

PAULO JOSÉ SAIZ JABARDO

**ESTUDO NUMÉRICO E EXPERIMENTAL DO
ESCOAMENTO AO REDOR DE CILINDROS**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do Título de Mestre em Engenharia

São Paulo
2003

CONSULTA
FD-3382

OK

PAULO JOSÉ SAIZ JABARDO

**ESTUDO NUMÉRICO E EXPERIMENTAL DO
ESCOAMENTO AO REDOR DE CILINDROS**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do Título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

Orientador:
Professor Doutor
Julio R. Meneghini

São Paulo
2003

... Seu [Dee Brown] primeiro amigo de infância foi um menino índio, que ia com ele a todo filme de mocinhos contra índios que passasse; o pequeno índio aplaudia sempre as vitórias da cavalaria ou dos colonos. "Certo dia", lembra-se Brown, "perguntei por que torcia pelos brancos e ele disse: 'Não são índios de verdade'; Para ele, eram apenas atores. Todos os livros sobre índios nessa época eram caricaturas e, assim, percebi que não eram índios reais, mesmo."

- Apresentação de G.G.F. do livro "Bury my heart at wounded knee" de Dee Brown

Agradecimentos

Este foi um trabalho extenso e muita gente (muita gente mesmo) me auxiliou. Não sei nem por onde começar . . .

Ai vamos nós. Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à PETROBRAS por financiar e permitir o uso dos resultados obtidos nos ensaios feitos no IPT. Nestes ensaios muitos ajudaram, o pessoal da Naval do IPT ajudou a confeccionar os modelos e instrumentação. O Gustavo Assi e o Leonardo (ex-estagiários) ajudaram nos ensaios. Não poderia faltar o Pucci que conduziu o ensaio inteiro e ajudou bastante.

Também não posso esquecer o Spencer Sherwin do Imperial College na Inglaterra que disponibilizou o (excelente) programa *NEKTAR* para que eu pudesse realizar as simulações.

Para não matar a tradição, tenho que agradecer ao meu pai por me encher o saco pra acabar isto logo. Falando sério agora, ele me direcionou bem durante todo o trabalho dando sugestões ou simplesmente conversando. Minha mãe por ela fazer o meu pai parar encher o saco e me receber como rei nos raros fins de semana que vou para casa.

É lógico que não posso me esquecer do meu orientador, Julio R. Meneghini. Acho que ele gastou boas horas algumas vezes conversando comigo, outras vezes tentando fazer com que eu parasse de divergir. Também tenho que agradecer ao pessoal do grupo (ou ex-pessoal): o Cesareo deu um V_0 no método de elementos finitos, o prof. Aranha conseguiu fazer com que eu percebesse a importância do lado mais matemático do Negócio e a todo o resto do pessoal que não negou ajuda quando precisei.

Por fim gostaria de fazer um agradecimento especial ao pessoal da Vazão que seguiu a barra, mesmo com a quantidade imensa de trabalhos precisando urgente de mãos livres. Isto eu não vou nunca esquecer. Valeu Kazuto, Nilson, Olga, Cláudia, Choco, Sandro, Valmir, Barba, Fernando, etc, etc, etc. Mais do que colegas, vocês são meus amigos (esqueçam o papo de eu não ter amigos, apenas conhecidos). Mas teve uma pessoa

determinante para este trabalho: o big-boss Marcos Tadeu Pereira. Sempre que eu pedi, o Marcão me deixou sair pra fazer este trabalho me poupou de tudo que é barra (e olha que a barra era pesada!). Muito obrigado Marcão.

E é lógico, não poderia esquecer: Richard Stallman por GNU, Donald Knuth por TeX e Linus Torvalds por Linux e a equipe de desenvolvimento do R (um programa fantástico).

Resumo

Neste trabalho, o escoamento ao redor de um e dois cilindros posicionados lado a lado e em linha é estudado experimentalmente em túnel de vento e numericamente utilizando o método de elementos espectrais. Foi feito um estudo numérico a baixos números de Reynolds para o cilindro isolado com $60 < Re < 600$, dois cilindros posicionados lado a lado com espaçamentos variando entre $0,25D$ a $5D$ para $Re = 100$ e 200 e dois cilindros posicionados em linha com espaçamentos variando entre $0,25D$ e $10D$ para $Re = 100$ e 200 . Em túnel de vento, foi medido o coeficiente de arrasto de um e dois cilindros, lado a lado e em linha com espaçamentos variando entre $1D$ e $6D$ utilizando célula de carga e medida de pressão para Re variando de 1×10^4 a 4×10^4 . Nestas mesmas configurações foram medidos os coeficientes de correlação entre duas séries temporais de pressão medidos numa mesma geratriz com o intuito de determinar a tridimensionalidade do escoamento. Estes coeficientes de correlação permitiram calcular o comprimento de correlação.

Abstract

The flow around one and two circular cylinders arranged side by side and in tandem is studied experimentally in a wind tunnel and numerically using spectral element methods. The numerical study was carried out for low Reynolds number for a single circular cylinder with $60 < Re < 600$, two circular cylinders arranged side by side with gap ranging from $0.25D$ up to $5D$ with $Re = 100$ and $Re = 200$ and, finally, two circular cylinders arranged in tandem with gap ranging from $0.25D$ up to $10D$ with $Re = 100$ and 200 . In the wind tunnel, the drag coefficient was measured for a single circular cylinder and two circular cylinders arranged side by side and in tandem with gaps ranging from $1D$ up to $6D$ using a load cell and pressure measurements with $1 \times 10^4 < Re < 4 \times 10^4$. Under these same circumstances, the correlation coefficient of two pressure signals taken simultaneously on the surface of one cylinder was measured to determine the tri-dimensionality of the flow. With these correlation coefficients, the correlation length was determined.

- (1) p.1, parágrafo 5 onde se lê "fazer" leia-se fazer
- (2) p.6, terceira linha do último parágrafo retirar a palavra "dots" no início da terceira linha
- (3) p.9, primeiro parágrafo da seção 1.2.2, quarta linha falta virgula após "vórtices"
- (4) p.12, segundo parágrafo da seção 1.4, onde se lê "um", leia-se "uma"
- (5) p.15, antepenúltima linha, onde se lê "...parâmetros (um faixa ..." leia-se "...parâmetros (uma faixa ..."
- (6) p.18, segunda linha. Onde se lê "do", leia-se "de"
- (7) p.20, primeiro parágrafo da seção 2.2, retirar, ao fim do parágrafo, um ponto final a mais
- (8) p.23, penúltimo parágrafo, linhas 5 e 6, omitir uma das palavras repetidas "pouco"
- (9) p.34, terceiro parágrafo, primeira linha, onde se lê "e a integral", leia-se "a integral"
- (10) p.39, último parágrafo antes da seção 2.7, última linha, onde se lê "levam" leia-se "leva"
- (11) p.54, segundo parágrafo antes de "Com célula de carga", segunda linha, retirar " " após a palavra "contrário"
- (12) p.62, no meio da tabela 4.1, acima da palavra "Fonte", onde se lê "Re=100", leia-se "Re=200"
- (13) p.110, na legenda da figura 5.15, onde se lê "Coeficiente" leia-se "Comprimento"
- (14) p.118, n bibliografia [43], o nome do autor é F. Saltara

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	iv
Lista de Abreviações	xiv
Lista de Símbolos	xv
1 Introdução	1
1.1 Escocamento ao redor de corpos rombudos	3
1.2 Escocamento ao redor de grupos de cilindros	7
1.2.1 Cilindros lado a lado	8
1.2.2 Cilindros posicionados em linha	9
1.3 Tridimensionalidade do escocamento	9
1.4 Método de elementos espectrais	12
1.5 Estrutura do trabalho	14
2 Método de elementos espectrais	15
2.1 Método dos resíduos ponderados	17
2.2 Introdução aos métodos espectrais	20
2.2.1 Convergência exponencial	21
2.2.2 Eficiência do método	23
2.2.3 Geometrias complexas	25
2.3 Método de elementos finitos	26
2.4 Método de elementos espectrais/hp	27
2.4.1 Base unidimensional ortogonal	28
2.4.2 Base unidimensional C^0	28
2.4.3 Base unidimensional C^0 nodal	29

2.4.4	Base bidimensional ortogonal para elementos quadriláteros	30
2.4.5	Base bidimensional C^0 para elementos quadriláteros	30
2.4.6	Base bidimensional C^0 nodal para elementos quadriláteros	31
2.4.7	Base bidimensional ortogonal para elementos triangulares	31
2.4.8	Base bidimensional triangular C^0	32
2.4.9	Base bidimensional triangular nodal	33
2.5	Resolução das equações de Navier-Stokes	35
2.6	Particularidades das equações de Navier-Stokes	37
2.7	O programa <i>NEKTAR</i>	39
2.8	Comentários finais	40
3	Metodologia experimental	43
3.1	Descrição dos modelos	43
3.2	Metodologia	44
3.2.1	Equipamentos e Dispositivos Utilizados	45
3.2.2	Arranjo dos cilindros	49
3.2.3	Determinação da Tridimensionalidade do escoamento	51
3.2.4	Medição da Força de Arrasto	52
4	Coefficientes de força	56
4.1	Cilindro isolado	56
4.1.1	Resultados numéricos	56
4.1.2	Resultados experimentais	64
4.2	Dois cilindros lado a lado	66
4.2.1	Resultados experimentais	78
4.3	Dois cilindros posicionados em linha	80
4.3.1	Resultados numéricos	80
4.3.2	Resultados experimentais	89
5	Tridimensionalidade no escoamento	93
5.1	Cilindro isolado	93
5.2	Dois cilindros posicionados lado a lado	98
5.3	Dois cilindros posicionados em linha	103
6	Discussão e conclusões	111

Referências Bibliográficas

ANEXO I

ANEXO II

ANEXO III

120
121
137
156

Lista de Figuras

1.1	Diferentes arranjos de cilindros estudados. (a) Cilindros posicionados lado a lado e (b) cilindros posicionados em linha. D é o espaçamento entre os cilindros e U é o vetor velocidade ao longe.	2
1.2	Esteira de vórtices na ilha de Guadalupe, na costa da Califórnia. Reproduzido de Semiu[47]	4
1.3	Esteira de vórtices ideal de von Karman	5
1.4	Testes realizados por Roshko[39] com <i>splitter-plate</i>	6
1.5	Esquema mostrando a formação da esteira de vórtices e caminhos que o fluido pode seguir. Reproduzido de Gerrard[15]	7
1.6	Visualização de escoamento ao redor de cilindros com placas de extremidade posicionadas em ângulos diferentes. Reproduzido de Williamson[61]	10
1.7	Desenho esquemático mostrando a influência das placas de extremidade no escoamento ao redor de cilindros na desprendimento de vórtices. Reproduzido de Williamson[61]	11
1.8	Curva $St \times Re$ para Re baixos. Reproduzido de Williamson[63]	12
1.9	Curva $C_{pb} \times Re$. Reproduzido de Roshko[41]	13
2.1	Erro, $L = \ u - u_N\ = \int_{\Omega} (u - u_N)^2 d\Omega$ para método espectral e método de volumes finitos. Os interpolantes do método espectral são polinômios de Lagrange nos pontos da quadratura de Gauss-Legendre-Lobatto (GLL)	22
2.2	Termos não nulos da matriz de rigidez ($\Delta \phi_n \cdot \Delta \phi_m$) onde as funções de base são formadas pelo produto tensorial de polinômios de Lagrange nos pontos da quadratura de Gauss-Legendre-Lobatto (GLL), $\phi_n = h_N^i(x)$	24
2.3	Alguns interpoladores de Lagrange para diferentes distribuições de nós	29

2.4	Coordenadas para bases triangulares. $-1 \leq \xi_1, \xi_2; \xi_1 + \xi_2 \leq 0, 0 \leq \eta_1, \eta_2 \leq 1$	32
3.1	Desenho esquemático do modelo utilizado na medição de correlação espacial de pressões	44
3.2	Esquema de modelo para medição de força com integrador de pressões	44
3.3	Foto do túnel de vento do Laboratório de Vazão do IPT	45
3.4	Seção de testes auxiliar	45
3.5	Medidor de pressão SCANVALVE com 8 canais	46
3.6	Foto do "octopus"	47
3.7	Instrumentos para a medição de velocidade	48
3.8	Foto de medidor de pressão ambiente	49
3.9	Instrumentos para a medição de condições ambientes	49
3.10	Cilindro isolado	50
3.11	Arranjos de dois cilindros testados	50
3.12	Desenho esquemático do dispositivo integrador de pressões indicando os pontos de tomada de pressão e detalhe de montagem do integrador de pressões	54
4.1	Coefficiente de arrasto C_D de um cilindro para diferentes números de Reynolds	57
4.2	Coefficiente de arrasto C_D de um cilindro para diferentes números de Reynolds. (1) Presente simulações e (2) Resultados apresentados por Flatschart[11].	58
4.3	Número de Strouhal St de um cilindro isolado para diferentes números de Reynolds. A equação foi obtida por Williamson e Brown[64]	59
4.4	Número de Strouhal St de um cilindro isolado para diferentes números de Reynolds. (1) Williamson e Brown[64], (2) Presente simulações, (3) Flatschart[11] e (4) Siqueira[51].	60
4.5	Média quadrática do coefficiente de sustentação $C_{L,RMS}$ de um cilindro para diferentes números de Reynolds	61
4.6	Relação entre coefficiente de arrasto devido a pressão e atrito viscoso com coefficiente de arrasto total (C_{visc}^D/C_D e C_{press}^D/C_D)	61

- 4.7 Malha utilizada na simulação do cilindro isolado 62
- 4.8 Simulação de cilindro isolado, $Re = 200$. (a) C_D e C_L em função de $\frac{D}{L}$, (b) Campo de vorticidade 63
- 4.9 Coeficiente de arrasto de um cilindro para diferentes Re medido com célula de carga e dispositivo integrador de pressão 64
- 4.10 Configurações idealizadas para a esteira de dois cilindros 66
- 4.11 Coeficiente de arrasto de um cilindro em um arranjo de dois cilindros posicionados lado a lado. Também mostrado os resultados obtidos por Siqueira[51] 68
- 4.12 Coeficiente de sustentação de um cilindro em um arranjo de dois cilindros posicionados lado a lado. Também mostrados os resultados obtidos por Siqueira[51] 69
- 4.13 Média quadrática do coeficiente de sustentação de um cilindro em um arranjo de dois cilindros posicionados lado a lado 70
- 4.14 Número de Strouhal dos cilindros 71
- 4.15 Simulação de dois cilindros posicionados lado a lado separados por $2D$, $Re = 200$. (a) C_D em função de $\frac{D}{L}$, (b) C_L 72
- 4.16 Campo de vorticidade do escoamento ao redor de dois cilindros posicionados lado a lado separados por $2D$, $Re = 200$ 73
- 4.17 Dois cilindros lado a lado, espaçamento $0,25D$ e $Re = 200$. (a) C_D em função do tempo adimensional $\frac{D}{U}$, (b) Campo de vorticidade 74
- 4.18 Dois cilindros lado a lado, espaçamento $0,25D$ e $Re = 100$. (a) C_L em função do tempo adimensional $\frac{D}{U}$, (b) Campo de vorticidade 75
- 4.19 Simulação de dois cilindros posicionados lado a lado separados por $1,5D$, $Re = 100$. (a) C_D em função de $\frac{D}{L}$, (b) C_L 76
- 4.20 Simulação de dois cilindros posicionados lado a lado separados por $1,5D$, $Re = 100$. (a) Esteira de vórtices em anti-fase (b) esteira de vórtices em fase 77
- 4.21 Resultados experimentais do coeficiente de arrasto de um dos cilindros posicionados lado a lado para diferentes distâncias entre cilindros. Também são mostrados resultados apresentados por Zdravkovich[65](*) 78

4.22	Três configurações básicas do escoamento ao redor de dois cilindros em linha (campos de vorticidade)	83
4.23	Coefficiente de arrasto do cilindro frontal de dois cilindros em linha. Também são apresentados os resultados de Siqueira[51] e Flatschhart[11].	84
4.24	Média quadrática do coeficiente de sustentação do cilindro frontal de dois cilindros em linha	84
4.25	Coefficiente de arrasto do cilindro de trás de dois cilindros em linha	85
4.26	Média quadrática do coeficiente de sustentação do cilindro de trás de dois cilindros em linha	85
4.27	Número de Strouhal dos cilindros posicionados em linha	86
4.28	C_D de dois cilindros posicionados em linha, separados por $1D$, $3D$ e $10D$ com $Re = 200$	87
4.29	C_L de dois cilindros posicionados em linha, separados por $1D$, $3D$ e $10D$ com $Re = 200$	88
4.30	Coefficiente de arrasto do cilindro frontal de dois cilindros em linha.	89
4.31	Coefficiente de arrasto do cilindro frontal de dois cilindros em linha, comparação entre resultados obtidos para $Re = 20,000$ e outros resultados encontrados na literatura. (1) e (2) Fregonesi e Meneghini[12], (3) Zdravkovich[65]	90
4.32	Coefficiente de arrasto do cilindro de trás de dois cilindros em linha.	91
4.33	Coefficiente de arrasto do cilindro de trás de dois cilindros em linha. (1) e (2) Fregonesi e Meneghini[12], (3) e (4) Zdravkovich[65]	92
5.1	Coefficiente de correlação R_{12} para diferentes sinais de pressão numa mesma geratriz do cilindro espaçados $\Delta z/D$ diâmetros no caso de um cilindro isolado	94
5.2	Coefficiente de correlação R_{12} para diferentes sinais de pressão numa mesma geratriz do cilindro espaçados $\Delta z/D$ diâmetros no caso de um cilindro isolado (1) presente trabalho, $Re = 4 \times 10^4$, (2) Szepessy[54], $Re = 4,3 \times 10^4$	95
5.3	Diferença entre coeficiente de correlação obtido com e sem <i>end-plates</i>	96
5.4	Comprimento de correlação L_{8D} para diferentes Re	97

5.5	Coefficiente de correlação para dois cilindros lado a lado, acima espaço- mento $1D$, abaixo $2D$	99
5.6	Continuação da figura 5.5. Acima espaçamento $3D$, abaixo $4D$	100
5.7	Continuação da figura 5.6. Acima espaçamento $5D$, abaixo $6D$	101
5.8	Comprimento de correlação L_{SD} para diferentes R_e e distâncias entre ci- lindros	102
5.9	Coefficiente de correlação para o cilindro frontal de 2 cilindros em linha, acima espaçamento $1D$, abaixo $2D$	104
5.10	Continuação da figura 5.9. Acima espaçamento $3D$, abaixo $4D$	105
5.11	Continuação da figura 5.10. Acima espaçamento $5D$, abaixo $6D$	106
5.12	Coefficiente de correlação para o cilindro de trás de 2 cilindros em linha, acima espaçamento $1D$, abaixo $2D$	107
5.13	Continuação da figura 5.12. Acima espaçamento $3D$, abaixo $4D$	108
5.14	Continuação da figura 5.13. Acima espaçamento $5D$, abaixo $6D$	109
5.15	Coefficiente de correlação de dois cilindros em linha. Acima, cilindro frontal. Abaixo cilindro de trás	110

Lista de Tabelas

4.1	Coefficiente de arrasto médio e número de Strouhal obtidos na literatura	62
4.2	Valores do coeficiente de C_D para diferentes números de Reynolds obtidos com dispositivo integrador de pressões e célula de carga	65
4.3	Valores de coeficientes de força para diferentes espaçamentos e $Re = 200$. (1) presente simulações e (2) resultados apresentados por Menghini <i>et al.</i> [30]	68
4.4	Valores de coeficiente de arrasto para diferentes espaçamentos e $Re = 200$. (1) presente simulações e (2) resultados apresentados por Menghini <i>et al.</i> [30]	80

Lista de Abreviações

CFD Computational Fluid Dynamics

DNS Direct Numerical Solution

DGM Método de Galerkin Discontínuo

FDM Método de diferenças finitas

FEM Método de elementos finitos

FVM Método de volumes finitos

IPT Instituto de Pesquisas Tecnológicas

LBB Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi

LES Large Eddy Simulation

MWR Método dos resíduos ponderados

RMS Média quadrática

SM Método espectral

SEM Método de elementos espectrais

ss Dois cilindros posicionados lado a lado

td Dois cilindros posicionados em linha

Lista de Símbolos

a_i Coeficiente de expansão

$B(u, v)$ Funcional da formulação fraca

C^k Espaço de funções com derivada de ordem k contínuas

C_D Coeficiente de arrasto

C_L Coeficiente de sustentação

$C_{L,RMS}$ Média quadrática do coeficiente de sustentação

C_{pb} Coeficiente de pressão na esteira (*back pressure*)

D, d Diâmetro, dimensão característica

D^s Operador de derivação de ordem s

d' Espessura da esteira

F Força, funcional da formulação fraca

f, f_s Frequencia de emissão de vórtices, função qualquer

F Vetor fluxo

g Condição de contorno de von Neuman

g Função qualquer

g_i Coeficiente de expansão da função g

\vec{n} Vetor normal

H^k Espaço de funções com todas as derivadas até ordem k quadrado integráveis

h	Dimensão qualquer
k	Coefficiente de velocidade
L	Comprimento, Comprimento de correlação
$L_n(x)$	- Polinômio de Legendre de ordem n
L_x	- Comprimento de correlação
M	Matriz qualquer
$N(u, \phi)$	Termo convectivo
n, N	Número de termos
p	Pressão
$P_{\alpha, \beta}^n$	Polinômio de Jacobi
q	função qualquer
R_{ij}	Coefficiente de correlação entre sinais i e j
R, R_N	Resíduo numa aproximação
Re	Número de Reynolds
St	Número de Strouhal
St^*	Strouhal universal
t	tempo
U	Velocidade do escoamento
u	Função qualquer ou velocidade
u_N	Aproximação de u com N termos
u_ϕ	Aproximação para o campo de velocidades
U_s	Velocidade na camada cisalhante
u, v_i	velocidade, função qualquer, função de forma

V	Matriz de Vandermonde
V	Vetor velocidade
x, x_i	Coordenadas
w	Dimensão qualquer
\mathcal{L}	Operador linear
δ_{ij}	Delta de Kronecker
ΔS	Pequena área
η	Coordenadas colapsadas
ϕ	Função, função de interpolação, função de forma
$\hat{\phi}$	Coefficiente de expansão
ψ	Função, função de interpolação, função de forma
$\hat{\psi}$	Coefficiente de expansão
λ	Coefficiente qualquer
ξ	Coordenadas locais
p	Massa específica
Π_{ij}	Tensor das tensões em um fluido Newtoniano
Ω	Domínio
Γ	Fronteira
$ \cdot , \ \cdot\ $	Norma

Capítulo 1

Introdução

Um dos problemas básicos (e dos primeiros) da Mecânica dos fluidos é determinar esforços em corpos submersos em um escoamento. Apesar de extensivamente estudado nos últimos 150 anos, este problema ainda está longe de poder ser considerado resolvido. Já se conhece muito e nos casos de corpos aerodinâmicos em baixo ângulo de ataque o problema possui soluções aceitáveis.

O escoamento ao redor de grupos de cilindros é extremamente importante para praticamente todas as áreas que envolvam escoamentos. Na engenharia civil, estruturas delgadas como chaminés ou edifícios altos sofrem cargas aerodinâmicas de vento que devem ser estudadas. Em aeronáutica, o escoamento ao redor de antenas e tens de pouso são muito semelhantes a escoamentos ao redor de cilindros. Trocadores de calor do tipo casco-tubo são exemplos onde ocorre este tipo de escoamento. Até na engenharia nuclear é muito importante o escoamento ao redor de cilindros: o combustível nuclear é, geralmente, constituído de cilindros por onde escoa, externamente, algum fluido refrigerante.

O foco de estudo deste trabalho são estruturas submarinas para transporte de petróleo em plataformas *off-shore*, mais conhecidas como *risers*. Neste problema, diversos tubos, muitas vezes com comprimento superior a 1 km, que transportam petróleo, estão submetidos a correntes marítimas e ondas.

O custo destas estruturas é altíssimo e qualquer redução deste custo é bem vinda. Os esforços causados pelas correntes marítimas chegam até mesmo a causar choques entre os tubos e conseqüentemente, a possibilidade de dano estrutural é elevada além da fadiga. O problema, além de aplicações muito importantes, tem um apelo acadêmico grande por apresentar vários aspectos interessantes para matemáticos, físicos e engenheiros. Ou seja: como problema puramente científico também é muito interessante.

A literatura é muito extensa porém fragmentada e, geralmente, resume-se à solução de um problema prático específico. Existem poucos estudos sistemáticos do problema, que começaram a ser feitos nos últimos anos apenas (Zdravkovich[65]).

O problema é muito complexo por que muitos diferentes fenômenos ocorrem simultaneamente. A turbulência do jato incidente nas estruturas algumas vezes é muito importante. No caso de estruturas submetidas ao vento é quase sempre determinante (Semiu[47]). Diversos fenômenos aerodinâmicos podem ocorrer, que são fenômenos por si complexos. A formação de esteiras de vórtices e como as esteiras de diferentes corpos interferem entre si é essencial para a compreensão do escoamento ao redor de grupos de cilindros.

Somente compreendendo, individualmente, os diferentes fenômenos que ocorrem neste tipo de escoamento é que se poderá atacar o problema como um todo. É verdade, no entanto, que todos estes fenômenos são inter-dependentes e que estudá-los individualmente nem sempre é possível ou desejável.

Neste trabalho, pretende-se compreender melhor a influência de um cilindro em outro quando estes estão próximos e imersos numa corrente. Fenômenos aerodinâmicos não são considerados. Os casos mais simples serão estudados: cilindros posicionados lado a lado (figura 1.1a) e cilindros posicionados em linha (figura 1.1b). Estes dois casos apresentam os dois tipos de interferência que podem ocorrer:

1. Esteiras superpondo-se: ocorre quando os cilindros estão posicionados em linha.

2. Proximidade: um cilindro não está na esteira do outro mas a proximidade pode afetar consideravelmente o escoamento.

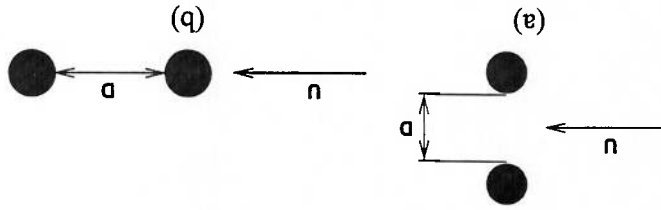


Figura 1.1: Diferentes arranjos de cilindros estudados. (a) Cilindros posicionados lado a lado e (b) cilindros posicionados em linha. D é o espaçamento entre os cilindros e U é o vetor velocidade ao longe.

O espaçamento entre os cilindros pode ser especificado de diversas maneiras. Neste trabalho, a distância entre dois cilindros é definida como a distância entre as paredes do cilindro no ponto onde passa o segmento de reta que une os centros dos cilindros (figura

1.1). Na literatura é muito comum encontrar espaçamentos definidos como a distância entre os centros dos cilindros e portanto é importante tomar cuidado ao analisar os resultados encontrados na literatura.

Um outro aspecto estudado neste trabalho é a tridimensionalidade do escoamento. O uso de dados bidimensionais para o projeto de estruturas geralmente resulta em sobre-dimensionamento. A tridimensionalidade pode também explicar algumas inconsistências entre resultados experimentais e numéricos. Muito pouco se sabe da tridimensionalidade do escoamento em grupos de cilindros. Um dos objetivos deste trabalho é verificar se e como a interferência afeta a tridimensionalidade.

1.1 Escoamento ao redor de corpos rombudos

Bearman[3] define um corpo rombudo como um corpo que quando submetido a um escoamento tem uma porção substancial de sua superfície imersa em uma região sujeita a separação. Quando o corpo é rombudo, o arrasto devido a pressão é considerável e geralmente muito superior ao arrasto devido ao arrito viscoso na superfície do corpo.

A separação do escoamento causa a formação de camadas cisalhantes (camadas com gradientes muito altos de velocidade) nos pontos de separação. A interação entre estas camadas cisalhantes são determinantes para as características do escoamento ao redor de corpos rombudos (Roshko[39] e Gerrard[15]). No caso de um cilindro, objeto de estudo deste trabalho, existem duas camadas cisalhantes saindo dos dois lados do cilindro com vorticidade de sinais opostos.

O problema de geração e desprendimento de vórtices também não se limita a uma estreita faixa de número de Reynolds, existindo inclusive em Re altíssimos, superiores a 10^7 como se pode observar na figura 1.2 que mostra uma esteira de vórtices nas nuvens ao redor de uma ilha.

Os gregos antigos já conheciam os tons aeolianos, resultado da passagem de ar ao redor de flos tensionados([30]). Características do escoamento ao redor de corpos rombudos podem ser observados em desenhos de Leonardo da Vinci (ver a capa do livro *Turbulence de Frisch*[13]) mas foi apenas em 1878 que foi feito um estudo científico mais aprofundado do problema. Strouhal determinou que a frequência dos tons aeolianos podiam ser

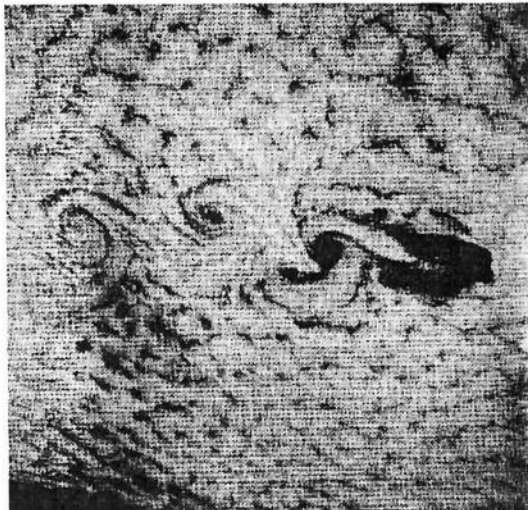


Figura 1.2: Estreita de vórtices na ilha de Guadalupe, na costa da Califórnia. Reproduzido de Semiu[47]

encontrados com a seguinte equação (Rayleigh[37])

$$(1.1) \quad f_s = 0,185 \frac{D}{U}$$

Onde U é a velocidade do ar, D o diâmetro do fio e f_s é a frequência do som. Strouhal também percebeu que quando esta frequência coincide com uma frequência natural de vibração do fio, o som é amplificado consideravelmente. Em 1879, Rayleigh percebeu que estas vibrações são normais à direção do escoamento, ao contrário do que se acreditava. Depois ele definiu a grandeza adimensional hoje conhecida como número de Strouhal St (Rayleigh[37]):

$$(1.2) \quad St = \frac{fD}{U}$$

Nesta equação D é o diâmetro do cilindro, U a velocidade do escoamento ao longe e f a frequência de desprendimento de vórtices. O número de Strouhal depende basicamente da geometria do corpo e do número de Reynolds mas, muitas vezes, esta dependência do número de Reynolds é pequena e St é aproximadamente constante (principalmente quando existem pontos de separação fixos). Uma aplicação interessante são medidores de vazão do tipo *Vortex*. Estes medidores usam a constância de St em uma larga faixa para medir a vazão de líquidos e gases. Medindo a frequência de desprendimento de vórtices pode-se determinar a vazão através da expressão 1.2 e uma calibração.

Um fato que já havia sido observado era a existência de uma estreita com duas linhas paralelas de vórtices de sentidos opostos. Von Karman (Prandtl e Tiejens[36]) estudou

em que circunstâncias esta esteira é estável. Ele determinou em que condições duas carreiras de vórtices ideais de mesma intensidade mas com sentidos opostos seriam estáveis

(figura 1.3).

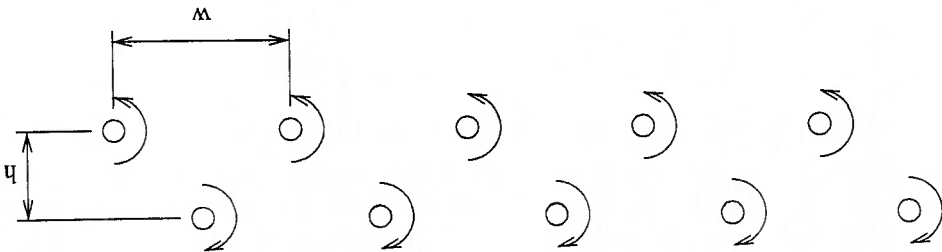


Figura 1.3: Esteira de vórtices ideal de von Karman

Von Karman chegou à seguinte relação entre h e w para que a esteira seja estável:

$$\frac{h}{w} = \frac{\pi}{1} \cosh^{-1} \sqrt{2} = 0,2806 \quad (1.3)$$

Com este resultado e com um balanço da quantidade de movimento, von Karman chegou a uma expressão para o coeficiente de arrasto:

$$C_D = \left[1,587 \frac{U}{n} - 0,628 \left(\frac{U}{n} \right)^2 \right] \frac{d}{w} \quad (1.4)$$

Onde n é a velocidade da esteira de vórtices e d é uma dimensão característica do corpo.

O problema, no entanto, ainda estava longe de ser resolvido. Na análise de von Kar-

man nada se sabe sobre a geometria que produziu esta esteira e nem a velocidade com

que se movimenta a esteira de vórtices, ou seja, o modelo é incompleto, faltam ainda

informações.

Antes disso, Kirchhoff adotou outra abordagem: ele supôs que as duas camadas cisa-

lhantes definem uma esteira com velocidade nula e como resultado, a pressão na esteira é

igual à pressão ao longe. Este modelo é conhecido como teoria da linha de corrente livre.

No entanto, este modelo fornece valores de C_D muito abaixo dos valores medidos. O

problema com o modelo é que a pressão de base (pressão no cilindro na região da esteira)

é na realidade mais baixa que a pressão ao longe.

Roshko[39] criou um modelo semi-empírico que casa a teoria da linha de corrente

livre de Kirchhoff com a esteira de von Karman. Inicialmente, Roshko constatou que o

problema com o modelo de Kirchhoff é a pressão de base muito alta. Ele percebeu que a

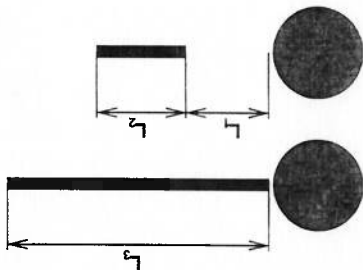


Figura 1.4: Testes realizados por Roshko[39] com *splitter-plate*

velocidade na camada cisalhante U_s é, na realidade, maior que a velocidade ao longe:

$$U_s = kU \quad (1.5)$$

Roshko também notou uma semelhança nas esteiras dos corpos rombudos. Quanto mais rombudo, menor a frequência de desprendimento de vórtices e maior a distância entre as camadas cisalhantes (distância denominada por d'). Usando análise dimensional nestas grandezas, Roshko chegou a um número de Strouhal "universal":

$$St^* = \frac{f d'}{U_s} \quad (1.6)$$

Experimentalmente verifica-se que para muitos corpos rombudos obtêm-se

$$St^* \approx 0,16$$

O modelo de Roshko depende de um outro parâmetro ainda: a vorticidade na esteira de von Karman é gerada na camada limite mas representa apenas uma fração ϵ desta vorticidade.

A pressão de base e a formação da esteira dependem diretamente da interação entre as duas camadas cisalhantes. Roshko[39], usando uma placa (*splitter plate*) dividindo a esteira em dois partes e assim impedindo interação entre as duas camadas cisalhantes conseguiu reduzir consideravelmente o arrasto no cilindro. A figura 1.4 mostra alguns dos arranjos testados por Roshko. O resultado mais interessante do Roshko foi utilizando um *splitter-plate* mas que podia ser deslocado (figura 1.4 inferior). Ele observou que para alguns espaçamentos ($L_1 \approx 2,6$) havia uma mudança drástica no escoamento: o número de Strouhal aumentou e a pressão de base (pressão na região do cilindro onde o escoamento está separado) caiu. Uma das conclusões deste trabalho é que a interação entre as camadas cisalhantes é muito importante no escoamento ao redor de corpos rombudos.

Gerrard[15] propõe um modelo para explicar a formação da esteira de von Karman. Neste modelo, o vórtice cresce com o fornecimento de circulação gerada na camada limite. Chega um momento em que este vórtice é forte o suficiente para atrair a outra camada cisalhante. O encontro de fluido com circulações opostas faz com que seja cortado o fornecimento de circulação ao vórtice em formação. Desta maneira este vórtice solta-se e é convectado. As partículas fluidas da camada cisalhante podem seguir por três caminhos distintos: (a) reduzir a circulação do vórtice em formação, (b) ir em direção à outra camada cisalhante com fluido com vorticidade oposta ou (c) realimentar a região da esteira próxima ao corpo, iniciando a formação de um novo vórtice na posição oposta. Este processo pode ser visualizado na figura 1.5

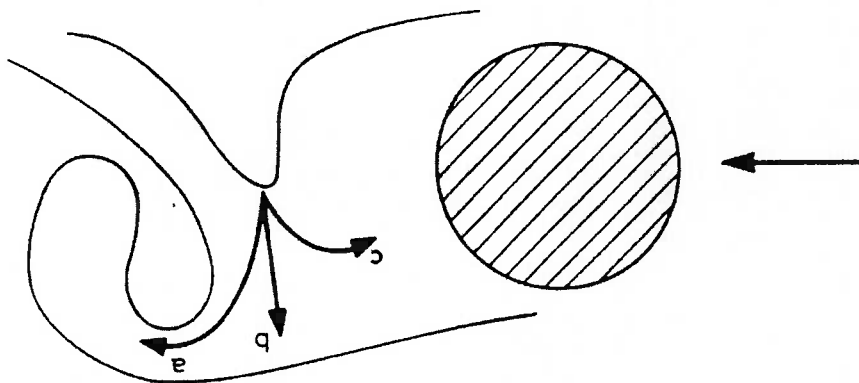


Figura 1.5: Esquema mostrando a formação da esteira de vórtices e caminhos que o fluido pode seguir. Reproduzido de Gerrard[15]

1.2 Escoramento ao redor de grupos de cilindros

O escoramento ao redor de grupos de cilindros é muito comum. Infelizmente, não se pode analisar os cilindros como se fossem isolados exceto quando os cilindros estão bem afastados. Os efeitos de interferência são muito importantes, em algumas situações aumentando os esforços e em outras reduzindo. A interferência depende diretamente do arranjo físico dos cilindros. Muitos dos fenômenos que ocorrem nos escoamentos ao redor de agrupamento de cilindros ocorre no escoamento ao redor de dois cilindros, que é um problema considera-

velmente mais simples. O arranjo de dois cilindros pode ser dividido em três famílias:

1. Cilindros lado a lado. Neste caso o plano formado pelos eixos dos cilindros é um plano normal à velocidade ao longe.

2. Cilindros em linha. O plano formado pelos eixos dos cilindros é paralelo à velocidade ao longe.

3. Cilindros na diagonal. Arranjos de cilindros que não estão nem em linha e nem lado a lado.

No primeiro caso, existe uma interferência por proximidade. No segundo caso esteiras sobrepõem-se e no último caso pode haver uma combinação dos dois primeiros casos.

O objeto de estudo deste trabalho são cilindros posicionados lado a lado e em linha. Zdravkovich[65, 66] faz uma revisão destes arranjos (e outros arranjos possíveis de 2 ou mais cilindros).

1.2.1 Cilindros lado a lado

Quando os cilindros estão posicionados lado a lado, nenhum cilindro está diretamente na esteira do outro. Bearman e Wadcock[4] estudaram o efeito de interferência de dois cilindros lado a lado. Medindo a distribuição de pressão ao redor dos cilindros, eles perceberam uma força de repulsão, resultado do deslocamento do ponto de estagnação e dos pontos de separação nos cilindros como resultado da interferência. Um outro aspecto observado por Bearman e Wadcock é que, para pequenos espaçamentos (menores que $1D$), o escoamento é bi-estável, podendo colar num ou noutro cilindro e mesmo alternar entre os dois cilindros.

Para espaçamentos inferiores a $1,2D$, Bearman e Wadcock[4] e Williamson[60] observaram que a esteira ao longe corresponde à de um cilindro isolado. Para espaçamentos superiores, cada cilindro tem sua esteira e estas estão sincronizadas. Duas configurações estáveis são possíveis: esteiras em fase e esteiras em anti-fase (problema análogo ao da esteira de von Karman). Na prática ambos os casos são observados. Williamson[60] observa que para espaçamentos maiores, geralmente as esteiras estão em anti-fase.

Para espaçamentos superiores a $1,2D$, Zdravkovich[65] observa que quanto menor o espaçamento, maior o C_D que é superior ao C_D do cilindro isolado. Para espaçamentos superiores a $5D$ ele observa que o comportamento dos cilindros é muito próximo do

1.2.2 Cilindros posicionados em linha

cilindro isolado. Agora, quando o espaçamento é inferior a $1,2D$, a soma do arrasto dos dois cilindros (lembrar que neste caso o escoamento não é simétrico) é inferior a duas vezes o arrasto de um cilindro isolado.

Arie *et al.*[1], Kim e Durbin[23], Sumner *et al.*[53] apresentaram outros resultados experimentais. Meneghini *et al.*[30] apresentaram resultados numéricos para baixos números de Reynolds.

Neste caso, o cilindro de trás está na esteira do cilindro frontal e isso trás algumas complexidades. Zdravkovich[65, 66] observa que existem três regimes de escoamento. No primeiro, para espaçamentos entre $0,2D - 0,8D$, as camadas cisalhantes do cilindro frontal passam o cilindro de trás e existe apenas uma esteira de vórtices os dois cilindros comportam-se como um único.

No segundo regime de escoamento, com $0,8D < L/D < 2,4 - 2,8$, as camadas cisalhantes do cilindro frontal atingem o cilindro de trás e há um recolamento destas camadas cisalhantes no cilindro de trás. No último regime de escoamento, com espaçamentos superiores a $2,8D$, as camadas cisalhantes do cilindro frontal chegam a formar uma esteira de vórtices que é sincronizada com a esteira de vórtices do cilindro de trás, resultando assim num incremento da média quadrática da força de sustentação do cilindro de trás.

Para espaçamentos pequenos, o C_D do cilindro frontal cai devido a um aumento da pressão de base (pressão na região descolada). Para espaçamentos maiores, após a formação da esteira de vórtices do cilindro frontal, há um aumento brusco do C_D chegando a valores próximos do cilindro isolado.

Já no cilindro de trás, o comportamento é bem distinto. Para espaçamentos pequenos, a pressão na região intersticial (região entre cilindros) é menor que a sua pressão de base. Assim, o C_D chega a ser *negativo*. Quando há a formação da esteira de vórtices no cilindro frontal, há um aumento considerável do C_D mas este ainda é bem mais baixo que no caso do cilindro isolado, resultado da baixa pressão incidente.

1.3 Tridimensionalidade do escoamento

Escoamento bidimensional é uma idealização que simplifica muito a análise de um problema. Numa simulação numérica, assumir a bidimensionalidade do escoamento reduz

em pelo menos uma ordem de grandeza o custo computacional. Já num estudo experimental, menos parâmetros precisam ser medidos, e uma instrumentação mais simples pode ser utilizada.

Turbulência, que ocorre na esteira mesmo para Re relativamente baixos, é um fenômeno tridimensional. Outros fenômenos tridimensionais, relacionados com problemas de extremidades foram observados .

Williamson[61] observou algumas descontinuidades na curva $St \times Re$ para o escoamento em torno de um cilindro para $Re \approx 60$. Ele constatou que esta descontinuidade ocorre como resultado de diferentes modos de desprendimento de vórtices (ver figura 1.8). Usando *end plates* (placas planas colocadas nas extremidades do cilindro para condicionar melhor o escoamento) inclinados ele conseguiu fazer com que o desprendimento de vórtices fosse paralelo ao longo do eixo do cilindro e ainda obtive, como resultado, uma curva suave e os resultados experimentais, nesta faixa de Re , coincidem com simulações numéricas. A figura 1.6 mostra visualizações com diferentes placas nas extremidades e a figura 1.7 mostra, esquematicamente como os ângulos das placas de extremidade influem no escoamento.

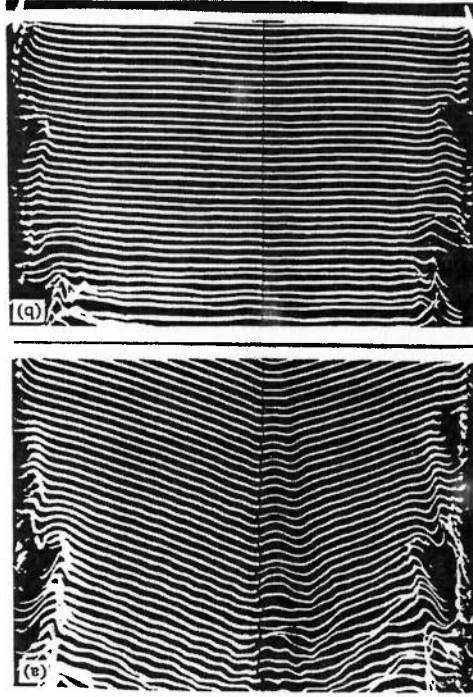


Figura 1.6: Visualização de escoamento ao redor de cilindros com placas de extremidade posicionadas em ângulos diferentes. Reproduzido de Williamson[61]

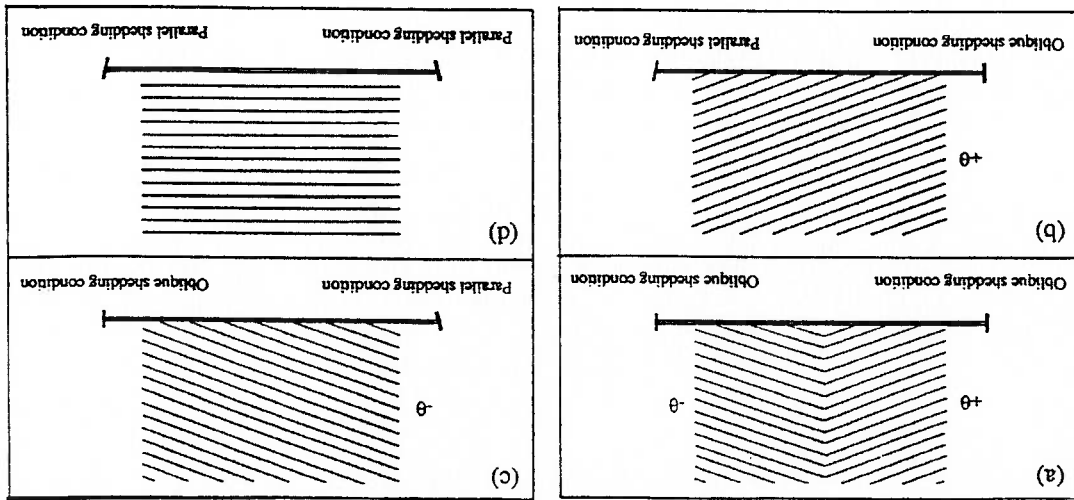


Figura 1.7: Desenho esquemático mostrando a influência das placas de extremidades no escoamento ao redor de cilindros na desprendimento de vórtices. Reproduzido de Williamson[61]

Quando Re sobe para aproximadamente 180 uma nova descontinuidade da curva $St \times Re$ surge. Outra descontinuidade ocorre para $Re \approx 240$. Williamson[62] notou que estas descontinuidades estão relacionadas com o surgimento de outro tipo tridimensionalidade no escoamento. O interessante é que esta tridimensionalidade não está relacionada com problemas nas extremidades dos cilindros e sim com instabilidades no escoamento como demonstrou Siqueira[51]. Este último fez simulações tridimensionais em cilindros, utilizando nas extremidades uma condição de contorno periódica e observou, em faixas de Re parecidas os mesmos fenômenos.

A curva de $St \times Re$ possui varias peculiaridades, conforme observado nos parágrafos anteriores. Estas são facilmente observadas em curvas $St \times Re$ (figura 1.8 onde se pode ver a descontinuidade no número de Strouhal) por exemplo ou $C_{pb} \times Re$ (pressão na esteira, *back pressure*. Roshko[41] apresenta uma curva $C_{pb} \times Re$ numa faixa bem ampla e mostra claramente vários regimes de escoamento (figura 1.9). Isto demonstra o papel crucial da formação e desprendimento de vórtices no escoamento ao redor de cilindros (e qualquer corpo rombudo) e do número de Reynolds.

Szepessy[54] realizou estudos extensivos da tridimensionalidade no desprendimento de vórtices em um cilindro. Ele estudou também o efeito das extremidades e relação de aspecto dos cilindros. Nesse trabalho Szepessy define o coeficiente de correlação e mostrou que uma defasagem no desprendimento de vórtices ao longo do eixo do cilindro

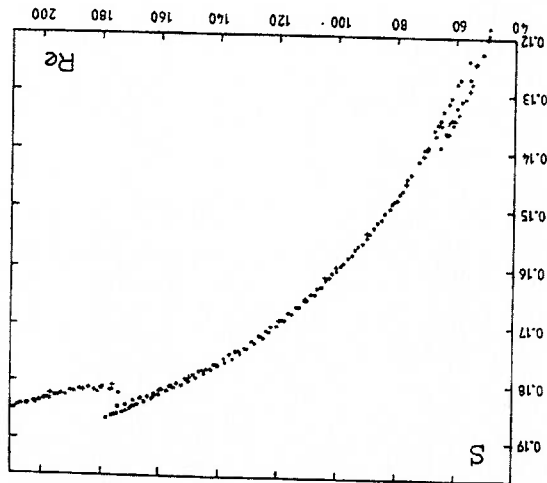


Figura 1.8: Curva $St \times Re$ para Re baixos. Reproduzido de Williamson[63]

é a causa da queda de correlação.

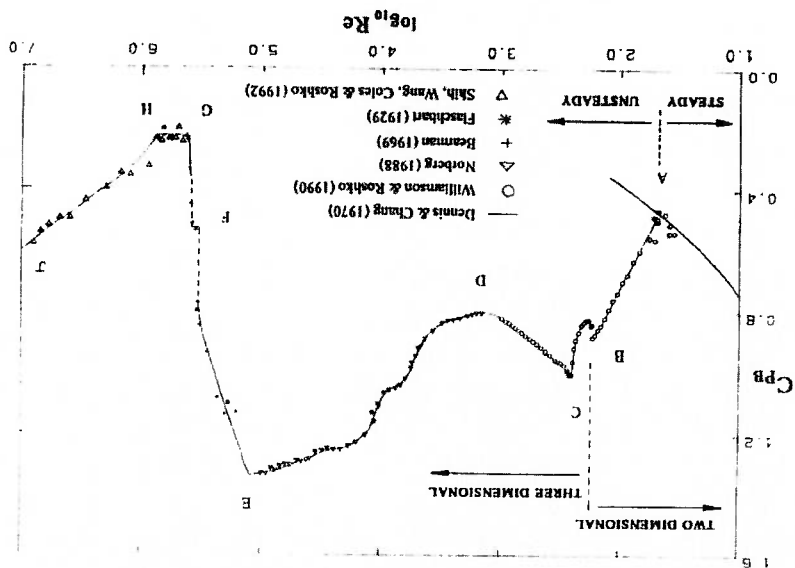
Existem muito poucos resultados referentes à tridimensionalidade do escoamento em grupos de cilindros. Bearman e Wadcock[4] fizeram algumas medidas de correlação na esteira de dois cilindros posicionados lado a lado com anemômetros de fio quente mas não exploraram muito mais o assunto.

1.4 Método de elementos espectrais

Tradicionalmente, em problemas de engenharia com geometrias complexas, utilizam-se métodos de baixa ordem na solução numérica de escoamentos. Os métodos mais comuns em CFD (*Computational Fluid Dynamics*) são o método de diferenças finitas, o método de elementos finitos e o método de volumes finitos. Por outro lado, em pesquisas relacionadas com a simulação direta da turbulência (DNS), utilizam-se principalmente os métodos espectrais e os métodos de diferenças finitas de ordem superior.

A grande qualidade dos métodos espectrais é a precisão. Com poucas incógnitas (comparado com os métodos de baixa ordem) consegue-se um precisão alta. A necessidade de resolver problemas turbulentos, DNS ou LES (*large-eddy simulation*) incentivou a busca por métodos que permitissem a aplicação dos métodos espectrais em geometrias complexas.

Utilizando mapeamento de geometrias, ou seja, mapear a geometria do problema em uma geometria simples como um cubo ou uma esfera por exemplo, Orszag[32] conseguiu



aplicar o método espectral em uma gama maior de problemas. No entanto, o método espectral era limitado a problemas com domínios simples, nada parecido com os problemas encontrados na engenharia. Boyd[7] descreve a divisão do domínio em subdomínios como um meio de permitir a solução de problemas em geometrias mais arbitrárias.

Mas é só Patera[34] que introduz noções comuns no método de elementos finitos no método espectral criando assim o método de elementos espectrais. Neste método, o domínio é dividido em elementos e em cada elemento adota-se uma expansão espectral da solução. A solução é montada, como no método de elementos finitos, a partir da soma das contribuições de cada elemento.

Henderson[18] modifica o método, permitindo a solução em malhas não estruturadas quadriláteras (malhas não conformes onde pode haver refinamento local). Sherwin e Karniadakis[50] implementaram o método de elementos espectrais em malhas não estruturadas triangulares (bidimensionais) e tetraédricas, prismáticas e piramidais (tridimensionais). Com isso, foi possível utilizar facilmente os geradores de malha disponíveis no mercado. Sherwin e Karniadakis[49] aplicaram o método de elementos espectrais na solução das equações do escoamento viscoso incompressível.

Outros métodos surgiram desde então. Warburton, Pavarino e Hesthaven[59] utilizaram um método de elementos espectrais com base nodal e elementos triangulares na solução de escoamentos viscosos incompressíveis. Cockburn[9] e Lomtev[26] aplicaram

o método de elementos espectrais na solução de problemas hiperbólicos com solução contínua por partes (escoamento compressível com ondas de choque).

1.5 Estrutura do trabalho

Uma das dificuldades deste trabalho foi juntar dois estudos distintos numa mesma dissertação e a estrutura do trabalho deve refletir isto. Neste capítulo foi feita uma abordagem geral do escoamento ao redor de corpos rombudos e aplicações deste tipo de escoamento. No capítulo 2 é feita uma breve introdução aos métodos espectrais e métodos espectrais na solução de escoamentos laminares incompressíveis. Também são mostrados diversos tipos de elementos e bases utilizados nos métodos de elementos espectrais.

O capítulo 3 faz uma descrição dos métodos experimentais utilizados e facilidades disponíveis. Neste capítulo são descritos os dispositivos utilizados na medição de forças nos cilindros (dispositivo integrador e célula de carga). Este capítulo também introduz a tridimensionalidade no escoamento e sua descrição.

Os coeficientes de força obtidos numericamente e experimentalmente são apresentados no capítulo 4 e os resultados referentes à tridimensionalidade do escoamento são apresentados no capítulo 5.

O capítulo 6 discute trabalhos futuros e aspectos do trabalho que merecem maior atenção.

Os anexos apresentam todos os resultados numéricos obtidos facilitando, assim, a comparação dos resultados obtidos com eventuais trabalhos futuros.

Capítulo 2

Método de elementos espectrais para a solução das equações de Navier-Stokes

O livro de Frisch, *Turbulence* ([13]) inicia citando um trecho do *The Feynman lectures on physics* de Richard Feynman onde é mostrada uma equação da mecânica quântica (a equação de Schrödinger. Para maiores detalhes, ver Fromhold[14]).

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi$$

Feynman diz que é bem provável que esta equação possa modelar o universo ou pelo menos uma equação próxima desta. Mas prever todos os fenômenos do universo a partir desta simples equação, é um problema bem diferente. Frish observa que a mesma coisa ocorre com a mecânica dos fluidos: poucas pessoas duvidam que toda a física da mecânica dos fluidos esteja nas equações de Navier-Stokes mas estamos muito longe (muito mesmo . . .) de poder descartar um trabalho experimental minucioso.

É verdade que Frish trata de turbulência e escoamento laminar é um problema muito mais simples. Mas na realidade ainda existem diversas dificuldades: escoamentos tridimensionais com geometrias complexas ainda estão além do alcance da tecnologia atual ou, pelo menos, não é qualquer um que tem acesso a facilidades necessárias para este tipo de simulação. Outro fator que deve ser considerado é que, durante um projeto de engenharia, vários aspectos do problema são simplificados ou mesmo desprezados: a modelagem ainda é a etapa mais importante. Com isso, sempre existe um problema "mais complexo" a ser resolvido. Ainda deve-se considerar que o problema deve ser estudado para uma faixa de valores de diferentes parâmetros (um faixa de número de Reynolds por exemplo) e isto aumenta muito a quantidade necessária de recursos computacionais. Hoje, necessita-se de algoritmos eficientes, como no passado mas por razões diferentes:

no passado os recursos computacionais eram escassos mas hoje os problemas levam em conta um número muito maior de parâmetros.

São conhecidos muitos métodos numéricos que podem ser aplicados a um número ainda maior de problemas. Estes métodos geralmente são agrupados em diferentes grandes famílias gerais. Os primeiros métodos numéricos eram baseados em expansões em séries de Taylor, os métodos de diferenças finitas - FDM. Estes métodos foram desenvolvidos e, com o passar dos anos, amadureceram bastante e são utilizados na solução de praticamente todos os tipos de problemas. No entanto, apresentam algumas dificuldades na solução de problemas com geometrias complexas (ver por exemplo [25, 55]).

Em paralelo, foram desenvolvidos os métodos analíticos de solução de equações diferenciais parciais que apresentam soluções baseadas em séries de funções ortogonais. Destes métodos vieram os métodos espectrais (SM). Nos métodos espectrais, a solução é aproximada utilizando uma expansão em séries de funções suaves (geralmente estas funções são autofunções de algum operador) e o erro da equação diferencial é minimizado segundo algum critério (critério que irá diferenciar os diferentes métodos numéricos). Mas o método espectral apresenta algumas dificuldades: geometrias complexas são difíceis de serem tratadas. A vantagem deste método é a convergência exponencial que possibilita a solução do problema com relativamente poucos graus de liberdade.

Os métodos de elementos finitos (FEM) foram os primeiros métodos numéricos que permitiram a solução de problemas em geometrias complexas com certa facilidade. Surgiram no final dos anos quarenta e começo dos anos 50 para a solução de problemas estruturais na engenharia aeronáutica [68] usando soluções aproximadas simples em diferentes regiões (elementos) do domínio. Logo, percebeu-se que na realidade o FEM é uma aplicação do método de Rayleigh-Ritz para a solução de problemas variacionais[5]. O método evoluiu e hoje pode ser utilizado na solução de praticamente qualquer tipo de equação.

Um outro método numérico muito empregado na simulação de escoamentos (na realidade o mais empregado nesta área) é o método de volumes finitos (FVM). Inicialmente desenvolvido por Patankar[33], o método é muito semelhante (em malhas estruturadas) ao método de diferenças finitas. No entanto, é muito mais flexível, permitindo uso de malhas não estruturadas. Maliska[27] apresenta uma excelente introdução ao método. Sua popularidade em dinâmica dos fluidos computacional é principalmente resultado do método

conservar os fluxos nas interfaces entre elementos (o que é difícil de se impor no FEM) e ter um embasamento físico forte que facilita a implementação em um computador mesmo por uma pessoa que não seja "expert" em métodos numéricos.

Estas famílias gerais de métodos não são hermeticamente fechadas e existe um forte intercâmbio entre elas. Este intercâmbio procura juntar o que há de melhor em cada uma delas. O método de elementos espectrais (SEM) nada mais é que uma combinação do método de elementos finitos com os métodos espectrais [22]. Neste método, funções de base espectrais são empregadas em uma formulação de elementos finitos. O método de volumes finitos utiliza, hoje, diversos conceitos desenvolvidos nos métodos de elementos finitos. Existem formulações de elementos finitos conservativas, muito semelhantes ao método de volumes finitos (o método de Galerkin descontínuo que será brevemente discutido mais adiante).

Pode-se observar nos métodos numéricos utilizados para a simulação de escoamentos duas tendências predominantes. Por um lado, existem métodos de baixa ordem para simulação de problemas em geometrias complexas e "problemas de engenharia" envolvendo modelos físicos avançados (modelos de turbulência do tipo $k - \epsilon$ por exemplo). Por outro, pesquisas envolvendo simulação direta da turbulência (DNS) só são possíveis com métodos de ordem superior (diferenças finitas ou métodos espectrais). Os métodos de elementos espectrais procuram, com sucesso (opinião do autor), conciliar estas duas tendências. Uma outra questão relevante é a simulação durante longos intervalos de tempo. Nesta situação, uma resolução espacial alta é essencial para minimizar os erros [21], o que é o caso deste trabalho onde estudam-se séries temporais de forças em cilindros.

Neste trabalho, as simulações numéricas foram realizadas com o programa *NEKTAR*, desenvolvido por Spencer J. Sherwin e outros. Este programa permite a solução das equações de Navier-Stokes laminar (2D e 3D) utilizando o método de elementos espectrais.

2.1 Método dos resíduos ponderados

A modelagem de um problema físico geralmente resulta num sistema de equações diferenciais (equações de Navier-Stokes por exemplo) ou num funcional que deve ser minimizado. A maioria dos métodos numéricos consistem em adotar uma aproximação (interpolação) da incógnita e substituir esta aproximação no sistema de equações diferentes. Com isso, obtém-se um erro que depende de alguns parâmetros. Estes parâmetros

devem ser calculados de modo a minimizar o erro de alguma forma. O que distingue um método numérico do outro é o tipo de interpolação adotado e o processo de minimização escolhido. Este método de solução é conhecido como o *método dos resíduos ponderados* (MWR).

Como exemplo, seja a seguinte equação diferencial:

$$\mathcal{L}u = f(x)$$

Esta equação diferencial é genérica. Pode ser um sistema e u e x podem ser vetores. No MWR adota-se uma aproximação para u :

$$u \approx u_\delta = \sum_N^{i=1} u_i \phi_i(x)$$

Nesta equação, u_i são coeficientes desconhecidos que devem ser determinados de modo a minimizar o erro da solução (a ser definido mais adiante), $\phi_i(x)$ é uma base para u_δ .

Como u_δ não é uma solução exata, ao ser substituído na equação diferencial existe um

Resíduo $R_N(x)$:

$$R_N = \mathcal{L}(u_\delta) - f(x)$$

O erro é determinado multiplicando este resíduo por um peso e integrando no domínio Ω :

$$\epsilon = \int_\Omega R_N(x) v(x) d\Omega$$

onde $v(x) = \sum_{i=1}^N v_i(x)$ forma uma base de v .

Fazendo com que a integral acima seja nula para qualquer v (ou seja, a integral deve

ser nula para qualquer $v_i(x)$) chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\int_\Omega R_N(x) v_i(x) d\Omega = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (2.1)$$

Dai o nome método dos resíduos ponderados.

Método dos mínimos quadrados

A primeira possibilidade que vem à mente para minimizar o resíduo é utilizar o método dos mínimos quadrados. Ou seja, devemos minimizar a seguinte integral:

$$\int_\Omega R^2(x) d\Omega$$

Uma vantagem desta técnica é que as matrizes resultantes são simétricas. Apesar de aparentemente simples, este método é pouco comum por ser mais difícil de implementar e por envolver um número maior de termos(Boyd[7]). Para problemas auto-adjuntos, o método de Galerkin é mais simples e possui as mesmas vantagens. É interessante notar que o método dos mínimos quadrados pode ser escrito na forma da equação 2.1 fazendo

$$v_i(x) = \frac{\partial R_N}{\partial u_i}$$

Método da colocação

Este é o método mais simples. Neste caso, escolhem-se diferentes pontos no domínio e impõe-se que o residuo nestes pontos seja nulo:

$$R_N(x_i) = 0 \quad i = 1, \dots, N$$

Para se escrever esta equação no formato da equação 2.1, basta adotar

$$v_i(x) = \delta(x - x_i)$$

Onde $\delta(x)$ é o delta de Dirac.

O método da colocação faz com que a equação diferencial seja satisfeita nos pontos de colocação x_i . O método de diferenças finitas usa esta técnica onde os interpoladores são polinômios de baixa ordem definidos localmente. Por sua facilidade de implementação esta é a técnica mais comum. Quando o método da colocação é utilizado, é comum chamar o método de *pseudo-espectral*. O termo *espectral* é reservado para quando utiliza-se o método de Galerkin.

Método de Galerkin

Este método também é muito utilizado e é extremamente importante para o método de elementos finitos. Neste caso, a função peso é a própria função de base:

$$v_i(x) = \phi_i(x)$$

Método de volumes finitos

Neste caso, o domínio é dividido em elementos $\Omega = \sum \Omega_e$ e as funções de teste valem $v_i = 1$ para $x \in \Omega_i$ e $v_i = 0$ para $x \notin \Omega_i$.

Na realidade o método de volumes finitos é mais do que isso: é a solução das equações de transporte em forma integral elemento a elemento. A comunicação entre os diferentes elementos é feita impondo *fluxos iguais* em ambos os elementos.

Outros métodos

Os métodos de minimização citados são os mais utilizados. No entanto, não são os únicos. Quando termos convectivos são dominantes, é comum adotar um peso $v_i(x)$ que leve em conta a direção do escoamento. O peso neste caso é escrito da seguinte forma:

$$v_i(x) = \phi_i(x) + \psi_i(x)$$

Onde ψ_i leva em conta a direção do escoamento. Este método é conhecido como Petrov-Galerkin.

2.2 Introdução aos métodos espectrais

Apesar da aparente complexidade, os métodos espectrais estão entre os primeiros métodos numéricos a terem sido utilizados com sucesso. Isto deve-se ao fato deles serem uma generalização de separação de variáveis na solução de equações diferenciais e permitirem encontrar uma solução com poucos graus de liberdade.

Os métodos espectrais são muito utilizados em algumas áreas. Um exemplo importante é na previsão do tempo, que desde meados dos anos 70 utiliza, em sua quase totalidade, os métodos espectrais[7]. É muito comum utilizar o método espectral em conjunto com o método de elementos finitos (ou método de elementos espectrais) quando se tem alguma homogeneidade na geometria. Exemplos de aplicação em mecânica estrutural podem ser vistos no capítulo 6 de Zienkiewicz e Taylor[69]. Henderson e Karniadakis[18] apresentam um exemplo aplicado à mecânica dos fluidos.

O método espectral consiste em expandir em uma série finita de funções suaves a solução do problema:

$$(2.2) \quad u(x) \approx \sum_N^{n=1} a_n \phi_n(x)$$

Ao introduzir-se esta aproximação na equação diferencial, obtêm-se um resíduo. A solução aproximada da equação diferencial é obtida encontrando os valores de a_n que minimizam este resíduo. O que distingue os diferentes métodos espectrais é

1. Funções de base $\phi_n(x)$
2. Critério de minimização

As funções de base geralmente são séries de funções ortogonais como por exemplo séries de Fourier ou polinômios de Chebyshev. É importante notar que a escolha das funções de base depende muito do problema a ser resolvido.

Nos métodos espectrais, diferentemente dos métodos de elementos finitos, os coeficientes a_i não são necessariamente valores de u em algum nó. Com isso, podem-se definir os métodos *nodais*, onde os coeficientes desconhecidos são valores da função em algum nó, e os métodos *modais*, onde os coeficientes desconhecidos representam algum modo da expansão (algum termo de uma série de Fourier por exemplo). Neste caso, para se obter o valor de u em algum ponto é necessário fazer uma transformação utilizando a equação 2.2.

A forma mais simples de implementação é usando o método da colocação ou método pseudo-espectral e também é o método mais comum. Boyd[7] faz uma ampla análise dos métodos espectrais.

2.2.1 Convergência exponencial

O que torna os métodos espectrais interessantes é a convergência exponencial ou convergência de ordem infinita. O que é esta convergência exponencial? No caso do método de diferenças finitas ou elementos finitos de baixa ordem, a convergência é algébrica. Seja a_n o coeficiente de expansão da função de base ϕ_n . A convergência algébrica ocorre quando

$$(2.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| n^k < \infty$$

Nesta equação, k é o índice de convergência e n é o número de graus de liberdade. Ou seja,

$$a_n \sim O\left[\frac{1}{n^k}\right]$$

A convergência exponencial ocorre quando

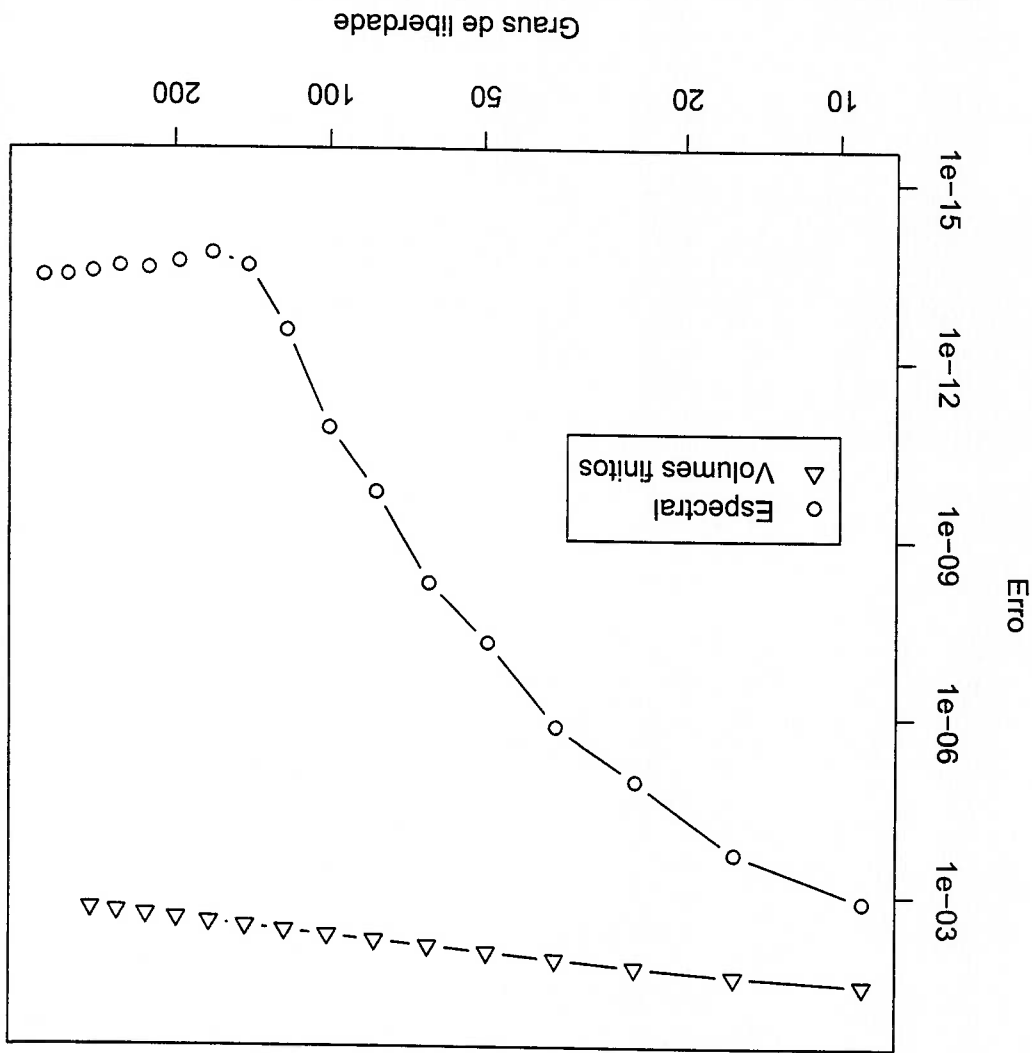
$$(2.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \exp(-qn^r) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}, r > 0$$

A convergência exponencial também é denominada convergência geométrica. O tipo de convergência depende muito da base adotada e da equação diferencial sendo resolvida.

Caso haja alguma singularidade, a convergência pode deixar de ser exponencial e tornar-se algébrica[7].

Um outro ponto a ser lembrado é que os números, quando representados em um computador, possuem uma precisão limitada e mesmo se houver convergência exponencial, chega-se a um limite inferior de precisão que depende da precisão numérica dos números de ponto flutuante do computador.

Um exemplo de convergência exponencial pode ser observado na figura 2.1. Nesta figura, é apresentado o erro da solução numérica da troca de calor em uma placa plana para dois casos: Método espectral e método de volumes finitos.



É interessante notar na figura 2.1 que o erro atinge um patamar mínimo de $\sim 10^{-15}$.

Este patamar deve ser causado pelo arredondamento dos números pelo computador (precisão dupla, 8 bytes).

2.2.2 Eficiência do método

De nada adianta o método espectral se sua eficiência não for comparável à do método de diferenças finitas ou método de elementos finitos de baixa ordem.

Memória

Neste aspecto o método espectral apresenta vantagens frente aos outros métodos. Devido à convergência exponencial, o número de graus de liberdade necessário para resolver um problema é muito inferior ao número necessário para o método de diferenças finitas, por exemplo. Segundo Boyd[7], a memória necessária para o método espectral é aproximadamente 8 vezes menor que a necessária pelo método de diferenças finitas de quarta ordem.

Matrizes

Uma das grandes desvantagens dos métodos espectrais é que as matrizes envolvidas na solução do problema são cheias (poucos termos nulos), ao contrário dos métodos de baixa ordem onde as matrizes são muito esparsas.

A consequência disto é que a solução do sistema linear resultante é muito menos eficiente. Os métodos diretos, para matrizes cheias, envolvem um número de operações da ordem de $\mathcal{O}[N^3]$ onde N é a ordem da matriz. No caso do método de diferenças finitas, o número de operações é da ordem de $\mathcal{O}[N]$. Quando N é muito grande ($\mathcal{O}[1000]$), é inviável o uso de métodos diretos. Mesmo os métodos iterativos tradicionais são pouco eficientes, tornando necessário uso de pré-condicionadores adequados e técnicas avançadas como por exemplo técnicas de *Multigrid*. Orszag[32] propõe diversos métodos para a solução do sistema de equações lineares. Ele também propõe o uso de um pré-condicionador baseado na formulação de diferenças finitas nos pontos de colocação, o que reduziria consideravelmente o número de iterações para a convergência.

A figura 2.2 mostra a estrutura da matriz de rigidez obtida na solução do problema proposto na figura 2.1. Os interpolantes usados nesta matriz têm grau 10 e portanto, sendo um problema bidimensional, a matriz é de ordem 100.

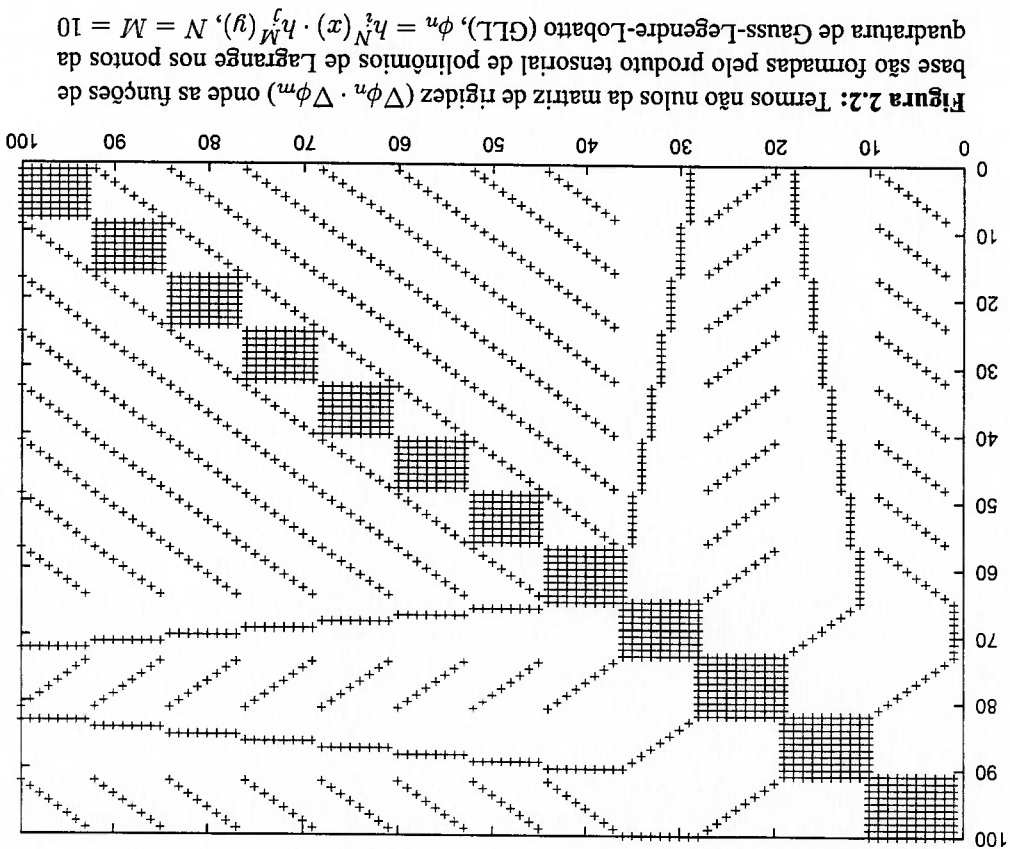


Figura 2.2: Termos não nulos da matriz de rigidez $(\Delta\phi_n \cdot \Delta\phi_m)$ onde as funções de base são formadas pelo produto tensorial de polinômios de Lagrange nos pontos da quadratura de Gauss-Legendre-Lobatto (GLL), $\phi_n = h_N^i(x) \cdot h_M^j(y)$, $N = M = 10$

Em geral, no entanto, a convergência exponencial torna o método competitivo pelo número pequeno de graus de liberdade.

Método das somas parciais

O método das somas parciais é o segredo da eficiência dos métodos espectrais (Karniadakis e Sherwin[22]). A importância desta técnica na eficiência do método espectral foi observada inicialmente por Orszag[32]. Na realidade esta técnica só é aplicável para casos multi-dimensionais. No método espectral, as funções de base multi-dimensionais são em geral formadas pelo produto tensorial de bases unidimensionais. No caso bidimensional, isto pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\phi_n(x, y) = \psi_i(x) \cdot \psi_j(y) \quad 0 \leq i < N, 0 \leq j < J \quad N = I \cdot J$$

O uso do produto traz duas vantagens importantes: 1) As diferentes bases unidimensionais podem ser utilizadas sem dificuldade nenhuma em problemas multi-dimensionais. 2) Pode-se fazer uso do método das somas parciais.

É interessante notar que é possível usar bases que não sejam produtos tensoriais, de fato diversas bases existem, por exemplo em domínios triangulares. Mas quando N cresce, o custo computacional cresce muito. Analisemos um exemplo simples usando bases tensoriais com $I = J = M$. Uma operação muito comum e importante nos métodos espectrais é o seguinte somatório que representa a transformação do espaço espectral para o espaço físico:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi^n(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} a_{ij} \psi_i(x) \psi_j(y)$$

Esta é uma operação que envolve um número de operações da ordem $\mathcal{O}[M^2]$. Caso esta soma deva ser calculada para todos os diferentes pontos de colocação (há M^2 pontos de colocação), temos uma operação com número de operações da ordem de $\mathcal{O}[M^4]$. Este custo computacional é inviável para um problema com M grande.

No entanto a estrutura tensorial da base permite um ganho computacional considerável:

ve:

$$f(x_k, y_l) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} a_{ij} \psi_i(x_k) \psi_j(y_l) = \sum_{i=0}^{M-1} \psi_i(x_k) \sum_{j=0}^{M-1} a_{ij} \psi_j(y_l)$$

Esta equação pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$f(x_k, y_l) = \sum_{i=0}^{M-1} \psi_i(x_k) \cdot g_i \quad 0 \leq k < M, \quad 0 \leq l < M$$

Que é uma operação de custo $\mathcal{O}[M^3]$. Nesta equação,

$$g_i = \sum_{j=0}^{M-1} a_{ij} \psi_j(y_l) \quad 0 \leq i < M, \quad 0 \leq l < M$$

Esta também é uma operação de custo $\mathcal{O}[M^3]$. Ou seja uma operação com cus-

$\mathcal{O}[M^4]$ foi transformada em duas operações de custo $\mathcal{O}[M^3]$ que também tem custo to $\mathcal{O}[M^3]$. No caso tridimensional, a economia é ainda maior: uma operação de custo

$\mathcal{O}[M^6]$ pode ser efetuada com $\mathcal{O}[M^4]$ operações!

2.2.3 Geometrias complexas

Uma das grandes dificuldades dos métodos espectrais é o tratamento de geometrias complexas. A grande dificuldade é encontrar funções de base adequadas para as diferentes

geometrias. Na maioria dos casos, é praticamente impossível encontrar bases adequadas. No caso de geometrias esféricas, cilíndricas e cartesianas, existem bases conhecidas (maiores detalhes, ver Boyd[7]). Nos outros casos, o que se faz é mapear a geometria complexa para uma geometria mais simples onde são conhecidas bases adequadas. No caso bi-dimensional, esta geometria pode ser um quadrado ou um círculo por exemplo. Orszag[32] apresenta algumas possibilidades.

O mapeamento introduz novas dificuldades e dependendo do caso pode até causar perda da convergência exponencial. O resultado disto é que o método espectral é aplicável apenas para geometrias relativamente simples.

A necessidade de tratar geometrias complexas, comuns em estudos de engenharia, resultou no desenvolvimento de técnicas de solução em subdomínios. Ou seja, o domínio é subdividido em diversos subdomínios onde são feitas as expansões espectrais. O método de elementos espectrais são um desenvolvimento natural destas técnicas.

2.3 Método de elementos finitos

No método de elementos finitos, praticamente tudo que foi dito sobre os métodos espectrais continua válido. No entanto algumas diferenças devem ser notadas.

No método de elementos finitos, as funções de base são definidas localmente. As funções de base têm valor nulo dentro de um único elemento e nulo em todos os outros. As funções de base são construídas de modo a obter um aproximação C^0 da solução (a solução é contínua mas não suas derivadas). Uma consequência é que a matriz global poder ser obtida através da montagem (*assembly*) das matrizes obtidas para cada elemento.

Observe que agora pode-se considerar dois graus de liberdade: os graus de liberdade local e os graus de liberdade global. Cada grau de liberdade local corresponde a um grau de liberdade global, $i^e \rightarrow i$ (i^e é o grau de liberdade local e i é o grau de liberdade global). A montagem da matriz global $M_{i,j}$ a partir das matrizes elementares $M_{i,j}^e$ para uma base com N graus de liberdade local pode ser feita usando o seguinte algoritmo :

Para $e = 0 \rightarrow N^{\text{elementos}}$

Para $i^e = 0 \rightarrow N$

Para $j^e = 0 \rightarrow N$

$i^{\text{global}} = \text{map}(e, i^e), j^{\text{global}} = \text{map}(e, j^e)$

$$M_i^{\text{global}} = M_{i,j}^e + M_{i,j}^e$$

Próximo j Próximo i Próximo e

Neste algoritmo, a função $\text{map}(e, i)$ retorna o grau de liberdade global do grau de liberdade local i do elemento e .

Observando o algoritmo anterior, é evidente que as matrizes globais são extremamente esparsas e com uma numeração adequada dos graus de liberdade global, a resolução de sistemas lineares com matrizes de ordem N é uma operação com custo $O(N)$. Esta é uma das vantagens de se trabalhar com interpolantes de ordem baixa válidos localmente.

No método de elementos finitos, as funções de base geralmente são polinômios de ordem baixa (geralmente até ordem 4). O aumento da precisão é conseguido refinando a malha. Este é o refinamento tipo h da solução (considerando h como dimensão característica dos elementos, o refinamento é feito diminuindo h). Este refinamento pode ser local e pode ser feito no decorrer da solução (neste caso, o método é adaptativo).

Zienkiewicz e Morgan[68] e Segerlind[48] apresentaram excelentes introduções do método de elementos finitos. Zienkiewicz e Taylor[70, 69] apresenta uma análise detalhada do método de elementos finitos. Strang e Fix[52] apresenta uma análise matemática do método.

2.4 Método de elementos espectrais/ hp

Conforme dito na introdução, o método de elementos espectrais procura juntar o melhor do método de elementos finitos (flexibilidade) com o melhor dos métodos espectrais (convergência exponencial). Neste método, as funções de base são definidas localmente em um elemento. A convergência é resultado de um aumento da ordem de interpolação (refinamento tipo p) ou um refinamento da malha (refinamento tipo h).

A princípio isto nada mais é que aumentar a ordem de interpolação dos elementos utilizados tradicionalmente no FEM. Surgem diversas dificuldades numéricas das quais podem ser citadas instabilidades e matrizes do tipo Vandermonde que são praticamente impossíveis de inverter (uma discussão sobre as matrizes de Vandermonde pode ser encontrada em Taylor, Wingate e Vincent[56]).

Uma possibilidade é utilizar dentro de cada elemento uma expansão espectral. O problema agora é como construir uma aproximação C^0 para todos os elementos do domínio que seja simples e eficiente. A viabilidade do método depende da existência de bases adequadas. A seguir algumas bases uni e bidimensionais são apresentadas. Para maiores detalhes, bases tridimensionais e uma análise de convergência, ver Karamiadakis e Sherwin[22].

O método de elementos espectrais foi originalmente desenvolvido por Patera[34]. Patera utilizou elementos quadriláteros e polinômios de Chebyshev como interpolantes para resolver o problema do escoamento num degrau.

2.4.1 Base unidimensional ortogonal

Uma base ortogonal muito utilizada nos métodos espectrais são os polinômios de Legendre. Deste modo uma grandeza u pode ser aproximada em um elemento $-1 \leq \xi \leq 1$ da seguinte forma:

$$(2.5) \quad u \approx \sum_{i=0}^N u_i L_i(\xi)$$

Nesta equação, L_i é o polinômio de Legendre de ordem i . Apesar de ortogonal, esta base não é C^0 o que dificulta seu uso. No entanto, no método de Galerkin descontínuo (que será brevemente descrito mais adiante) não são necessárias bases C^0 .

2.4.2 Base unidimensional C^0

Uma base de ordem $P + 1$ C^0 pode ser construída utilizando polinômios de Jacobi (Karamiadakis e Sherwin[22]):

$$(2.6) \quad \phi^d(\xi) = \begin{cases} \phi_a^0(\xi) = \left(\frac{\xi}{1-\xi}\right) & d = 0 \\ \phi_a^d(\xi) = \left(\frac{\xi}{1-\xi}\right) \left(\frac{\xi}{1+\xi}\right) P_{1,1}^{d-1}(\xi) & 0 < d < P \\ \phi_b^d(\xi) = \left(\frac{\xi}{1+\xi}\right) & d = P \end{cases}$$

Nesta equação, $P_{a,b}^n$ é o polinômio de Jacobi de ordem n com pesos a e b . Um aspecto interessante é que esta base e a anterior (ortogonal) são hierárquicas. Isto quer dizer que se for necessário incluir mais termos na expansão, os $P + 1$ termos já calculados podem ser utilizados como valores iniciais. Isto é muito interessante em um problema adaptativo onde não é necessário recalcular nenhuma base, apenas adicionar novos termos.

2.4.3 Base unidimensional C^0 nodal

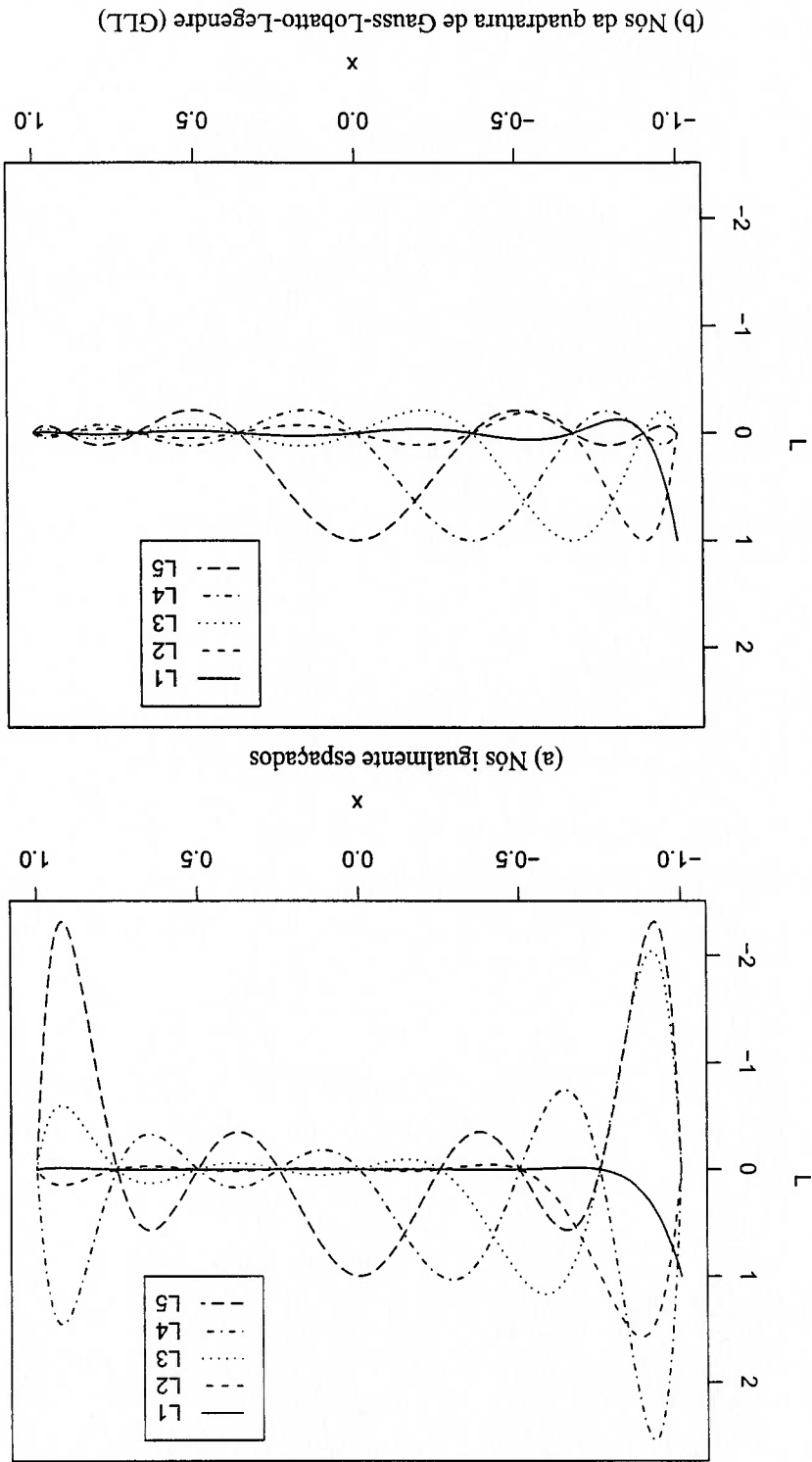


Figura 2.3: Alguns interpoladores de Lagrange para diferentes distribuições de nós

As bases tratadas até o momento são todas modais, ou seja, os coeficientes da expan-

são representam diferentes modos da expansão. Também existem bases nodais, onde os coeficientes de expansão representam os valores da variável em diferentes nós. Nestes casos, as diferentes bases são polinômios de Lagrange. O problema neste tipo de base é escolher o posicionamento adequado dos nós. Usando nós equidistantes resulta em instabilidade para interpolações de ordem superiores. A figura 2.3 mostra os interpoladores de Lagrange ordem 8 para nós equidistantes (a) e nós da quadratura de Gauss-Lobatto-Legendre. Observe como no caso (a) existem oscilações enormes perto das extremidades e este problema piora consideravelmente para ordens superiores. Já no caso (b), o comportamento é bem melhor. Interpolador i é próximo de 1 apenas nas intermediações do nó i e fora é bem próximo de zero.

Os nós da quadratura de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) concentram pontos nas extremidades, desta maneira reduzindo oscilações nas extremidades conforme pode ser observado na figura 2.3b. Outro benefício do uso das bases nodais é que caso as integrais sejam calculadas usando quadratura de GLL nos mesmos nós dos interpoladores a matriz *de massa é diagonal*, o que é um grande benefício. Estas bases não são hierárquicas o que dificulta um pouco a implementação de métodos adaptativos *hp*. Outro problema é que o operador Laplaciano $(\int_{\Omega} \Delta \phi_i(\xi) \cdot \Delta \phi_j(\xi) d\Omega)$ não apresenta nenhuma particularidade, resultando em matrizes cheias, ao contrário do caso modal onde mesmo esta matriz é esparsa.

2.4.4 Base bidimensional ortogonal para elementos quadriláteros

Esta base não é nada mais que o produto tensorial da base unidimensional apresentada na seção 2.4.1. Ou seja

$$\phi_{ij}(\xi_1, \xi_2) = L_i(\xi_1) \cdot L_j(\xi_2) \quad (2.7)$$

Esta base é definida para um elemento padrão com $-1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1$. Um elemento genérico deve ser mapeado para esta base padrão. Esta base é hierárquica.

2.4.5 Base bidimensional C^0 para elementos quadriláteros

Novamente, esta base é um produto tensorial de bases unidimensionais, no caso a base apresentada na seção 2.4.2. Esta base também é hierárquica. Os modos podem ser divididos em modos de fronteira e modos internos. Os modos internos são nulos na fronteira, portanto, não mantêm nenhuma relação com os demais elementos. Os modos de fronteira,

por sua vez podem ser divididos em modos de vértice e modos de aresta. Os modos de aresta são nulos nos vértices. Se os modos internos forem numerados em conjunto após os modos de fronteira, as matrizes globais terão uma estrutura que permite um ganho de eficiência considerável. Seja M uma matriz global simétrica. Se os modos de fronteira forem numerados primeiro e os modos internos depois, um sistema de equações $Mx = f$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} M_{bb} & M_{bz} \\ M_{bz}^T & M_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_b \\ x_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_b \\ f_z \end{Bmatrix}$$

Nesta equação, b refere-se aos modos de fronteira e z refere-se aos modos internos. A

submatriz M_{zz} é uma matriz diagonal em blocos, e por isso é muito fácil invertê-la. A condensação estática utiliza esta estrutura para aumentar a eficiência de resolução do sis-

tema. Multiplicando a matriz M por

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -M_{bz}M_{zz}^{-1} & I \end{bmatrix}$$

obtem-se o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} M_{bb} - M_{bz}M_{zz}^{-1}M_{bz}^T & M_{bz}^T \\ 0 & M_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_b \\ x_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_b - M_{bz}M_{zz}^{-1}f_z \\ f_z \end{Bmatrix}$$

A primeira equação permite o cálculo de x_b . x_z pode, em seguida, ser calculado facilmente:

$$x_z = M_{zz}^{-1}f_z - M_{zz}^{-1}M_{bz}^T x_b$$

2.4.6 Base bidimensional C^0 nodal para elementos quadriláteros

Esta base é o produto tensorial das bases unidimensionais nodais apresentadas na seção

2.4.3. Esta é a base que foi empregada na solução do problema apresentado na figura

2.1. A dificuldade nesta base é que ela não é hierárquica. Neste caso também é possível

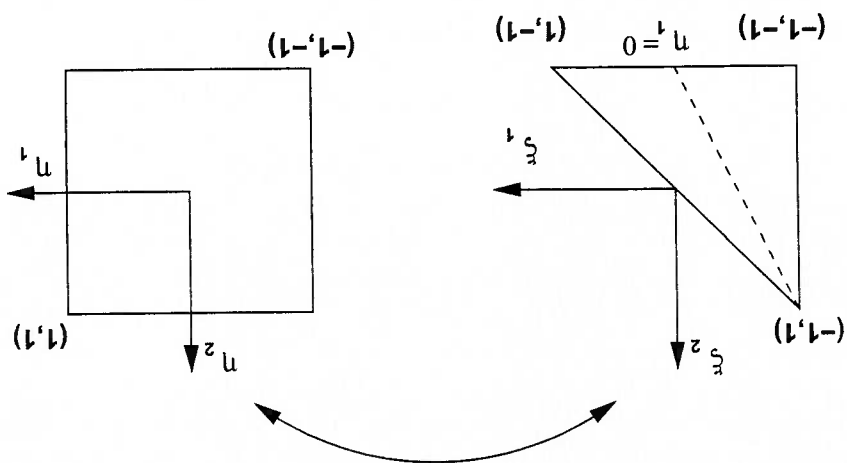
separar em graus de liberdade internos e de fronteira e portanto é possível aplicar a técnica

da condensação estática.

2.4.7 Base bidimensional ortogonal para elementos triangulares

Bases para elementos quadriláteros são facilmente desenvolvidas usando o produto tensorial de bases unidimensionais. No caso de elementos triangulares, isto já não é tão fácil.

Figura 2.4: Coordenadas para bases triangulares. $-1 \leq \xi_1, \xi_2; \xi_1 + \xi_2 \leq 0, 0 \leq \eta_1, \eta_2 \leq 1$



Também seria interessante manter o produto tensorial (por causa do método das somas parciais). Sherwin e Karniadakis[49] empregaram uma base inicialmente desenvolvida por Dubiner[10] para a resolução das equações de Navier-Stokes. O triângulo padrão é mapeado em um retângulo através da seguinte transformação de coordenadas:

$$\eta_1 = 2 \frac{1 + \xi_1}{1 - \xi_2} - 1$$

$$\eta_2 = \xi_2$$

A figura 2.4 mostra esta transformação. Neste novo sistema de coordenadas, as fun-

ções de base são:

$$\phi_{mn}(\xi_1, \xi_2) = \psi_a^m \left(2 \frac{1 + \xi_1}{1 - \xi_2} - 1 \right) \cdot \psi_b^{mn}(\xi_2) = \psi_a^m(\eta_1) \cdot \psi_b^{mn}(\eta_2)$$

onde

$$\psi_a^m(\eta) = P_{0,m}^0(\eta)$$

$$\psi_b^{mn}(\eta) = (1 - s) P_{2m+1,0}^n(\eta)$$

Esta base é ortogonal. $P_{a,b}^n(x)$ é o polinômio de Jacobi de ordem n com pesos a e b .

2.4.8 Base bidimensional triangular C^0

A base anterior, apesar de manter o produto tensorial e ser ortogonal, dificulta muito a construção de uma solução C^0 . Sherwin e Karniadakis[49] propõem uma modificação da base ortogonal anterior que é apenas parcialmente ortogonal mas é C^0 . A base utiliza os mesmo sistemas de coordenadas que no problema anterior e também permite a separação

dos graus de liberdade em modos de fronteira e modos internos permitindo assim o uso da condensação estática. Neste caso, a base tem a seguinte forma:

$$\phi_{i,j}(\xi_1, \xi_2) = \psi_a^i(\eta_1) \psi_b^j(\eta_2)$$

Nesta equação supondo $0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J,$

$$\psi_a^i(\eta) = \begin{cases} \left(\frac{\eta}{1-\eta}\right) & i = 0 \\ \left(\frac{\eta}{1-\eta}\right) P_{1-1}^i\left(\frac{\eta}{1-\eta}\right) & 1 \leq i \leq I-1 \\ \left(\frac{\eta}{1+\eta}\right) & i = I \end{cases}$$

$$\psi_b^j(\eta) = \begin{cases} \psi_a^j(\eta) & i = 0, \quad 0 \leq j \leq J \\ \left(\frac{\eta}{1-\eta}\right)^{i+1} & 1 \leq i \leq I-1, \quad j = 0 \\ \left(\frac{\eta}{1-\eta}\right)^{i+1} P_{2i+1-1}^j\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right) & 1 \leq i \leq I-1, \quad 1 \leq j \leq J-1 \\ \psi_a^j(\eta) & i = I, \quad 0 \leq j \leq J \end{cases}$$

2.4.9 Base bidimensional triangular nodal

As bases nodais fazem uso das funções cardinais. Funções cardinais são funções com o seguinte comportamento:

$$F^i(x_j) = \delta_{ij}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. O exemplo mais comum são os polinômios de Lagrange (outros exemplos de funções cardinais podem ser encontrados em Boyd[7]). Também existem funções equivalentes para triângulos, basta ver qualquer livro de elementos finitos como por exemplo Segerlind[48]. Mas se os nós não forem adequados, problemas de instabilidade iguais aos mostrados na figura 2.3 ocorrem para ordens superiores 5 (aproximadamente). No caso de elementos quadriláteros, encontrar estes pontos não é nenhum problema: basta fazer o produto tensorial dos nós da quadratura de Gauss-Lobatto-Legendre.

No caso de elementos triangulares, não existe uma maneira tão simples de encontrar os nós. Taylor, Wingate e Vincenzi[56] propõem um algoritmo para encontrar nós adequados. Os nós adequados são os nós que maximizam o determinante da matriz de Vandermonde. Estes nós são conhecidos como nós de Fekete.

Seja uma base $\phi_i(r, s)$, $0 \leq i \leq N$ para um elemento triangular padrão (no caso a base ortogonal descrita na seção 2.4.7). Matriz de Vandermonde V é definida da seguinte

maneira

$$V = \begin{bmatrix} \phi_0(r_0, s_0) & \dots & \phi_N(r_0, s_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(r_N, s_N) & \dots & \phi_N(r_N, s_N) \end{bmatrix}$$

Esta matriz nada mais é que uma transformação do espaço modal para o espaço físico (nodal). Quanto maior o determinante de V , mais condicionado é o sistema. Um outro aspecto interessante é que na fronteira, os nós de Fekete seguem uma distribuição da quadratura de Gauss-Lobatto-Legendre, permitindo, desta maneira, que elementos triangulares conformem com elementos quadriláteros sem maiores dificuldades (Taylor, Wingate e Vincent[56]). Bos, Taylor e Wingate[6] mostram que o produto tensorial dos nós da quadratura de Gauss-Lobatto-Legendre são pontos de Fekete para um quadrado.

Mas mesmo encontrando os nós adequados, ainda há um problema: não existem regras de quadraturas para triângulos adequadas para calcular as integrais necessárias. Mas usando a ortogonalidade da base proposta na seção 2.4.7, pode-se calcular as integrais de maneira *exata*.

Exemplo: suponha que é desejado calcular num elemento e a integral $\int_{\Omega} fgd\Omega$. Usan-

do a base ortogonal, pode-se proceder da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} fgd\Omega &= (f, g) = \left(\sum_N \phi_i(r, s) g_j(r, s), \sum_N \phi_j(r, s) f_i(r, s) \right) \\ &= \sum_N \sum_N \phi_i(r, s) \phi_j(r, s) g_j(r, s) f_i(r, s) \\ &= \sum_N f_i g_i \end{aligned}$$

Lembrando que

$$\{f\} [V] \{f\} \leftarrow \{f\} [V]^{-1} \{f\}$$

pode-se calcular a integral da seguinte maneira:

$$\{f\} [V] \{f\} = \{g\}$$

Warburton, Pavarino e Hesthaven[59] utilizaram esta base para resolver as equações de Navier-Stokes. Este método é simples de implementar e eficiente, pelo menos até interpolantes de ordem 10.

2.5 Resolução das equações de Navier-Stokes

O objeto de estudo deste trabalho é o escoamento laminar de um fluido newtoniano bidimensional. O princípio da conservação da massa resulta na seguinte equação:

$$(2.8) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \Delta \cdot (\rho v) = 0$$

A equação da quantidade de movimento (Tannehill *et al.*[55]) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$(2.9) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \Delta \cdot (\rho v) = \rho f + \Delta \cdot \Pi_{ij}$$

Nas equações 2.8 e 2.9, v é o campo de velocidades do fluido, ρ é a massa específica do fluido, t é o tempo, f são as forças de campo e Π_{ij} é o tensor das tensões. Estas equações são muito gerais e podem ser particularizadas. Caso o fluido seja Newtoniano, em notação tensorial (Tannehill *et al.*[55]),

$$(2.10) \quad \Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \delta_{ij}\mu' \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$$

Nesta equação δ_{ij} é o delta de Kronecker, p é a pressão, v_i são os componentes do vetor velocidade v , μ é a viscosidade e μ' é o segundo coeficiente de viscosidade.

Neste trabalho, são evidentes algumas simplificações. Sendo a velocidade baixa, é razoável admitir que o escoamento seja incompressível. Também é interessante desprezar as forças de campo. De qualquer maneira, não existe superfície livre e os experimentos foram realizados com ar o que torna os efeitos da gravidade desprezíveis. Com estas simplificações e algumas manipulações as equações acima tomam a seguinte forma:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \Delta \cdot v &= 0 && \text{equação da continuidade} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v - \frac{d}{dt} \Delta v &= -\nu \Delta v && \text{eq. da qtd de movimento} \end{aligned}$$

Onde $\nu = \mu/\rho$ é a viscosidade cinemática do fluido. Estas equações são conhecidas como equações de Navier-Stokes incompressível.

Falta agora definir as condições de contorno. Ao longe, o escoamento pode ser considerado não perturbado. Nas paredes, a velocidade é nula. Qual a condição de contorno da pressão na parede? A literatura apresenta um debate intenso sobre esta questão.

Ao se resolver as equações de Navier-Stokes no tempo, é necessário adotar uma discretização temporal. O mais usual em escoamentos incompressíveis é fazer a discretização no tempo independente da discretização no espaço. O método de elementos espectrais permite uma resolução muito alta no espaço mas isso de nada adianta se a resolução temporal não for compatível com esta precisão. Este não é um problema tão simples quanto parece.

Conforme dito, a condição de contorno adequada para a pressão na parede é um problema. Vale lembrar que não existe uma equação para pressão e portanto, a pressão numa parede é consequência do escoamento. Tradicionalmente, nas paredes adotou-se para a pressão um gradiente nulo:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\text{parede}} = 0$$

Esta equação é uma aplicação da teoria de camada limite na parede. Segundo Gresho e Sani [16] e Karniadakis, Israeli e Orszag [21], esta condição de contorno compromete qualquer tentativa de se obter um precisão melhor do que primeira ordem no tempo. Karniadakis, Israeli e Orszag [21] propõem um método de solução das equações de Navier-Stokes transitórias usando *time-splitting* que permite o uso de precisões de ordens superiores (este artigo trata somente até terceira ordem mas a princípio é possível aumentar esta precisão).

As equações de Navier-Stokes podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + N(v) = -\Delta p + \nu L(v) \quad (2.12)$$

Nesta equação,

$$N(v) = v \cdot \Delta v = \frac{1}{2} [v \cdot \Delta v + \Delta(v \cdot v)]$$

$$L(v) = \Delta^2 v$$

que representam o termo convectivo e o termo difusivo. O termo convectivo geralmente é implementado desta forma para reduzir *aliasing* (Karniadakis *et al.* [21]) e apresenta

resultados superiores apesar de aumentar o custo computacional. Usando esta notação, a discretização temporal toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \hat{a} - a^n &= \sum_{j^e=1}^{j^e=b} \beta^b N^b(a) \frac{\Delta t}{a} \\
 \Delta_z^d \hat{a} &= \Delta \cdot \left(\frac{\Delta t}{\hat{a}} \right) \\
 \left. \frac{\partial u}{\partial p} \right|_{\text{parede}} &= u \cdot \left[\sum_{j^e=1}^{j^e=b} \beta^b N^b(a) \right] + \sum_{j^i=1}^{j^i=b} \beta^b (-\Delta \times \Delta \times a)_{u-b} \\
 \hat{a} - \hat{a}^{n+1} &= -\Delta^d \hat{a}^{n+1} \\
 \hat{a}^{n+1} - \hat{a}^n &= \sum_{j^i=1}^{j^i=b} \gamma^b T^b(a) \frac{\Delta t}{a}
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Nestas equações, \hat{v} e \hat{v} são campos de velocidade intermediários, \hat{p}^{n+1} é um campo de

pressões que força a condição de incompressibilidade. O campo de velocidades temporá-

rio \hat{v} satisfaz as condições de contorno de Dirichlet e a condição de incompressibilidade

do fluido. Os termos não lineares são aproximados de maneira explícita de ordem J^e e

os coeficientes β^q são pesos da família Adams-Bashforth [19]). Os termos

difusivos são tratados de maneira implícita de ordem J^i e γ^q são pesos da família Adams-

Moulton (Hildebrand[19]). Observe a condição de contorno da pressão na parede.

Este método de solução das equações de Navier-Stokes foi aplicado no programa

NEKTR. O programa permite resolver as equações com ordem até 3. Neste trabalho,

ordem 2 foi empregada.

2.6 Particularidades das equações de Navier-Stokes

A solução numérica das equações de Navier-Stokes apresenta diversas dificuldades. A

primeira e mais evidente é o termo não linear. No método descrito aqui, o termo não

linear foi tratado de maneira explícita e com um intervalo de tempo (Δt) adequado este

problema é solucionado.

Uma outra dificuldade, também no termo convectivo, é a existência de direções pre-

ferenciais. O termo convectivo representa o transporte de alguma propriedade pelo esco-

amento. Nos métodos de diferenças finitas e volumes finitos este problema é resolvido

utilizando alguma forma de *upwind* (Maliska[27]). No método de elementos finitos (e

métodos espectrais) isto é um pouco mais complicado. O método de Galerkin é na verdade de uma forma de diferenças centradas que pode resultar em instabilidades caso o termo convectivo seja dominante.

Uma primeira solução é modificar as funções de teste de modo a introduzir o efeito da direção do escoamento. Neste caso utiliza-se o método de Petrov-Galerkin. Maiores detalhes sobre este método podem ser encontrados em Zienkiewicz e Taylor[69] e Pironneau[35].

Uma segunda solução é utilizar o método das características. Este método, adequado para simulações transitórias, faz uma deformação da malha de modo que os termos convectivos sejam eliminados (a malha não muda durante a simulação, o que poderia trazer diversas dificuldades). Esta técnica é tratada em detalhes por Zienkiewicz e Taylor[69] e Zienkiewicz *et al.*[67].

Uma última possibilidade é utilizar o método de Galerkin descontínuo que é muito parecido com o método de volumes finitos e será discutido na seção 2.8.

O programa *NEWTAR* não considera o problema do termo convectivo e utiliza o método de Galerkin. Neste caso isto é aceitável já que as simulações são realizadas a baixos números de Reynolds e o método espectral tem uma resolução muito alta eliminando qualquer dificuldade desta natureza.

Mais sutil, mas com implicações importantes, é o problema de escolher espaços de funções para velocidade e pressão iguais. Este problema não é resultado de não linearidades do termo convectivo e está presente mesmo na solução das equações de Stokes (neste caso o problema é mais sério). O problema é que não existe uma equação para a pressão. A pressão é simplesmente uma grandeza que assume um valor adequado para manter a continuidade do escoamento. Este tema é tratado com profundidade em qualquer livro que trate da matemática das equações de Navier-Stokes como por exemplo Temam[57], Schwab[46] ou Ladyzhenskaya[24]. É interessante que este não é um problema exclusivo da mecânica dos fluidos e também ocorre, por exemplo, em problemas de elasticidade incompressível.

O resultado deste problema é que as discretizações da velocidade e pressão devem satisfazer um critério conhecido como critério de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB) ou inf-sup. Este critério estabelece condições nas quais as discretizações da pressão e velocidade são estáveis. Um resultado imediato é que estas discretizações não podem

ser iguais. Gunzburger[17] e Pironneau[35] fornecem alguns pares de discretizações que satisfazem o critério de Babuska-Brezzi. O critério estabelece que as discretizações da pressão ($p \in S_h$) e velocidade ($v \in V_h$) devem satisfazer a seguinte relação (Gunzburger[17]):

$$(2.14) \quad \inf_{0 \neq p_h \in S_h} \sup_{v_h \in V_h} \left(\frac{\int_{\Omega} p_h \Delta \cdot v_h \, d\Omega}{\|v_h\|_1 \|p_h\|_0} \right)$$

Nesta equação, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_0$ são normas dadas por:

$$\begin{aligned} \|q\|_0 &= \sqrt{\int_{\Omega} q^2 \, d\Omega} \\ \|q\|_k &= \sqrt{\|q\|_0^2 + \sum_k \|D^s q\|_2^2} \\ \|q\|_1 &= \sqrt{\sum_n \left\| \frac{\partial q}{\partial x_i} \right\|_2^2} \end{aligned}$$

Se as bases não satisfizerem o critério inf-sup, a solução da pressão não é única e pode levar a instabilidades numéricas. O interessante é que este não é um problema do método de elementos finitos e ocorre para qualquer método numérico que seja utilizado para resolver as equações de Navier-Stokes incompressível. Nos métodos de diferenças finitas e volumes finitos o problema é resolvido utilizando malhas deslocadas (Patanekar[33] e Maliska[27]) e a explicação do problema tem uma natureza física.

O programa *NEKTAR* e mesmo o programa desenvolvido por Siqueira[51] utilizam a mesma interpolação para a velocidade e pressão. Este problema surge principalmente para solução simultânea da pressão e da velocidade. Quando se desacopla a pressão da velocidade (utilizando um método de *time-splitting* como o método da seção 2.5), obtém-se uma equação elíptica de Poisson para a pressão que com condições de contorno corretas levam a uma solução única (Karniadakis e Sherwin[22]).

2.7 O programa *NEKTAR*

Nesta seção, o programa *NEKTAR* será brevemente descrito. Este programa foi desenvolvido por Spencer Sherwin, George EM Karniadakis e outros e permite a solução das equações de Navier-Stokes incompressível. O programa é bem geral, permitindo utilizar

elementos quadriláteros e triangulares com interpolações de ordem variada (neste trabalho foram utilizadas interpolações de ordem 5 a 11).

As equações 2.13 são utilizadas para a discretização das equações de Navier-Stokes e o programa permite interpolação de até terceira ordem. O programa também permite utilizar diversas condições de contorno: Velocidades conhecidas em algum trecho da fronteira, parede (velocidade nula), escoamento saindo e fluxo. As condições de contorno podem ser fornecidas a partir de uma equação analítica, o que facilita muito a entrada de dados algumas vezes.

Para executar o programa é necessário criar um arquivo com as informações sobre a simulação. Este arquivo contém informações gerais sobre a simulação como número de Reynolds, intervalo de tempo, ordem de interpolação, ordem de interpolação no tempo, que saída produzir (campos e forças), tempo de simulação. O arquivo também tem a definição da malha e condições de contorno.

As malhas utilizadas neste programa foram feitas pelo programa livre EMC2 (Saltei e Hecht[44]) e foi desenvolvido um programa para converter as malhas criadas pelo EMC2 para o formato do programa *Nektar*. As visualizações foram realizadas com diversos programas. Entre eles vale a pena citar o Gnuplot, a linguagem de processamento matemático e estatístico livre R e o programa de visualização livre MayaVi (baseado na biblioteca de visualização VTK) e um programa de visualização, baseado na biblioteca livre `libplot`, desenvolvido pelo autor.

2.8 Comentários finais

O programa *Nektar* tem duas versões tri-dimensionais. Uma versão (*Nektar3D*) permite a solução de problemas tridimensionais utilizando elementos hexaédricos, piramidais, prismáticos e tetraédricos. O outro (*NektarF*), mais apropriado para os problemas deste trabalho, utiliza, numa das direções (eixo z), uma decomposição em série de Fourier da solução. O método emprega no eixo z um método espectral que é muito adequado para problemas periódicos numa direção. Seria interessante comparar a eficiência deste método com o *Nektar3D* ou mesmo o método implementado por Siqueira[51].

Utilizando o método de elementos finitos ALE (*arbitrary Lagrangian-Eulerian*) pode-se trabalhar com malhas deformáveis, o que seria muito interessante para estudar o problema de conjunto de cilindros oscilantes, que é um problema de difícil solução numérica.

Um outro aspecto importante seria a implementação do modelo de turbulência LES (*Large Eddy Simulation*) para permitir a simulação de escoamentos com número de Reynolds superiores. No momento o autor está desenvolvendo uma biblioteca de elementos espectrais que no futuro permitirá a implementação dos métodos descritos acima.

Finalmente, é interessante fazer alguns comentários referentes ao método de Galerkin descontínuo. Uma das dificuldades do método de elementos finitos é garantir a conservação do fluxo entre elementos como ocorre no método de volumes finitos. O método de Galerkin descontínuo procura resolver esta questão. Este método permite a resolução de problemas em forma conservativa do tipo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta \cdot \mathbf{F}(u) = 0$$

onde \mathbf{F} é o fluxo de u . Este método admite soluções descontínuas e é muito apropriado para a solução de problemas compressíveis com ondas de choque. Multiplicando esta equação por uma função de teste v e integrando por partes (teorema de Green, Riley[38]), chega-se à seguinte equação:

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} v \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}(u) d\Gamma - \int_{\Omega} \Delta v \cdot \mathbf{F}(u) d\Omega = 0;$$

Se o domínio Ω for dividido em elementos $\Omega_i = \cup_i \Omega_i$, a equação anterior pode ser utilizada para cada elemento se uma modificação for incluída: o termo na fronteira deve, agora, considerar a contribuição dos elementos vizinhos (para permitir o fluxo de informações entre os elementos). Na fronteira, o fluxo depende da variável u do elemento (u_i) e do elemento vizinho u_e . Assim a equação anterior toma a seguinte forma:

$$\int_{\Omega_e} v \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma_e} v \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}(u_i, u_e) d\Gamma - \int_{\Omega_e} \Delta v \cdot \mathbf{F}(u) d\Omega = 0;$$

Apenas o fluxo na fronteira mudou: $\mathbf{f}(u_i, u_e)$ que agora leva em consideração o vizinho. Utilizando para $\mathbf{f}(u_i, u_e)$ métodos utilizados em volumes finitos, pode-se chegar a um método conservativo e que leva em conta a direcionalidade do escoamento. Cockburn[9] faz uma análise detalhada do método de Lomtev[26] implementa o método de Galerkin descontínuo com elementos espectrais na solução das equações de Navier-Stokes compressíveis (inclusive com ondas de choque).

O método de elementos espectrais é uma técnica recente e que deve ser melhor pesquisada para, num futuro próximo, competir com os métodos tradicionais já estabelecidos.

Uma vantagem do método de elementos espectrais é o número reduzido de elementos, o que realmente facilita a análise do problema. Basta comparar o número de elementos utilizados por Siqueira[51] que é da ordem de 20,000 com o deste trabalho que é da ordem de 500! Por outro lado será que faz sentido utilizar um método sofisticado e de certo modo complicado e de difícil implementação para a solução de um problema turbulento, em regime permanente e com Reynolds alto utilizando modelo de turbulência $k - \epsilon$ e ainda mais se for necessário utilizar resultados experimentais em alguma região da simulação com incertezas muitas vezes superiores a 10%? Uma coisa é clara no entanto: os métodos de elementos espectrais/hp serão cada vez mais comuns nos próximos anos.

Capítulo 3

Metodologia experimental

Neste capítulo é descrita a metodologia experimental empregada nas medições. Este trabalho foi fruto de ensaios realizados no IPT para a PETROBRAS, que permitiu a publicação destes resultados. Os ensaios foram realizados no túnel de vento do Laboratório de Vazão que tem uma seção de testes de $500 \times 500 \text{ mm}^2$. Foram medidas forças e pressões para diferentes números de cilindros (1, 2 e 4) e diferentes posicionamentos e espaçamentos entre cilindros. Neste trabalho são apresentados apenas resultados com um e dois cilindros.

Os ensaios envolveram algumas dificuldades como a medição de pressões dinâmicas muito baixas (da ordem de $5Pa$ nos casos de velocidades mais baixas) em modelos pequenos. Tubos são utilizados para ligar os modelos aos transdutores de pressão e são os menores possíveis para minimizar atenuações ou outros efeitos dinâmicos na medição. O transdutor de pressão também demonstrou ser inadequado por não permitir uma medida com frequência alta o suficiente. Este problema foi resolvido com um dispositivo por nós denominado “octopus” (a ser descrito na seção 3.2.1).

A força é medida de duas maneiras diferentes: (a) utilizando um dispositivo integrador de pressões e (b) utilizando célula de carga. O dispositivo integrador de pressões resultou ser muito fácil de ser utilizado. Já a célula de carga deve ser melhor estudada para poder fornecer resultados superiores.

3.1 Descrição dos modelos

Os modelos utilizados nos testes são cilindros de acrílico e PVC de 32 mm de diâmetro por 500 mm de comprimento.

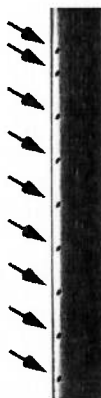


Figura 3.1: Desenho esquemático do modelo utilizado na medição de correlação espacial de pressões

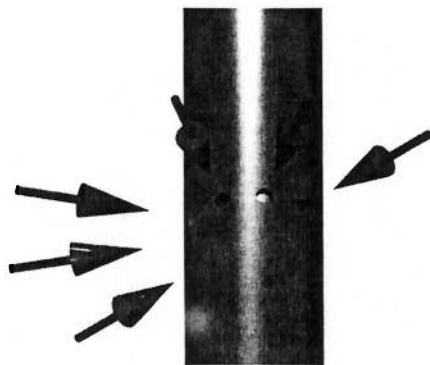


Figura 3.2: Esquema de modelo para medição de força com integrador de pressões

Nos ensaios com mais de um cilindro, pelo menos um dos cilindros é instrumentado. Foram desenvolvidos dois tipos diferentes de modelos instrumentados, um para a medida da correlação dos dados de pressão ao longo do eixo longitudinal do cilindro e outro para a medida da força de arrasto, exercida sobre o modelo pelo escoamento, através de dispositivo que integra a pressão ao redor do cilindro (denominado dispositivo integrador de pressões). Os modelos citados podem ser observados nas figuras 3.1 e 3.2.

3.2 Metodologia

A figura 3.3 mostra uma foto do túnel de vento do Laboratório onde foram realizados os experimentos deste trabalho.

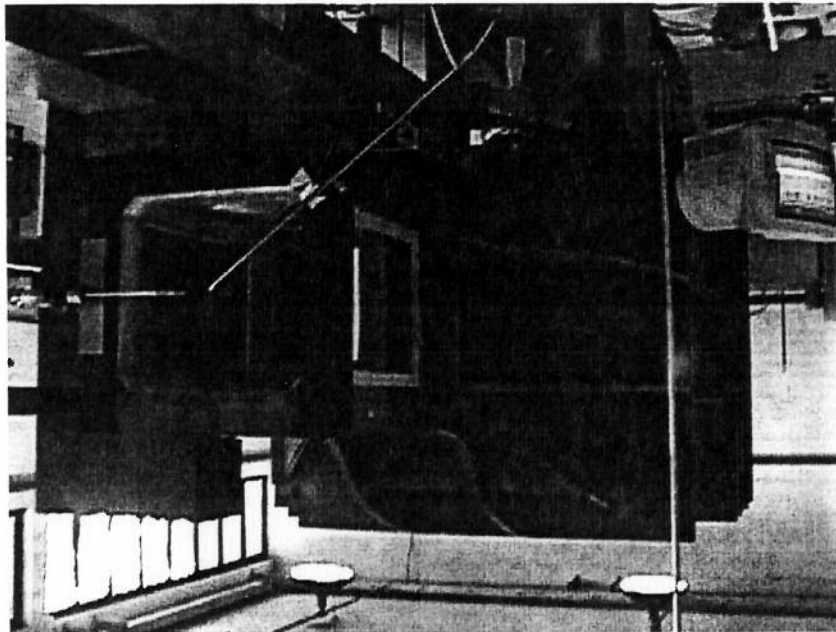


Figura 3.3: Foto do túnel de vento do Laboratório de Vazão do IPT

3.2.1 Equipamentos e Dispositivos Utilizados

Seção de testes auxiliar

Foi desenvolvida uma seção de testes auxiliar para que fossem instalados os modelos e toda a instrumentação necessária à integridade do túnel de vento existente. A seção de testes auxiliar constitui-se de um prolongamento de 650mm nas dimensões da seção original do túnel, construída rigorosamente no mesmo perfil. A seção de testes auxiliar pode ser observada na figura 3.4 que mostra um diagrama esquemático com modelos montados (a) e uma foto da extensão antes de ser acoplada ao túnel (b).

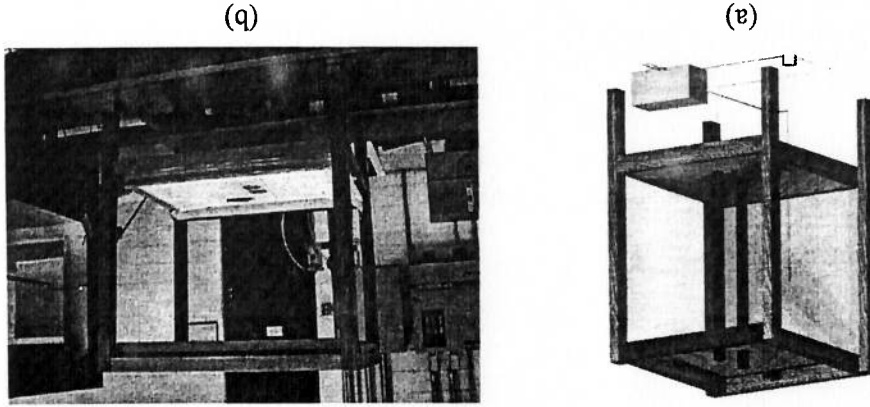


Figura 3.4: Seção de testes auxiliar

Instrumento para medição de pressão

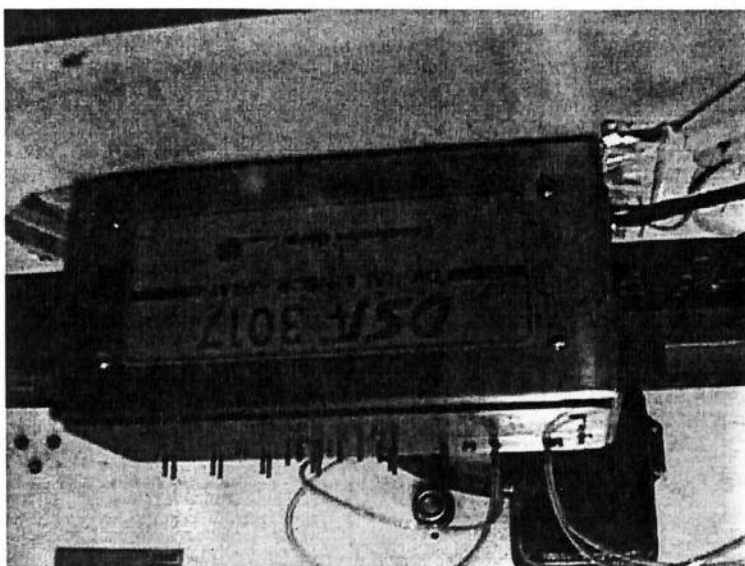


Figura 3.5: Medidor de pressão SCANVALVE com 8 canais

As medições de pressão foram efetuadas com o emprego de um equipamento de variedade modelo DSA3017, fabricado pela Scanivalve Co, que é composto de 16 sensores de medição de pressão, com faixa nominal de $2500Pa$ cada e com resolução de $0,2Pa$. Este sistema é capaz de ler simultaneamente os dados de pressão em 16 canais. A frequência de resposta pode chegar a $1,6kHz$ se limitado a 2 canais e usando dispositivo desenvolvido para tanto ("octopus", seção seguinte). Os sensores vieram calibrados de fábrica mas uma verificação contra um micro-manômetro foi feita.

"Octopus"

O sistema de medição de pressão DSA3017 descrito na seção anterior possui 16 sensores de pressão piezo-resistivos que têm resposta rápida. No entanto, a interface ethernet (liga-se a uma placa de rede de computador) usada para transmitir os dados a um computador é lenta, permitindo leitura dos dados a $200Hz$. Esta frequência de amostragem, permite a transmissão das informações de todos os canais de pressão mas é baixa para as necessidades deste experimento.

A princípio, este instrumento não é adequado para a medida de correlação. No entanto, a amostragem é feita sequencialmente, ou seja, o DSA3017 lê o canal 1, em seguida o canal 2 e assim por diante até o canal 16. Então, o DSA3017 disponibiliza estas infor-

ações na sua interface *ethernet*. O “octopus” nada mais é que uma ligação física de um sinal de pressão a oito canais do DSA3017. Desta maneira, o DSA3017 pode ser conectado a dois “octopus”. O primeiro “octopus” é ligado nos canais 1,3,5,7,9,11,13,15. O segundo nos canais restantes (de numeração par). Como a leitura dos sinais de pressão é sequencial, uma varredura dos canais do DSA3017 pode ser dividida em 16 intervalos de tempo, cada um correspondendo à leitura de um canal. Da maneira que estão ligados os dois “octopus”, um sinal de pressão (conectado ao “octopus” 1) é dividido em oito intervalos de tempo e o mesmo acontece com o outro sinal de pressão (conectado ao “octopus” 2). Assim, a frequência de amostragem foi aumentada para $8 \times 200Hz = 1,6kHz$. A figura 3.6 mostra uma foto do octopus.

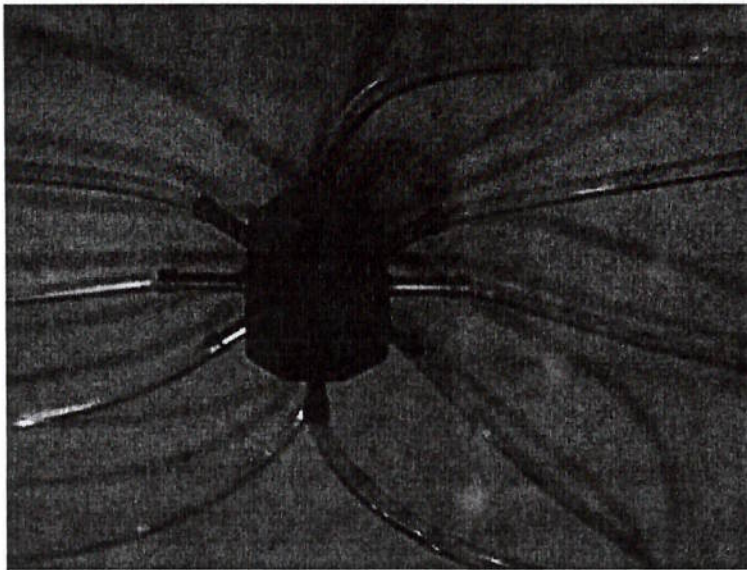


Figura 3.6: Foto do “octopus”

Um problema com o “octopus” é que o sinal de pressão é atenuado por todas as conexões extras. Mas como o maior interesse é comparar um sinal de pressão com outro (correlação) uma certa atenuação é admissível. Mas uma atenuação excessiva do sinal pode trazer problemas. Outra dificuldade que surge, principalmente quando se está medindo pressões baixas (da ordem de $5 - 10Pa$), é que, como um mesmo sinal é medido com diferentes sensores (que estão praticamente no limite da resolução) existe um ruído visível nas séries temporais medidas.

O “octopus” foi a maneira encontrada para lidar com uma instrumentação não muito adequada para medir a correlação de dois sinais. Seria interessante, no entanto, utilizar algum outro instrumento mais adequado como por exemplo um transdutor de pressão

posicionado diretamente na tomada de pressão ou um transdutor com processamento de sinal mais rápido que o DSA3017. Também seria interessante estudar melhor o comportamento dinâmico do octopus já que um sistema semelhante é empregado no dispositivo integrador de pressões.

Instrumento para medição de velocidade do ar

As faixas de velocidade do ar foram ajustadas com o auxílio de um tubo de Pitôt, marca Airflow, modelo Type 4, com faixa nominal de 2 a 70 m/s. As leituras de pressão do tubo de Pitôt, foram feitas em um manômetro de coluna inclinada, marca Airflow, com faixa nominal de 0 a 500 mmH₂O. Fotos destes instrumentos podem ser vistas na figura 3.7.

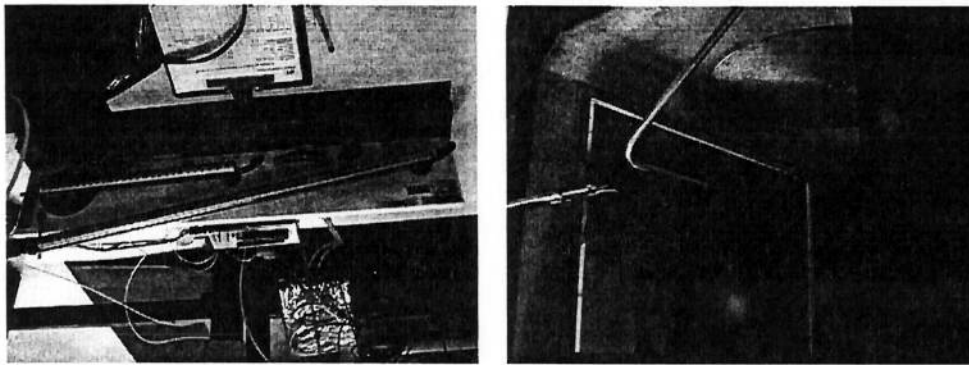


Figura 3.7: Instrumentos para a medição de velocidade

Instrumentos para medição das condições ambiente

As condições do ar ambiente foram medidas no medidor de temperatura de ponto de orvalho, marca Michell Instruments, modelo DEWMET.

A pressão barométrica foi medida pelo barômetro (transdutor de pressão absoluta) marca Degraanges et Huot, modelo RPM1-A0015, com faixa nominal de 0 a 1035 mbar. A figura 3.8 mostra uma foto do medidor de pressão atmosférica.

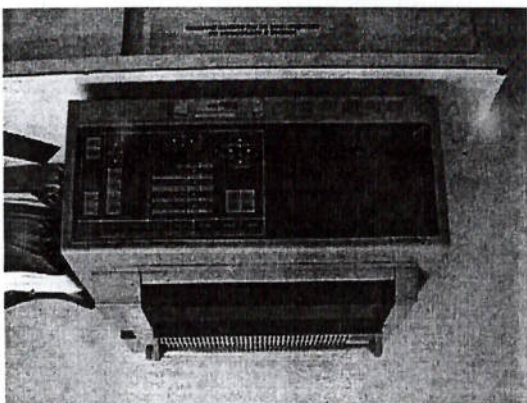
Instrumentos para medição direta da força de arrasto

Para medição direta da força de arrasto foram projetadas duas células de carga capazes de medir duas componentes de força em direções ortogonais entre si. Este instrumento foi projetado para operar na faixa nominal de 15N em cada direção. As curvas de calibração foram levantadas pela aplicação direta de força, utilizando-se massas calibradas.

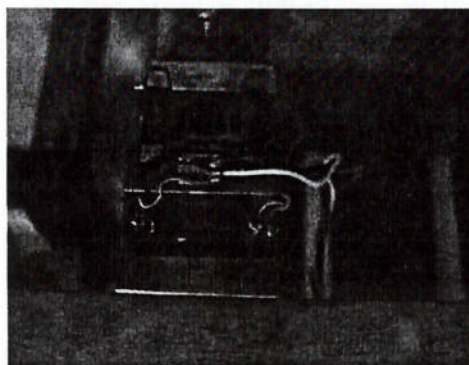


Figura 3.8: Foto de medidor de pressão ambiente

Os valores de tensão foram medidos e registrados em gráfico, por um analisador de espectro, marca Yokogawa, modelo 3655E.13.



(b) Analisador de espectro



(a) Célula de carga

Figura 3.9: Instrumentos para a medição de condições ambientes

3.2.2 Arranjo dos cilindros

Os ensaios foram efetuados para diferentes configurações de posicionamento dos cilindros. Para melhor compreensão, classificaremos os ensaios quanto ao número de modelos empregados. Assim, foram estudadas as seguintes configurações:

- Um cilindro
 - Dois cilindros
- Os ensaios desenvolvidos para o cilindro isolado (figura 3.10) foram: levantamento de coeficiente de arrasto C_D usando dispositivo integrador de pressões e célula de carga e determinação do coeficiente de correlação ao longo do eixo longitudinal.

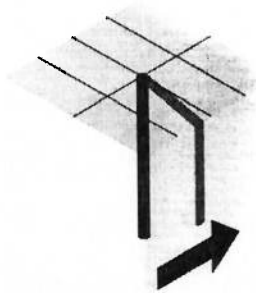
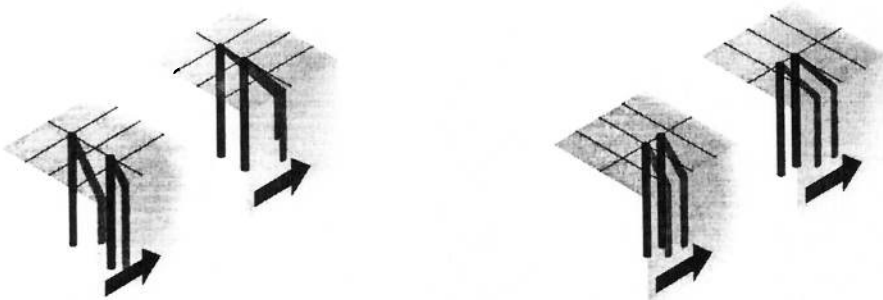


Figura 3.10: Cilindro isolado



(a) Cilindros em linha

(a) Cilindros lado a lado

Nestes ensaios foram objeto de estudo: a determinação do coeficiente de correlação ao longo do eixo longitudinal e medição da força de arrasto com o emprego de dispositivo integrador de pressões. Considerando-se os seguintes espaçamentos entre cilindros: 1D, 2D, 3D, 4D, 5D e 6D. Onde D corresponde ao valor do diâmetro do cilindro considerado (figura 3.11).

Os experimentos efetuados com dois cilindros foram divididos em dois arranjos físicos a saber:

1. Em linha (com os modelos colineamente dispostos em relação às linhas de corrente do escoamento). Para este arranjo foram consideradas que duas possibilidades de montagem poderiam obter resultados diferentes: uma com a cilindro instrumentado a montante e outra com o cilindro instrumentado a jusante.
2. Lado a lado (com os modelos ortogonalmente dispostos em relação às linhas de corrente do escoamento)

3.2.3 Determinação da Tridimensionalidade do escoamento

Quando a razão de aspecto (comprimento/diâmetro) de um cilindro é muito grande, é de se esperar que as extremidades tenham pouca influência e que o escoamento em seções normais ao eixo longitudinal do cilindro (ou conjunto de cilindros paralelos) sejam idênticos em cada instante de tempo. Desta maneira, o escoamento pode ser modelado como bidimensional, o que facilita consideravelmente o estudo. Na realidade isto ocorre apenas para números de *Reynolds* muito baixos. A partir de $Re = 180$, surgem perturbações tridimensionais, *inclusive para razões de aspecto grandes* (Williamson[62]). Isto leva à conclusão de que estes efeitos tridimensionais são resultado de instabilidades no escoamento e não de influência das extremidades dos modelos, já que aparecem mesmo em simulações numéricas (Siqueira[51]) onde os efeitos de extremidades estão ausentes.

Um aspecto deve ser observado: cada seção do cilindro (ou conjunto de cilindros) possui um campo de velocidades muito parecido com o caso bidimensional. Quando duas seções estão muito próximas, a diferença entre os campos de velocidade num mesmo instante são mínimas. Ou seja, num determinado instante de tempo, o campo de velocidades muda de maneira contínua na direção do eixo longitudinal do cilindro.

O resultado desta tridimensionalidade é uma defasagem na emissão de vórtices de uma seção perpendicular ao eixo do cilindro em relação a outra, ou seja: num dado instante, as forças agindo nos cilindros (força de arrasto, e força de sustentação), que variam periodicamente, estão defasadas. Isto geralmente é uma vantagem: ao se integrar estas forças ao longo do eixo longitudinal para calcular a força instantânea total no cilindro, devido à defasagem, esta resulta menor que para o caso bidimensional. Vale ressaltar que isto só afeta a componente flutuante da força, não modificando a média.

Uma forma de se determinar esta defasagem é calcular a correlação de dois sinais (força, pressão, velocidade, etc) ao longo do eixo longitudinal. Quando as duas seções estão afastadas, espera-se que os dois sinais estejam pouco correlacionados, ou seja, os sinais são independentes um do outro.

O coeficiente de correlação determina o quão correlacionados são dois sinais. Da dos dois sinais temporais u e v , o coeficiente de correlação para estes sinais é calculado segundo a seguinte expressão:

$$R_{uv} = \frac{\sqrt{u^2} \cdot \sqrt{v^2}}{u \cdot v} \quad (3.1)$$

Nesta equação, a barra em cima de uma grandeza representa a média temporal desta grandeza, e ϕ' representa a flutuação de ϕ , ou seja, $\phi = \bar{\phi} + \phi'$.

É evidente que $R_{uu} = 1$. Este é o valor máximo do coeficiente de correlação. Quanto mais próximo de zero for este coeficiente menos correlacionados estão os dois sinais. Neste projeto, deseja-se estudar o escoamento tridimensional ao redor de cilindros infinitos (na realidade limitados pelas dimensões do túnel de vento) e portanto, os dois sinais referem-se a grandezas semelhantes para diferentes seções do cilindro.

Caso o escoamento seja bidimensional, a correlação entre dois sinais iguais (pressão na mesma posição angular, por exemplo) é 1. Na realidade o coeficiente de correlação não é um, indicando uma tridimensionalidade dos sinais, ou seja, em certa medida, um sinal depende do outro.

Neste projeto, a correlação foi determinada a partir da medição da flutuação de pressões ao longo de uma reta, paralela ao eixo longitudinal do cilindro, na superfície do cilindro, ou seja,

$$R_{12} = R_{p_1, p_2} \quad (3.2)$$

onde $p'_1 = p_1 - \bar{p}_1$ e $p'_2 = p_2 - \bar{p}_2$, p_1 é a pressão na seção 1 e p_2 é a pressão na seção 2 e a barra sobre uma grandeza representa a média temporal.

A figura 3.1 mostra um desenho esquemático das tomadas de pressão utilizadas na determinação da tridimensionalidade do escoamento.

Outro conceito importante é o de comprimento de correlação. Este comprimento é uma estimativa da distância entre duas seções para a qual ainda existe alguma correlação. O comprimento de correlação é dado pela seguinte expressão:

$$L_x = \int_x R_{p_0, p_y} dy \quad (3.3)$$

Nesta equação, r é o coeficiente de correlação calculado, p_0 é a pressão na seção 0 e p_α é a pressão na seção α .

3.2.4 Medição da Força de Arrasto

Com o dispositivo Integrador de Pressões

Nesta seção faz-se uma breve descrição do dispositivo integrador de pressões usado para determinar forças agindo nos cilindros. O conceito básico foi retirado de Szepessy[54].

A força aerodinâmica resultante em um corpo pode ser decomposta em duas componentes principais: 1) forças resultantes do cisalhamento na superfície e 2) forças resultantes do campo de pressão no corpo. A importância desta decomposição reside no fato destas forças serem resultados de fenômenos físicos diferentes e, frequentemente, uma das duas forças ser dominante. No caso de corpos perfilados (perfil de asa por exemplo), a maior parte do arrasto é resultado das forças de cisalhamento na superfície.

Tratando-se de corpos rombudos, as forças de cisalhamento são muito pequenas frente às forças de pressão, resultantes da separação do escoamento e esta relação diminui com Reynolds (até que a camada limite torne-se turbulenta). O escoamento ao redor de cilindros é um exemplo clássico de escoamento separado e neste caso, as forças de pressão são dominantes. Com isso, para se determinar a força em um cilindro (de maneira aproximada), basta integrar a pressão ao longo da superfície do cilindro. De uma maneira geral, a força agindo em uma superfície é dada pela seguinte expressão:

$$\vec{F} = \int_S p \vec{n} dS \quad (3.4)$$

Nesta equação, S refere-se à superfície na qual deseja-se calcular a força, p é a pressão atuando nesta superfície e \vec{n} é o vetor unitário normal à superfície.

A equação 3.4 pode ser discretizada da seguinte maneira:

$$\vec{F} = \sum_i p_i \vec{n}_i \Delta S_i$$

Para se determinar a força na direção \vec{u} , basta projetar a expressão anterior nesta direção:

$$F_u = \vec{F} \cdot \vec{u} = \sum_i p_i \vec{n}_i \cdot \vec{u} \Delta S_i$$

Lembrando que $\vec{n}_i \cdot \vec{u} = \cos \theta$ onde θ é o ângulo formado entre estes dois vetores unitários e que a projeção da área ΔS_i no plano normal a \vec{u} vale $\Delta S_i \cos \theta = \Delta S_i^n$, chega-se a seguinte expressão:

$$F_u = \sum_i p_i \Delta S_i^n$$

Determinando a pressão média $\bar{p} = \frac{\sum_i p_i}{n}$ (n é o número de pontos de tomada de

pressão) e adotando $\Delta S_i^n = \Delta S = \text{const}$, chega-se à expressão final para a força na

superfície:

$$F_u = \bar{p} S \quad (3.5)$$

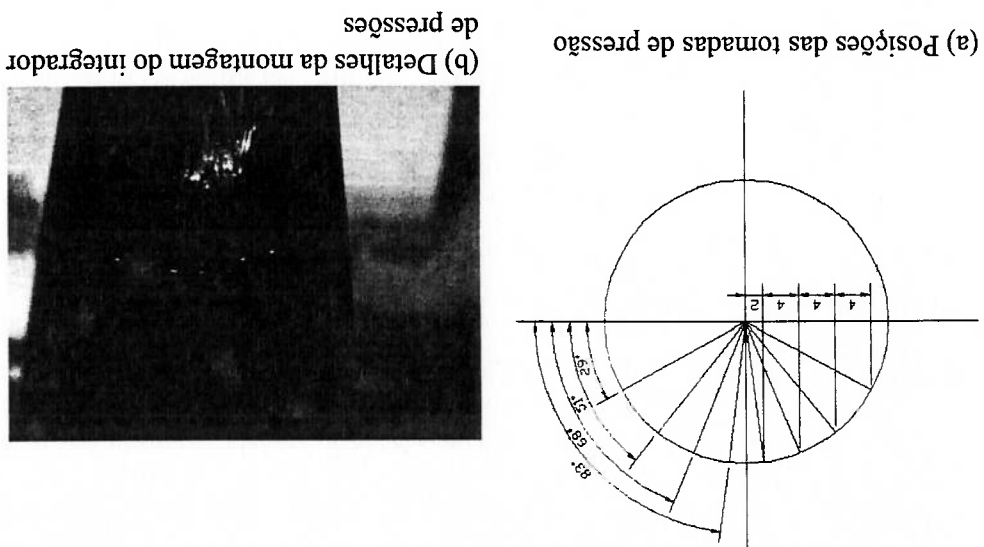


Figura 3.12: Desenho esquemático do dispositivo integrador de pressões indicando os pontos de tomada de pressão e detalhe de montagem do integrador de pressões

S é a área da superfície projetada e vale $n \Delta S$.

O dispositivo integrador de pressão mede a pressão média \bar{p} . Um desenho esquema-

tico que mostra as posições de tomada de pressão do integrador pode ser visto na figura

3.12. As diferentes tomadas de pressão (estas tomadas de pressão correspondem a p_i)

estão posicionadas de maneira a obter-se uma área projetada constante, daí os ângulos

diferentes entre as tomadas. Estas tomadas de pressão unem-se de modo a obter a pres-

são média. A figura 3.2 mostra uma vista do cilindro com o dispositivo integrador de

pressões.

A pressão média é medida com um dispositivo parecido com o "octopus" (na realidade

um "octopus" ao contrário). Os oito sinais de pressão entram numa câmara com um sinal

de saída que vai para o transdutor de pressões.

Outro ponto a ser destacado é que o dispositivo construído mede a pressão média

referente a apenas meio cilindro. Para se determinar a força total no cilindro, devem ser

feitas duas medidas girando o cilindro 180° pois é difícil, dadas as dimensões dos tubos e

modelos, instrumentá-lo inteiramente.

Com célula de carga

Foi feita a medição direta da força de arrasto com o emprego de duas células de carga, desenvolvidas especialmente para esta finalidade. As células foram posicionadas nas extremidades do cilindro e posicionadas de forma a garantir a não existência de qualquer

contato físico com a seção de testes ou suportes, permitindo assim uma medição confiável. A figura 3.9 mostra detalhe de montagem da célula de carga no modelo. Os sinais referentes às medições de força foram coletados, processados e registrados em forma de gráfico, através do Analisador de Espectro.

Capítulo 4

Resultados: Coeficientes de força

Este capítulo apresenta os coeficientes de força obtidos numericamente e experimentalmente. Os resultados referentes à tridimensionalidade do escoamento serão apresentados no capítulo seguinte.

Os resultados são apresentados segundo a disposição dos cilindros: primeiro é analisado o cilindro isolado, em seguida dois cilindros lado a lado e por último dois cilindros em linha.

4.1 Cilindro isolado

O escoamento ao redor de cilindros isolados apresenta aplicações práticas importantes e, no caso deste projeto, é uma excelente referência quando se analisa os diferentes arranjos testados. A literatura apresenta extensos resultados numéricos e experimentais para este tipo de escoamento e portanto é um excelente *benchmark* além de salientar os aspectos mais importantes do escoamento ao redor de corpos rombudos.

O problema foi estudado numericamente para $60 \leq Re \leq 600$ assumindo escoamento *bidimensional laminar*. O coeficiente de arrasto (C_D) foi medido em túnel de vento para $1 \cdot 10^4 \leq Re \leq 4 \cdot 10^4$.

4.1.1 Resultados numéricos $60 \leq Re \leq 600$

O coeficiente de arrasto para diferentes Re pode ser visto na figura 4.1. Na figura 4.2 são comparadas as curvas $C_D \times Re$ obtidas por [11] com as do presente trabalho. Na figura 4.5 está apresentada a média quadrática da força de sustentação do cilindro para diferentes Re e na figura 4.3 está apresentado o número de Strouhal para diferentes valores de Re . A figura 4.4 mostra outros resultados obtidos na literatura ([11, 51, 64]).

O coeficiente de arrasto é definido como

$$C_D = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho V^2 A} \quad (4.1)$$

onde F é a força de arrasto, ρ é a massa específica do fluido, V é a velocidade do fluido ao longe e A a área projetada do cilindro, $A = L \cdot D$. A média quadrática de uma grandeza ϕ é definida como

$$\phi_{RMS} = \sqrt{\overline{(\phi - \bar{\phi})^2}} \quad (4.2)$$

Onde uma barra indica uma média temporal.

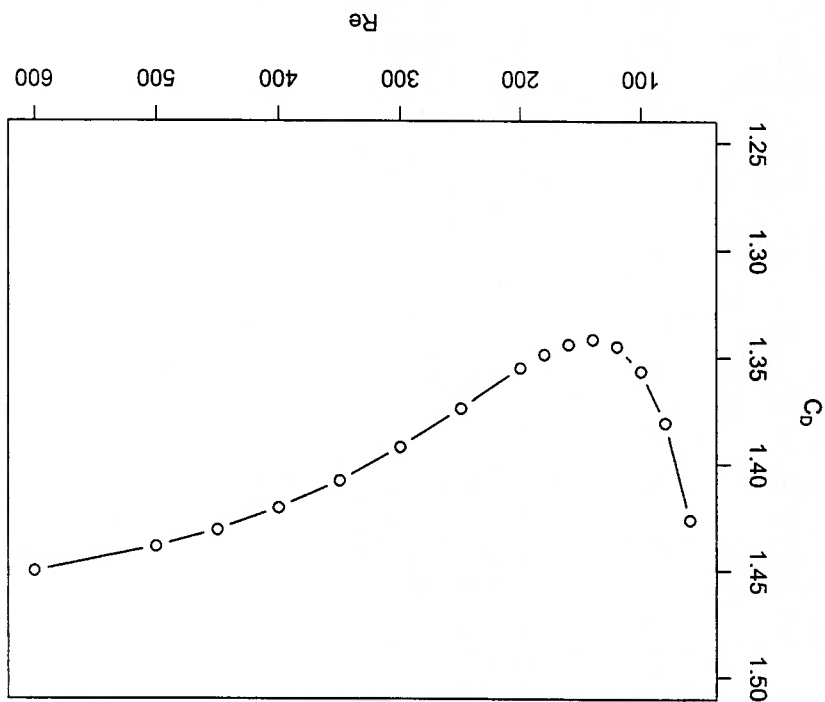


Figura 4.1: Coeficiente de arrasto C_D de um cilindro para diferentes números de Reynolds

Na tabela 4.1 são comparados diversos resultados obtidos na literatura para $Re = 100$ e $Re = 200$. Os resultados obtidos neste trabalho estão muito próximos de outros resultados encontrados na literatura apesar de haver uma dispersão considerável dos resultados, principalmente de C_D . Já St tem uma dispersão muito menor conforme pode-se observar na tabela 4.1 e, principalmente, na figura 4.4. As diferenças obtidas no C_D observadas na figura 4.2 estão dentro do esperado se estas diferenças forem comparadas com os resultados da tabela 4.1. Seria interessante estudar estas diferenças, que podem, principalmente

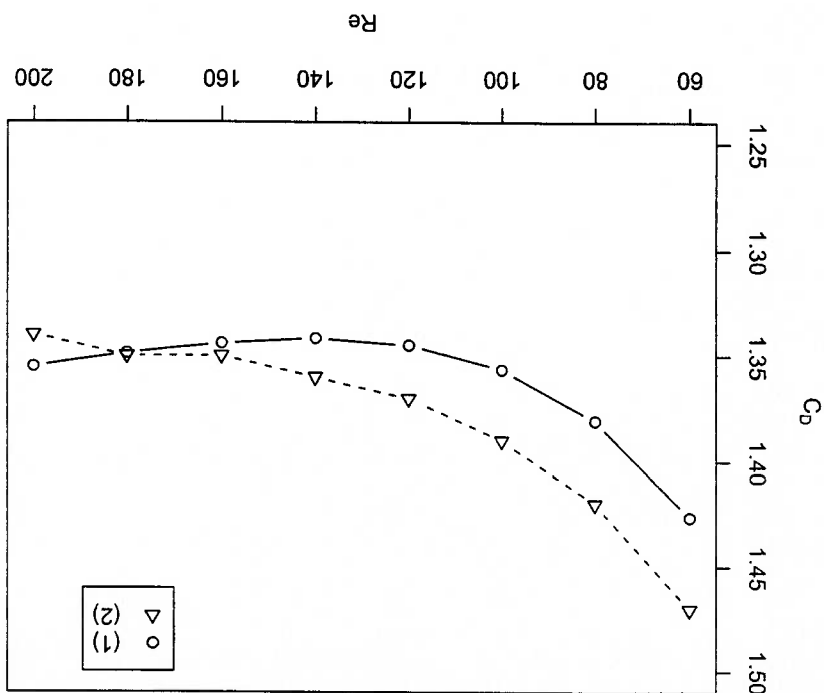


Figura 4.2: Coeficiente de arrasto C_D de um cilindro para diferentes números de Reynolds. (1) Presente simulação e (2) Resultados apresentados por Flatschhart [1].

nas simulações numéricas, mostrar que metodologias são mais adequadas para este tipo de simulação (método de vórtices discretos, elementos finitos, ordem de interpolação no espaço e no tempo, etc) e o que pode ser desprezado. A figura 4.6 mostra que para Re baixos não é possível desprezar o arrasto devido ao atrito viscoso, o que é feito em algumas simulações.

A malha utilizada na simulação pode ser vista na figura 4.7. Observe o número baixo de elementos (900) quando comparados com simulações com métodos de baixa ordem (Meneghini *et al* [30]).

As figuras 4.1, 4.3 e 4.5 mostram que o escoamento depende bastante de Re . Para Re baixos, $C_{L,RMS}$ sobe rapidamente mas este aumento diminui. Este resultado é esperado já que valores de $C_{L,RMS}$ indicam presença de vórtices intensos no escoamento, o que não é possível em Re baixos já que viscosidade alta impede aparecimento de regiões de elevada vorticidade (regiões com altos gradientes de velocidade). O mesmo não ocorre com Reynolds mais altos e assim $C_{L,RMS}$ aumenta consideravelmente. Mas com o aumento de Re , outros fatores começam a ser predominantes no escoamento: convecção e portanto o aumento com Re é menor. O valor máximo de $C_{L,RMS}$ deve ser o de um escoamento não

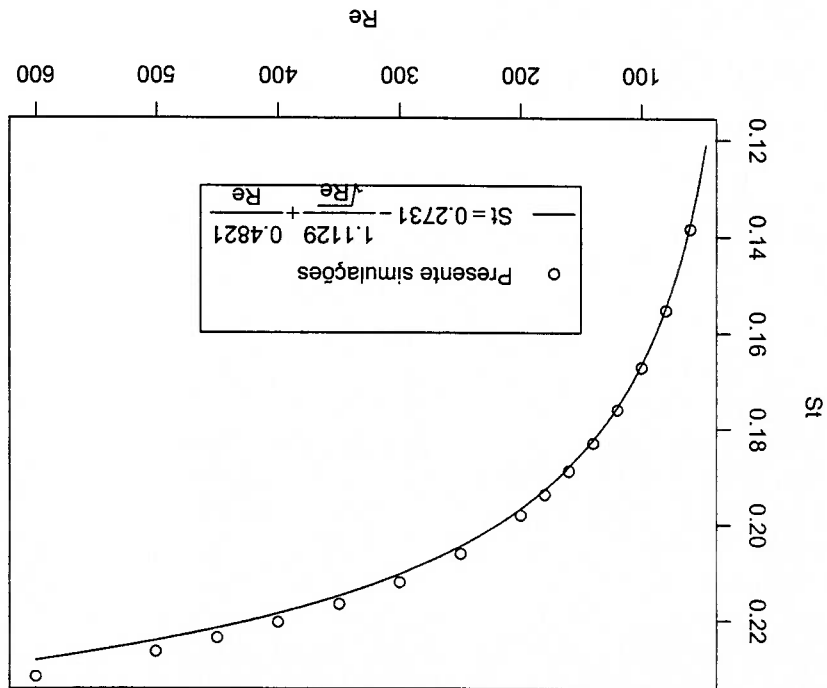


Figura 4.3: Número de Strouhal St de um cilindro isolado para diferentes números de Reynolds. A equação foi obtida por Williamson e Brown[64]

viscoso com a esteira composta de vórtices ideais sendo conectados, o que nada mais é que uma esteira de Von Karman.

É interessante observar na figura 4.6 que a parcela do coeficiente de arrasto devido ao atrito viscoso cai com o aumento do número de Reynolds. Isto indica que a determinação da força a partir do campo de pressão (como é o caso com o dispositivo integrador de pressões utilizado nos experimentos) é aceitável. Este efeito (redução da componente viscosa na força de arrasto) deve continuar com o aumento de Re por que a camada limite na parede do cilindro é cada vez mais fina. Para Re mais altos começa a surgir turbulência na esteira e a partir deste ponto o coeficiente de arrasto devido à pressão deve mudar pouco com Re , justificando, assim o patamar na curva $C_D \times Re$ observado na literatura[45]. Este comportamento deve continuar para Re mais altos até que a camada limite no cilindro torne-se turbulenta para $Re \approx 3 \times 10^5$. Quando isto acontece, os pontos de separação movem-se para a parte de trás do cilindro, reduzindo consideravelmente a área do cilindro imersa em região de baixa pressão (resultado da separação). Nesta situação, o coeficiente de arrasto cai consideravelmente (para um valor da ordem de 0,3) e depois aumenta um pouco e estabiliza num valor próximo de 0,7. Esta mudança no

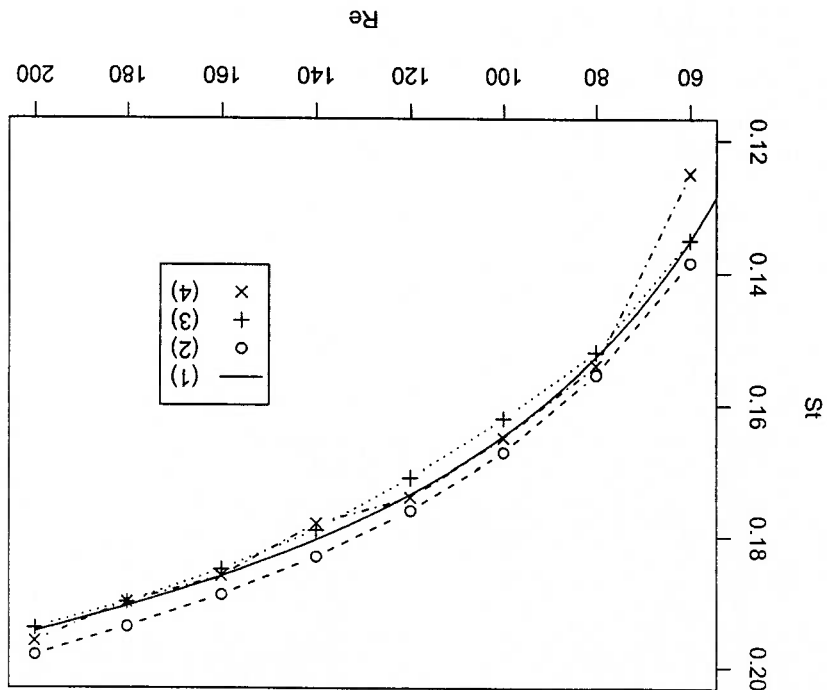


Figura 4.4: Número de Strouhal St de um cilindro isolado para diferentes números de Reynolds. (1) Williamson e Brown[64], (2) Presente simulações, (3) Flatschart[11] e (4) Siqueira[51].

regime de escoamento é chamada de crise do arrasto mas não é objeto de estudo deste trabalho.

A queda da componente viscosa da força de arrasto e o aumento de $C_{L,RMS}$ explicam o comportamento particular do C_D . Inicialmente, o valor de C_D cai chegando num mínimo em $Re \approx 140$. A partir deste ponto, o C_D aumenta. Para Re baixos, a componente viscosa do arrasto é alta, o que faz o C_D cair com Re . Mas a queda da componente viscosa do arrasto diminui com Re e começa ter grande influência o aumento de intensidade dos vórtices, visível claramente na curva $C_{L,RMS} \times Re$ (figura 4.5).

A figura 4.8(a) mostra o C_D e o C_L em função do tempo adimensional $t \cdot U/D$ para $Re = 200$. Já a figura 4.8(b) mostra o campo de vorticidade em um determinado instante. No anexo I estão todos os resultados obtidos neste trabalho para um cilindro isolado.

Figura 4.5: Média quadrática do coeficiente de sustentação $C_{L,RMS}$ de um cilindro para diferentes números de Reynolds

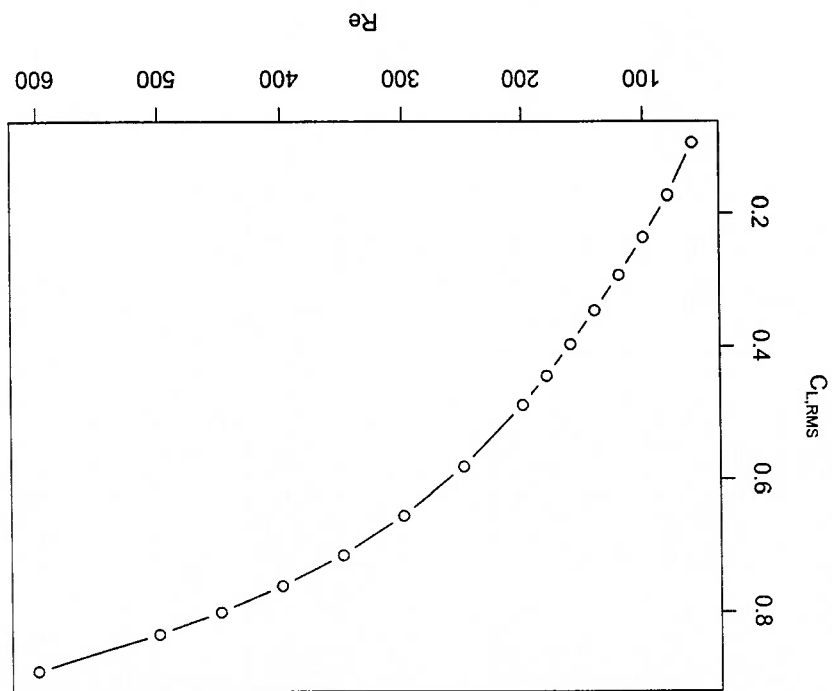


Figura 4.6: Relação entre coeficiente de arrasto devido a pressão e atrito viscoso com coeficiente de arrasto total (C_{D}^{visc}/C_D e C_D^{press}/C_D)

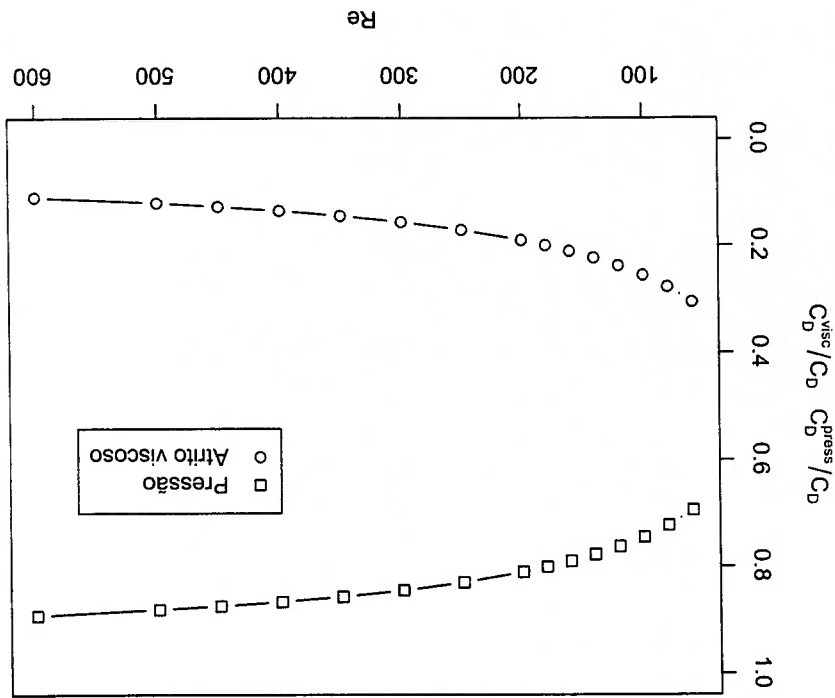


Tabela 4.1: Coeficiente de arrasto médio e número de Strouhal obtidos na literatura

$Re = 100$			
Fonte	Re	St	C_D
Presente simulação	100	0.167	1.36
Outros resultados numéricos	100	0.165	1.37
Menghini <i>et al.</i> [30]	100	0.160	1.37
Brza <i>et al.</i> [8]	100	0.160	1.37
Sa e Chang[42]	100	0.155	1.23
Menghini[29]	100	0.162	1.33
Saitara[43]	100	0.160	1.33
Flatschart[11]	100	0.162	1.39
Resultados experimentais	100	0.16 - 0.17	1.25
Roshko[39]	100		
Triton[58]	100		
Williamson[63]	100	0.164	
$Re = 100$			
Fonte	Re	St	C_D
Presente simulação	200	0.198	1.36
Outros resultados numéricos	200	0.196	1.30
Menghini <i>et al.</i> [30]	200	0.196	1.30
Brza <i>et al.</i> [8]	200	0.200	1.35
Sa e Chang[42]	200	0.186	1.13
Menghini[29]	200	0.196	1.25
Saitara[43]	200	0.190	1.25
Resultados experimentais	200	0.17 - 0.19	
Roshko[39]	200		
Williamson[63]	200	0.196	

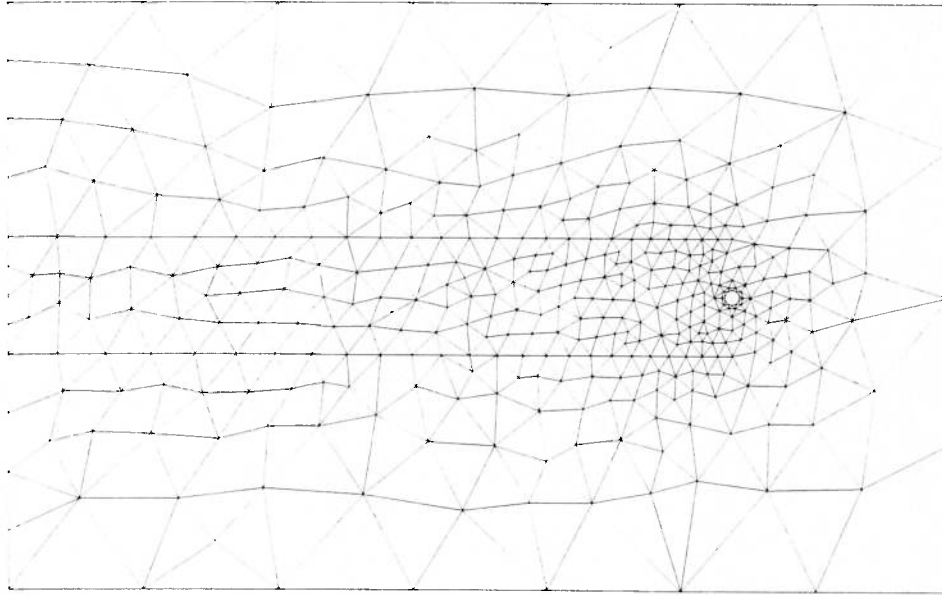


Figura 4.7: Malha utilizada na simulação do cilindro isolado

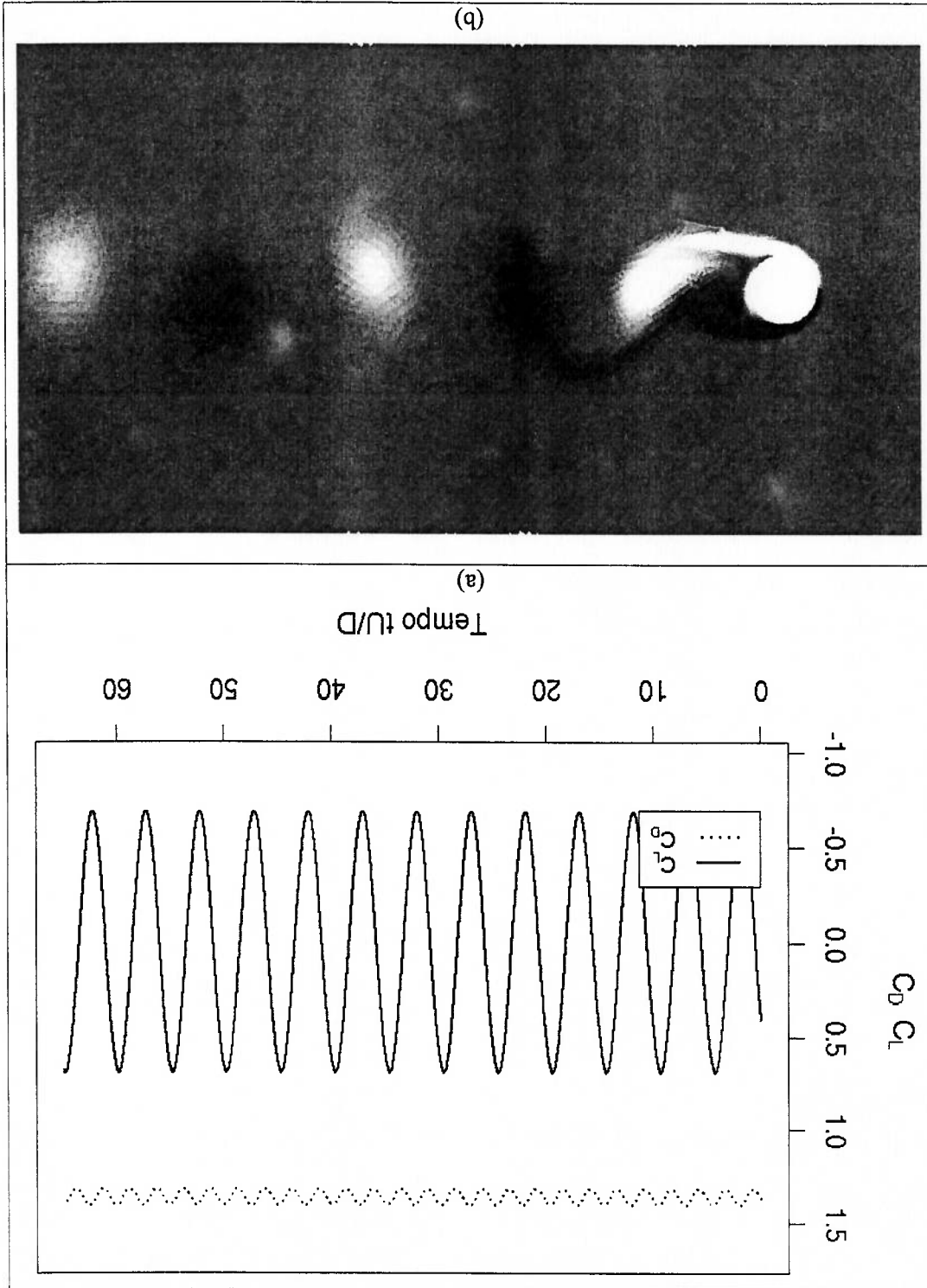


Figura 4.8: Simulação de cilindro isolado, $Re = 200$. (a) C_D e C_L em função de tU/D , (b) Campo de vorticidade

4.1.2 Resultados experimentais $1 \cdot 10^4 \leq Re \leq 4 \cdot 10^4$

O teste do cilindro isolado também serviu para melhorar e desenvolver a metodologia básica de ensaio e por isso, foi extremamente importante neste projeto, além de permitir a validação de algumas metodologias de ensaio.

Foi medido apenas o arrasto do cilindro isolado usando a célula de carga e o dispositivo integrador de pressões. Os resultados das medições usando a célula de carga e o dispositivo integrador apresentaram um desvio sistemático mas comportamentos semelhantes: para $Re < 20,000$ há um crescimento acentuado do C_D que em seguida estabiliza-se para o resto da faixa medida. Este comportamento também é observado em outros resultados obtidos na literatura (Anderson[2] ou Schlichting e Gersten[45] por exemplo). No entanto, os valores obtidos neste trabalho parecem baixos. Szepessy[54] apresenta $C_D = 1,33$ para $Re = 4,3 \cdot 10^4$ e Roshko[40] obteve $C_D = 1,2$ para $Re = 10,000$.

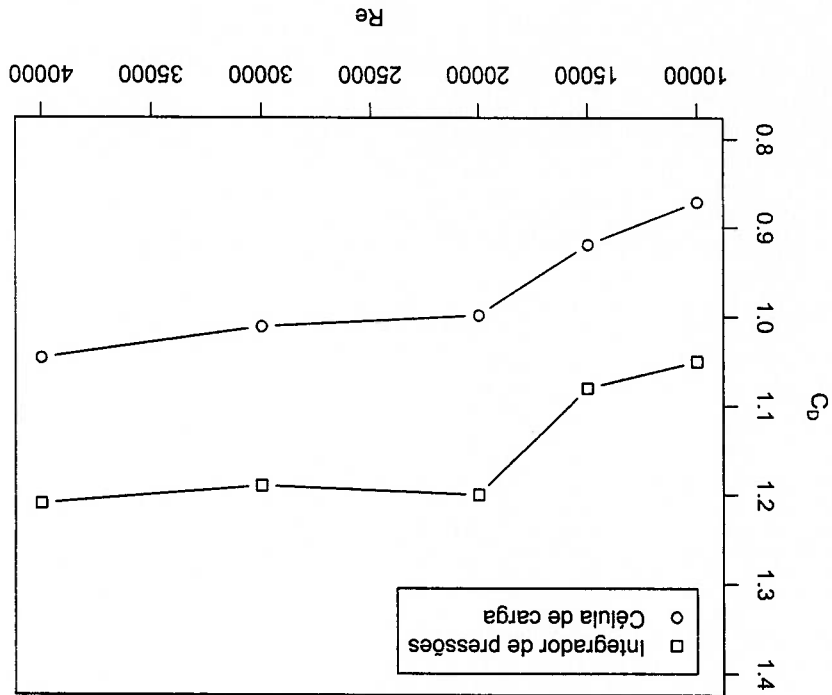


Figura 4.9: Coeficiente de arrasto de um cilindro para diferentes Re medido com célula de carga e dispositivo integrador de pressão

Os resultados obtidos experimentalmente estão apresentados na tabela 4.2 e podem ser visualizados na figura 4.9.

A força medida usando a célula de carga resultou menor que a medida usando o dispositivo integrador. Provavelmente esta diferença seja resultado do canal (pequena fresta) existente entre o chão do túnel e o cilindro (a célula de carga é montada fora do túnel).

Tabela 4.2: Valores do coeficiente de C_D para diferentes números de Reynolds obtidos com dispositivo integrador de pressões e célula de carga

Re	Int. Press.	Cel. carga
10.000	1,05	0,87
15.000	1,08	0,92
20.000	1,20	1,00
30.000	1,19	1,01
40.000	1,21	1,05

Este canal é necessário para permitir uma movimentação do cilindro e assim deformar os *strain gages*. Também pode ter ocorrido algum tipo de erro na calibração das células de carga.

O dispositivo integrador de pressões apresenta uma incerteza relativamente alta como constatado por Szepessy[54]. É interessante um estudo mais aprofundado do dispositivo com a finalidade de se determinar qual a influência da dinâmica do sinal de pressão na pressão média resultante. Szepessy[54] faz alguns comentários a este respeito mas vale lembrar que seu modelo tinha um diâmetro aproximadamente duas vezes maior que o modelo empregado neste projeto o que facilita consideravelmente as montagens pneumáticas.

Um estudo mais detalhado do desempenho da célula de carga também tem lugar: os altos ganhos utilizados podem comprometer a estabilidade do sistema de medição (*strain gage* e amplificador).

4.2 Dois cilindros lado a lado

O escoamento ao redor de dois cilindros posicionados lado a lado, perpendicularmente à direção do escoamento já foi bastante estudado experimentalmente (ver Bearman e Wadcock[4], Williamson[60] e revisito por Zdravkovich[65] por exemplo) e numericamente (Meneghini *et al.*[30] por exemplo). A importância deste tipo de escoamento é evidente visto a grande quantidade de publicações. E não é para menos: este problema aparece em muitos diferentes ramos da engenharia.

E de se imaginar que quando a distância entre os cilindros é grande, o problema tende a se aproximar ao caso do cilindro isolado. Inicialmente, é importante definir o que é a distância entre cilindros: distância entre as paredes dos cilindros, ou seja, dois cilindros colocados lado a lado em contato têm uma separação nula. É conveniente adimensionar esta separação em relação ao diâmetro dos cilindros e portanto de aqui em diante, todas as distâncias e separações serão referidas com relação ao diâmetro do cilindro. Estudando a estabilidade de duas carretas de vórtices mostram que duas possíveis configurações do escoamento são possíveis (ver Milne-Thomson[31] por exemplo):

1. Vórtices em fase

2. Vórtices em anti-fase

A figura 4.10 mostra qualitativamente como é a esteira de vórtices nas duas configurações. Estas configurações são resultado da análise de estabilidade de quatro carretas de vórtices.

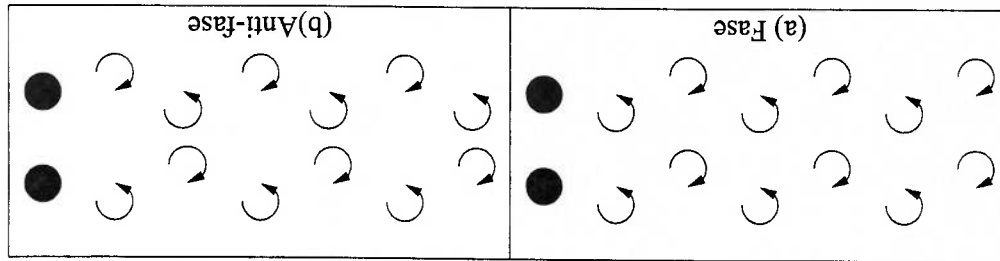


Figura 4.10: Configurações idealizadas para a esteira de dois cilindros

Apesar das configurações possíveis do escoamento, na prática, predomina o escoamento com esteira de vórtices em anti-fase (ver Bearman e Wadcock[4] e Williamson[60]). Neste trabalho, todas as simulações resultaram em um escoamento com os vórtices em anti-fase exceto um caso que será comentado mais adiante.

Quando os cilindros estão muito próximos um do outro (menos de $1D$ de separação), o escoamento é confuso e todos os resultados possuem grande oscilação (Bearman e Wadcock[4], Williamson[60]). O escoamento já não é mais simétrico, e tende a “colar” mais num dos cilindros sendo que esta situação pode inverter (o escoamento é bi-estável).

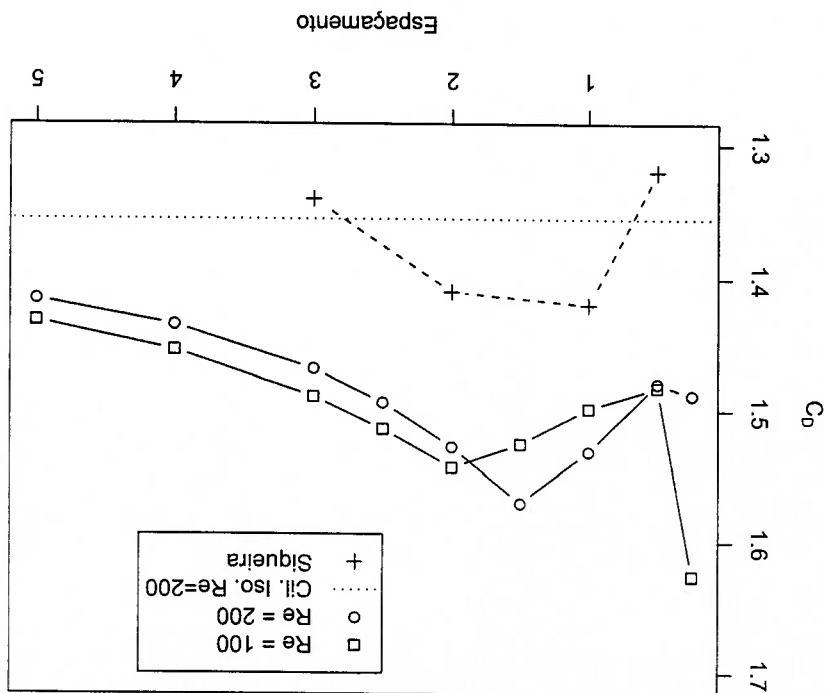
Resultados numéricos $Re = 100, 200$

O problema foi estudado, numericamente, para diferentes espaçamentos ($0.25D, 0.5D, 1D, 1.5D, 2D, 2.5D, 3D, 4D$ e $5D$). Os resultados das simulações numéricas para C_D podem ser vistas na figura 4.11, o coeficiente de sustentação pode ser visto na figura 4.12 e a média quadrática da sustentação na figura 4.13. É bom lembrar que a força de sustentação tem valores opostos para cada cilindro mas são, em ambos os casos, forças de repulsão. Esta repulsão ocorre por um deslocamento dos pontos de estagnação na parte frontal dos cilindros e também pela mudança na posição dos pontos de separação. Os pontos de separação na região intersticial (zona entre cilindros) movem-se para trás e os pontos de separação da região oposta à zona intersticial (voltado para o escoamento livre) movem-se para frente. Como a região na esteira é de baixa pressão, surge a força de repulsão. Naturalmente, esta força de repulsão tende a zero conforme pode ser observado na figura 4.12. A figura 4.14 mostra o número de Strouhal obtido.

Com o aumento do espaçamento entre cilindros, inicialmente existe um aumento do C_D que atinge o máximo para um espaçamento de aproximadamente $2D$. Para espaçamentos maiores, o C_D tende assintoticamente para o valor do cilindro isolado, conforme o esperado. O comportamento é o mesmo observado nos resultados obtidos por Siqueira[51] apesar dos valores obtidos no trabalho presente serem maiores. O valor do C_D é considerado mais alto que o valor do cilindro isolado, resultado da esteira de dois cilindros: quando os cilindros estão próximos, a esteira de vórtices de um cilindro influencia o outro com uma zona de baixa pressão. A figura 4.15 mostra o comportamento típico dos coeficientes de força obtidos para dois cilindros lado a lado. O campo de vorticidade deste mesmo caso pode ser visualizado na figura 4.16 onde é possível observar claramente a esteira de vórtices em anti-fase.

O coeficiente de sustentação, C_L , tem valores elevados em módulo para espaçamentos pequenos e cai rapidamente para valores próximos de 0 quando o espaçamento aumenta. Os valores obtidos neste trabalho estão muito próximos dos valores obtidos por

Figura 4.11: Coeficiente de arrasto de um cilindro em um arranjo de dois cilindros posicionados lado a lado. Também mostrado os resultados obtidos por Siqueira[51]



Siqueira[51], ao contrário dos resultados obtidos para C_D . Isto é natural se considerarmos que a força de sustentação depende principalmente do ponto de estagnação e dos pontos de separação. O ponto de estagnação não está na esteira e não apresenta dificuldades para a simulação computacional e os pontos de separação, em última análise, dependem da posição do ponto de estagnação já que a camada limite se desenvolve a partir deste ponto.

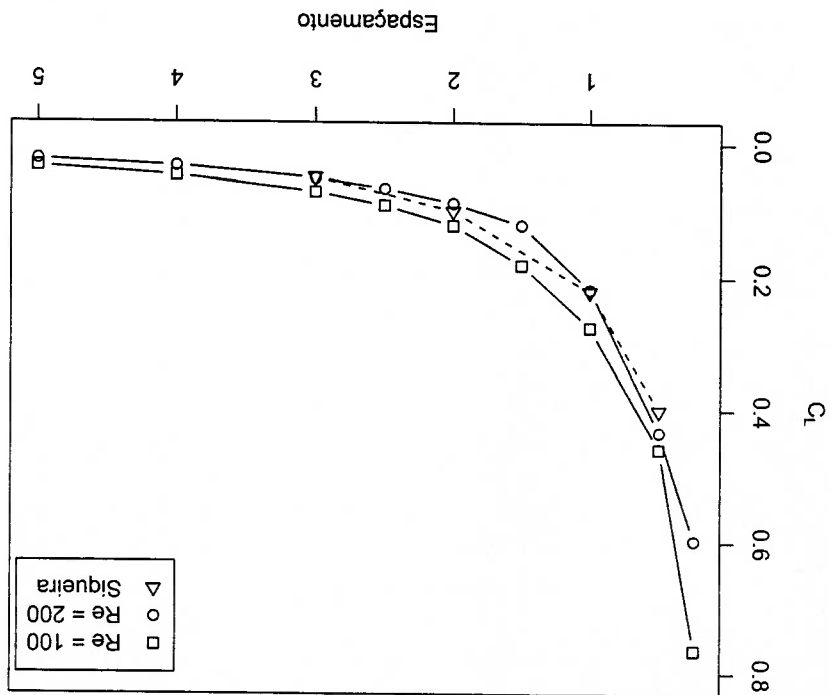
Tabela 4.3: Valores de coeficientes de força para diferentes espaçamentos e $Re = 200$. (1) presente simulações e (2) resultados apresentados por Meneghini *et al.* [30]

Espaçamento	C_D (1)	C_D (2)	C_L (1)	C_L (2)
0,5D	1,45	1,32	0,41	0,40
1D	1,50	1,42	0,21	0,22
2D	1,53	1,41	0,09	0,10
3D	1,47	1,34	0,05	0,05

A tabela 4.3 mostra que os resultados obtidos estão muito próximos aos resultados obtidos por Meneghini *et al.* [30] mas vale lembrar que a precisão utilizada nestas simulações é muito maior que a precisão utilizada nas simulações de Meneghini *et al.*.

Quando os cilindros estão próximos (menos que 1,5D), o quadro se complica. Os espectros de frequência dos coeficientes de força já não são tão simples, conforme cons-

Figura 4.12: Coeficiente de sustentação de um cilindro em um arranjo de dois cilindros posicionados lado a lado. Também mostrados os resultados obtidos por Siqueira[51]



tatado por Menghini *et al.*[30]. Um exemplo pode ser visto figura 4.17(a), que mostra o C_D , comportamento muito mais complexo que o observado na figura 4.15(b). A figura 4.17(b) mostra o campo de vorticidade correspondente. E neste caso fica difícil definir o número de Strouhal (figura 4.14).

O caso com espaçamento 0,25 D e $Re = 100$ apresentou um resultado muito interessante: os dois cilindros comportam-se como um único corpo e o escoamento, aparentemente, é estável sem que a esteira cole em nenhum dos cilindros (figura 4.18). Neste caso, os cilindros estão bastante próximos e Re é baixo, o que pode ter causado um estabilização dos escoamento. Observe na figura 4.18(a) que o coeficiente de sustentação não é uma senoide como no caso do cilindro isolado. Este comportamento ocorre pois o cilindro só está sob ação de um lado da esteira de vórtices e por isso o patamar entre os picos.

Um outro caso teve apresentado resultados surpreendentes: espaçamento 1,5 D e $Re = 100$. Neste caso, houve uma mudança no no escoamento: inicialmente os vórtices da esteira estavam em anti-fase e depois ficaram em fase. As figuras 4.19(a) e (b) mostram os coeficientes de força obtidos. A figura 4.20 mostra os campos de vorticidade em fase

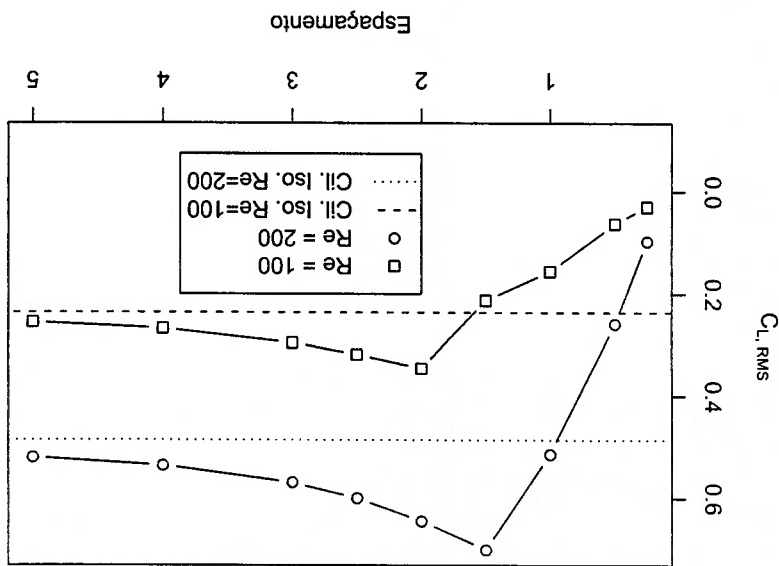


Figura 4.13: Média quadrática do coeficiente de sustentação de um cilindro em um arranjo de dois cilindros posicionados lado a lado

e anti-fase. É interessante notar que não é muito evidente que os campo de velocidade des estejam em fase, pelo menos quando comparado com o campo em anti-fase mas os coeficientes de força não deixam dúvida. Seria interessante deixar que a simulação transcorresse por um tempo muito maior para observar o que ocorre. Esta simulação foi feita com outras resoluções de malha mas o resultado foi o mesmo.

As flutuações de C_L (figura 4.13) aumentam consideravelmente com o espaçamento dos cilindros e atingem o máximo aproximadamente quando o escoamento volta a ser “regular”. O mesmo efeito pode ser observado na curva do C_D . Conforme observado nos parágrafos anteriores, para espaçamentos pequenos entre cilindros, o escoamento é bastante irregular e os mecanismos de formação da esteira não são tão claros. A figura 4.17(b) mostra isso claramente. Esta distribuição irregular de vorticidade não permite formação de regiões de alta vorticidade e baixa pressão nas imediações do cilindro e portanto reduzindo os extremos de pressão, justificando talvez, o comportamento observado nas curvas de C_D e $C_{L,RMS}$.

No anexo II estão todos os resultados obtidos numericamente.

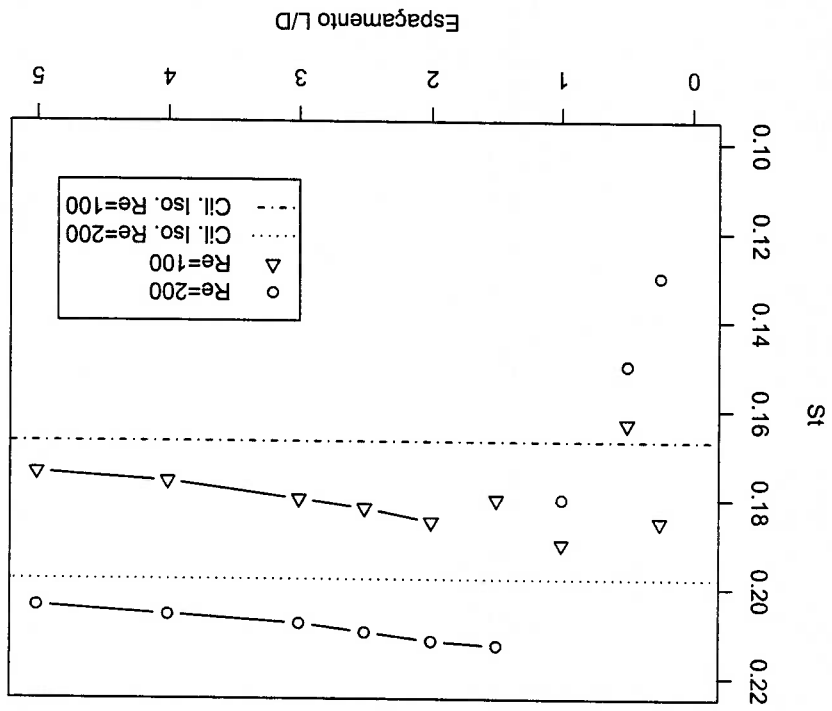


Figura 4.14: Número de Strouhal dos cilindros

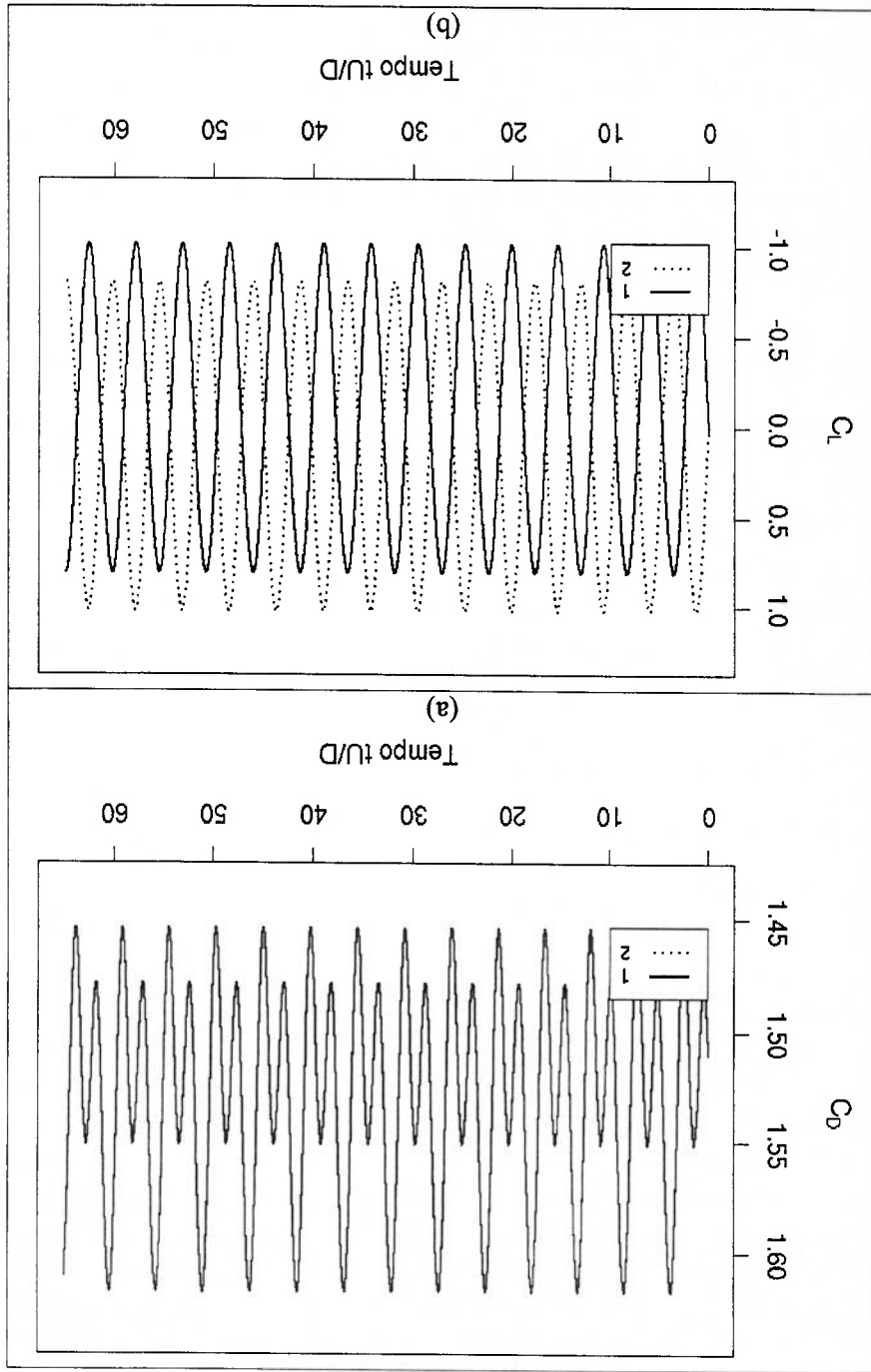


Figura 4.15: Simulação de dois cilindros posicionados lado a lado separados por 2D, $Re = 200$. (a) C_D em função de t/U , (b) C_L .

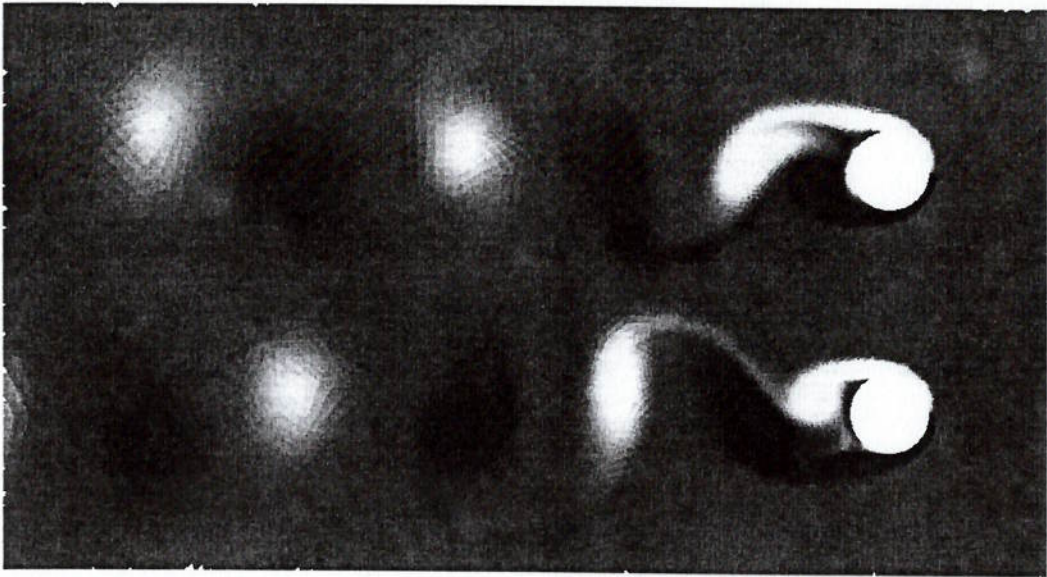


Figura 4.16: Campo de vorticidade do escoamento ao redor de dois cilindros posicionados lado a lado separados por 2D, $Re = 200$

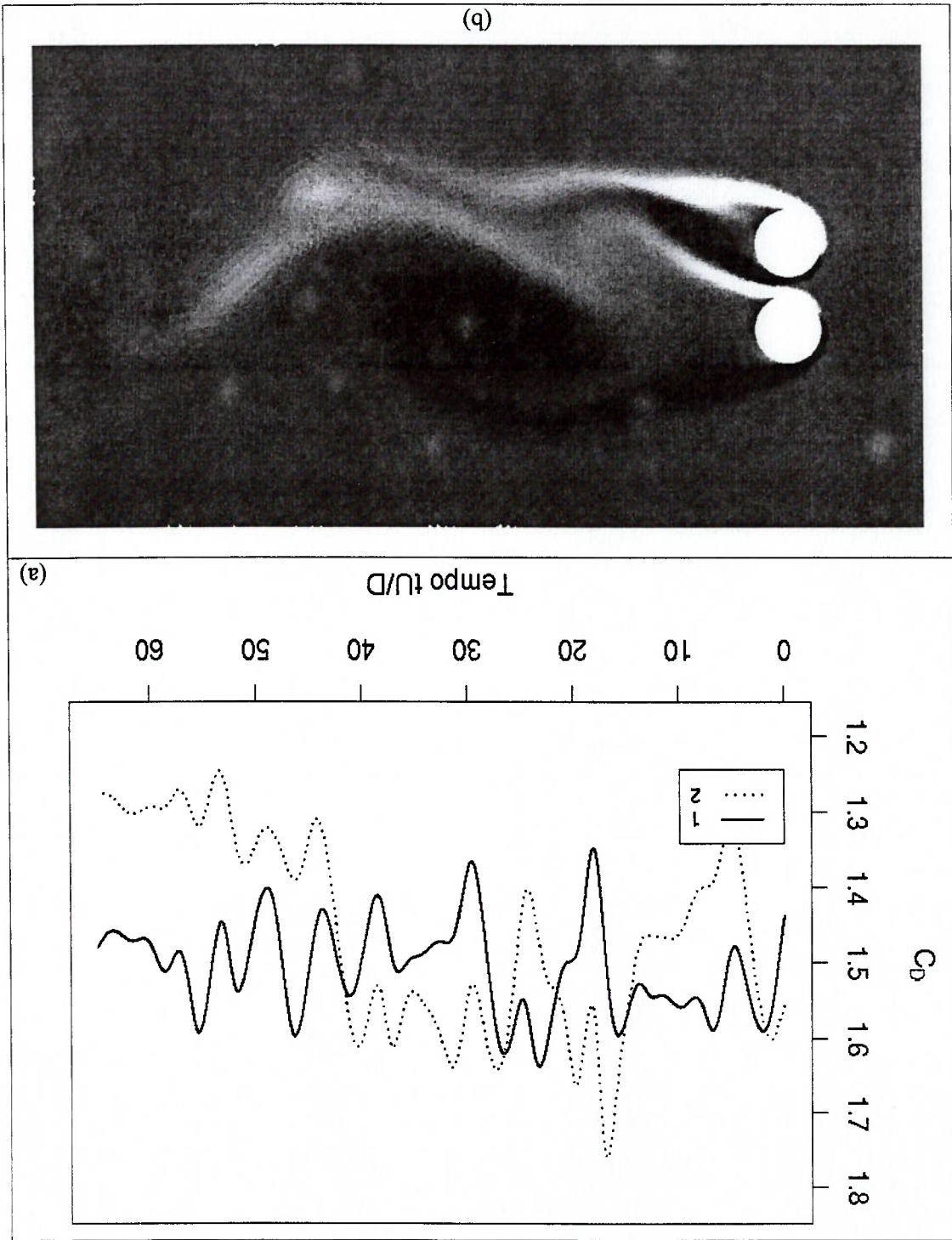


Figura 4.17: Dois cilindros lado a lado, espaçamento $0,25D$ e $Re = 200$. (a) C_D em função do tempo adimensional tU/D , (b) Campo de vorticidade

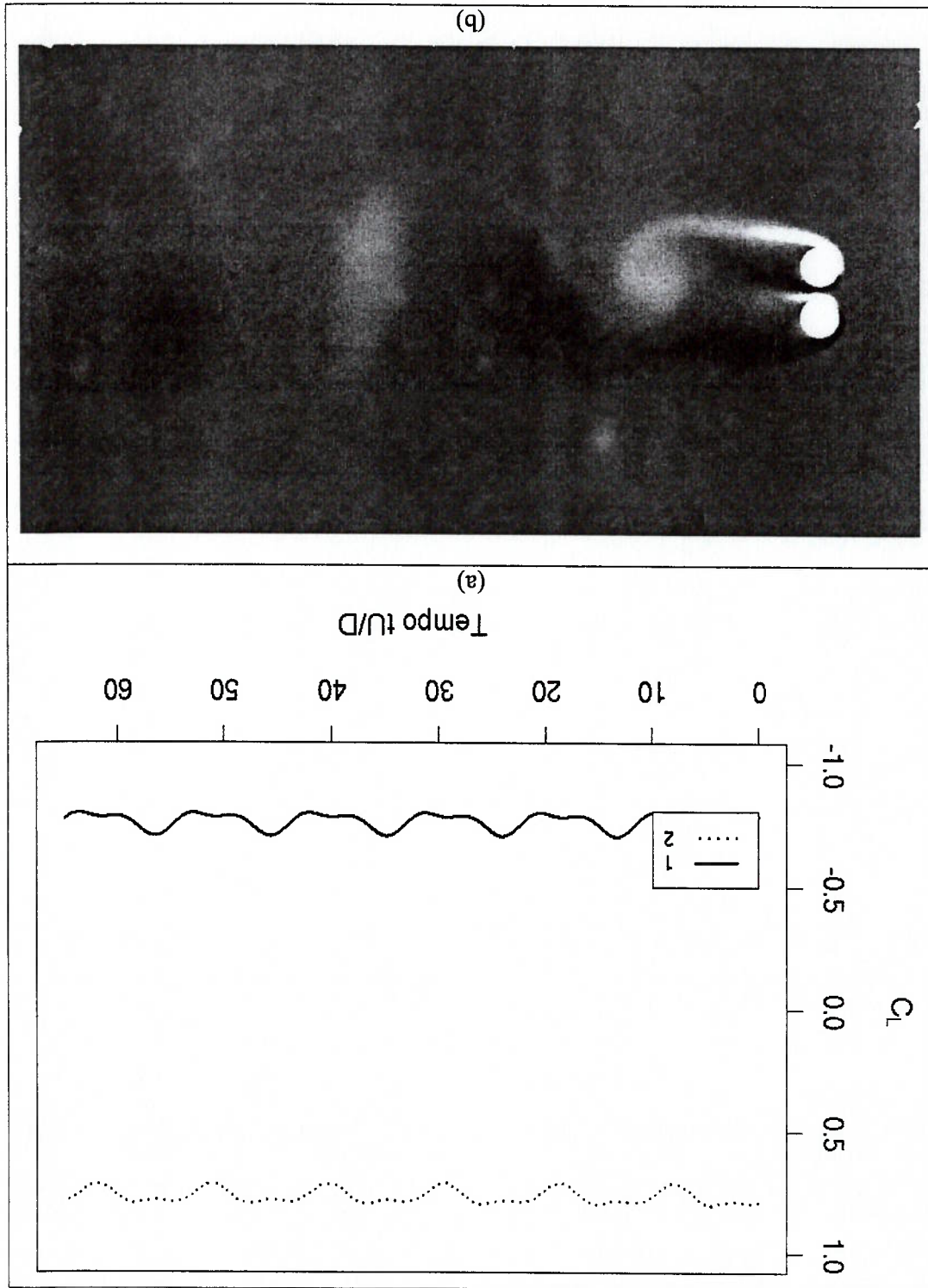


Figura 4.18: Dois cilindros lado a lado, espaçamento $0,25D$ e $Re = 100$. (a) C_L em função do tempo adimensional tU/D , (b) Campo de vorticidade

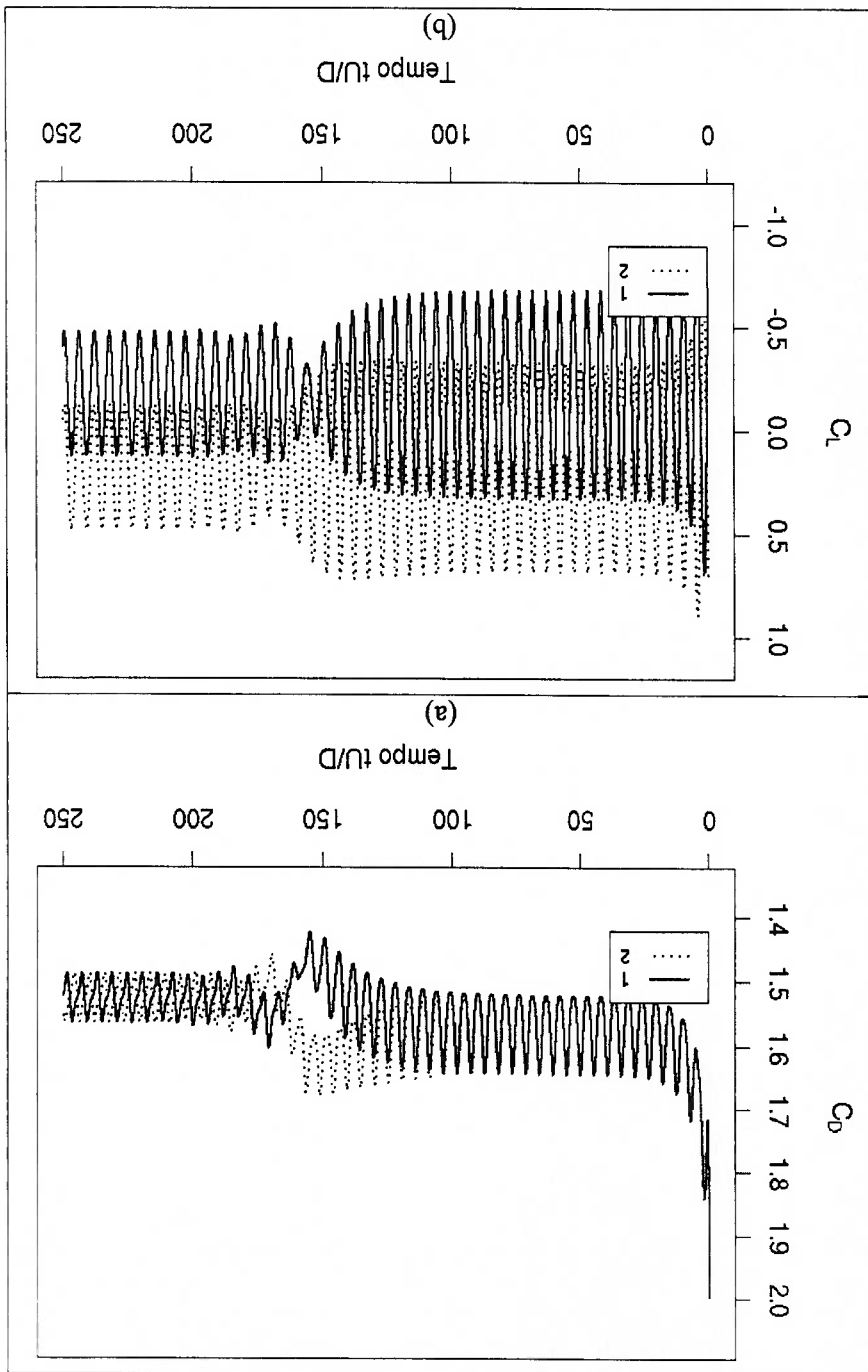


Figura 4.19: Simulação de dois cilindros posicionados lado a lado separados por $1,5D$, $Re = 100$. (a) C_p em função de t/D , (b) C_l .

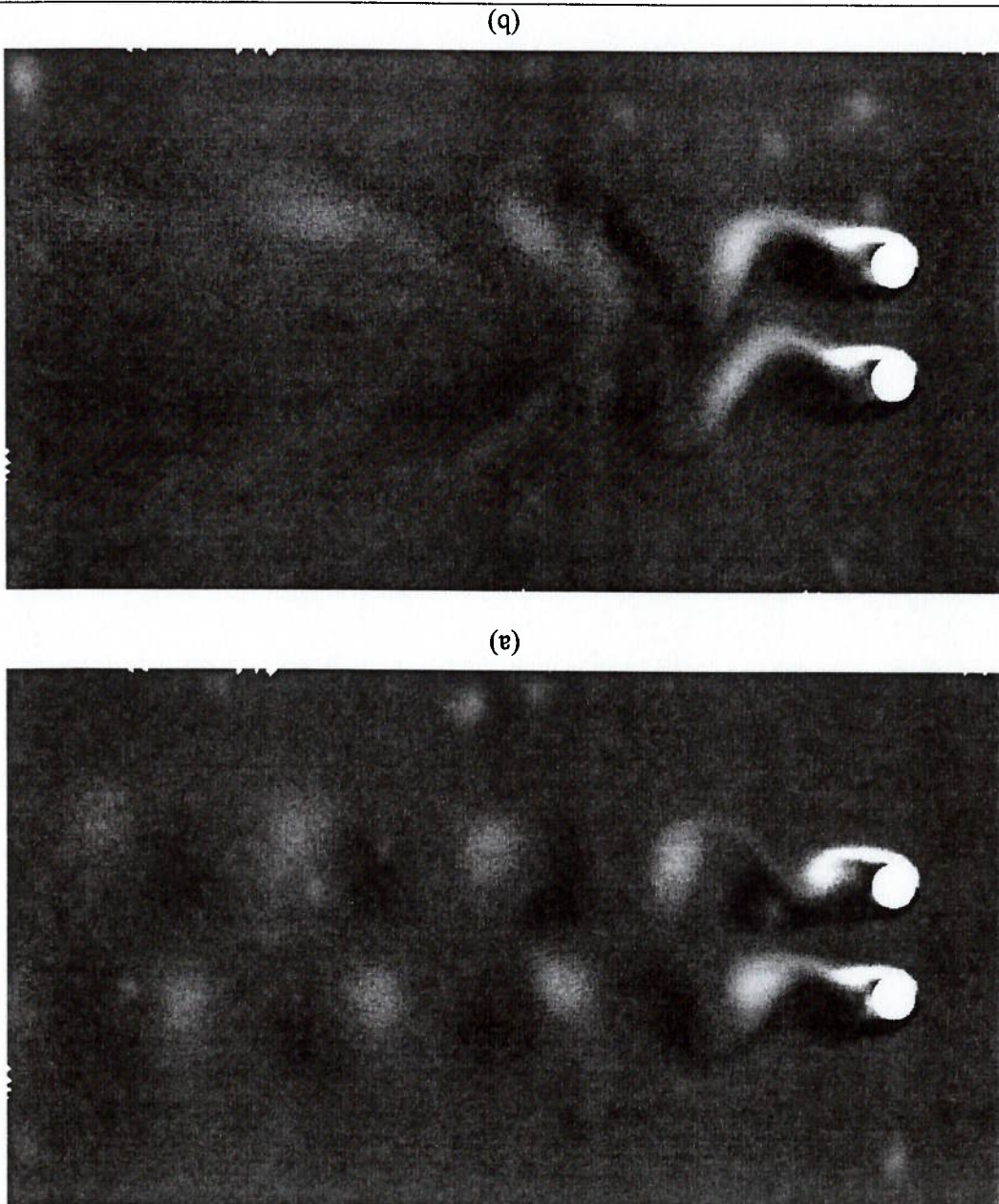
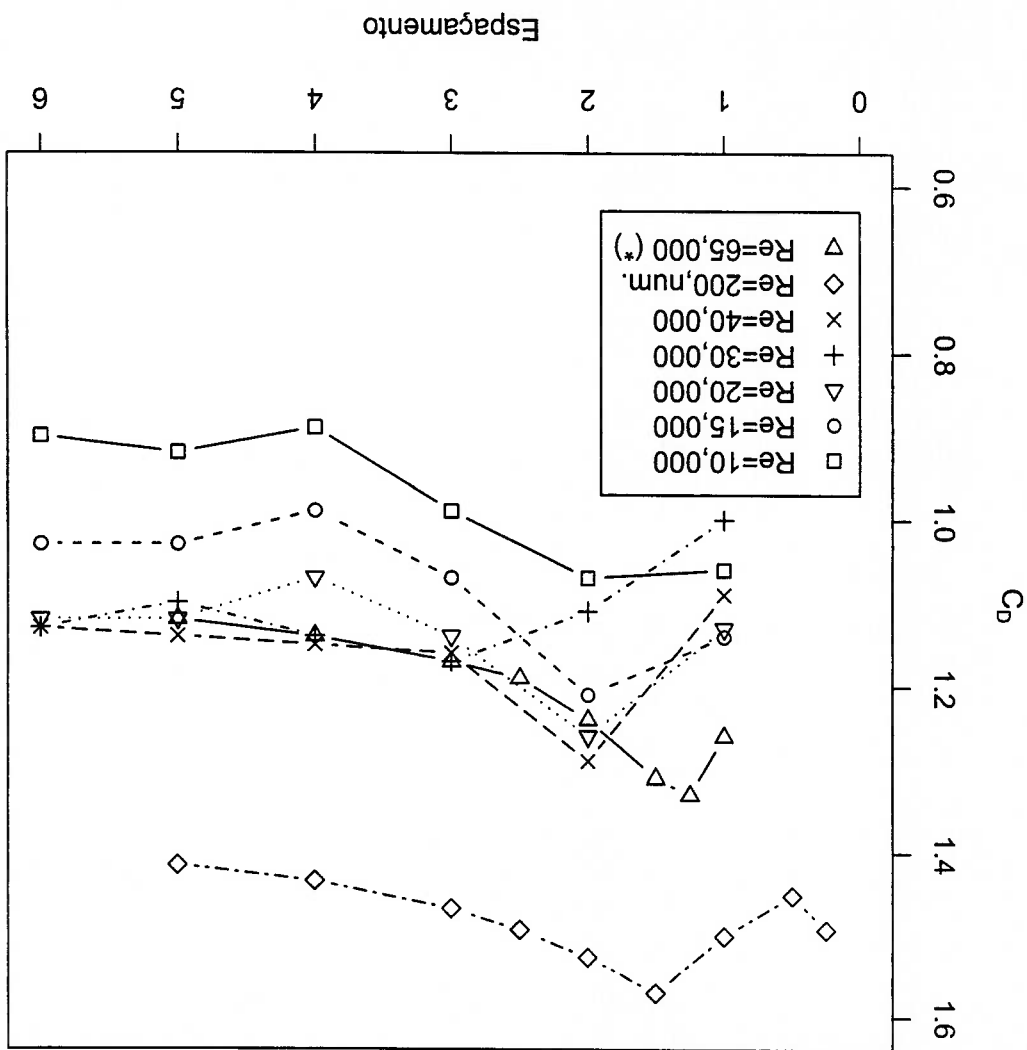


Figura 4.20: Simulação de dois cilindros posicionados lado a lado separados por $1,5D$, $Re = 100$. (a) Estreia de vórtices em anti-fase (b) estreia de vórtices em fase

4.2.1 Resultados experimentais $1 \cdot 10^4 \leq Re \leq 4 \cdot 10^4$

A figura 4.21 mostra o coeficiente de arrasto obtido utilizando o dispositivo integrador de pressões para diferentes números de Reynolds. Esta figura também compara os resultados obtidos neste trabalho com outros obtidos na literatura.



Fica evidente uma coisa: para espaçamentos maiores, o resultado tende a um patamar, patamar um pouco abaixo do C_D obtido para um cilindro isolado, diferentemente do comportamento observado nas simulações em Re baixos. Esta diferença não é de se surpreender se for lembrado que o dispositivo integrador de pressões deve possuir uma incerteza alta (da ordem de 5%) e esta incerteza pode aumentar se existirem gradientes

altos de velocidade ao longo da superfície do cilindro (Szepessy[54]). Mas o C_D tem o mesmo tipo de comportamento para diferentes distâncias entre cilindros: inicialmente, há um aumento do coeficiente de arrasto e depois este valor cai até atingir um valor próximo ao de um cilindro isolado, comportamento que coincide com o observado nas simulações numéricas com Re mais baixos. Os resultados estão próximos de resultados experimentais apresentados por Zdravkovich[65].

4.3 Dois cilindros posicionados em linha

O escoamento passando por dois cilindros posicionados com o plano formado por seus eixos longitudinais paralelos ao escoamento (cilindros em linha) são muito comuns. Diversos estudos referentes a estes casos já foram feitos (Zdravkovich[65], Meneghini *et al.*[30]) e Flatschart[1]. Agora, espera-se que o comportamento dos dois cilindros sejam bem diferentes pois o cilindro de trás estará na esteira do cilindro frontal.

A força que age nos cilindros depende de como é formada a esteira de vórtices. Quando os cilindros estão muito próximos, o cilindro de trás está totalmente dentro da esteira do cilindro frontal. Com isso o arrasto do cilindro a jusante chega a ser negativo, sendo atraído pelo cilindro frontal. Quando a distância entre cilindros é maior, existe a formação de uma esteira de vórtices no cilindro frontal e com isto, o coeficiente de arrasto do cilindro da frente tem um valor da ordem do valor obtido para um cilindro isolado. A transição entre estes dois regimes de escoamento ocorre para espaçamentos da ordem de $2,4D \sim 2,7D$ (Zdravkovich[65]). O valor exato deste espaçamento deve depender de uma série de parâmetros como por exemplo perturbações no escoamento ao longe e acabamento superficial dos cilindros.

De uma maneira geral, o escoamento em torno de dois cilindros em linha pode ser dividido em três configurações básicas [65]. (a) Quando os cilindros estão muito próximos (menos de $0,8D$) as duas camadas cisalhantes do cilindro da frente passam por fora do cilindro de trás. (b) Para espaçamentos entre $0,8D$ e $2,5D$ a camada cisalhante do cilindro frontal se choca com o cilindro de trás. (c) Com espaçamentos maiores, formam-se duas esteiras de vórtices, uma para cada cilindro. A figura 4.22 mostra os três comportamentos.

4.3.1 Resultados numéricos $Re = 100, 200$

Tabela 4.4: Valores de coeficiente de arrasto para diferentes espaçamentos e $Re = 200$. (1) presente simulações e (2) resultados apresentados por Meneghini *et al.*[30]

	Espaçamento	Frontal (1)	Frontal (2)	Traseiro (1)	Traseiro (2)
$0,5D$	1.08	1.06	1.03	-0.20	-0.18
$1D$	1.05	1.03	1.03	-0.20	-0.17
$2D$	1.01	1.01	1.0	-0.12	-0.08
$3D$	1.28	1.18	1.18	0.51	0.38

O coeficiente de arrasto do cilindro frontal obtido numericamente para baixos números de Reynolds pode ser visto na figura 4.23 que também mostra os resultados obtidos por

[51, 11]. Os resultados obtidos para C_D estão muito próximos aos obtidos por Flatschart e Siquera e apresentados a mesma descontinuidade para espaçamentos em torno de $2,5D$, quando começa a formação da esteira no cilindro da frente como ser visto na figura 4.22.

A figura 4.25 mostra o C_D para diferentes espaçamentos obtidos para o cilindro de trás. A tabela 4.4 compara os coeficientes de força obtidos neste trabalho com os resultados apresentados por Meneghini *et al.*[30]. As figuras 4.24 e 4.26 mostram o $C_{L,RMS}$ obtidos para o cilindro de trás e o cilindro da frente para diferentes espaçamentos. Para espaçamentos pequenos, o C_D do cilindro frontal cai com o aumento do espaçamento, resultado da difusão de quantidade de movimento através das camadas cisalhantes aumentando a pressão na região intersticial (região entre os dois cilindros). Observe que esta queda é um pouco maior para $Re = 200$:

$$[C_D(Re = 100) - C_D(Re = 200)]_{L/D=0,25} > [C_D(Re = 100) - C_D(Re = 200)]_{L/D=2,5}$$

diferença causada pela maior "viscosidade" do escoamento com Re baixo o que dificulta a transferência de quantidade de movimento entre o escoamento ao longe e a região intersticial.

Para espaçamentos maiores que $2,5D$, o C_D do cilindro frontal aproxima-se rapidamente do caso de um cilindro isolado, indicando claramente a importância da dinâmica de formação da esteira de vórtices nos coeficientes de força.

A média quadrática da força de sustentação pode ser vista na figura 4.24. Como é de se esperar, o $C_{L,RMS}$ é bem baixo para o cilindro frontal, muito próximo de zero. O que é surpreendente é que o valor também é bem pequeno para o cilindro de trás (figura 4.26. Analisando melhor os campos de vorticidade percebe-se que a esteira de vórtices do cilindro de trás é formada muito mais longe que no caso do cilindro isolado, algo em torno de 1,5 a 2 vezes mais longe (compare as figuras 4.22(a) e 4.8). De certa maneira, o cilindro de trás age como o "splitter-plate" do trabalho de Roshko[39] (ver figura 1.4, página 6).

Quando há a formação da esteira no primeiro cilindro (espaçamentos superiores a $2,5D$), o $C_{L,RMS}$ do cilindro frontal aproxima-se rapidamente dos valores obtidos para o cilindro isolado (em ambos os Re testados).

Outro ponto a se notar é que o C_D do cilindro frontal (antes de formar a esteira no cilindro frontal) é mais baixo que o observado no caso do cilindro isolado mas ainda é

alto. Isto significa que a pressão a montante do cilindro de trás é baixa mas, como a esteira do cilindro de trás é formada muito longe, a pressão não é muito baixa, resultando no C_D negativo para o cilindro de trás observado na figura 4.25 e no C_D mais baixo que no caso do cilindro isolado para o cilindro da frente. Quando inicia-se a formação da esteira de vórtices no cilindro frontal, existe um aumento considerável do C_D do cilindro de trás que continua baixo em relação ao cilindro isolado: pode-se observar a esteira de vórtices em regiões bem afastadas dos cilindros.

A figura 4.27 mostra o número de Strouhal dos cilindros. Observe que St é idêntico nos dois cilindros exceto para espaçamentos muito grandes (acima de $7D$) e mesmo assim, a diferença é tão pequena que decidiu-se apresentar uma curva apenas. Esta figura também apresenta os resultados obtidos por [51, 11]. Os resultados estão bastante próximos e apresentam o mesmo tipo de comportamento: queda inicial de St , um aumento brusco quando forma a esteira no cilindro da frente e um aumento gradual de St até chegar a um valor muito próximo do obtido no caso do cilindro isolado.

É natural que St de ambos os cilindros sejam os mesmos. Para espaçamentos inferiores a $2,5D$, a oscilação de C_L de ambos os cilindros é resultado de uma mesma esteira. Para valores superiores, a esteira do cilindro frontal induz a formação da esteira do cilindro de trás (observe os valores extremamente altos obtidos para $C_{L,RMS}$ para espaçamentos em torno de $3D$, quase 3 vezes superior ao caso do cilindro isolado. Quando os espaçamentos são muito grandes, alguma coisa começa a mudar para o cilindro de trás. O cilindro da frente já se comporta como um cilindro isolado mas o de trás ainda sofre influência considerável do cilindro da frente (basta lembrar que o valor de C_D e ainda bastante baixo). As figuras 4.28 e 4.29 mostram curvas de C_D , $C_L \times t$ para espaçamentos de $1D$, $3D$ e $10D$.

No anexo III estão todos os resultados obtidos numericamente.

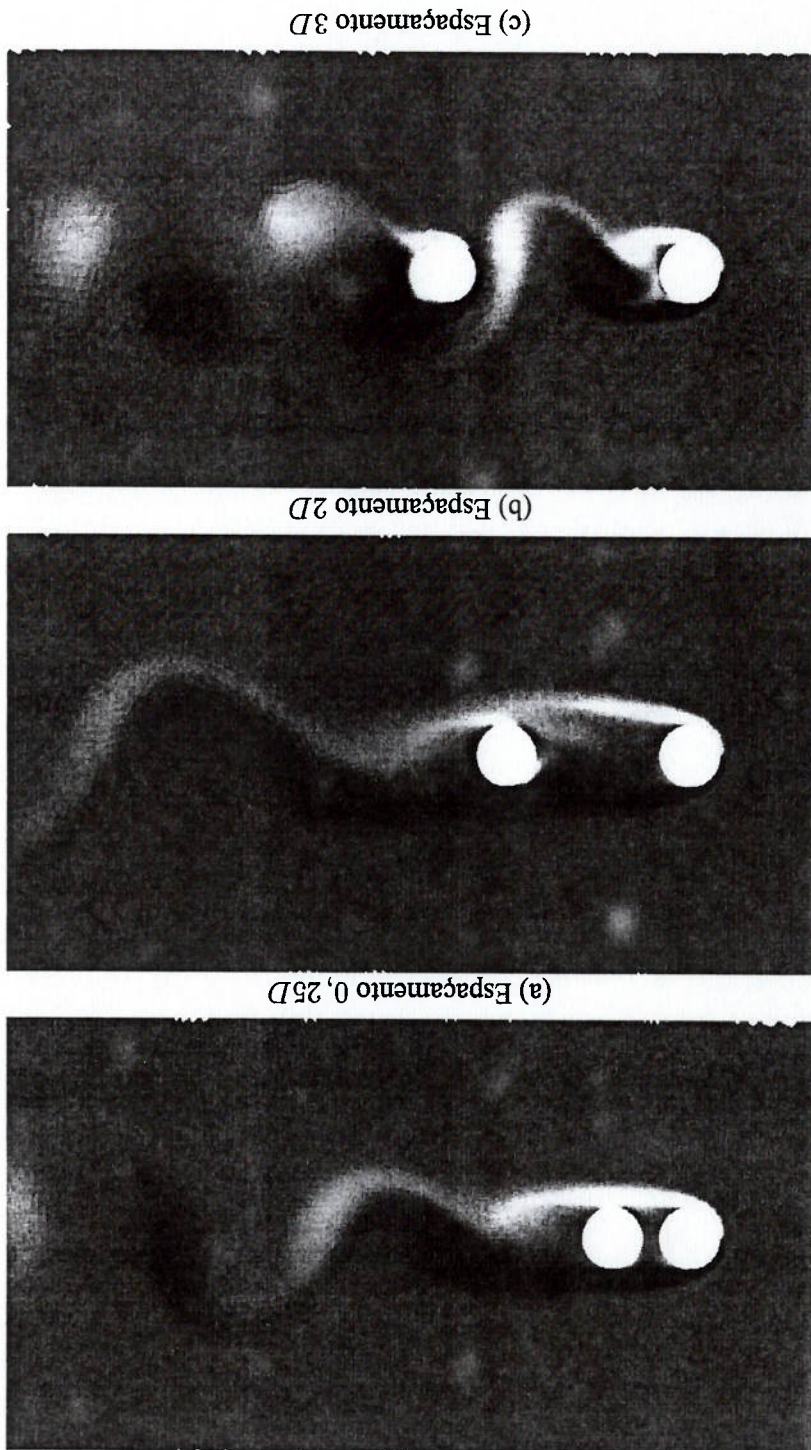


Figura 4.22: Três configurações básicas do escoamento ao redor de dois cilindros em linha (campos de vorticidade)

Figura 4.23: Coeficiente de arrasto do cilindro frontal de dois cilindros em linha. Também são apresentados os resultados de Siqueira[51] e Flatschart[11].

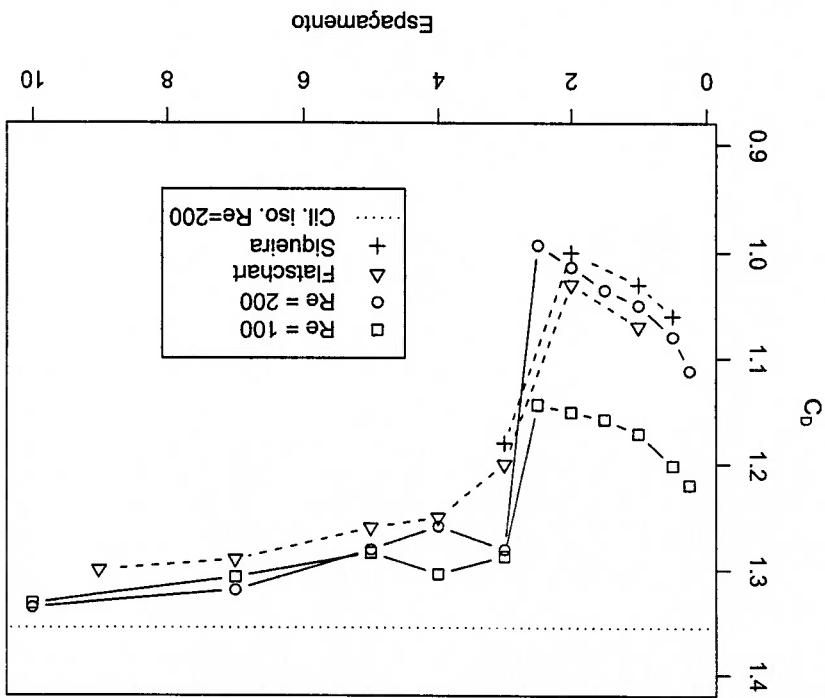


Figura 4.24: Média quadrática do coeficiente de sustentação do cilindro frontal de dois cilindros em linha

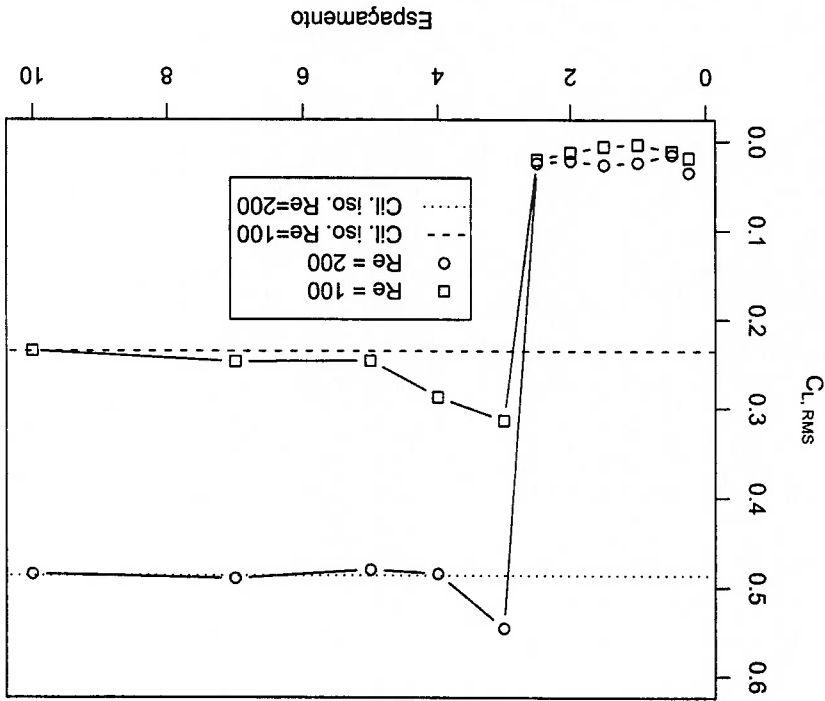


Figura 4.26: Média quadrática do coeficiente de sustentação do cilindro de trás de dois cilindros em linha

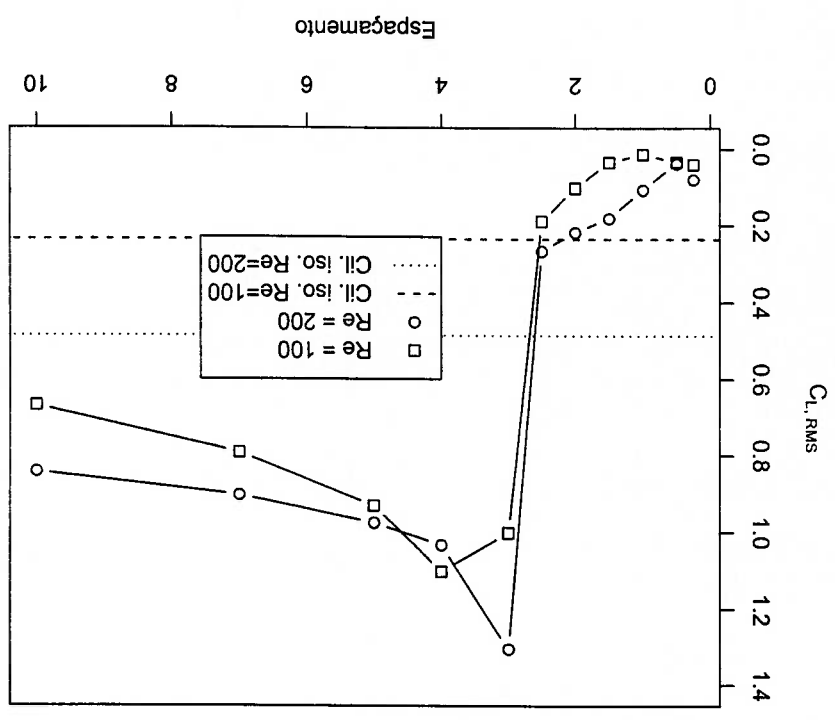
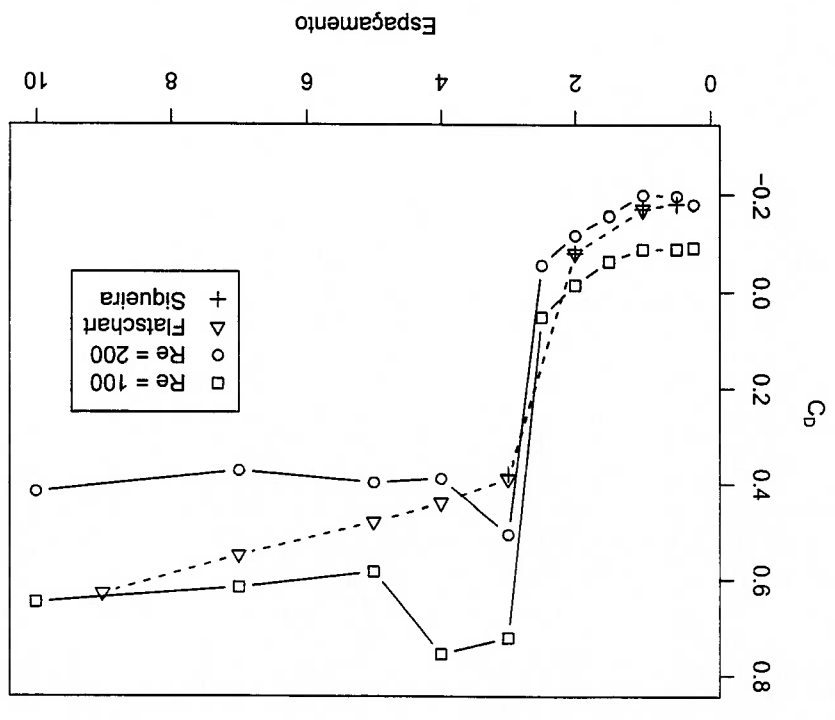


Figura 4.25: Coeficiente de arrasto do cilindro de trás de dois cilindros em linha



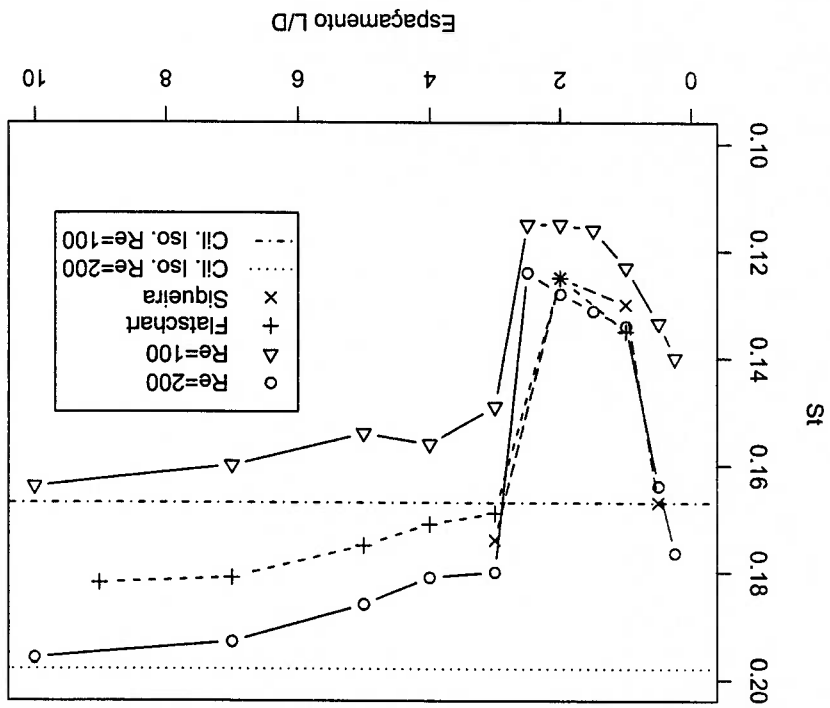


Figura 4.27: Número de Strouhal dos cilindros posicionados em linha

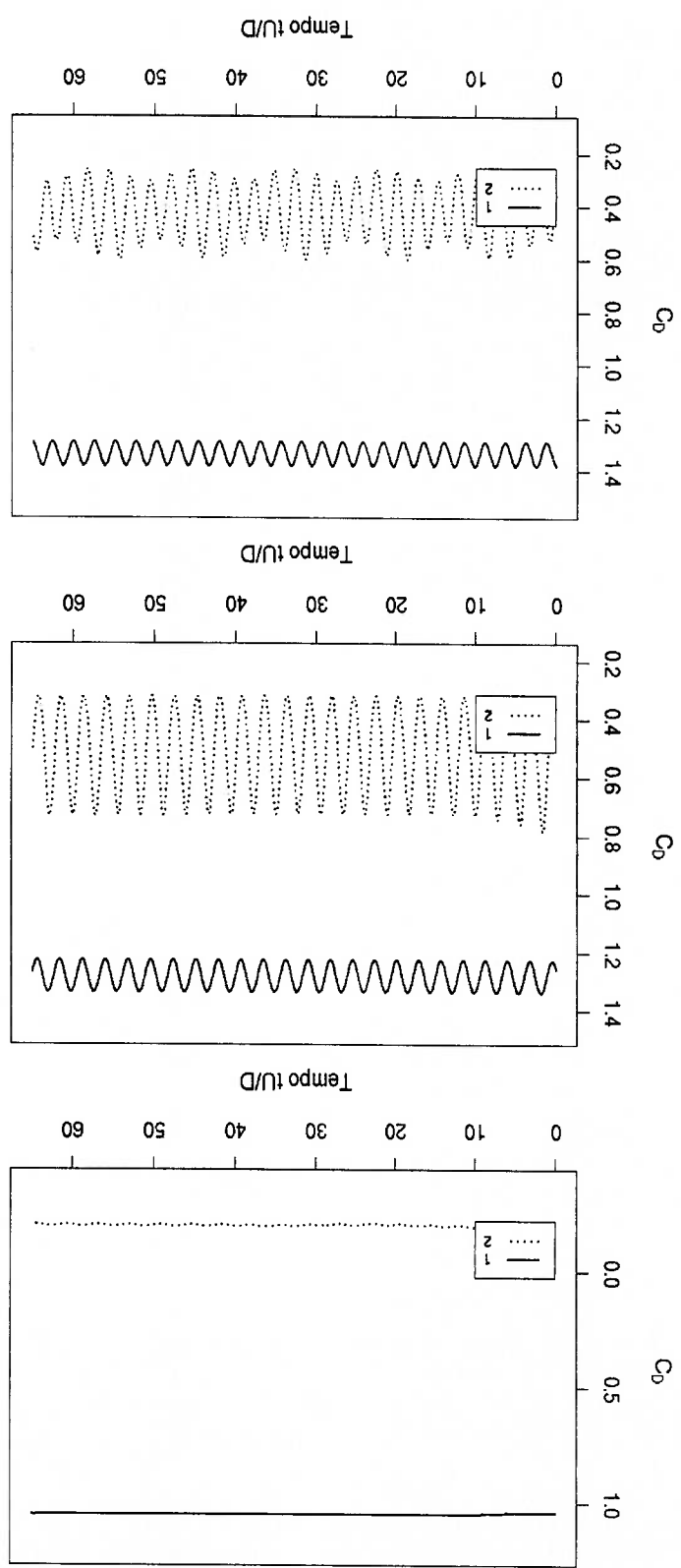


Figura 4.28: C_D de dois cilindros posicionados em linha, separados por $1D$, $3D$ e $10D$ com $Re = 200$.

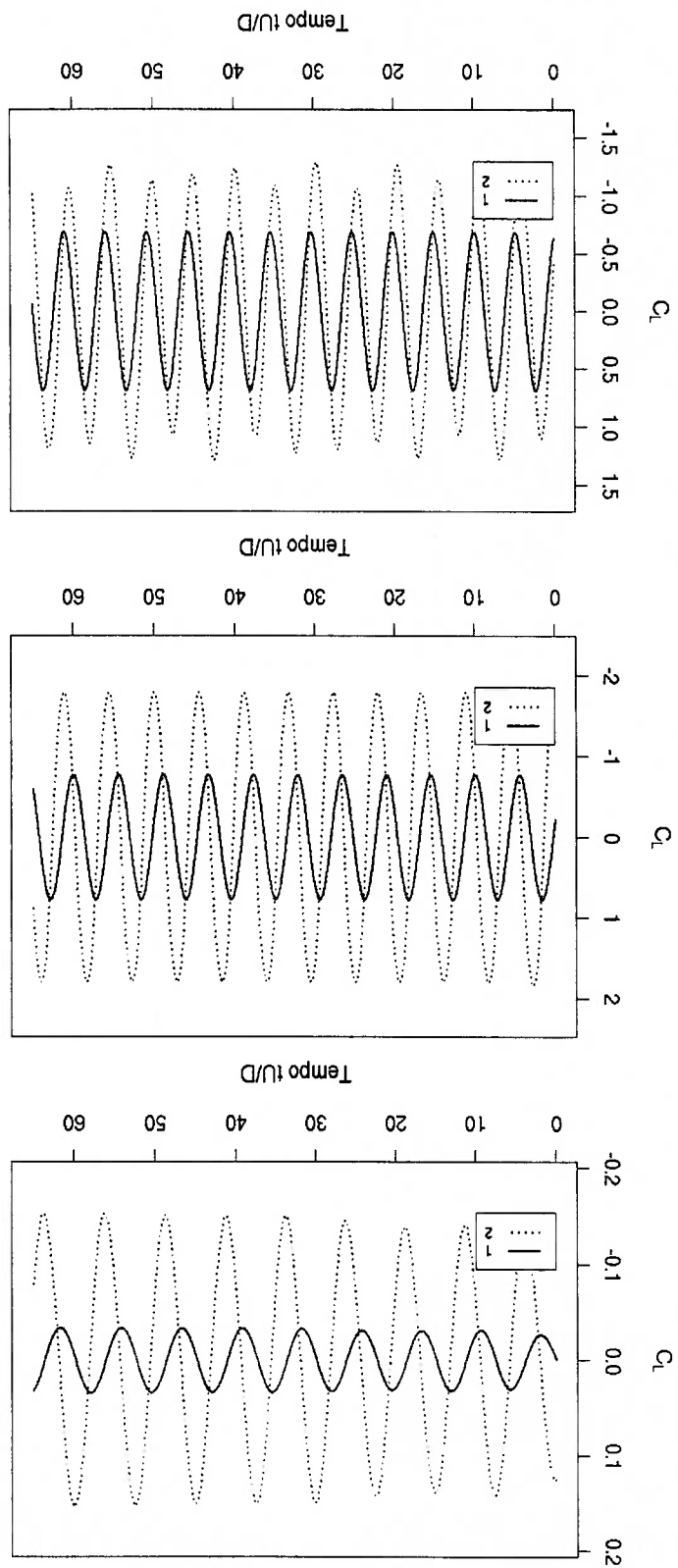


Figura 4.29: C_L de dois cilindros posicionados em linha, separados por $1D$, $3D$ e $10D$ com $Re = 200$.

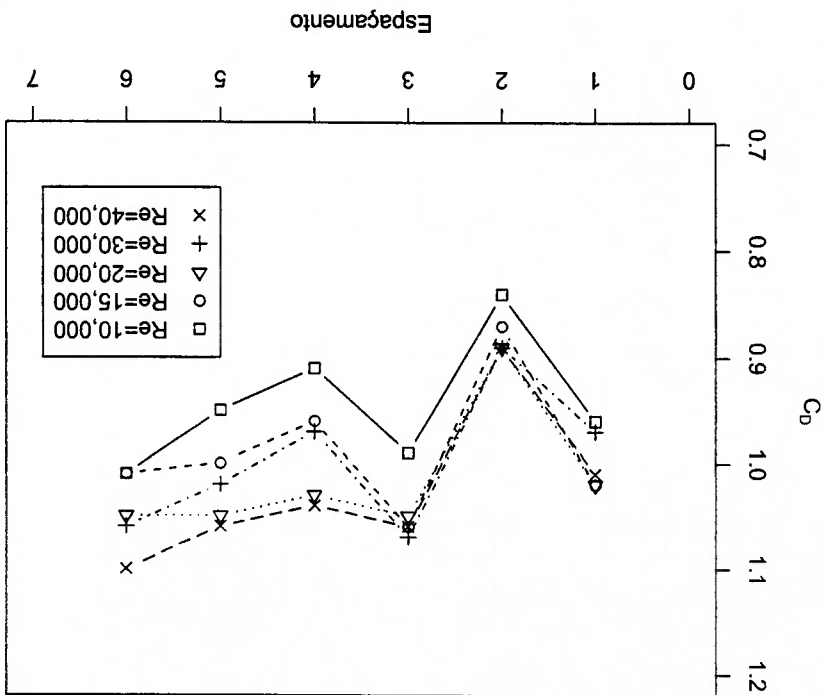
4.3.2 Resultados experimentais $1 \cdot 10^4 \leq Re \leq 4 \cdot 10^4$ 

Figura 4.30: Coeficiente de arrasto do cilindro frontal de dois cilindros em linha.

Na figura 4.30, novamente, C_p do cilindro frontal aumenta com *Reynolds*, podendo-se reparar que os valores obtidos estão muito próximos aos resultados experimentais apresentados por Zdravkovich[65] (figura 4.31). Observa-se também que ao aumentar a distância entre cilindros (quando estes estão próximos), o C_p do cilindro frontal cai, o que é de se esperar já que a esteira do cilindro frontal (sem vórtices) cresce permitindo infiltração de fluido ao longe a uma pressão alta. Entre $2D$ e $3D$, observa-se um aumento significativo de C_p que tende a se estabilizar num patamar próximo ao valor para um cilindro isolado. Isto representa uma descontinuidade nos valores de C_p resultado da formação da esteira no cilindro frontal (o que coincide com a literatura).

Na figura 4.32 observa-se claramente uma descontinuidade do C_p do cilindro de trás para espaçamentos próximos de $2,5D$. Novamente o aumento de C_p com *Reynolds* é observado e o valor de C_p é muito próximo dos valores descritos por Zdravkovich[65] (figura 4.33).

Um ponto a ser destacado é que o dispositivo integrador de pressões tem diversas limitações. Uma técnica mais precisa, porém mais trabalhosa para se determinar a força de arrasto e a força de sustentação *média* é medir o coeficiente de pressão ao redor do

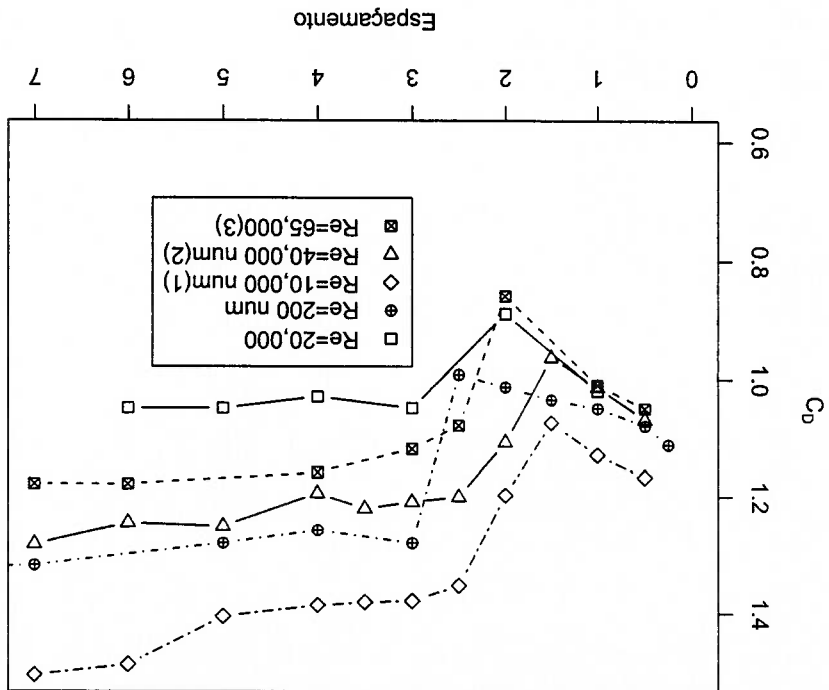


Figura 4.31: Coeficiente de arrasto do cilindro frontal de dois cilindros em linha, comparação entre resultados obtidos para $Re = 20,000$ e outros resultados encontrados na literatura. (1) e (2) Fregonesi e Meneghini[12], (3) Zdravkovich[65]

cilindro e integrar esta grandeza numericamente.

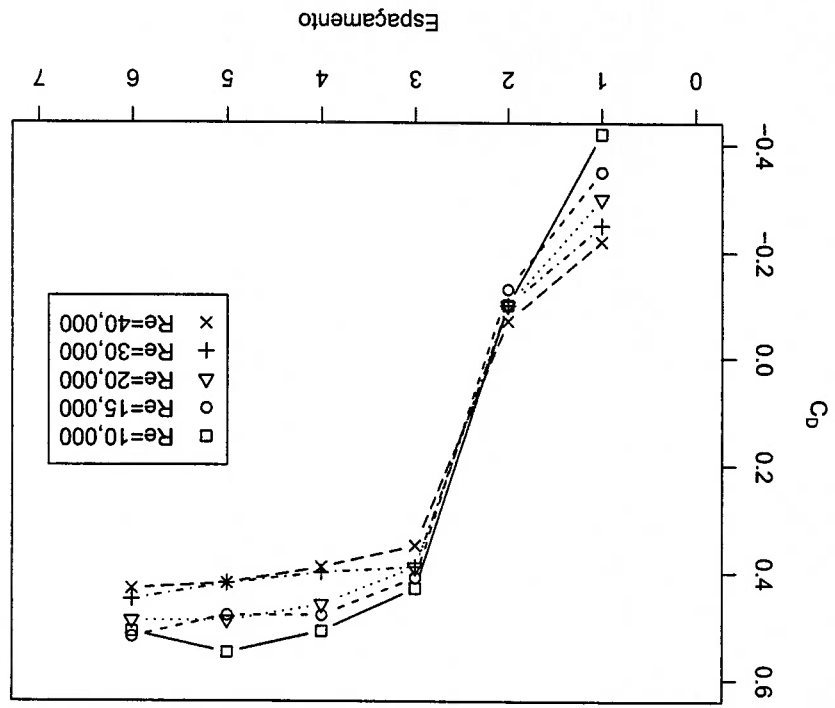


Figura 4.32: Coeficiente de arrasto do cilindro de trás de dois cilindros em linha.

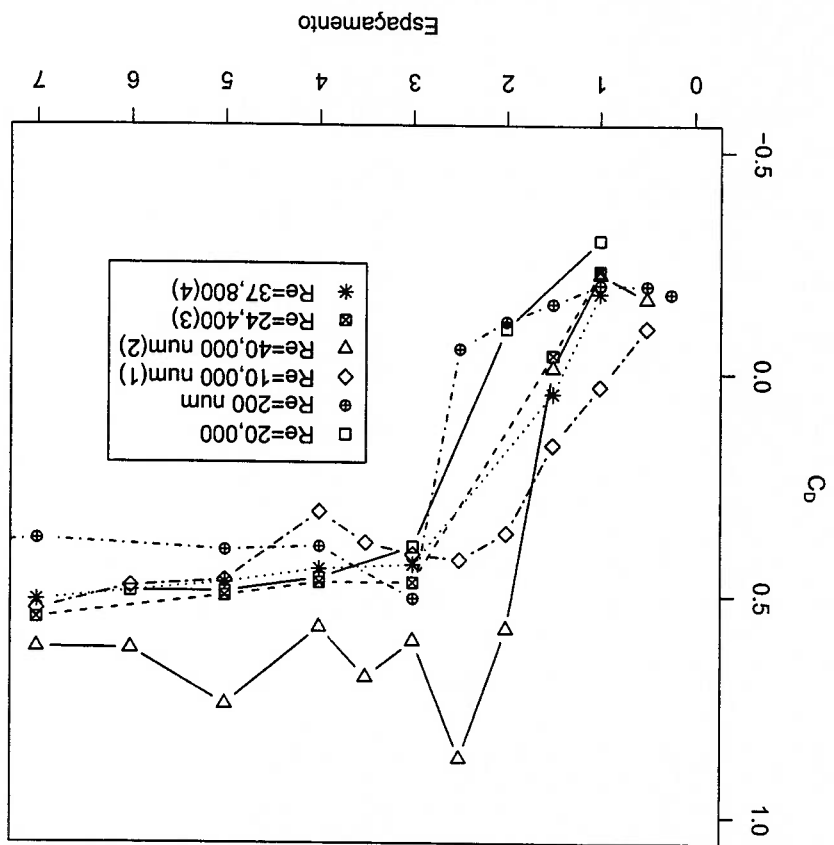


Figura 4.33: Coeficiente de arrasto do cilindro de trás de dois cilindros em linha. (1) e (2) Fregonesi e Meneghini[12], (3) e (4) Zdravkovich[65]

Capítulo 5

Resultados: Tridimensionalidade no escoamento ao redor de cilindros

Neste capítulo são apresentados os resultados referentes à tridimensionalidade no escoamento ao redor de cilindros. São estudados o cilindro isolado, dois cilindros lado a lado com diversos espaçamentos e dois cilindros em linha com diversos espaçamentos.

Inicialmente, é estudado o cilindro isolado por ser o caso mais simples, existir resultados na literatura e ser uma excelente referência para comparação com outros casos. A tridimensionalidade pode ser descrita através do coeficiente de correlação, definido pela equação 3.1. A correlação foi calculada a partir da flutuação de pressão em dois pontos ao longo da mesma geratriz do cilindro (ver seção 3.2.3). Outra maneira de descrever a tridimensionalidade do escoamento é utilizar o comprimento de correlação, L_x (equação 3.3) que indica o quanto bidimensional é o escoamento. Se $L_x = x$, o escoamento é bidimensional. Quanto menor o comprimento de correlação, mais tridimensional é o escoamento.

5.1 Cilindro isolado

A figura 5.1 mostra o coeficiente de correlação obtido para um cilindro isolado para diferentes Re .

A correlação R_{12} cai com a distância entre duas seções do cilindro e a $8D$ de distância os sinais de pressão não estão praticamente correlacionados. Este comportamento é esperado: quanto mais afastados dois pontos, menos correlacionados estão os sinais. O surpreendente é que em apenas $8D$ os sinais são pouco correlacionados. Uma das consequências disto é que se o C_L é medido com células de carga, o valor de C_L numa seção pode ser subestimado.

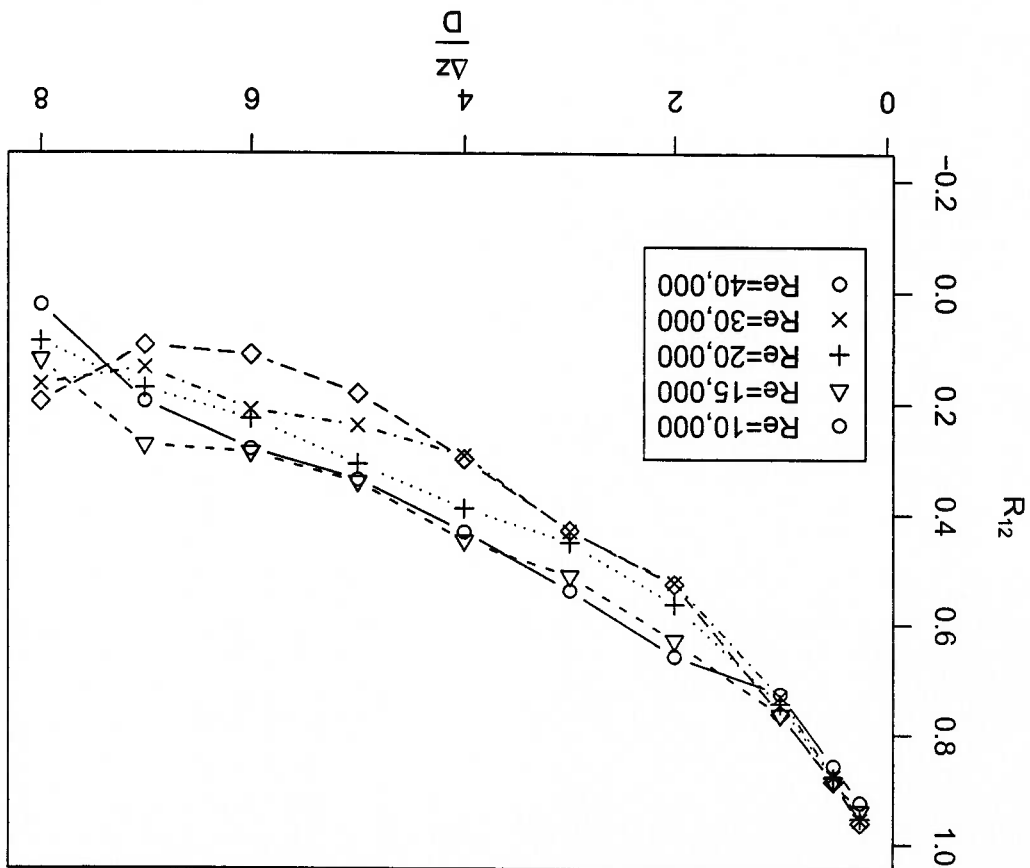


Figura 5.1: Coeficiente de correlação R_{12} para diferentes sinais de pressão numa mesma geratriz do cilindro espaçados $\Delta z/D$ diâmetros no caso de um cilindro iso-

lado

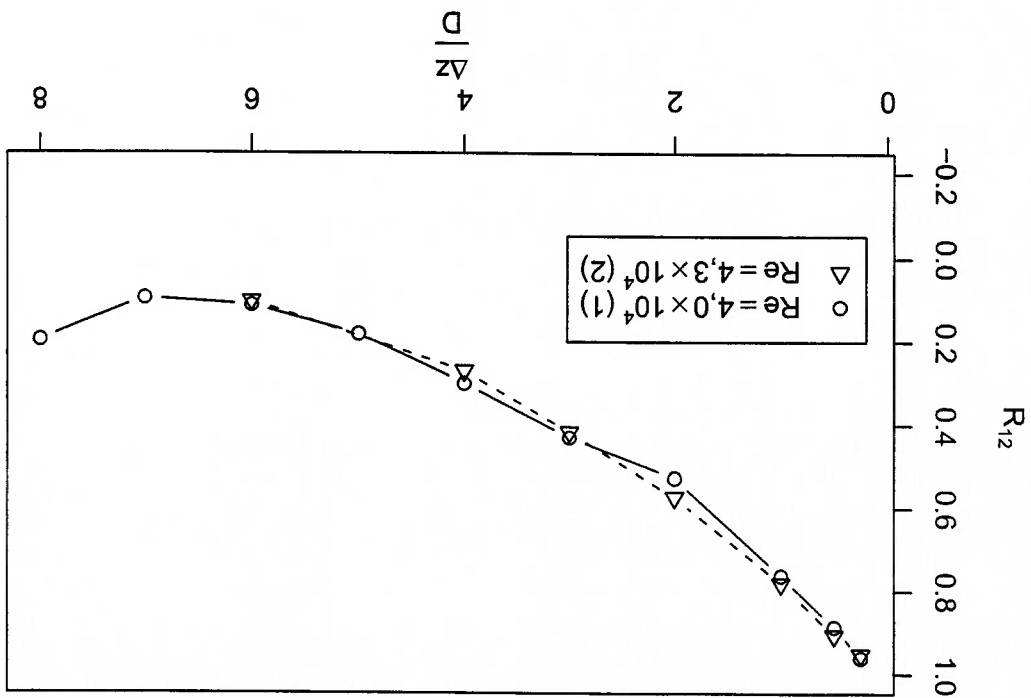
Szepessy[54] determinou a correlação para $Re = 4,3 \times 10^4$. A figura 5.2 compara os resultados obtidos neste trabalho com os resultados obtidos por Szepessy. É bom lembrar que quanto maior o espaçamento entre as seções do cilindro, maior a dispersão dos resultados obtidos neste trabalho aos resultados de Szepessy. É bom lembrar que a dispersão dos resultados obtidos para a correlação. Esta dispersão alta é natural já que o escoamento é tridimensional e existe pouca "relação" entre os sinais.

O comprimento de correlação L_{SD} foi obtido para os diferentes Re testados e pode ser visto na figura 5.4. O comprimento de correlação cai com Re , provavelmente porque o escoamento é mais turbulento.

Na literatura encontram-se muitas menções ao uso de "end-plates" ou placas de extremidades para reduzir os efeitos da camada limite no chão do túnel de vento (por exemplo Szepessy[54]). Szepessy também estudou a influência da distância entre os "end-plates" na tridimensionalidade e emissão de vórtices no escoamento. Para espaçamentos muito

pequenos, da ordem de $1D$, o escoamento é naturalmente bidimensional mas também ocorre a supressão de emissão de vórtices devido à ação da camada limite das placas. Neste trabalho verificou-se qual a influência dos "end-plates" nos resultados de tridimensionalidade. A figura 5.3 apresenta R_{12} com end plates - R_{12} sem end plates que é muito próximo de 0. A figura 5.4 também compara os comprimentos de correlação para diferentes Re que são muito próximos (lembrar que os resultados possuem uma dispersão considerável).

Figura 5.2: Coeficiente de correlação R_{12} para diferentes sinais de pressão numa mesma geratriz do cilindro espaçados $\Delta z/D$ diâmetros no caso de um cilindro isolado (1) presente trabalho, $Re = 4 \times 10^4$, (2) Szepessy[54], $Re = 4,3 \times 10^4$



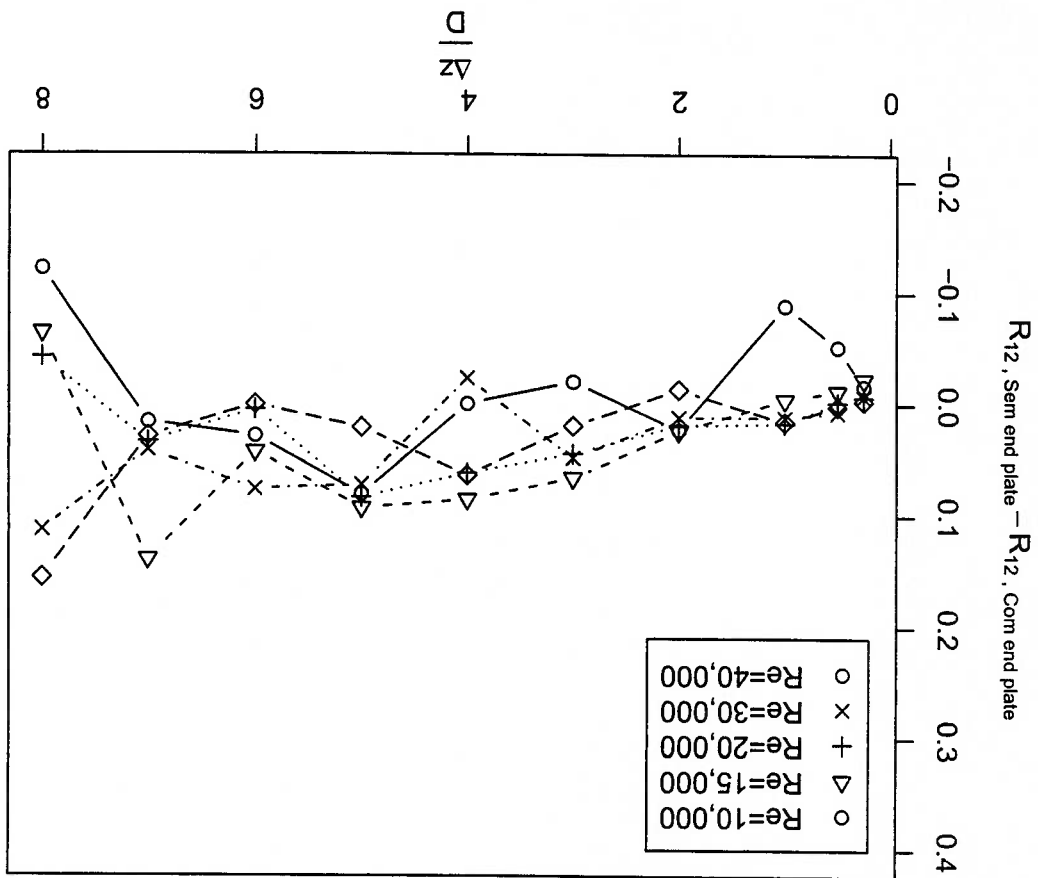


Figura 5.3: Diferença entre coeficiente de correlação obtido com e sem *end-plates*

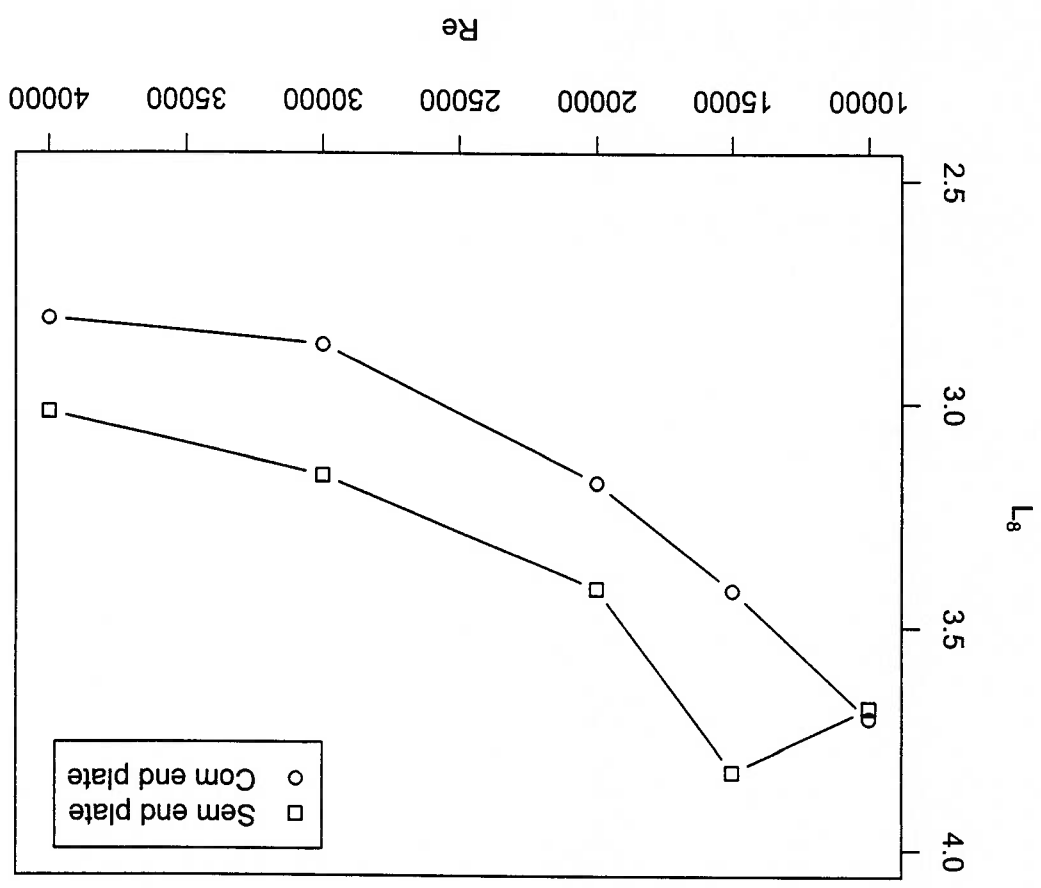


Figura 5.4: Comprimento de correlação L_{8D} para diferentes Re

5.2 Dois cilindros posicionados lado a lado

Quando dois cilindros são colocados lado a lado, espera-se que a tridimensionalidade seja muito parecida com a de um cilindro isolado para espaçamentos entre cilindros grandes. As figuras 5.5, 5.6 e 5.7 mostram a correlação entre as pressões em diferentes secções de um dos cilindros posicionados lado a lado para diferentes distâncias entre cilindros e Re . O comportamento é muito parecido com o observado para um cilindro isolado.

A figura 5.8 mostra o comprimento de correlação L_{8D} obtido a partir das curvas de correlação. O comprimento de correlação cai com Re (há superposição das curvas para $Re = 30,000$ e $Re = 40,000$). Exceto para $Re = 10,000$, o comprimento de correlação cai até um espaçamento entre cilindros de $2D$ e em seguida sobe lentamente, apresentando valores próximos dos obtidos para o cilindro isolado. A correlação alta observada para pequenos espaçamentos pode ser resultado da instabilidade no escoamento observados na seção 4.2

Bearman e Wadcock[4] fizeram algumas medidas de correlação ao longo do eixo longitudinal do cilindro mas é um pouco difícil comparar seus resultados já que seus dados foram obtidos medindo flutuação de velocidades na esteira e seus valores são muito mais baixos.

Um comentário final deve ser feito. Durante os experimentos, algumas vezes, os valores de correlação para cilindros separados por até três diâmetros aproximadamente, a correlação permanecia extremamente alta (da ordem de 0,9) inclusive para pontos de tomada de pressão separados por $5D$. Este resultado é surpreendente e merece maiores estudos. Possivelmente estes valores elevados são resultado de mudança na configuração da esteira, fenômeno conhecido como *flip-flop*(Williamson[60]) observados em *gaps* in-feriores a $2D$. Infelizmente estes resultados não puderam ser repetidos e provavelmente são erros de medida.

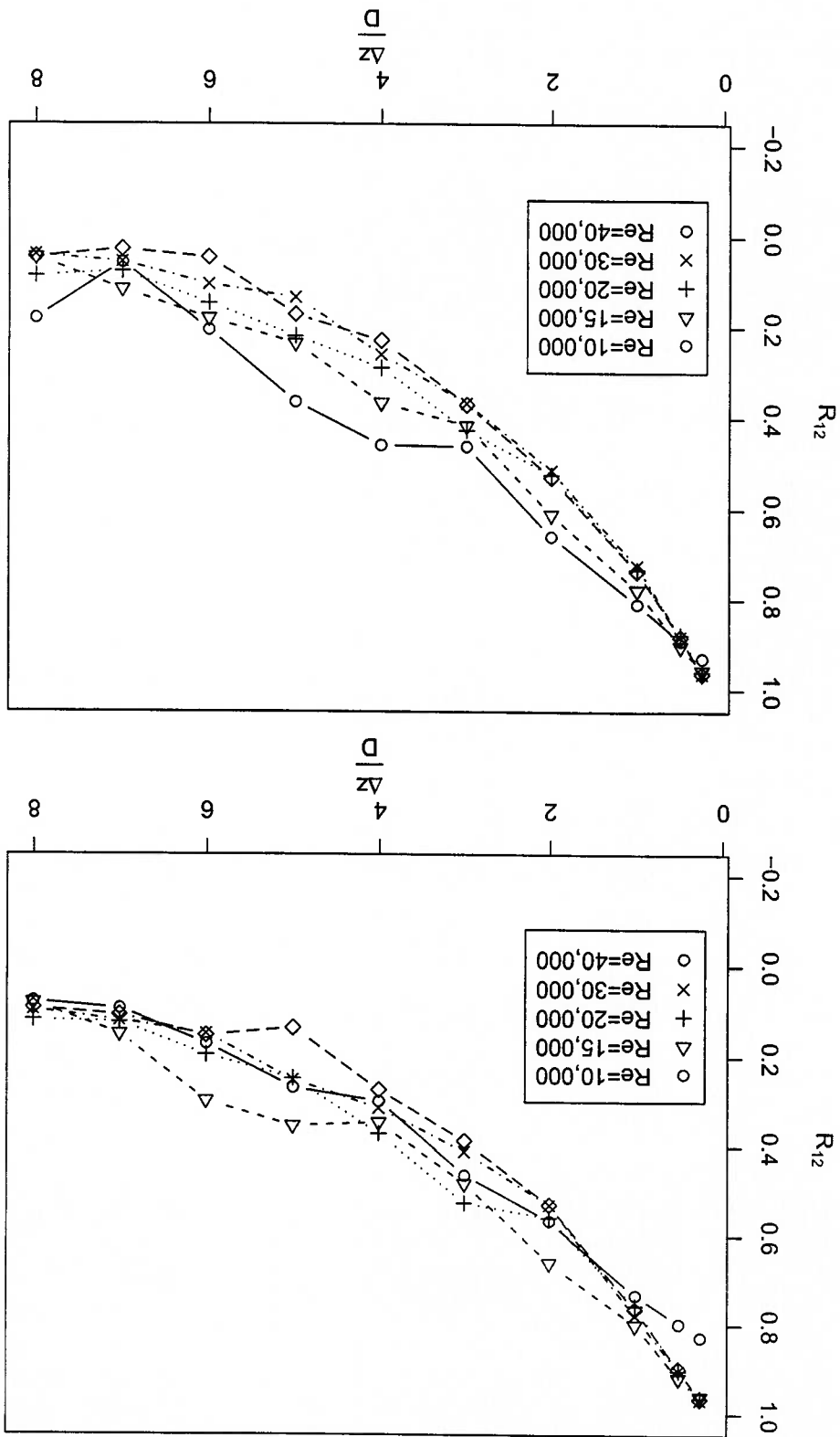


Figura 5.5: Coeficiente de correlação para dois cilindros lado a lado, acima espaço-mento $1D$, abaixo $2D$

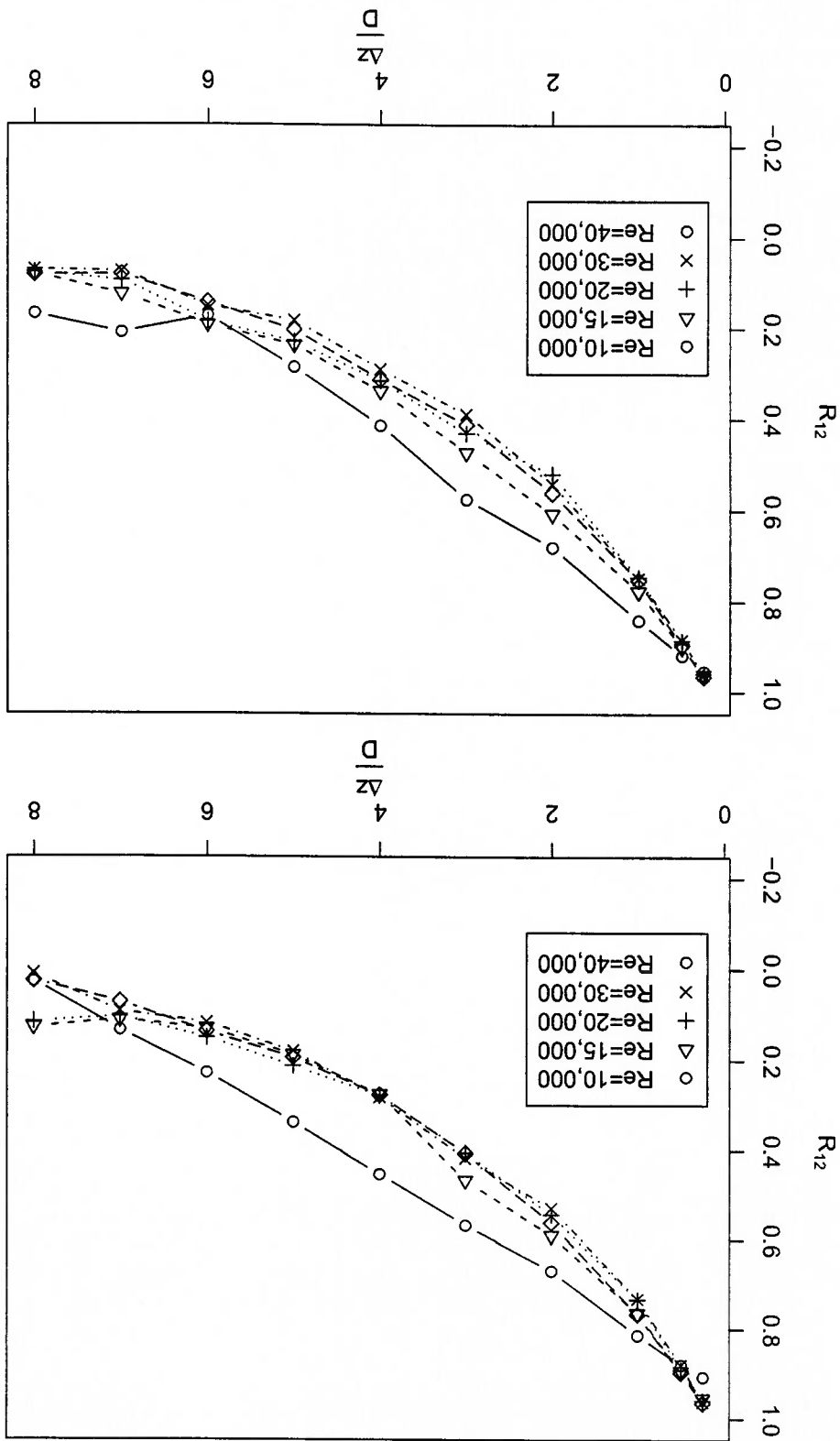


Figura 5.6: Continuação da figura 5.5. Acima espaçamento $3D$, abaixo $4D$

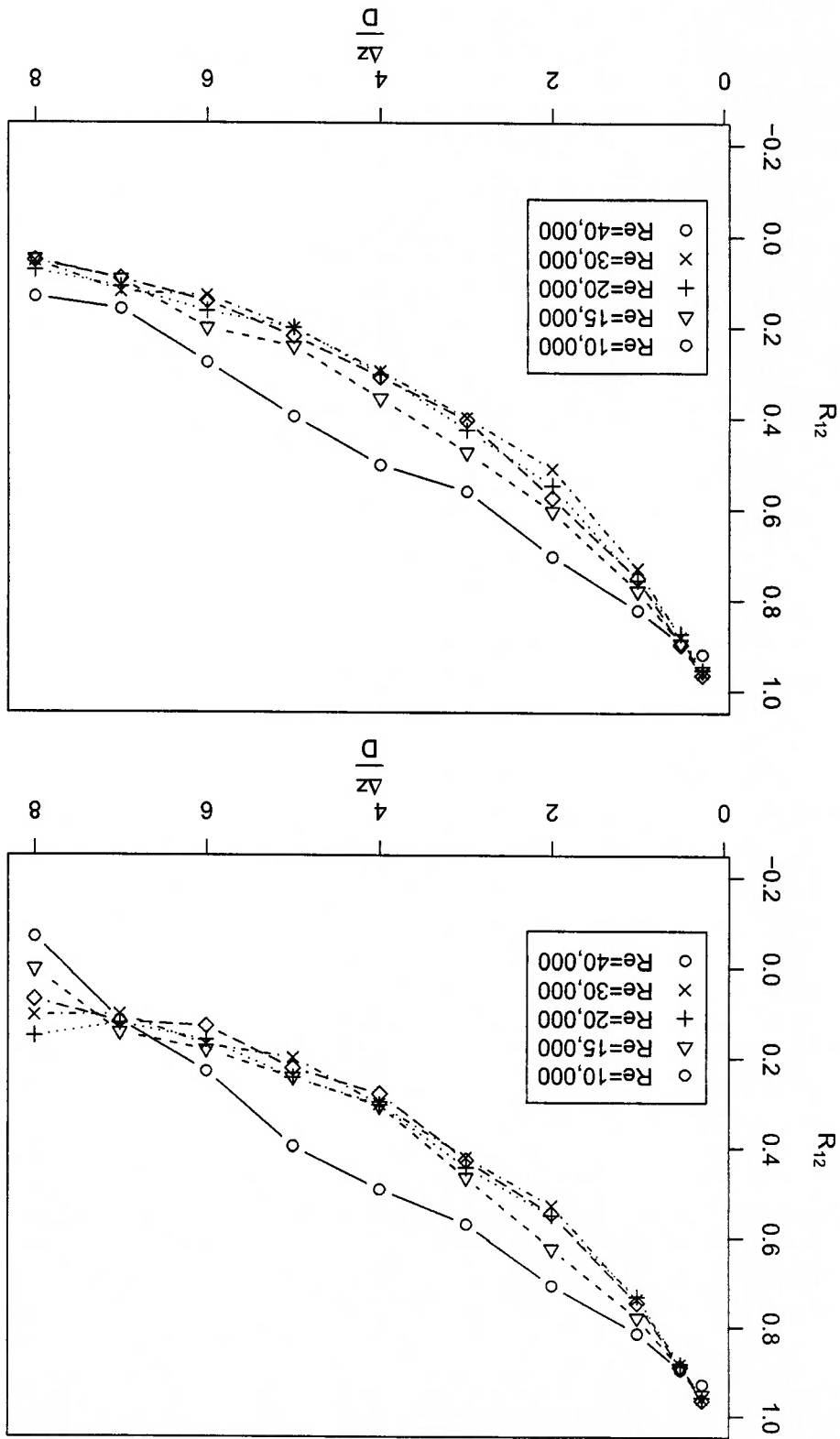


Figura 5.7: Continuação da figura 5.6. Acima espaçamento 5D, abaixo 6D

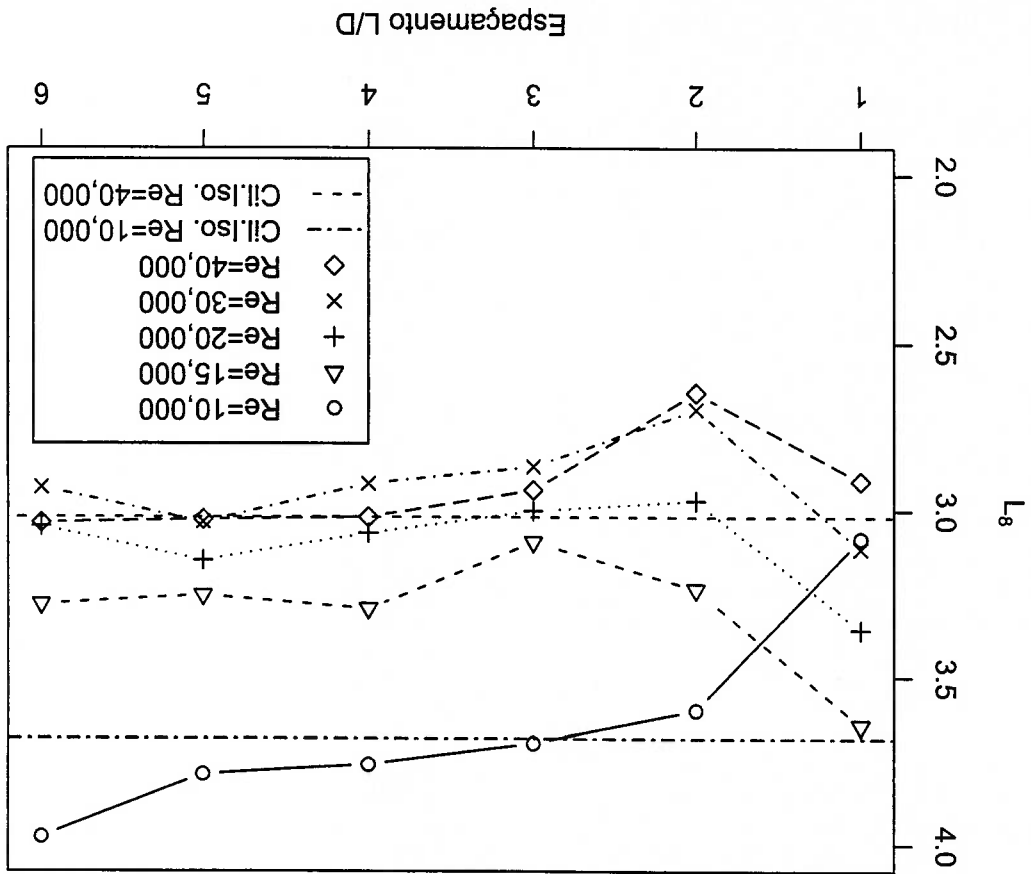


Figura 5.8: Comprimento de correlação L_{8D} para diferentes Re e distâncias entre cilindros

5.3 Dois cilindros posicionados em linha

As figuras 5.9, 5.10 e 5.11 mostram a correlação obtida para o cilindro da frente de dois cilindros posicionados em linha para diferentes distâncias entre cilindros e Re . As figuras 5.12, 5.13 e 5.14 mostram os resultados obtidos para o cilindro de trás e a figura 5.15 mostra o comprimento de correlação obtido para ambos os cilindros.

O comportamento da correlação depende do cilindro em questão e da distância entre cilindros. No caso do cilindro frontal, para distâncias pequenas entre cilindros, o comprimento de correlação é muito baixo (figuras 5.15 e 5.9). Mas após $3D$ (centro a centro), a correlação se comporta como a do cilindro isolado. Este resultado é comprovável já que para distâncias pequenas entre cilindros, não há formação de vórtices no cilindro da frente e a esteira apresenta uma pressão relativamente uniforme (o gráfico de $C_{L,RMS}$, figura 4.24, mostra isso). Nesta situação quaisquer erros na medida da pressão (resultado de incerteza da medida ou pequenas diferenças entre os sensores de pressão por exemplo) devem causar uma baixa correlação. De fato, se não houvesse variação de pressão com o tempo, nem faria sentido falar em correlação.

O caso do cilindro de trás é bem mais complicado. Quando os cilindros estão próximos, o comprimento de correlação é alto e permanece alto mesmo para seções de medição muito afastadas (figura 5.13). Ao se afastarem os cilindros, observa-se que o comprimento de correlação aumenta (figura 5.15). Quando começa haver a formação da esteira de vórtices no cilindro dianteiro, a correlação cai bruscamente, chegando mesmo a ser negativa em algumas situações (figuras 5.13 e 5.14). Este comportamento continua mesmo quando os cilindros estão bem afastados ($6D$).

Após a formação da esteira de vórtices no cilindro dianteiro, seu comportamento já é parecido com o cilindro isolado e as curvas de correlação são muito parecidas. Com isso, o escoamento que chega no cilindro de trás já tem uma tridimensionalidade considerável, o que se sobrepõe com a tridimensionalidade causada por ele mesmo, justificando a baixa correlação observada.

Novamente, observa-se que o comprimento de correlação cai com Re .

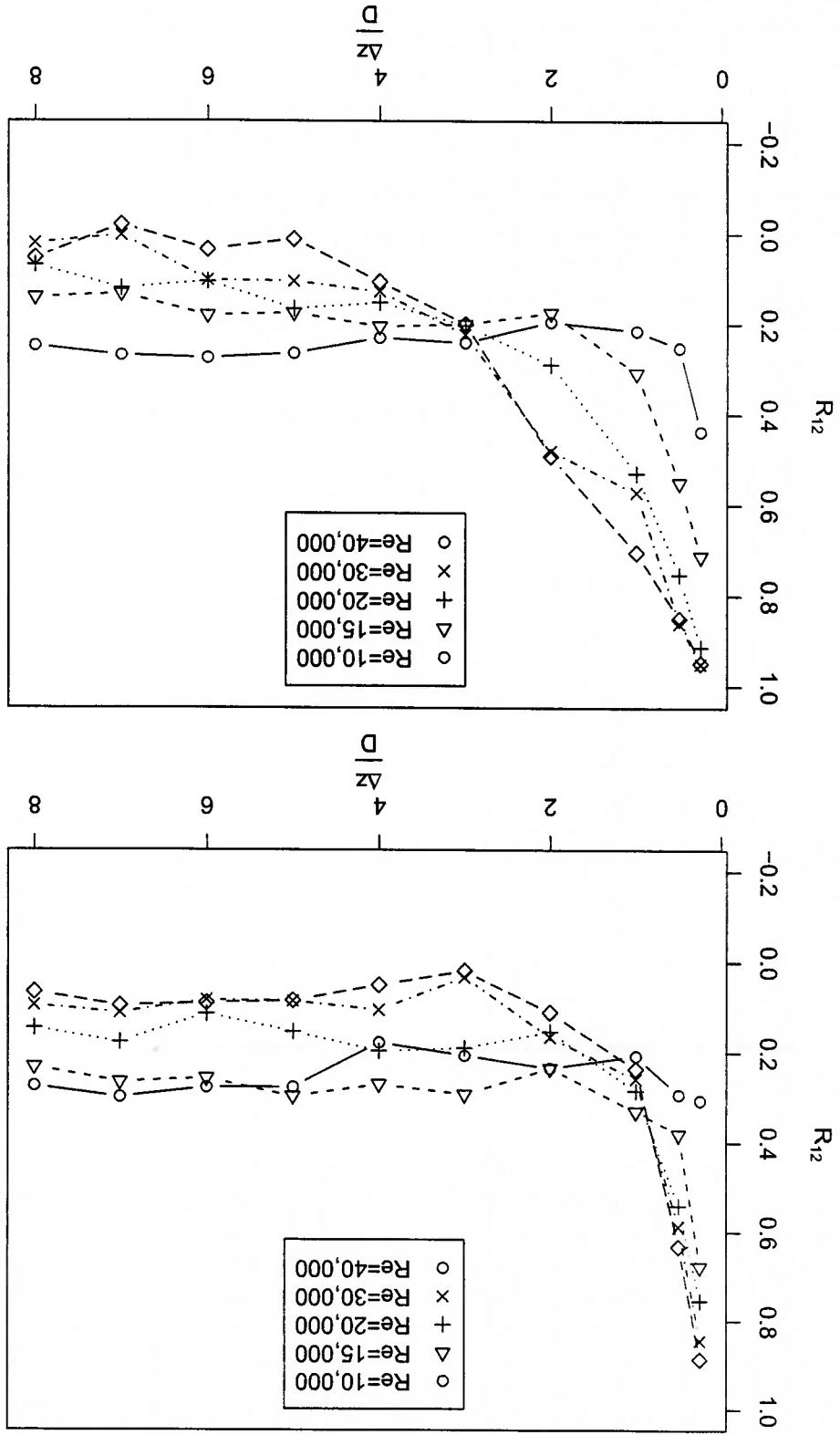


Figura 5.9: Coeficiente de correlação para o cilindro frontal de 2 cilindros em linha, acima espaçamento 1D, abaixo 2D

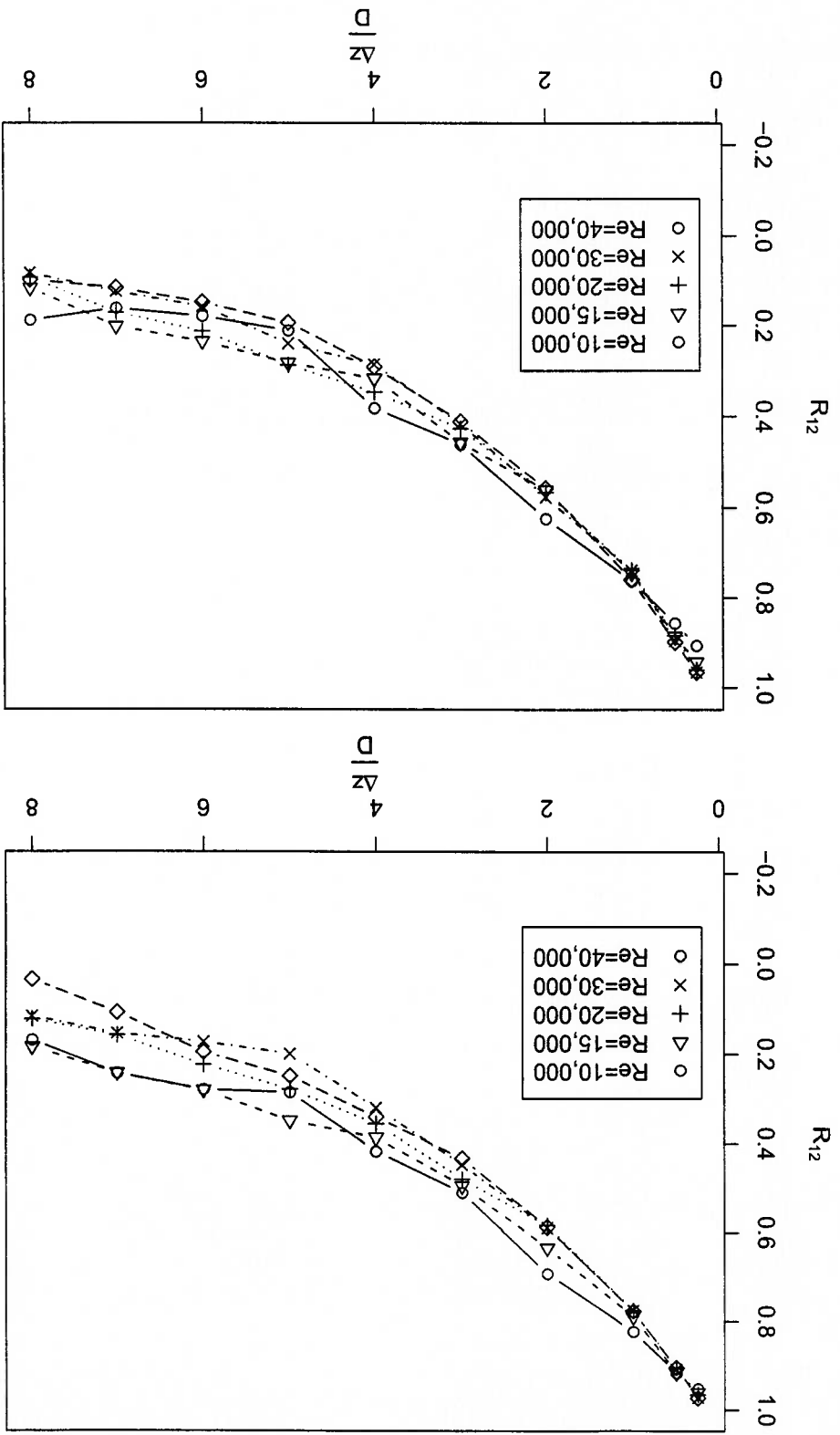


Figura 5.10: Continuação da figura 5.9. Acima espaçamento $3D$, abaixo $4D$

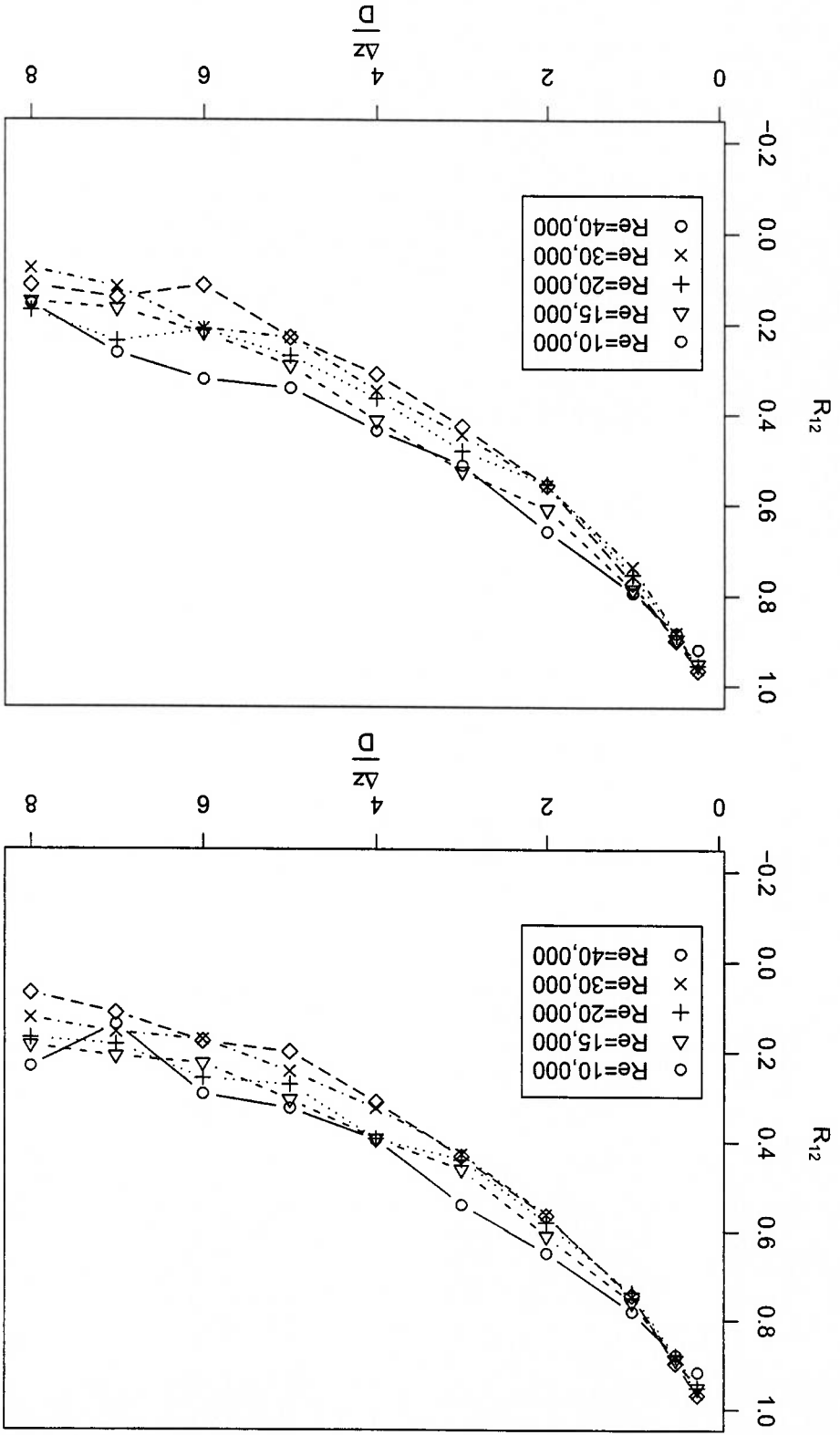


Figura 5.11: Continuação da figura 5.10. Acima espaçamento $5D$, abaixo $6D$

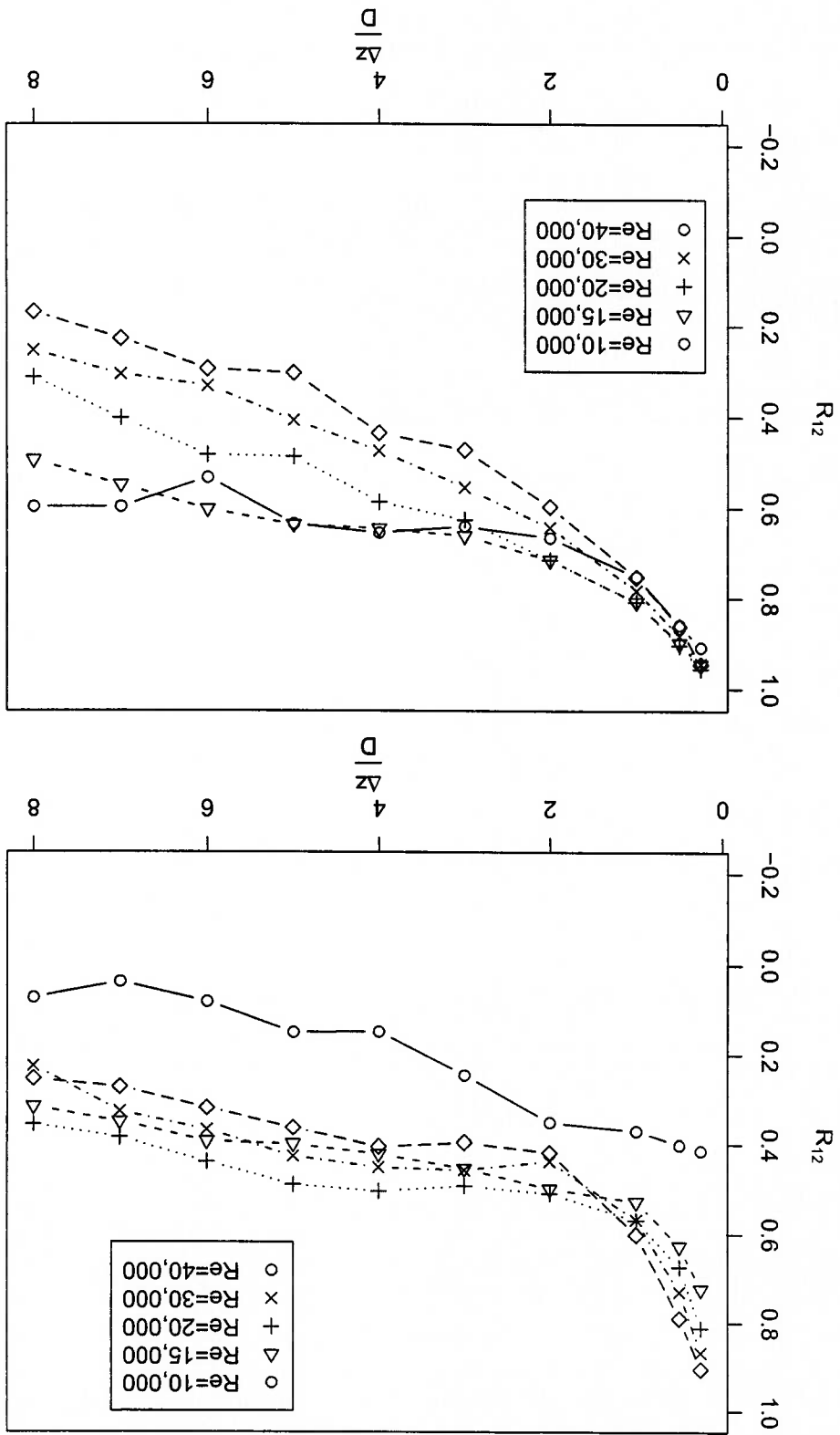


Figura 5.12: Coeficiente de correlação para o cilindro de trás de 2 cilindros em linha, acima espaçamento $1D$, abaixo $2D$

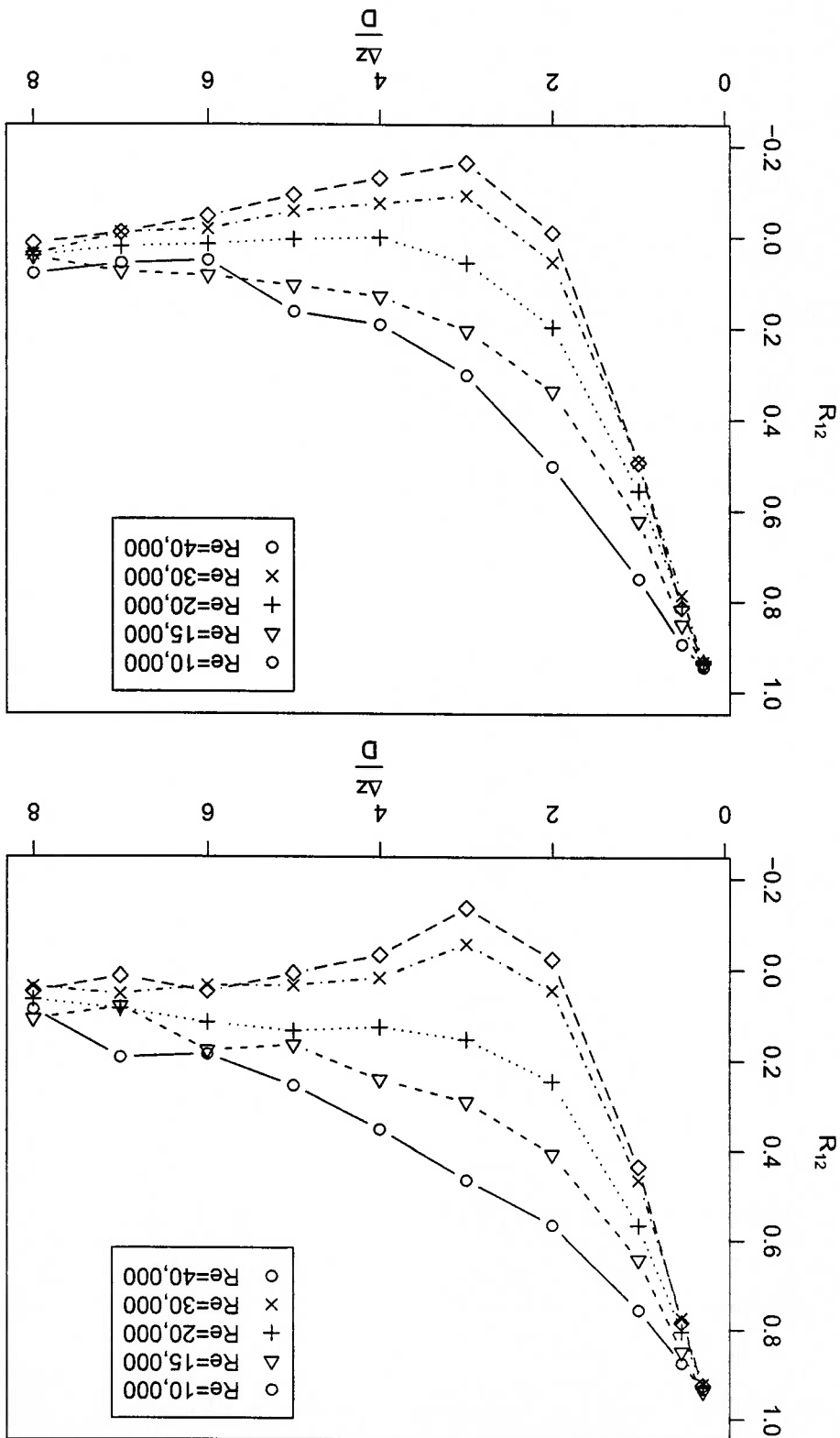


Figura 5.13: Continuação da figura 5.12. Acima espaçamento 3D, abaixo 4D

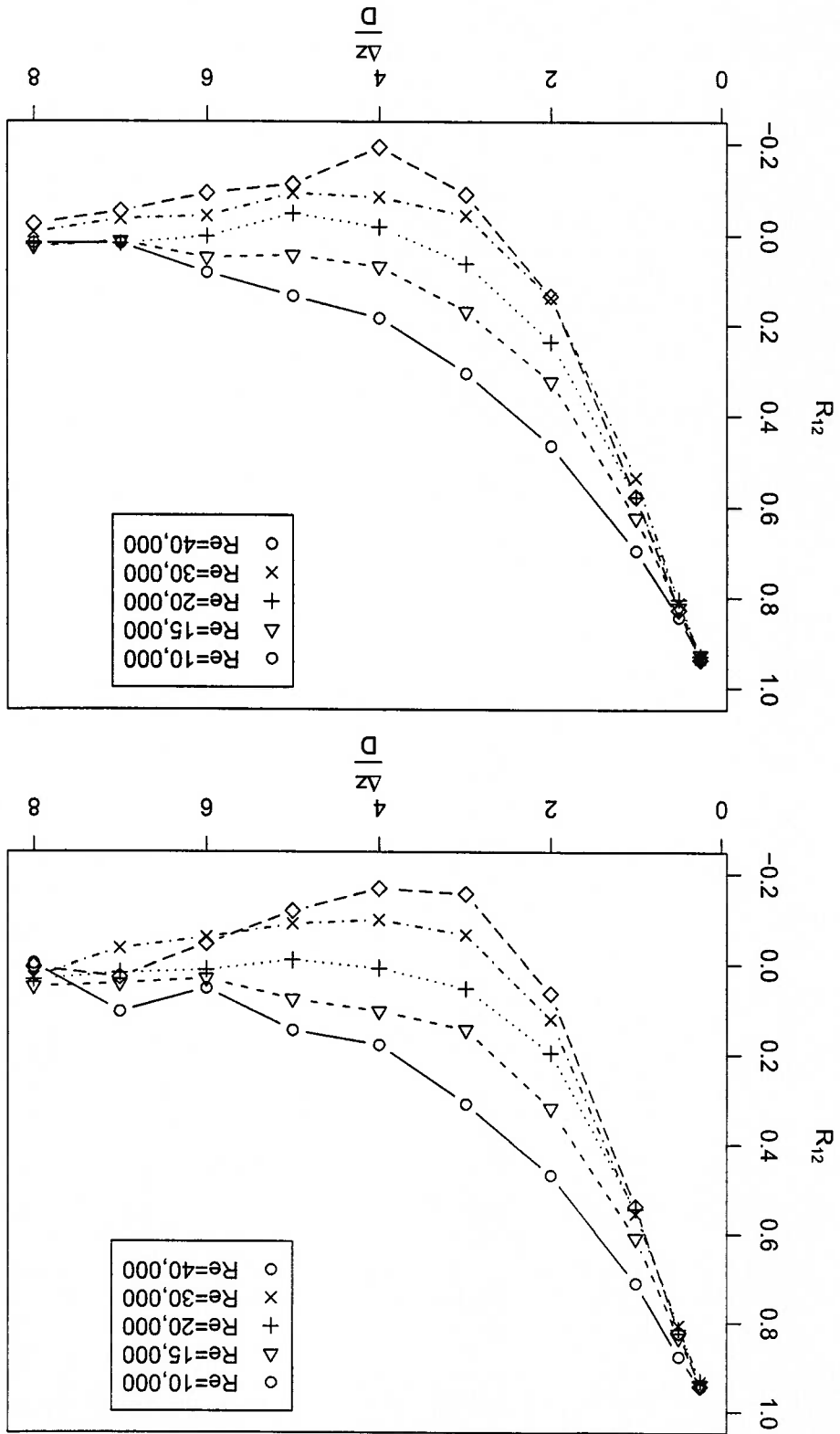


Figura 5.14: Continuação da figura 5.13. Acima espaçamento $5D$, abaixo $6D$

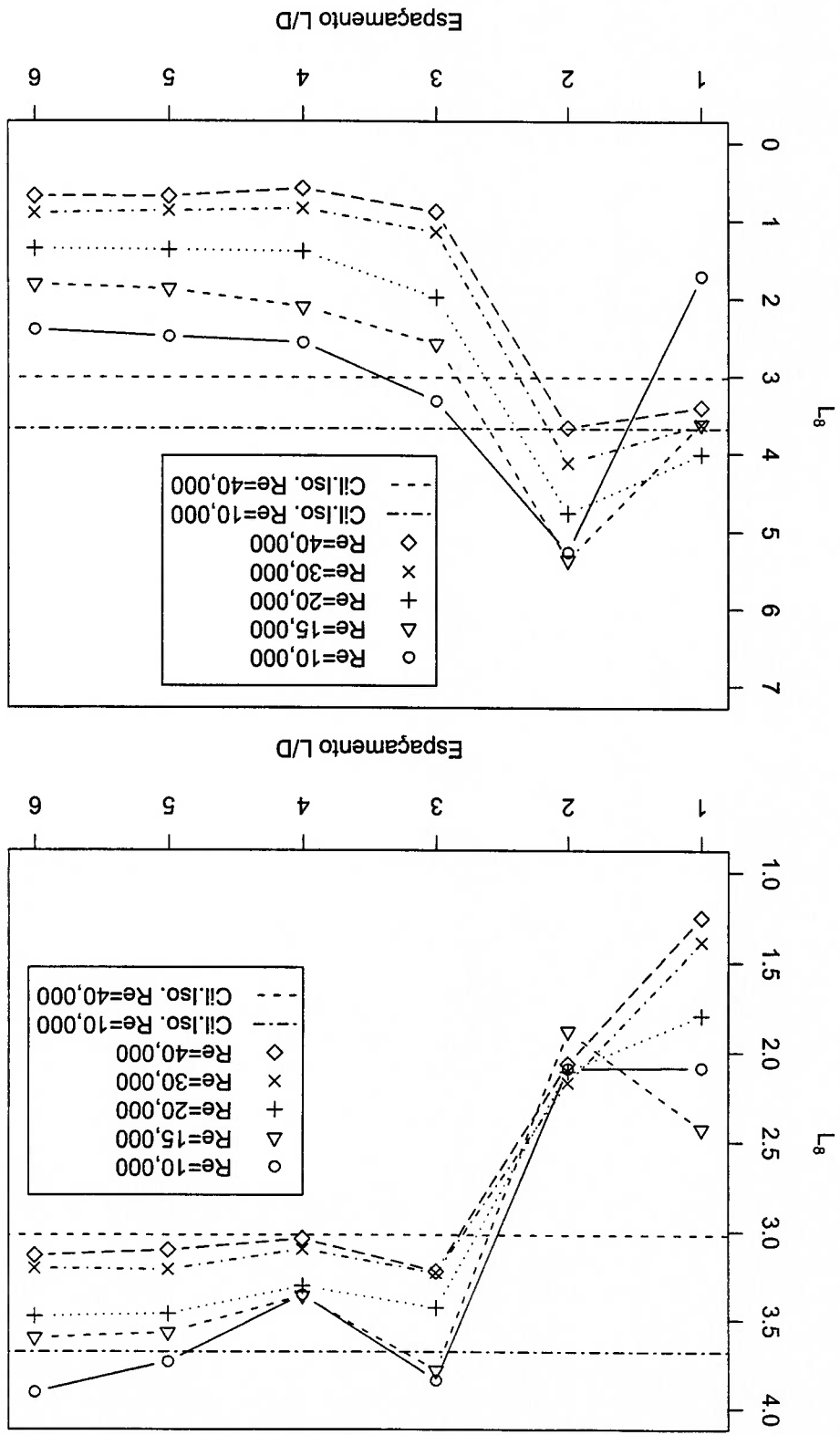


Figura 5.15: Coeficiente de correlação de dois cilindros em linha. Acima, cilindro frontal. Abaixo cilindro de trás

Capítulo 6

Discussão e conclusões

Neste trabalho estudaram-se dois problemas relacionados mas distintos: escoamento bidimensional a baixo número de Reynolds (> 200) e problemas tridimensionais com número de Reynolds superiores, (10^4 a $4 \cdot 10^4$). No geral o comportamento é muito semelhante, o que é de se esperar se for lembrado que o número de Strouhal varia muito pouco nesta faixa, ficando em torno de 0,2. Isto indica semelhança na dinâmica dos vórtices nesta ampla faixa de Re . A figura 4.6 mostra como o coeficiente de arrasto devido ao atrito viscoso cai em relação ao coeficiente de arrasto total. Este comportamento deve continuar, mesmo para problemas com Re superiores aos estudados neste trabalho, até chegar na crise do arrasto. O que mais distingue o problema com Re baixo (estudado numericamente) do problema com Re alto é a tridimensionalidade.

A tridimensionalidade também é afetada pela interação de diferentes corpos rombudos, principalmente quando os cilindros estão posicionados em linha. Na maior parte das aplicações, a tridimensionalidade é bem vinda por reduzir consideravelmente os esforços na direção transversal (forças de sustentação) e portanto é aconselhável que qualquer modelo que trabalhe com corpos rombudos compridos leve em conta a tridimensionalidade do escoamento.

Como fazer isto é uma questão em aberto. Uma possibilidade é trabalhar com modelos estatísticos onde a correlação (ou comprimimento de correlação) é uma grandeza conhecida. Mas para tanto, é necessário conhecer os mecanismos responsáveis pela tridimensionalidade e montar um banco de dados com diferentes disposições de cilindros (número e posicionamento dos cilindros) e números de Reynolds. Outro problema em aberto é como a tridimensionalidade se propaga. A tridimensionalidade de cada cilindro quando dois são posicionados em linha é muito diferente. Porque esta diferença é tão grande de

comportamento? Talvez algum modelo possa ser construído a partir das equações de Navier-Stokes e resultados empíricos. Neste trabalho foram medidas algumas grandezas relacionadas com a tridimensionalidade do escoamento mas pouco se discutiu sobre os mecanismos de formação e propagação da tridimensionalidade.

Outra possibilidade é estudar numericamente os problemas tridimensionais usando *Large Eddy Simulation* (LES). O problema é memória e capacidade de processamento. Com as máquinas melhorando dia a dia e a possibilidade de montar *clusters* de PCs, pode-se pensar em obter alguns resultados. Os métodos de elementos espectrais também ajudam neste sentido.

Falta estudar outros aspectos da tridimensionalidade do escoamento. A influência da turbulência da corrente nos esforços pode ser considerável, principalmente quando as escalas de turbulência são da ordem da dimensão do corpo. Um exemplo onde a turbulência é determinante é no estudo de estruturas submetidas ao vento atmosférico.

O problema de dois cilindros posicionados lado a lado com espaçamentos pequenos (da ordem de $1D$) merece um estudo mais aprofundado. O efeito da mudança do regime de escoamento (*flip-flop*) na tridimensionalidade do escoamento pode produzir resultados interessantes. Novas técnicas de análise de resultados experimentais, como por exemplo o uso de *wavelets*, pode fornecer novas informações a partir de dados já disponíveis e ajudar no planejamento de novos experimentos e simulações numéricas.

Um aspecto final que deve ser considerado é o efeito de oscilações dos corpos na tridimensionalidade. Em estruturas com relação de aspecto grande ($L/D \gg 1$) dificilmente não ocorre oscilações e é de se esperar que isto afete consideravelmente a tridimensionalidade do escoamento.

O problema de interferência bidimensional a baixo número de Reynolds ainda deve ser mais estudado. Este é um problema que pode ser estudado numericamente em PCs com certa facilidade (com as devidas ferramentas) e apresenta quase todos os mecanismos envolvidos no fenômeno de geração e desprendimento de vórtices. Diferentes disposições de cilindros devem ser estudados, a começar por dois cilindros com o plano formado por seus eixos formando um ângulo qualquer com a direção da corrente e passando, mais tarde devem ser estudados os casos com três ou mais cilindros. O estudo da influência de *Re* neste tipo de escoamento pode ajudar na compreensão dos mecanismos fundamentais da geração e desprendimento de vórtices.

Alguns dos casos simulados devem ser estudados mais a fundo. Um caso que vale mencionar é o escoamento ao redor de dois cilindros posicionados lado a lado espaçados por 1,5 D e Reynolds 100. Neste caso (ver figuras 4.19 e 4.20), houve uma mudança significativa no aspecto do escoamento. Seria interessante simular o problema durante intervalos de tempo muito maiores para ver se há outras mudanças ou se o que foi observado é apenas uma parte do transi t rio inicial do problema.   interessante determinar o comportamento de dois cilindros em linha quando o espaçamento está entre 2 D e 3 D onde o escoamento muda de maneira drástica. Estas simula es podem ser automatizadas utilizando *shell-scripts* e programas adequados, fornecendo uma quantidade grande de informa es com baixo custo homem-hora.

Existem muito poucos estudos sobre tridimensionalidade no escoamento para baixos números de Reynolds e geralmente estes estudos estão limitados a um cilindro isolado. Uma continua o do trabalho de Siqueira[51] com cilindros mais longos e, principalmente, com mais de um cilindro pode trazer novas informa es sobre o fen meno. A dificuldade com estas simula es   que os recursos computacionais necessários são enormes. Mas os computadores melhoram continuamente e os métodos espectrais podem ajudar consideravelmente. Existe uma versão do *NEMTOR* que faz uma decomposi o em séries de Fourier da soluço na dire o do eixo do cilindro que deve melhorar consideravelmente a eficiência computacional. Utilizando este programa poderia estudar-se a tridimensionalidade no escoamento ao redor de um ou mais cilindros e mesmo com cilindros oscilando o que pode fornecer uma compreensão melhor da tridimensionalidade.

Existe uma certa dificuldade em simular conjuntos de cilindros oscilando livremente utilizando métodos Eulerianos mas o método ALE (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian*) resolve este problema. Modelos estruturais dos cilindros podem ser acoplados ao problema hidrodinâmico. O uso de malhas cartesianas com refinamento local pode facilitar muito o estudo de problemas com diversos cilindros oscilando. Neste tipo de método, não   necessário deformar a malha, esta se refina nos locais adequados e engrossa em outros com baixos gradientes. Este tipo de método tem ganho bastante popularidade nos últimos anos. Maiores detalhes podem ser encontrados em [28, 20].

O efeito da compressibilidade na gera o e desprendimento de vórtices, além de ser um problema interessante por si, tem aplica es importantes em aeronáutica (escoamento em antenas e outros dispositivos na superfície da asa). O método de Galerkin descontínuo

permite utilizar aproximações espectrais para problemas compressíveis.

Nos ensaios em túnel diversas técnicas de medição foram empregadas e podem ser melhoradas. O dispositivo integrador de pressões facilita consideravelmente a medição de forças mas seu comportamento deve ser melhor estudado numericamente e experimentalmente com a finalidade de se conhecer em que circunstâncias este dispositivo é adequado ou não. Novos projetos de células de carga devem ser testados e a célula de carga desenvolvida deve ser melhor estudada. Faltou também medir as forças de sustentação nos cilindros, um trabalho que pode ser realizado sem muita dificuldade com a experiência adquirida.

A medição dos campos de velocidade com anemometria laser ou de fio quente (e mesmo com tubos de Pitó) podem trazer novas informações importantes. Visualização é extremamente importante no estudo do escoamento mas pode apresentar várias dificuldades.

O novo túnel de vento de camada limite atmosférica do Laboratório de Vazão do IPT traz novas possibilidades. Cilindros com diâmetros maiores podem ser confeccionados, permitindo uma montagem mais fácil e a realização de testes com números de Reynolds superiores. O novo túnel também permitirá estudar a influência da turbulência no escoamento. A turbulência do escoamento é de primordial importância no estudo de estruturas submetidas ao vento e a modelagem correta desta turbulência (a camada limite atmosférica) é uma outra dificuldade neste tipo de ensaio.

Já está em desenvolvimento um programa de elementos espectrais para a solução das equações de Navier-Stokes. Com este programa será possível implementar modelos de turbulência (LES) para a solução de problemas com Reynolds relativamente altos. A implementação de técnicas tipo ALF permitirá o estudo de conjuntos de cilindros oscilando. Este programa será baseado numa biblioteca (em desenvolvimento) de elementos espectrais que permitirá ainda desenvolver aplicativos para outros tipos de problemas como por exemplo micro-escoamentos e escoamentos compressíveis.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Airie, M. Kiya, M. Moriya, and H. Mori. Pressure fluctuations on the surface of two cylinders in tandem arrangement. *ASME J. Fluids Engineering*, 105:161–167, 1995.
- [2] John D. Anderson. *Fundamentals of aerodynamics*. McGraw-Hill, second edition, 1991.
- [3] P. W. Bearman. Vortex shedding from oscillating bluff bodies. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 16:195–222, 1984.
- [4] P. W. Bearman and A. J. Wadcock. The interaction between a pair of circular cylinders normal to a stream. *J. of Fluid Mechanics*, 61:499–511, 1973.
- [5] Maher N. Bismark-Nasr. *Finite elements in applied mechanics*. 1993.
- [6] L. Bos, M. A. Taylor, and Wingate B. A. Tensor product gauss-Lobatto points are fekete points for the cube. *Mathematics of Computation*, 70:1543–1547, 2000.
- [7] John P. Boyd. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Dover Publications, 2001.
- [8] M. Braza and H. Chassaigne, P. e Ha Minh. Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder. *J. of Fluid Mechanics*, 165, 1986.
- [9] Bernardo Cockburn. Discontinuous galerkin methods for convection dominated problems. Technical report, University of Minnesota, 2001.
- [10] M. Dubiner. Spectral methods on triangles and other domains. *SIAM J. Sci. Comput.*, 6, 1991.
- [11] Ricardo Flatschart. *Estudo do escoamento ao redor de um agrupamento de cilindros*. PhD thesis, Universidade de Sao Paulo, Sao Paulo, 2001.

- [12] Rodrigo Fregonesi and J. R. Meneghini. Dados de simulação. Comunicação pessoal, 2001.
- [13] Uriei Frisch. *Turbulence*. Cambridge, 1995.
- [14] Albert Thomas Fromhold. *Quantum Mechanics for Applied Physics and Engineering*. Dover Publications, 1991.
- [15] J. H. Gerrard. The mechanics of the formation region of vortices behind bluff bodies. *J. of Fluid Mechanics*, 25, 1966.
- [16] Phillip M. Gresho and Robert L. Sani. On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations. In R. H. Gallagher, R. Glowinski, P. M. Gresho, J. T. Oden, and O. C. Zienkiewicz, editors, *Finite Element in Fluids volume 7*. John Wiley & Sons, 1987.
- [17] Max D. Gunzburger. *Finite element methods for viscous incompressible flows*. Academic Press, 1989.
- [18] Ronald D. Henderson and George EM Karniadakis. Unstructured spectral element methods for the simulation of turbulent flows. *J. of Computational Physics*, 122:191–217, 1995.
- [19] F. B. Hildebrand. *Introduction to numerical analysis*. Dover Publications, 1987.
- [20] Louis H. Howell and John B. Bell. An adaptive mesh projection method for viscous incompressible flow. *SIAM Journal on Scientific Computing*, (18):996–1013, 1997.
- [21] George EM Karniadakis, Mosche Israeli, and Steven A. Orszag. High order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *J. of Computational Physics*, 97:414–443, 1991.
- [22] George EM Karniadakis and Spencer J. Sherwin. *Spectral/hp element methods for CFD*. Oxford University Press, 1999.
- [23] H. J. Kim and P. A. Durbin. Investigation of the flow between a pair of circular cylinders normal to a stream. *Journal of Fluid Mechanics*, 61:499–511, 1988.

- [24] O. A. Ladyzhenskaya. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. Gordon and Beach Science Publishers, 1969.
- [25] Harvard Lomax, Thomas H. Pulliam, and David W. Zingg. *Fundamentals of computational fluid dynamics*. 1997.
- [26] Igor Lomtev. *A discontinuous Galerkin method for the compressible Navier-Stokes equations in stationary and moving 3D domains*. PhD thesis, Brown University, 1999.
- [27] Clovis R. Maliska. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. LTC, 1995.
- [28] D. F. Martin. *An adaptive cell-centered projection method for the incompressible Euler equations*. PhD thesis, University of California, 1998.
- [29] J. R. Meneghini. *Numerical simulation of flow interference between two circular cylinders in tandem and side-by-side arrangements*. PhD thesis, Imperial College, 1993.
- [30] J. R. Meneghini, F. Saltara, C. L. R. Siqueira, and J. A. Ferrari. Numerical simulation of flow interference between two circular cylinders in tandem and side-by-side arrangements. *J. of Fluids and Structures*, 15:327–350, 2001.
- [31] L. M. Milne-Thomson. *Theoretical Hydrodynamics*. MacMillan & Co, 5th edition, 1968.
- [32] Steven A. Orszag. Spectral methods for problems in complex geometries. *J. of Computational Physics*, 37:70–92, 1980.
- [33] Patankar. *Numerical heat transfer and fluid flow*. MacGraw-Hill, 1981.
- [34] Anthony T. Patera. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, 54:468–488, 1984.
- [35] Olivier Pironneau. *Finite element methods for fluids*. John Wiley & Sons, 1989.
- [36] L. Prandtl and O. G. Tietjens. *Applied hydro- and aeromechanics*. Dover Publications, 1934.

- [37] J. W. S. Rayleigh. *The theory of sound*, volume 1,2. Dover Publications, 1896.
- [38] K. F. Riley, M. P. Hobson, and S. J. Bence. *Mathematical methods for physics and engineering*. Cambridge University Press, 1998.
- [39] A. Roshko. On the drag and shedding frequency of two dimensional bluff bodies. Technical Report 3169, NACA, 1954.
- [40] A. Roshko. Experiments on the flow past a circular cylinder at very high reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 10:354, 1961.
- [41] A. Roshko. Perspectives on bluff body aerodynamics. *Journal of Wind Engineering*, 49:79–100, 1993.
- [42] J. Y. Sa and K. S. Chang. Shedding patterns of the near-wake vortices behind a circular cylinder. *Int. J. of Num. Meth. in Fluids*, 12, 1991.
- [43] F. Saltar. *Numerical Simulation of the flow about circular cylinders*. PhD thesis, Escola Politécnica da USP, 1999.
- [44] Eric Sartei and Frédéric Hecht. Emc2 wysiwig 2d finite elements mesh generator. Technical Report 118, INRIA, 1995.
- [45] H. Schlichting and K. Gersten. *Boundary layer theory*. Springer, 1998.
- [46] C. Schwab. *p- and hp-finite element methods*. Oxford Science Pub., 1998.
- [47] Larry J. Segerlind. *Applied finite element analysis*. John Wiley & Sons, 1976.
- [48] Larry J. Segerlind. *Applied finite element analysis*. John Wiley & Sons, 1976.
- [49] Spencer J. Sherwin and George EM Karniadakis. A triangular spectral element method; application to the incompressible navier-Stokes equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrng.*, 123:189–229, 1995.
- [50] Spencer J. Sherwin and George EM Karniadakis. A new triangular and tetrahedral basis for high order (hp) finite element methods. *Int. J. Num. Methods in Engrng.*, 38:3775–3802, 1995.

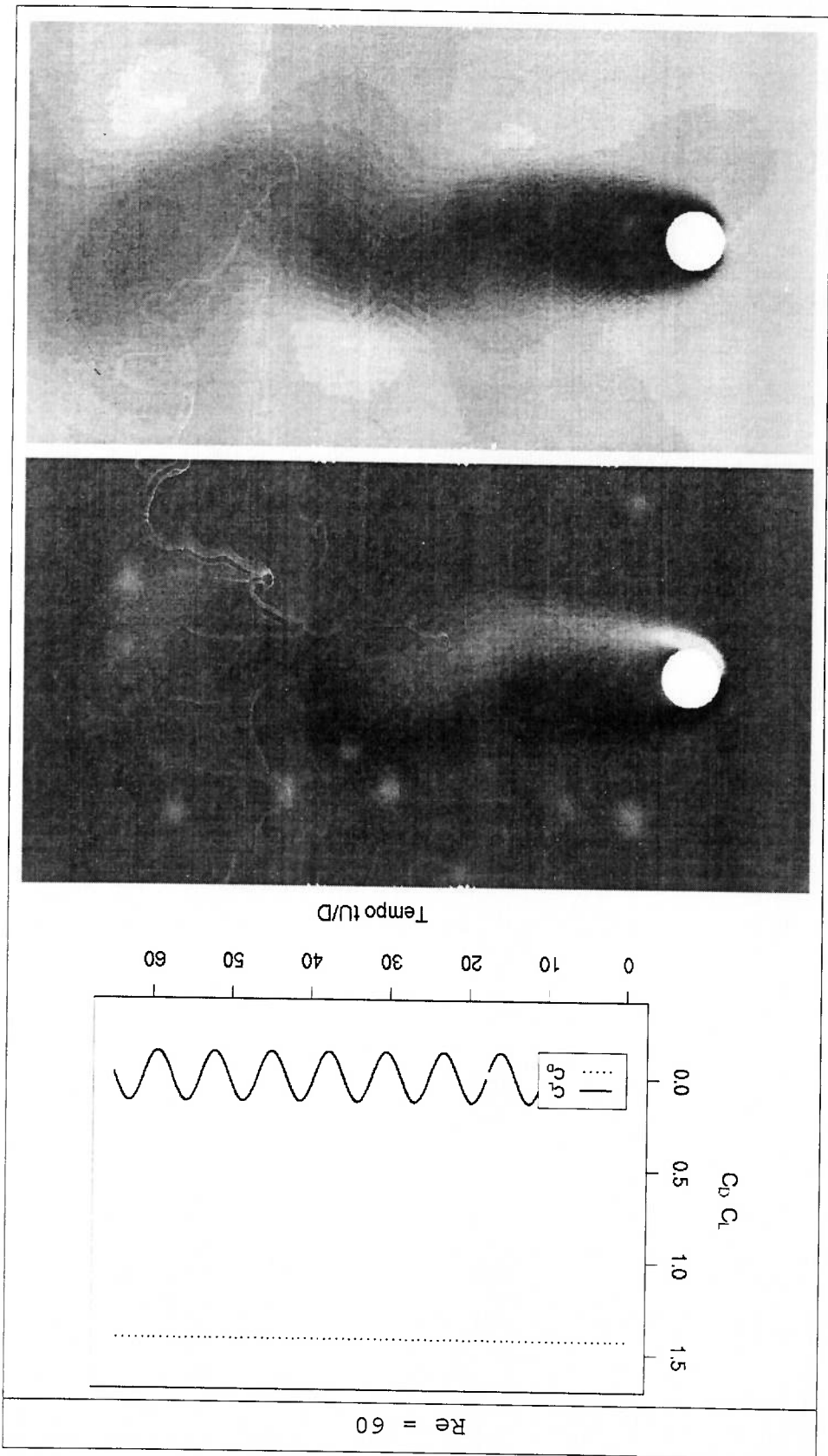
- [51] Cesario De La Rosa Siqueira. *Simulação numérica do escoamento ao redor de cilindros: aplicação a problemas bi e tridimensionais*. PhD thesis, Universidade de Sao Paulo, Sao Paulo, 1999.
- [52] Gilbert Strang and George Fix. *An analysis of the finite element method*. Prentice-Hall, 1973.
- [53] D. Sumner, S. J. Price, and M. P. Paidoussis. Investigation of side by side circular cylinder in steady flow by particle velocimeter. In *Proc. 1988 AMSE Fluids Eng. Division Summer Meeting*, 1988.
- [54] Stefan Szepessy. *On the three-dimensionality of vortex shedding from a circular cylinder*. PhD thesis, Chalmers University of Technology, 1991.
- [55] J. C. Tannehill, D. A. Anderson, and Richard H. Plecher. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. Taylor & Francis, second edition, 1997.
- [56] M. A. Taylor, B. A. Wingate, and R. E. Vincent. An algorithm for computing feke points in the triangle. *SIAM J. Num Analysis*, 38:1707–1720, 2000.
- [57] Roger Temam. *Navier-Stokes equations*. North-Holland, 1984.
- [58] D. J. Tritton. *J. of Fluid Mechanics*, 6:547–567, 1959.
- [59] T. Warburton, L. F. Pavarino, and J. S. Hesthaven. A pseudo-spectral scheme for the incompressible navier-stokes equations using nodal elements. *J. of Computational Physics*, 164:1–21, 2000.
- [60] C. H. K. Williamson. Evolution of a single wake behind a pair of bluff bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, 158:1–18, 1985.
- [61] C. H. K. Williamson. Defining a universal strouhal-reynolds number relationship for the laminar vortex of a circular cylinder. *Physics of Fluids*, 31(11), 1988.
- [62] C. H. K. Williamson. The existence of two stages in the transition to the three dimensionality of cylinder wake. *Physics of Fluids*, 31(11), 1988.
- [63] C. H. K. Williamson. 2-d and 3-d aspects of the wake of a cylinder, and their relation to wake computations. In C. R. Anderson and C. Greengard, editors, *Lectures in applied Mathematics*, volume 28. American Mathematical Society, 1991.

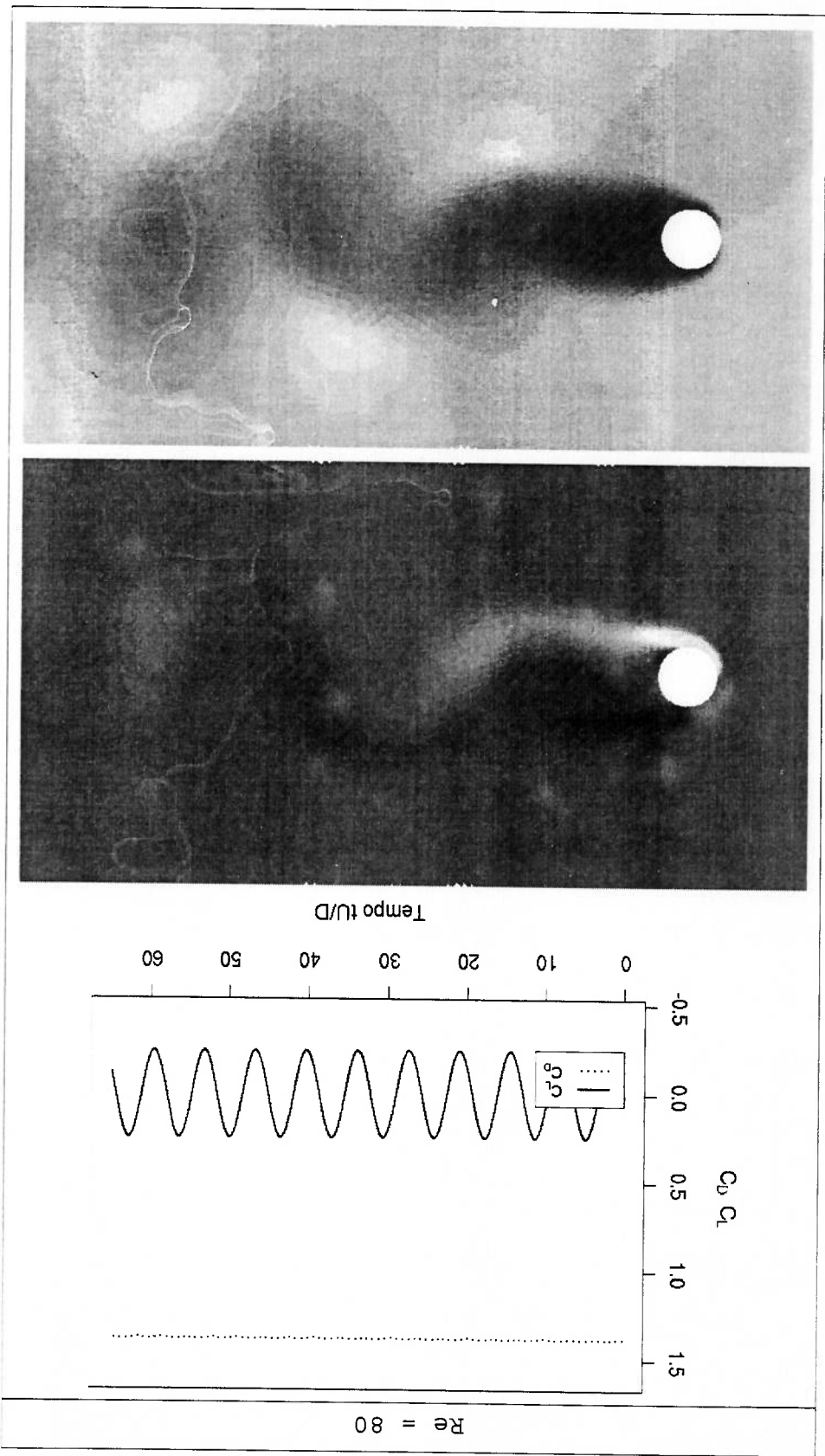
- [64] C. H. K. Williamson and G. L. Brown. A series in $1/\sqrt{Re}$ to represent the strouhal-reynolds number relationship of the cylinder wake. *Journal of Fluids and Structures*, 12:1073–1085, 1998.
- [65] M. M. Zdravkovich. Review of flow interference between two circular cylinders. *Transactions of the ASME*, December 1977.
- [66] M. M. Zdravkovich. The effects of interference between circular cylinders in cross flow. *Journal of Fluids and Structures*, 1, 1987.
- [67] O. C. Zienkiewicz, R. Lohner, K. Morgan, and J. Peraire. High speed compressible flow and other advection dominated problems in fluid dynamics. In R. H. Gallagher, G. F. Carey, J. T. Oden, and O. C. Zienkiewicz, editors, *Finite Element in Fluids volume 6*. John Wiley & Sons, 1985.
- [68] O. C. Zienkiewicz and K. Morgan. *Finite elements and approximation*. John Wiley & Sons, 1983.
- [69] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The finite element method*, volume 2. McGraw-Hill, 1991.
- [70] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The finite element method*, volume 1. McGraw-Hill, 1991.

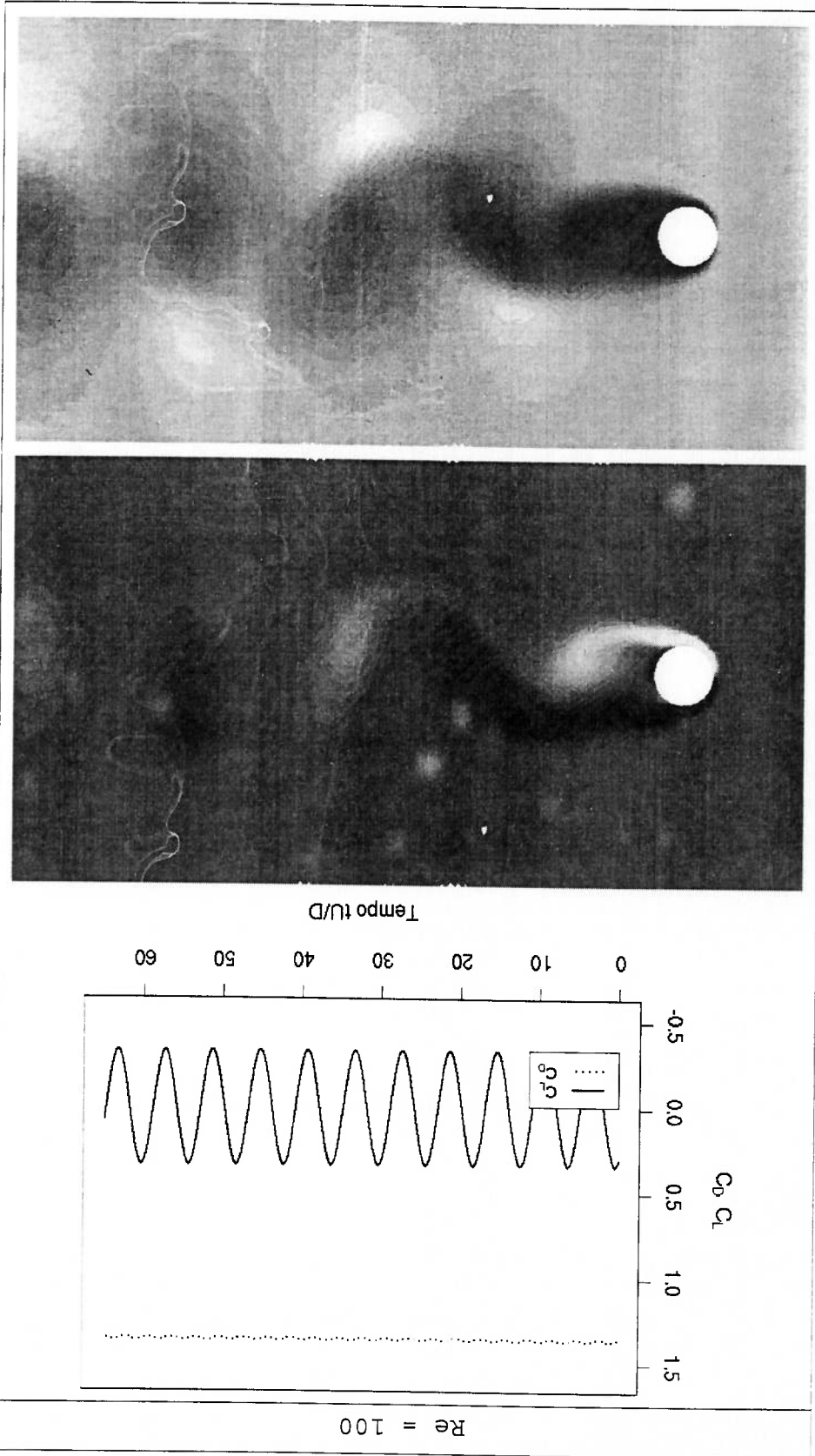
ANEXO I: Resultados numéricos obtidos para o cilindro isolado

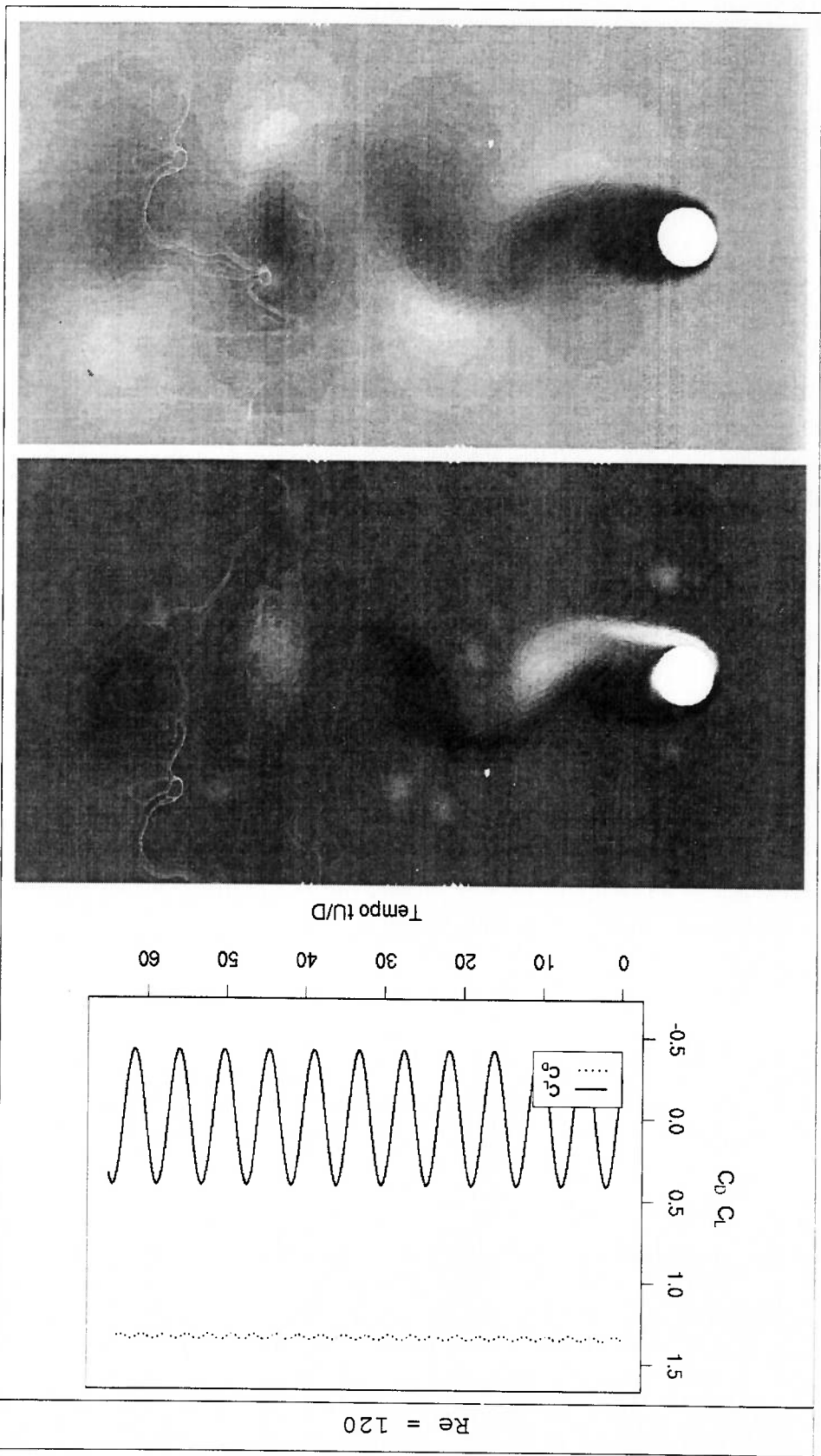
Neste anexo estão todos os resultados obtidos para um cilindro isolado. Inicialmente são apresentados os valores numéricos das figuras 4.1, 4.3 e 4.5. Em seguida são apresentados, para cada Re testado, os coeficientes de força, campo de vorticidade e campo de pressões.

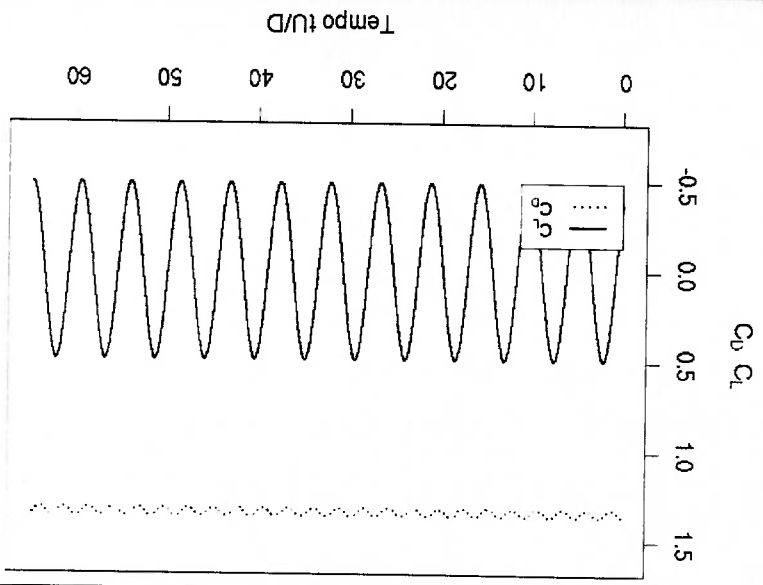
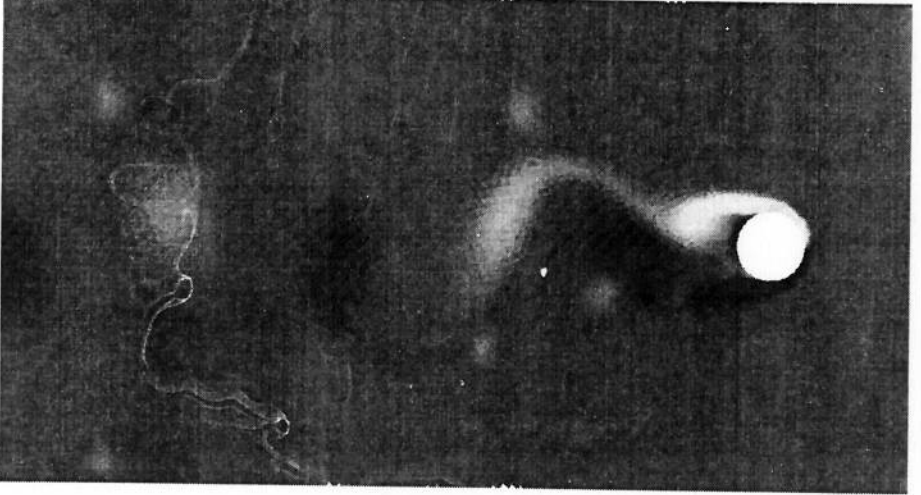
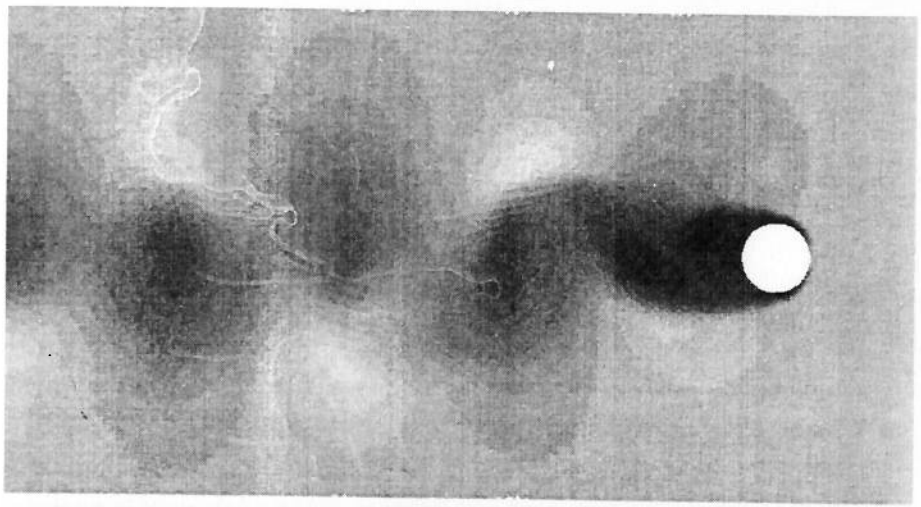
Re	C_D	S_f	$C_{L,RMS}$	Página
60	1,450	0,232	0,889	136
500	1,439	0,227	0,833	135
450	1,431	0,224	0,800	134
400	1,421	0,220	0,760	133
350	1,408	0,217	0,714	132
300	1,392	0,212	0,654	131
250	1,374	0,206	0,580	130
200	1,355	0,198	0,487	129
180	1,349	0,194	0,444	128
160	1,344	0,189	0,396	127
140	1,342	0,183	0,346	126
120	1,345	0,176	0,292	125
100	1,357	0,167	0,236	124
80	1,381	0,155	0,174	123
60	1,426	0,138	0,096	122



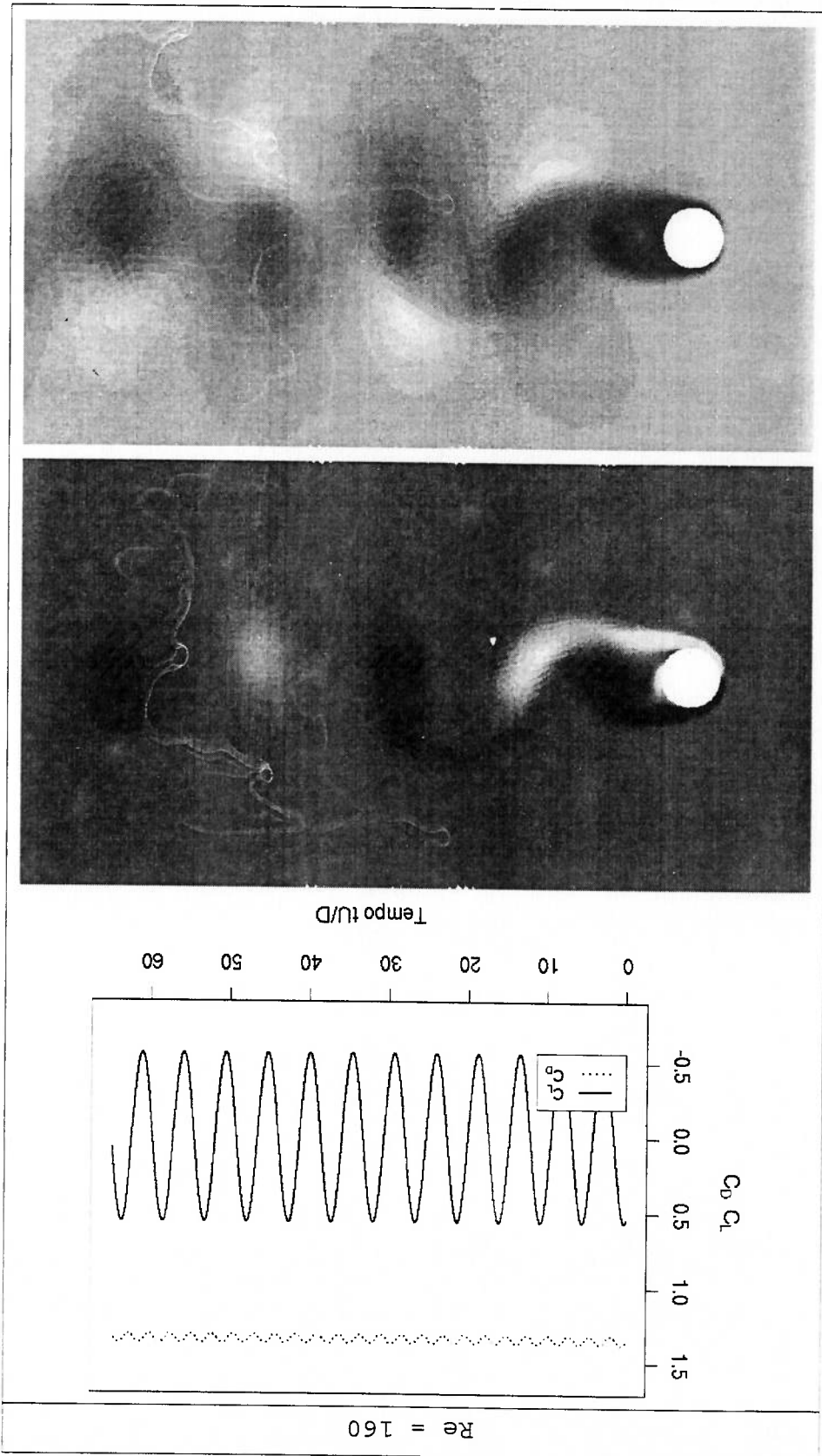


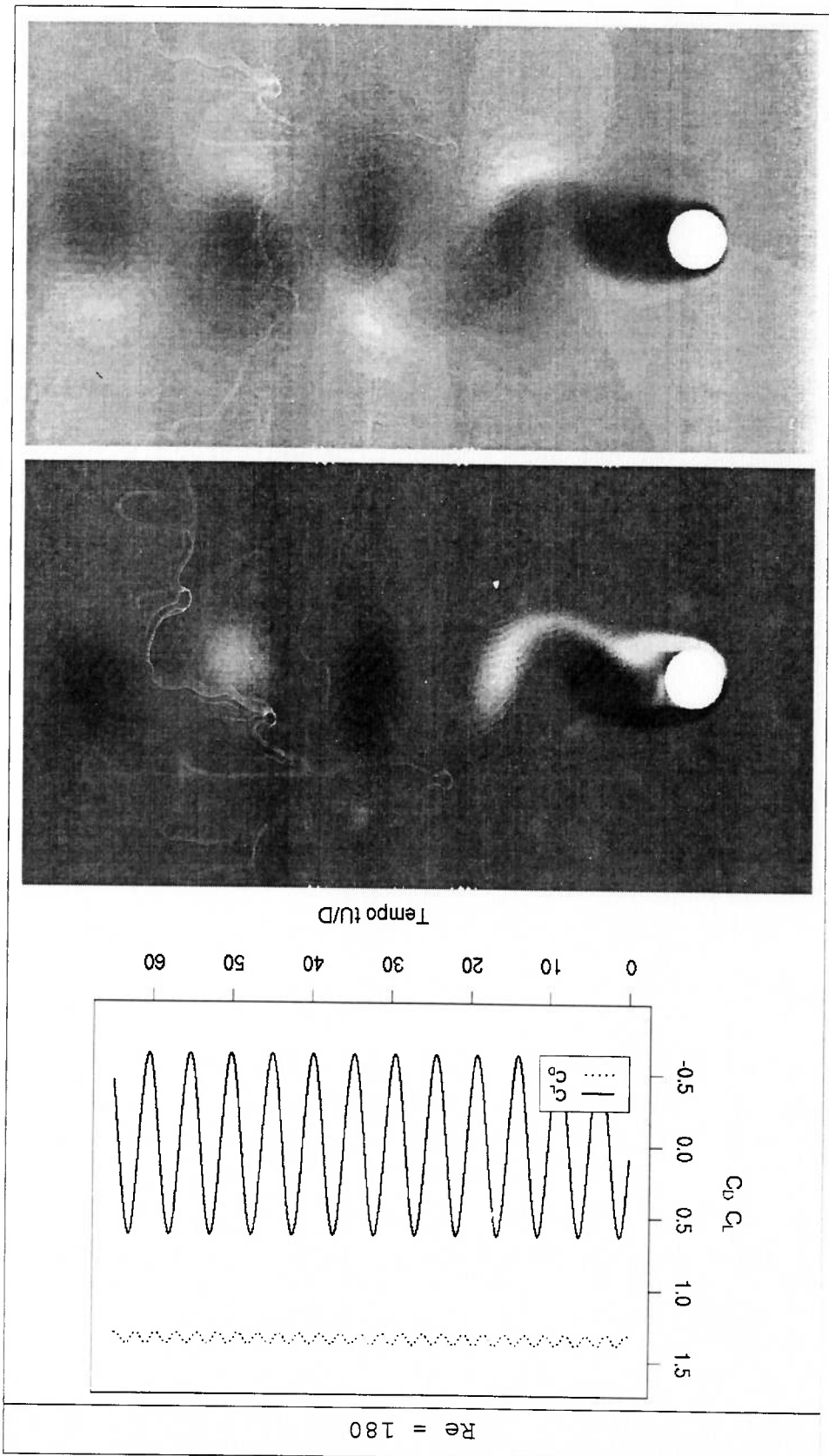


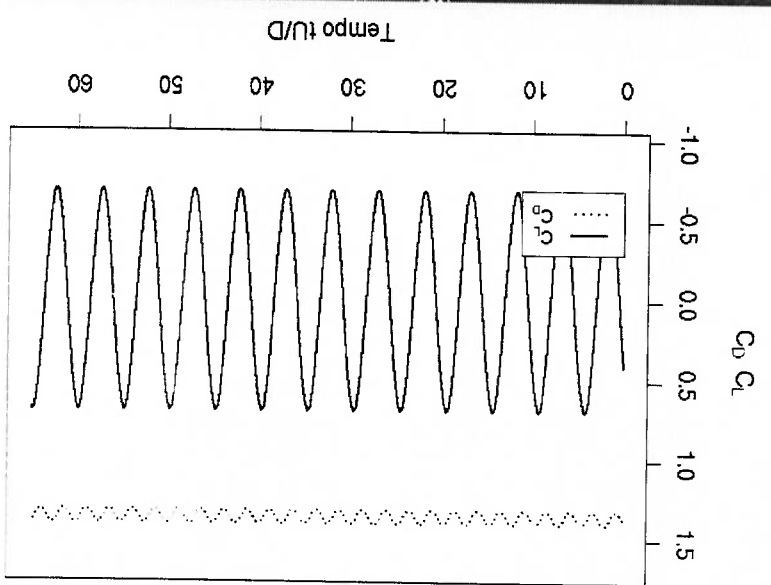
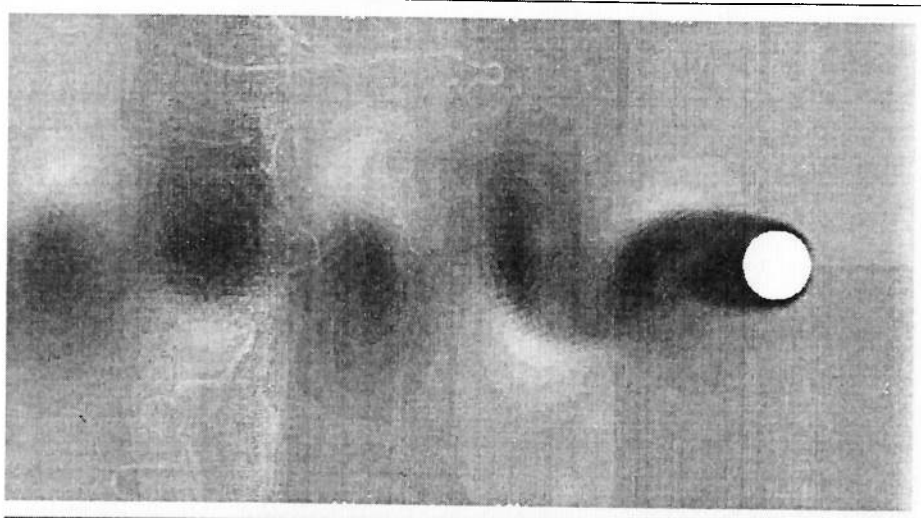




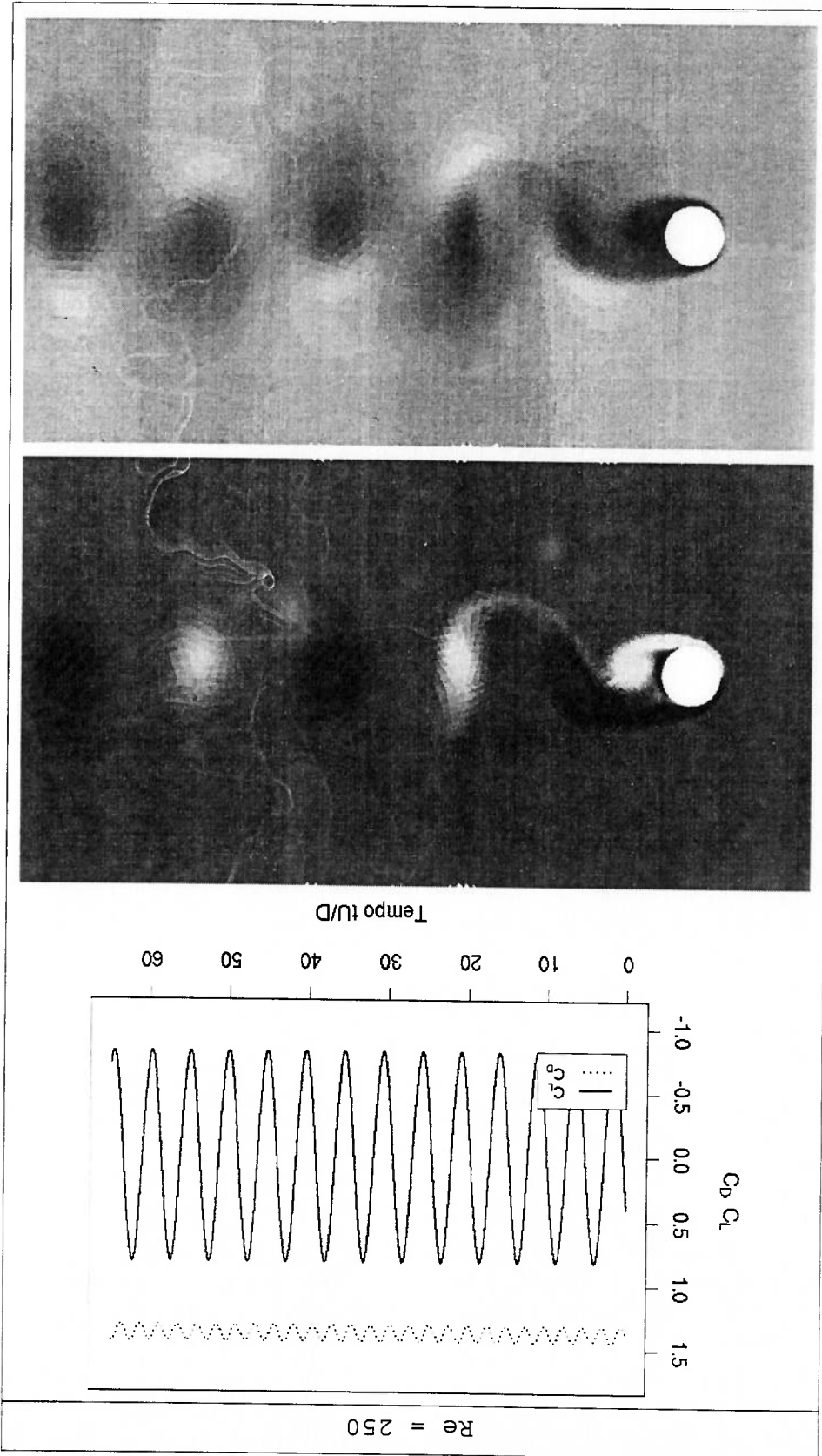
Re = 140

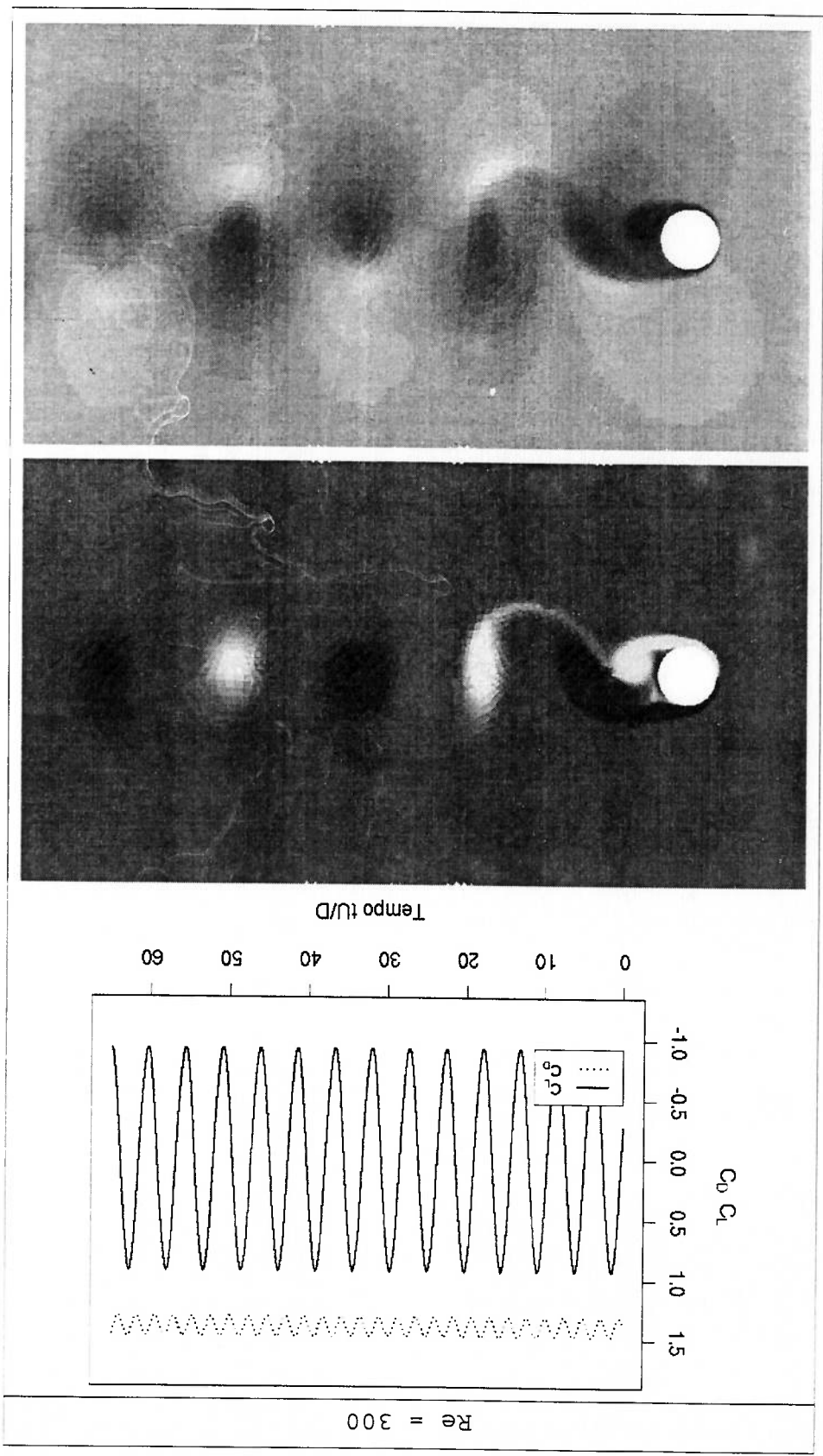


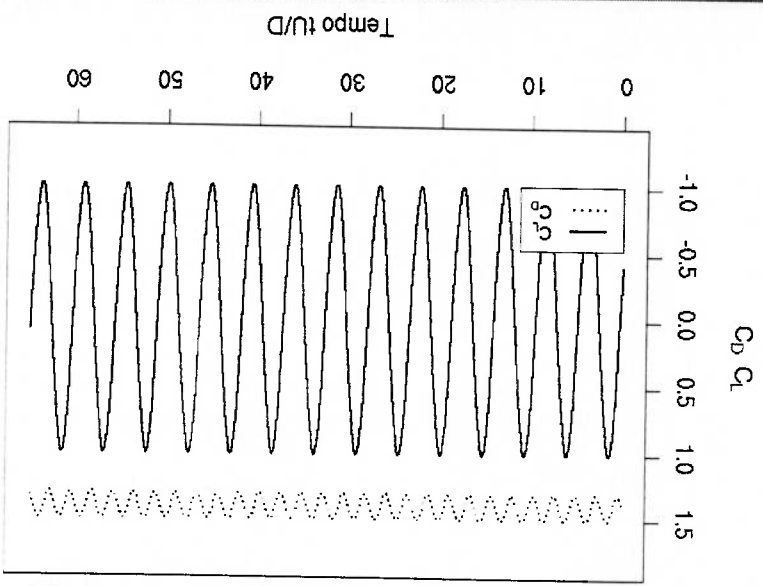
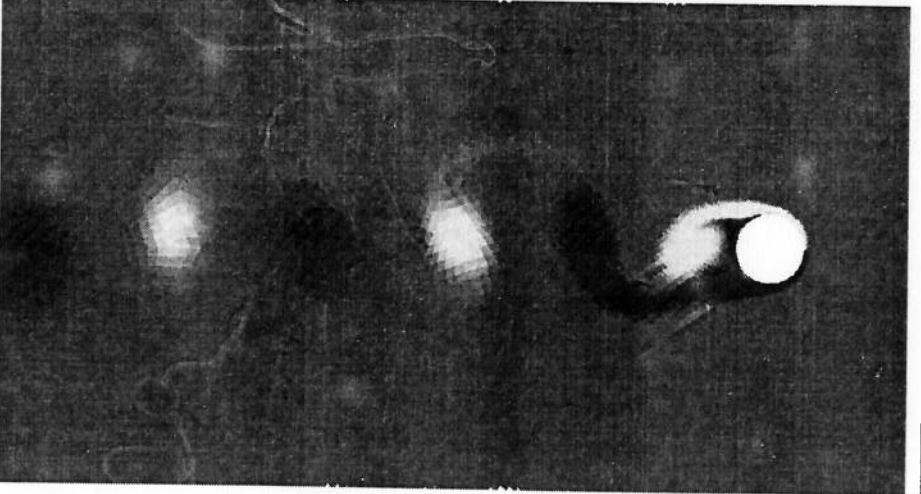




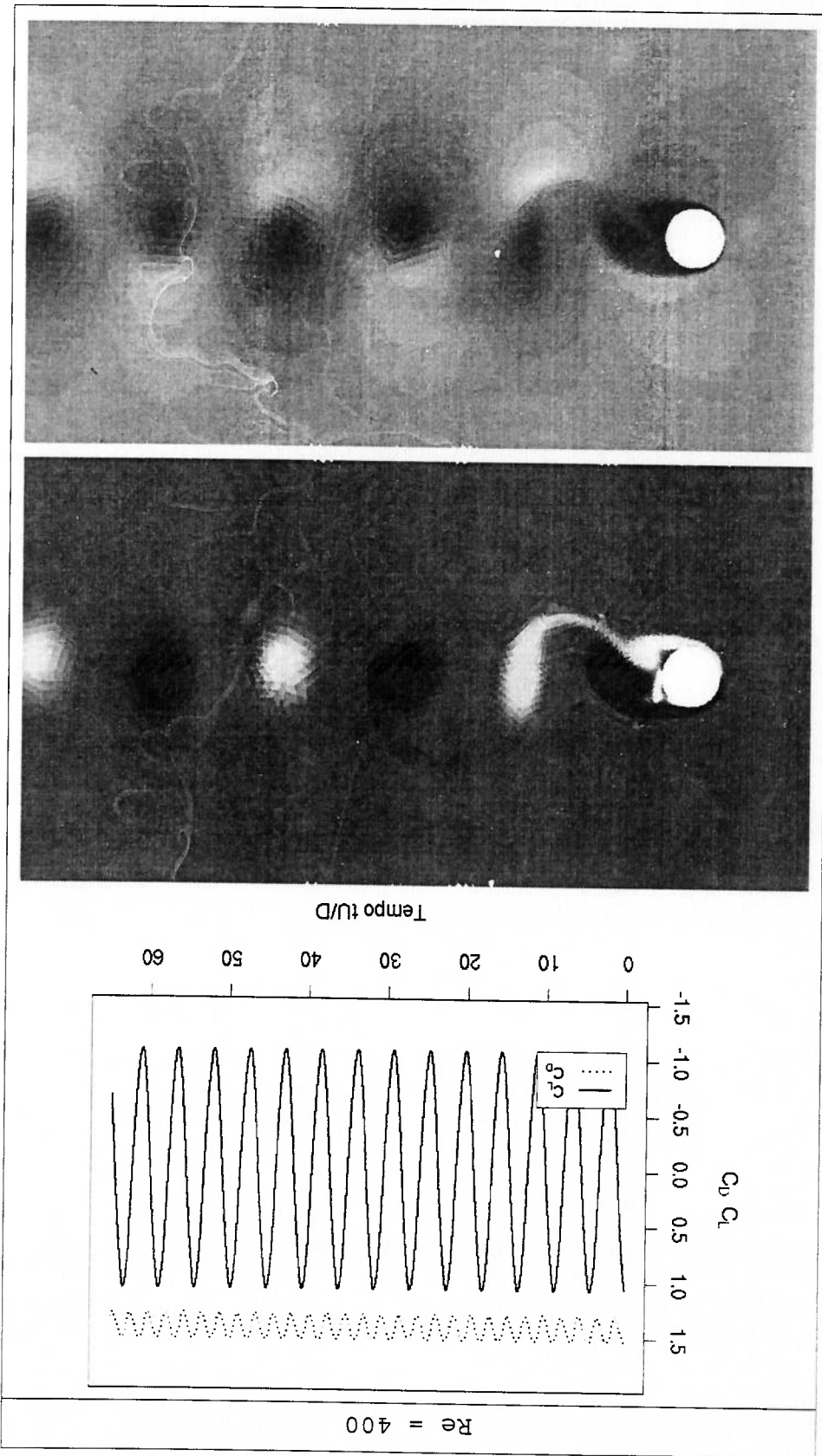
Re = 200

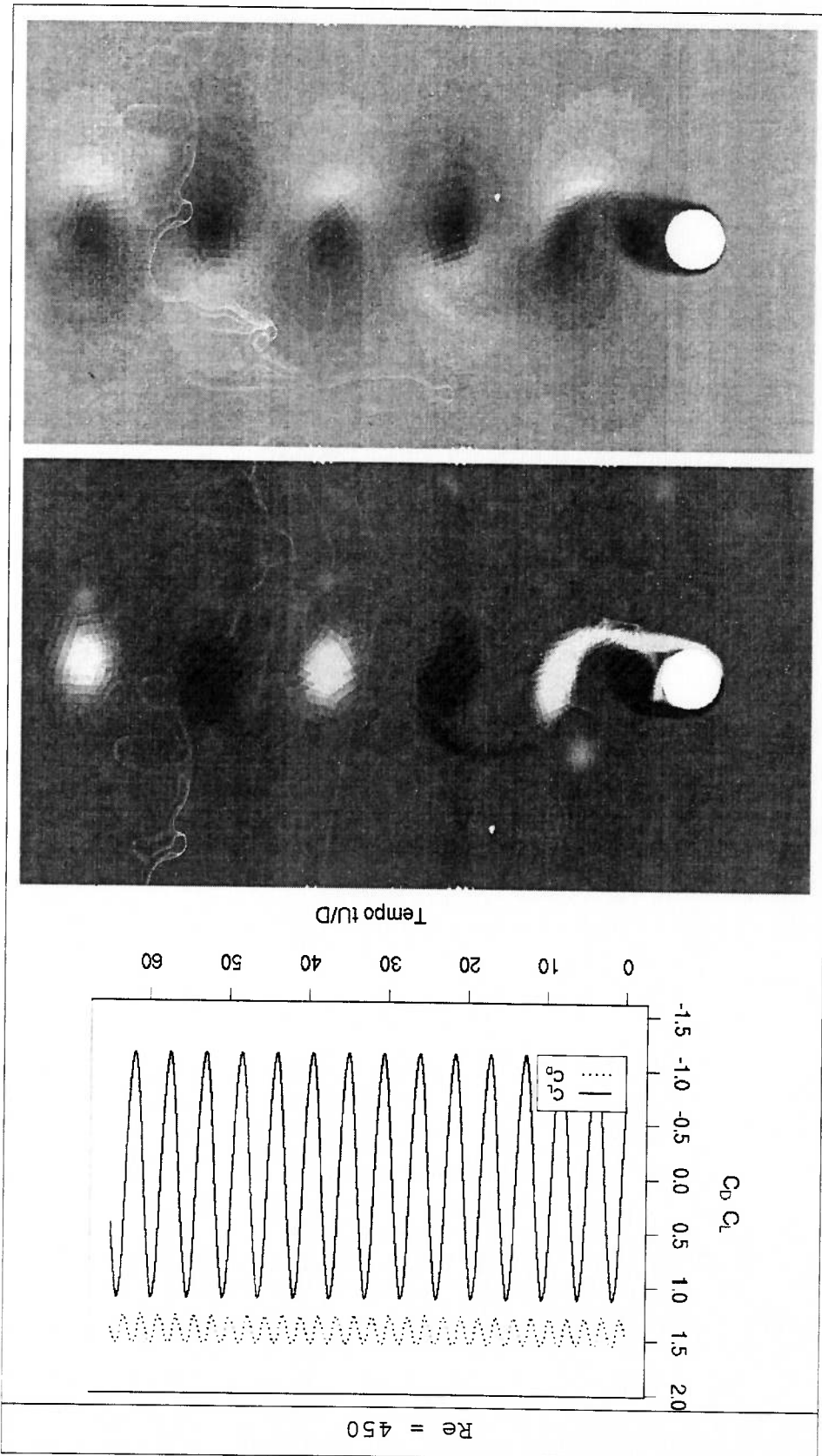


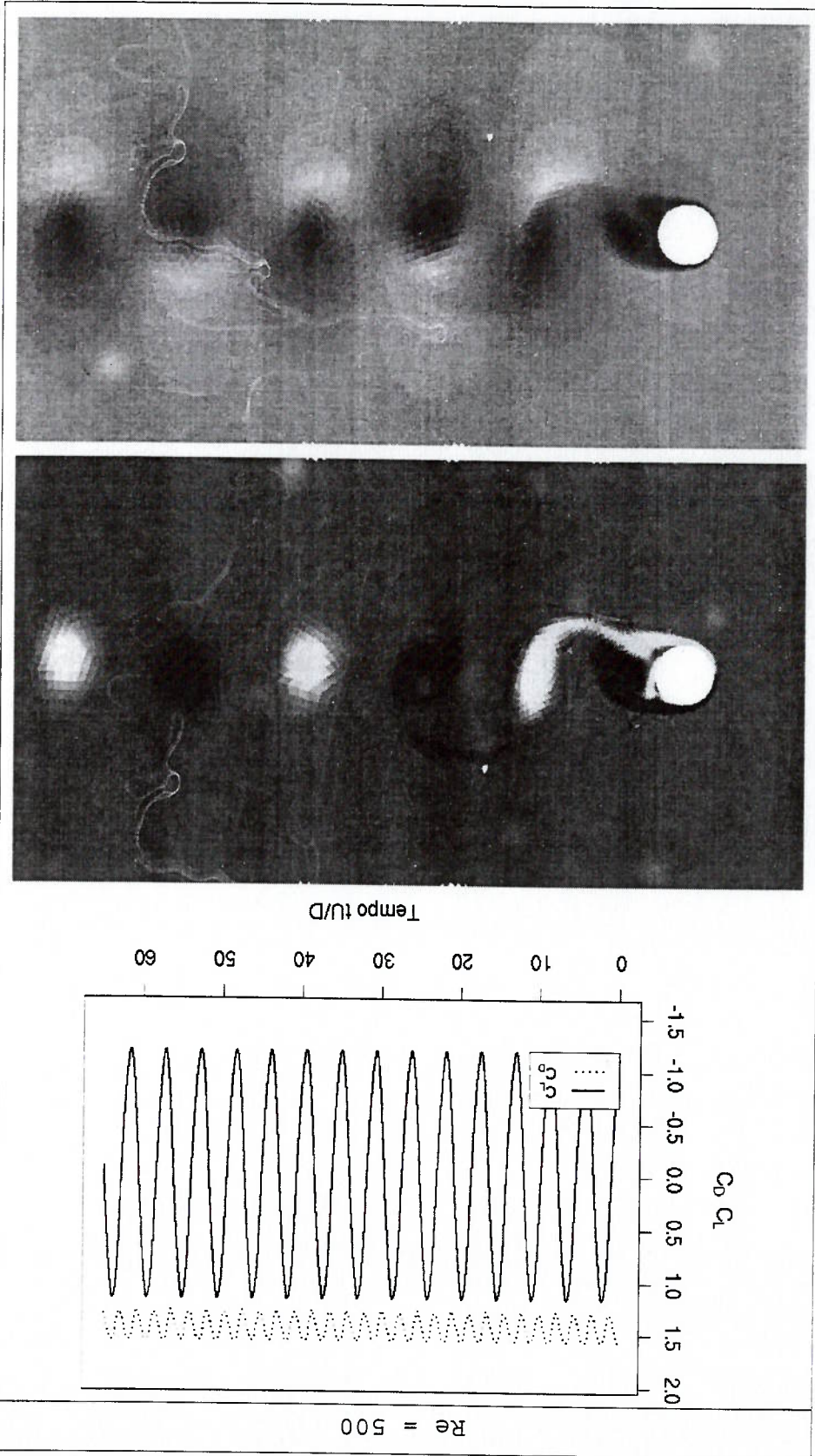


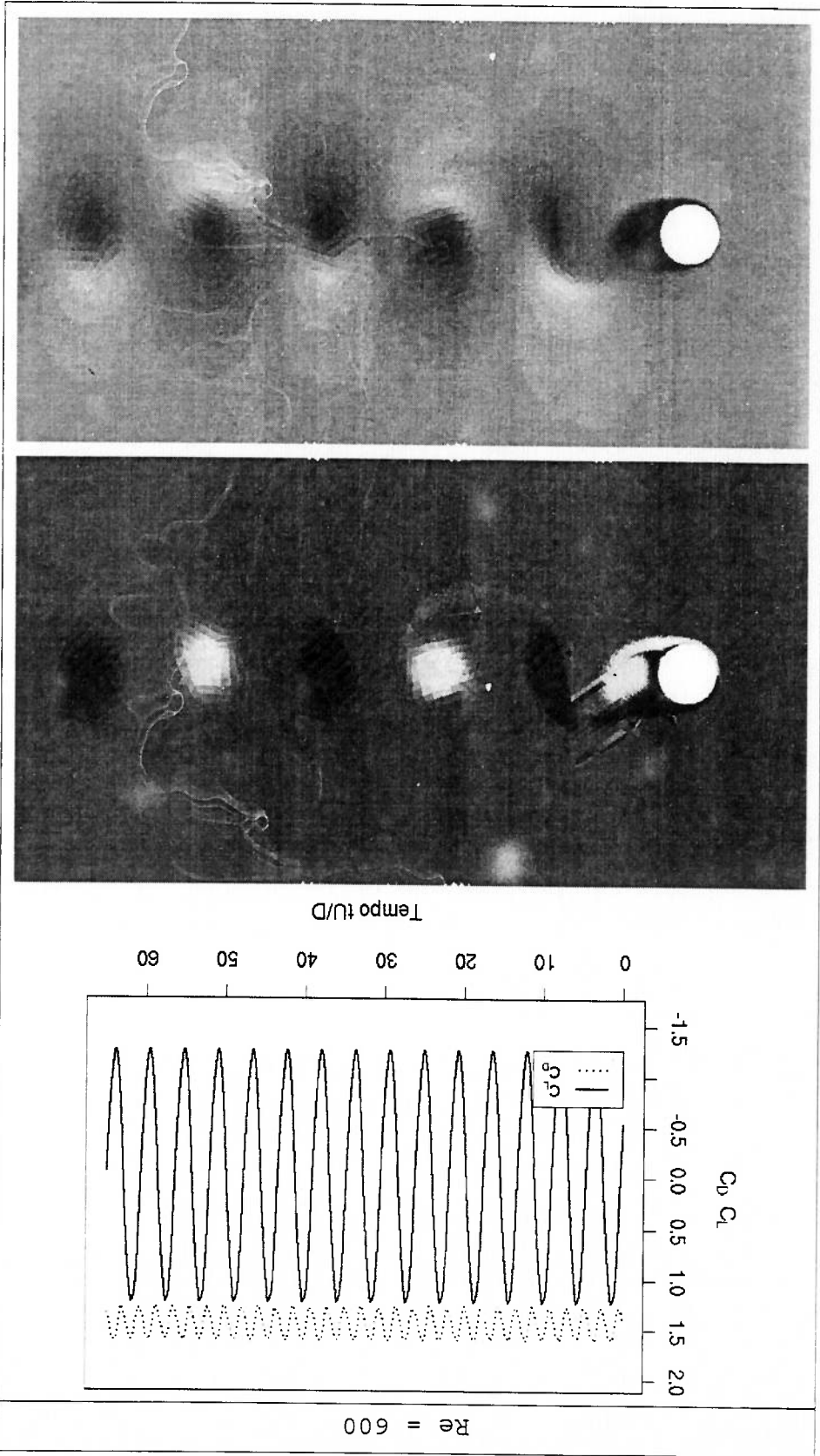


Re = 350







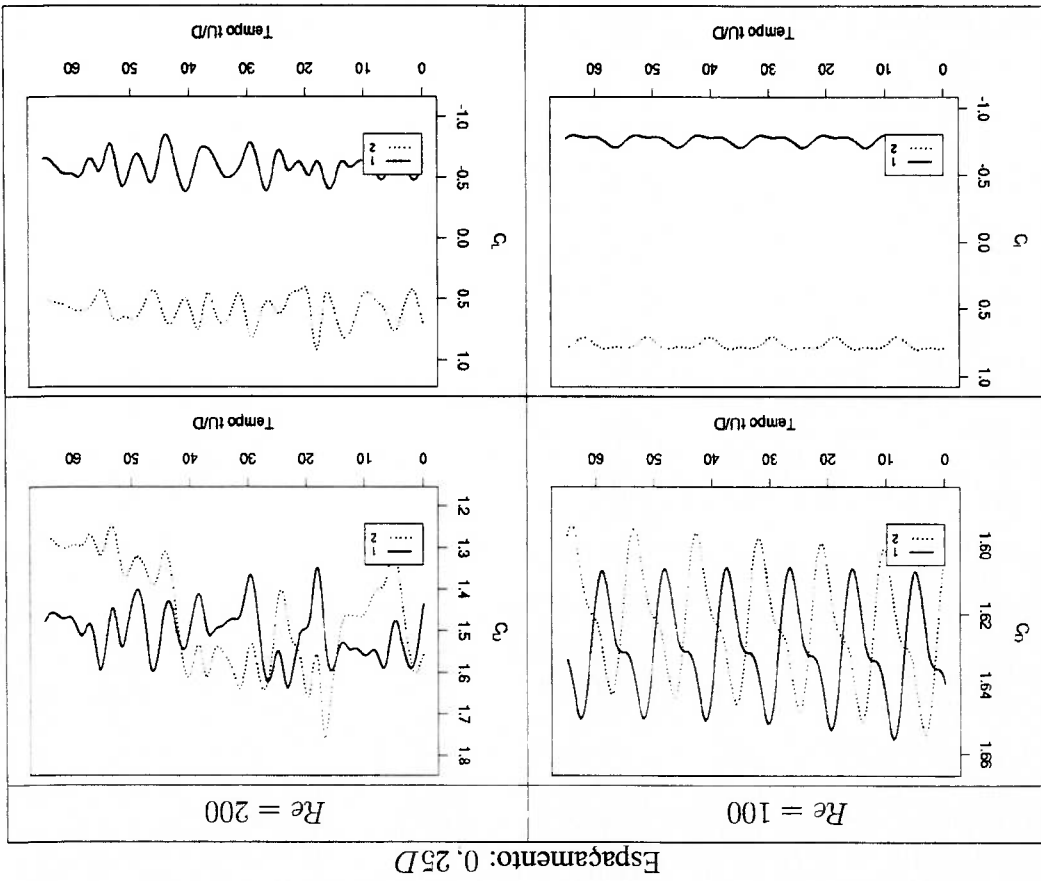
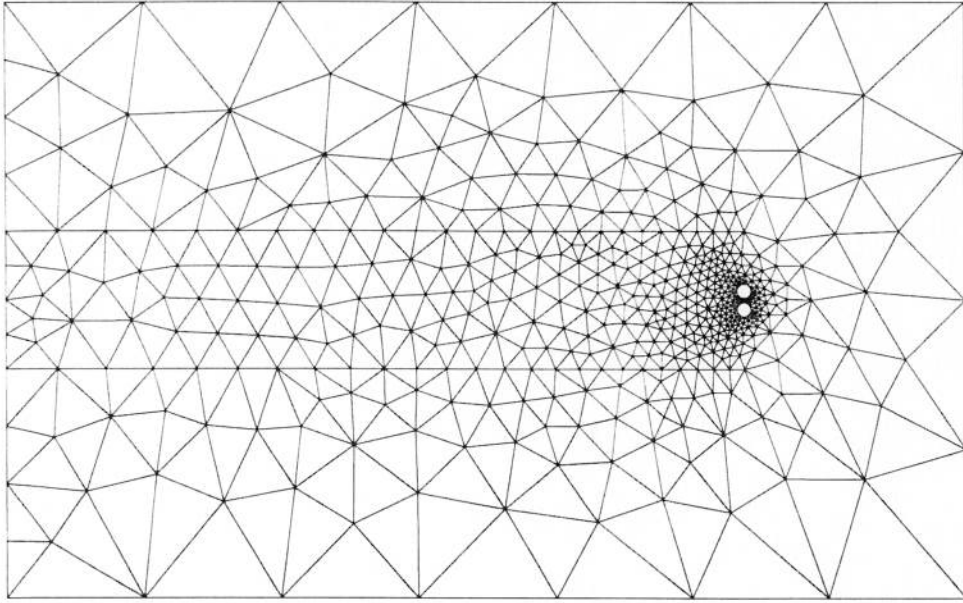


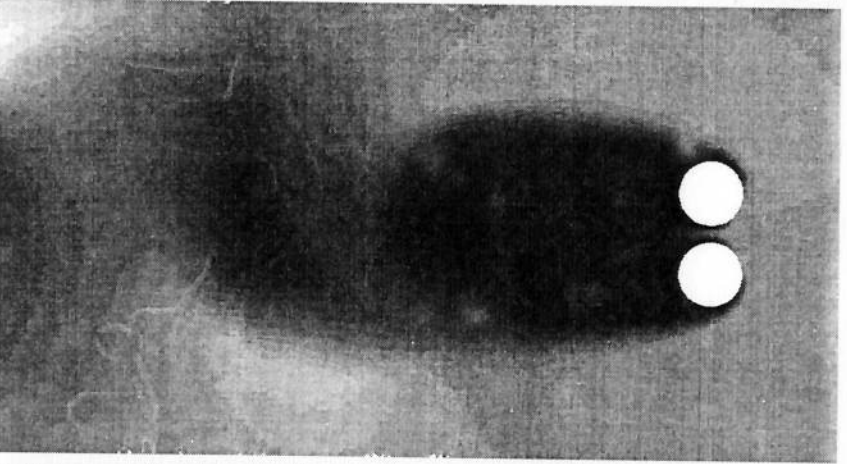
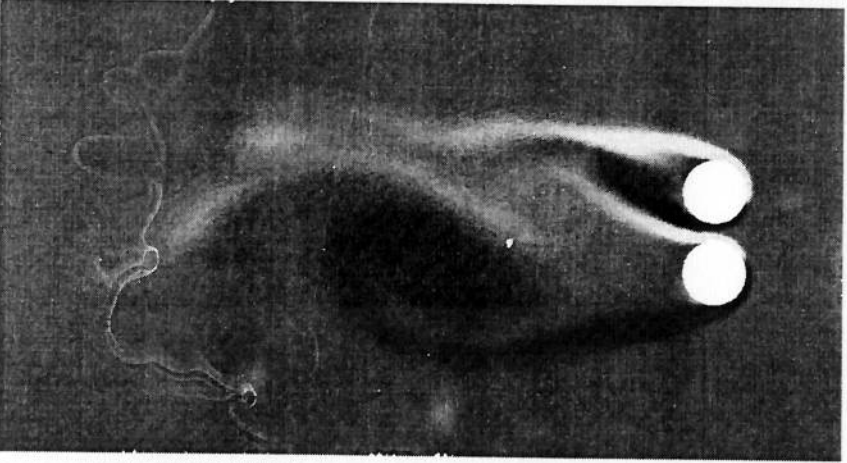
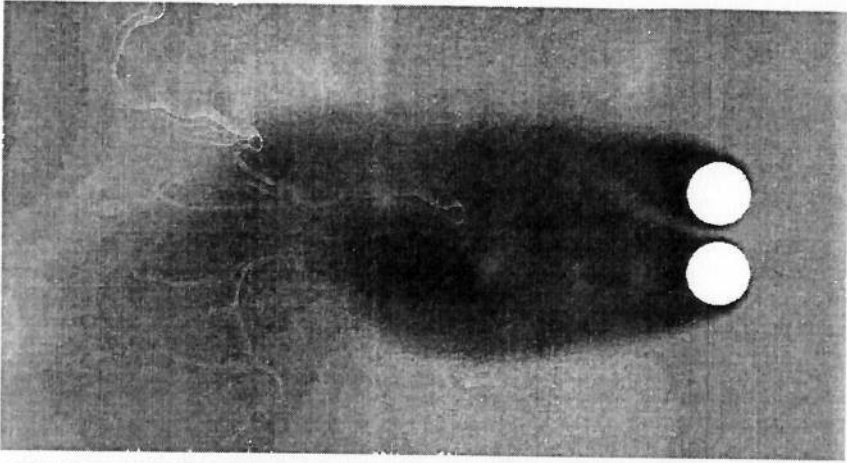
ANEXO II: Resultados numéricos obtidos para dois cilindros posicionados lado a lado

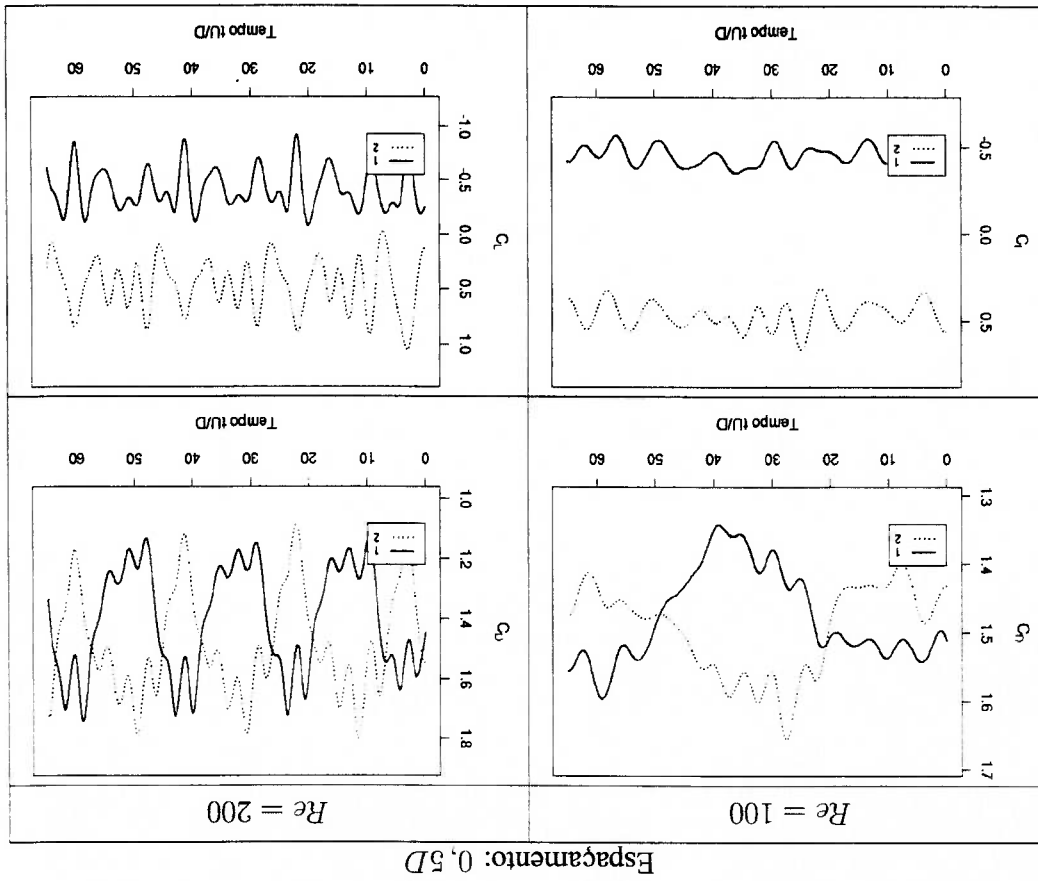
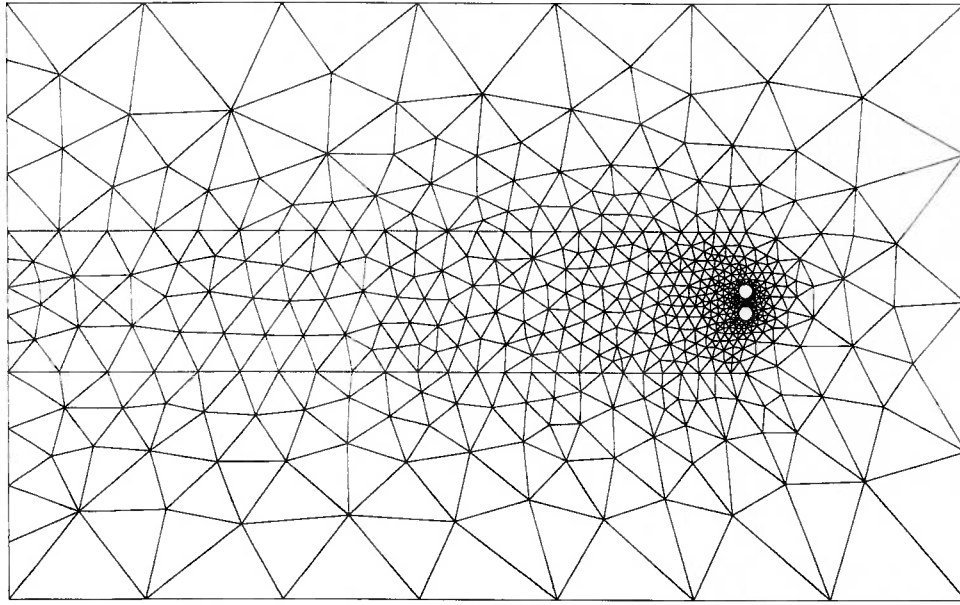
Neste anexo são apresentados todos os resultados obtidos para o escoamento ao redor de dois cilindros posicionados em linha. Inicialmente são apresentados os dados utilizados para plotar as figuras 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14. Observe que apenas são mostrados os resultados obtidos para um cilindro já que foi feita uma média temporal dos coeficientes de força e, nos dois cilindros, os resultados são muito próximos (mesmo para espaçamentos pequenos).

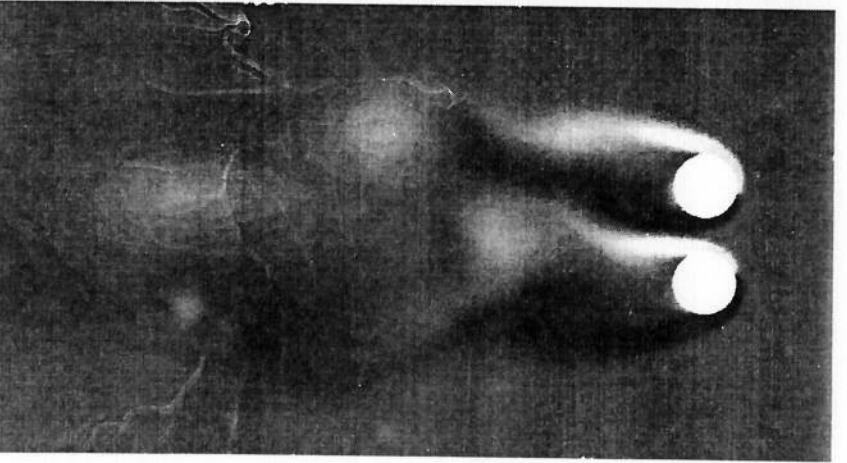
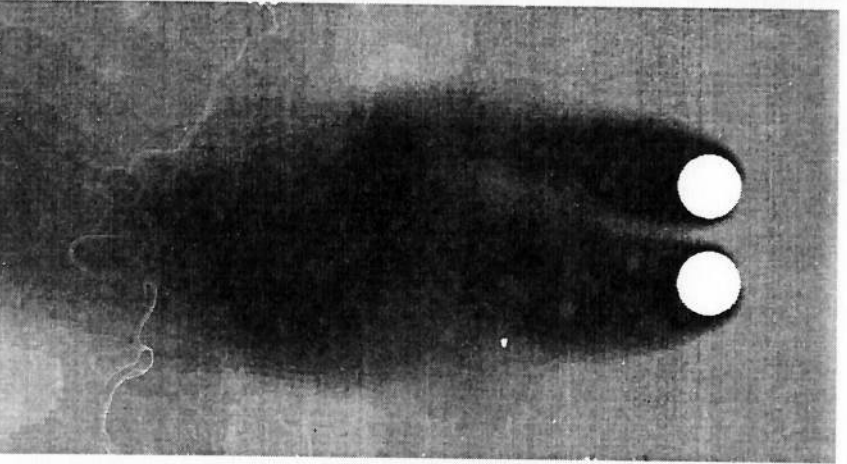
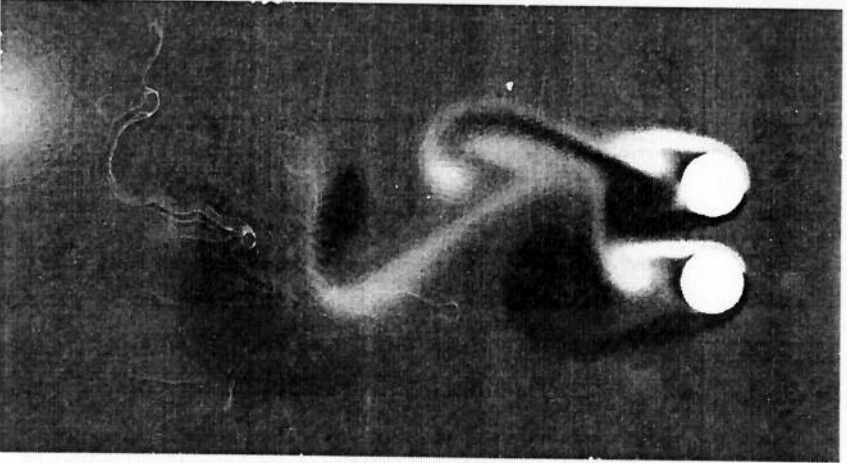
Os resultados obtidos para cada espaçamento são apresentados em duas páginas cada espaçamento: Na primeira são mostrados os coeficientes de força e malha para cada espaçamento: Primeira linha C_D , segunda linha C_L . Na segunda página, a primeira figura é o campo de vorticidade $Re = 100$, a segunda é o campo de pressões, $Re = 100$, a terceira é o campo de vorticidade, $Re = 200$ e a quarta é o campo de pressões $Re = 200$. Observe que nestas plotagens de campos, as cores escuras são as de menor valor.

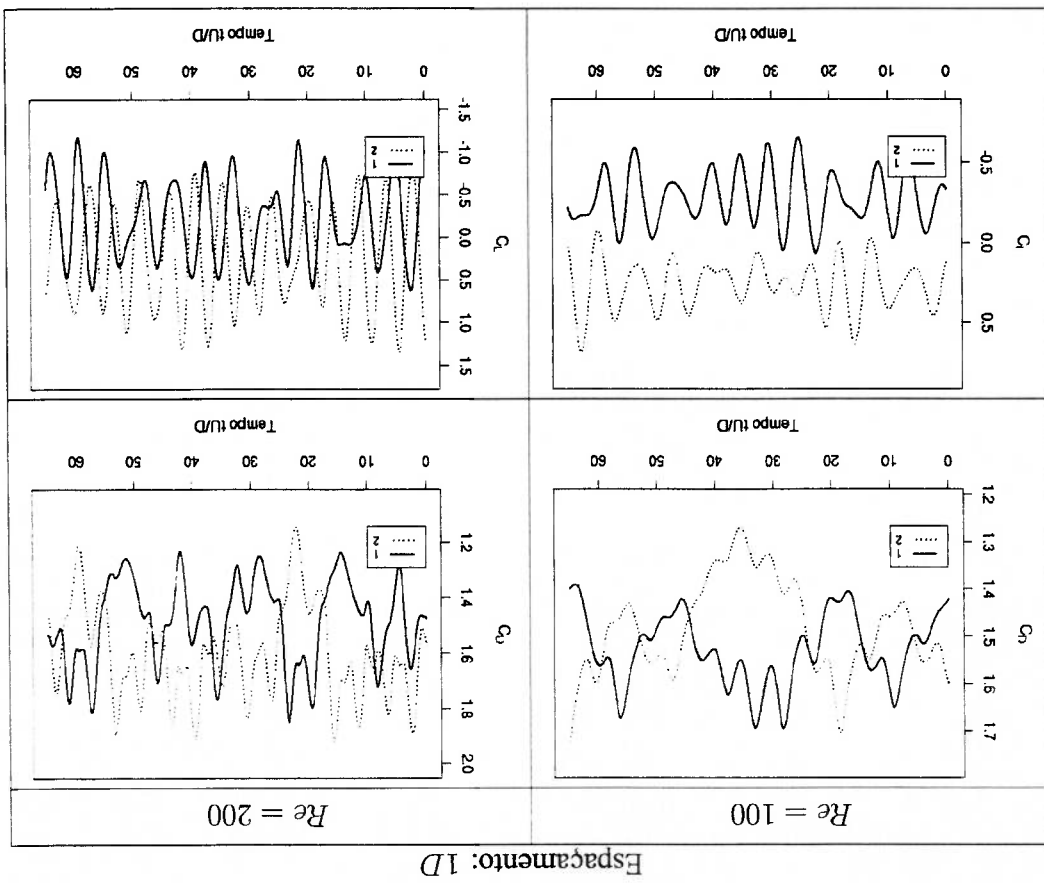
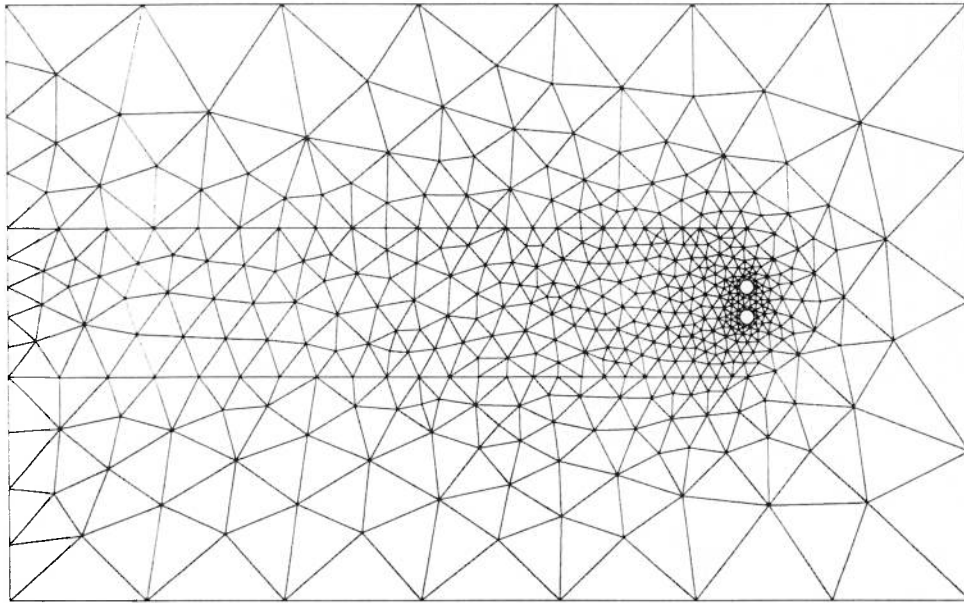
Esp	$C_{D,100}$	S_{t100}	$C_{L,100}$	$C_{L,RMS,100}$	$C_{D,200}$	S_{t200}	$C_{L,200}$	$C_{L,RMS,200}$	Pág
0,25	1,622	0,185	0,764	0,028	1,482	0,130	0,601	0,091	138
0,5	1,503	0,163	0,467	0,069	1,506	0,150	0,452	0,242	140
1	1,502	0,190	0,276	0,161	1,561	0,180	0,223	0,507	142
1,5	1,526	0,180	0,181	0,212	1,571	0,213	0,121	0,643	144
2	1,544	0,185	0,122	0,346	1,528	0,212	0,089	0,592	146
2,5	1,514	0,182	0,092	0,319	1,494	0,210	0,067	0,550	148
3	1,489	0,180	0,072	0,295	1,468	0,208	0,051	0,521	150
4	1,454	0,176	0,048	0,267	1,435	0,206	0,033	0,490	152
5	1,432	0,174	0,034	0,255	1,416	0,204	0,024	0,476	154

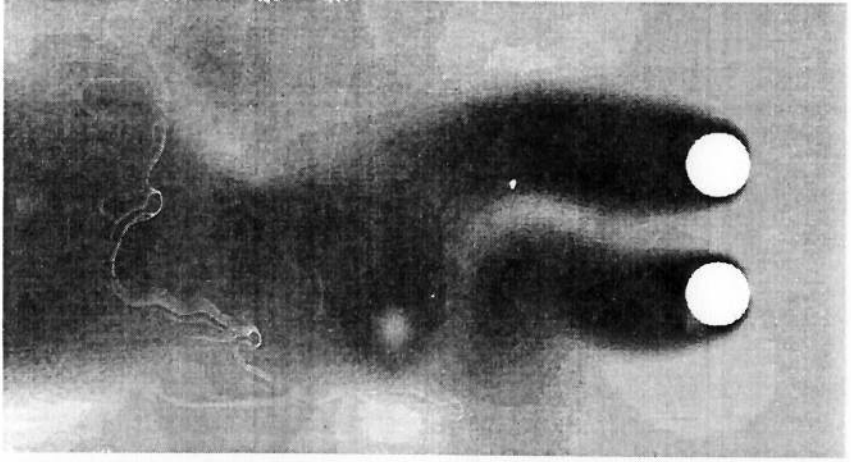
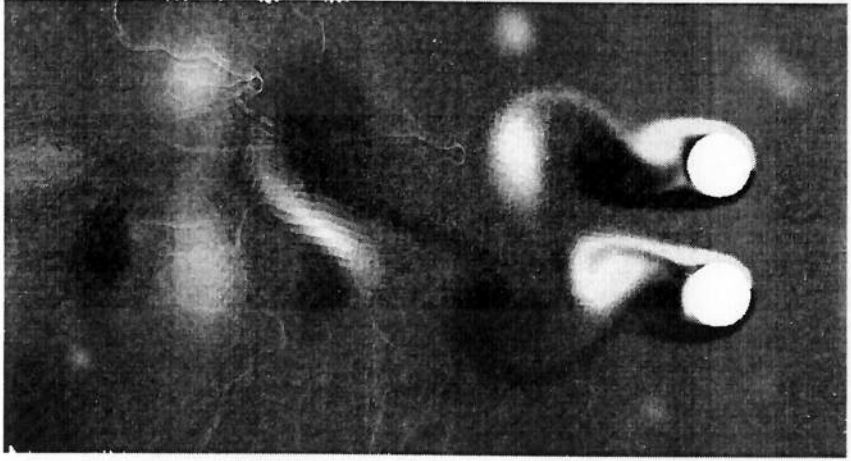
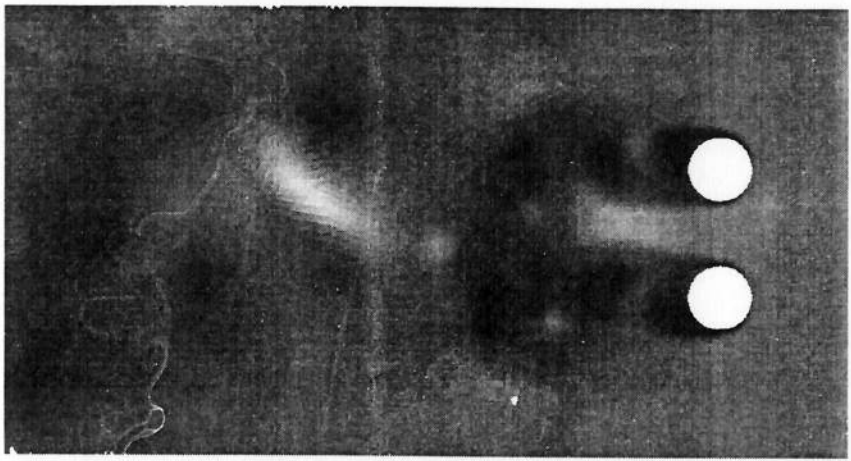


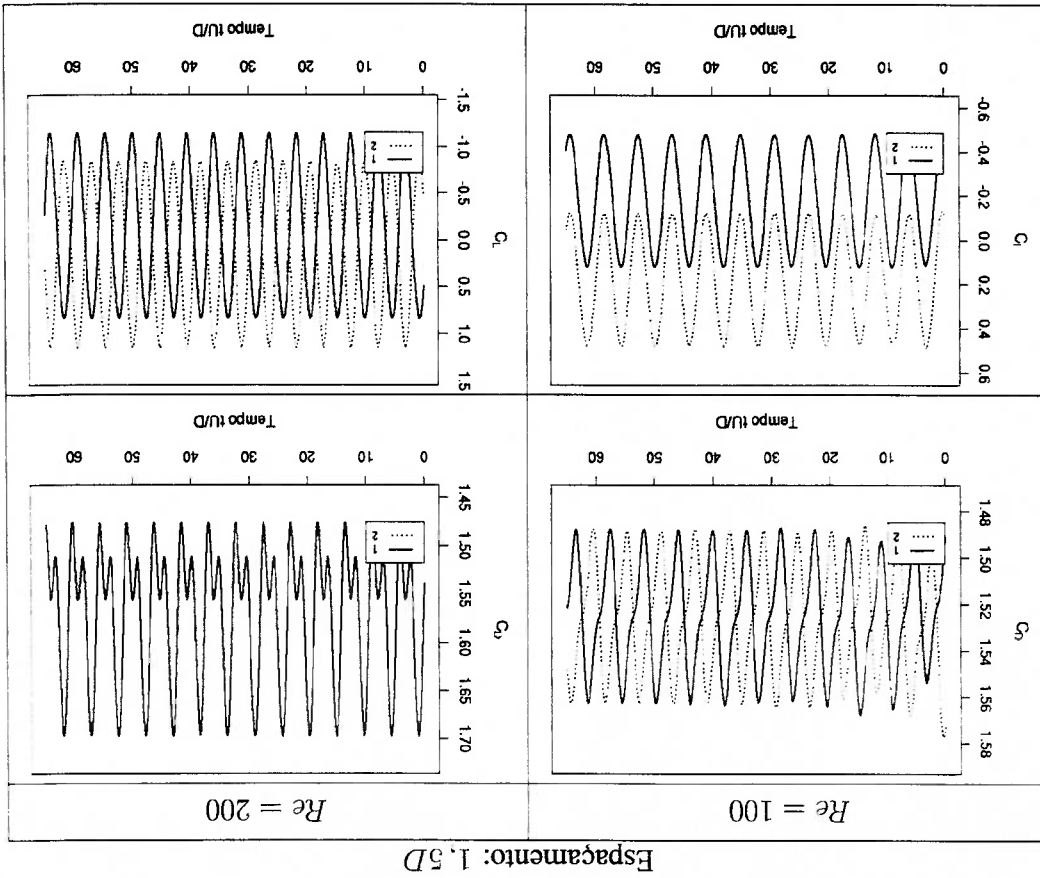
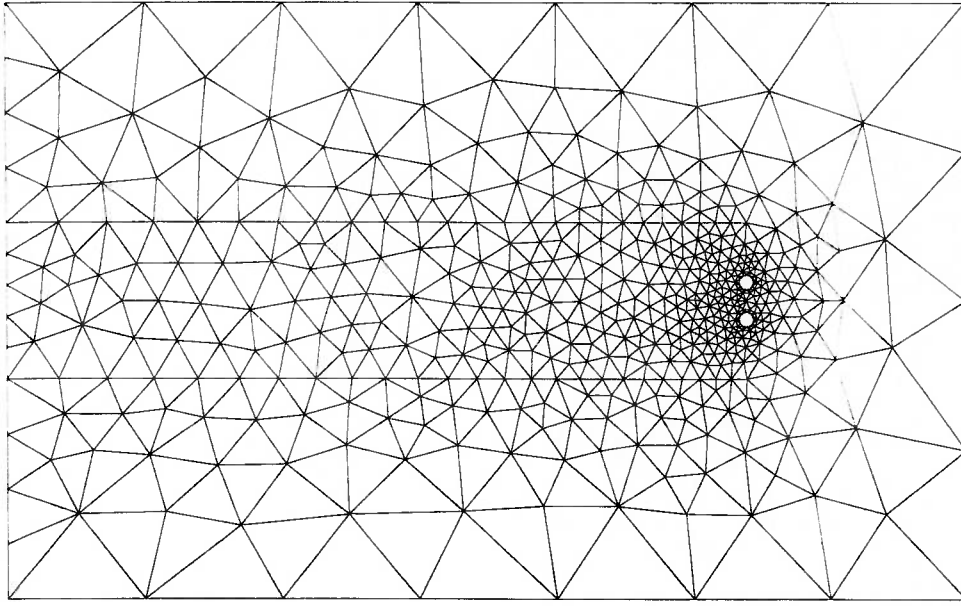


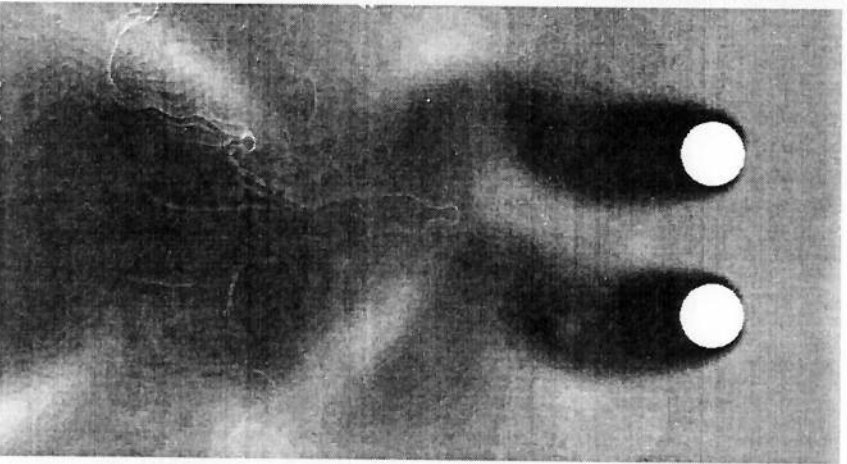
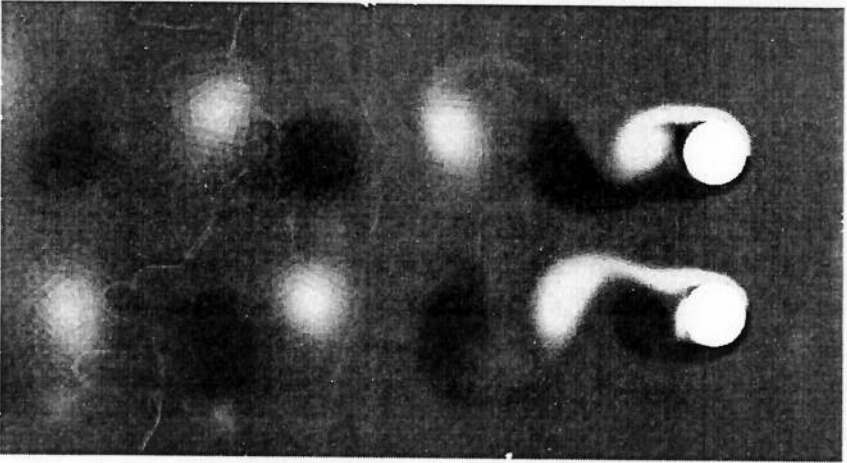
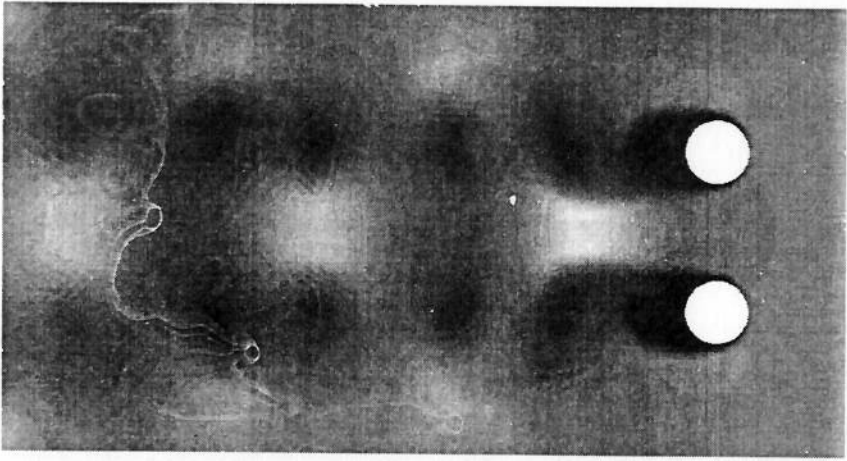


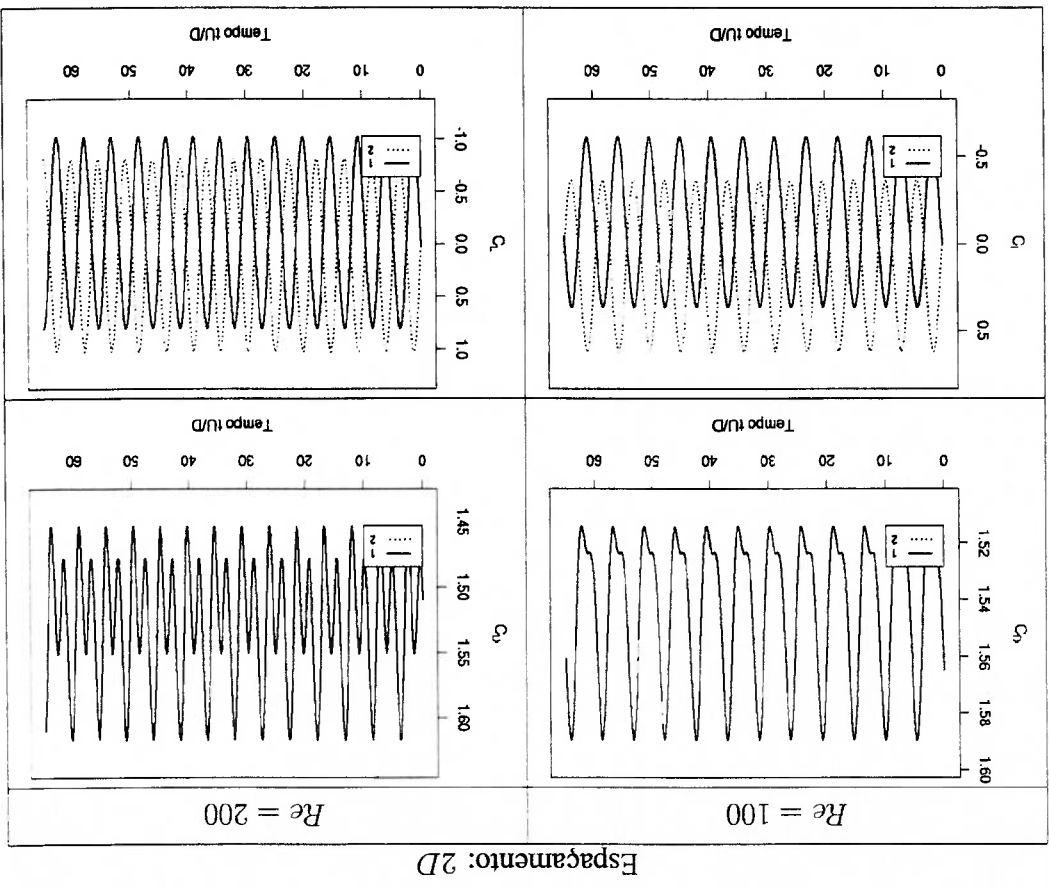
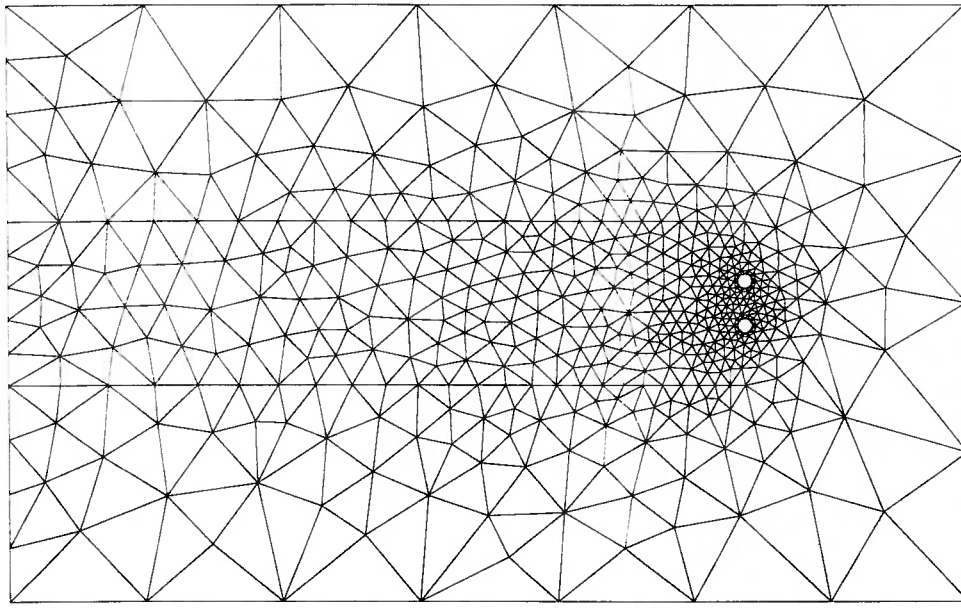


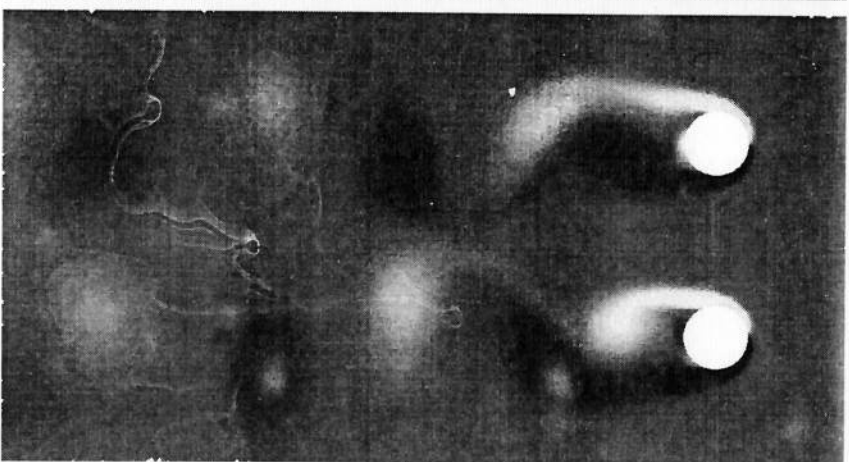
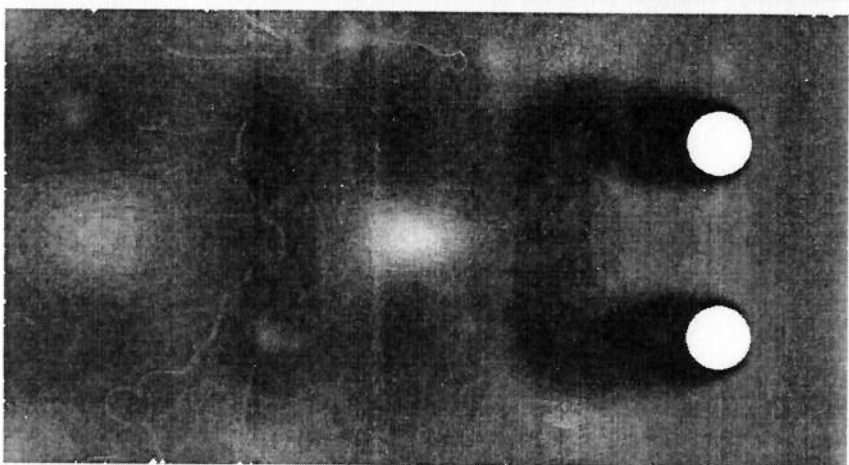
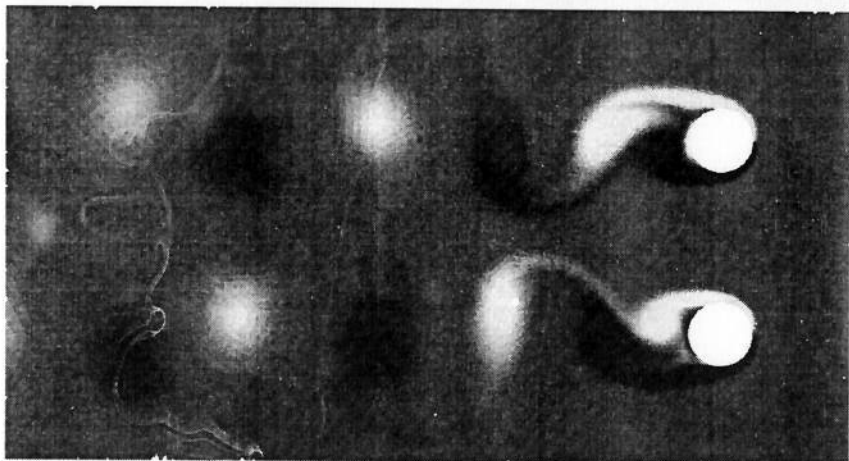
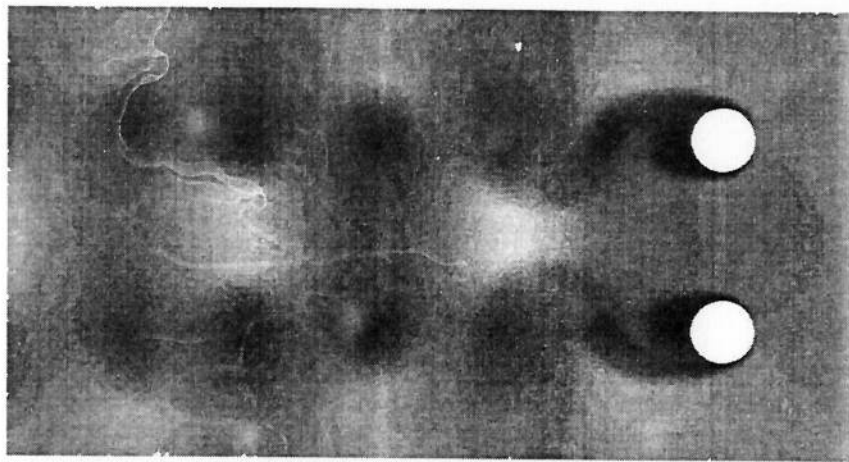


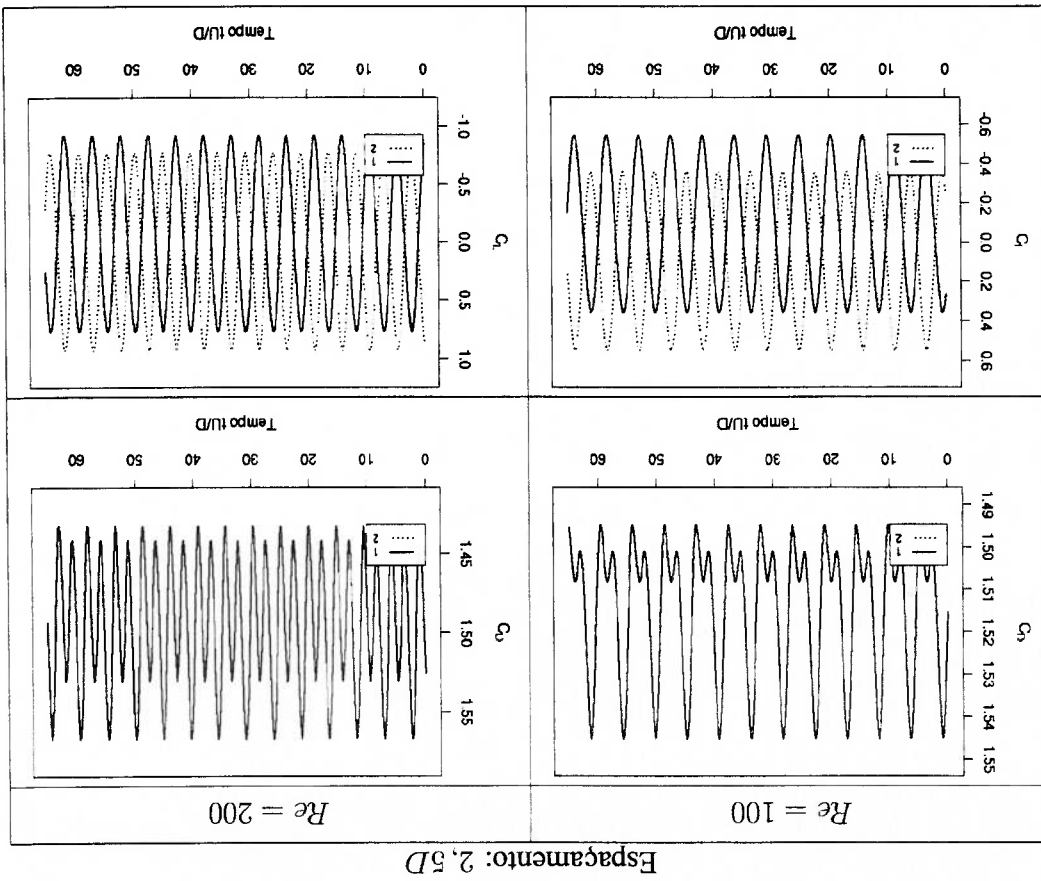
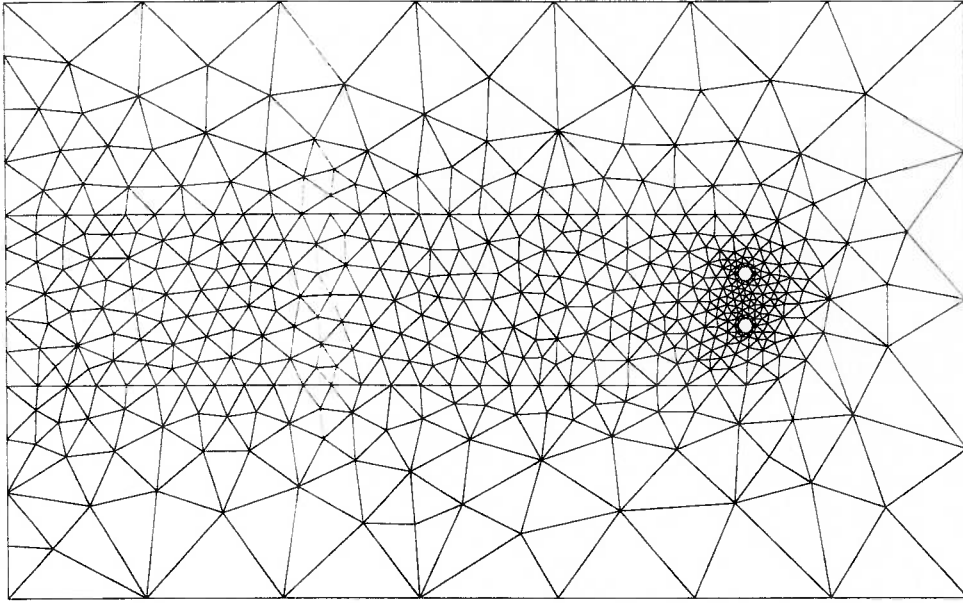


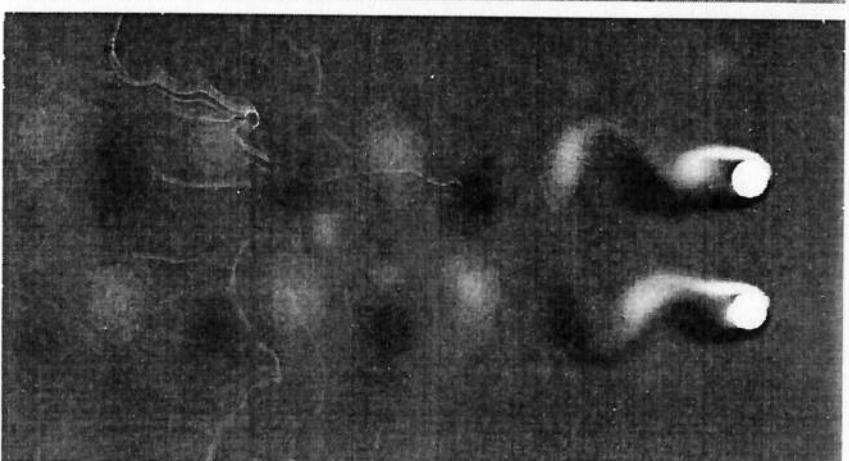
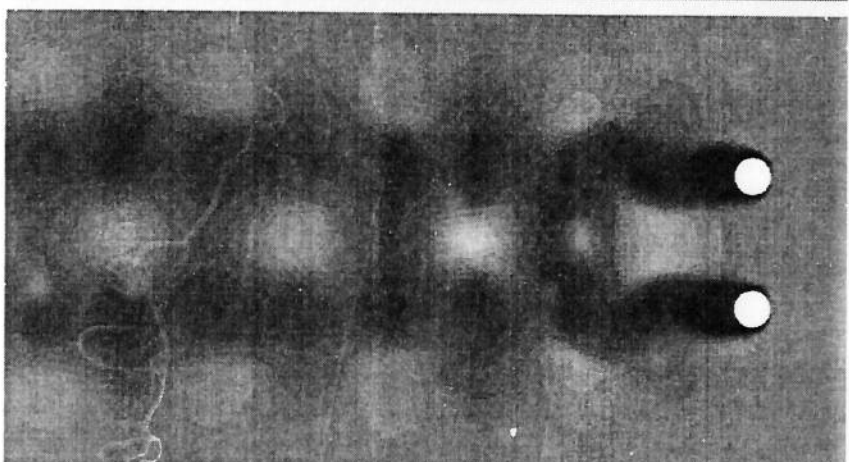
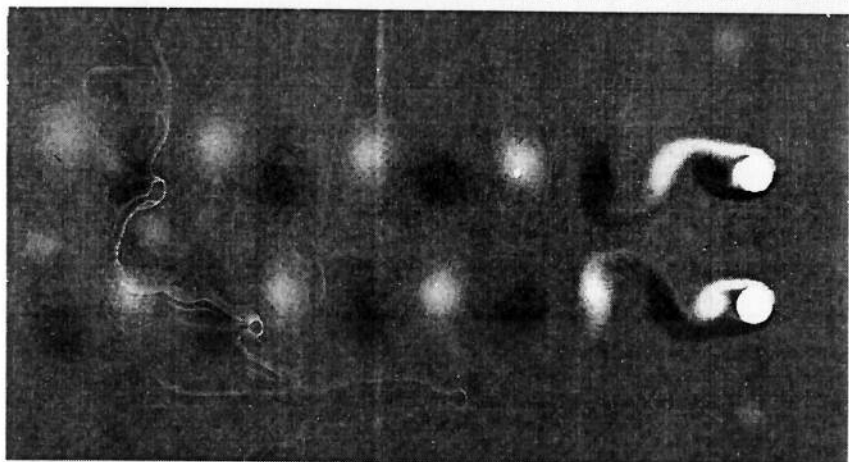
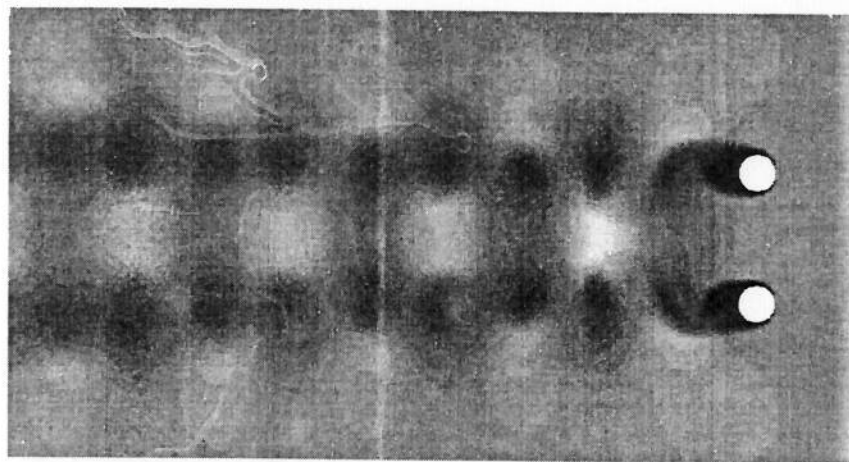


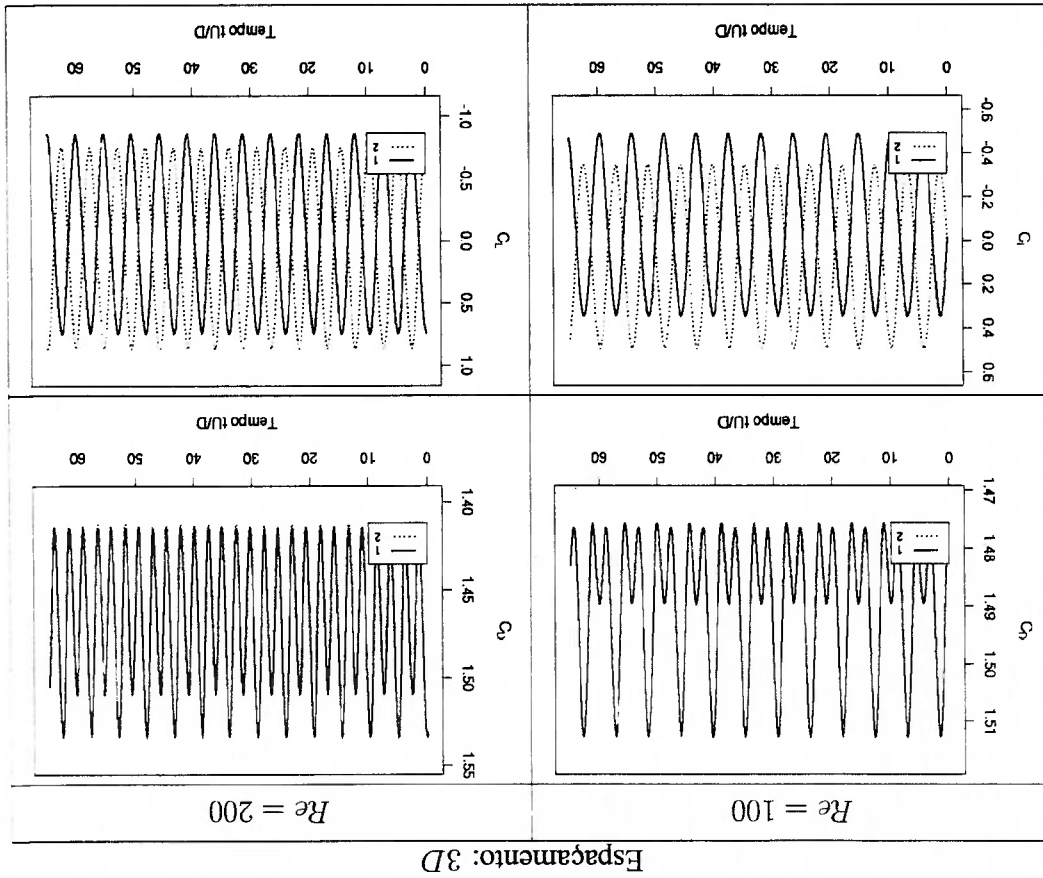
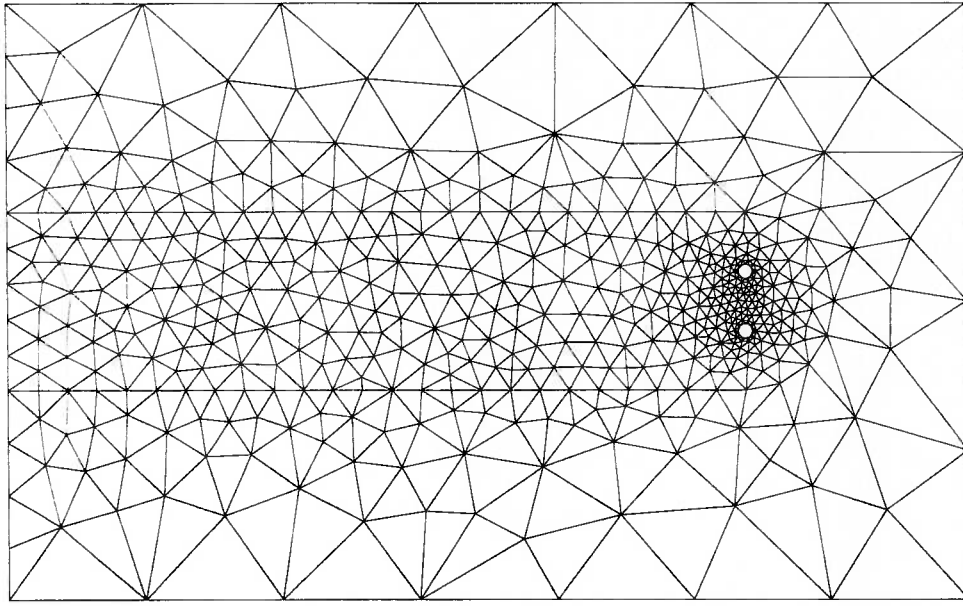


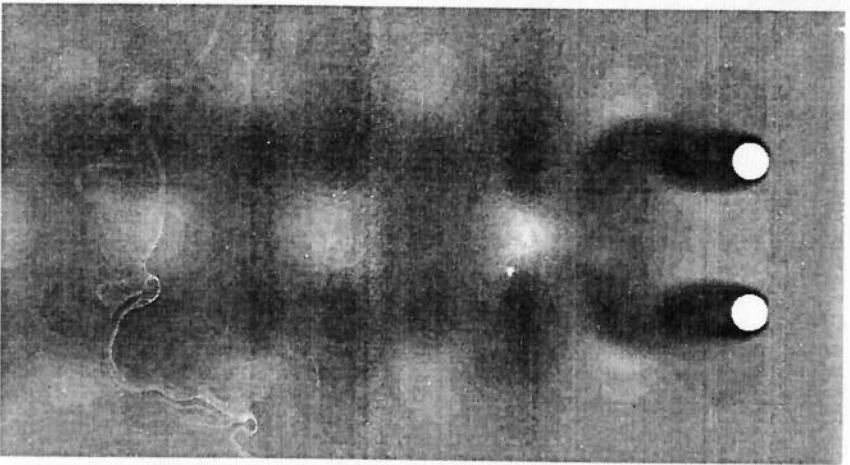
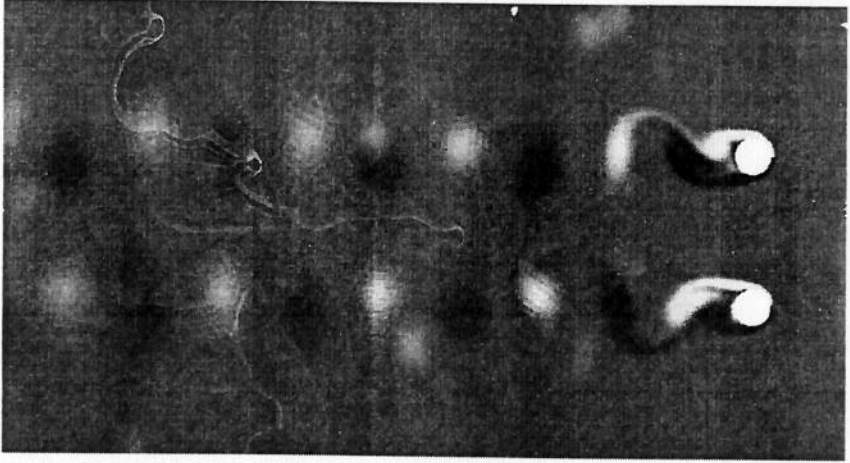
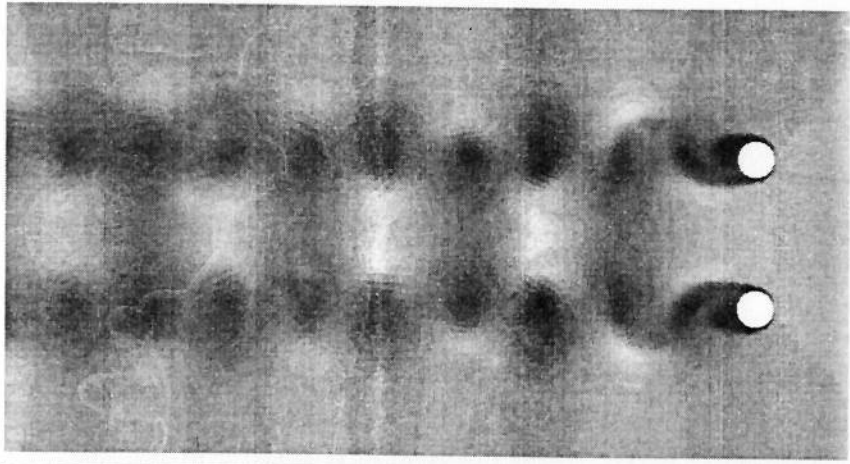


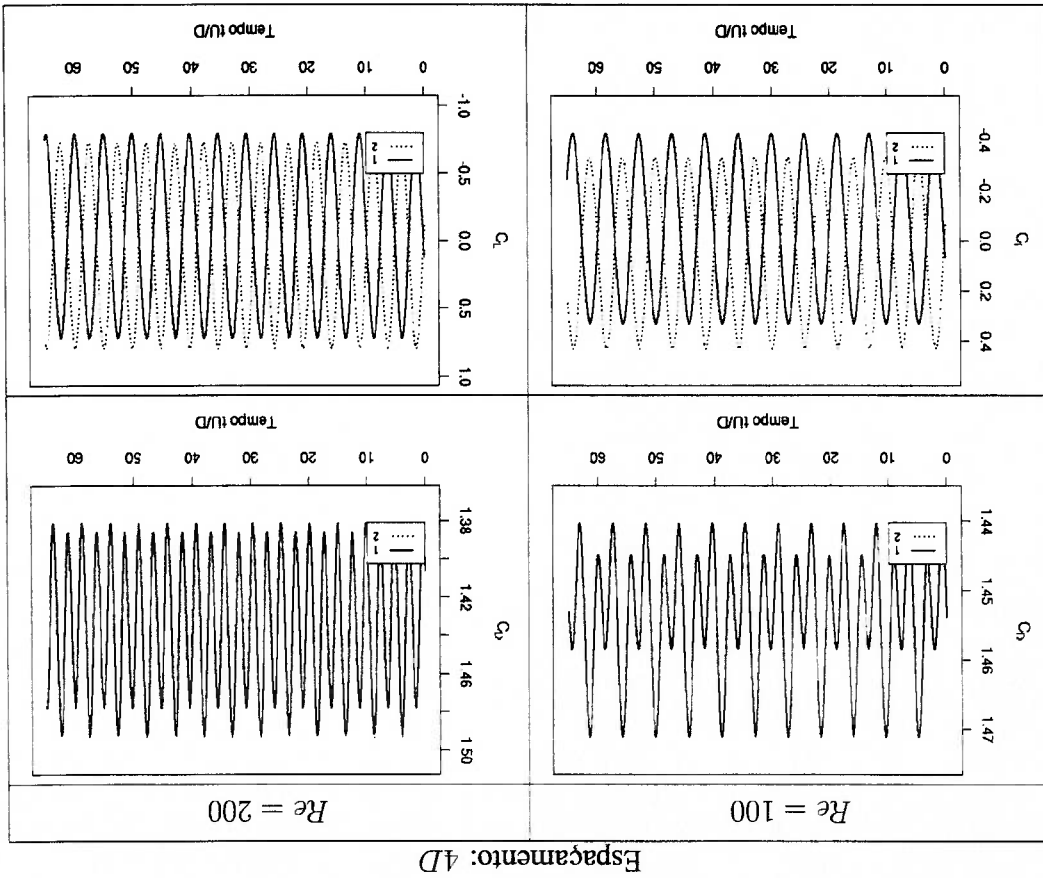
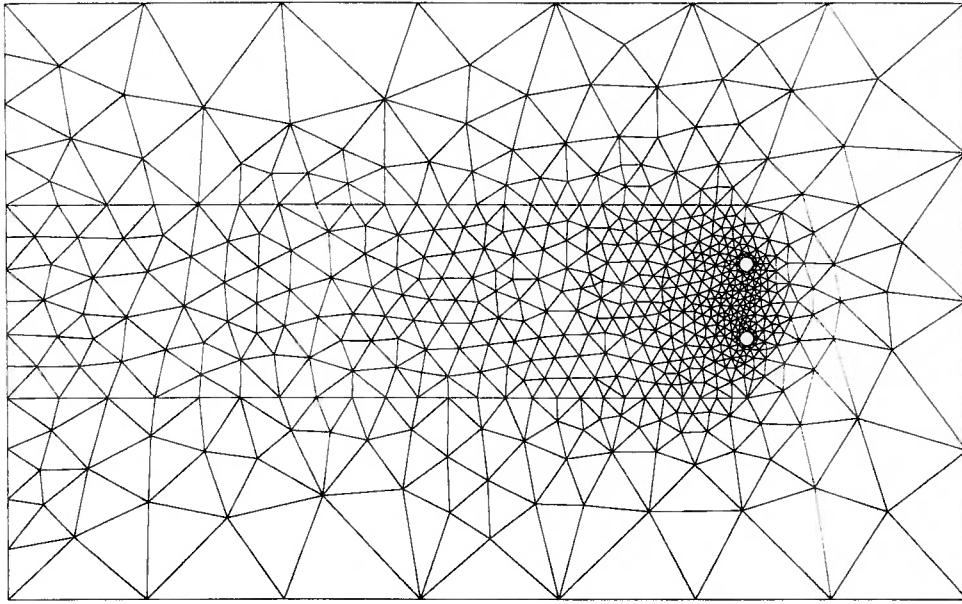


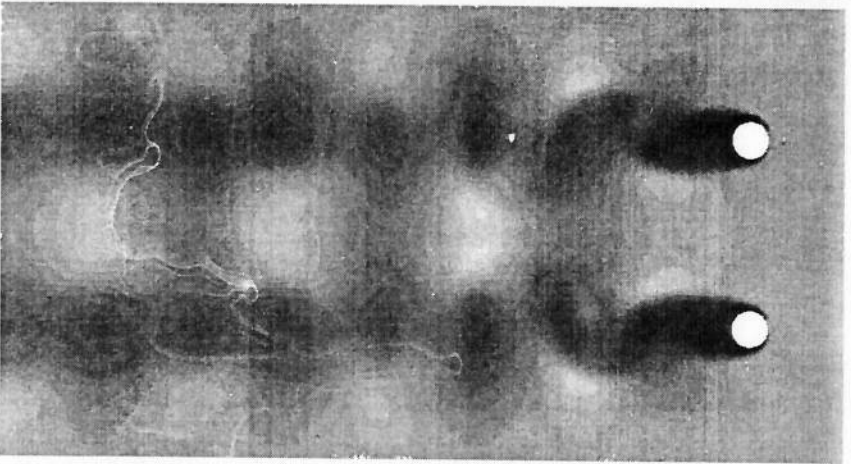
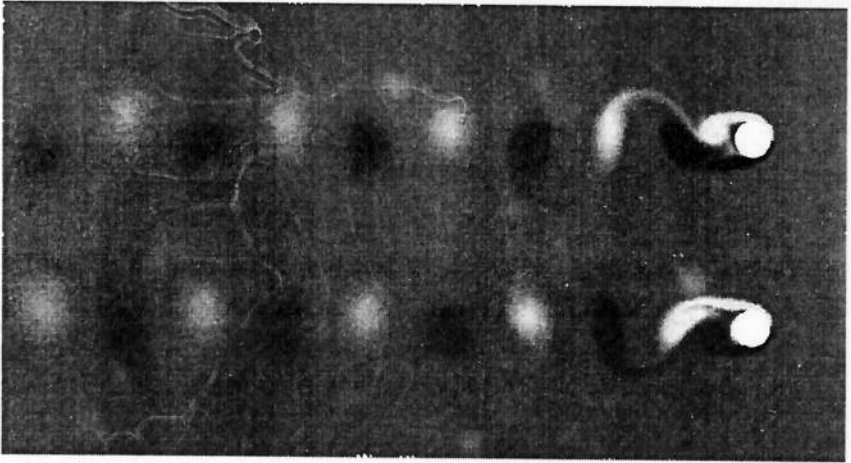
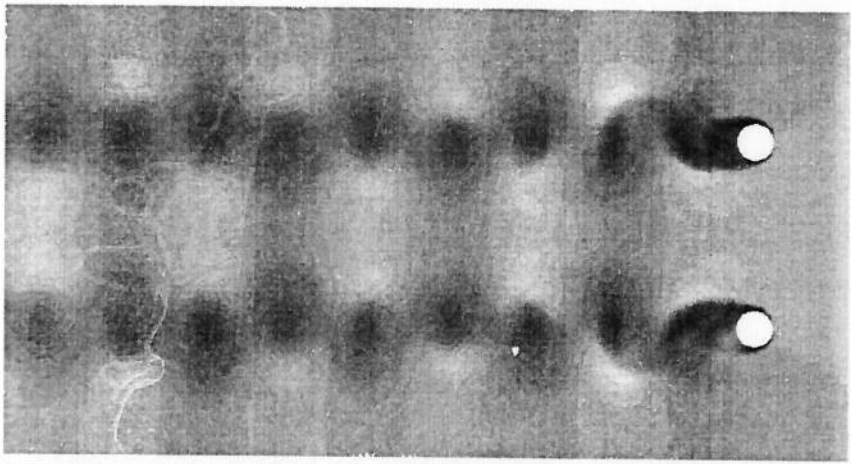


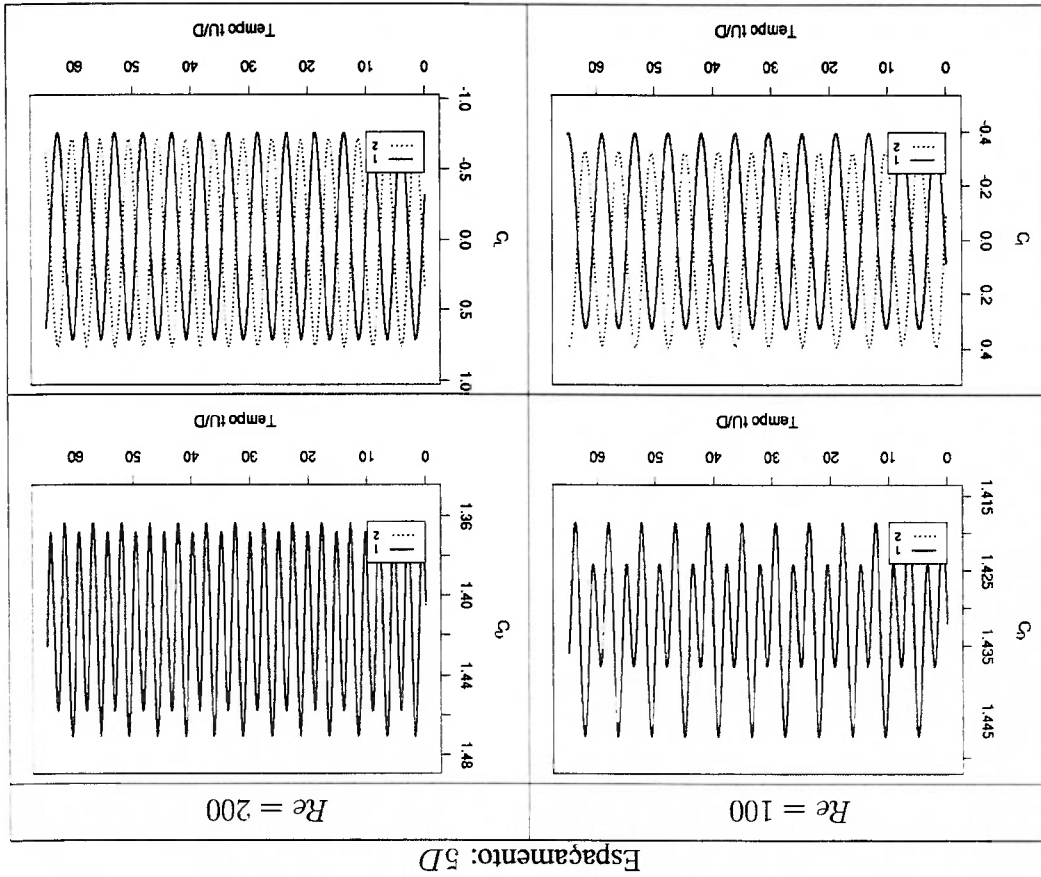
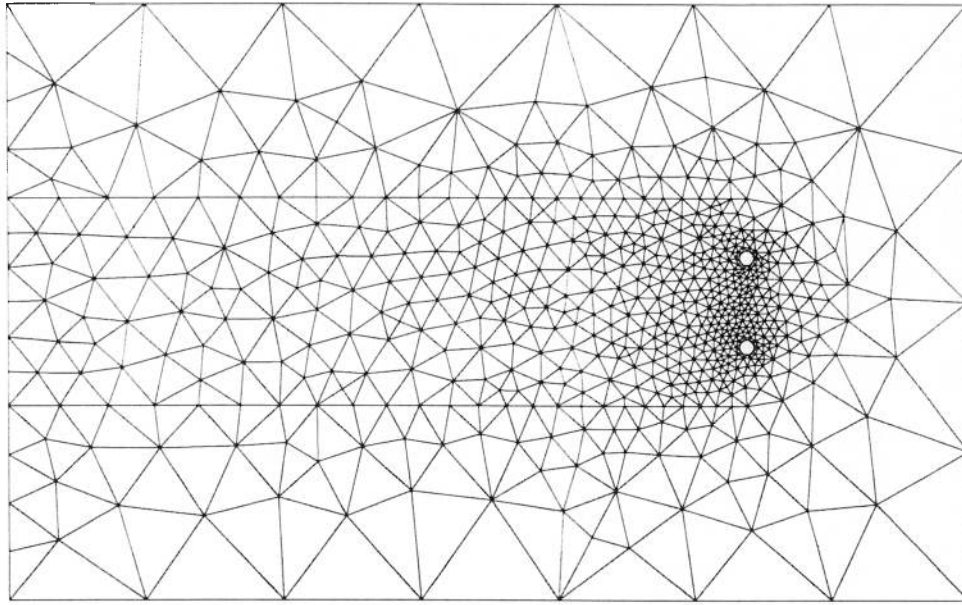


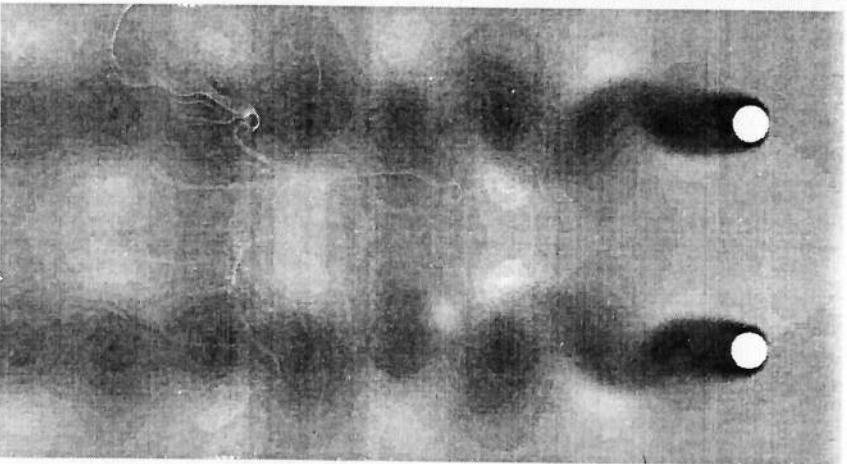
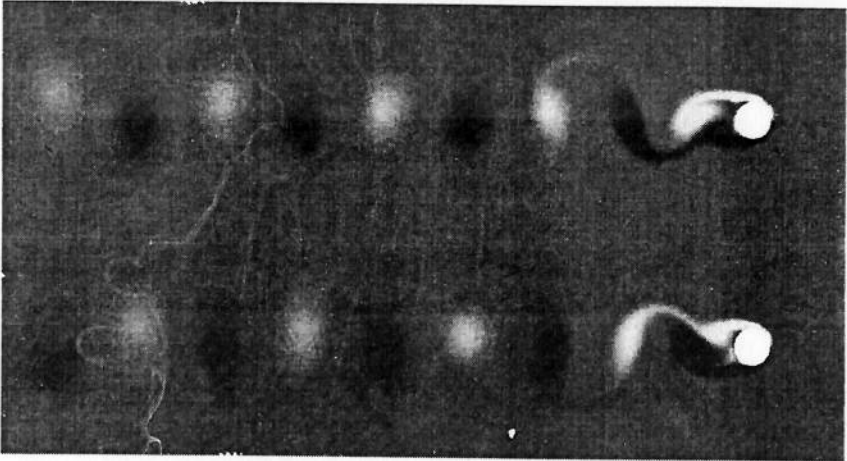
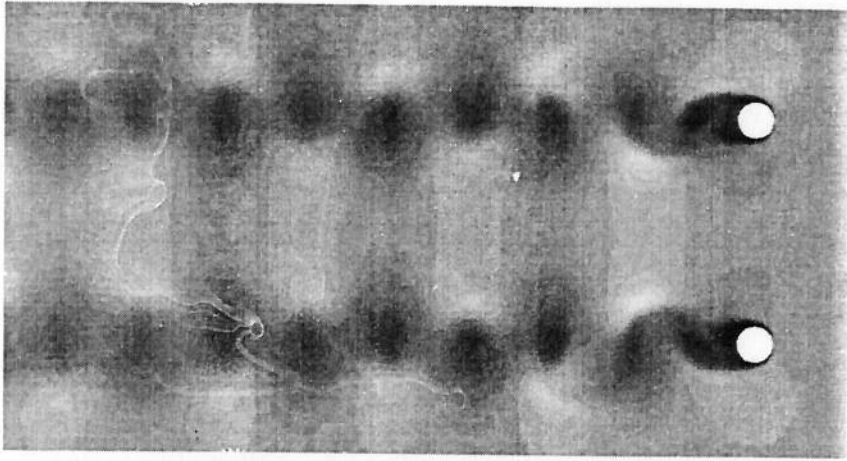












ANEXO III: Resultados numéricos obtidos para dois cilindros posicionados em linha

Neste anexo são apresentados todos os resultados obtidos para o escoamento ao redor de dois cilindros em linha. Inicialmente são apresentados os dados utilizados para plotar as figuras 4.23, 4.24, 4.25, 4.26 e 4.27.

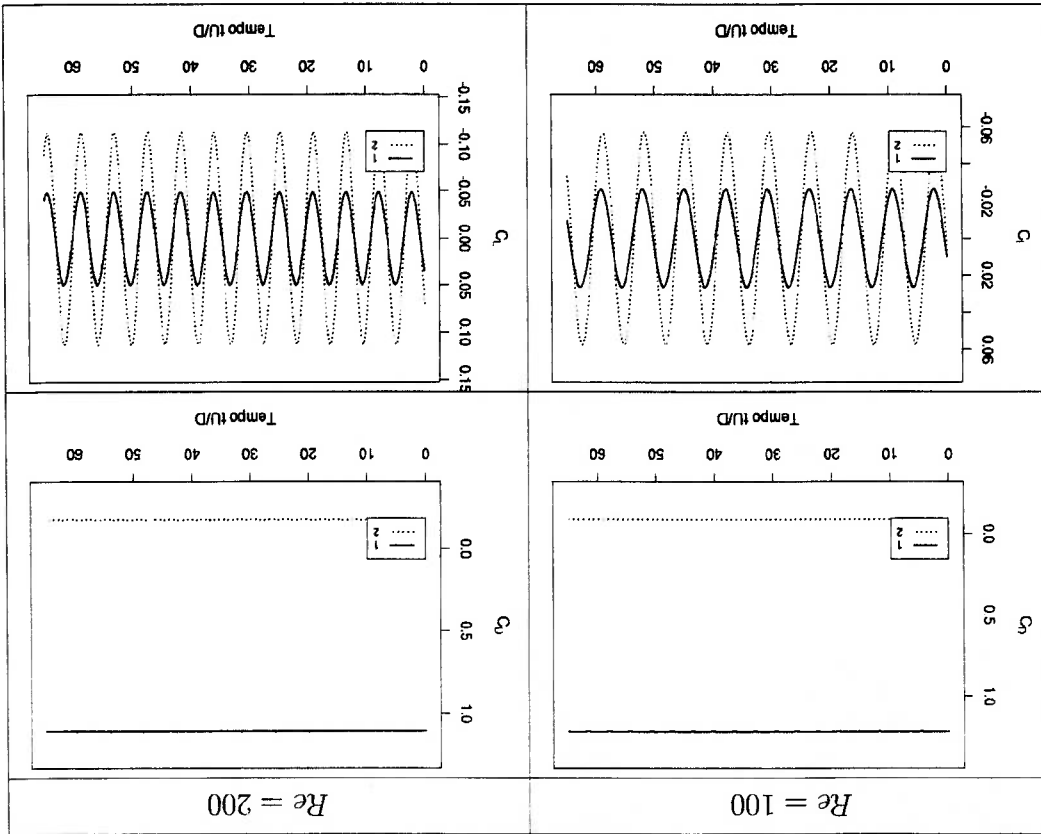
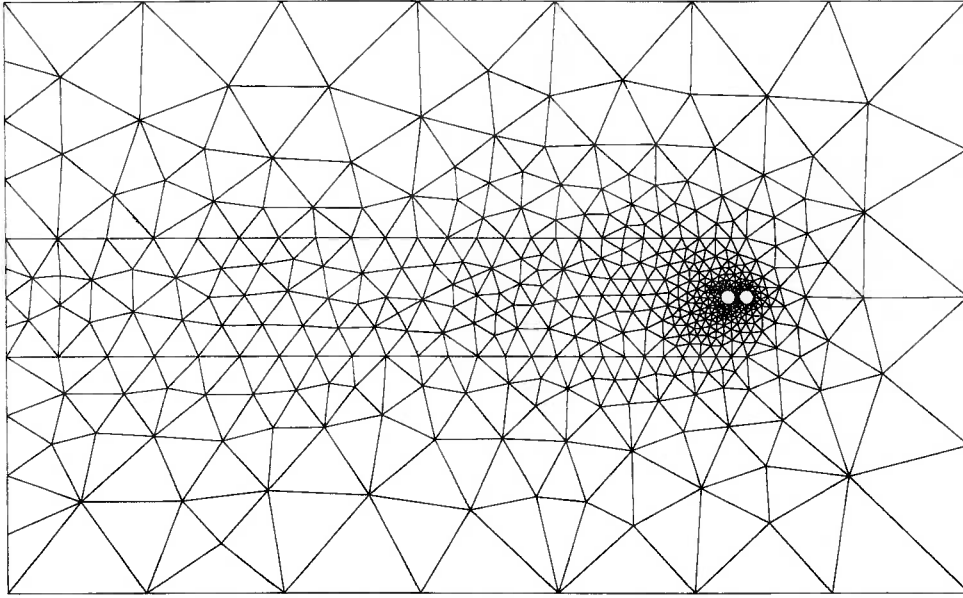
Os resultados obtidos para cada espaçamento são apresentados em duas páginas cada espaçamento: Na primeira são mostrados os coeficientes de força e malha para cada espaçamento: Primeira linha C_D , segunda linha C_L . Na segunda página, a primeira figura é o campo de vorticidade $Re = 100$, a segunda é o campo de pressões, $Re = 100$, a terceira é o campo de vorticidade, $Re = 200$ e a quarta é o campo de pressões $Re = 200$. Observe que nestas plotagens de campos, as cores escuras são as de menor valor.

$$Re = 100$$

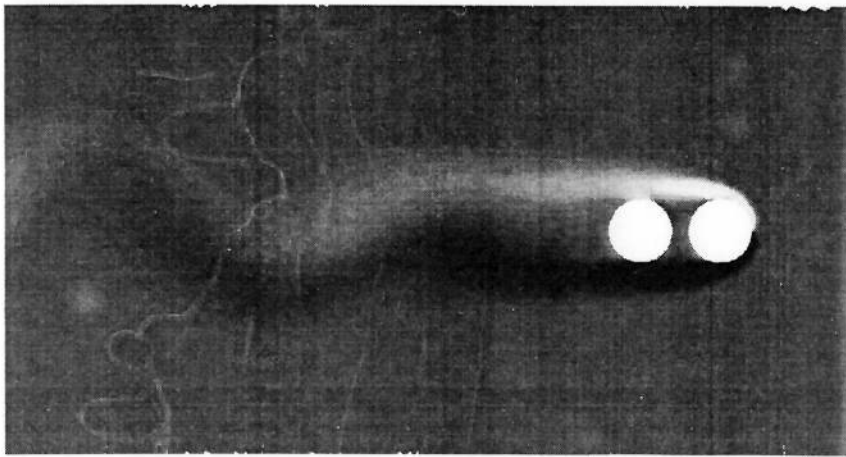
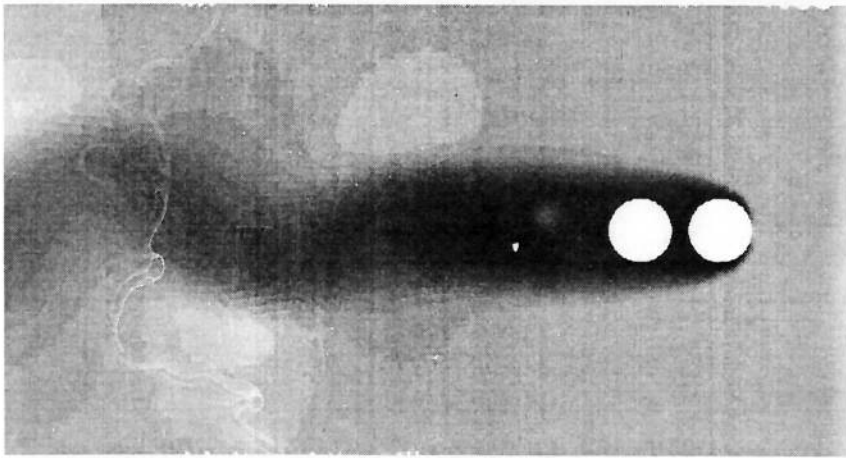
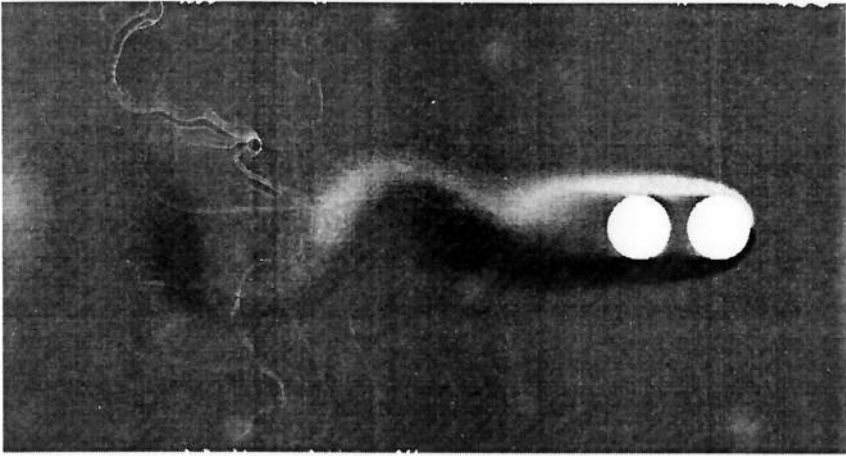
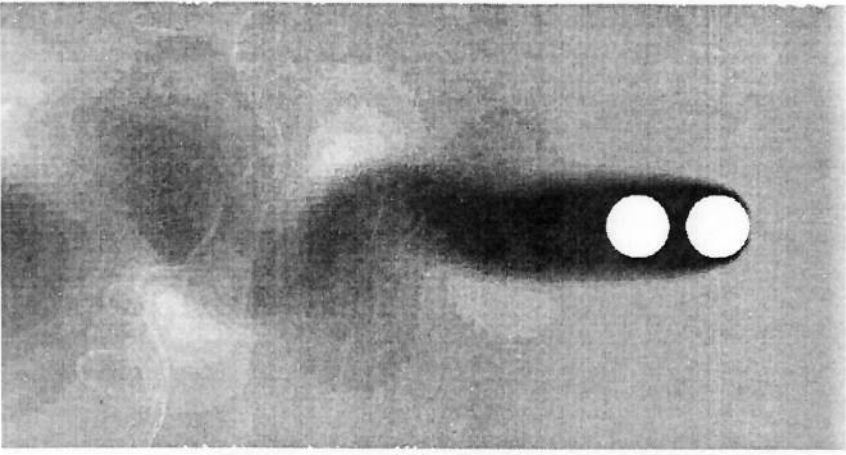
Esp	St	$C_{D,frente}$	$C_{L,RMS,frente}$	$C_{D,trás}$	$C_{L,RMS,trás}$	Página
0,25	0,140	1,220	0,019	-0,091	0,041	158
0,5	0,133	1,201	0,011	-0,089	0,034	160
1,0	0,123	1,171	0,004	-0,088	0,014	162
1,5	0,116	1,158	0,006	-0,063	0,035	164
2,0	0,115	1,151	0,013	-0,015	0,102	166
2,5	0,115	1,144	0,021	0,052	0,189	168
3,0	0,149	1,287	0,314	0,722	1,002	170
4,0	0,156	1,304	0,288	0,756	1,103	172
5,0	0,154	1,284	0,247	0,584	0,932	174
7,0	0,160	1,307	0,248	0,617	0,793	176
10,0	0,164	1,332	0,236	0,648	0,670	178

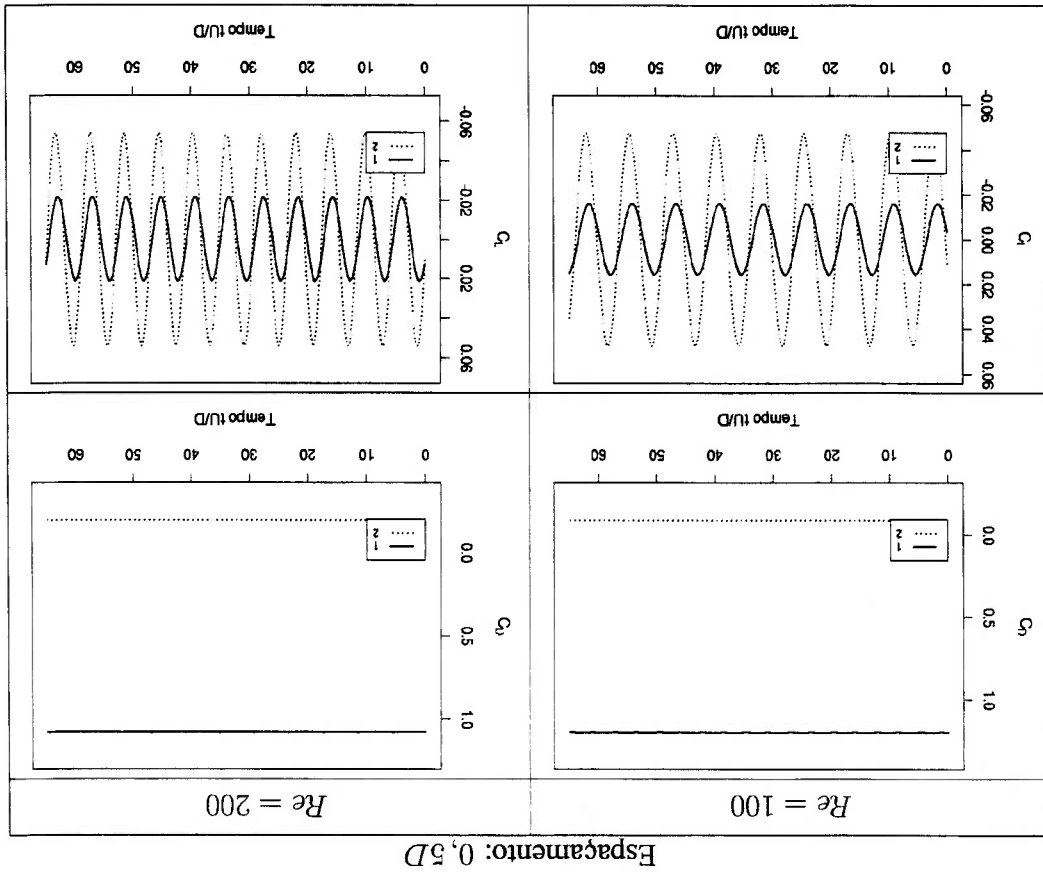
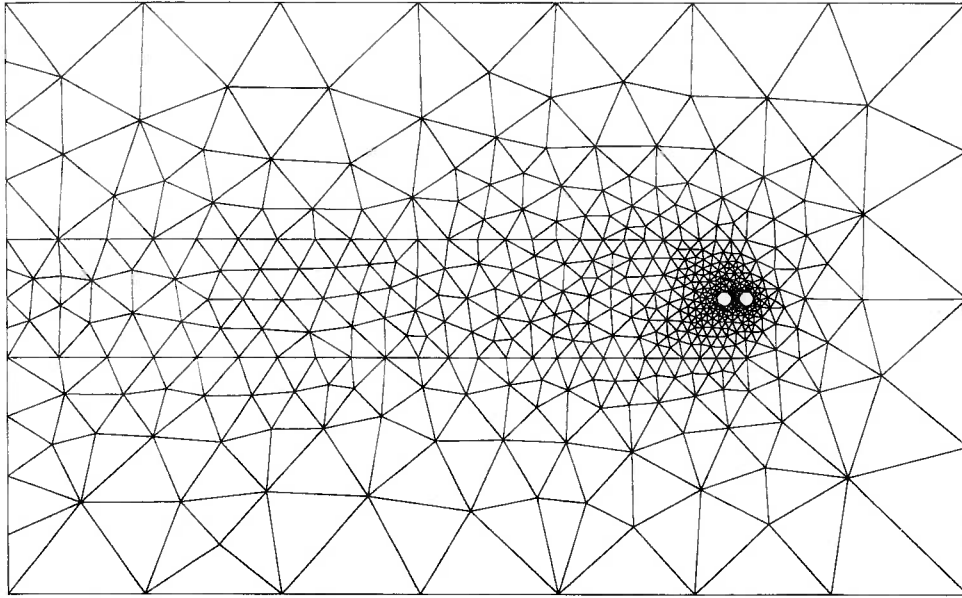
$$Re = 200$$

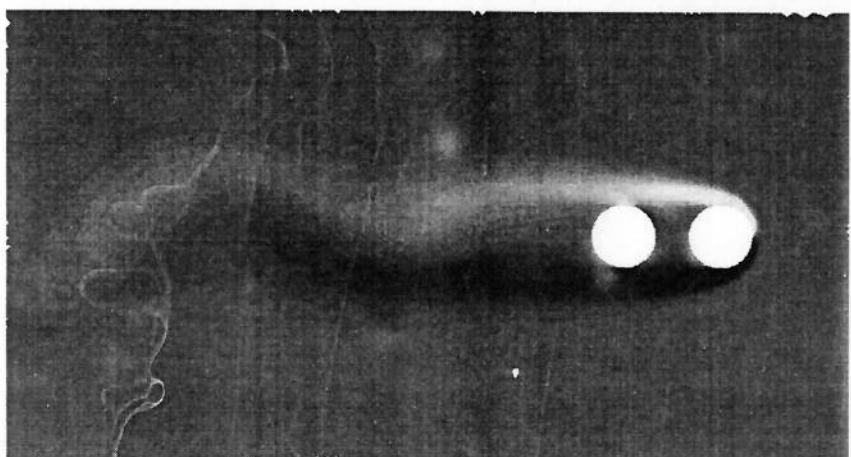
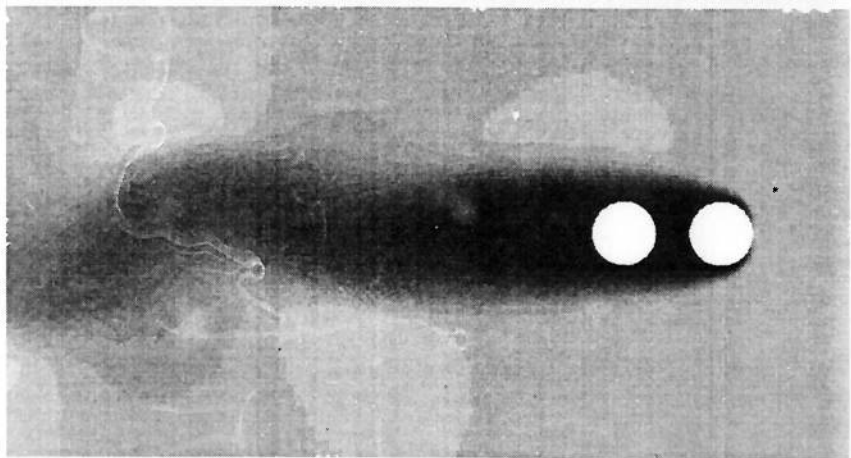
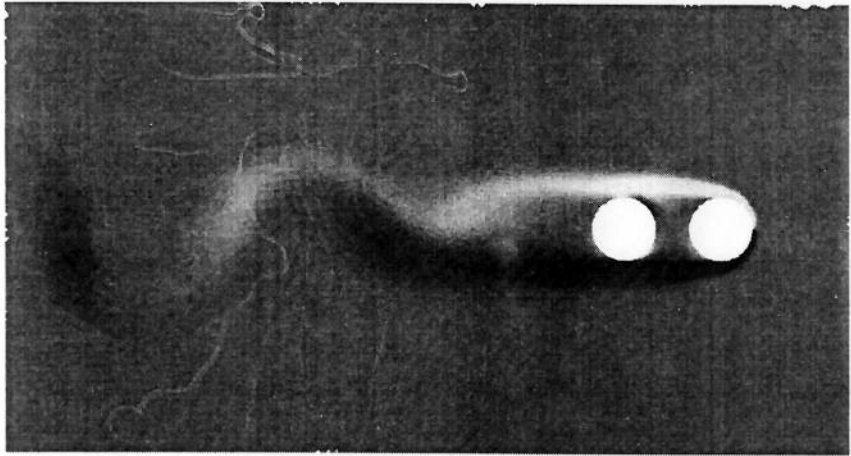
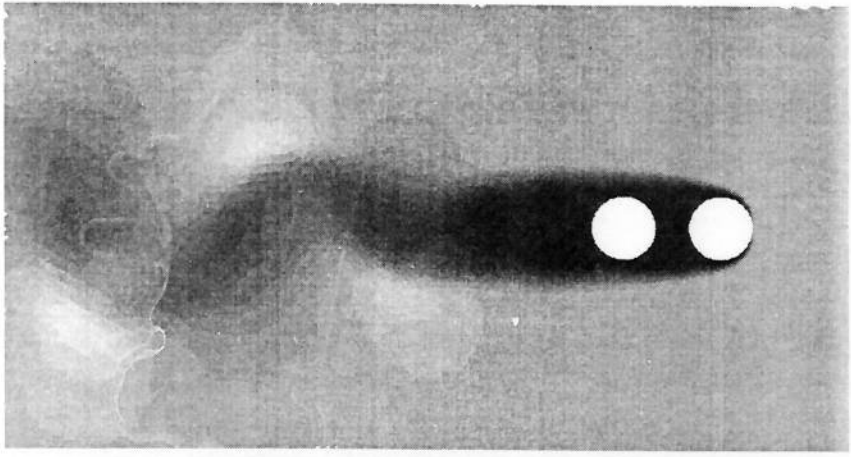
Esp	St	$C_{D,frente}$	$C_{L,RMS,frente}$	$C_{D,trás}$	$C_{L,RMS,trás}$	Página
0,25	0,176	1,112	0,035	-0,179	0,080	158
0,5	0,164	1,080	0,015	-0,197	0,038	160
1,0	0,134	1,050	0,024	-0,199	0,107	162
1,5	0,131	1,035	0,026	-0,157	0,181	164
2,0	0,128	1,013	0,022	-0,117	0,218	166
2,5	0,124	0,993	0,024	-0,055	0,267	168
3,0	0,180	1,281	0,546	0,506	1,306	170
4,0	0,181	1,259	0,485	0,389	1,034	172
5,0	0,186	1,281	0,480	0,398	0,977	174
7,0	0,193	1,319	0,490	0,373	0,904	176
10,0	0,196	1,336	0,485	0,417	0,843	178

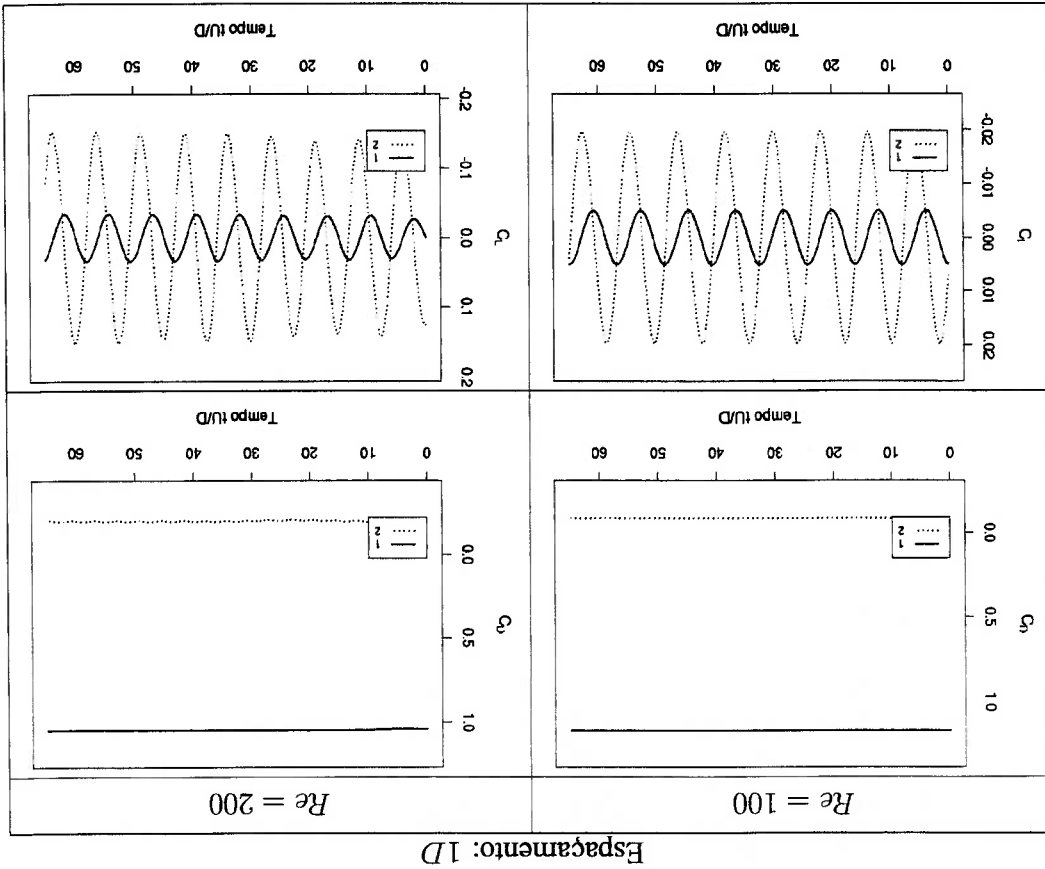
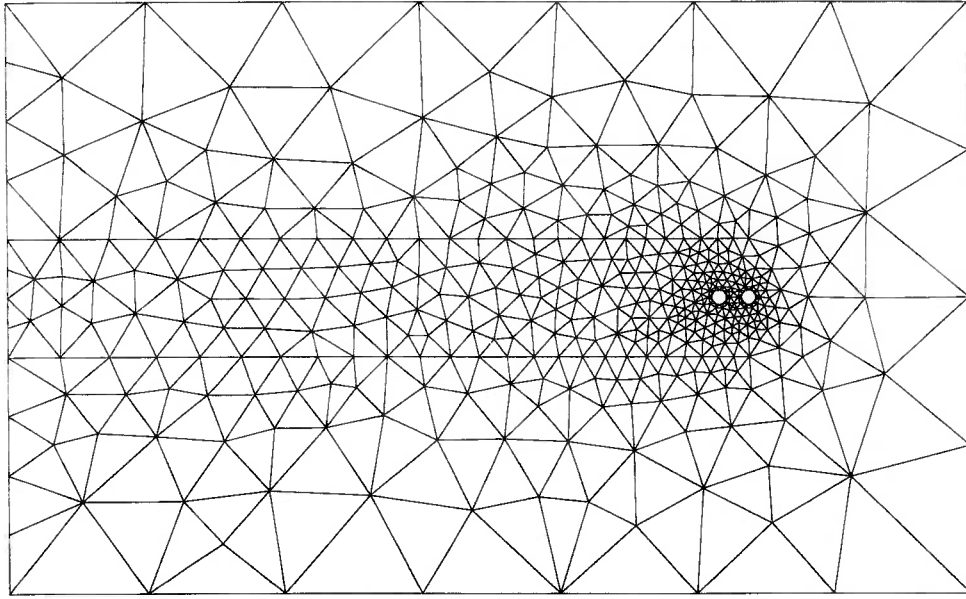


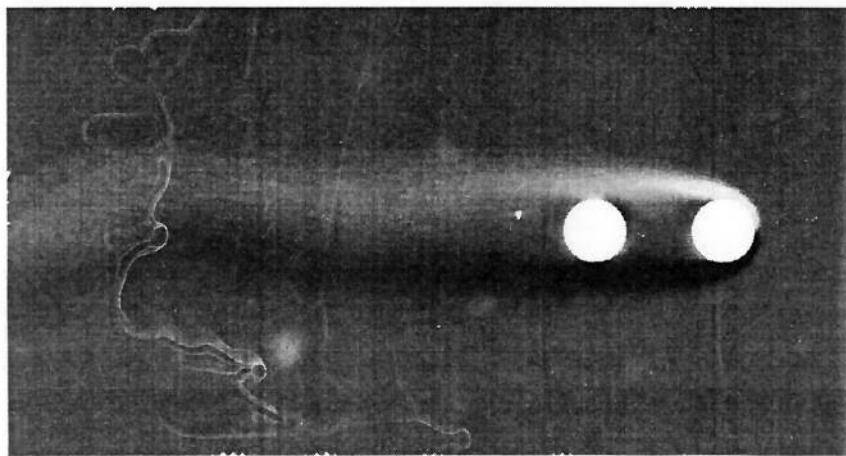
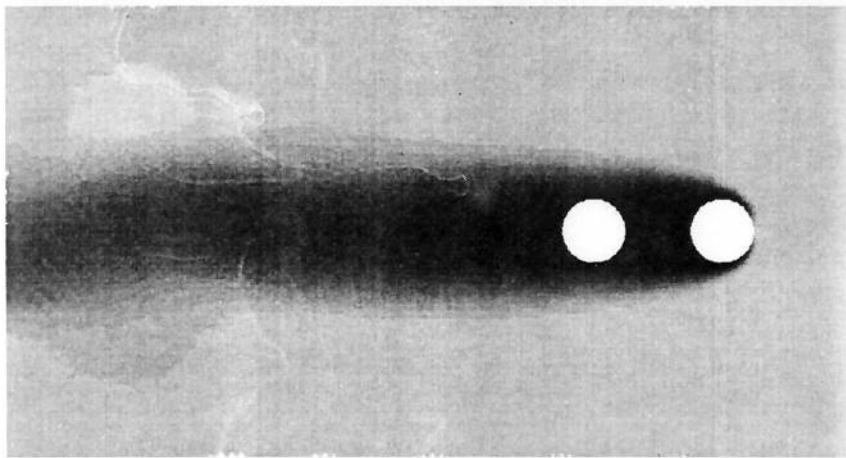
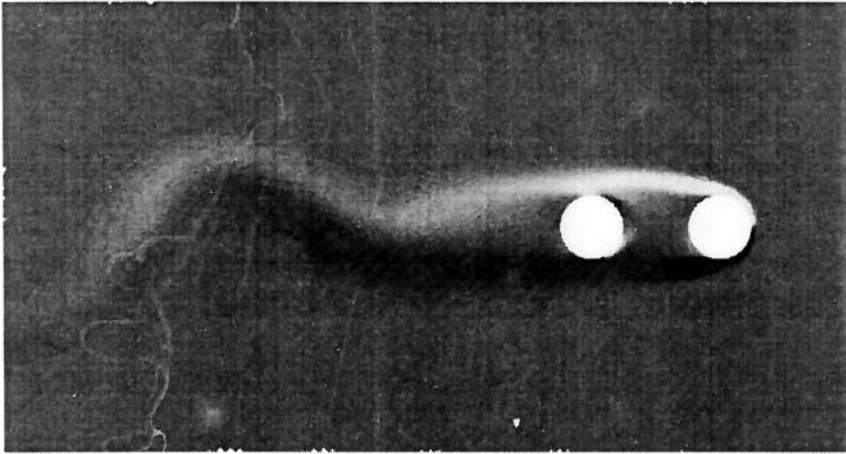
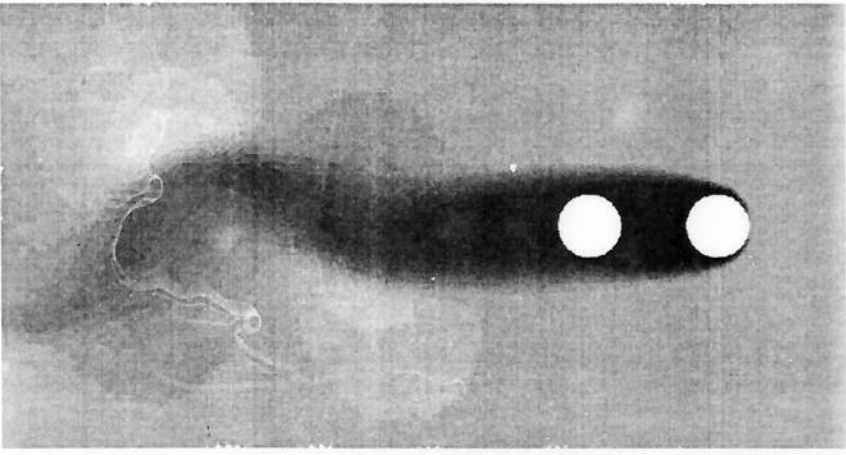
Espacamento: 0,25D

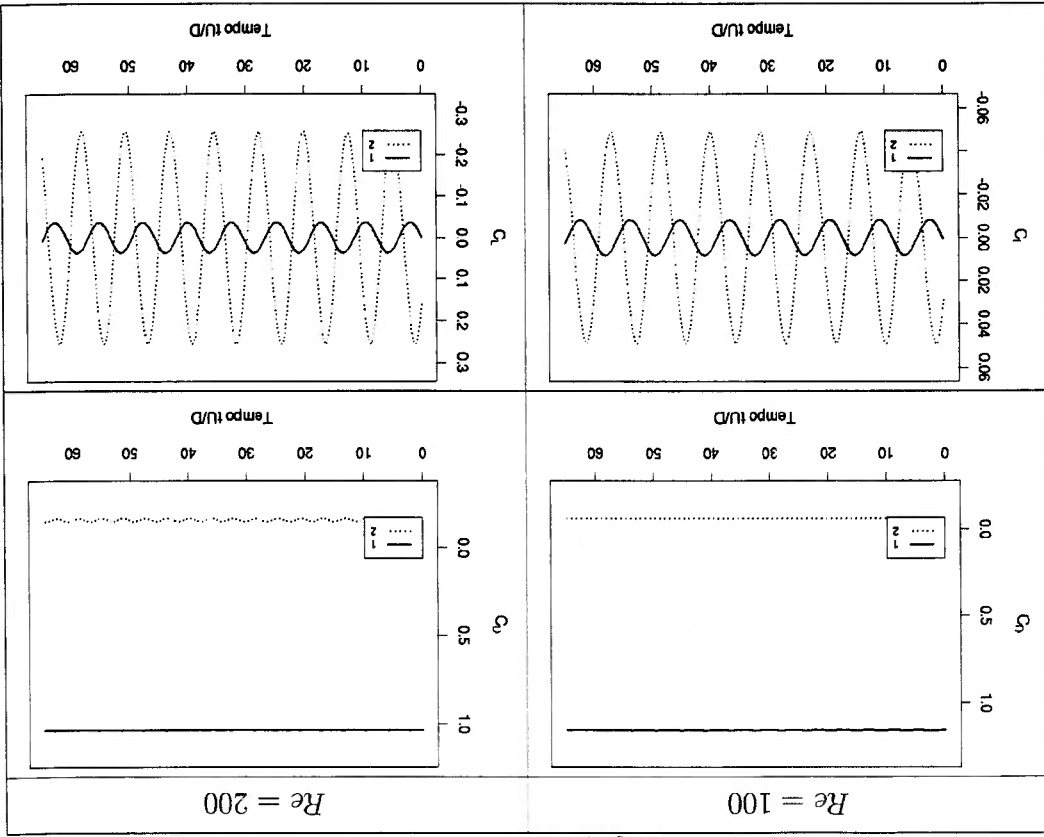
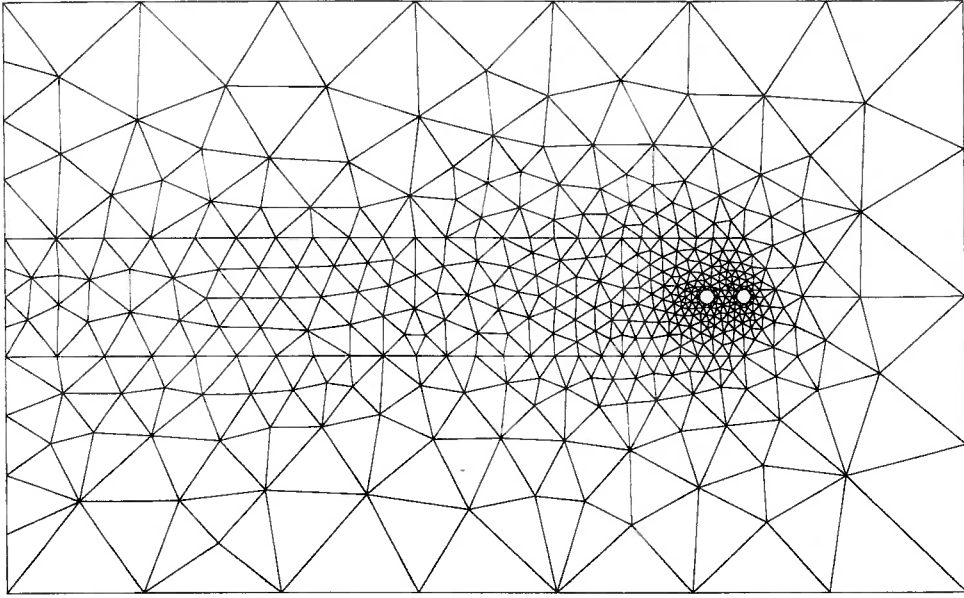




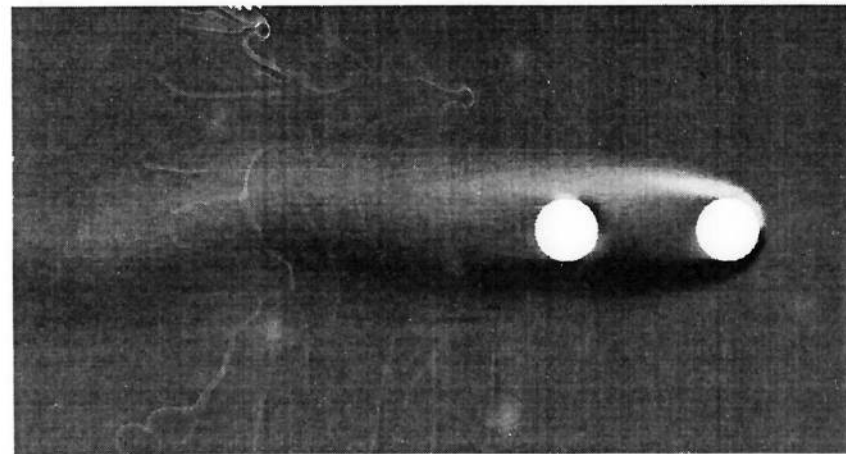
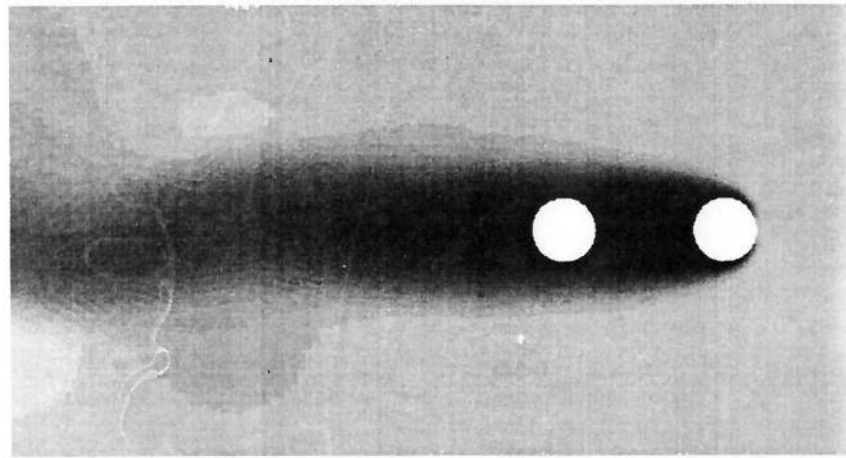
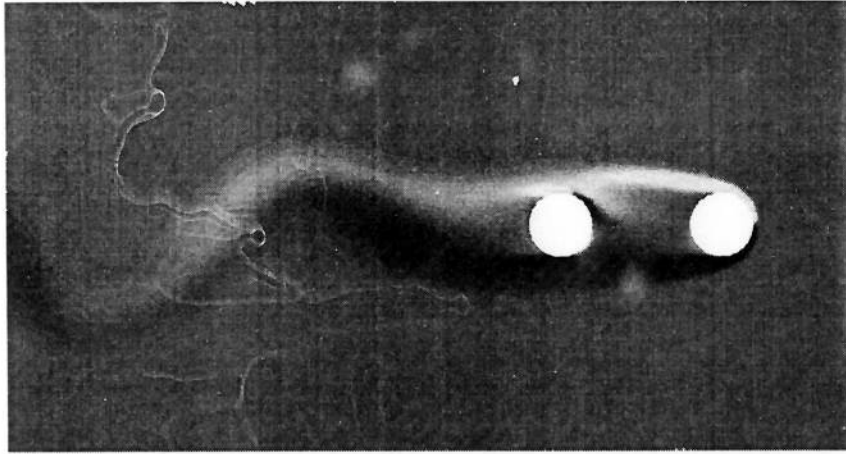
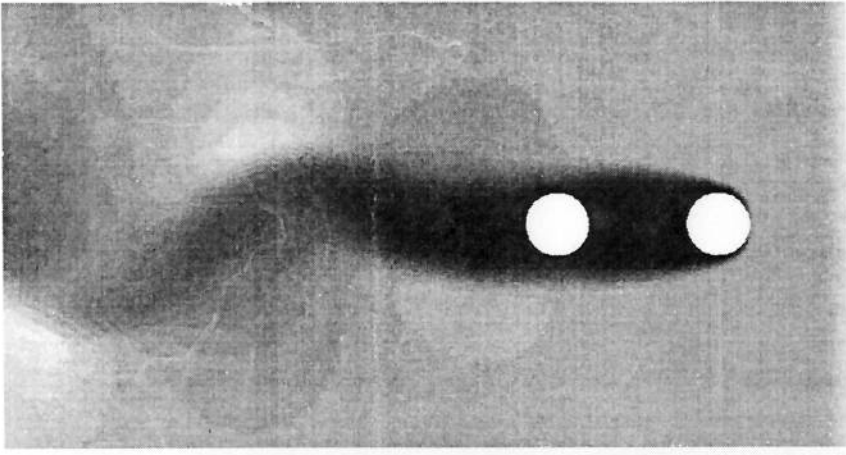


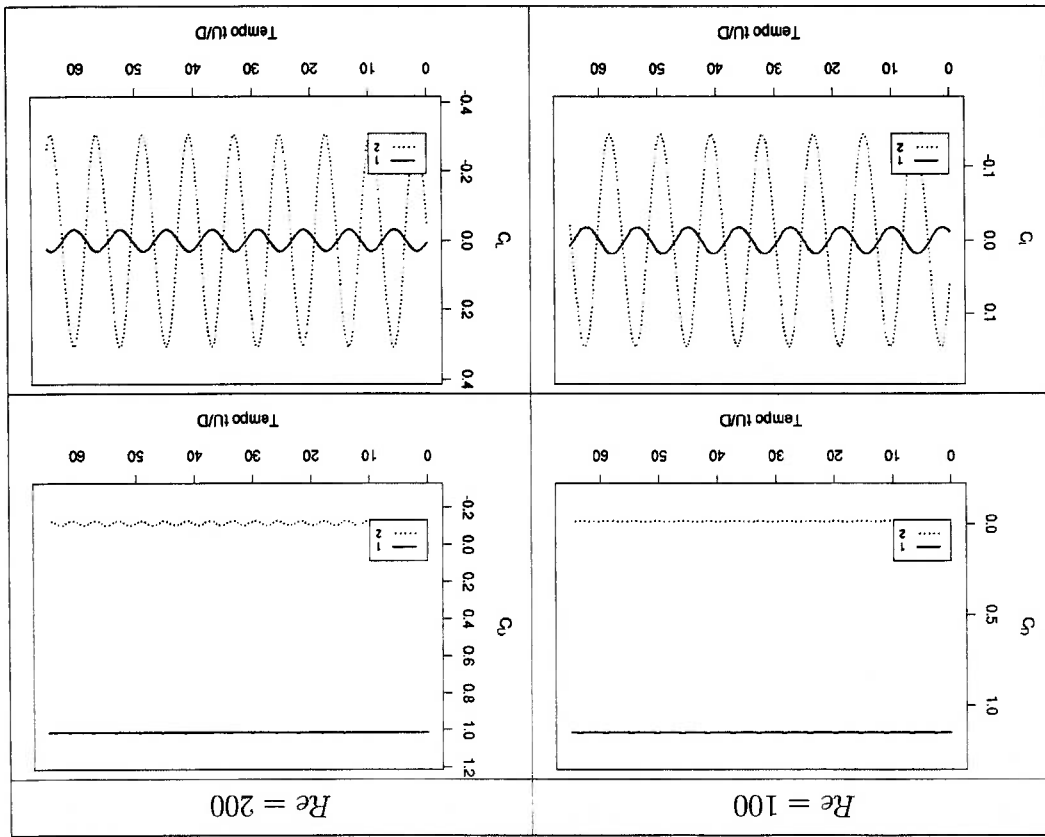
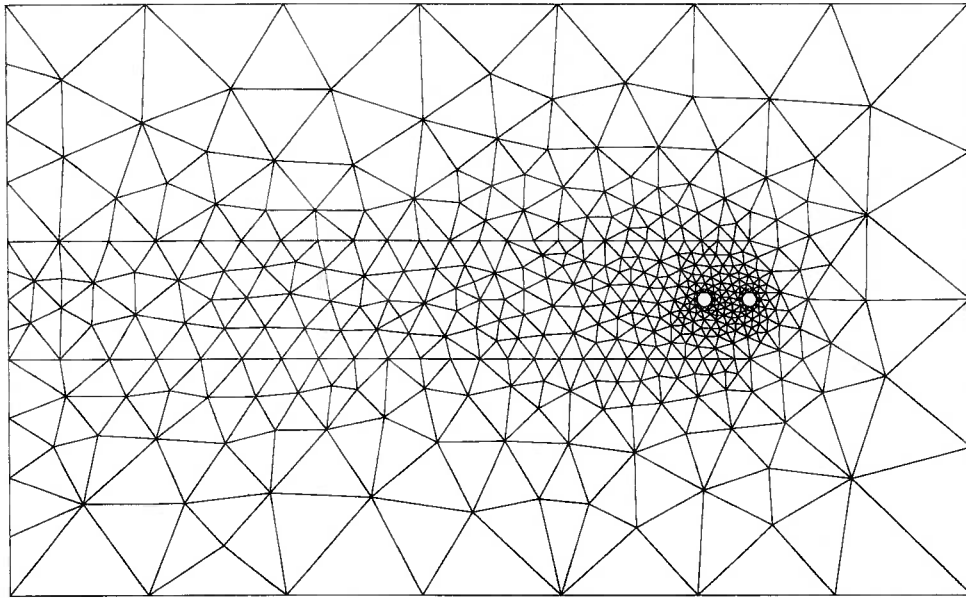




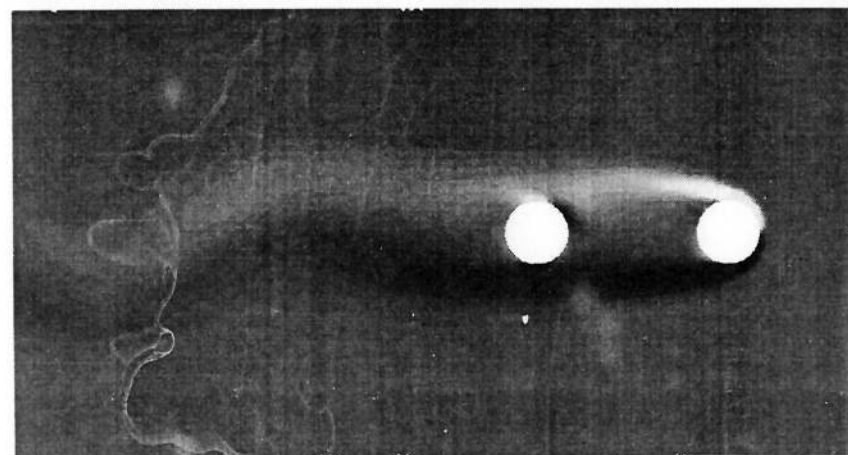
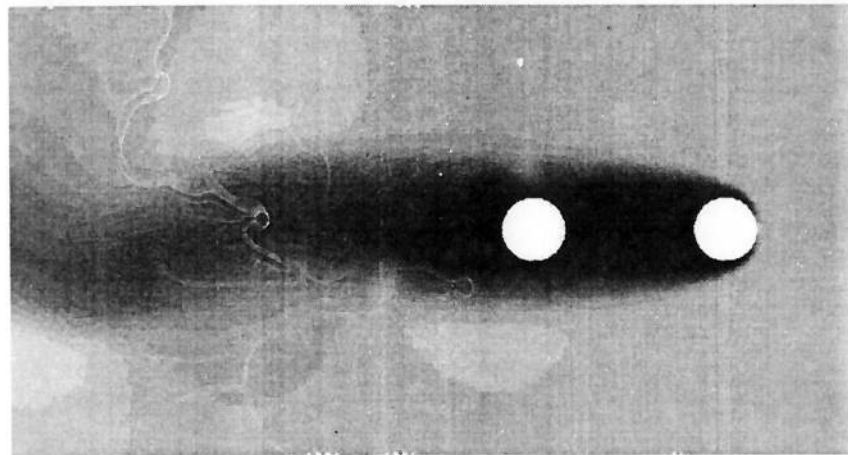
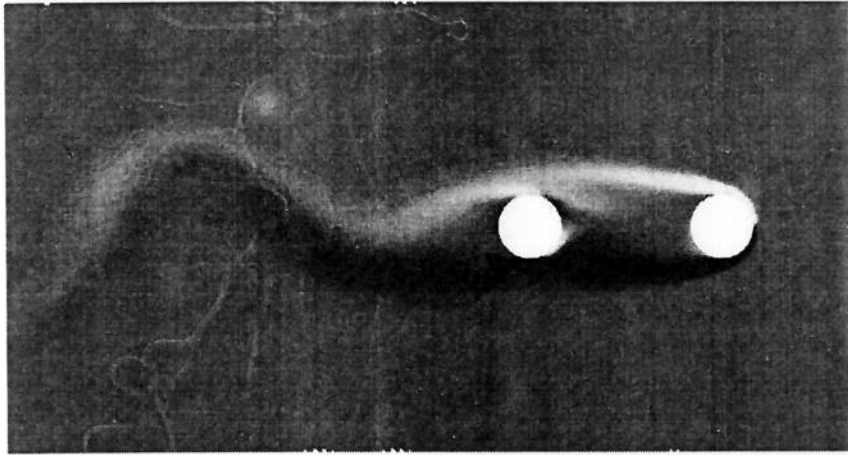
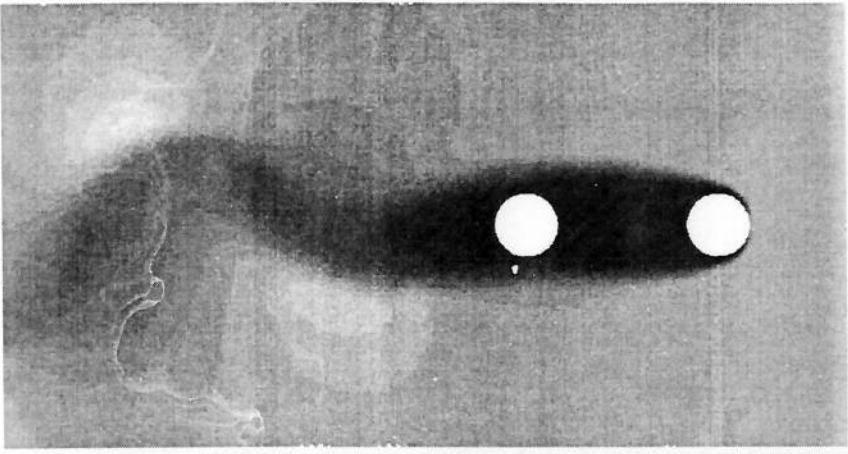


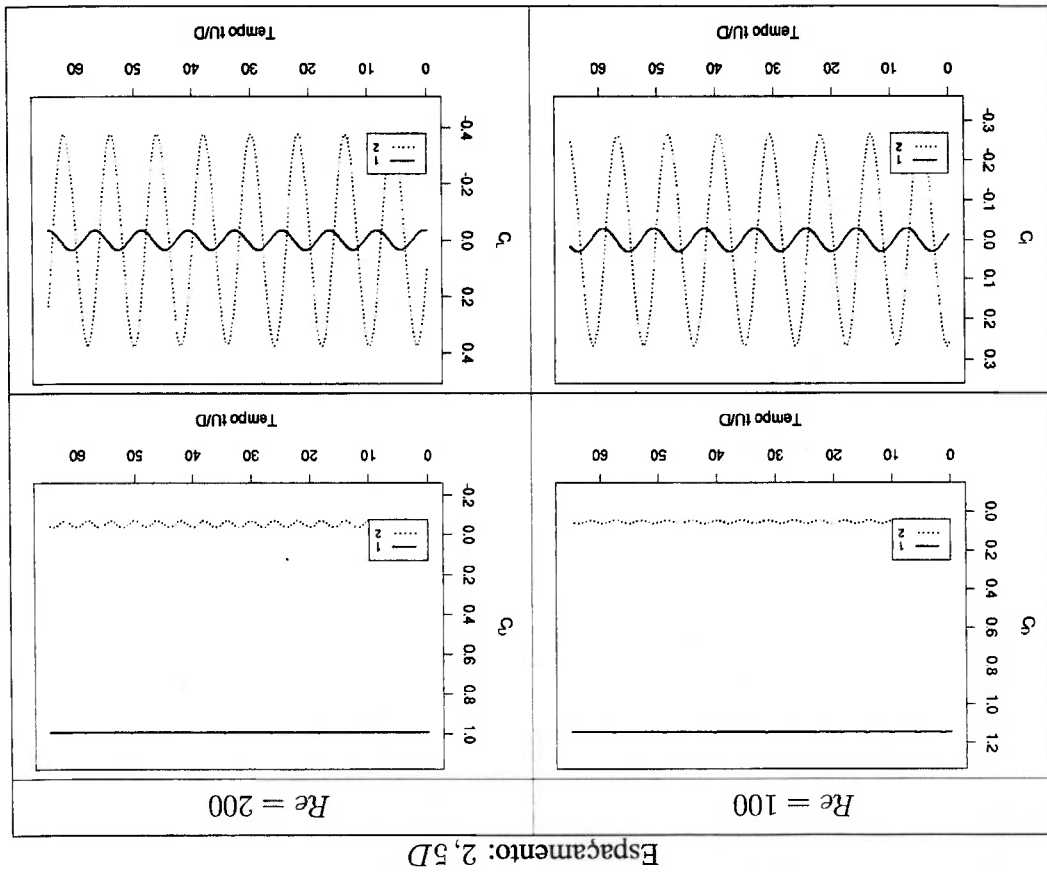
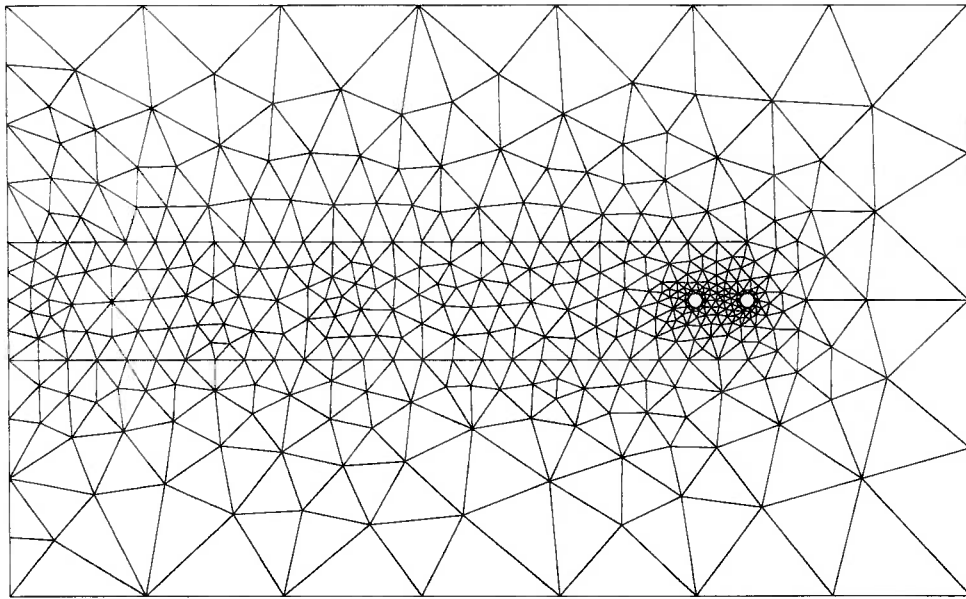
Espacamento: 1,5D

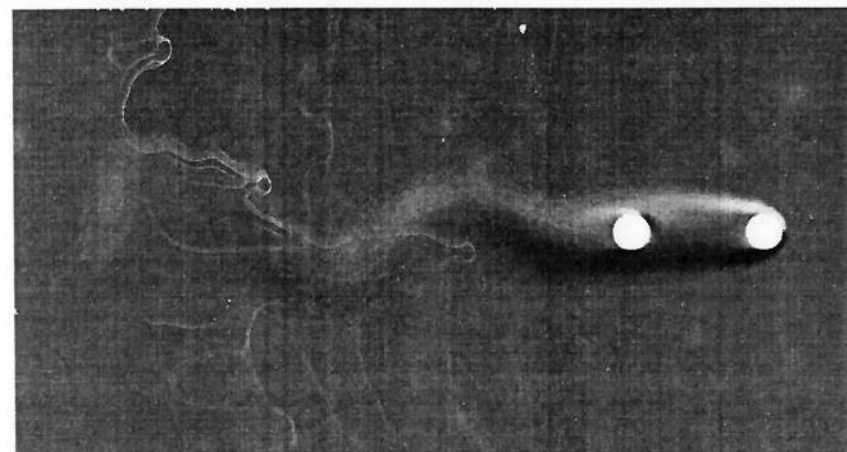
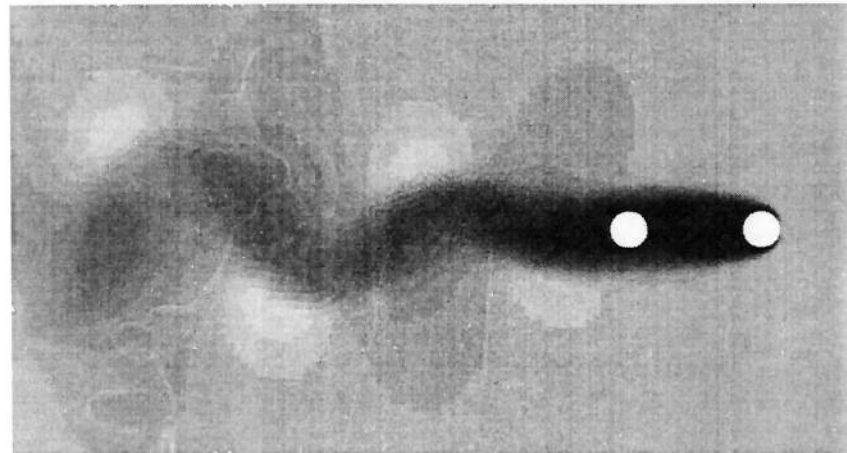
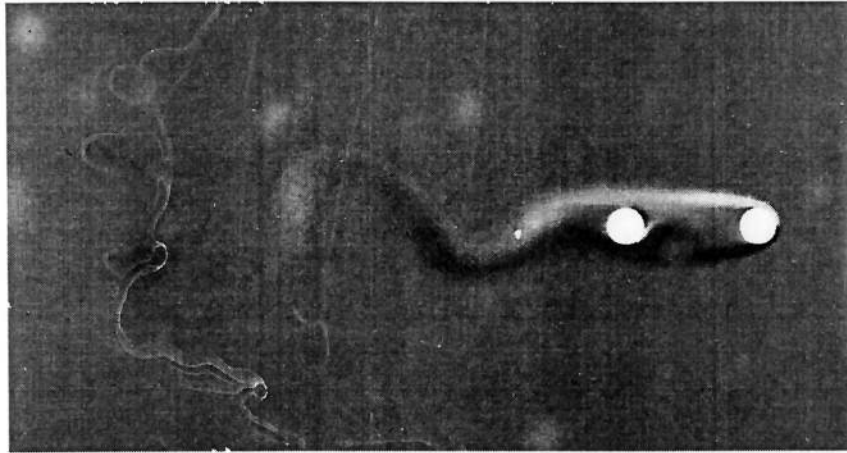
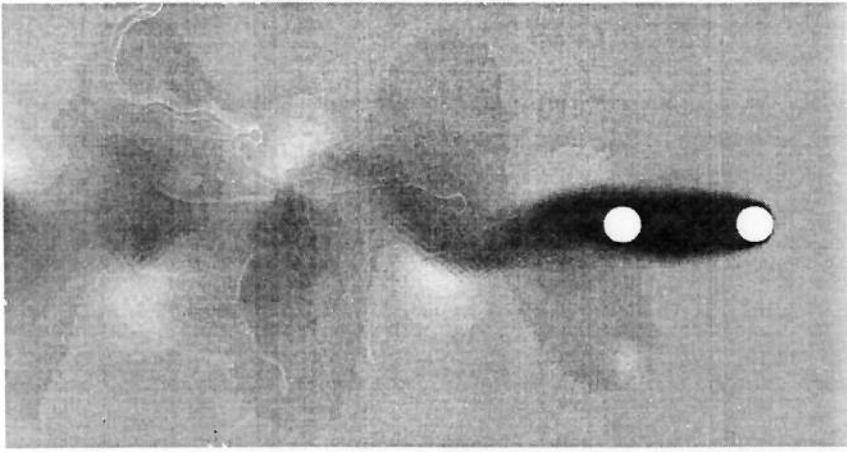


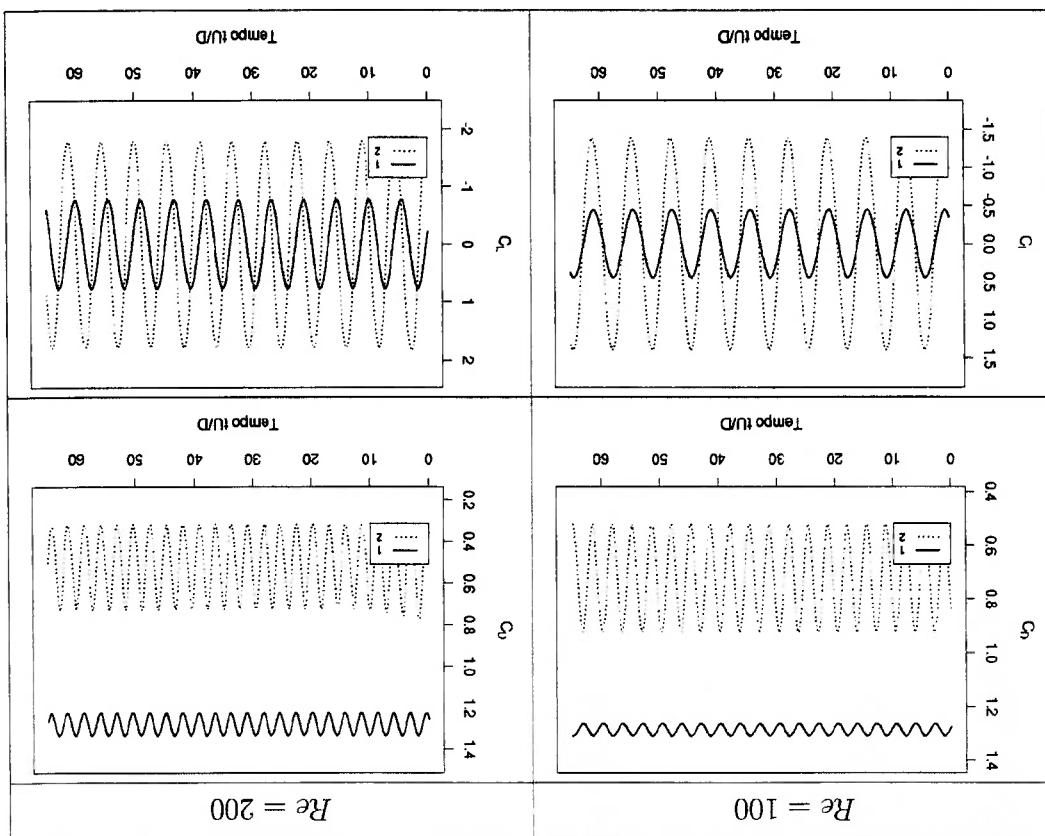
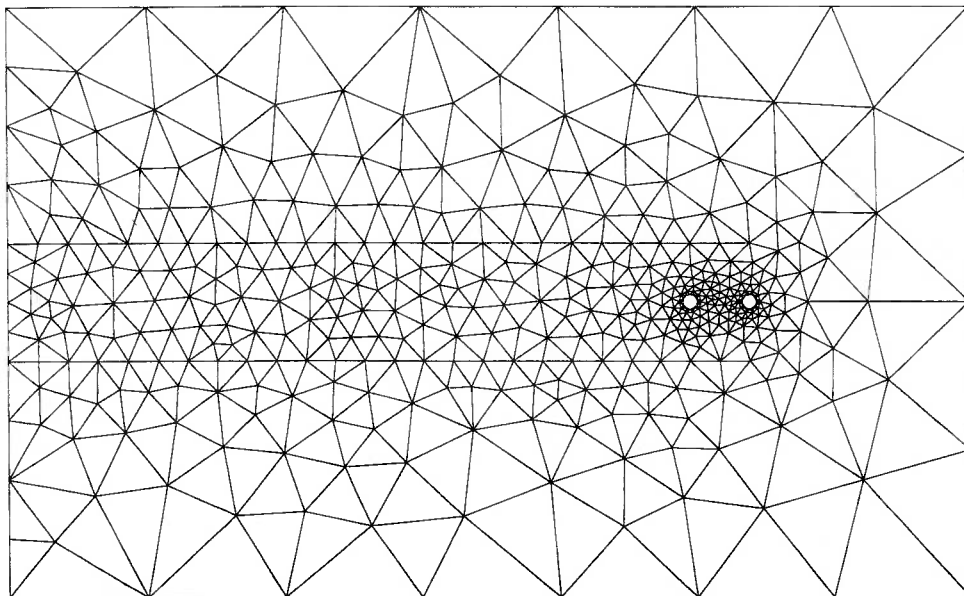


Espacamento: 2D

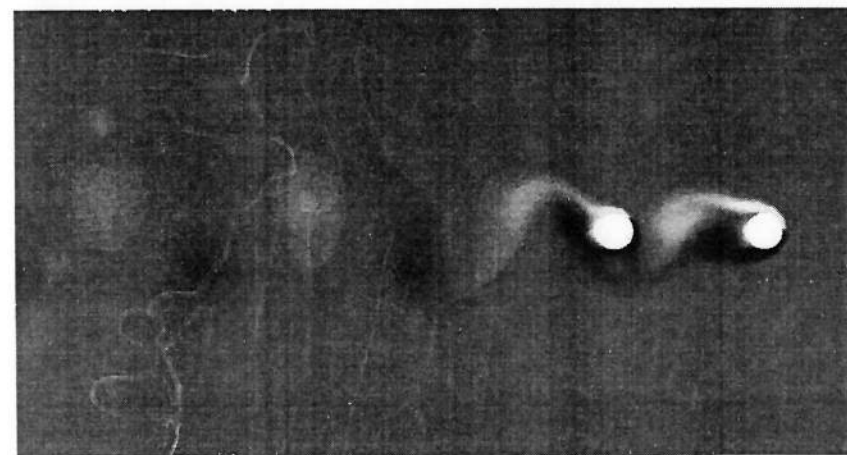
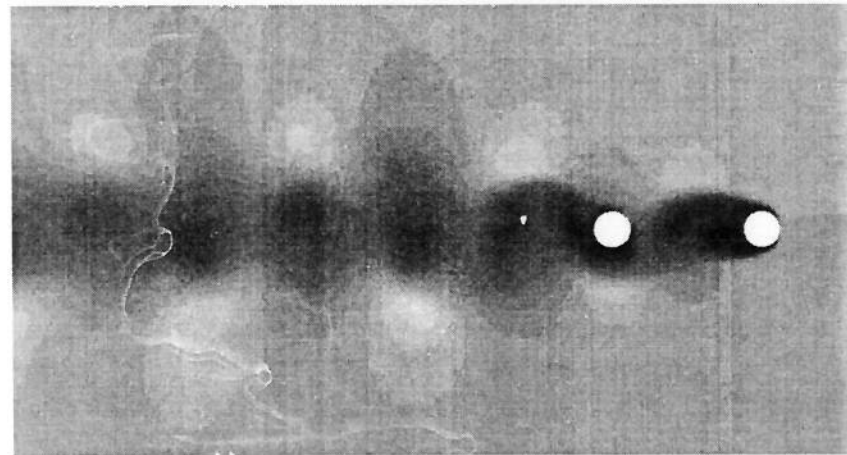
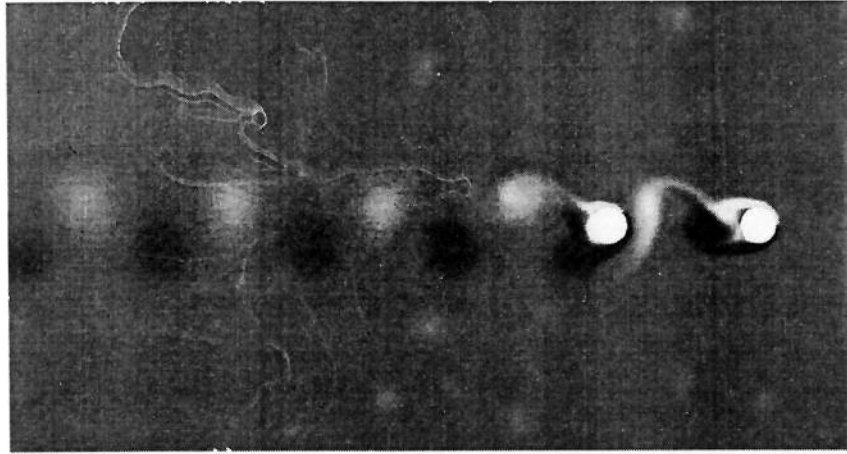
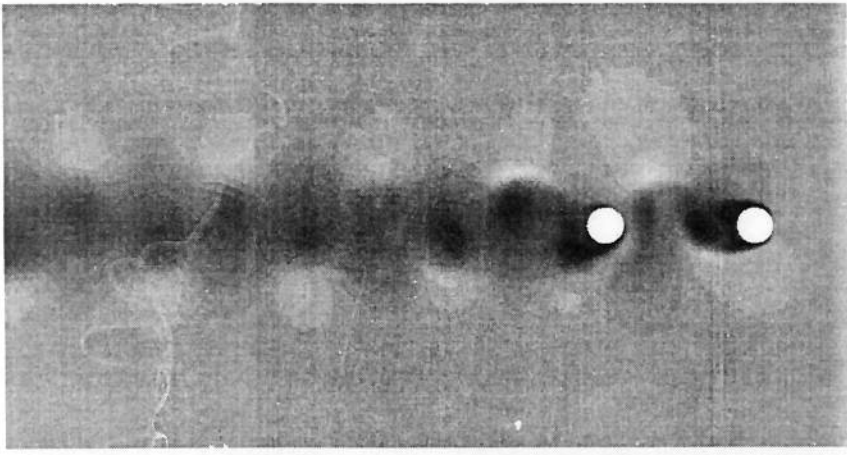


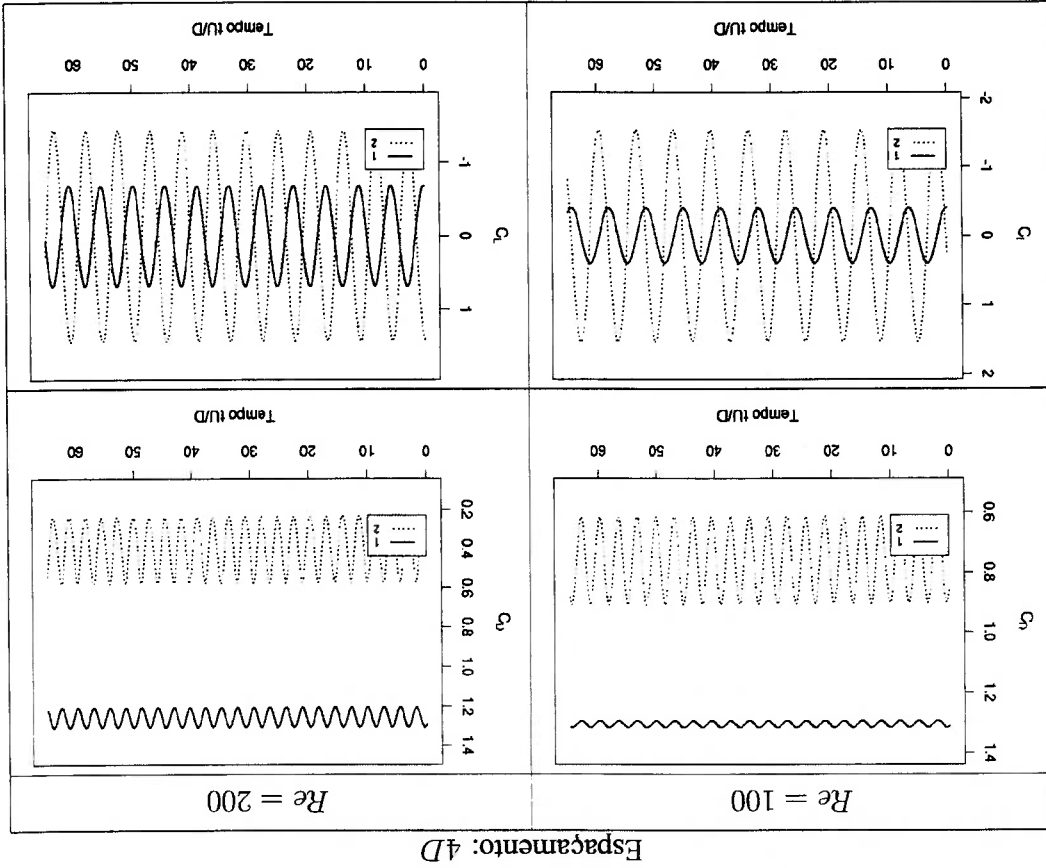
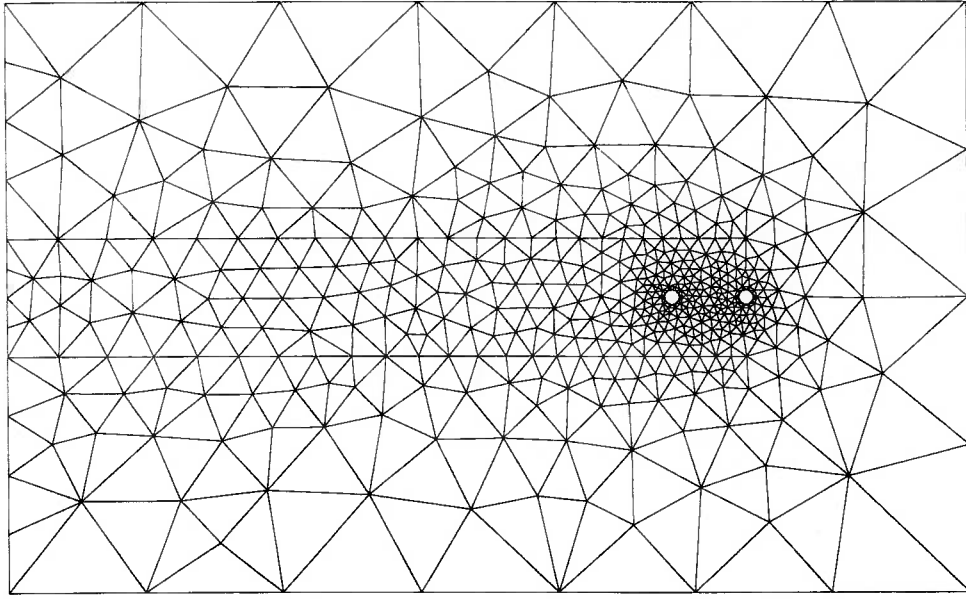


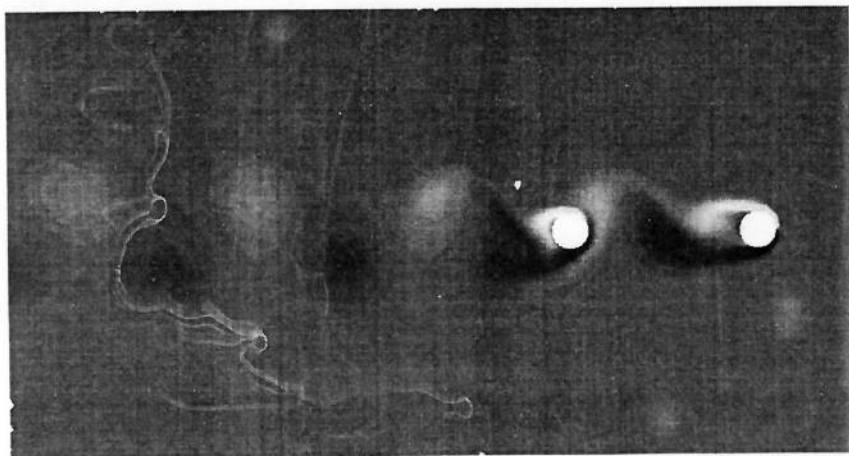
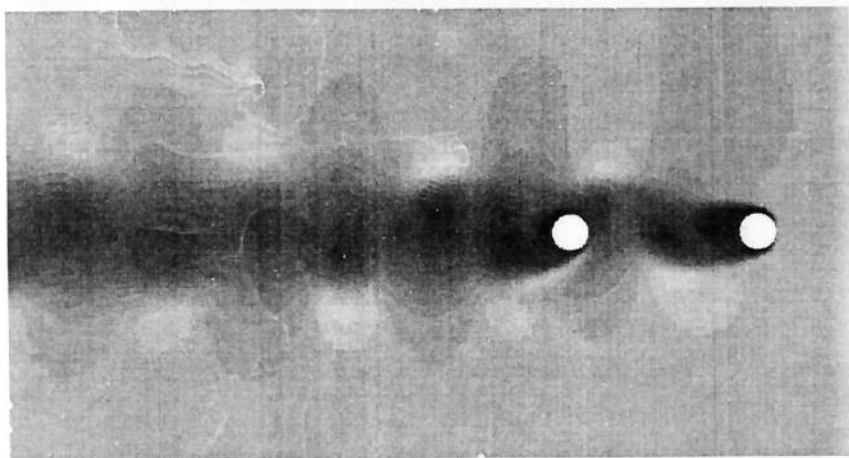
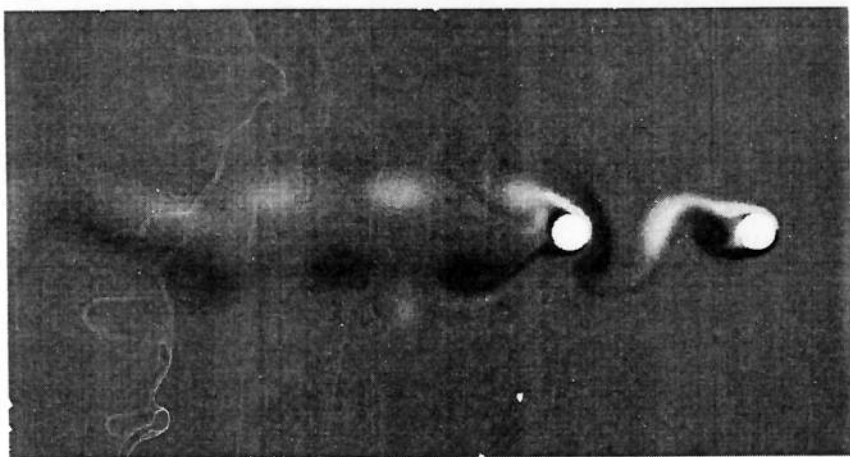
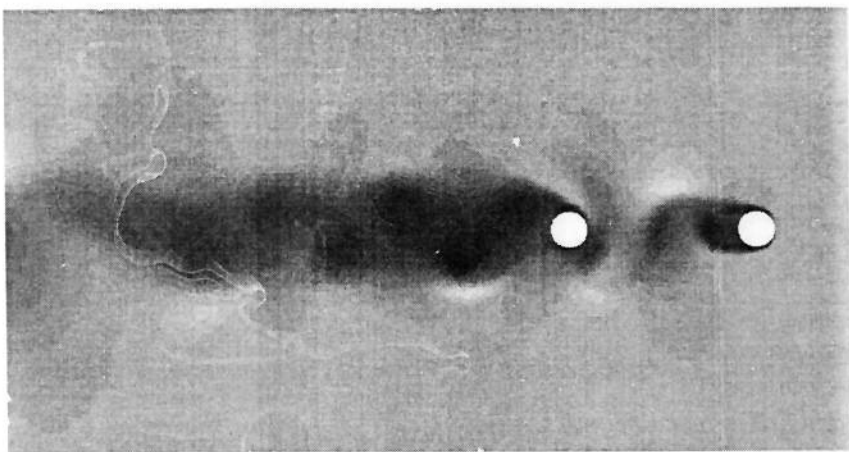


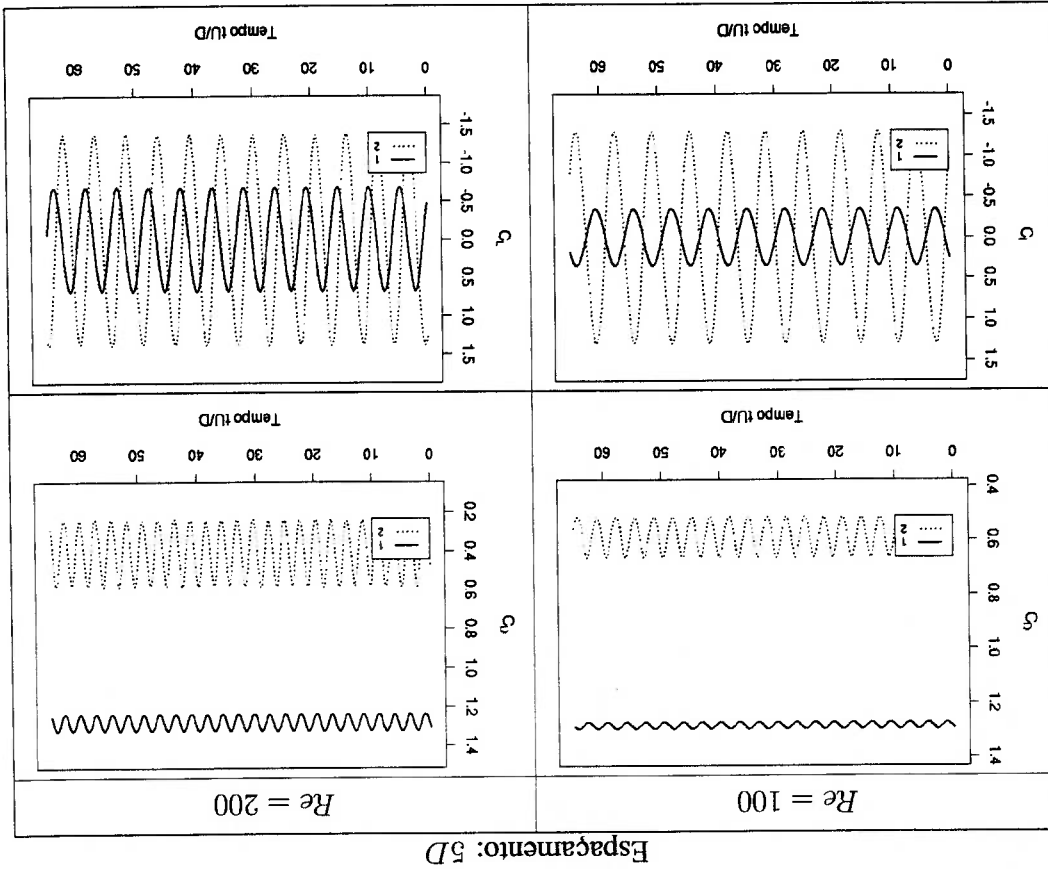
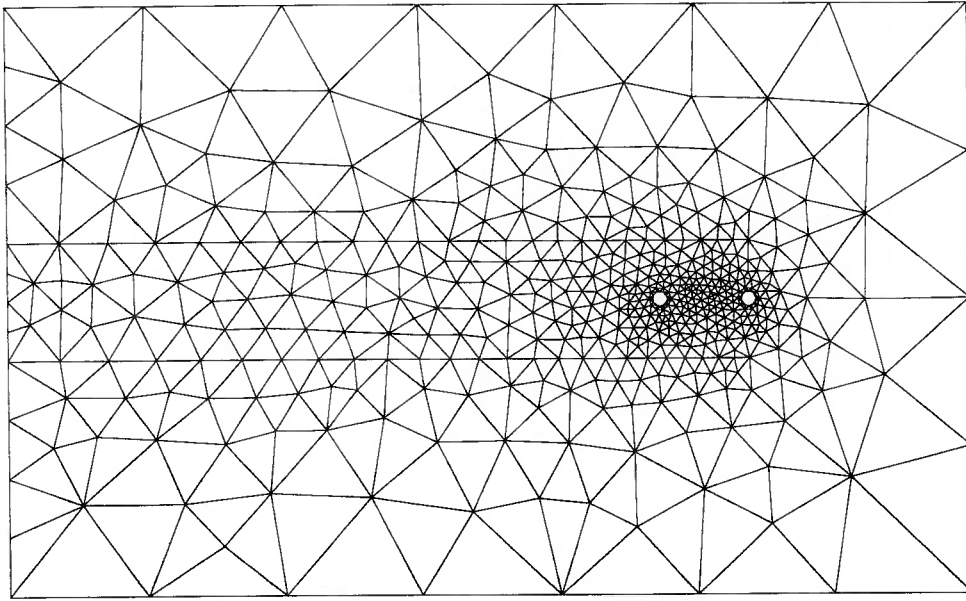


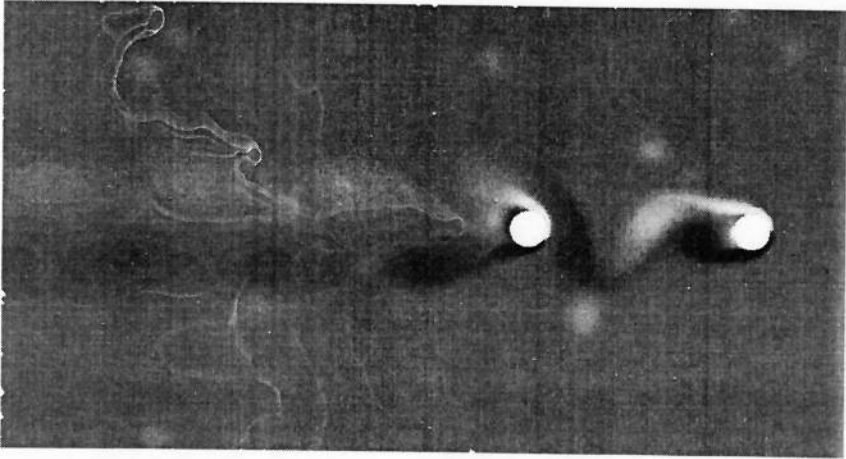
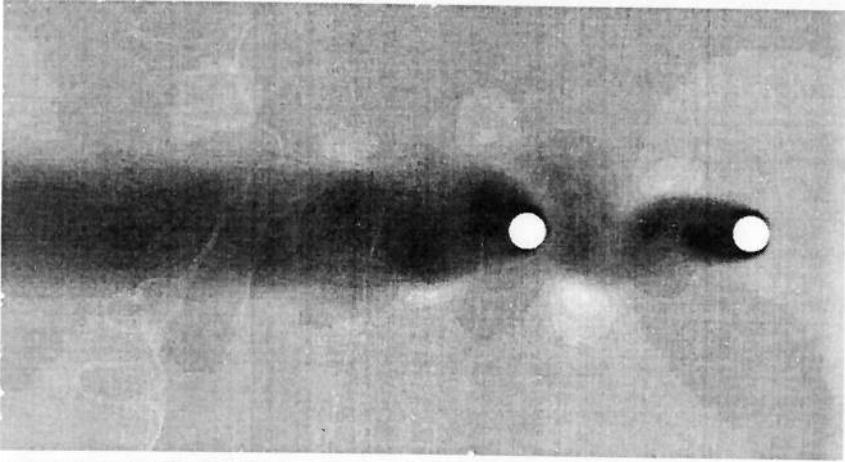
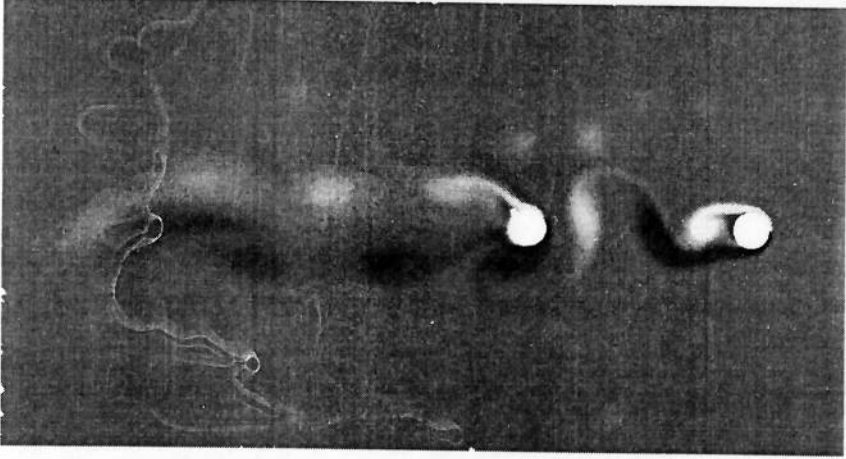
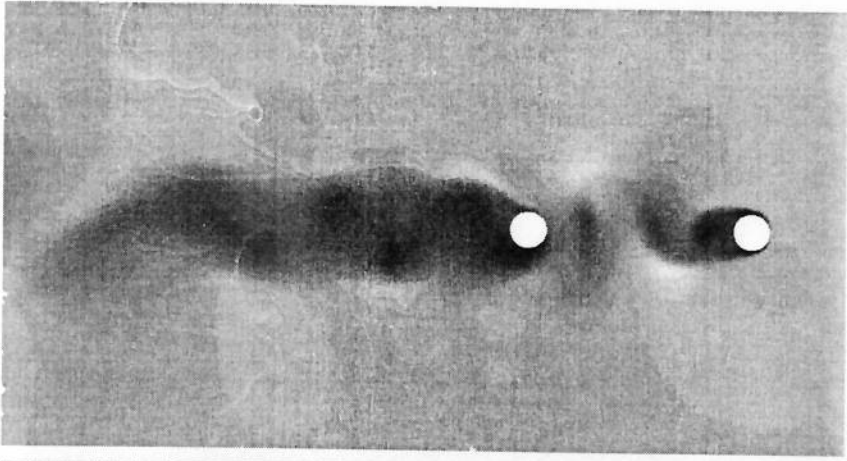
Espacamento: 3D

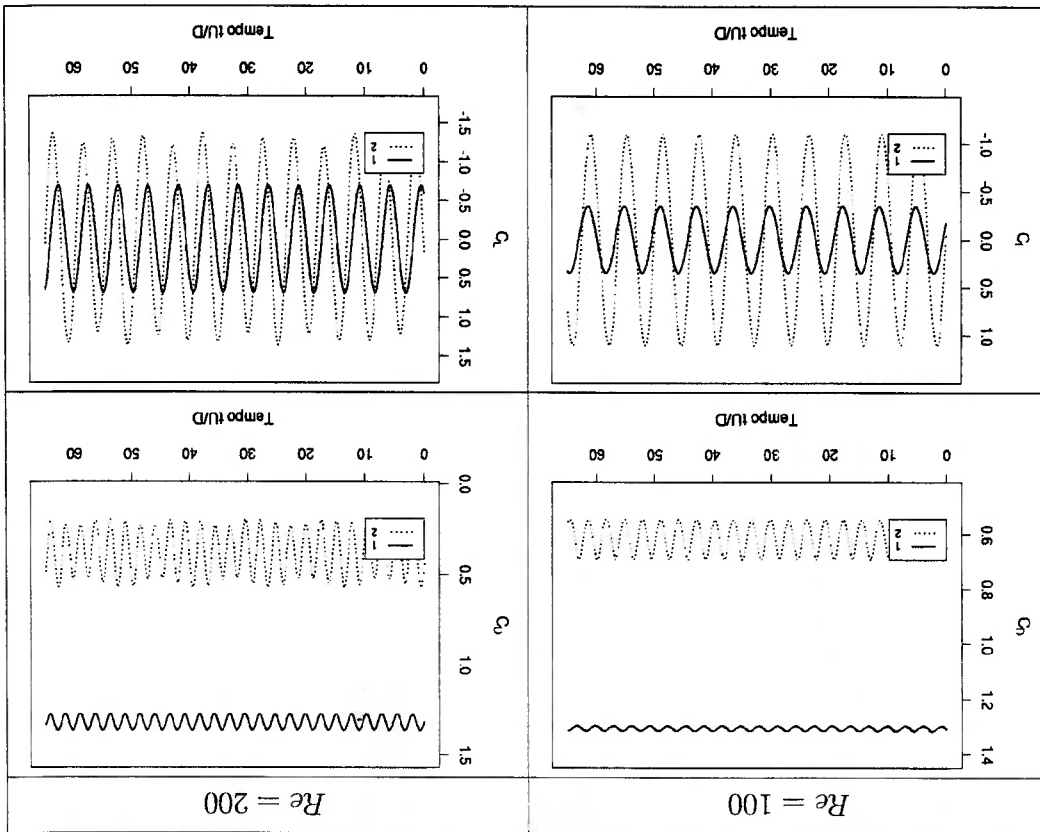
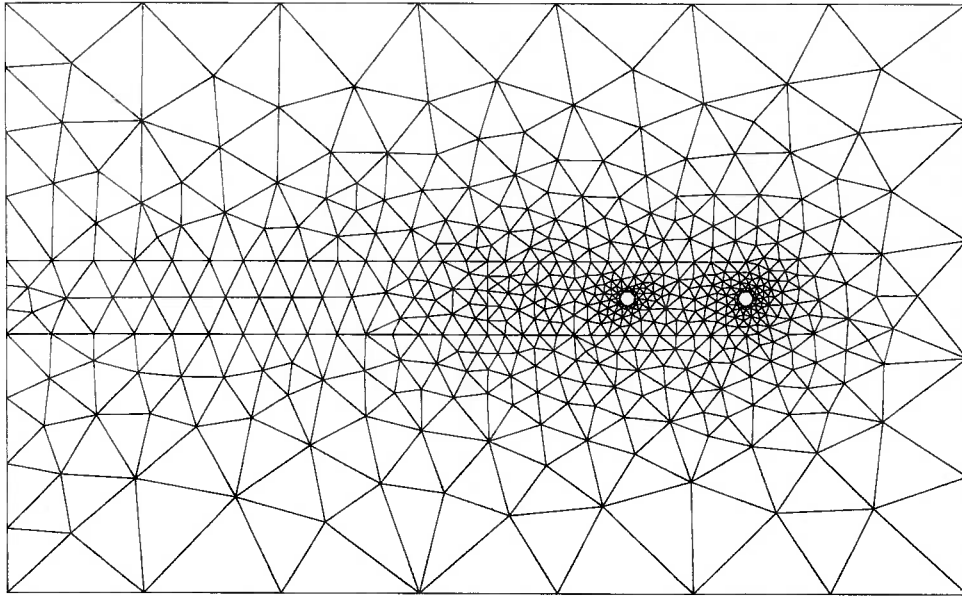




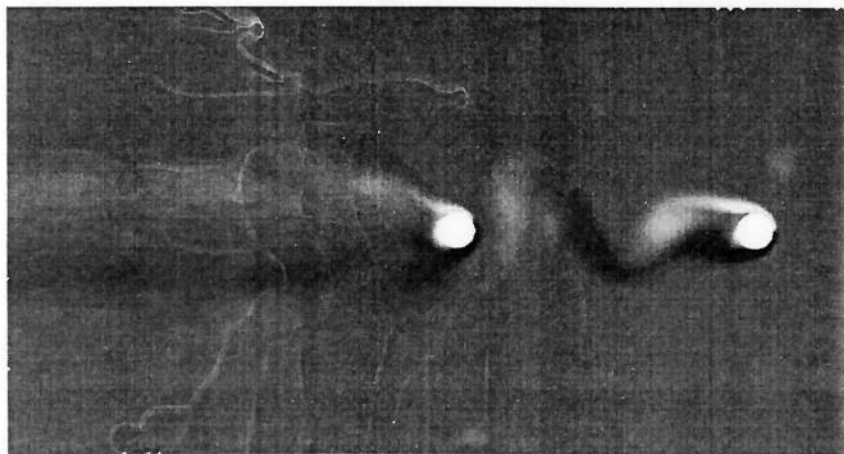
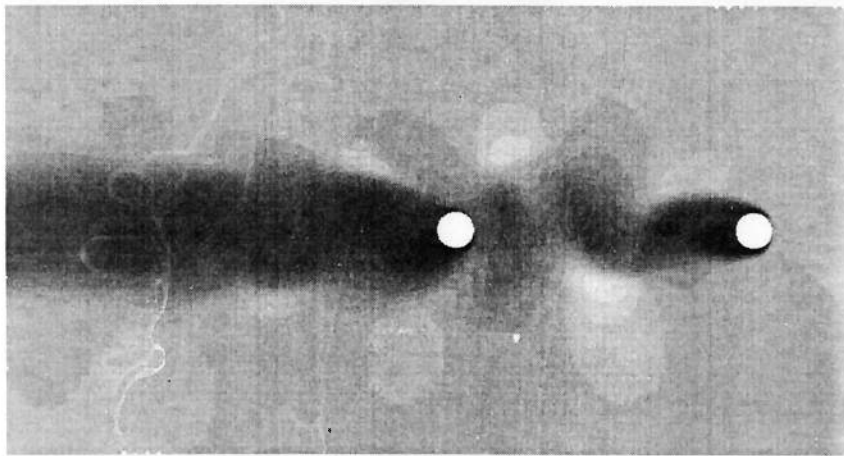
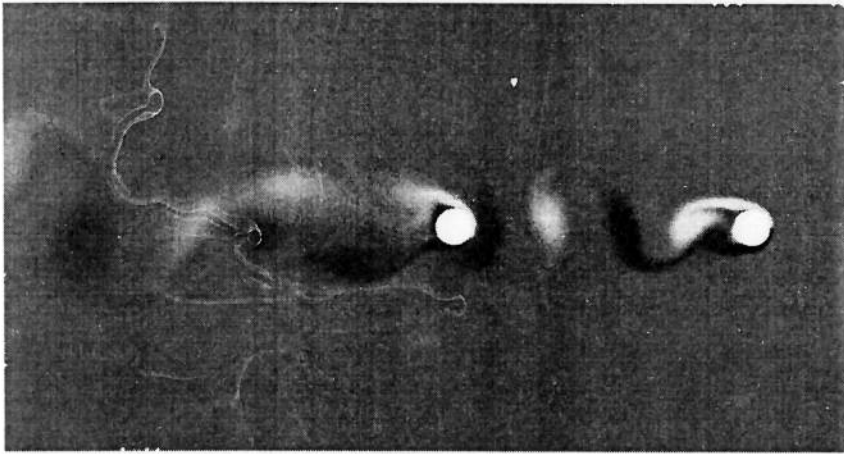
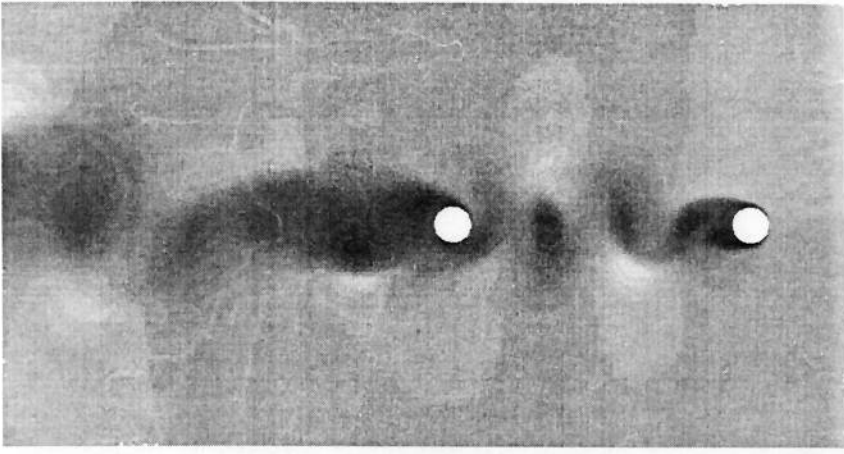


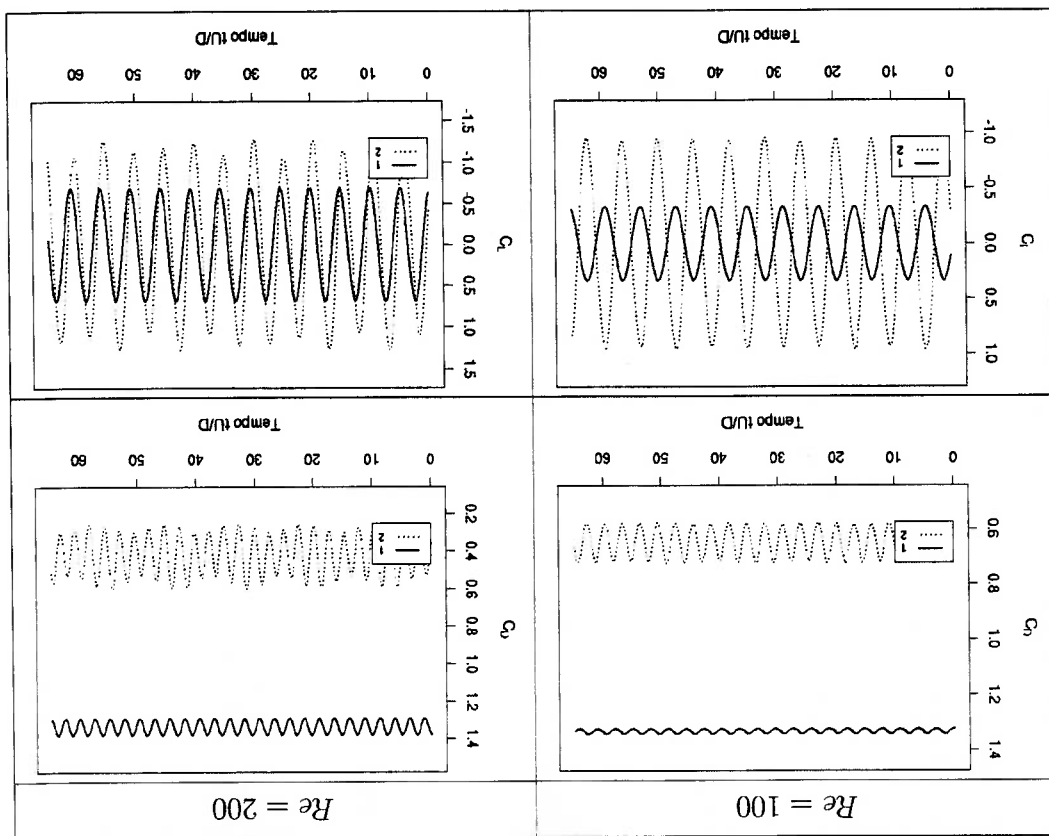
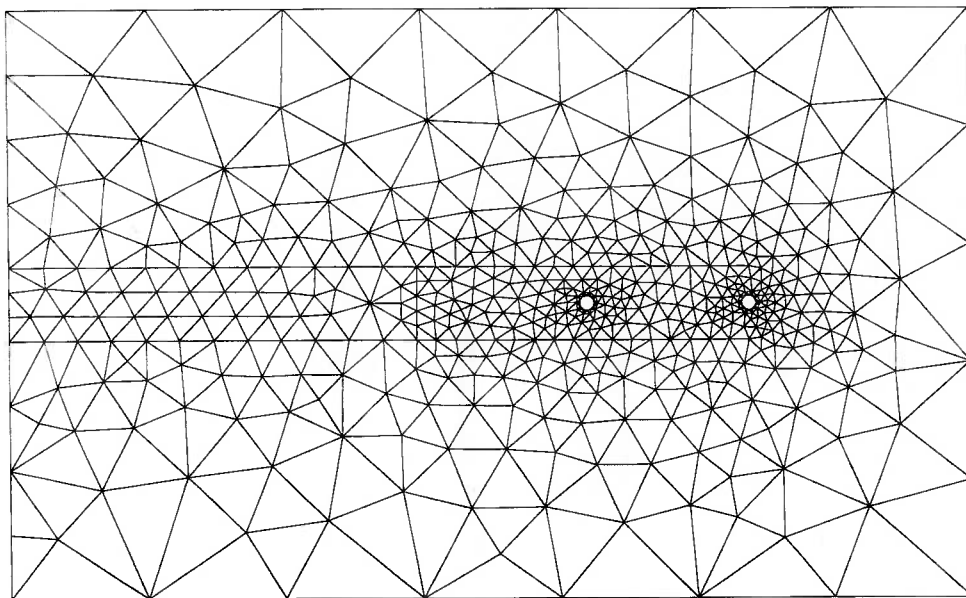






Españamento: 7D





Espaçamento: 10D

