

**RAFAEL ACEDO LOPES**

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADA AO PROJETO DE  
ESTRUTURAS SUBMETIDAS A FORÇAS DE CAMPO  
MECÂNICAS**

**Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de  
São Paulo para obtenção do título  
de Mestre em Engenharia**

**SÃO PAULO**

**2005**

RAFAEL ACEDO LOPES

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICADA AO PROJETO DE  
ESTRUTURAS SUBMETIDAS A FORÇAS DE CAMPO  
MECÂNICAS

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de  
São Paulo para obtenção do título  
de Mestre em Engenharia

Área de Concentração:  
**Engenharia de Controle e  
Automação Mecânica**

Orientador:  
Professor Doutor  
**Emilio Carlos Nelli Silva**

SÃO PAULO

2005

## FICHA CARTOGRÁFICA

Lopes, Rafael Acedo

Otimização topológica aplicada ao projeto de estruturas submetidas a forças de campo mecânicas, 2005.

106p.

Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Controle e Automação Mecânica.

1. Otimização Topológica    2. Forças de campo  
3. Elementos Finitos    4. Hidrogerador.  
I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica

**À minha esposa Natália.**

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus por mais esta realização na minha vida.

Ao Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva, pela orientação, confiança e incentivo.

À Voith Siemens Hydro Power Generation, na pessoa do Dr. Manuel Narciso Ferreira Gonçalves, pelo apoio.

Ao colega Fernando Viegas Stump, pelos valiosos comentários e pelo apoio recebido na fase final deste trabalho.

Aos meus pais, Antonio e Eydene, pelo constante apoio e pelos valores que sempre me transmitiram.

À minha esposa Natália, pelo amor, pela paciência e pela compreensão das horas que me fiz ausente para poder completar este trabalho.

À minha família, pelo apoio e incentivo.

E por fim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

## RESUMO

Na indústria de mecânica pesada, o conceito das estruturas é consequência de mais de um século de desenvolvimento. De forma que soluções estruturais já foram exaustivamente investigadas e poucos são os avanços obtidos pelos métodos tradicionais de projeto. Atualmente, a grande maioria dos novos desenvolvimentos está baseada na experiência de um grupo de projeto ou em alterações de um projeto existente. Neste sentido, os métodos de otimização estrutural apresentam-se como uma alternativa promissora no projeto desses componentes.

Normalmente, no projeto estrutural são consideradas apenas as cargas concentradas. Porém, em alguns casos as forças de campo não podem ser desprezadas. Este é o caso de máquinas rotativas como rotores de hidrogeradores, rotores de turbinas e volantes. No entanto, o projeto ótimo destas estruturas não é intuitivo, uma vez que tanto a rigidez como os carregamentos dependem da distribuição material. Neste sentido, o Método de Otimização Topológica (MOT) pode ser aplicado na obtenção do projeto conceitual destes componentes. O MOT busca a distribuição de material ideal de uma estrutura, tal que uma certa função objetivo seja otimizada. Embora existam diversos artigos que discutam a otimização topológica, apenas alguns consideram a influência das forças de campo.

Neste trabalho, implementou-se uma formulação de otimização topológica aplicada ao projeto de estruturas submetidas a forças de campo mecânicas. Considerou-se o tradicional problema de flexibilidade média onde o objetivo é encontrar a distribuição material que minimiza a flexibilidade média condicionada a restrição de volume. O modelo de material utilizado é baseado no SIMP, enquanto o algoritmo de otimização usado é o critério da otimalidade. Com o intuito de controlar os problemas do MOT, como a dependência de malha e a instabilidade de xadrez, aplicou-se um método de filtragem, enquanto o método de continuação foi utilizado para evitar mínimos locais.

Focando a aplicação industrial, o método foi implementado no software ANSYS™, uma ferramenta comumente encontrada no ambiente industrial. Tanto o algoritmo de otimização como o procedimento de OT, foram implementados usando a linguagem APDL (ANSYS™ Parametric Design Language). Desta forma, foi

possível utilizar todas as vantagens de MEF encontradas em um software comercial, potencializadas pela flexibilidade da ferramenta de otimização.

Para demonstrar a potencialidade do algoritmo, foram simulados alguns problemas clássicos. Finalmente, são apresentados os resultados da otimização topológica do rotor de um hidrogerador sujeito à força peso e força centrífuga.

Os resultados mostram que as forças de campo podem ter uma forte influência na topologia da estrutura dependendo da magnitude em relação às cargas concentradas aplicadas. Conseqüentemente, dependendo da condição operacional do componente mecânico, as forças de campo não podem ser desprezadas na obtenção de um projeto otimizado.

## ABSTRACT

In heavy mechanical industries, the structural concept is a consequence of about a century of development. In such way structural solutions have been exhaustively investigated and few chances of improvements applying conventional design methods remain. Nowadays, the great majority of new developments is based on the experience of a design group, or modifications upon an existing project. In this way, the structural optimization methods come as a powerful tool in the design of these components.

In structural design, usually only concentrated loads are considered. However, among mechanical structures, there are some of them in which the body forces have a major importance in its design. It is the case of rotational machines such as energy generator rotors, turbine runners and flywheels, the optimal design of these structures is not intuitive, once both load and stiffness depend on the material distribution. In this way, topology optimization methods can be applied in conceptual design. The topology optimization methods search an ideal material distribution of a structure, in such way that a certain objective function is optimized. However, even though there are plenty of articles discussing topology optimization structural design, only few of them consider the body force influence.

Thus, in this work, a topology optimization formulation for designing three-dimensional structures under self-weight and inertial forces is developed. As objective function, the traditional mean compliance design problem is considered where the objective is to find the material distribution that minimizes the mean compliance for a certain volume constraint. Material models parametrizing stiffness and density properties were implemented based on the well-known SIMP model. Optimality criteria method is applied as the optimization algorithm. A filtering technique is applied to control the mesh dependency and the checkerboard instability, and the continuation method is applied to avoid local minimums.

Thus, also concerning industry application, the method was implemented by using ANSYS™ software, a tool commonly available at the industrial environment. The optimization algorithm, as well as the topology optimization procedure, was implemented in ANSYS™ by using the APDL (ANSYS™ Parametric Design



Language). This allows us to take all advantages of FEM code capabilities presented in the commercial code increasing the design tool flexibility.

To demonstrate the algorithm potentiality, some examples of classical problems were synthesized and the results are presented. At the conclusion, the design of a hydro generator rotor component subjected to self-weight and centrifugal force is shown and discussed.

Results show that the body forces can have a strong influence in the structural topology depending on their magnitude in relation to the applied concentrated loads. Hence, depending on the operating condition of the mechanical part, body forces cannot be neglected to obtain the optimized design.

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
<b>1.1. Turbinas Hidráulicas .....</b>	<b>5</b>
<b>1.2. Condições operacionais .....</b>	<b>9</b>
<b>1.3. Objetivo e Justificativa .....</b>	<b>10</b>
<b>2. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....</b>	<b>12</b>
<b>2.1. Introdução .....</b>	<b>12</b>
<b>2.2. Elementos bidimensionais.....</b>	<b>16</b>
<b>2.3. Elementos tridimensionais.....</b>	<b>23</b>
<b>3. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL .....</b>	<b>27</b>
<b>3.1. Introdução .....</b>	<b>27</b>
<b>3.1.1. Formulação do problema de otimização.....</b>	<b>27</b>
<b>3.1.2. Problema de otimização estrutural.....</b>	<b>28</b>
<b>3.2. Otimização topológica .....</b>	<b>30</b>
<b>3.2.1. Conceituação .....</b>	<b>32</b>
<b>3.2.2. Domínio fixo estendido.....</b>	<b>34</b>
<b>3.2.3. Modelo de material.....</b>	<b>35</b>
<b>3.2.3.1 Método da homogeneização .....</b>	<b>37</b>
<b>3.2.3.2 Método das densidades.....</b>	<b>38</b>
<b>4. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA.....</b>	<b>42</b>
<b>4.1. Problema de minimização da flexibilidade média .....</b>	<b>42</b>
<b>4.2. Algoritmo de otimização .....</b>	<b>46</b>
<b>4.2.1. Conceitos do critério da otimalidade .....</b>	<b>47</b>

4.2.2. Critério da otimalidade aplicado ao problema deste trabalho .....	49
<b>4.3. Problemas e soluções no MOT.....</b>	<b>56</b>
4.3.1. Instabilidade xadrez .....	57
4.3.2. Dependência de malha.....	60
4.3.3. Escala de cinza.....	62
4.3.4. Métodos de filtragem.....	64
<b>5. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA .....</b>	<b>66</b>
<b>5.1. Introdução .....</b>	<b>66</b>
5.1.1. Inicialização das variáveis.....	68
5.1.2. Análise estrutural .....	69
5.1.3. Cálculo da função objetivo.....	69
5.1.4. Rotina de otimização .....	70
5.1.5. Verificação da convergência .....	70
5.1.6. Pós-processamento .....	70
<b>6. RESULTADOS .....</b>	<b>71</b>
<b>6.1. Introdução .....</b>	<b>71</b>
<b>6.2. Considerações gerais .....</b>	<b>72</b>
<b>6.3. Método da continuação .....</b>	<b>75</b>
<b>6.4. Influência da força de campo na topologia da estrutura.....</b>	<b>80</b>
<b>6.5. Problemas tridimensionais.....</b>	<b>85</b>
<b>6.6. Rotor do gerador .....</b>	<b>87</b>
6.6.1. Modelo bidimensional .....	89
6.6.2. Modelo tridimensional .....	91
<b>6.7. Interpretação dos resultados .....</b>	<b>97</b>
<b>7. CONCLUSÃO .....</b>	<b>98</b>
<b>7.1. Trabalhos futuros.....</b>	<b>99</b>
<b>8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>100</b>

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.1:</b> Problema sujeito a pressão. (a) Domínio fixo de projeto (b) solução ótima possível com carregamento fixo (c) solução ótima possível com carregamento “variável” .....	2
<b>Figura 1.2:</b> Turbina Pelton Vertical .....	6
<b>Figura 1.3:</b> Turbina Bulbo .....	7
<b>Figura 1.4:</b> Turbina Francis Vertical .....	7
<b>Figura 1.5:</b> Turbina Kaplan Vertical .....	8
<b>Figura 1.6:</b> Principais componentes da unidade geradora .....	9
<b>Figura 2.1:</b> Corpo submetido a forças de corpo e superfície .....	12
<b>Figura 2.2:</b> Geometria do elemento isoparamétrico plano de quatro nós .....	16
<b>Figura 2.3:</b> Geometria do elemento plano de oito nós .....	22
<b>Figura 2.4:</b> Geometria do elemento isoparamétrico tridimensional de oito nós .....	23
<b>Figura 2.5:</b> Geometria do elemento tridimensional de vinte nós .....	26
<b>Figura 3.1:</b> Exemplo de 3 categorias de otimização estrutural: (a) otimização paramétrica; (c) otimização de forma; (e) otimização topológica .....	29
<b>Figura 3.2:</b> Exemplos de variáveis de projeto na otimização paramétrica .....	30
<b>Figura 3.3:</b> Exemplos de variáveis de projeto na otimização de forma .....	30
<b>Figura 3.4:</b> Processo de projeto de estruturas utilizando o MOT .....	33
<b>Figura 3.5:</b> Configurações de microestruturas - Método da homogeneização .....	37
<b>Figura 4.1:</b> Corpo submetido a forças de corpo e superfície .....	42
<b>Figura 4.2:</b> Relação entre a pseudodensidade e a rigidez .....	55
<b>Figura 4.3:</b> (a) Solução com o erro numérico de “instabilidade xadrez” (b) Solução sem o erro numérico de “instabilidade xadrez” .....	57
<b>Figura 4.4:</b> (a) Padrão “instabilidade xadrez” (b) Distribuição uniforme .....	58
<b>Figura 4.5:</b> Dependência da malha no problema de OT .....	60
<b>Figura 4.6:</b> Exemplo de como o aumento na quantidade de furos pode aumentar o perímetro total para um dado volume $V$ .....	61
<b>Figura 4.7:</b> Relações a pseudodensidade e a rigidez .....	63
<b>Figura 4.8:</b> (a) Mínimo global (convexa), (b) Mínimos locais (não-convexa) .....	64
<b>Figura 5.1:</b> Algoritmo de otimização .....	67

<b>Figura 6.1:</b> Viga curta em balanço (2D) .....	73
<b>Figura 6.2:</b> Viga bi-apoiada (2D) .....	73
<b>Figura 6.3:</b> Viga bi-apoiada (2D) - Simetria .....	74
<b>Figura 6.4:</b> Viga curta em balanço (3D) .....	74
<b>Figura 6.5:</b> Viga bi-apoiada (3D) .....	75
<b>Figura 6.6:</b> Curva de convergência da função objetivo .....	76
<b>Figura 6.7:</b> Estrutura obtida ao final da primeira etapa .....	76
<b>Figura 6.8:</b> Estrutura obtida ao final da segunda etapa.....	77
<b>Figura 6.9:</b> Estrutura obtida ao final da terceira etapa.....	77
<b>Figura 6.10:</b> Estrutura obtida ao final da quarta etapa.....	78
<b>Figura 6.11:</b> Seqüência de material do problema da viga em balanço .....	80
<b>Figura 6.12:</b> Viga engastada (PLANE 42) - Estrutura obtida apenas com a aplicação da força externa.....	80
<b>Figura 6.13:</b> Viga engastada (PLANE 42) - RF=1 .....	81
<b>Figura 6.14:</b> Viga engastada (PLANE 42) - RF=2 .....	81
<b>Figura 6.15:</b> Viga engastada (PLANE 42) - RF=10 .....	82
<b>Figura 6.16:</b> Viga bi-apoiada (PLANE 82) - Estrutura obtida apenas com a aplicação da força externa.....	82
<b>Figura 6.17:</b> Viga bi-apoiada (PLANE 82) - RF=1 .....	83
<b>Figura 6.18:</b> Viga bi-apoiada (PLANE 82) - RF=2 .....	83
<b>Figura 6.19:</b> Viga bi-apoiada (PLANE 82) - RF=10 .....	83
<b>Figura 6.20:</b> Viga bi-apoiada (PLANE 42) - RF=1 .....	84
<b>Figura 6.21:</b> Viga bi-apoiada (PLANE 42) - RF=2 .....	84
<b>Figura 6.22:</b> Viga bi-apoiada (PLANE 42) - RF=10 .....	85
<b>Figura 6.23:</b> Viga bi-apoiada (SOLID 95) - RF=0 .....	86
<b>Figura 6.24:</b> Viga bi-apoiada (SOLID 95) - RF=1 .....	86
<b>Figura 6.25:</b> Componentes do gerador.....	87
<b>Figura 6.26:</b> Rotor do gerador.....	88
<b>Figura 6.27:</b> Rotor do gerador (2D) - Domínio fixo estendido e condições de contorno.....	90
<b>Figura 6.28:</b> Rotor do gerador (2D) - Restrição de volume = 50% .....	90
<b>Figura 6.29:</b> Rotor do gerador (2D) - Convergência da função objetivo .....	91

<b>Figura 6.30:</b> Rotor (Disparo) – Domínio fixo estendido e condições de contorno – Sem força peso .....	92
<b>Figura 6.31:</b> Rotor (Disparo) – Sem força peso – Restrição de volume = 20%.....	92
<b>Figura 6.32:</b> Rotor (Disparo) – Sem força peso – Restrição de volume = 20%.....	93
<b>Figura 6.33:</b> Rotor (Disparo) – Domínio fixo estendido e condições de contorno – Com força peso .....	93
<b>Figura 6.34:</b> Rotor (Disparo) – Com força peso – Restrição de volume=12,5% .....	94
<b>Figura 6.35:</b> Rotor (Operação Normal) – Domínio fixo estendido e condições de contorno – Sem força peso .....	95
<b>Figura 6.36:</b> Rotor (Operação Normal) – Sem força peso – Restrição de volume = 12,5%.....	95
<b>Figura 6.37:</b> Rotor (Operação Normal) – Sem força peso – Restrição de volume = 20%.....	96
<b>Figura 6.38:</b> Rotor (Operação Normal) – Sem força peso – Restrição de volume = 30%.....	96

## LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1: Propriedades do material isotrópico .....	72
Tabela 6.2: Características técnicas do gerador.....	88
Tabela 6.3: Características técnicas do cubo do gerador .....	89

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

2D	Bidimensional
3D	Tridimensional
ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
ANSYS	Software comercial de elementos finitos
APDL	ANSYS Parametric Design Language
CAD	Computer Aided Design
MEF	Método dos Elementos Finitos
MOT	Método de Otimização Topológica
OT	Otimização Topológica
SI	Sistema Internacional
SIMP	“Simple Isotropic Material with Penalization”



## LISTA DE SÍMBOLOS

$\Gamma$	Contorno	
$\Gamma_t$	Contorno com forças superficiais aplicadas	
$\Gamma_u$	Contorno com deslocamento prescrito	
$\varepsilon$	Tensor de segunda ordem das deformações infinitesimais	
$\lambda$	Multiplicador de Lagrange	
$\rho$	Densidade do material isotrópico	[kg m <sup>-3</sup> ]
$\eta$	Variável de projeto	
$\zeta$	Fator de amortecimento do algoritmo de otimização	
$\Pi$	Energia potencial total	[J]
$\Omega$	Domínio fixo estendido de projeto	
$\Omega_D$	Região do domínio fixo onde há presença de material	
$\sigma$	Tensor de segunda ordem das tensões	[Pa]
$\omega$	Vetor da velocidade angular	[rad s <sup>-1</sup> ]
$\nu$	Coeficiente de Poisson	
$\chi(\mathbf{X})$	Função de distribuição discreta	
$a(.,.)$	Forma bi-linear da energia interna	
$A^e$	Área do elemento plano	[m <sup>2</sup> ]
$A_n$	Variável de projeto qualquer	
$b(.)$	Forma linear do trabalho externo	
$\mathbf{B}$	Matriz das derivadas das funções de forma	
$C$	Flexibilidade média da estrutura	[Nm]
$\mathbf{E}(\mathbf{X})$	Tensor constitutivo de quarta ordem da elasticidade linear	[Pa]
$\mathbf{E}_0$	Tensor constitutivo de quarta ordem do material isotrópico base	[Pa]
$E$	Módulo de elasticidade (Young)	[Pa]
$\mathbf{F}$	Vetor de forças	[N]

$f_N$	Vetor de forças concentradas aplicadas nos nós	[N]
$f_C$	Vetor de forças de corpo “aplicadas” nos nós	[N]
$F_C$	Vetor de forças de corpo	[N]
$f(X)$	Função objetivo do problema de otimização	
$f_k(X)$	Restrição de igualdade	
$f_v$	Restrição de volume do material	
$g$	Vetor da aceleração da gravidade	[m s <sup>-2</sup> ]
$g_i(X)$	Restrição de desigualdade	
$I_x$	Ponto de integração de Gauss na direção x	
$I_y$	Ponto de integração de Gauss na direção y	
$I_z$	Ponto de integração de Gauss na direção z	
$J$	Matriz Jacobiana	
$ J $	Determinante da matriz Jacobiana	
$k$	Índice da iteração	
$K$	Matriz de rigidez	
$L$	Lagrangeano	
$L(.)$	Operador diferencial	
$N$	Matriz das funções de forma do elemento	
$n_e$	Número de elementos	
$p$	Vetor de forças de corpo	[N m <sup>-3</sup> ]
$P$	Fator de penalização das densidades intermediárias	
$P_K$	Fator de penalização das densidades intermediárias - relacionado à rigidez	
$P_B$	Fator de penalização das densidades intermediárias - relacionado às forças de campo	
$q$	Função contínua	
$r$	Ordenada do sistema de coordenadas locais do elemento	
$r$	Distância entre o centro de rotação do sistema e o ponto onde se está calculando o vetor $F_C$	[m]
$R_{ij}$	Distância entre os centróides dos elementos “i” e “j”	[m]
$R_{filtro}$	Raio de atuação do filtro	[m]
$s$	Abscissa do sistema de coordenadas locais do elemento	

<b>t</b>	Vetor de forças superficiais externas	[N m <sup>-2</sup> ]
<b>u</b>	Vetor de deslocamentos	[m]
<b>U<sup>e</sup></b>	Vetor dos deslocamentos nodais do elemento “e”	[m]
<b>U</b>	Energia de deformação	[J]
<b>v</b>	Vetor de deslocamentos	[m]
<b>V</b>	Volume do corpo	[m <sup>3</sup> ]
<b>V<sub>0</sub></b>	Volume do domínio fixo estendido	[m <sup>3</sup> ]
<b>V<sup>e</sup></b>	Volume do elemento sólido	[m <sup>3</sup> ]
<b>x</b>	Posição	[m]
<b>X</b>	Vetor das variáveis de projeto	
<b>X<sub>min</sub></b>	Limite móvel inferior da variável de projeto	
<b>X<sub>max</sub></b>	Limite móvel superior da variável de projeto	
<b>W<sub>Ix</sub></b>	Peso de integração de Gauss na direção x	
<b>W<sub>Iy</sub></b>	Peso de integração de Gauss na direção y	
<b>W<sub>Iz</sub></b>	Peso de integração de Gauss na direção z	
<b>.<sup>t</sup></b>	Índice de transposição de matriz ou vetor	
<b>.<sup>-1</sup></b>	Inversa de uma matriz	
<b>^</b>	Multiplicação vetorial	

## 1. INTRODUÇÃO

Na indústria de mecânica pesada, em especial de equipamentos de hidrogenação, o aperfeiçoamento das estruturas é decorrente de mais de um século de desenvolvimento. De forma que as soluções estruturais já foram exaustivamente investigadas e poucos são os avanços obtidos pelos métodos tradicionais de projeto (GULLIVER, ARNDT, 1991). Assim, a grande maioria dos “novos” desenvolvimentos está baseada na experiência de um grupo de projeto ou em alterações de um projeto existente. Neste sentido, os métodos de otimização estrutural apresentam-se como uma alternativa promissora no projeto desses componentes.

O método de otimização topológica oferece uma metodologia sistemática e eficiente para o projeto otimizado de componentes mecânicos (BENDSØE; KIKUCHI, 1988 e SUZUKI; KIKUCHI, 1991). Basicamente, o objetivo do método de otimização topológica (MOT) é encontrar a distribuição de material ideal de uma estrutura em um determinado espaço viável de projeto, dentro das condições de contorno, tal que a função objetivo seja otimizada (minimizada ou maximizada).

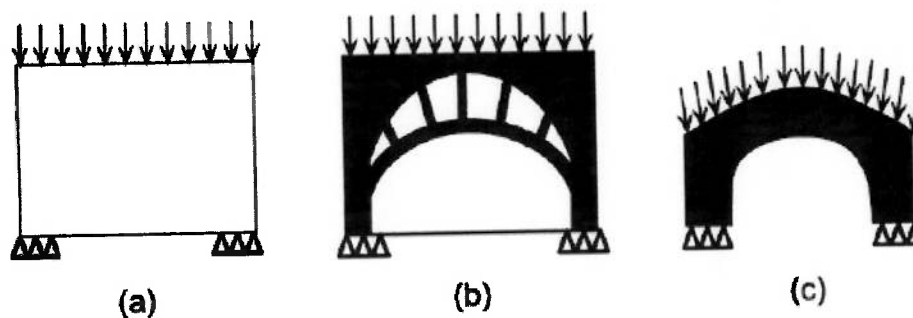
Originalmente, o MOT foi desenvolvido para projetos de maximização da rigidez de estruturas. Atualmente, esta metodologia tem sido aplicada com sucesso na resolução dos mais diversos tipos de problemas de otimização estrutural, tais como mecanismos flexíveis, estruturas submetidas a cargas dinâmicas, entre outros (BENDSØE, SIGMUND, 2003).

Normalmente, no projeto estrutural são consideradas apenas as cargas concentradas. Contudo, em muitos casos o problema de otimização depende do carregamento. No entanto, o projeto ótimo destas estruturas não é intuitivo, uma vez que tanto a rigidez da estrutura com os carregamentos decorrentes das forças de campo dependem da distribuição material.

O projeto de otimização dependente do carregamento ocorre quando a intensidade, o sentido e a direção do carregamento estão diretamente acoplados a topologia da estrutura (HAMMER; OLHOFF, 2000).

Dentre os diversos problemas de otimização dependentes do carregamento, pode-se destacar:

- Problemas de otimização sujeitos a pressão. (HAMMER; OLHOFF, 2000; CHEN, KIKUCHI, 2001; FUCHS; SHEMESH, 2004; DU, OLHOFF, 2004a) tratam o problema em questão. (DU, OLHOFF, 2004b) expandem a metodologia anterior para a solução de estruturas tridimensionais. Entre as estruturas que se enquadram neste tipo de problemas estão as estruturas civis submetidas a vento ou neve, fuselagem e asas do avião, turbinas a vapor, etc.... A **Figura 1.1(a)** ilustra o problema de uma estrutura submetida a um carregamento distribuído. Pode-se verificar a influência da direção e posição das cargas na topologia da estrutura (**Figura 1.1(b)** e **Figura 1.1(c)**);



**Figura 1.1:** Problema sujeito a pressão. (a) Domínio fixo de projeto (b) solução ótima possível com carregamento fixo (c) solução ótima possível com carregamento “variável”

- Problemas de otimização com carregamento “móvel”. Neste caso, o carregamento móvel é definido como uma força, com intensidade e direção determinadas, que pode ser aplicada em qualquer ponto da sua linha de ação. Ou seja, o ponto de aplicação da força não está fixo, de forma que a força pode “caminhar” ao longo da sua linha de ação. (FUCHS; MOSES, 2000) apresentam uma metodologia que trata este tipo de problema;
- Problemas de otimização sujeitos a forças de campo. Na Engenharia Mecânica, este tipo de problema é encontrado na otimização de componentes de máquinas rotativas, tais como rotores de hidrogeradores, rotores de turbinas e volantes. Na área civil, podem ser citadas as grandes estruturas onde o peso próprio é uma carga

relevante. Bruyneel e Duysinx (2005) tratam este problema utilizando o MOT.

Este trabalho tem por objetivo estudar o terceiro tipo de problema de otimização dependente do carregamento. Em seguida, apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre o problema em questão.

Liu, Parks e Clarkson (2005) indicam Donath como um dos precursores no estudo da otimização de estruturas rotativas sujeitas a forças centrífugas. Donath aproximou a estrutura estudada por uma série de discos com espessura constante.

Stodola (1927) discutiu a otimização do cubo do rotor de uma turbina a vapor. O trabalho de Stodola considerava um disco, sem furo central, sujeito ao carregamento imposto pelas pás da turbina e pela força centrífuga. O carregamento equivalente das pás era dividido uniformemente ao longo do perímetro externo do disco. O trabalho de Stodola fundamentava-se na idéia de manter a tensão constante em todo o disco. Assim, Stodola sugere uma curva hiperbólica para descrever o perfil ótimo da estrutura.

Com o advento dos métodos computacionais baseados em métodos de programação matemática, Bhavikatti e Ramakrishnan (1980) aplicaram o método de programação linear seqüencial para resolver o problema de otimização de um disco sujeito à força centrífuga. Enquanto, Cheu (1990) aplicou com sucesso o método “feasible direction” para a solução do mesmo problema. Kress (2000) aplicou o método “feasible direction” para otimizar a distribuição de espessura de um volante com furo central.

Liu, Parks, Clarkson (2005) estudaram a otimização de estruturas axissimétricas sujeitas a forças de campo. Os autores implementaram o método de desenvolvimento metamórfico (um tipo de método de crescimento). A metodologia foi aplicada a dois casos. O primeiro consistiu no crescimento de uma estrutura submetida apenas à força peso. Enquanto, no segundo caso, foi estudada a otimização de forma do rotor de uma turbina a gás submetido a forças termomecânicas (centrífuga, térmica e concentradas relativas às pás do rotor) e sujeito à restrição de tensão.

Cruz, Mendez, Guerrero e Anaya (2004) apresentam a otimização do cubo do rotor de uma turbina eólica sujeito à restrição de tensão máxima. O método de crescimento biológico foi o algoritmo de otimização utilizado.

Neste trabalho, desenvolveu-se uma formulação de otimização topológica aplicada ao projeto de estruturas submetidas a forças de campo mecânicas.

Implementou-se o tradicional problema de flexibilidade média onde o objetivo é encontrar a distribuição material que minimiza a flexibilidade média condicionada a restrição de volume.

O texto está organizado da seguinte forma. No primeiro capítulo, é feito um breve histórico sobre as máquinas hidráulicas, bem como, são descritos os principais tipos das turbinas hidráulicas e condições operacionais. Em continuação, apresenta-se uma revisão bibliográfica e o problema de otimização estudado é contextualizado na Engenharia. No capítulo 2 é apresentada uma breve revisão sobre o método dos elementos finitos, ferramenta utilizada para resolver as equações de equilíbrio, com o enfoque para a formulação utilizada neste trabalho. No terceiro capítulo, são abordados os principais conceitos utilizados em grande parte dos projetos envolvendo otimização estrutural. O capítulo 3 também inclui os principais conceitos da otimização topológica.

No quarto capítulo, é apresentada a formulação do problema de minimização da flexibilidade de estruturas contínuas submetidas a forças de campo e restrições de volume. Este capítulo, também é dedicado à apresentação dos principais problemas que envolvem a formulação desenvolvida, bem como, possíveis métodos para amenizar tais efeitos. A implementação numérica é detalhada no quinto capítulo.

Para demonstrar a potencialidade do algoritmo, o capítulo 6 apresenta alguns resultados clássicos, bem como, a aplicação prática no projeto de um componente de hidrogerador sujeito ao peso próprio e a força centrífuga.

Nos capítulos 7 e 8, são apresentados os comentários a respeito de trabalhos futuros, as conclusões e as referências bibliográficas que fundamentaram este trabalho. Os códigos fonte das rotinas APDL são encontrados no apêndice A.

## 1.1. Turbinas Hidráulicas

Há mais de 2000 anos, o homem utiliza a energia da água através de máquinas hidráulicas para minimizar os esforços humanos em atividades diversas.

Aparentemente, os gregos foram os primeiros a utilizar máquinas hidráulicas de bombeamento para retirar água do porão dos navios. Há 2300 anos atrás, Arquimedes desenvolveu a primeira bomba hidráulica.

No século XVII, foram desenvolvidas as primeiras máquinas concebidas segundo as leis físicas empregadas na atualidade (GULLIVER, ARNDT, 1991).

Até meados do século XIX, a energia era transmitida de forma mecânica (polia, correias eixo) da fonte geradora até o ponto de consumo. A partir da revolução industrial, a transformação da energia hidráulica em energia elétrica se tornou um ramo promissor de estudo.

Segundo a Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL), as usinas hidrelétricas fornecem mais de 90% da energia gerada no Brasil. Mesmo assim, segundo as informações da mesma entidade, apenas 25% do potencial hidrelétrico brasileiro foi explorado (ANEEL, 2002).

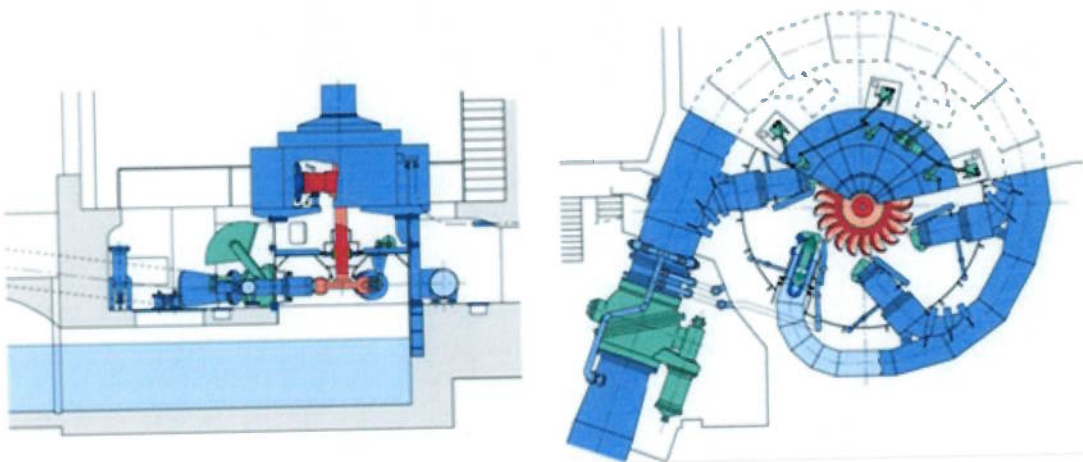
Toda esta potencialidade, a crescente demanda por energia e a crise energética que está sendo vislumbrada para os próximos anos, demonstram que muitos esforços serão feitos para que haja um desenvolvimento ainda maior nesta área. Muitos recursos serão utilizados com o intuito de aumentar a produtividade, garantir a geração e melhorar a confiabilidade das usinas e dos sistemas elétricos. Tavares (2003) discute o atual modelo energético brasileiro.

Os grupos geradores (turbina-gerador) são o coração da usina hidrelétrica, estes dois equipamentos são os responsáveis pela conversão de energia, pela estabilidade e segurança operacional dos sistemas que conduzem e suportam as massas energéticas, além de serem o ponto de partida para o dimensionamento do restante da usina. A turbina hidráulica converte energia hídrica em mecânica e a transfere ao eixo. O gerador, por sua vez, converte energia mecânica em elétrica.

Segundo Gulliver e Arndt (1991), as turbinas hidráulicas podem ser classificadas em dois grupos, a saber:



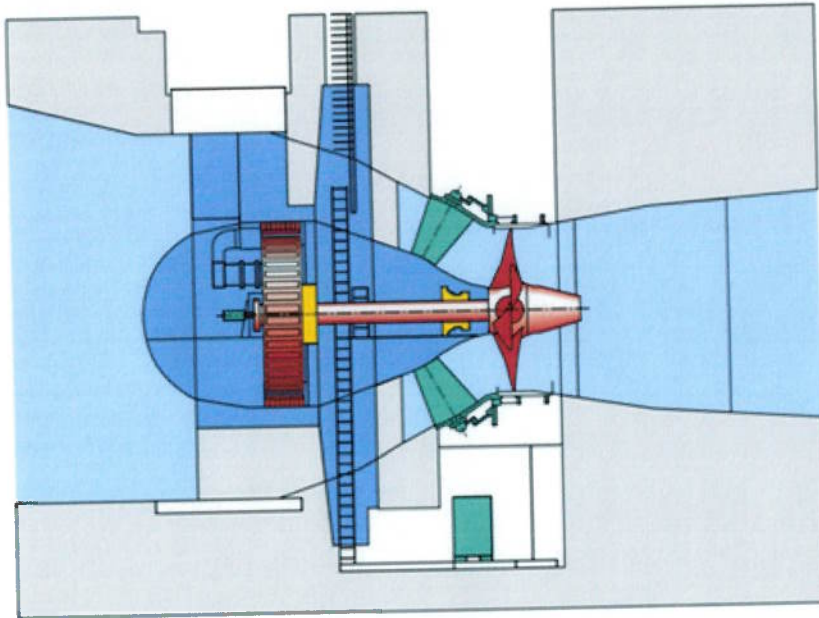
- Turbinas de ação: Estes tipos de turbina operam com a energia cinética da água. Toda a energia potencial da água é transformada em cinética antes de chegar às conchas do rotor da turbina. O tipo de turbina de ação mais conhecida é a turbina Pelton (Figura 1.2). Os rotores das turbinas tipo Pelton são acionados por jatos de água que atingem suas conchas. As conchas têm formato de colher dupla (lado a lado), separadas por um septo. Os jatos são direcionados através de um ou mais injetores, os quais possuem agulhas reguladoras que controlam a vazão.



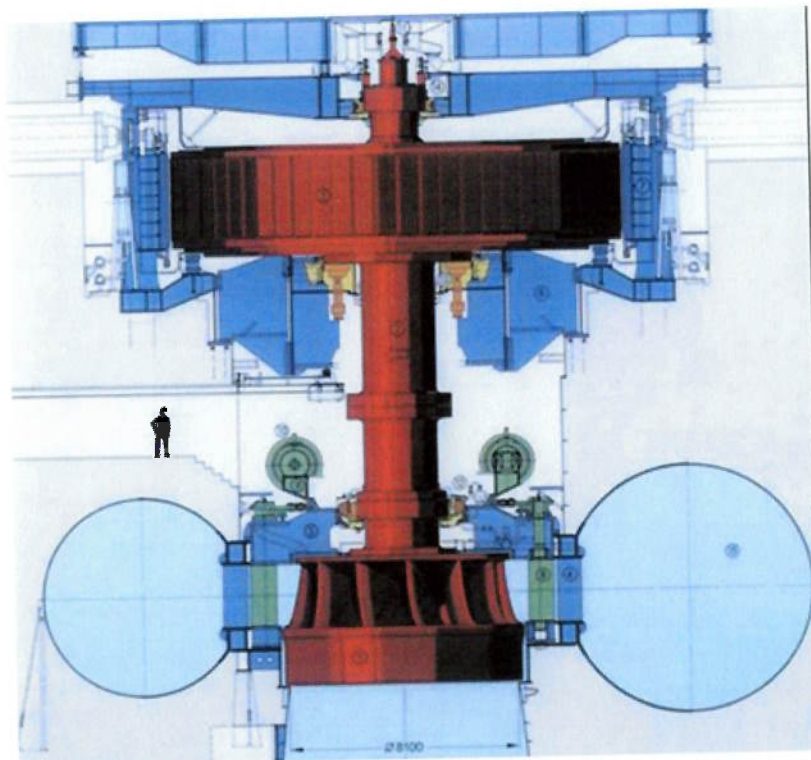
**Figura 1.2:** Turbina Pelton Vertical

- Turbinas de reação: Diferentemente das turbinas de ação, estas operam com a energia em forma cinética e de pressão, pois só parte da energia potencial é transformada em cinética. A pressão da água à saída do rotor, pode estar a pressões positiva, negativa ou nula em relação à pressão atmosférica. Os dois tipos de turbinas de reação mais conhecidos são a Francis (Figura 1.4) e a Kaplan (Figura 1.5). Diferentemente da Pelton, o que geralmente direciona o fluxo antes dos rotores tipo Francis e Kaplan é a caixa espiral (caracol). O controle da vazão para turbinas de reação é feito pelas palhetas do distribuidor, que são operadas por um ou mais servomotores hidráulicos. A turbina tipo Francis é chamada de fluxo misto, pois a água entra radialmente no rotor e sai axialmente ao mesmo. A turbina tipo Kaplan tem o fluxo puramente axial. Este último tipo de turbina possui pás móveis, comandadas por um servomotor hidráulico

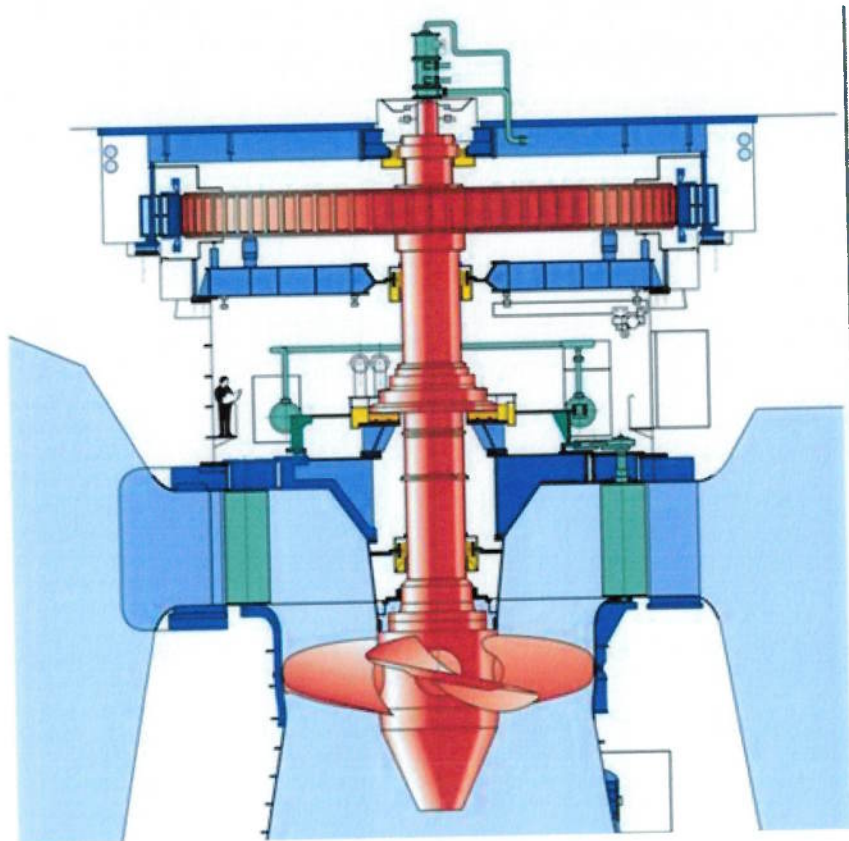
localizado dentro do cubo ou no eixo da turbina. Essa propriedade de movimentação das pás é um importante meio de compensar as variações de vazão e queda. Uma variação das turbinas Kaplan são as turbinas bulbo (**Figura 1.3**).



**Figura 1.3:** Turbina Bulbo



**Figura 1.4:** Turbina Francis Vertical

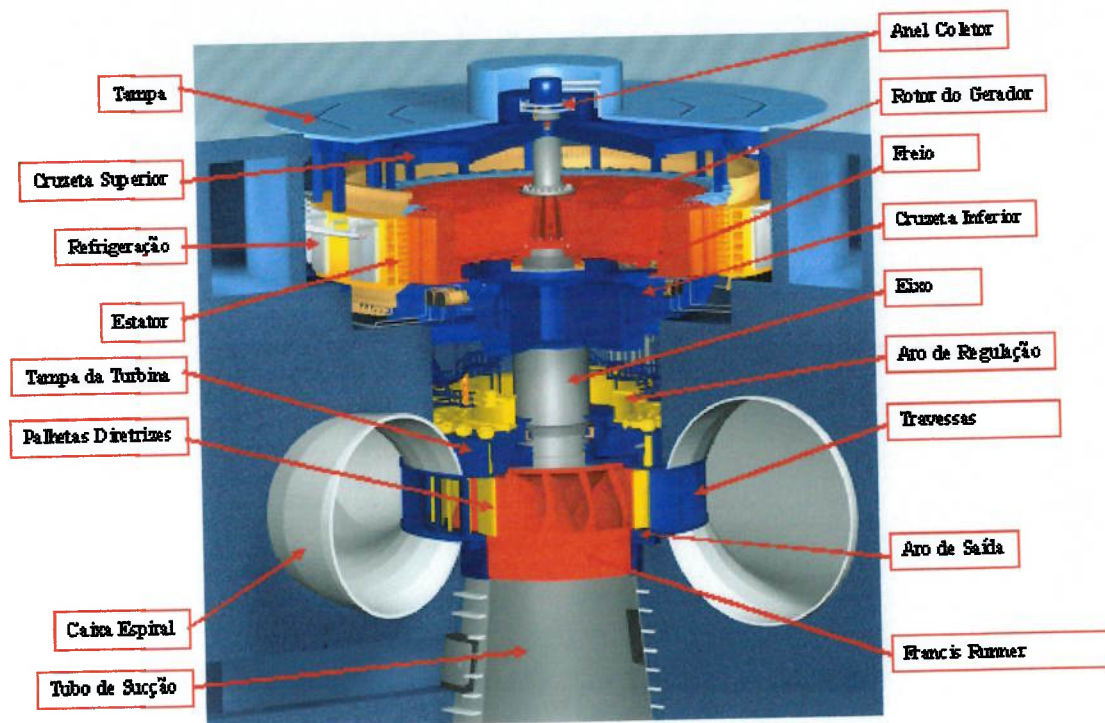


**Figura 1.5: Turbina Kaplan Vertical**

Os desenhos apresentados acima consideram a seguinte convenção de cores:

- Partes em vermelho – indicam as partes rotativas da unidade geradora, formadas basicamente pelo rotor do gerador, rotor da turbina e eixos;
- Partes em verde – correspondem aos componentes empregados no sistema de regulação da turbina;
- Partes em amarelo – mostram os mancais e seus respectivos sistemas de bombeamento de óleo.
- Partes em azul escuro – indicam os elementos embutidos e os elementos fixos, tais como a caixa espiral, tampas da turbina, aro de saída, cruzetas, estator do gerador;
- Partes em azul escuro – referem-se a estrutura civil.

Os principais componentes da unidade geradora estão rerepresentados na **Figura 1.6**



**Figura 1.6:** Principais componentes da unidade geradora

## 1.2. Condições operacionais

Na grande maioria dos casos, as turbinas hidráulicas são máquinas síncronas, ou seja, são projetadas para operarem com velocidade angular de rotação sempre constante durante a operação nominal (GULLIVER, ARNDT, 1991). Nesta situação, o torque no rotor da turbina decorrente da transformação da energia hidráulica em energia mecânica é equilibrado pelo torque originado no rotor do gerador pela ação das forças eletromagnéticas.

As variações de carga são corrigidas pelo regulador de velocidade e regulador de tensão. O primeiro sistema controla a abertura e o fechamento das paletas diretrizes (ou injetores) e conseqüentemente a vazão. Enquanto o segundo sistema atua diretamente na corrente de excitação dos pólos do gerador alterando por conseqüência o valor do torque eletromagnético.

No caso de uma rejeição total de carga, o gerador é subitamente desconectado da rede elétrica, fazendo com que o torque eletromagnético desapareça e, com isto, com que o torque hidráulico, acelere a máquina. Ao detectar o aumento da rotação, o regulador de velocidade fecha o distribuidor (ou os injetores), reduzindo o torque no

rotor até que a máquina possa ser completamente parada. A máxima rotação atingida nesta condição é denominada sobre-velocidade.

No caso do disparo, o processo é similar. Contudo, por alguma falha no sistema de regulação de velocidade, este não atua e conseqüentemente a vazão mantém-se inalterada, bem como, o torque hidráulico. Nestas circunstâncias, a máquina acelera até que o escoamento pela turbina se torne tão desordenado a ponto que o torque hidráulico seja equilibrado apenas pelas perdas viscosas nos mancais da unidade geradora e as perdas de ventilação do gerador. Nesta condição, a rotação de equilíbrio é denominada rotação de disparo.

### **1.3. Objetivo e Justificativa**

Diante do atual cenário econômico, o engenheiro necessita de metodologias de projeto cada vez mais eficientes e competitivas, que possibilitem um projeto de qualidade com o menor tempo e custo possíveis. Nas últimas décadas, diversas ferramentas computacionais, tais como Método dos Elementos Finitos (MEF) têm facilitado o projeto e análise de componentes.

Conforme mencionado, a grande maioria dos novos desenvolvimentos ainda está baseada na experiência de um grupo de projeto ou em alterações de um projeto existente.

Desta forma, o objetivo deste trabalho é implementar uma formulação de otimização topológica aplicada ao projeto de estruturas submetidas a forças de campo mecânicas. Implementou-se o problema de flexibilidade média onde o objetivo é encontrar a distribuição material que minimiza a flexibilidade média condicionada a restrição de volume.

Deve-se ter em mente que o critério de dimensionamento de diversos componentes da unidade geradora é a deflexão e não a tensão. Assim sendo, a rigidez é uma característica fundamental no dimensionamento destas estruturas. Nesta condição, o componente dimensionado que atende os requisitos de deflexão, conseqüentemente satisfaz os critérios de tensão.

O MOT foi implementado utilizando o método das densidades SIMP (“Simple Isotropic Material with Penalization”) (BENDSØE, 1989, ZHOU;

ROZVANY, 1991). Enquanto o critério da otimalidade foi o algoritmo de otimização (WASIUTYNSK, 1966). Hassani e Hinton (1998c) apresentam uma revisão completa do método. Com o intuito de controlar a dependência de malha e a instabilidade de xadrez (SIGMUND, PETERSSON, 1998), aplicou-se um método de filtragem (SIGMUND, 1997), enquanto o método de continuação foi utilizado para evitar mínimos locais.

Dois aspectos devem ser destacados. O primeiro é a consideração das forças de campo, visto que tais carregamentos podem ter uma forte influência na topologia da estrutura dependendo da magnitude em relação às cargas concentradas aplicadas (BRUYNEEL, DUYSINX, 2005). O segundo é a utilização de um software comercial de elementos finitos na implementação. O algoritmo foi implementado no software de ANSYS™, uma ferramenta comumente encontrada no ambiente industrial. A rotina de otimização foi desenvolvida na linguagem APDL (ANSYS Parametric Design Language) do software comercial ANSYS. Tanto o algoritmo de otimização como o procedimento de OT, foram implementados usando esta linguagem. Todas as demais funções (pré, pós-processamento e solução) são executadas diretamente pelo ANSYS através da rotina APDL.

Desta forma, foi possível utilizar todas as vantagens do MEF encontradas em um software comercial, potencializadas pela flexibilidade da ferramenta de otimização.

## 2. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

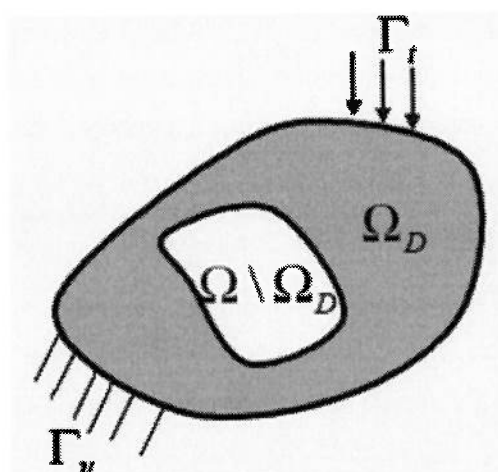
### 2.1. Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar de forma sucinta os principais conceitos do MEF utilizados neste trabalho.

Existem inúmeras publicações e livros que tratam sobre o MEF. Dentre os livros clássicos, que contém a formulação completa do método, podem-se citar (BATHE, 1996) e (ZIENKIEWICZ, 1979). Outras referências (COOK, 1994) e (SEGERLIND, 1984) apresentam uma abordagem mais prática, onde os conceitos são apresentados de forma mais intuitiva e com menos formalismo matemático. Os fundamentos teóricos, bem como, a formulação dos elementos utilizados pelo software comercial ANSYS está detalhada no manual teórico do software (ANSYS, 2001).

Os conceitos, bem como a formulação, ora apresentados estão baseados nas referências (SEGERLIND, 1984) e (ANSYS, 2001).

Considere um corpo tridimensional constituído de um material elástico linear que ocupa um domínio  $\Omega_D$  que é parte de domínio de referência maior  $\Omega$  em  $\mathcal{R}^3$ .



**Figura 2.1:** Corpo submetido a forças de corpo e superfície

Suponha que o corpo está sujeito a um conjunto de forças de corpo  $\mathbf{p}$  e a um conjunto de forças distribuídas  $\mathbf{t}$  aplicadas a uma região da sua superfície  $\Gamma_t$ . O corpo está restrito na região da sua superfície  $\Gamma_u$ . Os carregamentos supracitados geram um campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$ .

A partir do Princípio da Mínima Energia Potencial Total (PMEP), pode-se escrever o funcional de energia em sua forma bilinear:

$$\Pi = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}) \quad (2.1)$$

onde

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \quad (2.2)$$

é a forma bilinear correspondente à energia de deformação, e

$$b(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma} \mathbf{t} v d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{p} v d\Omega \quad (2.3)$$

é o termo linear referente ao trabalho das forças externas, sendo que o primeiro termo de (2.3) refere-se às forças de superfície, enquanto o segundo termo refere-se às forças de corpo.

$\mathbf{E}$  é o tensor constitutivo de quarta ordem da elasticidade linear,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  é o tensor de segunda ordem das deformações infinitesimais,  $\mathbf{t}$  é o vetor de forças superficiais externas,  $\mathbf{p}$  é o vetor de forças de corpo e  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores de deslocamento.

Serão consideradas apenas deformações infinitesimais, onde a relação entre a deformação  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  e o deslocamento  $\mathbf{u}$  é dada pelo operador diferencial  $\mathbf{L}(\cdot)$ :



$$\mathbf{L}(\cdot) = \begin{bmatrix} \partial(\cdot)/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial(\cdot)/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial(\cdot)/\partial x \\ 0 & \partial(\cdot)/\partial z & \partial(\cdot)/\partial y \\ \partial(\cdot)/\partial z & 0 & \partial(\cdot)/\partial x \\ \partial(\cdot)/\partial y & \partial(\cdot)/\partial x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

de tal forma que  $\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ .

Considerado a discretização do domínio  $\Omega$  em elementos finitos, de tal forma que

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n_e} \Omega_i^e \quad (2.5)$$

onde  $n_e$  é o número de elementos finitos

Interpolando os deslocamentos  $\mathbf{u}$  no interior de cada elemento, baseado nos valores nodais de deslocamento  $\mathbf{U}^e$ , temos que

$$\mathbf{u}^e = (\mathbf{N}^e)^t \mathbf{U}^e \quad (2.6)$$

onde  $\mathbf{N}^e$  é a matriz que contém as funções de forma do elemento.

Substituindo a equação (2.6) na equação (2.1), obtemos o funcional da energia potencial total

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^e} \mathbf{L}(\mathbf{N}^e)^t (\mathbf{U}^e)^t \mathbf{E}^e \mathbf{L}(\mathbf{N}^e) \mathbf{U}^e d\Omega^e - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma^e} (\mathbf{N}^e)^t \mathbf{t} \mathbf{U}^e d\Gamma^e \\ & - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^e)^t \mathbf{p} \mathbf{U}^e d\Omega^e \end{aligned} \quad (2.7)$$

Minimizando o funcional (2.7) em relação ao campo de deslocamentos, obtemos a forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi^e}{d\mathbf{U}^e} &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^e} \mathbf{L}(\mathbf{N}^e)^t \mathbf{E}^e \mathbf{L}(\mathbf{N}^e) d\Omega^e \mathbf{U}^e - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma^e} (\mathbf{N}^e)^t \mathbf{t} d\Gamma^e + \\ &- \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^e)^t \mathbf{p} d\Omega^e = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

A equação (2.8) representa a condição de energia de deformação mínima para o sólido em equilíbrio, ou seja, é a condição necessária e suficiente para garantir o equilíbrio de toda a estrutura, bem como de qualquer uma de suas partes.

Reescrevendo a equação (2.8), passando os termos derivados da expressão do trabalho externo para o lado direito da equação, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}^e)^t \mathbf{E}^e \mathbf{L}(\mathbf{B}^e) d\Omega^e \mathbf{U}^e &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma^e} (\mathbf{N}^e)^t \mathbf{t} d\Gamma^e + \\ &+ \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}^e)^t \mathbf{p} d\Omega^e \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{B}^e = \mathbf{L}(\mathbf{N}^e)$

A equação (2.9), pode ser reescrita na forma matricial:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{f} \quad (2.10)$$

onde a matriz de rigidez da estrutura  $\mathbf{K}$  e o vetor de forças  $\mathbf{f}$  são a composição das matrizes de rigidez e dos vetores de força globais dos elementos.

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{K}^e \quad \mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{f}^e \quad (2.11)$$

A solução do sistema de equações (2.10), permite obter os deslocamentos de todos os graus de liberdade da estrutura. Conhecendo os valores dos deslocamentos, podem-se calcular as grandezas dependentes, como a energia de deformação

$$C^e = \frac{1}{2} (U^e)^t K^e U^e \quad (2.12)$$

deformações

$$\varepsilon^e = (B^e)^t U^e \quad (2.13)$$

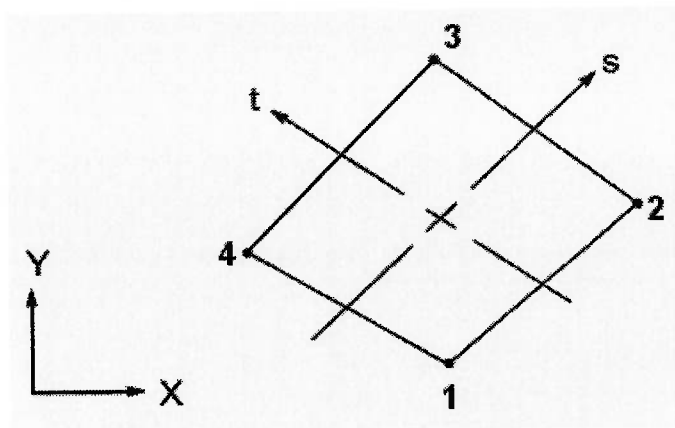
e tensões

$$\sigma^e = E^e \varepsilon^e \quad (2.14)$$

## 2.2. Elementos bidimensionais

Neste trabalho, foram utilizados os seguintes elementos para as estruturas planas:

- Elemento isoparamétrico bilinear de quatro nós;
- Elemento plano de oito nós.



**Figura 2.2:** Geometria do elemento isoparamétrico plano de quatro nós

No sistema de coordenadas locais, o elemento é quadrado, com o eixo de coordenadas no centro do elemento. Enquanto no sistema de coordenadas globais, o elemento é distorcido da forma retangular.

As funções de interpolação estão referenciadas a um sistema de coordenadas locais (s, t). As funções de interpolação ( $\mathbf{N}$ ) para o elemento bilinear de quatro nós são:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-s)(1-t) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+s)(1-t) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+s)(1+t) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1-s)(1+t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Assim, as coordenadas de qualquer ponto do elemento, podem ser expressas em termos das coordenadas globais (x, y) dos nós:

$$\begin{Bmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \end{Bmatrix} = \mathbf{N}^t \mathbf{x}^e \quad (2.16)$$

onde  $\mathbf{x}^e$  é o vetor de coordenadas nodais do elemento:

$$\mathbf{x}^e = \{x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad x_4 \quad y_4\}^t \quad (2.17)$$

e  $\mathbf{N}$  é a função de forma expressa na forma matricial:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

As coordenadas de um ponto genérico (x, y) do elemento isoparamétrico, são obtidas em função das coordenadas nodais do elemento, usando os polinômios bilineares do elemento retangular:

$$\begin{aligned}x &= \sum_{i=1}^4 N_i x_i \\y &= \sum_{i=1}^4 N_i y_i\end{aligned}\tag{2.19}$$

A equação (2.19) representa as aproximações para as componentes horizontal e vertical, respectivamente, do deslocamento mecânico de cada ponto no domínio do elemento.

Através das derivadas das funções de interpolação em relação ao sistema de coordenadas globais (x,y,z), pode-se determinar a matriz das derivadas das funções de interpolação **B**. Para tal, aplica-se à regra da cadeia:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} &= \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}\end{aligned}\tag{2.20}$$

Reescrevendo a equação (2.20) na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \end{Bmatrix}\tag{2.21}$$

onde a matriz **J** é conhecida como matriz Jacobiana de transformação.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}\tag{2.22}$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i & \frac{\partial y}{\partial s} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial s} y_i \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial t} x_i & \frac{\partial y}{\partial t} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial t} y_i \end{aligned} \quad (2.23)$$

Assim, os dois sistemas de coordenadas podem ser relacionados através das equações:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^t \begin{Bmatrix} s \\ t \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

De forma análoga, pode-se escrever a relação entre as derivadas das funções de forma nos dois sistemas de coordenadas:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial s} \\ \frac{\partial N}{\partial t} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

De posse das relações supracitadas, pode-se escrever a matriz  $\mathbf{B}$ , que representa o resultado da aplicação do operador diferencial sobre as funções de interpolação.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

A partir desses resultados é possível obter a matriz de rigidez de um elemento.

$$\mathbf{K}^e = \int_{A^e} (\mathbf{B}^e)^t \mathbf{E}^e \mathbf{B}^e dA^e \quad (2.27)$$

Usando o Jacobiano como um operador que transforma as equações escritas no sistema de coordenadas locais (s, t) para o sistema de coordenadas globais (x, y). A equação (2.27) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{B}^e)^t \mathbf{E}^e \mathbf{B}^e |\mathbf{J}| ds dt \quad (2.28)$$

Avaliando as integrais acima através do método numérico de Gauss-Legendre (Quadratura Gaussiana), temos

$$\mathbf{K}^e = \sum_{I_x=1}^2 \sum_{I_y=1}^2 \left( (\mathbf{B}^e)^t \mathbf{E}^e \mathbf{B}^e |\mathbf{J}| \right) W_{I_x} W_{I_y} \quad (2.29)$$

onde  $I_x$  e  $I_y$  são os pontos de integração (amostragem), respectivamente, nas direções x e y, enquanto  $W_{I_x}$  e  $W_{I_y}$  representam os pesos de Gauss para as mesmas direções.

O vetor de força  $\mathbf{f}$  é a somatória dos esforços nodais, ou seja, a composição das cargas aplicadas diretamente sobre o nó e as forças de corpo

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_N + \mathbf{f}_C \quad (2.30)$$

Na qual a força de corpo do elemento pode ser escrita

$$\mathbf{f}_C^e = \int_{A^e} \mathbf{N}^t \mathbf{F}_C^e dA^e \quad (2.31)$$

Este trabalho restringe-se as forças de corpo decorrentes da aceleração da gravidade e do movimento de rotação do corpo. Assim, pode-se escrever o vetor da força de campo:

$$\mathbf{F}_C^e = \rho^e (\mathbf{g} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}^e)) \quad (2.32)$$

onde  $\mathbf{g}$  é a aceleração da gravidade,  $\boldsymbol{\omega}$  é o vetor da velocidade angular de rotação e  $\mathbf{r}^e$  é a distância entre o centro de rotação do sistema e o ponto onde se está calculando o vetor  $\mathbf{F}_C^e$ .

Combinando as equações (2.31) e (2.32), obtemos

$$\mathbf{f}_C^e = \int_{A^e} \mathbf{N}^t \rho^e (\mathbf{g} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}^e)) dA^e \quad (2.33)$$

A densidade é constante em cada elemento. Assim a equação (2.33), pode ser reescrita

$$\mathbf{f}_C^e = \rho^e \int_{A^e} \mathbf{N}^t (\mathbf{g} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}^e)) dA^e \quad (2.34)$$

Utilizando o operador Jacobiano, pode se transformar as equações escritas no sistema de coordenadas locais (s, t) para o sistema de coordenadas globais (x, y). Assim, a equação (2.33) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_C^e = \rho^e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^t (\mathbf{g} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}^e)) \mathbf{J} |dsdt \quad (2.35)$$

Avaliando a integral da equação (2.35), através do método numérico de Gauss-Legendre (Quadratura Gaussiana), temos

$$\mathbf{f}_C^e = \rho^e \sum_{lx=1}^2 \sum_{ly=1}^2 (\mathbf{N}^t (\mathbf{g} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}^e)) \mathbf{J}) W_{lx} W_{ly} \quad (2.36)$$

O método de Gauss-Legendre determina o valor exato da integral de um polinômio com grau até  $(2n_G - 1)$ , onde  $n_G$  é o número de pontos de integração de Gauss utilizado (BATHE,1996). Assim, as integrais do vetor de forças e da matriz de



rigidez do elemento quadrado bilinear isoparamétrico, podem ser aproximadas por um somatório duplo com dois pontos de integração ( $n=2$ ), uma vez que as funções envolvidas são polinômios de 2ª ordem.

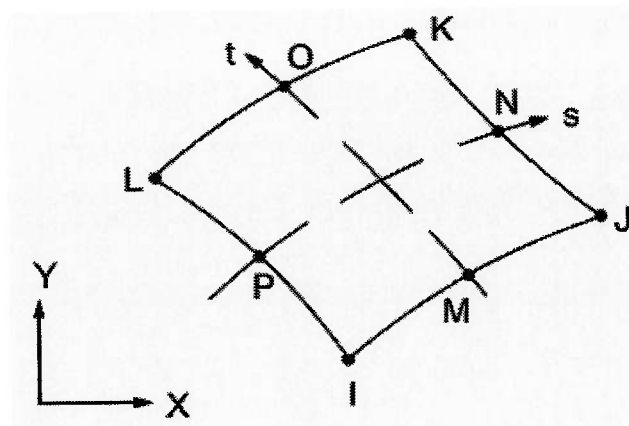
O elemento ora apresentado não representa de forma satisfatória o modo de deformação de flexão. Quando submetido a um carregamento de flexão, o elemento responde de forma mais rígida que a real, pois as funções de interpolação são lineares, não permitindo que os lados do elemento se curvem. Em decorrência deste fenômeno, é necessária uma quantidade muito grande de elementos para representar de forma satisfatória o campo de deslocamentos na flexão.

Alternativamente, pode-se aplicar elementos finitos de alta ordem, que descrevem melhor o campo de deslocamentos.

No software ANSYS, o elemento isoparamétrico bilinear de quatro nós de elasticidade plana é denominado PLANE 42, enquanto o PLANE 82 é o elemento plano de oito nós.

A formulação ora apresentada para o elemento isoparamétrico plano (PLANE 42) também é válida para o elemento plano de oito nós (PLANE 82). Em seguida são apresentadas as funções de forma para o elemento plano de oito nós.

A geometria do elemento PLANE 82 é apresentada na **Figura 2.3**.



**Figura 2.3:** Geometria do elemento plano de oito nós

As funções de interpolação ( $N$ ) para o elemento plano de oito nós são:

$$\begin{aligned}
 N_I &= \frac{1}{4}(1-s)(1-t)(-s-t-1) \\
 N_J &= \frac{1}{4}(1+s)(1-t)(s-t-1) \\
 N_K &= \frac{1}{4}(1+s)(1+t)(s+t-1) \\
 N_L &= \frac{1}{4}(1-s)(1+t)(-s+t-1) \\
 N_M &= \frac{1}{2}(1-s^2)(1-t) \\
 N_N &= \frac{1}{2}(1+s)(1-t^2) \\
 N_O &= \frac{1}{2}(1-s^2)(1+t) \\
 N_P &= \frac{1}{2}(1-s)(1-t^2)
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

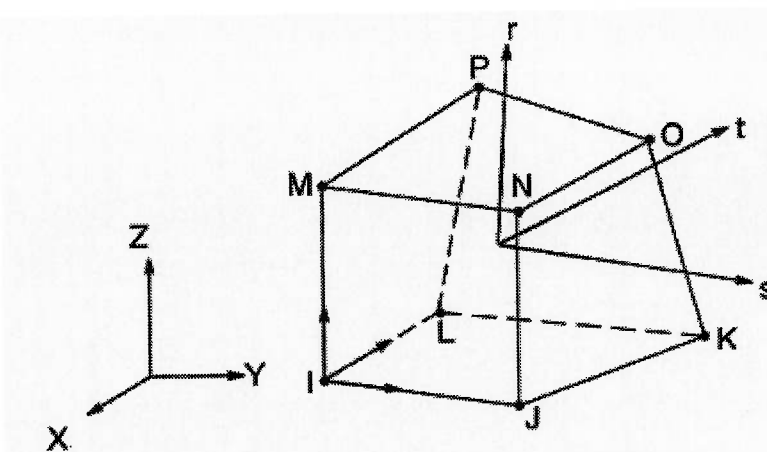
### 2.3. Elementos tridimensionais

A formulação apresentada para o elemento isoparamétrico plano pode ser facilmente expandida para o elemento isoparamétrico tridimensional de oito nós.

Neste trabalho, foram utilizados os seguintes elementos tridimensionais:

- Elemento isoparamétrico bilinear de 8 nós;
- Elemento sólido de vinte nós.

As funções de interpolação estão referenciadas a um sistema de coordenadas locais (r,s,t).



**Figura 2.4:** Geometria do elemento isoparamétrico tridimensional de oito nós

As funções de interpolação (N) para o elemento tridimensional de 8 nós são:

$$\begin{aligned}
N_I &= \frac{1}{8}(1-s)(1-t)(1-r) \\
N_J &= \frac{1}{8}(1+s)(1-t)(1-r) \\
N_K &= \frac{1}{8}(1+s)(1+t)(1-r) \\
N_L &= \frac{1}{8}(1-s)(1+t)(1-r) \\
N_M &= \frac{1}{8}(1-s)(1-t)(1+r) \\
N_N &= \frac{1}{8}(1+s)(1-t)(1+r) \\
N_O &= \frac{1}{8}(1+s)(1+t)(1+r) \\
N_P &= \frac{1}{8}(1-s)(1+t)(1+r)
\end{aligned} \tag{2.38}$$

De forma análoga, desenvolve-se a matriz de rigidez do elemento tridimensional.

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} (\mathbf{B}^e)^t \mathbf{E}^e \mathbf{B}^e dV^e \tag{2.39}$$

que no sistema de coordenadas locais é representada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{B}^e)^t \mathbf{E}^e \mathbf{B}^e |\mathbf{J}| dr ds dt \tag{2.40}$$

Avaliando as integrais acima através do método numérico de Gauss-Legendre (Quadratura Gaussiana), temos

$$\mathbf{K}^e = \sum_{I_x=1}^2 \sum_{I_y=1}^2 \sum_{I_z=1}^2 \left( (\mathbf{B}^e)^t \mathbf{E}^e \mathbf{B}^e |\mathbf{J}| \right) W_{I_x} W_{I_y} W_{I_z} \tag{2.41}$$

onde  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  são os pontos de integração (amostragem), respectivamente, nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , enquanto  $W_{I_x}$ ,  $W_{I_y}$  e  $W_{I_z}$  representam os pesos de Gauss para as mesmas direções.

De forma similar ao caso bidimensional, determina-se a força de corpo

$$\mathbf{f}_C^e = \int_{V^e} \mathbf{N}^t \rho^e (\mathbf{g} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}^e)) dV^e \quad (2.42)$$

A densidade é constante em cada elemento. Assim a equação (2.42), pode ser reescrita

$$\mathbf{f}_C^e = \rho^e \int_{V^e} \mathbf{N}^t (\mathbf{g} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}^e)) dV^e \quad (2.43)$$

No sistema de coordenadas locais o vetor de forças de campo é representado pela seguinte expressão:

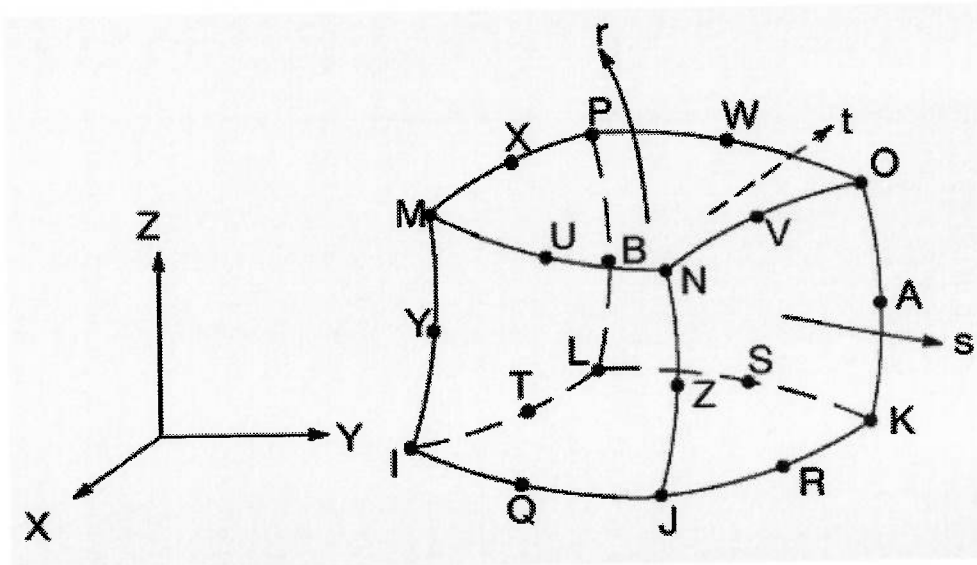
$$\mathbf{f}_C^e = \rho^e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^t (\mathbf{g} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}^e)) |\mathbf{J}| dr ds dt \quad (2.44)$$

Avaliando a integral da equação (2.44), através do método numérico de Gauss-Legendre (Quadratura Gaussiana), temos

$$\mathbf{f}_C^e = \rho^e \sum_{I_x=1}^2 \sum_{I_y=1}^2 \sum_{I_z=1}^2 (\mathbf{N}^t (\mathbf{g} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}^e)) |\mathbf{J}|) W_{I_x} W_{I_y} W_{I_z} \quad (2.45)$$

No caso do software ANSYS, o elemento isoparamétrico bilinear de oito nós é denominado SOLID 45, enquanto o SOLID 95 é o elemento tridimensional de vinte nós.

A geometria do elemento tridimensional de vinte nós (SOLID 95) está apresentada na **Figura 2.5**.



**Figura 2.5:** Geometria do elemento tridimensional de vinte nós

As funções de interpolação ( $N$ ) para o elemento SOLID 95 são:

$$\begin{aligned}
 N_I &= \frac{1}{8}(1-s)(1-t)(1-r)(-s-t-r-2) \\
 N_J &= \frac{1}{8}(1+s)(1-t)(1-r)(s-t-r-2) \\
 N_K &= \frac{1}{8}(1+s)(1+t)(1-r)(s+t-r-2) \\
 N_L &= \frac{1}{8}(1-s)(1+t)(1-r)(-s+t-r-2) \\
 N_M &= \frac{1}{8}(1-s)(1-t)(1+r)(-s-t+r-2) \\
 N_N &= \frac{1}{8}(1+s)(1-t)(1+r)(s-t+r-2) \\
 N_O &= \frac{1}{8}(1+s)(1+t)(1+r)(s+t+r-2) \\
 N_P &= \frac{1}{8}(1-s)(1+t)(1+r)(-s+t+r-2) \\
 N_Q &= \frac{1}{4}(1-s^2)(1-t)(1-r) \\
 N_R &= \frac{1}{4}(1+s)(1-t^2)(1-r) \\
 N_S &= \frac{1}{4}(1-s^2)(1+t)(1-r) \\
 N_T &= \frac{1}{4}(1-s)(1-t^2)(1-r) \\
 N_U &= \frac{1}{4}(1-s^2)(1-t)(1+r) \\
 N_V &= \frac{1}{4}(1+s)(1-t^2)(1+r) \\
 N_W &= \frac{1}{4}(1-s^2)(1+t)(1+r) \\
 N_X &= \frac{1}{4}(1-s)(1-t^2)(1+r) \\
 N_Y &= \frac{1}{4}(1-s)(1-t)(1-r^2) \\
 N_Z &= \frac{1}{4}(1+s)(1-t)(1-r^2) \\
 N_A &= \frac{1}{4}(1+s)(1+t)(1-r^2) \\
 N_B &= \frac{1}{4}(1-s)(1+t)(1-r^2)
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

### 3. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

#### 3.1. Introdução

O problema de otimização consiste em encontrar a melhor solução dentro do espaço de soluções possíveis, ou seja, extremizar (maximizar ou minimizar) uma certa função objetivo dentro do domínio viável.

##### 3.1.1. Formulação do problema de otimização

O problema de otimização pode ser formulado da seguinte maneira (VANDERPLAATZ, 1984; HAFTKA; GURDAL; KAMAT, 1996):

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(\mathbf{X}) \\ \mathbf{X} & \end{array} \quad (3.1)$$

tal que

$$\begin{array}{lll} g_i(\mathbf{X}) \leq 0 & i = 1, \dots, I & \text{Restrição de desigualdade} \\ f_k(\mathbf{X}) = 0 & k = 1, \dots, K & \text{Restrição de igualdade} \\ X_{\text{MIN}_j} \leq X_j \leq X_{\text{MAX}_j} & & \text{Restrição lateral} \end{array}$$

onde

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N) \in \mathfrak{R}^N \quad \text{Variáveis de projeto}$$

A função objetivo determina o desempenho do projeto. Esta é função das variáveis de projeto associada ao problema de otimização.

As variáveis de projeto são os parâmetros que podem ser alterados durante o processo de otimização. Estes parâmetros controlam as propriedades do modelo como, por exemplo, as dimensões, a forma, o material, as cargas, etc...

As restrições de igualdade e desigualdade definem o espaço viável do problema de otimização. Ou seja, o domínio admissível, onde as restrições são satisfeitas e o domínio inadmissível, onde ao menos uma das restrições é violada.

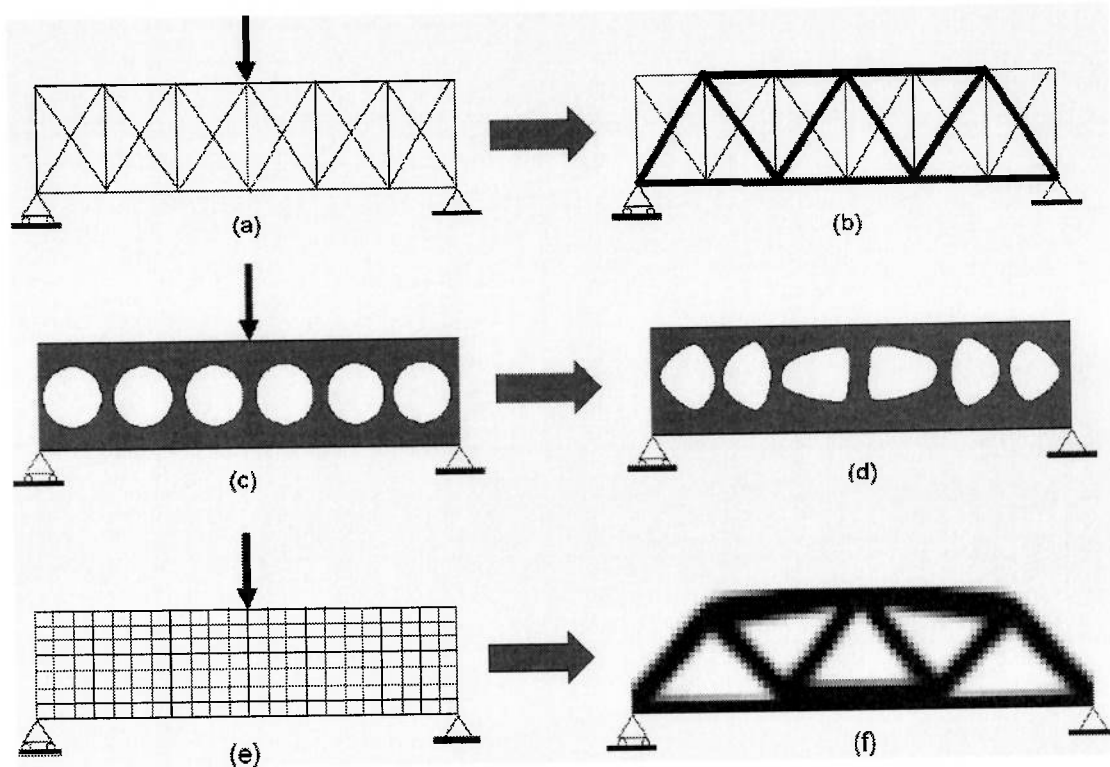
Em muitos problemas, o ponto extremo se encontra na fronteira que separa estes domínios (HAFTKA, GURDAL, KAMAT, 1996). Em um problema de otimização estrutural, podem-se citar as restrições de tensão máxima, volume, deformação máxima, entre outras.

### 3.1.2. Problema de otimização estrutural

O problema de otimização estrutural pode ser classificado em três categorias (HAFTKA, GURDAL, KAMAT, 1996):

- Otimização paramétrica (“size optimization”): Consiste em assumir para a estrutura uma forma fixa previamente definida. Neste caso, o processo de otimização consiste na modificação de alguns parâmetros pré-definidos (como seção transversal, espessuras,...) sem que as restrições sejam violadas.
- Otimização de forma (“shape optimization”): Consiste em otimizar o formato da estrutura obedecendo aos limites impostos pelas restrições. Normalmente a otimização de forma é utilizada para otimização local e é aplicada com êxito na indústria aeronáutica e automobilística. Frequentemente é utilizada para reduzir a concentração de tensão (e.g. filetes ou entalhes). As principais desvantagens deste método são: 1) proporciona soluções com pequenas alterações em relação ao projeto original; 2) Deforma a malha ou exige a redefinição da malha do MEF durante o processo de otimização.
- Otimização topológica (“topology optimization”): Consiste em encontrar a distribuição de material ideal de uma estrutura em um determinado espaço viável de projeto, tal que a função objetivo seja otimizada (minimizada ou maximizada).

A **Figura 3.1** apresenta as três categorias de um problema de otimização. No caso (a), busca-se otimizar a estrutura modificando as seções transversais das vigas. No caso (c), as variáveis de projeto são os parâmetros que descrevem a forma dos furos. No caso (e), apresenta-se a Otimização Topológica.



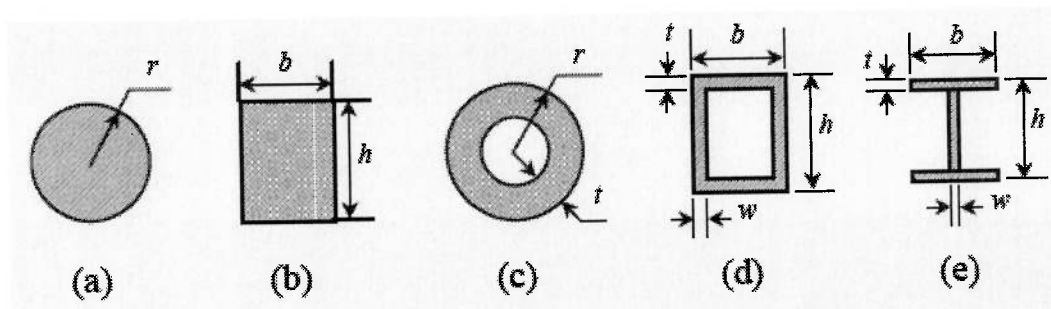
**Figura 3.1:** Exemplo de 3 categorias de otimização estrutural: (a) otimização paramétrica; (c) otimização de forma; (e) otimização topológica

Nos três casos, pode-se ter a mesma função objetivo (maximizar a rigidez ou maximizar a 1ª frequência natural) e as mesmas restrições (tensão máxima ou máxima deflexão). Contudo as variáveis de projeto são diferentes em cada caso:

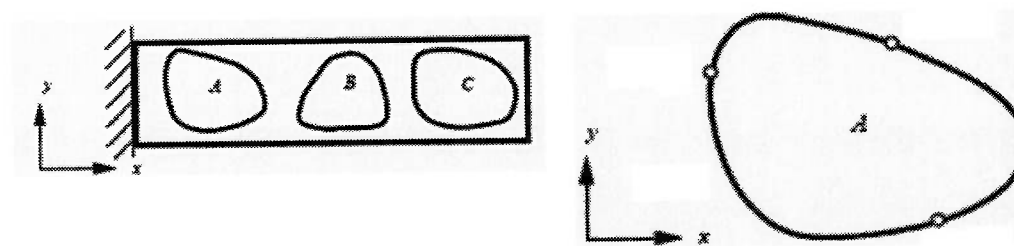
- Otimização paramétrica – As variáveis de projeto descrevem características geométricas da estrutura, tais como momentos de inércia, espessuras,... A **Figura 3.2** apresenta algumas variáveis de projeto para o problema paramétrico;
- Otimização de forma – As variáveis de projeto são geralmente os pontos de controle dos polinômios ou “B-splines” que descrevem contornos externos e internos do componente. Através de um algoritmo computacional são determinados os parâmetros ótimos das curvas que descrevem a estrutura (“B-splines”), e conseqüentemente a forma que otimiza a função objetivo. A **Figura 3.3** apresenta algumas variáveis de projeto relacionadas ao problema de otimização de forma;



- Otimização topológica – As variáveis de projeto normalmente descrevem a distribuição do material dentro do domínio fixo estendido da estrutura. Neste caso, a variável de projeto pode representar a densidade relativa do elemento (SIMP) ou as dimensões da célula unitária (homogeneização).



**Figura 3.2:** Exemplos de variáveis de projeto na otimização paramétrica



**Figura 3.3:** Exemplos de variáveis de projeto na otimização de forma

Como mencionado anteriormente, neste trabalho foi desenvolvida a formulação para a otimização topológica.

### 3.2. Otimização topológica

No início da década de 60, a teoria moderna de otimização estrutural baseada na programação matemática e análise de sensibilidade estava consolidada, em grande parte devido às contribuições de Schmit e Fox (apud SUZUKI; KIKUCHI, 1991). A formulação, até então desenvolvida, permitia a solução de problemas paramétricos de estruturas reticuladas.

Nos anos 70, foram desenvolvidos inúmeros métodos de otimização de forma e diversos artigos sobre o assunto foram publicados neste período. O trabalho de

Haftka e Gandhi (HAFTKA; GANDHI, 1986) apresenta uma boa revisão e fundamentação teórica para os métodos desenvolvidos até a primeira metade de década de 80. De forma similar aos métodos de otimização paramétrica, os métodos de otimização de forma fundamentam-se em métodos de análise como o método dos elementos finitos, métodos numéricos baseados na programação matemática e análise de sensibilidades.

A principal restrição da formulação de otimização de forma é que a geometria da estrutura é a variável de projeto. De forma que a mudança da topologia implica na constante alteração do modelo de elementos finitos associado à estrutura durante o processo de otimização.

Desta forma, estes procedimentos não permitem alterações na conectividade da estrutura, impondo uma restrição significativa na otimização e limitando soluções ótimas em potencial.

Com o intuito de suplantar esta restrição, Bendsøe e Kikuchi (BENDSØE; KIKUCHI, 1988) introduziram o MOT baseado no método da homogeneização no final da década de 80. Este método propõe a otimização da distribuição de material em um domínio fixo. De forma que o modelo de elementos finitos utilizado não se altera no decorrer do processo de otimização. Assim, este procedimento elimina os problemas enfrentados pelos métodos tradicionais de otimização de forma.

O método proposto por Bendsøe, Kikuchi (1988) foi baseado nos trabalhos de otimização de distribuição de espessuras em placas e chapas (CHENG; OLHOFF, 1981, 1982). O trabalho de Cheng e Olhoff (1982) demonstrou que o ótimo no problema de otimização da distribuição de espessuras em placas finas, para a maximização da rigidez com restrição de volume, consiste em regiões com infinitos reforços infinitesimais (nervuras), cujo comportamento é similar a um material composto por infinitas microestruturas.

Assim, Bendsøe, Kikuchi (1988) estabeleceram um modelo de material o qual definia a mistura em microescala de dois ou mais materiais permitindo que houvesse estágios intermediários ao se passar da condição de zero material (“buraco”) a sólido em cada ponto do domínio. Isso garantia a relaxação do problema de otimização evitando a transição brusca do “vazio” para sólido e vice-versa.

Desta forma, o método da homogeneização transformou o problema de distribuição de material em um domínio em um problema paramétrico, no qual as variáveis de projeto são os parâmetros que definem a geometria da microestrutura (BENDSØE; KIKUCHI, 1988).

Suzuki e Kikuchi (1991) consolidaram o trabalho anteriormente proposto por Bendsøe, Kikuchi (1988) e definiram um modelo de material baseado nessa microestrutura quadrada com um furo retangular.

O trabalho de Hassani e Hinton (1998b) apresenta uma revisão completa sobre as características das microestruturas utilizadas no MOT.

Após a definição da metodologia para OT em Bendsøe; Kikuchi (1988) e Suzuki; Kikuchi (1991), o MOT passou a ser utilizado em inúmeras aplicações, como as citadas a seguir. Olhoff; Bendsøe; Rasmussen (1991) estudaram a possibilidade da integração do MOT aos sistemas de CAD. Díaz; Kikuchi (1992) e Ma; Kikuchi; Hagiwara (1993) estudaram os problemas de OT considerando frequência de ressonância em estruturas contínuas. Sigmund, 1997 e Nishiwaki et al., 1998 estenderam o MOT para a aplicação em projetos de mecanismos flexíveis. Neves, Rodrigues, Guedes (1995) estudaram o problema de OT sujeito a flambagem. Enquanto, Nishiwaki et al., 2000 aplicam a metodologia a estruturas submetidas a cargas dinâmicas.

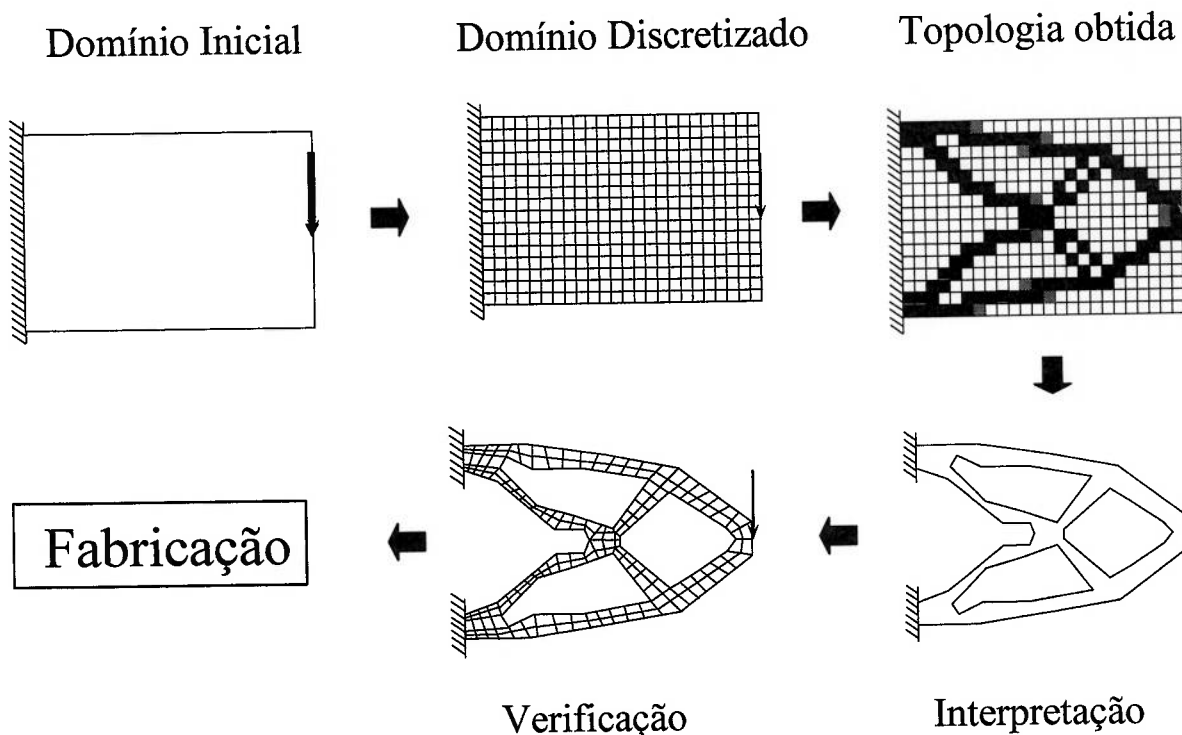
### **3.2.1. Conceituação**

O método de otimização topológica (MOT) oferece uma metodologia sistemática e eficiente para o projeto otimizado de componentes mecânicos. Basicamente, o objetivo da otimização topológica é encontrar a distribuição de material ideal de uma estrutura em um determinado espaço viável de projeto, dentro das condições de contorno, tal que a função objetivo seja otimizada (minimizada ou maximizada).

Um algoritmo de otimização é utilizado para encontrar de forma iterativa a distribuição ótima do material dentro do domínio estabelecido. Este algoritmo combina os métodos de otimização (VANDERPLAATZ, 1984) com um método numérico de análise, que na grande maioria dos casos, é o método de elementos finitos (BATHE, 1996). Outros métodos numéricos de análise podem ser usados, no

entanto, devem ser genéricos o suficiente de forma a manipular eficientemente as formas resultantes da otimização.

A **Figura 3.4** ilustra o problema de síntese uma viga engastada sujeita a um carregamento na extremidade com critério mínimo peso e máxima rigidez.



**Figura 3.4:** Processo de projeto de estruturas utilizando o MOT

A primeira etapa consiste em se definir o domínio fixo estendido ( $\Omega$ ), no qual a estrutura pode existir. O domínio fixo estendido é delimitado pelas condições de contorno da estrutura: restrições e pontos de aplicação do carregamento. De forma a não limitar as possíveis estruturas (espaço de solução), deve-se definir o maior domínio ( $\Omega$ ) possível.

Na segunda etapa o domínio ( $\Omega$ ) é discretizado em elementos finitos e são aplicadas as condições de contorno.

Na terceira etapa, o software de Otimização Topológica redistribui o material no domínio de forma a otimizar (minimizar ou maximizar) a função objetivo especificada. O resultado obtido é apresentado no quadrante denominado "topologia obtida" onde a cor escura indica a presença de material e a cor branca indica a ausência de material no ponto do domínio ( $\Omega$ ). Note que podem surgir pontos com

cores intermediárias, denominados de escala de cinza ("gray scale"). Essas cores indicam a presença de materiais intermediários no interior do domínio ( $\Omega$ ), os quais são, em geral, difíceis de serem implementados na prática, no entanto são inerentes ao problema de Otimização Topológica (BENDSØE, 1989 e SUZUKI; KIKUCHI, 1991). Outro problema é a "instabilidade de xadrez", que é representada pelas regiões em que elementos de cor escura e elementos de cor branca estão dispostos em forma de tabuleiro de xadrez. A rigidez da região que contém a "instabilidade xadrez" é maior se comparada à rigidez de uma região com distribuição uniforme de material (com a mesma quantidade de material). Estes problemas serão discutidos mais detalhadamente no item 0.

A quarta etapa consiste na interpretação do resultado. Essa interpretação consiste na remoção das eventuais "escalas de cinza" e a suavização do contorno da topologia obtida, ajustando-a de forma que possa ser fabricada. Dentre as diversas técnicas utilizadas para realizar a interpretação dos resultados, pode-se destacar as técnicas utilizadas para o processamento de imagens.

As duas últimas etapas consistem respectivamente na verificação do resultado e na fabricação da estrutura.

Nesta seção serão apresentados os principais conceitos do MOT e a respectiva formulação matemática.

Conforme mencionado anteriormente o foco desse trabalho é síntese de estruturas atendendo o critério de máxima rigidez para um dado volume de material considerando forças de corpo na formulação do problema.

O MOT é baseado em dois conceitos fundamentais, a saber:

- Domínio fixo estendido (3.2.2);
- Modelo de material (3.2.3).

### **3.2.2. Domínio fixo estendido**

O Domínio Fixo Estendido (DFE) de projeto consiste em um domínio de forma fixa delimitado pelos pontos de apoio da estrutura e pelos pontos de aplicação de carregamento, e que conterá a estrutura procurada. Assim, em um problema de OT a forma ótima é determinada sem quaisquer especificações geométricas, sendo

influenciada apenas pela quantidade de material, pelas restrições de deslocamento (pontos de fixação) e pelo carregamento aplicado.

O objetivo da otimização topológica é determinar as regiões sem material (“buracos”) e a conectividade da estrutura através da remoção e adição de material nesse domínio. Assim, o problema de otimização consiste em encontrar a distribuição ótima do material dentro do domínio fixo estendido.

Na implementação numérica o domínio fixo estendido é discretizado em elementos finitos e as variáveis de projeto são associadas a cada elemento da malha de MEF. Desta forma, o modelo de elementos finitos do domínio fixo não é alterado durante o processo de otimização, sendo que apenas a distribuição de material nos elementos é modificada. A consideração de domínio fixo torna o processo de otimização bastante vantajoso, visto que as derivadas de uma função contínua  $q$  são facilmente obtidas a partir da seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial A_n} \int_{\Omega} q d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial A_n} d\Omega \quad (3.2)$$

onde  $A_n$  é uma variável de projeto, e  $q$  é uma função contínua definida no domínio ( $\Omega$ ).

### 3.2.3. Modelo de material

O conceito fundamental do método de otimização consiste em discretizar o domínio viável de projeto. Inicialmente, a massa total da estrutura é uniformemente distribuída por todo o DFE. Durante o processo de otimização, o material é redistribuído de forma a minimizar (ou maximizar) a função objetivo.

A estrutura a ser otimizada pode ser definida por uma função discreta  $\chi(x)$ , definida em cada ponto ( $x$ ) do domínio ( $\Omega$ ), da seguinte maneira:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega_D \\ 0 & \text{se } x \in \Omega/\Omega_D \end{cases} \quad (3.3)$$

onde ( $\Omega_D$ ) é a região onde há presença de material, inserida no domínio ( $\Omega$ ). Sendo o material isotrópico, pode-se escrever:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x})\mathbf{E}_0 \quad (3.4)$$

onde ( $\mathbf{E}_0$ ) é o tensor constitutivo do material base.

Assim, os únicos valores admissíveis da função discreta  $\chi(\mathbf{x})$  em uma solução seriam zero (ausência de material), ou um (presença de material), não havendo estágios intermediários. Desta forma, o problema de otimização topológica é essencialmente um problema discreto binário, que considera como variável de projeto a presença de material em cada ponto do domínio. Contudo, o problema de otimização discreto não tem solução e a tentativa de resolvê-lo resulta em uma solução que depende da discretização da malha (SIGMUND, PETERSSON, 1988).

Uma forma de contornar este problema é permitir que as variáveis de projeto assumam valores intermediários entre zero e um, através da definição de um modelo de material que substitui a função discreta por uma função contínua (CHENG; OLHOFF, 1982; BENDSØE, 1989).

O modelo de material define uma equação que representa a mistura em microescala de dois ou mais materiais (um deles pode ser ar) permitindo que haja estágios intermediários ao se passar da condição de zero material (“vazio”) para sólido em cada ponto do domínio. A princípio, os estágios intermediários de materiais não têm significado físico sendo apenas decorrentes de um recurso matemático para relaxação do problema.

Segundo (BENDSØE, 1995), um modelo de material que forneça uma função contínua e consistente das propriedades do material em cada ponto do domínio, garante o alcance da solução. Existem diversos modelos de materiais descritos na literatura, entre quais, destacam-se o método de densidades (BENDSØE, 1989; ZHOU; ROZVANY, 1991) e o método da homogeneização (MURAT; TARTAR, 1985; BENDSØE; KIKUCHI, 1988). Uma breve descrição dos métodos supracitados é apresentada em (BENDSØE, 2002).

Neste trabalho será utilizado o método das densidades ou SIMP (“Solid Isotropic Material with Penalization”).

### 3.2.3.1 Método da homogeneização

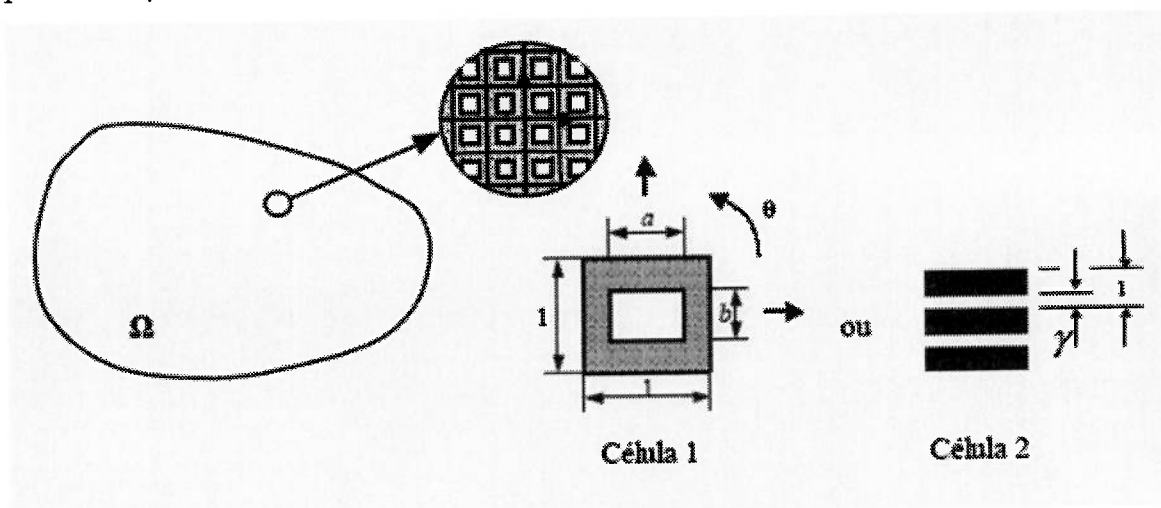
Esse método consiste em um modelo de material que define as propriedades efetivas do material composto a partir da geometria e composição de sua microestrutura (BENDSØE; KIKUCHI, 1988).

O material composto é formado por uma disposição periódica destas microestruturas, de modo que as propriedades efetivas do meio homogeneizado são parametrizadas apenas por características geométricas das células unitárias.

O método da homogeneização utiliza duas configurações clássicas de microestruturas. As duas microestruturas estão apresentadas na **Figura 3.5**. Os primeiros estudos utilizavam a uma célula quadrada com um furo quadrado ou retangular. Posteriormente, apareceu a microestrutura composta por camadas laminadas alternadas (material / vazio).

A microestrutura composta por uma célula quadrada sólida com furo interno (BENDSØE; KIKUCHI, 1988, SUZUKI; KIKUCHI, 1991), é definida pelas variáveis de projeto  $a$  e  $b$  e o ângulo  $\theta$ .

A microestrutura composta por camadas alternadas de material é construída alternando as camadas de material sólido com “vazios” e cuja variável de projeto é o parâmetro  $\gamma$ .



**Figura 3.5:** Configurações de microestruturas - Método da homogeneização



Desta forma, cada elemento do domínio ( $\Omega$ ) é definido por um material composto gerado pela repetição periódica de uma microestrutura de dimensões  $a$ ,  $b$  e  $\theta$  (ou  $\gamma$  na célula 2) correspondente aquele elemento.

Assim, variando-se os valores de  $a$ ,  $b$  e  $\theta$  (ou  $\gamma$  na célula 2) ao longo do domínio estendido fixo durante a otimização altera-se a distribuição de material nesse domínio, de maneira que ao final da otimização existirão pontos “vazios” ( $a=b=1$  ou  $\gamma=1$  na célula 2), pontos com sólido ( $a=b=0$  ou  $\gamma=0$  na célula 2) e alguns pontos com materiais intermediários.

Desta forma, o problema consiste em se otimizar a distribuição de material em um domínio composto de um material base com infinitos micro-furos.

O método da homogeneização é um método robusto capaz de descrever as propriedades efetivas de um material homogeneizado, contudo tem um alto custo computacional e uma complexa implementação numérica. Como visto, o método utiliza materiais ortotrópicos e anisotrópicos, o que acarreta uma dificuldade adicional na implementação do MEF. Além disso, o método pode exigir até seis variáveis de projeto por elemento num problema 3D.

### 3.2.3.2 Método das densidades

O método das densidades ou SIMP (“Solid Isotropic Material with Penalization”) consiste numa equação matemática que define o valor das propriedades (como o módulo de elasticidade) em cada ponto do domínio ( $\Omega$ ) em função da pseudodensidade  $\eta(\mathbf{X})$  do material usado no projeto e a propriedade efetiva  $\mathbf{E}_0$  do material base. Uma revisão completa desse método pode ser encontrada em (BENDSØE, SIGMUND, 1999).

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \eta(\mathbf{X})\mathbf{E}_0 \quad (3.5)$$

onde  $\mathbf{E}_0$  é o tensor constitutivo do material base;

$\eta(\mathbf{X})$  é a função de distribuição contínua de densidades, tal que  $0 \leq \eta(\mathbf{X}) \leq 1$  e  $\mathbf{X} \in \Omega$ .

A densidade efetiva do material também é definida em função da função da pseudodensidade  $\eta(\mathbf{X})$  do material usado no projeto e a propriedade efetiva  $\rho_0$  do material base.

$$\rho(\mathbf{X}) = \eta(\mathbf{X})\rho_0 \quad (3.6)$$

onde  $\rho_0$  é a densidade do material base;

Dessa forma, tem-se uma variável de projeto em cada ponto do domínio ( $\Omega$ ), representada pelo valor da pseudodensidade naquele ponto. No caso do problema discretizado, define-se uma variável por elemento finito.

Como mencionado anteriormente, o modelo de material transforma o problema de otimização topológica em um problema paramétrico onde a variável de projeto é a densidade do material (SIMP) ou as dimensões da célula unitária  $a$ ,  $b$  e  $\theta$  (homogeneização).

A relação linear apresentada na equação (3.5) define como viável qualquer valor de propriedade efetiva do material  $E(\mathbf{X})$  em todo o intervalo de “zero” (ou um valor bem próximo de zero) ao valor da propriedade efetiva do material base  $E_0$ .

Do ponto de vista físico, isto não é possível, visto que o valor da propriedade efetiva de um material é definido pela sua estrutura molecular e nem todos os valores neste intervalo são exequíveis.

O modelo de material apresentado relaxa o problema de otimização e contorna as dificuldades da implementação da variável discreta. Contudo, a solução final apresentará regiões com densidades intermediárias (também conhecida como “escala de cinza”). Embora importantes para a existência matemática do ótimo, as regiões com densidades intermediárias não são desejáveis do ponto de vista de Engenharia. No entanto, o projetista almeja uma solução em que a topologia ótima obtida seja composta praticamente por material base e vazios (“buracos”), ou seja, uma topologia constituída de materiais cujas propriedades efetivas (por exemplo, módulo de elasticidade) sejam possíveis de se construir.

Uma forma de reduzir a ocorrência de densidades intermediárias, e tentar retornar para o problema discreto, é penalizar a parametrização da propriedade efetiva do material. Assim, reescrevendo a equação (3.5), temos

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \eta(\mathbf{X})^P \mathbf{E}_0 \quad (3.7)$$

onde  $P$  é o fator de penalização que reduz as densidades intermediárias no resultado final.

O valor atribuído a penalização  $P$  é amplamente discutido na literatura e uma discussão mais detalhada pode ser encontrada nas referências (BENDSØE, SIGMUND, 1999).

Nesse trabalho foi utilizado o método da continuação que consiste em se alterar o valor de  $P$  durante o processo de otimização. Os fatores de penalização utilizados estão descritos no capítulo “Implementação numérica”.

Podem-se destacar as seguintes vantagens do modelo material SIMP:

- Alta eficiência computacional em termos de capacidade de armazenamento e tempo de processamento, pois exige apenas uma variável de projeto por elemento (densidade relativa do material). Enquanto outros métodos exigem até seis variáveis por elemento (método da homogeneização no caso 3D e três variáveis por elemento no caso 2D);
- Pode ser facilmente implementado.

Em contrapartida, o modelo de material SIMP apresenta as seguintes limitações:

- Comparado com o método da homogeneização, o SIMP tem uma tendência maior a apresentar estruturas com “escala de cinza”;
- É um modelo heurístico, não representando uma microestrutura sub-ótima.

Devido às vantagens mencionadas, o método de densidades é amplamente utilizado nos programas de otimização topológica. Além disso, este método combinado com métodos de filtragem proporciona um resultado muito similar aos

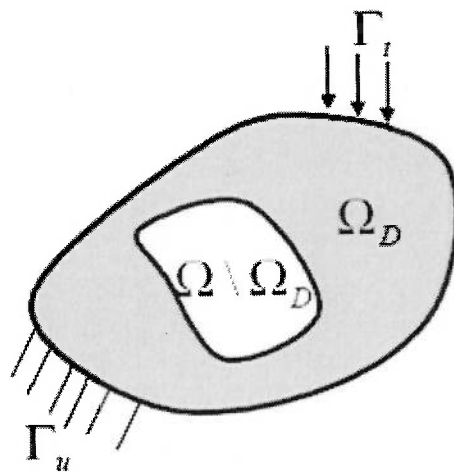
resultados obtidos com a aplicação do método da homogeneização (BENDSØE, SIGMUND, 2003). O método de filtragem utilizado neste trabalho será apresentado no próximo capítulo.

## 4. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

### 4.1. Problema de minimização da flexibilidade média

Considere um corpo tridimensional constituído de um material elástico linear que ocupa um domínio  $\Omega_D$  que é parte de um domínio de referência maior  $\Omega$  em  $\mathbb{R}^3$ .

Suponha que o corpo está sujeito a um conjunto de forças de corpo  $\mathbf{p}$  e a um conjunto de forças distribuídas  $\mathbf{t}$  aplicadas a uma região da sua superfície  $\Gamma_t$ . O corpo está restrito na região da sua superfície  $\Gamma_u$ . Os carregamentos supracitados geram um campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$ .



**Figura 4.1:** Corpo submetido a forças de corpo e superfície

Assim, considerando o problema apresentado no capítulo 2 e utilizando a teoria da mecânica do contínuo, pode-se escrever a forma linear da flexibilidade média do corpo:

$$b(\mathbf{u}) = \int_{\Gamma} \mathbf{t} \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{p} \mathbf{u} d\Omega \quad (4.1)$$

sendo que o primeiro termo do lado direito de (4.1) é referente às forças de superfície e o segundo termo é referente às forças de corpo. A flexibilidade média do corpo

corresponde à energia armazenada pelo corpo em decorrência da aplicação do vetor de forças de corpo  $\mathbf{p}$  e do vetor de forças distribuídas  $\mathbf{t}$  aplicadas a uma porção de sua superfície  $\Gamma_t$ . A flexibilidade média do corpo corresponde ao dobro da energia potencial total do mesmo. Combinado as equações (2.2) e (2.3), obtemos o funcional da Energia Potencial Total:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega - \int \mathbf{t} v d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{p} v d\Omega \quad (4.2)$$

onde o primeiro termo da equação (4.2) refere-se à energia de deformação. Enquanto o segundo e terceiro termos representam o trabalho das forças externas, sendo que o segundo termo de (4.2) refere-se às forças de superfície e o terceiro refere-se às forças de corpo.

Minimizando o funcional (4.2) em relação ao campo de deslocamentos, obtemos a forma

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{v}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) (\partial \mathbf{v}) d\Omega - \int \mathbf{t} (\partial \mathbf{v}) d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{p} (\partial \mathbf{v}) d\Omega = 0 \quad (4.3)$$

A equação (4.3) representa a condição de energia de deformação mínima para o sólido em equilíbrio, ou seja, é a condição necessária e suficiente para garantir o equilíbrio de toda a estrutura, bem como de qualquer uma de suas partes. Onde  $(\partial \mathbf{v})$  é arbitrário entre as funções admissíveis.

Reescrevendo a equação (4.3), passando os termos derivados da expressão do trabalho externo para o lado direito da equação, obtemos

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega = \int \mathbf{t} v d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{p} v d\Omega \quad (4.4)$$

Substituindo a equação (4.4) na equação (4.2), temos

$$\text{flexibilidade média} = \int \mathbf{t} v d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{p} v d\Omega = -2\Pi \quad (4.5)$$

Utilizando os conceitos ora apresentados, pode-se escrever a formulação do problema de minimização da flexibilidade média (maximização da rigidez) de uma estrutura mecânica sujeita a uma restrição de volume máximo.

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \text{Minimizar} \\ \mathbf{E} \in \mathbf{E}_{\text{Adm}} & \mathbf{u} \in \mathbf{U} \end{array} \left\{ \frac{1}{2} a_E(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - b(\mathbf{u}) \right\} \quad (4.6)$$

tal que

$$\int_{\Omega} \eta(\mathbf{X}) d\Omega \leq \bar{V}$$

$$0 < \eta_{\text{MIN}} \leq \eta \leq \eta_{\text{MAX}}$$

onde  $\eta(\mathbf{X})$  é a variável de projeto delimitada por restrições superiores e inferiores. A variável de projeto depende do modelo de material utilizado. No caso deste trabalho, o modelo de material é o SIMP.

$\bar{V}$  corresponde a restrição de volume máximo. Enquanto  $\mathbf{u}$  é o campo de deslocamento admissível dentro do espaço viável.

O problema de otimização ora formulado pode ser escrito de outras formas (BENDSØE; SIGMUND, 2003). Pode-se reescrever também o problema (4.6)

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar} \\ \mathbf{E} \in \mathbf{E}_{\text{Adm}} \end{array} \left\{ \frac{1}{2} a_E(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \right\} \quad (4.7)$$

tal que

$$\int_{\Omega} \eta(\mathbf{X}) d\Omega \leq \bar{V}$$

$$0 < \eta_{\text{MIN}} \leq \eta \leq \eta_{\text{MAX}}$$

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}) \mathbf{E} \varepsilon(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{p} d\Omega$$

Considerando a discretização do domínio ( $\Omega$ ) em elementos finitos do problema de otimização (4.6), de forma que

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n_e} \Omega_i^e \quad (4.8)$$

onde  $n_e$  é o número de elementos

Assim, o problema de minimização da flexibilidade média sujeito à restrição de volume, pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & C = \mathbf{f}^t \mathbf{u} \\ & \mathbf{X} \end{array} \quad (4.9)$$

tal que

$$\begin{aligned} f_v &\geq \frac{V(\Omega)}{V_0} \\ 0 &< \mathbf{X}_{\text{MIN}} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}_{\text{MAX}} \\ \mathbf{K}\mathbf{u} &= \mathbf{f} \end{aligned}$$

É importante ressaltar que no problema contínuo (4.6), existem dois campos de interesse distintos, o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$  e o campo de rigidez  $\mathbf{E}$ . No caso do problema discreto (4.9), utiliza-se a mesma malha de elementos finitos para descrever ambos os campos, sendo que o valor do módulo de elasticidade  $E$  é constante em cada elemento.

A flexibilidade média da estrutura pode ser reescrita da seguinte forma:

$$C = \mathbf{f}^t \mathbf{u} = \mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u} = \sum_{e=1}^{n_e} (\mathbf{u}^e)^t \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \quad (4.10)$$

Nessa formulação é possível identificar a função objetivo  $C$  que quantifica a flexibilidade média da estrutura. No problema estudado, as variáveis de projeto, definidas como  $(\mathbf{X}^e)$ , representam a quantidade de material em cada elemento. Os valores de  $(\mathbf{X}^e)$  compõem a matriz de rigidez  $(\mathbf{K})$  do modelo de elementos finitos.

A quantidade de material é representada pelas variáveis de projeto  $(\mathbf{X}^e)$  que são definidas pelo modelo de material utilizado. Entretanto é importante ressaltar que



independentemente do modelo de material a variável de projeto representa a quantidade de material presente em cada elemento. Usualmente, essa quantidade é denominada pseudodensidade do elemento, que no caso pode variar de zero (ausência de material) a um (presença de material).

A restrição de volume imposta ao problema é definida por:

$$f_v \geq \frac{V(\Omega)}{V_0} \quad (4.11)$$

onde  $V(\Omega) = \sum_{e=1}^{n_e} X^e v^e$  para o caso discretizado

$f_v$  é a fração de material que se deseja que permaneça no domínio fixo estendido.

Aplicando as equações (3.7) e (4.10), obtemos o valor da flexibilidade média da estrutura:

$$C = \sum_{e=1}^{n_e} (X^e)^p (u^e)^t K_0^e u^e \quad (4.12)$$

## 4.2. Algoritmo de otimização

Os algoritmos numéricos para solução de problemas de otimização podem ser classificados em métodos de programação matemática e métodos probabilísticos.

Entre os diversos métodos probabilísticos encontrados na literatura, podem-se destacar os algoritmos genéticos (XIE, STEVEN, 1993) e o "Simulated Annealing". Estes métodos são baseados em processos de seleção randômica guiada por decisões probabilísticas.

Os métodos probabilísticos são capazes de resolver problemas de otimização com variáveis discretas. Devido a sua natureza combinatória, os algoritmos genéticos têm uma chance maior de encontrar o mínimo global. Além disso, eles necessitam calcular apenas o valor da função objetivo (não são necessárias as derivadas). Em

contrapartida, a aplicação de métodos probabilísticos na solução de problemas contínuos apresenta diversas desvantagens, a saber:

- Alto custo computacional devido ao elevado número de variáveis de projeto;
- Problema de soluções desconexas;
- Problema de dependência de malha, pois o problema contínuo discretizado não tem solução.

Além disso, o problema estudado é regido por leis físicas e os gradientes são conhecidos.

A literatura apresenta inúmeros algoritmos de otimização para solução de problemas de otimização não-lineares com restrições. Os algoritmos não-lineares são classificados em dois segmentos, a saber (HAFTKA; GURDAL; KAMAT, 1996):

- Algoritmos baseados nas técnicas de programação matemática e métodos de aproximação seqüencial;
- Critério da otimalidade (HASSANI; HINTON, 1998c).

Os algoritmos baseados nas técnicas de programação matemática e métodos de aproximação seqüencial são classificados como genéricos. Ou seja, estes métodos constituem o conjunto de métodos que estão baseados na teoria de programação matemática e podem ser aplicados em diversos tipos de problemas nas diferentes áreas do conhecimento tais como Engenharia, Economia, Biologia, etc...

Existe uma vasta literatura disponível sobre estes métodos. Uma revisão completa desses algoritmos pode ser encontrada em (VANDERPLAATZ, G., 1984). Entre os diversos algoritmos baseados nos métodos de aproximação seqüencial, pode-se citar a programação linear seqüencial (PLS) (DANTZIG, 1963), programação quadrática seqüencial (PQS), etc...

A próxima seção descreve o critério da otimalidade, algoritmo de otimização implementado neste trabalho.

#### **4.2.1. Conceitos do critério da otimalidade**

O critério da otimalidade foi desenvolvido nos anos 60 como uma metodologia alternativa para os métodos de programação matemática utilizados na resolução de problemas de otimização estrutural.

O critério da otimalidade está baseado nas condições KKT (Karush-Kuhn-Tucker). Karush, Kuhn e Tucker propuseram as condições matemáticas que verificam se um dado ponto no espaço é um ponto ótimo (CHENG, OLHOFF, 1982).

O critério da otimalidade é um método empírico, sem justificativa matemática na atualização das variáveis (BENDSØE, 2003). Contudo este método é extremamente eficiente do ponto de vista computacional, além de ser facilmente implementado. Em contra partida, este método não é genérico (como os métodos de programação matemática) e deve ser desenvolvido para cada tipo de problema. De forma que qualquer alteração nas condições do problema de otimização, tais como restrições ou função objetivo, implica na reformulação do critério.

Devido as suas vantagens, critério da otimalidade é aplicado em inúmeros problemas de otimização topológica, entre os quais podem-se destacar o problema de minimização de flexibilidade média (SUZUKI; KIKUCHI, 1991), o problema de otimização de estruturas discretas (ROZVANY; ZHOU, 1991), o problema de maximização da freqüência de ressonância (MA; KIKUCHI; CHENG, 1995) e mecanismos flexíveis (NISHIWAKI et al., 1998).

Considerando o problema de otimização genérico definido em (3.1)

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(\mathbf{X}) \\ \mathbf{X} & \end{array} \quad (4.13)$$

tal que

$$\begin{array}{ll} g_i(\mathbf{X}) \leq 0 & i = 1, \dots, I \\ f_k(\mathbf{X}) = 0 & k = 1, \dots, K \end{array}$$

onde

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N) \in \mathfrak{R}^N \quad \text{Variáveis de projeto}$$

Assim, escrevendo o Lagrangeano do problema (3.1), temos

$$L = f(\mathbf{X}) + \sum_{k=1}^K \lambda_k f_k(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^I \lambda_i (g_i(\mathbf{X}) - \bar{g}_i) \quad (4.14)$$

onde

$\lambda_k$  é vetor de multiplicadores de Lagrange para a restrição de igualdade

$\lambda_i$  é vetor de multiplicadores de Lagrange para a restrição de desigualdade

$\bar{g}_i$  é o valor da  $i$ -ésima restrição de desigualdade

O ponto de ótimo é determinado quando a derivada da função de Lagrange é igual a zero para qualquer variável  $j$ .

$$\frac{\partial L}{\partial X_j} = \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial X_j} + \sum_{k=1}^K \lambda_k \frac{\partial f_k(\mathbf{X})}{\partial X_j} + \sum_{i=1}^I \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathbf{X})}{\partial X_j} = 0 \quad (4.15)$$

tal que

$$g_i(\mathbf{X}) - \bar{g}_i = 0$$

$$f_k(\mathbf{X}) = 0$$

$$\lambda_i \geq 0$$

#### 4.2.2. Critério da otimalidade aplicado ao problema deste trabalho

Conforme mencionado anteriormente, o critério da otimalidade exige um desenvolvimento específico para cada tipo de problema. Assim sendo, o critério de otimalidade do problema de otimização estudado neste trabalho (3.1) fica:

$$L = C + \lambda(V - f_v V_0) + \lambda_1^i (\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}) + \sum_{e=1}^{n_e} \lambda_2^e (X_{\text{MIN}} - X^e) + \sum_{e=1}^{n_e} \lambda_3^e (X^e - X_{\text{MAX}}) \quad (4.16)$$

onde

$\lambda$  é o multiplicador de Lagrange para a restrição de volume

$\lambda_1^i$  é o multiplicador de Lagrange para a condição de equilíbrio

$\lambda_2^e$  e  $\lambda_3^e$  são respectivamente os multiplicadores de Lagrange para o limite inferior e superior da variável de projeto.

Derivando a função de Lagrange em relação a variável de projeto (densidade dos elementos  $X^e$ ). Sabe-se que a restrição de equilíbrio  $(\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f})$  é satisfeita no processo de solução das equações de equilíbrio pelo MEF:

$$\frac{\partial L}{\partial X^e} = \frac{\partial C}{\partial X^e} + \lambda \frac{\partial V}{\partial X^e} + \lambda_2^e + \lambda_3^e \quad (4.17)$$

Nas densidades intermediárias, os limites superiores e inferiores não estão ativos, logo os multiplicadores de Lagrange  $\lambda_2^e$  e  $\lambda_3^e$  são iguais a zero.

$$\frac{\partial L}{\partial X^e} = \frac{\partial C}{\partial X^e} + \lambda \frac{\partial V}{\partial X^e} \quad (4.18)$$

Expandindo a equação (4.18)

$$\frac{\partial L}{\partial X^e} = \frac{\partial \mathbf{u}^t}{\partial X^e} \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{u}^t \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X^e} \mathbf{u} + \mathbf{u}^t \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^e} + \lambda v^e \quad (4.19)$$

Reagrupando os termos da equação (4.19)

$$\frac{\partial L}{\partial X^e} = \mathbf{u}^t \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X^e} \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^e} (2\mathbf{u}^t \mathbf{K}) + \lambda v^e \quad (4.20)$$

Derivando a equação  $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$  em relação a variável de projeto (densidade do elemento), temos:

$$\frac{\partial(\mathbf{K} \mathbf{u})}{\partial X^e} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial X^e} \quad (4.21)$$

Aplicando a regra cadeia na equação (4.21)

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X^e} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^e} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial X^e} \quad (4.22)$$

Isolando o termo  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^e}$ , temos:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^e} = \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial X^e} - \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X^e} \mathbf{u} \quad (4.23)$$

Substituindo a expressão (4.23) na equação (4.20), obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial X^e} = \mathbf{u}^t \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X^e} \mathbf{u} + \left( \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial X^e} - \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X^e} \mathbf{u} \right) (2\mathbf{u}^t \mathbf{K}) + \lambda v^e \quad (4.24)$$

Rearranjando a equação (4.24), temos que:

$$\frac{\partial L}{\partial X^e} = 2\mathbf{u}^t \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial X^e} - \mathbf{u}^t \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X^e} \mathbf{u} + \lambda v^e \quad (4.25)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (4.25) representa a parcela da derivada relativa à força de campo, enquanto que o segundo termo representa a parcela da derivada referente a flexibilidade da estrutura.

Nos problemas de OT não dependentes do carregamento, o primeiro termo é nulo, pois o carregamento independe da pseudodensidade do elemento. Nestes casos, a derivada do Lagrangeano é sempre negativa e a convergência da função objetivo é monotônica. Do ponto de vista físico, este resultado é coerente, já que a adição de material na estrutura resulta na redução da flexibilidade.

No caso dos problemas de OT dependentes do carregamento, o primeiro termo do lado direito da equação (4.25) não é nulo, uma vez que o carregamento depende da topologia da estrutura. Nesta condição, a derivada pode ser tanto positiva como negativa e a convergência da função objetivo pode ser não monotônica. Do ponto de vista físico, a adição de material não implica necessariamente na redução da flexibilidade.

As forças de corpo de um elemento, neste caso, a força peso e a força centrífuga, podem ser descritas pela equação (2.33). A força de corpo é a somatória das forças em cada elemento:

$$\mathbf{f}_C = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{f}_C^e \quad (4.26)$$

Derivando a equação (4.26) em relação a variável de projeto, temos

$$\frac{\partial \mathbf{f}_C}{\partial X^e} = \frac{\partial \mathbf{f}_C^e}{\partial X^e} \quad (4.27)$$

Neste trabalho, todas as demais forças aplicadas na estrutura independem da densidade do elemento, logo:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_N}{\partial X^e} = 0 \quad (4.28)$$

Combinando as equações (2.43), (3.6) e (4.27), obtemos:

$$\frac{\partial \mathbf{f}^e}{\partial X^e} = \mathbf{f}_{C_0}^e \quad (4.29)$$

onde  $\mathbf{f}_{C_0}^e$  corresponde a composição entre a força peso e a força centrífuga na condição em que a pseudodensidade do elemento “e” é igual a um.

Considerando as equações (4.12), (4.25) e (4.29), temos:

$$\frac{\partial L}{\partial X^e} = \left( 2(\mathbf{u}^e)^t \mathbf{f}_{C_0}^e \right) - P_K (X^e)^{P_K-1} \left( (\mathbf{u}^e)^t \mathbf{K}_0 \mathbf{u}^e \right) + \lambda v^e \quad (4.30)$$

O ponto de ótimo é determinado quando a derivada da função de Lagrange é igual a zero para qualquer elemento “e”.

$$\frac{\partial L}{\partial X^e} = 0 \quad (4.31)$$

Considerando a equação (4.30) e (4.31), temos:

$$\frac{\left(2(\mathbf{u}^e)^t \mathbf{f}_{C0}^e\right) - P_K \left(X^e\right)^{P_K-1} \left((\mathbf{u}^e)^t \mathbf{K}_0 \mathbf{u}^e\right)}{\lambda v^e} = 1 \quad (4.32)$$

O significado físico da equação (4.32) é que a densidade de energia potencial deve permanecer constante em todo domínio fixo estendido.

Assim, um processo heurístico de determinação da variável de densidade do material pode ser definido como (BENDSØE, 1995):

$$B^e = \left\{ - \frac{\left(2(\mathbf{u}^e)^t \mathbf{f}_{C0}^e\right) - P_K \left(X^e\right)^{P_K-1} \left((\mathbf{u}^e)^t \mathbf{K}_0 \mathbf{u}^e\right)}{\lambda v^e} \right\}^\xi \quad (4.33)$$

Desta forma, o valor da variável de densidade do material na iteração (k+1) pode ser calculado pela seguinte fórmula:

$$X^{e^{k+1}} = \begin{cases} \max\{(X^{e^k} - \zeta), X_{MIN}^e\} & \text{se } X^{e^k} B^e \leq \max\{(X^{e^k} - \zeta), X_{MIN}^e\} \\ X^{e^k} B^e & \text{se } \max\{(X^{e^k} - \zeta), X_{MIN}^e\} \leq X^{e^k} B^e \\ & \leq \min\{(X^{e^k} + \zeta), X_{MAX}^e\} \\ \min\{(X^{e^k} + \zeta), X_{MAX}^e\} & \text{se } X^{e^k} B^e \geq \min\{(X^{e^k} + \zeta), X_{MAX}^e\} \end{cases} \quad (4.34)$$

onde k é o índice da iteração,  $\zeta$  é o valor do limite móvel e  $\xi$  fator de amortecimento do algoritmo de otimização (SIGMUND, 2000).



O multiplicador de Lagrange  $\lambda$  é calculado de forma a manter o volume da estrutura constante. O procedimento de cálculo utilizado para a determinação do multiplicador  $\lambda$  é o método da dicotomia.

É importante observar que a solução ótima do problema de uma estrutura submetida apenas à força de campo é  $\mathbf{X}^e = 0$ , ou seja, a solução nula.

Deve-se ressaltar que alguns problemas de OT dependentes do carregamento apresentam soluções ótimas com restrição de volume não ativa. Tal particularidade deste tipo de problema de OT, foi observada por Turteltaub e Washabaugh (1999) na otimização de estruturas rotativas. Este fenômeno ocorre quando as forças de campo são preponderantes em relação as forças concentradas, ou seja, quando a energia de deformação devido a aplicação das forças de campo é relativamente superior a energia de deformação decorrente da aplicação dos outros carregamentos.

Como observado, o valor da sensibilidade da função objetivo (4.32) pode ser positivo, o que implicaria na raiz quadrada de um número negativo. Assim, adaptou-se a equação heurística de atualização das variáveis de projeto, conforme a formulação proposta por Bendsøe e Sigmund (2003) para mecanismos flexíveis:

$$B^e = \max \left\{ 0, - \frac{\left( 2(\mathbf{u}^e)^t \mathbf{f}_{C0}^e \right) - P_K (\mathbf{X}^e)^{P_K - 1} \left( (\mathbf{u}^e)^t \mathbf{K}_0 \mathbf{u}^e \right)}{\lambda V^e} \right\}^\xi \quad (4.35)$$

Outra particularidade do problema de OT dependente do carregamento, é que a relação entre a força de campo do elemento e a rigidez do elemento tende a infinito para valores baixos de pseudodensidade.

Para contornar este problema, Bruyneel e Duysinx (2005), baseados nos trabalhos de Pedersen (2000, 2001), propuseram a introdução de um valor de corte para a pseudodensidade. Assim, reescreve-se as equações (3.6) e (3.7) que definem as propriedades em função da pseudodensidade  $\eta(\mathbf{X})$  do material

$$\rho(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \rho_0 \quad (4.36)$$

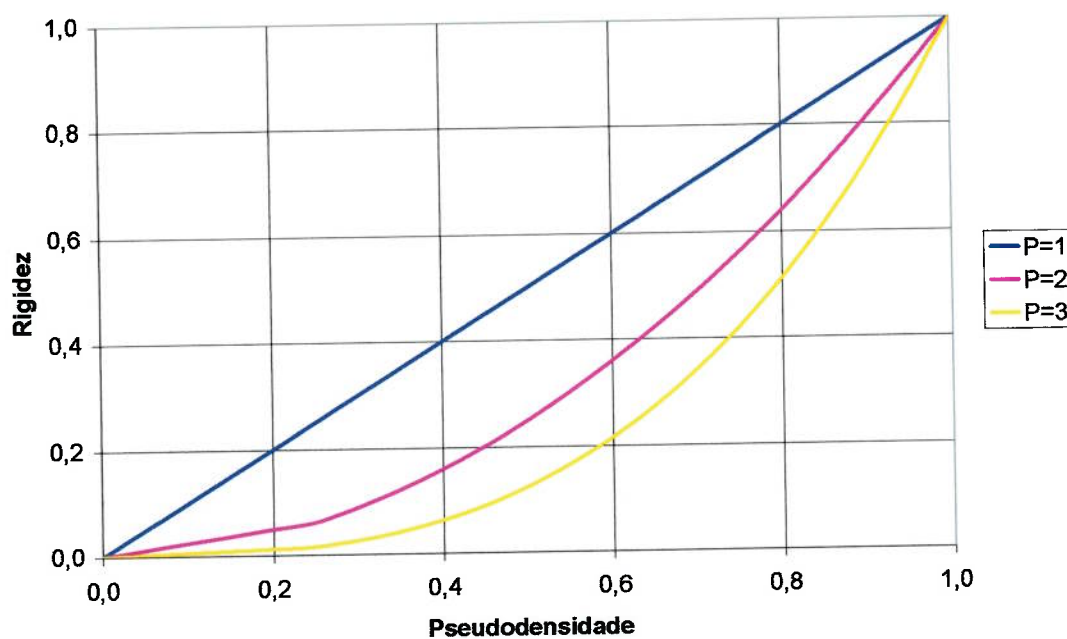
$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{X}) &= X^e X_C^{(P_k-1)} \mathbf{E}_0 & \text{se } X^e \leq X_C \\ \mathbf{E}(\mathbf{X}) &= (X^e)^{P_k} \mathbf{E}_0 & \text{se } X^e > X_C \end{aligned} \quad (4.37)$$

Isto posto, reescreve-se a equação de atualização da variável de projeto (4.35) para valores  $X^e < X_C$ .

$$B^e = \max \left\{ 0, - \frac{\left( 2(\mathbf{u}^e)^t \mathbf{f}_{C0}^e \right) - (X_C)^{P_k-1} \left( (\mathbf{u}^e)^t \mathbf{K}_0 \mathbf{u}^e \right)}{\lambda v^e} \right\}^\xi \quad (4.38)$$

A modificação do modelo de material limita a relação entre as forças de campo e a rigidez para os valores baixos de pseudodensidade.

A nova relação entre a rigidez e pseudodensidade, pode ser visualizada na **Figura 4.2**.



**Figura 4.2:** Relação entre a pseudodensidade e a rigidez

Desta forma, o valor da variável de densidade do material na iteração  $(k+1)$  será calculado pela fórmula:

$$X^{e^{k+1}} = \begin{cases} \max\{(X^{e^k} - \zeta), X_{\text{MIN}}^e\} & \text{se } X^{e^k} B^e \leq \max\{(X^{e^k} - \zeta), X_{\text{MIN}}^e\} \\ X^{e^k} B^e & \text{se } \max\{(X^{e^k} - \zeta), X_{\text{MIN}}^e\} \leq X^{e^k} B^e \\ & \leq \min\{(X^{e^k} + \zeta), X_{\text{MAX}}^e\} \\ \min\{(X^{e^k} + \zeta), X_{\text{MAX}}^e\} & \text{se } X^{e^k} B^e \geq \min\{(X^{e^k} + \zeta), X_{\text{MAX}}^e\} \end{cases} \quad (4.39)$$

onde

$$B^e = \begin{cases} \max\left\{0, -\frac{2(\mathbf{u}^e)^t \mathbf{f}_{C_0}^e - (X_C)^{P_K-1} \left((\mathbf{u}^e)^t \mathbf{K}_0 \mathbf{u}^e\right)}{\lambda v^e}\right\}^\xi & \text{se } X^e \leq X_C \\ \max\left\{0, -\frac{2(\mathbf{u}^e)^t \mathbf{f}_{C_0}^e - P_K (X^e)^{P_K-1} \left((\mathbf{u}^e)^t \mathbf{K}_0 \mathbf{u}^e\right)}{\lambda v^e}\right\}^\xi & \text{se } X^e > X_C \end{cases} \quad (4.40)$$

### 4.3. Problemas e soluções no MOT

Um fator importante na utilização do MOT é a qualidade do resultado obtido. Principalmente em uma aplicação prática, deseja-se a obtenção de uma estrutura relativamente simples e bem definida. No entanto, ao se resolver o problema de OT é comum se deparar com problemas numéricos que prejudicam a qualidade da solução. Estes problemas dependem de diversos fatores entre os quais: o tipo de elemento utilizado, densidade da malha de elementos finitos, algoritmo de otimização e o modelo de material.

Neste item, serão brevemente discutidos os principais problemas encontrados no MOT, a saber:

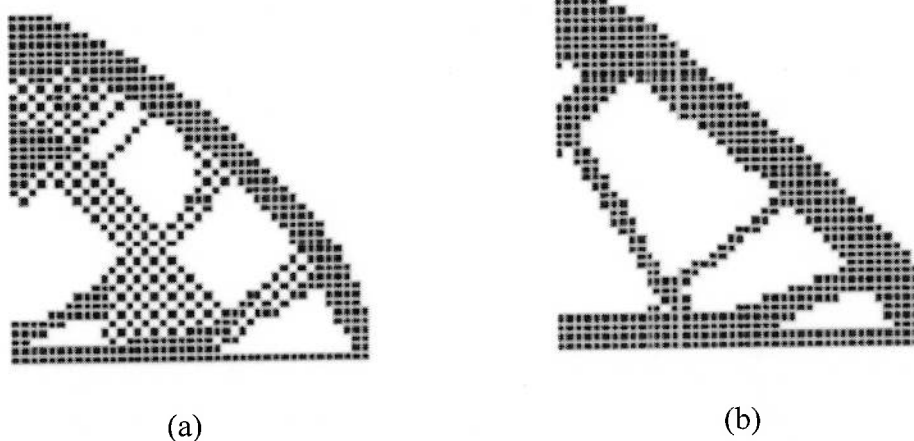
- Instabilidades xadrez (“Checkerboard”): A estrutura final apresenta regiões onde elementos com material e sem material se alternam, formando um padrão similar a um tabuleiro de xadrez;
- Dependência da malha (“Mesh dependence”): A estrutura final depende da densidade da malha utilizada (discretização);
- Escala de cinza (“Gray scale”): A estrutura final apresenta grandes regiões com elementos de pseudodensidades intermediárias;

Os trabalhos de Rozvany (1995), Sigmund e Petersson (1998), e Bendsøe e Sigmund (2003) apresentam uma revisão completa sobre o assunto.

#### 4.3.1. Instabilidade xadrez

A instabilidade de xadrez é um problema freqüente na otimização topológica de estruturas contínuas. Este problema é caracterizado pela formação de regiões na estrutura final onde elementos vizinhos possuem densidades zero ou um, de maneira intercalada definindo um padrão semelhante a um tabuleiro de xadrez.

Uma estrutura que apresenta o erro numérico de “instabilidade xadrez” é mostrada na **Figura 4.3 (a)**. A mesma estrutura sem a presença de tal erro é apresentada na **Figura 4.3 (b)**.



**Figura 4.3:** (a) Solução com o erro numérico de “instabilidade xadrez” (b) Solução sem o erro numérico de “instabilidade xadrez”

Os primeiros autores que estudaram esse fenômeno acreditavam que o resultado apresentado na **Figura 4.3 (a)** correspondia a tipo de microestrutura ótima. Visto que a topologia final na forma de tabuleiro aumentava a rigidez da estrutura. Posteriormente, se descobriu que essa rigidez “extra” era artificial.

Díaz e Sigmund (1995) constataram que a rigidez de uma estrutura com os elementos finitos dispostos na forma de tabuleiro (**Figura 4.4-a**) é “artificialmente” maior que a rigidez proporcionada por uma distribuição uniforme de material (**Figura 4.4-b**). Os autores verificaram que o aumento da rigidez era decorrente das aproximações do método dos elementos finitos, o qual superestimava a rigidez das regiões da estrutura com a instabilidade de xadrez.



**Figura 4.4:** (a) Padrão “instabilidade xadrez” (b) Distribuição uniforme

Jog e Haber (1996) demonstraram que o aparecimento da instabilidade de xadrez é decorrente da diferença na ordem de interpolação dos campos de densidades (variáveis) e de deslocamento. Os autores afirmam que a formação da “instabilidade xadrez” pode ser reduzida quando são utilizadas funções de interpolação diferentes (de mesma ordem) para ambos os campos (densidades e deslocamentos).

Os elementos de alta ordem possuem funções de interpolação que representam melhor o campo de deslocamentos, o que permite reduzir o erro induzido aos termos de deformação de cisalhamento dos mesmos.

Jog e Haber (1996) propõem um conjunto de testes para avaliar se uma determinada combinação de interpolações de densidades e deslocamentos resulta em configurações instáveis ou estáveis.

Diversos trabalhos na literatura mencionam a formação da “instabilidade xadrez” em seus resultados de OT, a grande maioria sugere duas alternativas distintas para amenizar tal problema. A primeira consiste em aumentar a ordem do elemento

finito enquanto a segunda sugere a utilização de métodos de filtragem ou de controle de gradiente.

Contudo, Díaz e Sigmund (1995) apontam que para determinados valores do fator de penalização, os elementos bidimensionais de alta ordem (8 ou 9 nós) também são suscetíveis à instabilidade de xadrez. Os autores sugerem que estes elementos sejam utilizados quando o fator de penalização estiver limitado a seguinte razão:

$$p \leq \frac{\log(2(6-5\nu))}{\log(2)} \quad (4.41)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do material base.

Além disso, a utilização de elemento de alta ordem aumenta consideravelmente o custo computacional quando comparado com a utilização de elementos de baixa ordem.

Bendsøe (1993) sugeriu a criação de uma malha formada por “super elementos”, constituídos de elementos de baixa ordem agrupados, todos com o mesmo valor de densidade. Apesar desse “super elemento” ser formado apenas por elementos de baixa ordem, o “super elemento” se comporta como se tivesse graus de liberdade extras, aumentando o custo computacional para solução do problema.

Considerando o elevado custo computacional inerente ao processo iterativo do MOT, a grande maioria dos trabalhos utiliza elementos de baixa ordem.

Assim sendo, uma estratégia comumente adotada na obtenção de soluções isentas da “instabilidade xadrez”, é a utilização de elementos de baixa ordem aliada aos métodos de filtragem ou de controle de gradiente.

Sabe-se que a formação da “instabilidade xadrez” é favorecida por variações bruscas das variáveis de projeto de elementos vizinhos. Assim, a aplicação de filtros que controlem estes gradientes, reduz o aparecimento deste problema (BOURDIN, 2001). Basicamente, os filtros tendem a amenizar a distribuição de densidade, não permitindo a variação abrupta da densidade entre elementos vizinhos.

A suavização da variação das variáveis de projeto nos problemas de OT pode ser efetuada; ou através de restrições inseridas na formulação do problema de

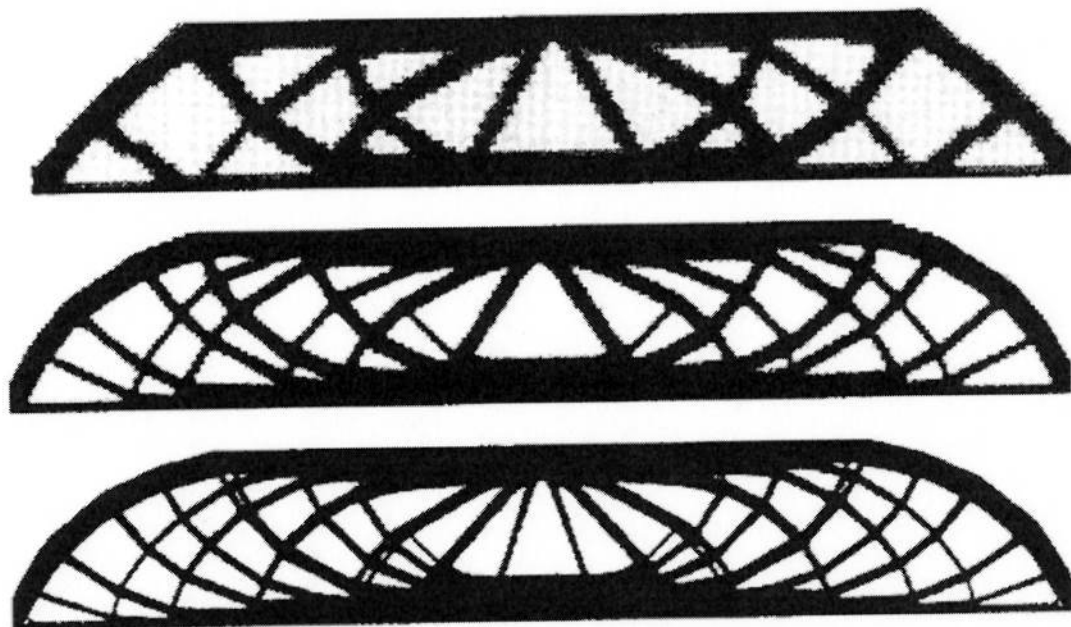
otimização, como em Haber e Jog (1996) que acrescentaram uma restrição de perímetro à formulação; ou através da restrição dos gradientes das variáveis de projeto (SIGMUND; 1997). Deve-se ressaltar que o método proposto por Haber e Jog (1996) resolve o problema de dependência de malha tratado a seguir.

Os principais tipos de filtro aplicados no MOT são apresentados no item 4.3.4.

#### 4.3.2. Dependência de malha

O problema da dependência da malha (“mesh dependence”) é caracterizado pela obtenção de estruturas finais diferentes em função da densidade da malha utilizada (discretização).

Intuitivamente, espera-se que quanto mais refinada for a malha de elementos finitos, mais definida será a topologia ótima. Contudo, observa-se que o refinamento da malha resulta em topologias mais detalhadas e qualitativamente diferentes de um modelo com malha mais grosseira.



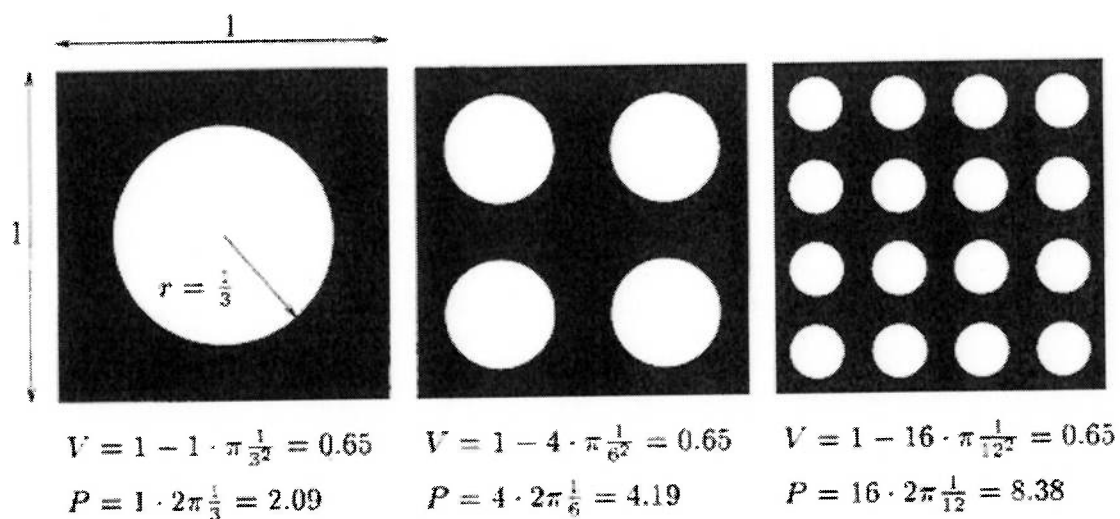
**Figura 4.5:** Dependência da malha no problema de OT

Segundo Sigmund e Petersson (1998), o problema da dependência da malha pode ser dividido em duas categorias, a saber:

- Obtenção de topologias finais cada vez mais complexas a medida que a malha de elementos finitos vai sendo refinada. Neste caso, a função objetivo é otimizada (minimizada ou maximizada) com o refinamento da malha de elementos finitos;
- Obtenção de diversas soluções ótimas com mesmo o valor da função objetivo. Este problema é causado pela não-unicidade da solução do problema discretizado (Por exemplo: projeto de uma estrutura uniaxial sob tensão em uma dada área).

O problema de dependência de malha é de difícil solução. Contudo, pode-se minimizar a aparição desse fenômeno com a aplicação de metodologias que “restringam” a complexidade da topologia final da estrutura. As metodologias usualmente empregadas são:

- Controle de perímetro: esse método propõe a inclusão de uma restrição de perímetro dos “furos” da estrutura (HABER, 1989). (Figura 4.6).



**Figura 4.6:** Exemplo de como o aumento na quantidade de furos pode aumentar o perímetro total para um dado volume  $V$

- Restrição local do gradiente das densidades: essa técnica foi proposta originalmente por Niordson (apud. SIGMUND;PETERSSON;1998),



o qual aplicou uma restrição na variação das espessuras de uma placa. A restrição adicional nos gradientes das densidades  $G$  pode ser escrita:

$$\left| \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right| \leq G \quad (4.42)$$

A restrição apresentada na equação (4.42), impõe que a distância mínima entre dois elementos sem material (“vazios”) deve ser superior a  $2/G$ . Segundo Sigmund e Petersson (1998), o procedimento ora proposto não apenas elimina a dependência da malha, mas também a instabilidade de xadrez. Em contra partida, o número de restrições dobra, aumentando consideravelmente o custo computacional.

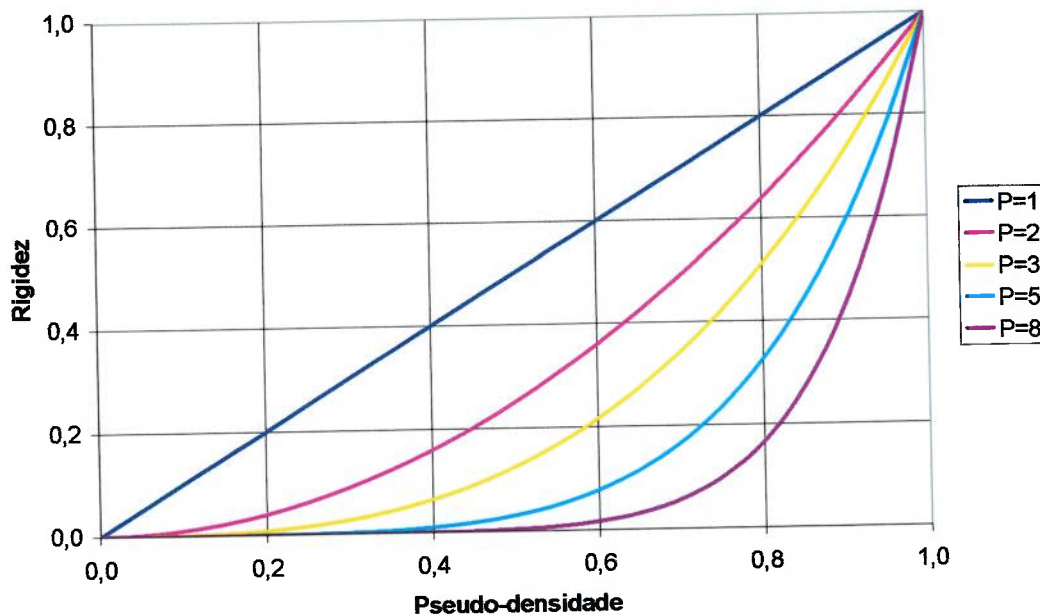
- Restrição global do gradiente das densidades: esse método consiste na introdução da seguinte restrição global ao problema OT.

$$\|\rho\|_H = \left( \int_{\Omega} (\rho^2 + \|\nabla \rho\|^2) d\Omega \right)^{1/2} \leq M \quad (4.43)$$

- Métodos de filtragem: as técnicas de filtragem são apresentadas no item 4.3.4.

### 4.3.3. Escala de cinza

Ao se utilizar à formulação com variáveis contínuas, a solução pode apresentar regiões com elementos de pseudodensidades intermediárias, chamadas de regiões com “escala de cinza”. A formação desse tipo de região está intimamente ligada com o modelo de material utilizado. No modelo de material SIMP, o controle de escala de cinza é feita pelo valor da penalização  $P$ .



**Figura 4.7:** Relações a pseudodensidade e a rigidez

O controle de escala de cinza é uma ferramenta importante quando se trata de um problema prático de engenharia, uma vez que os elementos com densidades intermediárias deverão ser mantidos ou retirados da estrutura conforme a interpretação do engenheiro projetista.

O fator de penalização  $P$  superior a um, apesar de ser útil na redução da escala de cinza, retira a convexidade do problema original. Visto que, o problema de maximização da rigidez é um problema convexo (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

Valores elevados de  $P$  podem retornar ao problema de não-existência da solução. Pois a medida que o fator de penalização  $P$  aumenta, o problema “relaxado” se aproxima novamente do problema discreto (Figura 4.7) conforme discutido por Rozvani et al., 1995.

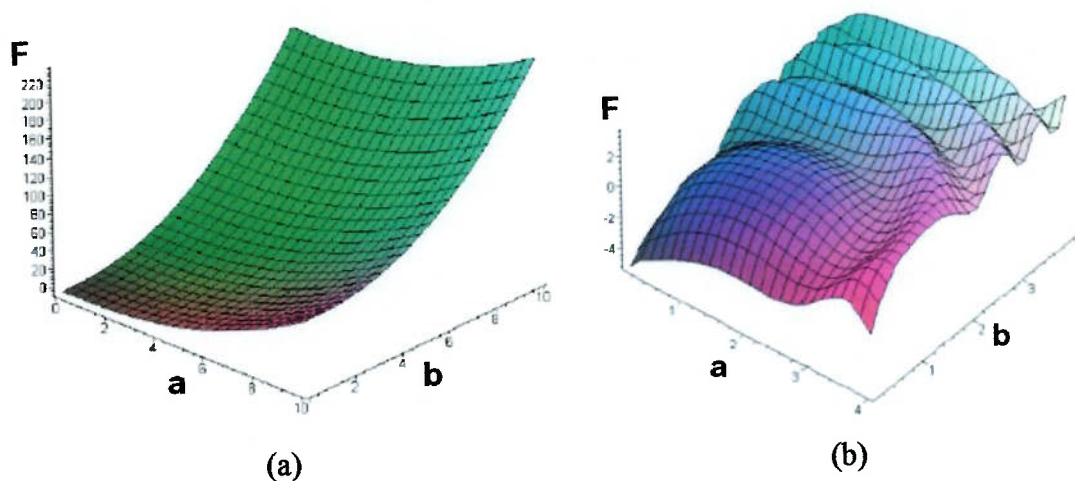
Com o intuito de amenizar os efeitos decorrentes da aplicação do fator de penalização  $P$ , diversos trabalhos utilizam os métodos da continuação.

O método da continuação (ROZVANI, 1995; SIGMUND, PETERSSON, 1998) consiste em iniciar o problema de otimização com um fator de penalização  $P$  igual um, de forma que a solução tenda a caminhar para o mínimo global, mesmo que o resultado obtido contenha muitas áreas de densidade intermediária.

Uma vez obtida a solução, eleva-se o valor da penalização  $P$ , com o intuito de eliminar as regiões com densidades intermediárias. Desta forma, obtém-se uma nova topologia, correspondente a um mínimo local próximo ao global, mas com menos regiões de densidade intermediária.

Embora isto represente uma mudança na definição matemática do problema, existem justificativas tanto do ponto de vista da Matemática quanto da Engenharia. Do ponto de vista da matemática, sabe-se que o resultado obtido é um mínimo local “derivado” de um mínimo global, como ilustrado na **Figura 4.8**.

Do ponto de vista da engenharia, obtém-se uma estrutura livre de densidades intermediárias.



**Figura 4.8:** (a) Mínimo global (convexa), (b) Mínimos locais (não-convexa)

$F$  – função objetivo,  $a$  e  $b$  – variáveis de projeto

#### 4.3.4. Métodos de filtragem

Como mencionado anteriormente, a formação da “instabilidade xadrez” é favorecida por variações bruscas nos gradientes das variáveis de projeto. Assim, a aplicação de filtros que controlem estas variáveis reduz o aparecimento deste problema. Os métodos de filtragem suavizam a distribuição espacial da variável de projeto, impedindo variações bruscas.

Os métodos de filtragem utilizados na otimização topológica podem ser classificados de acordo com a forma com que os elementos vizinhos são considerados:

- filtros de vizinhança fixa - os elementos vizinhos são os elementos que compartilham uma aresta e/ou nó;
- filtros espaciais - os elementos vizinhos são os elementos que se encontram dentro de um raio de varredura em torno do elemento central.

Neste trabalho foi implementado um filtro espacial sugerido por Sigmund (1997). Este filtro atua diretamente na distribuição dos gradientes da função objetivo  $\frac{\partial C}{\partial X^e}$ . Assim, o gradiente modificado da função objetivo é calculado a partir da seguinte equação:

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial X^i} = \frac{1}{X^i \sum_{j=1}^{n_e} \hat{H}_j} \sum_{j=1}^{n_e} \hat{H}_j X^i \frac{\partial C}{\partial X^i} \quad (4.44)$$

onde

$$\hat{H}_f = R_{\text{filtro}} - R_{ij} \quad \left\{ f \in n_e / R_{ij} \leq R_{\text{filtro}} \right\} \quad j = 1, \dots, n_e \quad (4.45)$$

sendo  $R_{ij}$  a distância entre os centróides dos elementos “i” e “j” e  $R_{\text{filtro}}$  o raio de atuação do filtro.

Assim, utiliza-se o valor do gradiente modificado da função objetivo (4.44) para atualizar o critério de otimalidade.

## 5. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

### 5.1. Introdução

Os capítulos anteriores delimitaram os conceitos básicos para a fundamentação do algoritmo de otimização topológica apresentado neste item.

Neste trabalho, implementou-se uma formulação de otimização topológica aplicada ao projeto de estruturas contínuas submetidas a forças de campo mecânicas. Considerou-se o tradicional problema de flexibilidade média onde o objetivo é encontrar a distribuição material que minimiza a flexibilidade média condicionada a restrição de volume. A implementação numérica da OT combinou o método de elementos finitos com o algoritmo de otimização.

A rotina foi implementada no software ANSYS, usando a linguagem APDL (ANSYS Parametric Design Language). Assim, foi possível conciliar todas as vantagens do MEF encontradas em um software comercial com a flexibilidade da ferramenta de otimização desenvolvida.

Podem ser destacadas as seguintes vantagens da metodologia aplicada:

- O software ANSYS possui uma ampla gama de tipos de elementos, podendo ser aplicado em diversos tipos de problemas de otimização. Assim, pode-se expandir o conceito aplicado para a solução de outros tipos de problemas, tais como, otimização térmica ou eletromagnética.
- Não é necessário programar as rotinas do MEF.
- O código de otimização é independente do MEF, o que facilita a manutenção do programa.

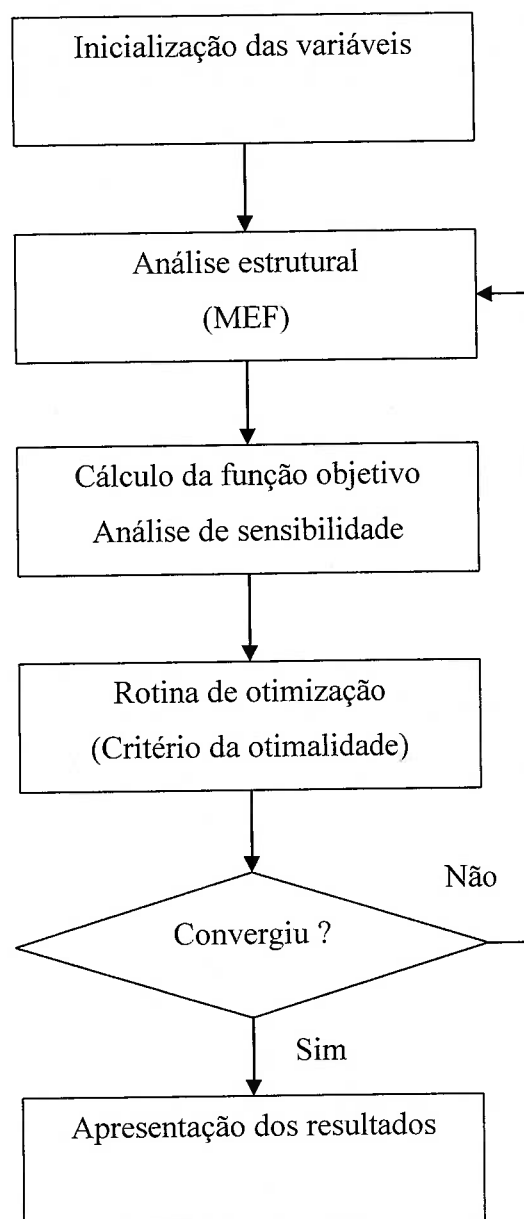
Em contrapartida, a linguagem APDL apresenta algumas limitações, a saber:

- Por ser tratar de uma linguagem interpretada, APDL apresenta um baixo desempenho no que tange velocidade de processamento.
- O software ANSYS não disponibiliza algumas grandezas para o usuário, tais como, matriz de rigidez, força nodal referente um determinado elemento, etc. Desta forma, faz-se necessário a utilização

de alguns subterfúgios para a obtenção de determinadas propriedades necessárias as rotinas de otimização.

A **Figura 5.1** ilustra as principais etapas da rotina de otimização implementada neste trabalho.

As tarefas de otimização são executadas pela rotina implementada em APDL. Enquanto, o software ANSYS executa as demais atividades (pré-processamento, solução MEF, pós-processamento).



**Figura 5.1:** Algoritmo de otimização

Os próximos parágrafos resumem as principais etapas do programa.

### 5.1.1. Inicialização das variáveis

1. Inicialização das variáveis – esta rotina estabelece as características do material base, bem como, os parâmetros da otimização.
  - i. Módulo de elasticidade do material base;
  - ii. Coeficiente de Poisson;
  - iii. Densidade do material base;
  - iv. Restrição de volume;
  - v. Fatores de penalização para rigidez e para a força de corpo;
  - vi. Raio de aplicação do filtro;
  - vii. Relação entre a intensidade da força de corpo e da força concentrada;
  - viii. Aceleração da gravidade;
  - ix. Velocidade angular em torno do eixo Z.
  - x. Número máximo de iterações em cada etapa do processo de otimização (método da continuação)
  - xi. Parâmetros de apresentação do ANSYS, tais como, escala dos gráficos, entre outros.
2. Definição do modelo de material – esta rotina define as propriedades do material para cada composição de materiais (“vazio” e material base). Foram gerados 1000 materiais diferentes com a densidade variando de  $0.001 \cdot \rho_0$  até  $\rho_0$ . O coeficiente de Poisson é igual para todos os materiais. Atribuiu-se, a cada material composto, o módulo de elasticidade proporcional à relação entre a densidade do material composto e material base elevada ao fator de penalização  $P_K$  para rigidez (conforme estabelecido na equação (3.7)). O método da continuação altera o fator de penalização durante o processo de otimização. Desta forma, o valor do módulo de elasticidade é atualizado a cada mudança do valor da penalização da rigidez  $P_K$ .
3. Importação do modelo em elementos finitos – para este trabalho criou-se uma rotina APDL auxiliar responsável pela criação do modelo de

elementos finitos. Esta rotina gera o modelo sólido, a malha; e também aplica as condições de contorno e o carregamento.

4. Armazenamento das propriedades do modelo em elementos finitos – responsável pela leitura das características principais do modelo, tais como, número de elementos e número de nós. Nesta etapa, também são alocados os vetores com dimensões adequadas ao tamanho do modelo.
5. Definição da matriz de elementos vizinhos – nesta etapa cria-se uma matriz contendo informações sobre os vizinhos de cada elemento finito, bem como a distância entre os centróides. A matriz armazena apenas os elementos que estão dentro do raio de ação estabelecido para o filtro. Essas informações são utilizadas posteriormente pela rotina filtragem.
6. Definição da densidade de cada elemento – nesta etapa define-se o material de cada elemento conforme o vetor de densidades calculado na rotina de otimização. Na primeira iteração, este vetor é inicializado com o valor da taxa de redução de volume (restrição de volume).

### **5.1.2. Análise estrutural**

Resolução das equações do MEF. Esta etapa é executada diretamente pelo software ANSYS. As informações relativas à formulação dos elementos utilizada pelo programa foram apresentadas no Capítulo 2.

### **5.1.3. Cálculo da função objetivo**

Avaliação da função objetivo e determinação da sensibilidade da função objetivo - Com os resultados da simulação MEF (trabalho das forças externas), avaliam-se a função objetivo e determina-se a sensibilidade da função objetivo em relação às variáveis de projeto. O valor de energia potencial de cada elemento é obtido diretamente através do comando “SENE” (ANSYS, 2001). Assim, o valor da função objetivo é calculada através multiplicação da energia potencial da estrutura (“SENE”) por dois. Visto que, a flexibilidade média da estrutura é o dobro da energia potencial total (equação (4.5)). A energia potencial total da estrutura é somatória da energia potencial de cada elemento (função “SENE”).



#### **5.1.4. Rotina de otimização**

Aplicação do filtro – aplica-se a técnica de filtragem que atua diretamente no gradiente da função objetivo. A transformação definida na equação (4.44).

Critério da otimalidade – calcula-se o novo vetor de densidades, utilizando o critério de atualização das variáveis definido na equação (4.39).

#### **5.1.5. Verificação da convergência**

Nesta etapa verifica-se convergência do problema. O critério de parada verifica se a diferença entre a densidade de um elemento em duas iterações consecutivas é inferior a 0,01. Caso este critério não seja atendido, o processo iterativo continua até que a convergência seja garantida ou o número limite de iterações for atingido.

#### **5.1.6. Pós-processamento**

O pós-processador do ANSYS é utilizado para apresentar os resultados da otimização.

Nesta etapa são elaborados os seguintes resultados:

- Figura com a distribuição densidade para cada iteração;
- Gráfico com a função objetivo para cada iteração.

## 6. RESULTADOS

### 6.1. Introdução

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos com o uso da metodologia desenvolvida neste trabalho. Foi empregada a formulação de minimização a flexibilidade média condicionada a restrição de volume, a qual foi aplicada ao projeto de estruturas submetidas a forças de campo mecânicas.

A primeira parte deste capítulo é dedicada ao estudo de problemas clássicos da OT. Estes problemas são freqüentemente encontrados na literatura e são utilizados como “benchmark” por softwares comerciais de otimização. Os resultados ora obtidos são comparados com os encontrados na literatura especializada.

Inicialmente, apresentam-se os parâmetros adotados (propriedade do material, carregamentos, ...) em todos os problemas estudados neste trabalho. Em seguida, avalia-se a influência do tipo de elemento na complexidade da topologia da estrutura.

Posteriormente, o método da continuação é ilustrado através do exemplo de uma viga engastada submetida a uma força concentrada na extremidade e a força peso. Concluindo a primeira parte, apresentam-se resultados que permitem avaliar a influência das forças de campo na topologia da estrutura.

No final deste capítulo, são apresentados os resultados da otimização topológica do rotor de um hidrogenador sujeito à força peso e a força centrífuga. Neste item, discute-se também a interpretação dos resultados.

Deve-se ressaltar que este trabalho aplicou duas metodologias para a resolução dos problemas propostos.

A primeira metodologia utiliza elementos finitos de baixa ordem associados a um método de filtragem. Conforme mencionado anteriormente, o método de filtragem “neutraliza” os problemas normalmente encontrados no MOT, tais como a dependência de malha e a instabilidade de xadrez.

A segunda metodologia emprega elementos finitos de alta ordem e não aplica nenhum método de filtragem. Sabe-se que elementos finitos com uma formulação mais elaborada permitem uma melhor descrição do campo de deslocamentos.

## 6.2. Considerações gerais

Normalmente, os problemas clássicos de OT discutidos na literatura, consideram um material “normalizado” com valores unitários para o módulo de elasticidade ( $E = 1 \text{ Pa}$ ) e para a densidade ( $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ ). Entretanto, nos problemas de otimização dependentes do carregamento, a relação entre o módulo de elasticidade e a densidade do material é um fator preponderante na distribuição de material na estrutura.

Assim, o material utilizado em todos os exemplos apresentados neste trabalho é o aço carbono. As propriedades do material adotado são apresentadas na Tabela 6.1.

Módulo de elasticidade	$210 \times 10^9 \text{ Pa}$
Coefficiente de Poisson	0,3
Densidade	$7850 \text{ kg/m}^3$

Tabela 6.1: Propriedades do material isotrópico

A geometria e as condições de contorno dos problemas clássicos da literatura são apresentadas a seguir. Todas as grandezas são apresentadas no Sistema Internacional de unidades (SI).

Neste trabalho, será utilizada a convenção descrita a seguir para indicar a relação entre força peso devido à aceleração da gravidade e a força concentrada aplicada.

Uma característica importante na definição dos problemas de otimização dependentes do carregamento é a relação entre a magnitude da força de campo e da força concentrada. Assim, as definições dos problemas clássicos são dadas por proporções, tais como  $\frac{1}{2}$ , significando que a relação entre a intensidade da força de campo e da força concentrada. Por exemplo, no problema da viga engastada, a relação entre forças (RF) igual a  $\frac{1}{2}$  indica que a intensidade força peso devido à aceleração da gravidade é igual a metade da intensidade da força concentrada. Para os problemas onde os efeitos de campo são desprezados, RF é igual a zero.

A restrição de volume indica a porcentagem final do volume da estrutura cheia, ou seja, uma restrição de 30% corresponde a uma redução de 70% no volume total do domínio fixo estendido.

O primeiro problema estudado é a tradicional viga curta em balanço submetida a uma força concentrada no centro da extremidade oposta ao engaste (Figura 6.1).

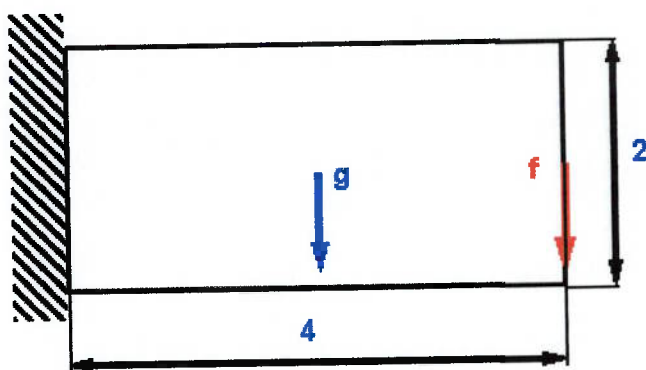


Figura 6.1: Viga curta em balanço (2D)

Outro problema clássico é a viga bi-apoiada submetida a uma força concentrada no centro da estrutura (Figura 6.2).

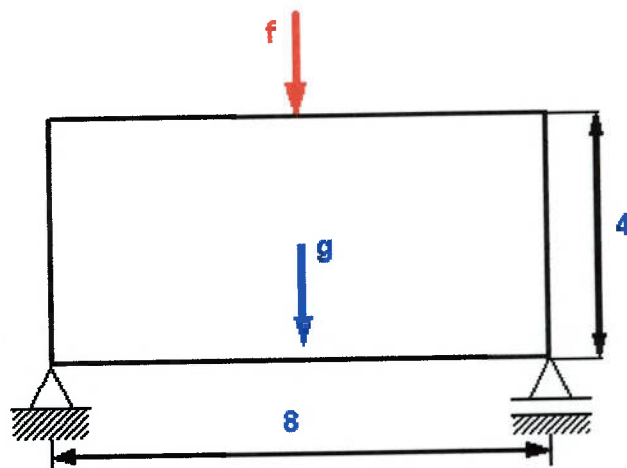
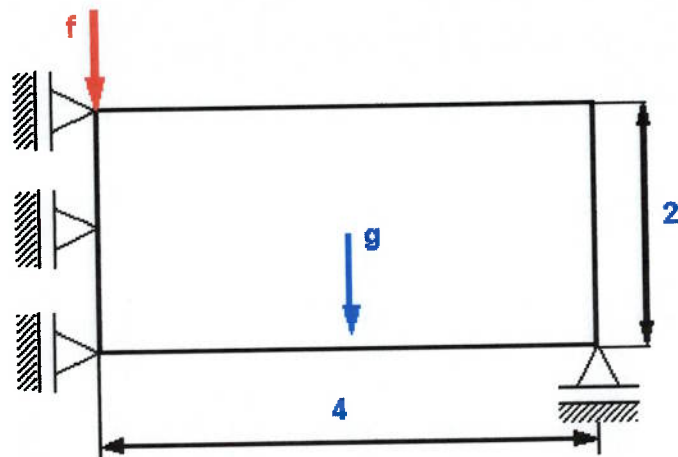


Figura 6.2: Viga bi-apoiada (2D)

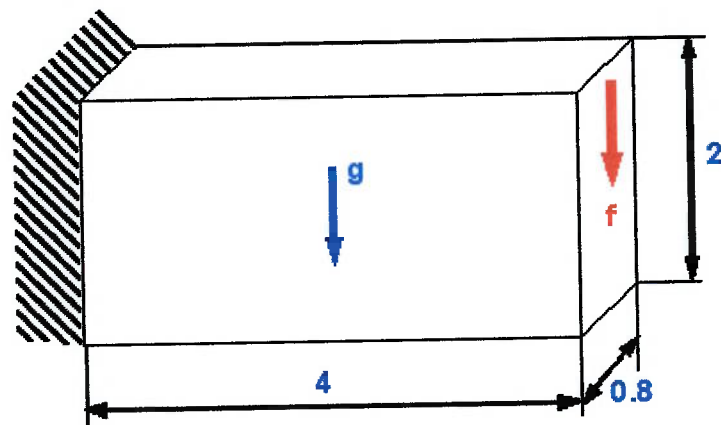
Devido à simetria do problema da viga bi-apoiada (Figura 6.2), em relação ao eixo vertical, apenas metade do domínio fixo estendido é apresentado na Figura 6.3.



**Figura 6.3:** Viga bi-apoiada (2D) - Simetria

Para os exemplos bidimensionais supracitados foi considerada hipótese de estado plano de deformação.

Os modelos para os problemas tridimensionais da viga engastada e da viga bi-apoiada são mostrados, respectivamente, na **Figura 6.4** e na **Figura 6.5**.



**Figura 6.4:** Viga curta em balanço (3D)

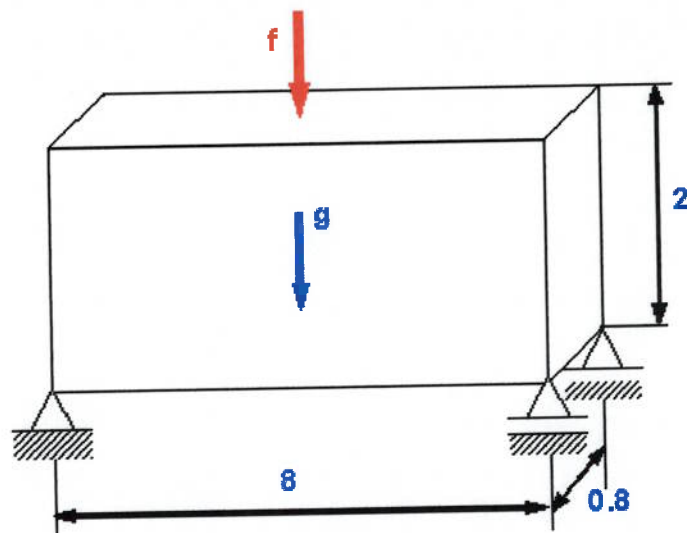


Figura 6.5: Viga bi-apoiada (3D)

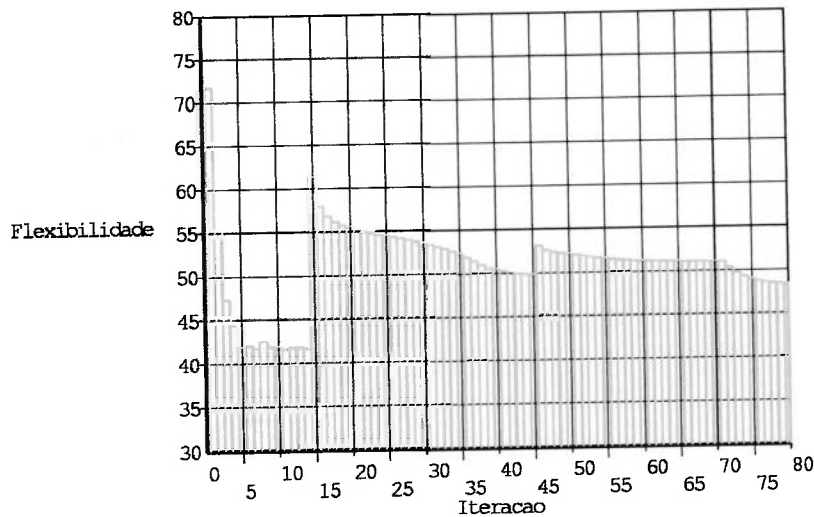
### 6.3. Método da continuação

Nesse trabalho foi utilizado o método da continuação que consiste em se alterar o valor de  $P_K$  durante o processo de otimização. Este método inicia o problema de otimização com um fator de penalização  $P_K$  igual um, de forma que a solução caminhe para o mínimo global, mesmo que o resultado obtido contenha muitas áreas de densidade intermediária (“escala de cinza”). Após a convergência, eleva-se o valor da penalização  $P_K$ , com o intuito de eliminar as regiões com densidades intermediárias. Desta forma, obtém-se uma nova topologia, correspondente a um mínimo local próximo ao global, mas com menos regiões de densidade intermediária.

Com o intuito de ilustrar o método da continuação serão apresentadas as diversas etapas da solução do problema da viga bi-apoiada (Figura 6.3). A estrutura foi discretizada com 3200 elementos isoparamétricos de quatro nós (PLANE 42).

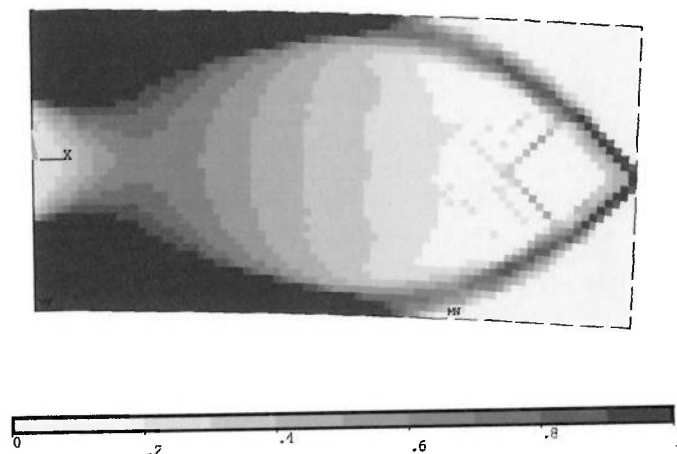
Foi aplicado o método de filtragem com raio igual a 1,5 vezes a dimensão da aresta do elemento. Neste exemplo, a intensidade da força peso é igual a intensidade da força concentrada ( $RF=1$ ) e a restrição de volume é 50%.

A curva de convergência da função objetivo do problema supracitado é apresentada na **Figura 6.6**. Os valores da flexibilidade média da estrutura estão em Nm.



**Figura 6.6:** Curva de convergência da função objetivo

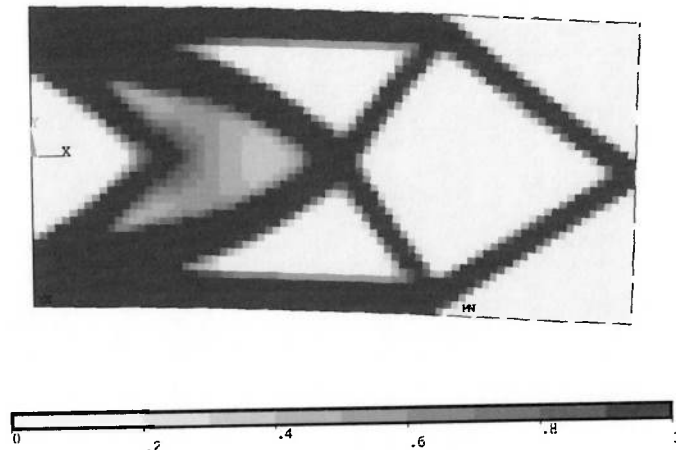
O primeiro trecho (primeira à décima quarta iteração) representa a etapa do processo iterativo onde a penalização  $P_K$  é igual a um e o filtro está desligado. A estrutura obtida ao final da primeira etapa é apresentada na **Figura 6.7**.



**Figura 6.7:** Estrutura obtida ao final da primeira etapa

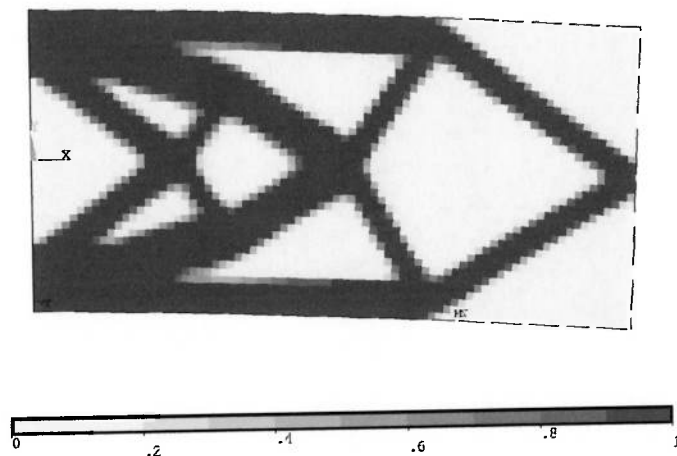
A estrutura ainda não está bem definida, pois o problema resolvido até então está muito próximo do problema contínuo.

No segundo trecho (décima quinta à quadragésima iteração), o fator de penalização  $P_K$  é elevado a dois e o filtro é ligado. O resultado obtido ao final desta etapa pode ser visualizado na **Figura 6.8**.



**Figura 6.8:** Estrutura obtida ao final da segunda etapa

Na terceira etapa (quadragésima primeira à septuagésima iteração), o fator de penalização é elevado a três e o filtro permanece ligado. A estrutura obtida ao final desta fase é mostrada na **Figura 6.9**.

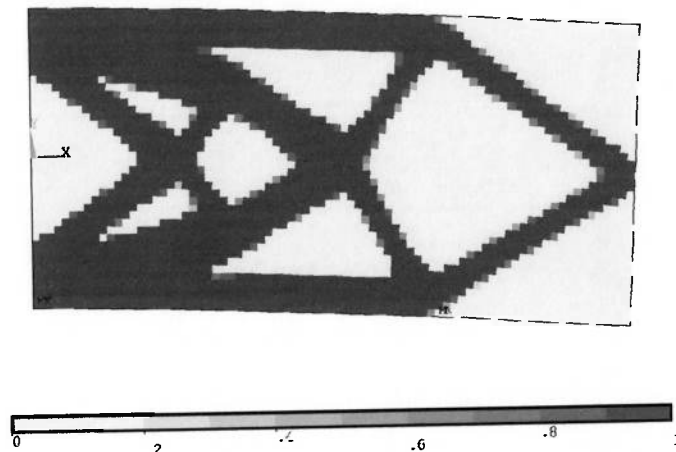


**Figura 6.9:** Estrutura obtida ao final da terceira etapa

Observa-se que a estrutura está bem mais definida, contudo ainda existem algumas regiões com pseudodensidades intermediárias, visto que o filtro não permite a alteração espacial brusca das variáveis de projeto.



Na última etapa (septuagésima primeira à última iteração), com o intuito de reduzir a escala de cinza, desliga-se o filtro e mantém-se o fator de penalização estabelecido na etapa anterior. A estrutura obtida ao final da quarta fase é apresentada na **Figura 6.10**.

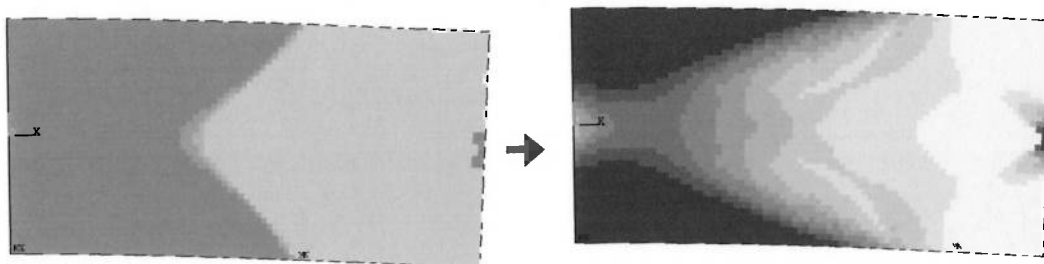


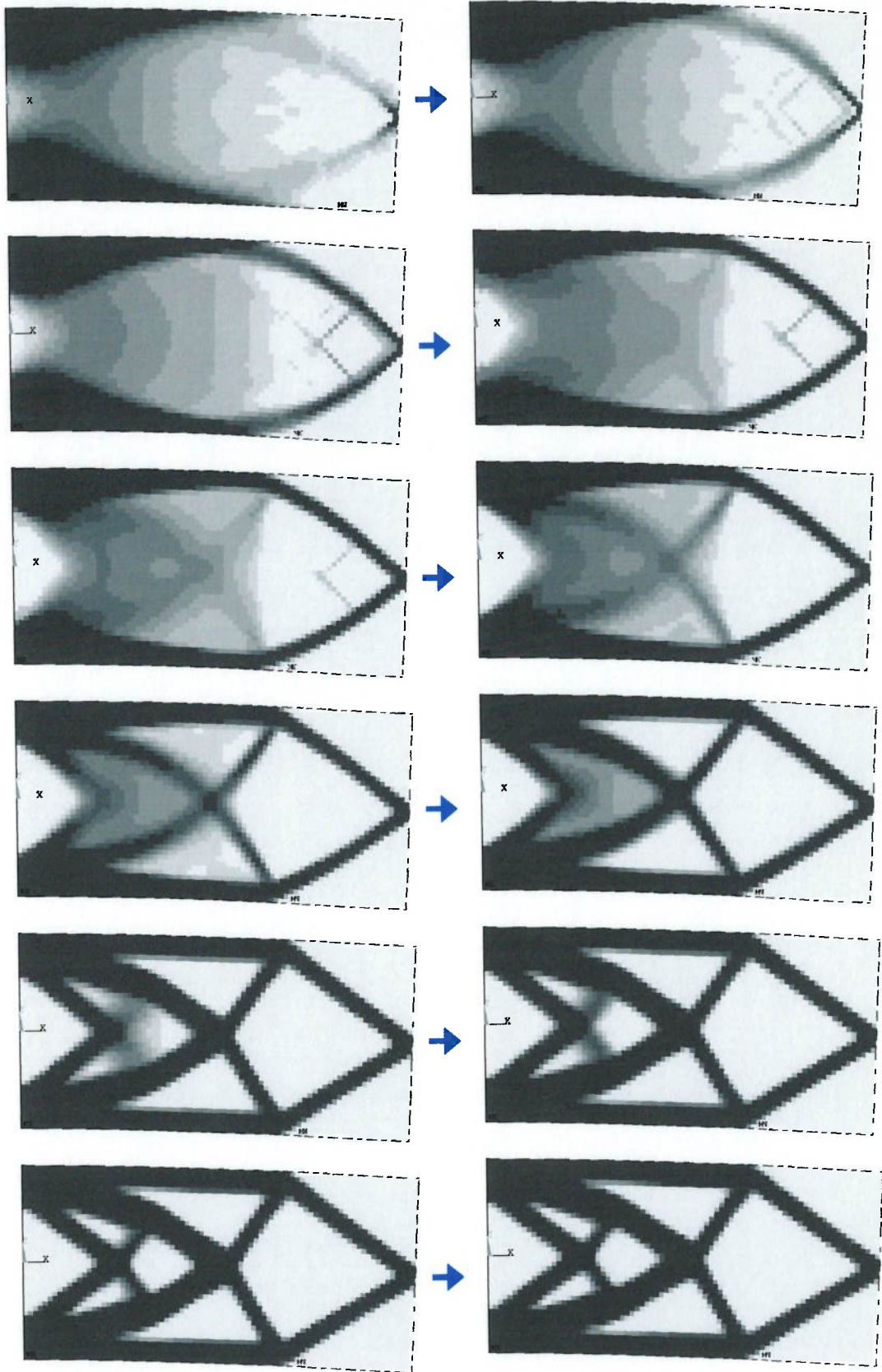
**Figura 6.10:** Estrutura obtida ao final da quarta etapa

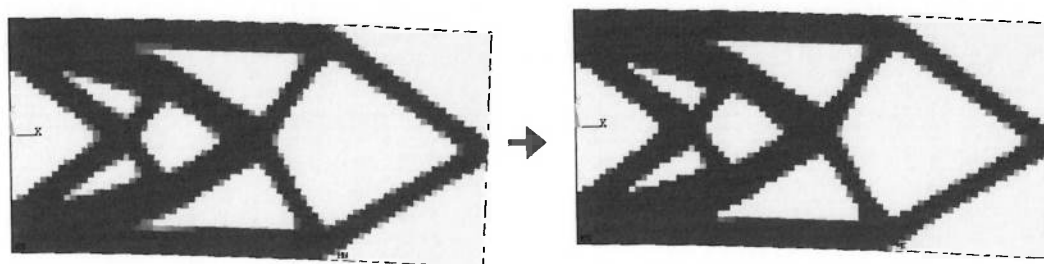
Pode-se observar que a estrutura está quase livre de regiões com pseudodensidades intermediárias.

A flexibilidade da estrutura obtida no final da primeira etapa é aproximadamente 41,9 Nm, enquanto que a flexibilidade média da estrutura no final do processo de otimização é igual a 48,5 Nm. Nota-se que a estrutura “interpretada” (livre de pseudodensidades intermediárias) é aproximadamente 15% mais flexível que a estrutura “ótima”.

A seqüência de material do problema da viga bidimensional é apresentada na **Figura 6.11**.







**Figura 6.11:** Seqüência de material do problema da viga em balanço

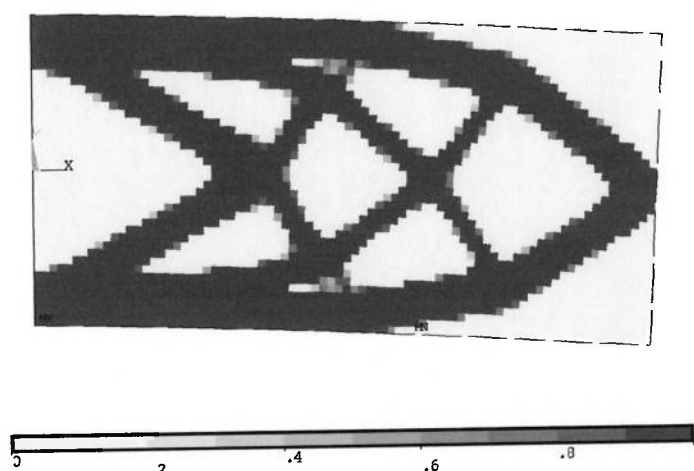
#### 6.4. Influência da força de campo na topologia da estrutura

Com o intuito de verificar a influência da força de campo na topologia da estrutura, foram sintetizadas quatro estruturas com diferentes relações entre força peso devido à aceleração da gravidade e a força concentrada.

Neste item, são estudados os problemas da viga engastada (**Figura 6.1**) e da viga bi-apoiada (**Figura 6.3**).

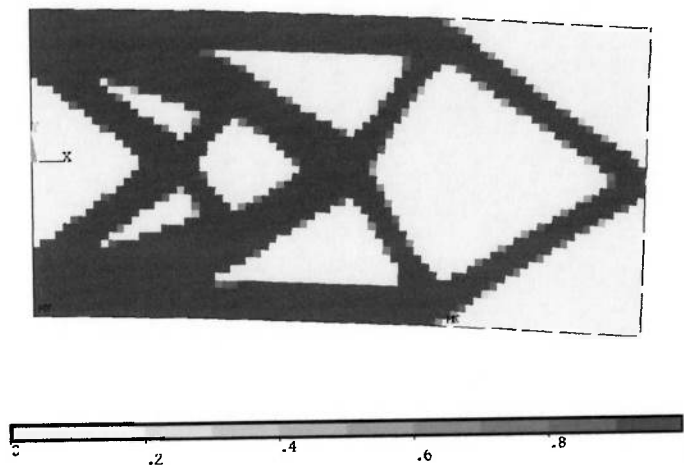
O domínio fixo estendido do problema foi discretizado com 3200 elementos isoparamétricos de quatro nós (PLANE 42). Foi aplicado o método de filtragem com raio igual a 1,5 vezes a dimensão da aresta do elemento. A restrição de volume foi definida em 50% para todos os quatro casos.

A estrutura obtida desconsiderando o peso próprio (RF=0) é apresentada na **Figura 6.12**.



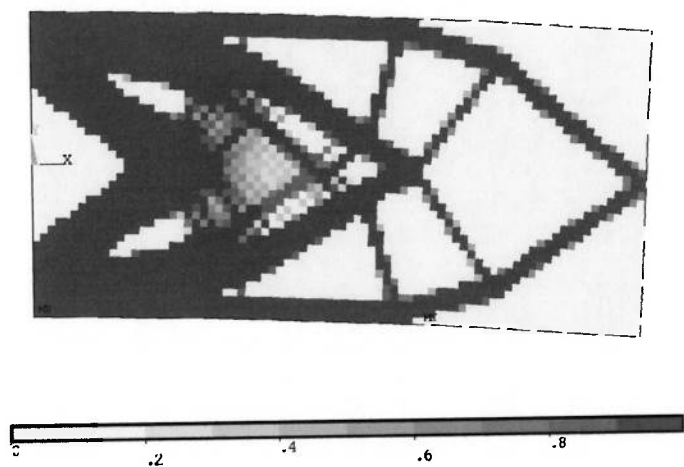
**Figura 6.12:** Viga engastada (PLANE 42) - Estrutura obtida apenas com a aplicação da força externa

A estrutura ótima tal que a aceleração da gravidade gere um carregamento igual a carga externa aplicada à estrutura ( $RF=1$ ) pode ser visualizada na **Figura 6.13**. Este é o caso de algumas estruturas civis, nas quais a força peso é o carregamento principal. Observa-se que o método concentra material na região próxima ao engaste, minimizando assim o momento fletor exercido pelo peso próprio da estrutura.

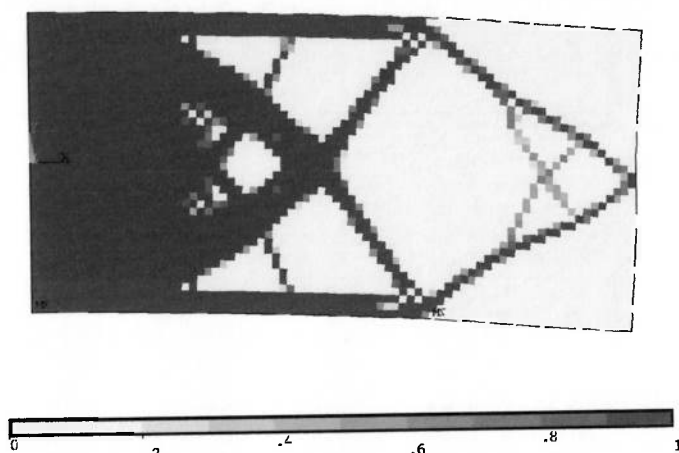


**Figura 6.13:** Viga engastada (PLANE 42) -  $RF=1$

Outras relações entre a magnitude da força peso e carregamento externo podem ser visualizadas na **Figura 6.14** e na **Figura 6.15**.



**Figura 6.14:** Viga engastada (PLANE 42) -  $RF=2$

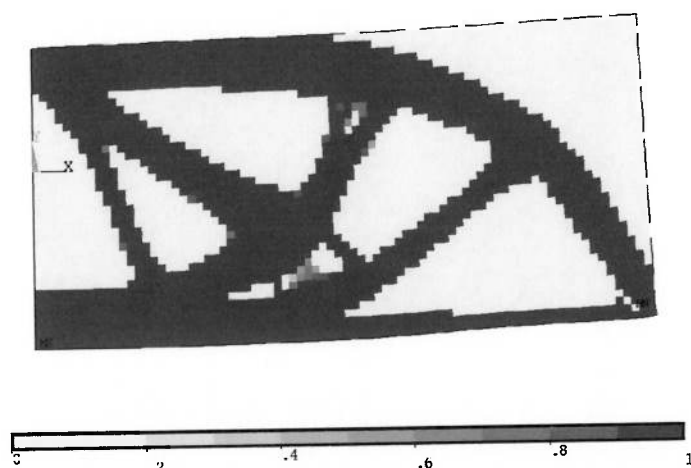


**Figura 6.15:** Viga engastada (PLANE 42) - RF=10

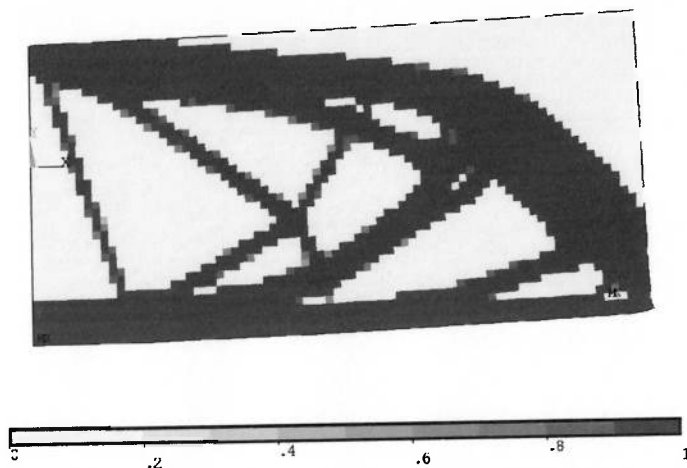
Observa-se que a estrutura tende a desaparecer para valores elevados de força de campo.

Os resultados obtidos para o problema da viga engastada (Figura 6.12, Figura 6.13, Figura 6.14 e Figura 6.15) são muito similares aos encontrados por Bendsøe e Sigmund (2003).

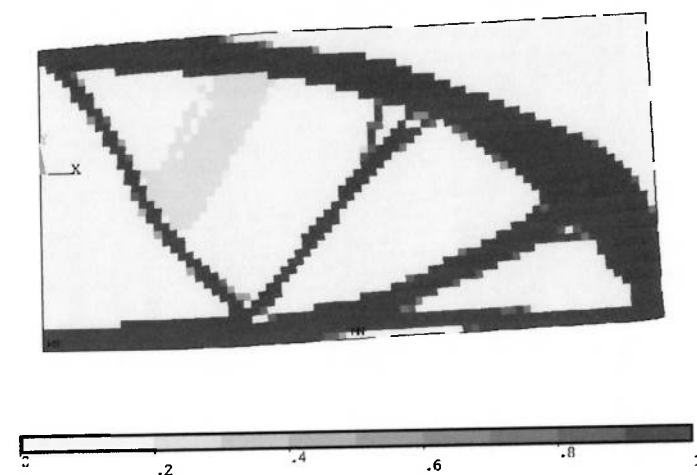
Em seguida, são mostrados os resultados da viga bi-apoiada (Figura 6.3). O domínio fixo estendido deste problema foi discretizado com 3200 elementos planos de oito nós (PLANE 82). Não foi aplicado nenhum método de filtragem. A restrição de volume foi definida em 50% para todos os quatro casos.



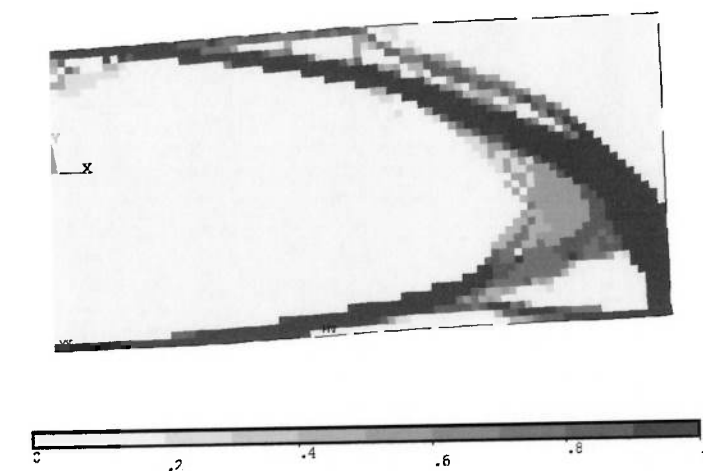
**Figura 6.16:** Viga bi-apoiada (PLANE 82) - Estrutura obtida apenas com a aplicação da força externa



**Figura 6.17:** Viga bi-apoiada (PLANE 82) - RF=1



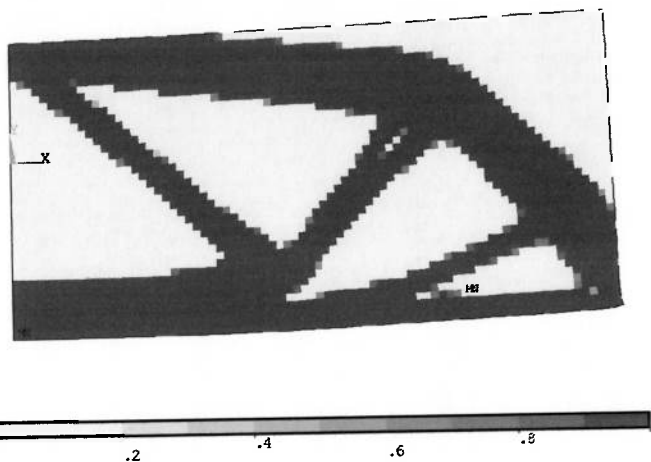
**Figura 6.18:** Viga bi-apoiada (PLANE 82) - RF=2



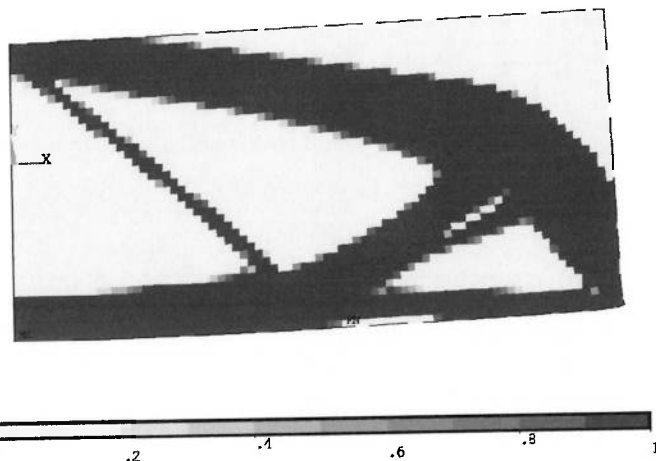
**Figura 6.19:** Viga bi-apoiada (PLANE 82) - RF=10

Observa-se que o método concentra material na região próxima aos apoios, reduzindo o peso da parte central da estrutura, e conseqüentemente minimiza o carregamento provocado pelo mesmo (momento fletor devido ao peso próprio).

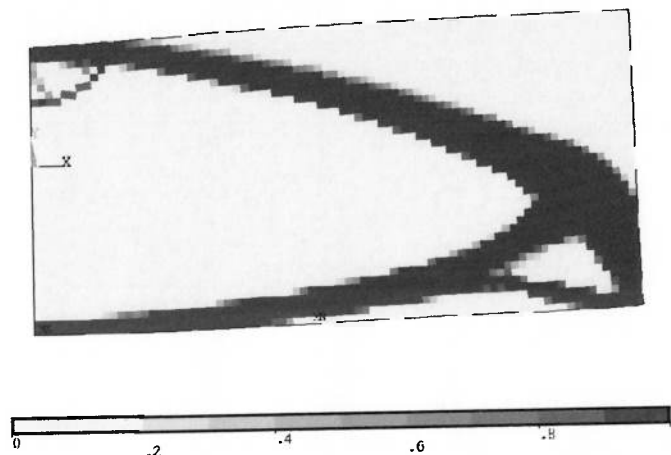
Os resultados obtidos neste trabalho (Figura 6.17, Figura 6.18 e Figura 6.19) são muito similares aos encontrados por Bruyneel e Duysinx (2005). A seguir, são apresentados os resultados obtidos com elemento isoparamétrico de quatro nós e método de filtragem.



**Figura 6.20:** Viga bi-apoiada (PLANE 42) – RF=1



**Figura 6.21:** Viga bi-apoiada (PLANE 42) – RF=2



**Figura 6.22:** Viga bi-apoiada (PLANE 42) – RF=10

Deve-se ressaltar que Bruyneel e Duysinx (2005) resolveram o problema utilizando elementos de baixa ordem associados a um método de filtragem similar ao empregado neste trabalho.

## 6.5. Problemas tridimensionais

A metodologia implementada neste trabalho não faz distinção entre os problemas bidimensionais e tridimensionais. Contudo, a otimização topológica de estruturas tridimensionais exige um esforço computacional considerável, em consequência do elevado número de variáveis de projeto.

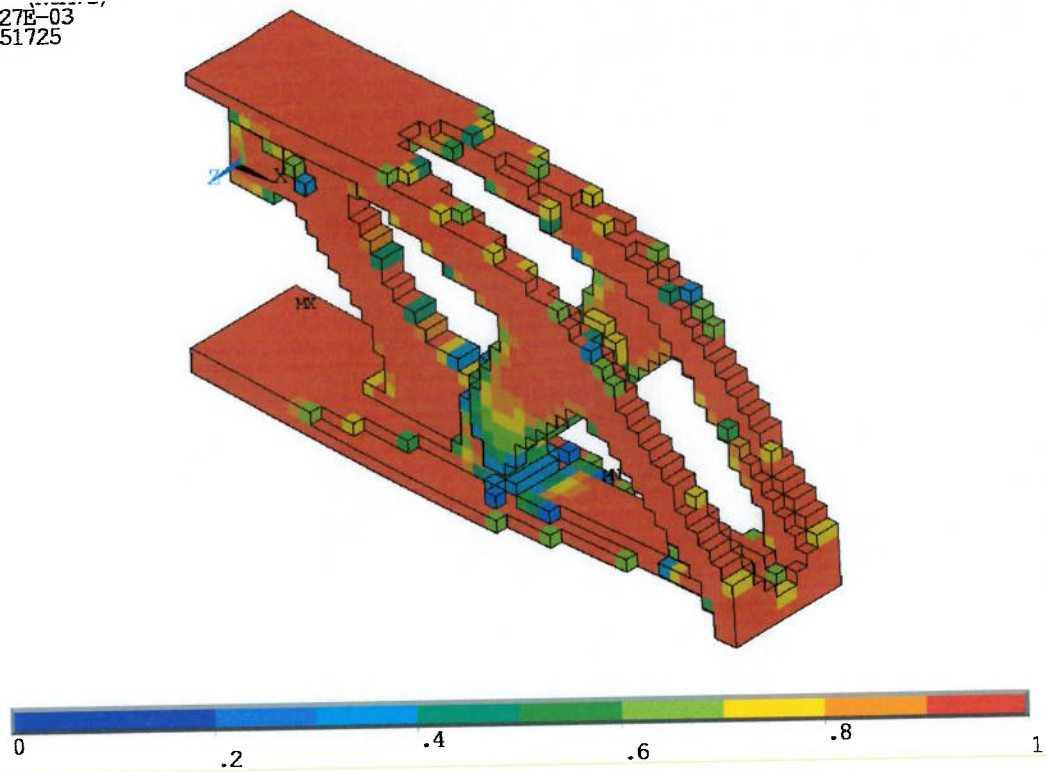
Os principais conceitos do problema de OT sujeito a força de campo foram ilustrados nos itens anteriores deste capítulo. Assim, neste item são apresentados apenas alguns exemplos de estruturas tridimensionais submetidas a forças de campo mecânicas.

Assim, o problema da viga bi-apoiada submetida a uma força concentrada no centro definido na **Figura 6.5** foi estudado.

O domínio fixo estendido do problema foi discretizado em 6400 elementos de vinte nós (SOLID 95). Não foi utilizado nenhum método de filtragem. A restrição de volume foi definida em 20%.

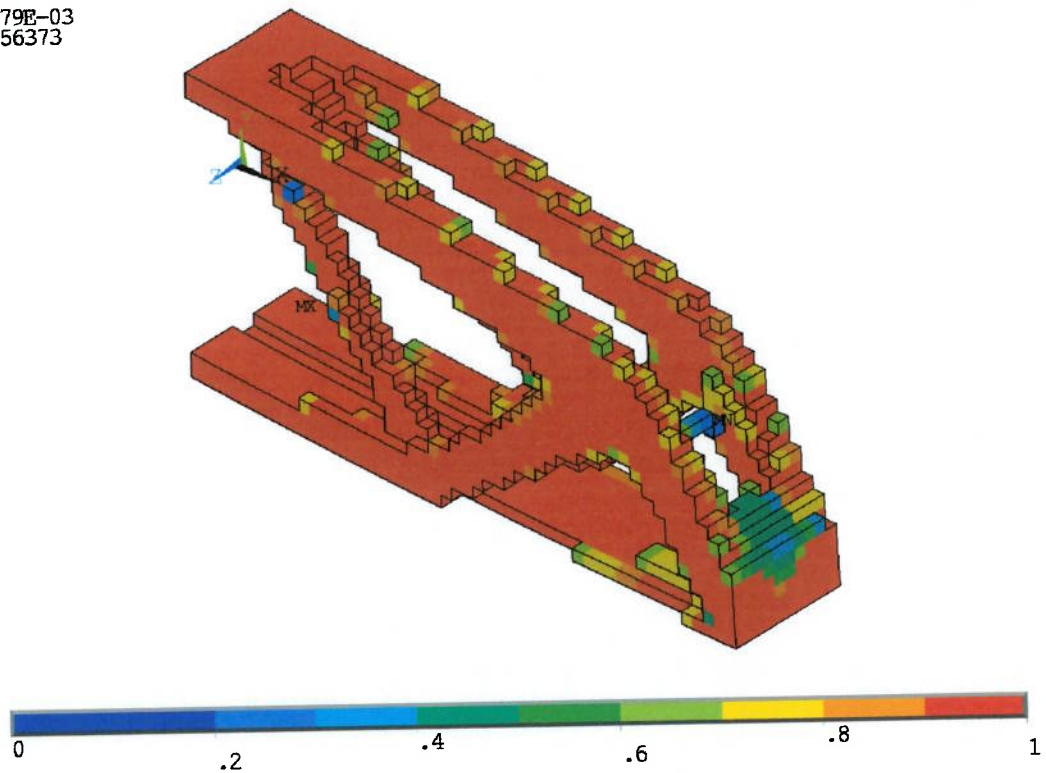


127E-03  
251725



**Figura 6.23: Viga bi-apoiada (SOLID 95) – RF=0**

179E-03  
256373



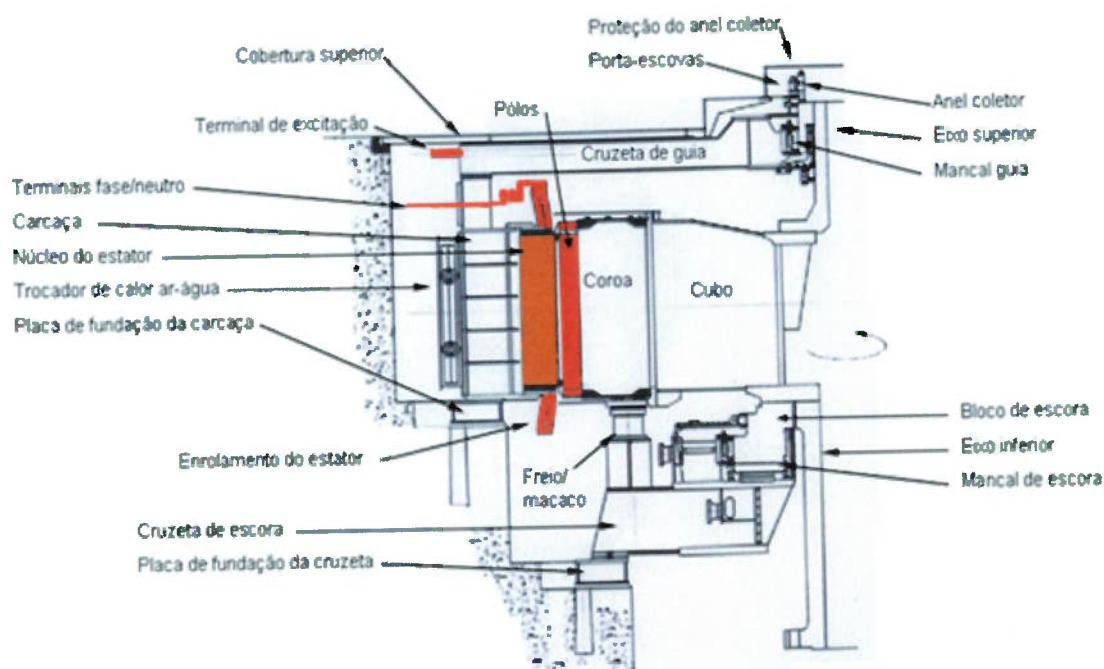
**Figura 6.24: Viga bi-apoiada (SOLID 95) – RF=1**

Seguindo a tendência constatada nos problemas bidimensionais, o método concentra material na região próxima aos apoios, reduzindo o carregamento decorrente do peso na parte central da estrutura. Observa-se que o “reforço” diagonal na parte central de estrutura reduz-se, com o aumento da magnitude da força peso em relação a força concentrada.

## 6.6. Rotor do gerador

Neste item são mostrados os resultados da otimização topológica do rotor de um hidrogerador sujeito à força peso e força centrífuga.

O rotor do gerador é essencialmente composto pelo eixo, cubo, coroa, pólos, partes rotativas do mancal e anel coletor. Os principais componentes do gerador são apresentados na **Figura 6.25**.



**Figura 6.25:** Componentes do gerador

A configuração do rotor do gerador estudado neste trabalho é um pouco diferente da concepção tradicional. Devido às altas rotações as quais o rotor é submetido, o cubo do rotor e a coroa formam uma única peça.

Assim, o rotor do gerador estudado é composto pelo eixo, pólos, ventilador, partes rotativas do mancal, disco de freio e anel coletor. Tais componentes podem ser visualizados na **Figura 6.26**.

As principais características do gerador estão mostradas na **Tabela 6.2**.

Potência nominal	30 MVA
Velocidade nominal	720 rpm
Velocidade de disparo	1300 rpm
Tensão nominal	13,8 kV
Frequência da rede	60 Hz
Fator de potência	0,85
Momento de inércia	15 $\text{tm}^2$
Forma construtiva do conjunto	IM-8425
Número de pólos	10

Tabela 6.2: Características técnicas do gerador

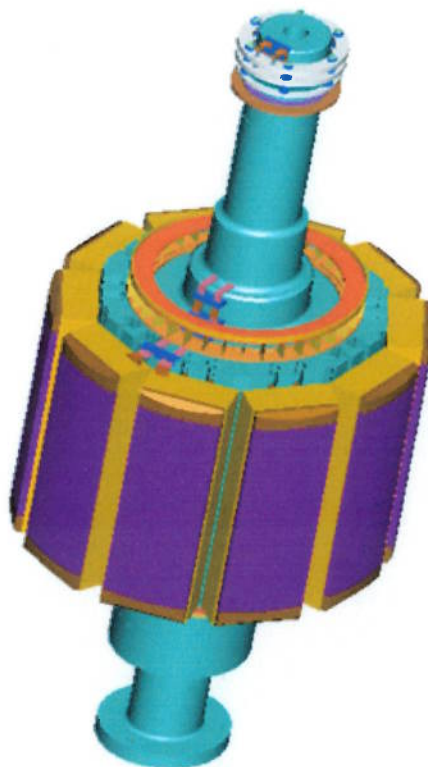


Figura 6.26: Rotor do gerador

O gerador estudado é de eixo vertical e tem a forma construtiva IM-8425. Conforme norma IEC 34-7, esta configuração de máquina tem um mancal combinado guia-escora situado acima do rotor do gerador e sua cruzeta suporte se apóia na carcaça do estator. Sob o rotor existe um mancal guia, disposto dentro de uma estrutura de suporte denominada de cruzeta inferior que, por sua vez, descansa sobre as paredes de concreto do poço da turbina.

As dimensões principais do componente estudado são apresentadas na **Tabela 6.3**

Diâmetro externo do cubo (parte central)	1,36 m
Diâmetro externo dos eixos (parte superior e inferior)	0,36 m
Diâmetro interno do eixo / cubo	0,15 m
Diâmetro externo do flange	0,60 m
Comprimento do cubo	1,36 m
Comprimento total do eixo	4,70 m
Peso aproximado do conjunto eixo + cubo	18.000 kg

Tabela 6.3: Características técnicas do cubo do gerador

O rotor do gerador foi analisado em duas condições operacionais (vide item “Condições operacionais”), a saber:

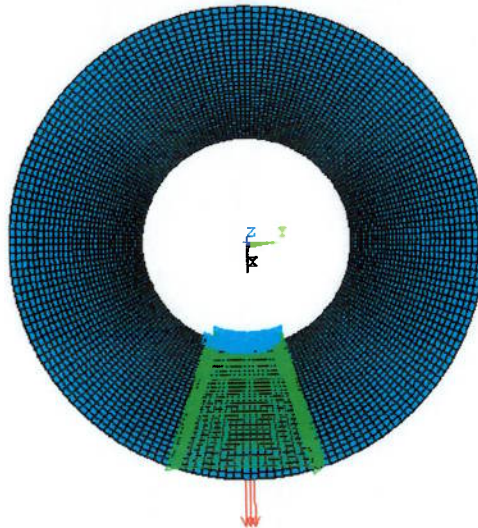
- Disparo – nesta condição o rotor estará sujeito apenas aos esforços decorrentes da força de campo mecânicas, ou seja, força centrífuga e gravidade.
- Operação nominal – nesta condição o rotor está operando na velocidade nominal e está submetido às força de campo mecânicas e forças magnéticas.

### 6.6.1. Modelo bidimensional

A geometria e as condições de contorno do modelo bidimensional do rotor do gerador são apresentadas na **Figura 6.27**. O disco está engastado na região do acoplamento (diâmetro interno) e o carregamento do pólo está aplicado no centro do

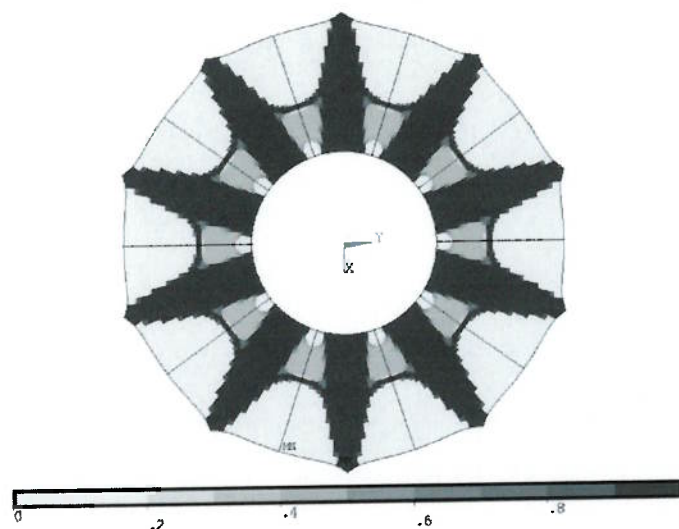
segmento. Neste caso, a única força de campo considerada foi a centrífuga. A condição operacional considerada foi o disparo (Rotação = 136 rad/s).

O problema do rotor do gerador é axissimétrico. Assim, o domínio fixo estendido (1/10 do disco) apresentado na **Figura 6.27** foi discretizado com 576 elementos planos de 8 nós (PLANE 82). A restrição de volume foi definida em 50%. A hipótese de estado plano de deformação foi considerada neste problema.

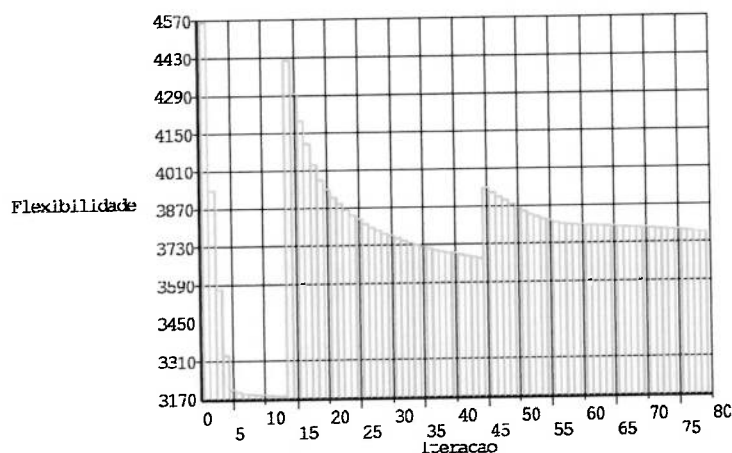


**Figura 6.27:** Rotor do gerador (2D) - Domínio fixo estendido e condições de contorno

O resultado obtido é apresentado na **Figura 6.28**, enquanto que a curva de convergência é mostrada na **Figura 6.29**.



**Figura 6.28:** Rotor do gerador (2D) – Restrição de volume = 50%



**Figura 6.29:** Rotor do gerador (2D) – Convergência da função objetivo

Observando a estrutura resultante, pode-se notar que a força concentrada devido ao pólo tem uma influência considerável no problema. Um fator que corrobora com esta afirmação é a curva de convergência da função objetivo (monotônica) apresentada na **Figura 6.29**.

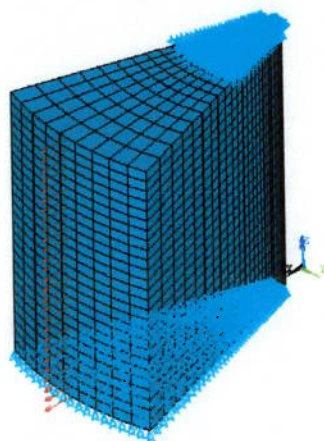
### 6.6.2. Modelo tridimensional

Neste item, estudou-se o problema do rotor com um modelo tridimensional. Foram analisados três casos:

- Rotor operando no disparo (desprezando a força peso);
- Rotor operando no disparo considerando a força peso;
- Rotor operando na condição nominal (desprezando a força peso).

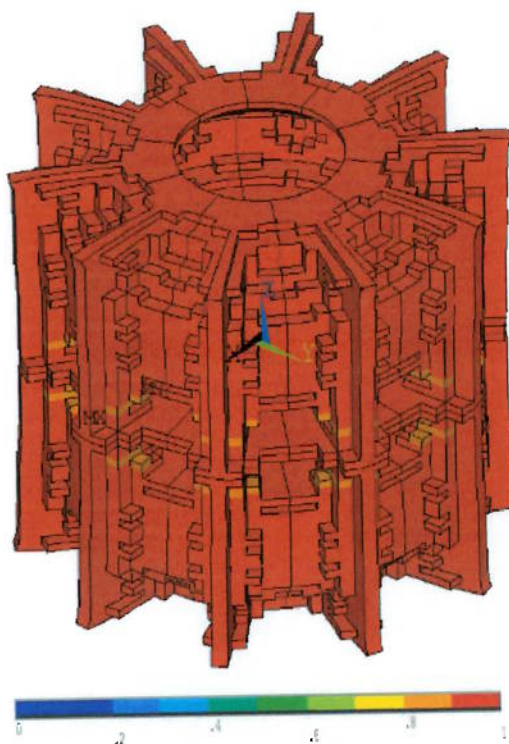
A geometria e as condições de contorno do modelo tridimensional para o primeiro caso são apresentadas na **Figura 6.27**. O disco está engastado na região do acoplamento (apenas na parte superior) e o carregamento do pólo está distribuído na parte externa do segmento.

Este modelo considera a simetria vertical e a simetria axial do problema. Assim, o segmento foi discretizado com 5850 elementos sólidos de 20 nós (SOLID 95). A restrição de volume foi definida em 20%.

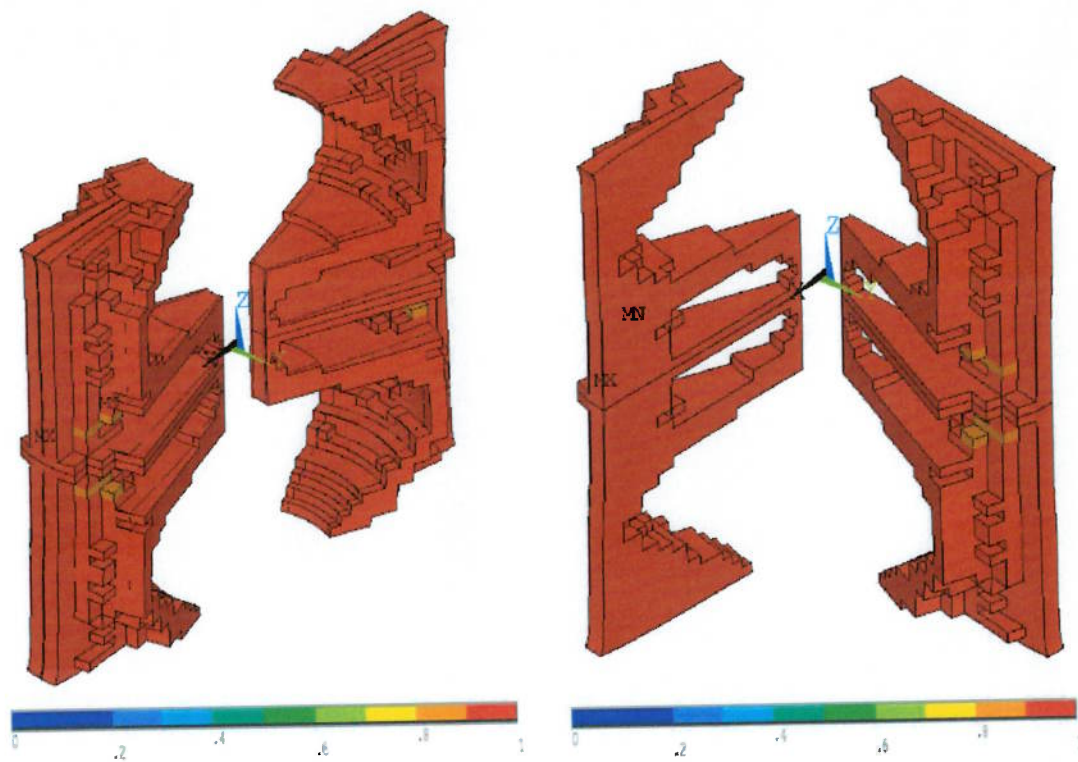


**Figura 6.30:** Rotor (Disparo) – Domínio fixo estendido e condições de contorno – Sem força peso

O resultado obtido é apresentado na **Figura 6.31**, enquanto que as seções da estrutura são mostradas na **Figura 6.32**.

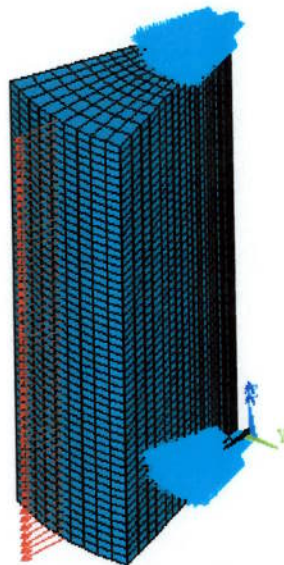


**Figura 6.31:** Rotor (Disparo) – Sem força peso – Restrição de volume = 20%



**Figura 6.32:** Rotor (Disparo) – Sem força peso – Restrição de volume = 20%

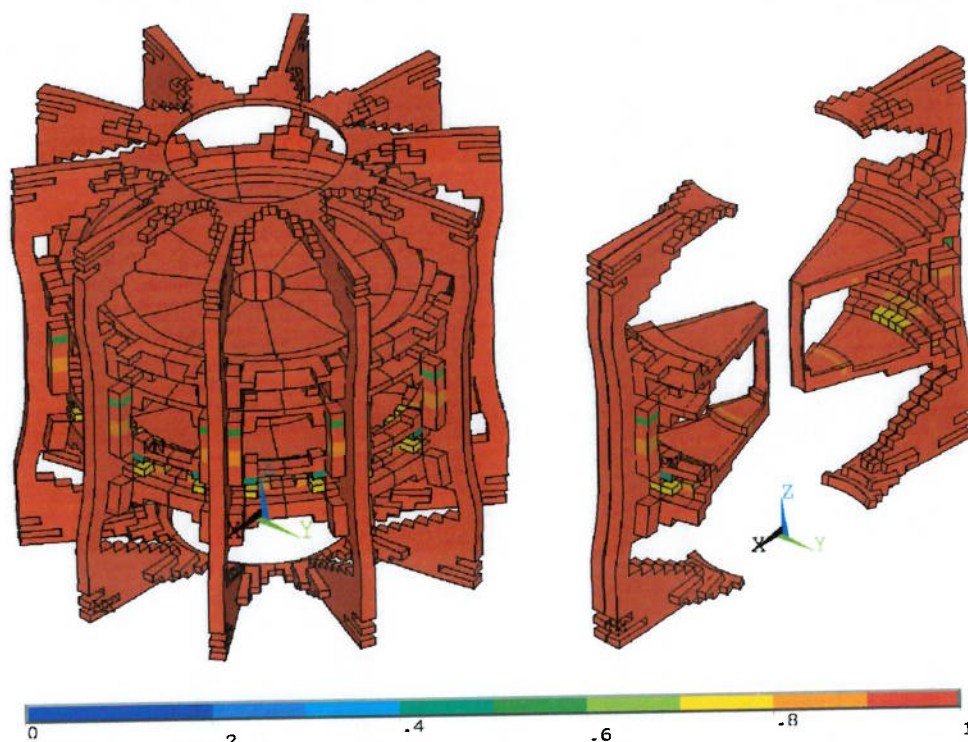
As condições de contorno do problema para o segundo caso podem ser visualizadas na **Figura 6.33**. Neste caso, considera-se apenas a simetria axial e o domínio fixo estendido foi discretizado com 11700 elementos sólidos de 20 nós (SOLID 95). A restrição de volume foi definida em 12,5%.



**Figura 6.33:** Rotor (Disparo) – Domínio fixo estendido e condições de contorno – Com força peso



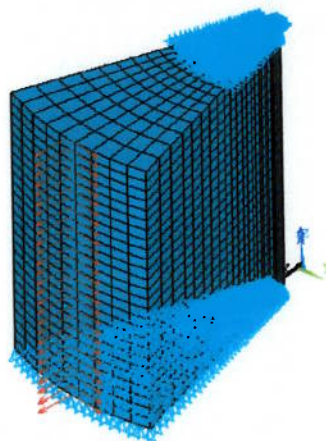
O resultado pode ser visualizado na **Figura 6.31**.



**Figura 6.34:** Rotor (Disparo) – Com força peso – Restrição de volume=12,5%

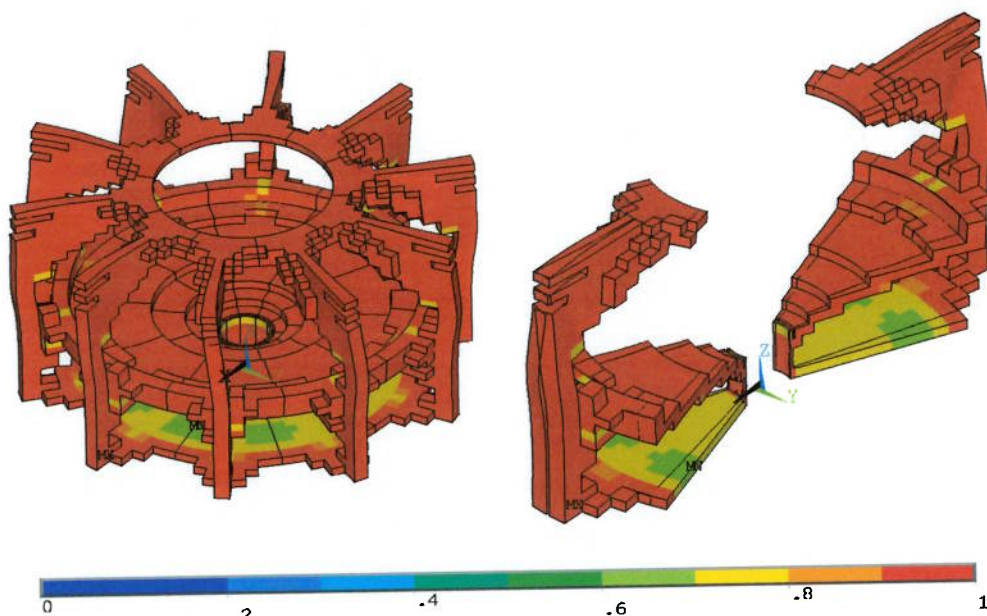
No terceiro caso de carga foi possível avaliar a influência da velocidade de operação na topologia ótima da estrutura.

As condições de contorno do modelo para este caso são apresentadas na **Figura 6.35**. Este modelo considera a simetria vertical e a simetria axial do problema. Neste caso, o segmento foi discretizado com 5850 elementos sólidos de 20 nós (SOLID 95).

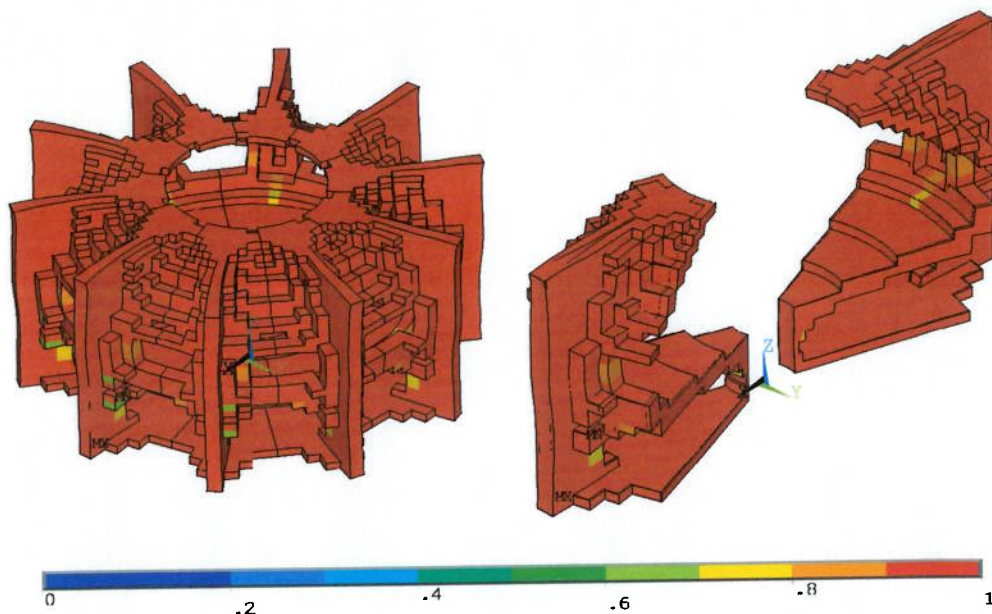


**Figura 6.35:** Rotor (Operação Normal) – Domínio fixo estendido e condições de contorno – Sem força peso

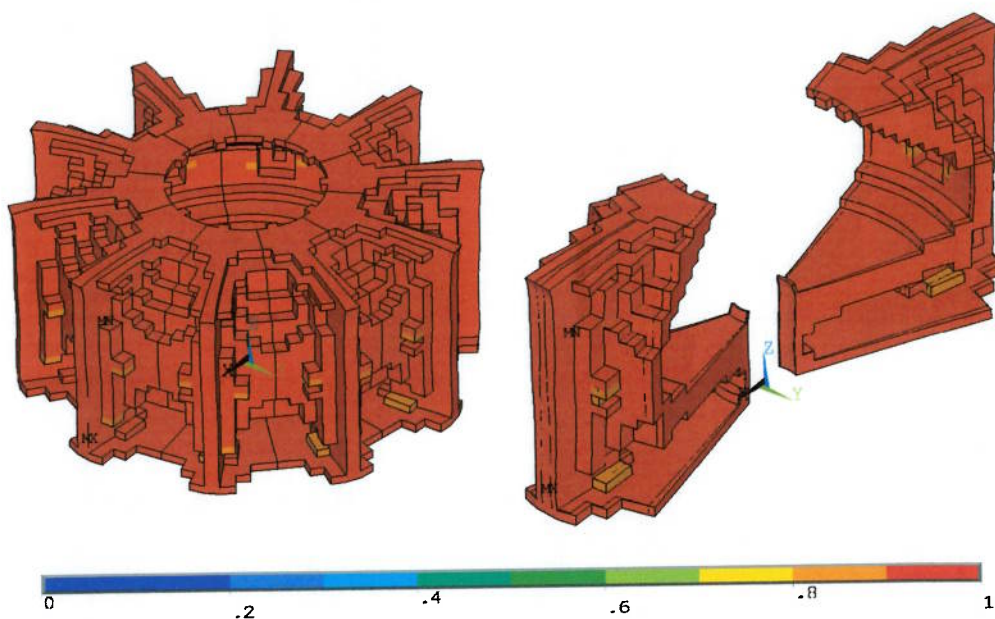
Os resultados obtidos com três restrições de volume diferentes podem ser visualizados na **Figura 6.36** (Restrição= 12,5%), na **Figura 6.37** (Restrição= 20%) e na **Figura 6.38** (Restrição= 30%).



**Figura 6.36:** Rotor (Operação Normal) – Sem força peso – Restrição de volume = 12,5%



**Figura 6.37:** Rotor (Operação Normal) – Sem força peso – Restrição de volume = 20%



**Figura 6.38:** Rotor (Operação Normal) – Sem força peso – Restrição de volume = 30%

Comparando o resultado obtido no caso 1 (**Figura 6.31**, **Figura 6.32**) como a topologia obtida no caso dois (**Figura 6.34**), pode-se constatar que a influência da força peso neste problema é praticamente desprezível, visto que ambas as estruturas são simétricas.

Observa-se que a estrutura obtida no caso 2 (**Figura 6.34**) possui apenas dois discos intermediários, enquanto a topologia obtida no terceiro caso (**Figura 6.36**) apresenta dois discos claramente definidos e um terceiro (no plano de simetria) em formação. Tendo em vista que a estrutura do caso 3 está submetida a forças tangenciais, o método tenta criar reforços ao longo do eixo z (terceiro disco) com o intuito de reduzir a deformação das “vigas” verticais que suportam o pólo.

Finalmente, pode-se observar que, mesmo sob condições de carregamento distintas, a estrutura obtida no primeiro caso (**Figura 6.31**, **Figura 6.32**) e no terceiro caso (**Figura 6.38**) são muito similares. A estrutura ótima obtida nestas simulações é composta por duas formas geométricas interessantes. A primeira é o cilindro que compõem a parte externa da estrutura, o qual é a forma ótima para elementos submetidos à torção. Enquanto que a segunda é a “ponte” observada na seção da **Figura 6.32**. Esta configuração é normalmente encontrada no problema de otimização de uma ponte, onde o domínio de projeto é uma viga engastada nas duas extremidades submetida a um carregamento distribuído.

## 6.7. Interpretação dos resultados

Após obtenção da distribuição de material no domínio no final do processo de otimização, deve-se interpretar a forma final da peça que irá ser construída. Fatores como a presença de densidades intermediária ou instabilidade de xadrez dificultam a interpretação da topologia.

Bendsøe e Rodrigues (1991) propõem que seja executada uma otimização de forma na topologia gerada pelo MOT. Tal metodologia pretende suavizar o contorno “serrilhado” obtido na OT (vide **Figura 6.10**).

Hsu e Chen (2001) propõem um método baseado nas densidades dos elementos extrapoladas para os nós, gerando um contorno suavizado.

## 7. CONCLUSÃO

No presente trabalho foi implementado o método de otimização topológica aplicada ao projeto de estruturas submetidas a forças de campo mecânicas. Foi utilizada a formulação de minimização de flexibilidade com restrição volume. O algoritmo implementado neste trabalho não faz distinção entre modelos bidimensionais e tridimensionais.

Deve-se ressaltar que um dos objetivos do trabalho era a utilização do software comercial de elementos finitos ANSYS para a implementação do algoritmo. Tal filosofia possibilitou a utilização das vantagens de MEF encontradas em um software comercial, potencializadas pela flexibilidade da ferramenta de otimização “tailor made”.

O software ANSYS possui uma ampla gama de tipos de elementos, podendo ser aplicado em diversos tipos de problemas de otimização. Desta forma, pode-se expandir o conceito aplicado neste trabalho para a solução de problemas de otimização térmica, eletromagnética ou hidrodinâmica. Considerando que o software ANSYS é multidisciplinar, pode-se ainda combinar dois problemas de otimização supracitados.

Um outro aspecto interessante foi à verificação da influência das forças de campo na topologia da estrutura. Constatou-se que as forças de campo têm uma forte influência na topologia do componente dependendo da magnitude em relação aos carregamentos não dependentes da estrutura.

### **7.1. Trabalhos futuros**

Como extensão do trabalho, pode-se citar a implementação da restrição de inércia no problema de maximização da rigidez. Considerando que tal restrição é de grande valia no projeto de rotores de hidrogeradores. Para atender as condições de regulação do sistema elétrico e hidráulico, os geradores devem ser projetados com um determinado valor (mínimo) de inércia.

Finalmente, é possível implementar uma interface amigável com pequenas alterações na macro do ANSYS.

## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANEEL (Agência Nacional de Energia Elétrica), 2002. "Atlas de energia elétrica do Brasil". Brasília – Brasil.

ANSYS Inc., 2001, "Theory Manual". Release 5.7. Twelfth Edition. Edited by Peter Kohnke

BATHE, K.J., 1996, "Finite Elements Procedures", Prentice Hall, New Jersey.

BENDSØE, M. P., Kikuchi N., 1988. "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 71, pp 197-224.

BENDSØE, M. P., 1989, "Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem", *Structural Optimization*, vol. 1, pp. 192-202.

BENDSØE, M. P. e Rodriguez, H. C., 1991, "Integrated Topology and Boundary Shape Optimization of 2-D Solids", *Computer Methods in Applied Mechanics*, vol. 87, pp. 15-34.

BENDSØE, M., P., 1995, "Optimization of Structural Topology, Shape and Material", Springer - Verlag, New York.

BENDSØE, M. P., Sigmund, O., 1999, "Material Interpolations Schemes in Topology Optimization", *Archive of Applied Mechanics*, vol. 69, pp. 635-654.

BENDSØE, M., P., 2002, "Recent Developments in Topology Design of Materials and Mechanisms", *Congres National D'analyse Numérique*, vol. 11, 41-60.

BENDSØE, M., P., Sigmund O., 2003. "Topology Optimization. Theory, Methods and Applications." Springer, Berlin.

BHAVIKATTI, S.S.; Ramakrishnan, C.V., 1980. "Optimum shape design of rotating disks". *Computer and Structures*, vol. 11, pp. 397-401.

BRUYNEEL, M., Duysinx, P., 2005 "Note on topology optimization of continuum structures including self-weight". *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Online First.

CARDOSO, E.L., Fonseca, J.S.O., 1999, "Intermediate density reduction and Complexity Control in the Topology Optimization", 20th Iberian Latin- American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE'99), Brazil.

CHEN, B-C., Kikuchi, N., 2001. "Topology optimization with design-dependent loads". *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 37, pp. 57-70.

CHENG, T. K.; Olhoff, N., 1981, "An Investigation Concerning Optimal Design of Solid Elastic Plates", *International Journal of Solids Structures*, vol. 17, pp. 305-323.

CHENG, T. K.; Olhoff, N., 1982, "Regularized Formulation for Optimal Design of Axisymmetric Plates", *International Journal of Solids Structures*, vol. 18-2, pp. 153-169.

CHEU, T.C., 1990, "Procedures for shape optimization of gas turbine disks." *Computer and Structures*, vol. 34, pp. 1-4.

COOK, R. D., 1994, "Finite Element Modeling for Stress Analysis", John Wiley & Sons, New York.

CRUZ, F. R.; Mendez, U. O.; Guerrero, F. E. L.; Anaya, R. G., 2004, "Diseño óptimo de elementos mecánicos usando algoritmos de crecimiento biológico". *Ingenierías*, Vol. VII, nº 22, pp. 27-34.



- DANTZIG, G.B., 1963, "Linear Programming and Extensions", Princeton, New Jersey.
- DÍAZ, A.R., Kikuchi, N., 1992, "Solution to Shape and Topology Eigenvalue Optimization Problems Using a Homogenization Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 35, pp. 1487-1502.
- DÍAZ, A., Sigmund, O., 1995, "Checkerboard Patterns in Layout Optimization", *Structural Optimization*, vol. 10, pp. 40-45.
- DU, J., Olhoff, N., 2004a, "Topological optimization of continuum structures with design-dependent surface loading – Part I: algorithm and examples for 2D problems". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 27, pp. 151-165.
- DU, J., Olhoff, N., 2004b, "Topological optimization of continuum structures with design-dependent surface loading – Part II: algorithm and examples for 3D problems". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 27, pp. 166-177.
- FUCHS, M. B., Moses, E., 2000, "Optimal structural topologies with transmissible loads". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 19, pp. 263-273.
- FUCHS, M. B., Shemesh, N. N. Y., 2004, "Density-based topological design of structures subjected to water pressure using a parametric loading surface". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 28, pp. 11-19.
- GULLIVER, J. S., Arndt, R. E. A., 1991, "Hydropower engineering handbook", McGraw-Hill, New York.
- HAFTKA, R. T.; Gandhi, R. V., 1986, "Structural shape optimization – A survey". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 57, pp. 91-106.

HAFTKA, R.T., Gürdal, Z., Kamat, M.P., 1996, "Element of Structural Optimization", Kluwer Academic Publishers, Boston.

HAMMER, V. B., Olhoff, N., 2000. "Density-based topological design of structures subjected to water pressure using a parametric loading surface". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 19, pp. 85-92.

HASSANI, B., Hinton, E., 1998a, "A Review of Homogenization and Topology Optimization, I- Homogenization theory for media with periodic structure", *Computer and Structures*, vol. 69, pp. 707-717.

HASSANI, B., Hinton, E., 1998b, "A Review of Homogenization and Topology Optimization, II- Analytical and numerical solution of homogenization equations", *Computer and Structures*, vol. 69, pp. 719-738.

HASSANI, B., Hinton, E., 1998c, "A Review of Homogenization and Topology Optimization, III- Topology Optimization using optimality criteria", *Computer and Structures*, vol. 69, pp. 739-756.

HSU, Y-L., Hsu, M-S. e Chen, C-T., 2001, "Interpreting Results from Topology Optimization Using Density Contours", *Computers and Structures*, vol. 79, pp.1049-1058.

JOG, C., Haber, R., B., 1996, "Stability of Finite Element Models for Distributed-Parameter Optimization and Topology Design", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 130, pp. 203-226.

KRESS, G. R., 2000. "Shape optimization of a flywheel". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 19, pp. 74-81.

KOSAKA, I., Swan, C. C., 1999, "A Symmetry Reduction Method for Continuum Structural Topology Optimization", *Computers and Structures*, vol. 70, pp. 47-61.

- LIU, J. S., Parks G. T., Clarkson, P. J., 2005. "Topology / Shape optimization of axisymmetric continuum structures – a metamorphic development approach", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 29, pp. 73-83.
- MA, Z.D, Kikuchi, N., Cheng, H. C., 1995, "Topology Design for Vibration Structure", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 121.1-4, pp. 259-280.
- MURAT, F., Tartar, L., 1985, "Optimality conditions and homogenization", Eds. Marino, A., Modica L., Spagnolo, S., and Degiovanni, M., *Nonlinear Variational Problems* Pitman Publishing Program, Boston, pp. 1-8.
- NEVES, M.M., Rodrigues, H., Guedes, J. M., 1995, "Generalized topology design of structures with a buckling load criterion". *Structural Optimization*, vol. 10, pp 71-78.
- NISHIWAKI, S., Frecker, M. I., Min, S., Kikuchi, N., 1998, "Topology Optimization of Compliant Mechanisms using the Homogenization Method", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 42, pp. 535-559.
- NISHIWAKI, S., Saitou, K., Min, S., Kikuchi, N., 2000, "Topology Design Considering Flexibility Under Periodic Loads", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 19, pp 4-16.
- OLHOFF, N., Bendsøe, M. P., Rasmussen, J., 1991, "On CAD-integrated Structural Topology and Design Optimization", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 89, pp 259-279.
- ROZVANY, G.I.N., Zhou, M., 1991, "The COC Algorithm, Part I: Cross Section Optimization or Sizing", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 89, pp 281-308.

ROZVANY, G.I.N., Bendsøe, M. P., e Kirsch, U., 1995, "Layout Optimization of Structures", *Applied Mechanics Reviews*, vol. 48.2, pp. 41-119.

ROZVANY, G.I.N., 2001, "Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 21(2), pp. 90-108.

SEGERLIND, L. J., 1984, "Applied finite element analysis", 2<sup>nd</sup> Edition, John Wiley & Sons, New York.

SIGMUND, O., 1997, "On the Design of Compliant Mechanisms using Topology Optimization", *Mechanics of Structures and Machines*, vol. 25, pp. 495-526.

SIGMUND, O., 2000, "A 99 Line Topology Optimization Code Written in Matlab", Technical University of Denmark ([www.topopt.dtu.dk](http://www.topopt.dtu.dk)).

SIGMUND, O., Petersson, J., 1998, "Numerical Instabilities in Topology Optimization: A Survey on Procedures Dealing with Checkerboards, Mesh - Dependencies and Local Minima", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 16, pp. 68-75.

SIMONE, G.A., 2000 "Centrais e Aproveitamentos Hidrelétricos". Erica, São Paulo.

SUZUKI, K.; Kikuchi, N., 1991, "A Homogenization Method for Shape and Topology Optimization", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 93, pp. 291-318.

SVANBERG, K., 1987, "A Homogenization Method for Shape and Topology Optimization", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 93, pp. 291-318.

TAVARES, S. R. R., 2003, "O Papel da ANEEL no Setor Elétrico Brasileiro", dissertação de mestrado, Campinas – Brasil, Escola Estadual de Campinas.

TURTELTaub S., Washabaugh P, 1999, "Optimal distribution of material properties for an elastic continuum with structure-dependent body force", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 36, pp.4587-4608.

VANDERPLAATZ, G., 1984, "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: with Applications". McGraw-Hill, New York.

XIE, Y. M., Steven, G., P., 1993, "A simple evolutionary Procedure for Structural Optimization", *Computer and Structures*, vol. 49, pp. 885-896.

ZIENKIEWICZ, O. C., 1977, "The Finite Element Method". McGraw-Hill, New York.

ZHOU, M., Rozvany, G.I.N, 1991, "The COC Algorithm, Part II: Topological, Geometrical, and Generalized Shape Optimization", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 89, pp. 309-336.

ZHOU, M., Shyy Y.K., Thomas H.L., 2001, "Checkerboard and minimum member size control in topology optimization", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 21, pp. 152-158.

## APÊNDICE A – MACRO do ANSYS

### A.1) Rotina de otimização

```

!*****
!* OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA
!* v.02a
!* Rafael Acedo Lopes
!* N°USP - 1771100
!* Prof. Dr. Emilio Carlos Nelli Silva
!*****

FINISH
/CLEAR

!*****
!* DEFINE COLOR MAP
/CMAP, 'OT_CM', 'cmap', ' '
/REPLOT
!*****

!*****
!* PARAMETROS DA SIMULAÇÃO

Mat_d=1000      !* Discretização do material [-]
Mat_E=210e9     !* Módulo de elasticidade do aço [Pa]
Mat_v=0.3       !* Módulo de Poisson [-]
Mat_rho=7850    !* Densidade [kg/m3]
Vol_Frac=0.2    !* Redução de volume [-]
C_Mod_3D=1     !* Modelo 2D=0 / Modelo 3D=1
Vel_Ang=136    !* Velocidade angular [rad/s]
Acel_Grav=0     !* Aceleração da gravidade [m/s2]
R_Fc_Fb=1      !* Relação - Força concentrada / Força de corpo [-]
X_Corte=0.25   !* Corte
!*****

!*****
!* INICIALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS

ITot_Max=80     !* Numero máximo de iterações - total
IPh1_Max=14     !* Numero máximo de iterações - K_Penal=1 / Filtro=off
IPh2_Max=31     !* Numero máximo de iterações - K_Penal=2 / Filtro=on

```

```

IPh3_Max=25      !* Numero máximo de iterações - K_Penal=3 / Filtro=on
IFil_Max=10     !* Numero máximo de iterações - K_Penal=3 / Filtro=off

K_Penal=1       !* Penalização da rigidez
F_Penal=1       !* Penalização da força de campo
C_Filter=0      !* Controle do filtro (liga=1 / desliga=0)

/CONT,ALL,10,0,,1 !* Fixa a escala

F_Esc_X=5       !* Fator de escala - eixo X
N_Div_Y=10      !* Numero de divisoes - eixo Y

*GET,T_2,ACTIVE,0,TIME,WALL,CPU !* Tempo do inicio da rotina
!*****

!*****
!*** DEFINE AS PROPRIEDADES DO MATERIAL

/PREP7
ANTYPE,0

!* Módulo de elasticidade e Módulo de Poisson

*DO,Var_N,1,(Mat_d*X_Corte),1
  MP,EX,Var_N,Mat_E*(Var_N/Mat_d)*X_Corte**(K_Penal-1)
  MP,PRXY,Var_N,Mat_v
  MP,DENS,Var_N,Mat_rho*(Var_N/Mat_d)
*ENDDO

*DO,Var_N,(Mat_d*X_Corte+1),Mat_d,1
  MP,EX,Var_N,Mat_E*(Var_N/Mat_d)**K_Penal
  MP,PRXY,Var_N,Mat_v
  MP,DENS,Var_N,Mat_rho*(Var_N/Mat_d)
*ENDDO

FINISH
!*****

!*****
!* MODELO ELEMENTOS FINITOS

/INPUT,'M_CilQ4_3D','mac'      !* Modelo

!*****

```

!\*\*\*\*\*

!\*\*\* PROPRIEDADES DO MODELO / VARIÁVEIS

/PREP7

\*GET,N\_Elem,ELEM,,COUNT

\*GET,N\_Node,NODE,,COUNT

\*DIM,X\_DER,ARRAY,N\_Elem,0,0

\*DIM,X\_DER\_New,ARRAY,N\_Elem,0,0

\*DIM,X\_ELE,ARRAY,N\_Elem,0,0

\*DIM,X\_NEW,ARRAY,N\_Elem,0,0

\*DIM,X\_OLD,ARRAY,N\_Elem,0,0

\*DIM,V\_ELE,ARRAY,N\_Elem,0,0

\*DIM,V\_A1,ARRAY,N\_Elem,0,0

\*DIM,V\_A2,ARRAY,N\_Elem,0,0

\*DIM,V\_A3,ARRAY,N\_Elem,0,0

\*DIM,V\_DBG,ARRAY,N\_Elem,0,0

\*DIM,V\_DBG1,ARRAY,N\_Elem,0,0

\*DIM,VET\_Move,ARRAY,N\_Elem,0,0

\*DIM,V\_Aux,ARRAY,N\_Elem,0,0

\*DIM,SIGN1,ARRAY,N\_Elem,0,0

\*DIM,SIGN2,ARRAY,N\_Elem,0,0

\*DIM,SIGN3,ARRAY,N\_Elem,0,0

\*DIM,M\_VIZ,ARRAY,N\_Face\*(N\_Face+1),0,0

\*DIM,M\_SOR,ARRAY,N\_Face\*(N\_Face+1),0,0

\*DIM,M\_FIL,ARRAY,N\_Elem,N\_Face\*N\_Face,2

\*DIM,R\_TCOMP,ARRAY,ITot\_Max,0,0

\*DIM,R\_TVOL,ARRAY,ITot\_Max,0,0

\*DIM,R\_CLoop,ARRAY,ITot\_Max,0,0

\*DIM,R\_VChan,ARRAY,ITot\_Max,0,0

\*DIM,R\_K\_Pen,ARRAY,ITot\_Max,0,0

\*DIM,R\_F\_Pen,ARRAY,ITot\_Max,0,0

\*DIM,R\_C\_Fil,ARRAY,ITot\_Max,0,0

\*DIM,R\_T\_OT,ARRAY,ITot\_Max,0,0

\*DIM,R\_T\_FEA,ARRAY,ITot\_Max,0,0

FINISH

!\*\*\*\*\*

!\*\*\*\*\*



```
!*** CONTROLE DOS LIMITES MOVEIS
```

```
minf=0.95
```

```
msup=1.05
```

```
mllower=0.05
```

```
mlupper=0.15
```

```
*VOPER,VET_Move(1),0,ADD,mlupper
```

```
!*****
```

```
!*****
```

```
!*** MATRIZ DE ELEMENTOS VIZINHOS
```

```
*DO,Var_Elem,1,N_Elem,1
```

```
  *DO,C1,1,N_Face,1
```

```
    M_VIZ((N_Face+1)*C1-N_Face)=ELADJ(Var_Elem,C1)
```

```
  *DO,C2,1,N_Face,1
```

```
    M_VIZ((N_Face+1)*C1-N_Face+C2)=ELADJ(M_VIZ((N_Face+1)*C1-  
N_Face),C2)
```

```
  *ENDDO
```

```
*ENDDO
```

```
*VFUN,M_SOR(1),ASORT,M_VIZ(1)
```

```
*VSCFUN,Aux_Zero,FIRST,M_SOR(1)
```

```
CEX=CENTRX(Var_Elem)
```

```
CEY=CENTRY(Var_Elem)
```

```
CEZ=CENTRZ(Var_Elem)
```

```
!* Primeiro elemento
```

```
AV0=M_SOR(Aux_Zero)
```

```
Aux_R=((CENTRX(AV0)-CEX)**2+(CENTRY(AV0)-CEY)**2+(CENTRZ(AV0)-  
CEZ)**2)**0.5
```

```
M_FIL(Var_Elem,1,1)=AV0
```

```
M_FIL(Var_Elem,1,2)=Aux_R
```

```
Aux_Cont=2
```

```
*DO,Var_Aux,(Aux_Zero+1),(N_Face+1)*N_Face,1
```

```
  AV=M_SOR(Var_Aux)
```

```
  *IF,M_SOR(Var_Aux-1),NE,AV,THEN
```

```
    Aux_R=((CENTRX(AV)-CEX)**2+(CENTRY(AV)-CEY)**2+(CENTRZ(AV)-  
CEZ)**2)**0.5
```

```
    M_FIL(Var_Elem,Aux_Cont,1)=AV
```

```
    M_FIL(Var_Elem,Aux_Cont,2)=Aux_R
```

```
    Aux_Cont=Aux_Cont+1
```

```

*ENDIF
*ENDDO
*ENDDO
!*****
!*****
!*** CÓDIGO OT

!* Inicializa os parametros

*VCUM,0
*VOPER,X_NEW(1),Vol_Frac,ADD,0
Var_Loop=0
Var_Control=0
Var_Chg=1

*DO,C_i,1,ITot_Max,1
!*****
!*** REDEFINE AS PROPRIEDADES DO MATERIAL

/PREP7
!* Módulo de elasticidade e Módulo de Poisson

*DO,Var_N,1,(Mat_d*X_Corte),1
  MP,EX,Var_N,Mat_E*(Var_N/Mat_d)*X_Corte**(K_Penal-1)
*ENDDO
*DO,Var_N,(Mat_d*X_Corte+1),Mat_d,1
  MP,EX,Var_N,Mat_E*(Var_N/Mat_d)**K_Penal
*ENDDO
!*****
!*****
!*** DEFINE AS NOVAS PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS

*VOPER,X_ELE(1),X_NEW(1),MULT,Mat_d      ! X_ELE=X_NEW*Mat_d
*VFUN,X_ELE(1),NINT,X_ELE(1)           ! X_ELE=integer(X_ELE)

*DO,Var_N,1,N_Elem,1
  EMODIF,Var_N,MAT,X_ELE(Var_N)
*ENDDO

*VOPER,X_ELE(1),X_ELE(1),DIV,Mat_d      ! X_ELE=X_ELE/Mat_d

FINISH

```

```

!*****
!*****
!*** ATUALIZA VARIÁVEIS

Var_Loop=Var_Loop+1
Var_Control=Var_Control+1
R_K_Pen(Var_Loop)=K_Penal
R_F_Pen(Var_Loop)=F_Penal
R_C_Fil(Var_Loop)=C_Filter
*VFUN,X_OLD(1),COPY,X_NEW(1)
!*****

!*****
!*** SOLUÇÃO - FEA

*GET,T_1,ACTIVE,0,TIME,WALL,CPU
R_T_OT(Var_Loop)=(T_1-T_2)*3600

/SOLU
!* Resolve
SOLVE

*GET,T_2,ACTIVE,0,TIME,WALL,CPU
R_T_FEA(Var_Loop)=(T_2-T_1)*3600

FINISH
!*****

!*****
!*** PROPRIEDADES - FUNÇÃO OBJETIVO

/POST1
TOT_VOL=0
TOT_COMP=0
disp_UZ=0
*DO,Var_N,1,N_Elem,1
  *GET,V_ELE(Var_N),ELEM,Var_N,VOLU
  TOT_VOL=TOT_VOL+V_ELE(Var_N)
  *GET,Var_Sene,ELEM,Var_N,SENE

  *IF,X_NEW(Var_N),GT,X_Corte,THEN
    Var_Sene=Var_Sene/(X_NEW(Var_N)**K_Penal)
  !* Função objetivo - Flexibilidade

```

```

TOT_COMP=TOT_COMP+(2*Var_Sene)*X_NEW(Var_N)**K_Penal
!* Sensibilidade - Função objetivo - Parcela=Rigidez
X_DER(Var_N)=- (2*Var_Sene)*K_Penal*X_NEW(Var_N)**(K_Penal-1)
*ELSE
Var_Sene=Var_Sene/(X_NEW(Var_N)*(X_Corte**(K_Penal-1)))
!* Função objetivo - Flexibilidade
TOT_COMP=TOT_COMP+(2*Var_Sene)*X_NEW(Var_N)*(X_Corte**(K_Penal-
1))

!* Sensibilidade - Função objetivo - Parcela=Rigidez
X_DER(Var_N)=- (2*Var_Sene)*X_Corte**(K_Penal-1)
*ENDIF

!* Sensibilidade - Função objetivo - Parcela=Força de campo
S_W_Fb=0
*DO,C_1,1,N_Node_Elem,1
N_Node=NELEM(Var_N,C_1)
*IF,C_Mod_3D,EQ,1,THEN
disp_UZ=UZ(N_Node)
*ENDIF
S_W_Fb=M_Fb_Node(Var_N,C_1,1)*UX(N_Node)+S_W_Fb    !* Direção X
S_W_Fb=M_Fb_Node(Var_N,C_1,2)*UY(N_Node)+S_W_Fb    !* Direção Y
S_W_Fb=M_Fb_Node(Var_N,C_1,3)*disp_UZ+S_W_Fb    !* Direção Z
*ENDDO
X_DER(Var_N)=X_DER(Var_N)+2*S_W_Fb
*ENDDO
FINISH
!*****
!*****
!*** FILTRA SENSIBILIDADE

*IF,C_Filter,EQ,1,THEN !* Controle do filtro (Ligado=1 / Desligado=0)
*DO,Var_Elem,1,N_Elem,1
soma=0
*DO,Var_Cont,1,N_Face*N_Face,1
VC_Elem=M_FIL(Var_Elem,Var_Cont,1)
*IF,VC_Elem,GT,0,THEN
Delta_r=r_fil-M_FIL(Var_Elem,Var_Cont,2)
*IF,Delta_r,GT,0,THEN
soma=soma+Delta_r

X_DER_New(Var_Elem)=X_DER_New(Var_Elem)+(Delta_r*X_NEW(VC_Elem)*X_DER(VC_Ele
m))

*ENDIF

```

```

*ENDIF
*ENDDO
X_DER_New(Var_Elem)=X_DER_New(Var_Elem)/(soma*X_NEW(Var_Elem))
*ENDDO
*VFUN,X_DER(1),COPY,X_DER_New(1)
*ENDIF
*VOPER,X_DER_New(1),X_DER(1),MULT,0
!*****

!*****

!*** CONTROLE DOS LIMITES MOVEIS

*VOPER,V_A1(1),SIGN2(1),SUB,SIGN1(1)
*VFUN,V_Aux(1),PWR,V_A1(1),2
*VFUN,V_A1(1),SQRT,V_Aux(1)

*VOPER,V_A2(1),SIGN3(1),SUB,SIGN2(1)
*VFUN,V_Aux(1),PWR,V_A2(1),2
*VFUN,V_A2(1),SQRT,V_Aux(1)

*VOPER,V_A3(1),SIGN3(1),SUB,SIGN1(1)
*VFUN,V_Aux(1),PWR,V_A3(1),2
*VFUN,V_A3(1),SQRT,V_Aux(1)

*VOPER,V_Aux(1),V_A1(1),ADD,V_A2(1)
*VOPER,V_A1(1),V_Aux(1),SUB,V_A3(1)

*DO,C_j,1,N_Elem,1
  *IF,V_A1(C_j),EQ,0,THEN
    VET_Move(C_j)=VET_Move(C_j)*minf
  *ELSE
    VET_Move(C_j)=VET_Move(C_j)*msup
  *ENDIF

  VET_Move(C_j)=MAX(VET_Move(C_j),mllower)
  VET_Move(C_j)=MIN(VET_Move(C_j),mlupper)
*ENDDO
!*****

!*****

!*** CRITÉRIO DA OPTIMALIDADE

!Função Objetivo: Min Flexibilidade (escalar: TOT_COMP)
!Variáveis: Propriedades do elemento (vetor: X_ELE)

```

```

!Restrição: Vol total do corpo < Vol especificado (escalar: TOT_VOL)

Var_L1=0
Var_L2=1000
Var_DtL=Var_L2
C_jj=0
*DO,C_j,1,10000,1
  C_jj=C_jj+1
  *IF,C_jj,EQ,1,THEN
    Var_LMid=Var_L2
  *ELSE
    Var_LMid=0.5*(Var_L1+Var_L2)
  *ENDIF
  *VOPER,V_A1(1),V_ELE(1),MULT,-Var_LMid      ! V_A1=V_ELE*(-Var_LMid)
  *VOPER,V_A2(1),X_DER(1),DIV,V_A1(1)        ! V_A2=(dc./V_A1)
  *VOPER,V_A1(1),V_A2(1),MAX,0               ! V_A1=MAX(V_A2,0)
  *VFUN,V_A2(1),PWR,V_A1(1),(0.3)           ! V_A2=(V_A1)^0.3
  *VOPER,V_A1(1),X_OLD(1),MULT,V_A2(1)       ! V_A1=X_NEW*V_A2
  *VOPER,V_A2(1),X_OLD(1),ADD,VET_Move(1)    ! V_A2=X_NEW+Move
  *VOPER,V_A3(1),V_A1(1),MIN,V_A2(1)        ! V_A3=MIN(V_A1,V_A2)
  *VOPER,V_A1(1),1,MIN,V_A3(1)              ! V_A1=MIN(1,V_A3)
  *VOPER,V_A2(1),X_OLD(1),SUB,VET_Move(1)    ! V_A2=X_NEW-Move
  *VOPER,V_A3(1),V_A1(1),MAX,V_A2(1)        ! V_A3=MAX(V_A1,V_A2)
  *VOPER,X_NEW(1),0.001,MAX,V_A3(1)         ! X_NEW=MAX(0.001,V_A3)

  *VOPER,V_A1(1),X_NEW(1),MULT,V_ELE(1)
  *VSCFUN,Var_Aux1,SUM,V_A1(1)              ! Sum(xnew)

  *IF,Var_Aux1,GT,(Vol_Frac*TOT_VOL),THEN
    Var_L1=Var_LMid
    *IF,C_jj,EQ,1,THEN
      Var_L2=Var_L2*10
      C_jj=0
    *ENDIF
  *ELSE
    Var_L2=Var_LMid
  *ENDIF

  Var_DtL=(Var_L2-Var_L1)/(Var_L2+Var_L1)
  *IF,Var_DtL,LT,0.0001,THEN
    *Exit                                     ! Sai do Loop
  *ENDIF
  *IF,Var_L2,LT,1e-10,THEN
    *Exit                                     ! Sai do Loop

```

```

*ENDIF
*ENDDO
TOT_VOL_R=Var_Aux1                                ! Volume real
!*****
!*****
!* Controle dos limites moveis

*VFUN,SIGN3(1),COPY,SIGN2(1)
*VFUN,SIGN2(1),COPY,SIGN1(1)
*VFUN,SIGN1(1),COPY,X_OLD(1)
!*****
!*****
!*** APRESENTACAO DOS RESULTADOS

/POST1
SET,FIRST
ETABLE,,EPSW
*VPUT,X_NEW(1),ELEM,,ETAB,EPSW,,2
PLETAB,EPSW
/TITLE,It=%C_i%      Comp=%TOT_COMP%      K_P=%K_Penal%      Fb_P=%F_Penal%
Filter=%C_Filter%

*IF,C_Mod_3D,EQ,1,THEN
  ESEL,NONE
  NSEL,S,LOC,Z,0,0.5*T_Elem
  ESLN,S
  NSEL,S,,ALL
*ENDIF

/EXPAND,N_Seg,POLAR,FULL,0,360/N_Seg,0
/VIEW,1,0,0,1
/REPLOT
/SHOW,PNG
PNGR,COMP,1,-1
PNGR,ORIENT,HORIZ
PNGR,COLOR,2
PNGR,TMOD,1
/GFILE,1200
/RGB,INDEX,100,100,100,0
/RGB,INDEX,0,0,0,15
/REPLOT
/SHOW,CLOSE
ALLSEL

```

```

*IF,C_Mod_3D,EQ,1,THEN
  *DO,Var_N,1,N_Elem,1
    *IF,X_NEW(Var_N),LT,0.33,THEN
      ESEL,U,,,Var_N
    *ENDIF
  *ENDDO

  /EXPAND,N_Seg,POLAR,FULL,0,360/N_Seg,0
  /VIEW,1,1,1,1
  /REPLOT
  /SHOW,PNG
  PNGR,COMP,1,-1
  PNGR,ORIENT,HORIZ
  PNGR,COLOR,2
  PNGR,TMOD,1
  /GFILE,1200
  /RGB,INDEX,100,100,100,0
  /RGB,INDEX,0,0,0,15
  /REPLOT
  /SHOW,CLOSE

  /EXPAND,4,POLAR,HALF,,90
  /VIEW,1,1,1,1
  /REPLOT
  /SHOW,PNG
  PNGR,COMP,1,-1
  PNGR,ORIENT,HORIZ
  PNGR,COLOR,2
  PNGR,TMOD,1
  /GFILE,1200
  /RGB,INDEX,100,100,100,0
  /RGB,INDEX,0,0,0,15
  /REPLOT
  /SHOW,CLOSE

  ALLSEL
*ENDIF

FINISH
!*****
!*****
*VOPER,V_A1(1),X_NEW(1),SUB,X_OLD(1)

```



```

*VFUN,V_A2(1),PWR,V_A1(1),2
*VFUN,V_A1(1),SQRT,V_A2(1)
*VSCFUN,Var_Chg,MAX,V_A1(1)

R_TCOMP(Var_Loop)=TOT_COMP
R_TVOL(Var_Loop)=TOT_VOL_R/TOT_VOL
R_CLoop(Var_Loop)=Var_Loop
R_VChan(Var_Loop)=Var_Chg

!* Condição de parada
*IF,Var_Chg,LT,0.01,THEN
  *IF,Var_Control,LT,IPh1_Max,THEN
    Var_Control=IPh1_Max
  *ELSEIF,Var_Control,LT,(IPh1_Max+IPh2_Max),THEN
    Var_Control=IPh1_Max+IPh2_Max
  *ELSEIF,Var_Control,LT,(IPh1_Max+IPh2_Max+IPh3_Max),THEN
    Var_Control=IPh1_Max+IPh2_Max+IPh3_Max
  *ELSEIF,Var_Control,LT,(IPh1_Max+IPh2_Max+IPh3_Max+IFil_Max),THEN
    Var_Control=IPh1_Max+IPh2_Max+IPh3_Max+IFil_Max
  *ENDIF
*ENDIF
*IF,Var_Control,EQ,IPh1_Max,THEN
  !* Inicia - K_Penal=2 / Filtro=on
  K_Penal=2
  F_Penal=1
  C_Filter=1    !* Filtro ligado
*ENDIF
*IF,Var_Control,EQ,(IPh1_Max+IPh2_Max),THEN
  !* Inicia - K_Penal=3 / Filtro=on
  K_Penal=3
  F_Penal=1
  C_Filter=1    !* Filtro ligado
*ENDIF
*IF,Var_Control,EQ,(IPh1_Max+IPh2_Max+IPh3_Max),THEN
  !* Inicia - K_Penal=3 / Filtro=off
  K_Penal=3
  F_Penal=1
  C_Filter=0    !* Filtro desligado
*ENDIF
*IF,Var_Control,EQ,(IPh1_Max+IPh2_Max+IPh3_Max+IFil_Max),THEN
  !* Fim da otimização
  *EXIT
*ENDIF
*ENDDO

```

```

!*****
!*****
!*** APRESENTACAO DOS RESULTADOS

*DIM,R_Iter,ARRAY,Var_Loop,0,0
*DIM,R_FObj,ARRAY,Var_Loop,0,0

*DO,C_i,1,Var_Loop,1
  R_Iter(C_i)=C_i
  R_FObj(C_i)=R_TCOMP(C_i)
*ENDDO

N_DivX=NINT(Var_Loop/F_Esc_X)
*IF,N_DivX*F_Esc_X,LT,Var_Loop,THEN
  N_DivX=N_DivX+1
*ENDIF

*VSCFUN,FObj_max,MAX,R_FObj(1)
*VSCFUN,FObj_min,MIN,R_FObj(1)
L_InfY=(NINT(FObj_min/N_Div_Y)-1)*N_Div_Y
Delta_Y=(NINT((FObj_max-FObj_min)/N_Div_Y)+2)*N_Div_Y

*VPLOT,R_Iter(1),R_FObj(1)
/XRANGE,0,N_DivX*F_Esc_X
/YRANGE,L_InfY,L_InfY+Delta_Y
/GROPT,DIVX,N_DivX
/GROPT,DIVY,N_Div_Y
/AXLAB,X,Iteracao
/AXLAB,Y,Flexibilidade
/TITLE,Convergencia da funcao objetivo
/REPLOT
/SHOW,PNG
PNGR,COMP,1,-1
PNGR,ORIENT,HORIZ
PNGR,COLOR,2
PNGR,TMOD,1
/GFILE,1200
/RGB,INDEX,100,100,100,0
/RGB,INDEX,0,0,0,15
/REPLOT
/SHOW,CLOSE

*CFOPEN,GenoQ8,'txt'

```

```

*VWRITE,R_CLoop(1),R_TCOMP(1),R_TVOL(1),R_VChan(1),R_K_Pen(1),R_F_Pen(1),R_C
_Fil(1),R_T_OT(1),R_T_FEA(1)
(F3.0,' ',F12.7,' ',F12.7,' ',F10.7,' ',F3.1,' ',F3.1,' ',F3.1,'
',F10.1,' ',F10.1)
*CFCLOS
!*****

```

## A.2) Rotina de geração do modelo – Viga engastada

```

!*****
!* VIGA ENGASTADA - MODELO
!* v.02a
!* Rafael Acedo Lopes
!* N°USP - 1771100
!* Prof. Dr. Emilio Carlos Nelli Silva
!*****

!*****
!* DADOS DE ENTRADA

Dim_L=4.0      !* Comprimento da viga [m]
Dim_H=2.0      !* Altura da seção transversal da viga [m]
Dim_W=1.0      !* Largura da seção transversal da viga [m]
Dim_Elem=0.05  !* Tamanho do elemento [m]
!*****

!*****
!*** DEFINE O TIPO DE ELEMENTO

/PREP7

!* Sistema de coordenada retangular
CSYS,0

*IF,C_Mod_3D,EQ,1,THEN
  !* Elemento de sólido
  ET,1,SOLID45
  N_Node_Elem=8      !* Numero de nos do elemento - caso 3D
  N_Face=6           !* Numero de faces do elemento
*ELSE
  !* Elemento plano
  ET,1,PLANE42

```

```

      N_Node_Elem=4      !* Numero de nos do elemento
      N_Face=4          !* Numero de faces do elemento
*ENDIF
!*****

!*****

!*** GERA O MODELO SÓLIDO

*IF,C_Mod_3D,EQ,1,THEN
  !* Modelo 3D
  BLOCK,0,Dim_L,-0.5*Dim_H,0.5*Dim_H,-0.5*Dim_W,0.5*Dim_W
  /VIEW, 1 ,1,1,1
*ELSE
  !* Modelo 2D
  RECTNG,0,Dim_L,-0.5*Dim_H,0.5*Dim_H
  /VIEW, 1 ,0,0,1
*ENDIF
!*****

!*****

!*** GERA O MODELO EM ELEMENTOS FINITOS

ALLSEL
ESIZE,Dim_Elem

*IF,C_Mod_3D,EQ,1,THEN
  !* Modelo 3D
  VMESH,ALL
*ELSE
  !* Modelo 2D
  AMESH,ALL
*ENDIF

NUMCMP,ALL
FINISH
!*****

!*****

!*** GERA A MATRIZ - FORÇA DE CAMPO NODAL DO ELEMENTO N

*GET,N_Elem,ELEM, ,COUNT
*DIM,M_Fb_node,ARRAY,N_Elem,N_Node_Elem,3

*DO,Co1,1,N_Elem,1

```

```

CEX=CENTRX (Co1)
CEZ=CENTRZ (Co1)
*GET, Vol_Elem, ELEM, Co1, VOLU
*DO, Co2, 1, N_Node_Elem, 1
  N_Node=NELEM (Co1, Co2)
  Mass_P_No=Mat_rho*Vol_Elem/N_Node_Elem
  !* Direção X - Força centrífuga
  M_Fb_node (Co1, Co2, 1)=Mass_P_No*Vel_Ang*Vel_Ang*0.5* (CEX+NX (N_Node))
  !* Direção Y - Força peso
  M_Fb_node (Co1, Co2, 2)=-Mass_P_No*Acel_Grav
  !* Direção Z - Força centrífuga
  M_Fb_node (Co1, Co2, 3)=Mass_P_No*Vel_Ang*Vel_Ang*0.5* (CEZ+NZ (N_Node))
*ENDDO
*ENDDO
!*****
!*****
!*** CONDIÇÕES DE CONTORNO

/SOLU

!* Aplica restrição - Engaste
NSEL, S, LOC, X, 0
D, ALL, UX, 0
D, ALL, UY, 0
*IF, C_Mod_3D, EQ, 1, THEN
  D, ALL, UZ, 0      !* No caso 3D
*ENDIF
ALLSEL
!*****
!*****
!*** CARREGAMENTO

!* Força concentrada
F_Body=Dim_L*Dim_H*Mat_rho*Vol_Frac*Acel_Grav*R_Fc_Fb

*IF, C_Mod_3D, EQ, 1, THEN
  F_Body=F_Body*Dim_W      !* No caso 3D
*ENDIF

NSEL, S, LOC, X, Dim_L
NSEL, R, LOC, Y, 0

```

```

*IF,C_Mod_3D,EQ,1,THEN
  NSEL,R,LOC,Z,-Dim_Elem,Dim_Elem
*ENDIF
*GET,N_Force,NODE, ,COUNT

F,ALL,FY,-F_Body/N_Force

!* Força de campo
ACEL,0,Acel_Grav,0

ALLSEL
FINISH
!*****

!*****
!*** LIBERA MEMORIA

*SET,CEX,
*SET,CEZ,
*SET,Vol_Elem,
*SET,N_Node,
*SET,Mass_P_No,
*SET,N_Force,
*SET,Co1,
*SET,Co2,
!*****

```

### A.3) Rotina de geração do modelo – Gerador

```

!*****
!* CILINDRO 3D - MODELO
!* v.02a
!* Rafael Acedo Lopes
!* N°USP - 1771100
!* Prof. Dr. Emilio Carlos Nelli Silva
!*****

!*****
!* DADOS DE ENTRADA

Dim_DOut=1.360    !* Diametro externo do cilindro [m]
Dim_DInn=0.15    !* Diametro interno do cilindro [m]
Dim_Flange=0.6   !* Diametro externo da flange [m]

```

```

Dim_H=1.360      !* Altura do cilindro [m]
N_Seg=10         !* Numero de segmentos [-]
N_Poles=10       !* Numero de polos [-]
M_Pole=1554      !* Massa do polo [kg]
!*****

!*****

!*** LIMITES

PI=3.14159265359

Ang_Arc=1.5
NDiv_R=MAX(2,NINT((Dim_DOut-Dim_DInn)/(PI*Dim_DOut*Ang_Arc/360)))
NDiv_H=MAX(2,NINT(Dim_H/(PI*0.5*(Dim_DOut+Dim_DInn)*Ang_Arc/360)))
Rad_Rat=Dim_DInn/Dim_DOut

T_Begin=-Ang_Arc*NINT((180/N_Seg)/Ang_Arc)
T_End=T_Begin+360/N_Seg
T_Inc=360/N_Poles
!*****

!*****

!*** DEFINE O TIPO DE ELEMENTO

/PREP7

!* Sistema de coordenada retangular
CSYS,0

!* Eixo Z para cima
/VUP,ALL,Z

!* Define elemento plano
ET,1,PLANE42
N_Node_Elem=4      !* Numero de nos do elemento
N_Face=4           !* Numero de faces do elemento

!* Define elemento sólido
*IF,C_Mod_3D,EQ,1,THEN
  ET,2,SOLID45
  N_Node_Elem=8    !* Numero de nos do elemento - caso 3D
  N_Face=6         !* Numero de faces do elemento
*ELSE
  KEYOPT,1,2,1     !* Estado plano de deformação

```

```

*ENDIF
!*****

!*****
!*** GERA O MODELO 2D

*IF,N_Seg,EQ,1,THEN
  PCIRC,0.5*Dim_DOut,0.5*Dim_DInn,-90,90
  PCIRC,0.5*Dim_DOut,0.5*Dim_DInn,90,270
  AGLU,ALL
*ELSE
  PCIRC,0.5*Dim_DOut,0.5*Dim_DInn,T_Begin,T_End
*ENDIF
!*****

!*****
!*** GERA O MODELO EM ELEMENTOS FINITOS 2D

!* Define os parametros da malha
LESIZE,ALL, ,Ang_Arc
LESIZE,2, , ,NDiv_R,Rad_Rat
LESIZE,4, , ,NDiv_R,Rad_Rat

!* Gera malha na area - Elemento plano
TYPE,1
AMESH,ALL
/VIEW,ALL,1,1,1
!*****

!*****
!*** EXTRUSAO DO MODELO 2D => GERA O MODELO EM ELEMENTOS FINITOS 3D

*IF,C_Mod_3D,EQ,1,THEN
  !* Define parametros para extrusao da malha
  !* Elemento solido
  TYPE,2
  EXTOPT,ESIZE,NDiv_H
  EXTOPT,ACLEAR,1

  !* Gera o solido
  VEXT,ALL, , ,0,0,Dim_H

  !* Vista isometrica
  /VIEW,ALL,1,1,1

```



```

*ENDIF

!* Reordena o numero dos nos
WSORT,ALL,0, ,MAX, , ,
!*****

!*****
!*** GERA A MATRIZ - FORÇA DE CAMPO NODAL DO ELEMENTO N

*GET,N_Elem,ELEM,,COUNT
*DIM,M_Fb_node,ARRAY,N_Elem,N_Node_Elem,3

*DO,Co1,1,N_Elem,1
  CEX=CENTRX(Co1)
  CEY=CENTRY(Co1)
  *GET,Vol_Elem,ELEM,Co1,VOLU
  *DO,Co2,1,N_Node_Elem,1
    N_Node=NELEM(Co1,Co2)
    Mass_P_No=Mat_rho*Vol_Elem/N_Node_Elem
    !* Direção X - Força centrífuga
    M_Fb_node(Co1,Co2,1)=Mass_P_No*Vel_Ang*Vel_Ang*0.5*(CEX+NX(N_Node))
    !* Direção Y - Força centrífuga
    M_Fb_node(Co1,Co2,2)=Mass_P_No*Vel_Ang*Vel_Ang*0.5*(CEY+NY(N_Node))
    !* Direção Z - Força peso
    M_Fb_node(Co1,Co2,3)=-Mass_P_No*Acel_Grav
  *ENDDO
*ENDDO

!*****

!*****
!*** CONDIÇÕES DE CONTORNO

ALLSEL
EPLLOT

CSYS,1      !* Sistema de coordenada cilindrica

!* Rotaciona o sistema de coordenadas dos nos
NROTAT,ALL

!* Acopla os nos das faces dos segmentos
*IF,N_Seg,NE,1,THEN
  CPCYC,ALL,0.0001,1,0,(360/N_Seg),0,1
*ENDIF

```

FINISH

!\* Aplica restrição

/SOLU

CSYS,1       !\* Sistema de coordenada cilíndrica

!\* Restringe os graus de liberdade - Flange

\*IF,C\_Mod\_3D,EQ,1,THEN       !\* No caso 3D

  NSEL,S,LOC,Z,Dim\_H

  NSEL,R,LOC,X,0,0.5\*Dim\_Flange

  D,ALL,UZ,0

\*ELSE

  NSEL,S,LOC,X,0.5\*Dim\_DInn

\*ENDIF

D,ALL,UX,0

D,ALL,UY,0

ALLSEL

!\* Simetria

\*IF,C\_Mod\_3D,EQ,1,THEN       !\* No caso 3D

  NSEL,S,LOC,Z,0

  D,ALL,UZ,0

\*ENDIF

CSYS,0       !\* Sistema de coordenada retangular

ALLSEL

!\*\*\*\*\*

!\*\*\*\*\*

!\*\*\* CARREGAMENTO

!\* Força concentrada

CSYS,1       !\* Sistema de coordenada cilíndrica

Fr\_Body=M\_Pole\*(0.5\*Dim\_DOut)\*Vel\_Ang\*\*2

Fz\_Body=M\_Pole\*Acel\_Grav

\*DO,T,(T\_Begin+0.5\*T\_Inc),(T\_End-0.5\*T\_Inc),T\_Inc

  NSEL,S,LOC,X,0.5\*Dim\_DOut

  NSEL,R,LOC,Y,(T-1),(T+1)

  \*GET,N\_Force,NODE,,COUNT

```

F,ALL,FX,Fr_Body/N_Force
*IF,C_Mod_3D,EQ,1,THEN
  F,ALL,FZ,-Fz_Body/N_Force
*ENDIF
NSEL,ALL
*ENDDO
CSYS,0      !* Sistema de coordenada retangular

!* Força de campo
OMEGA,0,0,Vel_Ang
ACEL,0,0,Acel_Grav

ALLSEL
!*****

!*****
!*** LIBERA MEMORIA

*SET,N_Poles,
*SET,N_Force,

*SET,Ang_Arc,
*SET,NDiv_R,
*SET,NDiv_H,
*SET,Rad_Rat,
*SET,T_Begin,
*SET,T_End,
*SET,T_Inc,

*SET,CEX,
*SET,CEY,
*SET,Vol_Elem,
*SET,N_Node,
*SET,Mass_P_No,
*SET,N_Force,
*SET,R_Fc_Fb,

*SET,T,
*SET,Co1,
*SET,Co2,
*SET,PI,
!*****

```