

01

CONSULTA
FD-3679

São Paulo
2004

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo, para obtenção do título de
Mestre em Engenharia

INVESTIGAÇÕES TEÓRICAS SOBRE O PROBLEMA DE
IMPACTO HIDRODINÂMICO

Leonardo Cassetta

São Paulo
2004

Orientador: Prof. Dr. Celso Pupo Pesce,
Departamento de Engenharia Mecânica, EPUSP.

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo, para obtenção do título de
Mestre em Engenharia

IMPACTO HIDRODINÂMICO INVESTIGAÇÕES TEÓRICAS SOBRE O PROBLEMA DE

Leonardo Cassetta
Eng. Químico, Escola Politécnica da USP, 2002

À Clara, minha filha, e à Regina, minha esposa, que fizeram
com que a realização desse trabalho fosse tão prazerosa
quanto nossas brincadeiras.

Agradecimentos

Meus agradecimentos destinam-se a todos aqueles que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a realização desse trabalho.

Mas não poderia deixar de mencionar algumas pessoas, às quais serei eternamente grato:

Ao Prof. Dr. Celso Pupo Pesce, orientador do presente trabalho, pelo carinho e paciência que estiveram presentes em todas as nossas discussões;

Ao Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo, pelo incentivo à pesquisa sobre o assunto abordado;

Ao Prof. Dr. Alexandre Nicolaos Simos, pela cuidadosa leitura desse trabalho e sugestões;

Ao meu Avô, pelo incansável apoio e ajuda;

Aos meus Pais, que sempre me proporcionaram uma boa formação, e apoiaram minhas decisões.

E, por fim, aos amigos e familiares: Ana Francisca, Clidenor Castro, Daliva Segalla, Dosolina Carrero, Emanuel Umada, Helton Henrique, Leandro Cassetta, Lidia Cassetta, Luis Cavalli e Maria Rosa.

ERRATA

| PÁGINA | LINHA | ONDE SE LÊ | LEIA-SE |
|-------------------|--------------------------------|---|---|
| Lista de Símbolos | 4º | é unívoca | é unívoca a menos de μ |
| Lista de Símbolos | 14º símbolo em Símbolos Gregos | $\mu =$ viscosidade dinâmica do fluido | $\mu =$ viscosidade dinâmica do fluido, e adimensional definido em (6.2.1.19) |
| Resumo | 19ª | linearização | linearização |
| 10 | 3ª | taxa de variação | taxa de variação da taxa de variação |
| 16 | 19ª | que insere | que se insere |
| 22 | 14ª | MACKIE (1969) | MACKIE (1969) apud HOWINSON et al. (1991) |
| 45 | 3ª | de (4.2.6) | da eq. (4.2.6) |
| 71 | Equação (6.1.2) | $-\int_{+a}^{-a} \frac{\partial \phi}{\partial t} dt$ | $-p \int_{+a}^{-a} \frac{\partial \phi}{\partial t} dt$ |
| 77 | Equação (6.1.2.13) | $\int_x^0 (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} \zeta dc$ | $\int_x^0 (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} \zeta da$ |
| 80 | Equação (6.2.1) | $\frac{Uc}{da} \sqrt{a^2 - x^2} dt$ | $\frac{Ua}{da} \sqrt{a^2 - x^2} dt$ |

SUMÁRIO

| | | |
|----|---|---|
| 1 | 1 | Introdução |
| | | Lista de símbolos |
| | | Lista de figuras |
| | | Resumo |
| | | “Abstract” |
| | | 2 Motivação, caracterização do problema e objetivos da pesquisa |
| 6 | 7 | 2.1 Caracterização do problema |
| 7 | | 2.1.1 Análise qualitativa do estágio inicial do problema de impacto hidrodinâmico |
| 8 | | 2.2 Objetivos da pesquisa |
| 13 | | 3 Revisão bibliográfica |
| 15 | | 3.1 Algumas abordagens para o problema de impacto hidrodinâmico |
| 17 | | 4 Modelagem teórica |
| 25 | | 4.1 Hipóteses adotadas para a construção do modelo matemático do problema |
| 26 | | 4.1.1 Meio <i>Continuum</i> |
| 26 | | 4.1.2 Fluido ideal |
| 27 | | 4.1.3 Efeitos de compressibilidade, gravidade, tensão superficial e viscosidade do fluido |
| 28 | | 4.1.4 Corpo de impacto rígido |
| 31 | | 4.1.5 Superfície-livre inicialmente não-perturbada |
| 31 | | 4.2 Evento de natureza impulsiva |
| 33 | | |

| | |
|--|-----------|
| 4.2.1 Sistema de equações acopladas que representa o problema de impacto hidrodinâmico – problema não linear | 36 |
| 4.2.1.1 Condições de Contorno | 36 |
| 4.2.1.2 Equação de campo de sistema de equações | 40 |
| 4.2.2 Sistema de equações desacopladas que representa o problema de impacto hidrodinâmico – problema linear | 42 |
| 4.2.2.1 Impacto vertical de um corpo axi-simétrico | 42 |
| 4.2.2.2 Linearização do problema em torno do instante inicial do impacto | 43 |
| 4.2.2.3 Um problema equivalente ao problema de impacto hidrodinâmico | 48 |
| 4.3 Avaliação da força hidrodinâmica vertical de impacto | 52 |
| 4.3.1 Expressão para a força hidrodinâmica vertical de impacto, considerando que a velocidade de penetração do corpo é constante | 53 |
| 4.3.2 Expressão para a força hidrodinâmica vertical de impacto, considerando que a taxa de variação da velocidade de penetração do corpo é significativa | 53 |
| 4.3.3 Breve nota sobre o método de expansão assintótica | 55 |
| 5 Paradoxo entre expressões para a força hidrodinâmica de impacto | 57 |
| 6 Obtenção da expressão para o coeficiente de impacto, para o caso de um cilindro infinito e de uma esfera67 | |
| 6.1 Coeficiente de impacto para o caso de um cilindro infinito (velocidade forçada constante) | 69 |
| 6.1.1 Abordagem de Von Kármán para obtenção do parâmetro a(t) | 72 |
| 6.1.2 Abordagem de Wagner para obtenção do parâmetro a(t) | 74 |
| 6.2 Coeficiente de impacto para o caso de um cilindro infinito (velocidade variável) | 80 |
| 6.2.1 Abordagem de Von Kármán | 82 |
| 6.2.1.1 Resolução analítica da equação diferencial de movimento do cilindro infinito, para o caso particular em que $1/2\sigma \gg b^2$ | 85 |
| 6.2.1.2 Resolução numérica da equação diferencial de movimento do cilindro infinito, para um valor genérico de σ | 89 |

| | |
|-----|---|
| 89 | 6.2.2 Abordagem de Wagner |
| 91 | 6.3 Coeficiente de impacto para o caso de uma esfera (velocidade forçada constante) |
| 93 | 6.3.1 Abordagem de Von Kármán para obtenção do parâmetro a(t) |
| 95 | 6.3.2 Abordagem de Wagner para obtenção do parâmetro a(t) |
| 100 | 6.4 Coeficiente de impacto para o caso de uma esfera (velocidade variável) |
| 100 | 6.4.1 Abordagem de Von Kármán |
| 104 | 6.4.1.1 Resolução analítica da equação diferencial de movimento da esfera, para o caso particular em que $1/2\sigma \gg b'$ |
| 107 | 6.4.1.2 Resolução numérica da equação diferencial de movimento da esfera, para um valor genérico de σ |
| 108 | 6.4.2 Abordagem de Wagner |

7 Redução da ordem da equação diferencial de movimento da esfera

110

8 Resultados

116

9 Discussão

129

| | |
|-----|---|
| 129 | 9.1 Paradoxo entre expressões para a força hidrodinâmica de impacto |
| 129 | 9.2 O comportamento da força hidrodinâmica vertical de impacto no estágio inicial de entrada do corpo |
| 133 | 9.2.1 Coeficientes de impacto para o caso da esfera |
| 136 | 9.2.1.1 Análise comparativa entre as expressões para o coeficiente de impacto de uma esfera que penetra o fluido com velocidade considerada constante |
| 139 | 9.2.2 Coeficientes de impacto para o caso do cilindro infinito |
| 139 | 9.2.2.1 Análise comparativa entre as expressões para o coeficiente de impacto de um cilindro infinito que penetra o fluido com velocidade constante |
| 142 | 9.2.3 A diferença de comportamento da força inicial de impacto entre os casos da esfera e do cilindro infinito |

10 Conclusões

143

Apêndice

Referências Bibliográficas

148

11 Sugestões para trabalhos futuros 11.1 Breve nota sobre a abordagem variacional

146

146

Lista de figuras

A seguir segue a lista das figuras que aparecem no texto. Na coluna esquerda está sua identificação, e na coluna direita seu título seguido da página em que aparece.

| Número | Título, página |
|---------------|--|
| 1-1 | Ilustração esquemática dos instantes iniciais do impacto |

(penetração) de um corpo contra a superfície livre, pág. 3.

| | |
|-------|--|
| 2.1-1 | Representação esquemática do rápido crescimento da massa adicional em pequenas profundidades de penetração de um corpo rombudo, pág. 10. |
|-------|--|

| | |
|-------|---|
| 3.1-1 | Massa adicional (região preenchida por pontos) associada a uma cunha em V, segundo a aproximação de VON KÁRMÁN (1929), pág. 18. |
|-------|---|

| | |
|-------|---|
| 3.1-2 | Massa adicional (região preenchida por pontos) associada a uma cunha em V, segundo a aproximação de WAGNER (1932) apud FALTINSEN (1990), pág. 19. |
|-------|---|

| | |
|-------|--|
| 3.1-3 | Aproximação do escoamento sobre a porção imersa da cunha, pelo escoamento devido a um elipsóide circunscrito a ela, pág. 22. |
|-------|--|

| | |
|-----------|---|
| 4.1.5-1 | Momentos antes do impacto de uma placa de elasticidade finita contra a superfície livre, pág. 32. |
| 4.1.5-2 | Representação da formação de um colchão de ar entre o corpo e a superfície livre inicialmente perturbada, momentos antes do impacto, pág. 37. |
| 4.2-1 | Volume fluido de controle Ω , e as superfícies que o fecham, i. e., $\partial\Omega = S_c \cup S_f \cup S_L \cup S_R$, pág. 38. |
| 4.2.2-1-1 | Transferência da condição de contorno (exata) no corpo, para a condição de contorno (aproximada) na superfície plana equivalente, pág. 44. |
| 4.2.2-2-1 | Aproximação da superfície livre pelo plano $z = 0$, pág. 45. |
| 4.2.2.3-1 | Perfil de escoamento resultante da aproximação do fluido com velocidade uniforme U , sobre o corpo fixo, pág. 50. |
| 4.2.2.3-2 | Perfil de escoamento resultante da entrada do corpo no fluido, pág. 51. |

- Problema equivalente, no qual se tem uma placa plana de dimensão variável, movendo-se totalmente imersa no meio fluido, pág. 51.
- 4.2.2.3-3
- Problema de contorno resultante da análise simplificada do estágio inicial do impacto hidrodinâmico de um corpo com pequeno ângulo de abatimento, pág. 52.
- 4.2.2.3-4
- Momentos antes do impacto hidrodinâmico de um cilindro de comprimento infinito (vista transversal), pág. 70.
- 6.1-1
- Problema de contorno resultante da análise simplificada do impacto hidrodinâmico de um cilindro infinito, pág. 70.
- 6.1.1-1
- Definição do parâmetro "a" na abordagem de Von Kármán, no impacto de um cilindro infinito, pág. 73.
- 6.1.2-1
- Definição dos parâmetros H e h na análise de Wagner, para o caso do cilindro infinito, pág. 77.
- 6.1.2-2
- Definição da função $H(x)$ na análise de Wagner, para o caso do cilindro infinito, pág. 77.
- 6.3-1
- Momentos antes do impacto hidrodinâmico de uma esfera, pág. 91.

| | |
|---------|---|
| 6.3-2 | Problema de contorno resultante da análise simplificada do impacto hidrodinâmico de uma esfera, pág. 92. |
| 6.3-1-1 | Definição do parâmetro "a" na análise de Von Kármán, no impacto de uma esfera (seção em corte), pág. 96. |
| 6.3-2-1 | Definição dos parâmetros H e h na análise de Wagner, para o caso da esfera, pág. 98. |
| 6.3-2-2 | Definição da função $H = H(r)$, na análise de Wagner, para o caso da esfera, pág. 98. |
| 7-1 | Velocidade de penetração adimensionalizada $U_0 t/R$. Caso de uma esfera, $\sigma = 0,7$ e $\mu = 17$. Abordagem de Wagner, pág. 114. |
| 7-2 | Velocidade de penetração adimensionalizada $U_0 t/R$, para a equação "exata" e para a "aproximada". Caso de uma esfera, $\sigma = 0,7$ e $\mu = 17$. Abordagem de Wagner, pág. 117. |
| 8-1 | Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de um cilindro infinito, com $\sigma = 1$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Von Kármán, pág. 119. |

8-2 Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de um cilindro infinito, com $\sigma = 10$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Von Kármán, pág. 120.

8-3 Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de um cilindro infinito, com $\sigma = 100$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Von Kármán, pág. 121.

8-4 Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de um cilindro infinito, com $\sigma = 1$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Wagner, pág. 122.

8-5 Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de um cilindro infinito, com $\sigma = 10$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Wagner, pág. 123.

8-6 Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de um cilindro infinito, com $\sigma = 100$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Wagner, pág. 124.

- 8-7 Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de uma esfera, com $\sigma = 1$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Von Kármán, pág. 125.
- 8-8 Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de uma esfera, com $\sigma = 10$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Von Kármán, pág. 126.
- 8-9 Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de uma esfera, com $\sigma = 100$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Von Kármán, pág. 127.
- 8-10 Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de uma esfera, com $\sigma = 1$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Wagner, pág. 128.
- 8-11 Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de uma esfera, com $\sigma = 10$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Wagner, pág. 129.

- 8-12 Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de uma esfera, com $\sigma = 100$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Wagner, pág. 130.
- 9.2.1-1 Coeficiente de impacto versus ϵ^2 ($R = 12,5$ mm, $U_0 = 2$ m/s), segundo diversas abordagens. Legenda: 1 - Wagner (velocidade constante), 2 - Von Kármán constante), 3 - Wagner (velocidade variável), 4 - Von Kármán (velocidade constante), 5 - Von Kármán (variável), 6 - Moghisi & Squire, 7 - Miloh ($F_c = 1,33$), 8 - Miloh (sem considerar F_c), pág. 140.
- 9.2.2-2 Coeficiente de impacto versus ϵ^2 , para um cilindro ($R = 10,48$ cm, $U_0 = 7,38$ m/s), segundo diversas abordagens. Legenda: 1 - Wagner (velocidade constante), 2 - Von Kármán (velocidade constante), 3 - Campbell & Weynberg, 4 - Electric Power Research Institute, pág. 143.
- A.1-1 Região de volume $\Delta x \Delta y \Delta z$ fixa no espaço, através da qual o fluido escoar.

- A.2-2 Elemento de volume $\Delta x \Delta y \Delta z$. As setas indicam a direção na qual a componente - x da quantidade de movimento é transportada através das superfícies.
- B.1-1 Movimento de rotação de uma partícula quadrada do *continuum*.
- D.1-1 Representação esquemática do movimento de um corpo rígido (delimitado pela fronteira S_c), totalmente imerso em meio fluido finito (delimitado pela superfície S_R).
- E.1-1 Esquema da transformação conforme que mapeia um círculo sob escoamento uniforme, para um segmento de reta.
- E.2-1 Sistema de coordenadas elípticas.

Lista de símbolos

Os símbolos utilizados para indicar constantes, funções, operadores matemáticos, parâmetros, variáveis, vetores e tensores são aqueles mais comumente empregados nos clássicos livros de mecânica dos fluidos. A correspondência entre significado e símbolo é unívoca.

Para vetores reservam-se os símbolos em **negrito**. Quantidades referentes aos jatos de fluido encontram-se todas na fonte *Monotype Corsiva*. Os símbolos de números complexos também estão nessa mesma fonte, para não serem confundidos com uma das coordenadas retangulares.

No lado direito do sinal de igualdade que acompanha cada um dos símbolos listados abaixo, encontra-se sua descrição seguida de um número entre parênteses. Esse número indica o local onde o símbolo aparece pela primeira vez. Quando em **negrito**, corresponde à seção onde o símbolo aparece. Exemplo: (4.1.3) = capítulo 4, seção 1.3. Quando o último algarismo estiver separado por um traço, o número indica uma figura. Exemplo: (6.3-2) = figura 2 do capítulo 6, seção 3. E por fim, quando não for nenhum desses dois casos, o número indica uma equação. Exemplo: (C.2.1) = equação 1 do apêndice C, seção 2.

Os símbolos que não aparecem na lista abaixo se encontram explicados no próprio local onde aparecem.

Sendo assim, tem-se:

Alfabeto romano

- A = amplitude de onda (C.2.1).
- A_T = área da seção transversal do corpo (4.3.3.1).
- \mathbf{a} = vetor genérico (**B – parte II**).
- a = dimensão característica da placa plana equivalente, i. e., meia-largura da placa retangular (6.1-2), e raio da placa circular (6.3-2).
- \mathbf{b} = vetor genérico (**B – parte II**).
- b = profundidade de penetração (6.2.1.5).
- $C(t)$ = função genérica dependente do tempo (4.2.5).
- C = quantidade de valor constante (E.2.10).
- C_I = coeficiente de impacto (4.3.3.1).
- C_n = n-ésima constante de integração (E.2.14).
- c = velocidade de propagação do som no meio fluido (4.1.3).
- d_1 = semi-eixo maior da elipse (E.2.20).
- d_2 = semi-eixo menor da elipse (E.2.20).
- $e = 2,71828\dots$
- e = excentricidade da seção meridiana (E.2.20).
- \mathbf{F} = vetor força hidrodinâmica de impacto (5.8).
- F_c = fator de correção para a superfície molhada do corpo (9.2.1.3).
- f = função genérica a uma variável real, definida em (E.2.13).
- f = função analítica a uma variável complexa, definida em (E.1.1).
- \mathbf{g} = vetor aceleração da gravidade (A.2.6).

$$\mathbf{g} = \|\mathbf{g}\| \quad (\text{A.3.15}).$$

$H =$ função posição vertical da superfície livre, tomada a partir de $z = \int U dt$

$$(6.1.2.11).$$

$H(x) =$ função que descreve o perfil da porção molhada do cilindro, em função

$$\text{de } x \text{ (6.1.2.13)}.$$

$H(r) =$ função que descreve o perfil da porção molhada da esfera, em função de

$$r \text{ (6.3.2-2)}.$$

$h =$ função posição vertical da superfície livre, tomada a partir de $z = 0$

$$(4.2.1.1.4).$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

$L =$ comprimento do cilindro (6.1.1.5).

$l =$ coordenada espacial utilizada para integração sobre o comprimento do

cilindro (6.1.2).

$M =$ massa adicional associada ao movimento de um corpo totalmente imerso

no meio fluido (4.2.2.3.2).

$m =$ massa do corpo de impacto (4.3.2.2).

$\mathbf{n} =$ versor normal da superfície (no sentido geral).

$O(x) =$ da ordem de x

$p =$ pressão fluída (4.2.1).

$p_{\text{atm}} =$ pressão atmosférica (4.2.1.1.7).

$\mathbf{q} =$ vetor fluxo de *momentum* (D.1.6).

$R =$ raio (no sentido geral).

$r =$ coordenada radial no sistema de coordenadas cilíndricas (6.3-2).

\mathbf{r}_{x_0} = vetor posição do ponto X , pertencente à superfície do corpo, a partir do

ponto O (baricentro) (4.2.1.1.1).

S = superfície (no sentido geral).

S_c = superfície molhada do corpo (4.2.1.1.1).

S_f = superfície do fundo do volume Ω (4.2.1.1.2).

S_l = superfície livre do volume Ω (4.2.1.1.4).

S_{l_0} = superfície fluida superior de Ω_0 , assumida fixa e colapsada no plano

$z = 0$ (5.3).

S_r = superfície lateral do volume Ω (4.2.1.1.3).

t = tempo.

T = energia cinética do fluido (5.4).

U = magnitude da velocidade de impacto do corpo (1-1).

\mathbf{u} = vetor velocidade (no sentido geral).

V_c = volume do corpo (D.8.1).

\mathbf{v}_0 = vetor velocidade do centro de massa do corpo (4.2.1.1.1).

v_f = magnitude da velocidade dos jatos de fluido (A.4.1).

v_r = magnitude da velocidade da raiz dos jatos de fluido (A.4.1).

\mathbf{x} = vetor posição, definido como $\mathbf{x} \equiv (x, y, z)$.

x = coordenada retangular.

x = identificação do eixo da coordenada x .

y = coordenada retangular.

y = identificação do eixo da coordenada y .

Z = altura de queda livre do corpo de impacto (6.2.1.19).

Simbolos gregos

Z = número complexo (E.1).

z = coordenada retangular.

Z = identificação do eixo da coordenada z .

z = número complexo (E.1).

α_n = n-ésimo coeficiente de série de potências, definida em (4.3.3.3) e (6.1.2.16).

β = variável auxiliar definida em (6.2.1.1.5).

β_n = n-ésimo coeficiente de série de potências, definida em (6.1.2.14).

δ_{ij} = delta de Kronecker (B – parte II).

δ_j = espessura do jato (A.4.2).

$\partial\Omega$ = superfície que engloba Ω .

ε = variável adimensional do problema de impacto hidrodinâmico (4.3.3.2).

ε_{jk} = tensor de Levi-Civita (B – parte II).

$\eta = \text{Im}(Z)$ (E.2.1).

Θ = potencial complexo (E.1).

θ = coordenada angular.

κ = intensidade de uma linha vortical (C.1.2).

λ = comprimento de onda (C.2.1).

μ = viscosidade dinâmica do fluido.

ν = viscosidade cinemática do fluido.

$\xi = \text{Re}(z)$ (E.2.1).

$\pi = 3,14159\dots$

$\rho =$ densidade do fluido.

$\sigma =$ tensão superficial do fluido.

$\tau =$ tensor das tensões do fluido (A.2.10) - (A.2.15).

$\phi =$ função potencial de velocidade (4.2.4).

$\hat{\phi} =$ função auxiliar, definida em (D.3.1).

$\varphi =$ fator independente do tempo do potencial de velocidade, que é solução do

problema de ondas de superfície irradiadas a partir da oscilação harmônica de um corpo

flutuante (C.2).

$\psi =$ função corrente (E.2.4).

$\Omega =$ vetor rotação do corpo de impacto (4.2.1.1.1).

$\Omega =$ volume fluido (4.2-1).

$\omega =$ vetor rotação da partícula fluida (B.2.1).

$\omega =$ frequência da onda (C.2.1).

$\varpi = \text{Im}(z)$ (E.2.1).

Simbolos subscritos

$o =$ quantidade de valor constante (E.2).

aprox = função aproximada (7.3).

placa = referente a uma placa plana (6.1.2.1).

uniforme = referente a um escoamento uniforme (6.1.2.1).

Simbolos sobrescritos

0 = quantidade avaliada em $\Omega_0 = \Omega - S_L + S_{L_0}$ (5).

w = componente - w do vetor (E.2.4).

z = componente - z do vetor.

y = componente - y do vetor.

x = componente - x do vetor.

Simbolos sobrepostos

$-$ = quantidade avaliada no instante de tempo imediatamente anterior o impacto do corpo (4.2.2).

$+$ = quantidade avaliada no instante de tempo imediatamente após o impacto do corpo (4.2.2).

∞ = quantidade avaliada em Ω^∞ (D.2.8).

R = quantidade avaliada em Ω^R (D.1.1).

\cdot = variável adimensionalizada (C.2.1).

\sim = por unidade de comprimento do cilindro (6.1.2).

\dot{x} = primeira derivada de x .

\ddot{x} = segunda derivada de x .

\dddot{x} = terceira derivada de x .

Grupos adimensionais

Fr = número de Froude (4.1.3).

M = número de Mach (4.1.3).

Re = número de Reynolds (4.1.3).

We = número de Weber (4.1.3).

Operadores e símbolos matemáticos

$\log x$ = logaritmo de x na base e .

∇ = operador "del" ou "nabla".

∇^2 = operador "laplaciano".

$|x|$ = valor absoluto de x .

$$\|x\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$x \equiv y$ = x é idêntico a y .

$x \approx y$ = x é aproximadamente igual a y .

Resumo

A força hidrodinâmica vertical de impacto, que surge na penetração de um corpo em um fluido, pode ser de magnitude suficiente para provocar danos estruturais nesse. É então importante predizer o comportamento dessa força em função de parâmetros como a dimensão, massa e velocidade do corpo, e densidade do fluido. A obtenção analítica da expressão para a força de impacto é um processo complexo, pois o desprendimento de jatos de fluido da região de contato dificulta a determinação da condição de contorno no corpo.

A dificuldade do estabelecimento adequado das condições de contorno pode gerar resultados conflitantes. Um aparente paradoxo entre expressões para a força de impacto é analisado, e mostra-se que a energia cinética transportada pelos jatos não pode ser desprezada, como assim se faz com o fluxo de massa e de quantidade de movimento.

Com o objetivo de se conhecer o comportamento da força de impacto em seu estágio inicial, utilizam-se as duas abordagens analíticas mais clássicas para sua obtenção, aplicando-as aos casos da penetração de um cilindro e de uma esfera. Para ambas geométricas, toma-se tanto a situação em que a velocidade de penetração é constante, como aquela em que é variável.

As duas abordagens estão fundamentadas em uma formulação matemática simplificada, que utiliza hipóteses como a de fluido ideal, escoamento irrotacional, corpo de impacto rígido e linearização das deflexões da superfície livre em torno de sua posição inicial.

Comparam-se as expressões obtidas para a força de impacto com dados experimentais, elucidando-se suas principais diferenças. Mostra-se que enquanto o impacto do cilindro é de caráter estritamente impulsivo, o de uma esfera se dá de maneira contínua.

“Abstract”

The hydrodynamic vertical water entry force, that happens when a body enters the water, may be of such magnitude that serious structural damages can occur in the body. In this sense, it is important to predict the force behavior as a function of the problem parameters (dimension, mass and velocity of the body, and the fluid density). The attainment of an analytic expression for this force is a very complex task, once the jet's flow from the contact region turns difficult the posedness of the body boundary condition.

This difficult in the boundary conditions establishment process may even result in conflicting expressions. An apparent paradox between two impact force expressions is then reviewed. It is shown that the kinetic energy carried by the jets cannot be neglected, as it is done with their mass and momentum

In order to know the impact force behavior during its initial stage, two classic methods are then applied for the water entry of a cylinder and a sphere. For both geometries, the constant and the variable velocity cases are studied.

The referred methods are based on a simplified mathematical formulation that makes simplifying assumptions like ideal fluid, irrotational flow and rigid body.

The analytic expressions for the impact force are paralleled with experimental data, and their main differences are then elucidated. While the hydrodynamic impact of a cylinder is of a strictly impulsive nature, that of a sphere is not, once its impact force growth is continuous and finite.

1 – Introdução

O impacto de um corpo contra uma superfície fluida, ou o impacto de uma massa fluida contra um corpo fixo, estão presentes em muitas das situações pertencentes ao campo da engenharia mecânica, naval e oceânica. Exemplos bastante ilustrativos desses fenômenos são o impacto de ondas marítimas contra o casco de embarcações, estruturas oceânicas flutuantes, plataformas offshore e construções portuárias, assim como o impacto de embarcações contra a superfície do mar. Sérios danos estruturais e erosão podem ocorrer, se as chamadas cargas hidrodinâmicas, que inevitavelmente surgem durante essa interação fluido-estrutura, não forem bem avaliadas *a priori*. Por essa razão, o estudo do problema de impacto hidrodinâmico é uma parte importante na avaliação da segurança de estruturas marítimas.

Desse modo, cabe à engenharia, analisar as forças sob as quais essas estruturas ficam submetidas durante seus processos de interações com o fluido. A avaliação das forças hidrodinâmicas de impacto pode ser feita através de procedimentos numéricos, experimentos ou resoluções analíticas, após uma modelagem adequada do problema. Quando analíticos, os métodos de resolução não são tão robustos quanto os numéricos, e, além disso, não levam em conta todos os efeitos envolvidos no problema como assim podem fazer os experimentos. Mesmo que a utilização de métodos analíticos exija a simplificação do problema, é ainda interessante obter um modelo teórico do qual se possa obter uma solução em forma explícita. Essa maneira auxilia a verificação da influência dos parâmetros do problema em sua solução.

Quando se tem uma representação mais simplificada, adquire-se mais facilmente um senso com relação aos aspectos qualitativos do problema real, e tem-se uma projecção para métodos mais robustos a serem utilizados, quando se deseja relaxar algumas das hipóteses simplificadoras empregadas no modelo teórico. Como aponta KOROBKIN e PUKHNACHOV (1988), a construção e análise de modelos aproximados, cujas soluções tem características peculiares com relação aos modelos mais complicados, são de grande importância para o entendimento da dinâmica do problema.

A elaboração do problema simplificado deve iniciar-se pela escolha do conjunto de hipóteses. É a partir daí, que os fenômenos físicos de influência significativa devem ressaltar, tornando o problema melhor compreendido. A escolha do conjunto de hipóteses deve ser criteriosa o suficiente, para que a descrição simplificada do problema não distorça em demasia a realidade física do problema. Espera-se que da resolução do problema simplificado, seja possível obter as informações desejadas.

Nesse contexto, como expressão da modelagem matemática usual do problema de impacto hidrodinâmico está um problema de contorno. Assim chamados, os problemas de contorno constituem-se essencialmente em uma equação de campo, a ser satisfeita em um determinado domínio, e uma ou mais condições de contorno impostas sobre a fronteira desse domínio. Quando bem estabelecidas, as condições de contorno suportam a solução do problema, no sentido de que a especificam tacitamente entre as infinitas possíveis soluções para a equação de campo.

No entanto, o problema de impacto hidrodinâmico apresenta um caráter transitório, não em sua equação de campo, mas sim em uma das condições de contorno. A medida que o corpo de impacto penetra o fluido, a área de contato entre eles começa a sofrer um aumento. Isso se deve não só à penetração do corpo, mas também ao

“empilhamento” de fluido por sobre a lateral do corpo, que corresponde ao processo de formação e desprendimento de jatos de fluido dessa região.

Assim, tem-se uma situação em que a condição de contorno na área de contato entre o corpo e o fluido varia também devido ao escoamento (ver fig. 1-1). Dessa forma, vê-se que a condição de contorno imposta sobre a região de contato só pode ser determinada simultaneamente à solução do campo de escoamento.

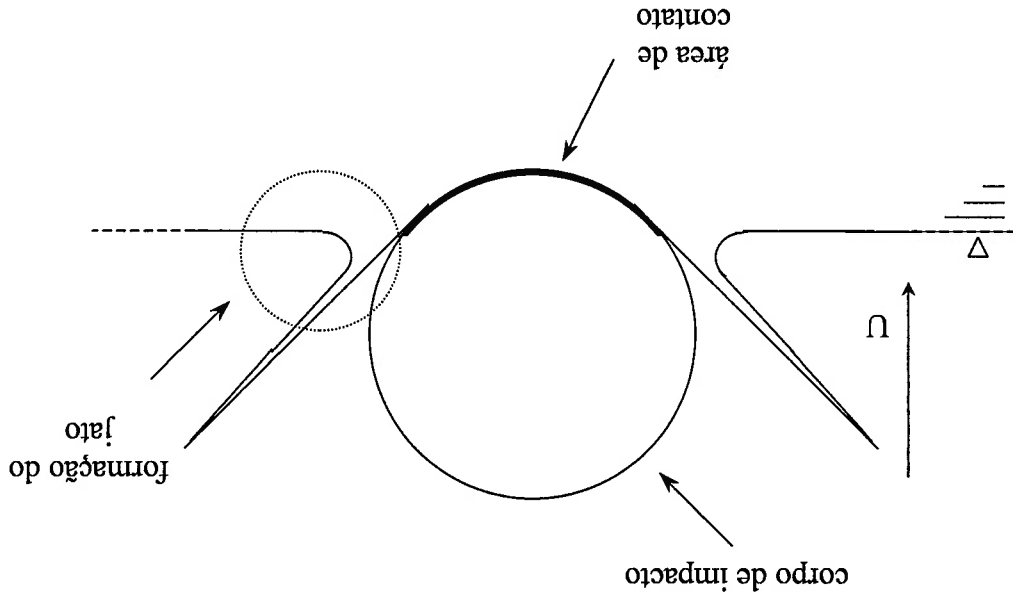


Fig. 1-1: Ilustração esquemática dos instantes iniciais do impacto (penetração)

de um corpo contra a superfície livre.

A fig. 1-1 mostra que a deflexão da superfície livre é bem mais acentuada nas proximidades do corpo, do que em regiões distantes desse. Nos instantes iniciais do impacto hidrodinâmico, a velocidade de penetração do corpo ainda é bastante alta, o que provoca a formação dos jatos. Desse particular aspecto do problema torna-se natural separar o campo de escoamento em duas regiões. Uma que encerre a região próxima ao

Essencialmente, a aplicação do método consiste em dividir o domínio do problema em duas partes, uma chamada de região “externa” e outra de região “interna”. A região do domínio fluido que está próxima ao corpo é a região interna, enquanto o restante do domínio recebe o nome de região externa. Então, a região externa corresponde, de certa forma, a toda extensão do domínio fluido a menos dos jatos. E a região interna corresponde àquela composta pelas proximidades da frente de contato, i. e., os jatos. Para cada região tem-se uma solução. A frente de contato entre o corpo e a superfície livre não pertence a nenhuma das duas regiões, já que é a interface entre elas. No entanto, como o domínio fluido é contínuo, a solução para a região de contato deve ser expressa pela extensão, no sentido do limite assintótico, da solução da região interna

(1968).

teoria de camada limite de proposta por PRANDTL (1904) apud SCHLICHTING (1975), a fundamentação teórica desse método é, de certa forma, uma generalização da problemas de escoamento, sejam esses invíscidos ou não. De acordo com VAN DYKE na mecânica dos fluidos. Vem sendo empregado com sucesso na resolução de A abordagem de expansão assintótica é aplicável a uma variedade de problemas particulares do problema, tenha apresentado resultados consideravelmente satisfatórios.

HOWINSON et al. (1991) e FALTINSEN e ZHAO (1997) e aplicado a alguns casos de expansão assintótica, utilizado por COINTE e ARMAND (1987), COINTE (1989), especializada como problema de camada limite. Logo, não é surpresa que a abordagem velocidade da superfície livre, identifica-se um problema, conhecido na literatura Da diferença entre as escalas temporais dessas regiões, no que diz respeito à distância infinita.

dessa região, onde essas perturbações tornam-se cada vez menores, anulando-se a uma corpo, onde há uma grande perturbação na superfície livre, e outra, nas adjacências

ou da externa até ela. Como ambas extensões devem ser iguais, podem ser igualadas, e então a solução composta do problema é por fim obtida.

A maioria das abordagens teóricas e analíticas do problema de impacto hidrodinâmico, seja através do método de expansão assintótica ou não, tem-se restringido ao impacto de corpos simétricos, como esferas, cilindros de comprimento infinito, elipsóides, parabolóides, hiperbolóides e cones. Esse tipo de geometria apresenta a vantagem de se poder utilizar, eficientemente, modelos analíticos para se obter o campo de escoamento no corpo. Além disso, uma vez que o problema é simétrico, pode-se adequar um sistema de coordenadas à geometria do corpo de impacto.

De fato, a aplicação do método de expansão assintótica ao impacto de corpos simétricos tem-se mostrado extremamente conveniente. De acordo com COINTE e ARMAND (1987), nos instantes iniciais do impacto de um cilindro infinito, a expressão para a força de impacto pode ser bem aproximada tomando-se apenas sua parcela correspondente à região externa.

O trabalho a ser aqui desenvolvido, pretende abordar o problema do impacto de um corpo contra a superfície livre de um fluido, resolvendo-se o escoamento da região externa. Apresenta-se a estrutura e o desenvolvimento do processo de obtenção dessa solução, nos casos em que o corpo de impacto é, ora, um cilindro infinito, ora, uma esfera. Concomitantemente, dada a sua complexa fenomenologia e, por conseguinte sua particular estrutura enquanto problema de física-matemática, tem-se também como intento esclarecer algumas questões no estabelecimento de sua modelagem, que até então têm se tornado razão de discussão entre os estudiosos do assunto.

2 – Motivação, caracterização do problema e objetivos

da pesquisa

O problema de impacto hidrodinâmico está caracterizado por uma

fenomenologia que necessita de rigorosa análise, para que se crie, de fato, um modelo

matemático bem posto. Além disso, mesmo para corpos com geometrias simples, a

obtenção da expressão analítica para a força que surge durante o estágio inicial da

entrada desses no fluido ainda é digna de investigações teóricas. Desse modo, o

problema de impacto hidrodinâmico vem atraindo a atenção de pesquisadores, não só do

ramo da engenharia, mas também da física teórica e da matemática aplicada.

A busca de soluções analíticas é uma prática sempre importante, uma vez que

podem validar e comparar resultados oriundos de experimentos que puderam ser

realizados com boa acurácia e representatividade. A consolidação de uma teoria

aproximada para a obtenção da força hidrodinâmica de impacto de um corpo é, de fato,

essencial para engenharia, visto que o desenvolvimento de métodos analíticos aplicáveis

a geometrias específicas é extremamente oneroso. Ao apresentar um método analítico

para a entrada vertical de um cone, à velocidade constante, SHIFFMAN e SPENCER

(1951) apontam que a computação das forças de impacto pode ser bastante onerosa, se

for necessário repeti-la para cada ângulo de abertura do cone em específico.

A medida que os diferentes métodos de abordagem vão sendo empregados no

problema, tem-se uma confluência de conclusões e observações que muito têm

contribuído para o enriquecimento de sua compreensão. Mesmo assim, a interpretação

matemática dos fenômenos físicos envolvidos no impacto hidrodinâmico não está de

massa e quantidade de movimento forem satisfeitas, então a equação de conservação da
entanto, para uma determinada classe de fluidos, se ambas equações de conservação de
fluidos, refere-se, quase sempre, à soma da energia mecânica à energia térmica. No
O emprego do termo energia total em problemas referentes à mecânica dos
modelo matemático do problema.

equações, apresentadas muitas vezes em formas simplificadas, que passam a constituir o
esses princípios, é possível transcrevê-los como equações de conservação. São essas
conservação. Como as transformações sofridas por esses sistemas devem obedecer a
definem o estado do sistema. A essas quantidades estão associados seus princípios de
casos, grandezas físicas como, massa, quantidade de movimento e energia total,
considerando-se apenas os fenômenos que ocorrem em nível macroscópico. Nesses
situações. Na maioria das vezes, o estudo desses problemas pode ser conduzido,
movimentação de aeronaves, submarinos e embarcações são bons exemplos dessas
fenômenos de transporte. Trocadores de calor, torres de resfriamento de água,
encerra um ou mais corpos e um meio fluido, entre os quais ocorrem os chamados
Muitos são os problemas de interesse da engenharia, cujo sistema de estudo

2.1 – Caracterização do problema

matemática usual do problema torna-se imprescindível.
esclarecimento. É nesse sentido que uma cuidadosa análise e revisão da modelagem
como MOLIN et al. (1996) e PESCE (1999), que então contribuíram para seu
deveriam conduzir a resultados idênticos. Essa interessante questão motivou autores
expressões para a força de impacto obtida através de duas abordagens que, *a priori*,
todo bem consolidada. Ainda até o ano de 1998, apontava-se uma controvérsia nas

energia mecânica também será (ver apêndice A.3). Sendo assim, torna-se então possível reduzir a complexidade e o trabalho empregado na resolução desse sistema de equações, substituindo-se a equação de conservação da energia total pela equação de conservação da energia térmica.

MOGHISI e SQUIRE (1980) e EROSHIN et al. (1984) apud KOROBKIN e PUKHNACHOV (1988) mostram que a força de impacto atinge seu máximo, a pequenas profundidades de penetração do corpo. F_p , então, esse intervalo de tempo que caracteriza o estágio inicial do problema, e é, portanto, nele, que as forças hidrodinâmicas devem então ser avaliadas. A duração desse estágio é pequena o suficiente, para que possíveis trocas térmicas entre o corpo e o fluido (no sentido de sua camada limite ou de seu seio) sejam desprezadas, no sentido de influenciarem a força de impacto. Sendo assim, são as equações de conservação da massa e de energia mecânica¹ que descrevem o sistema do estudo (representado pelo corpo de impacto e o meio fluido de interação).

2.1.1 – Análise qualitativa do estágio inicial do problema de impacto

hidrodinâmico

Essencialmente, durante o estágio inicial, dois são os aspectos do problema que devem ser considerados. Enquanto o fluido exerce uma resistência ao movimento de penetração do corpo, o que faz com que a velocidade de penetração seja reduzida, o empilhamento do fluido por sobre a lateral do corpo, que ocorre simultaneamente à sua penetração, provoca um rápido aumento na superfície molhada, o que significa uma

¹ Muitas vezes, opta-se por trabalhar com a equação de conservação da energia mecânica em virtude de sua natureza escalar, e assim o sistema passa então a ser descrito por essa equação e pela equação de conservação de massa.

maior área de atuação para a pressão do fluido. Note, então, que há um comportamento antagônico desses fatores. Enquanto o primeiro contribui para a diminuição da magnitude da força de impacto, a influência do segundo é no sentido de aumentá-la. Observando-se os dados experimentais de MOGHISI e SQUIRE (1980) e CAMPBELL e WEYNBERG (1980) apud FALTNSEN (1990), obtidos para o caso do impacto vertical de uma esfera rígida e de um cilindro infinito, respectivamente, nota-se que logo nos instantes iniciais, a força que o fluido exerce sobre o corpo aumenta muito rapidamente, atingindo seu máximo para pequenas profundidades de penetração, e então a partir desse instante começa a cair.

Para corpos de impacto como cilindros e esferas, a taxa de variação da área de contato entre o corpo e o fluido é bastante alta em pequenas profundidades de penetração (ver fig. 2.1-1). Assim, como a dimensão da frente de contato está relacionada com a massa adicional associada ao corpo, espera-se que, a pequenas profundidades de penetração, a intensidade da força hidrodinâmica de impacto cresça rapidamente.

Expressando-se a força hidrodinâmica vertical de impacto como

$$F_z = -\frac{d}{dt}(MU), \quad (2.1.1)$$

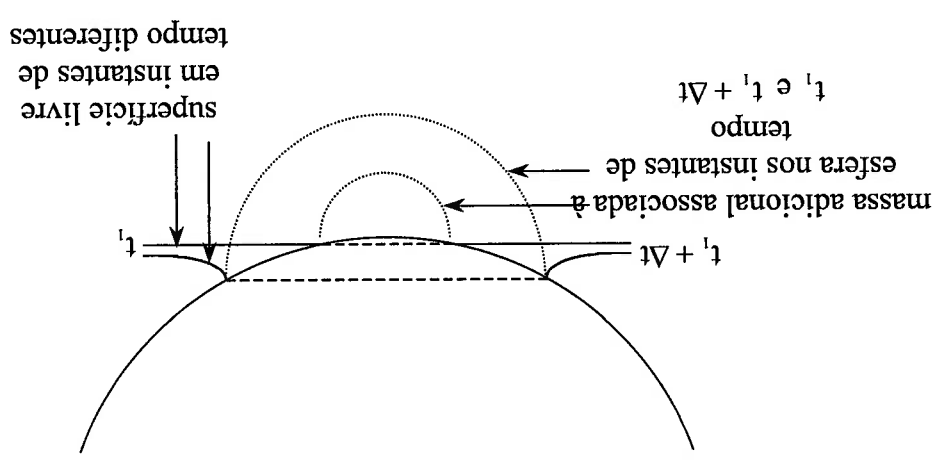
e aplicando-se a propriedade da derivada, tem-se

$$F_z = -U \frac{dM}{dt} - M \frac{dU}{dt} \quad (2.1.2)$$

Essa simplificada descrição da fenomenologia do problema vem servindo como fundamentação para muitos de seus estudos analíticos e numéricos e, de fato, a propagação da frente de contato entre a superfície livre e o corpo, ou seja, o aumento da área da superfície molhada, é uma das mais importantes características do problema. Ainda que simplificada, essa fenomenologia ainda necessita de investigações.

começando a partir daí. virtude da redução contínua da velocidade de entrada, atingindo logo seu valor máximo, intensidade da força hidrodinâmica de impacto aumenta de maneira mais branda, em a aceleração do corpo é negativa). Assim, em instantes posteriores aos iniciais, a que a taxa de variação da massa adicional é positiva), e a segunda positiva (uma vez que também o faz. Dessa forma, tem-se que a primeira parcela de (2.1.2) é negativa (visto que se a velocidade do corpo diminui, a taxa de variação da massa adicional assim expansão da frente de contato está relacionada com a velocidade de penetração, tem-se À medida que o corpo penetra o fluido, sua velocidade vai diminuindo. Como a

Fig. 2.1-1: Representação esquemática do rápido crescimento da massa adicional em pequenas profundidades de penetração de um corpo rombudo.



“Deve ser mencionado, que até o presente, não há resultados matemáticos rigorosos de um caráter geral, na teoria de problemas de hidrodinâmica, não-lineares, transitórios e com uma fronteira livre como linha de contato. Entretanto, as expansões assintóticas da solução do problema de impacto são de caráter formal” (KOROBKIN e PUKHNACHOV, 1988, p. 160).

Além da propagação da área da superfície molhada, a escala temporal do problema é uma característica muito importante. Como salienta MFI (1983), a adequada estimativa das escalas de um problema é o primeiro passo na tentativa de se obter uma boa solução aproximada. A magnitude da escala temporal do problema de impacto é suficientemente pequena para possibilitar sua linearização em torno do instante inicial. Esse processo resulta na substituição assintótica da superfície livre por uma superfície (no sentido hidrodinâmico), onde o potencial de velocidade é nulo em toda a sua extensão. Essa aproximação equivale a considerar o problema de impacto, a menos da região dos jatos, como sendo a situação limite em que a frequência de oscilação harmônica, no sentido do problema de radiação de onda a partir de um corpo flutuante, tende ao infinito.

Quando o corpo possui ângulo de abatimento suficientemente baixo e os efeitos de compressibilidade do fluido são levados em conta, o processo de impacto pode ser, em primeira aproximação, dividido em duas fases. De acordo com KOROBKIN (1996), logo nos instantes iniciais, o escoamento é dominado por efeitos de compressibilidade e a superfície livre permanece ainda não perturbada, ocorrendo somente pequenos deslocamentos das partículas fluidas, assim como radiação de ondas de pressão para o fluido. Segundo KOROBKIN (1992), para fluidos compressíveis e de baixa viscosidade, nota-se a existência de um estágio similar, onde as perturbações da superfície livre permanecem próximas à superfície molhada do corpo. CAMPANA et al. (1998) relacionam esse estágio, conhecido como supersônico, ao fato de que a

velocidade de expansão da frente de contato é maior que a velocidade de propagação do som no meio fluido. Em primeira aproximação, a duração dessa fase está relacionada com a velocidade de penetração do corpo e seu raio de curvatura. Posteriormente ao estágio supersônico, em virtude da redução da velocidade de entrada do corpo, segue-se uma segunda fase, no qual ocorrem grandes deslocamentos das partículas fluidas e os efeitos de compressibilidade podem ser desconsiderados. Em particular, ocorre o desprendimento de jatos de fluido da região de contato.

No início do impacto, jatos de fluido desprendem-se da região da superfície livre próxima ao corpo. O tratamento matemático para essa região exige um grande cuidado, tanto quando se deseja utilizar um método numérico, como quando se parte de uma abordagem analítica. ZHAO e FALTTNSEN (1993) tratam numericamente o problema do impacto de uma cunha em v. Nesse trabalho, os autores mostram que na região da superfície livre próxima ao corpo, é necessária uma discretização geométrica cada vez mais refinada, em virtude da rápida deflexão da superfície que aí ocorre, sendo até bastante difícil estabelecer computacionalmente o local onde se inicia o desprendimento dos jatos.

KOROBKIN e PUKHNACHOV (1988) e MOLIN et al. (1996) apontam que quando se trata de um fluido incompressível, a energia cinética do corpo de impacto é transferida igualmente para o seio do fluido e para os jatos. Dessa forma, embora a massa e a quantidade de movimento carregadas por esses jatos possam ser desprezadas, a energia cinética por eles transportada precisa ser levada em conta no balanço de energia global.

Note que, de fato, o problema de impacto hidrodinâmico requer cuidadosa análise, para que mesmo métodos usuais, como a teoria de expansão assintótica, sejam empregados segura e consistentemente. O problema é de veras complexo tanto quando

devido a VON KÁRMÁN (1929) e WAGNER (1931), obtém-se a força hidrodinâmica
ii) utilizando as duas abordagens mais clássicas do problema, que são aquelas

contorno à escolha do domínio fluido de estudo;

energia cinética do fluido, relacionando essa questão à pertinência das condições de
campo de pressão sobre a superfície molhada do corpo e aquela que utiliza a variação de
problema, uma discussão sobre o aparente paradoxo entre a abordagem da integração do
i) após o estabelecimento da equação de campo e das condições de contorno do

que um corpo fica sujeito durante sua entrada no fluido; mostram-se:

hidrodinâmico, assim como avaliar a intensidade da força hidrodinâmica de impacto a
No intuito de tornar clara a clássica modelagem do problema de impacto

2.2 – Objetivos da pesquisa

uma abordagem analítica do problema
fundamentos da teoria de escoamento potencial podem ser utilizados com sucesso, em
efeitos de compressibilidade e viscosidade não são levados em conta. Nesse sentido, os
simples, contra a superfície livre e inicialmente não-perturbada de um fluido ideal, cujos
problema é a de considerá-lo como sendo o impacto de um corpo rígido de geometria
Dessa forma, uma maneira bastante razoável e comumente usada para simplificar o
levada em consideração, a abordagem do problema pode tornar-se mesmo inviável.
meio fluido; geometria e elasticidade do corpo, e presença de ondas na superfície fluida
genérica, onde parâmetros como viscosidade, tensão superficial e compressibilidade do
quando se procura obter dados experimentais. Quando se parte de uma situação
se parte de uma abordagem teórica, seja ela analítica ou numérico-computacional, como

de impacto para corpos de geometrias simples como um cilindro infinito e uma esfera, tanto para o caso de velocidade de penetração constante, como o de variável, expressando a força de impacto adimensional através do coeficiente de impacto;

iii) a comparação entre o coeficiente de impacto obtido dessas abordagens e aqueles provenientes da abordagem analítica de outros autores e de dados experimentais.

3 – Revisão bibliográfica

Como já acima mencionada, a complexidade do problema de impacto hidrodinâmico tem sido razão de pesquisa em diversas áreas da ciência. Entre essas, estão a engenharia mecânica, naval e oceânica, a matemática aplicada e a física teórica. Dessa forma, o problema de impacto vem sendo abordado através de diversos enfoques e metodologias, o que resulta em uma reavaliação de suas características e fundamentos teóricos nele envolvidos, tornando-o cada vez melhor caracterizado e compreendido. Essa boa fundamentação sobre o problema, que vem sendo então adquirida, serve de estímulo para novas pesquisas, que queiram explorar outras vertentes do problema, ou até mesmo aprimorar abordagens anteriores.

O conjunto das referências bibliográficas consultadas para a elaboração do presente texto é essencialmente formado por artigos científicos, onde são conduzidas abordagens analíticas, experimentais e numéricas do problema. E através desses artigos, e também dos clássicos livros que tratam de mecânica dos fluidos, que os diferentes métodos de abordagem e questões sobre o problema foram analisados mais detalhadamente. De referências como BIRD (1960), BATCHELOR (1967), CURRIE (1974) e FOX e MCDONALD (1988), pôde se obter as equações de conservação que constituem o modelo matemático clássico do problema, assim como conceitos fundamentais sobre mecânica dos fluidos. As formas particulares das equações de conservação foram obtidas com auxílio de referências como PRAGUER (1961), COIMBRA (1967) e BUTKOV (1978). LAMB (1932), KOCHIN et al. (1964), BATCHELOR (1967) e MILNE-THOMSON (1968) foram essenciais para se

prosseguir com uma análise mais aprofundada sobre questões relacionadas ao escoamento potencial. Para que se conduzisse a discussão sobre essas questões, foi necessário o uso de ferramentas matemáticas mais avançadas, utilizadas não só na obtenção da expressão analítica da força de impacto, mas também na discussão sobre a modelagem matemática do problema. Nesse ponto, a teoria de funções analíticas a uma variável complexa aplicada à hidrodinâmica serviram como excelente ferramenta. Ainda LAMB (1945), BATCHELOR (1967) e MILNE-THOMSON (1968) foram boas fontes de consulta para tal, mas PENNISI (1963), SPIEGEL (1973) e NEWMAN (1978) também devem ser mencionados. Por fim, o processo de estabelecimento da equação de campo e condições de contorno do problema foi feito consultando-se referências que tratavam da teoria de ondas de superfície, a citar NEWMAN (1978), MEI (1983) e JOHNSON (1997).

O norteamerito e conduta dessas leituras foram devidos ao trabalho de PESCE (1999), que assim ocupa o lugar de referência central desse trabalho. Nesse trabalho, o autor apresenta a formulação matemática para o caso do impacto hidrodinâmico de um corpo em fluido ideal, prosseguindo com a descrição e discussão das abordagens de outros autores como COINTE e ARMAND (1987), SHIFFMAN e SPENCER (1991), COOKER e PEREGRINE (1995) e FALTNSEN e ZHAO (1997). E nesse contexto, que insere uma importante discussão sobre a questão do conflito das expressões para a força de impacto previamente abordado por MOLIN et al. (1996) e WU (1998).

Das referências consultadas, conclui-se que, experimentalmente, embora não seja deveras difícil reproduzir o fenômeno de impacto hidrodinâmico em laboratório, a obtenção de dados sobre seu estágio inicial é uma tarefa bastante complicada. Por essa razão, não há até o presente, uma grande disponibilidade de dados experimentais sobre esse estágio. Da necessidade de dados dessa natureza, recorre-se principalmente aos

VON KARMÄN (1929) analisou o caso bidimensional do impacto de uma cunha em vê. Equacionou a força de impacto, como sendo igual à força que agiria em uma placa plana de largura $2a$, totalmente imersa no fluido e movendo-se a mesma velocidade que o corpo (ver fig. 3.1-1). Sendo assim, VON KARMÄN (1929) simplificou a dinâmica do problema, aproximando a dinâmica da cunha para a de uma placa plana. Com essa aproximação, foi possível linearizar o problema para corpos que apresentavam seu ângulo de abatimento θ_0 suficientemente pequeno, o que permitiu a

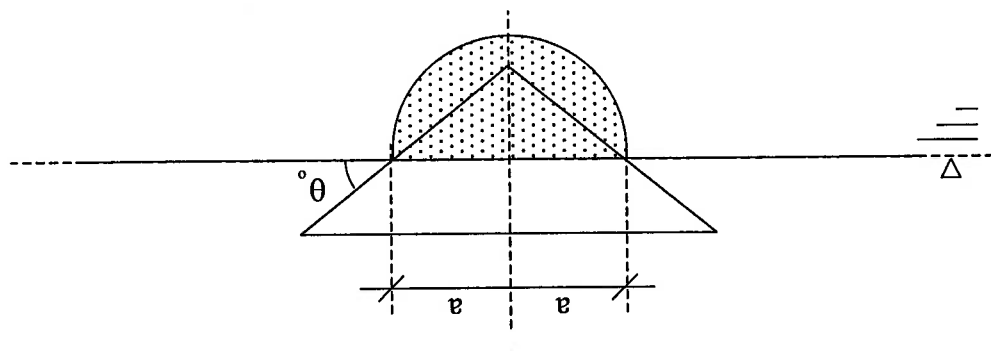
hidrodinâmico

3.1 – Algumas abordagens para o problema de impacto

desenvolvidos sobre o assunto. serviram como fundamentação e estímulo para que outros trabalhos pudessem ser do problema de entrada na água. Sem dúvida alguma, esses trabalhos foram pioneiros e referências bibliográficas na grande maioria de artigos, dissertações e teses que tratam trabalhos de VON KARMÄN (1929) e WAGNER (1931), que são encontrados como interesse no estudo da entrada e saída de projéteis da água. Dai se têm os clássicos pesquisas continuassem a ser conduzidas nesse campo, já que havia um particular vez àquela época. A Segunda Guerra Mundial também serviu de impeto para que ocorridos na amersisagem de hidroavões, que estavam sendo projetados pela primeira Inicialmente, foram estimulados pelo interesse de se avaliar os fenômenos físicos Os primeiros estudos analíticos do problema datam de meados de 1930. MOGHISI e SQUIRE (1981), COINTE e ARMAND (1987), e mais alguns outros. trabalhos de CAMPBELL e WEYENBERG (1980) apud FALTNSEN (1990).

penetração à velocidade constante. Esse resultado, juntamente com os dados já obtidos sobre um prisma triangular com ângulo de abatimento de 18° , resultante de sua DOHERTY (1952) também apresentou uma solução aproximada para o escoamento corrigido para a superfície molhada. WAGNER (1932) apud BISPLINGHOFF e largura da referida placa deveria ser corrigida por um fator, chamado de fator de fluido nas adjacências do corpo, foi levado em conta (ver fig. 3.1-2). Por essa razão, a Para tal, o processo de formação de jatos, que produz o "empilhamento" de

cunha em v, segundo a aproximação de VON KARMÁN (1929).
 Fig. 3.1-1: Massa adicional (região preenchida por pontos) associada a uma



Subseqüente ao trabalho de VON KARMÁN (1929), a mais significativa contribuição para os casos bidimensionais foi o trabalho de WAGNER (1931). Em seu trabalho, o autor aprimorou a abordagem proposta por VON KARMÁN (1929), proporcionando um modelo matemático mais verossímil para o problema. bem descrita em NEWMAN (1978) e MEI (1983).
 Essa condição é idêntica àquela presente no problema de um corpo flutuante cuja frequência de oscilação tende ao infinito. Para esse caso, a obtenção dessa condição está substituída da superfície livre por uma superfície hidrodinâmica de potencial nulo.

para os ângulos de 0° e 90° , deu origem a uma relação empírica para a massa adicional, conhecida como massa adicional de Wagner-Sydow². BISPLINGHOFF e DOHERTY (1952) também analisaram o problema de impacto hidrodinâmico de uma cunha em vê de maneira semelhante à abordagem de Wagner.

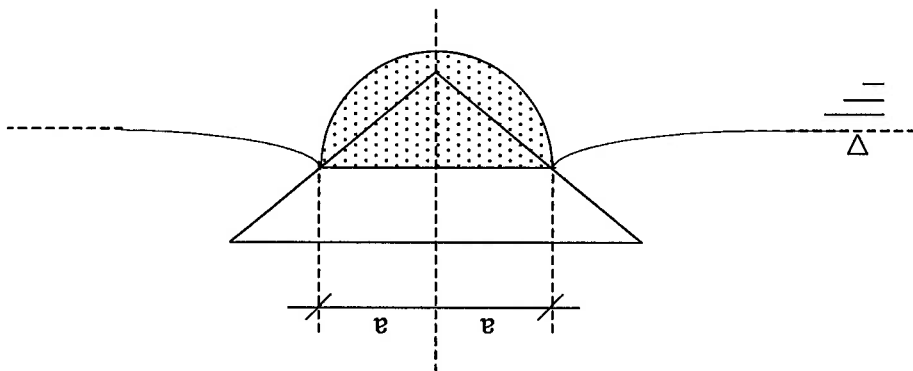


Fig. 3.1-2: Massa adicional (região preenchida por pontos) associada a uma cunha em vê, segundo a aproximação de WAGNER (1932) apud FALTNSEN (1990).

No entanto, o efeito do empuxo, desprezado pela maioria das outras abordagens analíticas, foi levado em conta no balanço de forças feito por esses autores. Nesse trabalho, BISPLINGHOFF e DOHERTY (1952) também apresentaram expressões empíricas para a massa adicional, no caso da penetração de uma cunha, que são os trabalhos de KREPS (1943) e MAYO (1945) apud BISPLINGHOFF e DOHERTY (1952)

A abordagem de WAGNER (1931) também foi utilizada por MILOH (1981, 1991b) que descreveu o problema em um sistema de coordenadas toroidais. O autor

² O nome é devido ao fato de que Sydow, J. apresentou, independentemente, essa mesma expressão em seu trabalho "Über den Einfluss von Lederung und Kislung auf den Landestoss," *Jahrbuch der Deutschen Luftfahrtforschung*, 1938.

recorreu à equação de Lagrange, generalizada para o caso de massa adicional dependente do tempo (equação essa discutida previamente por MILOH e LANDWEBER (1981) apud MILOH (1991b)), para obter a força de impacto. Para computar o empilhamento do fluido por sobre a lateral do corpo, o coeficiente de impacto foi corrigido pelo fator de correção para a superfície molhada. O resultado desse trabalho mostrou excelente concordância com os dados experimentais disponíveis, ainda que a equação de Lagrange, generalizada para o caso de massa adicional explicitamente dependente da posição, não tenha sido utilizada. Como discute PESCE (2003), a equação clássica de Lagrange não pode ser empregada no problema de impacto sem que se façam considerações adequadas, já que a massa adicional é, nesse caso, explicitamente dependente da profundidade de penetração do corpo, o que requer o uso da equação de Lagrange em uma forma mais generalizada. Sendo assim, acredita-se que parte da coerência dos resultados de MILOH (1981, 1991b) esteja, muito provavelmente, relacionada ao emprego do fator de correção para a superfície molhada, que de certa forma, considera a fenomenologia da formação dos jatos.

As hipóteses empregadas por WAGNER (1932) apud FALTNSEN (1990), i. e., fluido incompressível e invíscido, escoamento irrotacional, corpo de impacto rígido e ausência de tensão superficial e força gravitacional, são analisadas por COINTE e ARMAND (1987) que mostram que, de fato, uma previsão bastante acurada da força de impacto pode ser feita utilizando-se essas hipóteses. No entanto, existe um intervalo não-nulo de crescimento da força de impacto, até que essa atinja seu valor máximo, que nem sempre é bem reproduzido pelos modelos que utilizam essas hipóteses. Muitas vezes, essas hipóteses aplicam-se somente a partir de um determinado instante da penetração, pois a formação de um colchão de ar entre o corpo e a superfície fluida provavelmente perturbada, assim como as irregularidades que essa última possa possuir

(ondas de pequena amplitude, por exemplo), não são partes da modelagem usual do problema. E assim, a ausência desses fatores pode gerar um crescimento muito abrupto da força de impacto para algumas geometrias.

O desenvolvimento e a extensão da abordagem de WAGNER (1931), para corpos de impacto cujo ângulo de abatimento é baixo, são feitos através do método de expansão assintótica. Em VAN DYKE (1975) encontra-se a fundamentação teórica necessária para a compressão desse método de perturbação. São detalhados a divisão do problema nas regiões externa e interna e o processo de combinação de suas soluções, baseados na análise de magnitude de parâmetros adimensionais que caracterizam o problema.

SHIFFMAN e SPENCER (1951) desenvolveram a teoria para a entrada vertical de um cone a velocidade constante, para o caso de fluido ideal. Como não é vantajoso repetir esse procedimento para cada ângulo de abatimento, propuseram que o potencial de velocidade referente ao escoamento sobre a parte imersa do cone fosse aproximado por aquele devido ao escoamento por sobre uma elipse circunscrita à referida região (ver fig. 3.1-3), já que para esse segundo caso, a expressão para o potencial de velocidade é um clássico resultado da hidrodinâmica.

DOBROVOL'SKAYA (1969) apresentou soluções de similaridade para o escoamento bidimensional e incompressível, resultante do impacto de uma cunha forçada com velocidade constante através da superfície livre, utilizando-se das propriedades da função de Wagner e dos métodos da teoria dos jatos. Para o caso de fluido compressível, a solução é dada por GRIGORYAN (1956) e SAGOMONYAN (1956) apud DOBROVOL'SKAYA (1969). Essencialmente, o método de DOBROVOL'SKAYA (1969) está baseado na função proposta por WAGNER (1932) apud FALTINSEN (1990) e resulta em uma equação integral singular e não-linear, que

é aplicável a qualquer ângulo de abatimento da cunha. Entretanto, essa equação ainda não se encontra resolvida, sendo disponível apenas em uma forma implícita. Suas soluções numéricas são somente aplicáveis a ângulos de abatimento maiores ou iguais a 30°. FRAENKEL (1991) apud DOBROVOL'SKAYA (1969) prova que para todos os ângulos, a solução de similaridade obtida por DOBROVOL'SKAYA (1969) existe e é única. Por fim, GUREVICH (1965) apud HUGHES (1972) mostra que o princípio da similaridade geométrica pode ser estendido para casos nos quais a velocidade da cunha é proporcional a t^α , onde α é uma constante e t a variável tempo do problema.

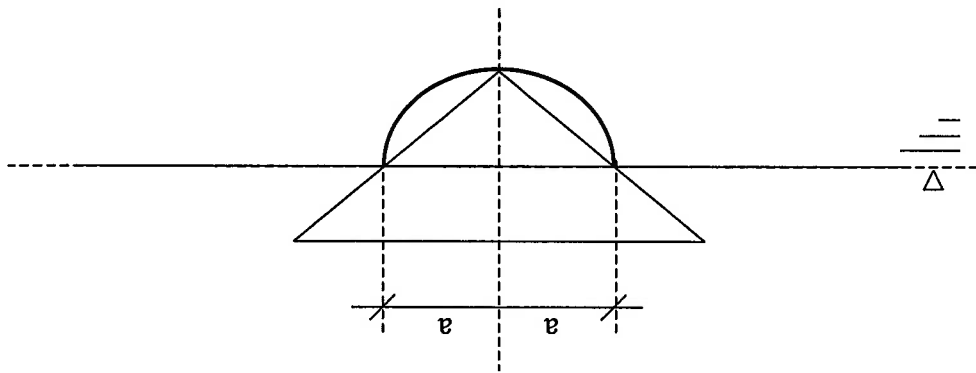


Fig. 3.1-3: Aproximação do escoamento sobre a porção imersa da cunha, pelo escoamento devido a um elipsóide circunscrito a ela.

HOWINSON et al. (1991) relatam que o problema de entrada mais bem estudado é o caso de uma geometria auto-semelhante bidimensional, no qual o corpo de impacto é uma cunha, e os efeitos de gravidade e compressibilidade são desprezados, assim como a formação do colchão de ar entre o fluido e a cunha. Segundo HOWINSON et al. (1991), os principais trabalhos nesse sentido são os devido a WAGNER (1932), GARABEDIAN (1953) e MACKIE (1969). Ainda, de acordo com

Quando são assumidos nulos os efeitos de viscosidade e compressibilidade do fluido, o alívio local para o campo de pressão, que ocorre devido ao impacto do corpo e dá-se através do desprendimento de jatos de fluido da região de contato entre o corpo e a superfície livre. A natureza desse alívio local poderia ser considerada, de acordo com PESCE (1999), como o resultado de um princípio variacional. SELIGER e WHITHAM (1968) mostram em seu artigo sobre princípios variacionais da mecânica dos meios contínuos, que para a mecânica dos fluidos, o princípio de Hamilton torna-se o de pressão estacionária. No caso de ondas gravitacionais, como apresentado em LUKE (1967), a Lagrangeana do sistema é dada pela pressão do fluido, sendo que a equação de

KOROBKIN e PUKHNACHOV (1988).

Uma excelente revisão sobre o estágio inicial do impacto hidrodinâmico pode ser encontrada no trabalho de SZEBEHELY e OCHI (1966) apud COINTE (1989) e (1993).

Algoritmos numéricos também têm sido desenvolvidos e empregados para a resolução do problema de impacto. Nesse campo, destacam-se os trabalhos de GARABEDIAN (1953, 1965), BORG (1957), DOBROVOL'SKAYA (1963, 1964) apud HUGHES (1972), DOBROVOL'SKAYA (1969) e de ZHAO e FALTNSEN

(1986) apud COINTE (1989).

geometrias tridimensionais, devidas a TROESCH e KANG (1986) e WATANABE como as extensões dos trabalhos de VON KARMÁN (1929) e WAGNER (1931) para (1987), e o de um cone, devido a WATANABE (1986) apud COINTE (1989), assim destaca-se o estudo do impacto de um cilindro infinito, devido a COINTE e ARMAND

Entre os trabalhos mais recentes sobre o problema de impacto hidrodinâmico, ao teste de algoritmos numéricos e experimentação.

HOWINSON et al (1991), ainda que essa situação seja bastante idealizada, é adequada

campo e as condições de contorno podem ser todas dela extraídas, através da aplicação de um princípio variacional. Essas informações reforçam a idéia proposta por PESCE (1999), de que no problema de impacto hidrodinâmico, a Lagrangeana poderia ser dada pelo campo impulsivo de pressão. No entanto, tal formalismo ainda não está desenvolvido, e para tal seria necessário um tratamento de rigor semelhante àquele apresentado em SELIGER e WHITHAM (1968).

4 – Modelagem teórica

De acordo com ARPACI (1966), quando os cientistas de engenharia abordam

teoricamente um problema, comumente passam por uma sequência de etapas que pode facilitar sua resolução. Após a identificação do problema a ser resolvido, constrói-se sua idealização física, ou seja, estabelece-se um conjunto de condições ideais nas quais o problema estaria supostamente inserido. As condições ideais desempenham o papel de simplificar a formulação do problema, mas não devem ser impostas sem justificativa, i. e., nenhuma condição ideal pode prejudicar em demasia a real descrição dos aspectos relevantes do problema. Após a determinação adequada das condições ideais, segue-se então sua formulação matemática. A formulação matemática consiste na transcrição dessas condições em equações. Utilizando-se de algum método de resolução, seja ele analítico ou numérico, obtém-se então a solução do problema¹. Quando existem dados experimentais disponíveis, costuma-se comparar a solução obtida com os resultados experimentais, a fim de se reavaliar a formulação do problema, se necessário.

Portanto, antes que se prossiga com a análise do problema de impacto hidrodinâmico, pretende-se apresentar e discutir as equações e hipóteses que compõe seu modelo matemático clássico. Essas equações, que são a equação de campo e as condições de contorno, provêm da manipulação das equações de conservação das grandezas físicas consideradas no estudo do problema.

¹ A solução de um problema bem-posto deve satisfazer os critérios de existência, unicidade e estabilidade. No entanto, esses aspectos não serão aqui discutidos formalmente.

4.1 – Hipóteses adotadas para a construção do modelo

matemático do problema

4.1.1 – Meio *continuum*

Na maioria dos problemas que são abordados no âmbito da mecânica dos

fluidos, a primeira hipótese adotada é a de se considerar o meio fluido como sendo um *continuum*. Esse conceito muito simplifica a análise dos problemas, pois permite estender a fenomenologia macroscópica a um nível microscópico, sem que haja uma direta preocupação com os fenômenos de interação intermolecular. Sendo assim, admite-se que o comportamento macroscópico do fluido corresponde ao de uma estrutura contínua, i. e., que não apresenta vazios em seu interior. É pertinente então, utilizar-se da teoria do *continuum*, também chamada de teoria de campo, ou teoria macroscópica, enriquecida por uma descrição fenomenológica, para a descrição do escoamento do fluido.

O problema de impacto hidrodinâmico apresenta como escala espacial a dimensão do corpo de impacto. Claramente, essa é muito superior ao livre caminho médio das moléculas do fluido. Assim, é pertinente e de extrema valia utilizar-se da hipótese do *continuum*, que então tornam válidos os princípios de conservação de massa, energia e quantidade de movimento em volumes de fluido de qualquer dimensão. Dessa maneira, pode-se prosseguir com o balanço dessas grandezas em um volume de controle fluido diferencial (considerações adicionais sobre essa hipótese são encontradas no apêndice B.1.).

4.1.2 – Fluido ideal

Como mencionada em SCHLICHTING (1968), a maioria das investigações

teóricas no campo da fluidodinâmica está baseada no conceito de fluido ideal, i. e., invíscido, incompressível e homogêneo em toda sua extensão. No movimento de um

fluido ideal, duas “camadas fluidas” de contato não sofrem nenhuma força tangencial, agindo sobre essas apenas forças normais, no caso a pressão do fluido. Isso é

equivalente a dizer que um fluido ideal não oferece resistência interna para que sua forma seja modificada. A teoria que descreve o movimento de um fluido ideal é

matematicamente bem consolidada, podendo proporcionar, muitas vezes, uma descrição satisfatória dos escoamentos reais, como por exemplo, no caso do movimento de ondas

de superfície ou formação de jatos de líquido.

A existência de tensões tangenciais e a condição de não-eskorregamento próxima

a superfícies sólidas constituem as diferenças essenciais entre o escoamento de um

fluido ideal e o de um fluido real. Alguns fluidos que são de grande importância para o campo de pesquisa da engenharia, como a água e o ar, possuem viscosidade muito

baixa. Em muitas situações, o movimento desses fluidos de baixa viscosidade concorda muito bem com o de um fluido ideal, visto que na maioria dos casos, as tensões de

cisalhamento são muito pequenas. Por essa razão, a existência de viscosidade é completamente desprezada na teoria dos fluidos ideais, o que introduz uma excelente

simplificação nas equações que descrevem o escoamento.

No estágio inicial do problema de impacto hidrodinâmico, a magnitude das

forças inerciais do fluido é bastante superior a das forças viscosas. Assim, não apenas

por ser, na grande maioria das situações práticas em que o fenômeno do impacto

hidrodinâmico está inserido, a água o fluido em questão, mas também pela

dimensão característica é dada pelo raio do corpo, tem-se que esses adimensionais são considerando-se que no caso do problema de impacto hidrodinâmico, a velocidade do som no meio fluido.

à razão entre a velocidade de expansão da frente de contato entre o corpo e o fluido e a influência da compressibilidade do fluido, através do número de Mach, que corresponde a viscosa e a de tensão superficial, respectivamente. Pela mesma razão, avalia-se a de certa forma, a razão entre a força inercial e uma outra força, no caso a gravitacional, adimensionais de Froude, Reynolds, Weber. Cada um desses adimensionais representa imprecisões originadas dessa assertiva sejam avaliadas, deve-se analisar os números superior em relação aos outros tipos de força que atuam sobre o corpo. Para que as cavidade, e pelo fato de que a força inercial do fluido apresenta magnitude muito penetração do corpo é ainda pequena. Esse estágio está caracterizado pela ausência de investigado em seu estágio inicial, ou seja, nos instantes em que a profundidade de viscosidade. O problema de impacto hidrodinâmico a ser aqui estudado, será um fluido deve incluir aquelas devido à inércia, pressão, gravidade, tensão superficial e A análise completa das forças atuantes em um corpo que penetra a superfície de

viscosidade do fluido

4.1.3 – Efeitos de compressibilidade, gravidade, tensão superficial e

B.2.).

predominância das forças inerciais do fluido frente às outras, é que a adoção da hipótese de fluido ideal é também bastante adequada para a construção da modelagem teórica do problema (considerações adicionais sobre essa hipótese são encontradas no apêndice

definidos da seguinte forma: $Fr = \frac{U^2}{gR}$, $Re = \frac{UR}{\nu}$, $M = \frac{c}{\|u\|}$ e $We = \frac{\sigma}{\rho U^2 R}$. Enquanto

U aqui representa a velocidade de penetração do corpo, $\|u\|$ corresponde a taxa de expansão da frente de contato entre o corpo e a superfície fluida.

KOROBKIN e PUKHNACHOV (1988) apresentam como exemplo, o caso de um projétil esférico de 0,1 m de raio, que atinge verticalmente a superfície de um fluido de densidade 10^3 kg/m³, tensão superficial $72,5 \times 10^{-3}$ N/m e viscosidade cinemática 10^{-6} m²/s, à velocidade de 10^2 m/s. Para esse caso tem-se $Fr = 1,02 \times 10^4$, $Re = 10^7$ e $We = 1,38 \times 10^7$, o que expressa a predominância da força inercial sobre essas.

KOROBKIN e PUKHNACHOV (1988) também relatam que os efeitos de capilaridade afetam apenas o segundo termo da solução externa do problema quando $t \rightarrow 0$. A gravidade afeta apenas seu terceiro termo, não modificando também o termo de ordem dominante da solução interna. Os efeitos de capilaridade só são comparáveis aos inerciais em uma pequena vizinhança da região de contato entre o corpo e a superfície livre, cujo raio é da ordem de Ut/We . O intervalo de tempo durante o qual essa contribuição deve ser levada em conta é estimado por $R/UtWe^2$, sendo esses efeitos, portanto, desprezíveis para o caso apresentado.

Ressaltam, também, que é bastante difícil apresentar uma estimativa quantitativa, no tocante à função que a viscosidade do fluido desempenha no estágio inicial do impacto. Pode-se dizer que, em argumentos gerais, espera-se que para $Re \gg 1$, a principal ação viscosa esteja localizada na camada limite próxima à região de contato entre a superfície fluida e o corpo e tenha uma espessura da ordem de $(\nu t)^{1/2}$,

quando $t \rightarrow 0$. De acordo com MILOH (1991b), isso implica que a razão entre os

componentes viscosos e os componentes inerciais da força de arrasto seja da ordem de

$$(Ut/RRe)^{1/2} \text{ quando } t \rightarrow 0. \text{ Assim, esses efeitos são também desprezíveis.}$$

Os efeitos de compressibilidade são discutidos por MILOH (1991b), que mostra

que para se estimar sua importância relativa, deve-se lembrar que no estágio inicial do impacto de uma esfera, por exemplo, a força hidrodinâmica é proporcional a $(Ut/R)^{1/2}$ (2). Sem demonstração formal, MILOH (1991b) aponta que se a ordem de magnitude da força hidrodinâmica for tal, então a pressão média que atuará na superfície molhada do corpo deverá variar de acordo com $(Ut/R)^{-1/2}$. Isso resultaria em valores infinitamente grandes da pressão média, para $t \rightarrow 0$. No entanto, como de fato a compressibilidade da água é não nula, a pressão inicial tem que ser finita e da ordem de $p_c U$. Esse resultado não será aqui demonstrado

Exemplificando a influência da compressibilidade, MILOH (1991b) ressaltava que para o impacto de uma esfera de raio 0,1 m e velocidade inicial de 10 m/s, o número de Mach é da ordem de 10^{-3} . Por fim, discute em seu trabalho que os efeitos de compressibilidade são importantes durante um intervalo de tempo adimensional que vai de 0 a M^2 . Assim, tem-se que esses efeitos podem ser desprezados à medida que M for pequeno, ou seja, quando a taxa de expansão da frente de contato for suficientemente baixa.

Assim, considerando-se a inércia como o efeito predominante, pode-se obter uma solução de ordem inferior para o problema, quando $t \rightarrow 0$. Como ressaltava PESCE (1999), essencialmente, a formulação que se segue dessas considerações, modela o impacto hidrodinâmico como uma idealização impulsiva desse fenômeno, tratando o

(2) MOGHISI; SQUIRE (1981) e MILOH (1991b) mostram que para o estágio inicial do problema de impacto de uma esfera, o coeficiente de impacto é proporcional a $A(Ut/R)^{1/2} - B(Ut/R)$, onde A e B são constantes positivas.

corpo de impacto como uma superfície plana equivalente. Esse procedimento é adotado por diversos autores como HOWINSON et al. (1991), KIM et al. (1996) e VORUS (1996) apud PESCE (1999). Uma importante vantagem dessa formulação é que a elevação da superfície livre, até a primeira ordem dos termos envolvidos, está desacoplada da solução do campo de escoamento, o que muita simplifica a resolução do problema.

4.1.4 – Corpo de impacto rígido

Estudando-se o caso do impacto de uma placa elástica suportada por duas paredes rígidas (ver fig. 4.1.4-1), KOROBKIN (1996) mostra que quando se trata de um líquido incompressível, a deflexão da placa é da ordem de $(Ut/R)^{3/2}$, para $t \rightarrow 0$. Assim, pode-se adotar por hipótese, que corpos de impacto maciços não apresentam deformações mecânicas significativas, que poderiam ocorrer dada a atuação da pressão fluida na área de contato.

4.1.5 – Superfície-livre inicialmente não-perturbada

De acordo com FALTNSEN e ZHAO (1997), quando o ângulo entre a superfície livre e o corpo é pequeno, um colchão de ar pode se formar entre eles, permitindo que o escoamento do ar interaja com o fluido, sendo o segundo influenciado por sua própria compressibilidade. Após o colapso desse colchão de ar, bolhas de ar são formadas.

Vale a pena ressaltar que a força hidrodinâmica vertical de impacto pode atingir valores bastante altos durante o estágio inicial de entrada do corpo, causando efeitos hidrodinâmicos importantes em corpos não-rígidos. Isso pode levar a uma subsequente cavitação e ventilação. No entanto, esses efeitos físicos têm escalas de tempo diferentes. Do ponto de vista estrutural, a escala de tempo que importa é aquela na qual as tensões máximas ocorrem. Os efeitos de compressibilidade, assim como a formação e colapso do colchão de ar são significativos em uma escala muito inferior àquela em que as tensões máximas ocorrem. Dessa forma, a compressibilidade e a formação do colchão de ar apenas terão um pequeno efeito nas tensões locais máximas, relativas aos efeitos dinâmicos hidrodinâmicos.

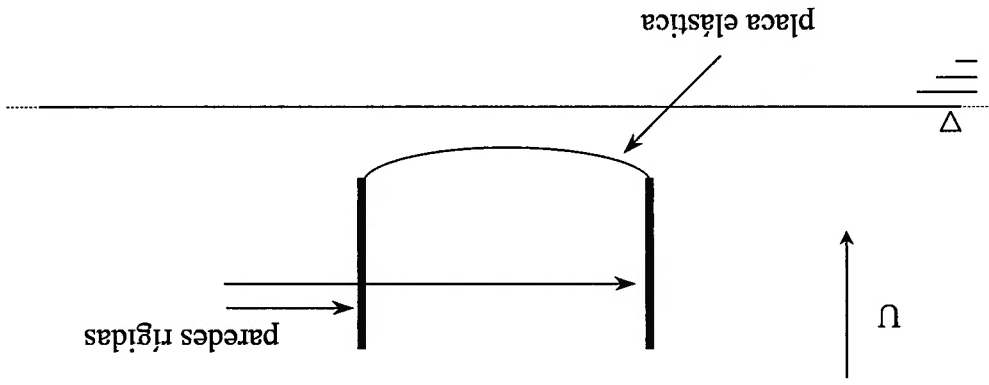


Fig. 4.1.5-1: Momentos antes do impacto de uma placa de elasticidade finita contra a superfície livre.

Logo, é a força impulsiva inicial que importa na avaliação da força hidrodinâmica de impacto. Note, por fim, que ao se desconsiderar as perturbações que a

superfície livre possa conter antes do impacto, despreza-se também a formação dos possíveis colchões de ar, como representa a fig. 4.1.5-2

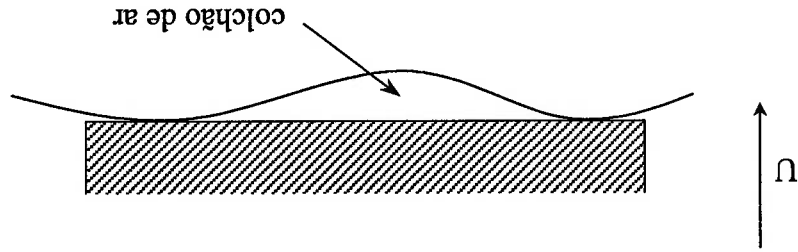


Fig. 4.1.5-2: Representação da formação de um colchão de ar entre o corpo e a superfície livre inicialmente perturbada, momentos antes do impacto.

4.2 – Evento de natureza impulsiva

Apresentadas as hipóteses a serem adotadas na elaboração do modelo teórico, prossigue-se com a obtenção das equações que representarão esse modelo. Uma vez que os efeitos inerciais do fluido são dominantes em relação aos outros, o contínuo processo de entrada do corpo no fluido pode ser visto sob uma ótica impulsiva.

De acordo com BATCHELOR (1967), em algumas circunstâncias, a aceleração das fronteiras e do seio do fluido é de magnitude tão grande e de tão pequena duração, que tais movimentos são considerados como sendo impulsivos, assim como em problemas de mecânica do choque. As forças de grande magnitude não agem diretamente no fluido, mas provocam uma súbita mudança na velocidade de suas fronteiras, gerando um gradiente de pressão capaz de produzir uma repentina mudança na velocidade de cada ponto do *continuum*.

Segundo PESCE (1999), ao se adotar a idealização impulsiva para o problema de impacto hidrodinâmico, o contato do corpo com a superfície livre deve ser considerado instantâneo e de tal sorte que, todos os pontos que compõe a superfície molhada do corpo estejam em contato com a superfície livre simultaneamente, o que transforma o corpo em uma superfície plana equivalente para cada instante de tempo. COOKER e PEREGRINE (1995) supõem que a mudança na velocidade durante o evento impulsivo ocorre em um intervalo de tempo tão pequeno, que os termos convectivos não-lineares, como $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$, tornam-se desprezíveis em relação a termos como $\partial \mathbf{u} / \partial t$, i. e., $\|\partial \mathbf{u} / \partial t\| \gg \|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\|$. De certa forma, isso traduz o fato de que a variação temporal da velocidade de escoamento do fluido se dá tão rapidamente que pode ser considerada de natureza impulsiva.

Como o estágio inicial do impacto esta caracterizado por profundidades de penetração pequenas, o termo relacionado à força gravitacional do fluido também é desprezível frente a $\partial \mathbf{u} / \partial t$, i. e., $\|\partial \mathbf{u} / \partial t\| \gg \|\mathbf{g}\|$. Dessa forma, (A.2.19) pode ser reduzida para

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\Delta p \quad (4.2.1)$$

A expressão acima pode ser integrada com respeito ao tempo, entre o instante imediatamente anterior ao impacto (0^-), e o imediatamente posterior (0^+); tornando

(4.2.1) como

$$\mathbf{n}^+ - \mathbf{n}^- = -\frac{\rho}{\mu} \int_{0^+}^{0^-} \Delta p dt \quad (4.2.2)$$

(3) Por simplicidade de notação, representa-se, de agora em diante, ϕ^+ por ϕ .

$$(4.2.6) \quad \phi^+ = - \int_{t^+}^0 \frac{d}{dt} p dt \quad (3)$$

Sem perda de generalidade, (4.2.5) pode ser reescrita como

$$(4.2.5) \quad \phi^+ - \phi^- = - \int_{t^+}^0 \frac{d}{dt} p dt + C(t)$$

Logo

onde ϕ é o potencial de velocidade do escoamento.

$$(4.2.4) \quad \Delta \phi|_{t=0^+} - \Delta \phi|_{t=0^-} = - \int_{t^+}^0 \frac{d}{dt} \Delta p dt,$$

Então de (B.2.5) em (4.2.3), tem-se

$$(4.2.3) \quad \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = - \int_{t^+}^0 \frac{d}{dt} \Delta p dt$$

Considerando que $p = p(\mathbf{x}, t)$ seja tal que

O sistema de coordenadas a ser utilizado na descrição do problema possui origem no primeiro ponto de contato entre o corpo e a superfície livre, e aí permanece fixo. Assim, o plano $z = 0$ coincide com a superfície livre não-perturbada, e a direção positiva do eixo z aponta para fora da superfície livre. Adota-se, sem perda de generalidade, como volume de controle, um cilindro de raio R , representado por Ω . A normal de sua superfície é orientada positivamente para fora (ver fig. 4.2-1).

4.2.1 – Sistema de equações acopladas que representa o problema impacto hidrodinâmico – problema não-linear

Para que o problema possa ser resolvido, é necessário estabelecer a equação de campo a ser satisfeita em Ω , assim como as condições de contorno impostas sobre $\partial\Omega$. A superfície $\partial\Omega$ é composta pelas superfícies S_c , S_r , S_l e S_R . Cada uma dessas superfícies possui características das quais decorrem as condições de contorno sobre elas impostas.

4.2.1.1 – Condições de contorno

A superfície de contato entre o corpo e a superfície fluida, representada por S_c , é classificada como material, móvel e não-permeável. O termo material remete ao fato de que S_c acompanha a movimentação da superfície molhada do corpo. Assim, como o fluido é invíscido, a velocidade normal da superfície molhada é igual à velocidade normal da superfície do corpo nessa região. A impermeabilidade decorre do fato de que

tal superfície não atravessa a superfície do corpo. Então, se X é um ponto pertencente à superfície molhada do corpo, e O seu baricentro, tem-se a seguinte relação

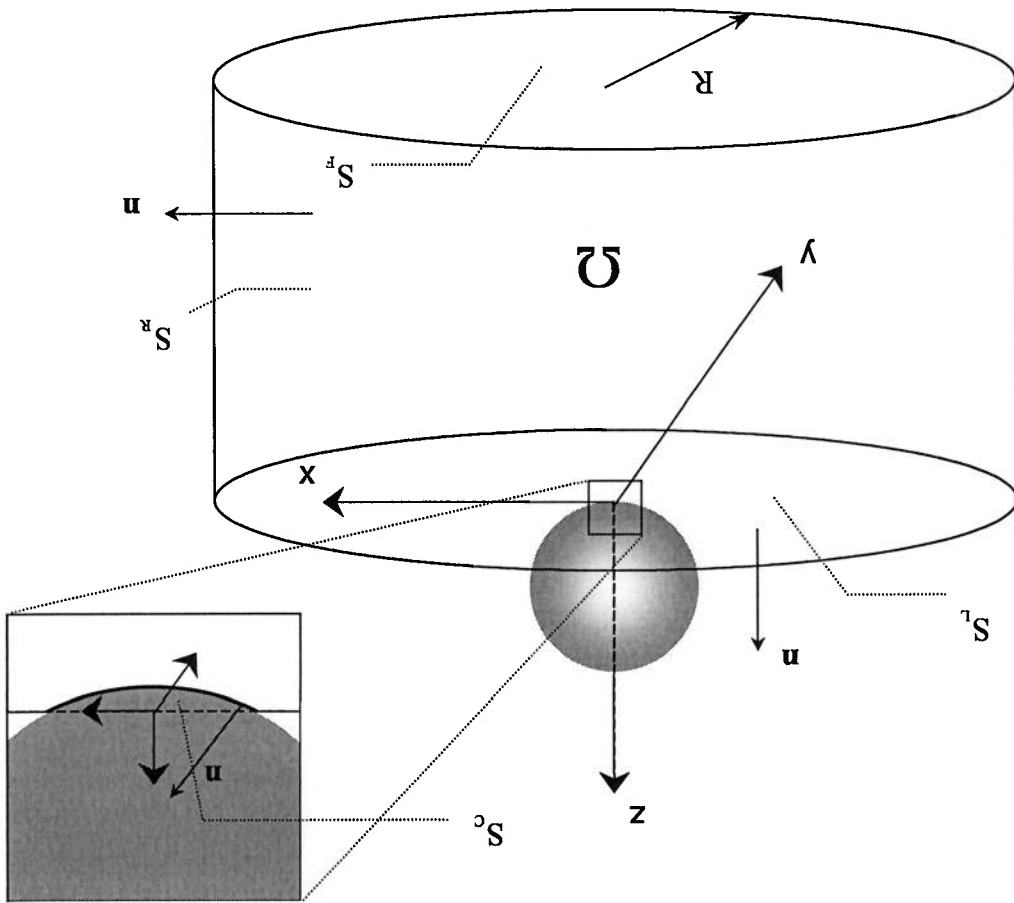


Fig. 4.2-1: Volume fluido de controle Ω , e as superfícies que o fecham, i. e.,

$$\partial\Omega = S_c \cup S_r \cup S_l \cup S_t$$

$$\Delta\phi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = (\nabla \phi \cdot \mathbf{n} + \Omega \times \mathbf{r}_{XO}) \cdot \mathbf{n}, \text{ em } S_c \quad (4.2.1.1.1)$$

S_f é também uma superfície material e não-permeável. No entanto é fixa. Por

ser fixa, tem-se que $\mathbf{u} \equiv 0$. Por ser material, vale que $\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$. Assim, a restrição

para S_f é dada por

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = 0, \text{ em } S_f \quad (4.2.1.1.2)$$

Já S_r é uma superfície fixa, porém não-material. Dessa forma, sua restrição

assume apenas a forma de

$$\mathbf{u} \equiv 0, \text{ em } S_r \quad (4.2.1.1.3)$$

A natureza física da superfície livre, i. e., S_L , exige tanto uma restrição

cinemática, quanto uma restrição dinâmica. A restrição cinemática deve impor que S_L

acompanhe as deflexões da superfície fluida superior. Assim, se $h(x, y, t)$ é a função

que descreve as deflexões da superfície livre, tomadas a partir do plano $z = 0$, então

$$z = h(x, y, t), \text{ em } S_L \quad (4.2.1.1.4)$$

Assim, a derivada total de z

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{dy}{dt}, \text{ em } S_L \quad (4.2.1.1.5)$$

Então de (B.2.5), (4.2.1.1.5) torna-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t}, \text{ em } S_L \quad (4.2.1.1.6)$$

A restrição dinâmica impõe que a pressão em S_L deve permanecer igual à

pressão atmosférica. Assim, utilizando-se de (A.3.19), tem-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \frac{p}{\rho_{\text{atm}}} + gh = C(t), \text{ em } S_L \quad (4.2.1.1.7)$$

Impondo-se convenientemente, e sem perda de generalidade

$$C(t) \equiv \frac{p}{\rho_{\text{atm}}}, \quad (4.2.1.1.8)$$

(4.2.1.1.7) pode ser simplificada para

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + gh = 0, \text{ em } S_L \quad (4.2.1.1.9)$$

Como já discutido, durante o estágio inicial do impacto, a intensidade da força

inercial do fluido é muito superior às outras. Dessa forma, o termo referente aos efeitos

gravitacionais, em (4.2.1.1.9), pode ser desprezado frente aos inerciais, tornando a

expressão como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi = 0, \text{ em } S_L \quad (4.2.1.1.10)$$

problema.

Determinadas as condições de contorno, obtêm-se agora a equação de campo do

4.2.1.2 – Equação de campo e sistema de equações

ser gerada por forças finitas que agem no sólido, durante um intervalo de tempo finito. distância infinita, implica energia cinética infinita. E, energia cinética infinita não pode corpo. Essa condição é necessária quando se considera que velocidade finita, a uma $\|\Delta\phi\| = \sqrt{(\partial\phi/\partial x)^2 + (\partial\phi/\partial y)^2 + (\partial\phi/\partial z)^2}$ devem ser nulos a uma distância infinita do

De acordo com LAMB (1932), os termos $\partial\phi/\partial x$, $\partial\phi/\partial y$ e $\partial\phi/\partial z$ devido a

$$\|\Delta\phi\| \rightarrow 0, \text{ para } \|x\| \rightarrow \infty \quad (4.2.1.1.13)$$

A natureza fenomenológica do problema requer também que

$$\phi \rightarrow 0, \text{ para } \|x\| \rightarrow \infty, \text{ (ver apêndice C.1)} \quad (4.2.1.1.12)$$

satisfazer a seguinte condição

provocado pela movimentação de um corpo rígido, o potencial de velocidade deve

BATCHELOR (1967) mostra que quando se tem escoamento irrotacional

$$\phi \equiv 0, \text{ em } S_L \quad (4.2.1.1.11)$$

Como S_L não sofre nenhum impulso de pressão, tem-se de (4.2.6)

Como a densidade do fluido é suposta constante, (A.1.4) torna-se

$$\Delta \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.2.1.2.1)$$

De (B.2.5) em (4.2.1.2.1), tem-se

$$\Delta^2 \phi = 0 \quad (4.2.1.2.2)$$

A equação (4.2.1.2.2), conhecida como equação de Laplace, constitui-se na

equação de campo do problema.

Note que quando se toma o caso particular em que a profundidade e o raio do

cilindro de controle (no sentido da fig. 4.2-1) tendem ao infinito, pode-se empregar as

condições (4.2.1.1.12) e (4.2.1.1.13). Assim, o estágio inicial do problema é governado

pelo seguinte conjunto de equações

$$\Delta^2 \phi = 0, \text{ em } \Omega^\infty; \quad (4.2.1.2.3)$$

$$\phi \equiv 0, \text{ em } z = h; \quad (4.2.1.2.4)$$

$$(\Delta \phi - \mathbf{n} \cdot \nabla \phi) = 0, \text{ em } S_c; \quad (4.2.1.2.5)$$

$$\|\Delta \phi\| \rightarrow 0 \text{ e } \phi \rightarrow 0, \text{ em } \|x\| \rightarrow \infty; \quad (4.2.1.2.6)$$

(4.2.1.2.7)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla h = 0, \text{ em } z = h;$$

(4.2.1.2.8)

$$S_c \equiv \emptyset, \text{ em } t = 0.$$

Note que de fato, o sistema de equações acima representa um problema não-linear. O potencial de velocidade e a função que descreve a deflexão da superfície livre têm que ser determinados simultaneamente. A condição (4.2.1.2.7) relaciona a função h com o potencial de velocidade a ser determinado. Mas, essa condição é imposta sobre S_c (que é descrita pela própria função h). Assim, h só pode ser determinado simultaneamente ao potencial de velocidade. Portanto, a deflexão da superfície livre e o potencial de velocidade estão acoplados.

4.2.2 – Sistema de equações desacopladas que representa o problema de impacto hidrodinâmico – problema linear

4.2.2.1 – Impacto vertical de um corpo axi-simétrico

É razoável tomar o caso particular em que o impacto do corpo é vertical à superfície livre, e que esse a atinge apenas de translação. Isso é pertinente para grande parte das situações práticas, nas quais o problema de impacto hidrodinâmico está inserido. Sendo assim, tem-se

(4.2.2.1.1)

$$\| \mathbf{n} \| = n_z \equiv U$$

Nesse sentido, a idealização impulsiva torna-se tão mais verossímil, quanto menor for o ângulo local de abatimento do corpo pois, dessa maneira, para pequenas profundidades de penetração, a superfície S_c é bem aproximada por uma superfície plana equivalente, como assim faz FALTNSEN e ZHAO (1997) (ver fig. 4.2.2.1-1).

Note também, da fig. 4.2.2.1-1b, que a normal de S_c apresenta a mesma direção que o eixo z. Dessa forma, é imediato que

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial n}, \text{ em } S_c \quad (4.2.2.1.2)$$

Logo, de (4.2.1.2.5), (4.2.2.1.2) torna-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -U, \text{ em } S_c \quad (4.2.2.1.3)$$

Se o impacto for vertical, e o corpo axissimétrico, pode-se transferir a condição de contorno na superfície molhada do corpo para a superfície plana equivalente, sob a ótica impulsiva.

4.2.2.2 – Linearização do problema em torno do instante inicial do impacto

Como ressaltava PESCE (1999), na teoria de impacto hidrodinâmico, é natural considerar como hipótese que a posição da superfície livre é conhecida em $t = 0^+$, sendo $z = h(x, y, t = 0^+) = 0$. “Isso é consistente com a modelagem matemática convencional dos problemas de impacto, na mecânica clássica” (PESCE, 1999, p. 17-8). Dessa

maneira, as condições de contorno impostas em S_L (móvel) transferem-se para o plano

$$z = 0.$$

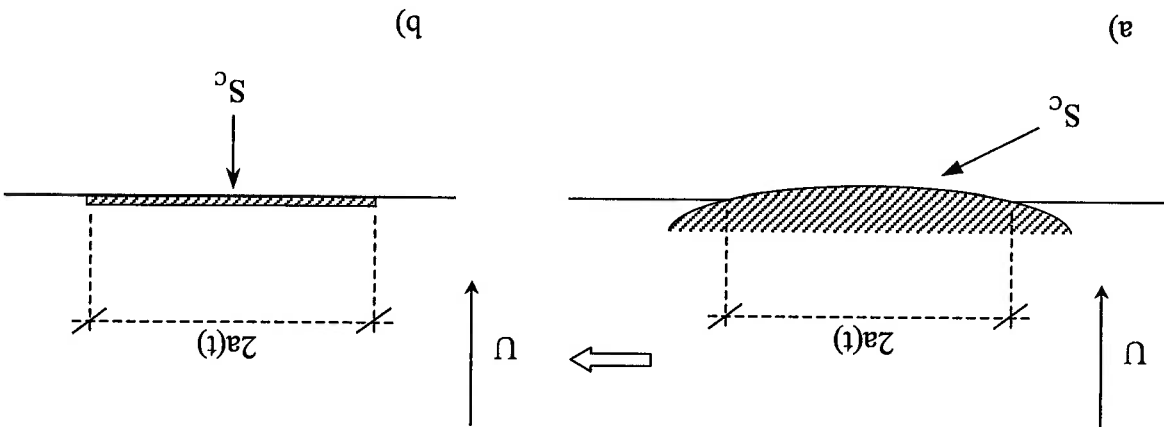


Fig. 4.2.1-1: Transferência da condição de contorno (exata) no corpo, para a

condição de contorno (aproximada) na superfície plana equivalente.

A expansão em série de Taylor, em torno de $z = 0$, para a componente vertical da

velocidade de S_L é

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=U_1} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} + U_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + O(U_1^2)$$

(4.2.2.1)

Logo, para $t \rightarrow 0$, tem-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=U_1} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0}, \text{ para } t \rightarrow 0$$

(4.2.2.2)

Ainda de acordo com PESCE (1999), a única maneira de se tratar o problema de impacto hidrodinâmico como uma idealização impulsiva, permitindo assim um salto temporal no potencial de velocidade, no sentido de (4.2.6), é considerar a superfície do corpo como uma superfície plana equivalente. Assim, a formação da superfície molhada do corpo, em $t = 0^+$, deve ocorrer instantaneamente.

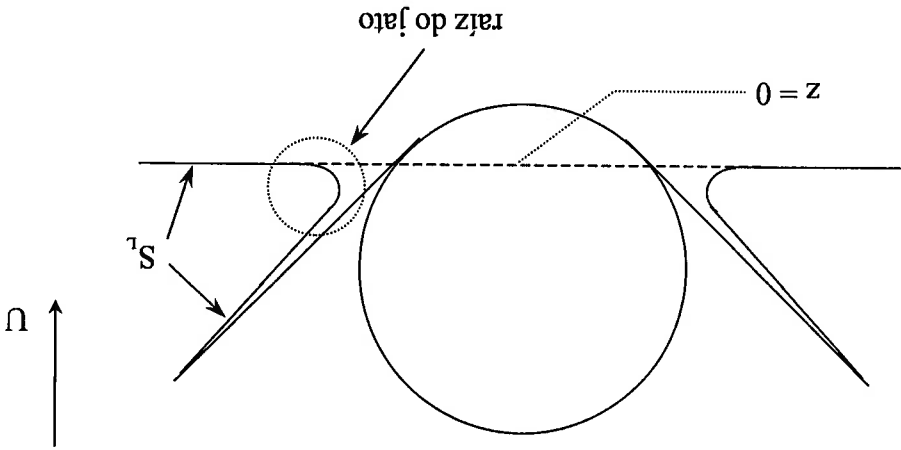


Fig. 4.2.2-1: Aproximação da superfície livre pelo plano $z = 0$.

De mesmo modo, PESCE (1999) aponta que é válido considerar

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} = 0, \text{ em } z = 0$$

(4.2.2.3)

De (4.2.2.3) em (4.2.1.1.6), obtêm-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial h} = \frac{\partial z}{\partial t}, \text{ em } z = 0$$

(4.2.2.4)

O problema de impacto hidrodinâmico também pode ser abordado como sendo um caso particular do problema de oscilação de um corpo flutuante. Para tal, toma-se o caso em que a frequência de oscilação do corpo tende ao infinito, recuperando assim a condição de contorno que estabelece potencial de velocidade nulo em $z = 0$ (ver apêndice C.2).

Note que o estágio inicial do fenômeno de impacto hidrodinâmico pode ser abordado, com boa aproximação, considerando-o como sendo o movimento impulsivo de um corpo em meio fluido, ou como o movimento de flutuação de um corpo na superfície livre, cuja frequência de oscilação tende ao infinito. É importante ressaltar que a possibilidade desse intercâmbio, que por sua vez muito facilita a compreensão e modelagem do problema, é apenas possível para os instantes iniciais do impacto. É isso que ocorre devido ao fato de que, nos instantes iniciais, o perfil de escoamento próximo ao corpo de impacto (região na qual se está interessado) pode ser obtido tanto considerando o caso do movimento de flutuação de um corpo a frequência infinita, como o caso do movimento impulsivo de um corpo, porém imerso no fluido. Ainda, de acordo com CHUANG (1969), o perfil de velocidade próximo ao corpo também pode ser obtido considerando o corpo fixo e atacado por um escoamento uniforme de velocidade igual à velocidade de penetração do corpo.

Da hipótese de potencial de velocidade nulo na superfície livre, pode-se obter (4.2.2.3), considerando que as linhas de corrente devem ser perpendiculares à linha equipotencial $\phi \equiv 0$. Essas observações também recuperam a hipótese de que um corpo flutuante com frequência infinita não irradia ondas a partir dele, FALTINGSSEN (1990). O que recupera a condição (4.2.2.4).

Da linearização da deflexão da superfície livre em torno de seu estágio inicial de repouso, tem-se então

$$\phi \equiv 0, \text{ em } z = 0 \quad (4.2.2.5)$$

Por fim, o sistema de equações que descreve o problema do impacto vertical de

um corpo axisimétrico contra a superfície livre de um fluido, em $t \rightarrow 0$ é dado por

$$\Delta^2 \phi = 0, \text{ em } \Omega_0^+; \quad (4.2.2.6)$$

$$\phi \equiv 0, \text{ em } z = 0; \quad (4.2.2.7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -U, \text{ em } S_c \text{ (no sentido da fig. 4.2.2.1-1b);} \quad (4.2.2.8)$$

$$\|\Delta \phi\| \rightarrow 0, \text{ quando } \|x\| \rightarrow \infty; \quad (4.2.2.9)$$

$$\phi \rightarrow 0, \text{ quando } \|x\| \rightarrow \infty; \quad (4.2.2.10)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial h} = \frac{\partial z}{\partial t}, \text{ em } z = 0; \quad (4.2.2.11)$$

$$S_c \equiv \emptyset, \text{ em } t = 0. \quad (4.2.2.12)$$

Note que, agora, a deflexão da superfície livre está desacoplada da solução para

ϕ . A função h pode ser determinada por (4.2.2.11), posteriormente à obtenção do

potencial de velocidade.

4.2.2.3 – Um problema equivalente ao problema de impacto hidrodinâmico

O problema de se obter a força resultante em um corpo axi-simétrico, que penetra verticalmente a superfície de um fluido, consiste basicamente em determinar o escoamento nas proximidades desse corpo.

A força hidrodinâmica vertical de impacto pode ser determinada em termos da massa adicional associada ao corpo, i. e.

$$F_z = -U \frac{dM}{dt} - M \frac{dU}{dt}, \quad (4.2.2.3.1)$$

onde M é dada por

$$\frac{1}{2} M U^2 = -\frac{1}{2} \rho \int_{S_c+S_L} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS, \quad (4.2.2.3.2)$$

o que corresponde à integração do campo de pressão sobre a superfície molhada do corpo.

De acordo com BISPLINGHOFF e DOHERTY (1952), a determinação de M através da expressão acima requer que a forma da superfície deformada, e as propriedades do escoamento na vizinhança da superfície livre sejam conhecidas. Esse problema ainda não foi resolvido, e assim assume-se então que a superfície livre é uma superfície de potencial nulo. Dessa maneira, (4.2.2.3.2) fica

$$\frac{1}{2} M U^2 = -\frac{\rho}{2} \int_{S_c} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \quad (4.2.2.3.3)$$

Com essa simplificação, BISPLINGHOFF e DOHERTY (1952) apontam que o corpo pode ser tratado como se estivesse completamente imerso no fluido, e movendo-

se com uma velocidade $U = U(t)$.

Tem-se assim um problema equivalente ao problema de um corpo que se movimenta em meio fluido infinito. Embora tal aproximação não leve em conta, explicitamente, o processo de formação dos jatos, de certa forma, esse está representado através da variação da dimensão da placa plana na abordagem de WAGNER (1931). De acordo com WAGNER (1931), quando o ângulo de abatimento do corpo é muito pequeno, tem-se que a inclinação da superfície livre (com exceção da região próxima à raiz do jato) é também muito pequena. Dessa forma, como também aponta CHUANG (1969), o escoamento na região próxima do corpo pode ser aproximado pelo escoamento que resulta da movimentação do fluido em escoamento uniforme, sobre o corpo fixo, uma vez que os perfis do escoamento na região próxima ao corpo, em ambas as situações (corpo fixo e fluido em movimento, corpo em movimento e fluido em repouso), são semelhantes (compare a fig. 4.2.2.3-1 com a fig 4.2.2.3-2).

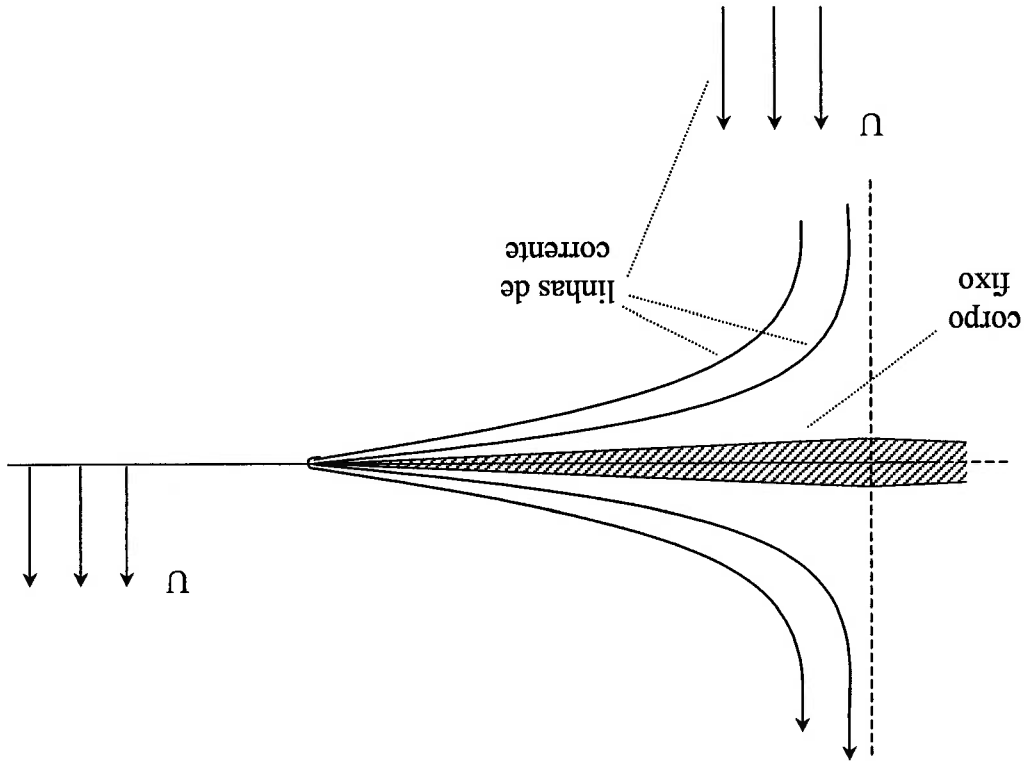


Fig. 4.2.3-1: Perfil de escoamento resultante da aproximação do fluido com velocidade uniforme U , sobre o corpo fixo.

Como a superfície molhada do corpo está colapsada no plano $z = 0$, tem-se então que a fig. 4.2.3-3 representa o problema equivalente.

O problema de contorno simplificado a ser resolvido assume então a forma dada pela fig. 4.2.3-4.

Utilizando-se dessa formulação, apresenta-se no capítulo 6, a obtenção da força de impacto para as situações em que o corpo de impacto é um cilindro infinito e uma esfera. Em ambos as situações, analisam-se tanto o caso em que a velocidade de penetração é constante, como o caso em que é variável.

Fig. 4.2.2.3-3: Problema equivalente, no qual se tem uma placa plana de dimensão variável, movendo-se totalmente imersa no meio fluido.

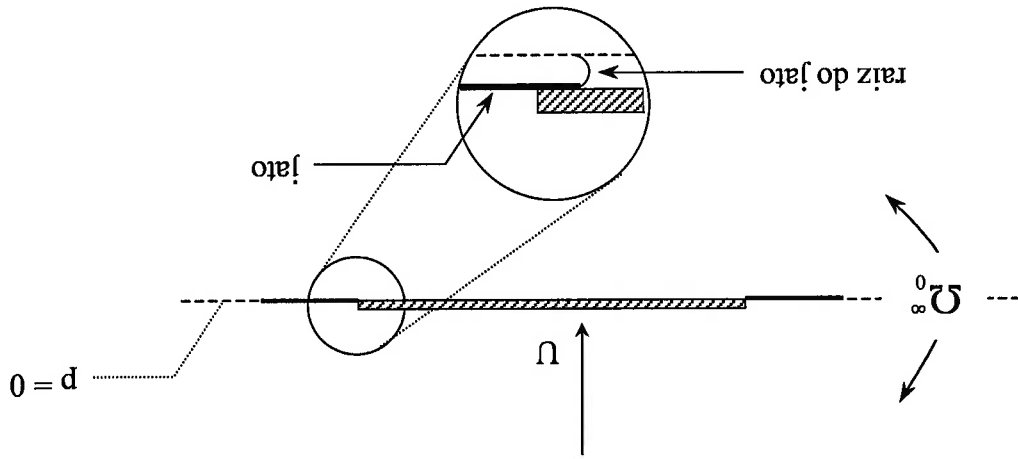
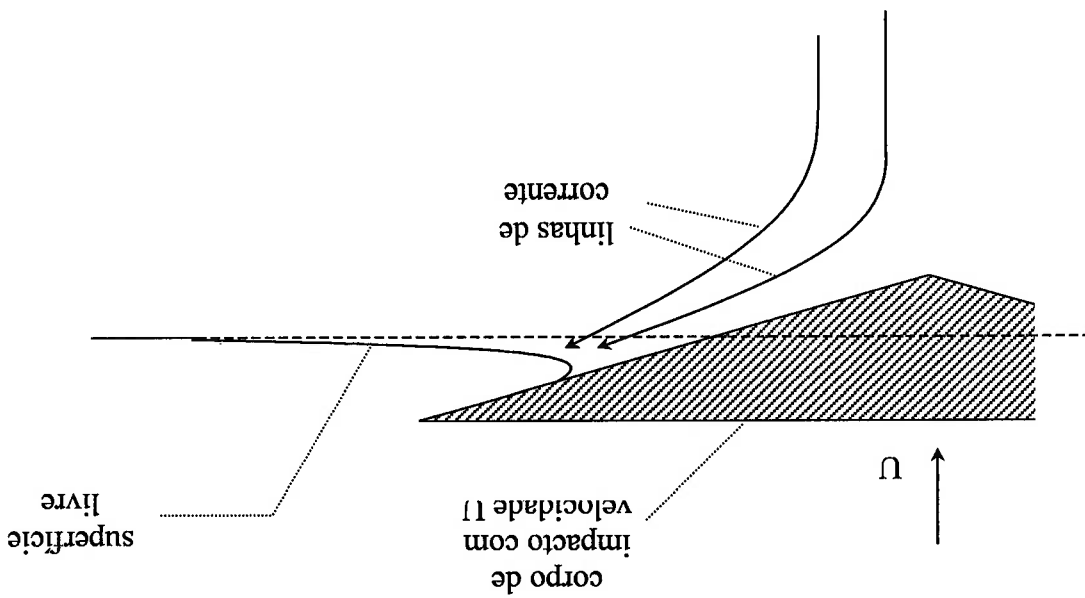


Fig. 4.2.2.3-2: Perfil de escoamento resultante da entrada do corpo no fluido.

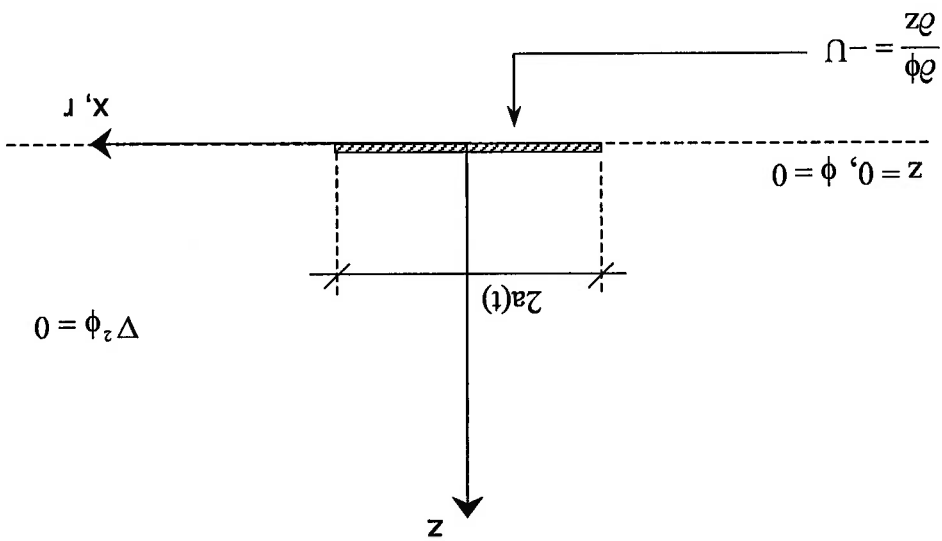


A modelagem apresentada para o problema é válida para aos instantes iniciais do impacto, ou seja, próximos a $t = 0$. Em instantes de tempo suficientemente distantes do inicial, efeitos antes desprezados tornam-se significativos, como os gravitacionais, e o de formação de uma cavidade no fluido, entre outros.

Embora a modelagem apresentada só seja válida para pequenas profundidades de penetração, as simplificações obtidas tornam-se vantajosas quando se especula que o valor máximo da força de impacto, para corpos como esferas e cilindros, ocorre em profundidades de penetração relativamente pequenas.

4.3 – Avaliação da força hidrodinâmica vertical de impacto

Fig. 4.2.3-4: Problema de contorno resultante da análise simplificada do estágio inicial do impacto hidrodinâmico de um corpo com pequeno ângulo de abatimento.



4.3.1 – Expressão para a força hidrodinâmica vertical de impacto, considerando que a velocidade de penetração do corpo é constante

Se nos instantes iniciais do impacto a desaceleração do corpo é

aproximadamente nula, i. e. $dU/dt \approx 0$, então a expressão (4.2.2.3.1) reduz-se à

$$F_z = -U \frac{dM}{dt} \quad (4.3.1.1)$$

4.3.2 – Expressão para a força hidrodinâmica vertical de impacto, considerando que a taxa de variação da velocidade de penetração do corpo é significativa

Se a velocidade de penetração é variável, então a força hidrodinâmica vertical de

impacto deve ser expressa por

$$F_z = -U \frac{dM}{dt} - M \frac{dU}{dt} \quad (4.3.2.1)$$

Se a força que o corpo aplica no fluido é dada por F_z , a força reativa do fluido

no corpo é $-F_z$. Então, da lei de Newton, tem-se que

$$m \frac{dU}{dt} = -F_z \quad (4.3.2.2)$$

De (4.3.2.1) e (4.3.2.2), obtém-se a seguinte equação diferencial

$$\frac{dU}{dt} + \frac{dM}{U} (M + m) = 0 \quad (4.3.2.3)$$

Então, como

$$M = M(b), \quad (4.3.2.4)$$

e

$$\frac{db}{dt} = U, \quad (4.3.2.5)$$

onde b é a profundidade de penetração tomada a partir do plano $z = 0$, tem-se que (4.3.2.3), (4.3.2.4) e (4.3.2.5) formam um sistema de equações diferenciais ordinárias

não-linear.

Assim, quando se tem velocidade de penetração constante, a força de impacto pode ser obtida diretamente pela expressão (4.3.1.1). No entanto, se a velocidade de penetração for variável, a força de impacto será dada implicitamente pelo sistema das equações (4.3.2.3), (4.3.2.4) e (4.3.2.5).

4.3.3 – Breve nota sobre o método de expansão assintótica

No âmbito da mecânica dos fluidos, é comum expressar a solução dos problemas por uma grandeza adimensionalizada em função de uma variável também adimensionalizada. A força hidrodinâmica vertical de impacto pode ser expressa em termos de um número adimensional chamado de coeficiente de impacto, e definido como

$$C_1 \equiv \frac{|F_z|}{\frac{1}{2} \rho A_r U_0^2} \quad (4.3.3.1)$$

onde A_r é a área transversal do corpo. No caso de fluido infinito, a única escala espacial do problema é a dimensão do corpo. Quando o corpo de impacto é um cilindro ou uma esfera, essa dimensão corresponde a seu raio. COINTE e ARMAND (1987) representam a variável adimensional de tempo do problema de impacto, como sendo

$$\varepsilon \equiv \sqrt{\frac{R}{U_0 t}} \quad (4.3.3.2)$$

Uma maneira de se determinar a relação entre o coeficiente de impacto e a profundidade de penetração adimensionalizada é proceder com aproximações sucessivas. Pode-se então propor uma relação entre eles que tenha a seguinte forma

$$C_1(\varepsilon) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \dots + \alpha_n \varepsilon^n \quad (4.3.3.3)$$

onde α_1 são constantes. Segundo VAN DYKE (1975), esse método é bastante adotado para se resolver problemas da mecânica dos fluidos, e mostra-se bastante eficiente para valores muito pequenos ou muito grandes da variável adimensionalizada envolvida. Existe uma importante relação conceitual entre a abordagem impulsiva do problema e o método de expansão assintótica. Da equação (4.2.6), vê-se que o potencial de velocidade procurado é aquele para o instante 0^+ . Como

$$(4.3.3.4) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} C_1(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} C_1(\varepsilon),$$

tem-se que a expansão assintótica do coeficiente de impacto para $t \rightarrow 0^+$ deve corresponder à solução obtida da abordagem impulsiva. Assim, integrando-se o campo de pressão, dado por (4.2.6), sobre a superfície molhada do corpo, deve-se obter uma solução do tipo (4.3.3.3). Assim, espera-se obter o termo de ordem dominante do coeficiente de impacto, ao se adotar a abordagem impulsiva.

5 – Paradoxo entre expressões para a força

hidrodinâmica de impacto

Quando se observa o impacto hidrodinâmico de um corpo com pequeno ângulo de abatimento, nota-se o desprendimento de jatos de fluido das proximidades da região de contato entre o corpo e a superfície livre. Embora a massa e a quantidade de movimento inerente a esses jatos sejam desprezíveis, sua energia cinética não o é. De acordo com KOROBKIN e PUKHNACHOV (1988) e MOLIN et al. (1996), a energia cinética do corpo de impacto é igualmente transferida para o seio do fluido e para os jatos.

Assim, uma discrepância entre as expressões para força de impacto, oriundas das abordagens de integração do campo de pressão fluida sobre a superfície molhada do corpo, e de taxa de variação da energia cinética do fluido, pode ser criada, se a referida particularidade do escoamento dos jatos não for consistentemente tratada.

Quando se deseja integrar o campo de pressão fluida sobre a superfície molhada do corpo, pode-se fazê-lo considerando apenas o escoamento da região externa do domínio fluido, i. e., todo o fluido a menos dos jatos. Mesmo que os detalhes locais do desprendimento dos jatos não sejam levados em conta, a expressão que se obtém para a força de impacto corresponde a uma boa aproximação dessa (ver apêndice A.4).

A expressão para a força de impacto também pode ser obtida através da taxa de variação da energia cinética do fluido. No entanto, essa abordagem requer cuidado no sentido de se considerar a magnitude da energia cinética transportada pelos jatos.

Nesse contexto, a idéia defendida por WU (1998) é a de que a aparente discrepância entre as expressões para a força, obtidas das duas abordagens, resulta de um desenvolvimento matemático incoerente. WU (1998) pensou ter então resolvido o aparente paradoxo.

A fim de se verificar a afirmação de WU (1998), analisam-se, agora, os domínios fluidos Ω_0 e Ω , e as condições de contorno sobre eles impostas.

Como discutido anteriormente, o problema de impacto pode ser analisado através de dois domínios fluidos diferentes, aquele cuja superfície superior é S_L , i. e., o domínio Ω , e aquele em que essa é S_{L_0} , i. e., o domínio Ω_0 . Ao se considerar o domínio Ω_0 , a resolução matemática do problema torna-se menos complexa. Na realidade, esse é um procedimento usual em problemas de hidrodinâmica de superfície livre. No entanto, há de se salientar que entre S_L e S_{L_0} faz uma fundamental diferença. Enquanto a superfície S_L acompanha os jatos de fluido, a superfície S_{L_0} coincide com o plano $z = 0$, permitindo assim que esses a atravessem.

Preende-se, assim, mostrar que a suposta discrepância entre as expressões para a força de impacto surge da inadequação da adoção do domínio fluido e das condições de contorno sobre ele impostas.

Ao analisar o problema de impacto, WU (1998) utiliza o domínio Ω_0 , e mostra que ao se integrar o campo de pressão sobre a superfície molhada do corpo, obtém-se

$$F_z = -\frac{d}{dt}(M)u_z + p \int_{S_c} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{z}{\partial \phi} \Delta \phi \cdot \Delta \phi \right) n_z dS, \quad (5.1)$$

Por outro lado, ao utilizar a taxa de variação da energia cinética do fluido, obtém

como resultado que

$$F_z = -\frac{z}{2}U \frac{dM}{dt} - M \frac{dU}{dt} \quad (5.2)$$

WU (1998), na realidade, tenta mostrar que (5.2) é consistente para as duas

abordagens.

No entanto, para a obtenção de (5.1) e (5.2), WU (1998) faz o uso da condição

de contorno

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \text{ em } S_{L_0} \quad (5.3)$$

Por outro lado, WU (1998) também justifica a validade da expressão (5.2),

aplicando o formalismo lagrangeano, ou seja

$$T = \frac{z}{2}MU^2, \quad M = M(z) \quad \text{e} \quad U = \frac{dz}{dt}, \quad (5.4)$$

na equação de Lagrange usual, i. e.

$$F_z = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial U} \right) + \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (5.5)$$

o que recupera de fato (5.2).

um resultado não-correto para a expressão da força de impacto. PESCE (2003) mostra que (5.1) pode ser obtida sem que se considere (5.3) (ver apêndice D.1). Além disso, PESCE (2003) ainda observa que quando se considera um sistema cuja massa varia explicitamente com a posição, a forma clássica da equação de

Considerar $\partial\phi/\partial t = 0$ válido por todo o plano $z = 0$ significa desconsiderar o processo de formação dos jatos. É de se esperar, então, que ao se utilizar a abordagem da energia cinética, tomando-se $\partial\phi/\partial t = 0$ válido por todo o plano $z = 0$, não considerando o fluxo de energia cinética através de S_L , que é significativo, obtenha-se

verifica-se que $\|\nabla\phi\| \gg 0$.

Essa última hipótese não pode ser considerada de todo verdadeira. A distâncias suficientemente longe do corpo, tem-se de fato que $\|\nabla\phi\| \approx 0$, como assim mostra (4.2.1.2.6). Entretanto, nas proximidades do corpo, tem-se $\|\nabla\phi\| \neq 0$, na realidade, aí aproximadamente nula, i.e., $\|\nabla\phi\| \approx 0$.

Dessa forma, assumindo-se (5.3), é imediato de (5.6) que $\|\nabla\phi\| = 0$ na superfície livre. Isso significa que além de considerar a superfície S_L como localizada em $z \approx 0$ (no sentido da fig. 4.2.2.2-1) e aí fixa, WU (1998) toma também que a velocidade da superfície fluida, localizada em $z = 0$, é de mesmo modo

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\nabla\phi\|^2 = 0 \quad (5.6)$$

Entretanto, vale lembrar que a condição de contorno na superfície fluida superior é dada por

Lagrange, empregada por WU (1998) para a obtenção de (5.2), não pode ser utilizada, sendo necessária o uso de sua forma estendida, i. e.

$$F_z = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right) + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{dM}{dz} U_z \quad (5.7)$$

Como a massa adicional do corpo varia explicitamente com sua profundidade de penetração, tomando-se (5.4) na expressão acima, obtém-se (5.1).

PESCE (1999) ainda mostra que a condição $\partial\phi/\partial t = 0$, válida em todo o plano $z = 0$, deveria ser imposta *a posteriori*, para que se satisfizesse um caso especial. Se fosse exigido que as expressões para a força, calculadas através de ambas abordagens, fossem idênticas com o uso de (5.5) e com o fato de que não há nenhum fluxo através de S_{L_0} , então (5.3) resultaria válida.

Mostra-se também que (5.1) é um caso particular da expressão

$$F_z = -\frac{d}{dt} (Mu) + p \int_{S_c} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n} \Delta\phi - \frac{z}{2} \Delta\phi \cdot \nabla\phi \right) dS, \quad (5.8)$$

quando se toma o caso em que o corpo está totalmente imerso em meio fluido infinito (ver apêndice D.2), pois adotando-se que $\|F\| = F_z$, (5.8) torna-se

$$F_z = -\frac{d}{dt} (Mu) + p \int_{S_c} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\phi} \frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{z}{2} \Delta\phi \cdot \nabla\phi \right) dS \quad (5.9)$$

No entanto, vale a identidade

$$\rho \int_{S_c} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \phi} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{1}{2} \Delta \phi \cdot \nabla \phi \right) n_z \, dS = \rho \int_{S_c} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \phi} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{1}{2} \Delta \phi \cdot \nabla \phi \right) n_z \, dS + \frac{\rho}{2U} \int_{S_c} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \phi} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{1}{2} \Delta \phi \cdot \nabla \phi \right) n_z \, dS$$

(5.10) (ver apêndice D.3)

Logo, substituindo-se (5.10) em (5.9), tem-se

$$F_z = -\frac{\rho}{2} (MU) + \frac{\rho}{2} \int_{S_c} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \phi} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{1}{2} \Delta \phi \cdot \nabla \phi \right) n_z \, dS + \frac{\rho}{2U} \int_{S_c} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \phi} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{1}{2} \Delta \phi \cdot \nabla \phi \right) n_z \, dS \quad (5.11)$$

Mas, como $\phi \equiv 0$ em S_{L_0} , (5.11) pode ser simplificada para

$$F_z = -M \frac{dU}{dt} - \frac{\rho}{2} U \frac{dM}{dt} + \frac{\rho}{2U} \int_{S_{L_0}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \phi} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{1}{2} \Delta \phi \cdot \nabla \phi \right) n_z \, dS \quad (5.12)$$

Se em S_{L_0} vale $\phi \equiv 0$, é imediato que $n_z = 1$, pois as linhas de corrente que

cruzam S_{L_0} assim o fazem perpendicularmente a essa superfície equipotencial (ver fig.

4.2.2.3-2). Então, (5.12) fica

$$F_z = -M \frac{dU}{dt} - \frac{\rho}{2} U \frac{dM}{dt} + \frac{\rho}{2U} \int_{S_{L_0}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \phi} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{1}{2} \Delta \phi \cdot \nabla \phi \right) n_z \, dS \quad (5.13)$$

Note que se for assumido $\partial\phi/\partial t = 0$ em S_{L_0} , recuperar-se-á (5.2) a partir de

(5.13).

WU (1998), na verdade, impôs uma condição de contorno equivocada sobre S_{L_0} . Assim, utilizando essa condição de contorno, WU (1998) obteve resultados discrepantes. Essa discrepância foi por ele demonstrada verdadeira pertinte, só que à luz da condição de contorno por ele estabelecida *a priori*, i. e., $\partial\phi/\partial t = 0$ em S_{L_0} .

Assim, WU (1998) comete uma tautologia. Ao impor a condição $\partial\phi/\partial t = 0$ em S_{L_0} , já seria esperado que se obtivesse resultados equivocados, uma vez que tal condição de contorno é falsa. Por fim, WU (1998) demonstra, utilizando-se dessa condição, que a discrepância entre as expressões não existe.

Dessa forma, WU (1998) não percebeu ter demonstrado que a discrepância entre as expressões surge se e somente se for assumido $\partial\phi/\partial t = 0$ em S_{L_0} . Portanto, não poderia ter sido assumido tal condição de contorno *a priori*.

Como tal condição de contorno está equivocada, segue que, de fato, não havia paradoxo. Sua existência deve-se ao uso de tal condição de contorno, e, portanto, para justificá-lo é necessário utilizá-la novamente, sendo essa a tautologia de WU (1998).

Note ainda que ao se considerar o domínio fluido Ω_0 , tem-se que

$$T_0 = \frac{1}{2} M U_z^2 = \frac{1}{2} \rho \int_{S_c} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \quad (5.14)$$

Logo, é imediato que

Utilizando-se de

$$(5.19) \quad \frac{dM}{dt} U_z + MU \frac{dU}{dt} = - \int_{S_c} p n_z dS + p \int_{S_{i_0}} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$$

o que permite que (5.17) seja reescrita como

$$(5.18) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \cancel{u_x n_x} + \cancel{u_y n_y} + u_z n_z = U n_z \text{ em } S_c,$$

Da abordagem impulsiva do problema, tem-se que

$$(5.17) \quad \frac{dM}{dt} U_z + MU \frac{dU}{dt} = - \int_{S_c} p n_x dS + p \int_{S_{i_0}} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$$

Assim, igualando-se (5.15) e (5.16), tem-se

$$(5.16) \quad \frac{dT_0}{dt} = - \int_{S_c} p n_x dS + p \int_{S_{i_0}} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \quad (\text{ver apêndice D.4})$$

Mas

$$(5.15) \quad \frac{dT_0}{dt} = \frac{dM}{dt} U_z + MU \frac{dU}{dt}$$

sejam iguais.

do fluido, obtidas de uma análise que não considerava nenhuma taxa de variação da energia cinética de pressão sobre a superfície molhada do corpo e da taxa de variação da energia cinética de pressão de que as expressões para força de impacto, oriundas da integração do campo de pressão, resultam em $\partial\phi/\partial t \equiv 0$, válida em toda a extensão de S_{L_0} , resulta da

S_{L_0} , o que é incorreto do ponto de vista físico.

Dessa forma, tem-se que para que (5.22) seja respeitada, é necessário que $\partial\phi/\partial t \equiv 0$ em S_{L_0} . Note que $\partial\phi/\partial z = -U$ não pode ser solução de (5.21), pois $\partial\phi/\partial z \geq 0$ em S_{L_0} .

$$\int_{S_{L_0}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + U \right) dS = 0 \quad (5.22)$$

Como $\frac{\partial\phi}{\partial n} \equiv \frac{\partial\phi}{\partial z}$ em S_{L_0} , se (5.21) fosse igualada com (5.13), obter-se-ia

$$F_z = -\frac{1}{2} \frac{dM}{dt} U - M \frac{dU}{dt} + \frac{U}{\rho} \int_{S_{L_0}} \frac{\partial\phi}{\partial n} dS \quad (5.21)$$

(5.19) torna-se

$$F_z = \int_{S_c} p n_z dS, \quad (5.20)$$

Quando o domínio fluido é representado por Ω_0 , a expressão da taxa de variação da energia cinética apresenta um termo correspondendo a um fluxo através de S_{L_0} , i. e.

$$\frac{dT_0}{dt} = - \int_{S_c} p u_n dS + \rho \int_{S_{L_0}} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \quad (5.23)$$

Então, se $\partial \phi / \partial t \equiv 0$ em S_{L_0} , o termo de fluxo desaparecerá da expressão acima.

Como já era esperado, quando se toma o domínio fluido completo Ω , onde a

superfície S_L acompanha os jatos, a taxa de variação da energia cinética do fluido é

dada por

$$\frac{dT}{dt} = - \int_{S_c} p u_n dS \quad (\text{ver apêndice D.5}), \quad (5.24)$$

diferindo de (5.23) justamente pela ausência do termo de fluxo.

Por fim, pode-se então concluir que, de fato, não há nenhum paradoxo entre as

expressões para a força de impacto obtida das diferentes abordagens. Apenas não se

pode desprezitar o fluxo de energia cinética devido aos jatos através de S_{L_0} , quando

se toma o domínio fluido Ω_0 . WU (1998), implicitamente, desprezita o fluxo de

energia cinética devido aos jatos, ao assumir $\partial \phi / \partial t \equiv 0$ válida em toda a extensão da

superfície S_{L_0} .

6 – Obtenção da expressão para o coeficiente de

impacto, para o caso de um cilindro infinito e de uma esfera

O presente capítulo tem como intenção explicitar o processo de obtenção da expressão para a força hidrodinâmica vertical de impacto, para o caso de um cilindro infinito e de uma esfera. Para tal integra-se o campo de pressão fluída sobre a superfície molhada do corpo. Em ambos os casos, são tomadas tanto a abordagem de VON KÁRMÁN (1929), como a de WAGNER (1931) para se obter a taxa de expansão da superfície molhada do corpo. Primeiramente, considera-se que a velocidade de penetração do corpo é constante, i. e., penetração forçada. Depois, toma-se o caso em que o corpo está livre para penetrar o fluido, sendo, assim, sua velocidade variável.

Como o campo de pressão está diretamente relacionado com o potencial de velocidade do escoamento através de (4.2.6), deve-se obter primeiramente o potencial de velocidade na superfície plana equivalente (no sentido da fig. 4.2.2.1-1) em ambos os casos, i. e., em uma placa plana retangular e em um disco circular.

Uma vez que o cilindro é infinito, o problema torna-se bidimensional. Na placa plana retangular, o escoamento é obtido utilizando-se de uma ferramenta disponível na teoria de funções analíticas¹ a uma variável complexa, conhecida como mapeamento conforme. Essa técnica consiste em mapear uma determinada geometria em uma outra mais simples e conhecida, substituindo então o escoamento do fluido e o perfil do corpo

¹ A teoria de funções analíticas a uma variável complexa não será aqui estendida, podendo ser encontrada em qualquer livro que trate de análise complexa. A citar, PENNISI (1963) e SPIEGEL (1973).

Posteriormente, WAGNER (1931) aponta que considerar uma relação apenas de uma relação geométrica entre esse e a profundidade de penetração do corpo. VON KARMAN (1929) propôs que o parâmetro $a(t)$ poderia ser obtido através

WAGNER (1931)).

VON KARMAN (1929)) e também da deflexão da superfície fluida (abordagem de e a superfície fluida, em função da profundidade de penetração do corpo) (abordagem de por $a = a(t)$, depende do conhecimento da propagação da área de contato entre o corpo variação da massa adicional. A obtenção desse parâmetro do problema, representado fluido é fundamental em cada caso, pois essa está diretamente relacionada com a O conhecimento da velocidade de expansão da linha de contato entre o corpo e o

coordenada tende a zero, a forma do elipsóide tende à de um disco circular.

desse sistema faz-se constante na superfície de um elipsóide. Dessa forma, quando tal caso limite de uma das dimensões do elipsóide oblato, já que uma das coordenadas sistema de coordenadas elípticas (caso oblato). O disco pode ser obtido, tomando-se o de seu eixo, e sem rotação. É conveniente descrever o disco circular, utilizando-se o irrotacional e devido ao movimento de um corpo axissimétrico, que se move na direção analíticas tornam-se menos severas, quando se adota a hipótese de que o escoamento é problemas bidimensionais, adequados aos tridimensionais. No entanto, as dificuldades analíticas a uma variável complexa, não há método equivalente àquela utilizado em Já no caso da esfera, o problema é tridimensional. Dentro da teoria de funções

um segmento de reta que faz entre os pontos $(-1,0)$ e $(+1,0)$ do outro plano.

então utilizar a transformação conforme que mapeia um círculo de raio unitário, para através da função analítica $f, i. e., z = f(z) e z = f^{-1}(z)$. Nesse caso, é conveniente conhecido, no plano complexo Z . As variáveis complexas Z e z estão relacionadas no plano complexo z , por um escoamento fictício através de um perfil geométrico

geométrica entre $a(t)$ e a profundidade de penetração não estaria de todo correta. WAGNER (1931) mostrou que deveria ser levado em conta o efeito do empilhamento do fluido por sobre a lateral do corpo, que produzia uma sensível alteração na propagação da área de contato.

Nesse contexto, insere-se nas páginas seguintes, o desenvolvimento matemático da obtenção da força hidrodinâmica vertical de impacto, para os casos de um cilindro infinito e de uma esfera. Em ambas as situações, utilizam-se as abordagens de VON KÁRMÁN (1929) e de WAGNER (1931).

6.1 – Coeficiente de impacto para o caso de um cilindro infinito (velocidade forçada constante)

Analisam-se então os instantes iniciais do impacto de um cilindro infinito, i. e., $t \rightarrow 0^+$ (tende a zero pela direita), considerando-se que sua velocidade de penetração é constante.

Seja então o caso de um cilindro circular de comprimento infinito que penetra o fluido com velocidade constante de magnitude U (ver fig. 6.1-1).

Como o cilindro é infinito, é conveniente expressar a força hidrodinâmica vertical de impacto por unidade de comprimento do cilindro.

Ao se cortar um cilindro em seu sentido axial, tem-se como seção, um retângulo. Dessa forma, a placa plana equivalente assume a forma de uma placa plana retangular. Assim, o sistema de coordenadas mais conveniente para a descrição do problema é o das retangulares, onde não se faz necessário o uso do eixo Y (perpendicular ao plano do

bidimensional (o fato de ser infinito elimina possíveis efeitos de borda na direção y).
 papel), pois devido ao comprimento infinito do cilindro, o problema torna-se

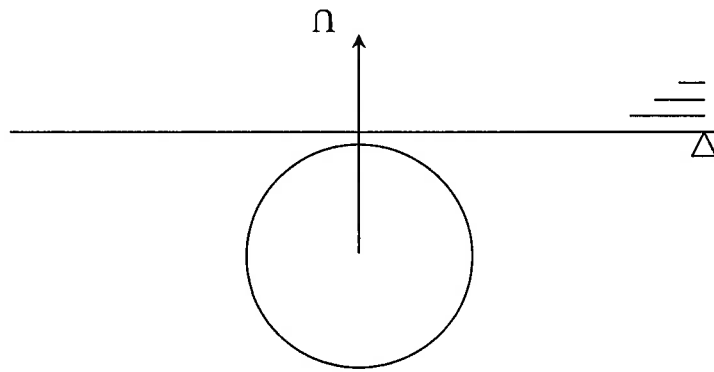


Fig. 6.1-1: Momentos antes do impacto hidrodinâmico de um cilindro de comprimento infinito (vista da seção).

O problema de contorno simplificado, no sentido da fig 4.2.2.3-4, é nesse caso representado pela fig. 6.1-2.

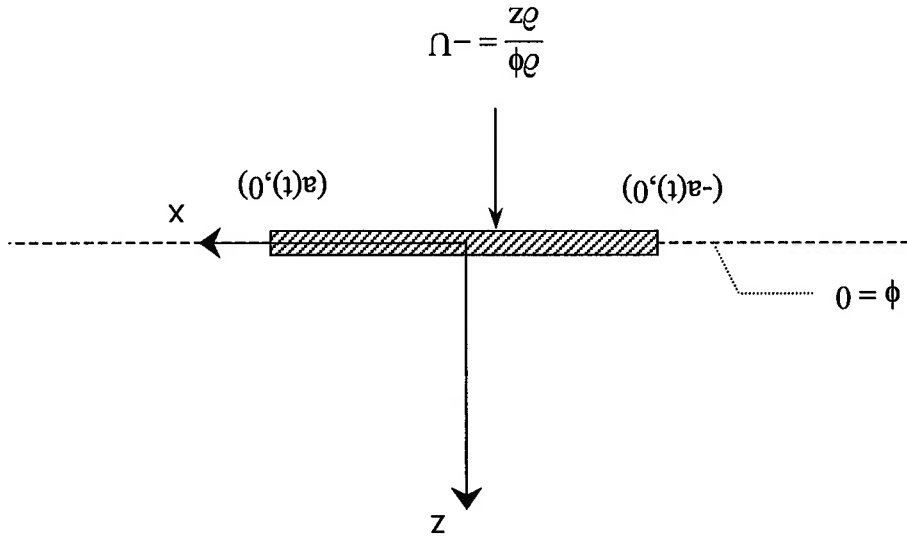


Fig. 6.1-2: Problema de contorno resultante da análise simplificada do impacto hidrodinâmico de um cilindro infinito.

O potencial de velocidade na placa retangular é dado por (ver apêndice E.1)

$$(6.1.1) \quad \phi = -U(a^2 - x^2)^{1/2}, \text{ para } |x| < a, z = 0$$

Para o caso de velocidade de penetração constante, pode-se usar (4.3.1.1) para se

determinar a força de impacto, i. e.

$$(6.1.2) \quad F_z = \int_{-a}^{+a} p \, d\ell = \int_{-a}^{+a} p \, dx = - \int_{-a}^{+a} \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dx$$

Logo, de (6.1.1) em (6.1.2) tem-se

$$(6.1.3) \quad F_z = \rho U a \frac{d}{d t} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^{1/2} \, dx$$

Como

$$(6.1.4) \quad \int_{+a}^{-a} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \, dx = \arcsen \frac{a}{x} \Big|_{+a}^{-a} = \pi/2 - (-\pi/2) = \pi,$$

(6.1.3) torna-se

$$(6.1.5) \quad F_z = \pi \rho U a \frac{d}{d t} \left(\frac{\pi a^2}{2} \right)$$

Note que $\rho r a^2 / 2$ é a massa adicional associada ao movimento de uma placa

plana retangular de largura $2a$, no sentido perpendicular ao plano da placa (ver apêndice

D.8).

6.1.1 – Abordagem de Von Kármán para obtenção do parâmetro $a(t)$

A relação geométrica entre o parâmetro $a(t)$ e a profundidade de penetração é

obtida do teorema de Pitágoras (ver fig. 6.1.1-1), ou seja,

$$(R - Ut)^2 + a^2 = R^2 \Leftrightarrow a^2 = 2UR - (Ut)^2 \quad (6.1.1.1)$$

Como a profundidade de penetração é pequena se comparada com o raio do

corpo, então

$$a^2 = 2UR - (Ut)^2 \approx 2UR \quad (6.1.1.2)$$

Utilizando-se então (6.1.5) e (6.1.1.2), tem-se por fim

$$\hat{F}_z = \rho \pi U^2 R \quad (6.1.1.3)$$

É conveniente expressar a força de impacto através de um adimensional, nesse

caso, o coeficiente de impacto. MOGHISI e SQUIRE (1981) apontam que o coeficiente

de impacto pode ser definido como

(6.1.1.6)

$$C_l = \pi$$

Por fim, substituindo-se (6.1.1.3) em (6.1.1.5), obtêm-se

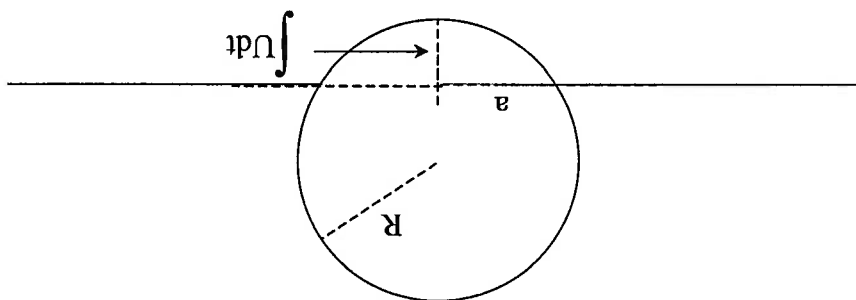
(6.1.1.5)

$$C_l \equiv \frac{F_z}{F_z} = \frac{F_z}{\frac{1}{2} \rho U^2 2R} = \frac{F_z}{\frac{1}{2} \rho U^2 2R}$$

Para o caso de um cilindro infinito, (6.1.1.4) deve então se tornar

impacto de um cilindro infinito.

Fig. 6.1.1-1: Definição do parâmetro "a" na abordagem de Von Kármán, no



(6.1.1.4)

$$C_l \equiv \frac{|F_z|}{\frac{1}{2} \rho U^2 A_r}$$

6.1.2 – Abordagem de Wagner para obtenção do parâmetro $a(t)$

A abordagem de WAGNER (1931) difere da de VON KARMÁN (1929) por considerar o fenômeno de empilhamento do fluido por sobre a lateral do corpo. É conveniente descrever a deflexão da superfície livre a partir do fundo do corpo, pois desse modo, essa fica diretamente relacionada com o parâmetro $a(t)$.

Para se obter a deflexão da superfície livre, deve-se conhecer o campo de escoamento em $|x| > a$.

Como discutido anteriormente, o potencial de velocidade nas proximidades do corpo pode ser aproximado por

$$\phi = \phi_{\text{placa}} + \phi_{\text{uniforme}}, \text{ em } |x| > a \quad (6.1.2.1)$$

De FOX e MACDONALD (1988), obtêm-se o clássico resultado para o escoamento uniforme, i. e.

$$\phi_{\text{uniforme}} = -Uz \quad (6.1.2.2)$$

Para $|x| > a$, em $z = 0$, tem-se de (E.1.8)

$$\phi_{\text{placa}} = iU(x^2 - a^2)^{1/2} \quad (6.1.2.3)$$

Como $\Phi = \phi + i\psi$, é imediato que em $|x| > a$ e $z = 0$, tenha-se

tem-se então de (4.2.2.4)

$$h = \int_0^0 \frac{\partial h}{\partial t} dt, \quad (6.1.2.8)$$

Como

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{|x| > a, z=0} = xU(x^2 - a^2)^{-1/2} - U \quad (6.1.2.7)$$

Logo

$$u_z \Big|_{|x| > a, z=0} = xU(x^2 - a^2)^{-1/2} - U \quad (6.1.2.6)$$

Utilizando-se (6.1.2.2) e (6.1.2.4), (6.1.2.5) fica

$$u_z \Big|_{|x| > a, z=0} = -\frac{\partial}{\partial x}(\psi_{\text{placa}}) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi_{\text{uniforme}}) \quad (6.1.2.5)$$

de ambos os escoamentos, em $z = 0$, i. e.

A velocidade vertical da superfície livre é igual à soma das velocidades verticais

$$\psi_{\text{placa}} = U(x^2 - a^2)^{1/2} \quad (6.1.2.4)$$

Substituindo-se (6.1.2.12) em (6.1.2.11), tem-se

$$(6.1.2.12) \quad \zeta(a) = U \left(\frac{da}{dt} \right)^{-1}$$

Toma-se o caso particular em que $H = H(x)$ é a função que descreve a geometria do fundo do cilindro (ver fig. 6.1.2-2). Supondo H conhecida, (6.1.2.11) torna-se uma equação integral em a , após a seguinte mudança de variáveis

$$(6.1.2.11) \quad H = h + \int_1^0 U dt = \int_1^0 x U (x^2 - a^2)^{-1/2} dt$$

1). Sendo assim, H é obtida

cilindro, portanto, deve-se somar a parcela $\int U dt$ à expressão (6.1.2.10) (ver fig. 6.1.2-

Mas, deseja-se obter a elevação da superfície livre, em relação ao fundo do

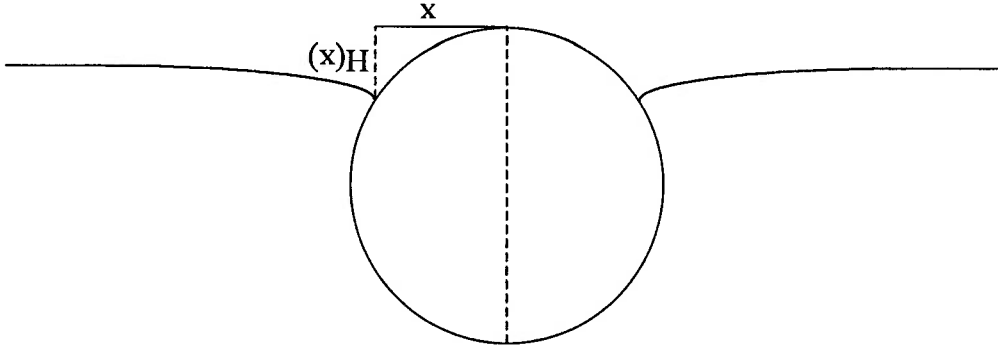
$$(6.1.2.10) \quad h = \int_1^0 [x U (x^2 - a^2)^{-1/2} - U] dt$$

Assim, de (6.1.2.7) em (6.1.2.9), tem-se

$$(6.1.2.9) \quad h = \int_1^0 \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$$

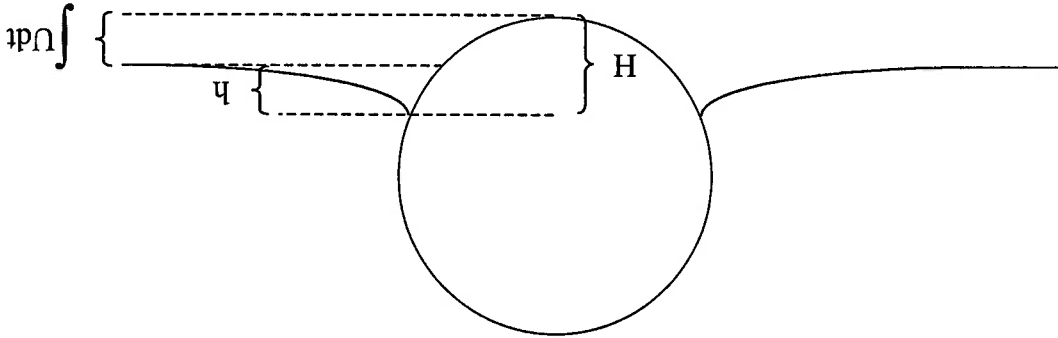
cilindro infinito.

Fig. 6.1.2-2: Definição da função $H(x)$ na análise de Wagner, para o caso do



do cilindro infinito.

Fig. 6.1.2-1: Definição dos parâmetros H e h na análise de Wagner, para o caso



(6.1.2.14)

$$H(x) = \beta_0 x + \beta_1 x^2 + \dots + \beta_n x^{n+1}$$

do fundo do cilindro por uma série de potências do tipo

De acordo com WAGNER (1931), é interessante aproximar a forma geométrica

(6.1.2.13)

$$H(x) = \int_x^0 (x^2 - a^2)^{-1/2} \zeta \, dc$$

Então, de (6.1.2.14) em (6.1.2.13), tem-se

$$\beta_0 x + \beta_1 x^2 + \dots + \beta_n x^{n+1} = \int_x^0 (x^2 - a^2)^{-1/2} \zeta \, da \quad (6.1.2.15)$$

A forma do membro esquerdo da equação acima sugere para ela, uma solução do

tipo

$$\zeta(a) = \alpha_0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_n a^n \quad (6.1.2.16)$$

Substituindo a expressão acima em (6.1.2.15), obtém-se pela propriedade de

integrals e pela identidade de polinômios

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} \beta_0, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{4} \beta_2, \quad \alpha_3 = \frac{2}{3} \beta_3, \quad \alpha_4 = \frac{3\pi}{16} \beta_4, \quad \dots \quad (6.1.2.17)$$

De acordo com FALTINSEN (1990), toma-se por hipótese uma aproximação de

primeira ordem em a , para ζ , i. e.

$$\zeta \approx \frac{\pi}{2} \beta_0 + \beta_1 a \quad (6.1.2.18)$$

Conseqüentemente, (6.1.2.14) torna-se

$$H \approx \beta_0 x + \beta_1 x^2 \quad (6.1.2.19)$$

uma vez que U é suposta constante. Logo, é imediato que

$$\frac{a}{2R} = U \left(\frac{da}{dt} \right)^{-1} \Leftrightarrow \int a da = 2UR \int dt, \quad (6.1.2.24)$$

Da própria definição de ψ e de (6.1.2.23), tem-se

$$\psi(a) = \frac{a}{2R} \quad (6.1.2.23)$$

Logo, (6.1.2.18) torna-se

$$\beta_0 = 0 \quad e \quad \beta_1 = 1/2R \quad (6.1.2.22)$$

Então, da analogia com (6.1.2.19), tem-se que

$$x^2 \approx 2RH \Leftrightarrow H \approx x^2/2R \quad (6.1.2.21)$$

Como o estágio inicial está relacionado a uma pequena profundidade de penetração, tem-se que $R \gg H$. Assim (6.1.2.20) pode ser aproximada por

$$x^2 + (R-H)^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 = H(2R-H) \quad (6.1.2.20)$$

De acordo com a fig. 6.1.2-2, tem-se a seguinte relação

De (6.2.1) em (6.1.2), tem-se então

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\sqrt{a^2 - x^2} \frac{dU}{dt} - \frac{Uc}{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{da}{dt} \quad (6.2.1)$$

Utilizando-se novamente de (6.1.1), porém considerando-se $U = U(t)$, tem-se

penetração é variável.

O caso de penetração livre pode ser visto como aquele em que o cilindro infinito atinge a superfície fluida, após uma queda livre. Dessa análise resulta uma equação diferencial ordinária de segunda ordem e não-linear, uma vez que a velocidade de

6.2 – Coeficiente de impacto para o caso de um cilindro infinito (velocidade variável)

6.2 – Coeficiente de impacto para o caso de um cilindro

$$C_I = 2\pi \quad (6.1.2.27)$$

Assim, de (6.1.1.4), tem-se

$$\dot{F}_z = U \frac{d}{dt} \left(\rho \frac{\pi}{2} 4U^2 R \right) = 2\rho\pi U^2 R \quad (6.1.2.26)$$

Utilizando-se por fim de (6.1.7), tem-se que

$$a(t) = 2\sqrt{U^2 R} \quad (6.1.2.25)$$

$$F_z = \frac{1}{2} \rho \pi a^2 \frac{dU}{dt} + \rho \pi U a \frac{da}{dt} \quad (6.2.5)$$

(6.2.2) torna-se

$$\int_{+a}^{-a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{sen}^{-1} \frac{x}{a} \Big|_{+a}^{-a} = \pi/2 - (-\pi/2) = \pi, \quad (6.2.4)$$

e,

$$\int_{+a}^{-a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{2}{3} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{2}{3} a^2 \text{sen}^{-1} \frac{x}{a} \Big|_{+a}^{-a} = \frac{2}{3} a^2 (\pi/2 - (-\pi/2)) = \frac{2}{3} \pi a^2 \quad (6.2.3)$$

Como

$$F_z = \rho \frac{dU}{dt} \int_{+a}^{-a} \sqrt{a^2 - x^2} dx + \rho U a \frac{da}{dt} \int_{+a}^{-a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (6.2.2)$$

$$\hat{F}_z = \int_{+a}^{-a} \left(\rho \sqrt{a^2 - x^2} \frac{dU}{dt} + \rho \frac{U a}{da} \frac{dt}{dx} \right) dx \Rightarrow$$

6.2.1 – Abordagem de Von Kármán

Utilizando-se a fig. 6.2.1-1, e reconhecendo-se que a profundidade de penetração

b é dada por $b = \int U dt$, tem-se a seguinte relação

$$(6.2.1.1) \quad \left(R - \int U dt \right)^2 + a^2 = R^2 \Rightarrow a^2 = 2R \int U dt - \left(\int U dt \right)^2$$

Analogamente ao caso anterior, para pequenas profundidades de penetração, é

válido

$$(6.2.1.2) \quad a^2 \approx 2R \int U dt$$

Substituindo-se (6.2.1.2) em (6.2.5), obtém-se

$$(6.2.1.3) \quad \bar{F}_z = p\pi R \left(\int U dt \right) \frac{dU}{dt} + p\pi U^2 R$$

De (6.2.1.3) e da lei de Newton, i. e., $\bar{m} \frac{dU}{dt} = -\bar{F}_z$, tem-se a seguinte equação

integro-diferencial

$$(6.2.1.4) \quad \frac{dU}{dt} + \frac{\left(\bar{m} \frac{dU}{dt} + \int U dt \right) p\pi R}{U^2} = 0$$

Uma vez que

$$\int U dt = b, \quad (6.2.1.5)$$

$$U = \dot{b}, \quad (6.2.1.6)$$

e

$$\frac{dU}{dt} = \ddot{b}, \quad (6.2.1.7)$$

(6.2.1.4) pode ser reescrita como

$$\ddot{b} + \frac{\left(\frac{m}{p\pi R} + b \right)}{b^2} = 0 \quad (6.2.1.8)$$

A equação acima é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não-

linear. Seus valores iniciais são

$$b(0) = 0, \quad (6.2.1.9)$$

e

$$\dot{b}(0) = U_0 \quad (6.2.1.10)$$

Reconhecendo as variáveis adimensionais como sendo dadas por

$$(6.2.1.11) \quad b' = \frac{R}{b},$$

$$(6.2.1.12) \quad b' = \frac{U_0}{b},$$

$$(6.2.1.13) \quad b' = \frac{g}{b},$$

e

$$(6.2.1.14) \quad t' = \frac{U_0 t}{R}$$

tem-se que (6.2.1.8), (6.2.1.9) e (6.2.1.10) tornam-se respectivamente

$$(6.2.1.15) \quad \ddot{b}' + \frac{2\mu b'^2}{(\frac{1}{2}\sigma + b')} = 0,$$

$$(6.2.1.16) \quad b'(0) = 0,$$

$$(6.2.1.17) \quad \dot{b}'(0) = 1,$$

onde aqui se define

$$\hat{m} = \frac{1}{2} \rho \pi R^2,$$

e

$$\mu = \frac{Z}{R},$$

(6.2.1.19)

onde Z é a altura de queda livre do corpo.

Para se obter o coeficiente de impacto, nesse caso, deve-se resolver a equação

diferencial (6.2.1.15), com os valores iniciais (6.2.1.16) e (6.2.1.17).

6.2.1.1 – Resolução analítica da equação diferencial de movimento do cilindro

infinito, para o caso particular em que $l/2\sigma \gg b'$

Uma maneira de simplificar a resolução de (6.2.1.15), permitindo inclusive que essa seja resolvida analiticamente, é tomar o caso particular em que $\frac{1}{2}\sigma \gg b'$. Essa hipótese é bastante pertinente, uma vez que na maioria das situações, a densidade do material que compõe o cilindro é superior à densidade da água, e ainda se tem que, no estágio inicial, os valores para a profundidade de penetração são bem menores que o raio do corpo. Note que de fato

(6.2.1.1.1)

$$\sigma = 2 \frac{p_c \pi R^2}{p \pi R^2} = 2 \frac{p_c}{p}$$

Assim, como o modelo proposto é para pequenas profundidades de penetração, i.

e., para $b' < 1$, então (6.2.1.15) torna-se

(6.2.1.1.2)

$$b' + \frac{\sigma}{4\mu b'^2} = 0$$

Definindo um novo adimensional, como sendo

(6.2.1.1.3)

$$g = \frac{\sigma}{\mu}$$

tem-se que (6.2.1.1.2) torna-se

(6.2.1.1.4)

$$b' + 4gb'^2 = 0$$

Tomando-se $b' = \beta$ em (6.2.1.1.4), onde é uma variável auxiliar, tem-se

(6.2.1.1.5)

$$\beta + 4g\beta = 0,$$

cujas soluções é dada por

(6.2.1.1.6)

$$\beta(t) = \beta(0)e^{-4gt}$$

Logo,

$$b'(t) = b'(0)e^{-49t} \quad (6.2.1.1.7)$$

De (6.2.1.1.7), (6.2.1.1.7) fica

$$\dot{b}'(t) = e^{-49t} \quad (6.2.1.1.8)$$

Diferenciando-se (6.2.1.1.8), tem-se

$$b''(t) = -49e^{-49t} \quad (6.2.1.1.9)$$

Integrando-se (6.2.1.1.8), tem-se

$$b'(t) = b'(0) + \frac{1}{e^{-49t}} - \frac{49}{49} \quad (6.2.1.1.10)$$

E, por fim, de (6.2.1.10), (6.2.1.1.10) fica

$$b'(t) = \frac{1}{1 - e^{-49t}} - \frac{49}{49} \quad (6.2.1.1.11)$$

As equações (6.2.1.1.8), (6.2.1.1.9) e (6.2.1.1.11) são, respectivamente, a função espaço, velocidade e aceleração adimensionalizadas.

relação a (6.1.1.6).

Note então que há um termo adicional, de segunda ordem, em (6.2.1.1.16) em

$$(6.2.1.1.16) \quad C_1(\varepsilon) = \pi \left(1 - \frac{4\mu}{\sigma} \varepsilon^2 \right)$$

rearranjada para

E por fim, utilizando-se (6.2.1.1.3) e (4.3.3.2), a expressão acima pode ser

$$(6.2.1.1.15) \quad C_1(t) = \pi(1 - 49t)$$

para pequenos instantes de tempo, tem-se então de (6.2.1.1.14) em (6.2.1.1.12) que

$$(6.2.1.1.14) \quad e^{-49t} \cong 1 - 49t,$$

e aproximando-a por

$$(6.2.1.1.13) \quad e^{-49t} = 1 - 49t + \frac{(-49t)^2}{2!} + \dots + \frac{(-49t)^n}{n!},$$

Tomando-se a expansão em série de e^{-49t} , i. e.

$$(6.2.1.1.12) \quad C_1(t) = \pi e^{-49t}$$

De (6.2.1.1.9), (6.2.1.1.3) e (6.1.1.5), tem-se

6.2.1.2 – Resolução numérica da equação diferencial de movimento do cilindro

infinito, para um valor genérico de σ

No caso de σ assumir um valor genérico, de tal maneira que a simplificação empregada acima não possa ser utilizada, usa-se um método de integração numérica para se resolver (6.2.1.15). Esse método é descrito no apêndice F. A solução dessa equação é apresentada em forma de gráficos, para diferentes valores de σ e μ , e podem ser encontrados no capítulo 8.

6.2.2 – Abordagem de Wagner

Na análise de Wagner, deve-se usar (6.1.2.24). Dessa forma, considerando que a velocidade de penetração é variável com o tempo, tem-se

$$(6.2.2.1) \quad \frac{a}{2R} = U \left(\frac{da}{dt} \right)^{-1} \Rightarrow a^2 = 4R \int U dt$$

Analogamente à abordagem de Von Kármán, obtêm-se

$$(6.2.2.2) \quad \boxed{b + \frac{b^2}{2\rho R} = 0}$$

com os valores iniciais

(6.2.2.3)

$$b(0) = 0$$

(6.2.2.4)

$$\dot{b}(0) = U_0$$

A forma adimensionalizada das equações acima é

(6.2.2.5)

$$\ddot{b} + \frac{2\mu b^2}{(\frac{1}{4}\sigma + b')} = 0$$

(6.2.2.6)

$$b'(0) = 0$$

(6.2.2.7)

$$\dot{b}'(0) = 1$$

Empregando um procedimento análogo ao utilizado na abordagem de Von

Kármán, obtém-se

(6.2.2.8)

$$C_1(\varepsilon) = 2\pi \left(1 - \frac{\sigma}{4\mu \varepsilon^2} \right)$$

Analogamente à abordagem de Von Kármán, nota-se em (6.2.2.8) um termo de

segunda ordem em relação à (6.1.2.27).

A expressão (6.2.8) só é válida para o caso em que $\frac{z}{b} \sigma \gg b'$. Para o caso de σ assumir um valor genérico, usa-se o mesmo método numérico anteriormente mencionado, e apresenta-se a solução de (6.2.5) em forma de gráficos (ver capítulo 8).

6.3 – Coeficiente de impacto para o caso de uma esfera (velocidade forçada constante)

Analisa-se agora o caso em que o corpo de impacto é uma esfera (ver fig. 6.3-1). No caso da esfera, a superfície plana equivalente é um disco circular. Uma vez obtido o potencial de velocidade no disco e a componente vertical da velocidade da superfície livre, a obtenção da força hidrodinâmica vertical de impacto e da equação diferencial de movimento (quando sua velocidade de penetração é variável) são análogas ao caso do cilindro. O sistema de coordenadas utilizado na descrição do problema é o das elípticas oblatas.

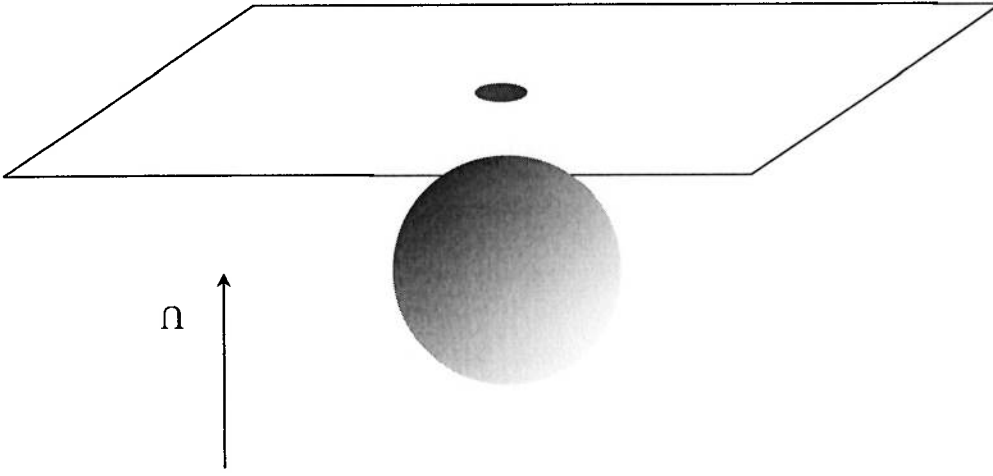


Fig. 6.3-1: Momentos antes do impacto hidrodinâmico de uma esfera.

O problema de contorno simplificado é agora representado pela fig. 6.3-2. O potencial de velocidade para $r < a$ em $z = 0$, i. e., no disco circular, é (ver apêndice E.2)

$$\phi = -\frac{\pi}{2U}(a^2 - r^2)^{1/2}, \text{ para } r < a, z = 0 \tag{6.3.1}$$

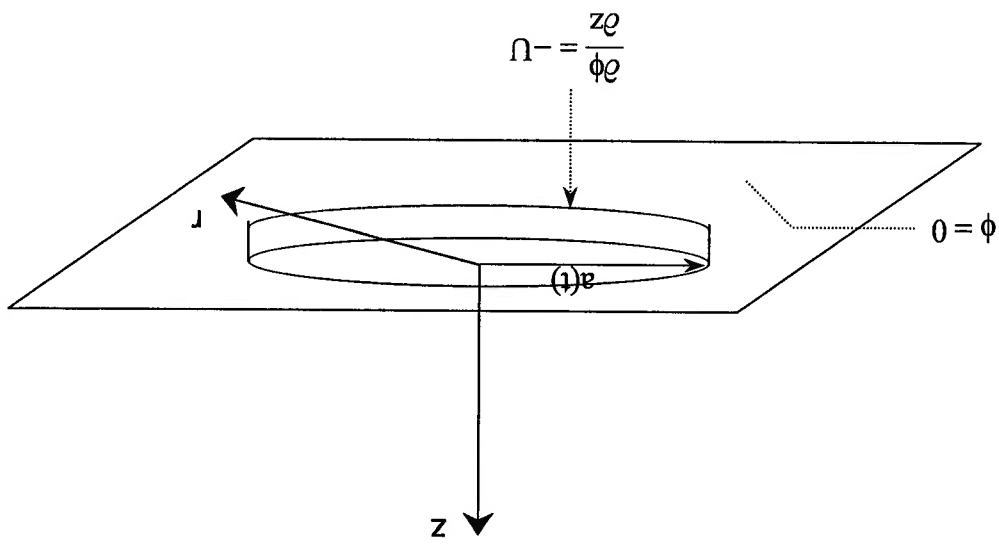


Fig. 6.3-2: Problema de contorno resultante da análise simplificada do impacto hidrodinâmico de uma esfera.

Integrando-se o campo de pressão sobre S_c , tem-se

$$F_z = \int_{S_c} p \, dS = \int_a^{s_c} \int_0^{2\pi} p r \, dr \, d\theta \tag{6.3.2}$$

Então de (4.2.6), (6.3.1) e (6.3.2) tem-se

Utilizando-se então (6.3.5) e (6.3.1.1), tem-se

$$a^2 = 2Ua^2 - (Ut)^2 \Rightarrow a^2 = 2Ua^2 \quad (6.3.1.1)$$

obtida do teorema de Pitágoras (ver fig. 6.3.1-1), ou seja

A relação geométrica entre o parâmetro $a(t)$ e a profundidade de penetração é

6.3.1 – Abordagem de Von Kármán para obtenção do parâmetro $a(t)$

apêndice D.8).

Note que $4\rho a^3/3$ é a massa adicional associada a um disco de raio a (ver

$$F_z = 4\rho U a^2 \frac{da}{dt} \equiv U \frac{d}{dt} \left(\frac{4\rho a^3}{3} \right) \quad (6.3.5)$$

(6.3.3) torna-se

$$\int_a^0 \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = -\sqrt{a^2 - r^2} \Big|_a^0 = 0 - (-a) = a, \quad (6.3.4)$$

Como

$$F_z = \frac{\pi}{2} \rho U a \frac{da}{dt} \int_a^0 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r dr d\theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} \quad (6.3.3)$$

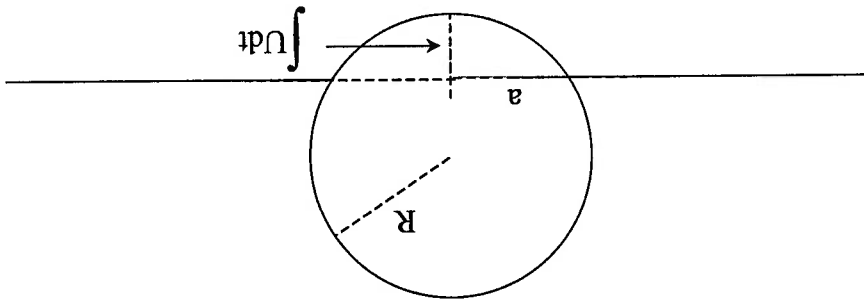
$$C_1(\epsilon) = \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \epsilon$$

(6.3.1.4)

Logo, de (6.3.1.2) em (6.3.1.3) tem-se

de uma esfera (seção em corte).

Fig. 6.3.1-1: Definição do parâmetro "a" na análise de Von Kármán, no impacto



$$C_1 \equiv \frac{F_z}{\frac{1}{2} \rho U^2 \pi R^2}$$

(6.3.1.3)

No caso da esfera, o coeficiente de impacto torna-se

$$F_z = 4\sqrt{2} \rho U^2 R^2 \left(\frac{U t}{R} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(6.3.1.2)

6.3.2–Abordagem de Wagner para obtenção do parâmetro $a(t)$

Analogamente ao caso do cilindro infinito, para se prosseguir com a análise de Wagner, deve-se obter a componente vertical da velocidade da superfície livre em

$$r > a, z = 0.$$

Assim, do apêndice E.2, têm-se que

$$(6.3.2.1) \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{r>a, z=0} = \frac{2U}{r^2} \left[\left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right)^{-1/2} - \text{sen}^{-1} \frac{r}{a} \right]$$

Como

$$(6.3.2.2) \quad h = \int_0^t \frac{\partial h}{\partial t} dt,$$

tem-se então de (4.2.2.4)

$$(6.3.2.3) \quad h = \int_0^t \frac{\partial \phi}{\partial z} dt$$

Assim, de (6.3.2.1) em (6.3.2.3)

$$(6.3.2.4) \quad h = \int_0^t \frac{2U}{r^2} \left[\left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right)^{-1/2} - \text{sen}^{-1} \frac{r}{a} \right] dt$$

Para se obter a elevação da superfície livre em relação ao fundo da esfera, soma-se

se $\int U dt$ à expressão (6.3.2.4) (ver fig. 6.3.2-1). Sendo assim, H é obtida

$$H = h + \int U dt = \int_0^1 U \left\{ \frac{\pi}{2} \left[\left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} - \sin^{-1} \frac{r}{a} \right] + 1 \right\} dt \quad (6.3.2.5)$$

Seja, agora, $H = H(r)$, a função que descreve a geometria do fundo da esfera (ver

fig. 6.3.2-2). Note que assim, (6.3.2.5) torna-se uma equação integral em ζ , após a

seguinte mudança de variáveis

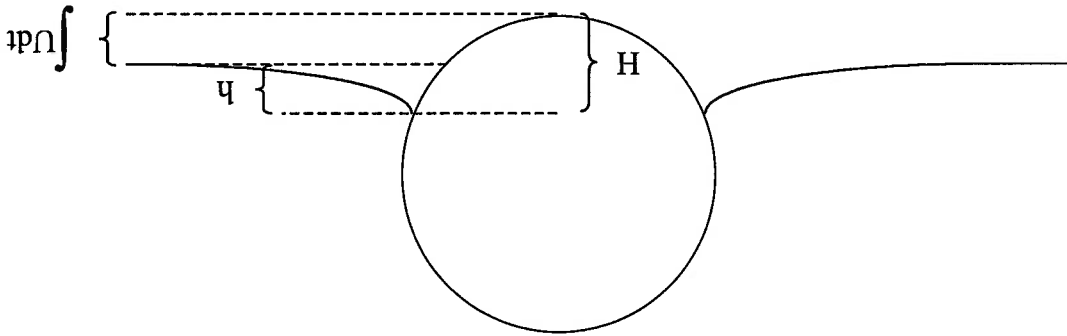


Fig. 6.3.2-1: Definição dos parâmetros H e h na análise de Wagner, para o caso

da esfera.

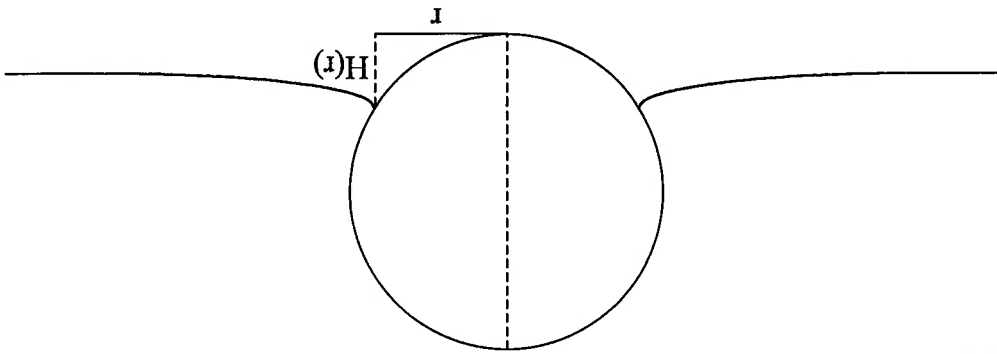


Fig. 6.3.2-2: Definição da função $H = H(r)$, na análise de Wagner, para o caso da

esfera.

de polinômios

e substituindo-a em (6.3.2.9), obtêm-se pela propriedade de integrais e pela identidade

$$\zeta(a) = \alpha_0 + \alpha_1 a + \dots + \alpha_n a^n, \tag{6.3.2.10}$$

Procurando para (6.3.2.9) uma solução da forma

$$\beta_0 r + \beta_1 r^2 + \dots + \beta_n r^{n+1} = \int_r^0 \left\{ \frac{\pi}{2} \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{r}{a} \right\} \zeta da \tag{6.3.2.9}$$

tem-se então de (6.3.2.7), que

$$H(r) = \beta_0 r + \beta_1 r^2 + \dots + \beta_n r^{n+1}, \tag{6.3.2.8}$$

da esfera por uma série de potências do tipo

Aproximando, de acordo com WAGNER (1931), a forma geométrica do fundo

$$H(r) = \int_r^0 \left\{ \frac{\pi}{2} \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{r}{a} \right\} \zeta da \tag{6.3.2.7}$$

Então, substituindo-se (6.3.2.6) em (6.3.2.5), obtêm-se

$$\zeta(a) = U \left(\frac{da}{dt} \right)^{-1} \tag{6.3.2.6}$$

$$\beta_0 = 0 \quad \text{e} \quad \beta_1 = 1/2R \quad (6.3.2.16)$$

Da analogia com (6.3.2.13), tem-se que

$$r^2 \cong 2RH \quad (6.3.2.15)$$

É razoável supor que $R \gg H$, já que o estágio inicial do impacto se dá a pequenas profundidades de penetração. Assim, (6.3.2.14) fica

$$r^2 + (R - H)^2 = R^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = 2RH - H^2 \quad (6.3.2.14)$$

De acordo com a fig. 6.3.2-2, tem-se a seguinte relação

$$H \cong \beta_0 r + \beta_1 r^2 \quad (6.3.2.13)$$

o que toma (6.3.2.8) como

$$\zeta \cong \frac{4}{\pi} \beta_0 + \frac{3}{4} \beta_1 a, \quad (6.3.2.12)$$

primeira ordem em a , para ζ , i. e.

De acordo com FALTINSEN e ZHAO (1997), toma-se uma aproximação de

$$\alpha_0 = \frac{4}{\pi} \beta_0, \quad \alpha_1 = \frac{3}{4} \beta_1, \quad \alpha_2 = \frac{16}{\pi} \beta_2, \quad \alpha_3 = \frac{15}{32} \beta_3, \quad \alpha_4 = \frac{128}{25\pi} \beta_4, \quad \dots \quad (6.3.2.11)$$

Logo, (6.3.2.10) torna-se

$$(6.3.2.17) \quad \zeta(a) = \frac{2}{3R} a$$

Da própria definição de ζ e de (6.3.2.17), tem-se

$$(6.3.2.18) \quad a(t) = \sqrt{3UtR}$$

Utilizando-se por fim de (6.3.5) e do resultado acima, chega-se a

$$(6.3.2.19) \quad F_z = 6\rho U^2 R \sqrt{3UtR}$$

Recorrendo à definição do coeficiente de impacto para o caso da esfera, i. e.

$$(6.3.2.20) \quad C_i \equiv \frac{F_z}{\frac{1}{2}\rho U^2 \pi R^2},$$

tem-se

$$(6.3.2.21) \quad C_i(\varepsilon) = \frac{\pi}{12\sqrt{3}} \varepsilon$$

6.4 – Coeficiente de impacto para o caso de uma esfera (velocidade variável)

Analogamente ao caso do cilindro infinito, esse procedimento também resulta em uma equação diferencial ordinária de segunda ordem e não-linear.

6.4.1 – Abordagem de Von Kármán

Utilizando-se novamente de (6.3.1), tem-se

$$(6.4.1.1) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\pi}{2} \left(\sqrt{a^2 - r^2} \frac{dU}{da} + \frac{Ua}{\sqrt{a^2 - r^2}} \frac{dt}{da} \right)$$

De (6.4.1.1) em (4.2.6), tem-se então

$$(6.4.1.2) \quad F_z = 4\rho \left(\frac{dU}{dt} \int_a^0 \sqrt{a^2 - r^2} dr + Ua \frac{da}{dt} \int_a^0 \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} dr \right)$$

Como

$$(6.4.1.3) \quad \int_a^0 \sqrt{a^2 - r^2} dr = -\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{3/2} \Big|_a^0 = \frac{2}{3} a^3,$$

e

De (6.4.1.8) e da lei de Newton, i. e., $m \frac{dU}{dt} = -F_z$, tem-se a seguinte equação

$$F_z = \frac{3}{8} \rho R^{\frac{3}{2}} \sqrt{\int U dt} + 4\sqrt{2} \rho R^{\frac{3}{2}} \sqrt{\int U dt U^2} \quad (6.4.1.8)$$

Substituindo-se (6.4.1.7) em (6.4.1.5), obtém-se

$$a^2 \approx 2R \int U dt \quad (6.4.1.7)$$

é válido

Analogamente ao caso do cilindro, para pequenas profundidades de penetração,

$$\left(R - \int U dt \right)^2 + a^2 = R^2 \Rightarrow a^2 = 2R \int U dt - \left(\int U dt \right)^2 \quad (6.4.1.6)$$

Da fig. 6.3.1-1, tem-se a seguinte relação

$$F_z = \frac{3}{4} \rho a^3 \frac{dU}{da} + 4\rho U a^2 \frac{da}{dt} \quad (6.4.1.5)$$

(6.4.1.2) torna-se

$$\int_a^0 \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = -\sqrt{a^2 - r^2} \Big|_a^0 = a, \quad (6.4.1.4)$$

$$\boxed{b(0) = 0}$$

(6.4.1.14)

linear. Seus valores iniciais são

A equação acima é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não-

$$\boxed{\ddot{b} + \frac{4\sqrt{2}\rho R^{\frac{3}{2}}\sqrt{b^2}}{m + \frac{3}{8}\sqrt{2}}\rho R^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}} = 0}$$

(6.4.1.13)

(6.4.1.9) pode ser reescrita como

$$\frac{dU}{dt} = \ddot{b},$$

(6.4.1.12)

e

$$U = \dot{b},$$

(6.4.1.11)

$$\int U dt = b,$$

(6.4.1.10)

Uma vez que

$$\frac{dU}{dt} + \frac{4\sqrt{2}\rho R^{\frac{3}{2}}U^2\sqrt{\int U dt}}{m + \frac{3}{8}\sqrt{2}}\rho R^{\frac{3}{2}}\left(\int U dt\right)^{\frac{3}{2}} = 0$$

(6.4.1.9)

(6.4.1.15)

$$\dot{b}(0) = U_0$$

e

Reconhecendo as variáveis adimensionais como sendo dadas por

(6.4.1.16)

$$b' = \frac{b}{R},$$

(6.4.1.17)

$$b' = \frac{b}{U_0},$$

(6.4.1.18)

$$b'' = \frac{b}{g},$$

e

(6.4.1.19)

$$t' = \frac{t}{R}$$

tem-se que (6.4.1.13), (6.4.1.14) e (6.4.1.15) tornam-se respectivamente

(6.4.1.20)

$$\dot{b}' + \frac{6\mu b'^2 b'^{1/2}}{R} = 0$$

(6.4.1.21)

$$\boxed{b'(0) = 0}$$

(6.4.1.22)

$$\boxed{b'(0) = 1}$$

onde

$$\sigma = \frac{m}{4} p R^{\frac{3}{4}}$$

(6.4.1.23)

e

$$\mu = \frac{Z}{R},$$

(6.4.1.24)

Para se obter o coeficiente de impacto, nesse caso, deve-se resolver a equação diferencial (6.4.1.20), com os valores iniciais (6.4.1.21) e (6.4.1.22).

6.4.1.1 – Resolução analítica da equação diferencial de movimento da esfera, para

o caso particular em que $\sqrt{2/\sigma} \gg 2b^{3/2}$

Uma maneira de simplificar a resolução de (6.4.1.20) é tomar o caso em que $\sqrt{2/\sigma} \gg 2b^{3/2}$. Tal hipótese é bastante pertinente, uma vez que na maioria das situações, a densidade do material que compõe a esfera é superior à densidade da água. Note que

de fato

(6.4.1.1.1)

$$\sigma = \frac{\frac{3}{4} p_c \pi^2 R^3}{\frac{3}{4} p \pi R^3} = \pi \frac{p_c}{p}$$

Assim, como o modelo proposto é para pequenas profundidades de penetração, i.

e, para $b < 1$, então (6.4.1.20) torna-se

(6.4.1.2)

$$b^2 + \frac{\sigma}{6\sqrt{2} \mu b^2} = 0$$

Definindo um novo adimensional, como sendo

(6.4.1.3)

$$g = \frac{\sigma}{\mu}$$

tem-se que (6.4.1.2) torna-se

(6.4.1.4)

$$b^2 + 6\sqrt{2} \mu b^2 = 0$$

Reescrevendo (6.4.1.4) como

(6.4.1.5)

$$\frac{b^2}{6\sqrt{2} \mu} + b^2 = 0, \text{ ou ainda}$$

(6.4.1.6)

$$\frac{d}{dt} (\ln b^2) + 4\sqrt{2} \mu \frac{d}{dt} (b^{3/2}) = 0,$$

e então integrando, tem-se

$$(6.4.1.17) \quad \ell_{nb'} + 4\sqrt{29}b'^{\frac{1}{2}} = \ell_{nb'}(0)$$

De (6.4.1.21) e (6.4.1.22), (6.4.1.17) fica

$$(6.4.1.18) \quad \ell_{nb'} = -4\sqrt{29}b'^{\frac{1}{2}},$$

que então pode ser reescrita como

$$(6.4.1.19) \quad b' = e^{-4\sqrt{29}b'^{\frac{1}{2}}}$$

Tomando-se a expansão em série de $e^{-4\sqrt{29}b'^{\frac{1}{2}}}$, i. e.

$$(6.4.1.110) \quad e^{-4\sqrt{29}b'^{\frac{1}{2}}} = 1 - 4\sqrt{29}b'^{\frac{1}{2}} + \frac{(-4\sqrt{29}b'^{\frac{1}{2}})^2}{2!} + \dots + \frac{(-4\sqrt{29}b'^{\frac{1}{2}})^n}{n!},$$

e truncando-a em seu segundo termo, tem-se que (6.4.1.19) pode ser aproximada por

$$(6.4.1.111) \quad b'(t) = 1 - 4\sqrt{29}b'^{\frac{1}{2}}$$

Uma vez que se está interessado em pequenos valores de tempo, então a

aproximação até o segundo termo de (6.4.1.110) é razoável.

Analogamente ao caso do cilindro, se σ assumir um valor genérico, de tal maneira que a simplificação empregada acima não possa ser utilizada, usa-se um método de integração numérica para se resolver (6.4.1.20). Esse método é descrito no apêndice F. Os resultados são apresentados em forma de gráficos, para diferentes valores de σ e μ , e são encontrados no capítulo 8.

um valor de genérico de σ

6.4.1.2 – Resolução numérica da equação diferencial de movimento da esfera, para

Assim, a função $b'(t')$ fica dada implicitamente por (6.4.1.13).

$$\ln \left[\frac{\sqrt{1 + (2^{5/2} g)^{1/3} \sqrt{b'}} (1 + (2^{5/2} g)^{1/3} \sqrt{b'})}{-1 + (2^{5/2} g)^{1/3} \sqrt{b'}} \right] = \frac{1}{\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{1 + (2^{11} g^2)^{1/6} \sqrt{b'}}} \frac{(2g)^{2/3} \sqrt{3}}{1} t'$$

(6.4.1.13)

Resolvendo-se (6.4.1.12) obtém-se

$$\int_{b'(t')}^0 \frac{ds}{\sqrt{1 - 4\sqrt{2} g^{3/2} s}} = \int_{t'}^0 ds,$$

(6.4.1.12)

Assim, integrando-se (6.4.1.11), obtém-se

6.4.2–Abordagem de Wagner

Tomando-se agora (6.3.2.17), para o caso de velocidade variável, obtém-se

$$(6.4.2.1) \quad \frac{2a}{3R} = U \left(\frac{da}{dt} \right)^{-1} \Leftrightarrow a^2 = \frac{2}{3} R \int U dt$$

Analogamente ao que foi feito anteriormente, tem-se a equação integro-

diferencial

$$(6.4.2.2) \quad \frac{dU}{dt} + \frac{6\sqrt{3}pR^{\frac{2}{3}}U^2 \sqrt{\int U dt}}{m + 4\sqrt{3}pR^{\frac{2}{3}} \left(\int U dt \right)^{\frac{2}{3}}} = 0,$$

que pode ser escrita como uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, i. e.

$$(6.4.2.3) \quad \ddot{b} + \frac{6\sqrt{3}pR^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\sqrt{b}}{m + 4\sqrt{3}pR^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}} = 0$$

Se na forma adimensionalizada, (6.4.2.3) torna-se

$$(6.4.2.4) \quad \ddot{b} + \frac{6\mu b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma + 2b^{\frac{2}{3}}} = 0$$

Os valores iniciais (6.4.1.14), (6.4.1.15) e (6.4.1.21), (6.4.1.22) aplicam-se

respectivamente a (6.4.2.3) e (6.4.2.4).

Para $\frac{2}{3}\sigma \gg 2b^{1/2}$, a função $b' = b'(t')$ é dada implicitamente por

$$t' = \frac{\ln \left(\frac{-1 + (23^{1/2}g)^{1/3} \sqrt{b}}{1 + (23^{1/2}g)^{1/3} \sqrt{b}} \right)}{\left(\frac{1}{3g^2} \right)^{1/3}} - \frac{\left(\frac{3^{13/2}g^2}{2} \right)^{1/3} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{1 + (2 \cdot 3^{1/2}g)^{1/3} \sqrt{b}} \right)}{\sqrt{3}}$$

(6.4.2.5)

Para valores genéricos de σ , emprega-se o mesmo método numérico utilizado

na abordagem de Von Kármán, para se resolver (6.4.2.4). Assim, os resultados também

são apresentados em forma de gráficos, e são encontrados no capítulo 8.

7 – Redução da ordem da equação diferencial de movimento da esfera

Após investigação teórica, constatou-se que as equações diferenciais (6.4.1.13) e (6.4.2.3) possuem uma particularidade bastante interessante, que muito pode auxiliar na compreensão do fenômeno de impacto hidrodinâmico.

Foi considerado anteriormente no processo de obtenção dessas equações, que a velocidade de penetração da esfera seria variável. De fato, tal hipótese resultou em uma equação diferencial ordinária de segunda ordem em relação à profundidade de penetração. No entanto, para o caso da esfera, em instantes próximos do inicial, a velocidade de penetração pouco varia, permanecendo aproximadamente igual ao seu valor inicial, i. e., a velocidade com que atinge a superfície do fluido.

Nesse sentido, propõe-se uma simplificação que se traduz como

$$(7.1) \quad \int_1^0 U(\tau) d\tau \equiv tU(t),$$

onde τ é a variável de integração.

Note que para que a expressão acima seja uma igualdade, é necessário que a velocidade de penetração seja constante. Assim, está se assumindo, de fato, que a velocidade de penetração é aproximadamente constante.

No entanto, nenhuma conclusão pode ser obtida, *a priori*, sobre a derivada da velocidade, i. e., da aceleração, pois o evento de entrada da esfera na superfície fluida tem natureza impulsiva.

De (7.1) é imediato que

$$\int_0^t \dot{b}'(\tau) d\tau \equiv t \times b'(t) \tag{7.2}$$

Assim, de (7.2) em (6.4.1.13), tem-se

$$\ddot{b}'_{aprox} + \frac{9\sqrt{3}\mu b'_{aprox}}{2\sigma} (t' b'_{aprox})^{\frac{1}{2}} = 0, \tag{7.3}$$

Note da fig. 7-1 que, de fato, a velocidade de penetração da esfera permanece

praticamente constante em instantes bem próximos de zero.

Escrevendo-se (7.2) em uma forma um pouco mais genérica, tem-se

$$\ddot{b}'_{aprox} + \phi b'_{aprox} (t' b'_{aprox})^{\frac{1}{2}} = 0, \tag{7.4}$$

onde por praticidade fez-se a substituição $\phi = 6\sqrt{2}\mu/\sigma$.

E, de modo análogo, escreve-se (6.4.1.13) como

$$\ddot{b}' + \phi b' (b')^{\frac{1}{2}} = 0, \tag{7.5}$$

Os valores iniciais de (7.4) e (7.5) são os mesmos, ou seja

$$b'(0) = b'_{\text{aprox}}(0) = 0 \text{ e } b''(0) = b''_{\text{aprox}}(0) = 1 \tag{7.6}$$

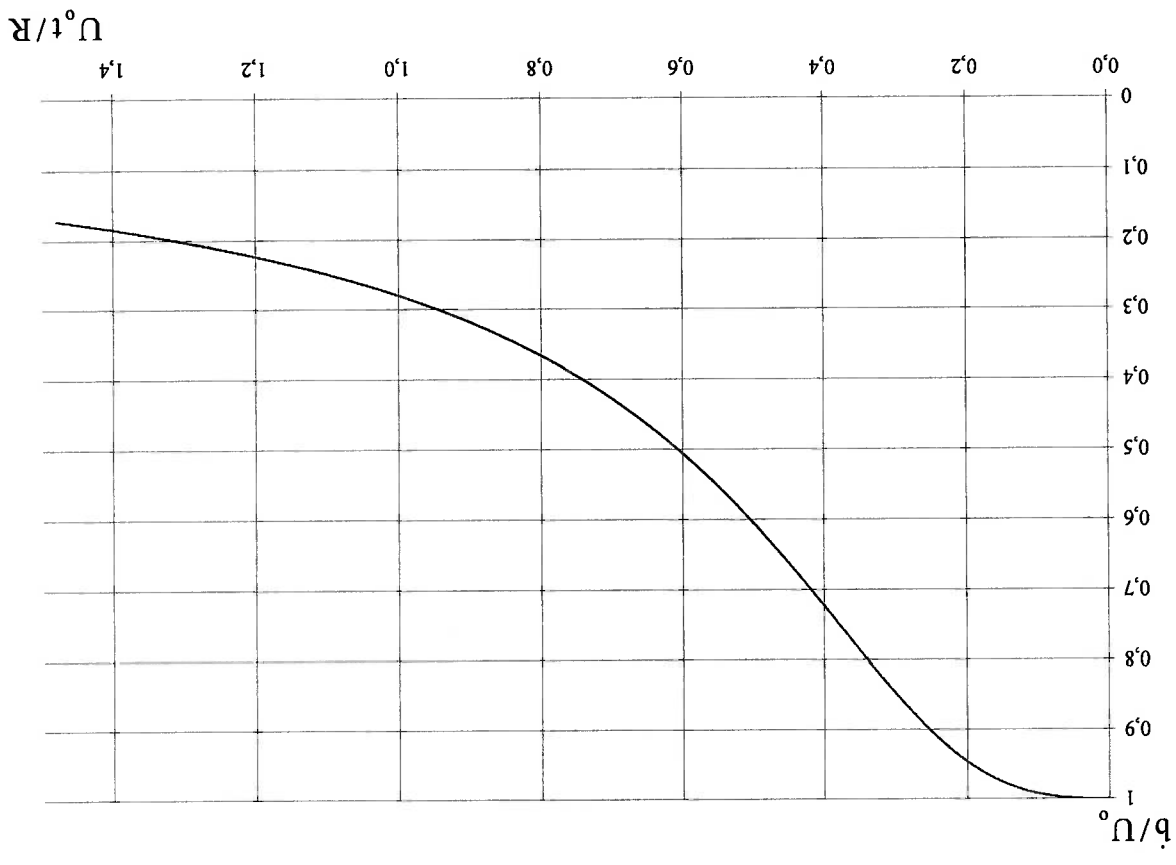


Fig. 7-1: Velocidade de penetração adimensionalizada versus $U_0 t/R$. Caso de

uma esfera, $\sigma = 0,7$ e $\mu = 17$. Abordagem de Wagner.

Expandindo-se b' e b'_{aprox} em série de Taylor, em torno de $t' = 0$, e truncando as

expansões no terceiro termo, tem-se respectivamente

$$b'(t) = b'(0) + t b''(0) + \frac{1}{2} t^2 b'''(0) + \frac{1}{6} t^3 b^{(4)}(0) + O(t^4), \tag{7.7}$$

e truncando-as no terceiro termo, tem-se

Tomando-se agora a expansão em série de Taylor de b' e b''_{aprox} , em torno de ϵ ,

$$(7.11) \quad b'(\epsilon) = 1 \times \epsilon, \quad b''(\epsilon) = 1 \times \epsilon^2, \quad b'''(\epsilon) = 1 \times \epsilon^3, \quad b''''(\epsilon) = 1$$

condições iniciais como

próximo de 0, que será aqui denominado por ϵ . Dessa maneira, reescreve-se as
 Sendo assim, adotam-se valores iniciais não em $t' = 0$, mas em um instante bem

$$(7.10) \quad \left(\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} [b'_{aprox}(t')]^2 \\ &+ \frac{1}{6} [b'_{aprox}(t')]^3 \\ &+ \frac{1}{24} [b'_{aprox}(t')]^4 \\ &+ \dots \end{aligned} \right) \left(\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} [b'_{aprox}(t')]^2 \\ &+ \frac{1}{6} [b'_{aprox}(t')]^3 \\ &+ \frac{1}{24} [b'_{aprox}(t')]^4 \\ &+ \dots \end{aligned} \right)$$

e

$$(7.9) \quad \left(\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} [b'_{aprox}(t')]^2 \\ &+ \frac{1}{6} [b'_{aprox}(t')]^3 \\ &+ \frac{1}{24} [b'_{aprox}(t')]^4 \\ &+ \dots \end{aligned} \right)$$

em $t' = 0$. Note de (7.4) e (7.5) que, de fato

No entanto, não é possível determinar a terceira derivada de $b'(t')$ e $b''_{aprox}(t')$

$$(7.8) \quad b'_{aprox}(t') = b'(0) + t' b''(0) + \frac{1}{2} t'^2 b'''(0) + \frac{1}{6} t'^3 b''''(0) + O(t'^4)$$

e

e

$$(7.18) \quad b_i(t) - b_i^{\text{aprox}}(t) = \frac{1}{2} t^2 \phi^2 \varepsilon$$

$$(7.17) \quad b_i(t) - b_i^{\text{aprox}}(t) = \frac{1}{12} t^4 \phi^2 \varepsilon,$$

$$(7.16) \quad b_i(t) - b_i^{\text{aprox}}(t) = \frac{1}{12} t^3 \phi^2 \varepsilon,$$

Logo,

e

$$(7.15) \quad b_i^{\text{aprox}}(t) = \varepsilon + t + \frac{1}{2} t^2 (-\phi \sqrt{\varepsilon}) + \frac{1}{6} t^3 \left(\frac{1}{2} \phi^2 \varepsilon - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\phi} \right)$$

e

$$(7.14) \quad b_i(t) = \varepsilon + t + \frac{1}{2} t^2 (-\phi \sqrt{\varepsilon}) + \frac{1}{6} t^3 \left(2\phi^2 \varepsilon - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\phi} \right),$$

Então, de (7.11), (7.12) e (7.13), escreva-se

$$(7.13) \quad b_i^{\text{aprox}}(t) = b_i^{\text{aprox}}(\varepsilon) + t b_i^{\text{aprox}}(\varepsilon) + \frac{1}{2} t^2 b_i^{\text{aprox}}(\varepsilon) + \frac{1}{6} t^3 b_i^{\text{aprox}}(\varepsilon)$$

$$(7.12) \quad b_i(t) = b_i(\varepsilon) + t b_i(\varepsilon) + \frac{1}{2} t^2 b_i(\varepsilon) + \frac{1}{6} t^3 b_i(\varepsilon),$$

Assim, para $t' < 1$, de (7.16) e (7.17), pode-se concluir que o uso da equação diferencial (7.4) traz uma excelente aproximação para a função que descreve a penetração da esfera, assim como aquela que descreve sua velocidade. No entanto, de (7.18), vê-se que o uso de (7.4) pode não ser uma boa aproximação para a aceleração da esfera para instantes distantes do inicial. A diferença entre as acelerações, i. e. (7.18), é maior que a diferença entre as velocidades, i. e. (7.17), que por sua vez é maior que a diferença entre as posições, i. e. (7.16). A fig. 7-2 mostra que, de fato, a aproximação (7.1) é bastante razoável para pequenos instantes de tempo.

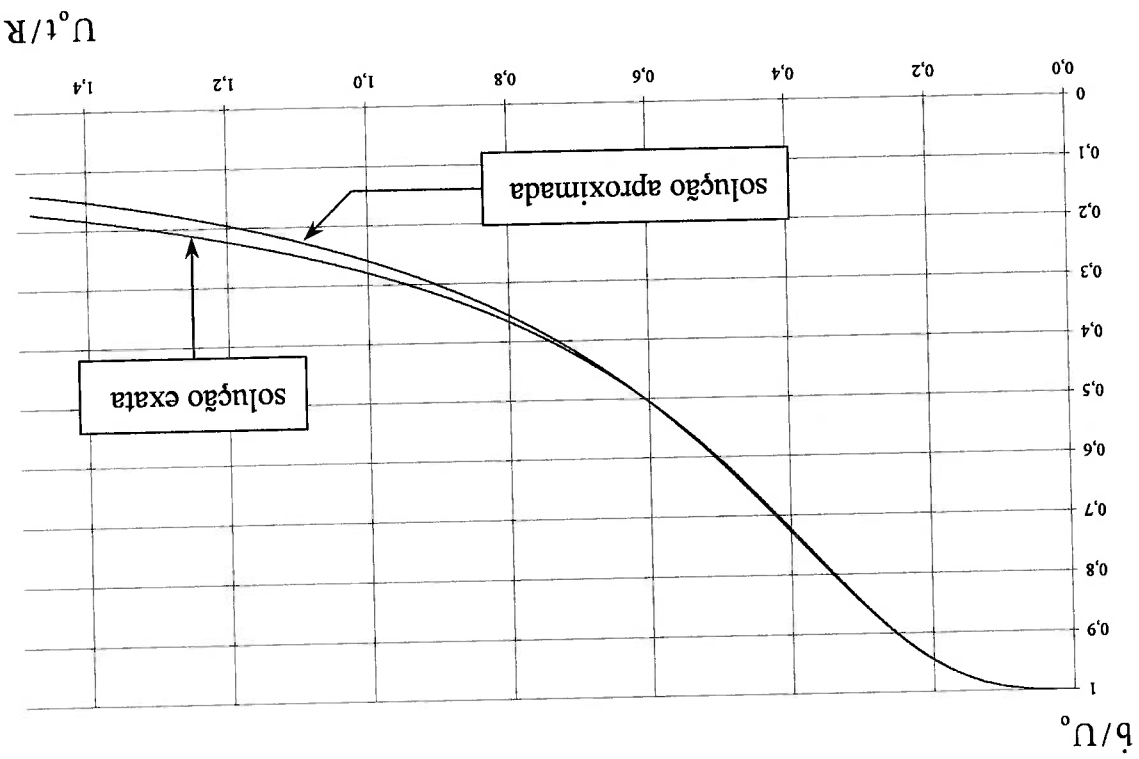


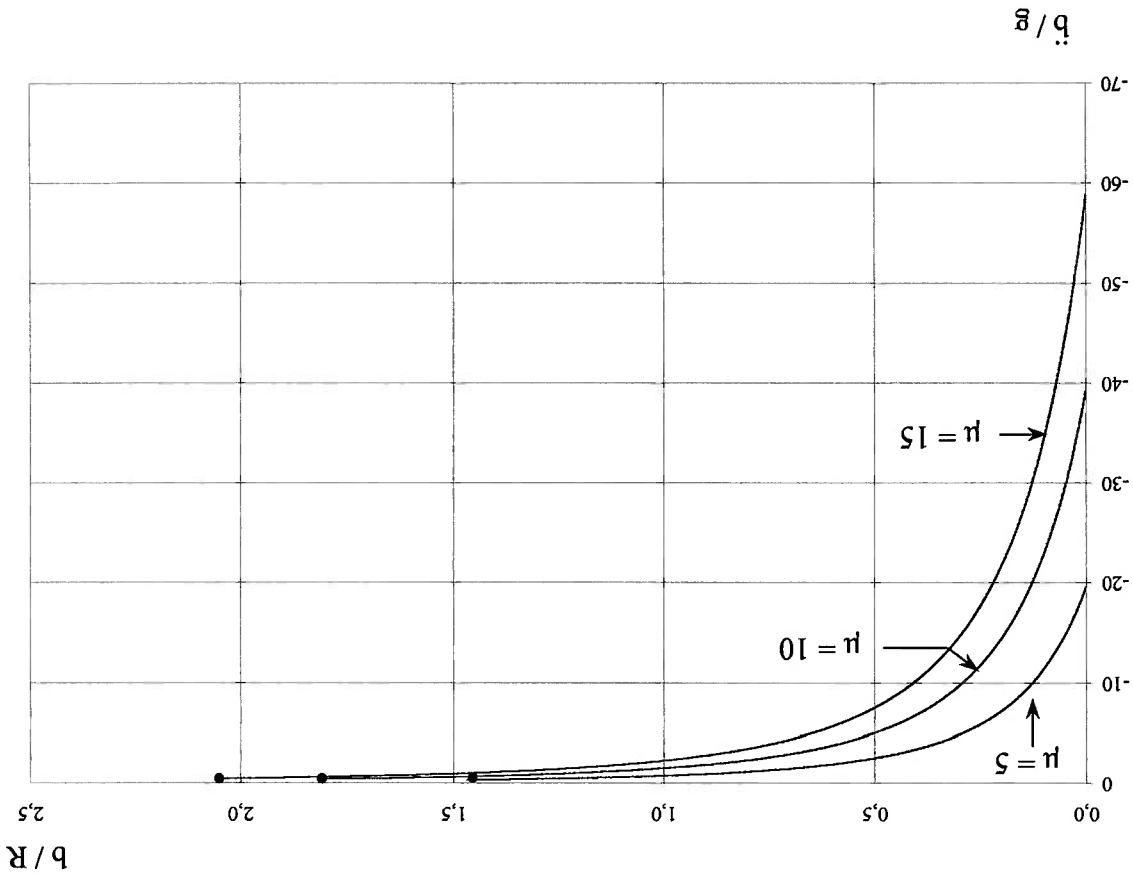
Fig. 7-2: Velocidade de penetração adimensionalizada versus $U_0 t / R$, para a equação "exata" e para a "aproximada". Caso de uma esfera, $\sigma = 0,7$ e $\mu = 17$.

Abordagem de Wagner.

8 – Resultados

- Como resultados do trabalho apresentado, tem-se:
- i) a resolução do aparente paradoxo representado pela diferença entre as expressões para a força de impacto (expressões (5.1) e (5.2));
 - ii) obtenção da expressão de primeira ordem para o coeficiente de impacto, segundo as abordagens de VON KÁRMÁN (1929) e WAGNER (1931), para o caso do impacto de um cilindro infinito e de uma esfera à velocidade de penetração constante, expressões (6.1.1.6), (6.1.2.27) e (6.3.1.4), (6.3.2.21) respectivamente;
 - iii) obtenção analítica de uma expressão particular de segunda ordem para o coeficiente de impacto, segundo as abordagens de VON KÁRMÁN (1929) e WAGNER (1931), para o caso do impacto de um cilindro infinito à velocidade variável, expressões (6.2.1.1.16) e (6.2.2.8);
 - iv) obtenção da solução numérica da equação diferencial do movimento do cilindro infinito e da esfera, para velocidade de penetração variável, segundo as abordagens de VON KÁRMÁN (1929) e WAGNER (1931). Esse resultado é melhor visualizado através das figs. 8-1 a 8-12, que mostram a variação da aceleração do cilindro infinito e da esfera em função da variável adimensional de tempo;
 - vi) obtenção analítica de uma solução particular implícita da equação diferencial do movimento de uma esfera, para velocidade de penetração variável, segundo as abordagens de VON KÁRMÁN (1929) e WAGNER (1931);

Fig. 8-1: Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de um cilindro infinito, com $\sigma = 1$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Von Kármán.



vi) Redução de ordem da equação diferencial do movimento de uma esfera, para instantes próximos do inicial.

Fig. 8-2: Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de um cilindro infinito, com $\sigma = 10$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Von Kármán.

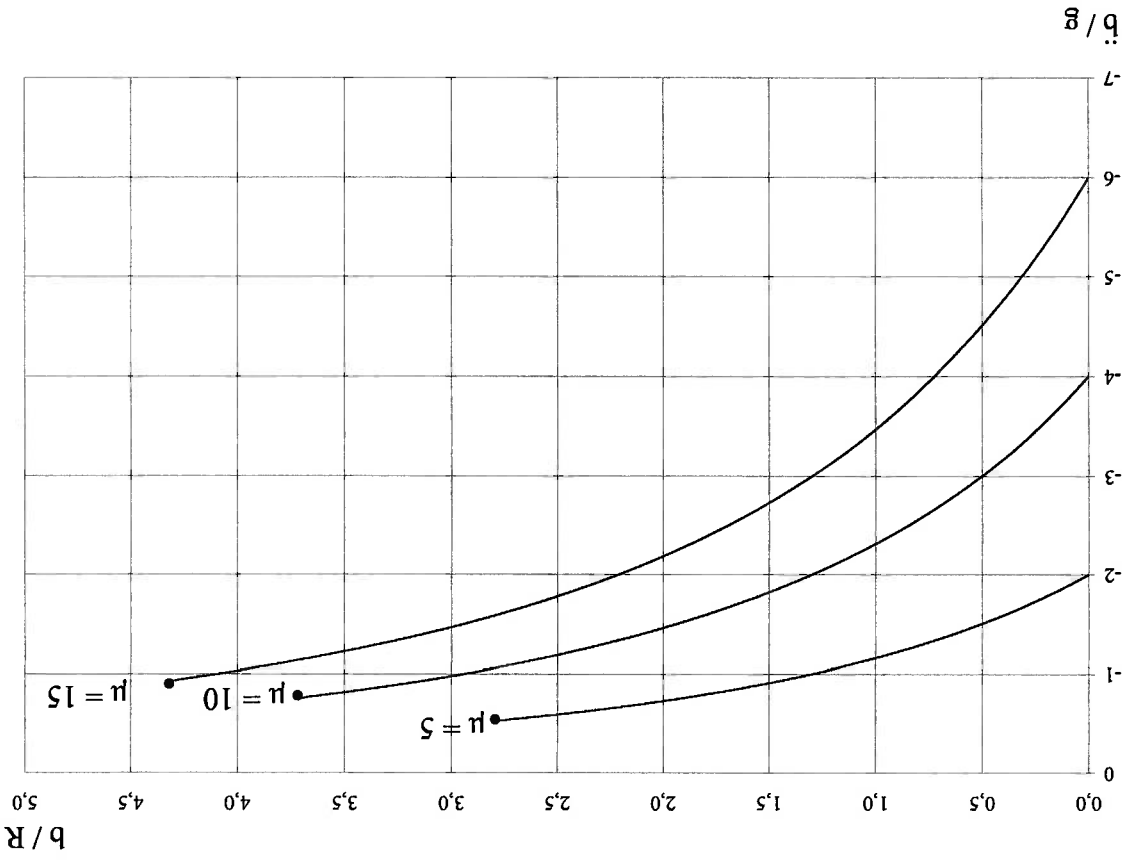


Fig. 8-3: Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de um cilindro infinito, com $\sigma = 100$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Von Kármán.

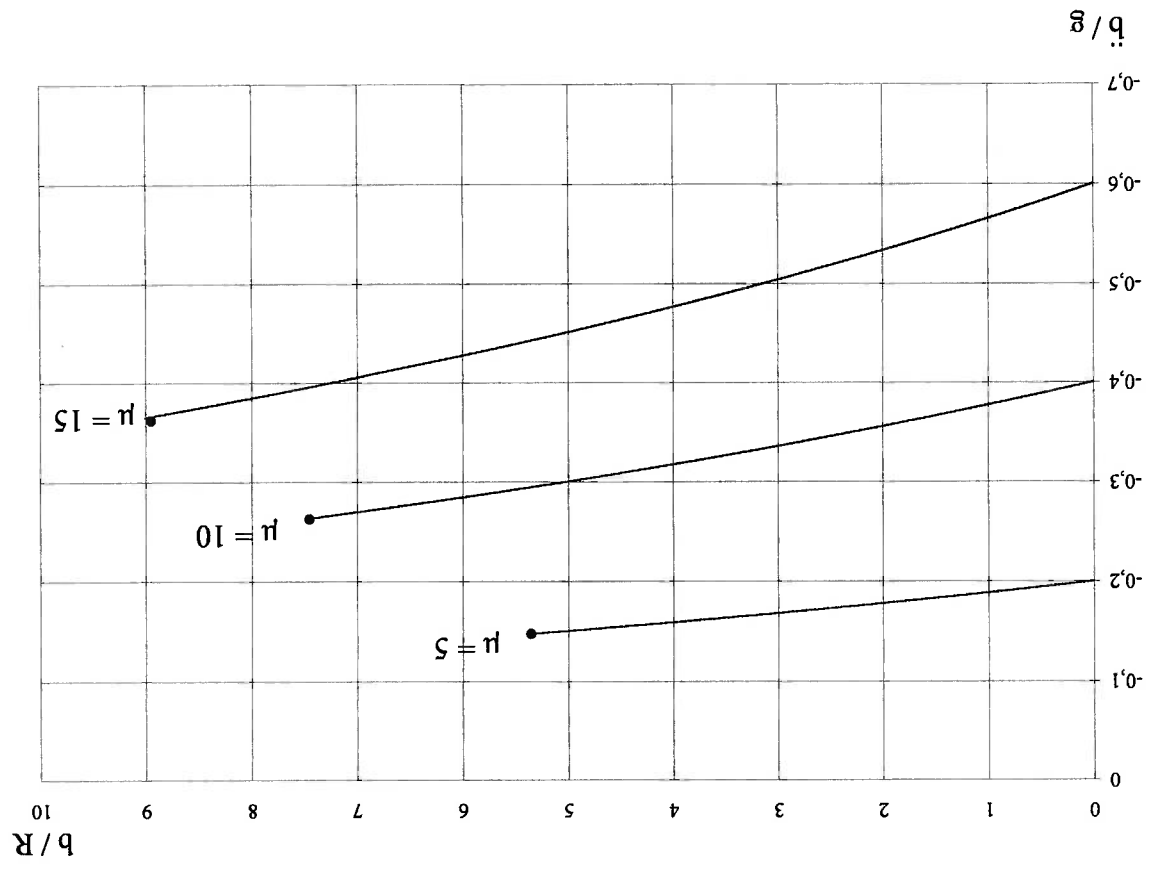
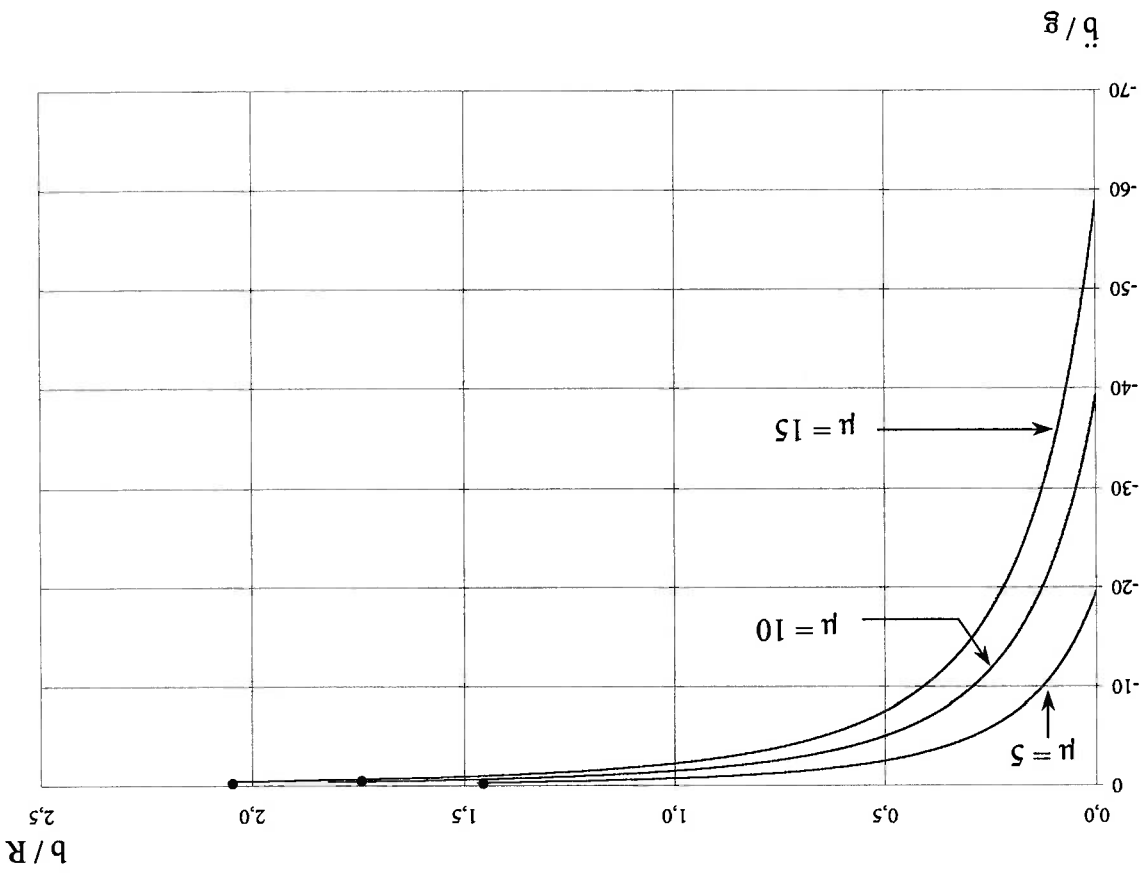


Fig. 8-4: Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de um cilindro infinito, com $\sigma = 1$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Wagner.



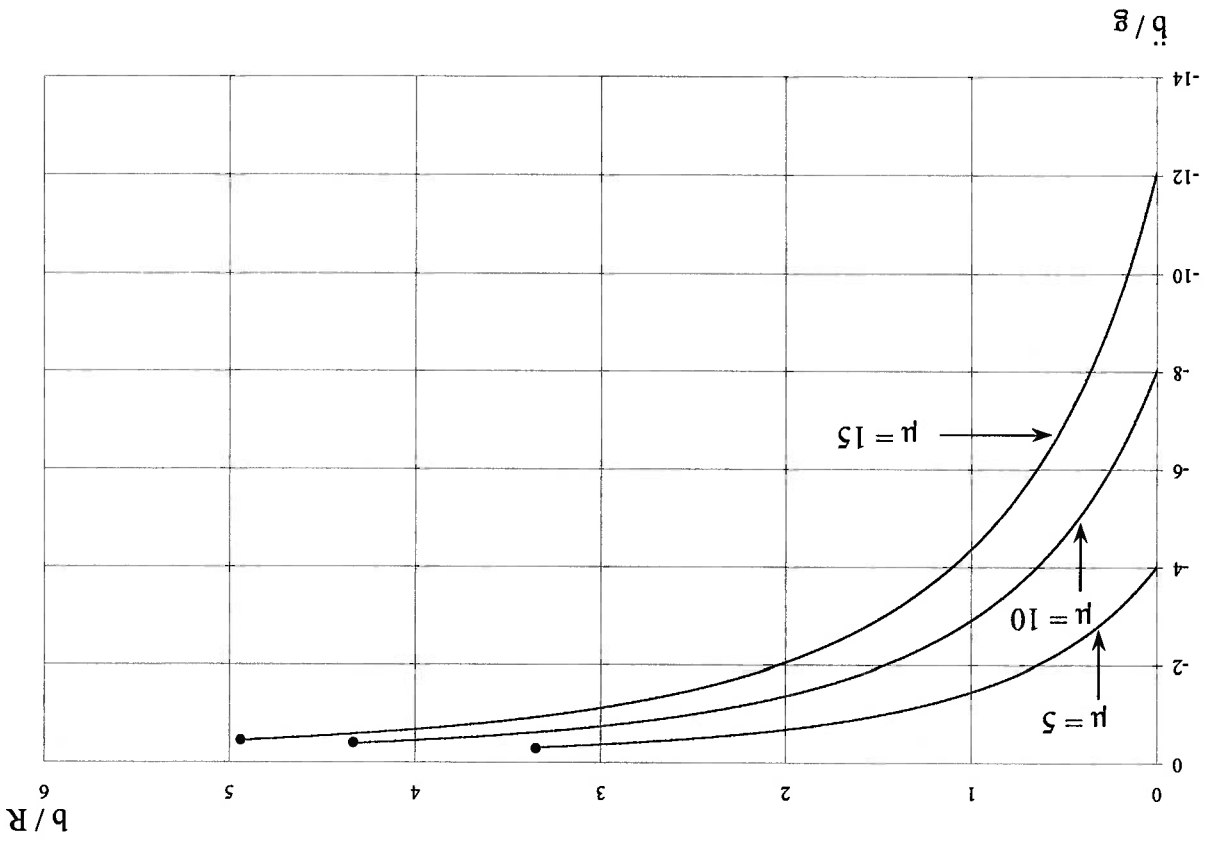


Fig. 8-5: Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de um cilindro infinito, com $\sigma = 10$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Wagner.

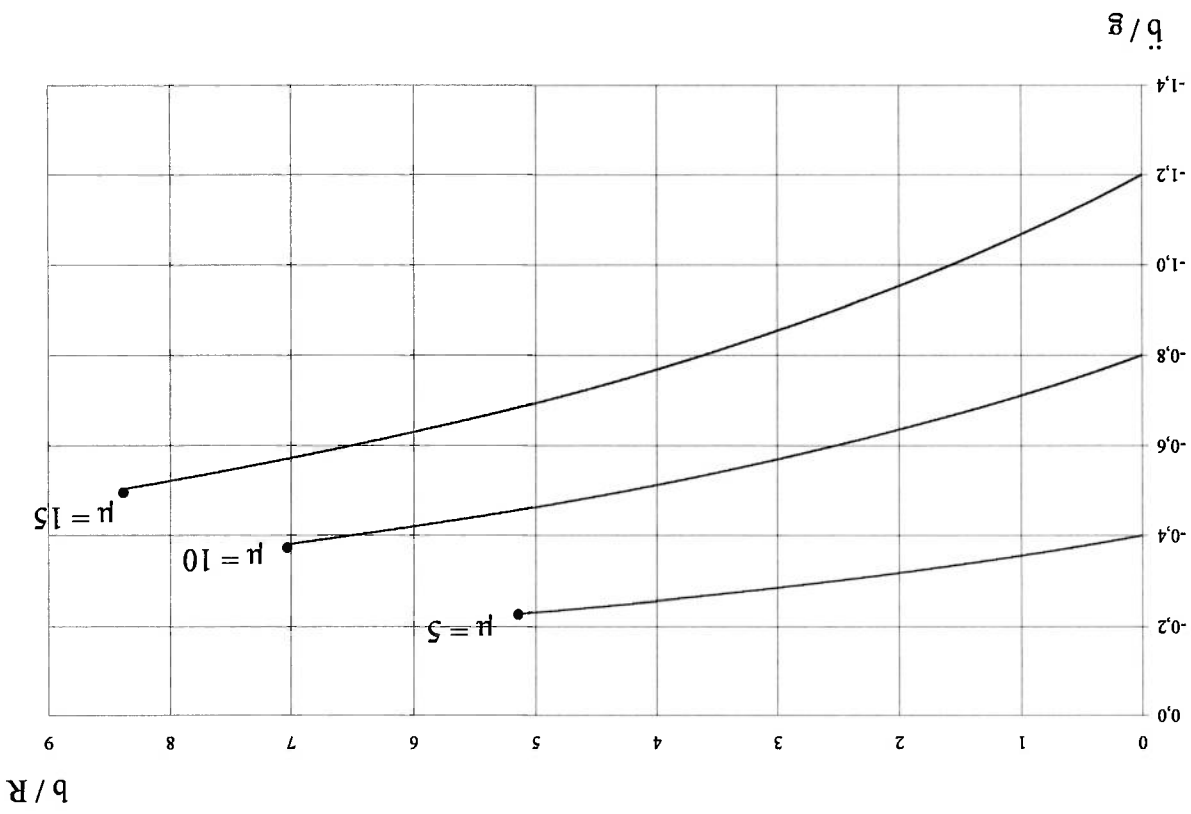


Fig. 8-6: Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de um cilindro infinito, com $\sigma = 100$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Wagner.

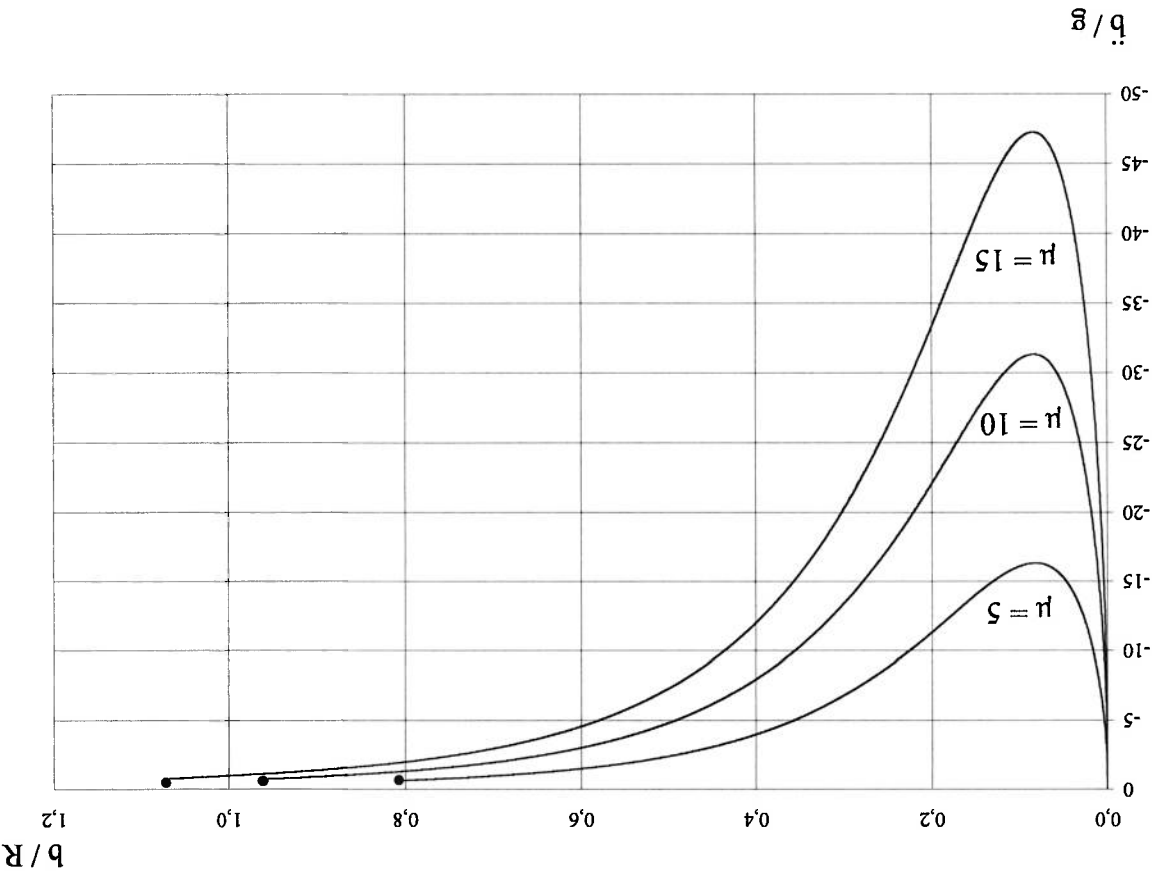
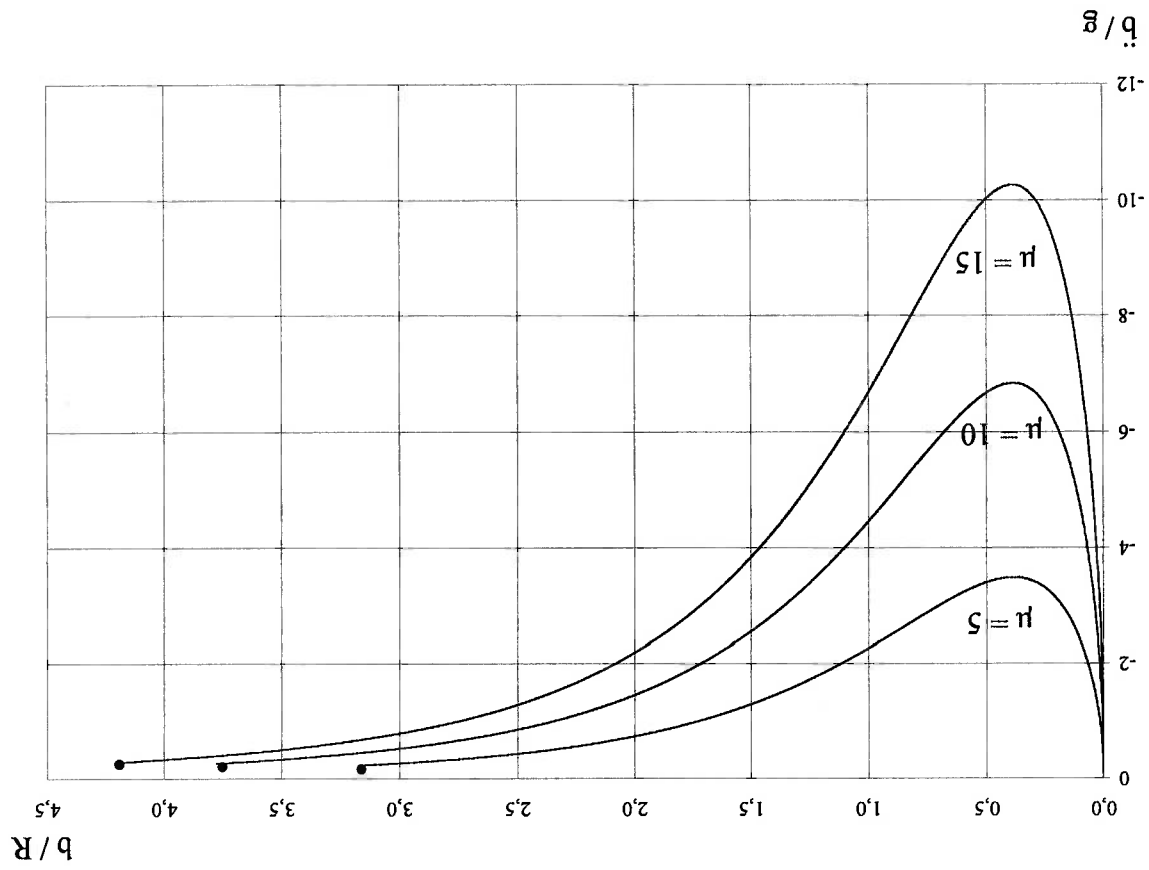


Fig. 8-7: Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de

penetração adimensionalizada, para o caso de uma esfera, com $\sigma = 1$, para diferentes

valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Von Kármán.

Fig. 8-8: Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de uma esfera, com $\sigma = 10$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Von Kármán.



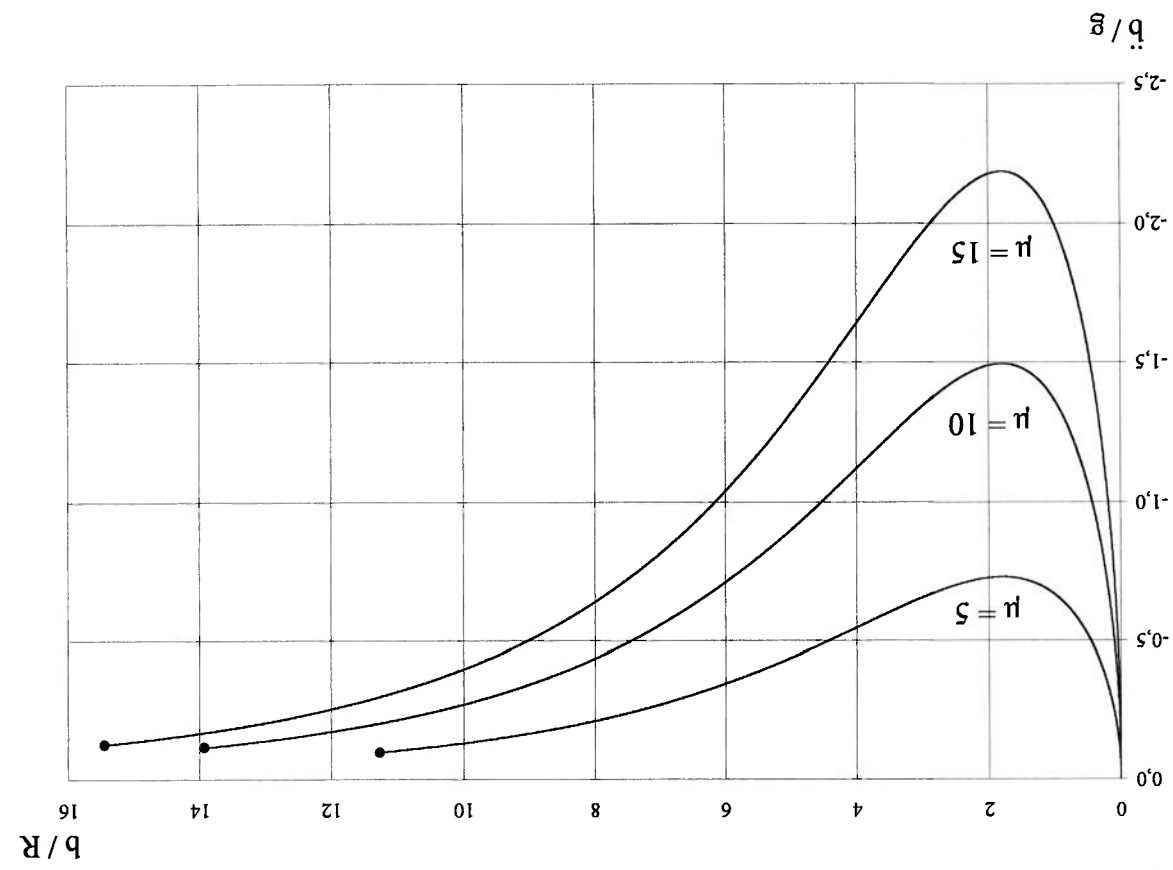


Fig. 8-9: Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de uma esfera, com $\sigma = 100$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Von Kármán.

Fig. 8-10: Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de uma esfera, com $\sigma = 1$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Wagner.

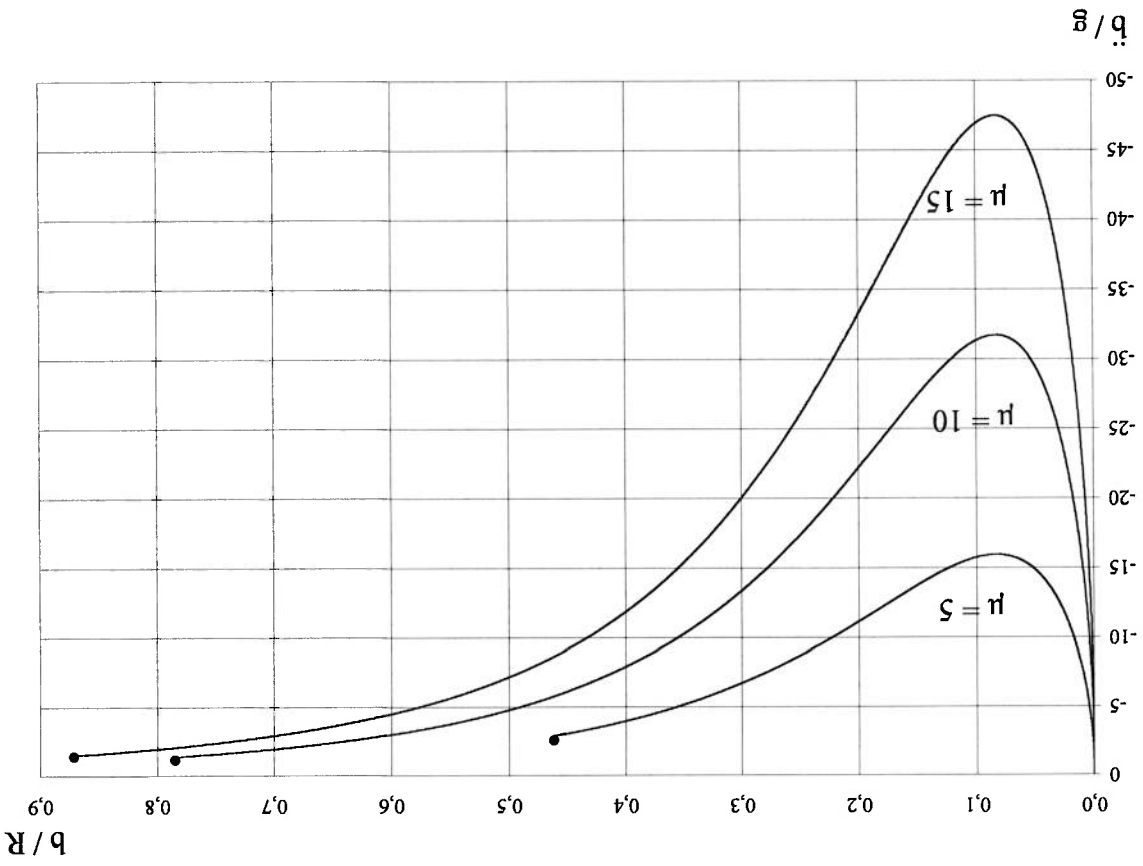


Fig. 8-11: Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de uma esfera, com $\sigma = 10$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Wagner.

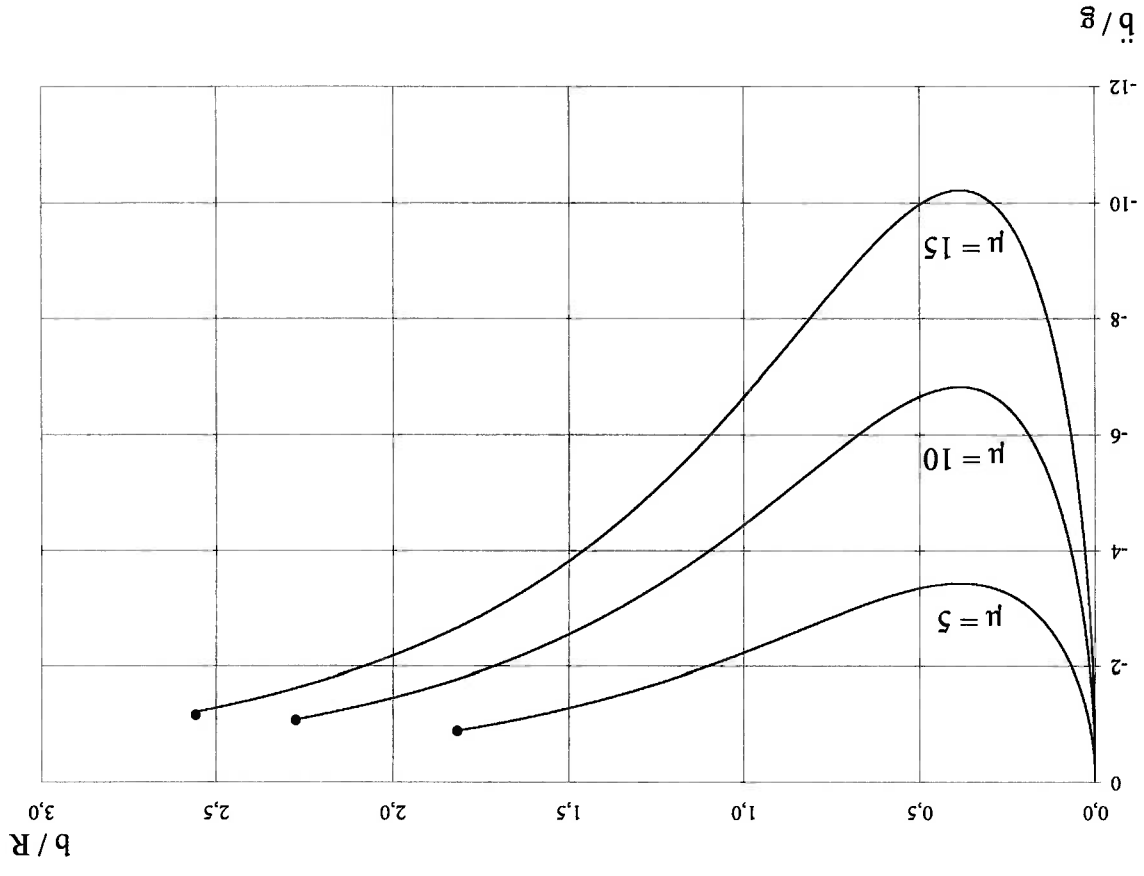
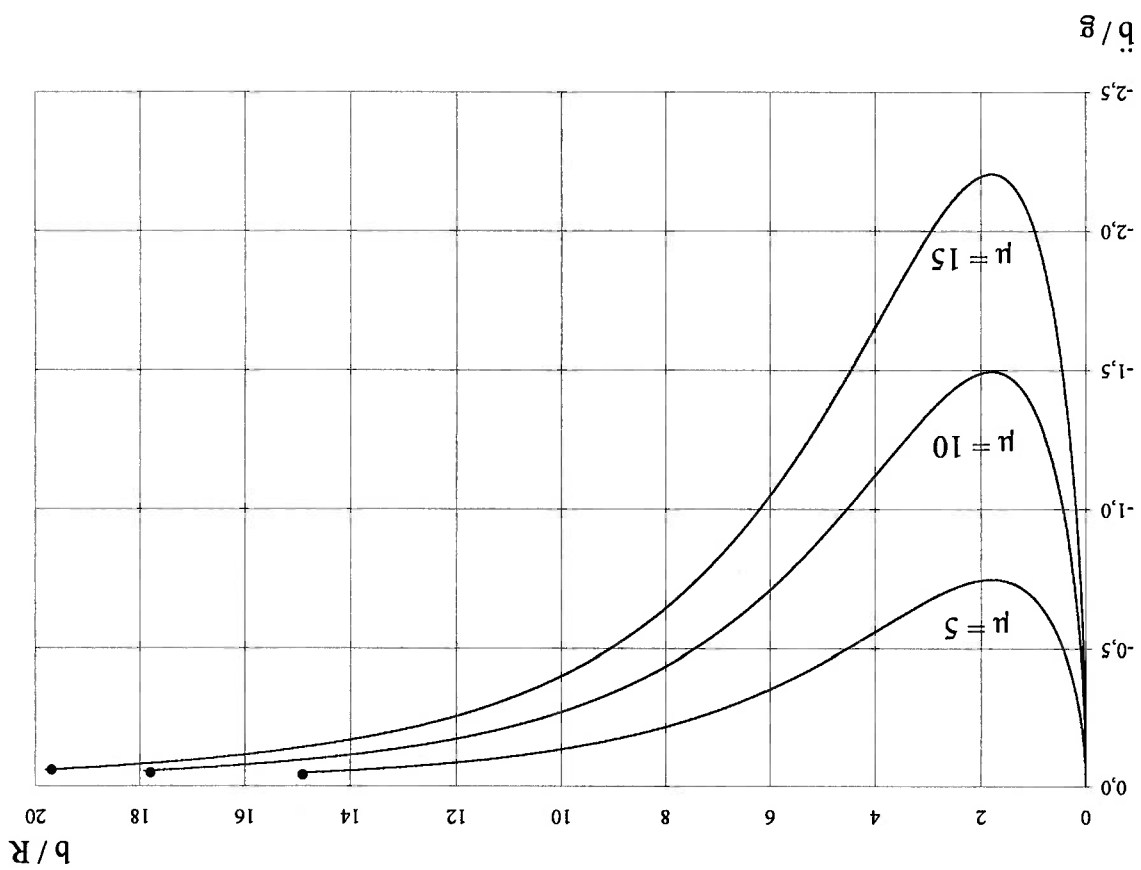


Fig. 8-12: Gráfico da aceleração adimensionalizada versus profundidade de penetração adimensionalizada, para o caso de uma esfera, com $\sigma = 100$, para diferentes valores de μ (• - mesmo instante de tempo). Abordagem de Wagner.



9 – Discussão

9.1 – Paradoxo entre expressões para a força hidrodinâmica de

impacto

A resolução proposta no capítulo 5 para o paradoxo entre a abordagem da integração do campo de pressão sobre a superfície molhada do corpo, e da variação da energia cinética do fluido, evidencia o rigor que se deve atribuir à análise de problemas de hidrodinâmica, não-lineares, transitórios e com uma fronteira livre como linha de contato.

9.2 – O comportamento da força hidrodinâmica vertical de impacto no estágio inicial de entrada do corpo

No capítulo 6, obteve-se expressões para o coeficiente de impacto, para o caso de um cilindro infinito e de uma esfera. Em ambos os casos, foram utilizadas tanto a abordagem de Von Kármán, como a de Wagner. Recuperaram-se as expressões de primeira ordem, no caso da esfera, e as de ordem zero no caso do cilindro infinito, sendo esses, clássicos resultados na teoria que descreve o fenômeno de entrada de um corpo em um fluido ideal.

Para um caso específico do impacto de um cilindro infinito com velocidade não-

forçada, obtve-se analiticamente o coeficiente de impacto de ordem superior, tanto através da abordagem de Von Kármán, quanto através da de Wagner.

Na tentativa de se encontrar a expressão de ordem superior para a esfera com velocidade de penetração não-forçada, obtve-se uma solução para sua equação diferencial de movimento apenas em uma forma implícita. A forma das equações (6.4.1.13) e (6.4.2.3) mostrou-se bastante complexa, e sendo assim, não se apresentou, nesse trabalho, uma forma explícita dessas equações.

Uma possível maneira para se obter o coeficiente de impacto de ordem superior, a partir da forma implícita da solução, seria plotar pares discretos de valores $(b'(t'), t')$ a partir de (6.4.2.4), por exemplo. Então, através do método dos mínimos quadrados, aproximar-se-ia b' por um polinômio em t' . Por fim, da função $b'(t')$, seria possível obter $b'(t')$ por derivação. E então, o coeficiente de impacto seria obtido por simples manipulação algébrica.

No entanto, uma dificuldade impede que esse procedimento seja executado com êxito. Para se obter os pares de valores $(b'(t'), t')$, seria necessário o conhecimento dos parâmetros que se apresentam na forma implícita da solução. E sendo assim, seria possível apenas obter diversos coeficientes de impacto, para diferentes valores desses parâmetros, sendo extremamente oneroso, o processo de obtenção do coeficiente de impacto em função de um valor a determinar desses parâmetros.

Então, optou-se por apresentar, em forma de gráficos do tipo *b' versus b'*, as soluções numéricas das equações diferenciais do movimento dos corpos, para alguns valores dos parâmetros envolvidos nessas equações.

É importante afirmar que as expressões de ordem superior do coeficiente de impacto, considerando-se o caso de velocidade variável, representam um caso muito particular. Seria necessário prosseguir com uma análise sobre os efeitos desconsiderados, como o de capilaridade, compressibilidade, viscosidade, entre outros; para mostrar se esses não influenciam da alguma forma os termos de ordem superior apresentados. Além do mais, a função que descreve a superfície molhada do corpo não mais seria aproximada por (6.3.2.13), por exemplo.

Das fig.(s) 8-1 a 8-12, é possível avaliar o *modus* da dinâmica inicial de um corpo rígido que entra em um fluido ideal, para os casos em que sua velocidade de entrada é não-forçada. Para que agora se possa fazer uma comparação e verificação quantitativa dessa dinâmica, é necessário comparar as expressões obtidas das abordagens clássicas aqui descritas, com aquelas obtidas analítica ou experimentalmente por outros autores.

Alguns experimentos que avaliam o impacto hidrodinâmico de uma esfera em queda livre mostram que a velocidade de entrada do corpo permanece constante para pequenas profundidades de penetração. MOGHISI (1979) apud MOGHISI e SQUIRE (1981) aponta que para a entrada de uma esfera de 12,5 mm de raio e 0,665 kg, que atinge o fluido com uma velocidade de 1-3m/s e sujeita a uma aceleração de $1-6\text{m/s}^2$, não se observam mudanças superiores a 1% em sua velocidade de entrada, mesmo para fluidos mais viscosos que a água.

Teoricamente, esse resultado foi aqui recuperado. De fato, observa-se na fig. 7-1, que para pequenos instantes de tempo, i. e., para pequenas profundidades de penetração, a velocidade de entrada da esfera permanece muito próxima de seu valor inicial.

Dessa forma, para pequenas profundidades de penetração, a dinâmica de uma esfera forçada penetrar com velocidade constante e a de uma esfera livre coincidem. No entanto, essa particularidade não é válida para o caso de um cilindro infinito. Uma vez que nesse caso a força de impacto cresce de zero a um valor finito instantaneamente e permanece constante, a velocidade de penetração de um cilindro não-forçado decai vertiginosamente. Ou seja, diferentemente do caso da esfera em que a força de impacto tende a zero quando a profundidade de penetração tende a zero, a força de impacto em um cilindro infinito tende a um valor finito e diferente de zero nessa mesma situação limite.

Assim, para o caso da esfera e para pequenas profundidades de penetração, pode-se comparar resultados da abordagem que considera velocidade de penetração constante, com aqueles de uma abordagem que considera a esfera livre para penetrar.

Para cada geometria, apresentam-se, em um único gráfico (ver fig.(s) 9.2.1-1 e 9.2.2-1), algumas expressões para o coeficiente de impacto em função da variável adimensional do problema, i. e., C_1 versus ϵ . Discutem-se, posteriormente, as diferenças encontradas entre essas expressões.

9.2.1 – Coeficientes de impacto para o caso da esfera

Para o caso da penetração de uma esfera, tomam-se os dados experimentais obtidos por MOGHISI e SQUIRE (1981). Ajustando-se os pontos obtidos através de uma regressão não-linear, os autores obtêm a expressão

$$C_1(\varepsilon) = 5,28\varepsilon^{1,006} - 5,71\varepsilon^{2,02}, \quad (9.2.1.1)$$

com 99% de confiança entre os pontos.

Para outras expressões analíticas, tomam-se aquelas devidas a MILOH (1991b). A escolha dessas expressões é justificada, considerando-se o método a partir do qual são obtidas. O procedimento empregado por MILOH (1991b) não avalia o aumento da superfície molhada, devido ao empilhamento do fluido, no decorrer do processo de obtenção do coeficiente de impacto. Note que na abordagem de WAGNER (1931), o coeficiente de impacto requer que a dimensão característica $a = a(t)$ seja determinada anteriormente a ele. Como a função $a(t)$ descreve, indiretamente, o empilhamento do fluido por sobre a lateral do corpo, tem-se que o conhecimento desse fenômeno é necessário para a determinação do coeficiente de impacto. Da mesma forma, transcorre a abordagem de VON KÄRMÄN (1929).

Sem considerar o efeito do empilhamento do fluido, MILOH (1991b) obtém como expressão para o coeficiente de impacto a expressão

entre os dois. MILLOH (1991b) apresenta essa relação como sendo dependem da variável adimensionalizada do problema, é possível estabelecer uma relação Como ambos coeficiente de impacto e fator de correção para a superfície molhada Note que para $\varepsilon \rightarrow 0$, as expressões (9.2.1.4) e (9.2.1.5) tornam-se iguais.

$$f_c(\varepsilon) = \frac{1,5}{1 + 0,114\varepsilon^2} \quad (9.2.1.5)$$

empírica dada por

COOPER (1949) apud MILLOH (1991b) expressa esse fator através de uma relação

$$f_c(\varepsilon) = 1,5 - 0,4\varepsilon \quad (9.2.1.4)$$

equivalente, obtém para f_c a expressão

hidrodinâmico de uma esfera através do método de expansão de um disco circular SHIFFMAN e SPENCER (1945) apud MILLOH (1991b), que consideram o impacto

$$f_c(\varepsilon) = 1,327 - 0,154\varepsilon^2 \quad (9.2.1.3)$$

Posteriormente, obtém o fator de correção para a superfície molhada, dado por

$$C_1(\varepsilon) = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}\varepsilon - 4\varepsilon^2 \quad (9.2.1.2)$$

$$C_1(\varepsilon) = \frac{8\sqrt{2}}{\pi} F_c^{1,5} \varepsilon - 4F_c^2 \varepsilon^2 \quad (9.2.1.6)$$

Utilizando o valor de 1,327 para F_c em (9.2.1.6), tem-se

$$C_1(\varepsilon) = 5,5\varepsilon - 7,04\varepsilon^2 \quad (9.2.1.7)$$

Por outro lado, tomando-se o valor de 1,5 para F_c (valor também obtido por

PUKHNACHOV e KOROBKIN (1981) apud MILOH (1991b)), (9.2.1.6) fica

$$C_1(\varepsilon) = \frac{\pi}{12\sqrt{3}} \varepsilon - 9\varepsilon^2 \quad (9.2.1.8)$$

Resumem-se, na tabela 9.2.1-1, as referidas expressões para o coeficiente de

impacto de uma esfera que penetra o fluido com velocidade forçada.

Como os dados obtidos por MOGHISI e SQUIRE (1981) são para uma esfera de

12,5 mm de raio, velocidade de entrada 1-3 m/s e aceleração de 1-6 m/s², ajusta-se os

outros coeficientes a esses parâmetros. E assim, para melhor visualização do

comportamento da força hidrodinâmica de impacto em cada abordagem, plotam-se as

diferentes expressões para C_1 em função de ε (ver fig. 9.2.1-1).

9.2.1.1 – Análise comparativa entre as expressões para o coeficiente de impacto de uma esfera que penetra o fluido com velocidade considerada constante

Observando-se a expressão para o coeficiente de impacto devida a MILLOH (1991b) com $f_c = 1,5$, e (6.3.2.21), nota-se que o termo de ordem inferior é idêntico em ambas. E assim, cabe lembrar que o valor de 1,5 para o fator de correção para a superfície molhada é obtido através de um método, que trata a penetração da esfera como sendo a expansão de uma placa plana circular (PUKHNACHOV e KOROBKIN (1981) apud MILLOH (1991b)). Sendo assim, uma vez que a abordagem de WAGNER (1931) utiliza o mesmo procedimento, é natural que os referidos termos sejam iguais.

TABELA 9.2.1-1: Expressões para o coeficiente de impacto de uma esfera, quando em pequenas profundidades de penetração

| ABORDAGEM | EXPRESSÃO PARA $C_1(\epsilon)$ |
|--------------------------------------|---|
| expressão (6.3.1.4) | $C_1(\epsilon) = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \epsilon$ |
| expressão (6.3.2.21) | $C_1(\epsilon) = \frac{\pi}{12\sqrt{3}} \epsilon$ |
| MOGHISI e SQUIRE (1981) | $C_1(\epsilon) = 5,28\epsilon^{1,006} - 5,71\epsilon^{2,02}$ |
| MILLOH (1991b), sem considerar f_c | $C_1(\epsilon) = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \epsilon - 4\epsilon^2$ |
| MILLOH (1991b), $f_c = 1,5$ | $C_1(\epsilon) = \frac{\pi}{12\sqrt{3}} \epsilon - 9\epsilon^2$ |
| MILLOH (1991b), $f_c = 1,33$ | $C_1(\epsilon) = 5,5\epsilon - 7,04\epsilon^2$ |

Comparando-se a expressão devida a MILLOH (1991b) sem considerar f_c , e aquela oriunda da abordagem de VON KÄRMÄN (1929), nota-se que os termos de maior magnitude são iguais. A razão de tal fato é que em nenhum dos dois casos, o efeito do empilhamento do fluido é levado em conta.

A grande semelhança entre a expressão obtida por MILLOH (1991), com valor de 1,33 para o fator de correção para a superfície molhada, e a expressão que representa a correlação entre os dados experimentais de MOGHISI e SQUIRE (1981), é um fato que merece ser analisado. Existe uma diferença fundamental entre o processo de obtenção de $f_c = 1,5$ e aquele do qual resulta $f_c = 1,327$. Enquanto PUKHNACHOV e KOROBKIN (1981) apud MILLOH (1981) relacionam a dimensão característica da superfície plana equivalente com a profundidade de penetração através da relação $a^2 + (R - a)^2 = R^2$, MILLOH (1991b) considera que vale $a^2 + (R - a - h)^2 = R^2$, inserindo aí, portanto, o efeito do empilhamento do fluido por sobre a lateral do corpo.

Note da fig. 9.2.1-1 que o coeficiente de impacto para o caso de velocidade de penetração variável segundo a abordagem de Wagner, muito pouco difere daquele para o caso de velocidade de penetração constante na mesma abordagem, em pequenas profundidades de penetração. Assim, a consideração de velocidade variável pode não ser vantajosa para determinados valores de densidade da esfera, pois como mostrado na fig. 9.2.1-1, a diferença entre os referidos casos pode não ser significativa. Por outro lado, o coeficiente de impacto para o caso de velocidade de penetração variável, na abordagem de Von Kármán, difere bastante do caso correspondente quando a velocidade de penetração é forçada constante.

Note ainda da fig. 9.2.1-1, que o valor máximo do coeficiente de impacto experimental é um pouco superestimado pela abordagem de Von Kármán com velocidade constante, enquanto que o caso de velocidade variável nessa mesma abordagem subestima esse valor.

$$C_1 = \frac{|F_z|}{\frac{1}{2} \rho R^2 U_0^2}$$

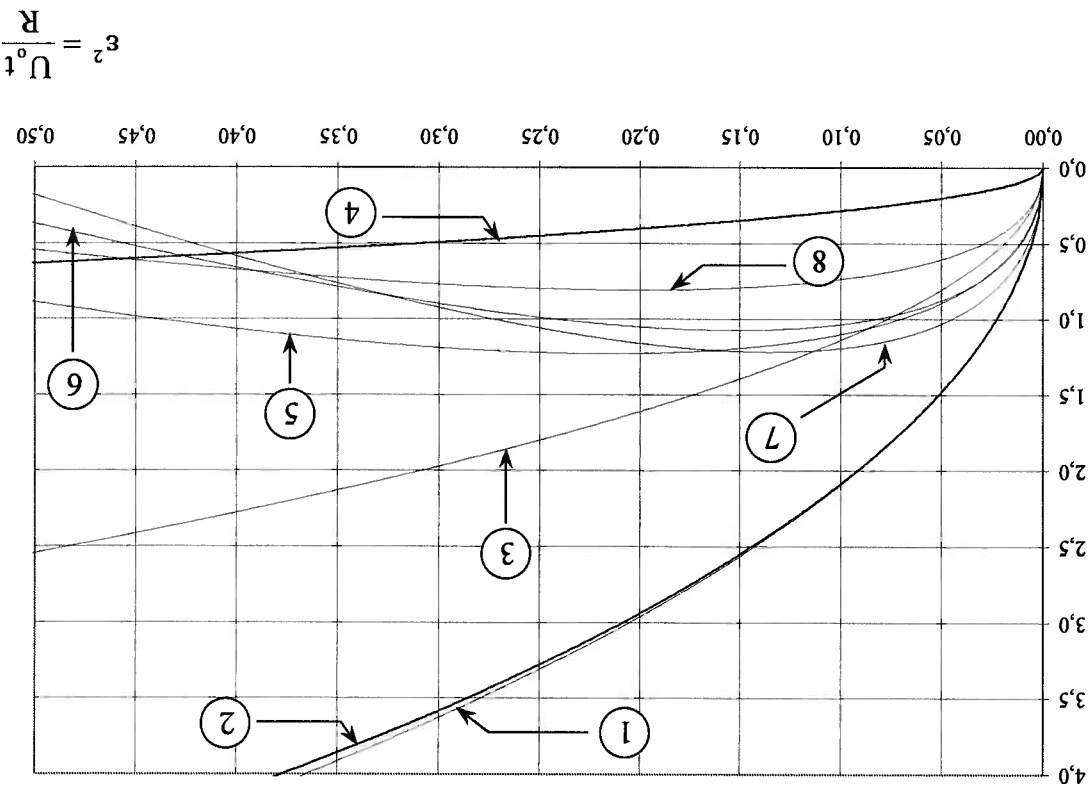


Fig. 9.2.1-1: Coeficiente de impacto versus ϵ^2 ($R = 12,5$ mm, $U_0 = 2$ m/s),

segundo diversas abordagens. Legenda: 1 - Wagner (velocidade constante), 2 - Wagner

(velocidade variável), 3 - Von Kármán (velocidade constante), 4 - Von Kármán

(velocidade variável), 5 - Moghisi & Squire, 6 - Miloh ($f_c = 1,33$), 7 - Miloh ($f_c = 1,5$), 8

- Miloh (sem considerar f_c).

9.2.2 – Coeficientes de impacto para o caso do cilindro infinito

Para o caso do cilindro infinito, tomam-se os dados experimentais devidos a ELECTRIC POWER RESEARCH INSITUTE apud COINTE e ARMAND (1987). CAMPBELL e WEYNBERG (1980) apud FALTINSEN (1990) também obtêm dados experimentais para o caso da penetração de um cilindro. Seus dados podem ser representados através da fórmula

$$C_1(\epsilon) = \frac{5,15}{1 + 8,5\epsilon^2} + 0,275\epsilon^2 \quad (9.2.2.1)$$

São apresentadas, na tabela 9.2-2-1, as expressões para o coeficiente de impacto de um cilindro infinito.

Os dados obtidos por ELECTRIC POWER RESEARCH INSITUTE apud COINTE; ARMAND (1987) são para um cilindro de 10,48 cm de raio e velocidade de entrada constante e igual a 7,38 m/s. Assim, ajusta-se as outras duas expressões para esses parâmetros. Na fig. 9.2-2-1, plotam-se as expressões para o coeficiente de impacto.

9.2.2.1 – Análise comparativa entre as expressões para o coeficiente de impacto de um cilindro infinito que penetra o fluido com velocidade constante

Note da fig. 9.2-2-1 que os valores devidos à abordagem de VON KÁRMÁN (1929) substituíam a força de impacto, enquanto que aqueles devidos à abordagem de WAGNER

(1931) a superestimam. Além disso, de ambas abordagens resulta um coeficiente de impacto de valor constante durante o estágio inicial do problema. Muito provavelmente, isso se deve ao fato de que o modelo de expansão da placa plana retangular não avalia, adequadamente, o aumento da superfície molhada devido ao empilhamento do fluido. Não foi possível apresentar os coeficientes de impacto de Von Kármán e Wagner, para os casos de velocidade variável, uma vez que não se dispunham de dados experimentais para o caso de um cilindro infinito não-forçado.

TABELA 9.2.2-1: Expressões para o coeficiente de impacto de um cilindro infinito com velocidade de entrada constante, quando em pequenas profundidades de penetração

| AUTOR | EXPRESSÃO PARA $C_i(\epsilon)$ |
|--|--|
| expressão (6.1.1.6) | $C_i = 3,15$ |
| expressão (6.1.2.27) | $C_i = 6,28$ |
| CAMPBELL e WEYENBERG (1980) apud FALTINGSSEN (1990) | $C_i = \frac{5,15}{1 + 8,5\epsilon^2} + 0,275\epsilon^2$ |

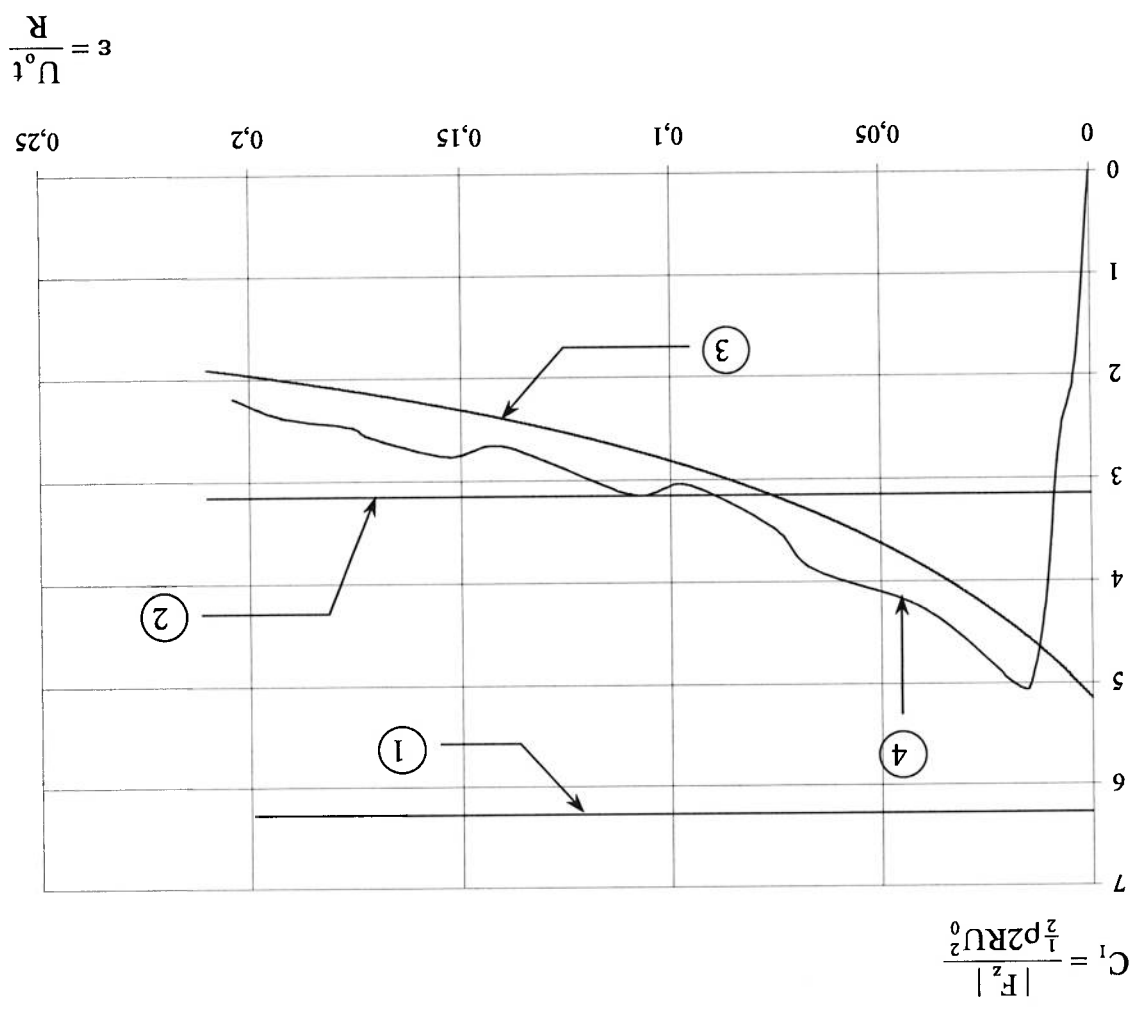


Fig. 9.2.2-2: Coeficiente de impacto versus e^2 , para um cilindro ($R = 10,48$ cm, $U_0 = 7,38$ m/s), segundo diversas abordagens. Legenda: 1 - Wagner (velocidade constante), 2 - Von Kármán (velocidade constante), 3 - Campbell & Weynberg, 4 - Electric Power Research Institute.

9.2.3 – A diferença de comportamento da força inicial de impacto entre os casos da esfera e do cilindro infinito

Observando-se as fig.(s) 9.2.1-1 e 9.2.2-1, nota-se que há uma diferença qualitativa entre o coeficiente de impacto do cilindro infinito e o da esfera. Enquanto o coeficiente de impacto do cilindro infinito cresce instantaneamente de zero a um valor finito, permanecendo constante, o crescimento do coeficiente de impacto da esfera dá-se de maneira sensivelmente mais branda.

10 – Conclusões

Como conclusões desse trabalho tem-se que:

i) A modelagem matemática clássica do problema de impacto hidrodinâmico foi revista. Recuperou-se a equação de campo, assim como as condições de contorno do problema. Apresentou-se também a forma linearizada dessas equações, para instantes de tempo próximos ao inicial;

ii) Discutiu-se o suposto paradoxo, aparentemente resolvido por WU (1998), entre as abordagens da integração do campo de pressão sobre a superfície molhada do corpo, e a da variação da energia cinética do fluido. Foi mostrado que não se pode desconsiderar a energia cinética transportada pelos jatos para fora do domínio Ω_0 . WU (1998), ao considerar $\partial\phi/\partial t \equiv 0$ válida em todo a superfície S_0 , assume implicitamente que a energia cinética transportada pelos jatos é desprezível. Assim, mostrou-se que de fato não há nenhum paradoxo entre as expressões para a força de impacto, oriunda dessas abordagens;

iii) As duas abordagens mais clássicas do problema foram utilizadas para se obter o comportamento da força hidrodinâmica vertical de impacto, nos casos do impacto de um cilindro infinito, problema bidimensional, e de uma esfera, problema tridimensional. Foram analisados os casos de velocidade de penetração forçada constante, e não-forçada, i. e., variável;

iv) Mostrou-se que para a esfera, na abordagem de Wagner e de Von Kármán, o coeficiente de impacto é tão mais próximo dos valores experimentais quanto menor for

a profundidade de penetração do corpo. Enquanto que os coeficientes de impacto da abordagem de Wagner (casos de velocidade constante e variável) pouco diferem entre si, para pequenas profundidades de penetração, os da abordagem de Von Kármán são bastante distintos em qualquer estágio da penetração do corpo. Pode-se dizer que o coeficiente de impacto da abordagem de Von Kármán, para velocidade de penetração variável, subestima os valores experimentais, enquanto que o caso de velocidade de penetração constante os superestima. No entanto, com exceção dos instantes próximos de zero, entre os casos acima comentados, a abordagem de Von Kármán para velocidade de penetração variável é, no sentido geral, a que melhor reproduz os resultados experimentais;

v) No caso do cilindro infinito, analisou-se o apenas o caso de velocidade de penetração forçada constante, onde a abordagem de Wagner bem reproduziu os valores experimentais, em instantes próximos do inicial;

vi) Quando se tem velocidade de penetração variável ou constante, conclui-se teoricamente que enquanto o impacto do cilindro é de natureza impulsiva, o impacto da esfera dá-se de maneira contínua. Os efeitos de compressibilidade e a formação do colchão de ar, que não são levados em conta pela modelagem matemática aqui empregada, podem, na prática, tornar o impacto do cilindro de maneira também contínua. Ainda assim, os dados experimentais mostram que o crescimento do coeficiente de impacto do cilindro é bem mais abrupto que o da esfera. Por fim, dos dados experimentais para velocidade de penetração forçada constante, observou-se que o termo dominante do coeficiente de impacto de uma esfera é de primeira ordem, enquanto que o de um cilindro é de ordem zero.

vii) Simplificou-se a equação diferencial do movimento de penetração de uma esfera, resultando na redução da ordem dessa equação. Tal simplificação foi justificada

expandindo-se a solução exata e a aproximação em série de Taylor, em torno do instante inicial, de onde foi então possível mostrar que a diferença entre elas está no terceiro termo da série. Essa aproximação é um resultado novo na teoria do problema de impacto hidrodinâmico.

viii) Para o caso do cilindro infinito, apresentou-se de forma explícita, um coeficiente de impacto particular de segunda ordem, ao se considerar que a velocidade de penetração do mesmo seria variável. Tanto na abordagem de Von Kármán, quanto na de Wagner, o coeficiente de impacto particular de segunda ordem foi obtido. Esse resultado também é novo na teoria do problema de impacto hidrodinâmico. A obtenção do coeficiente de impacto de segunda ordem deveria, *a priori*, incluir não apenas os efeitos inerciais, como foi feito, mas também outros efeitos que foram desconsiderados nessa primeira aproximação. Sendo assim, os coeficientes de impacto de segunda ordem apresentados são um caso particular, onde apenas os efeitos inerciais foram considerados.

No caso da esfera, apresentou-se, apenas de forma implícita, a solução analítica de um caso particular da equação diferencial de seu movimento de penetração, dada a complexidade da mesma.

ix) O presente trabalho elucidou, de maneira analítica, a complexidade de se abordar coerentemente o clássico problema de impacto hidrodinâmico em superfície livre. No entanto, do ponto de vista da engenharia, uma boa aproximação para o coeficiente de impacto de geometrias esféricas e cilíndricas pode ser feita através da abordagem de WAGNER (1931). Tal procedimento tem a vantagem de não requerer ferramentas computacionais avançadas para sua execução. Além disso, o mesmo estabelece um limite superior para o valor do coeficiente de impacto real das referidas geometrias.

11 – Sugestões para trabalhos futuros

Como trabalhos futuros, sugerem-se ainda novas investigações analíticas sobre o fenômeno de impacto hidrodinâmico. Seria interessante incorporar os efeitos de compressibilidade na modelagem do problema, a fim de se obter um coeficiente de impacto de ordem superior. No entanto, talvez também seja necessário reavaliar a pertinência da condição de contorno linearizada na superfície livre, quando se desejar obter um coeficiente de impacto de ordem superior.

Ainda sobre investigações analíticas, tem-se que o problema poderia ser abordado do ponto de vista da mecânica analítica. Intuitivamente, espera-se que a lagrangiana do sistema hidromecânico (corpo de impacto e fluido) seja dada pelo campo impulsivo de pressão fluida. Se assim formulado, poder-se-ia buscar uma solução através de abordagens variacionais. Além disso, espera-se que um método mais robusto possa ser aplicado a geometrias mais complexas.

11.1 – Breve nota sobre a abordagem variacional

Para melhorar a descrição do fenômeno, poder-se-ia dividir o problema em três partes distintas. A primeira, onde se teria a compressão da camada de ar entre o corpo e o fluido, ocorrendo antes do contato do corpo com o líquido. Posteriormente, a segunda fase encerraria pequenas profundidades de penetração, sendo também caracterizada por pequenas perturbações da superfície livre, dada a velocidade supersônica de expansão

da linha de contato entre o corpo e o fluido. Por fim, a terceira fase, corresponderia àquela modelada no presente trabalho, sendo caracterizada por grandes perturbações da superfície livre, e velocidade subsônica de expansão da linha de contato entre o corpo e o fluido.

Após a obtenção do princípio variacional do problema, uma abordagem variacional sugerida seria aquela apresentada em MEI (1983), para o problema de difração e radiação a partir de um corpo flutuante. Para o problema de ondas de gravidade irrotacionais, LUKK (1967) mostra que a lagrangiana seria dada pela pressão fluida. Assim, especula-se que para o problema de impacto hidrodinâmico, essa seria dada pelo campo impulsivo de pressão.

Abordagens variacionais já foram utilizadas na resolução de outros problemas de hidrodinâmica, como o de ondas dispersivas e não-lineares, e o de escoamento rotacional.

Referências Bibliográficas

- ARPACI, V. S. *Conduction heat transfer*. Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Corporation, 1966. p. 9-13. (Addison-Wesley Series in Mechanics and Thermodynamics)
- BATCHELOR, G. K. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1967. p. 1-20 e p. 471-4.
- BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. *Transport phenomena*. International edition. New York, John Wiley & Sons, Incorporation, 1960. p. 71-82.
- BISPLINGHOFF, R. L.; DOHERTY, C. S. Some studies of the impact of vee wedges on a water surface. *J.F.I.*, p. 547-61, 1952.
- BUTKOV, E. *Física matemática*. Trad. de João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1988. p. 668-83.
- CAMPANA, E. F. et al. Parametric analysis of slamming forces: compressible and incompressible phases. /Apresentado a 3. International Conference on Hydrodynamics, Seoul, 1998/
- CHUANG, S.-L. Theoretical investigations on slamming of cone shaped bodies. *Journal of Ship Research*, v. 13, n. 4, p. 276-83, 1969.
- COIMBRA, A. L. *Mecânica dos Meios Contínuos*. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1967. p. 34-50 e p. 209-28.
- COINTE, R.; ARMAND, J.-L. Hydrodynamic impact analysis of a cylinder. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, v. 109, p. 237-43, 1987.
- COINTE, R. Two-dimensional water-solid impact. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, v. 111, p. 109-14, 1989.
- COOKER, J.; PEREGRINE, D. H. Pressure-impulse theory for liquid impact problems. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 297, p. 193-214, 1995.
- CURRIE, I. G. *Fundamental mechanics of fluids*. New York, Maple Press Company, 1974. p. 174-5.
- DOBROVOL'SKAYA, Z. N. On some problems of similarity flow of fluid with a free surface. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 36, p. 805-29, 1969.

- FALTNSEN, O. *Sea loads on ships and offshore structures*. New York, Cambridge University Press, 1990. (Cambridge Ocean Technology Series)
- FALTNSEN, O.; ZHAO, R. Water entry of ship sections and axisymmetric bodies. /Apresentado a AGARD FDP and Ukraine Institute of Hydromechanics Workshop on "High Speed Body Motion in Water", Kiev, 1997/
- FOX, R. W.; McDONALD, A. T. *Introdução à mecânica dos fluidos*. 3. ed. Trad. de P. Silvestre. Rio de Janeiro, Editora Guanabara S. A., 1988. p. 188-90 e p. 232-4.
- HOWISON, S. D.; OCKENDON, J. R.; WILSON, S. K. Incompressible water-entry problems at small deadrise angles. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 222, p. 215-30, 1991.
- HUGHES, O. F. Solution of the wedge entry problem by numerical conformal mapping. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 56, p. 173-92, 1972.
- IAFRATI, A. et al. Impact of rigid and elastic systems over the water surface. /Apresentado a 2. International Conference on Hydroelasticity in Marine Technology, Fukuoka, 1998/
- JOHNSON, R. S. *A modern introduction to the mathematical theory of water waves*. Cambridge, Cambridge University Press, 1997. p. 13-8. (Cambridge Texts in Applied Mathematics)
- KOCHIN, N. E.; KIBEL, I. A.; ROZE, N. V. *Theoretical hydromechanics*. Trad. de D. Boyanovitch. New York, Interscience Publishers, 1964.
- KOROBKIN, A. A.; PUKHNACHOV, V. V. Initial stage of water impact. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 20, p. 159-85, 1988.
- KOROBKIN, A. Blunt-body impact on a compressible liquid surface. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 244, p. 437-53, 1992.
- KOROBKIN, A. Acoustic approximation in the slamming problem. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 318, p. 165-88, 1996.
- LAMB, H. *Hydrodynamics*. 6. ed. New York, Dover Publications, 1945. p. 142-5.
- LANCZOS, C. *The variational principles of mechanics*. 4. ed. New York, Dover Publications Incorporation, 1970. p. 359-62.
- LUKE, J. C. A variational principle for a fluid with a free surface. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 27, part 2, p. 395-7, 1967.
- MEI, C. C. *The applied dynamics of ocean surface waves*. New York, John Wiley & Sons, Incorporation, 1983. p. 1-14.

- MILNE-THOMSON, *Theoretical hydrodynamics*. 5. ed. London, The Macmillan Press LTD, 1968. p. 499-501.
- MILOH, T. Wave slam on a sphere penetrating a free surface. *Journal of Engineering Mathematics*, v. 15, n. 3, p. 221-40, 1981.
- MILOH, T. On the oblique water-entry problem of a rigid sphere. *Journal of Engineering Mathematics*, v. 25, p. 77-92, 1991a.
- MILOH, T. On the Initial Stage Slamming of a Rigid Sphere in Vertical Water Entry. *Applied Ocean Research*, v. 13, n. 1, p. 43-8, 1991b.
- MOGHISI, M. ; SQUIRE, P. T. An experimental investigation of the initial force of impact on a sphere striking a liquid surface. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 108, p. 133-46, 1981.
- MOLIN, B. ; COINTE, R. ; FONTAINE, E. On energy arguments applied to the slamming force. /Apresentado a 11. International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Hamburg, 1996/
- NEWMAN, J. N. *Marine hydrodynamics*. Massachusetts, The MIT Press, 1977. p. 118-23 e p. 132-6.
- PENG, W. ; PEREGRINE, D. H. Pressure impulse theory for plate impact on water surface. /Apresentado a 15. International Workshop on Water Waves and Floating bodies, Caesarea, 2000/
- PENNISI, L. L. ; GORDON, L. I. ; LASHER, S. *Elements of complex variables*. New York, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1963.
- PESCE, C. P. *A note on some fundamental aspects of the classical free surface hydrodynamic impact problem*. Michigan, 1999. Monografia – University of Michigan.
- PESCE, C. P. *A note on the application of Lagrange equations to mechanical systems with mass explicitly dependent on position*. São Paulo, 2003. Monografia – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- PRAGER, W. *Introduction to mechanics of continua*. Boston, Ginn and Company, 1961. p. 3-94. (Introductions to Higher Mathematics)
- PRANDTL, L. ; TIETJENS, O. G. *Applied hydro- and aeromechanics*. New York, Dover Publications, Incorporation, 1934. p. 91-3. (Engineering Societies Monographs)
- RICE, R. G. ; DO, D. D. *Applied mathematics and modeling for chemical engineers*. New York, John Wiley & Sons, Inc. 1955. p. 254-7. (Wiley Series in Chemical Engineering)

- SCHLICHTING, H. **Boundary-layer theory**. 6. ed. New York, McGraw-Hill Inc., 1968. p. 1-6. (McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering)
- SELIGER, R. L.; WHITTHAM, G. B. Variational principles in continuum mechanics. **Proceedings Royal Society**, A. 305, p. 1-25, 1968.
- SHIFFMAN, M.; SPENCER, D. C. The force of impact on a cone striking a water surface (vertical entry). **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 4, n. 4, p. 379-418, 1951.
- SPIEGEL, M. R. **Variáveis complexas: com uma introdução às transformações conformes e suas aplicações**. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1973. (Coleção Schaum)
- VAN DYKE, M. **Perturbation methods in fluid mechanics**. Annoted ed. California, The Parabolic Press, 1975. p. 1-98.
- VON KÁRMÁN, T. **The impact on seaplane floats during landing**. Washington, D. C., NACA/NASA Langley Research Center, 1929 (Technical Note n. 321)
- WAGNER, H. **Landing of seaplanes**. Hampton, NACA/NASA Langley Research Center, 1931 (Technical Memorandum n. 622)
- WU, G. X. Hydrodynamic force on a rigid body during impact with liquid. **Journal of Fluids and Structures**, v. 12, n. 1, p. 549-59, 1998.
- WU, G. X. Initial pressure distribution due to jet impact on a rigid body. **Journal of Fluids and Structures**, v. 15, p. 365-70, 2001.
- ZHAO, R.; FALTNSEN, O. A. Water entry of two dimensional bodies. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 246, p. 593-612, 1993.
- ZHAO, R.; FALTNSEN, O.; AARSNES, J. V. Water entry of arbitrary two-dimensional sections with and without flow separation. / Apresentado a 21. Symposium on Naval Hydrodynamics, Trondheim, 1996/

Apêndice A – Equações de conservação

São as equações de conservação de massa e de energia mecânica que governam o comportamento do fluido que recebe o impacto do corpo. Ambas equações são demonstradas utilizando-se de um elemento cúbico diferencial de fluido, descrito por um sistema de coordenadas retangulares. O desenvolvimento das demonstrações decorre da aplicação do balanço dessas grandezas no volume fluido diferencial.

O uso da equação de conservação da energia mecânica é conveniente em virtude de sua natureza escalar. Sua forma simplificada para a classe de fluidos stokesiano-newtonianos e em escoamento irrotacional, conhecida como equação de Bernoulli, pode ser obtida utilizando-se a equação de conservação da massa, e a equação de conservação de quantidade de movimento para a referida classe de fluidos.

A.1 Obtenção da equação de conservação de massa, através de um balanço dessa grandeza, em um elemento infinitesimal de fluido

A equação de conservação da massa, também chamada de equação de continuidade, é deduzida através de um balanço de massa sobre um elemento de volume fluido estacionário, através do qual o fluido escoar (ver fig. A.1-1), i. e.,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de acumulação} \\ \text{de massa} \\ \text{no elemento de volume} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de massa que} \\ \text{entra no elemento} \\ \text{de volume} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de massa que} \\ \text{sai do elemento} \\ \text{de volume} \end{array} \right\} \quad (\text{A.1.1})$$

Tomando-se o par de faces perpendicular ao eixo x, tem-se que a taxa de massa que entra através da face x é $(\rho u_x)|_x \Delta y \Delta z$, e a taxa de massa que sai através da face $x + \Delta x$ é $(\rho u_x)|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$. Analogamente se têm expressões semelhantes para os outros dois pares de faces nas direções y e z.

A taxa de acumulação de massa dentro do elemento de volume é $\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t}$. Sendo assim, tem-se de (A.1.1) que

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta y \Delta z [(\rho u_x)|_x - (\rho u_x)|_{x+\Delta x}] + \Delta x \Delta z [(\rho u_y)|_y - (\rho u_y)|_{y+\Delta y}] + \Delta x \Delta y [(\rho u_z)|_z - (\rho u_z)|_{z+\Delta z}] \quad (\text{A.1.2})$$

Dividindo-se a expressão acima por $\Delta x \Delta y \Delta z$, e tomando-se seu limite em que Δx , Δy , e Δz tendem a zero, tem-se, da definição de derivada

A.2 Obtenção da equação de conservação de quantidade de movimento através de um balanço dessa grandeza, em um elemento infinitesimal de fluido (descrição em coordenadas cartesianas)

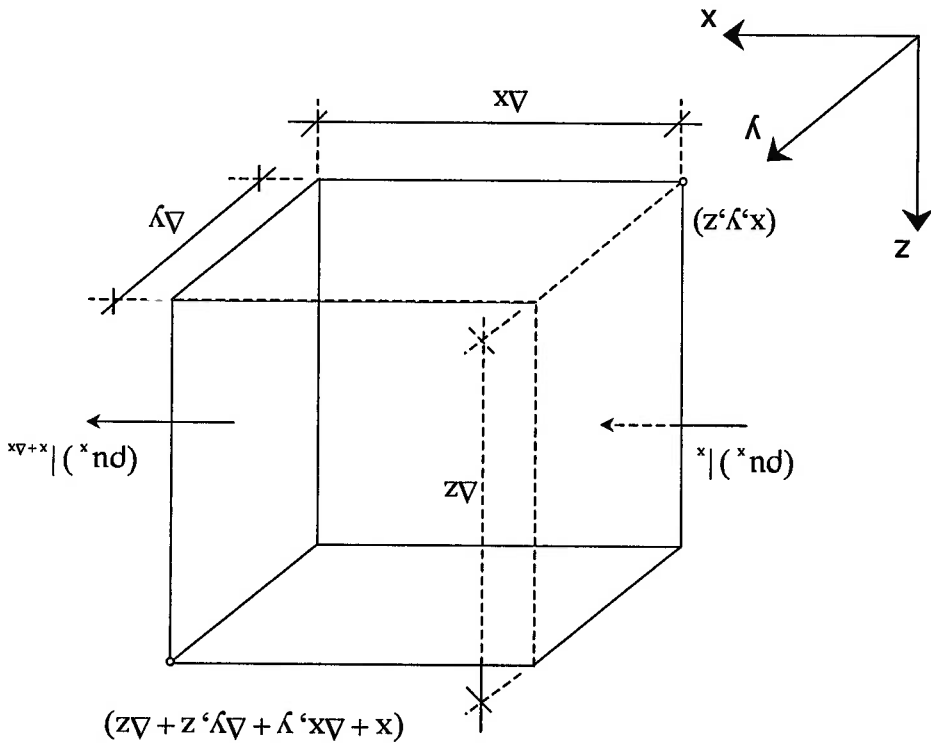
que é a equação de conservação de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{A.1.4}$$

Por fim, (A.1.3) pode ser reescrita como

escoa.

Fig. A.1-1: Região de volume $\Delta x \Delta y \Delta z$ fixa no espaço, através da qual o fluido



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) \right) \tag{A.1.3}$$

A dedução da equação de conservação da quantidade de movimento é feita de maneira análoga, i. e., escrevendo-se um balanço dessa grandeza sobre o volume fluido estacionário (ver fig. A.2-2). Dessa forma, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de acumulação} \\ \text{de quantidade de} \\ \text{movimento} \\ \text{no elemento de volume} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de quantidade} \\ \text{de movimento} \\ \text{que entra no elemento} \\ \text{de volume} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{taxa de quantidade} \\ \text{de movimento} \\ \text{que sai do elemento} \\ \text{de volume} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{soma das forças} \\ \text{atuantes} \\ \text{no elemento} \\ \text{de volume} \end{array} \right\} \quad (A.2.1)$$

A equação a ser deduzida é uma equação de caráter vetorial, e assim apresenta componentes nas direções x , y e z . Toma-se, primeiramente e arbitrariamente, a componente x da quantidade de movimento, sendo que as outras podem ser obtidas de maneira análoga.

O fluxo de quantidade de movimento, através do elemento de volume, dá-se através de dois mecanismos: por convecção, em virtude do escoamento do seio do fluido; e pelo transporte molecular, devido aos gradientes de velocidade.

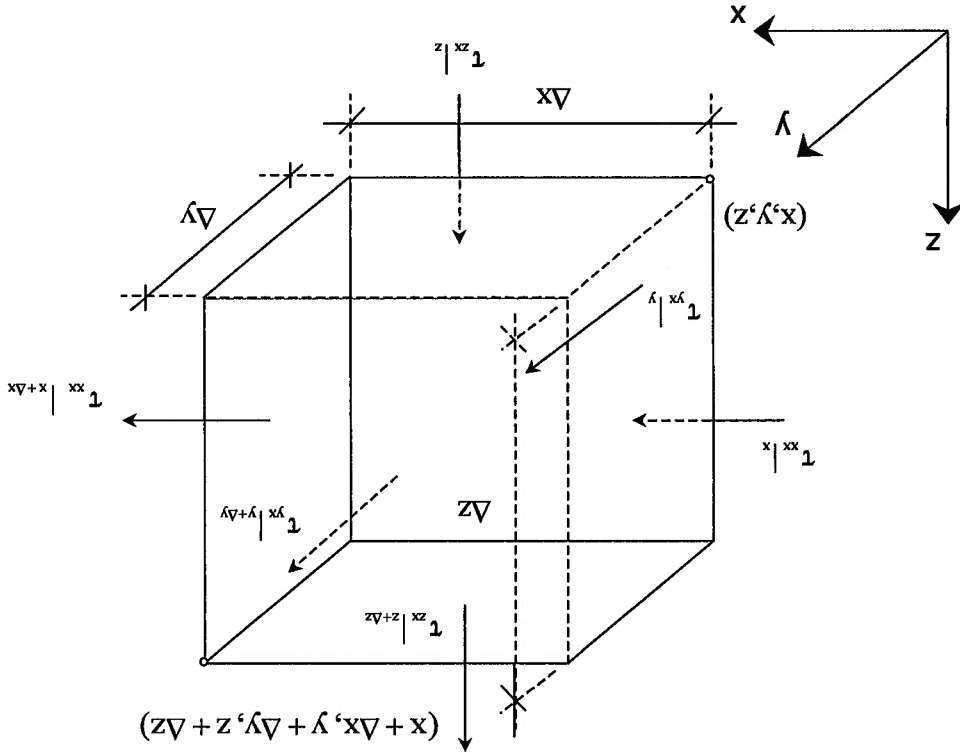


Fig. A.2-2: Elemento de volume $\Delta x \Delta y \Delta z$. As setas indicam a direção na qual a componente - x da quantidade de movimento é transportada através das superfícies.

(A.2.4)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_y) = - \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z u_y) \right] - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \rho g_y$$

As outras duas componentes são obtidas de maneira similar, e são

(A.2.3)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_x) = - \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_x u_z) \right] - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \rho g_x$$

Dividindo-se a expressão acima por $\Delta x \Delta y \Delta z$, e tomando-se seu limite em que Δx , Δy , e Δz tendem a zero, tem-se, da definição da derivada, que

(A.2.2)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_x) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_x u_z) - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \rho g_x$$

se

Por fim, tem-se que a taxa de acumulação de quantidade de movimento na direção x é $\Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_x)$. Agrupando-se agora as parcelas mostradas acima, tem-se

Na direção x , as forças que agem no elemento de volume são a pressão fluida, $\Delta y \Delta z (p_x - p_{x+\Delta x})$, e a força gravitacional, $\rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z$.

Para as faces z e $z + \Delta z$ são também similares.

A taxa em que sai através da face $y + \Delta y$ é $\tau_{yx} \Delta x \Delta z$; e a taxa em que entra através da face y é $\tau_{yx} \Delta x \Delta z$; e a taxa em que sai através da face x , por transporte molecular, é $\tau_{xx} \Delta y \Delta z$; e a taxa em que sai

De mesmo modo, a taxa em que a componente x do quantidade de movimento

entra através da face $x + \Delta x$ é $\tau_{xx} \Delta y \Delta z$. A taxa em que entra através da face y é $\tau_{yx} \Delta x \Delta z$. Analogamente, a taxa que entra através da face y é $(\rho u_x u_x) \Delta y \Delta z$, e a taxa em que sai através da face $x + \Delta x$ é $(\rho u_x u_x) \Delta y \Delta z$, e a taxa em que sai através da face $x + \Delta x$ é

A taxa em que a componente x da quantidade de movimento entra através da

$$(A.2.15) \quad \tau_{zx} = -\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

$$(A.2.14) \quad \tau_{yz} = -\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)$$

$$(A.2.13) \quad \tau_{xy} = -\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

$$(A.2.12) \quad \tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\mu}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u})$$

$$(A.2.11) \quad \tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\mu}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u})$$

$$(A.2.10) \quad \tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\mu}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u})$$

Em fluidos stokesiano-newtonianos, τ é definido como

$$(A.2.9) \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p - \Delta \cdot \mathbf{r} + \rho \mathbf{g}$$

Como (A.1.4) deve ser satisfeita, a expressão acima se reduz a

$$(A.2.8) \quad \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mu \nabla \Delta \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla \Delta \cdot \mathbf{u} = -\nabla p - \Delta \cdot \mathbf{r} + \rho \mathbf{g}$$

então (A.2.6) pode ser reescrita como

$$(A.2.7) \quad \Delta \cdot (\rho \mathbf{u}) = \mu \nabla \Delta \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \text{ (ver apêndice B.3)}$$

Como

$$(A.2.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \Delta \cdot \mathbf{r} + \rho \mathbf{g}$$

Reunindo-se, agora, (A.2.3), (A.2.4) e (A.2.5), tem-se

$$(A.2.5) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_x) = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_x u_z) \right] - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$$(A.3.1) \quad \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \mathbf{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u},$$

se

Em uma forma um pouco mais generalizada, a equação de Navier-Stokes torna-se newtonianos e incompressíveis, em escoamento irrotacional. O resultado a ser demonstrado é uma particularidade dos fluidos stokesiano-

A.3 - Obtenção da equação de Bernoulli, a partir da equação de Navier-Stokes e da equação de conservação de massa

$$(A.2.19) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \rho + \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_z$$

Para o caso de fluido incompressível, e com viscosidade constante, (A.2.16), (A.2.17) e (A.2.18) podem ser simplificadas. E então, se somadas, resultam em

$$(A.2.18) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \rho + \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_z$$

$$(A.2.17) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \rho + \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_y$$

$$(A.2.16) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \rho + \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_x$$

obtem-se

Substituindo as expressões (A.2.10) - (A.2.15) em (A.2.3), (A.2.4) e (A.2.5),

onde \mathbf{F} é a força de campo que está sendo aplicada no elemento de volume fluido.

Em notação indicial, pode-se escrever (A.3.1) como

$$(A.3.2) \quad p(\partial_0 u_i + u_j \partial_j u_i) = F_i - \partial_i p + \mu \partial_{jj} u_i$$

Utilizando-se da identidade

$$(A.3.3) \quad u_i \partial_i u_k = \frac{2}{3} \partial_k (u_i u_i) - \varepsilon_{kij} u_i \varepsilon_{jlm} \partial_l u_m \quad (\text{ver apêndice B.4}),$$

tem-se que (A.3.2) torna-se

$$(A.3.4) \quad p[\partial_0 u_i + \frac{2}{3} \partial_i (u_j u_j) - \varepsilon_{mjn} \varepsilon_{jlm} \partial_l u_m] = F_i - \partial_i p + \mu \partial_{jj} u_i$$

Utilizando-se agora de

$$(A.3.5) \quad \partial_{jj} u_i = \partial_i (\partial_j u_j) - \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l u_m \quad (\text{ver apêndice B.5}),$$

tem-se que (A.3.4) fica

$$(A.3.6) \quad p[\partial_0 u_i + \frac{2}{3} \partial_i (u_j u_j) - \varepsilon_{mjn} \varepsilon_{jlm} \partial_l u_m] = F_i - \partial_i p + \mu [\partial_i (\partial_j u_j) - \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l u_m]$$

Entretanto, se o fluido é incompressível, i. e., $p = \text{const.}$, a equação de conservação da massa toma a seguinte forma

$$(A.3.7) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

que em notação indicial fica

$$(A.3.8) \quad \partial_i u_i = 0$$

Logo, nesse caso, (A.3.6) torna-se

$$(A.3.9) \quad p[\partial_0 u_i + \frac{2}{3} \partial_i (u_j u_j) - \varepsilon_{mjn} \varepsilon_{jlm} \partial_l u_m] = F_i - \partial_i p + \mu (\varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l u_m)$$

Como o escoamento é irrotacional, tem-se que

$$(A.3.10) \quad \nabla \times \mathbf{u} \equiv 0,$$

ou melhor,

$$(A.3.11) \quad \varepsilon_{ijk} \partial_j u_k \equiv 0$$

Assim, (A.3.9) fica

$$\rho[\partial_0 u_i + \rho^{\frac{z}{2}} \partial_i (u_j u_j)] = F_i - \partial_i p \quad (\text{A.3.12})$$

É também característica dos escoamentos irrotacionais que

$$u_i = \partial_i \phi \quad (\text{ver B.2.5}) \quad (\text{A.3.13})$$

Dai, (A.3.12) pode assumir a seguinte forma

$$\rho[\partial_0 (\partial_i \phi) + \rho^{\frac{z}{2}} \partial_i (\partial_j \phi \partial_j \phi)] = F_i - \partial_i p \quad (\text{A.3.14})$$

Considerando-se que a única força externa aplicada ao fluido é a gravitacional, i.

e,

$$F_i = -\partial_i (p g z),$$

$$(\text{A.3.15})$$

(A.3.8) então fica

$$\rho[\partial_0 (\partial_i \phi) + \rho^{\frac{z}{2}} \partial_i (\partial_j \phi \partial_j \phi)] + \partial_i (p g z) + \partial_i p = 0,$$

$$(\text{A.3.16})$$

Tomando-se por hipótese que ϕ é uma função de classe C^2 , e utilizando-se das propriedades de derivadas parciais, tem-se então que

$$\partial_i (\rho \partial_0 \phi + \rho^{\frac{z}{2}} \partial_j \phi \partial_j \phi + p g z + p) = 0$$

$$(\text{A.3.17})$$

Por fim, é imediato que

$$\partial_0 \phi + \rho^{\frac{z}{2}} \partial_j \phi \partial_j \phi + g z + \frac{p}{\rho} = C(t)$$

$$(\text{A.3.18})$$

Alternativamente, em notação simbólica

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho^{\frac{z}{2}} \Delta \phi \cdot \Delta \phi + g z + \frac{p}{\rho} = C(t)$$

$$(\text{A.3.19})$$

A equação acima é a equação de Bernoulli. Normalmente, adota-se $C(t) = 0$; ou $C(t) = p_{\text{atm}} / \rho$, em problemas em que se verifica $p = p_{\text{atm}}$.

A.4 Comparação de magnitude entre as quantidades de massa, quantidade de movimento e energia cinética transportadas pelos jatos

COINTE e ARMAND (1987) resolvem o problema interno para o caso de um cilindro infinito, obtendo que a velocidade de cada um dos dois jatos é

$$v_j = 2 \left(\frac{UR}{t} \right)^{1/2} = 2U \frac{1}{\varepsilon} = 2v, \quad (A.4.1)$$

MOLIN et al. (1996) mostram que ao se igualar os limites das soluções interna e externa, obtêm-se

$$\delta_j = \frac{4}{\pi} R \varepsilon^3 \quad (A.4.2)$$

Assim, a variação de massa do seio do fluido, por unidade de comprimento do cilindro, é dada por

$$\frac{d\Omega_0}{dt} = 2(\rho \delta_j v_j) = \rho R U \varepsilon^4 \quad (A.4.3)$$

De mesmo modo, o "fluxo" de quantidade de movimento através dos jatos, por unidade de comprimento do cilindro, é

$$v_j \rho \frac{d\Omega_0}{dt} = 2\rho \pi R U^2 \varepsilon^3 \quad (A.4.4)$$

PESCE (2003) mostra que o formalismo lagrangeano aplicado ao problema de impacto hidrodinâmico, quando analisado através do domínio fluido Ω_0^* , fornece a seguinte expressão

$$F_z = -\frac{d}{dt}(\dot{M}U) - v_j \rho \frac{d\Omega_0^*}{dt} \quad (A.4.5)$$

Utilizando-se de (6.1.2.26), tem-se

$$-\frac{d}{dt}(\dot{M}U) = 2\rho \pi R U^2 \quad (A.4.6)$$

Assim, de (A.4.6) e (A.4.4), (A.4.5) pode ser escrita como

$$F_z = 2\rho \pi R U^2 (1 + \varepsilon^3) \quad (A.4.7)$$

Quando $t \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Assim, pode-se concluir de (A.4.6) e (A.4.7) que

$$F_z = -(1 + \varepsilon^3) \frac{d}{dt}(\dot{M}U), \text{ quando } t \rightarrow 0 \quad (A.4.8)$$

$\cong 1$

² As aspas aparecem, pois a expressão "fluxo" não está de todo correta. O fluxo deve dar-se em velocidade relativa à da fronteira do domínio. No entanto, na expressão para a força resultante do formalismo lagrangeano, utiliza-se a velocidade absoluta de desprendimento de massa

A energia cinética transportada pelos jatos para fora do volume de controle Ω_0^* é dada por

$$(A.4.9) \quad \frac{dT_0^*}{dt} = \frac{z}{2} v_j^2 [2\rho \delta_j (v_j - v_i)]$$

De (A.4.1) e (A.4.2), pode-se escrever (A.4.9) como

$$(A.4.10) \quad \frac{dT_0^*}{dt} = \rho \pi R U^3$$

Da expressão (5.2.3), para o caso em que $\phi \equiv 0$ em $z = 0$, $e_{\parallel} \mathbf{F} \parallel = \mathbf{F}_z$ (tomando-se o domínio fluido Ω_0^*), tem-se

$$(A.4.11) \quad \frac{dT_0^*}{dt} = U \int_{sc} p d\ell = \mathbf{F}_z U$$

De (6.1.1.3) em (A.4.11), tem-se então que

$$(A.4.12) \quad \frac{dT_0^*}{dt} = \mathbf{F}_z U = \rho \pi R U^3$$

Assim, comparando-se (A.4.10) e (A.4.12), mostra-se que, no instante inicial do impacto, a energia cinética é igualmente transferida para os jatos e para o seio do fluido, confirmando o mesmo resultado obtido por KOROBKIN; PUKHNACHOV (1988).

Note que foi utilizada a abordagem de VON KÁRMÁN (1929) em (A.4.11), pois o efeito do empilhamento não é levado em conta, quando não se considera formação da raiz do jato, i. e., $\partial\phi/\partial t = 0$ em $z = 0$.

Obtendo-se a expressão para a variação da energia cinética do fluido (seio + jatos), confirma-se a relação entre as expressões (A.4.10) e (A.4.12).

Então de (6.1.2.26) e (5.25), tem-se

$$(A.4.13) \quad \frac{dT_{sc}^*}{dt} = U \int_{sc} p d\ell = \mathbf{F}_z U = 2\rho \pi R U^3$$

O emprego da abordagem de WAGNER (1931) deve-se ao fato de que essa considera, como pertencendo ao fluido, a raiz do jato. É note que, se as expressões (A.4.10) e (A.4.12) forem somadas, recuperar-se-á (A.4.13). Embora ainda não tenha sido realizado nenhum formalismo semelhante a esse, para obter as magnitudes das grandezas devido aos jatos, para o impacto de uma esfera; MILLOH (1991b) postula que no cálculo da força de impacto atuante na esfera, pode-se desprezar a contribuição da solução interna.

Apêndice B – Meios *continua*

Parte I

B.1 Nota sobre a hipótese do meio ser um *continuum*

A inerente energia cinética de cada molécula que compõe um fluido impede que esse seja absolutamente coeso e compacto, pelo menos a todo instante de tempo. Assim, em uma porção arbitrária de fluido, a distribuição espacial de massa torna-se violentamente irregular e também variável com o tempo, já que a massa do fluido corresponde à soma das massas de cada uma das moléculas. Analogamente, é possível ver que outras propriedades como, velocidade, viscosidade, temperatura e etc., também se distribuem de maneira não-uniforme. Entretanto, a mecânica dos fluidos está normalmente preocupada com o comportamento da matéria em uma escala macroscópica, i. e., muito maior que a distância média entre as moléculas. Dessa forma, muito raramente, a estrutura molecular do meio precisa ser levada em conta explicitamente.

O livre caminho médio das moléculas é então considerado pequeno, se comparado com todas as outras dimensões existentes no problema. Sendo assim, uma média estatística, i. e., uma descrição global, torna-se possível. Em outras palavras, o meio passa a satisfazer a condição de campo.

A validação da hipótese do *continuum* torna-se ainda mais evidente, quando se observam as condições em que são realizadas as experiências do cotidiano da engenharia. Quando se deseja obter propriedades locais do fluido, deve-se realizar medições em pequenas porções desse, que distem entre si o mínimo possível. Inevitavelmente, os instrumentos acabam considerando os valores dessas medições, como sendo constante por toda a extensão do volume fluido utilizado para assim obtê-las. Dessa forma, tem-se que a medida que se diminui o volume utilizado pelo instrumento, a condição teórica de medida local¹ torna-se mais verossímil. Essa condição é dita apenas teórica, pois sempre é necessário adotar um volume de dimensões finitas para a realização das medidas. No entanto, mesmo que o volume adotado para as medições seja pequeno o suficiente em escala macroscópica, ele pode continuar sendo bastante grande em escala microscópica, o que implica que a estrutura molecular do fluido não precisa ser levada em conta. Sendo assim, as propriedades do fluido podem então ser descritas por funções contínuas nas coordenadas espaciais.

A hipótese do *continuum* permite também que outras investigações a respeito do escoamento sejam realizadas de maneira bastante clara e intuitiva. Na discussão das outras hipóteses adotadas na abordagem do problema de impacto hidrodinâmico, fica determinado *a priori* que o meio fluido é um *continuum*.

¹ O termo local significa ponto a ponto, i. e., a cada ponto do sistema de coordenadas que descreve o domínio fluido está associado um valor para determinada propriedade.

B.2 Obtenção da função potencial de velocidade a partir da condição de irrotacionalidade de uma partícula quadrada do *continuum*

“O desenvolvimento da rotação de uma partícula fluida, inicialmente sem rotação, requer a ação da tensão tangencial na superfície dessa partícula” (FOX, 1988, p. 189). Como um fluido ideal não apresenta viscosidade, segue que esse não pode sofrer ações que possam resultar em sua rotação. Esse fato permite o desenvolvimento de uma poderosa teoria matemática que descreve o escoamento dessa classe de fluidos. Seu principal fundamento ergue-se da condição da irrotacionalidade do meio, de onde então se mostra a existência de uma função escalar para descrever o campo do escoamento.

No caso bidimensional, o módulo do vetor de rotação de uma partícula quadrada do *continuum* é dado por

$$\|\boldsymbol{\omega}\| = \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (\text{B.2.1})$$

A equação acima pode ser melhor compreendida, observando-se a fig. B.1-1

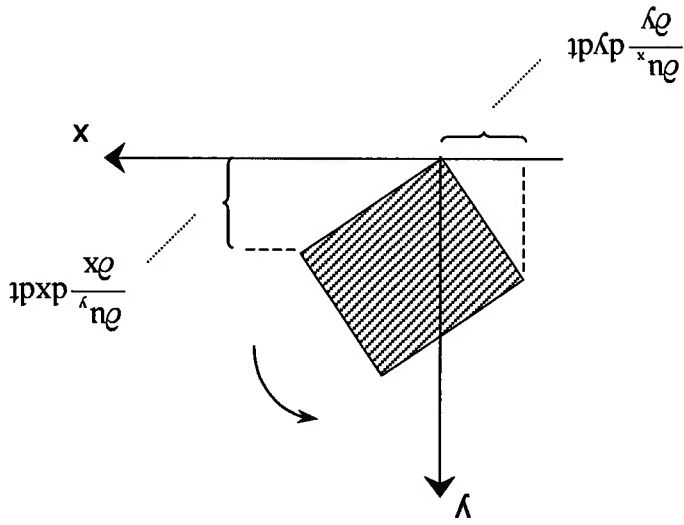


Fig. B.1-1: Movimento de rotação de uma partícula quadrada do *continuum*.

Para o caso tridimensional a expressão é análoga, i. e.

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \quad (\text{B.2.2})$$

Por conseguinte, se a partícula fluida não possui rotação, então

$$\nabla \times \mathbf{u} \equiv 0 \quad (\text{B.2.3})$$

Parte II

A função escalar ϕ é conhecida como potencial de velocidade. Dela erguem-se importantes relações como

$$\mathbf{u} \equiv \nabla \phi \quad (\text{B.2.5})$$

Da analogia entre (B.2.3) e (B.2.4), tem-se então

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (\text{ver apêndice B.6}) \quad (\text{B.2.4})$$

Da análise tensorial, tem-se que se ϕ é uma função escalar, então

Para que a manipulação das identidades tensoriais, que surgem da análise de um meio que satisfaz a hipótese do *continuum*, seja simplificada, adota-se uma notação conveniente, conhecida por notação indicial. Assim, para dois vetores genéricos $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \equiv (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z) \equiv (w_1, w_2, w_3)$, tem-se que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \equiv v_i w_i \delta_{ij} = v_i w_i = \sum_{i=1}^3 v_i w_i \quad (\text{i})$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} \equiv \varepsilon_{ijk} v_i w_j \quad (\text{ii})$$

O símbolo δ_{ij} chama-se delta de Kronecker, e está definido como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (\text{iii})$$

ε_{ijk} é o tensor de Levi-Civita, definido por

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{quando dois índices são iguais} \\ 1, & \text{quando } ijk = 123, 231, 312 \\ -1, & \text{quando } ijk = 213, 321, 132 \end{cases} \quad (\text{iv})$$

Segundo essa notação, adota-se por simplificação que

$$e_i \equiv \frac{\partial x_i}{e} \quad (\text{v})$$

$$e_{ij} \equiv \frac{\partial x_i \partial x_j}{e^2} \quad (\text{vi})$$

(vii)

$$\theta_0 \equiv \frac{\partial}{\partial t}$$

Em (v), (vi) e (vii) também se verifica a correspondência dos índices 1, 2 e 3 com x, y e z, respectivamente.

B.3 Demonstração da identidade: $\nabla \cdot (p\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla p + p \nabla \cdot \mathbf{u} + p \nabla \cdot \mathbf{n}$

Em notação indicial é fácil ver que

(B.3.1)

$$\partial_i (u_i n_j) = u_i n_j \partial_j p + p u_j \partial_j n_i + p u_i \partial_j n_j$$

O que remete diretamente à identidade em notação simbólica

B.4 Demonstração da identidade: $u_i \partial_i n_k = \frac{z}{l} \partial_k n_i n_i - \epsilon_{kij} u_i \epsilon^{jlm} \partial_l n_m$

Pela regra da cadeia da derivação

(B.4.1)

$$\partial_k (u_m n_m) = 2 u_m \partial_k n_m \Leftrightarrow u_m \partial_k n_m = \frac{z}{l} \partial_k (u_m n_m)$$

Pode-se também escrever

(B.4.2)

$$u_i \partial_i n_k = u_i \partial_i n_k + (u_i \partial_k n_i - u_i \partial_k n_i)$$

Logo, de (B.4.1) e (B.4.2) tem-se que

(B.4.3)

$$u_i \partial_i n_k = u_i \partial_i n_k - u_i \partial_k n_i + \frac{z}{l} \partial_k (u_i n_i)$$

No entanto

(B.4.4)

$$u_i \partial_k n_i = -\delta_{ki} \delta_{lm} u_i \partial_l n_m$$

Então de (B.4.3)

(B.4.5)

$$u_i \partial_i n_k = (\delta_{km} \delta_{ij} - \delta_{ki} \delta_{jm}) (u_i \partial_l n_m) + \frac{z}{l} \partial_k (u_i n_i)$$

Mas como

(B.4.6)

$$\delta_{km} \delta_{ij} - \delta_{ki} \delta_{jm} = -\epsilon_{jik} \epsilon^{jlm} = -\epsilon_{kij} \epsilon^{jlm},$$

(B.4.5) fica

(B.4.7)

$$u_i \partial_i n_k = -\epsilon_{kij} u_i \epsilon^{jlm} \partial_l n_m + \frac{z}{l} \partial_k (u_i n_i)$$

B.5 Demonstração da Identidade: $\partial_{jj} u_i = \partial_{jj} u_j - \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l u_m$

Pode-se escrever

$$(B.5.1) \quad \partial_{jj} u_i = \partial_{jj} u_i + \partial (u_j - \partial_{jj} u_j)$$

Supondo u suficientemente diferenciável, então

$$(B.5.2) \quad \partial_{jj} u_j = \partial_{jj} u_j$$

Assim, (B.5.1) é reescrita como

$$(B.5.3) \quad \partial_{jj} u_i = \partial_{jj} u_i + \partial_{jj} u_j - \partial_{jj} u_j$$

Mas

$$(B.5.4) \quad \partial_{jj} u_j = \delta_{jj} \delta_{jm} \partial_j \partial_l u_m$$

e,

$$(B.5.5) \quad \partial_{jj} u_i = \delta_{jm} \delta_{jl} \partial_j \partial_l u_m$$

Logo, de (B.5.4) e (B.5.5), (B.5.1) pode ser reescrita como

$$(B.5.6) \quad \partial_{jj} u_i = \partial_{jj} u_j - (\delta_{jj} \delta_{jm} \partial_j - \delta_{jm} \delta_{jl}) \partial_l u_m$$

Mas

$$(B.5.7) \quad \delta_{jj} \delta_{jm} - \delta_{jm} \delta_{jl} = \varepsilon_{kjl} \varepsilon_{klm}$$

Assim, (B.5.6) fica

$$(B.5.8) \quad \partial_{jj} u_i = \partial_{jj} u_j - \varepsilon_{kjl} \varepsilon_{klm} \partial_l u_m$$

Como

$$(B.5.9) \quad \varepsilon_{kjl} \equiv \varepsilon_{jlk},$$

(B.5.8), por fim, torna-se

$$(B.5.10) \quad \partial_{jj} u_i = \partial_{jj} u_j - \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l u_m$$

B.6 Demonstração da identidade: $\varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi \equiv 0$

ε_{ijk} é anti-simétrico em relação aos índices j e k . $\partial_j \partial_k \phi$ é simétrico em relação a esses índices, pois supondo-se ϕ suficientemente diferenciável, tem-se $\partial_j \partial_k \phi = \partial_k \partial_j \phi$.

Segue-se então que

$$2\varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi + \varepsilon_{jik} \partial_j \partial_k \phi$$

(B.6.1)

Mas

$$\varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi = \varepsilon_{kij} \partial_k \partial_j \phi = -\varepsilon_{jik} \partial_j \partial_k \phi$$

(B.6.2)

Então, (B.6.1) torna-se

$$2\varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi = -\varepsilon_{jik} \partial_j \partial_k \phi + \varepsilon_{jik} \partial_j \partial_k \phi = 0$$

(B.6.3)

Logo, é imediato que

$$\varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi = 0$$

(B.6.4)

Apêndice C – Condições de contorno

C.1 Obtenção de $\phi \rightarrow 0$ quando $\| \mathbf{x} \| \rightarrow \infty$

Segundo BATCHELOR (1967), a condição de que $\| \nabla \phi \| \rightarrow 0$, quando $\| \mathbf{x} \| \rightarrow \infty$ permite que o potencial de velocidade seja escrito como uma série infinita de harmônicos esféricos sólidos de grau negativo, i. e.¹

$$\phi(\mathbf{x}) = \gamma_1 e^{\gamma_1 \|\mathbf{x}\|^{-1}} + \gamma_2 e^{\gamma_2 \|\mathbf{x}\|^{-2}} + \dots + \gamma_n e^{\gamma_n \|\mathbf{x}\|^{-n}} \quad (\text{C.1.1})$$

campo para o tridimensional

$$\phi(\mathbf{x}) = \kappa \theta / 2\pi + \gamma_1 e^{\gamma_1 \|\mathbf{x}\|} + \gamma_2 e^{\gamma_2 \|\mathbf{x}\|} + \dots + \gamma_n e^{\gamma_n \|\mathbf{x}\|} \quad (\text{C.1.2})$$

campo bidimensional para o

Onde os coeficientes γ_1, γ_2 são dados por

$$\gamma_i = \frac{1}{4\pi} \int_{S_c} \mathbf{x}_i \cdot \nabla \phi - n_i \phi \, dS, \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_c} \left(-\frac{z}{r} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \cdot \nabla \phi - x_i n_j \phi \right) dS \quad (\text{C.1.3})$$

No entanto, a grandes distâncias do corpo, i. e. $\| \mathbf{x} \| \rightarrow \infty$, o potencial de velocidade pode ser aproximado por

$$\phi(\mathbf{x}) \approx \gamma_1 e^{\gamma_1 (\|\mathbf{x}\|^{-1})}, \text{ para o campo tridimensional} \quad (\text{C.1.4})$$

$$\phi(\mathbf{x}) \approx \gamma_1 e^{\gamma_1 (\log \|\mathbf{x}\|)}, \text{ para o campo bidimensional} \quad (\text{C.1.5})$$

Como

$$\| \mathbf{x} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad (\text{C.1.6})$$

então (C.1.4) e (C.1.5) pode ser escrita como

$$\phi(\mathbf{x}) \approx -\frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}}{\| \mathbf{x} \|^3}, \text{ para o campo tridimensional} \quad (\text{C.1.7})$$

¹ Vale a notação utilizada na parte II do apêndice B.

(C.1.8) $\phi(\mathbf{x}) \equiv \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}$, para o campo bidimensional

Logo, é imediato que quando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, tem-se $\phi \rightarrow 0$, tanto para o campo bidimensional como para o tridimensional.

C.2 Obtenção de $\phi = 0$ em $z = 0$, analisando-se o problema de oscilação harmônica de um corpo flutuante

Quando um corpo flutuante oscila na superfície livre de um fluido, ondas de superfície são formadas e irradiadas a partir do corpo. Em um fluido ideal e não limitado por fronteiras físicas, os parâmetros relacionados a essas ondas estão diretamente relacionados com a dinâmica e a dimensão do corpo.

Pode-se considerar que o estágio inicial do problema de impacto hidrodinâmico, quando visto de uma ótica impulsiva, equivale à situação limite em que a frequência de oscilação do corpo flutuante tende ao infinito.

De acordo com MEI (1983), as variáveis do problema de oscilação do corpo flutuante podem ser adimensionalizadas, com relação aos parâmetros inerente ao movimento das ondas de superfície geradas. E assim são

(C.2.1) $\phi' = \frac{A\omega\lambda}{2\pi}\phi$

(C.2.2) $\mathbf{x}' = \frac{\lambda}{2\pi}\mathbf{x}$

(C.2.3) $t' = \omega t$

(C.2.4) $h' = \frac{A}{h}$

Em $z = h(x, y, t)$, tem-se

(C.2.5) $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{dy}{dt}$

Mas

(C.2.6) $\frac{dx}{dt} \equiv \nabla\phi$

Logo, (C.2.5) pode ser reescrita como

(C.2.7) $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y}$, em $z = h$

Do mesmo modo, a restrição dinâmica do problema fica

$$(C.2.8) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + gh = 0, \text{ em } z = h$$

(C.2.7) e (C.2.8) podem ser reescritas utilizando-se das variáveis adimensionalizadas, ou seja

$$(C.2.9) \quad \frac{\partial \phi'}{\partial t'} = \frac{\partial \phi'}{\partial h'} + \frac{2\pi A}{\lambda} \left(\frac{\partial x'}{\partial h'} \frac{\partial \phi'}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial h'} \frac{\partial \phi'}{\partial y'} \right), \text{ em } z' = \frac{\lambda}{2\pi A} h'$$

$$(C.2.10) \quad \frac{\partial \phi'}{\partial t'} + \frac{\lambda}{\pi A} \nabla' \phi' \cdot \nabla' \phi' + \frac{2\pi g}{\omega^2 \lambda} h' = 0, \text{ em } z' = \frac{\lambda}{2\pi A} h'$$

Para ondas de pequenas amplitudes, i. e., $2\pi A/\lambda \ll 1$, as condições de contorno na superfície livre podem ser simplificadas, notando-se que a superfície livre difere do plano $z = 0$, por uma quantidade da ordem de $2\pi A/\lambda$. É razoável então adotar que $h \approx 0$. Como $z' = \frac{\lambda}{2\pi A} h'$, então é imediato que $z' = 0$.

Analogamente, como $2\pi A/\lambda \ll 1$, (C.2.9) e (C.2.10) tornam-se

$$(C.2.11) \quad \frac{\partial \phi'}{\partial h'} = \frac{\partial \phi'}{\partial t'}, \text{ em } z' = 0$$

$$(C.2.12) \quad \frac{\partial \phi'}{\partial t'} + \frac{2\pi g}{\omega^2 \lambda} h' = 0, \text{ em } z' = 0$$

De (C.2.1) - (C.2.4), tem-se que, (C.2.11) e (C.2.12) transformam-se em

$$(C.2.13) \quad \frac{\partial \phi}{\partial h} = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \text{ em } z = 0$$

$$(C.2.14) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + gh = 0, \text{ em } z = 0$$

Diferenciando-se (C.2.14) com respeito a t , e então a igualando com (C.2.13), obtêm-se

$$(C.2.15) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \text{ em } z = 0$$

MELI (1983) mostra que a linearidade do problema de oscilação de um corpo flutuante, em movimentos harmônicos simples, permite separar o fator tempo representado por $e^{-i\omega t}$, da expressão do campo de escoamento, i. e.

$$(C.2.16) \quad \phi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z)e^{-i\omega t}$$

Note então que

$$(C.2.17) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = -i\omega \phi e^{-i\omega t} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\omega^2 \phi e^{-i\omega t} = -\omega^2 \phi$$

Assim, (C.2.15) pode ser reescrita como

$$(C.2.18) \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi = 0$$

Por fim, (C.2.18) é rearranjada para

$$(C.2.19) \quad \phi = \frac{g}{\omega^2} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Como t' é uma variável adimensionalizada, seus valores devem estar entre 0 e 1 aproximadamente. Assim, de (C.2.3), é fácil ver que $t \rightarrow 0$, quando $\omega \rightarrow \infty$. Então, como $\partial \phi / \partial z$ é finito, tem-se que para $t \rightarrow 0$, (C.2.19) fica

$$(C.2.20) \quad \phi = 0, \text{ em } z = 0$$

Apêndice D – Identidades integrais e diferenciais envolvendo o potencial de velocidade

D.1 Expressão para a força hidrodinâmica de impacto (meio

fluido finito)

Da primeira lei de Newton, tem-se

$$(D.1.1) \quad \mathbf{F}_R^0 = \rho \frac{d}{dt} \int_{\Omega_R^0} \nabla \phi dV$$

Aplicando-se o teorema da divergência em (D.1.1), obtêm-se

$$(D.1.2) \quad \mathbf{F}_R^0 = \rho \frac{d}{dt} \int_{\partial \Omega_R^0} \phi \mathbf{n} dS$$

Como $\partial \Omega_R^0 = S_c \cup S_f \cup S_{L_0} \cup S_R$, (D.1.2) pode tornar-se

$$(D.1.3) \quad \rho \frac{d}{dt} \int_{\partial \Omega_R^0} \phi \mathbf{n} dS = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_{L_0} + \mathbf{F}_R$$

Mas

$$(D.1.4) \quad \mathbf{F}_{c,f,L_0,R} = - \int_{S_c, S_f, S_{L_0}, S_R} p \mathbf{n} dS \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_c = -\mathbf{F}_R^0$$

lei da ação e reação entre o corpo e o meio fluido

Da equação de Bernoulli, pode-se ainda ter

$$(D.1.5) \quad \mathbf{F}_{f,L_0,R} = \rho \int_{S_f, S_{L_0}, S_R} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{z}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) \mathbf{n} dS$$

Como \mathbf{u}_n é a velocidade normal da superfície $\partial \Omega_R^0$, então o fluxo de *momentum* através dessa superfície é dado por

$$(D.1.6) \quad \mathbf{q}_R^0 = \rho \int_{\partial R^0} \Delta \phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - u_n \right) dS$$

Como S_c e S_f são superfícies materiais segue que $\frac{\partial \phi}{\partial n} \equiv u_n$, nessas superfícies.

(D.1.7)

Então (D.1.6) fica

$$(D.1.8) \quad \mathbf{q}_R^0 = \rho \int_{S_{L_0} + S_R} \Delta \phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - u_n \right) dS$$

Vale a pena notar que nesse caso, não há somente fluxo de *momentum* através de S_R , mas também através de S_{L_0} , já que a superfície livre é considerada fixa nessa abordagem.

Para as superfícies fixas, tem-se $u_n \equiv 0$; logo (D.1.8) torna-se

$$(D.1.9) \quad \mathbf{q}_R^0 = \rho \int_{S_{L_0} + S_R} \Delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$$

Por fim de (D.1.4), (D.1.5) e (D.1.9); (D.1.3) pode ser reescrita como

$$(D.1.10) \quad \rho \frac{d}{dt} \int_{\partial R^0} \phi \mathbf{n} dS = -\mathbf{F}_R^0 + \rho \int_{S_f + S_{L_0} + S_R} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{z}{t} \Delta \phi \cdot \nabla \phi \right) \mathbf{n} dS - \rho \int_{S_{L_0}} \Delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$$

Mas

$$(D.1.11) \quad \rho \frac{d}{dt} \int_{\partial R^0} \phi \mathbf{n} dS = \rho \frac{d}{dt} \int_{S_c} \phi \mathbf{n} dS + \rho \frac{d}{dt} \int_{S_f + S_{L_0} + S_R} \phi \mathbf{n} dS$$

Do teorema do transporte, tem-se

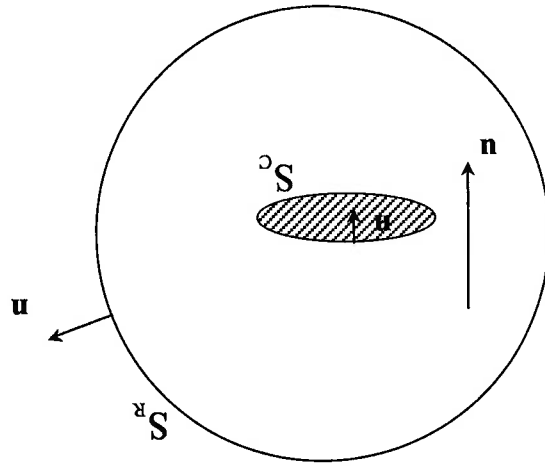
$$(D.1.12) \quad \rho \frac{d}{dt} \int_{\partial R^0} \phi \mathbf{n} dS = \rho \int_{S_f + S_{L_0} + S_R} \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{n} dS + \rho \int_{S_f + S_{L_0} + S_R} \Delta \phi \mathbf{n} dS$$

Como S_f , S_{L_0} , e S_R são superfícies fixas, (D.1.12) fica

$$(D.1.13) \quad \rho \frac{d}{dt} \int_{\partial R^0} \phi \mathbf{n} dS = \rho \int_{S_f + S_{L_0} + S_R} \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{n} dS$$

A taxa de variação da quantidade de movimento no volume fluido representado pela fig. D.1-1 é dada por

Fig. D.1-1: Representação esquemática do movimento de um corpo rígido (delimitado pela fronteira S_c), totalmente imerso em meio fluido finito (delimitado pela superfície S_R).



Vale notar que a expressão acima também pode ser obtida, considerando-se o movimento de um corpo rígido totalmente imerso em meio fluido finito, como assim mostra NEWMAN (1978) (ver fig. D.1.1).

$$\mathbf{F}_R^0 = \rho \frac{d}{dt} \int_{S_c} \left(\nabla \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{z}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) dS - \rho \frac{d}{dt} \int_{S_c} \phi \mathbf{n} dS \quad (\text{D.1.15})$$

Então, substituindo-se (D.1.14) em (D.1.10), e cancelando os termos semelhantes, tem-se

$$\frac{d}{dt} \int_{S_c} \phi \mathbf{n} dS = \frac{d}{dt} \int_{S_c} \phi \mathbf{n} dS + \int_{S_f+S_r+S_R} \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{n} dS \quad (\text{D.1.14})$$

Assim, (D.1.11) torna-se

$$\begin{aligned} \int_{S_r} \frac{d}{dt} \rho \mathbf{u} \, dS &= \rho \int_{V_r} \nabla \phi \, dV \quad \downarrow \text{teorema da divergência} \\ &= \rho \int_{V_r} \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dV + \rho \int_{S_r} \nabla \phi (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dS = \\ &\quad \uparrow \text{teorema do transporte} \end{aligned}$$

$$(D.1.16) \quad = \rho \int_{S_r} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{n} + \nabla \phi (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \right] dS$$

Como S_r é uma superfície de controle fixa, então $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$. Assim, (D.1.16) pode ser reescrita como

$$(D.1.17) \quad \rho \frac{d}{dt} \int_{S_r} \phi \, dS = \rho \int_{S_r} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{n} + \nabla \phi (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \right] dS + \rho \int_{S_r} \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{n} \, dS$$

Dessa forma, vê-se o sinal de integração e a derivada no tempo podem ser trocadas em S_r . Logo,

$$(D.1.18) \quad \rho \frac{d}{dt} \int_{S_c} \phi \, dS = \rho \int_{S_c} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{n} + \nabla \phi (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \right] dS$$

Como S_c é uma superfície material, então vale $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \partial \phi / \partial n$. Por fim, (D.1.18) torna-se

$$(D.1.19) \quad \rho \frac{d}{dt} \int_{S_c} \phi \, dS = \rho \int_{S_c} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{n} + \frac{\partial \phi}{\partial n} \nabla \phi \right] dS$$

Expressando-se a força de impacto como sendo a integral do campo de pressão sobre S_c , i. e.,

$$(D.1.20) \quad \mathbf{F}_R = \int_{S_c} p \, \mathbf{n} \, dS,$$

pode-se utilizar que $\partial \phi / \partial t + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + p / \rho = 0$ em S_c , e reescrever (D.1.20) como

$$(D.1.21) \quad \mathbf{F}_R = -\rho \int_{S_c} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right] \mathbf{n} \, dS$$

Utilizando-se por fim de (D.1.19) e (D.1.21), tem-se

$$\mathbf{F}_R = -\rho \frac{d}{dt} \int \phi \mathbf{n} ds + \rho \int \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \nabla \phi - \frac{z}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) ds \quad (\text{D.1.22})$$

D.2 Expressão para a força hidrodinâmica de impacto (meio fluido infinito)

Pode-se escrever que

$$\int_{S_c+S_R} \left(\Delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} - \frac{z}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) ds = \int_{S_c+S_R} [(\Delta \phi \nabla \phi) \cdot \mathbf{n} - \frac{z}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi] ds \quad (\text{D.2.1})$$

Pelo teorema de Gauss, a expressão acima fica

$$\int_{S_c+S_R} [(\Delta \phi \nabla \phi) \cdot \mathbf{n} - \frac{z}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi] ds = \int_{\Omega^R} [\nabla \cdot (\Delta \phi \nabla \phi) - \frac{z}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi] dV \quad (\text{D.2.2})$$

Utilizando-se da notação indicial, vê-se que

$$\int_{\Omega^R} [e_j e_j (\Delta \phi) - \frac{z}{2} e_i e_i (\Delta \phi \nabla_j \phi) + e_j e_j \Delta \phi] dV = \int_{\Omega^R} [e_j e_j \Delta \phi - \frac{z}{2} e_i e_i \Delta \phi \nabla_j \phi] dV \quad (\text{D.2.3})$$

Supondo ϕ suficientemente diferenciável em Ω^R , i. e.

$$e_j e_j \phi \equiv \Delta \phi, \quad (\text{D.2.4})$$

(D.2.3) torna-se

$$\int_{\Omega^R} [e_j e_j \Delta \phi + e_j e_j \Delta \phi - \frac{z}{2} e_i e_i \Delta \phi \nabla_j \phi] dV = \int_{\Omega^R} \Delta \phi dV \equiv \int_{\Omega^R} \Delta^2 \phi dV = 0 \quad (\text{D.2.5})$$

ϕ satisfaz a equação de Laplace em Ω^R

Logo, de (D.2.5), tem-se que (D.2.1) fica

$$\int_{S_c+S_R} \left(\Delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} - \frac{z}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) ds = 0 \quad (\text{D.2.6})$$

Assim, de (D.2.6), (D.1.22) pode ser reescrita como

$$\mathbf{F}_R = -\rho \frac{d}{dt} \int \phi \mathbf{n} ds - \rho \int_{S_c} \left(\Delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} - \frac{z}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) ds \quad (\text{D.2.7})$$

D.3 Obtenção da expressão para a taxa de variação da massa adicional em função de integrais em S_c e S_{L_0}

Seja

$$\hat{\phi} = \frac{U}{\phi} \tag{D.3.1}$$

Então, de (D.8.2)

$$\frac{1}{dM} \frac{d}{dt} \int_{S_c} \hat{\phi} n_z dS = \frac{p}{d} \frac{d}{dt} \int_{S_c} \hat{\phi} n_z dS \tag{D.3.2}$$

Como $\phi = 0$, em $z = 0$; então $\hat{\phi} = 0$, em $z = 0$. Logo, (D.3.2) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{dM} \frac{d}{dt} \int_{S_c+S_{L_0}} \hat{\phi} n_z dS = \frac{p}{d} \frac{d}{dt} \int_{S_c+S_{L_0}} \hat{\phi} n_z dS \tag{D.3.3}$$

Mas, como $\partial\Omega_R^0 = S_c \cup S_r \cup S_{L_0} \cup S_R$, e pelo teorema da divergência, (D.3.3)

$$\frac{1}{dM} \frac{d}{dt} \int_{S_c+S_{L_0}} \hat{\phi} n_z dS = \frac{p}{d} \frac{d}{dt} \int_{S_c+S_{L_0}} \hat{\phi} n_z dS - \int_{S_r+S_R} \hat{\phi} n_z dS \tag{D.3.4}$$

torna-se

De acordo com WU (1998), a superfície livre é considerada uma superfície fixa e coincidente com o plano $z = 0$, onde as seguintes condições de contorno são válidas

$$\phi = 0 = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \hat{\phi} = 0 = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} = 0 \tag{D.3.5}$$

Do apêndice C.1, tem-se que, no campo bidimensional, a grandes distâncias do corpo, o potencial de velocidade é da ordem de $\|x\|^{-2}$, o que implica que seu gradiente seja da ordem de $\|x\|^{-3}$. Como o elemento de área dS é da ordem de $\|x\|^2$, então a integral em S_r , (D.2.7), é da ordem de $\|x\|^{-4}$. Portanto, tornando-se nula quando $\|x\|$ tende ao infinito. O raciocínio é análogo para o caso tridimensional. Então, quando a distância do corpo tende ao infinito, (D.2.7) torna-se

$$F_\infty = -p \frac{d}{dt} \int_{S_c} \hat{\phi} n_z dS \tag{D.2.8}$$

(D.3.6)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

(D.3.7)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

Conseqüentemente, da equação de Bernoulli e de (D.3.5) e (D.3.7), tem-se

(D.3.8)

$$p = -\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2, \text{ em } S_{L_0}$$

Ainda de (D.3.7), (D.3.4) torna-se

(D.3.9)

$$\frac{1}{\rho} \frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{S_{L_0}^*} \frac{\partial \phi}{\partial z} \rho V - \frac{d}{dt} \int_{S_{L_0}^*} \phi n^z dS$$

Utilizando-se o teorema do transporte, a expressão acima fica

(D.3.10)

$$\frac{1}{\rho} \frac{dM}{dt} = \int_{S_{L_0}^*} \frac{\partial \phi}{\partial t} n^z dS + \int_{S_{L_0}^*} \frac{\partial \phi}{\partial z} n^z dS - \int_{S_{L_0}^*} \frac{\partial \phi}{\partial t} n^z dS =$$

Como S_{L_0} e $S_{L_0}^*$ são superfícies fixas, tem-se para essas $n^n \equiv 0$. Na superfície

molhada do corpo, i. e., em S_c , vale $n^n = U$. Da condição $\|\nabla \phi\| \rightarrow 0$, quando $\|x\| \rightarrow \infty$, e (D.3.7); tem-se $\partial \phi / \partial z \rightarrow 0$, quando $\|x\| \rightarrow \infty$. Sendo então imediato que

$\partial \phi / \partial z \rightarrow 0$, quando $\|x\| \rightarrow \infty$.

Assim, (D.3.10) fica

(D.3.11)

$$\frac{1}{\rho} \frac{dM}{dt} = \int_{S_c} \frac{\partial \phi}{\partial t} n^z dS + U \int_{S_c} \frac{\partial \phi}{\partial z} n^z dS$$

Note que, para o caso em que o corpo atinge a superfície livre, dotado somente

de translação pura, tem-se

(D.3.12)

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}, \text{ em } S_c$$

Para pequenas profundidades de penetração de um corpo com pequeno ângulo de deadrise, tem-se

$$(D.3.13) \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = u_x n_x + u_y n_y + u_z n_z = U n_z, \text{ em } S_c$$

Assim, é imediato que $\partial \phi / \partial n = u_z$ em S_c . Então, a primeira parcela do segundo membro de (D.3.11) pode ser reescrita como

$$(D.3.14) \quad \int_{S_c} \frac{\partial \phi}{\partial t} n_z dS = \int_{S_c} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial n} \phi \right) dS + \int_{S_c} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial n} \phi dS + \int_{S_c} \frac{\partial \phi}{\partial t} n_z dS$$

Do apêndice D.6, a expressão acima pode ser reescrita como

$$(D.3.15) \quad \int_{S_c} \frac{\partial \phi}{\partial t} n_z dS = - \int_{S_c} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial n} \phi \right) dS + \int_{S_c} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial n} \phi dS + \int_{S_c} \frac{\partial \phi}{\partial t} n_z dS$$

Utilizando-se de (D.3.5), (D.3.6) e (D.3.7); do fato de que S_r é uma superfície fixa e material; e de que $\phi \rightarrow 0$, quando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$; tem-se que (D.3.15) fica

$$(D.3.16) \quad \int_{S_c} \frac{\partial \phi}{\partial t} n_z dS = \int_{S_c} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial n} \phi dS + \int_{S_c} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} n_z - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial n} \phi \right) dS$$

WU (1998) mostra que, quando o corpo atinge a superfície fluida, dotado de translação pura, tem-se que

$$(D.3.17) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial n} n_z - U \frac{\partial \phi}{\partial z}, \text{ em } S_c \text{ (ver apêndice D.7)}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial n} n_z - U \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right) n_z - \frac{\partial U}{\partial z} n_z - U \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right) n_z - \frac{\partial U}{\partial z} n_z - U \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

$$(D.3.18) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right) n_z - \frac{\partial U}{\partial z} n_z - U \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

de (D.3.13) e (D.3.17)

Desse modo, (D.3.16) pode ser reescrita como

$$(D.3.19) \quad \int_{\partial\hat{\phi}}^{s_c+s_{i_0}} n_z ds = -U \int_{\partial\hat{\phi}}^{s_c} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial z \partial n} ds + \int_{\partial\hat{\phi}}^{s_{i_0}} \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} n_z - \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} \right) ds$$

WU e EATOCK TAYLOR (1996) apud PESCE (1999) mostram que

$$(D.3.20) \quad \int_{\partial\hat{\phi}}^{s_c} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial z \partial n} ds = \int_{\partial\hat{\phi}}^{s_{i_0}} \left(\Delta \hat{\phi} \cdot \nabla \hat{\phi} n_z - \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} \right) ds$$

Logo (D.3.19) torna-se

$$\int_{\partial\hat{\phi}}^{s_c+s_{i_0}} n_z ds = U \int_{\partial\hat{\phi}}^{s_c} \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{\phi} \partial \hat{\phi}} \frac{\partial z}{\partial n} - \nabla \hat{\phi} \cdot \nabla \hat{\phi} n_z \right) ds + \int_{\partial\hat{\phi}}^{s_{i_0}} \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} n_z - \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} \right) ds =$$

$$(D.3.21) \quad = U \int_{\partial\hat{\phi}}^{s_c} \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{\phi} \partial \hat{\phi}} \frac{\partial z}{\partial n} - \nabla \hat{\phi} \cdot \nabla \hat{\phi} n_z \right) ds + \int_{\partial\hat{\phi}}^{s_{i_0}} \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} n_z - \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} \right) ds$$

condição (D.3.6)



Assim, substituindo (D.3.21) em (D.3.11), tem-se

$$(D.3.22) \quad \frac{1}{2} \frac{dM}{dt} = U \int_{\partial\hat{\phi}}^{s_c} \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{\phi} \partial \hat{\phi}} \frac{\partial z}{\partial n} - \nabla \hat{\phi} \cdot \nabla \hat{\phi} n_z \right) ds + \int_{\partial\hat{\phi}}^{s_{i_0}} \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} n_z - \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} \right) ds + U \int_{\partial\hat{\phi}}^{s_c} n_z \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} ds$$

Rearranjando a expressão acima, tem-se

$$(D.3.23) \quad \frac{1}{2} \frac{dM}{dt} = 2U \int_{\partial\hat{\phi}}^{s_c} \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{\phi} \partial \hat{\phi}} \frac{\partial z}{\partial n} - \nabla \hat{\phi} \cdot \nabla \hat{\phi} n_z \right) ds + \int_{\partial\hat{\phi}}^{s_{i_0}} \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} n_z - \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} \right) ds$$

(D.3.23)

De (D.3.1), pode-se ainda reescrever (D.3.23) como

$$(D.3.24) \quad \frac{1}{2} \frac{dM}{dt} = U \int_{\partial\hat{\phi}}^{s_c} \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{\phi} \partial \hat{\phi}} \frac{\partial z}{\partial n} - \nabla \hat{\phi} \cdot \nabla \hat{\phi} n_z \right) ds + \frac{1}{U} \int_{\partial\hat{\phi}}^{s_{i_0}} \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial \hat{\phi}} - \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} \frac{\partial U}{\partial \hat{\phi}} \right) ds + U n_z \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} ds$$

Por fim, rearranjando-se (D.3.24) é imediato que

D.4 Obtenção da expressão da taxa de variação da energia cinética do domínio fluido Ω_0^c .

Tomando-se o domínio fluido Ω_0^c como volume de controle, tem-se

$$\frac{dT_R}{dt} \Big|_0 = \rho \int_{\Omega_0^c} \Delta \phi \cdot \Delta \phi \, dV + \rho \int_{\Sigma_0^c} \left(\frac{z}{2} \Delta \phi \cdot \Delta \phi \right) \cdot \mathbf{n} \, dS = \rho \int_{\Omega_0^c} \Delta \phi \cdot \Delta \phi \, dV + \rho \int_{\Sigma_0^c} \left(\frac{z}{2} \Delta \phi \cdot \Delta \phi \right) \cdot \mathbf{n} \, dS =$$

teorema do transporte

$$= \rho \int_{\Omega_0^c} \Delta \phi \cdot \Delta \phi \, dV + \rho \int_{\Sigma_0^c} \left(\frac{z}{2} \Delta \phi \cdot \Delta \phi \right) \cdot \mathbf{n} \, dS = \rho \int_{\Omega_0^c} \Delta \phi \cdot \Delta \phi \, dV + \rho \int_{\Sigma_0^c} \left(\frac{z}{2} \Delta \phi \cdot \Delta \phi \right) \cdot \mathbf{n} \, dS =$$

teorema da divergência

$$= \rho \int_{\Omega_0^c} \Delta \phi \cdot \Delta \phi \, dS + \rho \int_{\Sigma_0^c} \left(\frac{z}{2} \Delta \phi \cdot \Delta \phi \right) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (D.4.1)$$

Mas como, $u_n \equiv 0$ em S_F , S_L , S_R ; $\partial \phi / \partial n = 0$ em S_F ; $\partial \phi / \partial n = u_n$ em S_c ; e $\phi \rightarrow 0$, quando $\| \mathbf{x} \| \rightarrow \infty$; (D.4.1) torna-se

$$\frac{dT_R}{dt} \Big|_0 = \rho \int_{\Omega_0^c} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{z}{2} \Delta \phi \cdot \Delta \phi \right) u_n \, dS + \rho \int_{\Sigma_0^c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n} \, dS \quad (D.4.2)$$

Finalmente, utilizando-se a equação de Bernoulli na superfície molhada do corpo, a expressão acima pode ser reescrita como

$$\frac{dT_R}{dt} \Big|_0 = - \int_{\Sigma_0^c} p u_n \, dS + \rho \int_{\Sigma_0^c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n} \, dS \quad (D.4.3)$$

D.5 Obtenção da expressão da taxa de variação da energia cinética do domínio fluido Ω^∞

Tomando-se agora volume de controle o domínio fluido Ω^∞ , tem-se de maneira análoga à do apêndice D.4

↓

D.6 Aplicação da segunda identidade de Green às funções ϕ e

Pelo teorema da divergência

$$(D.6.1) \quad \int_V \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \Delta \psi - \psi \Delta \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dV = \int_V \nabla \cdot \left(\psi \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \psi \right) dV$$

$$(D.6.2) \quad \int_V \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \Delta \psi - \psi \Delta \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dV = \int_V \nabla \cdot \left(\psi \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \psi \right) dV$$

Conseqüentemente

$$(D.6.3) \quad \int_V \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \Delta \psi - \psi \Delta \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dV = \int_V \nabla \cdot \left(\psi \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \psi \right) dV$$

Da propriedade da derivada é imediato que

$$(D.5.4) \quad \frac{dT}{dt} = - \int_{S_c} p \, dV$$

Por fim, da equação de Bernoulli aplicada à S_c , obtêm-se

$$(D.5.3) \quad \frac{dT}{dt} = \int_{S_c} p \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) dV = \int_{S_c} p \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) dV$$

expressão acima é reescrita como

de que a superfície livre é uma superfície material e móvel, i. e., $\partial \phi / \partial n = u_n$, a

Utilizando-se da condição $\partial \phi / \partial t + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi = 0$, em S_f ; e considerando o fato

$$(D.5.2) \quad \frac{dT}{dt} = \int_{S_c} p \frac{\partial \phi}{\partial n} dS + p \int_{S_f} (\nabla \phi)_z u_n dS$$

quando $\| \mathbf{x} \| \rightarrow \infty$, tem-se

No entanto, para Ω^∞ , as condições são: $\partial \phi / \partial n = u_n = 0$ em S_f ; e $\phi \rightarrow 0$,

$$(D.5.1) \quad \frac{dT}{dt} = \int_{S_c} p \frac{\partial \phi}{\partial n} dS + p \int_{S_f} (\nabla \phi)_z u_n dS$$

$$\int_{\Omega} \Delta \cdot \left[\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \Delta \hat{\phi} - \hat{\phi} \Delta \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \right) \right] dV = \int_{\Omega} \Delta \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \right) \Delta \hat{\phi} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \Delta \hat{\phi} \Delta - \Delta \hat{\phi} \Delta \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \right) \Delta \hat{\phi} \Delta \right] dV =$$

$$= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \Delta \hat{\phi} \Delta - \hat{\phi} \Delta \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \right) \Delta \right] dV = \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \Delta \hat{\phi} \Delta dV - \int_{\Omega} \hat{\phi} \Delta \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \right) \Delta dV \quad (D.6.4)$$

Mas, se $\hat{\phi}$ satisfaz a equação de Laplace em Ω , então $\hat{\phi}$ assim também o faz,

logo

$$\int_{\Omega} \Delta \cdot \left[\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \Delta \hat{\phi} - \hat{\phi} \Delta \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \right) \right] dV = 0 \quad (D.6.5)$$

Assim, de (D.6.3), pode-se concluir que

$$\int_{s_i}^{s_c} \left[\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} - \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \right) \right] dS = - \int_{s_i}^{s_i+s_c} \left[\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} - \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \right) \right] dS \quad (D.6.6)$$

D.7 Obtenção da expressão $\frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial t} \frac{dU}{dz} - U \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial n} (\Delta \hat{\phi})$

Seja

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} \right) = \frac{d}{dt} (\Delta \hat{\phi} \cdot \mathbf{n}) = \frac{d}{dt} (\Delta \hat{\phi}) \cdot \mathbf{n} + \Delta \hat{\phi} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} \quad (D.7.1)$$

Acompanhando-se um ponto fixo no corpo, tem-se

$$\frac{d}{dt} (\Delta \hat{\phi}) = \Delta \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \right) \cdot \Delta \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \quad (D.7.2)$$

Como o corpo é rígido, (D.7.2) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt} (\Delta \hat{\phi}) = \Delta \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \right) + [(\mathbf{v}_o + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{xo}) \cdot \nabla] \Delta \hat{\phi} \quad (D.7.3)$$

Na superfície do corpo, vale

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n} \quad (D.7.4)$$

Assim, de (D.7.3) e (D.7.4), (D.7.1) fica

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right) \cdot \mathbf{n} + \{ (\mathbf{v}_o \cdot \nabla) \nabla \phi \} \cdot \mathbf{n} + \nabla \phi \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}) =$$

$$= \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + (\mathbf{v}_o \cdot \nabla) \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right) + \nabla \phi \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}) =$$

$$= \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \mathbf{v}_o \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right) + \boldsymbol{\Omega} \cdot \left(\mathbf{r}_{xo} \times \nabla \phi \right)$$

(D.7.5)

Da condição de contorno no corpo, tem-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = (\mathbf{v}_o \cdot \nabla) \phi + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{r}_{xo} \times \mathbf{n})$$

(D.7.6)

Portanto

$$\left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \cdot \mathbf{r}_{xo} \right) \times \mathbf{n} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{xo}) \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{v}_o \cdot \nabla) \phi + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}) \right\} =$$

$$= \left(\frac{d\mathbf{v}_o}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{xo} \right) \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{r}_{xo} \times \mathbf{v}_o)$$

(D.7.7)

Logo, igualando-se (D.7.5) e (D.7.7), tem-se

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \left(\frac{d\mathbf{v}_o}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{xo} \right) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{v}_o \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right) + \boldsymbol{\Omega} \cdot \left[\mathbf{r}_{xo} \times (\mathbf{v}_o - \nabla \phi) \right]$$

(D.7.8)

(D.7.8) torna-se

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \left(\frac{d\mathbf{v}_o}{dt} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_o \cdot \nabla \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right)$$

(D.7.9)

Tomando-se o caso particular em que só há translação do corpo, i. e., $\boldsymbol{\Omega} \equiv 0$,

D.8 Obtenção da massa adicional para o caso da penetração do cilindro infinito e da esfera

A massa adicional associada ao movimento de um corpo rígido em meio fluido infinito é dada por

$$\frac{1}{2} M U^2 = \rho \int_{\frac{1}{2}}^{V_c} \Delta \phi \cdot \Delta \phi \cdot \Delta \phi \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \rho \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{z}{2}} \phi \cdot \Delta \phi \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad \text{(abordagem através da energia cinética)} \quad (*) \quad \downarrow \quad (D.8.1)$$

ou

$$M U = \rho \int_{\frac{1}{2}}^{V_c} \Delta \phi \cdot dV = \rho \int \phi \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad \text{(abordagem através da quantidade de movimento)} \quad (D.8.2)$$

Podem-se demonstrar (*) utilizando-se do teorema da divergência, i. e.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{V_c} \Delta \cdot \phi \cdot dV = \int \phi \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad (D.8.3)$$

Suponha que $\phi = \phi \Delta \phi$, onde ϕ é uma variável auxiliar. Logo, (D.8.3) fica

$$\int_{\frac{1}{2}}^{V_c} \Delta \phi \cdot \Delta \phi \cdot dV + \int \phi \Delta^2 \phi \cdot dV = \int \phi \Delta \phi \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad (D.8.4)$$

No entanto, ϕ satisfaz a equação de Laplace em V_c , o que torna (D.8.4)

$$\int_{\frac{1}{2}}^{V_c} \Delta \phi \cdot \Delta \phi \cdot dV = \int \phi \Delta \phi \cdot \mathbf{n} \cdot dS \quad (D.8.5)$$

Para o caso do cilindro infinito utiliza-se de (6.1.1) e (4.2.1.2.22) em (D.8.1). O que dá

$$M = \rho \int_{+\infty}^{-\infty} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx \quad (D.8.6)$$

Como

$$\int_{+\infty}^{-\infty} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \left(\frac{2}{3} \sqrt{a^2 - x^2} - x^2 + \frac{2}{a^2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a} \right) \Bigg|_{+\infty}^{-\infty} = \frac{2}{3} \pi a^2, \quad (D.8.7)$$

é imediato que

$$M = \frac{2}{1} \rho \pi a^2$$

(D.8.8)

Para a esfera, o procedimento é análogo, porém utiliza-se de (6.2.1). Logo

$$M = \rho \frac{2}{2} \int_{2\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta = \rho \frac{\pi}{2} \int_{2\pi}^{\pi} \left[-\frac{5}{3} (a^2 - r^2)^{3/2} \right]_0^{\pi} d\theta = \frac{5}{4} \rho a^3$$

(D.8.9)

Apêndice E – Transformação conforme

E.1 Obtenção do escoamento em uma placa plana retangular

A função que mapeia um círculo de raio R (sob a ação de escoamento uniforme com velocidade de aproximação U) no plano complexo z , para um segmento de reta entre os pontos $(-2RU, 0)$ e $(+2RU, 0)$, no plano complexo Z , é dada por (ver fig. E.1-1)

$$z = f(z) = U \left(z + \frac{z}{R} \right) \quad (E.1.1)$$

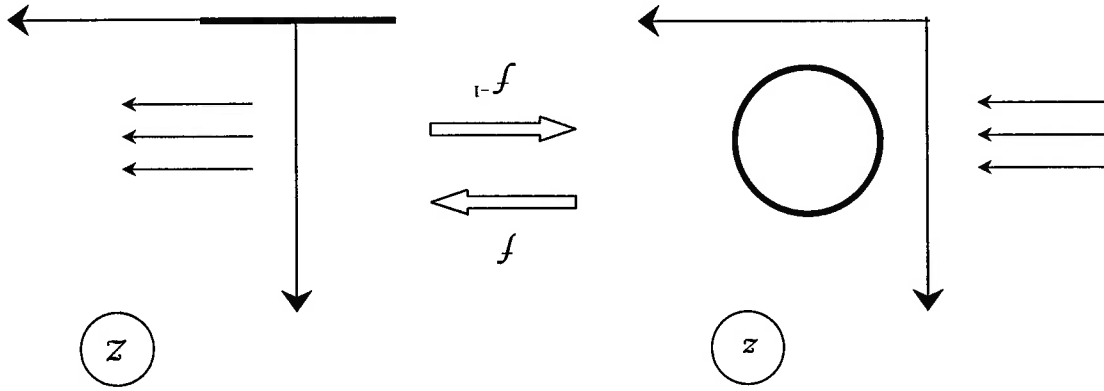


Fig. E.1-1: Esquema da transformação conforme que mapeia um círculo sob escoamento uniforme, para um segmento de reta.

É conveniente adotar $R = 1$ e $U = 1/2$, pois assim, (E.1.1) torna-se

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{z}{1} \right) \quad (E.1.2)$$

Dessa forma um círculo de raio unitário no plano z é mapeado no segmento de reta entre os pontos $(-1, 0)$ e $(+1, 0)$ no plano Z . Entretanto, o potencial complexo $\Phi = Z$ ⁽¹⁾ corresponde a uma corrente uniforme e paralela à placa plana (representada no caso pelo segmento de reta). Como se deseja que a placa esteja perpendicular à corrente,

⁽¹⁾ A função Φ , definida como $\Phi = \phi + iy$, é conhecida em hidrodinâmica, por potencial complexo.

é necessário que a placa seja girado de 90° graus. Para tal, gira-se o círculo de 90° graus, o que em nada altera seu escoamento. Para tal, substitui-se z por iz em (E.1.2). É interessante que se obtenha primeiramente $z = f^{-1}(Z)$, resolvendo-se (E.1.2) para z , i. e.

$$(E.1.3) \quad z = \frac{z}{2}(z+1/z) \Leftrightarrow z^2 - 2Zz + 1 = 0$$

Cujas raízes então são

$$(E.1.4) \quad z = Z \pm \sqrt{Z^2 - 1}$$

Escolhe-se como raiz $z = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$, pois $Z \equiv \sqrt{Z^2 - 1}$, quando $Z \rightarrow \infty$; o que então implica que $z \equiv 2Z$, quando $Z \rightarrow \infty$. Isso é consistente com o limite de $Z = \frac{z}{2}(z+1/z)$, quando $z \rightarrow \infty$.

Substituindo-se z por iz em (E.1.1), tem-se

$$(E.1.5) \quad f(z) = \frac{z}{2}i(z-1/z)$$

Tomando-se $z = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$ na expressão acima, obtém-se

$$(E.1.6) \quad f^{-1}(Z) = \frac{z}{2}i\{Z + (Z^2 - 1)^{1/2} - (Z + (Z^2 - 1)^{1/2})^{-1}\}$$

Por fim, rearranjando (E.1.6)

$$(E.1.7) \quad f^{-1}(Z) = \frac{z}{2}i(Z^2 - 1)^{1/2}$$

A expressão acima pode ser facilmente generalizada para o caso em que a velocidade de corrente é U , e a placa retangular plana possui meia-largura a , i. e.

$$(E.1.8) \quad f^{-1}(Z) = U i (Z^2 - a^2)^{1/2}$$

Em $z = 0$, tem-se $Z(x, z = 0) = x + iz$. Então, em $z = 0$, (E.1.8) fica

$$(E.1.9) \quad f^{-1}(x) = U i (x^2 - a^2)^{1/2}$$

Em $x > a$, tem-se que

$$(E.1.10) \quad (x^2 - a^2)^{1/2} = i(a^2 - x^2)^{1/2}$$

Assim, na superfície da placa, i. e., em $z = 0$ e $x > a$; (E.1.9) torna-se

$$(E.1.11) \quad f^{-1}(x) = -U(a^2 - x^2)^{1/2}$$

E.2 Obtenção do escoamento em uma placa plana circular

Seja a transformação conforme

$$z = a \sinh Z, \text{ onde } z = x + iy \text{ e } Z = \xi + i\eta \quad (\text{E.2.1})$$

Assim

$$x = a \sinh \xi \cos \eta \quad \text{e} \quad y = a \cosh \xi \sin \eta \quad (\text{E.2.2})$$

Note que a curva $\xi = \xi_0 = \text{const.}$ é uma elipse no plano meridiano cujos semi-eixos d_1 e d_2 são definidos como $d_1 = a \cosh \xi_0$ e $d_2 = a \sinh \xi_0$. Pode-se dizer que $\xi = \xi_0$ representa a superfície de um elipsóide oblato (ver fig. E.2-1).

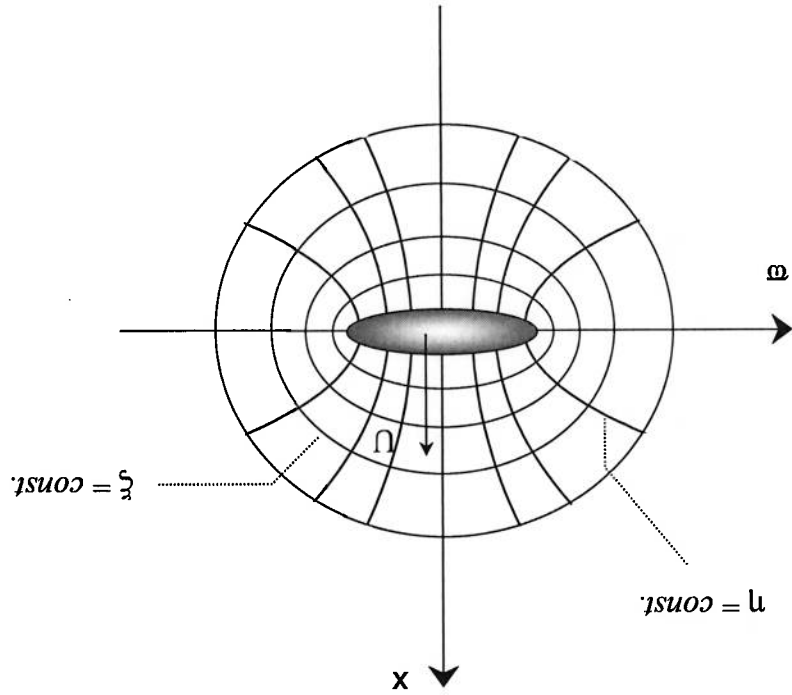


Fig. E.2-1: Sistema de coordenadas elípticas.

Logo, comparando-se $\Phi = f^{-1}(Z) = \phi + i\psi$ com (E.1.11) chega-se a

$$\phi = -U(a^2 - x^2)^{1/2}, \text{ em } z = 0 \text{ e } x > a \quad (\text{E.1.11})$$

Como o escoamento é irrotacional, segue que

$$\nabla \times \mathbf{u} \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial u_m}{\partial u_x} - \frac{\partial x}{\partial u_x} \equiv 0 \quad (\text{E.2.3})$$

Das relações entre a função corrente ψ e as componentes da velocidade u_m , u_x , que são

$$u_m = \frac{1}{\partial \psi} \frac{\partial x}{\partial \psi} \quad e \quad u_x = -\frac{1}{\partial \psi} \frac{\partial \omega}{\partial \omega}, \quad (\text{E.2.4})$$

aplicadas em (E.2.3), tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\partial \psi} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial \omega} \left(\frac{1}{\partial \psi} \frac{\partial \omega}{\partial \omega} \right) = 0 \quad (\text{E.2.5})$$

Da transformação (E.2.1), pode-se reescrever (E.2.5) como

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\partial \psi} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\partial \psi} \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (\text{E.2.6})$$

E assim de (E.2.2), (E.2.6) fica

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\partial \psi} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \cosh \xi \sin \eta \right) + \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\partial \psi} \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \cosh \xi \sin \eta \right) = 0 \quad (\text{E.2.7})$$

Quando um elipsóide rígido move-se com velocidade U em meio fluido infinito, as condições de contorno a serem satisfeitas pela função corrente são

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{\partial \psi} \frac{\partial \omega}{\partial s} = U \cos \gamma = U \frac{d\omega}{ds}, \text{ na superfície do corpo; (ver fig. E.2-2)}$$

$$\psi \rightarrow 0, \text{ no infinito} \quad (\text{E.2.9})$$

Note que a condição (E.2.8) pode ser integrada, fornecendo

$$\psi = -\frac{z}{2} U \omega^2 + C \quad (\text{E.2.10})$$

Sem perda de generalidade, (E.2.10) pode assumir a forma de

$$\psi = -\frac{z}{2} U \omega^2 \quad (\text{E.2.11})$$

Logo, de (E.2.2) em (E.2.11) tem-se

$$(E.2.12) \quad \psi = -\frac{1}{2} U c^2 \cosh^2 \xi_0 \operatorname{sen}^2 \eta$$

Observando-se a condição (E.2.12), é natural tentar uma solução para (E.2.7) do tipo $\psi(\xi, \eta) = f(\xi) \operatorname{sen}^2 \eta$. Substituindo-a em (E.2.7) obtém-se

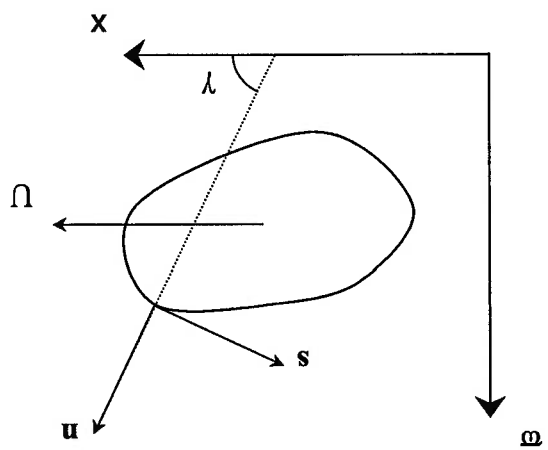


Fig. E.2-2: Representação do ângulo γ , formado entre a normal da superfície do corpo e o eixo x .

$$(E.2.13) \quad \frac{d^2 f}{d\xi^2} \cosh^2 \xi - 2f \operatorname{senh} \xi - \frac{df}{d\xi} \operatorname{senh} \xi - 2f \cosh \xi = 0$$

A expressão acima pode ser integrada com respeito a ξ , e dessa forma tem-se

$$(E.2.14) \quad \frac{df}{d\xi} \cosh^2 \xi - 2f \operatorname{senh} \xi = C_1$$

Note ainda que (E.2.14) pode ser reescrita como

$$(E.2.15) \quad \frac{d}{d\xi} \left(\frac{f}{C_1} \cosh^2 \xi \right) = \frac{df}{d\xi} \cosh^2 \xi$$

Novamente, da integração de (E.2.15) em ξ , tem-se

$$(E.2.16) \quad f = C_1 \cosh^2 \xi \int \frac{d\xi}{\cosh^3 \xi} + C_2 \cosh^2 \xi$$

Utilizando-se da condição (E.2.9), mostra-se que $C_2 = 0$.
Integra-se (E.2.16) por partes, e obtém-se

$$(E.2.17) \quad f(\xi) = \frac{1}{2} C_1 \cosh^2 \xi \left(\frac{\sinh \xi}{\cosh^2 \xi} - \cot^{-1} \sinh \xi \right) + C_3 \cosh^2 \xi$$

Note da condição (E.2.9) que a constante C_3 deve ser nula.

A constante C_1 é determinada, através da condição (E.2.12), i.e.

$$(E.2.18) \quad f(\xi_0) \sin^2 \eta = \frac{1}{2} C_1 \cosh^2 \xi_0 \left(\frac{\sinh \xi_0}{\cosh^2 \xi_0} - \cot^{-1} \sinh \xi_0 \right) \sin^2 \eta = -\frac{1}{2} U c^2 \cosh^2 \xi_0 \sin^2 \eta$$

Logo,

$$(E.2.19) \quad C_1 = \frac{\cosh^2 \xi_0 \left(\frac{\sinh \xi_0}{\cosh^2 \xi_0} - \cot^{-1} \sinh \xi_0 \right)}{-U c^2 \cosh^2 \xi_0}$$

Define-se a excentricidade e da seção meridiana como sendo

$$(E.2.20) \quad e = \left(\frac{d_1^2 - d_2^2}{d_2^2} \right)^{1/2}$$

Das definições de d_1 , e , d_2 e de (E.2.20), tem-se então que

$$(E.2.21) \quad d_2 = d_1 \sqrt{1 - e^2}$$

Ainda utilizando-se da definição de d_1 , e , d_2 e de (E.2.21), (E.2.19) pode ser

reescrita como

$$(E.2.22) \quad C_1 = -\frac{U a^2}{e \sqrt{1 - e^2} - \sin^{-1} e}$$

Logo, de (E.2.22) em (E.2.17), tem-se então

$$(E.2.23) \quad f(\xi) = -\frac{1}{2} U a^2 (\sinh \xi - \cosh^2 \xi \cot^{-1} \sinh \xi) \frac{e \sqrt{1 - e^2} - \sin^{-1} e}{e}$$

Assim, é imediato que

$$(E.2.24) \quad \psi(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} U a^2 (\sinh \xi - \cosh^2 \xi \cot^{-1} \sinh \xi) \frac{e \sqrt{1 - e^2} - \sin^{-1} e}{\sin^2 \eta}$$

Para o caso de um disco circular, ou seja, quando se tem $d_2 = 0$; o que implica de (E.2.20) que $e = 1$; (E.2.24) fica

$$(E.2.25) \quad Ua_2^2 = -\frac{\pi}{2} (\sinh \xi - \cosh^2 \xi \cot^{-1} \sinh \xi) \operatorname{sen}^2 \eta$$

Para se obter a velocidade vertical em $x = 0$ e $w > a$, toma-se

$$(E.2.26) \quad u_z \Big|_{x=0, w>a} = \frac{1}{\partial \psi} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{\partial \psi} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\pi/2}$$

É conveniente escrever a expressão acima como

$$(E.2.27) \quad u_z \Big|_{x=0, w>a} = \frac{1}{\partial \psi} \frac{\partial w}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right)^{-1} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^{-1} \Big|_{\eta=\pi/2}$$

Logo, de (E.2.2) em (E.2.27), tem-se

$$u_z \Big|_{x=0, w>a} = \frac{1}{\partial \psi} \left\{ \frac{1}{1} \cosh \xi \operatorname{sen} \eta \right\} - \frac{\pi}{Uc^2} \operatorname{sen}^2 \eta (\cosh \xi -$$

$$- 2 \cosh \xi \operatorname{sen} \xi \cot^{-1} \sinh \xi + \cosh \xi)) +$$

$$(E.2.28) \quad \left. \left. \left. \left. \frac{1}{1} + \frac{\cosh \xi \operatorname{sen} \eta}{1} \right) - 2 \frac{\pi}{Uc^2} \operatorname{sen} \eta \cos \eta \right) \right) \right) \Big|_{\eta=\pi/2}$$

Simplificando (E.2.28), tem-se então

$$(E.2.29) \quad u_z \Big|_{x=0, w>a} = -\frac{\pi}{aU} (2 \cosh \xi - 2 \cosh \xi \cot^{-1} \sinh \xi)$$

Mas como
Note que quando $\eta = \pi/2$, tem-se de (E.2.2) que $\cosh \xi = w/a$.

$$(E.2.30) \quad \cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \xi = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} \xi = \left(\frac{w^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2},$$

então

$$(E.2.31) \quad \coth \xi = \frac{\cosh \xi}{\sinh \xi} = \frac{a}{w} \left(\frac{a^2}{w^2} - 1 \right)^{-1/2}$$

Por simplicidade, nota-se que

$$\cot^{-1} \sinh \xi = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sinh \xi} \right) \quad (\text{E.2.32})$$

Assim, de (E.2.30), (E.2.31) e (E.2.32), tem-se

$$u_z \Big|_{x=0, w>0} = -2 \frac{\pi}{U} \left\{ \left(\frac{w}{a_z} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} - \tan^{-1} \left(\frac{w}{a_z} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \right\} \quad (\text{E.2.33})$$

Mas

$$y = w \cos \theta \quad e \quad z = w \sin \theta \quad (\text{E.2.34})$$

Então, de (E.2.34) e (E.2.2), tem-se

$$w = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (\text{E.2.35})$$

Logo, $w \equiv r$ em $x = 0$. O que torna (E.2.33) como

$$u_z \Big|_{x=0, r>0} = -2 \frac{\pi}{U} \left\{ \left(\frac{r}{a_z} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} - \tan^{-1} \left(\frac{r}{a_z} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \right\} \quad (\text{E.2.36})$$

No entanto, no problema de impacto hidrodinâmico, o corpo move-se no sentido negativo do eixo x (no sentido da fig. E.2-1). Assim, (E.2.36) fica

$$u_z \Big|_{x=0, r>0} = 2 \frac{\pi}{U} \left\{ \left(\frac{r}{a_z} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} - \tan^{-1} \left(\frac{r}{a_z} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \right\} \quad (\text{E.2.37})$$

O potencial de velocidade ϕ pode ser obtido, lembrando-se que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (\text{E.2.38})$$

Então, de (E.2.24) e (E.2.2) tem-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{U a (1 - \sinh \xi \cot^{-1} \sinh \xi)}{\rho \operatorname{sen} \eta} e^{\sqrt{1 - e^z} - \operatorname{sen}^{-1} e} \quad (\text{E.2.39})$$

Integrando-se a expressão acima com respeito a η , tem-se

$$\phi = -\frac{Ua(1 - \sinh \xi \cot^{-1} \sinh \xi)}{\cos \eta} \frac{e^{\sqrt{1 - e^2}} - \sinh^{-1} e}{e} \quad (\text{E.2.40})$$

Para um disco circular tem-se $e = 1$ e $d_1 = d_2$. Nesse caso, (E.2.40) fica

$$\phi = \frac{\pi}{2Ua} (1 - \sinh \xi \cot^{-1} \sinh \xi) \cos \eta \quad (\text{E.2.41})$$

Na superfície do disco, tem-se $\xi = \xi_0 = 0$ (ou $x = 0$ e $w < a$). Dessa forma,

(E.2.41) fica

$$\phi = \frac{\pi}{2Ua} \cos \eta \quad (\text{E.2.42})$$

Nesse caso, de (E.2.2) tem-se

$$\cos \eta = \frac{a}{\varpi} \Leftrightarrow \cos \eta = \left(1 - \frac{\varpi^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad (\text{E.2.43})$$

Então, (E.2.42) fica

$$\phi = 2 \frac{\pi}{U} \sqrt{a^2 - r^2}, \text{ em } x = 0, r < a \quad (\text{E.2.44})$$

O mesmo argumento usado para obter (E.2.37) vale para a obtenção da expressão abaixo, i. e.

$$\phi = -2 \frac{\pi}{U} \sqrt{a^2 - r^2}, \text{ em } x = 0, r < a \quad (\text{E.2.45})$$

Apêndice F – Método Numérico para solução das

equações diferenciais

O método empregado na solução das equações diferenciais de movimento do cilindro e da esfera é o de Euler. Seja então uma equação diferencial ordinária de segunda ordem e não-linear representada por

$$\ddot{x} = F(\dot{x}, x, t), \quad (\text{F.1})$$

onde $x = x(t)$.

Tomando-se a função auxiliar $y = y(t)$, de tal sorte que $y \equiv \dot{x}$, tem-se que (F.1) passa a ser representado pelo seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{x} = F(y, x, t) \\ \dot{y} = x \end{cases} \quad (\text{F.2})$$

Expandindo-se x e y em série de Taylor, ao redor do instante inicial, tem-se

$$x(t) = x(0) + t\dot{x}(0) + \frac{1}{2}t^2\ddot{x}(0) + \dots \quad (\text{F.3})$$

$$y(t) = y(0) + t\dot{y}(0) + \frac{1}{2}t^2\ddot{y}(0) + \dots \quad (\text{F.4})$$

Para pequenos valores de tempo, tem-se

$$x(t) \approx x(0) + t\dot{x}(0) \quad (\text{F.5})$$

$$y(t) \approx y(0) + t\dot{y}(0) \quad (\text{F.6})$$

Discretizando-se o domínio de tempo como

$$t_n \approx nh, \quad (\text{F.7})$$

onde h é o passo de integração, e n um número inteiro não-negativo, e tomando-se

$$x_n \equiv x(t_n), \quad (\text{F.8})$$

$$y_n \equiv y(t_n), \quad (\text{F.9})$$

pode-se obter a seguinte fórmula de recorrência

$$(F.10) \quad x_{n+1} = x_n + hy_n$$

$$(F.11) \quad y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$(F.12) \quad y'_n = f(x_n, y_n, t_n)$$

Assim, dos valores iniciais

$$(F.13) \quad x_0 = 0,$$

$$(F.14) \quad y_0 = U_0,$$

resolve-se (F.1), utilizando-se (F.10), (F.11) e (F.12).

O método de Euler é um método explícito, e um dos mais simples métodos de integração numérica. Pode ser bastante instável, principalmente quando utilizado em sistemas de equações não-lineares.

No entanto, após o teste com alguns valores para o passo de integração, verificou-se uma boa estabilidade da solução das equações diferenciais de movimento do cilindro e da esfera. E então, o método pode ser empregado com êxito.