

OK

São Paulo
2000

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para a obtenção
do título de Mestre em Engenharia

ESTUDO NUMÉRICO DE JATOS EVAPORATIVOS

EDVALDO ANGELO

EDVALDO ANGELO

ESTUDO NUMÉRICO DE JATOS EVAPORATIVOS

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para a obtenção
do título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração
Engenharia Mecânica

Orientador
Prof. Dr. José Roberto Simões Moreira

São Paulo
2000

*"No caminho da sabedoria te ensinei e pelas
carreiras direitas te fiz andar."
(Provérbios 4:11)*

Dedicado
aos meus pais Luiz e Geni e a meu irmão Gabriel.
Por seu amor, dedicação e doação.

Agradecimentos

Gostaria em primeiro lugar de agradecer a meus pais, pois a dedicação deles nunca teve limites, pelo seu apoio, carinho e compreensão, por estarem sempre presentes, encorajando e ajudando, por certo, fazendo sempre acima de suas possibilidades.

Agradeço ao prof. Simões pela valiosa orientação, vontade e disposição em ensinar e discutir, pelas horas e idéias comigo compartilhadas.

Agradeço a meus colegas de laboratório Jacqueline P. Yanes e Marcelo Vieira, amigos sempre prontos a ajudar.

Aos professores Marcos M. Pimenta, Julio R. Meneghini e novamente ao prof. Simões pelos importantísimos cursos de pós-graduação que tanto enriqueceram meu conhecimento.

Agradeço a Valéria Born por encontrar tempo e corrigir a redação deste texto. Finalmente gostaria de agradecer Aquele cujo poder, misericórdia e majestade são infinitos, Aquele que foi, que é e sempre será, Deus.

São Paulo, março de 2000

ERRATA

ESTUDO NUMÉRICO DE JATOS EVAPORATIVOS

Edvaldo Angelo

Orientador: Prof. Dr. José Roberto Simões Moreira

Localização

Onde se lê

Deve-se ler

Pág. 27

Inserir item 9 (logo após item 8)
9. Efeitos de tensão superficial
desprezíveis

... pela termodinâmica do equilíbrio.
... pela termodinâmica do
equilíbrio estável.

Pág. 38
3º parágrafo, 12ª linha

Retirar a frase:

Através dos comentários anteriores, é
possível concluir que na região interior a
curva espinodal há com certeza uma
mistura bifásica.

Pág. 39
2º parágrafo, 11ª linha

Pág. 41
Equação (3.38)

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau = \frac{\tau \operatorname{tg}(\beta)}{W_1} = \frac{\tau \operatorname{tg}(\beta + \theta)}{W_2}$$

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau = \frac{\tau \operatorname{tg}(\beta)}{W_1} = \frac{\tau \operatorname{cotg}(\beta + \theta)}{W_2}$$

Pág. 42
3º parágrafo, 1ª linha

A expressão acima é apenas cinemática,
porém com o auxílio da equação da
conservação de massa...

Pág. 42
4º parágrafo, 2ª linha

... mantendo o ângulo de giro entre
... mantendo o ângulo de onda
entre zero...

Pág. 67
4º parágrafo, 2ª linha

Caso o termo dentro da raiz em (5.47) ...
Caso o discriminante em (5.47) ...

Pág. 79
Equação (7.6)

$$\Phi_{i+1,j} = \Phi_{i,j} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \Delta \xi$$

$$\Phi_{i+1,j} = \Phi_{i,j} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_{i,j} \Delta \xi$$

Pág. 92
Equação (7.47)

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial T} = 2RT(1 + Bp) \{ \dots \}$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial p} = 2RT(1 + 2Bp) \{ \dots \}$$

Pág. 97
1º parágrafo, 2ª linha

... (veja a Fig 8-3) ...

... (veja a Fig. 8-1) ...

Índice

1	Lista de Figuras
4	Lista de Símbolos
6	Resumo
7	Abstract
8	1. Introdução
8	1.1 Apresentação e Revisão Bibliográfica
17	1.2 Objetivos
17	1.3 Motivação
18	1.4 Divisão da Dissertação
19	2. Propriedades Fundamentais
19	2.1 Iso-Octano
20	2.2 Interpolações
26	3. Ondas Evaporativas Obliquas
26	3.1 Equações de salto para a onda de evaporação oblíqua
27	3.1.1 Equação da conservação de massa
30	3.1.2 Equação da conservação da quantidade de movimento
32	3.1.3 Equação da conservação da energia
33	3.2 Resumo das equações de conservação
34	3.3 Equações de Rayleigh e de Rankine-Hugoniot
38	3.4 Líquido Superaquecido
40	3.5 Relações Trigonométricas
45	4. Jatos Evaporativos Cone Evaporativo
45	4.1 Considerações Iniciais
45	4.2 Aplicação da Teoria das Ondas de Evaporação Obliquas aos Jatos Evaporativos
48	4.2.1 Apresentação das hipóteses
48	4.2.2 Relação entre a pressão à montante da onda de evaporação e a pressão de estagnação do reservatório
51	4.2.3 Relação entre as vazões mássicas superficiais
52	4.2.4 Sequência de cálculo do jato evaporativo bloqueado
52	

54	5.1 Aspectos Gerais
54	5.1.1 Sistema de Equações
56	5.2 Forma conservativa e forma não conservativa das equações
59	5.3 Comportamento matemático das equações de conservação
60	5.3.1 Método dos Autovalores
61	5.3.2 Determinação da classificação do sistema de equações para o jato evaporativo
68	5.3.3 Importância da classificação do sistema de equações no tipo de solução numérica empregada
70	6. Jatos Evaporativos – Malha
70	6.1 Aspectos Gerais
70	6.2 Malha propriamente dita
71	6.3 A transformação
76	7. Método Numérico
76	7.1 Método numérico de MacCormack
78	7.1.1 Etapa de predição
80	7.1.2 Etapa de correção
81	7.1.3 Cálculo da variável de fluxo definitiva para $i+1$, 1
81	7.1.4 Decodificação da variável fluxo nas variáveis primitivas
84	7.1.5 Método da Dicotomia
85	7.1.6 Método de Newton-Raphson (modificado)
87	7.1.7 Combinação do Método da Dicotomia e o método de Newton-Raphson
88	7.1.8 Decodificação para Evaporação Completa
90	7.1.9 Método de Newton-Raphson para Solução de Sistemas de Equações não lineares
93	8. Resultados e Observações
93	8.1 Solução da Onda de Evaporação
96	8.2 Solução da Zona de Expansão
106	8.3 Dificuldades encontradas na simulação
107	9. Conclusões e Continuidade do Trabalho
107	9.1 Conclusões
108	9.2 Continuidade do Trabalho
110	Apêndice I
119	Apêndice II
135	Apêndice III
137	Apêndice IV

144	Referências Bibliográficas
141	Apêndice VI
140	Apêndice V

Lista de Figuras

Capítulo 1

Fig. 1-1 Onda de evaporação em n-dodecano superaquecido. Condições: Temperatura do líquido 230°C, pressão abaixo da onda de evaporação 0,59 bar, pressão acima da onda de evaporação 0,37 bar e velocidade (uniforme) da onda de evaporação 47,2 cm/s. Sentido de propagação da onda de evaporação de cima para baixo. Tubo de vidro com 15 mm de diâmetro interno. (Simões Moreira, 1994)

Fig. 1-2 Configuração de jatos. (Peter e outros, 1994)

Fig. 1-3 Jatos de diferentes geometrias com crescentes graus de superaquecimento. (Kurschat e outros, 1992)

Fig. 1-4 Jato de querosene no estado superaquecido (imagem tratada matematicamente). Condições: Pressão e temperatura iniciais, respectivamente 615 kPa e 95°C e pressão na câmara de injeção de 1,2 kPa. (Vieira, 1999)

Fig. 1-5 Jato de querosene no estado superaquecido (imagem tratada matematicamente). Condições: Pressão e temperatura iniciais, respectivamente 650 kPa e 220°C e pressão na câmara de injeção de 0,01 kPa. (Vieira, 1999)

Fig. 1-6 Jato de querosene no estado superaquecido (imagem tratada matematicamente). Condições: Pressão e temperatura iniciais, respectivamente 500 kPa e 265°C e pressão na câmara de injeção de 0,4 kPa. (Vieira, 1999)

Capítulo 2

Fig. 2-1 Fórmula estrutural condensada do iso-octano.

Fig. 2-2 Volume específico do líquido saturado em função da temperatura de saturação para o iso-octano.

Fig. 2-3 Entalpia do líquido saturado em função da temperatura de saturação para o iso-octano.

Fig. 2-4 Entalpia para o vapor saturado seco em função da temperatura de saturação para o iso-octano.

Fig. 2-5 Pressão de saturação em função da temperatura de saturação para o iso-octano.

Fig. 2-6 Volume específico do vapor saturado em função da temperatura de saturação para o iso-octano.

Fig. 2-7 Volume específico do vapor saturado em função de T / p para o iso-octano.

Capítulo 3

Fig. 3-1 Plano tangente à onda de evaporação e propriedades correlatas.

Fig. 3-2 Solução gráfica do estado à montante de uma onda de evaporação normal.

Fig. 3-3 Representação da região metaestável de um fluido em diagrama pressão x volume específico.

Fig. 3-4 Relações trigonométricas fundamentais da onda de evaporação.

Fig. 3-5 Ângulo de giro como função do ângulo de onda parametrizado pela razão entre os volumes específicos (Simões Moreira, 1999).

Capítulo 4

Fig. 4-1 Ilustração dos processos do fenômeno.

Fig. 4-2 Volume de controle cilíndrico elementar englobando parte do jato evaporativo.

Capítulo 5

Fig. 5-1 Variação das propriedades de fluxo através de uma onda de choque normal.

Fig. 5-2 Regiões de influência e dependência determinadas pelas linhas características em um sistema de equações diferenciais parciais do tipo hiperbólico, modelando um problema bidimensional em regime permanente.

Capítulo 6

Fig. 6-1 Superfície Evaporativa e malha adotada para o jato.

Fig. 6-2 Transformação do plano físico para o computacional (T).

Capítulo 7

Fig. 7-1 Célula de cálculo.

Fig. 7-2 Ilustração Gráfica do Método da Dicotomia.

Fig. 7-3 Ilustração Gráfica do Método de Newton-Raphson.

Fig. 7-4 Ilustração Gráfica da Combinação dos Métodos da Dicotomia e Newton-Raphson.

Capítulo 8

Fig. 8-1 Comparação da vazão mássica medida por Athans (1995) com a calculada pelo modelo para os grupos de experimento I e II da tabela 8.1.

Fig. 8-2 Comparação da vazão mássica medida por Athans (1995) com a calculada pelo modelo para os grupos de experimento III da tabela 8.1.

Fig. 8-3 Ilustração da localização dos pontos de cálculo.

Fig. 8-4 Gráfico da pressão para o escoamento número 8 do grupo I (tabela 8.1).

Fig. 8-5 Gráfico da temperatura para o escoamento número 8 do grupo I (tabela 8.1).

Fig. 8-6 Gráfico da densidade para o escoamento número 8 do grupo I (tabela 8.1).

Fig. 8-7 Gráfico da componente r da velocidade para o escoamento número 8 do grupo I (tabela 8.1).

Fig. 8-8 Gráfico da componente z da velocidade para o escoamento número 8 do grupo I (tabela 8.1).

Fig. 8-9 Comparação dos Resultados para passos distintos (pressão).

Fig. 8-10 Comparação dos Resultados para passos distintos (temperatura).

Fig. 8-11 Comparação dos Resultados para passos distintos (densidade).

Fig. 8-12 Comparação dos Resultados para passos distintos (V_r).

Fig. 8-13 Comparação dos Resultados para passos distintos (V_z).

Apêndice I

Fig. Apl-1 Diagrama esquemático dos processos escolhidos para o cálculo da entalpia.

Apêndice II

Fig. ApII-1 Volume de controle para coordenadas cilíndricas (à esquerda) e direção das velocidades (à direita).

Fig. ApII-2 Distribuição das forças no elemento infinitesimal.

Fig. ApII-3 Fluxos de energia na direção x em um volume de controle usado para a dedução da equação da energia.

Lista de Símbolos

Derivada Fundamental	F
Volume Específico	v
Pressão Absoluta	p
Entropia Específica	s
Fator de Acentricidade	ω
Constante do Gás	R
Entalpia	h
Temperatura Absoluta	T
Calor Específico à Pressão Constante	c_p
Fator de Compressibilidade	Z
Energia Interna Específica	e
Ângulo de Onda ou Semi-Ângulo do Cone	β
Volume de Controle	V
Densidade	ρ
Tempo	t
Vetor Unitário Normal	\hat{n}
Vetor Unitário Tangente	\hat{t}
Fluxo de Massa Normal por Unidade de Área	J
Componente Normal do Vetor Velocidade Relativa	W
Componente Tangencial do Vetor Velocidade Relativa	τ
Grau de Superaquecimento Adimensional	II
Ângulo de Giro	θ
Fluxo de Massa total	\dot{m}
Raio do Bocal	R_p
Comprimento do Cone de Líquido	L
Perda de Carga no Bocal	K
Fluxo de Massa que atravessa o Bocal por Unidade de Área	J_p
Área do Bocal	A_p
Área da Superfície do Cone de Líquido (menos a área da base)	A_L
Título	x
Velocidade na direção r	V_r
Velocidade na direção θ	V_θ
Velocidade na direção z	V_z
Força	F
Massa	m
Aceleração	a
Entalpia de Estagnação	h_0

Entalpia	h
Número de Mach	M
Sistema de Coordenadas Computacional	ξ, η
Vetor Variáveis de Fluxo	ϕ
Coefficiente de descarga ou de vazão	C_d

Subscritos:

Propriedade Reduzida	r
Ponto Critico	c
Constante	const
Vapor Saturado	v
Líquido Saturado	l
À Montante	1
À Jusante	2
Sat ou σ	Sat ou σ

Sobrescritos:

Fluido Simples	(0)
Fluido de Referência	(r)
Estado de Referência	0

Resumo

No presente trabalho é realizado um modelamento matemático para estudar o fenômeno da dinâmica de evaporação dos jatos evaporativos. O estudo é conduzido de modo a resolver numericamente a região de saída de um jato evaporativo emergente de um bocal convergente isentrópico e descarregando numa câmara de pressão controlada. A análise é voltada para o caso em que o jato permanece líquido no estado metaestável durante a expansão interna no bocal sem a presença de nucleação heterogênea ou homogênea. A mudança de fase ocorre de forma súbita via uma onda de evaporação à jusante da seção de saída do bocal. O trabalho consiste em duas partes: (1) Na primeira parte aplica-se a teoria das ondas evaporativas oblíquas para explicar o efeito da blocagem do jato evaporativo, bem como realizar cálculos de vazão mássica. (2) Na segunda parte analisa-se o problema da expansão da mistura bifásica, resultante do processo evaporativo, que geralmente culmina com a formação de uma onda de choque de formato esférico. Para isso uma abordagem bidimensional axisimétrica é empregada. O método utilizado é o método clássico de MacCormack das diferenças finitas.

Abstract

A theoretical and numerical study of the dynamics of flashing jets based on the theory of oblique evaporation waves is carried out in this work. The analysis is valid for the case in which the jet remains liquid in the metastable state during the internal expansion in nozzle. The work is divided in two parts: (1) In the first part, the theory of oblique evaporation waves is applied to explain the effect of flow shocking, mass flow rate estimations are obtained as well as geometrical parameters of the flashing jet; such as extinction length, are estimated. (2) In the second part of this thesis, the problem of the expansion region that results from the evaporation process is analyzed. This region is formed by a high speed two phase region and, generally, culminates with the formation of an avoid shock wave. A two dimensional approach is used to study the expansion region.

1. Introdução

1.1 Apresentação e revisão bibliográfica

O fenômeno da evaporação tem sido amplamente estudado, principalmente devido sua presença em muitos processos industriais. O conhecimento do comportamento dos fluidos em mudança de fase é de singular importância no aumento da eficiência e modelagem dos processos e também na prevenção de acidentes.

Os modos de evaporação podem ser agrupados nas seguintes categorias: evaporação explosiva, ondas de evaporação e evaporação superficial. O modo de evaporação depende do tipo de substância, seu grau de superaquecimento, o ambiente em que se encontra e como se inicia o processo de evaporação. O modo de evaporação explosiva ocorre quando a substância encontra-se próxima ao limite de estabilidade mecânica, ou seja, tem um alto grau de superaquecimento (definido na seção 3.4), onde a metaestabilidade é tão elevada que as variações nas propriedades tornam-se violentas, culminando em explosões. Diminuído o grau de superaquecimento (graus moderados de superaquecimento), é possível obter ondas de evaporação ou ainda evaporação superficial. Em casos onde o superaquecimento torna-se muito discreto ou inexistente, é observada uma evaporação simples que se caracteriza por uma baixa ou inexistente variação da pressão, caso amplamente discutido em livros texto.

Reid (1976) define o superaquecimento dos líquidos, destacando a ocorrência desse estado como causa de muitos acidentes industriais. Cita um experimento realizado na década de 50 por Moore e também por Wakeshima e Takata. No experimento uma coluna de vidro (um tubo de vidro na posição vertical) é preenchida totalmente com um fluido no estado líquido. A parte superior da coluna está a uma temperatura mais elevada que a parte inferior, devido a diferença de densidades

A evaporação rápida por sua vez é um fenômeno mais ameno e controlado em relação a evaporação explosiva, podendo ocorrer através de ondas de evaporação ou através de evaporação superficial. As ondas de evaporação são fenômenos de mudança de fase caracterizados por uma súbita evaporação de líquidos superaquecidos dentro de uma interface discreta e observável. Experimentos unidimensionais realizados por Hill (1991) e Simões Moreira (1994) documentaram através de filme de alta velocidade o fenômeno. O experimento consistiu em preencher um pequeno tubo de vidro com o líquido desejado, sendo que um diafragma separa o líquido de uma câmara a baixa pressão. Atingida a condição de teste, o diafragma é rompido expondo o líquido a baixa pressão, imediatamente (ordem de milissegundos) ondas acústicas se propagam no interior do líquido enviando a informação da queda

100°C.

Wakeshima e Takata (1958) bem como outros pesquisadores, utilizando como fluido de teste o n-pentano imerso em ácido sulfúrico, obtiveram superaquecimento de mais de o limite de estabilidade quando subitamente explode. Ainda segundo Reid (1976), se encontra em um estado metaestável ou superaquecido, mantendo-se assim até atingir de saturação do fluido teste, não há mudança de fase. A conclusão é que a gota líquida encontrar em seu movimento de subida temperaturas mais elevadas que a temperatura permitir a ascensão da gota líquida na coluna. O observado é que, mesmo após fluido de teste também deve ser menor que a densidade do fluido da coluna, de modo a ebulição do fluido teste (na pressão local) para a posição de injeção, e a densidade de temperatura do fluido que preenche a coluna deve ser menor que a temperatura de segundo fluido miscível no estado líquido (conhecido como fluido teste). A altura na coluna de fluido. É injetada na parte inferior da coluna uma gota de um não há convecção, estando o fluido estagnado. Deste modo a temperatura é função da

abrupta de pressão, reverberando na base do tubo e retornando até à superfície livre, até que são estabelecido um estado metaestável no líquido. Dezenas de milissegundos depois, o fenômeno das ondas de evaporação é disparado, ou seja, é formada uma onda de evaporação que se movimenta radialmente na direção da base do tubo. Nas observações realizadas pode se notar que o comprimento da onda de evaporação é sempre menor que o diâmetro do tubo de vidro e a onda se propaga com uma velocidade bem definida.

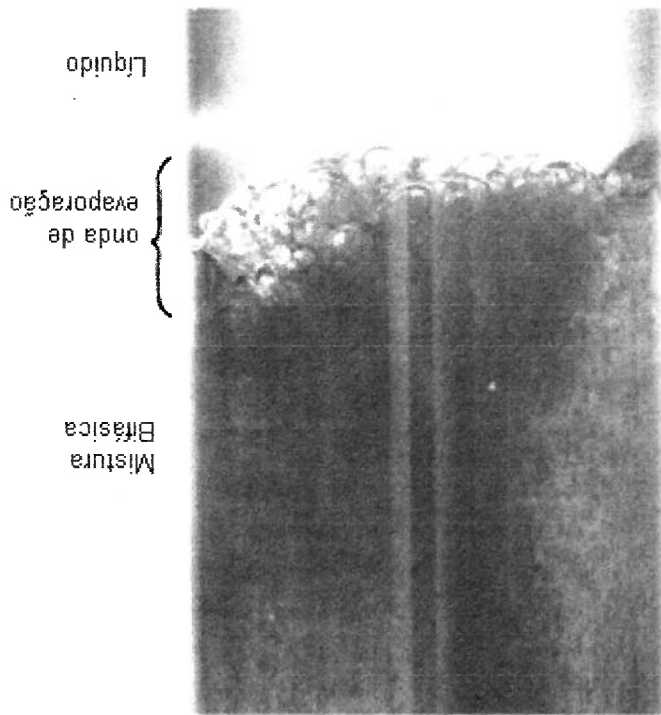


Fig. 1-1 Onda de evaporação em n-dodecano superaquecido. Condições: Temperatura do líquido 230°C, pressão abaixo da onda de evaporação 0,59 bar, pressão acima da onda de evaporação 0,37 bar e velocidade (uniforme) da onda de evaporação 47,2 cm/s. Sentido de propagação da onda de evaporação de cima para baixo. Tubo de vidro com 15 mm de diâmetro interno. (Simões Moreira, 1994).

Uma grande motivação no estudo de ondas de evaporação, principalmente nas décadas de 60 e 70, foi o LOCA – “Loss Of Coolant Accidents” nas indústrias nucleares. Que se constitui na exposição súbita de água em temperatura e pressão

Uma certa classe de fluidos denominados SCMF – Substâncias de Complexidade Molecular Elevada (na literatura inglesa conhecidas como “retrograde”), são muito utilizadas para o estudo dos fenômenos de evaporação. Tais substâncias apresentam alto valor do calor específico, indicando uma grande capacidade de acúmulo de energia interna. Segundo Thompson e Sullivan (1975), os hidrocarbonetos da série parafina com mais átomos que o propano são incluídos nesta classificação. As SCMF apresentam como principal característica, a possibilidade de sob circunstâncias especiais, sofrerem processos de mudança de fase líquido-vapor de forma completa e modo adiabático. Essas substância ainda podem apresentar anomalias em relação ao comportamento esperado em regiões próximas ao ponto crítico, entre elas a formação de ondas de choque de expansão ou choque negativo. Por choque de expansão entende-se que os saltos em pressão e densidade através de uma descontinuidade são negativos, comportamento absolutamente inverso ao das ondas de choque ordinárias de compressão observadas em gases perfeitos. Simões Moreira (1997) resume essa

heterogênea. do fenômeno, e também por sua baixa rugosidade superficial, o que inibe a nucleação fato que foi motivado pela transparência do vidro, o que permitiu o registro fotográfico para visualização das ondas de evaporação, o material de construção do tubo foi o vidro, quaisquer, etc... Nos experimentos realizados por Hill (1991) e Simões Moreira (1994) tubulações com costura), impurezas presentes no interior do escoamento, partículas evaporação. Paredes rugosas, superfícies com irregularidades, solda (como em no caso das ondas de evaporação, ela depende de pontos de nucleação para que ocorra A evaporação superficial ou evaporação em piscina não se desenvolve como tubulação.

elevadas a um ambiente de baixa pressão, como no caso do rompimento de uma

Alguns trabalhos experimentais com jatos de líquidos superaquecidos podem ser citados, como no caso de Peter e outros (1994), cuja substância de trabalho utilizada foi a água. Neste trabalho os jatos são classificados em quatro categorias, quando da ausência de pontos de nucleação dentro do bocal, levando em conta o contínuo aumento do grau de superaquecimento do líquido de injeção com base na forma geométrica do jato. O tipo 1 é o que possui menor grau de superaquecimento, sendo um filete contínuo de água; o tipo 2 apresenta uma certa pulverização, ou seja, um espalhamento de gotículas ao redor de um filete líquido; no tipo 3 o filete de líquido tem um pequeno comprimento e há uma grande pulverização das gotículas e, finalmente; o tipo 4 cuja pulverização é total e não há a presença aparente de um núcleo líquido.

Mais detalhes também podem ser encontrados em Thompson (1988).

Onde:
 v é a densidade,
 c é a velocidade do som,
 p é a pressão e
 s é a entropia.

$$\Gamma = -\frac{v^3}{2c^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_{s=const} \quad (1.1)$$

fundamental é:
 abordagem, incluindo a apresentação da derivada fundamental, Γ , que indica o comportamento anormal quando o seu valor é negativo. A definição da derivada

Lienhard e Day (1970) também realizaram estudos com jatos de líquidos superaquecidos com o objetivo de observar pontos de nucleação no filete de líquido. Kurschat e outros (1992) realizaram experimentos usando um bocal de expansão descarregando em uma câmara de vácuo um líquido no estado metaestável. Foi usada uma SCME ($C_6 F_{14}$), e os resultados experimentais foram comparados a um modelo matemático unidimensional do fenômeno. Para diversos graus de superaquecimento a geometria do jato foi observada. Desde um pequeno superaquecimento, onde um filete líquido contínuo é observado, até um grande grau de superaquecimento, onde já não há um filete contínuo de líquido mas sim um pequeno núcleo de líquido logo após a saída do bocal, a partir do qual o líquido se evapora formando uma mistura bifásica. A mistura bifásica continua a expansão, e esta pode se dar de tal forma, que a pressão atingida pelo fluido é menor que a pressão da câmara de injeção. Isso acarreta uma onda de choque para ajustar a pressão do fluido à pressão da câmara em que se encontra.

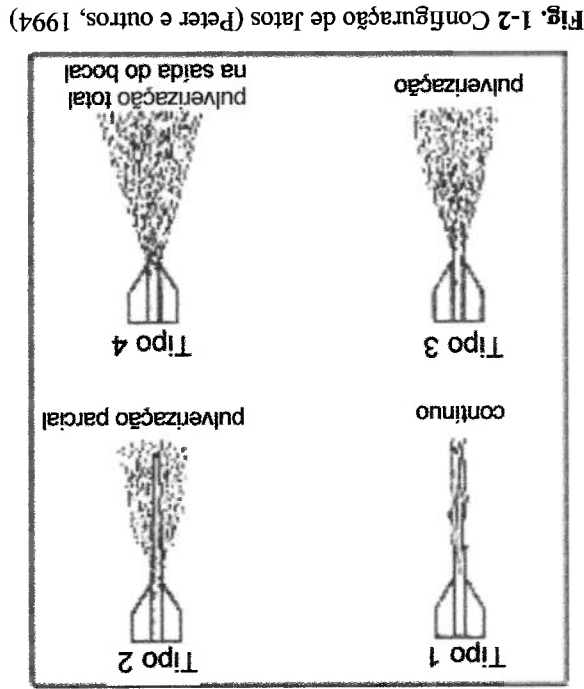


Fig. 1-2 Configuração de Jatos (Peter e outros, 1994)

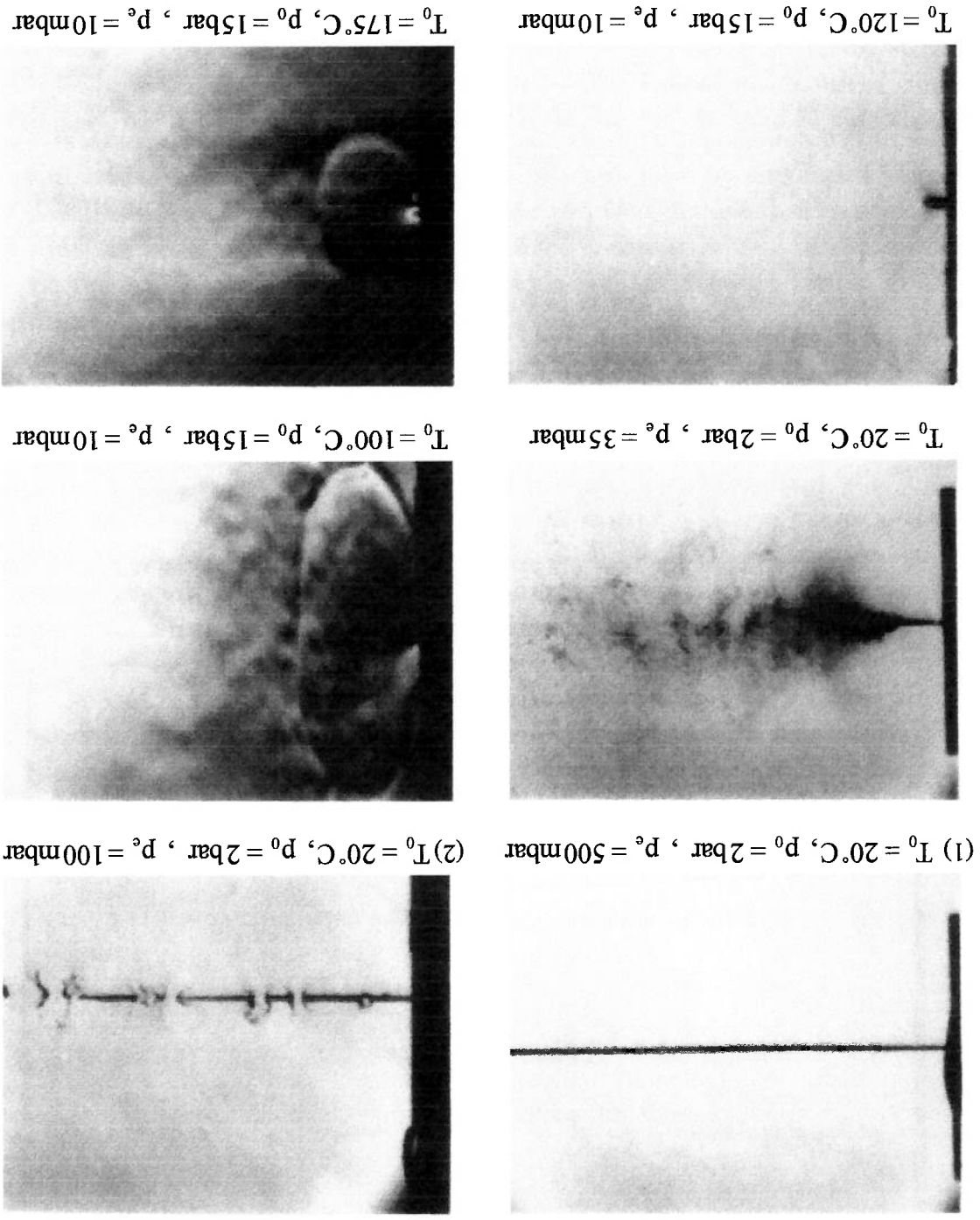


Fig. 1-3 Jatos de diferentes geometrias, com crescentes graus de superaquecimento. (Kurschat e outros, 1992)

Onde: T_0 , p_0 são as propriedades iniciais antes da injeção (líquido) e p_e é a pressão da câmara de injeção.

Vieira (1999) realizou um extenso registro fotográfico do fenômeno dos jatos evaporativos. Seu experimento consistia em injetar um líquido superaquecido em uma câmara de baixa pressão. Realizou uma classificação dos jatos quanto à sua geometria variando o grau de superaquecimento do líquido de injeção, do mesmo modo que Peter e outros (1994), como já citado anteriormente. Como substâncias de trabalho usou o querosene, o óleo diesel e o n-dodecano. O método de visualização do escoamento foi o método "schlieren" com um posterior tratamento matemático das imagens. Segundo Vieira, na faixa de superaquecimento em que estudou os jatos evaporativos, ele pode constatar três tipos distintos de jatos; o contínuo, o pulverizante e jatos que apresentavam a formação de onda de choque, de formatos mais ou menos variáveis entre esféricos e elipsoides. Seus experimentos confirmaram as observações experimentais de Athans (1995).

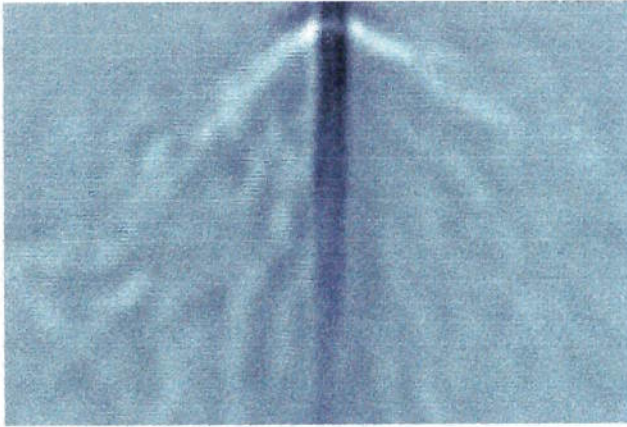


Fig. 1-4 Jato de querosene no estado superaquecido (imagem tratada matematicamente). Condições: Pressão e temperatura iniciais, respectivamente 615 kPa e 95°C e pressão na câmara de injeção de 1,2 kPa. (Vieira, 1999)

Simões Moreira (1999) apresentou um trabalho que consistia no modelamento matemático aos jatos evaporativos, usando a teoria das ondas de evaporação oblíquas. Também foi analisado o problema da onda de choque, utilizando uma abordagem unidimensional, admitindo um formato semi-estérico para a mesma.

Fig. 1-6 Jato de querosene no estado superaquecido (imagem tratada matematicamente). Condições: Pressão e temperatura iniciais, respectivamente 500 kPa e 265°C e pressão na câmara de injeção de 0,4 kPa. (Vieira, 1999)

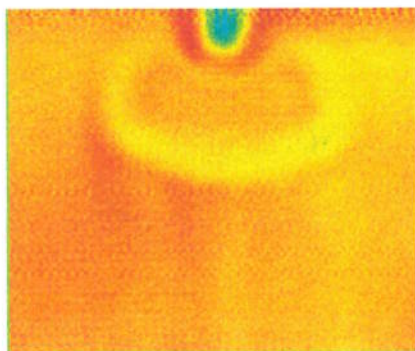


Fig. 1-5 Jato de querosene no estado superaquecido (imagem tratada matematicamente). Condições: Pressão e temperatura iniciais, respectivamente 650 kPa e 220°C e pressão na câmara de injeção de 0,01 kPa. (Vieira, 1999)



1.2 Objetivos

Esta dissertação tem como objetivo principal o modelamento matemático da dinâmica dos jatos evaporativos, dividindo o estudo em duas partes. Na primeira parte é aplicada a teoria das ondas de evaporação oblíquas. Estudando a onda de evaporação como uma descontinuidade que imprime ao escoamento uma variação brusca de suas propriedades. A montante da onda de evaporação o líquido está superaquecido e à jusante é formada uma mistura bifásica. A segunda parte do problema consiste em estudar a expansão da mistura bifásica, realizando um estudo das equações que modelam o fenômeno, propondo uma malha e um método numérico, conhecido como método de MacCormack, que é um método clássico de diferenças finitas. A captura de ondas de choque também é possível, caso ela exista nas condições do escoamento. A abordagem é uma abordagem bidimensional axissimétrica.

1.3 Motivação

O presente trabalho tem muitas aplicações tecnológicas que motivaram o estudo. Entre elas podemos citar:

1. Fenômenos que podem ocorrer no caso de "LOCA".
2. Dispositivos de expansão de ciclos de refrigeração e ar condicionado, como no caso dos tubos capilares.
3. Injeção de combustível e injetores de líquidos com mudança de fase.
4. Evaporação em microgravidade.

1.4 Divisão da dissertação

Como visto, o Capítulo 1 trata da apresentação do problema e a revisão bibliográfica, no intuito de descrever de maneira inicial o fenômeno. O Capítulo 2 trata das propriedades termodinâmicas de relevância ao trabalho. O Capítulo 3 apresenta a teoria das ondas de evaporação obliquas e o conceito de metaestabilidade. O Capítulo 4 aplica a teoria das ondas de evaporação obliquas ao jato, propondo um modelo de evaporação a taxa constante, admitindo uma geometria cônica à superfície de evaporação. No Capítulo 5 são apresentadas as equações para o modelamento da malha escolhida e das transformações matemáticas necessárias à mudança do espaço físico para o espaço computacional. O Capítulo 7 descreve o método clássico das diferenças finitas de MacComark, sua aplicação ao problema específico da expansão bitásica bem como a decodificação das variáveis de fluxo, apresentando os métodos numéricos auxiliares para a realização da tarefa. O Capítulo 8 apresenta resultados obtidos em algumas simulações e as dificuldades encontradas. O Capítulo 9 trata das conclusões e da continuidade do trabalho. No intuito de não quebrar a ordem do texto principal, foram incluídos os apêndices de I a VI, que vem complementar ou demonstrar as informações citadas no mesmo.

2.2 Interpolações

É usada a Tabela 2-2 (de propriedades saturadas) como referência aos comentários que se seguem, construída para o iso-octano. Para valores não tabelados são interpolados os valores com apresentado a seguir.

114,232	Massa Molecular (g / mol)
544	Temperatura Crítica (K)
25,7	Pressão Crítica (bar)
0,266	Fator de Compressibilidade Crítica

Tabela 2-2 Propriedades do iso-octano na região de saturação (gerada a partir da equação de Lee Kesler)

Temperatura T K	Pressão p Pa	Volume Específico m^3/kg (líquido saturado)	Volume Específico m^3/kg (vapor saturado seco)	Entalpia Específica kJ/kg (líquido saturado)	Entalpia Específica kJ/kg (vapor saturado seco)
243,15	2,200E+02	0,001365	85,15307	-57,60	269,80
248,15	3,440E+02	0,001373	55,57800	-48,20	279,20
253,15	4,680E+02	0,001381	41,67527	-38,80	285,30
258,15	6,986E+02	0,001389	28,46738	-29,20	298,20
263,15	9,293E+02	0,001396	21,81608	-19,60	300,80
268,15	1,331E+03	0,001404	15,52582	-9,80	317,60
273,15	1,732E+03	0,001412	12,15067	0,00	317,10
278,15	2,394E+03	0,001420	8,94493	9,93	325,18
283,15	3,057E+03	0,001429	7,19424	19,90	333,30
288,15	4,104E+03	0,001436	5,44476	29,93	341,33
293,15	5,150E+03	0,001444	4,44444	40,01	349,41
298,15	6,578E+03	0,001453	3,44814	50,15	357,55
303,15	8,321E+03	0,001462	2,85714	60,34	365,74
308,15	1,064E+04	0,001471	2,23347	70,59	373,94
313,15	1,296E+04	0,001480	1,85874	80,90	382,20
318,15	1,625E+04	0,001489	1,49030	91,27	390,37
323,15	1,953E+04	0,001498	1,25786	101,71	398,61
328,15	2,586E+04	0,001509	1,03828	112,21	406,76
333,15	3,219E+04	0,001519	0,88968	122,77	414,97
338,15	3,648E+04	0,001529	0,74352	133,41	423,21
343,15	4,077E+04	0,001540	0,64599	144,11	431,51
348,15	4,878E+04	0,001551	0,54765	154,90	439,90
353,15	5,679E+04	0,001563	0,47939	165,76	448,36
358,15	6,710E+04	0,001574	0,40627	176,70	456,75
363,15	7,742E+04	0,001585	0,35524	187,72	465,22
368,15	9,046E+04	0,001597	0,30540	198,82	473,57
373,15	1,035E+05	0,001610	0,27005	210,02	482,02
378,15	1,200E+05	0,001623	0,23328	221,31	490,41
383,15	1,360E+05	0,001636	0,20069	232,69	498,89
388,15	1,562E+05	0,001650	0,18134	244,17	507,22
393,15	1,759E+05	0,001664	0,16234	255,76	515,66
398,15	2,003E+05	0,001678	0,14283	267,45	524,05
403,15	2,241E+05	0,001693	0,12822	279,25	532,55
408,15	2,533E+05	0,001708	0,11362	291,16	541,01
413,15	2,817E+05	0,001724	0,10260	303,19	549,59
418,15	3,162E+05	0,001740	0,09151	315,35	558,05
423,15	3,498E+05	0,001757	0,08292	327,63	566,63
428,15	3,901E+05	0,001774	0,07419	340,04	575,19
433,15	4,295E+05	0,001792	0,06739	352,58	583,88
438,15	4,762E+05	0,001813	0,06061	365,26	592,36
443,15	5,219E+05	0,001834	0,05531	378,09	600,99
448,15	5,776E+05	0,001855	0,04979	391,07	609,57
453,15	6,321E+05	0,001877	0,04545	404,20	618,30
458,15	6,926E+05	0,001901	0,04117	417,49	626,84
463,15	7,518E+05	0,001925	0,03774	430,95	635,55
468,15	8,294E+05	0,001954	0,03404	444,58	644,03
473,15	8,935E+05	0,001983	0,03105	458,38	652,68
478,15	9,751E+05	0,002016	0,02796	472,36	660,96
483,15	1,055E+06	0,002050	0,02546	486,52	669,42
488,15	1,147E+06	0,002087	0,02300	500,88	677,38
493,15	1,238E+06	0,002125	0,02100	515,44	685,54
498,15	1,343E+06	0,002168	0,01901	515,44	678,39
503,15	1,445E+06	0,002214	0,01737	530,20	686,00
508,15	1,562E+06	0,002268	0,01562	545,18	692,73
513,15	1,677E+06	0,002326	0,01416	560,36	699,66
518,15	1,808E+06	0,002401	0,01262	575,78	704,98

As interpolações para v_l , h_l e h_v são lineares com a temperatura. Usando como referência o iso-octano (Tabela 2-2), podemos observar o comportamento das grandezas em função da temperatura nos gráficos das Figuras (Fig.2-2), (Fig.2-3) e (Fig.2-4) e concluir que a interpolação linear trará resultados satisfatórios na avaliação dos valores dessas grandezas; sobretudo em regiões bem abaixo do ponto crítico, que são as regiões de nosso interesse.

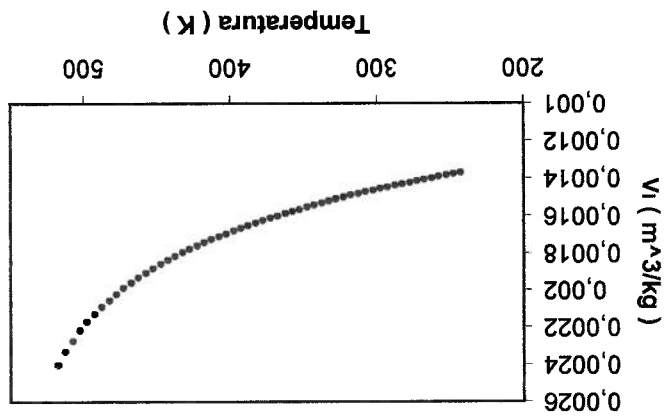


Fig. 2-2 Volume específico do líquido saturado em função da temperatura de saturação para o iso-octano.

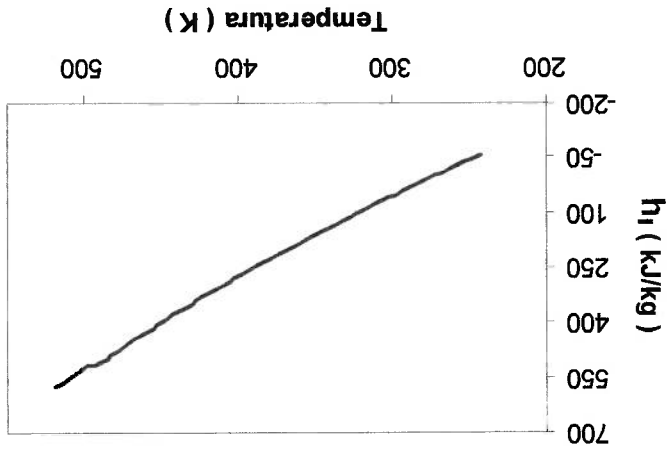


Fig. 2-3 Entalpia do líquido saturado em função da temperatura de saturação para o iso-octano.

o índice sat indica que as grandezas são avaliadas na região da saturação. O valor das constantes A e B dependem da substância em estudo. Além disso A e B serão ajustados para cada intervalo de temperatura da tabela termodinâmica, o que permite a obtenção do valor interpolado de pressão de uma forma bem precisa.

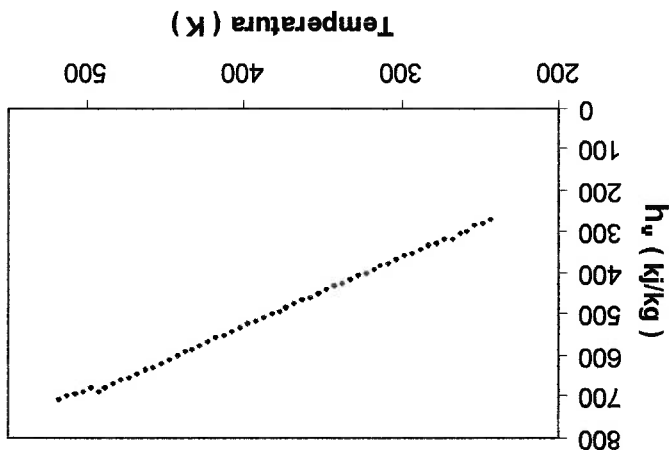
Dada uma temperatura T para qual se deseja encontrar a pressão de vapor, o procedimento é, usando a tabela termodinâmica, encontrar T_1 e T_2 tal que $T_1 < T < T_2$ e as respectivas pressões. Usando a equação (2.1) para os pontos tabelados (1) e (2), vem:

$$\ln(p^{sat}) = A - \frac{B}{T^{sat}} \quad (2.1)$$

duas variáveis A e B:

A pressão será tratada de um modo diferente ao dispensado às últimas grandezas. Para uma faixa estreita de temperatura, a curva de pressão de vapor representada na Fig.2-5, permite a seguinte aproximação da função interpolante com

Fig. 2-4 Entalpia para o vapor saturado seco em função da temperatura de saturação para o iso-octano.



$$(2.2) \quad \ln(p_1) = A - \frac{T_1}{B}$$

$$(2.3) \quad \ln(p_2) = A - \frac{T_2}{B}$$

Subtraindo as equações é possível encontrar o valor da constante B:

$$(2.4) \quad B = \left(\frac{T_2 T_1}{T_1 - T_2} \right) \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right)$$

Substituindo B na equação (2.2) e isolando a constante A temos:

$$(2.5) \quad A = \ln(p_1) + \frac{T_1 - T_2}{T_2} \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right)$$

De posse das duas constantes, com a equação (2.1) calcula-se a pressão no

valor intermediário:

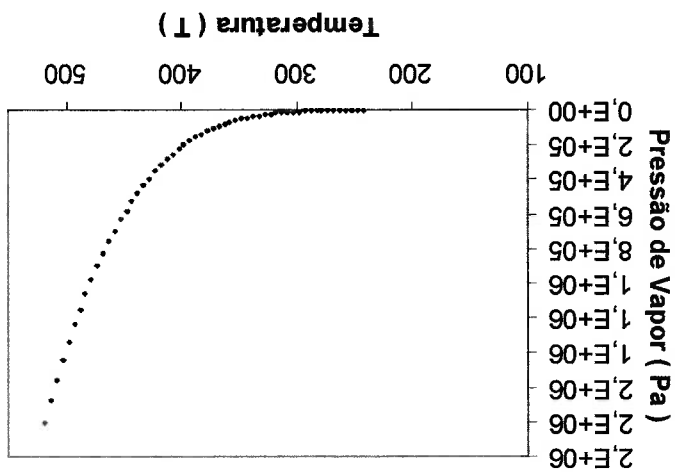


Fig. 2-5 Pressão de saturação em função da temperatura de saturação para o iso-octano.

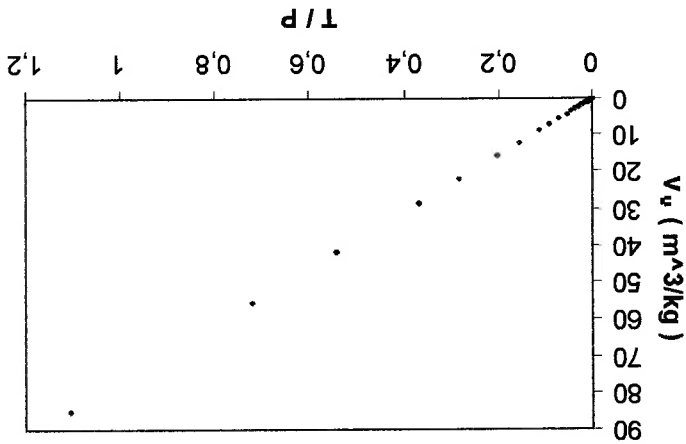
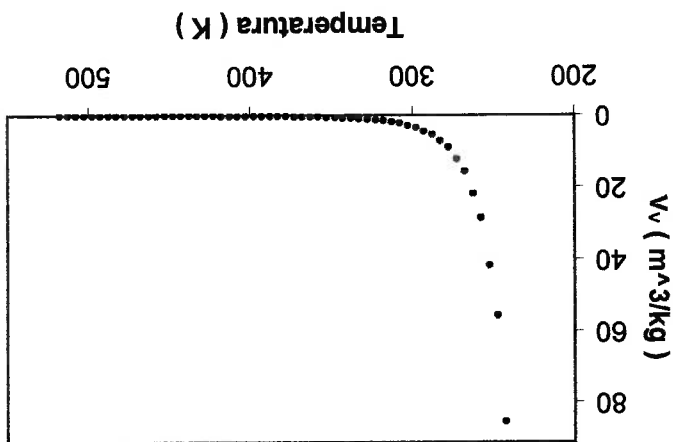


Fig. 2-7 Volume Específico do Vapor Saturado em função de T/p para o iso-octano.

T/p .

A Fig. 2-6 indica o comportamento do volume específico do vapor saturado em função da temperatura. Uma interpolação linear assim como mostrado no caso de outras propriedades, não é muito indicada. Por outro lado, construindo um gráfico do volume específico do vapor saturado seco em função da razão temperatura pressão, este é quase linear, em virtude da lei dos gases perfeitos. Assim a interpolação é feita para

Fig. 2-6 Volume específico do vapor saturado em função da temperatura de saturação para o iso-octano.



3. Ondas Evaporativas Oblíquas

3.1 Equações de salto para a onda de evaporação oblíqua

O tratamento matemático usado no modelamento das ondas de evaporação oblíquas é análogo ao tratamento dispensado às ondas de choque oblíquas e, de uma forma mais geral, serve para qualquer tipo de descontinuidade (em um meio material) dessa natureza. O fluido ao atravessar a onda de evaporação oblíqua sofre um giro, mudando a direção do vetor velocidade. Isso representa a principal diferença entre as ondas de evaporação oblíquas e as ondas de evaporação normais. No caso das ondas de evaporação normais, a direção principal do escoamento quando o fluido atravessa a descontinuidade não se altera. Por um ponto qualquer na onda de evaporação oblíqua é possível construir um plano imaginário tangente, sendo que, o ângulo entre o plano e a direção da velocidade do líquido metáestável nessa posição é conhecido como ângulo de onda (β). Para as ondas de evaporação normais, o ângulo de onda é normal. As propriedades à montante da onda de evaporação serão referenciadas pelo índice 1 e à jusante por 2.

Dada uma onda de evaporação oblíqua, propagando-se com velocidade constante em relação a um sistema de referência fixo (inercial) XYZ , sobre ela (envolvendo-a) é colocado um volume de controle (V) movimentando-se solidário à mesma. Um sistema de referência fixo no volume de controle xyz também é do tipo inercial, pois não possui aceleração em relação a XYZ .

As hipóteses para a dedução das equações de conservação para o volume de controle são:

1. É sempre possível encontrar um volume de controle envolvendo a onda de evaporação de forma que a taxa de acumulação de uma dada grandeza específica é nula.
2. As propriedades termodinâmicas são uniformes dentro de um domínio de fase.
3. Os efeitos gravitacionais são desprezíveis.
4. O volume de controle é adiabático.
5. A transferência de calor através da onda de evaporação é nula.
6. A mistura bitásica à jussante da onda está em equilíbrio termodinâmico.
7. As forças viscosas são desprezíveis.
8. As oscilações temporais das propriedades e grandezas são desprezíveis.

3.1.1 Equação da conservação de massa

A equação geral da conservação de massa na forma integral é escrita como:

$$(3.1) \quad \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV + \iint_A \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

Onde:

ρ é a densidade,

A é a área,

\vec{V} a velocidade e

t é o tempo.

A equação (3.1) é válida desde que todas as velocidades (\vec{V}) sejam medidas

em relação ao volume de controle e todas as derivadas referidas ao tempo também

sejam medidas em relação ao volume de controle. Levando em consideração as hipóteses simplificadoras de (1) a (8) do item 3.1:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iint_A (\bar{u} - \bar{U}) \cdot \bar{n} dA = 0 \quad (3.2)$$

As velocidades \bar{u} e \bar{U} são respectivamente as velocidades do fluido e da onda de evaporação (volume de controle) medidas em relação a XYZ e \bar{n} é o vetor unitário normal (indicados na Fig. 3-1). Em condições de regime permanente o primeiro termo da equação (3.2) é nulo. Deste modo:

$$\iint_{A_1} \rho_1 (\bar{u}_1 - \bar{U}) \cdot \bar{n} dA + \iint_{A_2} \rho_2 (\bar{u}_2 - \bar{U}) \cdot \bar{n} dA = 0 \quad (3.3)$$

As áreas podem ser escolhidas para que $A_1 = A_2 = A$, e pode ser observado na Fig. 3-1 a seguinte relação entre os vetores normais $\bar{n} = \bar{n}_2 = -\bar{n}_1$. Disso

resulta:

$$\iint_A \rho_2 (\bar{u}_2 - \bar{U}) \cdot \bar{n} dA = 0 \quad (3.4)$$

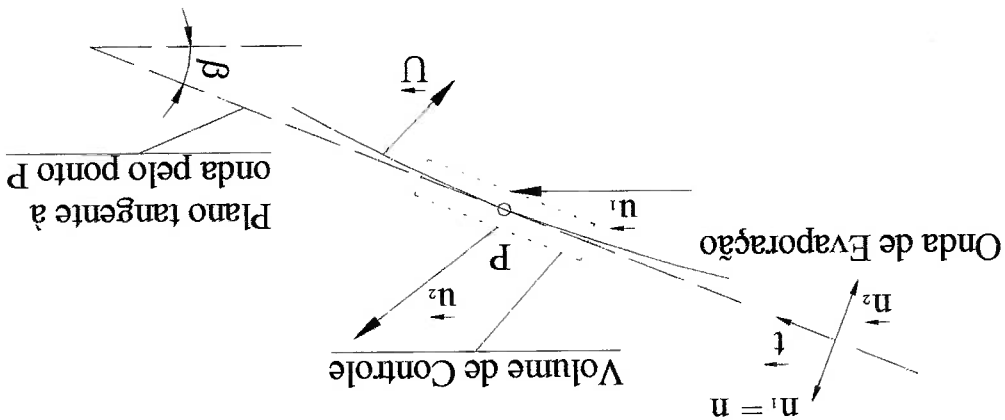


Fig. 3-1 Plano tangente à onda de evaporação e propriedades correlatas.

A área pode ser escolhida conforme se queira, portanto o integrando da

equação (3.4) deve ser nulo. Assim:

$$(3.5) \quad [p_2(\bar{u}_2 - \bar{U}) - p_1(\bar{u}_1 - \bar{U})] \cdot \bar{n} = 0$$

Definimos a velocidade relativa normal do fluido como: $W_i = (\bar{u}_i - \bar{U}) \cdot \bar{n}$, e

voltando a equação (3.5), temos:

$$(3.6) \quad p_2 W_2 - p_1 W_1 = 0$$

Será útil denominar o fluxo de massa (normal) por unidade de área como j :

$$(3.7) \quad j_i = \rho_i W_i$$

Este último pode ser substituído na equação (3.6).

$$(3.8) \quad j_2 - j_1 = 0$$

Como forma de simplificação de apresentação das equações será usada uma

notação para indicar a diferença entre os estados à montante e à jusante da onda de

evaporação. A diferença é indicada do seguinte modo, para uma propriedade ou

grandeza qualquer f , tem-se que a diferença ou salto através da descontinuidade é dada

por:

$$(3.9) \quad [f] = f_2 - f_1$$

$$(3.10) \quad [fg] = f_2 g_2 - f_1 g_1$$

Introduzindo a nova notação compacta para a equação (3.8):

$$(3.11) \quad [J] = 0$$

3.1.2 Equação da conservação da quantidade de movimento

A equação geral da conservação da quantidade de movimento na forma

integral é:

$$(3.12) \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \int_V \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho \vec{f} \cdot d\vec{V} - \int_V \rho \vec{f} \cdot d\vec{V} + \int_V \rho \vec{f} \cdot d\vec{V} + \int_V \rho \vec{f} \cdot d\vec{V}$$

Onde \vec{f} são as forças de campo por unidade de massa e $\vec{f}^{\text{viscosas}}$ são as forças

viscosas. Usando as hipóteses simplificadoras citadas no início deste capítulo (item 3.1)

é obtida a seguinte equação:

$$(3.13) \quad \int_V \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = - \int_V \rho \vec{f} \cdot d\vec{V}$$

Assim como na equação da conservação da quantidade de massa, a velocidade presente na

equação (3.13) é a velocidade relativa do fluido, tendo como referência o volume de

controle. O volume de controle é o mesmo usado para deduzir a equação de

conservação de massa, as áreas e as normais são as mesmas, assim a equação (3.13)

pode ser escrita como:

$$(3.14) \quad \int_V \rho (\vec{u} - \vec{U}) \cdot \vec{n} \, dA + \int_V \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dA = 0$$

Do mesmo modo que na equação da conservação de massa, pode-se escrever o salto através da descontinuidade como:

$$(3.15) \quad [\rho(\bar{u} - U) \cdot \bar{n} \bar{V} + p \bar{n}] = 0$$

Multiplicando escalarmente a equação (3.15) pela normal \bar{n} , a fim de reter somente a parte normal à onda de evaporação das grandezas:

$$(3.16) \quad \left\{ \rho(\bar{u} - U) \cdot \bar{n} (\bar{u} - U) \cdot \bar{n} + p \bar{n} \cdot \bar{n} \right\} = 0$$

Usando a definição de velocidade relativa e fluxo de massa por unidade de área, temos:

$$(3.17) \quad [p + jW] = p_2 - p_1 + p_2 W_2^2 - p_1 W_1^2 = 0$$

Uma propriedade importante as ondas de evaporação obliquas pode ser obtida multiplicando escalarmente a equação (3.15) pelo vetor unitário tangente \bar{t} , que pode ser visto na Fig.3-1.

$$(3.18) \quad \left\{ \rho(\bar{u} - U) \cdot \bar{n} (\bar{u} - U) \cdot \bar{t} + p \bar{n} \cdot \bar{t} \right\} = 0$$

$$(3.19) \quad [(\bar{u} - U) \cdot \bar{t}] = 0$$

É possível definir a velocidade tangencial relativa do fluido como $\tau_1 = (\bar{u}_1 - U) \cdot \bar{t}$. A equação (3.9) leva a conclusão que as velocidades tangenciais tanto à montante quanto à jusante são iguais. Fisicamente é fácil de entender, significa dizer que o fluido não “escorrega” sobre a onda de evaporação.

3.1.3 Equação da conservação da energia

A equação geral da conservação da energia escrita na forma integral é:

$$\dot{Q} + \dot{W}_{\text{eixo}} + \dot{W}_{\text{visc}} - \iint_{\bar{V}} \rho \cdot \bar{V} \cdot dA + \iint_{\bar{V}} \rho (\bar{f} \cdot \bar{V}) \cdot dV = \frac{e}{\partial t} \iint_{\bar{V}} \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dV + \iint_{\bar{V}} \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \bar{V} \cdot dA \quad (3.20)$$

Onde:

e é a energia interna específica,

\dot{Q} é o fluxo de calor,

\dot{W}_{eixo} é a potência no eixo e

\dot{W}_{visc} é a potência das forças viscosas.

Usando as hipóteses simplificadoras citadas no início deste capítulo, é obtida

a seguinte equação:

$$\iint_{\bar{V}} \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \bar{V} \cdot dA + \iint_{\bar{V}} \rho \bar{V} \cdot dA = 0 \quad (3.21)$$

As observações sobre a referência na tomada da velocidade e sobre o volume

de controle são idênticas as descritas na simplificação das equações de conservação de

massa e da quantidade de movimento. Usando as simplificações:

$$\iint_{\bar{V}} \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) (\bar{u} - \bar{U}) \cdot \bar{n} + p (\bar{u} - \bar{U}) \cdot \bar{n} \Big|_{dA} = 0 \quad (3.22)$$

Sabendo que o integrando deve ser nulo e usando a definição de velocidade

relativa e o volume de controle da Fig.3-1, tem-se:

$$\left[pW \left(e + \frac{z}{V_2} + \frac{p}{p} \right) \right] = 0 \quad (3.23)$$

Introduzindo a definição de entalpia $h = e + \frac{p}{\rho}$, e a equação da conservação

de massa (3.18), vem:

$$\left[h + \frac{z}{V_2} \right] = 0 \quad (3.24)$$

A velocidade ao quadrado pode ser escrita na forma das suas componentes

(normal e tangencial à onda de evaporação):

$$V_2^2 = W_2^2 + \tau_2^2 \quad (3.25)$$

Substituindo a equação anterior em (3.24), temos:

$$h_2 - h_1 + \frac{z}{W_2 + \tau_2} - \frac{z}{W_2 + \tau_2} = 0 \quad (3.26)$$

Como já demonstrado, as velocidades tangenciais à jusante e à montante da

onda de evaporação são iguais, o que reduz a equação (3.26) a:

$$\left[h + \frac{z}{W_2} \right] = 0 \quad (3.27)$$

3.2 Resumo das Equações de Conservação

Equação da conservação de massa:

$$[j] = 0 \quad (3.11)$$

Equação da conservação da quantidade de movimento:

$$[p + jW] = 0 \quad (3.17)$$

Equação da conservação da energia:

$$\left[h + \frac{W^2}{2} \right] = 0 \quad (3.27)$$

3.3 Equações de Rayleigh e de Rankine-Hugoniot

Através da combinação das equações básicas de conservação, é possível

encontrar duas equações muito importantes, que são a equação de Rayleigh e a equação

de Rankine-Hugoniot (R-H). Essas equações permitem uma análise gráfica no diagrama

pressão x volume específico, indicando um comportamento de grande importância na

compreensão do fenômeno físico e da relação entre as propriedades à montante e à

jusante da descontinuidade.

A equação de Rayleigh é encontrada através da substituição da equação (3.7)

na equação de conservação de quantidade de movimento (3.17) e a combinação com a

equação de conservação de massa (3.11) resultando em:

$$j^2 = -\frac{[p]}{[v]} \quad (3.28)$$

Para obtenção da equação de Rankine-Hugoniot, é isolado o valor da

velocidade relativa da equação (3.7) e substituído na equação da energia (3.27):

$$h_2 - h_1 + \frac{1}{2}(v_2 j_2)^2 - \frac{1}{2}(v_1 j_1)^2 = 0 \quad (3.29)$$

indicando duas possíveis soluções à jusante da onda de evaporação. É importante frisar que o quadrado do fluxo mássico superficial é proporcional à inclinação das linhas de Rayleigh. A medida que a vazão mássica é aumentada, a inclinação das linhas de Rayleigh aumentará proporcionalmente, aproximando cada vez mais as duas soluções genéricas A e C, até uma condição onde os pontos se tornem coincidentes, apresentando apenas uma solução para o estado à jusante, representado na Fig. 3-2 pelo ponto B. A linha de Rayleigh nessa situação é tangente a curva de R-H. Na literatura de combustão o ponto B recebe o nome de ponto de Chapman-Jouguet, ou simplesmente, C-J. Uma das características das equações de Rayleigh e de R-H é que elas não dependem da natureza da substância de trabalho e

Partindo de um estado à montante da onda de evaporação 1, é determinado o estado à jusante 2 através da solução simultânea das equações de Rayleigh e de R-H. No diagrama pressão x volume específico, a equação de Rayleigh é representada por uma reta e a de R-H por uma curva de concavidade voltada para cima, o estado à jusante no diagrama é caracterizado pela intersecção das duas curvas. O diagrama é representado na Fig. 3-2. Uma solução matemática qualquer se faz pela intersecção entre a curva de R-H e de Rayleigh, o que resulta dois pontos quaisquer, A e C, indicando duas possíveis soluções à jusante da onda de evaporação.

$$[h] = [p] \frac{v_1 + v_2}{2} \quad (3.31)$$

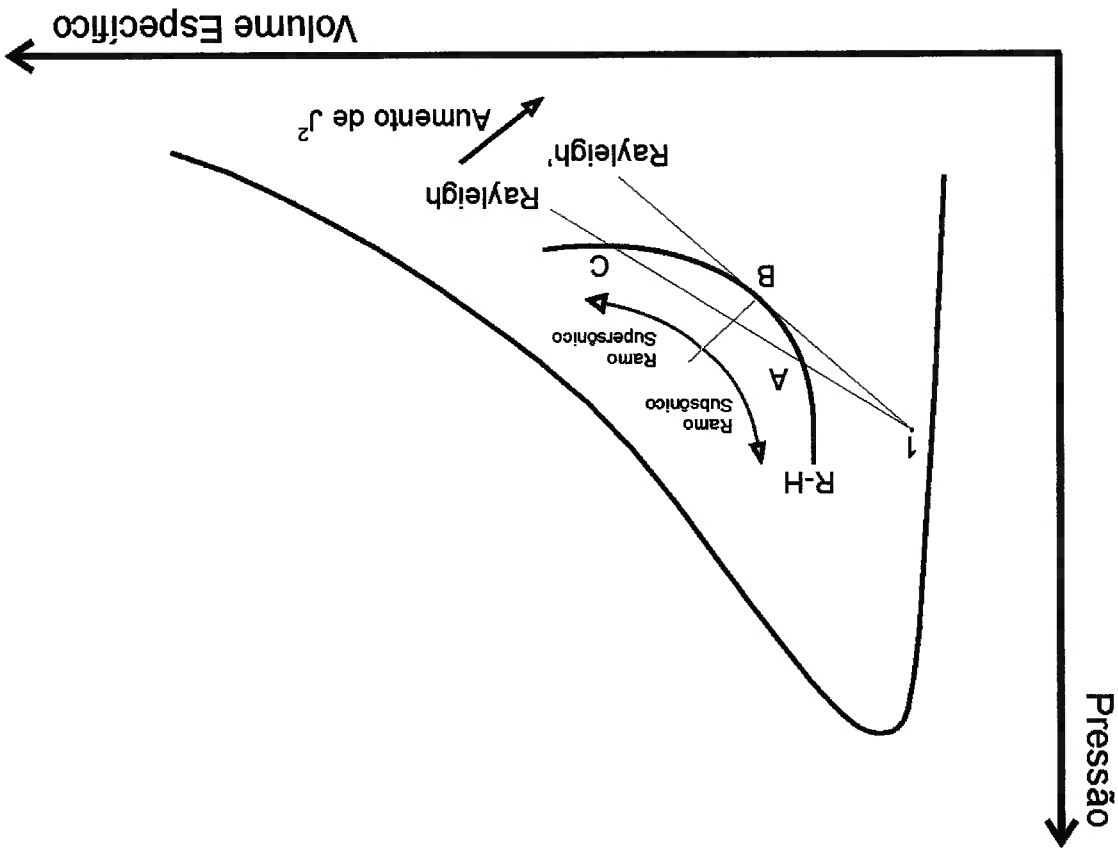
equação de Rayleigh, na equação (3.30), obtendo a equação de Rankine-Hugoniot:

$$h_2 - h_1 + \frac{1}{2} J_2^2 (v_2^2 - v_1^2) = 0 \quad (3.30)$$

Como pela equação da conservação de massa $J_2 = J_1 = J$, temos:

As soluções à esquerda do ponto de C-J, soluções do tipo A, são subsônicas. E as soluções à direita do ponto de C-J, soluções do tipo C, são supersônicas. Em condições de regime permanente são descartadas as soluções supersônicas em experimentos unidimensionais. Pesquisadores como Hill (1991) e Simões Moreira (1994) realizaram experimentos confirmando a existência do ramo subsônico e o ponto de C-J, também obtido por outros pesquisadores (Kurschat e outros, 1992). O ponto de C-J indica que o escoamento à jusante é sônico, em relação a frente de evaporação, o que é também uma condição de bloqueio. Em termos matemáticos a condição de

Fig. 3-2 Solução gráfica do estado à montante de uma onda de evaporação normal



podem ser aplicadas a qualquer descontinuidade que se assemelhe a uma onda de choque, determinando assim um comportamento absolutamente genérico.

máxima vazão mássica pode ser expressa assim $dJ^2 = 0$, que aplicada a equação de

Rayleigh (3.28), (ver apêndice V), resulta em:

$$d v_2 = -\frac{J^2}{p_2} d p_2 \quad \text{ou} \quad \frac{d v_2}{p_2} = -\frac{J^2}{p_2} d p_2 \quad \text{(ApV.6)}$$

O subscrito “C-J” indica que o fluxo mássico se refere ao ponto de

Chapman-Jouguet. As propriedades da fase líquida e vapor da mistura bifásica (estado

2) bem como a pressão, são funções apenas da temperatura, quando válida a hipótese de

equilíbrio termodinâmico entre as fases. O que torna a equação (ApV.6) muito útil no

cálculo do estado à jusante da onda de evaporação.

Uma determinada propriedade f , pode ser expressa para a região bifásica

através da lei elementar de mistura:

$$f = (1-x)f_1 + x f_2 \quad \text{(3.32)}$$

Onde x é o título, definido como a fração mássica de vapor contido na

mistura.

Para a entalpia e volume específico (estado 2):

$$h_2 = (1-x_2)h_{12} + x_2 h_{v2} \quad \text{(3.33)}$$

$$v_2 = (1-x_2)v_{12} + x_2 v_{v2} \quad \text{(3.34)}$$

Substituindo as equações (3.33) e (3.34) na equação de Rankine-Hugoniot

(3.31) e isolando o título, obtemos:

$$x_2 = \frac{2(h_1 - h_{12}) + (p_2 - p_1)(v_1 + v_{12})}{2(h_{v2} - h_{12}) - (p_2 - p_1)(v_{v2} - v_{12})} \quad \text{(3.35)}$$

A Fig. 3-3 ilustra o diagrama pressão x volume específico para uma substância, construído de modo a apresentar as regiões de interesse desse trabalho, ou seja, regiões onde a substância se encontra no estado líquido, vapor ou bifásico (mistura líquido-vapor). Uma substância inicialmente no estado líquido sofre uma diminuição em sua pressão, o processo é ilustrado na Fig. 3-3, a diminuição é feita à temperatura constante. É possível observar que do início até o final da mudança de fase, a pressão também se mantém constante. A essa pressão se dá o nome de pressão de saturação p_s . Associado a cada pressão de saturação há um estado onde a substância se encontra apenas na fase líquida (líquido saturado) ou apenas na fase de vapor (vapor saturado), a curva resultante da união de todos esses estados de equilíbrio é conhecida como linha de saturação ou binodal. O comportamento citado é aquele previsto pela termodinâmica do equilíbrio. Entretanto é possível que, sob determinadas condições, a pressão do líquido seja menor que a pressão de saturação, e ainda assim não tenha ocorrido mudança de fase enquanto a temperatura permanece inalterada. A esse estado é dado o nome de estado metaestável ou superaquecido.

3.4 Líquido Superaquecido

1. Uma temperatura à jussante T_2 é admitida (estimativa).
2. As propriedades termodinâmicas para o estado 2 são calculadas.
3. O título da mistura é calculado pela equação (3.35).
4. A equação (ApV.6) atualiza o valor da temperatura até a convergência.

A sequência de cálculo é a seguinte:

de Chapman-Jouguet, dado um estado à montante (líquido metaestável). Através das equações (ApV.6), (3.35) e uma equação de estado válida para a saturação (ou uma tabela de propriedades termodinâmicas) é possível calcular o ponto

obtidos através da diminuição cada vez maior da pressão, mantendo suprimida a nucleação heterogênea, bem como obedecida a condição de estabilidade mecânica. A condição de estabilidade mecânica é dada pela seguinte relação termodinâmica $(\partial p/\partial v)_{T=const} < 0$. O limite de estabilidade mecânica é atingido quando $(\partial p/\partial v)_{T=const} = 0$, a partir daí a mudança de fase obrigatoriamente ocorrerá. Uma segunda curva, denominada espínodal é construída pela união de todos os pontos correspondentes ao limite de estabilidade. Essas curvas estão indicadas na Fig. 3.3.

A fase vapor também pode se tornar metaestável, sendo que neste caso o vapor se torna subresfriado estando a uma pressão maior do que a pressão de saturação. O vapor subresfriado está sujeito a mesma condição de estabilidade imposta ao líquido superaquecido. Através dos comentários anteriores, é possível concluir que na região interior a curva espínodal há com certeza uma mistura bifásica.

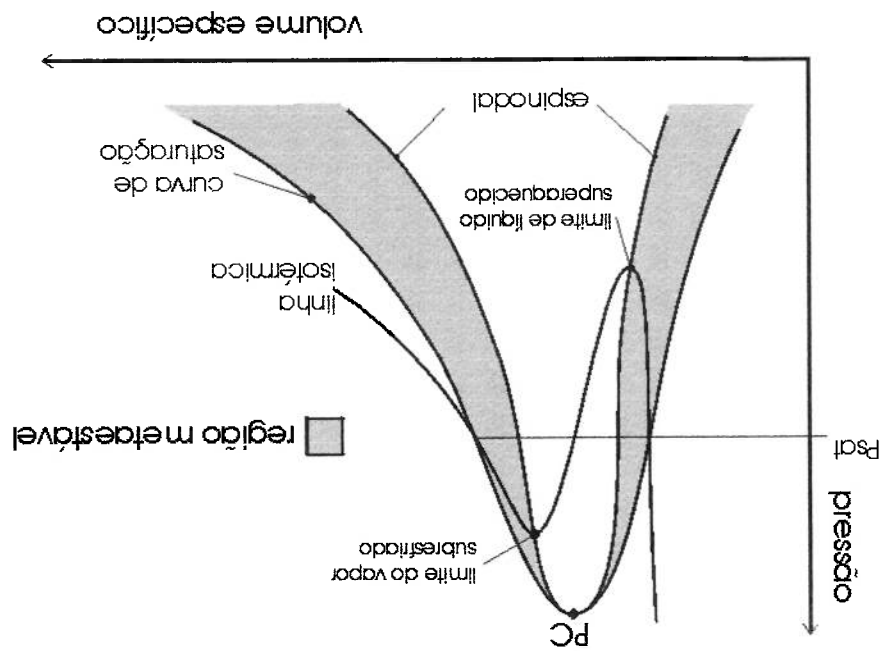


Fig. 3-3 Representação da região metaestável de um fluido em diagrama pressão x volume específico

Para as ondas de choque oblíquas é possível determinar a mudança de direção do fluido apenas relacionando suas propriedades à montante e à jusante da onda de choque (volumes específicos) e o ângulo de onda, (Anderson, 1990), determinando assim o ângulo de giro. O ângulo de giro é aquele formado entre a direção dos vetores

3.5 Relações Trigonométricas

ondas evaporativas oblíquas.

Para que ocorra uma onda evaporativa, o fluido necessariamente deve estar metaestável, é devido a esse fato que a seção (3.4) foi incluída no capítulo relativo as isotérmico e isentrópico são muito próximos (veja apêndice IV).

Uma informação que deve acompanhar o grau de superaquecimento é o processo pelo qual o líquido atingiu tal estado, que pode ter sido isotérmico ou isotérmico, por exemplo. Todos os comentários foram realizados para o caso isotérmico, porém no caso de líquidos superaquecidos verifica-se que os processos de expansão

$$\Pi = \frac{p^* - p}{p^*} \quad (3.37)$$

adimensional:

O grau de superaquecimento pode ser representado através do seguinte

Δp é o grau de superaquecimento.

p é a pressão do líquido superaquecido e

Onde:

$$\Delta p = p^* - p \quad (3.36)$$

O grau de superaquecimento ou de metaestabilidade é definido como:

velocidade à montante e à jusante da onda de choque oblíqua. O ângulo de giro nas ondas de evaporação oblíquas possui a mesma definição do ângulo de giro nas ondas de evaporação oblíquas, e também pode ser relacionado às propriedades à montante e à jusante da onda de evaporação oblíqua e o ângulo de onda. A representação dos ângulos pode ser vista na Fig. 3-4.

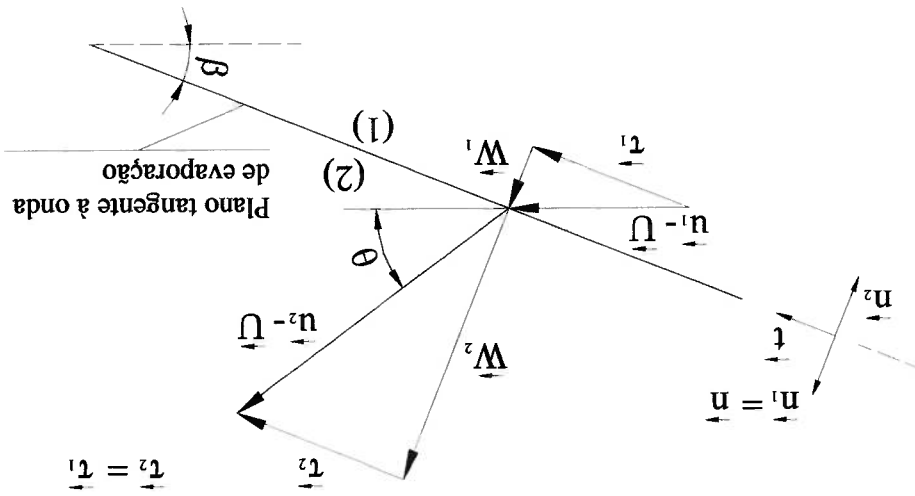


Fig. 3-4 Relações trigonométricas fundamentais da onda de evaporação

Com a ajuda da figura é possível escrever:

$$(3.38) \quad \tau_1 = \tau_2 = \tau = \frac{W_1}{W_2} \operatorname{tg}(\beta) = \frac{W_1}{W_2} \operatorname{tg}(\beta + \theta)$$

É conveniente introduzir a seguinte identidade: $W_2 = W_1 + [W]$, e expandir o

termo da tangente da soma dos ângulos, usando:

$$(3.39) \quad \operatorname{tg}(\beta + \theta) = \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\theta}$$

É obtida:

$$(3.40) \quad W_1 = (W_1 + [W]) \operatorname{tg}\beta \frac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\beta}$$

Isolando a tangente do ângulo de giro:

$$(3.41) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\left[W_1 \operatorname{tg}(\beta) \right]}{1 + \left(1 + \frac{W_1}{[W]} \right) \operatorname{tg}^2 \beta}$$

Para os próximos passos na dedução são usadas algumas identidades

trigonômétricas fundamentais. A sequência para obtenção da forma desejada partindo

da equação (3.41) é a seguinte:

$$(3.42) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\left[W \right] \operatorname{sen} \beta}{\frac{W_1 \operatorname{cosp} \beta}{1 + \left(1 + \frac{W_1}{[W]} \right) \operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{cos}^2 \beta}}$$

$$(3.43) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\left[W \right] \operatorname{sen} \beta \operatorname{cosp} \beta}{\frac{W_1 \operatorname{cosp} \beta}{\operatorname{cos}^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta} + \frac{W_1}{[W]} \operatorname{sen}^2 \beta}$$

$$(3.44) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen}(2\beta)}{2 \left(\frac{W_1}{[W]} + \operatorname{sen}^2 \beta \right)}$$

A expressão acima é apenas cinemática, porém com o auxílio da equação da

conservação de massa (3.11) é possível obter outra forma da relação trigonométrica

fundamental:

$$(3.45) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen}(2\beta)}{2 \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \beta} + \frac{v_2}{v_1} - 1 \right)}$$

Como a razão entre os volumes específicos é jussante e à montante é sempre

maior que a unidade, mantendo o ângulo de giro entre zero e noventa graus, o ângulo de

giro deverá sempre ser positivo. O que nos leva a concluir pela Fig.3-4 que o fluido realiza um giro afastando-se da descontinuidade. A mesma análise pode ser realizada para um ângulo de onda entre noventa e cento e oitenta graus chegando-se a mesma conclusão.

Para uma determinada razão entre os volumes específicos é possível verificar o comportamento ângulo de giro em função do ângulo de onda. Em um determinado ângulo de onda, o ângulo de giro é máximo. Do cálculo diferencial sabemos que o ponto de máximo de uma função pode ser encontrado quando o valor da sua primeira derivada em relação a variável independente tem valor nulo. Aplicando a equação (3.45) é possível encontrar o valor do ângulo de onda máximo para uma determinada razão entre os volumes específicos:

$$\text{tg } \theta_{\text{máx}} = \frac{v_2/v_1 - 1}{2\sqrt{v_2/v_1}} \quad (3.46)$$

O ângulo de onda correspondente ao máximo ângulo de giro é:

$$\text{sen } \beta_{\text{máx}} = \frac{1}{\sqrt{v_2/v_1 + 1}} \quad (3.47)$$

Combinando as equações (3.46) e (3.47), é obtida a relação entre os dois ângulos onde ocorre o efeito de máximo giro.

$$\theta_{\text{máx}} = 90^\circ - 2\beta_{\text{máx}} \quad (3.48)$$

É importante notar na Fig.3-5 que o ângulo de giro é limitado superiormente pela linha reta $\theta = 90^\circ - \beta$.

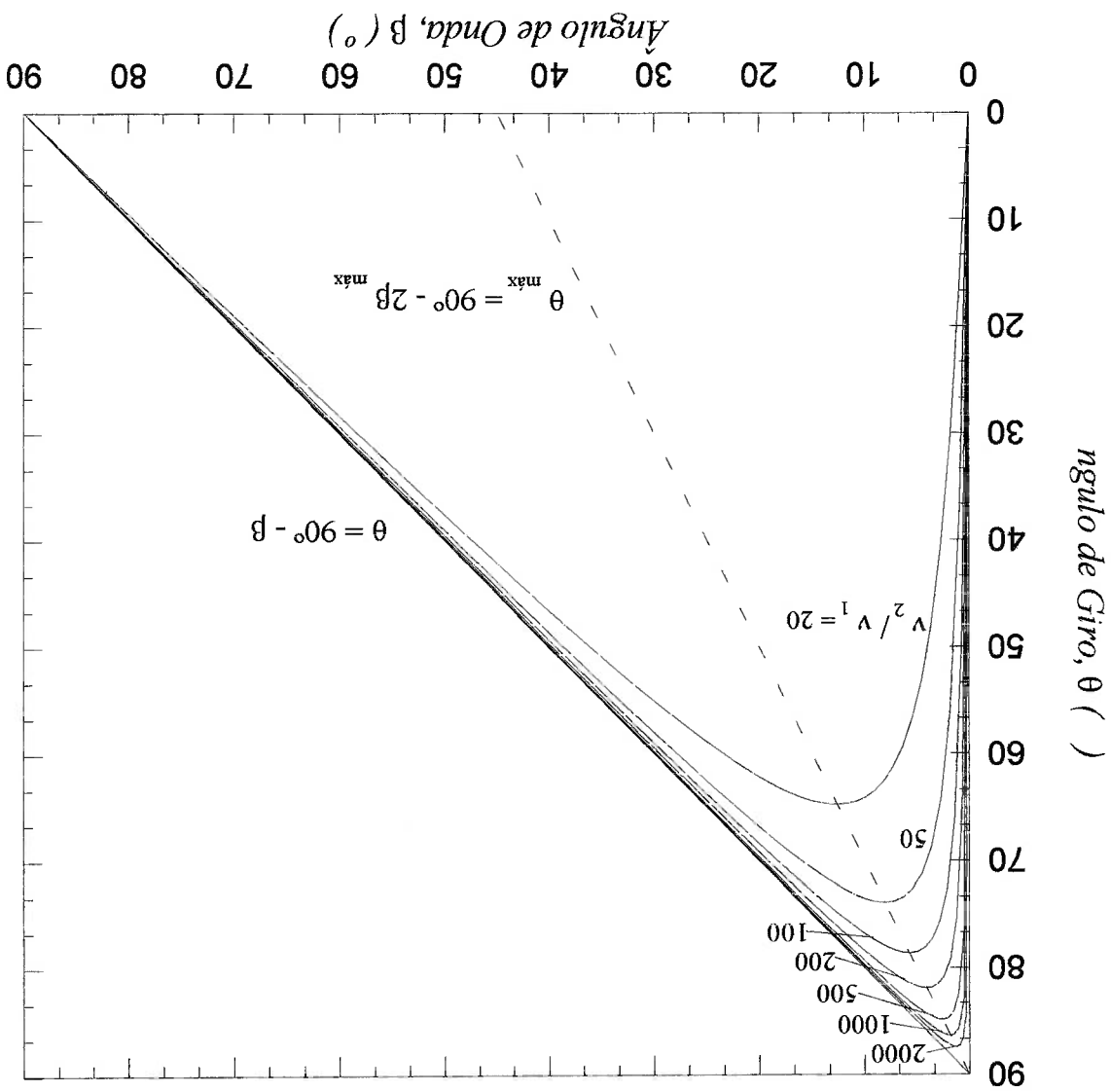


Fig. 3-5 Ângulo de giro como função do ângulo de onda parametrizado pela razão entre os volumes específicos (Simões Moreira, 1999)

4. Jatos Evaporativos – Cone Evaporativo

4.1 Considerações Iniciais

Um líquido a alta temperatura e pressão é injetado através de um bocal em um ambiente de baixa pressão em regime permanente. O bocal é curto (relação entre comprimento e diâmetro inferior a 5) e do tipo convergente e de rugosidade muito baixa, de modo a diminuir o efeito da nucleação heterogênea. Experimentos como esse foram realizados por Kurschat e outros (1992), Athans (1995) e Vieira (1999). Eles observaram que para altos graus de superaquecimento, logo após o bocal de injeção, já na câmara que o líquido está sendo descarregado, o fluido ainda permanece líquido (metaestável) até uma certa distância, formando uma superfície ou interface onde ocorre a evaporação. Há portanto algo que podemos chamar de núcleo líquido.

No presente trabalho a geometria do núcleo líquido será aproximada por um cone, que daqui por diante será denominado cone de líquido. O formato cônico foi escolhido por aproximar, relativamente bem, as formas do núcleo líquido obtidas nos experimentos, mas também por representar bem a hipótese que será postulada a seguir de taxa de evaporação uniforme. A superfície do cone será a onda estacionária de evaporação. Quando o líquido metaestável atravessar a superfície do cone, realizará um giro conforme a teoria apresentada no Capítulo 3.

Observando a Fig.4.1, que tem por finalidade esquematizar os processos termodinâmicos até à jusante da onda de evaporação, vê-se que inicialmente ocorre uma expansão da condição de reservatório, p_0 , até o estado metaestável, p_1 , por um processo isentrópico. Assim, a entropia específica é exatamente a mesma à montante da onda de evaporação (cone de líquido) e no reservatório de injeção. Nessas condições,

o processo isentrópico de expansão do líquido também está próximo de um processo

isotérmico (ver apêndice IV), de forma que:

$$s_1 = s_0 \quad \text{e} \quad T_1 \approx T_0$$



Fotografia de um jato evaporativo, para a substância iso-octano.

Condições:
 $T_0 = 223\text{ }^\circ\text{C}$ e $p_0 = 2068\text{ kPa}$.
 (Athans, 1995)

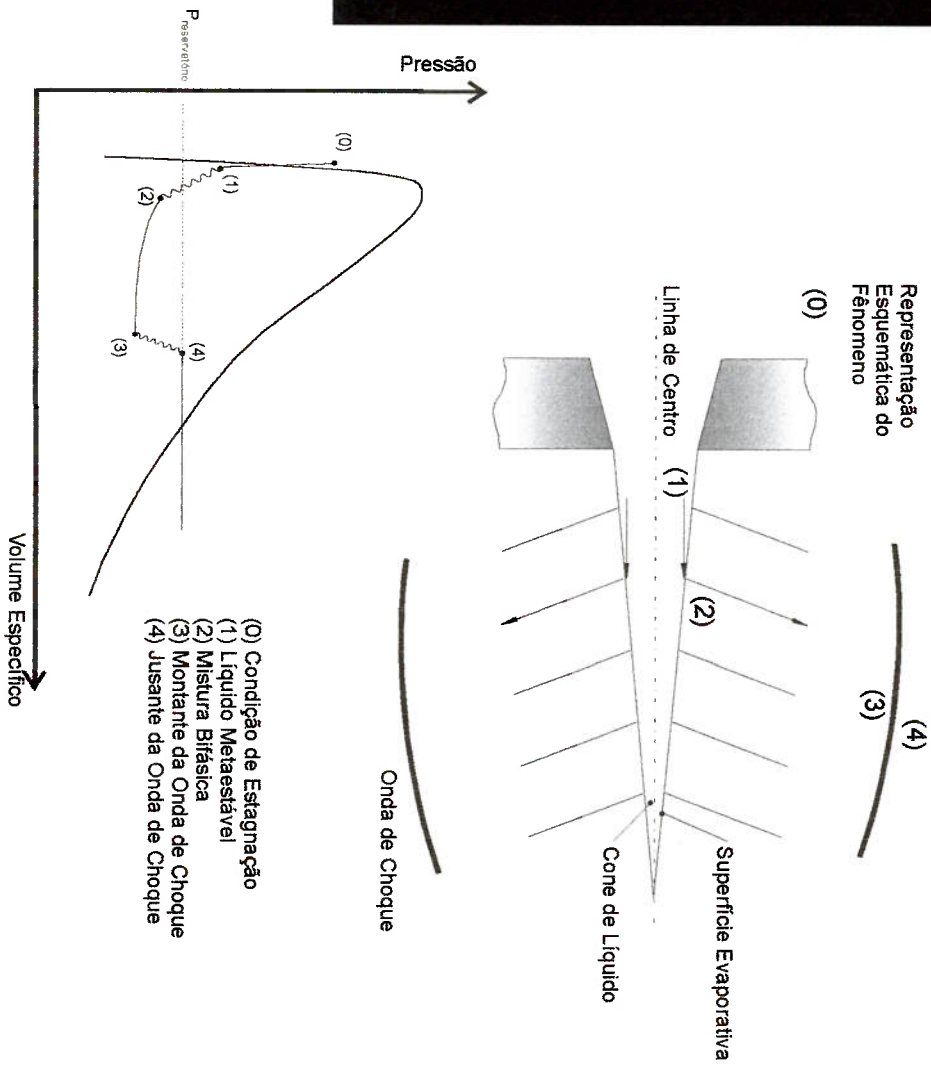


Fig. 4-1 Ilustração dos Processos

4.2 Aplicação da Teoria das Ondas de Evaporação Obliquas aos Jatos Evaporativos – Cone de Evaporação

4.2.1. Apresentação das hipóteses

Mais algumas hipóteses simplificadoras, além das discutidas no início da seção 3.1 são necessárias. E são elas:

1. O cone de líquido metaestável possui propriedades termodinâmicas uniformes, ou seja, temperatura, pressão, densidade, etc... são iguais em todos os seus pontos.

2. A velocidade do líquido metaestável dentro do cone de evaporação é constante e uniforme, bem como paralela a seu eixo de axissimetria.

3. A onda de evaporação é considerada oblíqua e estacionária em relação a um sistema de coordenadas inercial XYZ (global).

4. O produto entre quadrado da vazão mássica por unidade de área e a diferença de entropia à jusante e à montante da onda de evaporação oblíqua é máximo ($f^2(s_2 - s_1) \rightarrow \text{máximo}$).

A quarta hipótese merece um comentário mais detalhado. O jato estará operando nas condições da solução de C-J, ou seja, o escoamento estará bloqueado (condição de máxima vazão mássica), indicando que a solução à jusante da onda de choque é a solução sônica (estado 2), encontrada através da solução simultânea das equações de Rayleigh e Rankine-Hugoniot. Fato que evita o uso de correlações empíricas. A condição de máxima vazão mássica também refere-se a uma condição de máximo salto em entropia específica através da onda de evaporação. A prova dessa

afirmação pode ser encontrada em Thompson (1988). Portanto é razoável dizer que o produto $J^2(s_2 - s_1)$ também é máximo. A solução consiste em determinar dentre uma família de possíveis estados metaestáveis 1, aquele que, através da solução de C-J, determina um estado 2 de modo a maximizar o produto $J^2(s_2 - s_1)$.

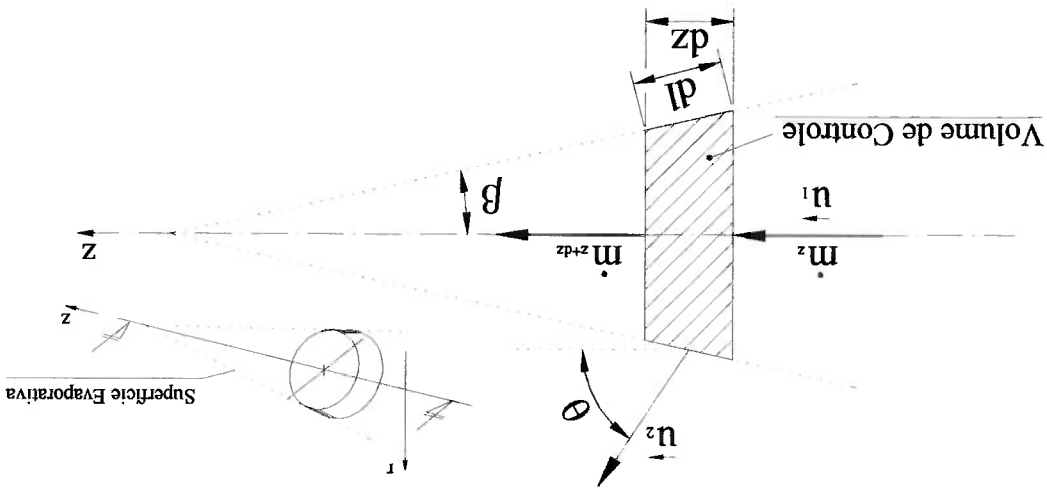


Fig. 4-2 Volume de controle cilíndrico elementar englobando parte do jato evaporativo

Com relação a Fig.4-2 é possível realizar o seguinte balanço de massa dentro do cone de líquido:

$$m_z = m_{z+dz} + m_{ev} \quad (4.1)$$

Em outras palavras, a massa que não evapora continua seguindo na direção do eixo de axissimetria. Como a velocidade no interior do cone de líquido é constante, podemos escrever:

$$m_z = \frac{V_l}{A_z u_1} \rho \quad e \quad m_{z+dz} = \frac{V_l}{A_{z+dz} u_1} \rho \quad (4.2)$$

A massa que evaporou pode ser escrita como:

$$m_{ev} = \int C dl \quad (4.3)$$

Onde C é o perímetro molhado da seção transversal, função da posição axial

z. Como $dl = \frac{dz}{\cos \beta}$, temos:

$$m_{ev} = \frac{\int C dz}{\cos \beta} \quad (4.4)$$

Voltando a equação (4.1), com o uso de (4.2) e (4.4):

$$A^z u_1 = \frac{A^{z+dz} u_1}{v_1} + \frac{\int C dz}{\cos \beta} v_1 \quad (4.5)$$

Realizando uma expansão em série de Taylor para a área A^{z+dz} desprezando

os termos de ordem superior, tem-se:

$$A^{z+dz} = A^z + \frac{dA^z}{dz} dz \quad (4.6)$$

Usando a equação (4.6) e a definição $\int = W_1/v_1 = u_1 \sin \beta/v_1$ em (4.5),

obtemos:

$$\frac{dA}{dz} = -C \operatorname{tg} \beta \quad (4.7)$$

A seção transversal é circular, portanto a área é calculada assim: $A = \pi R^2$ e

o perímetro molhado: $C = 2\pi R$, substituindo a área e o perímetro molhado na equação

(4.7):

$$(4.8) \quad \frac{dR}{dz} = -\operatorname{tg}\beta$$

Integrando a equação (4.8) para um cone de comprimento L e Raio R_b ,

$$\frac{R}{R_b} = \operatorname{tg}\beta = \frac{L}{R_b}$$

$$(4.9) \quad R = (L - z) \frac{L}{R_b}$$

4.2.2 Relação entre a pressão à montante da onda de evaporação e a pressão de estagnação do reservatório

Desde o reservatório até o cone de líquido a densidade varia muito pouco, pois estamos falando de fluido no estado líquido, considerado como incompressível ($v_1 \approx v_0$). É possível, portanto, o uso da equação de Bernoulli (ver Apêndice VI), acrescentando um termo de perda de carga no bocal (K), caso este não seja considerado isentrópico. Sendo isentrópico, K é nulo. Definindo a vazão mássica que atravessa o bocal por unidade de área como J_b , temos:

$$(4.10) \quad p_0 = p_1 + (1+K) \frac{\rho_1 J_b^2}{2}$$

A vazão mássica que atravessa o bocal por unidade de área é:

$$(4.11) \quad J_b = \frac{\dot{m}}{A_b} = \frac{\rho_1 v_1}{n}$$

a. Inicialmente é admitido um estado de líquido metaestável, de mesma entropia específica que o estado do líquido do reservatório, ou de modo

por Simões Moreira (1999):

primeira parte do programa Shofphast 1-D, desenvolvido em linguagem FORTRAN (caso não seja considerado isentrópico), segundo a seguinte sequência usada pela dados de entrada a pressão e a temperatura do reservatório e a perda de carga do bocal montante da onda de choque e as vazões mássicas podem ser calculados tendo como A geometria do cone de líquido, o ângulo de giro, as propriedades à jusante e à

4.2.4 Sequência de cálculo do jato evaporativo bloqueado

$$j_p = \frac{j}{\sin \beta} \quad (4.14)$$

de massa superficiais por unidade de área:

Combinando (4.11), (4.12) e (4.13) é possível obter uma relação entre os fluxos

$$\dot{m} = \frac{W}{v_l} A_L = j A_L \quad (4.13)$$

O fluxo de massa total também pode ser escrito como:

$$A_p = A_L \sin \beta \quad (4.12)$$

A_L , e tem a seguinte correlação com a área do bocal (ou área da base do cone):

guardando entre eles uma relação fixa. A área total da superfície do cone evaporativo é evapora pelo cone líquido. Mas os fluxos de massa por unidade de área são distintos, O fluxo de massa total que entra pelo bocal é o mesmo fluxo de massa que

4.2.3 Relação entre as vazões mássicas superficiais

alternativo é possível admitir um processo isotérmico, como já discutido na

seção 4.1.

- b. A condição de C-J é calculada para o estado do líquido metaestável admitido no passo anterior (a), como explicado na seção 3.3. As propriedades são obtidas como descrito no capítulo 2.

- c. Calculada a condição de C-J, o estado à montante da onda de evaporação está determinado. O produto do salto em entropia e o quadrado da vazão mássica por unidade de área (J), é calculado.

- d. Se o produto calculado no item c for máximo, o estado do líquido metaestável está determinado. Do contrário uma nova pressão metaestável é admitida e o processo é repetido a partir do item (b).

- e. Determinado o estado metaestável desejado, é calculada a vazão mássica que atravessa o bocal por unidade de área, J_b , pela equação (4.10). A vazão mássica total é obtida via equação (4.13).

- f. Usando (4.14) é obtido o ângulo de onda, e com a equação (3.44) o ângulo de giro.

5. Jatos Evaporativos – Onda de Choque

Neste capítulo serão apresentadas as equações básicas e discutidos aspectos do seu comportamento matemático. Equações que modelam o fenômeno de expansão à jusante da onda de evaporação.

5.1 Aspectos Gerais

É utilizada uma abordagem do tipo bidimensional, levando em consideração a axissimetria do escoamento. O escoamento em questão será estudado em regime permanente, sem a presença de forças de campo.

Após deixar a superfície evaporativa o escoamento é sônico e se expande atingindo velocidades supersônicas, assim as forças de inércia são muito maiores do que as forças viscosas, por esse motivo o escoamento pode ser aproximado pelo escoamento de um fluido invíscido. As características citadas são de grande importância para a determinação do comportamento matemático das equações usadas, bem como do tipo de solução que é adotada.

No apêndice II são deduzidas passo a passo as equações de conservação para coordenadas cilíndricas na forma conservativa. O eixo z é coincidente com a linha de axissimetria do escoamento (linha de centro do bocal convergente), e o eixo r é perpendicular ao eixo z

5.1.1 Sistema de equações

As equações finais deduzidas nos itens AII.1, AII.2 e AII.3 do apêndice II são:

As letras F, G e J são vetores do tipo coluna e têm quatro linhas. Cada qual representando um termo das equações que formam o sistema (conservação de massa, conservação da quantidade de movimento na direção z, conservação da quantidade de movimento na direção r e da conservação da energia). Deste modo F, G e J são:

$$(5.1) \quad \frac{\partial F}{\partial G} + \frac{\partial z}{\partial r} = J$$

A apresentação das equações (ApII.9), (ApII.37), (ApII.38) e (ApII.62) segue um padrão semelhante, o que faz com que possamos escrever o sistema que representam de um modo genérico:

$$(ApII.62) \quad \frac{\partial(pV_r h_0)}{\partial r} + \frac{\partial(pV_z h_0)}{\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial V_r h_0}$$

Equação da conservação da Energia:

$$(ApII.37) \quad \frac{\partial(pV_z + p)}{\partial r} + \frac{\partial(pV_r V_z)}{\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial V_z}$$

Equação da conservação da quantidade de movimento na direção r:

$$(ApII.38) \quad \frac{\partial(pV_r V_z)}{\partial r} + \frac{\partial(pV_z + p)}{\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial V_r V_z}$$

Equação da conservação da quantidade de movimento na direção z:

$$(ApII.9) \quad \frac{\partial(pV_r)}{\partial r} + \frac{\partial(pV_z)}{\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial V_r}$$

Equação da conservação de massa:

descrito abaixo.

Há duas formas de apresentação para as equações diferenciais, a forma conservativa e a forma não conservativa. A forma conservativa consiste em escrever as equações diferenciais em termos de fluxos das quantidades envolvidas, isto é, fluxos de massa, de quantidade de movimento e energia. Na forma não conservativa, as equações diferenciais são escritas em função das grandezas e propriedades primitivas envolvidas, isto é, pressão, componentes da velocidade e energia específica. O item 5.1.1 apresenta as equações na forma conservativa. Segundo Anderson (1995), a forma conservativa possui vantagens sobre a forma não conservativa do ponto de vista computacional como

5.2 Forma conservativa e forma não conservativa das equações

$$J = \begin{pmatrix} \left(\frac{p}{V_r} \right) \\ \left(\frac{p}{V_r V_z} \right) \\ \left(\frac{p}{V_r V_z^2} \right) \\ \left(\frac{p}{V_r h_0} \right) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

$$G = \begin{pmatrix} p V_r \\ p V_r V_z \\ p V_r V_z^2 + p \\ p V_r h_0 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

$$F = \begin{pmatrix} p V_z \\ p V_z^2 + p \\ p V_r V_z \\ p V_z h_0 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

É possível citar duas vantagens da utilização das equações na forma conservativa, uma é o modo com que se apresentam, podendo ser escritas de uma maneira única e homogênea, o que simplifica a implantação do método numérico, pois se torna muito mais fácil escrever o código computacional. A segunda e mais importante vantagem reside no fato de que utilizando as equações na forma conservativa, ao discretizá-las visando implantar um método de captura de onda de choque, estas trazem estabilidade ao esquema numérico. Para ilustrar o comportamento citado será usada uma onda de choque normal e estacionária, em um escoamento ilustrado na Fig.5-1. O fluido ao atravessar a onda de choque passa das condições de pressão, temperatura, densidade e velocidade que se encontrava em (1) para novas condições das mesmas grandezas em (2). Duas grandezas ilustram bem a descontinuidade imposta pela onda de choque no escoamento. A pressão em (1) é menor que a pressão em (2), a densidade também tem o mesmo comportamento da pressão, sendo portanto maior em (2) do que em (1). A velocidade tem um comportamento inverso, diminuindo na passagem de (1) para (2). As equações da conservação de massa, da quantidade de movimento e da energia podem ser aplicadas à onda de choque, adotando um volume de controle ilustrado também na Fig.5-1.

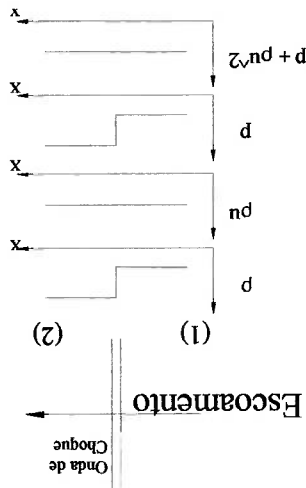


Fig. 5-1 Variação das propriedades de fluxo através de uma onda de choque normal.

variáveis de fluxo p_1 , p_2 e p_3 são constantes através da onda de choque, ao observando as equações (5.7), (5.10) e (5.13), é possível notar que as

$$(5.13) \quad p_1 u_1 h_{01} = p_2 u_2 h_{02}$$

$$(5.12) \quad p u h_0 = \text{cte}$$

$$(5.11) \quad \frac{\partial}{\partial x} (p u h_0) = 0$$

A equação da conservação de energia

$$(5.10) \quad p_1 u_1^2 + p_1 = p_2 u_2^2 + p_2$$

$$(5.9) \quad p u^2 + p = \text{cte}$$

$$(5.8) \quad \frac{\partial}{\partial x} (p u^2 + p) = 0$$

como:

A equação da quantidade de movimento para direção x pode ser escrita

choque é constante.

A equação (5.7) traz a informação que o fluxo de massa através da onda de

$$(5.7) \quad p_1 u_1 = p_2 u_2$$

$$(5.6) \quad p u = \text{cte}$$

$$(5.5) \quad \frac{\partial}{\partial x} (p u) = 0$$

A equação da conservação de massa (equação A.II.8), se resume a:

depende ou influencia outras posições da região em estudo. Dois métodos são muito regiões de dependência e influência no escoamento, ou seja, localidades cuja solução algumas derivadas descontínuas. Fisicamente as superfícies características determinam como superfícies sobre as quais certas propriedades são constantes ou que possuem equações está ligada ao conceito das superfícies características, que podem ser definidas exemplo se comportar como equações hiperbólicas - parabólicas. Essa classificação das mistas apresentam características híbridas entre os três primeiros tipos, podem por as hiperbólicas, as parabólicas, as elípticas e as mistas. As equações diferenciais parciais As equações diferenciais parciais podem ser classificadas em quatro tipos:

funções unicamente das variáveis dependentes.

primeira ordem, não há produtos entre elas, bem como os termos que as multiplicam são compõe. O sistema é classificado como quase linear, pois suas derivadas são de intrinsecamente ligado ao comportamento matemático apresentado pelas equações que o A solução do sistema quase linear de equações presente no item 5.1.1 está

5.3 Comportamento matemático das equações de conservação

de onda de choque mais estável.

capítulo foram deduzidas na forma conservativa de modo a criar um método de captura iriam desestabilizar o método. Por esse motivo as equações desenvolvidas nesse das variáveis de fluxo em variáveis primitivas. Deste modo as variáveis numéricas não essa descontinuidade, que seria calculada em uma próxima etapa com a transformação que calcule as variáveis de fluxo ao invés das variáveis primitivas, não iria "enxergar" mudança abrupta de valor quando o escoamento atravessa a onda. Um método numérico contrário das variáveis primitivas densidade, velocidade e pressão que sofrem uma

conhecidos para a classificação das equações diferenciais parciais, o método que usa a regra de Cramer e outro, mais geral, chamado de método dos autovalores. Para maiores detalhes sobre o método veja Hirsch (1998) e Whitham (1974).

5.3.1 Método dos Autovalores

O sistema de equações diferenciais parciais quase lineares pode ser escrito genericamente como:

$$(5.14) \quad \frac{\partial R_i^k}{\partial x_k} = Q_i \quad k = 1, \dots, m \quad i = 1, \dots, n$$

Podemos para esse sistema escrever o Jacobiano:

$$(5.15) \quad A_k^{\text{ff}} = \frac{\partial E_i^k}{\partial t_k}$$

Substituindo a equação (5.15) em (5.14):

$$(5.16) \quad A_k^{\text{ff}} \frac{\partial x_k}{\partial t^i} = Q_i \quad k = 1, \dots, m \quad i, j = 1, \dots, n$$

Como uma maneira de diminuir os índices podemos reescrever na (5.16)

usando a forma matricial:

$$(5.16') \quad A_k^{\text{ff}} \frac{\partial T}{\partial x_k} = Q \quad k = 1, \dots, m$$

Onde T é um vetor coluna contendo os elementos t^i , e A é uma matriz quadrada contendo os elementos A_{ij}^{ff} . A cada superfície característica há um vetor

normal n . A seguinte identidade é válida caso existam as superfícies características em um dado problema:

$$[A_k n_k]_{\vec{n}} = 0 \quad (5.17)$$

$$\det |A_k n_k| = 0 \quad (5.18)$$

A partir da obtenção das normais é possível afirmar o tipo de sistema de equações. Caso todas as normais sejam reais e linearmente independentes o sistema é do tipo hiperbólico, se forem todas complexas o sistema é elíptico, caso possua solução real e complexa é dito misto. Finalmente o sistema é dito parabólico se tiver normais coincidentes (não necessariamente todas).

5.3.2 Determinação da classificação do sistema de equações para o jato evaporativo

Usando o método dos autovalores, neste item é determinado o comportamento matemático do sistema de equações apresentadas em 5.1.1. Serão reescritas as equações para apresentarem-se conforme (5.14). Neste ponto será assumido escoamento isentrópico, ou seja, a expansão do jato até a onda de choque, pois através da onda de choque o escoamento não pode mais ser considerado isentrópico. Algumas relações termodinâmicas serão necessárias, relações apresentadas nas equações que se seguem. Elas tem por objetivo encontrar o valor da derivada da energia interna em relação a pressão, derivada que será posteriormente usada na manipulação da equação da energia.

Podemos escrever uma propriedade termodinâmica em função de outras duas propriedades independentes, assim a energia interna pode ser uma função da pressão e entropia:

(5.19)

$$e = e(p, s)$$

Deste modo:

(5.20)

$$\delta e = \frac{\partial e}{\partial p} \delta p + \frac{\partial e}{\partial s} \delta s$$

Como estamos estudando o trecho onde o escoamento é isentrópico a derivada parcial da energia interna em relação a entropia é nula, resultando em:

(5.21)

$$\left. \frac{\partial e}{\partial p} \right|_{\delta p} = 0$$

Usando a seguinte relação termodinâmica:

(5.22)

$$T ds = dh - \frac{p}{\rho} dp$$

Substituindo a definição de entalpia (equação ApII.55) em (5.21):

(5.23)

$$T ds = d \left(e + \frac{p}{\rho} \right) - \frac{p}{\rho} dp$$

Pela regra da cadeia:

(5.24)

$$d \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} dp + p d \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

Substituindo (5.24) em (5.23):

(5.25)

$$T ds = de + p d \left(\frac{1}{\rho} \right) = dh - \frac{p}{\rho} dp = 0$$

E a variação da entalpia com a pressão é obtida via equação (5.26), após as substituições sugeridas na equação (5.30), essa finalmente fornece a relação desejada entre a variação da energia interna com a pressão (mantida a entropia constante). Seu valor é proporcional a pressão e inversamente proporcional ao quadrado do produto da densidade pela velocidade do som, ou:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial p} \right|_s = c^2 \quad (5.31)$$

velocidade do som:

O último termo da equação (5.30) pode ser substituído pela definição da

$$\left. \frac{\partial e}{\partial h} \right|_s = \left. \frac{\partial h}{\partial h} \right|_s - \frac{p}{1} + \frac{p}{p} \frac{\partial p}{\partial p} \quad (5.30)$$

A equação (5.29) é derivada em relação a pressão

$$de = dh - \frac{p}{p} dp + \frac{p}{p^2} dp \quad (5.29)$$

Voltando a (5.25), já substituindo a equação acima, vem:

$$d \left(\frac{p}{1} \right) = - \frac{p}{1} d(p) \quad (5.28)$$

$$d \left(\frac{p}{1} \right) = d \left(\frac{p}{p} \right) = \frac{p}{1} d(p) + p d \left(\frac{p}{1} \right) = \frac{p}{1} d(p) + 2d \left(\frac{p}{1} \right) \quad (5.27)$$

É útil manipular o termo $d \left(\frac{p}{1} \right)$ da equação (5.25) da seguinte maneira:

$$\left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_s = \frac{p}{p} \quad (5.26)$$

Assim obtemos:

$$(5.32) \quad \frac{\partial e}{\partial p} \Big|_s = \frac{d^2 c^2}{p}$$

A idéia é transformar a equação da energia, que possui como uma de suas variáveis dependentes a energia interna, em uma equação que em seu lugar apresente como variável independente a pressão. Para que tal equação seja obtida, é necessário o seguinte procedimento: da equação da conservação da energia se subtrai a equação da conservação da quantidade de movimento previamente multiplicada de modo escalar pela velocidade total, usando a definição apresentada por (5.32) é obtida a equação desejada. Conforme descrito neste parágrafo inicialmente com a equação da quantidade de movimento:

$$(5.33) \quad \frac{dV}{\Delta p} + \frac{dp}{p} = 0$$

Multiplicando de modo escalar pela velocidade:

$$(5.34) \quad V \frac{dV}{\Delta p} + \frac{dp}{p} = 0$$

$$(5.35) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

É usada a equação da energia (equação ApII.45) escrita com a derivada

substitutiva (usando a equação ApII.21):

$$(ApII.45) \quad \frac{d}{dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) + \frac{dp}{\rho} = 0$$

A equação (5.35) é subtrahida da equação (ApII.45):

$$(5.36) \quad \frac{de}{dt} + \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot (pV) - V \cdot \nabla p] = 0$$

$$(5.37) \quad \frac{de}{dt} + \frac{p}{\rho} \nabla \cdot V = 0$$

Com o auxílio de (5.32) será substituída a energia interna pela pressão na equação (5.37). Reescrevendo (5.32) derivando em relação ao tempo:

$$(5.38) \quad \frac{de}{dt} = \frac{p}{\rho} \frac{d^2 c^2}{dt^2}$$

Substituindo em (5.37) é encontrada a equação desejada:

$$(5.39) \quad \frac{dp}{dt} + p c^2 \nabla \cdot V = 0$$

Voltando as coordenadas cilíndricas pelo cálculo do divergente da

velocidade, substituindo a derivada substantiva via equação (AplII.21) e eliminando a variação local da pressão com o tempo, bem como a variação na direção θ :

$$(5.40) \quad p c^2 \frac{\partial V_z}{\partial z} + p c^2 \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial p}{\partial z} + V_r \frac{\partial p}{\partial r} = - p c^2 \frac{V_r}{r}$$

O sistema de equações será formado pela equação (5.40) e as equações da

quantidade de movimento escritas na forma não conservativa, já deduzidas no item AII.2. Não é utilizada a equação da conservação de massa pois a mesma já faz parte das

equações (AplII.27) e (AplII.29).

$$(AplII.27) \quad V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

$$(AplII.29) \quad V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Usando a mesma nomenclatura apresentada no item 5.3.1, para o sistema de

equações em estudo $k = 1, 2$ e $i = 1, 2, 3$. Escrevendo na forma de (5.16'), usando as

equações na seguinte ordem (ApII.29'), (ApII.27') e (5.40):

$$(5.41) \quad \begin{bmatrix} V_z & 0 & 1/p \\ 0 & V_z & 0 \\ pc^2 & 0 & V_z \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} + \begin{bmatrix} V_r & 0 & 0 \\ 0 & V_r & 1/p \\ 0 & pc^2 & V_r \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} = \begin{bmatrix} V_z & 0 \\ 0 & V_r \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{pc^2 V_r} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$$

$$(5.42) \quad A_1 = \begin{bmatrix} V_z & 0 & 1/p \\ 0 & V_z & 0 \\ pc^2 & 0 & V_z \end{bmatrix} \quad e \quad A_2 = \begin{bmatrix} V_r & 0 & 0 \\ 0 & V_r & 1/p \\ 0 & pc^2 & V_r \end{bmatrix}$$

Usando a equação (5.18):

$$(5.43) \quad \det \begin{bmatrix} V_z & 0 & 1/p \\ 0 & V_z & 0 \\ pc^2 & 0 & V_z \end{bmatrix} n_z + \begin{bmatrix} V_r & 0 & 0 \\ 0 & V_r & 1/p \\ 0 & pc^2 & V_r \end{bmatrix} n_r = 0$$

Dividindo e multiplicando pela normal na direção r e substituindo $\lambda = \frac{n_z}{n_r}$:

$$(5.44) \quad \det \begin{bmatrix} V_z \lambda + V_r & 0 & \lambda/p \\ 0 & V_z \lambda + V_r & 1/p \\ pc^2 \lambda & pc^2 & V_z \lambda + V_r \end{bmatrix} = 0$$

Calculando o determinante:

$$(5.45) \quad (V_z \lambda + V_r)^3 - (pc^2 \lambda)(V_z \lambda + V_r)(\lambda - pc^2)(V_z \lambda + V_r) = 0$$

$$(5.45') \quad (V_z \lambda + V_r) \left[(V_z \lambda + V_r)^2 - pc^2 \lambda^2 - pc^2 \right] = 0$$

Um escoamento invíscido bidimensional em regime permanente que seja supersônico, é modelado por um sistema de equações diferenciais parciais do tipo hiperbólico. E possui segundo a análise anterior, duas linhas características que passam por um determinado ponto no escoamento. O jato evaporativo têm todas as características citadas neste parágrafo.

satisfeita (5.49) caso o número de Mach seja supersônico (maior que a unidade).

Pela definição do número de Mach: $M = \frac{V}{c} = \frac{V}{\sqrt{V_z^2 + V_r^2}}$, só poderá ser

$$(5.49) \quad V_z^2 + V_r^2 - c^2 > 0$$

$$(5.48) \quad V_z^2 V_r^2 - (V_z^2 - c^2)(V_r^2 - c^2) > 0$$

O primeiro autovvalor é real, os outros dois dependem dos valores das velocidades nas direções z e r . Caso o termo dentro da raiz em (5.47) seja maior que zero, todos os autovvalores são reais e distintos, desta forma é possível concluir que o sistema é hiperbólico.

$$(5.47) \quad \lambda_{2,3} = \frac{-V_z V_r \pm \sqrt{V_z^2 V_r^2 - (V_z^2 - c^2)(V_r^2 - c^2)}}{(V_z^2 - c^2)}$$

Os outros dois autovvalores são:

ao primeiro autovvalor é uma linha de corrente.

A superfície característica (neste caso é uma linha característica) associada

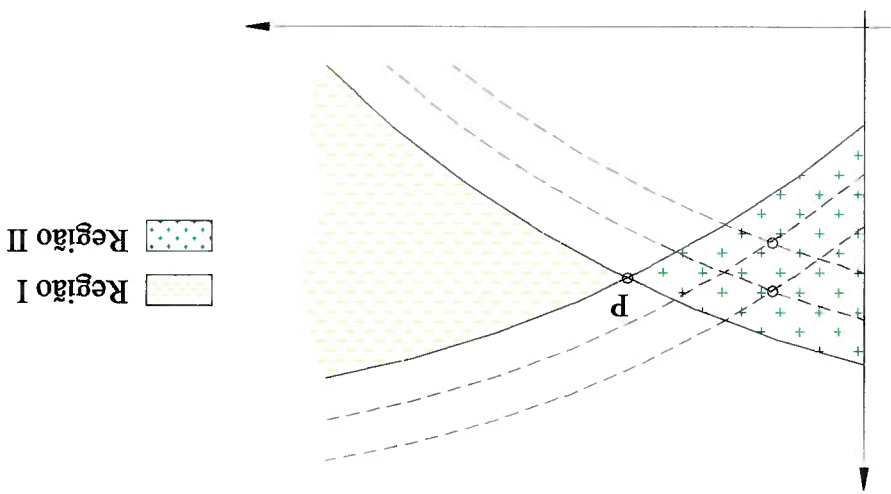
$$(5.46) \quad \lambda_1 = -\frac{V}{V_z}$$

O primeiro autovvalor é:

5.3.3 Importância da classificação do sistema de equações no tipo de solução numérica empregada

Uma das características mais importantes em um escoamento é o modo como as informações são transmitidas em seu interior, fato intimamente ligado a sua natureza e traduzido pelo tipo do sistema de equações. Um problema hiperbólico bidimensional, como provado, possui duas linhas características passando por um ponto P qualquer. Deste ponto em diante, seguindo a direção do escoamento, as linhas características delimitam uma região que receberá influência direta de qualquer perturbação que ocorra localmente em P . A região descrita é conhecida como região de influência do ponto P , está representada na Fig.5-2 como região I. Uma região anterior a P (também delimitada pelas duas linhas características) pode também ser vista na Fig.5-2 e inicialmente denominada como região II. Sobre cada um dos pontos na região II, passam da mesma maneira que no ponto P , duas linhas características, criando para cada um deles uma região de influência. O ponto P está no interior da zona de influência de todos os pontos pertencentes à região II. O que nos leva a concluir que a solução de P depende da região II. Essa região, então, é conhecida como região de dependência para o ponto P . As propriedades em P podem ser encontradas através das propriedades de pontos anteriores a ele, em uma solução denominada como marcha a jussante, que têm conhecida apenas uma linha inicial de dados e através de "passos" no espaço para uma direção, encontra a solução para todos os outros pontos no escoamento. Caso o problema fosse transitório a marcha não mais seria uma marcha no espaço, mas sim no tempo.

Fig. 5-2 Regiões de influência e dependência determinadas pelas linhas características em um sistema de equações diferenciais parciais do tipo hiperbólico modelando um problema bidimensional em regime permanente.



6. Jatos Evaporativos – Malha

Nesta capítulo será apresentada a malha adotada e a transformação do espaço

físico para o computacional.

6.1 Aspectos Gerais

Quando é possível apresentar para um problema uma solução analítica, esta é

contínua, o que em outras palavras significa dizer que para todo o campo em estudo os

valores das grandezas podem ser determinados. Geralmente soluções analíticas são

fáceis em casos onde são impostas condições simplificadoras, afastando na maioria

das vezes a solução matemática do comportamento físico real. Utilizando uma solução

numérica é possível resolver as equações sem tantas hipóteses simplificadoras, levando

a um resultado mais satisfatório. Porém uma desvantagem reside no fato das equações

terem de ser resolvidas para um número discreto de pontos. O arranjo desses pontos no

espaço é chamado de malha, sua distribuição e densidade é extremamente importante

sendo que a acuidade da solução depende em muito desses dois parâmetros.

6.2 Malha propriamente dita

A Fig.6-1 ilustra o problema do jato bidimensional. A superfície evaporativa

é considerada como um cone e sua geratriz (representada pela linha 1-1') forma um

ângulo β com o eixo de simetria z. A equação da geratriz do cone é:

$$r = R_p - z \operatorname{tg}(\beta)$$

(6.1)

O método das diferenças finitas convencional é utilizado neste trabalho, limitando a geometria da malha a uma geometria retangular. Como a proposta de malha feita no item anterior não é retangular, há necessidade de transformá-la matematicamente para que atinja essa forma. O espaço inicial onde a malha foi originalmente construída é conhecido como espaço físico e o espaço obtido após a

6.3 A transformação

distribuídos uniformemente.

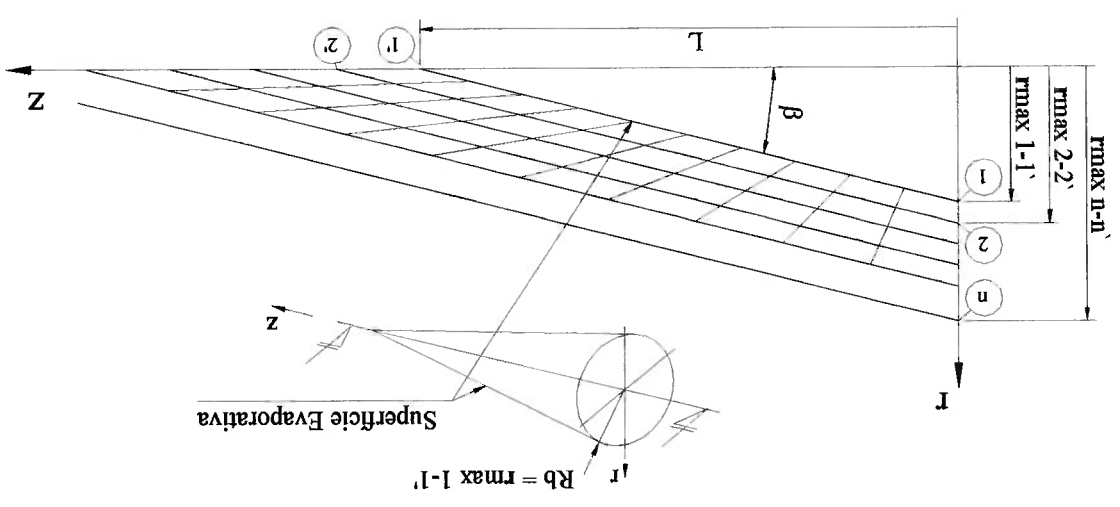
Cada uma das linhas possui o mesmo número de pontos eixo das ordenadas. Onde r_{\max}^{n-n} é o ponto onde a linha paralela a geratriz do cone intercepta o

$$r = r_{\max}^{n-n} - z \operatorname{tg}(\beta) \quad (6.2)$$

cada uma das linhas a equação de formação é:

Ela é construída por linhas paralelas a geratriz do cone (linhas 2-2', 3-3', ..., n-n'). A conhecida como estruturada, pois segue uma ordem lógica de disposição geométrica. Também na Fig-6-1 é mostrada a malha escolhida. Esse tipo de malha é

Fig. 6-1 Superfície Evaporativa e malha adotada para o jato



transformação é conhecido como espaço computacional, através dessa transformação é realizada uma passagem das coordenadas em z e r para as coordenadas em ξ e η .

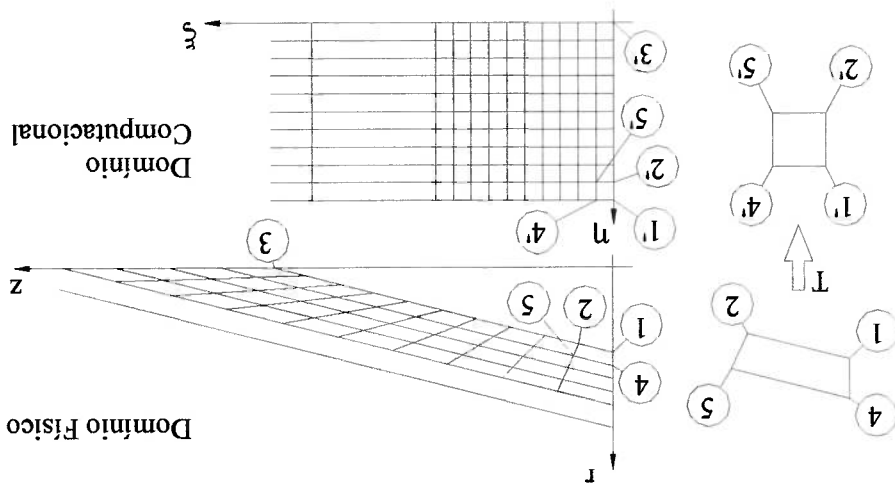


Fig. 6-2 Transformação do plano físico para o computacional (T).

As equações de transformação são:

$$(6.3) \quad \xi = z + \frac{r - Rb}{r - Rb} \operatorname{tg}(\beta)$$

$$(6.4) \quad \eta = \frac{r - R_{\max}}{r - R_{\min}}, \quad r = r + z \operatorname{tg}(\beta)$$

$$\eta = \eta(z, r)$$

As equações de conservação escritas para as coordenadas z e r , não podem

ser utilizadas e devem ser reescritas em função de ξ e η . Retornando a forma genérica

apresentada no item 5.1.1:

$$(5.1) \quad \frac{\partial F}{\partial G} + \frac{\partial z}{\partial r} = J$$

Utilizando a regra da cadeia:

$$(6.5) \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$(6.6) \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$$

Aplicando as equações (6.5) e (6.6) a (5.1):

$$(6.7) \quad \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} = f$$

Os termos $\frac{\partial \xi}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \eta}{\partial \xi}$, $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial r}{\partial z}$ são chamados de métricas e obtidos através de

(6.3) e (6.4).

$$(6.8) \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = 1$$

$$(6.9) \quad \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{r \operatorname{tg}(\beta)}$$

$$(6.10) \quad \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{[r+z \operatorname{tg}(\beta)]}{r \operatorname{tg}(\beta)}$$

$$(6.11) \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{[r+z \operatorname{tg}(\beta)]}{z \operatorname{tg}(\beta)}$$

É possível escrever ξ e η em função de z e r da seguinte forma:

$$(6.12) \quad z = (1-\eta) \left(\xi + \frac{R_p}{\operatorname{tg}(\beta)} \right)$$

$$(6.13) \quad r = \eta \operatorname{tg}(\beta) \left(\xi + \frac{R_p}{\operatorname{tg}(\beta)} \right)$$

$$r = r(\xi, \eta)$$

E substituir (6.12) e (6.13) nas métricas onde z e r aparecem:

$$(6.10') \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{R_p}{\eta} + \frac{\operatorname{tg}(\beta)}{\eta}$$

$$(6.11') \quad \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{\left(\xi + \frac{\xi}{R_b} \operatorname{tg}(\beta) \right)}{(1-\eta)}$$

Uma outra abordagem para o cálculo das métricas seria encontrar o

Jacobiano da transformação. Escrito da seguinte forma:

$$(6.14) \quad \operatorname{Jac} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial \xi}{\partial r} \\ \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \end{vmatrix} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} - \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial z}$$

Usando as equações (6.12) e (6.13) para o cálculo do jacobiano temos:

$$(6.15) \quad \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} - \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial z} = (1-\eta) \left[\operatorname{tg}(\beta) \left(\xi + \frac{\xi}{R_b} \operatorname{tg}(\beta) \right) \right] \left[- \left(\xi + \frac{\xi}{R_b} \operatorname{tg}(\beta) \right) \right] \left[n \operatorname{tg}(\beta) \right]$$

E finalmente calcular as métricas através das equações:

$$(6.16) \quad \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial r} \operatorname{Jac} \frac{\partial \eta}{\partial \xi}$$

$$(6.17) \quad \frac{\partial \eta}{\partial r} = - \frac{\partial z}{\partial r} \operatorname{Jac} \frac{\partial \xi}{\partial \eta}$$

$$(6.18) \quad \frac{\partial \xi}{\partial \xi} = \frac{\partial r}{\partial z} \operatorname{Jac} \frac{\partial \eta}{\partial \xi}$$

$$(6.19) \quad \frac{\partial \eta}{\partial \eta} = \frac{\partial r}{\partial z} \operatorname{Jac} \frac{\partial \xi}{\partial \eta}$$

O sistema de equações para as coordenadas ξ e η pode ser escrito usando as

métricas calculadas pelas equações (6.8), (6.9), (6.10), e (6.11'), na equação (6.7):

$$(6.20) \quad \frac{\partial F}{\partial \xi} (1) + \frac{\partial F}{\partial \eta} \left(\xi + \frac{R_p}{\eta} \operatorname{tg}(\beta) \right) + \frac{\partial F}{\partial G} \left(\frac{1}{1} \operatorname{tg}(\beta) \right) + \frac{\partial F}{\partial G} \left(\xi + \frac{R_p}{\eta} \operatorname{tg}(\beta) \right) \frac{1}{(1-\eta)} = J$$

7 Método Numérico

Neste capítulo será apresentado o método numérico empregado na solução do sistema de equações.

7.1 Método numérico de MacCormack

O método de diferenças finitas de MacCormack (1969) é um método

sua grande utilização na área do escoamento compressível invisível. É dividido em duas etapas, uma etapa de predição e outra de correção (“predictor - corrector”).

Conforme discutido no item 5.3.3 o problema do jato evaporativo admite uma solução do tipo marcha à jusante, ou seja, dado uma linha inicial de dados, que é representada pela geratriz da superfície de evaporação (cone de evaporação), onde são conhecidas todas as propriedades, através de uma marcha espacial é possível determinar as

propriedades para todos os outros pontos. Devido a mudança do espaço físico para o espaço computacional a marcha se dará na direção ξ , partindo de $\xi = 0$ que é a linha de

dados inicial. Linha onde são conhecidas todas as propriedades e grandezas, determinadas pela solução da onda de evaporação através das equações e método apresentados no Capítulo 4. A linha de dados inicial (geratriz da superfície do jato

evaporativo) é a única condição de contorno necessária ao método.

A equação deve ser reescrita para se adequar a marcha. No lado esquerdo do sinal de igualdade permanecerão as derivadas parciais em relação a direção ξ e os

outros termos serão posicionados à direita, como segue:

$$(6.20) \quad \frac{\partial F}{\partial \xi}(1) + \frac{\partial G}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R_b} \right) \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = J + \frac{\partial F}{\partial \eta} \left(\frac{\xi + R_b}{R_b} \right) \frac{\partial \xi}{\partial \eta} - \frac{\partial G}{\partial \eta} \left(\frac{\xi + R_b}{R_b} \right) \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \left(\frac{1}{1-\eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial F} = \frac{\partial \xi}{\partial G} \left(F + \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \left(\frac{\xi + R_b}{\eta} \right) - \frac{\partial \xi}{\partial G} \left(\frac{\xi + R_b}{\eta} \right) \right) \tag{6.20''}$$

Substituído $\Phi = F + \frac{\partial \xi}{\partial G}$ em (6.20''):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \xi}{\partial F} \left(\frac{\xi + R_b}{\eta} \right) - \frac{\partial \xi}{\partial G} \left(\frac{\xi + R_b}{\eta} \right) \left(\frac{\xi + R_b}{\eta} \right) \tag{7.1}$$

A equação (7.1) está apresentada na forma desejada para implantação do

método. A Fig.7-1 ilustra a célula de cálculo utilizada pelo método das diferenças

finitas. Na célula de cálculo são conhecidas todas as grandezas para a posição i.

Conhecidas as grandezas podemos calcular a variável de fluxo Φ em todas as posições

j na linha de i constante, na forma vetorial é:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{dV_i}{dV_i} + \frac{dV_z}{dV_i} \operatorname{tg}(\beta) \\ \frac{dV_z}{dV_i} + \frac{dV_z}{dV_i} \operatorname{tg}(\beta) \\ \frac{dV_i}{dV_i} + \frac{dV_z}{dV_i} \operatorname{tg}(\beta) \\ \frac{dV_i}{dV_i} + \frac{dV_z}{dV_i} \operatorname{tg}(\beta) \end{Bmatrix} = \Phi \tag{7.2}$$

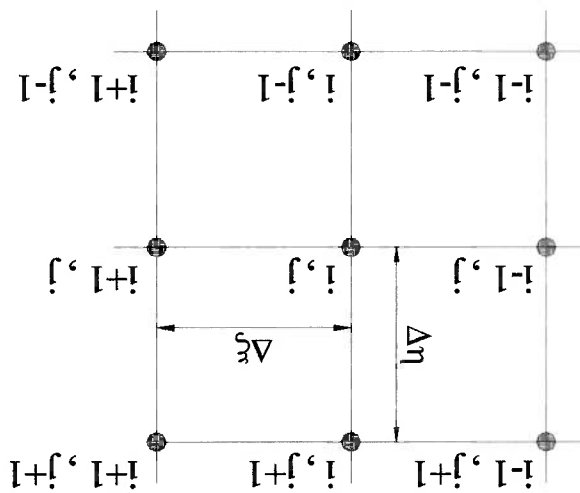


Fig. 7-1 Célula de cálculo

Usando uma expansão em série de Taylor truncada é possível calcular o valor da variável de fluxo Φ no próximo passo $(i+1, j)$ é:

$$\Phi_{i+1,j} = \Phi_{i,j} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_{i,j} \Delta \xi \quad (7.3)$$

A derivada parcial de Φ em relação a ξ é uma média conveniente que será

calculada em duas etapas.

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_{i,j} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_{i,j} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_{i+1,j} \right] \quad (7.4)$$

7.1.1 Etapa de predição

Na etapa de predição contamos apenas com os valores na posição i , portanto

usamos diferenças finitas para frente ao avaliar $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_{i,j}$. Discretizando a equação

(7.1):

A equação (7.7) é um sistema não linear de equações. Este sistema possui cinco incógnitas e quatro equações, ou seja, tem grau de indeterminação um. A operação de decodificação será descrita em detalhes mais a frente. Por enquanto digamos que é possível eliminar esse grau de indeterminação através da introdução de equações constitutivas. Decodificadas as variáveis são obtidas as grandezas preditas:

$$(7.7) \quad \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix}_{i+1,j} = \begin{pmatrix} \left(d \Lambda^z + \frac{d}{\Lambda^r} \right)_{i+1,j} \text{tg}(\beta) \\ \left(d \Lambda^z + d + \frac{d}{\Lambda^z} \right)_{i+1,j} \text{tg}(\beta) \\ \left(d \Lambda^r \Lambda^z + \frac{d}{\Lambda^z} \right)_{i+1,j} \text{tg}(\beta) \\ \left(d \Lambda^r \Lambda^z h_0 + \frac{d}{\Lambda^r h_0} \right)_{i+1,j} \text{tg}(\beta) \end{pmatrix} = \bar{\Phi}_{i+1,j}$$

Obtido o valor de cada um dos termos do vetor variável de fluxo intermediário calculados por (7.5), há necessidade de encontrar as variáveis primitivas intermediárias (velocidade nas direções r e z, pressão, entalpia e densidade). Esta operação é conhecida como decodificação.

$$(7.6) \quad \bar{\Phi}_{i+1,j} = \Phi_{i,j} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \Delta \xi$$

A variável de fluxo pode ser estimada em (i+1, j) a partir do resultado obtido em (7.5), será designada por um traço indicando que se trata de um valor intermediário. Também usando uma expansão em série de Taylor truncada:

$$(7.5) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_{i,j} = J_{i,j} + \left(\frac{F_{i,j+1} - F_{i,j}}{\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j}} \right) \left(\frac{\xi_{i,j} + \frac{\xi_{i,j}}{R_b}}{\eta_{i,j}} \right) - \left(\frac{G_{i,j+1} - G_{i,j}}{\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j}} \right) \left(\frac{\xi_{i,j} + \frac{\xi_{i,j}}{R_b} + \text{tg}(\beta)}{(1 - \eta_{i,j})} \right) \text{tg}(\beta)$$

$$(7.8) \quad \left(\underline{V}^r \right)_{i+1,j}, \left(\underline{V}^z \right)_{i+1,j}, \left(\underline{p} \right)_{i+1,j}, \left(\underline{h}_0 \right)_{i+1,j}$$

Para todas as linhas $i, i + 1, \dots, i + nlinhas$ há o mesmo número de pontos n_{pontos} , fica evidente que quando $j = n_{pontos}$, será necessário para cálculo de

ter um valor para as variáveis de fluxo F e G em um ponto inexistente, que é o

ponto $(i+1, n_{pontos} + 1)$. Uma solução para esse problema é que no cálculo de

$\left(\frac{\partial \xi}{\partial \xi} \right)_{i,j}$, quando $j = n_{pontos}$ ($n = 1$), não seja utilizada diferença finitas para frente

mas em seu lugar diferenças finitas para trás. Esse fato prejudica a acuidade de segunda

ordem do método para estes pontos.

7.1.2 Etapa de Correção

Partindo das variáveis primitivas calculadas no passo de predição para $i+1$ é

calculado o valor das variáveis de fluxo $\underline{F}_{i+1,j}$, $\underline{G}_{i+1,j}$ e $\underline{j}_{i+1,j}$, voltando a equação (7.1)

agora usando diferenças finitas para trás é obtido o valor da derivada corrigida de Φ

em relação a ξ :

$$(7.9) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_{i+1,j} = \underline{j}_{i+1,j} + \left(\frac{\underline{F}_{i+1,j} - \underline{F}_{i+1,j-1}}{n_{i+1,j} - n_{i+1,j-1}} \right) \left(\frac{\xi_{i+1,j} + \frac{R_b}{R_p} \text{tg}(\beta)}{n_{i+1,j}} \right) - \left(\frac{\underline{G}_{i+1,j} - \underline{G}_{i+1,j-1}}{n_{i+1,j} - n_{i+1,j-1}} \right) \left(\frac{\xi_{i+1,j} + \frac{R_b}{R_p} \text{tg}(\beta)}{1 - n_{i+1,j}} \right)$$

Quando $\eta = 0$, exatamente sobre a linha de simetria, no cálculo de $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)_{i+1,j}$ via equação (7.9) será necessário ter um valor para as variáveis de fluxo no ponto $(i+1, -1)$ que obviamente não existe. Como o eixo das abscissas é um eixo de simetria, o valor absoluto da velocidade e o da pressão para $(i+1, -1)$ é o mesmo do ponto $(i+1, 1)$.

7.1.3 Cálculo da variável de fluxo definitiva para $i+1, j$

Retornando a equação (7.4) e usando os valores obtidos nos itens 7.1.2 e 7.1.3 via equações (7.5) e (7.9) é calculado o valor de $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)^m$. Substituindo o valor da derivada parcial de Φ em relação a ξ média em (7.3) é obtido o valor definitivo de $\Phi_{i+1,j}$. As variáveis primitivas definitivas novamente são encontradas pela decodificação da variável de fluxo Φ . O procedimento anterior é realizado para todos os pontos na linha $i+1$, variando j de modo a varrer a linha completamente.

7.1.4 Decodificação da variável de fluxo Φ nas variáveis primitivas

A decodificação é uma operação que está presente na etapa de predição e na etapa final do método numérico apresentado no item 7.1. Em primeiro lugar são obtidas relações das velocidades em função das variáveis de fluxo usando a equação (7.2):

$$(7.10) \quad V^z = \frac{\Phi_2 - p}{\Phi_1}$$

$$(7.11) \quad V^r = \frac{\Phi_3 - p}{\Phi_1 \beta}$$

Da primeira linha de (7.2) temos $\Phi_1 = p \left(V_z + \frac{V_r}{\beta} \right)$, substituindo as

velocidades dadas pelas equações (7.10) e (7.11) e isolando a densidade chegamos a:

$$(7.12) \quad p = \frac{\Phi_2^2}{\Phi_1^2 - p + \frac{\Phi_3}{p} \left(\beta \operatorname{tg}(\beta) \right)}$$

Da quarta linha de (7.2) temos $\Phi_4 = p \left(V_z + \frac{V_r}{\beta} \right) h_0$ ou $\Phi_4 = \Phi_1 h_0$.

Usando a definição de entalpia de estagnação (equação 5.59):

$$(7.13) \quad \frac{\Phi_4}{\Phi_1} = h + \frac{1}{2} (V_z^2 + V_r^2)$$

Substituindo as equações (7.10) e (7.11) em (7.13):

$$(7.14) \quad \frac{\Phi_4}{\Phi_1} = h + \frac{1}{2} \left[(\Phi_2 - p)^2 + \left(\Phi_3 - \frac{\Phi_2}{p} \left(\beta \operatorname{tg}(\beta) \right) \right)^2 \right]$$

Com as equações (7.12) e (7.14) temos um sistema de duas equações e três

incógnitas (pressão, densidade e entalpia). Introduzimos uma terceira equação que é

uma equação de estado de equilíbrio térmico e mecânico para as fases é empregado. Sendo

modelo bitático de equilíbrio térmico e mecânico para as fases é empregado. Sendo

assim, a densidade e a entalpia podem ser escritas como função da temperatura e do

título x, enquanto que a pressão é função exclusiva da temperatura de saturação T. Isto

em termos matemáticos significa:

$$(7.15) \quad p = p(T)$$

$$(7.16) \quad h = x h^v + (1-x) h_l$$

$$(7.17) \quad p = \frac{1}{1 - x + \frac{p^v}{p_1}}$$

Introduzindo (7.15), (7.16) e (7.17) em (7.12) e (7.14), são encontradas as novas equações:

$$(7.18) \quad \frac{1}{\Phi_2} \frac{x}{1-x} + \frac{p^v}{p_1} = \frac{\Phi_2 - p + \frac{\Phi_3}{p} \operatorname{tg}(\beta)}{\Phi_2} = 0$$

$$(7.19) \quad x h^v + (1-x) h_1 + \frac{1}{2} \Phi_2 \left[(\Phi_2 - p)^2 + \left(\Phi_3 - \frac{\Phi_4}{p} \operatorname{tg}(\beta) \right) \right] = 0$$

Como forma de simplificar a solução das equações (7.18) e (7.19), é possível

isolar o título na equação (7.18):

$$(7.20) \quad x = \frac{\Phi_2 \left(\frac{p^v}{p_1} - \frac{1}{1 - x + \frac{p^v}{p_1}} \right)}{\left[\Phi_2 - p + \frac{\Phi_3}{p} \operatorname{tg}(\beta) \right]}$$

E substituir a equação (7.20) em (7.19), após manipulações algébricas e a

troca da densidade pelo volume específico $v = \frac{p}{1 - x + (1-x)v^v}$ chegamos a:

$$(7.21) \quad \left[\frac{\operatorname{tg}(\beta)}{\Phi_2} + 1 \right] p^2 - 2p \left[\frac{\operatorname{tg}(\beta)}{\Phi_2} + 1 \right] \left(\frac{p^v}{h^v - h_1} + 1 \right) \left(\frac{\operatorname{tg}(\beta)}{\Phi_3} + \Phi_2 \right) + 2\Phi_2 h_1 + \Phi_2^2 + \Phi_2^3 = 0$$

No interesse de simplificar a equação (7.21) é possível lançar mão da

seguinte identidade trigonométrica: $\frac{1}{\operatorname{tg}(\beta) + 1} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{tg}(\beta)}$.

A equação (7.21) é uma função exclusiva da temperatura e pode ser genericamente escrita como $\phi(T) = 0$. No interesse de garantir a convergência da solução da equação (7.21) é usada uma combinação de métodos numéricos, o método da dicotomia e o método de Newton-Raphson.

7.1.5 Método da Dicotomia

Dada a função em estudo $\phi(T)$, cujo objetivo é encontrar a temperatura onde a função será nula. Caso a função seja contínua e contenha raízes reais, existirão valores para a temperatura tais que:

$$\phi(T_1)\phi(T_2) < 0$$

$$T_2 > T_1$$

(7.22)

sendo a equação (7.22) verdadeira, há pelo menos uma raiz da equação no intervalo entre T_1 e T_2 . A técnica consiste em dividir o intervalo $\Delta T = T_2 - T_1$ ao meio e avaliar a função nesse ponto $\phi\left(T_3 = \frac{T_2 + T_1}{2}\right)$. Se $\phi(T_1)\phi(T_3) > 0$ a raiz se encontra

no intervalo T_1 e T_3 , caso contrário se encontra entre T_3 e T_2 . Esse novo intervalo é dividido ao meio e é novamente realizado o procedimento de avaliação. As iterações cessam quando o valor intermediário de T varia muito pouco de um passo para outro (a variação é menor que uma determinada tolerância previamente estipulada). Apenas uma das raízes existentes no intervalo inicial pode ser capturada.

O método de Newton-Raphson, também conhecido como método das tangentes, é muito utilizado para resolver equações não lineares, possui convergência mais rápida do que o método da dicotomia, porém necessita de um valor inicial que deve estar próximo da raiz. Caso esse valor esteja muito distante o método pode não convergir.

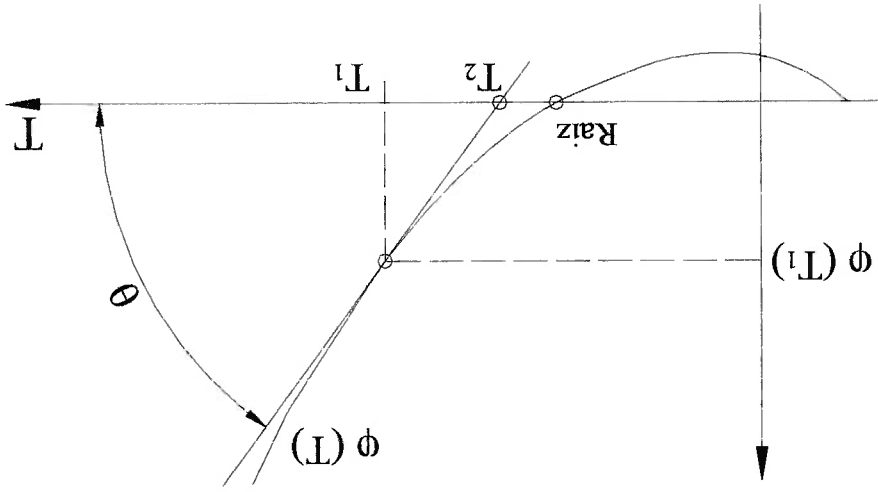
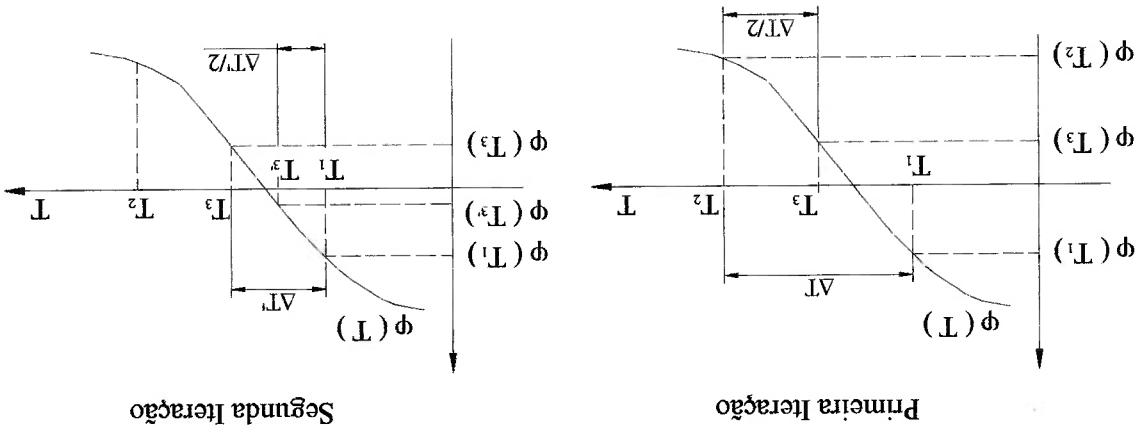


Fig. 7-3 Ilustração Gráfica do Método de Newton-Raphson

7.1.6 Método de Newton-Raphson (Modificado)

Fig. 7-2 Ilustração Gráfica do Método da Dicotomia



Primeiramente é estimado um valor inicial para a raiz. Tangente a função no ponto correspondente a T_1 , construímos uma reta. Ao prolongarmos essa linha tangente até interceptar o eixo T encontraremos T_2 , que está mais próximo da raiz real da equação que T_1 . A tangente é numericamente igual a primeira derivada da função avaliada em T_1 :

$$\phi'(T_1) = \text{tg } \theta \quad (7.23)$$

Utilizando o triângulo retângulo (Fig.7-3) é possível escrever a tangente da

seguinte forma:

$$\text{tg } \theta = \frac{\phi(T_1)}{T_1 - T_2} \quad (7.24)$$

Substituindo a equação (7.24) em (7.23) e organizando de forma adequada

os termos:

$$T_2 = T_1 - \frac{\phi(T_1)}{\phi'(T_1)} \quad (7.25)$$

Para k iterações a equação (7.25) se torna:

$$T_{k+1} = T_k - \frac{\phi(T_k)}{\phi'(T_k)} \quad (7.26)$$

A avaliação da derivada da função será feita numericamente, por esse motivo

o método é conhecido como método de Newton-Raphson modificado. Da definição da

derivada:

$$\phi'(T_k) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi(T_k + \Delta t) - \phi(T_k)}{\Delta t} \quad (7.27)$$

7.1.7 Combinação do Método da Dicotomia e o Método de Newton-Raphson

Como citado anteriormente, uma combinação dos métodos da dicotomia e de Newton-Raphson é usada no presente trabalho. O método da dicotomia parte de um intervalo de pesquisa, por outro lado o método de Newton-Raphson se inicia com um valor estimado da raiz da equação. Nesta abordagem iniciaremos com um intervalo inicial de temperaturas onde a função troca de sinal. Uma rotina de busca é implementada. Para muitas temperaturas dentro de uma faixa de interesse é avaliado o sinal da função, quando esta muda de sinal são guardados os valores de temperatura consecutivos. Os dois valores de temperatura determinam o intervalo onde se encontra a raiz. O intervalo é dividido ao meio, para essa temperatura média ao intervalo são calculados o valor da função e da sua derivada. Um teste é realizado, e define o método a ser empregado na iteração, o método da dicotomia ou o método de Newton-Raphson. O teste usando a nomenclatura da Fig.7-4 é:

$$(7.28) \quad \left| \frac{\phi(T_3)}{\phi'(T_3)} \right| > (T_3 - T_1)$$

e

$$(7.29) \quad \left| \frac{\phi(T_3)}{\phi'(T_3)} \right| > (T_2 - T_3)$$

Se as expressões (7.28) e (7.29) são verdadeiras simultaneamente, é usado o método de Newton-Raphson, do contrário é usado o método da dicotomia. Na próxima iteração, caso na iteração anterior tenha sido usado o método de Newton-Raphson, o novo intervalo será entre T_1 e T_4 ou T_4 e T_2 . O intervalo de temperatura será aquele onde o produto das funções calculadas nas extremidades for menor que zero.

O processo de expansão ou mesmo a passagem do fluido pela onda de choque pode levar a uma mudança de fase completa até a fase de vapor superaquecido. Somente uma SCME (ver seção 1.1) pode sofrer uma evaporação completa. A decodificação mostrada anteriormente pressupõe um escoamento bifásico, sendo o título obtido por tal procedimento superior a unidade, é necessário decodificar as variáveis

7.1.8 Decodificação para Evaporação Completa

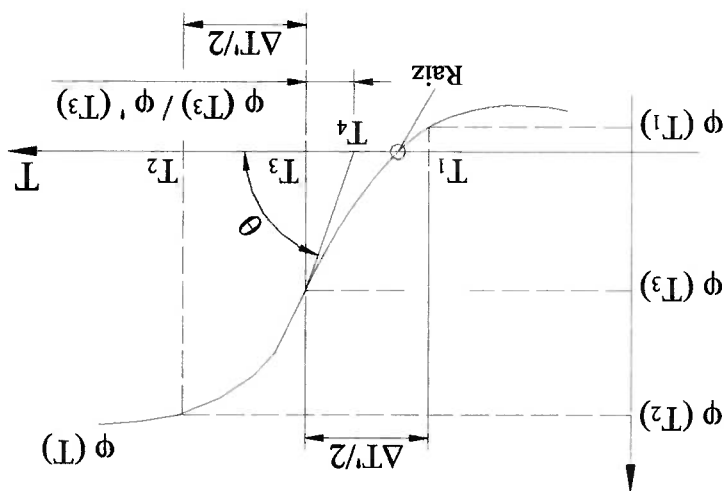
finaliza a decodificação.

Assim é possível com o uso da equação (7.20) calcular o título. As velocidades também podem ser determinadas pelas equações (7.10) e (7.11), o que

estado válida para a saturação.

Encontrado o valor da temperatura, a pressão está determinada via equação (7.15) e também os valores de volume específico e entalpia para o vapor saturado seco e para o líquido saturado. O código computacional empregado utiliza uma tabela termodinâmica para obter os valores de pressão, volume específico e entalpia (para o líquido saturado e vapor saturado) como função da temperatura (veja exemplo para a substância iso-octano na Tabela 2-2). A tabela é fruto da solução de uma equação de

Fig. 7-4 Ilustração Gráfica da Combinação dos Métodos da Dicotomia e Newton-Raphson



levando em conta o fato do fluido encontrar-se no estado de vapor superaquecido. As equações (7.15), (7.16) e (7.17) não são válidas. Caso a região de vapor superaquecido seja alcançada, é adotada a hipótese de que a entalpia específica é função apenas da temperatura. Portanto, a entalpia do vapor superaquecido é obtida da tabela de saturação, de forma que:

$$h \approx h^v(T) \quad (7.30)$$

Também, faz-se inserções na região superaquecida usando a equação virial truncada no segundo coeficiente virial B. Esse coeficiente é obtido a partir dos pontos tabelados. Logo:

$$p = pRT(1 + pB) \quad (\text{Apl.22'})$$

Substituindo a equação (Apl.22') na equação (7.12):

$$p \left[\Phi_2 + \frac{\Phi_3}{pRT(1+pB)} - \frac{\text{sen}^2(\beta)}{pRT(1+pB)} \right] - \Phi_2^2 = 0 \quad (7.31)$$

Substituindo a equação (Apl.22') na equação (7.14):

$$2\Phi_2^2 h^v - 2\Phi_1\Phi_4 + [\Phi_2 - pRT(1+pB)]^2 + \left[\Phi_3 - \frac{pRT(1+pB)}{\text{sen}^2(\beta)\text{tg}(\beta)} \right]^2 = 0 \quad (7.32)$$

As equações (7.31) e (7.32) são funções da densidade e da temperatura, ou seja, $\phi(p, T) = 0$. Não é possível escrever de forma explícita a densidade ou a temperatura em nenhuma das equações. Assim, se faz necessária, a solução simultânea do sistema de equações formado por (7.31) e (7.32). Novamente é utilizado o método de Newton-Raphson, só que agora aplicado a um sistema de equações.

7.1.9 Método de Newton-Raphson para Solução de Sistemas de Equações não Lineares

O método segue a seqüência: as equações (7.31) e (7.32) são avaliadas em

$$\phi_1(\underline{p} + \Delta p, T + \Delta T) = \phi_1(\underline{p}, T) + \phi_2(\underline{p} + \Delta p, T + \Delta T) = \phi_2(\underline{p}, T)$$

em série de Taylor:

$$\phi_1(\underline{p}, T) = \phi_1(\underline{p}, T) + \Delta p \frac{\partial \phi_1(\underline{p}, T)}{\partial p} + \Delta T \frac{\partial \phi_1(\underline{p}, T)}{\partial T} \tag{7.33}$$

$$\phi_2(\underline{p}, T) = \phi_2(\underline{p}, T) + \Delta p \frac{\partial \phi_2(\underline{p}, T)}{\partial p} + \Delta T \frac{\partial \phi_2(\underline{p}, T)}{\partial T} \tag{7.34}$$

Se o sistema de equações tivesse ψ_i variáveis, e n equações,

genericamente seria possível escrever:

$$\phi^n(\underline{\psi}) = \phi^n(\underline{\psi}) + \sum_{j=1}^n \Delta \psi_j \frac{\partial \phi^n(\underline{\psi})}{\partial \psi_j} \tag{7.35}$$

Se $\phi^n(\underline{\psi}) = 0$, ψ_i são as raízes do sistema não linear de equações, de modo

que é possível escrever:

$$\begin{Bmatrix} \phi_1(\psi_1) \\ \phi_2(\psi_1) \\ \vdots \\ \phi_n(\psi_1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \psi_1 \\ \Delta \psi_2 \\ \vdots \\ \Delta \psi_n \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1(\psi_1)}{\partial \psi_1} & \frac{\partial \phi_1(\psi_1)}{\partial \psi_2} & \dots & \frac{\partial \phi_1(\psi_1)}{\partial \psi_n} \\ \frac{\partial \phi_2(\psi_1)}{\partial \psi_1} & \frac{\partial \phi_2(\psi_1)}{\partial \psi_2} & \dots & \frac{\partial \phi_2(\psi_1)}{\partial \psi_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n(\psi_1)}{\partial \psi_1} & \frac{\partial \phi_n(\psi_1)}{\partial \psi_2} & \dots & \frac{\partial \phi_n(\psi_1)}{\partial \psi_n} \end{bmatrix} \tag{7.36}$$

De modo simplificado:

$$[jac] \{\Delta \psi\} = -\{\phi\} \tag{7.37}$$

$$\{\Delta \psi\} = -[jac]^{-1} \{\phi\} \tag{7.38}$$

Como $\Delta \psi = \underline{\psi} - \psi$:

$$(7.39) \quad \{\underline{\psi}\} = \psi - [\text{Jac}]^{-1} \{\phi\}$$

Sendo k o número de iterações:

$$(7.40) \quad \{\underline{\psi}\}^{k+1} = \psi^k - [\text{Jac}]^{-1} \{\phi\}^k$$

A matriz inversa do jacobiano é calculada no apêndice III, para o sistema de

equações formado por (7.31) e (7.32):

$$(7.39) \quad [\text{Jac}]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial \phi_1} & \frac{\partial T}{\partial \phi_1} \\ \frac{\partial p}{\partial \phi_2} & \frac{\partial T}{\partial \phi_2} \end{bmatrix}}{1 - \frac{\partial T}{\partial \phi_1} \frac{\partial p}{\partial \phi_2} - \frac{\partial T}{\partial \phi_2} \frac{\partial p}{\partial \phi_1}}$$

Voltando a definição do jacobiano é possível calcular:

$$(7.41) \quad \text{Determinant}[\text{Jac}] = \frac{\partial p}{\partial \phi_1} \frac{\partial T}{\partial \phi_2} - \frac{\partial T}{\partial \phi_1} \frac{\partial p}{\partial \phi_2}$$

Onde:

$\text{Determinant}[\text{Jac}]$ é o determinante do jacobiano

A equação (7.41) em conjunto com (7.40) leva a:

$$(7.42) \quad \Delta p = \frac{1}{\text{Determinant}[\text{Jac}]} \left(\frac{\partial p}{\partial \phi_1} \frac{\partial T}{\partial \phi_2} - \frac{\partial T}{\partial \phi_1} \frac{\partial p}{\partial \phi_2} \right) \phi_1 - \phi_2$$

$$(7.43) \quad \Delta T = \frac{1}{\text{Determinant}[\text{Jac}]} \left(\frac{\partial p}{\partial \phi_1} \frac{\partial p}{\partial \phi_2} - \frac{\partial p}{\partial \phi_2} \frac{\partial p}{\partial \phi_1} \right) \phi_1 - \phi_2$$

A resolução das equações (7.31) e (7.32) fornece a densidade e a temperatura, a pressão é obtida via equação (Apl.22). As velocidades nas duas direções são calculadas via equações (7.10) e (7.11), finalizando a decodificação. Os métodos iterativos de solução necessitam de um valor inicial de forma a iniciar o cálculo, o valor inicial adotado é o valor do passo anterior. Digamos que o programa computacional esteja iniciando a decodificação de um ponto qualquer na malha (i + 1, j), seguindo a nomenclatura da Fig.7.1 os valores iniciais adotados para a densidade e temperatura são a densidade e temperatura do ponto (i, j).

(7.47)

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial T} = 2R_p(1+B_p) \left\{ -\Phi_2 + R_{pT} + BR_{p^2T} + \frac{R_{pT}(1+B_p)}{1 + \frac{R_{pT}(1+B_p)}{\text{tg}(\beta)\text{sen}^2(\beta)}} \right\} - \Phi_3$$

(7.46)

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial T} = 2R_p(1+B_p) \left\{ -\Phi_2 + R_{pT} + BR_{p^2T} + \frac{R_{pT}(1+B_p)}{1 + \frac{R_{pT}(1+B_p)}{\text{tg}(\beta)\text{sen}^2(\beta)}} \right\} + \frac{\partial h_v}{\partial T} + 2\Phi_2$$

(7.45)

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial p} = \Phi_2 + \frac{\Phi_3}{R_{pT}} - \frac{\text{tg}(\beta)\text{sen}^2(\beta)}{R_{pT}(2+3B_p)}$$

(7.44)

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial T} = -R_{p^2}(1+B_p)\text{sen}^2(\beta)$$

As derivadas das funções Φ_1 e Φ_2 , são:

8 Resultados e Observações

Inicialmente é usado o programa SHOWPHAST 1-D (primeira parte do programa, Simões Moreira, 1999), que fornece a solução à montante e à jusante da onda de evaporação, programa desenvolvido seguindo a teoria apresentada nos Capítulos 3 e 4. Depois é simulada a expansão da mistura bitásica através do programa EXPANSÃO 2-D, programa desenvolvido seguindo a teoria apresentada nos capítulos 5, 6 e 7. Para todas as simulações foi usada a substância iso-octano.

8.1 Solução da Onda de Evaporação

Como dados de entrada para o programa SHOWPHAST 1-D são fornecidas a pressão e a temperatura de estagnação, estado (0) apresentado na Fig. 4-1. A tabela 8.1 apresenta os resultados obtidos pelo modelo (para bocal bocal isentrópico) e dados experimentais medidos por Athans (1995).

Tabela 8.1 Resultados selecionados dos experimentos de Athans (1995) e do modelo matemático para o iso-octano, como o objetivo de comparar o comprimento adimensional do jato evaporativo. Diâmetro do bocal = 0,8636 mm.

exp. num.	Dados Medidos					Resultados do Modelo					
	p_0 (kPa)	T_0 (°C)	P_{res} (kPa)	m (kg/s)	L/D	p_1 (kPa)	T_2 (°C)	x_2 (%)	m (kg/s)	β (°)	θ (°)

Experimentos Realizados em 04/jan/94 - Pressão aproximadamente fixa e temperatura variável (grupo I)												
1	2110	31	0,47	0,0248	inf.	7,1	20,0	7,1	0,03133	0,083	17,34	345
2	2110	53	0,63	0,02407	inf.	15,7	35,1	12,0	0,03084	0,146	24,2	197
4	2081	100	0,69	0,0221	inf.	63,1	70,0	22,4	0,02927	0,445	34,6	64
5	2085	124	0,69	0,0214	15,64	109,1	85,3	30,5	0,02839	0,679	40,53	42,2
6	2069	148	0,66	0,02038	14,26	192,1	105,2	36,5	0,02708	1,140	43,11	25
8	2097	200	0,65	0,0186	8,51	432,7	135,2	64,4	0,02396	2,212	52,78	12,9

Experimentos Realizados em 09/jan/94 - Temperatura fixa e pressão variável (grupo II)												
1	2183	150	0,47	0,021	10,35	194,0	105,2	38,2	0,02782	1,100	43,25	26,0
2	2029	150	0,71	0,0205	11,04	"	"	"	0,02672	1,140	44,40	25,0
5	1501	150	0,79	0,0176	10,58	"	"	"	0,02256	1,360	49,00	21,1
6	1348	150	0,67	0,0165	11,27	"	"	"	0,02121	1,450	50,70	19,8
7	1207	150	0,62	0,0155	9,89	"	"	"	0,01987	1,540	52,40	18,6
8	980	150	0,59	0,0139	9,66	"	"	"	0,01751	1,750	55,60	16,3
9	773	150	0,59	0,0123	8,28	"	"	"	0,01503	2,040	59,10	14,0
10	719	150	0,57	0,0119	7,13	"	"	"	0,01431	2,140	60,20	13,4
11	604	150	0,59	0,0107	7,59	"	"	"	0,01265	2,420	62,70	11,8
12	521	150	0,61	0,01	5,52	"	"	"	0,0113	2,720	64,80	10,5
13	451	150	0,61	0,0088	4,83	"	"	"	0,01002	3,060	66,80	9,3

Experimentos Realizados em 22/out/94 - Temperatura e pressões diversas (grupo III)												
1	2403	201	1,92	0,021	9,9	434,3	135,2	65,5	0,02601	2,030	50,90	14,1
2	2529	206	2,47	0,0213	9,7	496,7	141,3	66,3	0,02620	2,290	50,40	12,5
3	2606	211	2,3	0,0214	9,4	536,9	145,1	69,1	0,02622	2,420	50,00	11,8
4	2577	215	2,24	0,0213	9,4	543,6	145,1	73,6	0,02581	2,420	51,30	11,8
5	2608	221	2,36	0,0209	8,7	615,2	151,3	74,7	0,02527	2,770	51,10	10,3
6	2731	226	2,3	0,0211	7,5	630,4	152,5	75,1	0,02567	2,790	50,10	10,2
11	2646	204	atm	0,0225	13,1	443,9	135,9	68,2	0,02736	1,940	50,10	14,8
12	2650	211	atm	0,0223	12,5	536,9	145,2	69,1	0,02649	2,400	49,70	12,0
17	2509	223	atm	0,0206	10,3	562,6	146,3	78,5	0,02487	2,520	52,60	11,4

Os termos "inf" e "atm" indicam respectivamente, comprimento muito grande (infinito) do cone de evaporação e pressão atmosférica no reservatório. No intuito de uma melhor visualização dos resultados obtidos para a vazão mássica, veja os próximos gráficos:

Fig. 8-2 Comparação da vazão mássica medida por Athans (1995) com a calculada pelo modelo para os grupo de experimento III da tabela 8.1

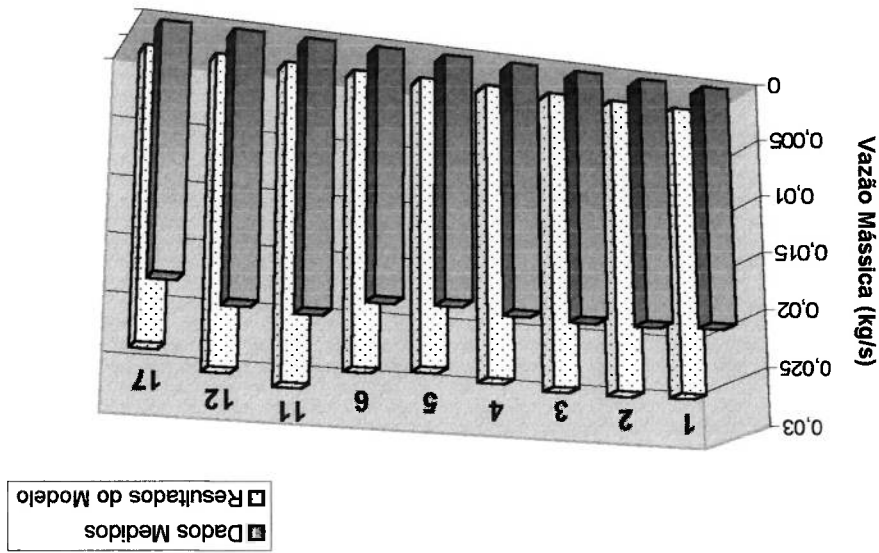
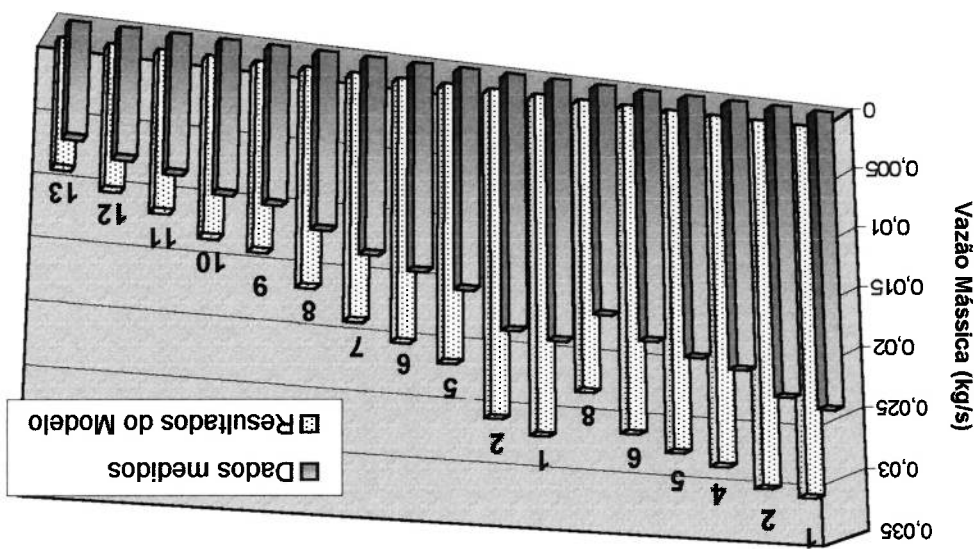


Fig. 8-1 Comparação da vazão mássica medida por Athans (1995) com a calculada pelo modelo para os grupos de experimento I e II da tabela 8.1



A vazão calculada pelo modelo é sempre maior que a vazão real, devido ao fato do bocal real não ser isentrópico. O modelo prevê a possibilidade de adicionar uma perda de carga, ou um coeficiente de descarga (ver relação entre eles no apêndice VI). Detalhes sobre o cálculo e adoção do coeficiente de descarga estão disponíveis no trabalho de Simões Moreira (1999).

Para todos os casos da tabela 8.1, o ângulo de onda é muito pequeno. O ângulo de giro por sua vez é bem grande, indicando que a expansão será quase radial. Algumas fotos ilustram essa característica claramente (ver Fig.4.1).

8.2 Solução da Zona de Expansão

A solução da onda de evaporação fornece todas as propriedades e grandezas para o estado à jusante (2). Com isso a superfície do cone de evaporação, representada nesta simulação por sua geratriz, é a linha de dados inicial para o método de solução apresentado no Capítulo 7, no plano computacional é a linha de $\xi = 0$ (capítulo 6). O caso 8 do primeiro grupo de experimentos da tabela 8.1 foi escolhido para a simulação. As grandezas para todos os pontos de $\xi = 0$, são:

Temperatura (K)	408,35
Pressão (Pa)	2,543464 e 5
Componente z da Velocidade (m/s)	4,48
Componente r da Velocidade (m/s)	115,93
Título	0,644

O passo na direção r (para $z = 0$) é $0,023$ mm, ou seja, $0,054 \cdot R_b$, que é de apenas os primeiros 26 para essa simulação calculados. Os pontos são distribuídos proporcionalmente ao longo da geratriz. Foram simulados 83 passos. Os resultados são mostrados nas próximas figuras. A Fig. 8.1 ilustra a localização dos pontos de cálculo. As figuras Fig. 8-2, 8.3, 8.4, 8.5 e 8.6, mostram respectivamente a distribuição da pressão, temperatura, densidade e componente r da velocidade e componente z da velocidade, para a simulação do caso em questão.

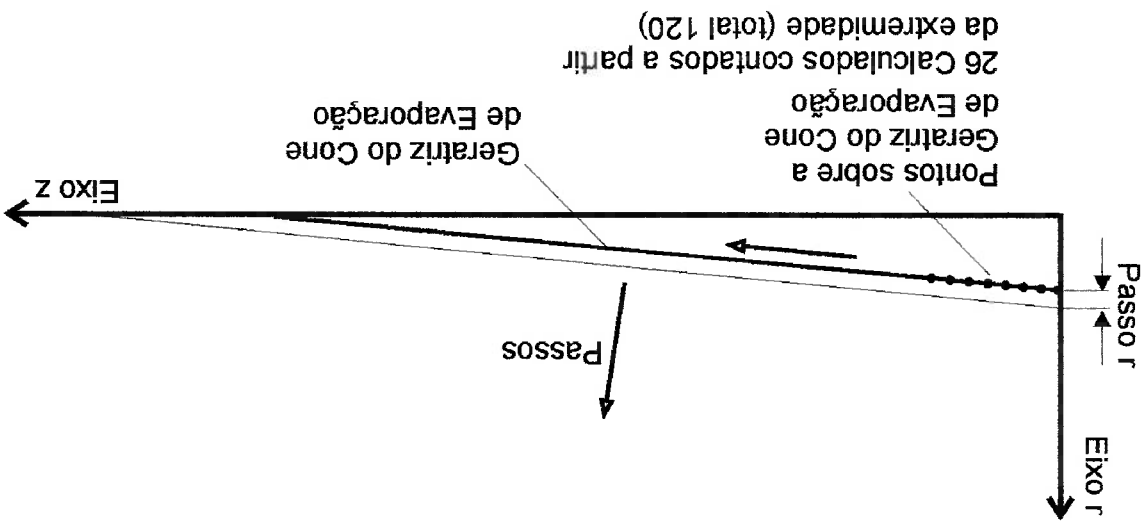


Fig. 8-1 Ilustração da localização dos pontos de cálculo

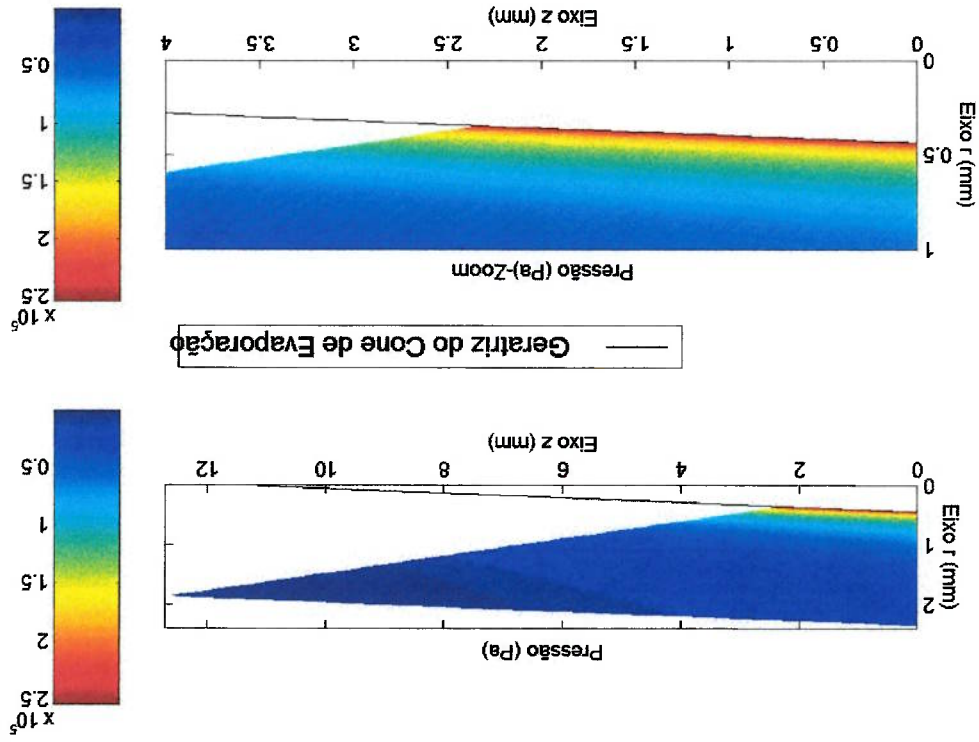
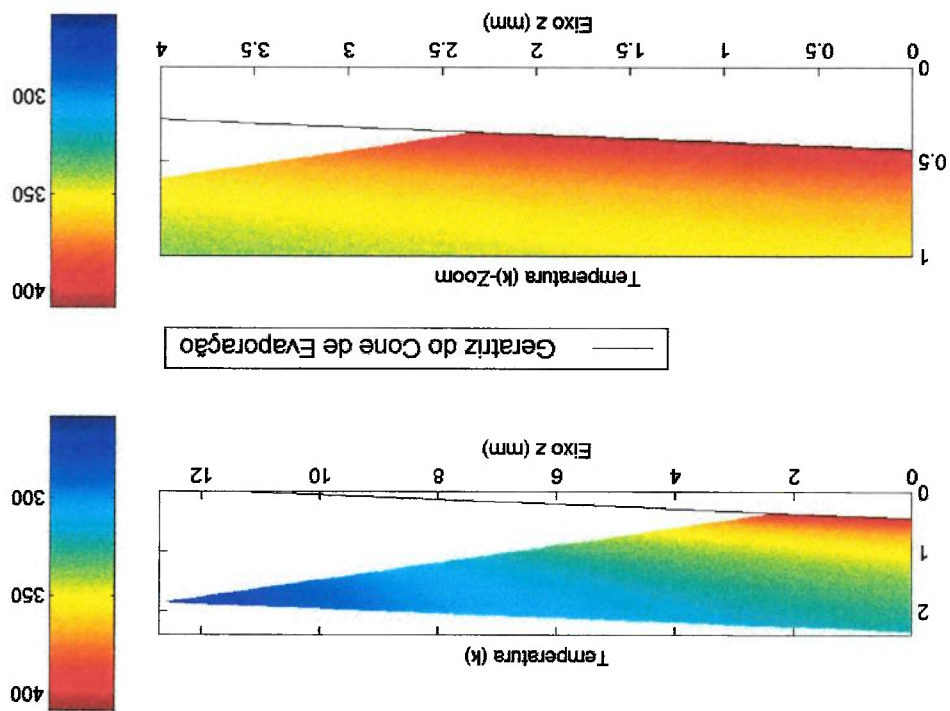


Fig. 8-2 Gráfico da pressão para o escoamento 8 do grupo I (tabela 8.1)

Fig. 8-3 Gráfico da temperatura para o escoamento 8 do grupo I (tabela 8.1)



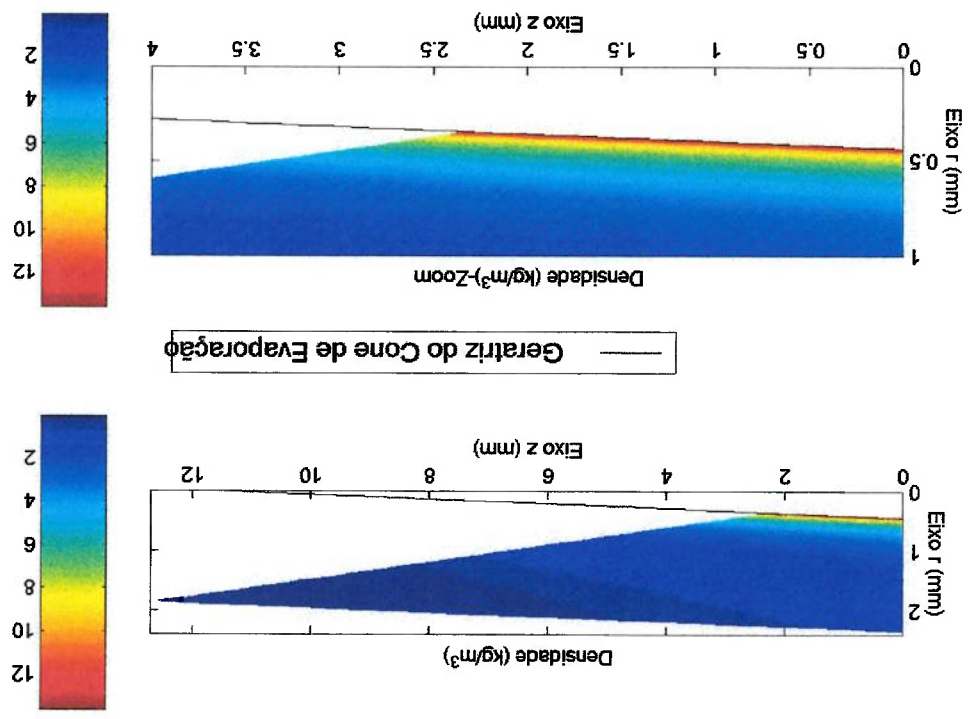
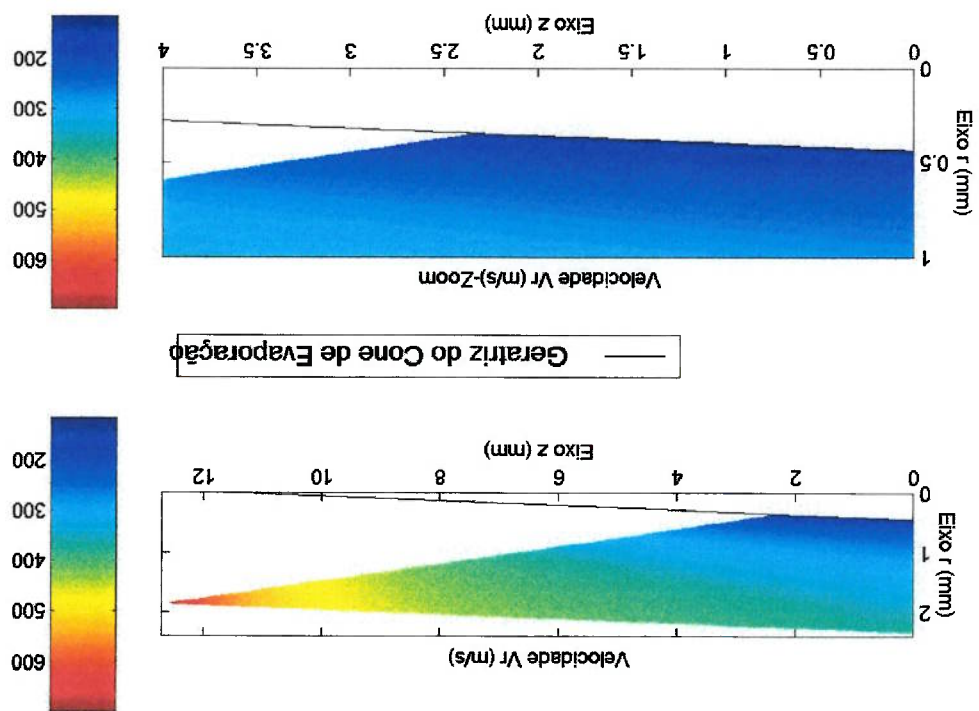


Fig. 8-4 Gráfico da densidade para o escoamento 8 do grupo I (tabela 8.1)

Fig. 8-5 Gráfico da Componente r da velocidade para o escoamento 8 do grupo I (tabela 8.1)

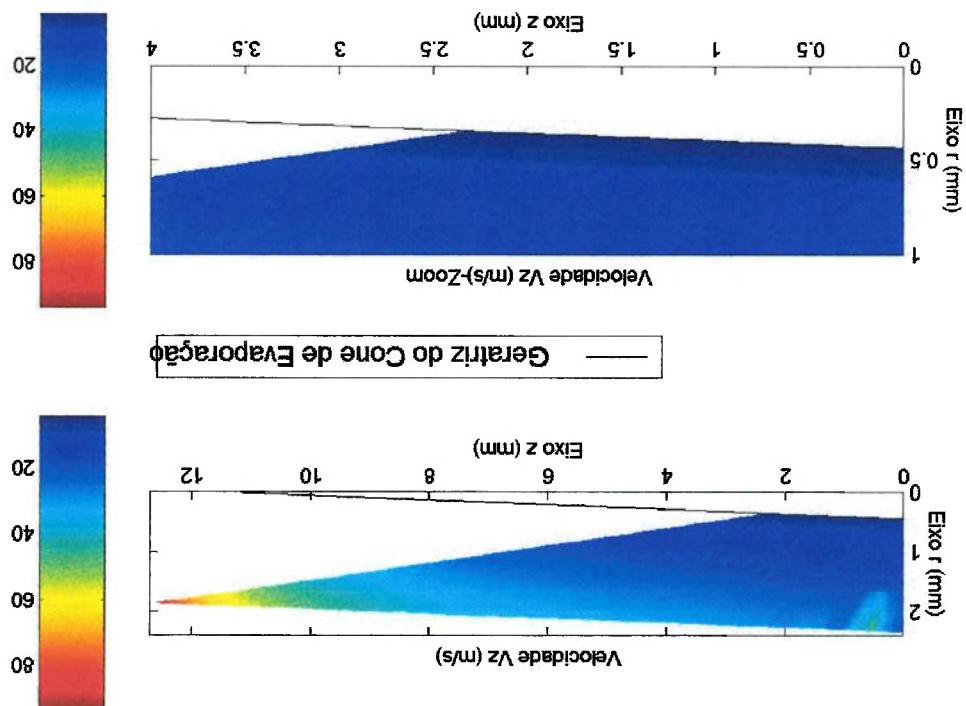


Devido à grande variação das propriedades, as distâncias entre os pontos da malha devem ser pequenas, sendo assim, para conseguir simular pontos cada vez mais próximos do vértice do cone, a malha deve ser cada vez mais refinada. Como é uma malha do tipo estruturada, quando refinamos uma parte dela, todo o resto da malha acaba sendo refinada também. Por esse motivo foram calculados apenas os primeiros 26 pontos sobre a geratriz do cone, caso fosse desejado mais pontos o tamanho da malha deveria ser diminuído ainda mais, aumentando muito o tempo computacional. O estudo

8-11 ilustram melhor a última afirmação.

A análise dos gráficos anteriores revela uma grande variação das propriedades na região próxima à superfície do cone de evaporação, com uma queda acentuada da pressão e aumento da temperatura e da velocidade. As figuras Fig. 8-7 a 8-11 ilustram melhor a última afirmação.

Fig. 8-6 Gráfico da Componente z da velocidade para o escoamento 8 do grupo I (tabela 8.1)



realizado no Capítulo 5 (discussão sobre a classificação da conservação de conservação) prova que é possível simular apenas uma parte do jato evaporativo (como feito aqui).

Para os primeiros pontos do jato, as distâncias entre os pontos de cálculo poderiam ser bem maiores. Para provar a afirmação anterior, o passo na direção r para a posição de z nulo é multiplicado por 10 (em relação ao passo anteriormente adotado), assim tendo seu valor aumentado para $0,23$ mm, ou seja, $0,54 \cdot R_p$. A linha de dados de $z = 0$ foi escolhida para comparar as duas simulações. Para essa simulação com passo maior, apenas foram usados os primeiros 6 pontos dos 120 inicialmente dispostos sobre a geratriz. O passo de $0,023$ mm e chamado de passo 1 e o de $0,23$ mm de passo 2.

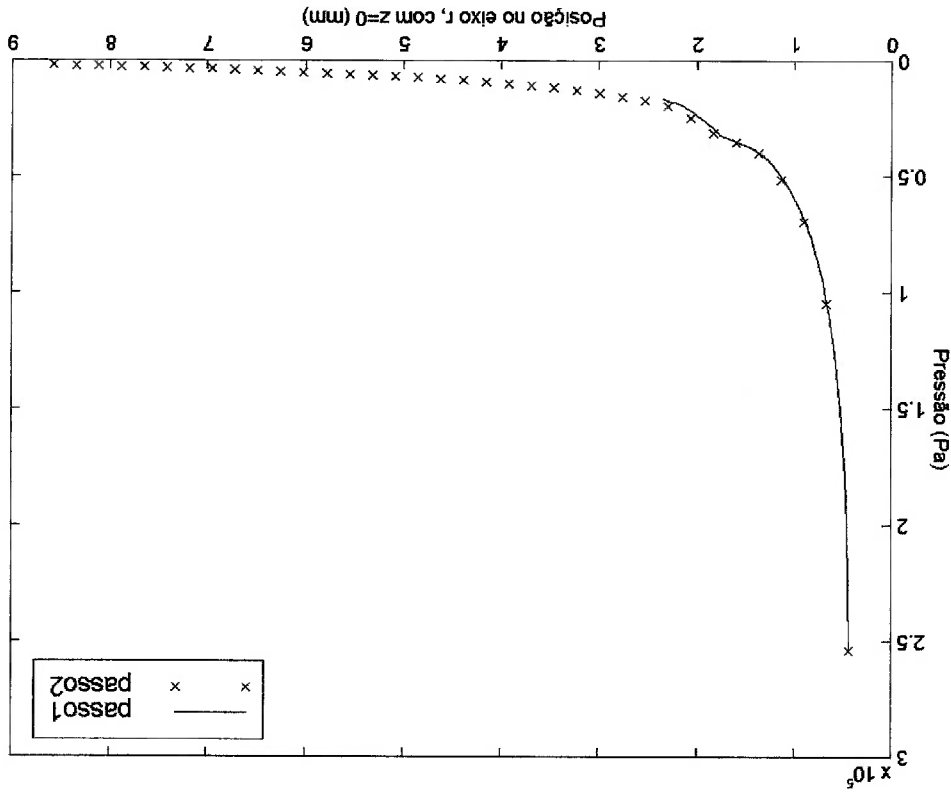


Fig. 8-7 Comparação dos Resultados para Passos distintos (pressão)

Fig. 8-9 Comparação dos Resultados para Passos Distintos (densidade)

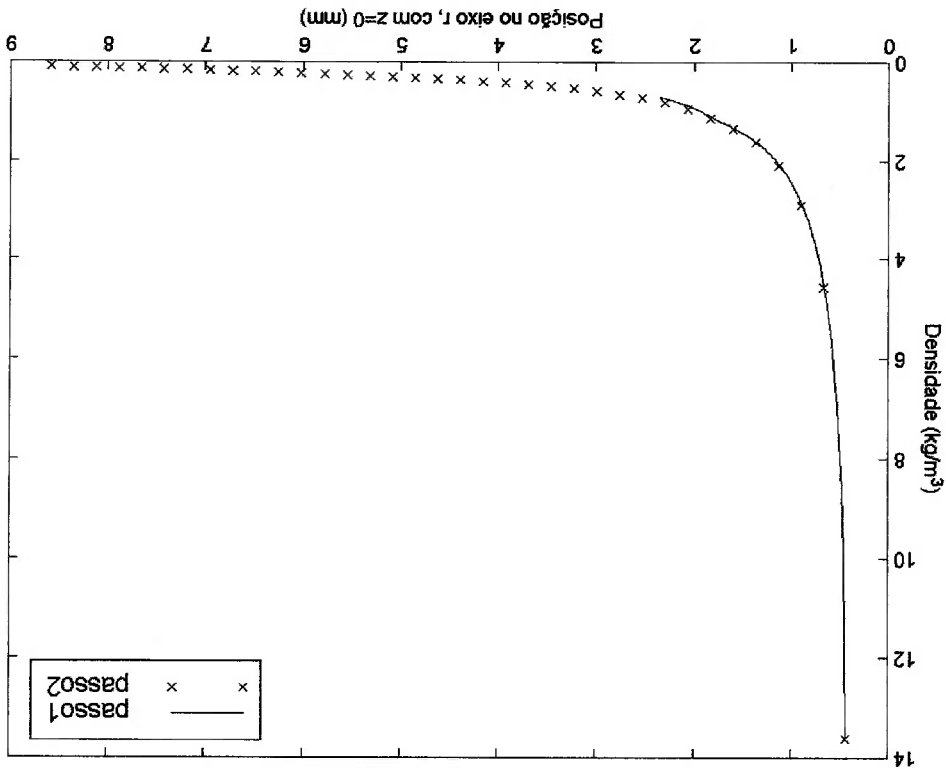


Fig. 8-8 Comparação do Resultados para Passos Distintos (temperatura)

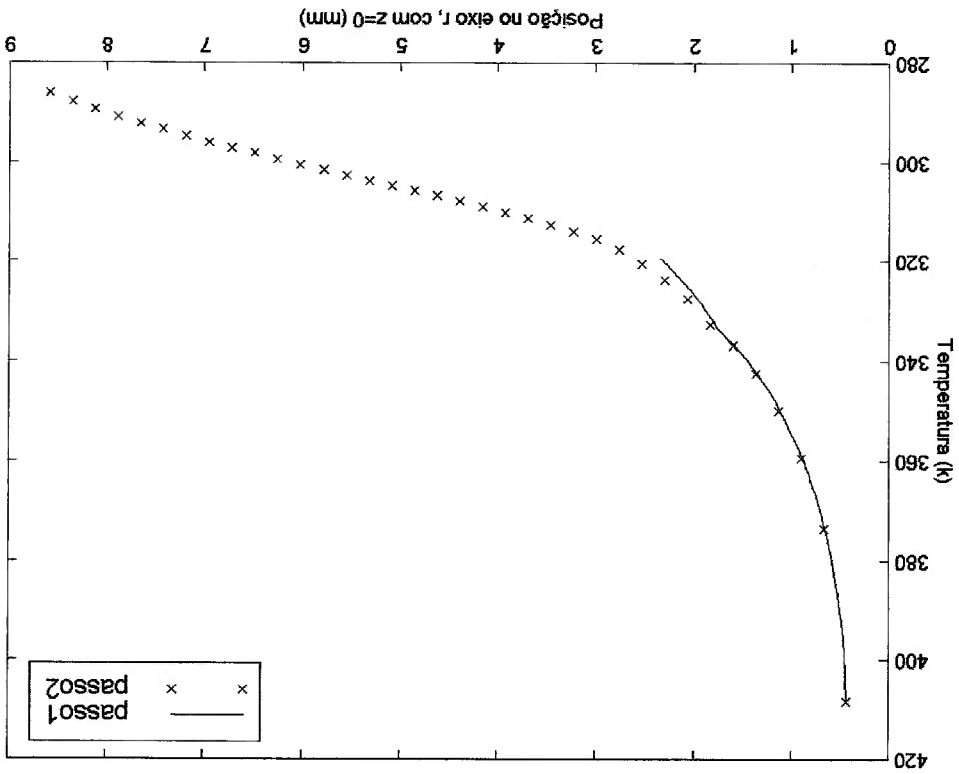


Fig. 8-11 Comparação dos Resultados para Passos Distintos (V_z)

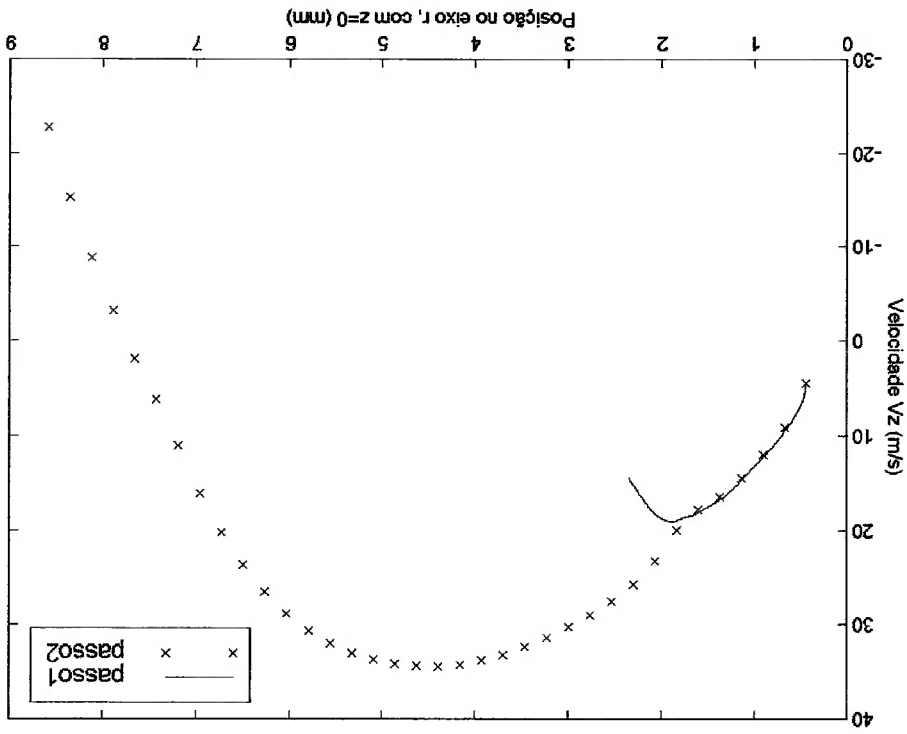
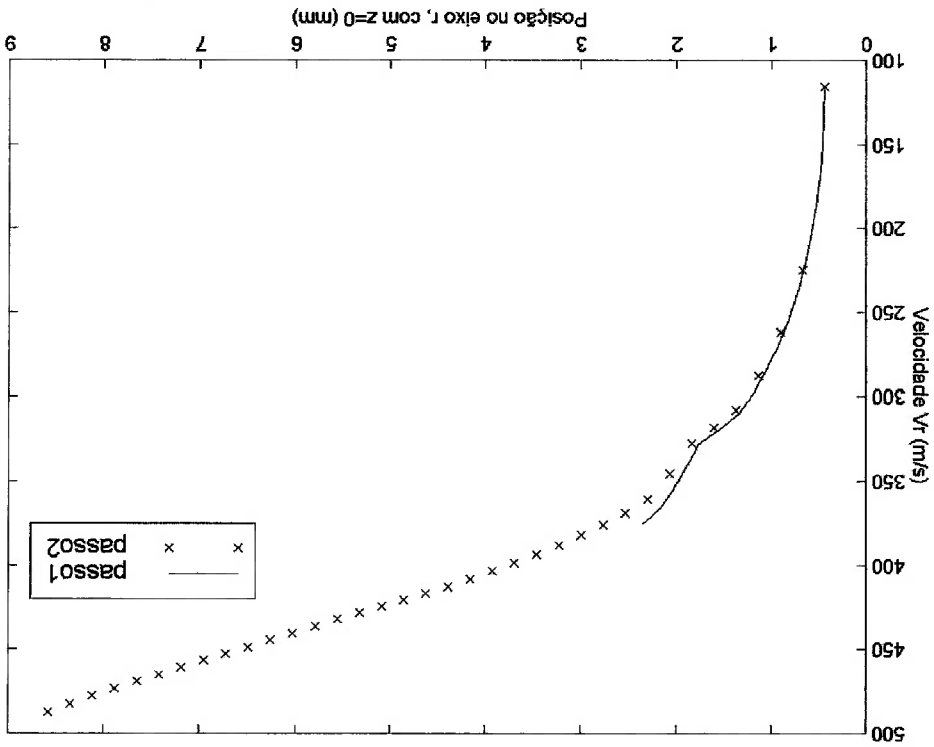


Fig. 8-10 Comparação dos Resultados para passos distintos (V_r)



8.3 Dificuldades encontradas na simulação

Como já citado, a grande variação das propriedades exige uma malha extremamente refinada para a simulação completa, de modo que as instabilidades numéricas sejam minimizadas. A região próxima ao vértice do cone evaporativo também introduz muita instabilidade. Exatamente sobre a linha de simetria (linha de centro do jato), a componente da velocidade na direção r deve ser nula (pela própria condição de simetria), observando os dados de entrada, percebemos que para os outros pontos a velocidade na direção r é muito grande e a brusca mudança de um valor grande em um ponto exatamente anterior ao ponto situado na linha de centro, para o valor nulo (na linha de centro) impossibilitou a simulação dessa região no escoamento.

A grande quantidade de operações e a necessidade do uso de métodos iterativos para a solução dos sistemas de equações não lineares, presentes na decodificação, elevam muito o tempo computacional.

Sugestões para a solução destes problemas são mencionadas no Capítulo 9.

9 Conclusões e Continuidade do Trabalho

9.1 Conclusões

A teoria das ondas de evaporação e a teoria de Chapman-Jouguet fornecem resultados muito bons quando aplicada aos jatos evaporativos, hipóteses como a adoção de uma superfície de evaporação de formato cônico também apresentaram bons resultados. Os elevados ângulos de giro (do vetor velocidade ao atravessar a superfície de evaporação) obtidos pelo modelo são comprovados por observações experimentais (ver exemplo na Fig. 4-1) realizadas por Athans (1995) e Vieira (1999). As vazões mássicas também tem grande concordância com dados experimentais, sem a adoção de coeficientes empíricos de correção, exceto pelo coeficiente de descarga do bocal, que leva em consideração os fenômenos não isentrópicos.

A inovação presente neste trabalho é o modelamento da zona de expansão da mistura bifásica (à jusante da onda de evaporação), utilizando uma abordagem bidimensional e axisimétrica, empregando para a solução das equações o método clássico de MacCormack (diferenças finitas). A malha proposta pelo autor permitiu a transformação analítica do espaço físico para o espaço computacional.

A região de expansão apresentou grande variação das propriedades e um grande aumento no valor da velocidade, especialmente próximo a superfície de evaporação. Os resultados são bastante satisfatórios se comparados ao comportamento físico.

9.2 Continuidade do Trabalho

Dando continuidade ao trabalho, os próximos esforços podem ser divididos

em quatro etapas distintas:

Etapas I:

Estudo da região do vértice do cone de líquido, que apresentou grandes dificuldades em sua solução. Uma das propostas que será testada é a suavização do vértice.

A troca de linguagem de programação para FORTRAN, no intuito de diminuir o tempo computacional e assim conseguir simular passos em quantidade suficiente para a captura da onda de choque.

Etapas II:

Utilizar uma malha conhecida como não estruturada e adaptativa, de forma a melhorar a captura da onda de choque. Esse tipo de malha concentra um maior número de pontos de cálculo na região de grandes variações de propriedades, como no caso da região do escoamento onde se encontra a onda de choque, visando aproximar a solução do caso real (lembrando que a onda de choque é uma descontinuidade bem definida no escoamento).

Etapas III

Pesquisar a possibilidade da aplicação do método das características, e em caso afirmativo, comparar os resultados com o método inicialmente apresentado.

Etapas IV

Comparar os modelos com dados experimentais (para diversas substâncias) que logo serão disponibilizados pelo SisEA- Laboratório de Sistemas Energéticos Alternativos do Departamento de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Investigação da aplicabilidade da abordagem desenvolvida para modelar tubos capilares presentes em ciclos de refrigeração e outros dispositivos onde o fenômeno de evaporação rápida ocorre ("flashing").

Apêndice I

AI.1 Equação de Estado

AI.1.1 Equação de Estado de Lee-Kesler

A equação de estado de Lee-Kesler (1975) é uma variante de equação de estado de Benedict-Webb-Rubin (BWR). Acrescenta a última o conceito de fator de acentricidade, ω , originalmente proposto por Pitzer e seus associados. A equação de Lee-Kesler é uma equação baseada na correlação entre três parâmetros, são eles: o fator de acentricidade e a pressão e temperatura reduzidas. A pressão reduzida é a razão entre a pressão e a pressão crítica e a temperatura reduzida é a razão entre a temperatura e a temperatura crítica.

$$p_r = \frac{p}{p_c}$$

(APl.1)

$$T_r = \frac{T}{T_c}$$

(APl.2)

O fator de acentricidade está ligado a não esfericidade da molécula da substância. Para gases monoatômicos, segundo Reid et al. (1987), o fator de acentricidade é nulo, para o metano tem valor muito pequeno, e para os hidrocarbonetos aumenta de valor com o peso molecular. Um modo de calcular o fator de acentricidade é usar a equação proposta por Pitzer mencionada por Reid et al. (1987) para cálculo da pressão de vapor:

$$\ln p_{vp,r} = f^{(0)} T_r + \omega f^{(1)} T_r$$

(APl.3)

Onde $p_{v,r}$ é a pressão de vapor reduzida, definida de acordo com a equação

(Apl.1) como a razão entre a pressão de vapor e a pressão crítica. As funções $f^{(0)}$ e

$f^{(1)}$ dependem apenas da temperatura reduzida:

$$f^{(0)} = 5,92714 - \frac{T_r}{6,09648} - 1,28862 \ln T_r + 0,169347 T_r \quad (\text{Apl.4})$$

$$f^{(1)} = 15,2518 - \frac{T_r}{15,6875} - 13,4721 \ln T_r + 0,43577 T_r \quad (\text{Apl.5})$$

O fator de acentricidade é obtido usando na equação (Apl.3) com $T_r = T_{br}$,

onde T_{br} é a temperatura de evaporação na pressão de uma atmosfera. Com a

substituição proposta, após rearranjos, chegamos a:

$$\omega = \frac{\alpha}{\psi} \quad (\text{Apl.6})$$

$$\alpha = -\ln p_c - 5,97214 + 6,09648 \Theta^{-1} + 1,28862 \ln \Theta - 0,169347 \Theta^6 \quad (\text{Apl.7})$$

$$\psi = 15,2518 - 15,6875 \Theta^{-1} - 13,4721 \ln \Theta + 0,43577 \Theta^6 \quad (\text{Apl.8})$$

$$\Theta = T_{br} = \frac{T_b}{T_c} \quad (\text{Apl.9})$$

O fator de compressibilidade Z da substância em estudo, é relacionado com

o fator de compressibilidade de um fluido simples e de um fluido de referência.

Respectivamente denominados aqui com o sobrescrito (0) e (r), através da seguinte

expressão:

$$Z = Z^{(0)} + \frac{\omega}{\psi} (Z^{(r)} - Z^{(0)}) \quad (\text{Apl.10})$$

O fator de compressibilidade é:

(Apl.11)
$$Z = \frac{p}{\rho v} R T$$

Através da substituição da pressão e da temperatura pelas definições

apresentadas nas equações (Apl.1) e (Apl.2), na equação (Apl.11), temos:

(Apl.12)
$$Z = \frac{p_r p_c v}{p_r p_c v} = \frac{R T_r T_c}{p_r T_c} \frac{R T_c}{v}$$

Usando em (Apl.12) a seguinte relação:

(Apl.13)
$$v_r = \frac{R T_c}{p_c v}$$

É possível escrever o fator de compressibilidade assim:

(Apl.14)
$$Z = \frac{T_r}{p_r v_r}$$

Vale lembrar que v_r não é o volume específico reduzido. Finalmente é

possível apresentar a equação proposta por Lee-Kesler, equação que contém doze

constantes empíricas:

(Apl.15)
$$Z = \frac{T_r}{p_r v_r} = 1 + \frac{v_r}{B} + \frac{v_r^{1/2}}{C} + \frac{v_r}{D} + \frac{v_r^{1/2}}{E} + \frac{v_r}{G} \left(\beta_1 + \frac{v_r^{1/2}}{\gamma} \right) \exp \left(- \frac{v_r^{1/2}}{\gamma} \right)$$

(Apl.16)
$$B = b_1 - \frac{T_r}{b_2} - \frac{T_r}{b_3} - \frac{T_r}{b_4}$$

(Apl.17)
$$C = c_1 - \frac{T_r}{c_2} + \frac{T_r}{c_3}$$

(Apl.18)
$$D = d_1 + \frac{T_r}{d_2}$$

O processo de obtenção do fator de compressibilidade para um dado fluido segue a seguinte sequência (lembrando que temos como dados de entrada a pressão e a temperatura do fluido que se quer determinar o fator de compressibilidade):

Usando as propriedades críticas do fluido e as equações (Apl.1) e (Apl.2) é possível calcular a pressão e temperatura reduzidas.

Para o fluido simples utilizando a equação (Apl.15) e os coeficientes calculados por (Apl.16), (Apl.17) e (Apl.18) encontra-se $v_r^{(0)}$. Os doze parâmetros estão tabelados para as substâncias.

O fator de compressibilidade para o fluido simples pode ser determinado com $Z^{(0)} = \frac{T_r}{P_r v_r^{(0)}}$.

Com a mesma temperatura e pressão reduzidas, os passos (2) e (3) são repetidos para o fluido de referência.

Finalmente de posse dos fatores de compressibilidade da substância simples e do fluido de referência é possível determinar o fator de compressibilidade para o fluido de estudo via equação (Apl.10).

Al.1.2 Equação de Estado Teórica

A equação de estado teórica também é apresentada na literatura como equação virial de estado. É uma equação deduzida a partir da teoria cinética ou da termodinâmica estatística. Representa bem o comportamento de moléculas não polares respeitando alguns limites de pressão e temperatura. Uma série é usada para relacionar o fator de compressibilidade com a temperatura e o volume específico ou o fator de compressibilidade com a temperatura e a pressão:

Onde os coeficientes B, \hat{C}, D, \dots e B, C, D, \dots são funções da temperatura e são conhecidos como coeficientes viriais. Os coeficientes viriais tem por objetivo introduzir a influência das forças moleculares, eles podem ser obtidos através de modelos que descrevam as forças de interação entre as moléculas da substância em estudo. É possível ver claramente o comportamento da equação (Apl.19) quando diminuímos a pressão mantendo a temperatura constante, os termos $B(T) p, \hat{C}(T) p^2, D(T) p^3, \dots$ diminuem seus valores sugerindo que as interações moleculares tem a tendência de decrescer sob estas condições. No limite, quando a pressão é nula, esses termos também são nulos, em outras palavras, o fator de compressibilidade é igual a unidade, o que recai exatamente sobre o modelo de gás perfeito. O modelo de gás perfeito é o limite quando as pressões estão muito abaixo da pressão crítica. A equação virial pode ser truncada, isto é, pode ser usado apenas o primeiro coeficiente virial, que representa a correção de primeira ordem ao modelo de gás perfeito. Desde que a densidade seja maior do que a metade da densidade crítica (Reid (1987)), a precisão da equação virial truncada a partir do segundo coeficiente virial é muito boa.

$$Z = 1 + B(T) p + \hat{C}(T) p^2 + D(T) p^3 + \dots$$

(Apl.19)

$$Z = 1 + \frac{B(T)}{v} + \frac{C(T)}{v^2} + \frac{D(T)}{v^3} + \dots$$

(Apl.20)

$$Z = 1 + B(T) p$$

(Apl.21)

$$Z = 1 + \frac{B(T)}{v}$$

(Apl.22)

A1.2 Entalpia

Dados dois estados termodinâmicos distintos (1) e (2), a diferença de entalpia entre eles é independente do processo que levou as propriedades de (1) a (2). É muito conveniente escolher um “caminho” onde as variações de propriedades podem ser calculadas. Podemos escrever a entalpia como função de duas propriedades independentes:

$$h = h(p, T)$$

(Apl.23)

Usando a regra da cadeia do cálculo:

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_{T=\text{const}} dp + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_{p=\text{const}} dT$$

(Apl.24)

A diferença de entalpia a ser calculada é a diferença entre os pontos A e B, representados na Fig. 2-1. Pelos pontos A e B podem ser construídas isotérmicas (nomeadas de T_1 e T_2 respectivamente, que são prolongadas até o encontro com o eixo das ordenadas (pressão igual a zero), na intersecção formam-se mais dois pontos, Q e R. O caminho escolhido como processo entre os pontos A e B é: partindo de A seguindo a isotérmica T_1 até Q, de Q através de uma isobárica com pressão igual a zero até o ponto R, e de R até B seguindo a isotérmica T_2 . Integrando a equação (Apl.24) no caminho descrito:

$$\Delta h_{A \rightarrow B} = \int_{p_0}^{p_1} \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_{T_1} dp + \int_{T_2}^{T_1} \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_{p_0} dT + \int_{T_2}^{p_0} \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_{T_2} dp$$

(Apl.25)

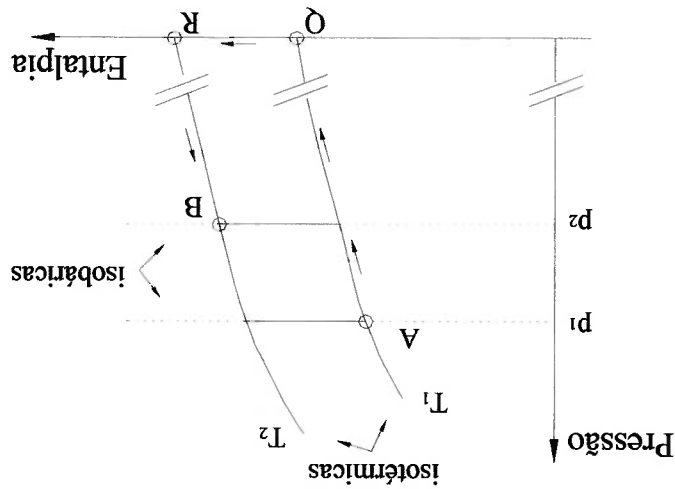


Fig. Apl-1 Diagrama esquemático dos processos escolhidos para o cálculo da entalpia

Neste ponto fica evidente o motivo da escolha do caminho passando por uma

isobárica com pressão igual a zero (ou muito próxima de zero), nesse limite a substância

se comporta como gás perfeito. A variação da entalpia com a temperatura a pressão

constante é uma grandeza denominada calor específico a pressão constante:

(Apl.26)
$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_{p=\text{const}}$$

Substituindo a equação (Apl.26) em (Apl.25), temos:

(Apl.27)
$$\Delta h_{A \rightarrow B} = \int_{p_2}^{p_1} \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_{T_1} dp + \int_{T_2}^{T_1} c_{p(0)} dT + \int_{p_2}^{p_0} \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_{T_2} dp$$

O sobrescrito (0) presente no calor específico a pressão constante indica

apenas que a pressão é igual a zero (absoluto). Para avaliar as integrais partimos da

seguinte relação termodinâmica:

$$T ds = de + p dv$$

(Apl.28)

$$v_{r(0)}, v_{r(x)}, Z^{(0)} \text{ e } Z^{(x)}.$$

2. Conforme descrito no item (A1.1) são calculados equações (Apl.1) e (Apl.2) é possível calcular a pressão e a temperatura reduzidas.

1. Como na equação de estado, usando a temperatura e pressão críticas nas

calcula da entalpia é a seguinte:

faz necessário a adoção de um fluido simples e um fluido de referência. A sequência de

Com o uso da equação de Lee-Kesler, como detalhado no item (A1.1), se

$$\frac{h-h_0}{RT_c} = T_r \left[Z^{(0)} - 1 - \frac{b_2 + 2b_3/T_r + 3b_4/T_r^2}{c_2 - 3c_3/T_r^2} - \frac{T_r(v_r)}{2T_r(v_r)^2} + \frac{5T_r(v_r)^5}{d_2} + 3E \right] \quad (\text{Apl.32})$$

$$E = \frac{2T_r^3 \gamma}{c_4} \left\{ \beta_1 + 1 - \left[\beta_1 + 1 + \frac{T_r(v_r)}{\gamma} \exp \left[-\frac{T_r(v_r)}{\gamma} \right] \right] \right\} \quad (\text{Apl.33})$$

(Apl.15):

que h na pressão de referência p_0 , e introduzindo a equação de estado de Lee-Kesler

Definindo uma entalpia h_0 , como a entalpia avaliada na mesma temperatura

$$\left(\frac{\partial h}{\partial v} \right)_T = v - T \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_p \quad (\text{Apl.31})$$

A equação (Apl.29) se torna:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)_T = - \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_p \quad (\text{Apl.30})$$

Usando uma das relações de Maxwell:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_T = v + T \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_T \quad (\text{Apl.29})$$

Dividindo por dp e manipulando:

3. Para o fluido denominado simples, é obtida a diferença de entalpia em

relação ao estado de referência através da equação (Apl.32) e (Apl.33):

$$\left(\frac{h-h_0}{RT_c}\right)^{(0)} = T_r \left[Z^{(0)} - 1 - \frac{b_2 + 2b_3/T_r + 3b_4/T_r^2}{c_2 - 3c_3/T_r^2} - \frac{2T_r \left(v_r^{(0)}\right)^2}{5T_r \left(v_r^{(0)}\right)^5} + 3E \right]$$

$$E = \frac{c_4}{2T_r^3 \gamma} \left\{ \beta_1 + 1 - \left[\beta_1 + 1 + \frac{\left(v_r^{(0)}\right)^2}{\gamma} \right] \exp \left[- \frac{\left(v_r^{(0)}\right)^2}{\gamma} \right] \right\}$$

4. De modo análogo ao feito no passo 3 obtemos a diferença de entalpia para

$$\text{o fluido de referência } \left(\frac{h-h_0}{RT_c}\right)^{(r)}$$

5. Para a substância em estudo, são combinados os valores encontrados nos

passos 3. e 4.

$$\left(\frac{h-h_0}{RT_c}\right)^{(0)} = \frac{RT_c}{h-h_0} \left(\frac{h-h_0}{RT_c}\right)^{(0)} + \frac{\varpi_r}{\varpi} \left(\frac{h-h_0}{RT_c}\right)^{(r)} - \left(\frac{h-h_0}{RT_c}\right)^{(0)} \quad (\text{Apl.34})$$

Finalmente com o valor encontrado em (Apl.34) para as duas integrais, mais

o calor específico a pressão constante são inseridos na equação (Apl.27), sendo Δ um

ponto de referência onde a entalpia é conhecida, determina-se a entalpia em B.

Apêndice II

Este apêndice tem como objetivo a dedução das equações de conservação para a zona de expansão, região logo após a superfície evaporativa (cone de evaporação). As equações são deduzidas passo a passo e simplificadas de acordo com as hipóteses previamente citadas, ver item 5.1. O autor não encontrou nenhuma referência onde as equações de conservação estivessem escritas na forma conservativa para o sistema de coordenadas cilíndricas, isto motivou a inclusão deste apêndice no presente trabalho.

AII.1 Equação da conservação de massa

Usando o sistema de coordenadas cilíndricas é determinado um elemento infinitesimal fixo no espaço, elemento ilustrado na Fig. AII-1. A ele é aplicado um

balanço de massa.

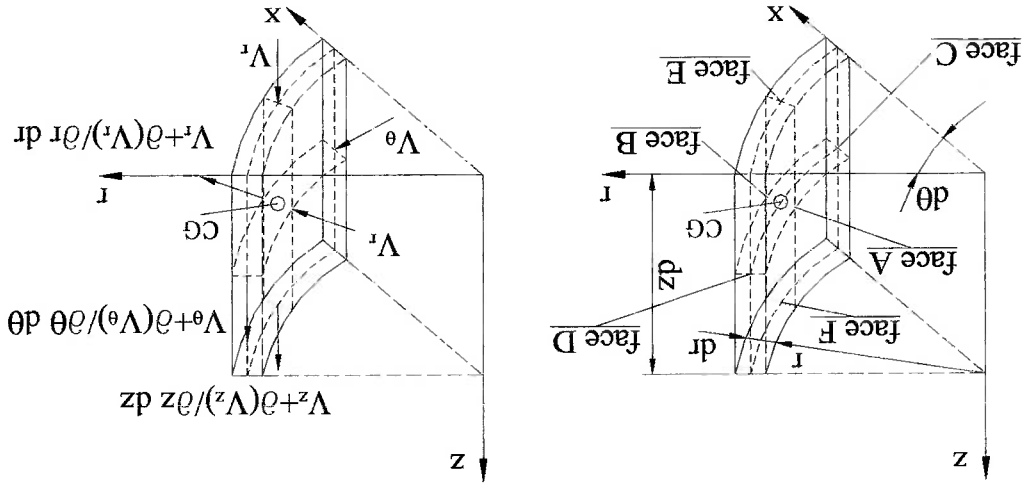


Fig. AII-1 Volume de controle para coordenadas cilíndricas (à esquerda) e direções das velocidades (à direita).

Balanço na direção r

Na face A o fluxo de massa é $\rho V_r [r \theta dz]$, na face B o fluxo de massa pode

ser encontrado através de uma expansão em série de Taylor, ou seja,

$$\left[p V_r + \frac{\partial}{\partial r} (p V_r) \right] (r + dr) d\theta dz. \text{ A diferença entre o fluxo de massa nas faces B e A é}$$

fisicamente a taxa de acúmulo ou perda de massa no elemento (até aqui apenas na direção r), desprezando-se o termo que contém dr^2 e obtida a seguinte relação:

$$(A_{PII.1}) \quad p V_r dr d\theta dz + \frac{\partial}{\partial r} (p V_r) r dr d\theta dz$$

Realizando o balanço nas demais direções:

Balanço na direção θ

Na face C o fluxo de massa é $[p V_\theta] dr dz$, na face D é

$$\left[p V_\theta + \frac{\partial}{\partial \theta} (p V_\theta) \right] dr dz, \text{ e a taxa de variação de massa no elemento é:}$$

$$(A_{PII.2}) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} (p V_\theta) r d\theta dz$$

Balanço na direção z

Na face E o fluxo de massa é $[p V_z] r d\theta dr$, na face F é

$$\left[p V_z + \frac{\partial}{\partial z} (p V_z) \right] r d\theta dr, \text{ e a taxa de variação de massa no elemento é:}$$

$$(A_{PII.3}) \quad \frac{\partial}{\partial z} (p V_z) r dr d\theta dz$$

A taxa de variação de massa total no elemento pode ser escrita como a soma

das equações (A_{PII.1}), (A_{PII.2}) e (A_{PII.3}):

$$(A_{PII.4}) \quad p V_r dr d\theta dz + \frac{\partial}{\partial r} (p V_r) r dr d\theta dz + \frac{\partial}{\partial \theta} (p V_\theta) r dr d\theta dz + \frac{\partial}{\partial z} (p V_z) r dr d\theta dz$$

Também é possível escrever a taxa de variação de massa como a variação

local da densidade com o tempo multiplicada pelo volume elementar:

$$(A_{II.5}) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} r \, d\theta \, dr \, dz$$

Igualando a equação (A_{II.4}) à equação (A_{II.5}) e realizando as

simplificações chegamos a forma desejada da equação da continuidade:

$$(A_{II.6}) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_r)}{\partial r} = 0$$

A equação (A_{II.6}) pode ser reescrita para qualquer sistema de coordenadas

usando a identidade:

$$(A_{II.7}) \quad \Delta \cdot (\rho V) = \frac{\partial (\rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho V_r)}{\partial r}$$

Assim sendo:

$$(A_{II.8}) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \Delta \cdot (\rho V) = 0$$

O problema como citado no início deste capítulo, será estudado em regime

permanente, assim o termo de variação local da densidade com o tempo na equação

(A_{II.6}) é igual a zero. A linha de axissimetria do jato será coincidente com a

orientação z do eixo de coordenadas cilíndricas, o que faz com que as variações na

direção θ também sejam nulas. Reescrevendo a equação (A_{II.6}) a luz das últimas

observações é encontrada a seguinte equação:

$$(A_{II.9}) \quad \frac{\partial (\rho V_r)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} + \frac{\partial (\rho V_r)}{\partial r} = 0$$

All.2 Equações de Conservação da Quantidade de Movimento

O ponto de partida para escrever as equações do movimento é a segunda lei

de Newton:

$$F = m a$$

(ApII.10)

A mesma abordagem feita para encontrar a equação da continuidade é

aplicada para encontrar as equações do movimento. Usando o mesmo volume

infinitesimal agora não mais realizando um balanço de massa, mas um balanço de forças

determinando uma força resultante que agirá no volume elementar. As forças podem ser

divididas em dois tipos: as de campo e as de superfície ou contato. As forças de campo

podem ser provenientes de campos eletromagnéticos ou gravitacionais, enquanto as

forças de superfície são oriundas da pressão e da viscosidade do fluido. No presente

estudo onde não é contabilizada a viscosidade nem há presença de campos

eletromagnéticos ou gravitacionais, a única força a ser contabilizada é oriunda da

pressão.

A Fig. ApII-2 ilustra o elemento infinitesimal e as forças.

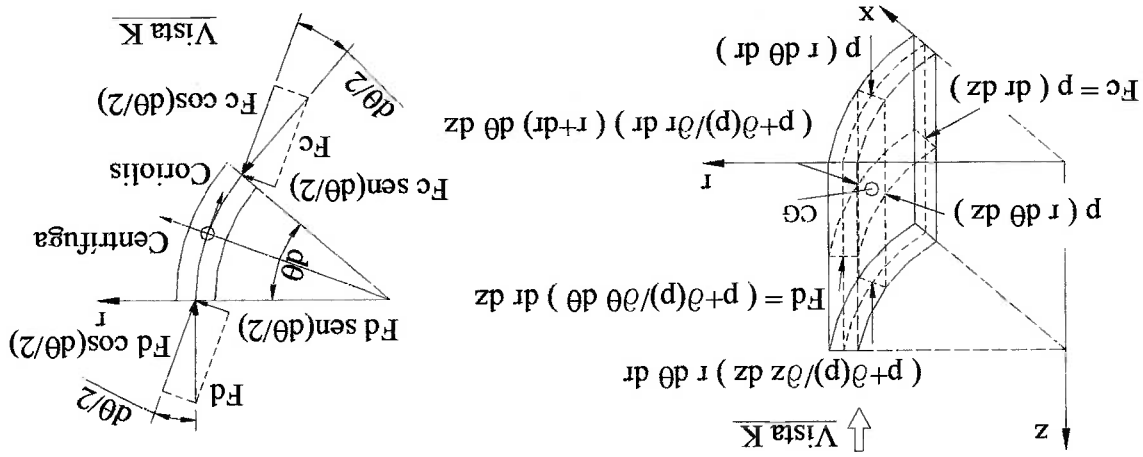


Fig. ApII-2 Distribuição das forças no elemento infinitesimal

Balanco na direção r

A força na face é obtida através do produto da pressão pela área. Na face A a força é $p(r)d\theta dz$, uma expansão em série de Taylor é usada para encontrar o valor da força na face B $\left[p + \frac{\partial p}{\partial r} dr \right] (r + dr) d\theta dz$. Há necessidade de considerar a projeção na

direção r das forças que agem nas faces C e D. A resultante é a diferença entre as forças que atuam em A e B somada a projeção na direção de r das forças que atuam nas faces C e D mais uma força que surge devido o movimento de rotação em torno do eixo z, conhecida como força centrífuga. A projeção das forças que atuam nas faces C e D é feita em relação ao plano que contém o eixo z e o centro de massa do elemento. Como $\frac{d\theta}{2}$ é um ângulo muito pequeno $\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx 1$ e $\text{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx \frac{d\theta}{2}$. Deste modo:

$$p r d\theta dz \quad \text{Face A} \quad - \quad \left[p + \frac{\partial p}{\partial r} dr \right] (r + dr) d\theta dz \quad \text{face B} \quad + \quad p dr dz \frac{d\theta}{2} \quad \text{face C} \quad + \quad \left[p + \frac{\partial p}{\partial r} dr \right] d\theta dz \frac{d\theta}{2} \quad \text{face D} \quad +$$

$$+ p \frac{V_\theta^2}{r} r d\theta dr dz \quad \text{Força Centrífuga}$$

Desprezando os termos que contém dr^2 e $d\theta^2$ e simplificando, é obtida a

expressão:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} dr d\theta dz + p \frac{V_\theta^2}{r} r d\theta dr dz \quad \text{(ApH.12)}$$

Volando a equação (ApH.10), escrevendo para a direção r e substituindo o valor da aceleração na direção r pela derivada substantiva da velocidade em relação ao

tempo:

$$(A_{PII.13}) \quad \rho (r d\theta dr dz) \frac{dV_r}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial r} dr r d\theta dz + \rho \frac{V_\theta}{r} r d\theta dr dz$$

Simplificando:

$$(A_{PII.14}) \quad \rho \frac{dV_r}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho \frac{r}{V_\theta^2}$$

Balanco na direção θ

O balanço de forças é feito com a projeção das forças que atuam nas faces C e D. Na face C a projeção da força na direção θ é $p(dr dz)$, na face D é $\left[p + \frac{\partial p}{\partial \theta} d\theta \right] dr dz$. Há necessidade de incluir a força de Coriolis, esta aparece quando temos fluxo de massa simultâneo nas direções r e θ tendo como valor $-\rho \frac{r}{V_\theta} r d\theta dr dz$. A resultante na direção θ é a diferença entre as duas projeções na

direção θ das forças que atuam em C e D mais a força de Coriolis:

$$(A_{PII.15}) \quad - \frac{\partial p}{\partial \theta} dr d\theta dz - \rho \frac{r}{V_\theta} r d\theta dr dz$$

Do mesmo modo ao realizado para encontrar a equação (A_{PII.13}):

$$(A_{PII.16}) \quad \rho (r d\theta dr dz) \frac{dV_\theta}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial \theta} dr d\theta dz - \rho \frac{r}{V_\theta} r d\theta dr dz$$

Simplificando:

$$(A_{PII.17}) \quad \rho \frac{dV_\theta}{dt} = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \rho \frac{r}{V_\theta}$$

Balanco na direção z

Agora o balanço leva em consideração as forças que atuam nas faces F e F'. A força que atua na face F vale $F \cdot r \cdot d\theta \cdot dr$, e a força que atua na face F' vale $\left[p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right] r \cdot d\theta \cdot dz$. A resultante é obtida de modo análogo ao realizado para as direções anteriores:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} r \cdot d\theta \cdot dr \cdot dz \quad (\text{ApII.18})$$

De modo análogo ao feito para obtenção da equação (ApII.13) :

$$p (r \cdot d\theta \cdot dr \cdot dz) \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} r \cdot d\theta \cdot dr \cdot dz \quad (\text{ApII.19})$$

Simplificando:

$$p \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{ApII.20})$$

A forma com que se encontram as equações (ApII.14), (ApII.17) e (ApII.20) não é a apresentação definitiva, há necessidade de algumas simplificações e alterações

para o modelamento do jato evaporativo.

No termo à esquerda das equações (ApII.14), (ApII.17) e (ApII.20) há a

presença da derivada substantiva, esta é fisicamente a taxa de variação total com o

tempo da velocidade quando nos fixamos na partícula de fluido. Será feita uma

mudança neste termo usando a seguinte identidade:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (V \cdot \nabla) \quad (\text{ApII.21})$$

A derivada substantiva é escrita como a soma de dois termos, o primeiro $\frac{\partial}{\partial t}$

é conhecido como derivada local e é a taxa de variação local da grandeza em um dado ponto fixo no espaço, o segundo termo $(V \cdot \nabla)$ é a derivada convectiva e é a taxa de variação da grandeza devido ao movimento do elemento de fluido de uma localização à outra no campo de escoamento onde as propriedades são distintas. A identidade representada na equação (AplI.21) torna-se bastante intuitiva quando é analisado seu significado, ou seja, a taxa de variação total de uma grandeza com o tempo é a soma da taxa de variação local mais aquela devido ao movimento do fluido. A equação (AplI.21) pode ser usada para qualquer sistema de coordenadas. A derivada convectiva para o sistema de coordenadas cilíndricas é escrita da seguinte forma:

$$V \cdot \nabla = V_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{r}{V_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{AplI.22})$$

Substituindo na equação (AplI.21):

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{r}{V_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{AplI.23})$$

É usada a equação (AplI.23) para substituir as derivadas substantivas presentes nas equações (AplI.14), (AplI.17) e (AplI.20). Utilizando a substituição na equação (AplI.12):

$$\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{r}{V_\theta} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho \frac{r}{V_\theta^2} \quad (\text{AplI.24})$$

Analogamente é substituída (AplI.23) em (AplI.17) e (AplI.20) obtendo

respectivamente:

$$(A_{pII.25}) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{r}{V_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{r}{V_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right) p = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \rho \frac{r}{V_\theta} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$(A_{pII.26}) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{r}{V_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{r}{V_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right) p = - \frac{\partial}{\partial p}$$

Os termos relativos a taxa de variação local com o tempo são nulos pela

condição de regime permanente, bem como os termos de variação local com a direção θ e as velocidades V_θ , devido a axissimetria. As equações (A_{pII.24}), (A_{pII.25}) e

(A_{pII.26}) podem ser escritas:

$$(A_{pII.27}) \quad \left(\frac{\partial}{\partial p} + V_r \frac{\partial}{\partial r} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right) = - \frac{\partial}{\partial r}$$

$$(A_{pII.28}) \quad 0 = 0$$

$$(A_{pII.29}) \quad \left(\frac{\partial}{\partial p} + V_r \frac{\partial}{\partial r} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right) = - \frac{\partial}{\partial z}$$

Por motivos que serão expostos mais adiante é muito vantajoso que todas as

variáveis estejam nas equações dentro das derivadas parciais, observando as equações (A_{pII.27}) e (A_{pII.29}) é possível notar variáveis multiplicando tais derivadas. Lançando mão de algumas identidades, facilmente inserimos tais variáveis dentro das derivadas. O

estudo será feito para a equação (A_{pII.27}) e aplicado também a (A_{pII.29}).

A primeira identidade a ser usada é:

$$(A_{pII.30}) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + V_r \frac{\partial}{\partial r} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + V_r \frac{\partial}{\partial r} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial r} + V_r \frac{\partial}{\partial r} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial r}$$

$$(A_{pII.31}) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} + V_r \frac{\partial}{\partial r} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} + V_r \frac{\partial}{\partial r} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial r} + V_r \frac{\partial}{\partial r} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial z}$$

A segunda identidade a ser usada é:

(AplI.32)

$$\frac{\partial}{\partial r} (p V_r V_z) = V_r \frac{\partial}{\partial z} (p V_z) + (p V_z) \frac{\partial}{\partial z}$$

(AplI.33)

$$(p V_z) \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (p V_r V_z) - V_r \frac{\partial}{\partial z} (p V_z)$$

Substituindo a equações (AplI.31) e (AplI.33) na equação (AplI.27):

(AplI.34)

$$\frac{\partial}{\partial p} (p V_r V_r) - V_r \frac{\partial}{\partial r} (p V_r) + \frac{\partial}{\partial z} (p V_r V_z) - V_r \frac{\partial}{\partial z} (p V_z) = -\frac{\partial}{\partial p}$$

(AplI.35)

$$\frac{\partial}{\partial p} (p V_r V_r) + \frac{\partial}{\partial z} (p V_r V_z) - V_r \left(\frac{\partial}{\partial r} (p V_r) + \frac{\partial}{\partial z} (p V_z) \right) = -\frac{\partial}{\partial p}$$

O primeiro membro da equação (AplI.35) possui termos em comum com a

equação da conservação de massa (termos em parênteses que estão multiplicados pela

velocidade radial). Escrevendo novamente a equação da conservação de massa:

(AplI.9')

$$\frac{\partial}{\partial r} (p V_r) + \frac{\partial}{\partial z} (p V_z) = -\frac{\partial}{\partial r}$$

Substituindo (AplI.9') em (AplI.35):

(AplI.36)

$$\frac{\partial}{\partial p} (p V_r V_r) + \frac{\partial}{\partial z} (p V_r V_z) + \frac{\partial}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial p}$$

(AplI.37)

$$\frac{\partial}{\partial p} (p V_r V_r + p) + \frac{\partial}{\partial z} (p V_r V_z) + \frac{\partial}{\partial r} = 0$$

Realizando o mesmo procedimento com a equação (AplI.29), é obtida a

equação (AplI.38):

(AplI.38)

$$\frac{\partial}{\partial r} (p V_r V_r) + \frac{\partial}{\partial z} (p V_r V_z + p) + \frac{\partial}{\partial r} = 0$$

All.3 Equação da Conservação da Energia

Para encontrar a equação da energia é usado o princípio da conservação, em

outras palavras, a primeira lei da termodinâmica. Quando deduzidas as equações da

continuidade e da quantidade de movimento foi usado diretamente o sistema de

coordenadas cilíndricas, nesta seção será deduzida a equação da energia no sistema de

coordenadas cartesianas. A equação obtida será trabalhada para que se obtenha uma

forma que seja independente do sistema de coordenadas. A Fig.AplII-3 ilustra o

elemento fluido usado como volume de controle.

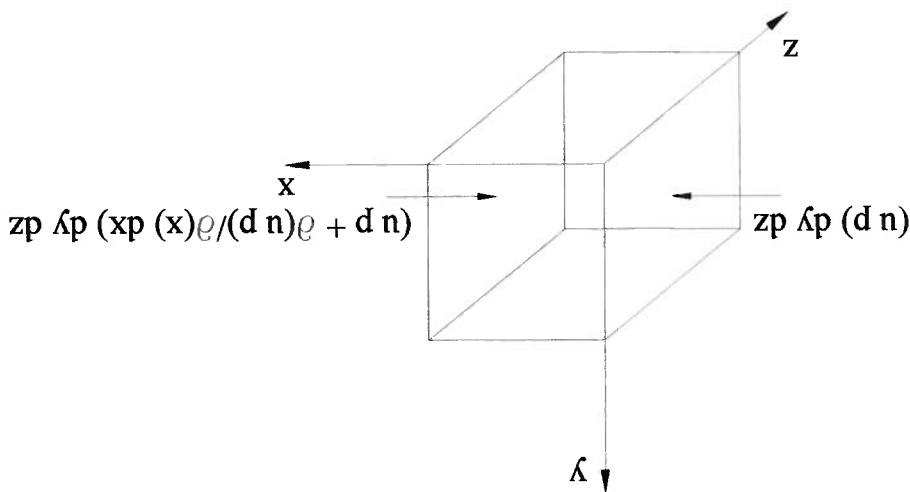


Fig. AplII-3 Fluxos de energia na direção x em um volume de controle usado para a dedução da equação da energia.

O balanço de energia aplicado ao elemento é:

$$\begin{matrix} \text{Termo A} \\ \text{energia dentro do} \\ \text{elemento} \\ \text{de variação de} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{Termo B} \\ \text{Fluxo de calor no} \\ \text{elemento} \end{matrix} + \begin{matrix} \text{Termo C} \\ \text{Troca de Trabalho no tempo} \\ \text{devido as forças de campo e} \\ \text{superfície que agem no elemento} \end{matrix}$$

Cada termo será estudado separadamente.

Termo A

A energia no interior do elemento pode ser separada em duas parcelas, a primeira é a energia interna e (energia interna por unidade de massa), a segunda parcela é proveniente do movimento de translação do fluido, também é chamada de energia cinética, seu valor é $\frac{V^2}{2}$ (energia cinética por unidade de massa). O termo A pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dx dy dz \quad (\text{ApII.39})$$

Termo B

O escoamento é do tipo invíscido, onde fenômenos dissipativos, fenômenos de transporte devido a viscosidade, difusão de massa e condução de calor são desprezados. Lembrando que não há fontes ou sorvedouros de calor, portanto este termo é nulo.

Termo C

Quando há referência a variação do trabalho com o tempo, é feita uma menção direta a potência, deste modo podemos calcular essa potência como o produto da velocidade pela projeção da força na direção da velocidade. A cada face do elemento de fluido é feito esse cálculo, após a soma de todos eles é encontrado o termo C.

Balanco na direção x

Para a face A a potência associada a força devido a pressão vale $(u p) dy dz$, para a face B é usada uma expansão em série de Taylor, e é obtido o valor

$$\left[n p + \frac{\partial (n p)}{\partial x} dx \right] dy dz. \text{ Somando os termos obedecendo a convenção de sinais da}$$

Fig.5-3, o balanço na direção x é

$$(\text{ApII.40}) \quad \left[n p + \frac{\partial (n p)}{\partial x} dx \right] dy dz - \left[n p + \frac{\partial (n p)}{\partial x} dx \right] dy dz$$

Balanço na direção y

Para a face C a potência associada a força devido a pressão vale $(v p) dx dz$,

para a face D é usada uma expansão em série de Taylor, e é obtido o valor

$$\left[v p + \frac{\partial (v p)}{\partial y} dy \right] dx dz. \text{ Somando os termos levando em consideração seus sinais:}$$

$$(\text{ApII.41}) \quad (v p) dx dz - \left[v p + \frac{\partial (v p)}{\partial y} dy \right] dx dz$$

Balanço na direção z

Para a face E a potência associada a força devido a pressão vale $(w p) dx dy$

, para a face F é usada uma expansão em série de Taylor, e é obtido o valor

$$\left[w p + \frac{\partial (w p)}{\partial z} dz \right] dx dy. \text{ Somando os termos levando em consideração seus sinais:}$$

$$(\text{ApII.42}) \quad (w p) dx dy - \left[w p + \frac{\partial (w p)}{\partial z} dz \right] dx dy$$

O termo C portanto é a soma das equações (ApII.40), (ApII.41) e (ApII.42).

Reunindo os termos A, B e C obtemos a equação da energia:

$$p \frac{d t}{d z} \left(e + \frac{2}{V z} \right) dx dy dz = - \frac{\partial (n p)}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial (v p)}{\partial y} dx dy dz - \frac{\partial (w p)}{\partial z} dx dy dz \quad (\text{ApII.43})$$

$$(A_{pII.44}) \quad \rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{z}{V_2} \right) = -\Delta \cdot (pV)$$

A equação (A_{pII.44}) é independente do sistema de coordenadas utilizado. A

derivada substantiva no lado esquerdo da equação (A_{pII.44}) é reescrita usando a

equação (A_{pII.21}):

$$(A_{pII.45}) \quad \rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{z}{V_2} \right) + pV \cdot \Delta \left(e + \frac{z}{V_2} \right) = -\Delta \cdot (pV)$$

A equação (A_{pII.45}) não é a apresentação desejada para a equação da

energia, algumas manipulações serão feitas. Usando a identidade:

$$(A_{pII.46}) \quad \frac{\partial}{\partial p} \left[p \left(e + \frac{z}{V_2} \right) \right] \frac{\partial t}{\partial p} = p \frac{\partial}{\partial V_2} \left(e + \frac{z}{V_2} \right) + \left(e + \frac{z}{V_2} \right) \frac{\partial t}{\partial p}$$

$$(A_{pII.47}) \quad \frac{\partial}{\partial p} \left(e + \frac{z}{V_2} \right) \frac{\partial t}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial V_2} \left[p \left(e + \frac{z}{V_2} \right) \right] - \left(e + \frac{z}{V_2} \right) \frac{\partial p}{\partial t}$$

E também:

$$(A_{pII.48}) \quad \Delta \cdot \left[pV \left(e + \frac{z}{V_2} \right) \right] = \left(e + \frac{z}{V_2} \right) \Delta \cdot (pV) + pV \cdot \Delta \left(e + \frac{z}{V_2} \right)$$

$$(A_{pII.49}) \quad pV \cdot \Delta \left(e + \frac{z}{V_2} \right) = \Delta \cdot \left[pV \left(e + \frac{z}{V_2} \right) \right] - \left(e + \frac{z}{V_2} \right) \Delta \cdot (pV)$$

Substituindo (A_{pII.47}) e (A_{pII.49}) em (A_{pII.45}):

$$(A_{pII.50}) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[p \left(e + \frac{z}{V_2} \right) \right] - \left(e + \frac{z}{V_2} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \Delta \cdot \left[pV \left(e + \frac{z}{V_2} \right) \right] - \left(e + \frac{z}{V_2} \right) \Delta \cdot (pV) = -\Delta \cdot (pV)$$

Manipulando os termos:

$$\text{Termo D} \quad \text{(ApII.51)} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[p \left(e + \frac{z}{V_2} \right) \right] + \Delta \cdot \left[p V \left(e + \frac{z}{V_2} \right) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(e + \frac{z}{V_2} \right) \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} (p V) \right] = -\Delta \cdot (p V)$$

O termo D presente na equação (ApII.51) é a equação da continuidade

(equação ApII.8), e tem valor nulo.

$$\text{(ApII.52)} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[p \left(e + \frac{z}{V_2} \right) \right] + \Delta \cdot \left[p V \left(e + \frac{z}{V_2} \right) \right] + p V = 0$$

Como mencionado o estudo é realizado em regime permanente o que anula o

termo de variação local no tempo.

$$\text{(ApII.53)} \quad \Delta \cdot \left[p V \left(e + \frac{z}{V_2} \right) + p V \right] = 0$$

$$\text{(ApII.54)} \quad \Delta \cdot \left[V \left(p e + p \frac{z}{V_2} + p \right) \right] = 0$$

A entalpia é uma grandeza mais fácil de trabalhar que a energia interna, a

seguinte relação termodinâmica transforma energia interna em entalpia:

$$\text{(ApII.55)} \quad h = e + \frac{p}{\rho}$$

$$\text{(ApII.56)} \quad p e = p h - p$$

Aplicando (ApII.55) a equação (ApII.54):

$$\text{(ApII.58)} \quad \Delta \cdot \left[p V \left(h + \frac{z}{V_2} \right) \right] = 0$$

Podemos introduzir a entalpia de estagnação na equação (ApII.58), definida

como:

(ApII.59)

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2}$$

Portanto a equação (ApII.58) se torna:

(ApII.60)

$$\nabla \cdot (\rho V h_0) = 0$$

A equação (ApII.60) é genérica e independente do sistema de coordenadas,

para o caso do jato evaporativo, onde o estudo é realizado em coordenadas cilíndricas,

aplicaremos apropriadamente a equação (ApII.7) levando em consideração a presença

do termo entalpia de estagnação dentro do divergente, obtemos assim:

(ApII.61)

$$\frac{\partial (\rho V^r h_0)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho V^\theta h_0)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho V^z h_0)}{\partial z} + \frac{\partial (\rho V^r h_0)}{\partial r} = 0$$

Devido a axissimetria do jato a derivada local em relação a direção θ é nula.

Desta forma:

(ApII.62)

$$\frac{\partial (\rho V^r h_0)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho V^z h_0)}{\partial z} + \frac{\partial (\rho V^r h_0)}{\partial r} = 0$$

Apêndice III

Neste apêndice é calculada a matriz inversa do Jacobiano, necessária na

solução de sistemas de equações não lineares pelo método de Newton-Raphson.

O Jacobiano para o sistema de equações formado por (7.31) e (7.32) é:

$$(A_{III.1}) \quad [Jac] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial p} & \frac{\partial \phi_1}{\partial T} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial p} & \frac{\partial \phi_2}{\partial T} \end{bmatrix}$$

A matriz inversa do Jacobiano pode ser escrita seguindo a definição:

$$(A_{III.2}) \quad [Jac]^{-1} = \text{Matriz Identidade}$$

Assim escrevendo a matriz inversa do Jacobiano com termos ainda não

conhecidos a, b, c e d:

$$(A_{III.3}) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial p} & \frac{\partial \phi_1}{\partial T} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial p} & \frac{\partial \phi_2}{\partial T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Com as seguintes manipulações matemáticas:

$$(A_{III.4}) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial p} a + \frac{\partial \phi_1}{\partial T} c & \frac{\partial \phi_1}{\partial p} b + \frac{\partial \phi_1}{\partial T} d \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial p} a + \frac{\partial \phi_2}{\partial T} c & \frac{\partial \phi_2}{\partial p} b + \frac{\partial \phi_2}{\partial T} d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ApIII.3 forma um sistema linear de equações, cuja solução fornece os

componentes da matriz inversa do Jacobiano:

(ApIII.5)

$$a = \frac{\frac{\partial \phi_1}{\partial \phi_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial T} - \frac{\partial \phi_1}{\partial T} \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_1}}{\frac{\partial \phi_2}{\partial T}}$$

(ApIII.6)

$$b = \frac{\frac{\partial \phi_1}{\partial \phi_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial T} - \frac{\partial \phi_1}{\partial T} \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_1}}{-\frac{\partial \phi_1}{\partial T}}$$

(ApIII.7)

$$c = \frac{\frac{\partial \phi_1}{\partial \phi_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial p} - \frac{\partial \phi_1}{\partial p} \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_1}}{-\frac{\partial \phi_2}{\partial p}}$$

(ApIII.8)

$$d = \frac{\frac{\partial \phi_1}{\partial \phi_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial p} - \frac{\partial \phi_1}{\partial p} \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_1}}{\frac{\partial \phi_1}{\partial p}}$$

Substituindo os termos calculados na matriz inversa e organizando, temos:

(ApIII.9)

$$[jac]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \phi_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial T} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial T} \end{bmatrix}}{\frac{\partial \phi_1}{\partial \phi_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial T} - \frac{\partial \phi_1}{\partial T} \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_1}}$$

Apêndice IV

Este apêndice avalia a variação de temperatura em um processo de expansão isentrópico de líquido superaquecido. Esta dedução foi retirada da tese de Simões Moreira (1999). Tem como objetivo provar que o processo citado se aproxima muito de um processo isotérmico.

Inicialmente realiza-se uma expansão em série de Taylor para o calor específico a pressão constante em termos da temperatura e outra expansão para o volume específico em termos da pressão. O subscrito σ indica o estado de saturação.

Assim:

$$(AIV.1) \quad c_p = c_{p\sigma} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m!}{(T - T_{\sigma})^m} \left(\frac{\partial^m c_p}{\partial T^m} \right)_{s=cte, T=T_{\sigma}}$$

$$(AIV.2) \quad v = v_{\sigma} + \sum_{n=1}^{\infty} (p - p_{\sigma})^n \left(\frac{\partial^n v}{\partial p^n} \right)_{s=cte, p=p_{\sigma}}$$

Introduzindo o fator de compressibilidade, definido como:

$$(AIV.3) \quad \beta_s = - \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_{s=cte}$$

E também:

$$(AIV.4) \quad \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_{s=cte} = \frac{e}{\beta_s v} \frac{d}{e}$$

Das últimas observações a equação (ApIV.7), se torna:
 Apenas a parte linear de variação com a pressão é mantida. A luz
 saturado é função exclusiva da temperatura. A segunda simplificação diz respeito ao
 simples de trabalho. Primeiramente, assume-se que o calor específico do líquido
 Duas simplificações são necessárias para se alcançar uma expressão mais

$$\left[v^{\sigma} \left[1 - \beta_{s,\sigma} (p - p^{\sigma}) \right] - \sum_{i=2}^n (p - p^{\sigma})^i \right] \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{s=cte, p=p^{\sigma}} \left[c_{p,\sigma} + \sum_{i=1}^m (T - T^{\sigma})^i \left(\frac{\partial c_{p,i}}{\partial T} \right)_{s=cte, T=T^{\sigma}} \right] \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{s=cte, p=p^{\sigma}} \quad (\text{ApIV.7})$$

Substituindo as equações (ApIV.1) e (ApIV.5) em (ApIV.6):

$$c_p dT = v dp \quad (\text{ApIV.6})$$

$$dh = c_p dT :$$

Para um processo isotérmico, dado que é válida a aproximação

$$T ds = dh - v dp \quad (5.22)$$

Será necessário o uso da equação (5.22):

$$v = v^{\sigma} \left[1 - \beta_{s,\sigma} (p - p^{\sigma}) \right] - \sum_{i=2}^n (p - p^{\sigma})^i \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{s=cte, p=p^{\sigma}} \quad (\text{ApIV.5})$$

Substituindo (ApIV.3) e (ApIV.4) em (ApIV.2) e organizando os termos:

Esos levam a concluir que a variação de temperatura é da ordem de três décimos negativos de grau ($\Delta T \approx -0,3^\circ\text{C}$), valor de ordem de grandeza desprezível para as situações estudadas neste trabalho. A aproximação por um processo isotérmico, é portanto, muito boa quando o grau de expansão não for exageradamente elevado, ou se o líquido estiver muito próximo do ponto crítico, região na qual o valor do volume específico aumenta consideravelmente.

$$\begin{aligned} \Delta p &\approx -100\text{kPa} \\ c_p &\approx 3\text{kJ/kg}\cdot^\circ\text{C} \\ v &\approx 0,001\text{m}^3/\text{kg} \end{aligned}$$

Uma estimativa das ordens de grandeza dos valores é bastante esclarecedora. São assumidos os seguintes valores (para o n-dodecano, apenas como exemplo):

$$\Delta T \approx \frac{c_p}{v} \Delta p \quad (\text{ApIV.10})$$

Assumindo a hipótese de calor específico constante e líquido incompressível, isto é, β_s nulo, será obtido o resultado simplificado elementar:

$$c_{pc} \Delta T + \sum_{i=1}^m \Delta T_{m+i} \left(\frac{\partial T_m}{\partial T_m} \right) \left(\frac{\partial T_m}{\partial p} \right) \Big|_{s=cte, T=T_o} = v_o \Delta p \left[1 - \beta_{s,o} \frac{v_o}{2} \right] \quad (\text{ApIV.9})$$

Líquido superaquecido, tem-se:

Integrando a equação (ApIV.8) entre o estado de saturação e o estado de

$$\left[c_{pc} + \sum_{i=1}^m \frac{m_i}{(T - T_o)_m} \left(\frac{\partial T_m}{\partial T_m} \right) \left(\frac{\partial T_m}{\partial p} \right) \Big|_{s=cte, T=T_o} \right] pT = v_o \left[1 - \beta_{s,o} \right] (p - p_o) \Big|_{dp} \quad (\text{ApIV.8})$$

Apêndice V

Neste apêndice é deduzida uma expressão que relaciona as propriedades pressão e volume específico à jussante da onde de evaporação com o fluxo de massa normal por unidade de área, quando a solução à jussante da onda de choque é a solução de Chapman-Jouguet. (ver também Simões Moreira, 1999).

A solução de C-J é a solução de máxima vazão mássica, se fixo um estado à montante da onda de evaporação, fato amplamente discutido no texto principal desta dissertação. Matematicamente essa condição pode ser traduzida como:

$$d f^2 = 0 \quad (\text{ApV.1})$$

Aplicada a equação de Rayleigh (3.28):

$$d \left\{ - \frac{[v]}{[p]} \right\} = 0 \quad (\text{ApV.2})$$

As seguintes manipulações matemáticas são necessárias:

$$- \frac{d [v]}{[p]} d [p] = 0 \quad (\text{ApV.3})$$

$$d \left\{ \frac{[v]}{p_2 - p_1} \right\} + [p] d \left\{ \frac{1}{v_2 - v_1} \right\} = 0 \quad (\text{ApV.4})$$

O estado 1 (à montante) é fixo, portanto:

$$\frac{d p_2}{p_2} + [p] \left\{ \frac{1}{v_2 - v_1} \right\} d v_2 = 0 \quad (\text{ApV.5})$$

Finalmente:

$$d v_2 = - \frac{f^{C-J}}{1} d p_2 \quad \text{ou} \quad \frac{d p_2}{p_2} = - \frac{f^{C-J}}{1} \frac{d p_2}{p_2} \quad (\text{ApV.6})$$

Apêndice VI

Este apêndice tem como objetivo obter uma expressão que relacione a pressão à montante da onda de evaporação e a pressão de estagnação do reservatório.

Integrando a Equação de Euler ao longo de uma linha de corrente é obtida a

equação de Bernoulli:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + g z = \text{Constante} \quad (\text{ApVI.1})$$

Valida se observada as seguintes hipóteses:

1. escoamento permanente.

2. fluido incompressível.

3. escoamento sem atrito.

4. escoamento ao longo de uma linha de corrente.

Onde z é a cota medida em relação a um referencial, as demais propriedades

e grandezas seguem a nomenclatura já definida no texto principal. A equação é aplicada

entre os estados (0) e (1) (veja Fig.4-1). A velocidade para o estado de estagnação, pela

própria definição é nula, e os pontos (0) e (1) são escolhidos de tal forma a

apresentarem a mesma posição em relação a um referencial qualquer. Assim a equação

pode ser escrita:

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{p}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2}$$

(ApVI.2)

Como o escoamento é incompressível $\rho = \rho_0 = \rho_1$, e a velocidade na seção

(1) é a velocidade teórica, ou seja, é a velocidade que ocorreria na saída do bocal caso a

viscosidade do fluido fosse nula.

É possível, no intuito de obter uma visão mais realista do problema, computar no cálculo a perda de carga no bocal, caso este seja considerado não isentrópico. A perda de carga no bocal é conhecida como perda de carga localizada, e é proporcional ao quadrado da velocidade:

$$h_p = K \frac{u^2}{2} \quad (\text{ApVI.3})$$

Onde:

h_p é a perda de carga

K é o coeficiente de perda de carga

u é a velocidade

O valor do coeficiente de perda de carga para uma determinada singularidade no escoamento, neste caso um bocal, é determinado experimentalmente. Dado um coeficiente de carga é necessário informar qual a velocidade usar no cálculo da equação (ApVI.3). A velocidade na entrada do bocal, ou na saída ou mesmo uma média entre elas. Para o caso em estudo vamos adotar sempre a seção de saída do bocal (1) como referência, portanto K deve ser relativo a esta seção. Introduzindo a perda de carga localizada a equação (ApVI.2), fica assim:

$$\frac{P_0}{\rho_1} = \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} + K \frac{u_1^2}{2} \quad (\text{ApVI.4})$$

Usando a equação (4.1), finalmente obtemos:

$$P_0 = P_1 + (1+K) \frac{\rho_1}{2} \quad (\text{ApVI.5})$$

É possível relacionar o coeficiente de perda de carga com outro parâmetro adimensional importante, definido como coeficiente de descarga ou de vazão. O coeficiente de descarga é a razão entre a vazão mássica real e a vazão mássica teórica:

$$C_D = \frac{\dot{m}_{\text{Real}}}{\dot{m}_{\text{teórica}}} = \frac{u_{\text{Real}}}{u_{\text{teórica}}} \quad (\text{ApVI.6})$$

A velocidade real é aquela calculada levando em consideração a perda de carga no bocal, portanto, aquela calculada pela equação (ApVI.4). É a velocidade teórica por sua vez, é aquela calculada pela equação (ApVI.2). Isolando as velocidades nas equações (ApVI.4) e (ApVI.2) e as substituindo em (ApVI.6), obtemos uma relação entre o coeficiente de perda de carga e o coeficiente de descarga:

$$K = \frac{C_D^2}{1} - 1 \quad (\text{ApVI.7})$$

Referências Bibliográficas

- Al-Khatafi, A. W., Tooley, J. R., 1986, J. R., *Numerical Methods in Engineering Practice*, Saunders College Publishing.
- Anderson, John D. Jr., 1995, *Computational Fluid Dynamics The basics with applications*, McGraw-Hill.
- Anderson, John D. Jr., 1991, *Fundamentals of Aerodynamics*, McGraw-Hill.
- Anderson, John D. Jr., 1990, *Modern Compressible Flow with historical perspective*, McGraw-Hill.
- Hill.
- Athans, R. E. e Hirs, A., 1995. *A Photographic Study of a Small Flashing Jets*, Flow Visualization and Image Processing of Multiphase System, ASME, V.209, pp. 201-206.
- Athans, R. E., 1995, *The Rapid Expansion of Near-Critical Retrograde Fluid*, tese de doutorado apresentada ao Rensselaer Polytechnic Institute, Nova Iorque, EUA.
- Carnahan, B e Wilkes, J. O., 1973, *Digital Computing and Numerical Methods*, John Wiley & Sons, Inc.
- Fox, R. W. e McDonald, A. T., 1992, *Introdução à Mecânica dos Fluidos*, LTC Editora, S.A.
- Hill, L. G., 1991, *An Experimental Study of Evaporation Waves in s Superheated Liquid*, tese de doutorado apresentada ao California Institute Of Technology, California, EUA.
- Hirsch, Charles, 1988, *Numerical Computation of Internal and External Flows Volume I*, John Wiley & Sons, Inc.
- Hirsch, Charles, 1988, *Numerical Computation of Internal and External Flows Volume II*, John Wiley & Sons, Inc.
- Kurschat, T., Chaves, H. e Meier, G. E. A., 1992, Complete Adiabatic Evaporation Highly Superheated Liquid Jets, *Journal of Fluid Mechanics*, V. 236, no 3, pp. 510-27.

- Lee, B. I. e Kester, M. G., 1975, A Generalized Thermodynamic Correlation Based on Three-Parameter Corresponding State, *AIChE Journal*, V.21, no 3, pp. 510-27.
- Lienhart, J. H. e Day, J. B., 1970, *The Breakup of Superheated Liquid Jets*, Transaction of the ASME – Journal of Basic Engineering, V.92, pp. 515-521.
- Moran, M. J. e Shapiro, H. N., 1996, *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*, John Wiley & Sons, Inc.
- Peter, E. M., Takimoto, A. e Hashiro, Y., 1994, *Flashing and Shattering Phenomena of Superheated Liquid Jets*, JSME International Journal, Série B, V.37, n.2, pp. 313-321.
- Prager, W., 1961, *Introduction to Mechanics of Continua*, Ginn and Company.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P., 1992, *Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing*, Cambridge Press, 2nd ed.
- Reid, R. C., Prausnitz, J. M., Poling, B. E., 1987, *The Properties of Gases & Liquids*, McGraw-Hill.
- Reid, R. C., 1976, Superheated Liquids, *American Scientist*, V. 64, pp. 145-56.
- Simões Moreira, J. R. e Shepherd, J., 1999, Evaporation Waves in Superheated Dodecane, *Journal of Fluid Mechanics*, V.382, pp. 63-86.
- Simões Moreira, J. R., McCahan, S. E Shepherd, J. E., 1993, Complete Evaporation Waves, *ASME Fluid Engineering Conference*, paper # 93-FE-7, Washington DC, EUA, 20 a 24 de junho.
- Simões Moreira, J. R., 1999, *Aplicação da Teoria das Ondas de Evaporação aos Jatos Evaporativos*, tese de livre docência apresentada a Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP.
- Simões Moreira, J. R., 1998, Simple Modeling of Evaporation Waves, *Waves in Two-Phase Flows – EURROMECH Colloquium 376*, Istanbul, Turquia, 27 a 30 de abril.

- Simões Moreira, J. R., 1997, Comportamento Termodinâmico de Substâncias de Complexidade Molecular Elevada, III CIDIM – Congresso Ibero-americano de Engenharia Mecânica, Havana, Cuba, 23 a 26 de setembro.
- Simões Moreira, J. R., 1994, *Adiabatic Evaporation Waves*, tese de doutorado apresentada ao Rensselaer Polytechnic Institute, Nova Iorque, EUA.
- Thompson, P. A., 1988, *Compressible Fluid Dynamics*.
- Thompson, P. A. e Sullivan, D. A., 1975, *On the Possibility of Complete Condensation Shock Waves in Retrograde Fluids*, Journal of Fluid Mechanics, V.95, pp. 279-304.
- Vieira, M. V., 1999, *Estudo Experimental de Jatos Evaporativos*, dissertação de mestrado apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- Whitham, G. B., 1974, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley.
- Wyllen, G. V., Sonntag, R., Borgnakke, C., 1995, *Fundamentos da Termodinâmica Clássica*, Editora Edgard Blucher Ltda.

Código Computacional

O código foi escrito na linguagem Matlab 5.0, os arquivos por sua vez são do tipo *.m. O programa principal chama várias sub-rotinas.

Programa principal: Expansão-2D – Arquivo expansão.m

Sub-rotinas:

Data – arquivo Data.m – contendo os dados de entrada.

Geometria – arquivo geometria.m – pré-processamento (construção da malha e transformação do espaço físico para o computacional).

Superfície – arquivo superficie.m – cálculo das velocidades na superfície do

cone evaporativo.

Decodbit – arquivo decodbit.m – decodificação das variáveis para

escoamento bifásico.

Três sub-rotinas são chamadas for Decodbit e são pesquisador (arquivo

pesquisador.m), função1 (arquivo função1.m) e função2 (arquivo função2.m) que fazem parte do método de dicotomia em conjunto com Newton-Raphson (ver capítulo 7 da

dissertação).

Decodevcomp – arquivo decodevcomp.m – decodificação da variáveis para

escoamento que sofreu evaporação completa.

Interpolacao – arquivo interpolacao.m – realiza a interpolação em uma tabela de

propriedades termodinâmicas válida na região de saturação.

```

%Programa Expansão-2D
%Departamento de Engenharia Mecânica
%Escola Politécnica
%Universidade de São Paulo
%Copyright 1999 by Edvaldo Angelo
%Marcador de Tempo
t=cputime;
%Lê Dados de entrada
Data;
%Construção da malha (pré-processamento)
geometria;
%Calcula u e v na superfície do jato
%u é a velocidade na direção z
%v é a velocidade na direção r
superfície;
for j=0:(nlinhas-1)
%Calcula os Valores de F, G, J e F
for i=0:(ndiv-limite)
%Cálculo de F
F1(i+1,j+1)=rho(i+1,j+1)*u(i+1,j+1);
F2(i+1,j+1)=rho(i+1,j+1)*(u(i+1,j+1))^2+p(i+1,j+1);
F3(i+1,j+1)=rho(i+1,j+1)*u(i+1,j+1)*v(i+1,j+1);
%Cálculo de G
G1(i+1,j+1)=alfa*rho(i+1,j+1)*v(i+1,j+1);
G2(i+1,j+1)=alfa*rho(i+1,j+1)*u(i+1,j+1)*v(i+1,j+1);
G3(i+1,j+1)=alfa*rho(i+1,j+1)*(v(i+1,j+1))^2+p(i+1,j+1);
G4(i+1,j+1)=alfa*rho(i+1,j+1)*v(i+1,j+1)*v(i+1,j+1)+
0.5*(u(i+1,j+1))^2+(v(i+1,j+1))^2);
%Cálculo de F
F1(i+1,j+1)=F1(i+1,j+1)+G1(i+1,j+1)/tan(beta);
F2(i+1,j+1)=F2(i+1,j+1)+G2(i+1,j+1)/tan(beta);
F3(i+1,j+1)=F3(i+1,j+1)+G3(i+1,j+1)/tan(beta);
else
F3(i+1,j+1)=0;
end
end
end

```

```

F4 (i+1, j+1) = F4 (i+1, j+1) + G4 (i+1, j+1) / tan(beta) ;

%Cálculo de U
if i~ndiv
    J1 (i+1, j+1) = -rho (i+1, j+1) * v (i+1, j+1) / y (i+1, j+1) ;
    J2 (i+1, j+1) = -u (i+1, j+1) * rho (i+1, j+1) / y (i+1, j+1) ;
    J3 (i+1, j+1) = - (v (i+1, j+1)) ^ 2 * rho (i+1, j+1) / y (i+1, j+1) ;
    J4 (i+1, j+1) = -
rho (i+1, j+1) * v (i+1, j+1) * (h (i+1, j+1) + 0.5 * (u (i+1, j+1)) ^ 2 + (v (i+1, j+1)) ^ 2) /
    y (i+1, j+1) ;
else
    J1 (i+1, j+1) = 0 ;
    J2 (i+1, j+1) = 0 ;
    J3 (i+1, j+1) = 0 ;
    J4 (i+1, j+1) = 0 ;
end
end

%Predictor Step

%Cálculo de d(fi)/d(Qsi) em i, j Usando forward differences
for i=0:(ndiv-limite)
    if i~0
        dF1iJ (i+1, j+1) = J1 (i+1, j+1) - ((1-
            Eta (i+1, j+1)) / (tan(beta) * Qsi (i+1, j+1) + Rb)) * (G1 (i, j+1) -
            G1 (i+1, j+1)) / (Eta (i, j+1)) -
            Eta (i+1, j+1) + (Eta (i+1, j+1) / (Qsi (i+1, j+1) + Rb) / tan(beta)) * (F1 (i, j+1) -
            F1 (i+1, j+1)) / (Eta (i, j+1)) / (Eta (i, j+1)) -
            dF2iJ (i+1, j+1) = J2 (i+1, j+1) - ((1-
            Eta (i+1, j+1)) / (tan(beta) * Qsi (i+1, j+1) + Rb)) * (G2 (i, j+1) -
            G2 (i+1, j+1)) / (Eta (i, j+1)) / (Eta (i, j+1)) -
            Eta (i+1, j+1) + (Eta (i+1, j+1) / (Qsi (i+1, j+1) + Rb) / tan(beta)) * (F2 (i, j+1) -
            F2 (i+1, j+1)) / (Eta (i, j+1)) / (Eta (i, j+1)) -
            dF3iJ (i+1, j+1) = J3 (i+1, j+1) - ((1-
            Eta (i+1, j+1)) / (tan(beta) * Qsi (i+1, j+1) + Rb)) * (G3 (i, j+1) -
            G3 (i+1, j+1)) / (Eta (i, j+1)) / (Eta (i, j+1)) -
            Eta (i+1, j+1) + (Eta (i+1, j+1) / (Qsi (i+1, j+1) + Rb) / tan(beta)) * (F3 (i, j+1) -
            F3 (i+1, j+1)) / (Eta (i, j+1)) / (Eta (i, j+1)) -
            dF4iJ (i+1, j+1) = J4 (i+1, j+1) - ((1-
            Eta (i+1, j+1)) / (tan(beta) * Qsi (i+1, j+1) + Rb)) * (G4 (i, j+1) -
            G4 (i+1, j+1)) / (Eta (i, j+1)) / (Eta (i, j+1)) -
            Eta (i+1, j+1) + (Eta (i+1, j+1) / (Qsi (i+1, j+1) + Rb) / tan(beta)) * (F4 (i, j+1) -
            F4 (i+1, j+1)) / (Eta (i, j+1)) / (Eta (i, j+1)) ;
    else
        dF1iJ (i+1, j+1) = J1 (i+1, j+1) - ((1-
            Eta (i+1, j+1)) / (tan(beta) * Qsi (i+1, j+1) + Rb)) * (G1 (i+1, j+1) -
            G1 (i+2, j+1)) / (Eta (i+1, j+1)) / (Eta (i+1, j+1)) -
            Eta (i+1, j+1) + (Eta (i+1, j+1) / (Qsi (i+1, j+1) + Rb) / tan(beta)) * (F1 (i+1, j+1) -
            F1 (i+2, j+1)) / (Eta (i+1, j+1)) / (Eta (i+2, j+1)) ;
        dF2iJ (i+1, j+1) = J2 (i+1, j+1) - ((1-
            Eta (i+1, j+1)) / (tan(beta) * Qsi (i+1, j+1) + Rb)) * (G2 (i+1, j+1) -
            G2 (i+2, j+1)) / (Eta (i+1, j+1)) / (Eta (i+1, j+1)) -
            Eta (i+1, j+1) + (Eta (i+1, j+1) / (Qsi (i+1, j+1) + Rb) / tan(beta)) * (F2 (i+1, j+1) -
            F2 (i+2, j+1)) / (Eta (i+1, j+1)) / (Eta (i+2, j+1)) ;
    end
end

```

```

df3i(j+1,j+1)=u3(i+1,j+1)-(1-
Eta(i+1,j+1))/(tan(beta))*Qs(i+1,j+1)+Rb)-
G3(i+2,j+1)/(Eta(i+1,j+1))-
Eta(i+2,j+1)/(Qs(i+1,j+1)+Eta(i+1,j+1)+Rb/tan(beta))*
(F3(i+2,j+1))/(Eta(i+1,j+1)-Eta(i+2,j+1));
df4i(j+1,j+1)=u4(i+1,j+1)-((1-
Eta(i+1,j+1))/(tan(beta))*Qs(i+1,j+1)+Rb)-
G4(i+2,j+1)/(Eta(i+1,j+1))-
Eta(i+2,j+1)/(Qs(i+1,j+1)+Eta(i+1,j+1)+Rb/tan(beta))*
(F4(i+2,j+1))/(Eta(i+1,j+1)-Eta(i+2,j+1));
end
end
%Calculo de fi medio em i+1,j
for i=0:(ndiv-limite)
    fm1i(j+1,j+2)=f1(i+1,j+1)+df1i(j+1,j+1)*Qs(i+1,j+2)-
    fm2i(j+1,j+1);
    fm2i(j+1,j+2)=f2(i+1,j+1)+df2i(j+1,j+1)*Qs(i+1,j+2)-
    fm3i(j+1,j+1);
    fm3i(j+1,j+2)=f3(i+1,j+1)+df3i(j+1,j+1)*Qs(i+1,j+2)-
    fm4i(j+1,j+1);
    fm4i(j+1,j+2)=f4(i+1,j+1)+df4i(j+1,j+1)*Qs(i+1,j+2)-
    Qs(i+1,j+1);
end
%Decodificação das variáveis
for i=0:(ndiv-limite)
    %estimativa inicial para T0 e x0 usando passo anterior
    T0=T(i+1,j+1);
    x0=x(i+1,j+1);
    if i~=ndiv
        alfa=1;
    else
        alfa=0;
    end
    fm1=fm1i(j+1,j+2);
    fm2=fm2i(j+1,j+2);
    fm3=fm3i(j+1,j+2);
    fm4=fm4i(j+1,j+2);
    if x0<1
        %Chama a função de Decodificação das variáveis
        decodifi;
        %Decodificação propriamente dita
        if Teste~=0
            hm(i+1,j+2)=hv0*x0+(1-x0)*h10;
            rhom(i+1,j+2)=1/(vv0*x0+(1-x0)*v10);
            um(i+1,j+2)=(fn2-p0)/fn1;
            if i~=ndiv
                vm(i+1,j+2)=(fn3-p0/tan(beta))/fn1;
            else
                vm(i+1,j+2)=(fn3-p0/tan(beta))/fn1;
            end
        end
    end
end

```

```

vm(i+1,j+2)=0;
end
Tm(i+1,j+2)=rtsafe;
pm(i+1,j+2)=p0;
xm(i+1,j+2)=x0;
else
xm(i+1,j+2)=2;
end
end
if xm(i+1,j+2)>1
decodcomp;
%Decodificação propriamente dita
hm(i+1,j+2)=hvx;
rhom(i+1,j+2)=rho0;
um(i+1,j+2)=(fn2-p0)/fn1;
vm(i+1,j+2)=(fn3-p0/tan(beta))/fn1;
Tm(i+1,j+2)=T0;
pm(i+1,j+2)=p0;
xm(i+1,j+2)=xm(i+1,j+1);
end
end
%Corrector Step
for i=(ndiv-limite)
%Cálculo de F(i+1,j) médio
fm1(i+1,j+2)=rhom(i+1,j+2)*um(i+1,j+2);
fm2(i+1,j+2)=rhom(i+1,j+2)*(um(i+1,j+2)+sqrt(2+pm(i+1,j+2)));
fm3(i+1,j+2)=rhom(i+1,j+2)*um(i+1,j+2)*vm(i+1,j+2);
fm4(i+1,j+2)=rhom(i+1,j+2)*um(i+1,j+2)*vm(i+1,j+2)+0.5*((um(i+1,j+2)+sqrt(2+vm(i+1,j+2)))^2);
if i~=ndiv
%Cálculo de G(i+1,j) médio
gm1(i+1,j+2)=alfa*rhom(i+1,j+2)*vm(i+1,j+2);
gm2(i+1,j+2)=alfa*rhom(i+1,j+2)*um(i+1,j+2)*vm(i+1,j+2);
gm3(i+1,j+2)=alfa*rhom(i+1,j+2)*(vm(i+1,j+2)+sqrt(2+pm(i+1,j+2)));
gm4(i+1,j+2)=alfa*rhom(i+1,j+2)*vm(i+1,j+2)*(hm(i+1,j+2)+0.5*((um(i+1,j+2)+sqrt(2+vm(i+1,j+2)))^2));
%Cálculo de U(i+1,j) médio
Umi(i+1,j+2)=-rhom(i+1,j+2)*vm(i+1,j+2)/Y(i+1,j+2);
Umi2(i+1,j+2)=-Umi(i+1,j+2);
Umi3(i+1,j+2)=(vm(i+1,j+2)+sqrt(2+vm(i+1,j+2)))/Y(i+1,j+2);
end
end

```

```

Jm411j(i+1,j+2)=-
rhom(i+1,j+2)*vm(i+1,j+2)*(hm(i+1,j+2)+0.5*(um(i+1,j+2))^2+(vm(i+1,j+2))^2)/y(i+1,j+2);
else
Jm11j(i+1,j+2)=0;
Jm21j(i+1,j+2)=0;
Jm31j(i+1,j+2)=0;
Jm41j(i+1,j+2)=0;
end
end
%Calculo de dfi/d(Qsi) em i+1,j usando backward differences
for i=(ndiv-limite)
for i=(ndiv-limite)
dfm11j(i+1,j+2)=Jm11j(i+1,j+2)-((1-
Eta(i+1,j+2))/(tan(beta)*Qsi(i+1,j+2)+Rb))-
gm11j(i+2,j+2)/(Eta(i+1,j+2))-
Eta(i+2,j+2)/(Qsi(i+1,j+2)+Rb/tan(beta))*
(fm11j(i+2,j+2)-fm11j(i+1,j+2))/(Eta(i+1,j+2))-
-fm11j(i+2,j+2)/(Eta(i+1,j+2))-
dfm21j(i+1,j+2)=Jm21j(i+1,j+2)-((1-
Eta(i+1,j+2))/(tan(beta)*Qsi(i+1,j+2)+Rb))-
gm21j(i+2,j+2)/(Eta(i+1,j+2))-
Eta(i+2,j+2)/(Qsi(i+1,j+2)+Rb/tan(beta))*
(fm21j(i+2,j+2)-fm21j(i+1,j+2))/(Eta(i+1,j+2))-
-fm21j(i+2,j+2)/(Eta(i+1,j+2))-
dfm31j(i+1,j+2)=Jm31j(i+1,j+2)-((1-
Eta(i+1,j+2))/(tan(beta)*Qsi(i+1,j+2)+Rb))-
gm31j(i+2,j+2)/(Eta(i+1,j+2))-
Eta(i+2,j+2)/(Qsi(i+1,j+2)+Rb/tan(beta))*
(fm31j(i+2,j+2)-fm31j(i+1,j+2))/(Eta(i+1,j+2))-
-fm31j(i+2,j+2)/(Eta(i+1,j+2))-
dfm41j(i+1,j+2)=Jm41j(i+1,j+2)-((1-
Eta(i+1,j+2))/(tan(beta)*Qsi(i+1,j+2)+Rb))-
gm41j(i+2,j+2)/(Eta(i+1,j+2))-
Eta(i+2,j+2)/(Qsi(i+1,j+2)+Rb/tan(beta))*
(fm41j(i+2,j+2)-fm41j(i+1,j+2))/(Eta(i+1,j+2))-
-fm41j(i+2,j+2)/(Eta(i+1,j+2));
else
dfm11j(i+1,j+2)=Jm11j(i+1,j+2)-((1-
Eta(i+1,j+2))/(tan(beta)*Qsi(i+1,j+2)+Rb))-
gm11j(i+2,j+2)/(Eta(i+1,j+2))-
Eta(i+2,j+2)/(Qsi(i+1,j+2)+Rb/tan(beta))*
(fm11j(i+2,j+2)-fm11j(i+1,j+2))/(Eta(i+1,j+2))-
-fm11j(i+2,j+2)/(Eta(i+1,j+2))-
dfm21j(i+1,j+2)=Jm21j(i+1,j+2)-((1-
Eta(i+1,j+2))/(tan(beta)*Qsi(i+1,j+2)+Rb))-
gm21j(i+2,j+2)/(Eta(i+1,j+2))-
Eta(i+2,j+2)/(Qsi(i+1,j+2)+Rb/tan(beta))*
(fm21j(i+2,j+2)-fm21j(i+1,j+2))/(Eta(i+1,j+2))-
-fm21j(i+2,j+2)/(Eta(i+1,j+2))-
dfm31j(i+1,j+2)=Jm31j(i+1,j+2)-((1-
Eta(i+1,j+2))/(tan(beta)*Qsi(i+1,j+2)+Rb))-
gm31j(i+2,j+2)/(Eta(i+1,j+2))-
Eta(i+2,j+2)/(Qsi(i+1,j+2)+Rb/tan(beta))*
(fm31j(i+2,j+2)-fm31j(i+1,j+2))/(Eta(i+1,j+2))-
-fm31j(i+2,j+2)/(Eta(i+1,j+2));
end
end

```



```

end
end
%Calculamos a média das derivadas dfi/d(Qsi) em i+1,j
for i=0:(ndiv-limite)
    dfmc1j(i+1,j+1)+dfm11j(i+1,j+2);
    dfmc2j(i+1,j+1)+dfm21j(i+1,j+2);
    dfmc3j(i+1,j+1)+dfm31j(i+1,j+2);
    dfmc4j(i+1,j+1)+dfm41j(i+1,j+2);
end
%Calculamos fi em i+1,j corrigido
for i=0:(ndiv-limite)
    f1(i+1,j+2)=f1(i+1,j+1)+dfmc1j(i+1,j+2)-
    Qsi(i+1,j+1);
    f2(i+1,j+2)=f2(i+1,j+1)+dfmc2j(i+1,j+2)-
    Qsi(i+1,j+1);
    f3(i+1,j+2)=f3(i+1,j+1)+dfmc3j(i+1,j+2)-
    Qsi(i+1,j+1);
    f4(i+1,j+2)=f4(i+1,j+1)+dfmc4j(i+1,j+2)-
    Qsi(i+1,j+1);
end
%Decodificação das variáveis
for i=0:(ndiv-limite)
    %estimativa inicial para T0 e x0 usando passo anterior
    T0=Tm(i+1,j+2);
    x0=xm(i+1,j+2);
    if i~=ndiv
        alfa=1;
    else
        alfa=0;
    end
    f1=f1(i+1,j+2);
    f2=f2(i+1,j+2);
    f3=f3(i+1,j+2);
    f4=f4(i+1,j+2);
    if x0<1
        %Chama a função de Decodificação das variáveis
        decodbf;
        %Decodificação propriamente dita
        if Teste~=0
            h(i+1,j+2)=hv0*x0+(1-x0)*h10;
            rho(i+1,j+2)=1/(v0*x0+(1-x0)*v10);
            u(i+1,j+2)=(fn2-p0)/fn1;
            if i~=ndiv
                v(i+1,j+2)=(fn3-p0/tan(beta))/fn1;
            else
                v(i+1,j+2)=(fn3-p0/tan(beta))/fn1;
            end
        end
    end
end

```

```

%Dados de entrada
%Data.m
%Propriedades do fluido
%Todas as unidades se encontram no Sistema Internacional (SI)
%Tabela de Propriedades Termodinâmicas contendo Matriz
%Prop=[] com as colunas, temperatura, pressão, vl, vv, hl, hv
respectivamente
isooctane;
%Massa Molecular
M=114.232;
%Pressão Crítica
pc=2498674.5;
%Densidade Crítica
rhoC=0.2327e3;
%Temperatura Crítica
Tc=568.8;
%Dados sobre as propriedades na superfície do jato (cone de líquido,
estado 2)
%Experimento n.8

```

```

tespera=(cputime-t)/60
end
end
end
x(i+1,j+2)=x(i+1,j+1);
p(i+1,j+2)=p0;
T(i+1,j+2)=T0;
v(i+1,j+2)=(fn3-p0/tan(beta))/fn1;
u(i+1,j+2)=(fn2-p0)/fn1;
rho(i+1,j+2)=rho0;
h(i+1,j+2)=hvx;
%Decodificação propriamente dita
decodevcomp;
if x(i+1,j+2)>1
end
end
x(i+1,j+2)=2;
else
x(i+1,j+2)=x0;
p(i+1,j+2)=p0;
T(i+1,j+2)=rtsafe;
end
v(i+1,j+2)=0;

```

```

%Razo do Bocal
Rb=(0.8636*1e-3)/2;
%Vazão Massica
m=0.02396;
%Semi-Angulo do cone
beta=2.212*pi/180;
%Temperatura
Tsup=135.2+273.15;
%Titulo
xsup=0.644;
%Dados sobre a malha

%Número de segmentos desejados sobre a superfície do fato
ndiv=120
%Quantidade de pontos não calculados
%contados a partir do vértice do cone
limite=80
%Número de passos desejados
nlinhas=220
%final dos dados de entrada

%Propriedades necessárias calculadas automaticamente
%Propriedades resultantes da interpolação
%Chama a rotina de interpolação
Tinterpolacao=Tsup;
interpolacao;
%Pressão
psup=px;
%Volume específico
vespsup=vvx*xsup+(1-xsup)*vlx;
%Entalpia
hsup=xsup*hvx+(1-xsup)*hlx;
%Calcula a densidade na superfície do fato
rhosup=1/vespsup;
%Attribui as propriedades a todos os pontos na superfície do fato
for l=0:ndiv
T(l+1,1)=Tsup;
p(l+1,1)=psup;
end

```

```

rho(i+1,1)=rhosup;
h(i+1,1)=hsup;
x(i+1,1)=xsup;
end
% R universal (J/(Kg*mol*K))
Ru=8.31e3;
% R do fluido
R=Ru/M;
% Gera a malha
% geometria.m
% Fator de proporcionalidade (Ligado ao passo em r)
multiplicador=5;
% Adoção automática do passo segundo uma lei proporcional
passoy=multiplicador*(Rb/tan(beta))*(1/ndiv);
% OBS
% A linha anterior poderia ser substituída por um valor pré estabelecido
assim:
passoy=(numero)
for j=0:nlinhas
    for i=0:ndiv
        passoy=multiplicador*(Rb/tan(beta))*(1/ndiv)*j/20;
        X(i+1,j+1)=(passoy+Rb)/tan(beta)*(1/ndiv)*i;
        y(i+1,j+1)=(passoy+Rb)-X(i+1,j+1)*tan(beta);
    end
end
hold on;
% Gera o gráfico z x r
for j=0:nlinhas
    for i=0:ndiv
        plot(X(i+1,j+1),y(i+1,j+1),'x');
    end
end
title('Espaço Fisico');
xlabel('x');
ylabel('y');
% Transformação para Espaço computacional
passoy=multiplicador*(Rb/tan(beta))*(1/ndiv);
for j=0:nlinhas
    for i=0:ndiv
        passoy=multiplicador*(Rb/tan(beta))*(1/ndiv)*j/20;
        for l=0:ndiv

```

```

%Calcula u e v na superfície do cone de líquido
%superfície.m
%Cálculo da Área superficial do cone de líquido
As=(pi*Rb^2)/sin(beta);
%Cálculo de w2 (velocidade normal a superfície do jato)-(jussante)
w2=m/(rho(1,1)*As);
%Cálculo da componente paralela ao eixo z u2
u2=w2*sin(beta);
%Cálculo da componente paralela ao eixo r v2
v2=w2*cos(beta);
for i=0:(ndiv-1)
    n(i+1,1)=u2;
    v(i+1,1)=v2;
end
%pontos sobre a linha de centro
n(ndiv+1,1)=u2;
v(ndiv+1,1)=0;
%Decolificação para bifásico
%decodbf.m
%busca um intervalo onde existe raiz para a função
pesquisador;
if Teste==1

```

```

%Calcula u e v na superfície do cone de líquido
%superfície.m
%Cálculo da Área superficial do cone de líquido
As=(pi*Rb^2)/sin(beta);
%Cálculo de w2 (velocidade normal a superfície do jato)-(jussante)
w2=m/(rho(1,1)*As);
%Cálculo da componente paralela ao eixo z u2
u2=w2*sin(beta);
%Cálculo da componente paralela ao eixo r v2
v2=w2*cos(beta);
for i=0:(ndiv-1)
    n(i+1,1)=u2;
    v(i+1,1)=v2;
end
%pontos sobre a linha de centro
n(ndiv+1,1)=u2;
v(ndiv+1,1)=0;
%Decolificação para bifásico
%decodbf.m
%busca um intervalo onde existe raiz para a função
pesquisador;
if Teste==1

```

```

%Gera o gráfico Qst x Eta
figure;
hold on;
for j=0:nlinhas
    for i=0:ndiv
        plot(Qst(i+1,j+1),Eta(i+1,j+1),'x');
    end
end
end
title('Espaço Computacional');
xlabel('Qst');
ylabel('Eta');
hold off;

```

```

Qst(i+1,j+1)=X(i+1,j+1)+(Y(i+1,j+1)-Rb)/tan(beta);
Eta(i+1,j+1)=Y(i+1,j+1)/(passoy+Rb);
end
end

```

```

xT1=Ta(1);
if i~=ndiv
    Funcao1;
else
    Funcao2;
end
f1=f;
xT2=Tb(1);
if i~=ndiv
    Funcao1;
else
    Funcao2;
end
f2=f;
xT2=Tb(1);
if i~=ndiv
    Funcao1;
else
    Funcao2;
end
f3=f;
MAXIT=4000;
xacc=1e-12;
if ((f1>0 & f2>0) | (f1<0 & f2<0))
    Mensagem='há algum problema'
end
if (f1==0)
    rtsafe=xT1;
    elseif (fh==0)
        rtsafe=xT2;
    elseif (f1<0)
        x1=xT1;
        xh=xT2;
    else
        xh=xT1;
        x1=xT2;
end
x1=xT2;
xh=xT1;
end
rtsafe=.5*(xT1+xT2);
dxold=abs(xT2-xT1);
dx=dxold;
xT=rtsafe;
Tinterpolacao=xT;
Funcao1;
com=0;
while com~=MAXIT
    if (((rtsafe-xh)*df-f)*((rtsafe-xl)*df-f)>=0) |
        (abs(2*f)>abs(dxold*df)))
        dxold=dx;
        dx=0.5*(xh-xl)
        rtsafe=xl+dx;
        if (x1==rtsafe)
            com=4000;
        end
end

```

```

else
    dxold=dx;
    dx=f/df;
    temp=rtSAFE;
    rtSAFE=rtSAFE-dx;
    if (temp==rtSAFE)
        com=4000;
    end
    if (abs(dx)<xacc)
        if (abs(dx)<xacc)
            com=4000;
        end
        xT=rtSAFE
        Tinterpolacao=xT;
        Funcao1;
        if (f>0)
            x1=rtSAFE;
        else
            xh=rtSAFE;
        end
        end
        Tinterpolacao=rtSAFE;
        Interpolacao;
        p0=px;
        v10=v1x;
        v0=vvx;
        h10=h1x;
        hv0=hvx;
        if i~=ndiv
            x0=(1/((vvx-v1x)*fn1^2))*(fn2-px*(1+1/tan(beta)^2)+fn3/tan(beta)-
                v1x*fn1^2)
            else
                x0=(1/((vvx-v1x)*fn1^2))*(fn2-px-v1x*fn1^2)
            end
        end
        else
            x0=2;% Irreal, adotado no algoritmo para tomada de decisao
        end
    end
    %Pesquisador para decodificacao com titulo <1
    %pesquisador.m
    Tpsqini=Prop(1,1)+10;
    Tpsqfin=T0+40;
    intervalo=(Tpsqfin-Tpsqini)/500;
    n=0;
    for c=1:499
        Tpsq(c)=Tpsqini+c*intervalo;
        Tinterpolacao=Tpsq(c);
        Interpolacao;
    end
end

```

```

%fpesq(c)=-2*fn4+fn2^2/fn1+fn3^2/fn1+2*fn1*hlx-
(2*fn2*px)/fn1+px^2/fn1+(2*fn2*hlx)/(fn1*(vlx-vvx))-
(2*fn2*lvx)/(fn1*(vlx-vvx))+2*(fn1*lvx*vx)/(fn1*(vlx-vvx)-
vx)) -2*fn1*hlx*vlx/(vlx-vvx)+2*(fn1*lvx*vx)/(fn1*(vlx-vvx)-
2*fn3*px*(1/tan(beta))/(fn1*(vlx-vvx))+px^2*(1/tan(beta))^2/fn1-
2*hlx*px*(1/tan(beta))^2/(fn1*(vlx-vvx)-
vx))+2*lvx*px*(1/tan(beta))^2/(fn1*(vlx-vvx))
fpesq(c)=(1/sin(beta)^2)*px^2-2*px*(1/sin(beta)^2)*(lvx-hlx)/(vvx-
vlx)+fn2+fn3/tan(beta))-2*fn1*fn4+2*(lvx-hlx)/(vvx-
vlx)*(fn2+fn3/tan(beta)-vlx*fn1^2)+2*fn1^2*hlx+(fn2^2+fn3^2);
Ta(1)=0;
for c=1:498
    if (fpesq(c)*fpesq(c+1))<0
        n=n+1;
        Ta(n)=fpesq(c);
        Tb(n)=fpesq(c+1);
    end
end
if Ta==0
    Teste=0;
else
    Teste=1;
end
end

```

```

%funcaol.m
%calcula a função l
interpolacao;

```

```

%Calcula o valor da funcao
F=(1/sin(beta)^2)*px^2-2*px*(1/sin(beta)^2)*(lvx-hlx)/(vvx-
vlx)+fn2+fn3/tan(beta))-2*fn1*fn4+2*(lvx-hlx)/(vvx-
vlx)*(fn2+fn3/tan(beta)-vlx*fn1^2)+2*fn1^2*hlx+(fn2^2+fn3^2);
%Calcula a derivada da funcao
Tfpesq(c)=Tfpesq(c)+0.005;
interpolacao;
df=(fdff-F)/0.005;

```

```

%funcaoz.m
%calcula a funcaoz
interpolacao;

```



```

%Calcula o sistema não linear de Equações usando Newton-Rapson
%para sistema de equações (2)
%No caso de evaporação completa
%decodcomp.m
%Valores iniciais (usamos os valores obtidos no passo anterior)
T0=T(i+1,j+1);
rho0=rho(i+1,j+1);
delatT=1;
delatrho=1;
acrescimo=0.001;
la=0;
while la~=1000
    la=la+1;
%Interpolação na Tabela para Estado 0
Tinterpolacao=T0
interpolacao;
%Determinação de b
b=vvx*(px*vvx)/(R*Tinterpolacao)-1);
%Cálculo de w(rho0,T0)
pressao=rho0*R*T0+b*R*T0*rho0^2;
pressao=(1+acrescimo)*rho0;
%Calculo de k(rho0,T0)
k00=2*fn1^2*hvx+(fn2-pessao)^2+(fn3-pessao/tan(beta))^2-2*fn4*fn1;
%Calculo de w(rho0+acrescimo,T0)
rho00=(1+acrescimo)*rho0;
pressao=rho00*R*T0+b*R*T0*rho00^2;
pressao=(1+acrescimo)*rho0;
%Calculo de w(rho0+acrescimo,T0)
pressao*(tan(beta)^2+1)/tan(beta)^2+fn3/tan(beta));

```

```

%Calcula o valor da funcao
F=px^2-2*px*((hvx-hlx)/(vvx-vlx)+fn2)-2*fn1*fn4+2*(hvx-hlx)/(vvx-
vlx)*(fn2-vlx*fn1^2)+2*fn1^2*hlx+(fn2^2);
%Calcula a derivada da funcao
Tinterpolacao=Tinterpolacao+0.005;
interpolacao;
fdiF=px^2-2*px*((hvx-hlx)/(vvx-vlx)+fn2)-2*fn1*fn4+2*(hvx-hlx)/(vvx-
vlx)*(fn2-vlx*fn1^2)+2*fn1^2*hlx+(fn2^2);
df=(fdiF-F)/0.005;

```

```

% Cálculo de k(rho0+acrescimo,T0)
k10=2*fn1^2*hvx+(fn2-pressao)^2+(fn3-pressao/tan(beta))^2-2*fn4*fn1;
% Cálculo de w(rho0,T0+acrescimo)
T0=(1+acrescimo)*T0;
Tinterpolacao=T0;
interpolacao;
b=vvx*((px*vx)/(R*Tinterpolacao)-1);
pressao=rho0*R*T0+b*R*T0*rho0^2;
w01=-rho0+(fn1^2)*(1)/(fn2-
pressao*((tan(beta)^2+1)/tan(beta)^2)+fn3/tan(beta));
% Cálculo de dw/drho em (rho0,T0)
dwrho00=(w10-w00)/(rho00-rho0);
% Cálculo de dk/dT em (rho0,T0)
dkT00=(k01-k00)/(T00-T0);
% Cálculo de dk/drho em (rho0,T0)
dkrho00=(k10-k00)/(rho00-rho0);
% Cálculo de D
D=dwT00*dkrho00-dwrho00*dkT00;
% Cálculo de deltaT
deltaT0=(k00*dwrho00-w00*dkrho00)*(1/D);
% Cálculo de deltarho
deltarho0=(w00*dkT00-k00*dwT00)*(1/D);
T0=T0+0.05*deltaT0;
rho0=rho0+0.05*deltarho0;
if (abs(w00)<1e-3) & (abs(k00)<5e-2)
    la=1000;
end
end
% Interpolação na tabela para estado 0
Tinterpolacao=T0
interpolacao;
b=vvx*((px*vx)/(R*Tinterpolacao)-1);
% Cálculo da Pressão
p0=rho0*R*T0+b*R*T0*rho0^2;
% Realiza as interpolações
interpolacao.m
aux=1;
while Prop(aux,1)<Tinterpolacao
    aux=aux+1;
end

```

```

aux=aux-1;
t1=Prop(aux,1);
t2=Prop(aux+1,1);
p1=Prop(aux,2);
p2=Prop(aux+1,2);
v1=Prop(aux,4);
v2=Prop(aux+1,4);
v1=Prop(aux,3);
v12=Prop(aux+1,3);
h1=Prop(aux,5);
h12=Prop(aux+1,5);
h1=Prop(aux,6);
h12=Prop(aux+1,6);
%Interpola a pressao (Clapeyron)
B=((t2*t1)/(t1-t2))*Log(p1/p2);
A=log(p1)+(B/t1);
px=exp(A-(B/TInterpolacao));
%interpola v1
v1x=interp1(Prop(:,1),Prop(:,3),TInterpolacao);
%interpola v Usando T/P
vvx=vv1+(v2-vv1)*((TInterpolacao/px-t1/p1)/(t2/p2-t1/p1));
%interpola h1
h1x=interp1(Prop(:,1),Prop(:,5),TInterpolacao);
%interpola hv
hvix=interp1(Prop(:,1),Prop(:,6),TInterpolacao);

```