

SILVANA APARECIDA GRAMINHO DA SILVA

**CALIBRAÇÃO DE CÂMERAS PARA TELEOPERAÇÃO DE ROBÔS
MÓVEIS**

**Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo.**

São Paulo

2000

SILVANA APARECIDA GRAMINHO DA SILVA

CALIBRAÇÃO DE CÂMERAS PARA TELEOPERAÇÃO DE ROBÔS

MÔVEIS

Dissertação apresentada à Escola

Politécnica da Universidade de São Paulo

Área de Concentração:

**Engenharia Mecatrônica e de Sistemas
Mecânicos**

Orientador:

Jun Okamoto Jr.

São Paulo

2000

Silva, Silvana Aparecida Graminho da
Calibração de Câmeras para Teleoperação de Robôs Móveis.
São Paulo. 1999.
135p.

Dissertação – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
Departamento Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.
1. Calibração de Câmeras 2. Teleoperação de Robôs Móveis –
Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento
Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

Aos professores e colegas da Escola
politécnica e aos meus amigos e
familiares que tem sido a grande
razão e incentivo ao meu
aperfeiçoamento.

AGRADECIMENTOS

Ao orientador Prof. Dr. Jun Okamoto Jr. pela preciosa orientação e incentivos.

Ao Gilmar pelo estímulo, companheirismo e apoio.

A minha família que grandiosamente me incentivou.

A todos que direta ou indiretamente colaboraram na execução deste trabalho.

ERRATA

Calibração de Câmeras para Teleoperação de Robôs Móveis
 Silvana Aparecida Graminho da Silva
 Orientador: Jun Okamoto Jr.

Página	Original (onde lê-se)	Correção (alterar para)
5	...por se tratar de calibração extrínseca.	...uma vez que, o trabalho só trata de calibração extrínseca.
6	...câmara fixa no laboratório...	...câmara fixa no ambiente...
16	...da imagem 2D no computador a partir de imagens 3D.	...da imagem 2D no computador a partir do ambiente 3D.
18	...os momentos da elipse...	...os eixos da elipse...
22	A Figura 3-	A Figura 3-2
23	(x_w, y_w, z_w) é a coordenada 3D do ponto P do objeto no sistema de coordenadas global 3D. (x, y, z) é a coordenada 3D do ponto P no sistema de coordenada da câmera, no qual estão centrados o ponto O e o centro óptico, com o eixo z sendo o mesmo do eixo óptico.	(x, y, z) é o sistema de coordenadas da câmera
24	Error! Reference source not found. Os 4 passos para a transformação... f é a distância entre o plano central da imagem e o centro óptico.	Figura 3-3 Segundo os 4 passos propostos por TSAI(1986) para a transformação... f é a distância entre o plano central da imagem (oi) e o centro óptico (o).
26	...aplicações de visão de máquina industrial,	...aplicações industriais de visão de máquina,
27	Onde: (X_f, Y_f) : linha e coluna # do pixel da imagem no quadro de memória do computador. d_x : distância entre os elementos do sensor adjacente na direção X d_y : distância entre os elementos do sensor adjacente na direção Y N_{cx} : número de elementos do sensor na direção X ...distância centro a centro entre os elementos do... Onde: (X_p, Y_p) : coordenada no plano da imagem; (X_f, Y_f) : linha e coluna do pixel da imagem no quadro de memória do computador. d_x : distância entre os elementos adjacentes do sensor na direção X d_y : distância entre os elementos adjacentes do sensor na direção Y N_{cy} : número de elementos fotossensores do sensor na direção X ...distância centro a centro entre os elementos fotossensores adjacentes do...	Onde: (X_p, Y_p) : coordenada no plano da imagem; (X_f, Y_f) : linha e coluna do pixel da imagem no quadro de memória do computador. d_x : distância entre os elementos adjacentes do sensor na direção X d_y : distância entre os elementos adjacentes do sensor na direção Y N_{cy} : número de elementos fotossensores do sensor na direção X ...distância centro a centro entre os elementos fotossensores adjacentes do...
30	Figure 3-1	Figura 3-3
31	...coordenadas da imagem (X, Y) Error! Reference source not found. Os parâmetros do passo 1 da figura 2.2...	...coordenadas da imagem (X_f, Y_f) Figura 3-3 Os parâmetros do passo 1 da figura 3.2...

34	<p>...ao centro do sistema de coordenadas globais para a posição 1 e a posição 2 do robô...</p> <p>β é o ângulo entre a linha vertical abaixo da câmera e a linha máxima de inclinação da posição 1 e β_2 é o ângulo entre a linha vertical abaixo da câmera e a linha máxima de inclinação da posição 2...</p>
----	---

Página 34:
Substituir a Figura 4-2 pela figura abaixo:

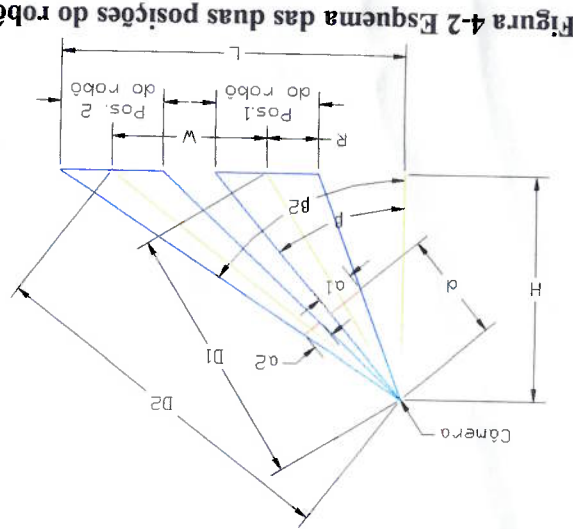
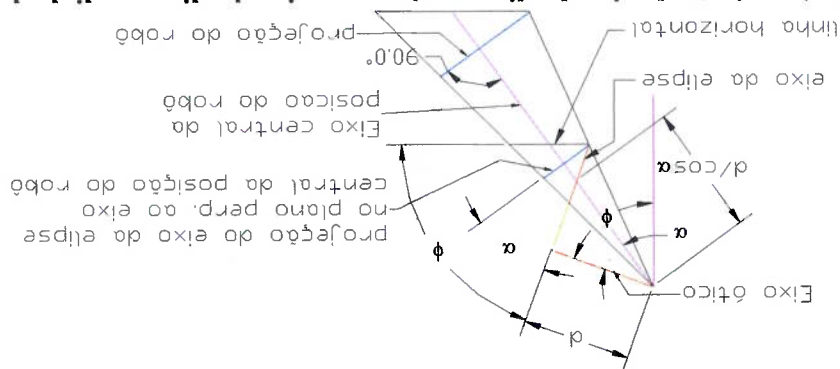


Figura 4-2 Esquema das duas posições do robô

Página	Original	Correção
37	Figura 4-7 Eixo óptico esta a esquerda das duas posições do robô e também do eixo vertical da câmera (Caso 4)	Figura 4-7 Eixo óptico esta a direita das duas posições do robô e também do eixo vertical da câmera (Caso 4)
40	Figura 4-13 Eixo óptico esta a direita das duas posições do robô e também do eixo vertical da câmera (Caso 12)	Figura 4-13 Eixo óptico esta a esquerda das duas posições do robô e também do eixo vertical da câmera (Caso 12)
43	O Eixo óptico esta a Direita da Posição do Robô quando a Posição estiver a Direita do Eixo Ótico e o Eixo óptico esta a Esquerda da Posição do Robô quando a Posição estiver a Esquerda do Eixo Ótico	O Eixo óptico esta a Direita da Posição do Robô quando a Posição estiver a Direita do Eixo Óptico e o Eixo óptico esta a Esquerda da Posição do Robô quando a Posição estiver a Esquerda do Eixo Óptico

Página 43: Substituir a Figura 5-1 pela figura abaixo:

Figura 5-1 A projeção do eixo da elipse está entre o eixo da elipse e a linha horizontal



Página	45
Original	$k1 = \frac{b \cdot \cos \alpha + dif}{\cos(\alpha + \phi)}$ (onde lê-se)
Correção	$k1 = \frac{b \cdot \cos \alpha + dif}{\cos(\phi - \alpha)}$ (alterar para)
	$y = tg(\alpha + \phi) \cdot (b \cdot \cos \alpha - dif)$
	$y = tg(\phi - \alpha) \cdot (b \cdot \cos \alpha + dif)$

Página 46: Eliminar a equação (5.12), pois ela é igual a equação (5.3).

Página 48: Substituir a equação (5.22) pela equação abaixo:

$$(5.22) \quad \frac{(b \cdot \cos \alpha + dif) \cdot 2 \cdot \cos \alpha}{2 \cdot d + k \cdot tg \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos(\phi - \alpha)} = \frac{2 \cdot R \cdot \cos(\phi - \alpha) - 2 \cdot R \cdot tg \epsilon \cdot \sin(\phi - \alpha)}{D - R \cdot \sin(\phi - \alpha)}$$

Página	50
Original	$x = \frac{tg \alpha \cdot k \cdot \cos(\phi - \alpha)}{2}$ (onde lê-se)
Correção	$x = \frac{tg \alpha \cdot k \cdot \cos(\phi + \alpha)}{2}$ (alterar para)

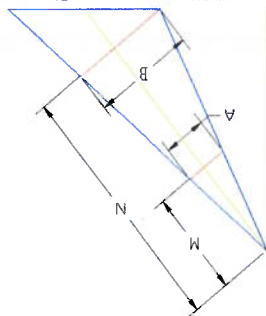
Página 50: Eliminar a equação (5.25), pois ela é igual a equação (5.3).
Eliminar a equação (5.28), pois ela é igual a equação (5.8).

Página 52: Substituir a equação (5.32) pela equação abaixo:

$$(5.32) \quad k = \frac{(b \cdot \cos \alpha - dif) \cdot [1 + tg \epsilon \cdot tg(\alpha - \phi) + tg \epsilon^2 \cdot tg(\alpha - \phi)^2 + \dots]}{\cos(\alpha - \phi)}$$

Página 54: Substituir a Figura 5-10 pela figura abaixo:

Figura 5-10 Relação Geométrica



Substituir a equação (5.49) pela equação abaixo:

$$\frac{2R \cos(\phi - \alpha) - 2R \cdot \operatorname{tg} \epsilon \cdot \operatorname{sen}(\phi - \alpha)}{a \cos \alpha - a \cdot \operatorname{tg} \epsilon \cdot \operatorname{sen} \alpha} = \frac{d}{\cos \alpha} - \frac{alt + k \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \phi)}{2}$$

(5.49)

Página	Original (onde lê-se)	Correção (alterar para)
56	4.3	4.4
	4.4	4.5
	4.5	4.6
	4.6	4.7
	4.7a	4.8a
	4.7b	4.8b
	4.8a	4.9a
	4.8b	4.9b
	4.9	4.10
	4.10	4.11
	4.11	4.12
	4.12	4.13
58	... da distância focal F da distância focal d

Página 59: Substituir a Figura 5-11 pela figura abaixo:

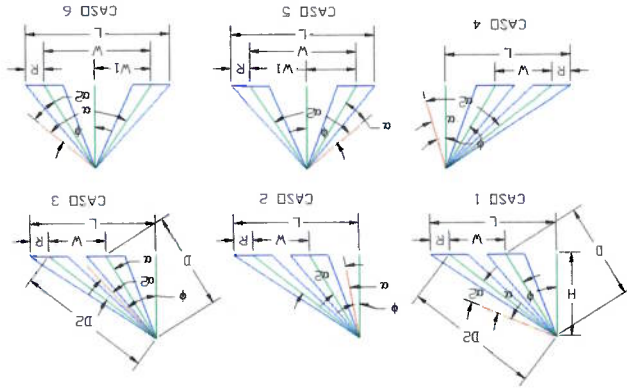
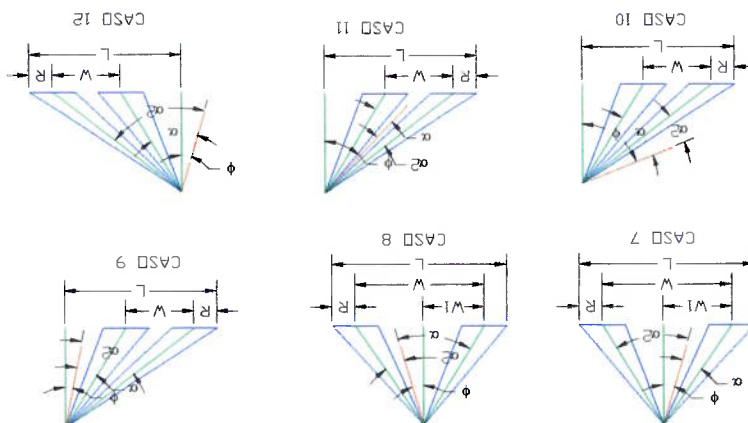


Figura 5-11 Esquema para o cálculo da altura H para os casos de 1 a 6

Página	Original (onde lê-se)	Correção (alterar para)
61	... a relação para calcular D a relação para calcular D ...
63	... grandemente a performance dos...	... grandemente o desempenho dos...
65	CÁLCULOS DE PARÂMETROS 1 valores fixos: d, w e Raio (mm)	CÁLCULOS DE PARÂMETROS 1 valores fixos: d, w e Raio (mm)
68	CÁLCULOS DE PARÂMETROS 2 valores fixos: d, w e Raio (mm) Valores Pré-calculados: b, b_2, H, L (mm) Calcular: H, w_1 e θ	CÁLCULOS DE PARÂMETROS 2 valores fixos: d, w e Raio (mm) Valores Pré-calculados: b, b_2, H, L (mm) Calcular: w_1 e θ
69	$X^w = h \cdot \tan(\theta)$ $Y^w = h \cdot \tan(\theta) \cdot \sin(\theta)$ $Z^w = h \cdot \tan(\theta)$	$X^w = \sin(\theta) \cdot h \cdot \tan(\theta)$ $Y^w = \cos(\theta) \cdot h \cdot \tan(\theta)$ $Z^w = h$
75	Figura 7-1 Exemplo de configuração para os	Figura 7-1 Exemplo de configuração para os

...referente aos cálculos dos parâmetros.
Estas equações encontram-se no apêndice A.
A. Como os casos foram simulados, já se sabe os valores finais esperados para todas as variáveis envolvidas, então, as equações do apêndice A servem para provar que elas estão corretas para cada caso, o que pode ser visto pelo erro final obtido.

Figura 5-12 Esquema para o cálculo da altura H para os casos de 7 a 12



Substituir a Figura 5-12 pela figura abaixo:

Página	Original (onde lê-se)	Correção (alterar para)
99	...A mostra o mapa... ...Na não foi considerada...	...A Figura 8-15a mostra o mapa... ...Na Figura 8-15b não foi considerada...
107	...apareça próximos as extremidades...	...apareça próximo as extremidades...
109	BOVISIO, Emanuele.	BOVISIO, E.
110	CHAIMOWICS, CAMPOS, Estimação de Visual de Distâncias na Navegação de Robôs Móveis. 4º SBAI - Simpósio Robôs Móveis. 4º SBAI - Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, p.482-486, SP, 08-10 de Setembro de 1999. CHAIMOWICZ, L.; SANTOS, M. F. M. Estimação Visual de Distâncias na Navegação de Robôs Móveis. SBAI - Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, p.482-486, São Paulo, 08-10 de setembro de 1999.	CHAIMOWICZ, L.; CAMPOS, M. F. M. Estimação Visual de Distâncias na Navegação de Robôs Móveis. 4º SBAI - Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, p.482-486, São Paulo, 08-10 de setembro de 1999.
111	HO, Teresa T.; ZHANG Hong; ...	HO, T. T.; ZHANG H.; ...

Página 96: Eliminar a Figura 8-11, pois ela é igual a figura 6-3. Eliminar as equações (8.3), (8.4) e (8.5), pois elas são iguais as equações (6.3), (6.4) e (6.5), respectivamente.

casos 1 e 10	casos 1 e 10	casos 10 e 1
Figura 7-2 Exemplo de configuração para os casos 2 e 9	Figura 7-2 Exemplo de configuração para os casos 2 e 9	Figura 7-2 Exemplo de configuração para os casos 9 e 2
Figura 7-3. Exemplo de configuração para os casos 3 e 11	Figura 7-3. Exemplo de configuração para os casos 3 e 11	Figura 7-3 Exemplo de configuração para os casos 11 e 3
...problema: Saberchegou-se a conclusão... ...extendidas... ...referentes...	...problema: Saberchegou-se a conclusão... ...extendidas... ...referentes...	...problema: saber... ...chegou-se à conclusão... ...extendidas... ...referentes...
96	Com os valores de h , til e pan , pode-se calcular as coordenadas da câmera XW, YW, ZW : ...A Figura 8-122...	Com os valores de h , til e pan , pode-se calcular as coordenadas globais da câmera X^w, Y^w e Z^wA Figura 8-12...

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	TELEOPERAÇÃO DE ROBÔS MÔVEIS: CONCEITO.....	1
1.2	CALIBRAÇÃO DE CÂMERAS: CONCEITO.....	3
1.3	OBJETIVOS.....	4
1.4	JUSTIFICATIVAS.....	6
1.5	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	7
2	TELEOPERAÇÃO DE ROBÔS MÔVEIS.....	9
3	CALIBRAÇÃO DE CÂMERAS.....	15
3.1	O MODELO DA CÂMERA.....	21
3.2	COORDENADAS GLOBAIS 3D E COORDENADAS DA IMAGEM 2D.....	28
3.3	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA.....	30
3.3.1	Parâmetros Extrínsecos.....	31
3.3.2	Parâmetros Intrínsecos.....	31
4	MÉTODO DE CALIBRAÇÃO DA CÂMERA.....	33
4.1	RELAÇÃO ENTRE UM PADRÃO CIRCULAR E A IMAGEM NO PLANO.....	35

APÊNDICES

9	CONCLUSÕES.....	105
8.2	RESULTADOS EXPERIMENTAIS.....	96
8.1	OTIMIZAÇÃO DO MÉTODO DE CALIBRAÇÃO PROPOSTO.....	86
8	OTIMIZAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO E RESULTADOS.....	86
7	RESULTADOS TEÓRICOS.....	74
6	IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO.....	63
5.3	CONSIDERAÇÕES PARA O CÁLCULO DA ALTURA H	59
5.2	DEFINIÇÃO DOS CASOS.....	55
5.1.3	Situação 3.....	51
5.1.2	Situação 2.....	48
5.1.1	Situação 1.....	43
5.1	ANÁLISE DAS SITUAÇÕES EM RELAÇÃO AO EIXO ÓPTICO DA CÂMERA.....	42
5	DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DE CALIBRAÇÃO.....	42
4.2	POSSÍVEIS POSIÇÕES DO EIXO ÓPTICO DA CÂMERA.....	36

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 3-1 EXEMPLO DE UM PADRÃO DE CALIBRAÇÃO..... 19

FIGURA 3-2 GEOMETRIA DE UM MODELO BÁSICO DE CÂMERA..... 23

FIGURE 3-3 OS 4 PASSOS DA TRANSFORMAÇÃO DAS COORDENADAS GLOBAIS PARA AS COORDENADAS DA IMAGEM NO COMPUTADOR..... 30

FIGURA 4-1 ESQUEMA DAS DUAS POSIÇÕES DO ROBÔ EM PERSPECTIVA..... 34

FIGURA 4-2 ESQUEMA DAS DUAS POSIÇÕES DO ROBÔ..... 34

FIGURA 4-3 RELAÇÃO GEOMÉTRICA ENTRE UM PADRÃO CIRCULAR E A IMAGEM NO PLANO..... 35

FIGURA 4-4 EIXO ÓPTICO ESTÁ A DIREITA DAS DUAS POSIÇÕES DO ROBÔ (CASO 1)..... 36

FIGURA 4-5 EIXO ÓPTICO ESTÁ A ESQUERDA DAS DUAS POSIÇÕES DO ROBÔ (CASO 2)..... 37

FIGURA 4-6 EIXO ÓPTICO ESTÁ NO MEIO DAS DUAS POSIÇÕES DO ROBÔ (CASO 3)..... 37

FIGURA 4-7 EIXO ÓPTICO ESTÁ A ESQUERDA DAS DUAS POSIÇÕES DO ROBÔ E TAMBÉM DO EIXO VERTICAL DA CÂMERA (CASO 4)..... 37

FIGURA 4-8 EIXO ÓPTICO ESTÁ A ESQUERDA E DEPOIS A DIREITA DAS DUAS POSIÇÕES DO ROBÔ E AS POSIÇÕES ESTÃO A ESQUERDA E A DIREITA DA LINHA VERTICAL DA CÂMERA (CASO 5 E CASO 6)..... 38

FIGURA 4-9 EIXO ÓPTICO ESTÁ NO MEIO DAS DUAS POSIÇÕES DO ROBÔ, MAS À ESQUERDA E DEPOIS À DIREITA DA LINHA VERTICAL DA CÂMERA (CASO 7 E CASO 8)..... 38

FIGURA 4-10 EIXO ÓPTICO ESTÁ A DIREITA DAS DUAS POSIÇÕES DO ROBÔ E ESTAS ESTÃO A ESQUERDA DA LINHA VERTICAL DA CÂMERA (CASO 9)..... 39

FIGURA 4-11 EIXO ÓPTICO ESTÁ A ESQUERDA DAS DUAS POSIÇÕES DO ROBÔ E ESTAS ESTÃO A ESQUERDA DA LINHA VERTICAL DA CÂMERA (CASO 10)..... 39

FIGURA 4-12 EIXO ÓPTICO ESTÁ NO MEIO DAS DUAS POSIÇÕES DO ROBÔ E ESTAS ESTÃO A ESQUERDA DA LINHA VERTICAL DA CÂMERA (CASO 11).....	39
FIGURA 4-13 EIXO ÓPTICO ESTÁ A DIREITA DAS DUAS POSIÇÕES DO ROBÔ E TAMBÉM DO EIXO VERTICAL DA CÂMERA (CASO 12).....	40
FIGURA 4-14 REPRESENTAÇÃO DOS ÂNGULOS <i>TILT</i> E <i>PAN</i> DA CÂMERA.....	40
FIGURA 5-1 A PROJEÇÃO DO EIXO DA ELIPSE ESTÁ ENTRE O EIXO DA ELIPSE E A LINHA HORIZONTAL.....	43
FIGURA 5-2 ESQUEMA PARA O CÁLCULO DA PROJEÇÃO DO EIXO DA ELIPSE 1.....	44
FIGURA 5-3 ARRANJO PARA O CÁLCULO DE K.....	45
FIGURA 5-4 ESQUEMA PARA O CÁLCULO DA PROJEÇÃO DO ROBÔ.....	47
FIGURA 5-5 VALORES OBTIDOS PARA SEREM UTILIZADOS NA RELAÇÃO GEOMÉTRICA.....	48
FIGURA 5-6 A PROJEÇÃO DO EIXO DA ELIPSE ESTÁ ACIMA DO EIXO DA ELIPSE E DA LINHA HORIZONTAL.....	49
FIGURA 5-7 ESQUEMA PARA O CÁLCULO DA PROJEÇÃO DO EIXO DA ELIPSE.....	49
FIGURA 5-8 A PROJEÇÃO DO EIXO DA ELIPSE ESTÁ ACIMA DO EIXO DA ELIPSE E DA LINHA HORIZONTAL.....	51
FIGURA 5-9 ESQUEMA PARA O CÁLCULO DA PROJEÇÃO DO EIXO DA ELIPSE.....	52
FIGURA 5-10 RELAÇÃO GEOMÉTRICA.....	54
TABELA 5-1 DEFINIÇÃO DOS CASOS.....	56
FIGURA 5-11 ESQUEMA PARA O CÁLCULO DA ALTURA <i>H</i> PARA OS CASOS DE 1 A 6.....	59
FIGURA 5-12 ESQUEMA PARA O CÁLCULO DA ALTURA <i>H</i> PARA OS CASOS DE 7 A 12.....	59
TABELA 5-2 EQUAÇÕES DA ALTURA <i>H</i> PARA TODOS OS CASOS.....	60
FIGURA 6-1 ESTRUTURA DOS PROGRAMAS.....	65
FIGURA 6-2 PROCEDIMENTO GERAL.....	67

69	FIGURA 6-3 REPRESENTAÇÃO DAS COORDENADAS GLOBAIS
71	FIGURA 6-4 MAPA VIRTUAL
75	FIGURA 7-1 EXEMPLO DE CONFIGURAÇÃO PARA OS CASOS 1 E 10
76	FIGURA 7-2 EXEMPLO DE CONFIGURAÇÃO PARA OS CASOS 2 E 9
77	FIGURA 7-3. EXEMPLO DE CONFIGURAÇÃO PARA OS CASOS 3 E 11
78	FIGURA 7-4 EXEMPLO DE CONFIGURAÇÃO PARA OS CASOS 4 E 12
79	FIGURA 7-5 EXEMPLO DE UMA CONFIGURAÇÃO PARA O CASO 5
80	FIGURA 7-6 EXEMPLO DE UMA CONFIGURAÇÃO PARA O CASO 6
81	FIGURA 7-7 EXEMPLO DE UMA CONFIGURAÇÃO PARA O CASO 7
82	FIGURA 7.1. EXEMPLO DE UMA CONFIGURAÇÃO PARA O CASO 8
84	TABELA 7-1. RESULTADOS DOS CASOS E SEUS RESPECTIVOS SINAIS
88	FIGURA 8-1. REPRESENTAÇÃO DA PERSPECTIVA DO PONTO A
89	FIGURA 8-2 REBATIMENTO DO PLANO GEOMETRAL
90	FIGURA 8-3 REPRESENTAÇÃO PERSPECTIVA LINEAR
91	FIGURA 8-4 PONTO P NO MAPA VIRTUAL
91	FIGURA 8-5 PONTO D NO MAPA VIRTUAL
92	FIGURA 8-6 PONTOS DE CONTATO ENTRE AS RETAS VERTICAIS
94	FIGURA 8-7 PONTO M E M' NO MAPA NIRTUAL
94	FIGURA 8-8 EXTRAPOLAÇÃO DAS EQUAÇÕES VERTICAIS E HORIZONTAIS
95	FIGURA 8-9 TRAÇADO DAS LINHAS VERTICAIS
95	FIGURA 8-10 MAPA VIRTUAL COM E SEM INCLINAÇÃO DAS POSIÇÕES 1 E 2
96	FIGURA 8-11 REPRESENTAÇÃO DA ALTURA E DOS ÂNGULOS DA CÂMERA

FIGURA 8-12 IMAGENS DO ROBÔ NAS 4 POSIÇÕES	97
FIGURA 8-13 IMAGENS PROCESSADAS	98
FIGURA 8-14 MAPA VIRTUAL INICIAL	99
FIGURA 8-15 MAPA VIRTUAL. A) COM INCLINAÇÃO, B) SEM INCLINAÇÃO ENTRE POSIÇÕES I E 2	100

LISTA DE TABELAS

TABELA 5-1 DEFINIÇÃO DOS CASOS.....	56
TABELA 5-2 EQUAÇÕES DA ALTURA H PARA TODOS OS CASOS.....	60
TABELA 7-1. RESULTADOS DOS CASOS E SEUS RESPECTIVOS SINAIS.....	84
TABELA 8-1 RESULTADOS OBTIDOS.....	101
TABELA 8-2 PARÂMETROS DE CALIBRAÇÃO.....	102
TABELA 8-3 RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DAS EQUAÇÕES.....	103
TABELA 8-4 COMPARAÇÃO ENTRE OS VALORES DE H , PAN E $TILT$	104

RESUMO

Existe uma necessidade crescente do homem em realizar tarefas complexas operadas remotamente e estender sua inteligência e experiência a aplicações distantes. Operações submarinas, de minas, nucleares, cirúrgicas e uma larga variedade de outros trabalhos perigosos e delicados são exemplos de operações complexas que podem ser efetuadas a distância. Para controlar o movimento dos robôs a distância utiliza-se a teleoperação onde o robô é monitorado de um computador para realizar os movimentos pré-definidos e, para se ter acesso ao local de trabalho do robô são utilizadas câmeras de vídeo e outros sensores. Dependendo do ambiente, pode-se utilizar uma ou mais câmeras fixas no local, ou ainda, uma câmera acoplada ao próprio robô. Com a câmera fixa o robô opera em tempo real e tem certa autonomia para desviar obstáculos e evitar colisões. Para qualquer aplicação onde exista uma relação entre a imagem 2D e a realidade 3D, deve ser feita a calibração da câmera, que corresponde a obtenção dos seus parâmetros intrínsecos (características geométricas e ópticas da câmera) e extrínsecos (a posição e a orientação da câmera em relação a um sistema de coordenadas globais).

O trabalho apresenta um novo método de calibração explícita de câmeras de vídeo fixas para aplicações em teleoperação de robôs móveis. Através do processamento de imagens capturadas pela câmera do robô, cujo formato é cilíndrico, obtêm-se os dados necessários para determinar a posição e a orientação da câmera em relação a um sistema de coordenadas globais. O método não utiliza nenhum padrão de referência ou marcas no

robô e basea-se no movimento do robô, sendo dados o ângulo e a distância a ser percorrida.

Para calibração da câmera pelo método proposto são necessárias duas posições conhecidas de um robô com as respectivas imagens, a distância focal, a distância entre as duas posições e o raio do robô. Os dados obtidos da imagem são os eixos maior e menor e as inclinações das elipses (projeções do robô nas imagens). Considerando todas as possíveis posições relativas do eixo óptico da câmera são necessárias várias análises para se obter as equações matemáticas em cada situação. Para refinamento do método utilizam-se quatro imagens provenientes dos vértices do quadrado (cujas dimensões são conhecidas) formado pelo deslocamento do robô, das quais são calculadas as coordenadas centrais das quatro posições do robô. A partir destas coordenadas constrói-se o mapa virtual do ambiente de trabalho, através do qual pode-se obter uma relação métrica entre os pixels das imagens, a altura e os ângulos de inclinação da câmera. Conhecendo-se estes valores é possível determinar as coordenadas de qualquer posição do robô no ambiente de trabalho. Utilizando-se as quatro imagens, o método pode ser adaptado para qualquer formato de robô.

Os resultados obtidos comprovam a eficiência das equações desenvolvidas para calibração da câmera.

ABSTRACT

There is a growing need for humans to be able to perform complex, large-scale remote operations, mining, nuclear power maintenance, surgery and a wide variety of other hazardous and delicate operations are examples of applications that would benefit from an increased capability to perform complex remote operations. To control the movement of teleoperated robots, the robot is monitored by computer to accomplish the prior-defined movements and, to have access to the place of the robot's work, video cameras and other sensors are used. Depending on the environment, it can be used one or more fixed cameras in the working space or a camera mounted the robot. With the fixed camera, the robot can operate in real time and it has certain autonomy to deviate obstacles and to avoid collisions. For any application where a relationship exists between the 2D image and the reality 3D, it is necessary to calibrate the camera that comprehends the obtaining of its intrinsic (geometric and optical characteristics of the camera) and extrinsic parameters (the position and the orientation of the camera in relation to a system of global coordinates).

The work presents a new method of explicit calibration of fixed video cameras for applications in mobile robots' teleoperation. Through the processing of images captured by the robot's camera, whose format is cylindrical, it is possible to obtain the data to determine the position and the orientation of the camera in relation to a system of global

coordinates. The method doesn't use any reference pattern or marks in the robot and it is based on the robot's movement, being given the angle and the distance to be navigated.

To camera's calibration by the proposed method are necessary robot's two well-known positions with the respective images, the focal distance, the distance between two positions and the robot's ray. The obtained data of the image are: the larger and smaller axes and the inclinations of the ellipses (the robot's projection in the image). Considering all the possible relative positions of the camera optical axis, it is necessary several analyses to obtain the mathematical equations in each situation. For refinement of the method four images are used from of vertexes of the square or the rectangle (whose dimensions are known) formed by the robot's displacement, in which the central coordinates of the robot's four positions are calculated. Starting from these coordinates, the virtual map of the work environment is built, which can be obtained a metric relationship among the pixels of the images, the camera's height and angles of inclination. Being known these values, it is possible to determine the coordinates of any robot's position in its work environment. Being used four images, the method is easily adapted for any robot format.

The obtained results verify the efficiency of the equations developed for calibration of the camera.

1 INTRODUÇÃO

Com o aumento do número de robôs industriais, a robótica está se tornando uma área da engenharia com identidade própria. O avanço e a redução de custos da tecnologia de sensores viabiliza, cada vez mais, a construção de robôs com maior capacidade de realimentação de dados sobre o ambiente de trabalho, aumentando, desta maneira, a acuidade de posicionamento, a velocidade de operação e a flexibilidade dos mesmos. É consensualmente aceito que a visão computacional é o mais poderoso e flexível meio de realimentação de informações disponíveis sobre o ambiente e que tem dispendido um considerável esforço em pesquisa e desenvolvimento para a área (KABAYAMA; TRABASSO, 1999).

1.1 Teleoperação de Robôs Móveis: Conceito

Os robôs móveis podem ser autônomos (navegação autônoma), semi-autônomos (teleoperados e com um certo grau de autonomia para tomar decisões) ou completamente teleoperados (totalmente teleoperado pelo homem e sem nenhum grau de autonomia para tomar decisões).

Segundo CHAIMOWICS; CAMPOS (1999), A navegação autônoma de um robô móvel envolve a sua movimentação de um determinado ponto a outro em seu espaço de trabalho sem a intervenção de um operador externo. Para que isso seja possível é necessário que o robô seja capaz de desviar obstáculos e identificar a sua posição

absoluta ou relativa dentro do ambiente. A complexidade da navegação irá depender de uma série de fatores [CHATILA (1995)]: o tamanho do robô, sua cinemática, o seu poder de computação e os tipos de sensores envolvidos. O ambiente pode ser conhecido ou desconhecido, estático ou dinâmico, com terreno plano ou acidentado, interno ou externo. Além disso, a navegação em si pode possuir algumas restrições, tais como, a escolha do menor caminho ou a execução deste em um tempo limitado. Devido a esta grande variedade de parâmetros e situações, diversas abordagens para o problema de navegação autônoma podem ser encontradas.

Uma questão importante é se a navegação pode ser baseada somente em um planejamento global. O planejamento global pode ser entendido pela determinação de como agir para satisfazer os objetivos baseando-se em previsões dos possíveis estados futuros. O problema dessa abordagem é que é difícil determinar com exatidão quais serão os estados futuros. Mesmo em um ambiente completamente conhecido e estático os movimentos executados pelo robô não são perfeitos devido ao deslizamento das rodas, as imperfeições no terreno, etc. O acúmulo destes pequenos erros traz incertezas ao processo, o que pode impedir o robô de cumprir o seu objetivo. A solução para isso é a utilização de sensores, de forma que o robô possa identificar a sua posição e detectar a presença de obstáculos permitindo o planejamento e o controle mais efetivo de suas ações.

Chama-se de teleoperação semi-autônoma o caso no qual o robô opera em tempo real e possui certa autonomia para decisões locais tais como desviar obstáculos e evitar colisões. O caso no qual o ser humano comanda todas as ações do robô em tempo real é

conhecido como sistema completamente teleoperado, nestes casos, a câmera pode estar fixa no ambiente de trabalho do robô.

1.2 Calibração de Câmeras: Conceito

Calibração de câmera, segundo LANG (1971) é um processo preliminar para calcular os parâmetros físicos da câmera (parâmetros extrínsecos), como centro da imagem, posição e orientação, etc. Este tipo de calibração é conhecida como Calibração Explícita e é de uso universal em todos os aspectos de visão computacional. Alguns parâmetros ópticos e geométricos internos da câmera (parâmetros intrínsecos) podem ser calibrados para uso em medições 3D, esta é a Calibração Implícita.

Aplicações: Medidas 3D, monitoramento de segurança e mover objetos em trajetórias. Quando a calibração é usada para medidas de objetos no espaço 3D, é necessário que o sistema de visão conheça suas informações de *status* sobre a sua localização e orientação. A calibração pode ser normalmente considerada como um problema de determinar ambos, os parâmetros intrínsecos da câmera, por exemplo, a distância focal, a distorção das lentes, o fator de escala da imagem; e os parâmetros extrínsecos, como, a localização e a orientação da câmera no espaço 3D.

passos:

- Um objeto de referência com forma geométrica simples ou padrão é colocado em uma certa posição;

- A relação entre os parâmetros extrínsecos e as coordenadas dos objetos de calibração é estabelecida de acordo com os princípios de projeção perspectiva;
- Os parâmetros da câmera são finalmente obtidos por um algoritmo iterativo.

1.3 Objetivos

Num sistema de teleoperação de robôs móveis, o robô deve reconhecer e identificar o seu ambiente de trabalho. Uma das formas pela qual ele pode obter isso é através de uma câmera pelo processamento das imagens obtidas de seu ambiente. Em situações onde envolve a relação entre a imagem 2D (advinda da câmera) e a realidade 3D (ambiente de trabalho do robô) é necessário que a câmera seja calibrada.

Existem dois tipos de calibração de câmeras: a que calcula os parâmetros intrínsecos como, por exemplo, a distância focal e o coeficiente de distorção das lentes e a que calcula os parâmetros extrínsecos da câmera. Estes fornecem a posição e a orientação da câmera em relação a um sistema de coordenadas globais.

A câmera deve estar calibrada para que o operador tenha um referencial da posição e da orientação do robô em relação ao sistema de coordenadas considerado. Com isto é possível, através das imagens 2D coletadas pela câmera calibrada, saber com certa precisão a posição em que se encontra o robô possibilitando ao operador determinar as novas posições nas quais o robô deve se deslocar.

O objetivo deste trabalho é apresentar um novo método para calibrar os parâmetros extrínsecos da câmera, ou seja, calcular os ângulos pan e tilt e a altura H da câmera. Não

se considera, neste trabalho a distorção das lentes, por se tratar de calibração extrínseca. Adotou-se inicialmente o robô em duas posições, onde a distância entre elas é conhecida (W). Estas duas posições são capturadas por uma câmera fixa no laboratório e as imagens destas são processadas para se obter os valores do eixo maior e do eixo menor da elipse, bem como, suas inclinações e posicionamentos. Nas imagens o robô aparece de forma elíptica porque o seu formato é cilíndrico. São dados a distância focal d e o raio R do robô. Como a posição do eixo óptico da câmera é desconhecida, é necessário fazer várias análises, considerando-se as possíveis posições do eixo óptico, para se obter as equações matemáticas devidas para cada situação.

Para refinamento do método e elaboração de um mapa virtual que represente o ambiente de trabalho são necessárias 4 imagens provenientes dos vértices de um quadrado formado pelo movimento do robô, cujas distâncias são conhecidas. Estas imagens são processadas e são calculadas as posições centrais do robô, estas servirão de base para a elaboração do mapa virtual que mostra o robô nas devidas posições previamente calculadas após o processo de calibração da câmera.

Tendo os parâmetros da câmera calibrados, pode-se obter a localização do robô através das coordenadas 2D da imagem. Estas informações sobre a localização do robô são imprescindíveis para a teleoperação do robô, pois, o operador do robô utiliza-se delas para decidir a melhor trajetória a ser seguida.

1.4 Justificativas

Calibrar uma câmera fixa no ambiente tendo como dados as imagens obtidas de um robô móvel e como parâmetros conhecidos o diâmetro do robô, a distância entre as posições percorridas pelo robô e a distância focal da câmera é o grande desafio deste trabalho. Grande parte dos trabalhos desenvolvidos na área de calibração de câmeras utiliza um objeto padrão de calibração de formas variadas como círculos, elipses, linhas, pontos, pontos de referência 3D, objetos de calibração planar arbitrário, papel quadrículado 2D, cartas padrões, entre outros, como pode ser visto na revisão bibliográfica no capítulo 3. O trabalho proposto não utiliza nenhum padrão de calibração e nem marcas de referência no robô. A câmera, a princípio, abrange a área de atuação do robô e está direcionada a ele. Não se tem informações a priori a respeito do eixo ótico da câmera e nem da posição do robô.

Calibrada a câmera é possível determinar uma métrica que relaciona os pixels da câmera e as correspondentes medidas em milímetros, o que possibilita determinar com certa precisão as posições do robô em seu ambiente de trabalho.

Dentre a bibliografia estudada, o artigo que serviu de base para o desenvolvimento do trabalho proposto foi escrito por HAN;HEE (1992). Eles descreveram um método para calcular os parâmetros da câmera usando um padrão circular, onde são determinados os ângulos pan, tilt e swing, e a distância da câmera ao ponto de referência no sistema de coordenadas globais. Só que a direção da câmera (equivalente ao eixo ótico da câmera) é ajustada manualmente.

1.5 Organização do Trabalho

Os capítulos 2 e 3 apresentam uma ampla revisão bibliográfica a respeito de teleoperação de robôs móveis e de calibração de câmeras, respectivamente.

No capítulo 4 está descrito detalhadamente o método de calibração apresentado neste trabalho, mostrando a relação geométrica entre um padrão circular e a sua correspondente imagem no plano e , também, as possíveis posições do eixo óptico da câmera.

Baseado em uma equação básica apresentada no capítulo 4 e nas diversas posições do eixo óptico, foram feitas várias análises para se chegar a uma equação geral para o cálculo dos ângulos pan e tilt e da altura H , em função dos valores dos eixos maior a e do eixo menor b da elipse, da distância focal d , do raio do robô R e da distância entre as duas posições do robô W . Este assunto é tratado no capítulo 5.

O capítulo 6 apresenta a implementação das equações apresentadas no capítulo 5 para a realização dos objetivos propostos neste trabalho.

Para validar as equações apresentadas no capítulo 5, foram criadas situações hipotéticas, simulando cada caso apresentado. Os dados obtidos nestas situações foram lançados nas equações, comprovando a validade de cada uma delas. Estas situações hipotéticas com seus devidos resultados podem ser vistas no capítulo 7 e as equações estão apresentadas no Apêndice A.

O capítulo 8 apresenta as descrições completas para elaboração do mapa virtual, bem como, a parte experimental e os resultados obtidos, seguido da Conclusão, Referências Bibliográficas, Bibliografia Recomendada e Apêndice.

2 TELEOPERAÇÃO DE ROBÔS MÓVEIS

A união da inteligência humana, das informações tecnológicas modernas, do controle remoto e de sistemas inteligentes autônomos é necessária para realizar operações remotas complexas a distância. CONWAY et al (1990) criaram o termo Tecnologia Teleautônoma, ou Teleautomação, para conceituar os métodos que produzem ações de inteligência a distância. Teleautomação vem do controle autônomo, em que une inteligência humana e ações convenientes.

Pesquisas no campo de robôs móveis atraíram grande atenção na década passada devido as suas largas aplicações industriais. A teleoperação de robôs móveis pode ser realizada num meio desconhecido ou parcialmente conhecido, em terrenos acidentados, em superfícies planetárias, num complexo e previamente meio interno desconhecido, entre outros. A seguir são apresentados alguns trabalhos desenvolvidos nesta área que ilustram a teleoperação de robôs móveis nos meios acima descritos.

MARTIAL; TAKEO (1990) definem o robô móvel como um veículo que navega autonomamente através de um meio desconhecido ou parcialmente conhecido e desenvolveram um trabalho referente a percepção do robô. O objetivo da percepção em robôs móveis é transformar os dados do sensor em representações que possam ser usadas pelos componentes de decisão do sistema. Existem muitas trajetórias de monitoramento para percepção de robôs móveis, incluindo sistemas de câmeras simples, sonares e estereo passivo.

Para percorrer terrenos acidentados, um sistema de locomoção deve ajustar o comprimento dos pés dos robôs móveis para que estes possam se firmar sobre possíveis apoios. HODGINS; RAIBERT (1991) exploram a tarefa de controlar o comprimento dos pés no contexto de um robô dinâmico que ativa sozinho os balanços por ele executados. Foram explorados 3 métodos para controlar o comprimento dos pés: a velocidade, a altura e a duração do contato com a terra.

No caso de superfícies planetárias, alguns exemplos de robôs teleoperados podem ser vistos no trabalho de GAT et al (1994), onde os autores descrevem uma série de robôs desenvolvidos para demonstrar a viabilidade de se pesquisar o controle do comportamento de pequenos robôs em superfícies planetárias. Robôs planetários devem possuir um certo grau de autonomia, entretanto, pequenos robôs podem suportar somente pequenos computadores. Todos os robôs descritos usam 8-bit, 1-MIP microprocessador entre 4 K e não mais que 40 K de memória, e sensores extremamente simples. Apesar destas limitações, eles são confiáveis em navegação autônoma e em manipulação, tanto em meios internos como externos.

KRIEGMAN *et al* (1989) desenvolveram um robô móvel que funciona autonomamente num complexo e previamente meio interno desconhecido. O robô móvel unidirecional usa visão estereo, odometria e para-choques para inicializar um modelo global simbólico. Para isto, é necessário encontrar as correspondências estereo através de uma linha epipolar simples. As incertezas nos dados do sensor são representadas pela distribuição normal multi-variável e são reduzidas pelo uso do filtro de Kalman Extendido. AYACHE; FAUGERAS (1989) também utilizam o filtro de Kalman Extendido para construir e

atualizar as representações 3D do meio de um robô móvel que usa visão passiva como sua principal modalidade sensorial, (EKF) e, ainda, discutem noções de representação de geometria mínima para as linhas 3D, os planos e para os movimentos rígidos.

Para controlar e monitorar um veículo remoto em sistemas de teleoperação é necessário uma interface onde o usuário possa integrar a tela, o teclado e o mouse permitindo o monitoramento de todas as informações. VEIGA (1991) descreve o projeto e as principais características de uma interface homem-máquina. O controle do veículo é feito através de uma estação de trabalho, de onde é possível controlar a velocidade e a direção do movimento. Dois tipos de interfaces estão disponíveis ao operador. Numa delas o usuário seleciona algumas setas com o mouse para mover o veículo em diferentes direções e define a velocidade desejada. No outro tipo, o usuário move o veículo segundo o movimento do mouse. Maiores detalhes podem ser vistos no trabalho de SHERIDAN (1989), onde ele apresenta as necessidades atuais, as aplicações presentes e futuras e os problemas nas pesquisas, particularmente em relação aos aspectos da interação homem-máquina e faz uma revisão dos desenvolvimentos históricos relevantes em telerobótica.

A seguir serão apresentados alguns problemas típicos ocorridos em sistemas teleautônomos e os estudos realizados para solucioná-los.

Para superar os tempos de espera devido a telemetria e a propagação de sinais, CONWAY *et al* (1990) introduziram novos conceitos que permitem desincronizar os quadros do tempo e da posição entre o controle do usuário local e o dispositivo remoto sendo controlado.

Falhas na navegação de robôs móveis são frequentemente causadas pelos erros na localização do robô relativo ao seu meio. TAKEEDA *et al* (1994) exploram a ideia que estes erros podem ser consideravelmente reduzidos pelo planejamento das trajetórias, analisando o robô através de posições onde as características pertinentes ao meio possam ser monitoradas. Propõem um planejador que usa um pré-computador para gerar trajetórias e minimizar as expectativas de erros.

Para gerenciar os desperdícios nas tarefas de restauração do meio, ANDERSON (1995) desenvolveu uma arquitetura SMART (*Sequential Modular Architecture for Robotics and Teleoperation*), através da qual consegue integrar os diferentes dispositivos escravos (grandes braços hidráulicos, manipuladores móveis), os sensores (ultra-som e de força) e os dispositivos de entrada (força/torque e geração de trajetória autônoma).

Com o objetivo de estimar visualmente as distâncias para os robôs móveis CHAIMOWICZ; CAMPOS (1999) apresentaram um método, no qual utilizam o tamanho de um marco artificial em imagens capturadas por uma câmera sem calibração. Com a aproximação do robô, este marco é visualizado maior ou menor conforme o robô se aproxima ou se afasta dele, com isso, pode-se estimar a distância que separa o robô deste marco. Uma das principais vantagens do método é a sua velocidade, tornando-o adequado para aplicações de navegação em tempo real.

A teleoperação de robôs móveis pode também ser feita através da internet com os seguintes objetivos: entretenimento, telemanufaturing, treinamento, exploração de minas, operação de veículos submarinos operados remotamente, etc. Alguns estudos realizados em

teleoperação de robôs via Internet, bem como, alguns dos projetos de teleoperação disponíveis na rede podem ser vistos abaixo:

- Uso de java para teleoperação baseado na internet (HO 98);
- Interface para o controle remoto de um robô móvel através da internet (BOVTSIO);
- Sistema de teleoperação de multi-robôs utilizando a Internet (SUZUKI *et al* 98);
- Implementação em uma plataforma unix de uma interface para controle remoto do robô abb irb utilizando a Internet como via de controle (PAULINYI 98);
- Simulador de robô - Encarnação
http://www.antares.com.br/~ifenc/robotics/robot_simulator/index_p.html
- Visualização, simulação e controle de um sistema robótico usando a Internet (CALKIN 98).

Alguns dos projetos de teleoperação disponíveis na rede:

- Mercury Project: Escavar objetos em uma caixa de areia (GOLDBERG, MASCHA 94);
- Diversões recreativas (CARTER 97);
- Australian Telerobot: Demolir e estocar blocos de madeira (TAYLOR 95);
- Carnegie Science Center: controle remoto da garra para mover peças em um jogo de damas (BACKES, THARP 97);
- Tele-garden: manutenção de jardim (GOLDBERG 97);
- Interactive Model Railroad: <http://tr-vs.informatik.uni-ulm.de/tr/LayoutControl.html>, controle de dois trens;

- Museum Exhibits: <http://digimuse.usc.edu/robot>, visitar um museu controlando uma camera;
- Puma Paint Project: sistema remoto para pintura (DEPASQUALE, LEWIS 98);
- Eyebot: espionagem <http://www.dma.nl/eyebot> ;
- Robo-toy (ATKINSON *et al* 98);
- Wits Project (BACKES *et al* 98);
- Khep on the Web (SAUCY, MONDADA 97).

3 CALIBRAÇÃO DE CÂMERAS

Calibração de câmeras num contexto de visão de máquina 3D, segundo TSAI (86), é o processo para determinar a geometria interna da câmera e as suas características ótimas (parâmetros intrínsecos) e/ou a posição 3D e a orientação da câmera para um certo sistema de coordenadas globais (parâmetros extrínsecos), com os seguintes propósitos:

- Obter informações 3D a partir das coordenadas da imagem. Há dois tipos de informações que podem ser obtidas e estas diferem devido as várias aplicações:

- As informações 3D envolvem a localização, o objetivo ou as características do objeto. Isto é, se o objeto for um ponto característico (mecanicamente marcado e iluminado por um laser), a calibração da câmera possibilita determinar as coordenadas da imagem no computador através de um raio sobre este ponto no espaço 3D. Com as vistas obtidas de duas câmeras ou uma câmera em duas posições, um ponto do objeto pode ser determinado pela interseção de dois raios. Ambos, os parâmetros intrínsecos e extrínsecos, precisam ser calibrados. Alguns exemplos de aplicações são medições dimensionais, montagem automática de componentes mecânicos e eletrônicos, acompanhamento de objetos (*object tracking*), calibração de robôs e análise da trajetória.

- Informações 3D envolvem a posição e a orientação de câmeras em movimento (isto é, uma câmera presa ao robô) relativo a um sistema de

coordenadas objetivado. Aplicações incluem calibração de robôs com a câmera montada no seu manipulador, e AGV.

- Obtendo as coordenadas da imagem 2D no computador a partir de imagens 3D. Na inspeção de um modelo guiado ou em aplicações de montagem usando visão de máquinas, uma hipótese da situação atual pode ser verificada ou confirmada observando se as coordenadas da imagem do objeto estão conforme as hipóteses. Feito isto, é necessário ter ambos os parâmetros intrínsecos e extrínsecos da câmera calibrados, então as coordenadas da imagem 2D podem ser propriamente preditas informando a localização 3D do objeto.

O processo de calibração da câmera, segundo GROSKEY; TAMBURINO (1990), analisa as medidas do sistema da câmera (pixels) para se obter os pontos de referência no sistema de coordenadas 3D. Nesta correspondência, o processo de calibração consiste de duas fases independentes:

1ª remover as distorções geométricas da câmera;

2ª usar uma transformação linear entre as coordenadas da câmera e as coordenadas dos pontos de referência conhecidos projetados sob uma imagem plana.

Na 2ª fase é concebido um modelo genérico que inclui 12 variáveis extrínsecas e 4 parâmetros intrínsecos. As variáveis extrínsecas incluem uma matriz de rotação que descreve a orientação do eixo óptico e os deslocamentos do ponto focal da câmera num sistema de coordenadas global. As variáveis intrínsecas corrigem os desvios do eixo

óptico e dos eixos das coordenadas da camera. Existem 3 importantes ângulos de rotação que são: *swing*, *pan* e *till*.

Muitos trabalhos tem sido desenvolvidos na área de calibração de câmeras abrangendo os mais diversos e diversificados métodos. Alguns métodos usados para obter as equações de estimativa dos parâmetros da câmara utilizam objetos de calibração de formas variadas como círculos, elipses, linhas, pontos, pontos de referência 3D, objetos de calibração planar arbitrário, papel quadriculado 2D, cartas padrões, entre outros. A seguir são apresentados alguns estudos desenvolvidos nesta área que ilustram os métodos de calibração que utilizam os objetos acima citados.

HAN; RHEE (1992) descrevem um método para calcular os parâmetros da câmara usando um padrão circular. O método por eles proposto usa equações simples para determinar os ângulos *pan*, *till* e *swing*, e a distância da câmara ao ponto de referência no sistema de coordenadas globais. Comparado com métodos atuais, este é um dos mais simples e precisos, sendo até trivial. O método consiste de um círculo de raio arbitrário com 2 furos que é usado como padrão para a calibração. O furo central indica a posição central do círculo e o outro, o furo direcional, indica informações direcionais. O círculo central é posicionado na origem do sistema de coordenadas global, e o furo direcional sobre o eixo X_w (eixo X do sistema de coordenadas da base). Então, a direção da câmara (equivalente ao eixo óptico da câmara) é ajustada manualmente até que o furo central coincida com o centro da imagem na tela, que é definido como as coordenadas do quadro da imagem da interseção do eixo óptico com o plano da imagem. O objetivo é calcular os parâmetros a partir da imagem do círculo. Outro exemplo do uso do padrão circular pode ser visto em MA (1993).

Elipse como objeto de calibração foi o padrão utilizado no trabalho de TAREL; GAGALOWICZ (1994) onde medidas precisas são obtidas na imagem para elaborar o modelo da câmara. A técnica, baseada na superfície fotométrica, permite computar, robusta e precisamente, os momentos da elipse na imagem, e usar estes como entrada para o algoritmo de estimação. As equações utilizadas permitem a concepção de um método de calibração baseado não só na correspondência entre os pontos mas também na utilização dos momentos de uma elipse. Estas equações são parcialmente estendidas para modelos incluindo distorções. Eles apresentam e discutem os testes com imagens sintéticas e reais para diferentes modelos de câmeras.

Métodos que utilizam linhas podem ser vistos em CAPRILE; TORRE (1990) e VAILLANT (1990). Com os pontos, segundo a modelagem e o critério de adequação, o problema pode ser formulado linearmente ou não, com ou sem restrições. Isto conduz aos métodos analíticos TSAI (1986) e TOSCANI (1987), ou aos algoritmos iterativos CHAUMETTE; RIVES (1990).

HONG; YANG (1993) desenvolveram um algoritmo para calibração de câmara usando um ponto de referência 3D, onde a idéia principal do método é que a relação entre os parâmetros de duas câmeras, (o ângulo *pan*, o *till* e as coordenadas globais de um dado ponto de calibração 3D), possa ser estabelecida pelos princípios da projeção perspectiva e ópticos geométricos, e a solução das equações transcendentais possa ser obtida por algoritmos iterativos para calibrar os parâmetros da câmara.

Utilizando um objeto de calibração planar arbitrário, CHEN et al (1991) apresentaram uma metodologia para estimar os parâmetros da câmara. As coordenadas do objeto de

calibração em relação a câmera sofre uma combinação arbitrária de transformações em termos de 3 rotações e 3 translações, e então o objeto é gravado numa imagem. Todas as possíveis vistas do objeto de calibração são geradas para construir uma biblioteca. Ao obter-se uma imagem do objeto de calibração, esta corresponderá a uma das vistas armazenadas. Quando uma imagem é apresentada, são feitas comparações com as da biblioteca, procurando outra idêntica, ou aproximadamente idêntica a esta imagem.

Uma carta padrão simples de calibração composta de linhas retas paralelas é usada como referência para calibração em NOMURA *et al* (1992). Seu artigo apresenta um método simples e útil de calibração para câmera de TV com lentes de alta distorção. Os parâmetros a serem calibrados são o comprimento focal efetivo, a largura de um pixel com uma imagem plana, o centro de distorção da imagem e o coeficiente de distorção. Alguns parâmetros são eliminados com o ajuste preciso da carta de calibração e com a utilização da baixa distorção próximo ao centro da imagem. Com isso, o número de parâmetros desconhecidos a serem calibrados são reduzidos drasticamente, possibilitando uma calibração simples e útil.

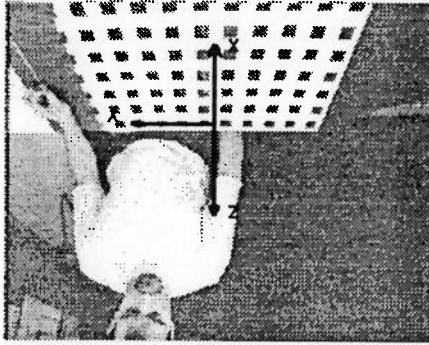


Figura 3-1 Exemplo de um padrão de calibração

A Figura 3-1 mostra o exemplo de um padrão de calibração. Pode-se ter calibração simultânea de um robô e de uma câmera acoplada a ele. Um exemplo desta pode ser visto em ZHUANG *et al* (1995). Eles desenvolveram um procedimento para calibração simultânea do robô e da câmera monocular. Baseado primeiro na calibração da câmera e depois na do robô, o algoritmo soluciona os parâmetros cinemáticos do robô e da câmera em um único estágio, então, elimina a propagação de erros e melhora a sensibilidade a ruídos. Apresentam, também, um modelo de erro relacionando os resíduos da imagem e os desvios dos parâmetros cinemáticos. Outro exemplo de calibração de um robô (*scara*) com um câmera acoplada pode ser visto em ZHUANG *et al* (1996), onde os parâmetros intrínsecos necessitam ser repetidamente calibrados para reconstruir as poses do robô em suas várias configurações.

Os três próximos trabalhos tratam da calibração onde são consideradas as distorções da lente e da câmera.

LI, LAVEST (1996) tratam alguns dos problemas na calibração, como a determinação do ponto principal de *zoom*, a modelagem e a calibração das distorções da lente e do comprimento focal, e também alguns aspectos práticos. Apresentam resultados experimentais na calibração de câmeras com *zoom*, com o foco e a abertura controlados por computador.

Relacionado à distorção nas lentes na calibração de câmeras, SHIH *et al* (1994) investigaram o efeito de negligenciar a distorção das lentes em calibração de câmeras, e apresentaram uma análise teórica sobre a precisão de calibração. Derivaram uma aproximação para prever os erros em função de alguns fatores que incluem: o número

de pontos de calibração, a observação dos erros de pontos em imagens 2D, o coeficiente de distorção de lentes radiais, o tamanho da imagem e a resolução.

Considerando a distorção da câmera, WENG *et al* (1992) apresentaram um modelo com campos de distorção da câmera, chamados de: radial, descentralizado e de prisma fino. O procedimento de calibração proposto consiste de dois passos:

1º os parâmetros de calibração são estimados usando uma solução baseada no modelo da câmera sem distorção.

2º os parâmetros estimados no 1º passo são melhorados iterativamente através de uma otimização não-linear, levando em conta as distorções da câmera.

A auto calibração não utiliza nenhum objeto de referência e usa, diretamente, a imagem do meio. E, teoricamente possível, assumir que as coordenadas do ponto principal de cada câmera sejam conhecidas. ZHANG *et al* (1996) discutem o problema da auto-calibração e a reconstrução métrica (além do fator escala) a partir do movimento desconhecido de um equipamento estéreo que não pode ser calibrado. Ainda na área de auto calibração, MA (1996) apresentou uma técnica para calibrar a geometria *head-eye* (manipulador com câmera acoplada) e os parâmetros intrínsecos.

3.1 O Modelo da Câmera

Com o modelo da câmera determina-se a transformação entre as coordenadas da imagem da câmera e o sistema de coordenadas 3D. Segundo ALLEN (1987), isto pode ser feito de duas formas: uma delas é descobrir os parâmetros do modelo da câmera e a

outra é obter experimentalmente a transformação de calibração a partir de uma série de pontos conhecidos na cena e na imagem.

Para GONZALEZ (1987), a aproximação a ser feita para modelar uma câmera é alinhar a câmera e os sistemas de coordenadas globais aplicando uma série de transformações. Depois disso, aplicam-se as transformadas perspectivas para se obter as coordenadas do plano para qualquer ponto global. Em outras palavras, primeiro reduz-se o problema para arranjos geométricos antes de se aplicar as transformadas perspectivas. O arranjo geométrico pode ser obtido de diversas formas, pode-se assumir a seguinte sequência de passos:

- Deslocamento do centro do pedestal a partir da origem;

- *Pan* no eixo x;

- *Tilt* no eixo z;

- Deslocamento do plano de origem da imagem com relação ao centro do pedestal.

A Figura 3- mostra um modelo de câmera com os parâmetros a serem calibrados [TSAI(1986)]:

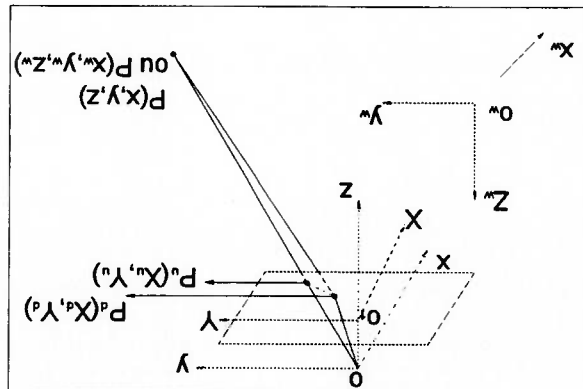


Figura 3-2 Geometria de um modelo básico de câmera

(x_w, y_w, z_w) é a coordenada 3D do ponto P do objeto no sistema de coordenadas global 3D.

(x, y, z) é a coordenada 3D do ponto P no sistema de coordenadas da câmera, no qual estão centrados o ponto O e o centro óptico, com o eixo z sendo o mesmo do eixo óptico.

(X, Y) é o sistema de coordenada da imagem centrada em O_i (interseção do eixo óptico z e o plano frontal da imagem) e paralelo aos eixos x e y.

f é a distância entre o plano central da imagem e o centro óptico.

(X'', Y'') é a coordenada da imagem de (x, y, z) se um modelo da câmera *pin-hole* é usado.

(X_d, Y_d) é a coordenada da imagem atual que difere de (X'', Y'') devido a distorção das lentes.

(X_f, Y_f) a coordenada usada no computador, é o número de pixels para imagem discreta no quadro de memória, parâmetros adicionais precisam ser especificados (e calibrados) que relacionem as coordenadas da imagem no plano frontal da imagem para o sistema de coordenadas da imagem no computador. As demais transformações de (x_w, y_w, z_w) para (X_f, Y_f) estão descritos na **Error! Reference source not found.**, bem como, a transformação na forma analítica para os 4 passos citados abaixo.

Os 4 passos para transformação das coordenadas 3D em coordenadas da câmera:

Passo 1: Transformação do corpo rígido a partir do sistema de coordenadas globais do objeto (x_w, y_w, z_w) para o sistema de coordenadas 3D da câmera (x, y, z) .

$$(3.1) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix} + T$$

Onde R é a matriz de rotação 3×3 e T é o vetor de translação

$$(3.2) \quad R \equiv \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix}$$

$$(3.3) \quad T \equiv [T_x \quad T_y \quad T_z]^T$$

Parâmetros a serem calibrados: R e T

Deve-se notar que a transformação do corpo rígido de um sistema de coordenadas cartesianas (x_w, y_w, z_w) para outro (x, y, z) é única se a transformação é definida como rotação 3D ao redor da origem (definido como três rotações separadas, yaw , $pitch$ e $roll$, ao redor do eixo passando pela origem) seguido da translação 3D. Muitas das técnicas existentes para calibração de câmeras definem a transformação como translação seguido de rotação.

Passo 2: Transformação das coordenadas da câmera 3D (x, y, z) para coordenada da imagem ideal (não distorcida) (X_u, Y_u) usando projeção perspectiva com geometria da câmera *pin-hole*.

$$X_u = f \frac{x}{z} \tag{3.4}$$

(3.4)

$$Y_u = f \frac{y}{z} \tag{3.5}$$

(3.5)

Parâmetros a serem calibrados: comprimento focal efetivo f

Passo 3: Distorção radial nas lentes

$$X_d + D_x = X_u \tag{3.6}$$

(3.6)

$$Y_d + D_y = Y_u \tag{3.7}$$

(3.7)

Onde (X_d, Y_d) é a imagem distorcida, ou seja, a coordenada da imagem real no plano da imagem.

$$D_x = X_d(k_1r^2 + k_2r^4) \quad (3.8)$$

$$D_y = Y_d(k_1r^2 + k_2r^4) \quad (3.9)$$

$$r = \sqrt{X_d^2 + Y_d^2} \quad (3.10)$$

Parâmetros a serem calibrados: coeficientes de distorção: k_1 e k_2

A modelagem da distorção das lentes pode ser encontrada no MANUAL DE FOTOGRAFIA (1980). Existem dois tipos de distorções: radiais e tangenciais. Para cada tipo de distorção, uma série infinita é necessária. Entretanto, a experiência mostra que para aplicações de visão de máquina industrial, somente as distorções radiais precisam ser consideradas, e somente dois termos são necessários. Qualquer modelo mais elaborado poderia atrapalhar e também poderia causar instabilidade numérica.

Passo 4: Coordenada da Imagem Real (X_d, Y_d) para calcular a transformação da coordenada da imagem (X_f, Y_f)

$$X_f = s_x p_x^{-1} X_d + C_x \quad (3.11)$$

$$Y_f = p_y^{-1} Y_d + C_y \quad (3.12)$$

Onde:

(X_f, Y_f) : linha e coluna # do pixel da imagem no quadro de memória do computador

(C_x, C_y) : coordenada da imagem no computador com a origem no plano da imagem

$$d_x^x = d_x \cdot N_x / N_f$$

(3.13)

d_x : distância entre os elementos do sensor adjacente na direção X

d_y : distância entre os elementos do sensor adjacente na direção Y

N_{cx} : número de elementos do sensor na direção X

N_{fy} : número de pixels na linha

Parâmetros a serem calibrados: incerteza no fator de escala da imagem s_x e a origem da

imagem (C_x, C_y)

Se uma câmera do tipo Vidicon for usada, ao invés de uma estado sólido CCD ou CID sensores discretamente distribuídos, então, o elemento do sensor ou o pixel mencionado acima pode ser armazenado como cada elemento de resolução individual na área de recepção. Neste caso, N_{cx} é igual a N_{fx} . Desde que a imagem seja varrida linha por linha, e a máxima resolução seja usada, a distância entre o pixels adjacentes na direção y é justamente a mesma que em d_y , distância centro a centro entre os elementos do

sensor adjacente CCD na direção y . Portanto, a equação 3.12 é a relação direta entre Y_d e Y_f . Normalmente, para fazer a varredura de uma câmera de TV uma forma de onda analoga é gerada para cada linha da imagem de ordem zero. Então ela é amostrada pelo computador em N_{fx} . Assim, chega-se a conclusão que:

$$X_f = \left(X_d / p_x \right) \cdot \left(N_{fx} / N_{fx} \right) + C_x \quad (3.14)$$

Entretanto, isto não é normalmente verdade para CCD ou qualquer dispositivo de imagem, cujo tempo hardware para fazer a varredura e digitalizar não é perfeito. Um parâmetro de incerteza adicional deve ser introduzido.

3.2 Coordenadas Globais 3D e Coordenadas da Imagem 2D

Combinando os últimos 3 passos, as coordenadas do computador (X, Y) estão relacionadas à (x, y, z) , as coordenadas 3D do ponto do objeto no sistema de coordenadas da câmera, pelas seguintes equações:

$$s_x^{-1} p_x X + s_x^{-1} p_x X (k_1 r^2 + k_2 r^4) = f \frac{z}{x} \quad (3.15)$$

$$p_y Y + p_y Y (k_1 r^2 + k_2 r^4) = f \frac{z}{y} \quad (3.16)$$

Onde:

$$X = X_f - C_x \quad (3.17)$$

$$Y = Y_f - C_y \quad (3.18)$$

$$r = \sqrt{(s^x - d^x X)^2 + (d^y Y)^2} \quad (3.19)$$

Substituindo (3.1) em (3.15) e (3.16) fica:

$$s^x - d^x X + s^y Y + d^x X (k^1 r^2 + k^2 r^4) = f \frac{r^1 x^w + r^2 y^w + r^3 z^w + T^x}{r^7 x^w + r^8 y^w + r^9 z^w + T^z} \quad (3.20)$$

$$d^y Y + d^y Y (k^1 r^2 + k^2 r^4) = f \frac{r^4 x^w + r^5 y^w + r^6 z^w + T^y}{r^7 x^w + r^8 y^w + r^9 z^w + T^z} \quad (3.21)$$

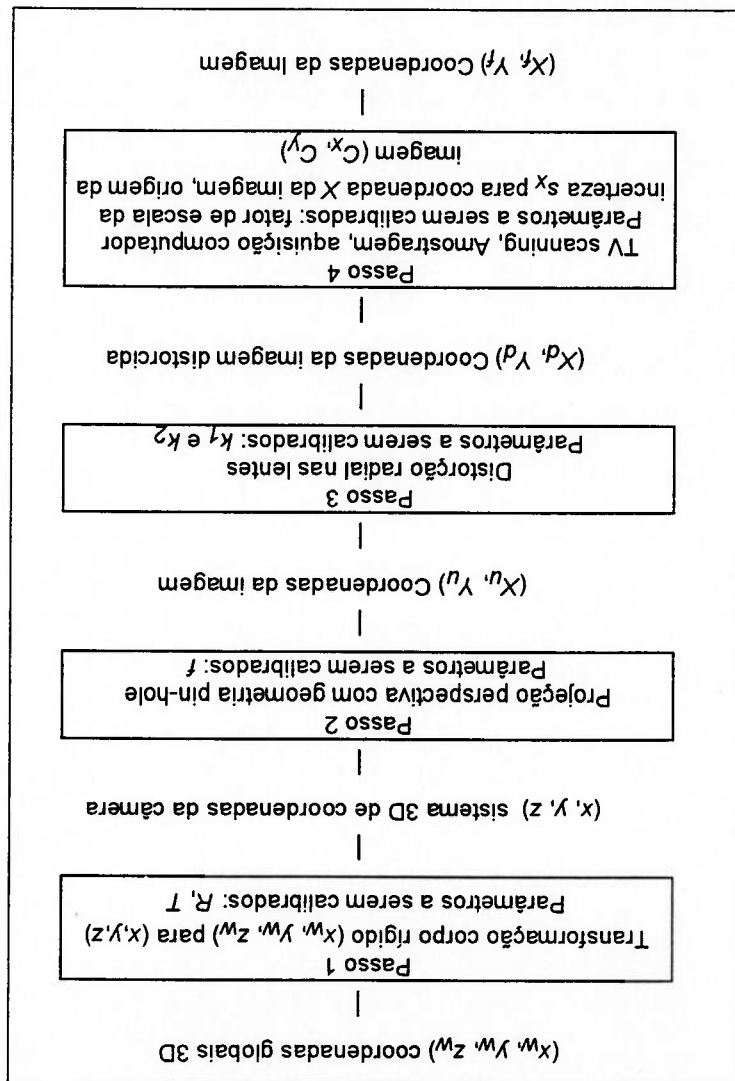


Figure 3-1 Os 4 passos da transformação das coordenadas globais para as coordenadas da imagem no computador

3.3 Definição do Problema

O problema de calibração da câmera é computar os parâmetros intrínsecos e extrínsecos baseado no número de pontos cujas coordenadas do objeto no sistema de coordenadas

(x_w, y_w, z_w) sejam conhecidas, e cujas coordenadas da imagem (X, Y) sejam medidas. Os parâmetros usados na transformação (Error! Reference source not found.) podem ser categorizados em duas classes:

3.3.1 Parâmetros Extrínsecos

Os parâmetros do passo 1 da figura 2.2 para a transformação do sistema 3D de coordenadas globais do objeto para o sistema 2D de coordenadas da câmera centrado no centro óptico são chamados parâmetros extrínsecos. Existem 6 parâmetros extrínsecos: o ângulo de Euler yaw θ , pitch ϕ e o tilt ψ para rotação, e 3 componentes para o vetor de translação T . A matriz de rotação R pode ser expressa em função de θ, ϕ e ψ , como segue:

$$R = \begin{bmatrix} \sin \psi \cos \theta & -\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi \\ \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \theta \sin \phi & \cos \psi \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta & \sin \psi \cos \theta & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

3.3.2 Parâmetros Intrínsecos

Os parâmetros dos passos 2, 3 e 4 da figura 3.2 da transformação da coordenada 3D do objeto no sistema de coordenada da câmera para a coordenada da imagem no computador são chamados parâmetros intrínsecos. Existem 6 parâmetros intrínsecos: f : comprimento focal efetivo, ou a distância do plano da imagem ao centro de projeção k_1, k_2 : coeficientes de distorção das lentes

s_x : incerteza no fator de escala para x , devido à varredura e ao erro de aquisição na

cronometragem

(C_x, C_y) : coordenada da imagem no computador para a origem no plano da imagem.

4 MÉTODO DE CALIBRAÇÃO DA CÂMERA

A calibração da câmera consiste em determinar os ângulos de pan e tilt e a altura h da câmera. Para tanto adotou-se o procedimento de utilizar imagens de um robô cujas dimensões e formas são conhecidas e movimentá-lo de distâncias determinadas para, então, extrair-se equações que relacionam variáveis conhecidas com os parâmetros que se deseja determinar.

Adotou-se o robô em duas posições, onde a distância entre elas é conhecida (W). Estas duas posições são capturadas, uma de cada vez, por uma câmera fixa no laboratório e as imagens destas são processadas para se obter os valores do eixo maior e do eixo menor da elipse, bem como suas inclinações. Nas imagens o robô aparece de forma elíptica porque o seu formato é cilíndrico. São dados também a distância focal d e o raio R do robô.

Como a posição do eixo óptico da câmera é desconhecida, é necessário fazer várias análises, considerando-se as possíveis posições do eixo óptico. Na Figura 4-1 pode-se visualizar o robô na posição 1 e na posição 2 no ambiente de trabalho com a câmera posicionada na parede, bem como, a tela de projeção que mostra as projeções do robô. Neste caso, o centro óptico da câmera está direcionado a posição 1, mas como será definido mais adiante, o centro óptico pode estar direcionado para qualquer lugar no ambiente de trabalho. A Figura 4-2 apresenta um esquema para as duas posições do robô baseado na tela de projeções (a altura do robô não está representada), onde:

H é a altura da câmera; R é o raio do robô; W é a distância entre as duas posições do robô; L é a distância desde a câmera até a segunda posição do robô; D1 e D2 são as distâncias da câmera ao centro do sistema de coordenadas globais para a posição 1 e a posição 2 do robô, respectivamente; α_1 e α_2 são os comprimentos dos planos da imagem para a posição 1 e a posição 2 do robô, respectivamente e β é o ângulo entre a linha vertical abaixo da câmera e a linha máxima de inclinação da posição 1.

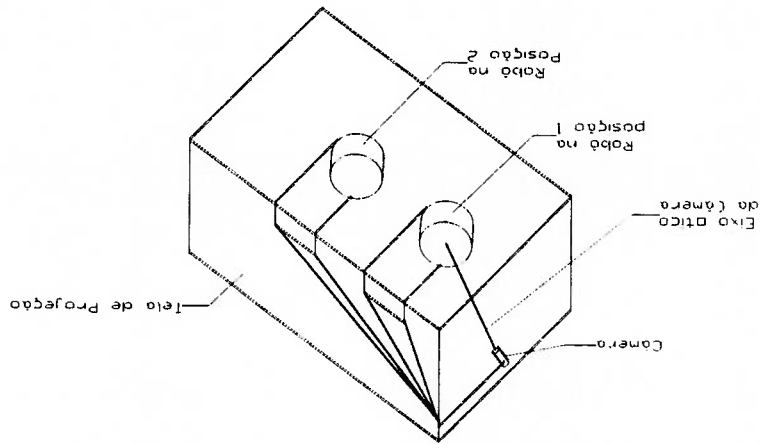


Figura 4-1 Esquema das duas posições do robô em perspectiva

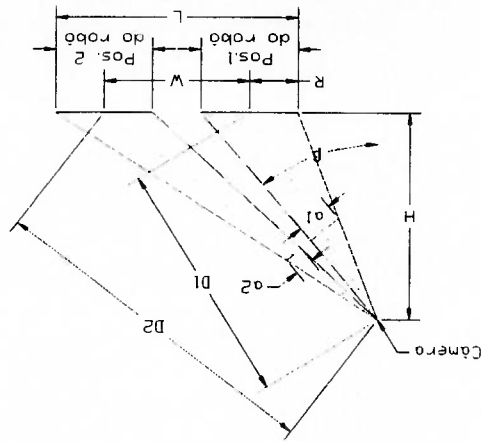


Figura 4-2 Esquema das duas posições do robô

Primeiramente será mostrada a relação geométrica básica entre um padrão circular e a correspondente imagem no plano, após serão mostradas as possíveis posições do eixo óptico e no próximo capítulo as correspondentes equações para cada uma delas.

4.1 Relação entre um Padrão Circular e a Imagem no Plano

As relações geométricas entre o padrão circular e a correspondente imagem no plano estão mostradas na Figura 4-3, baseada em HAN; RHEE (1992).

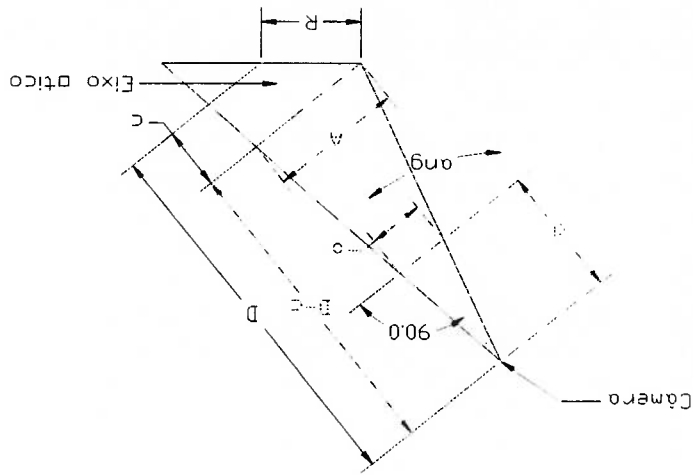


Figura 4-3 Relação geométrica entre um padrão circular e a imagem no plano

Note que o eixo óptico na Figura 4-3 é perpendicular a e a A, e neste caso, o ângulo da câmera é ang e d é a distância focal da câmera.

Da Figura 4-3 a seguinte relação geométrica é estabelecida:

$$\frac{a}{d} = \frac{D-c}{d} \quad (4.1)$$

A é o comprimento da projecção geométrica do objeto, paralelo a a . O comprimento do plano do objeto é $2R$; D é a distância da câmara ao centro do sistema de coordenadas globais; d é a distância entre o centro óptico e o plano da imagem; a é o comprimento do plano da imagem; c é a diferença entre D e a posição da projecção geométrica do objeto e ang é o ângulo de inclinação da câmara.

A equação 4.1 é a base para todas as relações desenvolvidas ao longo deste capítulo.

4.2 Possíveis Posições do Eixo Óptico da Câmera

As figuras abaixo mostram as possíveis posições para o eixo óptico da câmara, para cada uma delas esta é definida um caso, o que será visto mais adiante

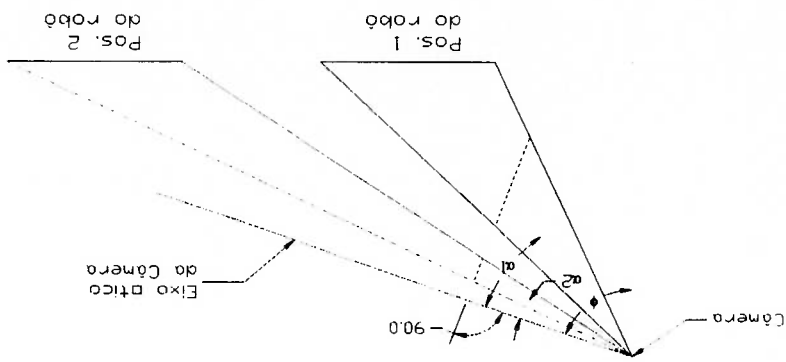


Figura 4-4 Eixo óptico esta a direita das duas posições do robô (Caso 1)

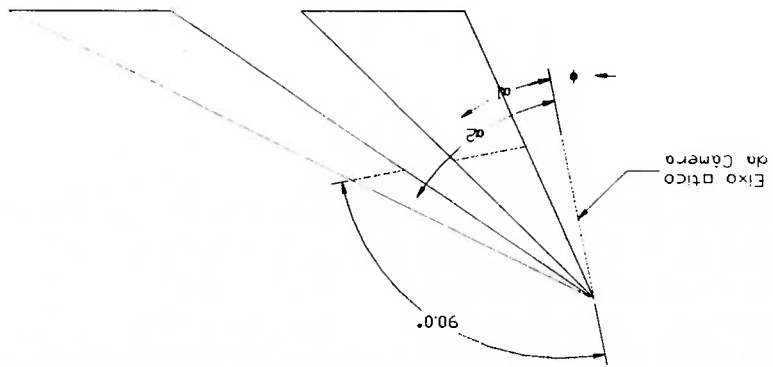


Figura 4-5 Eixo óptico está a esquerda das posições do robô (Caso 2)

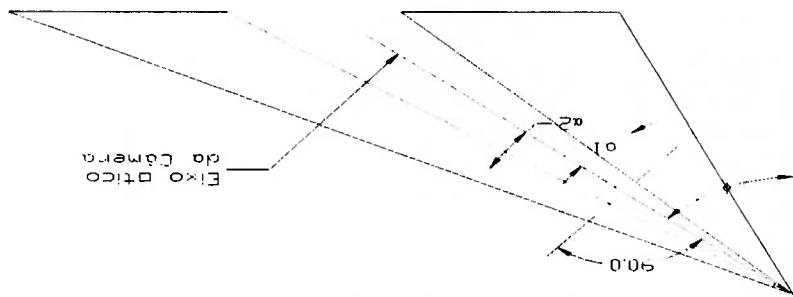


Figura 4-6 Eixo óptico está no meio das posições do robô (Caso 3)

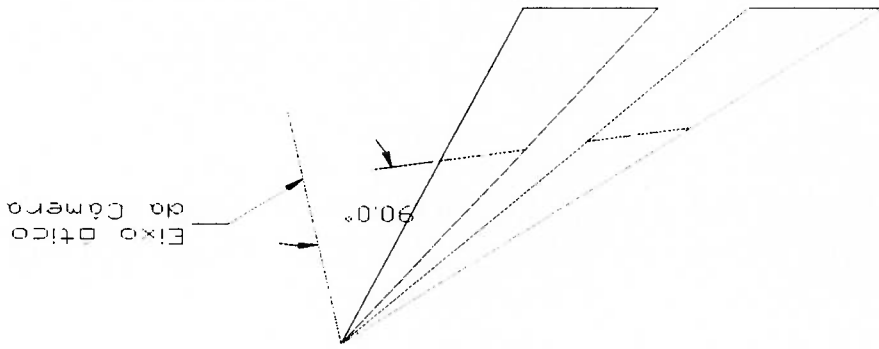


Figura 4-7 Eixo óptico está a esquerda das posições do robô e também do eixo vertical da câmera (Caso 4)

Figura 4-8 Eixo óptico está a esquerda e depois a direita das posições do robô

e as posições estão a esquerda e a direita da linha vertical da câmera (Caso 5 e

Caso 6)

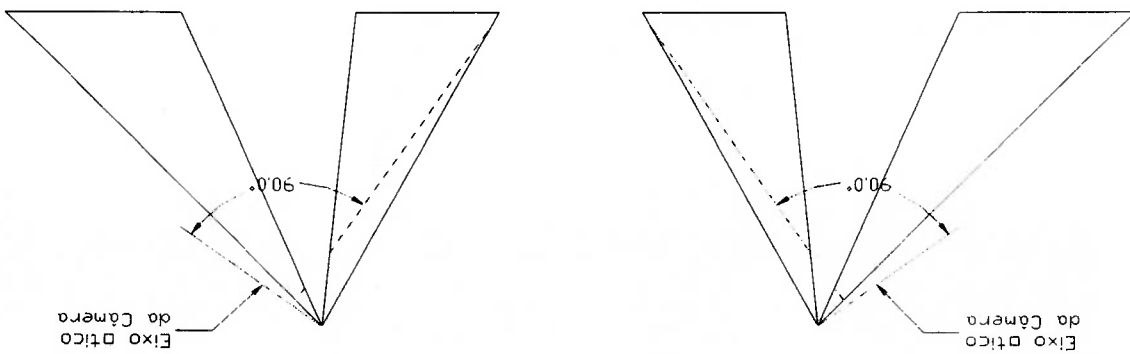
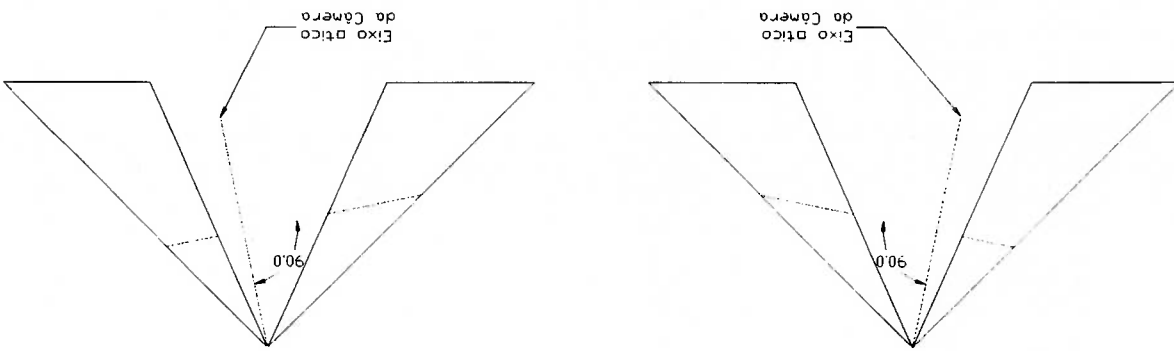


Figura 4-9 Eixo óptico está no meio das posições do robô, mas à esquerda e

depois à direita da linha vertical da câmera (Caso 7 e Caso 8)



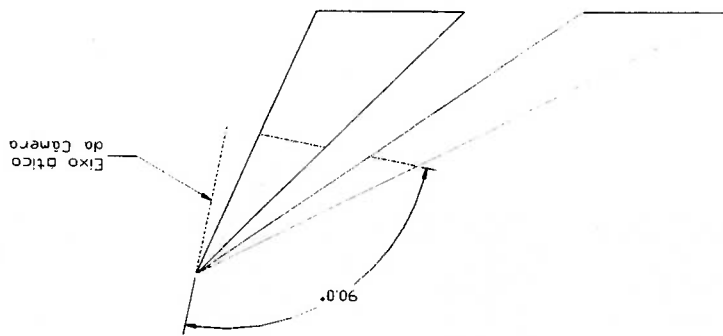


Figura 4-10 Eixo óptico está a direita das duas posições do robô e estas estão a esquerda da linha vertical da câmera (Caso 9)

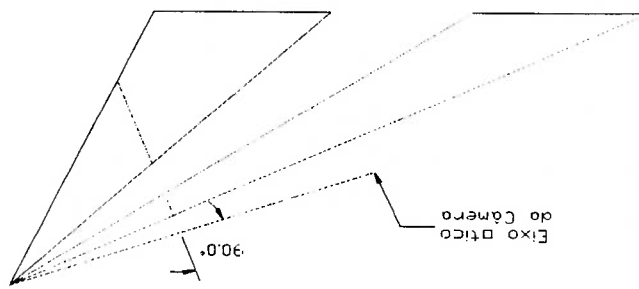


Figura 4-11 Eixo óptico está a esquerda das duas posições do robô e estas estão a esquerda da linha vertical da câmera (Caso 10)

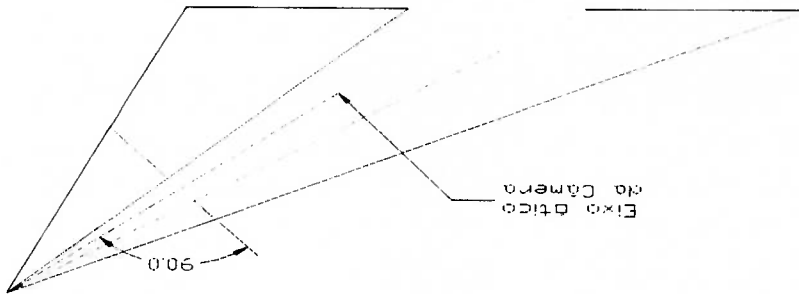


Figura 4-12 Eixo óptico está no meio das duas posições do robô e estas estão a esquerda da linha vertical da câmera (Caso 11)

Figura 4-13 Eixo óptico está a direita das duas posições do robô e também do eixo

vertical da câmera (Caso 12)

O ângulo que o eixo óptico da câmera forma com a linha vertical é o ângulo tilt (ϕ) e o ângulo que ele forma com a linha horizontal é o ângulo pan (θ). Os ângulos tilt e pan podem ser vistos Figura 4-13, bem como, o ângulo de abrangência de cada um deles.

Para o cálculo do ângulo tilt considera-se apenas os casos da Figura 4-4, Figura 4-5e Figura 4-6 e para o cálculo do ângulo pan consideram-se todas as figuras (4.4 a 4.12).

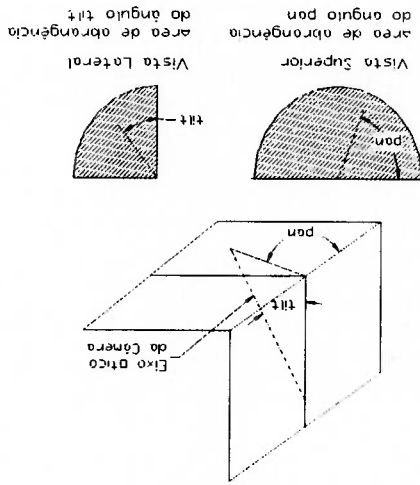


Figura 4-14 Representação dos ângulos tilt e pan da câmera

Com base na equação básica (4.1) e nas diversas posições do eixo óptico, foram feitas várias análises para se chegar a uma equação geral para o cálculo dos ângulos pan e tilt, da altura H e da distância do eixo vertical da câmara ao final da segunda posição do robô L, em função dos valores dos eixos maior a e do eixo menor b da elipse, da distância focal d, do raio do robô R e da distância entre as duas posições do robô w. Este assunto será tratado no capítulo 5.

5 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DE CALIBRAÇÃO

Este capítulo apresenta os passos desenvolvidos para a obtenção das equações para o cálculo dos ângulos *till* e *pan*, da altura *H* da câmera e da distância *L*. Como foi visto no capítulo anterior, o eixo óptico pode estar em diversas situações com relação as posições 1 e 2 do robô. Estas situações serão analisadas individualmente, pois, as equações diferem para cada uma delas.

No capítulo 4 foram apresentadas as possíveis posições do eixo óptico da câmera, onde cada representação gráfica mostrava um determinado caso. Para o ângulo *till* são 3 casos (Caso 1, 2 e 3) e para ângulo *pan* são 12 (Caso 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12).

5.1 Análise das Situações em Relação ao Eixo Óptico da Câmera

Para se aplicar a relação geométrica esboçada na equação 4.1, deve-se obedecer a perpendicularidade entre o eixo central da posição do robô e a linha de projeção da dimensão do eixo maior (ou menor) da elipse (*a* ou *b*). Bem como, a perpendicularidade entre o eixo central da posição do robô e a linha de projeção da dimensão da projeção do robô. Para se obter estas projeções várias análises trigonométricas foram desenvolvidas, para cada caso, o que será mostrado a seguir.

Analisando-se, trigonometricamente, as possíveis posições para o robô, conclui-se que existem três situações básicas, apresentadas a seguir, que o eixo óptico da câmera forma com as posições 1 e 2. A partir destas, é que são formuladas as equações para todas as configurações de posicionamento apresentadas no capítulo anterior.

5.1.1 Situação 1

O Eixo óptico está a Direita da Posição do Robô quando a Posição estiver a Direita do Eixo Óptico e o Eixo óptico está a Esquerda da Posição do Robô quando a Posição estiver a Esquerda do Eixo Óptico

O que caracteriza esta situação é que a projeção do eixo da elipse está entre o eixo da elipse e a linha horizontal, o que pode ser visto na Figura 5-1. Serão feitas as projeções tanto da dimensão do eixo da elipse, bem como, da dimensão do robô, para manter a perpendicularidade com o eixo central da posição do robô, possibilitando desta forma a utilização da equação (4.1).

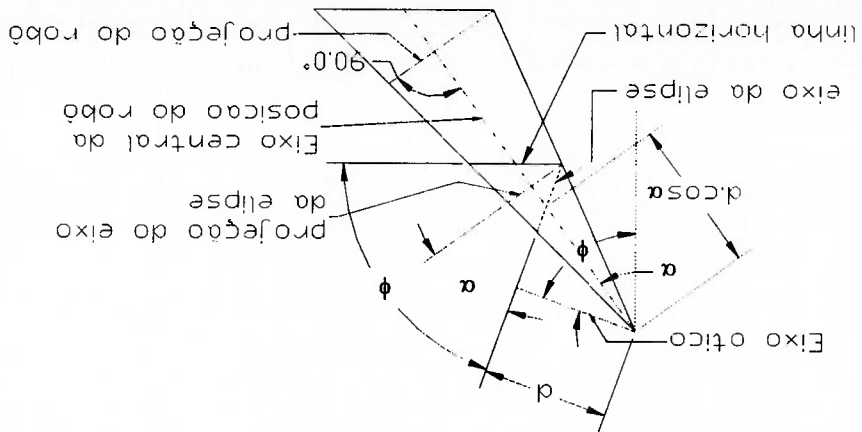


Figura 5-1 A projeção do eixo da elipse esta entre o eixo da elipse e a linha horizontal

Na Figura 5-1, ϕ é o ângulo *tilt*, mas a mesma representação é válida para o ângulo *pan* (θ). O ângulo α representa o quanto o eixo óptico está deslocado do eixo central da posição do robô. α é igual a zero ($\alpha=0$) quando o eixo óptico coincide com o eixo central da posição do robô. A projeção do eixo (maior e menor) da elipse é formada pela rotação do eixo (maior e menor) da elipse num ângulo α .

Para o cálculo da projeção do eixo da elipse (*pe*), pela Figura 5-2, nota-se que :

$$pe = b \cdot \cos \alpha + b \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{tg} \varepsilon \tag{5.1}$$

$$x = \frac{\text{tg} \alpha \cdot k \cdot \cos(\phi - \alpha)}{2} \tag{5.2}$$

$$dif = \text{tg} \varepsilon \cdot b \cdot \text{sen} \alpha \tag{5.3}$$

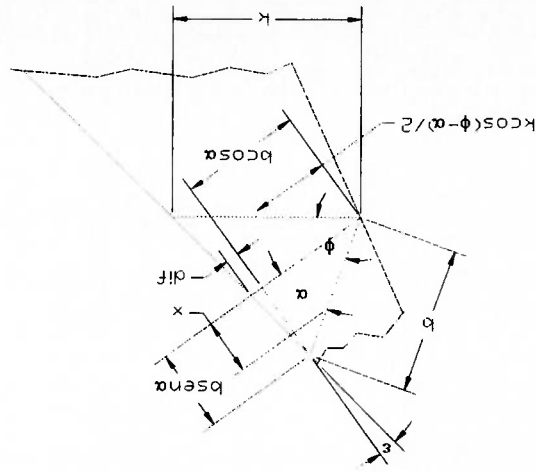


Figura 5-2 Esquema para o cálculo da projeção do eixo da elipse 1

A Figura 5-3 mostra o arranjo necessário para o cálculo de k .

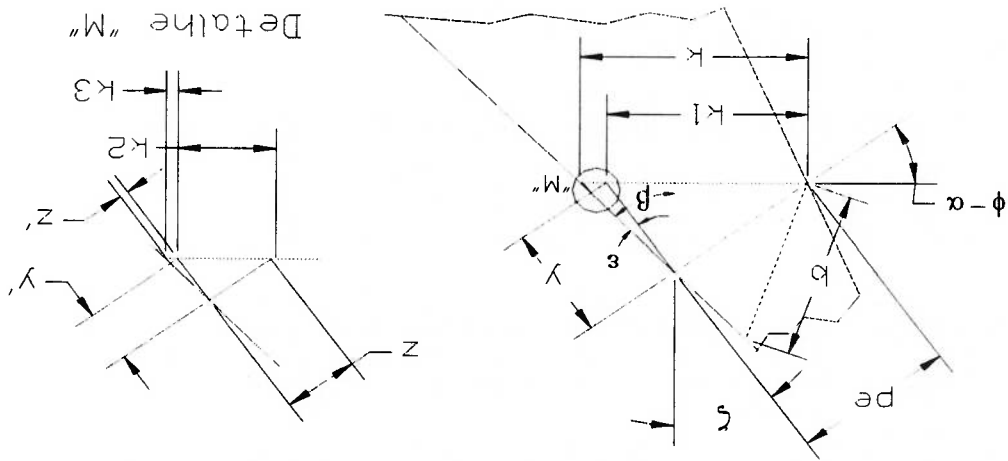


Figura 5-3 Arranjo para o cálculo de k

$$k = k_1 + k_2 + k_3 + \dots \quad (5.4)$$

$$k_1 = \frac{b \cdot \cos \alpha + dif}{\cos(\alpha + \phi)} \quad (5.5)$$

$$y = \text{tg}(\alpha + \phi) \cdot (b \cdot \cos \alpha - dif) \quad (5.6)$$

$$z = \text{tg} \epsilon \cdot y \quad (5.7)$$

$$\zeta - \beta = \epsilon \quad (5.8)$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{H}{L - W}\right) \quad (\text{para a posição I}) \quad (5.9)$$

$$(5.10) \quad \beta_2 = \arctg\left(\frac{H}{L}\right) \quad (\text{para a posição 2})$$

$$(5.11) \quad \zeta = \arctg\left(\frac{b \cdot \text{sen} \alpha}{b \cdot \text{cos} \alpha - \frac{b \cdot \text{cos} \phi}{\text{cos}(\phi - \alpha)}}\right)$$

$$(5.12) \quad \text{dif} = \text{tg} \varepsilon \cdot b \cdot \text{sen} \alpha$$

$$(5.13) \quad \alpha = \phi - \arctg\left(\frac{H}{L - W - R}\right) \quad (\text{para a Posição 1})$$

$$(5.14) \quad \alpha_2 = \phi - \arctg\left(\frac{H}{L - R}\right) \quad (\text{para a Posição 2})$$

$$(5.15) \quad k_2 = \frac{\text{cos}(\alpha + \phi)}{z}$$

$$(5.16) \quad y' = \text{tg}(\alpha + \phi) \cdot z$$

$$(5.17) \quad z' = \text{tg} \varepsilon \cdot y'$$

$$(5.18) \quad k_3 = \frac{\text{cos}(\alpha + \phi)}{z'}$$

$$(5.19) \quad y'' = \text{tg}(\alpha + \phi) \cdot z'$$

$$(5.20) \quad k = \frac{\text{cos}(\phi - \alpha)}{[b \cdot \text{cos} \alpha + \text{dif}] \cdot [1 + \text{tg} \varepsilon \text{tg}(\phi - \alpha) + \text{tg} \varepsilon^2 \text{tg}(\phi - \alpha)^2 + \dots]}$$

Para o cálculo da projeção do robô (pr), pela Figura 5-4, nota-se que:

$$pr = 2 \cdot R \cdot \cos(\phi - \alpha) - 2 \cdot R \cdot \text{tge} \cdot \text{sen}(\phi - \alpha) \quad (5.21)$$

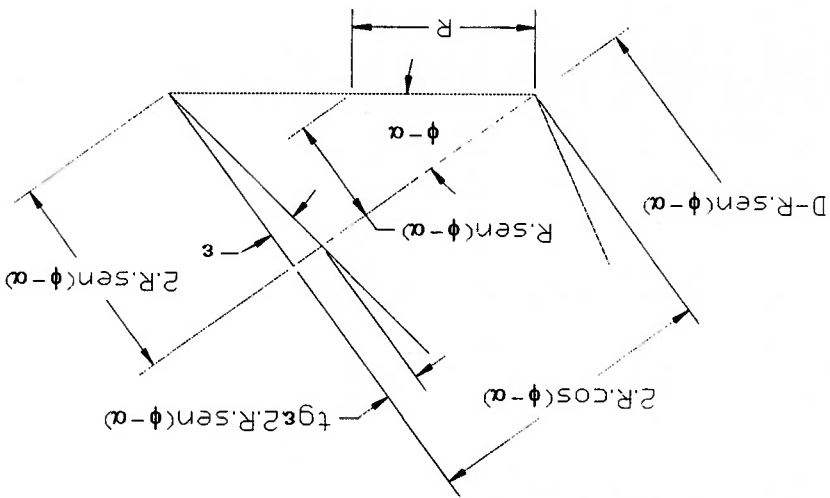


Figura 5-4 Esquema para o cálculo da projeção do robô

A Figura 5-5 mostra os valores obtidos para serem utilizados na relação geométrica.

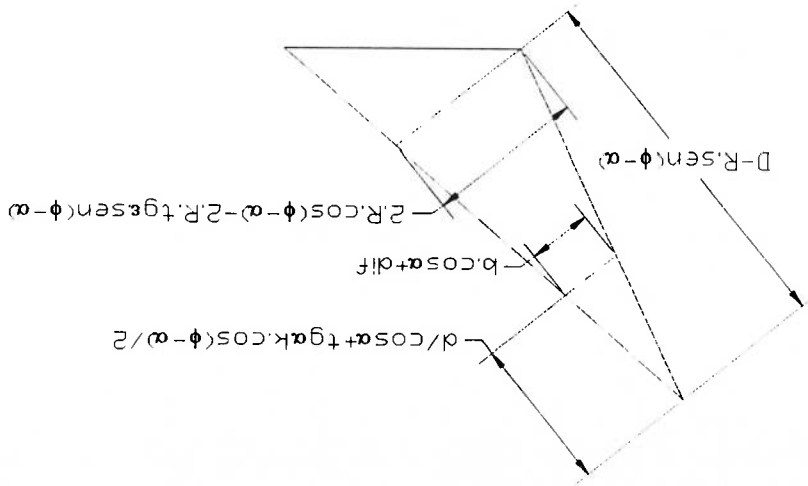


Figura 5-5 Valores obtidos para serem utilizados na relação geométrica

Aplicando-se a relação geométrica (4.1), obtêm-se:

$$(5.22) \quad \frac{(b \cdot \cos \alpha + dlf) \cdot 2 \cdot \cos \alpha}{2 \cdot R \cdot \cos(\phi - \alpha) - 2 \cdot R \cdot \text{tg} \epsilon \cdot \text{sen}(\phi - \alpha)} = \frac{2 \cdot d + k \cdot \text{tg} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos(\phi - \alpha)}{D - R \cdot \text{sen}(\phi - \alpha)}$$

5.1.2 Situação 2

O Eixo óptico está a Esquerda da Posição do Robô quando a Posição estiver a Direita do Eixo Vertical e o Eixo óptico está a Direita da Posição do Robô quando a Posição estiver a Esquerda do Eixo Vertical

O que caracteriza esta situação é que a projeção do eixo da elipse está acima do eixo da elipse e da linha horizontal, o que pode ser visto na figura 5.6. A exemplo da Situação 1, serão feitas as projeções tanto da dimensão do eixo da elipse, bem como, da dimensão do

robô, para manter a perpendicularidade com o eixo central da posição do robô, possibilitando desta forma a utilização da equação (4.1).

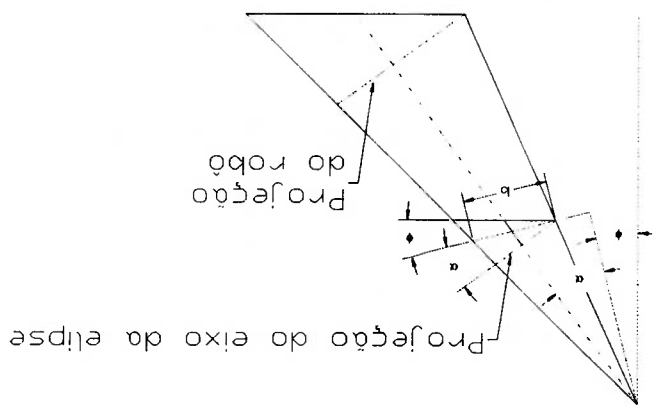


Figura 5-6 A projeção do eixo da elipse está acima do eixo da elipse e da linha

horizontal

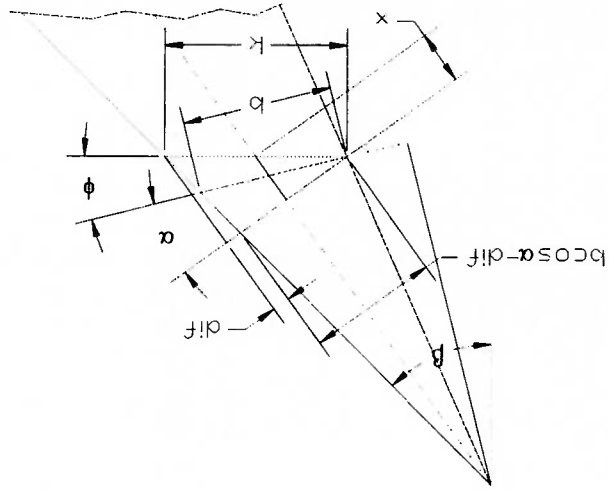


Figura 5-7 Esquema para o cálculo da projeção do eixo da elipse

Para o cálculo da projeção do eixo da elipse (pe), pela Figura 5-7, nota-se que:

$$pe = b \cdot \cos \alpha - b \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{tg} \varepsilon \quad (5.23)$$

$$x = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot k \cdot \cos(\phi - \alpha)}{2} \quad (5.24)$$

$$\operatorname{dif} = \operatorname{tg} \varepsilon \cdot b \cdot \operatorname{sen} \alpha \quad (5.25)$$

Seguindo-se o mesmo raciocínio da Situação 1, chegam-se às seguintes equações:

$$\boxed{\frac{(b \cdot \cos \alpha - \operatorname{dif}) \cdot 2 \cdot \cos \alpha}{2 \cdot R \cdot \cos(\phi + \alpha) - 2 \cdot R \cdot \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \operatorname{sen}(\phi + \alpha)} = \frac{2 \cdot d - k \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos(\phi + \alpha)}{D - R \cdot \operatorname{sen}(\phi + \alpha)}} \quad (5.26)$$

$$k = \frac{\cos(\alpha + \phi)}{(b \cdot \cos \alpha - \operatorname{dif}) \cdot [1 + \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \phi) + \operatorname{tg} \varepsilon^2 \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \phi)^2 + \dots]} \quad (5.27)$$

$$\varepsilon = \beta - \zeta \quad (5.28)$$

$$\zeta = \arccos\left(\frac{\operatorname{sen}(\phi + \alpha)}{\operatorname{tg}(\phi + \alpha)}\right) \quad (5.29)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{H}{L - W - R}\right) - \phi \quad (\text{Para a Posição 1}) \quad (5.30)$$

$$\alpha 2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{H}{L - R}\right) - \phi \quad (\text{Para a Posição 2}) \quad (5.31)$$

5.1.3 Situação 3

O Eixo óptico está de um lado da linha vertical da câmera e a posição do robô está de outro.

O que caracteriza esta situação é que a projeção do eixo da elipse está acima do eixo da elipse e da linha horizontal e, ainda, o eixo da elipse está abaixo da linha horizontal, o que

pode ser visto na Figura 5-8.

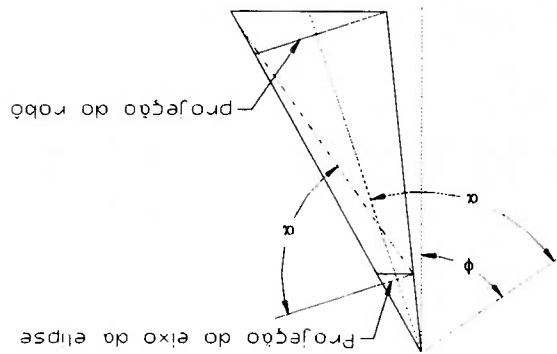


Figura 5-8 A projeção do eixo da elipse está acima do eixo da elipse e da linha horizontal

A exemplo da Situação 1, serão feitas as projeções tanto da dimensão do eixo da elipse, bem como, da dimensão do robô, para manter a perpendicularidade com o eixo central da posição do robô, possibilitando desta forma a utilização da equação (4.1).

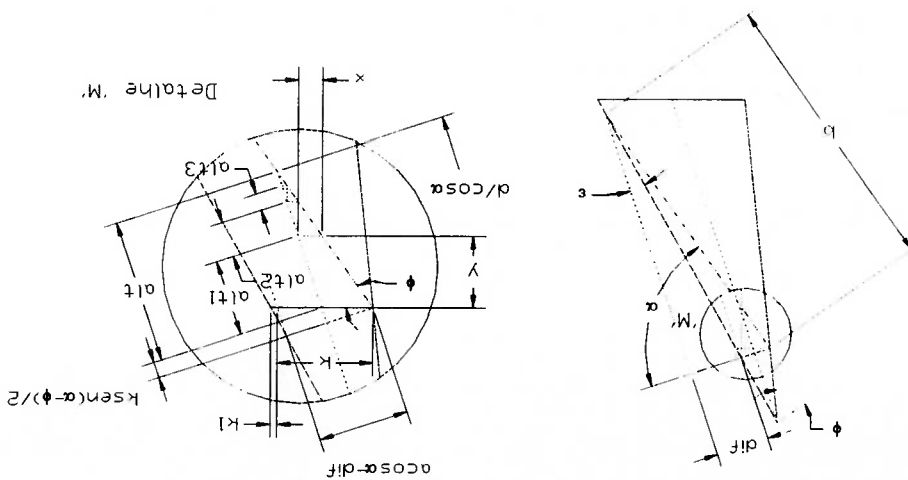


Figura 5-9 Esquema para o cálculo da projeção do eixo da elipse

Fazendo-se algumas relações trigonométricas, como visto na Situação 1 e na 2, a partir da

Figura 5-9, chegam-se às seguintes equações:

$$k = \frac{b \cdot \cos \alpha - dif}{[1 + tg \varepsilon \cdot tg(\alpha + \phi) + tg \varepsilon^2 \cdot tg(\alpha + \phi)^2 + \dots]} \cdot \cos(\alpha + \phi) \quad (5.32)$$

$$\varepsilon = \beta - \zeta \quad (5.33)$$

$$\zeta = \arccos \left(\frac{\sin(\alpha - \phi)}{\cos(\alpha - \phi)} \right) \quad (5.34)$$

$$\alpha = \arctg \left(\frac{L - W - R}{H} \right) + \phi \quad (5.35)$$

(Para a Posição 1)

$$\alpha 2 = \arctg \left(\frac{L - R}{H} \right) + \phi \quad (5.36)$$

(Para a Posição 2)

Análise para o cálculo de all :

$$y = \frac{k}{2} \operatorname{tg} \phi \quad (5.37)$$

$$y_2 = x \cdot \operatorname{tg} \phi \quad (5.38)$$

$$x = y \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \phi) \quad (5.39)$$

$$x_2 = y_2 \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \phi) \quad (5.40)$$

$$all1 = \frac{y}{\cos(\alpha - \phi)} \quad (5.41)$$

$$all2 = \frac{y_2}{\cos(\alpha - \phi)} \quad (5.42)$$

$$all = all1 + all2 + \dots \quad (5.43)$$

Substituindo-se y em $all1$, y_2 em $all2$ e assim, sucessivamente, e, somando-se os valores de $all1$, $all2$ e assim por diante, chega-se a equação geral de all , representada abaixo.

$$all = \frac{2 \cdot \cos \phi}{k(\operatorname{tg} \phi + \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^3 \phi + \dots)} \quad (5.44)$$

A Figura 5-10, mostra a relação geométrica necessária para aplicação das equações de equivalência do triângulo. Os valores de A , B , M e N são:

$$A = a \cdot \cos \alpha - a \cdot \operatorname{tg} \epsilon \cdot \operatorname{sen} \alpha \quad (5.45)$$

$$B = 2R \cos(\phi - \alpha) - 2R \cdot \operatorname{tg} \epsilon \cdot \operatorname{sen}(\phi - \alpha) \quad (5.46)$$

$$M = \frac{d}{\cos \alpha} - \frac{(all + k \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \phi))}{2} \quad (5.47)$$

$$N = D - R \cdot \operatorname{sen}(\phi - \alpha) \quad (5.48)$$

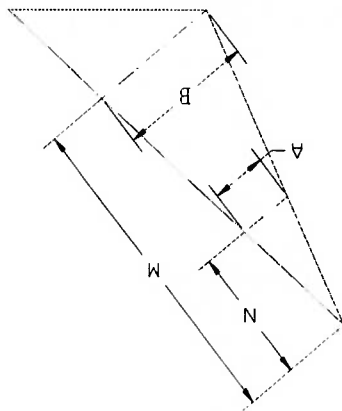


Figura 5-10 Relação Geométrica

Da relação entre triângulos, fica:

$$\frac{a \cos \alpha - a \cdot \operatorname{tg} \epsilon \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2R \cos(\phi - \alpha) - 2R \cdot \operatorname{tg} \epsilon \cdot \operatorname{sen}(\phi - \alpha)} = \frac{\frac{d}{\cos \alpha} - \frac{(all + k \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \phi))}{2}}{D - R \cdot \operatorname{sen}(\phi - \alpha)} \quad (5.49)$$

5.2 Definição dos Casos

Os doze casos são definidos em função da situação do eixo óptico em relação a posição do robô (Situações 1, 2 e 3 já apresentadas) e desta combinação com a segunda posição do robô.

Para equacionar cada caso, é preciso analisar a que situação (1, 2 ou 3) a posição 1 e a posição 2 estão em relação ao eixo óptico da câmera e em relação ao lado esquerdo ou direito da linha vertical da câmera. Feito isso, faz-se uma combinação das duas situações para definir o caso. A combinação para cada caso está mostrada na Tabela 5.1:

Tabela 5-1 DEFINIÇÃO DOS CASOS

CASO	Descrição	Figura	Combinação
1	Eixo óptico está a direita das duas posições do robô e todos estão a direita da linha vertical da câmera	4.3	Situações 1 e 1
2	Eixo óptico está a esquerda das duas posições do robô e todos estão a direita da linha vertical da câmera	4.4	Situações 2 e 2
3	Eixo óptico está no meio das duas posições do robô e todos estão a direita da linha vertical da câmera	4.5	Situações 1 e 2
4	Eixo óptico está a direita das duas posições do robô e também do eixo vertical da câmera, e as posições estão a esquerda da linha vertical	4.6	Situações 3 e 3
5	Eixo óptico está a esquerda das duas posições do robô e as	4.7a	Situações 1 e 3

		posições estão à esquerda e à direita da linha vertical da câmara	
6	4.7b	Eixo óptico está à direita das duas posições do robô e as posições estão à esquerda e à direita da linha vertical da câmara	Situações 3 e 1
7	4.8a	Eixo óptico está no meio das duas posições do robô, mas a esquerda da linha vertical da câmara	Situações 2 e 3
8	4.8b	Eixo óptico está no meio das duas posições do robô, mas a direita da linha vertical da câmara	Situações 3 e 2
9	4.9	Eixo óptico está a direita das duas posições do robô e todos estão a esquerda da linha vertical	Situações 2 e 2
10	4.10	Eixo óptico está a esquerda das duas posições do robô e todos estão a esquerda da linha vertical	Situações 1 e 1
11	4.11	Eixo óptico está no meio das duas	Situações 1 e 2

	posições do robô e todos estão a esquerda da linha vertical		
12	Eixo óptico está a esquerda das duas posições do robô e também do eixo vertical da câmera, e as posições estão a direita da linha vertical	4.12	Situações 3 e 3

Para cada caso acima citado, foram desenvolvidas equações para calcular os ângulos pan e tilt a partir dos valores do eixo maior a , a_2 e do eixo menor b , b_2 das elipses (robô na posição 1 e na posição 2), da distância focal f e do raio R do robô.

Através da posição e da inclinação da elipse na imagem, define-se a que caso cada elipse pertence. E a partir disto, o programa é direcionado para realizar os cálculos apropriados. As equações para todos os casos, bem como, um exemplo teórico de cada uma delas pode ser visto no Apêndice A.

Definiu-se como sendo a posição 1 aquela que está mais próxima do eixo vertical, e posição 2 aquela que está mais distante quando as duas posições estão ou a esquerda ou a direita do eixo vertical. Para os casos 5, 6, 7 e 8, a posição 1 é aquela que está a esquerda do eixo vertical e a posição 2 é aquela que está a direita.

5.3 Considerações para o cálculo da altura H

Para calcular a altura H , também deve-se levar em consideração os 12 casos, pois, para cada caso existe uma equação específica. As Figura 5-11 e Figura 5-12 esboçam as posições 1 e 2 do robô para todos os casos, e os ângulos necessários para o cálculo de H .

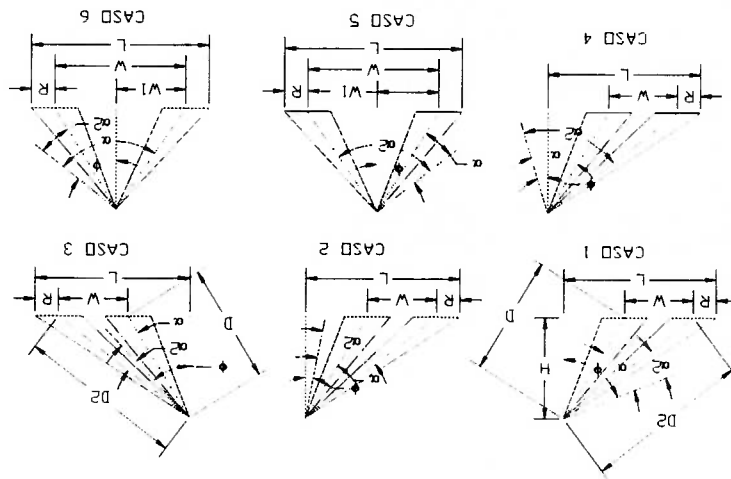


Figura 5-11 Esquema para o cálculo da altura H para os casos de 1 a 6

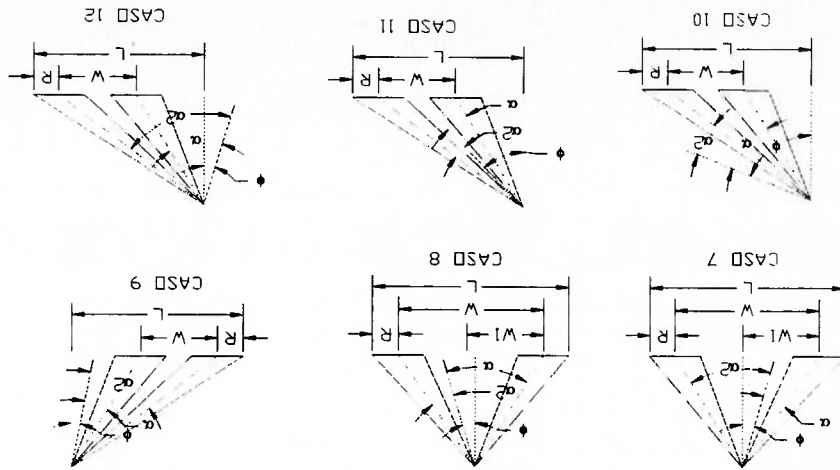


Figura 5-12 Esquema para o cálculo da altura H para os casos de 7 a 12

O que difere na altura para cada caso são os ângulos e os sinais. Abaixo tem um exemplo do desenvolvimento da equação da altura para o caso 1, e a seguir uma tabela contendo as equações para os todos os casos, cujo desenvolvimento dos demais casos é similar ao caso 1 apresentado.

Desenvolvimento do cálculo da altura H para o caso 1:

$$(5.50) \quad L - R = \frac{H}{\operatorname{tg}(\phi - \alpha)}$$

$$(5.51) \quad L - W - R = \frac{H}{\operatorname{tg}(\phi - \alpha)}$$

Isolando-se L da equação (5.50) e substituindo em (5.51), obtêm-se a equação de H :

$$(5.52) \quad H = \frac{W}{\operatorname{tg}(\phi - \alpha) - \operatorname{tg}(\phi - \alpha)}$$

A Tabela 5-2 mostra as equações da altura para todos os casos.

Tabela 5-2 EQUAÇÕES DA ALTURA H PARA TODOS OS CASOS

Casos	Equação da Altura H	Número da Equação
1 e 10	$H = \frac{W}{\operatorname{tg}(\phi - \alpha) - \operatorname{tg}(\phi - \alpha)}$	(5.53)

(5.54)	$H = \frac{I_2(\phi + \alpha) - I_1(\phi + \alpha)}{W}$	2 e 9
(5.55)	$H = \frac{I_2(\phi + \alpha) - I_1(\phi - \alpha)}{W}$	3 e 11
(5.56)	$H = \frac{I_2(\phi - \alpha) - I_1(\phi - \alpha)}{W}$	4 e 12
(5.57)	$H = \frac{I_2(\phi - \alpha) - I_1(\phi - \alpha)}{W}$	5
(5.58)	$H = \frac{I_2(\alpha - \phi) + I_1(\alpha - \phi)}{W}$	6
(5.59)	$H = \frac{I_2(\alpha + \phi) + I_1(\alpha - \phi)}{W}$	7
(5.60)	$H = \frac{I_2(\phi + \alpha) + I_1(\alpha - \phi)}{W}$	8

Das figuras 5.11 e 5.12, pode-se obter a relação para calcular D (para posição 1) e D_2 (para a posição 2). Para os casos 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11 e 12, as equações ficam:

$$D^2 = (L - W - R)^2 + H^2 \quad D = \sqrt{L^2 + W^2 + R^2 + H^2 - 2LR + 2WR - 2LW} \quad (5.61)$$

E para os casos 5, 6, 7 e 8 as equações para calcular D e D_2 são:

$$D_2^2 = (L - R)^2 + H^2 \quad D_2 = \sqrt{L^2 + R^2 + H^2 - 2LR} \quad (5.62)$$

$$D^2 = W_1^2 + H^2 \quad D = \sqrt{W_1^2 + H^2} \quad (5.63)$$

$$D_2^2 = (W - W_1)^2 + H^2 \quad D_2 = \sqrt{(W - W_1)^2 + H^2} \quad (5.64)$$

6 IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO

Foram desenvolvidos diversos programas relacionando os eixos maior e menor, os posicionamentos e as inclinações das elipses, provenientes das imagens, com o diâmetro e a distância real do robô entre duas posições conhecidas para descobrir a altura e os ângulos de inclinação da câmera. Através desta análise é possível estabelecer uma relação entre as dimensões reais em milímetros e as da imagem, em número de pixels. O passo seguinte é a elaboração de um mapa do ambiente de trabalho, através do qual será possível visualizar o robô em sua posição atual.

Neste capítulo serão abordados assuntos relacionados à qualidade da imagem e, também, apresentados os módulos referentes a implementação do método proposto.

Segundo FAUGERAS (1983), realçar uma imagem envolve operações sobre ela com o objetivo de produzir outra imagem melhorada em algum aspecto e não se pode obter mais informações em uma imagem transformada que numa imagem original. Entretanto, o realce pode melhorar a imagem em alguns aspectos particulares pela imposição de restrições sobre sua estrutura.

Realçar a imagem é um passo importante no pré-processamento para análises, ou para torná-las aparentemente mais visíveis. A redução de ruídos pode melhorar grandemente a performance dos procedimentos de análise como detecção de cantos e de linhas. Os

principais efeitos de realçar a imagem são os seguintes: salientar certas propriedades da imagem; reduzir os ruídos e corrigir as distorções.

As necessidades implícitas nestas operações são, em média, simples. O problema fundamental é a distinção entre as características da imagem e dos ruídos. Nenhuma distinção pode ser feita baseada no conhecimento de um simples pixel. Distinções efetivas requerem conhecimentos sobre processamento de imagem, bem como, regras sobre como se comportam as características da imagem.

Em GONZALEZ (1987), um dos mais importantes aspectos na seleção de um limiar é a confiabilidade pela identificação do pico num histograma dado. Isto é particularmente importante para a seleção de um limiar automático em situações onde as características das imagens podem mudar sobre uma faixa ampla de distribuição de intensidade. As chances de se selecionar um “bom” limiar podem ser consideravelmente melhores se os picos dos histogramas forem altos, estreitos, simétricos e separados por vales profundos.

A imagem quando capturada pela câmera está em níveis de cinza. Para realçar a forma da elipse, o programa I desenvolve, binariza a imagem. Para isso, primeiramente seleciona-se um determinado limiar, e os pixels que estão abaixo deste valor passam a ser zero (0) e os que estão acima passam a ser um (1).

A Figura 6-1 esquematiza a programação desenvolvida desde a captura da imagem do robô, a calibração da câmera, a elaboração do mapa virtual no ambiente de trabalho até o programa final que calcula as posições X e Y do robô.

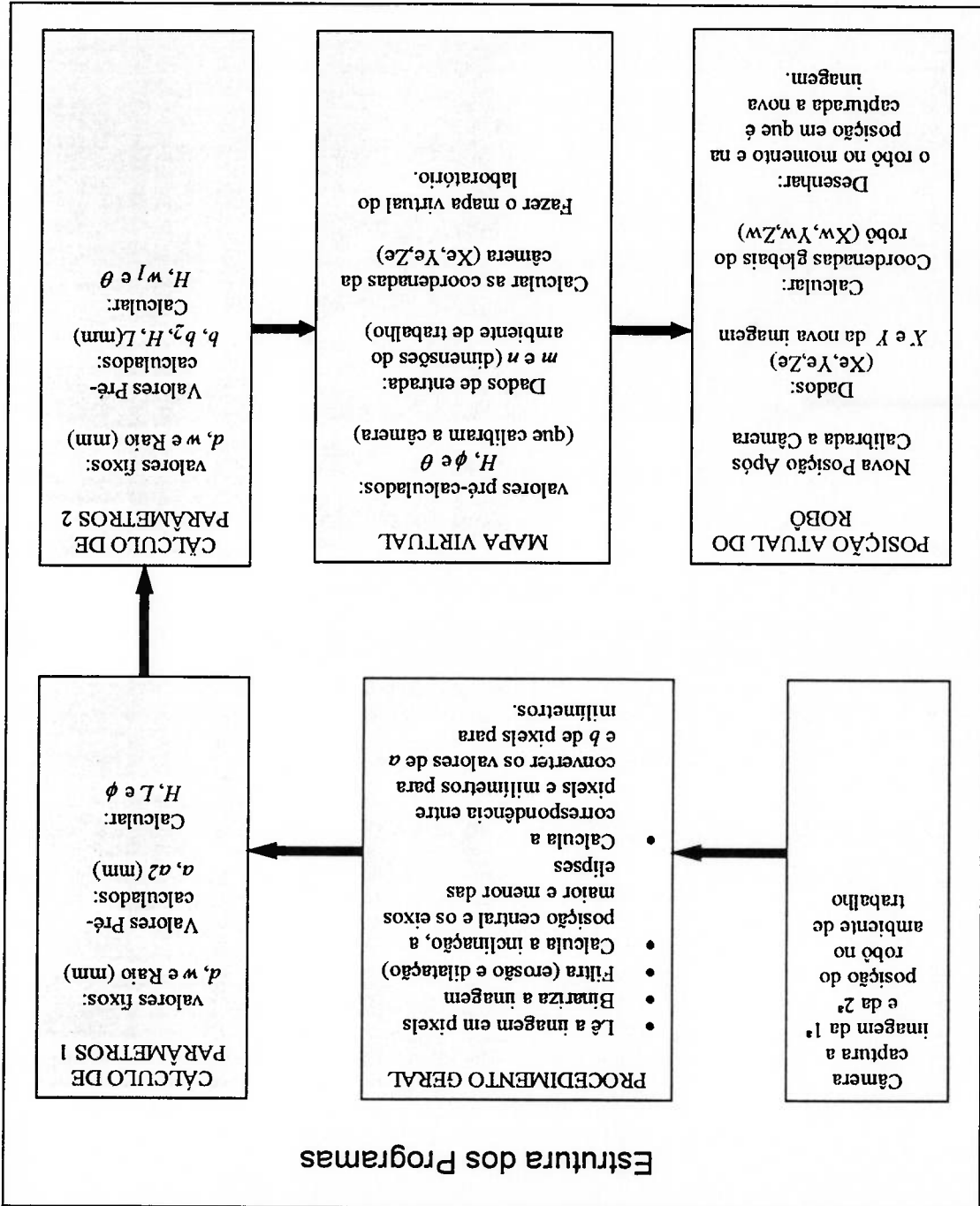


Figura 6-1 Estrutura dos programas

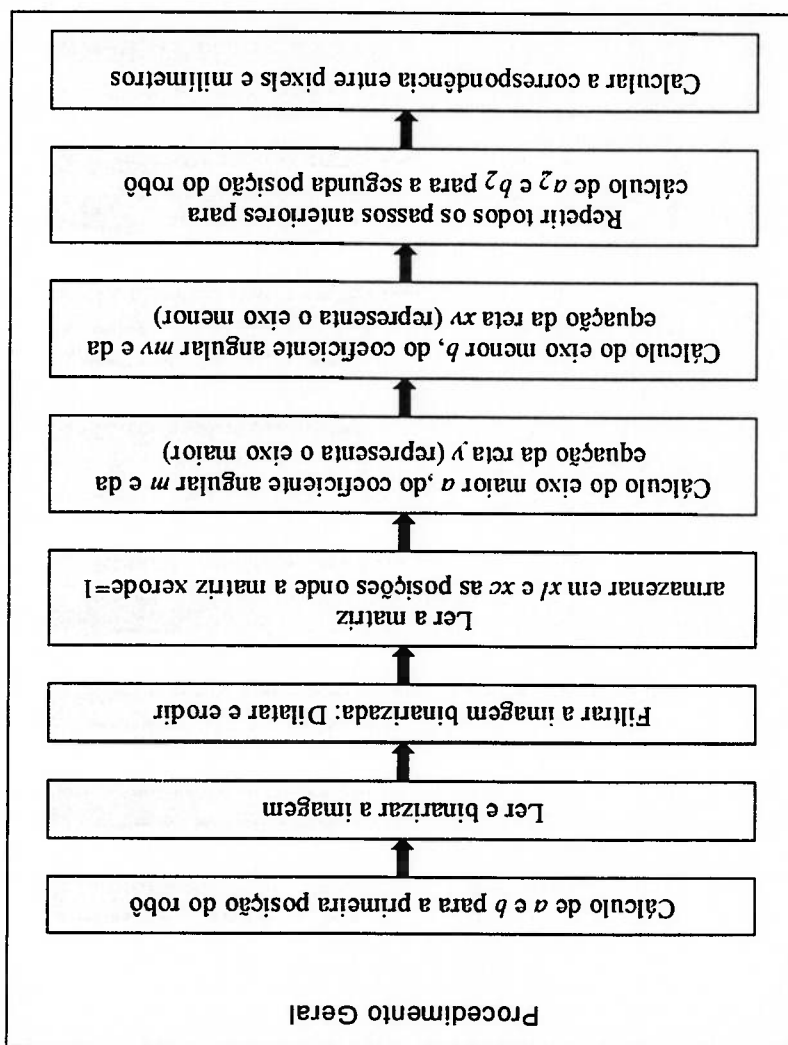
Cada bloco da Figura 6-1 representa um programa desenvolvido, os quais serão explicados a seguir.

A imagem binarizada apresenta alguns ruídos que são pixels pretos, estes confundem o objeto a ser analisado. Para isolar a elipse correspondente ao robô na imagem, deve-se eliminar os ruídos através de filtros. Utilizou-se, para isso, os operadores morfológicos dilatação e erosão. O operador dilatação expande a imagem binária através de uma matriz contendo zeros e uns, e o operador erosão provoca um desgaste na imagem binária, também, utilizando uma matriz de zeros e uns. No momento em que a imagem dilata, os pixels brancos se expandem, apagando os pixels pretos, nesta fase há um aumento de volume do objeto, o que é corrigido pela erosão da imagem.

Após filtrada a imagem, são calculados a inclinação, a posição central e os valores dos eixos maior e menor da elipse para as duas posições do robô. A representação esquemática deste programa pode ser vista na Figura 6-2. Também é definido o quadrante na imagem a que cada elipse pertence. O quadrante e a inclinação da elipse são dados importantes para auxiliar na definição do caso a que cada elipse pertence.

Para determinar a correlação entre os pixels da imagem e a dimensão real em milímetros deve-se considerar duas situações: ambiente 2D e ambiente 3D. Em imagens simples, 2D e onde a precisão não é uma variável importante, para realizar esta conversão, é necessário utilizar o número de pixels efetivos no CCD (P_x e P_y) que determina quantos pixels o CCD

Figura 6-2 Procedimento geral



possui e a distância entre os centros das células no CCD (D_x e D_y). Com estas informações e utilizando a resolução da imagem (R_x e R_y), utiliza-se as equações abaixo:

$$X = \frac{P}{R_x} D_x \quad (6.1)$$

$$Y = \frac{P}{R_y} D_y \quad (6.2)$$

No trabalho em questão, onde a imagem apresenta um ambiente em 3D, e é necessário alto grau de precisão, foi necessário desenvolver um estudo mais elaborado, o qual será exposto no capítulo 8. Em uma imagem 3D a relação entre os pixel e os milímetros não é única, e varia ao longo da imagem. A solução apresentada para solucionar este problema considera estas variações e a correlação entre os pixels e milímetros é determinada através de equações proporcionais.

O desenvolvimento dos programas “Cálculos dos Parâmetros 1 e 2”, mostrados na figura 6.1 foram detalhadamente explicados nos capítulos 4 e 5. No capítulo 7 estão expostos desenhos elaborados com o auxílio de um programa CAD, através dos quais foram testadas as equações referente aos cálculos dos parâmetros. Estas equações encontram-se no apêndice A.

Para calcular as coordenadas da câmera, primeiramente calculam-se as coordenadas globais (X_w, Y_w, Z_w) tendo como dados os ângulos de inclinação e a altura da câmera, o esquema está representado na figura 6-3.

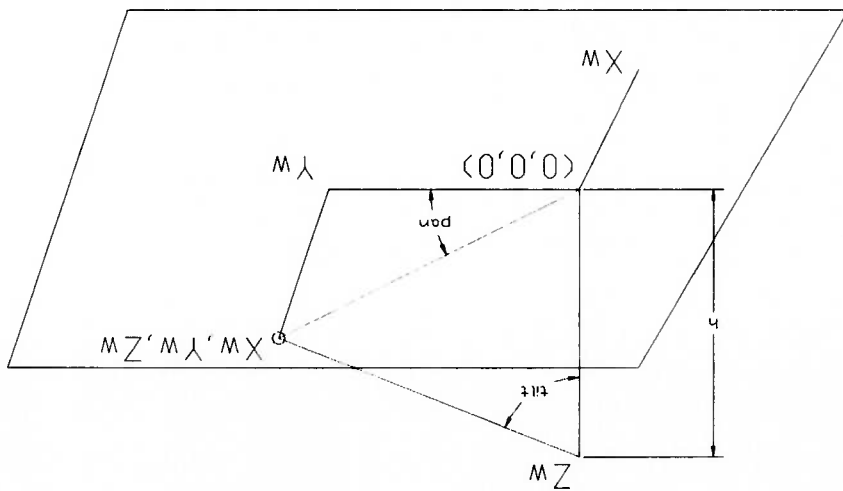


Figura 6-3 Representação das coordenadas globais

Equações para cálculo das coordenadas globais:

$$X_w = h \cdot \tan(\text{tilt}) \cdot \cos(\text{pan}) \quad (6.3)$$

$$Y_w = h \cdot \tan(\text{tilt}) \cdot \sin(\text{pan}) \quad (6.4)$$

$$Z_w = h \cdot \tan(\text{tilt}) \quad (6.5)$$

Cálculo das coordenadas da câmera:

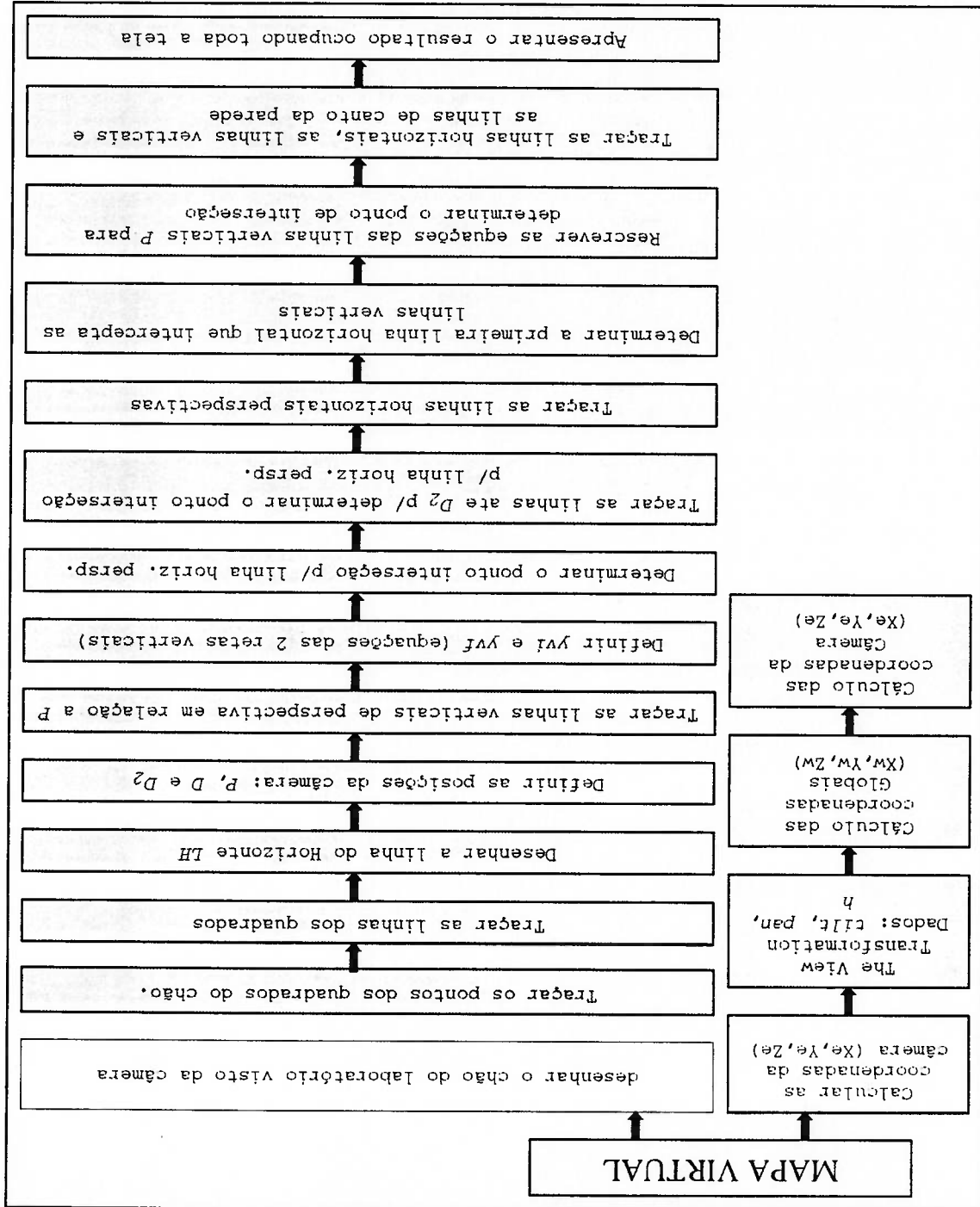
$$\begin{bmatrix} X^e \\ Y^e \\ Z^e \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

onde:

Tendo como dados a altura e os ângulos de inclinação da câmera pode-se calcular as coordenadas da câmera (X_c, Y_c, Z_c) e com as dimensões do ambiente de trabalho, baseando-se em perspectiva linear, pode-se elaborar o mapa virtual do laboratório. A sequência dos passos do programa que realiza este mapa pode ser visto na Figura 6-4.

$$(6.7) \quad R = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \phi \cos \theta & -\sin \phi \cos \theta & 0 \\ \cos \theta & -\cos \phi \sin \theta & -\sin \phi \sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & h & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 6-4 Mapa virtual



A transformação das coordenadas da câmera 3D (X_c, Y_c, Z_c) para as coordenadas da imagem X, Y , usando projeção perspectiva é realizada através das seguintes fórmulas:

$$X = p \frac{X_c}{Z_c} \quad (6.8)$$

$$Y = p \frac{Y_c}{Z_c} \quad (6.9)$$

onde d é a distância focal.

Através das equações 6.8 e 6.9 é possível obter, a partir das coordenadas da câmera, as coordenadas X e Y da imagem, e estes valores são dados em pixel. As coordenadas da imagem X e Y estão relacionadas às coordenadas 3D do ponto do objeto no sistema de coordenadas da câmera. O que se deseja obter neste trabalho é o contrário, partindo-se das coordenadas da imagem, para uma nova posição do robô após calibrada a câmera, calcular a posição do robô no ambiente de trabalho em relação as coordenada da câmera, em milímetros.

Para entrar com os valores do eixo maior e do eixo menor da elipse, a e b , nas equações que calculam os ângulos de inclinação e a altura da câmera, é preciso converter estes valores de pixels para milímetros, e esta relação não é direta porque trata-se de uma imagem em ambiente 3D.

Para realizar a conversão de pixels para milímetros, construir o mapa virtual do laboratório e encontrar as coordenadas X e Y para qualquer nova posição do robô no ambiente de

trabalho, foi necessário capturar quatro imagens provenientes dos vértices de um quadrado formado pelo deslocamento do robô, sendo dados a distância entre estas posições e o ângulo de 90°. Este procedimento serve para refinar o método de calibração apresentado e esta detalhadamente descrito no capítulo 8.

O capítulo 7 apresenta os resultados teóricos da técnica de calibração apresentada neste e nos capítulos anteriores a partir de dados sintéticos obtidos através de desenhos elaborados via CAD.

7 RESULTADOS TEÓRICOS

Neste capítulo estão expostos desenhos elaborados com o auxílio de um programa CAD, para cada possível posição do robô, através dos quais serão testadas as equações apresentadas nos capítulos anteriores. Estas equações encontram-se no apêndice A e o resultado delas é apresentado neste capítulo logo após as figuras correspondentes a cada caso. Nas configurações apresentadas, os valores são ideais, e eles foram substituídos nas equações para comprovar a sua veracidade, o que pode ser visto na precisão apresentada, onde o erro está em média 10^{-8} . Com o uso do CAD é possível definir um cilindro no espaço e visualizá-lo sob qualquer ponto de vista e as perspectivas mostradas são equivalentes àquelas vistas em situações reais.

Foram apresentadas 12 casos que diferem segundo a posição do robô em relação ao eixo ótico da câmera e, a seguir, está exposto um exemplo de cada um destes casos com seus respectivos resultados.

Casos 1 e 10

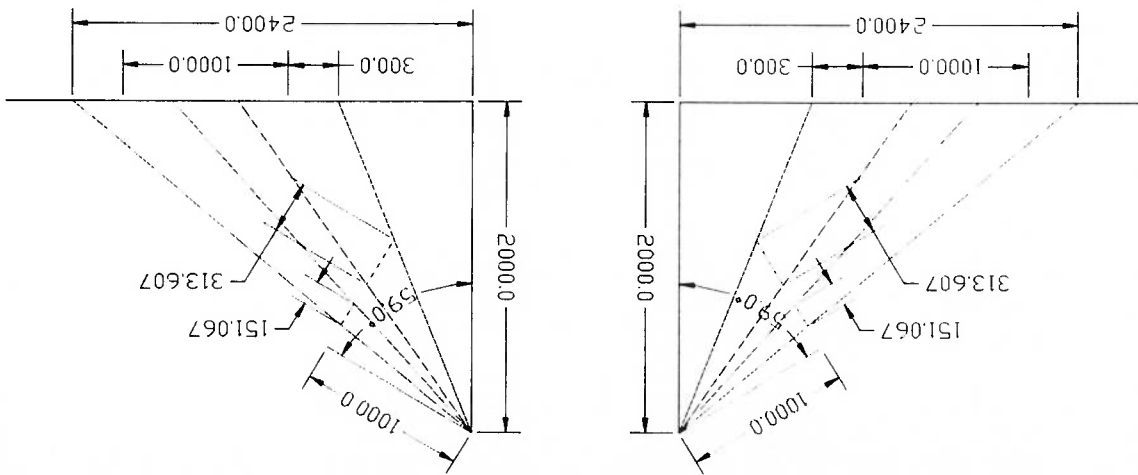


Figura 7-1 Exemplo de configuração para os casos 1 e 10

Resultados das equações e o erro apresentado para os casos 1 e 10

$$\text{fnd}(h, \phi, 1) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^3 \\ 1.03 \\ 2.4 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{2 \cdot b \cdot (\cos(\alpha))^2 + 2 \cdot \text{dif} \cdot \cos(\alpha)}{(2 \cdot \text{Raio} \cdot \cos(\phi - \alpha) - 2 \cdot \text{Raio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi - \alpha))} - \frac{2 \cdot d + k \cdot \tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{D - \text{Raio} \cdot \sin(\phi - \alpha)} = 3.78 \cdot 10^{-8}$$

$$A := \left[\frac{2 \cdot b \cdot (\cos(\alpha))^2 + 2 \cdot \text{dif} \cdot \cos(\alpha)}{(2 \cdot \text{Raio} \cdot \cos(\phi - \alpha) - 2 \cdot \text{Raio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi - \alpha))} - \frac{2 \cdot d + k \cdot \tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{D - \text{Raio} \cdot \sin(\phi - \alpha)} \right]$$

$$A = 5.305 \cdot 10^{-9}$$

O valor de ϕ está apresentado em radianos, que em graus corresponde a 59.016.

Casos 2 e 9

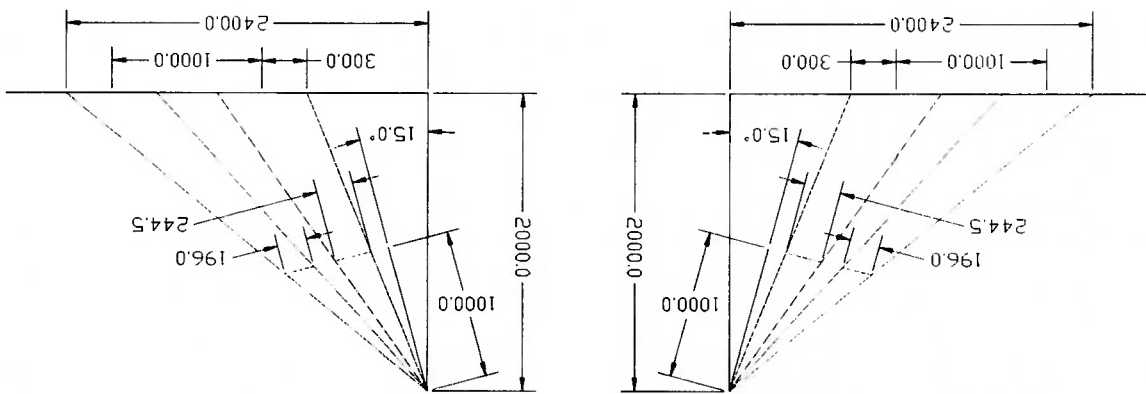


Figura 7-2 Exemplo de configuração para os casos 2 e 9

Resultados das equações e o erro apresentado para os casos 2 e 9

$$\text{find}(h, \phi, 1) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^3 \\ 0.262 \\ 2.4 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{2 \cdot d - k \cdot \tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\phi + \alpha)}{[2 \cdot b \cdot (\cos(\alpha))^2 - 2 \cdot \text{diff} \cdot \cos(\alpha)]} - \frac{D - \text{Raio} \cdot \cos(\phi + \alpha) - 2 \cdot \text{Raio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi + \alpha)}{(2 \cdot \text{Raio} \cdot \cos(\phi + \alpha) - 2 \cdot \text{Raio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi + \alpha))} = -4.364 \cdot 10^{-5}$$

$$\frac{2 \cdot d - k_2 \cdot \tan(\alpha_2) \cdot \cos(\alpha_2) \cdot \cos(\phi + \alpha_2)}{[2 \cdot b_2 \cdot (\cos(\alpha_2))^2 - 2 \cdot \text{diff}_2 \cdot \cos(\alpha_2)]} - \frac{D_2 - \text{Raio} \cdot \sin(\phi + \alpha_2)}{(2 \cdot \text{Raio} \cdot \cos(\phi + \alpha_2) - 2 \cdot \text{Raio} \cdot \tan(E_2) \cdot \sin(\phi + \alpha_2))} = -2.487 \cdot 10^{-5}$$

O valor de ϕ está apresentado em radianos, que em graus corresponde a 15.0119.

Casos 3 e 11

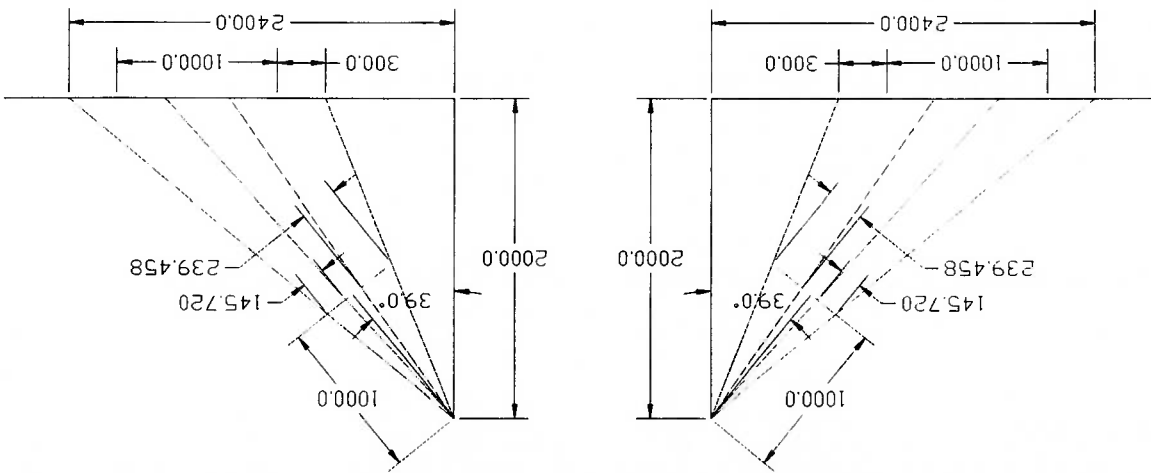


Figura 7-3. Exemplo de configuração para os casos 3 e 11

Resultados das equações e o erro apresentado para os casos 3 e 11

$$\text{find}(h, \phi, 1) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^3 \\ 0.681 \\ 2.4 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

$$A := \frac{\left[2 \cdot b \cdot (\cos(\alpha))^2 + 2 \cdot \text{dif} \cdot \cos(\alpha) \right] \cdot \cos(\phi - \alpha)}{\left[2 \cdot \text{Raio} \cdot \cos(\phi - \alpha) - 2 \cdot \text{Raio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi - \alpha) \right]} - \frac{2 \cdot d + k \cdot \tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\phi - \alpha)}{D - \text{Raio} \cdot \sin(\phi - \alpha)} = 1.8810^{-8}$$

$$A := \frac{\left[2 \cdot b \cdot 2 \cdot (\cos(\alpha 2))^2 - 2 \cdot \text{dif} \cdot 2 \cdot \cos(\alpha 2) \right] \cdot \cos(\alpha 2)}{\left[2 \cdot \text{Raio} \cdot \cos(\phi + \alpha 2) - 2 \cdot \text{Raio} \cdot \tan(E 2) \cdot \sin(\phi + \alpha 2) \right]} - \frac{2 \cdot d - k \cdot 2 \cdot \tan(\alpha 2) \cdot \cos(\alpha 2) \cdot \cos(\phi + \alpha 2)}{D 2 - \text{Raio} \cdot \sin(\phi + \alpha 2)}$$

$$A = -3.03710^{-7}$$

O valor de ϕ está apresentado em radianos, que em graus corresponde a 39.019.

Casos 4 e 12

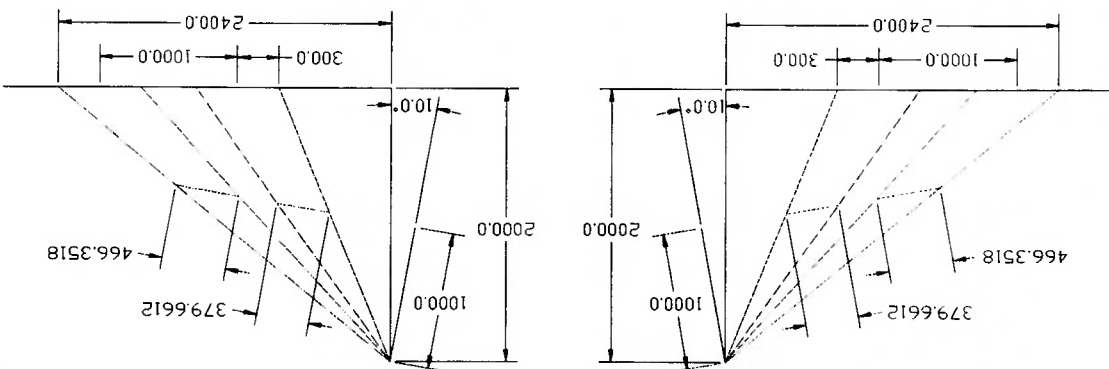


Figura 7-4 Exemplo de configuração para os casos 4 e 12

Resultados das equações e o erro apresentado para os casos 4 e 12

$$\text{find} (h, \phi, 1) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^3 \\ 0.175 \\ 2.4 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

$$b \cdot \cos(\alpha) - b \cdot \tan(E) \cdot \sin(\alpha) - \left(\frac{d}{2} + k \cdot \sin(\alpha - \phi) \right) - \frac{D - \text{Raio} \cdot \cos(\alpha - \phi) - 2 \cdot \text{Raio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\alpha - \phi)}{2 \cdot \text{Raio} \cdot \cos(\alpha - \phi)} = 6.714 \cdot 10^{-9}$$

$$A := \left[\begin{array}{l} \left[\frac{d}{2} + k \cdot \sin(\alpha - \phi) \right] - \left[\frac{d}{2} + k_2 \cdot \sin(\alpha_2 - \phi) \right] \\ b_2 \cdot \cos(\alpha_2) - b_2 \cdot \tan(E_2) \cdot \sin(\alpha_2) \\ b_2 \cdot \cos(\alpha) - b \cdot \tan(E) \cdot \sin(\alpha) - 2 \cdot \text{Raio} \cdot \cos(\alpha - \phi) - 2 \cdot \text{Raio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\alpha - \phi) \end{array} \right] - \frac{D_2 - \text{Raio} \cdot \sin(\alpha_2 - \phi)}{2 \cdot \text{Raio} \cdot \cos(\alpha - \phi)}$$

$$A = -3.632 \cdot 10^{-8}$$

O valor de ϕ está apresentado em radianos, que em graus corresponde a 10.027.

Caso 5

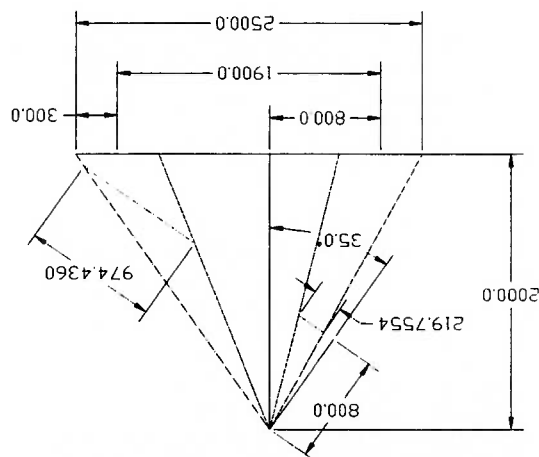


Figura 7-5 Exemplo de uma configuração para o caso 5

Resultados das equações e o erro apresentado para o caso 5

$$\text{find}(h, \phi, l) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^3 \\ 0.611 \\ 2.5 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{2 \cdot b \cdot (\cos(\alpha))^2 + 2 \cdot \text{dif} \cdot \cos(\alpha)}{(2 \cdot \text{Raio} \cdot \cos(\phi - \alpha) - 2 \cdot \text{Raio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi - \alpha))} - \frac{2 \cdot d + k \cdot \tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\phi - \alpha)}{D - \text{Raio} \cdot \sin(\phi - \alpha)} = -4.8 \cdot 10^{-7}$$

$$\frac{b2 \cdot \cos(\alpha2) - b2 \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\alpha2)}{\left[\frac{d}{\cos(\alpha2)} - \left(a1h2 + \frac{k2 \cdot \sin(\alpha2 - \phi)}{2} \right) \right]} - \frac{2 \cdot \text{Raio} \cdot \cos(\alpha2 - \phi) - 2 \cdot \text{Raio} \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\alpha2 - \phi)}{D2 - \text{Raio} \cdot \sin(\alpha2 - \phi)} = -1.2 \cdot 10^{-7}$$

O valor de ϕ está apresentado em radianos, que em graus corresponde a 35.008.

Caso 6

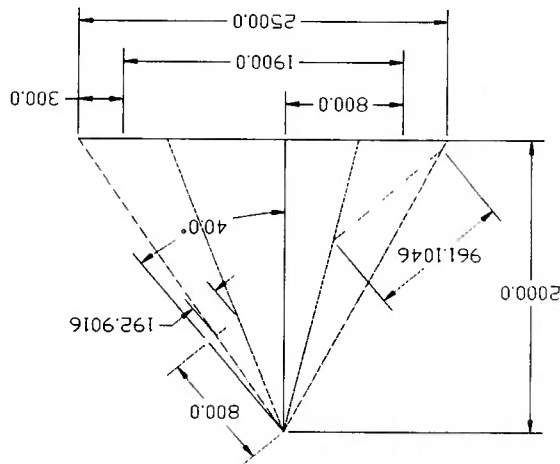


Figura 7-6 Exemplo de uma configuração para o caso 6

Resultados das equações e o erro apresentado para o caso 6

$$\text{find}(h, \phi, 1) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^3 \\ 0.698 \\ 2.5 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{2 \cdot b \cdot 2 \cdot (\cos(\alpha 2))^2 + 2 \cdot d \cdot 2 \cdot \cos(\alpha 2)}{(2 \cdot \text{Raio} \cdot \cos(\phi - \alpha 2) - 2 \cdot \text{Raio} \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\phi - \alpha 2))} - \frac{2 \cdot d + k \cdot 2 \cdot \tan(\alpha 2) \cdot \cos(\alpha 2) \cdot \cos(\phi - \alpha 2)}{D2 - \text{Raio} \cdot \sin(\phi - \alpha 2)} = -2.12110^{-9}$$

$$\left[\frac{b \cdot \cos(\alpha) - b \cdot \tan(E) \cdot \sin(\alpha)}{\left(\frac{d}{\cos(\alpha)} - \text{alt} + k \cdot \sin(\alpha - \phi) \right) \cdot \frac{2}{2}} \right] - \frac{2 \cdot \text{Raio} \cdot \cos(\alpha - \phi) - 2 \cdot \text{Raio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\alpha - \phi)}{D - \text{Raio} \cdot \sin(\alpha - \phi)} = -2.95210^{-8}$$

O valor de ϕ está apresentada em radianos, que em graus corresponde a 39.994.

Caso 7

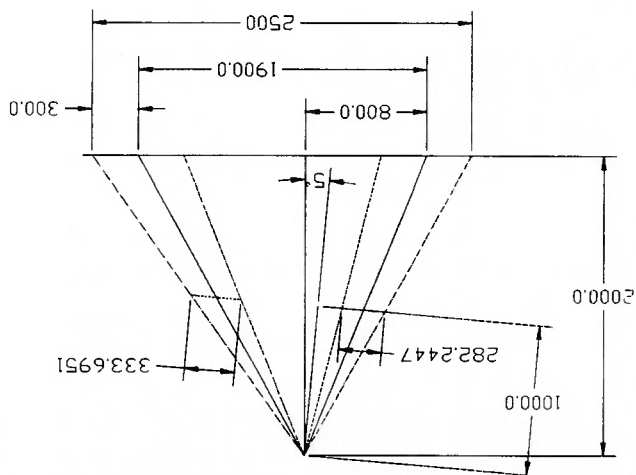


Figura 7-7 Exemplo de uma configuração para o caso 7

Resultados das equações e o erro apresentado para o caso 7

$$\text{find} (h, \phi, 1) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^3 \\ 0.087 \\ 2.4 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{2 \cdot d - k \cdot \tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\phi + \alpha)}{[2 \cdot b \cdot \cos(\alpha)]^2 - 2 \cdot \text{diff} \cdot \cos(\alpha)} \right] - \frac{D - \text{Ratio} \cdot \sin(\phi + \alpha)}{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi + \alpha) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi + \alpha))} = 3.364 \cdot 10^{-8}$$

$$\left[\frac{d}{\cos(\alpha 2)} - \left(\text{alt} 2 + \frac{k^2 \cdot \sin(\alpha 2 - \phi)}{2} \right) \right] - \frac{D 2 - \text{Ratio} \cdot \sin(\alpha 2 - \phi)}{b 2 \cdot \cos(\alpha 2) - b 2 \cdot \tan(E 2) \cdot \sin(\alpha 2)} - \frac{2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\alpha 2 - \phi) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E 2) \cdot \sin(\alpha 2 - \phi)}{2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\alpha 2) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E 2) \cdot \sin(\alpha 2 - \phi)} = -1.305 \cdot 10^{-8}$$

O valor de ϕ está apresentado em radianos, que em graus corresponde a 4.985.

Caso 8

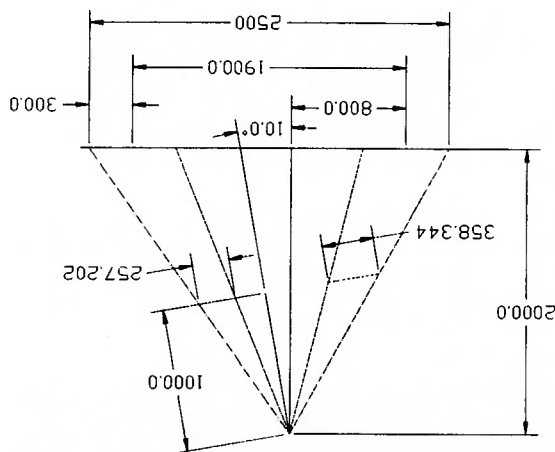


Figura 7.1. Exemplo de uma configuração para o caso 8

Resultados das equações e o erro apresentado para o caso 8

$$\text{find} (h, \phi, 1) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^3 \\ 0.175 \\ 2.5 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b \cdot \cos(\alpha) - h \cdot \tan(E) \cdot \sin(\alpha) \\ \left(\frac{d}{\cos(\alpha)} - \text{alt} + k \cdot \sin(\alpha - \phi) \right) / 2 \end{bmatrix} - \frac{D - \text{Raio} \cdot \cos(\alpha - \phi) - 2 \cdot \text{Raio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\alpha - \phi)}{2 \cdot \text{Raio} \cdot \cos(\alpha - \phi) - 2 \cdot \text{Raio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\alpha - \phi)} = -5 \cdot 10^{-9}$$

$$A := \frac{\left[\frac{2 \cdot d - k \cdot 2 \cdot \tan(\alpha 2) \cdot \cos(\alpha 2) \cdot \cos(\phi + \alpha 2)}{2 \cdot b \cdot 2 \cdot \cos(\alpha 2)^2 - 2 \cdot d \cdot \tan(\alpha 2) \cdot \cos(\alpha 2)} \right] - \frac{D - \text{Raio} \cdot \cos(\phi + \alpha 2)}{2 \cdot \text{Raio} \cdot \cos(\phi + \alpha 2) - 2 \cdot \text{Raio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi + \alpha 2)}}{A} = 4.115 \cdot 10^{-7}$$

O valor de ϕ está apresentado em radianos, que em graus corresponde a 10.027.

A grande dificuldade encontrada neste ponto do trabalho foi definir, a partir das duas elipses, qual o caso a que elas pertenciam. Foram analisadas as inclinações das elipses e a posição do quadrante na imagem a que cada uma pertencia na expectativa de encontrar uma regra que servisse como base de definição dos casos. Mas, sempre havia casos em que coincidiam tanto as inclinações dos eixos, bem como, o quadrante em que as imagens se encontravam. Para tentar solucionar este problema, algumas considerações foram feitas:

Adotou-se como sendo a posição 1 aquela que está mais próxima da câmera e a posição 2 aquela que está mais distante. Com isso, pode-se unificar as equações para os casos 1 e 10, 2 e 9, 3 e 11. Mas, ao mesmo tempo em que unifica os casos, cria também um problema: Saber se a câmera está virada para a esquerda ou para a direita para o cálculo do ângulo *pan*. Para estes casos, que encontram-se representados aos pares por um ser a imagem do outro, usa-se as mesmas equações. Os resultados diferem nos sinais dos seguintes valores: k , k_2 , α e α_2 .

Após exaustivo trabalho de análise nas 12 equações que representam os 12 casos, chegou-se a conclusão de que as equações apresentadas para o caso 1 podem ser extendidas a todos os demais, sem conhecimento prévio dos casos que pertencem as duas elipses.

Entra-se com os valores de a , a_2 , b e b_2 (eixos maior e menor das elipses 1 e 2), w e w_1 (distância entre as duas posições do robô, w_1 é somente para os casos 5, 6, 7 e 8), R (raio do robô) e d (distância focal da câmera) nas equações referentes ao caso 1. Também devem ser atribuídos pré-valores para os ângulos *pan*, *tilt* e para a altura h . Dependendo destes valores previamente fornecidos para as equações (*guess value*), elas

irão convergir para um resultado final ou darão um erro, o que indica que estes valores deverão ser alterados e os cálculos deverão ser reinicializados, até a obtenção de um resultado.

Os sinais dos valores obtidos é que definirão o caso a que pertencem as duas elipses, e a situação do eixo óptico da câmara em relação a posição do robô. A Tabela 7.1 mostra os sinais em cada caso, obtidos através das equações referentes ao caso 1. Pode-se observar que os casos ficam perfeitamente definidos analisando-se os sinais. Para as equações referentes a cada caso, os resultados de todas as variáveis são positivos.

Tabela 7-1. RESULTADOS DOS CASOS E SEUS RESPECTIVOS SINAIS

	h, l, D, D2, β, β2, E, E2	φ (ou θ)	ζ ₁	ζ ₂	diff	diff ²
1 e 10	+	+	+	+	+	+
2 e 9	+	+	+	+	-	-
3 e 11	+	+	+	+	+	+
4 e 12	+	-	+	+	-	-
5 e 6	+	+	+	+	+	-
7 e 8	+	-	-	+	+	+

K	+	+	+	+	+	+
K2	+	+	+	+	+	-
α	+	-	+	-	+	-
$\alpha 2$	+	-	-	-	-	-

Os sinais definem apenas qual é o caso a que pertencem as duas imagens, porque os resultados numéricos obtidos não são os reais. Para se obter os valores reais, deve-se, após definido o caso, utilizar as equações pertinentes a cada caso.

Para calcular a altura e os ângulos de inclinação nas equações apresentadas nos capítulos anteriores é necessário inicializa-las com um valor arbitrário, próximo do valor real, para h , pan e $till$. Para se obter este valor foi necessário deslocar o robô, de distâncias conhecidas, formando um quadrado para a construção de perspectivas lineares exatas de elementos geométricos situados sobre o plano geométral utilizando o processo dos pontos de distância. Este processo, explicado detalhadamente no capítulo 8, permite a construção do mapa virtual do ambiente de trabalho e também encontrar os valores arbitrários acima mencionados.

8 OTIMIZAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO E RESULTADOS

As imagens obtidas do robô apresentam um ambiente em 3D, donde não se podem extrair diretamente ou de forma simples as dimensões em milímetros dos eixos das elipses e do posicionamento do centro do robô. Em uma imagem 3D a relação entre os pixel e os milímetros não é única e varia ao longo da imagem. A solução apresentada considera estas variações e a correlação entre os pixels e milímetros é determinada através de equações proporcionais.

Para realizar a conversão de pixels para milímetros, construir o mapa virtual do laboratório e encontrar as coordenadas X e Y para qualquer nova posição do robô no ambiente de trabalho, foi necessário capturar quatro imagens provenientes dos vértices de um quadrado formado pelo deslocamento do robô, sendo dados a distância entre estas posições e o ângulo de 90°. Este procedimento serve para definir os valores iniciais de *h*, *pan* e *till*, para serem utilizados nas equações mencionadas nos capítulos anteriores e, também, para otimizar o método de calibração apresentado. Este capítulo apresenta este procedimento e os resultados experimentais obtidos.

8.1 Otimização do Método de Calibração Proposto

A otimização do método de calibração proposto está fundamentada em estudos de perspectiva, apresentados a seguir. Esta otimização é facilmente adaptável para qualquer formato de robô, pois não depende mais da elipse (imagem proveniente de um

robô de formato cilíndrico), mas somente da posição central do robô. Também não utiliza nenhum padrão de referência e nem marcas no robô, e não é necessário ter conhecimento da distância focal e nem da posição do eixo óptico da câmera. Para se utilizar esta técnica é necessário capturar 4 imagens provenientes de quatro posições do robô no ambiente de trabalho. A única condição é que o robô se desloque formando um quadrado perfeito (dentro das limitações do robô), as posições dos cantos é que são capturadas e utilizadas para calibração da câmera.

Segundo DORIA (1958), perspectiva é a arte e ciência de desenhar objetos sólidos numa superfície, causando a mesma impressão de posição, grandeza e distâncias relativas que os objetos concretos, quando observados de um ponto particular. Pode-se dizer que perspectiva é um método pelo qual reproduz-se três dimensões numa superfície de apenas duas.

A perspectiva é atualmente um dos maiores auxiliares com que o engenheiro, o desenhista, o construtor, o artista, o decorador e todos aqueles que desejam planejar ou construir alguma obra podem contar. Ela é a reprodução do que se quer construir, vista através da imaginação humana. Tornou-se a perspectiva indispensável em todos os setores da vida em que há o significado da criação, pois, é pelo desenho que se tem a visão futura do que se concebe no momento. É pelo seu emprego que pode-se desenhar um objeto de modo semelhante ao qual ele seria visto de um determinado ponto. Por esta razão, grande é o seu campo de aplicação, abrangendo tanto o desenho artístico como o desenho técnico.

A perspectiva fornece, em essência, três elementos indispensáveis na pintura ou desenho: dá ao objeto idéia de dimensões e corpo; dá sensação de distância e sugere sensação de espaço.

Construção de Perspectivas Lineares Exatas de Elementos Geométricos situados sobre o Plano Geometral: Processo dos Pontos de Distância

Considera-se (Figura 8-1) A' a época do ponto A, onde P é o ponto principal, LT é a linha de terra e LH é a linha do horizonte. A execução da perspectiva linear exata faz-se a partir desses dados e, para encontrar a perspectiva do ponto A, nota-se que:

Os pontos de distância D e D' estão afastados de P de uma distância igual ao afastamento do observador ao quadro; As inclinações de 45° em relação ao quadro (ou a LT) tem seu ponto de fuga nos pontos de distância; As retas horizontais perpendiculares ao quadro concorrem para o ponto principal.

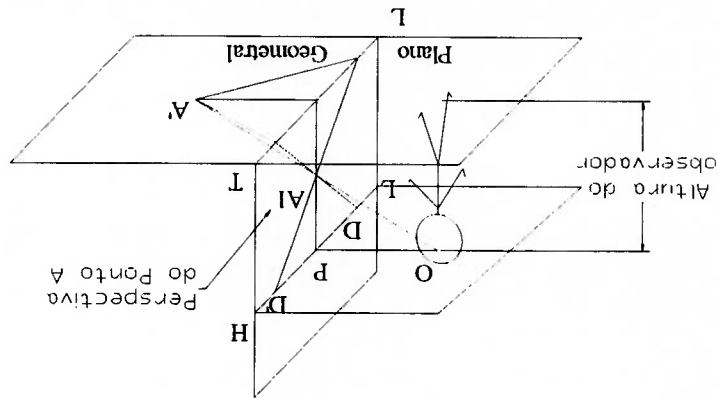


Figura 8-1. Representação da perspectiva do ponto A

Portanto, na Figura 8-2, baixa-se de A' uma perpendicular A'R à LT; seu ponto de fuga será P e tem-se a perspectiva da reta A'R. Com o centro do compasso em R e raio RA',

traça-se o arco RB que corresponde a uma inclinada de 45°; a perspectiva da reta A'B será a reta BD. A intersecção das perspectivas das retas RP e BD nos dá o ponto A1, que é a perspectiva procurada. Variando-se a cota e o afastamento do observador, variará a posição da perspectiva A1.

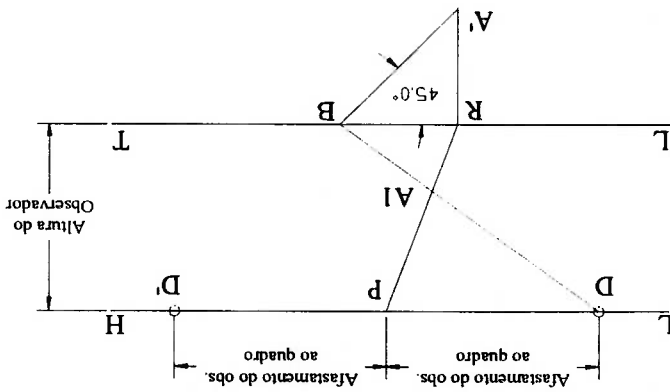


Figura 8-2 Rebatimento do Plano Geométrico

Para desenhar a perspectiva linear exata de um ponto pelo processo dos pontos de distância, deve-se:

Baixar da projeção horizontal do ponto uma perpendicular à linha de terra LT e unir seu traço com o ponto principal;

Tirar uma inclinada de 45° em relação à linha de terra e unir seu traço com o ponto de distância correspondente; O encontro dessas duas retas é a perspectiva linear exata do ponto.

A ideia principal desta técnica é construir o mapa virtual a partir das 4 imagens provenientes do robô tendo como base a construção de perspectivas lineares exatas de elementos geométricos situados sobre o plano geométrico e utilizando-se o processo dos

pontos de distância. A Figura 8-3 mostra as 4 posições do robô no ambiente real e como elas aparecem na imagem. O desenho foi elaborado com base nos conceitos de perspectivas lineares, onde um ponto no ambiente real é representado em perspectiva. Neste caso, para a sua construção, é necessário conhecimento dos valores de h e da distância entre P e D .

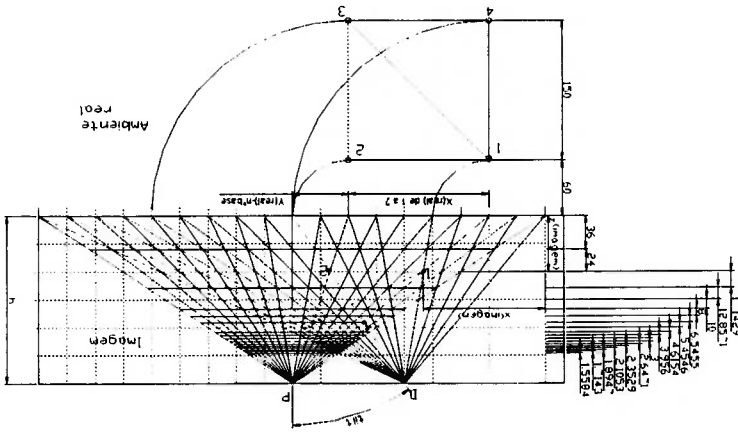
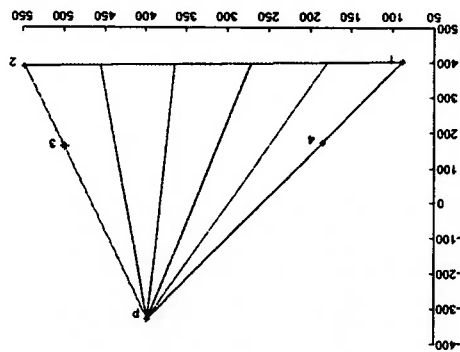


Figura 8-3 Representação Perspectiva Linear

A técnica desenvolvida parte das 4 posições na imagem para construir a perspectiva, ou o mapa virtual. Calculada a posição central do robô nas 4 imagens, tem-se as coordenadas x e y das 4 posições no mapa virtual. Baseado na Figura 8-3 foram feitas algumas considerações que estão apresentadas a seguir:

P é o ponto de intersecção entre o prolongamento das retas 1-4 e 2-3. Para construção do mapa virtual divide-se a reta 2-1 em n (na Figura 8-4, $n=5$) partes. A partir de P traça-se $n-1$ retas passando pelas n divisões (retas verticais):

Figura 8-4 Ponto *P* no mapa virtual



D é o ponto de intersecção da reta 2-4 com a reta que passa por *P* e é paralela a reta 2-1. Para construção do mapa deve-se traçar as demais retas do ponto *D* até os pontos das divisões na reta 2-1 e marcar os pontos de contato (*k*, *b*, *z*) entre as retas;

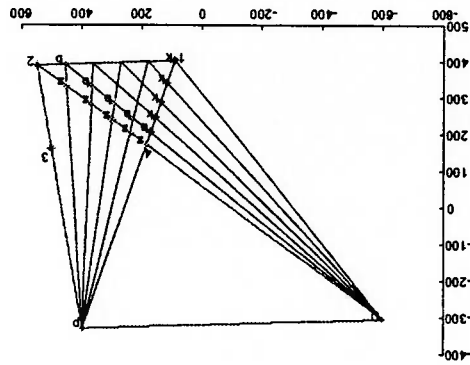


Figura 8-5 Ponto *D* no mapa virtual

A distância *y* do ponto 1 à linha inferior na imagem, representa a distância do ponto 1 à linha inferior no mapa virtual, e esta posição em *y* está representada abaixo pelo ponto *s*. A reta *AB* é paralela a reta 2-1 e esta distante desta *vprof*. *vprof* é a posição da

próxima linha horizontal a partir de s , e seu valor é encontrado extrapolando-se a equação vertical (explicada no próximo item);

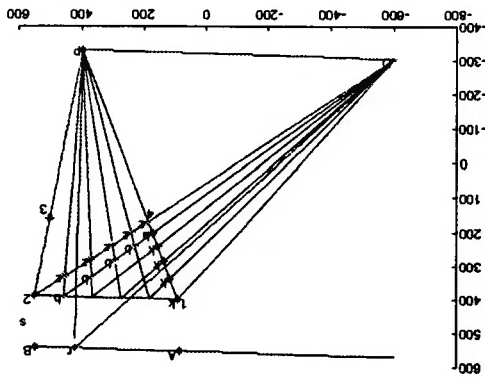


Figura 8-6 Pontos de contato entre as retas verticais

Cálculo das coordenadas verticais (dv , coordenadas y nos pontos z) e das coordenadas horizontais (dx , coordenadas x nos pontos z). Nota-se que estes valores diminuem ao longo da reta 1-4. Com os valores de dv encontra-se a equação vertical e com os valores de dx encontra-se a equação horizontal, estas duas equações regem o comportamento das distâncias entre as linhas horizontais no mapa virtual. Abaixo exemplos destas equações. O gráfico e os cálculos para os dois casos estão no Apêndice B.

$$f(x) = -0.031x^4 - 0.627x^3 + 5.639x^2 - 29.576x + 99.778$$

Equação Vertical

$$g(x) = -0.015x^4 + 0.392x^3 - 5.545x^2 + 63.568x + 0.06$$

Equação Horizontal

A distância da linha inferior à linha que passa por P e D no mapa virtual representa a altura h da câmera;

O ângulo formado pela linha 2-4 e a linha P -perpendicular à linha inferior representa o ângulo θ ;

Os passos a seguir são para calcular os valores de X_{real} e Y_{real} de uma posição qualquer do robô no ambiente de trabalho em relação a posição 1 do robô:

Calcula-se a posição x e y na imagem da nova posição do robô (representada na figura abaixo pelo ponto n):

F é o ponto de intersecção da reta 1-4 com a reta AB . Projetando-se uma reta do ponto F passando pelo ponto n até a linha AB tem-se o ponto N_n , a distância de F a N_n é dFN_n . G é o ponto de intersecção da reta 2-3 com a reta AB . A distância de 1 a 2 é o valor deslocado pelo robô da posição 1 até a posição 2 (d_{desloc}). A distância de F a G é um valor proporcional a distância 1-2 (dFG). Então:

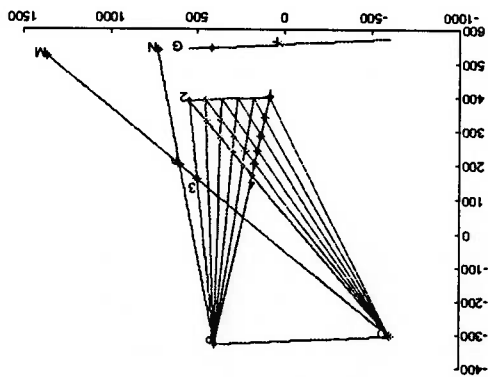
$$X_{real} = \frac{dFN_n \cdot d_{desloc}}{dFG} \quad (8.1)$$

Se n estiver a direita de F , X_{real} será positivo, se estiver a esquerda, X_{real} será negativo; Projetando-se uma reta do ponto D passando pelo ponto n até a linha AB tem-se o ponto M_n . $Base$ é o valor de dFG/n . i é o número de linhas horizontais da reta 2-1 à reta AB . Então:

$$Y_{real} = \frac{(dMN_n - i \cdot base) \cdot d_{desloc}}{dFG} \quad (8.2)$$

Se n estiver acima da posição 1, então Y_{real} será positivo, se estiver abaixo, Y_{real} será negativo.

Figura 8-7 Ponto N_n e M_n no mapa nirtual



Construção do mapa virtual: dividir dFG em n partes e extrapolar valores anteriores e posteriores através da equação vertical e da horizontal. Traçar a linha superior do mapa e, também, extrapolar os valores para determinar as posições das linhas verticais;

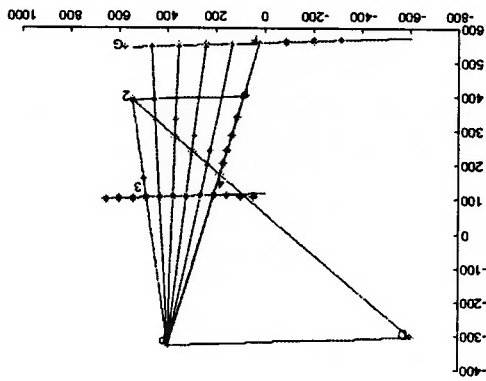
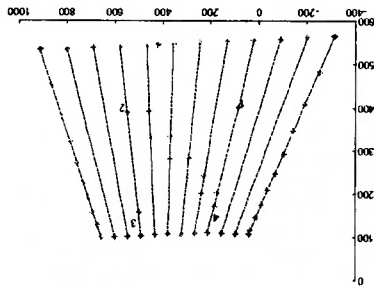


Figura 8-8 Extrapolação das equações verticais e horizontais

Traçar as linhas verticais dos pontos superiores e marcar os pontos laterais esquerdos e direitos;

Figura 8-9 Traçado das linhas verticais



Finalmente traçar as linhas horizontais e as linhas que representam as paredes. As figuras abaixo representam os mapas virtuais com e sem a inclinação da posição 1 à posição 2. O círculo dentro do mapa é a representação da posição atual do robô após calibrada a câmera, para a qual foram calculados os valores de X_{real} e Y_{real} .

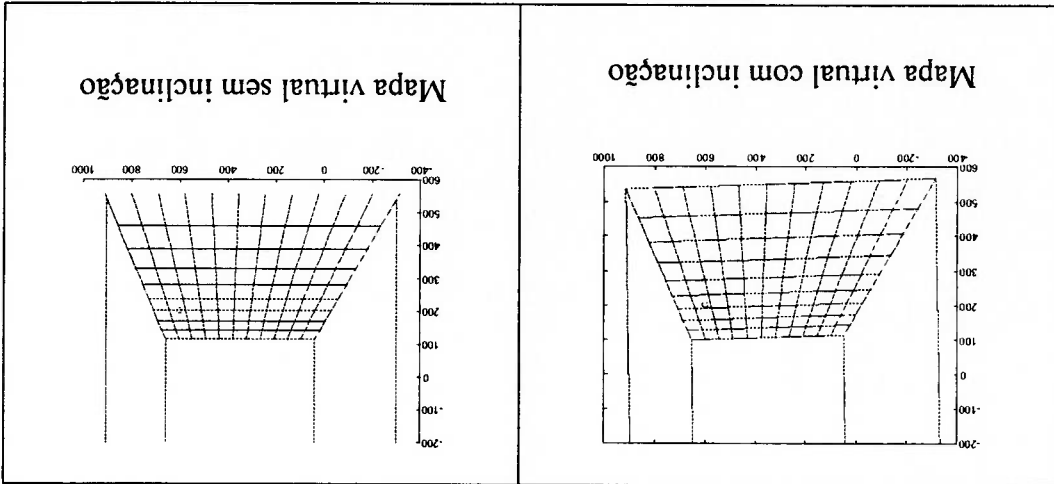


Figura 8-10 Mapa virtual com e sem inclinação das posições 1 e 2

Se a câmera estiver posicionada exatamente no meio do mapa virtual e o seu eixo óptico estiver na mesma direção, então o ângulo pan é zero. O ângulo formado pela lateral esquerda chão-parede e a linha vertical subtraído de 45° é o ângulo pan ;

Com os valores de h , til e pan , pode-se calcular as coordenadas da câmara XW , YW e ZW :

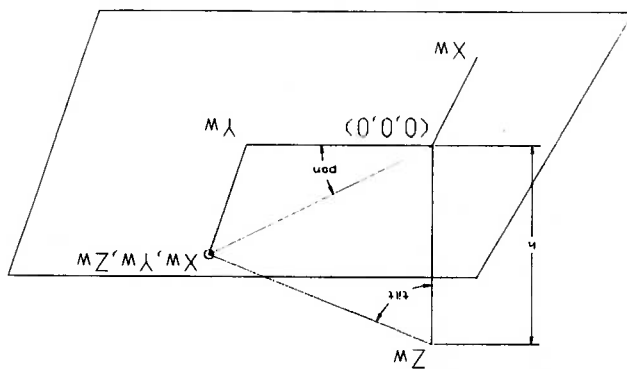


Figura 8-11 Representação da altura e dos ângulos da câmara

$$X_w = \sin(pan) \cdot h \cdot \tan(til) \tag{8.3}$$

(8.3)

$$Y_w = \cos(pan) \cdot h \cdot \tan(til) \tag{8.4}$$

(8.4)

$$Z_w = h \tag{8.5}$$

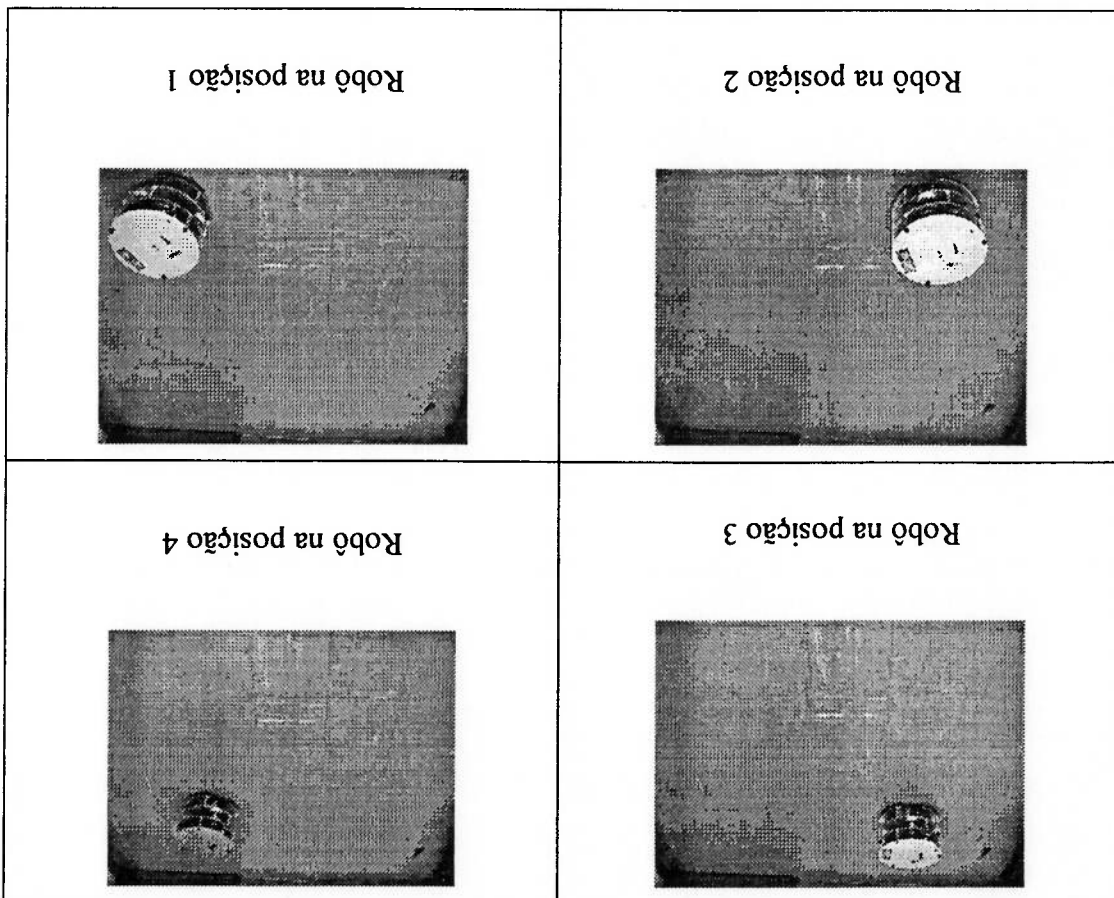
(8.5)

8.2 Resultados Experimentais

Para os testes finais foram capturadas várias imagens do robô no ambiente de trabalho para testar a veracidade do programa desenvolvido e apresentado neste capítulo. Será exposto um caso onde o robô se desloca para 4 posições com os seus respectivos resultados. A Figura 8-122 mostra o robô nas 4 posições

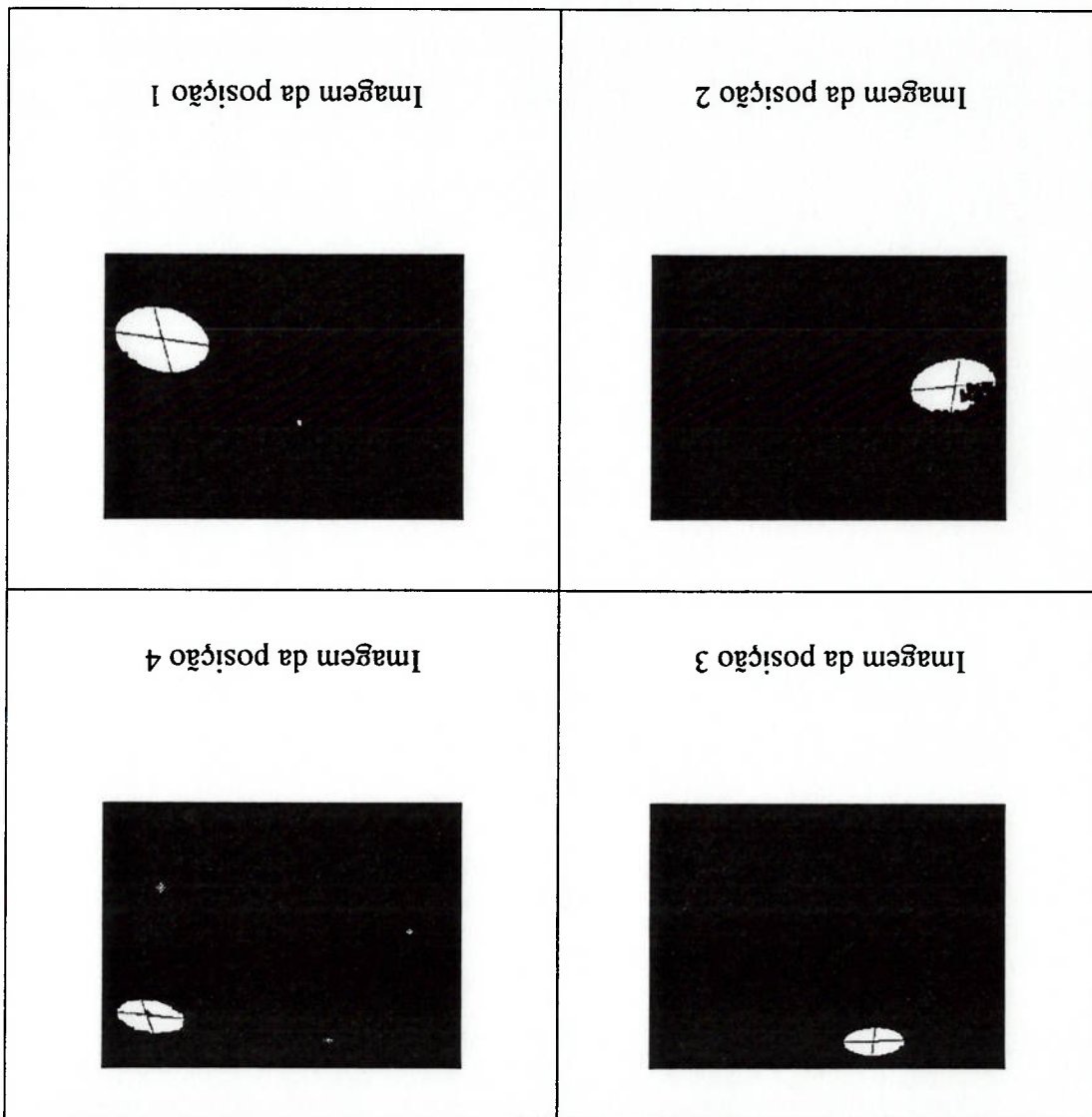
A figura a seguir mostra as imagens processadas, primeiramente foi determinado um limiar para binarização e após filtrado pelo método de dilatação e erosão. Em seguida, foram calculadas as posições centrais e traçadas as retas dos eixos maior e menor.

Figura 8-12 Imagens do robô nas 4 posições



A figura 8.14 representa a fase inicial da construção do mapa virtual, onde pode-se visualizar as quatro posições do robô, os pontos P e D , os pontos de intersecção entre as retas verticais e, neste caso, a nova posição do robô após calibrada a câmara coincide com a posição 2 do robô, para as quais estão representados os pontos N e M , que servirão de base para os cálculos de X_{real} e Y_{real} .

Figura 8-13 Imagens processadas



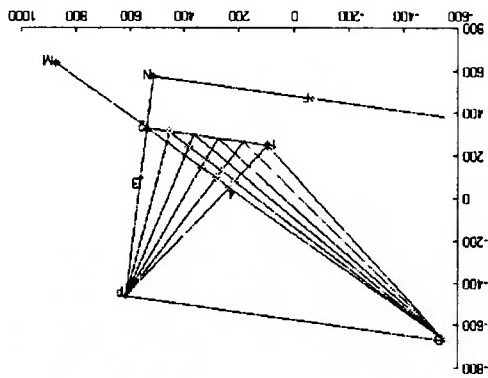
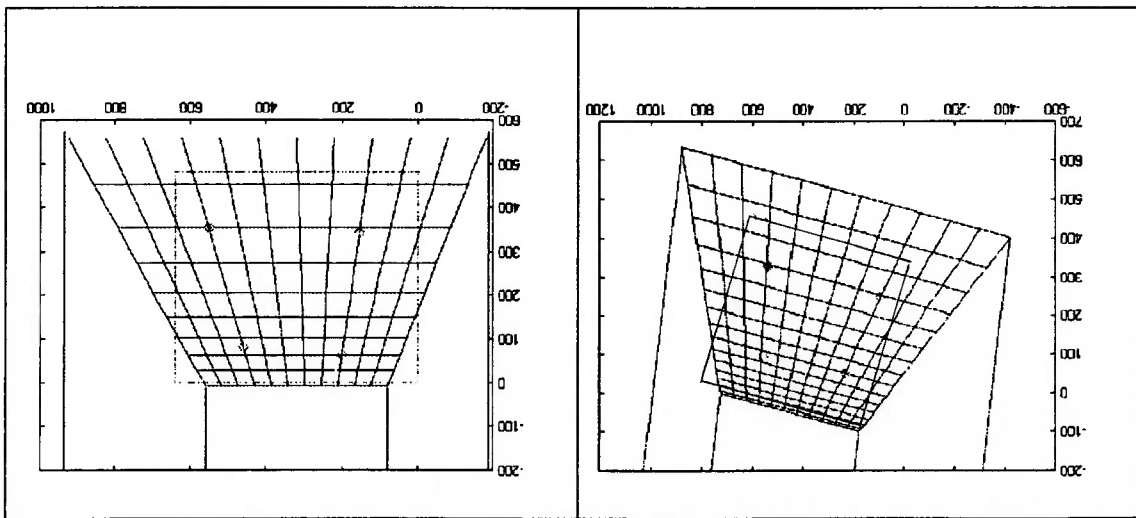


Figura 8-14 Mapa virtual inicial

Finalmente, na figura 8.15 pode-se visualizar os mapas virtuais resultantes deste processo de calibração da câmera. A mostra o mapa virtual na forma como ele foi calculado, isto é, considerando a inclinação entre as posições 1 e 2 do robô, e do qual se utiliza para realizar todos os cálculos devidos. Na não foi considerada a inclinação mencionada, para que se tenha uma melhor visualização do mapa, o objetivo deste é apenas visual. São mostrados nos dois mapas as 4 posições do robô que serviram de base para a sua elaboração. A partir deste mapa, que representa a calibração da câmera, pode-se calcular a posição X_{real} e Y_{real} para qualquer nova posição do robô no ambiente de trabalho.

Figura 8-15 Mapa Virtual. a) com inclinação, b) sem inclinação entre posições 1 e 2



A Tabela 8.1 agrupa os resultados obtidos no processo de calibração da câmera. Após calculados os ângulos de inclinação pan e tilt e a altura h da câmera, foram capturadas 6 novas imagens do robô em diversas posições e calculadas as coordenadas do centro do robô nestas imagens (x_n, y_n). Com estas coordenadas foram calculadas as respectivas posições do robô no ambiente de trabalho

Deve-se considerar que os instrumentos de medição (trena e transferidor) utilizados para obtenção das distâncias e dos ângulos não apresentavam grande precisão, o que acarreta um certo erro nas medidas reais apresentadas. Os valores X_{real} e Y_{real} são calculados em relação à posição 1 do robô.

x_n, y_n são as coordenadas da nova posição do robô; X_{calc} , Y_{calc} são os valores calculados para a nova posição; X_{med} , Y_{med} são os valores reais medidos pelos instrumentos de medição, e erro X e erro Y são os erros percentuais entre os valores calculados e os medidos.

TABELA 8-1 RESULTADOS OBTIDOS

	xn (mm)	yn (mm)	Xcalc (mm)	Ycalc (mm)	Xmed (mm)	Ymed (mm)	ErroX (%)	ErroY (%)
1	92.8468	247.8999	1.29e-013	16.79	0	0	0	-1.86
2	538.7178	328.2827	900.00	16.79	900	0	2.5e-014	-1.86
3	237.3170	51.5051	3.97e-013	916.79	0	900	0	1.86
4	311.2321	116.0344	274.65	653.77	280	630	-1.90	3.77
5	406.6699	207.9741	575.73	338.77	580	330	-0.73	2.65
6	141.8194	37.8671	-258.15	900	-270	900	4.38	-0.34

A tabela 8-2 mostra os parâmetros de calibração obtidos, estes valores são comuns a todas as novas posições do robô, e só são alterados se a câmera mudar de posição, nesta situação, eles precisam ser recalculados. H é a altura da câmera, pan e tilt são os ângulos de inclinação da câmera, ccx e ccy são as coordenadas em x e em y da posição da câmera em relação a posição 1 do robô.

TABELA 8-2 PARÂMETROS DE CALIBRAÇÃO

	Valor calculado(mm)	Valor medido(mm)	Erro (%)
h (calc) + h(robô)	1068.4+240=1308.4	1315	0.5
tilt	49.25	47	4.78
pan	5.1973	5	3.946
ccx	112.3221	120	6.39
ccy	1234.9	1190	3.77

A técnica de calibração proposta apresentou ótimos resultados, com erros na ordem de 3%, como pode ser visto na tabela 8.1, e erros médios de 5% na tabela 8.2.

Abaixo encontram-se as equações Verticais e Horizontais comportamento das distâncias verticais no mapa virtual para esta situação apresentada.

Equação Vertical $f(x) = 0.013x^4 + 0.051x^3 + 2.087x^2 + 36.331x + 13.023$

Equação Horizontal $f(x) = 0.014x^4 + 0.055x^3 + 2.273x^2 + 39.562x + 195.412$

A Tabela 8-3 mostra os resultados obtidos pela substituição dos valores encontrados pela otimização do método proposto nas equações inicialmente apresentadas.

TABELA 8-3 RESULTADOS OBTIDOS ATRAVÉS DAS EQUAÇÕES

Os valores calculados de h e pan foram substituídos nas equações do caso 1, e obteve-se os seguintes resultados (mostrados na coluna ao lado) para:	
H, ϕ , L, α , α_2 , D, D2, β , β_2 , ξ , ξ_2 , E, E2, Df, Df2, K, K2:	
Como os valores de α_2 e, Df2 são negativos, então as elipses pertencem ao caso 5/6.	
$tilt = \phi = 0.856 \text{ rad} = 49.04^\circ$	
$pan = 5.2^\circ$	
Eixo óptico esta à esquerda das duas posições do robô e as posições estão à esquerda e à direita da linha vertical da câmera. Eixo óptico esta à direita das duas posições do robô e as posições estão à esquerda e à direita da linha vertical da câmera.	
296.7	1.26 · 10 ³
446.847	0.856
- 1.254	2.184 · 10 ³
7.967	0.193
0.066	- 0.126
0.132	1.599 · 10 ³
0.981	2.267 · 10 ³
0.663	0.795
1.047	0.795

A Tabela 8-4 faz um comparativo do erro percentual entre os valores de h e tilt encontrados pela otimização do método proposto e os valores encontrados pelas equações inicialmente apresentadas.

TABELA 8-4 COMPARAÇÃO ENTRE OS VALORES DE H, PANE TILT

	Inicialmente	Calculado	Medido	Erro e/ calculado equações e medido (%)
<i>H</i>	1308.4 (mm)	1260 (mm)	1315 (mm)	4.1825
<i>pan</i>	5.1973	5.2	5	4
<i>till</i>	49.25	49.25	47	4.78

Através dos erros apresentados, em torno de 4 a 5%, percebe-se a eficiência das equações apresentadas nos capítulos anteriores para calibração da câmera.

9 CONCLUSÕES

Na teleoperação de robôs móveis pode-se ter câmeras fixas no robô para auxílio em operações locais e também pode-se ter câmeras fixas no ambiente de trabalho do robô para planejamento global de tarefas. Em ambos os casos é necessário calibrar as câmeras caso se deseje obter uma relação entre a posição 3D dos objetos no ambiente de trabalho do robô e das imagens 2D adquiridas pelas câmeras. A calibração é de grande importância na teleoperação de robôs móveis, pois é através dela que se obtêm os parâmetros intrínsecos (características geométricas e ópticas da câmera) e extrínsecos (a posição e a orientação da câmera em relação a um sistema de coordenadas globais) da câmera.

Foi proposto um novo método para calibração de câmeras fixas no ambiente de trabalho tendo como objetivos finais: determinar os ângulos de inclinação e a altura da câmera; construir o mapa virtual do robô que forneça uma relação métrica entre os pixels da imagem; determinar as coordenadas de qualquer posição do robô no seu ambiente de trabalho após calibrada a câmera e a orientação e posição da câmera em relação a um sistema de coordenadas. Trata de uma técnica puramente geométrica, na qual, através da observação da forma conhecida de um robô em várias posições determinam-se os parâmetros de calibração de uma câmera.

Os dados necessários no método proposto para calcular os parâmetros de calibração da câmera são a dimensão do eixo maior e menor e a inclinação da elipse (proveniente do

processamento da imagem), o diâmetro do robô, a distância entre as duas posições do robô e a distância focal. Com a otimização apresentada no capítulo 8, necessita-se saber as distâncias entre as quatro posições percorridas pelo robô e as coordenadas destas posições nas imagens.

Pela observação das fórmulas e pela análise dos resultados teóricos obtidos no método proposto, conseguiu-se unificar os doze casos apresentados. As equações para o caso 1, podem ser utilizadas para todos os demais casos e, o conhecimento do caso a que pertencem as duas elipses utilizadas para a calibração vem da análise dos sinais das variáveis apresentadas nos resultados obtidos. A análise dos sinais somente define o caso a que pertencem as elipses, para saber o resultado real, deve-se utilizar as equações específicas para cada caso. O método tem a desvantagem de precisar de um valor inicial (*guess value*) para o cálculo da altura e dos ângulos de inclinação da câmera. Estes valores, precisam estar muito próximos do real para que as equações convirjam para um resultado final.

Para otimizar o método proposto e encontrar uma relação métrica entre os pixels das imagens, relação esta necessária para converter os valores dos eixos maior e menor das elipses de pixels para milímetros e utilizá-los nas equações desenvolvidas, adotou-se o processo dos pontos de distância das perspectivas lineares exatas de elementos geométricos situados sobre o plano geométral. Verificou-se que é possível não somente determinar esta relação métrica através da construção do mapa virtual mas, também, encontrar todos os parâmetros necessários para calibrar a câmera e, após calibrada, descobrir as coordenadas de qualquer posição do robô no ambiente de trabalho.

Com a otimização, o método apresenta a vantagem de não depender dos eixos maior e menor da elipse, pois uma pequena variação nestes valores acarreta em um grande erro nas dimensões finais dos ângulos e da altura da câmera. Ele depende apenas da posição central do robô nas imagens, por isso pode ser facilmente adaptável a qualquer formato de robô. Os esforços computacionais também são reduzidos, pois, os valores procurados são retirados diretamente do mapa virtual. E o primeiro deslocamento do robô pode ser realizado em qualquer direção, isto implica em não precisar direcionar as rodas do robô para uma direção específica.

Observou-se que o processamento das imagens obtidas do robô é muito lento, em torno de 1'30" por imagem, e o limiar definido para uma imagem, nem sempre é o mesmo para as demais, pois, depende das condições de luminosidade nas quais elas foram obtidas.

Algumas das causas de erro nos resultados finais obtidos são:

- pequena variação nos cálculos da posição central da imagem, pois, se a luminosidade não for adequada, o método utilizado de obtenção do robô na imagem pode cortar parte do robô ou acrescentar outras que tenham o mesmo tom de cinza do robô;
- O não paralelismo entre os lados do quadrado formado pelos deslocamentos do robô, isto depende das limitações e da precisão do robô em manter esta condição;

- É aconselhável conciliar o zoom da câmera com as quatro posições do robô, para que nas imagens o robô apareça próximos as extremidades da imagem. Pois, as equações verticais e horizontais que regem o comportamento das linhas no mapa virtual não são

lineares e os valores obtidos para uma posição do robô que esteja fora desta área apresenta um erro maior em relação as que estão internas.

As equações desenvolvidas para calcular os parâmetros da câmera apresentaram resultados satisfatórios, com erros na ordem de 10^{-8} quando testadas com dados sintéticos para todas as possíveis posições do eixo óptico da câmera. Com a otimização, os valores obtidos também apresentaram resultados satisfatórios, com erros na ordem de 3%. Como trabalho futuro visa-se a teleoperação do robô móvel com enfoque em realidade virtual.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEN, P. K. **Robotic Object Recognition Using Vision and Touch**. Boston, Kluwer Academic Publishers, 1987.

ANDERSON, R. J. SMART: A Modular Control Architecture for Telerobotics. **IEEE Robotics & Automation Magazine**, p.10-18, setembro 1995.

ATKINSON D., CIUFO P., KRAV S. Robotoy - Technical Details, 1998, <http://robotoy.elec.nov.edu.au/tech.html>

AYACHE, N.; FAUGERAS, O. D. Maintaining Representations of the Environment of a Mobile Robot. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, vol.5, n°6, p.804-819, dezembro 1989.

BACKES P., THARP G. The Web Interface for Telescience (WITS). In proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation, p.411-417, Albuquerque, New Mexico, April 1997.

BACKES P., TSO K., THARP G., Mars Pathfinder Mission Internet-Based Operations Using WITS, **IEEE International Conference in Robotics & Automation**, 1998.

BOVISIO, Emanuele. **Interfaccia per il Controllo Remoto di un Robot Mobile Tramite Internet**. Politecnico Di Milano, Facoltà di Ingegneria, Corso di Laurea in Ingegneria Informatica.

CALKIN D. W., PARKIN R. M., SAFARIC R.. Department of Mechanical Engineering, Loughborough University, Ashby Road, UK. C. A. Czarniecki, School of Computing Sciences, De Montfort University, The Gateway Leicester, UK. **Visualization, Simulation & Control of a Robotic System Using Internet Technology**, 1998.

- CARTER M.: Using Telerobotics for Recreation, *International Conference on Field and Service Robotics*, 1997.
- CHAIMOWICS; CAMPOS. Estimagaõ Visual de Distâncias na Navegaõ de Robõs Mõveis. 4º SBAI - Simposio Brasileiro de Automagaõ Inteligente, p.482-486, SP, 08-10 de Setembro de 1999.
- CHAIMOWICZ, L.; SANTOS, M. F. M. Estimagaõ Visual de Distâncias na Navegaõ de Robõs Mõveis. SBAI – Simposio Brasileiro de Automagaõ Inteligente, p.482-486, São Paulo, 08-10 de setembro de 1999.
- CHAUMETTE, F.; RIVES, P. *Modélisation et Calibration D'une Caméra*. AFCET RFA, 1990.
- CHEN, Z.; WANG, C-M.; HO, S-Y. An Effective Search Approach to Camera Parameter Estimation Using an Arbitrary Planar Calibration Object. *Pattern Recognition*, vol.26, nº5, p.655-666, China, 1993.
- CONWAY, L.; VOLZ, R. A.; WALKER, M. W. Teleronomous Systems: Projecting and Coordinating Intelligent Action at a Distance. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol.6, nº2, p.146-158, abril 1990.
- DEPASQUALE P., LEWIS J., STEIN M. A Java Interface for Asserting Interactive Telerobotic Control, *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robotic Systems*, 1998, <http://yugo.mme.wilkes.edu/~villanov>
- Digital Media Arts, *The Eyebot Project*, 1996, <http://www.dma.nl/eyebot>
- DORIA, C. *Curso de Perspectivas e Sombras*. Curitiba, 1958.
- FAUGERAS, O.D. *Fundamentals in Computer Vision*. Cambridge University Press, 1983.

- GAT, E.; DESAI, R.; IVLEV, R.; LOCH, J.; MILLER, D. P. Behavior Control for Robotic Exploration of Planetary Surfaces. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol.10, nº4, p.490-503, agosto 1994.
- GOLDBERG K.; SANTARROMANA J. About the Tele-Garden, 1997. <http://telegarden.aec.at/html/intro.html>
- GOLDBERG S., BEKEY G., MCLAUGHLIN M. The Javamuse Applet: USC Interactive Art Museum, <http://digitimuse.usc.edu/robot/>
- GONZALEZ, R. C. *Digital Image Processing*. 2.ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1987.
- GROSKY, W. I.; TAMBURINO, L. A. A Unified Approach to the Linear Camera Calibration Problem. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol.12, nº7, p.663-671, julho 1990.
- HAN, M.; RHEE, S. Camera Calibration for Tree-Dimensional Measurement. *Pattern Recognition*, vol.25, nº2, p.155-164, Korea, 1992.
- HO, Teresa T.; ZHANG Hong; Use of Java for Internet-Based Teleoperation. University of Alberta, Department of Computing Science, Edmonton, Alberta, Canada, T6G 2H1, 1998.
- HODGINS, J. K.; RAIBERT, M. H. Adjusting Step Length for Rough Terrain Locomotion. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol.7, nº3, p.289-298, junho 1989.
- HONG, Z.; YANG, J. An Algorithm for Camera Calibration using a Three-Dimensional Reference Point. *Pattern Recognition*, vol.26, nº11, p.1655-1660, China, maio 1993.
- KABAYAMA, A. M.; TRABASSO, L. G. Análise de Desempenho de Técnicas de Visão Computacional. *COBEM Congresso de Engenharia Mecânica*, novembro 1999.

- KRIEGMAN, D. J.; TRIENDEL, E.; BINFORD, T. O. Stereo Vision and Navigation in Buildings for Mobile Robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol.5, nº6, p.792-803, dezembro 1989.
- LANG, S. *Algebra Linear*. Ed. Edgard Blücher Ltda, 1971.
- LI, M.; LAVEST, J-M. Some Aspects of Zoom Lens Camera Calibration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol.18, nº11, p.1105-1110, novembro 1996.
- MA, S. D. A Self-Calibration Technique for Active Vision Systems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol.12, nº1, p.114-120, fevereiro 1996.
- MA, S. D. Conics-Based Stereo, Motion Estimation and Pose Determination. *IJCV*, 10(1), 1993.
- Manual de Fotogrametria*. 1980, fourth edition, American Society of Photogrammetry.
- MARTIAL, K.; TAKEO, K. Analysis and Interpretation of Range Images. In So: "3D Vision Techniques for Autonomous Vehicles", Editors Ramesh C. Jain and Arnil K. Jain, Spreinger-Verlag, New York, 1990.
- NOMURA, Y.; SAGARA, M.; NARUSE, H.; IDE, A. Simple Calibration Algorithm for High-Distortion-Lens Camera. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol.14, nº11, p.1095-1099, Japão, novembro 1992.
- PAULINVI, Luis Felipe de Aguiar. Implementação em uma Plataforma UNIX de uma Interface para Controle Remoto do Robo ABB IRB 2000 Utilizando a Internet como Via de Controle. GRACO - Grupo de Automação e Controle, UNB, 1998, Brasília.

SAUCY P., MONDADA F. *KhépOnTheWeb, an Example of Remote Access to Mobile Robotics Facilities*, IROS 1997.

SHERIDAN, T. B. *Telerobotics*, vol.25, nº4, p.487-507, 1989.

SHIH, S-W; HUNG, Y-P.; LIN, W-S. *When Should We Consider Lens Distortion in Camera Calibration*, *Pattern Recognition*, vol.28, nº3, p.447-461, Taiwan, 1995.

Simulador de Robô. Encarnação, Rio de Janeiro, 1996

http://www.antares.com.br/~lfenc/robotics/robot_simulator/index_p.html

SUZUKI, T., FUJII, T., ASAMA, H., YOKOTA, K., KAETSU, H., ENDO, I.: "A Multi-Robot Teleoperation System Utilizing the Internet", *Advanced Robotics*, vol. 11, no. 8, pp. 781-797, 1998.

TAKEDA, H.; FACCHINETTI, C.; LATOMBE, J-C. *Planning the Motions of a Mobile Robot in a Sensory Uncertainly Field*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol.16, nº10, p.1002-1016, outubro 1994.

TAYLOR, Ken; DALTON, Barney; *Issues in Internet Telerobotics*. *FSR'97 International Conference on Field and Service Robotics*. The Australian National University, Canberra, Australia, 8-10, December, 1997. <http://telebot.mech.uwa.edu.au>

TSAI, R. Y. *An Efficient and Accurate Camera Calibration Technique for 3D Machine Vision*, In *CVPR*, p.364-374, USA, junho 1986.

VAILLANT, R. *Géométrie Différentielle et Vision par Ordinateur: Détection et Reconstruction des Contours d'ocultation de la Surface d'un Objet Non-Polyédrique*. PhD thesis, Université Paris-Sud, 1990.

VEIGA, P.; SOREL, F.; GONÇALVES, J. *A Man-Machine Interface for a Teleoperated Vehicle*. *IEEE*, p.927-930, 1991.

WENG, J.; COHEN, P.; HERNIOU, M. Camera Calibration with Distortion Models and Accuracy Evaluation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol.14, nº10, p.965-980, Canadá, outubro 1992.

WOLF H., From Web server to Railroad Layout <http://tr-vs.informatik.uni-ulm.de/tr/LayoutControl.html>

ZHANG, Z.; LUONG, Q-T; FAUGERAS, O. Motion of an Uncalibrated Stereo Rig: Self-Calibration and Metric Reconstruction. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol.12, nº1, p.103-113, fevereiro 1996.

ZHUANG, H.; WANG, K.; ROTH, Z. S. Calibração Simultânea de um Robô e de uma Câmera Montada no Braço. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol.11, nº5, p.649-660, USA, outubro 1995.

ZHUANG, H.; WU, W-C. Camera Calibration with a Near-Parallel Calibration Board Configuration. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol.12, nº6, p.918-921, USA, dezembro 1996.

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

- ABI-AYAD, C. R. A.; THIESSE, B.; MARTHON, P. Les Multiples Facettes du Problème de Calibrage de Caméras. AFCET RFA, 1991.
- BECKERMAN, M.; OBLow, E. M. Treatment of Systematic Errors in the Processing of Wide-Angle Sonar Sensor Data for Robotic Navigation. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol.6, nº2, p.638-647, abril 1990.
- BEYER, H. A. Accurate Calibration of CCD-Cameras. *IEEE International Conference on Computer Vision*, Champaign, p.96-101, junho 1992.
- CASTRO, G. J.; NIETO, J.; GALLEGO, L. M.; PASTOR, L.; CABELLO, E. An Effective Camera Calibration Method. *IEEE*, p.171-174, Espanha, 1998.
- CHANG, Y.-L.; LEBEGUE, X.; AGGARWAL, J. K. Calibrating a Mobile Camera's Parameters. *Pattern Recognition*, vol.26, nº1, p.75-88, USA, 1993.
- CHEN, W.; JIANG, B. C. 3-D Camera Calibration Using Vanishing Point Concept. *Pattern Recognition*, vol.24, nº1, p.57-67, USA, 1991.
- DORIA, C. *Perspectiva e Sombras*. Rio de Janeiro, 1965.
- EVERETT, L. J.; IVES, T. W. A Sensor Used for Measurements in the Calibration of Production Robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol.12, nº1, p.121-125, fevereiro 1996.

GILBERT, E. G.; FOO, C-P. Computing the Distance Between General Conves Objects in Three-Dimensional Space. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, vol.6, nº1, p.53-61, fevereiro 1990.

HARALICK, R. M.; SHAPIRO, L. G. Glossary of Computer Vision Terms. **Pattern Recognition**, vol.1, p.69-93, USA, 1991.

ITO, M.; ISHII, A. A Non-Iterative Procedure for Rapid and Precise Camera Calibration. **Pattern Recognition**, vol.27, nº2, p.301-310, Japão, 1994.

LENS, R. K.; TSAI, R. Y. Techniques for Calibration of the Scale Factor and Image Center for High Accuracy 3D Machine Vision Metrology. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, vol.10, nº5, p.713-720, setembro 1988.

LIU, A.; THARP, G.; FRENCH, L.; LAI, S.; STARK, L. Some of What One Needs to Know About Using Head-Mounted Displays to Improve Teleoperator Performance. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, vol.9, nº5, p.638-647, outubro 1993.

MACHADO, Ardevan. *Perspectiva*. São Paulo, 1966.

MCLAUCHLAN, P. F.; MURRAY, D. W. Active Camera Calibration for a Head-Eye Platform Using the Variable State-Dimension Filter. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, vol.18, nº1, p.15-21, janeiro 1996.

MURRAY, D.; BASU, A. Motion Tracking with an Active Camera. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, vol.16, nº5, p.449-459, maio 1994.

PERSIANO, R. C. M. O.; ALBERTO, A.F. **Introdução à Computação Gráfica**. V Escola de Computação, Belo Horizonte, UFMG, Ed. Gráfica Formato Ltda, 1986.

- RODRIGUES, A. J. *Perspectiva Paralela*. Rio de Janeiro, 1948.
- TAKEO, K.; KWEON High-Resolution Terrain from Multiple Sensor Data. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol.14, n°2, p.278-292, February 1992.
- TOSCANI, G. *Systèmes de Calibration et Perception du Mouvement en Vision Artificielle*. PhD thesis, Université Paris-Sud, 1987.
- TUCERYAN, M.; GREER, D. S.; WHITAKER, R. T.; BREEN, D. E.; CRAMPTON, C.; ROSE, E.; AHLERS, K. H. Calibration Requirements and Procedures for a Monitor-Based Augmented Reality System. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, vol.1, n°3, p.255-273, setembro 1995.
- WAMPLER, C. W.; HOLLERBACH, J. M.; ARAI, T. Na Implicit Loop Method for Kinematic Calibration and Its Application to Closed-Chain Mechanisms. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol.11, n°5, p.710-724, USA, outubro 1995.
- WEI, G-Q.; MA, S. D. Implicit and Explicit Camera Calibration: Theory and Experiments. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol.16, n°5, p.469-480, China, maio 1994.
- WEISBIN, C. R.; LAVERY, D. NASA Rover and Telerobotics Technology Program. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, p.14-21, dezembro 1994.
- WELLS, W. M. Visual Estimation of 3-D Line Segments from Motion - A mobile Robot Vision System. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol.5, n°6, p.820-825, dezembro 1989.

APÊNDICE A – Equações referentes ao cálculo dos parâmetros da câmara

CASOS 1 e 10

$$h = 2000$$

$$l = 2400$$

$$\phi = 59 \text{ deg}$$

$$d = 1000$$

$$w = 1000$$

$$b = 313.607$$

$$b2 = 151.067$$

$$\text{Ratio} = 300$$

$$\alpha = 30.189 \text{ deg}$$

$$\alpha := \phi - \text{atan} \left(\frac{l - w - \text{Ratio}}{h} \right)$$

$$\alpha2 = 12.603 \text{ deg}$$

$$\alpha2 := \phi - \text{atan} \left(\frac{l - \text{Ratio}}{h} \right)$$

$$D = \sqrt{l^2 + w^2 + \text{Ratio}^2 + h^2 - 2 \cdot l \cdot \text{Ratio} - 2 \cdot l \cdot w}$$

$$D2 = \sqrt{l^2 + \text{Ratio}^2 + h^2 - 2 \cdot l \cdot \text{Ratio}}$$

$$D = 2282.5424$$

$$D2 = 2900$$

$$\beta := \text{atan} \left(\frac{l - w}{h} \right)$$

$$\beta2 := \text{atan} \left(\frac{l}{h} \right)$$

$$\beta = 34.992 \text{ deg}$$

$$\beta2 = 50.194 \text{ deg}$$

$$\zeta = \text{atan} \left(\frac{b \cdot \cos(\alpha) - \left(b \cdot \frac{\cos(\phi)}{\cos(\phi - \alpha)} \right)}{b \cdot \sin(\alpha)} \right)$$

$$\zeta2 = \text{atan} \left(\frac{b2 \cdot \cos(\alpha2) - \left(b2 \cdot \frac{\cos(\phi)}{\cos(\phi - \alpha2)} \right)}{b2 \cdot \sin(\alpha2)} \right)$$

$$\zeta = 28.811 \text{ deg}$$

$$\zeta2 = 46.397 \text{ deg}$$

$$E = (\beta - \zeta)$$

$$E2 = \beta2 - \zeta2$$

$$E = 6.181 \text{ deg}$$

$$E2 = 3.797 \text{ deg}$$

$$\text{diff} := \tan(E) \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

$$\text{diff2} := \tan(E2) \cdot b2 \cdot \sin(\alpha2)$$

$$\text{diff} = 17.0794$$

$$\text{diff2} = 2.1877$$

$$h := \frac{\tan(\phi - \alpha2) - \tan(\phi - \alpha)}{w}$$

$$h = 2 \cdot 10^3$$

$$k_2 = \frac{(b_2 \cdot \cos(\alpha_2) + \text{diff}) \cdot (1 + \tan(E_2) \cdot \tan(\phi - \alpha_2) + \tan(E_2)^2 \cdot \tan(\phi - \alpha_2)^2 + \tan(E_2)^3 \cdot \tan(\phi - \alpha_2)^3 + \tan(E_2)^4 \cdot \tan(\phi - \alpha_2)^4)}{\cos(\phi - \alpha_2)}$$

$$k = \frac{(b \cdot \cos(\alpha) + \text{diff}) \cdot (1 + \tan(E) \cdot \tan(\phi - \alpha) + \tan(E)^2 \cdot \tan(\phi - \alpha)^2 + \tan(E)^3 \cdot \tan(\phi - \alpha)^3 + \tan(E)^4 \cdot \tan(\phi - \alpha)^4)}{\cos(\alpha - \phi)}$$

$$\text{diff} = \tan(E) \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

$$\text{diff} = \tan(E_2) \cdot b_2 \cdot \sin(\alpha_2)$$

$$E = \beta - \zeta$$

$$E_2 = \beta_2 - \zeta_2$$

$$\zeta = \text{atan} \left(\frac{b \cdot \cos(\alpha) - \left(b \cdot \frac{\cos(\phi)}{\cos(\phi - \alpha)} \right)}{b \cdot \sin(\alpha)} \right)$$

$$\zeta_2 = \text{atan} \left(\frac{b_2 \cdot \cos(\alpha_2) - \left(b_2 \cdot \frac{\cos(\phi)}{\cos(\phi - \alpha_2)} \right)}{b_2 \cdot \sin(\alpha_2)} \right)$$

$$\beta = \text{atan} \left(\frac{1-w}{h} \right)$$

$$\beta_2 = \text{atan} \left(\frac{1}{h} \right)$$

$$D = \sqrt{l^2 + w^2 + \text{Ratio}^2 + h^2 - 2 \cdot l \cdot \text{Ratio} + 2 \cdot w \cdot \text{Ratio} - 2 \cdot l \cdot w}$$

$$D_2 = \sqrt{l^2 + \text{Ratio}^2 + h^2 - 2 \cdot l \cdot \text{Ratio}}$$

$$\alpha = \phi - \text{atan} \left(\frac{1-w - \text{Ratio}}{h} \right)$$

$$\alpha_2 = \phi - \text{atan} \left(\frac{1 - \text{Ratio}}{h} \right)$$

$$-b=0 \quad \frac{w}{\tan(\phi - \alpha_2) - \tan(\phi - \alpha)}$$

Given

$$k_2 = 233.1925$$

$$k_2 = \frac{(b_2 \cdot \cos(\alpha_2) + \text{diff}) \cdot (1 + \tan(E_2) \cdot \tan(\phi - \alpha_2) + \tan(E_2)^2 \cdot \tan(\phi - \alpha_2)^2 + \tan(E_2)^3 \cdot \tan(\phi - \alpha_2)^3 + \tan(E_2)^4 \cdot \tan(\phi - \alpha_2)^4)}{\cos(\phi - \alpha_2)}$$

$$k = 349.6888$$

$$k = \frac{(b \cdot \cos(\alpha) + \text{diff}) \cdot (1 + \tan(E) \cdot \tan(\phi - \alpha) + \tan(E)^2 \cdot \tan(\phi - \alpha)^2 + \tan(E)^3 \cdot \tan(\phi - \alpha)^3 + \tan(E)^4 \cdot \tan(\phi - \alpha)^4)}{\cos(\alpha - \phi)}$$

$$\frac{2 \cdot b \cdot (\cos(\alpha))^2 + 2 \cdot \text{dif} \cdot \cos(\alpha)}{2 \cdot d + k \cdot \tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\phi - \alpha)} - \frac{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi - \alpha) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi - \alpha))}{2 \cdot b^2 \cdot (\cos(\alpha^2))^2 + 2 \cdot \text{dif}^2 \cdot \cos(\alpha^2)} - \frac{D2 - \text{Ratio} \cdot \sin(\phi - \alpha^2)}{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi - \alpha^2) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\phi - \alpha^2))} = 5.305 \cdot 10^{-9}$$

$$\frac{2 \cdot b \cdot (\cos(\alpha))^2 + 2 \cdot \text{dif} \cdot \cos(\alpha)}{2 \cdot d + k \cdot \tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\phi - \alpha)} - \frac{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi - \alpha) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi - \alpha))}{2 \cdot b^2 \cdot (\cos(\alpha^2))^2 + 2 \cdot \text{dif}^2 \cdot \cos(\alpha^2)} - \frac{D - \text{Ratio} \cdot \sin(\phi - \alpha)}{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi - \alpha) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi - \alpha))} = 3.784 \cdot 10^{-8}$$

0	2.10 ³
1	1.03
2	2.4.10 ³
3	0.527
4	0.22
5	2.283.10 ³
6	2.9.10 ³
7	0.611
8	0.876
9	0.503
10	0.81
11	0.108
12	0.066
13	17.079
14	2.188

find(h, phi, l, alpha, alpha2, D, D2, beta, beta2, gamma, gamma2, E, E2, dif, dif2, k, k2) =

$$\frac{2 \cdot b \cdot (\cos(\alpha))^2 + 2 \cdot \text{dif} \cdot \cos(\alpha)}{2 \cdot d + k \cdot \tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\phi - \alpha)} - \frac{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi - \alpha) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi - \alpha))}{2 \cdot b^2 \cdot (\cos(\alpha^2))^2 + 2 \cdot \text{dif}^2 \cdot \cos(\alpha^2)} - \frac{D2 - \text{Ratio} \cdot \sin(\phi - \alpha^2)}{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi - \alpha^2) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\phi - \alpha^2))} = 0$$

$$\frac{2 \cdot b \cdot (\cos(\alpha))^2 + 2 \cdot \text{dif} \cdot \cos(\alpha)}{2 \cdot d + k \cdot \tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\phi - \alpha)} - \frac{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi - \alpha) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi - \alpha))}{2 \cdot b^2 \cdot (\cos(\alpha^2))^2 + 2 \cdot \text{dif}^2 \cdot \cos(\alpha^2)} - \frac{D - \text{Ratio} \cdot \sin(\phi - \alpha)}{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi - \alpha) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi - \alpha))} = 0$$

CASOS 2 e 9

$$h = 2000$$

$$l = 2400$$

$$\phi = 15 \text{ deg}$$

$$D = 1000$$

$$w = 1000$$

$$b = 244.5$$

$$b2 = 196$$

$$\text{Ratio} = 300$$

$$\alpha = \text{atan} \left(\frac{1 - w - \text{Ratio}}{h} \right) - \phi$$

$$\alpha2 = \text{atan} \left(\frac{1 - \text{Ratio}}{h} \right) - \phi$$

$$\alpha = 13.811 \text{ deg}$$

$$\alpha2 = 31.397 \text{ deg}$$

$$D = \sqrt{l^2 + w^2 + \text{Ratio}^2 + h^2 - 2 \cdot l \cdot \text{Ratio} + 2 \cdot w \cdot \text{Ratio} - 2 \cdot l \cdot w}$$

$$D2 = \sqrt{l^2 + \text{Ratio}^2 + h^2 - 2 \cdot l \cdot \text{Ratio}}$$

$$D = 2.283 \cdot 10^3$$

$$D2 = 2.9 \cdot 10^3$$

$$\beta = \text{atan} \left(\frac{1 - w}{h} \right)$$

$$\beta2 = \text{atan} \left(\frac{1}{h} \right)$$

$$\beta = 34.992 \text{ deg}$$

$$\beta2 = 50.194 \text{ deg}$$

$$\zeta = \text{acos} \left(\frac{\sin(\phi + \alpha)}{\sin(\phi + \alpha2)} \right)$$

$$\zeta2 = \text{acos} \left(\frac{\sin(\phi + \alpha2)}{\tan(\phi + \alpha2)} \right)$$

$$\zeta = 28.811 \text{ deg}$$

$$\zeta2 = 46.397 \text{ deg}$$

$$E = (\beta - \zeta)$$

$$E2 = \beta2 - \zeta2$$

$$E = 6.181 \text{ deg}$$

$$E2 = 3.797 \text{ deg}$$

$$\text{diff} = \tan(E) \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

$$\text{diff2} = \tan(E2) \cdot b2 \cdot \sin(\alpha2)$$

$$\text{diff} = 6.321$$

$$\text{diff2} = 6.777$$

$$h = \frac{\tan(\phi + \alpha2) - \tan(\phi + \alpha)}{w}$$

$$h = 2 \cdot 10^3$$

Given

$$\alpha = \arctan \left(\frac{1 - w - \text{Ratio}}{h} \right) - \phi$$

$$\alpha 2 = \arctan \left(\frac{1 - \text{Ratio}}{h} \right) - \phi$$

$$D = \sqrt{1^2 + w^2 + \text{Ratio}^2 + h^2 - 2 \cdot 1 \cdot \text{Ratio} + 2 \cdot w \cdot \text{Ratio} - 2 \cdot 1 \cdot w}$$

$$D 2 = \sqrt{1^2 + \text{Ratio}^2 + h^2 - 2 \cdot 1 \cdot \text{Ratio}}$$

$$\beta = \arctan \left(\frac{1 - w}{h} \right)$$

$$\beta 2 = \arctan \left(\frac{1}{h} \right)$$

$$\zeta = \arccos \left(\frac{\sin(\phi + \alpha)}{\tan(\phi + \alpha)} \right)$$

$$\zeta 2 = \arccos \left(\frac{\sin(\phi + \alpha 2)}{\tan(\phi + \alpha 2)} \right)$$

$$E = \beta - \zeta$$

$$E 2 = \beta 2 - \zeta 2$$

$$\text{diff} = \tan(E) \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

$$\text{diff} 2 = \tan(E 2) \cdot b 2 \cdot \sin(\alpha 2)$$

$$h = \frac{\tan(\phi + \alpha 2) - \tan(\phi + \alpha)}{w}$$

$$K = \frac{(b \cdot \cos(\alpha) - \text{diff}) \cdot (1 + \tan(E) \cdot \tan(\alpha + \phi)) + \tan(E 2) \cdot \tan(\alpha + \phi)^2 + \tan(E 3) \cdot \tan(\alpha + \phi)^3 + \tan(E 4) \cdot \tan(\alpha + \phi)^4}{\cos(\alpha + \phi)}$$

$$K 2 = \frac{(b 2 \cdot \cos(\alpha 2) - \text{diff} 2) \cdot (1 + \tan(E 2) \cdot \tan(\alpha 2 + \phi)) + \tan(E 2) \cdot \tan(\alpha 2 + \phi)^2 + \tan(E 2) \cdot \tan(\alpha 2 + \phi)^3 + \tan(E 2) \cdot \tan(\alpha 2 + \phi)^4}{\cos(\alpha 2 + \phi)}$$

$$K 2 = 250.1953$$

$$K 2 = \frac{(b 2 \cdot \cos(\alpha 2) - \text{diff} 2) \cdot (1 + \tan(E 2) \cdot \tan(\alpha 2 + \phi)) + \tan(E 2) \cdot \tan(\alpha 2 + \phi)^2 + \tan(E 2) \cdot \tan(\alpha 2 + \phi)^3 + \tan(E 2) \cdot \tan(\alpha 2 + \phi)^4}{\cos(\alpha 2 + \phi)}$$

$$K = 280.4655$$

$$K = \frac{(b \cdot \cos(\alpha) - \text{diff}) \cdot (1 + \tan(E) \cdot \tan(\alpha + \phi)) + \tan(E 2) \cdot \tan(\alpha + \phi)^2 + \tan(E 3) \cdot \tan(\alpha + \phi)^3 + \tan(E 4) \cdot \tan(\alpha + \phi)^4}{\cos(\alpha + \phi)}$$

$$\frac{2 \cdot d - k \cdot \tan(\alpha) \cdot \cos(\phi + \alpha)}{[2 \cdot b \cdot (\cos(\alpha))^2 - 2 \cdot \text{diff} \cdot \cos(\alpha)]} - \frac{2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi + \alpha) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi + \alpha)}{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi + \alpha) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\phi + \alpha2))} = -4.364 \cdot 10^{-5}$$

$$\frac{2 \cdot d - k \cdot \tan(\alpha2) \cdot \cos(\phi + \alpha2)}{[2 \cdot b2 \cdot (\cos(\alpha2))^2 - 2 \cdot \text{diff}2 \cdot \cos(\alpha2)]} - \frac{2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi + \alpha2) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\phi + \alpha2)}{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi + \alpha2) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\phi + \alpha2))} = -2.487 \cdot 10^{-5}$$

0
2.10 ³
0.262
2.4.10 ³
0.241
0.548
2.283.10 ³
2.9.10 ³
0.611
0.876
0.503
0.81
0.108
0.066
6.321
6.776

find(h, phi, 1, alpha, alpha2, D, D2, beta, gamma, zeta, E, E2, diff, diff2, k, k2) =

$$\frac{2 \cdot d - k \cdot \tan(\alpha) \cdot \cos(\phi + \alpha)}{[2 \cdot b \cdot (\cos(\alpha))^2 - 2 \cdot \text{diff} \cdot \cos(\alpha)]} - \frac{D - \text{Ratio} \cdot \sin(\phi + \alpha)}{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi + \alpha) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi + \alpha))} = 0$$

$$\frac{2 \cdot d - k \cdot \tan(\alpha2) \cdot \cos(\phi + \alpha2)}{[2 \cdot b2 \cdot (\cos(\alpha2))^2 - 2 \cdot \text{diff}2 \cdot \cos(\alpha2)]} - \frac{D2 - \text{Ratio} \cdot \sin(\phi + \alpha2)}{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi + \alpha2) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\phi + \alpha2))} = 0$$

CASOS 3 e 11

$h = 2000$	$l = 2400$	$b = 239,458$	$w = 1000$
$d = 1000$	$\phi = 39 \text{ deg}$	$b2 = 145,72$	$\text{Ratio} = 300$

$$\alpha = \phi - \text{atan} \left(\frac{l - w - \text{Ratio}}{h} \right)$$

$$\alpha = 10,189 \text{ deg}$$

$$D = \sqrt{l^2 + w^2 + \text{Ratio}^2 + h^2 - 2 \cdot l \cdot \text{Ratio} + 2 \cdot w \cdot \text{Ratio} - 2 \cdot l \cdot w}$$

$$D = 2,283 \cdot 10^3$$

$$\beta = \text{atan} \left(\frac{l - w}{h} \right)$$

$$\beta = 34,992 \text{ deg}$$

$$\zeta = \text{atan} \left(\frac{b \cdot \cos(\alpha) - \left(b \cdot \frac{\cos(\phi)}{\cos(\phi - \alpha)} \right)}{b \cdot \sin(\alpha)} \right)$$

$$\zeta = 28,811 \text{ deg}$$

$$E = (\beta - \zeta)$$

$$E = 6,181 \text{ deg}$$

$$\text{diff} := \tan(E) \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

$$\text{diff} = 4,588$$

$$h = \frac{\text{diff}}{\tan(\phi + \alpha2) - \tan(\phi - \alpha)}$$

$$h = 2 \cdot 10^3$$

$$\alpha2 = \text{atan} \left(\frac{l - \text{Ratio}}{h} \right) - \phi$$

$$\alpha2 = 7,397 \text{ deg}$$

$$D2 = \sqrt{l^2 + \text{Ratio}^2 + h^2 - 2 \cdot l \cdot \text{Ratio}}$$

$$D2 = 2,9 \cdot 10^3$$

$$\beta2 = \text{atan} \left(\frac{l}{h} \right)$$

$$\beta2 = 50,194 \text{ deg}$$

$$\zeta2 = \text{acos} \left(\frac{\sin(\phi + \alpha2)}{\tan(\phi + \alpha2)} \right)$$

$$\zeta2 = 46,397 \text{ deg}$$

$$E2 = \beta2 - \zeta2$$

$$E2 = 3,797 \text{ deg}$$

$$\text{diff2} := \tan(E2) \cdot b2 \cdot \sin(\alpha2)$$

$$\text{diff2} = 1,245$$

$$k_1 = \frac{(b \cdot \cos(\alpha) + \text{dir}) \cdot (1 + \tan(E) \cdot \tan(\phi - \alpha)) + \tan(E) \cdot \tan(\phi - \alpha)}{(b \cdot \cos(\alpha) + \text{dir}) \cdot (1 + \tan(E) \cdot \tan(\phi - \alpha)) + \tan(E) \cdot \tan(\phi - \alpha)} \cdot \cos(\alpha - \phi)$$

$$k = 291,5807$$

$$k_2 = \frac{(b_2 \cdot \cos(\alpha_2) - \text{dir}_2) \cdot (1 + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha_2 + \phi)) + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha_2 + \phi)}{(b_2 \cdot \cos(\alpha_2) - \text{dir}_2) \cdot (1 + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha_2 + \phi)) + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha_2 + \phi)} \cdot \cos(\alpha_2 + \phi)$$

$$k_2 = 223,2908$$

Given

$$\alpha = \phi - \text{atan}\left(\frac{1 - w - \text{Ratio}}{h}\right)$$

$$\alpha_2 = \text{atan}\left(\frac{1 - \text{Ratio}}{h}\right) - \phi$$

$$D = \sqrt{l^2 + w^2 + \text{Ratio}^2 + h^2 - 2 \cdot l \cdot \text{Ratio} + 2 \cdot w \cdot \text{Ratio} - 2 \cdot l \cdot w}$$

$$D_2 = \sqrt{l^2 + \text{Ratio}^2 + h^2 - 2 \cdot l \cdot \text{Ratio}}$$

$$\beta = \text{atan}\left(\frac{h}{1 - w}\right)$$

$$\beta_2 = \text{atan}\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$\zeta = \text{atan}\left(\frac{b \cdot \cos(\alpha) - \left(b \cdot \frac{\cos(\phi)}{\cos(\phi - \alpha)}\right)}{b \cdot \sin(\alpha)}\right)$$

$$\zeta_2 = \text{acos}\left(\frac{\sin(\phi + \alpha_2)}{\tan(\phi + \alpha_2)}\right)$$

$$E = \beta - \zeta$$

$$E_2 = \beta_2 - \zeta_2$$

$$\text{dir} = \tan(E) \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

$$\text{dir}_2 = \tan(E_2) \cdot b_2 \cdot \sin(\alpha_2)$$

$$h = \frac{\tan(\phi + \alpha_2) - \tan(\phi - \alpha)}{w}$$

$$k = \frac{(b \cdot \cos(\alpha) + \text{dir}) \cdot (1 + \tan(E) \cdot \tan(\phi - \alpha)) + \tan(E) \cdot \tan(\phi - \alpha)}{(b \cdot \cos(\alpha) + \text{dir}) \cdot (1 + \tan(E) \cdot \tan(\phi - \alpha)) + \tan(E) \cdot \tan(\phi - \alpha)} \cdot \cos(\alpha - \phi)$$

$$k_2 = \frac{(b_2 \cdot \cos(\alpha_2) - \text{dir}_2) \cdot (1 + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha_2 + \phi)) + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha_2 + \phi)}{(b_2 \cdot \cos(\alpha_2) - \text{dir}_2) \cdot (1 + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha_2 + \phi)) + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha_2 + \phi)} \cdot \cos(\alpha_2 + \phi)$$

$$\frac{2 \cdot d + k \cdot \tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\phi - \alpha)}{[2 \cdot b \cdot (\cos(\alpha))^2 + 2 \cdot \text{dif} \cdot \cos(\alpha)]} - \frac{D - \text{Ratio} \cdot \sin(\phi - \alpha)}{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi - \alpha) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi - \alpha))} = 1,88 \cdot 10^{-8}$$

$$\frac{2 \cdot d - k2 \cdot \tan(\alpha2) \cdot \cos(\alpha2) \cdot \cos(\phi + \alpha2)}{[2 \cdot b2 \cdot (\cos(\alpha2))^2 - 2 \cdot \text{dif}2 \cdot \cos(\alpha2)]} - \frac{D2 - \text{Ratio} \cdot \sin(\phi + \alpha2)}{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi + \alpha2) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\phi + \alpha2))} = -3,037 \cdot 10^{-7}$$

find(h, phi, l, alpha, alpha2, D, D2, beta, beta2, gamma, gamma2, E, E2, dif, dif2, k, k2) =

0
2.10 ³
0.681
2.4.10 ³
0.178
0.129
2.283.10 ³
2.9.10 ³
0.611
0.876
0.503
0.81
0.108
0.066
4.588

$$\frac{2 \cdot d + k \cdot \tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\phi - \alpha)}{[2 \cdot b \cdot (\cos(\alpha))^2 + 2 \cdot \text{dif} \cdot \cos(\alpha)]} - \frac{D - \text{Ratio} \cdot \sin(\phi - \alpha)}{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi - \alpha) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi - \alpha))} = 0$$

$$\frac{2 \cdot d - k2 \cdot \tan(\alpha2) \cdot \cos(\alpha2) \cdot \cos(\phi + \alpha2)}{(b2 \cdot \cos(\alpha2) - \text{dif}2) \cdot 2 \cdot \cos(\alpha2)} - \frac{D2 - \text{Ratio} \cdot \sin(\phi + \alpha2)}{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi + \alpha2) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\phi + \alpha2))} = 0$$

CASOS 4 e 12

- h = 2000
- l = 2400
- φ = 10 deg
- d = 1000
- w = 1000
- b = 379,6612
- b2 = 466,3518
- Ratio = 300

$$\alpha = \text{atan} \left(\frac{l - w - \text{Ratio}}{h} \right) + \phi$$

$$\alpha = 38,811 \text{ deg}$$

$$D = \sqrt{l^2 + w^2 + \text{Ratio}^2 + h^2 - 2 \cdot l \cdot \text{Ratio} + 2 \cdot w \cdot \text{Ratio} - 2 \cdot l \cdot w}$$

$$D = 2,283 \cdot 10^3$$

$$\beta = \text{atan} \left(\frac{l - w}{h} \right)$$

$$\beta = 34,992 \text{ deg}$$

$$\zeta = \text{acos} \left(\frac{\sin(\alpha - \phi)}{\tan(\alpha - \phi)} \right)$$

$$\zeta = 28,811 \text{ deg}$$

$$E = (\beta - \zeta)$$

$$E = 6,181 \text{ deg}$$

$$\text{diff} = \tan(E) \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

$$\text{diff} = 25,771$$

$$h = \frac{\tan(\phi - \alpha) - \tan(\phi - \alpha 2)}{w}$$

$$h = 2 \cdot 10^3$$

$$k = \frac{(b \cdot \cos(\alpha) - \text{diff}) \cdot (1 + \tan(E) \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(E)^2 \cdot \tan(\alpha - \phi)^2 + \tan(E)^3 \cdot \tan(\alpha - \phi)^3 + \tan(E)^4 \cdot \tan(\alpha - \phi)^4)}{\cos(\alpha - \phi)}$$

$$k = 327,7438$$

$$\alpha 2 = \text{atan} \left(\frac{l - \text{Ratio}}{h} \right) + \phi$$

$$\alpha 2 = 56,397 \text{ deg}$$

$$D 2 = \sqrt{l^2 + \text{Ratio}^2 + h^2 - 2 \cdot l \cdot \text{Ratio}}$$

$$D 2 = 2,9 \cdot 10^3$$

$$\beta 2 = \text{atan} \left(\frac{l}{h} \right)$$

$$\beta 2 = 50,194 \text{ deg}$$

$$\zeta 2 = \text{acos} \left(\frac{\sin(\alpha 2 - \phi)}{\tan(\alpha 2 - \phi)} \right)$$

$$\zeta 2 = 46,397 \text{ deg}$$

$$E 2 = \beta 2 - \zeta 2$$

$$E 2 = 3,797 \text{ deg}$$

$$\text{diff} 2 = \tan(E 2) \cdot b 2 \cdot \sin(\alpha 2)$$

$$\text{diff} 2 = 25,78$$

$$k_2 = \frac{(b_2 \cdot \cos(\alpha_2) - \text{diff}) \cdot (1 + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)) + \tan(E_2)^2 \cdot \tan(\alpha_2 - \phi) + \tan(E_2)^3 \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)^2 + \tan(E_2)^4 \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)^3}{\cos(\alpha_2 - \phi)}$$

$$k = \frac{(b \cdot \cos(\alpha) - \text{diff}) \cdot (1 + \tan(E) \cdot \tan(\alpha - \phi)) + \tan(E)^2 \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(E)^3 \cdot \tan(\alpha - \phi)^2 + \tan(E)^4 \cdot \tan(\alpha - \phi)^3}{\cos(\alpha - \phi)}$$

$$h = \frac{\tan(\phi - \alpha) - \tan(\phi - \alpha_2)}{w}$$

$$\text{diff} = \tan(E) \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

$$E = \beta - \zeta$$

$$\zeta = \arccos\left(\frac{\sin(\alpha - \phi)}{\tan(\alpha - \phi)}\right)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{1 - w}{h}\right)$$

$$D = \sqrt{l^2 + w^2 + \text{Ratio}^2 + h^2 - 2 \cdot l \cdot \text{Ratio} + 2 \cdot w \cdot \text{Ratio} - 2 \cdot l \cdot w}$$

$$D_2 = \sqrt{l^2 + \text{Ratio}^2 + h^2 - 2 \cdot l \cdot \text{Ratio}}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1 - w - \text{Ratio}}{h}\right) + \phi$$

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{1 - \text{Ratio}}{h}\right) + \phi$$

Given

$$\text{alt}_2 = 56.806$$

$$\text{alt}_2 = k_2 \cdot (\tan(\phi) + \tan(\phi)^2 \cdot \tan(\alpha_2 - \phi) + \tan(\phi)^3 \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)^2 + \tan(\phi)^4 \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)^3 + \tan(\phi)^5 \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)^4 + \tan(\phi)^6 \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)^5)$$

$$\text{alt} = 36.519$$

$$\text{alt} = k \cdot (\tan(\phi) + \tan(\phi)^2 \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(\phi)^3 \cdot \tan(\alpha - \phi)^2 + \tan(\phi)^4 \cdot \tan(\alpha - \phi)^3 + \tan(\phi)^5 \cdot \tan(\alpha - \phi)^4 + \tan(\phi)^6 \cdot \tan(\alpha - \phi)^5)$$

$$k_2 = 362.0889$$

$$k_2 = \frac{(b_2 \cdot \cos(\alpha_2) - \text{diff}) \cdot (1 + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)) + \tan(E_2)^2 \cdot \tan(\alpha_2 - \phi) + \tan(E_2)^3 \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)^2 + \tan(E_2)^4 \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)^3}{\cos(\alpha_2 - \phi)}$$

$$\frac{(a_2 - \phi)_{11} + \tan(\phi)_{13} \cdot \tan(a_2 - \phi)_{12} + \tan(\phi)_{14} \cdot \tan(a_2 - \phi)_{13}}{(a_2 - \phi)_{13}}$$

$$\frac{(a - \phi)_{13} \cdot \tan(a - \phi)_{12} - \tan(\phi)_{14} \cdot \tan(a - \phi)_{13}}{(a - \phi)_{13}}$$

$$\text{alt} = k \cdot \left(\tan(\phi) + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \right)$$

$$\text{alt}^2 = k^2 \cdot \left(\tan(\phi) + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \cdot \tan(\alpha - \phi) \right)$$

$$\left[\frac{b \cdot \cos(\alpha) - b \cdot \tan(E) \cdot \sin(\alpha)}{d} - \left(\text{alt} + \frac{k \cdot \sin(\alpha - \phi)}{2} \right) \right] \cdot \sin(\alpha) - \left[\frac{D - \text{Ratio} \cdot \sin(\alpha - \phi)}{2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\alpha - \phi) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\alpha - \phi)} \right] = 0$$

$$\frac{b^2 \cdot \cos(\alpha^2) - b^2 \cdot \tan(E^2) \cdot \sin(\alpha^2)}{d} - \left(\text{alt}^2 + \frac{k^2 \cdot \sin(\alpha^2 - \phi)}{2} \right) \cdot \cos(\alpha^2) - \frac{D^2 - \text{Ratio} \cdot \sin(\alpha^2 - \phi)}{2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\alpha^2 - \phi) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E^2) \cdot \sin(\alpha^2 - \phi)} = 0$$

find(h, phi, l, alpha, alpha2, D, D2, beta, beta2, gamma, gamma2, E, E2, diff, diff2, k, k2, alt, alt2) =

0
2.10 ³
0.175
2.4.10 ³
0.677
0.984
2.283.10 ³
2.9.10 ³
0.611
0.876
0.503
0.81
0.108
0.066
25.771
25.78

$$\frac{b \cdot \cos(\alpha) - b \cdot \tan(E) \cdot \sin(\alpha)}{d} - \left(\text{alt} + \frac{k \cdot \sin(\alpha - \phi)}{2} \right) \cdot \cos(\alpha) - \frac{D - \text{Ratio} \cdot \sin(\alpha - \phi)}{2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\alpha - \phi) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\alpha - \phi)} = 6.714 \cdot 10^{-9}$$

$$\left[\frac{b^2 \cdot \cos(\alpha^2) - b^2 \cdot \tan(E^2) \cdot \sin(\alpha^2)}{d} - \left(\text{alt}^2 + \frac{k^2 \cdot \sin(\alpha^2 - \phi)}{2} \right) \cdot \cos(\alpha^2) - \frac{D^2 - \text{Ratio} \cdot \sin(\alpha^2 - \phi)}{2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\alpha^2 - \phi) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E^2) \cdot \sin(\alpha^2 - \phi)} \right] = -3.632 \cdot 10^{-8}$$

$$\frac{2 - \phi_{11} - \tan(\phi_{13}) \cdot \tan(\alpha_2 - \phi_{12}) + \tan(\phi_{14}) \cdot \tan(\alpha_2 - \phi_{13})}{\phi_{13}}$$

$$\frac{\phi_{13} \cdot \tan(\alpha - \phi_{12}) + \tan(\phi_{14}) \cdot \tan(\alpha - \phi_{13})}{\phi_{13}}$$

CASO 5

$$h = 2000$$

$$l = 2500$$

$$\phi = 35 \text{ deg}$$

$$w1 = 800$$

$$w = 1900$$

$$b = 219.755$$

$$b2 = 974.436$$

$$\text{Ratio} = 300$$

$$d = 800$$

$$\alpha = \left(\phi - \arctan \left(\frac{w1}{h} \right) \right)$$

$$\alpha = 13.199 \text{ deg}$$

$$D := \sqrt{w1^2 + h^2}$$

$$D = 2154.0659$$

$$\beta = \arctan \left(\frac{w1 + \text{Ratio}}{h} \right)$$

$$\beta = 28.811 \text{ deg}$$

$$\zeta := \arctan \left(\frac{b \cdot \cos(\alpha) - \left(b \cdot \frac{\cos(\phi)}{\cos(\alpha)} - \left(b \cdot \cos(\alpha) - \left(b \cdot \frac{\cos(\phi)}{\cos(\alpha)} - \left(b \cdot \sin(\alpha) \right) \right) \right) \right)}{b \cdot \sin(\alpha)} \right)$$

$$\zeta = 21.801 \text{ deg}$$

$$E = (\beta - \zeta)$$

$$E = 7.009 \text{ deg}$$

$$\text{diff} = \tan(E) \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

$$\text{diff} = 6.1692$$

$$\alpha = \arccos \left(\frac{D^2 + w^2 - D^2}{2 \cdot D \cdot w} \right)$$

$$\alpha = 68.199 \text{ deg}$$

$$h := \frac{\tan(\phi - \alpha) - \tan(\phi - \alpha^2)}{w}$$

$$h = 2 \cdot 10^3$$

$$\alpha2 = \arctan \left(\frac{w1}{(w - w1)} \right) + \phi$$

$$\alpha2 = 63.811 \text{ deg}$$

$$D2 := \sqrt{(w - w1)^2 + h^2}$$

$$D2 = 2282.5424$$

$$\beta2 = \arctan \left(\frac{w - w1 + \text{Ratio}}{h} \right)$$

$$\beta2 = 34.992 \text{ deg}$$

$$\zeta2 := \arccos \left(\frac{\sin(\alpha2 - \phi)}{\tan(\alpha2 - \phi)} \right)$$

$$\zeta2 = 28.811 \text{ deg}$$

$$E2 = \beta2 - \zeta2$$

$$E2 = 6.181 \text{ deg}$$

$$\text{diff2} = \tan(E2) \cdot b2 \cdot \sin(\alpha2)$$

$$\text{diff2} = 94.7006$$

$$w1 := \frac{h}{\tan(\alpha)}$$

$$w1 = 800$$

$$k = \frac{(b \cdot \cos(\alpha) + \text{diff}) \cdot (1 + \tan(E) \cdot \tan(\phi - \alpha)) + \tan(E)^2 \cdot \tan(\phi - \alpha)^2 + \tan(E)^3 \cdot \tan(\phi - \alpha)^3 + \tan(E)^4 \cdot \tan(\phi - \alpha)^4}{\cos(\alpha - \phi)}$$

$$k = 249.3381$$

$$k_2 = \frac{(b_2 \cdot \cos(\alpha_2) - \text{diff}_2) \cdot (1 + \tan(E_2) \cdot \tan(\phi_2 - \alpha_2)) + \tan(E_2)^2 \cdot \tan(\phi_2 - \alpha_2)^2 + \tan(E_2)^3 \cdot \tan(\phi_2 - \alpha_2)^3 + \tan(E_2)^4 \cdot \tan(\phi_2 - \alpha_2)^4}{\cos(\alpha_2 - \phi)}$$

$$k_2 = 406.9715$$

$$\text{alt}_2 = k_2 \cdot (\tan(\phi) + \tan(\phi))^2 \cdot \tan(\alpha_2 - \phi) + \tan(\phi)^3 \cdot \tan(\alpha_2 - \phi) + \tan(\phi)^4 \cdot \tan(\alpha_2 - \phi) + \tan(\phi)^5 \cdot \tan(\alpha_2 - \phi) + \tan(\phi)^6 \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)$$

$$\text{alt}_2 = 264.45661$$

Given

$$\alpha = \phi - \text{atan}\left(\frac{w_1}{h}\right)$$

$$D = \sqrt{w_1^2 + h^2}$$

$$\beta = \text{atan}\left(\frac{w_1 + \text{Ratio}}{h}\right)$$

$$\zeta = \text{atan}\left(\frac{b \cdot \cos(\alpha) - \left(b \cdot \frac{\cos(\phi)}{\cos(\phi - \alpha)}\right)}{b \cdot \sin(\alpha)}\right)$$

$$E = \beta - \zeta$$

$$\text{diff} = \tan(E) \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

$$\sigma = \text{acos}\left(\frac{D^2 + w^2 - D^2}{2 \cdot D \cdot w}\right)$$

$$h = \frac{\tan(\phi - \alpha) - \tan(\phi - \alpha_2)}{w}$$

$$w_1 = \frac{h}{\tan(\sigma)}$$

$$E_2 = \beta_2 - \zeta_2$$

$$\text{diff}_2 = \tan(E_2) \cdot b_2 \cdot \sin(\alpha_2)$$

$$\zeta_2 = \text{acos}\left(\frac{\sin(\alpha_2 - \phi)}{\tan(\alpha_2 - \phi)}\right)$$

$$\beta_2 = \text{atan}\left(\frac{w - w_1 + \text{Ratio}}{h}\right)$$

$$D_2 = \sqrt{(w - w_1)^2 + h^2}$$

$$\alpha_2 = \text{atan}\left(\frac{h}{(w - w_1)}\right) + \phi$$

$$\frac{z_2 - \phi_{11} - \tan(\phi)_{13} \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)_{12} + \tan(\phi)_{14} \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)_{13}}{1}$$

$$\frac{2 \cdot d + k \cdot \tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\phi - \alpha)}{2 \cdot b \cdot (\cos(\alpha))^2 + 2 \cdot \text{diff} \cdot \cos(\alpha)} - \frac{D - \text{Ratio} \cdot \sin(\phi - \alpha)}{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi - \alpha) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi - \alpha))} = -4.8 \cdot 10^{-7}$$

$$\frac{b2 \cdot \cos(\alpha2) - b2 \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\alpha2)}{2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\alpha2 - \phi) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\alpha2 - \phi)} - \left[\frac{d}{\cos(\alpha2)} - \left(\text{alt2} + \frac{k2 \cdot \sin(\alpha2 - \phi)}{2} \right) \right] = -1.2 \cdot 10^{-7}$$

0	2.10 ³
1	0.611
2	2.5.10 ³
3	0.23
4	1.114
5	2.154.10 ³
6	2.283.10 ³
7	0.503
8	0.611
9	0.381
10	0.503
11	0.122
12	0.108
13	6.169

find(h, phi, alpha, alpha2, D, D2, beta, beta2, gamma, gamma2, zeta, zeta2, E, E2, diff, diff2, k, k2) =

$$\frac{2 \cdot d + k \cdot \tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\phi - \alpha)}{2 \cdot b \cdot (\cos(\alpha))^2 + 2 \cdot \text{diff} \cdot \cos(\alpha)} - \frac{D - \text{Ratio} \cdot \sin(\phi - \alpha)}{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi - \alpha) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi - \alpha))} = 0$$

$$\frac{b2 \cdot \cos(\alpha2) - b2 \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\alpha2)}{2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\alpha2 - \phi) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\alpha2 - \phi)} - \left[\frac{d}{\cos(\alpha2)} - \left(\text{alt2} + \frac{k2 \cdot \sin(\alpha2 - \phi)}{2} \right) \right] = 0$$

$$k = \frac{(b \cdot \cos(\alpha) + \text{diff}) \cdot (1 + \tan(E) \cdot \tan(\phi - \alpha)) + \tan(E)^2 \cdot \tan(\phi - \alpha) + \tan(E)^3 \cdot \tan(\phi - \alpha) + \tan(E)^4 \cdot \tan(\phi - \alpha)}{\cos(\alpha - \phi)}$$

$$k2 = \frac{(b2 \cdot \cos(\alpha2) - \text{diff2}) \cdot (1 + \tan(E2) \cdot \tan(\alpha2 - \phi)) + \tan(E2)^2 \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(E2)^3 \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(E2)^4 \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(E2)^5 \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(E2)^6 \cdot \tan(\alpha2 - \phi)}{\cos(\alpha2 - \phi)}$$

$$\text{alt2} = k2 \cdot (\tan(\phi) + \tan(\phi)^2 \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(\phi)^3 \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(\phi)^4 \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(\phi)^5 \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(\phi)^6 \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(\phi)^7 \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(\phi)^8 \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(\phi)^9 \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(\phi)^{10} \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(\phi)^{11} \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(\phi)^{12} \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(\phi)^{13} \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(\phi)^{14} \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(\phi)^{15} \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(\phi)^{16} \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(\phi)^{17} \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(\phi)^{18} \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(\phi)^{19} \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(\phi)^{20} \cdot \tan(\alpha2 - \phi)$$

$$2 \cdot \cos(\alpha/2 - \phi)$$

$$\frac{\tan(\phi) \cdot \tan(\alpha/2 - \phi)^6 + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha/2 - \phi)^7 + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha/2 - \phi)^8 + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha/2 - \phi)^9 + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha/2 - \phi)^{10} + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha/2 - \phi)^{11} + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha/2 - \phi)^{12}}{\tan(\phi)}$$

$$\frac{-\phi_{11} - \tan(\phi)_{13} \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)_{12} + \tan(\phi)_{14} \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)_{13}}{-\phi_{11} - \tan(\phi)_{13} \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)_{12} + \tan(\phi)_{14} \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)_{13}}$$

CASO 6

$$h = 2000$$

$$w = 1900$$

$$l = 2500$$

$$b = 961,1046$$

$$\phi = 40 \text{ deg}$$

$$b2 = 192,9016$$

$$d = 800$$

$$\text{Ratio} = 300$$

$$w1 = 800$$

$$\alpha = \left(\text{atan} \left(\frac{w1}{h} \right) + \phi \right)$$

$$\alpha = 61,801 \text{ deg}$$

$$D = \sqrt{w1^2 + h^2}$$

$$D = 2154,0659$$

$$\beta = \text{atan} \left(\frac{w1 + \text{Ratio}}{h} \right)$$

$$\beta = 28,811 \text{ deg}$$

$$\zeta = \text{acos} \left(\frac{\sin(\alpha - \phi)}{\tan(\alpha - \phi)} \right)$$

$$\zeta = 21,801 \text{ deg}$$

$$E = (\beta - \zeta)$$

$$E = 7,009 \text{ deg}$$

$$\text{diff} = \tan(E) \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

$$\text{diff} = 104,1438$$

$$\sigma = \text{acos} \left(\frac{D^2 + w^2 - D^2}{2 \cdot D \cdot w} \right)$$

$$\sigma = 68,199 \text{ deg}$$

$$h = \frac{\tan(\alpha - \phi) + \tan(\phi - \alpha2)}{w}$$

$$h = 2 \cdot 10^3$$

$$\alpha2 = \phi - \text{atan} \left(\frac{w - w1}{h} \right)$$

$$\alpha2 = 11,189 \text{ deg}$$

$$D2 = \sqrt{(w - w1)^2 + h^2}$$

$$D2 = 2282,5424$$

$$\beta2 = \text{atan} \left(\frac{w - w1 + \text{Ratio}}{h} \right)$$

$$\beta2 = 34,992 \text{ deg}$$

$$\zeta2 = \text{atan} \left(\frac{b2 \cdot \cos(\alpha2) - \left(b2 \cdot \frac{\cos(\phi)}{\cos(\phi - \alpha2)} \right)}{b2 \cdot \sin(\alpha2)} \right)$$

$$\zeta2 = 28,811 \text{ deg}$$

$$E2 = \beta2 - \zeta2$$

$$E2 = 6,181 \text{ deg}$$

$$\text{diff2} = \tan(E2) \cdot b2 \cdot \sin(\alpha2)$$

$$\text{diff2} = 4,0541$$

$$w1 = \frac{h}{\tan(\sigma)}$$

$$w1 = 800$$

$$k = \frac{(b \cdot \cos(\alpha) - \text{dir}) \cdot (1 + \tan(E) \cdot \tan(\alpha - \phi)) + \tan(E) \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(E) \cdot \tan(\alpha - \phi)^2 + \tan(E) \cdot \tan(\alpha - \phi)^3 + \tan(E) \cdot \tan(\alpha - \phi)^4}{\cos(\alpha - \phi)}$$

$$k = 396.4664$$

$$k_2 = \frac{(b_2 \cdot \cos(\alpha_2) + \text{dir}_2) \cdot (1 + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha - \phi)) + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha - \phi)^2 + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha - \phi)^3 + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha - \phi)^4}{\cos(\phi - \alpha_2)}$$

$$k_2 = 234.5674$$

$$\text{alt} = k \cdot \left(\tan(\phi) + \tan(\phi)^2 + \tan(\phi)^3 + \tan(\phi)^4 + \tan(\phi)^5 + \tan(\phi)^6 + \tan(\phi)^7 + \tan(\phi)^8 + \tan(\phi)^9 + \tan(\phi)^{10} + \tan(\phi)^{11} + \tan(\phi)^{12} + \tan(\phi)^{13} + \tan(\phi)^{14} + \tan(\phi)^{15} + \tan(\phi)^{16} + \tan(\phi)^{17} + \tan(\phi)^{18} + \tan(\phi)^{19} + \tan(\phi)^{20} \right)$$

$$\text{alt} = 269.65917$$

Given

$$\alpha = \arctan\left(\frac{w_1}{h}\right) + \phi$$

$$D = \sqrt{w_1^2 + h^2}$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{w_1 + \text{Ratio}}{h}\right)$$

$$\zeta = \arccos\left(\frac{\sin(\alpha - \phi)}{\tan(\alpha - \phi)}\right)$$

$$E = \beta - \zeta$$

$$\text{dir} = \tan(E) \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

$$h = \frac{\tan(\alpha - \phi) + \tan(\phi - \alpha_2)}{w}$$

$$k = \frac{(b \cdot \cos(\alpha) - \text{dir}) \cdot (1 + \tan(E) \cdot \tan(\alpha - \phi)) + \tan(E) \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(E) \cdot \tan(\alpha - \phi)^2 + \tan(E) \cdot \tan(\alpha - \phi)^3 + \tan(E) \cdot \tan(\alpha - \phi)^4}{\cos(\alpha - \phi)}$$

$$k_2 = \frac{(b_2 \cdot \cos(\alpha_2) + \text{dir}_2) \cdot (1 + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha - \phi)) + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha - \phi)^2 + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha - \phi)^3 + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha - \phi)^4}{\cos(\phi - \alpha_2)}$$

$$\text{dir}_2 = \tan(E_2) \cdot b_2 \cdot \sin(\alpha_2)$$

$$E_2 = \beta_2 - \zeta_2$$

$$\zeta_2 = \arctan\left(\frac{b_2 \cdot \sin(\alpha_2)}{\cos(\phi) \cdot \left(b_2 \cdot \cos(\alpha_2) - \frac{\cos(\phi - \alpha_2)}{\cos(\phi)} \right)}\right)$$

$$\beta_2 = \arctan\left(\frac{w - w_1 + \text{Ratio}}{h}\right)$$

$$D_2 = \sqrt{(w - w_1)^2 + h^2}$$

$$\alpha_2 = \phi - \arctan\left(\frac{w - w_1}{h}\right)$$

$$\tan(\phi) = \frac{\tan(\alpha) \cdot \tan(\phi) + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha)}{\tan(\alpha) \cdot \tan(\phi) + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha)}$$

$$w1 = \frac{h}{\left(D^2 + w^2 - D^2 \right) \tan \left(\arccos \left(\frac{2 \cdot D \cdot w}{D^2 + w^2 - D^2} \right) \right)}$$

$$\text{alt} = k \cdot \frac{\tan(\phi) + \tan(\phi)^2 + \tan(\phi)^3 + \tan(\phi)^4 + \tan(\phi)^5 + \tan(\phi)^6 + \tan(\phi)^7 + \tan(\phi)^8 + \tan(\phi)^9 + \tan(\phi)^{10}}{\tan(\phi) + \tan(\phi)^2 + \tan(\phi)^3 + \tan(\phi)^4 + \tan(\phi)^5 + \tan(\phi)^6 + \tan(\phi)^7 + \tan(\phi)^8 + \tan(\phi)^9 + \tan(\phi)^{10}}$$

$$\frac{2 \cdot b2 \cdot (\cos(\alpha2))^2 + 2 \cdot \text{diff2} \cdot \cos(\alpha2)}{2 \cdot d + k2 \cdot \tan(\alpha2) \cdot \cos(\alpha2) \cdot \cos(\phi - \alpha2)} - \frac{D2 - \text{Ratio} \cdot \cos(\phi - \alpha2) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\phi - \alpha2)}{D2 - \text{Ratio} \cdot \sin(\phi - \alpha2)} = 0$$

$$\left[\frac{b \cdot \cos(\alpha) - b \cdot \tan(E) \cdot \sin(\alpha)}{d} - \left(\text{alt} + \frac{k \cdot \sin(\alpha - \phi)}{2} \right) \right] \cdot \sin(\alpha) - \frac{D - \text{Ratio} \cdot \sin(\alpha - \phi)}{2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\alpha - \phi) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\alpha - \phi)} = 0$$

1	2.10 ³
2	0.698
3	2.5 · 10 ³
4	1.079
5	0.195
6	2.154 · 10 ³
7	0.503
8	0.611
9	0.381
10	0.503
11	0.122
12	0.108
13	104.144

find(h, φ, l, α, α2, D, D2, β, β2, γ, γ2, E, E2, diff, diff2, k, k2) =

$$\frac{2 \cdot b2 \cdot (\cos(\alpha2))^2 + 2 \cdot \text{diff2} \cdot \cos(\alpha2)}{2 \cdot d + k2 \cdot \tan(\alpha2) \cdot \cos(\alpha2) \cdot \cos(\phi - \alpha2)} - \frac{D2 - \text{Ratio} \cdot \cos(\phi - \alpha2) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\phi - \alpha2)}{D2 - \text{Ratio} \cdot \sin(\phi - \alpha2)} = -2.121 \cdot 10^{-9}$$

$$\left[\frac{b \cdot \cos(\alpha) - b \cdot \tan(E) \cdot \sin(\alpha)}{d} - \left(\text{alt} + \frac{k \cdot \sin(\alpha - \phi)}{2} \right) \right] \cdot \sin(\alpha) - \frac{D - \text{Ratio} \cdot \sin(\alpha - \phi)}{2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\alpha - \phi) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\alpha - \phi)} = -2.952 \cdot 10^{-8}$$

$$\frac{\tan(\phi)_{13} \cdot \tan(\alpha - \phi)_{12} + \tan(\phi)_{14} \cdot \tan(\alpha - \phi)_{13}}{\tan(\phi)_{13}}$$

CASO 7

$$h = 2000$$

$$l = 2400$$

$$\phi = 5 \text{ deg}$$

$$d = 1000$$

$$w1 = 800$$

$$w = 1900$$

$$b = 282.2447$$

$$b2 = 333.6951$$

$$\text{Ratio} = 300$$

$$\alpha = \text{atan} \left(\frac{w1}{h} \right) - \phi$$

$$\alpha = 16.801 \text{ deg}$$

$$D = \sqrt{w1^2 + h^2}$$

$$D = 2.154 \cdot 10^3$$

$$\beta = \text{atan} \left(\frac{w1 + \text{Ratio}}{h} \right)$$

$$\beta = 28.811 \text{ deg}$$

$$\zeta = \text{acos} \left(\frac{\sin(\phi + \alpha)}{\tan(\phi + \alpha)} \right)$$

$$\zeta = 21.801 \text{ deg}$$

$$E = (\beta - \zeta)$$

$$E = 7.009 \text{ deg}$$

$$\text{diff} = \tan(E) \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

$$\text{diff} = 10.031$$

$$\sigma = \text{acos} \left(\frac{D^2 + w^2 - D2^2}{2 \cdot D \cdot w} \right)$$

$$\sigma = 1.19$$

$$h = \frac{w \cdot \tan(\alpha + \phi) + \tan(\alpha2 - \phi)}{w}$$

$$h = 2 \cdot 10^3$$

$$\alpha2 = \text{atan} \left(\frac{w - w1}{h} \right) + \phi$$

$$\alpha2 = 33.811 \text{ deg}$$

$$D2 = \sqrt{(w - w1)^2 + h^2}$$

$$D2 = 2.283 \cdot 10^3$$

$$\beta2 = \text{atan} \left(\frac{w - w1 + \text{Ratio}}{h} \right)$$

$$\beta2 = 34.992 \text{ deg}$$

$$\zeta2 = \text{acos} \left(\frac{\sin(\alpha2 - \phi)}{\tan(\alpha2 - \phi)} \right)$$

$$\zeta2 = 28.811 \text{ deg}$$

$$E2 = \beta2 - \zeta2$$

$$E2 = 6.181 \text{ deg}$$

$$\text{diff2} = \tan(E2) \cdot b2 \cdot \sin(\alpha2)$$

$$\text{diff2} = 20.11$$

$$w1 = \frac{h \cdot \tan(\sigma)}{h}$$

$$w1 = 800$$

$$k := \frac{(b \cdot \cos(\alpha) - \text{diff}) \cdot (1 + \tan(E) \cdot \tan(\alpha + \phi)) + \tan(E) \cdot \tan(\alpha + \phi)^2 + \tan(E) \cdot \tan(\alpha + \phi)^3 + \tan(E) \cdot \tan(\alpha + \phi)^4}{\cos(\alpha + \phi)}$$

$$k = 294.7002$$

$$k_2 := \frac{(b_2 \cdot \cos(\alpha_2) - \text{diff}_2) \cdot (1 + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)) + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)^2 + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)^3 + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)^4}{\cos(\alpha_2 - \phi)}$$

$$k_2 = 312.0666$$

$$k_{12} := k_2 \cdot (\tan(\phi) + \tan(\phi))^2 \cdot \tan(\alpha_2 - \phi) + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)^3 + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)^4 + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)^5 + \tan(\phi) \cdot \tan(\alpha_2 - \phi)^6$$

$$k_{12} = 16.36723$$

Given

$$\alpha = \text{atan}\left(\frac{w_1}{h}\right) - \phi$$

$$D = \sqrt{w_1^2 + h^2}$$

$$\beta = \text{atan}\left(\frac{w_1 + \text{Ratio}}{h}\right)$$

$$\zeta = \text{acos}\left(\frac{\sin(\phi + \alpha)}{\tan(\phi + \alpha)}\right)$$

$$E = \beta - \zeta$$

$$\text{diff} = \tan(E) \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

$$\sigma = \text{acos}\left(\frac{D^2 + w^2 - D^2}{2 \cdot D \cdot w}\right)$$

$$h = \frac{\tan(\alpha + \phi) + \tan(\alpha_2 - \phi)}{w}$$

$$k = \frac{(b \cdot \cos(\alpha) - \text{diff}) \cdot (1 + \tan(E) \cdot \tan(\alpha + \phi)) + \tan(E) \cdot \tan(\alpha + \phi)^2 + \tan(E) \cdot \tan(\alpha + \phi)^3 + \tan(E) \cdot \tan(\alpha + \phi)^4}{\cos(\alpha + \phi)}$$

$$w_1 = \frac{h}{\tan(\sigma)}$$

$$\text{diff}_2 = \tan(E_2) \cdot b_2 \cdot \sin(\alpha_2)$$

$$E_2 = \beta_2 - \zeta_2$$

$$\zeta_2 = \text{acos}\left(\frac{\sin(\alpha_2 - \phi)}{\tan(\alpha_2 - \phi)}\right)$$

$$\beta_2 = \text{atan}\left(\frac{w - w_1 + \text{Ratio}}{h}\right)$$

$$D_2 = \sqrt{(w - w_1)^2 + h^2}$$

$$\alpha_2 = \text{atan}\left(\frac{w - w_1}{h}\right) + \phi$$

$$2 \cdot \cos(\alpha 2 - \phi) + \tan(\phi)^7 \cdot \tan(\alpha 2 - \phi)^6 + \tan(\phi)^8 \cdot \tan(\alpha 2 - \phi)^7 + \tan(\phi)^9 \cdot \tan(\alpha 2 - \phi)^8 + \tan(\phi)^{10} \cdot \tan(\alpha 2 - \phi)^9 + \tan(\phi)^{11} \cdot \tan(\alpha 2 - \phi)^{10} + \tan(\phi)^{12} \cdot \tan(\alpha 2 - \phi)^{11}$$

$$k2 = \frac{(b2 \cdot \cos(\alpha2) - \text{dif}2) \cdot (1 + \tan(E2) \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(E2)^2 \cdot \tan(\alpha2 - \phi)^2 + \tan(E2)^3 \cdot \tan(\alpha2 - \phi)^3 + \tan(E2)^4 \cdot \tan(\alpha2 - \phi)^4)}{\cos(\alpha2 - \phi)}$$

$$a12 = k2 \cdot (\tan(\phi) + \tan(\phi)^2 \cdot \tan(\alpha2 - \phi) + \tan(\phi)^3 \cdot \tan(\alpha2 - \phi)^2 + \tan(\phi)^4 \cdot \tan(\alpha2 - \phi)^3 + \tan(\phi)^5 \cdot \tan(\alpha2 - \phi)^4 + \tan(\phi)^6 \cdot \tan(\alpha2 - \phi)^5 + \dots)$$

$$\frac{[2 \cdot b \cdot (\cos(\alpha))^2 - 2 \cdot \text{dif} \cdot \cos(\alpha)] \cdot \cos(\phi + \alpha)}{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi + \alpha) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi + \alpha))} = \frac{2 \cdot d - k \cdot \tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\phi + \alpha)}{D - \text{Ratio} \cdot \sin(\phi + \alpha)}$$

$$\frac{b2 \cdot \cos(\alpha2) - b2 \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\alpha2)}{2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\alpha2 - \phi) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\alpha2 - \phi)} = \frac{d \cdot \cos(\alpha2) - \left(a12 + \frac{k2 \cdot \sin(\alpha2 - \phi)}{2} \right)}{D2 - \text{Ratio} \cdot \sin(\alpha2 - \phi)}$$

0
2.10 ³
0.087
2.4.10 ³
0.293
0.59
2.154.10 ³
2.283.10 ³
0.503
0.611
0.381
0.503
0.122
0.108
10.031

End(b, phi, 1, alpha, a2, D, D2, beta, beta2, gamma, gamma2, E, E2, dif, dif2, k, k2) =

$$\frac{[2 \cdot b \cdot (\cos(\alpha))^2 - 2 \cdot \text{dif} \cdot \cos(\alpha)] \cdot \cos(\phi + \alpha)}{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi + \alpha) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\phi + \alpha))} = \frac{2 \cdot d - k \cdot \tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\phi + \alpha)}{D - \text{Ratio} \cdot \sin(\phi + \alpha)}$$

$$\frac{b2 \cdot \cos(\alpha2) - b2 \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\alpha2)}{2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\alpha2 - \phi) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\alpha2 - \phi)} = \frac{d \cdot \cos(\alpha2) - \left(a12 + \frac{k2 \cdot \sin(\alpha2 - \phi)}{2} \right)}{D2 - \text{Ratio} \cdot \sin(\alpha2 - \phi)}$$

= -1.305.10⁻⁸

$$2 \cdot \cos(\alpha 2 - \phi) \cdot \tan(\phi)^7 \cdot \tan(\alpha 2 - \phi)^6 + \tan(\phi)^8 \cdot \tan(\alpha 2 - \phi)^7 + \tan(\phi)^9 \cdot \tan(\alpha 2 - \phi)^8 + \tan(\phi)^{10} \cdot \tan(\alpha 2 - \phi)^9 + \tan(\phi)^{11} \cdot \tan(\alpha 2 - \phi)^{10} + \tan(\phi)^{12} \cdot \tan(\alpha 2 - \phi)^{11}$$

$$\frac{-\phi)^{11} - \tan(\phi)^{13} \cdot \tan(\alpha 2 - \phi)^{12} - \tan(\phi)^{14} \cdot \tan(\alpha 2 - \phi)^{13}}{13}$$

CASO 8

$h = 2000$

$w = 1900$

$l = 2500$

$b = 358.344$

$\phi = 10 \text{ deg}$

$b_2 = 257.202$

$d = 1000$

$\text{Ratio} = 300$

$w_1 = 800$

$$\alpha = \phi + \arctan\left(\frac{w_1}{h}\right)$$

$\alpha = 31.801 \text{ deg}$

$$D := \sqrt{w_1^2 + h^2}$$

$D = 2.154 \cdot 10^3$

$$\beta = \arctan\left(\frac{w_1 + \text{Ratio}}{h}\right)$$

$\beta = 28.811 \text{ deg}$

$$\zeta := \arccos\left(\frac{\sin(\phi - \alpha)}{\tan(\phi - \alpha)}\right)$$

$\zeta = 21.801 \text{ deg}$

$E := (\beta - \zeta)$

$E = 7.009 \text{ deg}$

$$\text{diff} := \tan(E) \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

$\text{diff} = 23.218$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{D^2 + w^2 - D^2}{2 \cdot D \cdot w}\right)$$

$\alpha = 1.19$

$$h := \frac{\tan(\phi + \alpha_2) + \tan(\alpha - \phi)}{w}$$

$h = 2 \cdot 10^3$

$$\alpha_2 := \arctan\left(\frac{w - w_1}{h}\right) - \phi$$

$\alpha_2 = 18.811 \text{ deg}$

$$D_2 := \sqrt{(w - w_1)^2 + h^2}$$

$D_2 = 2.283 \cdot 10^3$

$$\beta_2 := \arctan\left(\frac{w - w_1 + \text{Ratio}}{h}\right)$$

$\beta_2 = 34.992 \text{ deg}$

$$\zeta_2 := \arccos\left(\frac{\sin(\alpha_2 + \phi)}{\tan(\alpha_2 + \phi)}\right)$$

$\zeta_2 = 28.811 \text{ deg}$

$E_2 := \beta_2 - \zeta_2$

$E_2 = 6.181 \text{ deg}$

$$\text{diff}_2 := \tan(E_2) \cdot b_2 \cdot \sin(\alpha_2)$$

$\text{diff}_2 = 8.982$

$$w_1 := \frac{h}{\tan(\sigma)}$$

$w_1 = 800$

$$k = \frac{(b \cdot \cos(\alpha) - \text{diff}) \cdot (1 + \tan(E) \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(E)^2 \cdot \tan(\alpha - \phi)^2 + \tan(E)^3 \cdot \tan(\alpha - \phi)^3 + \tan(E)^4 \cdot \tan(\alpha - \phi)^4)}{\cos(\alpha - \phi)}$$

$$k = 318.6757$$

$$k_2 = \frac{(b_2 \cdot \cos(\alpha_2) - \text{diff}_2) \cdot (1 + \tan(E_2) \cdot \tan(\alpha_2 + \phi) + \tan(E_2)^2 \cdot \tan(\alpha_2 + \phi)^2 + \tan(E_2)^3 \cdot \tan(\alpha_2 + \phi)^3 + \tan(E_2)^4 \cdot \tan(\alpha_2 + \phi)^4)}{\cos(\alpha_2 + \phi)}$$

$$k_2 = 284.5582$$

$$\text{diff} := k \cdot (\tan(\phi) + \tan(\phi)^2 \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(\phi)^3 \cdot \tan(\alpha - \phi)^2 + \tan(\phi)^4 \cdot \tan(\alpha - \phi)^3 + \tan(\phi)^5 \cdot \tan(\alpha - \phi)^4 + \tan(\phi)^6 \cdot \tan(\alpha - \phi)^5 + \tan(\phi)^7 \cdot \tan(\alpha - \phi)^6)$$

$$\text{diff} = 32.55605$$

Given

$$\alpha = \phi + \text{atan}\left(\frac{w_1}{h}\right)$$

$$D = \sqrt{w_1^2 + h^2}$$

$$\beta = \text{atan}\left(\frac{w_1 + \text{Ratio}}{h}\right)$$

$$\zeta = \text{acos}\left(\frac{\sin(\phi - \alpha)}{\tan(\phi - \alpha)}\right)$$

$$E = \beta - \zeta$$

$$\text{diff} = \tan(E) \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

$$h = \frac{\tan(\phi + \alpha_2) + \tan(\alpha - \phi)}{w}$$

$$w_1 = \frac{h \cdot \left(\tan(\text{acos}\left(\frac{D^2 + w^2 - D^2}{2 \cdot D \cdot w}\right)) \right)}{h}$$

$$k = \frac{(b \cdot \cos(\alpha) - \text{diff}) \cdot (1 + \tan(E) \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(E)^2 \cdot \tan(\alpha - \phi)^2 + \tan(E)^3 \cdot \tan(\alpha - \phi)^3 + \tan(E)^4 \cdot \tan(\alpha - \phi)^4)}{\cos(\alpha - \phi)}$$

$$\text{diff}_2 = \tan(E_2) \cdot b_2 \cdot \sin(\alpha_2)$$

$$E_2 = \beta_2 - \zeta_2$$

$$\zeta_2 = \text{acos}\left(\frac{\sin(\alpha_2 + \phi)}{\tan(\alpha_2 + \phi)}\right)$$

$$\beta_2 = \text{atan}\left(\frac{w - w_1 + \text{Ratio}}{h}\right)$$

$$D_2 = \sqrt{(w - w_1)^2 + h^2}$$

$$\alpha_2 = \text{atan}\left(\frac{w - w_1}{h}\right) - \phi$$

$$2 \cdot \cos(\alpha - \phi)$$

$$) \cdot \tan(\alpha - \phi)^6 + \tan(\phi)^8 \cdot \tan(\alpha - \phi)^7 + \tan(\phi)^9 \cdot \tan(\alpha - \phi)^8 + \tan(\phi)^{10} \cdot \tan(\alpha - \phi)^9 + \tan(\phi)^{11} \cdot \tan(\alpha - \phi)^{10} + \tan(\phi)^{12} \cdot \tan(\alpha - \phi)^{11} + \tan(\phi)^{11}$$

$$\frac{\tan(\alpha - \phi)_{13} + \tan(\alpha - \phi)_{12}}{\tan(\alpha - \phi)_{14} + \tan(\alpha - \phi)_{13}}$$

$$k2 = \frac{(b2 \cdot \cos(\alpha2) - d \cdot \sin(\alpha)) \cdot (1 + \tan(\alpha2) \cdot \tan(\alpha)) + \tan(\alpha2) \cdot \tan(\alpha) + \tan(E2)^2 \cdot \tan(\alpha2) + \tan(E2)^3 \cdot \tan(\alpha2) + \tan(E2)^4 \cdot \tan(\alpha2) + \tan(\alpha)^4}{\cos(\alpha2 + \phi)}$$

$$\text{alt} = k \cdot \left(\tan(\phi) + \tan(\alpha) \right)^2 \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(\phi)^3 \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(\phi)^4 \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(\phi)^5 \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(\phi)^6 \cdot \tan(\alpha - \phi) + \tan(\phi)^7$$

$$\frac{b \cdot \cos(\alpha) - b \cdot \tan(E) \cdot \sin(\alpha)}{2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\alpha - \phi) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\alpha - \phi)} - \left(\frac{d}{\text{alt} + \frac{k \cdot \sin(\alpha - \phi)}{2}} \right) \cdot \cos(\alpha)$$

$$\frac{2 \cdot d - k2 \cdot \tan(\alpha2) \cdot \cos(\alpha2) \cdot \cos(\phi + \alpha2)}{[2 \cdot b2 \cdot (\cos(\alpha2))^2 - 2 \cdot d \cdot \text{dfr} \cdot \cos(\alpha2)]} - \frac{D2 - \text{Ratio} \cdot \sin(\phi + \alpha2)}{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi + \alpha2) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\phi + \alpha2))} = 0$$

0	0
1	2.10 ³
2	0.175
3	2.5.10 ³
4	0.555
5	0.328
6	2.154.10 ³
7	2.283.10 ³
8	0.503
9	0.611
10	0.381
11	0.503
12	0.122
13	0.108
14	23.218

fnd(h, φ, l, α, α2, D, D2, β, β2, ζ, ζ2, E, E2, dfr, dfr2, k, k2) =

$$\frac{b \cdot \cos(\alpha) - b \cdot \tan(E) \cdot \sin(\alpha)}{2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\alpha - \phi) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E) \cdot \sin(\alpha - \phi)} - \left(\frac{d}{\text{alt} + \frac{k \cdot \sin(\alpha - \phi)}{2}} \right) \cdot \cos(\alpha)$$

$$\frac{2 \cdot d - k2 \cdot \tan(\alpha2) \cdot \cos(\alpha2) \cdot \cos(\phi + \alpha2)}{[2 \cdot b2 \cdot (\cos(\alpha2))^2 - 2 \cdot d \cdot \text{dfr} \cdot \cos(\alpha2)]} - \frac{D2 - \text{Ratio} \cdot \sin(\phi + \alpha2)}{(2 \cdot \text{Ratio} \cdot \cos(\phi + \alpha2) - 2 \cdot \text{Ratio} \cdot \tan(E2) \cdot \sin(\phi + \alpha2))} = 4.115 \cdot 10^{-7}$$

$$\frac{\tan(\alpha - \phi)^6 + \tan(\phi)^8 \cdot \tan(\alpha - \phi)^7 + \tan(\phi)^9 \cdot \tan(\alpha - \phi)^8 + \tan(\phi)^{10} \cdot \tan(\alpha - \phi)^9 + \tan(\phi)^{11} \cdot \tan(\alpha - \phi)^{10} + \tan(\phi)^{12} \cdot \tan(\alpha - \phi)^{11} + \tan(\phi)^{11}}{2 \cdot \cos(\alpha - \phi)}$$

$$\frac{\tan(\alpha - \phi)_{12} + \tan(\phi)_{14} \cdot \tan(\alpha - \phi)_{13}}{\tan(\alpha - \phi)_{13}}$$

APENDICE B – Equação vertical e horizontal e seus gráficos

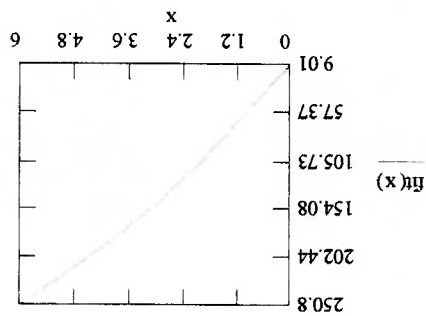
Exemplo de uma EQUAÇÃO VERTICAL e de seu gráfico

```
data := [
  1 58.4596
  2 107.9092
  3 150.2162
  4 186.8238
  5 218.8112
]
```

```
data := csort(data, 0)
```

```
X := data <0>
Y := data <1>
```

```
fit(x) := interp(X, Y, x)
```



```
regress(X, Y, 4) = [
  3
  3
  4
  0.06
  63.568
  -5.545
  0.392
  -0.015
]
```

```
X := 1, 2, .. 5
```

```
f(x) := -0.015·x4 + 0.392·x3 - 5.545·x2 + 63.568·x + 0.06
```

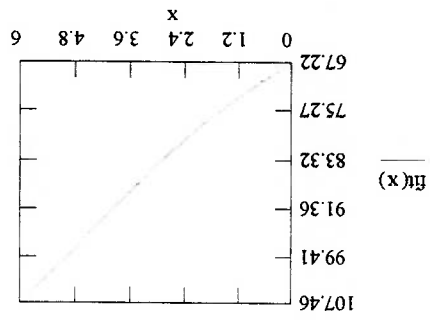
Exemplo de uma EQUAÇÃO HORIZONTAL e de seu gráfico

```
data = [ 0 67.2179
         1 72.0792
         2 77.6984
         3 84.2678
         4 91.999 ]
```

```
data := csort(data, 0)
```

```
X := data <0>
Y := data <1>
```

```
fit(x) := linterp(X, Y, x)
```



```
regress(X, Y, 4) = [ 3
                    3
                    4
                    67.218
                    4.542
                    0.292
                    0.027
                    8.042·10-4 ]
```

```
X := 1, 2, .. 5
```

$$f(X) := 8.042 \cdot 10^{-4} \cdot X^4 + 0.027 \cdot X^3 + 0.292 \cdot X^2 + 4.542 \cdot X + 67.218$$

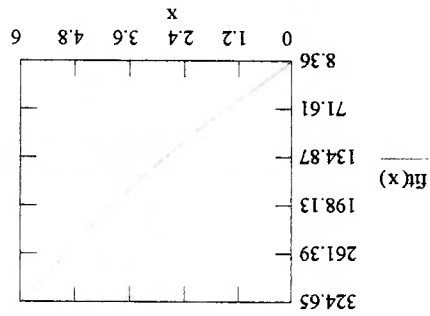
EQUAÇÃO VERTICAL e seu gráfico

```
data = [ 1 51.5051
        2 94.6533
        3 143.2513
        4 198.4013
        5 261.5239 ]
```

```
data := csort(data, 0)
```

```
X := data <0>
Y := data <1>
```

```
fit(x) := interp(X, Y, x)
```



```
regress(X, Y, 4) = [ 3
                    3
                    4
                    13.023
                    36.331
                    2.087
                    0.051
                    0.013 ]
```

```
X := 1, 2, .. 5
```

$$f(x) = 0.013 \cdot x^4 + 0.051 \cdot x^3 + 2.087 \cdot x^2 + 36.331 \cdot x + 13.023$$

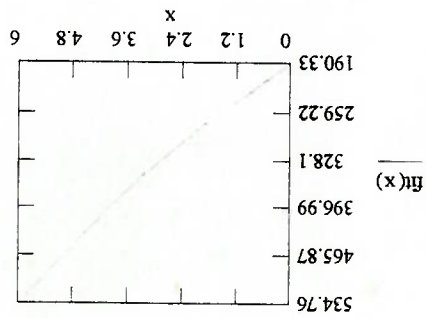
EQUAÇÃO HORIZONTAL e seu gráfico

```
data := [
  1 237.317
  2 284.3038
  3 337.2253
  4 397.2816
  5 466.0199
]
```

```
data := csort(data, 0)
```

```
X := data <0>
Y := data <1>
```

```
fit(x) := linterp(X, Y, x)
```



```
regress(X, Y, 4) = [
  3
  4
  195.412
  39.562
  2.273
  0.055
  0.014
]
```

X := 1, 2, 5

$$f(x) = 0.014x^4 + 0.055x^3 + 2.273x^2 + 39.562x + 195.412$$