

LUÍS AUGUSTO MOTTA MELLO

**ESTUDO DA OBTENÇÃO DE IMAGENS
TRIDIMENSIONAIS DE TOMOGRAFIA
POR IMPEDÂNCIA ELÉTRICA PELO
MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Engenharia.

SÃO PAULO

2005

LUÍS AUGUSTO MOTTA MELLO

**ESTUDO DA OBTENÇÃO DE IMAGENS
TRIDIMENSIONAIS DE TOMOGRAFIA
POR IMPEDÂNCIA ELÉTRICA PELO
MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Engenharia.

Área de Concentração: Otimização
Topológica aplicada à Tomografia
por Impedância Elétrica
Orientador: Prof. Dr. Emílio Carlos
Nelli Silva

SÃO PAULO

2005

AGRADECIMENTOS

Gostaria, em primeiro lugar, de agradecer à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelo suporte financeiro fornecido através de bolsa de Mestrado, sem o qual não poderia ter realizado este trabalho.

Agradeço a todos os colegas do grupo de otimização pela ajuda constante, em especial aos alunos Cícero Ribeiro de Lima, Fernando Viegas Stump e Ronny Calixto Carbonari. O auxílio e críticas dados por estes três foram fundamentais.

Agradeço ao professor Marcelo Britto Passos Amato por acreditar no meu trabalho e pelas sugestões dadas para melhoria da qualidade do trabalho.

Também agradeço ao professor Raul Gonzalez Lima, pela paciência, pelas discussões sobre os mais variados aspectos relacionados à tomografia e também pelas sugestões.

Agradeço ao professor Emílio Carlos Nelli Silva principalmente por acreditar no meu potencial e por fornecer todo o suporte técnico necessário para desenvolvimento do trabalho. Também agradeço por ter me incentivado a continuar na carreira acadêmica. Admiro muito a vontade e a inteligência do professor, e estas duas qualidades foram um grande incentivo para mim.

Agradeço aos funcionários da Escola Politécnica por toda a ajuda e paciência.

Agradeço a todos os meus amigos pelo incentivo e pelas horas de descanso e diversão.

Finalmente, agradeço à minha família e, principalmente, à minha mãe, por tudo.

RESUMO

Um tomógrafo por impedância elétrica permite que sejam obtidas as impedâncias elétricas do interior de um corpo (representadas por uma imagem) mediante os valores de potenciais elétricos medidos em eletrodos (posicionados ao redor do corpo), quando certo fluxo de corrente é aplicado também por eletrodos, segundo um padrão de excitação (diametral, adjacente, etc.). Vários casos de carregamento, ou seja, várias configurações geométricas diferentes de aplicação de corrente e imposição de potencial nulo, podem ser usados para que haja informação suficiente para a obtenção da imagem. O autor deste texto implementou, em seu trabalho de Mestrado, um “software” baseado no Método de Otimização Topológica para o estudo da obtenção de imagens de Tomografia por Impedância Elétrica. Neste trabalho, utilizou-se um modelo tridimensional para descrever, fisicamente, o corpo tomografado e o fenômeno de fluxo de corrente em seu interior. Segundo o Método de Otimização Topológica, define-se uma função objetivo, ou função custo, que expressa a diferença entre os potenciais medidos nos eletrodos do domínio tomografado e os potenciais correspondentes, calculados no decorrer da otimização, no domínio discretizado através do Método dos Elementos Finitos. É fornecido ao algoritmo uma sugestão inicial para os valores das impedâncias de cada elemento finito e o algoritmo prossegue, num processo iterativo, até que a convergência seja atingida. Como o MEF é usado, não há restrições acerca da geometria do domínio. A impedância referente à camada mais externa da epiderme humana, pode ser um fator causador de discrepâncias entre resultados obtidos e reais. Assim, foi incorporado um modelo de eletrodo, fiel à situação real.

Palavras-chave: Tomografia por Impedância Elétrica. Otimização Topológica. Método dos Elementos Finitos. Meios condutivos. Imagens médicas.

ABSTRACT

An Electrical Impedance Tomography device allows us to obtain impedance values (represented by images) of the interior of a body through electric potential measurements on the electrodes on the contour of the body, when a current density is applied to an electrode following a load (or current) pattern (adjacent, diametrical, etc.). Several load cases, that is, several geometrical configurations in applying current and a reference point can be used to obtain the images. In this work, the author implemented an algorithm to study the applicability of Topology Optimization Method on obtaining Electrical Impedance Tomography images. A three-dimensional model describes physically the body and the current flow inside this body. In the Topology Optimization Method framework, an objective function is defined, which expresses the difference between measured electric potentials on electrodes and computed electric potentials on numerical electrodes, disposed on the contour of finite element discretized body. An electrical impedance initial guess is provided for the algorithm and an iterative process is carried out until the convergence is achieved. There is no restrictions about the domain geometry since the Finite Element Method is used. The electrical impedance of the human epidermis outermost layer can cause discrepancies between measured and calculated potentials, under the same conditions. For this reason, an accurate electrode model was proposed.

Keywords: Electrical Impedance Tomography. Topology Optimization. Finite Element Method. Conductive media. Medical images.

SUMÁRIO

RESUMO

ABSTRACT

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	Importância do Estudo da TIE.....	1
1.2	Algoritmos de Reconstrução de Imagens Usados na Tomografia por Impedância Elétrica.....	5
1.3	Objetivos.....	9
2	MODELAGEM DO MEIO CONDUTIVO.....	11
2.1	Equações Constitutivas do Meio Condutivo.....	11
2.2	Método dos Elementos Finitos.....	12
2.2.1	Método dos Elementos Finitos Aplicado a Meios Condutivos.....	14
2.2.1.1	Elementos Hexaédricos.....	17
2.2.1.2	Elementos Tetraédricos.....	19
2.2.2	Modelo de Eletrodo.....	21
2.2.3	Solução Numérica do Sistema Linear $[K]\{\Phi\}=\{I\}$	28
3	MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA.....	30

3.1	Método de Otimização Topológica Aplicado à Tomografia por Impedância Elétrica	34
3.1.1	Restrição de Sintonia	37
3.1.2	Restrição do Valor Médio da Densidade	38
3.1.3	Filtro Espacial	41
4	SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO.....	43
4.1	Programação Linear e Programação Linear Seqüencial.....	43
4.2	Cálculo dos Gradientes	46
5	IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO	54
5.1	“Fantoma” Numérico	54
5.2	Algoritmos Implementados	54
5.2.1	Algoritmo Auxiliar	55
5.2.2	Algoritmo Principal	56
5.2.2.1	Leitura de Dados.....	58
5.2.2.2	Tratamento dos Dados.....	59
5.2.2.3	Geração dos Arquivos de Saída.....	60
6	RESULTADOS E DISCUSSÃO	61
6.1	Respostas com Elementos Hexaédricos	61
6.1.1	Crime Inverso	64
6.1.2	Recostituição na Malha Menos Discretizada.....	68
6.1.2.1	Otimização das Densidades (Dadas as Constantes de Eletrodo).....	68
6.1.2.2	Otimização das Constantes do Modelo de Eletrodo e das Densidades.....	72
	Otimização das constantes do modelo de eletrodo.....	73

Otimização das densidades no interior do domínio.....	74
6.2 Respostas com Elementos Tetraédricos	80
6.2.1 Recstituição na Malha Menos Discretizada.....	82
6.2.1.1 Otimização das Constantes do Modelo de Eletrodo e das Densidades.....	82
Otimização das constantes do modelo de eletrodo.....	83
Otimização das densidades no interior do domínio.....	83
7 CONCLUSÕES	108
8 TRABALHOS FUTUROS	110
ANEXO A – DEDUÇÃO DO PRINCÍPIO DOS POTENCIAIS VIRTUAIS.....	112
ANEXO B – CÁLCULO DA INTEGRAL DA MATRIZ DE CONDUTIVIDADE DO ELEMENTO TETRAÉDRICO E DA DERIVADA.....	114
REFERÊNCIAS	116
APÊNDICE – ARQUIVO DE ENTRADA EXEMPLO PARA OS ALGORITMOS	I

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 (a) Disposição de um conjunto ou camada de eletrodos para obtenção de uma imagem. (b) Esquema do tórax (e de eletrodos posicionados sobre ele). (c) Esquema da imagem obtida. A parte anterior da camada superficial e parte dos tecidos internos foram removidas para melhor visualização.2
- Figura 2 Os eletrodos são mostrados no contorno do domínio Ω . (a) Padrão adjacente de excitação. (b) Padrão diametral de excitação. (c) e (d) Dois casos de carregamento diferentes para um mesmo padrão de excitação.2
- Figura 3 Esquema de domínio tridimensional condutivo.12
- Figura 4 Elemento finito hexaédrico e suas coordenadas locais. As coordenadas variam de -1 a 118
- Figura 5 Elemento finito tetraédrico e suas coordenadas locais. As coordenadas variam de 0 a 119
- Figura 6 (a) Esquema do eletrodo. (b) O modelo de eletrodo inclui parte da pele e o próprio eletrodo. (c) Modelo de MEF com dimensões.22
- Figura 7 Elemento usado no modelo de eletrodo. É mostrado o sistema de coordenadas local usado.23
- Figura 8 (a) Fluxo de corrente constante aplicado ao modelo de MEF. (b) Corrente equivalente em cada nó. (c) Condensação dos nós 10 a 18 num único nó, o 10, e aplicação da soma das correntes nodais ao nó.26
- Figura 9 Domínio fixo de projeto (Ω_p), condições de contorno e corrente imposta, no problema de MOT aplicado a meios condutivos.30

Figura 10 Gráficos de $\text{mat} \times \rho$ para diferentes valores de p . Os valores de mat_A e mat_B usados foram 0,000001 e 0,06, respectivamente. (a) $p=1$. (b) $p=2$. (c) $p=4$	32
Figura 11 Gráficos de $\text{mat} \times \rho$ para diferentes valores de p . Os valores de mat_A e mat_B usados foram 0,06 e 0,000001, respectivamente. (a) $p=1$. (b) $p=2$. (c) $p=4$	32
Figura 12 Exemplo de aplicação do MOT, onde se deseja maximizar a rigidez de uma estrutura. (a) Domínio fixo, carregamento e condições de contorno. (b) Resposta da otimização. Apenas 40% do volume inicial é ocupado.	34
Figura 13 Função fw_k . Pelas curvas de nível mostradas, é possível notar a influência da posição da variável de projeto no domínio sobre o valor da função. O valor máximo é dado para $x=1$ e vale $f_k=1$	39
Figura 14 A função fw_k , dada em ρ_k igual a 0,45.....	40
Figura 15 Parte da malha de elementos finitos e RF. São destacados os nós considerados no processo de filtragem.	42
Figura 16 Função não linear $F(x)$ e sua linearização $f(x)$ em torno de x_i . O índice i indica a i -ésima iteração.....	44
Figura 17 Carregamentos citados no teorema de Betti-Maxwell.	47
Figura 18 Aplicação de $\{I_{ij}\}$ ao domínio. Obtém-se a distribuição $\{\Psi_{ij}\}$	50
Figura 19 Aplicação de $\{I_{ij}\}$, com i de 1 a n_p , todas as correntes ao mesmo tempo. Obtém-se a distribuição $\{\Psi_j^*\}$	51
Figura 20 Processo usado para obtenção da imagem. As constantes de eletrodo são entrada para a otimização das densidades.....	57

Figura 21 Fluxograma referente à determinação das densidades no interior do domínio e dos parâmetros de eletrodo.	58
Figura 22 Padrões de excitação diametral e adjacente.	62
Figura 23 Malha M. Discretização de 15134 elementos e 17190 nós.	63
Figura 24 Malha C. Discretização de 2368 elementos e 3105 nós (igual à da malha de reconstituição).	63
Figura 25 Dimensões das camadas das malhas C e M.	64
Figura 26 Fluxograma do processo para o crime inverso.	65
Figura 27 “Fantoma” numérico e resposta encontrada sem a restrição RS.	65
Figura 28 “Fantoma” numérico e resposta encontrada com a restrição RS. A restrição terminou ativa.	65
Figura 29 Curvas de convergência. (a) Sem RS (Figura 27) e valor mínimo 0,000015. (b) Com RS (Figura 28) e valor mínimo 0,000017.	65
Figura 30 Gráficos da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das variáveis de projeto. (a) Referente à Figura 21. (b) Referente à Figura 22.	66
Figura 31 Fluxograma do algoritmo.	69
Figura 32 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Não há RS e as constantes do modelo de eletrodo não são otimizadas.	69
Figura 33 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Há RS e as constantes do modelo de eletrodo não são otimizadas. A restrição terminou ativa.	70
Figura 34 Fileiras de imagens.	70
Figura 35 Curvas de convergência. (a) Sem RS (Figura 32) e valor mínimo 0,006019. (b) Com RS (Figura 33) e valor mínimo 0,003822.	71

Figura 36 Gráficos da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das variáveis de projeto. (a) Referente à Figura 32. (b) Referente à Figura 33.	71
Figura 37 Fluxograma do algoritmo.	73
Figura 38 “Fantoma” numérico e resposta encontrada com otimização das constantes de eletrodo (valores dados na Tabela 1). Não há RS.	74
Figura 39 “Fantoma” numérico e resposta encontrada com otimização das constantes de eletrodo (valores dados na Tabela 1). Há RS, a qual terminou ativa.	74
Figura 40 Curvas de convergência. (a) Sem RS (Figura 38) e valor mínimo 0,303145. (b) Com RS (Figura 39) e valor mínimo 0,303022.....	75
Figura 41 Gráficos da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das variáveis de projeto. (a) Referente à Figura 38. (b) Referente à Figura 39.	76
Figura 42 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Há RS e as constantes do modelo de eletrodo são otimizadas. Foi imposta uma restrição de 35% à variação das constantes.....	76
Figura 43 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das variáveis de projeto, ambos referentes à Figura 42. Há RS e restrição de 35% à variação das constantes de eletrodo. Valor mínimo: 0,009871.	77
Figura 44 “Fantoma” numérico e resposta encontrada com otimização das constantes de eletrodo (valores dados na Tabela 1). Não há RS e $p=2$	77
Figura 45 “Fantoma” numérico e resposta encontrada com otimização das constantes de eletrodo (valores dados na Tabela 1). Há RS, a qual terminou ativa, e $p=2$	78
Figura 46 Curvas de convergência. (a) Sem RS (Figura 44) e valor mínimo 0,304524. (b) Com RS (Figura 45) e valor mínimo 0,304487.....	78

Figura 47 Gráficos da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das variáveis de projeto. (a) Referente à Figura 44. (b) Referente à Figura 45.	78
Figura 48 “Fantoma” numérico e resposta encontrada com otimização das constantes de eletrodo (valores dados na Tabela 1). Não há RS e $p=1$	79
Figura 49 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 48. Valor mínimo: 0,306045.	79
Figura 50 Malha M. Discretização de 34359 elementos e 7650 nós.	81
Figura 51 Malha de reconstituição. Discretização de 5548 elementos e 1503 nós. ...	81
Figura 52 Fluxograma do algoritmo.	82
Figura 53 Esquema do “fantoma” numérico.	84
Figura 54 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$ e os potenciais nos eletrodos onde é aplicada corrente e potencial nulo estão presentes na função objetivo.	85
Figura 55 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$	86
Figura 56 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=2$	87
Figura 57 Gráficos da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades. (a) Referente à Figura 55. (b) Referente à Figura 56.	88
Figura 58 Curvas de convergência. (a) $p=1$ (Figura 55) e valor mínimo 0,613578. (b) $p=2$ (Figura 56) e valor mínimo 0,619519.	88
Figura 59 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$ e o raio do filtro é 0,005m.	89

Figura 60 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 59. Valor mínimo: 0,615368.....	90
Figura 61 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$ e o raio do filtro é 0,01m.....	90
Figura 62 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 61. Valor mínimo: 0,615886.....	90
Figura 63 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$ e o raio do filtro é 0,015m.....	91
Figura 64 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 63. Valor mínimo: 0,616282.....	92
Figura 65 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$ e o raio do filtro é 0,02m.....	92
Figura 66 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 65. Valor mínimo: 0,616554.....	92
Figura 67 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$ e o raio do filtro é 0,03m.....	93
Figura 68 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 67. Valor mínimo: 0,614722.....	93

Figura 69 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=2$ e o raio do filtro é 0,005m.....	94
Figura 70 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 69. Valor mínimo: 0,605146.....	94
Figura 71 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=2$ e o raio do filtro é 0,01m.....	95
Figura 72 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 71. Valor mínimo: 0,628354.....	95
Figura 73 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=2$ e o raio do filtro é 0,015m.....	96
Figura 74 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 73. Valor mínimo: 0,647476.....	96
Figura 75 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=2$ e o raio do filtro é 0,02m.....	97
Figura 76 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 75. Valor mínimo: 0,728196.....	97
Figura 77 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=2$ e o raio do filtro é 0,03m.....	98

Figura 78 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 77. Valor mínimo: 0,612080.....	98
Figura 79 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$ e a RVM foi usada.	99
Figura 80 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 79. Valor mínimo: 0,618546.....	99
Figura 81 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=2$ e a RVM foi usada.	100
Figura 82 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 81. Valor mínimo: 0,614970.....	100
Figura 83 Gráficos dos valores correntes das somatórias da RVM e dos valores limites, para cada iteração. (a) Referente à Figura 79. (b) Referente à Figura 81.	101
Figura 84 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$, a RVM foi usada e o raio do filtro é 0,005m.....	102
Figura 85 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 84. Valor mínimo: 0,613360.....	102
Figura 86 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$, a RVM foi usada e o raio do filtro é 0,01m.....	103

Figura 87 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 86. Valor mínimo: 0,621212.....	103
Figura 88 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$, a RVM foi usada e o raio do filtro é 0,015m.....	104
Figura 89 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 88. Valor mínimo: 0,611424.....	104
Figura 90 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=2$, a RVM foi usada e o raio do filtro é 0,005m.....	105
Figura 91 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 90. Valor mínimo: 0,620843.....	105
Figura 92 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=2$, a RVM foi usada e o raio do filtro é 0,01m.....	106
Figura 93 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 92. Valor mínimo: 0,617844.....	106
Figura 94 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=2$, a RVM foi usada e o raio do filtro é 0,015m.....	107
Figura 95 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 94. Valor mínimo: 0,602369.....	107

LISTA DE TABELAS

- Tabela 1 – Valores das constantes do modelo de eletrodo obtidos no primeiro processo iterativo. Os valores usados na malha de distribuição de condutividades uniforme foram $100(\text{m}^2.\Omega)^{-1}$ 73
- Tabela 2 – Valores das constantes do modelo de eletrodo obtidos no primeiro processo iterativo. Os valores usados na malha de distribuição de condutividades uniforme foram $100(\text{m}^2.\Omega)^{-1}$ 83

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CS	Coeficiente de Sintonia
FE	Filtro Espacial
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEMS	Sistemas MicroEletroMecânicos
MGCSE	Método dos Gradientes Conjugados para Sistemas Esparsos
MGBSE	Método dos Gradientes Biconjugados para Sistemas Esparsos
MOT	Método de Otimização Topológica
PL	Programação Linear
PLS	Programação Linear Seqüencial
RF	Raio do Filtro
RS	Restrição de Sintonia
RVM	Restrição do Valor Médio
SIMP	“Simple Isotropic Material with Penalization”
TIE	Tomografia po Impedância Elétrica
UTI	Unidade de Terapia Intensiva

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	domínio onde ocorre o fenômeno eletromagnético
∇	vetor gradiente
\mathbf{I}	vetor fluxo de corrente
\mathbf{x}	vetor posição
σ	condutividade elétrica
ϕ	potencial escalar elétrico
$\partial\Omega$	fronteira do domínio Ω
$\phi_{imposta}$	condição de contorno de potencial elétrico
I_n	fluxo de corrente na direção normal ao contorno do corpo
σ_n	condutividade elétrica na direção de \mathbf{n}
∂	variação parcial infinitesimal
\mathbf{n}	vetor normal ao domínio Ω , apontando para fora
$\partial\Omega_\phi$	região da fronteira de Ω onde se aplica $\phi_{imposta}$
$\partial\Omega_I$	região da fronteira de Ω onde se aplica I_n
V	volume do domínio Ω
$\bar{\phi}$	distribuição virtual de potenciais
$\{\bar{\phi}'\}^T$	vetor transposto de derivadas de $\bar{\phi}$ em relação às coordenadas
globais	
$[\sigma]$	matriz do material condutivo
$\{\phi'\}$	vetor de derivadas de ϕ em relação às coordenadas globais
$\bar{\phi}_S$	distribuição virtual de potenciais em $\partial\Omega_I$
dV	elemento infinitesimal de volume
dS	elemento infinitesimal de área
V_m	volume do m-ésimo elemento finito
$\{\bar{\phi}'_m\}^T$	vetor transposto de derivadas de $\bar{\phi}$ em relação às coordenadas
globais no elemento	
$[\sigma_m]$	matriz do material condutivo do elemento
$\{\phi'_m\}$	vetor de derivadas de ϕ em relação às coordenadas globais no
elemento	

$\bar{\phi}_{Sm}$	distribuição virtual de potenciais na superfície livre do elemento
dV_m	elemento infinitesimal de volume referente ao elemento
dS_m	elemento infinitesimal de área referente ao elemento
$\partial\Omega_{lm}$	região da fronteira do elemento onde se aplica I_n
I_{nm}	fluxo de corrente na direção normal ao contorno do corpo no elemento
ϕ_m	campo escalar de potenciais elétricos dentro do elemento
$\{\Phi_m\}$	vetor de potenciais nodais do elemento
$[N_m]$	matriz de funções de forma do elemento
(x,y,z)	coordenadas globais
(r,s,t)	coordenadas locais
$[J]$	operador Jacobiano
V'_m	V_m em coordenadas locais
$\det[]$	operador determinante
dV'_m	dV_m em coordenadas locais do elemento
dS'_m	dS_m em coordenadas locais do elemento
$\partial\Omega'_{lm}$	$\partial\Omega_{lm}$ em coordenadas locais do elemento
$[J_m]$	Jacobiano definido no elemento
$[J_{nm}]$	Jacobiano definido no elemento, na superfície $\partial\Omega'_{lm}$
I_{nm}	fluxo de corrente na direção normal ao contorno do corpo no elemento
$[B_m]$	matriz igual à inversa de $[J_m]$ multiplicada pela matriz de derivadas espaciais dos coeficientes de $[N_m]$
$\{X_m\}$	vetor de coordenadas nodais em x
$\{Y_m\}$	vetor de coordenadas nodais em y
$\{Z_m\}$	vetor de coordenadas nodais em z
$[N_{Sm}]$	matriz $[N_m]$ tomada em $\partial\Omega_{lm}$
$\{\bar{\Phi}_m\}$	vetor de potenciais nodais virtuais do elemento
$[K_m]$	matriz de condutividade do elemento finito
$\{I_m\}$	vetor de carregamentos nodais do elemento finito
$[K]$	matriz de condutividade global

$\{I\}$	vetor de carregamentos nodais global
$\{\Phi\}$	vetor de potenciais nodais global
t_{el}	espessura do modelo de eletrodo
a	largura do modelo de eletrodo
(x',y',z')	coordenadas locais dos elementos do modelo de eletrodo
$[N_e]$	matriz equivalente a $[N_m]$, dada para os elementos do modelo de eletrodo e definida nas coordenadas (x',y',z')
$[B_e]$	matriz equivalente a $[B_m]$, dada para os elementos do modelo de eletrodo e definida nas coordenadas (x',y',z')
$\{\phi'_e\}$	vetor equivalente a $\{\phi'_m\}$, dado para os elementos do modelo de eletrodo
$\{\Phi_e\}$	vetor equivalente a $\{\Phi_m\}$, dado para os elementos do modelo de eletrodo
$[K_e]$	matriz equivalente a $[K_m]$, dada para os elementos do modelo de eletrodo
$[\sigma_e]$	matriz equivalente a $[\sigma_m]$, dada para os elementos do modelo de eletrodo e definida nas coordenadas (x',y',z')
σ_{el}	condutividade dos elementos do modelo de eletrodo
I_{ne}	fluxo de corrente na direção normal ao eletrodo
$\partial\Omega_{I_e}$	região do eletrodo, definida nas coordenadas (x',y',z') , onde se aplica I_{ne}
$[N_{Se}]$	matriz equivalente a $[N_e]$, tomada em $\partial\Omega_{I_e}$
$\{I_e\}$	vetor equivalente a $\{I_m\}$, dado para os elementos do modelo de eletrodo
σ_{el}/t_{el}	constante do modelo de eletrodo ou parâmetro do modelo de eletrodo
$[K_{el}]$	matriz do modelo de eletrodo simplificada
$\{I_{el}\}$	vetor simplificado de correntes nodais do modelo de eletrodo
$\rho(x)$	densidade ou porcentagem de material
p	fator de penalidade ou penalização
F	função objetivo
ne	número de casos de carregamento aplicados

np	número de nós ou eletrodos onde são obtidos os potenciais elétricos
ϕ_{ij0}	potencial medido no i -ésimo eletrodo do corpo a ser tomografado, para o caso de carregamento j
ϕ_{ij}	potencial no i -ésimo eletrodo, para o caso de carregamento j , calculado através do modelo de MEF do corpo
σ_A	condutividade do material A
σ_B	condutividade do material B
σ_m	condutividade do elemento finito
ρ_m	densidade do elemento finito
$\{P_m\}$	vetor de densidades nodais do elemento finito
σ_{Ael}/t_{el}	limite para σ_{el}/t_{el}
σ_{Bel}/t_{el}	limite para σ_{el}/t_{el}
ρ_{el}	variável de projeto para o modelo de eletrodo
M	número de elementos finitos da malha
V_{min}	menor volume de elemento numa malha
N	número de variáveis de projeto
ρ_m	densidade da variável de projeto, a qual pode, ou não, ser igual a ρ_m
w_k	peso aplicado ao valor da função f_k
f_k	função da variável de projeto ρ_k usada na Restrição do Valor Médio
$\bar{\rho}$	média dos valores de densidade adquirida a partir dos potenciais medidos no corpo ou domínio de condutividades desconhecidas
f	função de $\bar{\rho}$ usada na Restrição do Valor Médio
w	peso associado ao valor da função f
dn_k	distância normalizada entre a variável de projeto ρ_k e o centro do domínio
fw_k	função dada pela multiplicação de w_k por f_k
\bar{U}_c	valor médio dos potenciais medidos nos eletrodos de um corpo de distribuição de condutividades conhecida e uniforme

$\bar{\rho}_c$ valor médio da densidade de um corpo de distribuição de condutividades conhecida e uniforme

\bar{U}_f valor médio dos potenciais medidos nos eletrodos de um corpo do qual se deseja obter a imagem

\hat{a} variável filtrada por FE

W_q q-ésimo peso do filtro FE

$dist_q$ distância entre o nó referente a \hat{a} e o q-ésimo nó

nd_q número de elementos que compartilham o q-ésimo nó

V_{ql}^* variável que expressa o volume de cada um destes nd_q

elementos

F_{linear} função objetivo linearizada

ρ vetor das densidades

ρ_0 vetor das densidades usadas como ponto de linearização de F

$F(\rho_0)$ função objetivo em ρ_0

F_{linear}^* função objetivo linearizada sem os termos constantes

ρ_k^{min} valor mínimo de ρ_k , ou limites móveis inferior

ρ_k^{max} valor máximo de ρ_k , ou limites móveis superior

$\{I_{ij}\}$ vetor de correntes nodais com corrente igual a $(\phi_{ij0} - \phi_{ij})$, obtida

da resposta do j-ésimo caso de carregamento e aplicada ao nó referente ao ponto de medição j

$\{\Psi_{ij}\}$ potenciais resultantes da aplicação de $\{I_{ij}\}$

$[K_j]$ matriz global para o j-ésimo caso de carregamento

$\{\Psi_j^*\}$ vetor de potenciais dado pela soma de todos os vetores $\{\Psi_{ij}\}$,

com i de 1 a np

$\{\Psi_{kj}^*\}$ vetor $\{\Psi_j^*\}$ para o k-ésimo elemento finito

$\{\Phi_{kj}\}$ vetor $\{\Phi_j\}$ para o k-ésimo elemento finito

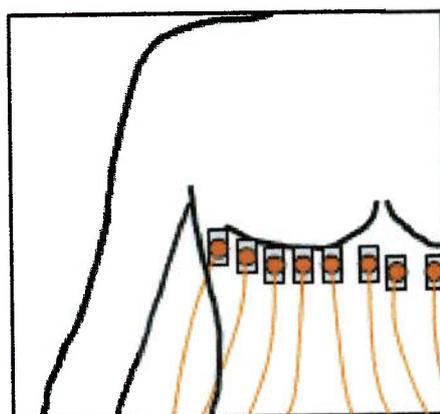
nt_k número de elementos finitos que compartilham o k-ésimo nó

1 INTRODUÇÃO

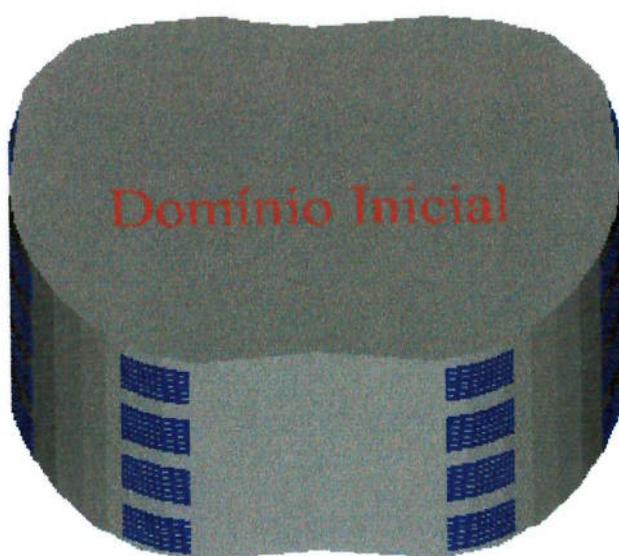
A Tomografia por Impedância Elétrica (TIE) é, resumidamente, uma forma de obtenção de imagens do interior de um corpo (domínio). Em seu contorno, é aplicada por um eletrodo, uma corrente elétrica de baixa intensidade, imposto potencial nulo em outro, são medidos os potenciais elétricos resultantes e, então, através da solução de um problema inverso (HUA et al., 1993; HYARIC; PIDCOCK, 2001), procura-se obter a distribuição de material (condutividade e permissividade) no interior do domínio, a qual é representada por uma imagem. Vários casos de carregamento, ou seja, várias configurações geométricas diferentes de aplicação de corrente e imposição de potencial nulo, segundo um mesmo padrão de excitação, podem ser usados para que haja informação suficiente para a reconstrução desta imagem. A Figura 1 mostra a TIE na prática, na situação de aplicação na área médica, e a Figura 2 mostra dois tipos de padrão de excitação para um caso de carregamento e dois casos de carregamento para um mesmo padrão.

1.1 Importância do Estudo da TIE

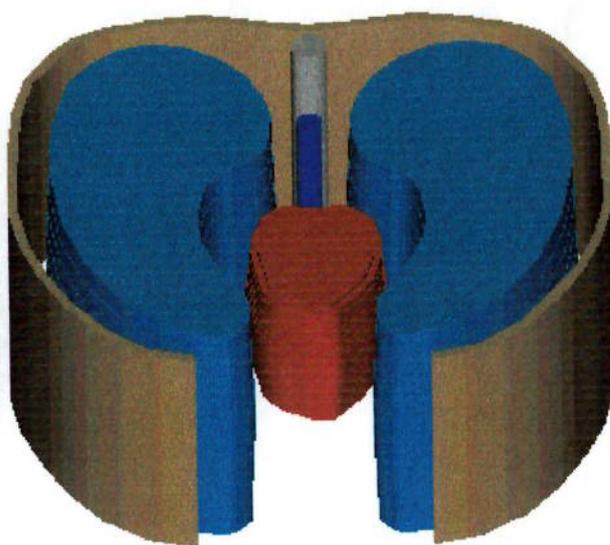
Segundo o Dr. Marcelo Britto Passos Amato (AMATO, 2001), aproximadamente duzentos e cinquenta mil pacientes por ano são submetidos à ventilação artificial prolongada – usada como medida de suporte até a recuperação plena de um pulmão afetado - em Unidades de Terapia Intensiva (UTI's) no Brasil. Além destes, alguns milhões recebem anestesia geral, também anualmente. Contudo, apesar dos avanços tecnológicos dos dias atuais, o médico ainda é obrigado a lidar com o pulmão como uma “caixa preta”, não dispondo sequer de recursos satisfatórios para localizar, de forma precisa, a presença de danos pulmonares em tempo real, por exemplo. Definem-se, apenas, com base em estratégias ventilatórias recentemente criadas, descritas por Amato (2001), protocolos de tratamento padrão.



(a)



(b)



(c)

Figura 1 (a) Disposição de um conjunto ou camada de eletrodos para obtenção de uma imagem. (b) Esquema do tórax (e de eletrodos posicionados sobre ele). (c) Esquema da imagem obtida. A parte anterior da camada superficial e parte dos tecidos internos foram removidas para melhor visualização.

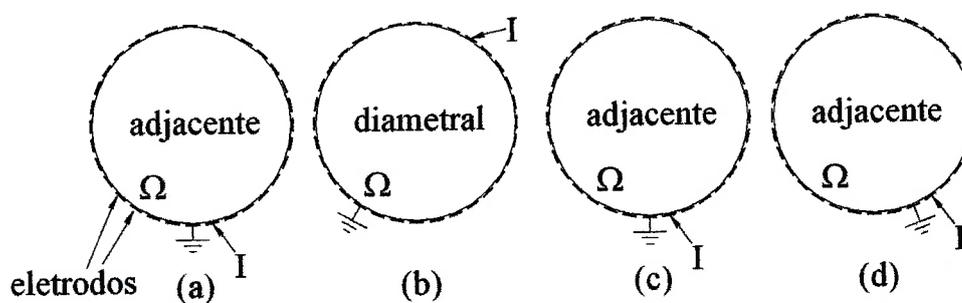


Figura 2 Os eletrodos são mostrados no contorno do domínio Ω . (a) Padrão adjacente de excitação. (b) Padrão diametral de excitação. (c) e (d) Dois casos de carregamento diferentes para um mesmo padrão de excitação.

Nessas condições, o risco de ocorrência de complicações pulmonares e até mesmo óbitos entre os pacientes é grande, sendo uma das principais causas destes problemas o trauma mecânico imposto pela própria ventilação artificial. Evidências experimentais indicam que o ajuste fino dos parâmetros ventilatórios, baseado em limites individuais de cada paciente, reduziria a quantidade de complicações e mortes.

Portanto, é de extrema importância o desenvolvimento de um sistema capaz de monitorar, eficientemente, a ventilação forçada, detectando, de maneira precisa e acurada, problemas no pulmão em nível regional e em tempo real. Através de estudos preliminares realizados na UTI-Respiratória do Hospital das Clínicas com um monitor construído pela Universidade de Sheffield (e aperfeiçoado pelo grupo do Dr. Marcelo Britto Passos Amato), percebeu-se que os princípios físicos da TIE, que já vinha sendo estudada por outras universidades no mundo (MATHERALL, 1998; CHENEY; ISAACSON; NEWELL, 1999), poderiam ser desenvolvidos e aprimorados para este fim.

A TIE se adapta excelentemente ao caso do pulmão, uma vez que uma pequena mudança na quantidade de ar presente altera drasticamente a propriedade do tecido pulmonar, denotando a otimização da relação ruído/sinal. Assim, é possível se conceber a aplicação de uma corrente de baixa intensidade, a qual não causa lesão aos tecidos e pode ser estendida por dias seguidos, numa mesma região (AMATO, 2001).

Podem-se citar outras vantagens do tomógrafo por impedância elétrica em relação aos outros tipos de tomógrafo. Exames radiológicos comuns são obtidos, em geral, quando o pulmão já entrou num processo danoso irreversível, e não apresentam sensibilidade suficiente para sua eficaz aplicação (AMATO, 2001). O tomógrafo por impedância elétrica é um aparelho menor que os tomógrafos de raios-X e de ressonância magnética e portátil, o que dá margem à sua instalação no leito de um paciente da UTI. Isto é extremamente importante, pois há risco de óbito ao se levar o paciente do leito de UTI para a sala do tomógrafo, além de possibilidade de danos irreversíveis. Além disso, é mais simples de se usar e muito mais barato do que os tomógrafos já descritos, o que o torna mais acessível aos hospitais brasileiros.

Finalmente, com o intuito de se estudar, desenvolver e aprimorar os princípios físicos citados, relacionados à TIE, e, ainda, estudar estratégias de ventilação pulmonar artificial, foi proposto o Projeto Temático FAPESP nº 01/05303-4 (AMATO, 2001), no qual este trabalho se insere. Tal projeto está sendo realizado, em conjunto, pelos professores da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (Prof. Agenor de Toledo Fleury, Prof. Emílio Carlos Nelli Silva, Prof. Marcos de Guerra Tsuzuki, Prof. Raul Gonzalez Lima) e professores do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo (Profª. Joyce Bevilacqua), sendo coordenado pelo Prof. Marcelo Britto Passos Amato do Departamento de Pneumologia da Escola de Medicina da Universidade de São Paulo. Envolvendo a construção de hardware e o desenvolvimento de software para a obtenção da imagem, o projeto não busca a produção de um protótipo pronto para o mercado, limitando-se apenas à exploração do tema e ao desenvolvimento de bases teóricas, modelos e algoritmos, que possibilitem a implementação clínica da TIE.

A obtenção da imagem, ainda no caso deste Projeto Temático, está sendo estudada utilizando-se diversos tipos de métodos originais, como o Filtro de Kalman Estendido (VAUHKONEN; KARJALAINEN; KAPIO, 1998; TRIGO, 2001; MOLINA, 2002; TRIGO; LIMA; AMATO, 2004), a Solução Geométrica (SHERBROOKE, 1993) e o Método de Otimização Topológica (MOT) (SILVA; NISHIWAKI; KIKUCHI, 2000; LIMA; LIMA; SILVA, 2004). Estas abordagens se encontram, atualmente, em estágios avançados de desenvolvimento, gerando resultados bastante encorajadores.

Os algoritmos que vêm sendo implementados pela equipe do projeto temático são, em sua maioria, bidimensionais (2-D) (TRIGO, 2001; MOLINA, 2002; LIMA; LIMA; SILVA, 2004; TRIGO; LIMA; AMATO, 2004). Assim, este trabalho de mestrado permitirá à equipe reforçar os estudos sobre algoritmos tridimensionais (3-D) de TIE.

Observa-se, na literatura científica da área médica, uma tendência na implementação de sistemas 3-D de TIE para obtenção de imagens (HYARIC; PIDCOCK, 2001; BLUE; ISAACSON; NEWELL, 2000; CHATEAUX; NADI, 2000; MOLINARI et al., 2001, etc.), que, além de, na maioria das vezes, gerarem resultados mais precisos (que os advindos de algoritmos 2-D), fornecem mais

informações para o diagnóstico. Esta maior precisão decorre do fato de que os algoritmos 2-D consideram, no modelo que emula o corpo tomografado, o fluxo de corrente, geometria, condições de contorno e correntes impostas, uniformes fora da seção do corpo considerada, ao redor da qual se encontram dispostos os eletrodos. De outra maneira, é admitido, no modelo 2-D, que o sistema formado pela distribuição de materiais, geometria, condições de contorno e correntes impostas se repete nos demais planos do corpo tomografado. Na prática, isto pode se traduzir na distorção das imagens produzidas pelo algoritmo de reconstrução (BLUE; ISAACSON; NEWELL, 2000).

A solução do problema inverso, neste trabalho, é realizada através do MOT, bastante difundido no meio acadêmico, sobretudo na área estrutural. Uma primeira incursão neste tópico foi realizada por Cícero Ribeiro de Lima em seu trabalho de Doutorado, abrangendo o estudo da obtenção de imagens 2-D de TIE pelo MOT. Segundo o método, define-se uma função objetivo, ou função custo, que expressa a diferença entre os potenciais medidos nos eletrodos do domínio tomografado e os potenciais correspondentes, calculados no decorrer da otimização, no domínio discretizado através do Método dos Elementos Finitos (MEF) (BATHE, 1996; COOK et al., 2002). É fornecido ao algoritmo uma sugestão inicial para os valores das impedâncias de cada elemento finito e o algoritmo prossegue, num processo iterativo, até que a variação do valor da função objetivo seja relativamente pequena, ou até que o valor da função seja relativamente pequeno. Como o MEF é usado, não há restrições acerca da geometria do domínio.

A impedância referente à camada mais externa da epiderme humana, pode ser um fator causador de discrepâncias entre resultados obtidos e reais, uma vez que costuma ser alta em relação à dos tecidos internos. Assim, foi incorporado um modelo (de MEF) de eletrodo, fiel à situação real, previamente implementado com êxito em casos 2-D de obtenção de imagens pela TIE (HUA et al., 1993).

1.2 Algoritmos de Reconstrução de Imagens Usados na Tomografia por Impedância Elétrica

Como mencionado, o objetivo da TIE é obter a distribuição de impedâncias elétricas do interior de um corpo mediante os potenciais elétricos medidos em pontos

específicos do contorno do mesmo ou, de outra forma, resolver o problema inverso de tomografia. A solução do problema inverso pode ser obtida de diversas formas, através de vários algoritmos encontrados na literatura. Alguns destes são citados no presente item. Os algoritmos referem-se a fenômenos 3-D de condução de corrente, com exceção dos baseados no filtro de Kalman e em “Back-Projection”, para os quais foi encontrada apenas literatura baseada em sistemas bidimensionais. Porém, não há perda de generalidade em se fazer um estudo dos algoritmos 3-D apenas, uma vez que os conceitos empregados nos bidimensionais podem ser diretamente estendidos para os tridimensionais. A diferença fica somente por conta do modelo que descreve o fenômeno do fluxo de corrente no interior do corpo tomografado e por conta da quantidade de variáveis analisadas (os algoritmos 3-D geralmente manipulam uma quantidade maior de variáveis, o que, por muito tempo, restringiu a sua implementação).

A TIE possui diversas áreas de aplicação. Na área médica, é usada na monitoração de órgãos como o pulmão e coração, do fluxo sanguíneo, na detecção do câncer de mama, dentre outros. Em outras áreas, como na geofísica, auxilia na localização de depósitos subterrâneos de minerais, e na área de testes não destrutivos, ligada à engenharia, detecta corrosão e outros tipos de imperfeições em peças e estruturas. O leitor pode se dirigir aos autores Kim et al., (2001), Molinari et al. (2001) e Lukaschewitsch, Maass e Pidcock (2003) para maiores detalhes sobre algumas das áreas de aplicação da TIE.

Como exemplo de algoritmo usado atualmente na prática da TIE, pode-se citar o algoritmo tradicional de “Back-Projection” (SANTOSA; VOGELIUS, 1990; METHERALL, 1998), baseado nas técnicas aplicadas à tomografia computadorizada por raios-X. Este deforma a imagem consideravelmente, forçando a distribuição de condutividades a se projetar sobre um círculo. Também é assumido, por hipótese, que é conhecida a disposição das linhas equipotenciais no interior do corpo tomografado e que o fenômeno do fluxo de corrente é 2-D. Como consequência, além de uma imagem pulmonar distorcida, o cálculo das variações de ventilação regional e aeração pulmonar é distorcido nas regiões anterior e posterior do pulmão, prejudicando uma aplicação clínica apropriada. Nestes trabalhos, não foi usado um modelo de eletrodo semelhante ao descrito (posteriormente) neste texto.

No caso dos algoritmos baseados no filtro de Kalman, vistos nos trabalhos de Vauhkonen, Karjalainen e Kaipio (1998), Trigo (2001), Molina (2002) e Trigo, Lima e Amato (2004), a obtenção da imagem é posta como um problema de estimação de estados, e então o filtro (usado em sistemas aproximadamente lineares), ou filtro estendido (utilizado em sistemas não-lineares), é empregado para solução do problema de obtenção de uma imagem. Apenas um caso de carregamento é usado em cada imagem e, assim, mostram-se bastante rápidos. O MEF modela a condução de corrente e define as incógnitas do problema, ou seja, as impedâncias dos elementos finitos.

Desconsiderando-se o conhecimento prévio da distribuição de potenciais usado pelo algoritmo de “Back-Projection” e admitindo-se um fenômeno 3-D, foram implementados outros algoritmos, comentados a seguir, procurando-se mostrar a sua evolução. Nos primeiros algoritmos discutidos, ainda não é citada a implementação de um modelo de eletrodo (HUA et al., 1993).

No chamado método da perturbação, desenvolvido por Kim, Webster e Tompkins (1983), uma solução de MEF é obtida para as equações diferenciais que descrevem o meio. São aplicados potenciais elétricos e medidas correntes. Num processo iterativo, a matriz, que relaciona mudanças de condutividade a diferenças entre correntes medidas e calculadas, é usada na correção de valores de incógnitas. Neste trabalho, poucas iterações foram necessárias para encontrar imagens razoáveis; porém, apenas respostas com dados numéricos de potenciais elétricos foram obtidas.

No método de dupla restrição, criado por Wexler, Fry e Neuman (1985), a cada iteração, duas soluções de MEF para potenciais são obtidas a partir de correntes aplicadas e conhecidas distribuições de material. Porém, na segunda, são aplicadas restrições de potencial elétrico provenientes das medições no contorno do corpo. Com isto, pretende-se “direcionar” a busca da distribuição correta de condutividades. Define-se, então, o erro quadrático entre os fluxos de corrente calculados nas duas soluções e, com este, um processo iterativo de atualização de condutividades dos elementos. Neste método, muitas iterações são realizadas para obtenção de imagens.

No método de camadas (“layer stripping method”), de Cheney, Isaacson e Somersalo (1992), e Cheney et al. (1991) e Cheney e Isaacson (1995), correntes ótimas (METHERALL, 1998) de diversas frequências espaciais são aplicadas ao

corpo (cilíndrico ou esférico), para que possam atingir camadas diferentes. Inicialmente, correntes de frequências mais altas, que atingem locais mais próximos da superfície, e os valores de potenciais medidos são usados e, com base nestes, calcula-se a distribuição de condutividade no contorno. Então, os potenciais medidos são “propagados” para uma camada interna e, com novas correntes, de frequências mais baixas aplicadas ao contorno, obtém-se nova distribuição de condutividades. O processo continua em direção ao centro do corpo. Foram obtidas imagens com o uso de dados reais de potenciais.

Hyaric e Pidcock (2001) desenvolveram um método “semi-analítico”, no qual o problema de solução para a distribuição de potenciais no domínio é resolvido analiticamente (para um corpo cilíndrico de condutividade constante) e o problema inverso, numericamente. É assumido um fluxo de corrente constante na superfície do eletrodo, igual à corrente aplicada dividida por sua área superficial, e zero nas demais regiões do domínio (utilizando-se o chamado “gap model”). O problema inverso, de função objetivo similar à usada neste trabalho, é resolvido pelo método de Newton-Raphson (BATHE, 1996), com apenas um passo. Foi usado o método de Levenberg-Marquardt na regularização do problema. O algoritmo está atrelado a domínios cilíndricos e apenas dados numéricos de potenciais foram usados na reconstituição.

Blue, Isaacson e Newell (2000) também utilizam o “gap model” e assumem um formato cilíndrico para o domínio, obtendo uma solução analítica para a distribuição de potenciais. O problema inverso é definido a partir da hipótese de que a variação da distribuição de condutividades, para uma distribuição uniforme, é pequena, o que leva, após se considerar o domínio como sendo composto por vários “voxels”, a um sistema de equações lineares. Este sistema é mal-condicionado e, portanto, métodos de regularização (Levenberg-Marquardt e um método baseado na decomposição espectral do sistema) são usados. O sistema é então resolvido, fornecendo uma aproximação como resposta. Resultados com potenciais elétricos provenientes de uma bancada experimental foram obtidos.

A partir do próximo trabalho, é citado o uso de um modelo de eletrodo.

Vauhkonen et al. (1999) propuseram o mesmo modelo de eletrodo usado neste trabalho (chamado pelo autor do artigo de “modelo completo de eletrodo”). O MEF também foi empregado no domínio restante e o método de Gauss-Newton (com um

passo) resolveu o problema inverso. Métodos de regularização foram aplicados para melhorar o condicionamento do problema e potenciais elétricos experimentais foram usados.

No trabalho de Molinari et al. (2001) o MEF foi utilizado na obtenção de potenciais elétricos, o método de Newton-Raphson definiu o processo iterativo e o Método dos Gradientes Conjugados resolveu o sistema de equações definido em cada iteração. Algumas restrições à função objetivo foram impostas, com o intuito de obter imagens com variação espacial suave. Os dados para reconstrução da imagem foram obtidos numericamente e o “modelo completo de eletrodo” foi utilizado.

Em trabalho recente de Vauhkonen et al. (2004), foi confrontado o método de Gauss-Newton (neste caso mais recente, com mais de um passo) com o método dos Gradientes Conjugados, concluindo que o novo método é vantajoso no caso de problemas de grande porte (o autor considera, por exemplo, um problema com 2060 incógnitas de pequeno porte). Potenciais de entrada numéricos foram utilizados.

Os algoritmos que utilizam métodos de regularização, geralmente têm a desvantagem de apresentarem parâmetros que devem ser ajustados com base no conhecimento prévio da resposta, o que pode limitar as suas aplicações.

Como se viu, existem muitos modos de se lidar com o problema definido pela TIE. Assim, procura-se, com este trabalho, introduzir o MOT como uma nova alternativa, o qual apresenta, como qualidades, o fato de ser robusto, a facilidade na implementação e na adição de restrições (tanto à distribuição de material no domínio quanto aos valores de potenciais elétricos), a possibilidade de aplicação em geometrias genéricas, etc..

1.3 Objetivos

O objetivo deste trabalho de Mestrado foi estudar a aplicação do MOT para obtenção de imagens de TIE, considerando-se um modelo 3-D para o corpo tomografado, através da implementação de um programa em linguagem C. O programa obtém valores absolutos de condutividades dos materiais presentes no interior do domínio tomografado. A reconstituição da imagem pelo “software” foi testada com dados provenientes de um modelo de elementos finitos do domínio, com distribuição de material conhecida.

O objetivo secundário foi participar de um Projeto Temático sobre TIE, que envolve várias áreas do conhecimento (como a Engenharia, Matemática e Medicina), interagindo com os profissionais destas áreas e contribuindo para o desenvolvimento de um tomógrafo por impedância elétrica para ser usado em aplicações médicas de Pneumologia, o que trará grandes benefícios às pessoas submetidas à ventilação forçada do pulmão.

Este texto está organizado da seguinte maneira. No capítulo 2, são apresentadas as equações diferenciais do meio condutivo e é descrita a formulação de MEF referente (tanto do interior do corpo tomografado quanto da interface entre este o corpo e os eletrodos) e o método de obtenção numérica dos potenciais nodais no domínio. No capítulo 3, é discutido o método de solução do problema inverso de determinação da imagem (ou seja, discute-se o MOT). Já no capítulo 4, mostra-se a forma de solução do problema de otimização definido no capítulo anterior. A implementação numérica é explicada no capítulo 5 e os resultados são mostrados no capítulo 6, juntamente com as discussões. Apresentam-se a conclusão e a continuação do trabalho nos capítulos 7 e 8, respectivamente e, no fim do texto, os anexos, as referências bibliográficas e o apêndice.

2 MODELAGEM DO MEIO CONDUTIVO

Como mencionado no capítulo introdutório deste trabalho, para implementação do MOT, é necessário que se calcule o campo de potenciais elétricos para dada distribuição de impedâncias elétricas no domínio. Além do mais, espera-se que a resposta seja fiel ao campo obtido no corpo tomografado, quer seja - o corpo - real ou virtual (numérico). Para tanto, deve-se modelar, satisfatoriamente, o fenômeno de fluxo de corrente neste corpo, levando-se em consideração os efeitos mais relevantes. A modelagem é mostrada nos itens vistos na seqüência.

2.1 Equações Constitutivas do Meio Condutivo

Primeiramente, torna-se necessária a introdução das equações diferenciais referentes ao fenômeno físico em questão.

As equações do campo elétrico são as mesmas tanto para o interior do corpo tomografado quanto para a o modelo de eletrodo, ambos formados, basicamente, por material com propriedades elétricas e magnéticas. Nestas condições, as equações de Maxwell (MATHERALL, 1998) descrevem o fluxo de corrente. Assume-se, porém, que a frequência da corrente elétrica aplicada ao meio é pequena o bastante para que efeitos dielétricos possam ser desprezados. Assim, o meio é considerado puramente condutivo e o fenômeno é considerado quasi-estático (MATHERALL, 1998). Sabendo-se, ainda, que as propriedades magnéticas dos tecidos biológicos são pouco significativas (MATHERALL, 1998), as equações diferenciais que regem os fenômenos elétricos podem ser dadas por:

$$\nabla \cdot \mathbf{I}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.1)$$

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}) = -\sigma(\mathbf{x})\nabla\phi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (2.2)$$

onde \mathbf{I} é o vetor fluxo de corrente, σ é a condutividade elétrica, ϕ é o potencial elétrico, Ω é o domínio, $\partial\Omega$ é a sua fronteira e ∇ é o vetor gradiente. As condições de contorno são:

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})_{imposta}, \mathbf{x} \in \partial\Omega_{\phi} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{I}_n(\mathbf{x}) = \sigma_n(\mathbf{x}) \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{n}}, \mathbf{x} \in \partial\Omega_I \quad (2.4)$$

onde a primeira condição é a de Dirichlet e a segunda é a condição de Neumann. I_n é o fluxo de corrente na direção normal ao contorno do corpo, \mathbf{n} é um vetor normal a este contorno, apontando para fora, σ_n é a condutividade elétrica na direção de \mathbf{n} e $\partial\Omega_\phi$ e $\partial\Omega_I$ são os locais da fronteira onde se aplicam as condições de contorno de potencial e fluxo, respectivamente.

Considerando-se a lei de conservação de cargas e a escolha de um ponto de referência para o potencial, assegura-se a existência e a unicidade da solução para o campo de potenciais elétricos no domínio (MOLINARI et al., 2001; VAUHKONEN et al., 1999).

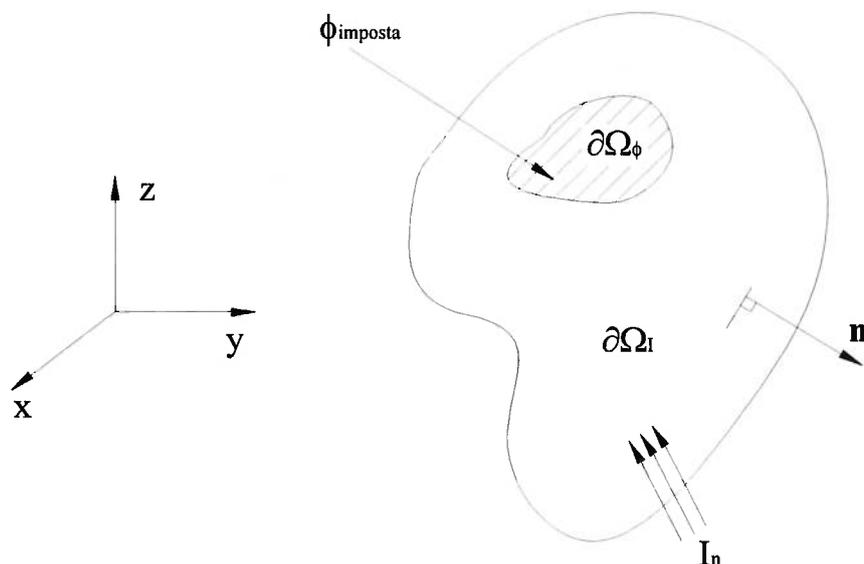


Figura 3 Esquema de domínio tridimensional condutivo.

O cálculo da distribuição de potenciais elétricos no domínio é um objetivo que nem sempre pode ser alcançado analiticamente. Colocando o problema na forma integral a partir, por exemplo, do Cálculo Variacional ou do Princípio dos Potenciais Virtuais (BATHE, 1996), pode-se então introduzir o MEF. Desta forma, torna-se possível efetuar o cálculo.

2.2 Método dos Elementos Finitos

Segundo Bathe (1996) e COOK et al. (2002), o MEF consiste num método aproximado de solução de equações diferenciais ou de expressões na forma integral. Considera-se conhecida a resposta em pequenas porções do domínio (elementos

finitos) e dependente de valores tomados em pontos específicos das porções (nós). Assim, o problema é substituído pelo da solução de um sistema de equações, sendo as novas incógnitas os valores nodais.

É usado nas mais variadas aplicações: na obtenção da distribuição de temperaturas num pistão de automóvel, na determinação das tensões em elementos estruturais, na análise do fluxo de corrente numa microgarra atuada eletrotermicamente, etc..

O termo finitos serve para distinguir tais elementos dos elementos infinitesimais, usados no Cálculo para determinação das equações diferenciais. A resposta no interior dos elementos é conhecida, como já mencionado, e é dada por funções simples, normalmente polinomiais. Na mesma região ocupada por um elemento, a solução da equação diferencial, uma função que varia no espaço, pode apresentar variações bem diferentes de perfis polinomiais. Assim, nota-se que o MEF gera aproximações, as quais estarão tão mais próximas da solução da equação diferencial quanto mais discretizada for a malha, ou seja, quanto menores forem os elementos finitos.

A função polinomial, dependendo de seu grau, necessita de mais ou menos coeficientes para sua definição. Tais coeficientes são dados pelos valores da função em pontos pertencentes a um domínio (domínio onde se define a função). Estes pontos, na formulação de MEF, são denominados nós, os quais conectam os elementos finitos entre si, formando a citada malha de MEF.

Nota-se que as incógnitas não são mais funções contínuas num certo domínio, mas valores nodais discretos. Assim, a formulação de MEF transforma o problema num sistema de equações algébricas comum, o qual será resolvido por métodos aplicados para tal caso. Pode-se também depreender que o MEF apresenta duas características interessantes: a possibilidade de adequação às mais variadas geometrias e de refinamento de malha em locais específicos, onde variações da incógnita sejam elevadas. A primeira vantagem será explorada neste trabalho e, eventualmente, a segunda.

Deve-se salientar que o MEF resolve equações diferenciais de forma aproximada, e que estas descrevem, também de forma aproximada, situações reais, para as quais são impostas algumas hipóteses simplificadoras. Na teoria de vigas, por

exemplo, na obtenção de um modelo matemático para descrição de seu comportamento dinâmico, pode-se, em determinadas situações, desprezar a inércia à rotação, mesmo sabendo-se de sua existência. Conseqüentemente, tal efeito não estará presente na resposta de finitos e, mesmo assim, este fato não poderá ser considerado como um erro. Então, a escolha de um modelo matemático adequado é algo muito importante quando a teoria de MEF é considerada.

2.2.1 Método dos Elementos Finitos Aplicado a Meios Condutivos

Como mencionado, deseja-se calcular a distribuição de potenciais no meio tomografado.

Através da eq. (2.1), aliada às condições de contorno do problema (eqs. (2.3) e (2.4)), pode-se obter (como mostrado no Anexo A), com auxílio do chamado Princípio dos Potenciais Virtuais (BATHE, 1996), a expressão:

$$\int_V \{\bar{\phi}'\}^T [\sigma] \{\phi'\} dV = \int_{\partial\Omega_I} \bar{\phi}_S I_n dS \quad (2.5)$$

para a qual V é o volume do domínio, $\bar{\phi}$ é a distribuição virtual de potenciais e, $\bar{\phi}_S$ é a distribuição virtual de potenciais em $\partial\Omega_I$. A distribuição virtual é, por hipótese, arbitrária e nula sobre $\partial\Omega_\phi$. Ainda:

$$\{\phi'\}^T = \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} \right\} \quad (2.6)$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

onde σ_x , σ_y e σ_z são as condutividades nas direções dos eixos x , y e z , eixos estes em que se define a expressão (2.5). Assumiu-se, neste trabalho, que as propriedades não dependem das direções (o meio é isotrópico) e, portanto, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$.

Divide-se, neste ponto, o domínio em elementos finitos. A eq. (2.5) torna-se:

$$\sum_m \int_{V_m} \{\bar{\phi}'_m\}^T [\sigma_m] \{\phi'_m\} dV_m = \sum_m \int_{\partial\Omega_{Im}} \bar{\phi}_{Sm} I_{nm} dS_m \quad (2.8)$$

onde m se refere a cada elemento. Assim, cada termo é considerado apenas num elemento finito, e as integrais são somadas para todo o domínio discretizado.

Como já explicitado, assume-se conhecido o campo escalar de potenciais elétricos dentro de cada elemento, função da posição no elemento e dos valores nodais do campo, sendo dado por:

$$\phi_m = [N_m] \{\Phi_m\} \quad (2.9)$$

onde $\{\Phi_m\}$ é o vetor de potenciais nodais do m-ésimo elemento e $[N_m]$ é a matriz de funções de forma, dada em coordenadas locais do elemento (BATHE, 1996; COOK et al., 2002). A matriz será mostrada adiante no texto, quando houver a particularização para um determinado tipo de elemento.

As coordenadas locais são introduzidas apenas para que as integrais mostradas na eq. (2.8), definidas nas coordenadas x, y e z , sejam calculadas eficientemente. Portanto, uma mudança de variáveis de (x,y,z) para (r,s,t) torna-se necessária, mudança esta realizada com auxílio do operador Jacobiano (BATHE, 1996):

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

A eq. (2.8) fica:

$$\sum_m \int_{V'_m} \{\bar{\phi}'_m\}^T [\sigma_m] \{\phi'_m\} \det[J_m] dV'_m = \sum_m \int_{\partial\Omega'_{1m}} \bar{\phi}_{sm} I_{nm} \det[J_{nm}] dS'_m \quad (2.11)$$

onde $[J_{nm}]$ é o Jacobiano na superfície $\partial\Omega'_{1m}$, dS'_m é um elemento infinitesimal de área e dV'_m é um elemento infinitesimal de volume, ambos definidos nas coordenadas locais do elemento. V'_m e $\partial\Omega'_{1m}$ são também definidos em coordenadas locais.

Pode-se também notar que:

$$\{\phi'_m\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J_m]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_m}{\partial r} \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial s} \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \end{Bmatrix} = [B_m] \{\Phi_m\} \quad (2.12)$$

A matriz $[B_m]$ possui as derivadas espaciais dos coeficientes de $[N_m]$, como será visto adiante no texto.

Foram escolhidos, para este trabalho, elementos finitos isoparamétricos (BATHE, 1996; COOK et al., 2002). Neste caso, as coordenadas de um ponto genérico do elemento são interpoladas da mesma forma que o potencial (BATHE, 1996; COOK et al., 2002):

$$x_m = [N_m] \{X_m\} \quad (2.13)$$

$$y_m = [N_m] \{Y_m\} \quad (2.14)$$

$$z_m = [N_m] \{Z_m\} \quad (2.15)$$

onde $\{X_m\}$, $\{Y_m\}$ e $\{Z_m\}$ são, à semelhança de $\{\Phi_m\}$, vetores de coordenadas nodais. Desta forma, o Jacobiano (e seu determinante) pode, facilmente, ser encontrado.

Tendo-se, em vista, que as funções de forma se aplicam tanto aos potenciais $\bar{\phi}$, arbitrários (vide Anexo A), quanto aos potenciais ϕ , escreve-se a eq. (2.11) como:

$$\begin{aligned} \sum_m \{\bar{\Phi}_m\}^T \int_{V'_m} [B_m]^T [\sigma_m] [B_m] \det[J_m] dV'_m \{\Phi_m\} \\ = \sum_m \{\bar{\Phi}_m\}^T \int_{\partial\Omega'_{Im}} [N_{Sm}]^T I_{nm} \det[J_{nm}] dS'_m \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde $[N_{Sm}]$ é a matriz $[N_m]$, tomada em $\partial\Omega_{Im}$. Na eq. (2.16):

$$[K_m] = \int_{V'_m} [B_m]^T [\sigma_m] [B_m] \det[J_m] dV'_m \quad (2.17)$$

é a matriz de condutividade do elemento finito. Ainda:

$$\{I_m\} = \int_{\partial\Omega'_{Im}} [N_{Sm}]^T I_{nm} \det[J_{nm}] dS'_m \quad (2.18)$$

é o vetor de carregamentos nodais devido ao fluxo normal de corrente I_n . É possível mostrar que, na eq. (2.17), deve-se integrar cada elemento da matriz resultante da multiplicação $[B_m]^T [B_m] \sigma_m \det[J_m]$, sendo que o termo unidimensional $\sigma_m \det[J_m]$ multiplica cada elemento de $[B_m]^T [B_m]$ e sendo σ_m a condutividade do elemento finito. Também é possível mostrar que, na eq. (2.18), deve-se integrar cada elemento da matriz resultante da multiplicação $[N_{Sm}]^T I_{nm} \det[J_{nm}]$, sendo que o termo unidimensional $I_{nm} \det[J_{nm}]$ multiplica cada elemento de $[N_{Sm}]^T$ (a substituição da multiplicação da matriz $[\sigma_m]$ pelo termo unidimensional σ_m só foi possível pois o material, por hipótese, é isotrópico).

Nota-se que as novas incógnitas do problema são os potenciais nodais dos elementos finitos.

De posse das matrizes $[K_m]$ e dos vetores de carregamento $\{I_m\}$, montam-se, com base nas conectividades de cada elemento, a matriz global $[K]$ e o vetor de correntes nodais global $\{I\}$ do sistema, respectivamente. A conectividade de um elemento apresenta os nós aos quais está ligado este elemento (BATHE, 1996; COOK et al., 2002). Define-se, então, após a montagem, o problema de obtenção dos potenciais nodais:

$$[K]\{\Phi\} = \{I\} \quad (2.19)$$

sendo $\{\Phi\}$ o vetor de potenciais nodais. Com a imposição de nós com potenciais nulos, pode-se então encontrar $\{\Phi\}$. O algoritmo utiliza uma extensão do Método dos Gradientes Conjugados (PRESS et al., 1999) na solução do problema (2.19), como será visto adiante.

Neste trabalho, foram utilizados, inicialmente, elementos finitos hexaédricos, numa primeira fase de implementação. As matrizes $[K_m]$ destes elementos são obtidas, via de regra, por métodos de integração numérica, sendo que, neste trabalho, utilizou-se a Quadratura de Gauss-Legendre (BATHE, 1996). Porém, com o intuito de reduzir os erros numéricos advindos dos arredondamentos realizados nos cálculos referentes à Quadratura de Gauss-Legendre, introduziram-se elementos finitos tetraédricos, cuja integral para determinação de $[K_m]$ foi obtida analiticamente. Estes elementos ainda dispõem da vantagem de se adequarem melhor a geometrias arbitrárias. Além disto, é um elemento extremamente eficaz no que se refere ao tempo de processamento, uma vez que o método de Gauss de integração numérica necessita de uma série de cálculos para as diversas combinações de pontos de amostragem (BATHE, 1996) ou “pontos de integração”.

A obtenção de $\{I_m\}$ será tratada no capítulo sobre o modelo de eletrodo.

2.2.1.1 Elementos Hexaédricos

Um elemento hexaédrico pode ser visto na Figura 4.

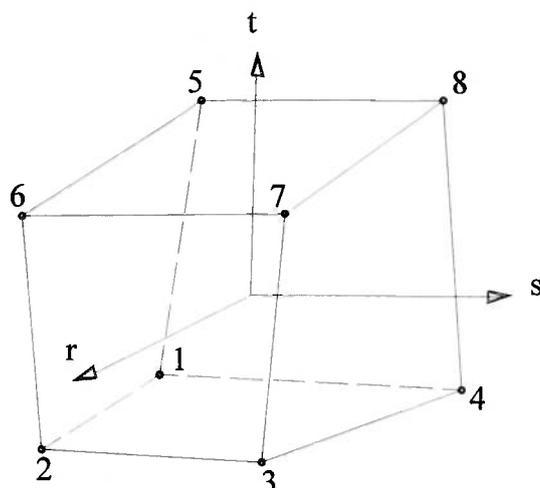


Figura 4 Elemento finito hexaédrico e suas coordenadas locais. As coordenadas variam de -1 a 1 .

O vetor de potenciais nodais do m -ésimo elemento, $\{\Phi_m\}$, é dado por:

$$\{\Phi_m\} = \{\Phi_1 \ \Phi_2 \ \Phi_3 \ \Phi_4 \ \Phi_5 \ \Phi_6 \ \Phi_7 \ \Phi_8\} \quad (2.20)$$

e a matriz de funções de forma, $[N_m]$, dada em coordenadas locais do elemento (BATHE, 1996; COOK et al., 2002), é igual a:

$$[N_m] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8] \quad (2.21)$$

visto que o elemento tem 8 nós. Neste caso, cada elemento de $[N_m]$ é igual a:

$$N_1 = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t) \quad (2.22)$$

$$N_2 = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t) \quad (2.23)$$

$$N_3 = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t) \quad (2.24)$$

$$N_4 = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t) \quad (2.25)$$

$$N_5 = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t) \quad (2.26)$$

$$N_6 = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t) \quad (2.27)$$

$$N_7 = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t) \quad (2.28)$$

$$N_8 = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t) \quad (2.29)$$

Estes elementos da matriz $[N_m]$ são funções de r , s e t , que variam de -1 a 1 , e, portanto, são construídos de tal forma que N_i é unitária no i -ésimo nó e nula nos demais. Assim, dada a eq. (2.20), o potencial elétrico no nó 1 de um elemento, de coordenadas locais $(-1,-1,-1)$, segundo a Figura 4, será Φ_1 .

Com base nas eqs. (2.12), (2.20) e (2.21), obtém-se:

$$[B_m] = [J_m]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial r} & \frac{\partial N_5}{\partial r} & \frac{\partial N_6}{\partial r} & \frac{\partial N_7}{\partial r} & \frac{\partial N_8}{\partial r} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} & \frac{\partial N_4}{\partial s} & \frac{\partial N_5}{\partial s} & \frac{\partial N_6}{\partial s} & \frac{\partial N_7}{\partial s} & \frac{\partial N_8}{\partial s} \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} & \frac{\partial N_2}{\partial t} & \frac{\partial N_3}{\partial t} & \frac{\partial N_4}{\partial t} & \frac{\partial N_5}{\partial t} & \frac{\partial N_6}{\partial t} & \frac{\partial N_7}{\partial t} & \frac{\partial N_8}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

De posse da matriz $[B_m]$, das propriedades do material do elemento e do determinante do Jacobiano, segundo a eq. (2.17), determina-se, $[K_m]$. A equação utilizada, particularizada para o elemento hexaédrico, assume a forma:

$$[K_m] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_m]^T [B_m] \sigma_m \det[J_m] dr ds dt \quad (2.31)$$

2.2.1.2 Elementos Tetraédricos

Um elemento tetraédrico pode ser visto na Figura 5.

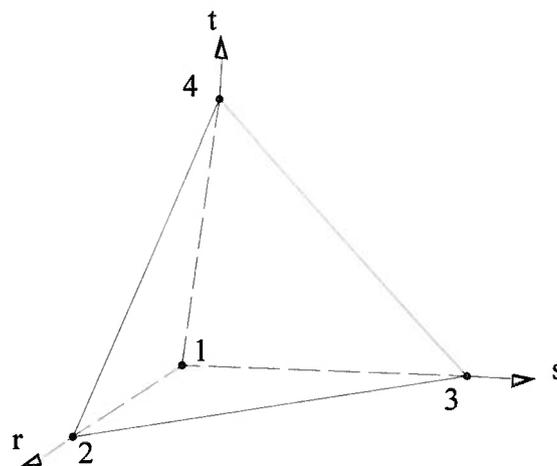


Figura 5 Elemento finito tetraédrico e suas coordenadas locais. As coordenadas variam de 0 a 1.

O vetor de potenciais nodais do m-ésimo elemento, $\{\Phi_m\}$, é dado por:

$$\{\Phi_m\} = \{\Phi_1 \ \Phi_2 \ \Phi_3 \ \Phi_4\} \quad (2.32)$$

e a matriz de funções de forma $[N_m]$, dada em coordenadas locais do elemento (BATHE, 1996; COOK et al., 2002), é igual a:

$$[N_m] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \quad (2.33)$$

visto que o elemento tem, nesta situação, apenas 4 nós. Ainda:

$$N_1 = 1 - r - s - t \quad (2.34)$$

$$N_2 = r \quad (2.35)$$

$$N_3 = s \quad (2.36)$$

$$N_4 = t \quad (2.37)$$

Tais elementos da matriz $[N_m]$ são funções de r , s e t , que variam de 0 a 1.

Com base nas eqs. (2.12), (2.32) e (2.33), obtém-se:

$$[B_m] = [J_m]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial r} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} & \frac{\partial N_4}{\partial s} \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} & \frac{\partial N_2}{\partial t} & \frac{\partial N_3}{\partial t} & \frac{\partial N_4}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

De posse da matriz $[B_m]$, das propriedades do material do elemento e do determinante do Jacobiano, segundo a eq. (2.17), determina-se, $[K_m]$. A equação utilizada, particularizada para o elemento tetraédrico, assume a forma:

$$[K_m] = \int_0^1 \int_0^{(1-r)} \int_0^{(1-r-s)} [B_m]^T [B_m] \sigma_m \det[J_m] dt ds dr \quad (2.39)$$

Deve-se notar que os limites de integração dependem das variáveis de integração e, portanto, a integral deve ser calculada na ordem mostrada. Ainda, é interessante perceber que a matriz $[B_m]$ e $[J_m]$ (e, conseqüentemente, seu determinante) são constantes em r , s e t , ou seja, no elemento finito. Portanto, $[K_m]$ pode ser simplificada para:

$$[K_m] = [B_m]^T [B_m] \left(\int_0^1 \int_0^{(1-r)} \int_0^{(1-r-s)} \sigma_m dt ds dr \right) \det[J_m] \quad (2.40)$$

O termo σ_m não foi retirado da integral por motivos que serão tratados no capítulo sobre o MOT. Pode-se adiantar, contudo, que o termo, no caso deste trabalho, será dependente das coordenadas locais. O cálculo da integral será visto no Anexo B.

2.2.2 Modelo de Eletrodo

A partir da modelagem do fluxo de corrente no interior do corpo tomografado por intermédio das equações de Maxwell simplificadas e pelo MEF, desconsideram-se, como mencionado, alguns efeitos de segunda ordem, como a dependência da propriedade do material em relação à permissividade do meio (desde que seja restringido o intervalo de frequências utilizado), por exemplo. Porém, para que os potenciais elétricos calculados através do modelo de MEF possam reproduzir, de maneira satisfatória, os potenciais medidos no corpo, deve ser empregado o chamado modelo de eletrodo (HUA et al., 1993; VAUHKONEN et al., 1999; MOLINARI et al., 2001), o qual leva em consideração grande parte dos efeitos existentes na situação real simulada - como o fato do potencial elétrico no interior do eletrodo ser aproximadamente constante, o fato de que a queda de potencial na camada externa da epiderme é relativamente grande e o fato da resistência à passagem de corrente pelas bordas do eletrodo ser maior que a das demais partes - rendendo imagens mais fiéis à situação real de distribuição de propriedades no domínio. Neste trabalho, foi estendido o modelo 2-D proposto por Hua et al. (1993) para o caso 3-D, através da modificação das eqs. (2.17) e (2.18) e da adoção de algumas hipóteses. Tal modelo representa não somente o eletrodo, mas também a camada mais externa da epiderme humana, composta de material morto, com elevado valor da impedância e reduzida espessura.

Formado por apenas quatro elementos finitos hexaédricos, é formulado a partir de sete hipóteses principais: possui uma geometria em forma de paralelepípedo, de seção transversal em quadrado; o fluxo de corrente, aplicado ao eletrodo, é constante; a variação do potencial, dentro da camada externa da epiderme, é praticamente linear; $t_{el} \ll a$, sendo t_{el} e a definidos na Figura 6; o potencial é constante no eletrodo; os efeitos de borda interna (definida na Figura 2) são desprezíveis; toda a superfície do eletrodo permanece em contato com a superfície do corpo tomografado, ou seja, o contato é perfeito.

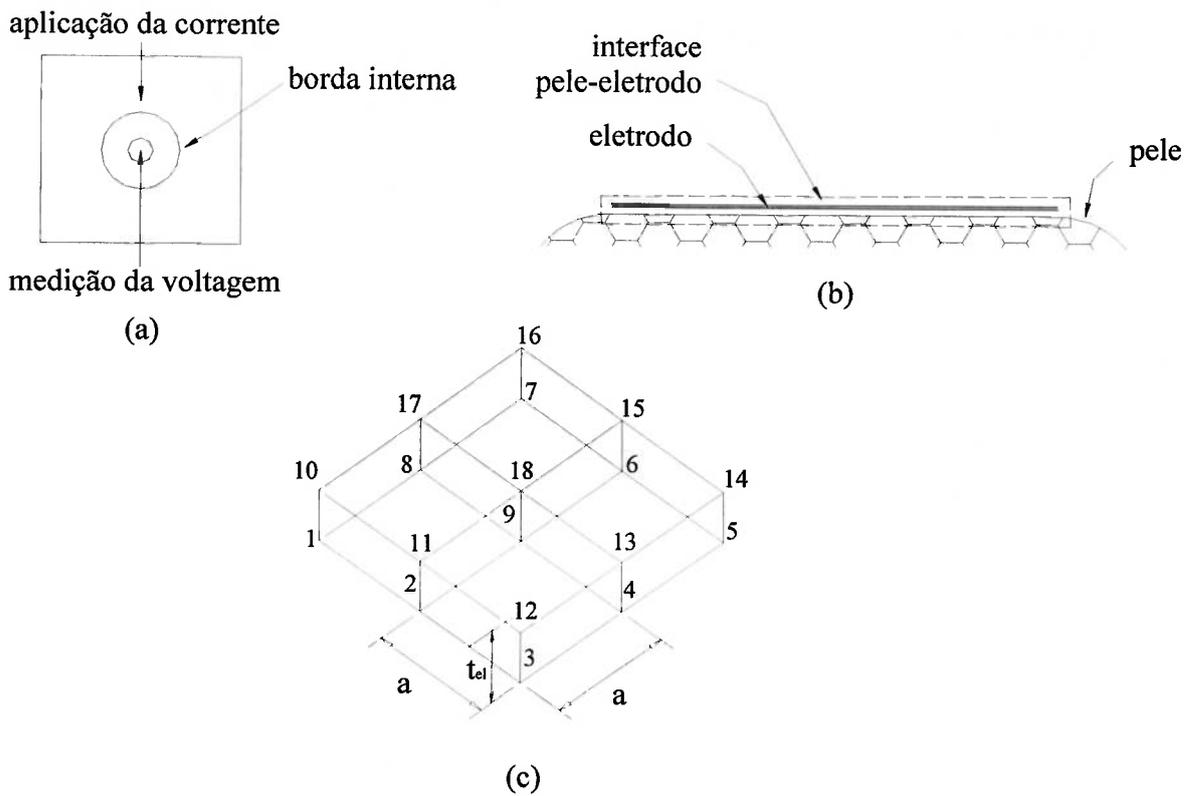


Figura 6 (a) Esquema do eletrodo. (b) O modelo de eletrodo inclui parte da pele e o próprio eletrodo. (c) Modelo de MEF com dimensões.

A aplicação da formulação de MEF ao meio condutivo (neste caso, a camada externa da epiderme) rende quatro matrizes, referentes aos quatro elementos finitos mostrados na Figura 6 (c). Não há necessidade de uso do sistema de coordenadas local (r,s,t) para facilitar as integrações em (2.17) e (2.18) (como no caso anterior, onde os elementos não apresentam, necessariamente, ângulos retos entre suas arestas) dado que os elementos utilizados no modelo são regulares (as arestas formam ângulos retos umas com as outras). É interessante apenas que se defina um sistema de coordenadas local (x',y',z') , no centro do elemento finito. Neste caso, a matriz de funções de forma $[N_m]$ é dada por $[N_e]$ e modificada para:

$$N_{1e} = \frac{1}{a^2 t_{el}} \left(\frac{1}{2} a - x' \right) \left(\frac{1}{2} a - y' \right) \left(\frac{1}{2} t_{el} - z' \right) \quad (2.41)$$

$$N_{2e} = \frac{1}{a^2 t_{el}} \left(\frac{1}{2} a + x' \right) \left(\frac{1}{2} a - y' \right) \left(\frac{1}{2} t_{el} - z' \right) \quad (2.42)$$

$$N_{3e} = \frac{1}{a^2 t_{el}} \left(\frac{1}{2} a + x' \right) \left(\frac{1}{2} a + y' \right) \left(\frac{1}{2} t_{el} - z' \right) \quad (2.43)$$

$$N_{4e} = \frac{1}{a^2 t_{el}} \left(\frac{1}{2} a - x' \right) \left(\frac{1}{2} a + y' \right) \left(\frac{1}{2} t_{el} - z' \right) \quad (2.44)$$

$$N_{5e} = \frac{1}{a^2 t_{el}} \left(\frac{1}{2} a - x' \right) \left(\frac{1}{2} a - y' \right) \left(\frac{1}{2} t_{el} + z' \right) \quad (2.45)$$

$$N_{6e} = \frac{1}{a^2 t_{el}} \left(\frac{1}{2} a + x' \right) \left(\frac{1}{2} a - y' \right) \left(\frac{1}{2} t_{el} + z' \right) \quad (2.46)$$

$$N_{7e} = \frac{1}{a^2 t_{el}} \left(\frac{1}{2} a + x' \right) \left(\frac{1}{2} a + y' \right) \left(\frac{1}{2} t_{el} + z' \right) \quad (2.47)$$

$$N_{8e} = \frac{1}{a^2 t_{el}} \left(\frac{1}{2} a - x' \right) \left(\frac{1}{2} a + y' \right) \left(\frac{1}{2} t_{el} + z' \right) \quad (2.48)$$

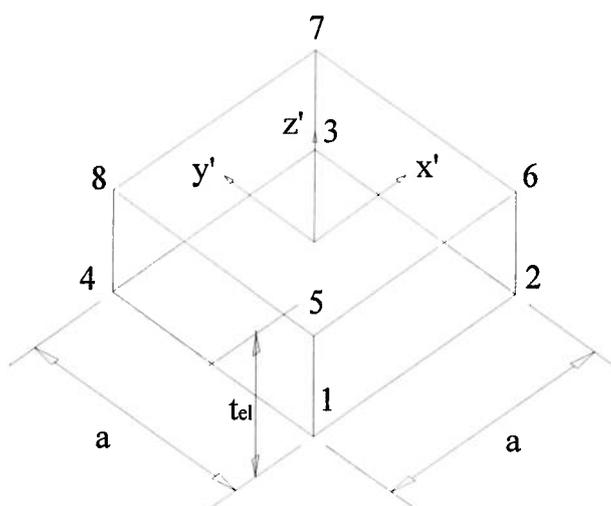


Figura 7 Elemento usado no modelo de eletrodo. É mostrado o sistema de coordenadas local usado.

Com estas, é possível que se construa uma nova matriz $[B_m]$ (eq. (2.30)), mas para as coordenadas (x', y', z') , que tem a forma:

$$[B_e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{1e}}{\partial x'} & \frac{\partial N_{2e}}{\partial x'} & \frac{\partial N_{3e}}{\partial x'} & \frac{\partial N_{4e}}{\partial x'} & \frac{\partial N_{5e}}{\partial x'} & \frac{\partial N_{6e}}{\partial x'} & \frac{\partial N_{7e}}{\partial x'} & \frac{\partial N_{8e}}{\partial x'} \\ \frac{\partial N_{1e}}{\partial y'} & \frac{\partial N_{2e}}{\partial y'} & \frac{\partial N_{3e}}{\partial y'} & \frac{\partial N_{4e}}{\partial y'} & \frac{\partial N_{5e}}{\partial y'} & \frac{\partial N_{6e}}{\partial y'} & \frac{\partial N_{7e}}{\partial y'} & \frac{\partial N_{8e}}{\partial y'} \\ \frac{\partial N_{1e}}{\partial z'} & \frac{\partial N_{2e}}{\partial z'} & \frac{\partial N_{3e}}{\partial z'} & \frac{\partial N_{4e}}{\partial z'} & \frac{\partial N_{5e}}{\partial z'} & \frac{\partial N_{6e}}{\partial z'} & \frac{\partial N_{7e}}{\partial z'} & \frac{\partial N_{8e}}{\partial z'} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

e $\{\phi'_m\}$ (eq. (3.17)), então, assume o formato:

$$\{\phi'_e\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_e}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_e}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_e}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{1e}}{\partial x'} & \frac{\partial N_{2e}}{\partial x'} & \frac{\partial N_{3e}}{\partial x'} & \frac{\partial N_{4e}}{\partial x'} & \frac{\partial N_{5e}}{\partial x'} & \frac{\partial N_{6e}}{\partial x'} & \frac{\partial N_{7e}}{\partial x'} & \frac{\partial N_{8e}}{\partial x'} \\ \frac{\partial N_{1e}}{\partial y'} & \frac{\partial N_{2e}}{\partial y'} & \frac{\partial N_{3e}}{\partial y'} & \frac{\partial N_{4e}}{\partial y'} & \frac{\partial N_{5e}}{\partial y'} & \frac{\partial N_{6e}}{\partial y'} & \frac{\partial N_{7e}}{\partial y'} & \frac{\partial N_{8e}}{\partial y'} \\ \frac{\partial N_{1e}}{\partial z'} & \frac{\partial N_{2e}}{\partial z'} & \frac{\partial N_{3e}}{\partial z'} & \frac{\partial N_{4e}}{\partial z'} & \frac{\partial N_{5e}}{\partial z'} & \frac{\partial N_{6e}}{\partial z'} & \frac{\partial N_{7e}}{\partial z'} & \frac{\partial N_{8e}}{\partial z'} \end{bmatrix} \{\Phi_e\} \quad (2.50)$$

$$= [B_e] \{\Phi_e\}$$

Por fim, $[K_m]$, aqui chamada de $[K_e]$, será dada por:

$$[K_e] = \int_{V_e} [B_e]^T [\sigma_e] [B_e] dx' dy' dz' \quad (2.51)$$

$[\sigma_e]$ é a matriz de propriedades do elemento do modelo de eletrodo. Integrando-se de $-a/2$ a $a/2$ em x' e y' , e de $-t_{el}/2$ a $t_{el}/2$ em z' , ou seja, dentro dos limites geométricos do elemento (conforme é visto na Figura 7) e assumindo-se que a condutividade é constante no interior do elemento e, como já mencionado, igual em todas as direções ($\sigma_{x'} = \sigma_{y'} = \sigma_{z'} = \sigma_{el}$), obtém-se a seguinte matriz, numerada de acordo com a Figura 7:

$$[K_e] = \frac{\sigma_{el}}{9t_{el}} \begin{bmatrix} 2t_{el}^2 + a^2 & -\frac{1}{2}t_{el}^2 + \frac{1}{2}a^2 & -\frac{1}{4}t_{el}^2 + \frac{1}{4}a^2 & \frac{1}{2}t_{el}^2 + \frac{1}{2}a^2 & t_{el}^2 - a^2 & -\frac{1}{4}t_{el}^2 + \frac{1}{4}a^2 & \frac{1}{2}t_{el}^2 + \frac{1}{2}a^2 & -\frac{1}{4}t_{el}^2 + \frac{1}{4}a^2 \\ & 2t_{el}^2 + a^2 & -\frac{1}{2}t_{el}^2 + \frac{1}{2}a^2 & -\frac{1}{4}t_{el}^2 + \frac{1}{4}a^2 & \frac{1}{4}t_{el}^2 - \frac{1}{4}a^2 & t_{el}^2 - a^2 & -\frac{1}{4}t_{el}^2 + \frac{1}{4}a^2 & \frac{1}{2}t_{el}^2 + \frac{1}{2}a^2 \\ & & 2t_{el}^2 + a^2 & -\frac{1}{2}t_{el}^2 + \frac{1}{2}a^2 & \frac{1}{2}t_{el}^2 + \frac{1}{2}a^2 & -\frac{1}{4}t_{el}^2 + \frac{1}{4}a^2 & t_{el}^2 - a^2 & -\frac{1}{4}t_{el}^2 + \frac{1}{4}a^2 \\ & & & 2t_{el}^2 + a^2 & -\frac{1}{4}t_{el}^2 + \frac{1}{4}a^2 & \frac{1}{2}t_{el}^2 + \frac{1}{2}a^2 & -\frac{1}{4}t_{el}^2 + \frac{1}{4}a^2 & t_{el}^2 - a^2 \\ & & & & 2t_{el}^2 + a^2 & -\frac{1}{2}t_{el}^2 + \frac{1}{2}a^2 & -\frac{1}{4}t_{el}^2 + \frac{1}{4}a^2 & -\frac{1}{2}t_{el}^2 + \frac{1}{2}a^2 \\ & S & I & M & & 2t_{el}^2 + a^2 & -\frac{1}{2}t_{el}^2 + \frac{1}{2}a^2 & -\frac{1}{4}t_{el}^2 + \frac{1}{4}a^2 \\ & & & & & & 2t_{el}^2 + a^2 & -\frac{1}{2}t_{el}^2 + \frac{1}{2}a^2 \\ & & & & & & & 2t_{el}^2 + a^2 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

onde σ_{el} é a condutividade do modelo, igual à condutividade de cada elemento.

O vetor de carregamentos (correntes) do elemento é dado por:

$$\{I_e\} = \int_{\partial\Omega_{1e}} [N_{se}]^T I_{ne} dx' dy' \quad (2.53)$$

$[N_{se}]$ é a matriz $[N_e]$, tomada em $\partial\Omega_{1e}$ (ou seja, para z igual a $t_{el}/2$). No caso do modelo de eletrodo usado neste trabalho, o eletrodo será representado pelas faces superiores ($\partial\Omega_{1e}$) dos quatro elementos. Considerando-se que o fluxo de corrente

aplicado ao eletrodo I_{ne} é uniformemente distribuído em sua superfície e integrando-se de $-a/2$ a $a/2$ em x' e y' , obtém-se:

$$\{I_e\}^T = \left\{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{4} I_{ne} a^2 \ \frac{1}{4} I_{ne} a^2 \ \frac{1}{4} I_{ne} a^2 \ \frac{1}{4} I_{ne} a^2 \right\} \quad (2.54)$$

em sua forma transposta.

As quatro matrizes $[K_e]$ e os quatro vetores $\{I_e\}$ calculados são acoplados, na montagem da chamada matriz do modelo de eletrodo e do chamado vetor de correntes nodais do eletrodo, da mesma forma que é feito com a matriz global $[K]$ e com o vetor de correntes nodais global $\{I\}$, respectivamente, ou seja, com base nas conectividades de cada elemento. A matriz e o vetor resultantes têm, respectivamente, 18×18 e 18×1 coeficientes.

Assume-se, então, que os nós 10 a 18 (vide Figura 6) pertencem ao eletrodo e, como (por hipótese) a distribuição de potenciais em seu interior é uniforme, apenas um nó é usado para representação de seu comportamento. Assim, a matriz final terá apenas 10 linhas e 10 colunas, e não as 18 iniciais. Esta condensação dos nós 10 a 18 num único faz com que a corrente, a qual é aplicada ao domínio por intermédio dos eletrodos, seja imposta através do mesmo nó (representativo do eletrodo), proveniente da condensação. Esta simplificação é vista na Figura 8.

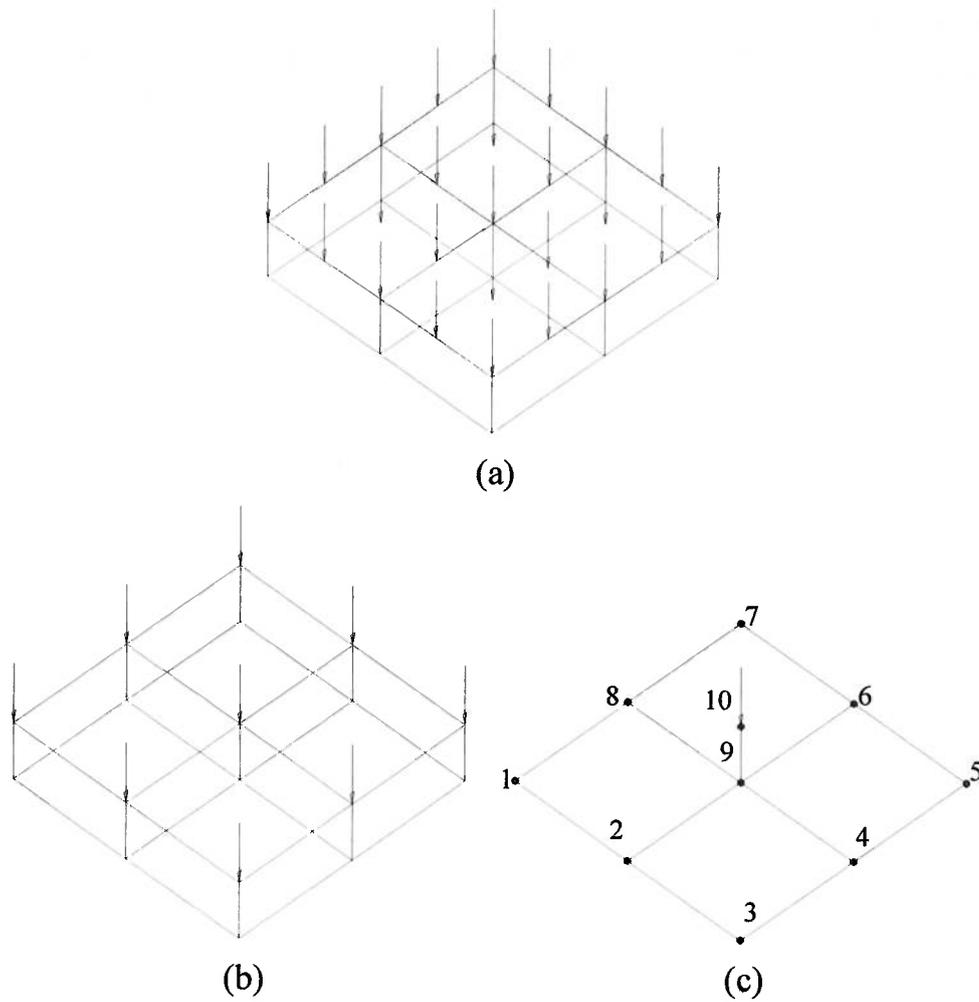


Figura 8 (a) Fluxo de corrente constante aplicado ao modelo de MEF. (b) Corrente equivalente em cada nó. (c) Condensação dos nós 10 a 18 num único nó, o 10, e aplicação da soma das correntes nodais ao nó.

Com a hipótese de que $t_{el} \ll a$, termos dependentes do quadrado de t_{el} são descartados, e a matriz final, $[K_{el}]$, matriz do modelo de eletrodo simplificada, assume a forma:

$$[K_{el}] = \frac{a^2 \sigma_{el}}{t_{el}} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{4} \\ & \frac{2}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{2} \\ & & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36} & -\frac{1}{4} \\ & & & \frac{2}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & 0 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{2} \\ & & & & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & 0 & 0 & \frac{1}{36} & -\frac{1}{4} \\ & & & & & \frac{2}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{2} \\ & & & & & & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{4} \\ & & & & & & & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{2} \\ & & & & & & & & \frac{4}{9} & -1 \\ & & & & & & & & & 4 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

O carregamento, $\{I_{el}\}$, vetor simplificado de correntes nodais do modelo de eletrodo, é dado por:

$$\{I_{el}\}^T = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4a^2 I_n\} \quad (2.56)$$

em sua forma transposta. Os primeiros nove nós pertencem também ao contorno do domínio Ω , ou seja, a $\partial\Omega$, e são os mesmos mostrados Figura 7 e Figura 8. O décimo nó é resultado da condensação dos nós 10 a 18, e é visto na Figura 8.

Se, por outro lado, o eletrodo for usado para medir potenciais, o nó usado para a tarefa será o de número 9, numa analogia ao que foi feito por Hua et al. (1993).

Na eq. (3.40), o termo σ_{el}/t_{el} é chamado de constante do modelo de eletrodo ou parâmetro do modelo de eletrodo. Deve-se notar que tal quociente é desconhecido na prática.

Finalmente, a matriz do modelo de eletrodo, da mesma forma que as demais matrizes dos elementos do domínio, deve ser “acoplada” a $[K]$, e o vetor de correntes nodais do eletrodo a $\{I\}$.

As simulações realizadas por Hua et al. (1993) com o modelo bidimensional descrito em seu artigo, mostram que a reprodução da distribuição de potenciais e correntes num domínio é feita de forma satisfatória. Isto no caso do uso de eletrodos compostos, que medem potenciais num ponto central do eletrodo (vide Figura 6) e

aplicam correntes ao corpo através da área restante, maior que a primeira e no formato de um quadrado. Assim, espera-se que o modelo tridimensional seja, também, satisfatório.

Convém lembrar, novamente, que este modelo foi desenvolvido com base em simplificações; assim, pode ainda ser melhorado.

2.2.3 Solução Numérica do Sistema Linear $[K]\{\Phi\}=\{I\}$

A formulação de MEF empregada neste trabalho remete à solução de um sistema linear, ou seja, à inversão de $[K]$ para obtenção dos potenciais nodais. Por este motivo, apesar dos métodos de solução destes sistemas apresentarem aplicações genéricas, não necessariamente ligadas ao MEF, optou-se por descrever o método utilizado juntamente com a teoria de elementos finitos.

A matriz global (relaciona os potenciais nodais às correntes nodais) possuirá diversos valores próximos ou iguais a zero. Isto remete ao uso de métodos de armazenamento de matrizes esparsas, que diminuem a quantidade de memória necessária. Além disto, existem diversos procedimentos que se utilizam de matrizes esparsas na solução de sistemas lineares, os quais apresentam as vantagens de reduzir a propagação de ruídos numéricos (por não manipularem valores próximos de zero) e diminuir o tempo de processamento computacional.

Um dos procedimentos de solução é o Método dos Gradientes Conjugados para Sistemas Esparsos (MGCSE) que, em um de seus algoritmos mais simples, resolve um sistema de equações linear e apenas no caso em que a matriz $[A]$ é simétrica e positiva definida, sendo o sistema dado por:

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (2.57)$$

onde $\{x\}$ e $\{b\}$ são vetores.

O método é baseado na idéia de minimização de:

$$f(x) = \frac{1}{2} \{x\}^T [A] \{x\} - \{b\}^T \{x\} \quad (2.58)$$

que tem como gradiente:

$$\nabla f = [A]\{x\} - \{b\} \quad (2.59)$$

onde o vetor ∇f possui, em cada linha, uma derivada numa determinada direção. As componentes do gradiente devem ser nulas, o que remete ao sistema de equações lineares anterior.

Para este trabalho, será, porém, utilizado o Método dos Gradientes Biconjugados para Sistemas Esparsos (MGBSE). Este método pode ser aplicado em sistemas lineares não necessariamente positivos definidos ou simétricos, sendo genérico. No entanto, não apresenta uma conexão simples e direta com a minimização de funções, como a apresenta o MGCSE. Maiores detalhes sobre o MGCSE, o MGBSE ou sobre matrizes esparsas e métodos de armazenamento podem ser obtidos no livro de Press et al. (1999).

3 MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

O MOT consiste num método computacional que gera topologias ótimas. Basicamente, a partir do ponto de vista de Bendsøe e Sigmund (2003), pode-se dizer que distribui o material no interior de um domínio fixo de forma a otimizar o desempenho do sistema correspondente, ou seja, soluciona um problema de otimização. O desempenho é representado, matematicamente, pela chamada função custo ou objetivo, a qual pode exprimir a rigidez estrutural, o volume de material, a diferença entre duas grandezas, etc.. Além disto, algumas características do sistema são conhecidas, como o carregamento aplicado (ou correntes elétricas, ou fluxos de calor, etc., dependendo do tipo de sistema em questão), as condições de contorno, como apoios ou engastes (ou potenciais elétricos nulos, ou temperaturas fixas, etc.), a quantidade de um ou mais tipos de material permitida no domínio e, possivelmente, a localização prescrita, referente a um ou mais tipos destes materiais. Assim, o sistema otimizado deve obedecer estas limitações. A Figura 9 mostra alguns destes conceitos, para o caso do problema de MOT aplicado a meios condutivos.

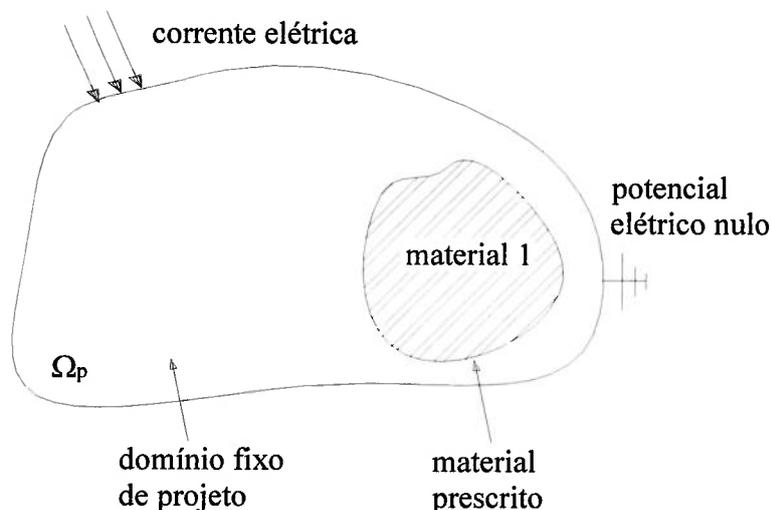


Figura 9 Domínio fixo de projeto (Ω_p), condições de contorno e corrente imposta, no problema de MOT aplicado a meios condutivos.

O material em cada ponto do domínio pode, por exemplo, variar de um material do tipo A (ar, por exemplo) a um material do tipo B (por exemplo, um material sólido), assumindo materiais intermediários entre A e B, de acordo com o chamado modelo de material. No modelo de material adotado, a propriedade de cada

ponto do domínio será tanto maior quanto maior for a sua “densidade” ρ , - ou “pseudo-densidade” (serão também tratadas simplesmente por densidades); o termo “pseudo-densidade” ou “densidade” é usado pois é correntemente empregado na literatura da área de otimização topológica estrutural, para a qual se considera, normalmente, apenas um tipo de material presente no domínio fixo e segundo a qual o volume da estrutura é calculado pela integral da grandeza ρ no domínio, de onde vem a idéia de nomenclatura do termo (BENDSØE; SIGMUND, 2003) – podendo variar de 0 (100% de material A, por exemplo) a 1 (100% de material B, por exemplo). O modelo de material, nestas condições, é baseado no chamado “Simple Isotropic Material with Penalization” (SIMP), doravante denominado método das densidades, o qual engloba a continuidade dos valores de densidades, como já mencionado, e ainda introduz o conceito de fator de penalidade ou penalização. O método é explicitado pelo modelo matemático do comportamento do material, dado pela seguinte equação:

$$\text{mat}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})^p \text{mat}_A + (1 - \rho(\mathbf{x})^p) \text{mat}_B \quad (3.1)$$

onde $\rho(\mathbf{x})$ é a densidade definida em todo o domínio, mat_A e mat_B são as propriedades dos materiais que compõem o meio e $\text{mat}(\mathbf{x})$ será a propriedade resultante. O fator de penalidade p tem como função reduzir materiais intermediários no resultado final da otimização. Assim, caso existam apenas dois tipos de material diferentes no domínio, mat_A e mat_B , é interessante que se utilize $p > 1$; caso contrário, p poderá, por exemplo, ser escolhido igual à unidade e mat_A e mat_B serão o maior e o menor valores de condutividade encontrados no domínio. O efeito de p é visto na Figura 10 e também na Figura 11, para diferentes valores de materiais mat_A e mat_B .

É importante notar que, no caso de haver apenas dois tipos de material no corpo tomografado, valores intermediários de densidade são indesejáveis. Assim, surge a idéia da implementação de um método de otimização que manipule apenas os valores limites mat_A e mat_B , assumindo a densidade os valores 0 e 1, somente. Métodos como o algoritmo genético ou simulated annealing (BENDSØE; SIGMUND, 2003) podem, neste caso, ser aplicados. Assim, o método das densidades, o qual “relaxa” o problema de otimização, representa uma alternativa aos algoritmos discretos citados quando $p > 1$. De fato, se o problema 0-1 é estendido para um caso discreto com mais de dois materiais, o grande número de cálculos da função

objetivo e restrições efetuados pelos algoritmos discretos pode tornar a sua aplicação proibitiva em termos computacionais (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

O material, neste trabalho, é representado associando-se valores de densidade a cada elemento ou nó obtido da discretização do domínio inicial. Por esta razão e pela necessidade de análise de domínios com geometrias e distribuições de propriedades arbitrárias (o tórax humano, por exemplo), o MOT está associado a métodos numéricos de análise, em geral o MEF, o qual foi adotado neste trabalho.

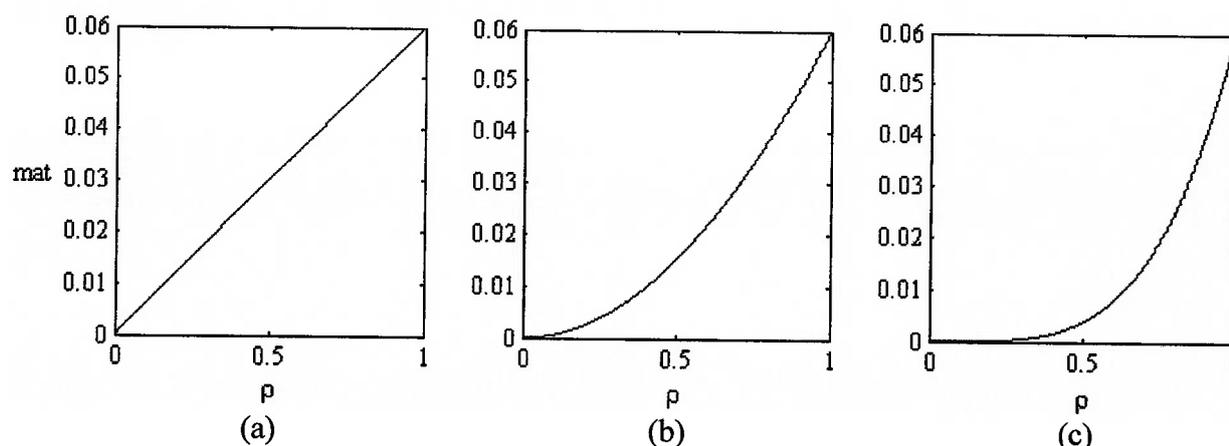


Figura 10 Gráficos de $mat \times \rho$ para diferentes valores de p . Os valores de mat_A e mat_B usados foram 0,000001 e 0,06, respectivamente. (a) $p=1$. (b) $p=2$. (c) $p=4$.

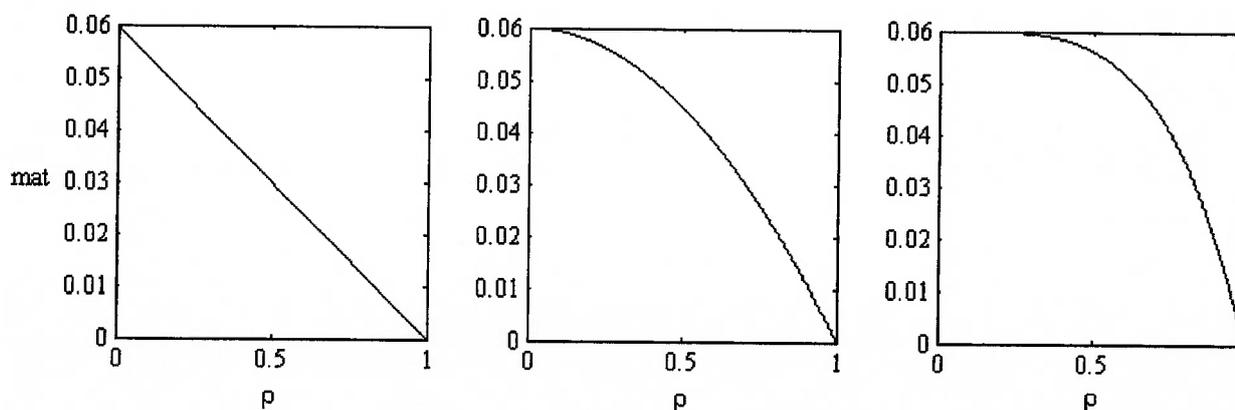


Figura 11 Gráficos de $mat \times \rho$ para diferentes valores de p . Os valores de mat_A e mat_B usados foram 0,06 e 0,000001, respectivamente. (a) $p=1$. (b) $p=2$. (c) $p=4$.

No contexto da abordagem por tentativa e erro aplicada à otimização, deve-se avaliar o desempenho de um sistema inúmeras vezes, através do cálculo da função objetivo para todas as configurações possíveis da distribuição do material no domínio, ou, pelo menos, para um número suficiente delas. Dado o método de

cálculo ou análise da função e o número de configurações consideradas, tal abordagem pode se tornar inviável. Utilizando-se o MEF como ferramenta de análise, por exemplo, deve-se assegurar que o modelo de elementos finitos seja fiel ao modelo dado pelas equações diferenciais que regem o fenômeno físico estudado. Portanto, muitos elementos devem ser usados na discretização, o que torna o processo de análise um processo custoso computacionalmente e, conseqüentemente, lento, sendo inviabilizada a abordagem por tentativa e erro.

Desta forma, no MOT, algoritmos de otimização, como algoritmos de programação matemática (HAFTKA; GÜRDAL, 1999) são usados para se determinar a distribuição ótima dos materiais, o que torna o processo relativamente rápido. Estes algoritmos aceleram o processo de busca da distribuição ótima de material através da informação do gradiente ou derivadas primeiras (e até mesmo as derivadas segundas, em alguns algoritmos) da função custo em relação às densidades ou variáveis de projeto. O cálculo deste gradiente é feito com base na análise da distribuição de potenciais elétricos no domínio (mais especificamente, a partir dos potenciais nodais) e será tratado, detalhadamente, adiante no texto.

Desde sua introdução, o MOT vem ganhando destaque no meio acadêmico e na indústria. No caso da metal-mecânica, torna o processo de projeto mais genérico, sistemático, otimizado, e independente da experiência específica de alguns engenheiros, fornecendo a topologia inicial, otimizada para certa aplicação do dispositivo a ser construído. A presença do engenheiro é necessária para a obtenção do projeto final e verificação do desempenho para o qual foi projetado (o que é feito com o auxílio de métodos numéricos e experimentais). Trabalhos relacionados à otimização estrutural foram realizados, por exemplo, por Bendsøe e Kikuchi (1988) e Bendsøe e Sigmund (2003). Um exemplo de problema de otimização de uma peça metálica é mostrado na Figura 12 (MELLO, 2002). Neste problema, é dado o domínio fixo, um carregamento concentrado, aplicado no vértice inferior direito do domínio e a condição de contorno de engaste na aresta esquerda. Limitando-se a quantidade de material máxima em 40%, é encontrada a topologia ótima da estrutura no sentido de minimizar sua flexibilidade. Tem sido expandido, com sucesso, para atuação em várias outras aplicações, como no projeto de mecanismos flexíveis (SILVA; NISHIWAKI; KIKUCHI, 2000; YIN; ANANTHASURESH, 2001; LIMA,

2002), no projeto de materiais com propriedades especiais (LARSEN; SIGMUND; BOUWSTRA, 1997; SIGMUND, 2000), Sistemas MicroEletroMecânicos (MEMS) (MAUTE; FRANGOPOL, 2003), estruturas sujeitas ao impacto (BENDSØE; SIGMUND, 2003; YOUN et al., 2004), estruturas ressonantes para aplicação em micro-motores, micro-garras, etc. (TCHERNIAK, 2002), dentre outros.

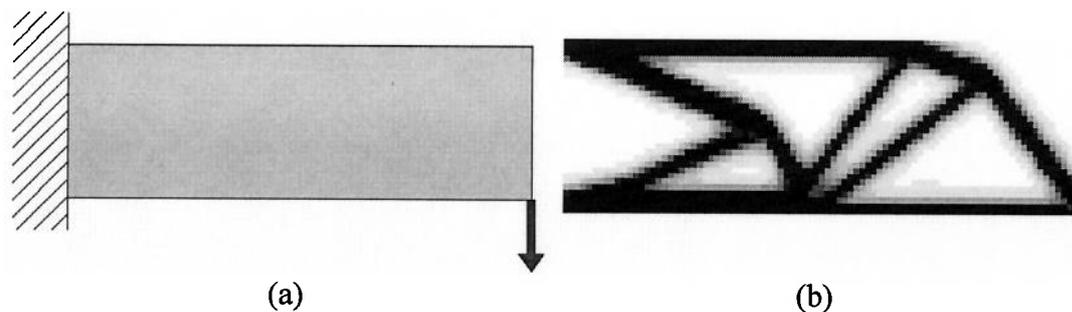


Figura 12 Exemplo de aplicação do MOT, onde se deseja maximizar a rigidez de uma estrutura. (a) Domínio fixo, carregamento e condições de contorno. (b) Resposta da otimização. Apenas 40% do volume inicial é ocupado.

A introdução do MOT na área de TIE é recente e está sendo testada para o caso de formulações em duas dimensões (LIMA; LIMA; SILVA, 2004). O trabalho tem mostrado bons resultados e potencialidades; assim buscou-se estendê-lo para o caso tridimensional.

3.1 Método de Otimização Topológica Aplicado à Tomografia por Impedância Elétrica

A função custo, ou função objetivo, neste caso será dada por:

$$F = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{ne} \sum_{i=1}^{np} (\phi_{ij} - \phi_{ij0})^2 \quad (3.2)$$

onde ne é o número de casos de carregamento aplicados, np o de pontos (nós da malha de elementos finitos) ou eletrodos onde são obtidos os potenciais elétricos, ϕ_{ij0} é o potencial medido no i -ésimo eletrodo do corpo a ser tomografado, para o caso de carga j , e ϕ_{ij} é o potencial correspondente, calculado através do modelo de MEF do corpo.

No modelo de material adotado, a condutividade de cada elemento finito será tanto maior quanto maior for a sua densidade. É dada pela seguinte equação:

$$\sigma(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})^p \sigma_A + (1 - \rho(\mathbf{x})^p) \sigma_B \quad (3.3)$$

onde $\rho(\mathbf{x})$ é, como já mencionado, a densidade definida em todo o domínio, σ_A e σ_B são as condutividades dos materiais que compõem o meio e $\sigma(\mathbf{x})$ será a condutividade resultante. Sendo $\sigma(\mathbf{x})$ constante em cada elemento finito, pode-se alterar (3.3) para uma forma discreta, obtendo-se:

$$\sigma_m = \rho_m^p \sigma_A + (1 - \rho_m^p) \sigma_B \quad (3.4)$$

para a qual σ_m será a condutividade e ρ_m a densidade de um elemento finito. Portanto, o número de variáveis de projeto, neste caso, é igual ao número de elementos.

Numa alternativa à variável de projeto por elemento, adotou-se um esquema de variáveis nodais, segundo o qual a densidade no elemento é interpolada da mesma maneira que os potenciais elétricos e as coordenadas:

$$\rho_m = [N_m] \{P_m\} \quad (3.5)$$

sendo $\{P_m\}$ o vetor de densidades nodais do elemento finito. Neste caso, o número de variáveis de projeto passa a ser igual ao número de nós de discretização. O modelo de material assume a forma:

$$\sigma_m = ([N_m] \{P_m\})^p \sigma_A + (1 - ([N_m] \{P_m\})^p) \sigma_B \quad (3.6)$$

Nota-se que σ_m depende das coordenadas locais do elemento. Assim, na construção da matriz de condutividade do elemento ($[K_m]$), deve-se integrar tal termo, conforme comentado anteriormente.

No caso do modelo de eletrodo, já foi explicitado que o quociente σ_{el}/t_{el} é desconhecido. Assim, foi também considerado como incógnita no problema de otimização e definiu-se um modelo de material. Este é semelhante ao citado acima; porém, p é igual à unidade, σ_{Ael}/t_{el} e σ_{Bel}/t_{el} são os limites para σ_{el}/t_{el} e ρ_{el} é a variável de projeto. Então, tem-se:

$$\frac{\sigma_{el}}{t_{el}} = \rho_{el} \frac{\sigma_{Ael}}{t_{el}} + (1 - \rho_{el}) \frac{\sigma_{Bel}}{t_{el}} \quad (3.7)$$

O esquema de variáveis por nó não foi implementado para o modelo de eletrodo.

Finalmente, o problema de MOT pode então ser definido, num caso que englobe apenas restrições laterais, ou seja, restrições aplicadas diretamente ao valor da variável de projeto, como:

$$\text{Minimizar} \quad F = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{ne} \sum_{i=1}^{np} (\phi_{ij} - \phi_{ij0})^2$$

$$\text{Tal que} \quad \text{Equação de condutividade} \quad ([K]\{\Phi\} = \{I\})$$

$$0 \leq \rho_k \leq 1$$

A última restrição, a lateral, aplica-se aos elementos finitos do domínio, aos parâmetros do modelo de eletrodo e, no caso do uso de variáveis por nó, aos nós dos elementos.

Nota-se que não há restrições, além das laterais, no problema de otimização acima. Pode-se dizer que esta é a forma mais simples (ou forma padrão) de definição do problema. Mas, a formulação do MOT permite que se introduzam mais restrições à forma padrão. As restrições usadas serão citadas adiante no texto

De maneira intuitiva, espera-se que com o aumento do número de casos de carregamento e do número de pontos de medição (ne e np , respectivamente), as respostas sejam mais satisfatórias, pois assim mais informação é fornecida ao algoritmo, modificando-se a dependência da função objetivo com relação à variáveis de projeto. Ao mesmo tempo, um grande número de elementos finitos deve ser usado para que o campo de potenciais elétricos seja fielmente reproduzido, o que, como freqüentemente se verifica, introduz um número elevado de incógnitas no problema em relação à quantidade de informação citada. Nestas condições, o aumento de ne e/ou np não livrará o problema de ser mal-posto (TIKHONOV; ARSENIN, 1977), no sentido de que, admitindo-se a existência de solução, existem vários mínimos locais (que otimizam a função objetivo), o que pode ser agravado por uma função custo não-linear. Além da existência dos mínimos locais, dada a precisão do algoritmo, a variação das condutividades em determinados locais do domínio pode não afetar os

valores calculados de ϕ_{ij} (BACRIE; GOUSSARD; GUARDO, 1997), indicando uma sensibilidade baixa.

Neste contexto, o MOT, com a inerente e já discutida possibilidade de inclusão de restrições e com a possibilidade de uso de filtros espaciais (CARDOSO, 2000), os quais não aumentam, significativamente, os tempos de processamento, permite que se realize a regularização do problema (TIKHONOV; ARSENIN, 1977; VAUHKONEN et al., 1999; BLUE; ISAACSON; NEWELL, 2000), reduzindo-se o espaço de soluções. Contudo, alguma informação sobre a resposta final, nem sempre possível de se obter de forma precisa, deve ser fornecida ao algoritmo.

Neste ponto, serão apresentadas as restrições e o filtro usados.

3.1.1 Restrição de Sintonia

Um tipo de restrição introduzido, utilizado apenas para o caso de variáveis de projeto constantes nos elementos, foi a Restrição de Sintonia (RS). Faz-se com que a soma de cada volume de elemento, multiplicado pela variável de projeto, seja menor ou igual ao volume total, multiplicado por certo coeficiente, previamente escolhido pelo usuário, o que funciona como um “botão” de sintonia:

$$\sum_{m=1}^M \frac{V_m}{V_{\min}} \rho_m \leq \frac{V_{\text{Total}}}{V_{\min}} CS \quad (3.8)$$

onde CS é o Coeficiente de Sintonia e M é o número de elementos finitos. V_{\min} é o menor volume entre os elementos e foi usado como fator de normalização para se evitarem valores muito pequenos, o que poderia influir (devido a grandes diferenças nas ordens de grandeza dos parâmetros da otimização) no processo de otimização.

Finalmente, outro problema de MOT pode ser definido:

$$\text{Minimizar} \quad F = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{ne} \sum_{i=1}^{np} (\phi_{ij} - \phi_{ij0})^2$$

$$\text{Tal que} \quad \text{Equação de condutividade } ([K]\{\Phi\} = \{I\})$$

$$0 \leq \rho_m \leq 1$$

$$\sum_{m=1}^M \frac{V_m}{V_{\min}} \rho_m \leq \frac{V_{\text{Total}}}{V_{\min}} CS$$

3.1.2 Restrição do Valor Médio da Densidade

A Restrição do Valor Médio da Densidade, ou, simplesmente, Restrição do Valor Médio (RVM), foi utilizada como uma alternativa para a RS. Tal restrição engloba a RS, sendo mais elaborada, além de independer de um ajuste de CS, o que implica no conhecimento prévio e aproximado da distribuição de propriedades, ou seja, no conhecimento prévio e aproximado da própria resposta do problema inverso.

A RVM é igual a:

$$\sum_{k=1}^N \frac{w_k(\rho_k, dn_k) f_k(\rho_k)}{N} \leq wf(\bar{\rho}) \quad (3.9)$$

onde N é o número de variáveis de projeto, w_k é o peso aplicado ao valor da função f_k da variável de projeto ρ_k , f é uma função de $\bar{\rho}$, a média dos valores de densidade adquirida a partir dos potenciais medidos no corpo ou domínio de condutividades desconhecidas, w é o peso associado e dn_k é a distância normalizada entre a variável de projeto ρ_k e o centro do domínio (dn_k é zero no centro e unitária no contorno). Neste trabalho, w_k foi dado por:

$$w_k = \{(\rho_k^2 - 2\rho_k)(1 - dn_k) - dn_k + 2\} \quad (3.10)$$

e f_k por:

$$f_k = (2\rho_k - \rho_k^2) \quad (3.11)$$

Como visto, utilizou-se, como peso w_k , uma quantidade inversamente proporcional à distância entre a variável de projeto e o eixo central da malha de elementos finitos, no caso de um domínio cilíndrico (usado neste trabalho). Nestas condições, a distância foi normalizada ou adimensionalizada pelo raio do domínio.

A função dada pela multiplicação de w_k por f_k , doravante representada por fw_k , penaliza a variável de projeto próxima de 0, fazendo com que o algoritmo de otimização “enxergue” valores mais elevados. Ainda aumenta a penalização se a variável estiver próxima da região central do domínio. A função fw_k é vista na Figura 13. A função, dada em ρ_k igual a 0,45, é vista na Figura 14, onde é possível notar o efeito da proximidade do centro do domínio.

Visou-se, com a utilização de w_k , dar um peso maior às variáveis de projeto próximas do eixo central do domínio, forçando-as a ter valores reduzidos no final da otimização. Tal abordagem foi utilizada com base no trabalho de Bacrie, Goussard e

Guardo (1997), os quais mencionam que o sistema de TIE tem sensibilidade reduzida à variação dos valores das propriedades nos locais distantes dos pontos de medição, quando comparada à sensibilidade dos locais próximos a estes pontos. Tais fatos foram verificados, para o caso do MOT, pelos resultados bidimensionais de Lima (2004), que indicaram que o algoritmo tem a tendência de atenuar as variações espaciais de condutividades da resposta obtida em regiões próximas do centro do domínio, em forma de círculo, no caso de apenas dois tipos de material presentes no corpo tomografado, tendo a maior parte do material condutividade igual a $0,058824(\text{m}\cdot\Omega)^{-1}$ e a menor, condutividade de $0,000001(\text{m}\cdot\Omega)^{-1}$ (informação verbal)¹.

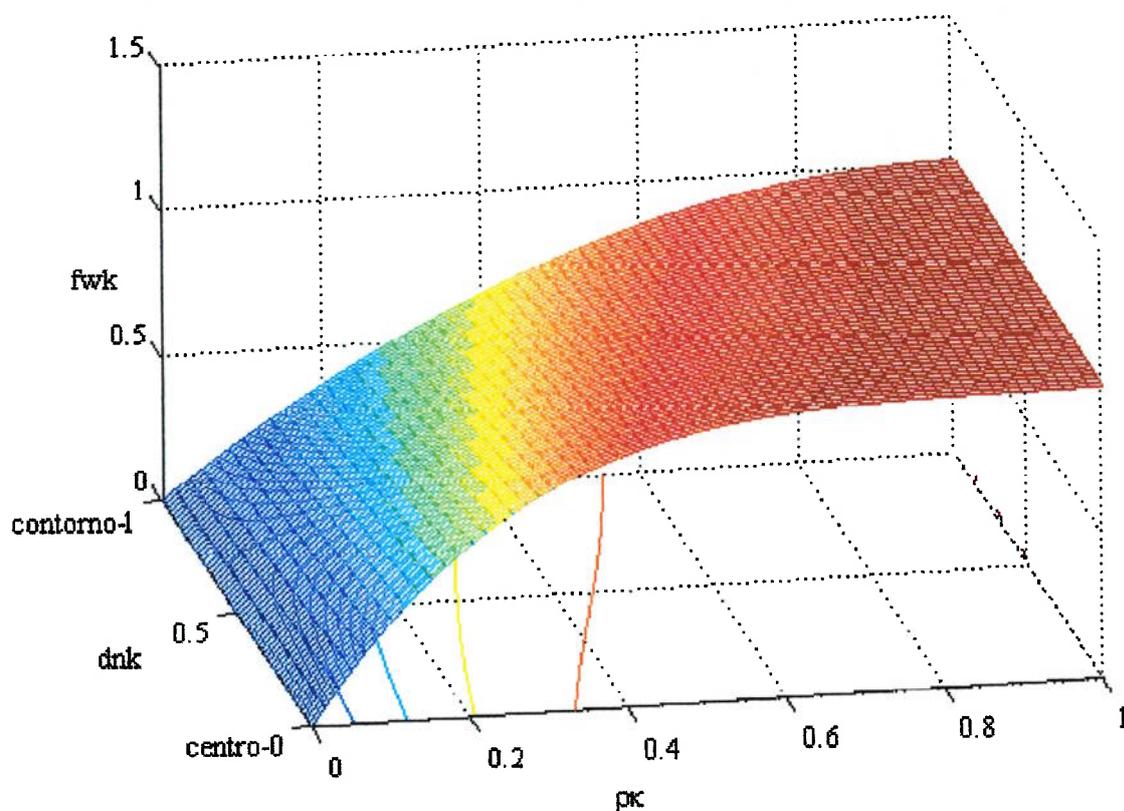


Figura 13 Função fw_k . Pelas curvas de nível mostradas, é possível notar a influência da posição da variável de projeto no domínio sobre o valor da função. O valor máximo é dado para $x=1$ e vale $f_k=1$.

O lado direito da equação da restrição foi dado por:

$$wf = \left(2\bar{\rho} - \bar{\rho}^2 \right) \quad (3.12)$$

¹ Informação fornecida por Cícero Ribeiro de Lima, aluno de Doutorado da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, em São Paulo, em 2004.

Assumi-se, portanto, que w é igual a 1.

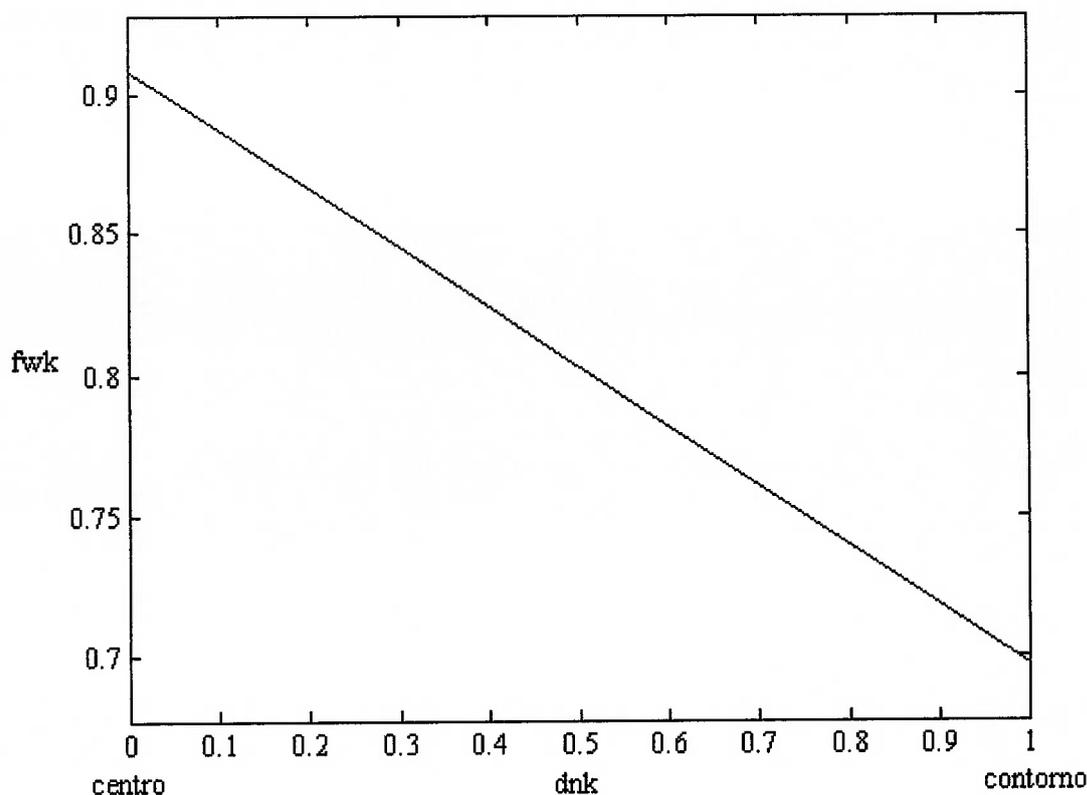


Figura 14 A função fw_k , dada em ρ_k igual a 0,45.

A idéia deste tipo de restrição é gerar respostas, no caso de dois materiais presentes no corpo tomografado, com regiões de transição de condutividades bem definidas. A dificuldade na implementação reside no cálculo de $\bar{\rho}$. Neste trabalho, utilizou-se uma aproximação para o valor, dada por:

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{U}_c}{\bar{U}_f} \bar{\rho}_c \quad (3.13)$$

onde \bar{U}_c é o valor médio dos potenciais medidos nos eletrodos de um corpo de distribuição de condutividades conhecida e uniforme, $\bar{\rho}_c$ é o valor médio da densidade neste corpo, e \bar{U}_f é o valor médio dos potenciais medidos nos eletrodos de um corpo do qual se deseja obter a imagem.

Finalmente, define-se, então o problema de otimização:

$$\text{Minimizar} \quad F = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{nc} \sum_{i=1}^{np} (\phi_{ij} - \phi_{ij0})^2$$

Tal que *Equação de condutividade* ($[K]\{\Phi\} = \{I\}$)

$$0 \leq \rho_m \leq 1$$

$$\sum_{k=1}^N \frac{w_k(\rho_k, dn_k) f_k(\rho_k)}{N} \leq wf(\bar{\rho})$$

3.1.3 Filtro Espacial

As restrições citadas foram utilizadas, como citado, com o intuito de se regularizar o problema de MOT, ou seja, para torná-lo menos mal-posto. Com a mesma finalidade, foi usado o chamado filtro espacial (FE) (CARDOSO, 2002).

A idéia do filtro é bastante simples. Durante o processo iterativo de otimização, certa quantidade referente a uma variável de projeto, como a própria variável ou a derivada da função objetivo em relação a ela, por exemplo, será alterada com base nos valores das quantidades dos elementos (no caso de variáveis constantes em elementos) ou nós vizinhos, segundo a fórmula:

$$\hat{a} = \frac{\sum_q W_q a_q}{\sum_q W_q} \quad (3.14)$$

sendo \hat{a} a quantidade citada. A somatória se estende a todos os vizinhos considerados, sendo a quantidade destes elementos dada pelo chamado raio do filtro (RF), entrada do algoritmo. Assim, o FE reduz a variação espacial do parâmetro \hat{a} .

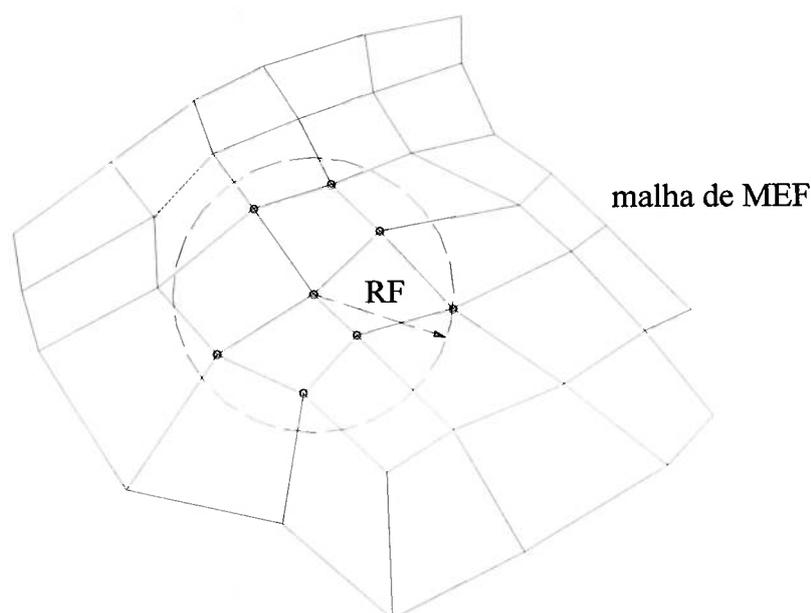


Figura 15 Parte da malha de elementos finitos e RF. São destacados os nós considerados no processo de filtragem.

Neste trabalho, cada peso W_q é igual a:

$$W_q = d_q s_q \quad (3.15)$$

sendo:

$$d_q = \frac{RF - \text{dist}_q}{RF} \quad (3.16)$$

e

$$s_q = \sum_{l=1}^{nd_q} V_{ql}^* \quad (3.17)$$

onde dist_q é a distância entre o nó referente a \hat{a} e o q -ésimo nó, nd_q é o número de elementos que compartilham o q -ésimo nó e V_{ql}^* expressa o volume de cada um destes nd_q elementos. Com a finalidade de se evitar algum problema numérico no caso de RF ser muito pequeno, foi implementado o seguinte artifício:

$$\hat{a}_k = \frac{a_k s_k + \sum_q W_q a_q}{s_k + \sum_q W_q} \quad (3.18)$$

A particularização realizada neste trabalho com relação a \hat{a}_k será mostrada adiante, pois ainda é necessário introduzir alguns conceitos.

4 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Existem vários métodos de solução dos problemas de otimização propostos (HAFTKA; GÜRDAL, 1999; VANDERPLATZ, 1984). Optou-se, pela Programação Linear Seqüencial (PLS), método iterativo que engloba o método de otimização de funções lineares Programação Linear (PL). A PL tem como vantagens: lidar com um grande número de variáveis de projeto, requerer apenas o cálculo das derivadas de primeira ordem da função objetivo e restrições (diferentemente de algoritmos baseados na Programação Quadrática, que usam derivadas de primeira e segunda ordem) e permitir a inclusão de um grande número de restrições (o que será feito na continuação deste trabalho). O algoritmo de PL usado, um algoritmo de Kamarkar (HAFTKA; GÜRDAL, 1999), pronto para uso e escrito em Linguagem Fortran de programação, encaixou-se perfeitamente nos requisitos deste trabalho. Adiante serão explicados os conceitos relacionados tanto à PLS quanto à PL e abordado o cálculo das derivadas de primeira ordem, ou componentes do gradiente da função objetivo.

4.1 Programação Linear e Programação Linear Seqüencial

A PLS é um método muito usado na solução de problemas de otimização não lineares (o caso em questão). Essencialmente, divide um problema não linear numa série de problemas lineares (resolvidos pela PL), num processo iterativo que se inicia num ponto previamente selecionado. A PL, por sua vez, utiliza os métodos Simplex (PRESS et al., 1999) ou Kamarkar (HAFTKA; GÜRDAL, 1999), que buscam mínimos para a função objetivo, considerando-se as restrições impostas.

A PL trabalha, como já mencionado, com funções objetivo e restrições lineares em relação às variáveis de projeto. Porém, a função objetivo, no caso deste trabalho, não é linear. Assim, deve ser linearizada através de sua expansão em Série de Taylor, sendo os termos de ordem superior a 1, então, desconsiderados. A função objetivo (eq. (3.1)) assume a forma:

$$F_{\text{linear}} = F(\rho_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial \rho_1} \right|_{\rho=\rho_0} (\rho_1 - \rho_{10}) + \dots + \left. \frac{\partial F}{\partial \rho_N} \right|_{\rho=\rho_0} (\rho_N - \rho_{N0}) \quad (4.1)$$

onde ρ_0 contém todos os valores de densidade usados como ponto de linearização, ou seja, contém $\rho_{10}, \rho_{20}, \dots, \rho_{N0}$, $F(\rho_0)$ é o valor da função objetivo em ρ_0 e $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$ são as variáveis de projeto.

O mínimo da função será o mesmo, independentemente da presença dos termos constantes. Assim, busca-se, de forma análoga, a otimização de:

$$F_{\text{linear}}^* = \left. \frac{\partial F}{\partial \rho_1} \right|_{\rho=\rho_0} \rho_1 + \left. \frac{\partial F}{\partial \rho_2} \right|_{\rho=\rho_0} \rho_2 + \dots + \left. \frac{\partial F}{\partial \rho_N} \right|_{\rho=\rho_0} \rho_N \quad (4.2)$$

O cálculo das derivadas mostradas (gradiente de F), em $\rho=\rho_0$, será abordado no capítulo posterior.

Como mencionado, a PLS aproxima um problema não linear por uma sucessão de subproblemas lineares, que são resolvidos pela PL. Nesta aproximação, deve-se restringir a variação das variáveis de projeto dentro de um subproblema. Realiza-se esta tarefa através dos limites móveis. Tais conceitos podem ser mais bem entendidos com o auxílio da Figura 16.

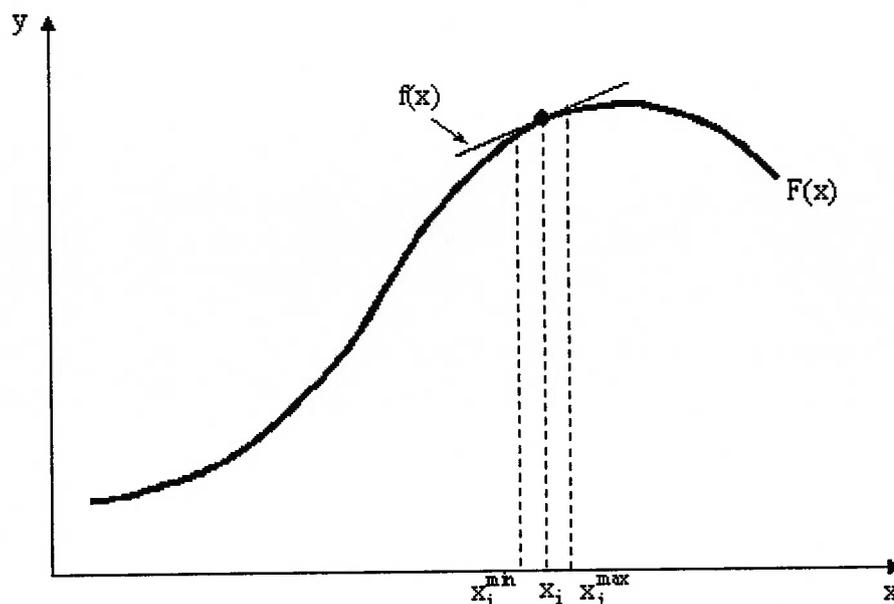


Figura 16 Função não linear $F(x)$ e sua linearização $f(x)$ em torno de x_i . O índice i indica a i -ésima iteração.

A função contínua $f(x)$ estará tão mais próxima da função não linear $F(x)$ quanto menor for a variação de x em torno do ponto de linearização x_i . Nota-se que,

entre x_i^{\max} e x_i^{\min} , as funções têm valores bem próximos e, assim, a aproximação de $F(x)$ por $f(x)$ é válida.

Seja considerada a busca do ótimo de $F(x)$, obtido através da otimização de uma série de funções (subproblemas) lineares, tais quais $f(x)$. Portanto, devem-se definir os valores máximos e mínimos em que a aproximação por $f(x)$ é razoável, os quais são chamados limites móveis de x_i . Tendo x_i como ponto de partida do processo iterativo, por exemplo, os limites seriam x_i^{\max} e x_i^{\min} , ou $x_i + \Delta x$ e $x_i - \Delta x$, e o ótimo (máximo, neste caso) do subproblema linear seria $x_i + \Delta x$ (o que é visto na figura). Então, este representaria o novo ponto de linearização de $F(x)$ para obtenção de uma nova $f(x)$, outros limites móveis seriam definidos e o processo continuaria até que ocorresse a convergência para o máximo de $F(x)$. Num problema prático (numérico), no entanto, certa tolerância deve ser aceita e, então, encontra-se não o ponto que otimiza de fato a função F , mas uma aproximação deste.

Considerando-se um subproblema linear, se os limites móveis são grandes, o erro da aproximação da função não linear pela linear pode ser grande, o que também pode acarretar na perda de um ponto ótimo e, ao longo do processo iterativo, na oscilação em torno deste ponto. Se os limites são pequenos, o ponto pode não ser ignorado, mas o custo computacional na obtenção da solução do problema (processo iterativo) é grande. Estes fatores sugerem o uso de limites móveis variáveis, os quais deverão ser pequenos (conservadores) se a curvatura da função objetivo, no ponto de linearização, for acentuada (matematicamente, se a derivada segunda da função, no ponto de linearização, tiver valor elevado) e grandes, caso contrário.

Neste trabalho, a variação dos limites móveis para cada ρ_k é calculada com base na oscilação do valor da variável de projeto em torno de um mínimo do problema. Assim, se é detectada a oscilação numa incógnita, reduzem-se os limites móveis referentes à incógnita. Caso contrário, os limites são aumentados. Este controle é importante pois, assim, menos iterações são realizadas em locais distantes do ponto mínimo sem que, próximo a este, o algoritmo oscile.

Finalmente, o subproblema de PL assume a forma:

$$\text{Minimizar} \quad F_{\text{linear}}^* = \left. \frac{\partial F}{\partial \rho_1} \right|_{\rho=\rho_0} \rho_1 + \left. \frac{\partial F}{\partial \rho_2} \right|_{\rho=\rho_0} \rho_2 + \dots + \left. \frac{\partial F}{\partial \rho_M} \right|_{\rho=\rho_0} \rho_M$$

Tal que *Equação de condutividade* ($[K]\{\Phi\} = \{I\}$)

$$\rho_k^{\min} \leq \rho_k \leq \rho_k^{\max} \quad k = 1 \dots M$$

$$\sum_{k=1}^M \frac{V_k}{V_{\min}} \rho_k \leq \frac{V_{\text{Total}}}{V_{\min}} \text{CS}$$

sendo ρ_k^{\min} e ρ_k^{\max} os valores mínimo e máximo de ρ_k (limites móveis). Impondo-se a RVM ao invés da RS, o subproblema ganharia a seguinte forma:

$$\text{Minimizar} \quad F_{\text{linear}}^* = \left. \frac{\partial F}{\partial \rho_1} \right|_{\rho=\rho_0} \rho_1 + \left. \frac{\partial F}{\partial \rho_2} \right|_{\rho=\rho_0} \rho_2 + \dots + \left. \frac{\partial F}{\partial \rho_N} \right|_{\rho=\rho_0} \rho_N$$

Tal que *Equação de condutividade* ($[K]\{\Phi\} = \{I\}$)

$$\rho_k^{\min} \leq \rho_k \leq \rho_k^{\max} \quad k = 1 \dots N$$

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \left. \frac{\partial (w_k f_k)}{\partial \rho_k} \right|_{\rho=\rho_0} \rho_k \leq wf(\bar{\rho}) + \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \left. \frac{\partial (w_k f_k)}{\partial \rho_k} \right|_{\rho=\rho_0} \rho_{k0} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} w_k f_k \Big|_{\rho=\rho_0}$$

Ficam, assim, definidos os subproblemas de otimização, explicitados pela minimização da função linear. Também fica definido o problema principal, dado pelo processo iterativo.

Maiores detalhes sobre a PLS podem ser obtidos no trabalho de Haftka e Gürdal (1999) e sobre PL, nos trabalhos de Press et al. (1999), Haftka e Gürdal (1999) e Vanderplatz (1984). Sobre limites móveis, há estudos realizados por Cardoso (2000).

Voltando ao FE, os valores de $\hat{\alpha}_k$ ou valores filtrados foram, da mesma forma que no trabalho de Cardoso (2002), os limites móveis. Portanto, restringiu-se a variação do valor de cada uma das variáveis de projeto também com base nos limites das variáveis vizinhas. O efeito de tal artifício será mostrado no capítulo sobre resultados. Porém, com o FE, pode-se esperar que a variação espacial das variáveis de projeto será reduzida.

4.2 Cálculo dos Gradientes

Como já mencionado, o algoritmo de PL resolve problemas lineares. Desta forma, devem-se determinar os gradientes da função objetivo e restrições em relação

às variáveis de projeto. A abordagem de cálculo do gradiente da função objetivo utilizada e descrita neste trabalho é a mesma mencionada por Lima (2003). Aplicando-se a regra da cadeia à eq. (3.1), pode-se obter:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_k} = \sum_{j=1}^{ne} \sum_{i=1}^{np} (\phi_{ij} - \phi_{ij0}) \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \rho_k} \quad (4.3)$$

uma vez que ϕ_{ij0} , dado de entrada, é constante em relação às variáveis de projeto. A eq. (4.3) mostra uma componente do gradiente da função objetivo. Para que se calcule este gradiente, utiliza-se o chamado teorema da reciprocidade de Betti-Maxwell (COOK et al., 2002), uma interpretação física do método adjunto.

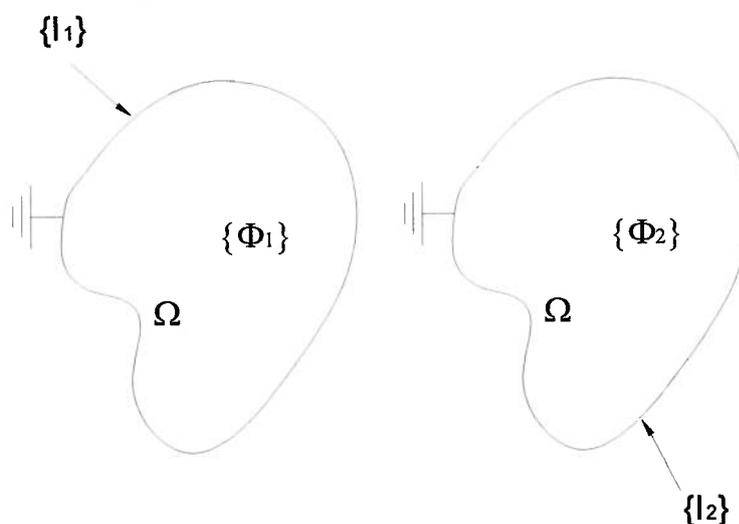


Figura 17 Carregamentos citados no teorema de Betti-Maxwell.

O teorema diz que “se dois conjuntos de carregamentos agem numa estrutura de comportamento linear, o trabalho realizado pelo primeiro conjunto de carregamentos sobre os potenciais produzidos pelo segundo conjunto de carregamentos é igual ao trabalho realizado pelo segundo conjunto sobre os potenciais produzidos pelo primeiro conjunto”. Assim, num formato de elementos finitos:

$$\{I_1\}^T \{\Phi_2\} = \{I_2\}^T \{\Phi_1\} \quad (4.4)$$

onde $\{I_1\}$ e $\{I_2\}$ são vetores de carregamentos (correntes) nodais e $\{\Phi_1\}$ e $\{\Phi_2\}$ são vetores de potenciais nodais. Cada lado da equação é chamado de energia mútua dos sistemas.

Para simplificar, inicialmente considera-se $\{I_2\}$ como sendo:

$$\{I_2\}^T = \{0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0\} \quad (4.5)$$

Com a eq. (2.19) ($[K]\{\Phi\} = \{I\}$) e a (4.5), e sabendo-se que a matriz $[K]$ é simétrica, transforma-se (4.4) em:

$$\{\Phi_1\}^T [K] \{\Phi_2\} = \phi_1 \quad (4.6)$$

sendo ϕ_1 o potencial escalar, ou componente de $\{\Phi_1\}$ na mesma posição (linha) da componente de corrente unitária em $\{I_2\}$. Se são derivados ambos os lados da equação, tem-se:

$$\frac{\partial(\{\Phi_1\}^T [K] \{\Phi_2\})}{\partial \rho_k} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho_k} \quad (4.7)$$

Agora, atendo-se ao lado esquerdo da eq. (4.7), obtém-se

$$\frac{\partial(\{\Phi_1\}^T [K] \{\Phi_2\})}{\partial \rho_k} = \frac{\partial \{\Phi_1\}^T}{\partial \rho_k} [K] \{\Phi_2\} + \{\Phi_1\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \rho_k} \{\Phi_2\} + \{\Phi_1\}^T [K] \frac{\partial \{\Phi_2\}}{\partial \rho_k} \quad (4.8)$$

Pode-se demonstrar que, para calcular a derivada dos vetores e da matriz, deve-se derivar cada elemento correspondente. Com (2.19) aplicada a $\{\Phi_1\}$ e $\{I_1\}$, tira-se que:

$$\frac{\partial [K]}{\partial \rho_k} \{\Phi_1\} + [K] \frac{\partial \{\Phi_1\}}{\partial \rho_k} = \frac{\partial \{I_1\}}{\partial \rho_k} = 0 \quad (4.9)$$

A igualdade acima é verdadeira pois a corrente imposta não varia com as variáveis de projeto. Lembrando-se que a derivada dos vetores é obtida derivando-se cada componente do vetor, e que a transposta da inversa de uma matriz (que possua inversa) simétrica é igual à própria inversa da matriz, chega-se em:

$$\frac{\partial \{\Phi_1\}^T}{\partial \rho_k} = -\{\Phi_1\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \rho_k} [K]^{-1} \quad (4.10)$$

E, da mesma forma, com (2.19) aplicada a $\{\Phi_2\}$ e $\{I_2\}$ e a mesma simplificação feita acima:

$$\frac{\partial \{\Phi_2\}}{\partial \rho_k} = -[K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial \rho_k} \{\Phi_2\} \quad (4.11)$$

Substituindo-se (4.10) e (4.11) em (4.8), obtém-se:

$$\frac{\partial(\{\Phi_1\}^T [K] \{\Phi_2\})}{\partial \rho_k} = -\{\Phi_1\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \rho_k} \{\Phi_2\} \quad (4.12)$$

Desta forma, (4.7) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \rho_k} = -\{\Phi_1\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \rho_k} \{\Phi_2\} \quad (4.13)$$

Agora, lembrando-se que o índice i se refere à i -ésima medição (ou i -ésimo ponto de medição) e o j ao j -ésimo caso de carregamento (corrente aplicada), considere-se, como artifício matemático, a aplicação de uma corrente $\{I_2\}$, no primeiro ponto de medição, da seguinte maneira:

$$\{I_2\}^T = \{0 \ 0 \ 0 \ \dots \ (\phi_{11} - \phi_{110}) \ \dots \ 0 \ 0 \ 0\} \quad (4.14)$$

onde ϕ_{11} e ϕ_{110} são os potenciais calculado e medido, respectivamente, no ponto de medição (ou nó de finitos, pertencente ao contorno do domínio, que fornece os potenciais para cada caso de carga) referente a $i=1$ para o caso de carregamento de $j=1$. Considere-se, também, $\{I_1\}$ como o primeiro caso de carregamento, ou seja, aquele dado para $j=1$. A posição do termo não nulo em (4.14) será igual à de ϕ_{11} em $\{\Phi_1\}$, o vetor distribuição de potenciais devido a $\{I_1\}$. Como (4.14) é constante em relação às variáveis de projeto, pode-se escrever a eq. (4.13) como:

$$(\phi_{11} - \phi_{110}) \frac{\partial \phi_{11}}{\partial \rho_k} = -\{\Phi_1\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \rho_k} \{\Phi_2\} \quad (4.15)$$

onde $\{\Phi_2\}$ é o vetor distribuição de potenciais devido a $\{I_2\}$. Agora, seja o lado esquerdo de (4.15) obtido para a aplicação de correntes similares a $\{I_2\}$ em todos os pontos de medição, e para o um caso de carregamento j , e sejam os resultados adicionados. Ainda, sejam estas correntes similares a $\{I_2\}$ dadas pelo vetor $\{I_{ij}\}$, os potenciais resultantes dados por $\{\Psi_{ij}\}$ e a matriz global dada por $[K_j]$. O vetor $\{\Psi_{ij}\}$ e a corrente $\{I_{ij}\}$ são mostrados na Figura 18. Cada vetor $\{I_{ij}\}$ terá a forma:

$$\{I_{ij}\}^T = \{0 \ 0 \ 0 \ \dots \ (\phi_{ij} - \phi_{ij0}) \ \dots \ 0 \ 0 \ 0\} \quad (4.16)$$

e a posição do termo não nulo será determinada pelo grau de liberdade relativo ao nó de medição em questão. Assim, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{np} (\phi_{ij} - \phi_{ij0}) \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \rho_k} = -\sum_{i=1}^{np} \{\Phi_j\}^T \frac{\partial [K_j]}{\partial \rho_k} \{\Psi_{ij}\} \quad (4.17)$$

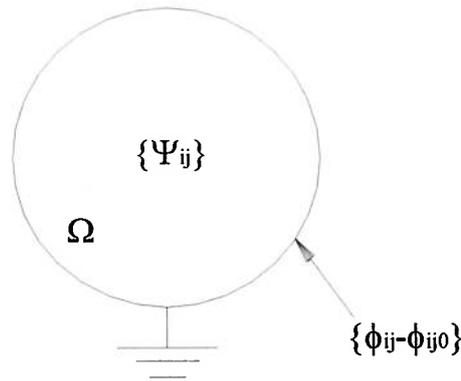


Figura 18 Aplicação de $\{I_{ij}\}$ ao domínio. Obtém-se a distribuição $\{\Psi_{ij}\}$.

Somando-se as somatórias para todos os ne casos de carregamento, seria obtida, finalmente:

$$\sum_{j=1}^{ne} \sum_{i=1}^{np} (\phi_{ij} - \phi_{ij0}) \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \rho_k} = - \sum_{j=1}^{ne} \sum_{i=1}^{np} \{\Phi_j\}^T \frac{\partial [K_j]}{\partial \rho_k} \{\Psi_{ij}\} \quad (4.18)$$

que é igual à eq. (4.3). Assim, o gradiente da função objetivo está definido.

Mas, uma simplificação pode ser feita. A eq. (4.17) pode ser escrita na forma:

$$- \sum_{i=1}^{np} \{\Phi_j\}^T \frac{\partial [K_j]}{\partial \rho_k} \{\Psi_{ij}\} = - \{\Phi_j\}^T \frac{\partial [K_j]}{\partial \rho_k} (\{\Psi_{1j}\} + \{\Psi_{2j}\} + \dots + \{\Psi_{npj}\}) \quad (4.19)$$

Para sistemas lineares, pode-se escrever:

$$(\{\Psi_{1j}\} + \{\Psi_{2j}\} + \dots + \{\Psi_{npj}\}) = [K_j]^{-1} (\{I_{1j}\} + \{I_{2j}\} + \dots + \{I_{npj}\}) \quad (4.20)$$

onde $\{I_{ij}\}$ seria a corrente responsável por $\{\Psi_{ij}\}$. Isto significa que a soma dos potenciais pode ser obtida aplicando-se ao sistema a soma das correntes. Desta forma, sendo $\{\Psi_j^*\}$ o vetor de potenciais obtido para a aplicação de todas as correntes ao mesmo tempo, num mesmo caso de carregamento, ou seja, para a soma de todas as $\{I_{ij}\}$, com i de 1 a np , obtém-se:

$$\{\Psi_j^*\} = (\{\Psi_{1j}\} + \{\Psi_{2j}\} + \dots + \{\Psi_{npj}\}) \quad (4.21)$$

Pode-se, então, modificar (4.19) para:

$$- \sum_{i=1}^{np} \{\Phi_j\}^T \frac{\partial [K_j]}{\partial \rho_k} \{\Psi_{ij}\} = - \{\Phi_j\}^T \frac{\partial [K_j]}{\partial \rho_k} \{\Psi_j^*\} \quad (4.22)$$

e (4.18) para:

$$\sum_{j=1}^{ne} \sum_{i=1}^{np} (\phi_{ij} - \phi_{ij0}) \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \rho_k} = - \sum_{j=1}^{ne} \{\Phi_j\}^T \frac{\partial [K_j]}{\partial \rho_k} \{\Psi_j^*\} \quad (4.23)$$

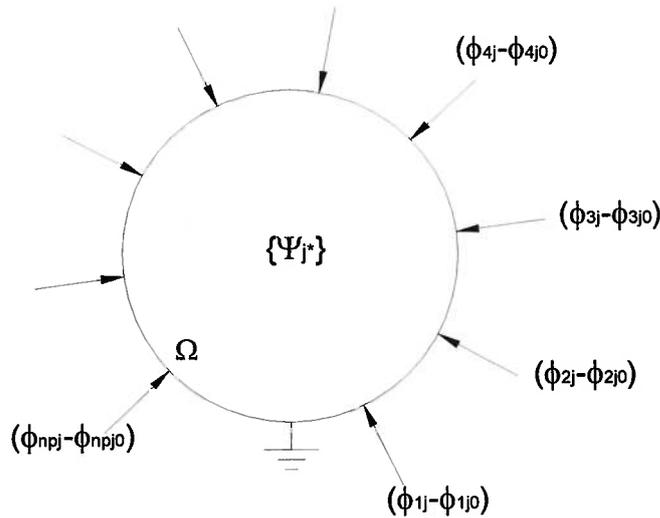


Figura 19 Aplicação de $\{I_{ij}\}$, com i de 1 a np , todas as correntes ao mesmo tempo. Obtém-se a distribuição $\{\Psi_j^*\}$.

Isto representa uma grande simplificação computacional.

Os elementos ou coeficientes da derivada da matriz $[K_j]$ em relação a ρ_k , não-nulos, são, apenas, os dependentes de ρ_k . Portanto, se as variáveis de projeto são definidas num elemento finito, os coeficientes da derivada de $[K_j]$ são dados por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [K_k]}{\partial \rho_k} &= \frac{\partial \left(\int_{V'_k} [B_k]^T [B_k] \sigma_k \det[J_k] dV'_k \right)}{\partial \rho_k} \\ &= \int_{V'_k} [B_k]^T [B_k] \frac{\partial(\sigma_k)}{\partial \rho_k} \det[J_k] dV'_k \\ &= \frac{\partial(\sigma_k)}{\partial \rho_k} \int_{V'_k} [B_k]^T [B_k] \det[J_k] dV'_k \\ &= (p \rho_k^{p-1} \sigma_A - p \rho_k^{p-1} \sigma_B) \int_{V'_k} [B_k]^T [B_k] \det[J_k] dV'_k \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde o índice k se refere ao k -ésimo elemento finito. A última integral da equação, neste trabalho, foi calculada numericamente. Como os demais coeficientes da derivada de $[K_j]$ são nulos, a eq. (4.23) pode ser dada por:

$$\sum_{j=1}^{ne} \sum_{i=1}^{np} (\phi_{ij} - \phi_{ij0}) \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \rho_k} = - \sum_{j=1}^{ne} \{\Phi_j\}^T \frac{\partial [K_j]}{\partial \rho_k} \{\Psi_j^*\} = - \sum_{j=1}^{ne} \{\Phi_{kj}\}^T \frac{\partial [K_k]}{\partial \rho_k} \{\Psi_{kj}^*\} \quad (4.25)$$

onde $\{\Psi_{kj}^*\}$ e $\{\Phi_{kj}\}$ são os vetores $\{\Psi_j^*\}$ e $\{\Phi_j\}$ para o k-ésimo elemento finito.

Se, por outro lado, as variáveis são definidas nos nós, os coeficientes da derivada de $[K_j]$ são dados por:

$$\frac{\partial [K_v]}{\partial \rho_k} = \int_{V'_v} [B_v]^T [B_v] \frac{\partial (\sigma_v)}{\partial \rho_k} \det[J_v] dV'_v \quad (4.26)$$

Neste caso, foi usado um índice v na equação para salientar que existe mais de um elemento ao qual o k-ésimo nó pertence. Ainda, a derivada da condutividade não foi retirada da integral, como feito no caso de variáveis por elemento, pois depende das variáveis de integração. Nestas condições, a eq. (4.23) pode ser dada por:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{ne} \sum_{i=1}^{np} (\phi_{ij} - \phi_{ij0}) \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \rho_k} &= - \sum_{j=1}^{ne} \{\Phi_j\}^T \frac{\partial [K_j]}{\partial \rho_k} \{\Psi_j^*\} \\ &= - \sum_{v=1}^{nt_k} \sum_{j=1}^{ne} \{\Phi_{vj}\}^T \frac{\partial [K_v]}{\partial \rho_k} \{\Psi_{vj}^*\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde $\{\Psi_{vj}^*\}$ e $\{\Phi_{vj}\}$ são os vetores $\{\Psi_j^*\}$ e $\{\Phi_j\}$ para o v-ésimo elemento finito e nt_k é o número de elementos finitos que compartilham o k-ésimo nó.

Neste trabalho, conforme será novamente explicitado no texto, as variáveis por nó foram usadas em conjunto com o tipo de elemento tetraédrico. Assim, a eq. (4.26) pode ser modificada para:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [K_v]}{\partial \rho_k} &= [B_v]^T [B_v] \left(\int_0^1 \int_0^{(1-r)} \int_0^{(1-r-s)} \frac{\partial (\sigma_v)}{\partial \rho_k} dt ds dr \right) \det[J_v] \\ &= [B_v]^T [B_v] \frac{\partial \left(\int_0^1 \int_0^{(1-r)} \int_0^{(1-r-s)} \sigma_v dt ds dr \right)}{\partial \rho_k} \det[J_v] \end{aligned} \quad (4.28)$$

O cálculo desta última derivada, realizado analiticamente, é mostrado no Anexo B.

No caso da RS, por ser esta uma função explícita (e linear) das variáveis de projeto, as componentes do gradiente ficam simplesmente dadas por:

$$\frac{\partial (RS)}{\partial \rho_k} = \frac{V_k}{V_{min}} \quad (4.29)$$

resultado este obtido diretamente da eq. (3.8).

No caso da RVM, lembrando que:

$$w_k = \{(\rho_k^2 - 2\rho_k)(1 - dn_k) - dn_k + 2\} \quad (4.30)$$

e:

$$f_k = (2\rho_k - \rho_k^2) \quad (4.31)$$

obtém-se:

$$\frac{\partial(w_k f_k)}{\partial \rho_k} = (4\rho_k^3 - 12\rho_k^2)(dn_k - 1) - 12\rho_k + 10\rho_k dn_k - 2dn_k + 4 \quad (4.32)$$

5 IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO

Com toda a base teórica introduzida, será dada uma explicação sobre as implementações realizadas. Primeiramente, porém, será introduzido o conceito de “fantoma” numérico.

5.1 “Fantoma” Numérico

“Fantoma” numérico é um domínio discretizado em elementos finitos, do qual podem ser obtidos os valores de entrada ϕ_{ij0} para o algoritmo de geração de imagens. Assim, reproduz, de forma aproximada, o corpo de um paciente a ser tomografado.

Da mesma maneira que na situação real, correntes elétricas são injetadas e potenciais são medidos, considerando-se diversos casos de carregamento. Os ruídos provenientes do sistema de aquisição de dados e de agentes externos, como campos elétricos, podem ou não ser emulados.

Para que uma situação mais próxima da real (de reconstrução da imagem) seja simulada, a discretização do domínio do “fantoma” deve ser maior que a discretização da malha em que se reconstitui a imagem (a malha de finitos mais discretizada será chamada de **malha M**). Isto porque, segundo a teoria de MEF, com o refinamento da malha, o campo de potenciais elétricos é mais bem aproximado, tendendo a se igualar à resposta do modelo matemático da eq. (2.1) no limite em que o tamanho dos elementos finitos tende a zero.

Para análise do algoritmo, porém, é interessante que se verifique a resposta obtida também num caso de discretizações iguais. O ato de obter uma imagem nestas condições é chamado de crime inverso ou crime de inversão; a malha do “fantoma”, neste caso, será chamada de **malha C**. Ambos os procedimentos de análise, os quais utilizam as malhas C e M, foram realizados neste trabalho e serão mostrados adiante.

A reconstituição da imagem foi feita, em todas as análises, em malha com discretização idêntica à da C.

5.2 Algoritmos Implementados

Dois algoritmos foram implementados: um auxiliar, de tratamento de dados, e o algoritmo principal. Os dois serão vistos com detalhes.

Ambos recebem dados de entrada. O algoritmo principal recebe, por exemplo, os potenciais elétricos nodais do “fantoma” numérico e dados mais completos com relação ao modelo, como posição de eletrodos, número de casos de carregamento, etc., mas os dois possuem um conjunto de dados comum (o que poderá ser modificado, posteriormente): basicamente, o número de elementos finitos, o número de nós, as conectividades de cada elemento e a posição – ou coordenada - dos nós. Tais informações são provenientes de um programa comercial de elementos finitos relativamente difundido no meio acadêmico: o ANSYS. Nele, é criado o corpo (cilíndrico, por exemplo), este é “malhado”, sendo que o tamanho dos elementos resultantes pode ser aproximadamente controlado, e então um arquivo ASCII com extensão “.txt” é gerado, que contém o conjunto de dados comum citado acima. Um exemplo de arquivo deste tipo é mostrado no apêndice no fim deste trabalho.

5.2.1 Algoritmo Auxiliar

Este algoritmo tem papel secundário neste trabalho. Mas torna o processo de geração do arquivo de entrada do algoritmo principal simples e automatizado.

Sua função é, basicamente, encontrar os locais onde serão aplicadas as correntes e os potenciais nulos (casos de carregamento), e serão medidos os potenciais nodais. Com estas informações, é gerado o arquivo de entrada para o algoritmo principal, citado anteriormente.

O programa recebe dados de coordenadas nodais e conectividades, além de números de nós e de elementos. Então, inicia a manipulação dos dados, que consiste num reconhecimento da geometria. Com informação sobre a geometria, divide-a em fatias e determina as posições de interesse.

O algoritmo é genérico o suficiente para lidar com domínios de formas complexas. Porém, é aconselhável, para resultados satisfatórios, que tenham uma base superior e uma inferior definidas (como um cilindro, por exemplo), ambas paralelas ao plano xy (definido no ANSYS). Também escreve, no arquivo de saída, os dados sobre materiais do domínio, valores de correntes aplicadas e o tamanho dos elementos finitos correspondentes ao modelo de eletrodo.

5.2.2 Algoritmo Principal

Antes, deve ser explicado o processo de obtenção das variáveis de projeto (referentes aos elementos ou aos nós do domínio, e referentes aos parâmetros de eletrodo). Então, será explicado o algoritmo e mostrado o fluxograma correspondente.

Inicia-se, como visto na Figura 20, pela obtenção das constantes do modelo de eletrodo e, então, realiza-se o cálculo das densidades dos elementos do domínio. Assim, duas fontes de potenciais ϕ_{ij0} são usadas, uma para cada caso. No primeiro caso, simula-se a situação de um domínio homogêneo e conhecido, de onde se retiram os ϕ_{ij0} nos eletrodos, com j indo de 1 a n_e , ou seja, com n_e casos de carregamento (e $2n_e$ soluções do algoritmo de gradientes conjugados, segundo a eq. (4.23)). Por meio destes potenciais e fixando-se as propriedades do domínio homogêneo, é possível otimizar a função objetivo, sendo as incógnitas do problema as constantes do modelo de eletrodo. Porém, estas constantes não precisam, necessariamente, ser calculadas, mas podem ser fornecidas ao programa em situações especiais e, neste caso, a sua otimização é descartada (**haverá aviso prévio sobre a ocorrência de tais situações**). Num segundo passo, pode-se então proceder para a obtenção das demais variáveis de projeto - as densidades dos elementos do domínio - através dos dados de um “fantoma” com distribuição de propriedades heterogênea. Neste passo final, fixam-se as constantes de eletrodo encontradas no anterior. A situação em que as constantes de eletrodo forem fornecidas para o programa será tratada como um caso especial.

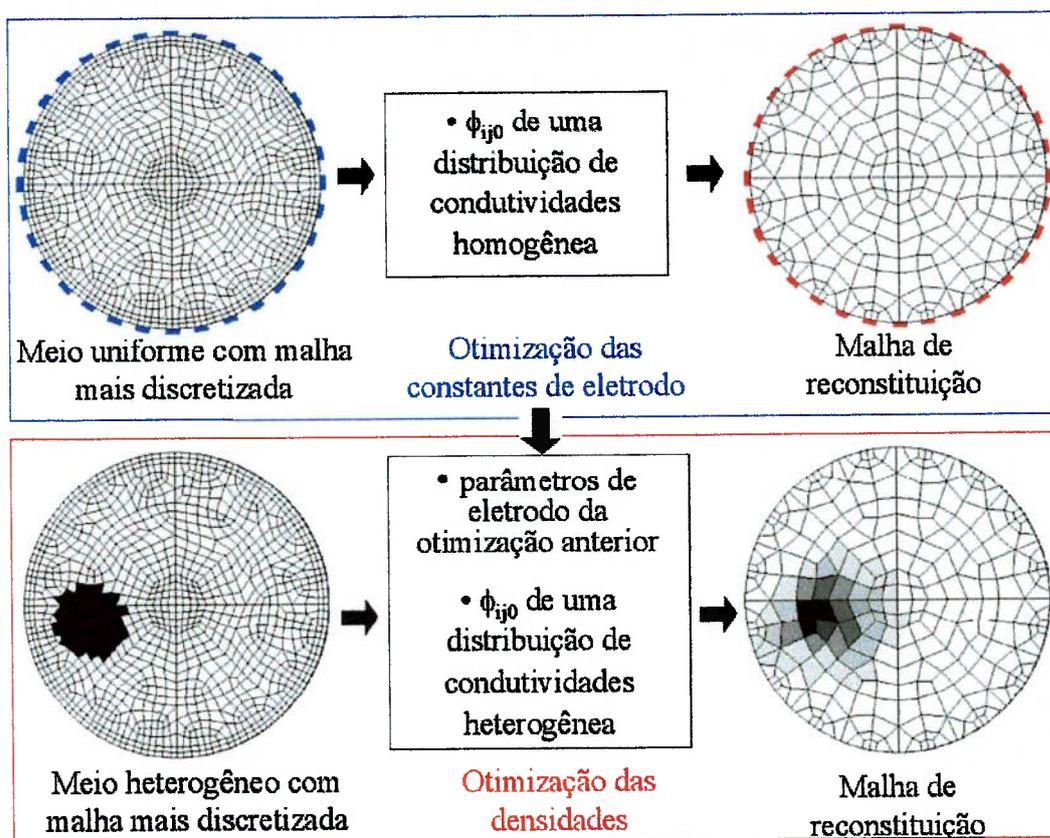


Figura 20 Processo usado para obtenção da imagem. As constantes de eletrodo são entrada para a otimização das densidades.

Para cada um dos dois processos (mostrados na Figura 20) foi criado um programa diferente, mas com fluxograma semelhante. O fluxograma genérico de cada um destes dois processos é visto na Figura 21.

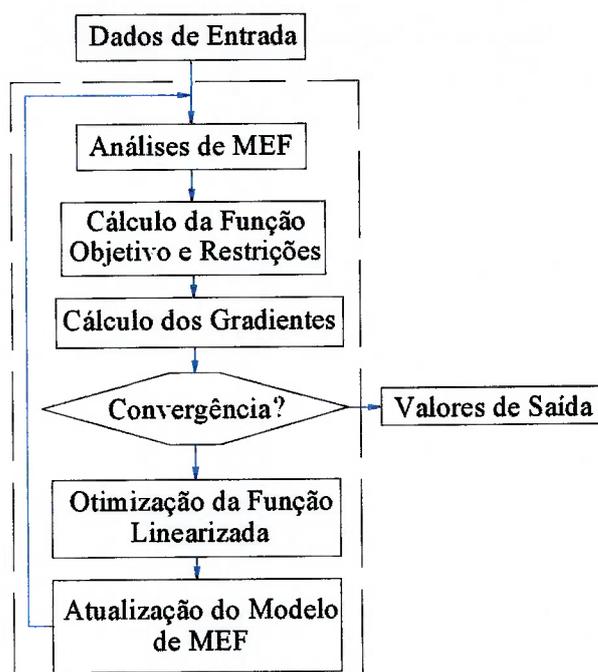


Figura 21 Fluxograma referente à determinação das densidades no interior do domínio e dos parâmetros de eletrodo.

Alternativamente, as constantes de eletrodo podem ser determinadas com o mesmo conjunto de dados de entrada (ϕ_{ij0}) usados para obtenção da imagem. Neste caso, não é necessário o conhecimento dos potenciais elétricos do meio uniforme. O processo de obtenção das variáveis de projeto nestas condições não foi explorado neste trabalho.

O fluxograma da Figura 21 é formado por duas etapas principais, realizadas após a declaração de variáveis e a etapa de leitura de dados: o tratamento dos dados e a geração dos arquivos de saída. Arquivos de saída são necessários para que se plote, por exemplo, o resultado final da otimização. Em seguida, estas etapas serão descritas em detalhes.

5.2.2.1 Leitura de Dados

Lêem-se o número de nós e o número de elementos; são lidas, também, as coordenadas dos nós e as conectividades dos elementos. Tais dados referem-se à malha de reconstituição de imagens.

Cada dado lido é convertido num tipo de variável. Os números de nós, de elementos e as conectividades são convertidos para inteiros e as coordenadas para números reais.

Então, os dados de materiais (valores de condutividade) são obtidos e convertidos em números reais.

O algoritmo também armazena o número de eletrodos, de casos de carregamento e ainda toma dados sobre os casos de carregamento (numeração dos nós de aplicação de corrente, numeração dos nós de potenciais nulos e valores de corrente), sobre os pontos de medição (numeração dos nós) e sobre posição de eletrodos.

Então, o arquivo de leitura é fechado.

É aberto um novo arquivo, com os potenciais nodais ϕ_{ij0} . Estes são lidos, convertidos para números reais e o arquivo é fechado.

Finalmente, é aberto o arquivo das constantes de eletrodo, entradas do algoritmo de reconstrução da imagem. São lidas, convertidas para números reais e o arquivo fonte é fechado.

5.2.2.2 Tratamento dos Dados

Nesta etapa, são calculadas as matrizes dos elementos finitos para materiais arbitrários pela rotina **Kelemento**. Também são montadas as matrizes dos modelos de eletrodo, uma para cada material (σ_{Ael}/t_{el} e σ_{Bel}/t_{el}), pela rotina **Keleetrodo**.

Prosseguindo, são inicializadas algumas variáveis, é escolhido o fator de penalização e selecionada a sugestão inicial para os valores das variáveis de projeto, e, então, inicia-se o processo iterativo (“loop”), ou a PLS propriamente dita.

Uma rotina é chamada pelo programa (rotina **otmef**). Ela determina os potenciais nodais necessários para cálculo dos gradientes da função objetivo, cálculo este baseado nos valores correntes de variáveis de projeto (no caso da primeira iteração, a sugestão inicial é usada). O número de chamadas à rotina será igual ao número de casos de carregamento (ne) e, conforme é mostrado pela eq. (4.23), cada chamada (correspondente a um caso de carregamento) produzirá dois vetores de potenciais nodais.

Após os ne casos, o gradiente da função objetivo de uma iteração está montado (na rotina **gradf**). Também o valor da função objetivo, a eq. (3.2), é calculado.

Neste ponto, as condições de parada do processo iterativo são testadas. O programa pára se ocorrer uma das três situações seguintes: a) o número de iterações ultrapassar um limite predeterminado e obtido com base em observações experimentais; b) a função objetivo, para a distribuição de material da respectiva iteração, apresentar valor desprezível; c) o valor absoluto da diferença entre os valores da função objetivo da iteração atual e da anterior, dividida pelo valor da função da iteração anterior (ou seja, a variação relativa da função custo), for desprezível. Por desprezível entenda-se: valor muito baixo, em geral, seis ordens de grandeza inferior ao valor de um potencial nodal médio obtido, mas diferente de zero, pois algum erro deve ser esperado.

A condição mais importante é a b). Se for satisfeita, as chances de se ter um bom resultado são grandes, descontando-se algum erro.

A condição c) ocupa um segundo lugar em importância, pois indica que um mínimo foi encontrado, o qual pode não ser o esperado.

A condição a) somente é usada quando o algoritmo leva um grande número de iterações para alcançar o mínimo da função objetivo, ou seja, quando a convergência é lenta.

Continuando com o algoritmo principal, são então calculados os valores de limites móveis (pela rotina **limits**). Depois, a rotina de otimização (**otdsplp**) é chamada e o resultado (constantes de eletrodo) é obtido.

O processo iterativo é repetido.

Ao final do processo iterativo, valores ótimos das variáveis de projeto são obtidos.

5.2.2.3 Geração dos Arquivos de Saída

Um arquivo de saída tem os dados de leitura para o ANSYS, que consistem dos comandos necessários para que este programa reconstrua a malha de MEF e, ainda, atribua cores diferentes para os diferentes valores de condutividade obtidos. Isto é feito com tons diversos de cinza, numa escala que varia do branco ao preto.

Os valores de constantes de eletrodo são também escritos no arquivo (juntamente aos comandos), para verificação e comparação com os valores reais.

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Primeiramente serão mostradas as respostas para o caso de elementos hexaédricos. Em seguida, serão vistas as respostas com elementos tetraédricos. Para os hexaédricos, foram usadas variáveis por elemento e para os tetraédricos, atribuídas variáveis por nó. Em todas as imagens, são vistas distribuições de condutividades.

Será apresentada a evolução dos resultados obtidos no decorrer dos estudos realizados durante o período do Mestrado. Esta forma de exposição tem a finalidade de mostrar a influência de cada variável usada, como uma restrição, por exemplo, no comportamento do algoritmo.

6.1 Respostas com Elementos Hexaédricos

Tanto os “fantomas” numéricos quanto o domínio de reconstituição de imagens são cilíndricos, de diâmetro 0,23m e altura 0,04m. As condutividades são iguais a $0,058824(\text{m}.\Omega)^{-1}$ (densidade nula e cor branca) e $0,000001(\text{m}.\Omega)^{-1}$ (densidade unitária e cor preta), e as correntes iguais a 0,001A. Tais condutividades representariam, numa situação prática, ar na tomografia de um meio aquoso. As constantes dos modelos de eletrodo, em todos os “fantomas”, são iguais a $100(\text{m}^2.\Omega)^{-1}$ e foram obtidas de HUA et al. (1993). As larguras a dos modelos de eletrodo são iguais a 0,005m.

Foram aplicadas correntes em apenas uma seção do domínio, a seção central. Oito camadas de elementos constituem a malha de elementos finitos onde se reconstitui a imagem e a malha C, e 14 camadas formam a malha M. Assim, a seção central fica compreendida entre a quarta e a quinta camadas, tanto para malha C quanto para a malha de reconstituição (Figura 24), e entre a sétima e oitava no caso da malha M (Figura 23). Foram utilizados 32 modelos de eletrodo acoplados ao domínio, permitiram-se apenas 100 iterações (no máximo) ao algoritmo e a convergência foi admitida para o valor da função objetivo ou a sua variação relativa menor que 10^{-6} . A sugestão inicial para as variáveis de projeto, para obtenção das densidades no interior domínio, foi igual a 0,96, ou seja, um caso de propriedades uniformemente distribuídas e iguais a $0,056471(\text{m}.\Omega)^{-1}$ ou igual a $0,054212(\text{m}.\Omega)^{-1}$, no caso de p ser igual a 2. Já o valor inicial das variáveis de projeto para cálculo das

constantes de eletrodo foi igual a 0,3 para a variável de projeto, ou seja, também um caso de propriedades uniformemente distribuídas, mas iguais a $136(\text{m}^2 \cdot \Omega)^{-1}$.

Dos dois padrões de excitação utilizados por Lima, Lima e Silva (2004), o diametral e o adjacente (ambos mostrados, novamente, na Figura 22), apenas o último foi usado. Isto porque rendeu resultados bidimensionais melhores. Basicamente, no diametral, os nós usados para aplicação de corrente e do terra (potencial nulo), num mesmo caso de carregamento, são diametralmente opostos (no caso de um domínio cilíndrico) e, no adjacente, os mesmos nós são “vizinhos”. Utilizaram-se 32 casos de carregamento adjacentes e 32 medições para cada caso, o que inclui, na medição, o eletrodo com potencial nulo e o eletrodo onde é aplicado o fluxo de corrente.

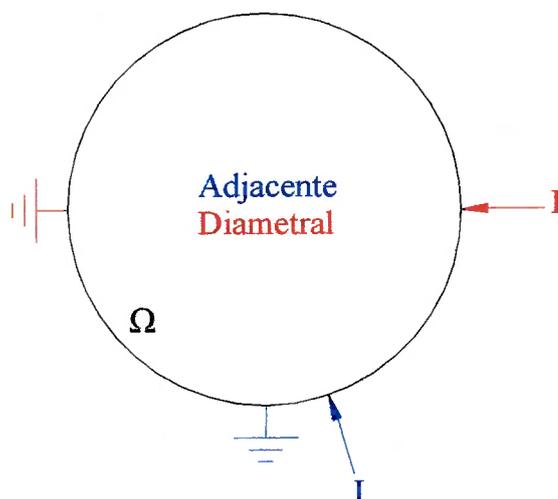


Figura 22 Padrões de excitação diametral e adjacente.

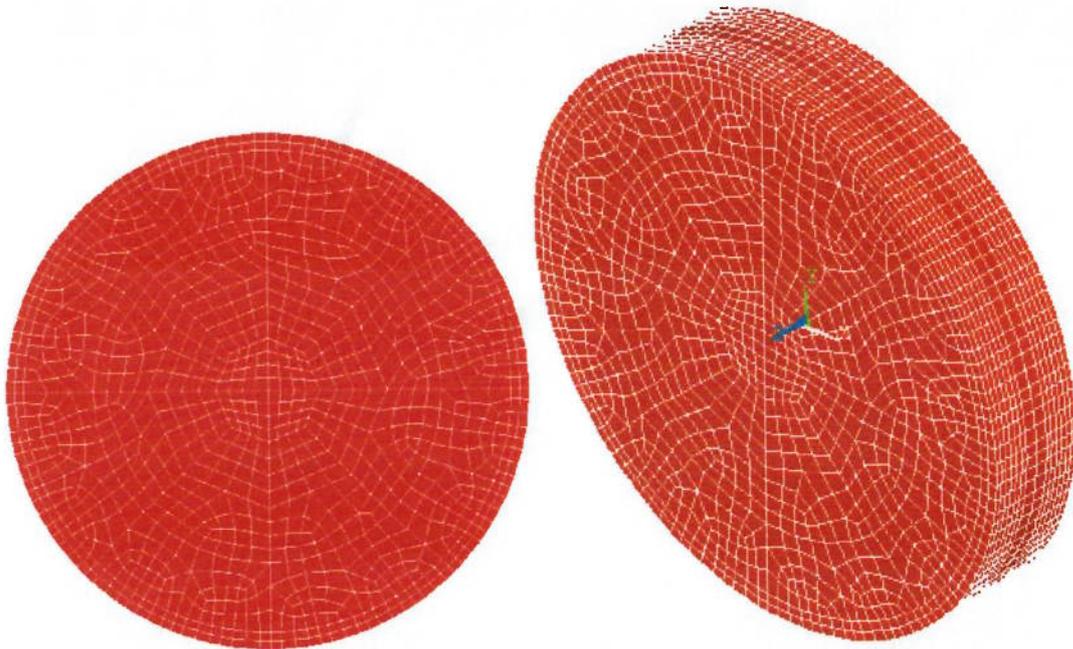


Figura 23 Malha M. Discretização de 15134 elementos e 17190 nós.

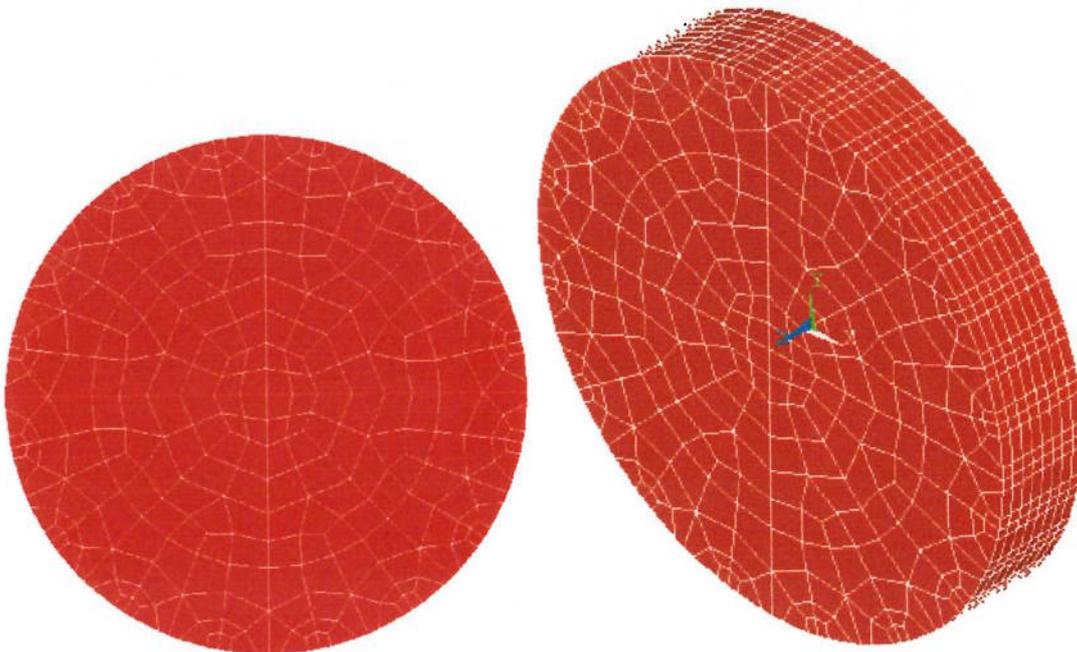


Figura 24 Malha C. Discretização de 2368 elementos e 3105 nós (igual à da malha de reconstituição).

As dimensões das camadas de elementos são vistas na Figura 25.

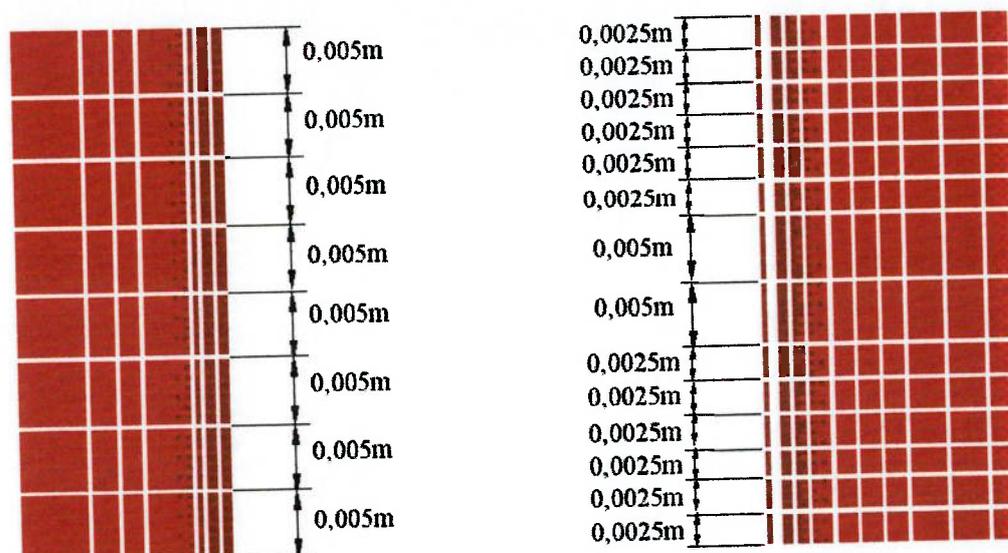


Figura 25 Dimensões das camadas das malhas C e M.

Nas figuras, devem-se desconsiderar os eixos x, y e z em seus centros (onde houver), advindos do ANSYS. A forma de exposição das respostas adotada foi através das diversas camadas de elementos finitos postas, cada uma, como uma figura diferente. A primeira fileira de camadas pertencerá ao “fantoma”, a segunda à imagem obtida, a terceira ao “fantoma”, etc..

6.1.1 Crime Inverso

Primeiramente são vistas imagens para o caso do crime inverso. Assim, a malha C foi utilizada para o “fantoma” (numérico). No processo usado para obtenção da imagem, as constantes do modelo de eletrodo não foram otimizadas, mas fornecidas $(100(\text{m}^2 \cdot \Omega)^{-1})$, ou seja, iguais às usadas no “fantoma”. A restrição RS pode ou não ser usada; assim, duas soluções diferentes são mostradas. O fluxograma do processo usado é visto na Figura 26.

Repostas obtidas para p igual a 2 foram omitidas por não apresentarem diferenças significativas em relação às geradas para p igual a 1.

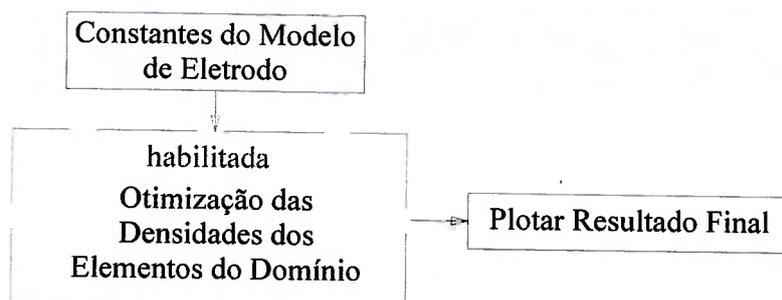


Figura 26 Fluxograma do processo para o crime inverso.

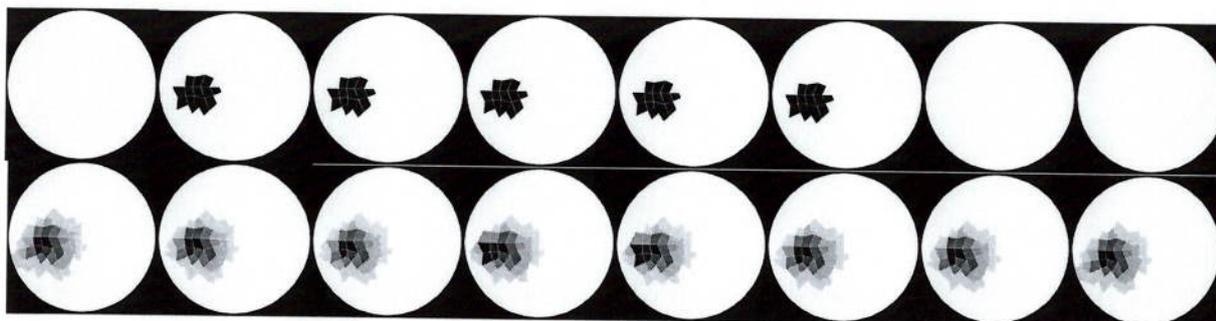


Figura 27 “Fantoma” numérico e resposta encontrada sem a restrição RS.

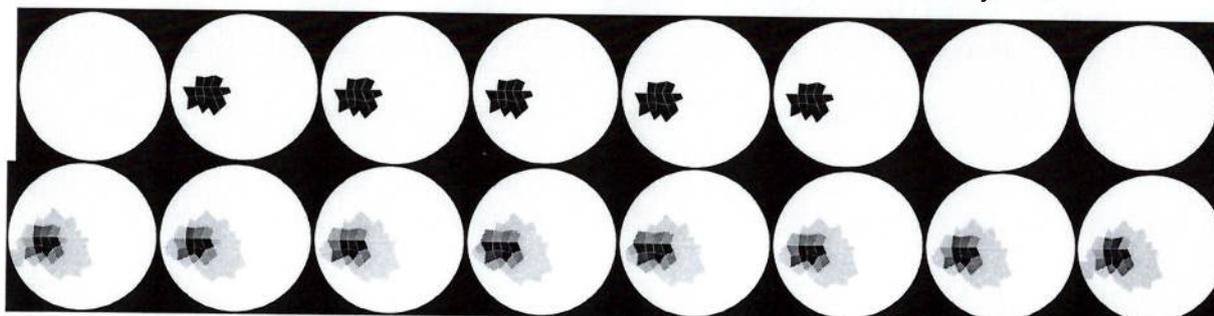


Figura 28 “Fantoma” numérico e resposta encontrada com a restrição RS. A restrição terminou ativa.

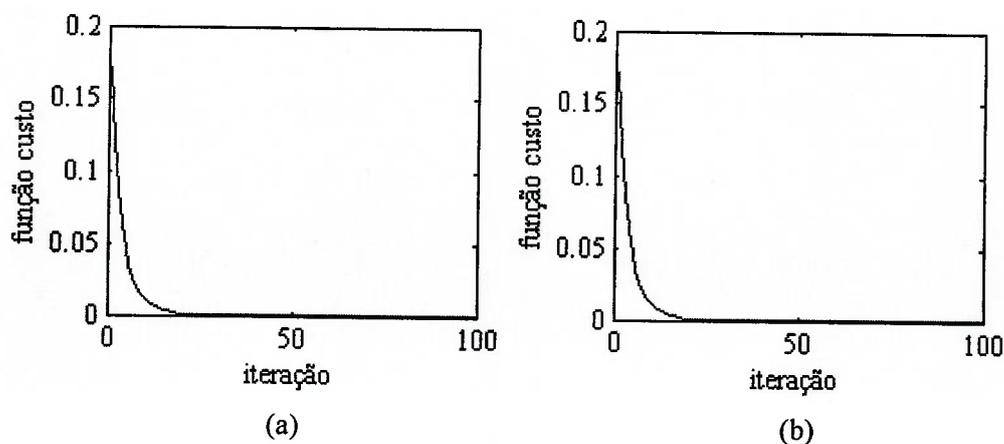


Figura 29 Curvas de convergência. (a) Sem RS (Figura 27) e valor mínimo 0,000015. (b) Com RS (Figura 28) e valor mínimo 0,000017.

A RS (eq. (3.8)) teve, quando aplicada (Figura 28), valor limite igual ao valor esperado, obtido do “fantoma”. Assim, foi imposto:

$$\sum_{k=1}^M \frac{V_k}{V_{\min}} \rho_k \leq \frac{V_f}{V_{\min}} \quad (6.1)$$

onde V_f é o volume da região escura do “fantoma” e V_{\min} é o menor volume de elemento finito da malha C. Em outras palavras, restringiu-se a resposta a valores menores ou iguais ao valor real procurado. Esta restrição terminou ativa.

Os gráficos da quantidade (em porcentagem do número total) de elementos finitos para cada faixa de valores das condutividades são vistos na Figura 30. Têm a finalidade de mostrar, quantitativamente, os resultados obtidos. Espera-se que grande parte seja igual aos valores máximo e mínimo utilizados, como no caso do “fantoma”. É visto que a maior parte das condutividades têm valores maiores que 0,058, como deveria ser, dado o “fantoma” utilizado. Também é visto que a restrição aumentou a quantidade de condutividades altas, ou seja, maiores do que ou iguais a 0,053, ao mesmo tempo que diminuiu a quantidade de densidades intermediárias; porém tais efeitos foram obtidos numa pequena escala.

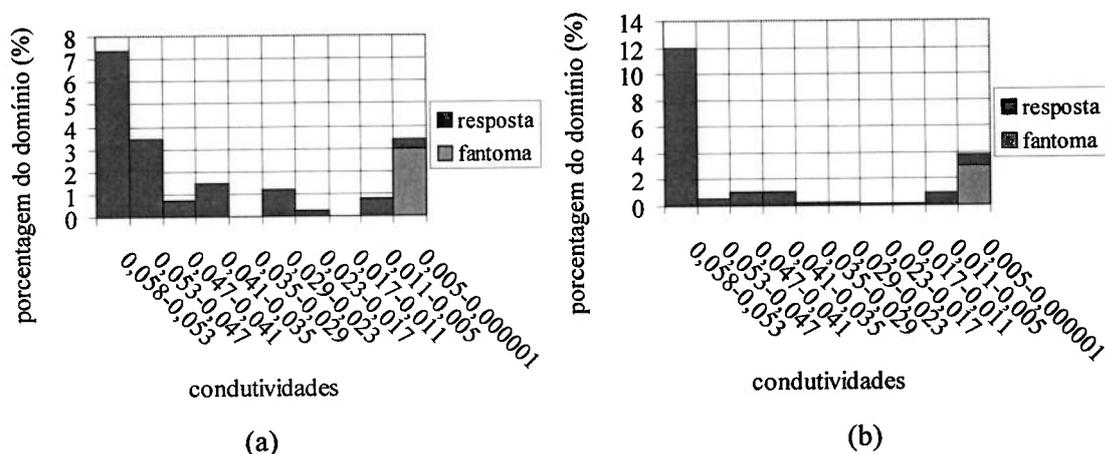


Figura 30 Gráficos da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das variáveis de projeto. (a) Referente à Figura 21. (b) Referente à Figura 22.

O algoritmo se mostrou quase insensível à variação ao longo das camadas (não houve mudança significativa na imagem, de uma camada para outra). Também, tendeu a diminuir a variação espacial das condutividades em cada camada,

“borrando” a imagem final. Estas divergências entre resultados e o “fantoma” são esperadas e explicadas na seqüência.

Primeiramente, existe um erro associado aos cálculos efetuados para obtenção das matrizes dos elementos finitos, para montagem da matriz global e para obtenção dos gradientes da função objetivo e da restrição. Também está associado aos cálculos efetuados para determinação dos potenciais nodais através do algoritmo de gradientes conjugados, que realiza processo iterativo, e para a solução do problema de otimização. Estes erros, numéricos, apesar de pequenos em relação às ordens de grandeza envolvidas, são absorvidos pela resposta.

Em segundo, poucos casos de carregamento foram aplicados e, ainda, concentrados da região central (entre as camadas de elementos 4 e 5). Assim, pode-se dizer que a observabilidade do meio tomografado é ruim, sendo a qualidade da observabilidade determinada pela quantidade e tipo dos carregamentos (carregamentos entre duas camadas de eletrodos, por exemplo, os quais não foram empregados), e pela disposição dos eletrodos no contorno do domínio. Desta forma, contribui-se para que a variação da imagem, de uma camada a outra, seja reduzida e, dentro de uma mesma camada, a imagem apresente o aspecto “borrado”, conforme verificaram Blue, Isaacson e Newell (2000). Com mais casos e tipos de carregamento e outras configurações espaciais de disposição de eletrodos (e, portanto, mais informação, em forma de potenciais medidos), a imagem será mais próxima do “fantoma”, desde que não haja redundância de informações, ou seja, distribuições de potencial aproximadamente semelhantes para casos de carregamento diferentes.

Em terceiro e último lugar, como já mencionado, é sabido que este problema inverso tem diversas soluções, sendo que todas elas minimizam a função objetivo, ou seja, há vários mínimos locais. Assim, acreditou-se que se outras restrições fossem impostas, já que foi notado que a RS não foi efetiva (Figura 28), as respostas obtidas seriam mais próximas da distribuição de condutividades do “fantoma”.

Comentou-se a restrição RS não foi efetiva e que a observabilidade do meio não é satisfatória. Porém, para os próximos resultados obtidos com a utilização dos elementos hexaédricos, foram mantidas as implementações utilizadas no presente item. Isto foi feito para que fosse comprovada a existência dos efeitos citados no caso do crime inverso, nos demais casos estudados, e para que outros efeitos pudessem ser

isolados e analisados. Portanto, as mesmas fontes de discrepâncias entre respostas e “fantoma” estão presentes no caso da reconstituição na malha menos discretizada, estudado em seguida.

6.1.2 Recostituição na Malha Menos Discretizada

Agora, as respostas para o caso da malha M serão mostradas (a partir deste ponto, não há mais crime inverso). Primeiramente, as constantes do modelo de eletrodo foram dadas $(100(\text{m}^2 \cdot \Omega)^{-1})$, ou seja, iguais às usadas no “fantoma”. Posteriormente, foram também calculadas.

O limite da restrição de sintonia teve seu valor posto como igual a V_{fM}/V_{\min} , sendo V_{fM} o volume da região escura do “fantoma” da malha M. Portanto, utilizou-se:

$$\sum_{k=1}^M \frac{V_k}{V_{\min}} \rho_k \leq \frac{V_{fM}}{V_{\min}} \quad (6.2)$$

V_{\min} é o menor volume de elemento finito da malha de reconstituição.

6.1.2.1 Otimização das Densidades (Dadas as Constantes de Eletrodo)

O fluxograma do processo utilizado é mostrado na Figura 31. As soluções do problema de otimização são vistas abaixo.

As explicações seguintes se fazem necessárias, dadas as diferentes quantidades de camadas do “fantoma” numérico e da malha de reconstituição que existirão nas respostas. A Figura 34 auxilia no entendimento do que será exposto. Na segunda fileira de imagens da Figura 32, a qual mostra as respostas encontradas, a primeira figura, da esquerda para a direita, é a resposta referente às duas primeiras figuras, também da esquerda para a direita, mas na primeira fileira de imagens, que mostra o “fantoma”. A segunda figura da resposta (segunda fileira) corresponde à terceira e à quarta figura do “fantoma” (primeira fileira) e a terceira à quinta e à sexta. Já a quarta figura da resposta corresponde apenas à sétima figura da fileira superior, de imagens do “fantoma”. Na quarta fileira da Figura 32, de respostas, a primeira figura, da esquerda para a direita, corresponde à primeira figura, também da esquerda para a direita, da terceira fileira, que possui imagens do “fantoma”. A segunda figura da resposta (quarta fileira) é referente à segunda e à terceira figura do “fantoma”

(terceira fileira), a terceira é referente à quarta e à quinta e a última à sexta e à sétima figura.

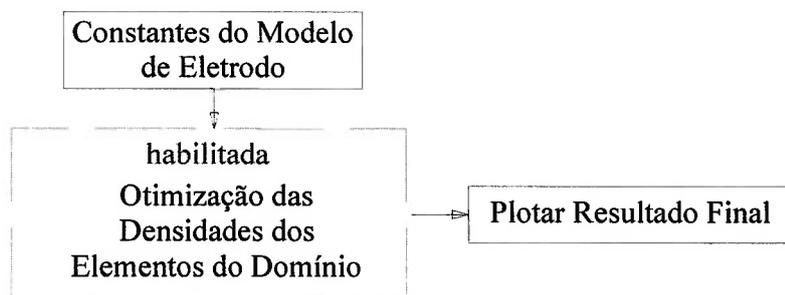


Figura 31 Fluxograma do algoritmo.

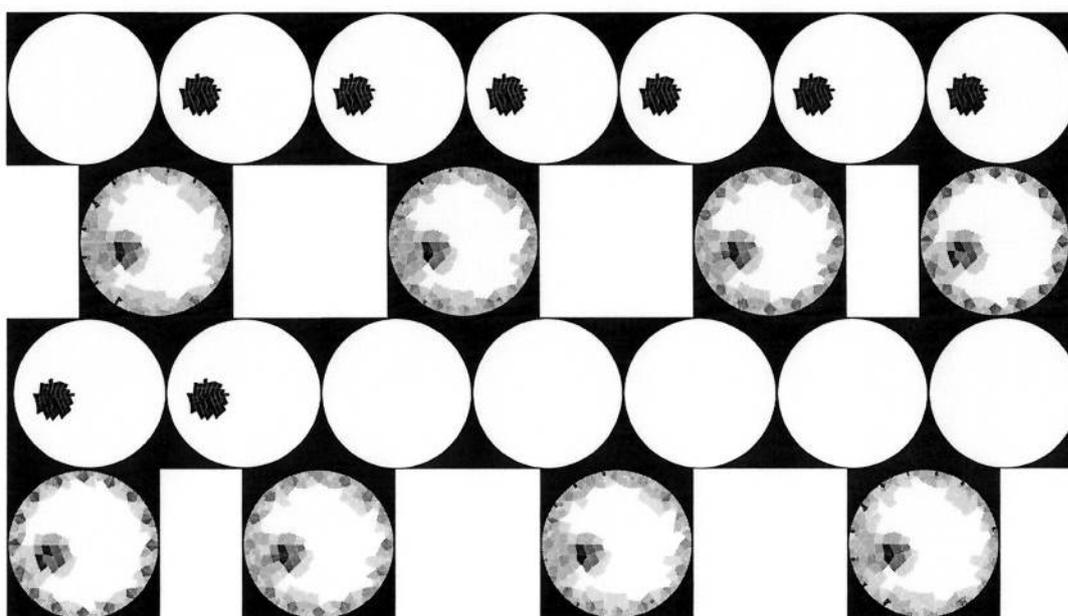


Figura 32 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Não há RS e as constantes do modelo de eletrodo não são otimizadas.

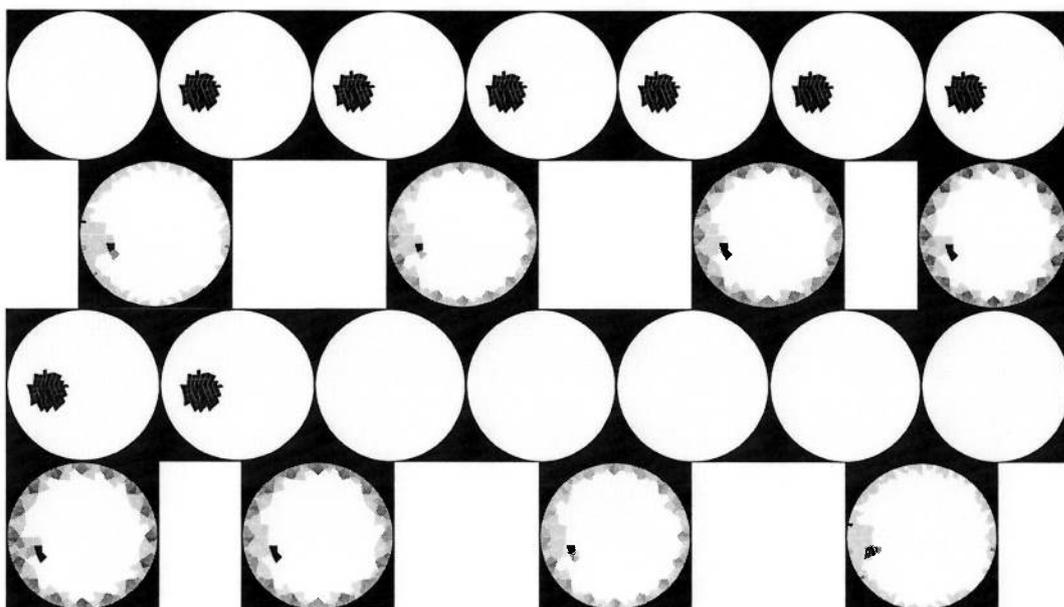


Figura 33 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Há RS e as constantes do modelo de eletrodo não são otimizadas. A restrição terminou ativa.

1	2	3	4	5	6	7	primeira fileira de imagens ("fantoma")
	1		2		3	4	
1	2	3	4	5	6	7	terceira fileira de imagens ("fantoma")
1		2		3		4	quarta fileira de imagens (resposta)

Figura 34 Fileiras de imagens.

Na comparação dos últimos dois casos, nota-se que a restrição não auxiliou na obtenção de imagens mais próximas do “fantoma”. Mas restringiu-se, de fato, a quantidade final de condutividades intermediárias, o que é confirmado num estudo dos gráficos na Figura 36.

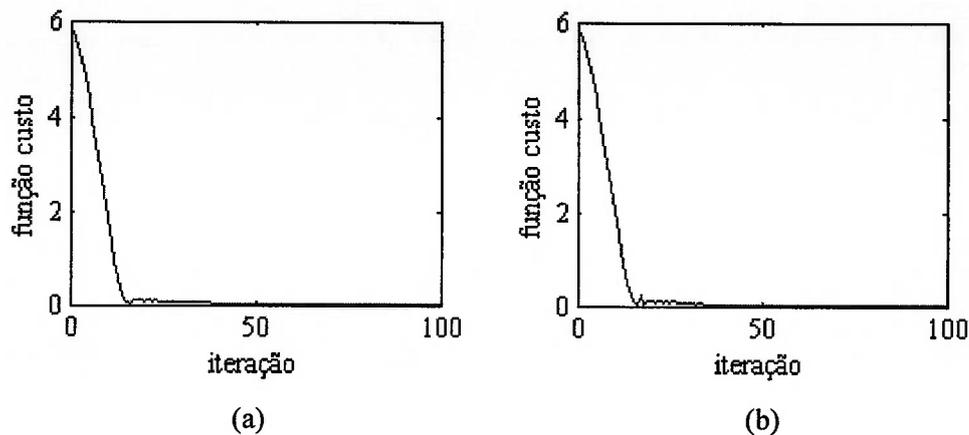


Figura 35 Curvas de convergência. (a) Sem RS (Figura 32) e valor mínimo 0,006019. (b) Com RS (Figura 33) e valor mínimo 0,003822.

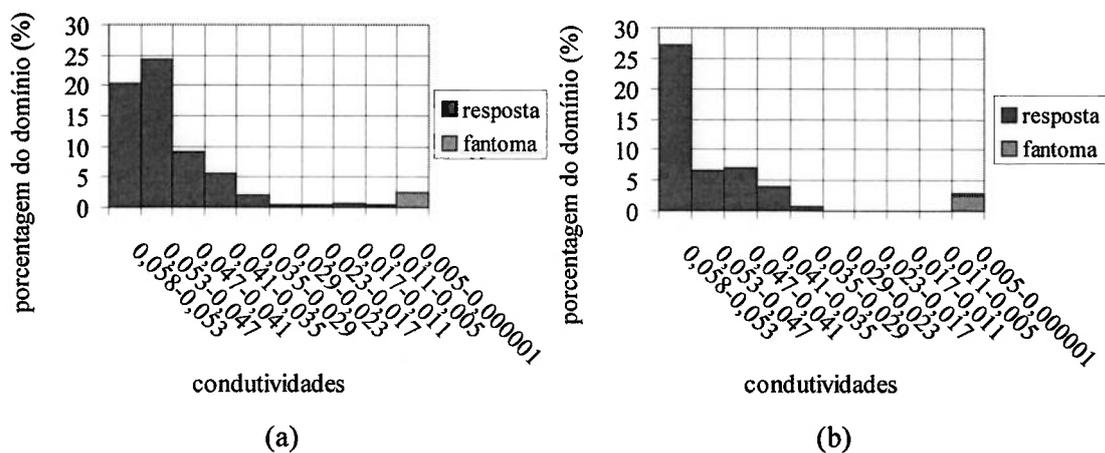


Figura 36 Gráficos da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das variáveis de projeto. (a) Referente à Figura 32. (b) Referente à Figura 33.

As regiões “borradas” ao redor do corpo de baixa condutividade e a pequena variação da imagem de uma camada para outra (efeitos também citados no item sobre as respostas do crime inverso) sugerem que as imagens podem ser melhoradas. Vê-se, ainda, que, nas camadas onde há eletrodos (e, conseqüentemente, modelos de eletrodo), ou seja, nas centrais, apresentaram-se densidades bastante baixas na periferia, representadas por cores escuras.

As mesmas justificativas para estas discrepâncias entre “fantoma” e imagem obtida, citadas no item sobre o crime inverso, podem ser usadas, como já mencionado, neste novo contexto. Mas há três novas fontes de divergências nessas duas últimas respostas, provenientes da diferença entre discretizações.

Primeiramente, a menor discretização da malha de reconstituição introduz divergências entre os potenciais obtidos em seu interior e os calculados através da análise de MEF do “fantoma”, mesmo no caso em que as condutividades e as constantes de eletrodo do “fantoma” são iguais às da malha de reconstituição (por exemplo, para as condutividades, mesmo no caso de distribuições uniformes nas duas malhas). Assim, a resposta final, ou o mínimo do problema de otimização, absorverá tais discrepâncias entre potenciais. Portanto, a imagem reconstruída a partir de uma malha mais discretizada, ou seja, a partir do “fantoma” na malha M, no caso em que são fornecidas constantes de eletrodo iguais às usadas nesta malha, salvo casos especiais ou atípicos, não será semelhante à imagem deste “fantoma”. Numa situação real, com um “fantoma” experimental (uma pessoa, por exemplo), que possui distribuição contínua de propriedades (“discretização infinita”), este efeito (diferenças entre as imagens do “fantoma” e as obtidas) também é esperado.

Em segundo, o algoritmo deve se adequar ao fato da malha de reconstituição possuir elementos maiores e com posições diferentes das encontradas na malha do “fantoma”.

Em terceiro, é sabido que existem erros nos valores de potenciais obtidos nos eletrodos onde se aplica a corrente e onde se impõe potencial nulo, no modelo de MEF. Isto ocorre pois a imprecisão numérica no cálculo dos potenciais, nos arredores do ponto de aplicação de um carregamento nodal e do ponto de imposição do potencial nulo a um nó, é grande. Portanto, estes erros se refletem nas imagens obtidas. No caso do crime inverso, o efeito da imprecisão não se propaga para a imagem, uma vez que as discretizações das malhas de reconstituição e do “fantoma” são iguais.

6.1.2.2 Otimização das Constantes do Modelo de Eletrodo e das Densidades

Finalmente, as constantes dos modelos de eletrodo foram também otimizadas (não foi imposta a RS a este problema). E, com estas, obtiveram-se novas imagens (houve casos restringidos e não restringidos, como se verá adiante). O fluxograma do processo de obtenção da imagem está representado na Figura 37.

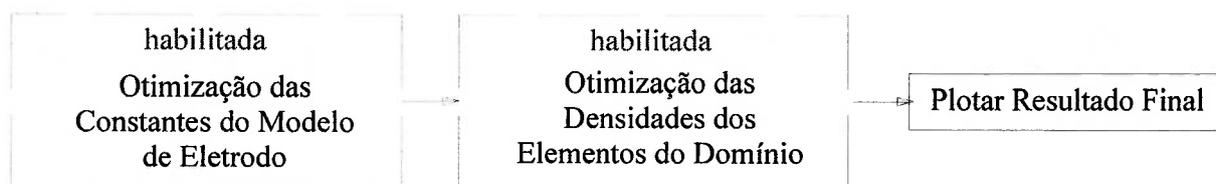


Figura 37 Fluxograma do algoritmo.

Otimização das constantes do modelo de eletrodo

Inicialmente (Tabela 1), permitiu-se um intervalo de valores para as constantes de 10 a $190(\text{m}^2.\Omega)^{-1}$ ($\sigma_{\text{Acl}}/t_{\text{el}}$ e $\sigma_{\text{Bcl}}/t_{\text{cl}}$, respectivamente, na eq. (3.7)). Porém, com base em literatura (HUA et al., 1993), optou-se por reduzir tais limites para 65 e $135(\text{m}^2.\Omega)^{-1}$, ou seja, 35%, para cima e para baixo (nesta situação, o valor inicial de 0,3 corresponde a $114(\text{m}^2.\Omega)^{-1}$). Com isto, buscou-se melhorar os valores de constantes encontrados. Os valores obtidos, nestas condições, foram iguais a $65(\text{m}^2.\Omega)^{-1}$, para todas as constantes.

De acordo com os resultados (tabelados abaixo), a otimização é muito sensível à diferença entre as discretizações do meio uniforme e do domínio de reconstituição.

Tabela 1. Valores das constantes do modelo de eletrodo obtidos no primeiro processo iterativo. Os valores usados na malha de distribuição de condutividades uniforme foram $100(\text{m}^2.\Omega)^{-1}$.

Constante	Valores encontrados $((\text{m}^2.\Omega)^{-1})$	Constante	Valores encontrados $((\text{m}^2.\Omega)^{-1})$
1	41,80	17	41,74
2	59,67	18	57,99
3	41,94	19	41,83
4	59,59	20	57,58
5	41,92	21	41,94
6	59,88	22	59,62
7	41,83	23	41,83
8	59,59	24	59,91
9	41,75	25	41,80
10	57,91	26	59,67
11	41,80	27	41,94
12	57,97	28	59,59
13	41,81	29	41,92
14	57,91	30	59,76

15	41,89	31	41,95
16	57,75	32	59,70

Otimização das densidades no interior do domínio

A RS à otimização das densidades no interior do domínio é dada pela eq. (6.2).

Por fim, são vistas as respostas para os dois conjuntos de constantes de modelo de eletrodo.

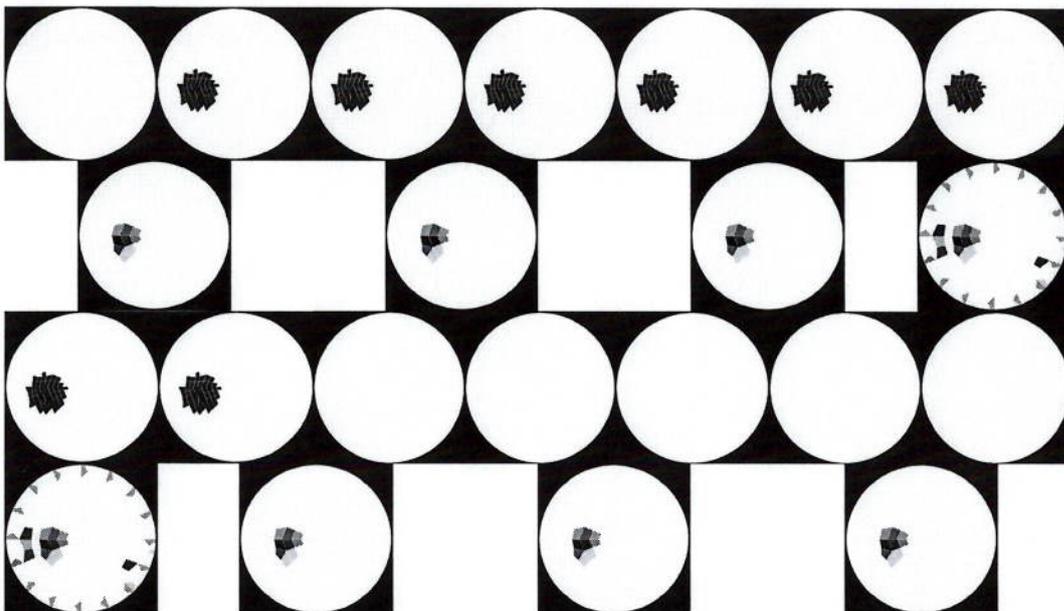


Figura 38 “Fantoma” numérico e resposta encontrada com otimização das constantes de eletrodo (valores dados na Tabela 1). Não há RS.

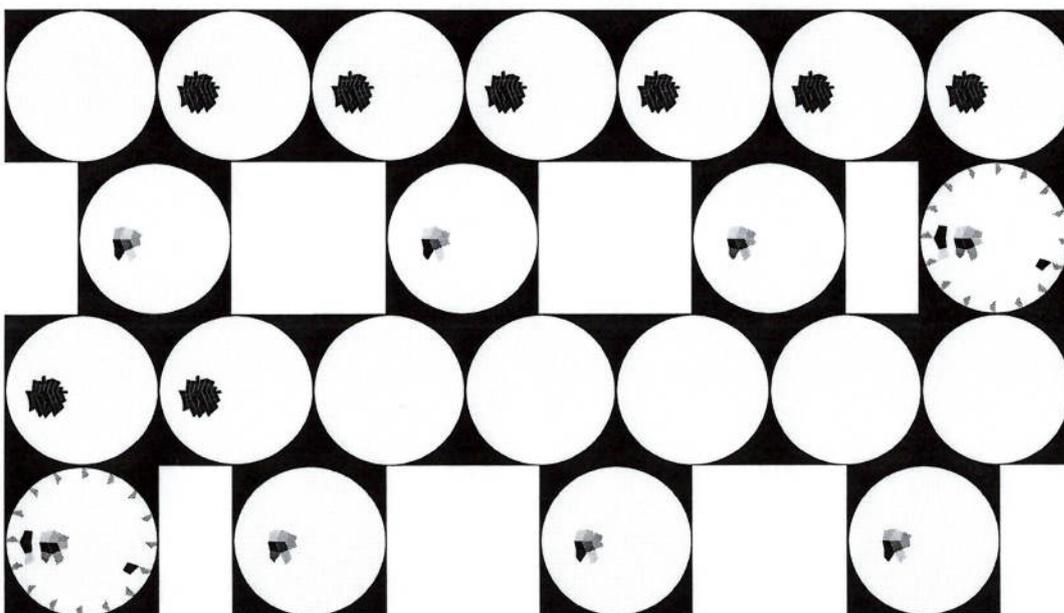


Figura 39 “Fantoma” numérico e resposta encontrada com otimização das constantes de eletrodo (valores dados na Tabela 1). Há RS, a qual terminou ativa.

Tais respostas (Figura 38 e Figura 39) são “melhores” que as obtidas para o caso em 6.1.2.1 (Figura 32 e Figura 33). Acontece que o erro absorvido, citado anteriormente e proveniente da diferença de discretizações, reside, agora, nas constantes de eletrodo, e não mais na imagem final. Em outras palavras, os valores de constantes de eletrodo, calculados neste estágio, estabelecem uma relação entre os potenciais medidos no “fantoma”, mais discretizado, e a distribuição de propriedades na malha de reconstituição, menos discretizada. Portanto, neste método de obtenção de imagens, é importante notar que as constantes não serão iguais às reais, existentes fisicamente, ou iguais às do “fantoma” numérico. Serão, por outro lado, constantes matemáticas, as quais variarão de acordo com a situação de aplicação do algoritmo e com a malha de reconstituição. Assim, sua obtenção pode ser vista como um processo de calibragem do algoritmo.

Vê-se, ainda, que não há, praticamente, variação da resposta ao longo das camadas (com exceção das centrais, onde estão posicionados os modelos de eletrodo) e que a RS não restringiu a distribuição de materiais (vide Figura 41).

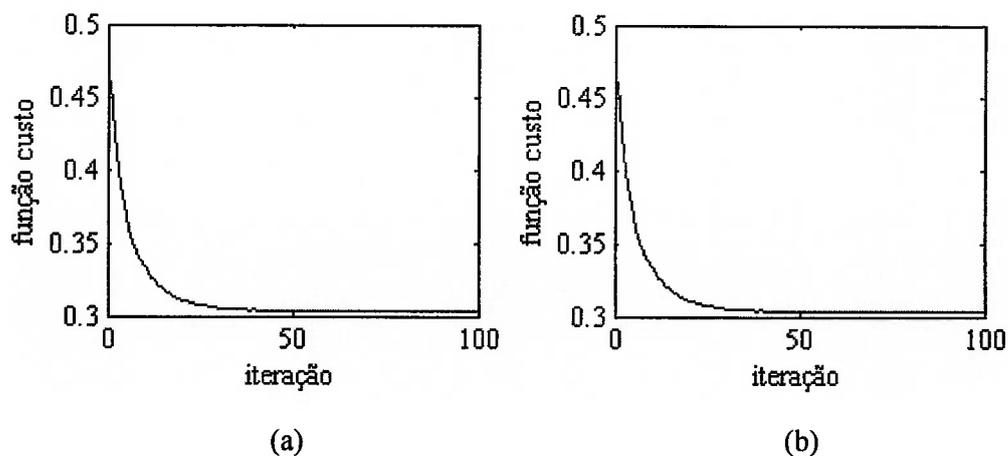


Figura 40 Curvas de convergência. (a) Sem RS (Figura 38) e valor mínimo 0,303145. (b) Com RS (Figura 39) e valor mínimo 0,303022.

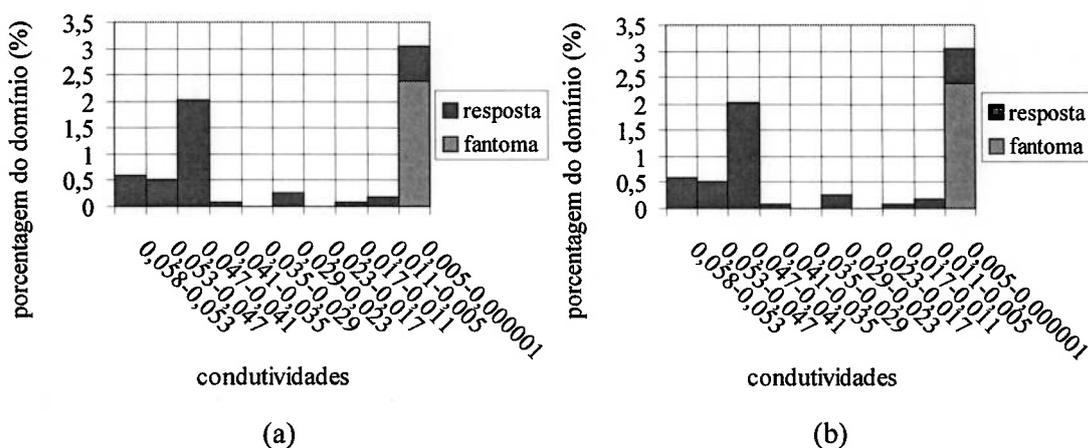


Figura 41 Gráficos da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das variáveis de projeto. (a) Referente à Figura 38. (b) Referente à Figura 39.

Quando a variação máxima das constantes de eletrodo é diminuída para 35%, dados os valores encontrados ($65(\text{m}^2 \cdot \Omega)^{-1}$), era esperado, como se comprova a partir do exame da Figura 42, que as características das respostas, tanto da Figura 39 quanto da Figura 33, estariam presentes. Isto também é visto no gráfico de convergência (Figura 43), no valor final da função objetivo e no gráfico da porcentagem de elementos. Portanto, tal artifício não é interessante. É mais vantajoso deixar o algoritmo “livre” para achar as constantes.

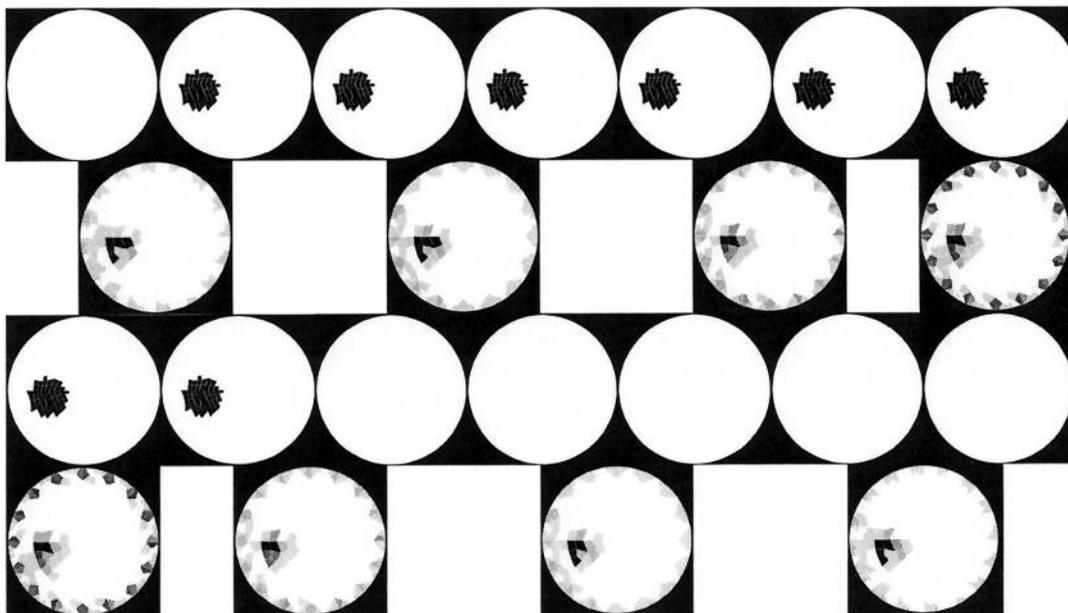


Figura 42 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Há RS e as constantes do modelo de eletrodo são otimizadas. Foi imposta uma restrição de 35% à variação das constantes.

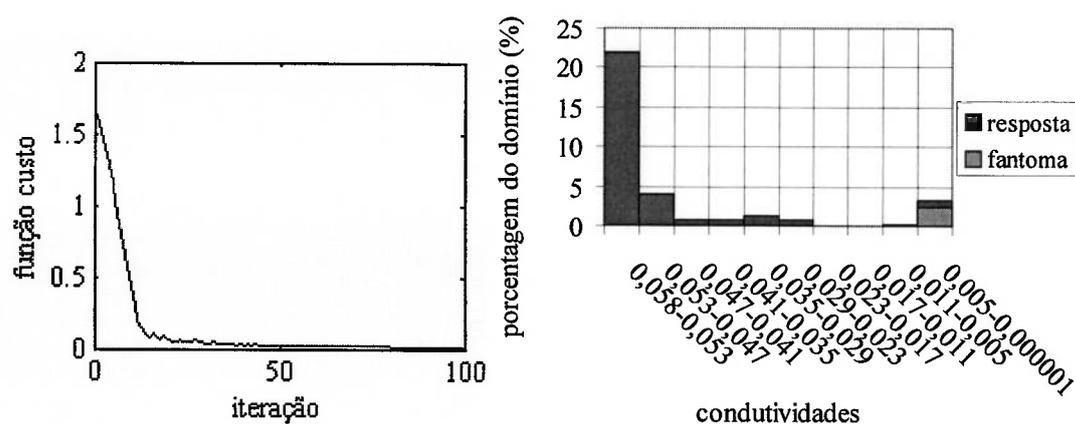


Figura 43 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das variáveis de projeto, ambos referentes à Figura 42. Há RS e restrição de 35% à variação das constantes de eletrodo. Valor mínimo: 0,009871.

Agora, serão vistas as respostas para p igual a 2. No caso de existência da RS no problema de otimização, a resposta mostrou uma pequena melhoria (imagens mais próximas do esperado) ao longo do eixo do domínio cilíndrico. Comparando-se estas respostas com as repostas para p igual a 1, pode-se notar um ligeiro aumento da quantidade de condutividades próximas do valor mínimo e uma ligeira diminuição das condutividades intermediárias, o que está representado na Figura 41 (para p igual a 1) e na Figura 47 (para p igual a 2). Isto mostra o efeito de p , o qual pode ser amplificado através da imposição de uma restrição efetiva ao problema de otimização, como realizado por Bensøe e Sigmund (2003).

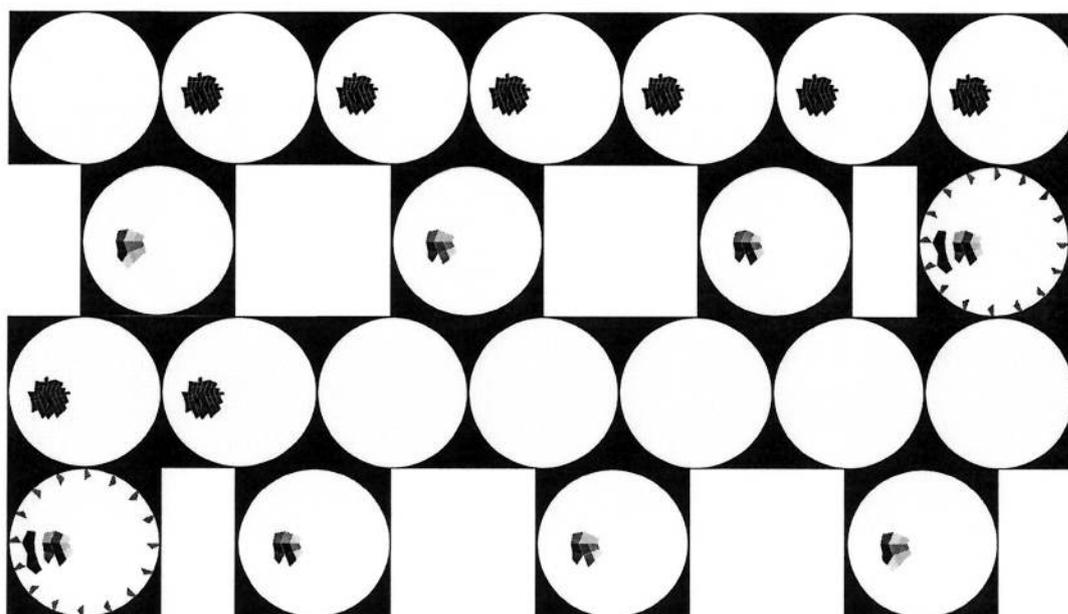


Figura 44 “Fantoma” numérico e resposta encontrada com otimização das constantes de eletrodo (valores dados na Tabela 1). Não há RS e $p=2$.

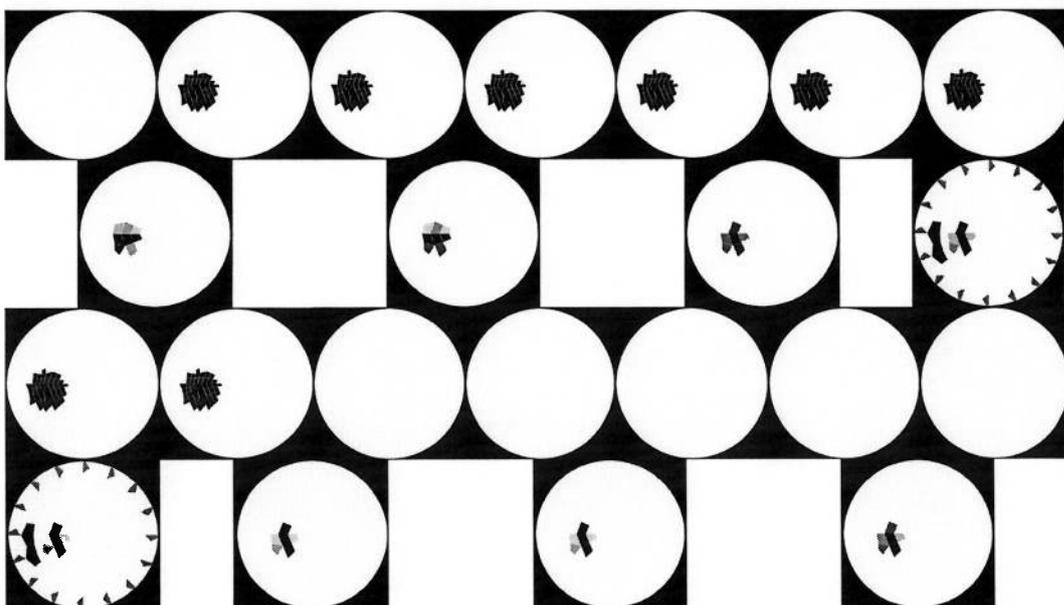


Figura 45 “Fantoma” numérico e resposta encontrada com otimização das constantes de eletrodo (valores dados na Tabela 1). Há RS, a qual terminou ativa, e $p=2$.

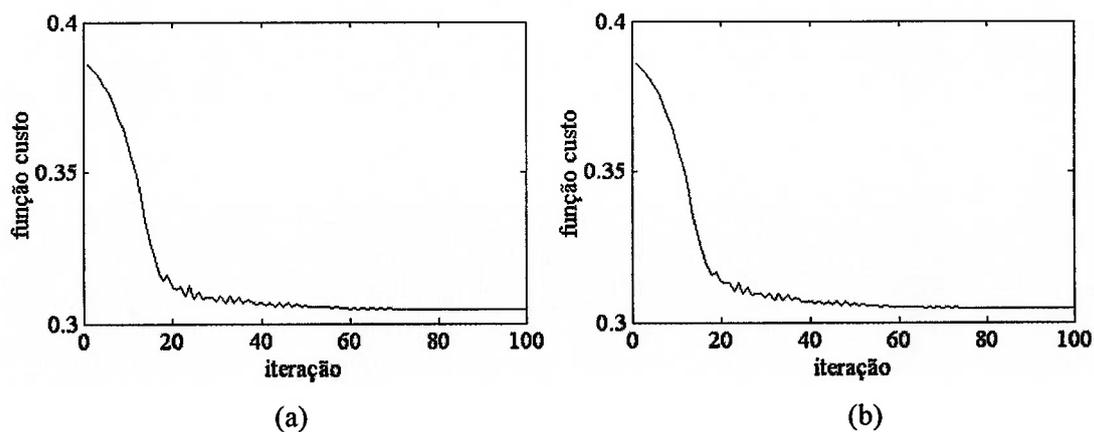


Figura 46 Curvas de convergência. (a) Sem RS (Figura 44) e valor mínimo 0,304524. (b) Com RS (Figura 45) e valor mínimo 0,304487.

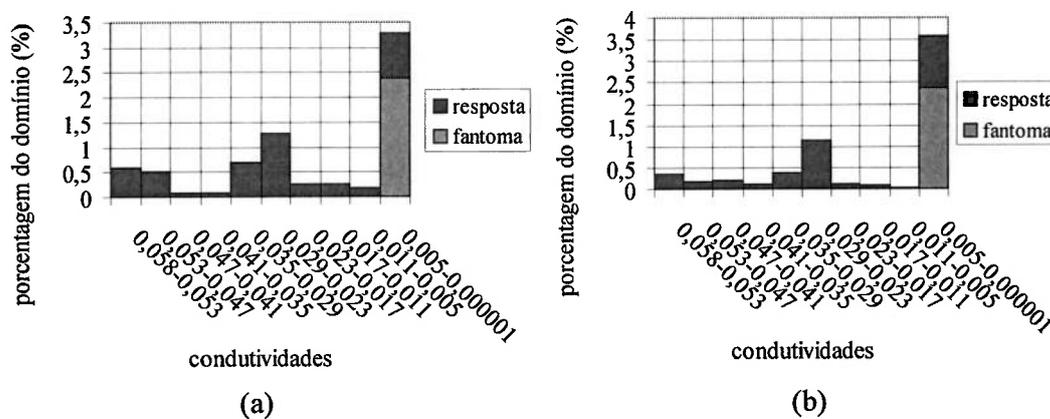


Figura 47 Gráficos da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das variáveis de projeto. (a) Referente à Figura 44. (b) Referente à Figura 45.

Com o intuito de mostrar a elevada sensibilidade do algoritmo nas regiões próximas aos eletrodos, foi exibida a resposta da Figura 48. Neste caso o “fantoma” foi modificado, apresentando uma distribuição de propriedades aproximadamente uniforme, com valores altos de condutividade, e apenas uma região, numa das camadas centrais, com material de baixa condutividade.

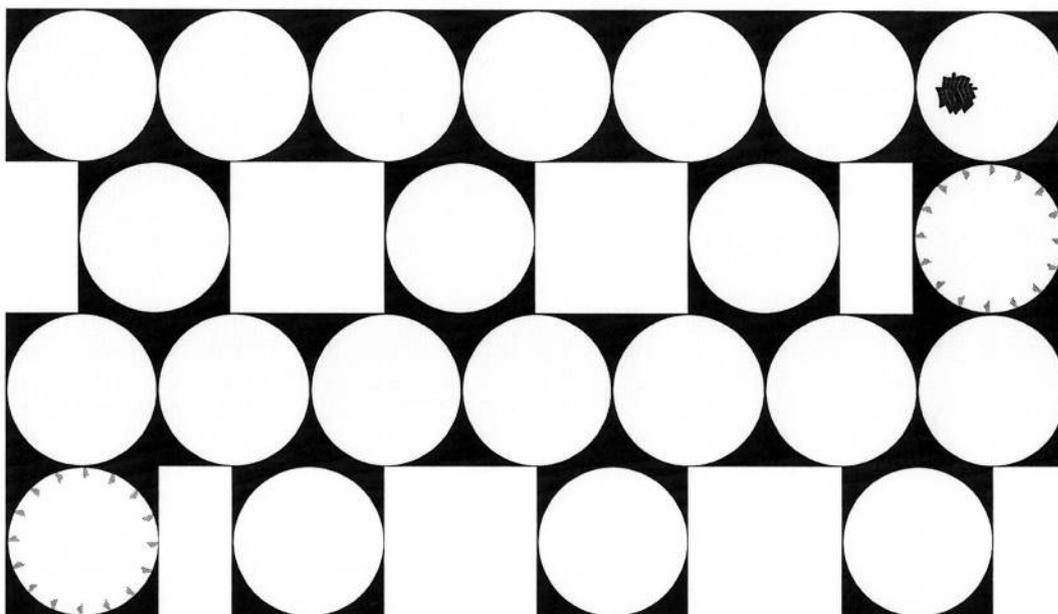


Figura 48 “Fantoma” numérico e resposta encontrada com otimização das constantes de eletrodo (valores dados na Tabela 1). Não há RS e $p=1$.

Estas imagens (Figura 48) apresentam material de baixa condutividade apenas nas camadas onde há eletrodos e, ainda, nos elementos próximos a estes eletrodos. Esta resposta ilustra a importância dos estudos que se seguem, realizados em conjunto com a introdução dos elementos tetraédricos.

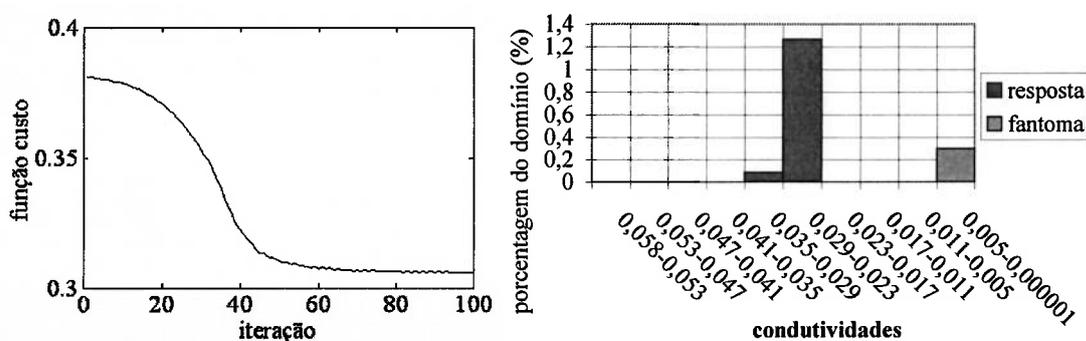


Figura 49 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 48. Valor mínimo: 0,306045.

6.2 Respostas com Elementos Tetraédricos

A partir deste ponto foram introduzidos os elementos tetraédricos como alternativa aos hexaédricos. Como mencionado no item 2.2.1, estes reduzem a quantidade de cálculos efetuados para obtenção das matrizes dos elementos, além de disporem da vantagem de se adequarem melhor a geometrias arbitrárias. Ainda, as incógnitas para a otimização, como mencionado, passaram a ser nodais.

As dimensões do “fantoma” numérico e do domínio de reconstituição de imagens foram então ligeiramente modificadas para o diâmetro de 0,22m e a altura de 0,035m. Os valores das condutividades permaneceram iguais a $0,058824(\text{m}.\Omega)^{-1}$ (cor branca) e $0,000001(\text{m}.\Omega)^{-1}$ (cor preta), as correntes iguais a 0,001A, as constantes dos modelos de eletrodo (em todos os “fantomas”) iguais a $100(\text{m}^2.\Omega)^{-1}$ e as larguras a dos modelos de eletrodo iguais a 0,005m. Porém, a partir deste ponto, os valores de $0,058824(\text{m}.\Omega)^{-1}$ e $0,000001(\text{m}.\Omega)^{-1}$ passaram a corresponder às variáveis de projeto 1 e 0, respectivamente, tornando-se mais coerente o modelo de material.

Foram aplicadas correntes em apenas uma seção do domínio, a seção central. Assim, foram dispostos eletrodos apenas na região central do domínio. A malha M e a malha de reconstituição são apresentadas na Figura 50 e na Figura 51, respectivamente. Nestes casos, o domínio está dividido em duas regiões definidas, limitadas pela seção central e pelas duas seções externas.

Neste ponto, descartaram-se os estudos com a malha C, pois as conclusões e observações feitas, no caso dos elementos hexaédricos, se aplicam também para as análises realizadas com elementos tetraédricos.

Foram utilizados 32 modelos de eletrodo acoplados ao domínio e 32 casos de carregamento, mas não necessariamente 32 medições para cada caso. Permitiram-se 100 iterações (no máximo) ao algoritmo e 150 no caso de p ser igual a 2. A convergência continuou sendo admitida para o valor da função objetivo ou a sua variação relativa menor que 10^{-6} . A sugestão inicial para obtenção das densidades no interior domínio, a qual satisfiz a RVM em todas as condições testadas, foi igual a 0,8, ou seja, uma situação de propriedades uniformemente distribuídas e iguais a $0,047059 (\text{m}.\Omega)^{-1}$ ou igual a $0,037648 (\text{m}.\Omega)^{-1}$, no caso de p ser igual a 2. O valor

inicial das variáveis de projeto para cálculo das constantes de eletrodo foi modificado, com base nos resultados anteriores, para 0,8 para a variável de projeto. Isto também equivale a um caso de propriedades uniformemente distribuídas, mas iguais a $46(\text{m}^2 \cdot \Omega)^{-1}$.

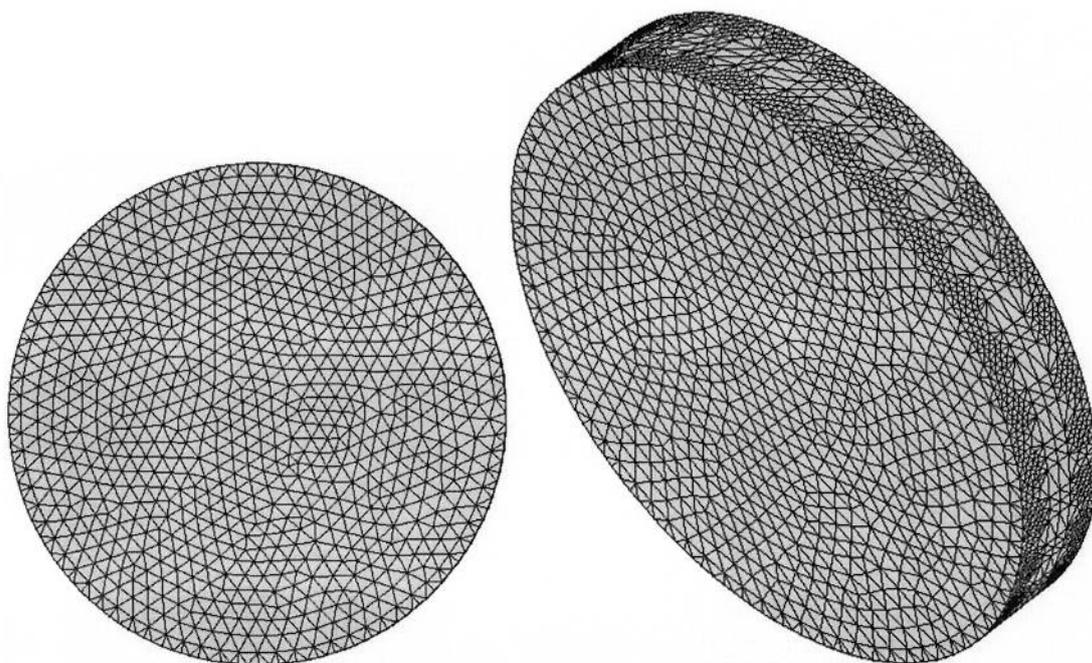


Figura 50 Malha M. Discretização de 34359 elementos e 7650 nós.

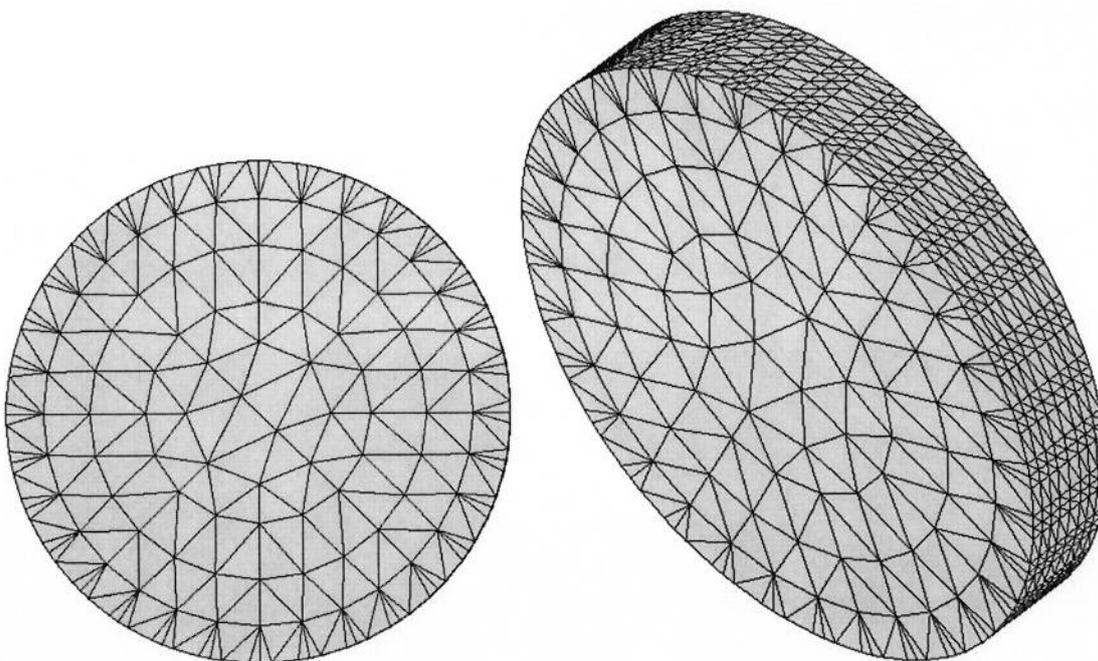


Figura 51 Malha de reconstituição. Discretização de 5548 elementos e 1503 nós.

Nas respostas a serem vistas nos próximos itens, a primeira fileira, com três imagens, corresponde ao “fantoma” e a segunda fileira, também com três imagens, corresponde à resposta. A imagem do centro, no caso de ambas as fileiras, mostra a seção central e as demais imagens mostram as bases e topos. Acredita-se que, com esta forma de exposição de imagens, a análise dos resultados seja feita de forma mais simples pelo leitor, sem que haja perda significativa de informação.

6.2.1 Recostituição na Malha Menos Discretizada

Agora, as respostas para o caso da malha M serão mostradas (a partir deste ponto, não há mais crime inverso). O processo usado para obtenção da imagem foi o F1. As constantes do modelo de eletrodo não mais foram fixadas com valores iguais ao do “fantoma” ($100(\text{m}^2 \cdot \Omega)^{-1}$), como em alguns casos com elementos hexaédricos, mas foram obtidas por processo de otimização. Isto porque, como já comentado, a diferença de discretizações introduz discrepâncias nos valores, cujas magnitudes são desconhecidas.

A partir daqui, a RS não foi mais utilizada por não ter se mostrado satisfatória. Foi substituída pela RVM, independente de um ajuste do usuário do programa. Também foi empregado o filtro FE.

6.2.1.1 Otimização das Constantes do Modelo de Eletrodo e das Densidades

Neste caso, como dito, as constantes dos modelos de eletrodo foram também otimizadas (não foi imposta qualquer restrição ao problema, além das laterais, da mesma maneira que foi feito para os elementos hexaédricos). E, com estas, obtiveram-se novas imagens (houve casos restringidos e não restringidos, como se verá adiante). O fluxograma do processo está representado na Figura 37.

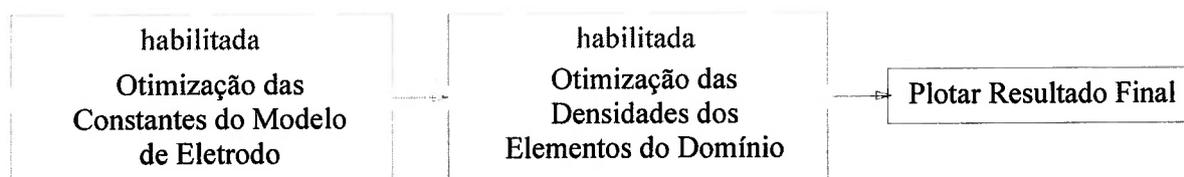


Figura 52 Fluxograma do algoritmo.

Otimização das constantes do modelo de eletrodo

Com base no resultados anteriores, permitiu-se um intervalo de valores para as constantes de 10 a $190(\text{m}^2.\Omega)^{-1}$ (σ_{Ael}/t_{el} e σ_{Bel}/t_{el} , respectivamente, na eq. (3.7)).

De acordo com os resultados (tabelados abaixo), a otimização, também neste caso, é muito sensível à diferença entre as discretizações do meio uniforme e do domínio de reconstituição.

Tabela 2. Valores das constantes do modelo de eletrodo obtidos no primeiro processo iterativo. Os valores usados na malha de distribuição de condutividades uniforme foram $100(\text{m}^2.\Omega)^{-1}$.

Constante	Valores encontrados $((\text{m}^2.\Omega)^{-1})$	Constante	Valores encontrados $((\text{m}^2.\Omega)^{-1})$
1	43,63	17	44,64
2	46,83	18	44,30
3	45,31	19	42,07
4	45,36	20	44,96
5	44,61	21	45,00
6	47,51	22	45,72
7	44,92	23	46,04
8	42,43	24	47,43
9	47,33	25	44,75
10	46,47	26	43,52
11	45,23	27	43,25
12	46,38	28	45,21
13	44,54	29	44,49
14	43,95	30	47,08
15	45,05	31	46,96
16	44,17	32	46,76

Otimização das densidades no interior do domínio

Em todas as respostas geradas, deste ponto em diante, foram utilizadas as constantes tabeladas na Tabela 2.

O “fantoma” numérico usado é aproximadamente uniforme ao longo do eixo do cilindro. Isto foi realizado para que fossem diminuídos os efeitos da observabilidade ruim citada, na situação da configuração dos eletrodos ao redor da região central do domínio utilizada. O “fantoma” é visto na Figura 53.

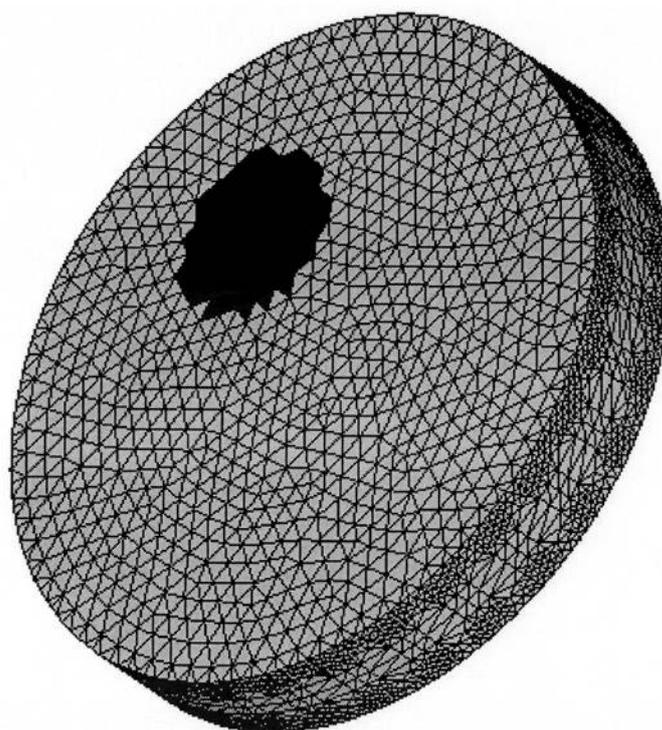


Figura 53 Esquema do "fantoma" numérico.

Por fim, são vistas as respostas para as constantes do modelo de eletrodo tabeladas na Tabela 2. Os quadros à direita das imagens apresentam valores de condutividades.

Nota-se, num exame da Figura 54, que as regiões periféricas da imagem, próximas aos eletrodos, mostram condutividades baixas da mesma maneira que ocorre com elementos hexaédricos. Conclui-se que tais resultados independem no tipo de elemento usado.

A figura também apresenta imagens com uma geometria bastante dependente da disposição dos elementos finitos na malha de reconstituição, o que será visto em todas as respostas. Tal efeito pode ser minimizado através do refinamento da malha, diminuindo-se o tamanho dos elementos usados. Porém, este artifício deve ser utilizado com cuidado, pois aumenta o número de incógnitas (nós) do problema. O efeito do aumento do número de incógnitas não é conhecido com precisão; porém, a priori, aumenta-se o número de soluções possíveis. Optou-se por manter a malha fixa, sendo dada ênfase ao estudo de outros efeitos.

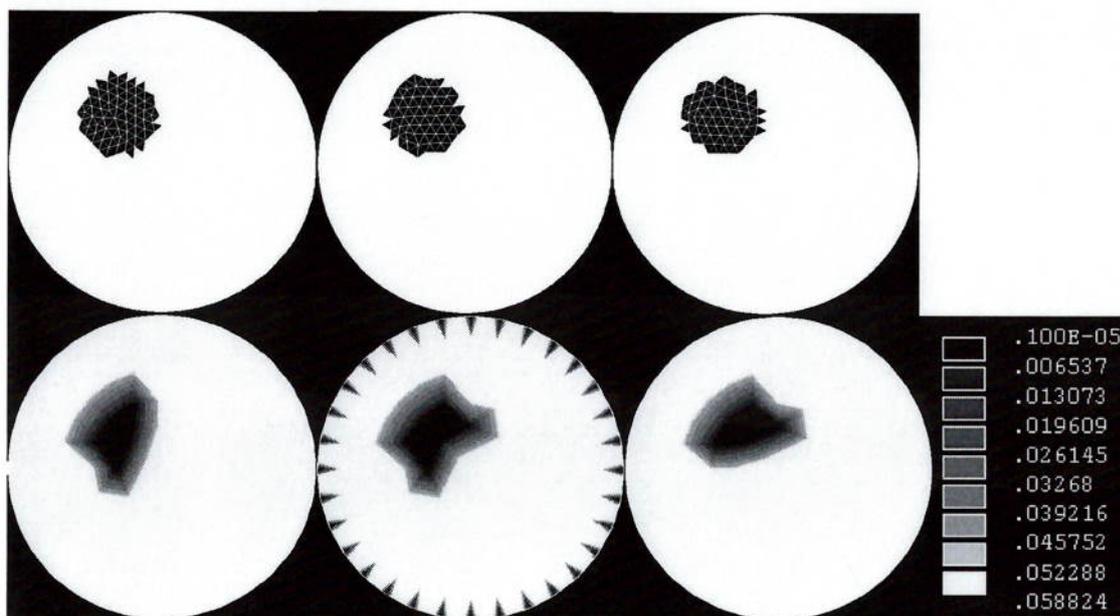


Figura 54 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$ e os potenciais nos eletrodos onde é aplicada corrente e potencial nulo estão presentes na função objetivo.

Analisada a primeira resposta (Figura 54), optou-se por retirar, do processo de otimização, os potenciais medidos dos eletrodos de aplicação de corrente e de imposição de potencial nulo. Isto porque, como já mencionado, existe uma imprecisão grande nos valores de potenciais elétricos calculados pelo MEF nos arredores destes eletrodos, devido à imposição de correntes e condições de contorno pontuais. A imagem resultante da modificação é mostrada na Figura 55. Os parâmetros de entrada do programa são os mesmos tanto para esta figura, quanto para a Figura 54.

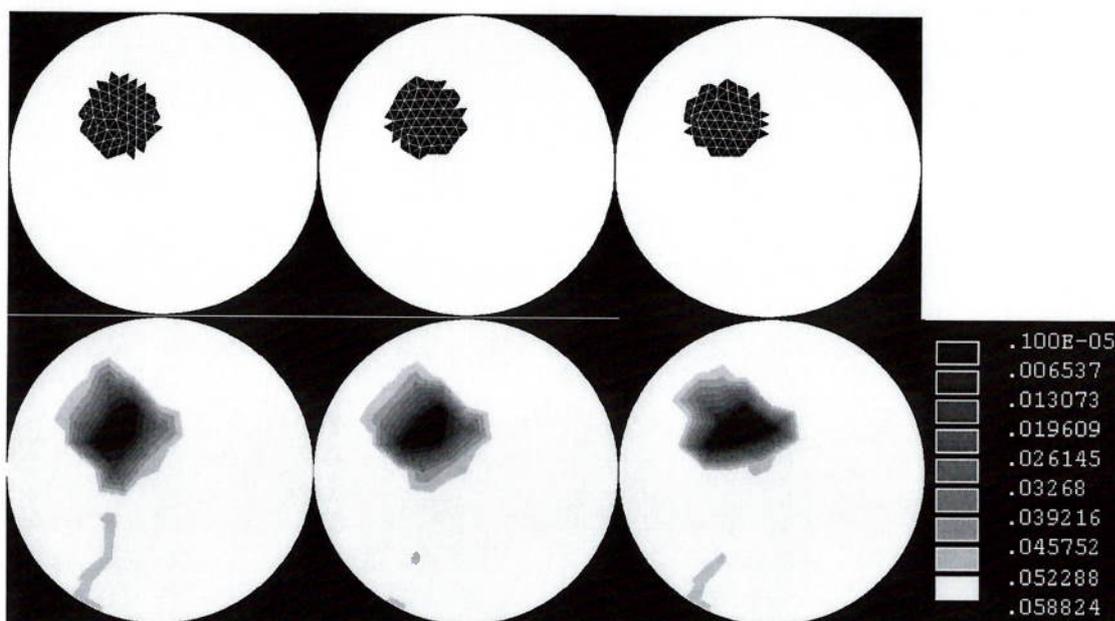


Figura 55 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$.

Vê-se, portanto, que a questão das condutividades baixas nas regiões próximas aos eletrodos foi solucionada. Assim, as imagens passaram a ser geradas sem os valores de potenciais imprecisos. Deve-se salientar que, no caso dos potenciais serem medidos num “fantoma” experimental, o mesmo procedimento precisa ser adotado, pois, apesar dos erros numéricos serem inexistentes neste “fantoma”, ainda há a imprecisão nos cálculos de MEF realizados pelo programa, no ato da análise da malha de reconstituição.

Serão agora mostradas as respostas com p igual a 2.

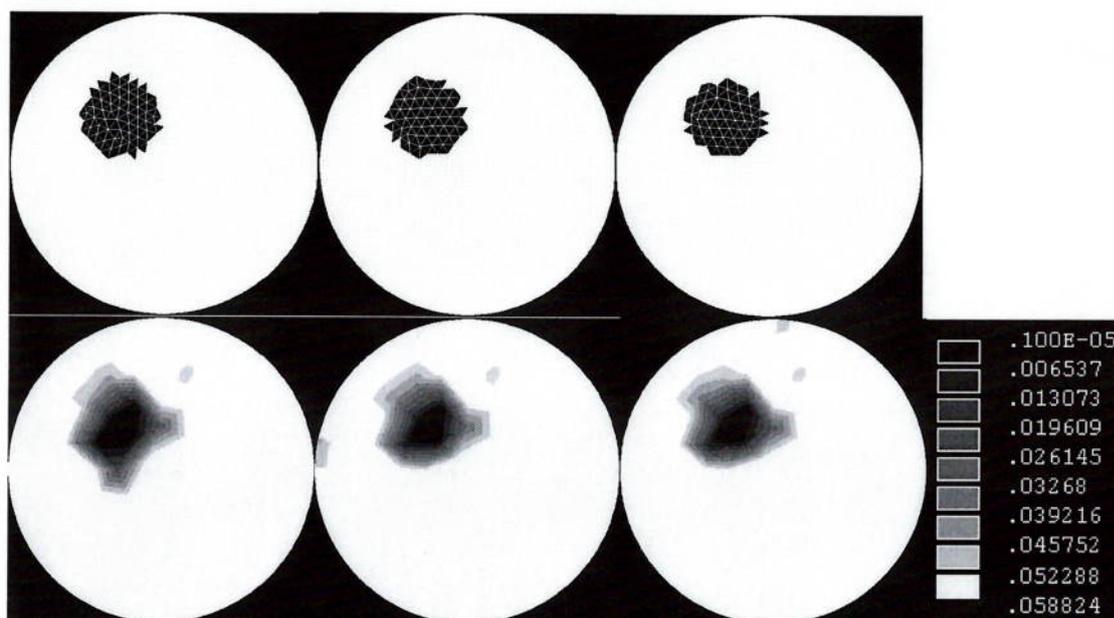


Figura 56 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=2$.

As baixas condutividades periféricas nas camadas centrais também são inexistentes na solução da Figura 56, reforçando o que foi mencionado.

Nota-se, num exame da Figura 56 e da Figura 55, que as densidades intermediárias foram, de fato, penalizadas, diminuindo-se a quantidade de locais com valores de condutividade distantes dos valores limites, sobretudo nas duas seções externas. A Figura 57, por sua vez, mostra que a diferença obtida com a utilização da penalização, pelo menos nesta situação, foi bem pequena. No caso de $p=1$, 82,9% do domínio é formado por regiões de condutividades maiores que $0,058236(\text{m}.\Omega)^{-1}$ ($0,058824(\text{m}.\Omega)^{-1}$ é o valor máximo) e, para $p=2$, a quantidade sobe apenas para 83,6% por exemplo. Os gráficos vistos na Figura 57 são semelhantes aos utilizados com elementos hexaédricos. Porém, as condutividades usadas são as médias dos valores nodais de cada elemento. Tal abordagem será usada deste ponto em diante no texto.

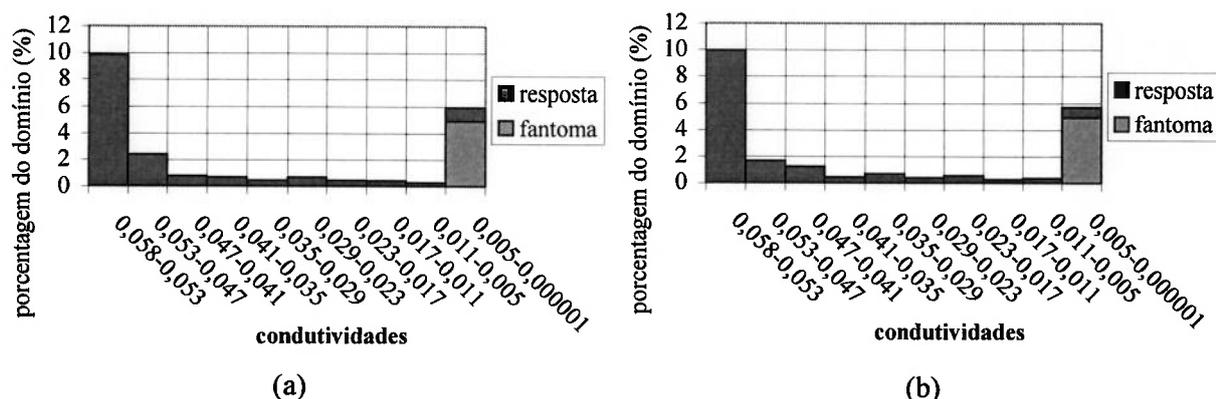


Figura 57 Gráficos da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades. (a) Referente à Figura 55. (b) Referente à Figura 56.

Vê-se, na Figura 58, que há convergência para valores mais elevados que os obtidos no caso de elementos hexaédricos, para parâmetros de entrada do programa semelhantes. O número elevado de iterações foi utilizado com a finalidade de se verificar a ocorrência da função objetivo ou sua variação relativa ser menor que 10^{-6} . Porém, o algoritmo não verificou tais critérios, chegando a 100 e a 150 iterações para p igual a 1 e p igual a 2, respectivamente.

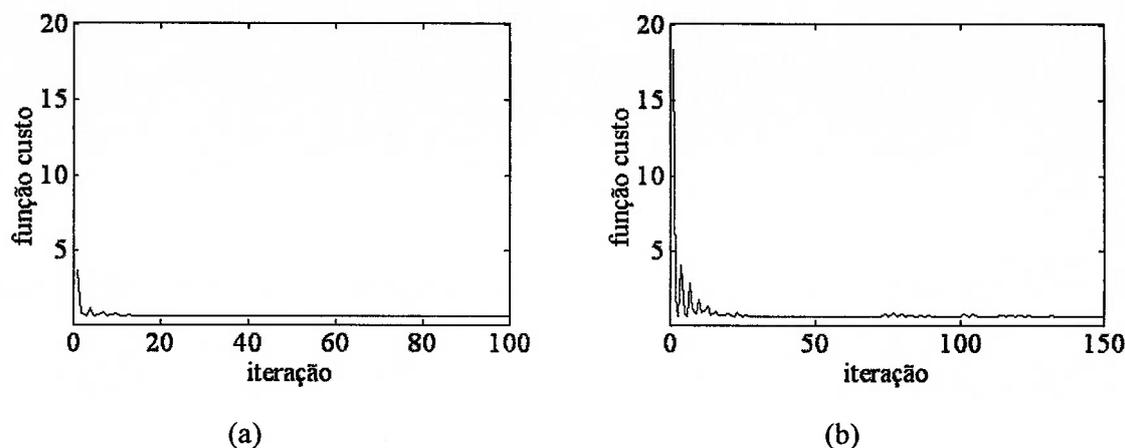


Figura 58 Curvas de convergência. (a) $p=1$ (Figura 55) e valor mínimo 0,613578. (b) $p=2$ (Figura 56) e valor mínimo 0,619519.

Agora, serão mostrados e comentados os resultados obtidos com o filtro FE. Neste caso, o raio RF foi modificado algumas vezes para que fosse notado o seu efeito. Deve-se salientar que o raio da região escura do “fantoma” considerado é aproximadamente igual a 0,03m. Inicialmente, considerou-se p igual a 1.

Para o raio igual a 0,005m, a imagem é bastante semelhante à imagem obtida sem o filtro (Figura 55), o que também se nota na comparação dos gráficos das faixas

de condutividades (Figura 57 e Figura 60), a não ser por pequenos aumentos da porcentagem de condutividades altas, pequeno aumento do contraste entre regiões escuras e claras, pelo pequeno aumento da região escura e pela eliminação das regiões com condutividades baixas nos locais afastados da região escura. A semelhança entre as duas respostas ocorre devido ao reduzido valor de RF.

O filtro impediu a formação das regiões com condutividades baixas nos locais afastados da região escura pois, como mencionado, o FE tende a reduzir a variação espacial dos parâmetros filtrados (limites móveis), o que se reflete nos valores de condutividade.

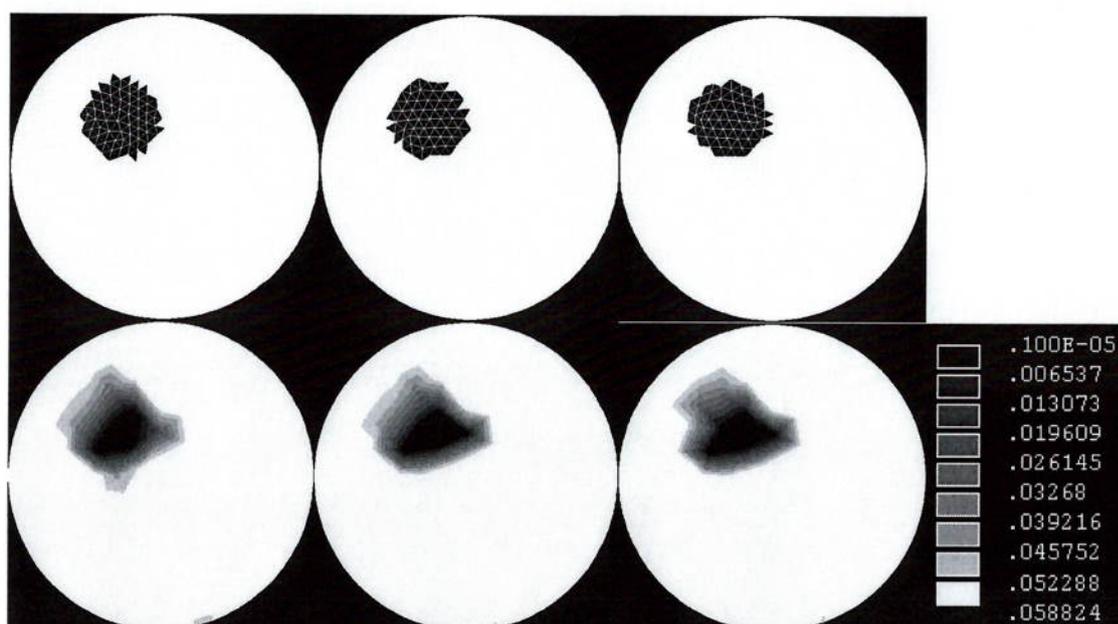


Figura 59 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$ e o raio do filtro é 0,005m.

Aumentando-se o RF para 0,01m (Figura 61), os mesmos efeitos citados no caso de RF igual a 0,005m em relação à resposta sem o filtro são vistos. Porém, é notada uma redução significativa na quantidade de condutividades intermediárias, evidenciada pela Figura 62.

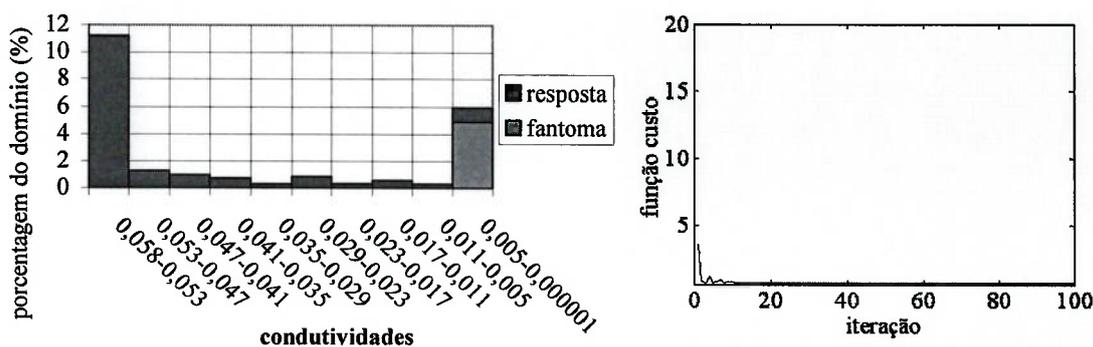


Figura 60 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 59. Valor mínimo: 0,615368.

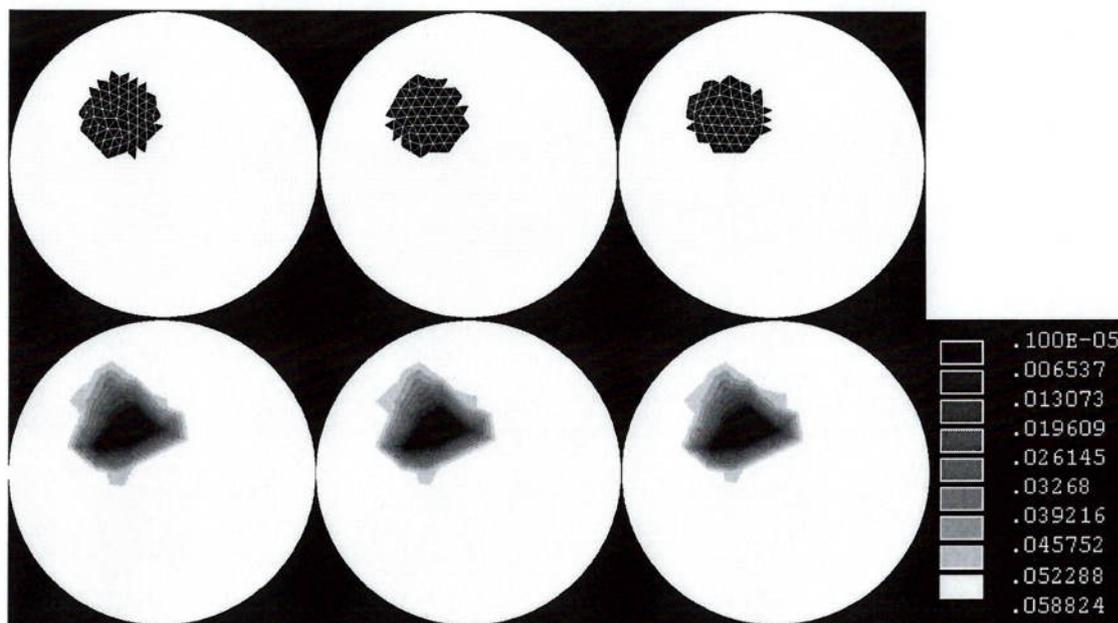


Figura 61 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$ e o raio do filtro é 0,01m.

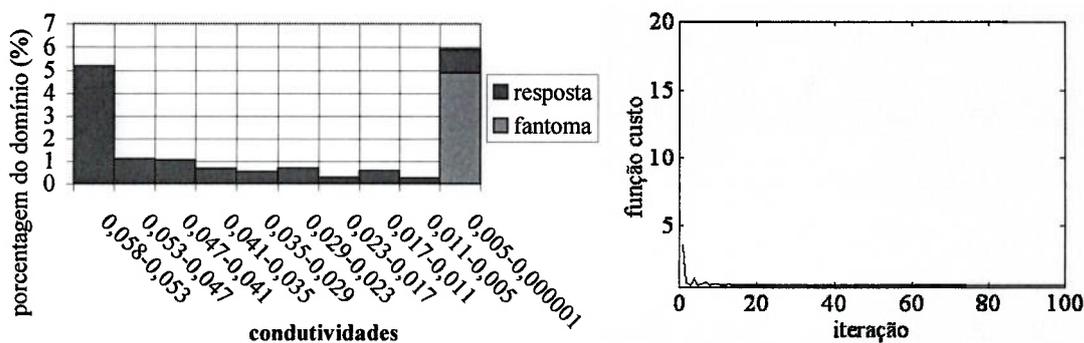


Figura 62 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 61. Valor mínimo: 0,615886.

A Figura 63 (RF igual a 0,015m) mostra que é mantida a tendência à redução da quantidade de condutividades intermediárias (vide Figura 64). Porém, se o raio é ainda maior, como 0,02m (Figura 65) ou 0,03m (Figura 67), vê-se que a tendência desaparece, como era de se esperar. O resultado são distribuições suaves de propriedades, com valores máximos da condutividade obtidos, reduzidos.

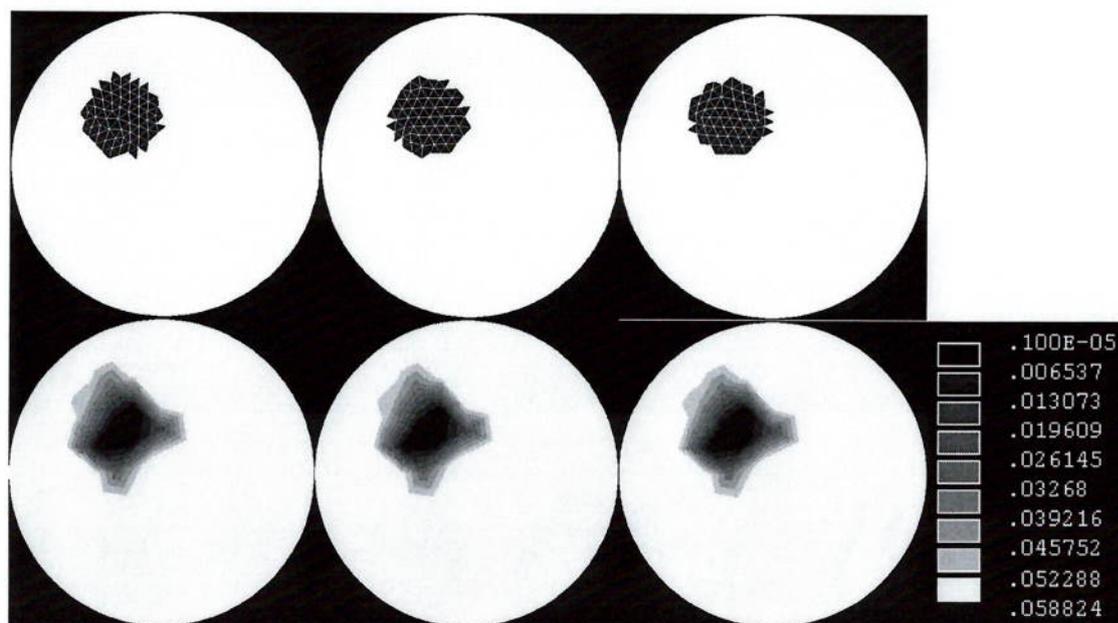


Figura 63 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$ e o raio do filtro é 0,015m.

Conclui-se que existe um valor ótimo para o raio, que irá variar com a geometria da distribuição de condutividades do “fantoma”, no caso de uma distribuição arbitrária. Ainda, deve-se perceber que o valor do raio ótimo será função da posição no domínio de distribuição arbitrária. Esta é uma limitação para o uso do filtro, pois alguma informação sobre a imagem final deve ser fornecida, inicialmente, ao algoritmo.

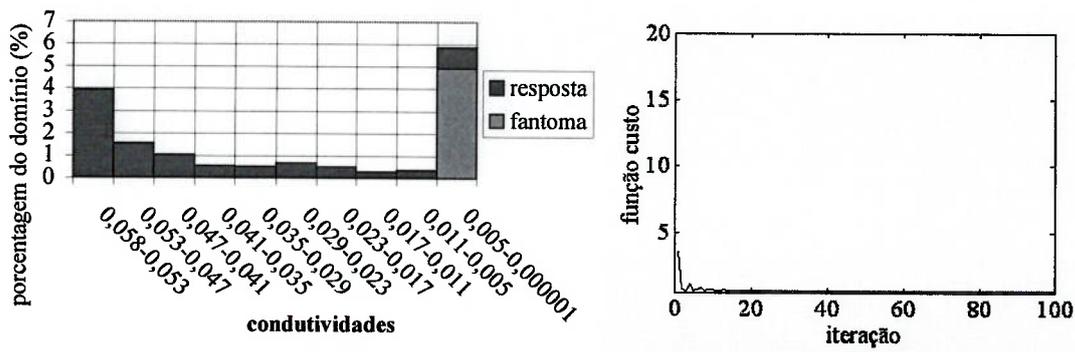


Figura 64 Curva de convergência e gráfico da percentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 63. Valor mínimo: 0,616282.

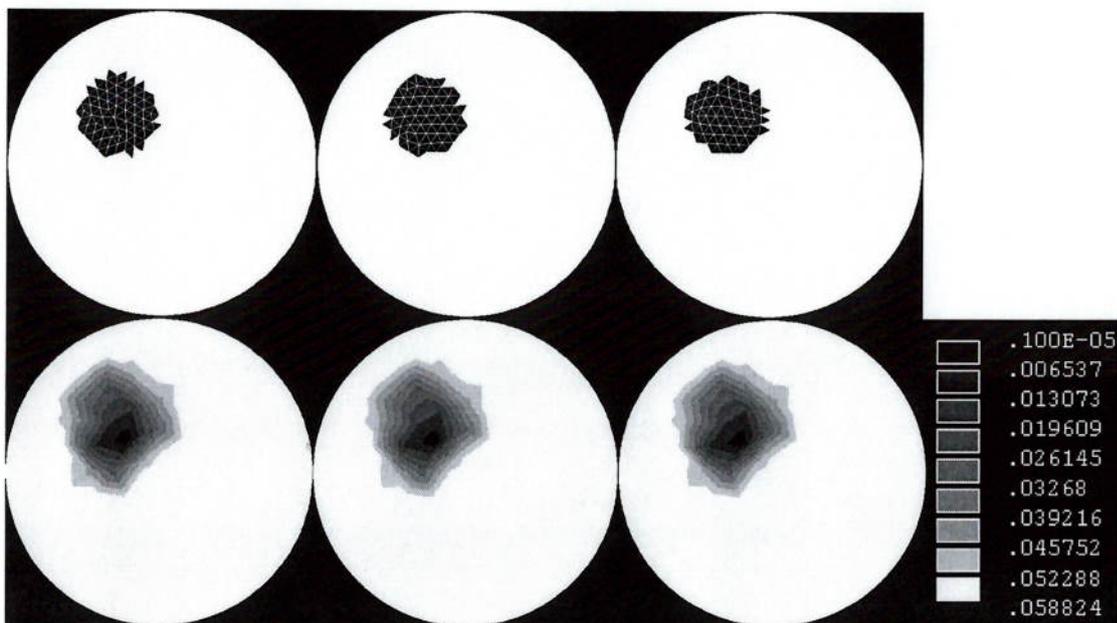


Figura 65 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$ e o raio do filtro é 0,02m.

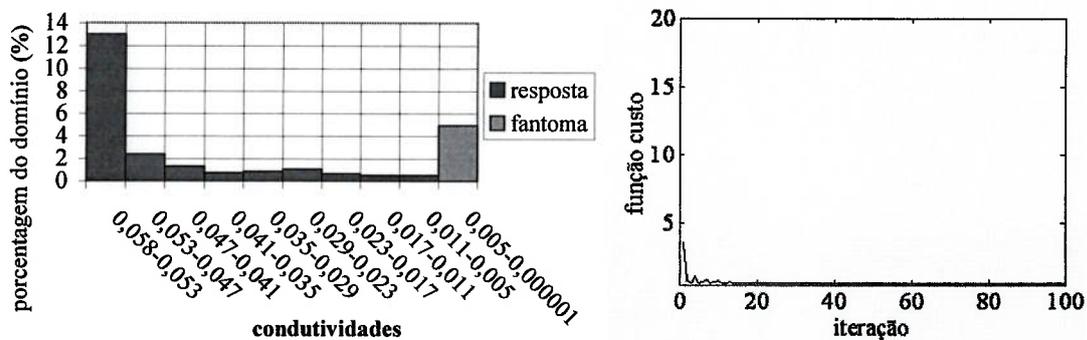


Figura 66 Curva de convergência e gráfico da percentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 65. Valor mínimo: 0,616554.

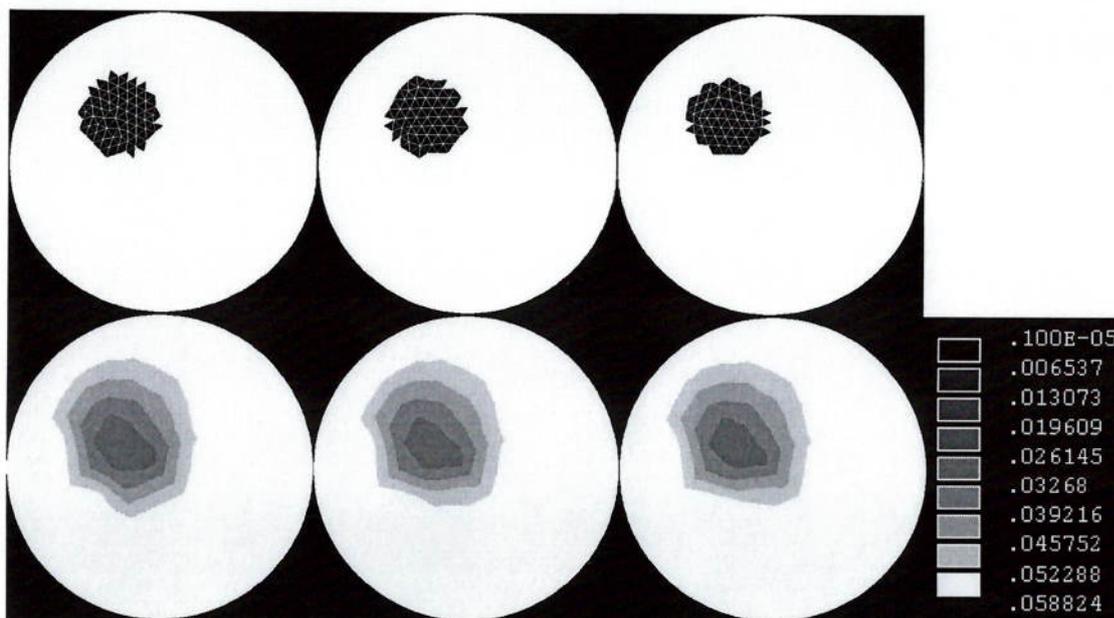


Figura 67 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$ e o raio do filtro é 0,03m.

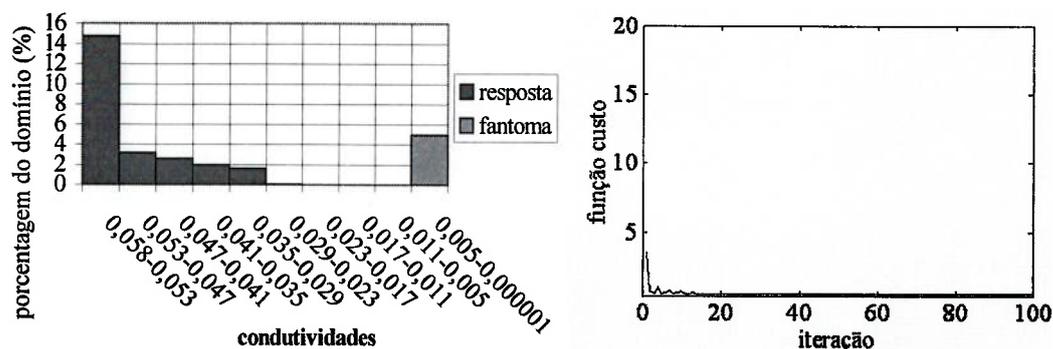


Figura 68 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 67. Valor mínimo: 0,614722.

No caso de p ser igual a 2, são testados os mesmos valores de RF usados com p igual a 1.

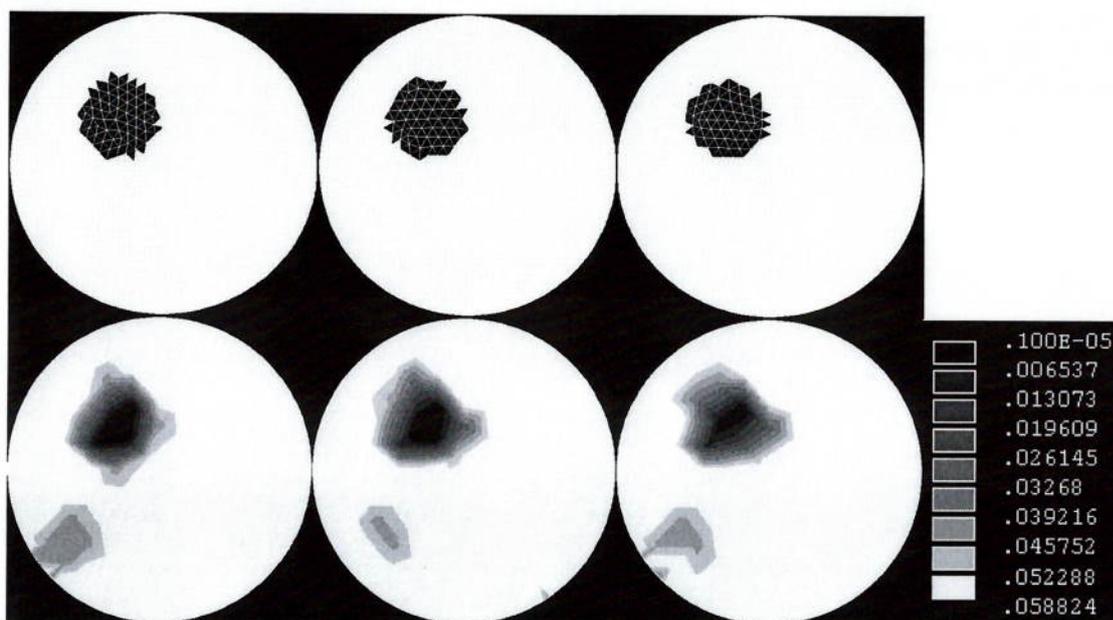


Figura 69 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=2$ e o raio do filtro é 0,005m.

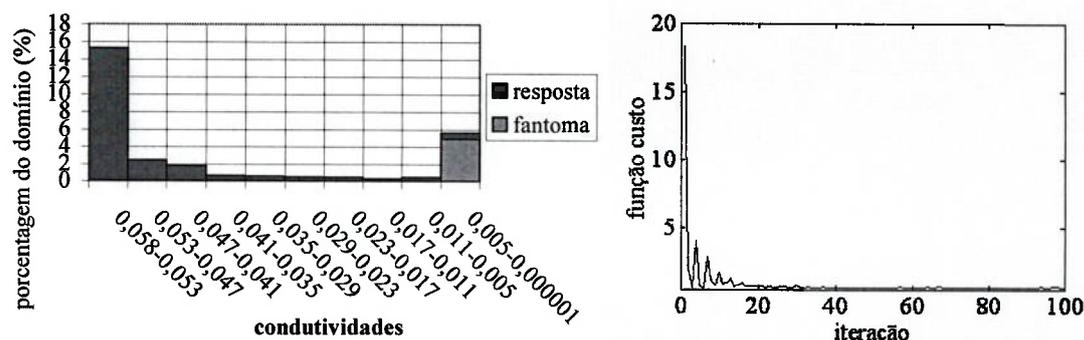


Figura 70 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 69. Valor mínimo: 0,605146.

Nestes casos, com exceção do RF igual a 0,03m – um valor relativamente elevado, o qual reduz os gradientes de propriedades efetivamente – algumas regiões com condutividades baixas indesejadas foram obtidas em todas as imagens, sobretudo para um raio igual a 0,015m.

Nota-se que estas regiões se concentram na periferia das imagens. Isto acontece pois as distâncias entre os nós dos elementos finitos, neste locais, são relativamente pequenas e, portanto, sendo o raio constante no domínio, tais nós estão mais sujeitos à redução da variação espacial dos limites móveis de nós próximos, do que estão os nós nas regiões centrais (vide malha de reconstituição, na Figura 51).

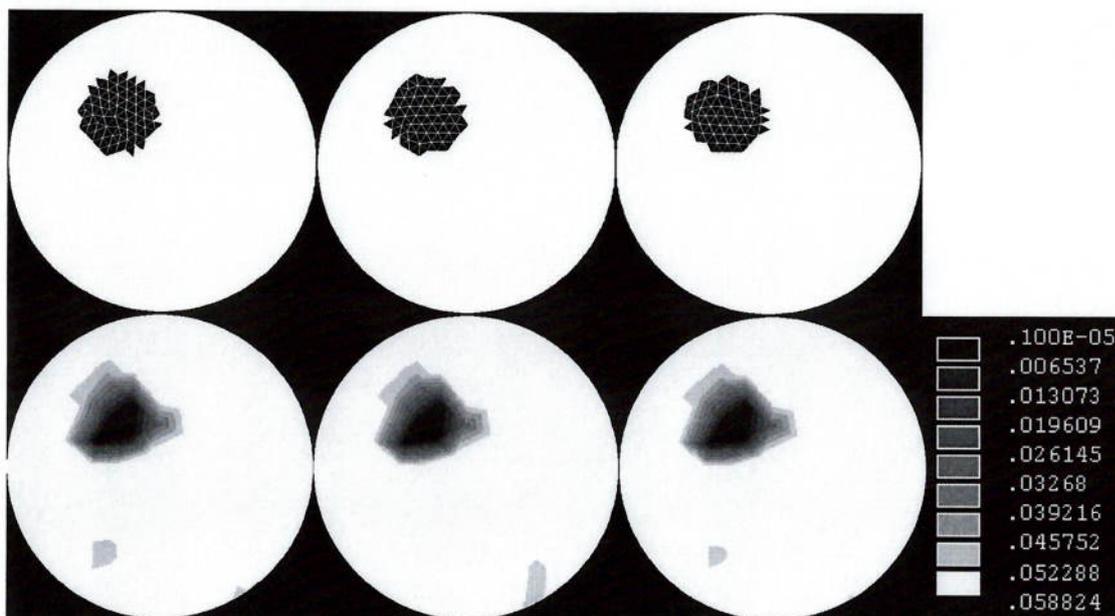


Figura 71 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=2$ e o raio do filtro é 0,01m.

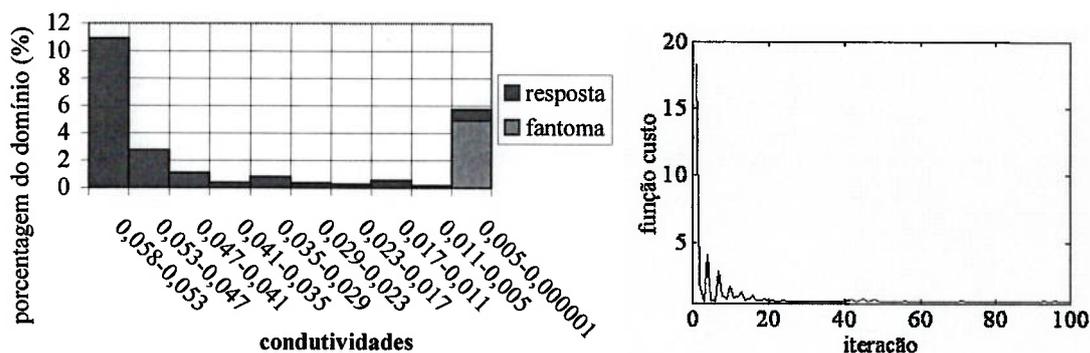


Figura 72 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 71. Valor mínimo: 0,628354.

Tais imagens imprecisas, em conjunto com os valores finais relativamente elevados para a função objetivo e com o fato de ter ocorrido a convergência, mostram que o filtro, aliado a p igual a 2, gera soluções que são mínimos locais indesejáveis. O termo indesejáveis é usado pois, de maneira geral, o fato do mínimo ser local não implica, necessariamente, numa solução insatisfatória. Neste caso, cuidado deve ser tomado ao se empregar, simultaneamente, as duas abordagens de solução (p igual a 2 em conjunto com o filtro).

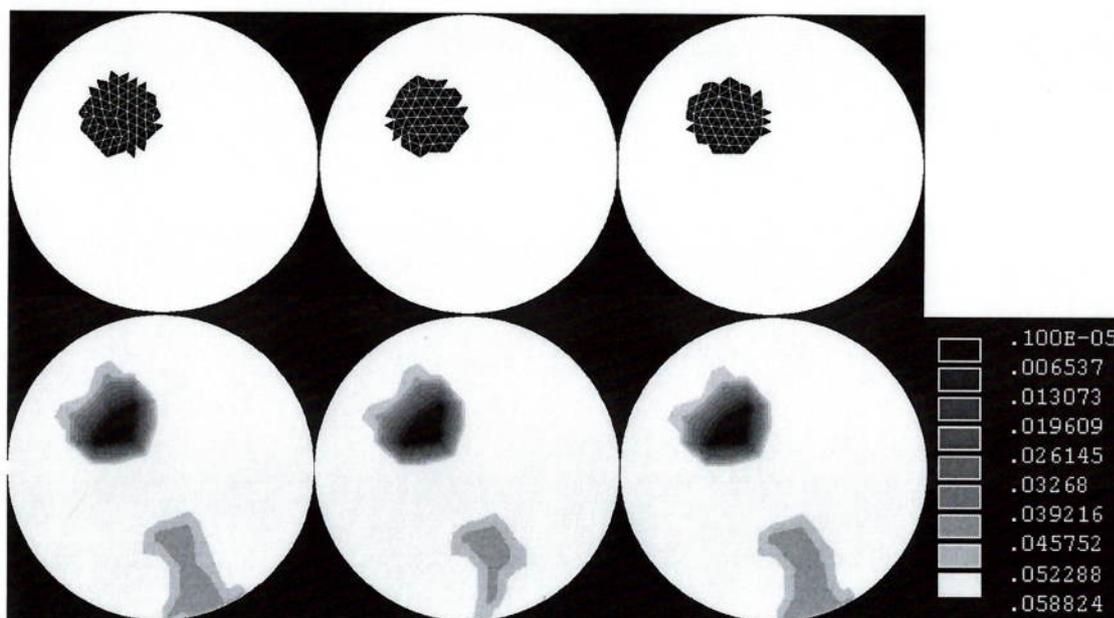


Figura 73 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=2$ e o raio do filtro é 0,015m.

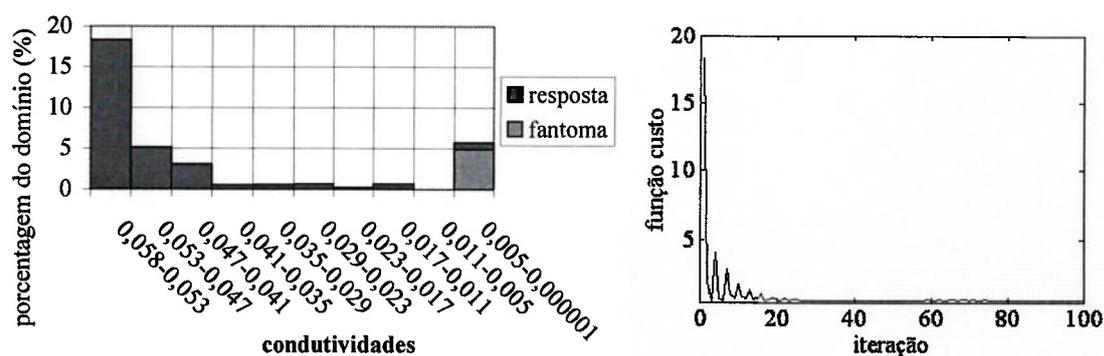


Figura 74 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 73. Valor mínimo: 0,647476.

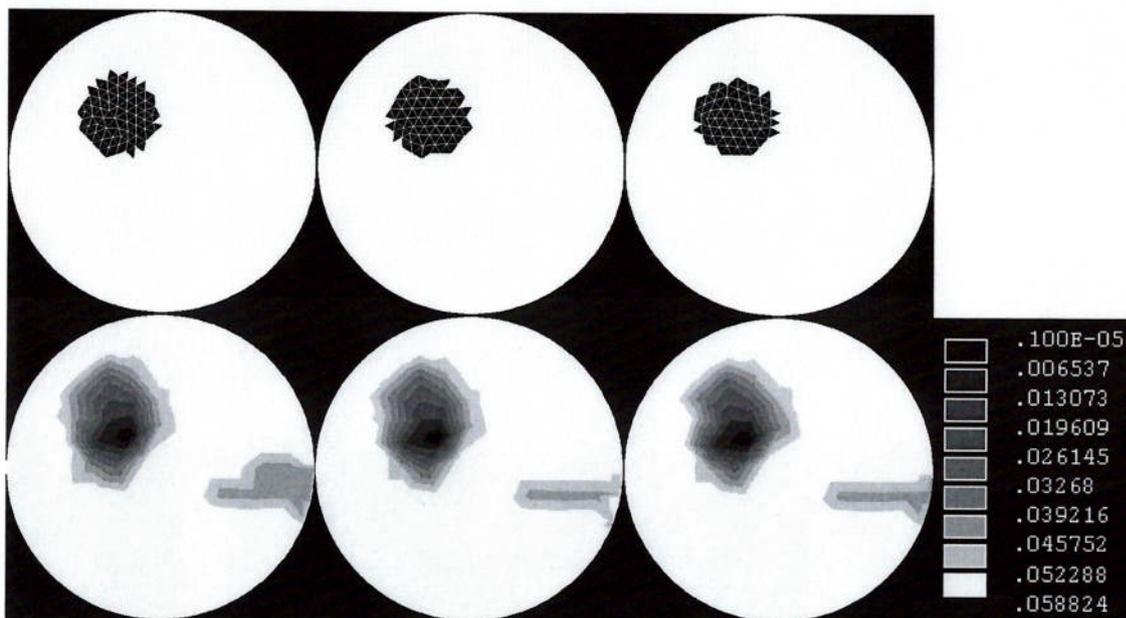


Figura 75 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=2$ e o raio do filtro é 0,02m.

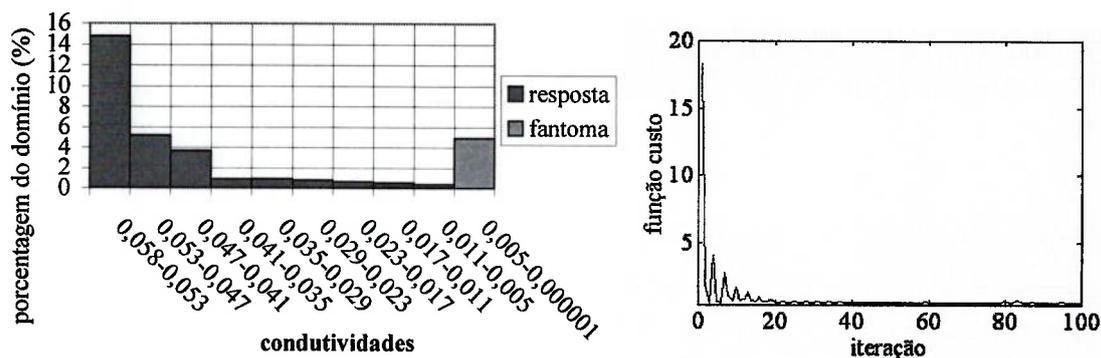


Figura 76 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 75. Valor mínimo: 0,728196.

Os raios iguais a 0,02m e 0,03m, tanto para p igual a 1 quanto para p igual a 2, mostraram-se valores elevados, aumentando, demasiadamente, a suavidade das distribuições de condutividades e o tamanho das regiões escuras das imagens correspondentes, além de reduzir o valor máximo. Assim estes raios foram evitados nas demais imagens.

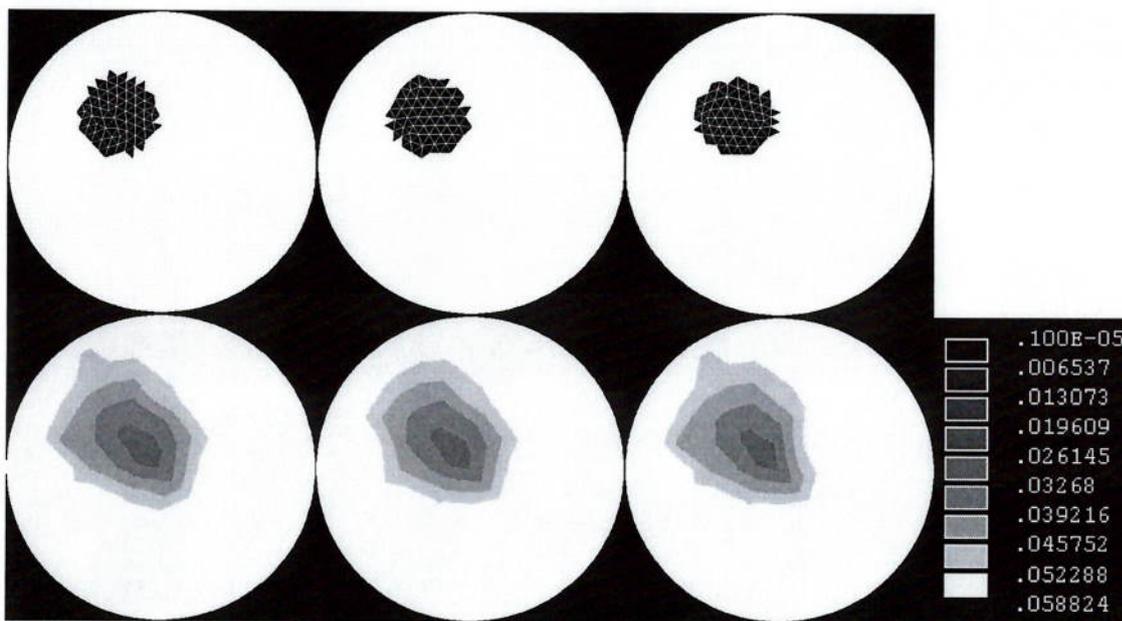


Figura 77 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=2$ e o raio do filtro é 0,03m.

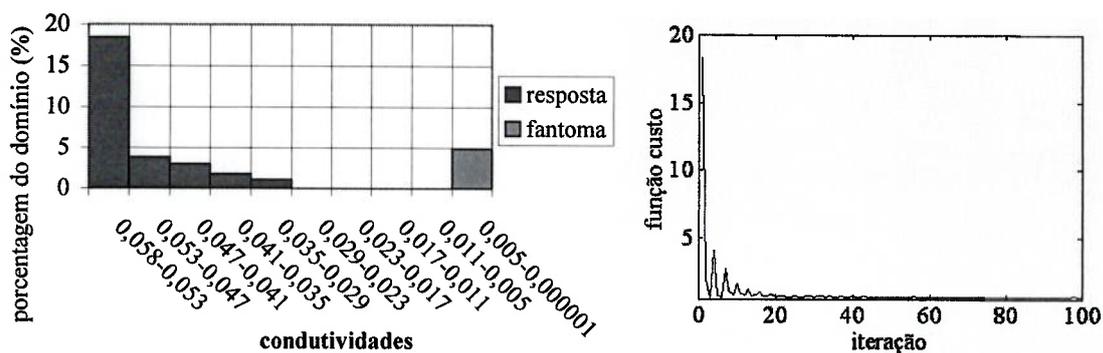


Figura 78 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 77. Valor mínimo: 0,612080.

As próximas imagens foram geradas com a inclusão de RVM na otimização.

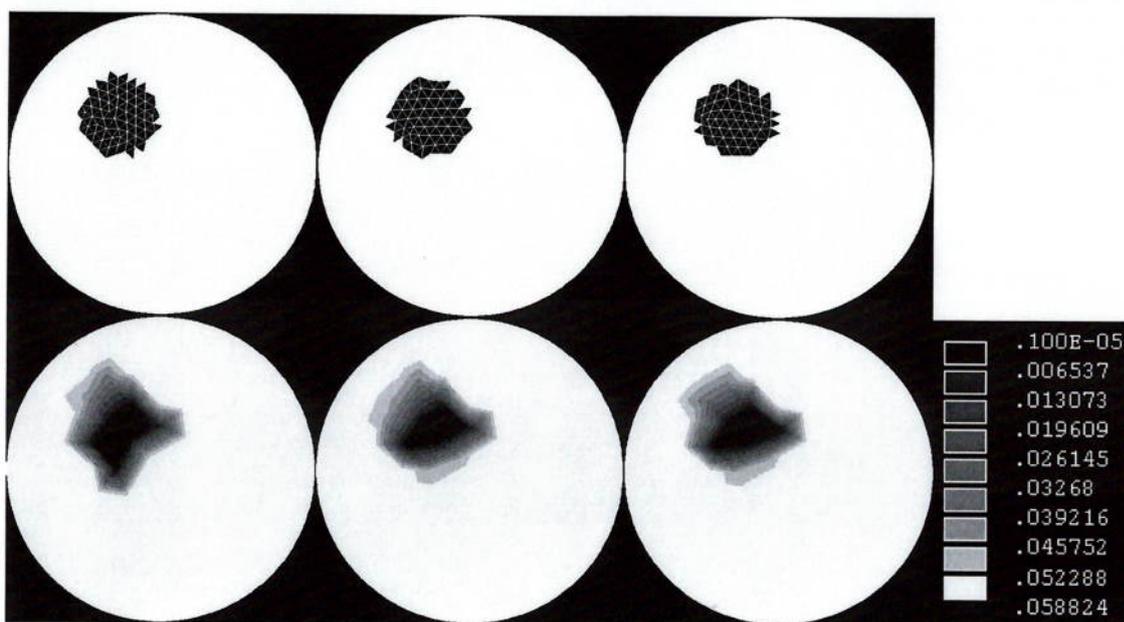


Figura 79 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$ e a RVM foi usada.

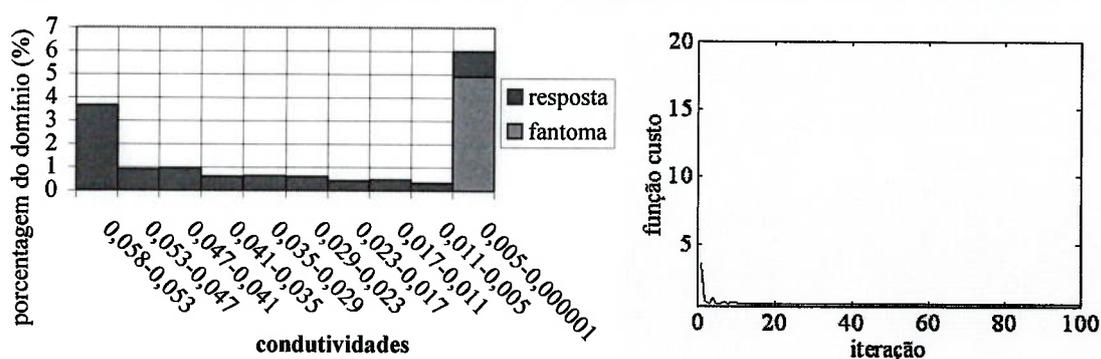


Figura 80 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 79. Valor mínimo: 0,618546.

As imagens dadas pela Figura 79 e pela Figura 81 mostram respostas praticamente semelhantes às anteriores (com exceção das geradas com o FE habilitado e p igual a 2), sobretudo com a restrição usada em conjunto com p igual a 1. Porém, dados os gráficos das quantidades de cada faixa de condutividades na Figura 80 e na Figura 82, é possível notar que, em relação aos casos sem restrição e sem o filtro (Figura 57), estas imagens se aproximaram mais do “fantoma”, pelo menos quantitativamente. De fato, para p igual a 1 e com a imposição de RVM, foram geradas as respostas mais próximas do “fantoma” em termos quantitativos, para os elementos tetraédricos, até este ponto.

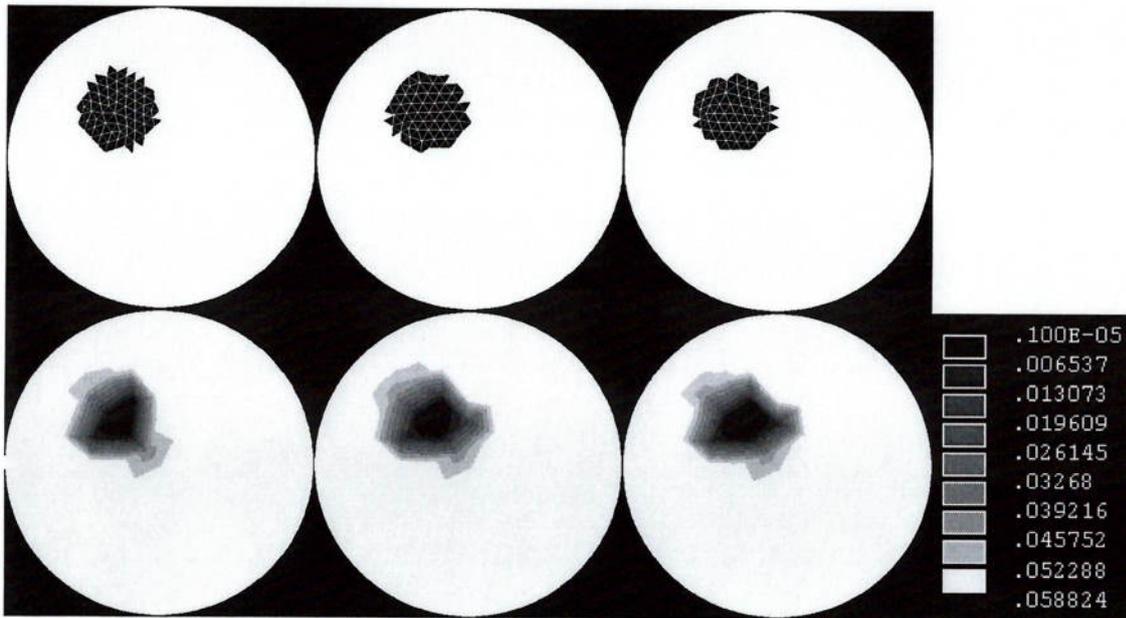


Figura 81 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=2$ e a RVM foi usada.

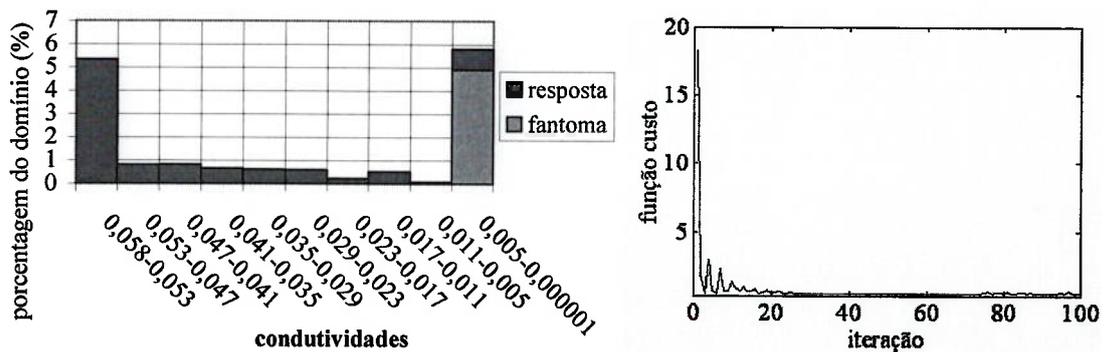


Figura 82 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 81. Valor mínimo: 0,614970.

Algo interessante a ser discutido está ligado aos gráficos das restrições RVM, vistos na Figura 83. Nestes, pode-se visualizar a restrição imposta, em linha contínua, e o valor corrente da RVM linearizada, em linha tracejada, ambos calculados durante as iterações. Estes gráficos mostram que a restrição linearizada terminou inativa, ou seja, foi obedecida mas não no limite. Porém, no início do processo iterativo, a restrição estava ativa. Assim, dadas as respostas, pode-se dizer que a RVM direcionou a otimização para regiões, no espaço de soluções possíveis, mais próximas da distribuição de propriedades do “fantoma”. A restrição não-linear também terminou inativa.

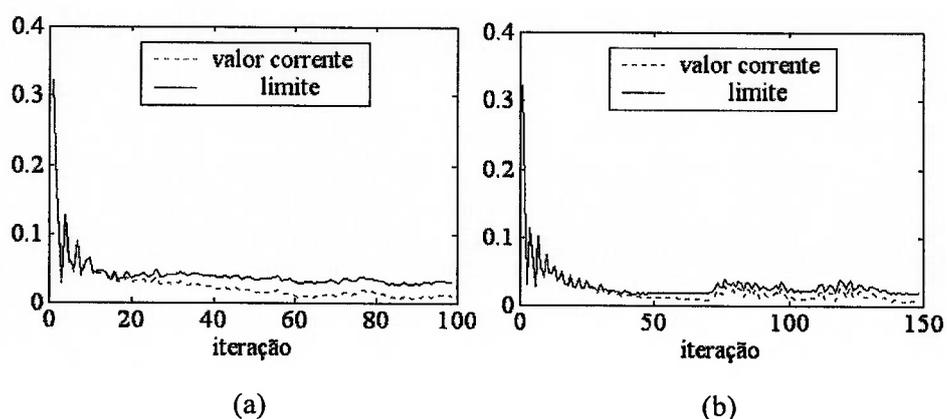


Figura 83 Gráficos dos valores correntes das somatórias da RVM e dos valores limites, para cada iteração. (a) Referente à Figura 79. (b) Referente à Figura 81.

Para os próximos resultados, os gráficos das restrições RVM, como os mostrados na Figura 83, serão omitidos, uma vez que não acrescentam dados significativos para a análise das respostas. Basta citar que, em todos os casos onde foi empregada a RVM, a restrição linearizada terminou inativa (como a não-linear), porém permaneceu ativa nas primeiras 20 iterações para p igual a 1, e nas 50 primeiras para p igual a 2.

Nas próximas respostas, os efeitos de RVM e do filtro, para raios de 0,005m, 0,01m e 0,015m, foram combinados.

Na resposta da Figura 84, com o raio igual a 0,005m e p igual a 1, a resposta é semelhante ao caso sem FE e sem restrição (Figura 55).

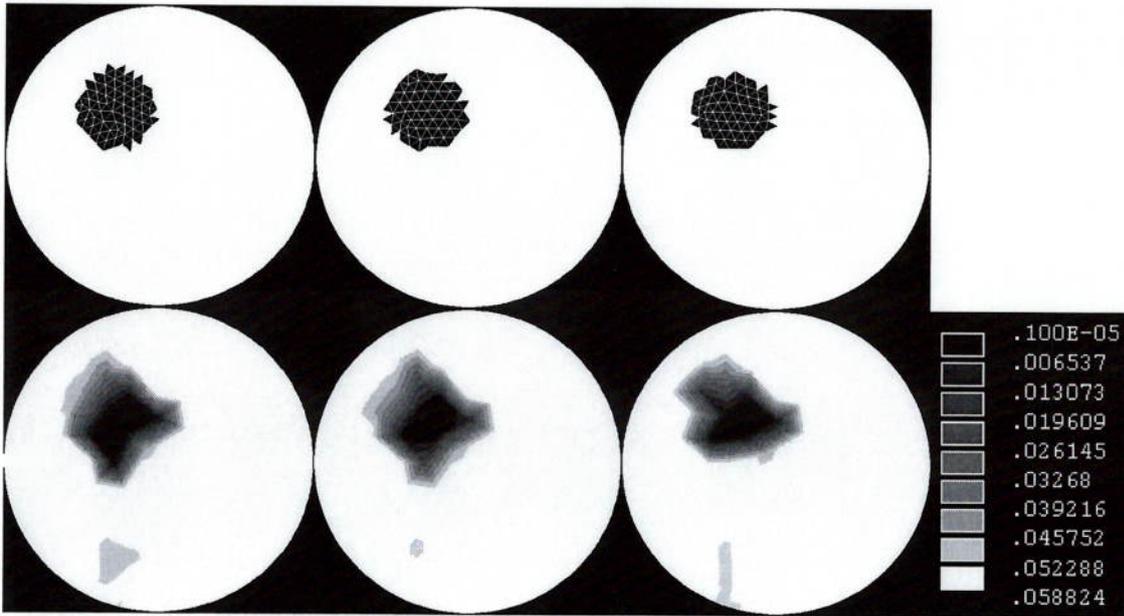


Figura 84 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$, a RVM foi usada e o raio do filtro é 0,005m.

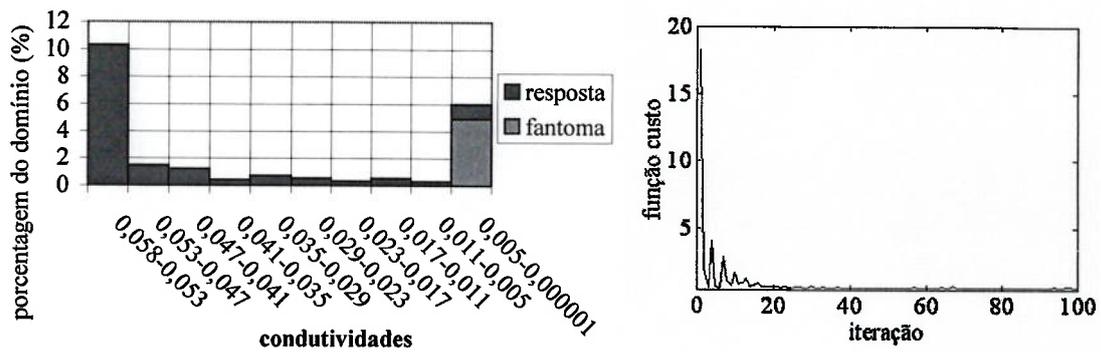


Figura 85 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 84. Valor mínimo: 0,613360.

Porém, quando o raio é aumentado para 0,01m, obtém-se um resultado bastante satisfatório (quando comparado aos demais), o que é evidenciado pela Figura 87. Aumentando-se, novamente o raio do filtro, o algoritmo tem o seu desempenho reduzido (vide gráfico da quantidade de condutividades na Figura 89).

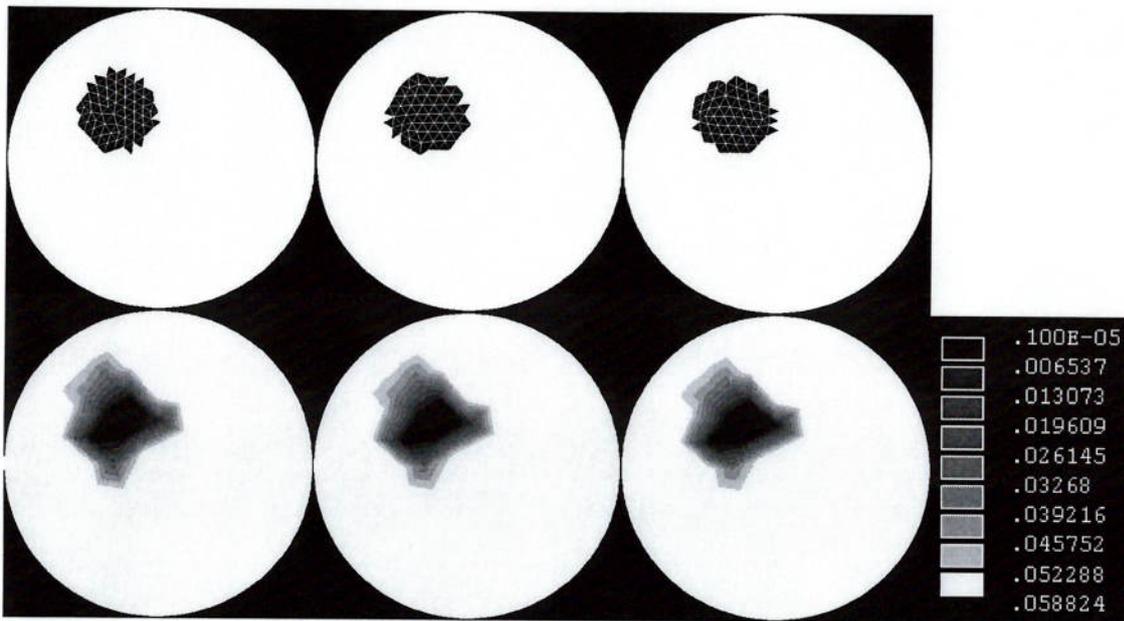


Figura 86 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$, a RVM foi usada e o raio do filtro é 0,01m.

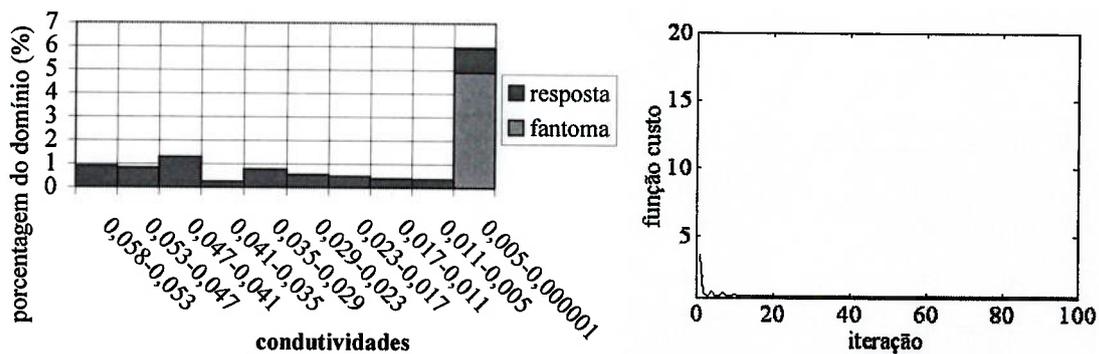


Figura 87 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 86. Valor mínimo: 0,621212.

É possível notar que o valor ótimo para o raio do filtro também existe para este caso. Porém, numa comparação com os resultados sem a imposição da RVM, mas com p igual a 1 e com o FE habilitado no algoritmo (as figuras referentes a esta situação vão da Figura 59 à Figura 67), é mostrado que o valor ótimo diminuiu. Assim, existe mais uma dificuldade para a seleção do raio do filtro.

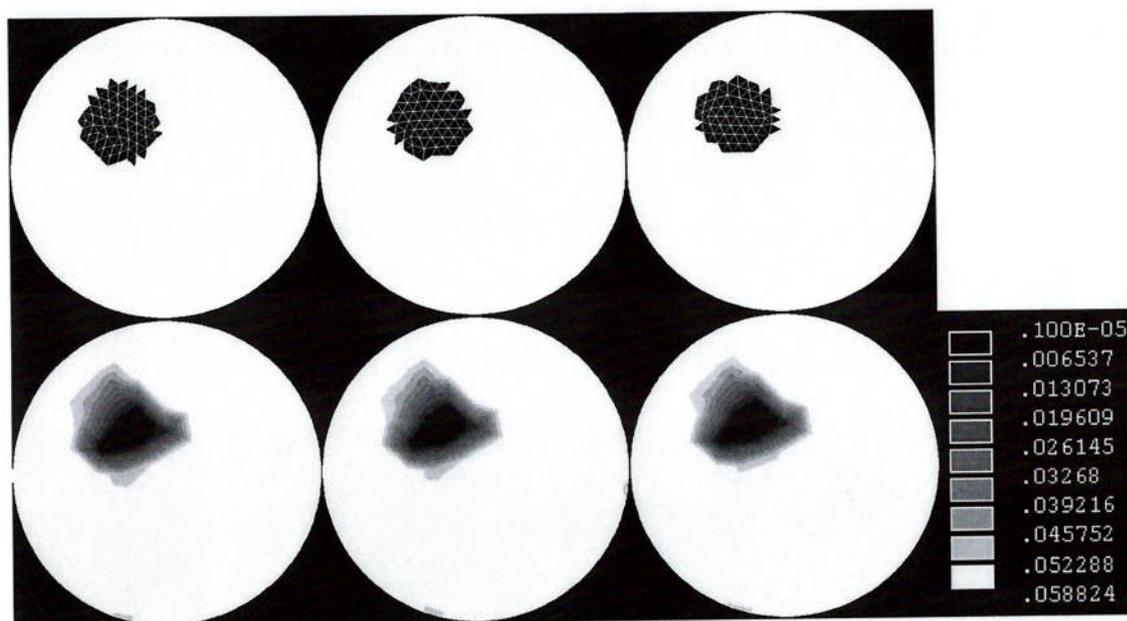


Figura 88 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=1$, a RVM foi usada e o raio do filtro é 0,015m.

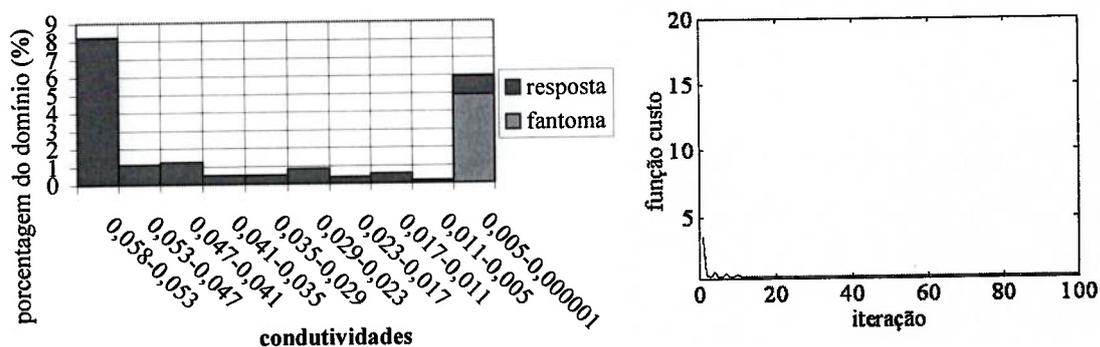


Figura 89 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 88. Valor mínimo: 0,611424.

Finalmente, com a restrição RVM imposta, FE habilitado e p igual a 2, são mostradas as figuras finais. Nestas, são vistas respostas que indicam um raio ótimo de valor ainda menor que o anterior. Também são explicitadas imagens livres de “manchas” na periferia do domínio, pelo menos para raios iguais a 0,005m e 0,01m, diferentemente do que tinha sido obtido anteriormente, quando a RVM não havia sido utilizada (vide da Figura 69 à Figura 77). Porém, numa comparação destes resultados com a situação dada para p igual a 1, sendo as demais condições de otimização idênticas, nota-se que as respostas finais são menos satisfatórias.

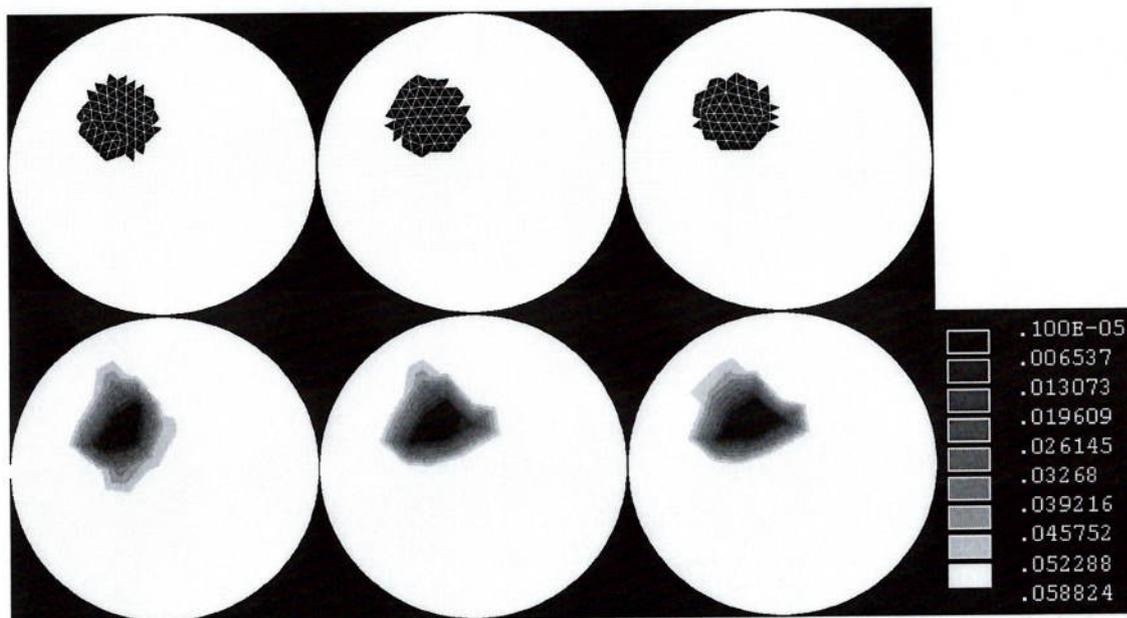


Figura 90 "Fantoma" numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=2$, a RVM foi usada e o raio do filtro é 0,005m.

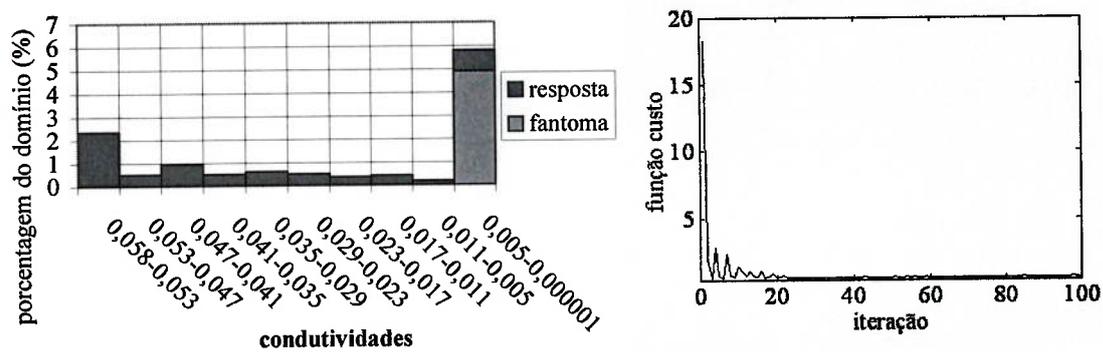


Figura 91 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 90. Valor mínimo: 0,620843.

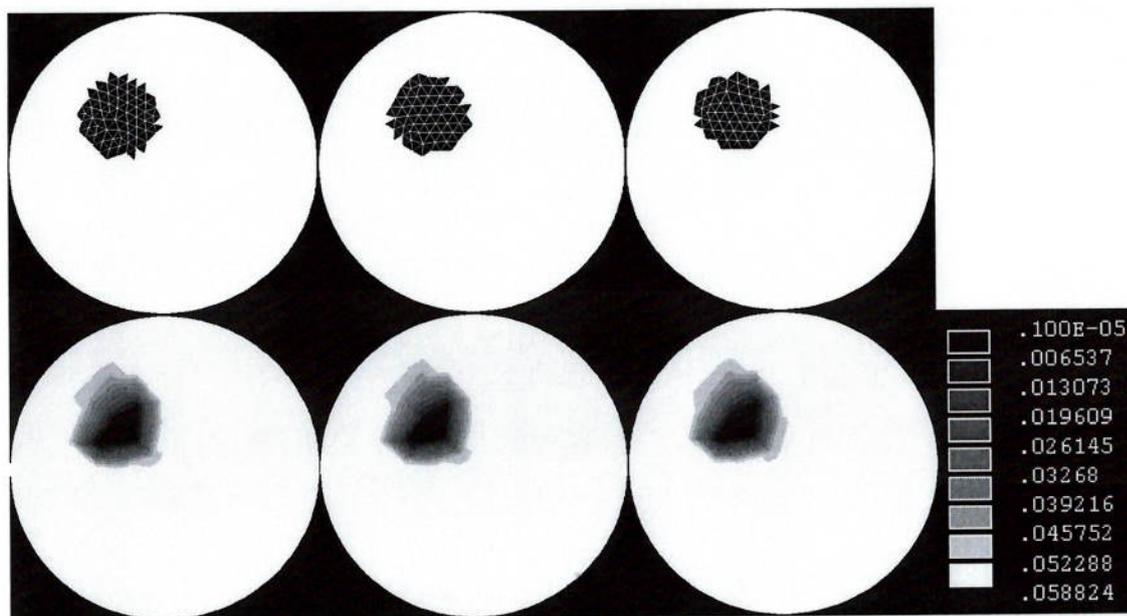


Figura 92 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=2$, a RVM foi usada e o raio do filtro é 0,01m.

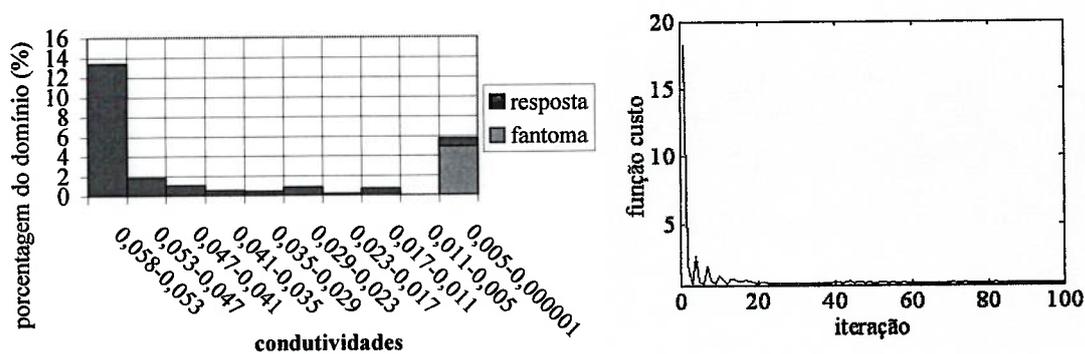


Figura 93 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 92. Valor mínimo: 0,617844.

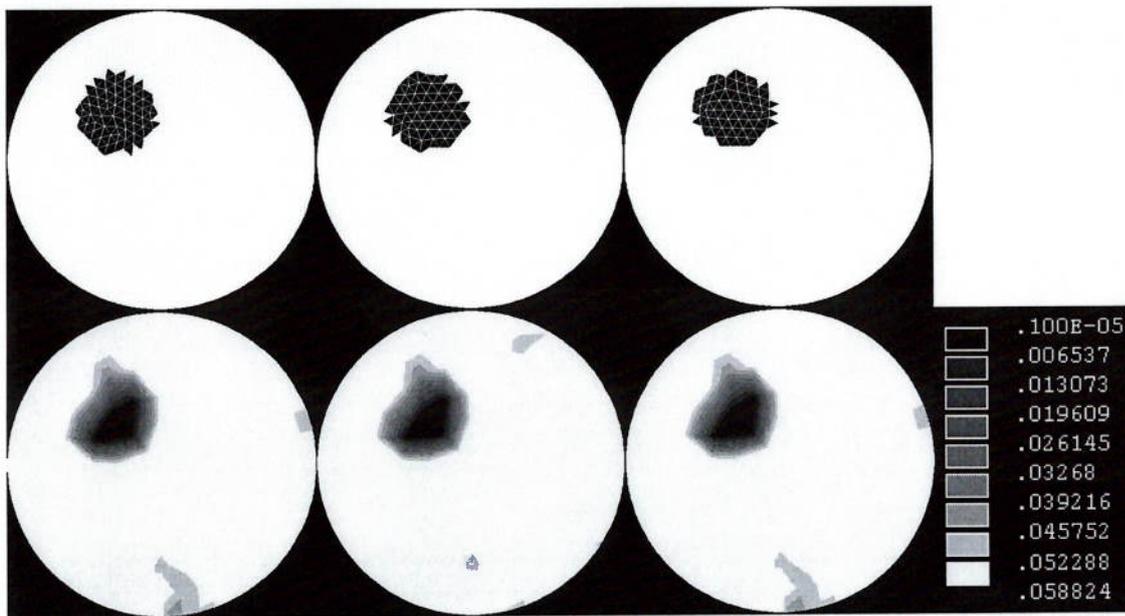


Figura 94 “Fantoma” numérico e resposta encontrada. Neste caso, $p=2$, a RVM foi usada e o raio do filtro é 0,015m.

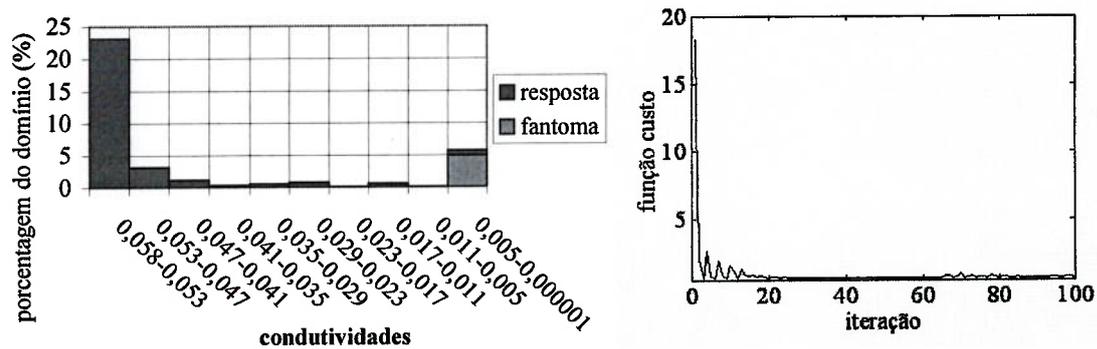


Figura 95 Curva de convergência e gráfico da porcentagem de elementos para cada faixa de valores das condutividades, ambos referentes à Figura 94. Valor mínimo: 0,602369.

7 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi implementado um algoritmo, baseado no MOT, para obtenção de imagens tridimensionais de TIE. Conclui-se que o método obteve respostas satisfatórias e que tem potencial para ser aplicado com dados experimentais.

Foi constatado que as constantes de eletrodo absorvem o efeito das diferenças entre as discretizações da malha de reconstituição e da malha do “fantoma”, estabelecendo uma relação entre os potenciais medidos no domínio mais discretizado e a distribuição de propriedades do domínio menos discretizado. Assim, é importante notar que, salvo casos atípicos, as constantes otimizadas não serão iguais às do “fantoma”.

Em segundo lugar, existem algumas fontes de erros numéricos inerentes ao algoritmo, não podendo ser evitadas. Estas são provenientes dos erros de arredondamento causados nos cálculos das matrizes dos elementos e dos gradientes da função objetivo e restrições, provenientes dos erros de arredondamento na montagem da matriz global e provenientes dos métodos utilizados na minimização da função objetivo linearizada (ou seja, no subproblema de otimização) e na solução do sistema linear (MGBSE). Como efeito destes erros, os pontos ótimos calculados em cada subproblema linear estão deslocados da solução ideal do subproblema, ou seja, daquela obtida sem a presença de erros numéricos. Neste caso, dado que a função objetivo possui diversos mínimos, uma resposta satisfatória pode não ser detectada pelo algoritmo, sobretudo se métodos de regularização (que diminuem o espaço de soluções) não são empregados.

Ainda no contexto dos erros numéricos, procurou-se reduzir tais erros com a mudança de elementos hexaédricos para os tetraédricos, evitando-se métodos numéricos de integração.

Observou-se que a utilização de p igual a 2 não influenciou, efetivamente, na geração de respostas próximas dos “fantomas” analisados. Em alguns casos, ao contrário, foram obtidos mínimos locais indesejáveis, evidenciados por imagens insatisfatórias em conjunto com curvas da função objetivo indicando a convergência e para valores elevados.

No caso da observabilidade, conclui-se que a utilização da estratégia de um domínio de materiais uniformemente distribuídos ao longo do eixo do cilindro foi efetiva, evitando-se a tendência do algoritmo de reduzir variações espaciais de condutividades entre as camadas. Porém, nas situações estudadas com elementos hexaédricos, para as quais foi usada uma distribuição não-uniforme, verificou-se a importância de se distribuir os eletrodos no domínio em mais de uma camada, conforme estudaram Blue, Isaacson e Newell (2000) no caso de seu método, e, eventualmente, aplicar carregamentos entre camadas.

A RS, da maneira como foi imposta, não foi efetiva no processo de regularização da imagem. Estudaram-se, então a RVM e o FE, os quais geraram resultados relativamente satisfatórios. Em situações experimentais, cuidados devem ser tomados com o cálculo do valor limite para a restrição RVM, uma vez que este valor é baseado em potenciais medidos, os quais apresentarão erros nesta situação. No caso do filtro, também é preciso cuidado na implementação, já que o valor ótimo para o raio irá variar com a geometria da distribuição de condutividades do “fantoma” e com a posição no domínio, no caso de uma distribuição arbitrária.

Foram retirados, do processo de otimização, os potenciais elétricos dos eletrodos do ponto de referência e do ponto de aplicação das correntes, o que influenciou para obtenção de imagens mais satisfatórias de maneira decisiva. O processo de retirada, da otimização, dos potenciais elétricos do ponto de aplicação das correntes também deve ser adotado num caso experimental, devido à imprecisão do modelo de eletrodo, o qual considera, por exemplo, uma espessura constante e um contato perfeito entre a pele e o eletrodo, sendo, localmente, insatisfatório (sabe-se que, devido à impedância elevada dos aparelhos de medição, as medidas de potenciais nos eletrodos onde a aplicação da corrente não é realizada simultaneamente com medição, são pouco afetadas por esta imprecisão, como salientou Matherall (1998)). Além disto, a imagem deve ser reconstituída numa malha de MEF e, assim, os erros numéricos locais estarão presentes.

8 TRABALHOS FUTUROS

Deve ser dada ênfase ao estudo da obtenção de imagens através dos dados provenientes apenas de um “fantoma” de propriedades heterogêneas. Assim, as abordagens citadas neste trabalho devem ser empregadas na obtenção das imagens. Este estudo é importante pois o processo de calibragem citado pode limitar o uso do algoritmo em situações práticas.

É preciso estudar alternativas para o algoritmo de solução do sistema linear através do MGBSE e, também, para o algoritmo de PLS, com o intuito de se reduzir o erro numérico.

Para impedir a formação de respostas correspondentes a mínimos locais insatisfatórios, mostradas para p igual a 2 em conjunto com o uso de restrição e do filtro, pode-se sugerir a utilização do método da continuação, segundo o qual a solução para p igual a 1 é usada como entrada para a otimização com p igual a 2. Desta forma, espera-se que os resultados sejam melhores.

Outro ponto importante é a observabilidade do meio. É necessário o estudo de mais tipos de carregamento e disposições dos eletrodos no contorno do domínio. Espera-se que variações de propriedade possam então ser melhor detectadas pelo algoritmo, obtendo-se respostas mais satisfatórias.

Outras restrições devem ser estudadas e um filtro, com raio baseado no conhecimento aproximado da geometria da distribuição de condutividades no interior do domínio, deve ser testado na reconstituição. É também necessário o desenvolvimento de um novo modelo ou atualização do modelo de eletrodo usado, de tal forma que os potenciais calculados sejam mais acurados e precisos e, como consequência, a imagem seja mais próxima do desejado.

Finalmente, as incertezas presentes no modelo adotado, como o valor das correntes aplicadas e o material usado, e as incertezas experimentais nos valores de potenciais de entrada do algoritmo, causadas devido a influências externas e aos próprios aparelhos utilizados no processo de medição, impedem que haja certeza sobre as imagens obtidas, as quais apresentam, então, um determinado nível de confiabilidade. Nestas condições, deve-se utilizar um método de otimização coerente, baseado na teoria de Probabilidades. O aluno, autor deste trabalho, irá

continuar os estudos referentes à aplicabilidade do MOT para a obtenção de imagens de TIE, em nível de doutorado, fundamentando-os no chamado Método de Otimização Topológica Baseado na Confiabilidade (ou “Reliability-Based Topology Optimization”, segundo Kharmanda et al. (2004)), um método capaz de obter sistemas otimizados levando-se em conta incertezas inerentes ao problema. Com esses estudos, espera-se contribuir, ainda mais, para a área de obtenção de imagens médicas de TIE.

ANEXO A – DEDUÇÃO DO PRINCÍPIO DOS POTENCIAIS VIRTUAIS

Esta dedução é dada por Bathe (1996). A eq. (2.1) é a seguinte:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{a.1})$$

Multiplicando-a pela distribuição virtual $\bar{\phi}$ e integrando o resultado no volume do domínio, obtém-se, dado que $\bar{\phi}$ é arbitrária e nula em $\partial\Omega\phi$:

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] \bar{\phi} dV = 0 \quad (\text{a.2})$$

Esta equação é equivalente à anterior. Como é sabido:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] \bar{\phi} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{\phi} \left(\sigma_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\bar{\phi} \left(\sigma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{\phi} \left(\sigma_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] - \\ & \quad \left[\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \left(\sigma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \left(\sigma_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{a.3})$$

Com esta, (a.2) é transformada em:

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{\phi} \left(\sigma_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\bar{\phi} \left(\sigma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{\phi} \left(\sigma_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] \right\} dV - \\ & \quad \int_V \left[\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \left(\sigma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \left(\sigma_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] dV = 0 \end{aligned} \quad (\text{a.4})$$

Com o auxílio do teorema do divergente, ou teorema de Gauss, pode-se modificar a primeira parcela da equação acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{\phi} \left(\sigma_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\bar{\phi} \left(\sigma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{\phi} \left(\sigma_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] \right\} dV \\ &= \int_{\partial\Omega} \left\{ \left[\bar{\phi} \left(\sigma_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] n_x + \left[\bar{\phi} \left(\sigma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] n_y + \left[\bar{\phi} \left(\sigma_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] n_z \right\} dS \end{aligned} \quad (\text{a.5})$$

onde n_x , n_y e n_z são as componentes do vetor unitário \mathbf{n} , normal a $\partial\Omega$, apontando para fora. Ainda, pode-se obter:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \left\{ \left[\bar{\phi} \left(\sigma_x \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \right] n_x + \left[\bar{\phi} \left(\sigma_y \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) \right] n_y + \left[\bar{\phi} \left(\sigma_z \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \right] n_z \right\} dS \\ = \int_{\partial\Omega} \left[\bar{\phi} \left(\sigma_n \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) \right] dS \end{aligned} \quad (\text{a.6})$$

Finalmente, impondo-se (2.4) e lembrando que $\bar{\phi}$ é nula em $\partial\Omega\phi$:

$$\int_{\partial\Omega} \left[\bar{\phi} \left(\sigma_n \frac{\partial\phi}{\partial n} \right) \right] dS = \int_{\partial\Omega_1} \bar{\phi}_S I_n dS \quad (\text{a.7})$$

Com esta última, modifica-se (a.4) para:

$$\int_V \left[\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial y} \left(\sigma_y \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial z} \left(\sigma_z \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \right] dV = \int_{\partial\Omega_1} \bar{\phi}_S I_n dS \quad (\text{a.8})$$

Esta é exatamente a eq. (2.5). Assim, deduziu-se o Princípio dos Potenciais Virtuais para o fenômeno de condução de corrente elétrica.

ANEXO B – CÁLCULO DA INTEGRAL DA MATRIZ DE CONDUTIVIDADE DO ELEMENTO TETRAÉDRICO E DA DERIVADA

Foi calculada, analiticamente, no caso da formulação da matriz de condutividade dos elementos tetraédricos com variáveis por nó, a seguinte integral:

$$\text{Int} = \left(\int_0^1 \int_0^{(1-r)} \int_0^{(1-r-s)} \sigma_m dt ds dr \right) \quad (\text{b.1})$$

sendo:

$$\sigma_m = ([N_m] \{P_m\})^p \sigma_A + (1 - ([N_m] \{P_m\})^p) \sigma_B \quad (\text{b.2})$$

dada a condutividade, portanto, pelo modelo de material definido para variável por nó. Ainda, foi mencionado que:

$$[N_m] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \quad (\text{b.3})$$

com cada elemento dado por:

$$N_1 = 1 - r - s - t \quad (\text{b.4})$$

$$N_2 = r \quad (\text{b.5})$$

$$N_3 = s \quad (\text{b.6})$$

$$N_4 = t \quad (\text{b.7})$$

A integral Int foi calculada através do manipulador simbólico do “software” comercial Matlab, para p igual a 1 e p igual a 2. Assim, obteve-se, para p igual a 1:

$$\text{Int} = \frac{1}{24} (\sigma_A - \sigma_B) (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4) + \frac{1}{6} \sigma_B \quad (\text{b.8})$$

e no caso de p igual a 2:

$$\text{Int} = \frac{1}{60} [(\sigma_A - \sigma_B) (\rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \rho_1 \rho_4 + \rho_2 \rho_3 + \rho_2 \rho_4 + \rho_3 \rho_4 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2)] + \frac{1}{6} \sigma_B \quad (\text{b.9})$$

Finalmente, para p igual a 1, foram obtidas as derivadas:

$$\frac{\partial(\text{Int})}{\partial \rho_1} = \frac{\partial(\text{Int})}{\partial \rho_2} = \frac{\partial(\text{Int})}{\partial \rho_3} = \frac{\partial(\text{Int})}{\partial \rho_4} = \frac{1}{24} (\sigma_A - \sigma_B) \quad (\text{b.10})$$

e, para p igual a 2:

$$\frac{\partial(\text{Int})}{\partial\rho_1} = \frac{1}{60} (\sigma_A - \sigma_B)(\rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + 2\rho_1) \quad (\text{b.11})$$

$$\frac{\partial(\text{Int})}{\partial\rho_2} = \frac{1}{60} (\sigma_A - \sigma_B)(\rho_1 + \rho_3 + \rho_4 + 2\rho_2) \quad (\text{b.12})$$

$$\frac{\partial(\text{Int})}{\partial\rho_3} = \frac{1}{60} (\sigma_A - \sigma_B)(\rho_1 + \rho_2 + \rho_4 + 2\rho_3) \quad (\text{b.13})$$

$$\frac{\partial(\text{Int})}{\partial\rho_4} = \frac{1}{60} (\sigma_A - \sigma_B)(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + 2\rho_4) \quad (\text{b.14})$$

REFERÊNCIAS

- AMATO, M.B.P. **Novas Estratégias em Ventilação Artificial: Diagnóstico e Prevenção do Barotrauma/ Biotrauma Através da Tomografia de Impedância Elétrica (TIE)**. São Paulo: publicação própria, 2001. (Sumário do Projeto temático FAPESP, processo 01/05303-4).
- BACRIE, C.C.; GOUSSARD, Y.; GUARDO, R. Regularized Reconstruction in Electrical Impedance Tomography Using a Variance Uniformization Constraint. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, v.16, p.562-571, 1997.
- BATHE, K.J. **Finite Element Procedures**. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- BENDSØE, M.P.; KIKUCHI, N. Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.71, p.197-224, 1988.
- BENSØE, M.P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**. New York: Springer – Verlag Berlin Heidelberg, 2003. (ISBN: 3-540-42992 1)
- BLUE, R.S.; ISAACSON, D.; NEWELL, J.C. Real-Time Three-Dimensional Electrical Impedance Imaging. *Physiol. Meas.*, v.21, p.15-26, 2000.
- CARDOSO, E.L. **Controle de Complexidade na Otimização Topológica de estruturas Contínuas**. 2000. 120p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2000.
- CHATEAUX, J.F.; NADI, M. Comparison of Performances of Electrical Impedance Tomography Evaluated with 2-D and 3-D Models. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, v.48, p.1874-1878, 2000.
- CHENEY, M.; ISAACSON, D. “Issues in Electrical Impedance Imaging”, *IEEE Computational Sci. Eng.*, v.2, p.53 – 62, 1995.

CHENEY, M.; Isaacson, D.; Goble, J.C. Electrical Impedance Tomography in Three Dimensions. *Appl. Computational Electromagn. Soc. J.*, v.7, p.128-148, 1992.

CHENEY, M.; Isaacson, D.; Newell, J.C. "Electrical Impedance Tomography", *SIAM review*, v.41, p.85-101, 1992.

CHENEY, M. et al. A Layer-stripping Reconstruction Algorithm for Impedance Imaging. In: *Proc. Ann. Int. Conf. IEEE EMBS, Paris, 1992. Anais. Paris 1992.* p.1694-1695.

CHENEY, M. et al. A Layer-stripping Reconstruction Algorithm for Impedance Imaging. In: *Proc. Ann. Int. Conf. IEEE EMBS, Orlando, 1991. Anais. Orlando*, p.3-4.

COOK, R.D. et al. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4.ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002.

HAFTKA, R.T.; GÜRDAL, Z. **Elements of Structural Optimization**. 3.ed. Kluwer Netherlands: Academic Publishers, 1999.

HUA, P. et al. Finite Element Modeling of Electrode-Skin Contact Impedance in Electrical Impedance Tomography. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v.40, p.335-343, 1993.

HYARIC, A.L.; PIDCOCK, M.K. An Image Reconstruction Algorithm for Three-Dimensional Electrical Impedance Tomography. *IEEE Trans Biomed Eng.*, v.48, p.230-235, 2001.

KHARMANDA, G. et al. Reliability-based topology optimization. *Struct Multidisc Optim*, v.26, p.295-307, 2004.

KIM, Y.; WEBSTER, J.G.; TOMPKINS, W.J. Electrical Impedance Imaging of the Thorax. *J. Microwave Power*, v.18, p.245-257, 1983.

KIM, M.C. et al. Regularization Methods in Electrical Impedance Tomography Technique for the Two-Phase Flow Visualization. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, v.28, p.773-782, 2001.

LARSEN, U.D.; SIGMUND, O.; BOUWSTRA, S. Design and Fabrication of Compliant Mechanisms and Material Structures with Negative Poisson's Ratio. *Journal of Micro Electro Mechanical Systems*, "MEMS", v.6, p.99-106, 1997.

LIMA, C. R. **Projeto de Mecanismos Flexíveis Usando o Método de Otimização Topológica**. 2002. 146p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2002.

LIMA, C. R. **Estudo da Obtenção de Imagens de Tomografia por Impedância Elétrica (TIE) do Pulmão pelo Método de Otimização Topológica (MOT)**. São Paulo: publicação própria, 2003. (Primeiro Relatório Científico FAPESP).

LIMA, C.R.; LIMA, R.G.; SILVA, E.C.N. Image Reconstruction Based On Topology Optimization And Applied To Electrical Impedance Tomography. In: XII International Conference on Electrical Bioimpedance & V Impedance Electrical Tomography, Gdansk, 2004. **Anais**. São Paulo, 2004.

LUKASCHEWITSCH, M.; MAASS, P.; PIDCOCK, M. Tikhonov regularization for electrical impedance tomography on unbounded domains. *Inverse Problems*, v.19, p.585-610, 2003.

MATHERALL, P. **Three Dimensional Electrical Impedance Tomography of the Human Thorax**. 1998. 227p. Tese (Doutorado) – Department of Medical Physics and Clinical Engineering, University of Sheffield. Western Bank, Sheffield, 1998.

MAUTE, K.; FRANGOPOL, D.M. Reliability-based design of MEMS mechanisms by topology optimization. *Computers and Structures*, v.81, p.813-824, 2003.

MELLO, L.A.M. **Desenvolvimento de um Software de Otimização Topológica Aplicado a Peças e Estruturas num Domínio Bidimensional**. 2002. 74p. Trabalho de Formatura – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2002.

MOLINA, N.A.V. **Redução de Erro Numérico no Filtro Estendido de Kalman Aplicado à Tomografia por Impedância Elétrica.** 2002. 152p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2002.

MOLINARI, M. et al. Efficient Non-Linear 3D Electrical Tomography Reconstruction. In: 2nd World Congress on Industrial Process Tomography, Hannover, 2001. **Anais.** Hannover, 2001. p. 424-432. (ISBN: 0 85316 2247)

PRESS, W.H. et al. **Numerical Recipes in C – The Art of Scientific Computing.** Cambridge University Press, 1999.

SANTOSA, F.; VOGELIUS, M. A Backprojection Algorithm for Electrical Impedance Imaging. *SIAM J. Appl. Math.*, v.50, p.216-243, 1990.

SHERBROOKE, E.C. Computation of the Solutions of Nonlinear Polynomial Systems. v.75, 1993. no prelo

SIGMUND, O. On the Design of Compliant Mechanisms using Topology Optimization. *Mechanics of Structures and Machines*, v.25, p.495-526, 1997.

SIGMUND, O. Topology optimization: a tool for the tailoring of structures and materials. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, v.358, p.211-227, 2000.

SILVA, E.C.N.; NISHIWAKI, S.; KIKUCHI, N. Topology Optimization Design of Flexensional Actuators. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, v.47, p.657-671, 2000.

TCHERNIAK, D. Topology optimization of resonating structures using SIMP method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.54, p.1605-1622, 2002.

TIKHONOV, A.N.; ARSENIN, V.Y. **Solutions of Ill-Posed Problems.** Washington D.C.: Winston V.H. & Sons N.W., 1977.

TRIGO, F.C. **Filtro Estendido de Kalman Aplicado à Tomografia por Impedância Elétrica**. 2001. 113p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2001.

TRIGO, F.C.; LIMA, R.G.; AMATO, M.B.P. Electrical Impedance Tomography Using the Extended Kalman Filter. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v.51, p.72-81, 2004.

VANDERPLATZ, G.N. **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design**: with Applications. McGraw-Hill, 1984.

VAUHKONEN, M.; KARJALAINEN, P.A.; KAIPIO, J.P. A Kalman Filter Approach to Track Fast Impedance Changes in Electrical Impedance Tomography, *IEEE Trans Biomed Eng.*, v.45, p.486-493, 1998.

VAUHKONEN, P.J. et al. Three-Dimensional Electrical Impedance Tomography Based on the Complete Electrode Model. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, v.46, p.1150-1160, 1999.

VAUHKONEN, P.J. et al. Iterative Image Reconstruction in Three-Dimensional Electrical Impedance Tomography. In: *Inverse Problems, Design and Optimization Symposium*, Rio de Janeiro, 2004. **Anais**. Rio de Janeiro, 2004.

WEXLER A.; FRY B.; NEUMAN M.R. Impedance Computed Tomography Algorithm and Systems. *Appl. Optics*, v.24, p.3985 – 3992, 1985.

WOO, E.J. et al. A Robust Image Reconstruction Algorithm and its Parallel Implementation in Electrical Impedance Tomography. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, v.12, p.137-146, 1993.

YIN, L.; ANANTHASURESH, G.K. Topology Optimization of Compliant Mechanisms with Multiple Materials Using a Peak Function Material Interpolation Scheme. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v.23, p.49-62, 2001.

YOUN, B.D. et al. Reliability-based design optimization for crashworthiness of vehicle side impact. *Struct Multidisc Optim*, v.26, p.272-283, 2004.

APÊNDICE – ARQUIVO DE ENTRADA

EXEMPLO PARA OS ALGORITMOS

```
/COM,ANSYS RELEASE 5.4 UP19970828 16:16:44 11/03/2003
```

```
/PREP7
```

```
/NOPR
```

```
/TITLE,
```

```
*IF,_CDRDOFF,EQ,1,THEN !if solid model was read in
```

```
_CDRDOFF= !reset flag, numoffs already performed
```

```
*ELSE !offset database for the following FE model
```

```
NUMOFF,NODE, 27
```

```
NUMOFF,ELEM, 8
```

```
NUMOFF,TYPE, 1
```

```
*ENDIF
```

```
ET, 1, 70
```

```
NBLOCK,6,SOLID
```

```
(3i8,6e16.9)
```

1	41	0	1.00000000	3.00000000	1.00000000
2	11	0	1.00000000	1.00000000	1.00000000
3	112	50000	1.00000000	2.00000000	1.00000000
4	21	0	3.00000000	1.00000000	1.00000000
5	32	50000	2.00000000	1.00000000	1.00000000
6	31	0	3.00000000	3.00000000	1.00000000
7	62	50000	3.00000000	2.00000000	1.00000000
8	82	50000	2.00000000	3.00000000	1.00000000
9	13	0	2.00000000	2.00000000	1.00000000
10	51	0	1.00000000	1.00000000	3.00000000
11	42	50000	1.00000000	1.00000000	2.00000000
12	61	0	3.00000000	1.00000000	3.00000000
13	12	50000	2.00000000	1.00000000	3.00000000
14	22	50000	3.00000000	1.00000000	2.00000000
15	23	0	2.00000000	1.00000000	2.00000000
16	81	0	1.00000000	3.00000000	3.00000000
17	102	50000	1.00000000	3.00000000	2.00000000
18	71	0	3.00000000	3.00000000	3.00000000
19	92	50000	2.00000000	3.00000000	3.00000000
20	72	50000	3.00000000	3.00000000	2.00000000

```

21  33  0 2.00000000  3.00000000  2.00000000
22 122 50000 1.00000000  2.00000000  3.00000000
23  43  0 1.00000000  2.00000000  2.00000000
24  52 50000 3.00000000  2.00000000  3.00000000
25  53  0 3.00000000  2.00000000  2.00000000
26  63  0 2.00000000  2.00000000  3.00000000
27  14  0 2.00000000  2.00000000  2.00000000

```

N,R5.3,LOC, -1,

N,R5.1,LOC, -1,

EBLOCK,18,SOLID

(18i7)

```

 1  1  1  1  0  0 14  0  8  0  1  3  9  8 17 23 27 21
 1  1  1  2  0  0 14  0  8  0  3  2  5  9 23 11 15 27
 1  1  1  3  0  0 14  0  8  0  8  9  7  6 21 27 25 20
 1  1  1  4  0  0 14  0  8  0  9  5  4  7 27 15 14 25
 1  1  1  5  0  0 14  0  8  0 17 23 27 21 16 22 26 19
 1  1  1  6  0  0 14  0  8  0 23 11 15 27 22 10 13 26
 1  1  1  7  0  0 14  0  8  0 21 27 25 20 19 26 24 18
 1  1  1  8  0  0 14  0  8  0 27 15 14 25 26 13 12 24

```

-1

EN,R5.1,ATTR, -1,

BFUNIF,TEMP,_TINY

AUTOTS,OFF

NSUBST, 1, 0, 0,OFF

KBC, 0

KUSE, 0

TIME, .000000000

TREF, .000000000

ALPHAD, .000000000

BETAD, .000000000

DMPRAT, .000000000

TIMINT,OFF ,THER

CNVTOL,HEAT,-1

CNVTOL,TEMP,-1

CRPLIM, .100000000

NCNV, 1, .000000000 , 0, .000000000 , .000000000

LNSRCH,OFF

NEQIT, 0

PRED,OFF ,,OFF

ERESX,DEFA

ACEL, .000000000 , .000000000 , .000000000

OMEGA, .000000000 , .000000000 , .000000000 , 0

DOMEGA, .000000000 , .000000000 , .000000000

CGLOC, .000000000 , .000000000 , .000000000

CGOMEGA, .000000000 , .000000000 , .000000000

DCGOMG, .000000000 , .000000000 , .000000000

IRLF, 0

FINISH