

PMC

FD-1409

ALEXANDRE VERCEZE NETO

**ESFORÇOS DINÂMICOS DECORRENTES
DOS ACIONAMENTOS EM MÁQUINAS DE
ELEVAÇÃO E TRANSPORTE**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da USP
para a obtenção do título de Mestre em Engenharia

SAO PAULO, 1992

ALEXANDRE VERCEZE NETO
Engenheiro Mecânico, USP, 1977

**ESFORÇOS DINÂMICOS DECORRENTES
DOS ACIONAMENTOS EM MÁQUINAS DE
ELEVAÇÃO E TRANSPORTE**

**Dissertação apresentada ao Departamento de
Engenharia Mecânica da Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Engenharia Mecânica**

**Orientador: Prof. Dr. Francisco Emilio Baccaro Nigro
Depto. Engenharia Mecânica da EPUSP**

SÃO PAULO, 1992

DEDALUS - Acervo - EPMN



31600009917

Verceze Neto, Alexandre

Esforços dinâmicos decorrentes dos acionamentos em máquinas de elevação e transporte. São Paulo, 1992. 160 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Máquinas de elevação e transporte - Esforços dinâmicos I, Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II.t

À minha esposa e aos meus filhos

AGRADECIMENTOS

Ao orientador Prof. Dr. Francisco E.B. Nigro pela sempre presente e eficaz orientação.

Aos engenheiros Paulo Gunther Melly e Clélio Ferrer Martins, respectivamente diretor técnico e superintendente técnico da BARDELLA S/A INDÚSTRIAS MECÂNICAS, pelo incentivo e apoio.

A todos os colegas que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

ESFORÇOS DINÂMICOS DECORRENTES DOS ACIONAMENTOS EM MÁQUINAS DE ELEVAÇÃO E TRANSPORTE

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se o desenvolvimento de modelos e procedimentos que possibilitem a determinação dos esforços dinâmicos decorrentes dos acionamentos em máquinas de elevação e transporte.

Aborda-se mais especificamente os movimentos de translação horizontais. Propõe-se um modelo de três massas, conectados por elementos elásticos, para representar o sistema mecânico. As respostas obtidas para este modelo são confrontadas com as de um modelo mais completo, simulado pelo método dos elementos finitos, com resultados satisfatórios.

A partir deste modelo, desenvolve-se uma formulação objetiva do ponto de vista da engenharia de projetos, para a determinação dos esforços dinâmicos para dois sistemas de acionamentos comumente aplicados em máquinas de elevação e transporte. Analisa-se um sistema convencional de partida em malha aberta e um sistema realimentado.

Ao final faz-se uma discussão dos resultados, comparando-se os níveis de solicitação para os dois sistemas analisados, bem como com os obtidos segundo os critérios propostos pelas normas internacionais que tratam do assunto.

Alexandre - pag. 153

DYNAMIC EFFORTS DUE TO DRIVING SYSTEM IN CRANES

ABSTRACT

In this work the development of models and procedures enabling the determination of dynamic efforts resulting from driving systems in cranes is being presented.

In particular, the horizontal travelling motion is discussed. A model with three masses, connected by elastic elements is proposed to represent the mechanical system. The answers obtained from this model are then compared with those from a more complete model, simulated by finite element method, with satisfactory results.

Based on this model, an objective formulation of the project engineering point of view is made, aiming at the determination of dynamic efforts for two driving system usually applied in cranes. A starting system without feedback and a loop controlled are analysed.

At the end of this work, all results are discussed comparing the levels of strain for the two analysed system, as well as with those obtained according to criteria proposed by international standards covering this subject.

SUMÁRIO

	PÁGINA
1. Objetivos e justificativas.....	01
2. O Sistema real a ser tratado.....	04
3. Revisão bibliográfica.....	07
4. Modelos físicos do sistema.....	12
5. O comportamento dinâmico do sistema.....	17
5.1 Análise do modelo de três graus de liberdade.....	18
5.1.1 Equações do movimento do sistema.....	18
5.1.1.1 Sistema com acionamento tipo A1.....	18
5.1.1.2 Sistema com acionamento tipo A2.....	19
5.1.2 Frequências naturais do sistema.....	20
5.1.3 Modos naturais de vibrar.....	21
5.2 Amortecimento interno do sistema.....	24
5.3 A resposta dinâmica a uma excitação qualquer.....	25
5.3.1 Equações da Resposta.....	25
5.3.2 Estudo das condições iniciais para o movimento livre do sistema.....	30
5.4 A resposta dinâmica a uma excitação em degrau.....	32
5.4.1 Equações da Resposta.....	33
5.4.2 Equações da participação dos modos e parâmetros do sistema no esforço dinâmico.....	35
5.4.2.1 Contribuição máxima de cada um dos modos.....	35
5.4.2.2 Aplicação.....	38
5.5 Análise de modelo pelo método dos elementos finitos..	41
5.5.1 O modelo estrutural.....	41
5.5.2 Modos e frequências naturais de vibrar.....	42
5.5.3 Resposta a uma excitação em degrau.....	47
5.5.3.1 Resposta em esforço dinâmico.....	47

5.5.3.1.1	Equações com carro centrado no meio do vão.....	47
5.5.3.1.2	Equação da resposta com carro descentrado.....	49
5.5.3.1.3	Aplicação aos sistemas com acionamento tipo A1.....	52
5.5.3.2	Resposta em velocidade e aceleração....	61
5.5.3.2.1	Equações da Resposta.....	61
5.5.3.2.2	Comparação com modelo de três graus de liberdade.....	61
5.5.3.2.3	Considerações sobre a resposta em termos de velocidade e aceleração.....	64
6.	Fontes de excitação nas M.E.T.s.....	65
6.1	Acionamento por motores de indução de rotor bobinado, em malha aberta.....	65
6.1.1	Introdução.....	65
6.1.2	Curvas características do motor.....	68
6.1.2.1	Considerações gerais.....	68
6.1.2.2	Curvas características durante a fase de aceleração.....	69
6.1.2.3	Curvas características durante a frenagem por plugging (contra-corrente).....	72
6.2	Acionamento por motores de corrente contínua.....	74
6.2.1	Introdução.....	74
6.2.2	Análise de desempenho do sistema.....	78
6.2.2.1	Análise de estabilidade pelo critério de Routh-Hurwitz.....	78
6.2.2.2	Performance do sistema quanto ao controle de velocidade.....	79
6.2.2.3	Performance do sistema quanto ao controle da limitação da corrente de partida.....	81
6.2.3	Equações da resposta para a força motora (Tp)..	82

6.2.3.1	Primeira fase: Não há movimento da Ponte.....	82
6.2.3.2	Segunda fase: Ponte inicia movimento...	85
6.2.4	Equações da resposta em velocidade do Motor....	96
6.2.5	Aplicação a sistema com acionamento Tipo A2....	97
6.2.6	Considerações sobre os sistemas controlados...	105
7.	Respostas do sistema mecânico.....	111
7.1	Introdução.....	111
7.2	Sistemas acionados por motores C.A. em malha aberta.	111
7.2.1	Fase de aceleração.....	111
7.2.2	Fase de frenagem.....	118
7.2.3	Aplicação.....	120
7.3	Sistemas acionados por motor C.C., realimentados....	124
7.3.1	Equações dos esforços dinâmicos.....	124
7.3.2	Aplicação.....	131
8.	Discussão dos resultados e conclusão.....	137
8.1	Quanto ao modelo.....	137
8.2	Quanto à elasticidade do sistema de transmissão....	138
8.3	Quanto aos esforços dinâmicos.....	139
8.4	Quanto ao dimensionamento do sistema de transmissão.	144
8.5	Sugestões.....	148
9.	Referências bibliográficas.....	151
	Apêndices.....	154
A.	Modelagem do sistema mecânico para simulação através de programas de elementos finitos.....	a1
B.	Simulação por elementos finitos de ponte rolante - Modelo DINA 4 e VIBRA 4.....	
B.1	Entradas do programa.....	b1
B.2	Saídas do programa.....	b7

SIMBOLOGIA ADOTADA

ALFABETO LATINO

- ao - Aceleração média do sistema mecânico.
- C, CA - Conjugado do motor.
- c₁, c₂ - Constantes elásticas torsionais do sistema de transmissão.
- CA, CC - Motor de corrente alternada e contínua respectivamente.
- cv - Constante de proporcionalidade entre torque e velocidade para motores de indução.
- D_R - Diâmetro da roda da ponte ou carro.
- E(s) - Transformada de Laplace do erro do sistema de controle.
- E_A - Força contra-eletromotriz para motores de corrente contínua.
- E_a - Erro no tempo de aceleração.
- E_f - Erro no tempo de frenagem.
- E_{va} - Erro na velocidade, durante a fase de aceleração.
- E_r - Erro em relação à velocidade nominal.
- E_i - Erro em relação ao limite de corrente.
- f_w - Folga linear equivalente do sistema de transmissão.
- g - Aceleração da gravidade (m/s).
- G₁(s) - Função de transferência do motor de corrente contínua.
- G₂(s) - Função de transferência do sistema mecânico.
- H(s) - Função de transferência do controlador proporcional e integral.
- i_r - Relação de transmissão entre motor e roda da ponte ou carro.
- I_A - Corrente da armadura de motores de corrente contínua.
- k₁, k₂ - Constante elástica linear equivalente do sistema de transmissão.
- k_{c1}, k_{c2} - Constante elástica dos cabos de aço.
- k_D - Constante do motor C.C, numericamente igual ao inverso da resistência da armadura do motor.
- k_E - Constante da proporcionalidade entre tensão e velocidade, para a força contra-eletromotriz.
- k_u - Constante do controlador proporcional.

- k_M - Constante da proporcionalidade entre força motora e corrente.
- L_A - Indutância da armadura.
- l - Comprimento do cabo de aço de sustentação da carga suspensa.
- m_1 - Massa equivalente da motrização.
- m_2 - Massa da ponte ou carro.
- m_3 - Massa da carga suspensa.
- M - Soma das massas m_1 e m_2 .
- p_1, p_2, p_3 - Componentes do vetor modal correspondente ao 2º modo do modelo de três massas.
- P - Designação do peso.
- q_1, q_2, q_3 - Designação de coordenadas normais do sistema mecânico.
- Q_1, Q_2, Q_3 - Forças generalizadas.
- Q_s - Esforço no sistema de transmissão devido à carga suspensa.
- R_A - Resistência da armadura de motores C.C.
- R_o - Força resistente ao movimento.
- s - Variável de Laplace.
- s_o - Constante de proporcionalidade entre força motora e o tempo, para sistemas controlados.
- t, t', t_o - Designação de tempo.
- t_w - Tempo para o motor vencer as folgas do sistema mecânico.
- T, T_A, T_{A1}, T_u - Designação de força motora referida à translação da ponte ou carro.
- T_1 - Constante de tempo do controlador proporcional e integral.
- u_1, u_2, u_3 - Componentes do vetor modal do 1º modo do sistema de três massas.
- U_A - Tensão na armadura de motores C.C.
- v_1 - Velocidade do motor.
- v_w - Velocidade do motor após vencer as folgas do sistema mecânico.
- v_M - Velocidade do centro de massa.
- w_1, w_2, w_3 - Componentes do vetor modal do 3º modo do sistema de três massas.

ALFABETO GREGO

- α, β_i - Constantes de proporcionalidade genéricas.
- γ - Designação da relação ($m_2/(m_1+m_2)$).
- γ_m - Fator de amplificação
- ϕ - Designação genérica de componente de vetor modal.
- λ - Auto-valor.
- η_R - Rendimento do sistema de transmissão.
- ξ - Designação genérica do fator de amortecimento.
- ζ_D - Constante de tempo do motor C. C.
- ω_n - Frequência natural.
- ω_A - Frequência amortecida.
- Δt_i - Tempo para formação do conjugado de partida no sistema controlado.
- σ - Designação da tensão.
- ρ - Constante de amortecimento do transitório de torque dos motores de indução.
- ψ - Fator de amplificação.

LISTA DE FIGURAS

	PÁGINA
Figura 01 - Acionamento do movimento de translação de uma ponte rolante - Tipo A1.....	04
Figura 02 - Variações do sistema de acionamento - Tipo A1...	04
Figura 03 - Acionamento por cabo de aço - Tipo A2.....	05
Figura 04 - Estrutura da ponte.....	06
Figura 05 - Estrutura do carrinho.....	06
Figura 06 - Modelo de duas massas (FEM - 1001).....	08
Figura 07 - Modelo estrutural (Kloppel e Mayer).....	09
Figura 08 - Sistema mecânico substituto (Ludwig).....	10
Figura 09 - Sistema real.....	12
Figura 10 - Modelo do sistema (Yang e Koss).....	12
Figura 11 - Modelo de quatro massas.....	12
Figura 12 - Modelo de três massas.....	14
Figura 13 - Sistema de acionamento tipo A2.....	15
Figura 14 - Modelo do sistema (sem folga).....	18
Figura 15 - Modelo do sistema (sem folga).....	19
Figura 16 a-c - Modos de vibrar do sistema de acionamento A1 Dados do sistema: $m_1 = 7700 \text{ kg}$; $m_2 = 40870 \text{ kg}$; $m_3 = 10.000 \text{ kg}$ $k_1 = 2.4 \cdot 10^7 \text{ N/m}$; $l = 5 \text{ m}$	23
Figura 18 - Ciclo de histerese do material.....	24
Figura 19 - Modelo estrutural com carro descentrado.....	49
Figura 20 a - Velocidade do motor - Modelo VIBRA 1 - 3GL....	62
Figura 20 b - Velocidade do motor - Modelo DINA 1 - 8GL....	62
Figura 20 c - Velocidade do motor - Modelo VIBRA 4 - 3GL....	62
Figura 20 d - Velocidade do motor - Modelo DINA 4 - 8GL....	63
Figura 21 a - Aceleração da ponte - Modelo VIBRA 4 - 3GL....	63
Figura 21 b - Aceleração nas cabeceiras-Modelo DINA 4-8GL...	63
Figura 21 c - Aceleração na região central da viga principal Modelo DINA 4 - 8GL.....	63
Figura 21 d - Aceleração da carga - Modelo VIBRA 4 - 3GL....	64
Figura 21 e - Aceleração da carga - Modelo DINA 4 - 8GL....	64

Figura 22 -	Curvas características dos motores de indução...	65
Figura 23 -	Curva do motor partida em vazio.....	69
Figura 24.1 -	Curva do motor no 1° estágio.....	69
Figura 24.2 -	Curva do motor no tempo - 1° estágio.....	71
Figura 25.1 -	Curva do motor no 2°, 3° e 4° estágio.....	71
Figura 25.2 -	Curva do motor no tempo.....	72
Figura 26.a -	Curva do motor - frenagem.....	72
Figura 26.b -	Curva do motor no tempo - frenagem.....	73
Figura 27 a -	Diagrama de blocos e gráfico de transferência.	76
Figura 27 b -	Diagrama de blocos com funções de transferência	76
Figura 28 -	Curva típica de evolução da força motora conjugado.....	77
Figura 29 a-b-c -	89
Figura 30 -	Curva de evolução da força motora..... $k_u = 4500$; $k_1 = 0.255$; $T_1 = 0.035$	103
Figura 31 -	Curva de evolução da força motora..... $k_u = 1650$; $k_1 = 0.255$; $T_1 = 0.035$	104
Figura 32 -	Representação da evolução da força motora.....	105
Figura 33 -	Curvas de evolução da força motora.....	108
Figura 34 a-b -	116
Figura 35 a-b -	118
Figura 36 -	119
Figura 37 -	Evolução da força motora.....	124
Figura 38 -	129
Figura 39 -	134
Figura 40 -	Evolução da força motora com a inclusão da carga suspensa.....	136
Figura 41 -	Modelo de duas massas.....	137
Figura 42 -	Curvas de torque do motor..... 1. Sistemas baseados em aceleração constante. 2. Sistemas baseados em conjugado constante.	143
Figura 43 -	Coletivo padrão - segundo DIN [1].....	146
Figura 44 -	Evolução do torque - Sistema convencional.....	149
Figura 45 -	Evolução do torque - Sistema controlado.....	149

1. OBJETIVOS E JUSTIFICATIVAS

Pretende-se neste trabalho desenvolver procedimentos que possibilitem determinar as solicitações dinâmicas transmitidas aos mecanismos e estruturas pelos acionamentos das Máquinas de Elevação e Transporte (M.E.T.).

Trataremos mais especificamente dos movimentos de translação horizontais que operam intermitentemente e onde estão envolvidas grandes inércias e fortes acelerações, embora a mesma abordagem seja extensiva ao movimento de elevação da carga e também a outros tipos de máquinas.

As normas que orientam o projeto das M.E.T. procuram padronizar coeficientes de segurança e esforços, aplicados a modelos simples, não elásticos, que em situações normais atendem os requisitos de segurança e durabilidade dos equipamentos.

Uma abordagem racional no estudo dos acionamentos das M.E.T. considerando a natureza das diferentes fontes de esforço, bem como um modelo físico mais real, mostra que há diferenças consideráveis nas possíveis combinações de fonte de esforço (motor e freio) e sistemas mecânicos de acionamento. Uma atenção adequada a estas diferenças permite ao projetista a otimização de equipamentos em determinadas aplicações com maior grau de confiabilidade, bem como evitar situações limites em que se colocaria aquém da segurança requerida.

Há uma tendência crescente de utilização de sistemas de controle de motores mais sofisticados, como os realimentados para motores corrente contínua e os conversores contínuos de frequência para motores de corrente alternada, que se viabilizam economicamente pelas vantagens operacionais, os quais possibilitam uma partida mais suave e conseqüentemente reduzem os efeitos dinâmicos nos acionamentos.

Isto deve se refletir em um ganho nas dimensões dos acionamentos que somente poderão ser avaliados a partir de estudos em cima de modelos físicos mais reais e dos parâmetros do sistema de controle.

Trabalhar com os esforços reais nos acionamentos implicará em novo enfoque no dimensionamento dos componentes mecânicos no qual as hipóteses de dano acumulado serão requeridas.

Este novo enfoque já é uma preocupação dos construtores alemães como pode ser constatado no relatório do Instituto Alemão de Normalização (DIN), denominado "Regras Fundamentais para o Cálculo de Acionamentos de Máquinas de Elevação e Transporte" [1] no qual se propõe a determinação dos esforços dinâmicos máximos com base no tipo de acionamento e nas características específicas do equipamento. O dimensionamento com base na hipótese linear de dano acumulado de Miner-Palmgren, contudo, é feito a partir de espectros de sollicitação padronizados, construídos a partir da sollicitação máxima. Dissertações produzidas por universidades alemãs, como a de Ludwig H.G. [2] de 1985 e trabalhos publicados em revistas especializadas como o de Yang (1988) [3] ambos na Alemanha, apontam nesta mesma direção. Portanto, é de se esperar também uma evolução neste sentido das Normas Internacionais que regulamentam o dimensionamentos de M. E. T. ou seja, deve-se trabalhar com modelos mais adequados, o que implica em esforços mais reais e em contra partida reduzir-se gradativamente os coeficientes de segurança.

Pretendemos em nosso trabalho desenvolver modelos, principalmente tratáveis analiticamente, que possam representar um avanço significativo em relação a formulação tradicional e também detalhar o caminho para construção e tratamento de modelos mais refinados utilizando recursos computacionais disponíveis.

A partir da construção de modelos adequados, pretende-se desenvolver procedimentos objetivos, que permitam a determinação das sollicitações dinâmicas máximas, devidas a dois

tipos de acionamentos comumente aplicados nas M. E. T. Serão tratados um sistema convencional de partida em malha aberta e um sistema realimentado.

No capítulo 2 será apresentado o sistema real a ser tratado nesta dissertação. No capítulo 3 será feita uma revisão bibliográfica, fazendo-se referências a trabalhos com escopo semelhante, bem como às normas internacionais que regulamentam o assunto. No capítulo 4 será feita uma breve discussão sobre os modelos físicos utilizados por pesquisadores da área e será proposto o modelo básico de três massas a ser analisado e criticado neste trabalho.

O capítulo 5 tratará da montagem das equações para análise dinâmica do modelo de três massas e da confrontação de resultados desse modelo com os de um modelo mais completo baseado no método dos elementos finitos. A confrontação será feita através da resolução de casos exemplo, comparando-se as respostas obtidas para cada um dos modelos, a uma excitação em degrau.

No capítulo 6 serão apresentados as excitações reais a que o sistema mecânico será submetido. Serão discutidas as excitações decorrentes de dois sistemas de acionamentos comumente empregados em M. E. T.

No capítulo 7, será proposto uma formulação simples e prática para determinar as solicitações dinâmicas, realçando as vantagens dos sistemas controlados sobre os sistemas convencionais, quanto à redução do nível dos esforços dinâmicos.

Finalmente, no capítulo 8 serão feitas as discussões dos resultados obtidos em comparação com os do tratamento tradicional, bem como com os decorrente da aplicação dos critérios das normas internacionais mais recentes e serão apresentadas as conclusões e sugestões para futuros trabalhos.

2. O SISTEMA REAL A SER TRATADO

2.1 Sistemas de Acionamento

Sistemas de acionamento dos movimentos de translação de M.E.T. são constituídos basicamente de motor de indução com rotor de anéis ou gaiola, ou de motor de corrente contínua do tipo "shunt", freio, acoplamento, redutor, eixo de transmissão e roda. O arranjo típico de um acionamento de Ponte Rolante constituído de duas motorizações independentes, próximas as rodas da ponte, é mostrado na Figura 1, ao qual denominaremos tipo A1.

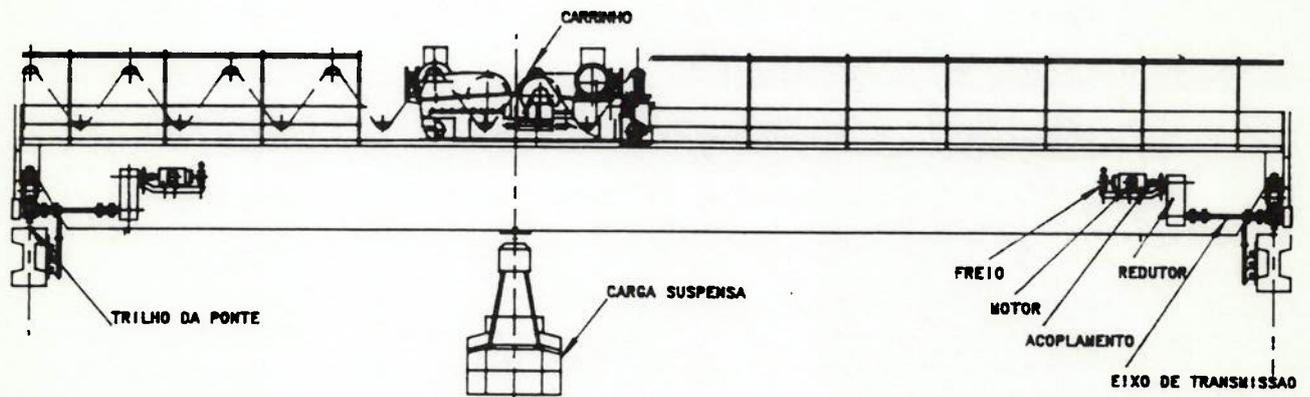


Figura 1 - Acionamento do movimento de translação de uma Ponte Rolante - tipo A1.

Este sistema apresenta variações como: acionamento direto nas rodas ou acionamento com um único conjunto motor redutor central acionando através de eixos de transmissão as duas rodas da ponte ou o carrinho da ponte conforme, Figura 2.

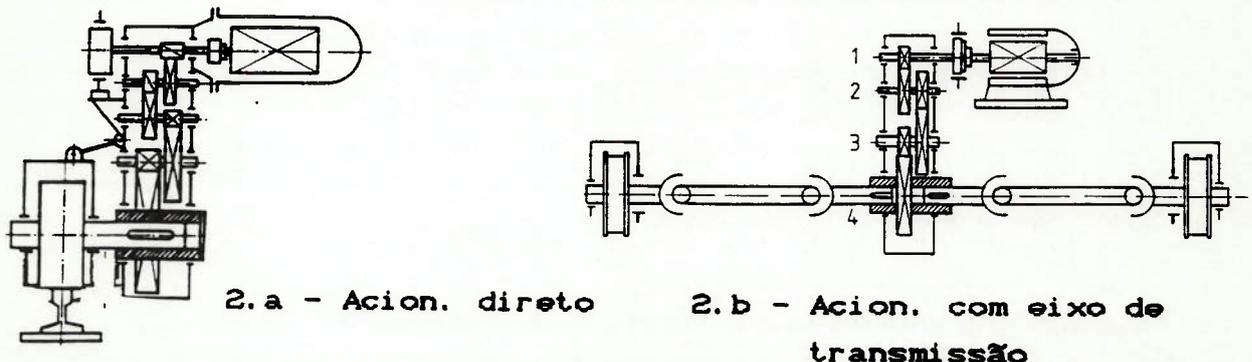


Figura 2 - Variações do sistema de acionamento tipo - A1.

Outra variação é o sistema de acionamento por cabos de aço mostrado na Figura 3, normalmente utilizado em guindastes portuários, ao qual denominaremos tipo A2.

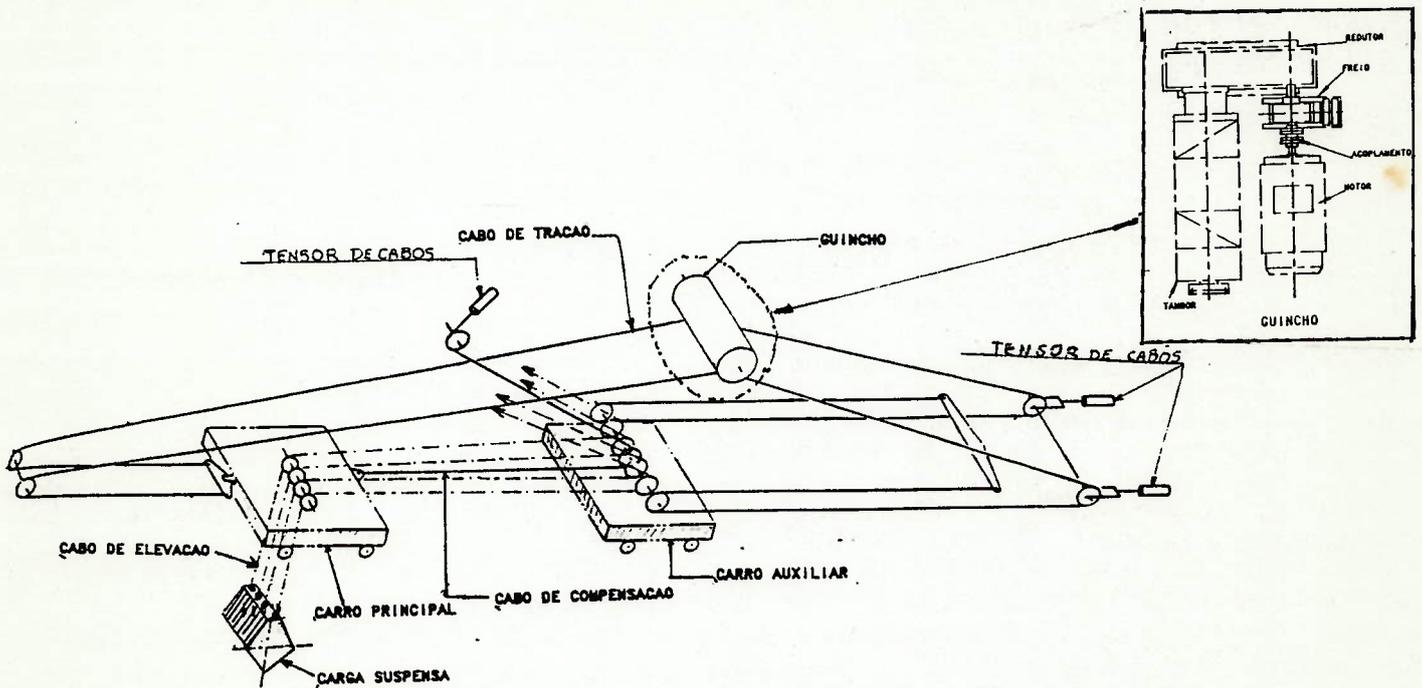


Figura 3 - Acionamento por cabo de aço - Tipo A2.

Os elementos de maior inércia nas M.E.T., quando referidos ao eixo do motor são por ordem decrescente:

- Inércia da Ponte (carro) + Carga : $(IP + IQ)$.
- Inércia do Motor + Freio : $(IM + IF) \approx 0.1$ a $0.2 (IP + IQ)$ segundo H. Ernst [4]
- Inércia do Redutor e demais elementos de transmissão (eixos, acoplamento): $IR \approx 0.1$ a $0.2 (IM + IF) \approx \approx 0.01$ a $0.05 (IP + IQ)$ segundo N. Rudenko [5].

2.2 Sistema Estrutural

As pontes rolantes, salvo pontes de pequena capacidade, são constituídas de duas vigas principais (Figura 4), sobre as quais apoiam-se os trilhos de translação do carrinho móvel, unidas em suas extremidades por vigas denominadas cabeceiras. As vigas cabeceiras são engastadas rigidamente às vigas principais e apoiam-se sobre rodas guiadas lateralmente por flanges aos trilhos de rolamento.

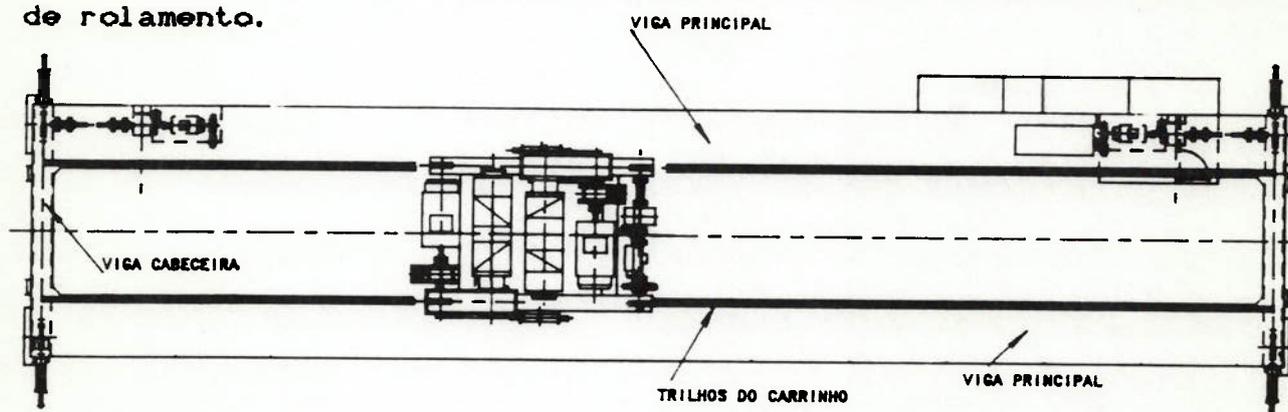


Figura 4 - Estrutura da ponte.

Os carrinhos possuem estruturas mais compactas que dão sustentação a carga suspensa, sendo esta manuseada por um guincho localizado ou não sobre a estrutura do carro (Figura 5).

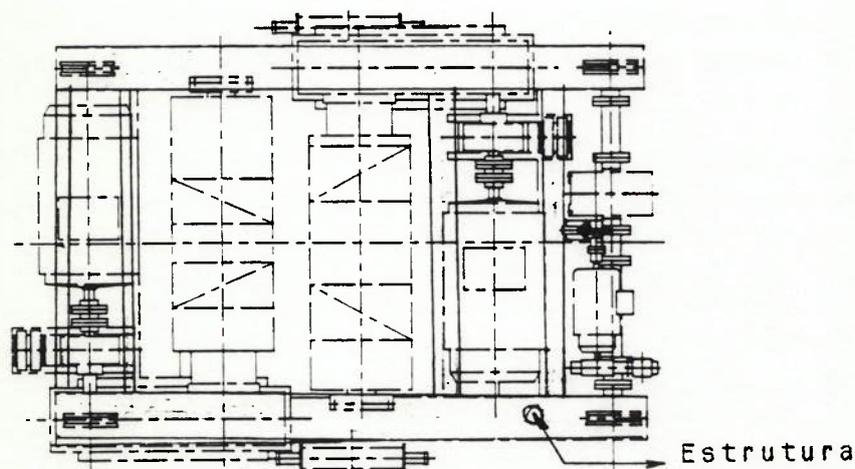


Figura 5 - Estrutura do carrinho.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Historicamente o dimensionamento dos mecanismos tem sido feito com base em métodos de análise de corpo rígido, relevando-se qualquer efeito dinâmico quando se determina os esforços sobre cada elemento da cadeia de transmissão.

Em geral toma-se o valor médio do torque proveniente do motor e admite-se que todos os elementos sofram a mesma aceleração ou desaceleração.

Por exemplo tomemos um sistema com relação de inércias típicas em que $(I_M + I_F) \approx 0.1 (I_Q + I_P)$ e $I_R = 0.01 (I_Q + I_P)$. A parcela do torque proveniente do motor (T_M) transmitida ao redutor (T_R) será dada por:

$$T_R = \frac{T_M \cdot (I_Q + I_P + I_R)}{I_Q + I_P + I_R + I_M + I_F} = T_M \cdot \frac{1.01}{1 + 0.01 + 0.1} = 0.91 T_M$$

Obviamente pelo lado da segurança, e através de coeficientes que levam em conta as imperfeições do método de cálculo, amadurecidos pela experiência de longos anos, são feitas as correções que permitem um razoável controle sobre o dimensionamento.

A literatura mais tradicional sobre o assunto e ainda bastante utilizada como referência, como os trabalhos de H. Ernst [4] ou ainda N. Rudenko [5] não fazem qualquer menção ao efeito dinâmico devido a elasticidade e ao tipo de acionamento.

As normas internacionais que regulam o dimensionamento das M.E.T. como F.E.M. - 1001 [6] na Europa, AISE N°6 [7], CMAA [8] nos Estados Unidos e NBR - 8400 [9] no Brasil ainda mantém o procedimento tradicional quando se trata do dimensionamento dos mecanismos (Redutores, eixos, rodas, etc.).

Mesmo sem propor uma abordagem mais específica no dimensionamento dos mecanismos, pode se perceber uma tendência à correção dos esforços calculados com base em modelos não elásticos, através de fatores de amplificação que dependem da intensidade do serviço, e que levam em contra partida a uma redução nos coeficientes de segurança, como acontece na revisão de 1987 da Norma F.E.M. 1001 (Europa).

A norma F.E.M. 1001 (Europa), que propõe um tratamento mais racional na determinação dos esforços dinâmicos sobre as estruturas, ainda o faz com base em modelo bastante simples de duas massas (Figura 6) e admitindo o conjugado motor ou de frenagem em seu valor médio constante.

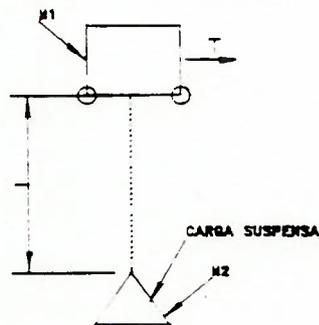


Figura 6 - Modelo de duas massas (FEM-1001).

m_1 = massa equivalente dos elementos em rotação acrescida da massa da ponte.

m_2 = massa da carga suspensa.

T = força motora constante.

Na realidade este modelo permite apenas a determinação da aceleração/desaceleração máxima da carga, pois negligencia-se a elasticidade do acionamento bem como da própria estrutura da ponte ou carro.

Para corrigir esta deficiência, a Norma recomenda que se majore a aceleração/desaceleração da massa da ponte ou carro em duas vezes o seu valor médio.

Quando o acionamento é feito por motores de corrente alternada sofrendo fortes comutações em sua curva de torque, como veremos em 8.1 a aceleração da estrutura da ponte pode exceder significativamente a duas vezes o seu valor médio...

A universidade alemã de Darmstadt tem produzido dissertações sobre o assunto como as de Kloppel e Mayer de 1965 [10] em que se analisa o efeito dinâmico dos motores de corrente alternada com comutação na curva de torque sobre a estrutura da ponte rolante, particularmente quando a partida ocorre com o carro deslocado em relação ao centro da ponte (Figura 7).

Neste caso são analisadas as forças obliquas (H) que aparecem lateralmente às rodas para compensar o fato de que a resistência ao movimento é diferente em cada trilho.

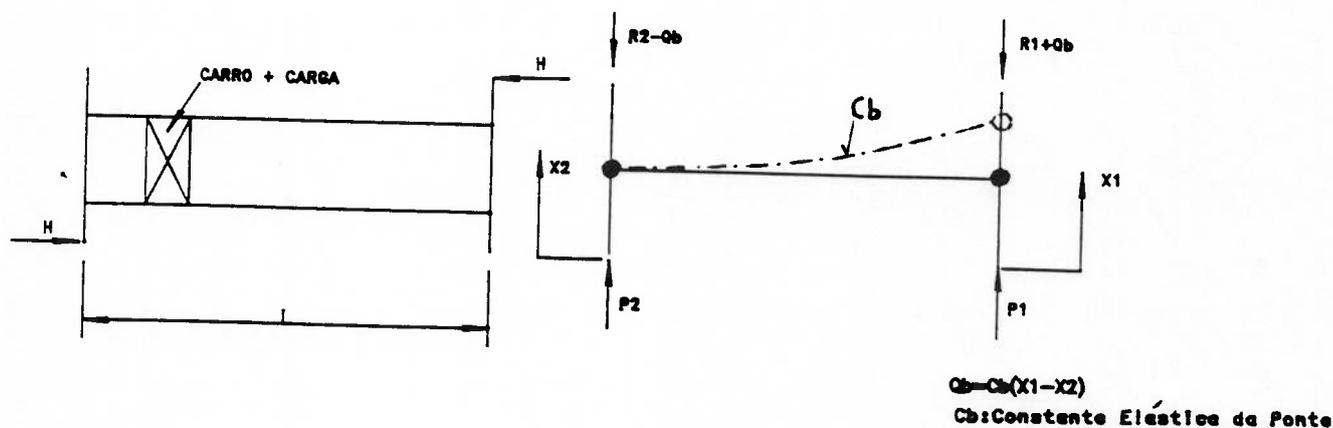


Figura 7 - Modelo Estrutural (Kloppel e Mayer).

No modelo são desconsideradas a oscilação da carga e a dinâmica do sistema de acionamento.

Outro trabalho mais recente também produzido em Darmstadt por H.G. Ludwig [2], de 1985, trata dos acionamentos das M.E.T. com um modelo de 4 massas (Figura 8) simulado através do computador analógico, para acionamento por motores de corrente alternada em malha aberta e corrente contínua em malha fechada.

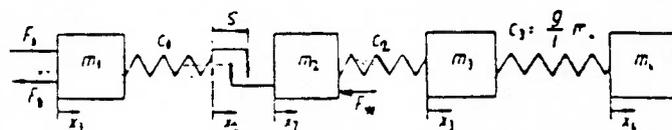


Figura 8 - Sistema mecânico substituto. (Ludwig).

- m_1 = momentos de inércia da massa do rotor do motor, do disco do freio e da transmissão, referidos ao movimento de translação do guindaste.
- m_2 = massa total da viga cabeçeira, acionamento da translação e uma parcela das vigas principais da ponte.
- m_3 = massa do carro móvel e da parte central da viga.
- m_4 = massa da carga (variável).
- c_1 = rigidez da mola de torção entre o motor e a roda livre, referida ao movimento de translação do guindaste.
- c_2 = rigidez de mola entre a roda livre e o carro móvel (ela contém a rigidez horizontal de flexão das vigas principais da ponte).
- c_3 = rigidez de mola do pêndulo matemático oriundo do peso da carga e do comprimento do cabo de elevação.
- s = soma das folgas entre dentes de todos os estágios da redução, referidas ao movimento de translação do guindaste.
- F_A, F_B = torques (momentos de torção) do motor e do freio mecânico, referidos ao movimento de translação do guindaste.
- F_W = resistência à translação.

Ludwig utiliza um modelo mínimo bastante satisfatório, contemplando as folgas do sistema de acionamento, bem como a oscilação da carga e a elasticidade da estrutura.

Quanto ao dimensionamento do sistema mecânico, devido às grandes flutuações na sequência esforços-tempo, os pesquisadores do assunto têm recorrido a técnicas de contagem de pico, como o método "Rainflow" e a hipótese de dano acumulado de Miner-Palmgren.

Na composição da sequência esforços-tempo, Yang [3] sugere uma separação das fases de aceleração e de frenagem para efeito de dimensionamento, enquanto Ludwig [2] não somente aglutina ambas na mesma sequência como inclui ainda operações de posicionamento da carga.

O método "Rainflow", como definido por Collins [17] aplicado literalmente levaria a se desconsiderar os picos extremos da fase de aceleração e frenagem (picos alternados) contando-se apenas os picos intermediários de menor magnitude; o que de fato permitiria uma separação na sequência esforço-tempo. Contudo, Collins observa que para sequências repetidas sistematicamente é recomendável a contagem dos picos extremos, procedimento este adotado por Ludwig [2].

Do ponto de vista prático da Engenharia de Projetos, seria conveniente, a partir de estudos detalhados de equipamentos que possam representar uma "família" considerável de equipamento comparáveis, se estabelecer coeficientes aplicáveis à solicitação dinâmica máxima, a partir dos quais se determinaria uma solicitação constante equivalente, capaz de produzir o mesmo dano que o ciclo de solicitações aleatórias.

Para isto seria necessário construir toda a sequência esforço-tempo, a partir de operações típicas de cada equipamento, para que se construa um espectro real de solicitação. Devido a extensão do assunto deixamos o mesmo como sugestão para futuros trabalhos nesta área.

4. MODELOS FISICOS DO SISTEMA

4.1 Sistema com acionamento Tipo A1.

O sistema real de acionamento é mostrado na Figura 9 abaixo.

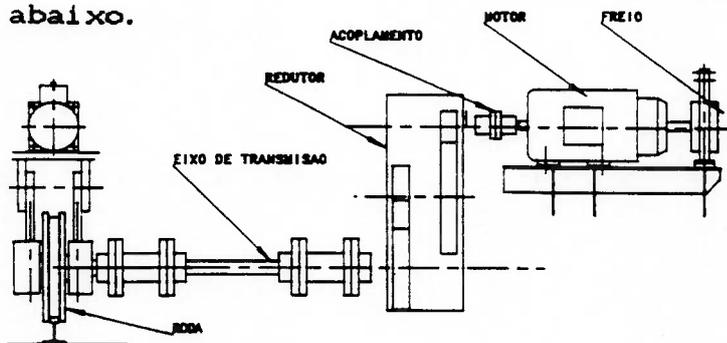


Figura 9 - Sistema Real

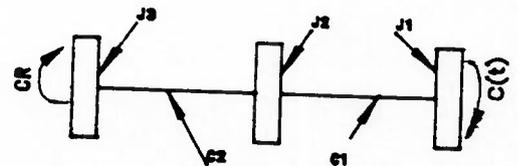


Figura 10 - Modelo do Sistema (Yang e Kos).

O modelo com três (3) elementos de inércia indicado na Figura 10 tem sido utilizado por pesquisadores do assunto como Yang (3) e Kos (11) onde:

I_1 = Inércia do motor e freio.

I_2 = Inércia do redutor referida ao eixo de entrada.

C_1 = Constante elástica entre motor e redutor.

C_2 = Constante elástica entre redutor e roda referida ao eixo do motor.

I_3 = Inércia equivalente da ponte, referida ao eixo do motor.

O modelo em massas de translação do conjunto com a inclusão da massa da carga, mostrado na Figura 11, nos parece mais conveniente pois permite a determinação de forças dinâmicas nos acionamentos bem como sobre a estrutura da ponte.

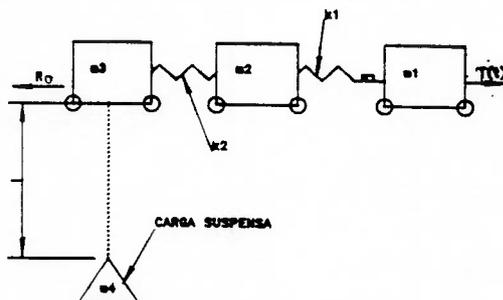


Figura 11 - Modelo de Quatro Massas.

Onde:

m_1, m_2 : massas equivalentes à inércia do motor+ freio e do redutor, respectivamente, referidas ao movimento de translação da ponte.

m_3 : massa da ponte + carro

m_4 : massa da carga suspensa

$$m_i = \frac{J_i}{\eta_R} \cdot \frac{4 \cdot i r^2}{D_R^2} \cdot p \quad i = 1,2, \text{ onde } p = \text{número de motores}$$

k_1, k_2 = constante elástica linear equivalente entre motor-redutor e entre redutor-ponte respectivamente, referidas ao movimento de translação da ponte, segundo Koss (11) dadas por:

$$k_i = C_i \cdot 4 \frac{i r}{D_R^2} \cdot p \quad i = 1,2$$

$i r$ = redução entre motor e roda da ponte.

D_R = diâmetro da roda da ponte.

η_R = rendimento do sistema de transmissão.

$T(t)$ = força de tração correspondente ao conjugado do motor $C(t)$.

$$T(t) = C(t) \left[\frac{2 \cdot i r}{D_R} \right] \cdot \eta_R \cdot p$$

R_0 = força constante devido as resistências ao movimento.

$$R_0 = R_{at} + R_w$$

R_{at} = força devido à resistência ao rolamento que pode ser calculada segundo H. Ernst (4) pela fórmula:

$$R_{at} = \omega_R \cdot P$$

ω_R = coeficiente dependente do tipo de mancal e diâmetro da roda.

P = carga total sobre as rodas.

R_w = resistência do vento.

Como observado em 2.1, a inércia do redutor é pequena quando comparada às demais, e não havendo elemento com inércia significativa montado no eixo de entrada do redutor, do lado oposto ao motor (freio de sapatas, freio dinâmico, etc) o sistema admite uma simplificação no modelo que pode ser resumido a três massas:

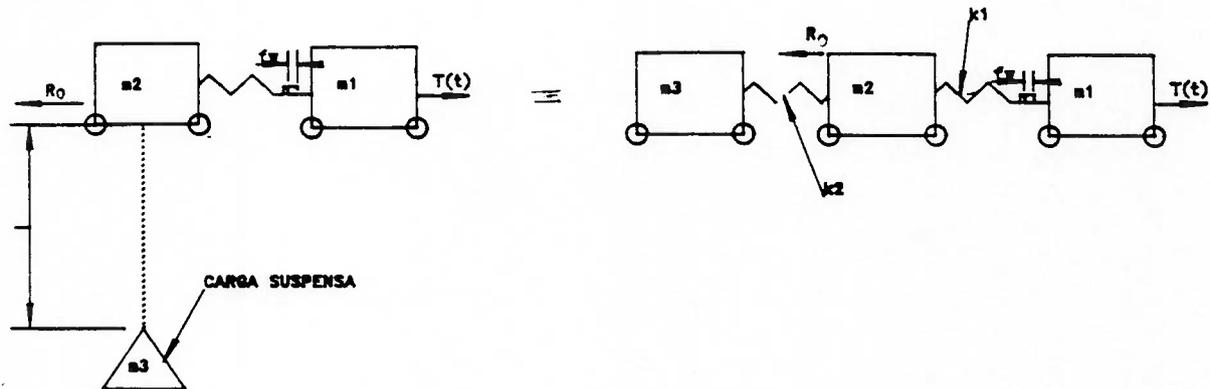


Figura 12 - Modelo de Três Massas.

Onde:

k_1 = constante elástica linear equivalente entre motor e ponte.

$k_2 = \frac{P_0}{1}$: Constante elástica linear, equivalente ao movimento pendular da carga, linearizado para pequenas oscilações.

m_1 = massa equivalente do motor + freio + redutor.

m_2 = massa da ponte + carro.

f_w = folga axial equivalente as folgas da transmissão.

4.2 Sistema com acionamento Tipo A2.

O modelo discutido anteriormente também se aplica aos sistemas de translação nas M.E.T. em que a força de tração é transmitida através de cabos de aço e a carga suspensa passa ser representada por uma massa pontual, segundo arranjo mostrado na Figura 13.

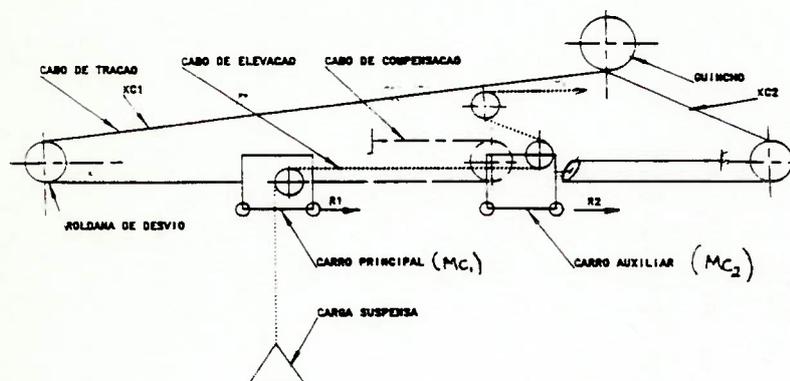
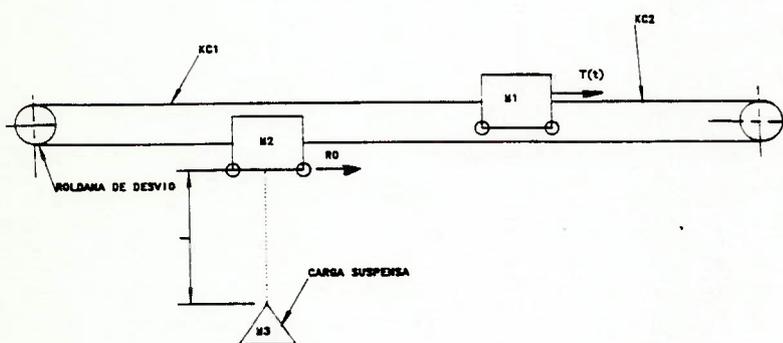


Figura 13a - Sistema Completo.



$$M2 = MC1 + 0.25 \cdot MC2$$

$$R0 = R1 + 0.5 \cdot R2$$

Figura 13b - Modelo reduzido do sistema.

Figura 13 - Sistema de Acionamento Tipo A2.

m_1 = massa equivalente do redutor + motor + freio.

m_2 = massa do carro.

m_3 = massa da carga suspensa.

k_{c1} , k_{c2} = constante elástica do cabo.

Na etapa seguinte em que será feita a análise modal dos acionamentos, a equivalência dos sistemas será mais claramente demonstrada.

O modelo de três massas pode ser criticado pelo fato de negligenciar a elasticidade da estrutura. Em alguns casos onde a frequência natural da estrutura é baixa em relação à frequência natural do sistema de acionamento (no caso de pontes esbeltas), a

mesma poderá atuar como elemento atenuador dos esforços dinâmicos. Para o tratamento destes casos pode-se utilizar algum programa de elementos finitos, para construção de um modelo mais refinado ou partir para uma simulação, direta, havendo recursos disponíveis adequados.

O modelo de três massas, entendemos ser do ponto de vista prático, do dia a dia da Engenharia de Projeto, o mais viável não só pela facilidade na sua construção e da obtenção da resposta, mas, sobretudo por oferecer segurança, como veremos no desenvolvimento deste trabalho. Podemos afirmar que a distância entre a resposta dada pelo modelo de três massas e um bom modelo é incomparavelmente menor do que a dada pelo tratamento tradicional.

Para o Projetista, usando-se uma expressão popular, "é fundamental conhecer o solo em que pisa", algo que coeficientes de segurança mesmo elevados não substituem.

5. COMPORTAMENTO DINÂMICO DO SISTEMA

No estudo do comportamento do sistema visando estabelecer procedimentos para determinação das solicitações dinâmicas, serão utilizadas técnicas de análise que permitam entender a sua dinâmica bem como avaliar a influência dos diversos parâmetros sobre a resposta.

Será priorizado o tratamento linear do assunto, visando a obtenção de respostas analíticas, que de fato nos permitam quantificar, e antecipar o comportamento do sistema diante de diferentes fontes de excitação e flutuações de parâmetros.

Faremos uma análise crítica do modelo de três graus de liberdade comparando-o com o tratamento tradicional e com um modelo contemplando os modos principais de vibrar da estrutura, simulada através de programa de elementos finitos. Com isso objetiva-se avaliar as deficiências e virtudes do modelo, bem como identificar a necessidade da construção de modelos mais refinados, em casos específicos. Serão utilizadas somente técnicas de análise linear, especificamente o método da superposição modal.

Serão desenvolvidas as equações para a análise dinâmica do sistema mecânico em termos de frequência natural, modos e resposta a uma excitação qualquer.

O Modelo de três graus de liberdade e um mais completo serão então construídos a partir de uma mesma ponte rolante. Inicialmente será feita a identificação dos modos de vibrar para que se possa quantificar a contribuição individual dos mesmos para os esforços máximos. Os modelos serão submetidos a uma excitação em degrau e comparadas as respostas em termos de esforços, velocidades e acelerações.

5.1 Análise do modelo de três graus de liberdade.

5.1.1 Equações do Movimento do Sistema

5.1.1.1 Sistema de acionamento Tipo A1 (com eixo de transmissão)

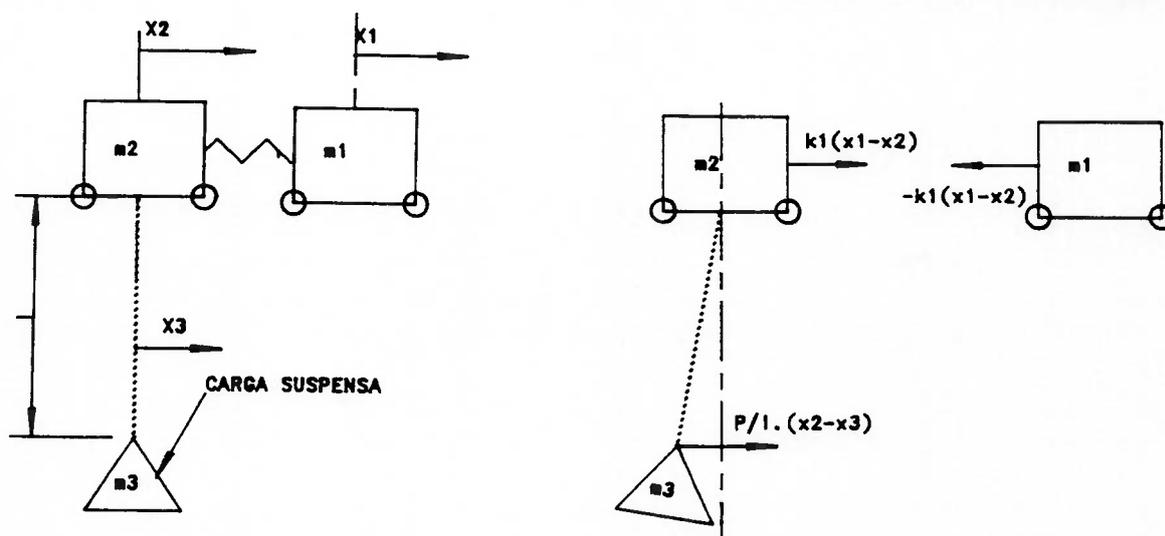


Figura 14 - Modelo do Sistema (Sem folga).

As equações do movimento livre do sistema mostrado na figura acima, linearizado para pequenas oscilações do pêndulo em torno da posição de equilíbrio e sem folga, utilizando-se a segunda lei de Newton são expressas na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + P/l & -P/l \\ 0 & -P/l & P/l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

5.1.1.2 Sistema de acionamento Tipo A2 (Acionamento por cabos de aço)

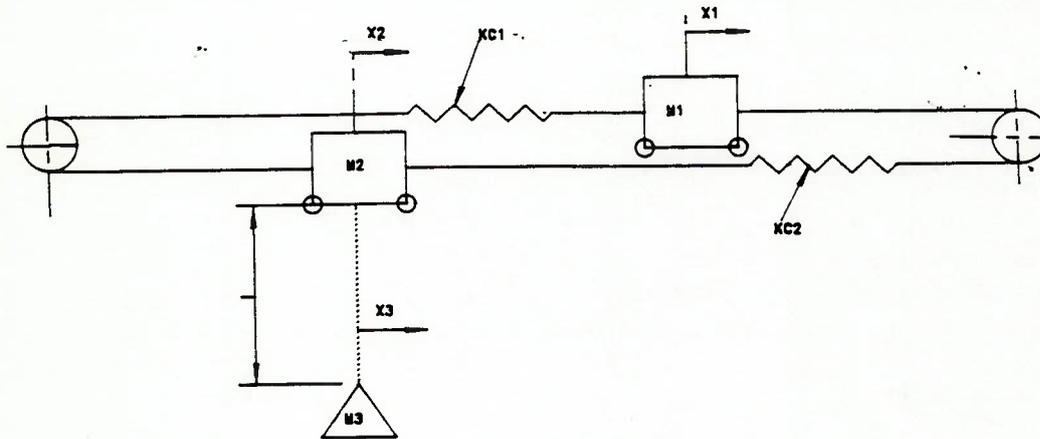
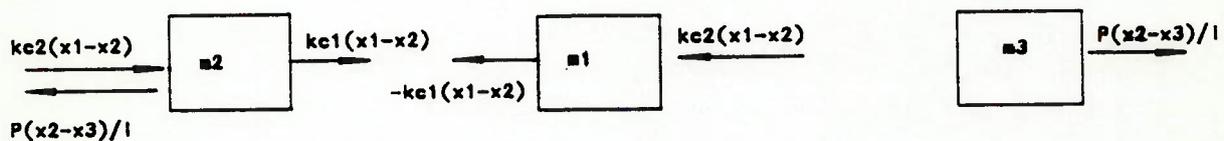


Figura 15 - Modelo do Sistema, Sem Folga.



As equações diferenciais utilizando-se a segunda Lei de Newton ficam:

$$m_1 \ddot{x}_1 + [kc_1 + kc_2] x_1 - [kc_1 + kc_2] x_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - [kc_1 + kc_2] x_1 + [kc_1 + kc_2] x_2 + \frac{P (x_2 - x_3)}{1} = 0$$

$$m_3 \ddot{x}_3 - \frac{P (x_2 - x_3)}{1} = 0$$

Fazendo $[kc_1 + kc_2] = k_1$

Na forma matricial teremos:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + P/l & -P/l \\ 0 & -P/l & P/l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(5.2)

O sistema de equações acima corresponde ao do sistema de acionamento Tipo A1, podendo portanto ser tratado de forma análoga.

5.1.2 Frequências naturais do Sistema

Para um sistema dado por: $[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\}$

as frequências naturais (ω_n) são obtidas determinando-se os auto-valores do problema:

$$\det \left[[K] - \lambda [M] \right] = 0, \text{ onde } \omega_n^2 = \lambda, \text{ que}$$

resulta no polinômio de terceiro grau:

$$\lambda^3 - \lambda^2 \left[\frac{g}{l} \left(1 + \frac{m_3}{m_2} \right) + \frac{k_1 (m_1 + m_2)}{m_1 \cdot m_2} \right] + \frac{k_1 \cdot g}{l} \frac{(m_1 + m_2 + m_3)}{m_1 \cdot m_2} \cdot \lambda = 0$$

$\lambda_1 = 0$ é solução (movimento de corpo rígido).

A equação reduzida dividindo-se ambos os lados por λ fica:

$$\lambda^2 - \lambda \left[\underbrace{\frac{g}{1} \left(1 + \frac{m_3}{m_2} \right) + k_1 \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \right)}_B \right] + k_1 \frac{g}{1} \underbrace{\left(\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 \cdot m_2} \right)}_C = 0 \quad (5.3)$$

$$\lambda_2 = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4C}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$$

5.1.3 Modos Naturais de Vibrar

Os modos naturais de vibrar são obtidos resolvendo-se o problema:

$$\left[[K] - \lambda [M] \right] \{ \phi \} = 0 \quad \text{onde os } \{ \phi_i \} \text{ são os vetores modais}$$

ou auto-vetores, obtidos resolvendo-se a equação matricial. Resolvendo teremos:

$$\begin{aligned} [k_1 - \lambda_i m_1] \phi_1 - k_1 \phi_2 &= 0 \rightarrow \frac{\phi_2}{\phi_1} = 1 - \frac{\lambda_i}{(k_1/m_1)} \\ -\frac{P}{1} \cdot \phi_2 + [P/1 - \lambda_i \cdot m_3] \phi_3 &= 0 \rightarrow \frac{\phi_3}{\phi_2} = \frac{1}{1 - \lambda_i/(g/1)} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\text{Portanto:} \quad \frac{\phi_3}{\phi_1} = \frac{1 - \lambda_i/(k_1/m_1)}{1 - \lambda_i/(g/1)}$$

$$\rightarrow \left\{ \phi_i \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 - \lambda_i/(k_1/m_1) \\ 1 - \lambda_i/(k_1/m_1) \\ \frac{1 - \lambda_i/(k_1/m_1)}{1 - \lambda_i/(g/1)} \end{array} \right\}$$

Para cada valor de λ_i teremos um correspondente vetor modal $\{\phi_i\}$

Identificaremos cada vetor modal por:

$$\left\{ \phi_1 \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{Bmatrix} \quad \left\{ \phi_2 \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \end{Bmatrix} \quad e \quad \left\{ \phi_3 \right\} = \begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 \end{Bmatrix}$$

Ortonormalização dos auto-vetores em relação a matriz de massa:

$$\delta_i^2 \left\{ \phi_i \right\}^T \left[M \right] \left\{ \phi_i \right\} = 1$$

$$\delta_i = \left[m_1 + \left(1 - \frac{\lambda_i \cdot m_1}{k_i} \right)^2 m_2 + \left(\frac{1 - \lambda_i / (k_1/m_1)}{1 - \lambda_i / (g/l)} \right)^2 \cdot m_3 \right]^{-1/2} \quad (5.4)$$

As componentes dos auto-vetores acima devem ser multiplicados igualmente pelo respectivo δ_i :

A matriz modal composta dos vetores $\{\phi_1\}$, $\{\phi_2\}$ e $\{\phi_3\}$ ortonormalizados será identificada por:

$$\left[\phi \right] = \begin{bmatrix} u_1 & p_1 & w_1 \\ u_2 & p_2 & w_2 \\ u_3 & p_3 & w_3 \end{bmatrix}$$

Na figura 16, faz-se a identificação dos modos de vibrar através de representação gráfica dos componentes dos vetores modais para o modelo substituto ao sistema de acionamento Tipo A1, correspondente a uma ponte rolante com os seguintes dados:

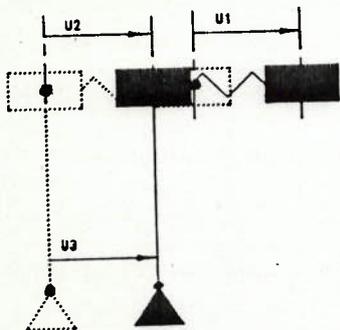
Capacidade: 10 ton

Vão : 28 m

Velocidade: 100 m/min

Aceleração média: 0.407 m/s^2

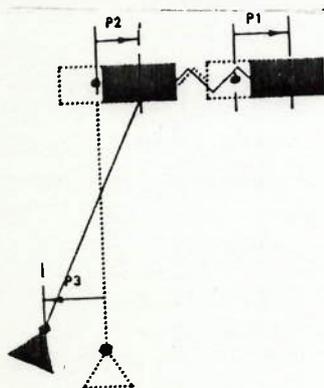
Acionamento: 2 motorizações independentes com eixo de transmissão.



$$\omega_1 = 0$$

$$u_1 = u_2 = u_3 = .004132$$

16.a) 1. Modo: Movimento de corpo rígido.



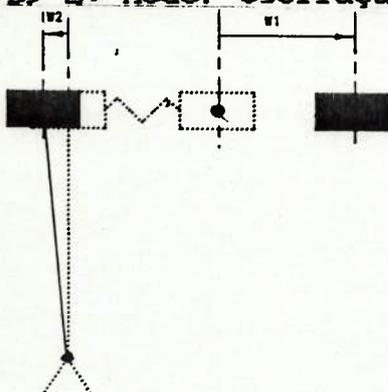
$$\omega_2 = 1.539 \text{ rad/s}$$

$$p_1 = .001876$$

$$p_2 = .001875$$

$$p_3 = -.009106$$

16.b) 2. Modo: Oscilação da carga em relação a Ponte



$$\omega_3 = 60.86 \text{ rad/s}$$

$$w_1 = .010454$$

$$w_2 = -.001970$$

$$w_3 = .1040E-05$$

16. c) 3. Modo: Vibração entre motor e Ponte

Figura 16 a-c - Modos de vibrar do sistema com acionamento A1

Dados do sistema:

$$m_1 = 7700 \text{ kg} \quad m_2 = 40870 \text{ kg} \quad m_3 = 10000 \text{ kg};$$

$$k_1 = 2.4 \cdot 10^7 \text{ N/m}; \quad l = 5 \text{ m}$$

5.2 Amortecimento interno do sistema

Experimentos realizados por diversos pesquisadores como Lazan e Kimbal referenciados por Thompson (14), indicaram que para muitos materiais como aço e alumínio por exemplo, a energia dissipada por ciclo é independente da frequência para uma faixa ampla de frequências, e proporcional ao quadrado da amplitude de vibração.

Este amortecimento interno é denominado de amortecimento por "histerese" ou "amortecimento estrutural".

A energia dissipada pelo amortecimento estrutural pode ser descrita por:

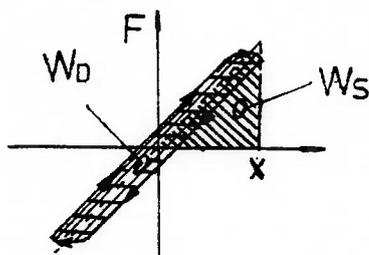
$$W_D = \alpha \cdot X^2 \quad (5.5)$$

Utilizando o conceito de amortecimento viscoso equivalente teremos segundo Thompson (14) em Theory of Vibrations With Applications:

$$C_{eq} = \frac{\alpha}{\pi \omega_n} \quad (5.6)$$

O fator de amortecimento correspondente utilizando (5.5) e (5.6) é dado por:

$$\zeta = \frac{W_D}{W_S \cdot 4\pi}$$



Área W_D = Energia dissipada por ciclo
Área $W_S = F \cdot X / 2$ Energia potencial máxima acumulada no ciclo

Figura 18 - Ciclo de histerese do material

O coeficiente "ξ" para estruturas de aço fica em torno de 0.02 a 0.05, segundo Dorwick [15], enquanto para a estrutura dos mecanismos, em trabalhos sobre o assunto como o de Kos [16] tem sido utilizado ξ = 0.02.

Nas M.E.T. além do amortecimento próprio do sistema, temos o oferecido pelo sistema elétrico, em geral mais importante que o amortecimento estrutural, sobre o qual falaremos mais detalhadamente em 6.1.1.

O amortecimento estrutural e do sistema elétrico para o sistema de três massas atua diretamente sobre as vibrações do terceiro modo que corresponde às vibrações entre motor e ponte. Os demais modos correspondem ao movimento de corpo rígido e ao balanço da carga aos quais pode-se atribuir amortecimento muito pequeno.

5.3 A resposta dinâmica a uma excitação qualquer

5.3.1 Equações da Resposta

Para determinação da resposta analítica será utilizado o método da superposição modal.

O sistema na forma matricial com a introdução da matriz de amortecimento terá a forma:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

Fazendo a transformação

$$\{x\} = [\phi] \{q\}$$

pré-multiplicando cada termo da equação diferencial por $[\phi]^T$ e utilizando as propriedades de ortogonalidade nos auto-vetores teremos:

$$\{\ddot{q}\} + [C] \dot{q} + [\omega^2] \cdot q = \{Q\} \quad (5.8)$$

onde

$$\{Q\} = [\phi]^T \{F(t)\} \quad e \quad [\omega^2]_n = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \omega_2^2 & \\ & & \omega_3^2 \end{bmatrix}$$

$\{Q\}$ = Vetor de Forças generalizadas

$$Q_1 = \sum_{i=1}^3 u_i \cdot F_i(t) = u_1 \cdot F(t)$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^3 p_i \cdot F_i(t) = p_1 \cdot F(t)$$

$$Q_3 = \sum_{i=1}^3 w_i \cdot F_i(t) = w_1 \cdot F(t)$$

Sabe-se que em geral a matriz de amortecimento não se diagonaliza, dificultando o desacoplamento do sistema em seus modos naturais de vibrar.

Quando o sistema tratado é de baixo amortecimento, os termos fora da diagonal podem ser desprezados como sendo efeito de segunda ordem, como sugere Meirovitch [16], permitindo um razoável aproximação.

Outra alternativa é se trabalhar com fatores de amortecimento modais conhecidos a partir dos quais pode se construir a matriz de amortecimento admitindo-se a hipótese de amortecimento proporcional, conhecido como amortecimento de Rayleigh ou ainda a série de Caughey (16).

A matriz de amortecimento de Rayleigh é expressa por:

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K]$$

Para construí-la é suficiente conhecer $p - 1$ fatores de amortecimentos modais (sendo "p" o número de modos de vibrar).

Aplicando-se a operação de desacoplamento à matriz $[C]$ teremos:

$$[\phi]^T [C] [\phi] = \alpha [\phi]^T [M] [\phi] + \beta [\phi]^T [K] [\phi] = \alpha [I] + \beta [\lambda]$$

(Matriz diagonal)

onde $[I]$ é a matriz unitária e $[\lambda]$ é a matriz diagonal dos autovalores

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \omega_2^2 & \\ & & \omega_3^2 \end{bmatrix}$$

Portanto a matriz de amortecimento de Rayleigh permite o desacoplamento das equações do movimento e os coeficientes α e β podem ser determinados das seguintes relações:

$$2 \xi_1 \omega_1 = \alpha + \beta \omega_1^2$$

$$2 \xi_3 \omega_3 = \alpha + \beta \omega_3^2$$

Em nosso caso em particular teremos: $\xi_1 = 0$, $\xi_2 \neq 0$ e $\xi_3 \neq 0$. Portanto $\alpha = 0$ e $\beta = 2\xi_3/\omega_3$ e $\xi_2 = \beta \cdot \omega_2/2$.

O sistema desacoplado terá as seguintes equações diferenciais:

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + 2 \xi_1 \omega_1 \dot{q}_1 = Q(t)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + 2 \xi_2 \omega_2 \dot{q}_2 = Q(t) \quad (5.9)$$

$$\ddot{q}_3 + \omega_3^2 q_3 + 2 \xi_3 \omega_3 \dot{q}_3 = Q(t)$$

Condições iniciais:

$$\{q_0\} = [\emptyset]^T [M] \{x_0\}$$

$$\{\dot{q}_0\} = [\emptyset]^T [M] \{\dot{x}_0\}$$

As equações acima podem ser resolvidas utilizando-se a integral de Duhamel que pode ser explicitada segundo Clough e Penzien [18] por:

- Modos sem amortecimento

$$q_i(t) = (1/\omega_i) \int_0^t Q_i(\tau) \operatorname{sen} \omega_i (t - \tau) d\tau \quad (5.10)$$

- Modos com amortecimento

$$q_i(t) = (1/\omega_{\Delta i}) \int_0^t Q_i(\tau) \cdot e^{-\xi_i \omega_i (t - \tau)} \operatorname{sen} \omega_{\Delta i} (t - \tau) d\tau \quad (5.11)$$

$$\omega_{\Delta i} = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$$

Nas integrais acima o tempo "t" aparece como uma constante, sendo "τ" a variável de integração, de forma que a resposta $q_i(t)$ seja uma função do tempo. Convém lembrar que a integral de Duhamel fornece a resposta completa apenas para condições iniciais nulas.

Para condições iniciais não nulas devemos acrescentar os seguintes termos:

- Modos sem amortecimento:

$$+ \dot{q}_i(0) / (\omega_i) \cdot \text{sen } \omega_i t + q_i(0) \cdot \text{cos } \omega_i t$$

- Modos com amortecimento:

$$+ e^{-\xi_i \cdot \omega_i \cdot t} \cdot \left[\dot{q}_i(0) / \omega_{Ai} \cdot \text{sen } \omega_{Ai} t + q_i(0) \cdot \text{cos } \omega_{Ai} t \right]$$

Conhecidos $q_1(t)$, $q_2(t)$ e $q_3(t)$ e lembrando que

$$\{X\} = [\theta] \cdot \{q\} \text{ teremos:}$$

$$x_1(t) = u_1 \cdot q_1(t) + p_1 q_2(t) + w_1 \cdot q_3(t)$$

$$x_2(t) = u_2 \cdot q_1(t) + p_2 q_2(t) + w_2 \cdot q_3(t) \quad (5.12)$$

$$x_3(t) = u_3 \cdot q_1(t) + p_2 q_2(t) + w_3 \cdot q_3(t)$$

A velocidade de cada elemento será dada por:

$$\{V\} = d / dt \{X\}$$

e a aceleração por:

$$\{A\} = d / dt \{V\}$$

Os esforços no acionamento serão dados por:

$$S_R(t) = k_1 \cdot (x_1 - x_2) + C_E (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (5.13)$$

$$S_R(t) = (u_1 - u_2) \cdot \left[k_1 \cdot q_1(t) + C_E \dot{q}_1(t) \right] + (p_1 - p_2) \left[k_1 - q_2(t) + C_E \dot{q}_2(t) \right] \\ + (w_1 - w_2) \left[k_1 \cdot q_3(t) + C_E \dot{q}_3(t) \right]$$

Como no nosso caso $u_1 = u_2$; $k_1 (p_1 - p_2) = m_1 \cdot p_1 \cdot \lambda_2$ e $k_1 (w_1 - w_2) = m_1 \cdot w_1 \cdot \lambda_3$ e sendo o amortecimento equivalente (C_E) pequeno entre motor e ponte, podemos considerar apenas a parcela elástica da força, o que torna o esforço:

$$S_R(t) = S_1(q_2) + S_2(q_3) \quad (5.14)$$

onde $S_1(q_2) = m_1 \cdot p_1 \cdot \lambda_2 \cdot q_2(t)$: contribuição do segundo modo

$S_2(q_3) = m_1 \cdot w_1 \cdot \lambda_3 \cdot q_3(t)$: contribuição do terceiro modo

5.3.2 Condições iniciais para estudo da vibração livre do conjunto

Será necessário discutirmos com detalhes as condições iniciais para o movimento livre do conjunto, pois numa primeira fase a massa da ponte (m_2) apresenta uma vinculação, ou seja, não há movimento de ponte e carga para $F_E \leq R_0$.

Onde $F_E = K_1 \cdot X_1$ corresponde a força elástica atuante sobre a massa da ponte e R_0 a força devido às resistências ao movimento. Outro aspecto a ressaltar é o efeito das folgas no acionamento que podem conduzir a não linearidade, dependendo do tipo de manobra que se efetua.

Não havendo passagens bruscas de uma fase de aceleração positiva para negativa, os sistemas com folga podem ser tratados como lineares por partes.

Neste capítulo nos ateremos ao estudo do sistema na fase de acelerações positivas.

1ª Etapa: Deslocamento livre da massa m_1 até vencer as folgas do sistema.

Equação de movimento:

$$m_1 \ddot{x}_1 = T(t)$$

$$\dot{x}_1 = \int_0^{t_w} T(t) / (m_1) \cdot dt \quad (5.15)$$

$$x_1 = f_w = \int_0^{t_w} \dot{x}_1 \cdot dt$$

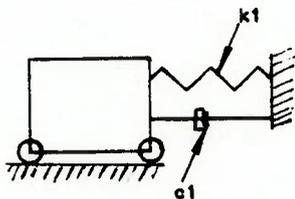
onde f_w = folga linear equivalente do sistema.

No instante $t = t_w$ teremos $\dot{x}_1 = v_w$ (velocidade da massa m_1).

2ª Etapa: A força elástica $F_E = k (x_1 - x_2) \leq R_0$

R_0 : força resistente ao movimento.

Para $F_E < R_0$ temos $x_2 = 0$, ou seja, não há deslocamento da massa m_2 e somente m_1 se desloca, e temos portanto um problema de um grau de liberdade segundo modelo abaixo.



A equação diferencial que rege o movimento da massa m_1 nesta fase é dada por:

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 = T(t) \quad (5.16)$$

Condições iniciais:

$$x_{10} = 0 \quad ; \quad \dot{x}_{10} = v_w$$

A determinação do deslocamento e velocidade da massa m_1 será necessária para estabelecer as condições iniciais para o estudo do movimento livre do sistema de 3 massas.

$$x_1 \text{ max} = \delta_0 = R_0 / k_1 \quad + \quad \dot{x}_1 = v_0$$

(início do movimento livre do sistema).

Denominaremos de "t₀" o tempo decorrido até o instante em que a força elástica atinge o valor R₀.

3º Etapa: Movimento livre do sistema de 3 massas.

Condições iniciais:

$$\left\{ x_0 \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \left\{ \dot{x}_0 \right\} = \begin{Bmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Optou-se por um novo sistema de referência para a coordenada x₁, deslocado de δ₀ em relação ao sistema original.

Neste novo sistema a força de excitação passa a ser F(tr) = T(tr) - R₀ (ou seja a mola de constante k₁ já está pré comprimida de δ₀). Onde tr = t - t₀.

A equação dos esforços no acionamento passa a ser:

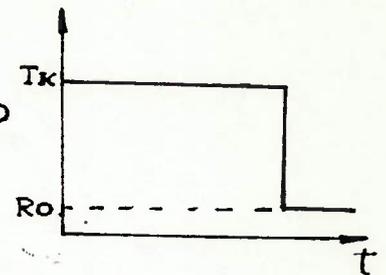
$$S_R(tr) = S_{R1}(q_2) + S_{R2}(q_3) + R_0 \quad (5.17)$$

5.4 Resposta Dinâmica a uma Excitação em Degrau

Antes de procurar respostas para as excitações mais complexas que desejamos estudar, será conveniente conhecer em detalhes a resposta do sistema a uma solicitação mais simples, no caso degrau de conjugado. Esta solicitação é de grande interesse prático pois diversas excitações como a partida de motores em sistemas não controlados ou a aplicação subta de um freio mecânico, podem ser simuladas por ela, para a determinação da resposta dinâmica máxima. Na Figura abaixo temos:

$T(t) = T_k = \text{constante}$ (Força motora)

$R = R_o = \text{constante}$ (Resistência ao movimento)



5.4.1 Equações da resposta

Sendo T_k uma força constante, as condições iniciais para estudo do movimento livre do conjunto podem ser obtidas mais facilmente utilizando-se a "Integral da Energia", relevando-se o trabalho de amortecimento nesta fase, perante o trabalho da força motora:

$$\int_0^{t_0} dE = \frac{1}{2} k_1 \delta_0^2 + \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \int_0^{\delta_0} T_k \cdot dx_1 + \zeta_0 \quad (5.18)$$

Onde " ζ_0 " é o trabalho realizado por " T_k " antes da interação massa mola, devido as folgas no sistema

$$\delta_0 = R_o/k_1$$

$$v_0 = \left[\frac{2 T_k \delta_0}{m_1} - \frac{k_1 \delta_0^2}{m_1} + \frac{2 \zeta_0}{m_1} \right]^{1/2}; \text{ onde } \zeta_0 = T_k \cdot f_w$$

$$v_0 = \left[\frac{R_o}{k_1 \cdot m_1} \cdot (2 \cdot T_k - R_o) + \frac{2 \cdot T_k \cdot f_w}{m_1} \right]^{1/2} \quad (5.19)$$

As expressões de $q_1(tr)$, $q_2(tr)$ e $q_3(tr)$ são obtidas resolvendo 5.9 para $F(tr) = T_k - R_o = F_o$

Resolvendo cada um dos modos:

- 1º Modo ($\lambda_1 = 0$)

$$\ddot{q}_1 = u_1 \cdot F_o$$

$$\dot{q}_1 = u_1 \cdot F_o \cdot tr + C_o$$

Condições iniciais:

$$t_r = 0$$

$$q_{o1} = u_1 \cdot m_1 \cdot v_0$$

$$q_1 = u_1 \cdot F_0 \cdot t_r + u_1 \cdot m_1 \cdot v_0$$

- 2° Modo ($\lambda = \lambda_2$, $\xi_2 = 0$)

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = p_1 \cdot F_0$$

Condições iniciais:

$$q_{o2} = 0$$

$$q_{o2} = p_1 \cdot m_1 \cdot v_0$$

Resposta completa utilizando a integral de Duhamel e introduzindo as condições iniciais:

$$q_2 = \frac{p_1 \cdot F_0}{\omega_2^2} (1 - \cos \omega_2 t_r) + \frac{q_{o2}}{\omega_2} \cdot \text{sen } \omega_2 \cdot t_r$$

- 3° Modo ($\lambda = \lambda_3$, $\xi = \xi_3$)

$$\ddot{q}_3 + \omega_3^2 q_3 + 2 \xi_3 \omega_3 \dot{q}_3 = w_1 \cdot F_0$$

Condições iniciais:

$$q_{o3} = 0$$

$$q_{o3} = w_1 \cdot m_1 \cdot v_0$$

A resposta completa neste caso é obtida mais facilmente achando-se a resposta para a equação homogênea associada:

$$\ddot{q}_3 + \omega_3^2 q_3 + 2 \xi_3 \omega_3 \dot{q}_3 = 0, \text{ cuja solução clássica é:}$$

$$q_h = A e^{-\xi_3 \omega_3 t_r} \cdot \text{sen}(\omega_3 t_r + \theta), \text{ somada à solução particular:}$$

$$q_p = \frac{w_1 \cdot F_0}{\omega_B^2}$$

Com a aplicação das condições iniciais teremos:

$$q_B = \frac{w_1 \cdot F_0}{\omega_B^2} \left[1 - e^{-\xi_B \omega_B t} \cdot \left(\frac{\xi_B}{\sqrt{1-\xi_B^2}} \sin \omega_{AB} t + \cos \omega_{AB} t \right) \right] + \frac{q^{\circ 0} \omega_B}{\omega_{AB}} e^{-\xi_B \omega_B t} \cdot \sin \omega_{AB} t$$

onde:

$$\omega_{AB} = \omega_B \sqrt{1 - \xi_B^2}$$

5.4.2 Equações da participação dos modos e parâmetro do sistema no esforço dinâmico

5.4.2.1 Contribuição máxima de cada um dos modos

- 1º Modo

Como visto anteriormente sua participação é nula.

- 2º Modo

$$S_{2max} = m_1 p_1 \cdot \lambda_2 \cdot q_2 \max$$

Fazendo $\dot{q}_2(t_r) = 0 \rightarrow \frac{p_1 \cdot F_0}{\omega_2} \cdot \sin \omega_2 t_r + p_1 \cdot m_1 \cdot v_0 \cdot \cos \omega_2 t_r = 0$

$$\dot{q}_2(t_r) = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \omega_2 t_r = \frac{-m_1 \cdot v_0 \cdot \omega_2}{F_0} \quad (5.20)$$

Temos dois valores, de $e_2 = \omega_2 \cdot tr$ que satisfazem a igualdade acima sendo um no 2° e outro no 4° quadrante. Calculando $\ddot{q}_z(tr)$ temos:

$$\ddot{q}_z(tr) = p_1 \cdot F_0 \cos \omega_2 tr - p_1 \cdot m_1 \cdot v_0 \cdot \omega_2 \cdot \sin \omega_2 tr$$

$$\ddot{q}_z(tr) < 0 \text{ para } e_2 \text{ pertencente ao 2° quadrante} \rightarrow \\ \rightarrow \text{ ponto de máximo}$$

Portanto, no ponto de máximo temos:

$$S_{zmax} = \gamma_1 F_0 + \gamma_2 \cdot v_0$$

onde:

$$\gamma_1 = m_1 \cdot p_1^2 \left[1 - \cos \theta_2 \right]$$

$$\gamma_2 = m_1^2 \cdot p_1^2 \cdot \omega_2 \cdot \sin \theta_2$$

Como: $v_0 = v_w + \Delta v_0$ onde

$$v_w = \left(\frac{2 T_k \cdot f_w}{m_1} \right)^{1/2} ; \text{ velocidade da massa } m_1 \text{ vencidas as folgas do sistema}$$

$$v_w = f(f_w)$$

$\Delta v_0 = f(R_0)$; incremento na velocidade da massa m_1 durante a fase de vinculação da massa da ponte ($R_0 = 0 \rightarrow \Delta v_0 = 0$)

Portanto S_{zmax} é o resultado da contribuição de três diferentes parâmetros do sistema, cuja participação no esforço máximo é condicionada pelo parâmetro θ_2 .

$$S_z \max = f_1(F_0) + f_2(R_0) + f_3(f_w)$$

Onde:

- $f_1 (F_o) =$ Contribuição da força $F_o = T_k - R_o$
 $f_2 (R_o) =$ Efeito dinâmico da vinculação da massa da ponte imposta pela resistência ao movimento "Ro"
 $f_3 (f_w) =$ Efeito da folga do acionamento.

- 3° Modo

$$S_a \max = m_1 \cdot w_1 \cdot \lambda_a \cdot q_a \max$$

Sendo o fator de amortecimento baixo ($\omega_a \approx \omega_n$), de forma similar ao 2° modo o valor máximo de q_a ocorre para

$$\operatorname{tg} \omega_a t_r \approx - \frac{m_1 \cdot v_o \cdot \omega_a}{F_o}$$

Portanto para $q_a = q_a \max$ e fazendo $\theta_a = \omega_a \cdot t_r$ teremos:

$$S_a \max = F_o \cdot \beta_1 + v_o \cdot \beta_2$$

Onde:

$$\beta_1 = m_1 w_1^2 \left[1 - e^{-\zeta_a \cdot \omega_a \cdot t_r} \cdot \left(\frac{\zeta_a}{\sqrt{1-\zeta_a^2}} \cdot \operatorname{sen} \theta_a + \cos \theta_a \right) \right]$$

$$\beta_2 = w_1^2 \cdot m_1^2 \frac{\omega_a^2 \cdot e^{-\zeta_a \cdot \omega_a \cdot t_r}}{\omega_a} \cdot \operatorname{sen} \theta_a$$

Da mesma forma que para o 2° modo $S_a \max$ é o resultado da contribuição de três diferente parâmetros do sistema ou seja:

$$S_a \max = F_o \beta_1 + \Delta v_o \cdot \beta_2 + v_w \cdot \beta_2$$

$$S_a \max = g_1 (F_o) + g_2 (R_o) + g_3 (f_w)$$

Onde:

$$g_1 (F_o) = \text{Contribuição da Força } F_o = T_k - R_o$$

$$g_2 (R_o) = \text{Efeito dinâmico, da vinculação da massa da ponte imposta pela resistência ao movimento "Ro"}$$

$$g_3 (f_w) = \text{Efeito da folga do acionamento.}$$

5.4.2.2 Aplicação

Vamos tomar o sistema analisado em 5.1 para uma avaliação da influência dos modos e parâmetros do sistema sobre a resposta dinâmica.

a. Sistema de acionamento Tipo A1.

Dados:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 7700 \text{ kg} & T_k &= 33130 \text{ N} & k_1 &= 2.4 \times 10^7 \text{ N/m} \\
 m_2 &= 40870 \text{ kg} & R_o &= 0.28 T_k & f_w &= 0.0015 \text{ m} \\
 m_3 &= 10.000 \text{ kg} & l &= 5 \text{ m} \\
 \omega_2 &= 1.538 \text{ rd/s} & \xi_2 &= 0 & p_1 &= 0.0018743 \text{ (2º modo)} \\
 \omega_3 &= 60.86 \text{ rd/s} & \xi_3 &= 0.05 & w_1 &= 0.01045 \text{ (3º modo)}
 \end{aligned}$$

a.1 Esforços dinâmicos (com folga, $f_w = 0.0015 \text{ m}$)

a.1.1 Participação máxima dos modos

- 2º Modo $\omega_2 = 1.538 \text{ rd/s}$; $\xi = 0$

$$S_{a \max} = 1 \cdot F_o - z v_o \quad \left(\text{para } \theta_2 = \arcsin \left(\frac{\omega_2 \cdot v_o \cdot m_1}{F_o} \right) \right)$$

$$v_w = \left[\frac{2 \cdot T_k \cdot f_w}{m_1} \right]^{1/2} = 0.1136 \text{ m/s}$$

$$v_o = \left[\frac{R_o}{k_1 \cdot m_1} (2 \cdot T_k - R_o) + v_w^2 \right]^{1/2} = 0.125 \text{ m/s} \rightarrow \Delta v_o = 0.0114 \text{ m/s}$$

$$F_o = 0.72 T_k$$

$$\theta_2 = 176.448^\circ \text{ (3.08 rd)} \rightarrow t_r = 2.0 \text{ s}$$

$$\delta_1 = m_1 \cdot p_1^2 (1 - \cos \theta_1) = 0.054$$

$$\delta_2 = m_1^2 \cdot p_1^2 \cdot \omega_2 \cdot \sin \theta_2 = 19.7$$

$$S_3 \max = 0.039 T_k$$

- 3° Modo $\omega_3 = 60.86 \text{ rd/s}$; $\xi_3 = 0.05$

$$S_3 \text{ max} = \beta_1 \cdot F_0 + \beta_2 \cdot v_0 \quad \left(\text{para } \theta_3 = \arctg \left(\frac{-\omega_{A3} \cdot v_0 \cdot m_1}{F_0} \right) \right)$$

$$\omega_{A3} = \omega_3 \sqrt{1 - \xi_3^2} = 60.78 \text{ rd/s}$$

$$\theta_3 = 1.958 \text{ rd} \rightarrow t_r = 0.032 \text{ s}$$

$$\beta_1 = m_1 \cdot w_1^2 \left[1 - e^{-\xi_3 \cdot \omega_3 \cdot t_r} \cdot \left(\frac{\xi_3}{\sqrt{1 - \xi_3^2}} \cdot \text{sen } \theta_3 + \cos \theta_3 \right) \right]$$

$$\beta_1 = 1.093$$

$$\beta_2 = m_1^2 \cdot w_1^2 \cdot \frac{\omega_3^2}{\omega_{A3}} \cdot e^{-\xi_3 \cdot \omega_3 \cdot t_r} \text{ sen } \theta_3 = 331.454$$

$$S_3 \text{ max} = 0.787 \text{ Tk} + 1.25 \text{ Tk} = 2.037 \text{ Tk}$$

$$\frac{S_2 \text{ max}}{S_3 \text{ max}} = 0.019$$

A contribuição de S_2 (2° modo) é pequena quando comparada a S_3 (3° modo).

a.1.2 Esforço Dinâmico máximo

$$S_R \text{ max} = S_2 + S_3 + R_0 \quad (t_r \approx 0.032 \text{ s})$$

$$\theta_2 = 0.0492 \text{ rd}$$

$$S_2 = 2.35 \times 10^{-5} \cdot \text{Tk} \approx 0$$

$$g_1 (F_0) = \beta_1 \cdot F_0 = 0.787 \text{ Tk}$$

$$g_2 (R_0) = \beta_2 \cdot \Delta v_0 = 0.114 \text{ Tk} \quad (0.407 R_0)$$

$$g_3 (f_w) = \beta_2 \cdot v_w = 1.136 \text{ Tk}$$

$$S_R \text{ max} = 2.037 \text{ Tk}$$

a.2 Esforços Dinâmico (Sem folga, $f_w = 0$)

$$v_0 = 0.0535 \text{ m/s} \rightarrow \theta_a = 2.332 \text{ rd} \rightarrow t_r = 0.0383 \text{ s}$$

$$\beta_1 = 1.33$$

$$\beta_2 = 254.240$$

$$g_1 (F_0) = 0.9576 \text{ Tk}$$

$$g_2 (R_0) = 0.41 \text{ Tk} (1.46 R_0)$$

$$g_3 (f_w) = 0$$

$$S_R \text{ max} = 1.33 F_0 + 2.46 R_0 = 1.646 \text{ Tk}$$

Portanto a folga f_w representa um incremento de 23.6% no esforço dinâmico máximo.

a.3 Comparação com tratamento tradicional.

Esforço máximo para modelo não elástico:

$$S_{R_0} = R_0 + (T_k - R_0) \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0.877 \text{ Tk}$$

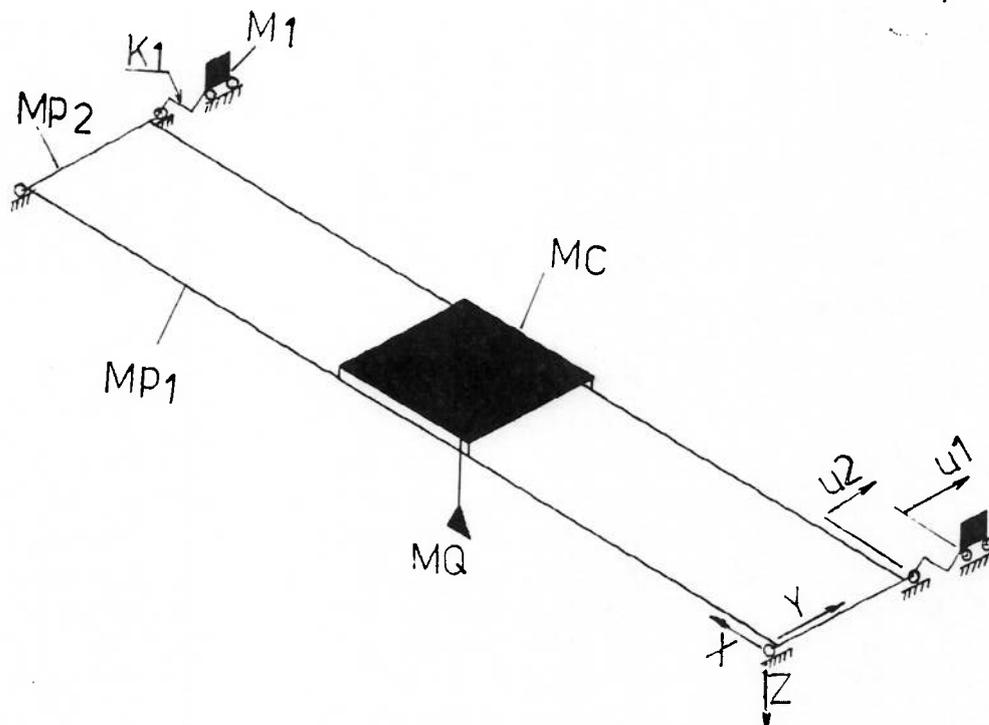
Quadro comparativo de esforços, em relação à formulação tradicional (Tratamento de corpo rígido).

Modelo	Esforço Dinâmico (S_R/T_k)	Fator de Amplificação S_R/S_{R_0}
Não elástico	0.877	1.0
Elástico sem folga	1.646	1.877
Elástico com folga	2.31	2.63

No item 5.5 será feita uma análise dinâmica da ponte pelo método dos elementos finitos com todos os seus elementos estruturais, para confrontar com os resultados obtidos através do modelo reduzido de três massas, na qual a elasticidade da estrutura da ponte é desconsiderada.

5.5 Análise de Modelo pelo método dos elementos finitos

5.5.1 O modelo estrutural



m_1 = massa equivalente dos elementos em rotação do sistema de acionamento.

k_1 = constante elástica linear equivalente do sistema de acionamento.

m_c = massa do carro.

m_{p1} = massa total das vigas da ponte. (No modelo distribuído ao longo da viga).

m_{p2} = massa das vigas cabeceiras da ponte. (No modelo distribuído ao longo da viga).

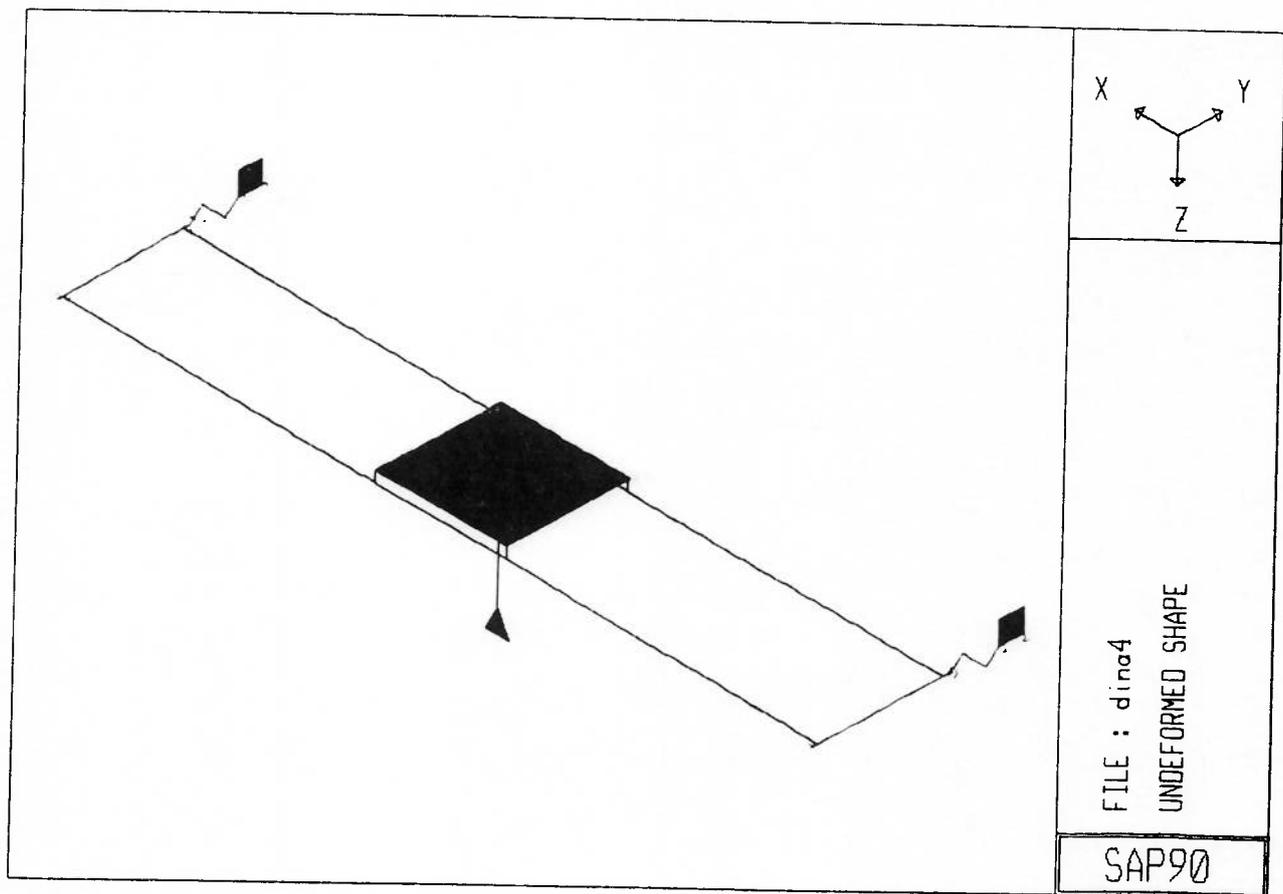
M_Q = massa da carga suspensa.

Para a simulação do sistema recorreu-se ao Programa de Elementos Finitos SAP-90 [19]. Para tanto foram necessários alguns recursos de modelagem, descritos com detalhes nos Apêndices A e B onde são apresentadas as listagens de Entrada e Saída do processamento.

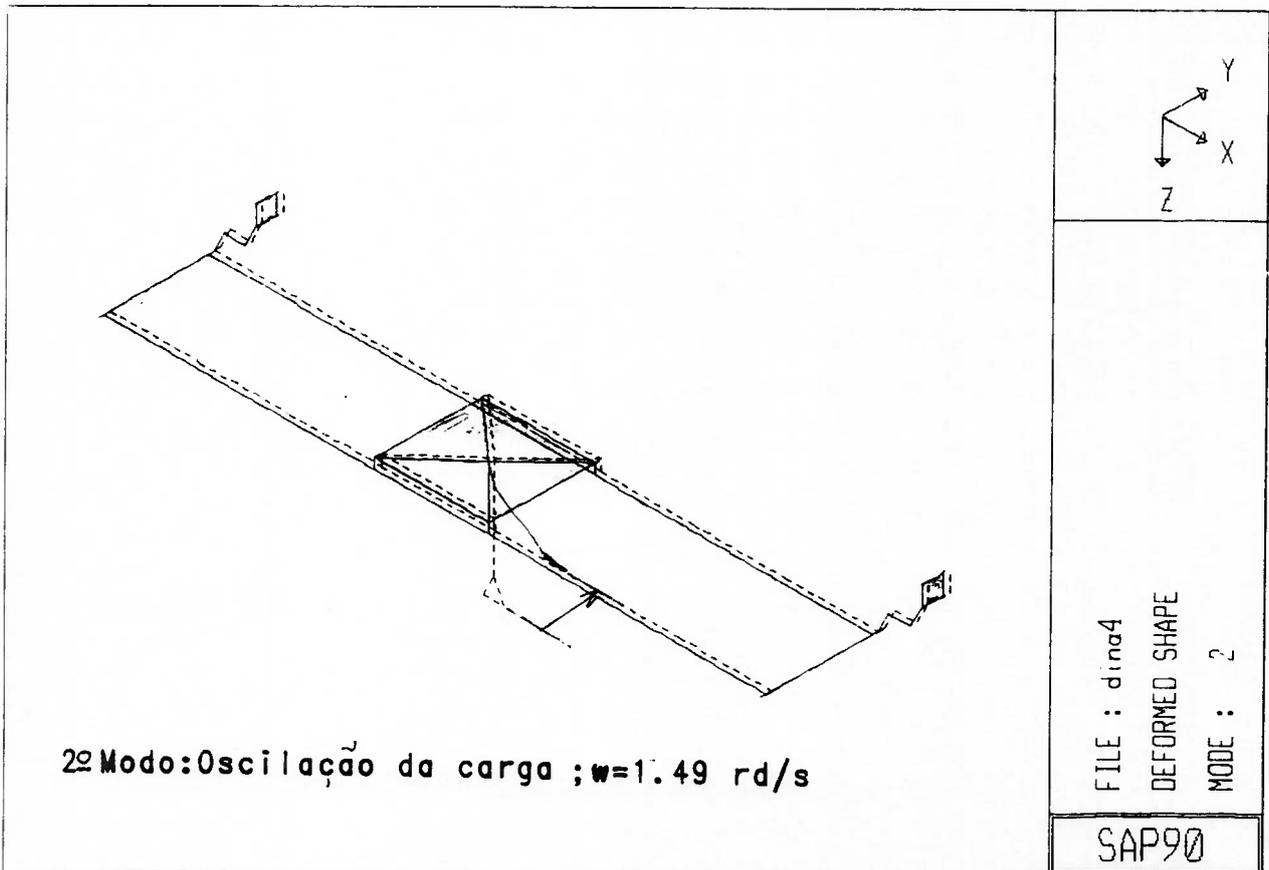
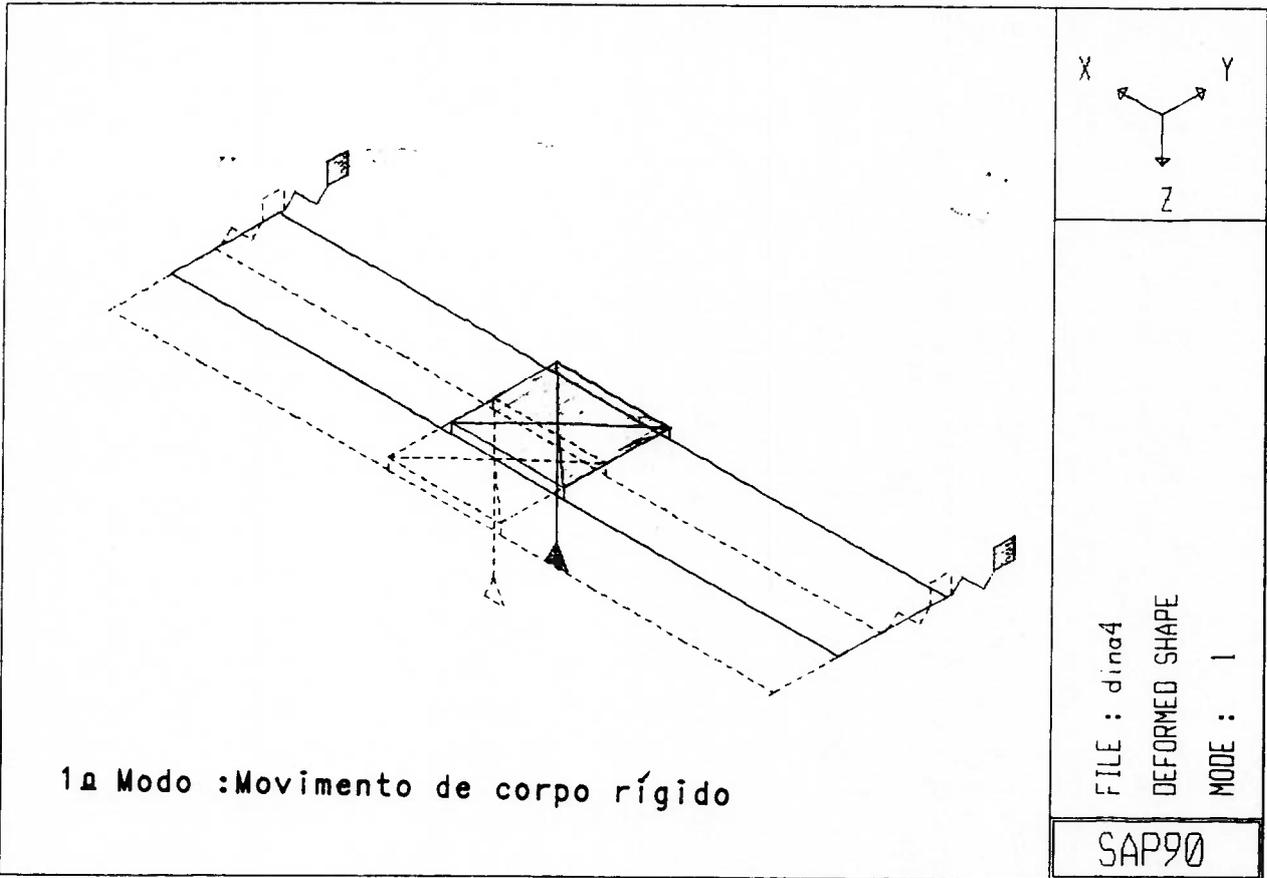
5.5.2 Modos e Frequências naturais de vibrar

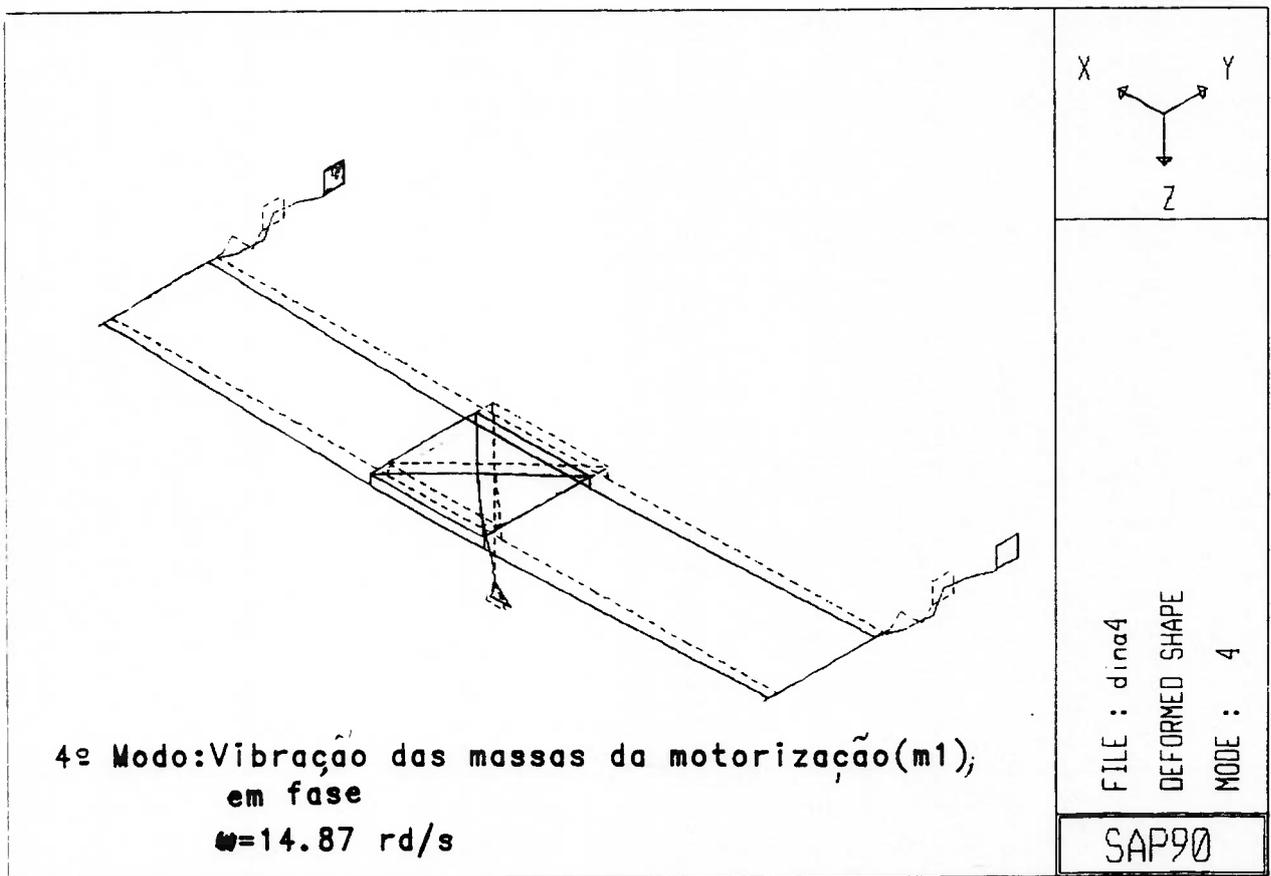
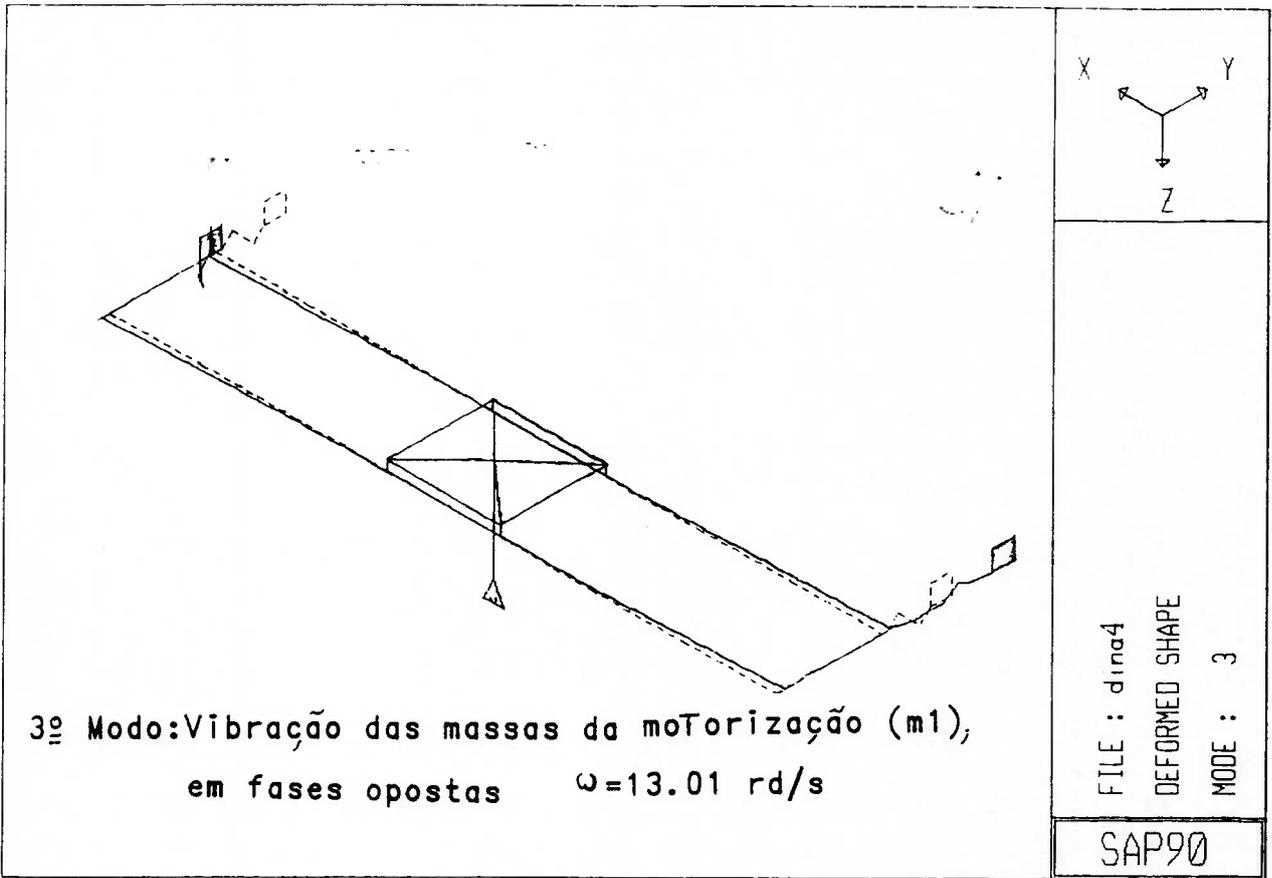
Os modos e frequências abaixo correspondem a uma ponte rolante com os seguintes dados:

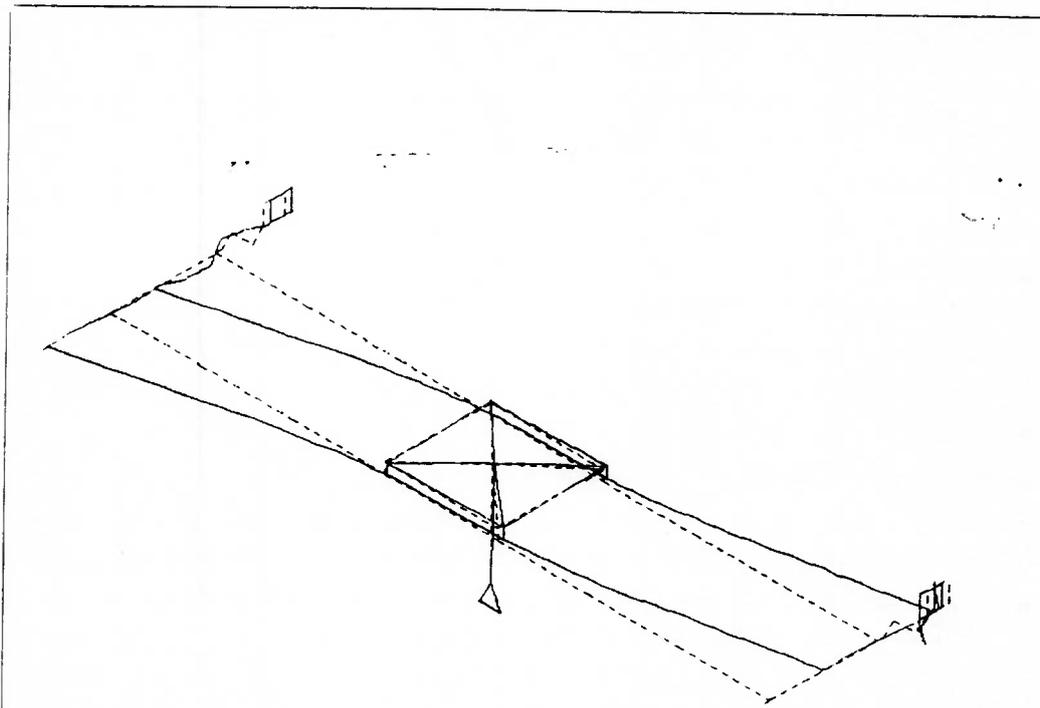
- Capacidade: 19.1 t
- Vão : 32 m
- Velocidade: 66 m/min
- Aceleração média: 0.3 m/s^2



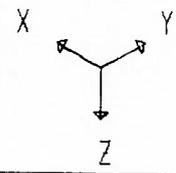
Modelo estrutural DINA4





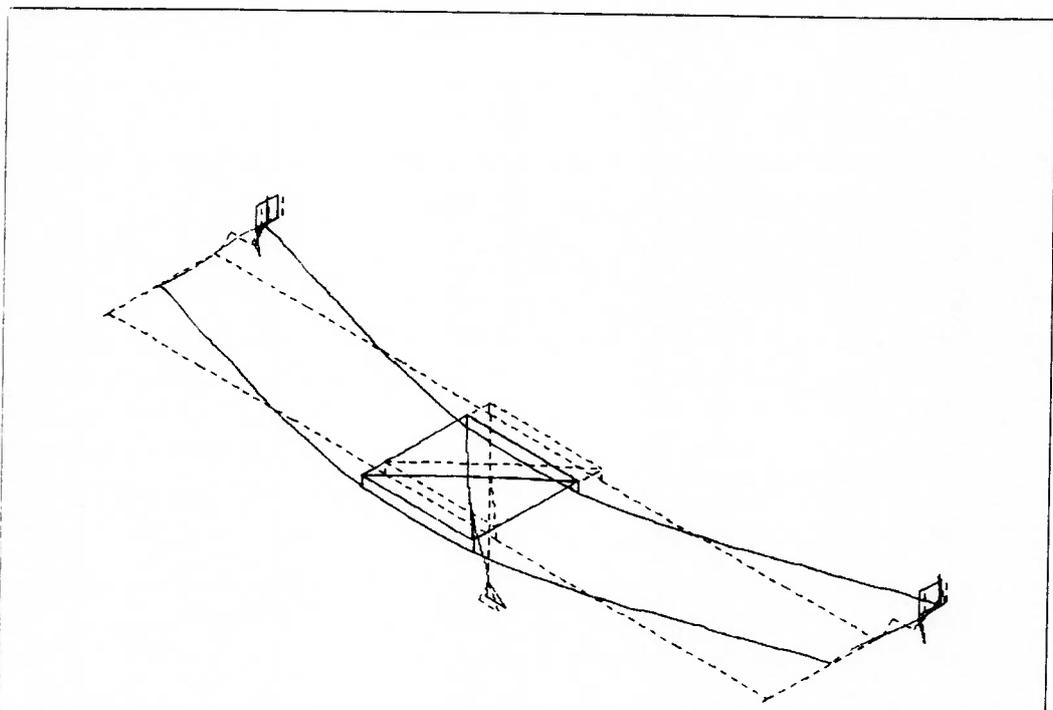


5º Modo: Vibração das cabeceiras em fases opostas
 $\omega = 42.12 \text{ rd/s}$

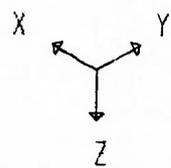


FILE : dina4
 DEFORMED SHAPE
 MODE : 5

SAP90

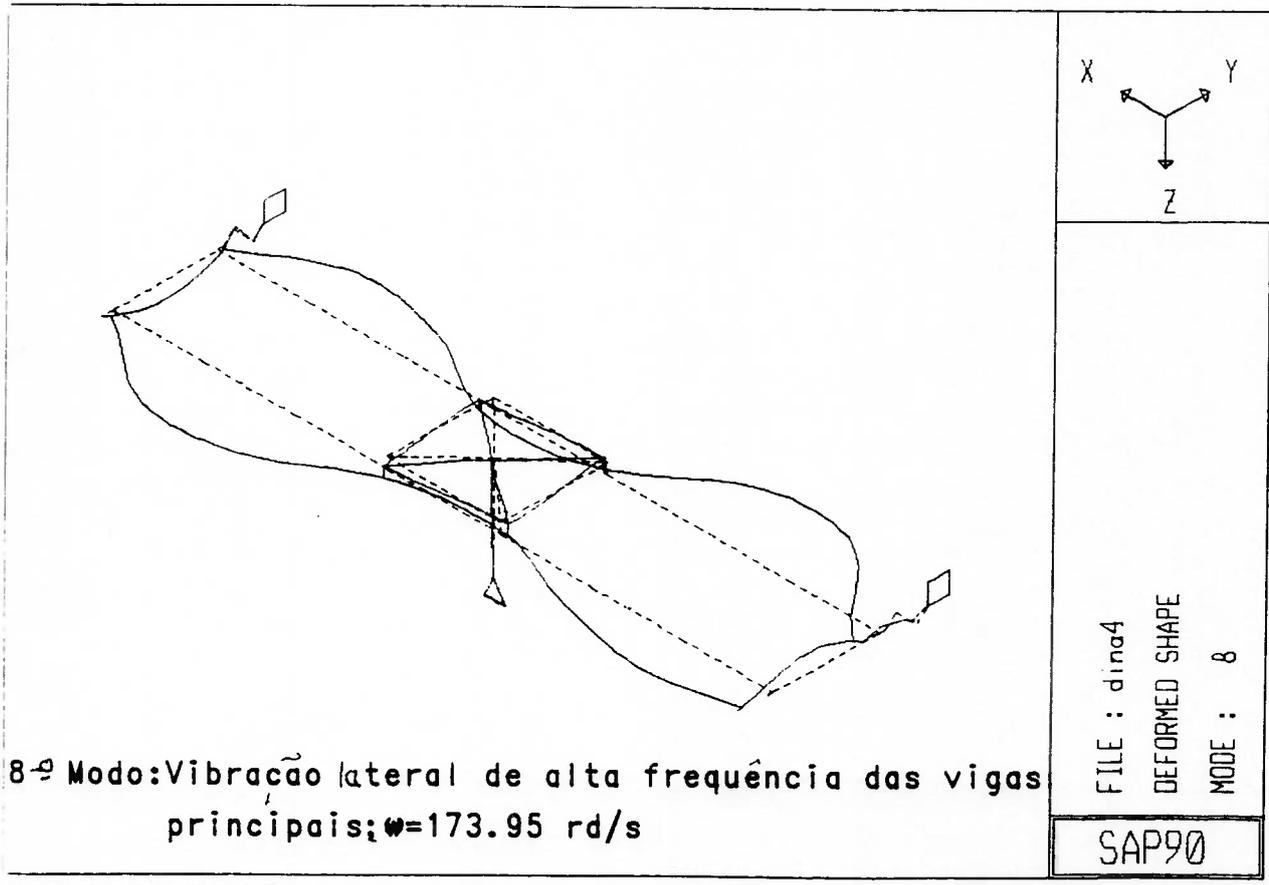
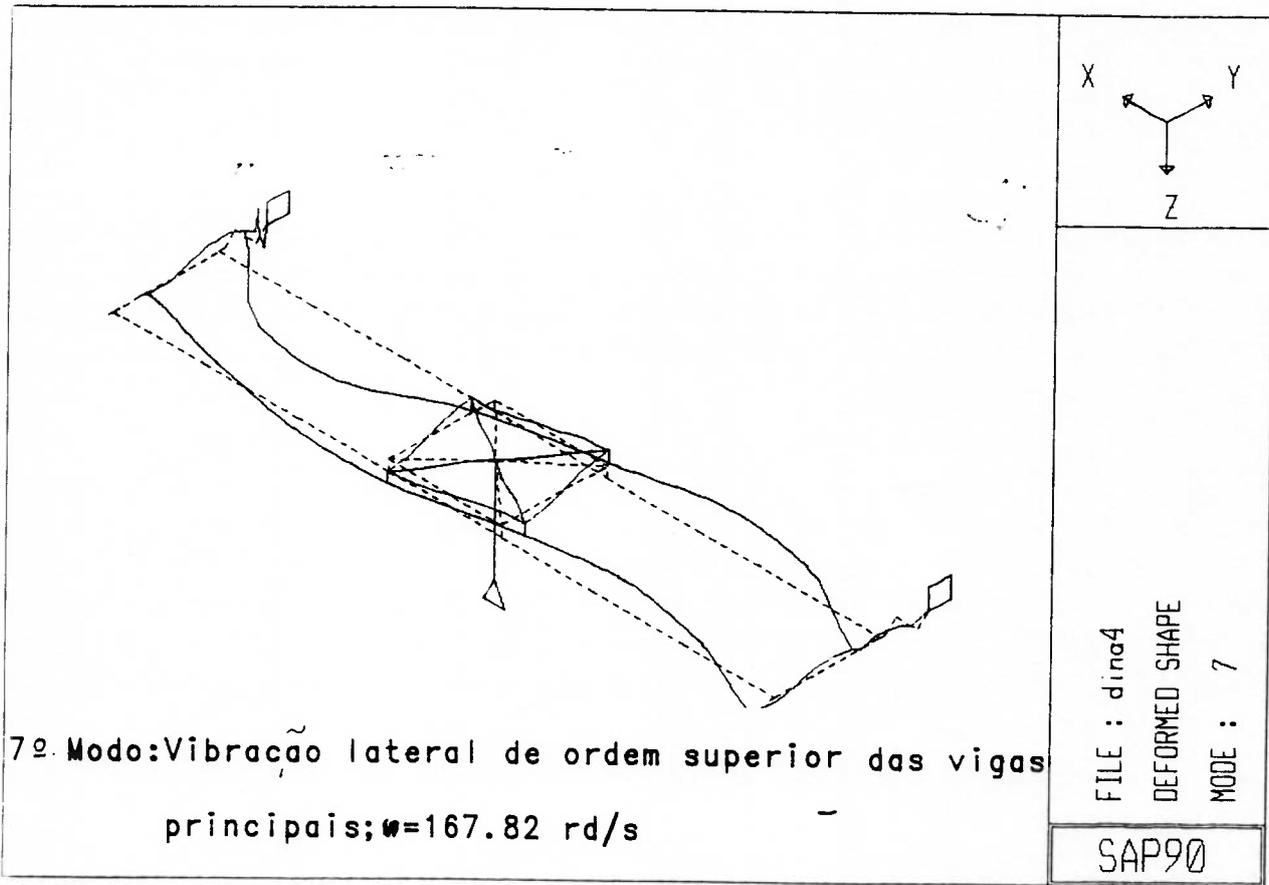


6º Modo: Vibração lateral das vigas da ponte;
 $\omega = 48.5 \text{ rd/s}$



FILE : dina4
 DEFORMED SHAPE
 MODE : 6

SAP90



5.5.3 Resposta a uma excitação em degrau

5.5.3.1 Resposta em esforço dinâmico

5.5.3.1.1 Equações da resposta com carro centrado no meio do vão

De forma análoga a 5.3 as equações de deslocamento de cada um dos graus de liberdade serão dadas por:

$$y_i(t) = \sum_{J=1}^p u_i^J \cdot q_J(t) \quad (5.21)$$

Onde:

u_i^J = componente "i" do vetor modal $\{ \phi_J \}$, correspondente ao deslocamento " y_i "

$q_J(t)$ = Solução da equação do modo "J".

p = número de modos de vibrar.

Portanto o esforço dinâmico no acionamento será dado por:

$$S_R = \sum_{J=1}^p k_1 \left(u_1^J - u_2^J \right) \cdot q_J + R_0$$

u_1^J = Componente do vetor modal J correspondente a coordenada da massa m_1 na direção y.

u_2^J = Componente do vetor modal J correspondente a coordenada da roda da ponte na direção y.

Sendo a força de excitação constante ($F(t) = F_0$) a participação de cada modo será dada por:

- Modos sem amortecimento ($\xi = 0$)

$$S_j = k_1 (u_1^j - u_2^j) \left[\frac{u_1^j \cdot F_0}{\omega_j^2} (1 - \cos \omega_j \cdot tr) + \frac{m_1 \cdot u_1^j \cdot v_0}{\omega_j} \cdot \sin \omega_j \cdot tr \right]$$

$$S_j \max + \operatorname{tg} \omega_j \cdot tr = \frac{-m_1 \cdot v_0 \cdot \omega_j}{F_0}$$

$$S_j = \gamma_1^j \cdot F_0 + \gamma_2^j \cdot v_0$$

$$\gamma_1^j = \frac{K_1 \cdot (u_1^j - u_2^j) \cdot u_1^j}{\omega_j^2} \cdot (1 - \cos \omega_j \cdot tr) \quad e$$

$$\gamma_2^j = \frac{k_1 \cdot (u_1^j - u_2^j)}{\omega_j} \cdot m_1 \cdot u_1^j \sin \omega_j \cdot tr$$

- Modos com amortecimento

$$S_j = K_1 \cdot (u_1^j - u_2^j) \cdot \left[\frac{u_1^j \cdot F_0}{\omega_j^2} \left[1 - e^{-\xi_j \cdot \omega_j \cdot tr} \left(\xi_j \frac{\sin \omega_j \cdot tr}{\sqrt{1-\xi_j^2}} + \cos \omega_j \cdot tr \right) \right] + \frac{m_1 \cdot u_1^j \cdot v_0}{\omega_j} \cdot e^{-\xi_j \cdot \omega_j \cdot tr} \cdot \sin \omega_j \cdot tr \right]$$

$$S_j = \beta_1^j \cdot F_0 + \beta_2^j \cdot v_0$$

$$\beta_{1j}^j = \frac{k_1 (u_1^j - u_2^j) \cdot u_1^j}{\omega_j^2} \cdot \left[1 - e^{-\xi_j \cdot \omega_j \cdot tr} \left(\frac{\xi_j}{\sqrt{1-\xi_j^2}} \cdot \text{sen } \omega_{AJ} \cdot tr + \right. \right. \\ \left. \left. + \text{cos } \omega_{AJ} \cdot tr \right) \right]$$

$$\beta_{2j}^j = \frac{k_1 (u_1^j - u_2^j) \cdot m_1 \cdot u_1^j}{\omega_{AJ}} \cdot e^{-\xi_j \cdot \omega_j \cdot tr} \cdot \text{sen } \omega_{AJ} \cdot tr$$

Para determinação das condições iniciais para o movimento livre valem as mesmas equações do modelo de três massas.

5.5.3.1.2 Equação da resposta com carro descentrado

Com o carrinho descentrado o problema deixa de ser simétrico, requerendo um tratamento específico na determinação das condições iniciais.

O modelo para determinação das condições iniciais, para o movimento livre do sistema é representado na figura abaixo.

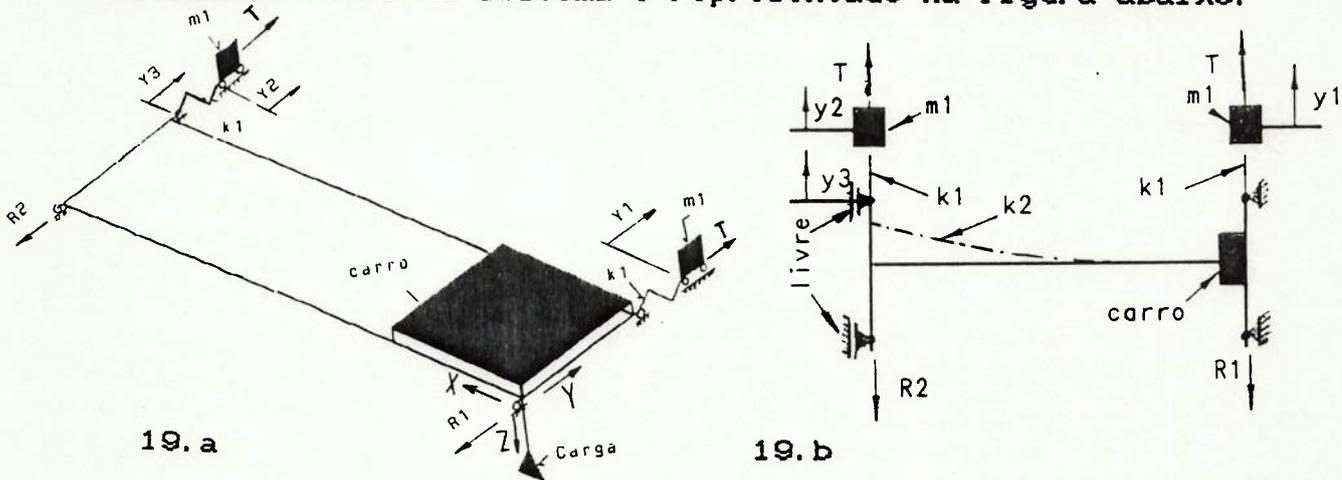


Figura 19 - Modelo estrutural com carro descentrado.

Na Figura 19 temos:

R_1, R_2 : Respectivamente correspondem à resistência ao movimento do lado de maior reação vertical e do lado oposto.

Para $k_1 y_2 > R_2$ a cabeceira do lado (2) inicia movimento e temos um novo modelo para o sistema, representado na Figura 19b com as seguintes condições iniciais de deslocamento e velocidade:

$$y_1 = y_2 = R_2 / k_1 = \delta_0$$

$$v_0 = [(R_1 / (k_1 \cdot m_1)) (2T_k - R_1) + (2 T_k \cdot f_w) / m_1]^{1/2}$$

Ao se iniciar esta fase as molas da constante k_1 já estão pré-comprimidas de $\delta_0 = R_2 / k_1$. O vínculo do lado (1) será rompido quando:

$$R_2 + k_1 \cdot y_1 + k_2 \cdot y_2 = R_1 \quad (5.22)$$

Onde:

k_2 = Constante elástica correspondente à resistência das vigas principais ao deslocamento relativo entre as vigas cabeceiras.

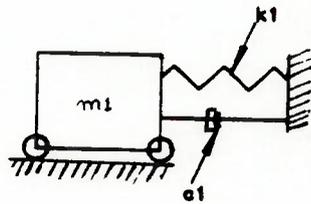
A constante k_2 corresponde numericamente ao inverso do deslocamento produzido por uma carga unitária aplicada a uma das cabeceiras na direção y .

As equações de deslocamento dos graus de liberdade y_2 e y_1 , são dadas pela expressão geral 5.21.

As componentes dos vetores modais (u_i) podem ser obtidas através de simulação da estrutura da ponte pelo método dos Elementos Finitos, nas condições de vinculação da Figura 19.b.

As equações dos modos, sendo a força de excitação constante, serão as mesmas desenvolvidas em 5.5.3.1.1.

A equação de deslocamento da coordenada y_1 (lado 1) é obtida resolvendo-se o problema de um grau de liberdade, a partir do modelo abaixo:



O movimento da massa m_1 é regido pela equação diferencial 5.16, onde $T(t) = Tk$. Sendo o tempo de duração da fase de vinculação muito pequeno, o trabalho de amortecimento pode ser relevado perante o trabalho da força motora.

Portanto a resposta completa será dada por:

$$y_1 = (Tk) / k_1 [1 - \cos \omega_n t] \quad (5.23)$$

Onde:

$$\omega_n = \sqrt{k_1 / m_1}$$

No instante em que a equação 5.22 é satisfeita ($t = t_0$) temos as condições iniciais para o movimento livre do sistema, as quais denominaremos por:

R_{o1} = Reação no acionamento do lado (1).

$$R_{o1} = k_1 \cdot y_1(t_0) + R_2$$

v_{w1} = Velocidade da massa da motorização do lado (1)

$$v_{w1} = [(R_{o1} / (k_1 \cdot m_1)) (2 \cdot Tk - R_{o1}) + (2 \cdot Tk \cdot f_w) / m_1]^{1/2}$$

R_{o2} = Reação no acionamento do lado (2)

$$R_{o2} = k_1 \cdot y_2(t_0) + R_1$$

$$v_{w2} = \dot{y}_2(t_0)$$

5.5.3.1.2 Aplicação aos sistemas com acionamento tipo A1.

A. Ponte rolante com estrutura rígida (Modelo de 8 GL-DINA 4), carro centrado.

O modelo DINA 4 corresponde a uma ponte rolante com os seguintes dados:

- Capacidade: 19.1 ton
- Vão : 28 m
- Velocidade: 66 m/min
- Aceleração Média: 0.3 m/s
- Acionamento : 2 motorizações independentes com eixo de transmissão curto.

Dados do Modelo

$m_1 = 14500 \text{ kg}$ $T_k = 30186 \text{ N}$
 $M_c = 36000 \text{ Kg}$ $R_o = 0.153 T_k$
 $m_{p1} = 71680 \text{ Kg}$ $K_1 = 2.65 \times 10^6 \text{ N/m}$
 $m_{p2} = 14278 \text{ Kg}$ $f_w = 0.0015 \text{ m}$
 $M_Q = 19.100 \text{ Kg}$ $l = 5 \text{ m}$

a.1 Participação máxima de cada modo

- 1° Modo: Movimento de corpo rígido.

$$\omega_1 = 0 \qquad u_1 = u_2 \rightarrow S_1 = 0$$

- 2° Modo: Oscilação da carga em relação a ponte

$$\omega_2 = 1.49 \text{ rd/s} \quad ; \quad \xi_2 \approx 0$$
$$u_1 = -0.0008744 \quad ; \quad u_2 = -0.0008645$$

$$S_2 \text{ max} \rightarrow \theta_2 = \omega_2 \cdot t_r = \text{Arc tg} \left[- \frac{\omega_2 \cdot v_e \cdot m_1}{F_o} \right]$$

$$V_0 = \left[\frac{R_0}{k_1 \cdot m_1} \left(2 T_k - R_0 \right) + \frac{2 \cdot T_k + f_w}{m_1} \right]^{\frac{1}{2}} = 0.115 \text{ m/s}$$

$$\theta_3 = 3.0447$$

$$z_1 = 0.0206$$

$$z_2 = 43.18$$

$$S_{3\max} = 0.0176 T_k \quad (t = 2.04\text{s})$$

- 3° Modo: Vibração das massas m_1 em relação a estrutura da ponte, em fases opostas.

$$\omega_3 = 13.01 \text{ rd/s} \quad \xi_3 = 0.05$$

$$u_1 = 0.005782 \quad u_2 = 0.000728$$

$$\theta_3 = 2.448 \text{ rd} \quad \beta_1 = 0.755 \quad e \quad \beta_2 = 47805$$

$$S_{3\max} = 0.8216 T_k \quad (t \approx 0.188 \text{ s})$$

- 4° Modo: Vibração das massas m_1 em relação a estrutura em fase

$$\omega_4 = 14.86 \text{ rd/s} \quad ; \quad \xi_4 = 0.05$$

$$u_1 = 0.005307 \quad ; \quad u_2 = -0.0007511$$

$$\theta_4 = 2.382 \text{ rd} \quad ; \quad \beta_1 = 0.622 \quad ; \quad \beta_2 = 49769$$

$$S_4 = 0.716 T_k \quad (t \approx 0.16 \text{ s})$$

- 5° Modo: Vibração das cabeceiras em fases opostas

$$\omega_5 = 42.12 \text{ rd/s} \quad ; \quad \xi_5 = 0.05$$

$$u_1 = -0.0006523 \quad ; \quad u_2 = 0.005325$$

$$\theta_5 = 1.928 \text{ rd} \quad ; \quad \beta_1 = 0.00928 \quad ; \quad \beta_2 = 2130$$

$$S_5 \approx 0.008 T_k \quad (t \approx 0.045 \text{ s})$$

- 6° Modo: Vibração lateral da viga da ponte

$$\omega_6 = 48.5 \text{ rd/s} \quad ; \quad \xi_6 = 0.05$$

$$u_1 = -0.000535 \quad ; \quad u_2 = 0.005966$$

$$\theta_6 = 1.883 \text{ rd} \quad ; \quad \beta_1 = 0.0075 \quad ; \quad \beta_2 = 82.4$$

$$S_6 \max = 0.0066 T_k$$

Somente o 3° e 4° modo tem participação significativa no esforço dinâmico máximo.

a.2 Esforço dinâmico máximo

$$S_{Rmax} = \sum_{i=1}^4 S_i + R_o$$

$$S_{Rmax} = 1.65 T_k \quad (t \approx 0.18 \text{ s})$$

a.3 Comparação com modelo de três G.L. e Modelo não elástico

Dados do modelo de 3 G.L.

$m_1 = 29000 \text{ kg}$;	$T_k = 60372 \text{ N}$
$m_2 = 122952 \text{ kg}$;	$R_o = 0.153 T_k$
$m_3 = 19100 \text{ kg}$;	$l = 5 \text{ m}$
$k_1 = 5.3 \times 10^6 \text{ N/m}$;	$f_w = 0.0015 \text{ m}$
$\omega_2 = 1.486 \text{ rd/s}$;	$\omega_3 = 15.03 \text{ rd/s}$
$u_1 = 5.2813 \times 10^{-9}$;	$\zeta_3 = 0.05$
$v_o = 0.115 \text{ m/s}$;	$\theta_3 = 2.366$
$\beta_1 = 1.297$;	$\beta_2 = 219268$
$S_{amax} = 1.516 T_k \quad (t \approx 0.16 \text{ s})$		
$S_{Rmax} = S_a \text{ max} + R_o = 1.67 T_k \quad (t \approx 0.16 \text{ s})$		

Para o modelo não elástico teremos:

$$S_{Ro} = R_o + (T_k - R_o) \times \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0.859 T_k$$

Tabela comparativa de esforços

Modelo	Esforço dinâmico (S_R/T_k)	Fator de amplificação (S_R/S_{Ro})
Não elástico	0.859	1.0
Três G.L.	1.67	1.944
DINA 4 (8.G.L.)	1.65	1.92

Podemos observar, com base na tabela acima, que o modelo de três G.L. apresentou resultados muito bons em comparação com o modelo refinado DINA 4.

b. Ponte Rolante com estrutura flexível (Modelo 8 GL-DINA 1), carro centrado.

Dados:

$$\begin{array}{lll}
 m_1 = 3.850 \text{ kg} & T_k = 16.565 \text{ N} & \xi_z = 0 \\
 m_o = 5.000 \text{ kg} & R_o = 0.28 \text{ N} & \xi_a = 0.05 \\
 m_{p1} = 30.072 \text{ kg} & f_w = 0.0015 \text{ m} & \\
 m_{p2} = 5.800 \text{ kg} & k_1 = 1.2 \times 10^7 \text{ N/m} & \\
 m_a = 10.000 \text{ kg} & l = 5 \text{ m} &
 \end{array}$$

b.1 Participação máxima de cada modo

- 1º Modo: (Movimento de corpo rígido)

$$\omega_1 = 0$$

$$u_1 = u_2 = 0.004115$$

$$S_1 = 0$$

- 2º Modo: (Oscilação da carga)

$$\omega_2 = 1.532 \text{ rd/s} ; \quad \xi_2 = 0$$

$$u_1 = -0.001852$$

$$u_2 = -0.001851$$

$$S_{2\max} \rightarrow \theta_2 = \omega_2 \cdot t_r = \text{Arc tg} - \omega_2 \cdot v_0 \cdot m_1 / (F_0)$$

$$v_0 = 0.125 \text{ m/s (idem modelo de 3 massas)}$$

$$\theta_2 = 3.08 \text{ rd}$$

$$\beta_1 = 0.019$$

$$\beta_2 = 3.47$$

$$S_{2\max} = 0.0137 \text{ Tk}$$

- 3º Modo: (Vibração das cabeceiras em fases opostas)

$$\omega_3 = 12.78 \text{ rd/s} \quad \xi_3 = 0.05$$

$$u_1 = 0.00678 ; \quad u_2 = 0.006434$$

$$\omega_{A3} = 12.78 \text{ rd/s}$$

$$S_{3\max} \rightarrow \theta_3 = \omega_3 \cdot t_r = \text{Arc tg} - \omega_{A3} \cdot v_0 \cdot m_1 / (F_0) \rightarrow \theta_3 = 2.666 \text{ rd}$$

$$t_r = 0.209 \text{ s}$$

$$\beta_1 = 0.303$$

$$\beta_2 = 3401.99$$

$$S_{3\max} = 0.242 \text{ Tk}$$

- 4º Modo: (Vibração lateral da viga da ponte)

$$\omega_4 = 23.57 \text{ rd/s} ; \quad \xi_4 = 0.05$$

$$u_1 = 0.005297 ; \quad u_2 = 0.004377$$

$$S_{4\max} \rightarrow \theta_4 = \omega_{A4} \cdot t_r = \text{Arc tg} - \omega_{A4} \cdot v_0 \cdot m_1 / (F_0)$$

$$\omega_{A4} = 23.54 \text{ rd/s} \rightarrow \theta_4 = 2.381 \text{ rd} \rightarrow t_r = 0.1 \text{ s}$$

$$\beta_1 = 0.17 ; \quad \beta_2 = 5846.47 ; \quad S_{4\max} = 0.166 \text{ Tk}$$

- 5° Modo: (Vibração das massas m_1 em fases opostas)

$$\begin{aligned}\omega_5 &= 61.45 \text{ rd/s} ; & \xi_5 &= 0.05 \\ u_1 &= -0.007415 ; & u_2 &= 0.001336 \\ \omega_{A5} &= 61.37 \text{ rd/s} ; & \theta_5 &= 1.954 \text{ rd} ; & t_r &= 0.0318 \text{ s} \\ \beta_1 &= 0.267 \\ \beta_2 &= 41088.7 \\ S_{R5\max} &= 0.502 \text{ Tk}\end{aligned}$$

- 6° Modo: (Modo de vibrar de ordem superior das vigas principais da ponte)

$$\begin{aligned}\omega_6 &= 62.81 \text{ rd/s} ; & \xi_6 &= 0.05 \\ u_1 &= 0.003447 ; & u_2 &= 0.000803 \\ \omega_{A6} &= 62.73 \text{ rd/s} \rightarrow \theta_6 = 1.947 \text{ rd/s} \rightarrow t_r = 0.031 \text{ s} \\ \beta_1 &= 0.0575 \\ \beta_2 &= 9102.7 \\ S_{R6\max} &= 0.11 \text{ Tk}\end{aligned}$$

- 7° Modo: (Vibração das massas m_1 em fase)

$$\begin{aligned}\omega_7 &= 67.8 \text{ rd/s} ; & \xi_7 &= 0.05 \\ u_1 &= -0.008737 ; & u_2 &= 0.003815 \\ \omega_{A7} &= 67.7 \text{ rd/s} ; & \theta_7 &= 1.923 \text{ rd} ; & t_r &= 0.0283 \text{ s} \\ \beta_1 &= 0.363 \\ \beta_2 &= 63837.85 \\ S_{R7\max} &= 0.743 \text{ Tk}\end{aligned}$$

- 8° Modo: (Modo de vibrar de alta frequência das vigas da ponte)

$$\begin{aligned}\omega_8 &= 76.66 \text{ rd/s} ; & \xi_8 &= 0.05 \\ u_1 &= -0.0001404 ; & u_2 &= 0.0001178\end{aligned}$$

Modo com participação muito baixa.

b.2 Esforço dinâmico máximo

$$S_{Rmax} = \sum_{i=1}^8 S_i + R_0 \quad (t \approx 0.03 \text{ s})$$

$$S_{Rmax} = 1.73 T_k$$

b.3 Comparação com modelo de três graus de liberdade e modelo não elástico

Quadro Comparativo

Modelo	Esforço Dinâmico (S_R/T_k)	Fator de Amplificação (S_R/S_{R0})
Não elástico	0.877	1
Três G.L.	2.31	2.63
DINA 1 (8.G.L.)	1.73	1.97

Observações:

1. Neste caso pode se observar uma sensível redução (25%) no esforço dinâmico, com a adoção de um modelo mais refinado.
2. A mesma estrutura foi simulada alterando-se a constante elástica do acionamento (Modelo DINA 2) para $k_1 = 1.25 \times 10^6 \text{ N/m}$, reduzindo-se assim sua frequência natural em relação a da ponte e os resultados obtidos foram:

$$\text{Modelo de 3 G.L.} \quad : \quad S_R = 1.7 T_k$$

$$\text{Modelo DINA 2 (8GL):} \quad S_R = 1.61 T_k$$

3. Nos casos de estruturas flexíveis com acionamentos de alta rigidez, se justifica portanto a construção de modelos mais refinados evitando-se um dimensionamento algo conservador, se tomarmos por base o modelo de três G.L.

c. Ponte Rolante estrutura rígida com carro descentrado
(Modelo 8GL - DINA 4B)

Será analisada a mesma ponte do caso "a", porém com o carro próximo a uma das cabeceiras. Para identificar os parâmetros abaixo refirir-se às figuras 19.a e 19.b.

$$R_1 = 0.2064 T_k$$

$$R_2 = 0.0996 T_k$$

$$T_k = 30186 N$$

$$v_0 = [(R_1/(k_1 \cdot m_1)) (2 T_R - R_1) + 2 \cdot T_R \cdot f_w/m_1]^{1/2} = 0.1036 \text{ m/s}$$

$$S_0 = 1.345 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$k_2 = 3.7 \times 10^{-6} \text{ N/m}$$

Através da simulação da estrutura pelo programa de Elementos Finitos SAP-90, na condição de vinculação da figura 19b, obteve-se as componentes dos vetores modais para as coordenadas y_z e y_a bem como a frequência fundamental de vibração lateral da estrutura e da massa da motorização.

Modo de vibração lateral da estrutura: $\omega_n = 8.538 \text{ rd/s}$.

$$u_z = -0.006545$$

$$u_a = -0.004082$$

Modo da vibração da massa da motorização: $\omega_n = 19.501 \text{ rd/s}$.

$$u_z = 0.005105$$

$$u_a = -0.00492$$

A partir dos dados acima aplicados à equação 5.21 e 5.23 obtém-se a equação de deslocamento das coordenadas

$$y_1, y_z \text{ e } y_a$$

No instante em que a equação 5.22 é satisfeita, obtêm-se as condições iniciais para o movimento livre do sistema.

Para $t \approx 0.0105$ s temos:

$$y_1 = 2.32 \times 10^{-3} \text{ m} ; \quad y_2 = 2.3215 \times 10^{-3} \text{ m} ; \quad y_3 = 2.566 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$R_{o1} = k_1 \cdot y_1 = 6150 \text{ N} \Rightarrow V_{w1} = 0.122 \text{ m/s}$$

$$R_{o2} = k_1 \cdot y_2 = 5995 \text{ N}$$

$$V_{w2} = 0.1368 \text{ m/s}$$

Participação dos modos no esforço dinâmico máximo, durante a fase de movimento livre.

- Modo de vibrar das cabeceiras em fases opostas $\omega_n = 10.18$ rd/s

$$S_1 = 0.184 \text{ Tk} \quad (t \approx 0.15 \text{ s})$$

- Modo de vibrar da massa da motorização, lado carregado

$$\omega_n = 15.17 \text{ rad/s}$$

$$S_2 = 1.2675 \text{ Tk} \quad (t \approx 0.15 \text{ s})$$

- Modo de vibrar da massa da motorização, lado oposto

$$\omega_n = 21.09 \text{ rd/s}$$

$$S_3 = 0.04 \text{ Tk} \quad (t \approx 0.15 \text{ s})$$

$$S_{\max} = \sum_{i=1}^3 S_i + R_{o1} = 1.695 \text{ Tk}$$

O esforço dinâmico máximo ficou bastante próximo do obtido para o modelo de 3GL e modelo de 8 G.L. com carro centrado.

5.5.3.2 Resposta em velocidade e aceleração

5.5.3.2.1 Equações da Resposta

A velocidade de cada um dos graus de liberdade será dada por:

$$\dot{y}_i(t) = \sum_{j=1}^R . u_i^j . \dot{q}_j(t)$$

e a aceleração por:

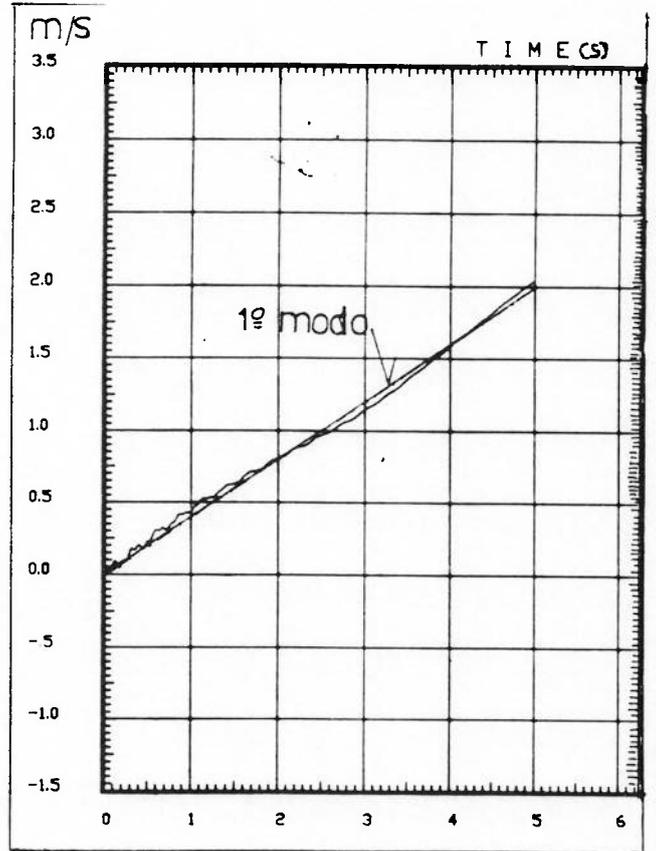
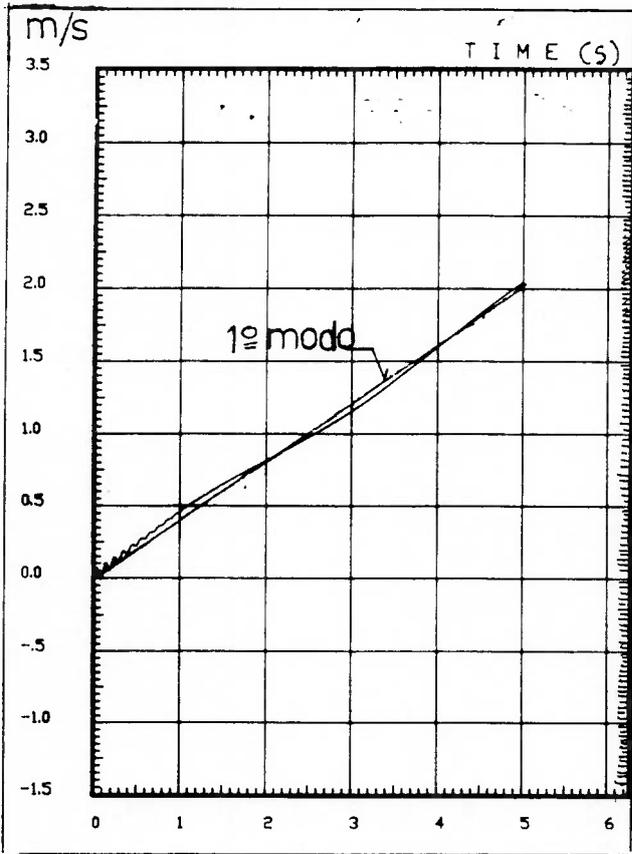
$$\ddot{y}_i(t) = \sum_{j=1}^R . u_i^j . \ddot{q}_j(t)$$

5.5.3.2.2 Comparação com modelo de três graus de liberdade

Para efeito de comparação, os modelos foram simulados através do Programa de Elementos Finitos SAP-90 durante a fase de movimento livre do sistema submetido à excitação $F_0 = T_k - R_0$ e sujeito as condições iniciais de velocidade.

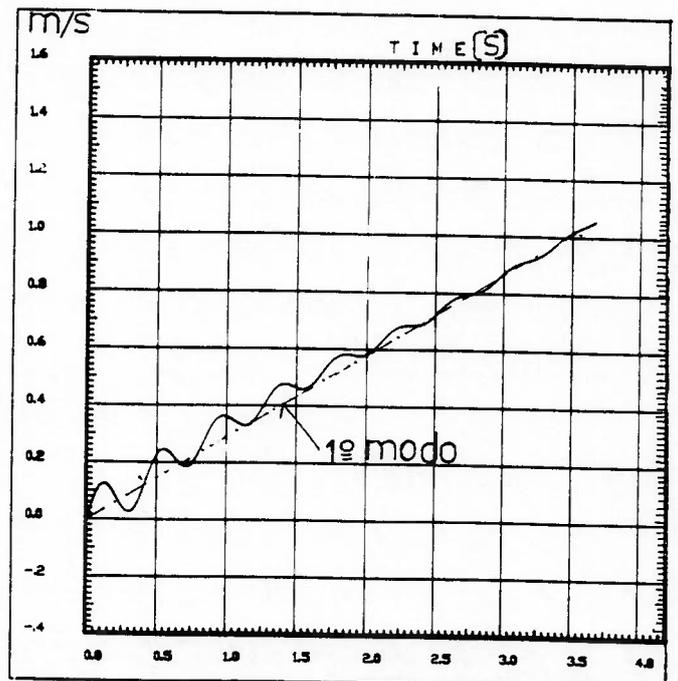
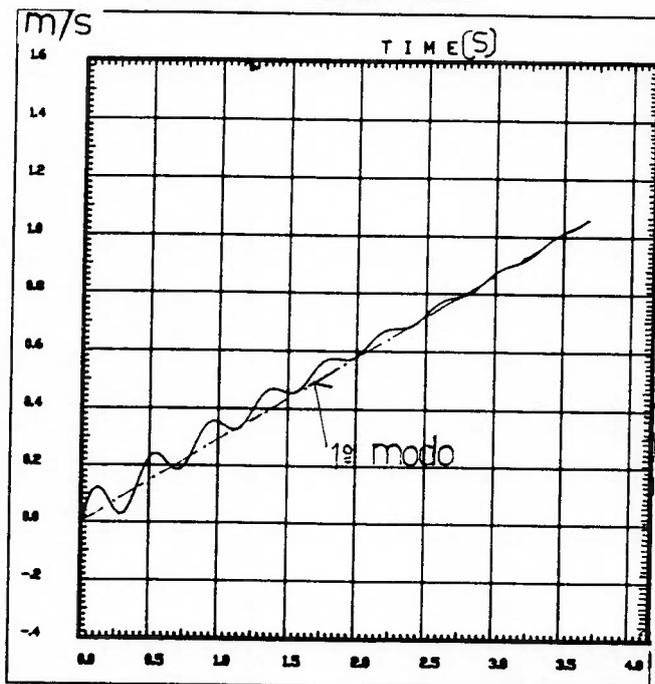
Os modelos simulados correspondem às pontes rolantes com acionamento tipo A1 descritas no item 5.5.3.1.2. a e b, modelos DINA 4 / VIBRA 4 e DINA 1 / VIBRA 1.

a. Velocidade do Motor



20.a-Velocidade do motor
Modelo VIBRA1:3GL

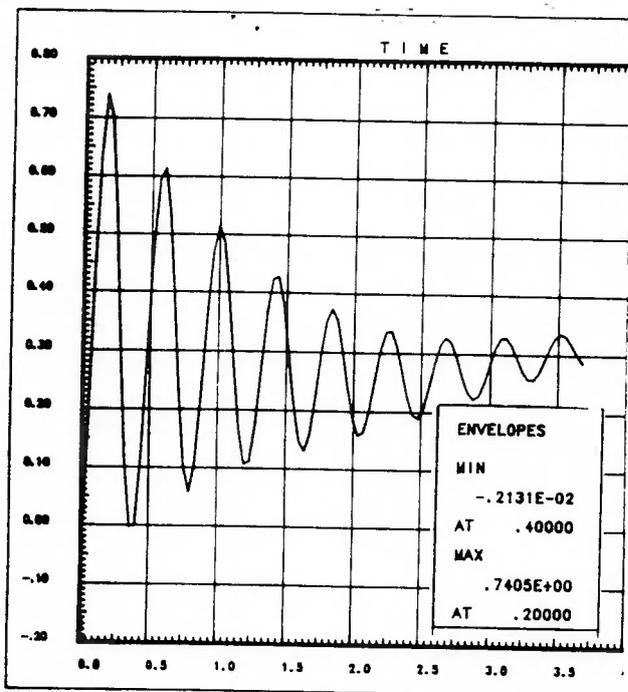
20.b-Velocidade do motor
Modelo DINA1:8GL



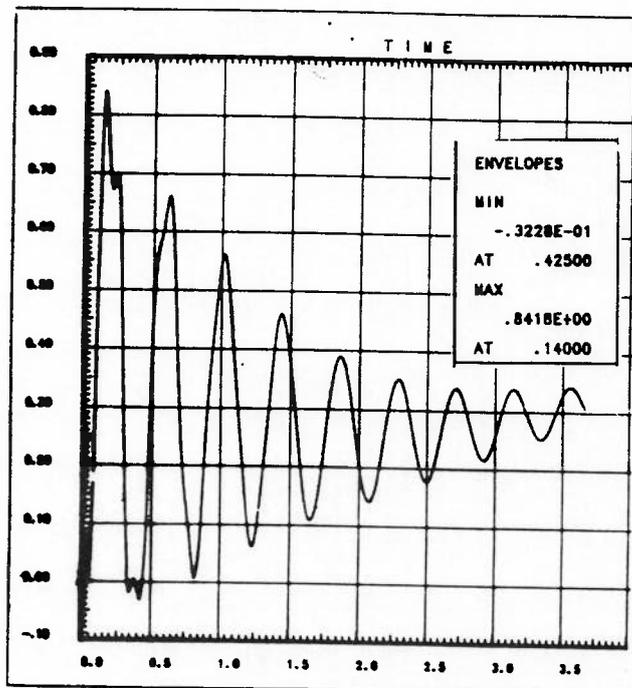
20.c-Velocidade do motor
Modelo VIBRA4:3GL

20.d-Velocidade do motor
Modelo DINA4:8GL

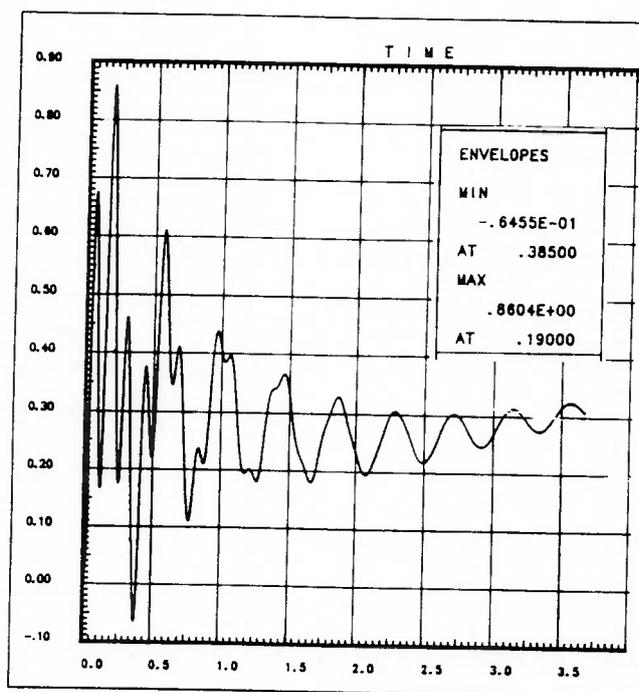
b. Aceleração da ponte e carga



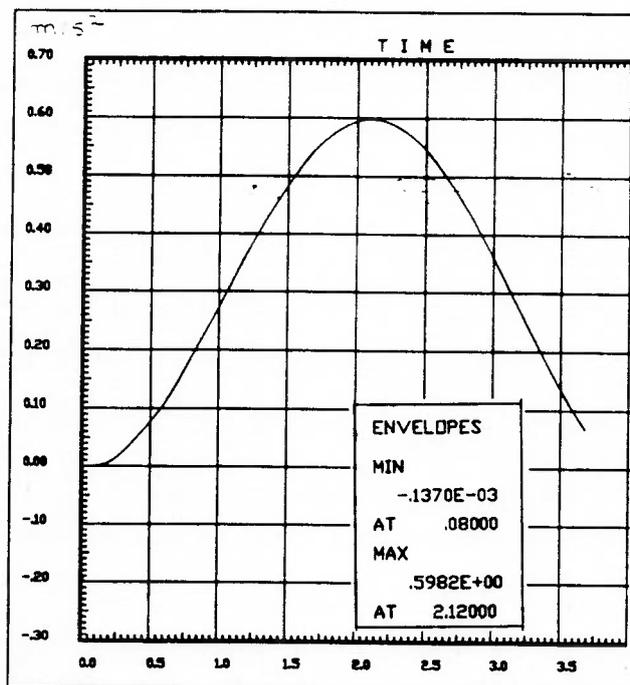
21. a-Aceleração da Ponte
Modelo VIBRA4:3GL



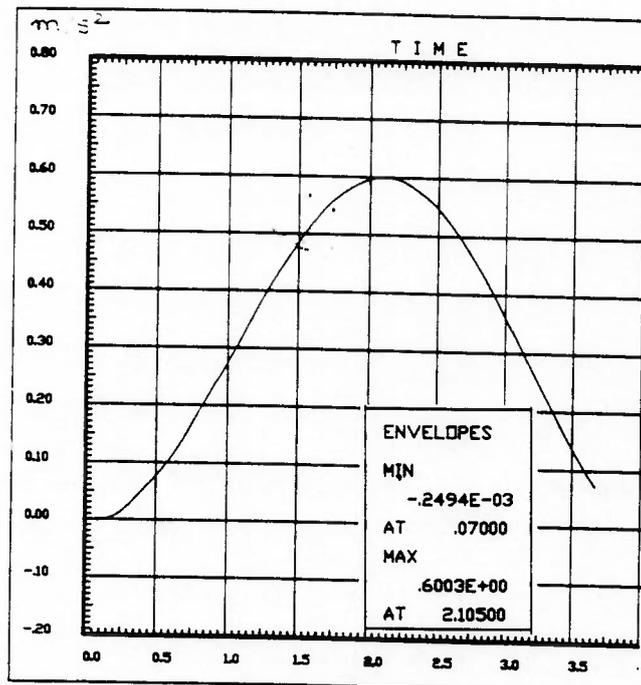
21. c-Aceleração na região central
da Viga Principal
Modelo DINA4:8GL



21. b-Aceleração nas Cabeceiras
Modelo DINA4:8GL



21.d Aceleração da carga
Modelo VIBRA4:3GL



21.e Aceleração da carga
Modelo DINA4:8GL

5.5.3.2.3 Considerações sobre a resposta em termos de velocidade e aceleração

O perfil da evolução da velocidade do motor no tempo, é bastante parecido para os dois modelos, indicando a predominância das frequências fundamentais, que são as do modelo de três massas. Na sequência velocidade-tempo, percebe-se a maior participação do 1º modo acrescido das vibrações nas frequências da transmissão e da carga suspensa.

Quanto à aceleração da massa da ponte, há uma razoável preservação do valor máximo, bem como da sequência de evolução no tempo, na qual prevalece a frequência da transmissão.

A sequência aceleração-tempo para a carga suspensa é muito parecida para os dois modelos. Percebe-se apenas as vibrações na sua própria frequência, indicando ser a carga, pouco sensível às vibrações entre o motor e ponte.

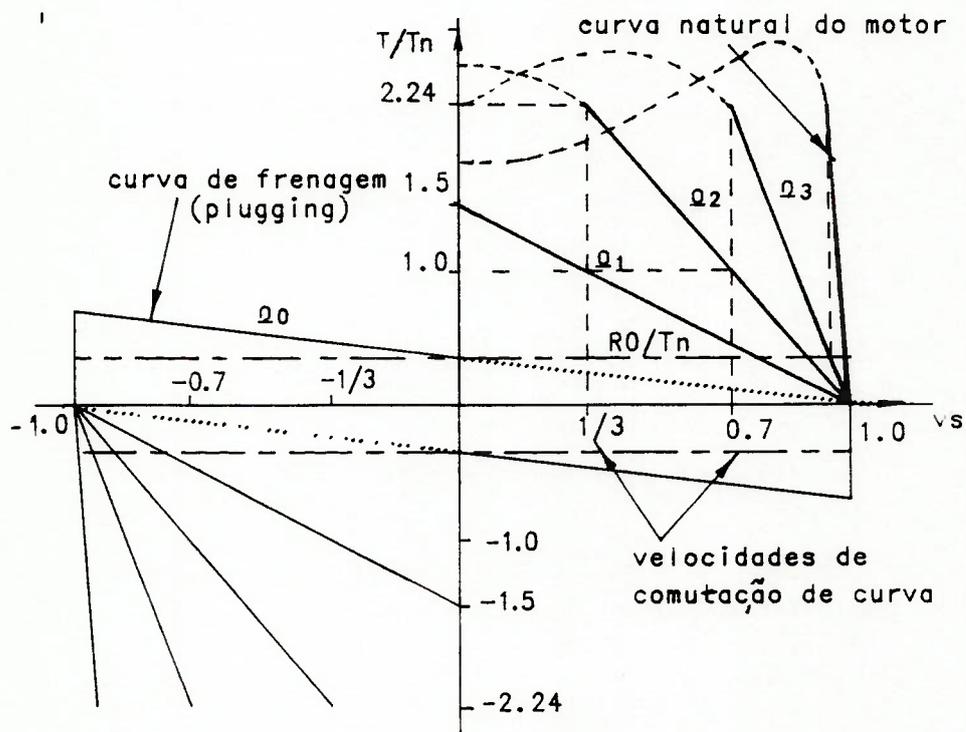
6. FONTES DE EXCITAÇÃO NAS M.E.T.s

6.1 Acionamento com motores de indução de rotor bobinado em malha aberta.

6.1.1 Introdução

O sistema de controle de motores de indução mais comum consiste na inserção de resistências em série com o rotor, conhecido como "Rotórico Normal", objetivando reduzir o conjugado médio de partida ou frenagem e a obtenção de velocidades abaixo da nominal para posicionamento da carga.

As curvas características dos motores podem ser representadas por famílias de curvas como mostrado na Figura 22.



Ω : Resistência elétrica externa associada à curva do motor.

Figura 22 - Curvas Características dos motores de indução.

As curvas podem ser representadas pela expressão clássica de Kloss para motores de indução: (12)

$$T = T_{CR} \frac{2}{\frac{S + S_{CR}}{S_{CR}} \frac{S_{CR}}{S}}$$

T_{CR} = conjugado máximo do motor.

S = $1 - v_i/v_s$: escorregamento do motor.

S_{CR} = escorregamento no ponto de conjugado máximo.

T = Conjugado do motor.

O conjugado máximo a ser aplicado aos mecanismos será de 80% de T_{CR} cujo valor máximo admitiremos seja de 280% do conjugado nominal do motor. (T_N)

No trecho final após o ponto de conjugado máximo (região de nosso interesse) as curvas podem ser aproximadas por retas.

$$T_{iA} = T_o - C_{vi} \cdot \Delta v$$

T_o = Conjugado de partida

Ao acionar o combinador, a transição para cada uma das curvas é feita automaticamente com base em temporização concatenada com as velocidades de comutação desejadas ou com base na frequência da corrente rotórica (proporcional à velocidade do motor). A estabilização na velocidade nominal ocorre quando se cruzam a curva do motor e a do conjugado resistente.

Ao reverter a posição do combinador inicia-se o processo de frenagem "Contra Corrente" (Plugging) pelo motor, através da curva de resistência Ω até a parada do movimento. O freio mecânico tem a finalidade apenas de retenção na posição de parada.

Para o tratamento linear deste sistema, a força, dependente da velocidade do motor será linearizada fazendo-se uma transformação na função $T(v_1)$ para $T(t)$, utilizando-se para isto as observações sobre o comportamento do sistema extraídos de 5.5.3.2.

A velocidade do motor pode ser representada pela velocidade do centro de massas acrescida, das parcelas correspondentes às vibrações em cada um dos modos do sistema ou seja:

$$v_1 = v_m + \sum_{j=1}^p u_1^j \cdot \dot{q}_j, \quad \text{onde } \phi_1^j = 1^\circ \text{ componente do vetor modal do modo "J" correspondente a massa do motor.}$$

$$\text{Portanto: } T_i(v_1) = T_{oi} - C_{vi} \left(v_m + \sum_{j=1}^p u_1^j \cdot \dot{q}_j - v_o \right)$$

$$T_i(v_1) = T_{oi} - C_{vi} (v_m - v_o) - C_{vi} \sum_{j=1}^p u_1^j \cdot \dot{q}_j$$

$$T_i(v_1) = T_i(v_m) - C_{vi} \sum_{j=1}^p u_1^j \cdot \dot{q}_j$$

Observando-se as figuras 20.a-d do item 5.5.3.2 pode-se verificar que o 1º modo que corresponde ao movimento do centro de massas do sistema (CM) é decisivo na definição da velocidade do motor, o que nos permite representar, por aproximação, a força motora por uma função dependente da velocidade do centro de massas, ou seja, $T_i(v_1) \approx T_i(v_m) = T_{oi} - C_v \cdot (v_m - v_o)$. Os termos dependentes da velocidade dos modos serão preservados, sendo representados como forças de amortecimento produzidas pelo sistema elétrico.

Sendo a força externa dada por $T_i = T_i(v_m)$, ou seja, dependente apenas da velocidade do centro de massa a mesma pode ser transformada em uma força dependente do tempo, ($T_i(t)$).

A força total equivalente atuando sobre o sistema resulta em:

$$T_i = T(t) = C_{vi} [u_1^2 \ddot{q}_2 + u_1^3 \ddot{q}_3 + \dots + u_1^p \ddot{q}_p] \dots$$

Para que o desacoplamento dos modos seja mantido, somente a força de amortecimento correspondente deve ser considerada.

Para o modo "J" por exemplo a força generalizada Q_j será dada por:

$$Q_j = u_1^j \cdot T(t) - u_1^{j^2} \times C_{vi} \cdot \dot{q}_j$$

O amortecimento modal correspondente será dado por:

$$\xi_j = \frac{u_1^{j^2} \times C_{vi}}{2 \cdot \omega_j}$$

6.1.2 Curvas características do motor

6.1.2.1 Considerações Gerais

Neste trabalho nos restringiremos aos acionamentos em que a comutação de curvas é feita com base em temporização previamente definida.

A temporização tem a desvantagem de requerer o pré-cálculo do tempo em cada um dos estágios para cada aplicação específica.

Por outro lado, possibilita uma redução da sollicitação nos mecanismos com a ponte em vazio a partir da 2ª comutação o que não ocorre no sistema baseado na frequência rotórica conforme pode ser visto na figura abaixo.

Aliada à redução da sollicitação no mecanismo ocorre uma partida mais suave e sem prejuizo do tempo de aceleração.

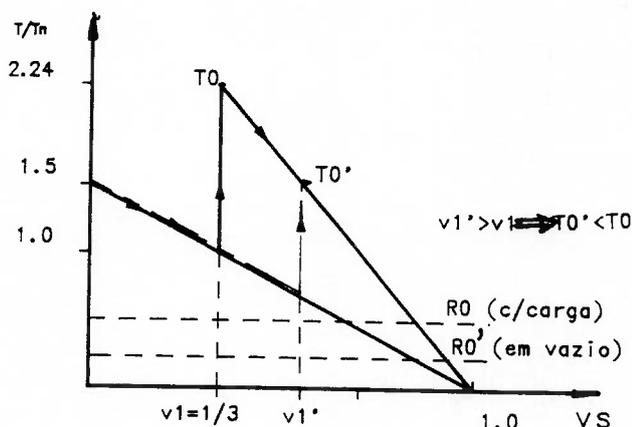
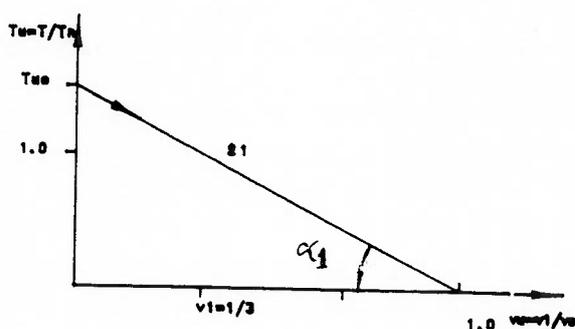


Figura 23 - Curva do motor partida em vazio

- Comutação com base na frequência rotórica. ($V_c = V_1$)
- Comutação com base em temporização. ($V_c = V_1^4$)

6.1.2.2 Curvas características durante a fase de aceleração

- 1º Estágio



$$\begin{aligned}
 T_u &= T/T_N \\
 T_{u0} &= T_0/T_N \\
 T_u &= T_{u0} - C_{v11} \cdot v_u \\
 C_{v11} &= \operatorname{tg} \alpha_1 = T_{u0} \\
 C_{v11} &= C_{v1} \cdot v_e / T_N \\
 C_{v1} &= T_a / v_s \\
 C_{v1} &= C_{v11} \cdot T_N / v_s \\
 v_u &= v_1 / v_s
 \end{aligned}$$

Figura 24.1 - Curva do motor do 1º estágio.

Equação diferencial do movimento do "CM".

$$\ddot{x}_m \cdot \sum_{i=1}^{i=9} m_i = M \ddot{x}_n = (Tu^1 - Ru) \cdot T_N = (Tu_o^1 - Ru - C_{v1} \cdot v_u) T_N$$

$$M \ddot{x}_m + C_{v1} \cdot v_u \cdot T_N = (Tu_o^1 - Ru) T_N$$

$$v_u = v_1 / v_s \approx v_m / v_e$$

$$M \cdot \dot{v}_m + \frac{C_{v1} \cdot T_N}{v_s} \cdot v_m = (Tu_o^1 - Ru) T_N$$

A equação diferencial acima é linear de primeira ordem cuja solução é dada por:

$$v_m(t) = v_e \cdot \left[\frac{Tu^1 - Ru}{C_{v1}'} \right] \left(1 - e^{-B_1 t} \right) \quad (t = 0 \rightarrow v_m = 0)$$

$$v_u(t) = v_m / v_s = \left[\frac{Tu_o^1 - Ru}{C_{v1}'} \right] \cdot \left(1 - e^{-B_1 t} \right)$$

$$B_1 = C_{v1} \cdot T_N / M \cdot v_e$$

Tempo para comutação de velocidade ($v_{u1} = 1/3$)

$$\Delta t_1 = \frac{-1}{B_1} \cdot v_s \cdot \ln \left[1 - \frac{C_v \cdot v_{u1}}{Tu_o - Ru} \right]$$

Curva do motor.

$$Tu^1(t) = Tu_o^1 - (Tu_o^1 - Ru) (1 - e^{-B_1 t})$$

$$Tu^1(t) = (Tu_o^1 - Ru) e^{-B_1 t} + Ru$$

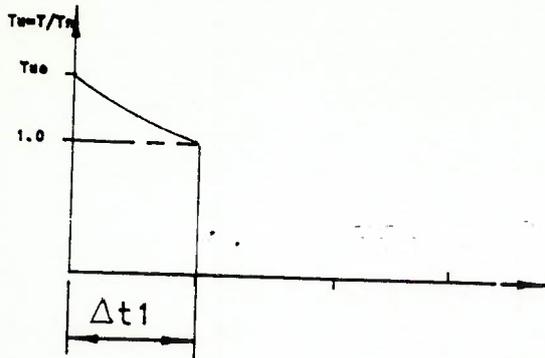
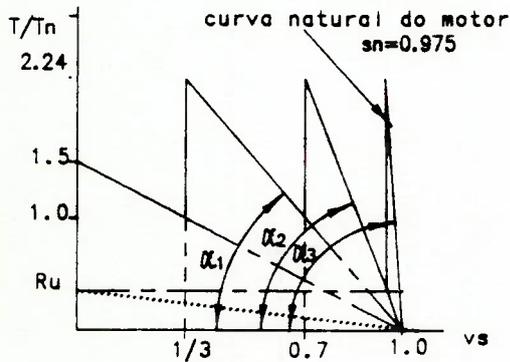


Figura 24.2 - Curva do motor no tempo - 1º estágio.

- 2º, 3º e 4º Estágios.



$$\begin{aligned} T_u^i &= T_{uo}^i - C_{vi} \cdot \Delta v_u^i \quad i = 2, 3, 4 \\ T_{uo}^i &= T_L \quad ; \quad C_{vi} = \operatorname{tg} \alpha_i \\ \Delta v_u^i &= v_{ui} - v_{ui-1} \end{aligned}$$

Figura 25.1 - Curva do motor 2º, 3º e 4º estágio.

$$v_{u3} = 1 - \frac{T_L}{\operatorname{tg} \alpha_4} \quad \text{onde } \operatorname{tg} \alpha_4 = \frac{1}{0.025} = 40$$

$$v_{u3} = 0.944$$

$$v_{u4} = 1 - R_u \cdot \operatorname{tg} \alpha_4$$

Tempos de comutação (Δt_i)

$$\Delta t_i = - \frac{1}{B_i} \operatorname{vs.} \ln \left[1 - \frac{C_{vi} \cdot \Delta v_u^i}{T_i - R_u} \right] \quad \text{onde } \Delta v_u^i = v_{ui} - v_{ui-1}$$

$$\beta_i = \frac{C_{vi} \cdot T_N}{M \cdot v_e}$$

Curvas do Motor.

$$T_u(t_0) = (T_L - R_u) e^{-B t_0} + R_u \quad \text{onde } t_0 = t - \sum_{j=1}^{i-1} \Delta t_j$$

Para t_0 variando de zero a Δt_i .

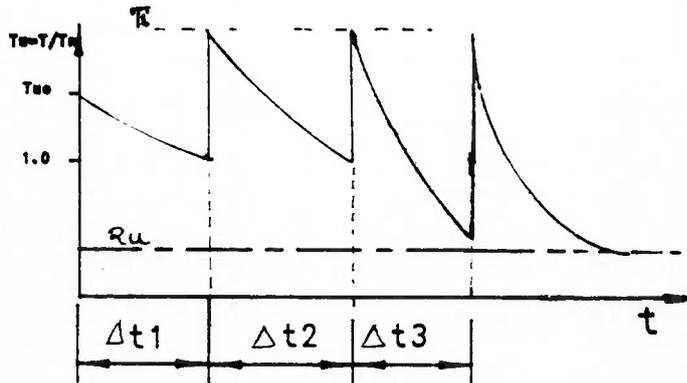
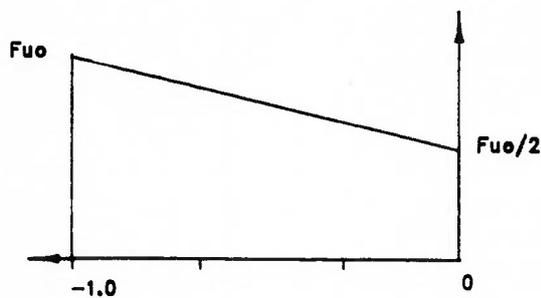


Figura 25.2- Curva do motor no tempo.

Convém notar que as expressões acima são válidas a partir do instante em que se inicia o movimento livre do centro de massas ou seja a força elástica entre motor e ponte supera à força correspondente à resistência ao movimento "R₀".

6.1.2.3 Curva característica durante a frenagem por Plugging (Contra Corrente)



$$F_u = F_{u0} - C_v \cdot (v_u + 1)$$

$$\frac{C_0}{C_v} = \frac{1}{2} F_{u0} \rightarrow F_u = \frac{F_{u0}}{2} (1 - v_u)$$

Figura 26.a - Curva do motor - Frenagem

Equação diferencial do Movimento do "CM"

$$M \ddot{x}_M = \frac{F_{u0}}{2} (1 - v_u) \cdot T_N + R_u \cdot T_N$$

$$v_u = \frac{v_1}{v_s} \approx \frac{v_M}{v_s}$$

$$M v_M + \frac{F_{u0} T_N \cdot v_M}{2 v_s} = (F_{u0} / 2 + R_u) T_N$$

$$v_u(t) = \frac{v_M}{v_s} = \frac{2}{F_{u0}} \left(\frac{F_{u0}}{2} + R_u \right) (1 - e^{-B_f \cdot t}) - e^{-B_f \cdot t}$$

para $t = 0$
 $v_u = -1$

$$B_f = \frac{F_{u0} \cdot T_N}{2 v_s \cdot M}$$

$$F_u(t) = (F_{u0} + R_u) e^{-B_f t} - R_u$$

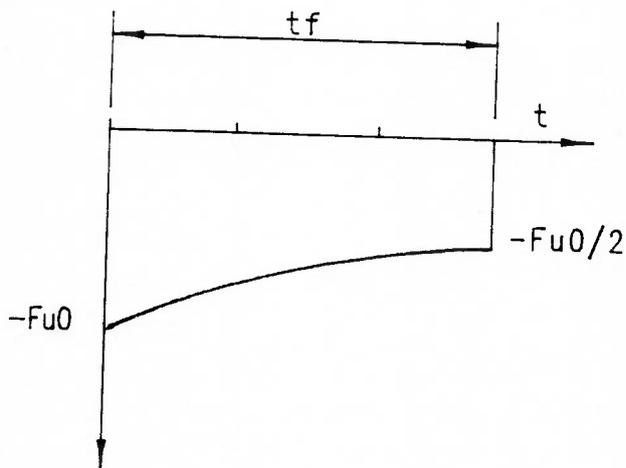


Figura 26.b - Curva do motor no tempo - Frenagem

6.2 Acionamento por motores de corrente continua (CC).

6.2.1 Introdução

Os motores de corrente continua atualmente ainda são muito pouco utilizados em pontes rolantes. Sua utilização em guindastes portuários de grande porte é mais frequente, uma vez que seu custo fica reduzido em proporção ao da máquina, permitindo que se usufrua de suas vantagens principalmente no que se refere ao menor consumo de energia. A redução no consumo de energia pode chegar a algo em torno de 50% em relação ao acionamento por motor de corrente alternada em malha aberta, segundo avaliação de H.G. Ludwig [2], após estudo comparativo destes sistemas de acionamento aplicados em pontes rolantes.

Os motores de corrente continua normalmente utilizados nas M.E.T. são do tipo "shunt" com excitação independente controlados em malha fechada.

Os sistemas de controle disponíveis no mercado apresentam as seguintes características básicas [20].

- Regulagem do conjugado motor pela variação da tensão da armadura.
- Regulagem contínua da velocidade de operação.
- Rampa de velocidade para ajuste da aceleração ou desaceleração.
- Operação nos quatro quadrantes.
- Limitação da corrente de partida.

Estes sistemas propiciam uma partida mais suave do que os em malha aberta para motores de indução. Para que esta vantagem seja captada é necessário levar em conta os parâmetros do próprio motor e do sistema de controle, quando modelamos a curva de torque do motor.

As relações básicas para um motor de corrente contínua, que associam as grandezas elétricas: tensão da armadura (U_A), força contra-eletromotriz (E_A), corrente da armadura (I_A) e as grandezas mecânicas: velocidade (v_1) e torque do motor (C_A), para excitação constante, são expressas por:

$$U_A = E_A + R_A I_A + L_A \frac{d I_A}{dt}$$

$$E_A = K_E \cdot v_1$$

$$C_A = K_M \cdot I_A$$

R_A = resistência da armadura

L_A = Indutância da armadura

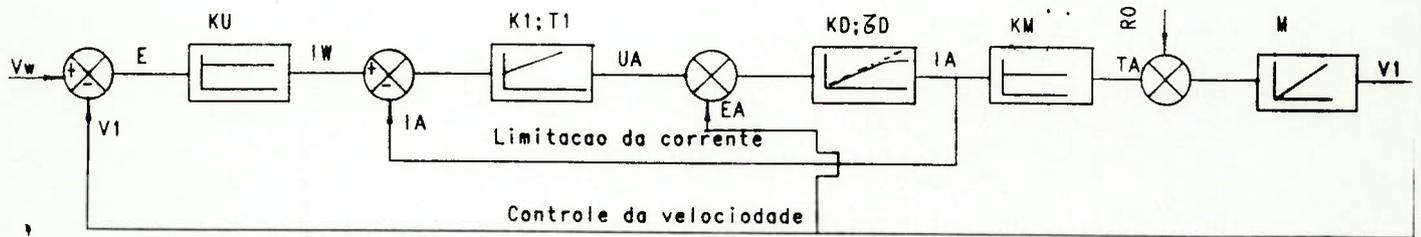
A representação por diagrama de blocos e funções de transferência de uma malha típica de controle de motores de corrente contínua com seus elementos básicos é mostrada nas Figuras 27 a e b.

A função do sistema de controle é fazer com que a ponte atinja uma velocidade definida pelo operador através da posição do combinador, a qual pode variar de zero à nominal, obedecendo sempre uma rampa de velocidade ou seja a referência é sempre "aceleração ou desaceleração" constante.

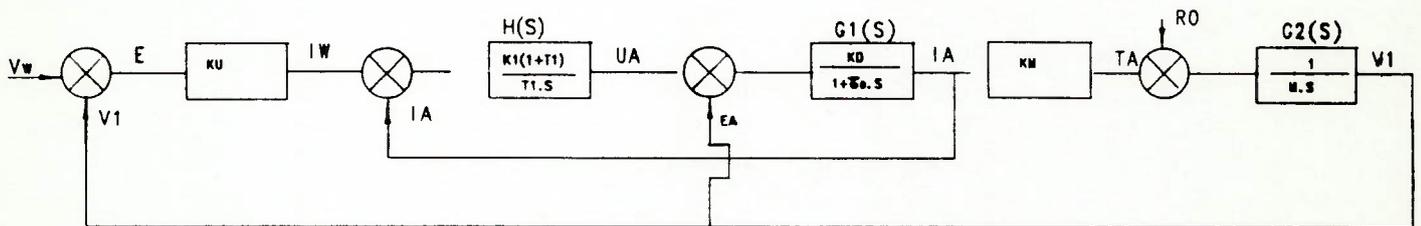
Para efeito de avaliação dos parâmetros do sistema de controle, o modelo do sistema mecânico será reduzido às massas que vibram nas maiores frequências (massa da motorização e carrinho ou ponte) pois somente as mesmas tem participação durante a fase transitória do sistema de controle.

Nos deteremos aqui na procura de valores de parâmetros que permitam conciliar uma boa performance do sistema de controle com a necessidade de atenuar o impacto produzido pelo acionamento, no sistema mecânico.

27.a. Diagrama de Blocos e gráficos de transferência.



27.b. Diagrama de Blocos com função de transferência.



k_u = constante do controlador proporcional de rotação, com limitação para o valor da corrente de saída I_v .

$H(s)$ = Função de transferência para controlador proporcional e integral.

$G_1(s)$ = Função de transferência do motor. ($K_D = 1/R_A$, $D = L_A/R_A$)

$G_2(s)$ = Função de transferência do sistema mecânico.

R_0 = Resistência ao movimento admitida constante.

v_w = Velocidade da referência.

$v_w = a_0.t$: Durante a fase de aceleração.

Corresponde a imposição da rampa de velocidade independente da carga e da velocidade de acionamento do combinador pelo operador.

$v_w = v_n =$ Durante a fase do regime (velocidade constante).

$v_w = v_n - a_0.t =$ Durante a fase de desaceleração da ponte.

Uma curva típica de evolução do conjugado, tomando-se por base trabalhos sobre o assunto [2], é mostrada abaixo. São de grande importância o tempo de transição entre conjugado nulo e conjugado de partida (T_p) e o tempo de decaimento do conjugado ao atingir a velocidade desejada, pois os mesmos definem os níveis de impacto produzidos no acionamento.

Os tempos Δt_1 e Δt_2 correspondem ao regime transitório do sistema de controle.

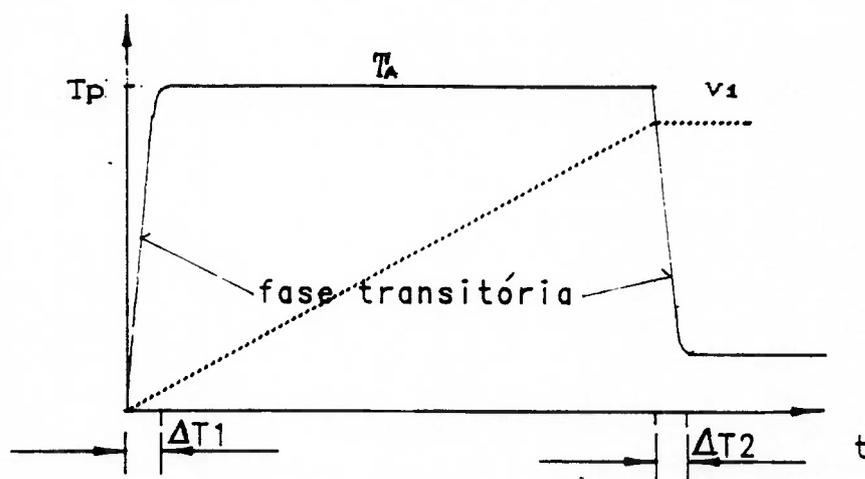


Figura 28 - Curva típica de Evolução da força motora/conjugado.

O ganho do sistema de controle pode ser estimado, pela condição de estabilidade do sistema, que pode ser verificada por um dos seguintes critérios: Routh-Hurwitz, Nyquist ou Root-Locus.

A expressão do erro em relação à velocidade de referência é dada por:

$$E = v_w \frac{(1 + k_E G_1 G_2 k_M + G_1 H) + R_o. G_2 (1 + H . G_1)}{1 + k_M . G_1 . G_2 (k_E + H . K_u) + H . G_1}$$

$$E = v_w - v_1$$

6.2.2 Análise de desempenho do sistema

6.2.2.1 Análise da estabilidade pelo critério de Routh-Hurwitz

Equação característica do sistema:

$$(1 + k_M \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot (k_E + H k_U) + H G_1) = 0$$

$$\left\{ 1 + \left[\frac{k_M \cdot k_D}{1 + T_D \cdot s} \right] \frac{1}{M \cdot s} \left[K_E + \frac{k_1 \cdot k_U}{s \cdot T_i} (1 + T_1 \cdot s) \right] + \frac{k_1 \cdot k_D (1 + T_1 s)}{T_1 \cdot s (1 + \zeta_D s)} \right\} = 0$$

$$s^3 + \left[\frac{1 + k_1 \cdot k_D}{\zeta_D} \right] \cdot s^2 + \frac{K_D}{\zeta_D \cdot M} \left[\frac{k_1 \cdot M}{T_i} + k_E \cdot k_M + k_1 \cdot k_U \cdot k_M \right] s + \frac{k_M \cdot k_D \cdot k_1 \cdot k_U}{\zeta_D \cdot M \cdot T_1} = 0 \quad (6.2)$$

A condição de estabilidade para um sistema de 3º ordem com coeficientes positivos segundo J.A. Hrones [21] é dada por:

$$a_1 \cdot a_2 > a_3 \cdot a_0$$

Onde os a_i são os correspondentes coeficientes dos termos de potência de ordem i do polinômio da equação característica.

$$a_3 = 1$$

$$a_2 = \left[\frac{1 + k_1 \cdot k_D}{\zeta_D} \right]$$

$$a_1 = \frac{K_D}{\zeta_D \cdot M} \left[\frac{k_1 \cdot M}{T_i} + k_E \cdot k_M + k_1 \cdot k_U \cdot k_M \right]$$

$$a_0 = \frac{k_M \cdot k_D \cdot k_1 \cdot k_U}{\zeta_D \cdot M \cdot T_1}$$

Condição de estabilidade:

$$k_1^2 \left[\frac{k_D \cdot M}{k_u \cdot k_M \cdot T_1} + k_D \right] + k_1 \left[\frac{M}{k_u \cdot k_M \cdot T_1} + \frac{k_D \cdot k_M}{k_u} + 1 - \frac{z_D}{T_1} \right] + \frac{k_E}{k_u} > 0 \quad (6.3)$$

6.2.2.2 Performance do sistema quanto ao controle da velocidade

Desenvolvendo-se a equação do erro do sistema teremos a seguinte expressão:

$$E(s) = \frac{Z_1(s) \cdot V_w + Z_2(s) \cdot R_o}{Z(s)}$$

Onde:

$$Z_1(s) = [(1 + d \cdot s) \cdot M \cdot T_1 \cdot s^2 + k_E \cdot k_D \cdot k_M \cdot T_1 \cdot s + k_D \cdot k_1 (1 + T_1 \cdot s) M \cdot s]$$

$$Z_2(s) = [(1 + d \cdot s) \cdot T_1 \cdot s + k_1 \cdot k_D (1 + T_1 \cdot s)]$$

$$Z(s) = [(1 + d \cdot s) M \cdot T_1 \cdot s^2 + k_M \cdot k_D (k_E \cdot T_1 \cdot s + k_1 (1 + T_1 \cdot s) \cdot k_u + k_1 (1 + T_1 \cdot s) \cdot k_D \cdot M \cdot s]$$

Para análise do erro em regime permanente durante a fase de aceleração, as seguintes relações devem ser consideradas:

$$V_w(t) = a_0 \cdot t \Rightarrow \dot{V}_w = a_0 \Rightarrow \ddot{V}_w = 0 \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[s^2 \cdot V(s)] = 0$$

$$R_o = \text{constante} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[s \cdot R_o] = 0$$

Admitindo-se que o sistema seja estável teremos ainda em regime permanente segundo J.A. Hrones [21].

$$E = \text{constante} \Rightarrow \dot{E} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[s \cdot E(s)] = 0$$

Portanto a equação do erro em regime permanente resulta:

$$E(s) = \frac{(k_M \cdot k_D \cdot k_E \cdot T_1 + k_D \cdot k_1 \cdot M) s \cdot v_w(s) + k_1 \cdot k_D \cdot R_o(s)}{k_M \cdot k_D \cdot k_1 \cdot k_u}$$

No domínio do tempo com $\dot{v}_w = a_0$ teremos:

$$E_{va} = a_0 \cdot \left[\frac{k_E \cdot T_1}{k_1 \cdot k_u} + \frac{M}{k_u \cdot k_M} \right] + \frac{R_o}{k_u \cdot k_M} \quad (6.4)$$

O erro "Eva" nos dá uma informação importante pois o mesmo é percentualmente próximo ao erro no tempo de aceleração esperado.

O erro mais importante em termos de velocidade será em relação à velocidade nominal desejada, sendo dado, para $v_w = v_n =$ constante, por:

$$E_r = (R_o) / k_u \cdot k_M \quad (6.5)$$

Analogamente à fase de aceleração, durante a frenagem com a força de perturbação "Ro" mudando de sinal, bem como a aceleração, o erro (Ef) será dado por:

$$E_f = - E_{va}$$

6.2.2.3 Performance do sistema quanto ao controle da limitação da corrente de partida

A função de transferência entre a corrente de partida e a corrente de referência I_w é dada por:

$$\frac{I_A(s)}{I_N(s)} = \frac{H.G.}{1 + H.G_1 + k_M.k_E.G_1.G_2}$$

O erro em relação ao limite de corrente, portanto será expresso por:

$$E(s) = I_w(s) \left[\frac{1 + k_M.k_E.G_1.G_2}{1 + H.G_1 + k_M.k_E.G_1.G_2} \right]$$

onde: $E(s) = I_w(s) - I_A(s)$

substituindo pelos respectivos parâmetros teremos:

$$E(s) = I_w(s) \cdot \frac{\frac{M.s}{k_D.k_M.k_E} (1 + \zeta_D.s) + 1}{\frac{m.s (1 + \zeta_D.s)}{k_D.k_M.k_E} + \frac{k_1.M}{k_M.k_E} + \frac{k_1.M}{T_1.k_M.k_E} + 1}$$

Em regime permanente com: $I_w = I_L$ e $\dot{E} = 0$ resulta para o erro:

$$E = \frac{I_L}{1 + \frac{k_1.M}{k_M.k_E.T_1}} \quad (6.6)$$

As expressões 6.4, 6.5 e 6.6 portanto nos permitem impor condições para a relação entre os parâmetros do sistema de controle k_u , k_1 e T_1 , a partir dos valores de performance adequados à aplicação.

6.2.3 Equação da Resposta para a Força motora (T_A)

6.2.3.1 - 1ª Fase: Não há movimento da ponte.

Admiteremos que somente haja movimento após a força proveniente do motor se equilibrar com a resistência ao movimento (R_0).

A evolução da força motora e o tempo decorrido nesta fase podem ser determinados mais facilmente pois $v_1 = 0$

A função de transferência no domínio da frequência entre T_A e v_w é dada por:

$$\frac{T_A}{v_w} = \frac{k_u \cdot k_M \cdot H \cdot G_1}{1 + H \cdot G_1}$$

No domínio do tempo com $v_w = a_1$ teremos:

$$\ddot{T}_A + \frac{1 + k_1 \cdot k_D}{\zeta_D} \cdot \dot{T}_A + \frac{k_1 \cdot k_D}{D \cdot T_1} \cdot T_A = \frac{k_1 \cdot k_u \cdot k_M \cdot k_D}{\zeta_D \cdot T_1} (a_0 \cdot t + a_0 \cdot T_1) \quad (6.7)$$

Fazendo:

$$D_2 = 1$$

$$D_1 = \frac{1 + k_1 \cdot k_D}{\zeta_D}$$

$$D_0 = \frac{k_1 \cdot k_D}{\zeta_D \cdot T_1}$$

$$K_P = \frac{k_1 \cdot k_u \cdot k_M \cdot k_D}{\zeta_D \cdot T_1}$$

a equação fica:

$$D_2 \ddot{T}_A + D_1 \dot{T}_A + D_0 \cdot T_A = k_p \cdot a_0 \cdot t_1 + k_p \cdot a_0 \cdot T_1$$

A solução da equação diferencial acima será a soma da homogênea associada: $D_2 \ddot{T}_A + D_1 \dot{T}_A + D_0 T_A = 0$, acrescida da solução particular dada por:

$$T_{Ap} = \beta \cdot a_0 \cdot t + \alpha \cdot a_0$$

onde $\beta = \frac{k_p}{D_0}$ e $\alpha = \frac{k_p}{D_0} (T_1 - (D_1 / D_0))$

Admitindo-se fator de amortecimento $\xi < 1$ para o sistema, a solução para a homogênea associada será:

$$T_{Ah} = e^{-\xi \omega_n t} [A \cdot \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t]$$

Com $\omega_n = \sqrt{D_0}$; $\xi = D_1 / (2\omega_n)$ e $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$

Com as condições iniciais $T_A(0) = 0$ e $\dot{T}_A(0) = 0$ a resposta completa será dada por:

$$T_A = \beta \cdot a_0 \cdot t + \alpha \cdot a_0 + e^{-\xi \omega_n t} [A \sin \omega_d t + B \cdot \cos \omega_d t] \quad (6.8)$$

onde:

$$B = -\alpha \cdot a_0$$

$$A = -[a_0 / (\omega_A)] (\beta + \alpha \cdot \omega_n \cdot \xi)$$

$$\dot{T}_A = \beta \cdot a_0 + e^{-\xi \omega_n t} [A_{11} \sin \omega_A t + B_{11} \cos \omega_A t] \quad (6.8.1)$$

onde:

$$A_{11} = - (B \cdot \omega_A + \xi \omega_n \cdot A)$$

$$B_{11} = (A \omega_A - \xi \omega_n B)$$

$$\ddot{T}_A = e^{-\xi \omega_n t} [A_{22} \sin \omega_A t + B_{22} \cos \omega_A t] \quad (6.8.2)$$

$$A_{22} = - (B_{11} \cdot \omega_A + \xi \omega_n \cdot A_{11})$$

$$B_{22} = (A_{11} \cdot \omega_A - \xi \omega_n \cdot B_{11})$$

A resposta dada pela equação 6.8. é válida desde que o limite do controlador proporcional não seja atingido, ou seja, $I_w = k_u \cdot E < I_L$. Sendo atingido o limite de corrente I_L a função de transferência entre T_A e I_w é dada por:

$$\frac{T_A}{I_w} = \frac{k_M \cdot H \cdot G_1}{1 + H \cdot G_1}$$

e a equação diferencial no domínio do tempo para $I_w = I_L$ será dada por:

$$\ddot{T}_A + \frac{1 + k_1 \cdot k_D}{\zeta_D} \cdot \dot{T}_A + \frac{k_1 \cdot k_D}{\zeta_D \cdot T_1} \cdot T_A = \frac{k_1 \cdot k_M \cdot k_D}{\zeta_D \cdot T_1} \cdot I_L \quad (6.9)$$

ou

$$D_2 \ddot{T}_A + D_1 \dot{T}_A + D_0 T_A = k_{p1} \cdot I_L$$

$$\text{com } k_{p1} = \frac{k_1 \cdot k_M \cdot k_D}{\zeta_D \cdot T_1}$$

A resposta completa com as condições iniciais $T_A(0)$ e $\dot{T}_A(0)$ será:

$$T_{A_L} = \frac{k_{p1} \cdot I_L}{A_0} + e^{-\xi \omega_n t} [AL \sin \omega_A t + BL \cos \omega_A t] \quad (6.10)$$

$$AL = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{\dot{T}_A(0)}{\omega_A} \times \frac{k_{p1} \cdot I_L}{A_0}$$

$$BL = - \frac{k_{p1} \cdot I_L}{A_0} + T_A(0)$$

$$\dot{T}_{A_L} = e^{-\xi \omega_n t} [AL_1 \sin \omega_A t + BL_1 \cos \omega_A t] \quad (6.10.1)$$

$$AL_1 = - (BL \omega_A + \xi \omega_n \cdot AL)$$

$$BL_1 = (AL \cdot \omega_A - \xi \omega_n \cdot BL)$$

$$\ddot{T}_{A_L} = e^{-\xi \omega_n t} [AL_2 \sin \omega_A t + BL_2 \cos \omega_A t] \quad (6.10.2)$$

$$AL_2 = - (BL_1 \omega_A + \xi \omega_n \cdot AL_1)$$

$$BL_2 = (AL_1 \cdot \omega_A - \xi \omega_n \cdot BL_1)$$

6.2.3.2 - 2ª Fase: A ponte Inicia Movimento.

A força motora (T_A) ao se iniciar o movimento já atingiu o valor R_0 .

O incremento na força motora a partir do início desta fase será identificado por T_{A1} onde $T_{A1} = T_A - R_0$

A função de transferência entre T_A e v_w é dada por:

$$\frac{T_{A1}(s)}{v_w(s)} = \frac{H \cdot G_1 [k_u \cdot k_M + 1] / G_2}{[1 + k_M \cdot G_1 \cdot G_2 (k_E + H \cdot k_U) + G \cdot H]} \quad \text{para } I_w < I_L \quad (6.11)$$

Substituindo temos:

$$\frac{T_{A1}(s)}{v_w(s)} = \frac{\frac{k_D \cdot k_M \cdot k_1 \cdot k_U}{\zeta_D \cdot T_1} (s + T_1 \cdot s^2)}{s^3 + \frac{(1 + k_1 \cdot k_D)}{\zeta_D} \cdot s^2 + \frac{k_D}{M \cdot \zeta_D} [k_M \cdot k_1 \cdot k_U + \frac{k_1 \cdot M}{T_1} + k_M \cdot k_E] s + \frac{k_M \cdot k_1 \cdot k_U}{T_1 \cdot M \cdot \zeta_D}}$$

Fazendo a transformação para o domínio do tempo teremos:

$$\ddot{T}_A + \frac{1+k_1 \cdot k_D}{\zeta_D} \dot{T}_A + \frac{k_D \cdot k_M}{M \cdot \zeta_D} \left[k_1 \cdot k_U + \frac{k_1 \cdot M}{k_M \cdot T_1} + k_E \right] T_A + \frac{k_M \cdot k_1 \cdot k_U}{T_1 \cdot M \cdot \zeta_D} T_A = \frac{k_M \cdot k_1 \cdot k_U \cdot k_D}{T_1 \cdot \zeta_D} (\dot{v}_w + T_1 \cdot \ddot{v}_w) \quad (6.12)$$

Como $v_w = at$ (durante a fase de aceleração) $\rightarrow \dot{v}_w = a$ e $\ddot{v}_w = 0$

Reescrevendo teremos:

$$A_3 \cdot \ddot{T}_{A1} + A_2 \dot{T}_{A1} + A_1 \cdot \dot{T}_{A1} + A_0 \cdot T_{A1} = k_w \quad (6.13)$$

onde:

$$A_3 = 1$$

$$A_2 = (1 + k_1 \cdot k_D) / (\zeta_D)$$

$$A_1 = k_D \cdot k_M / (M \cdot \zeta_D) [k_1 \cdot k_U + (k_1 \cdot M / (k_M \cdot T_1)) + k_E]$$

$$A_0 = k_M \cdot k_1 \cdot k_U \cdot k_D / (T_1 \cdot M \cdot \zeta_D)$$

$$k_w = k_M \cdot k_1 \cdot k_U \cdot k_D \cdot a_0 / (T_1 \cdot \zeta_D)$$

A solução da equação diferencial de T_A será a soma da solução da homogênea associado $A_3 \cdot \ddot{T}_{A1} + A_2 \cdot \dot{T}_{A1} + A_1 \cdot \dot{T}_{A1} + A_0 \cdot T_{A1} = 0$ qual denominaremos T_{A1H} e da solução particular $T_{A1P} = k_w / A_0$.

$$T_{A1} = T_{A1H} + T_{A1P}$$

Solução da homogênea:

$$T_{AH} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t}$$

Onde os λ_i são as raízes da equação características:

$$A_3 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 = 0$$

Sendo o sistema estável pelo critério de Routh-Hurwitz temos as seguintes possíveis combinações de raízes para a equação característica do sistema de 3° ordem.

1. As três raízes são reais e negativas.
2. Uma das raízes é real e negativa e as outras duas são complexas conjugadas com parte real negativa.

Para a primeira combinação, o sistema quando excitado segue a perturbação sem oscilar.

Tendo o sistema duas raízes complexas conjugadas o sistema quando perturbado oscila, sendo o grau de atenuação da oscilação dado pelo fator de amortecimento ξ .

Para estimar o valor de umas das raízes da equação característica podemos utilizar o Método do lugar da Raízes (ROOT Locus Method).

A equação característica para o sistema em malha fechada pode ser escrita da seguinte forma:

1. $|k_M \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot (k_E + H_k u) + H \cdot G_1| = 1$
2. $\angle (k_M \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot (k_E + H_k u) + H G_1) = 180^\circ$ (Ângulo de fase (ϕ) = 180°).

Desenvolvendo teremos:

$$\begin{aligned}
& [k_M \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot (k_E + h \cdot k_U) + H \cdot G_1] = \\
& = G_1 [k_E \cdot k_M \cdot G_2 + H [k_M \cdot k_U \cdot G_2 + 1]] = \\
& = k_D \cdot k_1 \left[\frac{\frac{k_M \cdot k_U}{M \cdot T_1} + \left(\frac{k_E \cdot k_M}{M} + \frac{1}{T_1} + \frac{k_M \cdot k_U}{M} \right) \cdot s + s^2}{(1 + \zeta_D \cdot s) \cdot s^2} \right] = 1 \\
& = \frac{k_D \cdot k_1}{\zeta_D} \left[\frac{(s + 1/\tau_1) (s + 1/\tau_2)}{s^2 (s + 1/\zeta_D)} \right] = 1 \quad (6.14)
\end{aligned}$$

Onde $-1/\tau_1$ e $-1/\tau_2$ são as raízes do polinômio:

$$P(s) = \frac{k_M \cdot k_U}{M \cdot T_1} + \left[\frac{k_M \cdot k_E}{k_1 \cdot M} + \frac{1}{T_1} + \frac{k_M \cdot k_U}{M} \right] s + s^2$$

$$P(s) = a \cdot s^2 + b \cdot s + c$$

$$- \frac{1}{\tau_1} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad - \frac{1}{\tau_2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Pela regra dos sinais de Descartes podemos afirmar que o Polinômio acima não possui raízes reais positivas, podendo ter duas raízes reais negativas.

Nas figuras abaixo estão representados no plano complexo os polos e zeros, ou seja as raízes que tornam o ganho do sistema (K) onde $K = k_D \cdot k_1 / (\zeta_D)$ infinito ou nulo respectivamente.

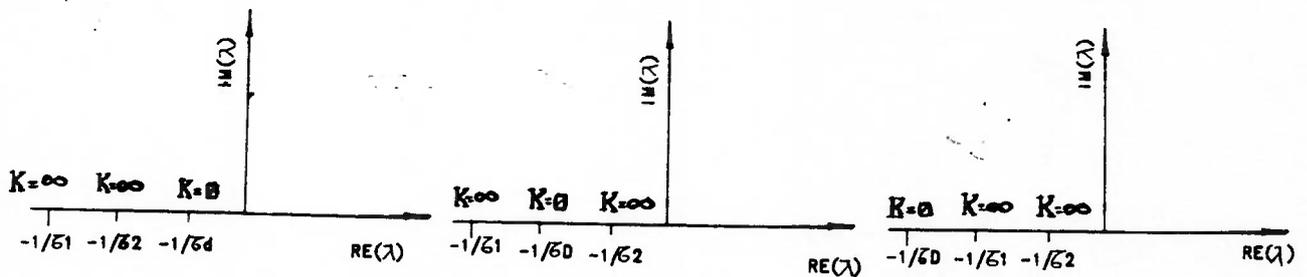


Figura - 29.a

Figura - 29.b

Figura - 29.c

Os valores de λ em condições de atender à igualdade 1 estão situados nos trechos para os quais

$$\angle [kM.G1.G2(kE+Hku)+HG1]=180^\circ \text{ ou } \angle (S+1/\zeta_1) + \angle (S+1/\zeta_2) - \angle S - \angle S - \angle (S+1/\zeta_D) = \pm 180^\circ.$$

A condição (2) indica para o lugar das raízes reais as seguintes possibilidades:

$$\text{Para } -1/\zeta_2 < -1/\zeta_D \rightarrow \lambda < -1/\zeta_1$$

$$\text{Para } -1/\zeta_2 > -1/\zeta_D \rightarrow -1/\zeta_D < \lambda < -1/\zeta_2 \text{ ou } \lambda < -1/\zeta_1$$

$$\text{Para } -1/\zeta_1 > -1/\zeta_D \rightarrow -1/\zeta_D < \lambda < -1/\zeta_2 \text{ ou } \lambda < -1/\zeta_D$$

Com base nas indicações acima podem fazer uma estimativa do valor da raiz real λ_1 , à qual denominaremos λ_0 .

Para a determinação do valor exato de λ_1 devemos recorrer a algum método de aproximação sucessiva como o descrito abaixo:

Seja $P(\lambda) = A_3 \cdot \lambda^3 + A_2 \cdot \lambda^2 + A_1 \cdot \lambda + A_0 = 0$

que também pode ser escrito como sendo:

$$P(\lambda) = (\lambda - \bar{\lambda}_0) Q(\lambda) + R(\bar{\lambda}_0)$$

Onde $R(\bar{\lambda}_0)$ é o resto da divisão de $P(\lambda)$ por $(\lambda - \bar{\lambda}_0)$, onde $R(\bar{\lambda}_0) = P(\bar{\lambda}_0)$ o que pode ser verificado pela substituição λ por $\bar{\lambda}_0$ na equação acima.

$$Q(\lambda) = A \lambda^2 + B \lambda + C$$

Onde:

$$A = A_3$$

$$B = A_3 \cdot \bar{\lambda}_0 + A_2$$

$$C = B \cdot \bar{\lambda}_0 + A_1$$

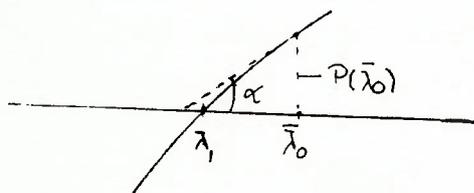
$$P(\bar{\lambda}_0) = C \cdot \bar{\lambda}_0 + A_0$$

Se $P(\bar{\lambda}_0) \approx 0$ $\bar{\lambda}_0$ é raiz de $P(\lambda)$ ou seja $\lambda_1 = \bar{\lambda}_0$ e portanto λ_2 e λ_3 podem ser obtido de:

$$Q(\lambda) = A \cdot \lambda^2 + B \cdot \lambda + C = 0$$

Para $P(\bar{\lambda}_0) \neq 0$ um valor de λ melhor para $P(\lambda) = 0$ será:

$$\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_0 - \frac{P(\bar{\lambda}_0)}{P'(\bar{\lambda}_0)} \quad \text{que decorre do método Newton Raphson}$$



$$\lambda_1 - \bar{\lambda}_0 \approx \frac{-P(\bar{\lambda}_0)}{P'(\bar{\lambda}_0)}$$

$$\lambda_1 \approx \bar{\lambda}_0 - \frac{P(\bar{\lambda}_0)}{P'(\bar{\lambda}_0)}$$

$$P'(\lambda) = 3 A_3 \lambda^2 + 2 A_2 \lambda - A_1$$

Repete-se a etapa anterior recalculando $Q(\lambda)$ e $P(\bar{\lambda}_1)$

Se $P(\bar{\lambda}_1) \neq 0$ repete-se novamente a sequência anterior.

As raízes λ_2 e λ_3 obtidos de $Q(y) = 0$ serão:

$$\lambda_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$\lambda_3 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Tendo os sistema duas raízes complexas conjugadas a seguinte notação será utilizada para representá-las

$$\lambda_2 = -\xi \omega_n + i \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

$$\lambda_3 = -\xi \omega_n - i \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

$$\omega_n^2 = \frac{C}{A} = \frac{(A_3 \lambda_1 + A_2) \lambda_1 + A_1}{A_3} = \lambda_1^2 - A_2 \lambda_1 + A_1$$

$$\xi = \frac{B}{2 \sqrt{AC}} = \frac{A_3 \lambda_1 + A_2}{2 A_3 \cdot \omega_n} = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_1}{\omega_n} + \frac{A_2}{\omega_n} \right]$$

Solução geral:

$$T_{A1}(t') = \frac{k w}{A_0} + C_1 e^{\lambda_1 t'} + e^{-\xi \omega_n t'} \left[C_2 \text{sen } \omega_n t' + C_3 \text{cos } \omega_n t' \right] \quad (6.15)$$

Aplicando as condições iniciais:

$$T_{A1} = T_{A1}(0)$$

$$\dot{T}_{A1} = \dot{T}_{A1}(0)$$

$$\ddot{T}_{A1} = \ddot{T}_{A1}(0)$$

$$T_{A1}(0) - kw / A_0 = C_1 + 0 + C_3$$

$$\dot{T}_{A1}(0) = \lambda_1 \cdot C_1 + \omega_A \cdot C_2 + \alpha C_3$$

$$\ddot{T}_{A1}(0) = C_1 \cdot \lambda_1^2 - \beta C_2 - C_3$$

Onde:

$$C_1 = \left[\left(T_{A1}(0) - \frac{kw}{A_0} \right) (\omega_A \cdot \gamma - \beta \omega + \dot{T}_{A1}(0) \beta - \ddot{T}_{A1}(0) \omega_A) \right] D^{-1}$$

$$C_2 = \left[\left(-T_{A1}(0) + \frac{kw}{A_0} \right) \lambda_1 (\gamma - \lambda_1 \omega) + \dot{T}_{A1}(0) (\gamma - \lambda_1 \beta) + \ddot{T}_{A1}(0) (\lambda_1 - \omega) \right] D^{-1}$$

$$C_3 = \left[\left(T_{A1}(0) - \frac{kw}{A_0} \right) \lambda_1 (\beta - \lambda_1 \omega_A) - \dot{T}_{A1}(0) \beta + \ddot{T}_{A1}(0) \omega_A \right] D^{-1}$$

$$D = (\omega_A \cdot \gamma - \alpha \beta + \lambda_1 \cdot \beta - \lambda_1^2 \cdot \omega_A)$$

Onde:

$$\alpha = -\xi \omega_n$$

$$\beta = -2\xi \omega_n^2 \sqrt{1-\xi^2}$$

$$\gamma = (\xi^2 \omega_n^2 - \omega_A^2) = [\xi^2 \omega_n^2 - \omega_n^2 (1 - \xi^2)]$$

$$\gamma^1 = (2\xi^2 - 1) \omega_n^2$$

A resposta completa para a força motora será:

$$T_A(t') = T_{A1}(t') + R_0 \quad (6.16)$$

A equação 6.16 rege a evolução da força motora T_A até que o limite de corrente (I_L) imposto pelo controlador da rotação seja atingido.

Atingido o limite de corrente ($E \cdot k_u = I_L$) o sistema sofre alterações em suas equações sendo a função de transferência entre a força motora (T_{AL}) e I_w dada por:

$$T_{AL} \frac{T_A(s)}{I_w(s)} = \frac{k_M \cdot H \cdot G_1}{1 + H G_1 + k_M \cdot k_E \cdot G_1 \cdot G_2} \quad (6.17)$$

Substituindo teremos:

$$\frac{T_{AL}(s)}{I_w(s)} = \frac{\frac{k_M \cdot k_1 \cdot k_D}{T_1 \cdot D} (1 + T_1 \cdot s)}{s^2 + \frac{1 + k_1 \cdot k_D}{D} \cdot s + \frac{K_D}{D} \left[\frac{k_1}{T_1} + \frac{k_M \cdot k_E}{M} \right]} \quad (6.18)$$

No domínio do tempo com I_w constante teremos:

$$\ddot{T}_{AL} + \frac{1 + k_1 \cdot k_D}{D} \cdot \dot{T}_{AL} + \frac{K_D}{D} \left[\frac{k_1}{T_1} + \frac{k_M \cdot k_E}{M} \right] \cdot T_{AL} = \frac{k_M \cdot k_1 \cdot k_D \cdot I_w}{T_1 \cdot D} \quad (6.19)$$

$$B_2 \ddot{T}_{AL} + B_1 \cdot \dot{T}_{AL} + B_0 T_{AL} = k w_1$$

Onde:

$$B_2 = 1$$

$$B_1 = 1 + k_1 \cdot k_D / Z_D$$

$$B_0 = [K_D / (C_D)] (k_1/T_1 + k_M \cdot k_E / M)$$

$$k_{WL} = k_M \cdot k_1 \cdot k_D \cdot I_w / (T_1 \cdot Z_D) \quad \text{e} \quad I_w = I_L - I_0$$

I_0 = Corrente no instante em que o conjugado motor se equilibra ao conjugado da carga resistente (R_0).

A resposta com as condições iniciais $T_{AL}(0)$ e $\dot{T}_{AL}(0)$ será:

$$T_{AL} = \frac{k_{WL}}{B_0} \left[1 - \frac{e^{-\xi_1 \omega_n t}}{\sqrt{1-\xi_1^2}} \left(\xi_1 \sin \omega_A t + \cos \omega_A t \right) \right] + T_{AL}(0) e^{-\xi_1 \omega_n t} \cdot \cos \omega_A t$$

$$+ \frac{\dot{T}_{AL}(0)}{\omega_A} \cdot e^{-\xi_1 \omega_n t} \cdot \sin \omega_A t \quad (6.20)$$

Onde:

$$\omega_n = \sqrt{B_0}$$

$$2 \xi_1 \omega_n = B_1$$

$$\xi_1 = B_1 / 2 \omega_n = B_1 / 2 \sqrt{B_0}$$

$$\omega_A = \omega_n \sqrt{1-\xi_1^2}$$

$T_{AL}(0)$, $\dot{T}_{AL}(0)$ são respectivamente os valores da força motora e sua derivada no instante em que é atingido o limite "IL" e são dados pela equação 6.15 e sua derivada \dot{T}_{A1} .

$$\dot{T}_{A1} = C_1 \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + e^{-\xi \omega_n t} [-(C_3 \cdot \omega_A + \xi \cdot C_2 \cdot \omega_n) \sin \omega_A t + (C_2 \cdot \omega_A - \xi \omega_n C_3) \cdot \cos(\omega_A t)]$$

A resposta completa para a força motora nesta fase é dada por:

$$T_A = T_{AL} + R_o$$

Convém notar que durante esta fase caso a corrente da armadura I_A atinga o valor limite I_L o sistema deixa momentaneamente de controlar a velocidade, restringindo-se apenas a controlar o limite da corrente.

A partir do instante em que $k_u.E < I_L$ o sistema volta a ser regido pelas equações 6.15 e 6.16.

As novas condições iniciais para a equação 6.15 serão

$$T_{A1}(0) = T_{ALW} \quad e \quad \dot{T}_{A1}(0) = \dot{T}_{ALW} \quad e \quad \ddot{T}_{A1}(0) = \ddot{T}_{ALW}$$

Onde T_{ALW} , \dot{T}_{ALW} e \ddot{T}_{ALW} são respectivamente a força motora e suas derivadas primeira e segunda calculadas no final da fase de limitação da corrente.

A expressão de T_{AL} é dada por:

$$T_{AL} = e^{-\xi \omega_n t} \left[\left[\frac{k_{WL}}{B_o} (\xi^2 \omega_n - \omega_A) - \left(T_{AL}(0) \omega_A + \frac{T_{AL}(0) \xi \omega_n}{\omega_A} \right) \right] \sin \omega_A t + \left[\frac{k_{WL}}{B_o} \cdot \xi (\omega_A + \omega_n) + T_{AL}(0) - T_{A1}(0) \xi \omega_n \right] \cdot \cos \omega_A t \right] \quad (6.21)$$

e a expressão de \ddot{T}_{AL} por:

$$\ddot{T}_{AL} = k_{WL} - B_o \dot{T}_{AL} - B_1 \cdot T_{AL} \quad (6.22)$$

6.2.4 EQUAÇÕES DA RESPOSTA EM VELOCIDADE DO MOTOR

- 1º Caso: O limite na saída do controlador proporcional não foi atingido $I_w < I_L$ (sem limitação da corrente).

A velocidade do motor é dada pela expressão:

$$v_i(t') = \int_0^{t'} \frac{T_A(t') - R_o}{m} dt' + v_o$$

v_o = velocidade no início desta fase.

$t' = t - \Delta t_o$

Δt_o = tempo decorrido até o início da fase

$$v_i(t') = \frac{1}{M} \left\{ \frac{k_w}{A_o} t' + \frac{C_1}{\lambda_1} \left[e^{\lambda_1 t'} - 1 \right] + \frac{e^{-\xi \omega_n t'}}{\omega_n^2} \left[C_{21} \sin \omega_A t' + C_{31} \cos \omega_A t' \right] + \frac{C_2 \omega_A}{\omega_n^2} + \frac{C_3 \xi}{\omega_n} \right\} + v_o \quad (6.23)$$

Onde:

$$C_{21} = (C_3 \omega_A - C_2 \cdot \xi \cdot \omega_n)$$

$$C_{31} = - (C_2 \omega_A + C_3 \cdot \xi \cdot \omega_n)$$

O erro na velocidade será dado por:

$$E(t') = a(t' + \Delta t_o) - v_i(t')$$

- 2º Caso: Fase de limitação da corrente.

A velocidade do motor é dada por:

$$v_1 = \int_0^{t'} \frac{TAL(t') - R_0}{M} dt' + v_L$$

v_L = velocidade no início da fase de limitação da corrente.

$t' = t - \Delta t_w$.

Δt_w = tempo decorrido até o início desta fase.

A velocidade é dada por:

$$v_1(t') = \frac{k_{WL}}{M \times B_0} \cdot \left\{ t' - e^{-\xi_1 \omega_{n1} t'} (D_{11} \sin \omega_{A1} t' + D_{22} \cos \omega_{A1} t') / \omega_{n1}^2 - \frac{2\xi_1}{\omega_{n1}} + \left[\frac{TAL(0)}{\omega_{n1}} + TAL(0) \cdot \xi_1 \times \frac{B_0}{k_{WL}} \right] \right\} + v_L \quad (6.24)$$

Onde:

$$D_{11} = \omega_{A1} - \xi_1^2 \cdot \omega_{n1}^2 / \omega_{A1} + [-TAL(0) \cdot \omega_{A1} + TAL(0) \cdot \xi_1 \cdot \omega_{n1} / \omega_{A1}] \cdot (B_0) / k_{WL}$$

$$D_{22} = -2 \xi_1 \cdot \omega_{n1} + [TAL(0) + TAL(0) \cdot \xi_1 \cdot \omega_{n1}] \cdot (B_0) / k_{WL}$$

O erro na velocidade será dado por:

$$E(t') = a(t' + \Delta t_w) - v_1(t') \quad (6.25)$$

6.2.5 Aplicação a sistema com acionamento tipo A2

Na figura 30 estão representadas as curvas de evolução da força motora, velocidade de referência e velocidade real do sistema descrito abaixo.

Dado do sistema com acionamento tipo A2 (Figura 13 a-b)

$$v_1 = 160 \text{ m/min (2.67 m/s) (velocidade nominal)}$$

$$m_1 = 15.000 \text{ kg}$$

$$m_{c1} = 17.000 \text{ kg}$$

$$m_{c2} = 20.000 \text{ kg}$$

$$m_2 = m_{c1} + 1/4 m_{c2} = 22.000 \text{ kg}$$

$$M = m_1 + m_2 = 37000 \text{ kg}$$

$$a_0 = 0.667 \text{ m/s}^2 \text{ (aceleração de referência)}$$

$$R_0 = R_1 + 1/2 R_2 = 3.900 \text{ N} \quad V$$

$$m_3 = 39.400 \text{ kg (carga suspensa máxima)}$$

$$T_L = R_0 + (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a_0 = 54.859 \text{ N (força motora limite)}$$

Dados do motor:

Tipo: CC - Shunt - Totalmente fechado - com trocador ar-ar.

$$\text{Potência (P)} = 125 \text{ kw} - 1750 \text{ rpm} - 460 \text{ V}$$

$$I_N = 289 \text{ A (Corrente Nominal)}$$

$$\text{Rendimento } (\eta) = 94\%$$

$$U_A = 460 \text{ V (Tensão nominal na armadura)}$$

$$R_A = 0.042 \Omega \text{ (} k_D = 23.8 \Omega^{-1} \text{)}$$

$$L_A = 1.34 \times 10^{-3} \text{ H}$$

$$\tau_D = L_A / k_D = 0.032 \text{ s}$$

$$C_N = 863 \text{ N/m (conjugado nominal)}$$

$$T_N = C_N \cdot (2\pi \cdot n) / v \cdot \eta_s = 41.551 \text{ N}$$

$$\eta_s = 0.886 \text{ (Rendimento do sistema mecânico)}$$

$$k_M = T_N / I_N = 143.78 \text{ N/A}$$

$$k_E = U_N - R_A \cdot I_N / v_1 = 187.95 \text{ V.s / m}$$

Parâmetros do sistema de controle.

Condição de estabilidade:

de 6.3 temos:

$$k_1^2 \left(\frac{k_D \cdot M}{k_u \cdot k_M \cdot T_1} + k_D \right) + k_1 \left(\frac{M}{k_u \cdot k_M \cdot T_1} + \frac{k_D \cdot k_R}{k_u} + 1 - \frac{\zeta_D}{T_1} \right) + \frac{K_E}{k_u} > 0$$

Portanto para $T_1 > 0$ o sistema será sempre estável.

Adotou-se $T_1 = 0.035$ s

Parâmetros do sistema de controle para um erro de velocidade durante a fase de aceleração de aproximadamente 2%.

Da equação 6.4 temos:

$$E_{va} = a_0 \left[\frac{k_E \cdot t_1}{k_1 \cdot k_u} + \frac{M}{k_u \cdot k_N} \right] + \frac{R_0}{k_u \cdot k_M}$$

Da equação 6.6 em relação ao limite da corrente, temos:

$$E_I = \frac{I_w}{\left[1 + \frac{k_1 \cdot M}{k_M \cdot k_E \cdot T_1} \right]} \Rightarrow k_1 > [I_L/E_I - 1] \cdot \frac{k_M \cdot k_E \cdot T_1}{M}$$

Para $E_I < 0.01 I_L$ teremos $k_1 > 0.251$

Adotando $k_1 = 0.255 \Rightarrow k_u > 4010$

Parâmetros do sistema de controle:

$$k_u = 4500 \text{ A.s/m}$$

$$k_1 = 0.255 \text{ V/A}$$

$$T_1 = 0.035 \text{ s}$$

O erro em relação a velocidade nominal, de 6.5 será:

$$E_r = 6.027 \times 10^3 \text{ m/s } (0.225\%)$$

- 1ª Fase -. Não há movimento da Ponte.

Frequência natural.

$$\omega_1 = \sqrt{D_0}$$

$$D_0 = [k_1 \cdot k_D / (C_D \cdot T_1)] = 5418.75 \rightarrow \omega_1 = 73.6 \text{ rd/s}$$

$$\xi_1 = D_1 / 2\omega_1 \quad ; \quad D_1 = (1 + k_1 \cdot k_D) / C_D = 220.906$$

$$\xi_1 = 1.5 > 1$$

Portanto a equação 6.8 precisa ser reescrita e a resposta completa para a força motora será dada por:

$$T_A = \beta \cdot a_0 \cdot t + \alpha \cdot a_0 + e^{-\xi \cdot \omega_1 \cdot t} [A_1 e^{\lambda \cdot t} + B_1 e^{-\lambda \cdot t}]$$

Onde:

$$\lambda = \omega_1 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1} = 82.358$$

$$A_1 = \frac{-\beta \cdot a_0}{2 \cdot \lambda} - \frac{\alpha \cdot a_0}{2} \left[\frac{\xi \cdot \omega_1}{\lambda} + 1 \right]$$

$$B_1 = \frac{\beta \cdot a}{2\lambda} + \frac{\alpha \cdot a}{2} \left[\frac{\xi \cdot \omega_1}{\lambda} - 1 \right]$$

$$\beta = \frac{k_p}{D_0} = 646751.2; \quad \alpha = \beta (T_1 - D_1/D_0) = -14685.7$$

$$A_1 = -1913.4 \quad ; \quad B_1 = 2892.9$$

$$t = 0.0135 \text{ s} \quad \rightarrow \quad T_A \approx 3900 \text{ N} = R_0$$

$$\dot{T}_A = \beta \cdot a + e^{-\xi \cdot \omega_1 \cdot t} \left[A_{11} e^{\lambda t} + B_{11} e^{-\lambda t} \right]$$

$$A_{11} = A_1 [\lambda - \xi \omega_1] = 60939.36$$

$$B_{11} = -B_1 [\lambda + \xi \omega_1] = -492323.66$$

$$t = 0.0135 \text{ s} \quad \rightarrow \quad \dot{T}_A = 397647.6$$

$$\ddot{T}_A = e^{-\xi \cdot \omega_1 \cdot t} \left[A_{22} e^{\lambda t} + B_{22} e^{-\lambda t} \right]$$

$$A_{22} = A_{11} [\lambda - \xi \omega_1] = -1940841.67$$

$$B_{22} = -B_{11} [\lambda + \xi \omega_1] = -83785331.5$$

$$t = 0.0215 \text{ s} \quad \rightarrow \quad \ddot{T}_A = -9684034.56$$

Erro na velocidade nesta fase: $E_0 = a_0 \cdot t = 0.009 \text{ m/s}$

(0.337%).

- 2ª Fase - Ponte inicia movimento.

$$E.k_u = 40.5 A < I_L$$

Coefficientes da equação característica.

$$A_3 = 1$$

$$A_2 = 220.908$$

$$A_1 = 9220.6$$

$$A_0 = 94756.36$$

$$\lambda_1 = -15.891$$

$$\lambda_2 = -35.088$$

$$\lambda_3 = -170.002$$

Sendo λ_2 e λ_3 raízes reais negativas isto indica fator de amortecimento $\xi > 1$ e portanto a equação 6.15 precisa ser reescrita.

$$T_{A1}(t') = \frac{k_w}{A_0} + C_1. e^{\lambda_1 t'} + C_2. e^{\lambda_2 t'} + C_3. e^{\lambda_3 t'} \quad (6.26)$$

$$T_A = T_{A1}(t') + R_0 \quad (6.2.6.1)$$

Onde:

$$C_1 = [-(k_w)/(A_0) \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_2) + \overset{2}{T} A_0 (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) + \overset{1}{T} A_0 (\lambda_3 - \lambda_2)] / D = -23809.85$$

$$C_2 = [(k_w)/(A_0) \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_1) + \overset{2}{T} A_0 (\lambda_3^2 - \lambda_1^2) + \overset{1}{T} A_0 (\lambda_1 - \lambda_3)] / D = -775.1$$

$$C_3 = [-(k_w)/(A_0) \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) + \overset{2}{T} A_0 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + \overset{1}{T} A_0 (\lambda_2 - \lambda_1)] / D = -94.05$$

$$D = \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_3 - \lambda_2) - \lambda_1 \cdot \lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_1) + \lambda_1 \cdot \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1) = -399138.868$$

A velocidade do motor será dada por:

$$v_1(t') = \int_0^{t'} \frac{T_{A1}(t')}{M} \cdot dt + v_0$$

$$v_1(t') = a_0 \cdot t + \left[\frac{C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t'}}{\lambda_1} + \frac{C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t'}}{\lambda_2} + \frac{C_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot t'}}{\lambda_3} \right] - \left(\frac{C_1/\lambda_1 + C_2/\lambda_2 + C_3/\lambda_3}{M} \right) + v_0$$

Em regime permanente teremos:

$$v_1(t) = a_0 \cdot t' - (C_1/\lambda_1 + C_2/\lambda_2 + C_3/\lambda_3) / M + v_0$$

O erro na velocidade com $v_0 = 0$ será dado por:

$$E_{v_a} = - (C_1/\lambda_1 + C_2/\lambda_2 + C_3/\lambda_3) / M + E_0 = 0.05 \text{ m/s} \quad (1.9\%)$$

As curvas de evolução da força motora e velocidade são mostradas na Figura 30.

Durante a fase de velocidade constante com $v_w = v_n$ a equação 6.28 precisa ser reescrita para as condições iniciais:

$$T_{A1}(0) = M \cdot a_0 ; \dot{T}_{A1}(0) = 0 ; \ddot{T}_{A1}(0) = 0 ; k_w = 0$$

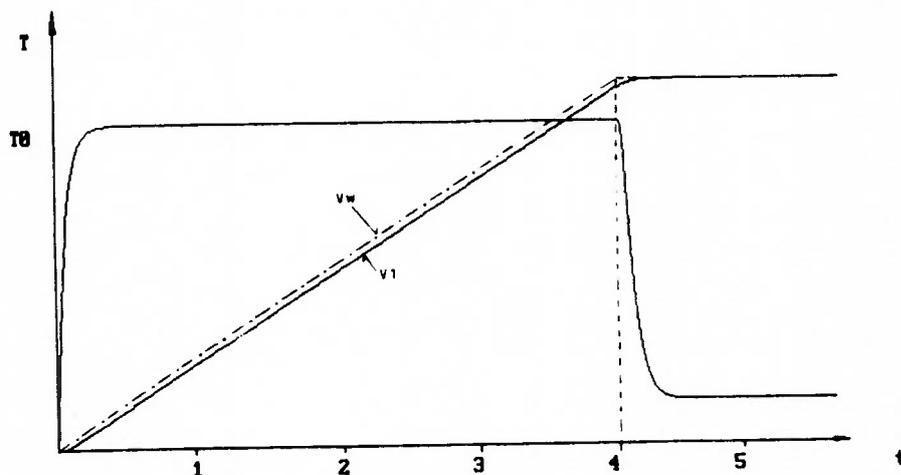


Figura 30 - Curva de evolução da força motora
 $k_u = 4500$, $k_1 = 0.255$, $T_1 = 0.035$

Para um erro no tempo de aceleração em torno de 5% teremos os seguintes parâmetros para o sistema de controle: $T_1 = 0.035$ s ; $k_1 = 0.255$ V/A e $k_u = 1650$ s.s/m

A curva de evolução da força motora é dada pelas equações 6.26 e 6.26.1, cujos parâmetros são:

$$\lambda_1 = - 5.947$$

$$\lambda_2 = - 31.914$$

$$\lambda_3 = - 183.12$$

$$C_1 = - 23574$$

$$C_2 = - 1155.26$$

$$C_3 = 50.26$$

$$R_0 = 3900$$
 N

$$k_w/A_0 = 24679$$
 N

$$E_0 = 0.019$$
 m/s e $E_{va} = 0.127$ m/s (4.76%)

A evolução da força motora é mostrada na Figura 31.

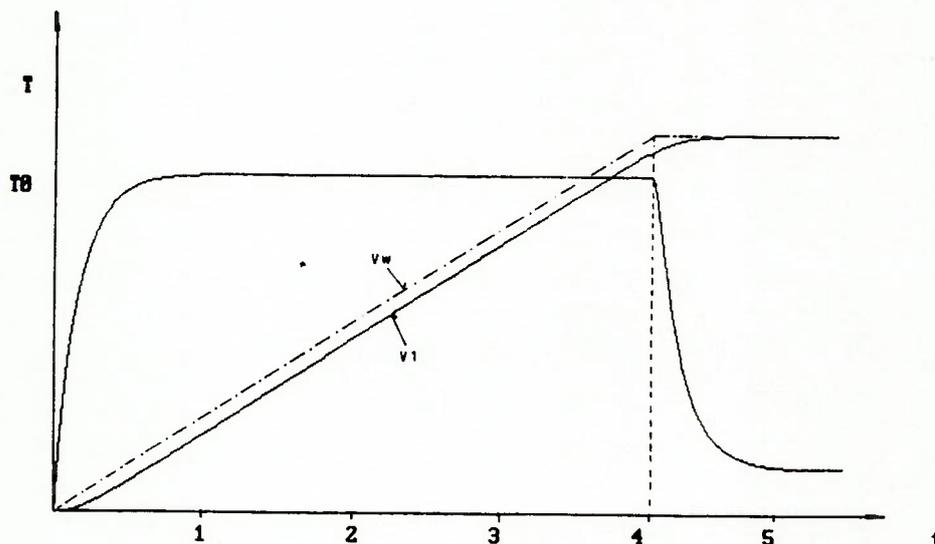


Figura 31 - Curva da evolução da força motora.

$$k_u = 1650 , k_1 = 0.255 \text{ e } T_1 = 0.035$$

6.2.6 Considerações sobre os sistemas controlados.

Uma observação da curva de evolução da força motora, (Figuras 30 e 31) durante a fase transitória do sistema de controle nos sugere para a mesma uma representação em rampa, como mostrado na Figura 32.

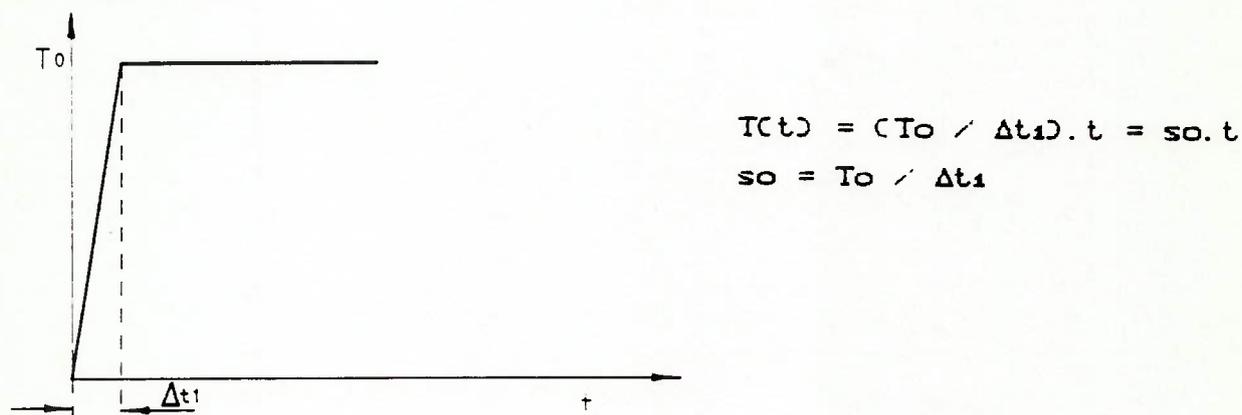


Figura 32 - Representação em rampa da evolução da força motora.

Na figura acima, " T_0 " corresponde ao torque de partida do motor e se refere à parcela permanente do torque gerado pelo sistema de controle e dado pela equação 6.26.1 de onde obtemos:

$$T_0 = kw / A_0 + R_0$$

Sendo $kw/A_0 = M \cdot a_0 \Rightarrow T_0 = M \cdot a_0 + R_0$

ou ainda $T_0 = (m_1 + m_2) \cdot a_0 + R_0$

Neste momento cabe uma observação importante na diferenciação entre o sistema controlado e o sistema aberto. A aplicação do torque da partida não é mais subta e seu valor será tão somente o adequado às necessidades reais de aceleração do sistema naquele instante. Isso significa que o sistema não gera torque excedente para acelerar massas que não são percebidas pelo motor no instante inicial. Entre estas massas se destaca a carga suspensa, que oscila em frequência muito mais baixa do que as massas da motorização e da ponte (ou carro).

O grau de dificuldade para a obtenção da resposta do sistema mecânico, em termos de esforço dinâmico máximo para uma excitação como a representada na Figura 32, será consideravelmente reduzido. A dificuldade maior para esta representação consiste na obtenção do tempo Δt_1 , dependente dos parâmetros do sistema de controle.

A determinação de Δt_1 pode ser bastante simplificada se atentarmos ao seguintes fatos:

- Desejamos aplicar no sistema uma aceleração constante e igual a "ao".
- Passada a fase transitória, a aceleração resulta constante e igual a "ao", fato que decorre da equação 6.26.1.
- Portanto o erro do sistema é gerado durante a fase transitória.

O erro durante a fase transitória com base na representação por rampa pode ser facilmente avaliado.

A velocidade do motor no instante Δt_1 deveria ser:

$$v_w = \int_0^{\Delta t_1} \frac{(T_o - R_o) \cdot dt}{M} = a_o \cdot \Delta t_1$$

A velocidade real será:

$$v_1 = \int_0^{\Delta t_1} \frac{T(t) \cdot dt}{M}$$

O erro portanto será:

$$E_{va} = a_0 \cdot \Delta t_1 - \int_0^{\Delta t_1} \frac{T(t) \cdot dt}{M}$$

$$E_{va} = a_0 \cdot \Delta t_1 - \frac{s_0 \cdot \Delta t_1^2}{2 \cdot M} = a_0 \cdot \Delta t_1 - \frac{(T_0 - R_0)}{2M} \cdot \Delta t_1 = \frac{a_0 \cdot \Delta t_1}{2}$$

$$\Delta t_1 = 2 E_{va} / a_0$$

Como $\Delta t_a = E_{va} / a_0$, corresponde ao erro em termos de tempo de aceleração teremos:

$$\Delta t_1 = 2 \cdot \Delta t_a$$

Comparando com os resultados obtidos nos casos exemplo de 6.2.5 temos:

1° Caso: Erro $\approx 2\%$

$$E_{va} = 0.0534 \text{ m/s}$$

$$a_0 = 0.667 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \Delta t_1 = 0.160 \text{ s}$$

$$T_0 = 28579 \text{ N} \rightarrow s_0 = 178600 \text{ N/s}$$

- 2° Caso: Erro $\approx 5\%$

$$E_{va} = 0.1335 \text{ m/s}$$

$$\Delta t_1 = 0.4 \text{ s}$$

$$T_0 = 28579 \text{ N} \rightarrow s_0 = 71400 \text{ N/s}$$

Na figura 33 estão representadas as curvas de evolução da força motora segundo a equação 6.26.1 e a evolução segundo a aproximação por rampa, para erros de 2 e 5% no tempo de aceleração.

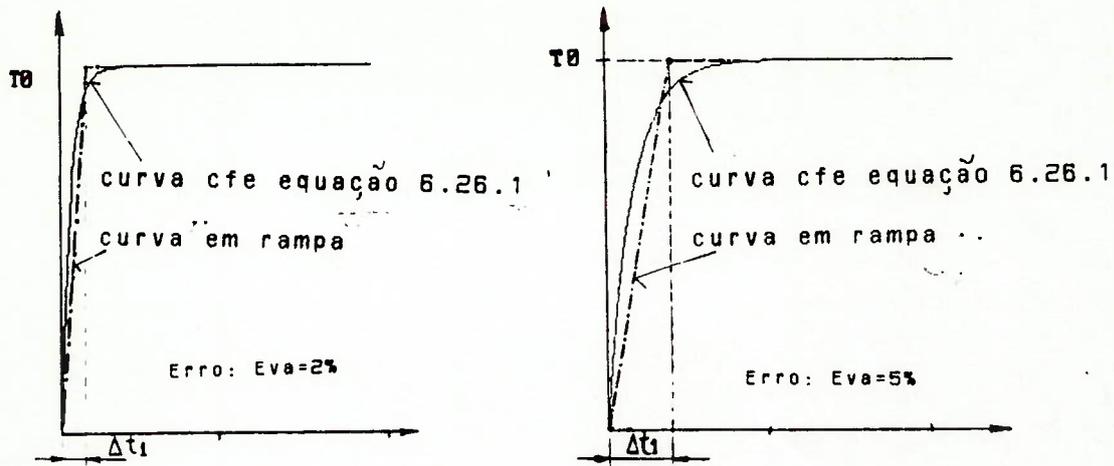


Figura 33 - Curvas de evolução da Força motora

Cabe ainda analisar a consistência da representação em rampa quanto a preservar o efeito dinâmico das folgas do sistema mecânico.

Estando a massa da motorização "m1" totalmente desvinculada do sistema mecânico, enquanto a folga não foi vencida o tempo para que a mesma atinja uma aceleração constante e igual a "ao" (aceleração de referência) é dado por:

$$\Delta t_w \approx 2 \cdot (Eva) / a_o$$

Onde, da equação 6.4 temos:

$$Eva = a_o \left[\frac{k_E \cdot T_1}{k_1 \cdot k_u} + \frac{m_1}{k_u \cdot k_M} \right]$$

Para um erro de 5% no tempo de aceleração, temos do 2º caso exemplo analisado em 6.2.5:

$$k_1 = 0.255 \quad , \quad T_1 = 0.035 \quad \text{e} \quad k_u = 1650$$

$$Eva = 0.0515 \text{ m/s} \quad , \quad \text{e portanto}$$

$$\Delta t_w = 0.154 \text{ s}$$

A curva de evolução da força motora durante a passagem do motor pela folga do sistema é dada por:

$$T = m_1 \cdot a = m_1 \cdot (a_0) / \Delta t_w \cdot t \quad \text{para } 0 \leq t \leq t_w$$

Sendo "fw" a folga linear equivalente do sistema mecânico, teremos a seguinte equação para a velocidade, no instante em que são vencidas as folgas do sistema:

$$v_w = \frac{a_0}{\Delta w} \cdot \frac{t_w^2}{2}$$

Onde:

$$t_w = \left[\frac{6 \cdot \Delta w \cdot f_w}{a_0} \right]^{1/3}$$

Para $f_w = 0.0015 \text{ m}$ teremos:

$$t_w = 0.128 \text{ s} \Rightarrow v_w = 0.0354 \text{ m/s} \quad (1.32\% v_N)$$

Vamos agora calcular o valor de v_w utilizando a representação em rampa já ajustada para um erro de 5%.

Lembrando que:

$$T_0 = (m_1 + m_2) \cdot a_0 + R_0 = 28579 \text{ N}$$

$$\Delta t_1 = (2 \cdot E_{v0}) / a_0 = 0.4 \text{ s}$$

$$t_w = \left[\frac{6 \cdot \Delta t_1 \cdot f_w}{T_0 / m_1} \right]^{1/3} = 0.124 \text{ s}$$

$$v_w = \frac{(T_0 / m_1)}{\Delta t_1} \cdot \frac{t_w^2}{2} = 0.0366 \text{ m/s} \quad (1.37\% v_N)$$

Portanto, há uma preservação satisfatória da velocidade relativa adquirida pelo motor, durante a passagem pelas folgas do sistema mecânico.

Do ponto de vista prático da engenharia de projeto do sistema mecânico, esta representação é bastante vantajosa pois não requer o equacionamento do problema de controle.

Quanto ao valor de " Δt_1 ", o mesmo estará condicionado ao erro usualmente aceito para o tempo de aceleração e frenagem nas M.E.T. Valores baixos de erro podem fazer com que o sistema de controle opere na faixa de instabilidade, bem como produzir impacto maior sobre o sistema mecânico. Um erro de da ordem de 5% no tempo de aceleração, pode ser considerado razoável para aplicações em que não existam compromissos operacionais muito restritivos, mesmo porque o erro em relação a velocidade nominal desejada se mantém pequeno.

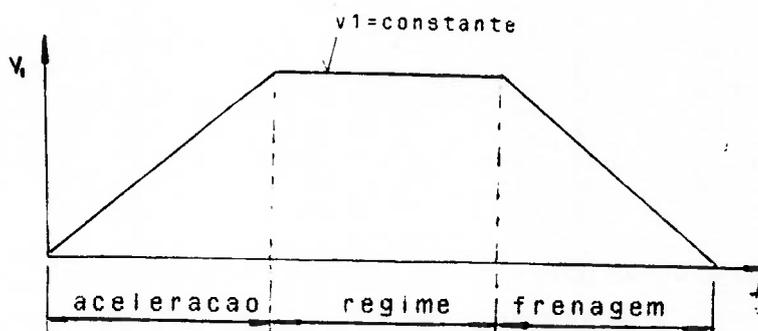
7. Respostas do sistema mecânico

7.1 Introdução

As equações desenvolvidas neste capítulo pretendem representar formas objetivas de se obter a sollicitação dinâmica máxima nos mecanismos, para sistemas acionados por motores de C.A. em malha aberta ou por motores de C.C. realimentados.

Serão consideradas as M.E.T.s que possam ser representadas por um modelo de três massas como o construído no capítulo 5.

Os esforços máximos serão analisados durante uma manobra normal que inclui as fases de aceleração, passando por uma fase de velocidade constante e frenagem, conforme o diagrama de velocidade típico mostrado abaixo.



7.2 Sistemas acionados por motores C.A. em malha aberta

7.2.1 Fase de Aceleração

A excitação durante a fase de aceleração, proveniente da curva de torque do motor, será representada em cada etapa de comutação pela expressão desenvolvida em 6.1.2.2 e dada por:

$$T(t) = Tu^i(t) \cdot T_N \quad (ND)$$

Onde:

$$Tui(t) = (Tu_o^i - Ru) e^{-Bi \cdot t} + Ru \quad (7.1)$$

T_N = Força motora correspondente ao conjugado nominal do motor (ND).

O tempo de operação em cada curva será dado por:

$$\Delta t_i = \frac{-1}{Bi} \cdot vs \cdot \ln \left[1 - \frac{Cvi \cdot \Delta vu^i}{Tu_o^i - Ru} \right] \quad (7.2)$$

onde $\Delta vu^i = vu_i - vu_i - 1$

Quando se submete o sistema a um degrau de solicitação, o tempo para a formação da resposta máxima não excede meio período natural do sistema mecânico, como visto em 5.4.2.1. Considerando-se que o modo de alta frequência, que corresponde às vibrações entre motor e ponte, praticamente responde por todo o esforço dinâmico máximo, isto se dará em tempo bastante reduzido.

Trazendo estas observações ao nosso caso, ou seja, à excitação dada pela expressão 7.1, o decréscimo na força motora no período de formação da resposta máxima será pequeno, e portanto $Tui(t) \approx Tu_o^i$.

Concluimos portanto que, quando se tem como objetivo a determinação da resposta dinâmica máxima, a força motora em cada comutação de curva pode ser representada por uma função degrau.

O amortecimento, tanto estrutural como o próprio do sistema elétrico, apesar de não ser significativo em termos de redução do esforço máximo, será preservado.

O fator de amortecimento modal em cada estágio das curvas será dado:

$$\xi_J^L = \frac{\phi_{J1}^2 \times C_{v1}}{2 \cdot \omega_J} + \xi_{sJ} \quad (7.3)$$

Onde ξ_{sJ} corresponde ao amortecimento estrutural do sistema mecânico no modo J. A outra parcela corresponde ao amortecimento produzido pelo sistema elétrico, cujo equacionamento foi feito em 6.1.

Utilizando-se os resultados obtidos no capítulo 5, temos para o esforço dinâmico máximo no 1º estágio:

$$S_R = S_{R1}(q_2) + S_{R2}(q_3) + R_0 \quad (7.4)$$

Como observado em 5.4.2.2 a participação do 2º modo (oscilação da carga suspensa) é muito pequena na resposta máxima, portanto:

$$S_{Rmax} \approx S_{R2}(q_3) + R_0$$

$$S_{R2}(q_3) = m_1 \cdot w_1 \cdot \omega_3^2 \cdot q_3 \max$$

No ponto do máximo de 5.4.2.1 temos:

$$S_{R2max} = F_0 \cdot \beta_1 + \beta_2 \cdot v_0 \quad (7.5)$$

Onde:

$$F_0 = [T_{u0} - R_{u0}], \quad T_N = T_0 - R_0$$

$$v_w = \left[2 \frac{T_o \cdot f_w}{m_1} \right]^{1/2} \quad (7.6)$$

$$v_o = \left[\frac{R_o}{k_1 \cdot m_1} \cdot (2 T_o - R_o) + v_w^2 \right]^{1/2} \quad (7.7)$$

$$\beta_1 = m_1 \cdot \omega_1^2 \left[(1 - e^{-\xi_3 \cdot \omega_3 \cdot t_r}) \left(\frac{\xi_3}{\sqrt{1 - \xi_3^2}} \cdot \text{sen} \theta_3 + \text{cos} \theta_3 \right) \right] \quad (7.8)$$

$$\beta_2 = \frac{\omega_1^2 \cdot m_1^2 \cdot \omega_2^2 \cdot e^{-\xi_3 \cdot \omega_3 \cdot t_r}}{\omega_3} \cdot \text{sen} \theta_3 \quad (7.9)$$

A equação do esforço máximo no 1º estágio, com base no tratamento tradicional seria expressa por:

$$S_R = R_o + F_o \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

O esforço dinâmico máximo pode ser visto como uma amplificação do efeito da força aceleradora do conjunto "Fo" e da resistência ao movimento "Ro".

Uma forma de tornar isto mais visível é rescrever a equação do esforço máximo da seguinte forma:

$$S_R = \psi_1 \cdot R_o + \psi_2 (T_o - R_o) \cdot m_1 \cdot \omega_1^2 \quad (7.10)$$

Onde:

$$\psi_1 = \left[1 + \frac{m_1^2 \cdot w_1^2 \cdot \omega_3}{\sqrt{1-\xi_3^2}} \cdot \frac{v_0}{R_0} e^{-\xi_3 \cdot \omega_3 \cdot tr} \cdot \text{sen}\theta_3 \right] \quad (7.11)$$

$$\psi_2 = \left[1 - e^{-\xi_3 \cdot \omega_3 \cdot tr} \left(\frac{\xi_3}{\sqrt{1-\xi_3^2}} \cdot \text{sen}\theta_3 + \text{cos}\theta_3 \right) \right] \quad (7.12)$$

$$\theta_3 = \text{ARC tg} \left[- \frac{m_1 \cdot v_0 \cdot \omega_3}{F_0} \right] > 0 \quad (7.13)$$

Os parâmetros "w₁" e "ω₃" envolvidos na expressão do esforço máximo também sofrem pouca influência da oscilação da carga.

Da expressão 5.3, negligenciando-se o efeito da carga suspensa, teremos:

$$\lambda_3 = k_1 \cdot \left(\frac{m_1+m_2}{m_1 \cdot m_2} \right) \Rightarrow \omega_3 = \sqrt{k_1 \left(\frac{m_1+m_2}{m_1 \cdot m_2} \right)} \quad (7.13.1)$$

de 5.4 temos:

$$w_1^2 = \left[m_1 + \left(1 - \frac{\lambda_3 \cdot m_1}{k_1} \right)^2 m_2 \right]^{-1}$$

Substituindo λ₃ pelo seu valor acima, teremos:

$$w_1^2 = \left[m_1 + \frac{m_1^2}{m_2} \right]^{-1} = \frac{m_2}{m_1 \cdot m_2 + m_1^2} \quad (7.13.2)$$

Portanto $m_1 \cdot w_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$

A expressão 7.10 resulta, portanto, em:

$$S_R = \psi_1 \cdot R_0 + \psi_2 (T_0 - R_0) \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (7.14)$$

O efeito das folgas do sistema mecânico não aparece explicitamente na expressão acima, estando embutido na expressão de ψ_1 , através de sua contribuição para o incremento do valor de v_0 .

A elasticidade do sistema mecânico influencia apenas o coeficiente ψ_1 sendo neutra em relação a ψ_2 .

Os acionamentos mais rígidos são mais sensíveis aos efeitos das folgas no acionamento, como pode ser visto pela expressão de ψ_1 , através do termo relativo à frequência ω_s .

- 2º e 3º Estágio

Sejam s_0 e Δv_0 respectivamente, o esforço dinâmico no acionamento e a diferença de velocidade entre motor e ponte durante a comutação de curva.

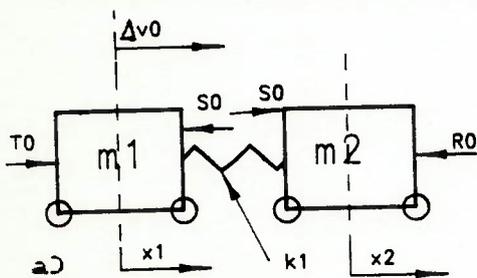
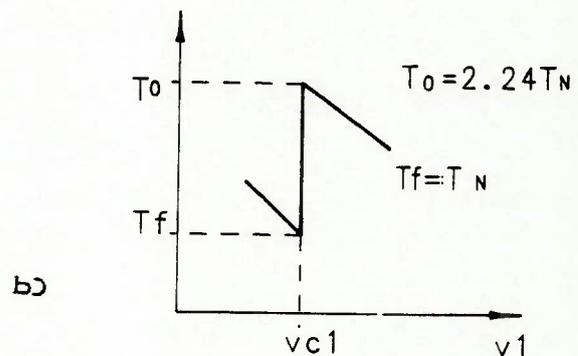


Figura 34



Escolhendo-se um referencial móvel cuja origem translada a velocidade constante, igual à velocidade inicial da massa m_2 , teremos as seguintes forças de excitação e condições iniciais para o modelo do sistema, representado na figura 34.

Forças de excitação com a mola de constante k_1 defletida pela força S_0 .

$$F_1 = T_0 - S_0 \quad : \quad \text{sobre a massa } m_1.$$

$$F_2 = S_0 - R_0 \quad : \quad \text{sobre a massa } m_2.$$

Condição inicial de velocidade:

$$v_1 = \Delta v_0 \quad \text{e} \quad v_2 = 0$$

Admitindo-se que, imediatamente antes do início desta fase a parcela transitória da vibração de alta frequência, entre motor e ponte, tenha sido amortecida, teremos apenas o movimento de corpo rígido e portanto:

$$S_0 = R_0 + (T_f - R_0) \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{e} \quad \Delta v_0 = 0$$

Neste caso a excitação externa pode ser representada por uma única força atuando sobre a massa m_1 e dada por: $F_1 = T_0 - T_f$ e portanto, de forma similar à primeira fase, teremos:

$$S_{rmax} = R_0 + \left[(T_f - R_0) + [T_0 - T_f] \cdot \psi \right] \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (7.15)$$

$$\text{Com} \quad \psi = \left[1 + e^{(-\xi \cdot \pi / \sqrt{1 - \xi^2})} \right]$$

Onde ξ é dado pela expressão 7.3

- 4º Estágio

O último estágio nas curvas de aceleração do motor corresponde ao retorno a sua curva original de torque. Esta fase requer um tratamento diferenciado pois a força motora decresce muito rapidamente, não devendo produzir esforços dinâmicos comparáveis aos estágios anteriores.

7.2.2 Fase de frenagem

A excitação proveniente do motor durante esta fase será representada pela expressão desenvolvida em 7.1.2.3 e dada por:

$$F(t) = F_u(t) \cdot T_N$$

Onde:

$$F_u(t) = - (F_{u0} + R_u) e^{-B_f \cdot t} + R_u$$

O modelo do sistema é representado na figura 35.

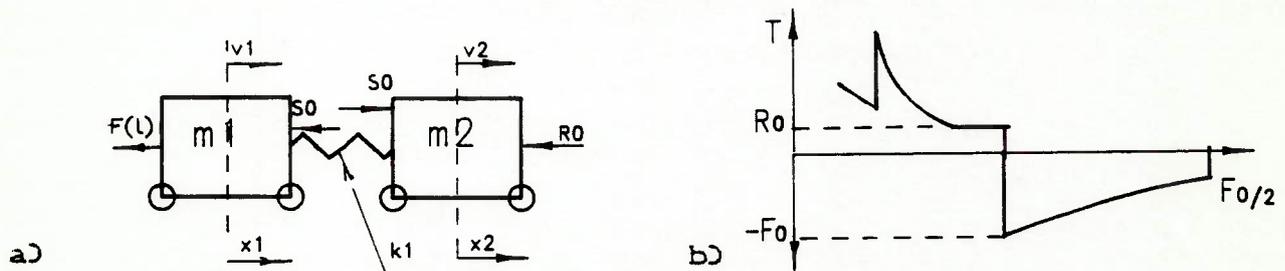


Figura 35 -

Admitindo-se que a frenagem ocorra após um período de translação a velocidade constante, suficiente longo para que as vibrações entre motor e ponte sejam amortecidas, teremos:

$$S_0 = R_0 \quad e \quad v_1 = v_2$$

Escolhendo-se um referencial conveniente, cuja origem translada a velocidade constante e igual à velocidade inicial da massa m_2 , teremos para o modelo do sistema representado na figura 36:

Forças de excitação com a mola de constante k_1 defletida pela força R_0 :

$$F_1(t) = F(t) - R_0 \quad e \quad F_2(t) = 0$$

Condições iniciais:

$$v_1 = v_2 = 0 \quad \text{e} \quad x_1 = x_2 = 0$$

O sistema será então representado pelo modelo com folga da figura 36.

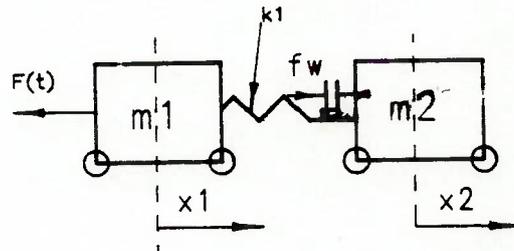


Figura 36 -

A força desaceleradora, para efeito de determinação do esforço máximo, será representada por um degrau correspondente ao valor máximo de $F(t)$, ou seja $F(t) = -F_0$, portanto:

$$F_1(t) = - (F_0 + R_0)$$

Durante a passagem da folga, a massa m_1 terá adquirido a velocidade relativa v_w dada pela expressão 7.6:

$$v_w = - \left[\frac{2 \cdot F_1 \cdot f_w}{m_1} \right]^{1/2} \quad (7.16)$$

O sistema sem folga terá submetido às seguintes condições de força e velocidade inicial.

$$F_1(t) = - (F_0 + R_0)$$

$$F_2(t) = 0$$

$$v_0 = v_w$$

A resposta máxima, considerando-se apenas o 3º modo será dada pela expressão 7.4.

$$S_{Rmax} = S_R (q_3) + R_0$$

$$S_R (q_3) = F_1 \cdot \beta_1 + v_0 \cdot \beta_2$$

Onde β_1 e β_2 são dados respectivamente pelas expressões 7.8 e 7.9.

A resposta pode ser expressa de forma mais conveniente por:

$$S_R = - F_0 \cdot \psi(\theta) \cdot \frac{m_2}{m_1+m_2} - R_0 \left[\frac{\psi(\theta) \cdot m_2}{m_1+m_2} - 1 \right] - S_w (v_0, \theta) \quad (7.17)$$

Onde $\psi(\theta)$ é dado pela expressão 7.12 e

$$S_w = \frac{m_2 \cdot m_1 \cdot \omega^2}{(m_1+m_2) \cdot \sqrt{1-\xi^2}} \cdot v_w \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \text{sen} \theta \quad (7.18)$$

Sendo:

$$\theta = \text{ARC tg} \left[- (m_1 \cdot v_w \cdot \omega) / (F_0 + R_0) \right]$$

A parcela S_w corresponde ao efeito dinâmico das folgas do sistema mecânico.

7.2.3 Aplicação

Vamos aplicar as equações desenvolvidas à ponte rolante cujo modelo de três massa foi analisado no item 5.5.3.1.2.3.

Dados dos motores.

$p = 2$: número dos motores.

$P_N = 33 \text{ Cv}$: Potência nominal.

$n_m = 1170 \text{ rpm}$: Rotação nominal.

$T_N = C_N \cdot [(2 \cdot \omega) / D_R] \cdot \eta_r \cdot p$: Força motora correspondente ao conjunto nominal do motor.

$C_N = (7026 \cdot P_N) / 1170 = 198.15 \text{ N.m}$

$\eta_r = 0.9$: Rendimento do sistema mecânico.

$(\omega) / D_R = (35.085) / 0.63 = 55.69$: Relação entre a redução desde o motor até à roda e o diâmetro da roda.

$T_N = 40168 \text{ N}$

$R_o = 9236 \text{ N}$ ($0.23 T_N$)

$T_o = 1.5 \cdot T_N = 60252 \text{ N}$

- Esforço dinâmico no 1º estágio de aceleração.

Da equação 7.14:

$$S_R = \psi_1 \cdot R_o + \psi_2 \cdot [T_o - R_o] \times \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\psi_1 = \left[1 + \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{\omega_3}{\sqrt{1 - \xi_3^2}} \cdot \frac{v_o}{R_o} e^{-\xi_3 \cdot \omega_3 \cdot t_r} \cdot \text{sen } \theta_3 \right]$$

$$\psi_2 = \left[1 - e^{-\xi_3 \cdot \omega_3 \cdot t_r} \left(\frac{\xi_3}{\sqrt{1 - \xi_3^2}} \text{sen } \theta_3 + \cos \theta_3 \right) \right]$$

$$\theta_3 = \text{ARC tg} \left[\frac{-m_1 \cdot v_o \cdot \omega_3}{F_o} \right]$$

$$v_o = \left[\frac{R_o}{k_s \cdot m_1} \cdot (2 \cdot T_o - R_o) + v_w^2 \right]^{1/2}$$

$$v_w = \left[\frac{2 \cdot T_o \cdot f_w}{m_1} \right]^{1/2} = 0.079 \text{ m/s}$$

$$v_0 = 0.111 \text{ m/s}$$

$$F_0 = T_0 - R_0 = 51016 \text{ N}$$

$$\omega_3 = 15.03 \text{ rad/s}$$

$$\theta_3 = 2.383 \text{ rad} \quad (t_{tr} = 0.1585 \text{ s})$$

$$\xi_3 = (C_v \cdot \omega_1^2) / (2 \cdot \omega_3 + \xi_s)$$

$$C_v = (T_0) / v_s$$

$$v_s = (v_n) / 60 = (1200) / 1170 = 1.128 \text{ m/s} : \text{ Velocidade síncrona.}$$

$$C_v = 53415 \text{ N} \cdot \text{s/m}$$

$$\omega_1^2 = m_2 / m_1(m_1 + m_2) = 2.79 \times 10^{-5}$$

$$\xi_s = 0.02 : \text{ Amortecimento estrutural.}$$

$$\xi_3 = 0.069 \Rightarrow \omega_{33} = \omega_3 \sqrt{1 - \xi_3^2} = 14.994 \text{ rad/s}$$

$$\psi_1 = 2.475$$

$$\psi_2 = 1.575$$

$$S_R = 103226 \text{ N} \quad (2.57 \cdot T_N)$$

- 2° e 3° Estágio

Da equação 7.15:

$$S_{Rmax} = R_0 + [(T_f - R_0) + (T_0 - T_f) \cdot \psi] \cdot m_2 / (m_1 + m_2)$$

$$T_0 = 2.24 \cdot T_N = 89976.3 \text{ N}$$

$$T_f = T_N$$

$$\psi = [1 + e^{(-\xi \cdot \pi / \sqrt{1 - \xi^2})}]$$

$$\xi = (C_v \cdot \omega_1^2) / (2 \cdot \omega_3 + \xi_s)$$

$$C_v = (T_0) / (0.888 v_s) = 119789 \text{ N} \cdot \text{m/s}$$

$$\xi = 0.13$$

$$\psi = 1.667$$

$$S_{Rmax} = 2.525 \cdot T_N$$

- Esforço dinâmico - frenagem.

Da equação 7.17 temos:

$$S_R = R_0 - (F_0 + R_0) \cdot \psi(\theta) \cdot m_2 / (m_1 + m_2) + s_w(v_w, \theta)$$

$$\psi(\theta) = \left[1 - e^{-\xi_3 \cdot \omega_3 \cdot tr} \cdot \left(\frac{\xi_3}{\sqrt{1-\xi_3^2}} \sin \theta_3 + \cos \theta_3 \right) \right]$$

$$\theta = \text{ARC tg} \left[\frac{m_1 \cdot v_N \cdot \omega_3}{(F_0 + R_0)} \right]$$

$$v_w = - \left[\frac{-2 \cdot F_1 \cdot f_w}{m_1} \right]^{1/2}$$

$$F_1 = - (F_0 + R_0)$$

$$F_0 = \frac{(1.5 T_N - 2 \cdot R_0)}{0.75}$$

O valor de F_0 foi escolhido de forma a manter a desaceleração média próxima da aceleração média.

$$F_0 = 55706.6 \text{ N} \rightarrow F_1 = - 64942.6 \text{ N}$$

$$v_w = - 0.082 \text{ m/s}$$

$$\theta = 2.638 \text{ rad} \rightarrow tr = 0.175 \text{ s}$$

$$\xi_3 = (C_v \cdot \omega_1^2) / 2 \cdot \omega_3 + \xi_s$$

$$C_v = (0.25 \cdot F_0) / v_s = 12346.32 \text{ N} \cdot \text{s/m}$$

$$\xi_3 = 0.0315 \rightarrow \omega_A \approx \omega_N$$

$$\psi(\theta) = 1.792$$

$$S_w = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot \omega_3}{(m_1 + m_2) \sqrt{1-\xi_3^2}} \cdot v_w e^{-\xi \cdot \theta} \cdot \sin \theta_3$$

$$S_R = - 97744 \text{ N} (- 2.43 T_N)$$

7.3 Sistemas acionados por motor C.C. realimentados

7.3.1 Equação dos esforços dinâmicos

A força de excitação, durante a partida do motor, será representada no tempo por uma entrada em rampa, seguida de uma fase de força constante, como mostrado na figura abaixo:

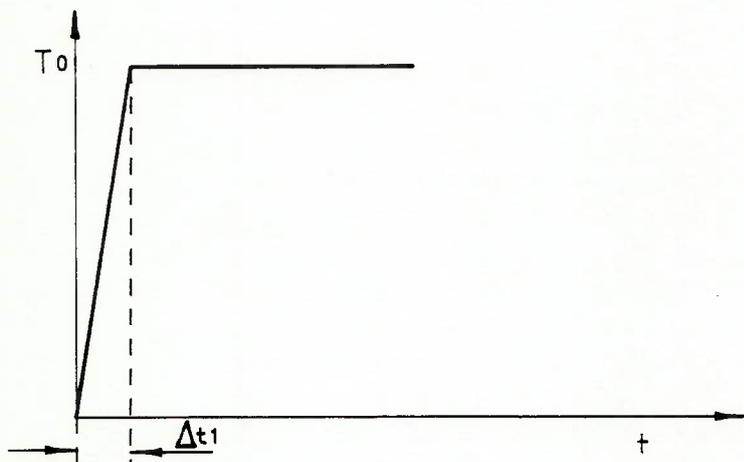


Figura 37 -

Os seguintes parâmetros são necessários para construção da curva:

$T_0 = (m_1 + m_2) \cdot a_0 + R_0$ (ND): torque de partida.

R_0 = (ND) : resistência ao movimento.

$\Delta t_1 = 2 E_a / a_0$ (s) : tempo para formação do torque de partida.

$E_a = E_{va} / a_0 = \Delta t_a$ (s) : Erro aceitável para o tempo de aceleração.

$s_0 = T_0 / \Delta t_1$

Representação paramétrica da curva:

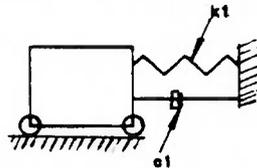
para $t \leq \Delta t_1$:

$$T = \text{so. } t$$

para $t > \Delta t_1$:

$$T = T_0$$

Condições iniciais para o movimento livre do sistema:
Durante a fase de vinculação da massa da ponte temos um problema de um grau de liberdade segundo o modelo abaixo:



A equação diferencial que rege o movimento da massa m_1 nesta fase é dada por:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + c_1 \cdot \dot{x}_1 + k_1 \cdot x_1 = T(t) \quad \text{ou}$$

$$\ddot{x}_1 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \dot{x}_1 + \omega_n^2 \cdot x_1 = T(t) / m_1$$

onde $\xi = \frac{c_1}{2 \cdot m_1 \cdot \omega_n}$ e $\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$

Com as condições iniciais:

$$x_{10} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{x}_{10} = v_w$$

De 7.2.6 temos: $v_w = T_0 \cdot t_w^2 / (m_1 \cdot \Delta t_1 \cdot 2)$

Ao se iniciar esta fase a força motora já atingiu o valor T_w , correspondente a sua elevação durante o tempo requerido para passagem do motor pelas folgas do sistema mecânico.

Onde:

$$T_w = s_0 \cdot t_w \text{ (ND)}$$

$$e \quad t_w = \left[\frac{B \cdot \Delta t_1 \cdot f_w \cdot m_1}{T_0} \right]^{1/3}$$

Portanto a força motora $T(t)$ na fase de vinculação da massa da ponte será dada por:

$$T(t') = T_w + s_0 \cdot t'$$

Uma solução particular para a equação diferencial do movimento nesta fase é dada por:

$$X_{1p} = \left[\frac{T_w}{k_1} + \frac{s_0 \cdot t'}{k_1} - \frac{T_s}{k_1} \right] \quad \text{onde} \quad T_s = \frac{2 \cdot \xi \cdot s_0}{\omega_n}$$

A resposta completa será dada por:

$$X_1(t') = \frac{T_w - T_s}{k_1} \left[1 - e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t'} \left(\cos \omega_A t' + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_A t' \right) \right] + \frac{s_0}{k_1} \left[t' + \frac{e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t'}}{\omega_A} \cdot \sin \omega_A t' \right] + \frac{v_w}{\omega_A} \cdot e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t'} \quad (7.19)$$

A equação 7.19 rege o movimento da massa m_1 para:

$$x_1 < R_0/k_1$$

- Fase de movimento livre do sistema.

Ao se iniciar esta fase a mola da constante k_1 já está defletida de $o = R_0/k_1$ e a massa da motorização adquiriu a

velocidade v_0 . Denominaremos t_r o tempo real decorrido até o início desta fase.

A resposta em termos de esforço dinâmico máximo é resultado da contribuição do 3º modo, que corresponde as vibrações entre a motorização e a ponte, como visto no capítulo 5.

$$S_R = S_R(q_3) + R_0 \quad (7.20)$$

Da equação 5.17 temos:

$$S_R(q_3) = m_1 \cdot w_1 \cdot \lambda_3 \cdot q_{\max} \quad \text{onde} \quad \lambda_3 = \omega_n^2 \quad (7.21)$$

A equação diferencial do 3º modo é dada por:

$$\ddot{q} + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \dot{q} + \omega_n^2 \cdot q = Q(t)$$

Onde $Q(t) = w_1 \cdot T(t)$

A força motora na fase de movimento livre do sistema se torna:

$$T(t) = T_R + s_0 \cdot t' - R_0$$

Onde "T_R" corresponde ao valor da força motora no instante em que se encerra a fase de vinculação da massa da ponte.

A resposta completa, valendo-se da similaridade com a equação da fase anterior, resulta:

$$q(t') = w_1 \cdot \left(\frac{T_R - R_0 - T_s}{\omega_n^2} \right) \cdot \left[1 - e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t'} \left(\cos \omega_A \cdot t' + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \text{sen } \omega_A t' \right) \right] \\ + \frac{s_0}{\omega_n^2} \left(t' - \frac{e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t'}}{\omega_A} \cdot \text{sen } \omega_A \cdot t' \right) + \frac{\dot{q}_0}{\omega_A} \cdot e^{-\xi \omega_n t'} \cdot \text{sen } \omega_A \cdot t' \quad (7.22)$$

Onde $\dot{q}_0 = w_1 \cdot m_1 \cdot v_0$

Para fator de amortecimento ξ baixo, o valor de T_s e o termo $\xi / \sqrt{1-\xi^2} \cdot \sin \omega_A \cdot t$ resultam muito pequenos e a equação de $q(t')$ pode ser expressa de forma mais conveniente por:

$$q(t') = w_1 \left\{ \frac{T_R - R_0 + s_0 \cdot t'}{\omega_n^2} - e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t} \left[\frac{T_R - R_0}{\omega_n^2} \cdot \cos \omega_A \cdot t' + \left(\frac{s_0}{\omega_n^2 \cdot \omega_A} - \frac{m_1 \cdot v_0}{\omega_A} \right) \sin \omega_A \cdot t' \right] \right\} \quad (7.23)$$

Seja S_{ro} a força elástica entre as massas m_1 e m_2 e Δv_0 a velocidade relativa entre ambas para $t = \Delta t_1$ ou seja ao final da fase de excitação em rampa.

Das expressões 7.20 7.21 e 7.22 teremos:

$$S_{ro} = \delta^1 \cdot \left[s_0 \cdot (\Delta t_1 - t_r - t_w(\Delta t_1)) + (s_0 \cdot t_r - R_0) \cdot \psi_1(\Delta t_1) \right] + S_w(\Delta t_1) + R_0 \quad (7.24)$$

$$\text{Com: } \delta^1 = m_1 \cdot w_1^2 = m_2 / (m_1 + m_2)$$

$$t_w(\Delta t_1) = \frac{e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot (\Delta t_1 - t_r)}}{\omega_A} \cdot \sin \omega_A \cdot (\Delta t_1 - t_r)$$

$$\psi_1(\Delta t_1) = 1 - e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot (\Delta t_1 - t_r)} \cdot \cos \omega_A \cdot (\Delta t_1 - t_r)$$

$$S_w = \delta^1 \cdot \frac{m_1 \cdot v_0 \cdot \omega_n^2}{\omega_A} \cdot e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot (\Delta t_1 - t_r)} \cdot \sin \omega_A \cdot (\Delta t_1 - t_r)$$

$$\Delta v_0 = \dot{X}_1 - \dot{X}_2$$

Relembrando a expressão 5.12 e considerando-se apenas o 1° e 3° modos de vibrar teremos:

$$\Delta v_0 = (w_1 - w_2) \cdot \dot{q}(t') = \frac{m_1 \cdot w_1 \cdot \omega n^2}{k_1} \cdot \dot{q}(\Delta t_1 - t_r) \quad (7.25)$$

De 7.13.2 temos: $w_1 = \left[\frac{m_2}{m \cdot m_2 + m_1^2} \right]^{1/2}$

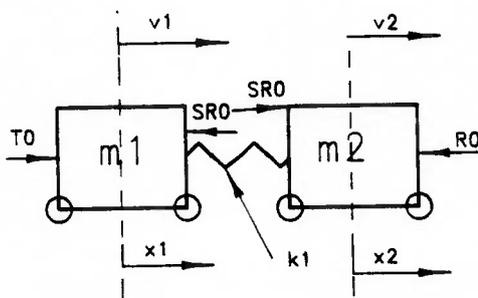


Figura 38 -

Escolhendo-se um sistema de referência conveniente, transladando a velocidade constante e igual à massa m_2 , teremos em relação ao mesmo (ver Figura 38).

Forças da excitação:

$$F_1(t') = T_0 - S_{10}$$

$$F_2(t') = S_{20} - R_0$$

Condições iniciais:

$$\dot{X}_{10} = \Delta v_0$$

$$X_{10} = 0$$

O esforço dinâmico máximo de forma análoga à fase anterior será dado por:

$$\begin{aligned} S_R &= S_R(q_3) + S_{R0} \\ S_R(q_3) &= m_1 \cdot w_1 \cdot \omega_n^2 \cdot q_{3\max} \end{aligned}$$

A força generalizada $Q_3(t)$ nesta fase passa a ser:

$$\begin{aligned} Q_3(t) &= w_1 \cdot F_1(t) + w_2 \cdot F_2(t) = w_1 (T_0 - S_{R0}) + w_2 \cdot (S_{R0} - R_0) \text{ e} \\ \dot{q}_0 &= m_1 \cdot w_1 \cdot \Delta v_0 \end{aligned}$$

Fazendo: $Q_0 = w_1 (T_0 - S_{R0}) + w_2 (S_{R0} - R_0)$ resulta para $q(t')$:

$$\begin{aligned} q(t') &= \frac{Q_0}{\omega_n^2} \left[1 - e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t'} \cdot \left[\cos \omega_A \cdot t' + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin \omega_A t' \right] \right] + \\ &+ \frac{w_1 \cdot m_1 \cdot \Delta v_0}{\omega_A} \cdot e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t'} \cdot \sin \omega_A \cdot t' \end{aligned} \quad (7.26)$$

O máximo de $q(t')$, para um fator de amortecimento (ξ) baixo, ocorre quando $\text{tg } \omega_A t' = (\Delta v_0 \cdot w_1 \cdot m_1 \cdot \omega_n) / Q_0$, conforme demonstrado em 5.4.2.1.

A componente w_2 do vetor modal correspondente a massa m_2 , utilizando-se as equações desenvolvidas no item 5.1.3 e sem levar em conta a carga suspensa é expressa por:

$$w_2 = w_1 \cdot (1 - \omega_n^2 \cdot m_1 / k_1) = - w_1 \cdot m_1 / m_2$$

Observação:

A frenagem nos sistemas controlados também é feita através do próprio motor. Escolhendo-se um tempo de frenagem idêntico ao de aceleração, de forma similar ao que acontece com os sistemas não controlados, devemos ter a manutenção das solicitações dinâmicas nos mesmos níveis dos obtidos durante a partida.

7.3.2 Aplicação

a. Determinação do esforço dinâmico

Vamos determinar os esforços dinâmico para o caso exemplo do item 6.2.5.

Além dos dados ali mencionados necessitam-os ainda dos seguintes dados característicos do sistema:

$k_1 = 5.73 \times 10^6$ N : constante elástica do acionamento.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m_1 (1+m_1/m_2)}} = 25.346 \text{ rd/s} : \text{Frequência natural.}$$

$\xi = 0.02$: Fator de amortecimento estrutural.

$f_w = 0.0015$ m : Folga do sistema mecânico.

Será considerado um erro de 5% no tempo de aceleração.

$$E_a = 0.05 \times v_w / a_o = 0.2 \text{ s}$$

$$\Delta t_1 = 2 \cdot E_a = 0.4 \text{ s}$$

$$T_o = (m_1+m_2) \cdot a_o + R_o = 28579 \text{ N} \Rightarrow s_o = 71372.5 \text{ N/s}$$

$$t_w = ((6 \cdot \Delta t_1 \cdot f_w \cdot m_1) / T_o)^{1/3} = 0.124 \text{ s}$$

$$v_w = T_o \cdot t_w^2 / (m_1 \cdot \Delta t_1 \cdot 2) = 0.0366 \text{ m/s}$$

$$T_w = s_o \cdot t_w = 8850 \text{ N}$$

Condições iniciais para o movimento livre do sistema:

$$T_s = (2 \cdot \xi \cdot s_o) / \omega_n = 112.84 \text{ N}$$

$$\delta_o = R_o / k_1 = 6.8 \times 10^{-4} \text{ m} \Rightarrow t' = 0.01 \text{ s}$$

$$t_R = t_w + t' = 0.134 \text{ s} \Rightarrow T_R = t_R \cdot s_o = 9564 \text{ N}$$

Como a força motora varia pouco neste período, "vo" pode ser calculado pela equação 7.7:

$$v_0 \approx \left[\frac{R_0}{k_1 \cdot m_1} (2 T_w - R_0) + v_w^2 \right]^{1/2} = 0.044 \text{ m/s} \quad (\Delta v = v_0 - v_w = 0.0074 \text{ m/s})$$

A contribuição máxima da velocidade v_0 , para o esforço dinâmico, com base na equação 7.22 é dada por:

$$S_w = \frac{m_1 \cdot v_0}{\omega_A} \cdot \omega_n^2 \cdot e^{-\xi \cdot \pi/2}$$

Como:

$$m_1 \cdot \omega_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{teremos:}$$

$$S_w = 9639 \text{ N}$$

Portanto S_w é consideravelmente maior do que a resistência ao movimento R_0 e resulta basicamente do efeito dinâmico da folga do sistema mecânico.

A evolução do esforço dinâmico passa a ser regida pela equação 7.20, para $t_r < t < \Delta t_1$.

Para $t' = \Delta t_1 - t_r = 0.266 \text{ s}$ teremos:

$$S_{r0} = S_R(q_3) + R_0 = 19132 \text{ N}$$

$$\Delta v_0 = (m_1 \cdot \omega_1 \cdot \omega_n^2) / k_1 \cdot \dot{q}(t') = \omega_1 (m_2 + m_1) / m_2 \cdot \dot{q}(t')$$

Para $t' = \Delta t_1 - t_r$: $\dot{q}(t') = 3.419$

$$\omega_1 = 6.296 \times 10^{-3} \Rightarrow \Delta v_0 = 0.0362 \text{ m/s}$$

$$\omega_2 = -4.29 \times 10^{-3}$$

$$Q_0 = \omega_1 (T_0 - S_{r0}) + \omega_2 (S_{r0} - R_0)$$

$$T_0 = (m_1 + m_2) \cdot a_0 + R_0 = 28579 \text{ N}$$

$$Q_0 = -5.867$$

$$S_{Rmax} \Rightarrow \tan \omega_n \cdot t' = (-\Delta v_0 \cdot \omega_1 \cdot m_1 \cdot \omega_n) / Q_0$$

$$\omega_n \cdot t' = 1.503 \text{ rd/s} \quad (t' = 0.06 \text{ s} \Rightarrow t = 0.46 \text{ s})$$

$$S_{Rmax} = m_1 \cdot \omega_1 \cdot \omega_n^2 \cdot q_{max} + S_{r0}$$

$$S_{Rmax} = 26547 \text{ N} \quad (0.929 \cdot T_0)$$

a.1 Comparação com uma entrada em degrau ou seja a aplicação subta do conjugado T_0 ($\Delta t_1 \approx 0$).

Neste caso com base nas equações desenvolvidas no item 5.4.2 teremos:

$$S_{rmax} = 38453 \text{ N } (1.345 \text{ } T_0)$$

a.2 Comparação com o valor médio do torque calculado com base no modelo de corpo rígido constituído das massas m_1 e m_2 .

$$S_r = R_0 + m_2 a_0 = 18574 \text{ N } (0.65 \text{ } T_0)$$

a.3 Comparação com o tratamento tradicional (corpo rígido) dado as M. E. T.

Com base no tratamento tradicional admitindo-se que todas as massas sofram a mesma aceleração média " a_0 ", teremos:

$$S_{rmax} = R_0 + (m_2+m_3). a_0 \quad (7.27)$$

$$m_3 = 39400 \text{ kg (carga suspensa)}$$

$$S_{rmax} = 44853.8 \text{ N } (1.57 \text{ } T_0)$$

Convém relembrar que no tratamento tradicional todas as massas são consideradas quando se determina o esforço médio, inclusive a carga suspensa.

Parece estranho o fato de o esforço dinâmico calculado com base no modelo de corpo rígido superar o esforço dinâmico na partida. Este fato poderá ocorrer para este tipo de acionamento sempre que a massa da carga suspensa for significativamente maior do que a massa do carrinho ou ponte.

Considerando-se que decorridos alguns segundos a vibração transitória entre motor e ponte é amortecida, após o que, de fato prevalece o movimento do corpo rígido, a equação 7.27 acima é válida.

A inclusão do efeito do modo de vibrar da carga suspensa na equação do esforço dinâmico pode ser feita sem grande dificuldade. Sendo a frequência de oscilação da carga bem mais baixa do que a do sistema de controle e do acionamento, a mesma deverá "enxegar" a ponte ou carrinho como tendo uma aceleração aproximadamente constante.

O modelo para análise de oscilação da carga é mostrado na figura 39.

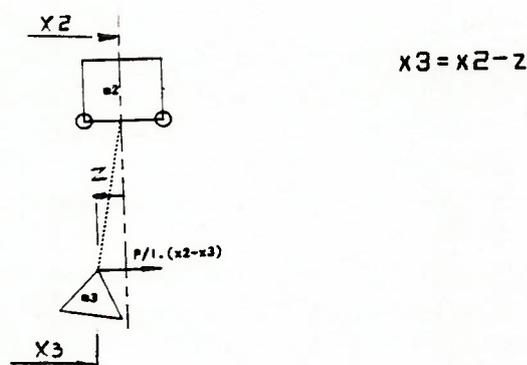


Figura 39 -

Da figura 39 temos:

$$m_3 (\ddot{x}_2 - \ddot{z}) = m_3 g z / l$$

$$m_3 \ddot{z} + m_3 g z / l = m_3 \ddot{x}_2$$

$$\ddot{z} + \omega_z^2 z = \ddot{x}_2 = a_0, \quad \text{onde } \omega_z = \sqrt{g/l}$$

$$z = a_0 / \omega_z^2 (1 - \cos \omega_z t)$$

$$\ddot{x}_3 = \ddot{x}_2 - \ddot{z} = a_0 (1 + \cos \omega_z t)$$

O sistema de acionamento deverá perceber a inércia da carga suspensa como uma resistência ao movimento que aumenta gradativamente, portanto com pouco efeito dinâmico.

A equação completa do esforço dinâmico, com a inclusão da carga suspensa resulta:

$$S_R = m \cdot \omega_1 \cdot g (t - \Delta t_1) + S_{R0} + P_3 \cdot Z(t)/l \quad (7.28)$$

Considerando-se um comprimento de pêndulo $l = 12$ m teremos:

$$\omega_2 = 0.904 \text{ rad/s}$$

$$\text{Para } t = 0.46 \text{ s} \Rightarrow Z(t) = 0.06955 \text{ m}$$

$$P_3 \cdot Z(t)/l = 2240 \text{ N}$$

$$S_{R\max} = 28787 \text{ N } (\approx T_0)$$

Para $t = (\pi)/2 \cdot \omega_2$ teremos $\ddot{x}_3 = a_0$ e admitindo-se que as vibrações transitórias entre motor e ponte tenham sido amortecidas teremos:

$$S_R = R_0 + (m_2+m_3) a_0, \text{ que corresponde à fórmula 7.27.}$$

Estando o limite de corrente do sistema de controle convenientemente regulado, a partir do instante em que $\ddot{x}_3 = a_0$ o torque do motor se manterá constante e a solicitação dinâmica máxima devese manter praticamente nos mesmos níveis dados pela equação 7.27.

Com a inclusão do modo de vibrar da carga suspensa, a equação da força motora deve ser acrescida do termo:

$$Q_S = \frac{P_3 \cdot a_0}{l \cdot \omega_2} \cdot \left[1 + \cos(\sqrt{g/l} \cdot t) \right]$$

Portanto:

$$T_A = T_{A1} + R_0 + Q_S$$

O torque limite será dado por:

$$T_L = R_0 + (m_1+m_2+m_3) \cdot a_0$$

A curva de evolução da força motora terá a configuração abaixo:

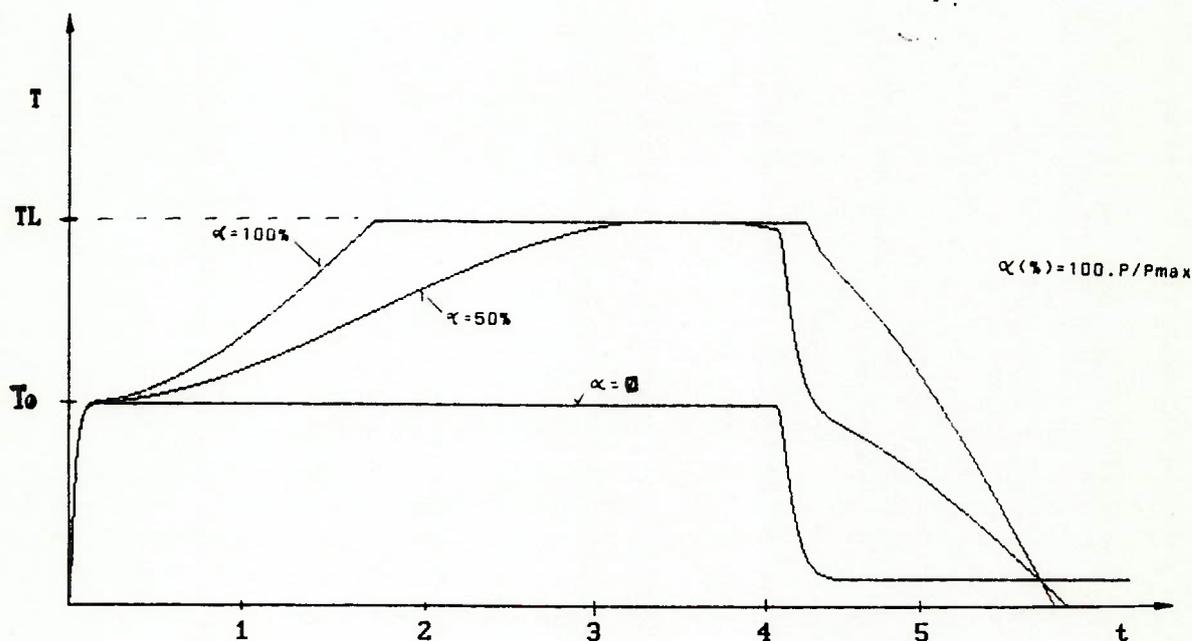


Figura 40 - Evolução da força motora com a inclusão da carga suspensa.

Dependendo do tempo em que o sistema opera no limite da corrente, teremos um certo aumento do tempo de aceleração. Este fato deverá ocorrer para o manuseio de cargas próximas da máxima e com o cabo de sustentação próximo do seu comprimento máximo, ou seja, com o movimento pendular de carga em seu período máximo. No entanto, isto nos parece mais aceitável do que um aumento na solicitação no sistema mecânico.

8. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS E CONCLUSÃO

8.1 Quanto ao Modelo

Na primeira parte deste trabalho nos preocupamos com a construção de um modelo para o sistema mecânico que permitesse a determinação dos esforços dinâmico no sistema de transmissão, bem como sobre a estrutura da ponte.

Construiu-se um modelo em que se faz a representação do sistema mecânico por três elementos de inércia conectados por elementos elásticos, com predominância das inércias da motorização, da ponte ou carro e da carga suspensa. Este modelo confrontado com um modelo mais completo simulado através de um programa de elementos finitos apresentou resultados bastante satisfatórios.

Observou-se ainda que o modelo de três inércias pode ainda ser reduzido a modelos de duas inércia, dependendo das objetivos que se tenha.

Quando se pretende determinar os esforços dinâmicos no sistema de transmissão (entre motor e ponte), é suficiente construir um modelo a partir apenas da inércia da motorização e da ponte ou carro e da elasticidade da transmissão, negligenciando-se a carga suspensa. Por outro lado, para determinar os esforços dinâmicos decorrentes da oscilação da carga, sobre a estrutura da ponte, é suficiente construir um modelo de duas inércias segundo a Figura 41.

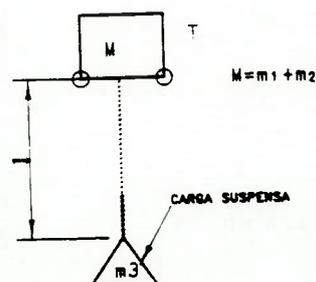


Figura 41 - Modelo de duas massas.

Neste modelo a elasticidade do sistema de transmissão é excluída pois a frequência natural desse sistema é mais alta do que aquela correspondente à oscilação da carga. No modelo M corresponde, a inércia da motorização acrescida da inércia da ponte ou carro.

8.2 Quanto à elasticidade do sistema de transmissão

Considerando-se que as excitações nas M.E.T. de modo geral se assemelham bastante aos casos aqui analisados, é possível concluir que a elasticidade do sistema de transmissão tem pouca influência sobre os níveis máximos de sollicitação, fato este já observado por Yang (3) em trabalho publicado na revista alemã F+H de 1990.

Cabe fazer ressalvas ao artigo de RIVIN (22) e trabalho da Associação de Pesquisa dos Acionamentos-Alemanha (23) sobre o efeito dinâmico de transitórios de torque na partida de motores de indução.

Nestes trabalhos, os transitórios de torque adicionados ao conjugado normal de partida dos motores foram representados por uma função do tipo:

$$T_D = T_{D0} \cdot e^{-\rho \cdot t} \cdot \text{sen}(2 \cdot \pi \cdot \Omega \cdot t)$$

Onde ρ é da ordem de 12.5 s^{-1} e Ω corresponde à frequência da rede (50 a 60 Hz).

Sendo a excitação do tipo harmônica e de frequência relativamente alta, quando comparado às frequências fundamentais das M.E.T. (em geral inferiores a 10 Hz), seu efeito dinâmico será bastante reduzido.

No entanto, precauções devem ser tomadas principalmente quanto ao eixo de ligação entre motor e redutor, cuja frequência de vibração pode se situar próximo a da excitação transitória.

Nestes casos a inclusão de um acoplamento capaz de alterar a constante elástica e conseqüentemente a frequência de vibração do eixo de transmissão, será bastante eficaz.

8.3 Quanto aos esforços dinâmicos

Foram analisados os esforços dinâmicos decorrentes de dois sistemas de acionamento, sendo um deles o sistema convencional de partida em malha aberta e o outro um sistema controlado.

8.3.1 Sistema convencional de partida

Com relação ao sistema convencional, constatou-se uma significativa diferença entre os esforços dinâmicos máximos a que o sistema é submetido, em comparação com os esforços obtidos através da rotina tradicional de cálculo baseada em modelo de corpo rígido.

Para o caso analisado em 7.2.3 o esforço dinâmico máximo resultou aproximadamente igual a duas vezes o valor calculado com base no modelo de corpo rígido e na aceleração média do sistema.

Denominando respectivamente de S_{RD} e S_{R0} os esforços obtidos com base em modelo elástico e não elástico, foram obtidos os seguintes valores:

$$S_{RD} = 2.57 \text{ TN}$$

$$S_{R0} = 1.283 \text{ TN}$$

Onde T_N corresponde ao conjugado nominal do motor.

Calculando o esforço dinâmico com base nas Normas FEM 1001 (B) e conforme a referência (01) do Instituto DIN, por se tratarem de trabalhos mais recentes e com avanços na direção de racionalização, teríamos:

$$\text{- Norma F.E.M.: } S_{R(B)} = S_M \cdot \gamma_m$$

Onde γ_m corresponde a um fator de amplificação variando de 1.0 a 1.3, em função da classe de serviço do equipamento.

A Norma não é clara quanto à forma de se determinar o esforço S_M , mencionando apenas que o mesmo deve ser determinado com base no torque do motor, ou freio. Calculando S_M com base na aceleração média do sistema teríamos: $S_M = S_{R0} = 1.283 T_N$ e portanto, $S_{R(B)} = 1.283 T_N$ a $1.668 T_N$.

Comparando-se com o valor obtido no modelo elástico ($S_{RD} = 2.57 T_N$) e considerando-se que o coeficiente de segurança em relação a tensão de ruptura do material (ν_r) é de 2.2, teríamos um coeficiente mínimo efetivo (ν_{ref}) de 1.1 o que colocaria em risco o equipamento.

Calculando S_M a partir do torque máximo efetivo do motor em cada uma das curvas e com base em modelo não elástico, teríamos:

- 1º Estágio:

$$S_M = R_0 + (T_0 - R_0) \cdot \frac{m_z + m_a}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$T_0 = 1.5 T_N$$

$$R_0 = 0.23 T_N$$

$$S_M = 1.284 T_N$$

- 2º e 3º Estágio

$$T_o = 2.24 \text{ TN}$$

$$S_M = 1.9 \text{ TN}$$

$$S_{R(6)} = 1.9 \text{ TN a } 2.47 \text{ TN}$$

Neste caso a segurança mínima efetiva será de 1.63 que nos parece mais razoável.

Portanto, mesmo calculando em relação ao torque máximo efetivamente aplicado pelo motor, o esforço poderá resultar aquém do valor máximo a que o sistema será submetido.

- Procedimento DIN

O esforço é calculado com base em modelo elástico formado pelas massas da motorização e da ponte ou carro.

$$S_{R(1)} = \left[R_o + (T_o - R_o) \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right] \cdot \psi_a$$

Onde ψ_a é um coeficiente de amplificação dependente do tipo de acionamento. Para o sistema convencional $\psi_a = 2.0$.

De 7.2.3 temos:

$$T_o = 1.5 \text{ TN e } R_o = 0.23 \text{ TN}$$

$$m_2 / (m_1 + m_2) = 0.809$$

$$S_{R(1)} = 2.515 \text{ TN } (\approx 0.98 \text{ SRD})$$

Portanto, com base no método direto proposto pelo DIN, o esforço dinâmico máximo se manteve muito próximo ao obtido levando-se em conta as particularidades do sistema mecânico quanto a folgas e elasticidade.

8.3.2 Sistema Controlado

Ao contrário dos sistemas não controlados o esforço dinâmico máximo se manteve bastante próximo dos valores obtidos com base em modelos não elásticos.

Para o caso analisado em 7.3.2 foram obtidos os seguintes resultados:

- Imediatamente após a aplicação do torque de partida.

$$SRD1 = T_0$$

Onde T_0 corresponde ao torque de partida do motor.

- No instante em que a carga suspensa atinge o mesmo nível de aceleração imposta á ponte:

$$SRD2 = 1.57 T_0$$

O valor de SRD nesta fase corresponde ao valor obtido com base em modelo não elástico.

Calculando conforme a Norma F.E.M. teriamos:

$$SR(B) = SR_0 \cdot \gamma_m$$

$$SR(B) = 1.57 T_0 \text{ a } 2.04 T_0 [1 \text{ a } 1.3 SRD]$$

Segundo DIN teriamos:

$$SR(1) = \left[R_0 + (T_0 - R_0) \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right] \psi_a$$

$\psi_a = 1.5$: para acionamento por motores de corrente continua.

De 7.3.2 temos:

$$R_o = 0.136 \cdot T_o$$

$$SRD(1) = 0.975 T_o \quad (0.975 SRD_1)$$

Cabe ressaltar que o DIN contudo não faz distinção entre os sistemas controlados baseados na imposição de uma aceleração constante ao motor e os baseados na imposição de um conjugado constante (Figura 42). No segundo caso teremos um torque de partida (T_o) mais elevado e definido pelo limite de corrente imposta ao motor.

Ludwig (2) comparando estes sistemas aplicados a um mesmo equipamento obteve uma redução de aproximadamente 38% no esforço dinâmico máximo, para o sistema baseado na imposição de aceleração constante (rampa de velocidade).

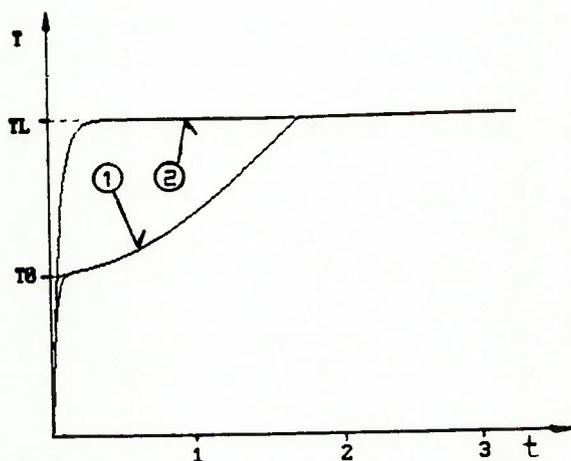


Figura 42 - Curvas de torque do motor.

(1) Sistemas baseados em aceleração constante.

(2) Sistemas baseados em conjugado constante.

Calculando o esforço segundo o DIN para o sistema controlado com conjugado constante, teremos:

$$SRD(1) = \left[R_o + (T_L - R_o) \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right] \cdot \psi_a$$

Onde T_L corresponde ao torque capaz de impor uma aceleração média " a_0 " ao sistema e é dada por: $T_L = R_0 + (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a_0$

De B.2.5 temos:

$$T_L = 54859 \text{ N} = 1.913 \text{ To}$$

$$R_0 = 0.136 \text{ To}$$

$$S_{RD}(1) = 0.935 \quad T_L = 1.789 \quad (1.14 \text{ S}_{RD})$$

Neste caso o esforço calculado segundo a F.E.M. ou DIN poderá resultar até mesmo maior do que o esforço dinâmico máximo, em particular nos casos em que a massa da carga suspensa é relativamente maior do que a soma da massa da motorização e ponte. Convém ressaltar que os sistemas baseados na imposição de aceleração constante, para os movimento de translação, são comuns hoje em dia, até mesmo para aplicação em motores de corrente alternada. Dentre estes para motores de corrente contínua, temos no mercado os sistemas: SIMOREG da Siemens (24) e RECTIVAR 4 da Telemecanique (25) e para motores de corrente alternada os sistemas: ALTIVAR 5 (26) e STATOVAR (27) da Telemecanique e SIMOVERT da Siemens (24) e (28).

8.4 Quanto ao dimensionamento do sistema de transmissão

8.4.1 Quanto à segurança em relação à ruptura dos mecanismos

Conforme já comentado em 8.3.1., em relação à Norma F.E.M., para elementos não sujeitos à fadiga é feito uma verificação em relação à tensão de ruptura do material a partir do esforço $S_{R}(6)$, resultando para o sistema convencional de partida, um coeficiente de segurança mínimo efetivo de 1.6.

No dimensionamento segundo o DIN a verificação é feita em relação ao limite elástico com base no esforço máximo $S_R(1)$, com um coeficiente de segurança mínimo de 1.5. Este procedimento portanto nos parece mais racional mesmo porque os esforços máximos se mantem mais próximos do real.

8.4.2 Quanto à segurança em relação à fadiga

Embora partindo de procedimentos diferenciados para a determinação dos esforços, há uma certa convergência quanto aos critérios no dimensionamento, quais sejam:

- Em ambos os casos a verificação é feita com base no esforço máximo.
- É necessário construir um espectro das solicitações a que o mecanismo é submetido, ou seja, uma curva esforços versus ocorrências.

Na determinação do número de ocorrências o DIN propõe o seguinte critério:

$$N_{max} = k_s \cdot f_s \cdot Z \cdot 3600$$

Onde:

k_s = corresponde à relação entre a duração total das fases de aceleração e frenagem e a duração total (Z) em horas do mecanismo.

f_s = corresponde à frequência (Hz) de vibração entre motor e ponte.

O DIN propõe três espectros ou "coletivos" de solicitações, construídos a partir das solicitações máximas e mínimas durante as fases de aceleração e frenagem e admitindo uma distribuição Gaussiana normal entre ambas. Ver figura 43.

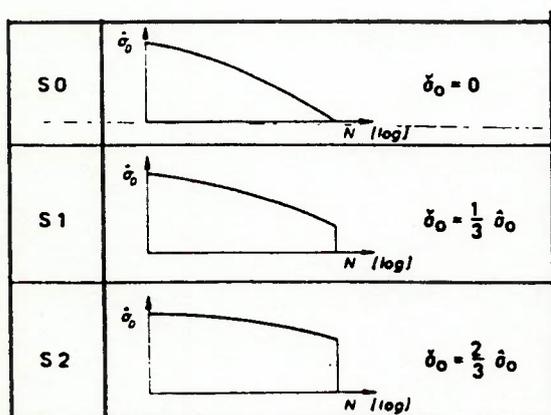


Figura 43 - Coletivo Padrão.
Segundo o DIN (1)

Definido o espectro e construído a curva de Wohler para o material, com base na hipótese linear de dano acumulado de Miner-Palmgren é feita a verificação.

Para se ter uma idéia da diferença entre se escolher um ou outro espectro, tomemos o seguinte caso:

$$N_{\max} = 5 \times 10^6 \text{ ciclos}$$

$\hat{\sigma}_0$ = solicitação máxima

σ_B = 500 N/mm² : tensão de ruptura do material

σ_D = 140 N/mm² : tensão admissível a fadiga do material para uma solicitação com 5×10^6 ciclos de ocorrência.

Utilizando-se uma das curvas já fornecidas pelo DIN teríamos para a solicitação máxima admissível (TN):

Coletivo : S0 → $\sigma_{N0} = 475 \text{ N/mm}^2$

Coletivo : S1 → $\sigma_{N1} = 300 \text{ N/mm}^2$

Coletivo : S2 → $\sigma_{N2} = 200 \text{ N/mm}^2$

Isto equivale a dizer que se o dimensionamento fosse feito com base em uma solicitação média equivalente (m) com duração de 5×10^6 ciclos teríamos para cada um dos coletivos:

$$\begin{aligned} \text{Coletivo: } S_0 &\rightarrow \tau_{m_0} = (\sigma_0/\sigma_{NO}). \hat{\sigma}_0 \approx 0.3 \hat{\sigma}_0 \\ S_1 &\rightarrow \tau_{m_1} = (\sigma_D/\sigma_{N1}). \hat{\sigma}_0 = 0.48 \hat{\sigma}_0 \\ S_2 &\rightarrow \tau_{m_2} = (\sigma_D/\sigma_{N2}). \hat{\sigma}_0 = 0.7 \hat{\sigma}_0 \end{aligned}$$

Há portanto uma diferença considerável entre os coletivos e a opção inadequada por um deles, poderá implicar em risco ou aumento desnecessário de custos para o equipamento.

Quanto a Norma F.E.M., não sendo o dimensionamento feito a partir de modelos elásticos o número de ocorrências será determinado a partir da rotação do elemento ou do tempo de duração de cada solicitação. No caso de eixo submetido à flexão por exemplo para cada rotação do mesmo, teremos um ciclo fechado de solicitação.

Os espectros de solicitação também são padronizados e em número de quatro. Contudo o enquadramento neste caso é muito mais complexo, pois a rigor seria necessário determinar a evolução da sequência solicitação-tempo, caso a caso.

Determinando-se o espectro e o número de ocorrências é possível determinar-se a tensão admissível partir da construção de curva de Wholer do material. A tensão decorrente do esforço máximo é comparada à tensão admissível.

8.5 Sugestões

Parece-nos exagerado o método de contagem de ciclos de solicitação baseado na frequência natural do sistema, pois imediatamente sugere que acionamentos mais rígidos devam trabalhar com níveis de tensão inferiores aos de maior elasticidade. Mesmo porque para os acionamentos mais modernos, as vibrações tendem a ocorrer apenas numa fase inicial de partida, sendo rapidamente amortecidas. Portanto em geral na maior parte do tempo deve predominar o regime estacionário. (Ver Figuras 44 e 45).

Entendemos a utilização de espectros construídos empiricamente pelo fato de ser extremamente trabalhoso a construção da sequência esforço-tempo através da simulação do sistema durante um ciclo de operação normal. A rigor também as vibrações deverão afetar de maneira diferente os elementos da cadeia de transmissão como eixos, engrenagens, etc., requerendo contagem específica de ciclos de solicitação, dando origem a diferentes espectros.

Contudo acreditamos ser viável a construção de espectros de solicitação típicos a cada tipo de acionamento. Para os acionamentos convencionais por exemplo as solicitações máximas são menos afetadas pela carga suspensa, que é outra variável do sistema. Para outros acionamentos, como os controlados, em que a carga suspensa influi na sequência esforço-tempo, será necessário considerar também a porcentagem de tempo que o equipamento opera com cargas máximas, médias e em vazio.

O espectro em si dependerá mais fundamentalmente do sistema de acionamento do que da intensidade do serviço. Somente o número máximo de ocorrências deverá ser corrigido caso a caso em função da duração total da utilização do componente e da porcentagem de tempo em que o equipamento se encontra em aceleração e frenagem.

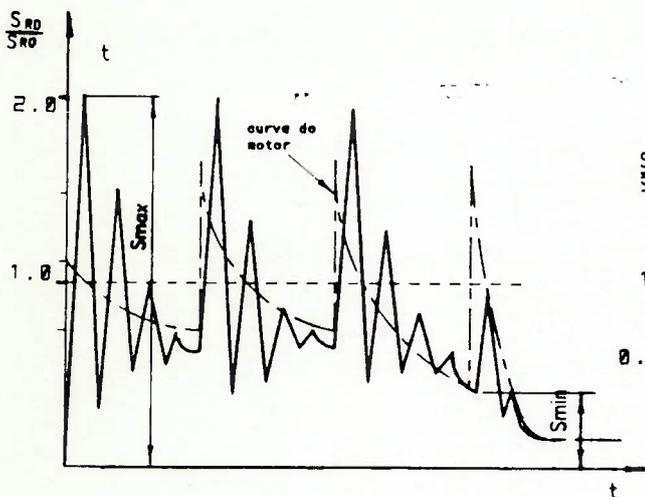


Figura 44 - Evolução do torque
Sistema convencional

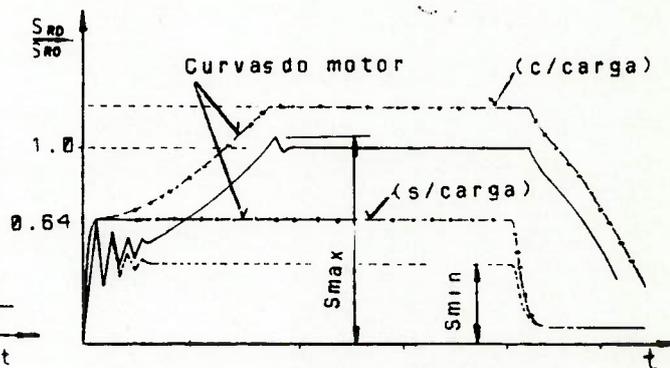


Figura 45 - Evolução do torque
Sistema controlado

Nas figuras 44 e 45 é representado o decurso das solicitações durante a partida, para o sistema convencional e o sistema controlado analisados neste trabalho.

A simulação das M.E.T. durante um ciclo completo de operação, para a contagem dos picos de solicitação, visando a construção de espectros típicos a cada acionamento, e a determinação do dano acumulado por fadiga, deixamos como sugestão para futuros trabalhos, devido à extensão do assunto.

A partir do modelo construído para o sistema mecânico, poderá ser feita a simulação do sistema como um todo, incluindo-se o próprio sistema de controle, utilizando-se simuladores como SIMNON (13), por exemplo.

Deixamos também como sugestão à A.B.N.T. - Associação Brasileira de Normas Técnicas, a revisão na Norma NBN-8400 (8) no sentido de seguir a tendência internacional de maior racionalização, cujas vantagens são oferecer maior segurança para o equipamento bem como reduzir custos em determinadas aplicações.

Acreditamos que este trabalho seja uma contribuição importante à Engenharia de Projetos no sentido de municiar o projetista com ferramentas que lhe permitam avançar em direção à racionalização, bem como adquirir uma visão crítica em relação aos critérios de dimensionamento propostos pelas principais Normas que tratam do assunto.

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] DIN - Regras fundamentais para o cálculo de acionamento de Máquinas de Elevação e Transporte - Deutsches Institut für Normung (DIN).
- [02] H.G. Ludwig - Comparação de acionamento de motores elétricos para mecanismos de translação de Guindastes. Extrato da dissertação na Escola Técnica Superior de Darmstadt - Revista Konstruktion - Editora Springer 1988 - Alemanha.
- [03] Zhiwei Yang - Suprimir vibrações em unidades de acionamento de guindastes - Revista F + H - 1988 Alemanha.
- [04] H. Ernst - Aparatos de elevacion y transporte, Madrid, Editorial Blume, 1970. Vol I e II.
- [05] N. Rudenko - Materials Handling Equipment - Peace Publishers - Moscou.
- [06] F.E.M. 1001 - Lifting Appliance Equipment. Federação Européia de Manutenção - 1987.
- [07] AISE N° 6 - Specification for Electric Overhead Traveling Cranes for Steel Mill Service - Association of Iron and Steel Engineers.
- [08] C.M.A.A. 70/83 - Specification for Electric Overhead Traveling Cranes - Crane Manufacturers Association of America - INC.
- [09] NBR-8400 - Cálculo de equipamentos para levantamento e movimentação de cargas - ABNT.

- [10] Kloppel y Mayer - Considerações dinâmicas sobre a partida de Pontes Rolantes com acionamento elétrico individual-Extrato da Dissertação apresentada em Darmstadt - Revista Der Stanlbau - 1965 - Alemanha.
- [11] Marko Kos - Praxis para a análise de acionamento de movimentos horizontais. Revista F + H - Förden und Heben - 1990. Alemanha.
- [12] S. Veshenevski - Características de Los Motores en el Accionamiento Electrico. Editorial Mir Moscou.
- [13] Simnon - Department of Automatic Control - Lund Institute of Technology - 1985.
- [14] Willian T. Thompson - Theory of Vibration With Application Prentice-Hall - 1972.
- [15] D.J. Dorwick - Earthquake Resistant Design - John Willey an Sons - 1977.
- [16] Leonard Meirovitch - Elements of Vibration Analysis - McGraw-Hill Book Company - USA.
- [17] J.A. Collins - Failure of Materials in Mechanical Design - John Willey and Sons.
- [18] Ray W. Clough e Joseph Penzien - Dynamic of Structures - McGraw-Hill - 1975.
- [19] SAP-90 - Structural Analysis Program - Version 5.03 Copyright - Edward L. Wilson.
- [20] K. Heumann - Fundamentos de la Electrónica de Potência - AEG - Telefunken.

- [21] J. A. Hrones - Fluid Power Control - M.I.T. Press.
- [22] DR. Eugene I. Rivin - Effects of driving motor on drive dynamic-Artigo da revista "The Magazine of Industrial Motion an Control" - 1982.
- [23] Pesquisa N° 4 - Associação de Pesquisa dos Acionamentos - Alemanha - 1977.
- [24] Simoreg DC Drives - Variable Speed Drive - Catálogo Siemens n° A19100-E319 - A226-X-7600 - Alemanha.
- [25] Rectivar 4 - Three phase speed controllers for DC motors - Catálogo Telemecanique 42081 - 1990.
- [26] Altivar 5 - Conversores de frequência para motores assíncronos-Catálogo Telemecanique-C.026.00 - 08/21 - Brasil - 1991.
- [27] Statovar 4 - Statovar "4 quadrantes" aplicado a movimento horizontais de equipamentos de levantamento e movimentação de cargas - Catálogo NT 62003 BR 7/79 - Brasil - 1979.
- [28] Simovert P - Inversor de frequência por modulação de largura de pulsos (PWM) - Catálogo Siemens - ASI 1/1249-FO - Brasil - 1992.

APÊNDICE A - MODELAGEM DO SISTEMA MECÂNICO PARA SIMULAÇÃO ATRAVÉS DE PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS

1. Simulação do sistema livre.

Um dos problemas, para simulação do movimento da ponte rolante pelo método dos elementos finitos, consiste na singularidade da matriz de rigidez pela ausência de restrições no sentido do movimento.

Um procedimento utilizado na determinação de autovalores e auto-vetores consiste no chamado deslocamento (Shifting) da matriz de rigidez.

Tomemos a equação dos auto-vetores expressa em 5.1.3 e dada por:

$$[[K] - \lambda [M]] \langle \phi \rangle = \langle 0 \rangle \quad [A.1]$$

Adicionando-se e ao mesmo tempo subtraindo da expressão entre colchetes a matriz $\epsilon [M]$ teremos:

$$[[K] + \epsilon [M] - \lambda [M] - \epsilon [M]] \langle \phi \rangle = \langle 0 \rangle \rightarrow$$

$$\rightarrow [[\hat{K}] - \alpha [M]] \langle \phi \rangle = \langle 0 \rangle \quad [A.2]$$

Onde: $[\hat{K}] = [K] + \epsilon [M]$

$$\alpha = \epsilon + \lambda$$

A matriz que multiplica $\langle \phi \rangle$ em A.1 e A.2 é exatamente a mesma, portanto os auto-vetores obtidos da expressão A.2 deverão ser também os mesmos.

Por outro lado os auto-valores ficam acrescidos do valor ϵ e as frequências naturais reais podem ser calculadas por:

$$\omega_i = \sqrt{\alpha_i - \varepsilon_i}$$

Em termos práticos, este procedimento corresponde a se adicionar a cada grau de liberdade da estrutura, molas proporcionais à massa associada ao mesmo (fator de proporcionalidade constante ε).

Escolhendo-se ε suficientemente pequeno em relação as frequências do sistema, hipótese admitida por Clough e Penzien (18), as frequências calculadas podem ser confundidas com as reais do sistema, com pequena margem de erro.

Nas simulações efetuadas, o maior valor de ε utilizado foi de 0.01, resultando em uma frequência natural de 0.0993 rd/s para o movimento de corpo rígido; para a frequência natural mais baixa, correspondente a oscilação da carga ($\omega = 1,49$ rd/s), isso representou um erro de 0.22%.

Para análise dinâmica linear de fenômenos de curta duração, como a partida e frenagem de pontes rolantes, este procedimento se torna um recurso importante para determinação dos modos principais de vibrar da estrutura.

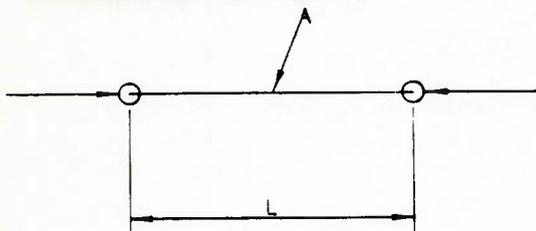
A restrição a fenômenos de curta duração se deve ao fato de que a inclusão de molas restringindo o movimento introduz uma frequência natural, que apesar de baixa é não nula, para o movimento de corpo rígido do sistema. Dependendo do tempo de duração da simulação em comparação com o período natural introduzido, no caso de movimento unidirecional, há perda de consistência quanto ao movimento do centro de massa do conjunto. Contudo, com a manutenção dos auto-vetores não há prejuízo para o cálculo dos esforços internos ao sistema o que de fato é o mais importante.

2 - Representação de elementos de mola.

A representação abaixo foi aplicada inicialmente ao modelo de três massas para comparação com os resultados obtidos pelo cálculo manual, com resultados bastante satisfatórios.

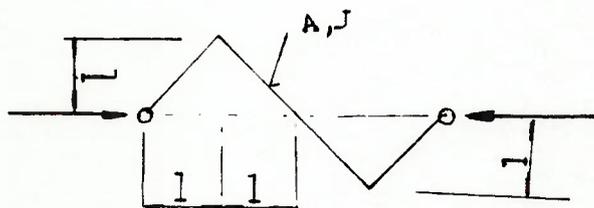
Para representar no modelo molas interligando dois elementos, utilizou-se elemento de barras ou vigas cujas características geométricas foram determinadas de forma a manter a mesma constante elástica.

- Elementos de barra



$$A = km.l / E$$

- Elementos de viga



Considerando-se apenas as deformações de flexão com "A" suficientemente grande:

$$J = \frac{km.4.\sqrt{2}.l^3}{3E}$$

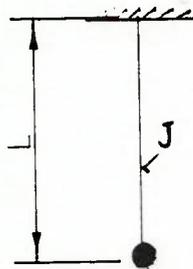
3. Representação do movimento pendular da carga

O movimento pendular da carga pode ser representado por um sistema de massa-mola de constante $k_M = P / l$.

Onde: P = Peso da carga.

l = comprimento do pêndulo.

Para representá-lo no modelo optou-se por uma viga em balanço engastada na estrutura do carrinho.



$$J = k_M \cdot l^3 / 3 E$$

**APÊNDICE B - SIMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS DE PONTE ROLANTE -
MODELO DINA 4 E VIBRA 4**

B.1 Entradas do Programa

PONTE ROLANTE: Analise dinamica
Estrutura rigida
Modelo 3 GL

VIBRA4

SYSTEM

R=0 L=2 V=3

JOINTS

1 X=0 Y=0 Z=0
2 X=.5
3 X=0 Y=0.5
4 X=.5 Y=.5
5 X=1.5 Y=0
7 X=1.5 Y=.5
6 X=2 Y=0
8 X=2 Y=.5
9 X=.5 Y=-.5
10 X=.25 Y=-5.5
11 X=.75 Y=-5.5

RESTRAINTS

1 8 1 R=0,1,1,1,1,1
9 11 1 R=0,1,1,1,1,0

SPRINGS

2 K=1219.58
5 K=290
9 K=191

MASSES

2 M=121958
5 M=29000
9 M=19100

SHELL

NM=1
1 E=2.06E11 U=.3
1 JQ=1,2,3,4 ETYPE=1 M=1 TH=1 LP=2
2 JQ=5,6,7,8 ETYPE=1 M=1 TH=1 LP=2
3 JQ=10,11,9 ETYPE=1 M=1 TH=1 LP=2

FRAME

NM=2
1 A=.5 I=7.58E-6 E=2.06E11
2 A=2.572E-5
1 2 9 M=1 LP=1,0
2 2 5 M=2 LP=1,0 LR=1,1,0,0,0,0

LOADS

5 L=1 F=60372
2 L=2 F=-9236

TIMEH

ATYPE=0 NSTEP=92 DT=0.04 NF=2
1 0 2 0 3 .05
NF=1 PRIN=1 NPL=4 NAM=FOR.M01
NF=2 PRIN=1 NPL=3 NAM=RES.M01

LC=1 NF=1 S=1 AT=0
LC=2 NF=2 S=1 AT=0

COMBO
1 C=1,1

FOR.M01

0 18.974,.002 18.974,.0021 1,3.68 1

RES.M01

0 0,.018 1,3.68 1

PONTE ROLANTE: Analise dinamica
Estrutura rigida
Modelo 8 GL

DINA4

SYSTEM
L=2 V=8

JOINTS

1	X=0	Y=.25	Z=0	
4	X=13.14			G=1,4,1
5	X=18.6			
8	X=32			G=5,8,1
9	X=0	Y=5.35		
12	X=13.4			G=9,12,1
13	X=18.6			
16	X=32			G=13,16,1
17	X=0	Y=6.1	Z=-.5	
18	X=32			
19	X=0	Y=7.1	Z=.5	
20	X=32			
21	X=0	Y=7.6	Z=0	
22	X=32			
23	X=0	Y=8.6		
24		Y=7.6	Z=-1	
25		Y=8.6		
26	X=32		Z=0	
27		Y=7.6	Z=-1	
28		Y=8.6		
29	X=0	Y=5.1	Z=-.5	
30	X=32			
31	X=0	Y=6.6	Z=-1	
32	X=32			
33	X=13.4	Y=.25	Z=-.5	
34	X=18.6			
35	X=13.14	Y=5.35		
36	X=18.6			
37	X=16	Y=2.8		
38	X=16		Z=4.5	
39	X=15.5		Z=5.5	
40	X=16.5			
41	X=0	Y=0	Z=0	
42	X=32			
43	X=0	Y=5.6		
44	X=32			

RESTRAINTS

1	16	R=0,0,1,0,1,0
41	44	R=1,0,1,0,1,0
17	20	R=1,0,0,0,1,1
21	28	R=1,0,1,1,1,1
29	32	R=1,1,1,1,1,1
33	37	R=0,0,1,0,0,0
38	40	R=1,0,0,0,0,1

SPRINGS

41	44	K=0,14.3,0,0,0,0
1	8	7 K=0,28.7,0,0,0,0

9 16 7 K=0,33.16,0,0,0,0
 2 3 K=0,45.56,0,0,0,0
 6 7 K=0,45.56,0,0,0,0
 10 15 5 K=0,72.49,0,0,0,0
 11 14 3 K=0,54.49,0,0,0,0
 4 5 K=0,49.30,0,0,0,0
 12 13 K=0,58.96,0,0,0,0
 37 K=0,360,0,0,0,0
 38 K=0,191,0,0,0,0
 21 22 K=0,145,0,0,0,0

MASSES

41 44 M=0,1430,0,0,0,0
 10 15 5 M=0,1800,0,0,0,0
 37 M=0,36000,0,0,0,0
 38 M=0,19100,0,0,0,0
 21 22 M=0,14500,0,0,0,0

FRAME

NM=5

1 A=2.24E-2 I=2.62E-3,9.552E-4 E=2.06E11 M=210
 2 A=9E-2 J=7.77E-2 I=9.7E-2,3.685E-2 M=1220
 3 A=9E-2 J=7.77E-2 I=9.7E-2,3.68E-2 M=1020
 4 A=2.24E-2 I=3.216E-6,3.216E-6
 5 A=2.24E-2 I=7.58E-6,7.58E-6
 1 1 2 M=3 LP=2,0 G=6,1,1,1
 8 1 9 M=1 LP=3,0 G=1,1,7,7
 10 9 10 M=2 LP=2,0 G=6,1,1,1
 17 43 17 M=4 LP=0,29 LR=1,0,0,0,0,1
 18 44 18 M=4 LP=0,30 LR=1,0,0,0,0,1
 19 17 19 M=4 LP=0,31
 20 18 20 M=4 LP=0,32
 21 19 21 M=4 LP=0,17 LR=0,1,0,0,0,0
 22 20 22 M=4 LP=0,18 LR=0,1,0,0,0,0
 23 41 1 M=1 LP=3,0 G=1,1,1,7
 25 9 43 M=1 LP=3,0 G=1,1,7,1
 27 4 33 M=3 LP=2,0 LR=0,0,0,0,0,1 G=1,1,1,1
 29 12 35 M=2 LP=2,0 LR=0,0,0,0,0,1 G=1,1,1,1
 31 37 38 M=5 LP=3,0

SHELL

NM=1

1 E=2.06E11 U=.3
 1 JQ=33,37,34 ETYPE=0 M=1 TH=1,1 LP=2
 2 JQ=33,35,37
 3 JQ=35,36,37
 4 JQ=34,36,37
 5 JQ=39,40,38
 6 JQ=21,23,24,25 ETYPE=1 M=1 TH=1 LP=2
 7 JQ=22,26,27,28

LOADS

21 22 L=1 F=0,30186
 43 44 L=2 F=0,-4618

TIMEH

ATYPE=0 NSTEP=734 DT=.005 NF=2
 1 0, 2 0, 3 .05,4 .05,5 .05
 6 .05,7 .05,8 .05
 NF=1 PRIN=1 NPL=4 NAM=FOR.M01
 NF=2 PRIN=1 NPL=3 NAM=RES.M01
 LC=1 NF=1 S=1 AT=0
 LC=2 NF=2 S=1 AT=0

COMBO
1 C=1,1

B.2 Saídas do Programa

\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$
\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$
\$\$ \$\$ \$\$ \$\$ \$\$ \$\$ \$\$ \$\$ \$\$ \$\$
\$\$ \$\$ \$\$ \$\$ \$\$ \$\$ \$\$ \$\$ \$\$ \$\$
\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$
\$\$ \$\$ \$\$ \$\$ \$\$ \$\$ \$\$ \$\$ \$\$ \$\$
\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$
\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$
\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$ \$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$\$

STRUCTURAL ANALYSIS PROGRAMS

VERSION 5.03

Copyright (C) 1978-1988
EDWARD L. WILSON
All rights reserved

BARDELLA S.A.

PAGE 1

PONTE ROLANTE: Analise dinamica

VIBRA4

PROGRAM:SAP90/FILE:vibra4.SOL

M O D E S H A P E S

MODE SHAPE NUMBER 1 PERIOD = 62.831852 SECONDS

DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	R(Z)
1	.002425	.000000
2	.002425	.000000
3	.002425	.000000
4	.002425	.000000
5	.002425	.000000
6	.002425	.000000
7	.002425	.000000
8	.002425	.000000
9	.002425	.000000
10	.002425	.000000
11	.002425	.000000

BARDELLA S.A.

PAGE 2

PROGRAM:GAP90/FILE:vibra4.SOL

PONTE ROLANTE:Analise dinamica

VIBRA4

M O D E S H A P E S

MODE SHAPE NUMBER 2 PERIOD = 4.215842 SECONDS

DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	R(Z)
1	-.8605E-03	.0000E+00
2	-.8605E-03	.0000E+00
3	-.8605E-03	.0000E+00
4	-.8605E-03	.0000E+00
5	-.8711E-03	.0000E+00
6	-.8711E-03	.0000E+00
7	-.8711E-03	.0000E+00
8	-.8711E-03	.0000E+00
9	.006817	.002303
10	.006817	.002303
11	.006817	.002303

BARDELLA S.A.

PONTE ROLANTE: Analise dinamica

VIBRA4

PAGE 3
PROGRAM: SAP90/FILE: vibra4.SOL

M O D E S H A P E S

MODE SHAPE NUMBER 3 PERIOD = .417753 SECONDS

DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	R(Z)
1	-.001256	.000000
2	-.001256	.000000
3	-.001256	.000000
4	-.001256	.000000
5	.005277	.000000
6	.005277	.000000
7	.005277	.000000
8	.005277	.000000
9	.1100E-04	.3802E-03
10	.1100E-04	.3802E-03
11	.1100E-04	.3802E-03

BARDELLA S.A.

PAGE 4

PONTE ROLANTE: Analise dinamica

VIBRA4

PROGRAM:SAP90/FILE:vibra4.SOL

J O I N T D I S P L A C E M E N T S

LOAD COMBINATION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	R(Z)
1	30.085204	.000000
2	30.085204	.000000
3	30.085204	.000000
4	30.085204	.000000
5	30.094951	.000000
6	30.094951	.000000
7	30.094951	.000000
8	30.094951	.000000
9	29.932749	-.045726
10	29.932749	-.045726
11	29.932749	-.045726

BARDELLA S.A.

PAGE 5
PROGRAM:SAP90/FILE:vibra4.SOL

PONTE ROLANTE:Analise dinamica

VIBRA4

R E A C T I O N S A N D A P P L I E D F O R C E S

LOAD COMBINATION 1 - FORCES "F" AND MOMENTS "M"

JOINT	F(X)	F(Y)	M(Z)
1	-.3055E-04	-.9875E-03	-.6845E-05
2	-.4593E+05	.5786E-03	.2857E+05
3	-.2579E-03	-.1050E-03	-.7761E-04
4	.8726E-04	-.2771E-03	-.7424E-04
5	.5164E+05	-.1415E-02	.1191E-03
6	-.2970E-03	.7014E-03	-.3134E-04
7	-.2579E-03	-.2581E-03	-.9973E-04
8	.4538E-03	.1044E-03	-.5213E-04
9	-5717.1543	-.2979	.0000
10	-.0003	.3082	-.0001
11	.0001	-.0101	-.0000

MODE SHAPES

MODE SHAPE NUMBER 1 PERIOD = 63.278428 SECONDS

DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
1	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
2	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
3	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
4	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
5	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
6	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
7	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
8	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
9	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
10	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
11	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
12	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
13	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
14	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
15	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
16	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
17	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
18	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
19	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
20	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
21	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
22	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
23	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
24	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
25	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
26	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
27	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
28	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
29	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
30	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
31	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
32	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
33	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
34	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
35	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
36	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
37	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
38	.000000	.002426	.000000	.000000	.000000	.000000
39	.000000	.002426	.000000	.000000	.000000	.000000
40	.000000	.002426	.000000	.000000	.000000	.000000
41	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
42	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
43	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000
44	.000000	.002427	.000000	.000000	.000000	.000000

MODE SHAPES

MODE SHAPE NUMBER 2 PERIOD = 4.217353 SECONDS

DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
1	-.6606E-07	-.8637E-03	.0000E+00	.1486E-09	.0000E+00	.2769E-06
2	-.4419E-07	-.8624E-03	.0000E+00	.9267E-09	.0000E+00	.3046E-06
3	-.2232E-07	-.8611E-03	.0000E+00	.1705E-08	.0000E+00	.2610E-06
4	-.4526E-09	-.8603E-03	.0000E+00	.2483E-08	.0000E+00	.1247E-06
5	.1542E-08	-.8602E-03	.0000E+00	.6700E-08	.0000E+00	-.1158E-06
6	.2370E-07	-.8611E-03	.0000E+00	.4603E-08	.0000E+00	-.2635E-06
7	.4587E-07	-.8624E-03	.0000E+00	.2506E-08	.0000E+00	-.3122E-06
8	.6803E-07	-.8638E-03	.0000E+00	.4092E-09	.0000E+00	-.2848E-06
9	.6592E-07	-.8637E-03	.0000E+00	.3224E-09	.0000E+00	.2764E-06
10	.4419E-07	-.8624E-03	.0000E+00	.1959E-08	.0000E+00	.3072E-06
11	.2247E-07	-.8611E-03	.0000E+00	.3596E-08	.0000E+00	.2640E-06
12	.7390E-09	-.8602E-03	.0000E+00	.5233E-08	.0000E+00	.1148E-06
13	-.1434E-08	-.8602E-03	.0000E+00	.5252E-08	.0000E+00	-.1249E-06
14	-.2302E-07	-.8612E-03	.0000E+00	.3606E-08	.0000E+00	-.2694E-06
15	-.4461E-07	-.8625E-03	.0000E+00	.1961E-08	.0000E+00	-.3097E-06
16	-.6619E-07	-.8638E-03	.0000E+00	.3161E-09	.0000E+00	-.2775E-06
17	.0000E+00	-.8662E-03	-.2488E-05	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
18	.0000E+00	-.8663E-03	-.2488E-05	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
19	.0000E+00	-.8712E-03	.2488E-05	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
20	.0000E+00	-.8713E-03	.2488E-05	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
21	.0000E+00	-.8737E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
22	.0000E+00	-.8738E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
23	.0000E+00	-.8737E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
24	.0000E+00	-.8737E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
25	.0000E+00	-.8737E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
26	.0000E+00	-.8738E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
27	.0000E+00	-.8738E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
28	.0000E+00	-.8738E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
29	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
30	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
31	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
32	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
33	.7514E-10	-.8602E-03	.0000E+00	.7394E-08	-.1417E-08	.1125E-06
34	.1133E-08	-.8602E-03	.0000E+00	.6283E-08	.1458E-08	.1126E-06
35	-.6605E-10	-.8602E-03	.0000E+00	.2813E-08	.2306E-08	.1124E-06
36	-.1157E-08	-.8602E-03	.0000E+00	.4496E-08	-.9349E-09	.1125E-06
37	-.2544E-10	-.8602E-03	.0000E+00	-.2289E-07	.2180E-08	.1125E-06
38	.000000	.006817	.000000	-.002303	.000000	.000000
39	.000000	.009120	.000000	-.002303	.000000	.000000
40	.000000	.009120	.000000	-.002303	.000000	.000000
41	.0000E+00	-.8637E-03	.0000E+00	-.7431E-10	.0000E+00	.2579E-06
42	.0000E+00	-.8638E-03	.0000E+00	-.2046E-09	.0000E+00	-.2658E-06
43	.0000E+00	-.8637E-03	.0000E+00	-.1612E-09	.0000E+00	.2571E-06
44	.0000E+00	-.8638E-03	.0000E+00	-.1580E-09	.0000E+00	-.2583E-06

MODE SHAPES

MODE SHAPE NUMBER 3 PERIOD = .483201 SECONDS

DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
1	.1379E-04	.7285E-03	.0000E+00	-.1799E-07	.0000E+00	-.5996E-04
2	.4451E-05	.4466E-03	.0000E+00	-.1165E-06	.0000E+00	-.6549E-04
3	-.4884E-05	.1840E-03	.0000E+00	-.2150E-06	.0000E+00	-.5102E-04
4	-.1422E-04	.2977E-04	.0000E+00	-.3136E-06	.0000E+00	-.1593E-04
5	-.1430E-04	-.5113E-05	.0000E+00	.1092E-05	.0000E+00	-.1598E-04
6	-.4820E-05	-.1654E-03	.0000E+00	.7500E-06	.0000E+00	-.5223E-04
7	.4665E-05	-.4399E-03	.0000E+00	.4084E-06	.0000E+00	-.6717E-04
8	.1415E-04	-.7346E-03	.0000E+00	.6669E-07	.0000E+00	-.6141E-04
9	-.1389E-04	.7365E-03	.0000E+00	-.6773E-07	.0000E+00	-.6038E-04
10	-.4456E-05	.4467E-03	.0000E+00	-.4096E-06	.0000E+00	-.6602E-04
11	.4974E-05	.1775E-03	.0000E+00	-.7514E-06	.0000E+00	-.5096E-04
12	.1440E-04	.2372E-04	.0000E+00	-.1093E-05	.0000E+00	-.1426E-04
13	.1437E-04	-.5048E-05	.0000E+00	.8448E-06	.0000E+00	-.1531E-04
14	.4795E-05	-.1654E-03	.0000E+00	.5802E-06	.0000E+00	-.5276E-04
15	-.4781E-05	-.4435E-03	.0000E+00	.3155E-06	.0000E+00	-.6814E-04
16	-.1436E-04	-.7425E-03	.0000E+00	.5082E-07	.0000E+00	-.6234E-04
17	.000000	.002004	.001264	.000000	.000000	.000000
18	.000000	-.002020	-.001275	.000000	.000000	.000000
19	.000000	.004537	-.001264	.000000	.000000	.000000
20	.000000	-.004575	.001275	.000000	.000000	.000000
21	.000000	.005804	.000000	.000000	.000000	.000000
22	.000000	-.005852	.000000	.000000	.000000	.000000
23	.000000	.005804	.000000	.000000	.000000	.000000
24	.000000	.005804	.000000	.000000	.000000	.000000
25	.000000	.005804	.000000	.000000	.000000	.000000
26	.000000	-.005852	.000000	.000000	.000000	.000000
27	.000000	-.005852	.000000	.000000	.000000	.000000
28	.000000	-.005852	.000000	.000000	.000000	.000000
29	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
30	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
31	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
32	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
33	-.1431E-04	.2558E-04	.0000E+00	-.3665E-06	.1659E-06	-.1444E-04
34	-.1436E-04	-.4636E-05	.0000E+00	.6113E-06	.1416E-06	-.1451E-04
35	.1448E-04	.2697E-04	.0000E+00	-.4448E-06	-.1249E-06	-.1430E-04
36	.1441E-04	-.4690E-05	.0000E+00	.3670E-06	-.8810E-07	-.1421E-04
37	.6538E-07	.1043E-04	.0000E+00	.7579E-08	-.7856E-07	-.1448E-04
38	.0000E+00	-.1220E-06	.0000E+00	.3160E-05	.1965E-07	.0000E+00
39	.0000E+00	-.3282E-05	.0000E+00	.3160E-05	.1965E-07	.0000E+00
40	.0000E+00	-.3282E-05	.0000E+00	.3160E-05	.1965E-07	.0000E+00
41	.0000E+00	.7285E-03	.0000E+00	.8996E-08	.0000E+00	-.5274E-04
42	.0000E+00	-.7346E-03	.0000E+00	-.3334E-07	.0000E+00	-.5419E-04
43	.0000E+00	.7372E-03	.0000E+00	.3386E-07	.0000E+00	-.5309E-04
44	.0000E+00	-.7433E-03	.0000E+00	-.2541E-07	.0000E+00	-.5493E-04

M O D E S H A P E S

MODE SHAPE NUMBER 4 PERIOD = .422679 SECONDS

DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
1	.1467E-04	-.7539E-03	.0000E+00	.3246E-07	.0000E+00	-.6151E-04
2	.000010	-.001038	.000000	.000000	.000000	-.000065
3	.000005	-.001299	.000000	.000000	.000000	-.000051
4	.000000	-.001466	.000000	.000001	.000000	-.000023
5	-.000000	-.001472	.000000	.000000	.000000	.000021
6	-.000005	-.001306	.000000	.000000	.000000	.000051
7	-.000010	-.001039	.000000	.000000	.000000	.000066
8	-.1488E-04	-.7459E-03	.0000E+00	-.4082E-08	.0000E+00	.6231E-04
9	-.1525E-04	-.7449E-03	.0000E+00	.2859E-07	.0000E+00	-.6393E-04
10	-.000010	-.001045	.000000	.000000	.000000	-.000067
11	-.000005	-.001314	.000000	.000000	.000000	-.000051
12	-.000000	-.001477	.000000	.000000	.000000	-.000020
13	.000000	-.001472	.000000	.000000	.000000	.000022
14	.000005	-.001304	.000000	.000000	.000000	.000051
15	.000010	-.001035	.000000	.000000	.000000	.000067
16	.1513E-04	-.7369E-03	.0000E+00	.2269E-08	.0000E+00	.6340E-04
17	.000000	.000762	.001504	.000000	.000000	.000000
18	.000000	.000754	.001487	.000000	.000000	.000000
19	.000000	.003775	-.001504	.000000	.000000	.000000
20	.000000	.003734	-.001487	.000000	.000000	.000000
21	.000000	.005281	.000000	.000000	.000000	.000000
22	.000000	.005224	.000000	.000000	.000000	.000000
23	.000000	.005281	.000000	.000000	.000000	.000000
24	.000000	.005281	.000000	.000000	.000000	.000000
25	.000000	.005281	.000000	.000000	.000000	.000000
26	.000000	.005224	.000000	.000000	.000000	.000000
27	.000000	.005224	.000000	.000000	.000000	.000000
28	.000000	.005224	.000000	.000000	.000000	.000000
29	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
30	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
31	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
32	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
33	.000000	-.001472	.000000	.000000	.000000	-.000022
34	-.000000	-.001472	.000000	.000000	.000000	-.000022
35	-.000000	-.001472	.000000	.000000	-.000000	-.000021
36	.000000	-.001472	.000000	.000000	.000000	-.000022
37	.000000	-.001472	.000000	.000000	.000000	-.000022
38	.0000E+00	.1319E-04	.0000E+00	-.4454E-03	.1274E-07	.0000E+00
39	.0000E+00	.4586E-03	.0000E+00	-.4454E-03	.1274E-07	.0000E+00
40	.0000E+00	.4586E-03	.0000E+00	-.4454E-03	.1274E-07	.0000E+00
41	.0000E+00	-.7539E-03	.0000E+00	-.1623E-07	.0000E+00	-.5727E-04
42	.0000E+00	-.7459E-03	.0000E+00	.2041E-08	.0000E+00	.5812E-04
43	.0000E+00	-.7440E-03	.0000E+00	-.1429E-07	.0000E+00	-.5949E-04
44	.0000E+00	-.7360E-03	.0000E+00	-.1135E-08	.0000E+00	.5903E-04

M O D E S H A P E S

MODE SHAPE NUMBER 5 PERIOD = .149746 SECONDS

DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
1	-.000093	-.005566	.000000	.000000	.000000	.000414
2	-.000010	-.003574	.000000	.000001	.000000	.000478
3	.000073	-.001578	.000000	.000001	.000000	.000404
4	.1558E-03	-.3126E-03	.0000E+00	.1412E-05	.0000E+00	.1398E-03
5	.1566E-03	.6261E-04	.0000E+00	-.9790E-05	.0000E+00	.1578E-03
6	.000059	.001510	.000000	-.000007	.000000	.000452
7	-.000018	.003790	.000000	-.000004	.000000	.000536
8	-.000106	.006069	.000000	-.000001	.000000	.000465
9	.000088	-.005565	.000000	.000001	.000000	.000394
10	.000004	-.003603	.000000	.000005	.000000	.000471
11	-.000080	-.001560	.000000	.000009	.000000	.000410
12	-.1641E-03	-.2645E-03	.0000E+00	.1353E-04	.0000E+00	.1299E-03
13	-.1634E-03	.6228E-04	.0000E+00	-.7546E-05	.0000E+00	.1560E-03
14	-.000075	.001540	.000000	-.000005	.000000	.000463
15	.000013	.003843	.000000	-.000003	.000000	.000532
16	.000101	.006066	.000000	-.000000	.000000	.000449
17	.000000	-.004001	.001560	.000000	.000000	.000000
18	.000000	.004362	-.001701	.000000	.000000	.000000
19	.000000	-.000875	-.001560	.000000	.000000	.000000
20	.000000	.000954	.001701	.000000	.000000	.000000
21	.0000E+00	.6878E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
22	.0000E+00	-.7498E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
23	.0000E+00	.6878E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
24	.0000E+00	.6878E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
25	.0000E+00	.6878E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
26	.0000E+00	-.7498E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
27	.0000E+00	-.7498E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
28	.0000E+00	-.7498E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
29	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
30	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
31	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
32	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
33	.1566E-03	-.2765E-03	.0000E+00	.3251E-05	-.1463E-05	.1237E-03
34	.1571E-03	.5835E-04	.0000E+00	-.5443E-05	-.1311E-05	.1245E-03
35	-.1648E-03	-.2922E-03	.0000E+00	.3969E-05	.1108E-05	.1224E-03
36	-.1638E-03	.5905E-04	.0000E+00	-.3343E-05	.8012E-06	.1213E-03
37	-.3727E-05	-.1086E-03	.0000E+00	-.5062E-07	.6905E-06	.1242E-03
38	.0000E+00	.1209E-06	.0000E+00	-.3259E-04	.7723E-06	.0000E+00
39	.0000E+00	.3271E-04	.0000E+00	-.3259E-04	.7723E-06	.0000E+00
40	.0000E+00	.3271E-04	.0000E+00	-.3259E-04	.7723E-06	.0000E+00
41	.000000	-.005566	.000000	.000000	.000000	.000352
42	.000000	.006070	.000000	.000000	.000000	.000401
43	.000000	-.005564	.000000	-.000000	.000000	.000331
44	.000000	.006066	.000000	.000000	.000000	.000382

MODE SHAPES

MODE SHAPE NUMBER 6 PERIOD = .129942 SECONDS

DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
1	-.000153	-.005724	.000000	-.000000	.000000	.000641
2	-.000099	-.002723	.000000	-.000002	.000000	.000706
3	-.4550E-04	.2012E-03	.0000E+00	-.3470E-05	.0000E+00	.5944E-03
4	.000008	.002177	.000000	-.000005	.000000	.000273
5	.000013	.002267	.000000	.000000	.000000	-.000235
6	.5667E-04	.4628E-03	.0000E+00	.3382E-06	.0000E+00	-.5420E-03
7	.000100	-.002286	.000000	.000000	.000000	-.000655
8	.000144	-.005141	.000000	.000000	.000000	-.000600
9	.000151	-.005722	.000000	.000000	.000000	.000634
10	.000098	-.002679	.000000	-.000000	.000000	.000708
11	.4517E-04	.3297E-03	.0000E+00	-.8560E-06	.0000E+00	.5982E-03
12	-.000008	.002311	.000000	-.000001	.000000	.000250
13	-.000013	.002268	.000000	.000000	.000000	-.000254
14	-.5474E-04	.3910E-03	.0000E+00	.4690E-07	.0000E+00	-.5532E-03
15	-.000097	-.002367	.000000	.000000	.000000	-.000646
16	-.000138	-.005141	.000000	.000000	.000000	-.000578
17	.000000	-.004162	.001557	.000000	.000000	.000000
18	.000000	-.003740	.001399	.000000	.000000	.000000
19	.000000	-.001043	-.001557	.000000	.000000	.000000
20	.000000	-.000937	-.001399	.000000	.000000	.000000
21	.0000E+00	.5168E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
22	.0000E+00	.4643E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
23	.0000E+00	.5168E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
24	.0000E+00	.5168E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
25	.0000E+00	.5168E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
26	.0000E+00	.4643E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
27	.0000E+00	.4643E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
28	.0000E+00	.4643E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
29	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
30	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
31	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
32	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
33	.000009	.002245	.000000	.000001	-.000001	.000258
34	.000013	.002267	.000000	.000000	.000001	.000259
35	-.000008	.002245	.000000	.000001	.000001	.000257
36	-.000012	.002268	.000000	-.000000	-.000001	.000259
37	.000000	.002255	.000000	-.000001	.000000	.000258
38	.0000E+00	-.1896E-05	.0000E+00	.6775E-03	-.1786E-06	.0000E+00
39	.0000E+00	-.6794E-03	.0000E+00	.6775E-03	-.1786E-06	.0000E+00
40	.0000E+00	-.6794E-03	.0000E+00	.6775E-03	-.1786E-06	.0000E+00
41	.000000	-.005725	.000000	.000000	.000000	.000595
42	.000000	-.005142	.000000	.000000	.000000	-.000562
43	.000000	-.005722	.000000	.000000	.000000	.000588
44	.000000	-.005141	.000000	.000000	.000000	-.000540

M O D E S H A P E S

MODE SHAPE NUMBER 7 PERIOD = .037667 SECONDS

DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
1	.000232	.003610	.000000	-.000014	.000000	-.000800
2	.5464E-03	.2942E-03	.0000E+00	-.7713E-04	.0000E+00	-.6671E-03
3	.000845	-.001754	.000000	-.000141	.000000	-.000205
4	.001119	-.001360	.000000	-.000204	.000000	.000356
5	.001128	.001380	.000000	-.000019	.000000	.000444
6	.000860	.002153	.000000	-.000013	.000000	-.000153
7	.5666E-03	.5341E-04	.0000E+00	-.7237E-05	.0000E+00	-.7233E-03
8	.000256	-.003721	.000000	-.000001	.000000	-.000900
9	-.000550	.003261	.000000	.000027	.000000	-.002046
10	-.000933	-.004494	.000000	.000158	.000000	-.001103
11	-.001281	-.005486	.000000	.000289	.000000	.000585
12	-.001583	-.001558	.000000	.000420	.000000	.000735
13	-.001574	.001405	.000000	-.000008	.000000	.000795
14	-.001275	.005421	.000000	-.000006	.000000	.000577
15	-.000929	.004368	.000000	-.000003	.000000	-.001115
16	-.000549	-.003399	.000000	-.000000	.000000	-.002043
17	.000000	.002445	-.000821	.000000	.000000	.000000
18	.000000	-.002548	.000856	.000000	.000000	.000000
19	.0000E+00	.7997E-03	.8212E-03	.2758E-11	.0000E+00	.0000E+00
20	.0000E+00	-.8336E-03	-.8559E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
21	.0000E+00	-.2290E-04	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
22	.0000E+00	.2387E-04	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
23	.0000E+00	-.2290E-04	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
24	.0000E+00	-.2290E-04	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
25	.0000E+00	-.2290E-04	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
26	.0000E+00	.2387E-04	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
27	.0000E+00	.2387E-04	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
28	.0000E+00	.2387E-04	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
29	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
30	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
31	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
32	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
33	.001121	-.001377	.000000	.000005	-.000004	-.000098
34	.001129	.001374	.000000	-.000006	-.000004	-.000089
35	-.001585	-.001530	.000000	.000008	.000004	-.000096
36	-.001575	.001397	.000000	-.000011	.000001	-.000108
37	-.2193E-03	.1326E-05	.0000E+00	-.8326E-07	.9576E-06	-.8753E-04
38	.0000E+00	-.5583E-09	.0000E+00	.4396E-06	.6525E-04	.0000E+00
39	.0000E+00	-.4402E-06	-.3407E-11	.4396E-06	.6525E-04	.0000E+00
40	.0000E+00	-.4402E-06	.3416E-11	.4396E-06	.6525E-04	.0000E+00
41	.000000	.003618	.000000	.000007	.000000	-.000991
42	.000000	-.003730	.000000	.000001	.000000	-.001084
43	.000000	.003268	.000000	-.000013	.000000	-.002278
44	.000000	-.003406	.000000	.000000	.000000	-.002272

MODE SHAPES

MODE SHAPE NUMBER 8 PERIOD = .036351 SECONDS

DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
1	.000223	-.001568	.000000	.000000	.000000	-.000917
2	.000157	-.004775	.000000	-.000004	.000000	-.000342
3	.000086	-.003940	.000000	-.000009	.000000	.000660
4	.1191E-04	-.5204E-03	.0000E+00	-.1375E-04	.0000E+00	.6164E-03
5	-.4805E-05	-.3614E-03	.0000E+00	.3791E-04	.0000E+00	-.5971E-03
6	-.000085	-.004031	.000000	.000026	.000000	-.000727
7	-.000163	-.005074	.000000	.000014	.000000	.000338
8	-.000235	-.001660	.000000	.000003	.000000	.000966
9	.000376	-.000809	.000000	-.000036	.000000	.001559
10	.000256	.004991	.000000	-.000218	.000000	.000688
11	.000125	.004323	.000000	-.000400	.000000	-.000863
12	-.1145E-04	-.2380E-03	.0000E+00	-.5821E-03	.0000E+00	-.7476E-03
13	-.4055E-04	-.2842E-03	.0000E+00	-.9367E-04	.0000E+00	.7953E-03
14	-.000169	.004563	.000000	-.000064	.000000	.000918
15	-.000291	.005285	.000000	-.000035	.000000	-.000726
16	-.000401	-.000860	.000000	-.000006	.000000	-.001656
17	.0000E+00	-.6067E-03	.2037E-03	.3612E-11	.0000E+00	.0000E+00
18	.0000E+00	-.6451E-03	.2165E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
19	.0000E+00	-.1987E-03	-.2037E-03	-.3658E-11	.0000E+00	.0000E+00
20	.0000E+00	-.2113E-03	-.2165E-03	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
21	.0000E+00	.5290E-05	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
22	.0000E+00	.5623E-05	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
23	.0000E+00	.5290E-05	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
24	.0000E+00	.5290E-05	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
25	.0000E+00	.5290E-05	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
26	.0000E+00	.5623E-05	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
27	.0000E+00	.5623E-05	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
28	.0000E+00	.5623E-05	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
29	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
30	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
31	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
32	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
33	.1043E-04	-.3713E-03	.0000E+00	.8456E-05	.3918E-05	.5302E-03
34	-.3431E-05	-.3436E-03	.0000E+00	.2891E-04	-.4914E-05	.5182E-03
35	-.1269E-04	-.3509E-03	.0000E+00	.1519E-04	.2567E-05	.5138E-03
36	-.3744E-04	-.3192E-03	.0000E+00	-.4009E-04	-.1152E-04	.5327E-03
37	-.1066E-04	-.3494E-03	.0000E+00	-.9875E-06	-.6678E-07	.5242E-03
38	.0000E+00	.2196E-07	.0000E+00	-.1043E-03	.3229E-05	.0000E+00
39	.0000E+00	.1043E-03	.0000E+00	-.1043E-03	.3229E-05	.0000E+00
40	.0000E+00	.1043E-03	.0000E+00	-.1043E-03	.3229E-05	.0000E+00
41	.000000	-.001572	.000000	.000000	.000000	-.000880
42	.000000	-.001664	.000000	-.000001	.000000	.000927
43	.000000	-.000811	.000000	.000018	.000000	.001477
44	.000000	-.000862	.000000	.000003	.000000	-.001580

J O I N T D I S P L A C E M E N T S

LOAD COMBINATION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
1	.000017	30.555416	.000000	.000000	.000000	-.000073
2	.000012	30.555080	.000000	.000000	.000000	-.000077
3	.000006	30.554773	.000000	.000000	.000000	-.000060
4	.000000	30.554576	.000000	.000001	.000000	-.000027
5	-.000000	30.554569	.000000	-.000000	.000000	.000025
6	-.000006	30.554767	.000000	-.000000	.000000	.000061
7	-.000012	30.555085	.000000	.000000	.000000	.000078
8	-.000018	30.555435	.000000	.000000	.000000	.000074
9	-.000018	30.555427	.000000	.000000	.000000	-.000076
10	-.000012	30.555073	.000000	.000000	.000000	-.000079
11	-.000006	30.554755	.000000	.000000	.000000	-.000060
12	-.000000	30.554562	.000000	.000000	.000000	-.000024
13	.000000	30.554569	.000000	.000000	.000000	.000026
14	.000006	30.554769	.000000	.000000	.000000	.000061
15	.000012	30.555090	.000000	.000000	.000000	.000079
16	.000018	30.555446	.000000	.000000	.000000	.000076
17	.000000	30.557721	.002289	.000000	.000000	.000000
18	.000000	30.557740	.002289	.000000	.000000	.000000
19	.000000	30.562306	-.002289	.000000	.000000	.000000
20	.000000	30.562325	-.002289	.000000	.000000	.000000
21	.000000	30.564599	.000000	.000000	.000000	.000000
22	.000000	30.564618	.000000	.000000	.000000	.000000
23	.000000	30.564599	.000000	.000000	.000000	.000000
24	.000000	30.564599	.000000	.000000	.000000	.000000
25	.000000	30.564599	.000000	.000000	.000000	.000000
26	.000000	30.564618	.000000	.000000	.000000	.000000
27	.000000	30.564618	.000000	.000000	.000000	.000000
28	.000000	30.564618	.000000	.000000	.000000	.000000
29	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
30	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
31	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
32	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
33	.000000	30.554569	.000000	-.000000	.000000	-.000025
34	-.000000	30.554569	.000000	-.000000	-.000000	-.000025
35	-.000000	30.554569	.000000	.000000	-.000000	-.000025
36	.000000	30.554569	.000000	.000000	.000000	-.000025
37	.000000	30.554569	.000000	.000001	.000000	-.000025
38	.000000	30.399778	.000000	.046437	.000000	.000000
39	.000000	30.353340	.000000	.046437	.000000	.000000
40	.000000	30.353340	.000000	.046437	.000000	.000000
41	.000000	30.555416	.000000	.000000	.000000	-.000068
42	.000000	30.555435	.000000	.000000	.000000	.000069
43	.000000	30.555428	.000000	.000000	.000000	-.000070
44	.000000	30.555447	.000000	.000000	.000000	.000071

REACTIONS AND APPLIED FORCES

LOAD COMBINATION 1 - FORCES "F" AND MOMENTS "M"

JOINT	F(X)	F(Y)	F(Z)	M(X)	M(Y)	M(Z)
1	.0000	-876.9405	-836.1599	.0000	.0000	.0000
2	.0000	-1392.0895	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0000	-1392.0755	.0000	.0000	.0000	.0000
4	-.1384E-06	-.1506E+04	.1046E+05	.6883E-03	-.1150E+05	.1605E-04
5	.1691E-08	-.1506E+04	.0000E+00	-.1286E-02	.1040E+05	-.1428E-04
6	.0000	-1392.0752	.0000	.0000	.0000	-.0000
7	.0000	-1392.0897	.0000	.0000	.0000	.0000
8	.0000	-876.9410	335.4834	.0000	.0000	.0000
9	.0000	-1013.2180	678.0386	.0000	.0000	.0000
10	.0000	-2214.9372	.0000	.0000	.0000	.0000
11	.0000	-1664.9286	.0000	.0000	.0000	.0000
12	.2710E-06	-.1802E+04	.1037E+05	-.6945E-03	.1248E+05	-.1084E-03
13	.7053E-09	-.1801E+04	.0000E+00	-.6938E-03	-.1025E+05	-.2752E-04
14	.0000	-1664.9294	.0000	.0000	.0000	-.0000
15	-.0000	-2214.9385	.0000	.0000	.0000	.0000
16	.0000	-1013.2185	-93.8659	.0000	.0000	.0000
17	-395.4118	.0000	-.0000	.0000	-65.9020	-65.9020
18	396.6426	.0000	-.0000	.0000	66.1071	66.1071
19	.0000E+00	-.1103E-04	.2561E-05	-.1073E-07	.0000E+00	.0000E+00
20	.0000E+00	-.2624E-04	.7979E-05	-.3549E-07	.0000E+00	.0000E+00
21	.0000E+00	.2575E+05	.2871E-02	-.1977E-02	.0000E+00	.0000E+00
22	.0000E+00	.2575E+05	.3208E-02	-.2023E-02	.0000E+00	.0000E+00
23	.0000E+00	.2625E-03	-.1547E-03	.8474E-04	.0000E+00	.0000E+00
24	.0000E+00	-.1692E-03	-.2922E-03	.1330E-03	.0000E+00	.0000E+00
25	.0000E+00	-.4204E-03	.3949E-03	.1119E-03	.0000E+00	.0000E+00
26	.0000E+00	.6503E-03	-.8157E-04	.1606E-03	.0000E+00	.0000E+00
27	.0000E+00	-.4786E-04	-.1212E-03	.2017E-03	.0000E+00	.0000E+00
28	.0000E+00	.8643E-05	-.1905E-03	.1119E-03	.0000E+00	.0000E+00
29	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
30	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
31	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
32	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
33	-.0007	.0011	-7481.2612	-.0005	.0000	.0008
34	.0009	.0005	3189.7529	-.0022	.0000	-.0009
35	.1143E-02	.4200E-02	-.1133E+05	-.2915E-03	.1557E-04	-.3940E-03
36	-.0003	-.0076	-827.0716	.0003	.0000	-.0004
37	-.2870E-02	-.1100E+05	-.4379E+04	.3595E-06	.3321E-06	.2490E-03
38	.0126	-5806.3577	.0000	-.0001	.0000	.0382
39	.0000	-.0009	.0000	-.0001	.0000	.0159
40	.0000	.0005	.0000	-.0000	.0000	.0471
41	.3145E+05	-.4369E+03	.8435E+03	.0000E+00	.0000E+00	.1635E-10
42	-.3159E+05	-.4369E+03	-.3376E+03	.0000E+00	.0000E+00	-.5885E-11
43	-.3148E+05	-.5055E+04	-.6854E+03	.0000E+00	-.1318E+03	-.3066E-10
44	.3162E+05	-.5055E+04	.9595E+02	.6149E-09	.1322E+03	.2294E-07