

MARCOS CLEMENTE

MODELO NUMÉRICO DE CÁLCULO DA INTEGRAL J
PARA ANÁLISE DE FRATURAS

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Mestre em
Engenharia Mecânica.

SÃO PAULO

1994

MARCOS CLEMENTE

ENGENHEIRO MECÂNICO, ESCOLA POLITÉCNICA DA USP, 1984

**MODELO NUMÉRICO DE CÁLCULO DA INTEGRAL J
PARA ANÁLISE DE FRATURAS**

**Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Mestre em
Engenharia Mecânica.**

ORIENTADOR : PROF.DR.EDISON GONÇALVES, DEPTO.ENG.MECÂNICA

SÃO PAULO, 1994

DEDICATÓRIA

Aos meus pais,

peessoas de quem sempre me sentirei devedor. A sua riqueza de princípios,
sentimentos de amizade e companheirismo serão minha maior herança.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Edison Gonçalves pela sua incansável orientação e incentivo. A sua objetividade e senso prático me influenciaram profundamente.

À Metal Leve S.A., cujo suporte e recursos viabilizaram esse trabalho. Agradeço às colaborações dos colegas e amigos Oswaldo Urbani Filho, Cláudio Dutenheffner e Keiji Utsonomia, que iluminaram alguns dos túneis encontrados no percurso do trabalho. Ao Sr. Georg Daxer, cujo apoio foi fundamental para a execução do mesmo.

Finalmente, quero agradecer à minha esposa Mara Cristina, pelo seu inesgotável companheirismo, paciência e compreensão. Seu apoio moral constante muito contribuiu para a conclusão desse trabalho.

RESUMO

Este trabalho apresenta um procedimento de análise de fraturas, utilizando o método dos elementos finitos para o cálculo numérico da integral J de estruturas contendo trincas.

São apresentados conceitos teóricos da integral J , a sua aplicabilidade no dimensionamento de estruturas trincadas tanto em regime LEFM, como com elevados níveis de plastificação à frente da trinca (EPFM), bem como as limitações para sua utilização. É feita uma descrição da norma ASTM E813-89 e seus procedimentos para obtenção do chamado valor crítico da integral J (J_{Ic}). A seguir, é apresentado o modelo numérico para cálculo da integral J , e o programa desenvolvido em linguagem FORTRAN 77, que pode ser adaptado para qualquer programa de elementos finitos. Os resultados obtidos com o código são comparados a soluções obtidas pelo módulo de Mecânica de Fraturas do programa ANSYS® Revisão 4.4A.

ABSTRACT

This work presents a code for the analysis of cracked structures, utilizing the finite elements method for the calculation of the J-integral parameter.

Theoretical concepts related to the J-integral are presented, together with its application for the design of cracked structures and components at either LEFM or EPFM (that have high levels of material yielding) conditions. Description is made of the ASTM Standard E813-89 for the determination of the so called critical J-integral (J_{Ic}). The steps for the development of the numerical model are described, resulting on the code written in FORTRAN 77 language, that calculates the J-integral and can be adapted to any finite element code. Results obtained with the developed code are compared to solutions from the ANSYS®4.4A Fracture Mechanics capabilities.

ÍNDICE

Dedicatória	II
Agradecimentos	III
Resumo	IV
Abstract	V
Índice	VI
Lista de Figuras	IX
Lista de Tabelas	XIV
Lista de Símbolos	XVII
1 Introdução	1
1.1 Aspectos Gerais	1
1.2 Revisão Bibliográfica	3
1.3 Escopo do Trabalho	13
2 Conceitos Teóricos da Integral \int	16
2.1 Dedução da Equação da Integral \int	20
2.2 Aplicação da Integral \int em Estruturas Trincadas	26
2.3 Limitações do Uso da Integral \int	30
3 Normas e Ensaios	34
3.1 Tipos de Ensaios e Corpos de Prova	34
3.2 Método para Determinação de \int_{lc}	38
3.3 Determinação de \int_{lc}	40

3.4	Determinação de J_{Ic} Utilizando-se Um Único Corpo de Prova	47
3.5	Valores de J_{Ic}	50
4	O Modelo Numérico	52
4.1	Desenvolvimento do Modelo Numérico	56
4.1.1	Derivadas Cartesianas dos Deslocamentos	68
4.1.2	Derivada $(\partial y / \partial \alpha)$	70
4.1.3	Componentes do Versor \bar{n} Normal ao Contorno Γ	71
4.2	Estrutura do Programa de Cálculo da Integral J	71
4.2.1	Programa Gerenciador PRINC	71
4.2.2	Subrotina INPUT	72
4.2.3	Outros Dados de Entrada	74
4.2.4	Subrotina DERST	74
4.2.5	Subrotina JACOB	76
4.2.6	Subrotina DCART	76
4.2.7	Subrotina DDC	76
4.2.8	Subrotina VETN	77
4.2.9	Subrotina CALC	77
4.2.10	Subrotina SELO	77
4.2.11	Subrotina TELA	78
4.2.12	Subrotina IMPRES	78
5	Resultados	79
5.1	Introdução	79
5.2	Alguns Procedimentos Para Execução da Análise	80

5.2.1	Pré-Processamento	81
5.2.2	Pós-Processamento	85
5.3	Análise de Estrutura Isenta de Trincas	87
5.4	Placa Plana Trincada - LEFM	92
5.4.1	Solução Analítica	94
5.4.2	Solução Pelo Programa PRINC	97
5.4.3	Solução Pelo ANSYS	104
5.4.4	Comparação dos Resultados Obtidos Pelos Programas PRINC e ANSYS - LEFM	105
5.4.5	Influência do Refinamento da Malha de Elementos Finitos	106
5.5	Placa Plana Trincada - EPFM	112
5.5.1	Solução Pelo Programa PRINC	114
5.5.2	Solução Pelo ANSYS	122
5.5.3	Comparação Entre Resultados dos Programas PRINC e ANSYS	123
6	Conclusões e Recomendações	127
6.1	Comentários Gerais	127
6.2	Restrições do Modelo	128
6.3	Aplicações Práticas	130
6.4	Conclusões	131
6.5	Recomendações	136
	Referências Bibliográficas	140
	Apêndice A Método da Quadratura de Gauss para Integração Numérica	
	Apêndice B Listagens do Programa PRINC.FOR, Subrotinas e Macros	

LISTA DE FIGURAS

FIGURA	PÁGINA
1.1	Interpretação da integral J , conforme equação (1.7). 7
1.2	Representação esquemática do procedimento desenvolvido por BEGLEY e LANDES[26], retirada da ref. [25]. 10
1.3	Curva de J vs. Δa , mostrando a definição de $J=J_c$ onde a curva de arredondamento intercepta a curva de resistência.[9] 11
1.4	Resultados experimentais de PARIS, correlacionando o <i>tearing modulus</i> com a propagação da trinca.[31]. 12
1.5	Modos básicos de fratura 15
2.1	Validade de aplicação da Mecânica de Fraturas em regime elástico linear, em função da tenacidade do material. 18
2.2	Gráfico da variação da energia total U em função do comprimento da trinca a 21
2.3	Placa plana trincada, submetida a um carregamento externo. Simbologia para dedução da equação (2.25). 23
2.4	Contornos ao redor da ponta da trinca para demonstração da independência da integral J do contorno Γ escolhido. 26
2.5	Condições de semelhança para aplicação de K_{Ic} e J_{Ic} 31
2.6	Aplicação da variação da integral J para cálculo da propagação de trinca por fadiga.[13] 33
3.1	Dimensões de um tipo de corpo de prova compacto para obtenção de J_{Ic} , por ensaio de tração.[14] 35
3.2	Dimensões de corpo de prova para obtenção de J_{Ic} , por ensaio de flexão pura. 35
3.3	Envelopes para entalhes nucleadores de trinca para ensaios de J_{Ic} 36

3.4	Arranjo experimental para ensaio do corpo de prova por flexão.	39
3.5	Gráfico Carga versus Deslocamento do ponto de aplicação da carga no ensaio para determinação de J_{Ic}	39
3.6	Gráfico Carga versus Deslocamento para vários corpos de prova.	41
3.7	Esquema para medição do crescimento Δa da trinca nos ensaios para determinação de J_{Ic} com vários corpos de prova.	42
3.8	Gráfico da Integral J versus Crescimento Δa das trincas dos diversos corpos de prova.	42
3.9	Efeito do crescimento da trinca por arredondamento ("blunting") da ponta da mesma, antes do seu crescimento real.	44
3.10	Crescimento efetivo da trinca com o arredondamento de sua ponta, em função do COD.	44
3.11	Região de validade dos dados do gráfico J versus Δa	47
3.12	Definição de regiões para requisitos de espaçamento dos dados experimentais no gráfico J versus Δa	48
3.13	Gráfico de Carga versus Deslocamento do ponto de aplicação da carga, para determinação de J_{Ic} com um único corpo de prova.	48
3.14	Determinação de J_{Ic} do aço HY-130, utilizando-se diferentes procedimentos de testes [4]	51
4.1	Elementos de trinca isoparamétricos bidimensionais : a) quadrilátero de 8 nós (STIF 82, 83, 93) b) triângulo de 6 nós (STIF 2) c) triângulo gerado pela degeneração de um quadrilátero de 8 nós (STIF 82, 83, 93)	53
4.2	Definição do elemento isoparamétrico quadrangular de 8 nós, bidimensional, STIF 82, do programa ANSYS® 4.4A.	57
4.3	Contorno para cálculo da integral J , passando por $s = \text{constante}$	59
4.4	Topologia da malha de elementos finitos necessária para	

	utilização do programa PRINC para cálculo da integral J.	60
5.1	Representação esquemática de placa finita, isenta de trincas, submetida a carregamento de tração, para verificação do programa PRINC.	88
5.2	Modelo de elementos finitos para a placa plana isenta de trincas, submetida a tração, mostrada na figura 5.1.	89
5.3	Representação dos contornos utilizados para cálculo da integral J através do programa PRINC (placa isenta de trincas). Os números correspondem à identificação dos elementos contidos nos contornos.	91
5.4	Modelo de elementos finitos da placa trincada ilustrada na figura 5.7, gerado pelo macro ARANHA.DAT.	93
5.5	Contornos utilizados para cálculo da integral J através do programa ANSYS (macro JIN2). Os números correspondem à identificação dos nós contidos nos contornos.	98
5.6	Representação dos contornos de integração para cálculo da integral J para a placa trincada, pelo programa PRINC.	99
5.7	Ilustração da placa finita contendo uma trinca passante em uma de suas laterais (EPD).	94
5.8	Modelo de elementos finitos da placa plana trincada, com malha de elementos finitos pouco refinada.	108
5.9	Modelo de elementos finitos mostrando os números dos nós utilizados nos cálculos da tabela 5.10.	110
5.10	Modelo de elementos finitos mostrando os números dos elementos utilizados nos cálculos da tabela 5.11.	111
5.11	Curva tensão vs. deformação adotada para análise de material em regime EPFM (modelo chamado bi-linear do ANSYS).	113
5.12	Representação dos contornos de integração para cálculo da integral J para a placa trincada, pelo programa PRINC, em regime EPFM.	115

5.13	Representação dos contornos de integração para cálculo da integral J para a placa trincada, pelo programa ANSYS, em regime EPFM.	124
5.14	Valores de integral J obtidos pelos programas PRINC e ANSYS, em função da distância média do contorno de integração à ponta da trinca. (Placa plana trincada, EPFM).	126
6.1	Integral J em função da tensão aplicada na placa da figura 5.7, para EPFM (PRINC) e LEFM (equação (4.3)).	135
6.2	Contorno de integração para cálculo de J, ao longo de elementos em que $s=\text{constante}$, outros em que $t=\text{constante}$ e elementos de canto nos quais o contorno muda de direção.	138
A.1	Integração numérica unidimensional.	A-2
A.2	Exemplo dos pontos de integração de Gauss para elementos bi-dimensionais quadrangulares, integração 3×3 . [32]	A-6
B.01	Fluxograma do programa gerenciador PRINC, em linguagem LEAL.	B-2
B.02	Listagem do programa gerenciador PRINC	B-11
B.03	Listagem do macro ARANHA, utilizado para geração parametrizada da malha de elementos finitos de estrutura em LEFM.	B-12
B.04	Listagem do macro ARAEPFM, utilizado para geração parametrizada da malha de elementos finitos de estrutura com material em regime EPFM. Utiliza-se o modelo bi-linear para o comportamento elasto-plástico do material.	B-13
B.05	Listagem do programa ARQUIVOS.COM, utilizado para leitura dos arquivos de coordenadas e deslocamentos nodais, bem como de tensões nos pontos de integração de Gauss, gerados pelo processamento do programa ANSYS.	B-14

B.06 Listagem do macro JIN2, disponível no módulo de Mecânica de Fraturas do ANSYS4.4A, válido para LEFM. B-15

B.07 Listagem do macro JIN1, disponível no módulo de Mecânica de Fraturas do ANSYS4.4A, válido para EPFM. B-16

LISTA DE TABELAS

TABELA	PÁGINA
3.1	Propriedades de alguns materiais retiradas da literatura. 50
4.1	Valores das coordenadas s_i e t_j da equação (4.4), válida para elemento isoparamétrico bi-dimensional com 8 nós (STIF 82). 58
5.1	Características e opções para utilização do elemento STIF82 (isoparamétrico, bi-dimensional, 8 nós). 84
5.2	Números dos itens correspondentes às tensões nos pontos de Gauss, conforme definição do programa ANSYS. Devem ser empregados quando da utilização do comando STRESS, para geração de arquivos com as tensões anteriores. 87
5.3	Resultados para a integral \underline{J} , obtidos a partir da utilização do programa PRINC, para uma estrutura isenta de trincas (valor teórico de \underline{J} é nulo). 90
5.4	Valores da integral J para o contorno de integração nº 1, mostrado na figura 5.6. 100
5.5	Valores da integral J para o contorno de integração nº 2, mostrado na figura 5.6. 101
5.6	Valores da integral J para o contorno de integração nº 3, mostrado na figura 5.6. 102
5.7	Valores da integral J para o contorno de integração nº 4, mostrado na figura 5.6. 103
5.8	Resultados da integral \underline{J} obtidos a partir do macro JIN2, para a placa plana com trinca passante em uma de suas laterais. Os números dos contornos referem-se àqueles mostrados na figura 5.5. 105
5.9	Comparação entre as características das malhas de elementos finitos com diferentes refinamentos. 106

5.10	Valores da integral J obtidos a partir do programa ANSYS, para o modelo com menor refinamento de malha, ilustrado na figura 5.8. A numeração dos nós corresponde àquela mostrada na figura 5.9.	109
5.11	Valores da integral J obtidos a partir do programa PRINC, para o modelo com menor refinamento de malha, ilustrado na figura 5.8. A numeração dos elementos corresponde àquela mostrada na figura 5.9.	109
5.12	Valores da integral \underline{J} para o contorno de integração nº 1, mostrado na figura 5.12, regime EPFM.	116
5.13	Valores da integral \underline{J} para o contorno de integração nº 2, mostrado na figura 5.12, regime EPFM.	117
5.14	Valores da integral \underline{J} para o contorno de integração nº 3, mostrado na figura 5.12, regime EPFM.	118
5.15	Valores da integral \underline{J} para o contorno de integração nº 4, mostrado na figura 5.12, regime EPFM.	119
5.16	Valores da integral \underline{J} para o contorno de integração nº 5, mostrado na figura 5.12, regime EPFM.	120
5.17	Valores da integral \underline{J} para o contorno de integração nº 6, mostrado na figura 5.12, regime EPFM.	121
5.18	Resultados da integral J obtidos a partir do macro JIN1, para a placa plana com trinca passante, regime EPFM.	123
5.19	Desvios entre os resultados obtidos para a integral J utilizando-se os programas ANSYS e PRINC.	125
6.1	Valores da integral J obtidos pelo programa PRINC, para diferentes carregamentos da placa plana trincada.	133
6.2	Valores da integral J calculados a partir da equação (4.3), válida apenas para regime LEFM.	134
6.3	Comparação entre os valores da integral J obtida pelo programa PRINC em EPFM, e pela equação (4.3), válida para LEFM apenas, para a placa plana da figura 5.7.	135

A.1.1 Valores dos pontos de integração de Gauss e respectivos
coeficientes.[32] A-4

LISTA DE SÍMBOLOS

A	:	área sob a curva carga versus deslocamento do ponto de aplicação da carga no ensaio de J_{Ic}
\bar{A}	:	vetor tangente à curva \underline{s} constante
a	:	semi-comprimento da trinca
a_c	:	valor crítico de \underline{a}
\bar{B}	:	vetor tangente à curva \underline{t} constante
b	:	largura da estrutura remanescente à frente da trinca
B	:	espessura do corpo de prova nos ensaios de J_{Ic}
\bar{C}	:	vetor normal ao plano do elemento finito bi-dimensional
COD	:	abertura da trinca (do inglês "crack opening displacement")
CTOD	:	abertura da ponta da trinca (do inglês "crack tip opening displacement")
\bar{d}	:	vetor de deslocamentos
ds	:	elemento do contorno de integração $\underline{\Gamma}$
\bar{D}	:	vetor normal ao contorno de integração Γ
E	:	Módulo de Elasticidade ou de Young do material
EPFM	:	Mecânica de Fraturas em regime elasto-plástico (do inglês "Elasto-Plastic Fracture Mechanics")
ΔF	:	trabalho executado por esforços externos em uma estrutura
G	:	taxa de liberação de energia
G_I	:	valor de \underline{G} para modo I de fratura
G_c	:	valor crítico de \underline{G}

J	:	integral \underline{J}
J_I	:	integral \underline{J} para o modo \underline{I} de fratura
J_{Ic}	:	valor crítico da integral \underline{J} para o modo \underline{I} de fratura
JB	:	operador jacobiano
JB_{ij}	:	componente i, j do operador jacobiano
K	:	fator de intensificação de tensões
K_I	:	valor de \underline{K} para modo \underline{I} de fratura
K_{Ic}	:	valor crítico de \underline{K} para modo \underline{I} de fratura
LEFM:		Mecânica de Fraturas em regime elástico linear (do inglês "Linear Elastic Fracture Mechanics")
N_i	:	função de interpolação do nó i de um elemento finito
\bar{n}	:	versor normal à curva $s=\text{constante}$
n	:	expoente de encruamento do material
n_x	:	componente x do versor \bar{n}
n_y	:	componente y do versor \bar{n}
P	:	razão entre a carga aplicada e a espessura do corpo de prova, no ensaio de J_{Ic}
r	:	coordenada radial do sistema de coordenadas polares
s	:	coordenada normalizada
s_i	:	coordenada s do nó i
t	:	coordenada normalizada
t_i	:	coordenada t do nó i
\bar{T}	:	esforço atuante ao longo do contorno de integração $\underline{\Gamma}$
u	:	deslocamento na direção x

u_i	:	deslocamento \underline{u} do nó \underline{i}
U	:	energia total contida em uma estrutura
U_0	:	energia de deformação elástica da estrutura <u>sem</u> trinca
U_a	:	variação da energia de deformação elástica causada pela presença de uma trinca
U_s	:	variação da energia superficial causada pela formação das superfícies da trinca
v	:	deslocamento na direção \underline{y}
v_i	:	deslocamento do nó \underline{i} na direção \underline{y}
W	:	densidade de energia de deformação
W	:	largura do corpo de prova no ensaio de J_{Ic}
W_q	:	coeficiente da quadratura de Gauss correspondente ao ponto de Gauss q
δ	:	deslocamento do ponto de aplicação da carga no ensaio de J_{Ic}
Γ	:	contorno de integração para cálculo da integral \underline{J}
ν	:	coeficiente de Poisson do material
μ	:	módulo de cisalhamento do material
σ	:	tensão
$\sigma_{0,2}$:	tensão correspondente à deformação 0,2%
σ_c	:	tensão crítica
σ_y	:	tensão de escoamento
σ_{ij}	:	tensão atuando no plano definido pela normal \underline{i} , na direção \underline{j}
σ_Y	:	tensão de escoamento efetiva

- σ_{UTS} : máxima tensão obtida durante ensaio de tração do material
- ϵ : deformação
- ϵ_{ij} : deformação no plano definido pela normal \underline{i} , na direção \underline{j}
- ϵ_Y : deformação correspondente à tensão σ_Y

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Aspectos Gerais

Após a 2ª Guerra Mundial, aumentou consideravelmente o uso de materiais de maior resistência mecânica visando-se, em geral, a redução de peso das estruturas. Simultaneamente, desenvolveram-se métodos de análise de tensões mais poderosos, entre eles o método dos elementos finitos, que permitiram a diminuição dos fatores de segurança empregados no dimensionamento estrutural, com reduções adicionais de peso. Consequentemente, as estruturas utilizando materiais de alta resistência normalmente possuem reduzidas margens de segurança, fazendo com que as tensões de operação possam ser suficientemente elevadas para induzir a propagação de trincas, especialmente se estiverem presentes defeitos ou concentradores de tensão. Além disso, os materiais de alta resistência têm como característica uma baixa tenacidade à fratura (resistência à propagação de trincas), muitas vezes agravada por um meio ambiente agressivo, o que faz com que a presença de trincas de dimensões reduzidas possa ocasionar a falha dessas estruturas em níveis de tensão muito abaixo das máximas tensões de serviço para as quais elas foram dimensionadas. A ocorrência desse tipo de falhas em materiais de alta resistência induziu o desenvolvimento da Mecânica de Fraturas.

A avaliação do comportamento de uma trinca com relação à sua propagação em uma estrutura com determinados material, carregamento e geometria, é feita através de parâmetros da Mecânica de Fraturas.

Dentre esses parâmetros, podem ser citados o Fator de Intensificação de Tensões K , o C.O.D. (do inglês "Crack Opening Displacement"), e os parâmetros baseados em conceitos energéticos: a Taxa de Liberação de Energia G e a Integral J .

A partir do campo de tensões da estrutura trincada, que pode ser obtido, por exemplo, por uma análise de elementos finitos, calculam-se os parâmetros anteriores.

A comparação desses parâmetros com os chamados valores críticos característicos do material (por exemplo, K_c , J_c), permite avaliar se ocorrerá ou não propagação da trinca.

Em função das dimensões da zona de material plastificado à frente da trinca, a análise poderá ser no regime elástico linear (daqui por diante representado pela sigla LEFM, do inglês "Linear Elastic Fracture Mechanics"), ou no regime elasto-plástico (representado pela sigla EPFM, do inglês "Elasto-Plastic Fracture Mechanics").

Os parâmetros utilizados na LEFM são K e G , enquanto que COD, CTOD e a integral J são empregados na EPFM.

1.2 Revisão Bibliográfica

Embora os maiores avanços na Mecânica de Fraturas tenham ocorrido nas últimas três décadas, uma de suas equações básicas, envolvendo conceitos energéticos, foi estabelecida por GRIFFITH [1], em 1921. Griffith, ao estudar uma placa com dimensões infinitas, de material frágil, com uma trinca passante transversal, afirmou que ocorreria propagação da trinca se a diminuição da energia elástica de deformação liberada com o seu crescimento fosse suficiente para suprir a energia necessária para a criação da superfície da trinca (energia superficial). As equações derivadas por Griffith, baseadas nos cálculos de campo de tensões para um defeito elíptico desenvolvidos por INGLIS [1] em 1913, foram por ele confirmadas em experimentos com vidro. HERTZBERG [2] considera essa concordância obtida por Griffith como sendo fortuita, já que Griffith não considerou as irreversibilidades previstas na Segunda Lei da Termodinâmica quando da conversão da energia liberada na fratura em energia superficial da trinca sendo gerada e plastificação do material à frente da trinca (processo irreversível). Os valores de resistência à fratura do vidro utilizados por Griffith também foram cerca de três vezes inferiores a resultados obtidos recentemente. De qualquer forma, os resultados de seus estudos e premissas representaram uma considerável contribuição à literatura sobre fratura.

Em 1950 OROWAN [2] propôs uma modificação na equação de Griffith, para considerar o efeito de deformação plástica que ocorre na ponta de trinca em materiais mais dúcteis que o vidro, como os metais. Essa correção considera o trabalho necessário para que ocorra a plastificação do material à frente da trinca que se propaga.

Simultaneamente, IRWIN [2] também estudou a aplicação da relação de Griffith para materiais com capacidade de correção de Orowan, acrescentando um termo de energia de deformação plástica à energia superficial da trinca. Irwin optou em criar o parâmetro \underline{G} , que é a chamada taxa de liberação de energia, dado por:

$$G = \frac{\partial U}{\partial a} \quad (1.1)$$

Irwin mostrou que:

$$\sigma = \sqrt{\frac{E \cdot G}{\pi \cdot a}} \quad (1.2)$$

que é uma das mais importantes relações da Mecânica de Fraturas. Na iminência de propagação instável da trinca, o valor de \underline{G} alcança o valor crítico \underline{G}_c , que pode ser considerado um parâmetro do material.

Para os casos em que ocorre apreciável plastificação na ponta da trinca, porém, o valor de \underline{G} não pode ser determinado pelo campo de tensões elásticas, podendo ser consideravelmente afetado pela zona plastificada na ponta da trinca, conforme FORMAN [1].

ESHELBY [1] definiu uma série de integrais de contorno que são independentes do caminho de integração escolhido, baseado no teorema de conservação de energia. Uma dessas integrais em forma bi-dimensional, pode ser escrita como:

$$J = \oint_{\Gamma} \left(W \cdot dy - \bar{T} \cdot \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} ds \right) \quad (1.3)$$

sendo :

$$W = W(x, y) = W(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij} .$$

A aplicação dessa equação a problemas de trincas foi feita em 1968 por CHEREPANOV [1] e RICE [3], independentemente, originando-se o conceito de integral J . Uma vez que a origem da equação (1.3) é o teorema de conservação de energia, a integral J constitui-se num parâmetro energético.

Na referência [3], RICE discute a dificuldade então existente para a determinação das tensões presentes próximas à ponta de entalhes e trincas, particularmente em materiais de comportamento não linear. A fim exatamente de contornar essa situação, RICE abordou o problema identificando uma integral de contorno que possuísse o mesmo valor para todos os contornos circundando a ponta de entalhes ou trincas, originando-se o conceito da integral J . RICE demonstrou a independência do valor de J do contorno adotado, para uma determinada estrutura, conforme mostrado no Capítulo 2. Partindo-se dessa independência, RICE propôs a adoção de um contorno de integração Γ tal que o mesmo coincidissem com o contorno da ponta de um entalhe, ou, no limite, de uma trinca (Γ pode ser tão pequeno quanto se queira). Nessas condições, o valor de J depende apenas do campo de tensões e deformações localizado na ponta da trinca, já que o valor de T na equação (1.3) anula-se, resultando:

$$J = \int_{\Gamma} W \, dy \quad (1.4)$$

RICE destaca que a utilidade do método reside no fato de que a partir da escolha de contornos de integração convenientes, o cálculo de J é facilmente executado, sendo representativo das condições existentes à frente da trinca, conforme equação (1.4). RICE [3] desenvolveu ainda uma relação entre o fator de intensificação de tensões K_I e a integral J , conforme equação (1.5).

$$J = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 \quad (1.5)$$

Uma vez que o parâmetro K_I controla o comportamento de trincas em estruturas em regime LEFM, o mesmo pode ser dito da integral J . Para carregamentos mais complexos, a integral J relaciona-se aos fatores de intensificação de tensões K_I , K_{II} e K_{III} conforme a equação (1.6), reproduzida da referência [3].

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (1.6)$$

RICE [3] mostrou ainda que a integral J pode ser relacionada à variação da energia potencial da estrutura com o comprimento da trinca. Conforme apresentado mais detalhadamente no Capítulo 2, pode-se escrever a equação (1.7), cuja interpretação física está mostrada na figura 1.1, retirada da referência [25].

$$J = -\frac{1}{B} \frac{\partial U_p}{\partial a} \quad (1.7)$$

A partir da equação (1.7), BEGLEY e LANDES [26], desenvolveram e executaram uma série de ensaios para validação da integral J como uma ferramenta analítica para campos elasto-plásticos à frente da trinca, em 1972. Conforme sumarizado por BUCCI et al. [27], no método desenvolvido, dada uma configuração do corpo de prova, como por exemplo aquele representado na figura 1.2 (a), vários corpos de prova com diferentes comprimentos de trinca são empregados para levantamento de curvas carga vs. deslocamento, como representado esquematicamente na figura 1.2 (b). Valores de energia por unidade de espessura (área sob a curva $P-\Delta$) são obtidos para diferentes comprimentos

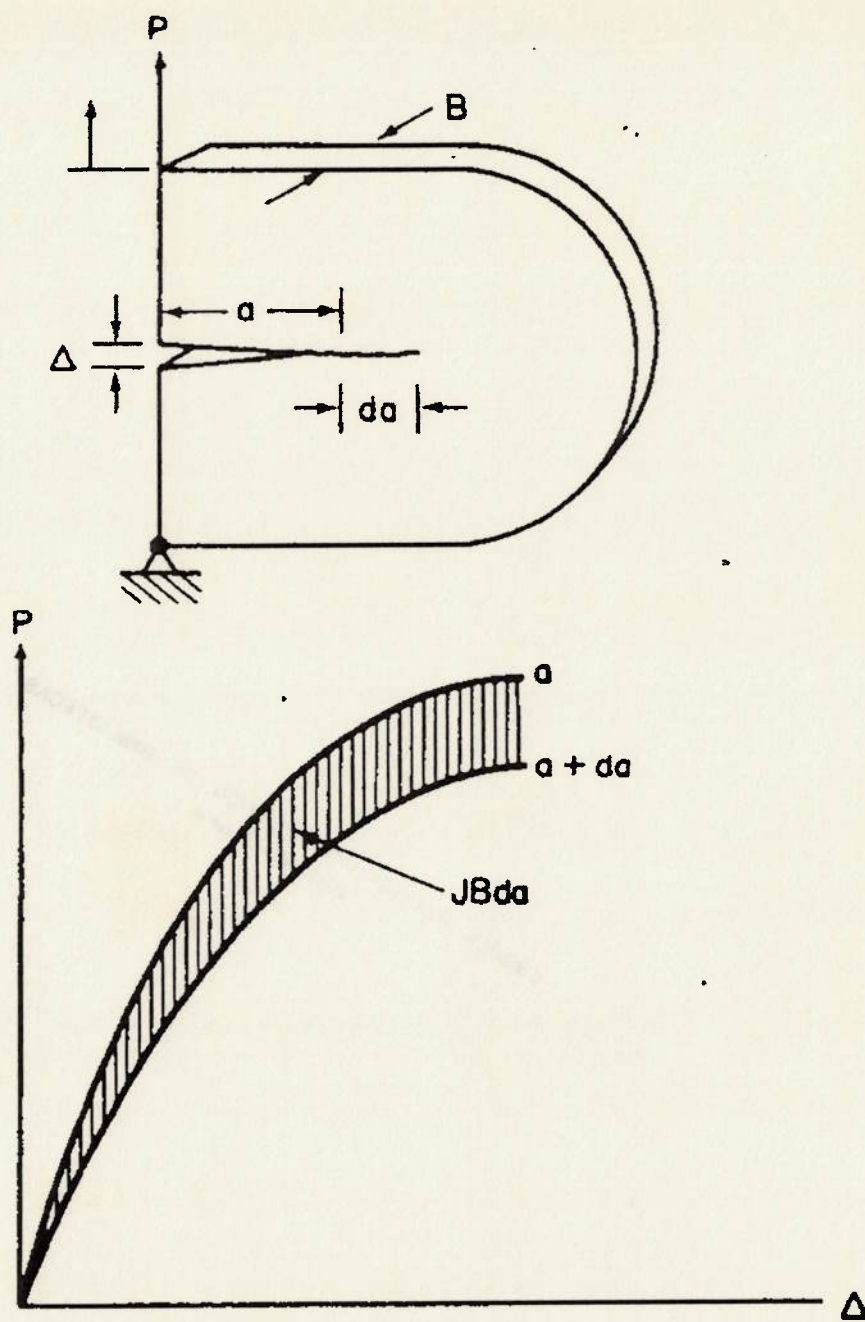


Figura 1.1 Interpretação da integral J , conforme equação (1.7) [25].

iniciais de trinca para vários valores de deslocamento Δ . A figura 1.2 (c) apresenta a curva obtida ao se plotar os valores de energia em função dos comprimentos de trinca, para constantes deslocamentos Δ . As inclinações das curvas mostradas na figura 1.2 (c) representam a variação de energia potencial por unidade de espessura por variação unitária do comprimento da trinca, sendo, pois, iguais a J , de acordo com a equação (1.7). Tal fato permite construir-se a curva da figura 1.2 (d) de J vs. Δ , para cada comprimento inicial de trinca, a . Dada a relação J vs. Δ , pode-se determinar experimentalmente o deslocamento crítico Δ_c para ocorrência de fratura instável no corpo de prova e, conseqüentemente, um valor crítico de J , o chamado J_c . O procedimento padronizado para obtenção de J_c encontra-se descrito detalhadamente no Capítulo 3.

Em 1968, contribuindo para o entendimento do campo de tensões e deformações atuantes na ponta de uma trinca, RICE e ROSENGREN [28] e HUTCHINSON [29] demonstraram que uma consequência da independência de J em relação ao contorno de integração é que as tensões próximas à ponta da trinca para um material encruável, com expoente de encruamento n , podem ser escritas como :

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{J}{r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \quad (1.8)$$

onde r e θ são as coordenadas polares medidas a partir da ponta da trinca e $\tilde{\sigma}_{ij}$ são funções tabeladas. Esse campo de tensões é conhecido como HRR, em homenagem aos seus elaboradores. Caso trate-se de um material que não seja encruável segundo a lei exponencial de encruamento, campos equivalentes podem ser desenvolvidos obtendo-se o mesmo efeito [24]. Uma vez que o campo de tensões à frente da trinca é controlado por J , pode-se concluir que J funciona como um parâmetro de fratura, que determina as condições para *iniciação* da

propagação da trinca, conforme comprovação experimental de Begley e Landes descrita anteriormente. Para estruturas em regime LEFM, a iniciação da propagação também corresponde à propagação instável da trinca. Já para condições de EPFM, após a iniciação da propagação segue-se propagação *estável* da trinca, sendo que as condições de campo HRR foram desenvolvidas considerando-se comportamento elástico não-linear do material e, com a ocorrência de propagação da trinca haverá descarregamento elástico de tensões acompanhado de plastificação do material à frente da mesma, fazendo com que a integral J deixe de modelar o seu comportamento (processo de escoamento do material é irreversível). Para alguns materiais de elevada tenacidade e ductilidade foi observado que a propagação da trinca ocorria com valores de integral J de cinco a dez vezes o valor de J_{IC} , conforme RITCHIE e THOMPSON [9]. Dessa maneira, avaliar-se a tenacidade à fratura desses materiais com parâmetros de *iniciação* da trinca, tal como J_{IC} , seria conservador. Para esses casos, desenvolveram-se outros parâmetros de propagação da trinca, tal como o adimensional *tearing modulus*, T, conforme desenvolvido por RICE et ali [30], como sendo :

$$T = \frac{E}{\sigma_y^2} \frac{dJ}{da} \quad (1.9)$$

onde,

σ_y tensão de escoamento em tração do material

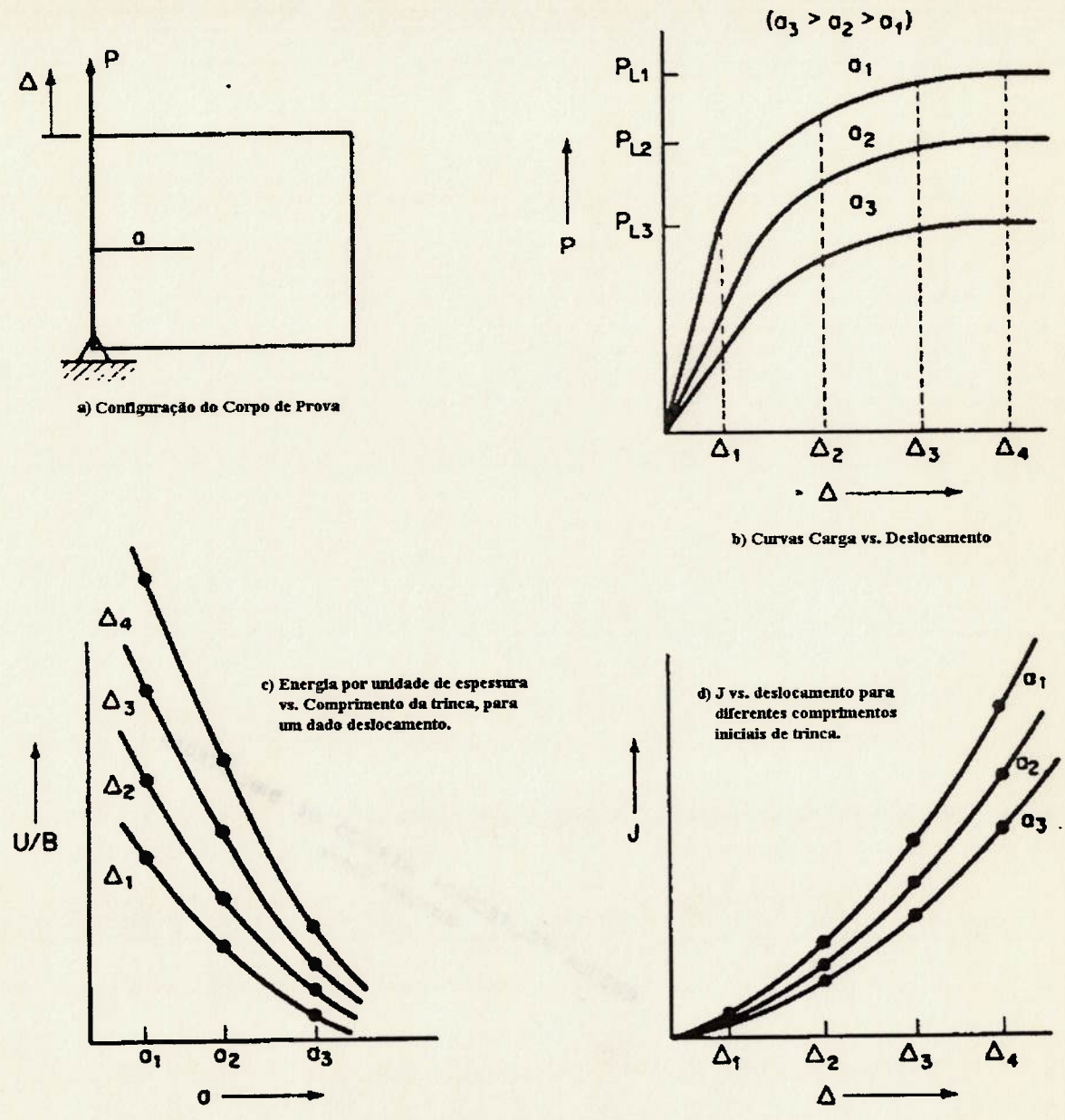


Figura 1.2 Representação esquemática do procedimento desenvolvido por BEGLEY e LANDES [26], retirada da referência [25].

A figura 1.3, retirada da referência [9], ilustra as diversas fases da propagação da trinca, desde o arredondamento de sua ponta (*blunting*), passando pelo início de propagação (controlado por J_{IC}) e pela propagação estável da

mesma, controlada por T , que é proporcional à inclinação da curva J vs. propagação Δa da trinca, conforme indicado na figura.

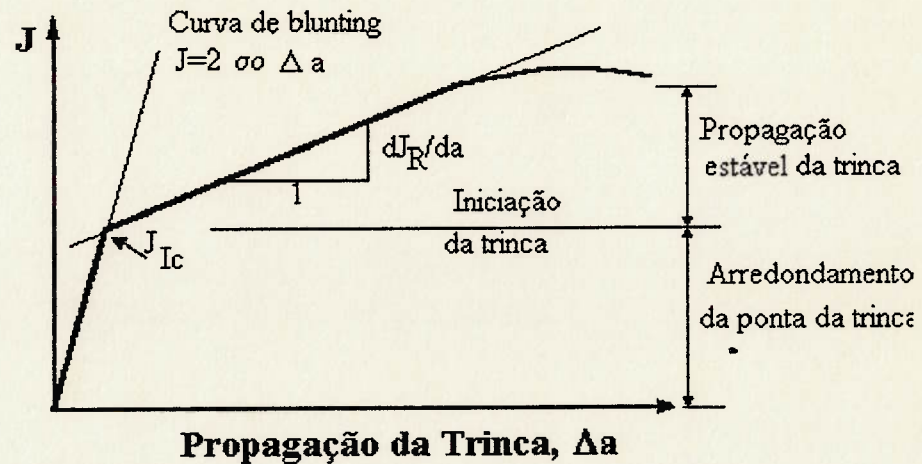


Figura 1.3 Curva de J vs. Δa , mostrando a definição de $J = J_c$ onde a chamada curva de arredondamento intercepta a curva de resistência. [9]

Um campo de grande aplicação dos conceitos de propagação da trinca controlada por J , através do *tearing modulus* T , é nas estruturas para usinas nucleares. Nesse caso, a preocupação reside no fato de que após uma etapa de propagação estável da trinca pode ocorrer propagação instável da mesma. Contemplando esse comportamento, PARIS et ali, segundo KANNINEN e POPELAR [31], estenderam o conceito de curva de resistência $K_R = K_R(\Delta a)$ da LEFM, para trincas controladas pela integral J , gerando, analogamente, curvas de projeto $J_R = J_R(\Delta a)$, onde Δa denota o valor de propagação estável da trinca. Ocorrerá propagação instável da trinca quando dJ/da exceder dJ_R/da (figura 1.3), ou, em outras palavras, quando $T > T_R$, dados por:

$$T = \frac{E}{\sigma_y^2} \frac{dJ}{da}$$

$$T_R = \frac{E}{\sigma_y^2} \frac{dJ_R}{da}$$

onde T_R é uma propriedade do material, obtida a partir da curva mostrada na figura 1.3. A figura 1.4, retirada da referência [31], ilustra os resultados experimentais conduzidos por Paris, correlacionando T e T_R com o tipo de propagação da trinca.

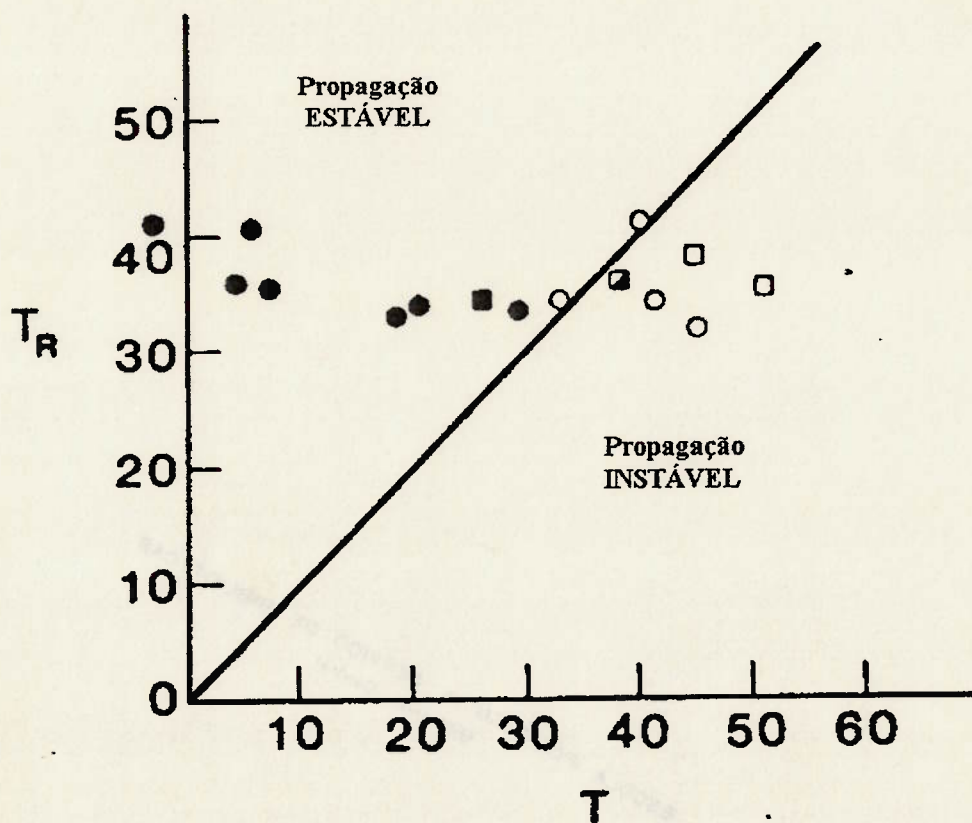


Figura 1.4 Resultados experimentais de PARIS, correlacionando o *tearing modulus* com o comportamento da propagação da trinca. [31]

Vários autores produziram extensões à equação (1.3), e revisões sobre integrais de contorno aplicadas à fratura são apresentadas por HELEN e BLACKBURN [4] e por ATLURI [5]. O efeito das deformações de origem térmica, por exemplo, foi considerado na equação (1.3) por AOKI [5].

1.3 Escopo do Trabalho

O objetivo principal deste trabalho é elaborar um programa computacional para cálculo da integral J , para avaliação do comportamento de trincas em estruturas trincadas. O código é desenvolvido em linguagem VAX FORTRAN, a qual tem como referência básica o FORTRAN 77. Os arquivos de entrada devem ser gerados pelo programa de elementos finitos sendo empregado, havendo a necessidade de elaborar-se uma rotina de leitura e formatação de tais arquivos, que atua como interface entre o programa de elementos finitos e o código para cálculo da integral J . Nesse trabalho, emprega-se o ANSYS 4.4A no processo de solução da estrutura.

Após a introdução ao tema, feita neste Capítulo 1, o Capítulo 2 apresenta conceitos teóricos da integral J , com as etapas para dedução da equação (1.3), bem como as hipóteses adotadas para sua obtenção. As limitações para aplicação da integral J na análise de estruturas trincadas também são discutidas.

No Capítulo 3, são apresentadas as normas e ensaios para obtenção dos valores críticos da integral J (representados por J_c), com ênfase para o modo I , de abertura da trinca, que se constitui no modo mais comum de propagação de trinca (figura 1.5).

O modelo numérico para cálculo da integral J é desenvolvido no Capítulo 4, a partir da equação (1.3). Discute-se o uso do método de integração de Gauss para cálculo do valor da integral J ao longo de um contorno contido na estrutura trincada modelada por elementos finitos isoparamétricos parabólicos, com 8 nós por elemento. É mostrada a estruturação do programa gerenciador PRINC e das subrotinas de cálculo. No Capítulo 5, o modelo é aplicado para fins de avaliação na solução de uma placa finita, isenta de trincas e submetida a

carregamento trativo, para verificação dos resultados obtidos pelo código, os quais devem ser iguais a zero, segundo desenvolvimento teórico da integral J. Em seguida, introduz-se uma trinca passante em uma das laterais da placa, estado plano de deformação e condições de LEFM, sendo os resultados da análise comparados tanto àqueles obtidos pelo módulo de Mecânica de Fraturas do programa ANSYS® 4.4A como à solução analítica. Aumentando-se o carregamento da mesma estrutura, resolvem-se condições de EPFM. Efetua-se uma análise de sensibilidade do programa para estudar-se a influência do nível de refinamento da malha de elementos finitos.

Finalmente, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões deste estudo, assim como algumas aplicações práticas do programa desenvolvido e recomendações para estudos futuros.

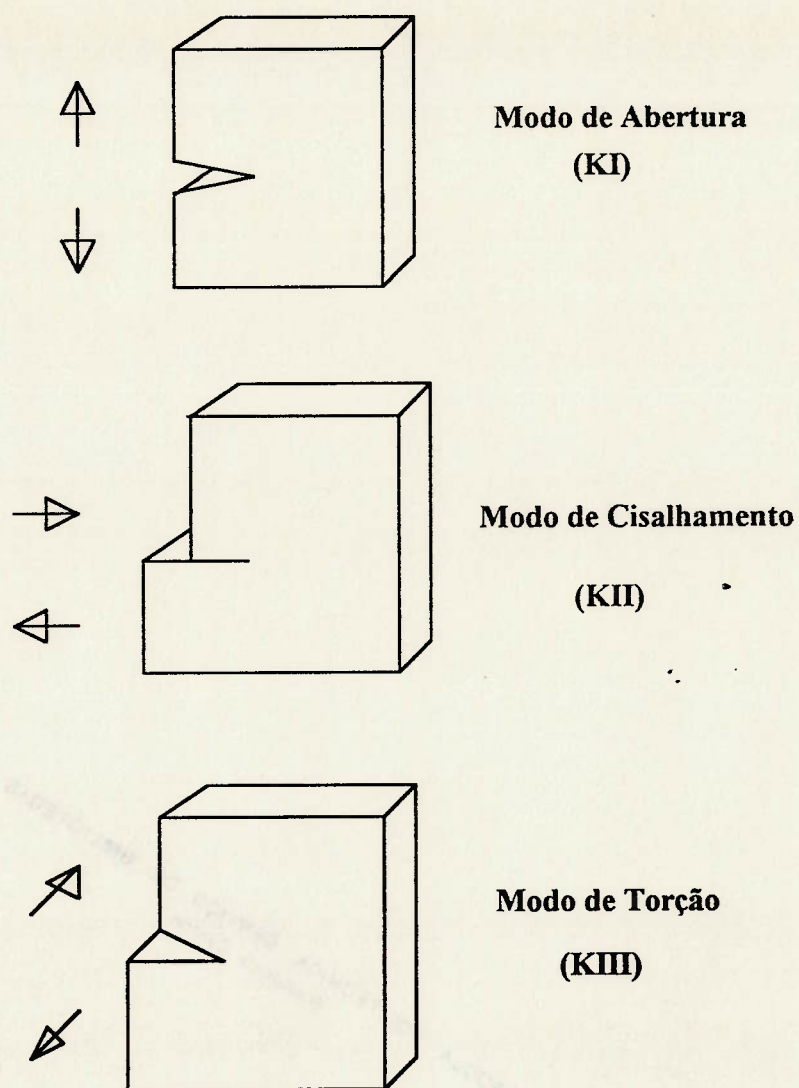


Figura 1.5 Os três modos básicos de fratura.

CAPÍTULO 2

Conceitos Teóricos da Integral \underline{J}

A integral \underline{J} representa um parâmetro desenvolvido por Rice a partir de conceitos de balanço energético, que pode ser aplicado no estudo de problemas envolvendo fratura no regime elástico (LEFM) e elasto-plástico (EPFM).

A transição entre as condições de LEFM e EPFM depende das dimensões da zona plastificada à frente da trinca. Vários autores procuraram estabelecer critérios para a determinação da validade de abordagem da LEFM. CHELL [7] sugeriu o seguinte parâmetro adimensional:

$$\alpha = \frac{(K_c/\sigma_y)^2}{\beta} \quad (2.1)$$

onde,

- K_c - fator de intensificação de tensões crítico
- σ_y - tensão de escoamento do material
- β - comprimento da trinca ou a seção restante à frente da trinca (aquele que for menor).

Chell afirma que a LEFM se aplicará caso :

$$\alpha < 1,0 \quad \text{para estado plano de deformação}$$

$\alpha < 0,4$ para estado plano de tensão

A ocorrência de zona plastificada à frente da trinca com dimensões elevadas relativamente ao tamanho da mesma, pode dever-se tanto à elevada tensão para ocorrência de fratura como à alta resistência do material à propagação de trinca. Tal fato evidencia-se, por exemplo, em materiais com reduzida tenacidade, na presença de trincas com pequenas dimensões. A sua tensão crítica é obtida a partir da expressão:

$$\sigma_c = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi \cdot a}} \quad (2.2)$$

onde,

- σ_c - tensão crítica (de fratura)
- K_{Ic} - fator de intensificação de tensões crítico, para modo I de fratura
- a - semi-comprimento da trinca

A figura 2.1 ilustra o comportamento da equação 2.2, podendo-se observar que a tensão crítica tende a infinito quando o comprimento da trinca tende a zero, na curva de materiais com baixa tenacidade (baixo K_{Ic}). Na prática, a tensão crítica para uma trinca de comprimento $(a/W)_1$, conforme mostrado na figura 2.1, é dada por B, cujo valor é menor que a tensão fornecida pela equação (2.2), e que está representada na figura por A. Uma vez que A corresponde à tensão obtida a partir de K_{Ic} , fica demonstrada a não aplicabilidade de conceitos de LEFM para a determinação da tensão crítica para as condições anteriores.

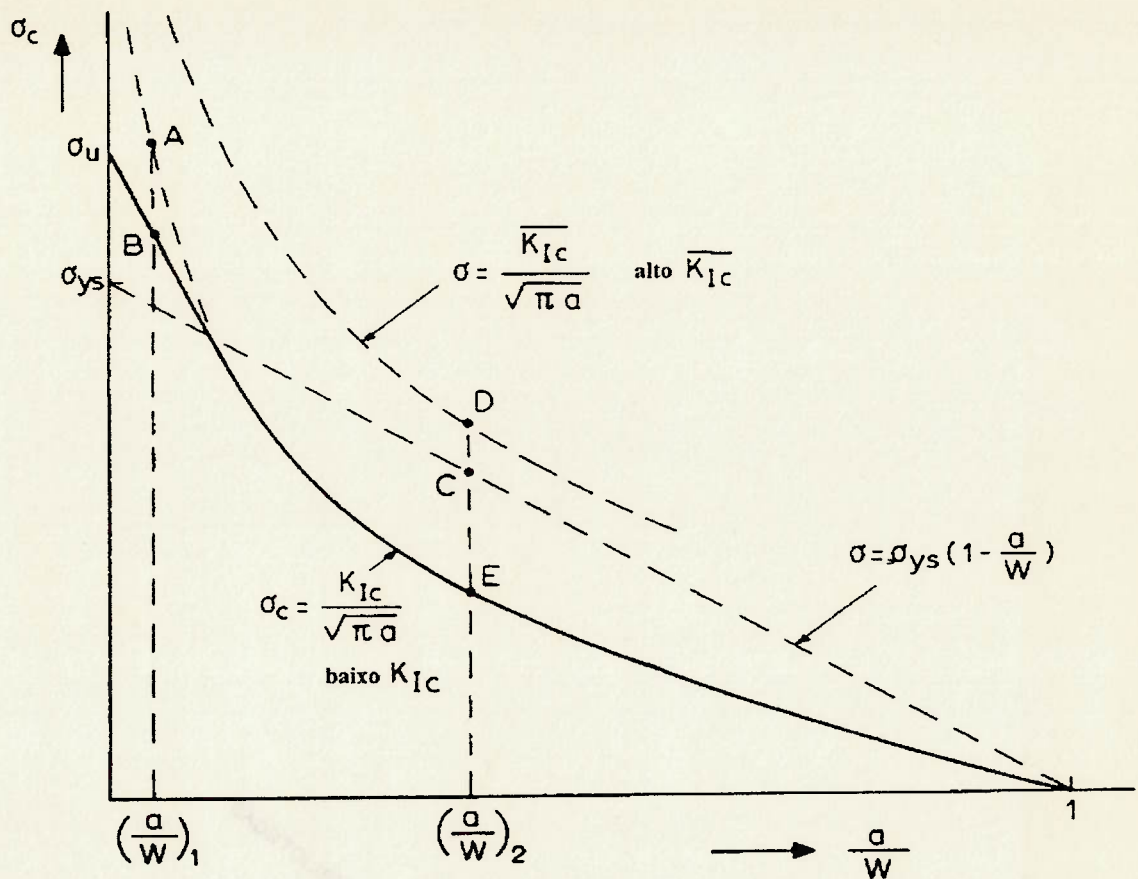


Figura 2.1 Validade de aplicação da Mecânica de Fraturas em regime elástico linear, em função da tenacidade do material.

Generalizando-se, a zona plastificada englobará toda a seção contendo a trinca, caso a tensão na seção remanescente à frente da trinca igualar-se à tensão de escoamento do material:

$$\sigma_{rem} = \sigma \frac{W}{W-a} \geq \sigma_y \quad (2.3)$$

onde,

σ_{rem} - tensão na seção remanescente à frente da trinca

σ - tensão aplicada ao longe

- W - largura da seção trincada
 a - semi-comprimento da trinca

Para o caso sendo analisado, onde as trincas tendem a zero, pode-se afirmar que:

$$\sigma_{rem} \cong \sigma_y$$

assim, o parâmetro K_{Ic} que caracteriza comportamento de LEFM pode ser utilizado até a tensão crítica σ_c aproximar-se da tensão de escoamento do material, σ_y . Na prática, porém, segundo FEDERSSEN [1], deve-se ter:

$$\sigma_c < \frac{2}{3} \sigma_y \quad (2.4)$$

para que a LEFM seja válida.

A figura 2.1 mostra outra curva, correspondente a materiais com elevada tenacidade (alto K_{Ic}). Nesses materiais, o escoamento generalizado na seção da trinca ocorrerá segundo a equação:

$$\sigma = \sigma_y \left(1 - \frac{a}{W} \right) \quad (2.5)$$

que é a reta, também representada na figura 2.1, passando por $a/W = 1$. Nota-se que a tensão crítica prevista pela LEFM será sempre maior que a tensão necessária para causar a plastificação em toda a seção trincada.

As situações anteriores não permitem, assim, o emprego dos conceitos de LEFM para verificação do comportamento da estrutura. Para tais casos, existem outros parâmetros de fratura, dentre eles o parâmetro integral J , desenvolvido detalhadamente a seguir.

2.1 Dedução da Equação da Integral \underline{J}

Considere-se uma estrutura que contenha uma trinca, constituída de material com comportamento elástico (linear ou não-linear). Nessas condições, o balanço energético da estrutura pode ser escrito por :

$$U = U_0 + U_a + U_s - F \quad (2.6)$$

onde,

- U - energia total contida na estrutura
- U_0 - energia de deformação elástica da estrutura sem trinca
- U_a - variação da energia de deformação elástica causada pela presença de uma trinca
- U_s - variação da energia superficial causada pela formação das superfícies da trinca
- F - trabalho executado pelos esforços externos,

segundo a referência [8].

A figura 2.2 ilustra a energia total \underline{U} em função do comprimento da trinca \underline{a} . A propagação instável da trinca ocorrerá quando a energia elástica liberada com o crescimento da trinca for maior que a energia superficial necessária para a formação das novas superfícies da trinca. Matematicamente, tal fato expressa-se por:

$$\frac{dU}{da} \leq 0 \quad (2.7)$$

e encontra-se representado graficamente na figura 2.2, sendo a_c o comprimento crítico da trinca.

Substituindo-se a eq.(2.6) em (2.7), e lembrando-se que U_0 é uma constante definida pelas condições iniciais da estrutura, obtém-se :

$$\frac{d(U_a + U_s - F)}{da} \leq 0 \quad (2.8)$$

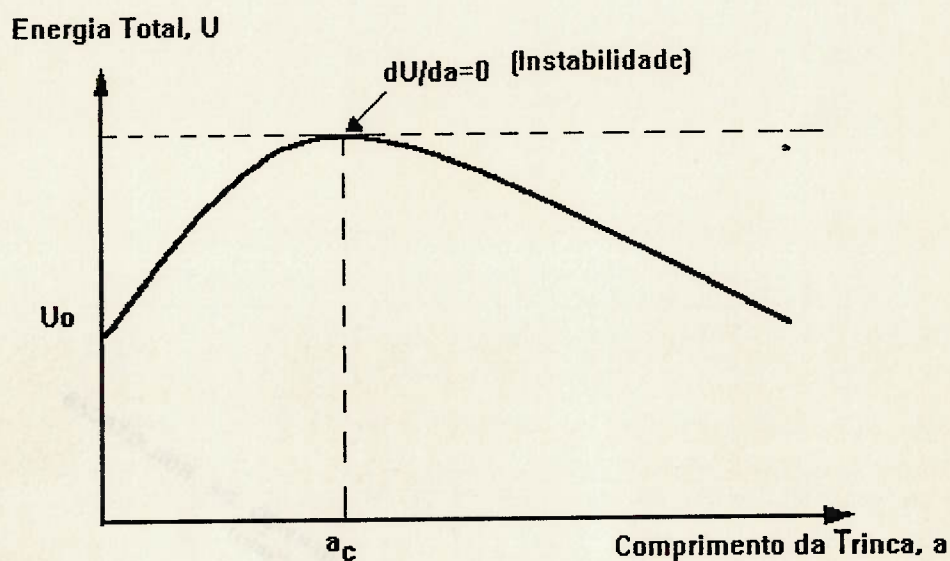


Figura 2.2 Gráfico da variação da energia total U em função do comprimento a da trinca.

Rearranjando-se, chega-se a :

$$\frac{d(F - U_a)}{da} \geq \frac{dU_s}{da} \quad (2.9)$$

Define-se :

$$J = \frac{d(F - U_a)}{da} \quad (2.10)$$

e a energia potencial elástica U_p como sendo :

$$U_p = U_0 + U_a - F \quad (2.11)$$

Comparando-se (2.11) com (2.6), obtém-se :

$$U = U_p + U_s \quad (2.12)$$

Diferenciando-se (2.11) em relação ao comprimento da trinca:

$$\frac{dU_p}{da} = \frac{d(U_a - F)}{da} = -\frac{d(F - U_a)}{da} \quad (2.13)$$

Lembrando da eq. (2.10), verifica-se que:

$$J = -\frac{dU_p}{da} \quad (2.14)$$

Considere-se um corpo de espessura unitária, contendo uma trinca, conforme figura 2.3. Define-se Γ como sendo o perímetro e \underline{A} a superfície do corpo. Um esforço externo \underline{T} atua ao longo da extensão do perímetro e executa um trabalho externo dado por $\underline{\Delta F}$. Os deslocamentos sofridos por regiões do corpo serão representados pelo vetor \bar{d} .

Seja \underline{U}_{o1} a energia de deformação elástica armazenada no corpo antes da aplicação de \underline{T} . Portanto, \underline{U}_{o1} representa a energia contida no corpo devido ao histórico dos carregamentos anteriores. O efeito da aplicação de \underline{T} pode ser analisado considerando-se duas situações:

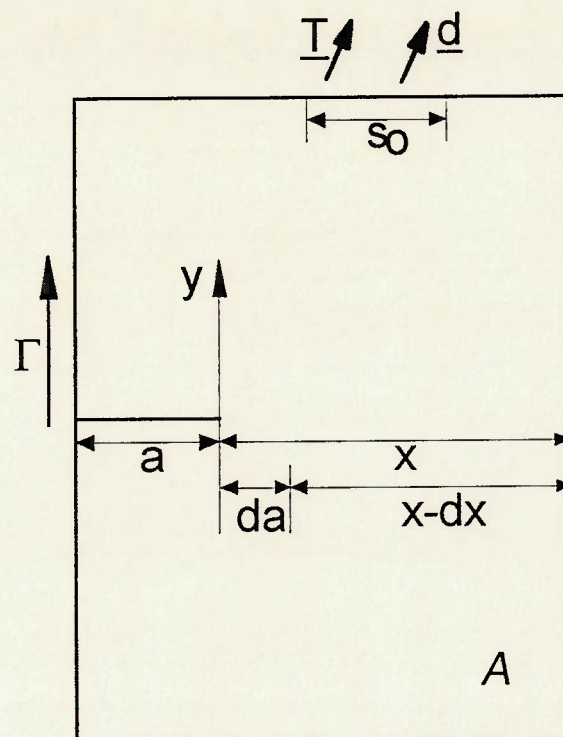


Figura 2.3 Placa plana trincada, submetida a um carregamento externo.
Simbologia para dedução da equação (2.25).

- Sem propagação da trinca. A energia potencial é:

$$U_{p1} = U_{o1} + \Delta F \quad (2.15)$$

- Com propagação $\underline{\Delta a}$ da trinca.

$$\Delta F = \Delta U_a + \Delta U_s$$

$$U_{p2} = U_{o1} + \Delta U_a \quad (2.16)$$

A variação da energia potencial elástica $\underline{\Delta U_p}$, devido à propagação $\underline{\Delta a}$ da trinca é dada por :

$$\Delta U_p = U_{p2} - U_{p1}$$

Substituindo-se as eqs.(2.15) e (2.16) na equação anterior, obtém-se :

$$\Delta U_p = \Delta U_a - \Delta F \quad (2.17)$$

Para o caso limite em que Δa tende a zero, pode-se escrever :

$$dU_p = dU_a - dF \quad (2.18)$$

Integrando-se (2.18), obtém-se :

$$\int dU_p = \int dU_a - \int dF$$

$$\Rightarrow U_p = U_a - U_F + \text{constante}$$

onde a constante será U_{01} , a energia elástica contida no corpo antes da aplicação de T . Assim :

$$U_p = U_a - F + U_{01} \quad (2.19)$$

Conjugando-se os termos U_a e U_{01} , nota-se que $(U_a + U_{01})$ representa a energia de deformação elástica total no corpo, e pode ser calculada por :

$$U_a + U_{01} = \iint W \, dx \, dy \quad (2.20)$$

onde,

W - densidade de energia de deformação

O trabalho executado pelos esforços externos pode ser calculado

por :

$$F = \oint_{\Gamma} \vec{T} \cdot \vec{d}.ds \quad (2.21)$$

Substituindo-se as eqs. (2.20) e (2.21) na eq. (2.19), chega-se a :

$$U_p = \iint_A W \, dx \, dy - \oint_{\Gamma} \bar{T} \bar{d} \, ds \quad (2.22)$$

Se os esforços externos \bar{T} forem mantidos constantes, pode-se escrever :

$$\frac{dU_p}{da} = \iint_A \frac{\partial W}{\partial a} \, dx \, dy - \oint_{\Gamma} \bar{T} \frac{\partial \bar{d}}{\partial a} \, ds \quad (2.23)$$

que é uma expressão que permite calcular-se a mudança de energia potencial elástica por unidade de propagação da trinca.

De acordo com o posicionamento do sistema de coordenadas na ponta da trinca (figura 2.3), e considerando-se fixo o perímetro Γ , chega-se a :

$$da = - dx$$

que, substituído em (2.23), resulta em:

$$\frac{dU_p}{da} = - \iint_A \frac{\partial W}{\partial x} \, dx \, dy + \oint_{\Gamma} \bar{T} \frac{\partial \bar{d}}{\partial x} \, ds$$

Aplicando-se o Teorema de Green, resulta :

$$\frac{dU_p}{da} = \oint_{\Gamma} \left(-W \, dy + \bar{T} \frac{\partial \bar{d}}{\partial x} \, ds \right) \quad (2.24)$$

Substituindo-se a eq. (2.24) em (2.14), obtém-se, finalmente:

$$J = \oint_{\Gamma} \left(W \, dy - \bar{T} \frac{\partial \bar{d}}{\partial x} \, ds \right) \quad (2.25)$$

que é a equação que define a integral J .

2.2 Aplicação da Integral J em estruturas trincadas

Rice e Cherepanov, conforme descrito no Capítulo 1, aplicaram a equação (2.25) a casos de estruturas contendo trincas. Considere-se o contorno fechado ABCDEFA ao redor da ponta da trinca mostrada na figura 2.4a. Pode ser mostrado que J é igual a zero para um contorno fechado. Então, pode-se escrever:

$$J = J_{\Gamma_1} + J_{CD} + J_{\Gamma_2} + J_{FA} = 0 \quad (2.26)$$

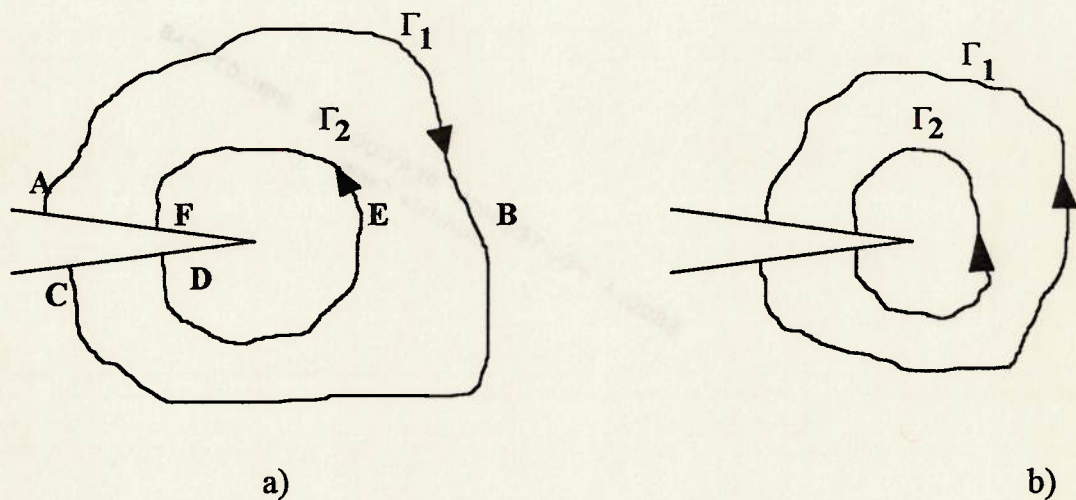


Figura 2.4 Contornos de integração ao redor da ponta da trinca para demonstração da independência da integral J do contorno Γ escolhido.

Nos flancos da trinca, uma vez que dy é igual a zero e os esforços externos \vec{T} também são nulos, obtém-se:

$$J_{CD} = J_{FA} = 0 \quad (2.27)$$

Substituindo-se (2.27) em (2.26), resulta:

$$J_{\Gamma 1} = -J_{\Gamma 2}$$

Invertendo-se o sentido de percurso ao longo do contorno Γ troca-se o sinal do mesmo (figura 2.4b), resultando, finalmente:

$$J_{\Gamma 1} = J_{\Gamma 2} = J \quad (2.28)$$

a qual demonstra a independência do valor de J em relação ao contorno escolhido para o seu cálculo. Esse fato permite a escolha de contornos que não incluam a zona plastificada à frente da trinca, simplificando-se sobremaneira a sua obtenção.

Analogamente aos parâmetros da LEFM, tais como K_{Ic} , G_{Ic} , pode-se definir e obter, experimentalmente, um valor de J_{Ic} característico de cada material, em uma determinada temperatura, que permite estabelecer as condições em que ocorrerá início da propagação da trinca. Uma das normas que contemplam a obtenção do parâmetro J_{Ic} encontra-se detalhadamente descrita no capítulo seguinte.

Considere-se um material elástico não-linear cuja curva tensão-deformação possa ser representada pela equação de Ramberg-Osgood [1]:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_Y} = \frac{\sigma}{\sigma_Y} + \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_Y} \right)^n \quad (2.29)$$

onde,

ε_Y - deformação correspondente a σ_Y

$\sigma_Y = \frac{(\sigma_Y + \sigma_{UTS})}{2}$ - tensão de escoamento efetiva

σ_Y - tensão de escoamento

σ_{UTS} - máxima tensão no ensaio de tração

n - expoente de encruamento

Caso o valor da componente de deformação não-linear seja pequena comparada à deformação linear, uma forma simplificada da equação (2.29) será:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_Y} = \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_Y} \right)^n \quad (2.30)$$

Ao aplicar-se a definição da integral J , eq. (2.25), e lembrando que o seu valor independe do contorno escolhido, pode-se adotar um contorno circular, de raio r , ao redor da ponta da trinca, obtendo-se:

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \left(W \cos \theta - T \frac{\partial d}{\partial x} \right) r \, d\theta \quad (2.31)$$

onde,

θ - coordenada polar angular

Na equação (2.31) sabe-se que $W = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}$, logo sua dimensão é

$\sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}$.

As dimensões do termo $T \cdot \partial d / \partial x$ também são $\sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}$. Uma vez que a equação (2.31) independe do contorno escolhido, o integrando não pode depender do valor de r (distância de um ponto qualquer à ponta da trinca). Assim, como o termo entre parênteses é proporcional a $\sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}$, pode-se escrever:

$$\sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} = C \frac{1}{r} \quad (2.32)$$

A partir da eq. (2.30), obtém-se:

$$\varepsilon(r) = \frac{C_1}{r^{n/(n+1)}} \quad (2.33a)$$

$$\sigma(r) = \frac{C_2}{r^{1/(n+1)}} \quad (2.33b)$$

As equações (2.33) ilustram a singularidade das tensões e deformações para o caso de comportamento elástico não-linear. Tais singularidades advêm do modelo HRR desenvolvido por HUTCHINSON [29] RICE e ROSENGREN [28], discutido no Capítulo 1.

Com base nesses resultados, torna-se evidente que a eq. (2.25) estabelece uma relação única entre \underline{J} e o campo de tensões e deformações à frente da trinca, e a inversão da eq. (2.25) deve fornecer as tensões e deformações em termos de \underline{J} . HUTCHINSON [29], utilizando a eq. (2.32), derivou o campo de tensões e deformações na ponta da trinca como sendo:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sigma_Y \left(\frac{J}{\alpha \sigma_Y \varepsilon_Y I_n r} \right)^{1/(n+1)} f_{ij}(\theta) \quad (2.34a)$$

$$\varepsilon_{ij}(r, \theta) = \alpha \sigma_Y \left(\frac{J}{\alpha \sigma_Y \varepsilon_Y I_n r} \right)^{n/(n+1)} g_{ij}(\theta) \quad (2.34b)$$

onde,

I_n - constante numérica que depende de \underline{n} (exp. de encruamento)

Tal fato demonstra que \underline{J} não é apenas um parâmetro energético, mas também um parâmetro de campo de tensões. Nota-se também que as equações (2.34) dependem do material (seus expoentes incluem o chamado expoente de encruamento \underline{n}).

Dessa forma, a integral \underline{J} pode ser utilizada como um parâmetro de fratura: haverá crescimento da trinca caso o valor calculado de \underline{J} exceda um valor crítico, o chamado \underline{J}_c . O campo de tensões à frente da trinca é controlado por \underline{J} em um material elástico não-linear, logo, diferentes estruturas submetidas a um

mesmo valor de \underline{J} apresentarão comportamentos semelhantes quanto à propagação da trinca.

O item 2.3 discute as limitações de aplicação da integral \underline{J} como critério de fratura.

2.3 Limitações do uso da integral \underline{J}

As condições de semelhança para propagação da trinca conforme definidas por \underline{K} e \underline{J} encontram-se representadas na figura 2.5. Para o caso de elasticidade linear (figura 2.5a), as dimensões da zona plastificada devem ser reduzidas em relação ao campo de tensões controlado por \underline{K} . Nesse caso, a dimensão da zona plastificada, como também todas as tensões e deformações na fronteira da zona plastificada são determinadas por \underline{K} e, portanto, o comportamento no interior da zona plastificada, incluindo o crescimento da trinca, deve ser controlado por \underline{K} .

As equações (2.33) e (2.34) foram deduzidas a partir do conceito de independência do contorno para cálculo de \underline{J} , e são válidas para comportamento elástico não linear, ou seja, a curva tensão-deformação para carregamento coincide com aquela para descarregamento (figura 2.5b). Se ocorrer um crescimento da trinca, haverá um descarregamento na ponta da mesma, o qual seguirá, em materiais elasto-plásticos reais, a curva linear elástica (figura 2.5b). Assim, a primeira limitação teórica para o uso da integral \underline{J} , seria a sua aplicação somente a trincas estacionárias, permitindo apenas a determinação do momento de *iniciação* do crescimento da trinca, e não de sua *propagação*.

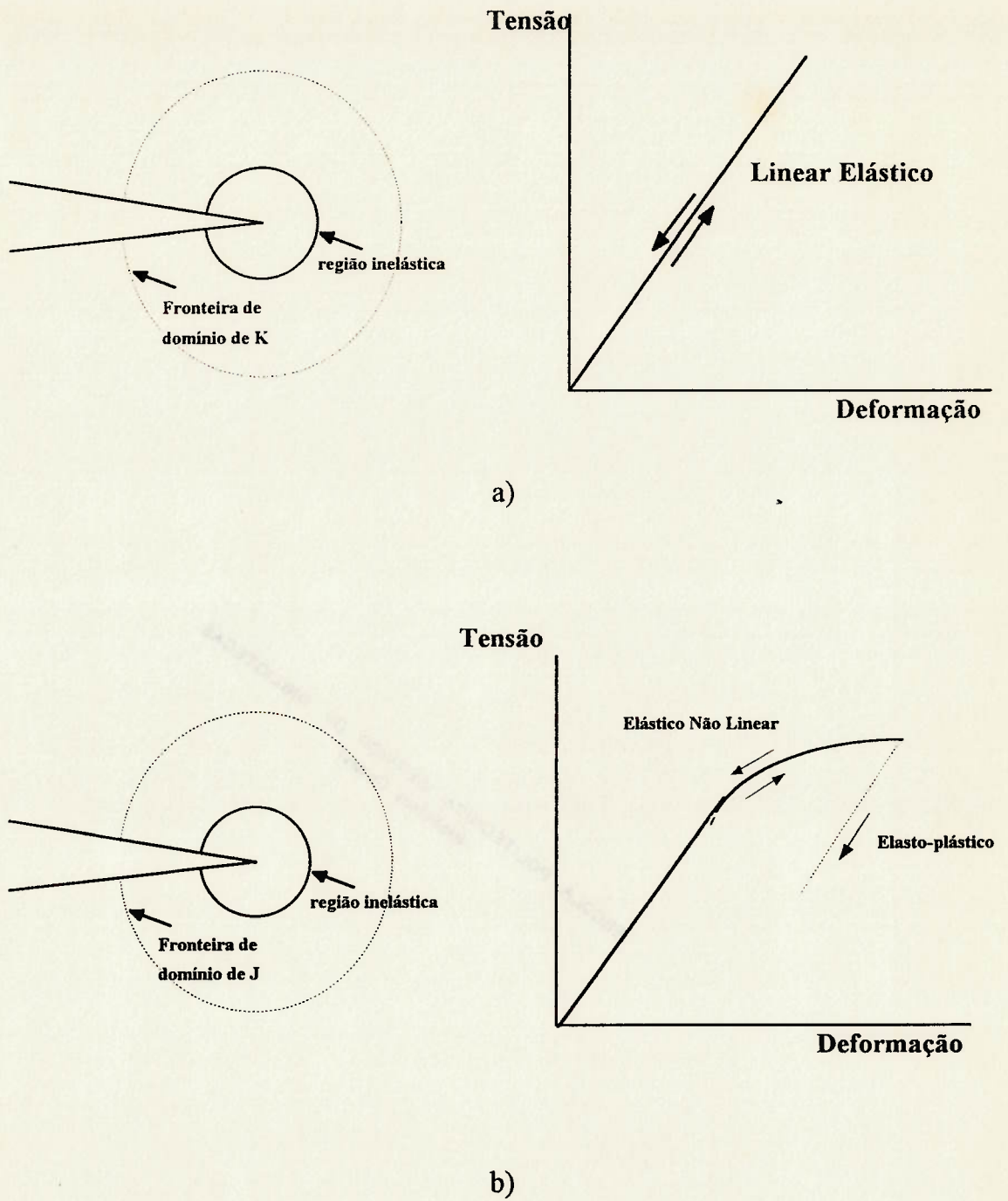


Figura 2.5 Condições de semelhança para aplicação de K_{Ic} e J_{Ic} .

As condições para que o campo de tensões próximo à ponta da trinca seja controlado por \underline{J} , podem ser representadas pelo parâmetro ω , apresentado na equação seguinte, retirada da referência [9] :

$$\omega = \frac{b}{J_{Ic}} \left(\frac{dJ}{da} \right) \gg 1$$

onde,

- b - seção remanescente à frente da trinca
- J_{Ic} - integral \underline{J} crítica, para modo I de fratura

Apesar de tais limitações teóricas, alguns autores concluíram que as mesmas não são tão severas. HUTCHINSON [10] demonstrou que ω deve ser da ordem de 40 e apresentou uma justificativa teórica para o uso da integral \underline{J} na análise de propagação estável de trincas. DOWLING [11] utilizou a variação do valor de \underline{J} durante carregamentos cíclicos (ΔJ) para correlacioná-las com as taxas de propagação de trincas por fadiga. Também nessa linha de trabalho, SADANANDA [12], [13], e HATANAKA e FUJIMITSU [34] aplicaram a integral \underline{J} para estudos de propagação de trincas por fadiga em metais submetidos a temperaturas elevadas (figura 2.6).

Propagação da Trinca da/dN, m/ciclo

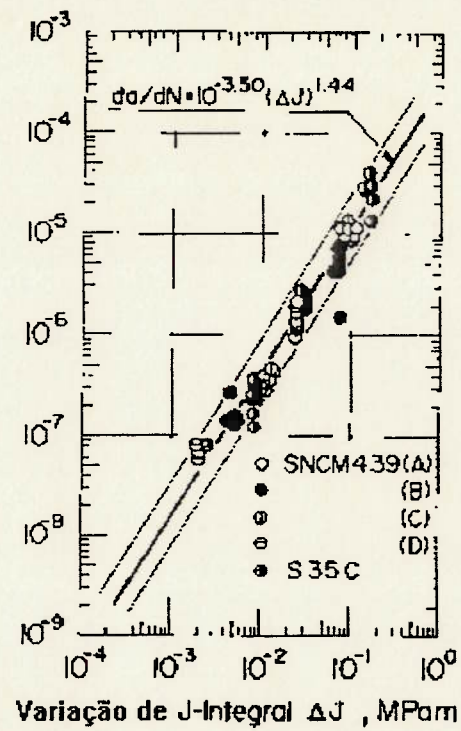


Figura 2.6 Aplicação da variação da integral J para cálculo da propagação de trincas por fadiga [34].

CAPÍTULO 3

Normas e Ensaaios

Nesse capítulo apresentam-se os aspectos mais relevantes da norma ASTM E813 - 89 - "Standard Test Method for J_{Ic} , a Measure of Fracture Toughness" [14]. Além do método para determinação do valor crítico da integral J , dado por J_{Ic} , discutem-se os tipos de corpos de prova possíveis, suas limitações geométricas, número mínimo de ensaios e critérios de validação dos resultados. Alguns resultados da literatura também são mostrados.

3.1 Tipos de ensaios e corpos de prova

Há, basicamente, duas possibilidades de execução do ensaio para determinação do J_{Ic} . O ensaio de tração, no qual o corpo de prova denomina-se compacto, e o ensaio de flexão.

As relações geométricas do corpo de prova compacto propostas pela norma, encontram-se ilustradas na figura 3.1. Para o ensaio de flexão, as dimensões do respectivo corpo de prova podem ser vistas na figura 3.2.

Como será visto nos parágrafos seguintes, o ensaio consiste em carregar-se os corpos de prova após a introdução de trincas nos mesmos (através

de carregamentos cíclicos). O início de crescimento estável dessa trinca previamente gerada é que será utilizado como parâmetro de obtenção do J_{Ic} do material. A fim de facilitar-se a nucleação das trincas por fadiga, usinam-se entalhes nos corpos de prova, conforme pode ser visto nas figuras 3.1, 3.2 e, mais detalhadamente, na figura 3.3.

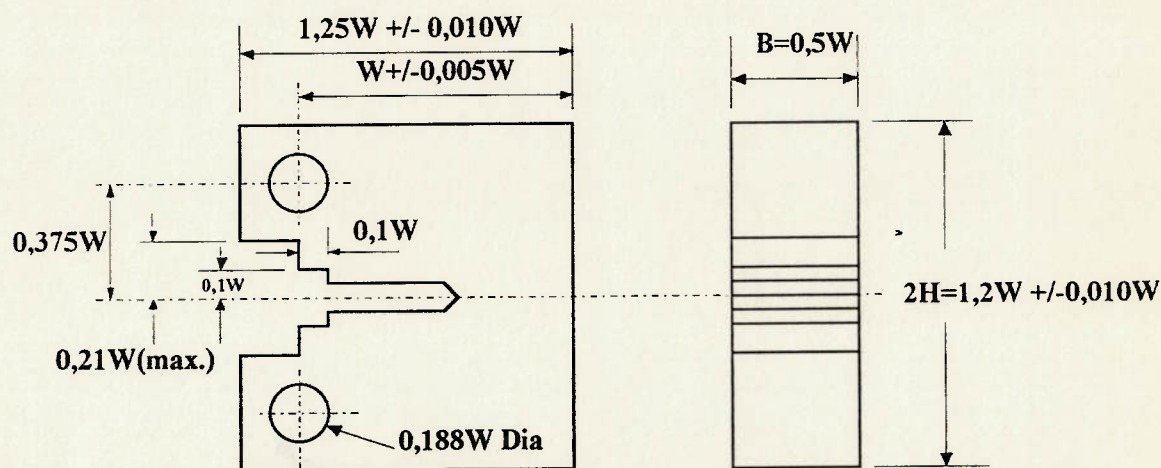


Figura 3.1 Dimensões de um tipo de corpo de prova compacto para obtenção de J_{Ic} , por ensaio de tração. Pino de diâmetro igual a $0,1875W(+0,000W/-0,001W)$. [14]

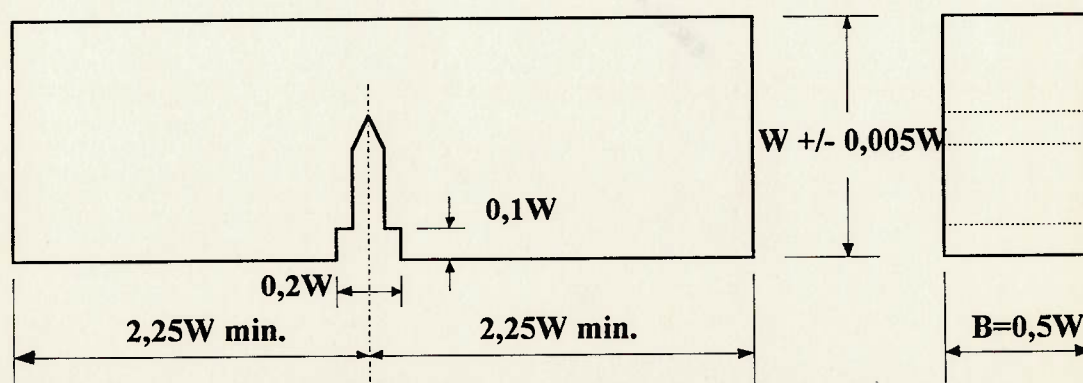
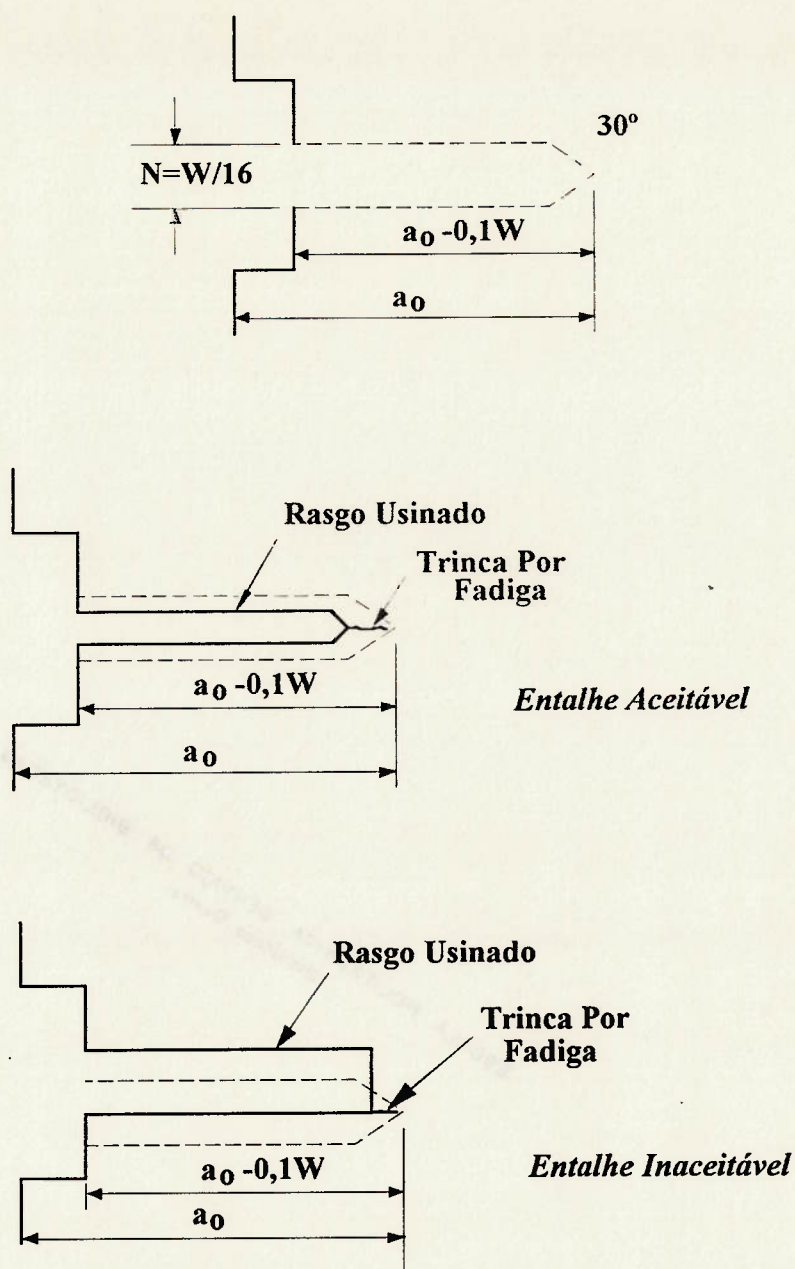


Figura 3.2 Dimensões de corpo de prova para obtenção de J_{Ic} , por ensaio de flexão pura.



Nota 1 - N não precisa ser menor que 1,6 milímetros, mas não deve exceder $W/16$.

Nota 2 - A intersecção das superfícies que iniciam a trinca, com as faces laterais do corpo de prova, deve ser equidistante das faces superior e inferior dentro de $0,005W$.

Figura 3.3 Envelopes para entalhes nucleadores de trinca para ensaios de J_{IC} .

As cargas cíclicas para geração e propagação da trinca por fadiga devem ser sempre menores que a carga P_L . Em flexão, P_L vale:

$$P_L = \left[\left(\frac{4}{3} \right) \left(\frac{B b_0^2 \sigma_Y}{5} \right) \right]$$

e, em tração:

$$P_L = \left[\left(\frac{B b_0^2 \sigma_Y}{(2W + a)} \right) \right]$$

onde,

B - espessura do corpo de prova (fig. 3.1 e 3.2)

b_0 - $(W - a_0)$

a_0 - comprimento da trinca por fadiga mais o comprimento do entalhe (figs. 3.1 e 3.2)

W - largura do corpo de prova (figs. 3.1 e 3.2)

σ_Y - tensão de escoamento efetiva

$$\sigma_Y = \frac{\sigma_{0,2} + \sigma_{UTS}}{2}$$

$\sigma_{0,2}$ - tensão correspondente à 0,2 % de deformação uniaxial

σ_{UTS} - tensão máxima obtida no ensaio de tração

Deve-se ressaltar que a trinca gerada por fadiga deve ser executada com o material nas mesmas condições de tratamento térmico em que será efetuado o ensaio de fratura. O comprimento da trinca gerada por fadiga não deve ser inferior a 5% do comprimento inicial da trinca a_0 ou a 1,3 milímetros (o que for menor).

3.2 Método para Determinação de J_{Ic}

Para o caso de flexão pura, RICE [4] demonstrou que :

$$J = \frac{2}{b} \int_0^{\delta_c} P d\delta \quad (3.1)$$

onde,

δ_c - abertura da trinca, medida conforme figura 3.4

P - carga aplicada/espessura do corpo de prova

A equação (3.1) reduz-se a :

$$J = \frac{2 A}{B b} \quad (3.2)$$

onde,

A - área sob a curva carga versus abertura da trinca
(figura 3.5)

A equação (3.2) é válida para a relação $s=4 W$ (figura 3.4).

Para o corpo de prova compacto utilizado em tração, a relação (3.2) deve ser corrigida para considerar-se a componente de tensão trativa do carregamento, resultando em :

$$J = \frac{\eta A}{B b} \quad (3.3)$$

onde,

$$\eta = 2 + 0,522 b/W$$

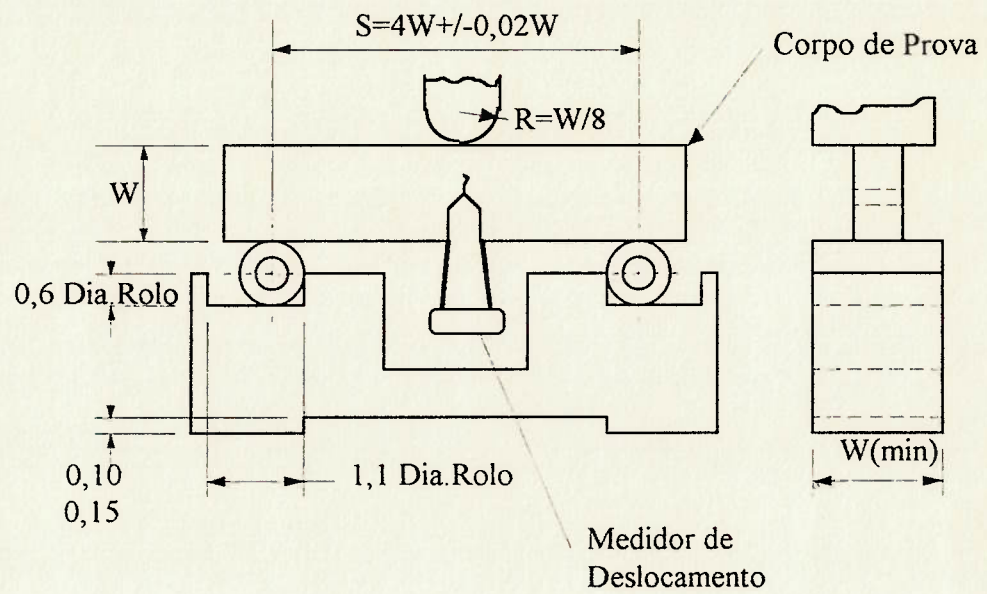


Figura 3.4 Arranjo experimental para ensaio do corpo de prova por flexão.

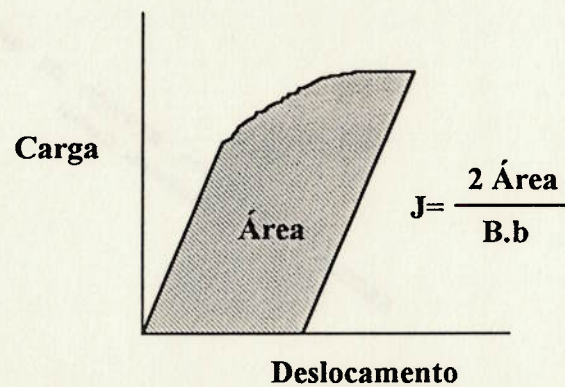


Figura 3.5 Gráfico Carga versus Deslocamento do ponto de aplicação da carga no ensaio para determinação de J_{IC} .

3.3 Determinação de J_{Ic}

A determinação de J_{Ic} consiste em medir-se a integral J , através das equações (3.2) e (3.3), de vários corpos de prova, o mais semelhantes possível, submetidos a diferentes valores de crescimento de trinca Δa . Esses dados são, então, colocados em um gráfico J versus Δa , originando uma curva de regressão polinomial. O valor de J_{Ic} é obtido da curva J - Δa assim definida, correspondendo ao início de propagação estável da trinca. A norma ASTM E813-89 estabelece esse valor, conforme o seguinte procedimento :

a) Carregar vários corpos de prova de flexão ou tração, submetendo-os a diferentes deslocamentos δ , descarregando-os em seguida. Essas amostras deverão apresentar diferentes valores de crescimento da trinca Δa , a partir da trinca previamente gerada por fadiga (figura 3.6).

b) A fim de possibilitar a posterior medição de Δa , deve-se marcar a superfície da trinca. Para tal, em materiais ferrosos, pode-se alterar a cor dessa superfície através de oxidação da mesma, submetendo o corpo de prova, por exemplo, a 300 °C por 10 minutos para cada 25 milímetros de espessura da amostra. Para outros materiais em que esse tratamento não causa alteração imediata da coloração do material (ex: ligas de alumínio), a região de crescimento Δa poderá ser identificada submetendo a amostra a um curto carregamento cíclico, aumentando a trinca, porém com um aspecto diverso daquele correspondente a Δa .

c) A seguir, as amostras são quebradas e procede-se à medição de Δa , compreendida entre a zona da trinca por fadiga previamente gerada e aquela marcada após o ensaio (por descoloração ou fadiga). Deve-se

medir Δa em 9 pontos diferentes da superfície trincada, já que o crescimento tenderá a ser maior no centro do corpo de prova, diminuindo ao aproximar-se das laterais do mesmo (figura 3.7).

d) A partir do gráfico obtido na figura 3.5, calcula-se o valor de J utilizando-se as eqs. (3.2) ou (3.3).

e) Colocar nos resultados obtidos nos itens c) e d) em um gráfico J versus Δa , conforme visto na figura 3.8.

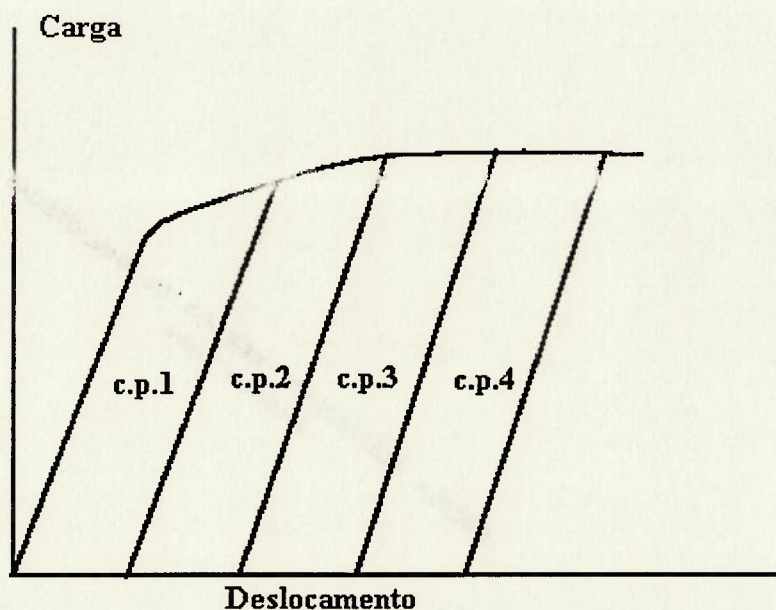


Figura 3.6 Gráfico Carga versus Deslocamento para vários corpos de prova.

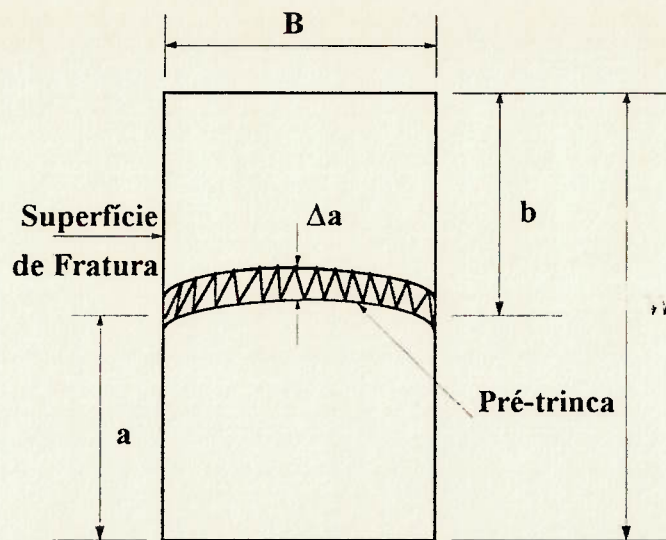


Figura 3.7 Esquema para medição do crescimento Δa da trinca na superfície fraturada, nos ensaios para determinação de J_{Ic} com vários corpos de prova.

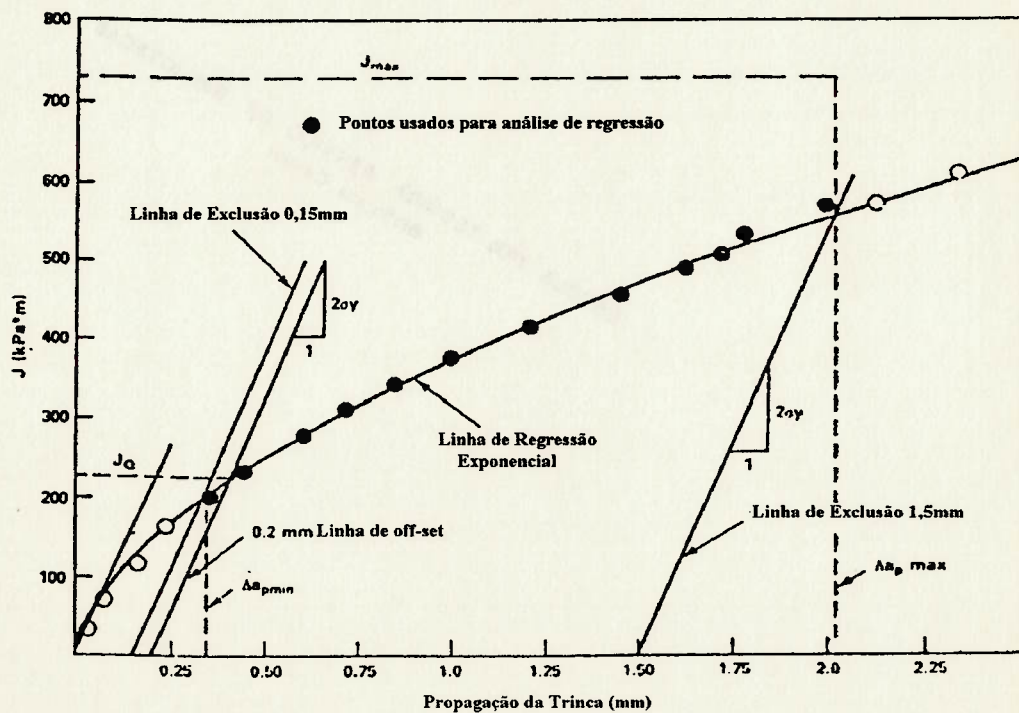


Figura 3.8 Gráfico da integral J versus Crescimento Δa das trincas dos diversos corpos de prova.

f) Existem condições que definem a validade dos resultados obtidos. O passo inicial é construir-se no gráfico da figura 3.8, a linha de arredondamento ("blunting line"). A justificativa para tal é que, antes de ocorrer o crescimento real da trinca, ocorre um arredondamento da ponta da mesma, fazendo com que haja um aumento aparente do comprimento da trinca, porém sem o seu crescimento real ou efetivo. A figura 3.9 procura ilustrar essa condição.

Conforme mostrado na figura 3.10, o crescimento aparente da trinca devido ao arredondamento da sua ponta, pode ser escrito como :

$$\Delta a_{\text{arred}} = \frac{\text{CTOD}}{2} \quad (3.4)$$

onde,

CTOD- abertura da ponta da trinca ("crack tip opening displacement")

Como o CTOD pode ser obtido através da equação [15] :

$$\text{CTOD} = \frac{J}{\lambda \cdot \sigma_y} \quad (3.5)$$

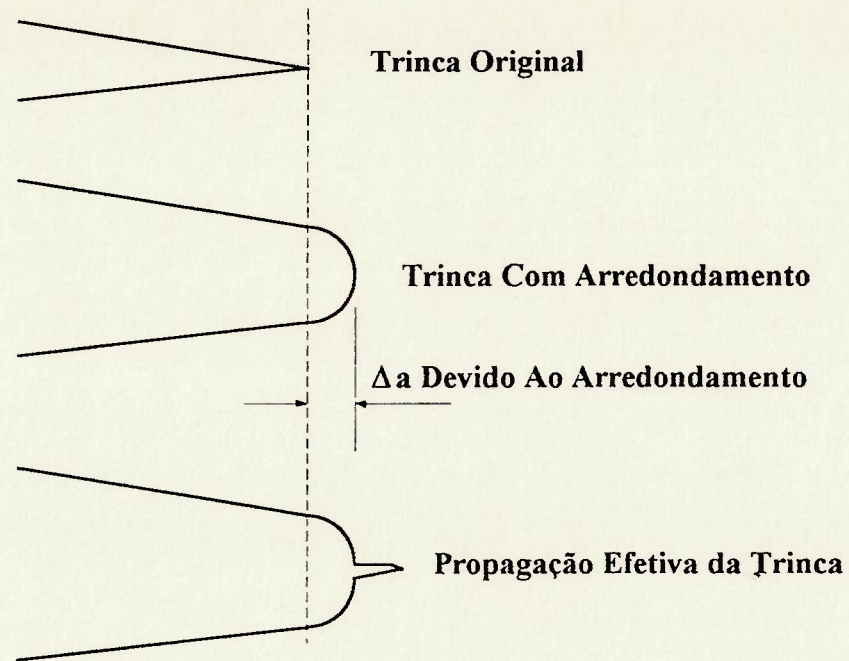


Figura 3.9 Efeito do crescimento da trinca por arredondamento ("blunting") da ponta da mesma, antes do seu crescimento real.

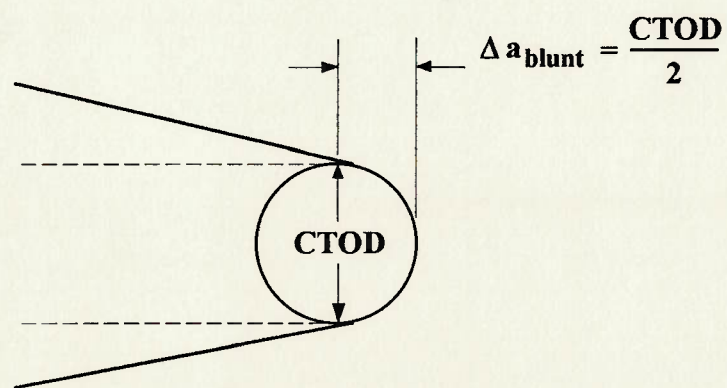


Figura 3.10 Crescimento efetivo da trinca com o arredondamento de sua ponta, em função do CTOD.

onde,

λ - valor experimental entre 1 e 2 (nesse caso vale 1)

σ_y - tensão de escoamento do material

pode-se escrever, a partir das eqs. (3.4) e (3.5) :

$$J \cong 2 \cdot \sigma_y \cdot \Delta a \quad (3.6)$$

Uma vez que os valores de Δa devido ao arredondamento da ponta da trinca são difíceis de medir experimentalmente, particularmente em materiais pouco dúcteis, a norma adotou, no lugar da tensão de escoamento σ_y , a tensão de escoamento efetiva, dada por σ_{Y_e} , conforme a equação abaixo :

$$\sigma_{Y_e} = \frac{(\sigma_y + \sigma_{UTS})}{2} \quad (3.7)$$

Substituindo-se a eq. (3.7) em (3.6), chega-se, finalmente, a :

$$J = 2 \cdot \sigma_{Y_e} \cdot \Delta a \quad (3.8)$$

que é a equação da reta mostrada na figura 3.8.

Também na figura 3.8, estão representadas retas paralelas à "blunting line", passando pelas abscissas 0,15 e 1,5 milímetros. Tais retas definem a região de validade dos dados experimentais, conforme pode ser visto na figura 3.11.

Pelo menos um ponto experimental deve estar contido na região A e na região B, geradas conforme indicado na figura 3.12.

Utilizando-se apenas os dados contidos na região de dados válidos, obtém-se uma curva de regressão, segundo a equação :

$$\ln J = \ln C_1 + C_2 \cdot \ln \Delta a \quad (3.9)$$

A seguir, constrói-se uma reta paralela à "blunting line", passando pela abscissa 0,2 milímetros. A intersecção dessa reta com a curva obtida através da eq. (3.9) define os valores J_Q e Δa_Q .

Caso sejam atendidos alguns requisitos suplementares da norma (discutidos adiante), o valor de J_Q será considerado J_{Ic} . Por hipótese, a norma estabelece que J_{Ic} corresponde ao valor da integral J obtido ao considerar-se uma propagação estável real da trinca igual a 0,2 milímetros, não considerando o crescimento por arredondamento da ponta da trinca.

Condições de Validação de J_Q como J_{Ic}

- espessura do corpo de prova $B > 25 \frac{J_Q}{\sigma_Y}$;
- $b_0 > 25 \frac{J_Q}{\sigma_Y}$;
- inclinação da curva eq. (3.8) dJ/da calculada em Δa_Q deve ser menor que σ_Y ;
- nenhum corpo de prova com fratura frágil por clivagem ;
- nenhuma das nove medidas de Δa obtidas no item c) pode diferir mais que 7% da média dos valores das nove medidas.

3.4 Determinação de J_{Ic} utilizando-se um único corpo de prova

O método anterior requer, no mínimo, quatro corpos de prova, tornando-o extremamente oneroso. A norma prevê um método alternativo, em que são obtidos os dados para levantamento da curva J versus Δa utilizando-se apenas um corpo de prova. A técnica consiste em efetuar-se sucessivos carregamentos e descarregamentos no corpo de prova, gerando-se um gráfico Carga versus Deslocamento do ponto de aplicação da carga, conforme mostrado na figura 3.13.

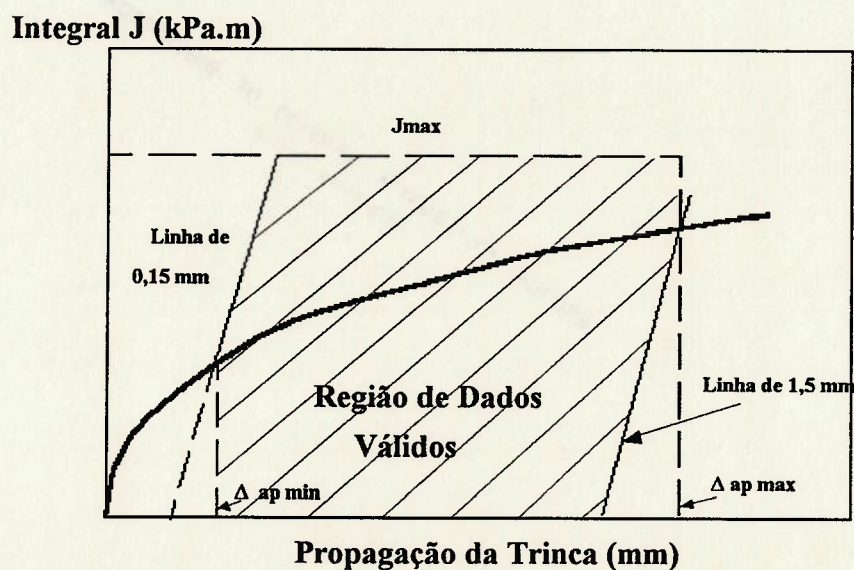


Figura 3.11 Região de validade dos dados do gráfico J versus Δa .

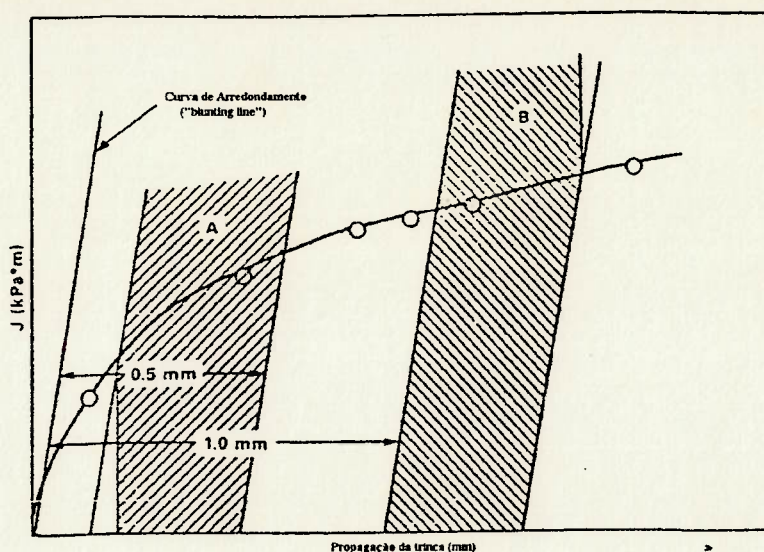


Figura 3.12 Definição de regiões para requisitos de espaçamento dos dados experimentais no gráfico J versus Δa . [14]

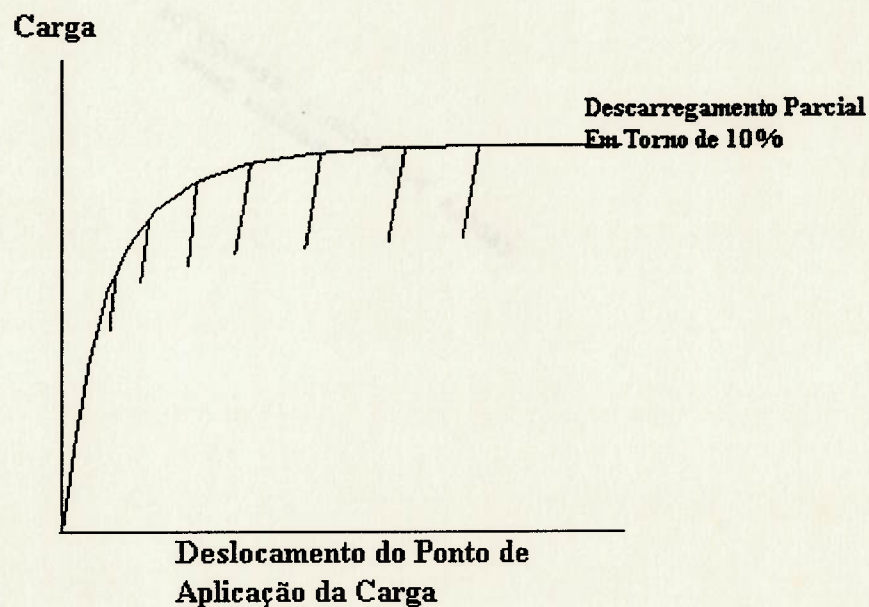


Figura 3.13 Gráfico da carga versus Deslocamento do ponto de aplicação da carga, para determinação de J_{Ic} com um único corpo de prova.

Através da medição da flexibilidade do corpo de prova para cada um dos carregamentos, pode-se calcular o comprimento da trinca correspondente ou efetivamente medi-lo, através de um sensor de ultra-som ou por medição da

resistência elétrica do corpo de prova. Dessa forma, para cada descarregamento, obtêm-se os valores de Δa e os correspondentes valores de J derivados da curva carga versus deslocamento do ponto de aplicação da carga. Tais dados permitem levantamento do gráfico conforme já visto na figura 3.8.

A equação que permite a obtenção do comprimento da trinca a_i no ciclo i de carregamento/descarregamento é dada, para um corpo de prova para ensaio de flexão, por:

$$\frac{a_i}{W} = 0,999748 - 3,9504 U_x + 2,9821 U_x^2 - 3,21408 U_x^3 + 51,51584 U_x^4 - 113,031 U_x^5$$

onde,

$$U_x = \frac{1}{\left[\frac{B W E C_i}{S/4} \right]^{1/2} + 1}$$

onde,

- C_i - flexibilidade do corpo de prova, dada por $(\Delta v_x / \Delta P)$,
- v_x - abertura da ponta da trinca
- E - Módulo de Elasticidade do material

No caso de ensaio de tração com corpo de prova compacto, vale :

$$\frac{a_i}{W} = 1,000196 - 4,06319 u_{LL} + 11,242 u_{LL}^2 - 106,043 u_{LL}^3 + 464,335 u_{LL}^4 - 650,677 u_{LL}^5$$

onde,

$$u_{LL} = \frac{1}{[B E C_i]^{1/2} + 1}$$

Ci - flexibilidade ("compliance") do ponto de aplicação da carga ($\Delta v/\Delta P$)

3.5 Valores de J_{Ic}

A figura 3.14 [4] apresenta dados experimentais comparando o método de obtenção de J_{Ic} com vários corpos de prova, para o aço HY-130.

Na tabela 3.1 encontram-se indicadas algumas propriedades de materiais, inclusive resultados de J_{Ic} , obtidos experimentalmente.

Tabela 3.1 Propriedades de alguns materiais, retiradas das referências indicadas entre colchetes.

Material	Temperatura °C	Tensão Escoamento (Mpa)	J_{Ic} (MPa m)	Referência
1196NiCrMoV	93	931	950in.lb/in ²	[25]
20MnMoNi55	80		0,26	[33]
A533B			0,60	[31]
HY-130	20	895-1030	0,13-0,14	[4]
HY-130	20		0,19	[33]
HSST-2	149		0,255	[33]
A508	20		0,94	[33]

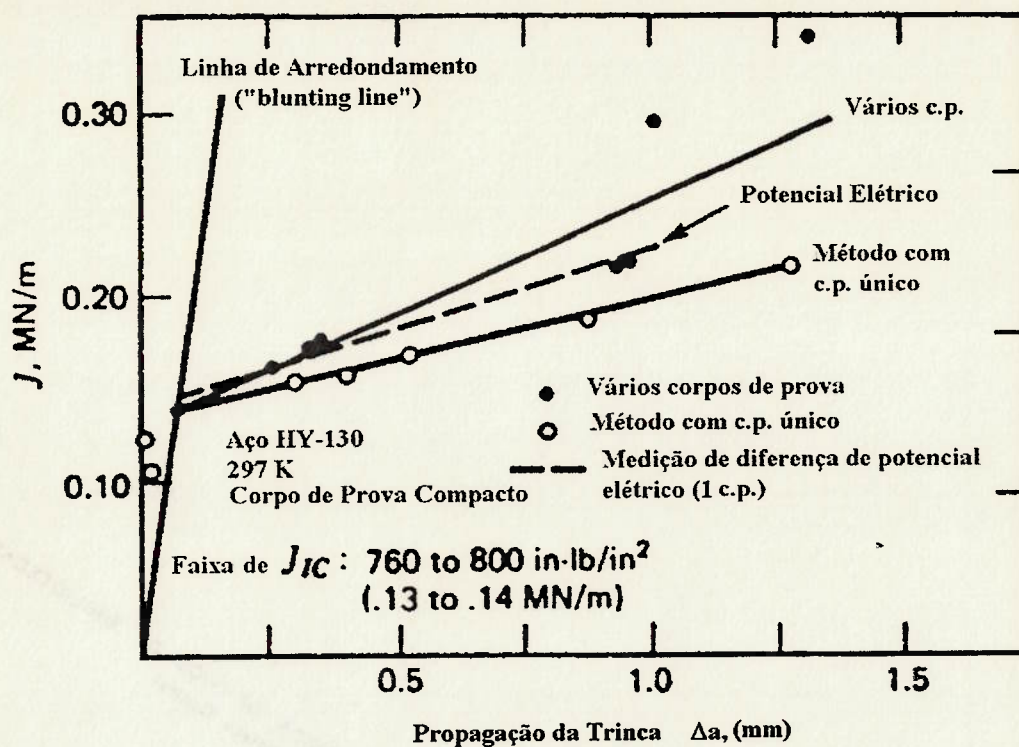


Figura 3.14 Curva obtida experimentalmente em ensaios de levantamento do valor crítico de J, para o aço HY-130.

CAPÍTULO 4

O MODELO NUMÉRICO

Durante a década de 70, o método dos elementos finitos consolidou-se como o mais poderoso procedimento para solução de problemas ligados à Mecânica de Fraturas. LEVY [6], já em 1971, apresentou uma análise de trinca tri-dimensional por elementos finitos, incluindo plasticidade.

Em todos os modelos desenvolvidos para obtenção do fator de intensificação de tensões, um problema comum era a representação do comportamento singular das tensões próximas à ponta da trinca. A variação das tensões em função de $1/\sqrt{r}$ pode ser vista na equação (4.1), válida para LEFM, que corresponde às eqs.(2.34) na EPFM.

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2 \pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (4.1)$$

Estudos iniciais envolvendo a utilização de elementos finitos em casos de fratura utilizaram elementos convencionais, com deformação constante dentro de cada elemento, sendo constatada a necessidade de utilizar-se malhas extremamente refinadas nas regiões próximas à ponta da trinca. O desenvolvimento de elementos de ordens superiores, como os isoparamétricos, possibilitaram a obtenção de resultados com a mesma precisão, porém, com malhas bem menos refinadas. A desvantagem desses últimos elementos com campo de deslocamentos polinomiais, é o maior número de iterações necessárias para a

convergência da solução. Dessa forma, desenvolveram-se os chamados elementos de trinca, que apresentam comportamento singular, segundo a equação (4.1).

Por exemplo, existem vários elementos de trinca disponíveis no programa ANSYS4.4A. Para problemas bi-dimensionais, a referência [6] sugere o uso de elementos isoparamétricos de 8 ou 6 nós (STIF 2, 82, 83 e 93), conforme representados na figura 4.1.

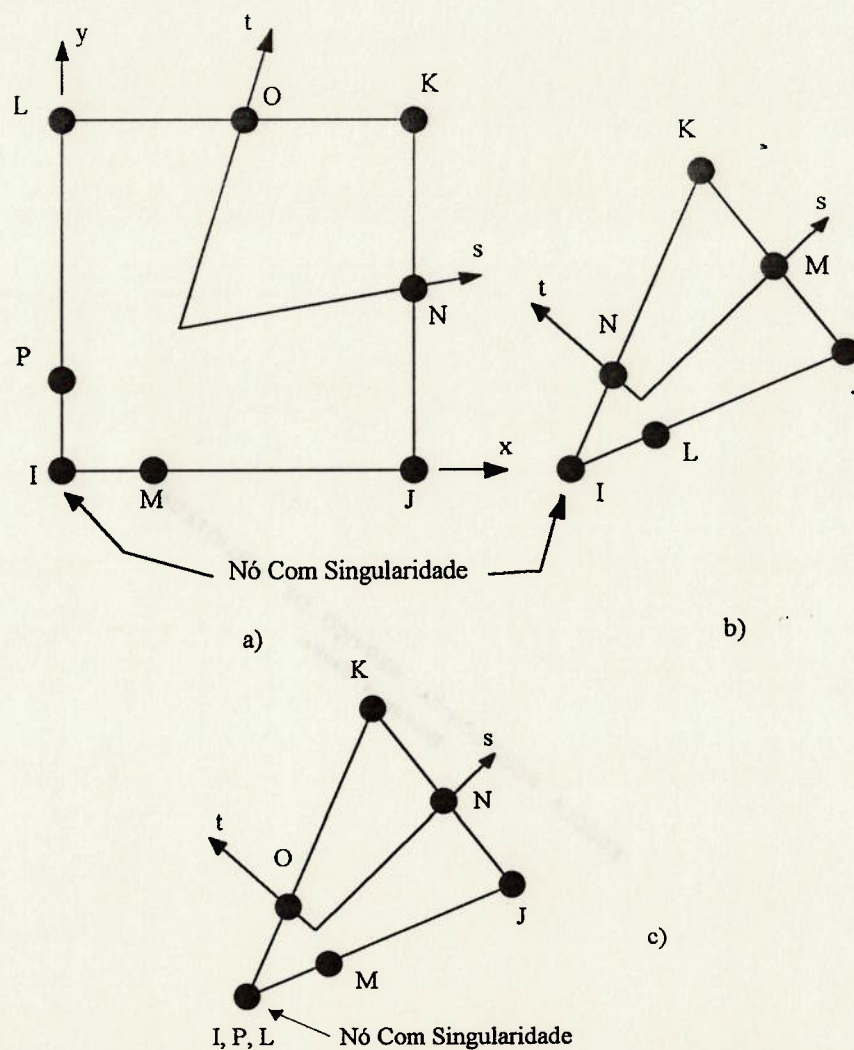


Figura 4.1 Elementos de trinca isoparamétricos bi-dimensionais :

a) quadrilátero de 8 nós (STIF82, 83, 93)

b) triângulo de 6 nós (STIF6)

c) triângulo gerado pela degeneração de um quadrilátero de 8 nós (STIF82, 83, 93).

Nesses elementos, a singularidade do campo de deformações em LEFM é obtida com o reposicionamento dos nós dispostos nos lados do elemento, conforme desenvolvimento de HENSHALL e SHAW [6], e BARSOUM [6].

Uma vez elaborado o modelo da estrutura trincada, deve-se desenvolver um procedimento para o cálculo dos fatores de intensificação de tensões, a partir dos resultados da análise de elementos finitos. Uma maneira imediata consiste na correlação desse resultados com a solução analítica para os campos de tensões e deslocamentos próximos à ponta da trinca, o que requer procedimentos de extrapolação. Nos casos de LEFM existem relações entre o fator de intensificação de tensões \underline{K} e a taxa de liberação de energia \underline{G} associada a uma propagação infinitesimal da trinca. Tais expressões formam a base para os métodos de taxa de liberação de energia e crescimento virtual da trinca, nos quais executam-se duas análises da estrutura, por elementos finitos, com diferença incremental do tamanho da trinca, avaliando-se a diferença de energia de deformação da estrutura. As equações (4.2) permitem o cálculo do fator de intensificação de tensões \underline{K} a partir de \underline{G} , no regime de LEFM.

$$\underline{K} = \left(\frac{8 \mu \underline{G}}{1 + \kappa} \right)^{1/2} \quad (4.2)$$

onde,

μ - módulo de cisalhamento

$$\kappa = \frac{(3 - \nu)}{(1 + \nu)} \quad \text{para EPT}$$

$$= (3 - 4\mu) \quad \text{para EPD}$$

ν coeficiente de Poisson

Dessa maneira evidencia-se uma outra vantagem do conceito de integral \underline{J} , no que se refere à possibilidade de sua utilização para análise de

estruturas também em regime de LEFM. Tal método dispensa o uso de elementos de trinca conforme anteriormente descrito, podendo-se elaborar malhas relativamente menos refinadas, com elementos isoparamétricos. Para o cálculo de \underline{K} a partir da integral \underline{J} , basta lembrar que \underline{J} equivale à taxa de liberação de energia \underline{G} , definida para estruturas em regime de LEFM, conforme abaixo indicado :

$$K = \left(\frac{8 \mu J}{1 + \kappa} \right)^{1/2} \quad (4.3)$$

Um exemplo de utilização de \underline{J} no regime LEFM será mostrado no Capítulo 5.

A seguir, será apresentado o desenvolvimento de um modelo numérico para cálculo da integral \underline{J} , baseado na equação (2.25), abaixo repetida.

$$J = \oint_{\Gamma} \left(W \, dy - \bar{T} \frac{\partial \bar{d}}{\partial x} \, ds \right) \quad (2.25)$$

O modelo tem como entrada de dados os resultados da análise estrutural por elementos finitos obtidos a partir de um programa de elementos finitos (no caso, o ANSYS4.4A), com malha utilizando elementos isoparamétricos. Como será detalhado adiante, houve a necessidade de geração de alguns arquivos durante a fase de solução do problema, para servirem de arquivos de entrada para o programa desenvolvido em FORTRAN 77.

4.1 Desenvolvimento do Modelo Numérico

Conforme explicado no item anterior, para a utilização da integral \underline{J} para análise de estruturas trincadas não há necessidade de modelar-se as regiões próximas à ponta da trinca com elementos singulares. Dessa forma, serão empregados os chamados elementos isoparamétricos com 8 nós. Tais elementos são identificados no programa ANSYS como STIF82, e a sua estrutura está representada na figura 4.2.

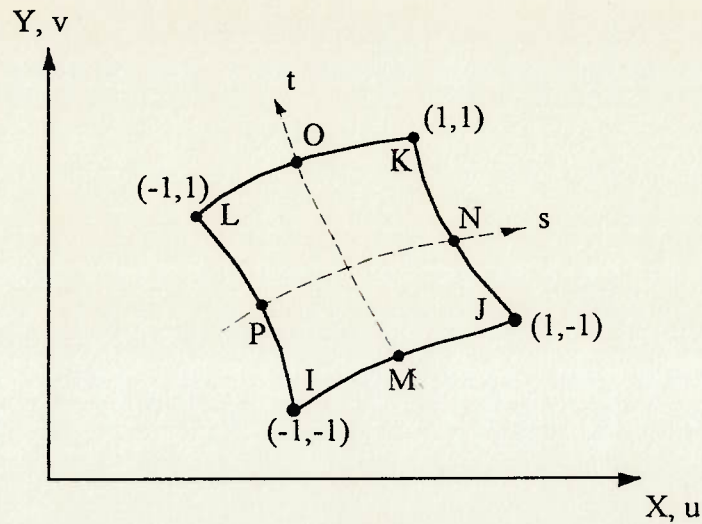
As suas funções de forma são descritas pelas equações (4.4).

- *Nós dos cantos*
$$N_i^{(e)} = \frac{1}{4}(1+s s_i)(1+t t_i)(s s_i + t t_i - 1)$$

$$i=1, 2, 3, 4 (=I, J, K, L \text{ na figura 4.2})$$
(4.4)

- *Nós dos lados*
$$N_i^{(e)} = \frac{s_i^2}{2}(1+s s_i)(1-t^2) + \frac{t_i^2}{2}(1+t t_i)(1-s^2)$$

$$i=5, 6, 7, 8 (=M, N, O, P \text{ na figura 4.2})$$



Funções de Forma	Pontos de Integração
$u = 1/4 (u_I(1-s)(1-t)(-s-t-1)$ $+ u_J(1+s)(1-t)(s-t-1)$ $+ u_K(1+s)(1+t)(s+t-1)$ $+ u_L(1-s)(1+t)(-s+t-1))$ $+ 1/2 (u_M(1-s^2)(1-t)$ $+ u_N(1+s)(1-t^2)$ $+ u_O(1-s^2)(1+t)$ $+ u_P(1-s)(1-t^2))$ $v = (\text{análogo a } u)$	3 x 3 (KEYOPT(2)=0) ou 2 x 2 (KEYOPT(2)=1)

Figura 4.2 Definição do elemento isoparamétrico quadrangular de 8 nós, bi-dimensional, STIF82, do programa ANSYS Rev. 4.4A.

A tabela 4.1 indica os valores das coordenadas s_i e t_i para cada nó i .

Tabela 4.1 - Valores das coordenadas s_i e t_i da equação (4.4), válida para elemento isoparamétrico bi-dimensional com 8 nós (STIF 82). A substituição desses valores na eq. (4.4) resulta nas equações mostradas na figura 4.2.

Número do nó	Coordenada s_i	Coordenada t_i
1	-1	-1
2	+1	-1
3	+1	+1
4	-1	+1
5	0	-1
6	+1	0
7	0	+1
8	-1	0

Para a integração da eq. (2.25), adotou-se o método de integração de Gauss, descrito no Apêndice A. Ainda de acordo com essa equação, percebe-se que faz-se necessário o equacionamento de um vetor \underline{T} , normal ao contorno $\underline{\Gamma}$. Por conveniência, já que a formulação dos elementos isoparamétricos utiliza coordenadas normalizadas, resolveu-se adotar a integração ao longo de um contorno $\underline{\Gamma}$, tal que o mesmo corresponda à curva de coordenada normalizada s igual a uma constante, conforme mostrado na figura 4.3. Essa escolha permite, também, que sejam utilizados os resultados da análise de elementos finitos correspondentes aos pontos de integração de Gauss, a partir dos quais derivam-se os resultados para outros pontos do elemento por interpolação quadrática. Tal

escolha de caminho de integração deve ser levado em conta durante a elaboração da malha de elementos finitos, pois essa necessitará uma topologia conforme ilustrado na figura 4.4, por exemplo.

Também deve-se salientar que o sentido de numeração dos nós dos elementos (tabela de incidência) e a posição do nó I (primeiro nó do elemento) de cada um dos elementos deverão ser controlados, a fim de garantir-se que o contorno Γ realmente contenha apenas pontos de Gauss com coordenada normalizada \underline{s} de valor constante. O procedimento para obtenção da malha com as características anteriores, para o programa ANSYS, será detalhado no Capítulo 5.

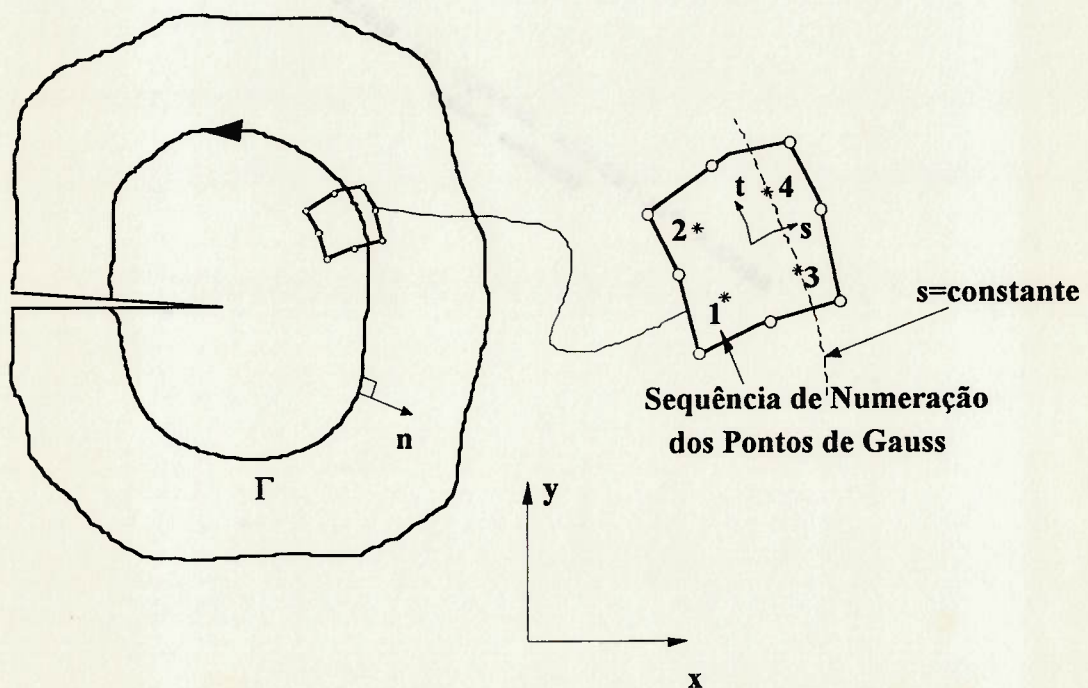


Figura 4.3 Contorno para cálculo da integral J , passando por \underline{s} igual a uma constante. A sequência de numeração dos pontos de Gauss correspondem à versão do ANSYS utilizada.

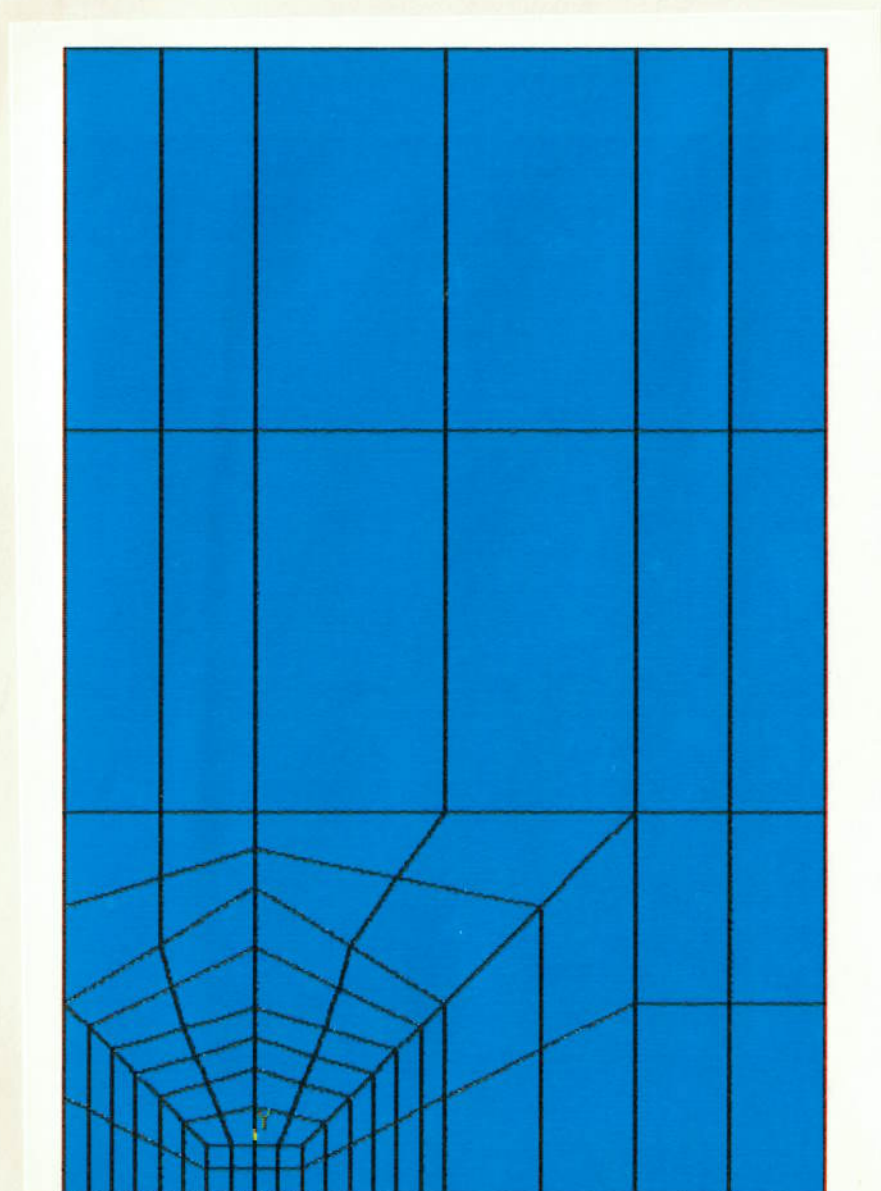


Figura 4.4 Topologia da malha de elementos finitos necessária para utilização do programa PRINC para cálculo da integral J .

A partir da equação analítica da integral J (2.25), desenvolve-se a formulação matemática que permite o cálculo do seu valor por procedimentos numéricos. O vetor de tensões \vec{T} , associado à direção normal \vec{n} ao contorno escolhido Γ , pode ser obtido através da decomposição do tensor de tensões $\vec{\sigma}$ do ponto considerado, na direção definida pelo versor \vec{n} . Assim, lembrando que o contorno Γ está contido no plano xy de coordenadas cartesianas, pode-se escrever :

$$\vec{T} = \vec{\sigma} \vec{n}$$

onde,

$\vec{\sigma}$ - tensor de tensões no ponto considerado

\vec{n} - versor, normal ao contorno Γ de integração

Para o caso bi-dimensional vale escrever:

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

onde,

σ_{ij} - tensão atuante no plano definido pela normal i , na direção j

n_i - componente i do versor \vec{n} , no sistema de coordenadas cartesianas. n_z é igual a zero, para análises bi-dimensionais.

Considerando-se o caso bi-dimensional, resultará, para o valor de \vec{T} :

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x n_x + \sigma_y n_y \\ \sigma_y n_x + \sigma_x n_y \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

O vetor deslocamento \bar{d} pode ser escrito como :

$$\bar{d}(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

onde,

$u(x,y)$ - campo de deslocamentos na direção x

$v(x,y)$ - campo de deslocamentos na direção y

Derivando-se (4.6) em relação a x , obtém-se:

$$\frac{\partial \bar{d}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Efetuando-se o produto escalar entre as eqs. (4.5) e (4.7), chega-se

a:

$$\bar{T} \frac{\partial \bar{d}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \sigma_x n_x + \sigma_y n_y \\ \sigma_y n_x + \sigma_x n_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\bar{T} \frac{\partial \bar{d}}{\partial x} = (\sigma_x n_x + \sigma_y n_y) \frac{\partial u}{\partial x} + (\sigma_y n_x + \sigma_x n_y) \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.8)$$

Na eq. (4.8), as componentes de \bar{n} estão representadas no sistema cartesiano (x, y) . Faz-se, a seguir, a dedução de sua representação no sistema de coordenadas normalizadas (s, t) .

Definindo-se o vetor \bar{A} como sendo tangente à curva $s=\text{constante}$, a sua expressão será dada pela equação do gradiente de \bar{r} na direção de \bar{t} [15], isto é:

$$\vec{A} = \frac{\vec{r}}{a} = \left[\frac{\partial x}{\partial a}; \frac{\partial y}{\partial a}; 0 \right] \quad (4.9)$$

Analogamente, pode-se escrever a equação de \vec{B} , tangente à curva t=constante:

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}}{s} = \left[\frac{\partial x}{\partial s}; \frac{\partial y}{\partial s}; 0 \right] \quad (4.10)$$

O vetor \vec{C} normal ao plano do elemento é obtido pelo produto vetorial de \vec{A} e \vec{B} . Assim:

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \vec{A} \wedge \vec{B} \\ \therefore \vec{C} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial a} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Deseja-se obter a equação do vetor \vec{D} , normal à curva s=constante, dada por:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \vec{C} \wedge \vec{A} \\ \vec{D} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial a} \right) \\ \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & 0 \end{vmatrix} \\ \vec{D} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial a} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \\ \frac{\partial x}{\partial a} \left(\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial a} \right) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

O versor \bar{n} , correspondente à direção normal à curva $s=\text{constante}$, será, pois:

$$\bar{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{n} = \begin{bmatrix} D_x \\ |\bar{D}| \\ D_y \\ |\bar{D}| \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

onde,

D_x e D_y - dados pela eq. (4.12)

$|\bar{D}| = (D_x^2 + D_y^2)^{1/2}$ módulo do vetor \bar{D}

O elemento infinitesimal ds , do contorno de integração Γ , é dado por:

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2} \quad (4.14)$$

Escrevendo-se as equações das coordenadas cartesianas x e y em função das coordenadas normalizadas s e t , obtém-se:

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt \\ dy = \frac{\partial y}{\partial s} ds + \frac{\partial y}{\partial t} dt \end{cases} \quad (4.15)$$

Lembrando que estamos adotando um contorno de integração Γ tal que s seja constante, as eqs. (4.15) tornam-se:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t} dt \quad (4.16)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial t} dt$$

Substituindo-se (4.16) na eq. (4.14), resulta:

$$ds = \left(\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right)^{1/2} dt \quad (4.17)$$

A equação da densidade de energia de deformação para casos bi-dimensionais, material em regime linear elástico, é dada por [36]:

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy}) \quad (4.18)$$

Finalmente, substituindo-se as eqs. (4.8), (4.13), (4.17) e (4.18) na eq. (2.25), obtém-se:

$$J^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \frac{\partial y}{\partial t} - \right. \quad (4.19)$$

$$\left. \left[(\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y) \frac{\partial u}{\partial x} + (\sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \left[\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} dt$$

A integração da equação (4.19) para um elemento e , deve ser feita por métodos numéricos, e o seu cálculo para todos os elementos finitos que estiverem contidos no contorno Γ resultará no valor da integral J desejado para a estrutura.

O método de integração escolhido, conforme já citado, é o Método da Quadratura de Gauss (descrito no Apêndice A). O programa desenvolvido

prevê a opção da ordem de integração desejada, que poderá ser 2 x 2 ou 3 x 3 para o elemento isoparamétrico de 8 nós. A solução do modelo numérico pelo programa desenvolvido consiste em calcular-se a eq.(4.19) nos pontos de integração de Gauss, conforme abaixo indicado:

$$J^{(e)} = \int_{-1}^{+1} I dt$$

$$J^{(e)} = \sum_{q=1}^{NGAUSS} I(s_c, t_q) W_q \quad (4.20)$$

onde,

- I - integrando da equação (4.19)
- NGAUSS - número de pontos de integração de Gauss (2 ou 3)
- s_c - coordenada s constante, adotada para o contorno de integração Γ
- t_q - coordenada t do ponto de integração de Gauss q
- W_q - coeficiente de Gauss, correspondente ao ponto de integração de Gauss q

As grandezas que compõem a equação de I na eq. (4.20) nem sempre podem ser diretamente obtidas dos arquivos gerados durante a execução da análise por elementos finitos da estrutura, sendo função do particular programa utilizado na resolução. O equacionamento a seguir visa mostrar várias possibilidades de obtenção dos dados necessários para cálculo de I nos pontos de integração de Gauss. Em função do conteúdo dos arquivos gerados pelo programa de elementos finitos sendo utilizado, alguns dos desenvolvimentos seguintes poderão ser desnecessários, ou talvez, até mesmo insuficientes em alguns casos, requerendo maior tratamento dos dados. A premissa adotada nesse trabalho

consistiu no desenvolvimento das equações considerando-se os resultados disponíveis ao utilizar-se o programa ANSYS Rev.4.4A, com elementos isoparamétricos de 8 nós (STIF82).

Os dados disponíveis para pós-processamento gerados pelo ANSYS encontram-se listados a seguir:

- GEOMETRIA DO ELEMENTO - coordenadas cartesianas globais dos nós do elemento (x_i, y_i);
- DESLOCAMENTOS NODAIS - deslocamentos nodais no sistema de coordenadas cartesianas (u_i, v_i);
- TENSÕES NODAIS - componentes cartesianas globais ou tensões principais;
- TENSÕES NO ELEMENTO - tensões interpoladas no centróide do elemento;
- TENSÕES NOS PONTOS DE INTEGRAÇÃO DE GAUSS

Pode-se notar que nem todos os parâmetros contidos na eq. (4.19) são fornecidos pelo programa. Seguem-se alguns desenvolvimentos que permitem a obtenção dessas grandezas, a partir dos resultados disponíveis gerados pelo programa ANSYS4.4A.

4.1.1 Derivadas Cartesianas dos Deslocamentos

Lembrando-se que o deslocamento de um ponto qualquer dentro de um elemento pode ser escrito em função dos deslocamentos nodais desse elemento, segue-se que:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n N_i(s, t) u_i \quad (4.21)$$

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n N_i(s, t) v_i$$

onde,

$N_i(s, t)$ - funções de forma dadas pelas eqs. (4.4)

u_i - deslocamento na direção x do nó i

v_i - deslocamento na direção y do nó i

n - número de nós do elemento (n é igual a 8 para o elemento STIF 82)

As derivadas dos deslocamentos no sistema de coordenadas cartesianas serão dadas por:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(s, t)}{\partial x} u_i$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(s, t)}{\partial y} u_i$$

(4.22)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(s, t)}{\partial x} v_i$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(s, t)}{\partial y} v_i$$

Os deslocamentos nodais u_i e v_i são disponíveis nos resultados gerados pela análise. As derivadas das funções de forma, porém, não são obtidas diretamente, pois elas estão escritas em coordenadas normalizadas, conforme eqs. (4.4), e não no sistema cartesiano, como seria necessário para calcular-se a eq. (4.22). A correlação entre as derivadas das funções de forma no sistema cartesiano e aquelas no sistema normalizado, é provida pelo operador jacobiano (aqui representado por \underline{JB} para evitar-se confusão com a notação da integral \underline{J}), segundo a relação seguinte:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(s, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i(s, t)}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{JB}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(s, t)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i(s, t)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

O segundo membro da eq. (4.23) é facilmente calculado, sendo conhecidas as coordenadas cartesianas dos nós do elemento. A equação do jacobiano é dada por:

$$\underline{JB} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(s, t)}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(s, t)}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(s, t)}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(s, t)}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

onde,

x_i, y_i - coordenadas cartesianas do nó i

$$\underline{JB} = \begin{bmatrix} \underline{JB}_{11} & \underline{JB}_{12} \\ \underline{JB}_{21} & \underline{JB}_{22} \end{bmatrix}$$

A matriz inversa do jacobiano calcula-se por:

$$JB^{-1} = \frac{1}{|JB|} \begin{bmatrix} JB_{22} & -JB_{12} \\ -JB_{21} & JB_{11} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

onde,

$|JB|$ - determinante da matriz do jacobiano \underline{JB}

Assim as eqs. (4.22) podem ser calculadas a partir da substituição das eqs. (4.23) , (4.25) e dos valores de deslocamentos e coordenadas nodais. Vale lembrar que os cálculos são executados para as coordenadas dos pontos no interior do elemento, correspondentes aos pontos de integração de Gauss.

4.1.2 Derivada $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$

Lembrando que para o elemento isoparamétrico, as coordenadas de um ponto qualquer no interior do elemento podem ser obtidas pelo uso das funções de forma, pode-se escrever :

$$y = \sum_{i=1}^n N_i(s, t) y_i \quad (4.26)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(s, t)}{\partial t} y_i \quad (4.27)$$

onde,

$N_i(s, t)$ - dados pelas eqs (4.4)

y_i - resultado fornecido pelo ANSYS 4.4A

4.1.3 Componentes do Versor \bar{n} Normal ao Contorno Γ

As componentes \underline{n}_x e \underline{n}_y do versor \bar{n} podem ser calculadas utilizando-se as eqs.(4.13) e (4.12), bastando lembrar que as coordenadas cartesianas de um ponto no interior do elemento são obtidos, analogamente à eq. (4.26), por:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i(s, t) \cdot x_i \quad (4.28)$$

$$y = \sum_{i=1}^n N_i(s, t) \cdot y_i$$

4.2 Estrutura do Programa de Cálculo da Integral \underline{J}

4.2.1 Programa Gerenciador PRINC

Visando-se um melhor controle do fluxo de dados durante a execução da rotina de cálculo da integral \underline{J} , decidiu-se segmentar a solução em diversas subrotinas, as quais são controladas por um programa principal, denominado PRINC.

O fluxograma do programa gerenciador PRINC pode ser visto na figura B.01, em linguagem LEAL [16].

Na figura B.02 encontra-se a listagem em linguagem FORTRAN 77 do programa PRINC e das subrotinas a seguir descritas.

4.2.2 Subrotina INPUT

A primeira subrotina considerada é a interface com os arquivos gerados pelo programa de elementos finitos ANSYS 4.4A. Ela é responsável pela leitura dos dados de entrada necessários para o processamento das equações desenvolvidas nos parágrafos anteriores, bem como pela formatação dos mesmos. Essa subrotina, denominada INPUT, gera as seguintes matrizes:

ECORD(2*NN,N)-Matriz com as coordenadas cartesianas globais dos nós dos elementos de toda a estrutura.

$$\text{ECORD} = \begin{bmatrix}
 x_{11} & \cdots & \cdots & x_{1j} & \cdots & \cdots & \cdots & x_{1N} \\
 x_{21} & & & \vdots & & & & \\
 \vdots & & & x_{ij} & & & & \\
 x_{NN1} & \cdots & & \vdots & & \cdots & & x_{NNN} \\
 \hline
 y_{11} & \cdots & & & & \cdots & & y_{1N} \\
 y_{21} & \cdots & & & & & & \vdots \\
 \vdots & & & & & & & \vdots \\
 y_{NN1} & \cdots & & & & \cdots & & y_{NNN}
 \end{bmatrix}$$

onde,

x_{ij} - coordenada x do nó i do elemento j

NN - número de nós no elemento (NN=8 para o elemento STIF 82)

N - número de elementos na estrutura

EDESL(2*NN,N)-Matriz com os deslocamentos nodais no sistema de coordenadas cartesianas globais

$$\text{EDESL} = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & \cdots & u_{1j} & \cdots & \cdots & \cdots & u_{1N} \\ u_{21} & & & \vdots & & & & \\ \vdots & & & u_{1j} & & & & \\ \ddots & & & \vdots & & & & \\ u_{NN1} & \cdots & & \vdots & & \cdots & & u_{NNN} \\ \hline v_{11} & \cdots & & & & & \cdots & v_{1N} \\ v_{21} & \cdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ v_{NN1} & \cdots & & & & & \cdots & v_{NNN} \end{bmatrix}$$

TENS(3, N, NGAUS*NGAUS)-Matriz com as componentes das tensões de cada elemento, nos pontos de integração de Gauss, no sistema cartesiano global.

NGAUS é a ordem da quadratura de integração de Gauss (NGAUS=2 para integração 2x2; NGAUS=3 para integração 3x3).

$$\text{TENS}(3, N, 1) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx 1} & \cdots & \sigma_{xx N} \\ \sigma_{xy 1} & \cdots & \sigma_{xy N} \\ \sigma_{yy 1} & \cdots & \sigma_{yy N} \end{bmatrix}$$

exemplifica a matriz TENS para o primeiro ponto de integração de Gauss (q=1, na eq.(4.20)).

4.2.3 Outros Dados de Entrada

Além dos dados de entrada obtidos dos resultados da análise de elementos finitos através da interface descrita na subrotina INPUT, também devem ser fornecidas as seguintes informações:

- NELEM** - número de elementos contidos no contorno de integração Γ escolhido
- CAM(NELEM)** vetor contendo os números dos elementos contidos no contorno de integração Γ escolhido.
- NGAUS** - ordem da quadratura de Gauss para a integração numérica pelo método de Gauss (2 ou 3).

4.2.4 Subrotina DERST

Sua função é originar a matriz DERNOR, contendo os valores das derivadas das funções de forma no sistema de coordenadas normalizadas, calculados nos pontos de integração de Gauss, a partir da derivação das eqs. (4.4). Para o elemento STIF 82, vale escrever-se:

Nós dos cantos ($i=1, 2, 3, 4$)

$$\frac{\partial N_i(s, t)}{\partial s} = \frac{1}{4} s (1 + t t_i) (2 s s + t t_i)$$

(4.29)

$$\frac{\partial N_i(s,t)}{\partial t} = \frac{1}{4} t_i (1+s s_i) (2 t t_i + s s_i)$$

Nós dos lados (i=5, 6, 7, 8)

$$\frac{\partial N_i(s,t)}{\partial s} = \frac{s_i^2}{2} (1-t^2) - s t_i^2 (1+t t_i) (1-s^2)$$

(4.29)

$$\frac{\partial N_i(s,t)}{\partial t} = \frac{t_i^2}{2} (1-s^2) - t s_i^2 (1+s s_i) (1-t^2)$$

A matriz DERNOR possui a seguinte configuração:

$$\text{DERNOR}(2, \text{NN}, \text{NG}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \dots & \dots & \frac{\partial N_{\text{NN}}}{\partial s} \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} & \frac{\partial N_2}{\partial t} & \dots & \dots & \frac{\partial N_{\text{NN}}}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial t} & \dots & \dots & \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

onde as funções $\partial N_i/\partial s$, $\partial N_i/\partial t$ são obtidas a partir de equações como as indicadas em (4.29), válidas para o elemento STIF 82. A terceira dimensão de DERNOR, dada por NG, fornece os valores de (4.29), obtidos quando da substituição das coordenadas de cada um dos pontos de integração de Gauss contidos no contorno de integração passando pelo elemento considerado.

É importante ressaltar que as eqs. (4.29) são aplicadas em função da tabela de incidência do elemento, conforme padrão do programa ANSYS. A figura 4.2 ilustra a tabela de incidência utilizada para o elemento STIF82 (isoparamétrico, quadrangular, bi-dimensional, 8 nós).

4.2.5 Subrotina JACOB

Essa subrotina calcula a matriz do jacobiano \underline{JB} (2, 2), conforme eq. (4.24), e o seu determinante.

4.2.6 Subrotina DCART

Objetiva calcular a matriz contendo as derivadas cartesianas das funções de forma, denominada DERXY(2,NN). Esse cálculo baseia-se na eq.(4.23), e utiliza os resultados gerados nas subrotinas JACOB e DERNOR.

$$\text{DERXY}(2, \text{NN}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \dots & \frac{\partial N_{\text{NN}}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \dots & \frac{\partial N_{\text{NN}}}{\partial y} \end{bmatrix}$$

4.2.7 Subrotina DDC

Calcula as derivadas do campo de deslocamentos obtidos nos pontos de integração de Gauss, em relação às coordenadas cartesianas, gerando-se a matriz SOMA(2,2). As eqs. (4.22) são utilizadas nessa rotina, com resultados gerados na subrotina DCART (matriz DERXY) e INPUT (matriz EDESL).

4.2.8 Subrotina VETN

Calcula as componentes do versor normal ao caminho Γ , para cada ponto de integração escolhido, a partir das eqs. (4.12), (4.13), (4.26), (4.27) e (4.28).

4.2.9 Subrotina CALC

Consiste na rotina responsável pelo cálculo da eq. (4.20), bem como pelo armazenamento do valor da integral J para cada elemento ao longo do contorno Γ .

4.2.10 Subrotina SELO

Essa subrotina monta a tela inicial, de apresentação do programa PRINC. Oferece, além do logotipo do mesmo, uma breve descrição de suas capacidades e limitações.

4.2.11 Subrotina TELA

Destina-se a limpar a tela do terminal. Na versão final do programa PRINC, a subrotina limpa 24 linhas. Em função do set-up do terminal, poderá ser necessário alterar-se tal número de linhas.

4.2.12 Subrotina IMPRES

Através dessa subrotina efetua-se a impressão dos resultados e de alguns dados de entrada utilizados na compilação do programa PRINC. Mais especificamente, são apresentados:

- números dos elementos contidos no contorno de integração;
- contribuição para a integral \underline{J} de cada ponto de gauss, de cada elemento do contorno de integração;
- valor acumulado da integral \underline{J} ;
- valor total da integral \underline{J} .

CAPÍTULO 5

Resultados

5.1 Introdução

Nesse capítulo são apresentados os resultados da utilização do programa PRINC para solução de algumas estruturas contendo trincas, através do cálculo do valor da integral J . Esses resultados são comparados àqueles obtidos através da solução das mesmas estruturas, empregando-se os recursos do módulo de Mecânica de Fraturas do programa ANSYS® Rev. 4.4A. Sempre que disponíveis, utilizam-se os resultados da solução analítica das estruturas como referência e avaliação do erro no cálculo da integral J pelos dois programas anteriores.

Descrevem-se, detalhadamente, os diversos passos e procedimentos necessários para efetuar-se a análise por elementos finitos utilizando-se o programa ANSYS® Rev. 4.4A. Esses procedimentos são imprescindíveis para garantir-se a correta geração dos elementos da malha, com relação à sua topologia e à incidência dos elementos. Nessa etapa, será discutido o macro denominado ARANHA, utilizado na fase de pré-processamento da análise por elementos finitos.

Conforme apresentado no Capítulo 2, o conceito de integral J , baseado em considerações de balanço energético da estrutura, resulta em valor nulo de J para os casos de estruturas isentas de trinca, calculado ao longo de um contorno fechado Γ contido na estrutura. A partir desse fato, emprega-se o programa PRINC para avaliação da integral J em uma estrutura carregada, porém isenta de trincas, para verificação dos resultados.

Analisa-se uma placa trincada em estado plano de deformação, em que aplicam-se os conceitos de LEFM. Valores de integral J são calculados em contornos de integração localizados a diferentes distâncias da ponta da trinca, utilizando-se os programas PRINC e ANSYS, a fim de comparar-se os resultados. Ao substituir-se esses valores na equação (4.3), obtêm-se os correspondentes fatores de intensificação de tensões K , que são comparados à solução analítica de K .

Finalmente, estuda-se uma estrutura trincada com elevados níveis de plastificação à frente da trinca (EPFM), mostrando-se a viabilidade da utilização da integral J como parâmetro de fratura, e os desvios que seriam obtidos através do emprego de uma solução utilizando o fator de intensidade de tensões K_{Ic} .

5.2 Alguns Procedimentos para Execução da Análise

Conforme já mencionado no Capítulo 4, em função do método adotado na elaboração do programa PRINC, deve-se garantir que a malha de elementos finitos a ser utilizada na análise possua uma configuração conforme

ilustrada na figura 4.3. Também a incidência dos elementos (posição do primeiro nó de cada elemento e o sentido de numeração dos nós), deve ser controlada.

Assim, visando o cumprimento dos requisitos anteriores para a correta utilização do programa PRINC, desenvolveram-se duas rotinas denominadas ARANHA e ARAEPM, que consistem em macros empregados na fase de pré-processamento (/PREP7) do programa ANSYS® Rev. 4.4A para estruturas em LEFM e EPFM, respectivamente. Elas são responsáveis pela geração parametrizada da malha de elementos finitos a ser utilizada na solução da estrutura. Deve-se salientar que, dependendo das dimensões da estrutura e da trinca sendo modelados, o procedimento desenvolvido nesses macros pode mostrar-se inadequado. A sua adaptação às novas condições, porém, não deverá apresentar maiores dificuldades, na maioria dos casos práticos. O que deverá ser considerado é, mais uma vez, a topologia da malha de elementos finitos e a incidência desses últimos.

O programa ANSYS® Rev. 4.4A utilizado no trabalho encontra-se instalado em um computador MACRO VAX 3600, operando em sistema operacional VAX/VMS V4. A linguagem utilizada para elaboração do programa PRINC é o VAX FORTRAN, a qual baseia-se na linguagem FORTRAN 77 [19].

5.2.1 Pré-Processamento

A nível de sistema operacional, deve-se iniciar a análise pela ativação do programa ANSYS®, através do comando :

\$ ANSYS44A

Uma vez ativado o programa ANSYS®, deve-se executar o pré-processamento da análise, através do comando :

```
/PREP7
```

Para a geração do modelo da estrutura e da malha de elementos finitos, atendendo aos requisitos discutidos anteriormente, utiliza-se o macro ARANHA, caso esteja-se analisando estrutura em LEFM, através do comando :

```
*USE, ARANHA
```

ou, caso seja EPFM :

```
*USE, ARAEPFM
```

A listagem de comandos contidos nesses macros está mostrada nas figuras B.03 e B.04.

Também deve ser lembrado, conforme visto na figura 5.1, que o tipo de elemento adotado para elaboração do programa PRINC constitui-se do elemento isoparamétrico, bi-dimensional, com 8 nós (STIF82, no programa ANSYS®).

A tabela 5.1, retirada da referência [20], mostra em detalhes as características do elemento STIF82. Dentre elas, há os chamados "keyoptions", representados na tabela 5.1 como "KEYOPT". Elas representam alguns dos campos disponíveis na definição do tipo de elemento a ser empregado na análise, conforme exemplificado no comando seguinte :

```
ET, 1, 82, , , KEYOPT(3), , KEYOPT(5), KEYOPT(6)
```

É nesse comando que se faz a escolha das características desejadas para a análise, tais como :

- a) o estado de tensões e deformações da estrutura (KEYOPT(3));
- b) seleção dos dados de saída que estarão disponíveis para leitura e impressão. Podem ser incluídos os resultados para os pontos de integração de Gauss (KEYOPT(5));
- c) idem item anterior, para análise não linear (KEYOPT(6)).

Os valores 0 correspondem ao chamado "default" do programa ANSYS®. Dessa maneira, como os dados de entrada necessários para o programa PRINC incluem as tensões nos pontos de integração de Gauss, deve-se adotar KEYOPT(5) igual a 1, conforme mostrado nos comandos dos macros ARANHA e ARAEPM, ilustrados nas figuras B.03 e B.04.

Nas etapas seguintes do pré-processamento introduzem-se as condições de contorno (apoios, carregamentos) e propriedades elásticas do material (módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson).

Tabela 5.1 Características e opções do elemento isoparamétrico STIF82, bi-dimensional, com oito nós, conforme programa ANSYS 4.4A.

Nome do Elemento	STIF82
Número de Nós	8 I, J, K, L, M, N, O, P
Graus de Liberdade	2 UX, UY
Constantes Reais	0 Se KEYOPT(3) = 0, 1, 2
	1 Espessura se KEYOPT(3) = 3
Propriedades de Material	7 EPT
	11 EPD
Características Especiais	Plasticidade, Fluência, Encruamento, Elevados Deslocamentos
KEYOPT(3)	0 EPT
	1 Axisimetria
	2 EPD
	3 EPT com especific. de espessura
KEYOPT(5)	0 Saída básica para o elemento
	1 Acrescenta solução dos pontos de integração
	2 Tensões Nodais

Tabela 5.1 (Continuação) Características e opções do elemento isoparamétrico STIF82, bi-dimensional, com oito nós, conforme programa ANSYS 4.4A.

KEYOPT(6)	0	Saída básica para o elemento
	1	Adiciona solução para a superfície 1
	2	Adiciona solução superf. 1 e 3
	3	Saída não-linear para cada ponto de integração

5.2.2 Pós-Processamento

Após a fase de solução da estrutura pelo programa ANSYS®, os arquivos de saída gerados devem ser lidos e formatados para permitirem a sua leitura pela subrotina INPUT, contida no programa PRINC e descrita no Capítulo 4.

Para tal, elaborou-se um programa, denominado ARQUIVOS.COM, cuja função consiste em ler, a nível de pós-processamento (/POST1), os arquivos do ANSYS® contendo as coordenadas globais dos nós dos elementos, os deslocamentos nodais e as tensões nos pontos de integração de Gauss de cada elemento e gerar, respectivamente, os arquivos COORD.DAT, DISP.DAT, TENSOES1.DAT e TENSOES2.DAT. Esses arquivos são, então, lidos pela subrotina INPUT, gerando as matrizes ECORD, DESLOC e TENS, descritas no Capítulo 4. A figura B.05 mostra a listagem dos comandos utilizados

na elaboração do programa ARQUIVOS.COM. Para efeito de checagem dos resultados da geração da malha de elementos finitos, também incorporou-se à rotina ARQUIVOS.COM a saída de dados correspondentes à incidência de todos os elementos da malha, permitindo a verificação do cumprimento das exigências anteriormente descritas para esse item. O nome do arquivo gerado é ELEMENTO.DAT. Uma última observação refere-se aos comandos necessários para que o programa ANSYS® também armazene as tensões dos pontos de integração de Gauss nos seus arquivos da tensões. Além do KEYOPT(5) igual a 1, descrito no item 5.2.1, faz-se necessário utilizar o comando STRESS, cuja estrutura mostra-se a seguir :

STRESS, Lab, JSTIF, ITEM

onde,

- Lab - nome de referência de até quatro caracteres, que designa a grandeza sendo armazenada
- JSTIF - identificação do tipo de elemento, conforme biblioteca de elementos do ANSYS® (nesse caso, é igual a 82)
- ITEM - número do item correspondente à tensão, conforme tabela 5.2, fornecida pelo ANSYS® para cada elemento,

segundo a referência [22]. A tabela 5.2 mostra os números dos itens correspondentes a cada uma das tensões. O comando "STRESS" deve ser utilizado antes do comando "SET", em nível de pós-processamento. Esses comandos estão representados no programa ARQUIVOS.COM, ilustrado na figura B.05.

Ainda com relação aos arquivos de tensões, o mesmo precisou ser dividido em dois arquivos separados (TENSOES1.DAT e TENSOES2.DAT),

devido às limitações do comando "PRSTR", que permite transferência de grupos de apenas dez tipos de tensões, resultando na leitura parcelada do arquivo de tensões gerado pelo ANSYS®.

Tabela 5.2 Números dos itens correspondentes a cada uma das tensões dos pontos de integração de Gauss.

	Ponto de Integração			
	1	2	3	4
SX	138	149	160	171
SY	139	150	161	172
SXY	140	151	162	173
SZ	141	152	163	174

5.3 Análise de estrutura isenta de trincas

Como primeira verificação do programa PRINC, efetuou-se o cálculo da integral J para uma placa finita carregada por esforços de tração, isenta de trincas, conforme ilustrado na figura 5.1.

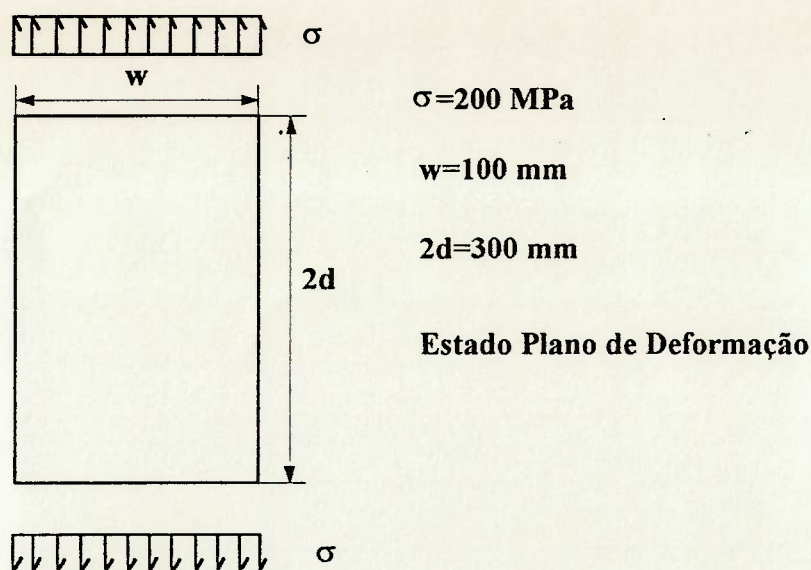


Figura 5.1 Representação esquemática de placa finita, isenta de trincas, submetida a carregamento de tração, para verificação do programa PRINC.

Sabe-se que a solução analítica prevê valor nulo para a integral J calculada em um contorno fechado contido na estrutura isenta de trincas. O modelamento da estrutura resultante da aplicação do macro ARANHA, encontra-se mostrado na figura 5.2, onde pode ser visto que, em função das condições de simetria, modela-se apenas metade da estrutura.

Adotou-se estado plano de deformação, com espessura da placa igual a 25 milímetros. A sequência de comandos encontra-se mostrada abaixo:

\$ANSYS44A	ativação do programa ANSYS
/INTER	execução da análise de forma interativa
/PREP7	fase de pré-processamento
/INPUT, ARANHA, DAT	geração da malha/condições contorno
AFWRITE	gravação dos dados

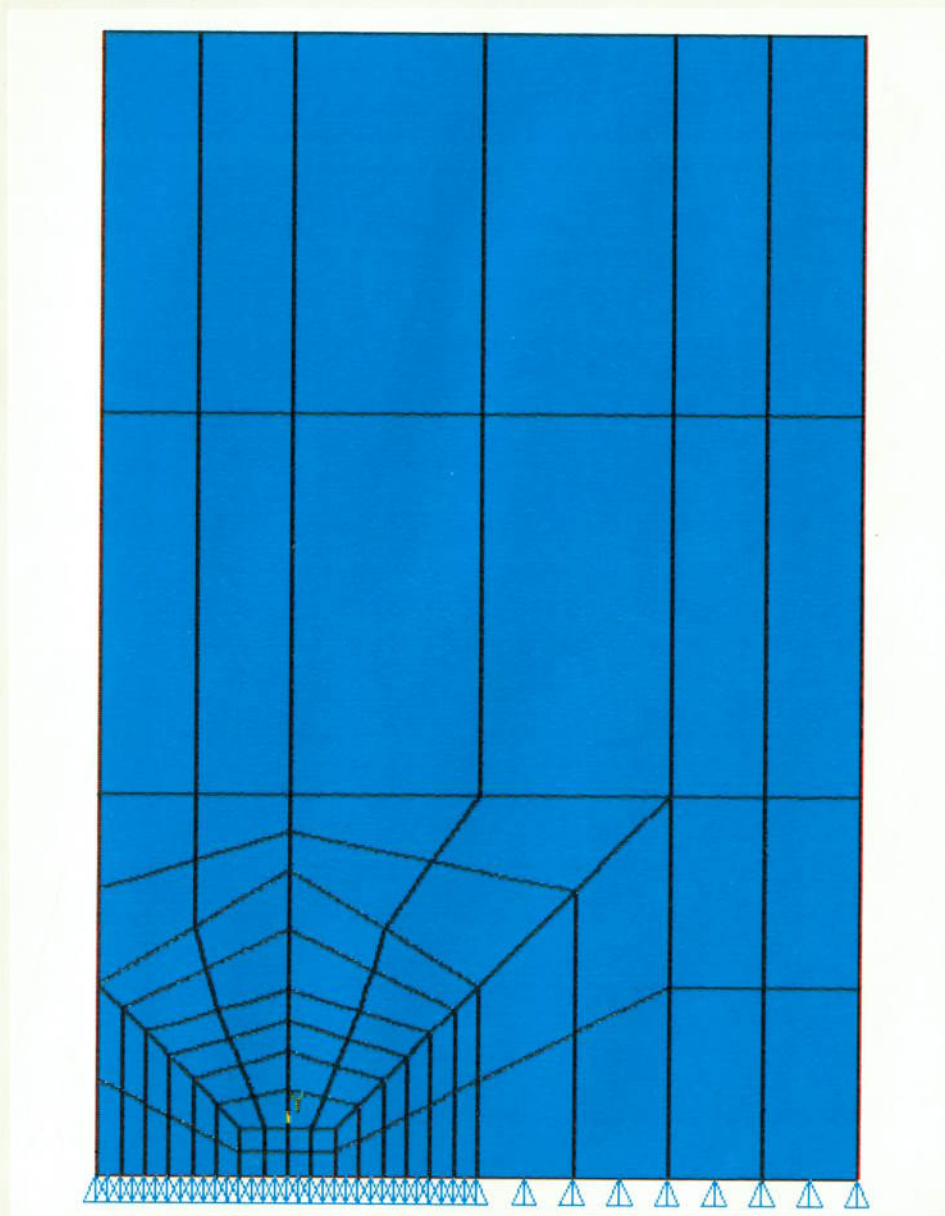


Figura 5.2 Modelo de elementos finitos para a placa plana isenta de trincas, submetida a tração, mostrada na figura 5.1.

FINISH	final da fase de pré-processamento
/INPUT,27	início da fase de solução da estrutura
FINISH	final da solução
/EOF	saída do programa ANSYS
\$ ARQUIVOS	ativação/execução do programa ARQUIVOS
\$RUN PRINC	ativação/execução do programa PRINC

A tabela 5.3 ilustra os números dos elementos adotados para cada um dos contornos Γ escolhidos para cálculo da integral J , ilustrados na figura 5.3.

Tabela 5.3 Resultados para a integral J , obtidos a partir da utilização do programa PRINC, para uma estrutura isenta de trincas, conforme mostrada na figura 5.1. (Valor teórico de J é zero.)

Número do Contorno de Integração Γ	Número dos Elementos Contidos no Contorno de Integração	Valor Obtido para a Integral J PRINC (Pa.m)
1	5, 7, 25, 27, 49, 51, 61, 63	-4,7 E-7
2	6, 8, 26, 28, 50, 52, 62, 64	4,3 E-5
3	9, 11, 37, 39, 63, 55, 65, 67	-2,2 E-13
4	10, 12, 38, 40, 54, 56, 66, 68	5,8 E-13

Conforme mostrado na tabela 5.3, os resultados obtidos são próximos de zero, aproximando-se, portanto, da solução teórica, havendo uma tendência de redução no desvio para os contornos mais distantes da ponta da trinca (contornos números 3 e 4).

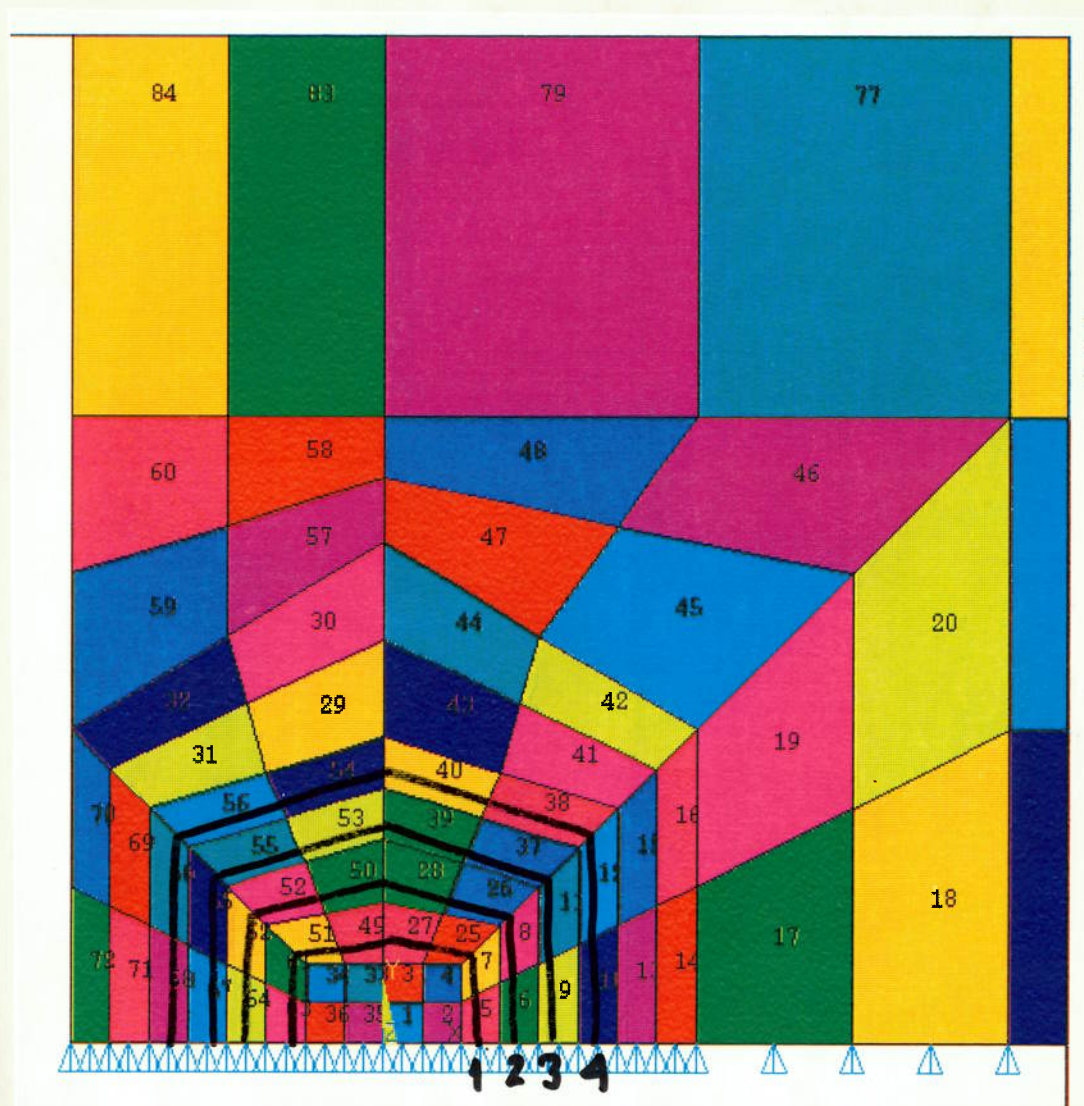


Figura 5.3 Representação dos contornos utilizados para cálculo da integral J através do programa PRINC (placa isenta de trincas). Os números correspondem à identificação dos elementos contidos nos contornos.

5.4 Placa Plana Trincada-LEFM

Uma vez que é conhecida a solução analítica de uma placa plana finita contendo uma trinca passante em uma de suas laterais, escolheu-se tal estrutura para avaliação do desempenho do programa PRINC em comparação aos resultados obtidos pelo ANSYS® Rev.4.4A.

A figura 5.7 representa a geometria da placa adotada. Nota-se a simetria da estrutura e do carregamento aplicado, fato tomado em consideração ao modelar-se apenas metade da estrutura, conforme visto na figura 5.4. Portanto, os valores calculados para a integral J pelo programa PRINC devem ser multiplicados por dois, em função da simetria da estrutura e carregamento.

5.4.1 Solução Analítica

Para uma placa finita nas condições anteriormente descritas, em LEFM, o valor do fator de intensidade de tensões para modo I de abertura da trinca, será dado pela equação (5.1).

$$K_I = Y \sigma \sqrt{a} \quad (5.1)$$

onde,

- Y - fator geométrico
- σ - tensão aplicada ao longe
- a - semi-comprimento da trinca

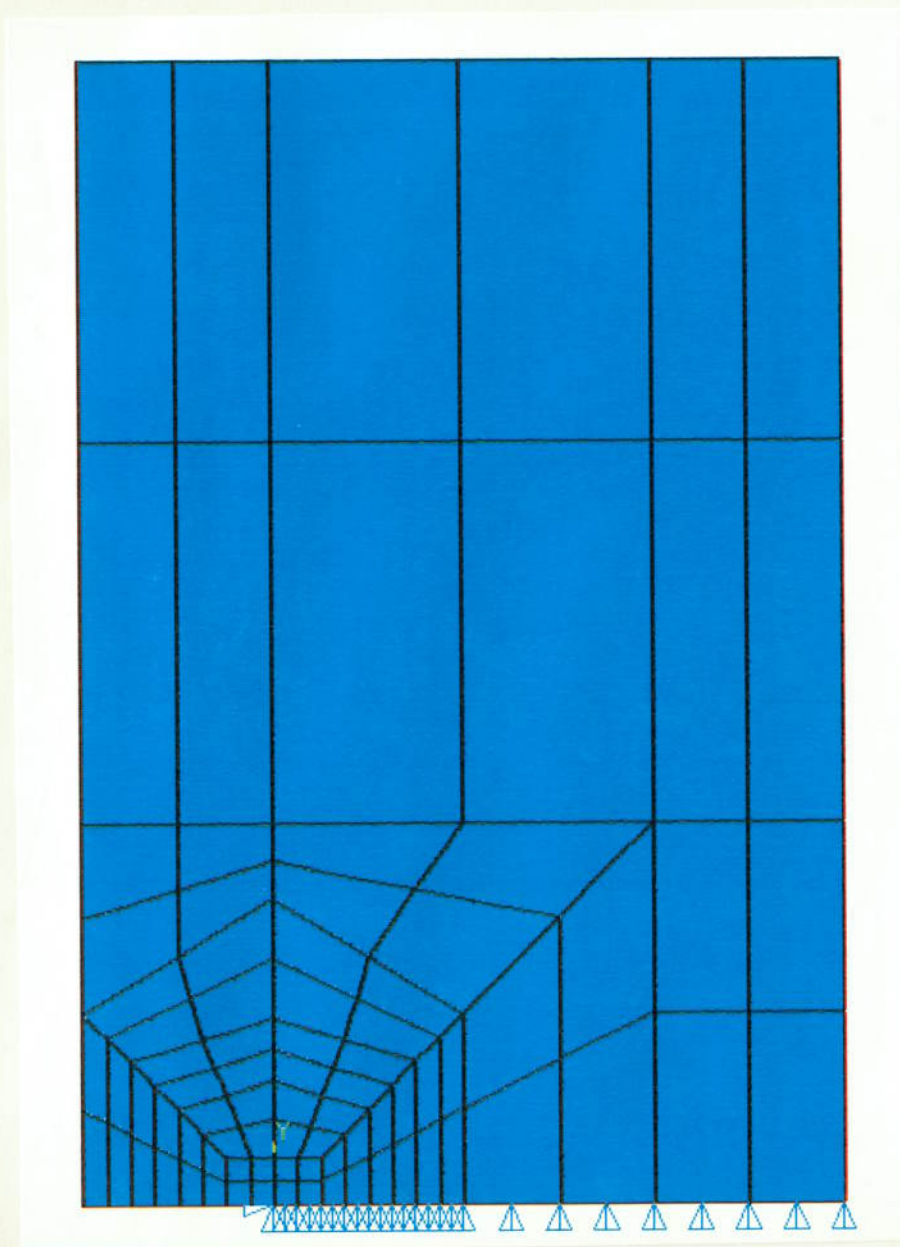


Figura 5.4 Modelo de elementos finitos da placa trincada ilustrada na figura 5.7, gerado pelo macro ARANHA.DAT.

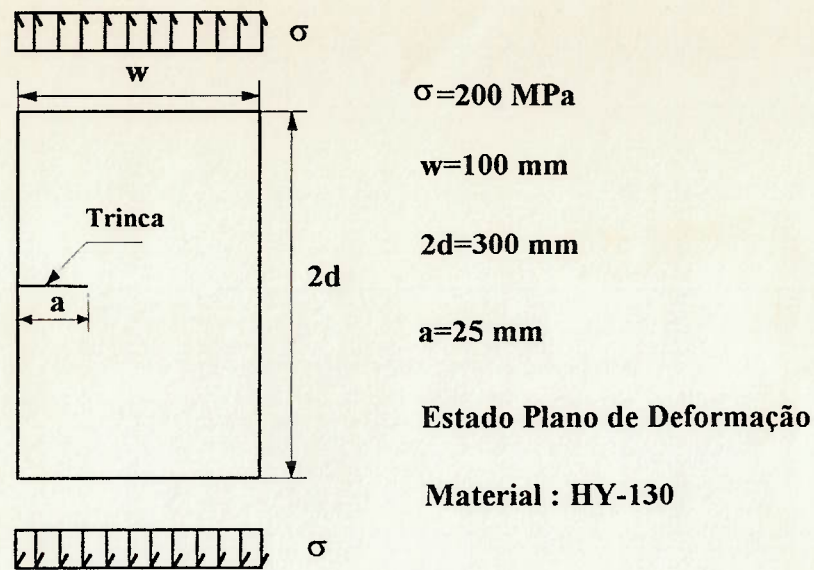


Figura 5.7 Ilustração da placa finita, contendo uma trinca passante em uma de suas laterais, estado plano de deformação.

O fator Y , segundo a referência [1], pode ser obtido segundo a equação (5.2).

$$Y = 1,99 - 0,41 \frac{a}{W} + 18,7 \left(\frac{a}{W} \right)^2 - 38,48 \left(\frac{a}{W} \right)^3 + 53,85 \left(\frac{a}{W} \right)^4 \quad (5.2)$$

onde,

a - semi-comprimento da trinca

W - largura total da placa

Ao substituírem-se os valores de a e W na eq.(5.2), obtém-se :

$$Y = 1,99 - 0,41 \frac{25}{100} + 18,7 \left(\frac{25}{100} \right)^2 - 38,48 \left(\frac{25}{100} \right)^3 + 53,85 \left(\frac{25}{100} \right)^4$$

$$Y = 2,665$$

Esse valor, juntamente com o carregamento adotado de σ igual a 200 MPa, resultará, segundo a equação (5.1) :

$$K_I = 2,665 \times 200 \times 10^6 \times \sqrt{25,0 \times 10^{-3}}$$

$$K_I = 84,3 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$$

Como nesse exemplo desejam-se condições de LFM, deve ser verificada a validade dessa hipótese mediante um dos critérios propostos no Capítulo 2. Adotando-se o critério de Chell, eq. (2.1), e substituindo-se as propriedades do material adotado, aço HY-130, obtém-se :

$$\alpha = \frac{\left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_y}\right)^2}{\beta} \quad (2.1)$$

onde,

$$K_{Ic} = 152 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2} \quad [35]$$

$$\sigma_y = 1030 \text{ MPa}$$

$$\beta = 25,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$E = 206 \text{ GPa}$$

resultando :

$$\alpha = \frac{\left(\frac{152}{1030}\right)^2}{25,0 \times 10^{-3}}$$

$$\alpha = 0,87$$

Logo, como α é menor que 1,0, pode-se afirmar que aplicam-se as condições de LEFM, pelo critério de Chell.

A partir do valor calculado de K_I para esse exemplo, obtém-se facilmente o correspondente valor da integral J , através da equação (4.3), abaixo repetida :

$$K_I = \left(\frac{8 \cdot \mu \cdot J_I}{1 + \kappa} \right)^{1/2}$$

onde, para o aço HY-130, valem as seguintes propriedades :

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{206}{2(1 + 0,3)} = 79,2 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,3$$

$$\kappa = (3 - 4\nu) = (3 - 4 \times 0,3) = 1,8 \quad (\text{EPD})$$

resultando, para o valor de J :

$$J = \frac{K_I^2(1 + \kappa)}{8\mu} = \frac{(84,3 \times 10^6)^2 \times (1 + 1,8)}{8 \times 79,2 \times 10^9}$$

$$\therefore J = 31405 \text{ Pa.m}$$

Assim, o valor de J igual a 31405 Pa.m será utilizado como referência para a avaliação dos resultados obtidos pelos programas PRINC e ANSYS®.

5.4.2 Solução pelo Programa PRINC

Procedendo-se ao modelamento por elementos finitos da placa trincada, utilizando-se a malha ARANHA, chega-se ao modelo mostrado na figura 5.4. Devido às condições de simetria desse exemplo, modela-se apenas metade da estrutura.

A fim de melhor identificar-se os elementos contidos no contorno Γ de integração, procedeu-se a um aumento da escala da figura 5.4, na região próxima à ponta da trinca, conforme visto na figura 5.6.

A tabela 5.4 representa os valores da integral J obtidos para o contorno Γ de integração número 1, mostrado na figura 5.6. Também encontram-se representadas as contribuições individuais de cada ponto de integração de Gauss.

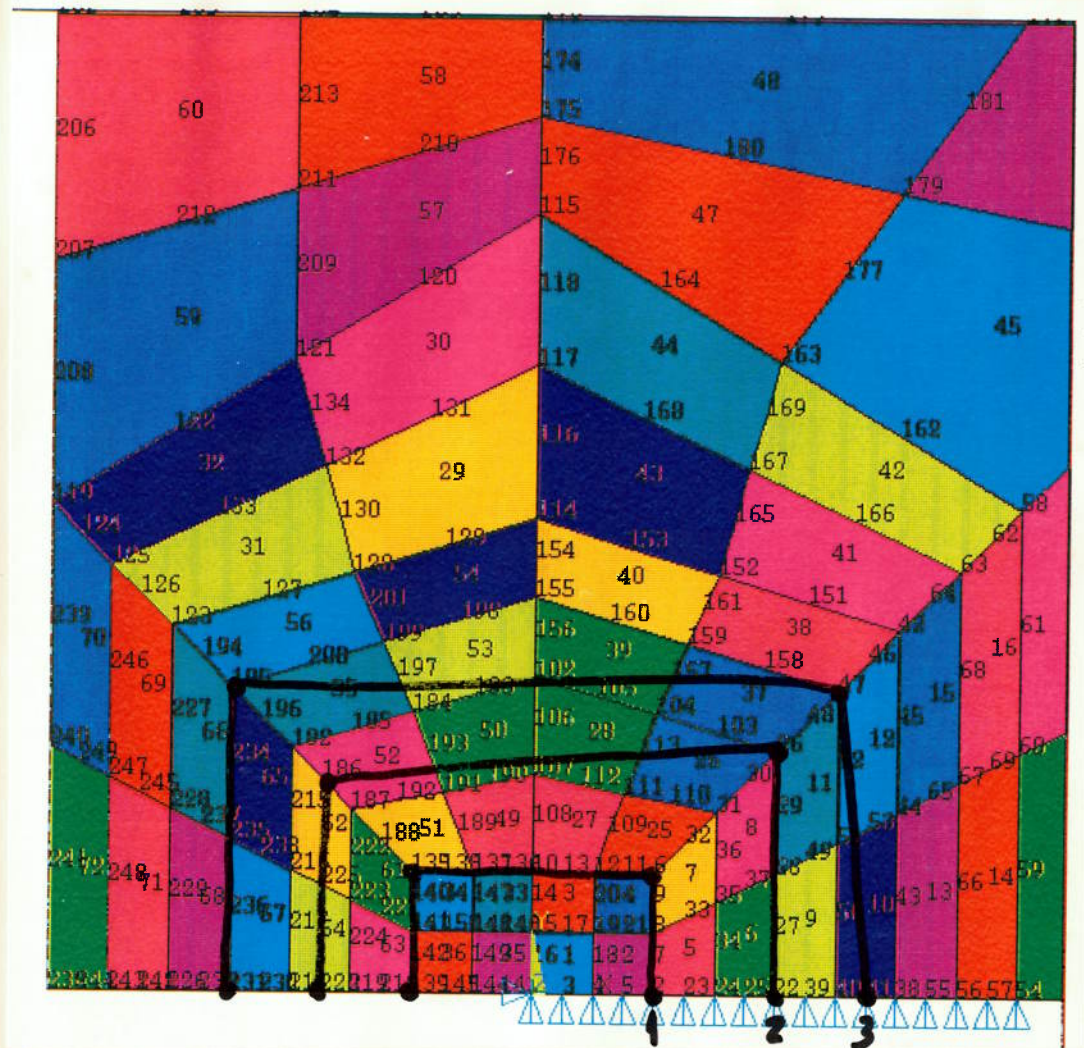


Figura 5.5 Contornos utilizados para cálculo da integral J através do programa ANSYS (macro JIN2). Os números correspondem à identificação dos nós que definem os contornos, conforme sintaxe do comando LPATH.

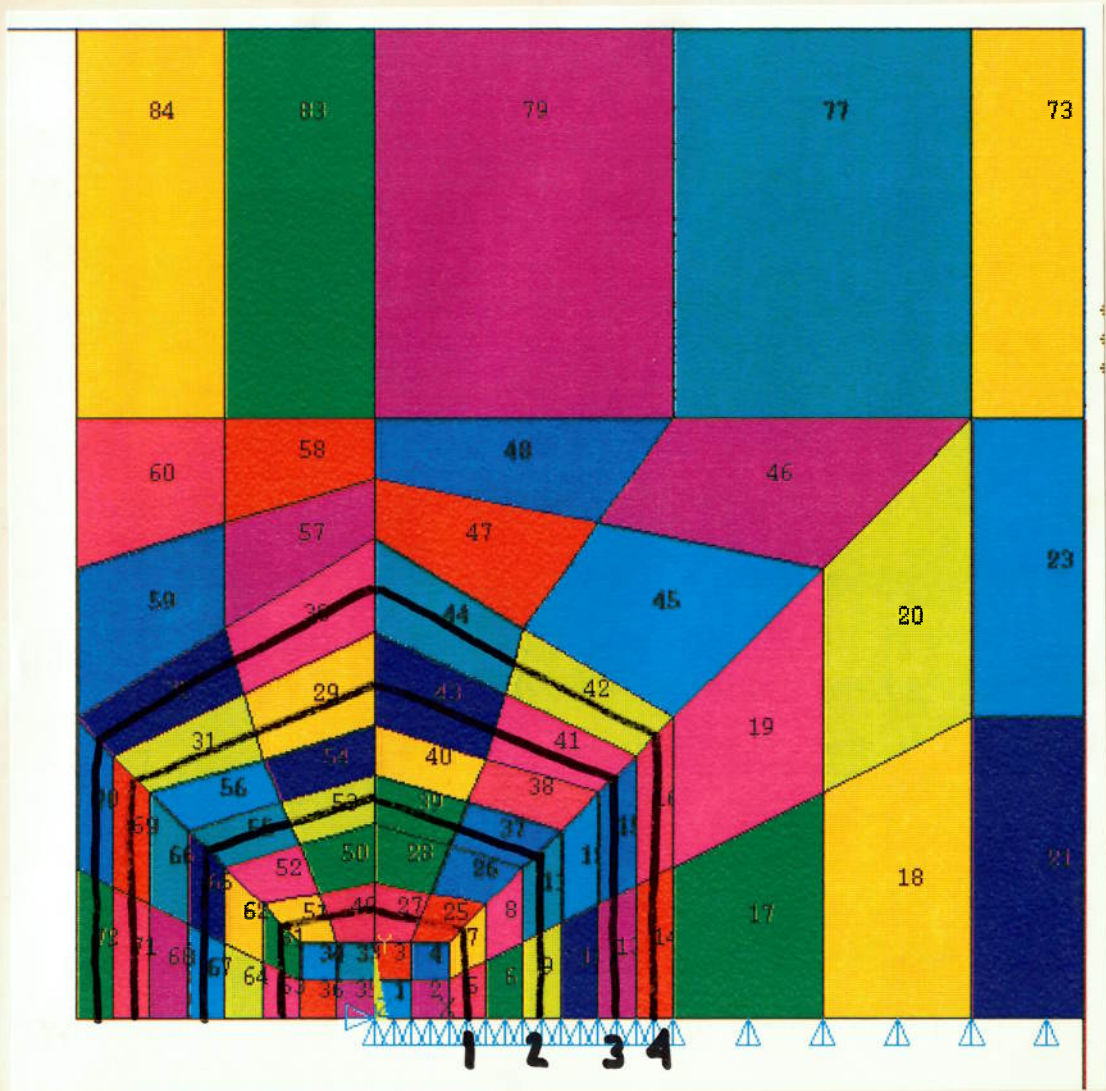


Figura 5.6 Representação dos contornos de integração para cálculo da integral J para a placa trincada, pelo programa PRINC.

Tabela 5.4 Valores da integral J para o contorno de integração nº 1, mostrado na figura 5.6.

Elementos Contidos no Contorno Γ	Contribuição para J de Cada Ponto de Gauss	Total Acumulado Para a Integral J
5	438,9	438,9
	509,5	948,4
7	743,0	1691,4
	783,9	2475,3
25	794,9	3270,2
	1218,8	4489,0
27	1768,4	6257,4
	2071,9	8329,3
49	2186,3	10515,6
	1703,8	12219,4
51	1312,5	13531,9
	729,6	14261,5
61	421,8	14683,3
	335,8	15019,1
63	155,0	15174,1
	33,5	15207,6
Valor Total=		15207,6
* 2=		30415,2

Por sua vez, as tabelas 5.5, 5.6 e 5.7 representam os resultados obtidos para os contornos de integração números 2, 3 e 4 (figura 5.6), analogamente à tabela 5.4.

Tabela 5.5 Valores da integral J para o contorno de integração nº 2, mostrado na figura 5.6.

Elementos Contidos no Contorno Γ	Contribuição para J de Cada Ponto de Gauss	Total Acumulado Para a Integral J
9	553,3	553,3
	737,7	1291,0
11	873,6	2164,6
	924,7	3089,3
37	1081,4	4170,7
	1552,6	5723,3
39	1831,0	7554,3
	1892,0	9446,3
53	1694,8	11141,1
	1579,4	12720,5
55	1274,9	13995,4
	758,4	14753,7
65	266,0	15019,8
	176,5	15196,3
67	51,5	15247,8
	-31,6	15216,2
Valor Total=		15216,4
* 2=		30432,4

Tabela 5.6 Valores da integral J para o contorno de integração nº 3, mostrado na figura 5.6.

Elementos Contidos no Contorno Γ	Contribuição para J de Cada Ponto de Gauss	Total Acumulado Para a Integral J
13	709,5	709,5
	889,1	1598,6
15	1008,2	2606,8
	1049,1	3655,9
41	1345,7	5001,6
	1773,7	6775,3
43	1955,8	8731,1
	1858,4	10589,5
29	1439,8	12029,3
	1421,4	13450,7
31	1144,0	14594,7
	562,5	15157,2
69	143,3	15300,5
	70,6	15371,1
71	-67,4	15303,7
	-85,8	15217,9
Valor Total=		15217,9
* 2=		30435,8

Tabela 5.7 Valores da integral J para o contorno de integração nº 4, mostrado na figura 5.6.

Elementos Contidos no Contorno Γ	Contribuição para J de Cada Ponto de Gauss	Total Acumulado Para a Integral J
14	757,1	757,1
	933,5	1690,6
16	1049,4	2740,0
	1081,6	3821,6
42	1560,0	5381,6
	1947,5	7329,1
44	2018,7	9347,8
	1836,7	11184,5
30	1255,0	12439,5
	1272,6	13712,1
32	1071,4	14783,5
	448,1	15231,6
70	36,1	15267,7
	19,5	15287,2
72	-46,0	15241,2
	-24,6	15216,6
Valor Total=		15216,6
* 2=		30433,2

5.4.3 Solução pelo ANSYS®

Conforme já mencionado, a revisão 4.4A do programa ANSYS® possui um módulo de Mecânica de Fraturas. Na referência [6] encontra-se uma descrição detalhada dos princípios teóricos considerados, potencialidades, limitações e procedimentos do programa.

Para efeito de comparação com os resultados analíticos e aqueles obtidos com o programa PRINC, utiliza-se um macro proposto na referência [6], e ali denominado de JIN2. Esse procedimento para obtenção da integral J considera a equação de energia de deformação W escrita para o caso de regime elástico da estrutura, e utiliza as tensões principais calculadas nos nós dos elementos, segundo a equação (5.3).

$$W = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) \quad (5.3)$$

A figura B.06 representa a estrutura do macro JIN2, que deve ser utilizado a nível de pós-processamento (/POST1, no ANSYS®). Os resultados de seu emprego na obtenção da integral J para os contornos Γ mostrados na figura 5.5, encontram-se ilustrados na tabela 5.8.

Tabela 5.8 Resultados da integral J obtidos a partir do macro JIN2, para a placa plana com trinca passante em uma de suas laterais. Os números dos contornos referem-se àqueles mostrados na figura 5.5.

Número do Contorno de Integração Γ	Número dos Nós Contidos no Contorno de Integração	Integral J (Pa.m)	Desvio em Relação ao Valor Analítico da Integral J (Pa.m)
1	2-16-135-139	30461	3,0%
2	22-26-186-220	30429	3,1%
3	50-47-195-231	30549	2,7%

5.4.4 Comparação dos Resultados Obtidos Pelos Programas PRINC e ANSYS - LEFM

A partir dos resultados mostrados nas tabelas 5.4 a 5.8, é possível comparar-se os desvios obtidos no cálculo da integral J pelos programas PRINC e ANSYS em relação à solução teórica prevista pela equação (5.1). Calculando-se a média dos resultados mostrados nas tabelas 5.4 a 5.7, chega-se a um valor de J igual a 30429 Pa m obtido pelo programa PRINC, enquanto que a média dos contornos da tabela 5.8, obtida pelo ANSYS, é de 30480 Pa m. A diferença percentual entre tais valores é de apenas 0,2%.

5.4.5 Influência do Refinamento da Malha de Elementos Finitos

A fim de avaliar-se a sensibilidade do modelo em relação ao nível de refinamento da malha de elementos finitos, executou-se uma análise adicional da placa plana, porém com um menor refinamento do que aquele utilizado nos itens anteriores.

A tabela 5.9 apresenta dados que permitem uma comparação direta entre a malha anteriormente utilizada (denominada de referência), e a malha com menor refinamento.

Tabela 5.9 Comparação entre as características das malhas de elementos finitos com diferentes refinamentos.

	Malha de Referência	Malha Pouco Refinada
Número de Elementos	84	21
Número de Nós	289	82

De maneira análoga aos itens anteriores, utilizam-se os programas ANSYS e PRINC para análise da estrutura. A figura 5.8 ilustra a estrutura modelada com malha menos refinada.

As tabelas 5.10 e 5.11 apresentam os valores obtidos a partir das soluções fornecidas pelos programas ANSYS e PRINC, respectivamente. Os números dos nós e elementos mostrados nas tabelas anteriores podem ser vistos

nas figuras 5.9 e 5.10, respectivamente. Esses resultados devem ser comparados àqueles mostrados nas tabelas 5.4 a 5.7 para o programa PRINC, à tabela 5.8 para o programa ANSYS e ao valor analítico da integral J (31405 Pa.m).

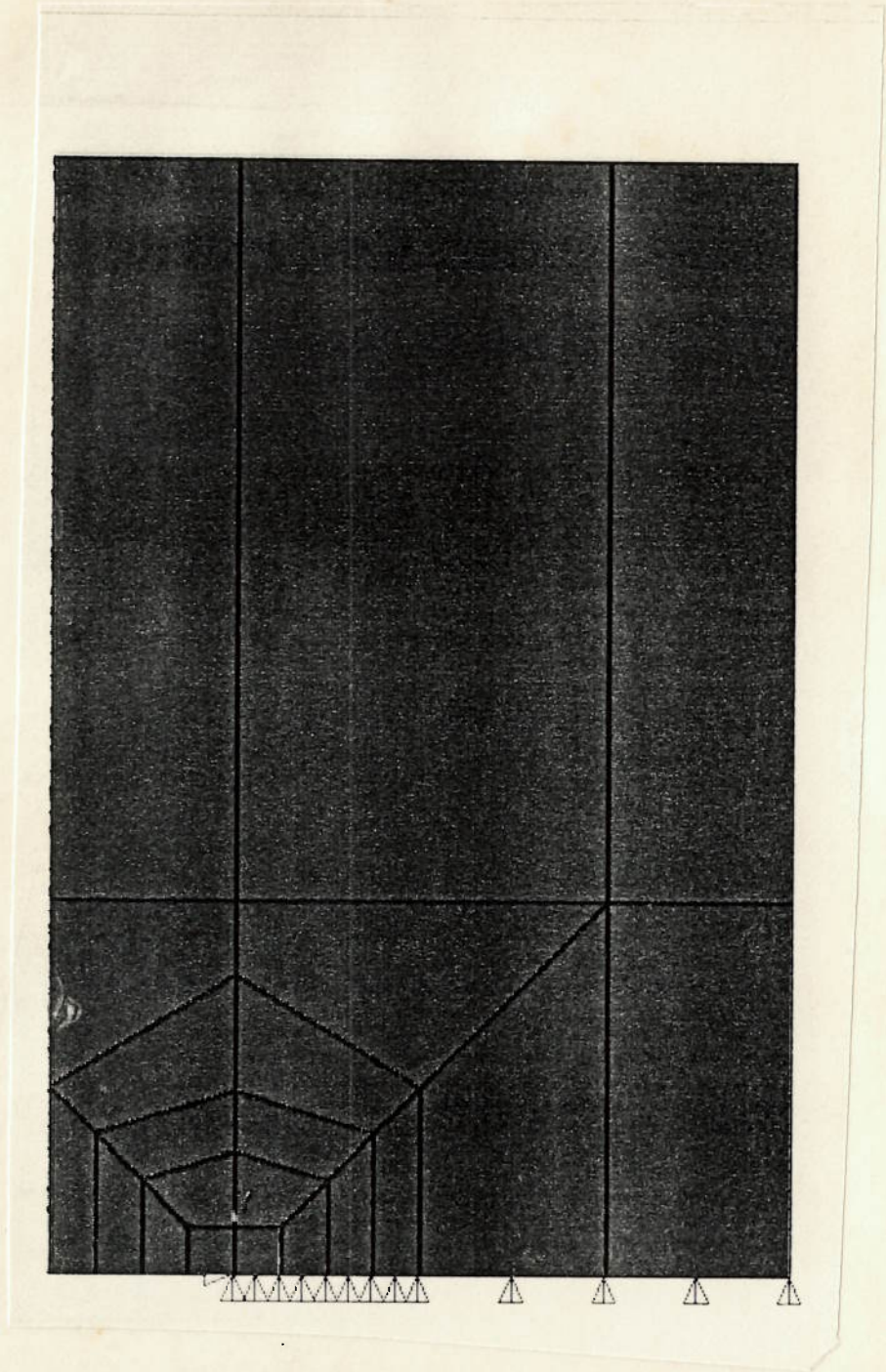


Figura 5.8 Modelo de elementos finitos da placa plana trincada, com malha de elementos finitos pouco refinada.

Tabela 5.10 Valores da integral J obtidos a partir do programa ANSYS, para o modelo com menor refinamento de malha, ilustrado na figura 5.8. A numeração dos nós corresponde àquela mostrada na figura 5.9.

Número dos Nós Contidos no Contorno	Valor da Integral J pelo Programa ANSYS (Pa.m)	Desvio Em Relação ao Valor Analítico da Integral J (31405 Pa.m)
10-13-58-68	29822	5,0%
9-18-59-68	29548	5,9%
20-23-43-71	30301	3,5%
29-72-80-69	29549	5,9%

Tabela 5.11 Valores da integral J obtidos a partir do programa PRINC, para o modelo com menor refinamento de malha, ilustrado na figura 5.8. A numeração dos elementos corresponde àquela mostrada na figura 5.10.

Número dos Elementos Contidos no Contorno	Integral J Obtida Pelo Programa PRINC, Para Metade da Placa (Pa.m)	* 2 (Pa.m)	Desvio em Relação ao Valor Analítico da Integral J (31405 Pa.m)
2-7-13-16	14553	29066	7,4%
3-10-14-17	14773	29546	5,9%
4-11-8-18	14786	29572	5,8%

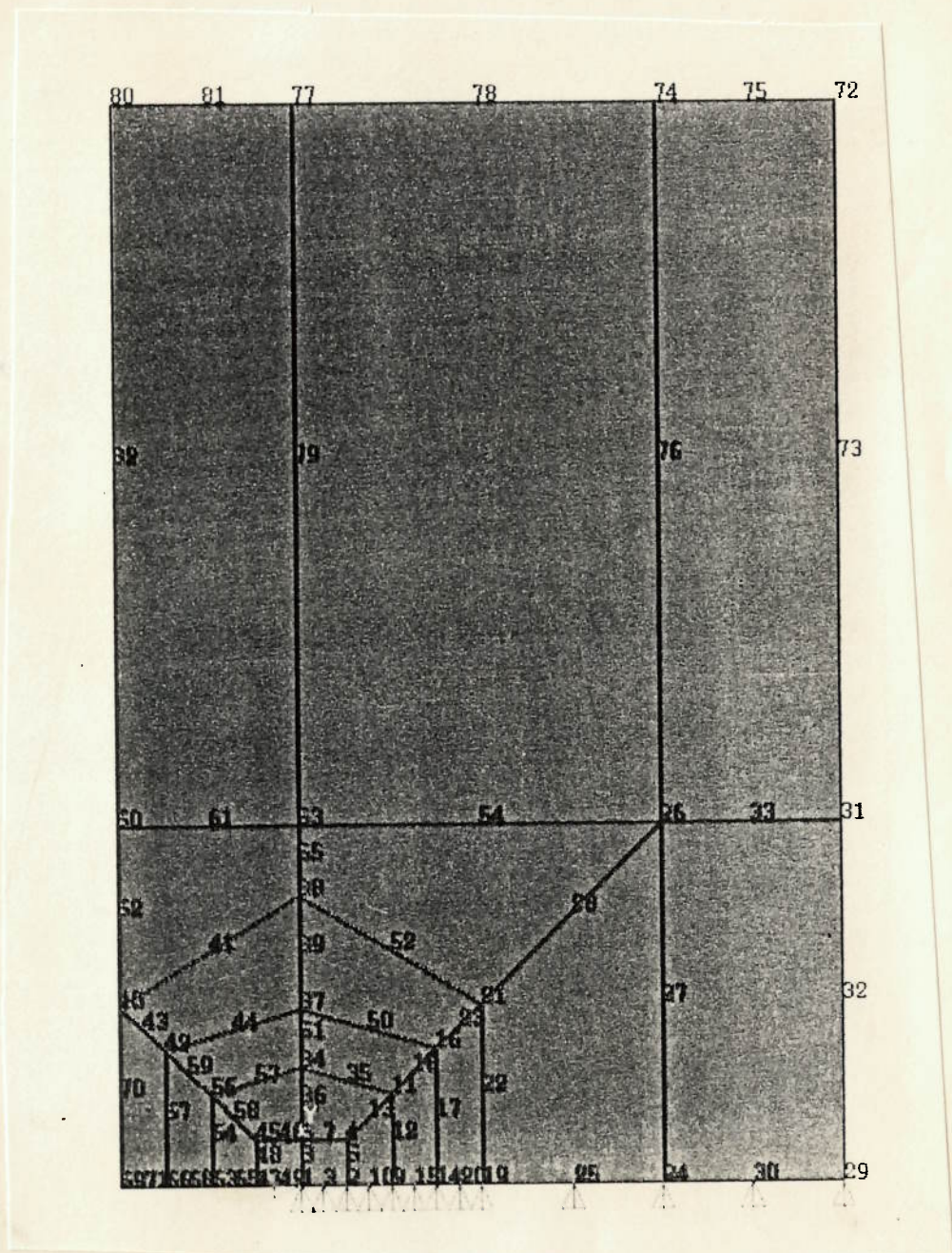


Figura 5.9 Modelo de elementos finitos mostrando os números dos nós utilizados nos cálculos da tabela 5.10.

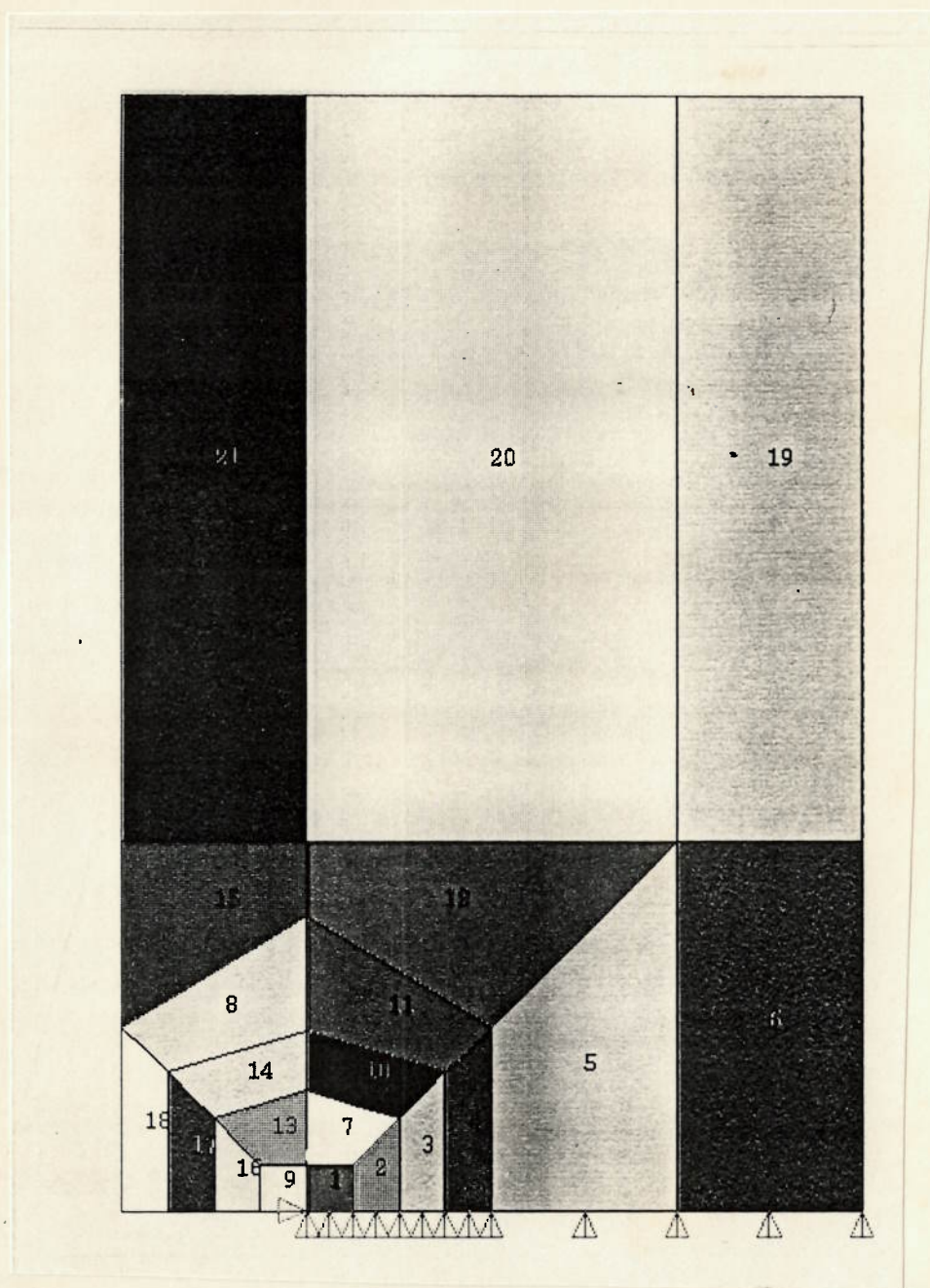


Figura 5.10 Modelo de elementos finitos mostrando os números dos elementos utilizados nos cálculos da tabela 5.11.

5.5 Placa Plana Trincada - EPFM

Na análise da estrutura anterior, verificou-se a aplicabilidade dos conceitos de integral J para uma estrutura em regime de LEFM conforme critério de Chell, equação (2.1). Empregou-se no modelo de elementos finitos, um material com comportamento linear elástico, e estrutura em estado plano de deformação.

A fim de verificar-se o comportamento do programa PRINC nos casos em que ocorre plastificação de região considerável à frente da ponta da trinca (EPFM), introduziram-se propriedades elasto-plásticas no modelo da mesma placa trincada anteriormente analisada .

A curva tensão vs. deformação que caracteriza o comportamento do material, e que determinará as tensões resultantes na estrutura, pode ser escolhida dentre as diversas opções de modelos de materiais oferecidas pelo ANSYS. Em nosso caso, adotou-se comportamento bi-linear, conforme mostrado na figura 5.11.

Os comandos necessários para a elaboração do modelo de elementos finitos, na fase de pré-processamento, foram incorporados ao macro ARAEPFM, cuja listagem encontra-se ilustrada na figura B.04. No exemplo estudado, as propriedades empregadas do material HY-130, conforme referências [21] e [35], são as seguintes:

- $\sigma_y=1030$ MPa
- $E=206$ GPa
- $K_c=152$ MPa.m^{1/2}

- $C31 = 1 \text{ GPa}$
- $J_{Ic} = 0,13-0,14 \text{ MPa.m}$

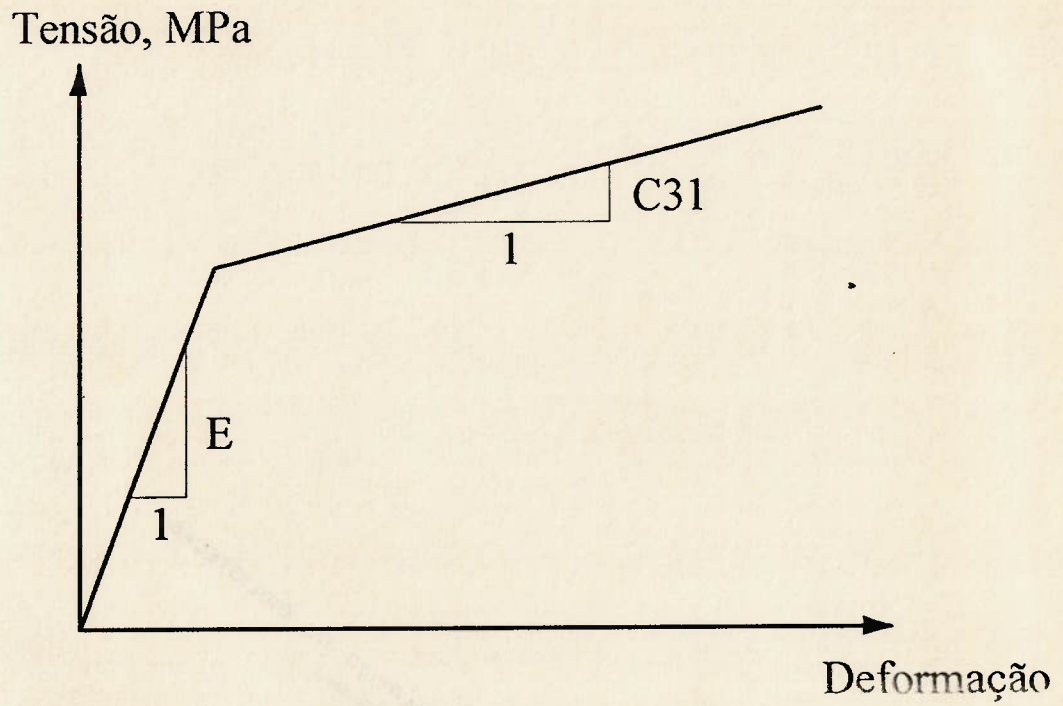


Figura 5.11 Curva tensão vs. deformação adotada para análise de material em regime EPFM (modelo chamado bi-linear do ANSYS).

5.5.1 Solução Pelo Programa PRINC

Procedendo-se ao modelamento por elementos finitos da placa trincada, em regime EPFM, através da utilização do macro ARAEPFM descrito no item 5.2.1, obtém-se o modelo mostrado na figura 5.12, onde também encontram-se indicados os contornos de integração empregados.

Os resultados para a integral J gerados pelo programa PRINC encontram-se representados na tabela 5.12. Também mostram-se as contribuições de cada ponto de integração de Gauss, de cada elemento contido no contorno de integração.

Também o carregamento aplicado foi alterado, sendo aumentado de 200 MPa para 600 MPa.

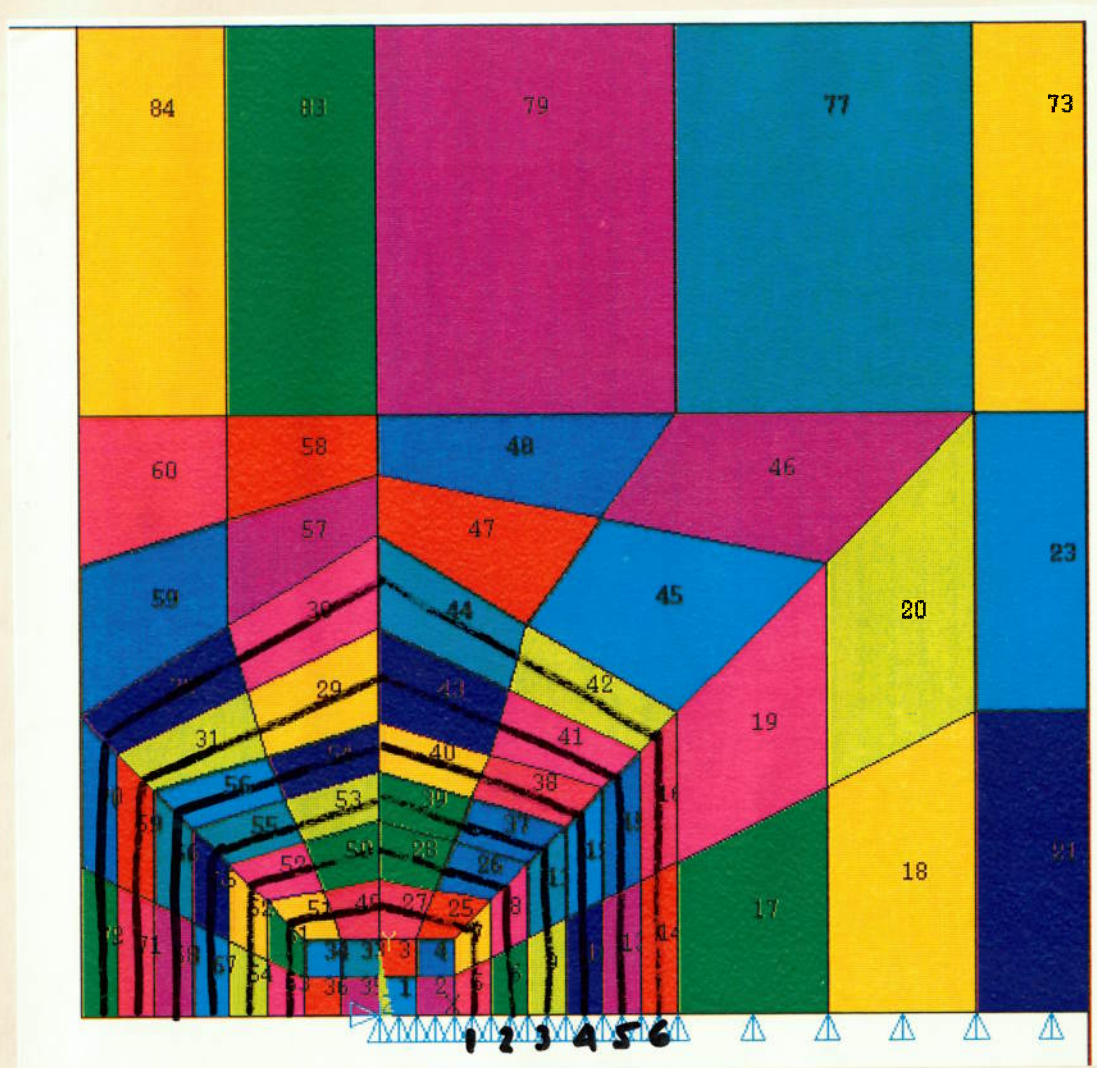


Figura 5.12 Representação dos contornos de integração para cálculo da integral J para a placa trincada, pelo programa PRINC, em regime EPFM.

Tabela 5.12 Valores da integral J para o contorno de integração nº 1, mostrado na figura 5.12, regime EPFM.

Elementos Contidos no Contorno Γ	Contribuição para J de Cada Ponto de Gauss (Pa.m)	Total Acumulado Para a Integral J (Pa.m)
5	6598	6598
	6456	13054
7	8676	21730
	8770	30500
25	11067	41566
	22054	63621
27	30241	93861
	23706	117567
49	16255	133823
	8540	142364
51	5958	148322
	4282	152605
61	3142	155748
	2285	158033
63	1656	159689
	282	159972
Valor Total=		159972
* 2=		319944

Tabela 5.13 Valores da integral J para o contorno de integração nº 2, mostrado na figura 5.12, regime EPFM.

Elementos Contidos no Contorno Γ	Contribuição para J de Cada Ponto de Gauss (Pa.m)	Total Acumulado Para a Integral J (Pa.m)
6	6834	6834
	8588	15422
8	9577	25000
	11041	36042
26	14404	50447
	26350	76797
28	23570	100368
	14836	115204
50	13664	128868
	11045	139814
52	8409	148323
	5286	153609
62	2630	156240
	2179	158420
64	1335	159755
	184	159940
Valor Total=		159940
* 2=		319880

Tabela 5.14 Valores da integral J para o contorno de integração nº 3, mostrado na figura 5.12, regime EPFM.

Elementos Contidos no Contorno Γ	Contribuição para J de Cada Ponto de Gauss (Pa.m)	Total Acumulado Para a Integral J (Pa.m)
9	7678	7678
	9518	17196
11	11015	28212
	12137	40349
37	17203	57552
	23526	81078
39	18830	99909
	15979	115888
53	14577	130466
	12083	142550
55	9440	151990
	5668	157658
65	1941	159600
	1402	161003
67	661	161664
	-112	161552
Valor Total=		161552
* 2=		323104

Tabela 5.15 Valores da integral J para o contorno de integração nº 4, mostrado na figura 5.12, regime EPFM.

Elementos Contidos no Contorno Γ	Contribuição para J de Cada Ponto de Gauss (Pa.m)	Total Acumulado Para a Integral J (Pa.m)
10	7793	7793
	9677	17470
12	11190	28661
	12149	40810
38	17321	58132
	22584	80716
40	19307	100023
	16858	116882
54	14388	131271
	12316	143587
56	9509	153097
	5589	158686
66	1763	160450
	1214	161664
68	443	162108
	-209	161898
Valor Total=		161898
* 2=		323796

Tabela 5.16 Valores da integral J para o contorno de integração nº 5, mostrado na figura 5.12, regime EPFM.

Elementos Contidos no Contorno Γ	Contribuição para J de Cada Ponto de Gauss (Pa.m)	Total Acumulado Para a Integral J (Pa.m)
13	8012	8012
	9974	17986
15	11606	29594
	12218	41812
41	17307	59120
	21633	80753
43	20535	101288
	17296	118585
29	14611	133197
	12428	145625
31	9593	155219
	5246	160465
69	1354	161820
	850	162670
71	33	162704
	-422	162281
Valor Total=		162281
* 2=		324562

Tabela 5.17 Valores da integral J para o contorno de integração nº 6, mostrado na figura 5.12, regime EPFM.

Elementos Contidos no Contorno Γ	Contribuição para J de Cada Ponto de Gauss (Pa.m)	Total Acumulado Para a Integral J (Pa.m)
14	8178	8178
	10308	18486
16	11934	30421
	12351	42772
42	18874	61647
	22134	83781
44	20947	104728
	17331	122060
30	13207	135268
	11968	147236
32	9584	156821
	4839	161660
70	681	162342
	489	162831
72	-81	162750
	-448	162301
Valor Total=		162301
* 2=		324602

As tabelas 5.12, 5.13, 5.14, 5.15, 5.16 e 5.17 representam os resultados obtidos para os contornos de integração identificados pelos números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 na figura 5.12, respectivamente.

5.5.2 Solução Pelo ANSYS

Para fins de avaliação dos resultados anteriormente obtidos com o programa PRINC, utilizou-se o macro disponível no ANSYS4.4A, segundo referência [6], ali denominado JIN1. Tal procedimento para obtenção da integral J considera a equação de energia de deformação W desenvolvida para o regime elasto-plástico. A figura B.07 representa os comandos do macro JIN1.

Os resultados conseguidos através do macro JIN1 para os contornos representados na figura 5.13, são mostrados na tabela 5.18.

Tabela 5.18 Resultados da integral J obtidos a partir do macro JIN1, para a placa plana com trinca passante, regime EPFM.

Número dos Nós Contidos no Contorno de Integração	Integral J (Pa . m)
23-32-188-218	332518
25-30-186-220	328927
39-48-196-230	327209
41-46-194-232	326910
55-65-126-242	326727
57-62-124-244	325916

5.5.3 Comparação Entre Resultados dos Programas PRINC e ANSYS - EPFM

A figura 5.14 ilustra os resultados da integral J para os diferentes contornos de integração utilizados pelos programas PRINC e ANSYS, em função de sua distância média à ponta da trinca. Os valores representados foram retirados das tabelas 5.12 a 5.18.



Figura 5.13 Representação dos contornos de integração para cálculo da integral J para a placa trincada, pelo programa ANSYS, em regime EPFM.

A tabela 5.19 representa os desvios obtidos entre os resultados dos programas ANSYS e PRINC, para contornos de integração aproximadamente coincidentes. Nota-se que a maior diferença entre os valores é no máximo da ordem de quatro por cento, para os contornos adotados.

Tabela 5.19 Desvios entre os resultados obtidos para a integral J utilizando-se os programas ANSYS e PRINC.

Contorno PRINC	Contorno ANSYS	Integral J PRINC(Pa.m)	Integral J ANSYS(Pa.m)	Desvio (%)
1 (tabela 5.12)	23-32-188-218	319944	332518	3,8
2 (tabela 5.13)	25-30-186-220	319880	328927	2,8
4 (tabela 5.15)	39-48-196-230	323106	327209	1,3
5 (tabela 5.16)	41-46-194-232	324564	326910	0,7

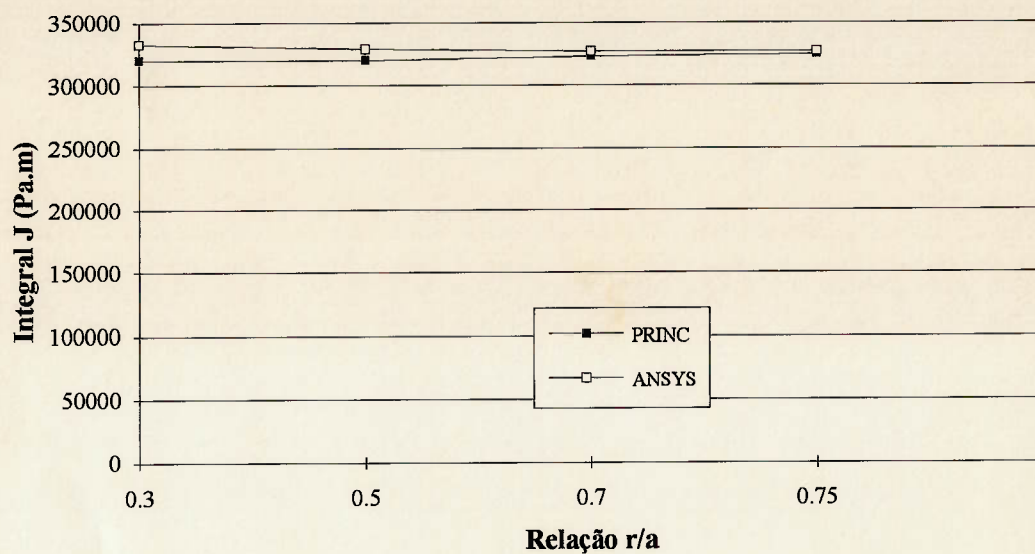


Figura 5.14 Valores de integral J obtidos pelos programas PRINC e ANSYS, em função da distância média do contorno de integração à ponta da trinca. (Placa plana trincada, EPFM).

CAPÍTULO 6

Conclusões e Recomendações

6.1 Comentários Gerais

Nesse trabalho elaborou-se um programa para cálculo do parâmetro de Mecânica de Fraturas conhecido como integral J , para análise de estruturas planas contendo trincas, e que foi denominado PRINC. A linguagem de programação utilizada foi o FORTRAN 77 para sistema operacional VAX/VMS.

O programa tem como dados de entrada os resultados gerados pelo programa de elementos finitos ANSYS 4.4A, não restringindo-se, contudo, a esse particular programa. Procurou-se explicitar, detalhadamente, todas as etapas necessárias para o interfaceamento do PRINC e ANSYS, explicitando a metodologia a ser seguida no caso de desejar-se empregar um outro código de elementos finitos. A rotina desenvolvida para promover tal interfaceamento entre esses programas foi denominada ARQUIVOS.COM, a qual lê e formata os dados de saída do programa de elementos finitos, gerando as matrizes a serem lidas pela sub-rotina denominada INPUT. Trata-se justamente do programa ARQUIVOS.COM que deverá ser elaborado em função do programa de elementos finitos especificamente sendo utilizado.

Na elaboração da rotina PRINC, adotaram-se, para simplificação, contornos de integração que possuem uma das coordenadas normalizadas mantida constante. Ainda em função do tipo de elemento finito empregado no modelamento (isoparamétrico de oito nós, interpolação parabólica), utilizaram-se contornos não somente com uma coordenada normalizada constante, como também passando pelos chamados pontos de integração de Gauss. Evidentemente, tais simplificações tornaram necessário o controle da topologia da malha de elementos finitos, garantindo-se o seu sentido de numeração (incidência dos elementos). Para o caso específico de placas planas, elaboraram-se os macros ARANHA.DAT e ARAEPM.DAT para os regimes LEFM e EPFM, respectivamente, visando atender-se automaticamente as exigências descritas, durante o processo de geração do modelo de elementos finitos.

As principais conclusões e recomendações do trabalho são apresentadas a seguir.

6.2 Restrições do Modelo

As hipóteses simplificadoras adotadas para a elaboração do programa PRINC foram :

- material homogêneo e isotrópico;
- temperatura uniforme da estrutura;
- isenção de tensões residuais de qualquer espécie;
- estrutura bi-dimensional.

Em função da simplificação em que o contorno de integração corresponde à curva de coordenada normalizada ξ igual a uma constante, não podem ser empregados os recursos de geração automática da malha de elementos finitos, normalmente disponíveis nesses programas. Uma proposta visando a flexibilização da topologia da malha necessária para emprego do programa PRINC encontra-se descrita mais adiante.

A equação (4.18) que representa a densidade de energia de deformação elástica \underline{W} utilizada no programa PRINC é válida apenas para regime linear elástico. Uma correção da equação (4.18) visando a inclusão da parcela de energia de deformação correspondente à plastificação do material somente será necessária para os casos em que a região contendo material plastificado seja tão extensa que não seja possível definir-se um contorno de integração que contenha elementos com material não plastificado em sua maioria (lembrando que a integral J independe do contorno adotado). Mesmo quando o contorno continha alguns elementos com plastificação, como na placa analisada em regime EPFM no Capítulo 5, o erro encontrado não mostrou-se significativo, conforme ilustrado na tabela 6.1. Nota-se que os desvios da integral J em relação à média dos contornos são maiores para os contornos mais próximos da ponta da trinca, o que explica-se pelo maior número de elementos plastificados presentes em tais contornos.

Outra limitação do modelo refere-se ao fato do programa não permitir análise de estruturas que sofram grandes deslocamentos (por exemplo, elastômeros). Para tais casos deve-se verificar se as características do elemento finito sendo empregado permitem análise de grandes deslocamentos, como os esperados na ponta da trinca. Uma modificação relativa ao programa PRINC para a solução de tais casos seria a necessidade de utilização das coordenadas

cartesianas globais da estrutura deformada de elementos finitos, para a solução da equação (4.19).

Com relação às tensões térmicas, as mesmas poderiam também ser levadas em consideração. As deformações térmicas correspondentes precisariam ser adicionadas às deformações causadas pelos carregamentos externos durante a solução por elementos finitos, utilizando a curva tensão vs. deformação do material. A dependência das propriedades elásticas do material, bem como do valor crítico da integral J com a temperatura podem ser compensados considerando a forma de variação na solução da estrutura de elementos finitos. A posterior obtenção da integral J pelo programa PRINC automaticamente refletiria tal efeito da temperatura.

6.3 Aplicações Práticas

O modelo numérico desenvolvido permite a análise de quaisquer estruturas que possam ser consideradas em estado plano de tensão (EPT) ou de deformação (EPD).

Dessa maneira, podem ser modelados, por exemplo, tubos e vasos de pressão com juntas soldadas como aqueles existentes em usinas nucleares, químicas, plataformas "off-shore" de exploração de petróleo. Como se sabe, as soldas introduzem defeitos no material que, quando submetidos a esforços ou a condições ambientes desfavoráveis, podem nuclear trincas e iniciar trincas que, eventualmente, alcançarão um comprimento crítico, com conseqüente falha estrutural. A seqüência de análise seria, inicialmente, a determinação do tamanho do defeito ou trinca a ser considerado (por exemplo, através da definição da

resolução mínima do equipamento utilizado para a detecção e medição de tais defeitos), ou do comprimento da trinca efetivamente medido na estrutura por alguma técnica apropriada. A seguir, procede-se ao modelamento e solução da estrutura por elementos finitos, considerando-se as dimensões e posicionamento da trinca. Finalmente, executa-se o programa PRINC para cálculo do valor da integral J , a qual deverá ser comparada à integral crítica do material para determinação do comportamento do defeito sob o carregamento considerado.

6.4 Conclusões

O programa PRINC pode ser considerado validado, baseando-se na comparação de seus resultados com aqueles obtidos tanto pelo módulo de Mecânica de Fraturas do ANSYS, como pelas soluções analíticas conhecidas para as estruturas analisadas.

Como primeiro teste para o programa PRINC, analisou-se uma placa plana finita, isenta de trincas, a fim de comparar-se os resultados obtidos pelo programa com o valor teórico esperado, igual a zero. Observaram-se desvios reduzidos, que podem ser atribuídos aos erros numéricos de arredondamento.

Em seguida, verificou-se a aplicabilidade do conceito de integral J , através da rotina PRINC, para análise de estruturas bi-dimensionais trincadas em regime de LEFM (zona de material plastificado à frente da ponta da trinca com dimensões relativamente reduzidas). A partir do valor de J , calculou-se o fator de intensificação de tensões K da placa tensionada em aço HY-130. Encontraram-se desvios da ordem de apenas 3% em relação à solução teórica (da mesma ordem de grandeza que aqueles obtidos pelo ANSYS). Outra vantagem do emprego da

integral J em análise de estruturas trincadas, em função da própria formulação do parâmetro, está relacionada à não necessidade de empregarem-se elementos de trinca na geração do modelo de elementos finitos, reduzindo-se o número total de elementos da malha.

Analisou-se também a sensibilidade do programa PRINC em relação ao grau de refinamento da malha de elementos finitos empregada. Constatou-se que, para o caso estudado de placa plana, com elementos isoparamétricos parabólicos, os resultados são afetados pelo refinamento, apresentando maiores erros para o menor refinamento. Ao reduzir-se o número de elementos da malha, dividindo-se por quatro o número correspondente à malha de referência, houve, porém, um aumento no erro de 3% para apenas 6%, ainda em relação à solução analítica da estrutura.

Partindo-se da mesma geometria de placa considerada para análise de estrutura em regime LEFM, aumentou-se o carregamento aplicado, visando alcançar-se regime EPFM. Os resultados obtidos para a integral J , utilizando-se o PRINC, foram comparados àqueles conseguidos com o ANSYS. A diferença entre os valores, para contornos de integração aproximadamente coincidentes, ficou no máximo da ordem de quatro por cento no contorno mais próximo da ponta da trinca ($r/a = 0,3$), reduzindo-se a 0,7% ($r/a = 0,75$) para um contorno mais distante, o que revela um razoável nível de precisão do programa desenvolvido, com relação ao ANSYS.

Uma vez determinado experimentalmente o valor crítico da integral J (representado por J_{IC}), conforme descrito no Capítulo 3, pode-se calcular o valor da tensão crítica σ_c , que ocasionará a propagação estável da trinca em uma estrutura. Para a placa plana finita trincada, analisada no Capítulo 5, em material aço HY-130, considerou-se a aplicação de carregamentos de tração crescentes, até próximo do limite de escoamento do material. A tabela 6.1 apresenta os

valores da integral J obtida pelo programa PRINC, para os seis diferentes contornos de integração anteriormente definidos nas tabelas 5.12 a 5.17, para os diferentes carregamentos. Os desvios mostrados referem-se ao valor médio de J obtido para todos os contornos analisados, para cada carregamento.

Tabela 6.1 Valores da integral J obtidos pelo programa PRINC, para diferentes carregamentos da placa plana trincada.

Número do Contorno	Tensão Aplicada na Placa (MPa)							
	200*	Desvio %	400	Desvio %	600**	Desvio %	800	Desvio %
1	30415	0,04	124972	0,05	319944	0,84	1077820	2,20
2	30432	0,01	125022	0,01	319880	0,86	1049338	0,49
3	30435	0,02	125046	0,01	323104	0,14	1045312	0,90
4	30433	0,01	125058	0,02	323798	0,36	1045604	0,80
5			125056	0,02	324562	0,59		
6			125060	0,02	324602	0,61		
Média	30429		125035		322648		1054518	
Desvio Padrão	9		34		2190		15642	

* Valores retirados das tabelas 5.4 a 5.7

** Valores retirados das tabelas 5.12 a 5.17

Para efeito de comparação, obtiveram-se os valores de J através da equação (4.3) (onde o valor de K_I é fornecido pela equação (5.1)), que relaciona o fator de intensificação K_I e a integral J, sendo válida apenas para regime LEFM. A tabela 6.2 apresenta os resultados.

Tabela 6.2 Valores da integral J calculados a partir da equação 4.3, válida apenas para regime LEFM.

Tensão Aplicada (MPa)	K_I (MPa.m ^{1/2})	J (Pa.m)
200	84,3	31405
400	168,6	125620
600	252,8	282421
800	337,1	502181

Agrupando-se os resultados da integral J obtidos pelo programa PRINC e pela equação (4.3), elaborou-se a tabela 6.3, a qual foi utilizada para elaboração do gráfico da figura 6.1. Para valor crítico da integral J, modo I, do material HY-130 empregou-se 0,19 MPa.m, conforme indicado no Capítulo 3.

Tabela 6.3 Comparação entre os valores da integral J obtida pelo programa PRINC em EPFM, e pela equação (4.3) (LEFM), para a placa plana finita da figura 5.7

Tensão Aplicada (MPa)	Integral J - LEFM (Pa.m), eq. (4.3)	Integral J - EPFM (Pa.m), PRINC *
200	31405	30429
400	125620	125060
600	282421	322648
800	502181	1054518

* Média dos contornos de integração conforme tabela 6.1.

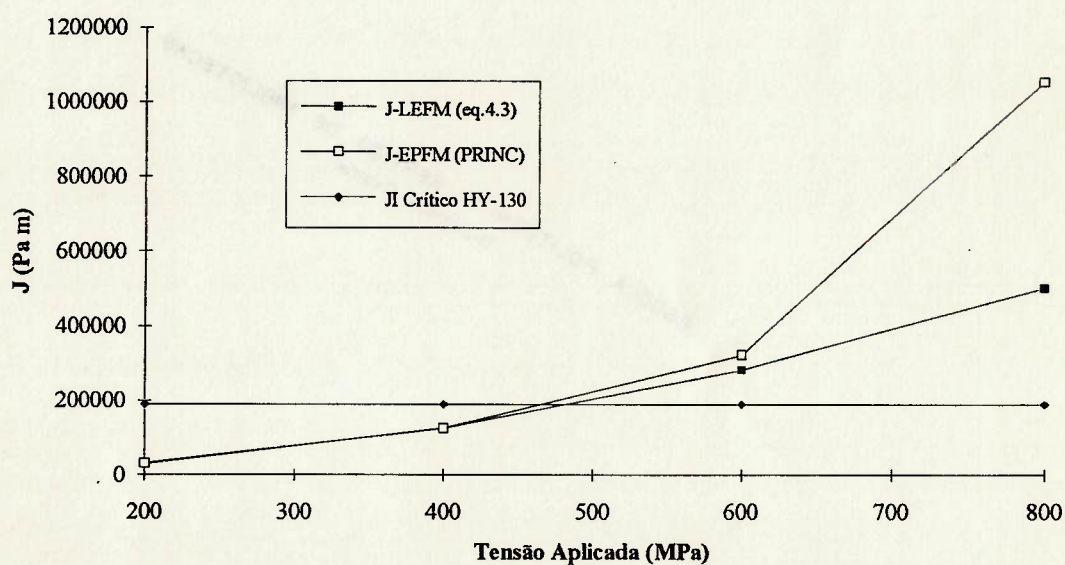


Figura 6.1 Integral J em função da tensão aplicada na placa da figura 5.7, para EPFM (PRINC) e LEFM (equação (4.3)). (Dados retirados da tabela 6.3).

Analisando-se a tabela 6.3, constata-se que a diferença entre os valores de J previstos pela equação 4.3 (válida para LEFM) e aqueles calculados pelo programa PRINC (EPFM) aumenta para valores crescentes de tensão aplicada na placa. O gráfico da figura 6.1 representa o efeito que tal comportamento pode causar na verificação de uma estrutura trincada, isto é, ao empregar-se a teoria de LEFM para simplificação da análise, pode-se concluir, erroneamente, que a trinca na estrutura não irá propagar-se uma vez que a tensão aplicada seria menor que a tensão crítica (obtida pela intersecção da curva correspondente à equação (4.3) e a curva horizontal representativa de J_{IC}). Referindo-se ainda à figura 6.1, percebe-se que a tensão crítica prevista pela equação (4.3) seria sub-dimensionada.

6.5 **Recomendações**

A seguir, encontram-se descritas algumas recomendações para trabalhos futuros envolvendo o emprego do programa PRINC em análises de estruturas contendo trincas.

Conforme salientado no trabalho, a interface entre o programa PRINC e o programa de elementos finitos, denominada ARQUIVOS.COM, foi desenvolvida para o ANSYS4.4A. Para tanto, levaram-se em consideração as informações disponíveis na saída de resultados do ANSYS, bem como os formatos desses arquivos. Sugere-se que interfaces específicas sejam geradas para outros programas de elementos finitos, seguindo-se as explicações fornecidas para o desenvolvimento da rotina ARQUIVOS.COM.

Para fins de simplificação, adotou-se que os caminhos de integração deveriam possuir uma de suas coordenadas normalizadas constante, passando, ainda, pelos pontos de integração de Gauss. Desenvolveu-se a rotina ARANHA.DAT, que permite a geração de um modelo de elementos finitos com topologia e incidência dos elementos tais que os contornos de integração atendam à simplificação descrita. Recomenda-se que o programa PRINC seja alterado para possibilitar a utilização de qualquer malha de elementos finitos, permitindo o emprego dos recursos de geração automática de malhas disponíveis em algoritmos de elementos finitos. A referência [22] sugere um procedimento em que o modelo de elementos finitos possuiria um aspecto conforme mostrado na figura 6.2. Um contorno de integração ao redor da trinca constituiria-se de :

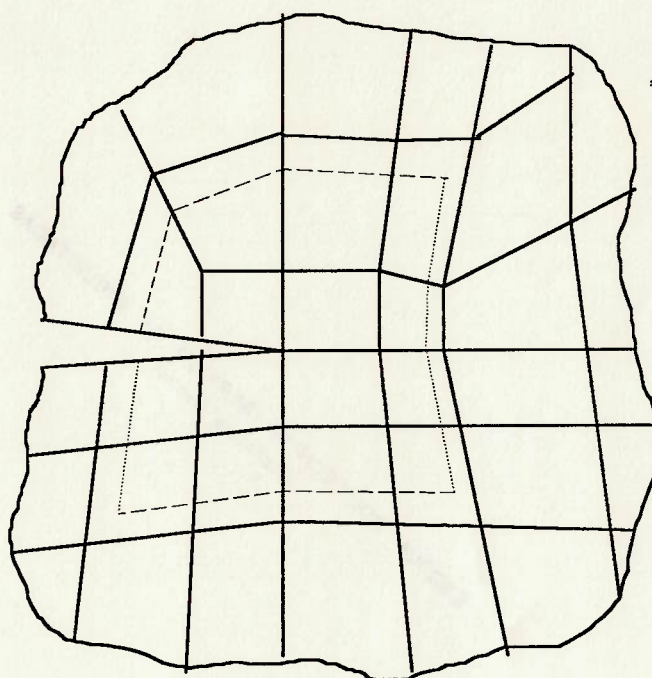
- contribuição de elementos em que a integração de J faz-se ao longo de contornos tais que $s=s_c$ (constante).
- contribuição de elementos em que a integração de J faz-se ao longo de contornos tais que $t=t_c$ (constante).
- contribuição de elementos de canto, em que a integração de J faz-se ao longo de contornos que mudam da direção s para t .

Para os elementos em que $s=\text{constante}$, o programa desenvolvido PRINC pode ser empregado diretamente para avaliação de J . Naqueles elementos em que tem-se $t=t_c$, deve-se efetuar a reformulação de maneira análoga às equações desenvolvidas no Capítulo 4. A equação para cálculo da integral J resultante, equivalente à equação (4.19), encontra-se representada na equação (6.1).

$$J^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} \right] \frac{\partial y}{\partial s} - \right.$$

(6.1)

$$\left. - \left[(\sigma_x n_x + \sigma_y n_y) \frac{\partial u}{\partial x} + (\sigma_y n_x + \sigma_y n_y) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \left[\left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} ds$$



..... **s constante**

----- **t constante**

Figura 6.2 Contorno de integração para cálculo de J , ao longo de elementos em que $s=\text{constante}$, outros em que $t=\text{constante}$ e elementos de canto nos quais o contorno muda de direção.

A etapa seguinte no desenvolvimento do programa seria a elaboração de um modelo numérico para obtenção da integral J em estruturas tridimensionais. A distribuição espacial da integral J permitiria a determinação da

direção mais provável de crescimento da trinca, conforme mostrado na referência [36].

Como última recomendação para desenvolvimento do algoritmo PRINC, sugere-se a incorporação de uma opção na entrada de dados em que sejam definidas as condições de simetria da estrutura e carregamento, caso elas existam. Dessa maneira, ao proceder-se às simplificações na definição do modelo de elementos finitos levando em conta as condições de simetria, o programa PRINC já faria as devidas compensações para apresentação do resultado da integral J.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BROEK, D. **Elementary engineering fracture mechanics**. 3.ed. The Hague, Netherlands, Martinus Nijhoff Publ, 1983.
- [2] HERTZBERG, R.W. **Deformation and fracture mechanics of engineering materials**. 3. ed. John Wiley & Sons, Inc. 1989. p. 274.
- [3] RICE, J.R. **A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks**. J. Appl. Mech. 35. 1968 p. 279-286.
- [4] HELLEN, T.K.; BLACKBURN, W.S. **Non-linear fracture mechanics and finite elements**. Engineering Computations, v. 4, 1987. p. 2.
- [5] ATLURI, S.N. **Energetic approaches and path-independent integrals in fracture mechanics**. Computational Methods in the Mechanics of Fracture, v. 2. Amsterdam. Computer Methods in Mechanics. ed.S.N. Atluri. Elsevier Science. 1986, p.121-165.
- [6] SOLECKI, J.S. **Fracture Mechanics**. Tutorial ANSYS® Rev. 4.4A. Swanson Analysis Systems, Inc. 1989.
- [7] CHELL, G.G. **Developments in fracture mechanics**. ed. Chell, Applied Science Publishers Ltd. 1980.
- [8] EWALDS, H.L.; WANHILL, R.J.H. **Fracture Mechanics**. ed. Arnould, DUM. 1985.
- [9] RITCHIE, R.O.; THOMPSON, A.W. **On macroscopic and microscopic analysis for crack initiation and crack growth toughness in ductile alloys**. Metall. Trans. A, v. 16A. 1985. p. 233-248.
- [10] HUTCHINSON, J.W.; OARSUM P.C. **Stability analysis of J-controlled crack growth**. ASTM STP 668. 1979. p. 37-64.
- [11] DOWLING, N.E.; BEGLEY J.A. **Mechanics of crack growth**. ASTM STP 590. ASTM. 1967. p. 82-102.

- [12] SADANANDA, K.; SHAHINIAN, P. **Elastic-plastic fracture mechanics for high-temperature fatigue crack growth.** *Fract. mech.*, 12th Conference. ASTM STP 700. ASTM. 1980. p. 152-163.
- [13] SADANANDA, K.; SHAHINIAN, P., **A fracture mechanics approach to high temperature fatigue crack growth in UDIMET 700.** *Eng. Fract. Mech.*, v. 11, n. 1. 1979. p. 73-85.
- [14] **Standard test method for J_{Ic} , A measure of Fracture Toughness.** ASTM E 813-89.
- [15] WEAVER, Jr., W.; Johnston, P.R. **Finite elements for structural analysis.** Prentice Hall. 1984. p. 112.
- [16] FREUND, G.; MELO, I.S.H.; YOSHIDA, L.K. **Manual de Referencia LEAL - Versão 120.** Inst. Matem. Estat., USP. 1980.
- [17] HEHL, M.E. **FORTRAN 77 - Linguagem de programação estruturada.** McGraw-Hill. 1986.
- [18] DAWE, D.J. **Matrix and finite elements displacement analysis of structures.** Oxford Univ. Press. 1984. p. 399-404.
- [19] **Programming in VAX FORTRAN.** Digital Equipment Corporation, Maynard, Massachusetts, E.U.A., Setembro 1984.
- [20] DeSALVO, G. J.; GORMAN, R. W. **ANSYS Engineering analysis systems. User's manual for ANSYS revision 4.3.** Houston. Swanson Analysis Systems, Inc. 1987.
- [21] **Metals Handbook.** Metals Park, American Society for Metals ASM. 9.ed. v. 1. p. 426.
- [22] OWEN, D. R. J.; FAWKES, A. J. **Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications.** Swansea. Pineridge Press Ltd. 1983.
- [23] SKELTON, R. P. Application of small specimen crack growth data to engineering components at high temperature : a review. In : SOLOMON, H. D. et al. **Low Cycle Fatigue.** Baltimore, ASTM STP 942, 1988. p. 227.

- [24] McMEEKING, R. M. Recent advances in fracture mechanics. In : NAIR, S. V. et al. **Fracture Mechanics : microstructure and micromechanisms**. Metals Park, 1989.
- [25] BARSOM, J. M.; ROLFE, S. R. **Fracture & fatigue control in structures. Applications of fracture mechanics**. 2.ed. Englewood Cliffs. Prentice-Hall, 1987. p.577.
- [26] BEGLEY, J. A.; LANDES, J.D. **The J integral as a fracture criterion**. Philadelphia. ASTM STP 514, 1972. p.1-20.
- [27] BUCCI, R. J. et ali. **J integral estimation procedures**. Philadelphia. ASTM STP 514, 1972. p.40-69.
- [28] RICE, J. R.; ROSENGREN, G. F. J. Mech. Phys. Solids, v.16, 1968, p.1.
- [29] HUTCHINSON, J. W. J. Mech. Phys. Solids, v.16, 1968, p.13.
- [30] RICE, J. R. et ali. **Elastic-plastic analysis of growing cracks**. Philadelphia, ASTM STP 700, 1979, p. 189-221.
- [31] KANNINEN, M. F.; POPELAR, C. H. **Advanced fracture mechanics**. Nova Iorque. Oxford University Press, 1985.
- [32] COOK, R. D. **Concepts and applications of finite element analysis**. 2 ed. Singapura, John Wiley & Sons, 1981.
- [33] INGHAM, T. **The interpretation and analysis of upper shelf toughness data**. In : Elastic-plastic fracture test methods : the user's experience, ASTM STP 856, ed. E.T. Wessel and F.J. Loss, 1985, p.47-67.
- [34] HATANAKA, K.; FUJIMITSU, T. **Growth of small cracks and an evaluation of low cycle fatigue life**. In : Low Cycle Fatigue, ASTM STP 942, H. D. Solomon, G. R. Halford, L. R. Kaisand, B. N. Leis, Filadélfia, 1988, p.257-280.
- [35] **Structural Alloys Handbook**. Columbus, Battelle's Columbus Division, v. 1, 1987, p.106.
- [36] WANG, P.C., EWING, K. W. **Fracture mechanics analysis of fatigue resistance of spot welded coach-peel joints**, Fatigue

Fracture Engineering Materials and Structures, v. 14, n. 9, p. 915-930.

- [37] POPOV, E. P. **Introdução à Mecânica dos Sólidos**. São Paulo, Edgard Bluecher Ed., 1978, p. 101.

APÊNDICE A

MÉTODO DA QUADRATURA DE GAUSS PARA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Devido à dificuldade de efetuar-se a integração analítica da eq. (2.25), que define a integral I , deve-se recorrer a procedimentos de integração numérica para sua solução. Existem vários métodos disponíveis para calcular-se, numericamente, integrais definidas, podendo-se citar a Regra de Simpson ou o Método da Quadratura de Newton. Nas aplicações de elementos finitos, porém, o método que se tem adotado é o da Quadratura de Gauss (ou Gauss-Legendre) [18].

Dentre as vantagens do método de Gauss, pode-se citar que ele se constitui no procedimento que, para uma precisão desejada, requer a menor quantidade de cálculos da função sendo integrada.

A.1. O Caso de Integração Unidimensional

Seja, inicialmente, o caso unidimensional em que se deseja obter o valor de uma integral definida I , dada por :

$$I = \int_{-1}^{+1} F(s).ds \quad (\text{A.1})$$

representada na figura A.1.

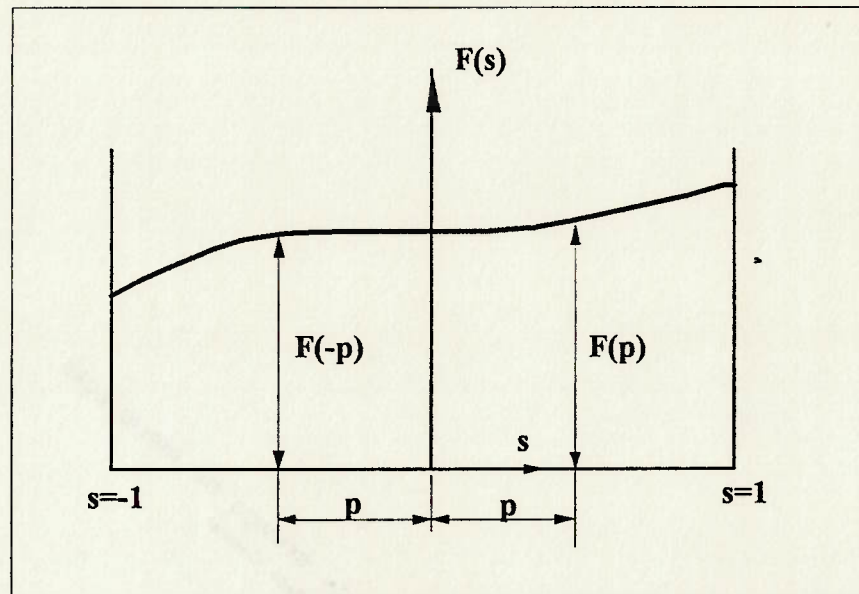


Figura A.1 Integração numérica uni-dimensional.

No método de Gauss, objetiva-se calcular I como a somatória de uma série de n produtos entre o valor da função $F(s)$, calculada em determinados pontos s_i e coeficientes definidos pelo procedimento (representados por W_i). Assim:

$$I = \int_{-1}^{+1} F(s).ds = \sum_{i=1}^n W_i.F(s_i) \quad (\text{A.2})$$

Nesse procedimento, os pontos s_i devem localizar-se simetricamente em relação ao centro do intervalo de interesse, isto é, s igual a zero, e os coeficientes W_i devem possuir o mesmo valor para os pontos $s = -s_i$ e $s = s_i$. A partir dessas

regras, podem ser calculadas as posições ótimas dos pontos s_i , bem como os valores de W_i para uma curva polinomial de grau conhecido.

Para um polinômio de grau 1, por exemplo, representado por

$F(s) = A + B.s$, pode-se facilmente obter, analiticamente, que :

$$I = \int_{-1}^{+1} F(s).ds = 2.A \quad (\text{A.3})$$

onde A deve ser $F(0)$. Dessa forma, nesse caso, somente um ponto s_i é necessário para avaliar-se exatamente a eq. (A.3). Os valores a serem substituídos na equação (A.2) devem ser, pois :

$$n=1 \quad s_i=0 \quad W_i=2$$

Considerando-se agora um polinômio de terceiro grau :

$$F(s) = A + Bs + Cs^2 + Ds^3 \quad (\text{A.4})$$

o valor de sua integral definida I , segundo a eq. (A.1), obtida analiticamente,

vale :

$$I = 2.A + 2.C/3 \quad (\text{A.5})$$

Desejamos obter numericamente o resultado de (A.5), utilizando dois pontos s_i ($n=2$). Pelas regras do método, queremos :

$$I = W.F(+p) + W.F(-p) \quad (\text{A.6})$$

onde $+p$ e $-p$ estão ilustrados na figura A.1.1. Substituindo-se os valores de $+p$ e $-p$ nas eqs. (A.5), a eq. (A.6) torna-se :

$$I = 2W(A + Cp^2) \quad (\text{A.7})$$

A diferença entre a integral analítica (eq. (A.5)) e numérica (eq. (A.7)), é dada por :

$$2A(W-1) + 2C(Wp^2 - 1/3) \quad (A.8)$$

Para que (A.8) seja zero, independentemente dos valores de A e C , devemos ter :

$$p = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad W = 1$$

Esse resultado mostra que o valor exato da integral definida de um polinômio de ordem 3, ou menor, pode ser calculado, simplesmente, somando-se o valor da função calculada em $s=1/\sqrt{3}$ e $s=-1/\sqrt{3}$.

De maneira análoga, podemos determinar os valores de s_i e W_i para funções polinomiais de ordens superiores (maiores n). Os resultados estão mostrados na tabela A.1.1, até n igual a 6.

Tabela A.1.1 Valores dos pontos de integração de Gauss e respectivos coeficientes. [32]

Ordem n	s_i	W_i
1	0.	2.
2	+/- 0.57735	1.
3	+/- 0.77459	0.55555
	0.	0.88888
4	+/- 0.86113	0.34785
	+/-0.33998	0.65214
5	+/- 0.90617	0.23692
	+/- 0.53846	0.47862
	0.	0.56888
6	+/- 0.93246	0.17132
	+/- 0.66120	0.36076
	+/- 0.23861	0.46791

Em resumo, com n pontos de integração, a integral definida de qualquer função polinomial de ordem $(2n-1)$, ou menor, será obtida exatamente utilizando-se esse procedimento.

A.2. Integração em Duas ou Três Dimensões

Na avaliação de integrais definidas bi-dimensionais do tipo :

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(s, t). ds. dt$$

utilizam-se os mesmos conceitos do caso unidimensional, em cada direção, sucessivamente. Inicialmente, calcula-se a primeira integral, mantendo-se t constante e, em seguida, a segunda integral. Assim :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{+1} \left(\int_{-1}^{+1} F(s, t). ds \right). dt = \int_{-1}^{+1} \left(\sum_{j=1}^{n_j} W_j. F(s_j, t) \right). dt \\ &= \sum_{i=1}^{n_i} W_i. \left(\sum_{j=1}^{n_j} W_j. F(s_j, t_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} W_i. W_j. F(s_j, t_i) \end{aligned} \quad (A.9)$$

Na expressão (A.9), assumiu-se que existem n_j pontos de integração na direção s e n_i na direção t , resultando em $n_j \times n_i$ pontos no total.

A figura A.2 ilustra os pontos de integração de Gauss para elementos finitos quadrangulares.

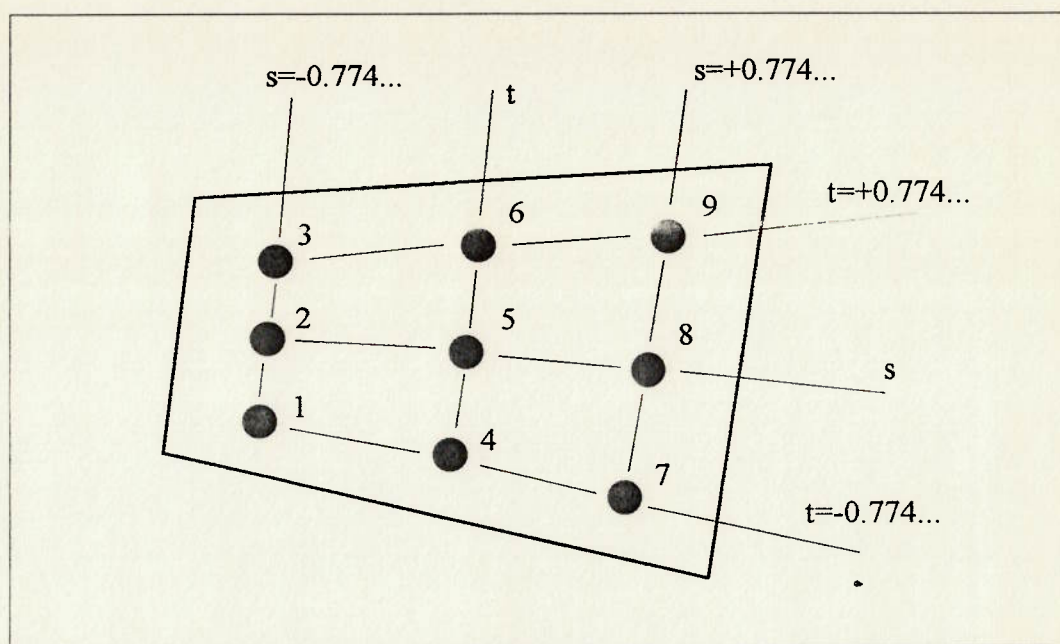


Figura A.2 Exemplo dos pontos de integração de Gauss para elementos bi-dimensionais quadrangulares, integração 3x3. [32]

Os conceitos anteriores, estendidos para o caso tri-dimensional, resultam em :

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(s, t, w) . ds . dt . dw$$

$$I = \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} \sum_{k=1}^{n_k} W_i . W_j . W_k . F(s_k, t_j, w_i)$$

A.3 Discussão Sobre a Ordem de Integração Mínima

Analisando-se a equação (4.19), a qual deve ser integrada numericamente, observa-se a dificuldade em definir-se o seu comportamento ao longo do contorno de integração $[-1; +1]$ dentro de um elemento (e) da malha de elementos finitos. Um procedimento para estabelecer-se o erro associado na integração ao adotar-se integração de Gauss de ordem n , seria a avaliação da equação abaixo [38].

$$E = \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]}{(2n+3)[(2n+2)!]^3} I^{(2n+2)}(\xi) \quad , \quad \xi \in [-1, +1] \quad (\text{A.10})$$

onde $I^{(2n+2)}(\xi)$ representa a derivada de ordem $(2n+2)$ do integrando I da equação (4.19). O máximo da equação (A.10) para $\xi \in [-1, +1]$ representa o maior erro procurado. Novamente a complexidade da equação envolvida introduz grandes dificuldades para um estudo analítico do problema.

Dessa maneira buscou-se um procedimento alternativo. A fim de obter-se qual o comportamento da equação (4.19) em uma estrutura analisada por elementos finitos, empregaram-se resultados baseados no caso da placa plana trincada estudada no Capítulo 5. Basicamente busca-se calcular o valor do integrando I para vários pontos do contorno de integração a fim de observar-se como é a sua variação no intervalo de integração. A figura A.3 ilustra as condições adotadas para tal estudo. Os valores de tensão na placa foram calculados a partir das equações representadas genericamente pela equação (4.1), ou, mais explicitamente:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

Calculando-se I nos pontos indicados, obtém-se a tabela A.3.1.

Tabela A.3.1 Valores do integrando I da equação (4.19), calculados com as hipóteses adotadas na figura A.3.

Coordenada s (constante)	Coordenada t	I (eq.4.19)
0,5774	-1	8,55
0,5774	-0,5	6,13
0,5774	0	3,74
0,5774	0,5	1,32
0,5774	1	-1,15

Construindo-se um gráfico de I em função do valor da coordenada t, conforme figura A.4, pode-se finalmente observar que não existem inflexões nem variações sensíveis da função ao longo do contorno de integração, nos limites de um elemento (t variando de $[-1; +1]$). Dessa forma, lembrando-se que a quadratura de Gauss para n pontos de integração integra precisamente polinômios de grau $(2n-1)$ e menores, pode-se dizer que a adoção de ordem de integração mínima $n=2$ irá aproximar de maneira suficiente o integrando I.

Estudo Para Definição da Mínima Ordem de Integração

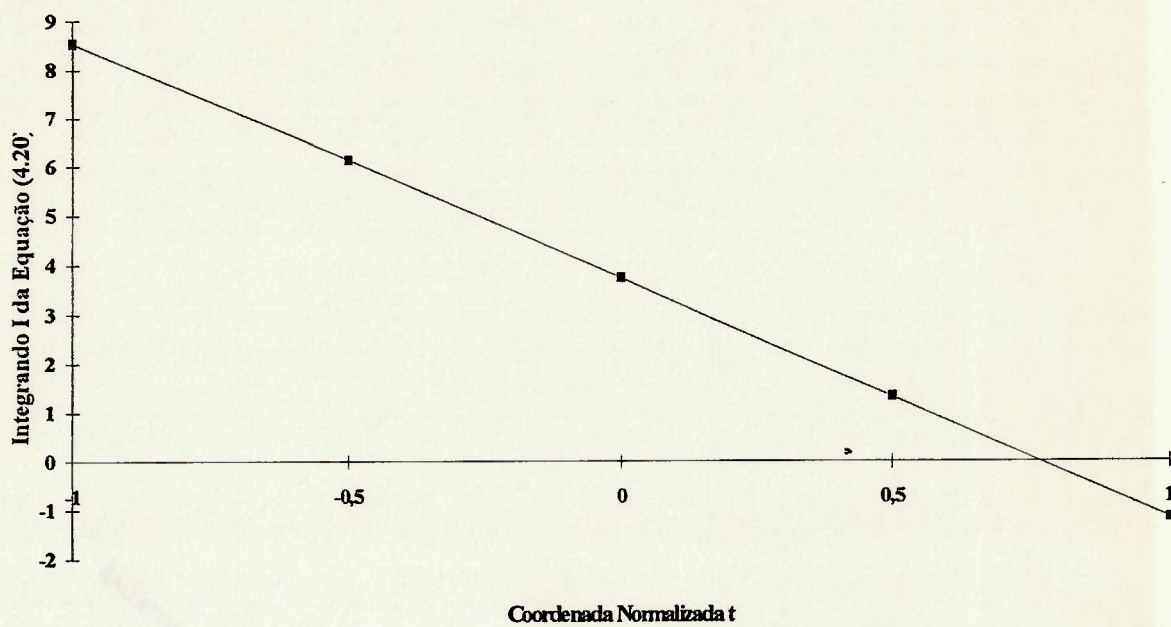


Figura A-4 - Gráfico com os resultados da integração da equação (4.19), conforme tabela A.3.1.

APÊNDICE B

Figura B.01 Fluxograma do programa gerenciador PRINC, em linguagem LEAL.

Programa PRINC

```

|   Real          S(9), T(9), X(2,8),    JAC(500,10);
   Inteiro       NELEM, NGAUS,          CAM(500);
   Lógico        OPT;
   Processe      SELO;
   Escreva       'Entre com o número de elementos no caminho Gama:>';
   Leia  NELEM;
   Escreva       'Entre com o número dos elementos no caminho Gama:>';
   Faça  I=1 a NELEM, incremento 1
           ||   Leia  CAM(I);   ||
   Escreva       'Entre com a ordem de integração de Gauss (2 ou 3)';
   Leia  NGAUS;
   Escreva       'Entre o valor 1 se desejar integração por s1';
   Escreva       'Entre o valor 2 se desejar integração por s2';
   Escreva       'Entre o valor 3 se desejar integração por s3';
   Leia  ORD;
   Processe      INPUT (ECORD, EDESL, TENS);
   Se  NGAUS=3 então
           ||   IND=1;
           Se  ORD=1 então
           |||  NG=NGAUS;
                CONT=1;
                Faça  K=1 a 3 incremento 1
                |V   S(K)= -(3/5)0.5;   |V
                T(1)= -(3/5)0.5;
                T(2)=0.;
                T(3)=(3/5)0.5;
                Processe DERST (S, T, NG, CONT, DERNOR); |||
           senão se  ORD=2 então
           |||  NG=NGAUS + 3;
                CONT=4;
                Faça  K=4 a 6 incremento 1
                IV   S(K)=0.;   |V
                T(4)=-(3/5)0.5;
                T(5)=0.;
                T(6)=(3/5)0.5;
                Processe DERST(S, T, NG, CONT, DERNOR);|||

```

senão

```

||| NG=NGAUS+6;
    CONT=7;
    Faça K=7 a 9 incremento 1
|V S(K)=(3/5)0.5; |V
  T(7)=- (3/5)0.5;
  T(8)=0.;
  T(9)=(3/5)0.5;
  Processe DERST; ||| ||

```

Senão

```

|| IND=0;
  Se ORD=1 então
||| NG=NGAUS;
    CONT=1;
    S(1)= -30.5/3;
    S(2)= -30.5/3;
    T(1)= -30.5/3;
    T(2)= 30.5/3;
    Processe DERST(S, T, NG, CONT, DERNOR);|||

```

Senão

```

||| NG=NGAUS+2;
    CONT=3;
    S(3)= 30.5/3;
    S(4)= 30.5/3;
    T(3)= -30.5/3;
    T(4)= 30.5/3;
    Processe DERST(S, T, NG, CONT, DERNOR);|||

```

||

JINT=0.

```

Faça I=1 a NELEM incremento 1
  || Faça KONT=1 a NG incremento 1
    ||| Faça J=1 a 2 incremento 1

```

|V Faça K=1 a 8 incremento 1
X (J, K)=DERNOR (J, K, KONT); |V

||| Faça L=1 a 16 incremento 1
|V Y (L)=ECORD (L, CAM (I)); |V

||| Processe JACOB (X, Y, JB, DETJB);
Processe DCART (DETJB, JB, X, Z); |||

||| Faça J=1 a 2 incremento 1
|V Faça K=1 a 8 incremento 1
DERXY (J, K, KONT)=Z (J, K); |V

||| Faça M=1 a 16 incremento 1
|V R(M)=EEDSL (M,CAM (I)); |V

||| Processe DDC;
Processe VETN (JB, N); |||

||| Faça J=1 a 3 incremento 1
|V SIG (J)=TENS (J, CAM (I), KONT); |V

||| Processe CALC (SIG, SOMA, IND, JB, N, KONT,
PARC);
IMPR (I, KONT)=PARC;
JINT=JINT + PARC;
JAC (I, KONT)=JINT; |||

Processe TELA;

Processe IMPRES (CAM, NGAUS, NELEM, IMPR, IND, NG, JINT,
JAC);

Processe TELA;

Imprima 'Quer Continuar ? [SIM <ENTER>, NAO <NAO>]';

Leia OPT

Se OPT= 'b' então reiniciar processamento

Fim;

| Subrotina INPUT (ECORD, EEDSL, TENS);

Inteiro NODE, ELEM1, ELEM2, I, J, N(8), NELEM, ELEM;

Real ECORD (16, 2000), EDESL (16, 2000), TENS (3, 2000,
9), NO (2000, 3), D (2000, 3), X, Y, Z, UX, UY,
ITEM (4, 4);

Abrir arquivos 10, 20, 30, 40, 50;

Enquanto não for encontrado 'end-file'

|| Leia do arquivo 10 NODE, X, Y, Z;
NO (NODE, 1)=X;
NO (NODE, 2)=Y;
NO (NODE, 3)=Z; ||

Enquanto não for encontrado 'end-file'

|| Leia do arquivo 20 NODE, UX, UY;
D (NODE, 1)=UX;
D (NODE, 2)=UY; ||

Enquanto não for encontrado 'end-file'

|| Leia do arquivo 30 ELEM1;
Faça I=1 a 2 incremento 1
|| Faça J=1 a 4 incremento 4
Leia ITEM (I, J); ||

Leia ITEM (3, 1), ITEM (3, 2);

Se ELEM1≠0 então

Enquanto não for encontrado 'end-file'

|| Leia do arquivo 40 ELEM2, ITEM (3, 3);
Faça I=1 a 4 incremento 4
|V Leia ITEM (4, 1); |V ||

Se ELEM2 ≠ 0 então

Se ELEM1 ≠ ELEM2 então

|| Escreva 'ERRO NA LEITURA DE
TENSOES';
'ELEM1=', ELEM1;
'ELEM2=', ELEM2;
'PARANDO O PROGRAMA COM
AVISO DE ERRO'; ||

Faça J=1 a 4 incremento 1

|| TENS (1, ELEM1, J)=ITEM (1, J);

|| TENS (2, ELEM1, J)=ITEM (3, J);

|| TENS (3, ELEM1, J)=ITEM (2, J); || ||

Enquanto não for encontrado 'end-file'

|| Leia do arquivo 50 ELEM;

```

      Faça I=1 a 8      incremento 1
      || Leia N (0); ||
Se ELEM≠0 então
  || Faça I=1 a 8      incremento 1
  |V ECORD (I, ELEM)=NO (N (I), 1);
  ECORD (I+8, ELEM)=NO (N (I), 2); |V
  Faça I=1 a 8      incremento 1
  |V EDESL (I, ELEM)=D (N (I), 1);
  EDESL (I+8, ELEM)=D (N (I), 2); |V || ||
Fechar arquivos 10, 20, 30, 40, 50;
Fim; |

```

```

| Subrotina DERST (A, B, N, K, C);
Real A (9), B (9), C (2, 8, 9);
Inteiro N, K, I;
Faça I=K a N incremento 1
|| C (1, 1, I)=0,25*(1-B (I)) * (2*A (I) + B (I));
C (1, 2, I)=0,25*(1-B (I)) * (2*A (I) - B (I));
C (1, 3, I)=0,25*(1+B (I)) * (2*A (I) + B (I));
C (1, 4, I)=0,25*(1+B (I)) * (2*A (I) - B (I));
C (1, 5, I)= - A (I) * (1 - B (I));
C (1, 6, I)=0,5 * (1 - B (I)**2);
C (1, 7, I)= - A (I) * (1 + B (I));
C (1, 8, I)= - 0,5 * (1 - B (I)**2);
C (2, 1, I)=0,25*(1-A (I)) * (2*B (I) + A (I));
C (2, 2, I)=0,25*(1+A (I)) * (2*B (I) - A (I));
C (2, 3, I)=0,25*(1+A (I)) * (2*B (I) + A (I));
C (2, 4, I)=0,25*(1-A (I)) * (2*B (I) - A (I));
C (2, 5, I)= - 0,5 * (1 - A (I)**2);
C (2, 6, I)= - B (I) * (1 + A (I));
C (2, 7, I)=0,5 * (1 - A (I)**2);
C (2, 8, I)= - B (I) * (1 - A (I)); ||

```

Fim; |

```

|   Subrotina   JACOB (A, B, C, D);
      Real       A (2, 8), B (16), C (2, 2), D, PARC;
      Inteiro    J, K;
      Faça   J=1 a 2      incremento 1
      ||      C (J, 1)=0,0;
              C (J, 2)=0,0;
      Faça   K=1 a 8      incremento 1
      |||     PARC=A (J, K)*B (K);
              C (J, 1)=C (J, 1) + PARC;
              PARC=A (J, K)*B (K+8);
              C (J, 2)=C (J, 2) + PARC; |||      ||
      D=C (1, 1)*C (2, 2) - C (2, 1)*C (1, 2);
      Fim;      |

|   Subrotina   DCART (D, C, A, Q);
      Real       A (2, 8), C (2, 2), D, Q (2, 8);
      Inteiro    J;
      Faça   J=1 a 8      incremento 1
      ||      Q (1, J)=1/D * (C (2, 2)*A (1, J) - C (1, 2)*A (2, J));
              Q (2, J)=1/D * (-C (2, 1)*A (1, J) + C (1, 1)*A (2, J)); ||
      Fim ;      |

|   Subrotina   DDC (Q, G, S);
      Real       Q (2, 8), G (16), S (2, 2), PARC;
      Inteiro    J, K;
      Faça   J=1 a 2      incremento 1
      ||      PARC = 0,0;
              S (J, 1)=0,0;
              S (J, 2)=0,0;
      Faça   K=1 a 8      incremento 1
      |||     PARC=Q (J, K)*G (K);
              S (J, 1)=S (J, 1) + PARC;
              PARC=Q (J, K)*G (K+8);
              S (J, 2)=S (J, 2) + PARC; |||      ||
      Fim ;      |

|   Subrotina   VETN (C, N);
      Real       N (2), D1, D2, C (2, 2), DEN;

```

$D1=C(2,2)*(-C(2,1)*C(1,2)+C(1,1)*C(2,2));$

$D2=C(2,1)*(C(2,1)*C(1,2)-C(1,1)*C(2,2));$

$DEN=(D1**2+D2**2)**0,5;$

$N(1)=D1/DEN;$

$N(2)=D2/DEN;$

Fim ; |

| Subrotina CALC (T, S, F, C, N, KONT, G);

Real T (3), C (2, 2), S (2, 2), N(2), G;

Inteiro KONT, F;

$G=0,5*(T(1)*S(1,1)+T(2)*(S(2,1)+S(1,2))+T(3)*S(2,2))*C(2,2)-((T(1)*N(1)+T(2)*N(2))*S(1)+(T(2)*N(1)+T(3)*N(2))*S(1,2))*(C(2,1)**2+C(2,2)**2)**0,5;$

Fim ; |

| Subrotina TELA;

Inteiro I;

Faça I=1 a 24 incremento 1

Escreva 'b';

Fim ; |

| Subrotina IMPRES (CAM, NGAUS, NELEM, IMPR, IND, NG, JINT, JAC);

Real IMPR (500, 10), JINT, JAC (500, 10);

Inteiro CAM (500), NGAUS, NELEM, IND, NG;

Escreva 'NUMERO DOS ELEMENTOS CONTIDOS NO CONTORNO DE INTEGRACAO:';

Faça I=1 a NELEM incremento 1

|| Escreva CAM (I); ||

Escreva 'ELEMENTO', 'PONTO DE GAUSS', CONTRIBUICAO PARA J', 'J ACUMULADA';

Faça J=1 a NELEM incremento 1

|| Se IND=0 então

||| Faça K=(NG-1) a NG incremento 1

|V Escreva CAM (I), K, IMPR (J, K), JAC (J, K)

|V

|||

senão

||| Faça $K=(NG-2)$ a NG incremento 1
|V Escreva CAM (J), K, IMPR (J, K), JAC (J, K)
|V ||| ||

Escreva 'b';
Escreva 'VALOR TOTAL DA INTEGRAL J=', JINT;
Fim ; |

Figura B.02 Listagem do programa gerenciador PRINC, em FORTRAN 77.

* IDENTIFICACAO DO PROGRAMA *

* (I) NOME DO PROGRAMA : PRINC *

* (II) CONSIDERACOES GERAIS :

* (1) METODOLOGIA DE CALCULO *

* PRINC CALCULA O VALOR DA INTEGRAL J EM ESTRUTURAS
* BI-DIMENSIONAIS, UTILIZANDO COMO ENTRADA DE DADOS
* ARQUIVOS GERADOS POR ANALISE DE ELEMENTOS FINITOS
* PELO PROGRAMA ANSYS V.4.4A.
* RESOLVE-SE A EQUACAO ANALITICA DA INTEGRAL J PELO
* METODO DE INTEGRACAO DE GAUSS, EMPREGANDO-SE OS
* RESULTADOS DA ANALISE POR E.F. NOS PONTOS DE GAUSS
* DE CADA ELEMENTO CONTIDO NO CONTORNO DE INTEGRACAO.
* DEVEM SER UTILIZADOS ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMETRI-
* COS COM 8 NOS PARA A GERACAO DA MALHA DE E.F.

* (2) PARAMETROS CALCULADOS *

* (a) CONTRIBUICAO PARA J DE CADA PONTO DE GAUSS
* (b) VALOR ACUMULADO DE J

* (3) DADOS DE ENTRADA *

* (a) NUMERO DE ELEMENTOS NO CONTORNO DE INTEGRACAO
* (b) NUMERO DOS ELEMENTOS FINITOS NO CONTORNO
* (c) ORDEM DE INTEGRACAO DE GAUSS (2 OU 3)
* (d) CONTORNO DE INTEGRACAO POR S1, S2 OU S3

* DESENVOLVIDO POR : Marcos Clemente *

* GERENCIA DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO
* METAL LEVE S.A. INDUSTRIA E COMERCIO
* SAO PAULO, MARCO DE 1993

* DEFINICAO DAS VARIAVEIS *

* NELEM NUMERO DE ELEMENTOS FINITOS
* NGAUS ORDEM DE INTEGRACAO DE GAUSS
* NG NUMERO DO MAIOR PONTO DE GAUSS DO ELEMENTO
* ORD CONTORNO POR S1, S2 OU S3
* IND INDICADOR DA ORDEM DE INTEGRACAO
* DETJB DETERMINANTE DA MATRIZ JACOBIANA
* PARC INTEGRAL J DE CADA PONTO DE INTEGRACAO GAUSS
* JINT INTEGRAL J

***** IDENTIFICACAO DE MATRIZES *****

* CAM(I) NUMERO DOS ELEMENTOS CONTIDOS NO CONTORNO
* ECORD(I,J) COORDENADAS NODAIS (SISTEMA CARTESIANO GLOBAL)
* EDESL(I,J) DESLOCAMENTOS NODAIS (SIST. CARTESIANO GLOBAL)
* TENS(I,J,K) ... TENSOES CARTESIANAS DOS PONTOS DE GAUSS
* S(I) COORDENADAS NORMALIZADAS 's' DOS PONTOS GAUSS
* T(I) COORDENADAS NORMALIZADAS 't' DOS PONTOS GAUSS
* DERNOR(I,J,K) . DERIVADAS DAS FUNCOES DE FORMA (COORD.NORMAL.) *

```
* DERXY (I, J, K) .. DERIVADAS DAS FUNCOES DE FORMA (COORD. CARTES.) *
* SOMA (I, I) ..... DERIVADAS DOS DESLOCAMENTOS, NOS PONTOS GAUSS *
* JB (I, I) ..... MATRIZ JACOBIANA DO ELEMENTO ISOPARAMETRICO *
* N (I) ..... COMPONENTES DO VETOR NORMAL AO CONTORNO *
*
*****
```

```
***** CARTAO DE IDENTIFICACAO *****
```

```
PROGRAM PRINC
```

```
***** DECLARACAO DE VARIAVEIS *****
```

```
IMPLICIT NONE
```

```
REAL*8 S (9), T (9), X (2, 8), Y (16), JB (2, 2), Z (2, 8), R (16), N (2),
1 SIG (3), TENS (3, 2000, 9), SOMA (2, 2), JINT, DETJB,
1 DERNOR (2, 8, 9), ECORD (16, 2000), EDESL (16, 2000), PARC,
1 DERXY (2, 8, 9), IMPR (500, 10), JAC (500, 100)
```

```
INTEGER*4 NELEM, NGAUS, NG, ORD, IND, I, J, K, L, M, CONT, KONT,
1 CAM (500)
```

```
LOGICAL OPT
```

```
***** APRESENTACAO DA TELA SELO DO PROGRAMA *****
```

```
CALL SELO
```

```
5 CONTINUE
```

```
***** ENTRADA DE DADOS MANUAIS *****
```

```
WRITE (6, *) 'ENTRE COM O NUMERO DE ELEMENTOS NO CAMINHO GAMA:'
```

```
READ (5, *) NELEM
```

```
WRITE (6, *) 'ENTRE COM O NUMERO DOS ELEMENTOS NO CAM.GAMA'
```

```
READ (5, *) (CAM (I), I=1, NELEM)
```

```
WRITE (6, *) 'ENTRE COM A ORDEM DE INTEGRACAO DE GAUSS (2 ou 3)'
```

```
READ (5, *) NGAUS
```

```
WRITE (6, *) 'ENTRE O VALOR 1 SE DESEJAR INTEGRACAO POR S1'
```

```
WRITE (6, *) 'ENTRE O VALOR 2 SE DESEJAR INTEGRACAO POR S2'
```

```
WRITE (6, *) 'ENTRE O VALOR 3 SE DESEJAR INTEGRACAO POR S3'
```

```
READ (5, *) ORD
```

```
*****
```

```

*
***** LE ARQUIVOS GERADOS PELO ANSYS *****
*
*****
*
      CALL INPUT (ECORD, EDESL, TENS)
*
*****
*
***** GERACAO DAS MATRIZES S(I), T(I) E DERNOR(I, J, K) *****
*
*****
*
***** INTEGRACAO 3 X 3 *****
*
      IF (NGAUS.EQ.3) THEN
          IND=1
          IF (ORD.EQ.1) THEN
              NG=NGAUS
              CONT=1
              DO 350 K=1, 3
                  S(K)=- (3/5) **.5
350          CONTINUE
                  T(1)=- (3/5) **.5
                  T(2)=0
                  T(3)=(3/5) **.5
                  CALL DERST(S, T, NG, CONT, DERNOR)
              ELSE IF (ORD.EQ.2) THEN
                  NG=NGAUS+3
                  CONT=4
                  DO 430 K=4, 6
                      S(K)=0
430          CONTINUE
                      T(4)=- (3/5) **.5
                      T(5)=0
                      T(6)=(3/5) **.5
                      CALL DERST(S, T, NG, CONT, DERNOR)
              ELSE
                  NG=NGAUS+6
                  CONT=7
                  DO 540 K=7, 9

```

```

S(K) = (3/5) **.5
340 CONTINUE
T(7) = - (3/5) **.5
T(8) = 0.
T(9) = (3/5) **.5
CALL DERST(S, T, NG, CONT, DERNOR)
END IF
*
***** INTEGRACAO 2 X 2 *****
*
ELSE
IND=0
IF (ORD.EQ.1) THEN
NG=NGAUS
CONT=1
S(1) = - (3**.5) / 3
S(2) = - (3**.5) / 3
T(1) = - (3**.5) / 3
T(2) = (3**.5) / 3
CALL DERST(S, T, NG, CONT, DERNOR)
ELSE
NG=NGAUS+2
CONT=3
S(3) = (3**.5) / 3
S(4) = (3**.5) / 3
T(3) = - (3**.5) / 3
T(4) = (3**.5) / 3
CALL DERST(S, T, NG, CONT, DERNOR)
END IF
END IF
*
***** INICIALIZACAO DA INTEGRAL J *****
*
*****
*
JINT=0.
*

```

```

*****
*
*****      INICIO DO PROCESSO ITERATIVO      *****
*
*****
*
      DO 1170 I=1,NELEM
      DO 1160 KONT=CONT,NG
      DO 910 J=1,2
      DO 900 K=1,8
      X(J,K)=DERNOR(J,K,KONT)
300    CONTINUE
310    CONTINUE
      DO 940 L=1,16
      Y(L)=ECORD(L,CAM(I))
340    CONTINUE
*
*****
*
*****      CALCULO DA MATRIZ JACOBIANA E SEU DETERMINANTE      *****
*
*****
*
      CALL JACOB(X,Y,JB,DETJB)
*
*****
*
*****      CALCULO DAS DERIVADAS CARTESIANAS DAS FUNCOES DE FORMA      *****
*
*****
*
      CALL DCART(DETJB,JB,X,Z)
      DO 1010 J=1,2
      DO 1000 K=1,8
      DERXY(J,K,KONT)=Z(J,K)
1000   CONTINUE
1010   CONTINUE
      DO 1040 M=1,16
      R(M)=EDES(L,M,CAM(I))
1040   CONTINUE
*
*****
*
*****      CALCULO DA MATRIZ SOMA(I,I)      *****
*
*****
*

```

```

CALL DDC (Z, R, SOMA)
*
*****
*
***** CALCULO DO VERSOR NORMAL AO CONTORNO *****
*
*****
*
CALL VETN (JB, N)
DO 1090 J=1, 3
SIG (J) = TENS (J, CAM (I), KONT)
1090 CONTINUE
*
*****
*
***** CALCULO DO VALOR DE J PARA CADA PONTO DE GAUSS *****
*
*****
*
CALL CALC (SIG, SOMA, IND, JB, N, KONT, PARC)
IMPR (I, KONT) = PARC
*
*****
*
***** CALCULO DO VALOR ACUMULADO DE J *****
*
*****
*
JINT = JINT + PARC
JAC (I, KONT) = JINT
*
*****
*
1160 CONTINUE
1170 CONTINUE
*
*****
*
***** LIMPA A TELA *****
*
*****
*
CALL TELA
*
*****
*
***** IMPRESSAO DOS RESULTADOS *****
*
*****
*
CALL IMPRES (CAM, NGAUS, NELEM, IMPR, IND, NG, JINT, JAC)
*
*****
*
CALL TELA
TYPE *, 'QUER CONTINUAR ? [SIM<ENTER>, NAO<NAO>]'
```

```

      READ (5,1200) OPT
1200  FORMAT (A3)
      IF (OPT.EQ.' ') GOTO 5
      STOP
      END
*
*****
*
***** FIM DO PROGRAMA PRINCIPAL
*
*
      SUBROUTINE INPUT (ECORD, EDESL, TENS)
*
*****
*
***** DECLARACAO DE VARIAVEIS *****
*
*
      IMPLICIT      NONE
      INTEGER*4     NODE, ELEM1, ELEM2, I, J, N(8), NELEM, ELEM, CONT, KONT,
1                 NOD
      REAL*8        ECORD(16,2000), EDESL(16,2000), TENS(3,2000,9),
1                 NO(2000,3), D(2000,2), X, Y, Z, UX, UY, ITEM(6,4)
*
*****
** LEITURA DOS ARQUIVOS GERADOS PELO ANSYS, FORMATADOS POR 'ARQUIVOS' **
*
*
      OPEN (UNIT=10, FILE='COORD.DAT', STATUS='OLD')
      OPEN (UNIT=20, FILE='DISP.DAT', STATUS='OLD')
      OPEN (UNIT=30, FILE='TENSOES1.DAT', STATUS='OLD')
      OPEN (UNIT=50, FILE='ELEMENTO.DAT', STATUS='OLD')
*
*****
*
***** LEITURA DAS COORDENADAS NODAIS *****
*
*
1      READ (10,2,END=100,ERR=1) NODE, X, Y, Z
2      FORMAT (I8,2X,3G12.5)
      IF (NODE .EQ. 0) GOTO 1
      NO (NODE, 1) = X
      NO (NODE, 2) = Y
      NO (NODE, 3) = Z
      GOTO 1
100   CONTINUE
*

```



```

*****
*
***** LEITURA DOS DESLOCAMENTOS NODAIS *****
*
*****
*
3      READ (20,4,END=200,ERR=3) NODE,UX,UY
1      FORMAT (I7,1X,2G12.5)
      IF (NODE .EQ. 0) GOTO 3
      D (NODE,1) = UX
      D (NODE,2) = UY
      GOTO 3
200    CONTINUE
*
***** LEITURA DAS TENSOES CARTESIANAS DOS PONTOS DE GAUSS *****
*
*
      CONT=1
      KONT=1
5      READ (30,6,END=300,ERR=5) NOD, (ITEM (J,CONT), J=1,6)
5      FORMAT (I7,2X,6G12.5)
      IF (NOD .EQ. 0) GOTO 5
      CONT=CONT+1
      IF (CONT .EQ. 5) THEN
          CONT=1
          TENS (1,KONT,1)=ITEM (1,1)
3          WRITE (6,*) ' TENS (1,KONT,1) = ',KONT,TENS (1,KONT,1)
          TENS (2,KONT,1)=ITEM (4,1)
          TENS (3,KONT,1)=ITEM (2,1)
          TENS (1,KONT,2)=ITEM (1,4)
          TENS (2,KONT,2)=ITEM (4,4)
          TENS (3,KONT,2)=ITEM (2,4)
          TENS (1,KONT,3)=ITEM (1,2)
          TENS (2,KONT,3)=ITEM (4,2)
          TENS (3,KONT,3)=ITEM (2,2)
          TENS (1,KONT,4)=ITEM (1,3)
          TENS (2,KONT,4)=ITEM (4,3)
          TENS (3,KONT,4)=ITEM (2,3)
3          KONT=KONT+1
          WRITE (6,*) ' PASSEI AQUI ',KONT
      ENDIF

```

GOTO 5

300 CONTINUE

```
*
*****
*
***** LEITURA DA INCIDENCIA DE CADA ELEMENTO *****
*
*****
*
9 READ (50,10,END=400,ERR=9)ELEM, (N(I),I=1,8)
10 FORMAT (I8,16X,8I7)
   IF (ELEM .EQ. 0)GOTO 9
   DO I = 1,8
       ECORD (I,ELEM) = NO (N(I),1)
       ECORD (I+8,ELEM) = NO (N(I),2)
   ENDDO
   DO I = 1,8
       EDESL (I,ELEM) = D (N(I),1)
       EDESL (I+8,ELEM) = D (N(I),2)
   ENDDO
   GOTO 9
400 CONTINUE
   GOTO 500
99999 CONTINUE
3 TYPE *, 'PARANDO O PROGRAMA COM AVISO DE ERRO'
500 CONTINUE
   CLOSE (UNIT=10)
   CLOSE (UNIT=20)
   CLOSE (UNIT=30)
   CLOSE (UNIT=50)
   RETURN
   END
*****
*
***** FIM DA SUBROTINA *****
*
```

```

*****
*
*      SUBROUTINE DERST (A,B,N,K,C)
*
*****
*
*      DECLARACAO DE VARIAVEIS
*
*****
*
*      IMPLICIT          NONE
*
*      REAL*8  A(9),B(9),C(2,8,9)
*
*      INTEGER*4          N,K,I
*
*****
*
*      DO 190  I=K,N
*
*      C(1,1,I)=0.25*(1-B(I))*(2*A(I)+B(I))
*
*      C(1,2,I)=0.25*(1-B(I))*(2*A(I)-B(I))
*
*      C(1,3,I)=0.25*(1+B(I))*(2*A(I)+B(I))
*
*      C(1,4,I)=0.25*(1+B(I))*(2*A(I)-B(I))
*
*      C(1,5,I)=-A(I)*(1-B(I))
*
*      C(1,6,I)=0.5*(1-B(I)**2)
*
*      C(1,7,I)=-A(I)*(1+B(I))
*
*      C(1,8,I)=-0.5*(1-B(I)**2)
*
*      C(2,1,I)=0.25*(1-A(I))*(2*B(I)+A(I))
*
*      C(2,2,I)=0.25*(1+A(I))*(2*B(I)-A(I))
*
*      C(2,3,I)=0.25*(1+A(I))*(2*B(I)+A(I))
*
*      C(2,4,I)=0.25*(1-A(I))*(2*B(I)-A(I))
*
*      C(2,5,I)=-0.5*(1-A(I)**2)
*
*      C(2,6,I)=-B(I)*(1+A(I))
*
*      C(2,7,I)=0.5*(1-A(I)**2)
*
*      C(2,8,I)=-B(I)*(1-A(I))
*
190  CONTINUE
*
*      RETURN
*
*      END
*
*****
*
*****
*
*****
*
*      SUBROUTINE JACOB (A,B,C,D)
*
*****

```

```

*****
*
*****  DECLARACAO DE VARIAVEIS  *****
*
*****
*
      REAL*8  A(2,8),B(16),C(2,2),D,PARC
      INTEGER*4      J,K
*
*****
*
*****  CALCULO DA MATRIZ JACOBIANA  *****
*
*****
*
      DO 90 J=1,2
      C(J,1)=0.0
      C(J,2)=0.0
      DO 80 K=1,8
      PARC=A(J,K)*B(K)
      C(J,1)=C(J,1)+PARC
      PARC=A(J,K)*B(K+8)
      C(J,2)=C(J,2)+PARC
30      CONTINUE
90      CONTINUE
*
*****
*
*****  CALCULO DETERMINANTE DA MATRIZ JACOBIANA  *****
*
*****
*
      D=C(1,1)*C(2,2)-C(2,1)*C(1,2)
      RETURN
      END
*
*****
*
*****  FIM DA SUBROTINA  *****
*
*****
*
      SUBROUTINE DCART(D,C,A,Q)
*
*****
*
*****  DECLARACAO DE VARIAVEIS  *****
*
*****
*
      INTEGER*4      J
      REAL*8  C(2,2),A(2,8),Q(2,8),D

```

```

DO 80 J=1,8
Q(1,J)=1/D*(C(2,2)*A(1,J)-C(1,2)*A(2,J))
Q(2,J)=1/D*(-C(2,1)*A(1,J)+C(1,1)*A(2,J))
30 CONTINUE
RETURN
END
*
*****
*
***** FIM DA SUBROTINA *****
*
*
SUBROUTINE DDC(Q,G,S)
*
*****
*
***** DECLARACAO DE VARIAVEIS *****
*
*****
*
REAL*8 Q(2,8),G(16),S(2,2),PARC
INTEGER*4 J,K
DO 50 K=1,8
50 CONTINUE
DO 90 J=1,2
PARC=0.0
S(J,1)=0.0
S(J,2)=0.0
DO 80 K=1,8
PARC=Q(J,K)*G(K)
S(J,1)=S(J,1)+PARC
PARC=Q(J,K)*G(K+8)
S(J,2)=S(J,2)+PARC
30 CONTINUE
90 CONTINUE
RETURN
END
*
*****
*
***** FIM DA SUBROTINA *****
*
*****
*

```

```

SUBROUTINE VETN (C,N)
*
*****
*
*
*****  DECLARACAO DE VARIAVEIS  *****
*
*
REAL*8  C (2,2) ,N(2) ,D1,D2,DEN
*
*****
*
D1=C (2,2) * (-C (2,1) *C (1,2) +C (1,1) *C (2,2) )
D2=C (2,1) * (C (2,1) *C (1,2) -C (1,1) *C (2,2) )
DEN= (D1**2+D2**2) **0.5
N (1) =D1/DEN
N (2) =D2/DEN
RETURN
END
*
*****
*
*****  FIM DA SUBROTINA  *****
*
*
SUBROUTINE CALC (T,S,F,C,N,KONT,G)
*
*****
*
*****  DECLARACAO DAS VARIAVEIS  *****
*
*
REAL*8  T (3) ,S (2,2) ,C (2,2) ,N(2) ,G
INTEGER*4  KONT,F
*
*****
*
G= (0.5* (T (1) *S (1,1) +T (2) * (S (2,1) +S (1,2) ) +T (3) *S (2,2) ) *C (2,2) -
1      ( (T (1) *N (1) +T (2) *N (2) ) *S (1,1) + (T (2) *N (1) +T (3) *N (2) ) *
2      S (1,2) ) * (C (2,1) **2+C (2,2) **2) ** .5)
RETURN
END
*
*****
*
*****  FIM DA SUBROTINA  *****
*
*
SUBROUTINE TELA
*
*****
*
DO 10 I=1,24

```

```

        TYPE *, ' '
10      CONTINUE
        RETURN
        END

*
*****
*
***** FIM DA SUBROTINA
*
*
        SUBROUTINE IMPRES (CAM, NGAUS, NELEM, IMPR, IND, NG, JINT, JAC)
*
*****
*
***** DECLARACAO DE VARIAVEIS *****
*
        REAL*8  IMPR(500,10), JAC(500,10), JINT
        INTEGER*4      CAM(500), NGAUS, NELEM, IND, NG
*
*****
*
        OPEN (UNIT=10, FILE=' SAIDA.DAT', STATUS=' NEW' )
        WRITE (10,10)
        WRITE (6,10)
10      FORMAT (3X, ' NUMEROS DOS ELEMENTOS CONTIDOS NO CONTORNO DE INTEGRA
        ICAO :' )
        WRITE (6,20) (CAM(I), I=1, NELEM)
        WRITE (10,20) (CAM(I), I=1, NELEM)
20      FORMAT (3X, 50I4)
        TYPE *, ' '
        WRITE (6,40)
        WRITE (10,40)
40      FORMAT (T3, ' ELEMENTO', T14, ' PONTO DE GAUSS', T32, ' CONTRIBUICAO PARA J',
        1      T54, ' J ACUMULADA' )
        DO 100 J=1, NELEM
3      WRITE (6,30) CAM (J)
330     FORMAT (T30, ' ELEMENTO', T40, I4)
        IF (IND.EQ.0) THEN
        DO 90 K=(NG-1), NG
        WRITE (6,50) CAM (J), K, IMPR (J, K), JAC (J, K)
        WRITE (10,50) CAM (J), K, IMPR (J, K), JAC (J, K)
50      FORMAT (T7, I3, T18, I3, T42, F12.3, T63, F12.3)

```

```

90      CONTINUE
        ELSE
        DO 95 K=(NG-2),NG
        WRITE (6,50) CAM(J),K,IMPR(J,K),JAC(J,K)
        WRITE (10,50) CAM(J),K,IMPR(J,K),JAC(J,K)
95      CONTINUE
        ENDIF
100     CONTINUE
        TYPE *,' '
        WRITE (6,110) JINT
        WRITE (10,110) JINT
110     FORMAT(3X,'VALOR TOTAL DA INTEGRAL J =',F12.3,'Pa.m')
        CLOSE (UNIT=10)
        RETURN
        END
*
*****
*
***** FIM DA SUBROTINA
*
*****
*
        SUBROUTINE SELO
*
*****
*
***** ESSA SUBROTINA MONTA A TELA INICIAL DE APRESENTACAO *****
*
*****
*
        WRITE (6,6)
5       FORMAT (20 (/))
        WRITE (6,10)
10      FORMAT (//,
1       12X,'*****'
1       //,
2       12X,'*'
2       //,
3       12X,'* ***** ** ** ** ** ** ** ***** *'
3       //,
4       12X,'* ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** ** *'
4       //,
5       12X,'* ** ** ** *'
5       //,
6       12X,'* ** ** ** *'
6       //,
7       12X,'* ***** ** ** *'
7       //,

```



```

8 12X,'* **          ** **          ***          ***          *****          **          */
8 //
9 12X,'* **          ** *          ***          ***          *****          **          */
9 //
1 12X,'* **          ** **          ***          ***          **          **          */
1 //
2 12X,'* **          ** **          ***          ***          **          *****          */
2 //
3 12X,'*
3 //
4 12X,'*****
4 //
5 12X,'
                                     PRESSIONE ENTER ',//)
*
*****
*
      READ (5,*)
*
*****
*
      WRITE (6,6)
      WRITE (6,20)
20  FORMAT (/,
1 12X,'*****
1 //
3 12X,'*
1 //
4 12X,'*          O programa PRINC permite o calculo da integral */
1 //
5 12x,'*          J a partir de arquivos gerados pela analise da estru- */
1 //
6 12x,'*          tura por elementos finitos, utilizando-se o programa */
1 //
7 12x,'*          ANSYS 4.4A. Na geracao da malha de E.F., deve-se */
1 //
8 12x,'*          empregar o macro ARANHA, que utiliza elementos finitos*/
1 //
9 12x,'*          isoparametricos com 8 nos.
1 //
1 12x,'*          A formatacao dos arquivos gerados pelo ANSYS eh */
1 //
2 12x,'*          executada pelo programa ARQUIVO, visando possibilitar */
1 //
3 12x,'*          a posterior leitura dos dados pelo PRINC.
1 //
4 12x,'*
1 //
5 12x,'*****
1 //
6 12x,'
                                     PRESSIONE ENTER ',//)
*
*****
*
      ,READ (5,*)
      WRITE (6,6)
      RETURN
      END
*
*****
*
***** FIM DA SUBROTINA

```

*

*

*
***** FIM DO PROGRAMA *****
*

*

Figura B.03 Listagem do macro ARANHA, utilizado para geração parametrizada da malha de elementos finitos de estrutura em LEFM.

A=25E-3
V=100E-3
Z=(2*A)
E=206E9
NU=0.3
SIG=200E6
K,1,0,0
K,2,(0.25*A)
K,3,(0.5*A)
K,4,(0.75*A)
K,5,A
K,6,B
K,7,(W-A)
K,8,(0.25*A),(0.25*A)
K,9,(0.5*A),(0.5*A)
K,10,(0.75*A),(0.75*A)
K,11,A,A
K,12,B,B
K,13,(W-A),B
K,14,0,(0.25*A)
K,15,0,(1.3*(0.5*A))
K,16,0,(1.3*(0.75*A))
K,17,0,(1.6*A)
K,18,0,B
K,19,-(0.25*A)
K,20,-(0.25*A),(0.25*A)
K,21,-(0.5*A)
K,22,-(0.5*A),(0.5*A)
K,23,-(0.75*A)
K,24,-(0.75*A),(0.75*A)
K,25,-A
K,26,-A,A
K,27,-A,B
K,28,(W-A),(3*B)
K,29,B,(3*B)
K,30,0,(3*B)
K,31,-A,(3*B)
U,1,2
U,2,3
U,3,4
U,4,5
U,1,19
U,19,21
U,21,23
U,23,25
U,2,8
A,8,14,1,2
A,9,8,2,3
A,10,9,3,4
A,11,10,4,5
A,12,11,5,6
A,13,12,6,7
A,15,14,8,9
A,26,24,16,17
A,19,1,14,20
A,16,15,9,10
A,17,16,10,11
A,18,17,11,12
A,22,20,14,15
A,24,22,15,16
A,27,26,17,18
A,21,19,20,22
A,23,21,22,24
A,25,23,24,26
A,28,29,12,13
A,30,18,12,29

```
1,27,18,30,31
LMODIF,ALL,,,2
ET,1,82,,,2,,1
MP,EX,1,E
MP,NUXY,1,NU
MESH,ALL
ITER,1,0,1
POSTRS,1,1,6
KSE,1
VSEL,Y,0,0
VRSEL,X,0,100
),ALL,UY,0
VRSEL,X,0,0
),ALL,UX,0
VALL
PSF,0,2,6*A,-SIG
```




Figura B.04 Listagem do macro ARAEPMF, utilizado para geração parametrizada da malha de elementos finitos de estrutura com material em regime EPFM. Utiliza-se o modelo bi-linear para o comportamento elasto-plástico do material.

A=25E-3
N=100E-3
E=(2*A)
E=206E9
NU=0.3
SIG=600E6
K,1,0,0
K,2,(0.25*A)
K,3,(0.5*A)
K,4,(0.75*A)
K,5,A
K,6,B
K,7,(W-A)
K,8,(0.25*A),(0.25*A)
K,9,(0.5*A),(0.5*A)
K,10,(0.75*A),(0.75*A)
K,11,A,A
K,12,B,B
K,13,(W-A),B
K,14,0,(0.25*A)
K,15,0,(1.3*(0.5*A))
K,16,0,(1.3*(0.75*A))
K,17,0,(1.6*A)
K,18,0,B
K,19,-(0.25*A)
K,20,-(0.25*A),(0.25*A)
K,21,-(0.5*A)
K,22,-(0.5*A),(0.5*A)
K,23,-(0.75*A)
K,24,-(0.75*A),(0.75*A)
K,25,-A
K,26,-A,A
K,27,-A,B
K,28,(W-A),(3*B)
K,29,B,(3*B)
K,30,0,(3*B)
K,31,-A,(3*B)
G,1,2
G,2,3
G,3,4
G,4,5
G,1,19
G,19,21
G,21,23
G,23,25
G,2,8
A,1,2,8,14
A,2,3,9,8
A,3,4,10,9
A,4,5,11,10
A,5,6,12,11
A,6,7,13,12
A,8,9,15,14
A,16,17,26,24
A,14,20,19,1
A,9,10,16,15
A,10,11,17,16
A,11,12,18,17
A,14,15,22,20
A,15,16,24,22
A,17,18,27,26
A,20,22,21,19
A,22,24,23,21
A,24,26,25,23
A,12,13,28,29
A,12,29,30,18

```
A, 30, 31, 27, 18
LMODIF, ALL, , , 2
ET, 1, 82, , , 2, , 1
MPTEMP, 1, 20.
MPDATA, EX, 1, 1, 206E9
MPDATA, NUXY, 1, 1, 0.3
PB, BISO, 1, 1, 1
PBTEMP, 20.
PBDATA, 1, 1030E6, 1E9
MESH, ALL
OUTRES, ALL, ALL
KSE, 1
NSEL, Y, 0, 0
NRSEL, X, 0, 100
), ALL, UY, 0
NRSEL, X, 0, 0
), ALL, UX, 0
NALL
NSEL, S, LOC, Y, 6*A-.1, 6*A+.1
SF, ALL, PRESS, -SIG
NALL
```


Figura B.05 Listagem do programa ARQUIVOS.COM, utilizado para leitura dos arquivos de coordenadas e deslocamentos nodais, bem como de tensões nos pontos de integração de Gauss, gerados pelo processamento do programa ANSYS.

```
§ ANSYS44A  
/INTER  
/POST1
```

```
§STRESS, SX1, 82, 138  
§STRESS, SX2, 82, 149  
§STRESS, SX3, 82, 160  
§STRESS, SX4, 82, 171  
§STRESS, SY1, 82, 139  
§STRESS, SY2, 82, 150  
§STRESS, SY3, 82, 161  
§STRESS, SY4, 82, 172  
§STRESS, SXY1, 82, 140  
§STRESS, SXY2, 82, 151  
§STRESS, SXY3, 82, 162  
§STRESS, SXY4, 82, 173  
§STRESS, SZ1, 82, 141  
§STRESS, SZ2, 82, 152  
§STRESS, SZ3, 82, 163  
§STRESS, SZ4, 82, 174
```

```
§ET
```

```
/OUTPUT, TENSOES1, DAT  
§RSTR, GRP1  
/OUTPUT
```

```
/OUTPUT, TENSOES2, DAT  
§RSTR, GRP2  
/OUTPUT
```

```
/OUTPUT, COORD, DAT  
§RNODE  
/OUTPUT
```

```
/OUTPUT, DISP, DAT  
§RDISP  
/OUTPUT
```

```
/OUTPUT, ELEMENTO, DAT  
§RELEM  
/OUTPUT
```

```
§FINISH  
/EOF  
§EXIT
```

Figura B.06 Listagem do macro JIN2, disponível no módulo de Mecânica de Fraturas do ANSYS4.4A, válido para LEFM.

```

?DEF, INTR, S1, SIG1
?DEF, INTR, S2, SIG2
?DEF, INTR, S3, SIG3
?CALC, MULT, C11, S1, S1
?CALC, MULT, C22, S2, S2
?CALC, MULT, C33, S3, S3
?CALC, MULT, C12, S1, S2
?CALC, MULT, C23, S2, S3
?CALC, MULT, C31, S3, S1
C=(1/(2*E))
?CALC, ADD, SUM1, C11, C22
?CALC, ADD, SUM1, SUM1, C33, C, C
C=NU/E
?CALC, ADD, SUM2, C12, C23
?CALC, ADD, SUM2, SUM2, C31, C, C
?CALC, ADD, W, SUM1, SUM2, 1, -1
?CALC, INTG, J, W, YG
*GET, JA, PLAST, J
?DEF, CLEAR
?DEF, NORM, NX, NY, NZ
?DEF, INTR, SX, SX
?DEF, INTR, SY, SY
?DEF, INTR, SXY, SXY
?CALC, MULT, TX, SX, NX
?CALC, MULT, C1, SXY, NY
?CALC, ADD, TX, TX, C1
?CALC, MULT, TY, SXY, NX
?CALC, MULT, C1, SY, NY
?CALC, ADD, TY, TY, C1
*GET, DX, PLAST, S
DX=DX/100
?CALC, ADD, XG, XG, , , , -DX/2
?DEF, INTR, UX1, UX
?DEF, INTR, UY1, UY
?CALC, ADD, XG, XG, , , , DX
?DEF, INTR, UX2, UX
?DEF, INTR, UY2, UY
?CALC, ADD, XG, XG, , , , -DX/2
C=(1/DX)
?CALC, ADD, C1, UX2, UX1, C, -C
?CALC, ADD, C2, UY2, UY1, C, -C
?CALC, MULT, C1, TX, C1
?CALC, MULT, C2, TY, C2
?CALC, ADD, C1, C1, C2
?CALC, INTG, J, C1, S
*GET, JB, PLAST, J
JINT=(2*(JA-JB))
?DEF, CLEAR

```




Figura B.07 Listagem do macro JIN1, disponível no módulo de Mecânica de Fraturas do ANSYS4.4A, válido para EPFM.

```
SEXP, W, SENE, VOLU, 1, -1
LPATH, ARG1, ARG2, ARG3, ARG4
?DEF, W, ETAB, W
?CALC, INTG, J, W, YG
*GET, JA, PATH, , LAST, J
?DEF, CLEAR
?VECT, NORM, NX, NY, NZ
?DEF, SX, S, X
?DEF, SY, S, Y
?DEF, SXY, S, XY
?CALC, MULT, TX, SX, NX
?CALC, MULT, C1, SXY, NX
?CALC, ADD, TX, TX, C1
?CALC, MULT, TY, SXY, NX
?CALC, MULT, C1, SY, NY
?CALC, ADD, TY, TY, C1
*GET, DX, PATH, , LAST, S
DX=DX/100
?CALC, ADD, XG, XG, , , , -DX/2
?DEF, UX1, U, X
?DEF, UY1, U, Y
?CALC, ADD, XG, XG, , , , DX
?DEF, UX2, U, X
?DEF, UY2, U, Y
?CALC, ADD, XG, XG, , , , -DX/2
C= (1/DX)
?CALC, ADD, C1, UX2, UX1, C, -C
?CALC, ADD, C2, UY2, UY1, C, -C
?CALC, MULT, C1, TX, C1
?CALC, MULT, C2, TY, C2
?CALC, ADD, C1, C1, C2
?CALC, INTG, J, C1, S
*GET, JB, PATH, , LAST, J
JINT=(2*(JA-JB))
?DEF, CLEAR
```