

2002

**São Paulo**

Dissertação apresentada à  
Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo  
para obtenção do título de  
Mestre em Engenharia.

**CONTROLE DE MANCAIS MAGNÉTICOS**

**DIMENSIONAMENTO, MODELAGEM E**

**DANIEL BOURDON**

04

São Paulo  
2002

Orientador: José Sotelo Jr.

Area de Concentração: Engenharia Mecânica

Mestre em Engenharia

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção do título de

# DIMENSIONAMENTO, MODELAGEM E CONTROLE DE MANCAIS MAGNÉTICOS

DANIEL BOURDON

# Sumário

Resumo	xii
Abstract	xiii
1. Introdução	01
1.1. Objetivos	11
2. Projeto do Mancal Magnético	13
2.1. Introdução	13
2.2. Dimensionamento do Eixo	21
2.2.1. Verificação da Deformação do Eixo	26
2.3. Dimensionamento do Eletroímã	28
2.3.1. Dimensionamento do Circuito do Eletroímã	32
2.3.2. Definição da Geometria do Eletroímã	38
2.3.3. Área do Enrolamento das Espiras	40
2.3.4. Massa do Rotor	41
2.3.5. Resistência do Fio	43
2.3.6. Resultados do Dimensionamento	44
2.4. Refinamento do Cálculos	47
2.4.1. Cálculo da Secção do Fluxo Magnético no Entreferro	47
2.4.2. Cálculo da Indutância do Circuito	48
2.4.3. Resultados do Refinamento do Cálculos	53
3. Modelagem do Sistema	54
3.1. Modelo dinâmico	55
3.2. Saturação Magnética	58
3.3. Modelo do Eixo Rígido	66
4. Sistema de Controle	71
4.1. Linearização por Expansão em Série de Taylor	71
4.1.1. Projeto do Sistema de Controle Com Realimentação de Estados	77
4.1.2. Projeto do Sistema de Controle PID	83
4.2. Linearização por Transformação Global	92
4.2.1. Projeto do Sistema de Controle Não-Linear	94

103	5. Simulações
111	5.1. Escolha dos Parâmetros do Controle PID
117	5.2. Escolha dos Parâmetros do Controle por Realimentação de Estado
123	5.3. Escolha dos Parâmetros do Controle Não-Linear
128	5.4. Comparação dos Sistemas de Controle
130	5.5. Refinamento dos Parâmetros do Controle PID
137	5.6. Refinamento dos Parâmetros do Controle por Realim. de Estados.
143	5.7. Refinamento dos Parâmetros do Controle Não-Linear
148	5.8. Comparação entre os Sistemas de Controle.
154	5.9. Estudo da dinâmica do eixo bi-apoiado nos Mancais Magnéticos
173	6. Conclusão.
178	7. Apêndice
178	7.1. Determinação da Solução Ótima dos Parâmetros Do Sistema.
181	7.2. Definições e Conceitos de Geometria Diferencial
182	7.3. Determinação das Forças Externas
186	7.4. Cálculo de Parâmetros Gerais do Dimensionamento
188	8. Bibliografia

## Lista de Figuras

- Figura 2.1: Eixos e graus de liberdade considerados no modelo
- Figura 2.2: Secção longitudinal do eixo suportado pelo Mancal Magnético
- Figura 2.3: Mancal em corte
- Figura 2.4: Modelo do aspecto físico do Mancal Magnético
- Figura 2.5: Diagrama de esforços que atuam sobre o eixo
- Figura 2.6: Diagrama de tração e compressão na secção do eixo
- Figura 2.7: Flecha e inclinação do eixo
- Figura 2.8: inclinação do eixo em relação ao mancal
- Figura 2.9: Distribuição básica dos eletroímãs em torno do eixo
- Figura 2.10: Forças dominantes nas extremidades do eixo
- Figura 2.11: Esquema do atuador eletromagnético
- Figura 2.12: Largura e comprimento do pólo
- Figura 2.13: circuito do eletroímã
- Figura 2.14: gráfico da dinâmica da corrente elétrica no circuito do eletroímã
- Figura 2.15: magneto de perfil em “U”
- Figura 2.16: magneto de perfil circular
- Figura 2.17: Geometria do perfil do mancal magnético
- Figura 2.18: Perspectiva do rotor
- Figura 2.19: Secção do núcleo com enrolamento de fio em espiras
- Figura 2.20: Comportamento do fluxo magnético no entreferro
- Figura 2.21: Geometria do entreferro
- Figura 2.22: circuito do fluxo magnético

Figura 3.1: Secção transversal do Sistema I

Figura 3.2: Comparação entre curvas de magnetização do aço-silício obtida de modo teórico e experimental de dois materiais diferentes

Figura 3.3: Comparação entre curvas de magnetização do aço-silício obtida de modo teórico e experimental de dois materiais diferentes

Figura 3.4 : Curva do fluxo magnético em função da corrente elétrica no magneto superior para diversos valores de  $x$

Figura 3.5: Força magnética em função da posição  $x$  e corrente  $I$

Figura 3.6: Representação das forças atuantes ao longo do eixo

Figura 4.1: Posição dos polos do Sistema (4.7a)

Figura 4.2: Diagrama de blocos do sistema (4.7) com realimentação de estado

Figura 4.3: Posição dos polos do Sistema (4.9a)

Figura 4.4: Posição dos polos do Sistema (4.9b) com ganho de realimentação de estado  $K$  e considerando a variável  $x$  como saída.

Figura 4.5: Diagrama de blocos do modelo do mancal  $G_p$  com controle PID

Figura 4.6: Posição dos polos e zeros do sistema (4.26)

Figura 4.7: Posição dos polos do sistema (4.39), com controle PID

Figura 5.1: Resposta da posição do eixo ao seu degrau (degrau de posição) com controle PID, controle por Realimentação de Estado e Controle Não-Linear.

Figura 5.2: Resposta da posição do eixo ao seu degrau de posição com controle PID. Entreferro  $h_g = 5 \cdot 10^{-4}$  m;  $t_s = 0,2$  s;  $M_p = 10\%$ ;  $I_0 = 0,05$  A.

Figura 5.3: Resposta da tensão no magneto ao degrau de posição.

Figura 5.4: Resposta da posição do eixo às forças de vibração a 1800 rpm

Figura 5.5: Resposta da tensão no magneto às forças de vibração a 1800 rpm.

Figura 5.6: Gráfico dos índices  $J_0$  para valores de pré-corrente  $I_0$ , na resposta ao degrau de posição

- Figura 5.7: Gráfico dos índices  $J_0$  para valores de pré-corrente  $I_0$  na resposta às forças de vibração do eixo numa faixa de frequências.
- Figura 5.8: Resposta da posição do eixo ao seu posicionamento inicial de partida (azul) e à aplicação brusca da força de trabalho à rotação de 2200 rpm (verde).
- Figura 5.9: Resposta da posição do eixo ao seu posicionamento inicial em 50% do entreferro com  $I_0 = 0,12$  A.
- Figura 5.10: Resposta da corrente elétrica ao posicionamento inicial em 50% do entreferro com  $I_0 = 0,12$  A.
- Figura 5.11: Resposta da tensão elétrica ao posicionamento inicial em 50% do entreferro com  $I_0 = 0,12$  A.
- Figura 5.12: Resposta da posição do eixo às forças de vibração a 2200 rpm,  $I_0 = 0,12$ A.
- Figura 5.13: Resposta da tensão elétrica às forças de vibração a 2200 rpm,  $I_0 = 0,12$ A.
- Figura 5.14: Gráfico dos índices  $J_0$  calculados na resposta ao degraú de posição, para valores de pré-corrente  $I_0$ .
- Figura 5.15: Gráfico de detalhe dos índices  $J_0$  para valores de pré-corrente  $I_0$ , na resposta ao degraú de posição.
- Figura 5.16: Gráfico dos índices  $J_0$  na resposta à vibração do eixo numa faixa de frequências, para valores de pré-corrente  $I_0$ .
- Figura 5.17: Resposta da posição do eixo na partida (azul) e à aplicação brusca da força de trabalho à rotação de 2200 rpm (verde).
- Figura 5.18: Resposta da posição do eixo ao seu posicionamento inicial em 50% do entreferro com  $I_0 = 0,005$  A.
- Figura 5.19: Resposta da posição do eixo ao seu posicionamento inicial em 50% do entreferro com  $I_0 = 0,005$  A.
- Figura 5.20: Resposta da posição do eixo às vibrações a 2200 rpm,  $I_0 = 0,005$ A.
- Figura 5.21: Resposta da tensão elétrica às forças de vibração a 2200 rpm,  $I_0 = 0,005$ A.

Figura 5.22: Gráfico dos índices  $J_0$  para valores de pré-corrente  $I_0$ , na resposta ao degrau de posição.

Figura 5.23: Gráfico dos índices  $J_0$  na resposta à vibração do eixo numa faixa de frequências, para valores de pré-corrente  $I_0$ .

Figura 5.24: Gráfico dos índices  $J_0$  na resposta à vibração do eixo numa faixa de frequências, para valores de pré-corrente  $I_0$ .

Figura 5.25: Gráfico dos índices  $J_0$  na resposta à vibração do eixo numa faixa de frequências, para valores de pré-corrente  $I_0$ .

Figura 5.26: Resposta da posição do eixo ao seu posicionamento inicial em 50% do entreferro com  $I_0 = 0,02$  A.

Figura 5.27: Resposta da tensão elétrica ao seu posicionamento inicial em 50% do entreferro com  $I_0 = 0,02$  A.

Figura 5.28: Resposta da posição do eixo às forças de rotação a 2200 rpm,  $I_0 = 0,02$  A.

Figura 5.29: Resposta da tensão elétrica às forças de rotação a 2200 rpm,  $I_0 = 0,02$  A.

Figura 5.30: Resposta da posição do eixo ao seu degrau de posição com controle PID, controle por Realimentação de Estado e Controle Não-Linear.

Figura 5.31: Gráfico dos índices  $J_0$  na resposta ao degrau de posição para diversos valores de pré-corrente  $I_0$  e tempos de acomodação  $t_s$ .

Figura 5.32: Detalhe do ponto de mínimo índice  $J_0$  do gráfico da figura 5.31.

Figura 5.33: Resposta da posição do eixo ao degrau de posição com  $I_0 = 0,07$  A e  $t_s = 0,12$  s.

Figura 5.34: Gráfico dos índices  $J_0$  da resposta à vibração para diversos valores de pré-corrente  $I_0$  e tempos de acomodação  $t_s$ .

Figura 5.35: Gráfico dos índices  $J_0$  da resposta à vibração para valores refinados de pré-corrente  $I_0$  e tempos de acomodação  $t_s$ .

Figura 5.36: Gráfico dos índices  $J_0$  da resposta às forças externas para diversos valores de pré-corrente  $I_0$  e tempos de acomodação  $t_s$ .



- Figura 5.37: Resposta da posição do eixo às forças externas,  $I_0 = 0,03$  A e  $t_s = 0,18$  s.
- Figura 5.38: Resposta da tensão elétrica às forças externas,  $I_0 = 0,03$  A e  $t_s = 0,18$  s.
- Figura 5.39: Resposta da posição do eixo às situações de partida sem carga (azul) e de aplicação de carga máxima (verde),  $I_0 = 0,03$  A e  $t_s = 0,18$  s.
- Figura 5.40: Gráfico dos índices  $J_0$  na resposta ao degrau de posição para diversos valores de pré-corrente  $I_0$  e tempos de acomodação  $t_s$ .
- Figura 5.41: Gráfico dos índices  $J_0$  na resposta ao degrau de posição, na região de  $J_0$  mínimo.
- Figura 5.42: Resposta da posição do eixo ao degrau de posição, com  $I_0 = 0,14$  A e  $t_s = 0,045$  s.
- Figura 5.43: Resposta da tensão ao degrau de posição,  $I_0 = 0,14$  A e  $t_s = 0,045$  s.
- Figura 5.44: Gráfico dos índices  $J_0$  da resposta às forças externas, para diversos valores de pré-corrente  $I_0$  e tempos de acomodação  $t_s$ .
- Figura 5.45: Gráfico em detalhe dos índices  $J_0$  da resposta às forças externas, para valores refinados de pré-corrente  $I_0$  e tempos de acomodação  $t_s$ .
- Figura 5.46: Resposta da posição do eixo às forças externas,  $I_0 = 0,35$  A e  $t_s = 0,025$  s.
- Figura 5.47: Resposta da tensão elétrica às forças externas,  $I_0 = 0,35$  A e  $t_s = 0,025$  s.
- Figura 5.48: Resposta da posição do eixo à aplicação de força de trabalho,  $I_0 = 0,35$  A e  $t_s = 0,025$  s.
- Figura 5.49: Gráfico dos índices  $J_0$  na resposta ao degrau de posição para diversas simulações alterando a pré-corrente  $I_0$  e o tempo de acomodação  $t_s$ .
- Figura 5.50: Gráfico da região de mínimos índices  $J_0$  na resposta ao degrau de posição.
- Figura 5.51: Resposta da posição do eixo ao degrau de posição,  $I_0 = 0,03$  A e  $t_s = 0,02$  s.
- Figura 5.52: Resposta da posição do eixo ao seu degrau de posição com controle PID, controle por Realimentação de Estado e Controle Não-Linear refinados.
- Figura 5.53: Resposta da posição do eixo às forças externas com controle PID, controle por Realimentação de Estado e Controle Não-Linear refinados.

Figura 5.54: Gráfico dos índices  $J_0$  das respostas à força de vibração em diversas frequências de rotação do eixo, com os controles projetados.

Figura 5.55: Resposta da posição do eixo ao degrau de posição aplicado às duas extremidades ao mesmo tempo, para cada controle estudado

Figura 5.56: Resposta da posição do eixo às forças externas aplicada às duas extremidades ao mesmo tempo, para cada controle estudado

Figura 5.57: Resposta da posição do eixo na direção  $x$ , causada pelas forças externas no mancal com controle PID.

Figura 5.58: Resposta da posição do eixo na direção  $y$ , causada pelas forças externas no mancal com controle PID.

Figura 5.59: Trajetória do eixo no plano radial, na resposta às forças externas aplicadas às duas extremidades, usando controle PID.

Figura 5.60: Trajetória do eixo no plano radial, na resposta às forças externas aplicadas às duas extremidades, usando controle por Realimentação de Estado.

Figura 5.61: Trajetória do eixo no plano radial, na resposta às forças externas aplicadas às duas extremidades, usando Controle Não-Linear.

Figura 5.62: Resposta da posição do eixo na direção  $x$ , causada pelo degrau de posição inicial em  $h/2$  e  $-h/5$  nas extremidades do eixo, com controle PID.

Figura 5.63: Resposta da posição do eixo na direção  $x$ , causada pelo degrau de posição inicial em  $h/2$  e  $-h/5$ , com controle por Realimentação de Estado.

Figura 5.64 Resposta da posição do eixo na direção  $x$ , causada pelo degrau de posição inicial em  $h/2$  e  $-h/5$  nas extremidades do eixo, com Controle Não-Linear.

Figura 5.65: Trajetória da extremidade do eixo  $x_1$  no plano radial, na resposta ao degrau de posição inicial, usando controle PID.

Figura 5.66: Trajetória da extremidade do eixo  $x_1$  no plano radial, na resposta ao degrau de posição inicial, usando controle por Realimentação de Estado.

Figura 5.67: Trajetória da extremidade do eixo  $x_1$  no plano radial, na resposta ao degrau de posição inicial, usando Controle Não-Linear.

Figura 5.68: Trajetória das extremidades do eixo no plano radial, na resposta ao degrau de posição e velocidade inicial, usando controle PID.

Figura 5.69: Trajetória das extremidades do eixo no plano radial, na resposta ao degrau de posição e velocidade inicial, usando controle por Realimentação de Estado.

Figura 5.70: Trajetória das extremidades do eixo no plano radial, na resposta ao degrau de posição e velocidade inicial, usando Controle Não-Linear.

Figura 5.71: Detalhe da trajetória das extremidades do eixo no plano radial, na resposta ao degrau de posição e velocidade inicial, usando controle PID.

Figura 5.72: Trajetória das extremidades do eixo no plano radial, na resposta às forças externas, usando Controle PID.

Figura 5.73: Trajetória das extremidades do eixo no plano radial, na resposta às forças externas, usando Realimentação de Estado.

Figura 5.74: Trajetória das extremidades do eixo no plano radial, na resposta às forças externas, usando Controle Não-Linear.

Figura 5.75: Resposta da posição do eixo na direção  $x$ , causada pelas forças externas, com diferença de fase do desbalançamento de  $180^\circ$ , com Controle Não-Linear.

Figura 5.76: Comparação entre as Respostas da posição do eixo à vibração, com a presença e ausência de saturação magnética, com Controle por Realim. de Estado.

Figura 7.1: Massa relativa do rotor  $M$  em função da constante do eletromã  $k_0$  para

diversos valores de massa do rotor e números de espiras

Figura 7.2: Massa relativa do rotor  $M$  em função do Raio externo do mancal  $R_e$ , para

diversos valores de massa do rotor e números de espiras

## Lista de Tabelas

Tabela 2.1: Parâmetros

Tabela 2.2: Parâmetros

Tabela 2.3: Parâmetros

Tabela 2.4: Parâmetros

Tabela 4.1: Parâmetros do sistema linearizado

Tabela 4.2: Ganhos do sistema de controle RE

Tabela 4.3: Ganhos do sistema de controle PID

Tabela 4.4: Ganhos do sistema de Controle Não-Linear

Tabela 5.1: Parâmetros escolhidos para melhor resposta ao degrau de posição, índices de desempenho  $J_0$  e os ganhos projetados  $K$  para os sistemas de controle.

Tabela 5.2: Parâmetros escolhidos para melhor resposta às forças externas, índices de

desempenho  $J_0$  e os ganhos projetados  $K$  para os sistemas de controle.

Tabela 5.3: Faixa de situações de trabalho estável do Mancaal Magnético, conforme tipo de controle, sua configuração e o tipo de resposta.

Tabela 7.4: Momento de inércia

## Resumo

Este trabalho estuda o desempenho dos sistemas de controle PID, controle por realimentação de estados e controle não-linear projetado por Transformação Global, com relação ao comportamento do modelo de um eixo sustentado por mancais magnéticos com 4 graus de liberdade, sujeito a perturbações externas.

Foi desenvolvido um método geral de dimensionamento para mancais magnéticos por computador, buscando otimizar as dimensões para obter respostas mais rápidas e eficientes. O método serve como base para a montagem do modelo matemático do mancal magnético. Foi modelado um eixo rígido suspenso por 4 mancais, considerando a sua dinâmica em todas as direções radiais, sujeito a efeitos de vibração por excentricidade do eixo, forças de trabalho, efeitos giroscópicos, saturação magnética, indutância e resistência elétrica, perdas magnéticas, entre outros. Foi desenvolvido um método para modelar os efeitos da saturação magnética do núcleo do magneto, para simular seus efeitos na dinâmica do eixo.

Foram projetados 3 tipos de sistema de controle para estabilizar o eixo e estudar seu desempenho: o controle PID e o controle por realimentação de estados são controles lineares simples, projetados a partir da linearização do sistema por Expansão em Série de Taylor, e o controle não-linear, que tem seu algoritmo projetado a partir da linearização do modelo do sistema pelo método da Transformação Global e o projeto dos ganhos por imposição de polos. Realizaram-se simulações de situações variadas para gerar respostas do sistema com cada controle e analisá-las. Foram ajustados os parâmetros de cada controle para se ter o melhor desempenho para comparação. O controle não-linear mostrou-se mais adaptado ao mancal magnético, pois tem maior desempenho nas condições de trabalho de projeto e pode manter o sistema estável numa ampla faixa de situações.

## Abstract

This work deals with the performance evaluation of three control systems, named PID control, state feedback control and a nonlinear control designed by the Global Transformation Method, having as the dynamic system the model of a shaft levitated by magnetic bearings with four degree of freedom, subject to external disturbances.

A general method for designing magnetic bearings by computer was developed, aimed to optimize the physical dimensions of components in order to obtain better and faster responses. The method was used as the basis for the magnetic bearing mathematical model developed in this study.

A rigid shaft levitated by four bearings was modeled, considering the dynamics in the radial directions, subject to vibrations induced by shaft eccentricities, working forces, gyroscopic effects, magnetic saturation, inductance and electrical resistance, magnetic losses, etc. A method was developed to model the effects of magnetic saturation of the magnet's nucleus, in order to simulate its effect in the shaft.

The shaft can be stabilized in this work for three different types of control systems designed to study their performance to several situations: the PID control and the state feedback control are well-known linear controllers, designed by linearizing the system by Taylor series expansion, and a nonlinear controller designed by linearization of the system using the method of Global Transformation followed by selecting the gains through pole placement design.

The math model of system and controllers were simulated in several situations likely to occur in practice to analyze the overall performance. The best parameters for each controller were adjusted for comparison purpose. The performance of the magnetic bearings using the nonlinear controller was considered superior when compared with the linear controllers, showing improved behavior near to the design working point and is able to maintain good system stability for a wide range of operations.

# 1. Introdução

A levitação magnética tem aplicação principalmente em duas áreas: sistemas de transporte e mancais de rotores. Existem poucos exemplos de uso da levitação magnética em transportes comerciais, porém seu uso em sustentação de rotores já alcança duas décadas com inúmeros exemplos de aplicações na indústria.

A levitação magnética pode ser definida por uma condição estável de um objeto sem nenhum contato mecânico com o meio externo, onde seu peso é sustentado somente por forças magnéticas. A condição do objeto deve continuar estável mesmo sujeito a distúrbios externos razoáveis, em todos os graus de liberdade de corpo rígido [4].

Podemos dividir o campo da levitação magnética em 2 grandes grupos segundo o princípio físico para criação da força magnética. Um deles é baseado na força de relutância, devido à diferença de permeabilidade magnética entre materiais, que resulta numa força magnética perpendicular às superfícies dos diferentes materiais. O outro grupo é baseado no princípio da força de Lorentz, resultado do produto da corrente elétrica e o campo magnético num corpo, que gera uma força transversal ao campo magnético, bastante utilizada nos motores de indução.

Esta classificação é baseada nas aplicações da levitação magnética encontradas na indústria ou com aplicação promissora num futuro próximo.

Os mecanismos que utilizam a força de relutância podem ser classificados em 4 tipos diferentes:

1. **Mancal Magnético Ativo (AMB)**: basicamente, a levitação é mantida por eletromagnetos cuja corrente elétrica é definida por um controlador que amplifica os

4. **Levitação usando material diamagnético:** o efeito diamagnético de materiais supercondutores permite a geração de grandes forças de repulsão entre estes
3. **Mancal de magneto ferromagnético permanente (sem supercondutores):** é baseado na força de atração e repulsão entre ímãs permanentes, mas não é estável em todos os graus de liberdade de corpo rígido, portanto necessita do uso de um sistema estável de apoio em um dos graus de liberdade do sistema. É utilizado para diminuir a carga ou a amplitude de vibração de um corpo girante em conjunto com um mancal eletromagnético ativo ou convencional, por exemplo em bombas de alto vácuo. Tem como desvantagem um baixo amortecimento.
2. **Mancal de circuito LCR sintonizado:** é bastante semelhante ao anterior, porém o funcionamento de um equipamento on-line, entre outros.
- 2



materiais quando sujeitos a um campo magnético. Embora em fase de testes, este método tem previsíveis aplicações na indústria num futuro próximo por não necessitarem de controle ativo. Porém o sistema magnético ativo ainda tem vantagens sobre o passivo, portanto não deve ser totalmente substituído por este.

Os mecanismos que utilizam a força de Lorentz, por sua vez, também podem ser classificados em 4 tipos diferentes:

5. **Levitação eletrodinâmica passiva:** a levitação ocorre sem necessidade de controle quando altas correntes são induzidas pela velocidade relativa entre o estator e o rotor. O uso de supercondutores é necessário para evitar altas perdas em um nível de levitação razoável. Foram construídos muitos protótipos de veículos levitados por este método, um deles em utilização.

6. **Levitação por Interação entre correntes alternada e induzida (passiva):** se o movimento relativo é substituído por um fluxo alternante, uma levitação semelhante à anterior é obtida. Porém a força devido à corrente induzida é muito fraca comparada com as perdas envolvidas, além de possuir baixo amortecimento. Estas desvantagens são a razão pela qual este tipo de levitação é usado apenas em alguns casos especiais.

7. **Levitação por interação entre correntes alternada e induzida (ativa):** o motor de indução tem excelente eficiência para gerar uma força tangencial que pode ser transformada em radial se um sistema de controle apropriado for aplicado no estator. Este controle será baseado no entreferro, como no AMB, porém a eficiência deve ser da ordem da mesma que a dos motores de indução. É possível combinar deste modo mancal e motor em um mesmo sistema.

## 8. Levitação por corrente controlada e fluxo estático: semelhante ao anterior,

porém a corrente induzida no rotor é substituída por um rotor permanentemente magnetizado. Com algumas modificações na bobina, um motor pode se tornar também um mancal com alta eficiência e com aplicação industrial.

Ao comparar os sistemas que usam a força de relutância e os que usam força de Lorentz podemos notar que a capacidade física de ambos é aproximadamente a mesma. Embora os sistemas com a força de relutância precisem do menor entreferro possível e do maior fluxo magnético no material e enquanto os sistemas com a força de Lorentz precise da maior corrente elétrica possível, a decisão entre usar um ou outro sistema depende muito da aplicação e das circunstâncias. Isto é, não há uma regra geral válida para que haja preferência para um ou outro tipo de levitação [4].

Sistemas de mancais magnéticos ativos são hoje em dia encontrados no mercado em grande variedade, oferecidos geralmente por fabricantes de rolamentos convencionais (Revolve/SKF) ou por fabricantes de motores elétricos, uma vez que usam a mesma matéria-prima (CALNETIX, Magnetics Moments, entre outros). Estas empresas geralmente disponibilizam informações sobre mancais magnéticos em catálogos ou pela internet, e comercializam vários tipos de mancais, classificando-os como:

- **Passivos:** funcionam com magnetos permanentes e necessitam de um apoio convencional no quinto grau de liberdade ou um centro de relutância, para estabilizar o rotor na posição desejada. São correspondentes aos do tipo 3 e fornecem baixa força e mínimo amortecimento.

- Ativos: funcionam como o AMB com amplificador de potência e sistema de

controle PID sintonizado para uma resposta otimizada. São mais complexos mas fornecem uma resposta adequada para cada aplicação.

No caso dos AMB's comerciais, geralmente usa-se de 6 a 12 eletromagnetos com polos arranjados de modo alternado ao redor do eixo (heteropolar), com pré-fluxo equivalente a 50 % da máxima capacidade do eletromagneto, para linearização do sistema. São usados 2 sensores opostos para leitura de mesma posição para diminuir as interferências causadas pelo sensor, além de filtros para alta frequência. O sinal é convertido para linguagem digital e processado por um algoritmo para produzir uma corrente no atuador equivalente à resposta desejada. A diferença entre a corrente desejada e a atual é convertida para o analógico e enviada ao gerador de pulso, que enviará ao amplificador de potência. Todo o ciclo é repetido a uma frequência de 10 KHz. O sistema de controle usado geralmente é PID com filtro passa baixa frequência, polos e zeros adicionados e filtros *Notch* para frequências críticas. A performance do mancal pode ser monitorada à distância e um alarme soa quando a posição do mancal ultrapassa certo limite, para desligamento do sistema. Um sistema de emergência gera energia para o mancal por 30 minutos em caso de blecaute e um rolamento de emergência segura o eixo a meio caminho do entreferro em caso de pane.

Um mancal magnético tem inúmeras vantagens sobre um mancal convencional de rolamentos. A principal é a confiabilidade do sistema. O material usado é o mesmo dos motores elétricos, que costuma durar mais que o equipamento. Sem contato com o meio, não há desgaste mecânico entre as partes girantes e estacionárias, eliminando a necessidade de manutenção frequente e de lubrificação, além de aumentar a vida útil. As falhas são

acompanhadas por um sistema eletrônico que prevê a troca de componentes antes que eles

danifiquem o sistema [4].

Um mancal magnético geralmente é usado em operações onde a limpeza é prioritária;

aplicações em sistemas que requerem alta velocidade de rotação e alto desempenho;

sistemas de precisão e sistemas que requerem ausência de contato ou vibração.

Uma das aplicações é em bombas de fluidos que não podem ser lubrificadas sem

risco de contaminação, como no caso de compressores de gases de alta pureza, bombas

usadas na indústria de alimentos ou em corações artificiais (bombeamento sanguíneo

extra-corpóreo) (Revolve/SKF).

Outra aplicação é em operações no vácuo, como bombas turbomoleculares (40 000

rpm) para geração de vácuo industrial, processos da indústria de semicondutores e baterias

mecânicas, armazenando energia na forma de inércia sem atrito com o meio externo

(40 000 rpm), já usado em ônibus urbano (CALNETIX) e satélites, além de aplicações em

tecnologia espacial, como motores e mancais usados em satélites, sondas e estações

espaciais [30].

Ha aplicação ainda em motores de alta velocidade, fresadoras de precisão (de

300.000 a 180.000 rpm com 6 pólos cônicos) com alta capacidade de remoção de material

(Revolve/SKF), bombas de Hélio líquido [1], trens levitados magneticamente (KOMET),

isolamento de equipamentos industriais e de medição contra vibrações do chão (entre 3 Hz

e 60 Hz devido a ambiente industrial de usinagem pesada) [8], entre outros.

Ainda há projetos de utilização em turbinas de usinas termelétricas, turbinas

hidrelétricas, grandes ventiladores industriais, entre outras aplicações espaciais.

Ultimamente as indústrias vêm somando esforços para tornar-se ou continuar

competitivas num mercado preponderantemente globalizado. Para isso elas têm

modernizado suas gestões de administração da produção de modo a manter um nível tecnológico que as tornem competitivas, valorizando principalmente o processo de fabricação e não só o produto fabricado. Esta modernização implica em investimentos na área da tecnologia da produção, com o objetivo de utilizar os equipamentos mais modernos disponíveis, e na área de recursos humanos, com o objetivo de mudar o perfil dos funcionários de modo a conscientizá-los da responsabilidade de seu trabalho e prepará-los para lidar com equipamentos que exigem conhecimentos mais amplos, envolvendo áreas da elétrica, mecânica, hidráulica, pneumática, química e robótica. Toda essa mudança de mentalidade, o que alguns chamam de “a nova revolução industrial”, invoca numa preocupação maior no controle do processo produtivo na empresa e nos equipamentos utilizados, dando lugar a um novo conceito de manutenção de equipamentos onde o mancal magnético tem papel de destaque: a manutenção preventiva. Com menor necessidade de paradas para manutenção e possibilidade de acompanhamento on-line do desempenho do equipamento, o mancal magnético está perfeitamente inserido num contexto produtivo automatizado necessário nas grandes indústrias atuais. Por este motivo, o presente estudo se empenha em desenvolver novas abordagens para o tema, utilizando técnicas de dimensionamento e de controle mais atualizadas.

O dimensionamento de um mancal magnético pode ser feito de várias maneiras, dependendo da geometria utilizada. Porém, na maioria das referências não se encontra um método de dimensionamento para um mancal geométricamente equivalente ao escolhido neste estudo, ou então é utilizado um método semelhante ao do dimensionamento de um transformador [19] e [26], que não tem relação direta entre a massa do rotor, o número de espiras e a seção do núcleo. No caso do mancal magnético os parâmetros de dimensionamento têm uma tal interdependência que uma solução sub-ótima só é possível

por meio de interação por computador, e não só um cálculo para escolha de um elemento normalizado (o perfil de aço-sifício). Neste estudo viu-se necessário o desenvolvimento de uma rotina por computador para determinar a solução ótima de dimensionamento de um mancal magnético, para que o mancal seja mais compacto e tenha as respostas mais rápidas possíveis.

Recentemente, a maioria dos estudos sobre mancais magnéticos se concentra no sistema de controle. O clássico PID analógico deu lugar ao controle digital e a moderna teoria de controle, como controle *sliding mode*, controle  $H_\infty$ , para criar controles robustos. Porém o modelo do sistema é muito genérico, baseado em métodos com incertezas inaceitáveis, em torno de 50% em relação à posição do rotor [1]. É necessária uma maior aproximação entre o modelo e o sistema real, de modo a diminuir os erros envolvidos. É necessário deixar de linearizar o sistema para modelá-lo, assim como seu controlador. Deve-se estudar e simular o comportamento do mancal trabalhando na área fortemente saturada do magneto, onde se encontra um comportamento bastante não-linear do sistema, porém com grandes perspectivas de resultados positivos. Outra possibilidade é usar parâmetros linearizados diferentes em função do ponto de operação do sistema, porém Matti Antila [1] usa o método de elementos finitos para estudar o comportamento do sistema o mais próximo possível da realidade, e compará-lo com o método linear de cálculo. Conclui-se que há uma grande discrepância de resultados obtidos, principalmente na área de saturação do material, onde a força magnética é fortemente não-linear em relação à corrente. Os resultados demonstram experimentalmente a necessidade de um tratamento mais preciso e não linearizado durante a modelagem de um mancal magnético.

Lichuan Li [15] usa um mancal de 8 pólos em oposição pré-magnetizados para

possibilitar linearização, embora possa usar pólos extras em torno do eixo com corrente fixa para obter pré-magnetização, como tem-se usado ultimamente (CALNETIX). Porém, acredito que pode-se economizar espaço se usarmos um pólo para controle e o outro para pré-magnetização, totalizando ainda 8 pólos, ou ainda 6 pólos se abandonarmos o referencial ortogonal, pois 3 vetores de forças são suficientes para estabilizar radialmente o rotor (Revolve/SKF). Lichuan Li [15] acredita que a soma das correntes de cada pólo irá gerar um efeito semelhante a pré-magnetização de um pólo. Ele compara a utilização do sistema de controle para manter a soma constante das correntes elétricas, das tensões elétricas ou dos fluxos magnéticos nos pólos de mesmo magneto, usando a tensão como a variável definida pelo controle. Mantendo a soma de correntes no mesmo magneto positiva e a posição do rotor próximo do equilíbrio, pode-se manter distância do problema de singularidade em  $t = 0$  e a linearização é possível. No presente estudo utiliza-se a mesma variável definida pelo controle: a tensão, porém usa-se método diferente para manter a corrente positiva.

A partir de um modelo linearizado de um mancal magnético para isolamento de vibrações, Fabien [8] desenvolve um método para dimensionar os ganhos do sistema de controle a partir de análise geométricas das relações entre as variáveis do sistema (diagrama de fases), por meio de otimização do isolamento de vibrações ou da energia gasta pelo sistema. Novamente o enfoque linearizado do sistema induz a alguns desvios de resultados comparados com os medidos experimentalmente, porém o método para desenvolver o modelo antes de ser linearizado (conservação de energia) e o método de interpretação geométrica das variáveis serviram como base para o desenvolvimento deste estudo, embora a interpretação aqui presente introduza um pouco de geometria diferencial.

Conforme o Freddy Pérez [20], a principal justificativa para a linearização de um

sistema é a existência de poderosas ferramentas para controle de sistemas lineares. Um dos procedimentos mais utilizados é a aplicação do método de Expansão em Série de Taylor no sistema para linearizá-lo em torno de um ponto de operação. O problema é que este sistema linearizado só é válido nas vizinhanças deste ponto. Outras abordagens podem ser adotadas, como o *Escalonamento de Ganhos (Gain Scheduling)* onde lineariza-se em torno de vários pontos de operação e projeta-se um ganho de controle para cada ponto, ou a *Quase-Linearização*, onde substitui-se a não-linearidade por um ganho quase linear, obtido considerando a resposta do elemento não-linear a uma entrada específica. Porém a introdução da geometria diferencial na teoria de controle e os avanços nas técnicas computacionais produziram uma revolução no tratamento dos fenômenos não-lineares. Surgiram a Linearização Global, Linearização Entrada-Saída, Pseudo-Linearização e a Linearização Estendida.

A Linearização Global consiste em obter, mediante transformação de coordenadas nos espaços de estado e de controle, um sistema linear equivalente. Na linearização Entrada-Saída, as saídas do sistema são manipuladas de modo a obter um sistema de ordem reduzida cujo comportamento do ponto de vista entrada-saída é linear. A Pseudo-Linearização compreende uma transformação semelhante a Linearização Global, porém o domínio de validade é um conjunto de pontos nas vizinhanças dos pontos de operação do sistema. A Linearização Estendida consiste em obter uma família parametrizada de sistemas lineares em torno de pontos nominais de operação.

Um sistema de levitação magnética tem comportamento extremamente não-linear, o que dificulta a aplicação de um sistema de controle linear [8] que forneça uma resposta com bom desempenho ao sistema. O método da Linearização Global foi escolhido neste



estudo para obter o algoritmo de controle que leve em consideração as não-linearidades da dinâmica do sistema, pela extensão de seu domínio de validade no espaço de estados, e para comparação com a teoria linear. O objetivo é buscar um sistema de controle que ofereça maior desempenho e maior faixa estável ao sistema. Um algoritmo de controle não-linear pode interagir melhor com o comportamento não-linear do sistema, pois pode ter uma dinâmica semelhante, e pode obter melhor desempenho de resposta, promover maior economia de energia e aumentar a robustez do sistema.

## 1.1. Objetivos

Este estudo tem por objetivo dimensionar e montar um modelo matemático realista de um eixo girante sustentado por mancais magnéticos e comparar certos tipos de sistemas de controle modernos com relação ao seu comportamento.

O sistema proposto encontrará uma solução ótima de dimensionamento e simulará um eixo em rotação constante apoiado magneticamente nas extremidades, com 4 graus de liberdade, sujeito a forças contínuas e variáveis na sua extensão. Realizaremos testes de estabilidade e análise de resposta do eixo em rotação constante, sujeito a vibração e cargas variáveis, comparando 3 tipos de sistemas de controle: controle PID, controle com ganho de realimentação de estado e controle com algoritmo não-linear, linearizado por Transformação Global.

Para que o modelo matemático seja o mais realista possível, ele será baseado em um projeto real de um mancal magnético experimental. Isto é, foi dimensionado um eixo sustentado por mancais magnéticos como parte de um projeto de uma bancada para estudo

de sistemas de controle de mancais magnéticos para garantir a veracidade dos dados para modelagem e simulação, porém esta bancada não foi construída para verificar efetivamente os resultados obtidos. Este projeto poderá vir a ser montado posteriormente e servir para experimentos relacionados à área e testes de sistemas de controle, além de validar e corrigir o modelo matemático desenvolvido neste estudo.

## 2. Projeto do Mancal Magnético

### 2.1. Introdução

Neste capítulo é dimensionado e projetado um eixo sustentado por mancais magnéticos para servir como base para a montagem de um modelo matemático deste sistema verossímil e aplicável. O mancal não foi montado fisicamente pois este não é o objetivo deste estudo.

O projeto do mancal magnético é direcionado a fins experimentais genéricos, portanto deve ter dimensões de fácil manuseio e instalação em laboratório, de modo a possibilitar pesquisa abrangente sobre o assunto sem necessidade de altos investimentos. Definimos um eixo girante e flexível apoiado radialmente pelos mancais magnéticos nas extremidades e sujeito a vibrações causadas por excentricidades e forças externas arbitrárias. Foi escolhida esta configuração pela simplicidade de construção, facilidade de cálculo dos sistemas de controle e ampla faixa de aplicabilidade.

O eixo é acionado por um motor elétrico que fornece a rotação necessária para os testes dinâmicos e é conectado ao eixo por meio de uma conexão projetada para transmitir apenas momentos axiais, montado na extremidade do eixo, para que não haja interferências de esforços no mancal. Esta conexão pode ser um sistema magnético de transmissão de torque ou um sistema de transmissão por arcos e aros, o que é mais simples e barato. O eixo não é apoiado axialmente por mancais devido a não existência de esforços axiais consideráveis e porque a existência de um sistema de controle axial não adicionaria nenhum aspecto relevante ao estudo, pois o sistema de controle axial seria bastante

semelhante ao radial. Além disso o sistema de apoios magnéticos radiais geram força axial

suficiente para manter o eixo estável nesta direção.

O eixo está apoiado por um campo magnético gerado por oito eletroímãs com

corrente contínua. A corrente elétrica nas espiras no estator do mancal é definida pela

tensão elétrica aplicada nele, a qual é controlada pelo sistema de controle e limitada a um

valor de fácil aplicação em laboratório.

São montados no eixo dois anéis de material ferromagnético, um para cada mancal,

para estabelecerem um circuito magnético entre o estator e o eixo, ao qual denominamos

rotor. Os rotores são fixados no eixo por meio de um disco de material leve: a bucha.

Foi considerado, para a construção do modelo, os movimentos de translação e rotação

radiais do eixo rígido e 3 modos de vibração de eixo flexível não apoiado, com massas

representando os rotores nas extremidades. Os movimentos axiais foram excluídos do

modelo porque podem ser considerados independentes dos demais. Foi considerado que o

acionamento não ajuda a apoiar o mancal e transmite apenas a rotação necessária sem

variações e sem esforços radiais.

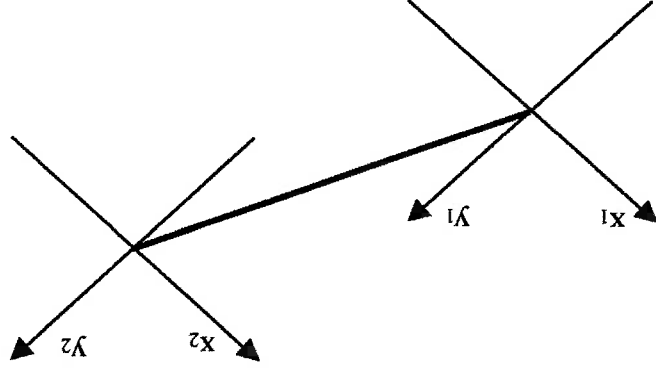


Figura 2.1: Eixos e graus de liberdade considerados no modelo

A forma de montagem dos mancais e motor no eixo é apresentada na figura 2.2 e foi assim escolhida com o objetivo de servir a uma ampla faixa de experimentos magnéticos e de controle com utilidade prática, pois esta forma de construção permite generalizações para a maioria dos casos de apoio por mancais usados industrialmente. Além disso o eixo foi projetado longo para que seja possível a instalação de equipamentos para experimentos em geral, como aplicação de forças variáveis e estudo dos modos de vibração do eixo.

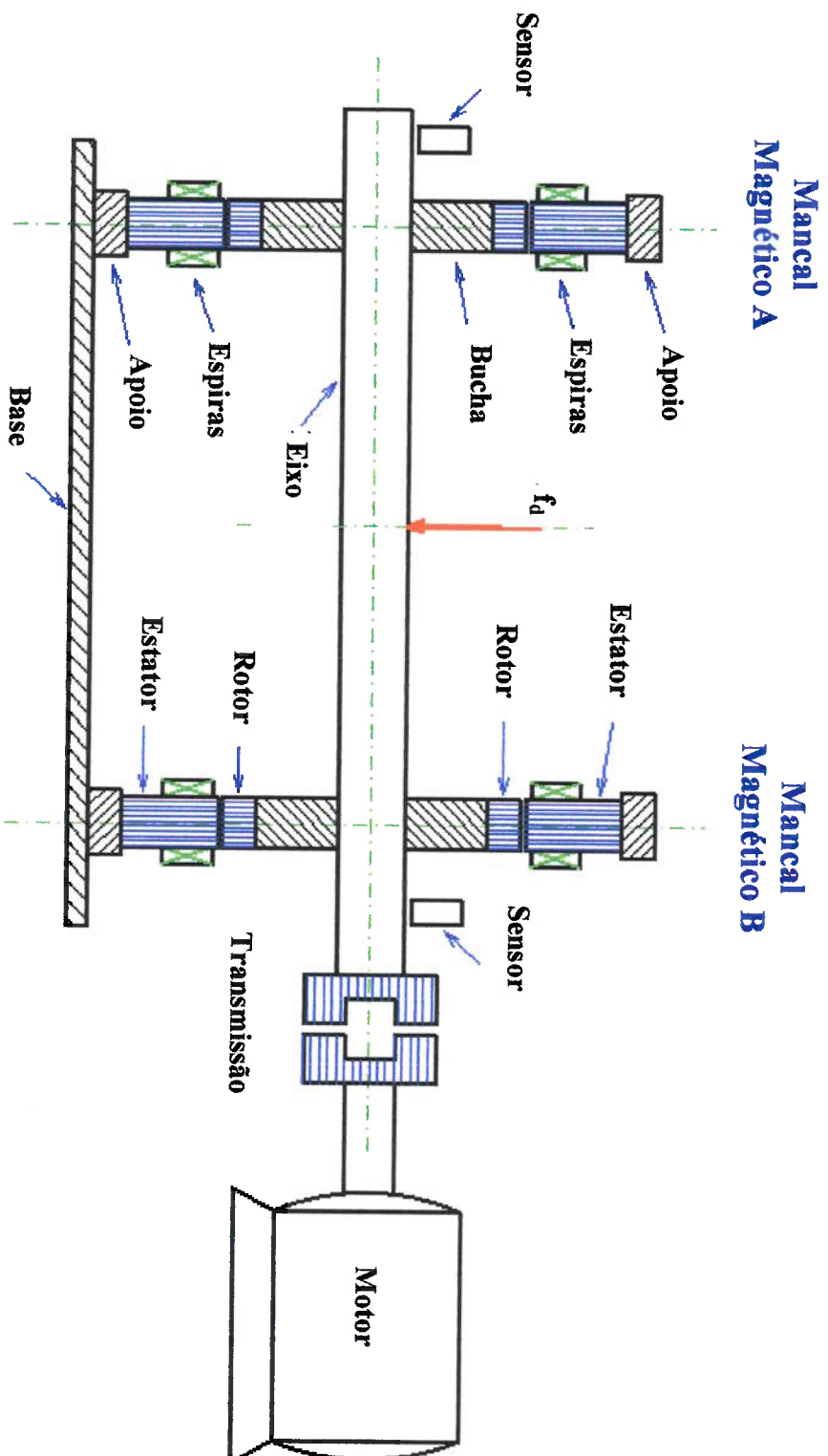


Figura 2.2: Secção longitudinal do eixo suportado pelo Mancal

Magnético

Foram incluídos no modelo efeitos de indutância e resistência elétrica no circuito do

eletroímã; perdas de fluxo e saturação magnética, perdas por corrente induzida no eletroímã, efeitos da geometria do mancal, gravitação, efeitos giroscópicos, defeitos de balançamento do rotor e eixo, forças de trabalho, dinâmica do sistema de controle, ruídos e interferências induzidos nos sensores como integrantes do modelo dinâmico do sistema Mancal Magnético. Não foram considerados os efeitos de atrito com o meio externo, choques mecânicos, flexibilidade do eixo, blecautes e efeitos devido ao método de observação da variável de controle v.

O dimensionamento dos componentes do mancal magnético experimental foi baseado nas limitações impostas pelas condições e instalações de um laboratório de pesquisas. O eixo girante foi dimensionado para suportar os esforços solicitados em trabalho e apresentar deformação suficientemente pequena de modo a não interferir na dinâmica do sistema. Dimensionamos o eixo solicitado à flexão devido a uma força externa constante aplicada nele, à força gerada pelo seu desbalançamento e a de seu próprio peso. Verificamos a deformação e definimos a massa do eixo, assim como suas dimensões, procurando escolher peso e comprimento de modo a aumentar a rigidez do eixo sem comprometer as limitações de energia requeridas pelo controle.

O eletroímã foi dimensionado de forma a suportar as forças máximas requeridas pelo rotor. Foi escolhida a geometria circular (Fig. 2.3) ao invés do magneto em “U” pela sua facilidade de construção e rigidez, por ser mais compacta, ter razoável facilidade de fabricação e por garantir precisão de montagem suficiente para manter a geometria projetada com tolerância necessária e evitar perdas de fluxo magnético e forças não previstas. Foi definida uma tensão máxima de 20 V no eletroímã de modo a viabilizar a

instalação de fontes de corrente contínua no laboratório, uma vez que este equipamento é

barato e de fácil aquisição no mercado.

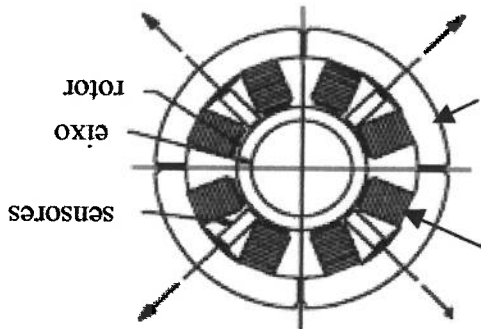


Figura 2.3: Mancal em corte

Foi projetada uma pré-tensão no eletroímã superior para suportar a força do peso do

rotor. As dimensões do eletroímã foram definidas segundo a força necessária para levantar

o rotor a partir de sua posição estacionária e pelo espaço mínimo necessário entre pólos

para o enrolamento das espiras de fio de cobre. A indutância máxima no circuito é definida

pela velocidade de resposta requerida do sistema. Tendo em vista que a massa do rotor, as

dimensões do eletroímã, a corrente elétrica máxima, o número de espiras, o entreferro, as

forças externas e a velocidade de rotação do rotor são independentes, temos que usar

métodos computacionais para melhor definir todas as variáveis em questão, visualizando

seus efeitos graficamente. Este método de dimensionamento foi desenvolvido neste estudo

e tem como base a limitação da tensão máxima requerida pelo controle, a velocidade de

rotação do eixo, a carga de trabalho no eixo e a dimensão do entreferro.

O sistema de controle tem como entradas a posição e a velocidade do rotor em

relação ao eletroímã e a corrente elétrica no magneto, e como saída possui a tensão aplicada

no circuito [8]. A posição do eixo pode ser mensurada fisicamente por sensores de posição



que, se trabalharem em pares posicionados em oposição, podem gerar sinais de entrada mais precisos (SKF). Os valores da intensidade da corrente elétrica também serão coletados por sensores em cada magneto. A velocidade do eixo pode ser mensurada por meio de sensores de velocidade, deduzida a partir da variação da posição do eixo ou estimada através de observadores de estado.

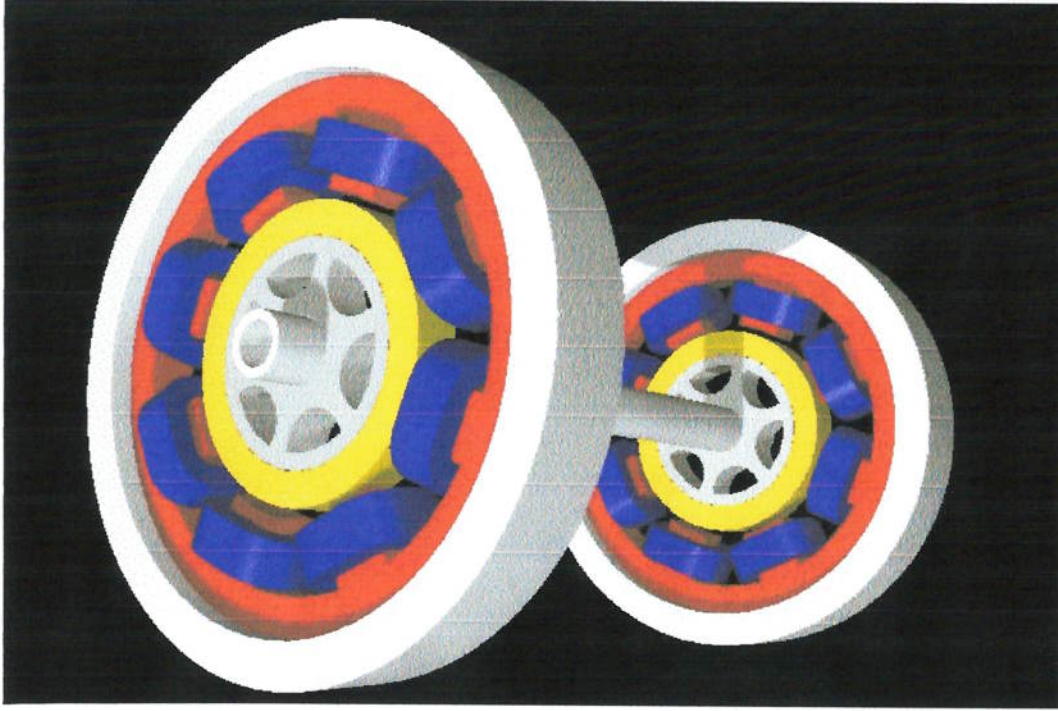


Figura 2.4: Modelo do aspecto físico do Mancal Magnético

Neste estudo usaremos três métodos de controle no mancal magnético:

- Sistema de controle linear PPD ;
- Sistema de controle linear por ganho de realimentação de estado;
- Sistema de controle por algoritmo não-linear, projetado pelo método de Transformação Global do sistema;

O método da Transformação Global consiste numa transformação das variáveis do

sistema não linear de modo a encontrar um sistema linear equivalente, no qual projeta-se um sistema de controle pelos métodos clássicos da teoria linear, neste estudo foi usada a transformação inversa para retornar às variáveis originais e encontrar o algoritmo de controle não linear. Este método permite a obtenção de um sistema de controle que leva em consideração as não linearidades características do mancal magnético e abrange uma área maior de situações que podem ser controladas. Porém é necessário o uso de um sistema digital de controle que integra informações de todas as variáveis observadas e deduzidas [20]. Este tipo de controle pode ter bons desempenhos em sistemas de levitação magnética por causa da natureza não-linear da dinâmica deste tipo de sistema. Deste modo, o controle não-linear poderá prever com maior exatidão o comportamento do sistema e obter melhor desempenho do equipamento.

O controle PID e o controle por realimentação de estado são métodos clássicos de controles lineares aplicados a um sistema e projetados a partir de linearização deste sistema. Foram escolhidos para que se tenha uma referência de comportamento e desempenho durante as simulações do mancal, para comparação com o sistema de controle não-linear. Os ganhos dos sistemas são calculados pelo método da imposição de polos a partir da linearização do sistema por Expansão em Série de Taylor.

Todos os sistemas de controle descritos estabilizam o eixo nas direções radiais, porém, por causa da forma do rotor, o eletroímã causará uma força axial de atração quando ocorrer um deslocamento axial do eixo, puxando-o de volta sem amortecimento. Isto causaria um movimento de vibração axial que pode ser controlado se adicionarmos um sensor na posição axial. Deste modo o movimento axial seria interpretado pelo sistema de

controle como um distanciamento radial, gerando forças de atração em todos os eletroímãs

simultaneamente, atraindo axialmente o rotor e resultando na estabilização do eixo. Este

sistema pode ser estudado futuramente e seria de fácil verificação, pois bastaria acrescentar

uma parcela no sistema de controle radial referente a posição e velocidade axiais. Porém,

seria necessário analisar simulações para verificar a interferência que esta inclusão teria na

resposta radial do eixo.

A dinâmica dos sistemas de controle pode ser modelada baseando-se nos

equipamentos que são utilizados em laboratório para estes fins. As simulações do

comportamento do mancal magnético serão analisadas levando em consideração o controle

utilizado, o desempenho dinâmico, a energia utilizada pelo controle, a extensão da faixa

estável, forças externas, partidas, comportamento em uma faixa de frequências de rotação

do eixo, limitações do controle, equipamento necessário e dificuldades de implementação.

Os resultados serão baseados em análise de sinais gerados por simulação de comportamento

no tempo e análise em frequência.

## **2.2. Dimensionamento do eixo**

Consideramos o eixo como uma barra bi-apoiada sujeita a esforço no centro.

Considera-se que esta é a pior situação de esforço no eixo.

$g =$  gravidade

$m_e =$  massa do eixo

$f_a =$  força teste constante

$F_{re} =$  força gerada pela excentricidade do eixo

onde:

$$F_v = F_{re} + f_a + m_e \cdot g \tag{2.2}$$

corresponde a soma de forças externas atuantes no eixo:

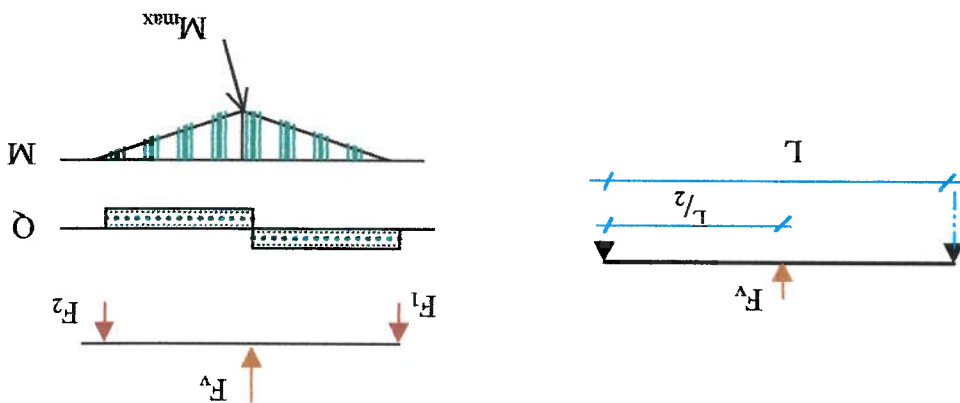
onde  $M_{max}$  é o momento fletor máximo do eixo,  $L$  é a distância entre mancais e  $F_v$

$$M_{max} = \frac{F_v \cdot L}{2} \tag{2.1}$$

$$F_1 = F_2 = \frac{F_v}{2}$$

Reações:

Figura 2.5: Diagrama de esforços que atuam sobre o eixo



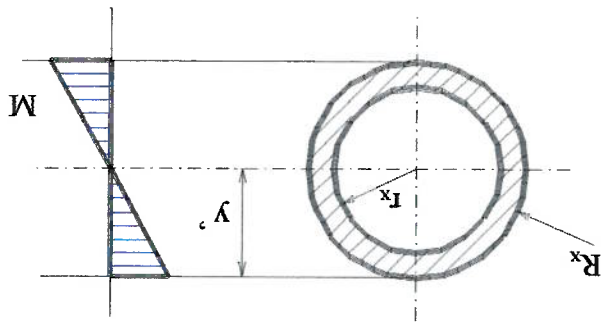


Figura 2.6: Diagrama de tração e compressão na seção do eixo

Considerando a seção do eixo com núcleo oco como o representado, o momento de

inércia do eixo é definido por:

$$J_{LN} = \frac{\pi (R_x^4 - r_x^4)}{4} \quad (2.3)$$

Sendo a tensão admissível:

$$\tau_{adm} = \frac{J_{LN}}{M_{max}} \cdot \gamma' \quad (2.4)$$

que deve ter no máximo:

$$\tau_{adm} = \frac{\tau_{rupt}}{s} \quad (2.5)$$

onde:

$M_{max}$  = movimento fletor máximo

$J_{LN}$  = momento de inércia do eixo

$\gamma'$  = ponto de máxima tração do eixo em relação à sua linha neutra

$s$  = coeficiente de segurança

$\tau_{rupt}$  = tensão de ruptura do material

Tabela 2.1

Parâmetro	Valor	unidade
$f_d$	44	N
$f$	33,3	Hz
$R_{exc}$	$1.10^{-4}$	m
$s$	3	-
$L$	0,5	m
$\tau_{rupt}$	$5.10^8$	$N/m^2$
$\rho_{ferro}$	7800	$Kg/m^3$

Tabela 2.1.

Para esforço máximo de trabalho previsto, adota-se os valores apresentados na

onde:  $\rho_{ferro}$  = densidade do aço SAE1040

$$m_e = \pi (R_x^2 - r_x^2) \cdot L \cdot \rho_{ferro}, \quad (2.8)$$

Massa do eixo:

$f$  = frequência de rotação do eixo

$R_{exc}$  = raio de excentricidade do eixo

$m_e$  = massa do eixo

onde:

$$F^{Re} = m_e \cdot \omega^2 \cdot R_{exc}, \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f \quad (2.7)$$

A força máxima causada por desbalanceamento do eixo é definida por:

$$r_x = \sqrt[4]{R_x^4 + \frac{F_v \cdot s \cdot L}{\pi \cdot \tau_{rupt}} \cdot R_x} \quad (2.6)$$

Como  $y' = R_x$ , então, de (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5):

Tabela 2.2

Parâmetro	Valor	unidade
$R_x$	$10 \cdot 10^{-3}$	m
$r_x$	$8 \cdot 10^3$	m
$m_e$	1	kg
$F_1$	58,2	N

Os valores adotados estão apresentados na Tabela 2.2.

Cada mancal suportará uma força de  $F_1 = 58,2$  N.

$$m_e = 1,0 \text{ Kg}$$

elementos, podemos adotar a massa do eixo:

Se o eixo for desenhado com ressalto de 2 mm para fixação dos rotores e de outros

Corrigindo, chegaremos a  $m_e = 0,44$  Kg

$$R_x = 10 \text{ mm e } r_x = 8 \text{ mm}$$

adotaremos:

Para que a massa do tubo não seja grande e a parede do tubo não seja muito pequena,

$$R_x = 10 \text{ mm , } r_{x \text{ min}} = 9,5 \text{ mm}$$

(2.2) e em (2.6) temos:

Após testar alguns valores de  $R_x$  e  $m_e$  (definido por interação de valores), de (2.7) em

## 2.2.1. Verificação da deformação do eixo

A força  $F_v$  causará uma deformação  $y$  no eixo e uma inclinação  $\phi$  nas bordas do eixo, podendo causar choques com o estator (figura 2.7).

$E$  = coef. de elasticidade do ferro, segundo a lei de Hooke:

$$EI \cdot \phi = \int -M \cdot dx + C_1 \quad (2.9)$$

$$EI \cdot y = \int \phi \cdot dx + C_2 \quad (2.10)$$

onde  $M$  = momento devido a força  $F_v$ . Então, do diagrama na figura 2.5 e (2.9):

$$M = \frac{F_v}{2} \cdot x$$

$$EI \cdot \phi = \frac{-F_v}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 = \frac{-F_v \cdot x^2}{4} + C_1 \quad (2.11)$$

Como os esforços do eixo são simétricos:

$$\phi^{x=L/2} = 0 \quad (2.12)$$

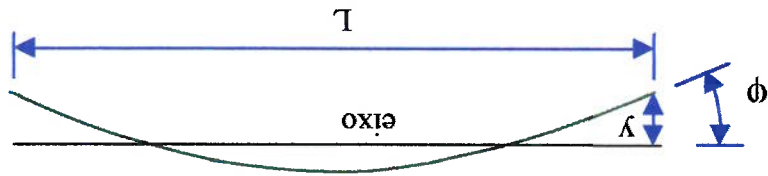


Figura 2.7: Flecha e inclinação do eixo

Então, (2.12) em (2.11):



proporcional ao peso do eixo, mas inversamente proporcional ao peso dos rotores, portanto

Foram testados eixos com  $R_x = 5 \cdot 10^{-3}$  a  $3 \cdot 10^{-2}$  m. O raio externo do eixo  $R_x$  é

**Comentário:**

eixo.

poderia se chocar com o mancal, porém serviria para estudar o comportamento flexível do

Obs.: se usássemos barra cheia  $R_x = 5 \cdot 10^{-3}$  m (mesmo  $J_{LN}$ ),  $x_c = 1,5 \cdot 10^{-4}$  m (30%):

inclinação do eixo não interfere na dinâmica de forças do mancal.

Então podemos considerar verificado que o eixo não encosta no apoio, além disso a

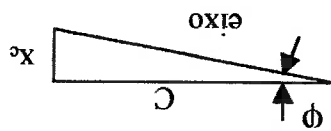
$$x_c = C \cdot \text{tg}(0,08^\circ) = 10^{-5} \text{ m (menos de 3\% do entreferro)}$$

Supondo que o mancal tenha aproximadamente  $C = 0,01$  m de largura, de (2.13):

$$x_c = C \cdot \text{tg}(\phi) \quad (2.14)$$

É necessário verificar se a deformação influencia o mancal. Conforme a figura 2.8:

Figura 2.8: inclinação do eixo em relação ao mancal



$$\phi = 0,08^\circ$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kgf/cm}^2 \text{ e } J_{LN} = \frac{\pi(R_x^4 - r_x^4)}{4}, \text{ teremos:}$$

(2.13)

Adotando:

$$\phi = \frac{F_v \cdot L^2}{16 \cdot EJ}$$

$$-\frac{F_v \cdot L}{4 \cdot 4} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{F_v \cdot L^2}{16}$$

externa  $F_v$  pode ter equivalente nas extremidades do eixo, conforme a figura 2.10.

eletroímã deve desenvolver uma força igual ou maior que a requerida no eixo. A força

A independência dos eixos nos permite considerá-los separadamente, assim o

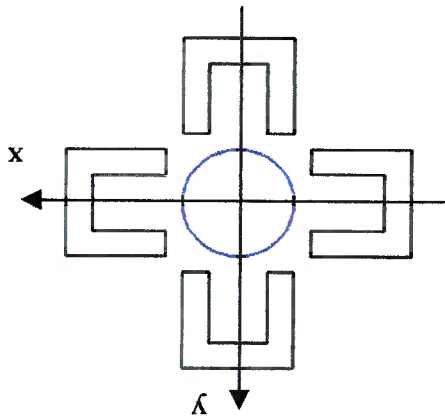
pelos polos verticais (direção y).

controlar os movimentos do eixo neste sentido, e os movimentos em y serão suportados

distribuídas em 2 eixos (direções x e y) independentes. Os pares ao longo do eixo x

No sentido radial, o eixo será suportado por quatro pares de polos magnéticos

Figura 2.9: Distribuição básica dos eletroímãs em torno do eixo



### 2.3. Dimensionamento do Eletroímã

levantá-lo e melhorar a velocidade de resposta do sistema.

A diminuição do peso do eixo é importante, pois economiza energia necessária para

utilizado, com o objetivo de otimizar o peso do eixo e rotor. Determinamos  $R_x = 0,010$  m.

temos que recalcular o raio do eixo depois de definir a espessura do rotor do mancal

$R_{exc}$  = raio da excentricidade do rotor e de metade do eixo

$f$  = frequência de rotação do eixo

$m$  = massa dos 2 rotores + eixo

$F_d$  = força de trabalho

$F_R$  = força de aceleração centrífuga do eixo e rotores

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

$$F_R = \frac{m}{2} \cdot \omega^2 \cdot R_{exc}$$

onde:

$$F_d = \frac{m \cdot g}{2} + F_R + f_d \quad (2.16)$$

Para o pior caso de esforços:

$$F_{mag} \geq F_d \quad (2.15)$$

deve ser:

Definindo  $F_d$  como a força na extremidade do eixo, a reação de apoio do mancal

Figura 2.10: Forças dominantes nas extremidades do eixo



oposto é nula. Fazendo (2.17) em (2.15):

alternadamente, isto é, quando a corrente de um eletroímã é positiva, a corrente no ímã (figura 2.12) e cada eletroímã de um par no mesmo eixo agindo independentemente e Para uma primeira aproximação, consideremos o eletroímã de face plana  $A_g = a \cdot c$

$X$  = distância entre o eixo levantado e o magneto

$I$  = corrente elétrica no eletroímã

$N$  = número de espiras por pólos

$A_g$  = área de seção perpendicular ao fluxo magnético no entreferro de 1 pólo

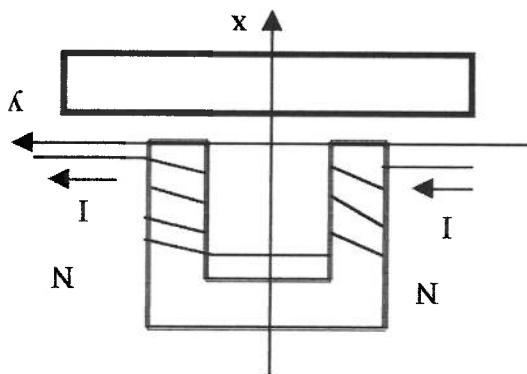
$\mu_0$  = permeabilidade magnética do ar

$$K = \mu_0 \cdot A_g \cdot N^2$$

onde:

$$F_{mag} = \frac{K \cdot I^2}{X^2} \quad (2.17)$$

Figura 2.11: Esquema do atuador eletromagnético



dimensionamento, segundo a equação:

magnética desenvolvida num atuador como o da figura 2.11, para efeito de

Conforme Matti Antila [1], Lichuan Li [15] e Bleuler [4], podemos definir a força

espaço ocupado pelo eletroímã, sem variar a seção do núcleo  $S_f$ .

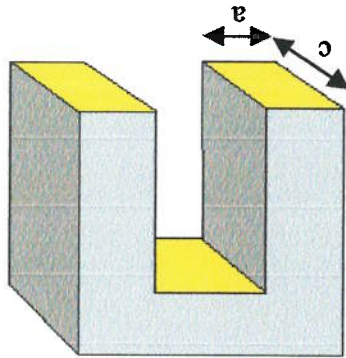
As variáveis  $a$  e  $c$  poderão ser determinadas de modo a minimizar o peso do rotor e o

$$(2.19) \quad S_{\min} = \frac{\mu_o \cdot N^2 \cdot I_{\max}^2}{(h_g + x_m)^2} \cdot F_d = \frac{\mu_o}{F_d} \cdot N \cdot I_{\max}^2$$

determinar por (2.18) a largura do pólo:

posição máxima do eixo correspondente a 60 % do entreferro:  $x_m = 0,6 \cdot h_g$ , pode-se pre-  
 Sendo a seção do pólo  $S_f = a \cdot c$ , e adotando, para efeito de dimensionamento, a

Figura 2.12: Largura e comprimento do pólo



$x_m$  = posição máxima de trabalho

$h_g$  = entreferro (air gap)

$x = h_g + x_m$

$I_{\max}$  = corrente máxima no eletroímã

onde:

$$(2.18) \quad F_{\text{mag}} > F_d \Rightarrow a \cdot c > \frac{x^2 \cdot F_d}{\mu_o \cdot N^2 \cdot I_{\max}^2}$$

### 2.3.1. Dimensionamento do circuito do eletroímã

Podem-se supor, para um pré-dimensionamento, que o circuito elétrico do sistema seja

representado por:

$$V = L \cdot \frac{di}{dt} + Ri$$

onde:

L = indutância

R = resistência elétrica

i = corrente elétrica

t = tempo

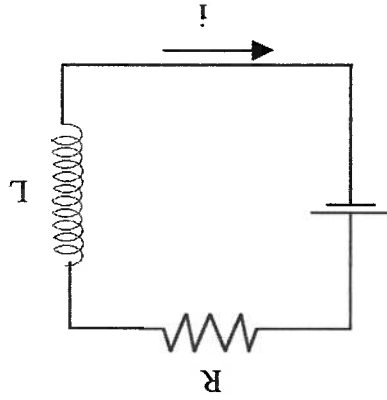


Figura 2.13: circuito do eletroímã

Para um sistema com estas características, a corrente se comporta da seguinte

maneira:

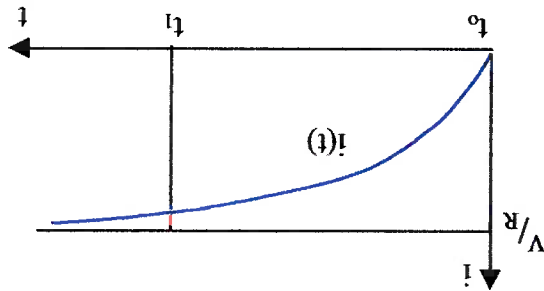


Figura 2.14: gráfico da dinâmica da corrente elétrica no circuito do eletroímã

$$i(t) = \frac{R}{L} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{L}{R}t} \right) \quad (2.21)$$

Para uma boa resposta da corrente para uma tensão de controle  $V$ , determinamos que

em  $t_1$  a corrente deve ter um erro de 5% em relação a corrente desejada pelo controle, então

de (2.20) e da figura 2.14:

$$\frac{V}{R} - i(t_1) = 0,05 \cdot \frac{V}{R} \Rightarrow i(t_1) = 0,95 \cdot \frac{V}{R}$$

Portanto, de (2.21):

$$0,95 \cdot \frac{R}{L} = \frac{R}{L} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{L}{R}t_1} \right) \quad (2.22)$$

Com o objetivo de obter a resposta da corrente rapidamente, de modo que esta possa

agir na resposta do eixo em tempo, considera-se  $t_1 = 0,5 \cdot t_s$ , onde  $t_s$  é o tempo de

acomodação da posição do eixo do mancal, e  $t_s = 0,4 / f$ , onde  $f$  é a frequência de rotação do

eixo. Substituindo  $t_1$  em (2.22) teremos que a relação entre a resistência e a indutância fica

$$\frac{L}{R} = -5 \cdot f \cdot \ln(0,05) \quad (2.23)$$

definida por:

De modo a evitar que a tensão de controle alcance frequentemente a tensão máxima permitida, foi escolhido:

$$V_{\text{trabalho}} = 0,5 \cdot V_{\text{max}} \quad (2.24)$$

pois deste modo a tensão requerida pelo controle irá oscilar em torno da metade da tensão máxima permitida. Esta oscilação poderá ocorrer em função da indutância do sistema e de

vibrações no eixo. Portanto, se na ausência de perturbações:

$$V_{\text{rab}} = R \cdot I_{\text{max}} \quad (2.25)$$

então (2.25) em (2.23):

$$L = - \frac{V_{\text{rab}} / I_{\text{max}}}{5 \cdot f \cdot \ln(0,05)} \quad (2.26)$$

Considerando que  $K_0$  é a constante do eletroímã e  $h_g$  é a distância entre o mancal e o

rotor do eixo (entreferro), temos definido que:

$$L = \frac{h}{K} \quad , \text{ inserindo em (2.26) e levando em conta (2.24):}$$

$$K = - \frac{0,5 \cdot V_{\text{max}}}{5 \cdot f \cdot I_{\text{max}} \cdot \ln(0,05)} \cdot h_g \quad (2.27)$$

Segundo a maioria dos artigos escritos sobre o assunto, a força eletromagnética pode

ser simplificada por:



$$F_{mag} = K \cdot \frac{X^2}{I^2}$$

onde:

K = constante do eletroímã

I = corrente elétrica no eletroímã

X = distância do entreferro

Para uma situação de força máxima requerida no mancal:

$$I = I_{max}$$

$$X = h_g + x_m = 1,6 \cdot h_g$$

$$F_{mag} = 1,25 \cdot F_d$$

Então, de (2.27) em (2.28):

$$F_{mag} = - \frac{0,5 \cdot V_{max} \cdot \ln(0,05)}{I^2} \cdot h_g \cdot \left( \frac{1,6 h_g}{I^2} \right)^2 = 1,25 F_d$$

$$I_{max} = 191,7 \cdot \frac{V_{max}}{f \cdot h_g \cdot F_d}$$

Se adotarmos:

$$V_{max} = 20 \text{ V}$$

$$f = 2000 \text{ rpm}$$

$$h_g = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$m = m_e + 2 \cdot m_r = 3 \text{ Kg}$ , teremos como valores iniciais:

$$F_d = 48 \text{ N}$$

$$L = 1,65 \text{ mF}$$

$$K = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{A}^2$$

$$I_{max} = 9,2 \text{ A}$$

(2.28)

(2.29)

O valor da corrente elétrica necessária é alta demais e não é viável no laboratório de

sistemas de controle proposto neste estudo, pois para construir um mancal com 8 magnetos utilizando 10 A cada um necessitaria de mais fontes de corrente contínua 20 V do que é disponível nos laboratórios. Vamos adotar então a corrente elétrica total máxima de 20 A

no mancal, assim cada magneto terá corrente:

$$I_{\max} = 2 \text{ A}$$

Esta escolha devido a limitações de implementação implica em certas consequências

pois ela não está de acordo com a equação (2.29). Pode se manter a tensão máxima em 20 V, porém a resistência do sistema deve ser ajustada para manter a corrente abaixo de 2 A, o que será feito no capítulo 2.3.6. A principal consequência é a perda de desempenho do sistema, pois ele não terá a mesma potência, que poderá resultar em queda de capacidade (força) ou queda de velocidade de resposta, dependendo de como forem escolhidos os parâmetros do dimensionamento e do sistema de controle. Se o sistema não tiver resposta rápida o suficiente o desempenho na situação de vibração pode ser prejudicado, podendo até perder a condição de estabilidade. Na conclusão esta consideração será comentada.

### Comentário:

O dimensionamento do eletroímã busca a resposta mais rápida do conjunto mecânico integrado ao elétrico, para que o sistema possa diminuir a vibração no eixo em alta rotação. A primeira vista, o aumento da dimensão do eletroímã e, consequentemente, o aumento da força magnética poderia fornecer uma resposta mais rápida ao eixo. Porém existem 2 fatores principais que influenciam no dimensionamento do eletroímã e a velocidade de resposta do sistema: a força eletromagnética e a indutância. Quanto mais força o eletroímã pode desenvolver, mais rápida será a resposta do eixo, porém quanto maior a indutância do

eletroímã, mais lenta será a resposta da corrente e, conseqüentemente mais lenta a resposta

do eixo, para uma mesma tensão de controle e mesma massa do eixo. Ao aumentar o

número de espiras do eletroímã ou aumentar a seção de seu núcleo, aumenta-se sua

constante K e pode-se aumentar a sua capacidade, mas também aumenta-se sua indutância,

retardando a resposta da corrente e podendo obter como resultado em menor velocidade de

resposta do eixo. Esta consideração é feita lembrando que a tensão de controle é limitada.

Então, desconsiderando a dinâmica do sistema de controle e de outros parâmetros, a relação

entre força e indutância será:

$$(2.30) \quad \left| \begin{array}{l} F_{mag} = K \cdot \frac{h_g}{I^2} \\ L = \frac{h_g}{K} \end{array} \right. \quad \leftarrow \quad \frac{F_{mag}}{I^2} = \frac{L}{h_g}$$

Esta relação deve ser levada em consideração durante o dimensionamento do

magneto, pois a atuação do sistema de controle é limitada pela tensão máxima  $V_{max}$ .

Portanto o controle não é capaz de obter uma resposta instantânea da corrente no magneto e

a resposta da corrente será tanto mais rápida quanto menor for a indutância L. E se a

corrente responder lentamente a força magnética também será prejudicada, assim como a

resposta do eixo.

Portanto a alteração do valor da constante K do magneto, não considerando a

dinâmica de controle, não resulta necessariamente em respostas mais rápidas. De acordo

com a equação (2.30) o aumento da corrente ou a diminuição do entreferro aumentam a

relação entre a força e a indutância, portanto influenciam diretamente na velocidade

máxima de resposta do sistema, considerando todos os outros parâmetros constantes.

### 2.3.2. Definição da Geometria

Para suportar o eixo radialmente deve-se usar um magneto de simples instalação, onde existem duas alternativas típicas. A primeira usa perfis em U usinados na ponta para acompanhar o perfil do eixo.

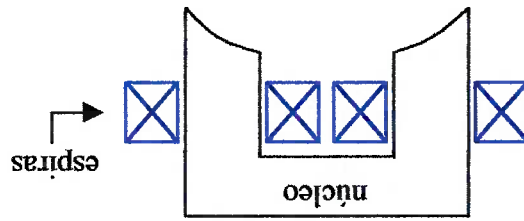


Figura 2.15: magneto de perfil em "U"

A facilidade para encontrar no mercado perfis em "U" é uma vantagem desta alternativa. Porém, a dificuldade de manter a precisão da geometria durante a montagem dos perfis alinhados em círculo e a dificuldade de usinar precisamente o arco nas extremidades dos perfis tornam esta opção útil apenas em casos de rotores grandes. Outra alternativa é usar o eletroímã circular, isto é, os polos são dispostos em um perfil circular único.

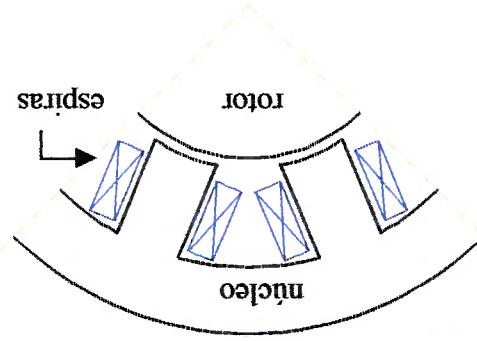


Figura 2.16: magneto de perfil circular

A vantagem é a facilidade de montagem, além de distribuir melhor o espaço das espiras. A única dificuldade é a usinagem, que pode ser por estampagem, eletro-erosão a fio ou a laser. Este foi o perfil escolhido por ser mais compacto, preciso e de fácil utilização para eletroímãs da dimensão necessária para fácil manuseio em laboratório.

Deste modo a geometria do mancal fica definida segundo a figura 2.17.

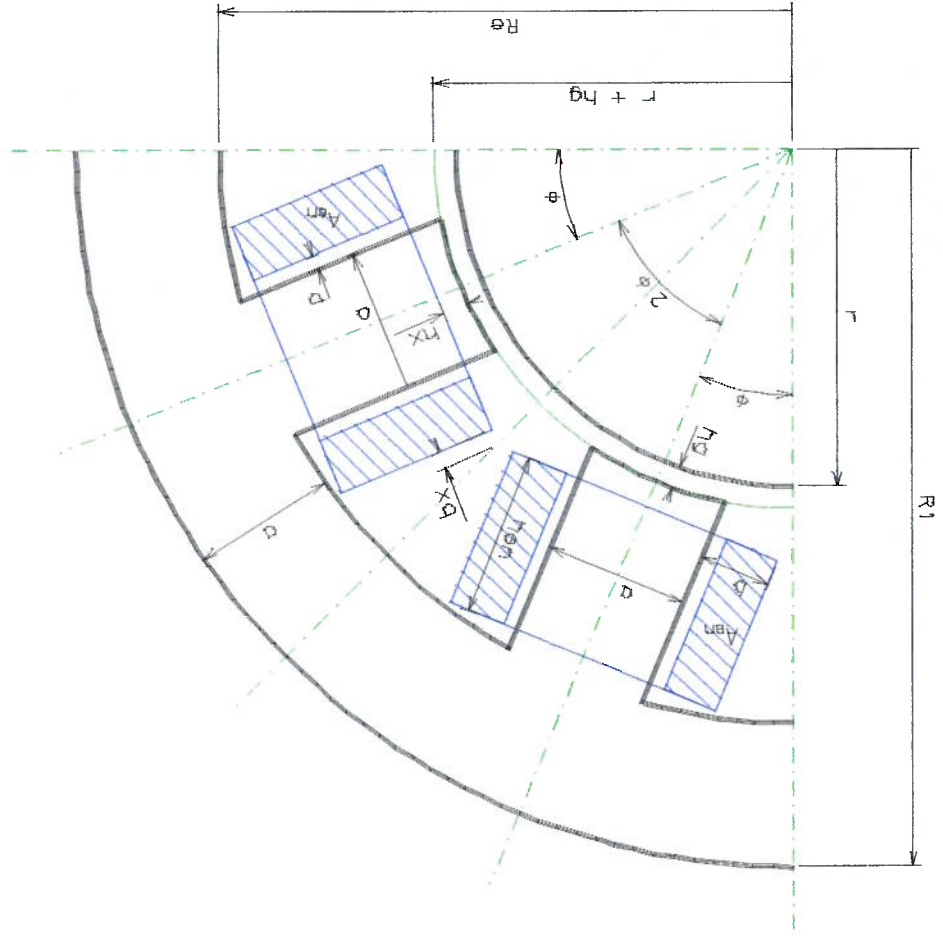


Figura 2.17: Geometria do perfil do mancal magnético

Baseado na geometria utilizada no mancal, fica definido:

### 2.3.3. Área de Enrolamento das Espiras

O fluxo magnético no núcleo do eletroímã é gerado pela passagem de corrente

elétrica no fios dispostos em espiras, enroladas nos pólos do perfil, como na figura 2.17 e

2.19. A área mínima  $A_{en}$  ocupada pelo enrolamento é usada como base para estimar o raio

mínimo do rotor do eixo.

A densidade de enrolamento das espiras do fio AWG, segundo o fabricante, é

definida por  $n_s$ , onde :

$$n_s = \frac{A_{en}}{N} \quad (2.32)$$

onde:

$N$  = número de espiras

$A_{en}$  = seção de enrolamento normal ao fio

Então definiremos: a área do enrolamento, com 10% de folga a partir de (2.32):

$$A_{en} = \frac{N}{n_s} \cdot 1,1 \quad (2.33)$$

Geometricamente, definimos observando a figura 2.17:

$$A_{en} = h_{en} \cdot b$$

$$b = R_r \cdot \text{tg} \phi - \frac{2}{a} - p \quad (2.34)$$

então, de (2.31) e (2.34) em (2.33):

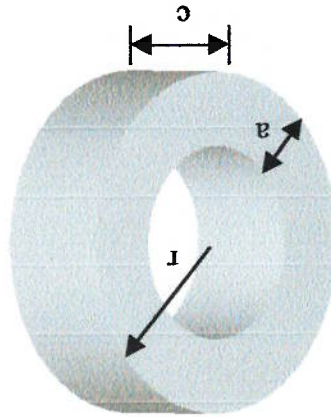
$\rho_f$  = densidade do material do rotor

onde:

$$\rho_{ferro} = \frac{V}{m} \Rightarrow m_r = \rho_f \cdot V_r \tag{2.36}$$

$$V_r = \pi [r^2 - (r-a)^2] \cdot c$$

Figura 2.18: Perspectiva do rotor



A massa do rotor pode ser calculada a partir da densidade do ferro:

### 2.3.4. Massa do Rotor

das espiras no estator.

Desta forma definimos o raio do rotor segundo a área necessária para o enrolamento

onde  $r$  é o raio do rotor e  $p$  é o espaço entre os fios e o núcleo.

$$r = \frac{1.1 \cdot N \cdot \left( \frac{u_s \cdot h_{en}}{2} + d \right)}{1.8 \phi} \tag{2.35}$$

$$1.1 \cdot N \cdot u_s \cdot h_{en} \cdot \left[ (h_s + h_x + r) \cdot 1.8 \phi - \frac{2}{a} \cdot d \right]$$

$V_r$  = volume do rotor

Como o raio interno ( $r - a$ ) do rotor será maior que o raio do eixo, teremos que usar

uma bucha entre o eixo e o rotor. Então o volume da bucha é:

$$V_b = \pi[(r - a)^2 - R_x^2] \cdot c \quad (2.37)$$

A massa do rotor:

$$m_r = \rho_{rotor} \cdot V_r + \rho_{bucha} \cdot V_b \quad (2.38)$$

O material usado será:

- Rotor – aço silício -  $\rho_r = 7650 \text{ Kg/m}^3$
- Bucha – aço 1020 -  $\rho_b = 7800 \text{ Kg/m}^3$

A massa do eixo + rotor + bucha será:

$$m = m_e + 2 \cdot m_r \quad (2.39)$$

que deverá ser igual a massa do eixo + rotor considerada inicialmente, no cálculo da força magnética requerida e área da seção do núcleo. Esta correção não pode ser feita diretamente, pois a dimensão do eletroímã, a força magnética e o peso do eixo e rotor são interdependentes. Porém estes valores podem ser determinados usando interação por computador, conforme será apresentado posteriormente.



### 2.3.5. Resistência do fio

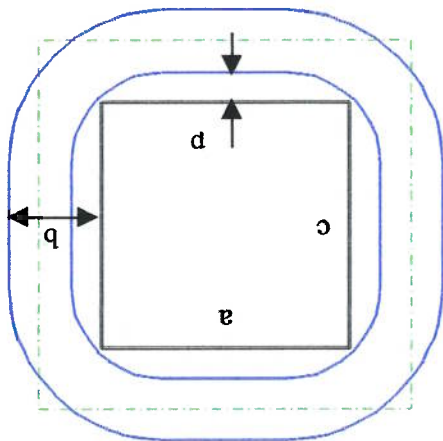


Figura 2.19: Seção do núcleo com enrolamento de fio em espiras

O fabricante define a resistência do fio proporcional ao comprimento deste.

Para determinar a resistência do circuito do eletroímã, devemos calcular o comprimento total do fio nas espiras. Conforme a figura 2.19, o perímetro médio de

enrolamento será definido por [26]:

$$P = \left[ a + \left( p + \frac{b-p}{2} \right) \cdot 2 + c + 2 \cdot \left( p + \frac{b-p}{2} \right) \cdot 2 \right] \quad (2.40)$$

Pode ser usada uma resistência adicional em série no circuito para aumentar a

resistência total do sistema e adequá-la ao dimensionamento elétrico. Então a resistência

total:

$$R = 2 \cdot N \cdot P \cdot R_K + R_r$$

(2.41)

onde:

$R_K$  = resistência do fio das espiras

$R_r$  = resistência adicional

### 2.3.6. Resultados do dimensionamento

As variáveis a seguir foram definidas baseando-se em tentativas e interações usando as relações de dimensionamento das equações (2.16), (2.19), (2.35) e (2.39). Devido ao inter-relacionamento entre os diversos parâmetros do sistema, como massa do rotor, número de espiras, área do núcleo, corrente elétrica máxima, entreferro, diâmetro do eletroímã, entre outros, foi montado um programa em Matlab definindo as relações entre os parâmetros e determinando-os usando interação de valores (vide apêndice 7.1), com erros inferiores a 3% entre a massa do rotor e eixo pré-definida arbitrariamente e a mesma massa calculada no dimensionamento do eletroímã. Além disso os valores podem ser considerados soluções otimizadas, calculadas a partir das características de energia disponível, geometria do eletroímã, velocidade e condições de trabalho do eixo.

Os parâmetros escolhidos para a geometria geral do magneto visam a rigidez mecânica, a viabilidade de construção em laboratório, folgas para possibilidade de alterações e melhores desempenhos são apresentados a seguir:

Fio do enrolamento para corrente máxima 2 A:

Fio de cobre AWG 19 (2 A) :

Densidade de enrolamento:  $n_s = 84$  espiras/cm<sup>2</sup>

Resistência:  $R_k = 4,15 \text{ } \Omega/\text{Km}$

$$h_{en} = 1,2 \cdot a$$

$$c_g = \frac{0,95}{c} \rightarrow \text{empilhamento de chapas de ferro-silício: fator 0,95.}$$

$$h_x = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$b_x = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$R_f = 3,7 \Omega$$

$$\phi = \frac{\pi}{8} = 22,5^\circ$$

$$c = 0,8 \cdot S_f$$

$$a = 1,4 \cdot S_f$$

$$p = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

A partir dos valores iniciais dos parâmetros do eletroímã encontrados no Capítulo 2.3.1, podemos definir uma solução ótima de dimensionamento, conforme o Apêndice 7.1. estes valores são apresentados na Tabela 2.3.

Tabela 2.3

Parâmetro	Valor	unidade
$V_{max}$	20	V
$I_{max}$	2	A
$h_g$	$5.10^{-4}$	m
$F_d$	64,6	N
$m_r$	0,95	Kg
$m$	2,9	Kg
$N$	182	espiras
$R_e$	0,1277	m
$r$	$56,2.10^{-3}$	m
$a$	$22.10^{-3}$	m
$b$	$13,7.10^{-3}$	m
$c_g$	$13,2.10^{-3}$	m
$S_f$	$2,48.10^{-4}$	$m^2$
$R_f$	0,1047	m
$R$	5	$\Omega$
$F_{max}$	77,8	N

## 2.4. Refinamento dos Cálculos

### 2.4.1. Cálculo da seção do fluxo magnético no entreferro

O fluxo magnético no entreferro se comporta conforme a figura 2.20.

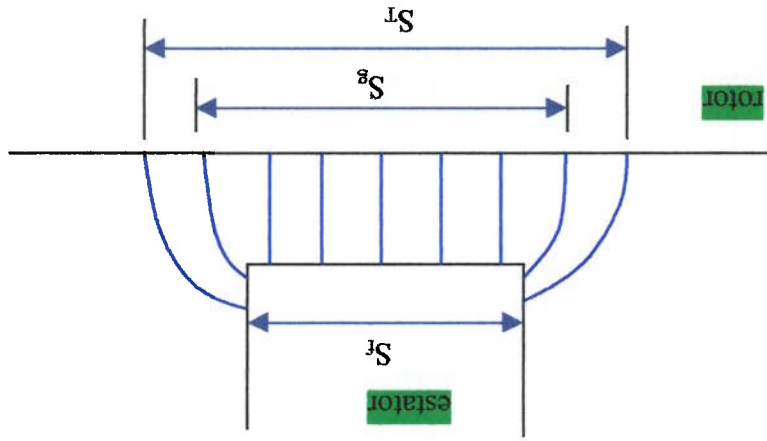


Figura 2.20: Comportamento do fluxo magnético no entreferro

Segundo [8], a área nominal da seção do fluxo magnético  $S_g$  no gap pode ser

definido por:

$$S_g = (a + 2 \cdot h_g) \cdot (c + h_g)$$

(2.42)

$$S_f = a \cdot c$$

que corresponde à área da seção perpendicular ao fluxo magnético, responsável pela

força magnética e pela indutância do sistema ( $A_g$ )

## 2.4.2. Cálculo da indutância do circuito

A força magnética é consequência da lei da mínima energia aplicada a corrente elétrica do sistema, isto é, quando o entreferro é mínimo a indutância é máxima e a corrente elétrica é mínima, utilizando mínima energia [7] e [25].

A força magnetomotriz gerada pela corrente  $I$  e  $N$  espiras em um pólo é definida por:

$$F_{mm} = NI \quad (2.43)$$

Esta força define o fluxo magnético no pólo ( $gap$ ), que pode ser dividida em:

$$F_{mm} = F_g + F_f \quad (2.44)$$

onde

$F_g$  = força magnetomotriz no entreferro ( $gap$ )

$F_f$  = força magnetomotriz no núcleo.

Considera-se:

$$F_g = H_g \cdot l_g \quad (2.45)$$

$$\text{onde } H_g = \frac{B}{\mu_g} \quad (2.46)$$

então, de (2.46) em (2.45):

$$F_g = \frac{B}{\mu_g} \cdot l_g \quad (2.47)$$

onde:

$H_g$  = intensidade do campo magnético no  $gap$

$B_g$  = campo magnético no  $gap$

$l_g$  = distância entre rotor e núcleo

$\mu_0$  = permeabilidade do ar =  $4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$

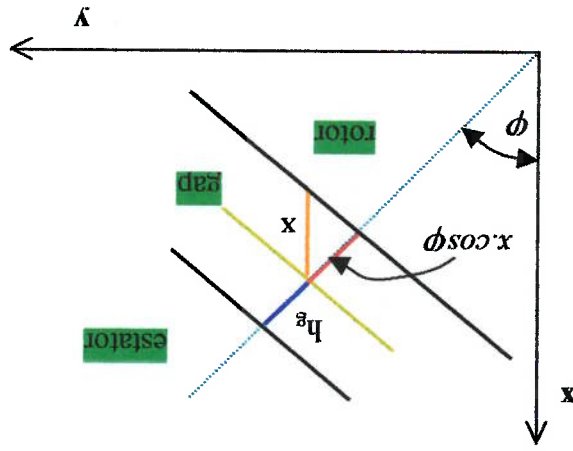


Figura 2.21: Geometria do entreferro

Segundo a figura 2.21:

$$l_g = h_g + x \cdot \cos\phi \quad (2.48)$$

Inicialmente consideramos que não há saturação magnética no núcleo, então

$$F_f = H_f \cdot l_f \quad (2.49)$$

$$H_f = \frac{B_f}{\mu_r \cdot \mu_0} \quad (2.50)$$

onde:

$B_f$  = densidade do campo magnético no núcleo

$\mu_r$  = permeabilidade do núcleo em relação ao ar  $\cong 5000$

$H_f$  = intensidade do campo magnético no núcleo

$l_f$  = distância percorrida pelo fluxo no núcleo.

O caminho do fluxo magnético fica sendo, conforme a figura 2.22:

$$l_f = l_1 + l_2 + l_3 \quad (2.51)$$

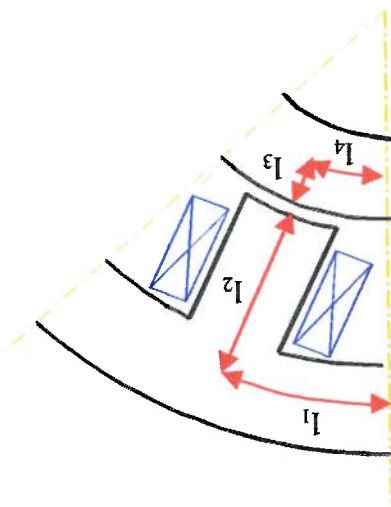


Figura 2.22: circuito do fluxo magnético

Fazendo:

$$B = \frac{\phi}{S} \quad (2.52)$$

onde:

$\phi$  = fluxo magnético

S = seção transversal do fluxo

e inserindo (2.50) em (2.49), (2.47) e (2.52) em (2.44), teremos:

$$F_{mm} = \frac{S_z \cdot \mu_0}{\phi \cdot l_f} + \frac{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot S_f}{\phi \cdot l_f}, \text{ ou} \quad (2.53)$$

$$F_{mm} = \phi \cdot \left( l_z + \frac{l_f \cdot S_z \cdot \mu_0}{S_f \cdot \mu_r \cdot \mu_0} \right) = \phi \cdot (l_z + \delta) \cdot S_z \cdot \mu_0 \quad (2.54)$$

onde:

$$\delta = \frac{l_f \cdot S_z}{\mu_r \cdot S_f}$$

$S_z = A_z =$  seção transversal do fluxo no gap



$S_f$  = seção transversal do fluxo no núcleo,

portanto:

$$\delta = \frac{\mu_r \cdot S_f}{(l_1 + l_2 + l_3) \cdot A_g} \quad (2.55)$$

De (2.48) em (2.54), temos:

$$F_{mm} = \frac{\mu_0 \cdot A_g}{\phi \cdot (h_g + x \cdot \cos \varphi + \delta)} = \frac{\mu_0 \cdot A_g}{\phi \cdot \left( \frac{h_g}{\cos \varphi} + x + \delta / \cos \varphi \right) \cdot \cos \varphi} \quad (2.56)$$

Fazendo:

$$h = \frac{h_g + \delta}{\cos \varphi} \quad (2.57)$$

teremos, de (2.56) em (2.43):

$$F_{mm} = \frac{\mu_0 \cdot A_g}{\phi \cdot (h+x) \cdot \cos \varphi} = N \cdot I$$

Logo:

$$\phi = \frac{\mu_0 \cdot A_g \cdot N \cdot I}{\cos \varphi \cdot (h+x)} \quad (2.58)$$

onde:

$\delta, h$  = constantes do ímã

$\varphi$  = ângulo do pólo em relação ao eixo x

A indutância do sistema é definida por :

$$L = \frac{\lambda}{I} \quad (2.59)$$

Para eletroímã de 2 bobinas com  $N$  espiras cada, teremos:

$$\lambda = 2 \cdot N \cdot \phi$$

então, se fizermos (2.63) em (2.64), considerando (2.65):

$$K_o = \frac{\cos \phi}{2 \cdot \mu_o \cdot K_f \cdot A_g \cdot N^2} \quad (2.65)$$

Se definirmos a constante do eletroímã:

$$L = \frac{2 \cdot \mu_o \cdot K_f \cdot A_g \cdot N^2 \cdot I}{2 \cdot N} \cdot \phi_p + \frac{I}{2 \cdot N} \cdot \phi_p \quad (2.64)$$

Então a indutância será definida por:

$$\text{onde } K_p = 0,05 \sim 0,10 \text{ [1]}$$

$$\phi_p = \frac{\cos \phi \cdot h}{K_p \cdot \mu_o \cdot A_g \cdot N \cdot I} \quad (2.63)$$

$$\phi_p = K_p \cdot \phi_{x=0}$$

$$\text{onde } K_f = 1,05 \sim 1,10 \text{ [1]}$$

$$\phi_f = (K_f - 1) \cdot \phi \quad (2.62)$$

O fluxo perdido será definido como uma porcentagem do fluxo útil  $\phi$

entreferro e perdas devido a correntes parasitas no núcleo)

$\phi_p$  = Fluxo magnético perdido que não depende de x (fluxo perdido que não passa pelo

entreferro de outros pólos)

$\phi_f$  = perdas de fluxo magnético que depende de x (fluxo perdido que passa pelo

$\phi$  = fluxo magnético útil)

$$\phi_T = \phi + \phi_f + \phi_p \quad (2.61)$$

onde:

$$L = \frac{I}{2 \cdot N \cdot \phi_T} \quad (2.60)$$

então, em (2.59):

Tabela 2.4

Parâmetro	Valor	unidade
$K_p$	0,1	-
$K_f$	1,05	-
$A_g$	$3,13 \cdot 10^{-4}$	$m^2$
$h_f$	0,133	m
$\delta$	$3 \cdot 10^{-5}$	m
$h$	$5,74 \cdot 10^{-4}$	m
$L$	$5,17 \cdot 10^{-2}$	H
$L_p$	$4,9 \cdot 10^{-3}$	H
$K_o$	$2,97 \cdot 10^{-5}$	$N \cdot m^2 / A^2$
$\phi_{max}$	$2,71 \cdot 10^{-4}$	T.m
$B_{fmax}$	0,98	T

Apurando os calculos a partir dos valores iniciais dos parâmetros do eletroímã encontrados no Capítulo 2.3.1, são encontrados os parâmetros apresentados na Tabela 2.3.

### 2.4.3. Resultados da refinamento do cálculo

$$L_p = K_p \cdot \frac{K_o}{K_f} \cdot K_f \cdot h, \text{ então:} \tag{2.66}$$

Fazendo:

$$L = \frac{K_o}{K_f} \cdot (x+h) + K_p \cdot \frac{K_f}{K_o} \cdot h \tag{2.67}$$

### 3. Modelagem do Sistema

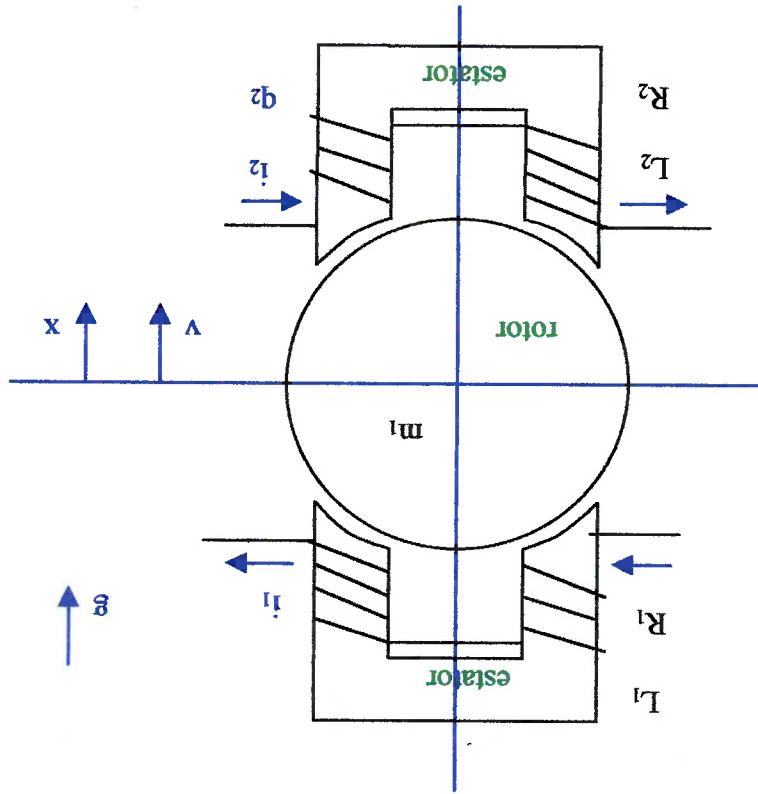


Figura 3.1: Seção transversal do Sistema I

Consideramos que cada mancal pode ser dividido em dois sistemas independentes conforme a direção dos eixos radiais. Deste modo os magnetos superior e inferior suportam o eixo verticalmente enquanto os magnetos direito e esquerdo suportam o eixo horizontalmente. Consideremos inicialmente a dinâmica de um dos mancais que suportam o eixo verticalmente pela extremidade, e consideremos que cada metade do eixo é equivalente a um corpo de massa igual a  $\frac{1}{2} m$ , sustentado por um mancal numa direção, como na figura 3.1.

### 3.1. Modelo dinâmico

Definimos  $T$  como energia cinética,  $U$  como potencial e  $D$  energia dissipada, podemos aplicar as equações de Lagrange para modelar o sistema, então:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} m_1 \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L_1 \cdot \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \dot{q}_2^2 \\
 U &= -m_1 \cdot g \cdot x \\
 D &= \frac{1}{2} R_1 \cdot \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} R_2 \cdot \dot{q}_2^2
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

onde :

$x$  = posição do rotor

$\left( \frac{dx}{dt} \right)$  = velocidade do rotor

$q_j$  = carga elétrica no magneto  $j$  ( $j = 1, 2$ )

$q_j$  = corrente elétrica  $\left( \frac{dq}{dt} \right) = i$

$L_j$  = indutância do circuito

$R_j$  = resistência elétrica

$m_1$  = massa girante em um mancal =  $\frac{m}{2}$

OBS.: considera-se inicialmente que a inércia do eixo e o rotor como uma barra com

massas concentradas nas extremidades. Deste modo podemos considerar inicialmente que

cada mancal suporta metade do eixo.

Escolhemos  $x_1$  (posição do eixo),  $q_1$  e  $q_2$  (cargas elétricas nas espiras) como as

coordenadas generalizadas para as equações de Lagrange do sistema:

representadas em espaço de estado:

As equações dinâmicas do eixo na direção vertical em cada mancal podem ser

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{K_o}{K_o} + L_p \frac{d}{dt} + K_o \cdot v \cdot \frac{(h-x)}{(I_2+l_2)^2} + R_2 \cdot (I_2+l_2) \right] = U_2 + n_2 \\ & \left[ \frac{K_o}{K_o} + L_p \frac{d}{dt} - K_o \cdot v \cdot \frac{(h+x)}{(I_1+l_1)^2} + R_1 \cdot (I_1+l_1) \right] = U_1 + n_1 \\ & m_1 \ddot{v} + \frac{1}{2} K_o \cdot \frac{(h+x)^2}{(I_1+l_1)^2} - \frac{1}{2} K_o \cdot \frac{(h-x)^2}{(I_2+l_2)^2} - m_1 g = F^{exc} + f_a \end{aligned} \right.$$

Aplicando (3.1) em (3.2), teremos o sistema:

$F^{exc}$  é a força externa devido ao desbalançamento do eixo (ver apêndice 7.4)

$h, K_o$  e  $L_o$  são constantes do eletroímã e

onde:  $U_1, U_2, I_1$  e  $I_2$  são valores iniciais da tensão e corrente;

$$\dot{x} = v$$

$$L_1 = \frac{K_o}{K_o} + L_p \frac{(h+x)}{(I_1+l_1)^2}$$

$$q_2 = I_2 + l_2$$

$$q_1 = I_1 + l_1$$

$$\tilde{Q}_{q_1} = U_1 + n_1$$

$$\tilde{Q}_x = F^{exc} + f_a$$

Fazendo:

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_2} + \frac{\partial Q_{q_2}}{\partial q_2} = \tilde{Q}_{q_2} \\ & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_{q_1}}{\partial q_1} = \tilde{Q}_{q_1} \\ & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial x} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} = \tilde{Q}_x \end{aligned} \right.$$

$$F_{mag_{max}} = \frac{K_o}{I_{max}^2} \cdot \frac{2}{(h+x)^2} \quad (3.7)$$

mesma, definiremos:

Considerando que em módulo, a  $F_{mag}$  máxima em ambos os pares de pólos é a

$$F_{mag_1} = \frac{K_o}{(l_1+l_2)^2} \cdot \frac{2}{(h+x)^2} \quad (3.6)$$

$$F_{mag_2} = \frac{K_o}{(l_2+l_2)^2} \cdot \frac{2}{(h-x)^2}$$

de cada par de pólos é:

Observamos que, segundo as equações do movimento encontradas, a força magnética

verticalmente

o peso do eixo, porém inicialmente vamos considerar os magnetos dispostos horizontal e

podemos inclinar o mancal 45 graus de modo a não sobrecarregar o magneto superior com

horizontalmente seja a mesma que a já descrita vertical, porém com  $g = 0$ . Na realidade

Podemos considerar que a dinâmica dos magnetos que suportam o eixo

$$F^e = F^{exc} + f^d + m_1 g \quad (3.5)$$

onde  $u_1$  e  $u_2$  são as tensões de controle (volts) e onde:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} = v \\ v = -\frac{K_o \cdot (l_1+l_2)^2}{2 \cdot m_1 \cdot (h+x)^2} + \frac{K_o \cdot (l_2+l_2)^2}{2 \cdot m_1 \cdot (h-x)^2} + \frac{m_1}{F} \\ \frac{dl_1}{dt} = \left[ \frac{(h+x)}{K_o + L^d(h+x)} \right] \cdot \left[ U_1 + n_1 + \left( \frac{K_o \cdot v}{(h+x)^2} - R_1 \right) \cdot (l_1+l_2) \right] \\ \frac{dl_2}{dt} = \left[ \frac{(h-x)}{K_o + L^d(h-x)} \right] \cdot \left[ U_2 + n_2 + \left( \frac{K_o \cdot v}{(h-x)^2} - R_2 \right) \cdot (l_2+l_2) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

### 3.2. Saturação magnética

Obs: na posição de equilíbrio a força magnética pode chegar a 150 N, quando em regime permanente sem oscilações, como será demonstrado no capítulo 6.

$$F_{magn} = 63 \text{ N (25\% maior que } F_d)$$

Usando (3.6) nos parâmetros já definidos, teremos:

$$K_o = \frac{\cos \phi}{2 \cdot \mu_0 \cdot K_f \cdot A \cdot N^2}$$

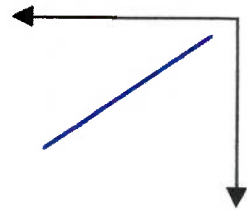
$$x_m = 0,6 \text{ h}_g \quad (\text{posição máxima do eixo})$$

onde:

A curva de saturação do ferro-silício foi modelada matematicamente. Ao invés do

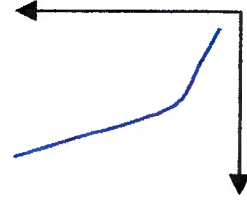
modelo linear:

$$B_f = \frac{S_f}{\phi} = \mu_r \mu_0 H_f$$



foi usado um modelo não linear da forma:

$$B_f = \frac{S_f}{\phi} = Ae^{BH_f} + CH_f + D$$



porém o fluxo pode ser considerado linear no entretanto:



(3.9)

$$B_g = \frac{A_g}{\phi} = \mu_0 H_g$$

Deste modo:

(3.10)

$$F^{mm} = NI = H_g l_g + H_f l_f$$

então, de (3.9) e (2.48) em (3.10):

(3.11)

$$NI = C_1 \phi + C_2 H_f \quad \text{onde} \quad \begin{cases} C_1 = \frac{A_g \mu_0}{(h_g + x \cos \phi)} \\ C_2 = l_f \end{cases}$$

De (3.8) em (3.11):

(3.12)

$$NI = C_1 S_f A e^{B H_f} + C_1 S_f C H_f + C_1 S_f D + C_2 H_f$$

Para simplificar fazemos:

(3.13)

$$\begin{aligned} A' &= C_1 S_f A \\ B' &= B \\ C' &= C_1 S_f C + C_2 \\ D' &= C_1 S_f D - NI \end{aligned}$$

em (3.12) então teremos:

(3.14)

$$A' e^{B' H_f} + C' H_f + D' = 0.$$

Solucionando a equação exponencial (3.14) chegamos a:

(3.15)

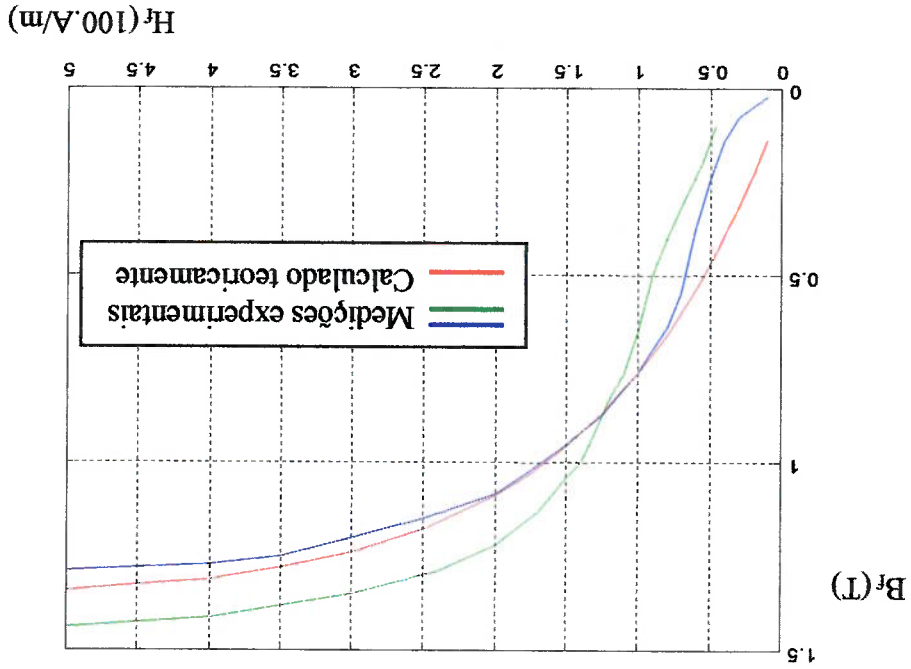
$$H_f = - \frac{B'}{C'} \frac{\text{Lambert} \left[ \frac{B' A'}{C'} \cdot e^{\frac{C'}{B' D'}} \right]}{\frac{B'}{C'}}$$

onde  $\text{Lambert}(x)$  é a função de Lambert de  $x$ , isto é,

$w = \text{Lambert}(x)$  é a solução para a equação:  $w e^w = x$

Aplicando (3.15) em (3.8):

Figura 3.2: Comparação entre curvas de magnetização do aço-silício obtida de modo teórico e experimental de dois materiais diferentes



ago-silício [7] (pg:164-5).

medida experimentalmente na Escola Politécnica – USP; azul – curva de magnetização do que podem ser utilizados: verde – curva de magnetização do aço E 230 esp. 0,50 mm, As duas curvas experimentais correspondem a uma faixa de materiais de ferro-silício práticas a partir de  $B_f > 0,6$  T, tendo comportamento razoável abaixo deste valor.

3.3, podemos notar que a curva conseguida matematicamente corresponde às medições como a equação acima. Comparando graficamente com medições práticas na figura 3.2 e Podemos representar o comportamento do fluxo no núcleo  $B_f$  em função do campo  $H_f$

$$B_f = \frac{S_f}{\phi} = Ae \left\{ -B \frac{\text{Lambert} \left[ \frac{B'A'}{C'} \cdot e^{-\frac{C'}{B'D'}} \right]}{D'} + C \frac{\text{Lambert} \left[ \frac{B'A'}{C'} \cdot e^{-\frac{C'}{B'D'}} \right]}{D'} + D \right\} \quad (3.16)$$

(3.17)

$$F_{mm} = F_g + F_f$$

Para valores de  $H_f < 1$ , a força magnetomotriz do entreferro predomina em relação a força no núcleo, por isso o erro entre a curva de saturação teórica e a experimental nesta área não influencia o fluxo magnético total de forma sensível. Isto é, se:

$$D = 1,34 \text{ T}$$

$$C = 5,5 \cdot 10^{-5} \text{ T.m/A}$$

$$B = -0,008 \text{ m/A}$$

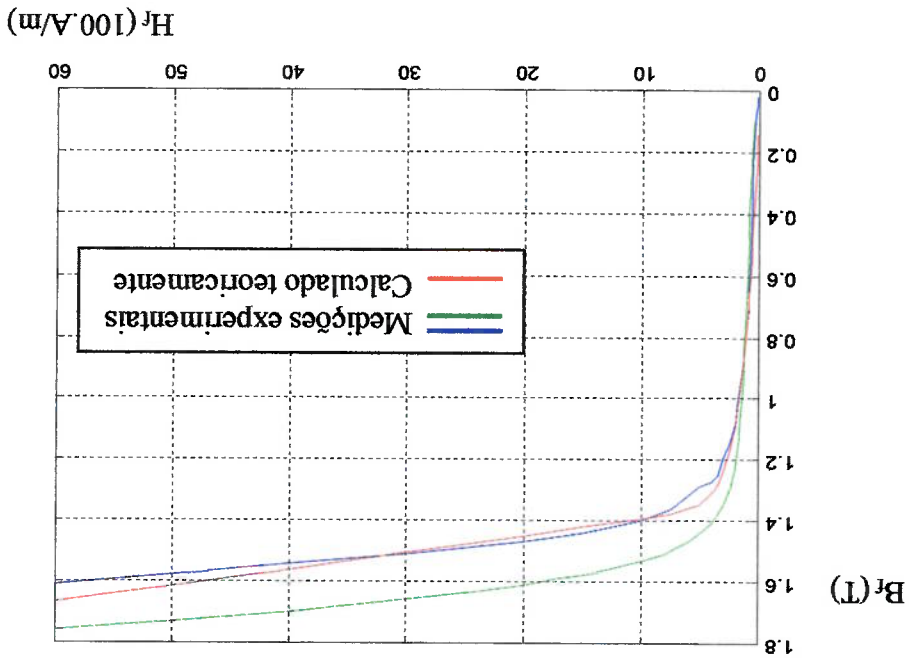
$$A = 1,3 \text{ T}$$

curva teórica da experimental. Assim:

Os valores de A, B, C e D foram determinados de forma a aproximar ao máximo a

teórico e experimental de dois materiais diferentes

Figura 3.3: Comparação entre curvas de magnetização do aço-silício obtida de modo



$$F_m = K_s \left( A_f e^{-\frac{C}{B D}} - \frac{C}{B} \text{Lambert} - \frac{C}{C_f D} + D_f \right) \quad (3.22)$$

de (3.19) em (3.20):

$$K_s = \frac{F_m}{K_f \cos \phi} = \frac{\mu_0 A_s}{\phi^2} \quad (3.21)$$

onde, de (2.58) e (3.20):

$$F_m = K_s \phi^2 \quad (3.20)$$

útil gerado pelo magneto [24]:

Consideramos a força magnética aplicada no eixo proporcional ao fluxo magnético

$$A_f, C_f, D_f = cte$$

$$D' = f(x, I)$$

$$C' = f(x)$$

$$B = cte$$

$$A' = f(x)$$

onde:

$$\phi = A_f e^{-\frac{C}{B D}} - \frac{C}{B} \text{Lambert} - \frac{C}{C_f D} + D_f \quad (3.19)$$

então (3.16) fica:

$$\text{Lambert} = \text{Lambert} \left[ \frac{B A'}{B'} \cdot e^{-\frac{C}{B D}} \right]$$

$$D_f = D S_f$$

$$C_f = C S_f$$

$$A_f = A S_f$$

Fazendo:

para pequenos valores de  $I$  ou grandes valores de  $X$ ,  $F_f$  é desprezível.

Deste modo podemos traçar uma tabela de valores da força magnética  $F_m$  para cada

valor de  $t$  e de  $x$  possíveis e incluir esta tabela no modelo do mancal para simular o efeito da saturação magnética no núcleo de aço-silício. Para o modelo do mancal, o gráfico da Figura 7.6 relaciona a corrente elétrica  $I$  com o correspondente fluxo magnético  $\phi$  no núcleo, para determinadas posições do eixo  $x$ , e compara com o modelo linear.

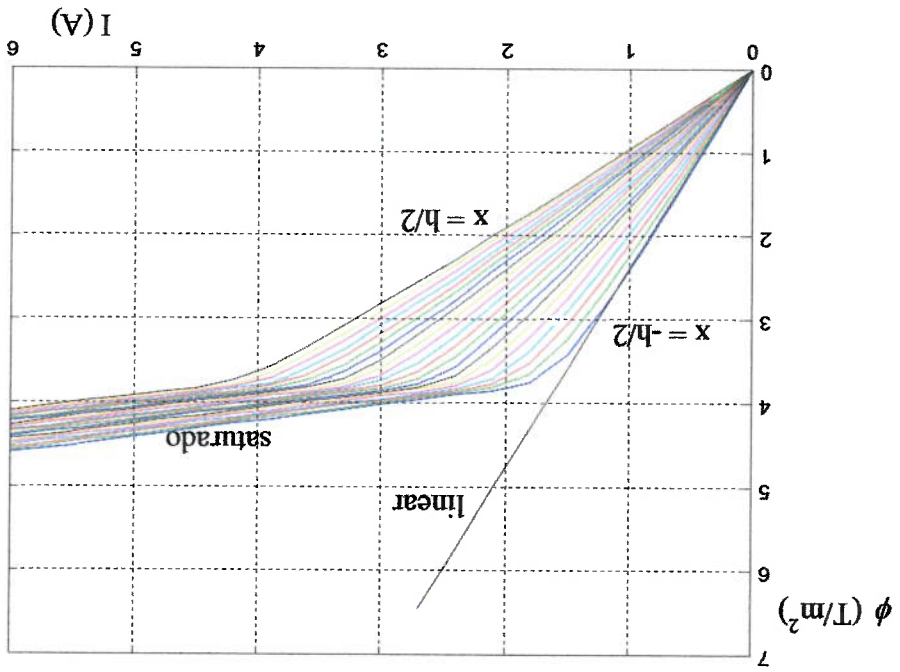


Figura 3.4 : Curva do fluxo magnético em função da corrente elétrica no magneto superior para diversos valores de  $x$

Podemos comparar o modelo linear (linha preta) e o modelo com saturação (linha

azul) para  $x = -h/2$  e observamos que o fluxo magnético pode ser considerado linear até certo valor de  $I$  ( $I > 1,5$  para  $x = -h/2$ ), onde podemos considerar que principalmente o campo magnético no entreferro compõe a força magnetomotriz. Porém, quando  $I > 1,5$  o núcleo passa a ser saturado magneticamente, constituindo a parcela dominante na

composição da  $F_{mm}$  e alterando a linearidade da relação entre a corrente e o fluxo. Portanto,

na fase saturada o fluxo magnético sofre perdas por saturação no núcleo e não corresponde

mais a um modelo linear.

O entreferro ( $x$ ) também influencia a saturação de modo inversamente proporcional,

portanto quanto menor o gap, menor é a corrente necessária para que haja saturação.

Observamos que quanto maior o gap ( $x$ ), mais alta é a corrente necessária para causar

saturação no núcleo, porém a saturação inicia para semelhantes valores do fluxo  $\phi$ .

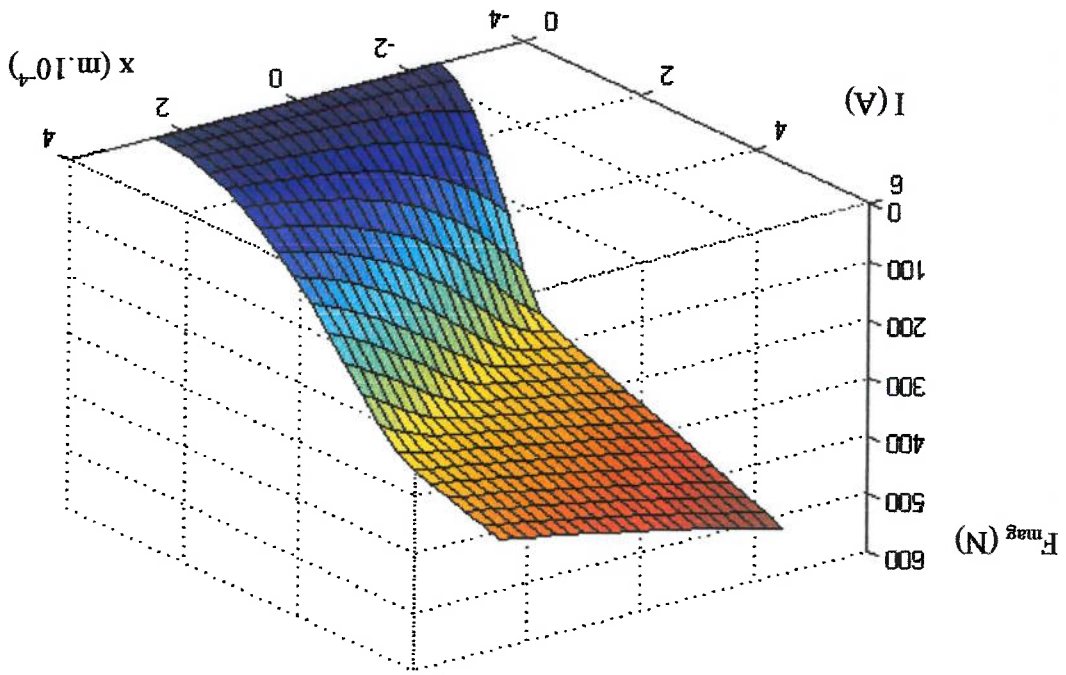


Figura 3.5: Força magnética em função da posição  $x$  e corrente  $I$

A força magnética aplicada no eixo por um magneto depende da posição  $x$  do eixo e

da corrente  $I$  do magneto. Podemos visualizar esta relação, levando em conta a saturação

calculada teoricamente, na figura 3.5.

$$(3.24) \quad \left. \begin{aligned} F_{m2} &= K_s \phi_2 \\ F_{m1} &= K_s \phi_1 \end{aligned} \right\} \text{onde} \quad \left. \begin{aligned} \phi_2 &= f(-x, I_2, I_2 + I_2) \\ \phi_1 &= f(x, I_1, I_1 + I_1) \end{aligned} \right\}$$

então:

onde  $F_{m1}$  e  $F_{m2}$  representam as forças magnéticas nos magnetos opostos 1 e 2, respectivamente, levando em conta a saturação magnética do núcleo do magneto. As forças magnéticas são determinadas por (3.20) segundo a posição  $x$  e a corrente  $I$  no magneto,

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{F_{m1}}{m_1} + \frac{F_{m2}}{m_1} + \frac{F_e}{m_1} \\ \frac{dI_1}{dt} &= \left[ \frac{(h+x)(K_0 + L^p(h+x))}{(h+x)} \right] \cdot \left[ U_1 + u_1 + \left( \frac{K_0 \cdot v}{h+x} \right)^2 - R_1 \right] \cdot (I_1 + I_1) \\ \frac{dI_2}{dt} &= \left[ \frac{(h-x)(K_0 + L^p(h-x))}{(h-x)} \right] \cdot \left[ U_2 + u_2 + \left( \frac{K_0 \cdot v}{h-x} \right)^2 - R_2 \right] \cdot (I_2 + I_2) \end{aligned}$$

apoio do mancal se torna:

encontrada a força magnética exercida pelo magneto  $F_m$ . Então a equação do sistema de a posição do eixo  $x$  e a corrente no eletroímã  $I$  com o fluxo magnético  $\phi$ , a partir daí será Os dados apresentados no gráfico da figura 3.5 será usada no modelo para relacionar certas limitações de utilização, que serão observados nas simulações.

o modelo. Porém, o sistema de controle não levará estas perdas em consideração, gerando maiores que a corrente máxima calculada (2 A) ou usar entreferros  $h$  menores sem invalidar as perdas quando usados altos fluxos magnéticos. Desse modo podemos utilizar correntes A saturação magnética foi considerada no modelo do mancal magnético para simular

### 3.3. Modelo do Eixo Rígido

Uma vez definido o modelo de cada mancal em cada direção, deve-se montar um modelo de todas as forças atuantes no eixo, em todas as direções. Desse modo podemos montar um modelo do comportamento de corpo rígido do eixo suportado pelo mancal.

As forças atuantes ao longo do eixo estão representadas na figura 3.6. Para encontrar

as equações da dinâmica de corpo rígido do eixo, as coordenadas do mancal ( $x_1, y_1$ ) foram transformadas em coordenadas do eixo ( $x_c, y_c$ ), com origem no seu centro de

massa que, por ser simétrico, coincide com o centro geométrico do eixo.

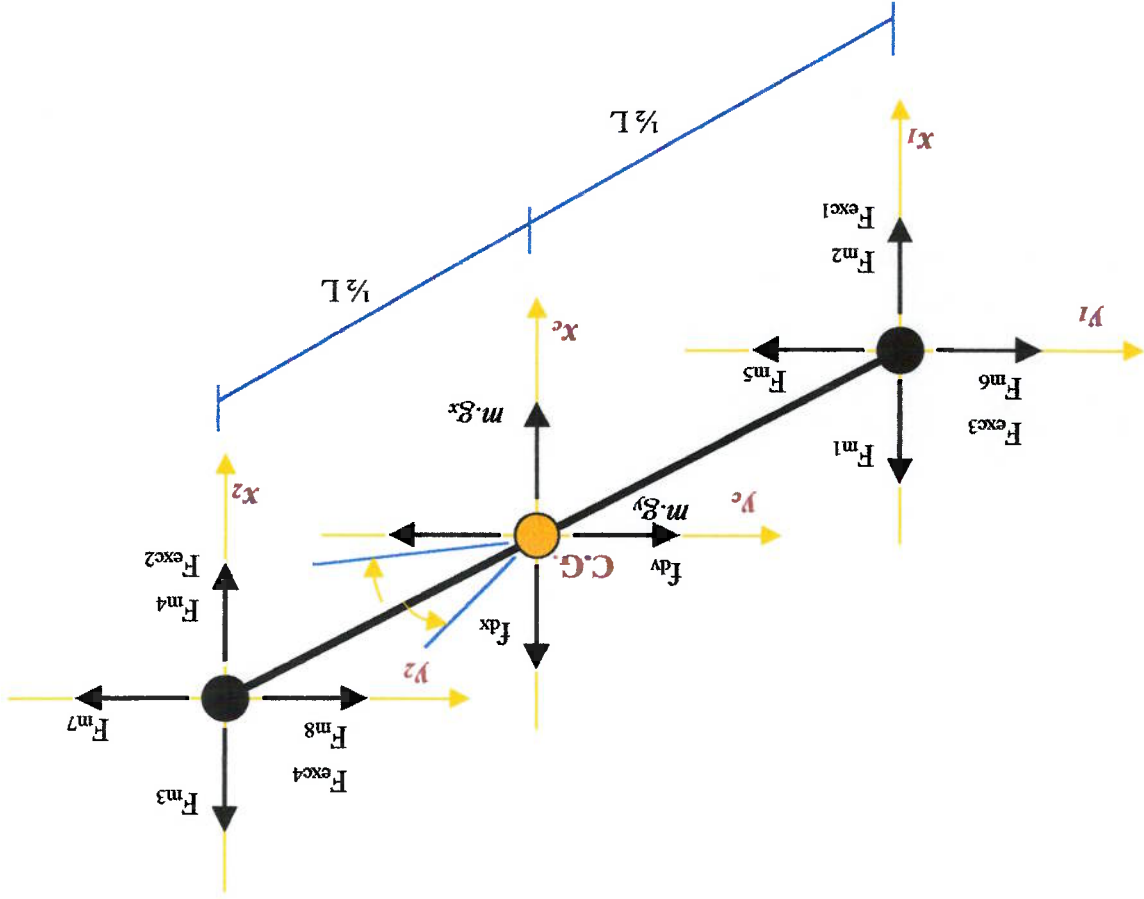


Figura 3.6: Representação das forças atuantes ao longo do eixo



As forças magnéticas  $F_m$  são definidas segundo a equação (3.20) e dependem da posição do eixo  $x$  e da corrente no magneto  $I$  conforme definido no capítulo 3.2 em (3.19).

$$(3.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum F^{N\phi} = -F^{exc3} + F^{exc4} + F^{m5} - F^{m6} - F^{m7} + F^{m8} \\ \sum F^{N\theta} = -F^{exc1} + F^{exc2} + F^{m1} - F^{m2} - F^{m3} + F^{m4} \end{array} \right.$$

$$(3.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum F^{exc x} = F^{exc1} + F^{exc2} \\ \sum F^{exc y} = F^{exc3} + F^{exc4} \end{array} \right.$$

$$(3.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum F^{m x} = -F^{m1} + F^{m2} - F^{m3} + F^{m4} \\ \sum F^{m y} = -F^{m5} + F^{m6} - F^{m7} + F^{m8} \end{array} \right.$$

onde:

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} J^r \ddot{\phi} = \frac{2}{L} \sum F^{N\phi} - J^a \omega \theta \\ J^r \ddot{\theta} = \frac{2}{L} \sum F^{N\theta} - J^a \omega \phi \\ m \ddot{y}_c = \sum F^{m y} + \sum F^{exc y} + f_{d y} + m g_y \\ m \ddot{x}_c = \sum F^{m x} + \sum F^{exc x} + f_{d x} + m g_x \end{array} \right.$$

podem ser definidas as equações de translação e de rotação assim:

As equações de corpo rígido do eixo são facilmente calculadas considerando as forças atuantes em cada eixo, segundo as coordenadas em relação ao centro de massa com 4 graus de liberdade. Considera-se os movimentos de translação nas direções vertical ( $x$ ) e horizontal ( $y$ ) e de rotação nas direções radiais vertical ( $\theta$ ) e horizontal ( $\phi$ ). O efeito giroscópico devido a velocidade angular axial ( $\omega$ ) do eixo também é considerado. Então

(3.30)

$$\begin{aligned}x_1 &= x_c - \frac{z}{\theta} \\ x_2 &= x_c + \frac{z}{\theta} \\ y_1 &= y_c - \frac{z}{L} \\ y_2 &= y_c + \frac{z}{L}\end{aligned}$$

origem no C.G. do eixo) conforme segue:

As coordenadas locais são relacionadas com as coordenadas gerais do eixo (com

(3.29)

$$\begin{aligned}\phi_1 &= f(x_1, I_1 + I_1) \\ \phi_2 &= f(-x_1, I_2 + I_2) \\ \phi_3 &= f(x_2, I_3 + I_3) \\ \phi_4 &= f(-x_2, I_4 + I_4) \\ \phi_5 &= f(y_1, I_5 + I_5) \\ \phi_6 &= f(-y_1, I_6 + I_6) \\ \phi_7 &= f(y_2, I_7 + I_7) \\ \phi_8 &= f(-y_2, I_8 + I_8)\end{aligned}$$

será definido segundo as variáveis locais:

onde  $f$  é a função descrita na equação (3.22). Porém para cada magneto o fluxo magnético

$$\phi = f(x, I)$$

De forma geral, o fluxo magnético:

$$F_m^i = K_s \phi_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

magneto. Então a força magnética para cada magneto é:

Porém os valores de  $I$  e  $x$  se relacionam com as variáveis do modelo conforme cada

magneto a equação fica:

O modelo eletromagnético do magneto é o mesmo da equação (3.4), porém para cada

$$g_x = g_y = g \cos \frac{\pi}{4} \quad (3.32)$$

distribuir a carga do peso do eixo entre dois magnetos. Deste modo:

eixos inclinados de 45 graus. Esta inclinação dos magnetos é usada com frequência para componentes da força peso do eixo  $mg$ , que serão válidas se considerarmos as direções dos componentes da força de trabalho  $f_a$  nas direções  $x$  e  $y$ . Da mesma forma,  $mg_x$  e  $mg_y$  são as radial e axial do rotor e eixo, que são calculados no Apêndice 7.4. As forças  $f_{ax}$  e  $f_{ay}$  são as

O parâmetro  $m$  é a massa do eixo mais rotores,  $J_r$  e  $J_a$  são os momentos de inércia

força de desbalançamento do eixo, por ser pequena, está integrada nas forças dos rotores. ângulos de defasagem entre as direções das forças de desbalançamento de cada rotor. A desbalançamento do rotor em cada extremidade do eixo, descrita em (7.9), e  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são os onde  $\omega$  é a velocidade angular axial do eixo,  $F_r$  é a intensidade máxima da força devido ao

$$\begin{aligned} F^{exc4} &= F_r \cos(\omega t + \phi_2) \\ F^{exc3} &= F_r \cos(\omega t + \phi_1) \\ F^{exc2} &= F_r \sin(\omega t + \phi_2) \\ F^{exc1} &= F_r \sin(\omega t + \phi_1) \end{aligned} \quad (3.31)$$

equação (7.10) e são definidas para cada direção (magneto) como:

As forças devido à excentricidade do rotor  $F^{exc}$  são descritas de modo geral na

As pré-correntes e as correntes de compensação do peso do eixo serão impostas pelo sistema de controle. O sistema de controle será definido no próximo capítulo para cada par de magnetos independentemente, então as leis de controle para os magnetos 1 e 2 também valerão para o 3 e 4, 5 e 6, etc...

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = I_6 = I_7 = I_8 = I_0$$

onde:

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= \left[ \frac{K_0 + L^p}{h + x_1} (h + x_1) \right] \cdot \left[ U_1 + n_1 + \left( \frac{K_0 \cdot v_1}{v_1^2} (h + x_1) - R \right) \cdot (I_1 + i_1) \right] \\ \frac{di_2}{dt} &= \left[ \frac{K_0 + L^p}{h - x_1} (h - x_1) \right] \cdot \left[ U_2 + n_2 + \left( \frac{-K_0 \cdot v_1}{v_1^2} (h - x_1) - R \right) \cdot (I_2 + i_2) \right] \\ \frac{di_3}{dt} &= \left[ \frac{K_0 + L^p}{h + x_2} (h + x_2) \right] \cdot \left[ U_3 + n_3 + \left( \frac{K_0 \cdot v_2}{v_2^2} (h + x_2) - R \right) \cdot (I_3 + i_3) \right] \\ \frac{di_4}{dt} &= \left[ \frac{K_0 + L^p}{h - x_2} (h - x_2) \right] \cdot \left[ U_4 + n_4 + \left( \frac{-K_0 \cdot v_2}{v_2^2} (h - x_2) - R \right) \cdot (I_4 + i_4) \right] \\ \frac{di_5}{dt} &= \left[ \frac{K_0 + L^p}{h + y_1} (h + y_1) \right] \cdot \left[ U_5 + n_5 + \left( \frac{K_0 \cdot v_3}{v_3^2} (h + y_1) - R \right) \cdot (I_5 + i_5) \right] \\ \frac{di_6}{dt} &= \left[ \frac{K_0 + L^p}{h - y_1} (h - y_1) \right] \cdot \left[ U_6 + n_6 + \left( \frac{-K_0 \cdot v_3}{v_3^2} (h - y_1) - R \right) \cdot (I_6 + i_6) \right] \\ \frac{di_7}{dt} &= \left[ \frac{K_0 + L^p}{h + y_2} (h + y_2) \right] \cdot \left[ U_7 + n_7 + \left( \frac{K_0 \cdot v_4}{v_4^2} (h + y_2) - R \right) \cdot (I_7 + i_7) \right] \\ \frac{di_8}{dt} &= \left[ \frac{K_0 + L^p}{h - y_2} (h - y_2) \right] \cdot \left[ U_8 + n_8 + \left( \frac{-K_0 \cdot v_4}{v_4^2} (h - y_2) - R \right) \cdot (I_8 + i_8) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.33a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_5}{dt} &= \left[ \frac{K_0 + L^p}{h + y_1} (h + y_1) \right] \cdot \left[ U_5 + n_5 + \left( \frac{K_0 \cdot v_3}{v_3^2} (h + y_1) - R \right) \cdot (I_5 + i_5) \right] \\ \frac{di_6}{dt} &= \left[ \frac{K_0 + L^p}{h - y_1} (h - y_1) \right] \cdot \left[ U_6 + n_6 + \left( \frac{-K_0 \cdot v_3}{v_3^2} (h - y_1) - R \right) \cdot (I_6 + i_6) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.33c)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_3}{dt} &= \left[ \frac{K_0 + L^p}{h + x_2} (h + x_2) \right] \cdot \left[ U_3 + n_3 + \left( \frac{K_0 \cdot v_2}{v_2^2} (h + x_2) - R \right) \cdot (I_3 + i_3) \right] \\ \frac{di_4}{dt} &= \left[ \frac{K_0 + L^p}{h - x_2} (h - x_2) \right] \cdot \left[ U_4 + n_4 + \left( \frac{-K_0 \cdot v_2}{v_2^2} (h - x_2) - R \right) \cdot (I_4 + i_4) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.33b)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_7}{dt} &= \left[ \frac{K_0 + L^p}{h + y_2} (h + y_2) \right] \cdot \left[ U_7 + n_7 + \left( \frac{K_0 \cdot v_4}{v_4^2} (h + y_2) - R \right) \cdot (I_7 + i_7) \right] \\ \frac{di_8}{dt} &= \left[ \frac{K_0 + L^p}{h - y_2} (h - y_2) \right] \cdot \left[ U_8 + n_8 + \left( \frac{-K_0 \cdot v_4}{v_4^2} (h - y_2) - R \right) \cdot (I_8 + i_8) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.33d)$$

## 4. Sistema de Controle

Uma vez desenvolvido o modelo do sistema Mancaal Magnético, devemos escolher um sistema de controle que irá estabilizar o eixo numa posição de equilíbrio no Mancaal. Se não houver controle, o eixo será atraído por um dos eletroímãs até se chocar. O comportamento instável do sistema pode ser deduzido a partir da análise das equações do movimento, assim como a necessidade de um sistema de controle para estabilização do eixo.

Projetaremos 3 tipos de sistemas de controle neste capítulo: controle PID, controle por realimentação de estado e Controle Não-Linear. Os primeiros foram desenvolvidos a partir de linearização convencional do modelo e imposição de polos, enquanto no terceiro foi usado a Linearização Global e imposição de polos para projetar um Controle Não-Linear com maior precisão.

### 4.1. Linearização por Expansão em Série de Taylor

Os controles lineares (PID e realimentação de estado) para o Mancaal Magnético foram desenvolvidos a partir da linearização do sistema baseado na expansão em série de Taylor.

Esta técnica de linearização é aplicável à maioria dos sistemas não-lineares. O procedimento é baseado na expansão da função não-linear em torno do ponto de operação e a retenção apenas do termo linear. Os termos da série de Taylor de ordem mais alta são desprezados e para isso devem desviar pouco em relação à condição de operação.

Para obter um modelo matemático linear para um sistema não-linear, supomos

que as variáveis variam pouco em relação à condição de operação. Então um sistema:

$$y = f(x_1, x_2) \quad (4.1)$$

pode ser expandido em série de Taylor em torno do ponto  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  da forma:

$$y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot (x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot (x_2 - \bar{x}_2) \right] + \left[ \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \cdot (x_1 - \bar{x}_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \cdot (x_2 - \bar{x}_2)^2 \right] + \dots \right]$$

onde as derivadas parciais são calculadas em  $x_1 = \bar{x}_1, x_2 = \bar{x}_2$ . Nas vizinhanças do

ponto de operação os termos de ordem superior podem ser desprezados, então o sistema

é descrito por:

$$y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + K_1(x_1 - \bar{x}_1) + K_2(x_2 - \bar{x}_2) \quad (4.2)$$

onde:

$$K_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x_1 = \bar{x}_1, x_2 = \bar{x}_2}$$

$$K_2 = \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{x_1 = \bar{x}_1, x_2 = \bar{x}_2}$$

Considera-se o sistema a ser controlado composto pela figura 3.1 e modelado por

(3.4). Este modelo foi escolhido para o cálculo do sistema de controle porque é

preferível estudar inicialmente o comportamento da aplicação de controles

independentes para cada mancal, que combina facilidade de implementação com

eficiência em estabilizar o eixo com bom desempenho.

Então teremos o sistema descrito por:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} n_1 &= -n_2 \\ I_2 &= I_0 \\ I_1 &= I_0 + I_p \quad (\text{nos magnetos verticais}) \\ I_1 &= I_0 \quad (\text{nos magnetos horizontais}) \\ L_p &= 0 \end{aligned}$$

Para efeito de cálculo do controle de fluxo magnético por ser pequena; consideram-se as forças externas como perturbações no sistema, portanto podem ser ignoradas no projeto do controle; por enquanto; a corrente de equilíbrio  $I_p$  será considerada apenas no controle aplicado aos magnetos verticais, pois esta corrente equilibra a força externa ( $m_1 g$ ) que somente ocorre nesta direção, assim teremos o mesmo valor da pré-corrente nos dois magnetos opostos (horizontal ou vertical). Isto é, serão calculados dois sistemas de controle diferentes para cada direção de magnetos: um considerando  $I_p$  e o outro não o considerando. O valor necessário de  $I_p$  para equilibrar o eixo no modelo é calculado no apêndice 7.4. Para simplificar o controle usaremos um único algoritmo de controle para cada magneto do par de magnetos opostos. Porém, a tensão de controle em um magneto terá que ser oposta à tensão no outro magneto para gerar forças opostas de controle, segundo Matti Antila [1], ou seja:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} = v \\ v &= -\frac{K_o \cdot (l_1 + l_2)^2}{2 \cdot m_1 \cdot (h + x)^2} + \frac{K_o \cdot (l_2 + l_2)^2}{2 \cdot m_1 \cdot (h - x)^2} + \frac{F_e}{m_1} \\ \frac{dI_1}{dt} &= \left[ \frac{K_o + L_p}{h + x} \right] \cdot \left[ U_1 + n_1 + \left( \frac{K_o \cdot v}{h + x} - R_1 \right) \cdot (I_1 + I_1) \right] \\ \frac{dI_2}{dt} &= \left[ \frac{K_o + L_p}{h - x} \right] \cdot \left[ U_2 + n_2 + \left( \frac{-K_o \cdot v}{h - x} - R_2 \right) \cdot (I_2 + I_2) \right] \end{aligned} \right\}$$

Calcula-se inicialmente o sistema de controle para os magnetos horizontais. Os

magnetos verticais têm cálculo equivalente, porém considerando  $I_l = I_o + I_p$ .

Podemos considerar então a dinâmica do circuito de apenas um magneto, pois o

magneto oposto terá comportamento aproximadamente equivalente. Representando o

sistema (3.4) com (4.3):

$$(4.5) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ v_1 \\ \frac{dx_1}{dt} \\ v_1 \\ \dot{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K_o(I_o + l_1)^2}{2m_1(h+x_1)^2} + \frac{K_o(I_o - l_1)^2}{2m_1(h+x_1)^2} \\ \frac{K_o}{U_1}(h+x_1) + \frac{v_1(I_o + l_1)}{R_1} - \frac{K_o}{R_1}(h+x_1) \\ \frac{K_o}{U_1}(h+x_1) + \frac{v_1(I_o + l_1)}{R_1} - \frac{K_o}{R_1}(h+x_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_o}{(h+x_1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} n_1$$

$$\text{onde } x_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ l_1 \end{bmatrix}$$

Expandindo (4.5) em série de Taylor em torno do ponto de operação

$\bar{x}_1 = 0, \bar{v}_1 = 0, \bar{l}_1 = 0, \dot{\bar{x}}_1 = 0, \dot{\bar{v}}_1 = 0$  e desprezando os termos de ordem mais altas, teremos:

$$(4.6) \quad \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ -\frac{2K_o I_o}{2K_o I_o^2} l_1 + \frac{m_1 h^2}{2K_o I_o^2} l_1 + \frac{2K_o I_o}{2K_o I_o^2} x_1 \\ \frac{I_o}{R_1} v_1 - \frac{K_o}{R_1} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_o}{h} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} n_1$$

representando (4.6) por espaço de estado:

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2K_o I_o}{2K_o I_o^2} & 0 & -\frac{m_1 h^2}{2K_o I_o^2} \\ \frac{I_o}{R_1} & -\frac{K_o}{R_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_o}{h} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} n_1$$



Tabela 4.1: Parâmetros do sistema linearizado

Parâmetro	Valor	unidade
N	182	Espiras
m	2,9	Kg
k <sub>0</sub>	2,96.10 <sup>-5</sup>	N.m <sup>2</sup> /A <sup>2</sup>
I <sub>0</sub>	0,1	A
R	5,0	Ω
h	5,74 10 <sup>-4</sup>	m
k <sub>x</sub>	785,8	N/m
k <sub>i</sub>	9,02	N/A
L <sub>0</sub>	5,17 10 <sup>-2</sup>	H

são apresentados a seguir:

projetado usando as técnicas lineares. Os valores dos parâmetros usados neste modelo

O sistema (4.7) é um sistema linear, portanto o sistema de controle pode ser

$$L_0 = \frac{h}{K_0}$$

$$k_i = \frac{h^2}{2K_0 I_0}$$

$$k_x = \frac{h^3}{2K_0 I_0^2}$$

onde:

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{m_1}{k_x} & 0 \\ 0 & \frac{k_i}{R} & -\frac{L_0}{R} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m_1}{k_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L_0}{1} \end{bmatrix} u_1$$

Simplificando:

(4.7)

A função de transferência deste sistema pode ser deduzida a partir de (4.7)

definindo a variável  $x$  como saída:

$$X(s) = \frac{-\frac{k_1}{m_1 L_0}}{s^3 + \frac{R}{s^2} - \frac{Rk_x}{L_0 m_1}} U(s) \quad (4.7a)$$

O mapa da localização dos polos e zeros deste sistema é apresentado na figura 4.1

com a variável de estado  $x$  como saída. Podemos deduzir que o sistema é instável nas vizinhanças do ponto de equilíbrio, se notarmos a presença do polo no lado positivo do eixo real. Os polos do sistema (4.7a) são:  $39,3$ ;  $-68,2 \pm 26,6j$ .

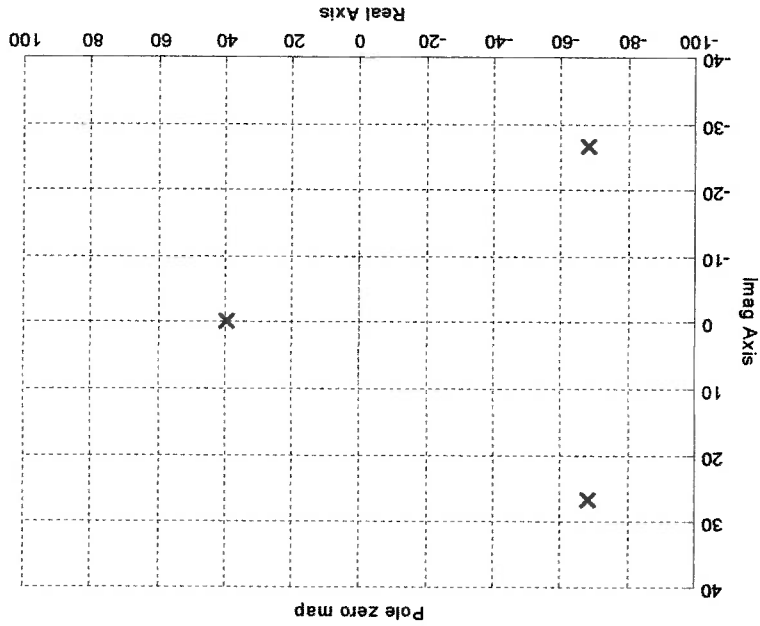


Figura 4.1: Posição dos polos do Sistema (4.7a)

#### 4.1.1. Projeto do Sistema de Controle por Realimentação de

#### Estados

Vamos projetar o sistema de controle por realimentação de estado para estabilizar

o sistema (4.7). Supondo que os estados do sistema sejam acessíveis, vamos implantar

um ganho de realimentação  $K$  no sistema, conforme representado em diagrama de

blocos na figura 4.2.

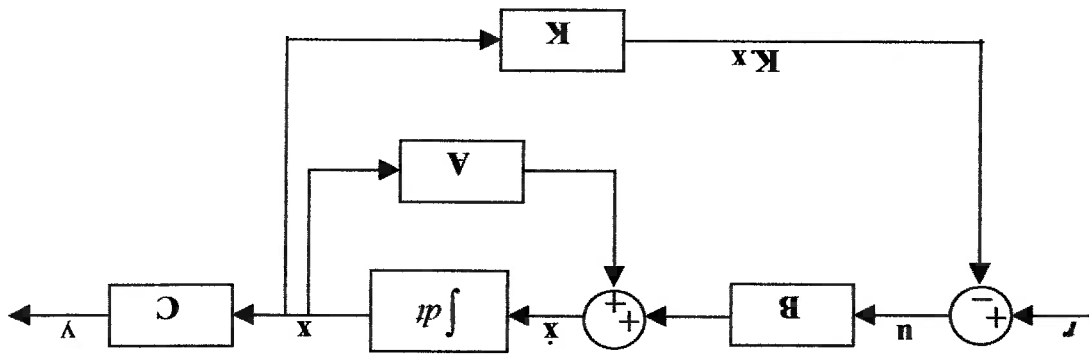


Figura 4.2: Diagrama de blocos do sistema (4.7) com realimentação de estado

Os valores de referência  $r$  dos estados são nulos, portanto a função de controle:

$$u = -Kx \quad (4.8)$$

Os parâmetros de controle  $K$  para o sistema linear são projetados por imposição

de polos. Definimos a equação característica desejada para o sistema e calculamos o

ganho de realimentação  $K$  usando a Fórmula de Ackermann.

Com o propósito de eliminar erros em regime permanente no entreferro para

perturbações constantes, foi incluída no modelo (4.7) uma variável de estado para ganho

de realimentação: a variável  $w$ , onde:

os de (4.7) com a inclusão de um pólo na origem.  
 4.3, onde notamos que o sistema é naturalmente instável. Os pólos são os mesmos que  
 O gráfico da posição dos pólos e zeros do sistema (4.9a) é apresentado na figura

$$W(s) = \frac{U(s)}{-\frac{k_1}{m_1 L_0} s^4 + \frac{L_0}{R} s^3 - \frac{L_0}{R k_x} s^2 - \frac{L_0}{m_1} s} \quad (4.9a)$$

variável  $x$  como saída é:

A função de transferência correspondente ao sistema (4.9), considerando a

portanto é um sistema linear de 4ª ordem (tem 4 raízes).

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{t} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} w \\ x \\ v \\ t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_x}{m_1} & 0 & -\frac{L_0}{R} \\ 0 & \frac{k_1}{m_1} & -\frac{L_0}{R} & \frac{L_0}{1} \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad (4.9)$$

onde:

$$y = Cx$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

O sistema (4.7) pode então ser descrito na forma:

frequência.

regime permanente, quando submetido a forças constantes e durante oscilações de baixa

A inclusão deste integrador propiciará ao sistema um melhor comportamento em

$$w = \int x dt$$

comportamento do sistema. Vamos então impor um par de pólos dominantes no sistema, deste modo ele comporta-se aproximadamente como um sistema de segunda ordem. Podemos

deveremos posicionar os pólos de maneira tal que permita uma previsão do As raízes da equação serão definidas segundo a resposta desejada, portanto

$$|sI - A + BK| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4) = 0. \quad (4.11)$$

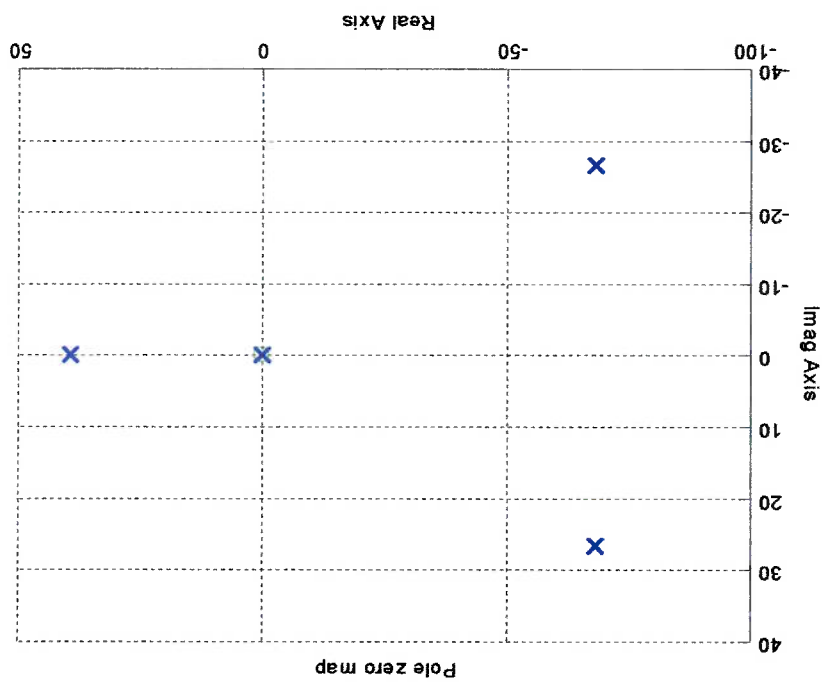
O sistema desejado possui a seguinte equação característica:

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

controlabilidade  $M$  deve ser 4:

Inicialmente devemos verificar se é possível a imposição de pólos arbitraria. A condição necessária é que o sistema seja controlável, portanto o posto da matriz de

Figura 4.3: Posição dos pólos do Sistema (4.9a)



determinar o local dos polos dominantes se definirmos o sobre-sinal e o tempo de

acomodação desejado para uma resposta degrau do sistema [18]:

$$\text{O sobre-sinal desejado: } M_p = e^{-\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$(4.12) \quad \text{O tempo de acomodação: } t_s = \frac{4}{\zeta \cdot \omega_n} \text{ (2\%)}$$

Então:

$$(4.13) \quad \zeta = \frac{\ln M_p}{\ln M_p + \sqrt{\pi^2 + (\ln M_p)^2}}$$

$$(4.14) \quad \omega_n = \frac{t_s \zeta}{4}$$

O lugar das duas raízes dominantes requeridas são:

$$(4.15) \quad s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} j$$

O lugar da terceira e quarta raízes são determinados de modo a não interferir na

resposta do sistema: no eixo real, mais de dez vezes à esquerda das raízes dominantes,

isto é:

$$(4.16) \quad s_3 = -20 \zeta \omega_n$$

A equação característica (4.11) deve ter os polos definidos por (4.15) e (4.16):

$$(s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2)(s + 20\zeta \omega_n)^2 = 0$$

então o polinômio característico é:

$$(4.17) \quad \phi(s) = (s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2)(s + 20\zeta \omega_n)^2$$

que pode ser escrito da forma:

$$\zeta = 0,5912$$

$$\omega_n = 67,66 \text{ rad/s}$$

Então, de (4.13) e (4.14):

$$t_s = 0,1 \text{ seg.}$$

$$M_p = 0,1 \text{ (10\%)}$$

pela tensão máxima de 20 V, determinamos:

Para uma resposta rápida do sistema sem extrapolar o limite de energia definido

imposição de polos é possível.

Para este sistema, o posto da matriz de controlabilidade (4.10)  $M$  é 4, portanto a

parâmetros da Tabela 4.1.

Vamos aplicar o método do mancal magnético (4.9), usando os

$$K = [0 \ 0 \ 0 \ 1] [B \ AB \ A^2B \ A^3B]^{-1} \phi(A), \quad (4.21)$$

usando a fórmula de Ackermann, definimos a matriz de realimentação de estado  $K$ :

$$\phi(A) = A^4 + a_1 \cdot A^3 + a_2 \cdot A^2 + a_3 \cdot A + a_4 \cdot I \quad (4.20)$$

característica:

Segundo o teorema de Cayley-Hamilton,  $A$  satisfaz a própria equação

$$\begin{aligned} a_4 &= (20\zeta \omega_n)^2 \omega_n^2 = 400 \zeta^2 \omega_n^4 \\ a_3 &= 2 \omega_n^2 \cdot 20\zeta \omega_n + 2 \zeta \omega_n \cdot (20\zeta \omega_n)^2 = (40 \zeta + 800 \zeta^3) \omega_n^3 \\ a_2 &= 4 \zeta \omega_n \cdot 20\zeta \omega_n + \omega_n^2 + (20\zeta \omega_n)^2 = (480 \zeta^2 + 1) \omega_n^2 \\ a_1 &= 2 \zeta \omega_n + 40 \zeta \omega_n = 42 \zeta \omega_n \end{aligned} \quad (4.19)$$

então, de (4.17) em (4.18), teremos:

$$\phi(s) = s^4 + a_1 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_3 \cdot s + a_4, \quad (4.18)$$

notar que a posição dos pólos é equivalente à desejada:  $-800 \pm 10^4 j$ ;  $-40 \pm 54,6j$ .

A posição dos pólos do sistema (4.9b) é apresentada na figura 4.4, onde se pode

$$(4.9b) \quad \frac{U(s)}{W(s)} = \frac{\frac{L_0}{(K_4 + R)} s^3 - \frac{m_1 L_0}{K_3 k_i} s^2 - \frac{m_1 L_0}{K_2 k_i + (K_4 + R) k_x} s - \frac{m_1 L_0}{K_1 k_i}}{-\frac{k_i}{m_1 L_0} s}$$

realimentação de estado segundo o diagrama de blocos da figura 4.2 é:

A função de transferência correspondente ao sistema (4.9) com ganho de

Tabela 4.2: Ganhos do sistema de controle RE

Parâmetro	Valor	unidade
$K_1$	$1,22 \cdot 10^7$	-
$K_2$	$2,59 \cdot 10^5$	-
$K_3$	$3,21 \cdot 10^3$	-
$K_4$	$-81,9$	-

$v_l$  e  $i_l$ , respectivamente e são apresentados na Tabela 4.2.

onde os ganhos  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  e  $K_4$  são os ganhos da realimentação para as variáveis  $w_1$ ,  $x_l$ ,

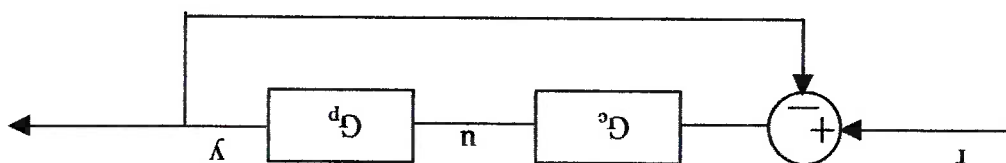
$$\mathbf{K} = [K_1 \quad K_2 \quad K_3 \quad K_4]$$

sistema fica definido por:

Usando (4.19) em (4.20) e (4.9) em (4.20) em (4.21), o ganho de realimentação do



Figura 4.5: Diagrama de blocos do modelo do mancal  $G_p$  com controle PID

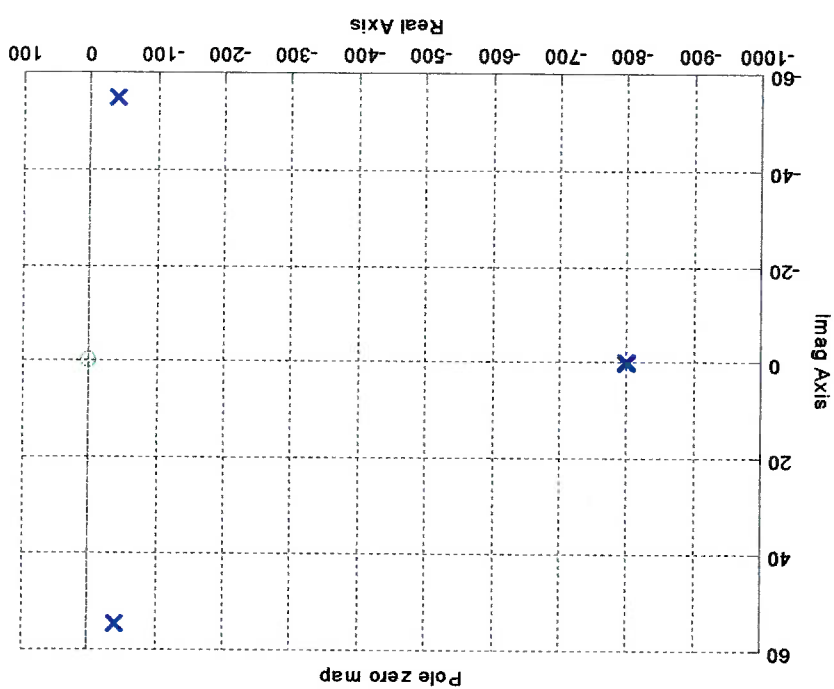


Neste capítulo vamos projetar um sistema de controle tipo PID para estabilizar o eixo no mancal magnético. O diagrama de blocos representando a adição de um PID é apresentado na figura 4.5. considera-se  $G_p$  a planta do mancal e  $G_c$  a do controle.

#### 4.1.2. Projeto do Sistema de Controle PID

$K$  e considerando a variável  $x$  como saída.

Figura 4.4: Posição dos polos do Sistema (4.9b) com ganho de realimentação de estado



O modelo da planta  $G_p$  é o sistema (4.7) com a tensão no circuito do eletroímã  $u$

como entrada e a posição do eixo  $x$  como saída:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_x & m_1 \\ 0 & k_x & k_l \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m_1 L_0}{R} \end{bmatrix} u_1 \quad y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}_1 \quad (4.22)$$

A função de transferência do sistema  $G_p$  é facilmente calculada a partir de (4.22):

$$G_p(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{-\frac{k_l}{m_1 L_0} \left( s^3 + \frac{L_0}{R} s^2 - \frac{L_0}{R} k_x s \right)}{k_l} \quad (4.23)$$

onde  $X(s)$  é a transformada de Laplace de  $x$  e  $U(s)$  é a transformada de Laplace de  $u$ . a posição dos pólos desse modelo foi apresentada na figura 4.2.

O sistema de controle PID é definido por:

$$G_c(s) = \frac{s}{K_1 + K_2 + K_3 s} \quad (4.24)$$

onde  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$  são os ganhos integral, proporcional e derivativo do controle,

respectivamente.

O sistema formado pela planta mais o controle pode ser representado por:

$$G_0(s) = G_c(s) G_p(s)$$

então, de (4.23) e (4.24):

$$G_0(s) = \frac{-\frac{k_l}{m_1 L_0} (K_3 s^2 + K_2 s + K_1) \left( s^3 + \frac{L_0}{R} s^2 - \frac{L_0}{R} k_x s \right)}{k_l} \quad (4.25)$$

Incluindo a realimentação unitária, teremos:

$$G(s) = \frac{-\gamma_3 s^2 - \gamma_2 s - \gamma_1}{s^4 + \gamma_4 s^3 - \gamma_3 s^2 - (\gamma_2 + \gamma_5) s - \gamma_1} \quad (4.26)$$

onde:

$$\gamma_j = K_j \frac{m_j}{k_j}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.27)$$

$$\gamma_4 = \frac{L_0}{R}$$

$$\gamma_5 = \frac{L_0}{R} \frac{m_1}{k_x}$$

Vamos usar a imposição de pólos para definir a resposta desejada no sistema. O

polinômio característico do sistema é:

$$s^4 + \gamma_4 s^3 - \gamma_3 s^2 - (\gamma_2 + \gamma_5) s - \gamma_1 \quad (4.28)$$

portanto o sistema é de quarta ordem, isto é, possui 4 pólos.

Vamos impor que o sistema desejado tenha 2 pólos dominantes, deste modo a

resposta será semelhante a um sistema de segunda ordem. O terceiro pólo deve ser

posicionado de modo a não interferir na resposta do sistema. O quarto pólo não pode ser

imposto porque o sistema (4.26) não é completamente controlável pelo estado, pois o

posto da matriz de controlabilidade  $M$  é menor que a dimensão do estado  $n$ , isto é:

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \\ A^3B \end{bmatrix} = 3 < 4$$

Então a equação característica do sistema (4.28) deverá ser:

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + 20\zeta\omega_n)(s + p_1) = 0 \quad (4.29)$$

onde  $p_1$  é o pólo independente (não-controlável).

$$(4.34) \quad \begin{cases} K_1 = \frac{k_1}{m_1} \left( 440\omega_n^4 \zeta^2 - 20\omega_n^3 \zeta \frac{L_0}{R} \right) \\ K_2 = -\frac{k_1}{m_1} \left( 880\zeta^3 \omega_n^3 - \omega_n^2 \frac{L_0}{R} - 40\zeta^2 \omega_n^2 \frac{L_0}{R} + 2\omega_n^3 \zeta - \frac{L_0}{R} \frac{k_x}{m_1} \right) \\ K_3 = \frac{k_1}{m_1} \left( 444\omega_n^2 \zeta^2 - 22\zeta \omega_n \frac{L_0}{R} - \omega_n^2 \right) \end{cases}$$

De (4.33) em (4.27):

$$(4.33) \quad \begin{cases} a_1 = \gamma_1 = \omega_n^2 - 22\zeta \omega_n \frac{L_0}{R} \\ a_2 = -\gamma_2 = \omega_n^2 - 444\omega_n^2 \zeta^2 + 22\zeta \omega_n \frac{L_0}{R} \\ a_3 = -(\gamma_2 + \gamma_3) = \omega_n^2 \frac{L_0}{R} - 2\omega_n^3 \zeta + 40\zeta^2 \omega_n^2 \frac{L_0}{R} - 880\zeta^3 \omega_n^3 \\ a_4 = -\gamma_4 = 20\omega_n^3 \zeta \frac{L_0}{R} - 440\omega_n^4 \zeta^2 \end{cases}$$

podemos resolver o restante das equações de (4.31):

$$(4.32) \quad p_1 = \frac{L_0}{R} - 22\omega_n \zeta$$

Fazendo a primeira equação do sistema (4.31) com (4.27):

$$(4.31) \quad \begin{cases} a_1 = \gamma_4 = 22\zeta \omega_n + p_1 \\ a_2 = -\gamma_3 = \omega_n^2 + 40\zeta^2 \omega_n^2 + 22\zeta \omega_n p_1 \\ a_3 = -(\gamma_2 + \gamma_3) = 20\omega_n^3 \zeta + \omega_n^2 p_1 + 40\zeta^2 \omega_n^2 p_1 \\ a_4 = -\gamma_1 = 20\omega_n^3 \zeta p_1 \end{cases}$$

então, de (4.29) em (4.30) e em (4.28):

$$(4.30) \quad \phi(s) = s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4$$

acomodação teremos um polinômio característico do sistema desejado:

(4.16), isto é, determinando a resposta adotando um sobre-sinal e um tempo de

Determinando a posição dos polos de modo equivalente às equações (4.12) à

Foram usados os mesmos valores de  $M_p$  e  $t_s$  do projeto do controle por

Realimentação de Estado e o mesmo método para calcular  $\zeta$  e  $\omega_n$ . A posição dos pólos

do sistema (4.26) com controle PID é apresentado na figura 4.6. os pólos deste sistema

são:  $782,8$  ;  $-800 \pm 54,6j$ .

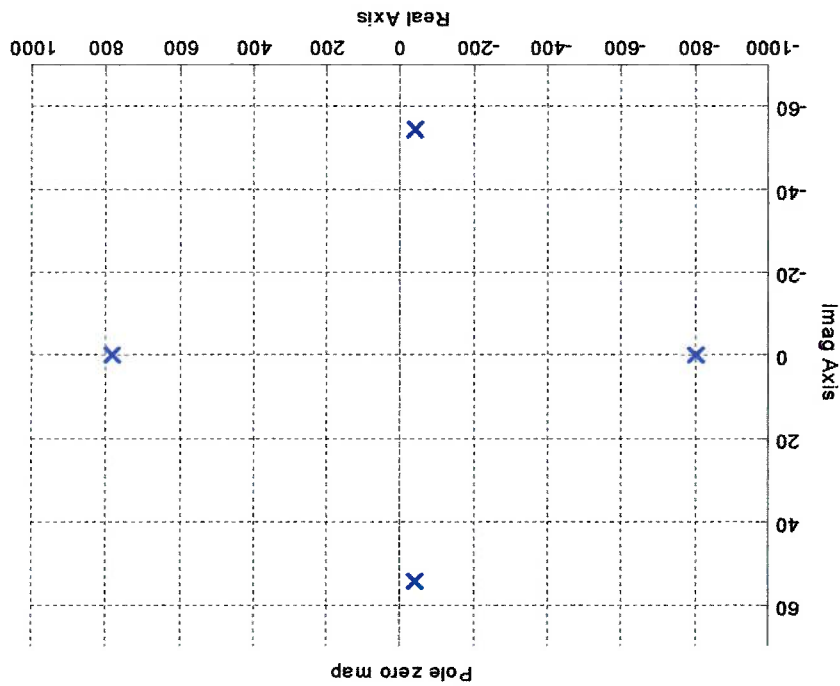


Figura 4.6: Posição dos pólos e zeros do sistema (4.26)

Analisando a posição dos pólos do sistema com PID na fig. 4.6, percebemos que

existe um pólo real positivo em  $342,8$  que tornará a resposta do sistema instável. Este

pólo é determinado pela equação (4.32), portanto este sistema só será estável quando for

escolhido  $\zeta$  e  $\omega_n$  que façam  $p_1 > 0$ . Porém ao diminuirmos  $\zeta$  e  $\omega_n$  estaremos alterando a

resposta desejada do sistema, que não terá rigidez suficiente para manter o eixo em

equilíbrio durante aplicação de esforços externos. Isto é, este sistema de controle não é

viável no modelo escolhido.

Vamos escolher um novo modelo para calcular um novo sistema de controle PID estável. Se retirarmos os efeitos da indutância do modelo para cálculo do controle, poderemos ter um controle que estabiliza o sistema, como será provado a seguir. A tensão de controle torna-se diretamente proporcional a corrente, portanto podemos determinar a corrente  $i_1$  como a variável de controle. A corrente do magneto oposto fica determinado por  $i_2 = -i_1$ .

O novo modelo  $G_p$  é baseado no sistema (4.7), porém com a corrente no circuito do eletroímã  $i_1$  como entrada e a posição do eixo  $x$  como saída:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_x}{m_1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_x}{m_1} \end{bmatrix} i_1 \quad y = [1 \ 0] \mathbf{x}_1 \quad \text{onde } \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Temos então uma redução da ordem do modelo, pois a corrente passou a ser a variável de controle e a tensão no magneto fica definida por:  $u = R \cdot i$ .

A função de transferência do sistema  $G_p$  é facilmente calculada a partir de (4.35):

$$G^p(s) = \frac{X(s)}{I(s)} = \frac{\frac{k_x}{m_1}}{s^2 - \frac{k_x}{m_1}} \quad (4.36)$$

onde  $X(s)$  é a transformada de Laplace de  $x$  e  $I(s)$  é a transformada de Laplace de  $i$ .

Os pólos de  $G_p$  são  $+46,6$  e  $-46,6$ , portanto o sistema é instável. Vamos projetar um sistema de controle PID para este modelo.

O sistema de controle PID é definido por:

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + 20\zeta\omega_n) = 0 \quad (4.41)$$

A equação característica do sistema (4.40) deverá ser:

10 20 vezes mais à esquerda que os pólos dominantes.

posicionado de modo a não interferir na resposta do sistema, portanto vamos posiciona-

resposta será semelhante a um sistema de segunda ordem. O terceiro pólo deve ser

Vamos impor que o sistema desejado tenha 2 pólos dominantes, deste modo a

portanto o sistema é de terceira ordem e possui 3 pólos.

$$s^3 - K_3 \frac{m_1}{k_1} s^2 - \left( K_2 \frac{m_1}{k_1} + \frac{m_1}{k_x} \right) s - K_1 \frac{m_1}{k_1} \quad (4.40)$$

O polinômio característico do sistema é:

Vamos usar a imposição de pólos para definir a resposta desejada no sistema.

$$G(s) = \frac{s^3 - K_3 \frac{m_1}{k_1} s^2 - \left( K_2 \frac{m_1}{k_1} + \frac{m_1}{k_x} \right) s - K_1 \frac{m_1}{k_1}}{-\frac{m_1}{k_1} (K_3 s^2 + K_2 s + K_1)} \quad (4.39)$$

Incluindo a realimentação unitária, teremos:

$$G_0(s) = \frac{s^3 - \frac{m_1}{k_x} s}{-\frac{m_1}{k_1} (K_3 s^2 + K_2 s + K_1)} \quad (4.38)$$

então, de (4.36) e (4.37):

$$G_0(s) = G_c(s) G_p(s)$$

O sistema formado pela planta mais o controle pode ser representado por:

$$G_c(s) = \frac{s}{K_1 + K_2 + K_3 s} \quad (4.37)$$

Tabela 4.3: Ganhos do sistema de controle PID

Parâmetro	Valor	unidade
$K_3$	356	-
$K_2$	$2,86 \cdot 10^4$	-
$K_1$	$1,48 \cdot 10^6$	-

$$K_3 = -\frac{k_1}{m_1} (225 \omega_n)$$

$$K_2 = -\frac{k_1}{m_1} (\omega_n^2 + 405 \omega_n^2) - \frac{k_x}{k_x} \quad (4.44)$$

$$K_1 = -\frac{k_1}{m_1} (205 \omega_n^3)$$

De (4.43) e (4.42) em (4.40):

$$\begin{cases} a_3 = 205 \omega_n^3 \\ a_2 = \omega_n^2 + 405 \omega_n^2 \\ a_1 = 225 \omega_n \end{cases} \quad (4.43)$$

então, de (4.41) em (4.42):

$$\phi(s) = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 \quad (4.42)$$

acomodação teremos um polinômio característico do sistema desejado:

(4.16), isto é, determinando a resposta adotando um sobre-sinal e um tempo de

Determinando a posição dos polos de modo equivalente às equações (4.12) à



A posição dos polos do sistema (4.39) é apresentada na figura 4.7 e o valor dos

ganhos está na tabela 4.3 calculados a partir da resposta esperada definida por  $M_p = 0,1$

e  $t_s = 0,1s$ . Os polos encontrados são:  $-800 \pm 54,6j$  portanto os polos estão

alocados como desejado. Espera-se que o modelo do mancal magnético responda de

forma estável e próxima ao desejado, embora a indutância não esteja sendo levada em

consideração no cálculo dos ganhos do controle PID.

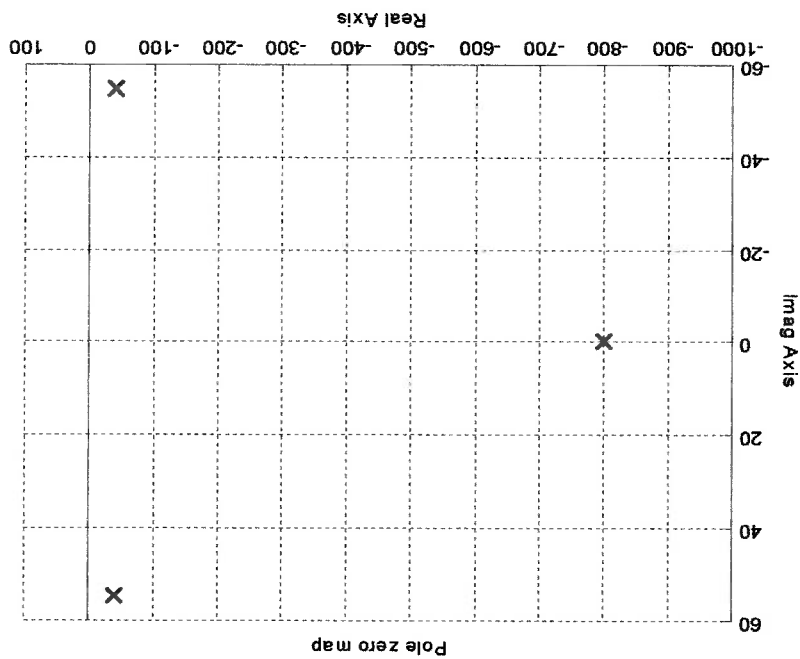


Figura 4.7: Posição dos polos do sistema (4.39), com controle PID.

Da mesma forma que o controle por realimentação de estado, a tensão  $u$  será

limitada entre 0 e 20 V para manter o sistema viável em laboratório. A corrente de

controle pode ser transformada em tensão de controle para o modelo do Mancal por

meio da relação:  $u = R \cdot i$ .

## 4.2. Linearização por Transformação Global

A Linearização Global é um método de linearização de sistemas de equações que leva em conta não só a vizinhança de um ponto de equilíbrio considerado, mas todo o espaço compreendido pelo sistema não linear. Embora não sirva para todos os tipos de equações não lineares, este método pode ser utilizado para encontrar um algoritmo de controle para o mancal magnético que leva em consideração características não lineares da força magnética, da indutância e vibrações do eixo, entre outros.

Segundo Freddy Pérez [20], a geometria diferencial é usada como ferramenta matemática para obter, mediante transformação das coordenadas nos espaços de estado e de controle, um sistema linear equivalente. Uma realimentação de estados pode ser calculada utilizando a poderosa teoria de controle linear existente, e incorporada no sistema não-linear original, por meio de uma transformação inversa.

Para efeito de cálculo do controle, o sistema (3.4) foi dividido em dois sistemas dinâmicos independentes: o Sistema 1 compreende um magneto e eixo (Figura 7.3 no apêndice 7.4), o Sistema 2 compreende o outro magneto e eixo. Deste modo teremos sistemas de controle independentes para cada eletroímã. Então:

$$\text{Sistema 1: } \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = v \\ v = -\frac{K_o \cdot (I_1 + i_1)^2}{F_e} + \frac{2 \cdot m_1 \cdot (h+x)^2}{m_1} \\ \frac{dh_1}{dt} = \left[ \frac{K_o + L_p}{(h+x)} \right] \cdot \left[ U_1 + n_1 + \left( \frac{K_o \cdot v}{(h+x)^2} - R_1 \right) \cdot (I_1 + i_1) \right] \end{array} \right. \quad (4.45a)$$

As condições necessárias e suficientes para que exista a transformação global são:

vizinhança aberta  $U$  da origem, com  $f(0) = 0$ .

onde  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $n \in \mathfrak{R}$ ,  $f$  e  $g$  são campos vetoriais suaves, definidos sobre uma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.46)$$

Considere o sistema não-linear:

controle não linear aplicável em sistemas não-lineares.

variáveis do controlador retornam às originais, obtendo deste modo um sistema de disponíveis para sistemas lineares. Então, mediante uma transformação inversa, as ao Sistema 1. O sistema de controle é calculado para o Sistema T conforme os métodos pelo sistema linear T nas variáveis  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$ , criando o sistema linear correspondente linear, da seguinte maneira: converte-se o sistema não-linear nas variáveis reais  $x$ ,  $v$  e  $t$  satisfeitas. Então faremos a transformação de variáveis de modo a tornar o sistema inicialmente iremos verificar se as condições para aplicação do método são um eletroímã  $n_1$  e a tensão de controle no eletroímã oposto  $n_2$ .

oposição com sistemas de controle independentes. Foi definida a tensão de controle em meio eixo em apenas uma direção, para observar o desempenho dos eletroímãs em Nas simulações foi considerada inicialmente a dinâmica de um mancal suportando

$$\text{Sistema 2: } \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = v \\ v = \frac{K_o \cdot (I_2 + i_2)^2}{F_e} + \frac{2m_1 \cdot (h-x)^2}{m_1} \\ \frac{di_2}{dt} = \left[ \frac{K_o + L_p(h-x)}{(h-x)} \right] \cdot [U_2 + n_2 + \left( \frac{-K_o \cdot v}{(h-x)^2} - R_2 \right) \cdot (I_2 + i_2)] \end{array} \right. \quad (4.45b)$$

1. A matriz de controlabilidade  $\begin{bmatrix} g, (ad^0_f, g), (ad^1_f, g), \dots, (ad^{n-1}_f, g) \end{bmatrix}$  é não-singular

(vide equação 7.7 no apêndice 7.2);

2. O conjunto de campos vectoriais  $\{g, (ad^0_f, g), (ad^1_f, g), \dots, (ad^{n-2}_f, g)\}$  é involutivo

(vide equação 7.8 no apêndice 7.2).

Para construir as equações da transformação que lineariza globalmente o sistema,

é necessário resolver o seguinte sistema de equações diferenciais parciais (vide equação

7.5 no apêndice 7.2):

$$\langle dT_i, g \rangle = 0 \quad (4.47)$$

$$\langle dT_i, f \rangle = T_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4.48)$$

$$\langle dT_n, f + n g \rangle = T_{n+1} = V \quad (4.48)$$

A transformação fica totalmente determinada encontrando  $T_1$  tal que  $T_1(0) = 0$  e:

$$\begin{aligned} \langle dT_k, (ad^k_f, g) \rangle &= 0 \\ \langle dT_k, (ad^{n-k}_f, g) \rangle &\neq 0 \end{aligned} \quad k = 0, 1, \dots, n-2 \quad (4.49)$$

Determinando  $V = f(u)$  fica também determinada a transformação inversa  $u = f(V)$

e consequentemente  $u = f(x)$  não-linear.

#### 4.2.1. Projeto do Sistema de Controle Não-Linear

Vamos aplicar este método no Sistema 1 (4.45a) do mancal magnético,

inicialmente.

Para facilitar o cálculo fazemos uma mudança de variáveis:

$$X_1 = h + x_1$$

$$X_2 = v_1$$

$$X_3 = I_1 + i_1$$

$$U = U_1$$

$$n = n_1$$

$$M = m_1$$

$$G = g$$

Consideramos para efeito de controle de fluxo magnético:

$$L_p = 0.$$

Então, o Sistema I (4.45a) será:

$$(4.51) \quad \begin{bmatrix} \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{K_0}{K_0} \cdot \frac{2M}{X_2} \cdot \frac{X_2^1}{X_2} + G \\ \frac{K_0}{U} \cdot X_1 + \frac{X_1}{X_2 \cdot X_3} - \frac{K_0}{R} \cdot X_1 \cdot X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_0}{X_1} \end{bmatrix} \cdot n$$

Logo, de (4.45a) e (4.49):

$$(4.52) \quad f(x) = \begin{bmatrix} X_2 \\ -\frac{K_0}{K_0} \cdot \frac{2M}{X_2} \cdot \frac{X_2^1}{X_2} + G \\ \frac{K_0}{U} \cdot X_1 + \frac{X_1}{X_2 \cdot X_3} - \frac{K_0}{R} \cdot X_1 \cdot X_3 \end{bmatrix} \quad e \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_0}{X_1} \\ \frac{K_0}{X_1} \end{bmatrix}$$

A transformação existe se a matriz de controlabilidade é não-singular, isto é:

$$C = [g \mid f, g] [f, g] \neq 0$$

$$\text{onde } [f, g] = \frac{dg}{dx} \cdot f - \frac{df}{dx} \cdot g \quad (\text{vide apêndice 7.3})$$

as equações diferenciais (4.47):

variável de controle  $u$  em  $v$ , para montar um sistema linear. Para isso temos que resolver Segundo o método, transformaremos as variáveis  $X_1, X_2$  e  $X_3$  em  $T_1, T_2$  e  $T_3$ , e a por  $\{g, (ad_{f,g})\}$  é evidentemente involutivo (vide apêndice 7.3).

A segunda condição é verificada, pois o conjunto de campos vetoriais definidos

então o sistema é controlável se  $\begin{cases} X_3 \neq 0 \\ X_1 \neq \infty \end{cases}$ .

$$Det \begin{bmatrix} 0 & \frac{M \cdot X_1}{X_3} & \frac{K_0 \cdot M}{K_3} \\ 0 & \frac{M \cdot X_1}{X_3} & \frac{K_2}{R \cdot X_2} \\ \frac{K_0}{X_1} & \frac{K_2}{R \cdot X_1} & \frac{K_3}{R \cdot X_1} + \frac{K_2}{R} \cdot X_1 \cdot X_2 - \frac{M \cdot X_1}{X_3} \end{bmatrix} = -\frac{K_0 \cdot M^2 \cdot X_1}{X_3} \neq 0$$

portanto:

$$[f, [f, g]] = \begin{bmatrix} \frac{M \cdot X_1}{X_3} \\ \frac{K_0 \cdot M}{U} \\ \frac{K_3}{R \cdot X_1} + \frac{K_2}{R} \cdot X_1 \cdot X_2 - \frac{M \cdot X_1}{X_3} \end{bmatrix}$$

$$[f, g] = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{M \cdot X_1}{X_3} \\ \frac{K_0}{R} \cdot X_2 \end{bmatrix}$$

$$(4.58) \quad \frac{dT_1}{dX_1} \cdot X_2 = T_2 = T_2 = X_2$$

Então, de (4.54):

$$(4.57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dT_1}{dX_1} = \frac{dT_2}{dX_2} = \frac{dT_3}{dX_3} = 0 \\ \frac{dT_1}{dX_1} \cdot \frac{dX_1}{M \cdot X_1} \neq 0 \end{array} \right. \text{ De (4.53), (4.55) e (4.56): então é solução : } T_1 = X_1$$

Resolvendo as equações:

$$(4.56) \quad \langle dT_1, ad_2^f(g) \rangle \neq 0 \Rightarrow -\frac{dT_1}{dX_1} \cdot \frac{dX_1}{M \cdot X_1} \neq 0$$

$$(4.55) \quad \langle dT_1, ad_1^f(g) \rangle = 0 \Rightarrow \frac{dT_1}{dX_1} \cdot \frac{dX_1}{M \cdot X_1} = 0 \Rightarrow \frac{dT_1}{dX_1} = 0, \text{ desde que } X_3 \neq 0$$

a solução fica determinada se incluirmos as equações (4.49):

$$(4.54) \quad \begin{aligned} \langle dT_1, f \rangle = T_2 &\Rightarrow \frac{dT_1}{dX_1} \cdot X_2 - \frac{2M}{K_0} \cdot \frac{dX_1}{dX_2} \cdot \frac{dT_1}{dX_2} = T_2 \\ \langle dT_2, f \rangle = T_3 &\Rightarrow \frac{dT_2}{dX_2} \cdot X_2 - \frac{2M}{K_0} \cdot \frac{dX_2}{dX_3} \cdot \frac{dT_2}{dX_3} + G \cdot \frac{dX_2}{dX_3} = T_3 \\ \langle dT_3, f + g \rangle = T_4 &\Rightarrow \frac{dT_3}{dX_3} \cdot X_2 - \frac{2M}{K_0} \cdot \frac{dX_3}{dX_2} \cdot \frac{dT_3}{dX_2} + G \cdot \frac{dT_3}{dX_3} + \\ &+ \frac{dT_3}{dX_3} \cdot \left( \frac{U}{K_0} \cdot X_1 + \frac{X_1}{K_2 \cdot X_3} - \frac{K_0}{R} \cdot X_1 \cdot X_3 + \frac{K_0}{X_1} \cdot n \right) = V \end{aligned}$$

e as equações (4.48), já considerando as (4.53):

$$(4.53) \quad \begin{aligned} \langle dT_1, g \rangle = 0 &\Rightarrow \frac{dT_1}{dX_1} \cdot \frac{dX_1}{X_1} \cdot \frac{K_0}{K_0} = 0 \Rightarrow \frac{dT_1}{dX_1} = 0 \\ \langle dT_2, g \rangle = 0 &\Rightarrow \frac{dT_2}{dX_2} \cdot \frac{dX_2}{X_1} \cdot \frac{K_0}{K_0} = 0 \Rightarrow \frac{dT_2}{dX_2} = 0 \\ \langle dT_3, g \rangle \neq 0 &\Rightarrow \frac{dT_3}{dX_3} \cdot \frac{dX_3}{X_1} \cdot \frac{K_0}{K_0} \neq 0 \Rightarrow \frac{dT_3}{dX_3} \neq 0 \end{aligned}$$

Os parâmetros de controle  $K$  para o sistema linear  $T$  são projetados pelo método de espaço-de-estado: via imposição de polos. Definimos a equação característica desejada para o sistema e calculamos  $K$  usando a Fórmula de Ackermann, como calculado para encontrar os ganhos da realimentação de estados no capítulo 4.1.1.

Desta forma podemos encontrar um controle ideal para o sistema usando os métodos convencionais para sistemas lineares. Definimos os parâmetros de controle  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$ , para que a resposta do sistema seja mais rápida e mais econômica possível.

(4.63)

$$V = -[K_1 \quad K_2 \quad K_3] \cdot T$$

$$\text{onde } T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \text{ e}$$

(4.62)

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot T + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot V$$

O sistema linearizado  $T$  é descrito por:

(4.61)

$$V = \frac{MX_1}{X_3} \cdot (RX_3 - U - n)$$

portanto, de (4.57) a (4.59) em (4.60):

(4.60)

$$\left( \frac{dT_3}{dT} \cdot \frac{dX_3}{dT} \cdot \frac{K_0}{U} \cdot X_1 + \frac{X_1}{X_3} \cdot \frac{K_0}{R} - \frac{K_0}{R} \cdot X_1 \cdot X_3 + \frac{X_1 \cdot X_3}{X_1 \cdot X_3} + \frac{K_0}{X_1} \cdot n \right) = V$$

(4.59)

$$T_3 = -\frac{2M}{K_0} \cdot \frac{X_2^1}{X_3^1} + G$$

$$T_4 = \frac{dX_3}{dT} \cdot X_2 - \frac{2M}{K_0} \cdot \frac{X_2^1}{X_3^1} \cdot \frac{dX_3}{dT} +$$



(4.65)

$$\mathbf{K} = [K_1 \ K_2 \ K_3]$$

o sistema fica definido por:

Usando (4.19) em (4.20) e (4.9) e (4.20) em (4.21), o ganho de realimentação do

$$\zeta = 0,5912$$

$$\omega_n = 67,66 \text{ rad/s}$$

Então, de (4.13) e (4.14):

$$t_s = 0,1 \text{ seg.}$$

$$M_p = 0,1 \text{ (10\%)}$$

peça tensão máxima de 20 V, aqui também determinamos:

Para uma resposta rápida do sistema sem extrapolar o limite de energia definido

linearizado por transformação global são as (4.11) às (4.21).

equações usadas aqui para cálculo dos ganhos de realimentação para o sistema

O procedimento a seguir é idêntico ao usado no capítulo 4.1.1, portanto as

O posto de  $\mathbf{M}$  é 3, portanto a imposição de polos é possível.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

posto da matriz de controlabilidade  $\mathbf{M}$  deve ser 3, como em (4.10):

Inicialmente devemos verificar se é possível a imposição de polos arbitrária. O

portanto é um sistema linear de 3ª ordem (tem 3 raízes).

(4.64)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

O sistema  $\mathbf{T}$  é descrito dinamicamente por (4.62) e (4.63), então:

Tabela 4.4: Ganhos do sistema de Controle Não-Linear

Parâmetro	Valor	unidade
$K_1$	$3,66 \cdot 10^6$	-
$K_2$	$6,86 \cdot 10^4$	-
$K_3$	-880	-

desde que  $(l_2 + i_2) \neq 0$ .

$$n_2 = \frac{m_1 \cdot (h - x_1)}{(l_2 + i_2)} \cdot [K_1 \cdot x_1 + K_2 \cdot y_1 + K_3 \cdot g] + K_3 \frac{2(h - x_1)}{K_0(l_2 + i_2)} - R(l_2 + i_2) + U_2 \quad (4.67)$$

são verificadas e é fácil deduzir que o controle será descrito por:

Para o Sistema 2 (4.45b) o processo é semelhante. As condições iniciais também

desde que  $(l_1 + i_1) \neq 0$

$$n_1 = \frac{m_1(h + x_1)}{(l_1 + i_1)} [K_1 x_1 + K_2 y_1 + K_3 g] - K_3 \frac{2(h + x_1)}{K_0(l_1 + i_1)} + R(l_1 + i_1) - U_1 \quad (4.66)$$

(4.45a) fica descrito como:

Retornando às variáveis do modelo, o algoritmo de controle para o Sistema 1

$$n = \frac{M \cdot X_1}{X_3} \cdot \left( K_1 \cdot X_1 + K_2 \cdot X_2 + K_3 \cdot \left( \frac{2M \cdot X_2}{K_0 \cdot X_3} + G \right) \right) + R \cdot X_3 - U$$

$$\frac{M \cdot X_1}{X_3} \cdot (R \cdot X_3 - U - n) = -[K_1 \quad K_2 \quad K_3] \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

O controle para o sistema não linearizado será calculado de (4.61) em (4.63):

Vamos impor um limite mínimo para a tensão  $U + n = 0,01$  de modo a limitar a corrente mínima  $I_{min} = 0,01$  em cada eletroímã para que  $F_{mag} > 0$ , assim os magnetos estarão trabalhando alternadamente e a condição  $(I_1 + I_2) \neq 0$  será satisfeita. Deste modo evitaremos forças opostas devido a correntes negativas no eletroímã. A resposta do controle pode ser ligeiramente alterada por esta imposição, mas é necessária, pois correntes negativas no eletroímã causam forças magnéticas positivas não esperadas pelo controle. Além disso, se for incluído este efeito no modelo, o cálculo do sistema de controle torna-se impossível. Deve-se levar em conta também que existem inúmeras soluções para as equações diferenciais (4.53) a (4.56), portanto a solução encontrada não é única. Futuramente pode-se testar outros algoritmos de controle baseados no mesmo método, podendo obter desempenhos melhores.

Embora o sistema de controle calculado pelo método da linearização global não esteja restrito às vizinhanças de um ponto de operação e embora leve em consideração as não-linearidades do sistema, existem algumas desvantagens quanto à utilização deste método. Segundo Freddy [20], e como pudemos verificar neste exemplo:

1. As condições para a existência da transformação global são muito restritivas e de difícil verificação manual. Neste projeto as condições de existências foram satisfeitas, porém exigiu assistência por computador (software Matlab v.5.31 - toolbox Symbolic) ;
2. A resolução da transformação envolve solução de equações diferenciais parciais lineares, que podem não admitir solução exata ou exigir solução numérica complexa (neste projeto a solução não é exata, deixando margem a alterações durante simulações);

3. O domínio da transformação pode estar limitado às vizinhanças de um ponto de operação, onde o uso de um controlador não-linear não compensaria (neste projeto as limitações são valores singulares da corrente e da posição do rotor);
4. A lei de controle resultante pode ser complexa demais para implementação (o que não ocorre neste projeto);
5. A robustez do método só pode ser confirmada por simulação.

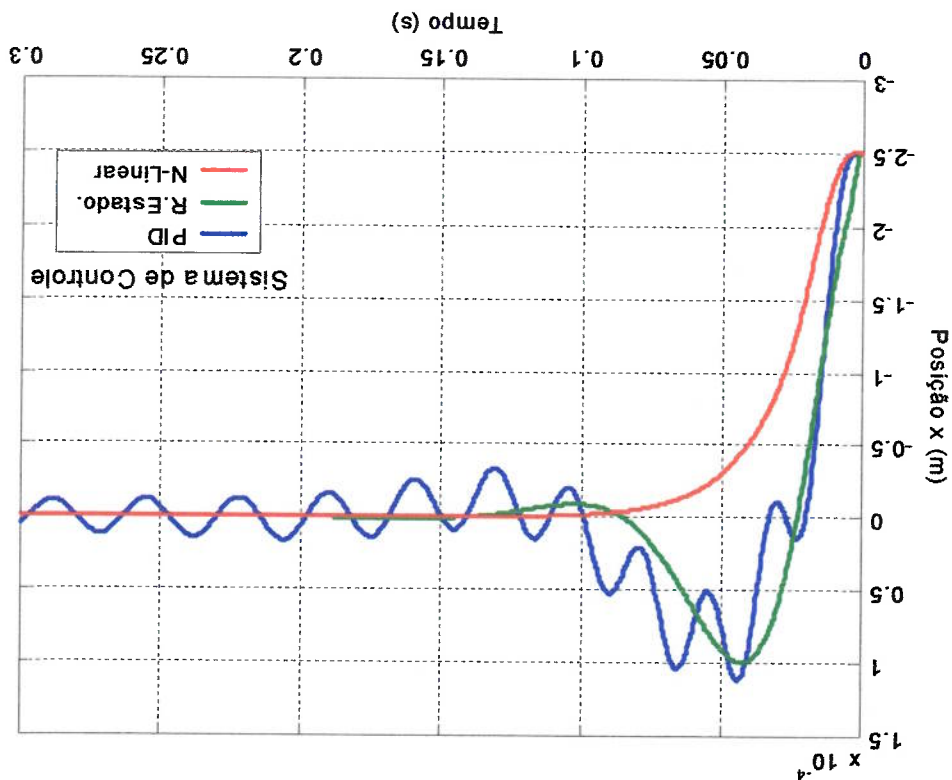
## 5. Simulações

No capítulo 2 foi dimensionado um mancal magnético, no capítulo 3 este foi modelado matematicamente, por meio de espaço de estados. No capítulo 4 foram modelados três sistemas de controle para o mancal. Com o auxílio do programa para computador Matlab, usando o toolbox Simulink especializado em simulações, podemos agora montar o mancal modelado com qualquer sistema de controle e fazer simulações para estudar o comportamento deste em diversas situações de trabalho.

Um exemplo de simulação, que já pode servir comparação entre os sistemas de controle é apresentado na figura 5.1. Trata-se do modelo de dois magnetos de um mancal magnético apoiando uma massa, definido pela equação (3.23) e incluído de um dos sistemas de controle projetado no capítulo 4. A simulação pode ser descrita por um posicionamento do eixo fora do desejado, em 50 % do entreferro, para observar o comportamento do sistema para voltar a posição de equilíbrio. Foram usados os parâmetros do dimensionamento,  $M_p = 10\%$ ,  $t_s = 0,1$  s,  $I_0 = 0,1$  A para os sistemas de controle PID, realimentação de estado e não-linear.

Inicialmente devemos refinar alguns parâmetros do modelo e do controle por meio de simulações. Deste modo poderemos encontrar uma configuração próxima à ótima para cada sistema de controle para que possamos compará-los eficientemente. O primeiro parâmetro a ser otimizado é a pré-corrente  $I_0$ . Este parâmetro deve ser estudado pois influencia o modelo e consequentemente a velocidade de resposta do sistema de modo diferente conforme o sistema de controle utilizado. Posteriormente iremos estudar os efeitos de alterações da resposta desejada do mancal, alterando o tempo de acomodação  $t_s$  exigido, e explorar até quais condições o mancal é capaz de manter o eixo estável ou com desempenho aceitável. A presença da corrente  $I_p$  também altera o cálculo do controle e a influência na resposta do sistema, porém pode-se considerar que

**Figura 5.1:** Resposta da posição do eixo ao seu degraú de posição(degraú de posição) com controle PID, controle por Realimentação de Estado e Controle Não-Linear.



posição do eixo.

cada termo seria 50 % do valor de  $J_0$ , no caso de máxima tensão no circuito e máxima posição ou da energia. Neste índice de desempenho, foram escolhidos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  tais que coeficientes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  podem ser determinados de modo a valorizar mais o aspecto da que determina o desempenho conjunto em manter a posição economizando energia. Os

$$J_0 = \alpha_1 J_x + \alpha_2 J_n$$

possível. Desempenho geral:

que determina o desempenho do sistema em utilizar a menor quantidade de energia

$$J_n = \int (U_1 + u_1)^2 dt + \int (U_2 + u_2)^2 dt$$

Desempenho da energia utilizada:

que determina o desempenho do sistema em manter o rotor na posição desejada.

$$J_x = \int x^2 dt$$

Desempenho de posição do eixo:

energia que seria necessária para isso. Deste modo teremos:

medirá a capacidade do mancal em manter o eixo na posição próxima a desejada e a índice de desempenho da resposta do sistema sujeito às forças externas  $F_e$ . Este índice A escolha do melhor valor do parâmetro para o sistema é feita utilizando um com um valor da pré-corrente equivalente à da corrente  $I_p$ .

magnetos opostos. Deste modo sua dinâmica é estudada quando o mancal é simulado causa o mesmo comportamento no eixo que a presença de pré-correntes nos dois valor, pois a força de gravidade em oposição à força magnética devido a corrente  $I_p$  seus efeitos sejam semelhantes à presença de uma pré-corrente no magneto de mesmo

O parâmetro  $I_0$  é inicialmente determinado analisando a resposta do sistema

sujeito a duas situações: capacidade de posicionar o eixo a partir de uma posição inicial diferente do equilíbrio, aqui denominado resposta ao degrau da posição (variável  $x$ ), e capacidade de manter o eixo próximo à posição desejada quando sujeito a forças cíclicas causadas pela descentralização do centro de massa do eixo em rotação, denominada resposta à vibração. Durante a determinação dos parâmetros foi analisada a dinâmica de um mancal que sustenta o eixo em apenas uma direção, portanto entende-se que o sistema é definido pelas equações (3.23) além do sistema de controle em estudo.

Considera-se, para todas as simulações, que os magnetos estão inclinados radialmente em 45 graus, portanto os eixos  $x$  e  $y$  não são vertical e horizontal, pois estão inclinados como os magnetos, e o peso do eixo é sustentado pelos dois magnetos superiores.

A figura 5.2 apresenta a trajetória do centro do eixo em relação ao centro do entreferro ( $x = 0$ ) do mancal com sistema de controle PID, considerando  $M_p = 10\%$ ,  $t_s = 0,2$  s e  $I_0 = 0,05$  A, a partir da posição inicial do eixo correspondente a metade do entreferro ( $h_g = 0,5$  mm). Foi usado o modelo descrito pela equação (3.23) simulando 0,4 s em 1.000 pontos (2,5 KHz), não foram incluídas as forças externas devido ao desbalanceamento  $F^{exc}$  e a força de trabalho  $f_a$  para simular a situação de partida do sistema. Na figura 5.2 temos a variação no tempo da tensão elétrica no magneto.



Figura 5.3: Resposta da tensão no magneto ao degra de posição.

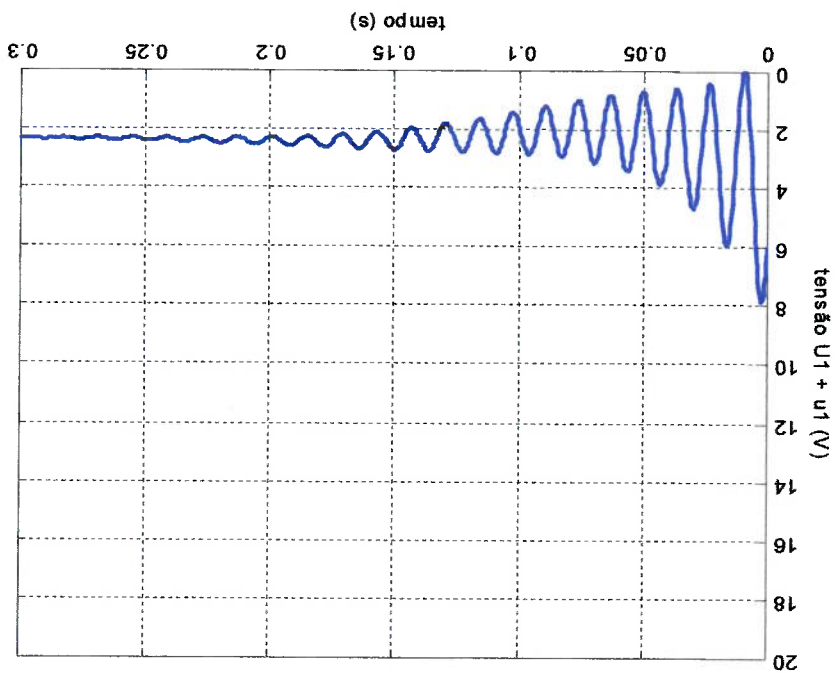
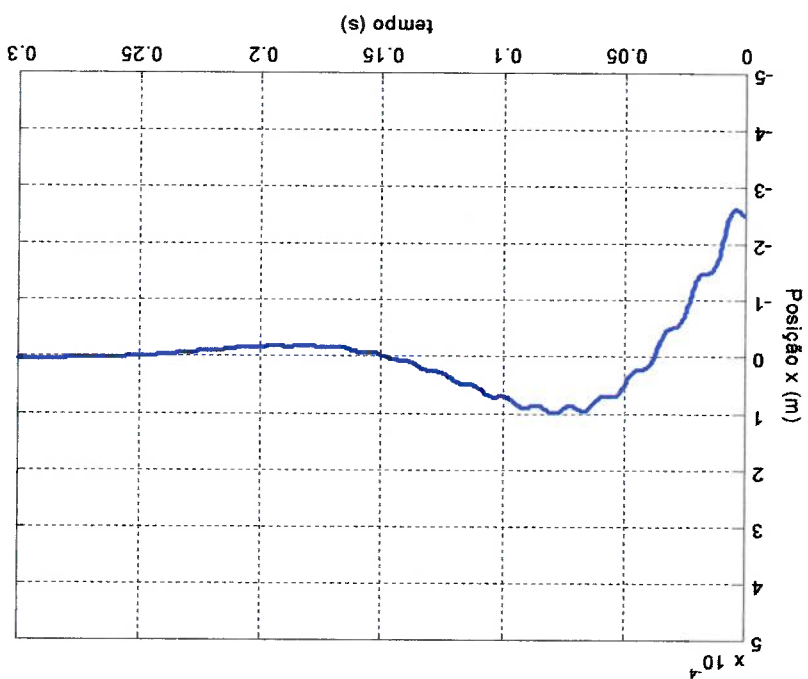


Figura 5.2: Resposta da posição do eixo ao seu degra de posição com controle PID. Entreferro  $h_g = 5 \cdot 10^{-4}$  m;  $t_s = 0,2$  s;  $M_p = 10\%$ ;  $I_0 = 0,05$  A.



Pode-se notar que a resposta do sistema é próxima a resposta esperada pelo

projeto, porém é ligeiramente oscilatória devido à indutância do magneto.

Para este tipo de simulação foi determinado que os parâmetros:

$$\alpha_1 = 10^5 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = 10^{-5}$$

traduzem um valor para o índice de desempenho adequado, dando maior importância à

variação da posição em relação ao desejado, pois a energia máxima que um par de

magnetos pode gastar é baixa (cerca de 40 W) em relação aos efeitos da vibração no

eixo. Estes parâmetros do índice dependem da aplicação e do equipamento no qual o

eixo suportado pelo mancal é utilizado. Na simulação anterior o desempenho da

resposta é:

$$J_x = 4,69 \cdot 10^{-6}; \quad J_n = 7,0 \cdot 10^3 \quad \text{e} \quad J_\theta = 4,76.$$

Outra situação relevante para estudo é quando o eixo em rotação é submetido a

forças cíclicas devido ao seu desbalanceamento. A partir de um estado inicial de

equilíbrio, pode-se estudar a resposta do sistema quando o eixo passa a girar em

diversas velocidades, até a frequência de trabalho  $f = 2000$  rpm (simulação da resposta à

vibração). A figura 5.4 apresenta a resposta da posição do eixo desbalanceado (centro

de massa do eixo dista  $R_{exc}$  do centro geométrico) girando a frequência de  $f = 1800$  rpm,

com  $t_s = 0,2$  s;  $I_0 = 0,05$  A; sistema de controle por Realimentação de Estados; tempo de

simulação  $t_{max} = 0,2$  s em 1000 pontos. Não foi considerada a força de trabalho  $F_a$ . a

figura 5.5 apresenta a variação da tensão no magneto durante a simulação, que tem

relação direta com a energia utilizada pelo sistema.

Figura 5.5: Resposta da tensão no magneto às forças de vibração a 1800 rpm.

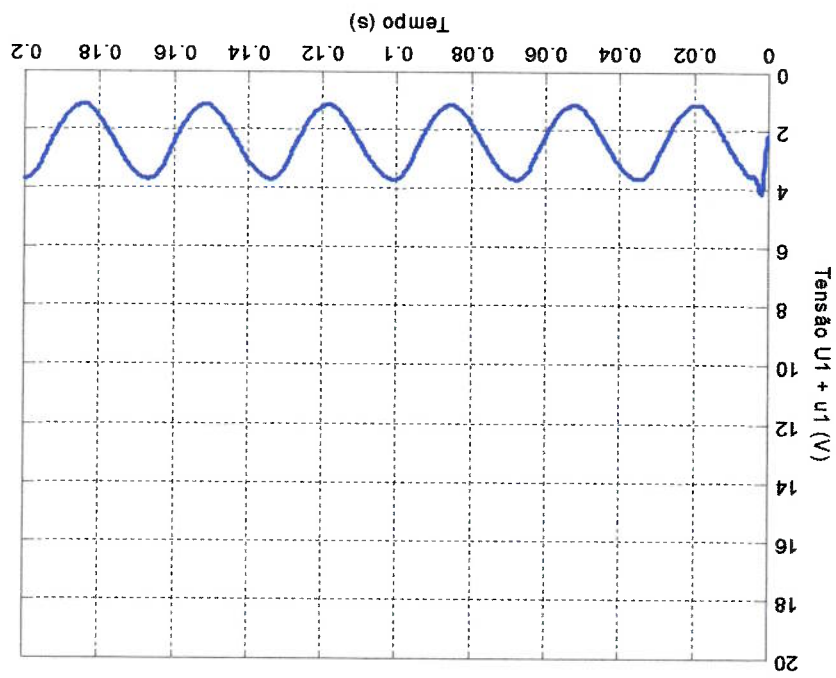
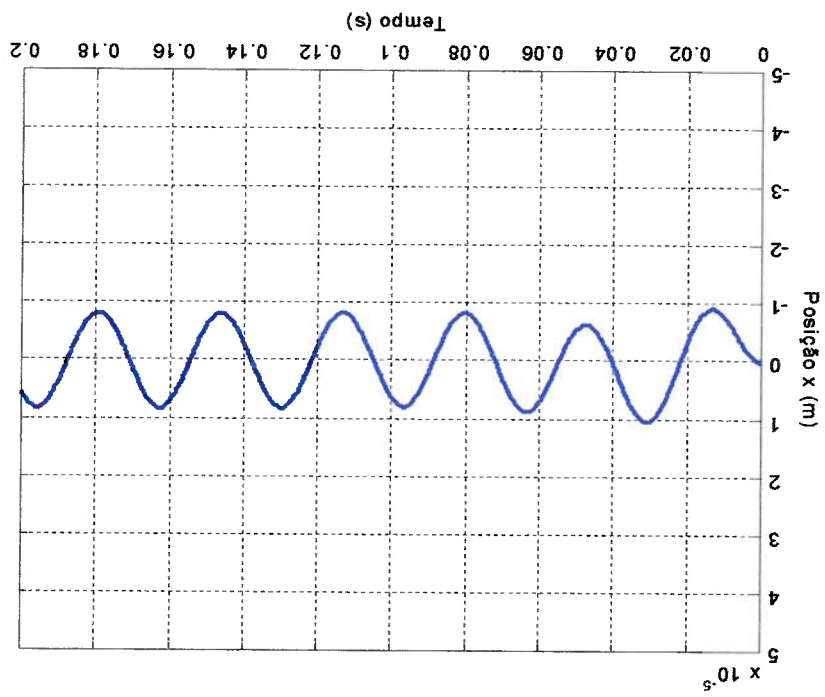


Figura 5.4: Resposta da posição do eixo às forças de vibração a 1800 rpm.



A resposta é oscilatória, porém mantém a posição do eixo dentro de uma faixa de

2% do entreferro usando apenas uma tensão de 2 V, os índices de desempenho foram:

$$J_x = 3,5 \cdot 10^{-8}; J_u = 7,2 \cdot 10^3; J_0 = 0,108.$$

Para encontrar a melhor resposta, segundo o desempenho desejado, foram feitas

diversas simulações testando valores da pré-corrente  $I_0$  e verificando o respectivo índice

de desempenho  $J_0$ , em diversas situações de trabalho. A resposta é ótima quando o

índice é mínimo. Para cada simulação a pré-corrente  $I_0$  não só altera o modelo como

também os ganhos de controle que são calculados a partir do modelo, para que a

resposta continue conforme a desejada.

Iremos estudar os efeitos e determinar a melhor pré-corrente, segundo os índices

de desempenho, para cada sistema de controle, por meio de simulações em situações de

trabalho, como: resposta do sistema quando o eixo é posicionado fora do estado

desejado (degrau de posição) e durante aplicação de força devido à rotação do eixo

desbalanceado (vibração). Será verificada a estabilidade do sistema quando a força de

trabalho é aplicada bruscamente e os efeitos da saturação magnética na resposta.

Cada tipo de simulação terá parâmetros semelhantes para todos os sistemas de

controle, exceto quando informado da alteração. A saturação magnética fará parte do

modelo, embora seus efeitos não sejam sentidos porque os valores do fluxo magnético

ficarão na região linear, abaixo da linha de saturação, por enquanto.

O modelo do sistema será o equivalente ao descrito pela equação (3.23), isto é,

apenas um mancal com movimento em uma direção será considerado para o estudo e

determinação do melhor valor de  $I_0$ .

## 5.1. Escolha dos Parâmetros do Controle PID

Na figura 5.6 tem-se os índices de desempenho  $J_0$  para uma faixa de valores de pré-corrente  $I_0$  de 0,02 a 0,45 A, calculado durante a resposta ao posicionamento inicial em 50% do entreferro, usando o controle PID. Foi usado tempo de acomodação conforme o projetado  $t_s = 0,1$  s, tempo de simulação  $T_{max} = 0,3$  s com 1.000 pontos. Não foram incluídas forças externas além do peso do eixo. Os demais parâmetros foram idênticos à simulação anterior.

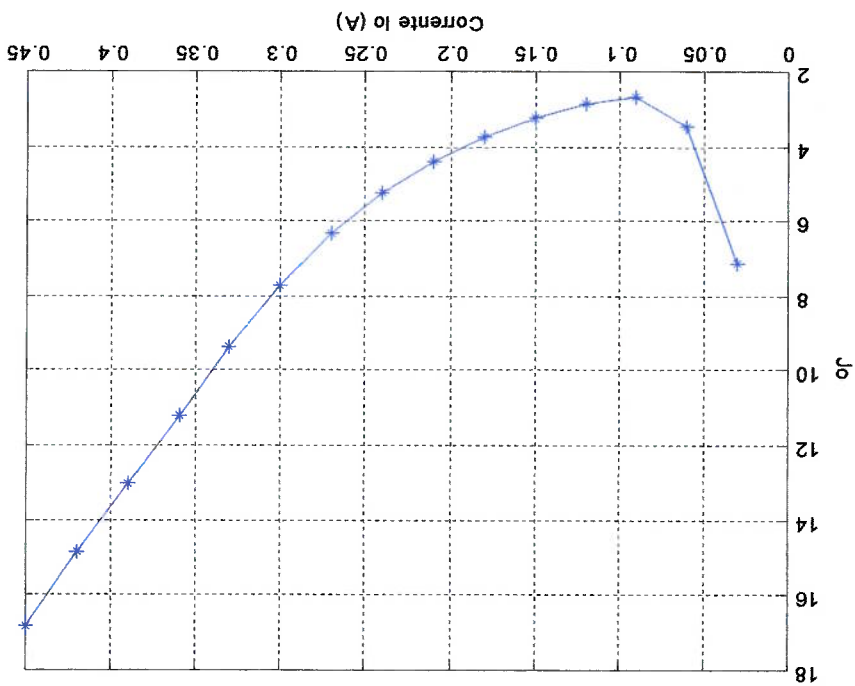


Figura 5.6: Gráfico dos índices  $J_0$  para valores de pré-corrente  $I_0$ , na resposta ao degrau de posição.

Pode-se observar que o índice de desempenho  $J_0$  atinge seu mínimo valor quando a pré-corrente é cerca de  $I_0 = 0,1$  A, portanto este é o melhor valor da pré-corrente neste tipo de situação do mancal.

Na figura 5.7 temos o gráfico do resultado de várias simulações. Em cada ponto

foi feita uma simulação de  $t_{max} = 0,5$  s usando certa frequência constante de rotação do eixo  $f$  entre 125 e 3000 rpm e determinada pré-corrente  $I_0$  entre 0,05 a 0,23 A. Resultou-se numa matriz de índices de desempenho  $J_0$ , onde se pode determinar a curva da pré-corrente  $I_0$  que minimiza  $J_0$  na maior faixa de frequências de rotação, com preferência para a rotação de trabalho (2000 rpm). A posição inicial do sistema foi a de equilíbrio em  $x = 0$ , não foi considerada a força de trabalho e os demais parâmetros são idênticos à simulação anterior. A figura 5.8 apresenta uma região do gráfico em detalhe, ressaltando a curva de mínimo  $J_0$ .

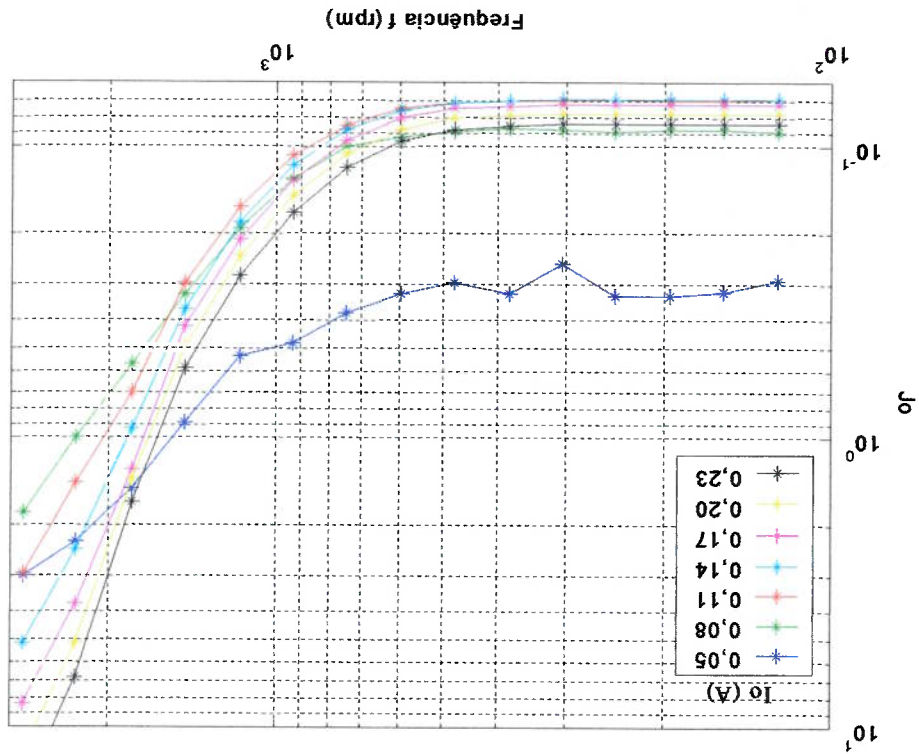
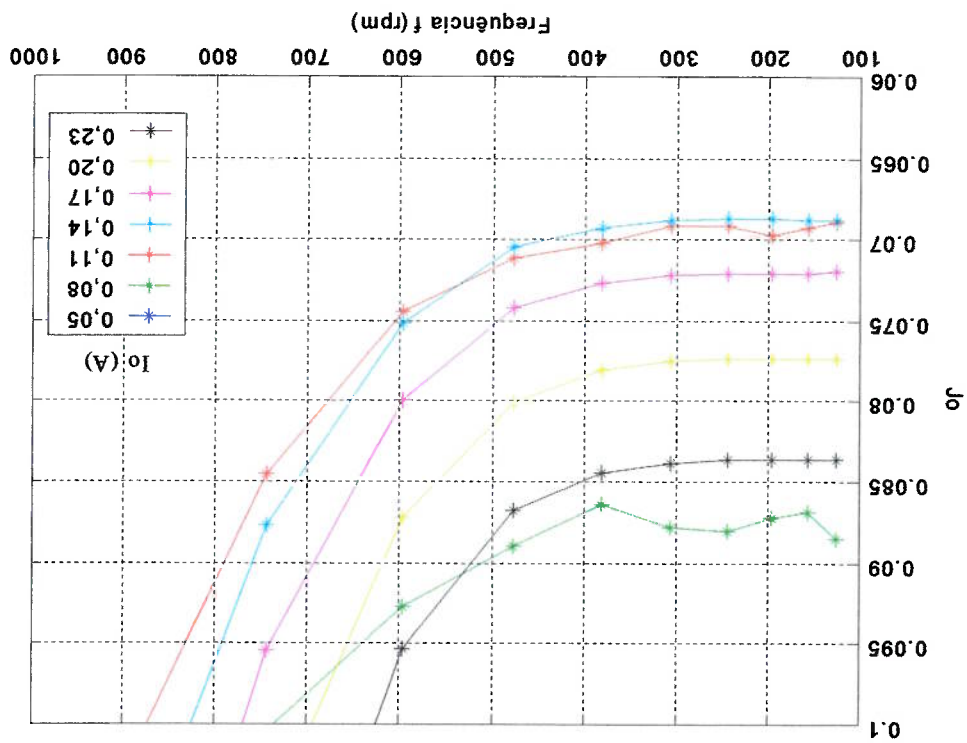


Figura 5.7: Gráfico dos índices  $J_0$  para valores de pré-corrente  $I_0$  na resposta às forças de vibração do eixo numa faixa de frequências.

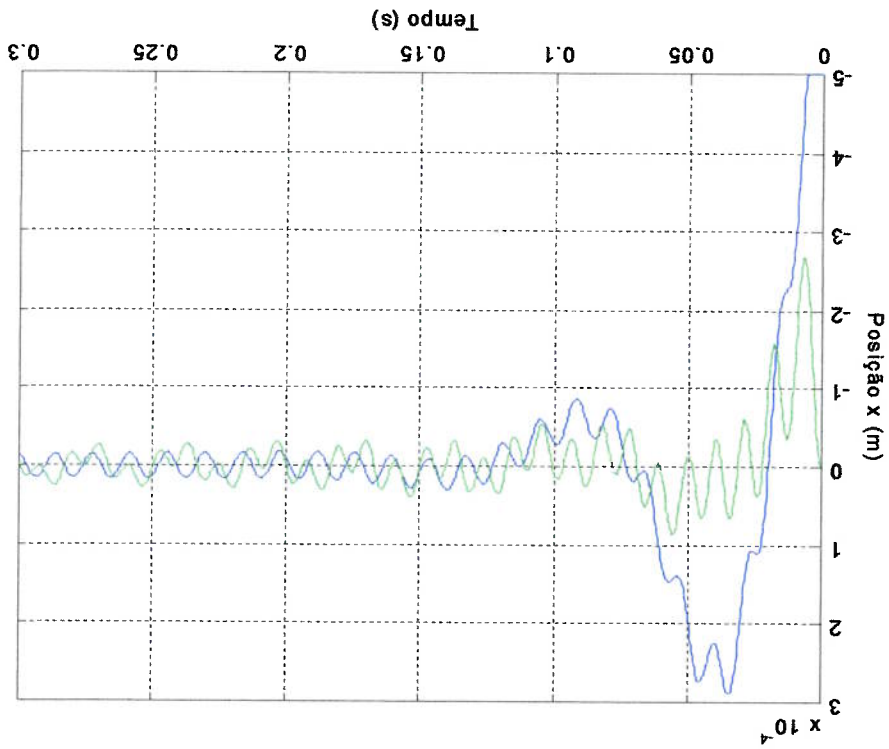
Figura 5.7: Gráfico dos índices  $J_0$  para valores de pré-corrente  $I_0$  na resposta às forças de vibração do eixo numa faixa de frequências.



As melhores respostas em frequências de 600 a 1500 rpm estão na curva  $I_0 = 0,11$  A. Embora em 2000 rpm a melhor resposta é de  $I_0 = 0,08$  A, esta curva tem desempenho muito baixo nas outras frequências, podendo até prejudicar a robustez do sistema, considerando que curvas com picos e rebaixos neste tipo de gráficos indicam que a tensão no magneto chegou no limite de 20 V por algum tempo. Por causa da existência de alguns picos na curva  $I_0 = 0,11$  A vamos considerar  $I_0 = 0,12$  A por precaução.

Na figura 5.8 verificamos que com a pré-corrente escolhida  $I_0 = 0,12$  A o sistema estabiliza em situação de partida sem carga (azul) e em máxima carga aplicada bruscamente, com rotação do eixo  $f = 2200$  rpm e  $F_a = 40$  N (verde).

**Figura 5.8:** Resposta da posição do eixo ao seu posicionamento inicial de partida (azul) e à aplicação brusca de força de trabalho à rotação de 2200 rpm (verde).



Estudando as simulações realizadas, fica determinado para o PID que  $I_0 = 0,12$  A tem o melhor desempenho, pois mesmo não tendo o menor índice na simulação do posicionamento inicial (fig. 5.6), ele tem o melhor desempenho na simulação das forças de vibração, que é mais importante porque é uma situação de trabalho constante do mancal.

Nas figuras 5.9, 5.10 e 5.11 apresentamos a resposta da posição, da corrente e da tensão ao degraude de posição nas figuras 5.12 e 5.13 apresentamos a resposta da posição e tensão quando sujeitas às forças devido à vibração do eixo, usando a pré-corrente escolhida.



Figura 5.10: Resposta da corrente elétrica ao posicionamento inicial em 50% do entreferro com  $I_0 = 0,12$  A.

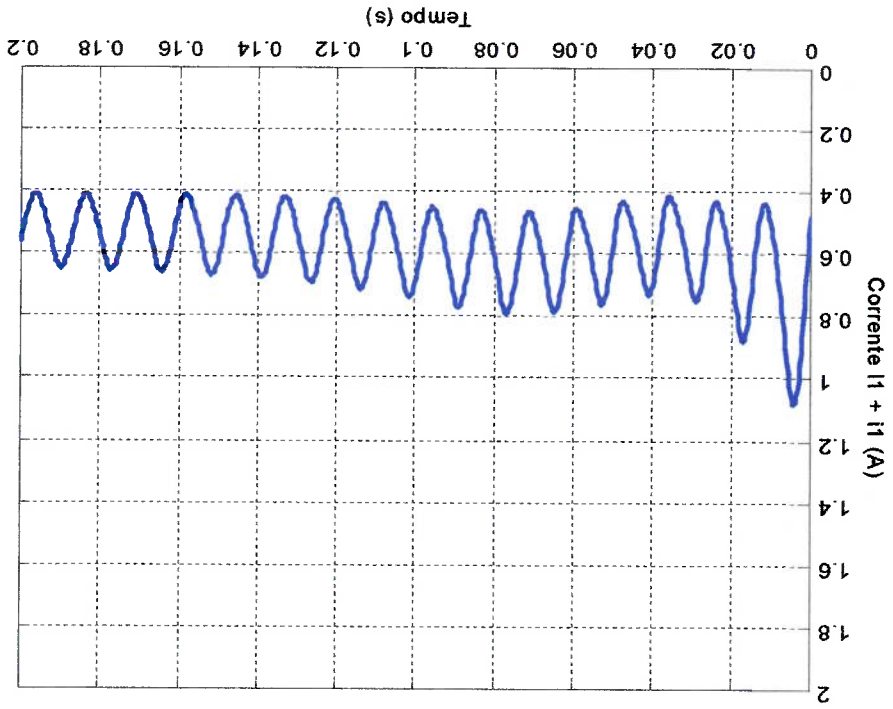


Figura 5.9: Resposta da posição do eixo ao seu posicionamento inicial em 50% do entreferro com  $I_0 = 0,12$  A.

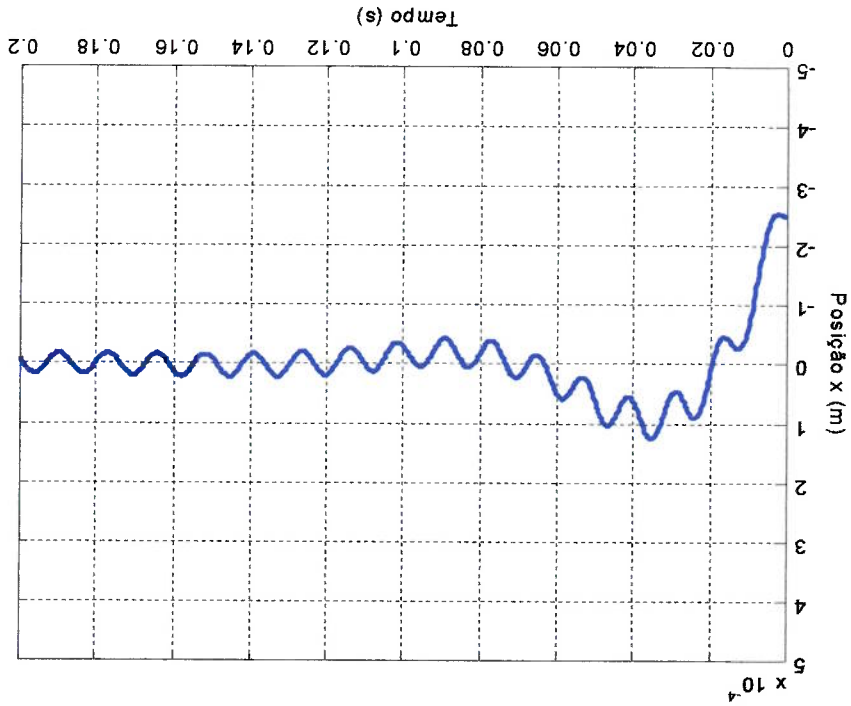


Figura 5.12: Resposta da posição do eixo às forças de vibração a 2200 rpm,  $I_0 = 0,12A$ .

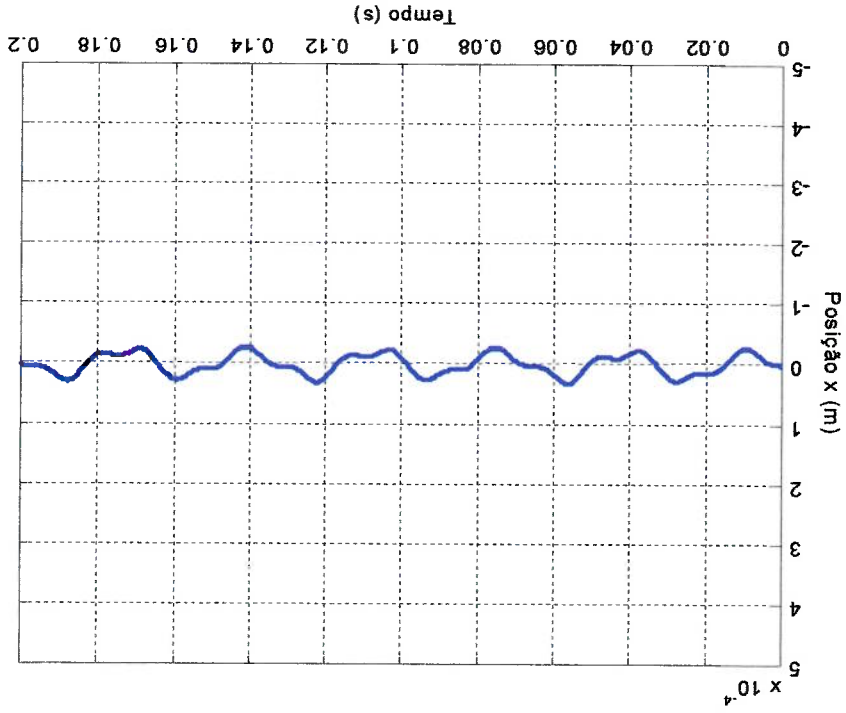
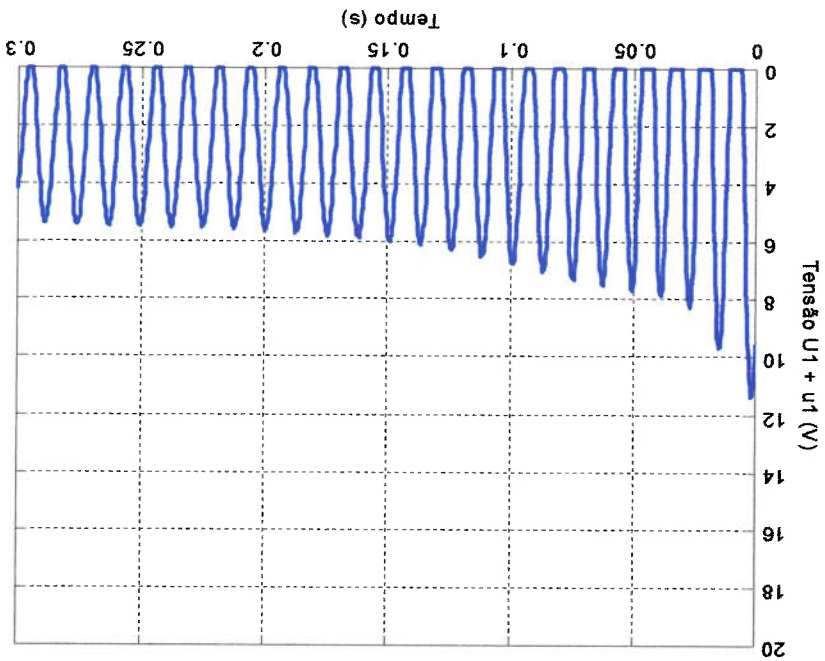


Figura 5.11: Resposta da tensão elétrica ao posicionamento inicial em 50% do entreferro com  $I_0 = 0,12 A$ .



O mesmo processo realizado com o PID será feito para determinar o melhor valor de  $I_0$  no controle por realimentação de estado. Na figura 5.14 vê-se os desempenhos das respostas ao degrau de posição para diversos valores de  $I_0$ , com os mesmos parâmetros usados no PID, porém com o controle por realimentação de estado. Percebe-se neste gráfico que o índice  $J_0$  é minimizado quando a pré-corrente tender a zero, mas na figura 5.15, onde se tem uma visão mais detalhada dos desempenhos até  $I_0 = 0,08$  A, percebe-se um ponto de mínimo próximo a  $I_0 = 0,01$  A, o qual pode ser considerado o melhor valor da pré-corrente neste tipo de simulação com controle por realimentação de estado

## 5.2. Escolha dos Parâmetros do Controle por Realimentação de Estado

Figura 5.13: Resposta da tensão elétrica às forças de vibração a 2200 rpm,  $I_0 = 0,12$ A.

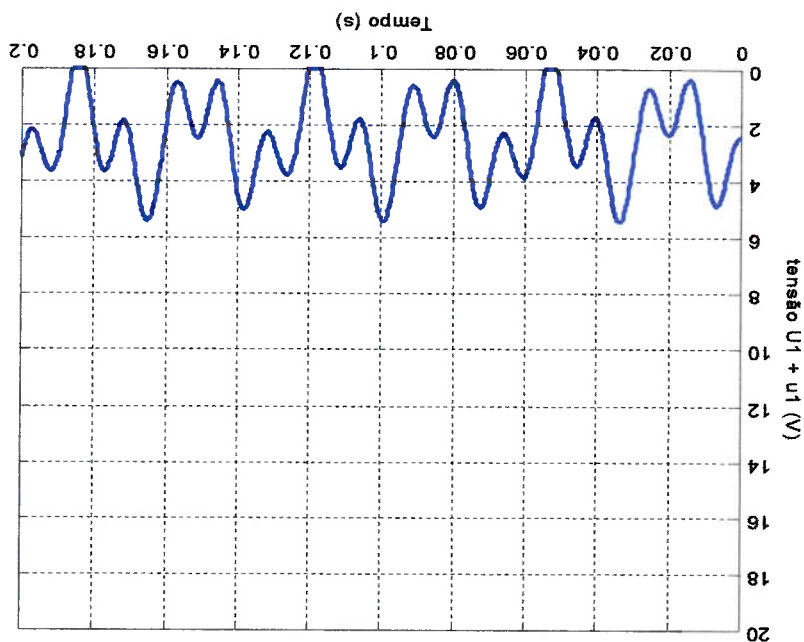


Figura 5.14: Gráfico dos índices  $J_0$  calculados na resposta ao degrau de posição, para valores de pré-corrente  $I_0$ .

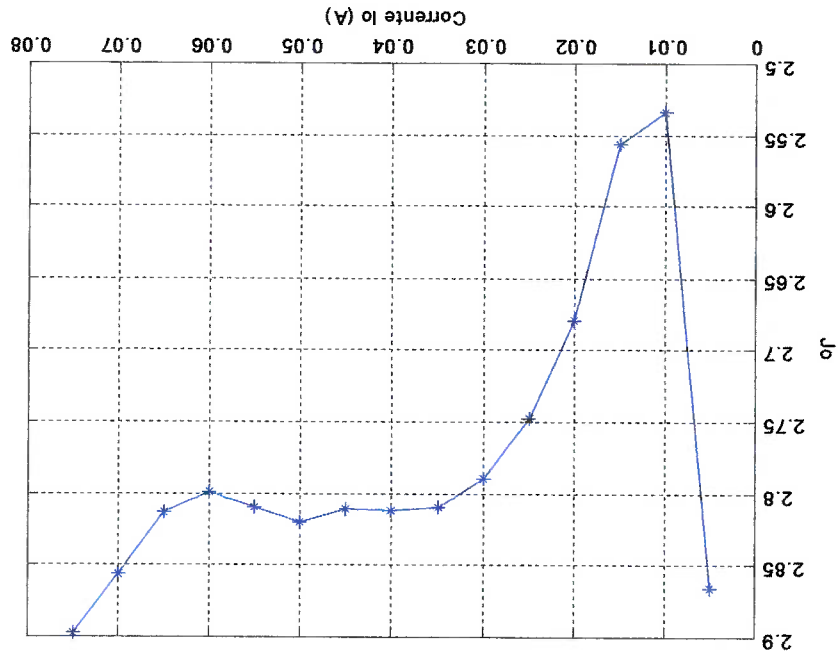
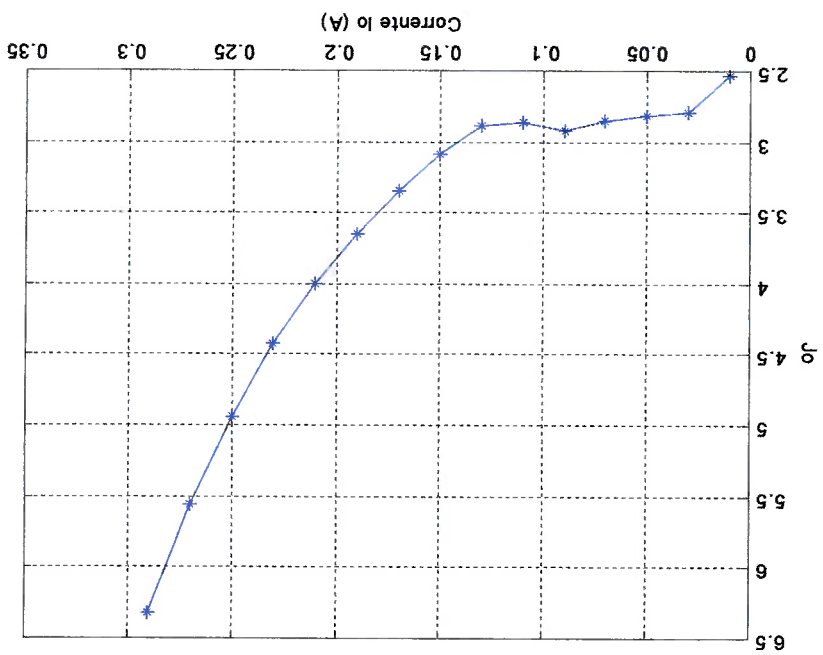


Figura 5.15: Gráfico de detalhe dos índices  $J_0$  para valores de pré-corrente  $I_0$ , na resposta ao degrau de posição.



Na figura 5.16 apresentam-se os índices de desempenho para diversas frequências

de rotação  $f$  do eixo, organizados em curvas de valores da pré-corrente  $I_0$  usados na

simulação da resposta à vibração.

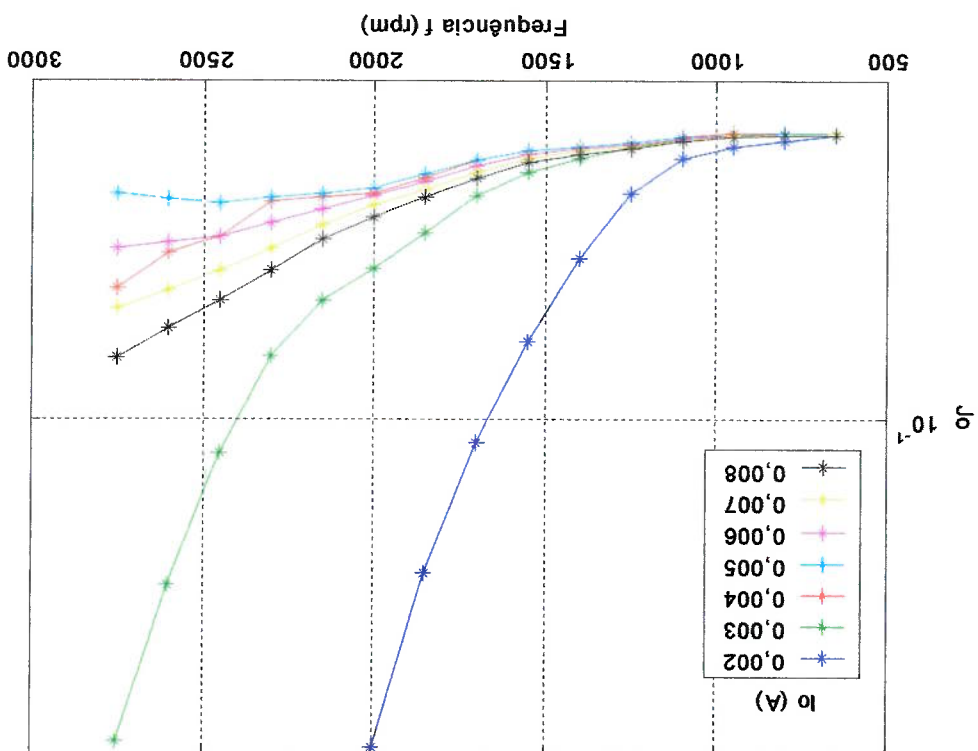


Figura 5.16: Gráfico dos índices  $J_0$  na resposta à vibração do eixo numa faixa de frequências, para valores de pré-corrente  $I_0$ .

Pode-se notar que a curva onde  $I_0 = 0,005$  A tem índices de desempenho

minimizados a partir de  $f = 1500$  rpm, portanto este é o melhor valor da pré-corrente

para este tipo de simulação.

Em vista da maior incidência da vibração durante o trabalho do

mancal, foi escolhida  $I_0 = 0,005$  A.

Na figura 5.17 é verificada a estabilidade nas condições de partida (azul) sem carga e na condição de carga máxima (verde) com rotação de 2200 rpm, a partir do equilíbrio.

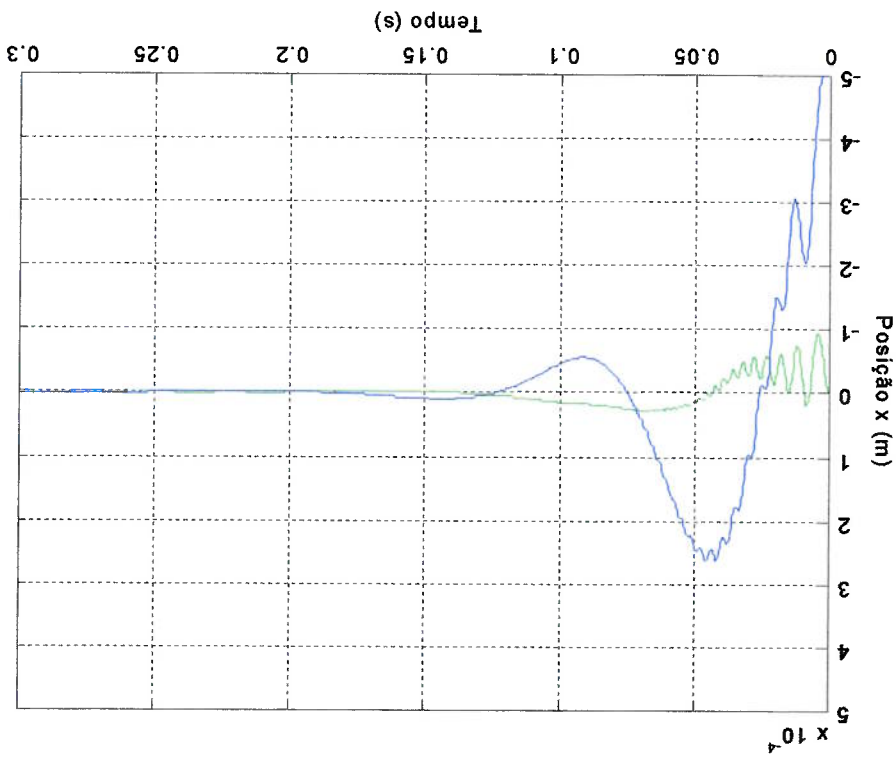


Figura 5.17: Resposta da posição do eixo na partida (azul) e à aplicação brusca da força de trabalho à rotação de 2200 rpm (verde).

Nas figuras 5.18, 5.19 é apresentada a resposta da posição e da tensão ao degraude de posição nas figuras 5.20 e 5.21 é apresentada a resposta da posição e tensão quando sujeitas às forças devido à vibração do eixo, usando a pré-corrente escolhida  $I_0 = 0,005$ .

A.

Figura 5.18: Resposta da posição do eixo ao seu posicionamento inicial em 50% do entreferro com  $I_0 = 0,005$  A.

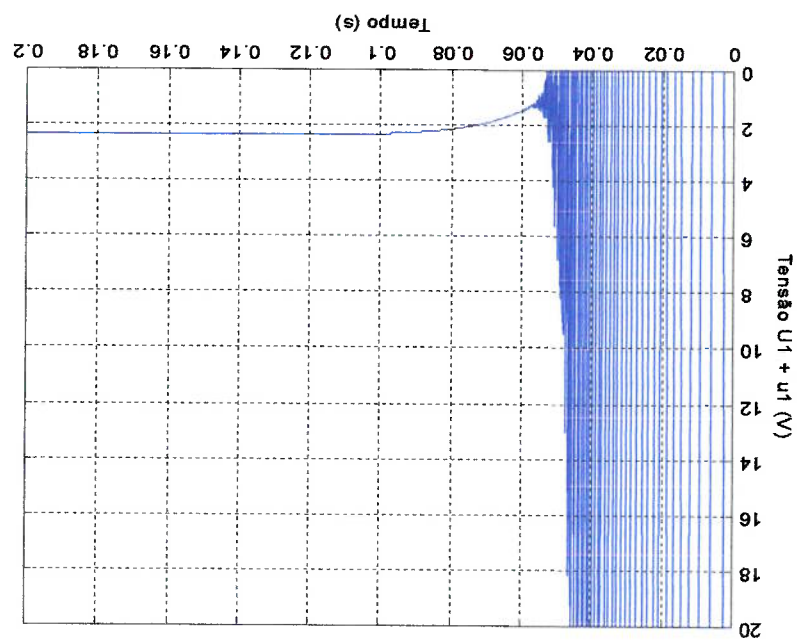


Figura 5.19: Resposta da tensão elétrica ao posicionamento inicial do eixo em 50% do entreferro com  $I_0 = 0,005$  A.

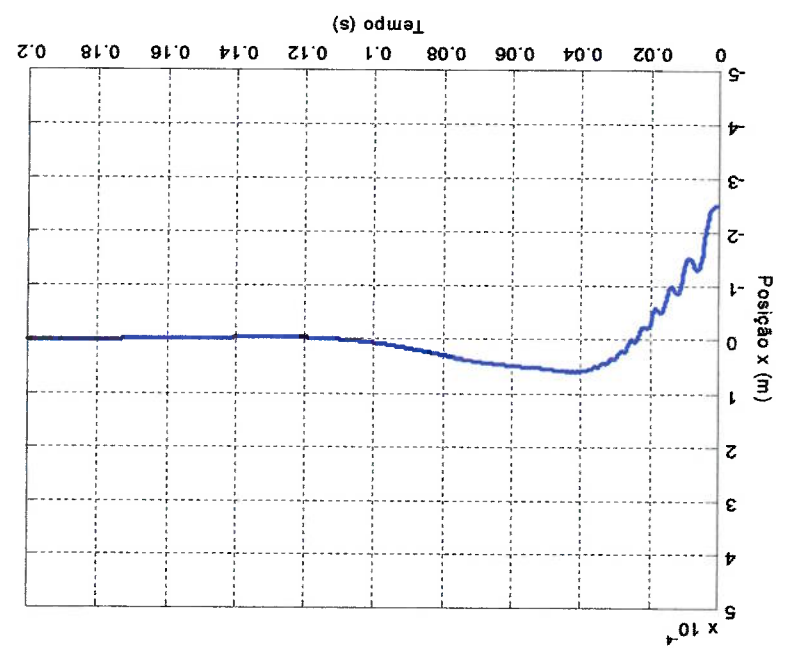


Figura 5.21: Resposta da tensão elétrica às forças de vibração a 2200 rpm,  $I_0 = 0,005A$ .

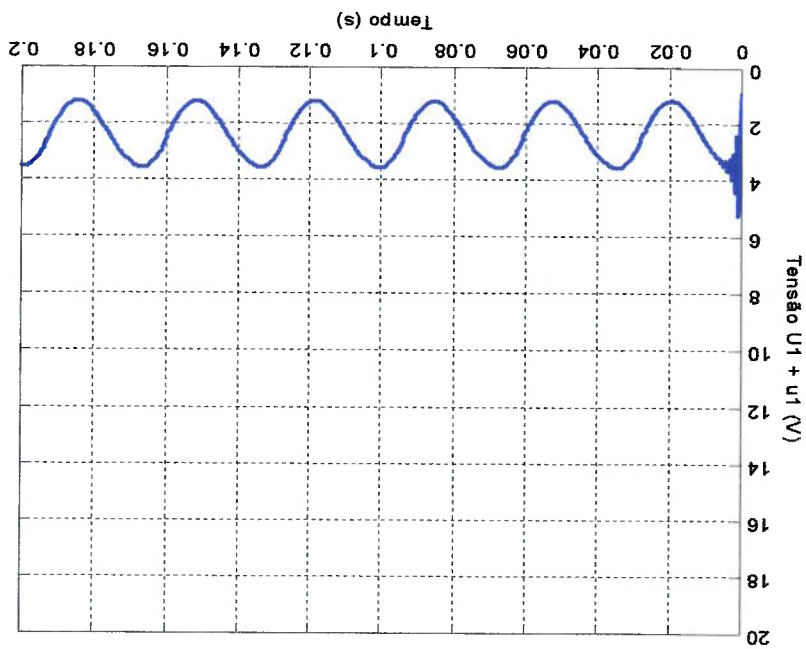
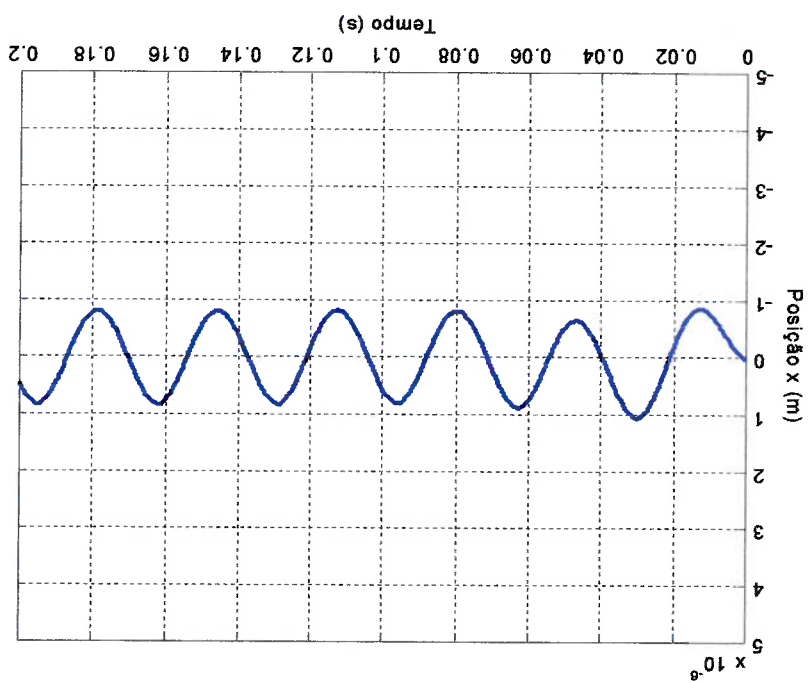


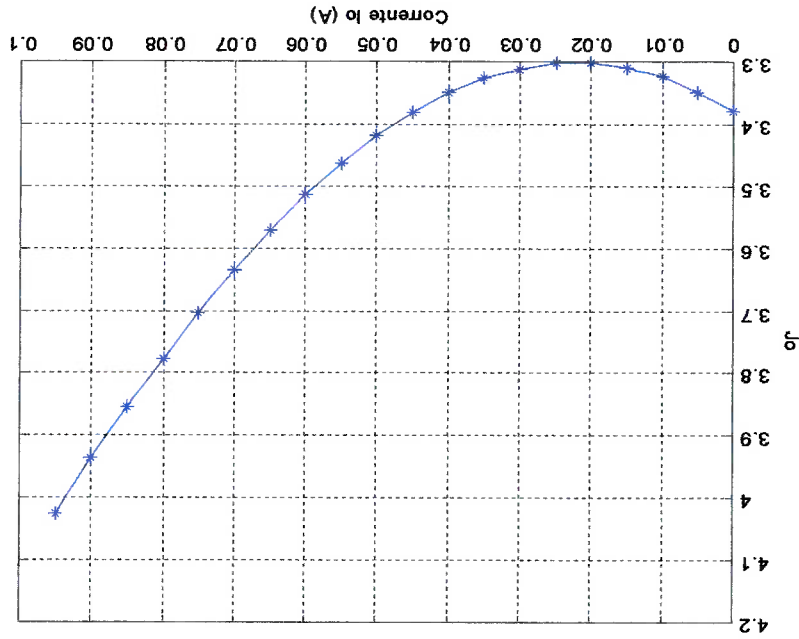
Figura 5.20: Resposta da posição do eixo às vibrações a 2200 rpm,  $I_0 = 0,005A$ .





Na figura 5.23 tem-se os valores do índice de desempenho para a simulação da resposta às forças de vibração na faixa de frequência de 125 a 3000 rpm, para pré-corrente de 0 a 0,30 A, com  $t_s = 0,1$  s. Pode-se notar que a curva com mínimo  $J_0$  na maioria das frequências e nas frequências de trabalho tem  $I_0 = 0,20$  A.

Figura 5.22: Gráfico dos índices  $J_0$  para valores de pré-corrente  $I_0$ , na resposta ao degraú de posição.



A figura 5.22 apresenta os desempenhos das respostas ao degraú de posição para diversos valores de  $I_0$ , com os mesmos parâmetros usados nas simulações anteriores equivalentes, porém com o sistema de Controle Não-Linear.

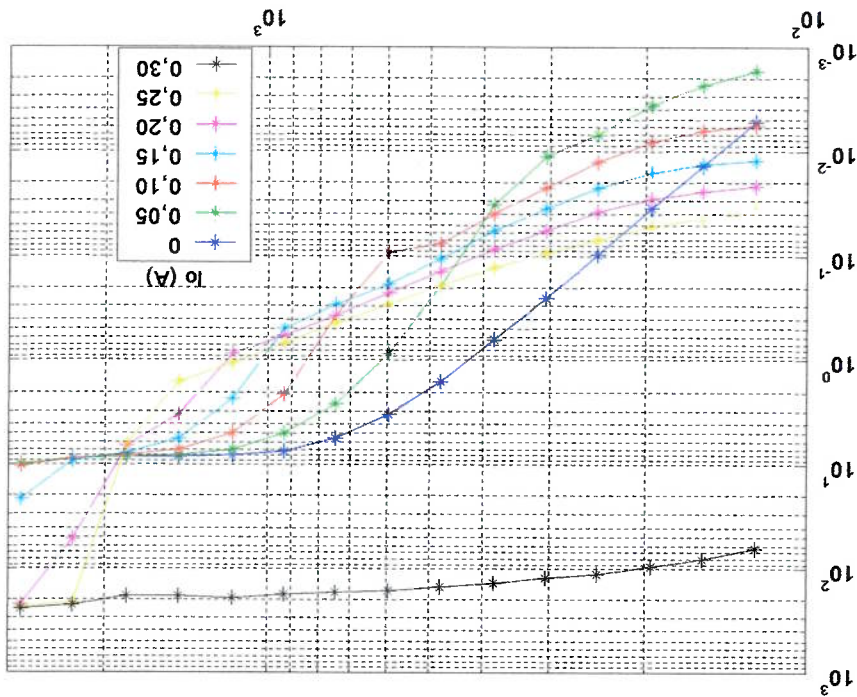
### 5.3. Escolha dos Parâmetros do Controle Não-Linear

equilíbrio.

sem carga e na condição de carga máxima (verde) com rotação de 2200 rpm, a partir do

A figura 5.25 mostra a verificação de estabilidade nas condições de partida (azul)

Figura 5.24: Gráfico dos índices  $J_0$  na resposta à vibração do eixo numa faixa de frequências, para valores de pré-corrente  $I_0$ .



A estabilidade na condição de carga máxima não é observada para o sistema de Controle Não-Linear, pois o eixo não volta ao ponto de equilíbrio para qualquer valor da pré-corrente. Este resultado pode ser explicado considerando que a velocidade de resposta exigida (por  $t_s$ ) não é alta o bastante para vencer a gravidade. Esta verificação não invalida totalmente o sistema de controle, pois a situação desta verificação não acontece frequentemente durante o trabalho do mancal.

Foi considerada a melhor resposta quando  $I_0 = 0,02$  A, pela boa resposta ao posicionamento inicial e por ter um desempenho razoável na resposta às forças de posicionamento. Nas figuras 5.26 e 5.27 são apresentadas as respostas ao posicionamento inicial longe do equilíbrio, e nas figuras 5.28 e 5.29 as respostas às forças de vibração.

Figura 5.25: Resposta da posição do eixo na partida (azul) e à aplicação brusca da força de trabalho à rotação de 2200 rpm (verde).

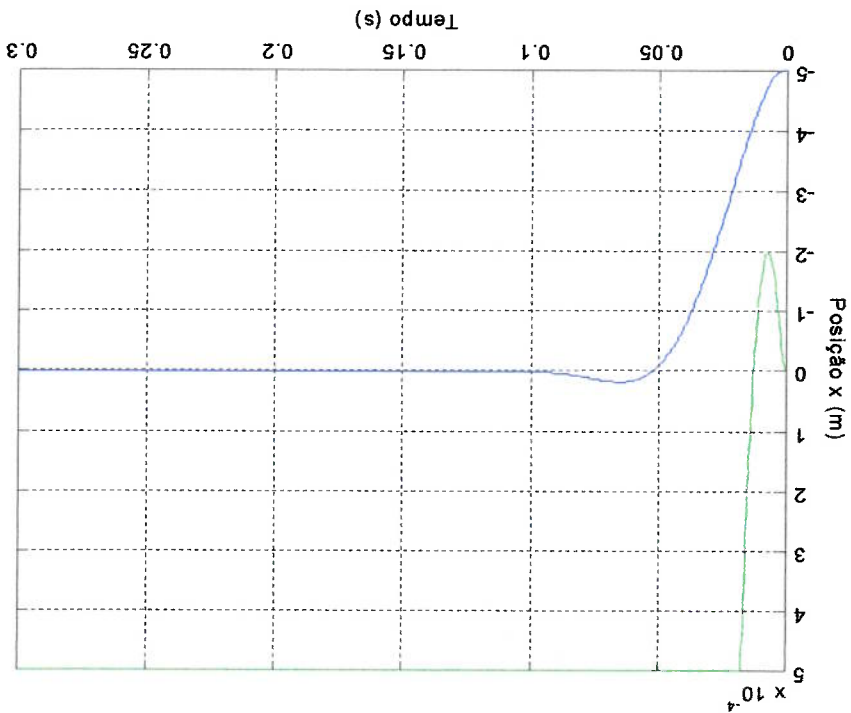


Figura 5.26: Resposta da posição do eixo ao seu posicionamento inicial em 50% do entreferro com  $I_0 = 0,02$  A.

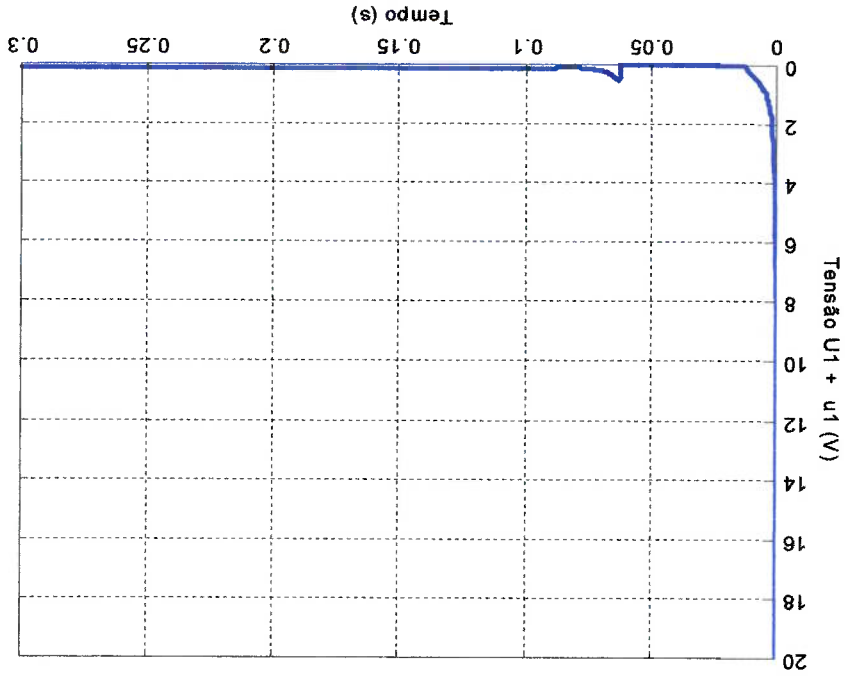


Figura 5.27: Resposta da tensão elétrica ao seu posicionamento inicial em 50% do entreferro com  $I_0 = 0,02$  A.

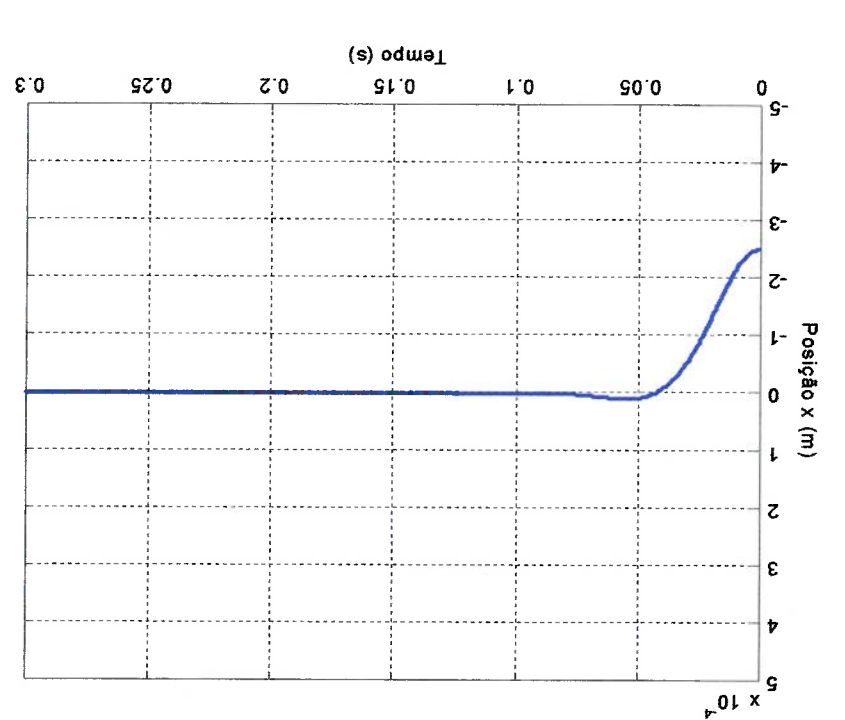


Figura 5.29: Resposta da tensão elétrica às forças de rotação a 2200 rpm,  $I_0 = 0,02A$ .

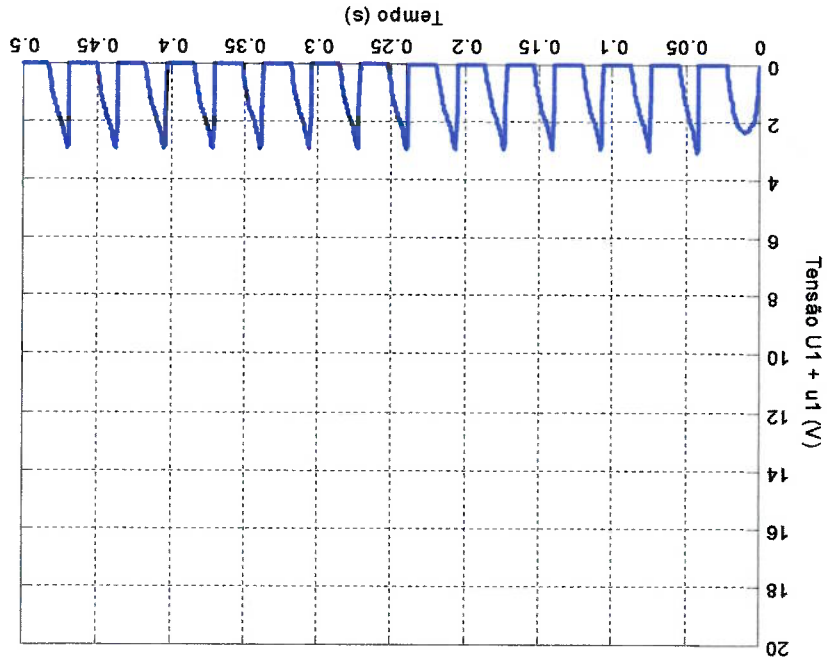
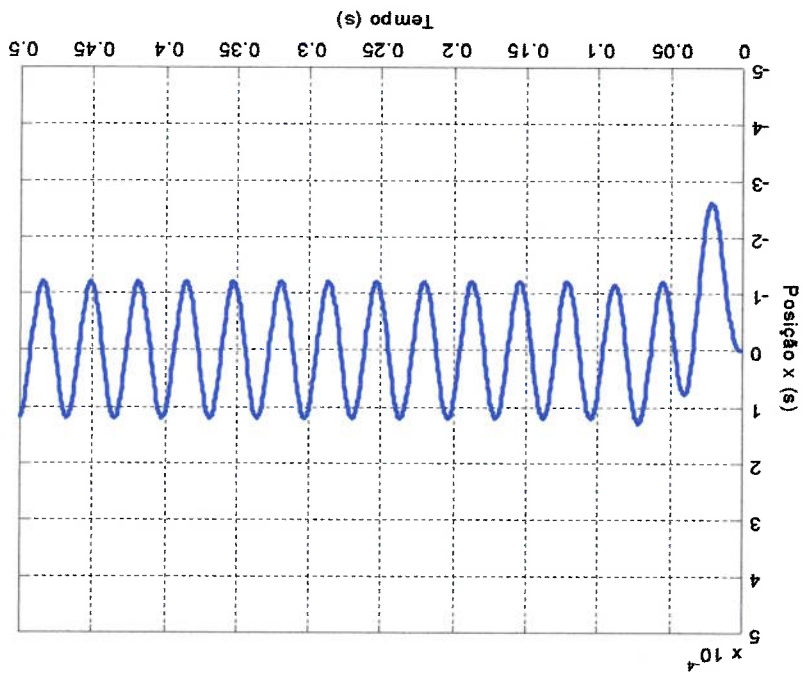


Figura 5.28: Resposta da posição do eixo às forças de rotação a 2200 rpm,  $I_0 = 0,02A$ .



## 5.4. Comparação dos Sistemas de Controle

Vamos fazer uma comparação dos sistemas de controle estudados, considerando o valor dos parâmetros que foram fixados como critério. Na figura 5.30 compara-se as respostas ao posicionamento longe do equilíbrio para os 3 sistemas de controle projetados, usando os parâmetros gerais fixados anteriormente e pré-corrente projetada neste capítulo para cada controle. Deve-se ressaltar que o tempo de acomodação esteve fixado em  $t_s = 0,1$  s, portanto não podemos tirar conclusões definitivas sobre o desempenho geral desses sistemas. É necessário um estudo mais aprofundado para explorar a capacidade máxima de resposta desses controles alterando os ganhos a partir do tempo de acomodação requerido.

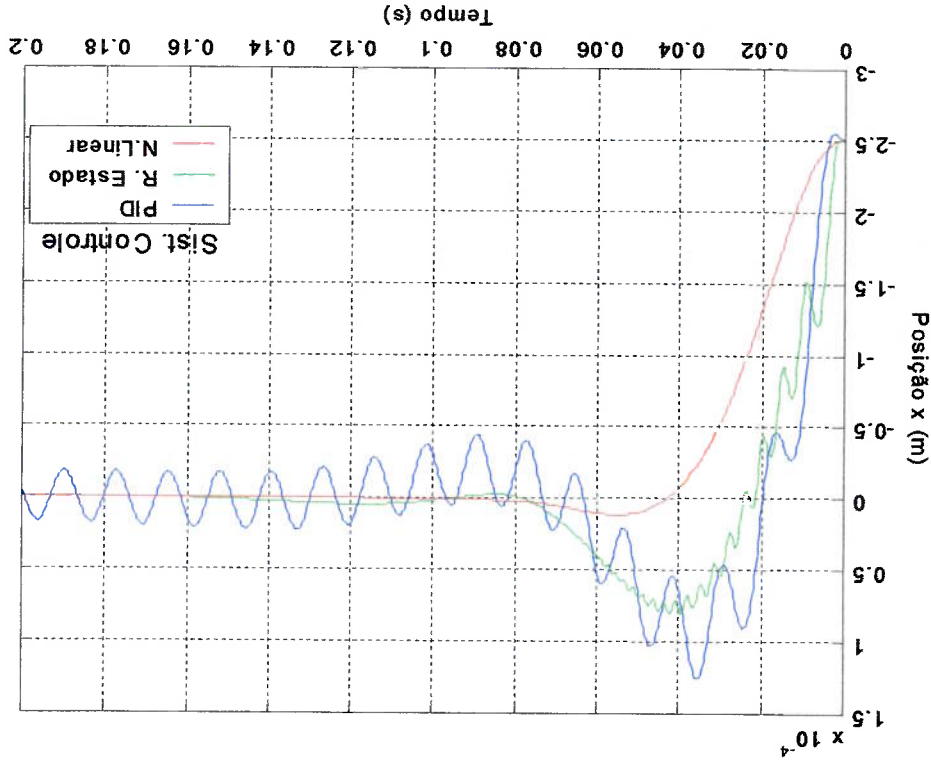


Figura 5.30: Resposta da posição do eixo ao seu degraú de posição com controle PID, controle por Realimentação de Estado e Controle Não-Linear.

Os índices de desempenho resultantes dessa simulação, para cada sistema de

controle utilizado foram:

Controle PID:  $J_0 = 2,70$

Controle por Realimentação de Estado:  $J_0 = 2,87$

Controle Não-Linear:  $J_0 = 3,30$

Embora sejam bem próximos, o controle PID teve melhor desempenho neste tipo de simulação nos parâmetros escolhidos, pois seu índice foi minimizado.

Na figura 5.31 tem-se a resposta da posição do eixo às forças devido à rotação,

para comparação dos sistemas de controle aplicados no mesmo modelo de sistema do

Mancal Magnético, descrito pelas equações (3.23).

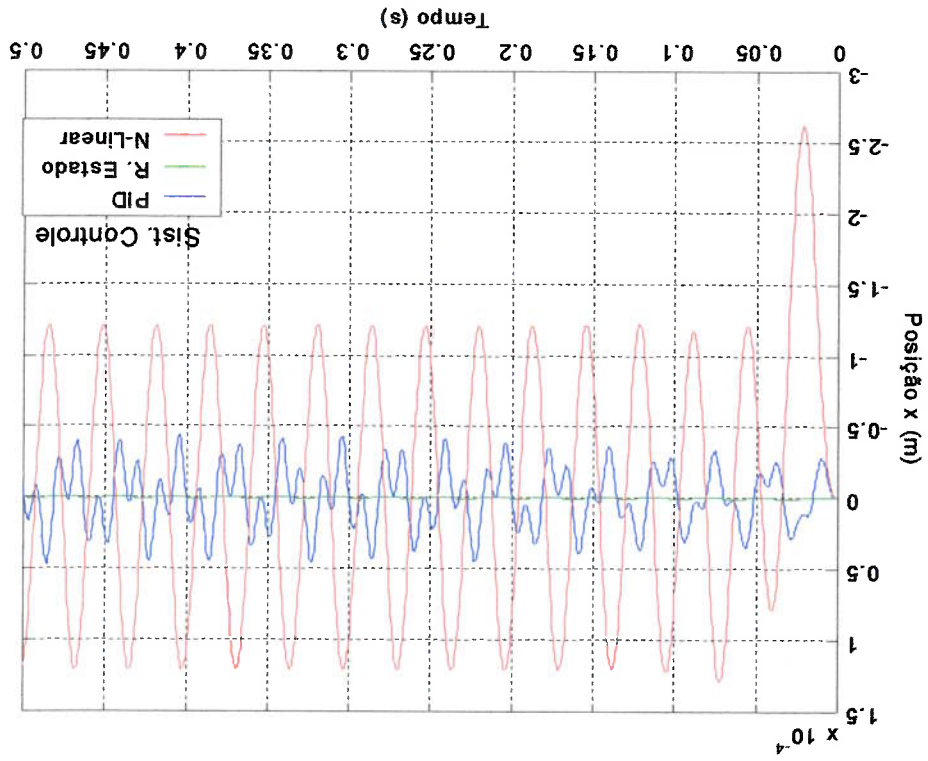


Figura 5.30: Resposta da posição do eixo à vibração, com controle PID, controle por Realimentação de Estado e Controle Não-Linear.

Os índices de desempenho resultantes dessa simulação, para cada sistema de

controle utilizado foram:

Controle PID:  $J_0 = 0,63$

Controle por Realimentação de Estado:  $J_0 = 0,060$

Controle Não-Linear:  $J_0 = 8,50$

Na resposta às forças cíclicas de vibração, o modelo com sistema de controle por realimentação de estado teve melhor desempenho.

Este resultado é parcial, pois só é válido para quando o tempo de acomodação for definido durante o projeto do sistema de controle, para ter a resposta controlada num tempo determinado. Porém, este tipo de limitação inviabiliza um estudo mais profundo sobre a capacidade de estabilização dos sistemas de controle estudados nas situações de trabalho requeridas. Devemos alterar os ganhos do controle a partir do tempo de acomodação  $t_s$  para explorar os limites da capacidade de cada sistema de controle e compará-los em sua configuração de melhor desempenho.

## 5.5. Refinamento dos Parâmetros do Controle PID

Mantendo os valores dos parâmetros dos modelos estudados anteriormente, vamos realizar simulações para medir o desempenho do comportamento do sistema para encontrar a melhor configuração de pré-corrente e tempo de acomodação possível.

É apresentado na figura 5.31 o resultado dos desempenhos de diversas simulações

da resposta ao degrau de posição com diferentes valores da pré-corrente  $I_0$  e do tempo



de acomodação  $t_s$ . O tempo de simulação usado foi  $t_{max} = 0,4$  s, os demais parâmetros

foram mantidos como os das simulações anteriores. O gráfico na figura 5.32 apresenta o

mesmo gráfico anterior detalhando o ponto de mínimo de  $J_0 = 2,03$  em  $t_s = 0,12$  s e  $I_0 =$

0,07 A, portanto esta é a melhor configuração encontrada para este tipo de simulação. A

resposta é instável quando  $I_0 < 0,02$  A.

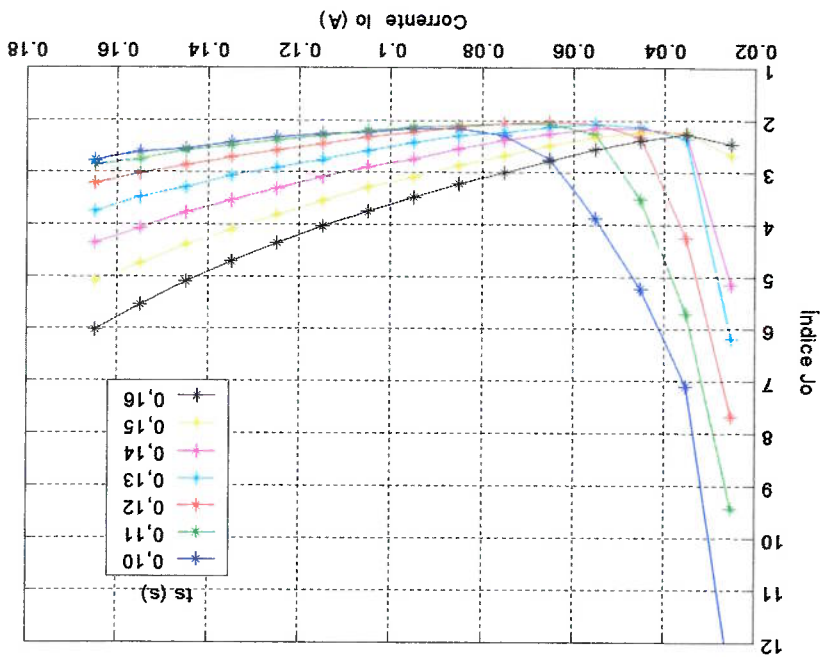


Figura 5.31: Gráfico dos índices  $J_0$  na resposta ao degrau de posição para diversos valores de pré-corrente  $I_0$  e tempos de acomodação  $t_s$ .

O aspecto da resposta ao degrau de posição é apresentado na figura 5.33, usando

os melhores valores dos parâmetros encontrados.

Figura 5.33: Resposta da posição do eixo ao degrau de posição com  $I_0 = 0,07$  A e  $t_s = 0,12$  s.

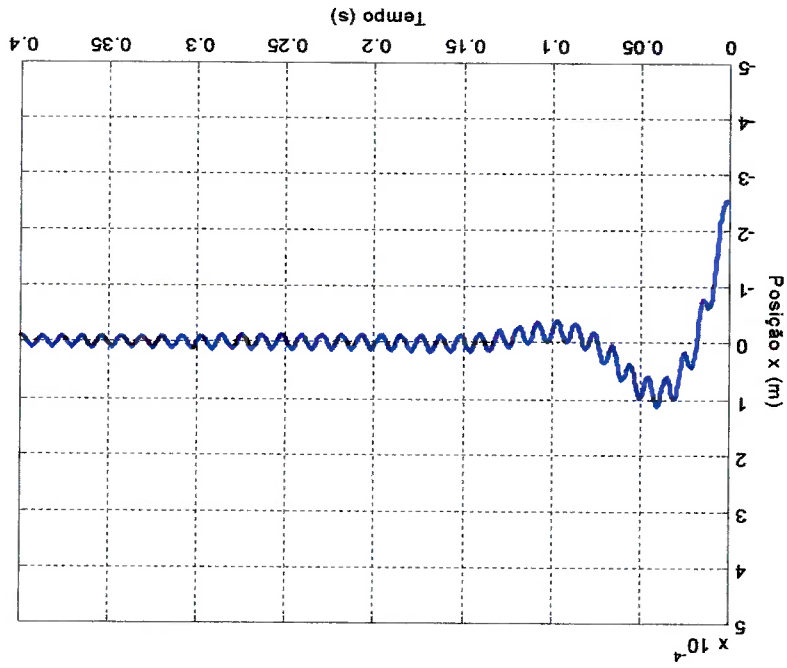
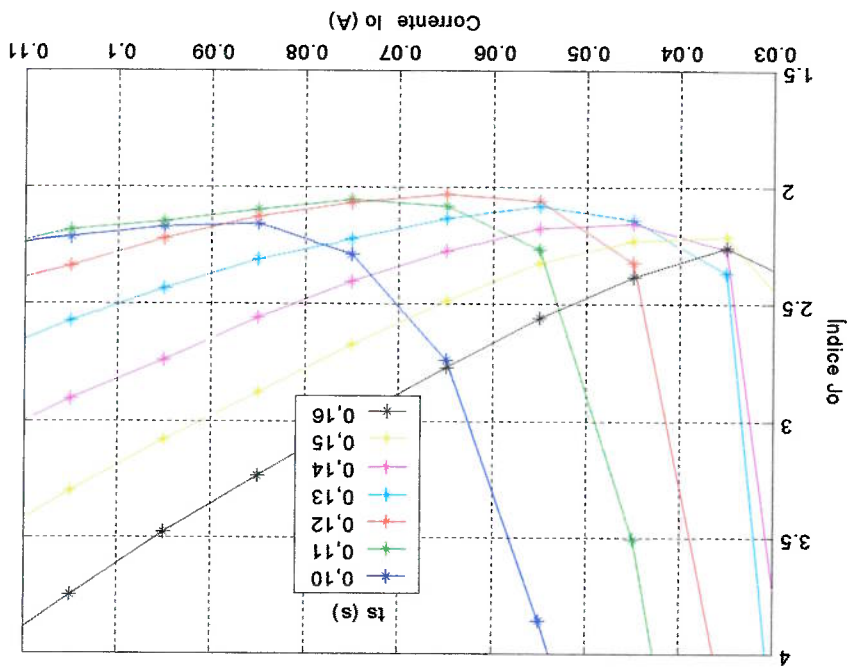


Figura 5.32: Detalhe do ponto de mínimo índice  $J_0$  do gráfico da figura 5.31.



Na figura 5.34 são apresentados os desempenhos de diversas simulações da

resposta à vibração do eixo à rotação de 2000 rpm para diferentes valores da pré-corrente  $I_0$  e do tempo de acomodação  $t_s$ . Os demais parâmetros foram mantidos como os das simulações anteriores desse tipo. O gráfico na figura 5.35 apresenta o mesmo gráfico anterior detalhando a região de índice de desempenho mínimo. Foi escolhido este tipo de gráfico por ser possível visualizar a variação de  $J_0$  em função de  $I_0$  em conjunto com  $t_s$ , o que não é possível quando testa-se para uma faixa de frequências como foi feito no capítulo anterior.

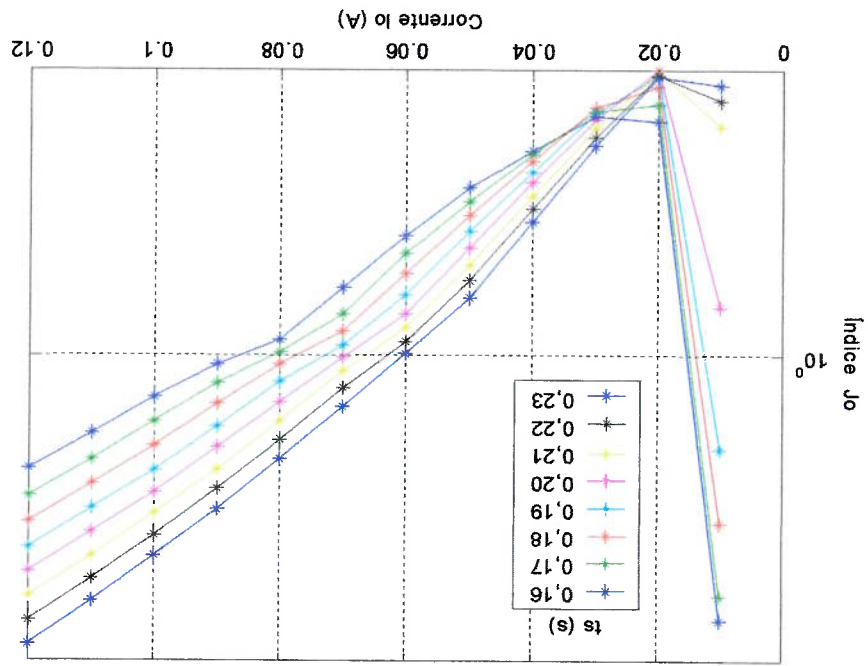


Figura 5.34: Gráfico dos índices  $J_0$  da resposta à vibração para diversos valores de pré-corrente  $I_0$  e tempos de acomodação  $t_s$ .



de uma situação de repouso e é aplicada simultaneamente a força peso, a força de

vibração do eixo e 50% da força de trabalho. Foi escolhida apenas metade da força de

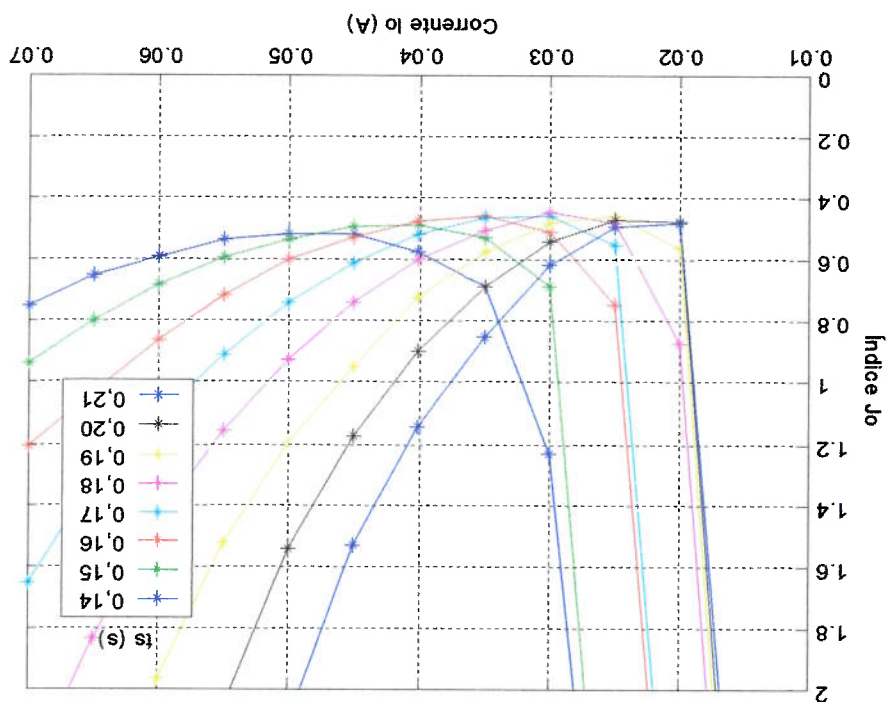
trabalho porque esta situação não acontece na prática, pois mesmo em situação de

choque a força não é aplicada instantaneamente por causa da elasticidade do material.

Na figura 5.36 tem-se o índice de desempenho calculado na simulação da resposta

às forças externas para uma matriz de valores de  $I_0$  e  $t_s$  escolhidos para encontrar um

ponto de mínimo  $J_0$ .



**Figura 5.36:** Gráfico dos índices  $J_0$  da resposta às forças externas para diversos valores de pré-corrente  $I_0$  e tempos de acomodação  $t_s$ .

Foi encontrado um ponto de mínimo  $J_0$  no gráfico da figura 5.36 em  $I_0 = 0,03$  A e

$t_s = 0,18$  s. A resposta escolhida é apresentada na figura 5.37 e 5.38, com  $J_0 = 0,436$ . As

situações de carga máxima e de partida são verificadas na figura 5.39.

Figura 5.37: Resposta da posição do eixo da tensão elétrica às forças externas,  $I_0 = 0,03$  A e  $t_s = 0,18$  s.

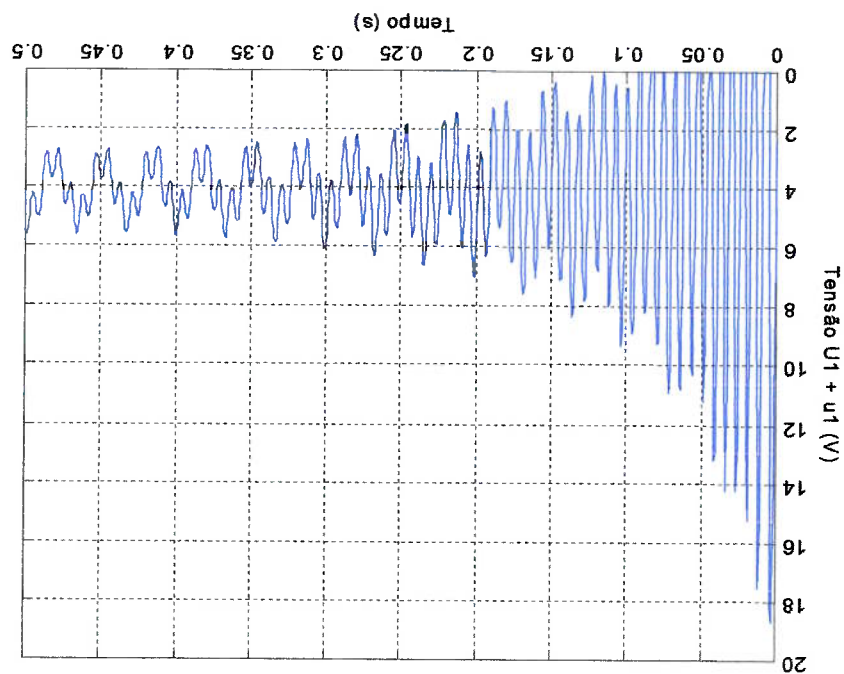
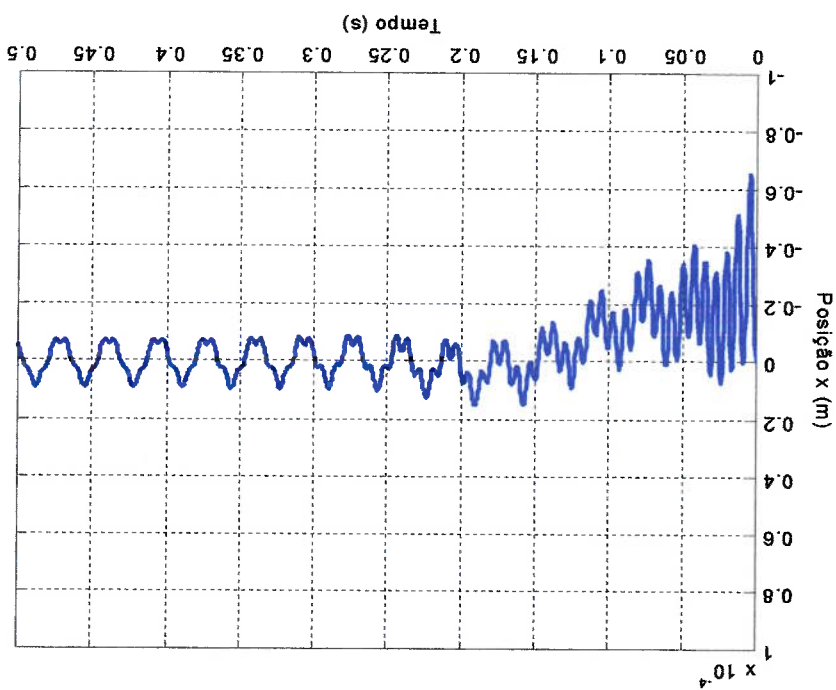


Figura 5.38: Resposta da tensão elétrica às forças externas,  $I_0 = 0,03$  A e  $t_s = 0,18$  s.



É apresentado na figura 5.40 o resultado dos desempenhos de diversas simulações da resposta ao degrau de posição com diferentes valores da pré-corrente  $I_0$  e do tempo de acomodação  $t_s$ , com controle por Realimentação de Estados. Os parâmetros foram mantidos como o da simulação de degrau de posição anterior. A figura 5.41 apresenta a mesma situação detalhando o ponto de mínimo  $J_0$  em  $I_0 = 0,14$  A e  $t_s = 0,045$  s.

## 5.6. Refinamento dos Parâmetros do Controle por Realimentação de Estados

Figura 5.39: Resposta da posição do eixo às situações de partida sem carga (azul) e de aplicação de carga máxima (verde),  $I_0 = 0,03$  A e  $t_s = 0,18$  s.

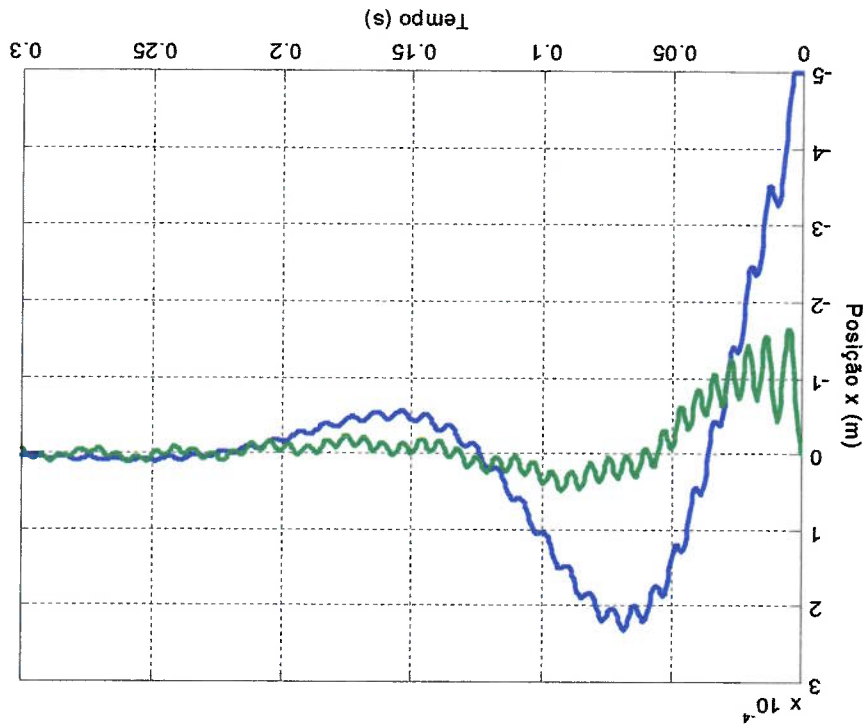


Figura 5.41: Gráfico dos índices  $J_0$  na resposta ao degrau de posição, na região de  $J_0$  mínimo.

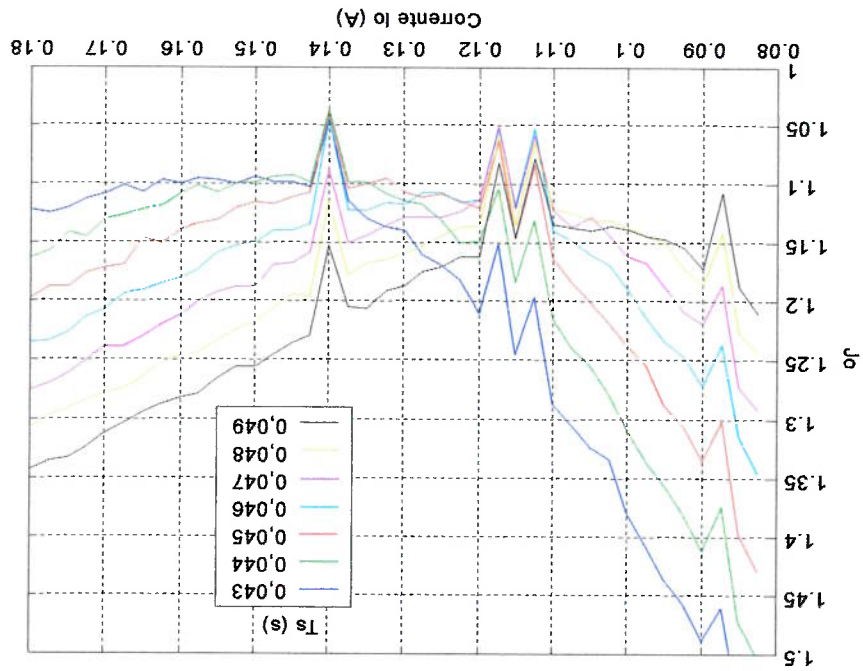
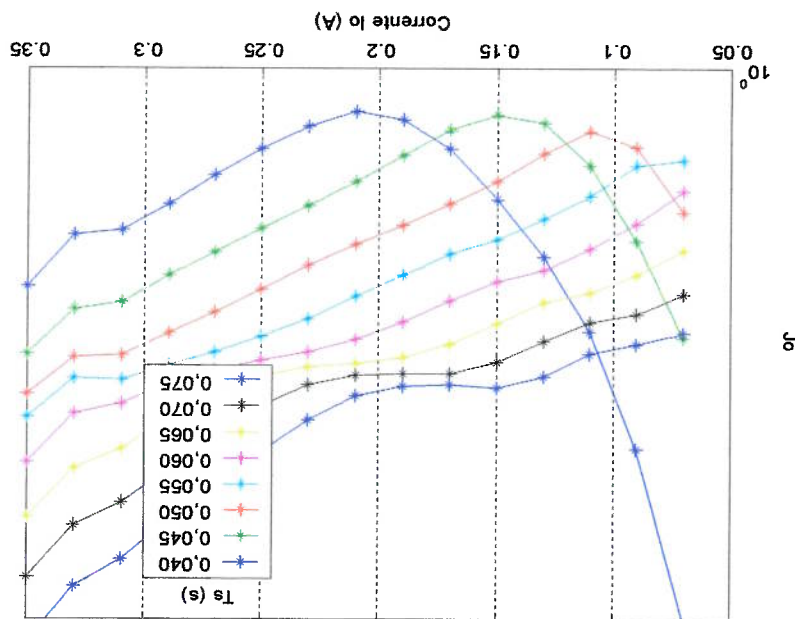


Figura 5.40: Gráfico dos índices  $J_0$  na resposta ao degrau de posição para diversos valores de pré-corrente  $I_0$  e tempos de acomodação  $t_s$ .





A figura 5.42 e 5.43 mostram a resposta do sistema ao degrau de posição para os

melhores valores encontrados de  $I_0$  e  $t_s$ .

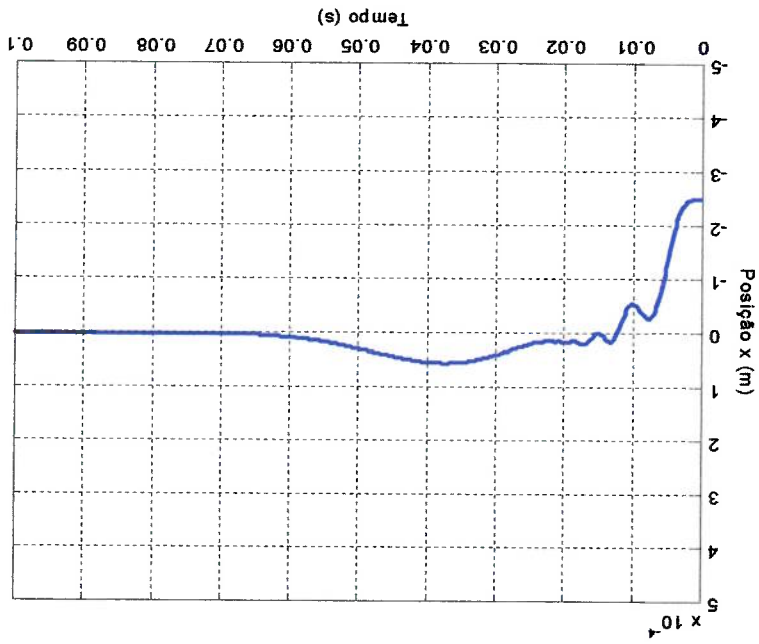


Figura 5.42: Resposta da posição do eixo ao degrau de posição, com  $I_0 = 0,14 \text{ A}$  e  $t_s = 0,045 \text{ s}$ .

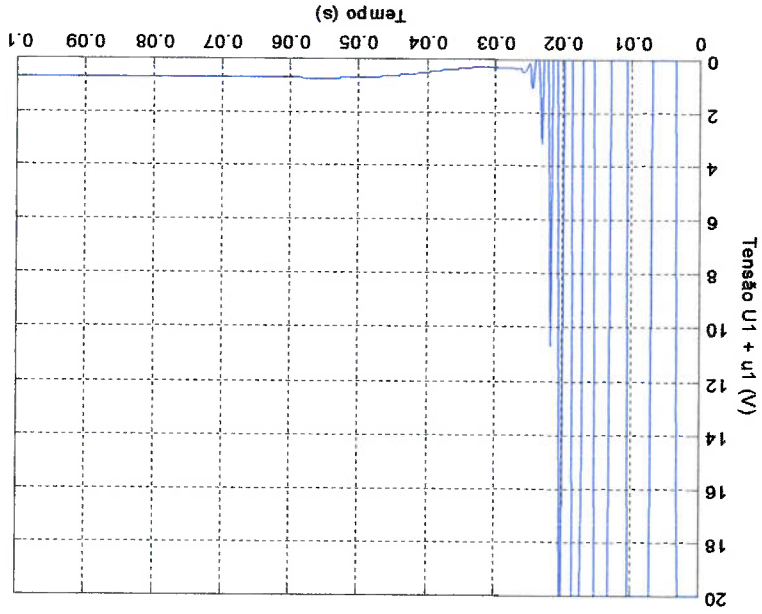


Figura 5.43: Resposta da tensão ao degrau de posição,  $I_0 = 0,14 \text{ A}$  e  $t_s = 0,045 \text{ s}$ .

A matriz de índices de desempenho  $J_0$  da resposta às forças externas é apresentada

graficamente na figura 5.44, para diversos valores de pré-corrente e de tempo de acomodação, com controle por Realimentação de Estados. O detalhe da região onde  $J_0$  é mínimo é apresentado na figura 5.45. apesar das curvas de  $t_s$  do gráfico não serem suaves, pode-se considerar que o ponto de mínimo  $J_0$  fica em  $I_0 = 0,26$  A e  $t_s = 0,021$  s.

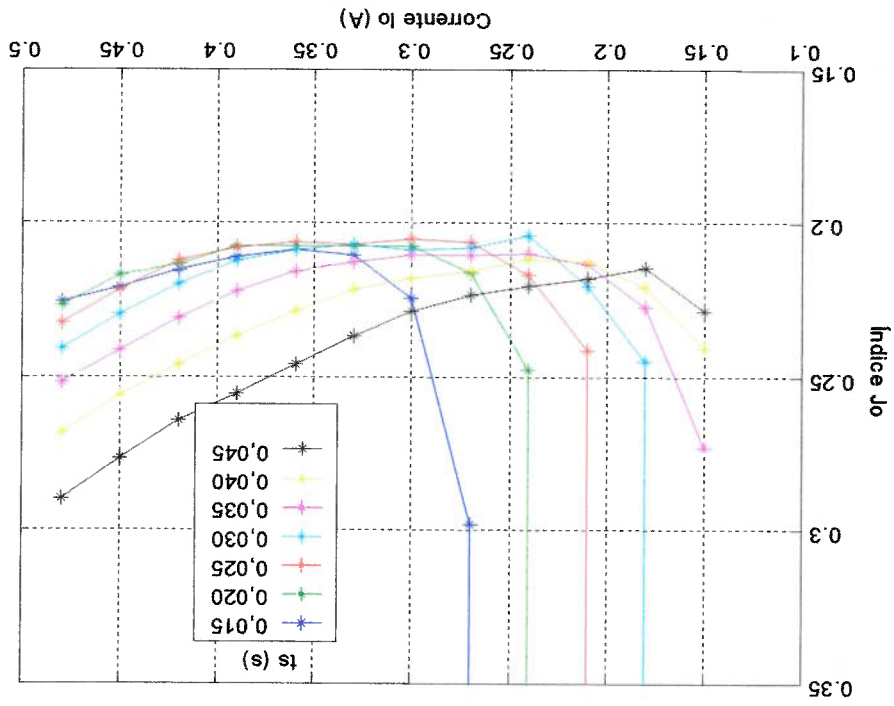


Figura 5.44: Gráfico dos índices  $J_0$  da resposta às forças externas, para diversos valores de pré-corrente  $I_0$  e tempos de acomodação  $t_s$ .

A estabilidade da resposta em situação de carga máxima não é verificada no ponto de mínimo escolhido, então a melhor configuração estável é verificada em  $I_0 = 0,35$  A e  $t_s = 0,025$  s. A estabilidade da resposta na situação de partida não é verificada também nesta nova condição, mas a partida é uma situação particular que pode ter outra solução. A simulação da resposta usando os parâmetros escolhidos é apresentada na figura 5.46 e 5.47, com  $J_0 = 0,214$ . A estabilidade da resposta na situação de carga máxima é verificada na figura 5.48. A resposta ao degraú de posição também não é estável nesta condição, mas o degraú é uma situação que não acontece na prática, a não ser na partida.

Figura 5.45: Gráfico em detalhe dos índices  $J_0$  da resposta às forças externas, para valores refinados de pré-corrente  $I_0$  e tempos de acomodação  $t_s$ .

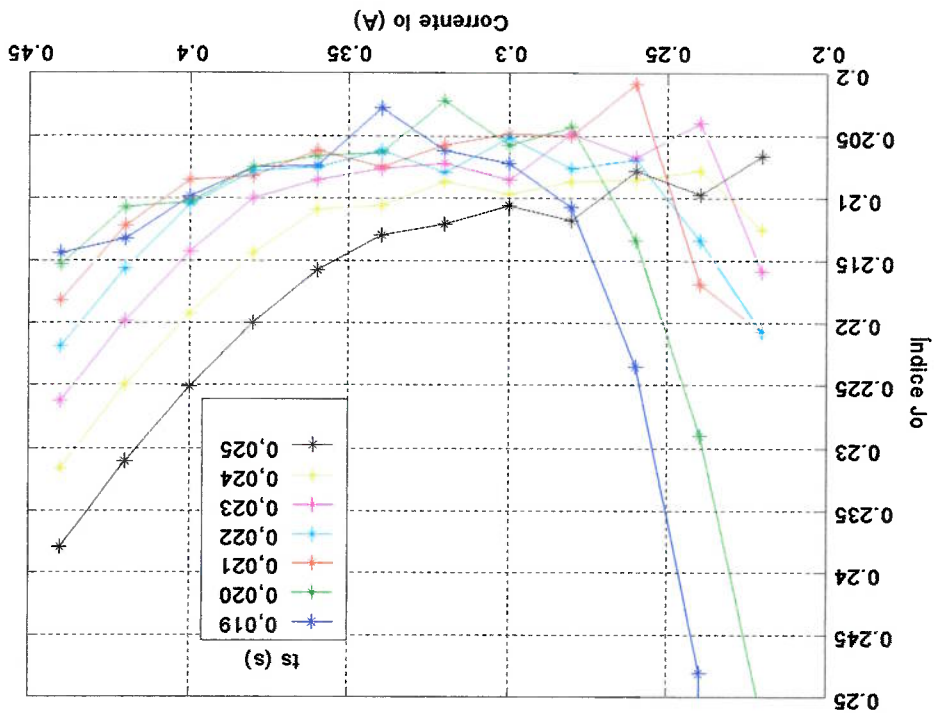


Figura 5.47: Resposta da tensão elétrica às forças externas,  $I_0 = 0,35$  A e  $t_s = 0,025$  s.

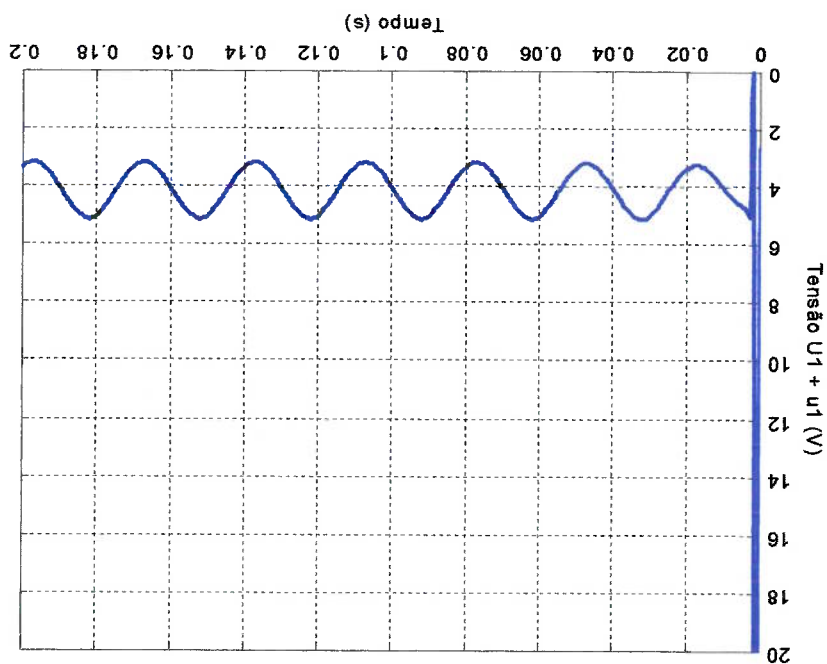
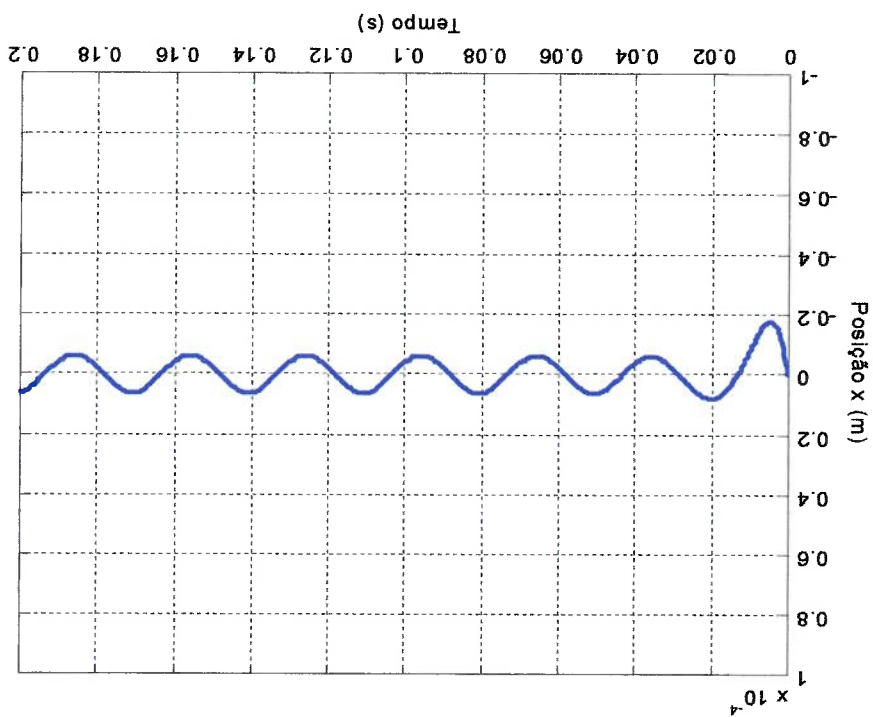


Figura 5.46: Resposta da posição do eixo às forças externas,  $I_0 = 0,35$  A e  $t_s = 0,025$  s.



A pesquisa de índices de desempenho por meio de simulação de resposta ao degrau de posição é apresentada na figura 5.49, variando em cada simulação os parâmetros da pré-corrente  $I_0$  e tempo de acomodação  $t_s$ , os demais parâmetros são idênticos aos das simulações anteriores desse tipo. A figura 5.50 apresenta a região onde  $J_0$  é mínimo com maior precisão. Embora as curvas sejam suaves pode-se considerar a melhor resposta onde  $I_0 = 0,03$  A e  $t_s = 0,020$  s. Um trecho da resposta escolhida está na figura 5.51 e 5.52.

## 5.7. Refinamento dos Parâmetros do Controle Não-Linear

Figura 5.48: Resposta da posição do eixo à aplicação de força de trabalho,  $I_0 = 0,35$  A e  $t_s = 0,025$  s.

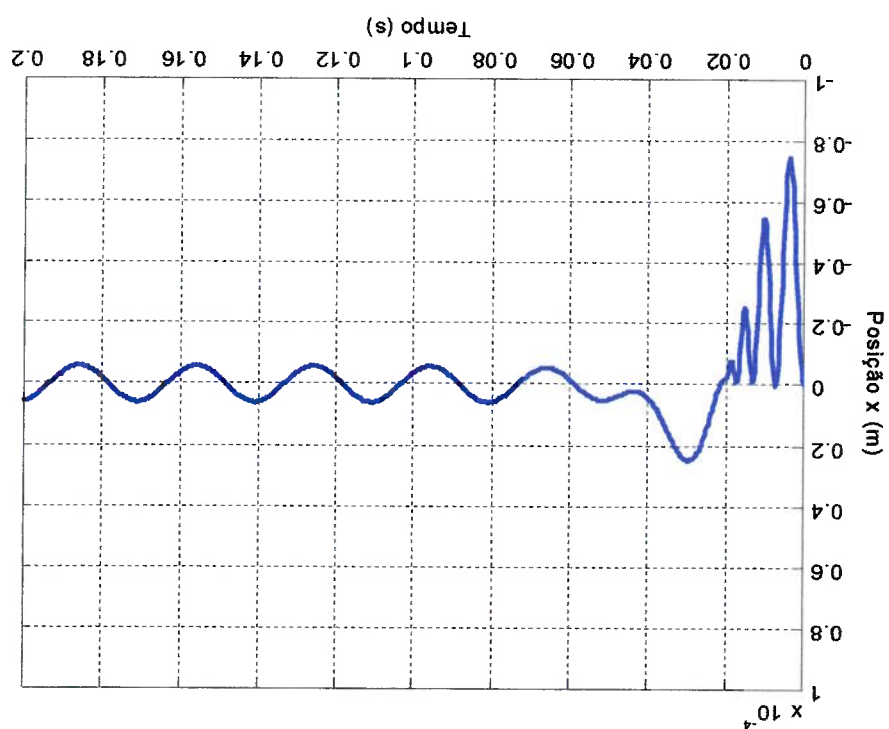


Figura 5.50: Gráfico da região de mínimos índices  $J_0$  na resposta ao degrau de posição.

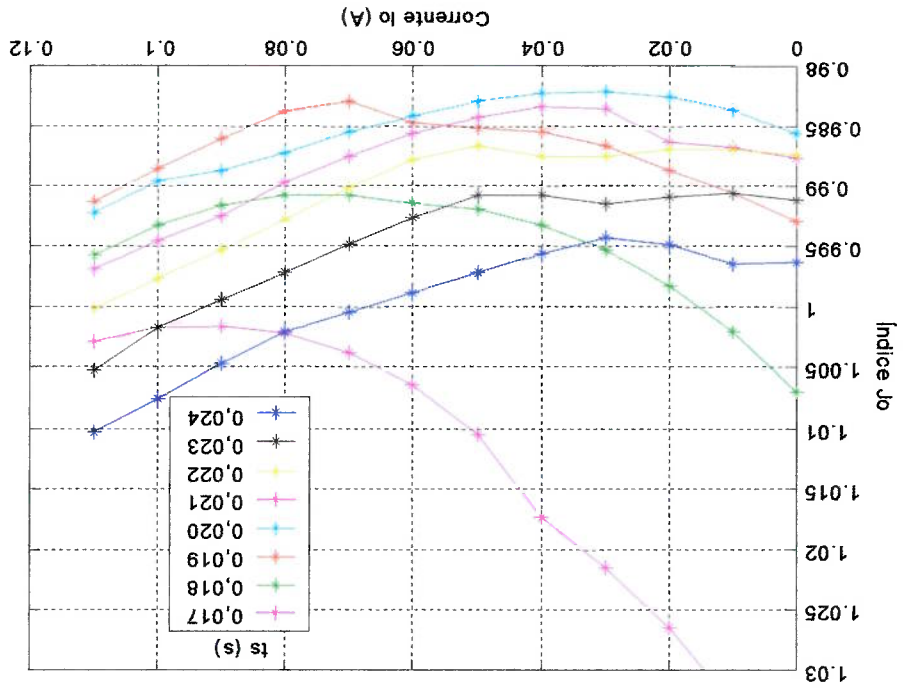


Figura 5.49: Gráfico dos índices  $J_0$  na resposta ao degrau de posição para diversas simulações alterando a pré-corrente  $I_0$  e o tempo de acomodação  $t_s$ .

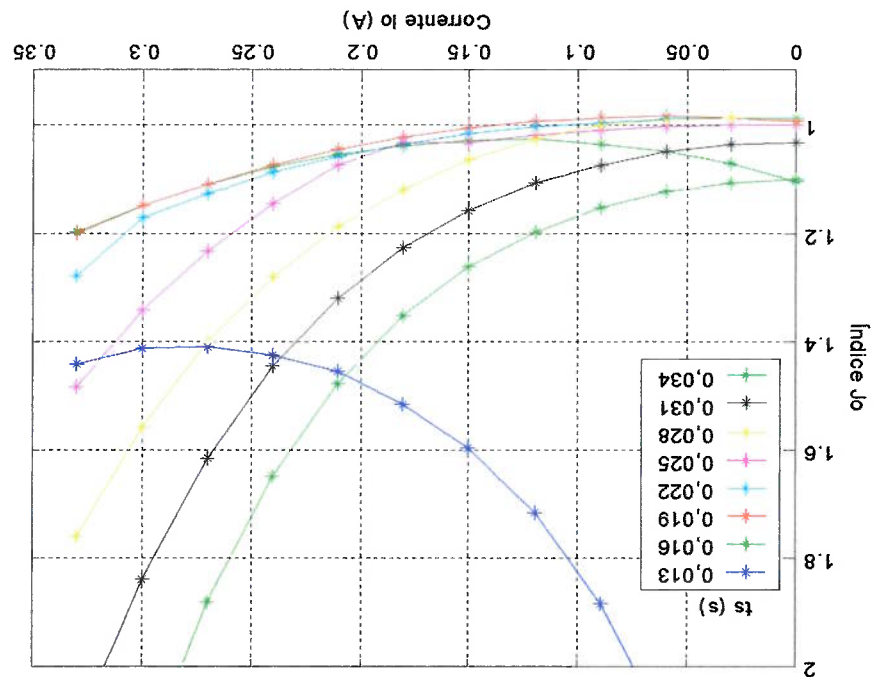


Figura 5.52: Resposta da tensão elétrica ao degrau de posição,  $I_0 = 0,03 \text{ A}$  e  $t_s = 0,02\text{s}$ .

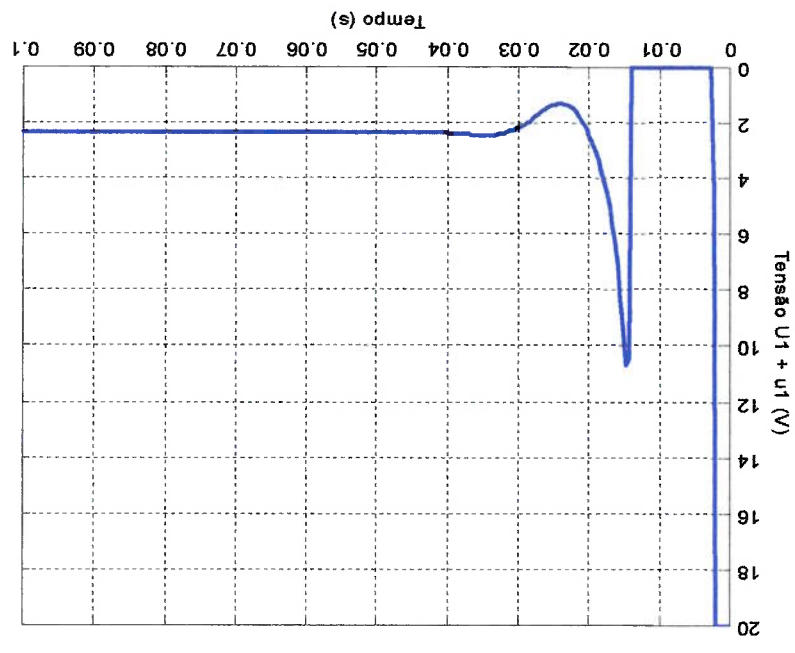
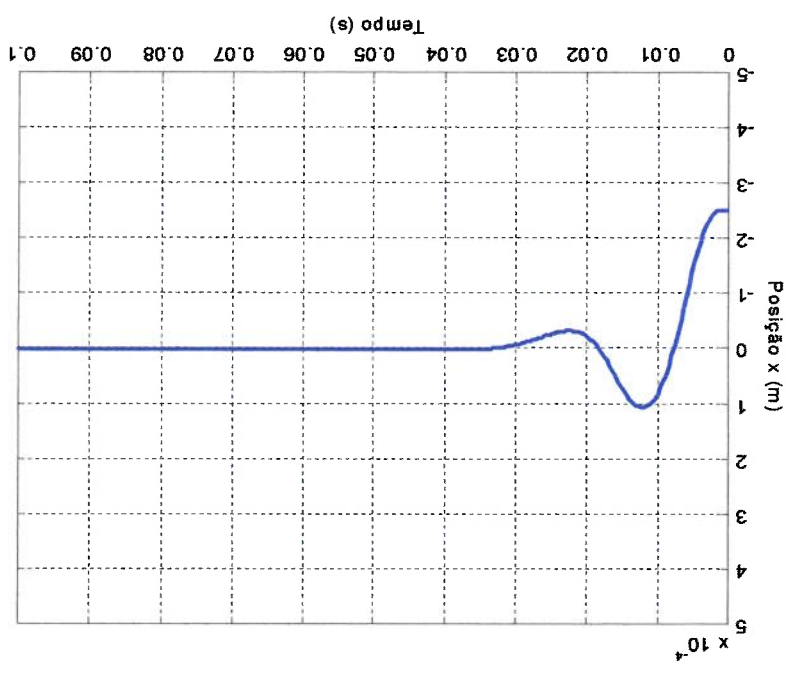


Figura 5.51: Resposta da posição do eixo ao degrau de posição,  $I_0 = 0,03 \text{ A}$  e  $t_s = 0,02\text{s}$ .



Este sistema de controle não precisa ter uma corrente auxiliar  $I_p$  para compensar o

peso do eixo, pois há uma parcela no algoritmo do Controle Não-Linear que gera a tensão necessária para compensá-lo. Por isso, mesmo tendo a constante  $K_3$  multiplicando a variável  $(I_1 + i_1)$ , a corrente nos magnetos superiores não tendem a zero no equilíbrio.

A matriz de índices de desempenho para resposta às forças externas é

graficamente apresentada na figura 5.53, já na região de mínimo índice  $J_0$  encontrado.

As simulações foram feitas com os parâmetros idênticos aos das simulações anteriores desse tipo, com frequência de rotação do eixo em 2000 rpm. Algumas curvas têm

apenas alguns pontos representados no gráfico porque apenas para estes valores a resposta é estável. Os valores no ponto de mínimo  $J_0$  encontrado são:  $I_0 = 0,7$  A e  $t_s =$

0,005 s.

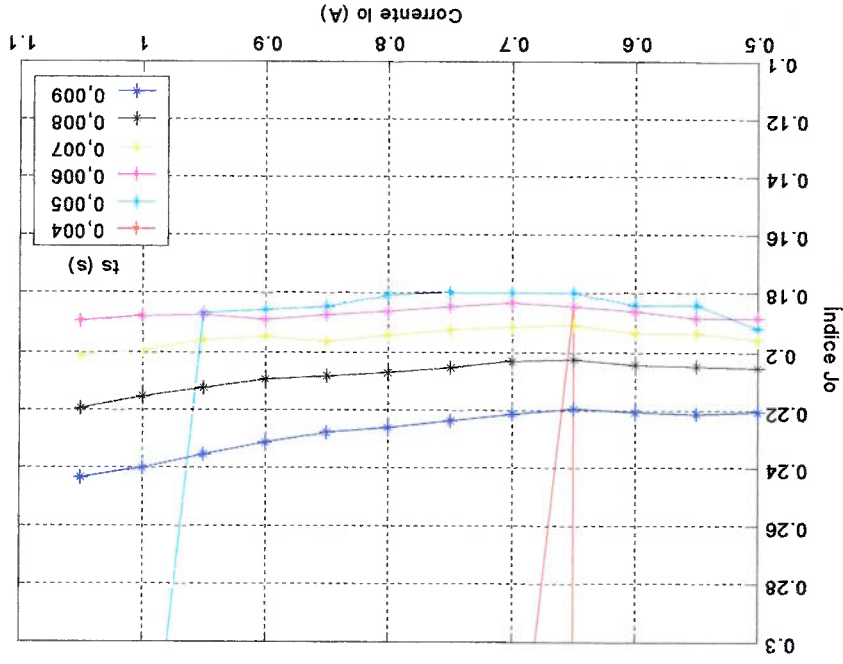
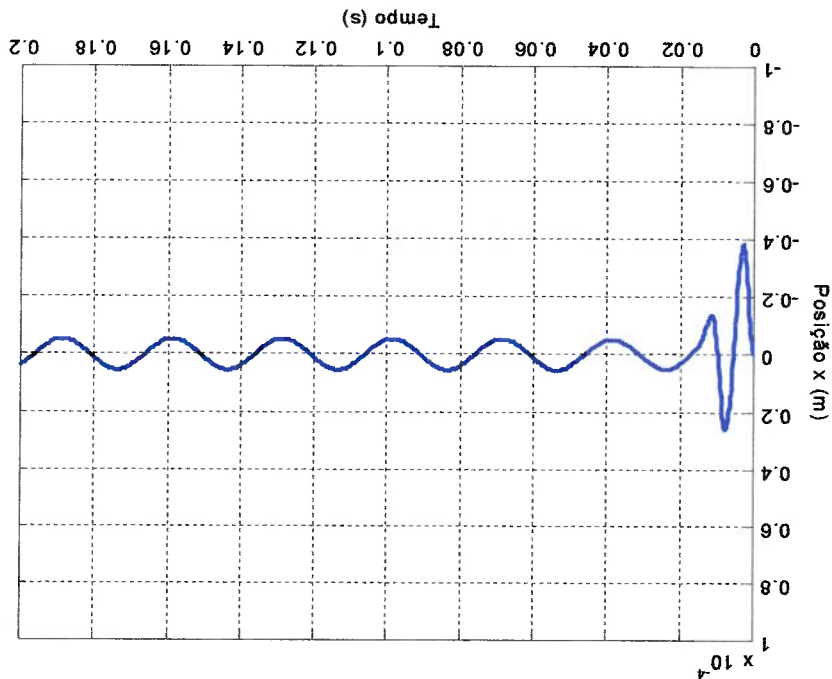


Figura 5.53: Gráfico dos índices  $J_0$  da resposta às forças externas, para valores de pré-corrente  $I_0$  e tempos de acomodação  $t_s$ .



Este tipo de sistema de controle permite a compensação de forças externas conhecidas a partir da adição de seu formato no algoritmo de controle, isto é, se a força externa puder ser prevista e modelada, o sistema de controle poderá prever a força e compensá-la por meio de sua adição no algoritmo de controle. Isto é feito no caso da força peso e pode ser compensada também forças externas variáveis ou cíclicas, desde que se conheça a força qualitativa e quantitativamente.

Figura 5.51: Resposta da posição do eixo às forças externas,  $I_0 = 0,8 \text{ A}$  e  $t_s = 0,007 \text{ s}$ .



A situação de máxima carga tem resposta instável e só é verificada para a condição mais próxima:  $I_0 = 0,8 \text{ A}$  e  $t_s = 0,007 \text{ s}$ . Na figura 5.54 é apresentada a resposta escolhida. A situação de partida também é verificada.

## 5.8. Comparação entre os Sistemas de Controle

Foram estudados dois tipos de configuração dos parâmetros do mancal, segundo a posição e a configuração com melhor resposta às forças externas. Cada configuração é direcionada a certa aplicação prática, dependendo da forma se utilização do mancal. A primeira configuração pode ser direcionada a aplicações mais genéricas, se adapta a diferentes condições de trabalho, tem desempenho melhor a choques e aplicação brusca de forças, com desempenho razoável. A segunda configuração é voltada ao melhor desempenho em condições restritas de trabalho ou próximo ao equilíbrio, sob aplicação de forças suaves, para aplicações especializadas e economia de energia.

A figura 5.52 apresenta as respostas do sistema ao degrau de posição aplicando os 3 controles estudados. As simulações foram feitas usando os melhores parâmetros encontrados para este tipo de simulação, em cada sistema de controle.

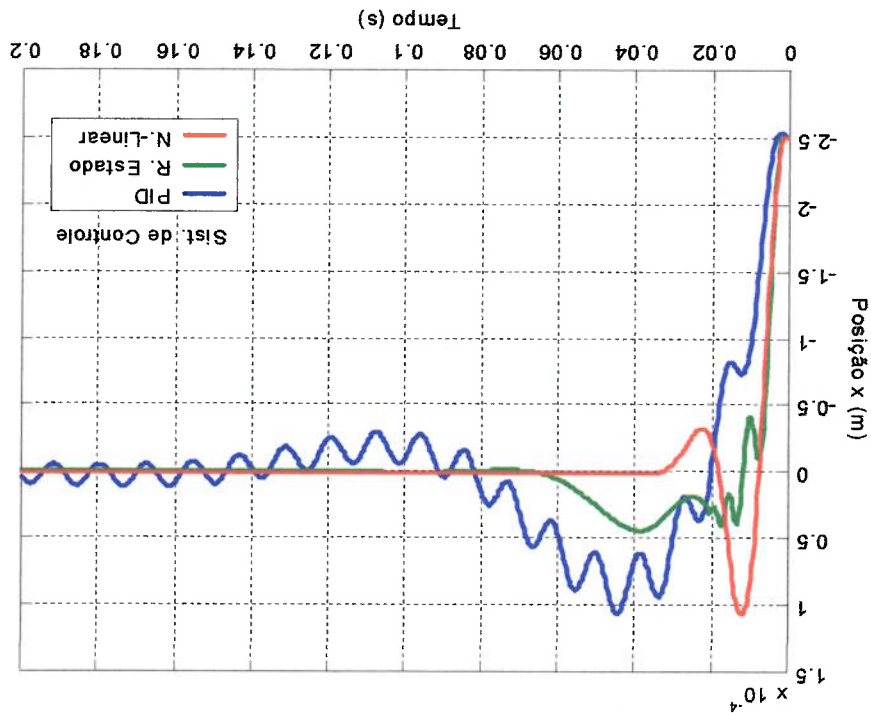
Nota-se que a melhor resposta do mancal com controle PID encontrada é muito oscilatória e demora mais tempo para estabilizar. As oscilações do eixo ocorrem por causa da oscilação da corrente elétrica, devido à indutância do sistema. Nas respostas com os demais controles este efeito não é observado porque há controle da corrente elétrica. Deve-se ressaltar que o Controle Não-Linear não tem ganho integral e nem pré-corrente para compensar o peso do eixo, e mesmo assim tem o melhor desempenho na resposta ao degrau de posição.

Tabela 5.1: Parâmetros escolhidos para melhor resposta ao degrau de posição, índices de desempenho  $J_0$  e os ganhos projetados  $K$  para os sistemas de controle.

Sistema de Controle	$I_0$ (A)	$t_s$ (s)	$J_0$	$K_w$	$K_x$	$K_v$	$K_i$	$K_{acel}$
PID	0,07	0,12	2,656	$1,2 \cdot 10^6$	$1,8 \cdot 10^4$	423		
Realimentação de Estados	0,14	0,045	1,434	$2,1 \cdot 10^8$	$2,0 \cdot 10^6$	$1,1 \cdot 10^4$	-188	
Não-Linear	0,03	0,02	1,282		$4,6 \cdot 10^8$	$1,7 \cdot 10^6$		4400

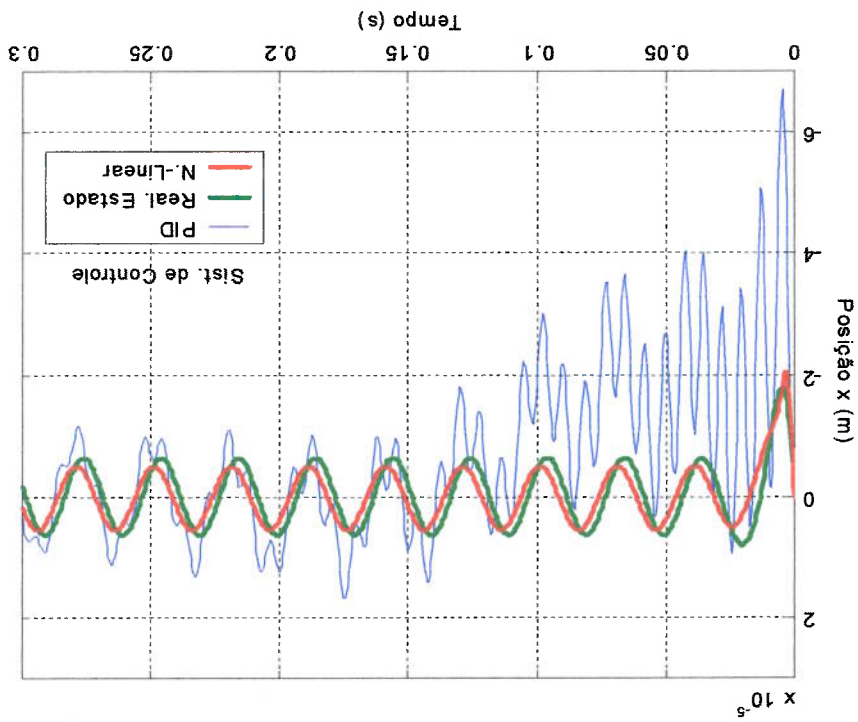
Os índices de desempenho calculados na resposta ao degrau de posição são apresentados na tabela 5.1, além dos parâmetros escolhidos para a melhor resposta ao degrau e os ganhos  $K$  projetados para cada sistema de controle, onde os índices de  $K$  são as variáveis ou as grandezas relacionadas ao ganho.

Figura 5.52: Resposta da posição do eixo ao seu degrau de posição com controle PID, controle por Realimentação de Estado e Controle Não-Linear refinados.



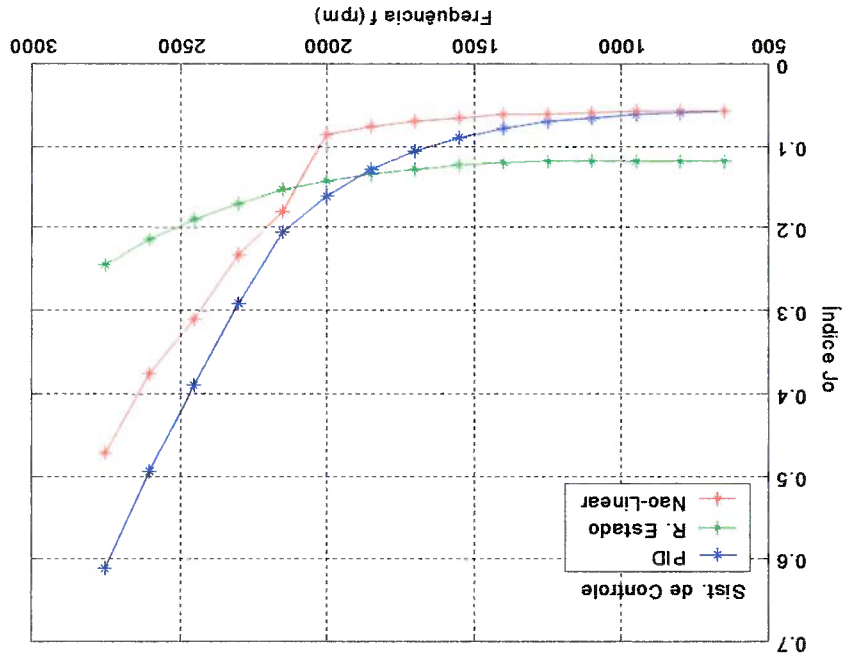
A resposta do sistema com controle PID é muito oscilante por causa da indutância que, quando entra em ressonância com a força de vibração devido à rotação do eixo, pode instabilizar o sistema. O método escolhido para projeto do controle pode melhorar a resposta do sistema, porém a oscilação irá se manter em maior ou menor grau. Os outros sistemas de controle conseguem manter o eixo numa situação estável e mais próxima da desejada. Os desempenhos e os ganhos de controle usados na simulação da resposta às forças externas são apresentados na tabela 5.2.

**Figura 5.53:** Resposta da posição do eixo às forças externas com controle PID, controle por Realimentação de Estado e Controle Não-Linear refinados.



A figura 5.53 apresenta as respostas do sistema às forças externas com a aplicação dos controles estudados. As simulações foram feitas usando os melhores parâmetros encontrados para este tipo de simulação, para cada sistema de controle. Nesta simulação, como as outras deste tipo, o eixo está girando constantemente a 2000 rpm.

Figura 5.54: Gráfico dos índices  $J_0$  das respostas à força de vibração em diversas frequências de rotação do eixo, com os controles projetados.



Nas simulações apresentadas na figura 5.53, o eixo gira a rotação constante a 2000 rpm, porém é interessante verificar o desempenho destes sistemas nas demais velocidades de rotação. Portanto foram simuladas as respostas à vibração para o mancal, com a mesma configuração anterior de parâmetros, para verificar o desempenho e a estabilidade em rotações de 500 a 2500 rpm, na figura 5.54.

Tabela 5.2: Parâmetros escolhidos para melhor resposta às forças externas, índices de desempenho  $J_0$  e os ganhos projetados  $K$  para os sistemas de controle.

Sistema de Controle	$I_0$ (A)	$t_s$ (s)	$J_0$	$K_w$	$K_x$	$K_v$	$K_i$	$K_{acel}$
PID	0,03	0,18	0,448	$8,5 \cdot 10^5$	$2,9 \cdot 10^4$	658		
Realimentação de Estados	0,35	0,025	0,214	$8,9 \cdot 10^8$	$4,7 \cdot 10^6$	$1,5 \cdot 10^4$	-343	
Não-Linear	0,8	0,007	0,195		$1,1 \cdot 10^{10}$	$1,4 \cdot 10^7$		$1,3 \cdot 10^4$

O gráfico dos índices de desempenho em frequência da figura 5.54 mostra que o

controle Não-linear tem o melhor desempenho em todas as frequências de rotação até a frequência de projeto (2000 rpm), porém quando eixo gira mais rápido o desempenho cai consideravelmente. O controle por Realimentação de Estados tem desempenho bom na frequência de rotação de projeto e tem o melhor desempenho apenas nas rotações acima das de projeto, porém em baixas rotações o desempenho é ruim. E ao tentar melhorar o desempenho deste controle em baixas frequências, perde-se a estabilidade na resposta à aplicação de carga máxima, o que não é aceitável neste projeto, pois o sistema deve manter certa robustez. O controle PID tem baixo desempenho em quase todas as frequências, exceto em baixas rotações, pois nestas rotações a vibração da corrente causada pela indutância não tem grande amplitude. Isto não ocorre nos outros controles porque nestes há um ganho para a corrente (C. Real. de Estados) ou para a aceleração do eixo (C. Não-Linear). Pode-se concluir deste gráfico que o sistema com Controle Não-Linear tem um desempenho bastante direcionado para as frequências de trabalho, enquanto o sistema com Realimentação de Estado permite um desempenho razoável em qualquer frequência de rotação do eixo. O controle PID só permite bom desempenho ao sistema em baixas rotações do eixo.

Pode-se definir dois tipos de conjunto de parâmetros, conforme a pré-corrente  $I_0$  e

o tempo de acomodação  $t_s$ , apresentados na tabela 5.1 e na tabela 5.2, que definem os ganhos do controle e que foram determinados pelo tipo de situação às quais obtiveram melhor desempenho. Então, se os parâmetros de controle forem configurados pelos valores da tabela 5.1, pode-se denominar este conjunto como configuração de controle genérica, pois ela permite melhor desempenho do sistema na resposta ao degrau de

posição e, consequentemente, em situações gerais com perturbações externas. E os parâmetros de controle configurados pelos valores da tabela 5.2 podem ser denominados por configuração de controle restrita, pois tem melhor desempenho na resposta às forças externas e portanto em situações particulares de trabalho.

Analisando os índices de desempenho encontrados, podemos concluir que o sistema de Controle Não-Linear tem melhor desempenho nas condições que foram realizadas as simulações, com os parâmetros usados, as limitações impostas e as características do índice requeridas.

A partir das simulações feitas neste capítulo, pode-se deduzir que o controle PID é de uso mais aconselhável em situações diversas, pois ele responde bem em situações de partida e em perturbações em geral, numa grande faixa de configurações de parâmetros de controle. Já o sistema com Realimentação de Estados pode ser mais direcionado a fins específicos, pois se pode conseguir maior desempenho desde que seja usado em situações limitadas. O Controle Não-Linear, por sua vez, tem resposta razoável a situações adversas e ainda pode ter ótimo desempenho em situações específicas, como as apresentadas neste estudo. Este controle também pode ser direcionado especificamente para determinada aplicação, onde se conhecem as forças envolvidas, para conseguir um desempenho ainda melhor. Por exemplo, se no algoritmo de controle for incluído o comportamento da força de vibração, esta pode ser compensada pelo controle para obter resultados de respostas ainda melhores. Nesta simulação foi incluída no algoritmo de controle a força de trabalho  $F_a$  previsível, se isto não for feito teremos um erro de regime permanente de cerca de  $1,6 \cdot 10^{-5}$  m na resposta às forças externas. A força de vibração é mais difícil de ser incluída no algoritmo por necessitar sincronizar a fase da força com a fase do algoritmo de controle.

Deve-se lembrar que os sistemas otimizados neste estudo, bem como os resultados

obtidos e as conclusões tomadas, são válidas apenas nas situações estudadas aqui.

Embora algumas conclusões possam ser generalizadas, a maior parte dos resultados não

pode ser considerada conclusiva para os sistemas de controle, pois não foram realizadas

simulações suficientes para garantir a otimização total dos parâmetros usados em cada

controle; o cálculo do índice de desempenho  $J_0$  busca características de desempenho

particulares para o sistema; as simulações de respostas não cobrem toda a gama de

situações que um mancal encontrará durante o trabalho; e o cálculo dos sistemas de

controle pode ser feitos de diversas maneiras, principalmente as do Controle Não-

Linear. Porém os resultados obtidos traduzem características gerais e tendências de

desempenho dos sistemas de controle estudados, além de um constituir um método de

projetar e avaliar sistemas de controle.

Vamos fazer algumas simulações de respostas semelhantes às anteriores

estudando agora o comportamento de todo o sistema do eixo apoiado por 2 mancais

magnéticos nas extremidades, considerando a dinâmica do eixo como corpo rígido.

## 5.9. Estudo da dinâmica do eixo bi-apoiado nos Mancais

### Magnéticos

Considerando o eixo apoiado pelos mancais magnéticos nas extremidades nas

direções radiais, como no modelo descrito pelas equações (3.25), podemos estudar o

comportamento do eixo com dinâmica de corpo rígido e comparar com os resultados

obtidos anteriormente. Em todas as simulações foi usada configuração de controle



genérico para respostas ao degrau de posição ou similar e configuração de controle

restrito para respostas às forças externas ou em situações de trabalho, como nos

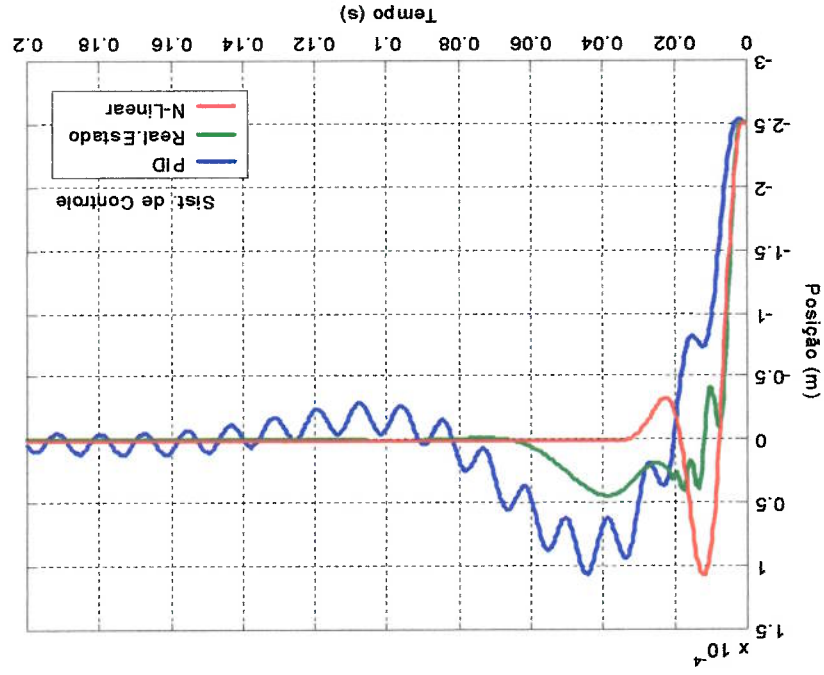
capítulos anteriores.

Na figura 5.55 temos as respostas para cada controle de uma extremidade do eixo

ao degrau de posição na direção x, onde as duas extremidades do eixo partem da mesma

posição inicial, portanto o comportamento do eixo inteiro é bastante semelhante à

resposta da figura 5.33, onde é simulado apenas meio eixo em uma direção.



**Figura 5.55:** Resposta da posição do eixo ao degrau de posição aplicado às duas extremidades ao mesmo tempo, para cada controle estudado

Como nesta simulação não foi aplicado degrau na direção y, a resposta nesta

direção manteve-se praticamente nula, exceto por certa vibração causada pelo efeito

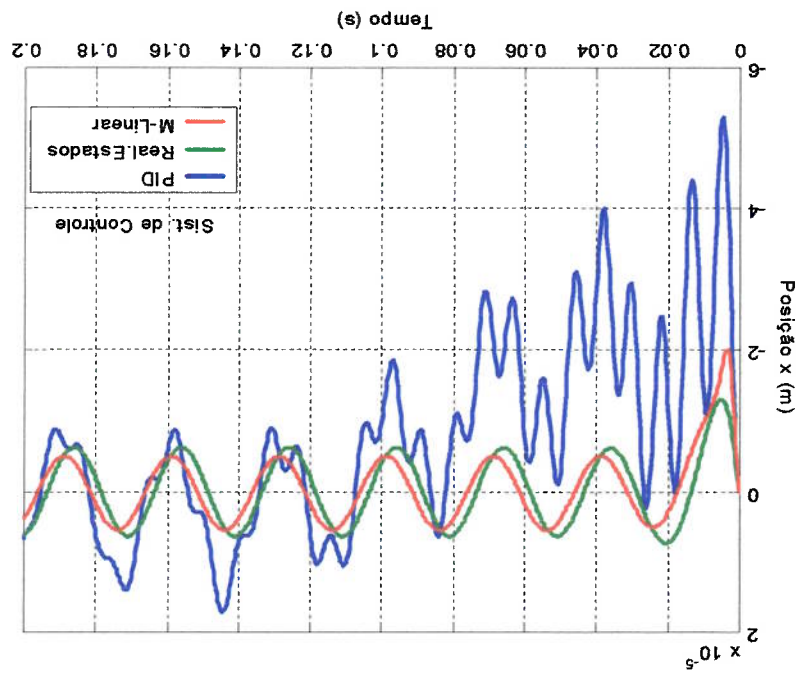
giroscópico.

A figura 5.56 apresenta a resposta do eixo às forças externas, aplicadas na posição

do eixo que causa maior esforço no manual, isto é, a força de trabalho foi aplicada

A figura 5.57 apresenta a resposta da posição da extremidade do eixo na direção  $x$ , a partir da aplicação das forças externas no mancal com controle PID. Na figura 5.58 tem-se a resposta da posição  $y$  na mesma simulação, e em 5.59 apresenta-se um gráfico polar da trajetória da extremidade do eixo, permitindo visualizar o seu movimento no plano perpendicular ao eixo. Este gráfico é bastante útil, pois permite a visualização simultânea da resposta física do eixo nas direções  $x$  e  $y$  (apresentado em coordenadas polares) para análise da trajetória do eixo até o equilíbrio.

**Figura 5.56:** Resposta da posição do eixo às forças externas aplicada às duas extremidades ao mesmo tempo, para cada controle estudado



próximo ao rotor e as forças de vibração no rotor estão sincronizadas. Foi simulado o comportamento do eixo completo para comparar com as simulações anteriores com meio eixo e, em vista da semelhança, pode-se concluir que as simulações com meio eixo representam o satisfatoriamente o comportamento do sistema naquela direção.

Figura 5.57: Resposta da posição do eixo na direção x, causada pelas forças externas no mancal com controle PID.

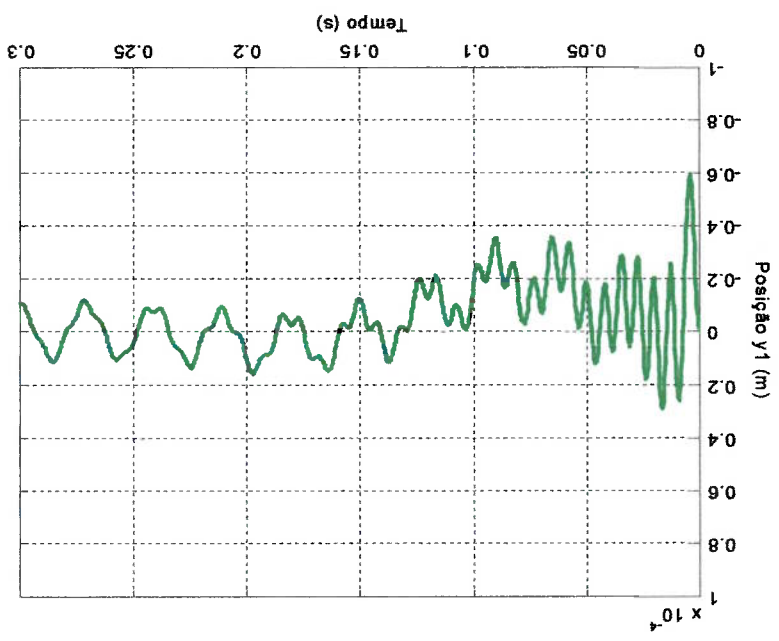
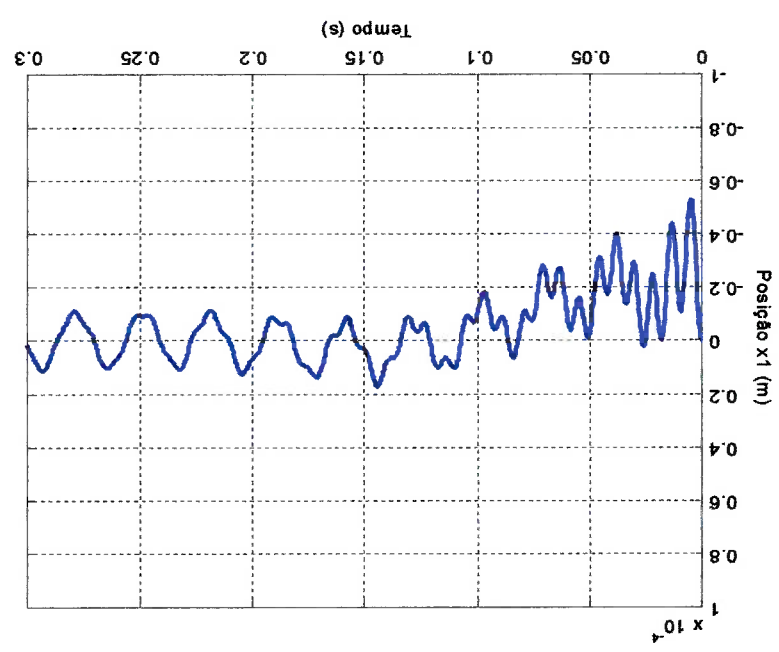


Figura 5.58: Resposta da posição do eixo na direção y, causada pelas forças externas no mancal com controle PID.



As trajetórias das duas extremidades do eixo são idênticas, pois partem da mesma posição inicial e sofrem influência das mesmas forças externas aplicadas de forma simétrica no eixo. As trajetórias do eixo nas figuras 5.60 e 5.61 são respostas às forças externas usando o controle por Realimentação de Estado e o Controle Não-Linear, respectivamente. Os parâmetros usados são os encontrados para a resposta às forças externas na tabela 5.2.

**Figura 5.59:** Trajetória do eixo no plano radial, na resposta às forças externas aplicadas às duas extremidades, usando controle PID.

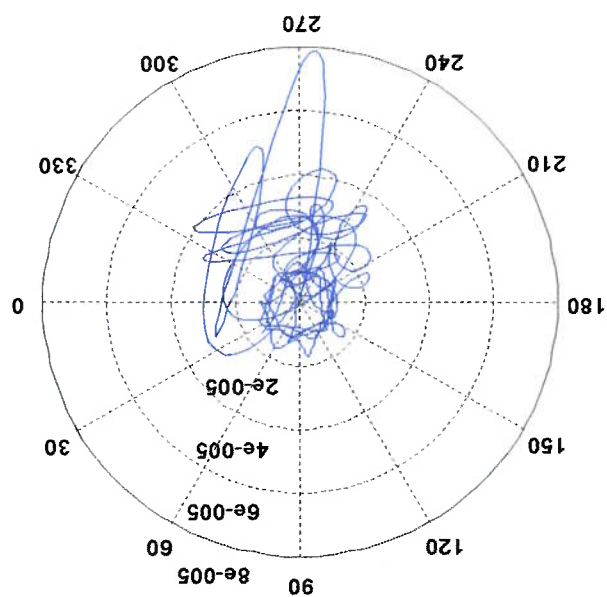


Figura 5.61: Trajetória do eixo no plano radial, na resposta às forças externas aplicadas às duas extremidades, usando Controle Não-Linear.

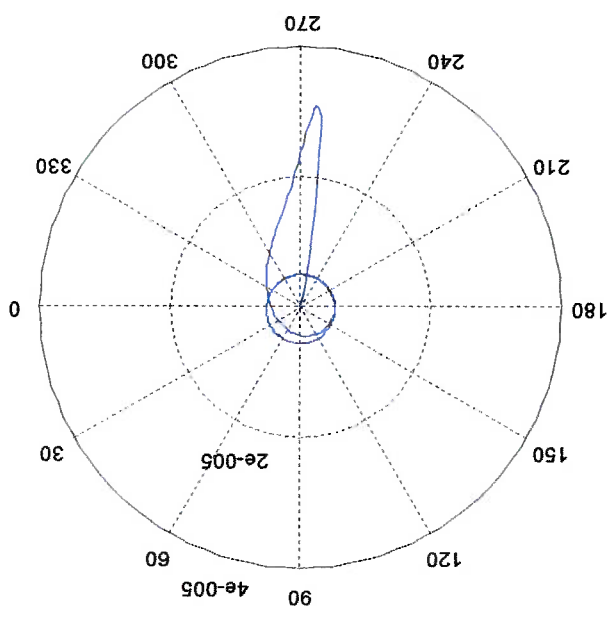
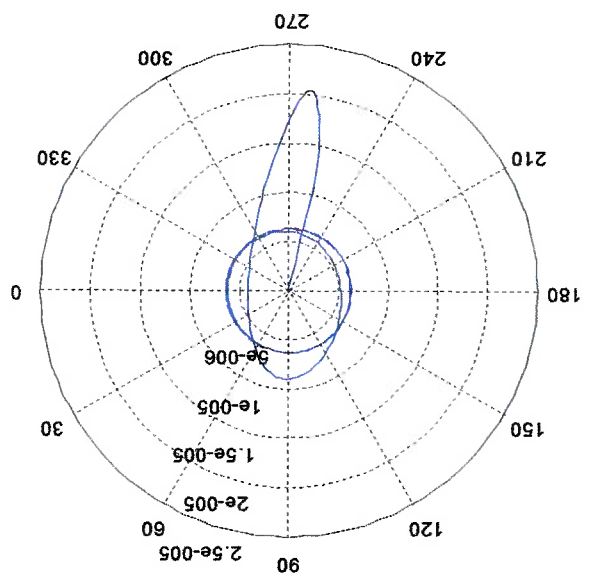


Figura 5.60: Trajetória do eixo no plano radial, na resposta às forças externas aplicadas às duas extremidades, usando controle por Realimentação de Estado.



Nota-se que a trajetória do sistema com Controle Não-Linear estabiliza mais

rapidamente, e o sistema com PID tem a pior resposta.

Nos gráficos polares apresentados deve-se lembrar que a referência do gráfico é a horizontal no ângulo zero e os eixos x e y estão inclinados 45 graus.

A simulação da resposta de grau de posição na direção x é apresentada a seguir, porém a posição inicial é  $hg/2$  para uma extremidade do eixo e  $-hg/5$  para a outra

extremidade. Foi usado controle PID na figura 5.62, Realimentação de Estado na 5.63 e controle Não-linear na 5.64. Os parâmetros usados são os encontrados para a resposta

ao grau de posição descritos na tabela 5.1.

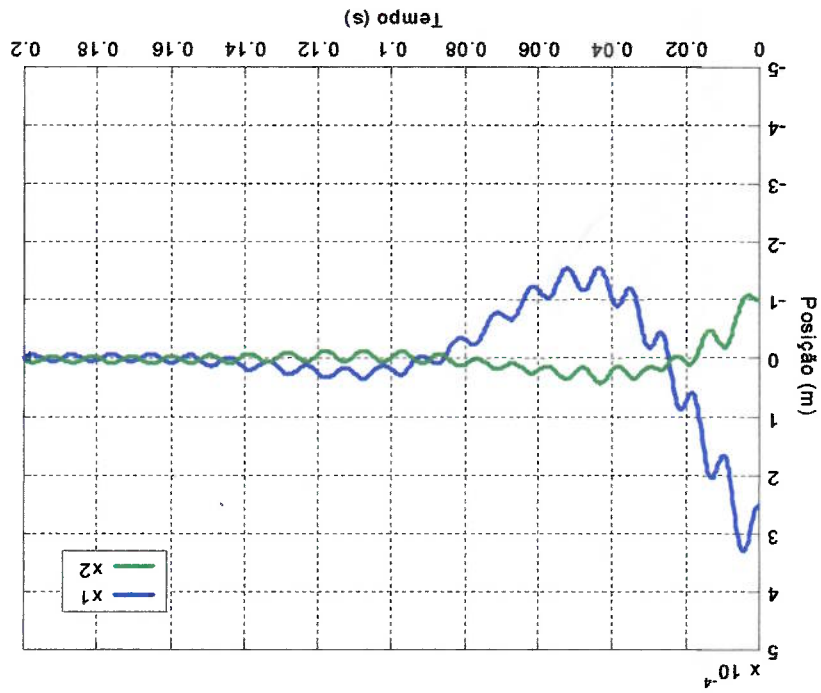


Figura 5.62: Resposta da posição do eixo na direção x, causada pelo degraú de posição inicial em  $h/2$  e  $-h/5$  nas extremidades do eixo, com controle PID.

Figura 5.64 Resposta da posição do eixo na direção x, causada pelo degraú de posição inicial em  $h/2$  e  $-h/5$  nas extremidades do eixo, com Controle Não-Linear.

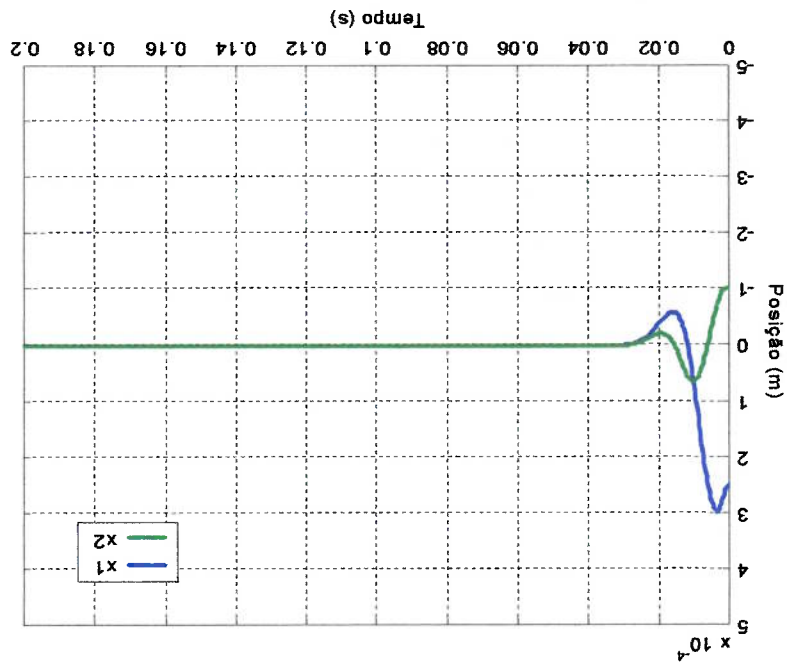


Figura 5.63: Resposta da posição do eixo na direção x, causada pelo degraú de posição inicial em  $h/2$  e  $-h/5$ , com controle por Realimentação de Estado.

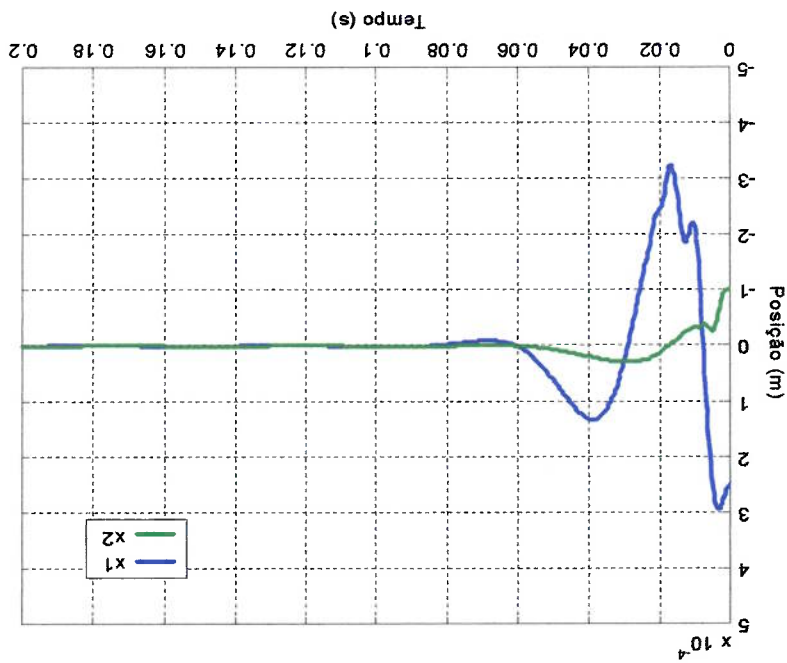
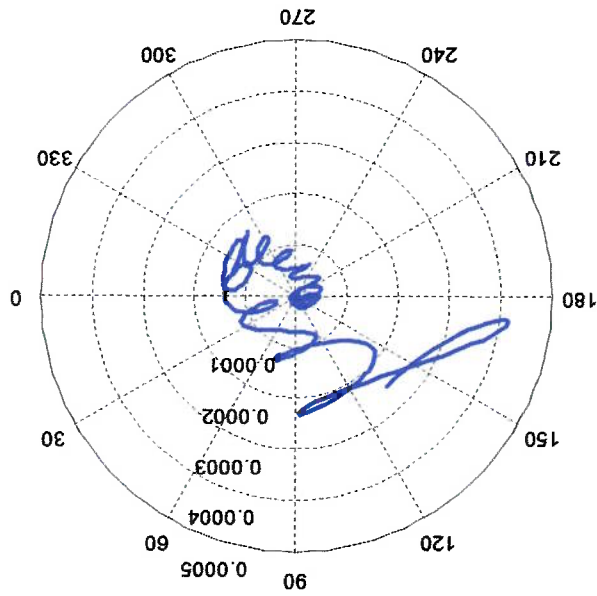


Figura 5.65: Trajetória da extremidade do eixo  $x_1$  no plano radial, na resposta ao degrau de posição inicial, usando controle PID.



As figuras 5.65 a 5.67 apresentam as simulações da resposta a uma situação de posição e velocidade iniciais, no gráfico polar da trajetória da extremidade do eixo. A posição inicial do eixo é  $x_1 = hg/2$  e  $x_2 = -hg/5$  e as velocidades iniciais são  $v_3 = 0,1$  m/s e  $v_4 = -0,1$  m/s eo tempo de simulação é 0,3 s. Em 5.65 utiliza-se no mancal o controle PID, em 5.66 utiliza-se o Controle por Realimentação de Estado e em 5.67 o Controle Não-Linear. Os parâmetros usados são os encontrados para a resposta ao degrau de posição descritos na tabela 5.1.



Figura 5.67: Trajetória da extremidade do eixo  $x_1$  no plano radial, na resposta ao degrau de posição inicial, usando Controle Não-Linear.

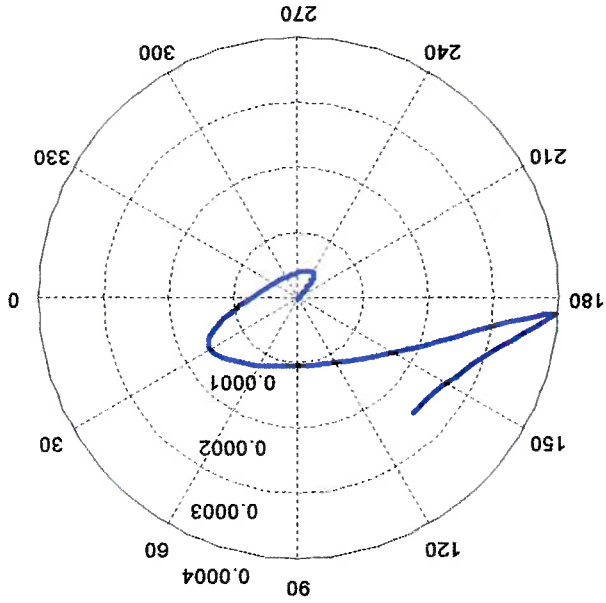
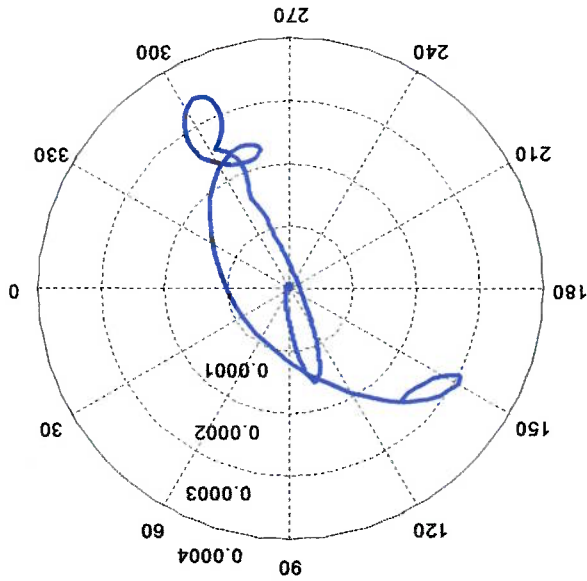


Figura 5.66: Trajetória da extremidade do eixo  $x_1$  no plano radial, na resposta ao degrau de posição inicial, usando controle por Realimentação de Estado.



Analisando as trajetórias do eixo nos gráficos polares, pode-se notar que com o

Controle Não-Linear o eixo estabiliza de forma mais eficiente, com trajetória mais convergente, isto é, o eixo vai para a posição de equilíbrio desviando menos da

trajetória ideal.

Nas figuras 5.68 a 5.70 o eixo é posicionado inicialmente em  $x_1 = h/5$  e  $x_2 = -h/5$

com velocidade inicial de  $v_3 = 0,05$  m/s e  $v_4 = -0,05$  m/s, de onde se tem a trajetória das

duas extremidades do eixo no plano radial até alcançar o equilíbrio em 0,3 s, para cada

sistema de controle. Os parâmetros usados são os encontrados para a resposta ao degrau

de posição descritos na tabela 5.1.

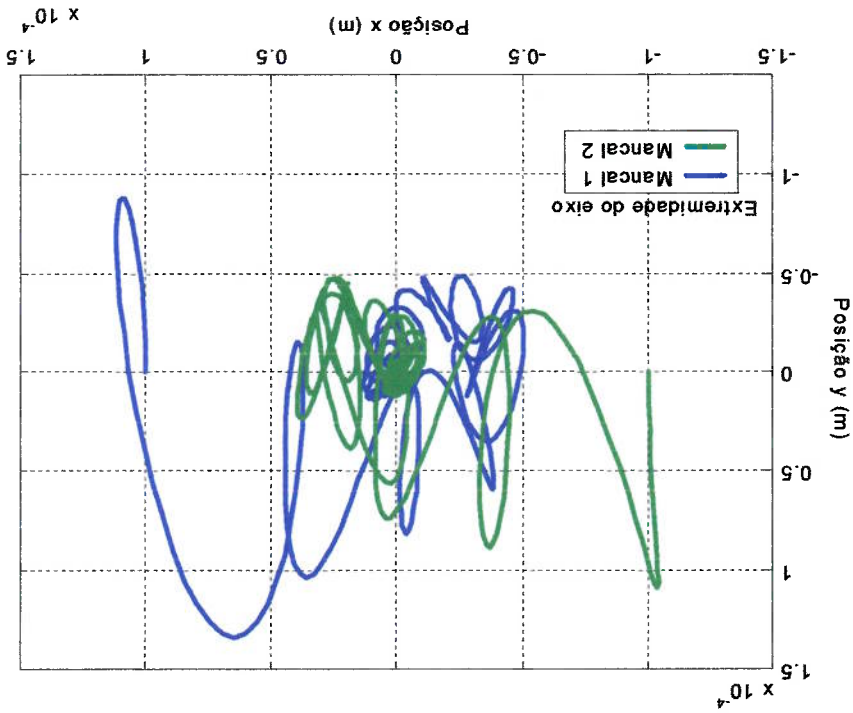


Figura 5.68: Trajetória das extremidades do eixo no plano radial, na resposta ao degrau de posição e velocidade inicial, usando controle PID.

Figura 5.70: Trajetória das extremidades do eixo no plano radial, na resposta ao degrau de posição e velocidade inicial, usando Controle Não-Linear.

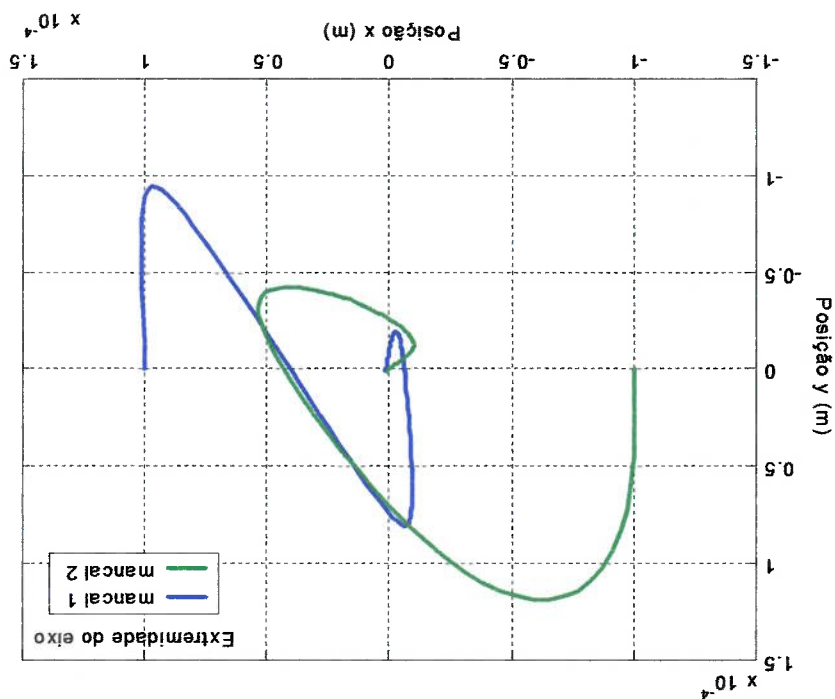
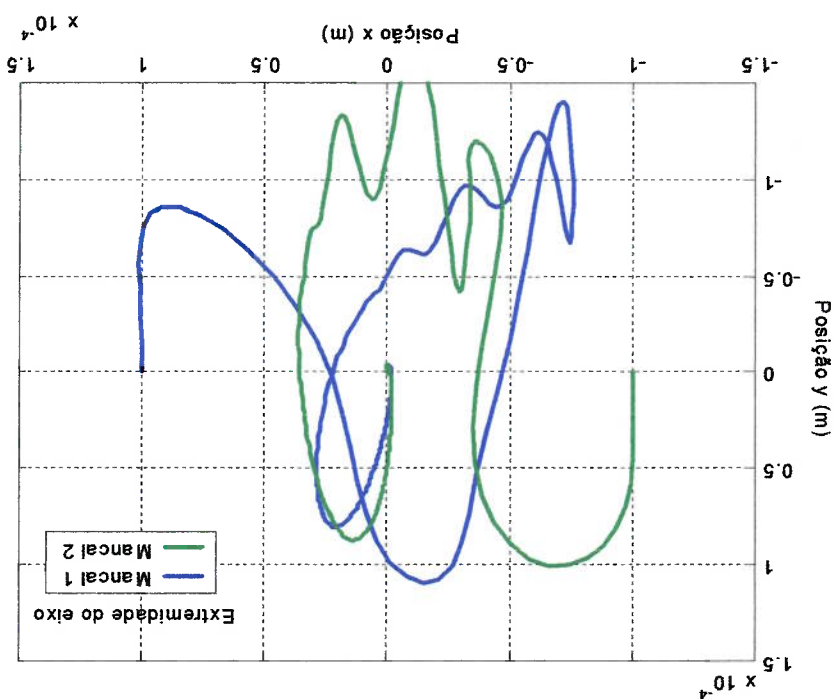


Figura 5.69: Trajetória das extremidades do eixo no plano radial, na resposta ao degrau de posição e velocidade inicial, usando controle por Realimentação de Estado.



A resposta do sistema com controle Não-Linear converge rapidamente para o

equilíbrio e a resposta do sistema com Controle por Realimentação de Estado, apesar de ter um certo sobre-sinal, também converge razoavelmente rápido para o equilíbrio, porém a resposta do sistema com Controle PID mantém-se certos instantes longe do equilíbrio e estabiliza lentamente em torno deste, como mostrado em detalhe na figura

5.71.

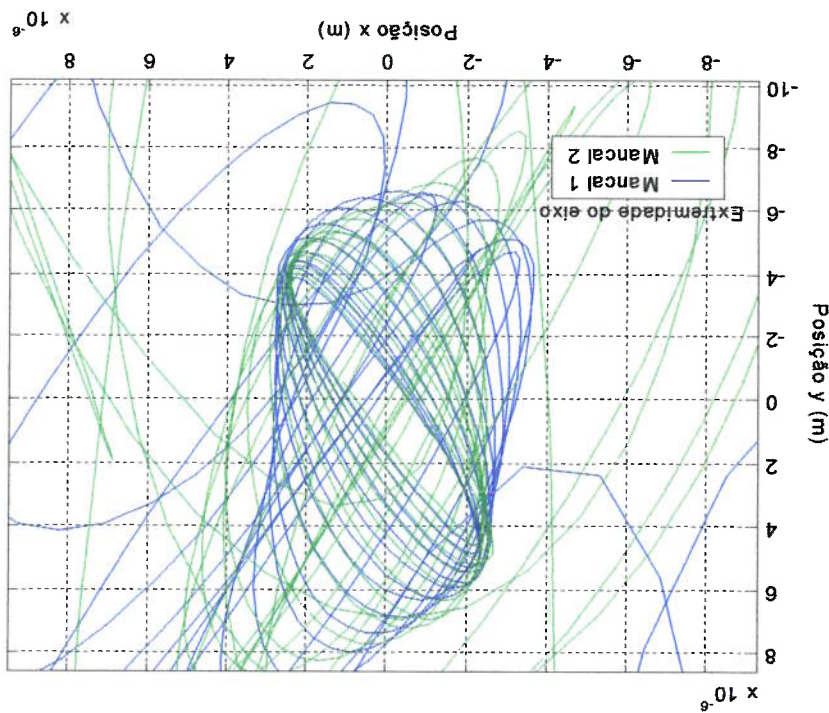


Figura 5.71: Detalhe da trajetória das extremidades do eixo no plano radial, na resposta ao degrau de posição e velocidade inicial, usando controle PID.

As trajetórias das extremidades do eixo durante a simulação da resposta às forças externas com os controles PID, Realimentação de Estado e Não-Linear são apresentadas nas figuras 5.72 a 5.74, no plano  $xy$  perpendicular ao eixo. Nesta simulação as forças cíclicas devido à vibração do rotor têm uma diferença de fase de  $180^\circ$ . Os parâmetros usados são os encontrados para a resposta às forças externas descritos na tabela 5.2.

Figura 5.72: Trajetória das extremidades do eixo no plano radial, na resposta às forças externas, usando Realimentação de Estado.

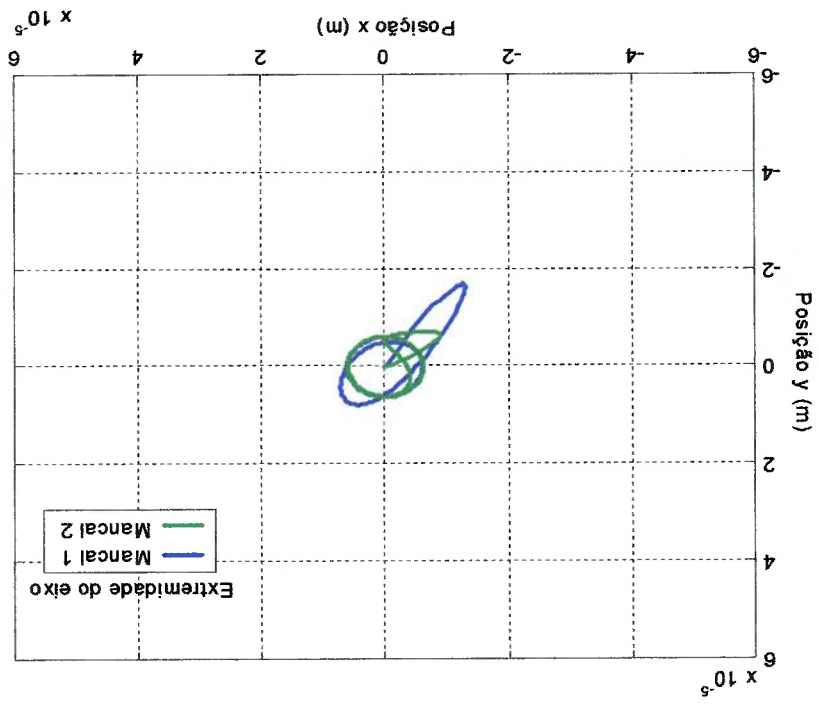
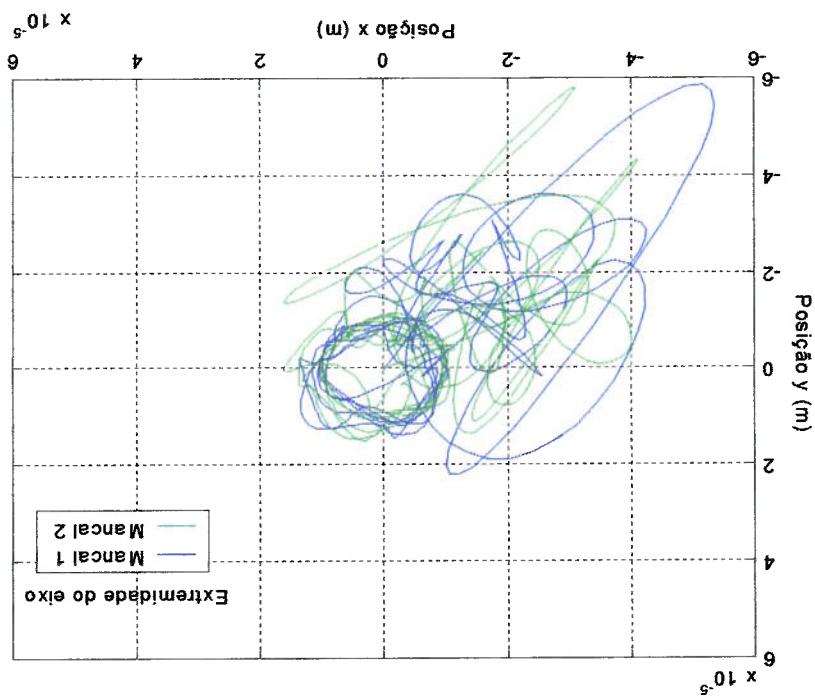
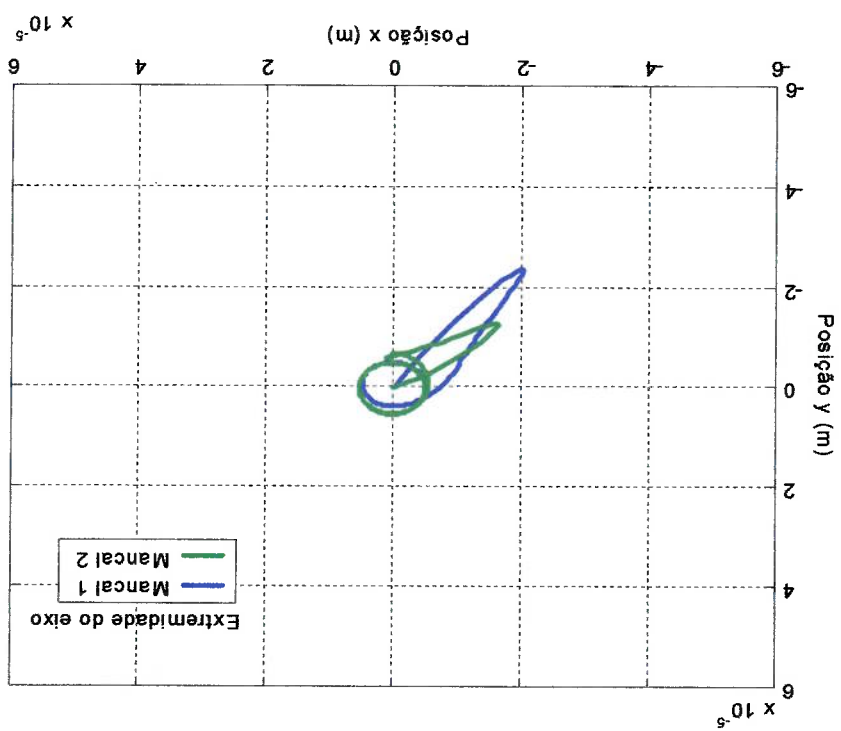


Figura 5.73: Trajetória das extremidades do eixo no plano radial, na resposta às forças externas, usando Controle PID.



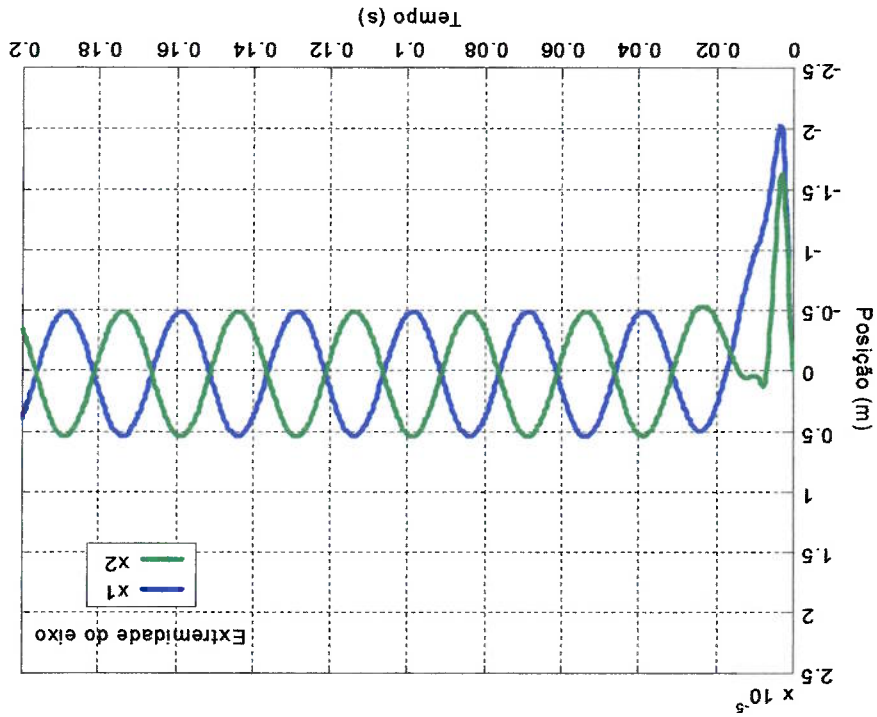
Como os gráficos estão na mesma escala, é possível comparar visualmente as diferenças de respostas do sistema para cada controle usado. O controle PID continua fornecendo uma resposta lenta e bastante oscilatória em torno do equilíbrio, causada pela oscilação da corrente elétrica. Este efeito de oscilação pode ser reduzido bastante se forem escolhidos outros valores de parâmetros, porém a resposta ficaria mais lenta e o índice de desempenho do sistema seria pior. As respostas usando Realimentação de Estado e Controle Não-Linear são bastante parecidas, porém o índice de desempenho é melhor para o sistema com Controle Não-Linear. As respostas no tempo das extremidades do eixo na direção x são mostradas na figura 5.75, com Controle Não-Linear. As respostas da figura 5.75 são da mesma simulação da figura 5.74.

**Figura 5.74:** Trajetória das extremidades do eixo no plano radial, na resposta às forças externas, usando Controle Não-Linear.



A tabela 5.3 apresenta as situações limite de trabalho do Mancal Magnético, conforme a configuração dos parâmetros de controle, conforme o tipo de controle usado e conforme a situação de esforço à qual o sistema é submetido. Cada coluna da tabela representa uma situação particular ao qual o sistema é submetido, e cada valor da tabela representa a máxima situação daquele tipo na qual o sistema mantém-se estável. Por exemplo, o sistema com controle PID e configuração de controle genérico suporta um degrau de posição de até 65% do entreferro acima do equilíbrio e de 100% do entreferro abaixo do equilíbrio, e quando submetido unicamente a uma força de trabalho acima de 150 N ele torna-se instável.

Figura 5.75: Resposta da posição do eixo na direção x, causada pelas forças externas, com diferença de fase do desbalançamento de 180°, com Controle Não-Linear.



A configuração de controle genérica é a configuração de valores de parâmetros que permite o melhor desempenho na resposta ao degrau de posição, verificada a estabilidade nas condições de partida e de aplicação de carga máxima repentina. Esta configuração permite ao mancal um desempenho razoável em uma grande faixa de aplicações, pois se tem uma resposta estável do sistema em inúmeras situações de

**Tabela 5.3:** Faixa de situações de trabalho estável do Mancal Magnético, conforme tipo de controle, sua configuração e o tipo de resposta.

Configuração de controle	Tipo de controle	Degrão de posição máximo (% do entreferro)	Força máxima de trabalho contínua (N)	Frequência máxima de vibração do eixo (rpm)	Situação limite de estabilidade		
					Resposta	Configuração	Tempo de resposta
Resposta	Não-Linear	- 5 % + 5 %	50	3500			
	Realim.Estado	- 15 % + 15 %	60	5000			
	PID	- 100 % + 65 %	90	4000			
Genérico	Não-Linear	- 100 % + 65 %	190	6500			
	Realimentação de Estado	- 100 % + 65 %	190	5000			
	PID	- 100 % + 65 %	150	3500			



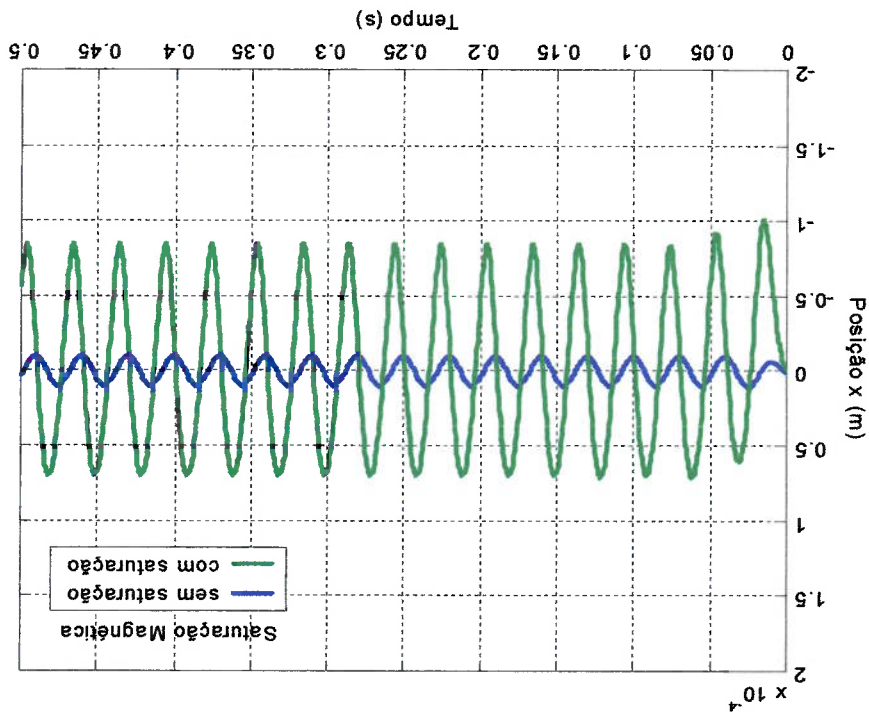
trabalho diferentes, embora o desempenho do sistema não seja o melhor em cada situação. Em outras palavras, esta configuração de controle é aplicável em situações gerais de esforços, onde é requerida uma resposta estável, mesmo que não se conheça exatamente os esforços aos quais o mancal será submetido, e onde um desempenho otimizado não é estritamente necessário.

A configuração de controle restrita é a configuração de parâmetros que permite o melhor desempenho na resposta às forças externas, se for verificada a estabilidade nas condições de aplicação de carga máxima repentina. Esta configuração permite ao mancal um ótimo desempenho em uma faixa restrita de aplicações. Isto é, tem-se uma resposta com o melhor desempenho encontrado para determinada situação de trabalho previsível em projeto e repetitiva ou contínua, embora não tenha bom desempenho e chegue a ter resposta instável em situações para as quais o controle não foi projetado, ou situações diferentes daquelas de trabalho. Portanto esta configuração é aplicável em situações particulares de trabalho, onde é requerida uma resposta com desempenho ótimo e conhece-se com certa precisão os esforços aos quais o mancal será submetido. A aplicação de esforço repetitivo ou conhecido e ininterrupto é uma situação onde este tipo de configuração de controle é aplicável. E este tipo de aplicação é o mais recomendado comercialmente para mancais magnéticos em geral, pois sua construção permite maior período de tempo entre as paradas para manutenção do equipamento. Isto é, mancais magnéticos são mais recomendados em situações de trabalho ininterrupto e de alto desempenho requerido, portanto a configuração de controle restrita pode ter maior aplicabilidade nas situações de trabalho dos mancais magnéticos em geral.

A figura 5.76 compara a resposta do eixo com relação à ocorrência de saturação magnética no núcleo do magneto.

Figura 5.76: Comparação entre as Respostas da posição do eixo à vibração, com a presença e ausência de saturação magnética, com Controle por Realim. de Estado.

O efeito de saturação foi inserido no modelo por meio de uma diminuição da seção do magneto, causando uma alteração das curvas que relacionam o fluxo magnético com a corrente elétrica e baixando a ocorrência de zona saturada para cerca de 0,9 A. o método desenvolvido neste estudo permite posicionar a curva de saturação para que este efeito ocorra para qualquer valor da corrente elétrica. A consequência principal é a perda de força magnética na zona saturada, causada pela mudança da relação entre a corrente e o fluxo magnético. Pode-se notar que há uma queda do desempenho do sistema quando esta trabalhando na zona saturada, mesmo que parcialmente.



## 6. Conclusão

A partir das situações escolhidas para dimensionamento e simulação do modelo do mancal magnético, conclui-se que o sistema de Controle Não-Linear obteve o melhor desempenho geral, considerando as características escolhidas para definição de bom desempenho, as situações e configurações de parâmetros testadas por simulação matemática e as dimensões e a geometria do mancal modelado.

Durante as simulações, as respostas do sistema mostraram-se bastante dependente da pré-corrente usada, pois este parâmetro tem forte influência no comportamento do sistema e é um parâmetro importante no modelo linearizado da dinâmica do mancal. Fez-se necessário um estudo mais profundo dos efeitos quantitativos deste parâmetro na dinâmica de cada sistema de controle. Notou-se que quanto maior a pré-corrente usada no sistema, mais instável ele se tornaria na ausência de controle e menores seriam os ganhos calculados pelo controle, pois este está baseado num sistema linear. Porém, com pré-correntes mais baixas e, conseqüentemente ganhos de controle mais altos, o sistema responde com melhor desempenho, pois a resposta da tensão de controle torna-se mais alta. A melhora no desempenho ocorre até certo valor da pré-corrente, onde a energia gasta pelo controle não compensa manter o eixo no equilíbrio, ou então o sistema acaba se tornando instável.

As configurações dos parâmetros da pré-corrente e do tempo de acomodação foram divididas em dois tipos, conforme o tipo de resposta simulada. Estes parâmetros influenciam diretamente os ganhos de controle do sistema, por isso suas configurações

de valores foram classificadas segundo o tipo de resposta na qual aquela configuração consegue o maior desempenho. Isto é, foi necessário dividir a configuração de parâmetros de controle em dois tipos, para cada sistema de controle. Foi classificado de configuração de controle genérica como a configuração de valores de parâmetros da tabela 5.1, e configuração de controle restrita como os valores de parâmetros da

5.2, conforme o sistema de controle.

As simulações realizadas no capítulo anterior levam a concluir que o sistema de Controle Não-Linear obteve o melhor desempenho na situação de trabalho conhecida em projeto, com as configurações de controle restritas. Isto é, numa situação de trabalho particular, este tipo de controle alcança um desempenho que melhor atende ao requerido em projeto. Esta conclusão é baseada nos índices de desempenho alcançados pelo mancal com Controle Não-Linear e configuração de controle restrito, nas respostas às forças externas e ao degrau de posição, com tempo de acomodação  $t_s$  ajustável (tabela 5.1 e 5.2), nos aspectos das trajetórias do eixo no plano radial e nos resultados das verificações da faixa de estabilidade (tabela 5.3). Além disso o Controle Não-Linear com configuração de controle genérico foi responsável pela estabilidade do mancal numa maior faixa de situações.

Deve-se ressaltar que o Controle Não-Linear pode ter inúmeras outras soluções para o algoritmo de controle, baseadas na Transformação Global, pois se a força externa puder ser modelada matematicamente ela pode ser incluída no algoritmo de controle para que haja uma compensação de seus efeitos. Além disso existem infinitas soluções para as equações diferenciais que geraram o algoritmo de controle, o que abre uma inesgotável fonte de possibilidades de algoritmos não-lineares para estudo, que podem melhorar ainda mais o desempenho deste e de outros tipos de sistemas magnéticos.

O sistema de controle por Realimentação de Estado teve melhor desempenho em algumas simulações particulares, como nas respostas às forças externas, com tempo de acomodação de projeto  $t_s = 0,1$  s (cap.5.4), e maior estabilidade e desempenho na aplicação de forças externas em frequências mais altas (tabela 5.3 e figura 5.54). O sistema de controle PID também teve melhor desempenho em situações específicas de simulação: na resposta ao degrau com tempo de acomodação de projeto.

O Controle Não-Linear tem maior desempenho quando está na situação de trabalho na qual foi projetado, seja a situação genérica ou restrita. Isto é, quando o controle é projetado para se adaptar a situações genéricas, consegue-se uma ampla faixa de situações de utilização estável do sistema, embora com baixo desempenho, e quando o controle é projetado para uma situação particular de trabalho conhecida, consegue-se um ótimo desempenho de trabalho em uma faixa restrita de situações.

O sistema de controle PID não tem um bom desempenho em nenhuma situação geral de trabalho, mas torna o sistema estável em ampla faixa de parâmetros de controle, e mais barato comercialmente e de fácil instalação, o que o faz recomendável para aplicações gerais em mancais magnéticos onde um alto desempenho não é uma característica essencial de projeto.

O sistema de controle por Realimentação de Estados oferece ao sistema um desempenho geral intermediário, entre o controle PID e o Não-Linear, porém mais próximo ao desempenho do segundo. Este controle oferece um desempenho razoável a uma faixa de situações mais ampla que o Controle Não-Linear e tem simplicidade de construção comparável ao controle PID, por ser um controle linear. Portanto se o aspecto de facilidade de montagem e custos fossem aspectos relevantes neste estudo, talvez este controle pudesse alcançar o melhor desempenho geral.

Deve-se lembrar que os resultados e conclusões são baseados em um estudo de um mancal magnético particular, dimensionado e projetado para este trabalho. As simulações e os critérios de desempenho foram definidos buscando a melhor configuração de parâmetros para que certas características desejadas para o mancal sejam satisfeitas, porém estas características são particulares para este mancal e para a sua aplicação. A natureza do processo de otimização por simulações não permite garantir o melhor desempenho para cada sistema de controle, pois não é possível simular todas as configurações de parâmetros de controle existentes, porém acredita-se que uma aproximação do desempenho desejado é possível de ser conseguida por este método. O algoritmo de controle projetado para o sistema de Controle Não-Linear por Transformação Global não é solução única, este método permite uma infinidade de soluções para algoritmos de controle que não foram estudadas neste trabalho, o que pode resultar em ainda melhores desempenhos para o sistema.

Apesar das limitações deste estudo, o método de dimensionamento do mancal magnético desenvolvido aqui não é válido apenas para os parâmetros estudados, mas para qualquer valor de dimensão e de aplicação de esforços. Ele ainda é válido para uma grande variedade de aplicações deste equipamento, mesmo que a configuração ou a posição das forças sejam diferentes, ou mesmo que a posição dos mancais não seja nas extremidades, algumas pequenas mudanças nas equações de dimensionamento adaptariam o método de dimensionamento para uma extensa gama de situações. Além disso os métodos de projeto dos parâmetros do sistema de controle baseado em simulações utilizados neste estudo podem ser usados para melhorar a resposta de qualquer equipamento de levitação magnética. O método para projetar o Controle Não-Linear pode ser aplicado numa grande variedade de sistemas de comportamento pouco

linear para gerar um algoritmo de controle que melhor se adapta às condições de

trabalho específicas.

Deve-se levar em consideração que o sistema de Controle PID e o Controle por Realimentação de Estados podem ser implementados por um sistema analógico simples, o que os torna seu custo de utilização menor. O sistema de Controle Não-Linear necessita de decodificação, pois sua aplicação só é viável se for usado um sistema digital para montar seu algoritmo. Porém nos últimos anos o desenvolvimento de circuitos integrados mais baratos passou a viabilizar a implementação de algoritmos mais complexos por meio de circuitos programáveis ou outros digitais.

A melhoria do desempenho de resposta oferecida pela inúmera variedade de algoritmos de controle possíveis, calculados por Transformação Global, estimula um estudo futuro mais aprofundado sobre o assunto. O estudo do desempenho de um sistema de controle aplicado a um modelo que considere os efeitos de oscilação dos modos flexíveis de vibração do eixo apoiado por mancais magnéticos também é um assunto que merece aprofundamento futuro. Outro assunto que desperta interesse é o comportamento do eixo em alta velocidade de rotação, situação que comumente utiliza mancais magnéticos, e desafia a capacidade do sistema de controle para estabilizá-lo. A montagem física de um eixo sustentado por mancais magnéticos semelhante ao estudado se faz interessante, para verificar a confiabilidade do modelo construído e adicionar correções e efeitos não considerados neste modelo. O projeto de um sistema de controle que leve em consideração toda a dinâmica do eixo teria boas chances de alcançar bons desempenhos, o que merece ser explorado com profundidade.

## 7. Apêndice

### 7.1. Determinação da solução ótima dos parâmetros do sistema.

A determinação das dimensões do eletroímã é baseada no método de interação de valores, por causa do grande número de variáveis que influencia o sistema.

O problema da determinação dos parâmetros pode ser sintetizado no seguinte: a área da seção do núcleo de ferro-silício e o número de espiras do eletroímã determinam o diâmetro mínimo do eletroímã e dependem da força magnética necessária para levantar e controlar o eixo. Porém, esta força depende da massa do eixo e rotor, cujo diâmetro é determinado pelo diâmetro do eletroímã. Deste modo os parâmetros estão integrados e só podemos determiná-los por meio de interação.

Fixando os valores do entreferro, tensão máxima disponível e a frequência de rotação do eixo, determina-se a corrente máxima de trabalho (2.29). A partir disso determina-se arbitrariamente a massa do rotor e o número de espiras (2.19) e analisa-se a dimensão do conjunto (2.35). Verifica-se então se os valores arbitrários são confirmados pelo cálculo (2.39).

Foi inicialmente determinada uma faixa de massas do rotor que definem uma faixa de forças magnéticas que, segundo uma faixa de números de espiras possíveis, definem a área da seção do núcleo e o diâmetro mínimo do rotor. O volume do rotor determinará a sua massa que terá que ser a mesma adotada inicialmente. Se a massa do



rotor calculada for a mesma que a adotada inicialmente então a construção com estes

parâmetros é possível.

Além disso, dessa maneira pode-se determinar o caso ótimo onde a constante do

eletroímã ( $k_0$ ) seja a menor possível, garantindo rapidez de resposta, e o diâmetro total

do mancal seja o menor, garantindo compactação dimensional.

Foi testada uma faixa de massas do rotor e uma faixa de número de espiras,

usando os valores já definidos ou calculados no dimensionamento no capítulo. Os

resultados estão apresentados nos gráficos a seguir. As soluções possíveis estão no eixo

onde  $M = 1$ , pois se  $M$  é a relação entre a massa do rotor definida arbitrariamente e a

massa do rotor corrigida pelo cálculo, as únicas soluções possíveis estão onde as massas

arbitrária e calculada se confirmam.

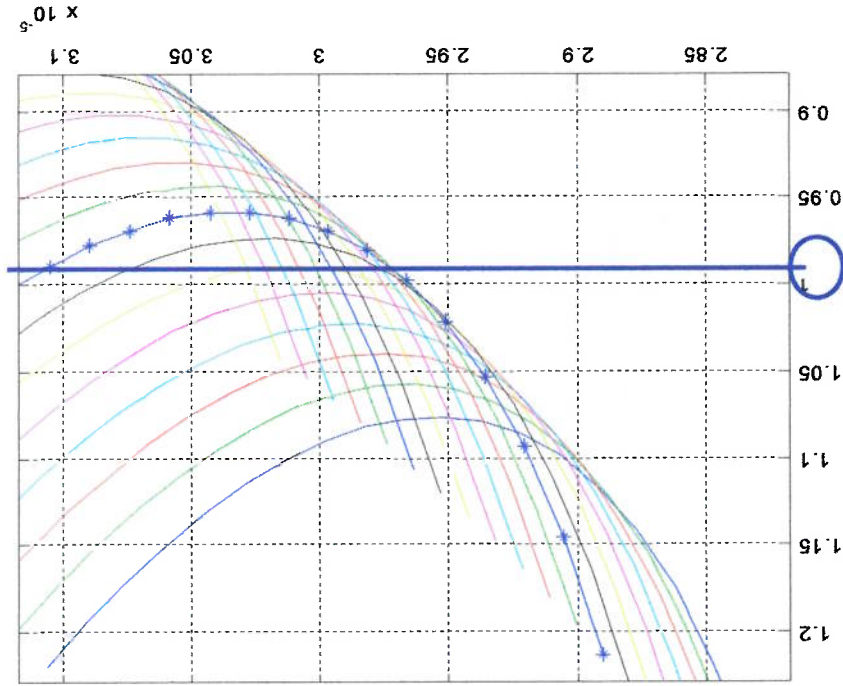
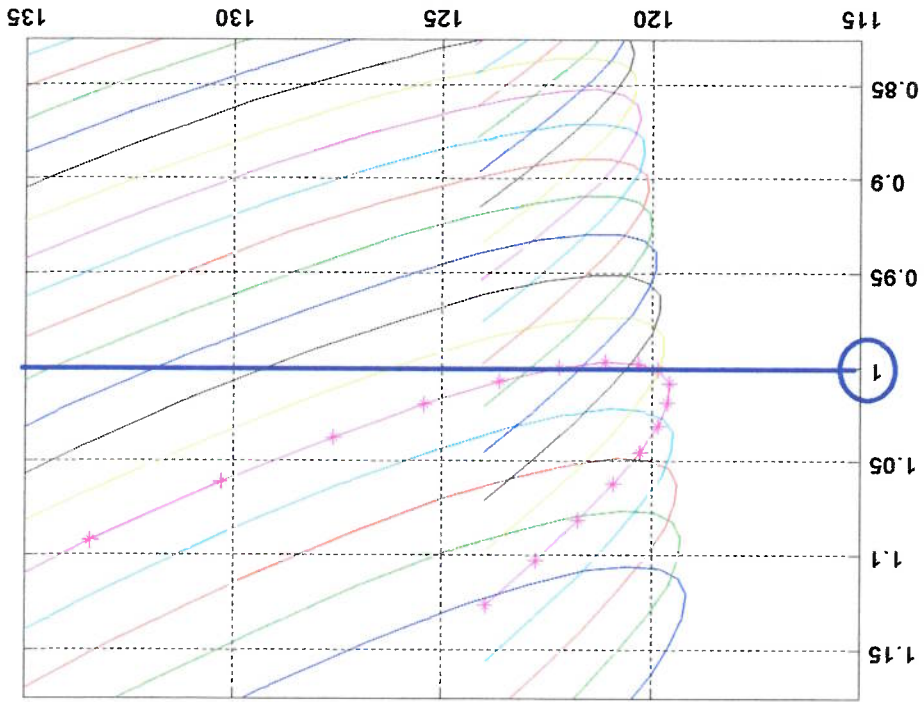


Figura 7.1: Massa relativa do rotor  $M$  em função da constante do eletroímã  $k_0$  para diversos valores de massa do rotor e números de espiras

Figura 7.2: Massa relativa do rotor  $M$  em função do Raio externo do mancal  $R_e$  para diversos valores de massa de rotor e números de espiras



A constante do eletroímã  $k_0$  influencia diretamente a intensidade da força magnética desenvolvida por ele, isto é, quanto maior  $k_0$ , maior será a força que o mancal poderá desenvolver. Porém, a indutância do sistema também é proporcional a  $k_0$ , o que diminui a velocidade de resposta. Para uma boa resposta em altas rotações deve-se buscar uma constante que permita a resposta mais rápida possível, portanto  $k_0$  deve ser minimizado. Entre as soluções possíveis, existe uma onde a constante do eletroímã  $k_0$  é mínimo, calculado por métodos computacionais.

O diâmetro do eletroímã também deve ser minimizado para que o mancal ocupe o

menor espaço possível

Foi desenvolvida uma rotina por computador para determinar a situação ótima dos

parâmetros do mancal em relação a sua menor dimensão física (compactação) ou em

relação à melhor velocidade de resposta do sistema, utilizando os dados das figuras 7.1

e 7.2 e considerando apenas as soluções fisicamente possíveis. Neste estudo buscou-se

otimizar os parâmetros em relação a sua velocidade de resposta, portanto chegou-se a

uma solução apresentada na tabela 2.3 no capítulo 2.3.6.

## 7.2. Definições e Conceitos de Geometria Diferencial

Seja  $h(x)$  uma função escalar analítica, o *gradiente* de  $h$  é o vetor:

$$dh = \left[ \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial h}{\partial x_n} \right] \frac{\partial h}{\partial x} \quad (7.4)$$

A *derivada de Lie* de uma função escalar  $h$  com respeito a um campo vetorial

suave  $f$  é a derivada direcional definida por:

$$\langle dh, f \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i(x) \quad (7.5)$$

Define-se *colchete de Lie* de  $f$  e  $g$  como

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g \quad (7.6)$$

onde as derivadas parciais de  $f$  e  $g$  são *matrizes jacobianas*  $n \times n$ .

Os colchetes sucessivos de Lie são definidos como:

eixo num plano longitudinal ao eixo.

Ao modelar o Sistema I podemos considerar os efeitos aplicados a metade do

eixo, a corrente e a tensão inicial aplicada no circuito de um eletroímã em particular. gravidade da Terra, do desbalanceamento do eixo, as forças de trabalho aplicadas ao serão modelados como entradas no sistema. Serão consideradas entradas os efeitos da O sistema Manca! Magnético sofrerá influência de alguns fatores externos, que

### 7.3. Determinação das Forças Externas

$$[f^d, f^b] = \sum_{k=1}^m \alpha^{pqk}(x) f^k(x) \quad d \geq 1, q \leq m. \quad (7.8)$$

funções escalares  $\alpha^{pqk}(x)$  tais que:

Um conjunto de campos vectoriais  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  é dito **involutivo** se existem

$$\begin{aligned} ad_{f_1}^f \mathcal{G} &= [f, ad_{f_1}^f \mathcal{G}] \\ &\vdots \\ ad_{f_2}^f \mathcal{G} &= [f, [f, \mathcal{G}]] \\ &\vdots \\ ad_{f_m}^f \mathcal{G} &= [f, \mathcal{G}] \\ \mathcal{G} &= ad_{f_0}^f \mathcal{G} \end{aligned} \quad (7.7)$$

um disco usinado:  $R^{exc} = 0,1 \text{ mm}$ .

Podemos estimar o raio da excentricidade a partir de uma amostra de um eixo e

$$\begin{aligned}
 F^{exc_y} &= F_r \cos(\omega t + \phi_i) \rightarrow \text{na direção } y \\
 F^{exc_x} &= F_r \sin(\omega t + \phi_i) \rightarrow \text{na direção } x
 \end{aligned}
 \tag{7.10}$$

e definida por:

$$\begin{aligned}
 F_r &= m_1 \cdot \omega^2 \cdot R^{exc} \\
 \omega &= 2\pi \cdot f
 \end{aligned}
 \tag{7.9}$$

com amplitude:

O desbalanceamento das partes girantes causa uma força cíclica aplicada ao rotor

vertical para baixo aplicada em cada rotor.

A gravidade causa uma força peso no eixo e no rotor definida por:  $F^{peso} = m_1 g$

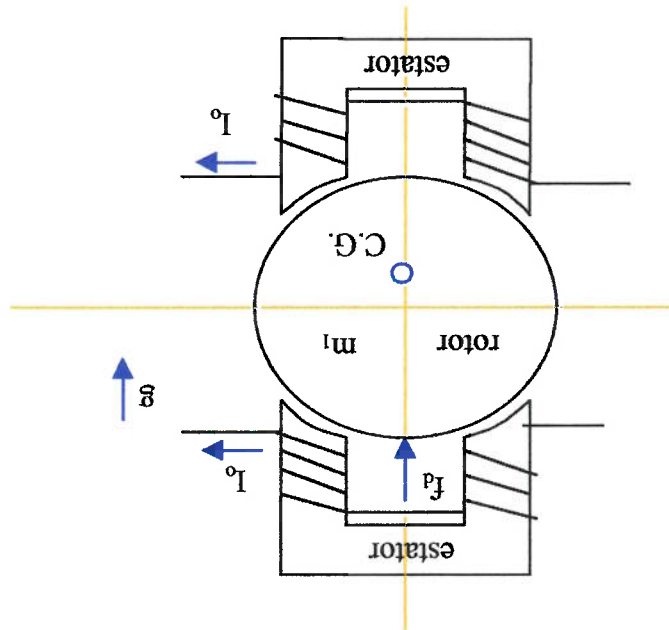


Figura 7.3: Esquema do Sistema 1

As forças de trabalho são forças externas arbitrárias e podem ser constantes ou

variáveis. São denominadas por *fa*.

A corrente  $I_0$  e a tensão  $U_0$  são os parâmetros iniciais do eletrolít para gerar uma força magnética que equilibre as forças externas devido ao peso do eixo e do rotor e devido às forças externas de trabalho. A corrente e a tensão inicial podem ser diferentes para cada magneto, conforme a posição deste em relação às forças externas. Caso haja uma força externa de trabalho cíclica aplicada ao eixo, pode-se incluir uma corrente  $I_0$  cíclica gerada pelo sistema de controle que causará uma outra força cíclica que anulará a força externa, para estabilizar o sistema. Isto seria possível se subermos a frequência da força externa e a sua fase (que pode ser ajustada manualmente no processo).

A corrente  $I_p$  para compensar o peso do eixo e rotor é definida a seguir. O equilíbrio dinâmico vertical do eixo fica definido por:

$$F_{mag1} - F_{mag2} = m_1 g$$

aplicando (3.5):

$$\frac{K_0}{2} \cdot \frac{(I_p + I_0 + I_1)^2}{(I_0 + I_2)^2} - \frac{K_0}{2} \cdot \frac{(h+x)^2}{(h-x)^2} = m_1 g$$

mas na posição de equilíbrio  $I_1 = I_2 = x = 0$ , então:

$$I_p = -I_0 + \sqrt{I_2^2 + \frac{K_0}{2m_1 g h^2}} \quad (7.11)$$

Com o propósito de distribuir a carga do peso do eixo em mais de magneto, é usual trabalhar com os magnetos inclinados em 45 graus no sentido radial. Deste modo o peso do eixo será suportado pelos dois magnetos superiores e o esforço não fica concentrado em apenas um magneto. Se assim for, a corrente  $I_p$  fica definida da mesma

Para o Sistema Mancaal Magnético, a corrente  $I_0$  será gerada no sistema de controle e será definida conforme o tipo de sistema de controle usado. Durante as

mesmo núcleo. sistema de controle ou pode estar em um circuito paralelo, com espiras enroladas no ao esperado pelo sistema de controle. A corrente  $I_0$  pode estar no mesmo circuito do corrente elétrica em valores positivos, pois correntes negativas causam forças contrárias Esta adição de corrente nos eletroímãs opostos também é útil para manter a energia, pela possibilidade de trabalhar com menores valores da tensão de controle.

Portanto o sistema teoricamente se torna mais rígido e talvez venha a gastar menos Porém, se  $I_0$  for nula, a variação de  $i$  em 2 A causará uma força no eixo de apenas 4 N. magnética resultante aplicada ao eixo de 44 N (para  $x=1$ ,  $h=1$ ,  $K_0=8$ , por exemplo). opostos, a variação de 2 A na corrente de controle  $i$  de um magneto causará uma força Deste modo, ao usarmos uma corrente  $I_0$  de, por exemplo, 10 A no dois magnetos

$$F_{mag} = \frac{K_0}{2} \cdot \frac{(I_0 + i)^2}{(h+x)^2} > \frac{K_0}{2} \cdot \frac{(i)^2}{(h+x)^2} \quad (7.12)$$

Matematicamente é fácil demonstrar que:

controle  $i$  para criar uma força maior do que a que seria criada apenas pela corrente  $i$ . Isto é, além de compensar forças externas,  $I_0$  pode somar-se a corrente de carga forças magnéticas no eixo e consequentemente uma dinâmica mais veloz de A corrente  $I_0$  também pode ser usada em mancais opostos para gerar uma pré-

equilíbrio  $I_p$  é apresentado na Tabela 7.1.

dinâmica do sistema na direção  $x$  e na direção  $y$ . O valor numérico da corrente de magnetos terão comportamentos mais simétricos, uma vez que não há diferenças entre a forma, porém o parâmetro  $g$  deve ser substituído por  $g_x$ , descrito em (3.32) e os

$$J_a = 2I_{rotor} + I_{eixo}$$

formada pela soma da inércia do eixo e inércia dos rotores:

A inércia de rotação em torno da direção axial  $J_a$  do eixo e rotores também é

$$J_r = \frac{2}{m_r r^2} + \frac{6}{m_r c_g^2} + \frac{2}{m_r} \left( L - c_g \right)^2 + \frac{4}{m_r R_x^2} + \frac{m_r L^2}{12}$$

onde  $m_r$  é a massa,  $R_x$  é o raio e  $L$  é o comprimento do eixo.

$$J_{eixo} = \frac{4}{m_e R_x^2} + \frac{m_e L^2}{12} \quad (7.15)$$

considerando-o um cilindro, é:

A inércia de rotação radial do eixo do mancal em relação ao seu C.G.,

onde  $m_r$  é a massa,  $r$  é o raio e  $c_g$  é a espessura do rotor.

$$J_{rotor} = \left( \frac{4}{m_r r^2} + \frac{12}{m_r c_g^2} \right) + m_r \left( \frac{L}{2} - \frac{c_g}{2} \right)^2 \quad (7.14)$$

do eixo, a sua inércia de rotação radial em relação ao C.G. do eixo é:

Considerando que o rotor tem forma de disco cheio e que está deslocado do C.G.

$$J_r = 2J_{rotor} + J_{eixo} \quad (7.13)$$

soma da inércia do eixo e inércia dos rotores:

A inércia de rotação em torno da direção radial  $J_r$  do eixo e rotores é formada pela

## 7.4. Cálculo de Parâmetros Gerais do Dimensionamento

tensão nos magnetos.

simulações serão discutidas as vantagens e necessidades de trabalhar com uma pré-



Tabela 7.4

Parâmetro	Valor	unidade
$I_p$	0,496	A
$J_r$	0,141	Kg.m <sup>2</sup>
$J_a$	$3,08 \cdot 10^{-3}$	Kg.m <sup>2</sup>

Os valores numéricos das inércias de rotação são apresentadas na Tabela 7.1.

onde  $r_x$  é o raio interno do eixo (oco).

$$J_a = m_r r^2 + \frac{m}{2} (R_x^2 + r_x^2)$$

(7.16)

então:

## 8. Bibliografia

- [1] ANTILA, M.; LANTTO, E.; ARKKIO, A. Determination of Forces and Linearized Parameters of Radial Active Magnetic Bearings by Finite Element Technique. IEEB Transaction on Magnetics. Vol. 34, nº 3. May, 1998.
- [2] BITTAR, A. Controle da Suspensão Eletromagnética do Protótipo de um Veículo. Tese apresentada à Escola Politécnica, USP. São Paulo, 1998.
- [3] BITTAR, A. Levitação Magnética de uma Barra Flexível. Dissertação apresentada à Escola Politécnica, USP. São Paulo, 1993.
- [4] BLEULER, H. A Survey of Magnetic Levitation and Magnetic Bearing Types. JSMIE International Journal. Series III, Vol.35, nº 3. 1992.
- [5] BOLTON, W. Engenharia de Controle. Makron Books do Brasil Ed. Ltda. Trad.: Valceres Vieira Rocha e Silva, MSc. São Paulo, 1995.
- [6] COLE, M. O. T.; KEOGH, P. S.; BURROWS, C. R. Vibration Control of a Flexible Rotor/Magnetic Bearing System Subject to Direct Forcing and Base Motion Disturbance. Proc. Instn. Mech. Engrs. Vol.212 - Part C, 1998.
- [7] EDMINISTER, J. A. Eletromagnetismo. Tradução de José Fabiano Rocha. McGraw-Hill do Brasil, 1980
- [8] FABIEN, B. C. Controller Gain Selection for an Electromagnetic Suspension under Random Excitation. Transaction of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Vol. 115, pg.156-165. March, 1993.
- [9] GREEN, S. A.; CRAIG, K. C. Robust, Digital, Nonlinear Control of Magnetic-Levitation Systems. Transaction of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Vol. 120, pg.488-495. December, 1998.

- [10] HUMPHRIS, R. R. ; KELM, R. D. ; LEWIS, D. W. ; ALLAIRE, P. E. **Effects of Control Algorithms on Magnetic Journal Bearing Properties.** Transaction of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Vol. 108, pg.624-632. October, 1986.
- [11] KIM, C.-S. ; LEE, C.-W. **Isotropic Optimal Control of Active Magnetic Bearing System.** Transaction of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Vol. 118, pg.721-729. December 1996.
- [12] KVAE, T. K. N. ; BONESIO, M. C. M. ; VILLELA, M. C. O. **Dirtrizes para Apresentação de Dissertações e Teses.** Serviço de Bibliotecas da Escola Politécnica. São Paulo, 1991.
- [13] LANGFORD, F. **Radio designer's Handbook.** London, Hiffe Books LTD, 1967.
- [14] LEVINE, J. ; LOTTN, J. ; PONSART, J.-C. **A Nonlinear Approach to the Control of Magnetic Bearings.** IEEE Transaction on Control Systems Technology. Special Issue on Magnetic Bearing Control. Vol.4, n° 5, pg. 524-544, September 1996.
- [15] LI, L. **Linearizing Magnetic Bearing Actuators by Constant Current Sum, Constant Voltage Sum, and Constant Flux Sum.** IEEE Transaction on Magnetics. Vol. 35, n° 1, January 1999.
- [16] MASLEN, E. H. ; BIELK, J. R. **Stability Model of Flexibility with Magnetic Bearings.** Transaction of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Vol. 114, pg.172-175. March, 1992.
- [17] MEIROVITCH, L. **Elements of Vibration Analysis.** Second ed. McGraw-Hill Book Co. International ed, Singapore, 1986.
- [18] OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno.** 2ª. ed. Tradução de Ivan José de Albuquerque. Rio de Janeiro, Prentice-Hall do Brasil Ltda, 1990.
- [19] ORSINI, L. Q. **Introdução aos Sistemas Dinâmicos.** Rio de Janeiro, Guanabara dois, 1985.

- [20] PEREZ, F. N. *Técnicas de Linearização para Controle de Sistemas Não-Lineares*. Dissertação apresentada à Escola Politécnica, USP. São Paulo, 1990.
- [21] PETELA, G. *Magnetic Bearing Control of Flexible Shaft Vibrations Based on Multi-access Velocity-Displacement Feedback*. Transaction of the ASME, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. Vol. 117, pg.188-197, January 1995.
- [22] QUEIROZ, M. S. ; DAWSON, D. M. ; *Nonlinear Control of Active Magnetic Bearings: a Backstepping Approach*. IEEE Transaction on Control Systems Technology. Special Issue on Magnetic Bearing Control. Vol.4, nº 5, pg. 545-552, September 1996.
- [23] RESNICK, R. ; HALLDAY, D. ; KRANE, K. S. *Física 1*. 4ª ed. Rio de Janeiro. LTC – Livros Técnicos e Científicos S. A. 1996.
- [24] RESNICK, R. ; HALLDAY, D. ; KRANE, K. S. *Física 2*. 4ª ed. Rio de Janeiro. LTC – Livros Técnicos e Científicos S. A. 1996.
- [25] RESNICK, R. ; HALLDAY, D. ; KRANE, K. S. *Física 3*. 4ª ed. Rio de Janeiro. LTC – Livros Técnicos e Científicos S. A. 1996.
- [26] ROTERS, H. C. *Electromagnetic Devices*. 1<sup>st</sup> ed. New York, John Wiley and Sons Inc., 1941.
- [27] SCHWEITZER, G. *Magnetic Bearings*. Cap12.1, pg. 543.
- [28] TOMSON, W. T. *Vibration Theory and Applications*. Prentice-Hall, Inc, 1965.
- [29] WEAVER Jr, W. ; TIMOSHENKO, S. P. ; YOUNG, D. H. *Vibration Problems in Engineering*. New York, John Wiley and Sons Inc., 1990
- [30] YOUNG-TOUMI, K. ; REDDY, S. *Dynamic Analysis and Control of High Speed and High Precision Active Magnetic Bearings*. Transaction of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. Vol. 114, pg.623-633 December, 1992.