

FULGÊNCIO ANTÔNIO AQUINO DUARTE

MODELO MATEMÁTICO PARA MATERIAIS METÁLICOS  
COM DANO

Tese apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de  
São Paulo para obtenção do  
Título de Doutor em Engenharia

São Paulo  
2005

FULGÊNCIO ANTÔNIO AQUINO DUARTE

MODELO MATEMÁTICO PARA MATERIAIS METÁLICOS  
COM DANO

Tese apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de  
São Paulo para obtenção do  
Título de Doutor em Engenharia

Área de concentração:  
Engenharia Mecânica

Orientador:  
Prof. Dr., Ph.D  
João Batista de Aguiar

São Paulo  
2005

## FICHA CATALOGRÁFICA

Aquino Duarte, Fulgêncio Antônio

Modelo matemático para materiais metálicos com dano. São Paulo, 2005.  
115p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1.Mecânica dos Sólidos 2. Mecânica de Danos

I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II.t.

Dedico esta tese à minha mãe Amanda,  
por todo o que ela me deu  
desde o primeiro instante da minha vida.  
E ao Dr. Jesús René Haurón, pela a sua confiança  
e pelo respeito profissional demonstrado  
com relação à minha pessoa.

## AGRADECIMENTOS

- Este trabalho foi financiado, num primeiro momento, pela Universidad Católica Nuestra Señora de la Asunción, Sede Regional Itapúa (UCI), Paraguai. Posteriormente passei a receber o financiamento da CNPq. Por tanto fico grato com as duas Instituições.
- Ao magnífico Pró-Reitor da UCI Dr. Jesús R. Haurón, quem sempre acreditou neste projeto de estudos, e através dele, a todas as pessoas que desde a UCI me ajudaram a realizar esta tese.
- Ao meu Orientador o Prof. Dr. João Batista de Aguiar, quem pacientemente esperou a minha evolução intelectual, e teve a sabedoria de me mostrar o caminho certo a percorrer, para chegar ao amadurecimento intelectual necessário para a elaboração deste trabalho. Certamente este trabalho é só o começo, estou bem animado para prosseguir a pesquisa na área.
- Ao meu colega e amigo Renato Vargas, quem compartilhou comigo muitos momentos de conversas bem interessantes sobre Mecânica, História e Filosofia, e pelos momentos de alegria compartilhados com a sua bonita família.
- Aos professores da USP cujas disciplinas tenho cursado e me deram o embasamento necessário para prosseguir o trabalho.
- A todos os meus amigos quem compartilharam comigo todo este tempo, e me fizeram sentir uma pessoa socializada.
- A minha mãe Amanda quem esteve sempre me apoiando desde a minha querida terra.

## RESUMO

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo matemático para materiais metálicos com dano. A construção do modelo foi feita ao longo do documento, introduzindo primeiramente os conceitos primitivos, logo depois as leis gerais, e posteriormente as referentes ao tipo de material a modelar. Posteriormente foi desenvolvida uma lei constitutiva para materiais dúcteis, considerando os fenômenos de elasticidade, plasticidade e degradação do material (dano). A implementação da lei constitutiva foi feita posteriormente. Vários resultados numéricos foram obtidos utilizando o modelo implementado no programa ABAQUS. Finalmente, se dão as conclusões e se especifica as contribuições do trabalho.

## ABSTRACT

In this work was developed a mathematical model for damaged metal materials. The developing of the model was made along the present document, getting firstly the primitive concepts, afterwards the general laws and thus the specific material's kind one. Thus, was developed a constitutive law for ductile materials, having in count elasticity, plasticity and material degradation (damage) phenomena. Then, the numerical implementation of the material model was made. Various results was obtained, using the numerical form of the constitutive law, as a user subroutine of the ABAQUS program. Finally, are given the conclusions and the contributions of the work.

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	ESCOPO DO TRABALHO . . . . .	3
1.2	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA . . . . .	4
1.3	CONSTRUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO . . . . .	4
<b>2</b>	<b>ELEMENTOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO E DA TER-</b>	
	<b>MODINÂMICA</b>	<b>6</b>
2.1	INTRODUÇÃO . . . . .	6
2.2	CONCEITOS PRIMITIVOS E HIPÓTESES BÁSICAS . . . . .	8
2.2.1	Corpo . . . . .	8
2.2.2	Espaço-tempo Euclidiano . . . . .	8
2.2.3	Sistema de forças . . . . .	9
2.3	CINEMÁTICA . . . . .	10
2.3.1	Deslocamento . . . . .	11
2.3.2	Velocidade . . . . .	11
2.3.3	Aceleração . . . . .	11
2.3.4	Rotação . . . . .	11
2.3.5	Composição de rotações . . . . .	12
2.3.6	Velocidade angular . . . . .	12
2.3.7	Aceleração angular . . . . .	13
2.3.8	Movimento de corpo rígido . . . . .	13
2.3.9	Gradiente de deformação . . . . .	13
2.3.10	Razão de extensão (stretching ratio) . . . . .	14
2.3.11	Decomposição polar do gradiente de deformação . . . . .	14
2.3.12	Medidas de deformação . . . . .	20
2.3.13	Taxa de deformação e tensor de rotação material . . . . .	22
2.3.14	Formulação corotacional . . . . .	24
2.4	FORÇAS E TENSÕES . . . . .	24



2.4.1	Tensor de Cauchy . . . . .	26
2.4.2	Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff . . . . .	27
2.4.3	Segundo tensor de Piola-Kirchhoff . . . . .	27
2.5	<b>LEIS FUNDAMENTAIS DA TERMODINÂMICA</b> . . . . .	29
2.5.1	Conservação da massa . . . . .	29
2.5.2	Conservação do momento linear . . . . .	30
2.5.3	Conservação do momento angular . . . . .	30
2.5.4	Conservação da energia (Primeira lei da termodinâmica) . . . . .	31
2.5.5	Segunda lei da termodinâmica . . . . .	32
2.5.6	Desigualdade de Clausius-Duhem . . . . .	32
2.6	<b>CARACTERIZAÇÃO DE MATERIAIS: LEIS CONSTITUTIVAS</b> . . . . .	33
2.6.1	Axiomas constitutivos . . . . .	33
2.6.2	Termodinâmica com variáveis internas . . . . .	36
2.6.3	Medidas objetivas de equações constitutivas . . . . .	38
2.7	<b>A FORMA FRACA DO EQUILÍBRIO</b> . . . . .	39
2.7.1	O princípio dos trabalhos virtuais . . . . .	39
2.7.2	O problema quasi-estático com valor inicial e de contorno . . . . .	40
2.7.3	Solução do problema quasi-estático com valor inicial e de contorno . . . . .	41
<b>3</b>	<b>MODELO MATEMÁTICO DO MATERIAL</b> . . . . .	<b>44</b>
3.1	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	44
3.1.1	Mecânica do dano contínuo . . . . .	44
3.1.2	Formulação Termodinâmica . . . . .	45
3.2	<b>ELASTO-PLASTICIDADE COM DANO ANISOTRÓPICO</b> . . . . .	47
3.2.1	Potencial de dissipação . . . . .	48
3.2.2	Tensor do efeito de dano . . . . .	49
3.2.3	Elasticidade . . . . .	50
3.2.4	Plasticidade . . . . .	50
3.2.5	Dano do material . . . . .	51
3.3	<b>EVOLUÇÃO DO DANO</b> . . . . .	52

3.3.1	Dano com endurecimento isotrópico: formulação dependente da tensão . . . . .	52
3.3.2	Dano com endurecimento isotrópico: formulação dependente da energia . . . . .	55
<b>4</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO</b>	<b>58</b>
4.1	INTRODUÇÃO . . . . .	58
4.2	RELAÇÕES IMPORTANTES . . . . .	58
4.3	SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EVOLUÇÃO DO DANO . . . . .	59
4.4	ALGORITMO DO RETORNO . . . . .	60
4.4.1	Solução numérica da elasto-plasticidade . . . . .	61
4.4.2	Solução numérica da evolução do dano: . . . . .	64
4.4.3	Casos possíveis . . . . .	65
4.5	OBTENÇÃO DO JACOBIANO CONSISTENTE (ALGORÍTMICO) . . . . .	68
4.5.1	Caso (a): Não há variação nem da deformação plástica nem do dano. . . . .	68
4.5.2	Caso (b): Há variação da deformação plástica e do dano. . . . .	68
4.5.3	Caso (c): Há variação apenas da deformação plástica. . . . .	71
4.5.4	Caso (d): Há variação apenas do dano. . . . .	73
<b>5</b>	<b>SIMULAÇÕES NUMÉRICAS</b>	<b>76</b>
5.1	CARACTERIZAÇÃO DO MATERIAL . . . . .	76
5.2	PROGRAMA UTILIZADO PARA A SIMULAÇÃO: . . . . .	79
5.3	BLOCO COM TRAÇÃO NUMA DIREÇÃO . . . . .	80
5.4	ENSAIO DE COMPRESSÃO DO BLOCO . . . . .	83
5.5	ENSAIO DE TRAÇÃO BIAxIAL DO BLOCO . . . . .	86
5.6	ENSAIO DE OBJETIVIDADE DO MODELO CONSTITUTIVO . . . . .	88
5.7	DISCUSSÃO . . . . .	89
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E CONTRIBUIÇÕES</b>	<b>91</b>
6.1	CONTRIBUIÇÕES . . . . .	91
6.2	LIMITAÇÕES DO MODELO . . . . .	91
6.3	CONCLUSÕES . . . . .	92

# Lista de Figuras

2.1	Configurações de referência e atual em relação ao mesmo referencial.	10
2.2	(a)- Interpretação dos operadores $\mathbf{R}$ e $\mathbf{U}$ .	18
2.3	(b)- Interpretação dos operadores $\mathbf{R}$ e $\mathbf{U}$ .	18
2.4	(c)- Interpretação dos operadores $\mathbf{R}$ e $\mathbf{U}$ .	19
2.5	Representação de um vetor $\mathbf{a}$ em forma corotacional.	25
2.6	Tensor de Cauchy: forças superficiais no cubo elementar.	26
2.7	Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff.	28
2.8	Segundo tensor de Piola-Kirchhoff.	29
5.1	Curva tensão-deformação	77
5.2	Bloco 1x1x0,1 cm.	80
5.3	Evolução do dano $d$ e do dano equivalente $\beta$ .	81
5.4	Evolução numérica e experimental da tensão.	81
5.5	Deformação plástica equivalente em função da deformação total . . .	82
5.6	Compressão do bloco de 1x1x0,1 cm.	83
5.7	Evolução do dano $d$ e do dano equivalente $\beta$ .	84
5.8	Evolução numérica da tensão para o ensaio de compressão.	84
5.9	Deformação plástica equivalente em função da deformação total . . .	85
5.10	Evolução do dano $d$ e do dano equivalente $\beta$ .	86
5.11	Evolução numérica da tensão equivalente, para o ensaio de tração biaxial.	87
5.12	Deformação plástica equivalente em função da deformação total . . .	88
5.13	Evolução do dano $d$ com e sem rotação $\beta$ .	89

# Lista de Tabelas

5.1	Curva de encruamento plástico . . . . .	76
5.2	Varição do módulo elástico . . . . .	78
5.3	Curva de encruamento do dano . . . . .	78

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $\mathfrak{B}$  = Corpo.  
 $\mathcal{P}$  = Parte do corpo  $\mathfrak{B}$ .  
 $X$  = Partículas.  
 $\mathbf{X}$  = Posição da partícula  $X$  na configuração de referência.  
 $\mathbf{x}$  = Posição da partícula  $X$  na configuração atual.  
 $\mathcal{E}$  = Espaço Euclidiano.  
 $\mathfrak{R}$  = Região do espaço Euclidiano  $\mathcal{E}$ .  
 $\Omega$  = Conjunto aberto em  $\mathfrak{R}$ .  
 $\partial\Omega$  = Fronteira de  $\Omega$ .  
 $\hat{\mathbf{x}}_0$  = Configuração de referência.  
 $\mathbf{I}$  = Tensor de identidade de segunda ordem.  
 $\mathbf{1}$  = Tensor de identidade de quarta ordem.  
 $\mathbf{u}$  = Deslocamento.  
 $(\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}})$  = Velocidade linear.  
 $\ddot{\mathbf{x}}$  = Aceleração linear.  
 $\nabla_{\mathbf{x}}(\cdot)$  = Gradiente espacial de  $(\cdot)$ .  
 $\nabla(\cdot)$  = Gradiente material de  $(\cdot)$ .  
 $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\cdot)$  = Divergente espacial de  $(\cdot)$ .  
 $\nabla \cdot (\cdot)$  = Divergente material de  $(\cdot)$ .  
 $\mathbf{t}$  = Força superficial.  
 $\mathbf{b}$  = Força volumétrica.  
 $\hat{\Theta}$  = Tensor das rotações.  
 $\Theta$  = Vetor axial de  $\hat{\Theta}$ .  
 $\mathbf{l}$  = Eixo de rotação de  $\hat{\Theta}$ .  
 $\theta$  = Ângulo de rotação em radianos.  
 $\mathbf{Q}$  = Matriz de rotação.  
 $\mathbf{R}$  = Rotação das direções principais do tensor das deformações.  
 $\mathbf{W}$  = Tensor das rotações materiais (spin)  
 $\Omega$  = Velocidade angular.  
 $\omega$  = Vetor axial de  $\Omega$ .  
 $\hat{\Omega}$  = Aceleração angular.  
 $\dot{\omega}$  = Vetor axial de  $\hat{\Omega}$ .  
 $\mathbf{x}_T$  = Translação.  
 $\mathbf{F}$  = Gradiente de deformação.

$J = \det(\mathbf{F})$ .

$\lambda$  = Razão de extensão (stretching ratio).

$\mathbf{N}_i$  = Vetor unitário na direção principal na configuração de referência.

$\mathbf{n}_i$  = Vetor unitário na direção principal na configuração atual.

$\mathbf{V}$  = Tensor de deformação esquerdo.

$\mathbf{U}$  = Tensor de deformação direito.

$\varepsilon_n$  = Deformação unidimensional.

$\varepsilon$  = Tensor de deformação qualquer.

$\varepsilon_G$  = Tensor de deformação de Green-Lagrange.

$\mathbf{L}$  = Gradiente de velocidade.

$\mathbf{D}$  = Taxa de deformação.

$\mathbf{B}$  = Tensor de deformação esquerdo de Cauchy-Green  $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ .

$\{I_1, I_2, I_3\}$  = Invariantes de um tensor de segunda ordem.

$\{J_1, J_2, J_3\}$  = Invariantes da parte deviatórica de um tensor de segunda ordem.

$\bar{\mathbf{a}}$  = Vetor  $\mathbf{a}$  na base corotacional.

$\boldsymbol{\sigma}$  = Tensor de tensões de Cauchy.

$\mathbf{P}$  = Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff.

$\mathbf{S}$  = Segundo tensor de Piola-Kirchhoff.

$\mathbf{T}$  = Tensor de tensões qualquer.

$m$  = Massa do corpo  $\mathfrak{B}$ .

$\rho$  = Densidade do corpo  $\mathfrak{B}$ .

$\mathbf{f}$  = Forças externas sobre  $\mathfrak{B}$ .

$\mathbf{p}$  = Momento linear.

$\mathbf{m}$  = Momento angular.

$E$  = Energia interna.

$e$  = Energia interna por unidade de volume.

$K$  = Energia cinética.

$Q$  = Taxa de recepção de calor.

$r$  = Taxa de produção de calor.

$\mathbf{q}$  = Fluxo de calor pela fronteira do corpo  $\mathfrak{B}$ .

$P$  = Potência das forças externas.

$Q_s$  = Limite superior da taxa de produção de calor.

$S$  = Entropia.

$s$  = Entropia por unidade de massa.

$T$  = Temperatura absoluta.

$\psi$  = Função energia livre.

$\mathbf{g}$  = Gradiente espacial de temperatura.

$W_T$  = Potência não cinemática.

$\mathbf{F}_0$  = Gradiente de deformação entre duas configurações de referência.

$\alpha$  = Conjunto das variáveis internas.

$\Pi$  = Potencial de dissipação.

$(\cdot)^\nabla$  = Taxa objetiva de derivação de leis constitutivas (derivação corotacional).

$(\cdot)^\nabla J$  = Taxa corotacional de Jaumann.

$(\cdot)^\nabla G$  = Taxa corotacional de Green-Naghdi.

$(\cdot)^\nabla T$  = Taxa corotacional de Truesdell.

$\varepsilon_e$  = Componente elástica do tensor de deformações  $\varepsilon$ .

Obs: os índices repetidos correspondem às somas, a menos que se afirme *in situ* outra coisa, e.g.  $\sum_k A_k * b^k = A_k * b^k$  por falta.

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

A engenharia é uma especialidade que se coloca comonexo entre a ciência e a tecnologia, por isso (muito provavelmente) ela se preocupou em criar as leis que regem os fenômenos envolvidos nas diferentes situações decorrentes da sua atividade, tais como: o desenho e implementação de processos, projeção de máquinas e a construção das mesmas. Foi assim [48] que a atividade do engenheiro baseava-se principalmente na observação, na experimentação e no acúmulo da experiência apartir destas atividades. Esta metodologia, porém, tem duas desvantagens principais: o alto custo dos experimentos e a dificuldade de transmissão dos conhecimentos empíricos, exigindo ademais um longo período de tempo para a projeção e implementação dos diferentes projetos.

A aparição dos computadores digitais, a sua rápida evolução e o baixo custo destas máquinas, permitiram a ampla difusão do uso dos *modelos matemáticos* complexos. Pudendo estes modelos serem resolvidos, em forma aproximada, através dos denominados *métodos numéricos*, criados muito tempo antes deste período, mas que teve grande impulso apartir do que pode ser denominado como a *era informática*. As ferramentas numéricas são muito variadas, mas na simulação de processos envolvendo sólidos, o *Método dos Elementos Finitos* tem uma ampla aceitação.

Numa maneira bem geral, se pode dizer que o *modelo matemático* consiste num conjunto de correlações que refletem uma situação real [48]. Geralmente essas correlações são expressas através de operadores matemáticos, envolvendo ademais certos parâmetros, conjunto de dados iniciais e um conjunto de resultados numéricos. Em outras palavras, converter em fórmulas matemáticas uma determinada situação real (ou abstrata) que está descrita em forma quantitativa.

Podem ser encontrados excelentes textos que tratam sobre a modelagem, e.g. Belomo et al. (1995) [9].



Existe um importante problema relativo à relação entre a *experimentação* o *modelo matemático* e a *interpretação convencional* que precisa ser analisado com maior cuidado.

Basicamente, o *modelo*, sendo um objeto matemático, depende da estrutura matemática subjacente. A *interpretação* consiste em estudar a relação entre os *parâmetros envolvidos*, e por conseguinte as *conclusões do modelo* e os *observáveis* no domínio considerado.

Evidentemente, podem acontecer perturbações tanto no *modelo*, quanto na *experimentação* e na *interpretação*.

Quando se assume que há variação apenas no *modelo* se tem o problema da *estabilidade estrutural*. O problema da estabilidade estrutural do modelo matemático está sendo abordado por uma grande quantidade de pesquisadores de diferentes áreas [1]. Dito problema começou a ser estudado a partir do trabalho de H. Poincaré em 1889, e no Brasil se teve uma participação pioneira com os trabalhos de M. Peixoto e outros, a partir da década de 1950.

A *perturbação* do modelo não é um problema puramente teórico, considerando que essas perturbações acontecem sempre, e estão associados com o *grau de incerteza* subjacentes nos dados fornecidos. Nesse sentido, o que se tenta determinar é o *grau de sensibilidade* do modelo às perturbações sofridas. Se é considerado, por exemplo, uma equação diferencial com coeficientes constantes, esses coeficientes serão obtidos a partir de dados experimentais, que contém um grau de incerteza característico do processo de medição. O que se quer determinar, neste caso, é se pequenas variações nos valores desses coeficientes, ocasionam também pequenas variações na resposta do modelo. Se isso acontecer, se diz que o modelo é *estruturalmente estável*, caso contrário, se tem uma *instabilidade estrutural* e o modelo não será apto para representar o fenômeno que se deseja estudar.

O estudo qualitativo do relacionamento *modelo-experimento-interpretação* tem uma importância fundamental na Mecânica. De acordo com Abraham e Marsden (1978), [1] a história da pesquisa em Mecânica foi marcada por três importantes etapas. A primeira, foi a *era qualitativa* que culmina com os trabalhos de Kepler e Galileu. A segunda, uma *era quantitativa* que compreende o período (1687-1889) marcado pelos trabalhos monumentais de Newton, Euler, Lagrange, Laplace, Hamilton e Jacobi. A terceira, *era neo-quantitativa* começa em 1889 com o trabalho de H. Poincaré. Na opinião de Abraham e Marsden, a crise que causou o início da *era neo-quantitativa* é comparável à crise associada à Teoria da Relatividade e à Mecânica Quântica, e a importância do trabalho pioneiro de H. Poincaré comparável ao Cálculo Diferencial e

Integral, às Equações Diferenciais e ao Cálculo Variacional.

Denominando *Mecânica Computacional*, ao ramo da Mecânica que desenvolve as atividades próprias do engenheiro com o auxílio do computador. Se pode dizer que este ramo exige cada vez mais conhecimentos matemáticos, e precisa testar, em todo momento, os resultados obtidos através da comparação com os dados experimentais, até que os resultados sejam suficientemente confiáveis, i.e., até que o modelo seja suficientemente robusto. É assim que o estudo dos sistemas dinâmicos, análise funcional, análise harmônico, análise tensorial etc. são ramos da matemática que hoje são fundamentais na formação do engenheiro.

Neste ponto, é fácil achar uma variedade muito grande de aplicações da *Mecânica Computacional*. Por exemplo, a automação de um processo de fabricação, desenvolvido com uma mínima quantidade de tentativas e erros, exige o desenvolvimento da tecnologia CAD/CAM (Computer Aided Design/Computer Aided Manufacturing). Desta forma podem ser testados novos processos, materiais, geometrias etc. com rapidez, baixo custo e grande eficiência [63]. Tudo isso justifica sobradamente o uso intensivo das técnicas computacionais, o que exige a construção prévia de modelos matemáticos adequados.

No Brasil, a abundância de minérios, o custo da energia (cada vez mais alto), a necessidade de colocar valor agregado aos produtos de exportação para equilibrar a balança comercial, o alavancamento de uma tecnologia nacional eficiente acorde com o volume de produção do país, e por fim, a necessidade de facilitar a cooperação Universidade-Empresa, justifica a construção de modelos matemáticos utilizáveis na indústria nacional. Nesse sentido, é freqüentemente mencionado a grande dificuldade existente na transferência dos conhecimentos avançados da Universidade à Empresa, refletido na escassez de patentes. É necessário portanto a realização de pesquisas cuja utilização extensiva nas indústrias locais seja possível.

## 1.1 ESCOPO DO TRABALHO

Este trabalho objetiva construir um modelo matemático, para a inclusão da elasto-plasticidade e do dano, na caracterização do material deformável.

Implementar o modelo num programa comercial para a sua utilização na resolução de problemas da engenharia, relacionados com materiais dúcteis (especialmente metais) e processos que envolvem grandes deformações (não-linearidade geométrica).

## 1.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Existe uma grande necessidade das empresas que trabalham na fabricação de produtos, tais como a indústria automotiva e naval, de caracterizar convenientemente as peças para evitar algum tipo defeito nelas.

Os programas comerciais vem penetrando na industria com maior força a partir de esta década. É assim que a tecnologia CAD/CAM auxilia a maioria das atividades de projeção, fabricação e controle dos produtos. Uma das limitações dos programas estruturais, tais como o ANSYS e o ABAQUS, é a carência de uma ferramenta adequada para o estudo da falha do material. Faz-se necessário então, a construção de um modelo matemático que possa preencher essa lacuna, e assim, ajudar ao desenvolvimento das indústrias que lidam diariamente com problemas estruturais.

A maioria dos consultores da area estrutural, adotam o critério de von Mises para determinar a segurança da estrutura. Perdendo de vista outros possíveis causantes da instabilidade estrutural. A Mecânica do Dano Contínuo, possui um enorme potencial para auxiliar a esses consultores, a resolverem problemas de instabilidade bem complexos. Porém, até agora, provavelmente devida à "juventude" da teoria, a contribuição da Mecânica do Dano à industria é quase nula. É imperativa então, a idéia de operacionalizar esta teoria e assim mostrar as suas limitações e "virtudes", ajudando dessa maneira a aumentar a segurança dos diferentes meios de transporte e outras estruturas.

## 1.3 CONSTRUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

A construção do modelo matemático é feita através de vários passos. Típicamente, a modelagem matemática é realizada seguindo a seguinte seqüência:

1. Início.
2. Colocação do problema.
3. Criação do esquema de fenômenos.
4. Elaboração do modelo matemático.
5. Criação do algoritmo.
6. Elaboração do programa.
7. Identificação do modelo matemático (validação do modelo).
8. Execução das pesquisas numéricas.

## 9. Fim.

Como se poderá ver, o processo de modelagem neste trabalho se levou a cabo através de vários capítulos:

- No Capítulo 1 se faz a formulação do problema e são discutidos alguns aspectos fundamentais do processo de conformação.
- No Capítulo 2 são determinadas as leis gerais, válidas para qualquer material, utilizando o contínuo numérico para representar o material a deformar. Em seguida, são discutidas as características gerais das leis constitutivas a serem desenvolvidas. Por fim, são colocadas estas leis numa forma conveniente (forma variacional) e se mostra a maneira em que serão resolvidas numericamente (Método dos Elementos Finitos).
- No Capítulo 3 é obtido o modelo elasto-plástico com dano anisotrópico.
- No Capítulo 4 se realiza a implementação numérica do mesmo.
- No Capítulo 5 é feita a validação do modelo através da comparação dos resultados obtidos com dados experimentais disponíveis. Posteriormente é realizada a pesquisa numérica correspondente resolvendo o problema proposto no capítulo 1.
- Finalmente, no capítulo 6 são colocadas as conclusões obtidas a partir do modelo mostrando as sua potencialidade e limitações.

## Capítulo 2

# ELEMENTOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO E DA TERMODINÂMICA

### 2.1 INTRODUÇÃO

Com o objetivo de representar os problemas mecânicos através de uma formulação, cuja resolução forneça uma descrição aproximada dos problemas termo-mecânicos, tem sido propostos diferentes abordagens pelos pesquisadores. Mesmo antes da construção da teoria atômica, esta tarefa tem sido feita e assim nasceu a chamada termodinâmica, que consiste numa teoria macromecânica que tem mostrado muita eficiência na resolução de estes problemas. Existem três principais tratados da termodinâmica que depreendem processos fora do equilíbrio termodinâmico a seguir [72]: Termodinâmica Clássica de Processos Irreversíveis (TCI), Termodinâmica Racional (TR) e Termodinâmica Clássica de Processos Irreversíveis Extendida (TCE).

A TCI tem sido originada a partir dos trabalhos de Osanger (1931) e recebeu posteriormente a colaboração essencial de Prigogine (1947, 1961). A principal limitação de esta teoria corresponde ao fato de não poder modelar materiais com memória, e ser inapropriado para modelar processos distantes do equilíbrio termodinâmico. A assunção que a causa e o efeito são simultâneos é outra severa restrição de esta teoria.

A TR foi originada pelos trabalhos de Truesdell, Noll e Coleman na década de 1960. Esta teoria utiliza uma formulação eminentemente variacional e constitui numa teoria determinística, podendo modelar por tanto processos dependentes de

uma história. Porém, a complexidade matemática desta teoria dificulta a sua resolução numérica e mesmo a sua compreensão o que o torna menos prático.

A TCE constitui um esforço por resolver as limitações da TCI mas o seu uso também é restrito devido à sua complexidade.

É claro que os problemas termo-mecânicos podem ser estudados através de teorias não macroscópicas como a Mecânica Estatística, mas o grande desenvolvimento na elaboração de teorias termodinâmicas permite a resolução dos problemas termo-mecânicos em forma eficiente, através do uso de métodos numéricos adequados (e.g. Método dos Elementos Finitos). Neste trabalho utiliza-se a Termodinâmica com Variáveis Internas (TVI) e dita teoria será abordada com mais detalhes neste capítulo.

A Mecânica dos Meios Contínuos (MMC) consiste essencialmente na idealização, e posterior formalização, de corpos materiais que sofrem a influência de forças e de fenômenos térmicos [37].

Existem tratados clássicos (e.g. Truesdell et al., 1965 [82]; Gurtin, 1981 [38]) que realizam esta idealização em forma detalhada e completa. Truesdell [80] propõe a seguinte seqüência:

1. Obtenção dos conceitos primitivos
2. Enunciação das leis gerais (válidos para qualquer material)
3. Caracterização do material (leis constitutivas)

Os conceitos primitivos propostos por Truesdell são: Corpo, Espaço-Tempo Euclidiano e Sistema de Forças. A formalização destes conceitos é feita [87] através de teorias matemáticas adequadas (e.g. Teoria da Medida, Topologia Diferencial) onde se associa o contínuo matemático ao conceito de Corpo. Esta construção teórica é denominada Mecânica Racional (MR).

Neste trabalho se fará uma construção mais simples, porém intuitiva, da base teórica da MMC, mantendo a ordem da proposta de Truesdell [80].

## 2.2 CONCEITOS PRIMITIVOS E HIPÓTESES BÁSICAS

### 2.2.1 Corpo

Um corpo  $\mathfrak{B}$  é uma variedade tridimensional, suficientemente suave onde os elementos são chamados partículas  $X$ . Porém, para os propósitos deste trabalho é suficiente considerar o espaço Euclidiano.

É necessário ter algum critério para poder atribuir uma grandeza ao corpo. Atribui-se ao corpo um volume, uma área, etc., e outras grandezas físicas como massa, e velocidade. Existe um formalismo chamado teoria da medida, que permite fazer um tratamento adequado disso. Porém, considerando corpos com contornos suficientemente suaves e funções bem comportadas, é possível simplificar bastante a teoria e utilizar os conceitos habituais do cálculo diferencial e integral (Riemannianos), assumindo como conceitos primitivos as grandezas mencionadas.

### 2.2.2 Espaço-tempo Euclidiano

A estrutura de espaço Euclidiano  $\mathfrak{E}$  é necessária para permitir o uso de conceitos como convergência, continuidade etc.

Os elementos do Espaço Euclidiano são os pontos  $\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ . Sabendo que esta estrutura é independente do tempo, é feito um mapeamento do corpo  $\mathfrak{B}$  numa região  $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{E}$  do Espaço Euclidiano. A região ocupada pelo corpo no Espaço é denominada configuração (i.e. o homeomorfismo de  $\mathfrak{B}$  numa região  $\mathfrak{R}$  do Espaço Euclidiano tridimensional). Isto pode ser expresso através da função

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(X) \tag{2.1}$$

A função anterior deve ser injetora para que o corpo obedeça as leis de conservação da massa e impenetrabilidade dos corpos.

Mais formalmente,  $\hat{\mathbf{x}} : X \in \mathfrak{B} \rightarrow \mathbf{x} \in \mathfrak{R}$ .

Admite-se também a existência da inversa da função  $\hat{\mathbf{x}}$  denotada através da expressão  $\hat{\mathbf{x}}^{-1}$ . Desta forma, resumindo se tem:  $X$  é uma partícula, enquanto que  $\mathbf{x}$  é o lugar ocupado pela partícula numa configuração, sendo  $\hat{\mathbf{x}}(\mathfrak{B})$  a configuração.

Para introduzir o conceito de tempo admite-se que cada configuração está associada a um tempo  $t, t \in \mathbb{R}$ . Cada par resultante  $(X, t)$  corresponde a uma observação do



corpo na estrutura espaço-temporal denominado Espaço-Tempo Euclidiano.

Considerando uma seqüência (seqüência generalizada) de configurações tem-se o movimento do corpo o que pode ser expresso através da relação

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(X, t) \quad (2.2)$$

onde  $\hat{\mathbf{x}}$  é um homeomorfismo continuamente diferenciável (difeomorfismo) para cada  $t$ .

Maiores detalhamentos sobre a cinemática serão feitos posteriormente neste trabalho.

Efeitos relativísticos não serão tidos em conta e será admitida a existência de sistemas de referências inerciais.

### 2.2.3 Sistema de forças

Muito antes do conhecimento da natureza atômica da matéria surgiu uma classificação das forças em: forças de contato e de campo. As forças de contato atuam sobre superfícies (forças superficiais) enquanto que as forças de campo sobre todas as partículas do corpo (forças volumétricas).

Para cada  $t$  é associado um campo vetorial  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  para cada  $\mathbf{x}$ , na região ocupada pelo corpo  $\mathfrak{B}$  no instante  $t$ , i.e. em  $\hat{\mathbf{x}}(\mathfrak{B}, t)$ .

Seja  $\mathcal{P} \subset \mathfrak{B}$  onde  $\mathcal{P}$  é uma parte de  $\mathfrak{B}$ . O vetor  $\mathbf{b}(\mathcal{P})$  definido através da expressão

$$\mathbf{b}(\mathcal{P}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} dV, \Omega \subset \mathfrak{R} \quad (2.3)$$

é denominado resultante das forças externas aplicadas sobre a parte  $\mathcal{P}$  do corpo  $\mathfrak{B}$  no instante  $t$ , na configuração  $\hat{\mathbf{x}}$ .

Similarmente, para cada  $t$  é associado um campo vetorial  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$  para cada  $\mathbf{x}$ , no contorno  $\partial\mathcal{P}$  de cada parte  $\mathcal{P}$  da região ocupada pelo corpo  $\mathfrak{B}$  no instante  $t$ .

O vetor  $\mathbf{t}(\mathcal{P})$  definido através da expressão

$$\mathbf{t}(\mathcal{P}) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} dS \quad (2.4)$$

é denominado resultante das forças de contato aplicadas sobre o contorno  $\partial\mathcal{P}$  do corpo  $\mathfrak{B}$  no instante  $t$ , na configuração  $\hat{\mathbf{x}}$ .

A mecânica consiste na combinação destes três conceitos: corpo, movimento e força [80]. Neste capítulo se fará um detalhamento da iteração destes conceitos.



## 2.3 CINEMÁTICA

Escolhendo uma configuração fixa  $\hat{x}_0$ , denominado configuração de referência, designa-se à posição de uma partícula  $X$  pela expressão  $\mathbf{X} = \hat{x}_0(X)$ . A configuração  $\hat{x}_0$  pode ser (mas não necessariamente) uma configuração realmente ocupada pelo corpo durante o movimento.

Assim, se tem  $\mathbf{x} = \hat{x}(\hat{x}_0^{-1}(\mathbf{X}), t)$  ao invés de  $\mathbf{x} = \hat{x}(X, t)$ , i.e. é substituindo a partícula pela sua posição na configuração de referência. Assim  $\mathbf{X}$  atua como se fosse uma etiqueta da partícula  $X$  e é denominado daqui em mais a *partícula*  $\mathbf{X}$ , e os mapeamentos dependentes da variável  $\mathbf{X}$  são denominados *material* ou Lagrangiano.

Quando a variável independente for a posição  $\mathbf{x}$  da partícula  $X$  num tempo  $t$ , se tem uma descrição *espacial* ou Euleriana do movimento.

Usando um sistema de referência cartesiana tem-se

$$x_i = \hat{x}_i(X_1, X_2, X_3) \quad (2.5)$$

onde  $x_i, i = 1, 2, 3$  são as coordenadas espaciais, enquanto que  $X_j, j = 1, 2, 3$  são as coordenadas materiais.

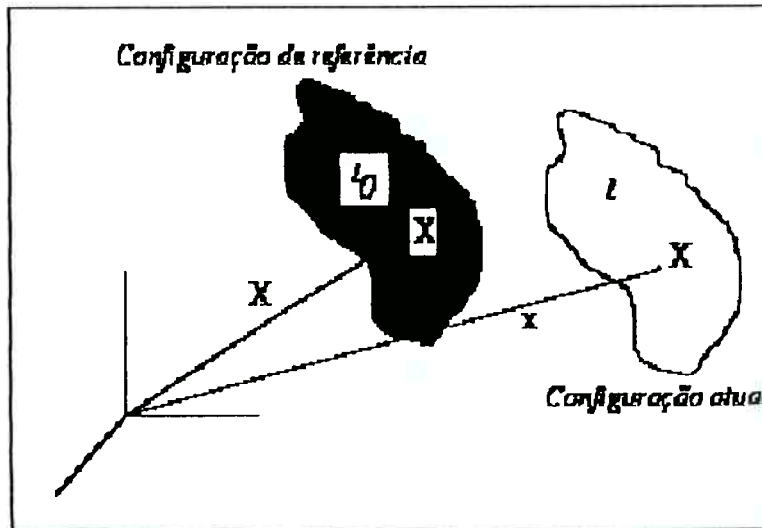


Figura 2.1: Configurações de referência e atual em relação ao mesmo referencial.

### 2.3.1 Deslocamento

O deslocamento de uma partícula  $\mathbf{X}$ , é definido através da equação

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.6)$$

### 2.3.2 Velocidade

A velocidade de uma partícula  $\mathbf{X}$  é definida através da expressão

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial t}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} \right) + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial t} \\ &= \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde  $\nabla_{\mathbf{x}}$  é o operador gradiente espacial (o operador gradiente material é escrito sem sub-índices, i.e. simplesmente  $\nabla$ ) e  $\mathbf{v} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$  é o vetor velocidade.

Na equação (2.7)  $\nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}$  mede a variação da velocidade com a variação das posições (termo convectivo) e  $\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial t}$  é a velocidade medida numa coordenada fixa.

### 2.3.3 Aceleração

A aceleração de uma partícula  $\mathbf{X}$  é definida através da expressão

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{x}}}{\partial t^2} = \nabla_{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial t} \quad (2.8)$$

### 2.3.4 Rotação

Uma rotação pode ser caracterizada por um vetor  $\Theta$  cuja direção determina o eixo da rotação  $\mathbf{l} = \frac{\Theta}{\|\Theta\|}$ , e cujo módulo  $\theta = \|\Theta\|$  é o ângulo de rotação, i.e. uma rotação  $\Theta$  é uma rotação de  $\theta$  radianos ao redor do eixo  $\mathbf{l}$ . Dita rotação também pode ser caracterizada por uma transformação ortogonal (matriz de rotação). Define-se então a matriz antisimétrica  $\hat{\Theta}$  associada ao vetor  $\Theta$  através da relação seguinte

$$\hat{\Theta} \cdot \Theta = 0, \quad \text{e} \quad \hat{\Theta} \cdot \mathbf{a} = \Theta \times \mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{a} \quad (2.9)$$

onde  $\Theta$  é denominado *vetor axial* da matriz antisimétrica  $\hat{\Theta}$ . Se o vetor axial  $\Theta$  é definido através dos seus componentes relativos a uma base, i.e.  $\Theta = \{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}^T$ ,

então a transformação ortogonal será dada pela expressão

$$\hat{\Theta} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta^3 & \theta^2 \\ \theta^3 & 0 & -\theta^1 \\ -\theta^2 & \theta^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Ademais, a exponencial de uma matriz antisimétrica  $\hat{\Theta}$  é uma matriz ortogonal que produce uma rotação finita  $\Theta$ .

Seja  $\mathbf{Q}$  uma matriz de rotação, tal que  $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$ , então por definição se tem

$$\mathbf{Q} = \exp[\hat{\Theta}] = \mathbf{I} + \hat{\Theta} + \frac{1}{2!}\hat{\Theta}^2 + \dots \quad (2.11)$$

a que pode ser expressa através da equação de Euler-Rodrigues

$$\mathbf{Q} = \exp[\hat{\Theta}] = \cos(\theta)\mathbf{I} + \frac{\sin\theta}{\theta}\hat{\Theta} + \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2}\Theta\Theta \quad (2.12)$$

### 2.3.5 Composição de rotações

Uma composição de rotações é a sucessiva aplicação de duas ou mais rotações. Para problemas geometricamente lineares, uma composição pode ser obtida pela superposição das rotações (linearização). Sejam  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$  duas rotações infinitesimais, então essas rotações podem ser expressas através das expressões

$$\mathbf{Q}_1 = \exp[\hat{\Theta}_1] \approx \mathbf{I} + \hat{\Theta}_1, \quad \mathbf{Q}_2 = \exp[\hat{\Theta}_2] \approx \mathbf{I} + \hat{\Theta}_2$$

de onde

$$\mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1 = \exp[\hat{\Theta}_1] \cdot \exp[\hat{\Theta}_2] \approx \exp[\hat{\Theta}_2] \cdot \exp[\hat{\Theta}_1] \approx \mathbf{I} + \hat{\Theta}_1 + \hat{\Theta}_2$$

o que indica que para rotações infinitesimais a composição de rotações é aditiva e comutativa. Para rotações finitas porém, a composição não é comutativa (com exceção de rotações com o mesmo eixo).

Obs: Um desenvolvimento similar pode ser feito usando quaternions. Para maiores detalhes pode ser consultado [41].

### 2.3.6 Velocidade angular

O tensor de velocidades angulares  $\Omega$  associado ao tensor  $\mathbf{Q}(t)$  é definido por meio de

$$\Omega = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T \quad (2.13)$$

onde  $\Omega$  é um tensor antisimétrico, ou seja

$$\Omega^T = -\Omega$$

e o vetor axial é  $\omega$ .

### 2.3.7 Aceleração angular

O tensor das acelerações angulares é definido através da expressão

$$\dot{\Omega} = \frac{\partial}{\partial t}(\Omega) = \ddot{Q}Q^T - \Omega^2 \quad (2.14)$$

$\dot{\Omega}$  é um tensor antisimétrico e o vetor axial é  $\dot{\omega}$ .

### 2.3.8 Movimento de corpo rígido

O movimento de corpo rígido pode ser caracterizado por uma translação  $\mathbf{x}_T$  e uma rotação ao redor da origem  $\mathbf{Q}$  segundo a equação

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{x}_T \quad (2.15)$$

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t), \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t), \mathbf{x}_T = \mathbf{x}_T(t)$$

o que indica que tanto  $\mathbf{Q}$  quanto  $\mathbf{x}_T$  não dependem do ponto material. As componentes de  $\mathbf{x}$  estarão dadas portanto pela equação

$$x_i = Q_{ij}X_j + x_{Ti} \quad (2.16)$$

Pode ser mostrado que o movimento do corpo rígido (2.15) preserva distâncias.

Derivando (2.15) em relação ao tempo obtém-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{X} + \dot{\mathbf{x}}_T \quad (2.17)$$

e através da mesma equação (2.15) obtém-se

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_T) + \dot{\mathbf{x}}^T = \Omega \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_T) + \dot{\mathbf{x}}^T \quad (2.18)$$

### 2.3.9 Gradiente de deformação

O gradiente de deformação no ponto  $\mathbf{x}$  é uma transformação linear definida através da equação

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_{\mathbf{x}} \quad (2.19)$$

Utilizando a equação (2.6) o gradiente de deformação tem a forma

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \mathbf{I} \quad (2.20)$$

Fazendo uso da regra da cadeia se pode escrever

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.21)$$

o que mostra que  $\mathbf{F}$  transforma  $d\mathbf{X}$  em  $d\mathbf{x}$ , onde  $d\mathbf{X}$  e  $d\mathbf{x}$  são vetores materiais nas configurações de referência e atual respectivamente, o que justifica a denominação "gradiente de deformação".

A determinante da matriz  $\mathbf{F}$  pode ser interpretado como o quociente entre o volume do corpo deformado na configuração atual e de referência, i.e.

$$J = \det(\mathbf{F}) = \frac{dV}{dV_0}$$

onde  $V$  é o volume na configuração atual e  $V_0$  o volume na configuração de referência. Se pode concluir a partir da sua definição, que para qualquer deformação  $J > 0$ , e  $J = 1$  quando o corpo não sofre deformação.

### 2.3.10 Razão de extensão (stretching ratio)

Chama-se razão de extensão de um vetor material  $d\mathbf{X}$  à grandeza

$$\lambda = \frac{\|d\mathbf{x}\|}{\|d\mathbf{X}\|} = \frac{\sqrt{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}}{\sqrt{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}}}, \lambda > 0 \quad (2.22)$$

Portanto, para  $0 < \lambda < 1$  se tem uma contração, para  $\lambda > 1$  uma extensão e finalmente para  $\lambda = 1$  nenhuma deformação.

### 2.3.11 Decomposição polar do gradiente de deformação

Usando a equação (2.21) se pode escrever

$$d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} = d\mathbf{X}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (2.23)$$

e introduzindo na equação (2.22) obtém-se

$$\lambda^2 = \frac{d\mathbf{X}^T}{\sqrt{d\mathbf{X}^T d\mathbf{X}}} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \frac{d\mathbf{X}}{\sqrt{d\mathbf{X}^T d\mathbf{X}}} = \mathbf{N}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{N} \quad (2.24)$$

onde  $\mathbf{N}$  é o vetor unitário na direção do vetor  $d\mathbf{X}$ .

A equação (2.24) mostra a razão de extensão associada com uma direção  $\mathbf{N}$  para

qualquer ponto material definido por  $\mathbf{X}$  ou  $\mathbf{x}$ . Um resultado muito importante obtém-se quando se faz variar a direção definida por  $\mathbf{N}$  e procura-se o valor estacionário da razão de deformação. Tem-se então o seguinte problema: achar o valor estacionário de

$$\lambda^2 = \mathbf{N}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{N}$$

sendo

$$\mathbf{N}^T \mathbf{N} = 1$$

O problema torna-se num problema de autovalores e pode ser expresso pela equação

$$(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \lambda^2) \mathbf{N} = 0 \quad (2.25)$$

De acordo com a definição de  $\lambda$  se pode concluir que  $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$  é definido positivo. A equação (2.25) fornece os valores  $\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III}$  denominados *valores principais da deformação* e os autovetores correspondentes  $\mathbf{N}_I, \mathbf{N}_{II}, \mathbf{N}_{III}$  (que devem ser ortogonais no caso de que os autovalores sejam diferentes e caso contrário, podem ser ortogonalizados) determinam as *direções principais* da deformação.

As direções principais na configuração atual correspondentes a  $\mathbf{N}_I, \mathbf{N}_{II}, \mathbf{N}_{III}$  são  $\mathbf{n}_I, \mathbf{n}_{II}, \mathbf{n}_{III}$  e através da equação (2.22) obtém-se

$$\mathbf{n}_I = \frac{1}{\lambda_I} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_I \quad (2.26)$$

Devido a que  $\mathbf{n}_I, \mathbf{n}_{II}, \mathbf{n}_{III}$  são vetores unitários se pode escrever

$$\mathbf{n}_I = \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_I, \quad \mathbf{n}_{II} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_{II}, \quad \mathbf{n}_{III} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_{III} \quad (2.27)$$

onde  $\mathbf{R}$  é a matriz de rotação.

A equação (2.27) permite dizer que uma vez achadas as direções principais do gradiente de deformação se terá conseguido isolar deformações e movimento do corpo rígido na vizinhança de um ponto material. É possível escrever portanto as componentes do vetor  $d\mathbf{X}$  em relação às direções principais, deste modo se tem

$$d\mathbf{X} = d\mathbf{X}_I + d\mathbf{X}_{II} + d\mathbf{X}_{III}$$

onde

$$d\mathbf{X}_I = \mathbf{N}_I \mathbf{N}_I^T d\mathbf{X}, \quad d\mathbf{X}_{II} = \mathbf{N}_{II} \mathbf{N}_{II}^T d\mathbf{X}, \quad d\mathbf{X}_{III} = \mathbf{N}_{III} \mathbf{N}_{III}^T d\mathbf{X}$$

Sendo  $d\mathbf{X}_I$  a componente da linha material na direção  $\mathbf{N}_I$ , a mesma linha terá uma extensão  $\lambda_I$  na direção  $\mathbf{n}_I$ , o que é expressa pela equação

$$d\mathbf{x}_I = \lambda_I \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}_I$$

Similarmente se tem

$$dx_{II} = \lambda_{II} \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}_{II}$$

e

$$dx_{III} = \lambda_{III} \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}_{III}$$

Da mesma forma, se pode escrever a equação seguinte

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{x}_I + d\mathbf{x}_{II} + d\mathbf{x}_{III}$$

de onde é obtido

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \lambda_I \mathbf{R} \cdot \mathbf{X}_I + \lambda_{II} \mathbf{R} \cdot \mathbf{X}_{II} + \lambda_{III} \mathbf{R} \cdot \mathbf{X}_{III} \\ &= (\lambda_I \mathbf{R} \mathbf{N}_I \mathbf{N}_I^T + \lambda_{II} \mathbf{R} \mathbf{N}_{II} \mathbf{N}_{II}^T + \lambda_{III} \mathbf{R} \mathbf{N}_{III} \mathbf{N}_{III}^T) d\mathbf{X} \\ &= (\lambda_I \mathbf{n}_I \mathbf{N}_I^T + \lambda_{II} \mathbf{n}_{II} \mathbf{N}_{II}^T + \lambda_{III} \mathbf{n}_{III} \mathbf{N}_{III}^T) d\mathbf{X} \\ &= (\lambda_I \mathbf{n}_I \mathbf{n}_I^T + \lambda_{II} \mathbf{n}_{II} \mathbf{n}_{II}^T + \lambda_{III} \mathbf{n}_{III} \mathbf{n}_{III}^T) \mathbf{R} d\mathbf{X} \end{aligned}$$

o que pode ser expressa na forma seguinte

$$d\mathbf{x} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.28)$$

onde

$$\mathbf{V} = \lambda_I \mathbf{n}_I \otimes \mathbf{n}_I + \lambda_{II} \mathbf{n}_{II} \otimes \mathbf{n}_{II} + \lambda_{III} \mathbf{n}_{III} \otimes \mathbf{n}_{III} \quad (2.29)$$

é o *tensor de deformação esquerdo*. Comparando (2.21) e (2.28) se tem

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (2.30)$$

denominado *decomposição polar* do gradiente de deformação.

Se ao invés da base  $\mathbf{n}_I, \mathbf{n}_{II}, \mathbf{n}_{III}$  é adotado  $\mathbf{N}_I, \mathbf{N}_{II}, \mathbf{N}_{III}$ , pode ser obtida uma outra decomposição do gradiente de deformação

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \quad (2.31)$$

onde  $\mathbf{U}$  é o *tensor de deformação direito*. Tanto  $\mathbf{V}$  quanto  $\mathbf{U}$  são simétricos e definido positivos, enquanto que  $\mathbf{R}$  é antisimétrico com determinante unitário.

A equação (2.30) mostra que quando se passa de uma configuração a outra, o movimento pode ser decomposto num movimento rígido seguido de uma extensão, ou numa extensão seguida de um movimento rígido na equação (2.31). Más especificamente,  $\mathbf{F}$  define completamente o movimento relativo das partículas materiais numa vizinhança infinitesimal de um ponto material (partícula). Para uma partícula situada em  $\mathbf{X}$  na configuração de referência, a deformação é completamente definida

pelo tensor de deformação esquerdo  $\mathbf{V}$  (ou o tensor de deformação direito  $\mathbf{U}$ ). A matriz de rotação  $\mathbf{R}$  define a rotação rígida das direções principais da deformação ( $\mathbf{N}_I$  na configuração de referência e  $\mathbf{n}_I$  na configuração atual e similarmente para as outras duas direções principais). É importante observar que  $\mathbf{R}$  representa a rotação rígida do material no ponto  $\mathbf{X}$  em forma aproximada, numa forma mais geral, cada extensão infinitesimal emanando do ponto, experimenta uma rotação diferente. Dita distinção entre a rotação das direções principais da deformação,  $\mathbf{R}$ , e a rotação das direções individuais no material, torna-se significativa quando se tem grandes deformações de materiais não isotrópicos. Uma generalização geométrica deste fato pode ser conseguida através do raciocínio seguinte:

Suponha que se esteja observando uma vizinhança de um ponto  $\mathbf{X}$ . Deste ponto emanam infinitas fibras em todas as direções. Se a região onde se encontra dito ponto experimenta uma deformação com gradiente  $\mathbf{F}$ , e seja a decomposição polar do tipo  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ .

- A descrição da ação do operador  $\mathbf{U}$  pode ser visto considerando as três fibras que estão nas direções principais, imagine-se que essas fibras não experimentem uma rotação material (apenas alongam), todas as outras fibras (que não correspondem às direções principais) experimentam, ao mesmo tempo, um alongamento e uma rotação material  $\mathbf{R}^*$  devido ao operador  $\mathbf{U}$ .
- A rotação do corpo rígido  $\mathbf{R}$  faz (posteriormente à ação do operador  $\mathbf{U}$ ) rotar todas as fibras num mesmo valor angular. Desta forma, as fibras que se encontram nas direções principais experimentam somente uma rotação rígida  $\mathbf{R}$  enquanto que todas as outras uma rotação material adicional  $\mathbf{R}^*$  à rotação  $\mathbf{R}$ . O isolamento dessas duas rotações é muito difícil de conseguir na prática, razão pela qual muitas vezes se considera apenas a rotação rígida  $\mathbf{R}$  o que evidentemente não influencia em demasia os resultados caso que se tenha pequenas deformações.



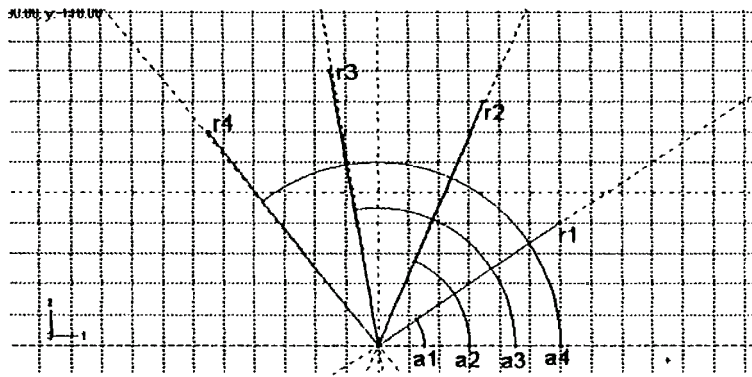


Figura 2.2: (a)- Interpretação dos operadores  $R$  e  $U$ .

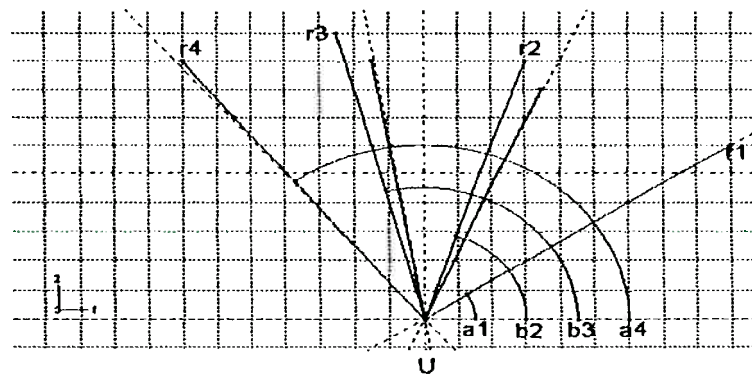


Figura 2.3: (b)- Interpretação dos operadores  $R$  e  $U$ .

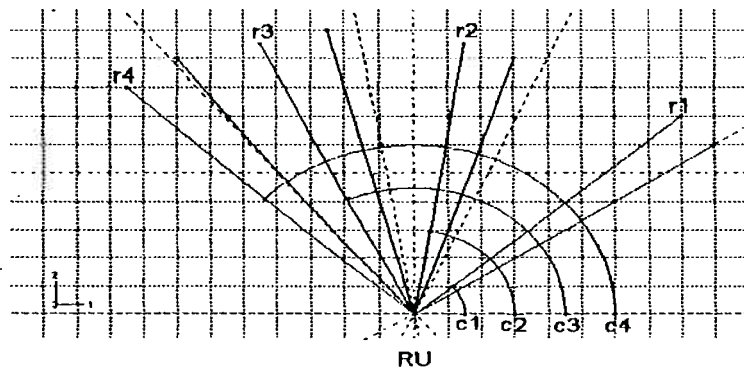


Figura 2.4: (c)- Interpretação dos operadores  $R$  e  $U$ .

Tendo em conta a importância do operador  $\mathbf{V}$  na deformação do material, pode-se concluir que é importante conseguir isolá-lo. Isso pode ser feito facilmente na forma seguinte

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \lambda_I^2 \mathbf{n}_I \otimes \mathbf{n}_I + \lambda_{II}^2 \mathbf{n}_{II} \otimes \mathbf{n}_{II} + \lambda_{III}^2 \mathbf{n}_{III} \otimes \mathbf{n}_{III} \quad (2.32)$$

o que permite obter  $\mathbf{V}$  resolvendo o problema de autovalores (2.25). Posteriormente usando a equação (2.30) pode ser obtida a rotação  $\mathbf{R}$  através da expressão

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F} \quad (2.33)$$

onde

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{\lambda_I} \mathbf{n}_I \otimes \mathbf{n}_I + \frac{1}{\lambda_{II}} \mathbf{n}_{II} \otimes \mathbf{n}_{II} + \frac{1}{\lambda_{III}} \mathbf{n}_{III} \otimes \mathbf{n}_{III} \quad (2.34)$$

### 2.3.12 Medidas de deformação

#### Deformação numa dimensão

Tem sido considerado uma medida de deformação, a razão de extensão  $\lambda$ . Para muitos problemas dita medida proporciona um valor adequado para a magnificação da deformação, mas em outros casos mostra-se inadequado. Define-se então uma função

$$\varepsilon = f(\lambda) \quad (2.35)$$

onde a função  $f$  é escolhida por conveniência. Expandindo  $\varepsilon$  numa série de Taylor ao redor de  $\lambda = 1$  (estado inextendido) se tem

$$\varepsilon = f(1) + (\lambda - 1) \frac{df}{d\lambda} + \frac{1}{2!} (\lambda - 1)^2 \frac{d^2 f}{d\lambda^2} + \dots \quad (2.36)$$

onde  $f(1) = 0$  para  $\varepsilon = 0$  e  $\lambda = 1$ , e escolhe-se  $\frac{df}{d\lambda} = 1$  para  $\lambda = 1$  e  $\frac{d^2 f}{d\lambda^2} > 0$  para qualquer valor positivo de  $\lambda$ .

É importante notar que quando se tem pequenas deformações, os termos de mais alta ordem na equação (2.36) podem ser desprezados.

É possível propor muitas medidas de deformação, alguns mais usuais são:

- Deformação de Biot (de engenharia):

$$f(\lambda) = \lambda - 1 \quad (2.37)$$

Esta definição é o mais familiar para os engenheiros que realizam o teste uniaxial de tração.

- Deformação de Green (quadrática):

$$f(\lambda) = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) \quad (2.38)$$

Esta medida é computacionalmente conveniente para problemas envolvendo grandes deslocamentos mas pequenas deformações, devido a que a sua generalização num tensor de deformações para o caso tridimensional pode ser resolvido diretamente a partir do gradiente de deformação, sem necessidade de resolver o problema de autovalores, i.e. sem precisar primeiramente determinar as direções principais e as correspondente razões de extensões em ditas direções.

- Deformação logarítmica:

$$f(\lambda) = \ln(\lambda) \quad (2.39)$$

Esta medida é muito utilizada em metais sob deformação plástica. Uma motivação para o seu uso é quando a tensão verdadeira (força por área real) é grafada em relação à deformação logarítmica, nesse caso, os testes de tração, compressão e torção coincidem. Ademais, para muitos materiais, dita medida é matematicamente adequada. Para esses materiais, a parte elástica da deformação deve ser considerada pequena. Todas às funções acima podem ser agrupadas numa família de funções como e mostrado a continuação:

$$\epsilon_n = f_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{n}(\lambda^n - 1) & \text{se } n \neq 0 \\ \ln(\lambda) & \text{se } n = 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.40)$$

Como já tem sido comentado, a escolha depende da conveniência, ademais sendo que a deformação está ligada diretamente à cinemática e à relação constitutiva. Em relação à aplicação do método dos elementos finitos a escolha é baseada em dois requisitos: a facilidade com que a deformação pode ser computada a partir de deslocamentos (fato muito comum neste método) e a conveniência da medida de deformação em relação a alguma lei constitutiva particular. Por exemplo, como mencionado acima, a deformação logarítmica é particularmente conveniente para plasticidade em metais, em quanto que para materiais com grandes deformações elásticas (borracha e materiais similares) pode ser usada diretamente a razão de extensão  $\lambda$  pois o seu valor é bem diferente de 1.

### Deformação tridimensional

Tendo definido os conceitos básicos de deformação para o caso unidimensional, agora é possível generalizar ditas idéias para o caso tridimensional. Tem-se dito anteriormente que a deformação na vizinhança de uma partícula pode ser determinada completamente conhecendo as três razões de deformações  $\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III}$  e as três direções principais  $\mathbf{n}_I, \mathbf{n}_{II}, \mathbf{n}_{III}$  (ou  $\mathbf{N}_I, \mathbf{N}_{II}, \mathbf{N}_{III}$ ). Isso sugere a generalização das funções

de deformações dadas para o caso unidimensional. Escolhendo  $\varepsilon_I = f_I(\lambda)$  na direção  $\mathbf{n}_I$  (ou  $\mathbf{N}_I$ ),  $\varepsilon_{II} = f_{II}(\lambda)$  na direção  $\mathbf{n}_{II}$  (ou  $\mathbf{N}_{II}$ ), e  $\varepsilon_{III} = f_{III}(\lambda)$  na direção  $\mathbf{n}_{III}$  (ou  $\mathbf{N}_{III}$ ), o tensor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_I \mathbf{n}_I \otimes \mathbf{n}_I + \varepsilon_{II} \mathbf{n}_{II} \otimes \mathbf{n}_{II} + \varepsilon_{III} \mathbf{n}_{III} \otimes \mathbf{n}_{III} \quad (2.41)$$

caracteriza completamente o estado de deformação num ponto material.

Por exemplo, escolhendo  $\varepsilon_I = \frac{1}{2}(\lambda_I^2 - 1)$ ,  $\varepsilon_{II} = \frac{1}{2}(\lambda_{II}^2 - 1)$ , e  $\varepsilon_{III} = \frac{1}{2}(\lambda_{III}^2 - 1)$  obtém-se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_g &= \frac{1}{2}(\lambda_I^2 - 1)\mathbf{n}_I \otimes \mathbf{n}_I + \frac{1}{2}(\lambda_{II}^2 - 1)\mathbf{n}_{II} \otimes \mathbf{n}_{II} + \frac{1}{2}(\lambda_{III}^2 - 1)\mathbf{n}_{III} \otimes \mathbf{n}_{III} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T - \mathbf{I}) \end{aligned}$$

As observações feitas para o caso unidimensional servem para o caso geral (tridimensional), o que significa que o tensor de deformações de Green não pode ser utilizada com sucesso para grandes deformações, sendo apropriado o seu uso por exemplo em problemas estruturais (vigas e cascas) que experimentam normalmente pequenas deformações mas grandes rotações, também é usual para problemas de flambagem utilizando uma formulação para pequenas deformações.

### 2.3.13 Taxa de deformação e tensor de rotação material

Muitos materiais tem deformações que dependem da historia da deformação experimentada pelo mesmo, nesse caso as relações constitutivas são formuladas em forma de taxas. Tendo em conta que a velocidade de uma partícula material é

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \quad (2.42)$$

onde a diferenciação parcial em relação ao tempo significa a taxa de câmbio da posição espacial de um ponto material (partícula).

A diferença de velocidade entre dois pontos materiais numa vizinhança na configuração atual é dada pela equação

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.43)$$

onde

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.44)$$

é o gradiente de velocidade na configuração atual.

Lembrando que

$$dx = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

a equação (2.43) se pode escrever na forma seguinte

$$d\mathbf{v} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.45)$$

Por outra parte, a diferença de velocidade pode ser obtida na forma seguinte

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.46)$$

Comparando as equações (2.45) e (2.46), obtém-se

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} \quad (2.47)$$

O gradiente de velocidade pode ser decomposto numa soma de dois tensores simétrico e antisimétrico como segue

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = \mathbf{D} + \mathbf{W}$$

onde

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (2.48)$$

é a taxa de deformação, e

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (2.49)$$

é o tensor de rotação material (spin).

É fácil de obter

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \mathbf{R}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}})\mathbf{R}^T \quad (2.50)$$

o que mostra que  $\mathbf{D}$  não é influenciada pela rotação do corpo rígido  $\mathbf{R}$ .

Também é muito fácil de obter

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \mathbf{R}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}})\mathbf{R}^T + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \frac{1}{2} \mathbf{R}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}})\mathbf{R}^T + \boldsymbol{\Omega} \quad (2.51)$$

A primeira parcela do lado direito da equação (2.51) corresponde à rotação material, enquanto que a segunda parcela corresponde à rotação do corpo rígido, de onde se pode inferir que em ausência de deformação (movimento do corpo rígido por exemplo), os tensores de rotação material  $\mathbf{W}$  e velocidade angular  $\boldsymbol{\Omega}$  são iguais, i.e.  $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Omega}$ .

Uma relação importante que será utilizada neste trabalho, é a que existe entre a taxa do tensor de deformações de Green-Lagrange  $\boldsymbol{\epsilon}_G = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I})$  e  $\mathbf{D}$ . Dita relação pode ser obtida facilmente e está dada pela equação

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_G = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \quad (2.52)$$

### 2.3.14 Formulação corotacional

Uma formulação corotacional consiste em construir um sistema de coordenadas para cada ponto (ou elemento) de um corpo, de tal forma que o sistema de coordenadas local rote com o material. Dita formulação tem a vantagem de expressar em forma mais simples as equações resultantes. Todos os sistemas corotacionais considerados podem ser mapeados numa configuração global comum, através da escolha adequada do tensor de rotação.

Sejam dois sistemas de coordenadas ortogonais com bases  $\mathbf{e}_i$  e  $\tilde{\mathbf{e}}_i$ , fixa e rotada respectivamente, segundo a Fig.(2.5). Se um vetor qualquer  $\mathbf{a}$  tem a representação

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i \quad (2.53)$$

na base fixa (global), representa-se aqui o mesmo vetor na base corotacional através de expressão

$$\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{a}_i \tilde{\mathbf{e}}_i \quad (2.54)$$

As representações (2.53) e (2.54) estão relacionadas através da expressão

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{a} \quad (2.55)$$

onde

$$a_i = Q_{ij} \tilde{a}_j, \quad Q_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (2.56)$$

Uma matriz qualquer  $\mathbf{A}$ , cuja representação corotacional adotada aqui é  $\tilde{\mathbf{A}}$ , está relacionada com a sua representação na base fixa através da expressão

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} \quad (2.57)$$

Supondo que se queira uma representação corotacional da taxa de deformação  $\mathbf{D}$ , utilizando a rotação das direções principais  $\mathbf{R}$ , tem-se então

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R}$$

## 2.4 FORÇAS E TENSÕES

Na teoria mecânica adotada aqui, tal como se mencionou anteriormente, existem os dois tipos de forças a seguir: as superficiais e as volumétricas, ao invés das três forças fundamentais na natureza, i.e. a eletro-fraca, a forte e a gravitacional, postuladas em outras áreas da física. As forças volumétricas e superficiais estão definidas

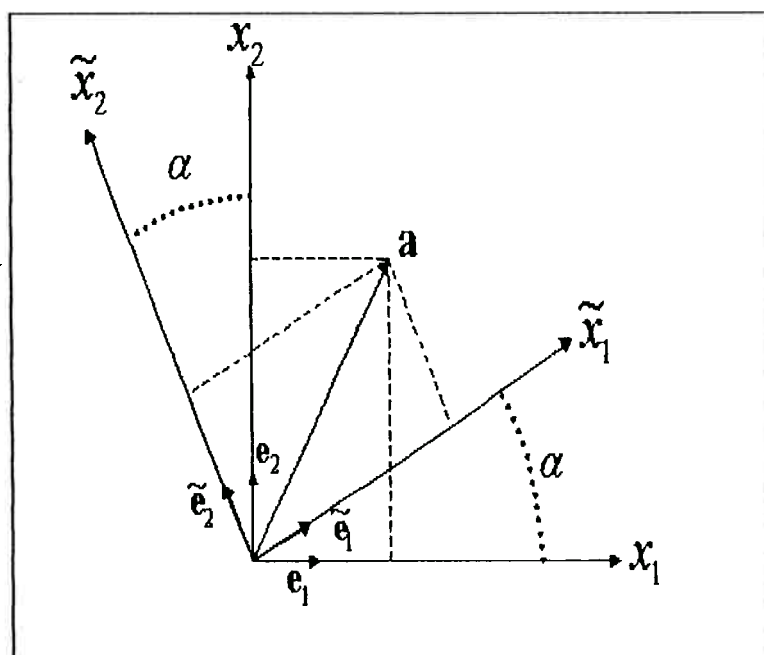


Figura 2.5: Representação de um vetor  $\mathbf{a}$  em forma corotacional.

pelas equações (2.3) e (2.4) respectivamente. Considera-se também que em cada seccionamento interno do corpo deformável existe uma força superficial (hipótese de Cauchy).

Considerando uma força distribuída sobre uma superfície (tensão), é possível associar dita força a uma direção determinada. Com efeito, um ente matemático que relaciona um vetor com cada direção do espaço, através de uma expressão que é linear e homogêneo na direção do cosseno, chama-se tensor de segunda ordem (Prager, 1961) [68]. Dita definição é informal mas intuitivo, e permite dar uma idéia mais clara do conceito de tensor de tensões, que evidentemente são tensores de segunda ordem que relacionam forças superficiais com direções no espaço. Previamente a esta seção já foram introduzidas outros tensores, e um estudo mais aprofundado pode ser feito, por exemplo, através de (Borisenko and Tarapov, 1968) [14]. Existem várias medidas de tensões mas aqui serão dadas apenas aquelas que serão utilizadas neste trabalho.



### 2.4.1 Tensor de Cauchy

O tensor de tensões de Cauchy tem um significado físico claro. Considerando um cubo elementar da Fig.(2.6), este tensor relaciona a normal a cada face do cubo com cada força superficial aplicada na face correspondente, na configuração atual. Assim

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (2.58)$$

onde  $\mathbf{t}$  é a força superficial aplicada,  $\mathbf{n}$  é a normal à fase na configuração atual e  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de Cauchy.

Escolhendo um sistema de coordenadas se pode escrever a matriz correspondente como segue

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

O tensor de Cauchy é simétrico, i.e.  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$  na ausência de binários (não-polaridade) como é usual.

Uma forma corrotacional do tensor de Cauchy é de muita utilidade para uma análise

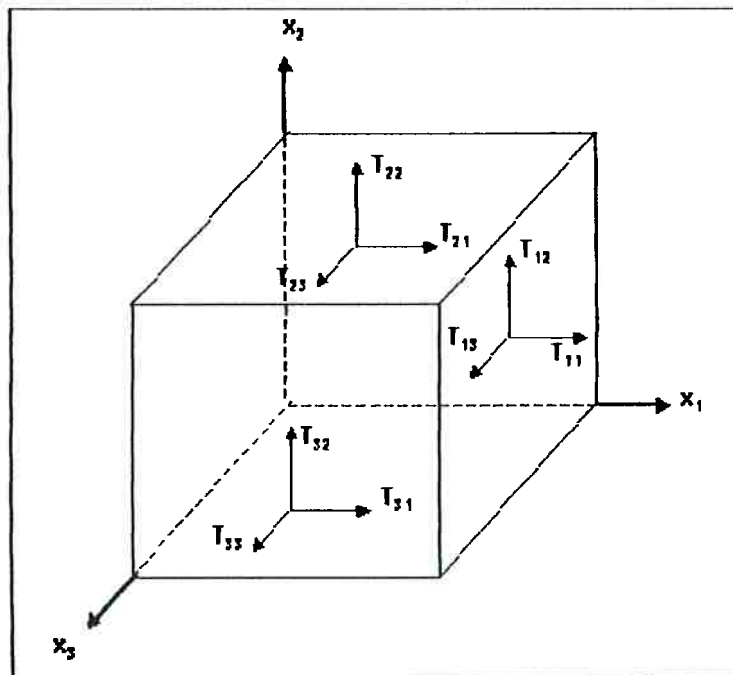


Figura 2.6: Tensor de Cauchy: forças superficiais no cubo elementar.

não-linear, e está dada através da transformação (2.57) o que fornece

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{R}^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{R} \quad (2.60)$$

### 2.4.2 Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff

O primeiro tensor de Piola-Kirchhoff (PK1) está definida através da expressão

$$\mathbf{P} = J \sigma \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.61)$$

onde  $J = \det(\mathbf{F})$ .

O PK1 proporciona a força superficial atualizada (na configuração atual) mas aplicada sobre a unidade de área na configuração de referência, e expressa a força em função da normal  $\mathbf{n}_0$  à superfície  $dS_0$  em  $\mathbf{X}$

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0, \hat{\mathbf{t}} = k \mathbf{t} \quad (2.62)$$

O PK1 é não simétrico o que dificulta o seu uso numa lei constitutiva com tensor de deformação simétrico:

Obs: Alguns autores como (MALVERN, 1969)[57] definem o PK1 como a transposta do tensor  $\mathbf{P}$  dado aqui, i.e.  $\hat{\mathbf{P}} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \sigma$  que recebe as vezes a denominação de tensão nominal.

### 2.4.3 Segundo tensor de Piola-Kirchhoff

O segundo tensor de Piola-Kirchhoff (PK2) está definida através da expressão

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \sigma \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.63)$$

O PK2 corresponde ao mapeamento inverso da força superficial atualizada, na configuração de referência, na mesma forma em que o vetor  $d\mathbf{X}$  em  $\mathbf{X}$  é mapeado no vetor espacial  $d\mathbf{x}$  em  $\mathbf{x}$ , i.e.  $d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}$ , como se pode ver a seguir

$$\hat{\mathbf{t}}_0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{t}}$$

de onde se tem

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{t}}_0 \quad (2.64)$$

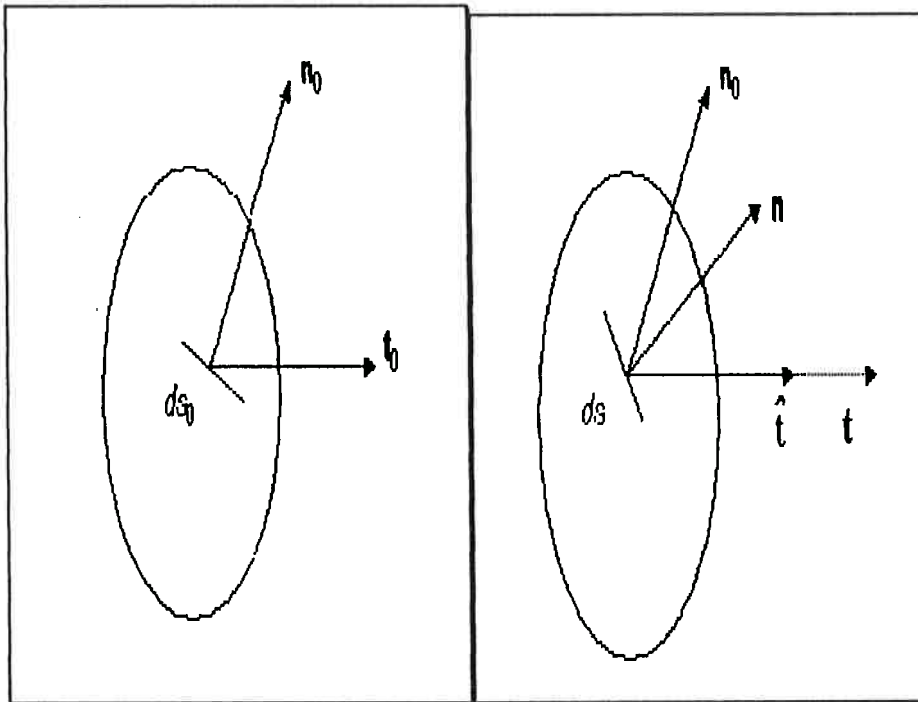


Figura 2.7: Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff.

para  $\sigma = \sigma^T$ .

O PK2 é simétrico se  $\sigma$  o é, e ainda que o seu uso leve a uma lei constitutiva complexa, oferece uma formulação conveniente para muitos casos.

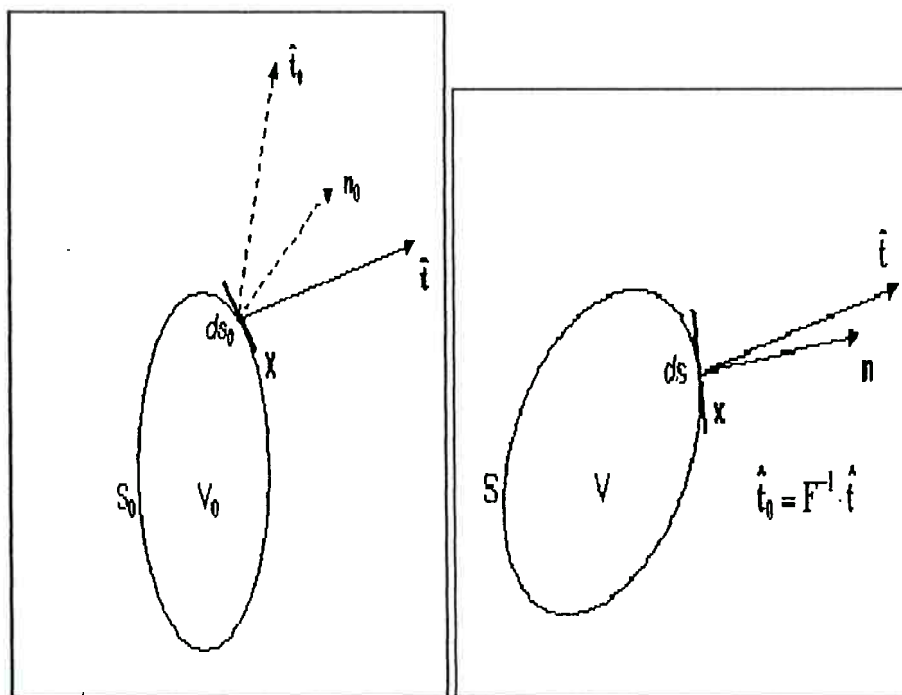


Figura 2.8: Segundo tensor de Piola-Kirchhoff.

## 2.5 LEIS FUNDAMENTAIS DA TERMODINÂMICA

### 2.5.1 Conservação da massa

A massa de um corpo está definida através da sua densidade  $\rho = \rho(\mathbf{X}, t)$  na forma integral como segue

$$m(\mathcal{P}) = \int_{\Omega} \rho dV, \quad \rho = \rho(\mathbf{x}, t) \quad (2.65)$$

A conservação de massa é expressa pela equação

$$\frac{d}{dt} (m) = 0 \quad (2.66)$$

o que indica que a massa é a mesma independentemente das deformações que possa sofrer o corpo.

A forma local da equação (2.66) é

$$\dot{\rho} + \rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.67)$$

onde  $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}$  é a divergente espacial de  $\mathbf{v}$ .

## 2.5.2 Conservação do momento linear

Considerando o corpo  $\mathfrak{B}$  e a parte  $\mathcal{P}$  sobre a qual são aplicadas as forças volumétrica  $\mathbf{b}$  e superficial  $\mathbf{t}$ , a força total aplicada sobre o corpo está dada pela equação

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} dS \quad (2.68)$$

O momento linear está definido através da equação

$$\mathbf{p}(\mathcal{P}, t) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV, \quad \rho = \rho(\mathbf{x}, t) \quad (2.69)$$

onde  $\rho \mathbf{v}$  é o momento linear por unidade de volume.

A conservação do momento linear, denominada segunda lei de Newton, é expressa pela equação

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}) = \mathbf{f} \quad (2.70)$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV \right) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} dS \quad (2.71)$$

Aplicando o teorema de Gauss, obtém-se a forma local de (2.70) expressa pela seguinte equação

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \text{ em } \Omega \\ \mathbf{t} &= \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \text{ em } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.72)$$

onde  $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  é a divergente espacial de  $\boldsymbol{\sigma}$ .

## 2.5.3 Conservação do momento angular

Fazendo as considerações feitas para o momento linear, e definindo o momento angular através da equação

$$\mathbf{m}(\mathcal{P}, t) = \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV \quad (2.73)$$

onde o vetor  $\mathbf{r}$  determina a posição do vetor  $\mathbf{v}$  a partir de um eixo de giro arbitrário. Definindo

$$\boldsymbol{\tau} = \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS, \quad (2.74)$$

a conservação do momento angular é expressa pela equação

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{m}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.75)$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV \right) = \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS \quad (2.76)$$

O resultado mais importante obtido da equação (2.76) é a simetria do tensor de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  [57], ou seja

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2.77)$$

#### 2.5.4 Conservação da energia (Primeira lei da termodinâmica)

Definindo a energia interna do corpo  $\mathfrak{B}$  através da equação

$$E(\mathfrak{B}, t) = \int_{\Omega} \rho e dV \quad (2.78)$$

onde  $e$  é a energia interna por unidade de volume. A energia cinética total

$$K(\mathfrak{B}, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV \quad (2.79)$$

A taxa de recepção de calor

$$Q(\mathfrak{B}, t) = \int_{\Omega} \rho r dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.80)$$

onde  $r$  é a taxa de produção de calor no corpo por unidade de volume, e  $\mathbf{q}$  é o fluxo de calor pela fronteira  $\partial\Omega$ . E finalmente, a potência das forças externas aplicadas sobre o corpo

$$P(\mathfrak{P}, t) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS \quad (2.81)$$

A conservação da energia em forma de taxa está dada então pela equação

$$\frac{d}{dt}(E + K) = P + Q \quad (2.82)$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho e dV + \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV \right) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\Omega} \rho r dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.83)$$

A forma local da conservação da energia é obtida de (2.83) fazendo algumas transformações, e a sua expressão final será

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \rho r - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} \quad (2.84)$$

a que é conhecida como primeira lei da termodinâmica.

## 2.5.5 Segunda lei da termodinâmica

A primeira lei da termodinâmica permite prever a conversão de um tipo de energia em outro, e.g. mecânica em térmica e vice-versa. Porém, a experiência mostra a existência de uma direcionalidade na conversão de energia. Mais especificamente, a velocidade de conversão de energia térmica em energia não acompanhada de trabalho mecânico (i.e. a conversão de  $Q$  em  $\dot{E} + \dot{K} - P$ ) está limitada superiormente

$$Q \leq Q_s \quad (2.85)$$

onde  $Q_s$  é um limite superior dado aprioristicamente [81].

A inequação (2.85) indica que ainda que seja sempre possível que o trabalho e a energia possa ser convertida em calor, há um limite para a velocidade à qual possa se converter calor em energia sem efetuar trabalho mecânico [81].

Uma forma mais conhecida da desigualdade (2.85) pode ser obtida introduzindo o conceito de entropia. Considerando a variação de dita desigualdade por unidade de temperatura absoluta, através da equação

$$S = \int_{\Omega} \rho s dV \quad (2.86)$$

onde  $s$  é a entropia por unidade de massa, obtém-se a inequação

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\Omega} \frac{\rho r}{T} dV - \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dS \quad (2.87)$$

onde  $T$  é a temperatura absoluta. A inequação (2.87) é conhecida como segunda lei da termodinâmica.

Em relação à entropia, dita grandeza mede o grau de convertibilidade de energia térmica, e o seu valor não pode ser negativo. Assim, se o sistema possui um alto grau de entropia, significa que será mais difícil de extrair energia útil do sistema.

A forma local de (2.87) é

$$\rho \dot{s} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{\rho r}{T} \geq 0 \quad (2.88)$$

## 2.5.6 Desigualdade de Clausius-Duhem

Uma relação muito útil pode ser obtida de (2.88) substituindo primeiramente  $r$  da equação (2.84) em (2.88)

$$\rho \dot{s} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{1}{T} (\rho \dot{e} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}) \geq 0 \quad (2.89)$$

e introduzindo a função de energia livre de Helmholtz

$$\psi = e - T s \quad (2.90)$$

em (2.89) obtém-se

$$\sigma : \mathbf{D} - \rho \left( \dot{\psi} + s\dot{T} \right) - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (2.91)$$

denominado desigualdade de Clausius-Duhem, onde  $\mathbf{g} = \nabla_{\mathbf{x}} T$  (gradiente espacial de temperatura).

## 2.6 CARACTERIZAÇÃO DE MATERIAIS: LEIS CONSTITUTIVAS

Até agora, neste trabalho se tem apresentado leis gerais e propriedades que não dependem do tipo de material. Para corpos deformáveis porém, caracterizar o material é de muita importância.

### 2.6.1 Axiomas constitutivos

De acordo com Truesdell (Truesdell, 1973) [81] é possível caracterizar o processo termodinâmico através de dois sub-processos.

Um processo *termo-cinético* de  $\mathfrak{B}$  está definido pelas funções

$$T = \hat{T}(\mathfrak{B}, t), \quad \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathfrak{B}, t) \quad (2.92)$$

que na forma local, é expressa pelas equações

$$T = \hat{T}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.93)$$

Um processo *caloro-dinâmico* de  $\mathfrak{B}$  está definido pelas funções

$$W_T(\mathfrak{B}, t), E(\mathfrak{B}, t), Q(\mathfrak{B}, t) \text{ e } Q_s(\mathfrak{B}, t) \quad (2.94)$$

as que por simplicidade serão expressas através de

$$W_T(t), E(t), Q(t) \text{ e } Q_s(t) \quad (2.95)$$

e que satisfazem as duas leis da termodinâmica, i.e. (2.84) e (2.91), sendo

$$W_T(t) = P - \dot{K} \quad (2.96)$$

Para a elaboração de uma lei constitutiva é necessário impor restrições às formulações. A axiomática introduzida aqui é devido a Truesdell [87].



## Determinismo

Para um corpo  $\mathfrak{B}$  no instante  $t$ , a história do processo termo-cinético ao qual tem sido submetido até esse momento, incluído o instante  $t$ , determina o processo calorodinâmico, então existem os funcionais  $\hat{W}_T$ ,  $\hat{E}$ ,  $\hat{Q}$  e  $\hat{Q}_s$  tal que

$$\begin{aligned}W_T(t) &= \hat{W}_T(\hat{T}, \hat{\mathbf{x}}) \\E(t) &= \hat{E}(\hat{T}, \hat{\mathbf{x}}) \\Q(t) &= \hat{Q}(\hat{T}, \hat{\mathbf{x}}) \\Q_s(t) &= \hat{Q}_s(\hat{T}, \hat{\mathbf{x}})\end{aligned}\tag{2.97}$$

onde os funcionais satisfazem as duas leis da termodinâmica, i.e. (2.84) e (2.91).

## Princípio de ação local

O estado termodinâmico num ponto  $\mathbf{X}$ , não é influenciado pelos estados termodinâmicos de pontos fora de vizinhança do ponto  $\mathbf{X}$ .

Sendo assim, para um corpo simples, se pode escrever a forma local da equação (2.97), como segue [87]

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \hat{\sigma}(\mathbf{F}^t, T^t, \mathfrak{g}^t) \\ \psi(t) &= \hat{\psi}(\mathbf{F}^t, T^t, \mathfrak{g}^t) \\ s(t) &= \hat{s}(\mathbf{F}^t, T^t, \mathfrak{g}^t) \\ \mathbf{q}(t) &= \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}^t, T^t, \mathfrak{g}^t)\end{aligned}\tag{2.98}$$

onde (2.98) satisfaz as equações (2.66), (2.72)<sub>1</sub>, (2.76), (2.84) e (2.91); e onde  $(\cdot)^t$  denota a história de  $(\cdot)$  em  $\mathbf{X}$  até o instante  $t$ .

## Equi-presença

Uma quantidade presente como uma variável independente numa relação constitutiva, deve estar presente em todas as equações do modelo constitutivo.

Note que isso se verifica em (2.98).

Este axioma permite a compatibilidade das equações constitutivas propostas, tanto com as leis gerais, quanto como propriedades particulares do material [87].

## Dissipação universal

Este axioma garante que cada termo da desigualdade (2.89) deve satisfazer individualmente dita inequação.

## Objetividade

Uma lei constitutiva não deve depender do observador ou do sistema de referência. Assim, a descrição local do movimento do corpo  $\mathfrak{B}$  descritos por dois observadores serão dados através das equações (2.2) e (2.15), de acordo com a relação

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x}_T \\ \mathbf{x}^* &= \mathbf{x}^*(\mathbf{X}, t), \mathbf{R} = \mathbf{R}(t), \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \mathbf{x}_T = \mathbf{x}_T(t) \end{aligned} \quad (2.99)$$

sendo  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}^*$ , o movimento descrito pelo primeiro e segundo observador respectivamente.

Nessas condições, o gradiente de deformação, o tensor de Cauchy, o fluxo de calor e o gradiente de temperatura, serão dados de acordo a cada observador de acordo com as transformações seguintes

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^* &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\sigma}^* &= \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}^T \\ \mathbf{q}^* &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{q} \\ \mathbf{g}^* &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{g} \end{aligned} \quad (2.100)$$

As relações (2.98) para o segundo observador serão dados portanto através das expressões seguintes

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^*(t) &= \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{F}^{t*}, T^t, \mathbf{g}^{t*}) \\ \boldsymbol{\psi}(t) &= \hat{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{F}^{t*}, T^t, \mathbf{g}^{t*}) \\ s(t) &= \hat{s}(\mathbf{F}^{t*}, T^t, \mathbf{g}^{t*}) \\ \mathbf{q}^*(t) &= \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}^{t*}, T^t, \mathbf{g}^{t*}) \end{aligned} \quad (2.101)$$

permanecendo  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ ,  $\hat{s}$  e  $\hat{\mathbf{q}}$  independentes do observador.

## Simetria

Na seção (2.3) optou-se por uma configuração de referência  $\hat{\mathbf{x}}_0(\mathfrak{B})$ . Se se tivesse optado por uma outra configuração de referência  $\hat{\mathbf{x}}_0^{(1)}(\mathfrak{B})$ , de que maneira mudaria a resposta do material para as leis constitutivas expressas pelas equações (2.98) (ou (2.97) para a sua correspondente forma global)?

A simetria material é o conjunto de transformações da configuração de referência sob as quais não se modifica a resposta do material, fornecidas através das equações

(2.98) (ou (2.97)).

Pode ser demonstrado [15] que as transformações correspondem às rotações da configuração de referência, e que estas transformações tem uma estrutura de grupo, que são chamados *grupos de simetria material* do corpo  $\mathfrak{B}$ .

A simetria na sua forma local é expressa pelas equações

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}(\mathbf{F}^t, T^t, \mathbf{g}^t) &= \hat{\sigma}([\mathbf{F}\mathbf{F}_0]^t, T^t, [\mathbf{F}_0^T \mathbf{g}]^t) \\
 \hat{\psi}(\mathbf{F}^t, T^t, \mathbf{g}^t) &= \hat{\psi}([\mathbf{F}\mathbf{F}_0]^t, T^t, [\mathbf{F}_0^T \mathbf{g}]^t) \\
 \hat{s}(\mathbf{F}^t, T^t, \mathbf{g}^t) &= \hat{s}([\mathbf{F}\mathbf{F}_0]^t, T^t, [\mathbf{F}_0^T \mathbf{g}]^t) \\
 \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}^t, T^t, \mathbf{g}^t) &= \hat{\mathbf{q}}([\mathbf{F}\mathbf{F}_0]^t, T^t, [\mathbf{F}_0^T \mathbf{g}]^t)
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

onde  $\mathbf{F}_0$  é o gradiente de deformação entre as configurações  $\hat{\mathbf{x}}_0(\mathfrak{B})$  e  $\hat{\mathbf{x}}_0^{(1)}(\mathfrak{B})$ .

Se (2.98)<sub>2</sub>, por exemplo, expressa os resultados de um possível experimento descritos pela teoria, a simetria expressa que  $\hat{\mathbf{x}}_0(\mathfrak{B})$  e  $\hat{\mathbf{x}}_0^{(1)}(\mathfrak{B})$  são indistinguíveis através de qualquer experimento.

## 2.6.2 Termodinâmica com variáveis internas

Escrever equações constitutivas através da história do gradiente de deformação  $\mathbf{F}$ , a temperatura  $T$  e o gradiente de temperatura  $\mathbf{g}$  tem uma importância teórica muito grande pois sintetiza as idéias fundamentais subjacentes numa lei constitutiva. Porém a implementação desse programa na simulação do comportamento do material é uma tarefa muito difícil, senão impossível [26]. É importante portanto poder achar uma forma relaxada desse programa.

A termodinâmica das variáveis internas se propõe à determinação dos funcionais  $\hat{\sigma}$ ,  $\hat{\psi}$ ,  $\hat{s}$  e  $\hat{\mathbf{q}}$  num instante  $t$  considerado, através do conhecimento dos valores locais de certas variáveis denominados *variáveis de estado*. Nesse caso, os valores desses funcionais dependem somente dos valores das variáveis de estado no instante  $t$  e não da história das mesmas. Nesse sentido, a obtenção das leis constitutivas através da termodinâmica das variáveis internas pode ser vista como uma particularização da correspondente obtida através da termodinâmica racional.

Assumindo que as variáveis de estado são os seguintes  $\{\mathbf{F}, T, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}\}$ , onde cada variável é determinado num tempo  $t$  dado. As variáveis  $\{\mathbf{F}, T, \mathbf{g}\}$  são denominados *variáveis observáveis*, enquanto que  $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_k\}$ ;  $k = 1, \dots, n$  corresponde a um conjunto de *variáveis internas*, onde cada  $\alpha_k$  corresponde a uma variável escalar, vetorial ou tensorial de qualquer ordem, associados com mecanismos dissipativos.

Desta maneira, é possível escrever as equações (2.98) na forma seguinte

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}) &= \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{F}, T, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \\
 \psi(\mathbf{X}) &= \hat{\psi}(\mathbf{F}, T, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \\
 s(\mathbf{X}) &= \hat{s}(\mathbf{F}, T, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \\
 \mathbf{q}(\mathbf{X}) &= \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, T, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha})
 \end{aligned} \tag{2.103}$$

A desigualdade de Clausius-Duhem (2.91) é expressa então através da desigualdade

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{F}} - \rho \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \dot{\mathbf{g}} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_k} * \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k + s \dot{T} \right) - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \tag{2.104}$$

onde  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$ .

Re-ordenando (2.104) se tem

$$\left( \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} - \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{F}} \right) : \dot{\mathbf{F}} - \rho \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial T} + s \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \dot{\mathbf{g}} - \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_k} * \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \tag{2.105}$$

e usando o princípio de dissipação universal, se tem

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} &= \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F} \\
 s &= - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial T} \\
 \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{g}} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.106}$$

de onde a desigualdade (2.105) se reduz a

$$-\rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_k} * \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \tag{2.107}$$

Definindo as forças termodinâmicas na forma seguinte

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_k &= \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_k} \\
 \mathbf{A} &= \mathbf{A}_k; \quad k = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.108}$$

a equação (2.107) tem a forma

$$-\mathbf{A}_k * \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \tag{2.109}$$

onde \* representa o produto apropriado entre as grandezas envolvidas.

### Evolução das variáveis internas

Tendo em conta que as derivadas temporais das variáveis de estado não aparecem na definição do estado termodinâmico do sistema estudado, é necessário um formalismo adicional para descrever a evolução das variáveis internas [50], já que as

variáveis observáveis estão determinadas pela função energia livre que é o potencial termodinâmico das mesmas. A evolução das variáveis  $\alpha_k$  e  $\frac{1}{T} \mathbf{q}$  podem ser escritas na forma seguinte

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_k &= f_{\alpha}(\mathbf{F}, T, \mathbf{g}, \alpha) \\ \frac{1}{T} \mathbf{q} &= f_{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, T, \mathbf{g}, \alpha)\end{aligned}\quad (2.110)$$

### Potencial de dissipação

Pode ser postulada a existência de um potencial de dissipação a fim de acoplar dito potencial ao formalismo desenvolvido aqui. Nesse caso se tem

$$\Pi = \hat{\Pi}(\mathbf{A}, \mathbf{g}; \mathbf{F}, T, \alpha) \quad (2.111)$$

e a evolução da variáveis dissipativas estarão dadas pelas equações

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_k &= -\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \mathbf{A}_k} \\ \frac{1}{T} \mathbf{q} &= -\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \mathbf{g}}\end{aligned}\quad (2.112)$$

### 2.6.3 Medidas objetivas de equações constitutivas

Quando uma equação constitutiva é escrita em forma de taxa, pode acontecer que a variação seja perturbada pelo efeito da rotação do corpo rígido, i.e. não dependa exclusivamente das propriedades do material. Considerando a relação seguinte

$$\dot{\sigma} = f(\mathbf{D}, t) \quad (2.113)$$

pode ser mostrado (e.g. Belytschko et al., 2000 [56]) que se um corpo experimenta uma rotação pura, i.e.  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ , a taxa do tensor de Cauchy pode não ser nula. Evidentemente que neste caso a lei constitutiva carece de validéz pois deveria depender exclusivamente das propriedades do material e ser independente do sistema de referência (observador), segundo o axioma de objetividade.

Existem várias taxas objetivas como a taxa de Jaumann, Green-Naghdi e Truesdell, que restitui a objetividade da lei constitutiva. O uso de cada um dessas taxas é determinado pela dificuldade na implementação e do tipo de problema estudado. Como essas taxas não dependem da rotação rígida do material são denominadas derivadas corotacionais.

#### Taxa de Jaumann

A taxa de Jaumann está definida de acordo com a equação

$$\mathbf{A}^{\nabla J} = \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{W}^T \quad (2.114)$$

onde  $\mathbf{A}$  é um tensor qualquer, e  $\mathbf{W}$  é o tensor de rotação material definida pela equação (2.49).

### Taxa de Green-Naghdi

A taxa de Green-Naghdi é obtida em forma similar à taxa de Jaumann, substituindo o tensor de rotação material pela velocidade angular  $\boldsymbol{\Omega}$  em (2.114), ou seja

$$\mathbf{A}^{\nabla G} = \dot{\mathbf{A}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega}^T \quad (2.115)$$

### Taxa de Truesdell

A taxa de Truesdell está definida de acordo à seguinte equação

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{\nabla T} &= \dot{\mathbf{A}} + (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v})\mathbf{A} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}^T \\ &= \dot{\mathbf{A}} + (\mathbf{D} : \mathbf{I})\mathbf{A} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}^T \end{aligned} \quad (2.116)$$

onde  $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}$  é o divergente espacial da velocidade  $\mathbf{v}$ .

Neste trabalho, uma taxa objetiva qualquer será expressa na forma seguinte

$$(\cdot)^{\nabla}$$

onde  $(\cdot)$  é o tensor derivado em forma objetiva.

## 2.7 A FORMA FRACA DO EQUILÍBRIO

### 2.7.1 O princípio dos trabalhos virtuais

Seja o corpo  $\mathfrak{B}$  ocupando a região  $\Omega$  com fronteira  $\partial\Omega$  no espaço euclidiano  $\mathfrak{E}$  submetida a carregamentos superficiais e volumétricas. A forma fraca do equilíbrio numa configuração qualquer é obtida de (2.72) e expressa através da forma funcional

$$\int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_t,t)} (\mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0, \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad (2.117)$$

onde  $\mathcal{V}$  é o conjunto dos deslocamentos cinematicamente admissíveis e  $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}(\mathbf{X})$  são deslocamentos virtuais. Sendo

$$\mathcal{V} = \{ \delta \boldsymbol{\eta} | \delta \boldsymbol{\eta} \in C^0(\mathbf{X}), \delta \boldsymbol{\eta} = 0 \text{ em } \partial\Omega_{\mathbf{u}} \} \quad (2.118)$$

Aplicando o teorema de Ostrogradski-Gauss e fazendo algumas transformações algébricas é obtida a expressão

$$\int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} \boldsymbol{\sigma} : (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{u}) dV = \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} (\mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_t,t)} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS \quad (2.119)$$

Esta última expressão é conhecida como o princípio dos trabalhos virtuais, ou forma fraca do equilíbrio, e o procedimento para obtê-lo conjuntamente ao processo inverso mostra a equivalência entre a forma local e global do equilíbrio.

Para o caso quasi-estático a equação (2.119) torna-se

$$\int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} \boldsymbol{\sigma} : (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{u}) dV = \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_t,t)} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS \quad (2.120)$$

Se o deslocamento virtual  $\delta \mathbf{u}$  é trocado pela velocidade virtual  $\delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}$  em (2.117), obtém-se o chamado princípio das velocidades virtuais que no caso quasi-estático é dado pela equação

$$\int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{L} dV = \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_t,t)} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} dS \quad (2.121)$$

e decompondo o gradiente virtual de velocidade  $\delta \mathbf{L}$  nas suas componentes simétrica e antisimétrica é obtida a equação integral

$$\int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D} dV = \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_t,t)} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} dS \quad (2.122)$$

### 2.7.2 O problema quasi-estático com valor inicial e de contorno

O problema quasi-estático com valor inicial e de contorno através da utilização do princípio das velocidades virtuais, consiste em resolver (2.122) (i.e. obter  $\mathbf{u}$  do princípio das velocidades virtuais) conhecendo a história dos carregamentos volumétrico  $\mathbf{b}$ , superficial  $\mathbf{t}$  e o mapeamento que leva de qualquer configuração no tempo  $t_0$  a uma outra configuração no tempo  $t$ . O valor de  $\boldsymbol{\sigma}$  é a solução do modelo constitutivo dado pelas equações (2.103), (2.106) e (2.110)<sub>1</sub>.

Mais formalmente: resolver

$$\int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D} dV - \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} dV - \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_t,t)} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} dS = 0, \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (2.123)$$

sujeito ao carregamento volumétrico  $\mathbf{b}$  em  $\Omega$

$$\mathbf{b}(\mathbf{X}, t), t \in [t_0, \tau], \mathbf{X} \in \Omega$$

com as condições de contorno:

- Natural em  $\partial\Omega_t$ : consistente numa força superficial

$$\mathbf{t}(\mathbf{X}, t), t \in [t_0, \tau], \mathbf{X} \in \partial\Omega_t$$

- Essencial na região  $\partial\Omega_u$ : consistente num mapeamento contínuo diferenciável (difeomorfismo) do contorno do corpo  $\mathfrak{B}$

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t), t \in [t_0, \tau], \mathbf{X} \in \partial\Omega_u$$

onde os deslocamentos cinematicamente admissíveis consiste no conjunto dos deslocamentos que satisfazem a condição de contorno inicial.

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{u} | \mathbf{u} \in C^0(\mathbf{X}), \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \Omega\} \quad (2.124)$$

Onde  $\sigma$  é obtida das equações (2.103), (2.106) e (2.110)<sub>1</sub>.

Por simplicidade, é assumido que  $\partial\Omega_t \cap \partial\Omega_u = \emptyset$  sendo  $\partial\Omega_t \cup \partial\Omega_u = \partial\Omega$ .

### 2.7.3 Solução do problema quasi-estático com valor inicial e de contorno

Para a solução do problema quasi-estático com valor inicial e de contorno é feita primeiramente uma discretização temporal  $[t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots)$ , obtendo a função constitutiva e o equilíbrio em forma incremental. Posteriormente é feita uma discretização espacial do domínio, onde a discretização da forma fraca do equilíbrio é feita através do Método dos Elementos Finitos.

#### Função constitutiva em forma incremental

As integrações das equações (2.103) e (2.110)<sub>1</sub> em forma explícita fornece as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \hat{\sigma}(\mathbf{F}_{n+1}, \alpha_{n+1}) \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \Delta t f_\alpha(\mathbf{F}_{n+1}, \alpha_{n+1}) \end{aligned} \quad (2.125)$$

onde  $\sigma_{n+1} = \sigma_{t_{n+1}}$  e  $\alpha_{n+1} = \alpha_{t_{n+1}}$  são obtidas de (2.125) usando um método numérico iterativo (e.g. método de Newton), sendo conhecidos os valores de  $\alpha_n$  e  $\mathbf{F}_{n+1}$ .

#### Princípio das velocidades virtuais em forma incremental

Considerando o equilíbrio na configuração  $t_{n+1}$ , a equação (2.123) torna-se

$$\int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega, t_{n+1})} \sigma_{n+1} : \delta \mathbf{D} dV - \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega, t_{n+1})} \mathbf{b}_{n+1} \cdot \delta \mathbf{v} dV - \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_t, t_{n+1})} \mathbf{t}_{n+1} \cdot \delta \mathbf{v} dS = 0 \quad (2.126)$$

onde  $\sigma_{n+1}$  é obtido da equação (2.125) e são conhecidos os valores de  $\mathbf{b}_{n+1}$  e  $\mathbf{t}_{n+1}$ .



## Discretização espacial: Método dos Elementos Finitos

Dividindo o domínio de integração correspondente à forma fraca de equilíbrio em subdomínios, onde cada subdomínio é chamado *elemento*, é possível expressar os valores das grandezas envolvidas, no elemento, através dos valores em certos pontos do elemento denominado nós. Os valores dessas grandezas são portanto interpoladas no elemento através dos valores nodais e as funções de interpolação são normalmente funções simples (normalmente polinômios), denominado as vezes funções de forma. O Método dos Elementos Finitos utilizado aqui é baseado nos deslocamentos nodais. Seja  $\mathbf{u}$  a função de deslocamento para um elemento dado, se  $\mathbf{u}^N$  é o vetor dos deslocamentos nodais, se tem

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}^N \quad (2.127)$$

onde  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{X})$  é a matriz correspondente às funções de interpolação. As componentes do deslocamento no elemento estão determinados através da expressão

$$u_i = N_{ij}u_j^N \quad (2.128)$$

Similarmente se tem

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{N}\mathbf{v}^N \\ \delta\mathbf{v} &= \mathbf{N}\delta\mathbf{v}^N \\ \delta\mathbf{D} &= \mathbf{B}\delta\mathbf{v}^N \end{aligned} \quad (2.129)$$

onde  $\mathbf{B} = \frac{\partial\mathbf{N}}{\partial\mathbf{X}}$ .

A forma global do equilíbrio nas configuração  $n + 1$ , i.e. a equação (2.126), no domínio discretizado tem a forma

$$\begin{aligned} &\int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega^{(d)}, t_{n+1})} (\delta\mathbf{v}^N)^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\mathbf{F}(\mathbf{u}_{n+1}), \boldsymbol{\alpha}_{n+1}) dV - \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega^{(d)}, t_{n+1})} (\delta\mathbf{v}^N)^T \mathbf{N}^T \mathbf{b}_{n+1} dV \\ &- \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_t^{(d)}, t_{n+1})} (\delta\mathbf{v}^N)^T \mathbf{N}^T \mathbf{t}_{n+1} dS = 0, \forall \delta\mathbf{v}^N \in \mathcal{V}^{(d)} \end{aligned} \quad (2.130)$$

sendo  $\mathcal{V}^{(d)}$  a forma discretizada de  $\mathcal{V}$ . Posteriormente é obtida

$$\begin{aligned} &(\delta\mathbf{v}^N)^T \left\{ \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega^{(d)}, t_{n+1})} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\mathbf{F}(\mathbf{u}_{n+1}), \boldsymbol{\alpha}_{n+1}) dV - \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega^{(d)}, t_{n+1})} \mathbf{N}^T \mathbf{b}_{n+1} dV \right. \\ &\left. - \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_t^{(d)}, t_{n+1})} \mathbf{N}^T \mathbf{t}_{n+1} dS \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.131)$$

Definindo

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}_{n+1}) &= \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega^{(d)}, t_{n+1})} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\mathbf{F}(\mathbf{u}_{n+1}), \boldsymbol{\alpha}_{n+1}) dV \\ \mathbf{f}_{ext} &= \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega^{(d)}, t_{n+1})} \mathbf{N}^T \mathbf{b}_{n+1} dV^{(d)} + \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_t^{(d)}, t_{n+1})} \mathbf{N}^T \mathbf{t}_{n+1} dS \end{aligned} \quad (2.132)$$

se tem

$$\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}_{n+1}) - \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{0} \quad (2.133)$$

Este sistema de equações não-lineares é resolvida para  $\mathbf{u}_{n+1}$  através de um método numérico (e.g. Método de Newton).

As forças generalizadas  $\mathbf{f}_{int}$  e  $\mathbf{f}_{ext}$  estão relacionadas com as suas formas locais respectivas pelas igualdades seguintes

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{int} &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{f}_{int}^e; & \mathbf{f}_{int}^e &= \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega^{(e)}, t_{n+1})} \mathbf{B}_{(e)}^T \boldsymbol{\sigma} dV \\ \mathbf{f}_{ext} &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{f}_{ext}^e; & \mathbf{f}_{ext}^e &= \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega^{(e)}, t_{n+1})} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{b} dV^{(e)} + \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_t^{(e)}, t_{n+1})} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{t} dS^{(e)} \end{aligned} \quad (2.134)$$

onde  $\mathbf{B}_{(e)}$  e  $\mathbf{N}_{(e)}$  são as formas locais da matrizes de interpolação, e a integração de (2.134) é feita através de um método numérico adequado (e.g. quadratura de Gauss).

## Capítulo 3

# MODELO MATEMÁTICO DO MATERIAL

### 3.1 INTRODUÇÃO

#### 3.1.1 Mecânica do dano contínuo

A mecânica do dano surgiu apartir do trabalho de Kachanov (1958) [50] com o intuito de estudar problemas de fluência em materiais com degradação interna através da mecânica do contínuo, introduzindo uma variável de dano como variável interna na lei constitutiva do material. A variável de dano evoluiu apartir de uma variável escalar inicial até os modelos atuais envolvendo variáveis tensoriais de ordem superior.

Existem varios mecanismos de formação de danos, dentro das quais se podem mencionar [50]: Dano plástico dúctil acompanhado de grandes deformações em metais, dano visco-plástico dúctil, fadiga causada pela repetição de deformações e identificada como função do número de ciclos, assim como processos de oxidação, corrosão etc.

Uma variável de dano pode ser associada às propriedades micromecânicas do material ou à variação de algumas propriedades macromecânicas do mesmo. A escolha de dita variável é muito importante e depende tanto do fenômeno em estudo quanto da possibilidade de medição de dita variável [45].

Algumas formas de medir o dano são [50] [2]: Variação do módulo de elasticidade, variação das características plásticas, variação das características elasto-plásticas, variação da resistência elétrica.

Neste trabalho, a variável de dano será associada à presença de micro-fissuras e

vazios no material, que reflete no comportamento macro-mecânico do material. Um conceito importante portanto é a de *volume representativo* do material, que corresponde a um elemento de volume "suficientemente pequeno" para evitar efeitos locais, e "suficientemente grande" para admitir homogeneidade no elemento. Para metais, tais volumes representativos, tem dimensões entre 0,1-1 mm (aproximadamente), 1cm (aproximadamente) para madeiras e 10cm (aproximadamente) para concreto [50].

O objetivo da mecânica do dano é modelar o comportamento do material, a partir de um estado virgem (sem dano) até quando o dano ficar crítico, i.e. o material perca a sua capacidade de resistência. Assim quando a micro-fissura se transforme numa macro-fissura, a evolução de dita fissura será estudada através da mecânica da fratura, por exemplo. Ou seja, quando o tamanho da micro-fissura ultrapasse o volume representativo a mecânica de dano deixa o estudo do dano para um outro ramo mais apropriado.

A importância da mecânica do dano radica principalmente na sua estrutura teórica, que permite a implementação dos modelos reológicos com dano computacionalmente. Desenhos de componentes mecânicos na indústria aeronáutica e automotiva, que exigem de segurança, podem ser feitos com um custo muito mais baixo, eliminando as provas dispendiosas à medida que fiquem mais robustos os modelos constitutivos desenvolvidos. Fábricas inteiras podem parar devido a defeitos que poderiam ser prognosticados, e assim podem ser evitados enormes custos econômicos, e até perdas de uma outra natureza em outros casos.

Os modelos de danos descritos aqui modelam comportamento de metais dúcteis, que sob condições de temperaturas comparáveis com a temperatura de ambiente, sofrem grandes deformações plásticas.

### 3.1.2 Formulação Termodinâmica

#### Variável de dano e homogeneização

A variável de dano  $d$  pode ser caracterizada a partir de uma concepção micro-mecânica que poderá ser associada a uma grandeza macro-mecânica (e.g. a variação do módulo elástico do material). Ou seja, a variação na micro-estrutura é refletida nas propriedades macromecânicas do material.

Para considerações micro-mecânicas é necessário que os valores médios das grandezas envolvidas sejam significativas, i.e. estatisticamente homogêneas [43]. Assim num

*volume representativo* do material, é necessário que o valor médio das tensões, deformações etc. possam ser estatisticamente representativas, ou seja, que as flutuações das grandezas envolvidas não afetem as propriedades globais do material (homogeneidade estatística, i.e. ergodicidade). Quando isso acontece, se diz que as grandezas envolvidas estão hogeneizadas.

Há várias formas de interpretar fisicamente a variável de dano, uma delas devida a Rabotnov(1963) será utilizada para ilustrar dita interpretação. Porém, na construção do modelo constitutivo, a variável de dano deve ser a mais geral possível. Considerando uma secção de um elemento de volume com normal  $\mathbf{n}$ , seja  $A$  a área dessa secção, e seja também  $A_d$  a área das trincas e vazios na secção considerada. Se tem portanto uma área  $\bar{A}$  que realmente suporta o carregamento mecânico (secção efetiva). A variável de dano  $d_n$  está dada pela expressão seguinte

$$d_n = \frac{A_d}{A} = 1 - \frac{\bar{A}}{A} \quad (3.1)$$

de onde se pode deduzir que  $0 \leq d_n \leq 1$ . No caso de que o dano seja isotrópico a variável de dano não depende da normal  $\mathbf{n}$  e se escreverá simplesmente  $d$ .

### Tensão Efetiva

Se uma força superficial  $\mathbf{t}$  é aplicada sobre uma secção de área  $A$  a tensão será dada então pela expressão

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{t}}{A} \quad (3.2)$$

A tensão sobre a área efetiva  $\bar{A}$  será dada então pela equação

$$\bar{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{t}}{\bar{A}} \quad (3.3)$$

onde  $\bar{\mathbf{T}}$  é a tensão efetiva. Se  $\mathbf{T}$  é a tensão do material virgem i.e. sem dano, se obtém através das equações (3.1), (3.2) e (3.3) a seguinte relação

$$\bar{\mathbf{T}} = \frac{1}{1-d} \mathbf{T} \quad (3.4)$$

de onde se pode obter facilmente

$$\bar{\mathbf{T}} \geq \mathbf{T} \quad (3.5)$$

sendo que:  $\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{T}$  para  $d = 0$ , e  $\bar{\mathbf{T}} \rightarrow \infty$  para  $d \rightarrow 1$ . Para materiais dúcteis a fratura acontece no intervalo  $0,5 \leq d \leq 0,9$  [54].

## Princípios de equivalência

Devido à dificuldade de caracterizar as trincas e cavidades, para determinar o estado inicial e a evolução da variável de dano como a definida na equação (3.1), é necessário adotar uma técnica alternativa para poder descrever de uma maneira mais simples a variável de dano. Para isso é utilizado uma das hipóteses seguintes que equivale à adoção de uma técnica de homogeneização [50].

Considerando as três configurações a seguir:  $C_0$  configuração virgem i.e. indeformada e sem dano,  $C$  configuração danificada e deformada,  $\bar{C}$  configuração deformada e sem dano, i.e. configuração fictícia obtida a partir de  $C$  removendo o dano (configuração equivalente). O material evolui de  $C_0$  a  $C$ , existindo um mapeamento contínuo entre  $C$  e  $\bar{C}$  [84].

Uma vez escolhida a variável de dano se pode propor várias hipóteses:

- Deformação equivalente (Lemaitre, 1985)[54]:  
Esta hipótese propõe a equivalência das deformações entre as configurações  $C$  e  $\bar{C}$ .
- Energia de deformação equivalente (Sidoroff et al., 1981):  
Neste caso propõe-se a equivalência das energias de deformação nas configurações  $C$  e  $\bar{C}$ .
- Tensão equivalente (Simo et al., 1987):  
A hipótese proposta é a equivalência entre as tensões nas configurações  $C$  e  $\bar{C}$

## 3.2 ELASTO-PLASTICIDADE COM DANO ANISOTRÓPICO

Um modelo elasto-plástico com dano anisotrópico é proposto aqui. Uma formulação, baseada na hipótese de equivalência de energia, é desenvolvida a partir do potencial de energia livre como segue.

Primeiramente, a função de energia livre é decomposta em três parcelas: elástica, plástica e de dano, i.e.

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}_e, \mathbf{d}, \bar{\varepsilon}_p, \beta) = \psi_{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}_e, \mathbf{d}) + \psi_p(\bar{\varepsilon}_p) + \psi_d(\beta) \quad (3.6)$$

Conseqüentemente, a desigualdade de Clausius-Duhem (2.91) terá a forma seguinte

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho \left( \frac{\partial \psi_{ed}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} : \boldsymbol{\varepsilon}_e^\nabla + \frac{\partial \psi_{ed}}{\partial \mathbf{d}} : \mathbf{d}^\nabla + \frac{\partial \psi_p}{\partial \bar{\varepsilon}_p} \dot{\bar{\varepsilon}}_p + \frac{\partial \psi_d}{\partial \beta} \dot{\beta} \right) \geq 0 \quad (3.7)$$

Admitindo que  $\varepsilon_e^\nabla \cong \mathbf{D}^e$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$  e  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p$ , se tem

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi_{ed}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e}\right) : \mathbf{D}^e + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^p - \rho \frac{\partial \psi_{ed}}{\partial \mathbf{d}} : \mathbf{d}^\nabla - \rho \frac{\partial \psi_p}{\partial \bar{\varepsilon}_p} \dot{\bar{\varepsilon}}_p - \rho \frac{\partial \psi_d}{\partial \beta} \dot{\beta} \geq 0 \quad (3.8)$$

de onde

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi_{ed}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} \quad (3.9)$$

Define-se as forças termodinâmicas associadas

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= -\rho \frac{\partial \psi_{ed}}{\partial \mathbf{d}} \\ R &= \rho \frac{\partial \psi_p}{\partial \bar{\varepsilon}_p} \\ B &= \rho \frac{\partial \psi_d}{\partial \beta} \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde  $\mathbf{Y}$  é a taxa de energia liberada pelo dano,  $R$  é a variável que determina o tamanho da região elástica no espaço de tensões (variável de endurecimento isotrópico), e finalmente  $B$  é o equivalente para a superfície de dano. Desta maneira é possível escrever (3.8) na forma seguinte

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^p + \mathbf{Y} : \mathbf{d}^\nabla - R \dot{\bar{\varepsilon}}_p - B \dot{\beta} \geq 0 \quad (3.11)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^p - R \dot{\bar{\varepsilon}}_p$  é a dissipação plástica, e  $\mathbf{Y} : \mathbf{d}^\nabla - B \dot{\beta}$  a dissipação associada ao dano.

### 3.2.1 Potencial de dissipação

Para determinar a evolução das variáveis internas, são propostas um potencial plástico  $F_p$  e um potencial de dano  $F_d$ . Cada um deles dependendo das variáveis termodinâmicas, com normalidade e convexidades obedecidas, segundo a expressão

$$\begin{aligned} F_p &= F_p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{d}, R), F_p = 0 \\ F_d &= F_d(\mathbf{d}, \beta), F_d = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Utilizando o princípio da máxima entropia, se tem o problema de maximizar (3.12) sujeito às condições dadas acima. O problema de maximização é então resolvido introduzindo os multiplicadores de Lagrange  $\dot{\gamma}_p$  e  $\dot{\gamma}_d$ , sob condições matemáticas adequadas relativas à condição do ótimo. Obtém-se então apartir das equações (3.11) e (3.12) a seguinte expressão

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^p + \mathbf{Y} : \mathbf{d}^\nabla - R \dot{\bar{\varepsilon}}_p - B \dot{\beta} - \dot{\gamma}_p F_p - \dot{\gamma}_d F_d \quad (3.13)$$

A estacionariedade da função  $\Phi$  em relação às diferentes variáveis termodinâmicas envolvidas, dão finalmente a evolução das variáveis internas em função dos potenciais

plástico e de dano de acordo com

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}^p &= \dot{\gamma}_p \frac{\partial F_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\
 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p &= -\dot{\gamma}_p \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{R}} \\
 \mathbf{d}^\nabla &= \dot{\gamma}_d \frac{\partial F_d}{\partial \mathbf{Y}} \\
 \dot{\beta} &= -\dot{\gamma}_d \frac{\partial F_d}{\partial B}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

### 3.2.2 Tensor do efeito de dano

Considerando a existência de um mapeamento contínuo entre as tensões  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  correspondentes às configurações  $C$  e  $\bar{C}$  respectivamente, a relação seguinte devida a Chaboche apud Zhu et al. [93] é dada pela equação

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M}\boldsymbol{\sigma} \tag{3.15}$$

onde  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{d})$  é o *tensor do efeito de dano*. O tensor  $\mathbf{M}$  é um tensor de segunda ou quarta ordem dependendo do tensor de dano  $\mathbf{d}$ . Não existe uma única formulação matemática para  $\mathbf{M}(\mathbf{d})$ , mas sempre é possível escrevê-lo em função às direções principais de  $\mathbf{d}$  [93]. Escrevendo a equação (3.15) na forma matricial, utilizando a notação de Voigt se tem

$$[\bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{22} \bar{\sigma}_{33} \bar{\sigma}_{23} \bar{\sigma}_{31} \bar{\sigma}_{12}]^T = \mathbf{M}[\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{23} \sigma_{31} \sigma_{12}]^T \tag{3.16}$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{66} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

sendo

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \frac{1}{1-d_1}, M_{22} = \frac{1}{1-d_2}, M_{33} = \frac{1}{1-d_3}, \\
 M_{44} &= \frac{1}{\sqrt{(1-d_2)(1-d_3)}}, M_{55} = \frac{1}{\sqrt{(1-d_3)(1-d_1)}}, M_{66} = \frac{1}{\sqrt{(1-d_1)(1-d_2)}}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Em caso de que o dano fosse isotrópico se tem  $d_i = d_j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), o que reproduz (3.4).



### 3.2.3 Elasticidade

Propondo uma lei elástica linear, o potencial elástico estará dado pela expressão

$$\psi_{ed} = \frac{1}{2\rho} \boldsymbol{\varepsilon}_e : \bar{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (3.19)$$

onde

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-T} \quad (3.20)$$

As leis constitutivas nas configurações  $C$  e  $\bar{C}$ , respectivamente, estarão dadas pelas equações seguintes

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (3.21)$$

e

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad (3.22)$$

Assumindo a hipótese de equivalência de energia, se tem

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_e = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad (3.23)$$

de onde

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (3.24)$$

### 3.2.4 Plasticidade

- Função de escoamento:

A função de escoamento na configuração  $C$  está dada pela função

$$f_p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{d}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) = \sigma_{eq}^* - R(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \leq 0 \quad (3.25)$$

onde

$$\sigma_{eq}^* = \frac{1}{6} \|\mathbf{M}\| \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\sigma}^{dev}\|, \quad \|\mathbf{M}\| = tr(\mathbf{M}) \quad (3.26)$$

que corresponde à função de escoamento de von Mises para  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ .

- Multiplicador plástico:

Da função de escoamento é obtida

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p = \dot{\gamma}_p \quad (3.27)$$

- Lei de fluxo:

A lei de fluxo está dada pela expressão

$$\mathbf{D}^p = \dot{\gamma}_p \frac{\partial F_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma}_p \frac{\partial f_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.28)$$

de onde

$$\mathbf{D}^p = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{M}\| \dot{\bar{\epsilon}}_p \frac{\boldsymbol{\sigma}^{dev}}{\|\boldsymbol{\sigma}^{dev}\|} = \frac{1}{4} \|\mathbf{M}\|^2 \frac{\dot{\bar{\epsilon}}_p}{R} \boldsymbol{\sigma}^{dev} \quad (3.29)$$

- Evolução da deformação plástica acumulada:

A evolução da deformação plástica acumulada é dada pela equação

$$\dot{\bar{\epsilon}}_p = -\dot{\gamma}_p \frac{\partial F_p}{\partial R} = -\dot{\gamma}_p \frac{\partial f_p}{\partial R} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\|\mathbf{M}\|} \|\mathbf{D}^p\| \quad (3.30)$$

onde

$$\bar{\epsilon}_p = \int_0^t \dot{\bar{\epsilon}}_p dt \quad (3.31)$$

- Consistência plástica e multiplicador plástico:

A consistência plástica está dada pela expressão

$$\dot{f}_p = \frac{\partial f_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\sigma}^\nabla + \frac{\partial f_p}{\partial R} \dot{R} + \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{d}} : \mathbf{d}^\nabla \quad (3.32)$$

de onde

$$\dot{\gamma}_p = \frac{\frac{\partial f_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \mathbf{D}}{\frac{\partial f_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial f_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \rho \frac{\partial f_p}{\partial R} \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial \epsilon_p^2} \frac{\partial f_p}{\partial R} - \dot{\gamma}_d \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{d}} : \frac{\partial F_d}{\partial \mathbf{Y}}} \quad (3.33)$$

### 3.2.5 Dano do material

Seja a forma matricial de  $\mathbf{Y}$  que escrita na direção principal do dano, é dada através da expressão

$$\mathbf{Y}^T = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{22} & Y_{33} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

- Lei de escoamento do dano:

A lei de escoamento do dano está dada pela desigualdade

$$f_d(\mathbf{Y}, \beta) = Y_{cq} - B(\beta) \leq 0 \quad (3.35)$$

onde

$$Y_{cq} = \sqrt{2} \left( \frac{1}{2} Q \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.36)$$

é uma função dependente da forma quadrática  $Q$  cuja forma geral está dada pela equação

$$Q = a_1 Y_{11}^2 + a_2 Y_{22}^2 + a_3 Y_{33}^2 + 2a_4 Y_{22} Y_{33} + 2a_5 Y_{11} Y_{33} + 2a_6 Y_{11} Y_{22} = 1 \quad (3.37)$$

que na forma matricial pode ser escrita na forma seguinte

$$Q = \mathbf{Y}^T \begin{bmatrix} a_1 & a_6 & a_5 \\ a_6 & a_2 & a_4 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T \mathbf{J} \mathbf{Y} = 1 \quad (3.38)$$

Se a matriz  $\mathbf{J}$  é diagonal, o locus correspondente será simétrico. Por outro lado, para ter em conta o efeito Bauschinger, na definição de  $Y_{eq}$  devem ser incluídos os termos lineares.

- Evolução do dano:

A evolução do dano é dada através da expressão

$$\mathbf{d}^\nabla = \dot{\gamma}_d \frac{\partial F_d}{\partial \mathbf{Y}} = \dot{\gamma}_d \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} = \frac{\dot{\gamma}_d}{2Y_{eq}} \mathbf{JY} \quad (3.39)$$

e a variável  $\beta$  segundo a equação

$$\dot{\beta} = -\dot{\gamma}_d \frac{\partial f_d}{\partial B} = \dot{\gamma}_d \quad (3.40)$$

### 3.3 EVOLUÇÃO DO DANO

#### 3.3.1 Dano com endurecimento isotrópico: formulação dependente da tensão

É possível modelar a evolução do dano através da evolução da tensão. Nesse caso é necessário considerar tanto a parte hidrostática quanto a deviatórica da tensão, ou seja, o escoamento do dano será do tipo Drucker-Prager. A deformação estará composta, neste caso, por uma parte elástica  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ , uma parte plástica  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  e uma parte associada ao dano  $\boldsymbol{\varepsilon}^d$ . Escrevendo, em forma de taxa a relação entre estas três componentes de deformação y a deformação total, resulta na equação

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d \quad (3.41)$$

Seja a função de escoamento definida através da equação seguinte

$$f_d = f_d(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^d, h_d) = F_d(\boldsymbol{\sigma}) - \chi_d(\boldsymbol{\varepsilon}^d, h_d) = 0 \quad (3.42)$$

onde a evolução de  $h_d$  pode ser escrita dependente da taxa energia liberada pelo dano (work-hardening) como segue

$$\dot{h}_d = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d \quad (3.43)$$

ou dependente apenas da componente da deformação devida ao dano (strain-hardening)

$$\dot{h}_d = k \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d\| \quad (3.44)$$

-Tensão de dano efetiva  $\sigma_{de}$ :

Quando é considerado um problema geral em três dimensões, é necessário ter uma quantidade equivalente ao caso unidimensional (um escalar) que represente à tensão associada ao dano. Define-se então a *tensão de dano efetiva*  $\sigma_{de}$ , que pode ser definida, tendo em conta a propriedade de escalamento, na forma seguinte

$$\sigma_{de} = c (F_d)^{\frac{1}{n}} \quad (3.45)$$

de onde é obtida

$$F_d = \left(\frac{\sigma_{de}}{c}\right)^n \quad (3.46)$$

Utilizando o teorema de Euler, pode ser obtido o grau de homogeneidade através da equação seguinte

$$\frac{\partial F_d}{\partial \sigma} : \sigma = n F_d \quad (3.47)$$

Adotando uma função do tipo Drucker-Prager

$$F_d = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} \quad (3.48)$$

se tem

$$\sigma_{de} = c (\alpha I_1 + \sqrt{J_2})^{\frac{1}{n}} \quad (3.49)$$

Sabendo que neste caso  $n = 1$  e  $c = \frac{\sqrt{3}}{1 + \alpha \sqrt{3}}$ , a *tensão de dano efetiva* estará dada pela expressão

$$\sigma_{de} = \frac{\sqrt{3}}{1 + \alpha \sqrt{3}} (\alpha I_1 + \sqrt{J_2}) \quad (3.50)$$

A função de escoamento do dano  $f_d$  é expressa por meio da equação

$$f_d = (\alpha I_1 + \sqrt{J_2}) - \chi_d = 0 \quad (3.51)$$

ou equivalentemente através de

$$f_d = \sigma_{de} - \frac{\sqrt{3}}{1 + \alpha \sqrt{3}} \chi_d = 0 \quad (3.52)$$

**-Dano total equivalente  $\varepsilon_d$ :**

Similarmente à *tensão de dano efetiva* é necessário definir o *dano total equivalente*  $\varepsilon_d$ . Sendo  $\varepsilon_d$  um escalar que representa a componente de deformação associada ao dano, que no caso unidimensional, é equivalente à componente  $\varepsilon^d$  da deformação total.

A evolução do *dano total equivalente* pode ser definida por meio da energia associada ao dano (work-hardening) como em (3.43). Sendo dita energia obtida da equação

$$\dot{w}^d = \sigma_{de} \cdot \dot{\epsilon}_d \quad (3.53)$$

e de

$$\dot{w}^d = \sigma : \dot{\epsilon}^d \quad (3.54)$$

Portanto, a evolução do *dano total equivalente* está dada pela equação

$$\dot{\epsilon}_d = \frac{\sigma : \dot{\epsilon}^d}{\sigma_{de}} \quad (3.55)$$

Equivalentemente, usando uma outra definição do *dano total equivalente*, dependente da componente da deformação associada ao dano  $\epsilon^d$  (strain-hardening), é definida dita grandeza por meio da equação seguinte

$$\dot{\epsilon}_d = k \|\dot{\epsilon}^d\| \quad (3.56)$$

tal como foi feita na equação (3.44).

O valor do escalar  $k$  pode ser obtido através da expressão

$$k = \frac{n \cdot F_d}{\sigma_{de} \|\frac{\partial F_d}{\partial \sigma}\|} \quad (3.57)$$

Assim, uma vez que se tem escolhido a função de escoamento do tipo Drucker-Prager, o valor de  $k$  será

$$k = \frac{\sqrt{2} + \alpha \sqrt{6}}{\sqrt{18\alpha^2 + 3}} \quad (3.58)$$

onde a evolução do *dano total equivalente* estará dada por

$$\dot{\epsilon}_d = \frac{\sqrt{2} + \alpha \sqrt{6}}{\sqrt{18\alpha^2 + 3}} \|\dot{\epsilon}^d\| \quad (3.59)$$

Re-escrevendo a função de escoamento, obtém-se

$$\begin{aligned} f_d(\sigma, \epsilon^d, \epsilon_d) &= \frac{\sqrt{3}}{1+\alpha\sqrt{3}}(\alpha I_1 + \sqrt{J_2}) - \frac{\sqrt{3}}{1+\alpha\sqrt{3}} \cdot \chi_d(\epsilon^d, \epsilon_d) \\ &= \sigma_{de} - B(\epsilon^d, \epsilon_d) = 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

A integração do *dano total equivalente* é definida pelo procedimento a seguir. Primeiramente se tem

$$\epsilon_d = \int_0^t \dot{\epsilon}_d dt = \frac{\sqrt{2} + \alpha \sqrt{6}}{\sqrt{18\alpha^2 + 3}} \int_0^t \|\dot{\epsilon}^d\| dt \quad (3.61)$$

Por outro lado

$$\dot{\epsilon}^d = -\dot{\gamma}_d \frac{\partial f_d}{\partial \sigma} = -\dot{\gamma}_d \frac{\sqrt{3}}{1 + \alpha\sqrt{3}} \left[ \alpha \mathbf{I} + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \sigma^{dev} \right] \quad (3.62)$$

de onde

$$\|\dot{\epsilon}^d\| = \dot{\gamma}_d \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{6\alpha^2 + 1}}{1 + \alpha\sqrt{3}} \quad (3.63)$$

a partir da qual, se obtém a seguinte relação

$$\dot{\epsilon}_d = \dot{\gamma}_d \quad (3.64)$$

É importante neste ponto, dizer que o valor da variável escalar  $B$  da equação (3.60) pode ser obtido pelo ensaio de tração simples, e neste mesmo experimento é obtido  $\epsilon_d$ , que é uma medida de deformação (deformação equivalente) que representa o dano acumulado. Obtém-se assim uma curva de encruamento do dano " $B - \epsilon_d$ " que é utilizada para modelar a evolução do dano.

### 3.3.2 Dano com endurecimento isotrópico: formulação dependente da energia

Trabalhando no espaço  $\mathbf{Y}$  ao invés do espaço de tensões, se obtém uma formulação diferente para a evolução do dano. Numa forma geral, a função de escoamento do dano pode ser escrita na forma

$$f_d(\mathbf{Y}, h_d) = F_d(\mathbf{Y}) - \chi_d(h_d) = 0 \quad (3.65)$$

onde a evolução da variável  $h_d$  pode ser obtida a partir do trabalho associado ao dano (work-hardening)

$$\dot{h}_d = \mathbf{Y} : \mathbf{d}^\nabla \quad (3.66)$$

ou diretamente do tensor do dano  $\mathbf{d}$  (damage\_tensor-hardening)

$$\dot{h}_d = k \|\mathbf{d}^\nabla\| \quad (3.67)$$

**-Energia do dano equivalente ( $Y_{eq}$ ):**

A *energia do dano equivalente*  $Y_{eq}$ , é obtida tendo em conta a condição de escalamento

$$Y_{eq} = c(F_d)^{\frac{1}{n}} \quad (3.68)$$

de onde

$$F_d = \left(\frac{Y_{eq}}{c}\right)^n \quad (3.69)$$

O grau de homogeneidade, é obtido segundo o teorema de Euler na forma seguinte

$$\frac{\partial F_d}{\partial \mathbf{Y}} : \mathbf{Y} = n \cdot F_d \quad (3.70)$$

O modelo adotado neste trabalho é obtido a partir de

$$F_d = \left(\frac{1}{2} Q\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{Y}^T \mathbf{J} \mathbf{Y}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.71)$$

de onde resulta

$$Y_{eq} = c \left[\left(\frac{1}{2} Q\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{n}} \quad (3.72)$$

É necessário obter os valores de  $n$  e  $c$  para completar a definição de  $Y_{eq}$ . Aplicando o teorema de Euler (3.70), se obtém o valor de  $n$  como segue

$$\frac{\partial F_d}{\partial \mathbf{Y}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} Q\right)^{\frac{1}{2}}} \mathbf{Y}^T \mathbf{J} \quad (3.73)$$

de onde

$$\frac{\partial F_d}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \mathbf{Y} = F_d \quad (3.74)$$

o que implica que  $n = 1$ .

Assim, a equação (3.72) torna-se

$$Y_{eq} = c \left(\frac{1}{2} Q\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.75)$$

Por outro lado, no caso unidimensional,  $\mathbf{Y}^T = [Y \ 0 \ 0]$ ,  $Y_{eq} = Y$  e  $\mathbf{J} = \mathbf{I}$ . Conseqüentemente

$$Y = c \left(\frac{1}{2} [Y \ 0 \ 0]\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} Y \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} Y \quad (3.76)$$

assim  $c = \sqrt{2}$  e

$$Y_{eq} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} Q\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \mathbf{Y}^T \mathbf{J} \mathbf{Y}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.77)$$

Finalmente, a função do escoamento do dano será dada pela equação

$$f_d = F_d - \chi_d = 0 \quad (3.78)$$

ou equivalentemente

$$f_d = Y_{eq} - B = 0 \quad (3.79)$$

**-Dano total equivalente  $\beta$ :**

O *dano total equivalente*  $\beta$ , pode ser definido segundo o trabalho associado ao dano (work-hardening) como segue

$$\dot{w}^d = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{d}^{\nabla} \quad (3.80)$$

ou equivalentemente

$$\dot{w}^d = Y_{eq} \cdot \dot{\beta} \quad (3.81)$$

Por conseguinte

$$\dot{\beta} = \frac{\mathbf{Y} \cdot \mathbf{d}^\nabla}{Y_{eq}} \quad (3.82)$$

No caso unidimensional, o *dano total equivalente*  $\beta$ , é equivalente à variável de dano  $d$ , i.e.  $\beta \equiv d$  para o caso unidimensional.

Alternativamente, o *dano total equivalente* pode ser definido através da norma do tensor do dano (damage\_tensor-hardening), na forma seguinte

$$\dot{\beta} = k \|\mathbf{d}^\nabla\| \quad (3.83)$$

onde o valor de  $k$  é obtido segundo

$$k = \frac{n \cdot F_d}{Y_{eq} \|\frac{\partial F_d}{\partial \mathbf{Y}}\|} \quad (3.84)$$

Para o modelo proposto neste trabalho, se tem

$$k = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} Q\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\|\mathbf{Y}^T \mathbf{J}\|} \quad (3.85)$$

de onde

$$\dot{\beta} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} Q\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\|\mathbf{Y}^T \mathbf{J}\|} \|\mathbf{d}^\nabla\| \quad (3.86)$$

A evolução do tensor  $\mathbf{d}$  obtém-se de (3.14), i.e.

$$\mathbf{d}^\nabla = \dot{\gamma}_d \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} = \dot{\gamma}_d \frac{1}{Y_{eq}} \mathbf{J} \mathbf{Y} \quad (3.87)$$

inserindo o resultado da última equação em (3.86), obtém-se a relação

$$\dot{\beta} = \dot{\gamma}_d \quad (3.88)$$



## Capítulo 4

# IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO

### 4.1 INTRODUÇÃO

A implementação do modelo constitutivo é feita através de um esquema de integração implícito tal como é detalhado Neste capítulo. A implementação é feita considerando que o dano é isotrópico. O algoritmo do retorno, para a evolução simulatânea da elasto-plasticidade e do dano, é desenvolvido. Uma linearização adequada, associada ao algoritmo do retorno, para a solução da equação do equilíbrio (2.133), é introduzida através do Jacobiano consistente na seção (4.5).

### 4.2 RELAÇÕES IMPORTANTES

A relação entre a tensão e a deformação, escrita em forma incremental é dada pela equação

$$\Delta\sigma_{n+1} = \bar{C} : \Delta\varepsilon_{n+1}^e \quad (4.1)$$

sendo

$$\bar{C} = (1 - d_{n+1})^2 C \quad (4.2)$$

O tensor de tensões pode ser dividido em duas parcelas, deviatórica e hidrostática, respectivamente, como segue

$$\Delta\sigma_{n+1} = \Delta\sigma_{n+1}^{dev} + \Delta p_{n+1} \mathbf{I} \quad (4.3)$$

onde

$$\Delta p_{n+1} = \frac{1}{3} \text{tr}(\Delta \sigma_{n+1}) \quad (4.4)$$

Identicamente o tensor de deformações é decomposta nas suas componentes deviatórica e hidrostática, como é mostrado seguidamente

$$\Delta \varepsilon_{n+1} = \Delta \varepsilon_{n+1}^{dev} + \frac{1}{3} \varepsilon_{n+1}^{vol} \mathbf{I} \quad (4.5)$$

onde

$$\Delta \varepsilon_{n+1}^{vol} = \text{tr}(\Delta \varepsilon_{n+1}) \quad (4.6)$$

### 4.3 SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EVOLUÇÃO DO DANO

Uma vez escolhido o modelo de evolução do dano, é necessário obter uma solução aproximada do modelo evolutivo. Para dar maior clareza a esta etapa de implementação do modelo, serão repetidas algumas equações.

a. *Função de escoamento do dano:*

A função de escoamento está dada pela expressão

$$f_d(\mathbf{Y}, \beta) = Y_{eq} - B(\beta) = 0 \quad (4.7)$$

onde

$$Y_{eq} = \sqrt{2} \left( \frac{1}{2} Q \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

e

$$Q = \mathbf{Y}^T \mathbf{J} \mathbf{Y} \quad (4.9)$$

b. *Evolução do tensor do dano:*

A evolução do tensor do dano é dada pela equação

$$d^\nabla = \dot{\gamma}_d \frac{1}{Y_{eq}} \mathbf{J} \mathbf{Y} \quad (4.10)$$

c. *Relações para o caso de dano isotrópico:*

Se o dano for isotrópico se tem as relações seguintes

$$\mathbf{J} = \mathbf{I} \quad (4.11)$$

$$d^T = [d \ d \ d] \quad (4.12)$$

$$\mathbf{Y}^T = [Y \ Y \ Y] \quad (4.13)$$

$$Y = -\rho \frac{\partial \psi_{ed}}{\partial d} \quad (4.14)$$

de onde resulta

$$Y = (1 - d)(\epsilon^e)^T C \epsilon^e \quad (4.15)$$

A energia de deformação elástica está dada pela equação

$$w^e = \rho \psi_{ed} = \frac{1}{2} (1 - d)^2 \epsilon^{eT} C \epsilon^e \quad (4.16)$$

de onde é obtida

$$Y = \frac{2}{1 - d} w^e \quad (4.17)$$

Também são obtidas

$$Q = 3Y^2 \quad (4.18)$$

$$Y_{eq} = \sqrt{3}Y \quad (4.19)$$

$$\dot{d} = \frac{1}{\sqrt{3}} \dot{\gamma}_d \quad (4.20)$$

e

$$\dot{\beta} = \dot{\gamma}_d \quad (4.21)$$

d. *Integração:*

A solução das equações evolutivas é feita através de um *esquema de Euler atrasado* (implícito). É obtido um sistema de equações (normalmente não lineares) a partir das equações diferenciais de evolução. O sistema de quatro equações é dado a seguir, sendo que  $n$  representa a  $n$ -ésima configuração no tempo  $t$  discretizado

$$d_{n+1} = d_n + \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta \gamma_d \quad (4.22)$$

$$\beta_{n+1} = \beta_n + \Delta \gamma_d \quad (4.23)$$

$$0 = Y_{eq}(Y_{n+1}) - B(\beta_{n+1}) \quad (4.24)$$

$$Y_{n+1} = (1 - d_{n+1}) \epsilon^{eT}_{n+1} C \epsilon^e_{n+1} \quad (4.25)$$

## 4.4 ALGORITMO DO RETORNO

Para verificar se a deformação que experimenta o corpo, entre as configurações  $n$  e  $n + 1$  (i.e. quando passa da configuração  $n$  para  $n + 1$ ), é puramente elástica ou elastoplástica, ou ainda, se o dano do material sofreu uma variação ou não, é utilizado o conhecido algoritmo chamado "Algoritmo do retorno". Dito algoritmo é composto de dois passos, como é mostrado seguidamente. Supondo conhecido o valor da deformação elástica na configuração  $n + 1$ , se verifica através das funções

de escoamento plástico e do dano, se há alguma variação da deformação plástica e do valor do dano.

#### 4.4.1 Solução numérica da elasto-plasticidade

i. Preditor elástico:

Considerando conhecida a variação da deformação total  $\Delta\epsilon_{n+1}$ , este passo consiste em considerar que dita deformação é puramente elástica. Obtém-se então a equação seguinte em forma incremental

$$\Delta\sigma_{n+1}^{trial} = (1 - d_n)^2 \mathbf{C} : \Delta\epsilon_{n+1}^{e\ trial} = (1 - d_n)^2 \mathbf{C} : \Delta\epsilon_{n+1} \quad (4.26)$$

de onde é obtida a equação

$$\sigma_{n+1}^{trial} = \sigma_n + (1 - d_n)^2 \mathbf{C} : \Delta\epsilon_{n+1} \quad (4.27)$$

sendo

$$\epsilon_{n+1}^{e\ trial} = \epsilon_n^e + \Delta\epsilon_{n+1} \quad (4.28)$$

$$\epsilon_{n+1}^{p\ trial} = \epsilon_n^p \quad (4.29)$$

e

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^{p\ trial} = \bar{\epsilon}_n^p \quad (4.30)$$

Finalmente é definida a tensão equivalente, em função da tensão de teste (trial), que terá a forma

$$\sigma_{eq}^{* trial} = \frac{1}{1 - d_n} \sqrt{\frac{3}{2}} \|(\sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\| \quad (4.31)$$

A equação

$$(\sigma_{n+1}^{dev})^{trial} = \sigma_{n+1}^{trial} - \frac{1}{3} tr(\sigma_{n+1}^{trial}) \mathbf{I} \quad (4.32)$$

também é válida em forma análoga à equação (4.3).

ii. Corretor plástico:

É preciso verificar se a nossa hipótese em (i) tenha sido verdadeira ou não, i.e. se a deformação foi realmente puramente elástica ou se possui uma componente plástica.

Para isso verifica-se o seguinte:

$$\text{Se } \sigma_{eq}^{* trial} > (\sigma_y)_n \text{ então} \quad (4.33)$$

a deformação não foi puramente elástica. Por conseguinte, deve ser resolvido o seguinte sistema de equações, decorrente da integração implícita (Euler retrasado)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} - \frac{1}{1 - d_{n+1}} \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev}}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev}\|} \quad (4.34)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p \quad (4.35)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ dev}} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ dev}})^{trial} - \frac{1}{1 - d_{n+1}} \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev}}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev}\|} \quad (4.36)$$

$$\dot{f}_p = 0 \Rightarrow \frac{1}{1 - d_{n+1}} \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev}\| - \sigma_y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) = 0 \quad (4.37)$$

sendo utilizada a notação  $R = \sigma_y$  como é habitual.

Tendo em conta que a deformação plástica está relacionada diretamente com as tensões e deformações deviatóricas, pode ser adotada a seguinte hipótese:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ vol}} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ vol}})^{trial} \quad (4.38)$$

e

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ vol}} = (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ vol}})^{trial} \quad (4.39)$$

A componente deviatórica do tensor de tensões em forma contraída (contração de um índice para o tensor de segunda ordem, e de dois para o tensor de quarta ordem) pode ser expressa através da equação

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev} = \boldsymbol{\sigma}_n^{dev} + \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev} \quad (4.40)$$

o que pode ser escrita utilizando a equação (4.3) de acordo com a equação

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev} = \boldsymbol{\sigma}_n^{dev} + (1 - d_{n+1})^2 \mathbf{C} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e - \frac{1}{3} (1 - d_{n+1})^2 \text{tr}(\mathbf{C} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e) \mathbf{I}_R \quad (4.41)$$

onde

$$\mathbf{I}_R^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Tendo em conta que

$$\mathbf{C} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \lambda \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e) \cdot \mathbf{I}_R + 2\mu \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e \quad (4.43)$$

e

$$\text{tr}(\mathbf{C} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e) = 3\lambda \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e) + 2\mu \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e) = (3\lambda + 2\mu) \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e) \quad (4.44)$$

obtém-se finalmente

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev} = \boldsymbol{\sigma}_n^{dev} + 2\mu (1 - d_{n+1})^2 \left[ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e - \frac{1}{3} \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e) \mathbf{I}_R \right] \quad (4.45)$$

A última equação é escrita na forma

$$\sigma_{n+1}^{dev} = \sigma_n^{dev} + 2\mu (1 - d_{n+1})^2 \Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev} \quad (4.46)$$

de onde é obtida

$$\Delta \sigma_{n+1}^{dev} = 2\mu (1 - d_{n+1})^2 \Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev} \quad (4.47)$$

o que demonstra que  $\Delta \sigma_{n+1}^{dev}$  e  $\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev}$  são paralelos.

Posteriormente, obtém-se a relação entre as componentes volumétricas de tensão e deformação. Segundo a sua definição

$$p_{n+1} = p_n + \frac{1}{3} (1 - d_{n+1})^2 [3\lambda \text{tr}(\Delta \varepsilon_{n+1}^e) + 2\mu \text{tr}(\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})] \quad (4.48)$$

o que pode ser expresso através da equação

$$p_{n+1} = p_n + k (1 - d_{n+1})^2 \Delta \varepsilon_{n+1}^{e vol} \quad (4.49)$$

onde

$$k = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \quad (4.50)$$

é o módulo volumétrico. Finalmente, a partir da equação (4.49) é obtida facilmente a expressão

$$\Delta p_{n+1} = k(1 - d_{n+1})^2 \Delta \varepsilon_{n+1}^{e vol} \quad (4.51)$$

Uma importante relação é obtida a partir da equação (4.34) tendo em conta que

$$\varepsilon_{n+1}^e = \varepsilon_{n+1}^{e dev} + \frac{1}{3} \varepsilon_{n+1}^{e vol} \mathbf{I} \quad (4.52)$$

onde

$$\varepsilon_{n+1}^{e dev} + \frac{1}{3} \varepsilon_{n+1}^{e vol} \mathbf{I} = (\varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} + \frac{1}{3} (\varepsilon_{n+1}^{e vol})^{trial} \mathbf{I} - \frac{1}{1 - d_{n+1}} \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \frac{\sigma_{n+1}^{dev}}{\|\sigma_{n+1}^{dev}\|} \quad (4.53)$$

Tendo em conta a equação (4.38) obtém-se

$$\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev} = \Delta (\varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} - \frac{1}{1 - d_{n+1}} \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \frac{\sigma_{n+1}^{dev}}{\|\sigma_{n+1}^{dev}\|} \quad (4.54)$$

Utilizando a equação (4.47), é possível escrever a equação anterior em função das tensões deviatóricas, na forma seguinte

$$\frac{\Delta \sigma_{n+1}^{dev}}{2\mu(1 - d_{n+1})^2} = \frac{(\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial}}{2\mu(1 - d_n)^2} - \frac{1}{1 - d_{n+1}} \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \frac{\sigma_{n+1}^{dev}}{\|\sigma_{n+1}^{dev}\|} \quad (4.55)$$

de onde

$$\Delta \sigma_{n+1}^{dev} = \frac{(1 - d_{n+1})^2}{(1 - d_n)^2} (\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial} - 2\mu (1 - d_{n+1}) \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \frac{\sigma_{n+1}^{dev}}{\|\sigma_{n+1}^{dev}\|} \quad (4.56)$$

Por conseguinte, se obtém a relação

$$(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial} = [1 + 2\mu (1 - d_{n+1}) \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \frac{1}{\| \sigma_{n+1}^{dev} \|}] \sigma_{n+1}^{dev} \quad (4.57)$$

onde

$$(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial} = \frac{1}{(1 - d_n)^2} [(1 - d_{n+1})^2 (\sigma_{n+1}^{dev})^{trial} + \{(1 - d_n)^2 - (1 - d_{n+1})^2\} \sigma_n^{dev}] \quad (4.58)$$

que mostra o paralelismo entre  $\sigma_{n+1}^{dev}$  e  $(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}$ .

Escrevendo a equação (4.56) na forma

$$\sigma_{n+1}^{dev} = (\sigma_{n+1}^{dev})^{trial} - 2\mu (1 - d_{n+1}) \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \frac{\sigma_{n+1}^{dev}}{\| \sigma_{n+1}^{dev} \|} \quad (4.59)$$

e usando o paralelismo entre  $\sigma_{n+1}^{dev}$  e  $(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}$ , é obtida a equação

$$\sigma_{n+1}^{dev} = (\sigma_{n+1}^{dev})^{trial} - 2\mu (1 - d_{n+1}) \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \frac{(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}}{\| (\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial} \|} \quad (4.60)$$

Desta forma, é possível escrever  $\sigma_{n+1}^{dev}$  em função de  $(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}$  na forma

$$\sigma_{n+1}^{dev} = [1 - 2\mu (1 - d_{n+1}) \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \frac{1}{\| (\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial} \|}] (\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial} \quad (4.61)$$

Introduzindo (4.61) e (4.71) em (4.37) é obtida

$$\frac{1}{1 - d_{n+1}} \sqrt{\frac{3}{2}} [1 - 2\mu (1 - d_{n+1}) \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \frac{1}{\| (\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial} \|}] (\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) = 0 \quad (4.62)$$

onde  $\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) = \sigma_y(\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p)$ .

Finalmente, é obtida a equação

$$\frac{1}{(1 - d_{n+1})^2} \sqrt{\frac{3}{2}} \| (\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial} \| - 3\mu \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p) = 0 \quad (4.63)$$

que é uma equação dependente das variáveis  $\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p$  e  $d_{n+1} = d_n + (\Delta \beta_{n+1})$ .

#### 4.4.2 Solução numérica da evolução do dano:

-(i) *Preditor do dano:*

Primeiramente é suposto que

$$d_{n+1} = d_n$$

$$\beta_{n+1} = \beta_n$$

De onde, o valor tentativo da energia do dano equivalente (trial)  $Y_{n+1}^{eq} \equiv Y_{eq}$  é dado por

$$Y_{eq}^{trial} = \sqrt{3}Y_{n+1}^{trial} = \sqrt{3}(1 - d_n)(\epsilon^{e\ trial}_{n+1})^T C \epsilon_{n+1}^{e\ trial} \quad (4.64)$$

- (ii) *Corretor do dano:*

Se  $Y_{eq}^{trial} > B_n$  então é resolvido o seguinte sistema de equações:

$$d_{n+1} = d_n + \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta\beta_{n+1} \quad (4.65)$$

$$\beta_{n+1} = \beta_n + \Delta\beta_{n+1} \quad (4.66)$$

$$0 = Y_{eq}(Y_{n+1}) - B(\beta_{n+1}) \quad (4.67)$$

$$Y_{n+1} = (1 - d_{n+1}) (\epsilon_{n+1}^e)^T C \epsilon_{n+1}^e \quad (4.68)$$

De (4.66) e (4.67) se obtém

$$\sqrt{3}Y_{n+1} - B(\beta_n + \Delta\beta_{n+1}) = 0 \quad (4.69)$$

De (4.68) se deduz

$$\sqrt{3}(1 - d_{n+1}) (\epsilon_{n+1}^e)^T C \epsilon_{n+1}^e - B(\beta_n + \Delta\beta_{n+1}) = 0 \quad (4.70)$$

Da equação (4.65) se tem

$$\sqrt{3}(1 - d_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta\beta_{n+1})(\epsilon_{n+1}^e)^T C \epsilon_{n+1}^e - B(\Delta\beta_{n+1}) = 0 \quad (4.71)$$

### 4.4.3 Casos possíveis

Existem quatro casos possíveis, tendo em conta que acontece simultaneamente a evolução da deformação elástica e do dano.

- **Caso (a):** Não há variação nem da deformação plástica nem do dano.

Nesse caso se verifica

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_{n+1}^e &= \Delta\epsilon_{n+1} \\ \sigma_{n+1} &= \sigma_n + (1 - d_n)^2 C : \Delta\epsilon_{n+1} \\ \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p &= 0 \\ \Delta\epsilon_{n+1}^p &= 0 \\ \Delta\beta_{n+1} &= 0 \\ d_{n+1} &= d_n \end{aligned}$$

- **Caso (b):** Há variação da deformação plástica e do dano.



Nesse caso é necessário resolver o sistema formado pelas equações (4.63) e (4.71), i.e.

$$\frac{1}{(1-d_{n+1})^2} \sqrt{\frac{3}{2}} \|(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}\| - 3\mu \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p) = 0 \quad (4.72)$$

e

$$\sqrt{3}(1-d_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta \beta_{n+1})(\varepsilon_{n+1}^e)^T C \varepsilon_{n+1}^e - B(\Delta \beta_{n+1}) = 0 \quad (4.73)$$

Fazendo

$$f_p = \sqrt{\frac{3}{2}} \|(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}\| - (1-d_{n+1}) \{3\mu \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p + \sigma_y(\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p)\} = 0 \quad (4.74)$$

e

$$f_d = \sqrt{3}(1-d_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta \beta_{n+1})(\varepsilon_{n+1}^e)^T C \varepsilon_{n+1}^e - B(\Delta \beta_{n+1}) = 0 \quad (4.75)$$

se pode ver que

$$f_p = f_p(\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p, \Delta \beta_{n+1}) \quad (4.76)$$

e

$$f_d = f_d(\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p, \Delta \beta_{n+1}) \quad (4.77)$$

Aplicando o método de Newton obtém-se os valores aproximados de  $\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p$  e  $\Delta \beta_{n+1}$  como segue

$$\begin{Bmatrix} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \Delta \beta_{n+1} \end{Bmatrix}_{(k+1)} = \begin{Bmatrix} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \Delta \beta_{n+1} \end{Bmatrix}_{(k)} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_p}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial f_p}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \\ \frac{\partial f_d}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial f_d}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \end{bmatrix}_{(k)}^{-1} \begin{Bmatrix} f_p \\ f_d \end{Bmatrix}_{(k)} \quad (4.78)$$

onde  $k$  é o número de iterações do método numérico.

As expressões necessárias para a utilização do método de Newton, são obtidas depois de manipulações simbólicas, e são as seguintes:

- (i):

$$\frac{\partial f_p}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = -(1-d_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta \beta_{n+1})(3\mu + H), \quad H = \frac{\partial \sigma_y}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \quad (4.79)$$

- (ii):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_p}{\partial \Delta \beta_{n+1}} = & -\frac{4\mu}{\sqrt{2} \|(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}\|} (1-d_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta \beta_{n+1}) \{2\mu \|\Delta \varepsilon_{d n+1}^e\| + \\ & (\Delta \varepsilon_{d n+1}^e \cdot \sigma_n^{dev})\} + \frac{1}{\sqrt{3}} (3\mu \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p + \sigma_y) \end{aligned} \quad (4.80)$$

- (iii):

$$\frac{\partial f_d}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = -\frac{6}{\sqrt{2}} \frac{1}{\|(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}\|} ((\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial})^T C \varepsilon_{n+1}^e \quad (4.81)$$

- (iv):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_d}{\partial \Delta \beta_{n+1}} &= \sqrt{3} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}} (\epsilon_{n+1}^e)^T C \epsilon_{n+1}^e + \right. \\ &2(1 - d_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta \beta_{n+1}) \left[ -\sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}(1-d_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta \beta_{n+1})^2} N + \right. \right. \\ &\left. \frac{1}{1-d_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta \beta_{n+1}} \left[ \frac{4\mu}{\sqrt{3}} \frac{1-d_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta \beta_{n+1}}{\|(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}\|^2} \{ 2\mu(1 - d_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta \beta_{n+1})^2 \|\Delta \epsilon_{d n+1}^{e trial}\|^2 + \right. \right. \\ &\left. \left. (\Delta \epsilon_{d n+1}^{e trial} \cdot \sigma_n^{dev}) \right\} N - \right. \\ &\left. \left. \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1-d_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta \beta_{n+1}}{(1-d_n)^2} \frac{1}{\|(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}\|} \Delta \sigma_{n+1}^{trial} \right\}^T C \epsilon_{n+1}^e \right\} - HD, \quad HD = \frac{\partial B}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \end{aligned} \quad (4.82)$$

adernais

$$N = \frac{(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}}{\|(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}\|} \quad (4.83)$$

Por conseguinte, o sistema de duas equações a resolver iterativamente, tem a forma seguinte:

$$(\Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p)_{(k+1)} = (\Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p)_{(k)} - \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\partial f_d}{\partial \Delta \beta_{n+1}} f_p - \frac{\partial f_d}{\partial \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p} f_d \right)_{(k)} \quad (4.84)$$

$$(\Delta \beta_{n+1})_{(k+1)} = (\Delta \beta_{n+1})_{(k)} - \frac{1}{\Delta} \left( -\frac{\partial f_p}{\partial \Delta \beta_{n+1}} f_p + \frac{\partial f_p}{\partial \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p} f_d \right)_{(k)} \quad (4.85)$$

sendo

$$\Delta = \frac{\partial f_p}{\partial \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p} \frac{\partial f_d}{\partial \Delta \beta_{n+1}} - \frac{\partial f_d}{\partial \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p} \frac{\partial f_p}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \quad (4.86)$$

Uma vez obtidas  $\Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p$  e  $\Delta \beta_{n+1}$  são atualizadas as grandezas dependentes dessas variáveis.

- **Caso (c):** Há variação apenas da deformação plástica.

Neste caso a equação a resolver iterativamente é a seguinte

$$f_p = \sigma_{eq}^{* trial} - 3\mu \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p - \sigma_y (\Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p) = 0 \quad (4.87)$$

sendo  $f_p = f_p(\Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p)$ .

Resolvendo a equação (4.87) pelo método de Newton, se tem

$$(\Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p)_{(k+1)} = (\Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p)_{(k)} + \left( \frac{f_p}{3\mu + H} \right)_{(k)} \quad (4.88)$$

Finalmente são atualizadas as variáveis dependentes de  $\Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p$ .

- **Caso (d):** Há variação apenas do dano.

Neste caso a equação que precisa ser resolvida é

$$f_d = (1 - d_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta \beta_{n+1}) Y_{eq}^{trial} \frac{1}{1 - d_n} - B(\Delta \beta_{n+1}) = 0 \quad (4.89)$$

Resolvendo a equação (4.89) pelo método de Newton, obtém-se

$$(\Delta\beta_{n+1})_{(k+1)} = (\Delta\beta_{n+1})_{(k)} + \left( \frac{1}{Y_{eq}^{trial} \frac{1}{\sqrt{3}(1-d_n)} + HD} f_d \right)_{(k)} \quad (4.90)$$

## 4.5 OBTENÇÃO DO JACOBIANO CONSISTENTE (ALGORÍTMICO)

Para garantir a convergência quadrática do método de Newton na solução da equação de equilíbrio, é obtido nesta seção o chamado *Jacobiano consistente*, no sentido de que, a tangente material seja consistente com o algoritmo numérico aplicado para resolver a lei constitutiva do material. Neste caso, o algoritmo utilizado é o algoritmo do retorno, obtido aplicando o método de Euler implícito. O *Jacobiano consistente* é necessário principalmente no caso de existir uma transição não suave entre a parte puramente elástica e elastoplástica do material [56].

Neste trabalho, é considerado o dano do material, motivo pelo qual, o *Jacobiano consistente* depende tanto da evolução do dano quanto da plasticidade.

### 4.5.1 Caso (a): Não há variação nem da deformação plástica nem do dano.

Nesse caso

$$D^{ep} = \frac{\partial \Delta\sigma_{n+1}}{\partial \Delta\varepsilon_{n+1}^{e, trial}} = \frac{\partial \Delta\sigma_{n+1}}{\partial \Delta\varepsilon_{n+1}} = \bar{C} = (1 - d_n)^2 C \quad (4.91)$$

### 4.5.2 Caso (b): Há variação da deformação plástica e do dano.

Neste caso a tangente depende das duas equações escalares cujas soluções são obtidas pelo método de Newton, i.e. das equações (4.63) e (4.71).

- (i):

Trabalhando primeiramente com a equação (4.63), se tem

$$\frac{1}{1 - d_{n+1}} \sqrt{\frac{3}{2}} \|(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}\| = 3\mu\Delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p + \sigma_y(\Delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) \quad (4.92)$$

e tendo em conta que

$$\Delta\sigma_{n+1}^{dev} = \Delta\sigma_{n+1}^{dev}(\Delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p, \Delta\beta_{n+1}, \Delta\varepsilon_{d, n+1}^{e, trial}) \quad (4.93)$$

se pode escrever a equação (4.92) na forma seguinte

$$f_1 = f_1(\Delta\beta_{n+1}, \Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}}) = \frac{1}{1 - d_{n+1}} \sqrt{\frac{3}{2}} \|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\| \quad (4.94)$$

e

$$f_2 = f_2(\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p) = 3\mu\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p + \sigma_y(\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p) \quad (4.95)$$

de onde se obtém

$$\frac{\partial f_1}{\partial \Delta\beta_{n+1}} d\Delta\beta_{n+1} + \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}}} \cdot d\Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}} = \frac{\partial f_2}{\partial \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p} d\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p \quad (4.96)$$

Derivando se tem

$$\frac{\partial f_1}{\partial \Delta\beta_{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \frac{\|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\|}{(1 - d_{n+1})^2} - \frac{4\mu}{\|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\|} [2\mu(1 - d_{n+1})^2 \|\Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}}\|^2 + (\Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}} \cdot \sigma_n^{\text{dev}})] \right\} \quad (4.97)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}}} = 2\mu \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1 - d_{n+1}}{\|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\|} (\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}} \quad (4.98)$$

e

$$\frac{\partial f_2}{\partial \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p} = 3\mu + H, H = \frac{\partial \sigma_y}{\partial \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p} \quad (4.99)$$

- (ii):

Da equação (4.71) se obtém

$$\sqrt{3}(1 - d_{n+1})(\epsilon_{n+1}^e)^T \mathbf{C} \epsilon_{n+1}^e = B(\Delta\beta_{n+1}) \quad (4.100)$$

a que pode ser expressa através de

$$h_1 = h_1(\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p, \Delta\beta_{n+1}, \Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}}) = \sqrt{3}(1 - d_{n+1})(\epsilon_{n+1}^e)^T \mathbf{C} \epsilon_{n+1}^e \quad (4.101)$$

e

$$h_2 = h_2(\Delta\beta_{n+1}) = B(\Delta\beta_{n+1}) \quad (4.102)$$

de onde se obtém a equação

$$\frac{\partial h_1}{\partial \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p} d\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p + \frac{\partial h_1}{\partial \Delta\beta_{n+1}} d\Delta\beta_{n+1} + \frac{\partial h_1}{\partial \Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}}} \cdot d\Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}} = \frac{\partial h_2}{\partial \Delta\beta_{n+1}} d\Delta\beta_{n+1} \quad (4.103)$$

Sendo

$$\frac{\partial h_1}{\partial \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p} = -\frac{6}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\|} (\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}} \right\}^T \mathbf{C} \epsilon_{n+1}^e \quad (4.104)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial \Delta\beta_{n+1}} = & -\{\epsilon_{n+1}^e\}^T \mathbf{C} \epsilon_{n+1}^e - \frac{6}{\sqrt{2}} (1 - d_{n+1}) \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}(1 - d_{n+1})^2} \frac{(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}}{\|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\|} + \right. \\ & \left. \frac{4\mu}{\sqrt{3} \|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\|^2} [-\|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\| \|\Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}}\| + \right. \\ & \left. \{2\mu(1 - d_{n+1})^2 \|\Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}}\|^2 + (\Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}} \cdot \sigma_n^{\text{dev}})] \right\}^T \mathbf{C} \Delta\epsilon_{n+1}^e \end{aligned} \quad (4.105)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial \Delta \epsilon_{d n+1}^{e \text{ trial}}} = 2\sqrt{3}(1 - d_{n+1}) \left\{ \mathbf{I} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\epsilon_{n+1}^p}{1 - d_{n+1}} \mathbf{b}_1 \right\}^T \mathbf{C} \Delta \epsilon_{n+1}^e \quad (4.106)$$

$$\mathbf{b}_1 = \frac{2\mu(1 - d_{n+1})^2}{\|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\|} \left\{ \mathbf{I} + \frac{(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}}{\|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\|} \otimes \frac{(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}}{\|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\|} \right\}$$

e

$$\frac{\partial h_2}{\partial \Delta \beta_{n+1}} = HD, HD = \frac{\partial B}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \quad (4.107)$$

- (iii):

Um resultado importante é obtido a seguir das equações (4.93), (4.96) e (4.103) e é dado a seguir

$$\frac{d\Delta \sigma_{n+1}^{\text{dev}}}{d\Delta \epsilon_{d n+1}^{e \text{ trial}}} = \frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{\text{dev}}}{\partial \Delta \epsilon_{d n+1}^{e \text{ trial}}} + \frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{\text{dev}}}{\partial \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p} \otimes \frac{d\Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p}{d\Delta \epsilon_{d n+1}^{e \text{ trial}}} + \frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{\text{dev}}}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \otimes \frac{\partial \Delta \beta_{n+1}}{\partial \Delta \epsilon_{d n+1}^{e \text{ trial}}} \quad (4.108)$$

de onde é obtido

$$\frac{d\Delta \sigma_{n+1}^{\text{dev}}}{d\Delta \epsilon_{d n+1}^{e \text{ trial}}} = \frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{\text{dev}}}{\partial \Delta \epsilon_{d n+1}^{e \text{ trial}}} + \frac{1}{dt - am - bl} \frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{\text{dev}}}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \otimes \{a\mathbf{n} + t\mathbf{c}\} \quad (4.109)$$

sendo que

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p} \\ b &= \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \\ c &= \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \epsilon_{d n+1}^{e \text{ trial}}} \\ d &= \frac{\partial h_2}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \\ m &= \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \\ \mathbf{n} &= \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \epsilon_{d n+1}^{e \text{ trial}}} \\ t &= \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p} \end{aligned} \quad (4.110)$$

- (iv):

Tendo em conta que

$$\Delta p_{n+1} = \Delta p_{n+1}(\Delta \beta_{n+1}, \Delta \epsilon_{v n+1}^{e \text{ trial}}) \quad (4.111)$$

se tem

$$d\Delta p_{n+1} = \frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \beta_{n+1}} d\Delta \beta_{n+1} + \frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \epsilon_{v n+1}^{e \text{ trial}}} \cdot d\Delta \epsilon_{v n+1}^{e \text{ trial}} \quad (4.112)$$

Da equação (4.71) é obtida

$$h_1 = h_1(\Delta \beta_{n+1}, \Delta \epsilon_{v n+1}^{e \text{ trial}}) = \sqrt{3}(1 - d_{n+1}) \{\epsilon_{n+1}^e\}^T \mathbf{C} \epsilon_{n+1}^e \quad (4.113)$$

$$h_2 = h_2(\Delta \beta_{n+1}) = B(\Delta \beta_{n+1}) \quad (4.114)$$

de onde

$$\frac{\partial h_1}{\partial \Delta \beta_{n+1}} d\Delta \beta_{n+1} + \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \epsilon_{v n+1}^{e \text{ trial}}} d\Delta \epsilon_{v n+1}^{e \text{ trial}} = \frac{\partial h_2}{\partial \Delta \beta_{n+1}} d\Delta \beta_{n+1} \quad (4.115)$$

sendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \beta_{n+1}} = & -\{\epsilon_{n+1}^e\}^T \mathbf{C} \epsilon_{n+1}^e - \frac{6}{\sqrt{2}} (1-d_{n+1}) \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p \left\{ \frac{1}{\sqrt{3} (1-d_{n+1})^2} \frac{(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}}{\|(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}\|} + \right. \\ & \left. \frac{4\mu}{\sqrt{3} \|(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}\|^2} [-\|(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}\| \Delta \epsilon_{d_{n+1}}^{e trial} + \right. \\ & \left. \{2\mu(1-d_{n+1})^2 \|\Delta \epsilon_{d_{n+1}}^{e trial}\|^2 + (\Delta \epsilon_{d_{n+1}}^{e trial} \cdot \sigma_n^{dev})\}]^T \mathbf{C} \Delta \epsilon_{n+1}^e \right\} \end{aligned} \quad (4.116)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial \Delta \epsilon_{v_{n+1}}^{e trial}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} (1-d_{n+1}) (\mathbf{I}_R)^T \mathbf{C} \epsilon_{n+1}^e = w \quad (4.117)$$

e

$$\frac{\partial h_2}{\partial \Delta \beta_{n+1}} = HD, \quad HD = \frac{\partial B}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \quad (4.118)$$

Conseqüentemente

$$\frac{d\Delta p_{n+1}}{d\Delta \epsilon_{v_{n+1}}^{e trial}} = \frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \frac{w}{d-b} + \frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \epsilon_{v_{n+1}}^{e trial}} \quad (4.119)$$

sendo que

$$\frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \epsilon_{v_{n+1}}^{e trial}} = k(1-d_{n+1})^2 \quad (4.120)$$

$$\frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \beta_{n+1}} = -\frac{2k}{\sqrt{3}} (1-d_{n+1}) \Delta \epsilon_{v_{n+1}}^{v trial} \quad (4.121)$$

Finalmente

$$\frac{d\Delta \sigma_{n+1}}{d\Delta \epsilon_{n+1}^{e trial}} = \frac{d\Delta \sigma_{n+1}^{dev}}{d\Delta \epsilon_{d_{n+1}}^{e trial}} : \frac{d\Delta \epsilon_{d_{n+1}}^{e trial}}{d\Delta \epsilon_{n+1}^{e trial}} + \frac{d\Delta p_{n+1}}{d\Delta \epsilon_{v_{n+1}}^{e trial}} \mathbf{I}_R \otimes \frac{d\Delta \epsilon_{v_{n+1}}^{e trial}}{d\Delta \epsilon_{n+1}^{e trial}} \quad (4.122)$$

de onde é obtida

$$\frac{d\Delta \sigma_{n+1}}{d\Delta \epsilon_{n+1}^{e trial}} = \frac{d\Delta \sigma_{n+1}^{dev}}{d\Delta \epsilon_{d_{n+1}}^{e trial}} \cdot \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I}_R \otimes \mathbf{I}_R \right] + \frac{d\Delta p_{n+1}}{d\Delta \epsilon_{v_{n+1}}^{e trial}} \mathbf{I}_R \otimes \mathbf{I}_R \quad (4.123)$$

### 4.5.3 Caso (c): Há variação apenas da deformação plástica.

Como já se viu anteriormente

$$\mathbf{D}^{ep} = \frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}}{\partial \Delta \epsilon_{n+1}^{e trial}} = \frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}}{\partial \Delta \epsilon_{n+1}} \quad (4.124)$$

onde  $\mathbf{D}^{ep}$  é o *Jacobiano consistente*. Lembrando que

$$\sigma_{eq}^{* trial} = 3\mu \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p + \sigma_y (\bar{\epsilon}_n^p + \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p) = \frac{1}{1-d_n} \sqrt{\frac{3}{2}} \|(\sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\| \quad (4.125)$$

obtida a partir de (4.63) e (4.31).

Tendo em conta a equação (4.47) se tem

$$3\mu \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p + \sigma_y (\bar{\epsilon}_n^p + \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p) = \frac{1}{1-d_n} \sqrt{\frac{3}{2}} \|2\mu (1-d_n)^2 (\Delta \epsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} + \sigma_n^{dev}\| \quad (4.126)$$

de onde

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} [3\mu \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p + \sigma_y (\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p)] d\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \\ & \frac{\partial}{\partial (\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial}} \left[ \frac{1}{1-d_n} \sqrt{\frac{3}{2}} \|2\mu (1-d_n)^2 (\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} + \sigma_n^{dev}\| \right] : d(\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} \end{aligned} \quad (4.127)$$

Conseqüentemente

$$\begin{aligned} (3\mu + H) d\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p &= \frac{2\mu}{\|(\sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|} \sqrt{\frac{3}{2}} (1-d_n) [2\mu (1-d_n)^2 (\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} \\ &+ \sigma_n^{dev}] : d(\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} \end{aligned} \quad (4.128)$$

Por conseguinte

$$d\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \frac{2\mu}{\|(\sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|} \sqrt{\frac{3}{2}} (1-d_n) \frac{1}{3\mu + H} (\sigma_{n+1}^{dev})^{trial} : d(\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} \quad (4.129)$$

Partindo da equação (4.61) obtém-se a equação

$$\Delta \sigma_{n+1}^{dev} + \sigma_n^{dev} = [1 - 2\mu (1-d_n) \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\|(\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial} + \sigma_n^{dev}\|}] [(\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial} + \sigma_n^{dev}] \quad (4.130)$$

e introduzindo a equação (4.47) na equação anterior obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{n+1}^{dev} &= [1 - 2\mu (1-d_n) \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\|2\mu (1-d_n)^2 (\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} + \sigma_n^{dev}\|}] [2\mu (1-d_n)^2 (\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} \\ &+ \sigma_n^{dev}] - \sigma_n^{dev} \end{aligned} \quad (4.131)$$

Sendo  $\Delta \sigma_{n+1}^{dev} = \Delta \sigma_{n+1}^{dev} ((\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial}, \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p)$  se tem a seguinte expressão

$$d\Delta \sigma_{n+1}^{dev} = \frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{dev}}{\partial (\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial}} : d(\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} + \frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{dev}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} d\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \quad (4.132)$$

o que conduz à equação

$$\begin{aligned} d\Delta \sigma_{n+1}^{dev} &= \{2\mu (1-d_n)^2 [1 - 2\mu (1-d_n) \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\|(\sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|}] \mathbf{I} + (2\mu (1-d_n)^2 (\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} \\ &+ \sigma_{n+1}^{dev}) \otimes [2\mu (1-d_n)^2 \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\|(\sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|^2} \frac{\partial}{\partial (\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial}} (\|(\sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|)]\} : d(\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} \\ &- 2\mu (1-d_n) \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(\sigma_{n+1}^{dev})^{trial}}{\|(\sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|} d\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \end{aligned} \quad (4.133)$$

Substituindo (4.129) na última equação se tem

$$\begin{aligned} d\Delta \sigma_{n+1}^{dev} &= \{2\mu (1-d_n)^2 [1 - 2\mu (1-d_n) \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\|(\sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|}] \mathbf{I} + (\sigma_{n+1}^{dev})^{trial} \otimes 2\mu (1-d_n) \\ &\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\|(\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|^2} \frac{2\mu (1-d_n)^2}{\|(\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|} (\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\} : d(\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} - 2\mu (1-d_n) \sqrt{\frac{3}{2}} \\ &\frac{(\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial}}{\|(\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|} \left\{ \frac{2\mu}{\|(\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1-d_n}{3\mu+H} (\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial} \right\} : d(\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} \end{aligned} \quad (4.134)$$

o que pode ser expresso depois de algumas transformações, segundo a equação

$$d\Delta\sigma_{n+1}^{dev} = \left\{ 2\mu (1 - d_n)^2 \left[ 1 - 3\mu \frac{\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p}{\sigma_{c_q}^*} \right] \mathbf{I} + 6\mu^2 (1 - d_n)^2 \frac{\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p}{\sigma_{c_q}^*} \bar{\mathbf{N}} \otimes \bar{\mathbf{N}} \right\} : d(\Delta\epsilon_{n+1}^{dev})^{trial} - \frac{6\mu^2}{3\mu + H} (1 - d_n)^2 \bar{\mathbf{N}} \otimes \bar{\mathbf{N}} : d(\Delta\epsilon_{n+1}^{dev})^{trial} \quad (4.135)$$

onde

$$\bar{\mathbf{N}} = \frac{\sigma_{n+1}^{dev}}{\|\sigma_{n+1}^{dev}\|} \quad (4.136)$$

Conseqüentemente

$$d\Delta\sigma_{n+1}^{dev} = (1 - d_n)^2 \{ a \mathbf{I} + b \bar{\mathbf{N}} \otimes \bar{\mathbf{N}} \} : d(\Delta\epsilon_{n+1}^{dev})^{trial} \quad (4.137)$$

sendo

$$\begin{aligned} a &= 2\mu \left[ 1 - 3\mu \frac{\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p}{\sigma_{c_q}^*} \right] \\ b &= 6\mu^2 \left[ \frac{\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p}{\sigma_{c_q}^*} - \frac{1}{3\mu + H} \right] \end{aligned} \quad (4.138)$$

de onde se obtém finalmente

$$\frac{d\Delta\sigma_{n+1}^{dev}}{d(\Delta\epsilon_{n+1}^{dev})^{trial}} = (1 - d_n)^2 \{ a \mathbf{I} + b \bar{\mathbf{N}} \otimes \bar{\mathbf{N}} \} \quad (4.139)$$

Outra importante relação é obtida apartir da equação (4.51) cuja expressão é a seguinte

$$\frac{d\Delta p_{n+1}}{d\Delta\epsilon_{n+1}^{e\ vol}} = k (1 - d_n)^2 \quad (4.140)$$

Finalmente apartir da expressão

$$\frac{d\Delta\sigma_{n+1}}{d\Delta\epsilon_{n+1}^{e\ trial}} = \frac{d\Delta\sigma_{n+1}^{dev}}{d(\Delta\epsilon_{n+1}^{dev})^{trial}} : \frac{d(\Delta\epsilon_{n+1}^{dev})^{trial}}{d\Delta\epsilon_{n+1}^{e\ trial}} + \frac{d\Delta p_{n+1}}{d\Delta\epsilon_{n+1}^{e\ vol}} \mathbf{I}_R \otimes \frac{d\Delta\epsilon_{n+1}^{e\ vol}}{d\Delta\epsilon_{n+1}^{e\ trial}} \quad (4.141)$$

Posteriormente, depois de algumas transformações simples, é obtida a equação

$$\frac{d\Delta\sigma_{n+1}}{d\Delta\epsilon_{n+1}^{e\ trial}} = (1 - d_n)^2 \{ a \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I}_R \otimes \mathbf{I}_R \right] + b \bar{\mathbf{N}} \otimes \bar{\mathbf{N}} + k \mathbf{I}_R \otimes \mathbf{I}_R \} \quad (4.142)$$

#### 4.5.4 Caso (d): Há variação apenas do dano.

Neste caso a única equação a resolver iterativamente é a equação (4.71), que toma a forma

$$\sqrt{3}(1 - d_{n+1}) \{ \epsilon_{n+1}^{e\ trial} \}^T \mathbf{C} \epsilon_{n+1}^{e\ trial} = B(\Delta\beta_{n+1}) \quad (4.143)$$

- (i):

Tendo em conta que

$$\Delta\sigma_{n+1}^{dev} = \Delta\sigma_{n+1}^{dev}(\Delta\beta_{n+1}, \Delta\epsilon_{n+1}^{e\ trial}) \quad (4.144)$$



se obtém

$$\frac{\partial h_1}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \Delta \beta_{n+1} + \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \varepsilon_{d n+1}^{e \text{ trial}}} \cdot \Delta \varepsilon_{d n+1}^{e \text{ trial}} = \frac{\partial h_2}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \Delta \beta_{n+1} \quad (4.145)$$

onde

$$\frac{\partial h_1}{\partial \Delta \beta_{n+1}} = -\{\varepsilon_{n+1}^{e \text{ trial}}\}^T \mathbf{C} \varepsilon_{n+1}^{e \text{ trial}} \quad (4.146)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial \Delta \varepsilon_{d n+1}^{e \text{ trial}}} = 2\sqrt{3} (1 - d_{n+1}) \mathbf{C} \varepsilon_{n+1}^{e \text{ trial}} \quad (4.147)$$

e

$$\frac{\partial h_2}{\partial \Delta \beta_{n+1}} = HD, HD = \frac{\partial B}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \quad (4.148)$$

Conseqüentemente

$$\frac{d\Delta \sigma_{n+1}^{dev}}{d\Delta \varepsilon_{d n+1}^{e \text{ trial}}} = \frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{dev}}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \otimes \frac{1}{\frac{\partial h_2}{\partial \Delta \beta_{n+1}} - \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \beta_{n+1}}} \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \varepsilon_{d n+1}^{e \text{ trial}}} + \frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{dev}}{\partial \Delta \varepsilon_{d n+1}^{e \text{ trial}}} \quad (4.149)$$

sendo

$$\frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{dev}}{\partial \Delta \beta_{n+1}} = -\frac{4\mu}{\sqrt{3}} (1 - d_{n+1}) \Delta \varepsilon_{d n+1}^{e \text{ trial}} \quad (4.150)$$

$$\frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{dev}}{\partial \Delta \varepsilon_{d n+1}^{e \text{ trial}}} = 2\mu(1 - d_{n+1})^2 \mathbf{I} \quad (4.151)$$

- (ii):

Sabendo que

$$\Delta p_{n+1} = \Delta p_{n+1}(\Delta \beta_{n+1}, \Delta \varepsilon_{v n+1}^{e \text{ trial}}) = k(1 - d_{n+1})^2 \Delta \varepsilon_{v n+1}^{e \text{ trial}} \quad (4.152)$$

se tem

$$d\Delta p_{n+1} = \frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \beta_{n+1}} d\Delta \beta_{n+1} + \frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \varepsilon_{v n+1}^{e \text{ trial}}} d\Delta \varepsilon_{v n+1}^{e \text{ trial}} \quad (4.153)$$

sendo

$$\frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \beta_{n+1}} = -\frac{2k}{\sqrt{3}} (1 - d_{n+1}) \Delta \varepsilon_{v n+1}^{e \text{ trial}} \quad (4.154)$$

e

$$\frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \varepsilon_{v n+1}^{e \text{ trial}}} = k(1 - d_{n+1})^2 \quad (4.155)$$

Por outra parte, da equação (4.143) se tem

$$\frac{\partial h_1}{\partial \Delta \beta_{n+1}} d\Delta \beta_{n+1} + \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \varepsilon_{v n+1}^{e \text{ trial}}} d\Delta \varepsilon_{v n+1}^{e \text{ trial}} = \frac{\partial h_2}{\partial \Delta \beta_{n+1}} d\Delta \beta_{n+1} \quad (4.156)$$

Por conseguinte

$$\frac{d\Delta p_{n+1}}{d\Delta \varepsilon_{v n+1}^{e \text{ trial}}} = \frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \frac{1}{\frac{\partial h_2}{\partial \Delta \beta_{n+1}} - \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \beta_{n+1}}} \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \varepsilon_{v n+1}^{e \text{ trial}}} + \frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \varepsilon_{v n+1}^{e \text{ trial}}} \quad (4.157)$$

Finalmente é obtida a equação

$$\frac{d\Delta\sigma_{n+1}}{d\Delta\varepsilon_{n+1}^{e\ trial}} = \frac{d\Delta\sigma_{n+1}}{d\Delta\varepsilon_{d\ n+1}^{e\ trial}} : \frac{d\Delta\varepsilon_{d\ n+1}^{e\ trial}}{d\Delta\varepsilon_{n+1}^{e\ trial}} + \frac{d\Delta p_{n+1}}{d\Delta\varepsilon_{v\ n+1}^{e\ trial}} \mathbf{I}_R \otimes \frac{d\Delta\varepsilon_{v\ n+1}^{e\ trial}}{d\Delta\varepsilon_{n+1}^{e\ trial}} \quad (4.158)$$

obtendo-se a expressão

$$\frac{d\Delta\sigma_{n+1}}{d\Delta\varepsilon_{n+1}^{e\ trial}} = \frac{d\Delta\sigma_{n+1}}{d\Delta\varepsilon_{d\ n+1}^{e\ trial}} \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I}_R \otimes \mathbf{I}_R \right] + \frac{d\Delta p_{n+1}}{d\Delta\varepsilon_{v\ n+1}^{e\ trial}} \mathbf{I}_R \otimes \mathbf{I}_R \quad (4.159)$$

# Capítulo 5

## SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

### 5.1 CARACTERIZAÇÃO DO MATERIAL

Os resultados numéricos são baseados na curva do material (Fig.5.1) fornecida por Elaine C. S. Corrêa e Paulo R. Cetlin da Universidade Federal de Minas Gerais. A curva corresponde à relação entre a tensão de Cauchy (tensão verdadeira) e a deformação logarítmica (deformação verdadeira). O material é aço inoxidável 304 e foi aplicada a correção de Bridgman após o início da estrição. O material foi recozido antes da realização do teste.

A curva de encruamento plástico foi obtida da mesma curva (Tensão-Deformação verdadeira).

A curva do encruamento do dano foi obtida, tendo em conta a variação típica do módulo elástico em metais, do livro *Mechanics of Solid Materials* [50] de J. Lemaitre and J.Chaboche.

A curva de encruamento está dada na tabela seguinte (5.1):

$\sigma_y \equiv R (\times 10^6)$	305,2393	689,1470	970,7436	1112,9040	1332,3610	1524,465
$\bar{\epsilon}_p \equiv \epsilon^p$	0,000	0,166	0,348	0,520	0,660	0,655
$\epsilon$	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00

Tabela 5.1: Curva de encruamento plástico

Para a obtenção da tabela se teve em conta, que no caso unidimensional,  $\epsilon^p \equiv \bar{\epsilon}_p$ .

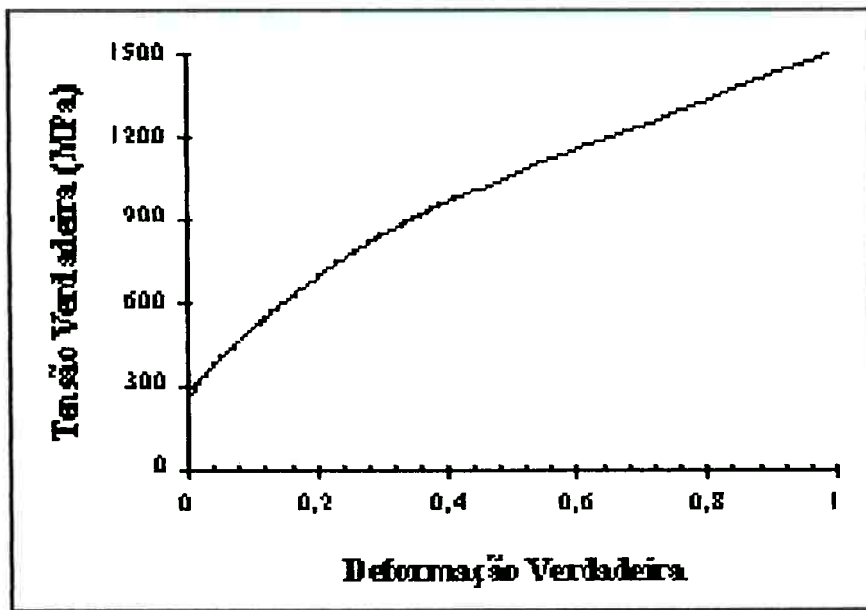


Figura 5.1: Curva tensão-deformação

A variação do módulo elástico  $E$ , dada na tabela (5.2), representa a variação típica do módulo elástico em metais.

A curva de encruamento do dano, dada na tabela (5.3), foi obtida tendo em conta

$\epsilon$	Fator do $E$	$\bar{E}$
0,00	1,0000	$200,0 \times 10^8$
0,10	1,0000	$200,0 \times 10^8$
0,20	1,0000	$200,0 \times 10^8$
0,30	0,9910	$198,2 \times 10^8$
0,40	0,9380	$187,6 \times 10^8$
0,50	0,8390	$167,8 \times 10^8$
0,60	0,7170	$143,4 \times 10^8$
0,70	0,6040	$120,8 \times 10^8$
0,80	0,4790	$95,8 \times 10^8$
0,90	0,3350	$67,0 \times 10^8$
1,00	0,2200	$44,0 \times 10^8$

Tabela 5.2: Variação do módulo elástico

que

$$d = 1 - \sqrt{\frac{\bar{E}}{E}} \quad (5.1)$$

e que no caso unidimensional  $Y_{eq} \equiv Y$ , e  $\beta \equiv d$ .

$\epsilon$	$\sigma$	$\epsilon^e$	$\beta \equiv d = 1 - \sqrt{\frac{\bar{E}}{E}}$	$Y_{eq} \equiv Y = \frac{1}{1-d} \sigma \epsilon^e$	B
0,0000	0,00	0,0000	0,0000	0,0000	$3,40 \times 10^7$
0,20	$6,89 \times 10^8$	0,0345	0,0000	$2,37 \times 10^7$	$3,40 \times 10^7$
0,40	$9,71 \times 10^8$	0,0517	0,0315	$5,19 \times 10^7$	$5,19 \times 10^7$
0,60	$1,15 \times 10^9$	0,0804	0,1532	$1,10 \times 10^8$	$1,10 \times 10^8$
0,80	$1,34 \times 10^9$	0,140	0,3079	$2,71 \times 10^8$	$2,71 \times 10^8$
1,00	$1,52 \times 10^9$	0,345	0,5310	$1,11 \times 10^9$	$1,11 \times 10^9$

Tabela 5.3: Curva de encruamento do dano

## 5.2 PROGRAMA UTILIZADO PARA A SIMULAÇÃO:

Uma vez caracterizado o material, foram feitas simulações numéricas utilizando uma subrotina para materiais elasto-plásticos com dano. Dita subrotina foi implementada no programa ABAQUS e na simulação foi utilizada um elemento sólido com interpolação quadrática (cubo com 20 nós).

O algoritmo implícito utilizado pela subrotina foi descrito no capítulo precedente.

1. Início do programa.
2. Monta a matriz do material  $C$ .
3. Lê as variáveis de estado.
4. Calcula  $Y_{eq}^{trial}$ , e  $\sigma_{eq}^{* trial}$ .
5. Se  $Y_{eq}^{trial} > B$  e  $\sigma_{eq}^{* trial} > (\sigma_y)_n$  ir ao passo (6), caso contrário ir ao passo (10).
6. Obtém  $\Delta\beta$  e  $\Delta\beta_{n+1}$  pelo método de Newton.
7. Atualiza o dano  $d$  e o dano equivalente  $\beta$ .
8. Atualiza a tensão  $\sigma$  as deformações elástica  $\Delta\epsilon^e$  e plástica  $\Delta\epsilon^p$ , e a deformação plástica equivalente  $\bar{\epsilon}_p$ .
9. Obtém o Jacobiano consistente (caso(b)).
10. Se  $\sigma_{eq}^{* trial} > (\sigma_y)_n$  ir ao passo (11), caso contrário ir ao passo (14).
11. Obtém  $\Delta\bar{\epsilon}_p$  pelo método de Newton.
12. Atualiza  $\sigma$ ,  $\epsilon^p$ ,  $\epsilon^e$  e  $\bar{\epsilon}_p$ .
13. Obtém a matriz Jacobiana consistente (caso(c)).
14. Se  $Y_{eq}^{trial} > B$  ir ao passo (15), caso contrário ir ao passo (18).
15. Obtém  $\Delta\beta$  pelo método de Newton.
16. Atualiza o dano  $d$  e o dano equivalente  $\beta$ .
17. Obtém o Jacobiano consistente (caso(d)).
18. Atualiza as variáveis de estado.
15. Fim do processo.

### 5.3 BLOCO COM TRAÇÃO NUMA DIREÇÃO

Um bloco de 1 cm de comprimento, 0,1 cm de espessura e 1 cm de altura, segundo a figura (5.2), foi utilizado nesta parte da simulação.

A condição de contorno de uns dos extremos, consiste em restringir a translação dos nós correspondentes. O movimento do corpo rígido de dito extremo também foi impedido.

No outro extremo foi aplicado um deslocamento de 1 cm axialmente.

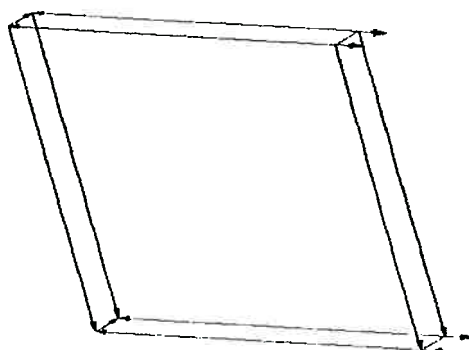


Figura 5.2: Bloco 1x1x0,1 cm.

A evolução do dano  $d$  e do dano equivalente  $\beta$  em função da deformação é mostrada na figura (5.3). Dita figura mostra, que tanto o dano como o dano equivalente, começa a ter um valor significativo a partir de 20% de deformação, mantendo-se crescente sob deformação crescente.

A evolução da tensão  $\sigma$  é mostrada na figura (5.4). Os valores da tensão numérica e experimental são bem próximos, o que demonstra a eficiência do algoritmo.

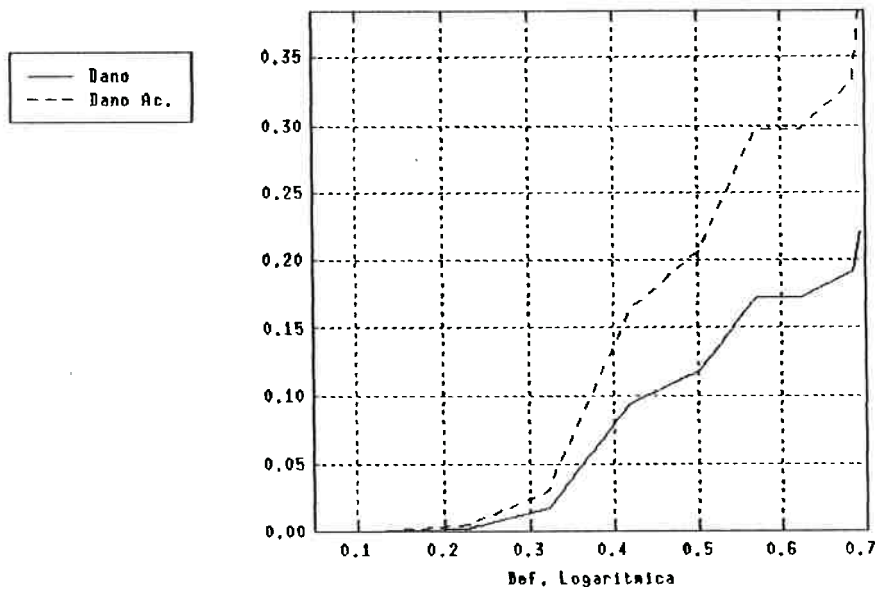


Figura 5.3: Evolução do dano  $d$  e do dano equivalente  $\beta$ .

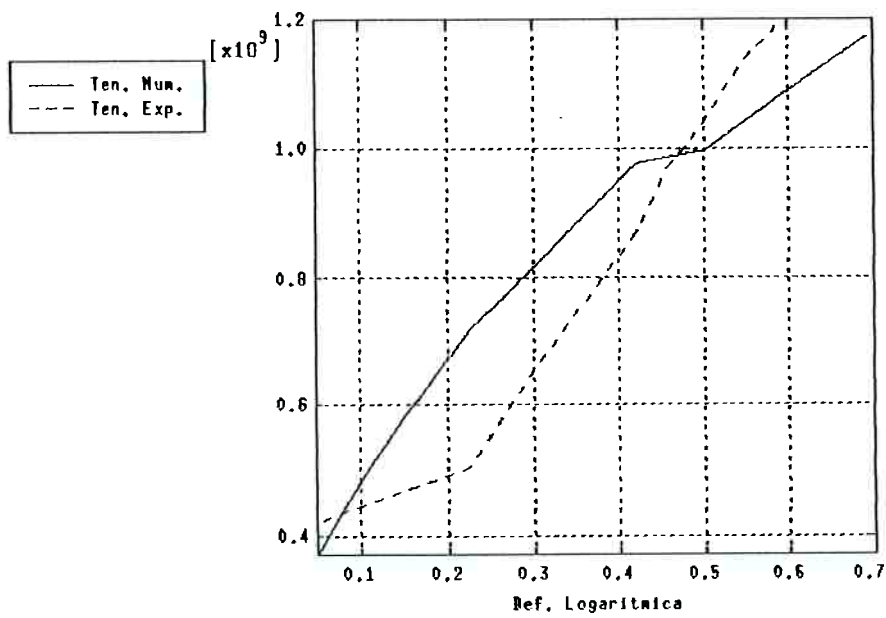


Figura 5.4: Evolução numérica e experimental da tensão.



A figura (5.5) mostra a evolução da deformação plástica equivalente. Esses valores são os esperados conforme à tabela (5.1). Como era esperado, a deformação elástica é pequena em relação à plástica.

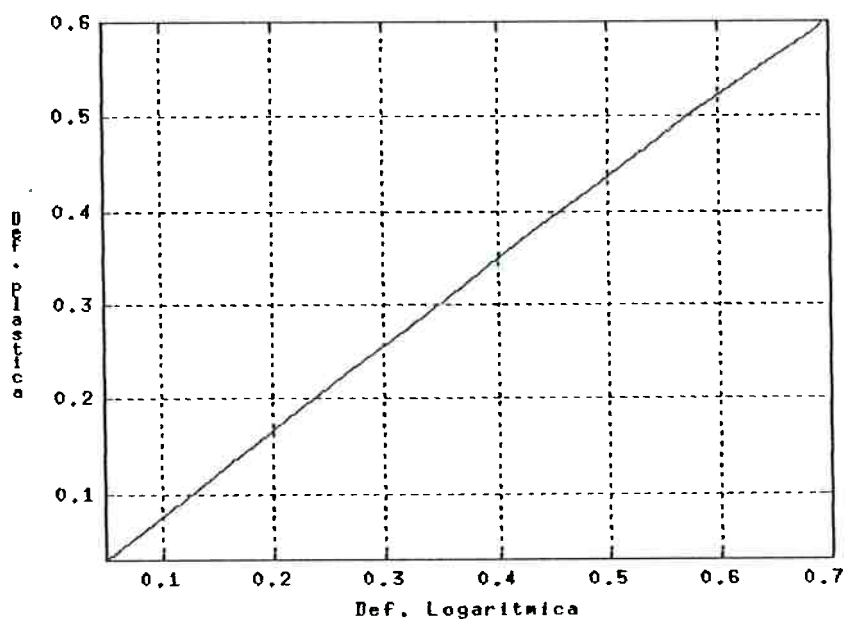


Figura 5.5: Deformação plástica equivalente em função da deformação total .

## 5.4 ENSAIO DE COMPRESSÃO DO BLOCO

O segundo tipo de carregamento aplicado ao bloco, foi uma compressão axial equivalente a um deslocamento de 0,5 cm em dita direção axial, tal como o mostra a figura (5.6).

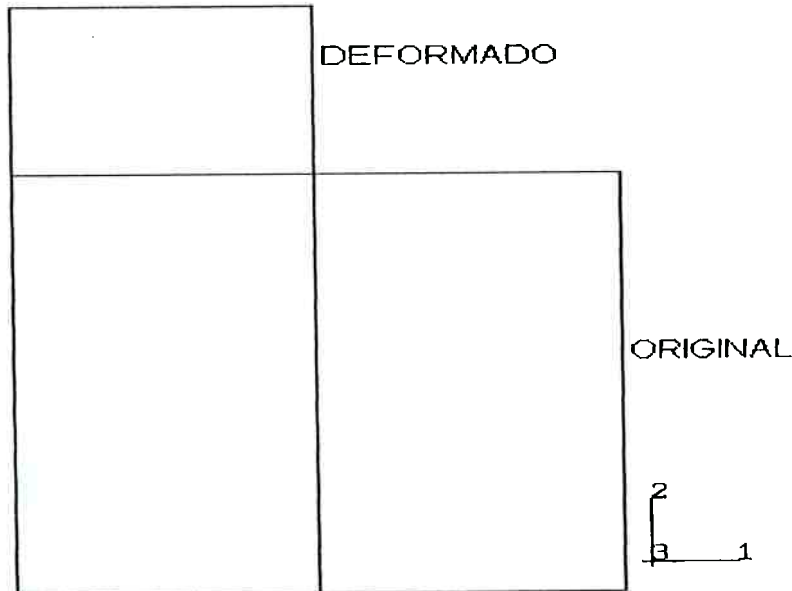


Figura 5.6: Compressão do bloco de 1x1x0,1 cm.

A evolução do dano  $d$  e do dano equivalente  $\beta$  em função da deformação é mostrada na figura (5.7). Isso demonstra que o algoritmo é capaz de obter corretamente o valor de dano não somente a trações, senão também para outros carregamentos mais complexos.

A evolução da tensão  $\sigma$  é mostrada na figura (5.8). Os valores da tensão numérica correspondem à curva experimental, o que demonstra que o algoritmo calcula corretamente os valores da tensão para a compressão.

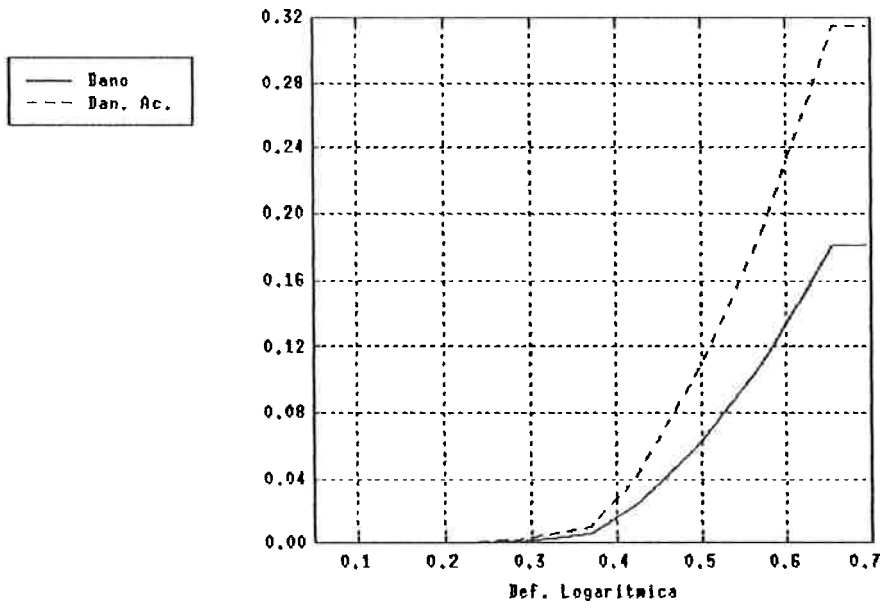


Figura 5.7: Evolução do dano  $d$  e do dano equivalente  $\beta$ .

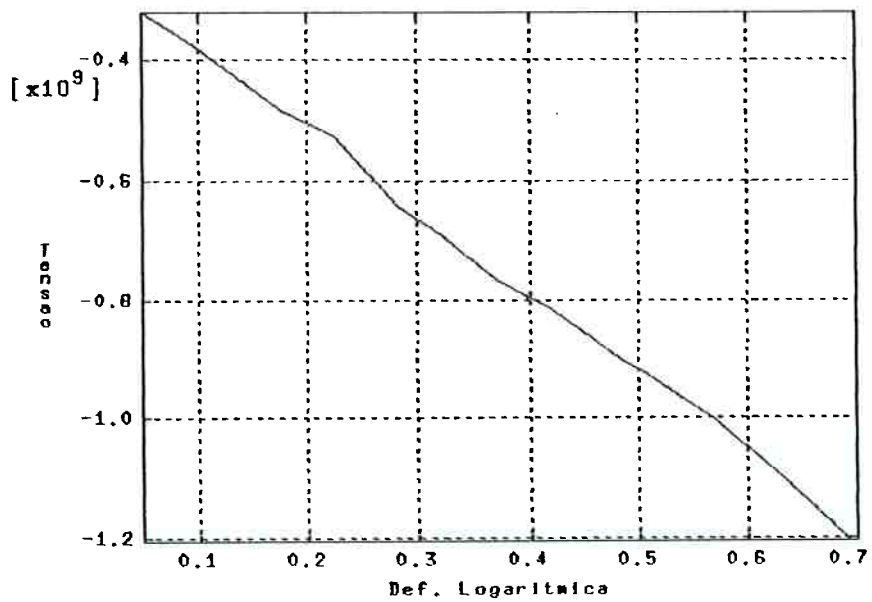


Figura 5.8: Evolução numérica da tensão para o ensaio de compressão.

A figura (5.9) mostra a evolução da deformação plástica equivalente. Há uma boa correspondência entre os valores esperados e os obtidos numericamente.

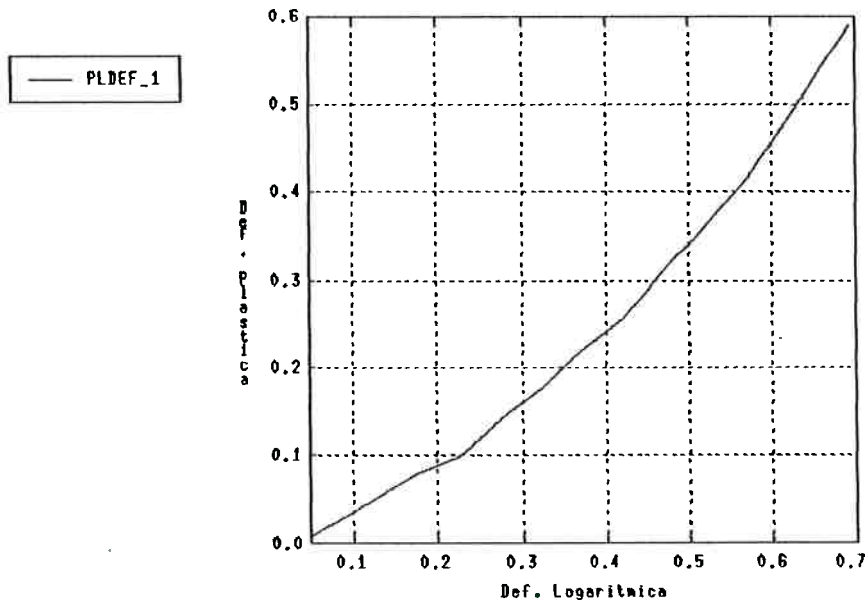


Figura 5.9: Deformação plástica equivalente em função da deformação total.

## 5.5 ENSAIO DE TRAÇÃO BIAIXIAL DO BLOCO

O terceiro tipo de carregamento aplicado ao bloco, foi uma tração biaxial equivalente a um deslocamento de 0,5 cm nas duas direções.

A evolução do dano  $d$  e do dano equivalente  $\beta$  em função da deformação é mostrada na figura (5.10). Isso mostra que o algoritmo funciona corretamente, e é possível aplicar o mesmo em problemas mais complexos.

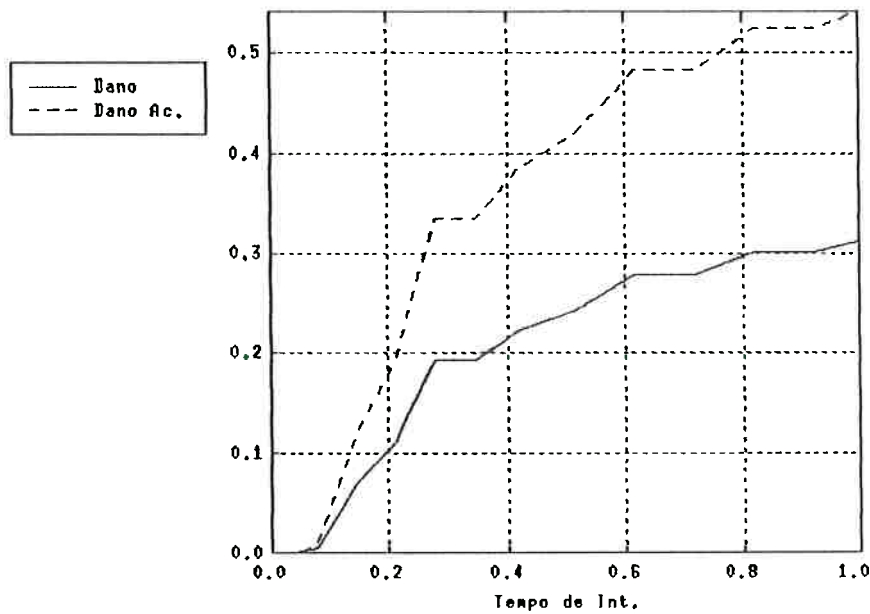


Figura 5.10: Evolução do dano  $d$  e do dano equivalente  $\beta$ .

A evolução da tensão  $\sigma$  equivalente (de von Mises) é mostrada na figura (5.11). Os valores da tensão numérica correspondem à curva experimental.

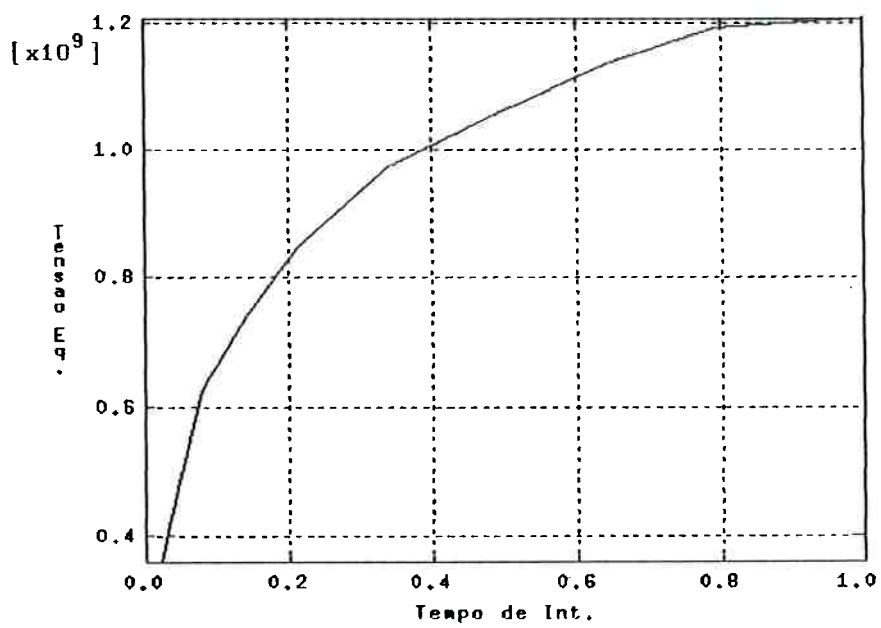


Figura 5.11: Evolução numérica da tensão equivalente, para o ensaio de tração biaxial.

A figura (5.12) mostra a evolução da deformação plástica equivalente. Há uma boa correspondência, também neste caso, entre os valores esperados e os obtidos numericamente.

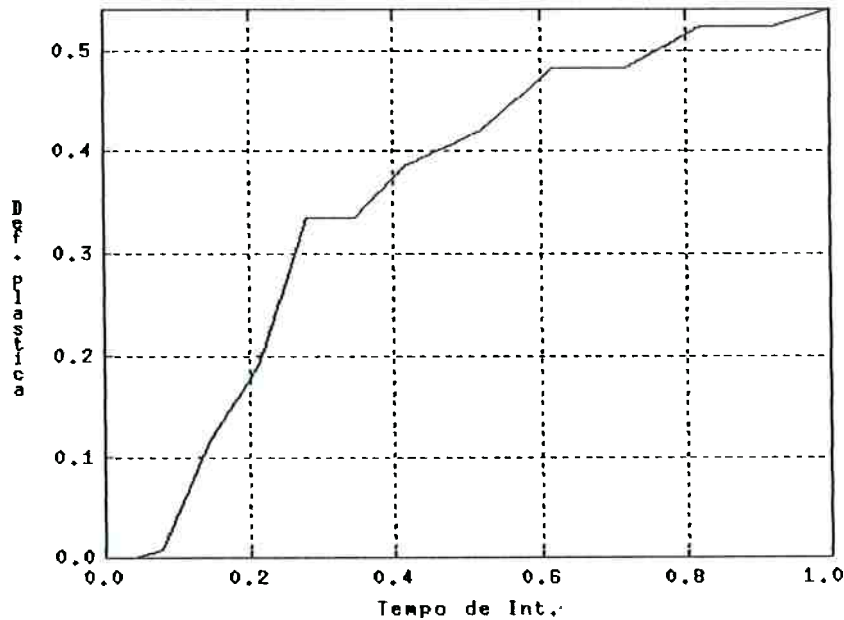


Figura 5.12: Deformação plástica equivalente em função da deformação total .

## 5.6 ENSAIO DE OBJETIVIDADE DO MODELO CONSTITUTIVO

Para provar que o modelo do material desenvolvido neste trabalho é objetivo, i.e. não muda o seu valor com a mudança do sistema de coordenadas, foi realizado um ensaio numérico de tração idêntico ao primeiro ensaio. Porém, aplicando ao mesmo tempo dita tração progressivamente e uma rotação de 360 graus (uma volta). Os valores obtidos são os mesmos que a da Figura (5.3) tal como o mostra a Figura (5.13). Isso demonstra que o modelo é robusto e pode ser utilizado para resolver problemas relevantes da engenharia.

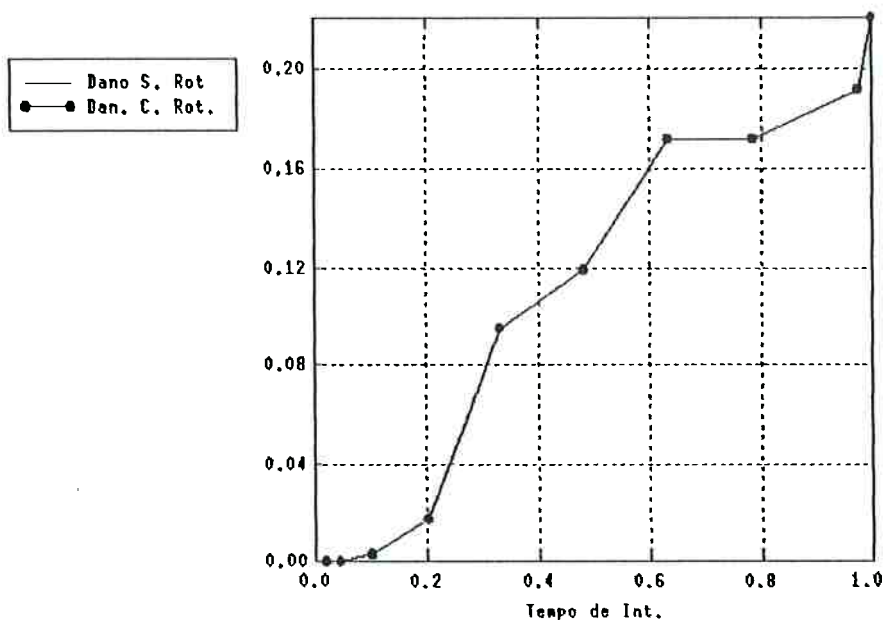


Figura 5.13: Evolução do dano  $d$  com e sem rotação  $\beta$ .

## 5.7 DISCUSSÃO

Tendo em conta que o desenvolvimento do modelo do Capítulo 3 não conjecturou a natureza do dano a priori. Por conseguinte, o modelo é capaz de adotar não somente a variação do módulo elástico, como se fez no Capítulo 4, senão que pode ser utilizada outra variável macro-mecânica que seja possível medir. Isso dá uma grande versatilidade ao modelo, de maneira que, dependendo das características do laboratório, é possível adaptar o modelo às medições, incorporando o dano no modelo de material com relativa facilidade.

A implementação do modelo no programa ABAQUS, permite a sua difusão para a sua posterior utilização na indústria, tendo em conta que este programa está adotando uma política de maior penetração nos problemas industriais.

Como se viu no Capítulo 3, o modelo pode considerar a variação da evolução do dano dependendo da direção (i.e. a anisotropia do dano). A implementação do modelo anisotrópico depende dos valores experimentais disponíveis. Portanto a sua implementação é possível num futuro próximo.

A adoção da equivalência da energia, possui, apesar da grande utilização da equivalência de deformação, como vem sendo adotado por Lemaitre e seguidores, uma grande vantagem devida a natureza escalar da energia. Isso possibilita desenvolver modelos de



danos de forma mais simples e intuitiva [46]. Porém, o trabalho desenvolvido por Lemaitre, tanto o experimental quanto o teórico, é reconhecido pela comunidade científica e merece todo o respeito possível.

Por outra parte, apesar de ser este modelo adequado para o dano dúctil e carregamentos não cíclicos. Pode ser incorporado ao modelo, com relativa facilidade o efeito cinemático nas suas leis de escoamento. Podendo modelar desta forma (depois de dita incorporação) casos de fadiga a baixo e alto ciclo.

Um critério de falha pode ser incorporado ao modelo, para modelar problemas dependentes de dito critério. Neste momento está sendo provado um critério acoplado ao modelo de dano. Se espera poder concluir, com a validação do critério, em breve, e assim agregar maior funcionalidade ao modelo, através da determinação numérica do diagrama de conformação limite, por exemplo.

Finalmente, o modelo pode ser implementado em outros programas comerciais como o ANSYS por exemplo para realizar as simulações numéricas.

## Capítulo 6

# CONCLUSÕES E CONTRIBUIÇÕES

### 6.1 CONTRIBUIÇÕES

No Capítulo 2 foram colocados conceitos clássicos, num ordenamento didático adequado. Fazendo a construção da teoria, partindo dos conceitos primitivos, até os requeridos para a construção do modelo. Nesse sentido, a maior contribuição deste Capítulo foi a didática adotada.

Foi desenvolvido no Capítulo 3 o modelo elasto-plástico como dano anisotrópico. Dito desenvolvimento depende da teoria termodinâmica adotada.

No Capítulo 4 foi desenvolvido um algoritmo implícito, fazendo uma adaptação do algoritmo do retorno para o modelo desenvolvido. A formulação decorrente do algoritmo, i.e., a integração e os Jacobianos são totalmente novos.

### 6.2 LIMITAÇÕES DO MODELO

O modelo desenvolvido está restringido aos problemas quasi-estáticos. Uma ampliação do modelo para ter em conta efeitos dinâmicos é possível. Porém, a utilização da Termodinâmica com Variáveis Internas limita a utilização do modelo a processos com moderada velocidade, devido à estrutura de dita teoria Termodinâmica.

O modelo do material não considera o efeito da temperatura no comportamento do material, porém, esse efeito pode ser introduzido facilmente através de uma variável interna no modelo.

Efeitos cíclicos como fadiga não podem ser resolvidos fazendo uso do modelo do material desenvolvido no trabalho. No entanto, esses efeitos podem ser considerados pelo modelo, modificando as funções de escoamento do dano e a plástica, i.e. introduzindo leis de escoamento mistos.

### 6.3 CONCLUSÕES

Foi desenvolvido um modelo matemático capaz de simular os fenômenos mais importantes do processo de deformação do material.

Uma boa correlação entre os dados experimentais com os obtidos pelo modelo foi observado.

O modelo pode ser acrescentado para considerar outros efeitos desejados, tais como fadiga, temperatura etc.

O alto grau de relacionamento do modelo com o programa ABAQUS permite o tratamento de problemas complexos com relativa facilidade, fazendo possível desta forma a aplicação do modelo em forma flexível. Outros programas comerciais também podem ser utilizados para a implementação do modelo.

Em caso de ter dados experimentais confiáveis, a implementação numérica do dano anisotrópico pode ser realizada, devido à generalidade do modelo desenvolvido.

# Referências Bibliográficas

- [1] R. Abraham and J. Marsden. *Foundations of Mechanics*. Addison-Wesley, New York, USA, 1978.
- [2] M. Alves. Some comments on material damage. Preprint submitted to *Engineering Fracture Mechanics*, 1998.
- [3] M. Alves and N. Jones. Influence of hydrostatic stress on failure of axisymmetric notched specimens. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 47:643–667, 1999.
- [4] A. Aquino. Modelagem e simulação do estado tenso-térmico em corpos elásticos bidimensionais: Problema inverso, 1999.
- [5] N. Aravas. On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models. *International J. for Numerical Methods in Engineering*, 24:1395–1416, 1987.
- [6] F. Armero and S. Oller. A general framework for continuum damage models. i. infinitesimal plastic damage models in stress space. *International J. of Solids and Structures*, 37:7409–7436, 2000.
- [7] F. Armero and S. Oller. A general framework for continuum damage models. ii. integration algorithms, with applications to the numerical simulation of porous metals. *International J. of Solids and Structures*, 37:7437–7464, 2000.
- [8] S. Taher; M. Baluch and A. Al-Gadhib. Towards a canonical elastoplastic damage model. 48:151–166, 1994.
- [9] N. Bellomo and L. Preziosi. *Modelling Mathematical Methods and Scientific Computation*. CRC Press, London, UK, 1995.
- [10] B. Bhattacharya and B. Ellingwood. A new cdm-based approach to structural deterioration. *International J. of Solids and Structures*, 36:1757–1779, 1999.

- [11] B. Bhattacharya and B. Ellinwood. Continuum damage mechanics analysis of fatigue crack initiation. *International J. of Fatigue*, 20:631–639, 1998.
- [12] N. Bonora. A nonlinear cdm model for ductile failure. 58:11–28, 1997.
- [13] N. Bonora and G. Newaz. Low cycle fatigue life estimation for ductile metals using a nonlinear continuum damage mechanics model. *Interational J. of Solids and Structures*, 16:1881–1894, 1998.
- [14] A. Borisenko and I. Tarapov. *Vector and Tensor Analysis With Applications*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, USA, 1968.
- [15] R. Bowen. *Introduction to Continuum Mechanics for Engineers*. Penum Press, New York, USA, 1989.
- [16] M. Brunig. A framework for large strain elastic-plastic damage mechanics based on metric transformations. *International J. of Engineering Science*, 39:1033–1056, 2001.
- [17] M. Brunig. Numerical analysis and elastic-plastic deformation behavior of anisotropically damaged solids. *International J. of Plasticity*, 18:1237–1270, 2002.
- [18] M. Brunig. Numerical analysis of anisotropic ductile continuum damage. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 192:2949–2976, 2003.
- [19] A. Cauvin and R. Testa. Damage mechanics: Basic variables in continuum theories. *Interational J. of Solids and Structures*, pages 747–761, 1999.
- [20] A. Cauvin and R. Testa. Elastoplastic material with isotropic damage. *Interational J. of Solids and Structures*, 36:727–746, 1999.
- [21] S. Chandrakanth and P. Pandey. Damage coupled elasto-plastic finite element analysis of a timoshenko layered beam. *Computer & Structures*, 69:411–420, 1998.
- [22] J. Cusumano and A. Chatterjee. Step towards a qualitative dynamics of damage evolution. *Interational J. of Solids and Structures*, 37:6397–6417, 2000.
- [23] J.B. de Aguiar and A. Aquino. Formulação elasto-plástica para materiais danificados. In *CONEM*, Brasil, 2002.

- [24] J.B. de Aguiar; A. Aquino and J.M. de Aguiar. Elasto-plastic analysis of an upsetting process using a damaging material. In *II COBEF*, Uberlândia, MG, Brasil, 2002.
- [25] E. de Souza Neto; D. Peric and D. Owen. A model for elastoplastic damage at finite strain: Algorithmic issues and applications. *Engineering Computations*, 11:257–281, 1994.
- [26] E. de Souza Neto; D. Peric and D. Owen. Computational plasticity. Preprint, Swansea, UK, 2002.
- [27] J. Lemaitre; R. Desmorat and M. Sauzay. Anisotropic damage law of evolution. *Eur. J. Mech.*, pages 187–208, 2000.
- [28] R. Desmorat and J. Lemaitre. Stress singularities applied to crack initiation by damage of multimaterial joints. *Mechanics of Materials*, 29:153–160, 1998.
- [29] R. Echle and G. Voyiadjis. Simulation of damage evolution in a uni-directional titanium matrix composite subjected to high cycle fatigue. *International J. of Fatigue*, 21:909–923, 1999.
- [30] M. Elgueta and C. Cortés. Application of continuum damage theory in metal-forming processes. *Journal of Materials Processing Technology*, pages 122–127, 1999.
- [31] A.A. Benzerga et al. Synergistic effects of plastic anisotropy and void coalescence on fracture mode in plane strain. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, pages 73–102, 2002.
- [32] C. Chow et al. Prediction of forming limit diagrams for al6111-t4 under non-proportional loading. *International J. of Mechanical Sci.*, pages 471–486, 2001.
- [33] C. Han et al. A multiplicative finite elasto-plastic formulation with anisotropic yield functions. *International J. of Plasticity*, pages 197–211, 2003.
- [34] P. Ladevèze et al. A mesomodel for localisation and damage computation in laminates. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 183:105–122, 2000.
- [35] Y. Kaji et al. Development of structural analysis program for non-linear elasticity by continuum damage mechanics. *Nuclear Engineering and Design*, 206:1–12, 2001.

- [36] M. Frémond and B. Nedjar. Damage, gradient of damage and principle of virtual power. *International J. of Solids and Structures*, 33:1083–1103, 1996.
- [37] Y. Fung. *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, USA, 1965.
- [38] M. Gurtin. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, San Diego, USA, 1981.
- [39] R. Hambli and D. Badie-Levet. Damage and fracture simulation during the extrusion processes. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 186:109–120, 2000.
- [40] S. Hassiotis. Identification of damage using natural frequencies and markov parameters. *Computer & Structures*, 74:365–373, 2000.
- [41] HKS. *ABAQUS Theory Manual*. Hibbit; Karlson & Sorensen, INC, Pawtucket, RI, USA, 1995.
- [42] G. Johnson and D. Bammann. A discussion of stress rates in finite deformation problems. *International J. of Solids and Structures*, 20:725–737, 1984.
- [43] J. Ju. On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects. *International J. of Solids and Structures*, 25:803–833, 1989.
- [44] J. Ju and H. Lee. A micromechanical damage model for effective elastoplastic behavior of ductile matrix composites considering evolutionary complete particle debonding. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, pages 201–222, 2000.
- [45] D. Krajcinovic. Selection of damage parameter - art or science? *Mechanics of Materials*, 28:165–179, 1998.
- [46] D. Krajcinovic. Damage mechanics: Accomplishments, trends and needs. *International J. of Solids and Structures*, 37:267–277, 2000.
- [47] D. Krajcinovic and M. Vujosevic. Intrinsic failure modes of brittle materials. *International J. of Solids and Structures*, 35:2487–2503, 1998.
- [48] V. Kriukov. Fundamentos da modelagem matemática: Parte i. Cadernos UNIJUÍ, Ijuí, RS, Brasil, 1996.

- [49] M. Kuroda and V. Tvergaard. Forming limit diagrams for anisotropic metal sheets with different yield criteria. *International J. of Solids and Structures*, pages 5037–5059, 2000.
- [50] J. Lemaitre and J. Chaboche. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge Press, Cambridge, UK, 1994.
- [51] J. Lee. Finite element procedures for large strain elastic-plastic theories. *Computer & Structures*, 28:395–406, 1988.
- [52] Th. Lehmann. Thermodynamical foundations of large inelastic deformations of solid bodies including damage. *International J. of Plasticity*, 7:79–98, 1991.
- [53] J. Lemaitre. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 107:83–89, 1985.
- [54] J. Lemaitre. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, pages 31–49, 1985.
- [55] U. Lee; G. Lesieutre and L. Fang. Anisotropic damage mechanics based on strain energy equivalence and equivalent elliptical microcracks. *International J. of Solids and Structures*, 34:4377–4397, 1997.
- [56] T. Belytschko; W. Liu and B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons, New York, USA, 2000.
- [57] L. Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, USA, 1969.
- [58] P. Nagdhi. A critical review of the state of finite plasticity. *Journal of Applied Mechanics and Physics*, 41:315–394, 1990.
- [59] J. Nagtegaal and J. Jong. Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis. *International J. for Numerical Methods in Engineering*, 17:15–41, 1981.
- [60] S.A. Nazarov. Damage tensor and damage measures. *Mechanics of Solids*, 36:65–73, 2001.
- [61] S. Nemat-Nasser. On finite deformation elasto-plasticity. *International J. of Solids and Structures*, 18:857–872, 1982.



- [62] J. Nemes and E. Spéciel. Use of a rate-dependent continuum damage model to describe strain-softening in laminated composites. *Computer & Structures*, 58:1083–1092, 1996.
- [63] T. Altan; S. Oh and H. Gegel. *Conformação de Metais: Fundamentos e Aplicações*. EESC-USP, São Carlos, SP, Brasil, 1999.
- [64] M. Ortiz and E. Popov. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International J. for Numerical Methods in Engineering*, 21:1561–1576, 1985.
- [65] M. Ortiz and J. Simo. An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International J. for Numerical Methods in Engineering*, 23:353–366, 1986.
- [66] W. Chien; J. Pan and S. Tang. Modified anisotropic gurson yield criterion for porous ductile sheet metals. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 123:409–416, 2001.
- [67] T. Pardoen and J. Hutchinson. An extended model for void growth and coalescence. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48:2467–2512, 2000.
- [68] W. Prager. *Introduction to Mechanics of Continua*. Ginn and Co., Boston, USA, 1961.
- [69] S. Proença and J. Pituba. A damage constitutive model accounting for induced anisotropy and bimodular elastic response. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 1:101–117, 2003.
- [70] M. Brunig; S. Ricci and H. Obrecht. Nonlocal large deformation and localization behavior of metals. *Computer & Structures*, 79:2063–2074, 2001.
- [71] G. Rousselier. Dissipation in porous metal plasticity and ductile fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49:1727–1746, 2001.
- [72] K. Santaoja. Thermodynamics of solid materials with application to the gurson-tvergaard material model. Technical report, Technical Research Centre of Finland, Finland, 1997.

- [73] J. Simo. A framework fo finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part i. continuum formulation. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 66:199–219, 1988.
- [74] J. Simo. A framework fo finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. part ii: Computational aspects. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 68:1–31, 1988.
- [75] J. Simo and M. Ortiz. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 49:221–245, 1985.
- [76] J. Simo and K. Pister. Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: Computational implications. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 46:201–215, 1984.
- [77] J. Simo and R. Taylor. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, pages 101–118, 1985.
- [78] L. Zhao; R. Sowerby and M. Sklad. A theoretical and experimental investigation of limit strains in sheet metal forming. *International J. of Mechanical Sci.*, 38:1307–1317, 1996.
- [79] W. Lee; E. Tai and C. Tang. Damage evolution and forming limit predictions of an al2024-t3 aluminium alloy. *Journal of Materials Processing Technology*, pages 100–104, 1997.
- [80] C. Truesdell. *Six Lectures on Modern Natural Philosophy*. Springer-Verlag, New York, USA, 1966.
- [81] C. Truesdell. *Termodinámica Racional*. Reverté, Barcelona, España, 1973.
- [82] C. Truesdell and W. Noll. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1965.
- [83] G. Voyiadjis and B. Deliktas. A coupled anisotropic damage model for the inelastic response of composite materials. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, pages 159–199, 2000.

- [84] G. Voyiadjis and P. Kattan. A plasticity-damage theory for large deformation of solids-i. theoretical formulation. *International J. of Engineering Science*, 30:1089–1108, 1992.
- [85] G. Voyiadjis and T. Park. The kinematics of damage for finite-strain elastoplastic solids. *International J. of Engineering Science*, 37:803–830, 1999.
- [86] G. Voyiadjis and A. Zolochovsky. Thermodynamic modeling of creep damage in materials with different properties in tension and compression. *International J. of Solids and Structures*, 37:3281–3303, 2000.
- [87] C. Wang and C. Truesdell. *Introduction to Rational Elasticity*. Noordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands, 1973.
- [88] K. Williams and R. Vaziri. Application of a damage mechanics model for predicting the impact response of composite materials. *Computer & Structures*, 79:997–1011, 2001.
- [89] O. Bruhns; H. Xiao and A. Meyers. A self-consistent eulerian rate type model for finite deformation elastoplasticity with isotropic damage. *International J. of Solids and Structures*, 38:657–683, 2001.
- [90] C. Chow; X. Yang and E. Chu. Viscoplastic constitutive modeling of anisotropic damage under nonproportional loading. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 123:403–408, 2001.
- [91] M. Alves; J. Yu and N. Jones. On the elastic modulus degradation in continuum damage mechanics. *Computer & Structures*, 76:703–712, 2000.
- [92] G. Zhong-Heng. A note on the decomposition of elastoplastic finite deformations. *International J. of Solids and Structures*, pages 925–927, 1981.
- [93] Y. Zhu and S Cescotto. A fully coupled elasto-visco-plastic damage theory for anisotropic materials. *International J. of Solids and Structures*, 32:1607–1641, 1995.
- [94] Z. Zimniak. Application of a system for sheet metal forming design. *Journal of Materials Processing Technology*, pages 159–162, 2000.
- [95] Z. Zimniak. Problems of multi-step forming sheet metal process design. *Journal of Materials Processing Technology*, pages 152–158, 2000.