

FULGÊNCIO ANTÔNIO AQUINO DUARTE

MODELO MATEMÁTICO PARA MATERIAIS METÁLICOS
COM DANO

Tese apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do
Título de Doutor em Engenharia

São Paulo
2005

014

FULGÊNCIO ANTÔNIO AQUINO DUARTE

MODELO MATEMÁTICO PARA MATERIAIS METÁLICOS
COM DANO

Tese apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do
Título de Doutor em Engenharia

Área de concentração:
Engenharia Mecânica

Orientador:
Prof. Dr.
João Batista de Aguiar

São Paulo
2005

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 23 de julho de 2005.

Assinatura do autor



Assinatura do orientador



FICHA CATALOGRÁFICA

Aquino Duarte, Fulgêncio Antônio

Modelo matemático para materiais metálicos com dano. São Paulo, 2005.115p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1. Mecânica dos Sólidos 2. Mecânica de Danos

I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II.t.

Dedico esta tese à minha mãe Amanda,
por tudo o que ela me deu
desde o primeiro instante da minha vida.
E ao Dr. Jesús René Haurón, pela a sua confiança
e pelo respeito profissional demonstrado
com relação à minha pessoa.

AGRADECIMENTOS

- Este trabalho foi financiado, num primeiro momento, pela Universidad Católica Nuestra Señora de la Asunción, Sede Regional Itapúa (UCI), Paraguai. Posteriormente passei a receber o financiamento da CNPq. Portanto sou às duas Instituições.
- Ao magnífico Pró-Reitor da UCI Dr. Jesús R. Haurón, que sempre acreditou neste projeto de estudos, e através dele, a todas as pessoas da UCI que me ajudaram a realizar esta tese.
- Ao meu Orientador o Prof. Dr. João Batista de Aguiar, que pacientemente esperou a minha evolução intelectual, e teve a sabedoria de me mostrar o caminho certo a percorrer, para chegar ao amadurecimento intelectual necessário para a elaboração deste trabalho. Certamente este trabalho é só o começo, estou bem animado para prosseguir a pesquisa na área.
- Ao meu colega e amigo Renato Vargas, que compartilhou comigo muitos momentos de conversas bem interessantes sobre Mecânica, História e Filosofia, e pelos momentos de alegria compartilhados com a sua bonita família.
- Aos professores da USP cujas disciplinas cursei e me deram o embasamento necessário para prosseguir o trabalho.
- A todos os meus amigos que compartilharam comigo todo este tempo, e me fizeram sentir uma pessoa socializada.
- A minha mãe Amanda que esteve sempre me apoiando na minha querida terra.

RESUMO

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo matemático para materiais metálicos com dano. A construção do modelo foi feita ao longo do documento, introduzindo primeiramente os conceitos básicos, logo depois as leis gerais, e posteriormente as referentes ao tipo de material a modelar. Depois foi desenvolvida uma lei constitutiva para materiais dúcteis, considerando os fenômenos de elasticidade, plasticidade e degradação do material (dano). A implementação da lei constitutiva foi feita a seguir. Vários resultados numéricos foram obtidos utilizando o modelo implementado no programa ABAQUS. Finalmente, são feitas conclusões e se especifica as contribuições do trabalho.

ABSTRACT

In this work a mathematical model for damaged of metallic materials was developed. The basic model is presented along document, firstly the basic concepts, afterwards the general laws and the specific material studied. Thus, a constitutive law for ductile materials, was developed taking into account the elasticity, plasticity and materials degradation (damage) phenomena. Then, the numerical implementation of the material model was made. Various results were obtained, using the numerical form of the constitutive law, as an user subroutine of the ABAQUS program. Finally, are given the conclusions and the contributions of the work are given.

Sumário

| | | |
|----------|-----------------------------------------------------------|----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 | ESCOPO DO TRABALHO | 3 |
| 1.2 | FORMULAÇÃO DO PROBLEMA | 4 |
| 1.3 | CONSTRUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO | 4 |
| 2 | ELEMENTOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO E DA TER- | |
| | MODINÂMICA | 6 |
| 2.1 | INTRODUÇÃO | 6 |
| 2.2 | CONCEITOS E HIPÓTESES BÁSICOS | 7 |
| 2.2.1 | Corpo | 7 |
| 2.2.2 | Espaço-tempo Euclidiano | 8 |
| 2.2.3 | Sistema de forças | 9 |
| 2.3 | CINEMÁTICA | 9 |
| 2.3.1 | Deslocamento | 10 |
| 2.3.2 | Velocidade | 11 |
| 2.3.3 | Aceleração | 11 |
| 2.3.4 | Rotação | 11 |
| 2.3.5 | Composição de rotações | 12 |
| 2.3.6 | Velocidade angular | 12 |
| 2.3.7 | Aceleração angular | 13 |
| 2.3.8 | Movimento de corpo rígido | 13 |
| 2.3.9 | Gradiente de deformação | 13 |
| 2.3.10 | Razão de extensão (stretching ratio) | 14 |
| 2.3.11 | Decomposição polar do gradiente de deformação | 14 |
| 2.3.12 | Medidas de deformação | 20 |
| 2.3.13 | Taxa de deformação e tensor de rotação material | 22 |
| 2.3.14 | Formulação corotacional | 24 |
| 2.4 | FORÇAS E TENSÕES | 24 |

| | | |
|-------|------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.4.1 | Tensor de Cauchy | 26 |
| 2.4.2 | Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff | 27 |
| 2.4.3 | Segundo tensor de Piola-Kirchhoff | 27 |
| 2.5 | LEIS FUNDAMENTAIS DA TERMODINÂMICA | 29 |
| 2.5.1 | Conservação da massa | 29 |
| 2.5.2 | Conservação do momento linear | 30 |
| 2.5.3 | Conservação do momento angular | 30 |
| 2.5.4 | Conservação da energia (Primeira lei da termodinâmica) | 31 |
| 2.5.5 | Segunda lei da termodinâmica | 32 |
| 2.5.6 | Desigualdade de Clausius-Duhem | 32 |
| 2.6 | CARACTERIZAÇÃO DE MATERIAIS: LEIS CONSTITUTIVAS | 33 |
| 2.6.1 | Axiomas constitutivos | 33 |
| 2.6.2 | Termodinâmica com variáveis internas | 36 |
| 2.6.3 | Medidas objetivas de equações constitutivas | 38 |
| 2.7 | A FORMA FRACA DO EQUILÍBRIO | 39 |
| 2.7.1 | O princípio dos trabalhos virtuais | 39 |
| 2.7.2 | O problema quasi-estático com valor inicial e de contorno | 40 |
| 2.7.3 | Solução do problema quasi-estático com valor inicial e de contorno | 41 |
| 3 | MODELO MATEMÁTICO DO MATERIAL | 44 |
| 3.1 | INTRODUÇÃO | 44 |
| 3.1.1 | Mecânica do dano contínuo | 44 |
| 3.1.2 | Formulação Termodinâmica | 45 |
| 3.2 | ELASTO-PLASTICIDADE COM DANO ANISOTRÓPICO | 47 |
| 3.2.1 | Potencial de dissipação | 48 |
| 3.2.2 | Tensor do efeito de dano | 49 |
| 3.2.3 | Elasticidade | 49 |
| 3.2.4 | Plasticidade | 50 |
| 3.2.5 | Dano do material | 51 |
| 3.3 | EVOLUÇÃO DO DANO | 52 |

| | | |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.3.1 | Dano com endurecimento isotrópico: formulação dependente da tensão | 52 |
| 3.3.1 | Dano com endurecimento isotrópico: formulação dependente da energia | 55 |

4 IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO

| | | |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.1 | INTRODUÇÃO | 58 |
| 4.2 | RELAÇÕES IMPORTANTES | 58 |
| 4.3 | SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EVOLUÇÃO DO DANO | 59 |
| 4.4 | ALGORITMO DO RETORNO | 60 |
| | 4.4.1 Solução numérica da elasto-plasticidade | 61 |
| | 4.4.2 Solução numérica da evolução do dano | 64 |
| | 4.4.3 Casos possíveis | 65 |
| 4.5 | OBTENÇÃO DO JACOBIANO CONSISTENTE (ALGORÍTMICO) | 68 |
| | 4.5.1 Caso (a): Não há variação nem da deformação plástica nem do dano | 68 |
| | 4.5.2 Caso (b): Há variação da deformação plástica e do dano | 68 |
| | 4.5.3 Caso (c): Há variação apenas da deformação plástica | 71 |
| | 4.5.4 Caso (d): Há variação apenas do dano | 73 |

5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

| | | |
|------|-----------------------------------------------|-----|
| 5.1 | PROGRAMA UTILIZADO PARA A SIMULAÇÃO | 76 |
| 5.2 | PROBLEMA 1: ESTAMPAGEM | 78 |
| 5.3 | RESULTADOS | 79 |
| 5.4 | PROBLEMA 2: EXTRUSÃO | 84 |
| 5.5 | RESULTADOS | 87 |
| 5.6 | PROBLEMA 3: ESTTRICÇÃO | 92 |
| 5.7 | RESULTADOS | 95 |
| 5.8 | PROBLEMA 4: RECALQUE | 101 |
| 5.9 | RESULTADOS | 103 |
| 5.10 | DISCUSSÃO | 108 |

6 CONCLUSÕES E CONTRIBUIÇÕES

| | | |
|-----|--------------------------------|-----|
| 6.1 | CONTRIBUIÇÕES | 109 |
| 6.2 | LIMITAÇÕES DO MODELO | 109 |
| 6.3 | CONCLUSÕES | 109 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.1 | Configurações de referência e atual em relação ao mesmo referencial | 10 |
| 2.2 | (a)- Interpretação dos operadores \mathbf{R} e \mathbf{U} (Configuração inicial) | 17 |
| 2.3 | (b)- Interpretação dos operadores \mathbf{R} e \mathbf{U} (Operação \mathbf{U}) | 18 |
| 2.4 | (c)- Interpretação dos operadores \mathbf{R} e \mathbf{U} (Operação \mathbf{R}) | 19 |
| 2.5 | Representação de um vetor \mathbf{a} em forma corotacional. | 25 |
| 2.6 | Tensor de Cauchy: forças superficiais no cubo elementar | 26 |
| 2.7 | Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff | 28 |
| 2.8 | Segundo tensor de Piola-Kirchhoff | 29 |
| 5.1 | Modelo axi-simétrico do conjunto Chapa-Punção-Prensa | 78 |
| 5.2 | Tensão de von Mises para o material sem dano | 79 |
| 5.3 | Tensão de von Mises para o material com dano | 80 |
| 5.4 | Deslocamento na direção 1 para o material sem dano | 81 |
| 5.5 | Deslocamento na direção 1 para o material com dano | 81 |
| 5.6 | Deslocamento na direção 2 para o material sem dano | 82 |
| 5.7 | Deslocamento na direção 2 para o material com dano | 82 |
| 5.8 | Distribuição do dano no material | 83 |
| 5.9 | Modelo axi-simétrico do material a extrudar | 84 |
| 5.10 | Tensão de von Mises para o material sem dano | 87 |
| 5.11 | Tensão de von Mises para o material com dano | 88 |
| 5.12 | Deslocamento na direção 1 para o material sem dano | 89 |
| 5.13 | Deslocamento na direção 1 para o material com dano | 89 |
| 5.14 | Deslocamento na direção 2 para o material sem dano | 90 |
| 5.15 | Deslocamento na direção 2 para o material com dano | 90 |
| 5.16 | Distribuição do dano no material | 91 |
| 5.17 | Modelo axi-simétrico do material a sofrer estrição | 92 |
| 5.18 | Tensão de von Mises para o material sem dano | 95 |
| 5.19 | Tensão de von Mises para o material com dano | 96 |
| 5.20 | Deslocamento na direção 1 para o material sem dano | 97 |
| 5.21 | Deslocamento na direção 1 para o material com dano | 97 |
| 5.22 | Deslocamento na direção 2 para o material sem dano | 98 |
| 5.23 | Deslocamento na direção 2 para o material com dano | 99 |
| 5.24 | Distribuição do dano no material | 99 |
| 5.25 | Modelo axi-simétrico do material a sofrer recalque | 101 |
| 5.26 | Tensão de von Mises para o material sem dano | 103 |
| 5.27 | Tensão de von Mises para o material com dano | 104 |
| 5.28 | Deslocamento na direção 1 para o material sem dano | 105 |
| 5.29 | Deslocamento na direção 1 para o material com dano | 105 |
| 5.30 | Deslocamento na direção 1 para o material sem dano | 106 |
| 5.31 | Deslocamento na direção 1 para o material com dano | 106 |
| 5.32 | Distribuição do dano no material | 107 |

Lista de Tabelas

| | | |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1 | Deformações e tensões sem variação do módulo elástico | 78 |
| 5.2 | Deformações e tensões com variação do módulo elástico | 79 |
| 5.3 | Deformações e tensões sem variação do módulo elástico e com variação da temperatura | 85 |
| 5.4 | Deformações e tensões com variação do módulo elástico e temperatura | 86 |
| 5.5 | Deformações e tensões sem variação do módulo elástico e com variação da temperatura | 93 |
| 5.6 | Deformações e tensões com variação do módulo elástico e temperatura | 94 |
| 5.7 | Deformações e tensões sem variação do módulo elástico e com variação da temperatura | 102 |
| 5.8 | Deformações e tensões com variação do módulo elástico e temperatura | 102 |

LISTA DE SÍMBOLOS

- \mathfrak{B} = Corpo.
 \mathcal{P} = Parte do corpo \mathfrak{B} .
 X = Partículas.
 \mathbf{X} = Posição da partícula X na configuração de referência.
 \mathbf{x} = Posição da partícula X na configuração atual.
 \mathcal{E} = Espaço Euclidiano.
 \mathfrak{R} = Região do espaço Euclidiano \mathcal{E} .
 Ω = Conjunto aberto em \mathfrak{R} .
 $\partial\Omega$ = Fronteira de Ω .
 $\hat{\mathbf{x}}_0$ = Configuração de referência.
 \mathbf{I} = Tensor de identidade de segunda ordem.
 $\mathbf{1}$ = Tensor de identidade de quarta ordem.
 \mathbf{u} = Deslocamento.
 $(\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}})$ = Velocidade linear.
 $\ddot{\mathbf{x}}$ = Aceleração linear.
 $\nabla_{\mathbf{x}}(\cdot)$ = Gradiente espacial de (\cdot) .
 $\nabla(\cdot)$ = Gradiente material de (\cdot) .
 $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\cdot)$ = Divergente espacial de (\cdot) .
 $\nabla \cdot (\cdot)$ = Divergente material de (\cdot) .
 \mathbf{t} = Força superficial.
 \mathbf{b} = Força volumétrica.
 $\hat{\Theta}$ = Tensor das rotações.
 Θ = Vetor axial de $\hat{\Theta}$.
 \mathbf{l} = Eixo de rotação de $\hat{\Theta}$.
 θ = Ângulo de rotação em radianos.
 \mathbf{Q} = Matriz de rotação.
 \mathbf{R} = Rotação das direções principais do tensor das deformações.
 \mathbf{W} = Tensor das rotações materiais (spin)
 Ω = Velocidade angular.
 ω = Vetor axial de Ω .
 $\dot{\Omega}$ = Aceleração angular.
 $\dot{\omega}$ = Vetor axial de $\dot{\Omega}$.
 \mathbf{x}_T = Translação.
 \mathbf{F} = Gradiente de deformação.

$J = \det(\mathbf{F})$.

$\lambda =$ Razão de extensão (stretching ratio).

$\mathbf{N}_i =$ Vetor unitário na direção principal na configuração de referência.

$\mathbf{n}_i =$ Vetor unitário na direção principal na configuração atual.

$\mathbf{V} =$ Tensor de deformação esquerdo.

$\mathbf{U} =$ Tensor de deformação direito.

$\varepsilon_n =$ Deformação unidimensional.

$\varepsilon =$ Tensor de deformação qualquer.

$\varepsilon_G =$ Tensor de deformação de Green-Lagrange.

$\mathbf{L} =$ Gradiente de velocidade.

$\mathbf{D} =$ Taxa de deformação.

$\mathbf{B} =$ Tensor de deformação esquerdo de Cauchy-Green $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$.

$\{I_1, I_2, I_3\} =$ Invariantes de um tensor de segunda ordem.

$\{J_1, J_2, J_3\} =$ Invariantes da parte deviatórica de um tensor de segunda ordem.

$\tilde{\mathbf{a}} =$ Vetor \mathbf{a} na base corrotacional.

$\boldsymbol{\sigma} =$ Tensor de tensões de Cauchy.

$\mathbf{P} =$ Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff.

$\mathbf{S} =$ Segundo tensor de Piola-Kirchhoff.

$\mathbf{T} =$ Tensor de tensões qualquer.

$m =$ Massa do corpo \mathfrak{B} .

$\rho =$ Densidade do corpo \mathfrak{B} .

$\mathbf{f} =$ Forças externas sobre \mathfrak{B} .

$\mathbf{p} =$ Momento linear.

$\mathbf{m} =$ Momento angular.

$E =$ Energia interna.

$e =$ Energia interna por unidade de volume.

$K =$ Energia cinética.

$Q =$ Taxa de recepção de calor.

$r =$ Taxa de produção de calor.

$\mathbf{q} =$ Fluxo de calor pela fronteira do corpo \mathfrak{B} .

$P =$ Potência das forças externas.

$Q_s =$ Limite superior da taxa de produção de calor.

$S =$ Entropia.

$s =$ Entropia por unidade de massa.

$T =$ Temperatura absoluta.

$\psi =$ Função energia livre.

g = Gradiente espacial de temperatura.

W_T = Potência não cinemática.

F_0 = Gradiente de deformação entre duas configurações de referência.

α = Conjunto das variáveis internas.

Π = Potencial de dissipação.

$(.)^\nabla$ = Taxa objetiva de derivação de leis constitutivas (derivação corotacional).

$(.)^{\nabla J}$ = Taxa corotacional de Jaumann.

$(.)^{\nabla G}$ = Taxa corotacional de Green-Naghdi.

$(.)^{\nabla T}$ = Taxa corotacional de Truesdell.

ε_e = Componente elástica do tensor de deformações ε .

Obs: os índices repetidos correspondem às somas, a menos que se afirme *in situ* outra coisa.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A engenharia é uma especialidade que se coloca como nexos entre a ciência e a tecnologia, por isso ela se preocupou em criar as leis que regem os fenômenos envolvidos nas diferentes situações decorrentes da sua atividade, tais como: o desenho e implementação de processos, projeto de máquinas e a construção das mesmas. Foi assim [48] que a atividade do engenheiro estava baseada principalmente na observação, na experimentação e no acúmulo da experiência a partir destas atividades. Esta metodologia, porém, tem duas desvantagens principais: o alto custo dos experimentos e a dificuldade de transmissão dos conhecimentos empíricos, exigindo um longo período de tempo para a projeção e implementação dos diferentes projetos.

A utilização dos computadores digitais, a sua rápida evolução e o baixo custo destas máquinas, permitiram a ampla difusão do uso dos *modelos matemáticos* complexos, podendo ser resolvidos, em forma aproximada, através dos denominados *métodos numéricos*, criados muito tempo antes deste período, mas que teve grande impulso a partir do que pode ser denominado como a *era da informática*. As ferramentas numéricas são muito variadas, mas na simulação de processos envolvendo sólidos o *Método dos Elementos Finitos* tem uma ampla aceitação.

De uma maneira bem geral, pode-se dizer que o *modelo matemático* consiste de um conjunto de correlações que refletem uma situação real [48]. Geralmente estas correlações são expressas através de operadores matemáticos, envolvendo certos parâmetros, conjunto de dados iniciais e um conjunto de resultados numéricos. Em outras palavras, converter em fórmulas matemáticas uma determinada situação real (ou abstrata) que está descrita de forma quantitativa.

Podem ser encontrados excelentes textos que tratam sobre a modelagem, e.g. Bellomo et al. (1995) [9].

Existe um importante problema relativo à relação entre a *experimentação*, o *modelo*

matemático e a interpretação convencional que precisa ser analisado com maior cuidado.

Basicamente, o *modelo*, sendo um objeto matemático, depende da estrutura matemática subjacente. A *interpretação* consiste em estudar a relação entre os *parâmetros envolvidos*, e por conseguinte, as *conclusões do modelo* e os *observáveis* no domínio considerado.

Evidentemente, podem acontecer perturbações tanto no *modelo*, quanto na *experimentação* e na *interpretação*.

Quando se assume que há variação apenas no *modelo* tem-se o problema da *estabilidade estrutural*. O problema da estabilidade estrutural do modelo matemático está sendo abordado por uma grande quantidade de pesquisadores de diferentes áreas. Tal problema começou a ser estudado a partir do trabalho de H. Poincaré em 1889 apud Abraham et al. [1], e no Brasil houve uma participação pioneira com os trabalhos de M. Peixoto e outros, a partir da década de 1950 ??.

A *perturbação* do modelo não é um problema puramente teórico, considerando que estas perturbações acontecem sempre, e estão associados com o *grau de incerteza* subjacentes nos dados fornecidos. Neste sentido, o que se tenta determinar é o *grau de sensibilidade* do modelo às perturbações sofridas. Se é considerado, por exemplo, uma equação diferencial com coeficientes constantes, estes coeficientes serão obtidos a partir de dados experimentais, que contém um grau de incerteza característico do processo de medição. O que se quer determinar, neste caso, é se pequenas variações nos valores desses coeficientes, ocasionam também pequenas variações na resposta do modelo. Se isso acontecer, diz-se que o modelo é *estruturalmente estável*, caso contrário, tem-se uma *instabilidade estrutural* e o modelo não será apto para representar o fenômeno que se deseja estudar.

O estudo qualitativo do relacionamento *modelo-experimento-interpretação* tem uma importância fundamental na Mecânica. De acordo com Abraham e Marsden (1978), [1] a história da pesquisa em Mecânica foi marcada por três importantes etapas. A primeira, foi a *era qualitativa* que culmina com os trabalhos de Kepler e Galileu. A segunda, uma *era quantitativa* que compreende o período (1687-1889) marcado pelos trabalhos de Newton, Euler, Lagrange, Laplace, Hamilton e Jacobi. A terceira, a *era neo-quantitativa* começa em 1889 com o trabalho de H. Poincaré. Na opinião de Abraham e Marsden, a crise que causou o início da *era neo-quantitativa* é comparável à crise associada à Teoria da Relatividade e à Mecânica Quântica, e a importância do trabalho pioneiro de H. Poincaré comparável ao Cálculo Diferencial e Integral, às Equações Diferenciais e ao Cálculo Variacional.

Denominando de *Mecânica Computacional*, ao ramo da Mecânica que desenvolve as atividades próprias do engenheiro com o auxílio do computador. Pode-se dizer que este ramo exige cada vez mais conhecimentos matemáticos, e precisa testar, a todo momento, os resultados obtidos através da comparação com os dados experimentais, até que os resultados sejam suficientemente confiáveis, i.e., até que o modelo seja suficientemente robusto. É assim que o estudo dos sistemas dinâmicos, análise funcional, análise harmônica, análise tensorial etc. são ramos da matemática que hoje são fundamentais na formação do engenheiro.

Neste ponto, é fácil achar uma variedade muito grande de aplicações da *Mecânica Computacional*. Por exemplo, a automação de um processo de fabricação, desenvolvido com uma quantidade mínima de tentativas e erros, exige o desenvolvimento da tecnologia CAD/CAM (Computer Aided Design/Computer Aided Manufacturing). Desta forma, podem ser testados novos processos, materiais, geometrias etc. com rapidez, baixo custo e grande eficiência [63]. Tudo isto justifica o uso intensivo das técnicas computacionais, o que exige a construção prévia de modelos matemáticos adequados.

No Brasil, a abundância de minérios, o custo da energia (cada vez mais alto), a necessidade de colocar valor agregado aos produtos de exportação para equilibrar a balança comercial, o alavancamento de uma tecnologia nacional eficiente em concordância com o volume de produção do país, e por fim, a necessidade de facilitar a cooperação Universidade-Empresa, justifica a construção de modelos matemáticos utilizáveis na indústria nacional. Nesse sentido, é freqüentemente mencionado a grande dificuldade existente na transferência dos conhecimentos avançados da Universidade à Empresa, refletido na escassez de patentes. É necessário portanto a realização de pesquisas cuja utilização extensiva nas indústrias locais seja possível.

1.1 ESCOPO DO TRABALHO

Este trabalho objetiva construir um modelo matemático que leva em conta a elasto-plasticidade e o dano na caracterização de materiais deformáveis.

Ainda, implementar o modelo em um programa computacional para a sua utilização na resolução de problemas da engenharia, relacionados com materiais dúcteis (especialmente metais dúcteis) e processos que envolvem grandes deformações.

1.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Existe uma grande necessidade das empresas que trabalham na fabricação de produtos, tais como a indústria automotiva e naval, de caracterizar convenientemente as peças para evitar a ocorrência de algum tipo defeito.

Os programas computacionais vem penetrando na industria com maior força a partir de esta década. É assim que a tecnologia CAD/CAM auxilia a maioria das atividades de projeto, fabricação e controle dos produtos. Uma das limitações dos programas estruturais, tais como o ANSYS e o ABAQUS, é a carência de uma ferramenta mais moderna para o estudo da falha do material. Faz-se necessário então, a construção de um modelo matemático que possa preencher essa lacuna, e assim, ajudar o desenvolvimento das indústrias que lidam diariamente com problemas estruturais.

A maioria dos consultores da area estrutural, adotam o critério de von Mises para determinar a segurança da estrutura, perdendo de vista outros possíveis causantes da instabilidade estrutural, considerando critérios estáticos. A Mecânica do Dano Contínuo, possui um enorme potencial para auxiliar a estes consultores a resolver problemas de instabilidade bem complexos. O alto custo das falhas estruturais justifica plenamente a elaboração de uma lei constitutiva com potencialidade para a aplicação na indústria.

1.3 CONSTRUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

A construção do modelo matemático é feita através de vários passos. Típicamente, a modelagem matemática é realizada segundo a seguinte seqüência:

1. Início.
2. Colocação do problema.
3. Criação do esquema de fenômenos.
4. Elaboração do modelo matemático.
5. Criação do algoritmo.
6. Elaboração do programa.
7. Validação do modelo matemático.
8. Execução das pesquisas numéricas.
9. Fim.

Como se poderá ver, o processo de modelagem neste trabalho foi levado a cabo através de vários capítulos:

- No Capítulo 1 se faz a formulação do problema.
- No Capítulo 2 são determinadas as leis gerais, válidas para qualquer material, utilizando o contínuo numérico para representar o material a deformar. Posteriormente, são discutidas as características gerais das leis constitutivas a serem desenvolvidas. Por fim, são colocadas estas leis numa forma conveniente (forma variacional) e se mostra a maneira em que serão resolvidas numericamente (Método dos Elementos Finitos).
- No Capítulo 3 é obtido o modelo elasto-plástico com dano anisotrópico.
- No Capítulo 4 realiza-se a implementação numérica.
- No Capítulo 5 é feita a avaliação do modelo resolvendo 4 problemas típicos.
- Finalmente, no capítulo 6 são colocadas as conclusões obtidas a partir do modelo mostrando as sua potencialidade e limitações.

Capítulo 2

ELEMENTOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO E DA TERMODINÂMICA

2.1 INTRODUÇÃO

Tem sido propostos diferentes abordagens pelos pesquisadores com o objetivo de representar os problemas mecânicos através de uma formulação, cuja resolução forneça uma descrição aproximada destes problemas. Mesmo antes da construção da teoria atômica, esta tarefa tem sido feita e assim nasceu a chamada termodinâmica, que consiste numa teoria macromecânica que tem mostrado muita eficiência na resolução destes problemas. Existem três principais tratados da termodinâmica que decrivem processos fora do equilíbrio termodinâmico, a seguir [72]: Termodinâmica Clássica de Processos Irreversíveis (TCI), Termodinâmica Racional (TR) e Termodinâmica Clássica de Processos Irreversíveis Extendida (TCE).

A TCI tem sido originada a partir dos trabalhos de Osanger (1931) com quem colaborou posteriormente Prigogine (1947, 1961) para a elaboração desta teoria. A principal limitação desta teoria corresponde ao fato de não poder modelar materiais com memória (i.e. dependentes da história da deformação), e ser inapropriado para modelar processos distantes do equilíbrio termodinâmico. O fato de assumir que a causa e o efeito são simultaneos é outra severa restrição desta teoria.

A TR foi originada pelos trabalhos de Truesdell, Noll e Coleman na década de 1960. Esta teoria utiliza uma formulação eminentemente variacional e constitui numa teoria determinística, podendo modelar portanto processos dependentes de

uma história. Porém, a complexidade matemática desta teoria dificulta a sua resolução numérica e mesmo a sua compreensão, o que o torna menos prático.

A TCE constitui um esforço para resolver as limitações da TCI, mas o seu uso também é restrito devido à sua complexidade.

É claro que os problemas termo-mecânicos podem ser estudados através de teorias não macroscópicas como a Mecânica Estatística, mas o grande desenvolvimento na elaboração de teorias termodinâmicas permite a resolução dos problemas termo-mecânicos em forma eficiente, através do uso de métodos numéricos adequados (e.g. Método dos Elementos Finitos). Neste trabalho utiliza-se a Termodinâmica com Variáveis Internas (TVI) e tal teoria será abordada com mais detalhes neste capítulo. A Mecânica dos Meios Contínuos (MMC) consiste essencialmente na idealização, e posterior formalização de corpos materiais que sofrem a influência de forças e de fenômenos térmicos [37].

Existem tratados clássicos (e.g. Truesdell et al., 1965 [82]; Gurtin, 1981 [38]) que realizam esta idealização em forma detalhada e completa. Truesdell [80] propõe a seguinte seqüência:

1. Obtenção dos conceitos básicos.
2. Enunciação das leis gerais (válidas para qualquer material).
3. Caracterização do material (leis constitutivas).

Os conceitos básicos propostos por Truesdell são: Corpo, Espaço-Tempo Euclidiano e Sistema de Forças. A formalização destes conceitos é feita [87] através de teorias matemáticas adequadas (e.g. Teoria da Medida, Topologia Diferencial) onde se associa o contínuo matemático ao conceito de Corpo. Esta construção teórica é denominada de Mecânica Racional (MR).

Neste trabalho será feita uma construção mais simples, da base teórica da MMC, mantendo a ordem da proposta de Truesdell [80].

2.2 CONCEITOS E HIPÓTESES BÁSICOS

2.2.1 Corpo

Um corpo \mathfrak{B} é uma variedade tridimensional, com contornos suficientemente suaves onde os elementos são chamados de partículas X . Porém, para os propósitos deste

trabalho é suficiente considerar o espaço Euclidiano.

É necessário ter algum critério para poder atribuir uma grandeza ao corpo. Atribui-se ao corpo um volume, uma área, etc., e outras grandezas físicas como massa, e velocidade. Existe um formalismo chamado teoria da medida, que permite fazer um tratamento adequado disso. Porém, considerando corpos com contornos suficientemente suaves e funções bem comportadas, é possível simplificar bastante a teoria e utilizar os conceitos habituais do cálculo diferencial e integral (Riemannianos), assumindo como conceitos primitivos as grandezas mencionadas.

2.2.2 Espaço-tempo Euclidiano

A estrutura de espaço Euclidiano \mathcal{E} é necessária para permitir o uso de conceitos como convergência, continuidade etc.

Os elementos do Espaço Euclidiano são os pontos $\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Sabendo que esta estrutura é independente do tempo, é feito um mapeamento do corpo \mathfrak{B} numa região $\mathfrak{R} \subset \mathcal{E}$ do Espaço Euclidiano. A região ocupada pelo corpo no Espaço é denominada configuração (i.e. o homeomorfismo de \mathfrak{B} numa região \mathfrak{R} do Espaço Euclidiano tridimensional). Isto pode ser expresso através da função

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(X) \tag{2.1}$$

A função anterior deve ser injetora para que o corpo obedeça as leis de conservação da massa e impenetrabilidade dos corpos.

Mais formalmente, $\hat{\mathbf{x}} : X \in \mathfrak{B} \rightarrow \mathbf{x} \in \mathfrak{R}$.

Admite-se também a existência da inversa da função $\hat{\mathbf{x}}$ denotada através da expressão $\hat{\mathbf{x}}^{-1}$. Desta forma, resumindo se tem: X é uma partícula, enquanto que \mathbf{x} é o lugar ocupado pela partícula numa configuração, sendo $\hat{\mathbf{x}}(\mathfrak{B})$ a configuração.

Para introduzir o conceito de tempo admite-se que cada configuração está associada a um tempo $t, t \in \mathbb{R}$. Cada par resultante (X, t) corresponde a uma observação do corpo na estrutura espaço-temporal denominado Espaço-Tempo Euclidiano.

Considerando uma seqüência (seqüência generalizada) de configurações tem-se o movimento do corpo o que pode ser expresso através da relação

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(X, t) \tag{2.2}$$

onde $\hat{\mathbf{x}}$ é um homeomorfismo continuamente diferenciável (difeomorfismo) para cada t .

Maiores detalhes sobre a cinemática serão feitos posteriormente neste trabalho. Efeitos relativísticos não serão levados em conta e será admitida a existência de sistemas de referências inerciais.

2.2.3 Sistema de forças

Muito antes do conhecimento da natureza atômica da matéria surgiu uma classificação das forças em: forças de contato e de campo. As forças de contato atuam sobre superfícies (forças superficiais) enquanto que as forças de campo sobre todas as partículas do corpo (forças volumétricas).

Para cada tempo t é associado um campo vetorial $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ para cada \mathbf{x} , na região ocupada pelo corpo \mathfrak{B} no instante t , i.e. em $\hat{\mathbf{x}}(\mathfrak{B}, t)$.

Seja $\mathcal{P} \subset \mathfrak{B}$ onde \mathcal{P} é uma parte de \mathfrak{B} . O vetor $\mathbf{b}(\mathcal{P})$ definido através da expressão

$$\mathbf{b}(\mathcal{P}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} dV, \quad \Omega \subset \mathfrak{R} \quad (2.3)$$

é denominado resultante das forças externas aplicadas sobre a parte \mathcal{P} do corpo \mathfrak{B} no instante t , na configuração $\hat{\mathbf{x}}$.

Similarmente, para cada tempo t é associado um campo vetorial $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ para cada \mathbf{x} , no contorno $\partial\mathcal{P}$ de cada parte \mathcal{P} da região ocupada pelo corpo \mathfrak{B} no instante t .

O vetor $\mathbf{t}(\mathcal{P})$ definido através da expressão

$$\mathbf{t}(\mathcal{P}) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} dS \quad (2.4)$$

é denominado resultante das forças de contato aplicadas sobre o contorno $\partial\mathcal{P}$ do corpo \mathfrak{B} no instante t , na configuração $\hat{\mathbf{x}}$.

A mecânica consiste na combinação destes três conceitos: corpo, movimento e força [80]. Neste capítulo será feita uma descrição da interação destes conceitos.

2.3 CINEMÁTICA

Escolhendo uma configuração fixa $\hat{\mathbf{x}}_0$, denominado configuração de referência, designa-se à posição de uma partícula X pela expressão $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{x}}_0(X)$. A configuração $\hat{\mathbf{x}}_0$ pode ser (mas não necessariamente) uma configuração realmente ocupada pelo corpo durante o movimento.

Assim, se tem $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}_0^{-1}(\mathbf{X}), t)$ ao invés de $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(X, t)$, i.e. é substituindo a

partícula pela sua posição na configuração de referência. Assim \mathbf{X} atua como se fosse uma etiqueta da partícula X e é denominado daqui em mais a *partícula X*, e os mapeamentos dependentes da variável \mathbf{X} são denominados *material* ou Lagrangiano.

Quando a variável independente for a posição \mathbf{x} da partícula X num tempo t , se tem uma descrição *espacial* ou Euleriana do movimento.

Usando um sistema de referência cartesiano tem-se

$$x_i = \hat{x}_i(X_1, X_2, X_3) \quad (2.5)$$

onde $x_i, i = 1, 2, 3$ são as coordenadas espaciais, enquanto que $X_j, j = 1, 2, 3$ são as coordenadas materiais.

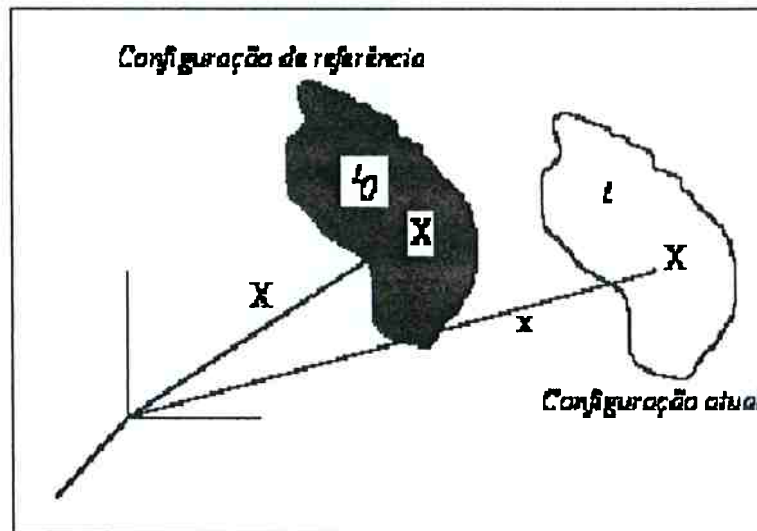


Figura 2.1: Configurações de referência e atual em relação ao mesmo referencial.

2.3.1 Deslocamento

O deslocamento de uma partícula X , é definido através da equação

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.6)$$

2.3.2 Velocidade

A velocidade de uma partícula \mathbf{X} é definida através da expressão

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial t}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} \right) + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial t} \\ &= \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde $\nabla_{\mathbf{x}}$ é o operador gradiente espacial (o operador gradiente material é escrito sem sub-índices, i.e. simplesmente ∇) e $\mathbf{v} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ é o vetor velocidade.

Na equação (2.7) $\nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}$ mede a variação da velocidade com a variação das posições (termo convectivo) e $\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial t}$ é a velocidade medida numa coordenada fixa.

2.3.3 Aceleração

A aceleração de uma partícula \mathbf{X} é definida através da expressão

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{x}}}{\partial t^2} = \nabla_{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial t} \quad (2.8)$$

2.3.4 Rotação

Uma rotação pode ser caracterizada por um vetor Θ cuja direção determina o eixo da rotação $\mathbf{l} = \frac{\Theta}{\|\Theta\|}$, e cujo módulo $\theta = \|\Theta\|$ é o angulo de rotação, i.e. uma rotação Θ é uma rotação de θ radianos ao redor do eixo \mathbf{l} . Tal rotação também pode ser caracterizada por uma transformação ortogonal (matriz de rotação). Define-se então a matriz antisimétrica $\hat{\Theta}$ associada ao vetor Θ através da relação seguinte

$$\hat{\Theta} \cdot \Theta = \mathbf{0}, \quad \text{e} \quad \hat{\Theta} \cdot \mathbf{a} = \Theta \times \mathbf{a}, \forall \mathbf{a} \quad (2.9)$$

onde Θ é denominado *vetor axial* da matriz antisimétrica $\hat{\Theta}$. Se o vetor axial Θ é definido através dos seus componentes relativos a uma base, i.e. $\Theta = \{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}^T$, então a transformação ortogonal será dada pela expressão

$$\hat{\Theta} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta^3 & \theta^2 \\ \theta^3 & 0 & -\theta^1 \\ -\theta^2 & \theta^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Ademais, a exponencial de uma matriz antisimétrica $\hat{\Theta}$ é uma matriz ortogonal que produce uma rotação finita Θ .

Seja Q uma matriz de rotação, tal que $Q^T = Q^{-1}$, então por definição se tem

$$Q = \exp[\hat{\Theta}] = I + \hat{\Theta} + \frac{1}{2!} \hat{\Theta}^2 + \dots \quad (2.11)$$

a que pode ser expressa através da equação de Euler-Rodrigues

$$Q = \exp[\hat{\Theta}] = \cos(\theta)I + \frac{\sin\theta}{\theta} \hat{\Theta} + \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} \Theta \Theta \quad (2.12)$$

2.3.5 Composição de rotações

Uma composição de rotações é a sucessiva aplicação de duas ou mais rotações. Para problemas geometricamente lineares, uma composição pode ser obtida pela superposição das rotações (linearização). Sejam Θ_1 e Θ_2 duas rotações infinitesimais, então essas rotações podem ser expressas através das expressões

$$Q_1 = \exp[\hat{\Theta}_1] \approx I + \hat{\Theta}_1, \quad Q_2 = \exp[\hat{\Theta}_2] \approx I + \hat{\Theta}_2$$

de onde

$$Q_2 \cdot Q_1 = \exp[\hat{\Theta}_1] \cdot \exp[\hat{\Theta}_2] \approx \exp[\hat{\Theta}_2] \cdot \exp[\hat{\Theta}_1] \approx I + \hat{\Theta}_1 + \hat{\Theta}_2$$

o que indica que para rotações infinitesimais a composição de rotações é aditiva e comutativa. Para rotações finitas porém, a composição não é comutativa (com exceção de rotações com o mesmo eixo).

Um desenvolvimento similar pode ser feito usando quaternions. Para maiores detalhes pode ser consultado [41].

2.3.6 Velocidade angular

O tensor de velocidades angulares Ω associado ao tensor $Q(t)$ é definido por meio de

$$\Omega = \dot{Q}Q^T \quad (2.13)$$

onde Ω é um tensor antisimétrico, ou seja

$$\Omega^T = -\Omega$$

e o vetor axial é ω .

2.3.7 Aceleração angular

O tensor das acelerações angulares é definido através da expressão

$$\dot{\Omega} = \frac{\partial}{\partial t}(\Omega) = \ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T - \Omega^2 \quad (2.14)$$

$\dot{\Omega}$ é um tensor antisimétrico e o vetor axial é $\dot{\omega}$.

2.3.8 Movimento de corpo rígido

O movimento de corpo rígido pode ser caracterizado por uma translação \mathbf{x}_T e uma rotação ao redor da origem \mathbf{Q} segundo a equação

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{x}_T \quad (2.15)$$

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t), \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t), \mathbf{x}_T = \mathbf{x}_T(t)$$

o que indica que tanto \mathbf{Q} quanto \mathbf{x}_T não dependem do ponto material. As componentes de \mathbf{x} estarão dadas portanto pela equação

$$x_i = Q_{ij}X_j + x_{T_i} \quad (2.16)$$

Pode ser mostrado que o movimento do corpo rígido (2.15) preserva distâncias.

Derivando (2.15) em relação ao tempo obtém-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{X} + \dot{\mathbf{x}}_T \quad (2.17)$$

e através da mesma equação (2.15) obtém-se

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_T) + \dot{\mathbf{x}}^T = \Omega \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_T) + \dot{\mathbf{x}}^T \quad (2.18)$$

2.3.9 Gradiente de deformação

O gradiente de deformação no ponto \mathbf{x} é uma transformação linear definida através da equação

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_{\mathbf{x}} \quad (2.19)$$

Utilizando a equação (2.6) o gradiente de deformação tem a forma

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \mathbf{I} \quad (2.20)$$

Fazendo uso da regra da cadeia se pode escrever

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.21)$$

o que mostra que \mathbf{F} transforma $d\mathbf{X}$ em $d\mathbf{x}$, onde $d\mathbf{X}$ e $d\mathbf{x}$ são vetores materiais nas configurações de referência e atual respectivamente, o que justifica a denominação "gradiente de deformação".

A determinante da matriz \mathbf{F} pode ser interpretado como o quociente entre o volume do corpo deformado na configuração atual e de referência, i.e.

$$J = \det(\mathbf{F}) = \frac{dV}{dV_0}$$

onde V é o volume na configuração atual e V_0 o volume na configuração de referência. Se pode concluir a partir da sua definição, que para qualquer deformação $J > 0$, e $J = 1$ quando o corpo não sofre deformação.

2.3.10 Razão de extensão (stretching ratio)

Chama-se razão de extensão de um vetor material $d\mathbf{X}$ à grandeza

$$\lambda = \frac{\|d\mathbf{x}\|}{\|d\mathbf{X}\|} = \frac{\sqrt{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}}{\sqrt{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}}}, \lambda > 0 \quad (2.22)$$

Portanto, para $0 < \lambda < 1$ tem-se uma contração, para $\lambda > 1$ uma extensão e finalmente para $\lambda = 1$ nenhuma deformação.

2.3.11 Decomposição polar do gradiente de deformação

Usando a equação (2.21) se pode escrever

$$d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} = d\mathbf{X}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (2.23)$$

e introduzindo na equação (2.22) obtém-se

$$\lambda^2 = \frac{d\mathbf{X}^T}{\sqrt{d\mathbf{X}^T d\mathbf{X}}} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \frac{d\mathbf{X}}{\sqrt{d\mathbf{X}^T d\mathbf{X}}} = \mathbf{N}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{N} \quad (2.24)$$

onde \mathbf{N} é o vetor unitário na direção do vetor $d\mathbf{X}$.

A equação (2.24) mostra a razão de extensão associada com uma direção \mathbf{N} para qualquer ponto material definido por \mathbf{X} ou \mathbf{x} . Um resultado muito importante obtém-se quando se faz variar a direção definida por \mathbf{N} e procura-se o valor estacionário da razão de deformação. Tem-se então o seguinte problema: achar o valor estacionário de

$$\lambda^2 = \mathbf{N}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{N}$$

sendo

$$\mathbf{N}^T \mathbf{N} = 1$$

O problema torna-se num problema de autovalores e pode ser expresso pela equação

$$(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \lambda^2) \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (2.25)$$

De acordo com a definição de λ se pode concluir que $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ é definido positivo. A equação (2.25) fornece os valores $\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III}$ denominados *valores principais da deformação* e os autovetores correspondentes $\mathbf{N}_I, \mathbf{N}_{II}, \mathbf{N}_{III}$ (que devem ser ortogonais no caso de que os autovalores sejam diferentes e caso contrário, podem ser ortogonalizados) determinam as *direções principais* da deformação.

As direções principais na configuração atual correspondentes a $\mathbf{N}_I, \mathbf{N}_{II}, \mathbf{N}_{III}$ são $\mathbf{n}_I, \mathbf{n}_{II}, \mathbf{n}_{III}$ e através da equação (2.22) obtém-se

$$\mathbf{n}_I = \frac{1}{\lambda_I} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_I \quad (2.26)$$

Devido a que $\mathbf{n}_I, \mathbf{n}_{II}, \mathbf{n}_{III}$ são vetores unitários se pode escrever

$$\mathbf{n}_I = \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_I, \quad \mathbf{n}_{II} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_{II}, \quad \mathbf{n}_{III} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_{III} \quad (2.27)$$

onde \mathbf{R} é a matriz de rotação.

A equação (2.27) permite dizer que uma vez achadas as direções principais do gradiente de deformação se terá conseguido isolar deformações e movimento do corpo rígido na vizinhança de um ponto material. É possível escrever portanto as componentes do vetor $d\mathbf{X}$ em relação às direções principais, deste modo se tem

$$d\mathbf{X} = d\mathbf{X}_I + d\mathbf{X}_{II} + d\mathbf{X}_{III}$$

onde

$$d\mathbf{X}_I = \mathbf{N}_I \mathbf{N}_I^T d\mathbf{X}, \quad d\mathbf{X}_{II} = \mathbf{N}_{II} \mathbf{N}_{II}^T d\mathbf{X}, \quad d\mathbf{X}_{III} = \mathbf{N}_{III} \mathbf{N}_{III}^T d\mathbf{X}$$

Sendo $d\mathbf{X}_I$ a componente da linha material na direção \mathbf{N}_I , a mesma linha terá uma extensão λ_I na direção \mathbf{n}_I , o que é expressa pela equação

$$dx_I = \lambda_I \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}_I$$

Similarmente se tem

$$dx_{II} = \lambda_{II} \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}_{II}$$

e

$$dx_{III} = \lambda_{III} \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X}_{III}$$

Da mesma forma, se pode escrever a equação seguinte

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{x}_I + d\mathbf{x}_{II} + d\mathbf{x}_{III}$$

de onde é obtido

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \lambda_I \mathbf{R} \cdot \mathbf{X}_I + \lambda_{II} \mathbf{R} \cdot \mathbf{X}_{II} + \lambda_{III} \mathbf{R} \cdot \mathbf{X}_{III} \\ &= (\lambda_I \mathbf{R} \mathbf{N}_I \mathbf{N}_I^T + \lambda_{II} \mathbf{R} \mathbf{N}_{II} \mathbf{N}_{II}^T + \lambda_{III} \mathbf{R} \mathbf{N}_{III} \mathbf{N}_{III}^T) d\mathbf{X} \\ &= (\lambda_I \mathbf{n}_I \mathbf{N}_I^T + \lambda_{II} \mathbf{n}_{II} \mathbf{N}_{II}^T + \lambda_{III} \mathbf{n}_{III} \mathbf{N}_{III}^T) d\mathbf{X} \\ &= (\lambda_I \mathbf{n}_I \mathbf{n}_I^T + \lambda_{II} \mathbf{n}_{II} \mathbf{n}_{II}^T + \lambda_{III} \mathbf{n}_{III} \mathbf{n}_{III}^T) \mathbf{R} d\mathbf{X} \end{aligned}$$

o que pode ser expresso na forma seguinte

$$d\mathbf{x} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.28)$$

onde

$$\mathbf{V} = \lambda_I \mathbf{n}_I \otimes \mathbf{n}_I + \lambda_{II} \mathbf{n}_{II} \otimes \mathbf{n}_{II} + \lambda_{III} \mathbf{n}_{III} \otimes \mathbf{n}_{III} \quad (2.29)$$

é o *tensor de deformação esquerdo*. Comparando (2.21) e (2.28) tem-se

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (2.30)$$

denominado *decomposição polar* do gradiente de deformação.

Se ao invés da base $\mathbf{n}_I, \mathbf{n}_{II}, \mathbf{n}_{III}$ é adotado $\mathbf{N}_I, \mathbf{N}_{II}, \mathbf{N}_{III}$, pode ser obtida uma outra decomposição do gradiente de deformação

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \quad (2.31)$$

onde \mathbf{U} é o *tensor de deformação direito*. Tanto \mathbf{V} quanto \mathbf{U} são simétricos e definido positivos, enquanto que \mathbf{R} é antisimétrico com determinante unitário.

A equação (2.30) mostra que quando se passa de uma configuração a outra, o movimento pode ser decomposto num movimento rígido seguido de uma extensão, ou numa extensão seguida de um movimento rígido na equação (2.31). Más especificamente, \mathbf{F} define completamente o movimento relativo das partículas materiais numa vizinhança infinitesimal de um ponto material (partícula). Para uma partícula situada em \mathbf{X} na configuração de referência, a deformação é completamente definida pelo tensor de deformação esquerdo \mathbf{V} (ou o tensor de deformação direito \mathbf{U}). A matriz de rotação \mathbf{R} define a rotação rígida das direções principais da deformação (\mathbf{N}_I na configuração de referência e \mathbf{n}_I na configuração atual e similarmente para as outras duas direções principais). É importante observar que \mathbf{R} representa a rotação

rígida do material no ponto X em forma aproximada, numa forma mais geral, cada extensão infinitesimal emanando do ponto, experimenta uma rotação diferente. Dita distinção entre a rotação das direções principais da deformação, \mathbf{R} , e a rotação das direções individuais no material, torna-se significativa quando se tem grandes deformações. Uma generalização geométrica deste fato pode ser conseguida através do raciocínio seguinte:

Suponha que se esteja observando uma vizinhança de um ponto X . Deste ponto emanam infinitas fibras em todas as direções. Se a região onde se encontra tal ponto experimenta uma deformação com gradiente \mathbf{F} , e seja a decomposição polar do tipo $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$.

- A descrição da ação do operador \mathbf{U} pode ser visto considerando as três fibras que estão nas direções principais, imagine-se que essas fibras não experimentem uma rotação material (apenas alongam), todas as outras fibras (que não correspondem às direções principais) experimentam, ao mesmo tempo, um alongamento e uma rotação material \mathbf{R}^* devido ao operador \mathbf{U} .
- A rotação do corpo rígido \mathbf{R} faz (posteriormente à ação do operador \mathbf{U}) rotacionar todas as fibras num mesmo valor angular. Desta forma, as fibras que se encontram nas direções principais experimentam somente uma rotação rígida \mathbf{R} enquanto que todas as outras uma rotação material adicional \mathbf{R}^* à rotação \mathbf{R} . O isolamento dessas duas rotações é muito difícil de conseguir na prática, razão pela qual muitas vezes se considera apenas a rotação rígida \mathbf{R} o que evidentemente não influencia em demasia os resultados caso que se tenha pequenas deformações.

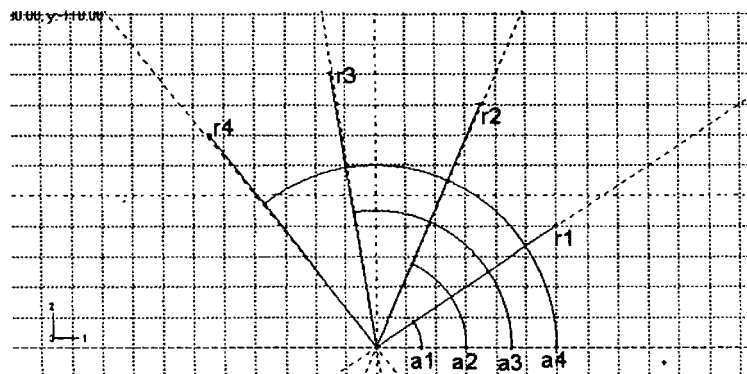


Figura 2.2: (a)- Interpretação dos operadores \mathbf{R} e \mathbf{U} (Configuração inicial).

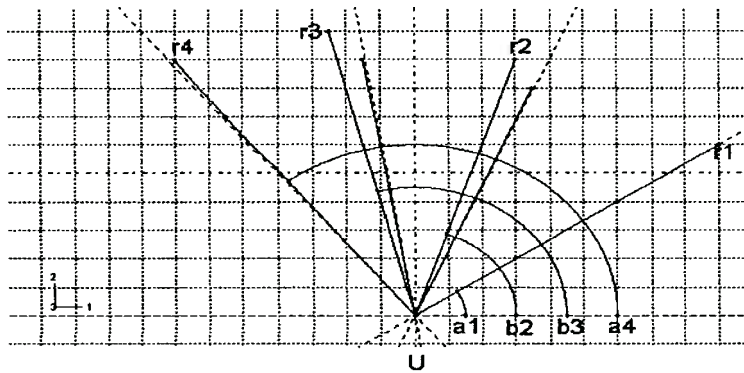


Figura 2.3: (b)- Interpretação dos operadores \mathbf{R} e \mathbf{U} (Operação \mathbf{U}).

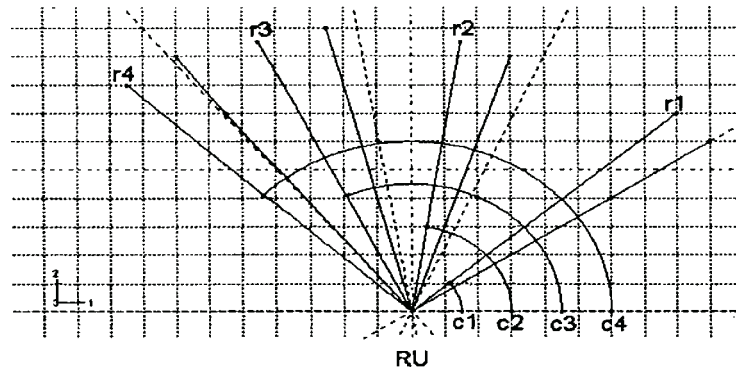


Figura 2.4: (c)- Interpretação dos operadores R e U (Operação R).

Tendo em conta a importância do operador \mathbf{V} na deformação do material, pode-se concluir que é importante conseguir isolá-lo. Isso pode ser feito facilmente na forma seguinte

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = \lambda_I^2 \mathbf{n}_I \otimes \mathbf{n}_I + \lambda_{II}^2 \mathbf{n}_{II} \otimes \mathbf{n}_{II} + \lambda_{III}^2 \mathbf{n}_{III} \otimes \mathbf{n}_{III} \quad (2.32)$$

o que permite obter \mathbf{V} resolvendo o problema de autovalores (2.25). Posteriormente, usando a equação (2.30) pode ser obtida a rotação \mathbf{R} através da expressão

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F} \quad (2.33)$$

onde

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{\lambda_I} \mathbf{n}_I \otimes \mathbf{n}_I + \frac{1}{\lambda_{II}} \mathbf{n}_{II} \otimes \mathbf{n}_{II} + \frac{1}{\lambda_{III}} \mathbf{n}_{III} \otimes \mathbf{n}_{III} \quad (2.34)$$

2.3.12 Medidas de deformação

Deformação numa dimensão

Tem sido considerado uma medida de deformação, a razão de extensão λ . Para muitos problemas dita medida proporciona um valor adequado para a magnificação da deformação, mas em outros casos mostra-se inadequado. Define-se então uma função

$$\varepsilon = f(\lambda) \quad (2.35)$$

onde a função f é escolhida por conveniência. Expandindo ε numa série de Taylor ao redor de $\lambda = 1$ (estado inextendido) se tem

$$\varepsilon = f(1) + (\lambda - 1) \frac{df}{d\lambda} + \frac{1}{2!} (\lambda - 1)^2 \frac{d^2 f}{d\lambda^2} + \dots \quad (2.36)$$

onde $f(1) = 0$ para $\varepsilon = 0$ e $\lambda = 1$, e escolhe-se $\frac{df}{d\lambda} = 1$ para $\lambda = 1$ e $\frac{d^2 f}{d\lambda^2} > 0$ para qualquer valor positivo de λ .

É importante notar que quando se tem pequenas deformações, os termos de mais alta ordem na equação (2.36) podem ser eliminados.

É possível propor muitas medidas de deformação, algumas delas são:

- Deformação de Biot (de engenharia):

$$f(\lambda) = \lambda - 1 \quad (2.37)$$

Esta definição é o mais familiar para os engenheiros que realizam o teste uniaxial de tração.

- Deformação de Green (quadrática):

$$f(\lambda) = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) \quad (2.38)$$

Esta medida é computacionalmente conveniente para problemas envolvendo grandes deslocamentos mas pequenas deformações, devido a que a sua generalização num tensor de deformações para o caso tridimensional pode ser resolvida diretamente a partir do gradiente de deformação, sem necessidade de resolver o problema de autovalores, i.e. sem precisar primeiramente determinar as direções principais e as correspondente razões de extensões em tais direções.

- Deformação logarítmica:

$$f(\lambda) = \ln(\lambda) \quad (2.39)$$

Esta medida é muito utilizada em metais sob deformação plástica. Uma motivação para o seu uso é quando a tensão verdadeira (força por área real) é grafada em relação à deformação logarítmica, nesse caso, os testes de tração, compressão e torção coincidem. Ademais, para muitos materiais tal medida é matematicamente adequada. Para estes materiais a parte elástica da deformação deve ser considerada pequena. Todas às funções acima podem ser agrupadas numa família de funções como e mostrado a continuação:

$$\varepsilon_n = f_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{n}(\lambda^n - 1) & \text{se } n \neq 0 \\ \ln(\lambda) & \text{se } n = 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.40)$$

Como já tem sido comentado, a escolha depende da conveniência, ademais sendo que a deformação está ligada diretamente à cinemática e à relação constitutiva. Em relação à aplicação do método dos elementos finitos a escolha é baseada em dois requisitos: a facilidade com que a deformação pode ser computada a partir de deslocamentos (fato muito comum neste método) e a conveniência da medida de deformação em relação a alguma lei constitutiva particular. Por exemplo, como mencionado acima, a deformação logarítmica é particularmente conveniente para plasticidade em metais, em quanto que para materiais com grandes deformações elásticas (borracha e materiais similares) pode ser usada diretamente a razão de extensão λ pois o seu valor é bem diferente de 1.

Deformação tridimensional

Tendo definido os conceitos básicos de deformação para o caso unidimensional agora é possível generalizar tais idéias para o caso tridimensional. Tem-se mencionado anteriormente que a deformação na vizinhança de uma partícula pode ser determinada completamente conhecendo as três razões de deformações $\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III}$ e as três direções principais $\mathbf{n}_I, \mathbf{n}_{II}, \mathbf{n}_{III}$ (ou $\mathbf{N}_I, \mathbf{N}_{II}, \mathbf{N}_{III}$). Isso sugere a generalização das

funções de deformações dadas para o caso unidimensional. Escolhendo $\varepsilon_I = f_I(\lambda)$ na direção \mathbf{n}_I (ou \mathbf{N}_I), $\varepsilon_{II} = f_{II}(\lambda)$ na direção \mathbf{n}_{II} (ou \mathbf{N}_{II}), e $\varepsilon_{III} = f_{III}(\lambda)$ na direção \mathbf{n}_{III} (ou \mathbf{N}_{III}), o tensor

$$\varepsilon = \varepsilon_I \mathbf{n}_I \otimes \mathbf{n}_I + \varepsilon_{II} \mathbf{n}_{II} \otimes \mathbf{n}_{II} + \varepsilon_{III} \mathbf{n}_{III} \otimes \mathbf{n}_{III} \quad (2.41)$$

caracteriza completamente o estado de deformação num ponto material.

Por exemplo, escolhendo $\varepsilon_I = \frac{1}{2}(\lambda_I^2 - 1)$, $\varepsilon_{II} = \frac{1}{2}(\lambda_{II}^2 - 1)$, e $\varepsilon_{III} = \frac{1}{2}(\lambda_{III}^2 - 1)$ obtém-se

$$\begin{aligned} \varepsilon_g &= \frac{1}{2}(\lambda_I^2 - 1)\mathbf{n}_I \otimes \mathbf{n}_I + \frac{1}{2}(\lambda_{II}^2 - 1)\mathbf{n}_{II} \otimes \mathbf{n}_{II} + \frac{1}{2}(\lambda_{III}^2 - 1)\mathbf{n}_{III} \otimes \mathbf{n}_{III} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T - \mathbf{I}) \end{aligned}$$

As observações feitas para o caso unidimensional servem para o caso geral (tridimensional), o que significa que o tensor de deformações de Green não pode ser utilizada com sucesso para grandes deformações, sendo apropriado o seu uso por exemplo em problemas estruturais (vigas e cascas) que experimentam normalmente pequenas deformações mas grandes rotações, também é usual para problemas de flambagem utilizando uma formulação para pequenas deformações.

2.3.13 Taxa de deformação e tensor de rotação material

Muitos materiais tem deformações que dependem da história da deformação experimentada pelo mesmo, neste caso as relações constitutivas são formuladas em forma de taxas. Tendo em conta que a velocidade de uma partícula material é

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \quad (2.42)$$

onde a diferenciação parcial em relação ao tempo significa a taxa de câmbio da posição espacial de um ponto material (partícula).

A diferença de velocidade entre dois pontos materiais numa vizinhança na configuração atual é dada pela equação

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.43)$$

onde

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.44)$$

é o gradiente de velocidade na configuração atual.

Lembrando que

$$dx = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

a equação (2.43) se pode escrever na forma seguinte

$$d\mathbf{v} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.45)$$

Por outra parte, a diferença de velocidade pode ser obtida na forma seguinte

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.46)$$

Comparando as equações (2.45) e (2.46), obtém-se

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} \quad (2.47)$$

O gradiente de velocidade pode ser decomposto numa soma de dois tensores simétrico e antisimétrico como segue

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = \mathbf{D} + \mathbf{W}$$

onde

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (2.48)$$

é a taxa de deformação, e

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (2.49)$$

é o tensor de rotação material (spin).

É fácil de obter

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \mathbf{R}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}})\mathbf{R}^T \quad (2.50)$$

o que mostra que \mathbf{D} não é influenciada pela rotação do corpo rígido \mathbf{R} .

Também é muito fácil de obter

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \mathbf{R}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}})\mathbf{R}^T + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \frac{1}{2} \mathbf{R}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}})\mathbf{R}^T + \boldsymbol{\Omega} \quad (2.51)$$

A primeira parcela do lado direito da equação (2.51) corresponde à rotação material, enquanto que a segunda parcela corresponde à rotação do corpo rígido, de onde se pode inferir que em ausência de deformação (movimento do corpo rígido por exemplo), os tensores de rotação material \mathbf{W} e velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$ são iguais, i.e. $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Omega}$.

Uma relação importante, é a que existe entre a taxa do tensor de deformações de Green-Lagrange $\boldsymbol{\varepsilon}_G = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I})$ e \mathbf{D} . Tal relação pode ser obtida facilmente e está dada pela equação

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_G = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \quad (2.52)$$

2.3.14 Formulação corotacional

Uma formulação corotacional consiste em construir um sistema de coordenadas para cada ponto (ou elemento) de um corpo, de tal forma que o sistema de coordenadas local rotacione com o material. Tal formulação tem a vantagem de expressar em forma mais simples as equações resultantes. Todos os sistemas corotacionais considerados podem ser mapeados numa configuração global comum, através da escolha adequada do tensor de rotação.

Sejam dois sistemas de coordenadas ortogonais com bases \mathbf{e}_i e $\tilde{\mathbf{e}}_i$, fixa e rotacionada respectivamente, segundo a Fig.(2.5). Se um vetor qualquer \mathbf{a} tem a representação

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i \quad (2.53)$$

na base fixa (global), representa-se aqui o mesmo vetor na base corotacional através de expressão

$$\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{a}_i \tilde{\mathbf{e}}_i \quad (2.54)$$

As representações (2.53) e (2.54) estão relacionadas através da expressão

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{a} \quad (2.55)$$

onde

$$a_i = Q_{ij} \tilde{a}_j, \quad Q_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (2.56)$$

Uma matriz qualquer \mathbf{A} , cuja representação corotacional adotada aqui é $\tilde{\mathbf{A}}$, está relacionada com a sua representação na base fixa através da expressão

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} \quad (2.57)$$

Por exemplo, supondo que se queira uma representação corotacional da taxa de deformação \mathbf{D} , utilizando a rotação das direções principais \mathbf{R} , tem-se então

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R}$$

2.4 FORÇAS E TENSÕES

Na teoria mecânica adotada aqui, tal como se mencionou anteriormente, existem os dois tipos de forças a seguir: as superficiais e as volumétricas, ao invés das três forças fundamentais na natureza, i.e. a eletro-fraca, a forte e a gravitacional, postuladas em outras áreas da física. As forças volumétricas e superficiais estão definidas

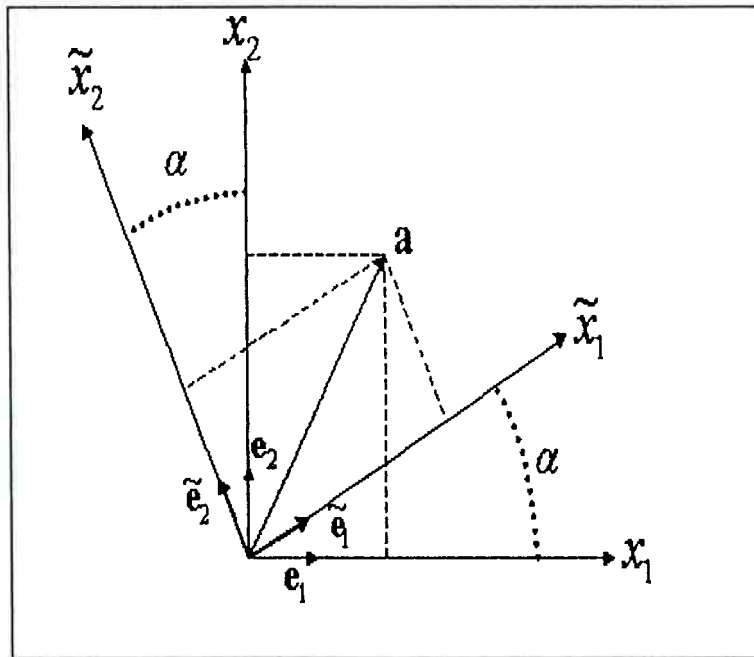


Figura 2.5: Representação de um vetor a em forma corotacional.

pelas equações (2.3) e (2.4) respectivamente. Considera-se também que em cada secionamento interno do corpo deformável existe uma força superficial (hipótese de Cauchy).

Considerando uma força distribuída sobre uma superfície (tensão), é possível associar tal força a uma direção determinada. Com efeito, um ente matemático que relaciona um vetor com cada direção do espaço, através de uma expressão que é linear e homogêneo na direção do cosseno, chama-se tensor de segunda ordem (Prager, 1961) [68]. Esta definição é informal mas intuitivo e permite dar uma idéia mais clara do conceito de tensor de tensões, que evidentemente são tensores de segunda ordem que relacionam forças superficiais com direções no espaço. Previamente a esta seção já foram introduzidos outros tensores, e um estudo mais aprofundado pode ser feito, por exemplo, através de (Borisenko and Tarapov, 1968) [14]. Existem várias medidas de tensões mas aqui serão dadas apenas as mais conhecidas.

2.4.1 Tensor de Cauchy

O tensor de tensões de Cauchy tem um significado físico claro. Considerando um cubo elementar da Fig.(2.6), este tensor relaciona a normal a cada face do cubo com cada força superficial aplicada na face correspondente, na configuração atual. Assim

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (2.58)$$

onde \mathbf{t} é a força superficial aplicada, \mathbf{n} é a normal à fase na configuração atual e $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de Cauchy.

Escolhendo um sistema de coordenadas se pode escrever a matriz correspondente como segue

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

O tensor de Cauchy é simétrico, i.e. $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ na ausência de binários (não-polaridade) como é usual.

Uma forma corotacional do tensor de Cauchy é de muita utilidade para uma análise

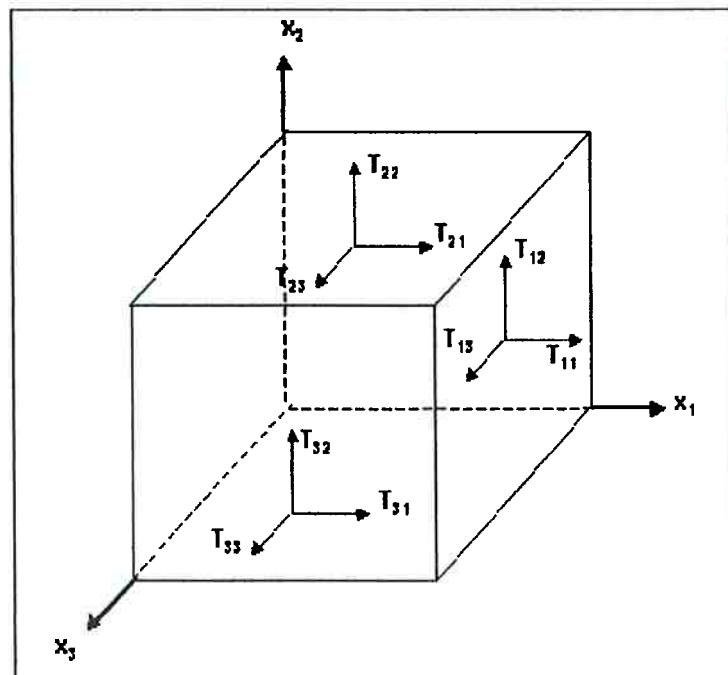


Figura 2.6: Tensor de Cauchy: forças superficiais no cubo elementar.

não-linear, e está dada através da transformação (2.57) o que fornece

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{R}^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{R} \quad (2.60)$$

2.4.2 Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff

O primeiro tensor de Piola-Kirchhoff (PK1) está definida através da expressão

$$\mathbf{P} = J \sigma \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.61)$$

onde $J = \det(\mathbf{F})$.

O PK1 proporciona a força superficial atualizada (na configuração atual) mas aplicada sobre a unidade de área na configuração de referência, e expressa a força em função da normal \mathbf{n}_0 à superfície dS_0 em \mathbf{X}

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0, \hat{\mathbf{t}} = k \mathbf{t} \quad (2.62)$$

O PK1 é não simétrico o que dificulta o seu uso numa lei constitutiva com tensor de deformação simétrico.

Alguns autores como (MALVERN, 1969)[57] definem o PK1 como a transposta do tensor \mathbf{P} dado aqui, i.e. $\hat{\mathbf{P}} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \sigma$ que recebe as vezes a denominação de tensão nominal.

2.4.3 Segundo tensor de Piola-Kirchhoff

O segundo tensor de Piola-Kirchhoff (PK2) está definida através da expressão

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \sigma \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.63)$$

O PK2 corresponde ao mapeamento inverso da força superficial atualizada, na configuração de referência, na mesma forma em que o vetor $d\mathbf{X}$ em \mathbf{X} é mapeado no vetor espacial $d\mathbf{x}$ em \mathbf{x} , i.e. $d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}$, como se pode ver a seguir

$$\hat{\mathbf{t}}_0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{t}}$$

de onde se tem

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{t}}_0 \quad (2.64)$$

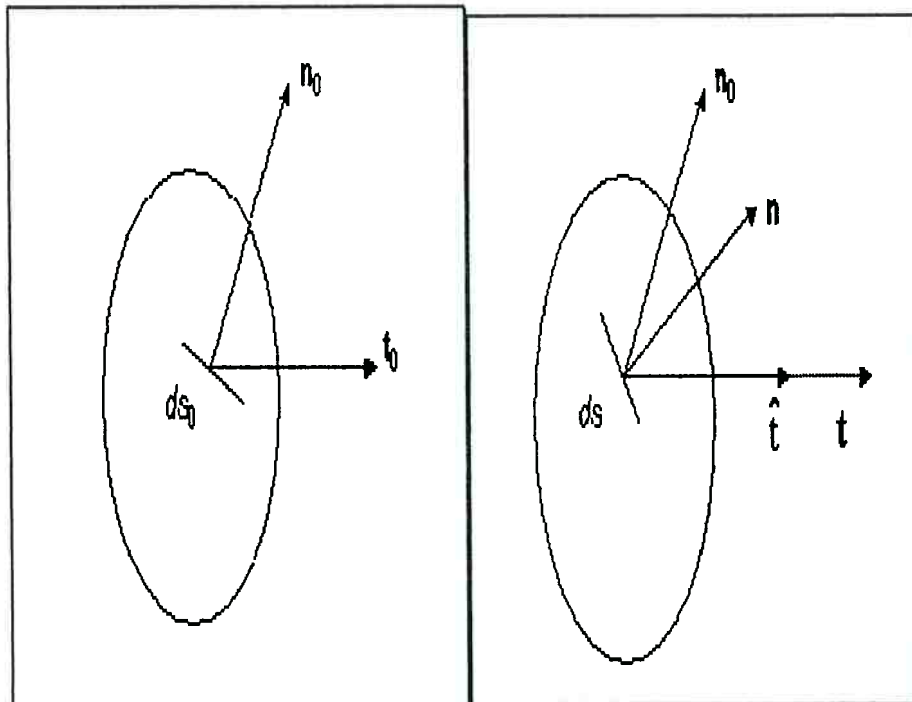


Figura 2.7: Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff.

para $\sigma = \sigma^T$.

O PK2 é simétrico se σ o é, e ainda que o seu uso leve a uma lei constitutiva complexa, oferece uma formulação conveniente para muitos casos.

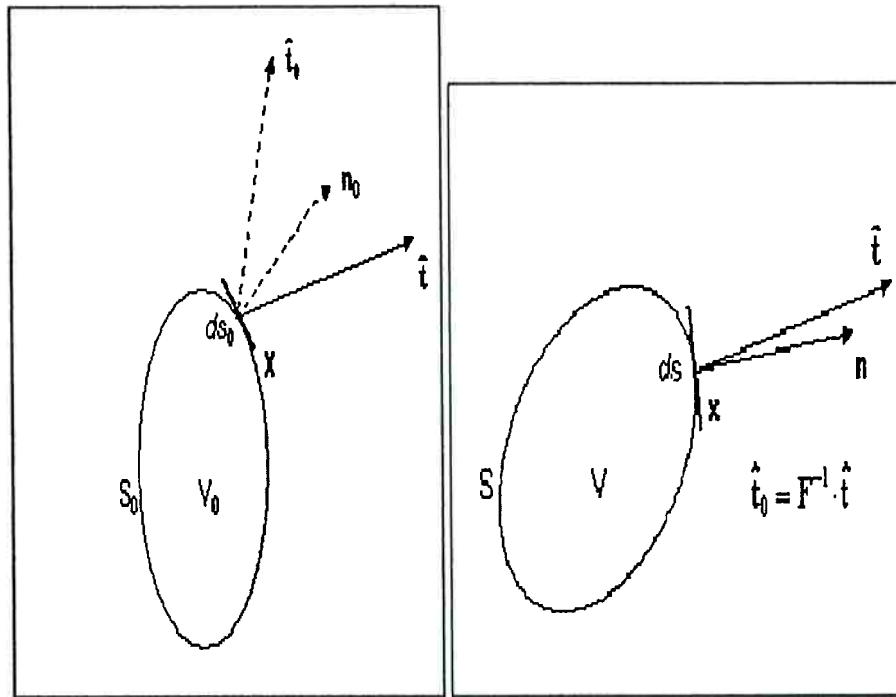


Figura 2.8: Segundo tensor de Piola-Kirchhoff.

2.5 LEIS FUNDAMENTAIS DA TERMODINÂMICA

2.5.1 Conservação da massa

A massa de um corpo está definida através da sua densidade $\rho = \rho(\mathbf{X}, t)$ na forma integral como segue

$$m(\mathcal{P}) = \int_{\Omega} \rho dV, \quad \rho = \rho(\mathbf{x}, t) \quad (2.65)$$

A conservação de massa é expressa pela equação

$$\frac{d}{dt} (m) = 0 \quad (2.66)$$

o que indica que a massa é a mesma independentemente das deformações que possa sofrer o corpo.

A forma local da equação (2.66) é

$$\dot{\rho} + \rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.67)$$

onde $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}$ é a divergente espacial de \mathbf{v} .

2.5.2 Conservação do momento linear

Considerando o corpo \mathfrak{B} e a parte \mathcal{P} sobre a qual são aplicadas as forças volumétricas \mathbf{b} e superficiais \mathbf{t} , a força total aplicada sobre o corpo está dada pela equação

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} dS \quad (2.68)$$

O momento linear está definido através da equação

$$\mathbf{p}(\mathcal{P}, t) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV, \quad \rho = \rho(\mathbf{x}, t) \quad (2.69)$$

onde $\rho \mathbf{v}$ é o momento linear por unidade de volume.

A conservação do momento linear, denominada segunda lei de Newton, é expressa pela equação

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}) = \mathbf{f} \quad (2.70)$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV \right) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} dS \quad (2.71)$$

Aplicando o teorema de Gauss, obtém-se a forma local de (2.70) expressa pela seguinte equação

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \text{ em } \Omega \\ \mathbf{t} &= \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \text{ em } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.72)$$

onde $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ é a divergente espacial de $\boldsymbol{\sigma}$.

2.5.3 Conservação do momento angular

Fazendo as considerações feitas para o momento linear, e definindo o momento angular através da equação

$$\mathbf{m}(\mathcal{P}, t) = \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV \quad (2.73)$$

onde o vetor \mathbf{r} determina a posição do vetor \mathbf{v} a partir de um eixo de giro arbitrário. Definindo

$$\boldsymbol{\tau} = \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS, \quad (2.74)$$

a conservação do momento angular é expressa pela equação

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{m}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.75)$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV \right) = \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS \quad (2.76)$$

O resultado mais importante obtido da equação (2.76) é a simetria do tensor de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ [57], ou seja

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2.77)$$

2.5.4 Conservação da energia (Primeira lei da termodinâmica)

Definindo a energia interna do corpo \mathfrak{B} através da equação

$$E(\mathfrak{B}, t) = \int_{\Omega} \rho e dV \quad (2.78)$$

onde e é a energia interna por unidade de volume. A energia cinética total

$$K(\mathfrak{B}, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV \quad (2.79)$$

A taxa de recepção de calor

$$Q(\mathfrak{B}, t) = \int_{\Omega} \rho r dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.80)$$

onde r é a taxa de produção de calor no corpo por unidade de volume, e \mathbf{q} é o fluxo de calor pela fronteira $\partial\Omega$. E finalmente, a potência das forças externas aplicadas sobre o corpo

$$P(\mathfrak{P}, t) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS \quad (2.81)$$

A conservação da energia em forma de taxa está dada então pela equação

$$\frac{d}{dt}(E + K) = P + Q \quad (2.82)$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho e dV + \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV \right) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\Omega} \rho r dV - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.83)$$

A forma local da conservação da energia é obtida de (2.83) fazendo algumas transformações, e a sua expressão final será

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \rho r - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} \quad (2.84)$$

a que é conhecida como primeira lei da termodinâmica.

2.5.5 Segunda lei da termodinâmica

A primeira lei da termodinâmica permite prever a conversão de um tipo de energia em outro, e.g. mecânica em térmica e vice-versa. Porém, a experiência mostra a existência de uma direcionalidade na conversão de energia. Mais especificamente, a velocidade de conversão de energia térmica em energia não acompanhada de trabalho mecânico (i.e. a conversão de Q em $\dot{E} + \dot{K} - P$) está limitada superiormente

$$Q \leq Q_s \quad (2.85)$$

onde Q_s é um limite superior dado aprioristicamente [81].

A inequação (2.85) indica que ainda que seja sempre possível que o trabalho e a energia possa ser convertida em calor, há um limite para a velocidade à qual possa se converter calor em energia sem efetuar trabalho mecânico [81].

Uma forma mais conhecida da desigualdade (2.85) pode ser obtida introduzindo o conceito de entropia. Considerando a variação de tal desigualdade por unidade de temperatura absoluta, através da equação

$$S = \int_{\Omega} \rho s dV \quad (2.86)$$

onde s é a entropia por unidade de massa, é obtida a inequação

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\Omega} \frac{\rho r}{T} dV - \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dS \quad (2.87)$$

onde T é a temperatura absoluta. A inequação (2.87) é conhecida como segunda lei da termodinâmica.

Em relação à entropia, tal grandeza mede o grau de convertibilidade de energia térmica, e o seu valor não pode ser negativo. Assim, se o sistema possui um alto grau de entropia, significa que será mais difícil de extrair energia útil do sistema.

A forma local de (2.87) é

$$\rho \dot{s} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{\rho r}{T} \geq 0 \quad (2.88)$$

2.5.6 Desigualdade de Clausius-Duhem

Uma relação muito útil pode ser obtida de (2.88) substituindo primeiramente r da equação (2.84) em (2.88)

$$\rho \dot{s} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{1}{T} (\rho \dot{e} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}) \geq 0 \quad (2.89)$$

e introduzindo a função de energia livre de Helmholtz

$$\psi = e - T s \quad (2.90)$$

em (2.89) obtém-se

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho \left(\dot{\psi} + s\dot{T} \right) - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (2.91)$$

denominado desigualdade de Clausius-Duhem, onde $\mathbf{g} = \nabla_{\mathbf{x}} T$ (gradiente espacial de temperatura).

2.6 CARACTERIZAÇÃO DE MATERIAIS: LEIS CONSTITUTIVAS

Até agora, neste trabalho tem-se apresentado leis gerais e propriedades que não dependem do tipo de material. Para corpos deformáveis, porém, caracterizar o material é de muita importância.

2.6.1 Axiomas constitutivos

De acordo com Truesdell (Truesdell, 1973) [81] é possível caracterizar o processo termodinâmico através de dois sub-processos.

Um processo *termo-cinético* de \mathfrak{B} está definido pelas funções

$$T = \hat{T}(\mathfrak{B}, t), \quad \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathfrak{B}, t) \quad (2.92)$$

que na forma local, é expresso pelas equações

$$T = \hat{T}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.93)$$

Um processo *caloro-dinâmico* de \mathfrak{B} está definido pelas funções

$$W_T(\mathfrak{B}, t), E(\mathfrak{B}, t), Q(\mathfrak{B}, t) \text{ e } Q_s(\mathfrak{B}, t) \quad (2.94)$$

as que por simplicidade serão expressas através de

$$W_T(t), E(t), Q(t) \text{ e } Q_s(t) \quad (2.95)$$

e que satisfazem as duas leis da termodinâmica, i.e. (2.84) e (2.91), sendo

$$W_T(t) = P - \dot{K} \quad (2.96)$$

Para a elaboração de uma lei constitutiva é necessário impor restrições às formulações. A axiomática introduzida aqui é devido a Truesdell [87].

Determinismo

Para um corpo \mathfrak{B} no instante t , a história do processo termo-cinético ao qual tem sido submetido até esse momento, incluído o instante t , determina o processo calorodinâmico, então existem os funcionais \hat{W}_T , \hat{E} , \hat{Q} e \hat{Q}_s tal que

$$\begin{aligned}W_T(t) &= \hat{W}_T(\hat{T}, \hat{\mathbf{x}}) \\E(t) &= \hat{E}(\hat{T}, \hat{\mathbf{x}}) \\Q(t) &= \hat{Q}(\hat{T}, \hat{\mathbf{x}}) \\Q_s(t) &= \hat{Q}_s(\hat{T}, \hat{\mathbf{x}})\end{aligned}\tag{2.97}$$

onde os funcionais satisfazem as duas leis da termodinâmica, i.e. (2.84) e (2.91).

Princípio de ação local

O estado termodinâmico num ponto \mathbf{X} , não é influenciado pelos estados termodinâmicos de pontos fora de vizinhança do ponto \mathbf{X} .

Sendo assim, para um corpo simples se pode escrever a forma local da equação (2.97) como segue [87]

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \hat{\sigma}(\mathbf{F}^t, T^t, \mathbf{g}^t) \\ \psi(t) &= \hat{\psi}(\mathbf{F}^t, T^t, \mathbf{g}^t) \\ s(t) &= \hat{s}(\mathbf{F}^t, T^t, \mathbf{g}^t) \\ \mathbf{q}(t) &= \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}^t, T^t, \mathbf{g}^t)\end{aligned}\tag{2.98}$$

onde (2.98) satisfaz as equações (2.66), (2.72)₁, (2.76), (2.84) e (2.91); e onde $(.)^t$ denota a história de $(.)$ em \mathbf{X} até o instante t .

Equi-presença

Uma quantidade presente como uma variável independente numa relação constitutiva, deve estar presente em todas as equações do modelo constitutivo.

Note que isso se verifica em (2.98).

Este axioma permite a compatibilidade das equações constitutivas propostas, tanto com as leis gerais, quanto com as propriedades particulares do material [87].

Dissipação universal

Este axioma garante que cada termo da desigualdade (2.89) deve satisfazer individualmente tal inequação.

Objetividade

Uma lei constitutiva não deve depender do observador ou do sistema de referência. Assim, a descrição local do movimento do corpo \mathfrak{B} descritos por dois observadores serão dados através das equações (2.2) e (2.15), de acordo com a relação

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x}_T \\ \mathbf{x}^* &= \mathbf{x}^*(\mathbf{X}, t), \mathbf{R} = \mathbf{R}(t), \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \mathbf{x}_T = \mathbf{x}_T(t) \end{aligned} \quad (2.99)$$

sendo \mathbf{x} e \mathbf{x}^* , o movimento descrito pelo primeiro e segundo observador respectivamente.

Nessas condições, o gradiente de deformação, o tensor de Cauchy, o fluxo de calor e o gradiente de temperatura, serão dados de acordo a cada observador de acordo com as transformações seguintes

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^* &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\sigma}^* &= \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}^T \\ \mathbf{q}^* &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{q} \\ \mathbf{g}^* &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{g} \end{aligned} \quad (2.100)$$

As relações (2.98) para o segundo observador serão dados portanto através das expressões seguintes

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^*(t) &= \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{F}^{t*}, T^t, \mathbf{g}^{t*}) \\ \boldsymbol{\psi}(t) &= \hat{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{F}^{t*}, T^t, \mathbf{g}^{t*}) \\ s(t) &= \hat{s}(\mathbf{F}^{t*}, T^t, \mathbf{g}^{t*}) \\ \mathbf{q}^*(t) &= \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}^{t*}, T^t, \mathbf{g}^{t*}) \end{aligned} \quad (2.101)$$

permanecendo $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, $\hat{\boldsymbol{\psi}}$, \hat{s} e $\hat{\mathbf{q}}$ independentes do observador.

Simetria

Na seção (2.3) optou-se por uma configuração de referência $\hat{\mathbf{x}}_0(\mathfrak{B})$. Se se tivesse optado por uma outra configuração de referência $\hat{\mathbf{x}}_0^{(1)}(\mathfrak{B})$, de que maneira mudaria a resposta do material para as leis constitutivas expressas pelas equações (2.98) (ou (2.97) para a sua correspondente forma global)?.

A simetria material é o conjunto de transformações da configuração de referência sob as quais não se modifica a resposta do material fornecidas através das equações

(2.98) (ou (2.97)).

Pode ser demonstrado [15] que as transformações correspondem às rotações da configuração de referência, e que estas transformações tem uma estrutura de grupo chamados *grupos de simetria material* do corpo \mathfrak{B} .

A simetria na sua forma local é expressa pelas equações

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(\mathbf{F}^t, T^t, \mathbf{g}^t) &= \hat{\sigma}([\mathbf{F}\mathbf{F}_0]^t, T^t, [\mathbf{F}_0^T \mathbf{g}]^t) \\ \hat{\psi}(\mathbf{F}^t, T^t, \mathbf{g}^t) &= \hat{\psi}([\mathbf{F}\mathbf{F}_0]^t, T^t, [\mathbf{F}_0^T \mathbf{g}]^t) \\ \hat{s}(\mathbf{F}^t, T^t, \mathbf{g}^t) &= \hat{s}([\mathbf{F}\mathbf{F}_0]^t, T^t, [\mathbf{F}_0^T \mathbf{g}]^t) \\ \hat{q}(\mathbf{F}^t, T^t, \mathbf{g}^t) &= \hat{q}([\mathbf{F}\mathbf{F}_0]^t, T^t, [\mathbf{F}_0^T \mathbf{g}]^t)\end{aligned}\tag{2.102}$$

onde \mathbf{F}_0 é o gradiente de deformação entre as configurações $\hat{\mathbf{x}}_0(\mathfrak{B})$ e $\hat{\mathbf{x}}_0^{(1)}(\mathfrak{B})$.

Se (2.98)₂, por exemplo, expressa os resultados de um possível experimento descrito pela teoria, a simetria expressa que $\hat{\mathbf{x}}_0(\mathfrak{B})$ e $\hat{\mathbf{x}}_0^{(1)}(\mathfrak{B})$ são indistinguíveis através de qualquer experimento.

2.6.2 Termodinâmica com variáveis internas

Escrever equações constitutivas através da história do gradiente de deformação \mathbf{F} , a temperatura T e o gradiente de temperatura \mathbf{g} tem uma importância teórica muito grande pois sintetiza as idéias fundamentais subjacentes numa lei constitutiva. Porém a implementação desse programa na simulação do comportamento do material é uma tarefa muito difícil, senão impossível [26]. É importante portanto poder achar uma forma relaxada desse programa.

A termodinâmica das variáveis internas se propõe à determinação dos funcionais $\hat{\sigma}$, $\hat{\psi}$, \hat{s} e \hat{q} num instante t considerado através do conhecimento dos valores locais de certas variáveis denominados *variáveis de estado*. Neste caso, os valores desses funcionais dependem somente dos valores das variáveis de estado no instante t e não da história das mesmas. Nesse sentido, a obtenção das leis constitutivas através da termodinâmica das variáveis internas pode ser vista como uma particularização da correspondente obtida através da termodinâmica racional.

Assumindo que as variáveis de estado são as seguintes $\{\mathbf{F}, T, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}\}$, onde cada variável é determinado num tempo t dado. As variáveis $\{\mathbf{F}, T, \mathbf{g}\}$ são denominadas *variáveis observáveis*, enquanto que $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_k\}; k = 1, \dots, n$ corresponde a um conjunto de *variáveis internas*, onde cada α_k corresponde a uma variável escalar, vetorial ou tensorial de qualquer ordem, associados com mecanismos dissipativos.

Desta maneira, é possível escrever as equações (2.98) na forma seguinte

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{X}) &= \hat{\sigma}(\mathbf{F}, T, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \\ \psi(\mathbf{X}) &= \hat{\psi}(\mathbf{F}, T, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \\ s(\mathbf{X}) &= \hat{s}(\mathbf{F}, T, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{q}(\mathbf{X}) &= \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, T, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha})\end{aligned}\quad (2.103)$$

A desigualdade de Clausius-Duhem (2.91) é expressa então através da desigualdade

$$\sigma \mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{F}} - \rho \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \dot{\mathbf{g}} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_k} * \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k + s \dot{T} \right) - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (2.104)$$

onde $\sigma \mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$.

Re-ordenando (2.104) se tem

$$\left(\sigma \mathbf{F}^{-T} - \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{F}} \right) : \dot{\mathbf{F}} - \rho \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial T} + s \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{g}} \cdot \dot{\mathbf{g}} - \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_k} * \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (2.105)$$

e aplicando o princípio da dissipação universal, se tem

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F} \\ s &= - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial T} \\ \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{g}} &= 0\end{aligned}\quad (2.106)$$

de onde a desigualdade (2.105) se reduz a

$$- \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_k} * \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (2.107)$$

Definindo as forças termodinâmicas na forma seguinte

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_k &= \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_k} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{A}_k; \quad k = 1, \dots, n\end{aligned}\quad (2.108)$$

a equação (2.107) tem a forma

$$- \mathbf{A}_k * \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (2.109)$$

onde * representa o produto apropriado entre as grandezas envolvidas.

Evolução das variáveis internas

Tendo em conta que as derivadas temporais das variáveis de estado não aparecem na definição do estado termodinâmico do sistema estudado, é necessário um formalismo adicional para descrever a evolução das variáveis internas [50], já que as

variáveis observáveis estão determinadas pela função energia livre que é o potencial termodinâmico das mesmas. A evolução das variáveis α_k e $\frac{1}{T} \mathbf{q}$ podem ser escritas na forma seguinte

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_k &= f_\alpha(\mathbf{F}, T, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha}) \\ \frac{1}{T} \mathbf{q} &= f_q(\mathbf{F}, T, \mathbf{g}, \boldsymbol{\alpha})\end{aligned}\quad (2.110)$$

Potencial de dissipação

Pode ser postulada a existência de um potencial de dissipação a fim de acoplar tal potencial ao formalismo desenvolvido aqui. Nesse caso se tem

$$\Pi = \hat{\Pi}(\mathbf{A}, \mathbf{g}; \mathbf{F}, T, \boldsymbol{\alpha}) \quad (2.111)$$

e a evolução da variáveis dissipativas estarão dadas pelas equações

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_k &= -\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \mathbf{A}_k} \\ \frac{1}{T} \mathbf{q} &= -\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \mathbf{g}}\end{aligned}\quad (2.112)$$

2.6.3 Medidas objetivas de equações constitutivas

Quando uma equação constitutiva é escrita em forma de taxa pode acontecer que a variação seja perturbada pelo efeito da rotação do corpo rígido, i.e. não dependa exclusivamente das propriedades do material. Considerando a relação seguinte

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = f(\mathbf{D}, t) \quad (2.113)$$

pode ser mostrado (e.g. Belytschko et al.,2000) [56] que se um corpo experimenta uma rotação pura, i.e. $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, a taxa do tensor de Cauchy pode não ser nula. Evidentemente que neste caso a lei constitutiva carece de validéz pois deveria depender exclusivamente das propriedades do material e ser independente do sistema de referência (observador), segundo o axioma da objetividade.

Existem várias taxas objetivas como a taxa de Jaumann, Green-Naghdi e Truesdell, que restitui a objetividade da lei constitutiva. O uso de cada um destas taxas é determinado pela dificuldade na implementação e do tipo de problema estudado. Como estas taxas não dependem da rotação rígida do material são denominadas derivadas corotacionais.

Taxa de Jaumann

A taxa de Jaumann está definida de acordo com a equação

$$\mathbf{A}^{\nabla J} = \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{W}^T \quad (2.114)$$

onde \mathbf{A} é um tensor qualquer, e \mathbf{W} é o tensor de rotação material definida pela equação (2.49).

Taxa de Green-Naghdi

A taxa de Green-Naghdi é obtida em forma similar à taxa de Jaumann, substituindo o tensor de rotação material pela velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$ em (2.114), ou seja

$$\mathbf{A}^{\nabla G} = \dot{\mathbf{A}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega}^T \quad (2.115)$$

Taxa de Truesdell

A taxa de Truesdell está definida de segundo à seguinte equação

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{\nabla T} &= \dot{\mathbf{A}} + (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v})\mathbf{A} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}^T \\ &= \dot{\mathbf{A}} + (\mathbf{D} : \mathbf{I})\mathbf{A} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}^T \end{aligned} \quad (2.116)$$

onde $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}$ é o divergente espacial da velocidade \mathbf{v} .

Neste trabalho, uma taxa objetiva qualquer será expressa na forma seguinte

$$(\cdot)^{\nabla}$$

onde (\cdot) é o tensor derivado em forma objetiva.

2.7 A FORMA FRACA DO EQUILÍBRIO

2.7.1 O princípio dos trabalhos virtuais

Seja o corpo \mathcal{B} ocupando a região Ω com fronteira $\partial\Omega$ no espaço euclidiano \mathcal{E} submetida a carregamentos superficiais e volumétricas. A forma fraca do equilíbrio numa configuração qualquer é obtida de (2.72) e expressa através da forma funcional

$$\int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_t,t)} (\mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0, \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad (2.117)$$

onde \mathcal{V} é o conjunto dos deslocamentos cinematicamente admissíveis e $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}(\mathbf{X})$ são deslocamentos virtuais. Sendo

$$\mathcal{V} = \{\delta \boldsymbol{\eta} | \delta \boldsymbol{\eta} \in C^0(\mathbf{X}), \delta \boldsymbol{\eta} = 0 \text{ em } \partial\Omega_u\} \quad (2.118)$$

Aplicando o teorema de Ostrogradski-Gauss e fazendo algumas transformações algébricas é obtida a expressão

$$\int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} \boldsymbol{\sigma} : (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{u}) dV = \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} (\mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_t,t)} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS \quad (2.119)$$

Esta última expressão é conhecida como o princípio dos trabalhos virtuais, ou forma fraca do equilíbrio, e o procedimento para obtê-la conjuntamente ao processo inverso mostra a equivalência entre a forma local e global do equilíbrio.

Para o caso quasi-estático a equação (2.119) torna-se

$$\int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} \boldsymbol{\sigma} : (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{u}) dV = \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_t,t)} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dS \quad (2.120)$$

Se o deslocamento virtual $\delta \mathbf{u}$ é trocado pela velocidade virtual $\delta \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ em (2.117), obtém-se o chamado princípio das velocidades virtuais que no caso quasi-estático é dado pela equação

$$\int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{L} dV = \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_t,t)} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} dS \quad (2.121)$$

e decompondo o gradiente virtual de velocidade $\delta \mathbf{L}$ nas suas componentes simétrica e antisimétrica é obtida a equação integral

$$\int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D} dV = \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_t,t)} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} dS \quad (2.122)$$

2.7.2 O problema quasi-estático com valor inicial e de contorno

O problema quasi-estático com valor inicial e de contorno através da utilização do princípio das velocidades virtuais, consiste em resolver (2.122) (i.e. obter \mathbf{u} do princípio das velocidades virtuais) conhecendo a história dos carregamentos volumétricos \mathbf{b} , superficiais \mathbf{t} e o mapeamento que leva de qualquer configuração no tempo t_0 a uma outra configuração no tempo t . O valor de $\boldsymbol{\sigma}$ é a solução do modelo constitutivo dado pelas equações (2.103), (2.106) e (2.110) ₁.

Mais formalmente: resolver

$$\int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D} dV - \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega,t)} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} dV - \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_t,t)} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} dS = 0, \delta \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (2.123)$$

sujeito ao carregamento volumétrico \mathbf{b} em Ω

$$\mathbf{b}(\mathbf{X}, t), t \in [t_0, \tau], \mathbf{X} \in \Omega$$

com as condições de contorno:

- Natural em $\partial\Omega_t$: consistente numa força superficial

$$\mathbf{t}(\mathbf{X}, t), t \in [t_0, \tau], \mathbf{X} \in \partial\Omega_t$$

- Essencial na região $\partial\Omega_{\mathbf{u}}$: consistente num mapeamento contínuo diferenciável (difeomorfismo) do contorno do corpo \mathfrak{B}

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t), t \in [t_0, \tau], \mathbf{X} \in \partial\Omega_{\mathbf{u}}$$

onde os deslocamentos cinematicamente admissíveis consistem no conjunto dos deslocamentos que satisfazem a condição de contorno inicial.

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{u} | \mathbf{u} \in C^0(\mathbf{X}), \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \Omega\} \quad (2.124)$$

Onde σ é obtida das equações (2.103), (2.106) e (2.110)₁.

Por simplicidade, é assumido que $\partial\Omega_{\mathbf{t}} \cap \partial\Omega_{\mathbf{u}} = \emptyset$ sendo $\partial\Omega_{\mathbf{t}} \cup \partial\Omega_{\mathbf{u}} = \partial\Omega$.

2.7.3 Solução do problema quasi-estático com valor inicial e de contorno

Para a solução do problema quasi-estático com valor inicial e de contorno é feita primeiramente uma discretização temporal $[t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots)$, obtendo a função constitutiva e o equilíbrio em forma incremental. Posteriormente é feita uma discretização espacial do domínio, onde a discretização da forma fraca do equilíbrio é feita através do Método dos Elementos Finitos.

Função constitutiva em forma incremental

As integrações das equações (2.103) e (2.110)₁ em forma implícita fornece as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \hat{\sigma}(\mathbf{F}_{n+1}, \alpha_{n+1}) \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \Delta t f_{\alpha}(\mathbf{F}_{n+1}, \alpha_{n+1}) \end{aligned} \quad (2.125)$$

onde $\sigma_{n+1} = \sigma_{t_{n+1}}$ e $\alpha_{n+1} = \alpha_{t_{n+1}}$ são obtidas de (2.125) usando um método numérico iterativo (e.g. método de Newton), sendo conhecidos os valores de α_n e \mathbf{F}_{n+1} .

Princípio das velocidades virtuais em forma incremental

Considerando o equilíbrio na configuração t_{n+1} , a equação (2.123) torna-se

$$\int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega, t_{n+1})} \sigma_{n+1} : \delta \mathbf{D} dV - \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega, t_{n+1})} \mathbf{b}_{n+1} \cdot \delta \mathbf{v} dV - \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_{\mathbf{t}}, t_{n+1})} \mathbf{t}_{n+1} \cdot \delta \mathbf{v} dS = 0 \quad (2.126)$$

onde σ_{n+1} é obtido da equação (2.125) e são conhecidos os valores de \mathbf{b}_{n+1} e \mathbf{t}_{n+1} .

Discretização espacial: Método dos Elementos Finitos

Dividindo o domínio de integração correspondente à forma fraca de equilíbrio em subdomínios, onde cada subdomínio é chamado de *elemento* é possível expressar os valores das grandezas envolvidas, no elemento, através dos valores em certos pontos do elemento denominado nós. Os valores destas grandezas são portanto interpolados no elemento através dos valores nodais e as funções de interpolação são normalmente funções simples (normalmente polinômios) denominado, usualmente, funções de forma. O Método dos Elementos Finitos utilizado aqui é baseado nos deslocamentos nodais (deslocamentos generalizados).

Seja \mathbf{u} a função de deslocamento para um elemento dado, se \mathbf{u}^N é o vetor dos deslocamentos nodais, se tem

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}^N \quad (2.127)$$

onde $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{X})$ é a matriz correspondente às funções de interpolação. As componentes do deslocamento no elemento estão determinados através da expressão

$$u_i = N_{ij}u_j^N \quad (2.128)$$

Similarmente se tem

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{N}\mathbf{v}^N \\ \delta\mathbf{v} &= \mathbf{N}\delta\mathbf{v}^N \\ \delta\mathbf{D} &= \mathbf{B}\delta\mathbf{v}^N \end{aligned} \quad (2.129)$$

onde $\mathbf{B} = \frac{\partial\mathbf{N}}{\partial\mathbf{X}}$.

A forma global do equilíbrio na configuração $n+1$, i.e. a equação (2.126), no domínio discretizado tem a forma

$$\begin{aligned} &\int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega^{(d)}, t_{n+1})} (\delta\mathbf{v}^N)^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\mathbf{F}(\mathbf{u}_{n+1}), \boldsymbol{\alpha}_{n+1}) dV - \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega^{(d)}, t_{n+1})} (\delta\mathbf{v}^N)^T \mathbf{N}^T \mathbf{b}_{n+1} dV \\ &- \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_t^{(d)}, t_{n+1})} (\delta\mathbf{v}^N)^T \mathbf{N}^T \mathbf{t}_{n+1} dS = 0, \forall \delta\mathbf{v}^N \in \mathcal{V}^{(d)} \end{aligned} \quad (2.130)$$

sendo $\mathcal{V}^{(d)}$ a forma discretizada de \mathcal{V} . Posteriormente é obtida

$$\begin{aligned} &(\delta\mathbf{v}^N)^T \left\{ \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega^{(d)}, t_{n+1})} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\mathbf{F}(\mathbf{u}_{n+1}), \boldsymbol{\alpha}_{n+1}) dV - \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega^{(d)}, t_{n+1})} \mathbf{N}^T \mathbf{b}_{n+1} dV \right. \\ &\left. - \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_t^{(d)}, t_{n+1})} \mathbf{N}^T \mathbf{t}_{n+1} dS \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.131)$$

Definindo

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}_{n+1}) &= \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega^{(d)}, t_{n+1})} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\mathbf{F}(\mathbf{u}_{n+1}), \boldsymbol{\alpha}_{n+1}) dV \\ \mathbf{f}_{ext} &= \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega^{(d)}, t_{n+1})} \mathbf{N}^T \mathbf{b}_{n+1} dV^{(d)} + \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_t^{(d)}, t_{n+1})} \mathbf{N}^T \mathbf{t}_{n+1} dS \end{aligned} \quad (2.132)$$

se tem

$$\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}_{n+1}) - \mathbf{f}_{ext} = \mathbf{0} \quad (2.133)$$

Este sistema de equações não-lineares é resolvida para \mathbf{u}_{n+1} através de um método numérico (e.g. Método de Newton).

As forças generalizadas \mathbf{f}_{int} e \mathbf{f}_{ext} estão relacionadas com as suas formas locais respectivas pelas igualdades seguintes

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{int} &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{f}_{int}^e; & \mathbf{f}_{int}^e &= \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega^{(e)}, t_{n+1})} \mathbf{B}_{(e)}^T \boldsymbol{\sigma} dV \\ \mathbf{f}_{ext} &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{f}_{ext}^e; & \mathbf{f}_{ext}^e &= \int_{\hat{\mathbf{x}}(\Omega^{(e)}, t_{n+1})} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{b} dV^{(e)} \int_{\hat{\mathbf{x}}(\partial\Omega_t^{(e)}, t_{n+1})} \mathbf{N}_{(e)}^T \mathbf{t} dS^{(e)} \end{aligned} \quad (2.134)$$

onde $\mathbf{B}_{(e)}$ e $\mathbf{N}_{(e)}$ são as formas locais das matrizes de interpolação, e a integração de (2.134) é feita através de um método numérico adequado (e.g. quadratura de Gauss).

Capítulo 3

MODELO MATEMÁTICO DO MATERIAL

3.1 INTRODUÇÃO

3.1.1 Mecânica do dano contínuo

A mecânica do dano surgiu a partir do trabalho de Kachanov (1958) [50] com o intuito de estudar problemas de fluência em materiais com degradação interna através da mecânica do contínuo introduzindo uma variável de dano como variável interna na lei constitutiva do material. A variável de dano evoluiu a partir de uma variável escalar inicial até os modelos atuais envolvendo variáveis tensoriais de ordem superior.

Existem vários mecanismos de formação de danos, dentro dos quais se podem mencionar [50]: Dano plástico dúctil acompanhado de grandes deformações em metais, dano visco-plástico dúctil, fadiga causada pela repetição de deformações e identificada como função do número de ciclos, assim como processos de oxidação, corrosão etc.

Uma variável de dano pode ser associada às propriedades micromecânicas do material ou à variação de algumas propriedades macromecânicas do mesmo. A escolha de desta variável é muito importante e depende tanto do fenômeno em estudo quanto da possibilidade da obtenção da medida desta variável [45].

Algumas formas de medir o dano são [50] [2]: Variação do módulo de elasticidade, variação das características plásticas, variação das características elasto-plásticas, variação da resistência elétrica.

Neste trabalho, a variável de dano será associada à presença de micro-trincas e

vazios no material, que reflete no comportamento macro-mecânico do material. Um conceito importante portanto é a de *volume representativo* do material, que corresponde a um elemento de volume "suficientemente pequeno" para evitar efeitos locais, e "suficientemente grande" para admitir homogeneidade no elemento. Para metais, tais volumes representativos, tem dimensões entre 0,1-1 mm (aproximadamente), 1cm (aproximadamente) para madeiras e 10cm (aproximadamente) para concreto [50]. O objetivo da mecânica do dano é modelar o comportamento do material, a partir de um estado virgem (sem dano) até quando o dano fique crítico, i.e. o material perca a sua capacidade de resistência. Assim quando a micro-trinca se transforme numa macro-trinca, a evolução desta fissura será estudada através da mecânica da fratura, por exemplo. Ou seja, quando o tamanho da micro-trinca ultrapasse o volume representativo a mecânica de dano deixa o estudo do dano para um outro ramo mais apropriado.

A crescente utilização da mecânica do dano consiste principalmente na sua estrutura teórica que permite a implementação dos modelos reológicos com dano computacionalmente. Projetos de componentes mecânicos na indústria aeronáutica e automotiva que exigem de segurança podem ser feitos com um custo muito mais baixo, eliminando muitas provas dispendiosas à medida que fiquem mais confiáveis os modelos constitutivos desenvolvidos. Fábricas inteiras podem parar devido a defeitos que poderiam ser detectados, e assim podem ser evitados enormes custos econômicos, e até perdas de uma outra natureza em outros casos.

Os modelos de danos descritos aqui modelam comportamento de metais dúcteis que sob condições de temperaturas, comparáveis com a temperatura de ambiente, sofrem grandes deformações plásticas.

3.1.2 Formulação Termodinâmica

Variável de dano e homogeneização

A variável de dano d pode ser caracterizada a partir de uma concepção micro-mecânica que poderá ser associada a uma grandeza macro-mecânica (e.g. a variação do módulo elástico do material). Ou seja, a variação na microestrutura é refletida nas propriedades macromecânicas do material.

Para considerações micro-mecânicas é necessário que os valores médios das grandezas envolvidas sejam significativas, i.e. estatisticamente homogêneas [43]. Assim num *volume representativo* do material, é necessário que o valor médio das tensões, de-

formações etc. possam ser estatisticamente representativas, ou seja, que as flutuações das grandezas envolvidas não afetem as propriedades do material que estão sendo representadas (homogeneidade estatística, i.e. ergodicidade). Quando isso acontece, se diz que as grandezas envolvidas estão homogeneizadas.

Há várias formas de interpretar fisicamente a variável de dano, uma delas devida a Rabotnov(1963) será utilizada para dar uma descrição desta variável. Porém, na construção do modelo constitutivo a variável de dano deve ser a mais geral possível. Considerando uma seção de um elemento de volume com vetor normal de direção \mathbf{n} , seja A a área dessa seção, e seja também A_d a área das trincas e vazios na seção considerada. Se tem portanto uma área \bar{A} que realmente suporta o carregamento mecânico (seção efetiva). A variável de dano d_n está dada pela expressão seguinte

$$d_n = \frac{A_d}{A} = 1 - \frac{\bar{A}}{A} \quad (3.1)$$

de onde se pode deduzir que $0 \leq d_n \leq 1$. No caso de que o dano seja isotrópico a variável de dano não depende da normal \mathbf{n} e se escreverá simplesmente d .

Tensão Efetiva

Se uma força superficial \mathbf{t} é aplicada sobre uma seção de área A a tensão será dada então pela expressão

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{t}}{A} \quad (3.2)$$

A tensão sobre a área efetiva \bar{A} será dada então pela equação

$$\bar{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{t}}{\bar{A}} \quad (3.3)$$

onde $\bar{\mathbf{T}}$ é a tensão efetiva. Se \mathbf{T} é a tensão do material integro i.e. sem dano, se obtém através das equações (3.1), (3.2) e (3.3) a seguinte relação

$$\bar{\mathbf{T}} = \frac{1}{1-d} \mathbf{T} \quad (3.4)$$

de onde se pode obter facilmente

$$\bar{\mathbf{T}} \geq \mathbf{T} \quad (3.5)$$

sendo que: $\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{T}$ para $d = 0$, e $\bar{\mathbf{T}} \rightarrow \infty$ para $d \rightarrow 1$. Segundo Lemaitre et al. [54], para materiais dúcteis a fratura acontece no intervalo $0,5 \leq d \leq 0,9$.

Princípios de equivalência

Devido à dificuldade de caracterizar as trincas e cavidades para determinar o estado inicial e a evolução da variável de dano, como a definida na equação (3.1),

é necessário adotar uma técnica alternativa para poder descrever de uma maneira mais simples a variável de dano. Para isso é utilizada uma das hipóteses seguintes que equivale à adoção de uma técnica de homogeneização [50].

Considerando as três configurações a seguir: C_0 configuração íntegra i.e. indeformada e sem dano, C configuração danificada e deformada, \bar{C} configuração deformada e sem dano, i.e. configuração fictícia obtida a partir de C removendo o dano (configuração equivalente); o material evolui de C_0 a C existindo um mapeamento contínuo entre C e \bar{C} [84].

Uma vez escolhida a variável de dano é possível propor várias hipóteses:

- Deformação equivalente (Lemaitre, 1985)[54]:
Esta hipótese propõe a equivalência das deformações entre as configurações C e \bar{C} .
- Energia de deformação equivalente (Sidoroff et al., 1981):
Neste caso propõe-se a equivalência das energias de deformação nas configurações C e \bar{C} .
- Tensão equivalente (Simo et al., 1987):
Neste caso a hipótese proposta é a equivalência entre as tensões nas configurações C e \bar{C} .

3.2 ELASTO-PLASTICIDADE COM DANO ANISOTRÓPICO

Um modelo elasto-plástico com dano anisotrópico é proposto neste trabalho. Uma formulação baseada na hipótese de equivalência de energia é desenvolvida a partir do potencial de energia livre como segue.

Primeiramente, a função de energia livre é decomposta em três parcelas: elástica, plástica e de dano, i.e.

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}_e, \mathbf{d}, \bar{\varepsilon}_p, \beta) = \psi_{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}_e, \mathbf{d}) + \psi_p(\bar{\varepsilon}_p) + \psi_d(\beta) \quad (3.6)$$

Conseqüentemente, a desigualdade de Clausius-Duhem (2.91) terá a forma seguinte

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho \left(\frac{\partial \psi_{ed}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} : \boldsymbol{\varepsilon}_e^\nabla + \frac{\partial \psi_{ed}}{\partial \mathbf{d}} : \mathbf{d}^\nabla + \frac{\partial \psi_p}{\partial \bar{\varepsilon}_p} \dot{\bar{\varepsilon}}_p + \frac{\partial \psi_d}{\partial \beta} \dot{\beta} \right) \geq 0 \quad (3.7)$$

Admitindo que $\boldsymbol{\varepsilon}_e^\nabla \cong \mathbf{D}^e$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0$ e $\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p$, se tem

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi_{ed}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} \right) : \mathbf{D}^e + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^p - \rho \frac{\partial \psi_{ed}}{\partial \mathbf{d}} : \mathbf{d}^\nabla - \rho \frac{\partial \psi_p}{\partial \bar{\varepsilon}_p} \dot{\bar{\varepsilon}}_p - \rho \frac{\partial \psi_d}{\partial \beta} \dot{\beta} \geq 0 \quad (3.8)$$

de onde

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi_{ed}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} \quad (3.9)$$

Define-se as forças termodinâmicas associadas

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= -\rho \frac{\partial \psi_{ed}}{\partial \mathbf{d}} \\ R &= \rho \frac{\partial \psi_p}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p} \\ B &= \rho \frac{\partial \psi_d}{\partial \dot{\beta}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde \mathbf{Y} é a *taxa de energia liberada pelo dano*, R é a variável que determina o tamanho da região elástica no espaço de tensões (variável de endurecimento isotrópico). Finalmente B é o equivalente para a superfície de dano. Desta maneira é possível escrever (3.8) na forma seguinte

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^p + \mathbf{Y} : \mathbf{d}^\nabla - R\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - B\dot{\beta} \geq 0 \quad (3.11)$$

onde $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^p - R\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ é a dissipação plástica, e $\mathbf{Y} : \mathbf{d}^\nabla - B\dot{\beta}$ a dissipação associada ao dano.

3.2.1 Potencial de dissipação

Para determinar a evolução das variáveis internas, são propostas um potencial plástico F_p e um potencial de dano F_d . Cada um deles dependendo das variáveis termodinâmicas, com normalidade e convexidades obedecidas segundo a expressão

$$\begin{aligned} F_p &= F_p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{d}, R), F_p = 0 \\ F_d &= F_d(\mathbf{d}, \beta), F_d = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Utilizando o princípio da máxima entropia tem-se o problema de maximizar (3.12) sujeita às condições dadas acima. O problema de maximização é então resolvido introduzindo os multiplicadores de Lagrange $\dot{\gamma}_p$ e $\dot{\gamma}_d$, sob condições matemáticas adequadas relativas à condição do ótimo. Obtém-se então a partir das equações (3.11) e (3.12) a seguinte expressão

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^p + \mathbf{Y} : \mathbf{d}^\nabla - R\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - B\dot{\beta} - \dot{\gamma}_p F_p - \dot{\gamma}_d F_d \quad (3.13)$$

A estacionariedade da função Φ em relação às diferentes variáveis termodinâmicas envolvidas dão finalmente a evolução das variáveis internas em função dos potenciais plástico e de dano segundo

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^p &= \dot{\gamma}_p \frac{\partial F_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p &= -\dot{\gamma}_p \frac{\partial F_p}{\partial R} \\ \mathbf{d}^\nabla &= \dot{\gamma}_d \frac{\partial F_d}{\partial \mathbf{Y}} \\ \dot{\beta} &= -\dot{\gamma}_d \frac{\partial F_d}{\partial B} \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.2.2 Tensor do efeito de dano

Considerando a existência de um mapeamento contínuo entre as tensões σ e $\bar{\sigma}$ correspondentes às configurações C e \bar{C} respectivamente a relação seguinte, devida a Chaboche apud Zhu et al. [92], é dada pela equação

$$\bar{\sigma} = \mathbf{M}\sigma \quad (3.15)$$

onde $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{d})$ é o *tensor do efeito de dano*. O tensor \mathbf{M} é um tensor de segunda ou quarta ordem dependendo do tensor de dano \mathbf{d} . Segundo Zhu and Cescotto (1995) [92], não existe uma única formulação matemática para $\mathbf{M}(\mathbf{d})$, mas sempre é possível escrever tal formulação em função às direções principais de \mathbf{d} . Escrevendo a equação (3.15) na forma matricial e utilizando a notação de Voigt se tem

$$[\bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{22} \bar{\sigma}_{33} \bar{\sigma}_{23} \bar{\sigma}_{31} \bar{\sigma}_{12}]^T = \mathbf{M}[\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{23} \sigma_{31} \sigma_{12}]^T \quad (3.16)$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{66} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

sendo

$$\begin{aligned} M_{11} &= \frac{1}{1-d_1}, M_{22} = \frac{1}{1-d_2}, M_{33} = \frac{1}{1-d_3}, \\ M_{44} &= \frac{1}{\sqrt{(1-d_2)(1-d_3)}}, M_{55} = \frac{1}{\sqrt{(1-d_3)(1-d_1)}}, M_{66} = \frac{1}{\sqrt{(1-d_1)(1-d_2)}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Em caso de que o dano fosse isotrópico se tem $d_i = d_j$ ($i, j = 1, 2, 3$), o que reproduz (3.4).

3.2.3 Elasticidade

Propondo uma lei elástica linear, o potencial elástico estará dado pela expressão

$$\psi_{ed} = \frac{1}{2\rho} \boldsymbol{\varepsilon}_e : \bar{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (3.19)$$

onde

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-T} \quad (3.20)$$

As leis constitutivas nas configurações C e \bar{C} , respectivamente, estarão dadas pelas equações seguintes

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (3.21)$$

e

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad (3.22)$$

Assumindo a hipótese de equivalência de energia, se tem

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}_e = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad (3.23)$$

de onde

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (3.24)$$

3.2.4 Plasticidade

A evolução da deformação plástica proposta está definida como segue.

- Função de escoamento:

A função de escoamento na configuração C está dada pela função

$$f_p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{d}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) = \sigma_{eq}^* - R(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \leq 0 \quad (3.25)$$

onde

$$\sigma_{eq}^* = \frac{1}{6} \|\mathbf{M}\| \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\sigma}^{dev}\|, \quad \|\mathbf{M}\| = tr(\mathbf{M}) \quad (3.26)$$

que corresponde à função de escoamento de von Mises para $\mathbf{d} = \mathbf{0}$.

- Multiplicador plástico:

Da função de escoamento é obtida

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p = \dot{\gamma}_p \quad (3.27)$$

- Lei de fluxo:

A lei de fluxo está dada pela expressão

$$\mathbf{D}^p = \dot{\gamma}_p \frac{\partial F_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma}_p \frac{\partial f_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.28)$$

de onde

$$\mathbf{D}^p = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{M}\| \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p \frac{\boldsymbol{\sigma}^{dev}}{\|\boldsymbol{\sigma}^{dev}\|} = \frac{1}{4} \|\mathbf{M}\|^2 \frac{\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p}{R} \boldsymbol{\sigma}^{dev} \quad (3.29)$$

- Evolução da deformação plástica acumulada:

A evolução da deformação plástica acumulada é dada pela equação

$$\dot{\bar{\epsilon}}_p = -\dot{\gamma}_p \frac{\partial F_p}{\partial R} = -\dot{\gamma}_p \frac{\partial f_p}{\partial R} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\|\mathbf{M}\|} \|\mathbf{D}^p\| \quad (3.30)$$

onde

$$\bar{\epsilon}_p = \int_0^t \dot{\bar{\epsilon}}_p dt \quad (3.31)$$

- Consistência plástica e multiplicador plástico:

A consistência plástica está dada pela expressão

$$\dot{f}_p = \frac{\partial f_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\sigma}^\nabla + \frac{\partial f_p}{\partial R} \dot{R} + \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{d}} : \mathbf{d}^\nabla \quad (3.32)$$

de onde

$$\dot{\gamma}_p = \frac{\frac{\partial f_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \mathbf{D}}{\frac{\partial f_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial f_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \rho \frac{\partial f_p}{\partial R} \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial \bar{\epsilon}_p^2} \frac{\partial f_p}{\partial R} - \dot{\gamma}_d \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{d}} : \frac{\partial F_d}{\partial \mathbf{Y}}} \quad (3.33)$$

3.2.5 Dano do material

O dano do material é caracterizado segundo a seguinte proposta.

A forma matricial de \mathbf{Y} que escrita na direção principal do dano é dada através da expressão

$$\mathbf{Y}^T = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{22} & Y_{33} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

- Lei de variação do locus do dano:

A lei de variação do locus (domínio) do dano está dada pela desigualdade

$$f_d(\mathbf{Y}, \beta) = Y_{eq} - B(\beta) \leq 0 \quad (3.35)$$

onde

$$Y_{eq} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} Q \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.36)$$

é uma função dependente da forma quadrática Q cuja forma geral está dada pela equação

$$Q = a_1 Y_{11}^2 + a_2 Y_{22}^2 + a_3 Y_{33}^2 + 2a_4 Y_{22} Y_{33} + 2a_5 Y_{11} Y_{33} + 2a_6 Y_{11} Y_{22} = 1 \quad (3.37)$$

que na forma matricial pode ser escrita na forma seguinte

$$Q = \mathbf{Y}^T \begin{bmatrix} a_1 & a_6 & a_5 \\ a_6 & a_2 & a_4 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T \mathbf{J} \mathbf{Y} = 1 \quad (3.38)$$

Se a matriz \mathbf{J} é diagonal, o locus correspondente será simétrico. Por outro lado, para ter em conta o efeito Bauschinger na definição de Y_{eq} é necessário incluir os termos lineares.

- Evolução do dano:

A evolução do dano é dado através da expressão

$$\mathbf{d}^\nabla = \dot{\gamma}_d \frac{\partial F_d}{\partial \mathbf{Y}} = \dot{\gamma}_d \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} = \frac{\dot{\gamma}_d}{2Y_{eq}} \mathbf{JY} \quad (3.39)$$

e a variável β segundo a equação

$$\dot{\beta} = -\dot{\gamma}_d \frac{\partial f_d}{\partial B} = \dot{\gamma}_d \quad (3.40)$$

3.3 EVOLUÇÃO DO DANO

3.3.1 Dano com endurecimento isotrópico: formulação dependente da tensão

É possível modelar a evolução do dano através da evolução da tensão. Nesse caso é necessário considerar tanto a parte hidrostática quanto a deviatórica da tensão, ou seja, o escoamento do dano será do tipo Drucker-Prager. A deformação estará composta, neste caso, por uma parte elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, uma parte plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ e uma parte associada ao dano $\boldsymbol{\varepsilon}^d$. Escrevendo em forma de taxa a relação entre estas três componentes de deformação e a deformação total resulta equação

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d \quad (3.41)$$

Seja a função de evolução do locus de dano definida através da equação seguinte

$$f_d = f_d(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^d, h_d) = F_d(\boldsymbol{\sigma}) - \chi_d(\boldsymbol{\varepsilon}^d, h_d) = 0 \quad (3.42)$$

onde a evolução de h_d pode ser escrita dependente da taxa energia liberada pelo dano como segue

$$\dot{h}_d = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d \quad (3.43)$$

ou dependente apenas da componente da deformação devida ao dano

$$\dot{h}_d = k \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d\| \quad (3.44)$$

-Tensão efetiva de dano σ_{de} :

Quando é considerado um problema geral em três dimensões é necessário ter uma quantidade equivalente ao caso unidimensional (um escalar) que represente à tensão associada ao dano. Define-se então a *tensão efetiva de dano* σ_{de} tendo em conta a propriedade de escalamento na forma seguinte

$$\sigma_{de} = c (F_d)^{\frac{1}{n}} \quad (3.45)$$

de onde é obtida

$$F_d = \left(\frac{\sigma_{de}}{c}\right)^n \quad (3.46)$$

Utilizando o teorema de Euler pode ser obtido o grau de homogeneidade através da equação seguinte

$$\frac{\partial F_d}{\partial \sigma} : \sigma = n F_d \quad (3.47)$$

Adotando uma função do tipo Drucker-Prager

$$F_d = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} \quad (3.48)$$

se tem

$$\sigma_{de} = c (\alpha I_1 + \sqrt{J_2})^{\frac{1}{n}} \quad (3.49)$$

Sabendo que neste caso $n = 1$ e $c = \frac{\sqrt{3}}{1 + \alpha \sqrt{3}}$, a *tensão efetiva de dano* estará dada pela expressão

$$\sigma_{de} = \frac{\sqrt{3}}{1 + \alpha \sqrt{3}} (\alpha I_1 + \sqrt{J_2}) \quad (3.50)$$

A função de evolução do locus do dano f_d é expressa segundo a equação

$$f_d = (\alpha I_1 + \sqrt{J_2}) - \chi_d = 0 \quad (3.51)$$

ou equivalentemente através de

$$f_d = \sigma_{de} - \frac{\sqrt{3}}{1 + \alpha \sqrt{3}} \chi_d = 0 \quad (3.52)$$

-Dano total equivalente ε_d :

Similarmente à *tensão efetiva de dano* é necessário definir o *dano total equivalente* ε_d . Se pretende obter um escalar ε_d que representa a componente de deformação associada ao dano e que no caso unidimensional é equivalente à componente ε^d da deformação total.

A evolução do *dano total equivalente* pode ser definida por meio da energia associada ao dano como em (3.43). Sendo esta energia obtida da equação

$$\dot{w}^d = \sigma_{de} \cdot \dot{\varepsilon}_d \quad (3.53)$$

e de

$$\dot{w}^d = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d \quad (3.54)$$

Portanto, a evolução do *dano total equivalente* está dada pela equação

$$\dot{\varepsilon}_d = \frac{\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d}{\sigma_{de}} \quad (3.55)$$

Equivalentemente, usando uma outra definição do *dano total equivalente* dependente da componente da deformação associada ao dano $\boldsymbol{\varepsilon}^d$ é definida esta grandeza por meio da equação seguinte

$$\dot{\varepsilon}_d = k \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d\| \quad (3.56)$$

tal como foi feita na equação (3.44).

O valor do escalar k pode ser obtido através da expressão

$$k = \frac{n \cdot F_d}{\sigma_{de} \|\frac{\partial F_d}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\|} \quad (3.57)$$

Assim, uma vez escolhida a função de escoamento do tipo Drucker-Prager o valor de k será

$$k = \frac{\sqrt{2} + \alpha \sqrt{6}}{\sqrt{18\alpha^2 + 3}} \quad (3.58)$$

onde a evolução do *dano total equivalente* estará dada por

$$\dot{\varepsilon}_d = \frac{\sqrt{2} + \alpha \sqrt{6}}{\sqrt{18\alpha^2 + 3}} \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d\| \quad (3.59)$$

Re-escrevendo a função de escoamento, obtém-se

$$\begin{aligned} f_d(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}^d, \varepsilon_d) &= \frac{\sqrt{3}}{1+\alpha\sqrt{3}}(\alpha I_1 + \sqrt{J_2}) - \frac{\sqrt{3}}{1+\alpha\sqrt{3}} \cdot \chi_d(\boldsymbol{\varepsilon}^d, \varepsilon_d) \\ &= \sigma_{de} - B(\boldsymbol{\varepsilon}^d, \varepsilon_d) = 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

A integração do *dano total equivalente* é definida pelo procedimento a seguir. Primeiramente se tem

$$\varepsilon_d = \int_0^t \dot{\varepsilon}_d dt = \frac{\sqrt{2} + \alpha \sqrt{6}}{\sqrt{18\alpha^2 + 3}} \int_0^t \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d\| dt \quad (3.61)$$

Por outro lado

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d = -\dot{\gamma}_d \frac{\partial f_d}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -\dot{\gamma}_d \frac{\sqrt{3}}{1 + \alpha\sqrt{3}} \left[\alpha \mathbf{I} + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \boldsymbol{\sigma}^{dev} \right] \quad (3.62)$$

de onde

$$\|\dot{\epsilon}^d\| = \dot{\gamma}_d \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{6\alpha^2 + 1}}{1 + \alpha\sqrt{3}} \quad (3.63)$$

a partir da qual se obtém a seguinte relação

$$\dot{\epsilon}_d = \dot{\gamma}_d \quad (3.64)$$

É importante neste ponto dizer que o valor da variável escalar B da equação (3.60) pode ser obtido pelo ensaio de tração simples, e neste mesmo experimento é obtido ϵ_d que é uma medida de deformação (deformação equivalente) que representa o dano acumulado. Obtém-se assim uma curva que determina a variação do locus do dano " $B - \epsilon_d$ " que é utilizada para modelar a evolução do dano.

3.3.2 Dano com endurecimento isotrópico: formulação dependente da energia

Trabalhando no espaço \mathbf{Y} ao invés do espaço de tensões se obtém uma formulação diferente para a evolução do dano. Numa forma geral, a função de evolução do locus do dano pode ser escrita na forma

$$f_d(\mathbf{Y}, h_d) = F_d(\mathbf{Y}) - \chi_d(h_d) = 0 \quad (3.65)$$

onde a evolução da variável h_d pode ser obtida a partir do trabalho associado ao dano

$$\dot{h}_d = \mathbf{Y} : \mathbf{d}^\nabla \quad (3.66)$$

ou diretamente do tensor do dano \mathbf{d}

$$\dot{h}_d = k \|\mathbf{d}^\nabla\| \quad (3.67)$$

-Energia equivalente do dano (Y_{eq}):

A *energia equivalente do dano* Y_{eq} é obtida tendo em conta a condição de escalamento

$$Y_{eq} = c(F_d)^{\frac{1}{n}} \quad (3.68)$$

de onde

$$F_d = \left(\frac{Y_{eq}}{c}\right)^n \quad (3.69)$$

O grau de homogeneidade é obtido segundo o teorema de Euler na forma seguinte

$$\frac{\partial F_d}{\partial \mathbf{Y}} : \mathbf{Y} = n \cdot F_d \quad (3.70)$$

No modelo desenvolvido neste trabalho se tem

$$F_d = \left(\frac{1}{2} Q\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{Y}^T \mathbf{J} \mathbf{Y}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.71)$$

de onde resulta

$$Y_{eq} = c \left[\left(\frac{1}{2} Q\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{n}} \quad (3.72)$$

É necessário obter os valores de n e c para completar a definição de Y_{eq} . Aplicando o teorema de Euler (3.70) se obtém o valor de n como segue

$$\frac{\partial F_d}{\partial \mathbf{Y}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} Q\right)^{\frac{1}{2}}} \mathbf{Y}^T \mathbf{J} \quad (3.73)$$

de onde

$$\frac{\partial F_d}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \mathbf{Y} = F_d \quad (3.74)$$

o que implica que $n = 1$.

Assim, a equação (3.72) torna-se

$$Y_{eq} = c \left(\frac{1}{2} Q\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.75)$$

Por outro lado, no caso unidimensional $\mathbf{Y}^T = [Y \ 0 \ 0]$, $Y_{eq} = Y$ e $\mathbf{J} = \mathbf{I}$. Conseqüentemente

$$Y = c \left(\frac{1}{2} [Y \ 0 \ 0]\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} Y \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} Y \quad (3.76)$$

assim $c = \sqrt{2}$ e

$$Y_{eq} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} Q\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \mathbf{Y}^T \mathbf{J} \mathbf{Y}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.77)$$

Finalmente, a função da evolução do locus do dano será dada pela equação

$$f_d = F_d - \chi_d = 0 \quad (3.78)$$

ou equivalentemente

$$f_d = Y_{eq} - B = 0 \quad (3.79)$$

-Dano total equivalente β :

O *dano total equivalente* β pode ser definido segundo o trabalho associado ao dano como segue

$$\dot{w}^d = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{d}^\nabla \quad (3.80)$$

ou equivalentemente

$$\dot{w}^d = Y_{eq} \cdot \dot{\beta} \quad (3.81)$$

Por conseguinte

$$\dot{\beta} = \frac{\mathbf{Y} \cdot \mathbf{d}^\nabla}{Y_{eq}} \quad (3.82)$$

No caso unidimensional, o *dano total equivalente* β é equivalente à variável de dano d , i.e. $\beta \equiv d$ para o caso unidimensional.

Alternativamente, o *dano total equivalente* pode ser definido através da norma do tensor do dano na forma seguinte

$$\dot{\beta} = k \|\mathbf{d}^\nabla\| \quad (3.83)$$

onde o valor de k é obtido segundo

$$k = \frac{n \cdot F_d}{Y_{eq} \|\frac{\partial F_d}{\partial \mathbf{Y}}\|} \quad (3.84)$$

Para o modelo proposto neste trabalho se tem

$$k = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} Q\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\|\mathbf{Y}^T \mathbf{J}\|} \quad (3.85)$$

de onde

$$\dot{\beta} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} Q\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\|\mathbf{Y}^T \mathbf{J}\|} \|\mathbf{d}^\nabla\| \quad (3.86)$$

A evolução do tensor \mathbf{d} obtém-se de (3.14), i.e.

$$\mathbf{d}^\nabla = \dot{\gamma}_d \frac{\partial f_d}{\partial \mathbf{Y}} = \dot{\gamma}_d \frac{1}{Y_{eq}} \mathbf{J} \mathbf{Y} \quad (3.87)$$

inserindo o resultado da última equação em (3.86) obtém-se a relação

$$\dot{\beta} = \dot{\gamma}_d \quad (3.88)$$

Capítulo 4

IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO

4.1 INTRODUÇÃO

A implementação do modelo constitutivo é feita através de um esquema de integração implícito tal como é detalhado neste capítulo. A implementação é feita considerando que o dano é isotrópico. O algoritmo do retorno para a evolução da elasto-plasticidade e do dano é desenvolvido. Uma linearização adequada associada ao algoritmo do retorno para a solução da equação do equilíbrio (2.133) é introduzida através do Jacobiano consistente na seção (4.5).

4.2 RELAÇÕES IMPORTANTES

A relação entre a tensão e a deformação escrita em forma incremental é dada pela equação

$$\Delta\sigma_{n+1} = \bar{\mathbf{C}} : \Delta\epsilon_{n+1}^e \quad (4.1)$$

sendo

$$\bar{\mathbf{C}} = (1 - d_{n+1})^2 \mathbf{C} \quad (4.2)$$

O tensor de tensões pode ser dividido em duas parcelas deviatórica e hidrostática, respectivamente, como segue

$$\Delta\sigma_{n+1} = \Delta\sigma_{n+1}^{dev} + \Delta p_{n+1} \mathbf{I} \quad (4.3)$$

onde

$$\Delta p_{n+1} = \frac{1}{3} \text{tr}(\Delta \sigma_{n+1}) \quad (4.4)$$

Identicamente o tensor de deformações é decomposta nas suas componentes deviatórica e hidrostática como é mostrado seguidamente

$$\Delta \epsilon_{n+1} = \Delta \epsilon_{n+1}^{dev} + \frac{1}{3} \epsilon_{n+1}^{vol} \mathbf{I} \quad (4.5)$$

onde

$$\Delta \epsilon_{n+1}^{vol} = \text{tr}(\Delta \epsilon_{n+1}) \quad (4.6)$$

4.3 SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EVOLUÇÃO DO DANO

Uma vez escolhido o modelo de evolução do dano é necessário obter uma solução aproximada do modelo evolutivo. Para dar maior clareza a esta etapa de implementação do modelo serão repetidas algumas equações.

a. *Função de evolução do locus do dano:*

A função de evolução do locus do dano está dada pela expressão

$$f_d(\mathbf{Y}, \beta) = Y_{eq} - B(\beta) = 0 \quad (4.7)$$

onde

$$Y_{eq} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} Q \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

e

$$Q = \mathbf{Y}^T \mathbf{J} \mathbf{Y} \quad (4.9)$$

b. *Evolução do tensor do dano:*

A evolução do tensor do dano é dada pela equação

$$\mathbf{d}^\nabla = \dot{\gamma}_d \frac{1}{Y_{eq}} \mathbf{J} \mathbf{Y} \quad (4.10)$$

c. *Relações para o caso de dano isotrópico:*

Se o dano for isotrópico se tem as relações seguintes

$$\mathbf{J} = \mathbf{I} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{d}^T = [d \ d \ d] \quad (4.12)$$

$$\mathbf{Y}^T = [Y \ Y \ Y] \quad (4.13)$$

$$Y = -\rho \frac{\partial \psi_{ed}}{\partial \mathbf{d}} \quad (4.14)$$

de onde resulta

$$\mathbf{Y} = (1 - d)(\boldsymbol{\varepsilon}^e)^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (4.15)$$

A energia de deformação elástica está dada pela equação

$$w^e = \rho \psi_{ed} = \frac{1}{2} (1 - d)^2 \boldsymbol{\varepsilon}^{eT} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (4.16)$$

de onde é obtida

$$Y = \frac{2}{1 - d} w^e \quad (4.17)$$

Também são obtidas

$$Q = 3Y^2 \quad (4.18)$$

$$Y_{eq} = \sqrt{3}Y \quad (4.19)$$

$$\dot{d} = \frac{1}{\sqrt{3}} \dot{\gamma}_d \quad (4.20)$$

e

$$\dot{\beta} = \dot{\gamma}_d \quad (4.21)$$

d. *Integração:*

A solução das equações evolutivas é feita através de um *esquema de Euler atrasado* (implícito). É obtido um sistema de equações (normalmente não lineares) a partir das equações diferenciais de evolução. O sistema de quatro equações é dado a seguir, sendo que n representa a n -ésima configuração no tempo t discretizado

$$d_{n+1} = d_n + \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta \gamma_d \quad (4.22)$$

$$\beta_{n+1} = \beta_n + \Delta \gamma_d \quad (4.23)$$

$$0 = Y_{eq}(Y_{n+1}) - B(\beta_{n+1}) \quad (4.24)$$

$$Y_{n+1} = (1 - d_{n+1}) \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{eT} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e \quad (4.25)$$

4.4 ALGORITMO DO RETORNO

Para verificar se a deformação que experimenta o corpo, entre as configurações n e $n + 1$ (i.e. quando passa da configuração n para $n + 1$), é puramente elástica ou elastoplástica, ou ainda, se o dano do material sofreu uma variação ou não, é utilizado o conhecido algoritmo chamado "Algoritmo do retorno". Este algoritmo é composto de dois passos como é mostrado seguidamente. Supondo conhecido o valor da deformação elástica na configuração $n + 1$ se verifica através das funções de

escoamento plástico e do dano se há alguma variação da deformação plástica e do valor do dano.

4.4.1 Solução numérica da elasto-plasticidade

i. Preditor elástico:

Considerando conhecida a variação da deformação total $\Delta\epsilon_{n+1}$, este passo consiste em considerar que a deformação é puramente elástica. Obtém-se então a equação seguinte em forma incremental

$$\Delta\sigma_{n+1}^{trial} = (1 - d_n)^2 \mathbf{C} : \Delta\epsilon_{n+1}^{e\ trial} = (1 - d_n)^2 \mathbf{C} : \Delta\epsilon_{n+1} \quad (4.26)$$

de onde é obtida a equação

$$\sigma_{n+1}^{trial} = \sigma_n + (1 - d_n)^2 \mathbf{C} : \Delta\epsilon_{n+1} \quad (4.27)$$

sendo

$$\epsilon_{n+1}^{e\ trial} = \epsilon_n^e + \Delta\epsilon_{n+1} \quad (4.28)$$

$$\epsilon_{n+1}^{p\ trial} = \epsilon_n^p \quad (4.29)$$

e

$$\bar{\epsilon}_{n+1}^{p\ trial} = \bar{\epsilon}_n^p \quad (4.30)$$

Finalmente, é definida a tensão equivalente em função da tensão de teste (trial) que terá a forma

$$\sigma_{eq}^{* trial} = \frac{1}{1 - d_n} \sqrt{\frac{3}{2}} \|(\sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\| \quad (4.31)$$

A equação

$$(\sigma_{n+1}^{dev})^{trial} = \sigma_{n+1}^{trial} - \frac{1}{3} tr(\sigma_{n+1}^{trial}) \mathbf{I} \quad (4.32)$$

também é válida em forma análoga à equação (4.3).

ii. Corretor plástico:

É preciso verificar se a hipótese feita em (i) foi verdadeira ou não, i.e. se a deformação foi realmente puramente elástica ou se possui uma componente plástica. Para isso verifica-se o seguinte:

$$\text{Se } \sigma_{eq}^{* trial} > (\sigma_y)_n \text{ então} \quad (4.33)$$

a deformação não foi puramente elástica. Por conseguinte, deve ser resolvido o seguinte sistema de equações decorrente da integração implícita (Euler retardado)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} - \frac{1}{1 - d_{n+1}} \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev}}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev}\|} \quad (4.34)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p \quad (4.35)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ dev}} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ dev}})^{trial} - \frac{1}{1 - d_{n+1}} \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p \frac{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev}}{\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev}\|} \quad (4.36)$$

$$\dot{f}_p = 0 \Rightarrow \frac{1}{1 - d_{n+1}} \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev}\| - \sigma_y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) = 0 \quad (4.37)$$

sendo utilizada a notação $R = \sigma_y$ como é habitual.

Tendo em conta que a deformação plástica está relacionada diretamente com as tensões e deformações deviatóricas pode ser adotada a seguinte hipótese:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ vol}} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ vol}})^{trial} \quad (4.38)$$

e

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ vol}} = (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ vol}})^{trial} \quad (4.39)$$

A componente deviatórica do tensor de tensões em forma contraída (contração de um índice para o tensor de segunda ordem, e de dois para o tensor de quarta ordem) pode ser expressa através da equação

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev} = \boldsymbol{\sigma}_n^{dev} + \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev} \quad (4.40)$$

o que pode ser escrita utilizando a equação (4.3) de acordo com a equação

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev} = \boldsymbol{\sigma}_n^{dev} + (1 - d_{n+1})^2 \mathbf{C} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e - \frac{1}{3} (1 - d_{n+1})^2 \text{tr}(\mathbf{C} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e) \mathbf{I}_R \quad (4.41)$$

onde

$$\mathbf{I}_R^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Tendo em conta que

$$\mathbf{C} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \lambda \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e) \cdot \mathbf{I}_R + 2\mu \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e \quad (4.43)$$

e

$$\text{tr}(\mathbf{C} \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e) = 3\lambda \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e) + 2\mu \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e) = (3\lambda + 2\mu) \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e) \quad (4.44)$$

obtém-se finalmente

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev} = \boldsymbol{\sigma}_n^{dev} + 2\mu (1 - d_{n+1})^2 [\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e - \frac{1}{3} \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e) \mathbf{I}_R] \quad (4.45)$$

A última equação é escrita na forma

$$\sigma_{n+1}^{dev} = \sigma_n^{dev} + 2\mu (1 - d_{n+1})^2 \Delta \epsilon_{n+1}^{e dev} \quad (4.46)$$

de onde é obtida

$$\Delta \sigma_{n+1}^{dev} = 2\mu (1 - d_{n+1})^2 \Delta \epsilon_{n+1}^{e dev} \quad (4.47)$$

o que demonstra que $\Delta \sigma_{n+1}^{dev}$ e $\Delta \epsilon_{n+1}^{e dev}$ são paralelos.

Posteriormente, obtém-se a relação entre as componentes volumétricas de tensão e deformação. Segundo a sua definição

$$p_{n+1} = p_n + \frac{1}{3} (1 - d_{n+1})^2 [3\lambda \text{tr}(\Delta \epsilon_{n+1}^e) + 2\mu \text{tr}(\Delta \epsilon_{n+1}^{e dev})] \quad (4.48)$$

o que pode ser expresso através da equação

$$p_{n+1} = p_n + k (1 - d_{n+1})^2 \Delta \epsilon_{n+1}^{e vol} \quad (4.49)$$

onde

$$k = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \quad (4.50)$$

é o módulo volumétrico. Finalmente, apartir da equação (4.49) é obtida facilmente a expressão

$$\Delta p_{n+1} = k(1 - d_{n+1})^2 \Delta \epsilon_{n+1}^{e vol} \quad (4.51)$$

Uma importante relação é obtida apartir da equação (4.34) tendo em conta que

$$\epsilon_{n+1}^e = \epsilon_{n+1}^{e dev} + \frac{1}{3} \epsilon_{n+1}^{e vol} \mathbf{I} \quad (4.52)$$

onde

$$\epsilon_{n+1}^{e dev} + \frac{1}{3} \epsilon_{n+1}^{e vol} \mathbf{I} = (\epsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} + \frac{1}{3} (\epsilon_{n+1}^{e vol})^{trial} \mathbf{I} - \frac{1}{1 - d_{n+1}} \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p \frac{\sigma_{n+1}^{dev}}{\|\sigma_{n+1}^{dev}\|} \quad (4.53)$$

Tendo em conta a equação (4.38) obtém-se

$$\Delta \epsilon_{n+1}^{e dev} = \Delta (\epsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} - \frac{1}{1 - d_{n+1}} \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p \frac{\sigma_{n+1}^{dev}}{\|\sigma_{n+1}^{dev}\|} \quad (4.54)$$

Utilizando a equação (4.47) é possível escrever a equação anterior em função das tensões deviatóricas na forma seguinte

$$\frac{\Delta \sigma_{n+1}^{dev}}{2\mu(1 - d_{n+1})^2} = \frac{(\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial}}{2\mu(1 - d_n)^2} - \frac{1}{1 - d_{n+1}} \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p \frac{\sigma_{n+1}^{dev}}{\|\sigma_{n+1}^{dev}\|} \quad (4.55)$$

de onde

$$\Delta \sigma_{n+1}^{dev} = \frac{(1 - d_{n+1})^2}{(1 - d_n)^2} (\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial} - 2\mu (1 - d_{n+1}) \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\epsilon}_{n+1}^p \frac{\sigma_{n+1}^{dev}}{\|\sigma_{n+1}^{dev}\|} \quad (4.56)$$

Por conseguinte, obtém-se a relação

$$(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial} = [1 + 2\mu (1 - d_{n+1}) \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \frac{1}{\|\sigma_{n+1}^{dev}\|}] \sigma_{n+1}^{dev} \quad (4.57)$$

onde

$$(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial} = \frac{1}{(1 - d_n)^2} [(1 - d_{n+1})^2 (\sigma_{n+1}^{dev})^{trial} + \{(1 - d_n)^2 - (1 - d_{n+1})^2\} \sigma_n^{dev}] \quad (4.58)$$

o que mostra o paralelismo entre σ_{n+1}^{dev} e $(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}$.

Escrevendo a equação (4.57) na forma

$$\sigma_{n+1}^{dev} = (\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial} - 2\mu (1 - d_{n+1}) \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \frac{\sigma_{n+1}^{dev}}{\|\sigma_{n+1}^{dev}\|} \quad (4.59)$$

e usando o paralelismo entre σ_{n+1}^{dev} e $(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}$, é obtida a equação

$$\sigma_{n+1}^{dev} = (\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial} - 2\mu (1 - d_{n+1}) \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \frac{(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}}{\|(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}\|} \quad (4.60)$$

Desta forma, é possível escrever σ_{n+1}^{dev} em função de $(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}$ na forma

$$\sigma_{n+1}^{dev} = [1 - 2\mu (1 - d_{n+1}) \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \frac{1}{\|(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}\|}] (\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial} \quad (4.61)$$

Introduzindo (4.61) em (4.37) é obtida

$$\frac{1}{1 - d_{n+1}} \sqrt{\frac{3}{2}} [1 - 2\mu (1 - d_{n+1}) \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \frac{1}{\|(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}\|}] \|(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}\| - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) = 0 \quad (4.62)$$

onde $\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) = \sigma_y(\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p)$.

Finalmente, é obtida a equação

$$\frac{1}{1 - d_{n+1}} \sqrt{\frac{3}{2}} \|(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}\| - 3\mu \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p) = 0 \quad (4.63)$$

que é uma equação dependente das variáveis $\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ e $d_{n+1} = d_{n+1}(\Delta \beta_{n+1})$.

4.4.2 Solução numérica da evolução do dano:

-(i) *Preditor do dano:*

Primeiramente é suposto que

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= d_n \\ \beta_{n+1} &= \beta_n \end{aligned}$$

Por conseguinte, o valor tentativo da energia equivalente do dano (trial) $Y_{n+1}^{eq} \equiv Y_{eq}$ é dado por

$$Y_{eq}^{trial} = \sqrt{3}Y_{n+1}^{trial} = \sqrt{3}(1 - d_n)(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial})^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \quad (4.64)$$

- (ii) *Corretor do dano:*

Se $Y_{eq}^{trial} > B_n$ então é resolvido o seguinte sistema de equações:

$$d_{n+1} = d_n + \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta\beta_{n+1} \quad (4.65)$$

$$\beta_{n+1} = \beta_n + \Delta\beta_{n+1} \quad (4.66)$$

$$0 = Y_{eq}(Y_{n+1}) - B(\beta_{n+1}) \quad (4.67)$$

$$Y_{n+1} = (1 - d_{n+1}) (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e \quad (4.68)$$

De (4.66) e (4.67) se obtém

$$\sqrt{3}Y_{n+1} - B(\beta_n + \Delta\beta_{n+1}) = 0 \quad (4.69)$$

De (4.68) se deduz

$$\sqrt{3}(1 - d_{n+1}) (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e - B(\beta_n + \Delta\beta_{n+1}) = 0 \quad (4.70)$$

Da equação (4.65) se tem

$$\sqrt{3}(1 - d_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta\beta_{n+1})(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e - B(\Delta\beta_{n+1}) = 0 \quad (4.71)$$

4.4.3 Casos possíveis

Existem quatro casos possíveis tendo em conta que é necessário considerar a evolução da deformação plástica e do dano.

- **Caso (a):** Não há variação nem da deformação plástica nem do dano.

Nesse caso se verifica

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}_n + (1 - d_n)^2 \mathbf{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \\ \Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p &= 0 \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p &= \mathbf{0} \\ \Delta\beta_{n+1} &= 0 \\ d_{n+1} &= d_n \end{aligned}$$

- **Caso (b):** Há variação da deformação plástica e do dano.

Neste caso é necessário resolver o sistema formado pelas equações (4.63) e (4.71), i.e.

$$\frac{1}{1-d_{n+1}} \sqrt{\frac{3}{2}} \|(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}\| - 3\mu \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p) = 0 \quad (4.72)$$

e

$$\sqrt{3}(1-d_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta \beta_{n+1})(\varepsilon_{n+1}^e)^T \mathbf{C} \varepsilon_{n+1}^e - B(\Delta \beta_{n+1}) = 0 \quad (4.73)$$

Fazendo

$$f_p = \sqrt{\frac{3}{2}} \|(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}\| - (1-d_{n+1}) \{3\mu \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p + \sigma_y(\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p)\} = 0 \quad (4.74)$$

e

$$f_d = \sqrt{3}(1-d_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta \beta_{n+1})(\varepsilon_{n+1}^e)^T \mathbf{C} \varepsilon_{n+1}^e - B(\Delta \beta_{n+1}) = 0 \quad (4.75)$$

se pode ver que

$$f_p = f_p(\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p, \Delta \beta_{n+1}) \quad (4.76)$$

e

$$f_d = f_d(\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p, \Delta \beta_{n+1}) \quad (4.77)$$

Aplicando o método de Newton obtém-se os valores aproximados de $\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ e $\Delta \beta_{n+1}$ como segue

$$\begin{Bmatrix} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \Delta \beta_{n+1} \end{Bmatrix}_{(k+1)} = \begin{Bmatrix} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \Delta \beta_{n+1} \end{Bmatrix}_{(k)} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_p}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial f_p}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \\ \frac{\partial f_d}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} & \frac{\partial f_d}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \end{bmatrix}_{(k)}^{-1} \begin{Bmatrix} f_p \\ f_d \end{Bmatrix}_{(k)} \quad (4.78)$$

onde k é o número de iterações do método numérico.

As expressões necessárias para a utilização do método de Newton são obtidas depois de manipulações analíticas e são as seguintes:

- (i):

$$\frac{\partial f_p}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = -(1-d_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta \beta_{n+1})(3\mu + H), \quad H = \frac{\partial \sigma_y}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \quad (4.79)$$

- (ii):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_p}{\partial \Delta \beta_{n+1}} = & -\frac{4\mu}{\sqrt{2} \|(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}\|} (1-d_n - \frac{1}{3} \Delta \beta_{n+1}) \{2\mu \|\Delta \varepsilon_{d n+1}^e\|^2 + \\ & (\Delta \varepsilon_{d n+1}^e \cdot \sigma_n^{dev})\} + \frac{1}{\sqrt{3}} (3\mu \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p + \sigma_y) \end{aligned} \quad (4.80)$$

- (iii):

$$\frac{\partial f_d}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} = -\frac{6}{\sqrt{2}} \frac{1}{\|(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}\|} ((\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial})^T \mathbf{C} \varepsilon_{n+1}^e \quad (4.81)$$

- (iv):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_d}{\partial \Delta \beta_{n+1}} &= \sqrt{3} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}} (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e)^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \right. \\ &2(1 - d_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta \beta_{n+1}) \left[-\sqrt{\frac{3}{2}} \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}(1-d_n-\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta\beta_{n+1})^2} \mathbf{N} + \right. \right. \\ &\frac{1}{1-d_n-\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta\beta_{n+1}} \left[\frac{4\mu}{\sqrt{3}} \frac{1-d_n-\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta\beta_{n+1}}{\|(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{*dev})^{trial}\|^2} \left\{ 2\mu(1-d_n-\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta\beta_{n+1})^2 \|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{d\,n+1}^{e\,trial}\|^2 + \right. \right. \\ &(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{d\,n+1}^{e\,trial} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n^{dev}) \left. \left. \right\} \mathbf{N} - \right. \\ &\left. \left. \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1-d_n-\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta\beta_{n+1}}{(1-d_n)^2} \frac{1}{\|(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{*dev})^{trial}\|} \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} \right\}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e \right\} - HD, \quad HD = \frac{\partial B}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \end{aligned} \quad (4.82)$$

ademais

$$\mathbf{N} = \frac{(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{*dev})^{trial}}{\|(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{*dev})^{trial}\|} \quad (4.83)$$

Por conseguinte, o sistema de duas equações a resolver iterativamente tem a forma seguinte:

$$(\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p)_{(k+1)} = (\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p)_{(k)} - \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial f_d}{\partial \Delta \beta_{n+1}} f_p - \frac{\partial f_d}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} f_d \right)_{(k)} \quad (4.84)$$

$$(\Delta \beta_{n+1})_{(k+1)} = (\Delta \beta_{n+1})_{(k)} - \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{\partial f_p}{\partial \Delta \beta_{n+1}} f_p + \frac{\partial f_p}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} f_d \right)_{(k)} \quad (4.85)$$

sendo

$$\Delta = \frac{\partial f_p}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \frac{\partial f_d}{\partial \Delta \beta_{n+1}} - \frac{\partial f_d}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \frac{\partial f_p}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \quad (4.86)$$

Uma vez obtidas $\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ e $\Delta \beta_{n+1}$ são atualizadas as grandezas dependentes destas variáveis.

- **Caso (c):** Há variação apenas da deformação plástica.

Neste caso, a equação a resolver iterativamente é a seguinte

$$f_p = \sigma_{eq}^{*trial} - 3\mu \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \sigma_y (\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p) = 0 \quad (4.87)$$

sendo $f_p = f_p(\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p)$.

Resolvendo a equação (4.87) pelo método de Newton se tem

$$(\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p)_{(k+1)} = (\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p)_{(k)} + \left(\frac{f_p}{3\mu + H} \right)_{(k)} \quad (4.88)$$

Finalmente, são atualizadas as variáveis dependentes de $\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p$.

- **Caso (d):** Há variação apenas do dano.

Neste caso, a equação que precisa ser resolvida é

$$f_d = (1 - d_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta \beta_{n+1}) Y_{eq}^{trial} \frac{1}{1 - d_n} - B(\Delta \beta_{n+1}) = 0 \quad (4.89)$$

Resolvendo a equação (4.89) pelo método de Newton obtém-se

$$(\Delta\beta_{n+1})_{(k+1)} = (\Delta\beta_{n+1})_{(k)} + \left(\frac{1}{Y_{eq}^{trial} \frac{1}{\sqrt{3}(1-d_n)} + HD} f_d \right)_{(k)} \quad (4.90)$$

4.5 OBTENÇÃO DO JACOBIANO CONSISTENTE (ALGORÍTMICO)

Para garantir a convergência quadrática do método de Newton na solução da equação de equilíbrio é obtido nesta seção o chamado *Jacobiano consistente*, no sentido de que, a tangente à curva do material seja consistente com o algoritmo numérico aplicado para resolver a lei constitutiva do material. Neste caso, o algoritmo utilizado é o algoritmo do retorno obtido aplicando o método de Euler implícito. O *Jacobiano consistente* é necessário, principalmente, no caso de existir uma transição não suave entre a parte puramente elástica e a elastoplástica da curva do material [56].

Neste trabalho é considerado o dano do material, motivo pelo qual o *Jacobiano consistente* depende tanto da evolução do dano quanto da plasticidade.

4.5.1 Caso (a): Não há variação nem da deformação plástica nem do dano.

Neste caso

$$D^{ep} = \frac{\partial \Delta\sigma_{n+1}}{\partial \Delta\varepsilon_{n+1}^{e\ trial}} = \frac{\partial \Delta\sigma_{n+1}}{\partial \Delta\varepsilon_{n+1}} = \bar{C} = (1 - d_n)^2 C \quad (4.91)$$

4.5.2 Caso (b): Há variação da deformação plástica e do dano.

Neste caso a tangente depende das duas equações escalares cujas soluções são obtidas pelo método de Newton, i.e. das equações (4.63) e (4.71).

- (i):

Trabalhando primeiramente com a equação (4.63) se tem

$$\frac{1}{1 - d_{n+1}} \sqrt{\frac{3}{2}} \|(\sigma_{n+1}^{* dev})^{trial}\| = 3\mu\Delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p + \sigma_y(\Delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) \quad (4.92)$$

e tendo em conta que

$$\Delta\sigma_{n+1}^{dev} = \Delta\sigma_{n+1}^{dev}(\Delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p, \Delta\beta_{n+1}, \Delta\varepsilon_{d\ n+1}^{e\ trial}) \quad (4.93)$$

se pode escrever a equação (4.92) na forma seguinte

$$f_1 = f_1(\Delta\beta_{n+1}, \Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}}) = \frac{1}{1 - d_{n+1}} \sqrt{\frac{3}{2}} \|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\| \quad (4.94)$$

e

$$f_2 = f_2(\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p) = 3\mu\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p + \sigma_y(\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p) \quad (4.95)$$

de onde se obtém

$$\frac{\partial f_1}{\partial \Delta\beta_{n+1}} d\Delta\beta_{n+1} + \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}}} \cdot d\Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}} = \frac{\partial f_2}{\partial \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p} d\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p \quad (4.96)$$

Derivando se tem

$$\frac{\partial f_1}{\partial \Delta\beta_{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \frac{\|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\|}{(1-d_{n+1})^2} - \frac{4\mu}{\|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\|} [2\mu(1-d_{n+1})^2 \|\Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}}\|^2 + (\Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}} \cdot \sigma_n^{\text{dev}})] \right\} \quad (4.97)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}}} = 2\mu \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1 - d_{n+1}}{\|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\|} (\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}} \quad (4.98)$$

e

$$\frac{\partial f_2}{\partial \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p} = 3\mu + H, H = \frac{\partial \sigma_y}{\partial \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p} \quad (4.99)$$

- (ii):

Da equação (4.71) se obtém

$$\sqrt{3}(1 - d_{n+1})(\epsilon_{n+1}^e)^T \mathbf{C} \epsilon_{n+1}^e = B(\Delta\beta_{n+1}) \quad (4.100)$$

a que pode ser expressa através de

$$h_1 = h_1(\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p, \Delta\beta_{n+1}, \Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}}) = \sqrt{3}(1 - d_{n+1})(\epsilon_{n+1}^e)^T \mathbf{C} \epsilon_{n+1}^e \quad (4.101)$$

e

$$h_2 = h_2(\Delta\beta_{n+1}) = B(\Delta\beta_{n+1}) \quad (4.102)$$

de onde se obtém a equação

$$\frac{\partial h_1}{\partial \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p} d\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p + \frac{\partial h_1}{\partial \Delta\beta_{n+1}} d\Delta\beta_{n+1} + \frac{\partial h_1}{\partial \Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}}} \cdot d\Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}} = \frac{\partial h_2}{\partial \Delta\beta_{n+1}} d\Delta\beta_{n+1} \quad (4.103)$$

Sendo

$$\frac{\partial h_1}{\partial \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p} = -\frac{6}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\|} (\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}} \right\}^T \mathbf{C} \epsilon_{n+1}^e \quad (4.104)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial \Delta\beta_{n+1}} = & -\{\epsilon_{n+1}^e\}^T \mathbf{C} \epsilon_{n+1}^e - \frac{6}{\sqrt{2}} (1 - d_{n+1}) \Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}(1-d_{n+1})^2} \frac{(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}}{\|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\|} + \right. \\ & \left. \frac{4\mu}{\sqrt{3} \|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\|^2} [-\|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\| \|\Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}}\| + \right. \\ & \left. \{2\mu(1 - d_{n+1})^2 \|\Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}}\|^2 + (\Delta\epsilon_{d_{n+1}}^{e \text{ trial}} \cdot \sigma_n^{\text{dev}})] \right\}^T \mathbf{C} \Delta\epsilon_{n+1}^e \end{aligned} \quad (4.105)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial \Delta \varepsilon_d^{e \text{ trial}} n+1} = 2\sqrt{3}(1-d_{n+1})\{\mathbf{I} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\varepsilon_{n+1}^p}{1-d_{n+1}} \mathbf{b}_1\}^T \mathbf{C} \Delta \varepsilon_{n+1}^e \quad (4.106)$$

$$\mathbf{b}_1 = \frac{2\mu(1-d_{n+1})^2}{\|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\|} \left\{ \mathbf{I} + \frac{(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}}{\|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\|} \otimes \frac{(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}}{\|(\sigma_{n+1}^{* \text{ dev}})^{\text{trial}}\|} \right\}$$

e

$$\frac{\partial h_2}{\partial \Delta \beta_{n+1}} = HD, HD = \frac{\partial B}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \quad (4.107)$$

- (iii):

Um resultado importante é obtido das equações (4.93), (4.96) e (4.103) e é dado a seguir

$$\frac{d\Delta \sigma_{n+1}^{\text{dev}}}{d\Delta \varepsilon_d^{e \text{ trial}} n+1} = \frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{\text{dev}}}{\partial \Delta \varepsilon_d^{e \text{ trial}} n+1} + \frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{\text{dev}}}{\partial \Delta \varepsilon_{n+1}^p} \otimes \frac{d\Delta \varepsilon_{n+1}^p}{d\Delta \varepsilon_d^{e \text{ trial}} n+1} + \frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{\text{dev}}}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \otimes \frac{\partial \Delta \beta_{n+1}}{\partial \Delta \varepsilon_d^{e \text{ trial}} n+1} \quad (4.108)$$

de onde é obtido

$$\frac{d\Delta \sigma_{n+1}^{\text{dev}}}{d\Delta \varepsilon_d^{e \text{ trial}} n+1} = \frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{\text{dev}}}{\partial \Delta \varepsilon_d^{e \text{ trial}} n+1} + \frac{1}{dt-am-bt} \frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{\text{dev}}}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \otimes \{a\mathbf{n} + t\mathbf{c}\} \quad (4.109)$$

sendo que

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \varepsilon_{n+1}^p} \\ b &= \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \\ c &= \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \varepsilon_d^{e \text{ trial}} n+1} \\ d &= \frac{\partial h_2}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \\ m &= \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \\ n &= \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \varepsilon_d^{e \text{ trial}} n+1} \\ t &= \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \varepsilon_{n+1}^p} \end{aligned} \quad (4.110)$$

- (iv):

Tendo em conta que

$$\Delta p_{n+1} = \Delta p_{n+1}(\Delta \beta_{n+1}, \Delta \varepsilon_v^{e \text{ trial}} n+1) \quad (4.111)$$

se tem

$$d\Delta p_{n+1} = \frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \beta_{n+1}} d\Delta \beta_{n+1} + \frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \varepsilon_v^{e \text{ trial}} n+1} \cdot d\Delta \varepsilon_v^{e \text{ trial}} n+1 \quad (4.112)$$

Da equação (4.71) é obtida

$$h_1 = h_1(\Delta \beta_{n+1}, \Delta \varepsilon_v^{e \text{ trial}} n+1) = \sqrt{3}(1-d_{n+1})\{\varepsilon_{n+1}^e\}^T \mathbf{C} \varepsilon_{n+1}^e \quad (4.113)$$

$$h_2 = h_2(\Delta \beta_{n+1}) = B(\Delta \beta_{n+1}) \quad (4.114)$$

de onde

$$\frac{\partial h_1}{\partial \Delta \beta_{n+1}} d\Delta \beta_{n+1} + \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \varepsilon_v^{e \text{ trial}} n+1} d\Delta \varepsilon_v^{e \text{ trial}} n+1 = \frac{\partial h_2}{\partial \Delta \beta_{n+1}} d\Delta \beta_{n+1} \quad (4.115)$$

sendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \beta_{n+1}} = & -\{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e\}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e - \frac{6}{\sqrt{2}} (1 - d_{n+1}) \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p \left\{ \frac{1}{\sqrt{3} (1 - d_{n+1})^2} \frac{(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{* dev})^{trial}}{\|(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{* dev})^{trial}\|} + \right. \\ & \left. \frac{4\mu}{\sqrt{3} \|(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{* dev})^{trial}\|^2} [-\|(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{* dev})^{trial}\| \|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^e\| + \right. \\ & \left. \{2\mu(1 - d_{n+1})^2 \|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^e\|^2 + (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^e \cdot \boldsymbol{\sigma}_n^{dev})\}]^T \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e \right\} \end{aligned} \quad (4.116)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial \Delta \varepsilon_v^e} = \frac{2\sqrt{3}}{3} (1 - d_{n+1}) (\mathbf{I}_R)^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = w \quad (4.117)$$

e

$$\frac{\partial h_2}{\partial \Delta \beta_{n+1}} = HD, HD = \frac{\partial B}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \quad (4.118)$$

Conseqüentemente

$$\frac{d\Delta p_{n+1}}{d\Delta \varepsilon_v^e} = \frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \frac{w}{d - b} + \frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \varepsilon_v^e} \quad (4.119)$$

sendo que

$$\frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \varepsilon_v^e} = k(1 - d_{n+1})^2 \quad (4.120)$$

$$\frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \beta_{n+1}} = -\frac{2k}{\sqrt{3}} (1 - d_{n+1}) \Delta \varepsilon_v^{trial} \quad (4.121)$$

Finalmente

$$\frac{d\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e} = \frac{d\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev}}{d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^e} : \frac{d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^e}{d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e} + \frac{d\Delta p_{n+1}}{d\Delta \varepsilon_v^e} \mathbf{I}_R \otimes \frac{d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_v^{trial}}{d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e} \quad (4.122)$$

de onde é obtida

$$\frac{d\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e} = \frac{d\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev}}{d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{d_{n+1}}^e} \cdot \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I}_R \otimes \mathbf{I}_R \right] + \frac{d\Delta p_{n+1}}{d\Delta \varepsilon_v^e} \mathbf{I}_R \otimes \mathbf{I}_R \quad (4.123)$$

4.5.3 Caso (c): Há variação apenas da deformação plástica.

Como já se viu anteriormente

$$\mathbf{D}^{ep} = \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e} = \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \quad (4.124)$$

onde \mathbf{D}^{ep} é o *Jacobiano consistente*. Lembrando que

$$\boldsymbol{\sigma}_{eq}^{* trial} = 3\mu \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p + \sigma_y (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) = \frac{1}{1 - d_n} \sqrt{\frac{3}{2}} \|(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev})^{trial}\| \quad (4.125)$$

obtida a partir de (4.63) e (4.31).

Tendo em conta a equação (4.47) se tem

$$3\mu \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p + \sigma_y (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) = \frac{1}{1 - d_n} \sqrt{\frac{3}{2}} \|2\mu (1 - d_n)^2 (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{dev})^{trial} + \boldsymbol{\sigma}_n^{dev}\| \quad (4.126)$$

de onde

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} [3\mu \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p + \sigma_y (\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p)] d\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \\ & \frac{\partial}{\partial (\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial}} \left[\frac{1}{1-d_n} \sqrt{\frac{3}{2}} \|2\mu (1-d_n)^2 (\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} + \sigma_n^{dev}\| \right] : d(\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} \end{aligned} \quad (4.127)$$

Conseqüentemente

$$\begin{aligned} (3\mu + H) d\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p &= \frac{2\mu}{\|(\sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|} \sqrt{\frac{3}{2}} (1-d_n) [2\mu (1-d_n)^2 (\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} \\ &+ \sigma_n^{dev}] : d(\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} \end{aligned} \quad (4.128)$$

Por conseguinte

$$d\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \frac{2\mu}{\|(\sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|} \sqrt{\frac{3}{2}} (1-d_n) \frac{1}{3\mu + H} (\sigma_{n+1}^{dev})^{trial} : d(\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} \quad (4.129)$$

Partindo da equação (4.61) obtém-se a equação

$$\Delta \sigma_{n+1}^{dev} + \sigma_n^{dev} = [1 - 2\mu (1-d_n) \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\|(\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial} + \sigma_n^{dev}\|}] [(\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial} + \sigma_n^{dev}] \quad (4.130)$$

e introduzindo a equação (4.47) na equação anterior obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{n+1}^{dev} &= [1 - 2\mu (1-d_n) \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\|2\mu (1-d_n)^2 (\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} + \sigma_n^{dev}\|}] [2\mu (1-d_n)^2 (\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} \\ &+ \sigma_n^{dev}] - \sigma_n^{dev} \end{aligned} \quad (4.131)$$

Sendo $\Delta \sigma_{n+1}^{dev} = \Delta \sigma_{n+1}^{dev} ((\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial}, \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p)$ se tem a seguinte expressão

$$d\Delta \sigma_{n+1}^{dev} = \frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{dev}}{\partial (\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial}} : d(\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} + \frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{dev}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} d\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \quad (4.132)$$

o que conduz à equação

$$\begin{aligned} d\Delta \sigma_{n+1}^{dev} &= \{2\mu (1-d_n)^2 [1 - 2\mu (1-d_n) \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\|(\sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|}] \mathbf{I} + (2\mu (1-d_n)^2 (\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} \\ &+ \sigma_{n+1}^{dev}) \otimes [2\mu (1-d_n)^2 \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\|(\sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|^2} \frac{\partial}{\partial (\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial}} (\|(\sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|)]\} : d(\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} \\ &- 2\mu (1-d_n) \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(\sigma_{n+1}^{dev})^{trial}}{\|(\sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|} d\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \end{aligned} \quad (4.133)$$

Substituindo (4.129) na última equação se tem

$$\begin{aligned} d\Delta \sigma_{n+1}^{dev} &= \{2\mu (1-d_n)^2 [1 - 2\mu (1-d_n) \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\|(\sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|}] \mathbf{I} + (\sigma_{n+1}^{dev})^{trial} \otimes 2\mu (1-d_n) \\ &\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\|(\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|^2} \frac{2\mu (1-d_n)^2}{\|(\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|} (\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\} : d(\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} - 2\mu (1-d_n) \sqrt{\frac{3}{2}} \\ &\frac{(\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial}}{\|(\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|} \left\{ \frac{2\mu}{\|(\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial}\|} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1-d_n}{3\mu + H} (\Delta \sigma_{n+1}^{dev})^{trial} \right\} : d(\Delta \varepsilon_{n+1}^{e dev})^{trial} \end{aligned} \quad (4.134)$$

a que pode ser expressa depois de algumas transformações segundo a equação

$$d\Delta\sigma_{n+1}^{dev} = \left\{ 2\mu (1 - d_n)^2 \left[1 - 3\mu \frac{\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p}{\sigma_{eq}^{*trial}} \right] \mathbf{I} + 6\mu^2 (1 - d_n)^2 \frac{\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p}{\sigma_{eq}^{*trial}} \bar{\mathbf{N}} \otimes \bar{\mathbf{N}} \right\} : d(\Delta\epsilon_{n+1}^{dev})^{trial} - \frac{6\mu^2}{3\mu+H} (1 - d_n)^2 \bar{\mathbf{N}} \otimes \bar{\mathbf{N}} : d(\Delta\epsilon_{n+1}^{dev})^{trial} \quad (4.135)$$

onde

$$\bar{\mathbf{N}} = \frac{\sigma_{n+1}^{dev}}{\|\sigma_{n+1}^{dev}\|} \quad (4.136)$$

Conseqüentemente

$$d\Delta\sigma_{n+1}^{dev} = (1 - d_n)^2 \{ a \mathbf{I} + b \bar{\mathbf{N}} \otimes \bar{\mathbf{N}} \} : d(\Delta\epsilon_{n+1}^{dev})^{trial} \quad (4.137)$$

sendo

$$\begin{aligned} a &= 2\mu \left[1 - 3\mu \frac{\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p}{\sigma_{eq}^{*trial}} \right] \\ b &= 6\mu^2 \left[\frac{\Delta\bar{\epsilon}_{n+1}^p}{\sigma_{eq}^{*trial}} - \frac{1}{3\mu+H} \right] \end{aligned} \quad (4.138)$$

de onde se obtém finalmente

$$\frac{d\Delta\sigma_{n+1}^{dev}}{d(\Delta\epsilon_{n+1}^{dev})^{trial}} = (1 - d_n)^2 \{ a \mathbf{I} + b \bar{\mathbf{N}} \otimes \bar{\mathbf{N}} \} \quad (4.139)$$

Outra importante relação é obtida apartir da equação (4.51) cuja expressão é a seguinte

$$\frac{d\Delta p_{n+1}}{d\Delta\epsilon_{n+1}^{e\ vol}} = k (1 - d_n)^2 \quad (4.140)$$

Finalmente apartir da expressão

$$\frac{d\Delta\sigma_{n+1}}{d\Delta\epsilon_{n+1}^{e\ trial}} = \frac{d\Delta\sigma_{n+1}^{dev}}{d(\Delta\epsilon_{n+1}^{dev})^{trial}} : \frac{d(\Delta\epsilon_{n+1}^{e\ dev})^{trial}}{d\Delta\epsilon_{n+1}^{e\ trial}} + \frac{d\Delta p_{n+1}}{d\Delta\epsilon_{n+1}^{e\ vol}} \mathbf{I}_R \otimes \frac{d\Delta\epsilon_{n+1}^{e\ vol}}{d\Delta\epsilon_{n+1}^{e\ trial}} \quad (4.141)$$

Posteriormente, depois de algumas transformações simples, é obtida a equação

$$\frac{d\Delta\sigma_{n+1}}{d\Delta\epsilon_{n+1}^{e\ trial}} = (1 - d_n)^2 \left\{ a \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I}_R \otimes \mathbf{I}_R \right] + b \bar{\mathbf{N}} \otimes \bar{\mathbf{N}} + k \mathbf{I}_R \otimes \mathbf{I}_R \right\} \quad (4.142)$$

4.5.4 Caso (d): Há variação apenas do dano.

Neste caso, a única equação a resolver iterativamente é a equação (4.71) que toma a forma

$$\sqrt{3}(1 - d_{n+1}) \{ \epsilon_{n+1}^{e\ trial} \}^T \mathbf{C} \epsilon_{n+1}^{e\ trial} = B(\Delta\beta_{n+1}) \quad (4.143)$$

- (i):

Tendo em conta que

$$\Delta\sigma_{n+1}^{dev} = \Delta\sigma_{n+1}^{dev}(\Delta\beta_{n+1}, \Delta\epsilon_{n+1}^{e\ trial}) \quad (4.144)$$

se obtém

$$\frac{\partial h_1}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \Delta \beta_{n+1} + \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \epsilon_{d n+1}^{e trial}} \cdot \Delta \epsilon_{d n+1}^{e trial} = \frac{\partial h_2}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \Delta \beta_{n+1} \quad (4.145)$$

onde

$$\frac{\partial h_1}{\partial \Delta \beta_{n+1}} = -\{\epsilon_{n+1}^{e trial}\}^T \mathbf{C} \epsilon_{n+1}^{e trial} \quad (4.146)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial \Delta \epsilon_{d n+1}^{e trial}} = 2\sqrt{3} (1 - d_{n+1}) \mathbf{C} \epsilon_{n+1}^{e trial} \quad (4.147)$$

e

$$\frac{\partial h_2}{\partial \Delta \beta_{n+1}} = HD, HD = \frac{\partial B}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \quad (4.148)$$

Conseqüentemente

$$\frac{d\Delta \sigma_{n+1}^{dev}}{d\Delta \epsilon_{d n+1}^{e trial}} = \frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{dev}}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \otimes \frac{1}{\frac{\partial h_2}{\partial \Delta \beta_{n+1}} - \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \beta_{n+1}}} \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \epsilon_{d n+1}^{e trial}} + \frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{dev}}{\partial \Delta \epsilon_{d n+1}^{e trial}} \quad (4.149)$$

sendo

$$\frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{dev}}{\partial \Delta \beta_{n+1}} = -\frac{4\mu}{\sqrt{3}} (1 - d_{n+1}) \Delta \epsilon_{d n+1}^{e trial} \quad (4.150)$$

$$\frac{\partial \Delta \sigma_{n+1}^{dev}}{\partial \Delta \epsilon_{d n+1}^{e trial}} = 2\mu(1 - d_{n+1})^2 \mathbf{I} \quad (4.151)$$

- (ii):

Sabendo que

$$\Delta p_{n+1} = \Delta p_{n+1}(\Delta \beta_{n+1}, \Delta \epsilon_{v n+1}^{e trial}) = k(1 - d_{n+1})^2 \Delta \epsilon_{v n+1}^{e trial} \quad (4.152)$$

se tem

$$d\Delta p_{n+1} = \frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \beta_{n+1}} d\Delta \beta_{n+1} + \frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \epsilon_{v n+1}^{e trial}} d\Delta \epsilon_{v n+1}^{e trial} \quad (4.153)$$

sendo

$$\frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \beta_{n+1}} = -\frac{2k}{\sqrt{3}} (1 - d_{n+1}) \Delta \epsilon_{v n+1}^{e trial} \quad (4.154)$$

e

$$\frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \epsilon_{v n+1}^{e trial}} = k(1 - d_{n+1})^2 \quad (4.155)$$

Por outra parte, da equação (4.143) se tem

$$\frac{\partial h_1}{\partial \Delta \beta_{n+1}} d\Delta \beta_{n+1} + \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \epsilon_{v n+1}^{e trial}} d\Delta \epsilon_{v n+1}^{e trial} = \frac{\partial h_2}{\partial \Delta \beta_{n+1}} d\Delta \beta_{n+1} \quad (4.156)$$

Por conseguinte

$$\frac{d\Delta p_{n+1}}{d\Delta \epsilon_{v n+1}^{e trial}} = \frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \beta_{n+1}} \frac{1}{\frac{\partial h_2}{\partial \Delta \beta_{n+1}} - \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \beta_{n+1}}} \frac{\partial h_1}{\partial \Delta \epsilon_{v n+1}^{e trial}} + \frac{\partial \Delta p_{n+1}}{\partial \Delta \epsilon_{v n+1}^{e trial}} \quad (4.157)$$

Finalmente é obtida a equação

$$\frac{d\Delta\sigma_{n+1}}{d\Delta\epsilon_{n+1}^{e\ trial}} = \frac{d\Delta\sigma_{n+1}}{d\Delta\epsilon_{d\ n+1}^{e\ trial}} : \frac{d\Delta\epsilon_{d\ n+1}^{e\ trial}}{d\Delta\epsilon_{n+1}^{e\ trial}} + \frac{d\Delta p_{n+1}}{d\Delta\epsilon_{v\ n+1}^{e\ trial}} \mathbf{I}_R \otimes \frac{d\Delta\epsilon_{v\ n+1}^{e\ trial}}{d\Delta\epsilon_{n+1}^{e\ trial}} \quad (4.158)$$

obtendo-se a expressão

$$\frac{d\Delta\sigma_{n+1}^{dev}}{d\Delta\epsilon_{n+1}^{e\ trial}} = \frac{d\Delta\sigma_{n+1}}{d\Delta\epsilon_{d\ n+1}^{e\ trial}} \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I}_R \otimes \mathbf{I}_R \right] + \frac{d\Delta p_{n+1}}{d\Delta\epsilon_{v\ n+1}^{e\ trial}} \mathbf{I}_R \otimes \mathbf{I}_R \quad (4.159)$$

Capítulo 5

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

5.1 PROGRAMA UTILIZADO PARA A SIMULAÇÃO

Uma vez caracterizado o material, foram feitas simulações numéricas utilizando uma sub-rotina para materiais elasto-plásticos com dano. Esta sub-rotina foi implementada no programa ABAQUS e foram utilizados diferentes elementos nos 4 problemas propostos neste capítulo. O algoritmo implícito utilizado pela sub-rotina foi descrito no capítulo precedente e pode ser descrito como segue.

1. Início do programa.
2. Monta a matriz do material C .
3. Lê as variáveis de estado.
4. Calcula Y_{eq}^{trial} e σ_{eq}^{*trial} .
5. Se $Y_{eq}^{trial} > B$ e $\sigma_{eq}^{*trial} > (\sigma_y)_n$ ir ao passo (6), caso contrário ir ao passo (10).
6. Obtém $\Delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ e $\Delta\beta_{n+1}$ pelo método de Newton.
7. Atualiza o dano d e o dano equivalente β .
8. Atualiza a tensão σ as deformações elástica ε_{n+1}^e e plástica ε_{n+1}^p , e a deformação plástica equivalente $\bar{\varepsilon}_p$.
9. Obtém o Jacobiano consistente caso(b) e vai ao passo (18).
10. Se $\sigma_{eq}^{*trial} > (\sigma_y)_n$ ir ao passo (11), caso contrário ir ao passo (14).
11. Obtém $\Delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ pelo método de Newton.
12. Atualiza σ , ε^p , ε^e e $\bar{\varepsilon}_p$.
13. Obtém o Jacobiano consistente caso(c) e vai ao passo (18).
14. Se $Y_{eq}^{trial} > B$ ir ao passo (15), caso contrário ir ao passo (18).

15. Obtém $\Delta\beta_{n+1}$ pelo método de Newton.
16. Atualiza o dano d e o dano equivalente β .
17. Obtém o Jacobiano consistente caso(d).
18. Atualiza as variáveis de estado.
19. Fim do processo.

5.2 PROBLEMA 1: ESTAMPAGEM

Este exemplo de aplicação foi obtido do “Example Problems Manual Vol. II” do programa ABAQUS versão 5.7. O problema resolvido corresponde ao problema 4.2.16 do referido manual onde podem ser obtidos maiores detalhes do problema.

A geometria do material corresponde a um modelo axi-simétrico onde foi utilizado o elemento CAX4R (elemento axi-simétrico com 4 nós e integração reduzida). A Figura 5.1 ilustra a disposição da chapa, da prensa e do punção na sua posição inicial (não-deformada).

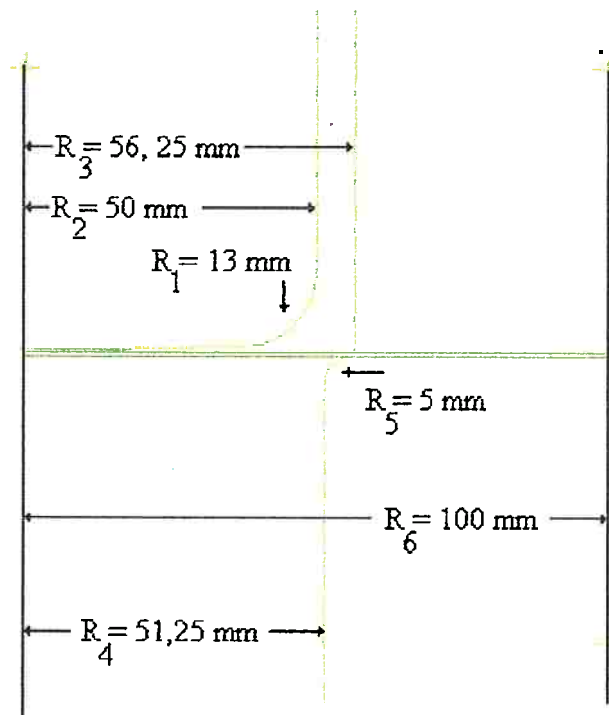


Figura 5.1 – Modelo axi-simétrico do conjunto Chapa-Punção-Prensa.

As propriedades do material correspondem a uma liga de metais (aço-alumínio) e foram utilizadas por Wang and Tang (1988). O módulo de Young inicial do material é de 211 GPa, o módulo de Poisson 0,3. A tensão de escoamento inicial é de 91,3 MPa. O coeficiente de atrito entre a peça e o punção é de 0,25 e entre a peça e a prensa 0,1.

Tabela 5.1 – Deformações e tensões sem variação do módulo elástico.

| Def. | Tensão (Pa) | Def. El. | Def. Pl. |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 4,34733E-04 | 9,12940E+07 | 4,34733E-04 | 0 |
| 0,2 | 3,61290E+08 | 1,72043E-03 | 1,98280E-01 |
| 0,4 | 4,21290E+08 | 2,00614E-03 | 3,97994E-01 |
| 0,6 | 4,61290E+08 | 2,19662E-03 | 5,97803E-01 |
| 0,8 | 4,91290E+08 | 2,33948E-03 | 7,97661E-01 |
| 1 | 5,21290E+08 | 2,48233E-03 | 9,97518E-01 |

Tabela 5.2 – Deformações e tensões com variação do módulo elástico.

| Def. | E (Pa) | d | Tensão (Pa) | Def. El. | Def. Pl. | Yeq (J/m ³) | B (J/m ³) |
|-----------|----------|----------|-------------|-----------|-----------|-------------------------|-----------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7,39E+05 |
| 4,347E-04 | 2,10E+11 | 0,00E+00 | 9,129E+07 | 4,347E-04 | 0 | 3,97E+04 | 7,39E+05 |
| 0,2 | 2,10E+11 | 0,00E+00 | 3,612E+08 | 1,720E-03 | 1,982E-01 | 6,22E+05 | 7,39E+05 |
| 0,4 | 1,97E+11 | 3,15E-02 | 4,212E+08 | 2,138E-03 | 3,978E-01 | 9,30E+05 | 9,30E+05 |
| 0,6 | 1,51E+11 | 1,53E-01 | 4,612E+08 | 3,063E-03 | 5,969E-01 | 1,67E+06 | 1,67E+06 |
| 0,8 | 1,01E+11 | 3,08E-01 | 4,912E+08 | 4,884E-03 | 7,951E-01 | 3,47E+06 | 3,47E+06 |
| 1 | 4,62E+10 | 5,31E-01 | 5,212E+08 | 1,128E-02 | 9,887E-01 | 1,25E+07 | 1,25E+07 |

O carregamento é feito em 5 passos. No primeiro passo é prensada a chapa a estampar. O segundo passo consiste em remover a condição de contorno aplicado no passo anterior e substituir por um carregamento de 100 kN na prensa. A força é mantida constante durante os passos 2 e 3. No terceiro passo o punção é movimentado na direção da chapa 60 mm, realizando a estampagem da chapa. Os últimos dois passos servem para simular o retorno elástico. No passo 4 todos os nós do modelo são fixados nas suas posições atuais e são removidos os contatos. No passo 5 são re-estabelecidas as condições de contorno permitindo o retorno elástico.

5.3 RESULTADOS

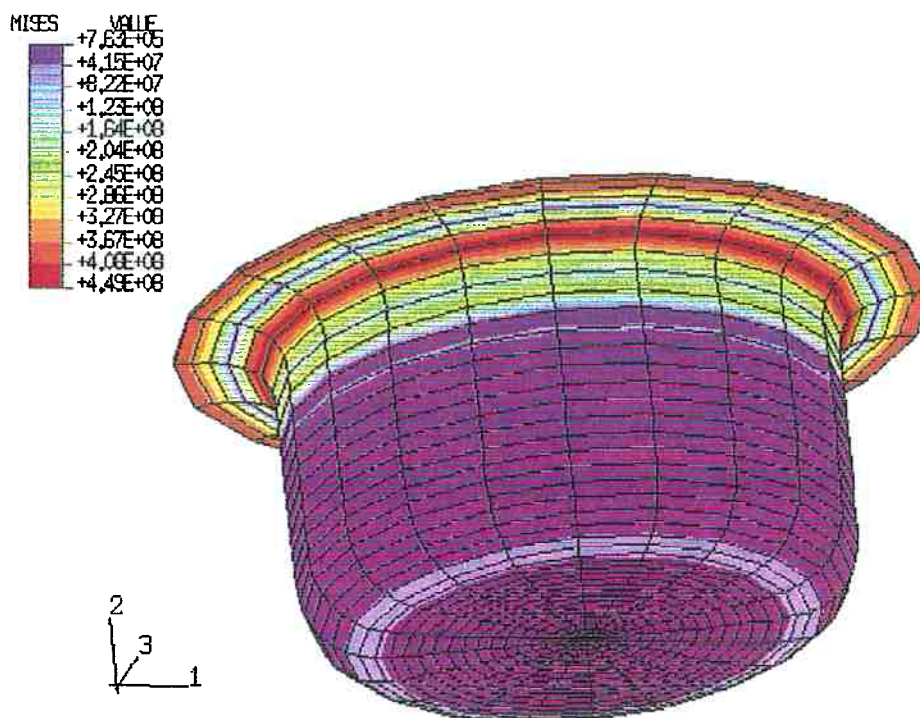


Figura 5.2 – Tensão de von Mises para o material sem dano.

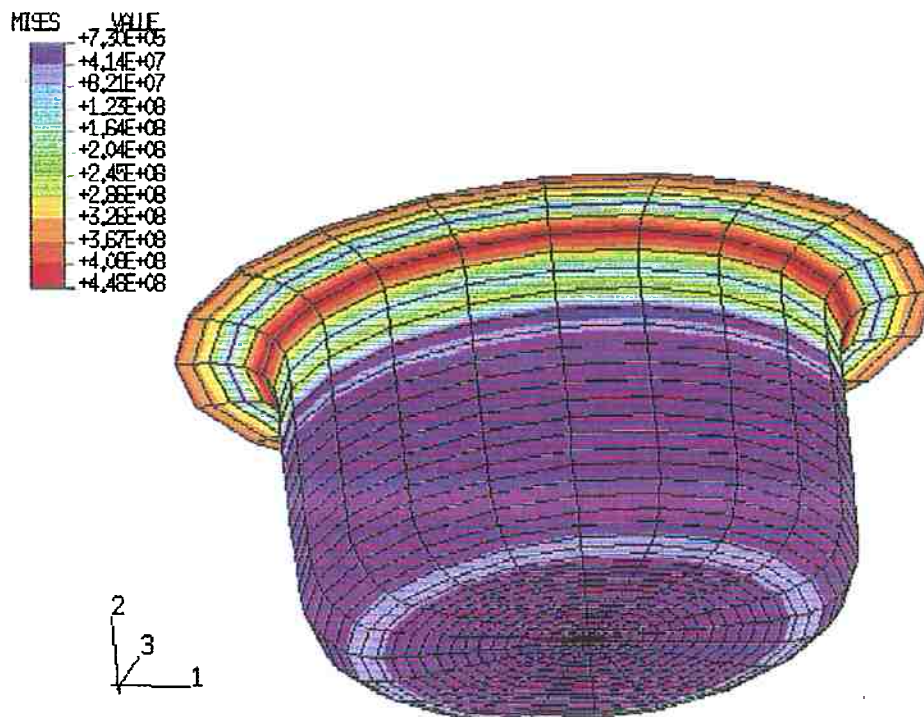


Figura 5.3 - Tensão de von Mises para o material com dano.

Nas figuras 5.2 e 5.3 se podem observar que a tensão de von Mises do material danificado é um pouco menor que o não danificado. Isso ocorre devido a diferença entre as definições da tensão de von Mises para materiais com dano em relação ao material sem dano. Porém a forma da distribuição é similar.

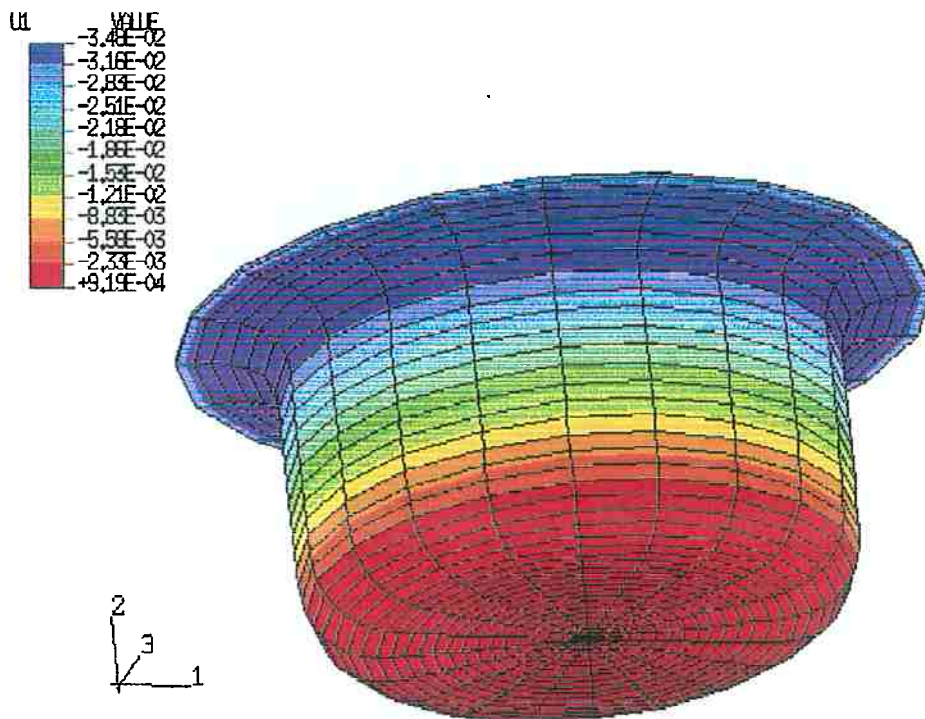


Figura 5.4 – Deslocamento na direção 1 para o material sem dano.

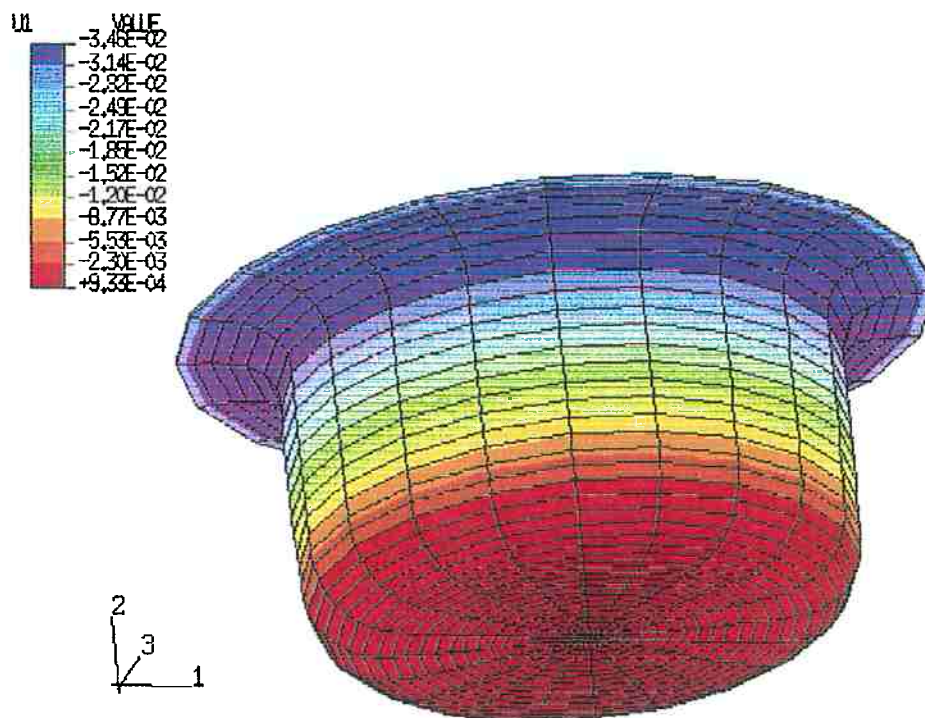


Figura 5.5 – Deslocamento na direção 1 para o material com dano.

Os deslocamentos na direção 1 são equivalentes como ser verificado observando as figuras 5.4 e 5.5, pois há pouca diferença entre os valores observados.

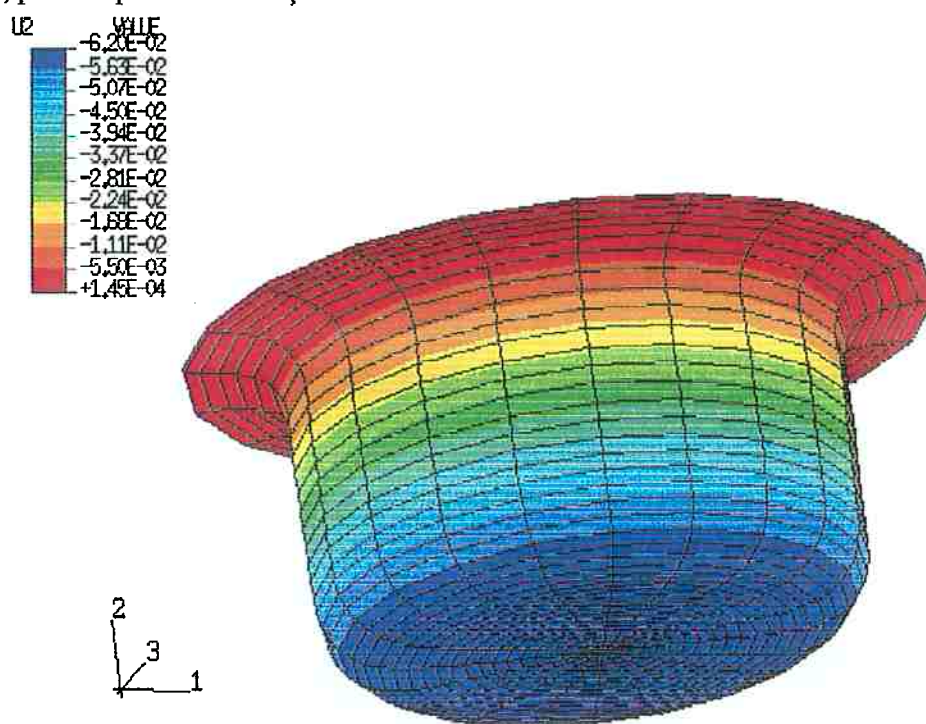


Figura 5.6 - Deslocamento na direção 2 para o material sem dano.

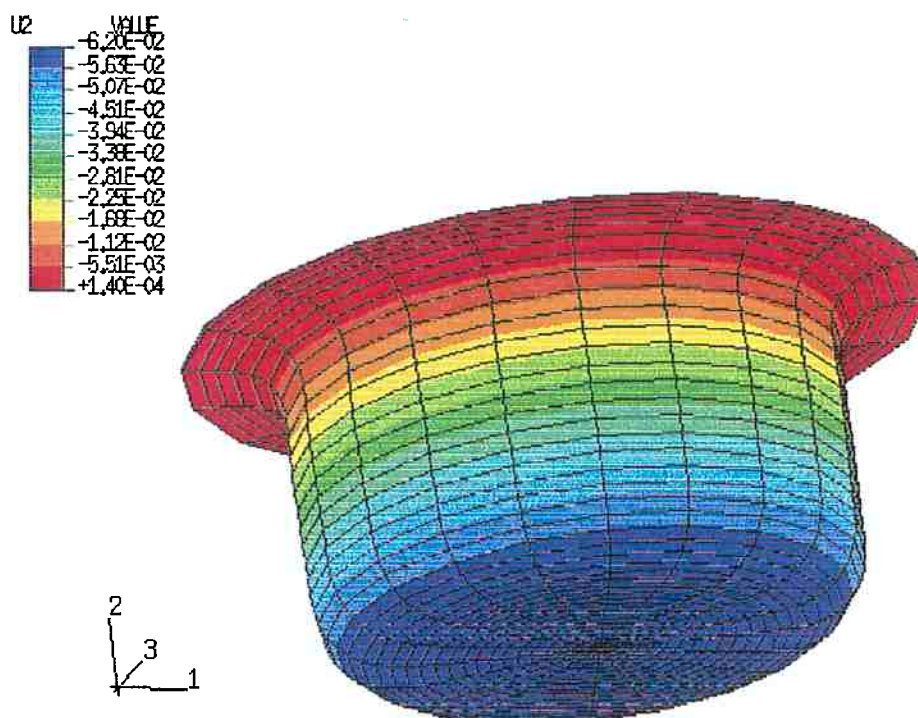


Figura 5.7 - Deslocamento na direção 2 para o material com dano.

Os deslocamentos na direção 2 também são equivalentes como ser verificado observando as figuras 5.6 e 5.7, pois há pouca diferença entre os valores observados.

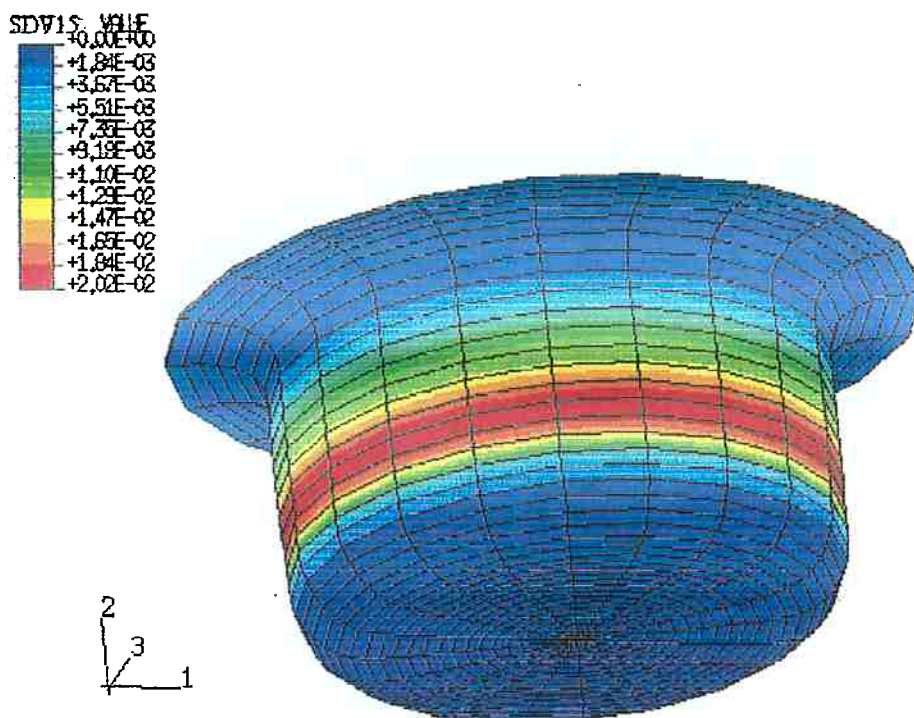


Figura 5.8 – Distribuição do dano no material.

A figura 5.8 mostra a distribuição do dano na peça onde a área vermelha mostra a faixa onde teve acumulação maior do dano. Isso mostra que a deterioração do material é maior nessa região, o que não pode ser inferido observando a tensão de von Mises por exemplo.

5.4 PROBLEMA 2: EXTRUSÃO

Este exemplo de aplicação foi obtido do “Example Problems Manual Vol. II” do programa ABAQUS versão 5.7. O problema resolvido corresponde ao problema 4.2.18 do referido manual onde podem ser obtidos maiores detalhes do problema.

A geometria do material corresponde a um modelo axi-simétrico onde foi utilizado o elemento CAX4T (elemento axi-simétrico com 4 nós com deslocamento e temperatura) para modelar a barra. O contato entre a barra e a matriz foi modelada com o elemento ISL21AT. A Figura 5.9 ilustra a disposição da barra, as suas dimensões antes de deformar.

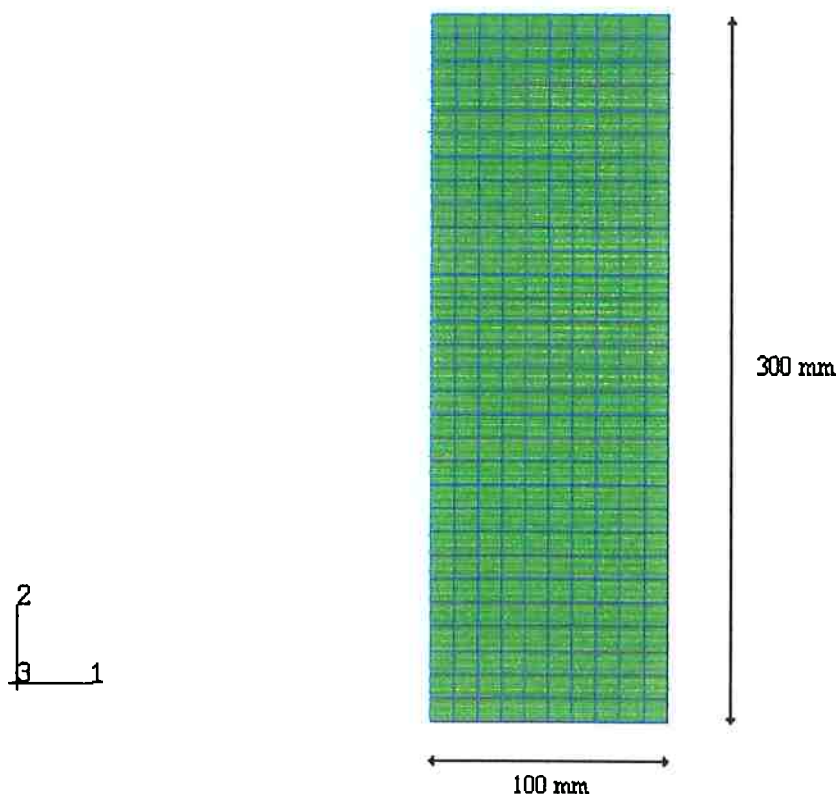


Figura 5.9 – Modelo axi-simétrico do material a extrudar.

As propriedades do material correspondem a uma liga de metais (aço-alumínio) segundo pode ser verificado no Example Problems Manual Vol. II . O módulo de Young inicial do material é de 69 GPa, o módulo de Poisson 0,33. A tensão de escoamento inicial é de 60 MPa. O coeficiente de atrito entre a peça e a matriz é de 0,1. O calor gerado durante a deformação é transferido em partes iguais à matriz e à peça.

Tabela 5.3 – Deformações e tensões sem variação do módulo elástico e com variação da temperatura.

| Def. | Tensão (Pa) | Def. El. | Def. Pl. | T (C) |
|-----------|-------------|----------|----------|-------|
| 8,696E-04 | 6,00E+07 | 8,70E-04 | 0 | 20 |
| 1,263E-01 | 9,00E+07 | 1,30E-03 | 0,125 | 20 |
| 2,516E-01 | 1,13E+08 | 1,64E-03 | 0,25 | 20 |
| 3,768E-01 | 1,24E+08 | 1,80E-03 | 0,375 | 20 |
| 5,019E-01 | 1,33E+08 | 1,93E-03 | 0,5 | 20 |
| 1,002E+00 | 1,65E+08 | 2,39E-03 | 1 | 20 |
| 2,002E+00 | 1,66E+08 | 2,41E-03 | 2 | 20 |
| 8,696E-04 | 6,00E+07 | 8,70E-04 | 0 | 50 |
| 1,262E-01 | 8,00E+07 | 1,16E-03 | 0,125 | 50 |
| 2,514E-01 | 9,70E+07 | 1,41E-03 | 0,25 | 50 |
| 3,766E-01 | 1,10E+08 | 1,59E-03 | 0,375 | 50 |
| 5,017E-01 | 1,20E+08 | 1,74E-03 | 0,5 | 50 |
| 1,002E+00 | 1,50E+08 | 2,17E-03 | 1 | 50 |
| 2,002E+00 | 1,51E+08 | 2,19E-03 | 2 | 50 |
| 7,246E-04 | 5,00E+07 | 7,25E-04 | 0 | 100 |
| 1,259E-01 | 6,50E+07 | 9,42E-04 | 0,125 | 100 |
| 2,512E-01 | 8,15E+07 | 1,18E-03 | 0,25 | 100 |
| 3,763E-01 | 9,10E+07 | 1,32E-03 | 0,375 | 100 |
| 5,014E-01 | 1,00E+08 | 1,45E-03 | 0,5 | 100 |
| 1,002E+00 | 1,25E+08 | 1,81E-03 | 1 | 100 |
| 2,002E+00 | 1,26E+08 | 1,83E-03 | 2 | 100 |
| 6,522E-04 | 4,50E+07 | 6,52E-04 | 0 | 150 |
| 1,259E-01 | 6,30E+07 | 9,13E-04 | 0,125 | 150 |
| 2,511E-01 | 7,50E+07 | 1,09E-03 | 0,25 | 150 |
| 5,013E-01 | 8,90E+07 | 1,29E-03 | 0,5 | 150 |
| 1,002E+00 | 1,10E+08 | 1,59E-03 | 1 | 150 |
| 2,002E+00 | 1,11E+08 | 1,61E-03 | 2 | 150 |

Tabela 5.4 – Deformações e tensões com variação do módulo elástico e temperatura.

| Def. | Fator | E (Pa) | D | Tensão (Pa) | Def. El. | Def. Pl. | Yeq (J/m ³) | B(J/m ³) | T (C) |
|-------|-------|----------|----------|-------------|-----------|----------|-------------------------|----------------------|-------|
| 0,001 | 1 | 6,90E+10 | 0,00E+00 | 6,00E+07 | 8,696E-04 | 0 | 5,22E+04 | 1,80E+05 | 20 |
| 0,126 | 1 | 6,90E+10 | 0,00E+00 | 9,00E+07 | 1,304E-03 | 0,125 | 1,17E+05 | 1,80E+05 | 20 |
| 0,252 | 0,938 | 6,47E+10 | 3,15E-02 | 1,13E+08 | 1,746E-03 | 0,25 | 2,04E+05 | 2,04E+05 | 20 |
| 0,378 | 0,717 | 4,95E+10 | 1,53E-01 | 1,24E+08 | 2,506E-03 | 0,375 | 3,67E+05 | 3,67E+05 | 20 |
| 0,504 | 0,479 | 3,31E+10 | 3,08E-01 | 1,33E+08 | 4,024E-03 | 0,5 | 7,73E+05 | 7,73E+05 | 20 |
| 1,011 | 0,22 | 1,52E+10 | 5,31E-01 | 1,65E+08 | 1,087E-02 | 1 | 3,82E+06 | 3,82E+06 | 20 |
| 2,013 | 0,18 | 1,24E+10 | 5,76E-01 | 1,66E+08 | 1,337E-02 | 2 | 5,23E+06 | 5,23E+06 | 20 |
| 0,001 | 1 | 6,90E+10 | 0,00E+00 | 6,00E+07 | 8,696E-04 | 0 | 5,22E+04 | 1,40E+05 | 50 |
| 0,126 | 1 | 6,90E+10 | 0,00E+00 | 8,00E+07 | 1,159E-03 | 0,125 | 9,28E+04 | 1,40E+05 | 50 |
| 0,251 | 0,938 | 6,47E+10 | 3,15E-02 | 9,70E+07 | 1,499E-03 | 0,25 | 1,50E+05 | 1,50E+05 | 50 |
| 0,377 | 0,717 | 4,95E+10 | 1,53E-01 | 1,10E+08 | 2,223E-03 | 0,375 | 2,89E+05 | 2,89E+05 | 50 |
| 0,504 | 0,479 | 3,31E+10 | 3,08E-01 | 1,20E+08 | 3,631E-03 | 0,5 | 6,30E+05 | 6,30E+05 | 50 |
| 1,010 | 0,22 | 1,52E+10 | 5,31E-01 | 1,50E+08 | 9,881E-03 | 1 | 3,16E+06 | 3,16E+06 | 50 |
| 2,012 | 0,18 | 1,24E+10 | 5,76E-01 | 1,51E+08 | 1,216E-02 | 2 | 4,33E+06 | 4,33E+06 | 50 |
| 0,001 | 1 | 6,90E+10 | 0,00E+00 | 5,00E+07 | 7,246E-04 | 0 | 3,62E+04 | 3,62E+04 | 100 |
| 0,126 | 1 | 6,90E+10 | 0,00E+00 | 6,50E+07 | 9,420E-04 | 0,125 | 6,12E+04 | 6,12E+04 | 100 |
| 0,251 | 0,938 | 6,47E+10 | 3,15E-02 | 8,15E+07 | 1,259E-03 | 0,25 | 1,06E+05 | 1,06E+05 | 100 |
| 0,377 | 0,717 | 4,95E+10 | 1,53E-01 | 9,10E+07 | 1,839E-03 | 0,375 | 1,98E+05 | 1,98E+05 | 100 |
| 0,503 | 0,479 | 3,31E+10 | 3,08E-01 | 1,00E+08 | 3,026E-03 | 0,5 | 4,37E+05 | 4,37E+05 | 100 |
| 1,008 | 0,22 | 1,52E+10 | 5,31E-01 | 1,25E+08 | 8,235E-03 | 1 | 2,19E+06 | 2,19E+06 | 100 |
| 2,010 | 0,18 | 1,24E+10 | 5,76E-01 | 1,26E+08 | 1,014E-02 | 2 | 3,01E+06 | 3,01E+06 | 100 |
| 0,001 | 1 | 6,90E+10 | 0,00E+00 | 4,50E+07 | 6,522E-04 | 0 | 2,93E+04 | 2,93E+04 | 150 |
| 0,126 | 1 | 6,90E+10 | 0,00E+00 | 6,30E+07 | 9,130E-04 | 0,125 | 5,75E+04 | 5,75E+04 | 150 |
| 0,251 | 0,938 | 6,47E+10 | 3,15E-02 | 7,50E+07 | 1,159E-03 | 0,25 | 8,97E+04 | 8,97E+04 | 150 |
| 0,503 | 0,479 | 3,31E+10 | 3,08E-01 | 8,90E+07 | 2,693E-03 | 0,5 | 3,46E+05 | 3,46E+05 | 150 |
| 1,007 | 0,22 | 1,52E+10 | 5,31E-01 | 1,10E+08 | 7,246E-03 | 1 | 1,70E+06 | 1,70E+06 | 150 |
| 2,009 | 0,18 | 1,24E+10 | 5,76E-01 | 1,11E+08 | 8,937E-03 | 2 | 2,34E+06 | 2,34E+06 | 150 |

O carregamento é feito em 4 passos. No primeiro passo a barra é movida numa posição onde é estabelecido o contato e o deslizamento da barra contra a matriz é iniciado. O segundo passo a barra é extrudada contra a matriz. Para realizar isso são fixados os nós da parte superior da barra. No terceiro passo são removidos os contatos. No passo 4 a barra é resfriada e acontecem deformações devido à contração térmica.

5.5 RESULTADOS

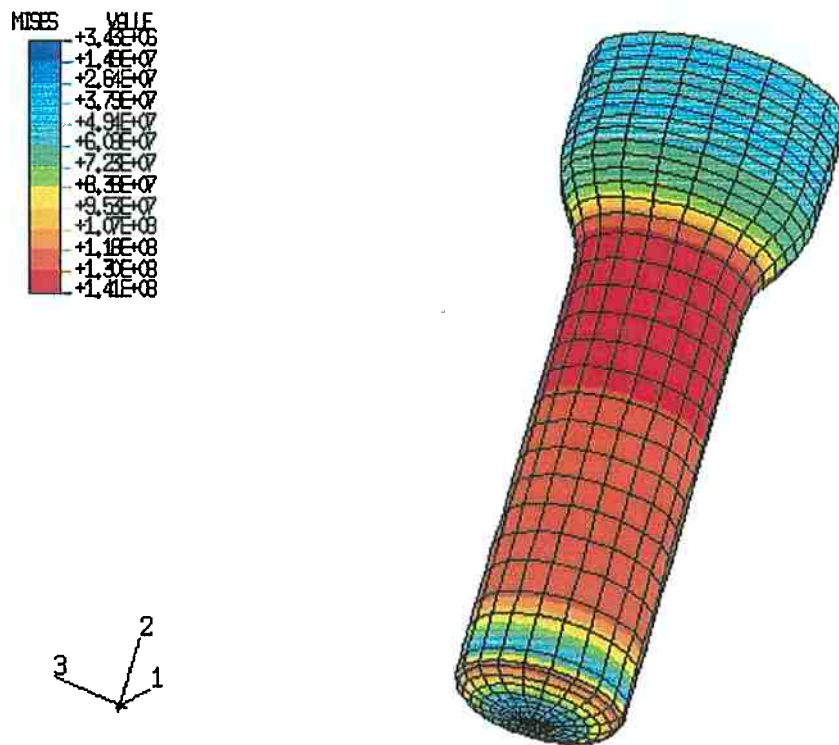


Figura 5.10 – Tensão de von Mises para o material sem dano.

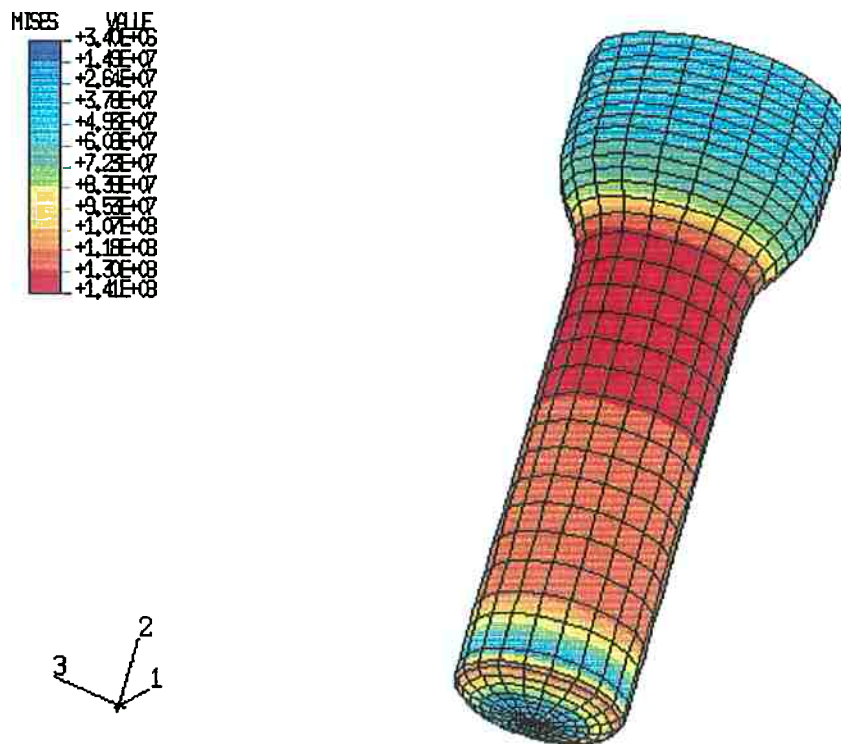


Figura 5.11 - Tensão de von Mises para o material com dano.

Nas figuras 5.10 e 5.11 podem ser observados que a tensão de von Mises é inferior para o processo envolvendo o material danificado devido à diferença na definição da tensão de von Mises para materiais com e sem dano.

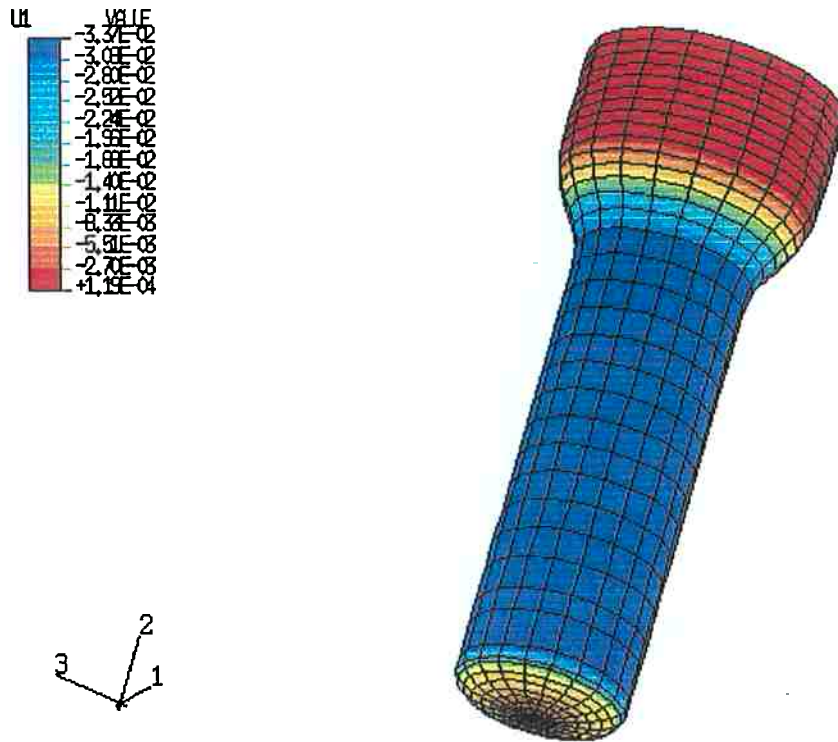


Figura 5.12 – Deslocamento na direção 1 para o material sem dano.

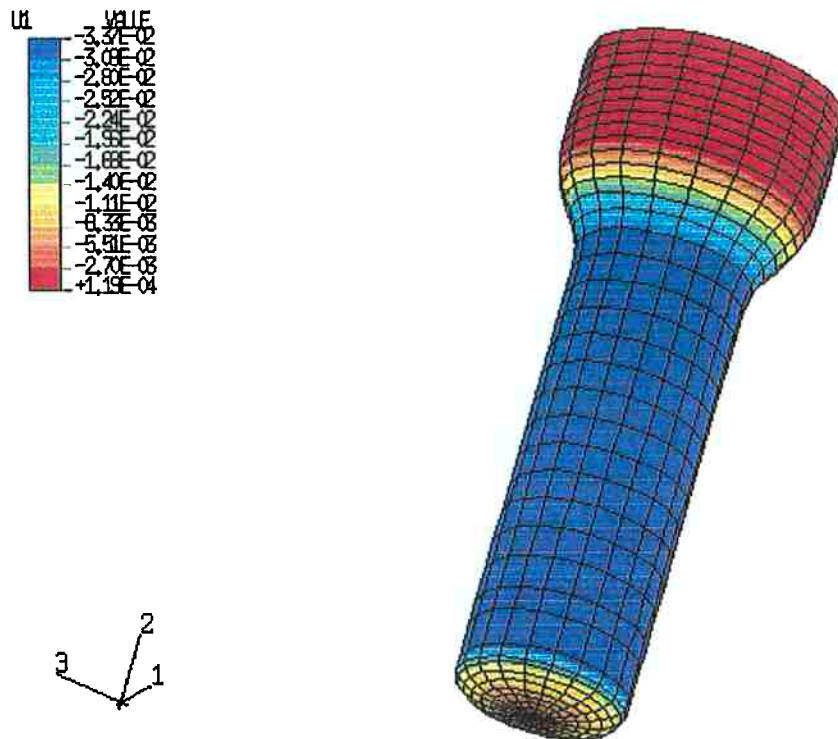


Figura 5.13 – Deslocamento na direção 1 para o material com dano.

Os deslocamentos na direção 1 são equivalentes segundo pode ser observado nas figuras 5.12 e 5.13. Similarmente, os deslocamentos na direção 2 também não tem maiores variações comparando as figuras 5.14 e 5.15.

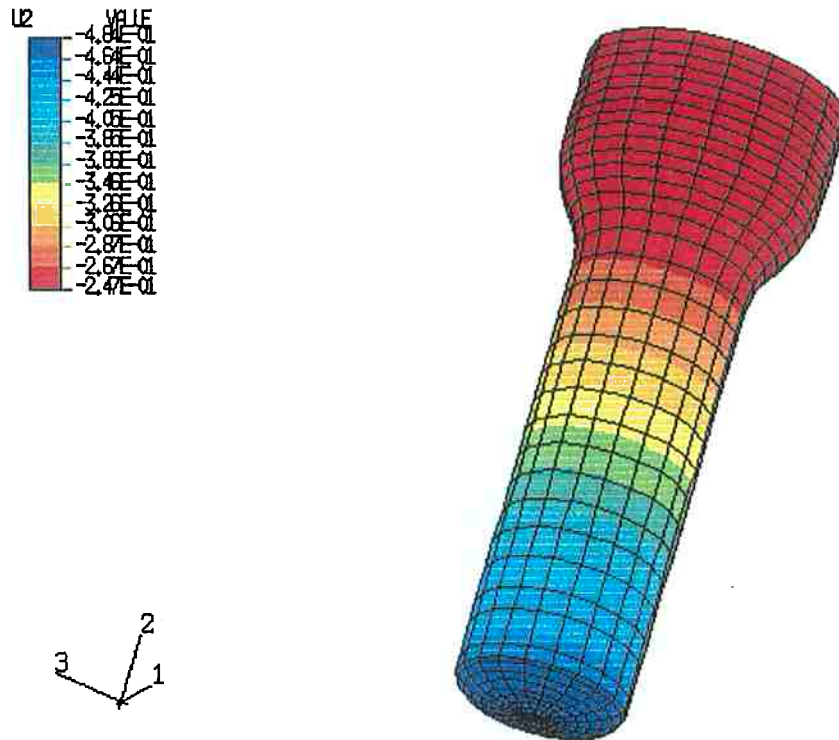


Figura 5.14 - Deslocamento na direção 2 para o material sem dano.

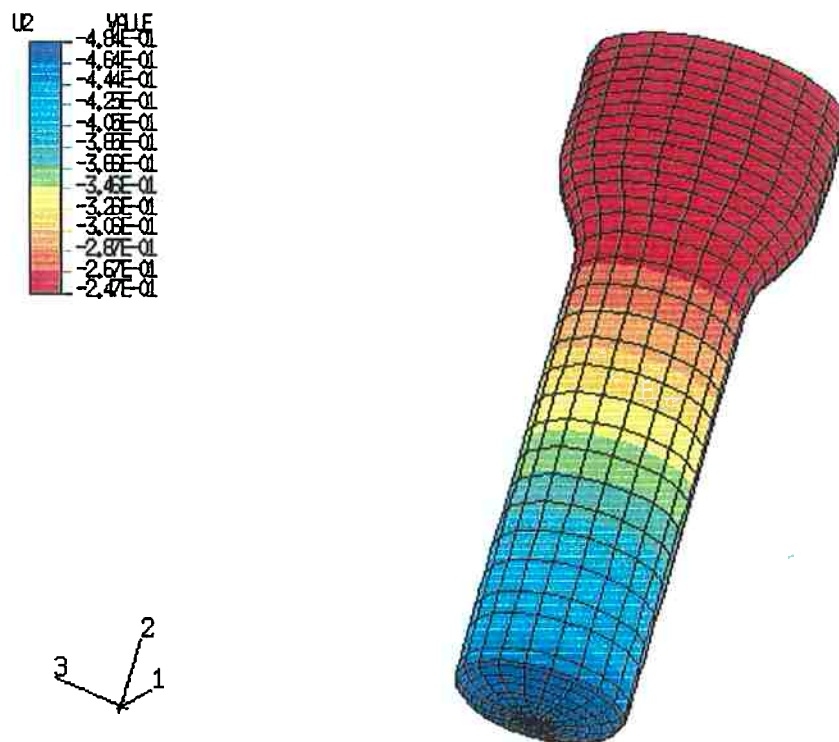


Figura 5.15 - Deslocamento na direção 2 para o material com dano.

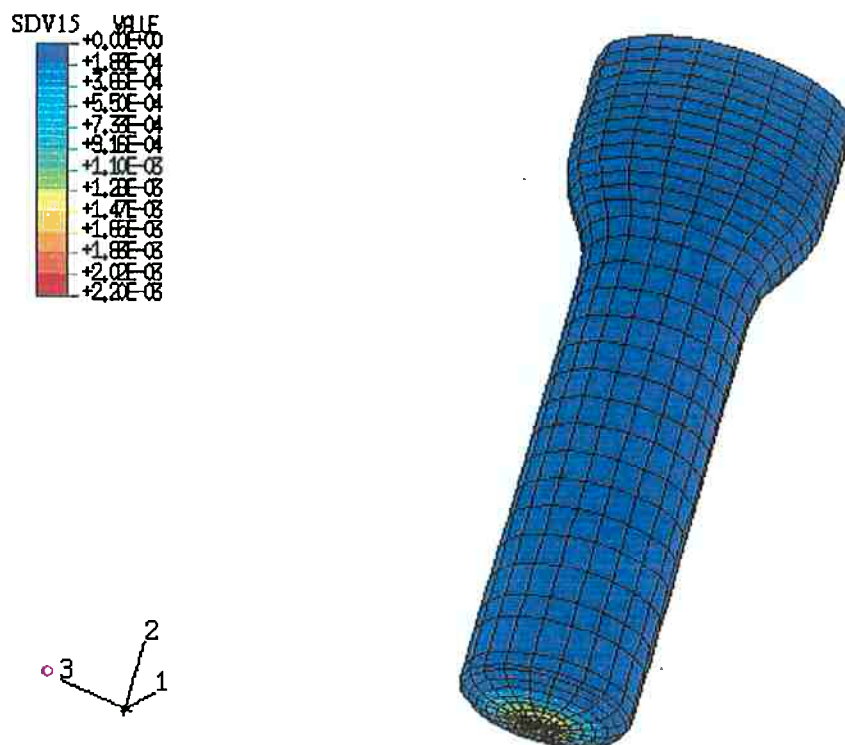


Figura 5.16 – Distribuição do dano no material.

O dano do material é concentrado no centro da barra mostrando conseqüentemente uma perda de resistência do material nesta região.

5.6 PROBLEMA 3: ESTRICÇÃO

Este exemplo de aplicação foi obtido do “Example Problems Manual Vol. II” do programa ABAQUS versão 5.7. O problema resolvido corresponde ao problema 4.2.20 do referido manual onde podem ser obtidos maiores detalhes do problema.

A geometria do material corresponde a um modelo axi-simétrico onde foi utilizado o elemento CAX8R (elemento axi-simétrico com 8 nós e integração reduzida) para modelar a barra circular. O teste consiste em estender a barra impondo um deslocamento dado. Devido a simetria da peça é necessário apenas modelar a quarta parte da mesma. As relações entre as dimensões são as seguintes, o comprimento inicial é de l_0 e o raio inicial R_0 sendo $l_0/R_0 = 4$, onde $R_0 = 1$ unidade. Uma imperfeição cônica é introduzida perto do centro da peça, sendo o valor do raio no centro igual a $R_0|_{z=0} = 0,995R_0$. A malha na região próxima ao centro é refinada devido a que é esperado uma concentração de deformação nesta região. A Figura 5.17 ilustra a disposição da barra e as suas dimensões antes de deformar.

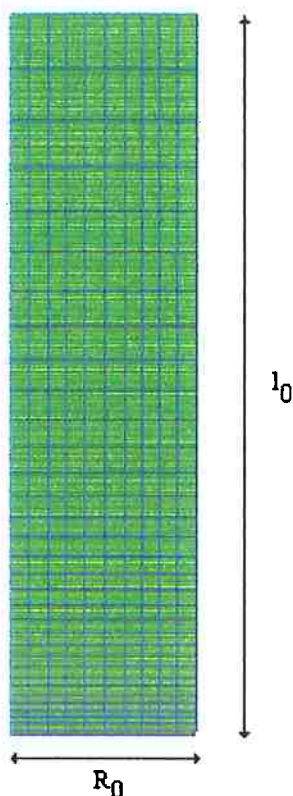


Figura 5.17 – Modelo axi-simétrico do material a sofrer estricção.

As propriedades do material segundo pode ser verificado no Example Problems Manual Vol. II possui módulo de Young inicial de 300 MPa, o módulo de Poisson 0,3. A tensão de escoamento inicial é de 1 MPa.

Tabela 5.5 – Deformações e tensões sem variação do módulo elástico e com variação da temperatura.

| Def. | Tensão (MPa) | Def. El. | Def. Pl. |
|----------|--------------|----------|----------|
| 3,33E-03 | 1,00E+00 | 3,33E-03 | 0,00E+00 |
| 5,17E-03 | 1,05E+00 | 3,50E-03 | 1,67E-03 |
| 7,98E-03 | 1,10E+00 | 3,67E-03 | 4,32E-03 |
| 1,22E-02 | 1,15E+00 | 3,83E-03 | 8,36E-03 |
| 1,84E-02 | 1,20E+00 | 4,00E-03 | 1,44E-02 |
| 2,75E-02 | 1,25E+00 | 4,17E-03 | 2,33E-02 |
| 4,04E-02 | 1,30E+00 | 4,33E-03 | 3,61E-02 |
| 5,87E-02 | 1,35E+00 | 4,50E-03 | 5,42E-02 |
| 8,42E-02 | 1,40E+00 | 4,67E-03 | 7,95E-02 |
| 9,69E-02 | 1,42E+00 | 4,73E-03 | 9,22E-02 |
| 1,11E-01 | 1,44E+00 | 4,80E-03 | 1,07E-01 |
| 1,28E-01 | 1,46E+00 | 4,87E-03 | 1,23E-01 |
| 1,46E-01 | 1,48E+00 | 4,93E-03 | 1,41E-01 |
| 1,67E-01 | 1,50E+00 | 5,00E-03 | 1,62E-01 |
| 1,91E-01 | 1,52E+00 | 5,07E-03 | 1,86E-01 |
| 2,17E-01 | 1,54E+00 | 5,13E-03 | 2,12E-01 |
| 2,47E-01 | 1,56E+00 | 5,20E-03 | 2,42E-01 |
| 2,81E-01 | 1,58E+00 | 5,27E-03 | 2,76E-01 |
| 3,18E-01 | 1,60E+00 | 5,33E-03 | 3,13E-01 |
| 4,33E-01 | 1,65E+00 | 5,50E-03 | 4,27E-01 |
| 5,83E-01 | 1,70E+00 | 5,67E-03 | 5,77E-01 |
| 7,79E-01 | 1,75E+00 | 5,83E-03 | 7,73E-01 |
| 1,00E+00 | 1,79E+00 | 5,98E-03 | 9,98E-01 |

Tabela 5.6 – Deformações e tensões com variação do módulo elástico e temperatura.

| Def. | E (MPa) | d | Tensão (MPa) | Def. El. | Def. Pl. | Yeq (J/m ³) | B (J/m ³) |
|-----------|----------|----------|--------------|-----------|----------|-------------------------|-----------------------|
| 3,333E-03 | 3,00E+02 | 0,00E+00 | 1,00E+00 | 3,333E-03 | 0,00E+00 | 3,33E-03 | 8,50E-03 |
| 5,172E-03 | 3,00E+02 | 0,00E+00 | 1,05E+00 | 3,500E-03 | 1,67E-03 | 3,68E-03 | 8,50E-03 |
| 7,982E-03 | 3,00E+02 | 0,00E+00 | 1,10E+00 | 3,667E-03 | 4,32E-03 | 4,03E-03 | 8,50E-03 |
| 1,220E-02 | 3,00E+02 | 0,00E+00 | 1,15E+00 | 3,833E-03 | 8,36E-03 | 4,41E-03 | 8,50E-03 |
| 1,842E-02 | 3,00E+02 | 0,00E+00 | 1,20E+00 | 4,000E-03 | 1,44E-02 | 4,80E-03 | 8,50E-03 |
| 2,746E-02 | 3,00E+02 | 0,00E+00 | 1,25E+00 | 4,167E-03 | 2,33E-02 | 5,21E-03 | 8,50E-03 |
| 4,040E-02 | 3,00E+02 | 0,00E+00 | 1,30E+00 | 4,333E-03 | 3,61E-02 | 5,63E-03 | 8,50E-03 |
| 5,869E-02 | 3,00E+02 | 0,00E+00 | 1,35E+00 | 4,500E-03 | 5,42E-02 | 6,08E-03 | 8,50E-03 |
| 8,418E-02 | 3,00E+02 | 0,00E+00 | 1,40E+00 | 4,667E-03 | 7,95E-02 | 6,53E-03 | 8,50E-03 |
| 9,693E-02 | 3,00E+02 | 0,00E+00 | 1,42E+00 | 4,733E-03 | 9,22E-02 | 6,72E-03 | 8,50E-03 |
| 1,114E-01 | 3,00E+02 | 0,00E+00 | 1,44E+00 | 4,800E-03 | 1,07E-01 | 6,91E-03 | 8,50E-03 |
| 1,278E-01 | 3,00E+02 | 0,00E+00 | 1,46E+00 | 4,867E-03 | 1,23E-01 | 7,11E-03 | 8,50E-03 |
| 1,463E-01 | 3,00E+02 | 0,00E+00 | 1,48E+00 | 4,933E-03 | 1,41E-01 | 7,30E-03 | 8,50E-03 |
| 1,673E-01 | 3,00E+02 | 0,00E+00 | 1,50E+00 | 5,000E-03 | 1,62E-01 | 7,50E-03 | 8,50E-03 |
| 1,909E-01 | 3,00E+02 | 0,00E+00 | 1,52E+00 | 5,067E-03 | 1,86E-01 | 7,70E-03 | 8,50E-03 |
| 2,174E-01 | 3,00E+02 | 0,00E+00 | 1,54E+00 | 5,133E-03 | 2,12E-01 | 7,91E-03 | 8,50E-03 |
| 2,473E-01 | 3,00E+02 | 0,00E+00 | 1,56E+00 | 5,200E-03 | 2,42E-01 | 8,11E-03 | 8,50E-03 |
| 2,808E-01 | 3,00E+02 | 0,00E+00 | 1,58E+00 | 5,267E-03 | 2,76E-01 | 8,32E-03 | 8,50E-03 |
| 3,185E-01 | 2,89E+02 | 1,77E-02 | 1,60E+00 | 5,527E-03 | 3,13E-01 | 9,00E-03 | 9,00E-03 |
| 4,334E-01 | 2,72E+02 | 4,71E-02 | 1,65E+00 | 6,057E-03 | 4,27E-01 | 1,05E-02 | 1,05E-02 |
| 5,851E-01 | 2,23E+02 | 1,39E-01 | 1,70E+00 | 7,637E-03 | 5,77E-01 | 1,51E-02 | 1,51E-02 |
| 7,846E-01 | 1,53E+02 | 2,85E-01 | 1,75E+00 | 1,142E-02 | 7,73E-01 | 2,79E-02 | 2,79E-02 |
| 1,025E+00 | 6,60E+01 | 5,31E-01 | 1,79E+00 | 2,720E-02 | 9,98E-01 | 1,04E-01 | 1,04E-01 |

É dado um incremento de 0,79 unidades na direção axial da barra. As condições de contorno são tais que simulam o teste de tração da barra tendo em conta que o modelo é considerado simétrico.

5.7 RESULTADOS

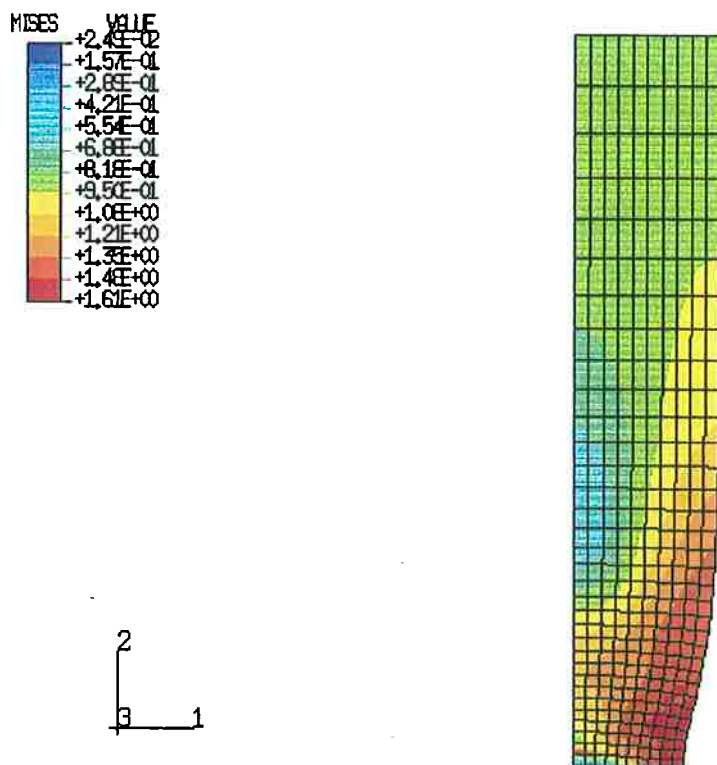


Figura 5.18 – Tensão de von Mises para o material sem dano.

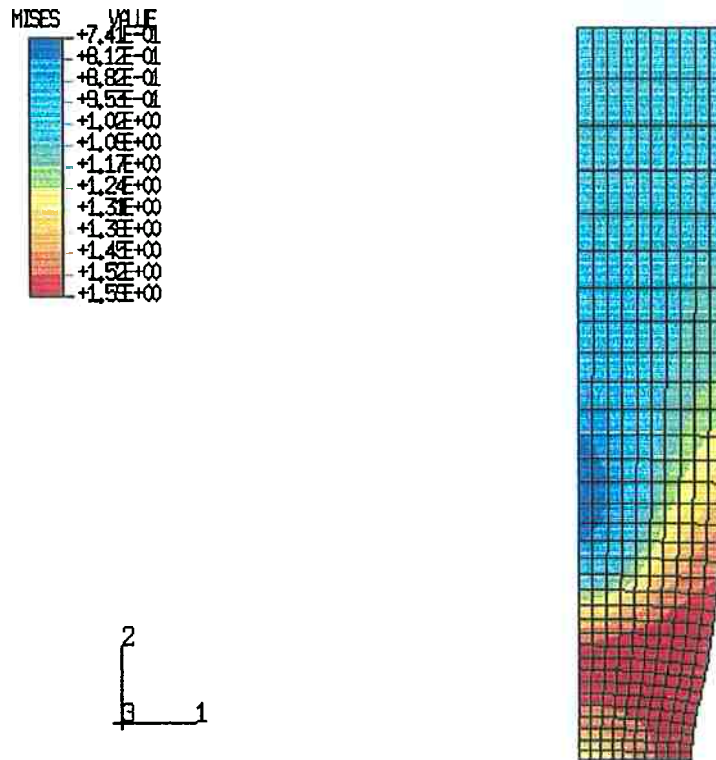


Figura 5.19 - Tensão de von Mises para o material com dano.

Nas figuras 5.18 e 5.19 podem ser verificados que as tensões de von Mises neste caso tem distribuições um pouco diferentes, mostrando uma concentração maior de tensões na região de estrição no caso do material com dano.

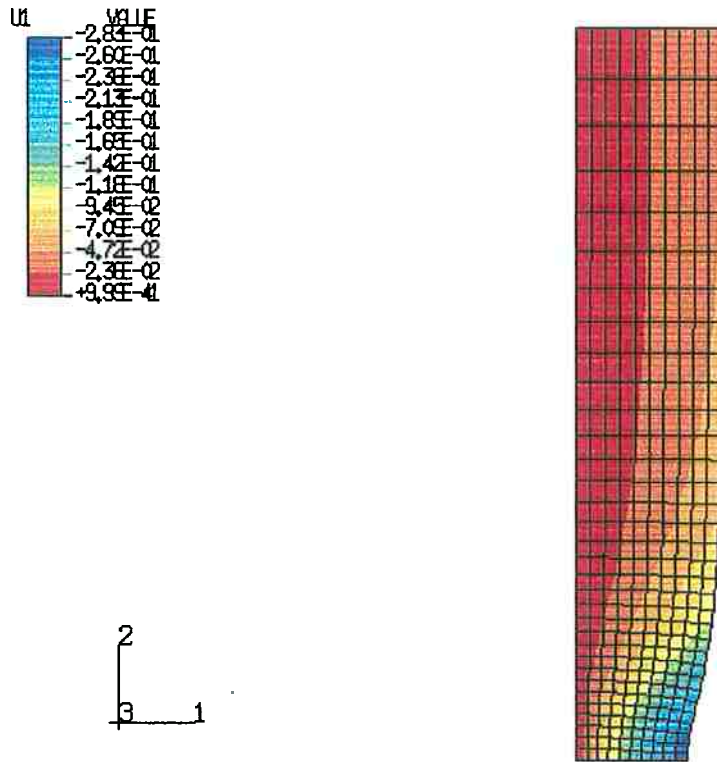


Figura 5.20 – Deslocamento na direção 1 para o material sem dano.

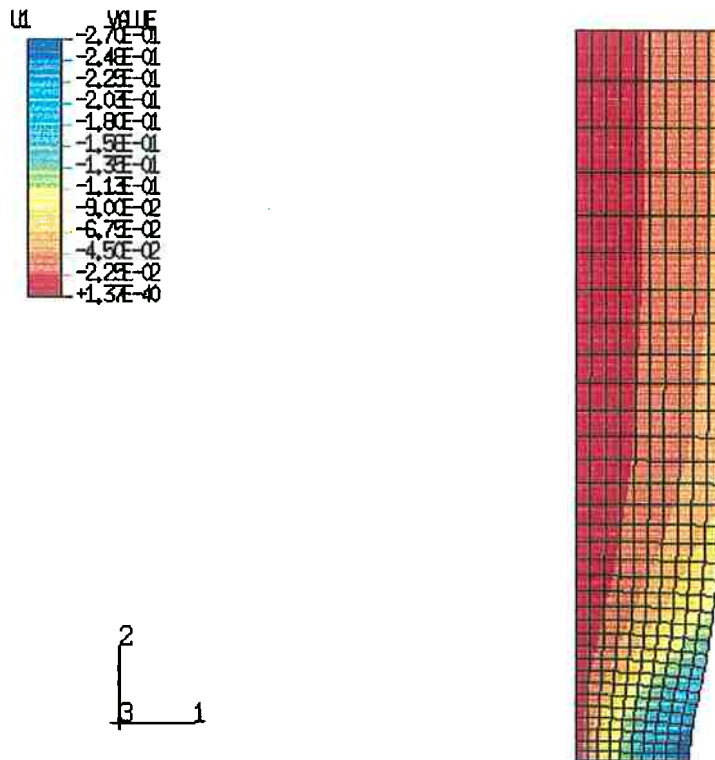


Figura 5.21 – Deslocamento na direção 1 para o material com dano.

Os deslocamentos na direção 1 tal como pode ser observado nas figuras 5.20 e 5.21 não apresentam grandes variações tanto nos seus valores quanto na suas distribuições. Identicamente podem ser considerados equivalentes os deslocamentos na direção 2 de acordo com as figuras 5.22 e 5.23.

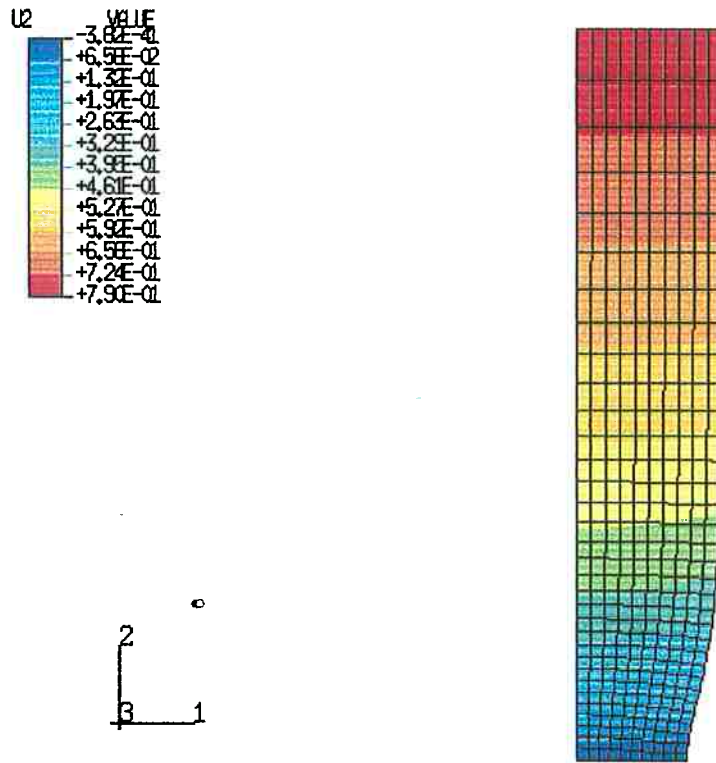


Figura 5.22 - Deslocamento na direção 2 para o material sem dano.

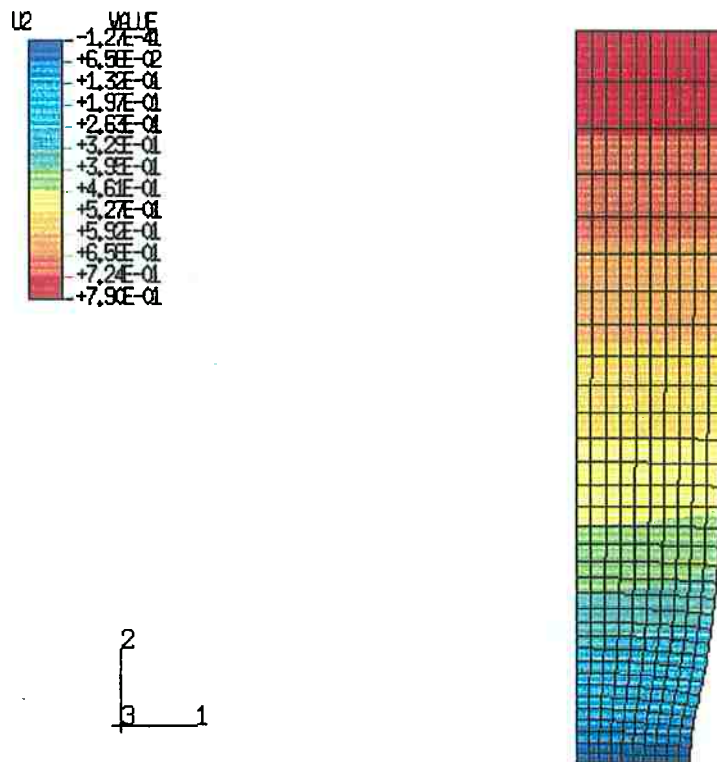


Figura 5.23 - Deslocamento na direção 2 para o material com dano.

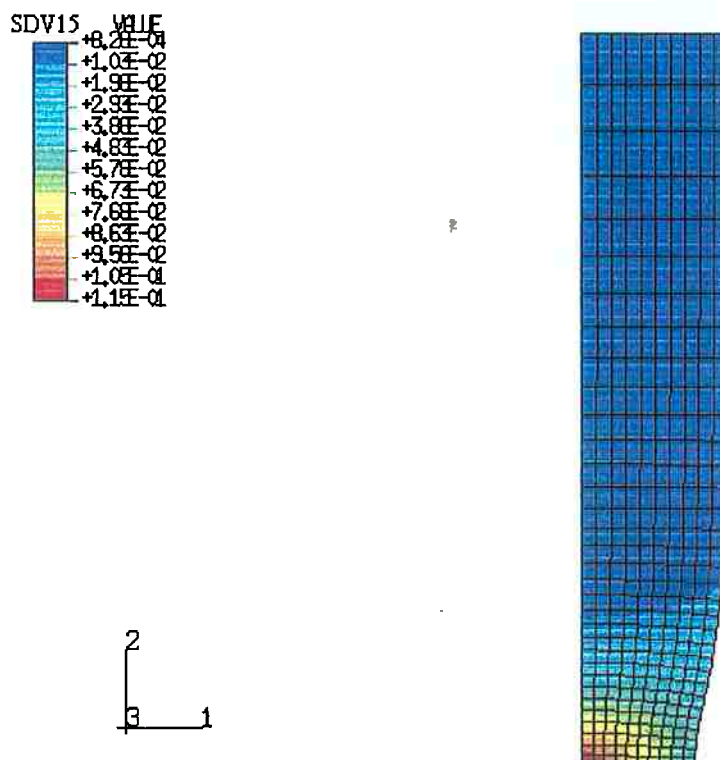


Figura 5.24 - Distribuição do dano no material.

O dano do material se concentra na região da estrição do material. Isso significa que a possível região onde ocorrerá a fissura pertence à região de estrição.

5.8 PROBLEMA 4: RECALQUE

Este exemplo de aplicação foi obtido do “Example Problems Manual Vol. II” do programa ABAQUS versão 5.7. O problema resolvido corresponde ao problema 4.2.11 do referido manual onde podem ser obtidos maiores detalhes do problema.

A geometria do material corresponde a um modelo axi-simétrico onde foi utilizado o elemento CAX8RT (elemento axi-simétrico com 8 nós e integração reduzida e acoplamento de temperatura) para modelar a barra circular. A barra tem um comprimento de 30 mm e raio de 10 mm e é comprimido por uma matriz plana. O modelo em elementos finitos consiste somente na parte superior da seção devido à simetria. O tipo de contato utilizado é o rugoso que equivale a utilizar a lei de Coulomb com coeficiente de atrito infinito, portanto não há deslizamento entre as superfícies em contato. A Figura 5.25 ilustra a disposição da barra, as suas dimensões antes de deformar.

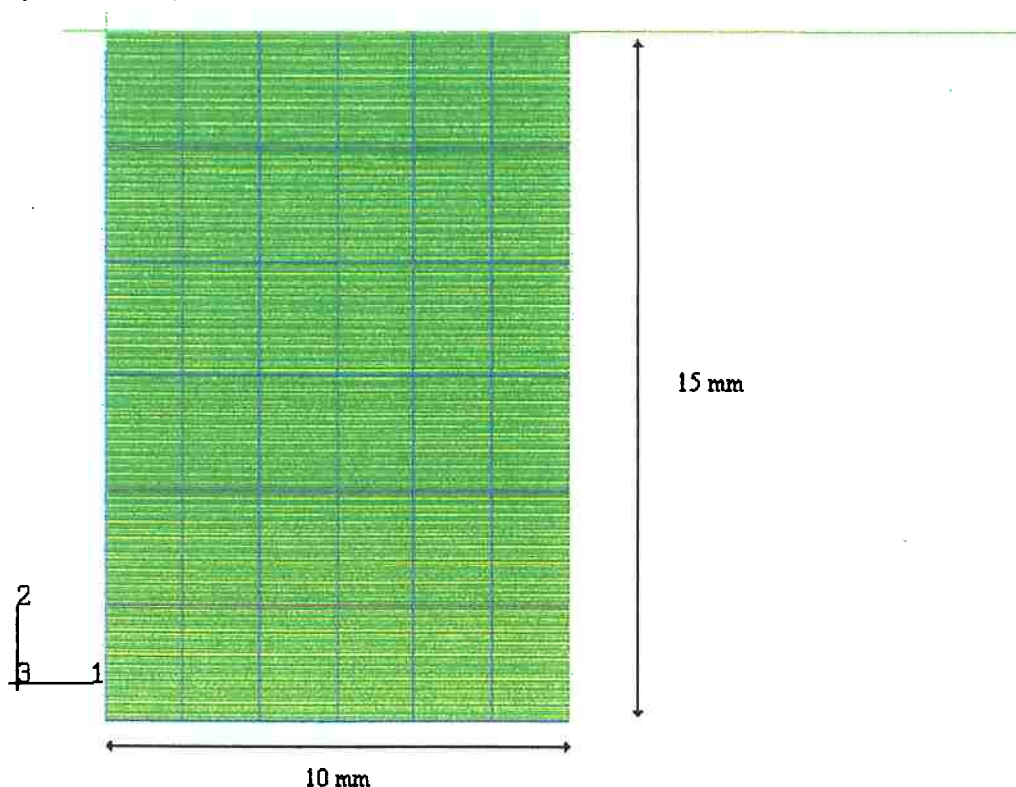


Figura 5.25 – Modelo axi-simétrico do material a sofrer recalque.

As propriedades do material segundo pode ser verificado no Example Problems Manual Vol. II possui módulo de Young inicial de 300 MPa, o módulo de Poisson 0,3. A tensão de escoamento inicial é de 1 MPa.

Tabela 5.7 – Deformações e tensões sem variação do módulo elástico e com variação da temperatura.

| Def. | Tensão (Pa) | Def. El. | Def. Pl. |
|----------|-------------|----------|----------|
| 3,50E-03 | 7,00E+08 | 3,50E-03 | 0 |
| 4,00E-01 | 7,65E+08 | 3,83E-03 | 0,396 |
| 1,00E+01 | 3,70E+09 | 1,85E-02 | 10 |

Tabela 5.8 – Deformações e tensões com variação do módulo elástico e temperatura.

| Def. | E (Pa) | d | Tensão (Pa) | Def. El. | Def. Pl. | Yeq (J/m ³) | B (J/m ³) |
|-----------|----------|----------|-------------|-----------|----------|-------------------------|-----------------------|
| 3,500E-03 | 2,00E+11 | 0,00E+00 | 7,00E+08 | 3,500E-03 | 0 | 2,45E+06 | 2,80E+06 |
| 3,999E-01 | 1,94E+11 | 1,51E-02 | 7,65E+08 | 3,943E-03 | 0,396 | 3,06E+06 | 3,06E+06 |
| 1,012E+01 | 3,20E+10 | 6,00E-01 | 3,70E+09 | 1,156E-01 | 10 | 1,07E+09 | 1,07E+09 |

Como é natural, as condições de contorno de simetria são adotados. Nestas condições a matriz desce 9 mm comprimindo a barra.

5.9 RESULTADOS

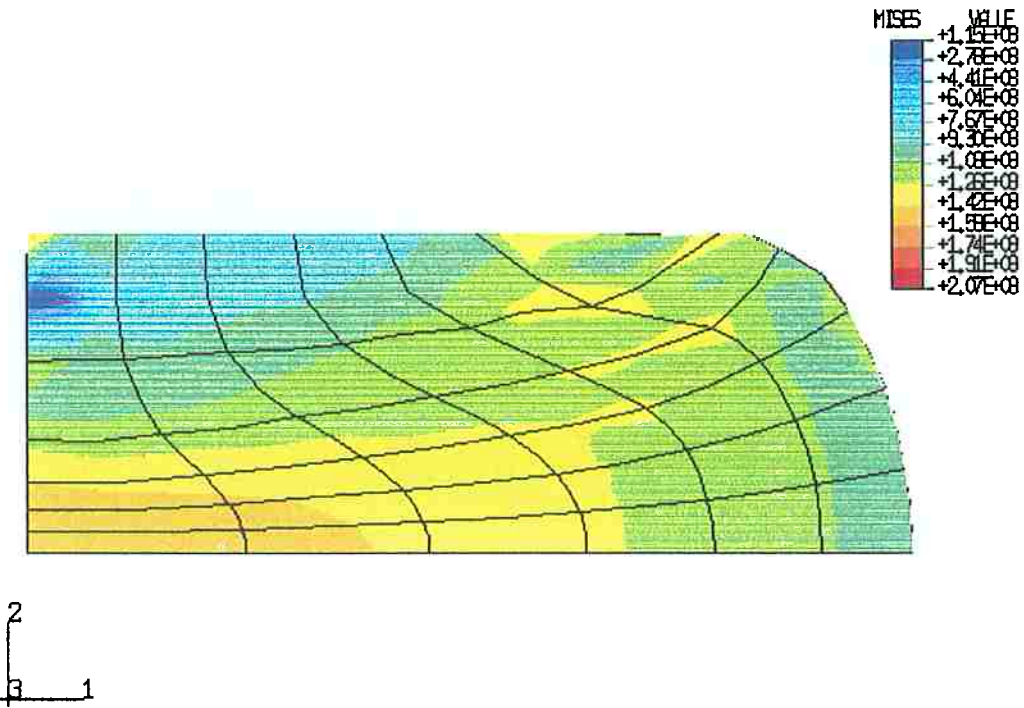


Figura 5.26 – Tensão de von Mises para o material sem dano.

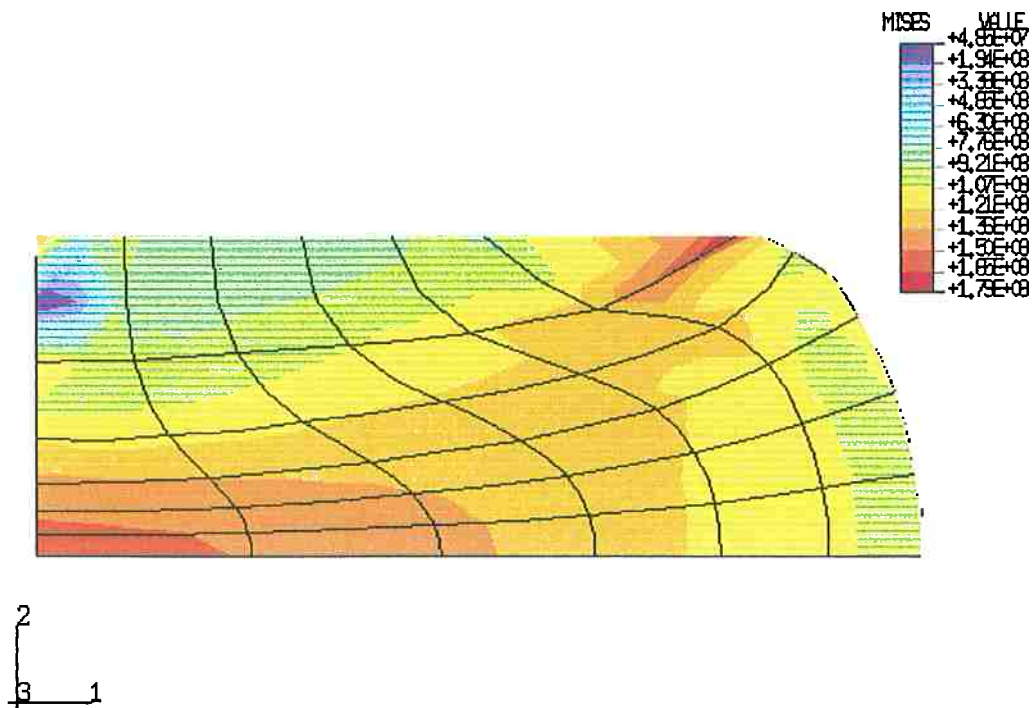


Figura 5.27 - Tensão de von Mises para o material com dano.

As tensões de von Mises no material com dano são inferiores ao do material sem dano como mostram as figuras 5.26 e 5.27. As distribuição das tensões também são um pouco diferentes como pode ser verificado.

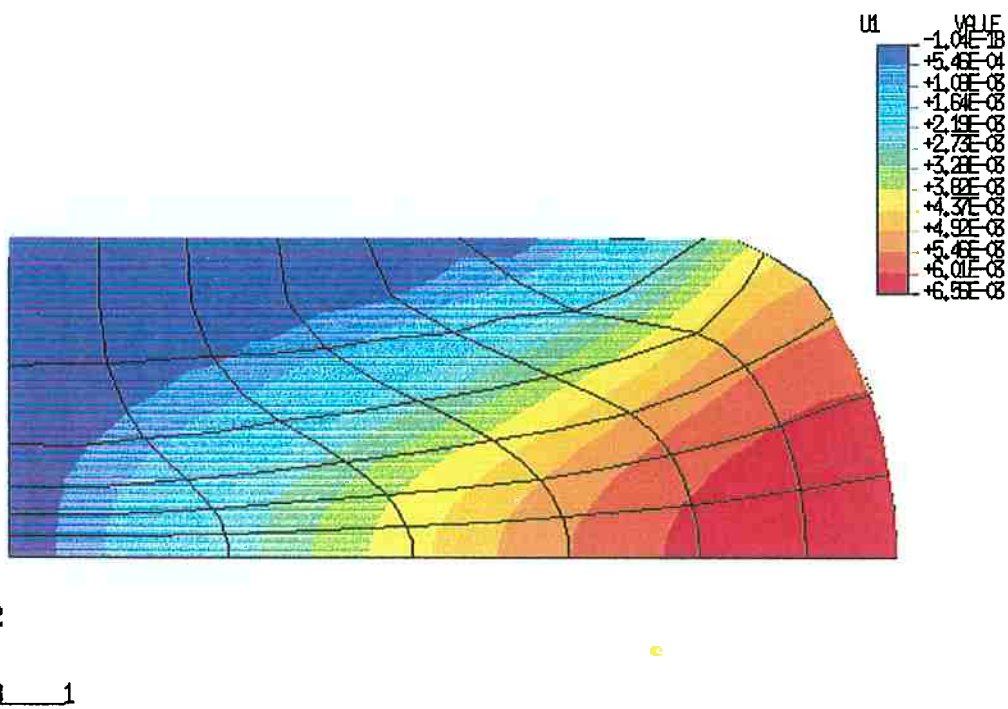


Figura 5.28 – Deslocamento na direção 1 para o material sem dano.

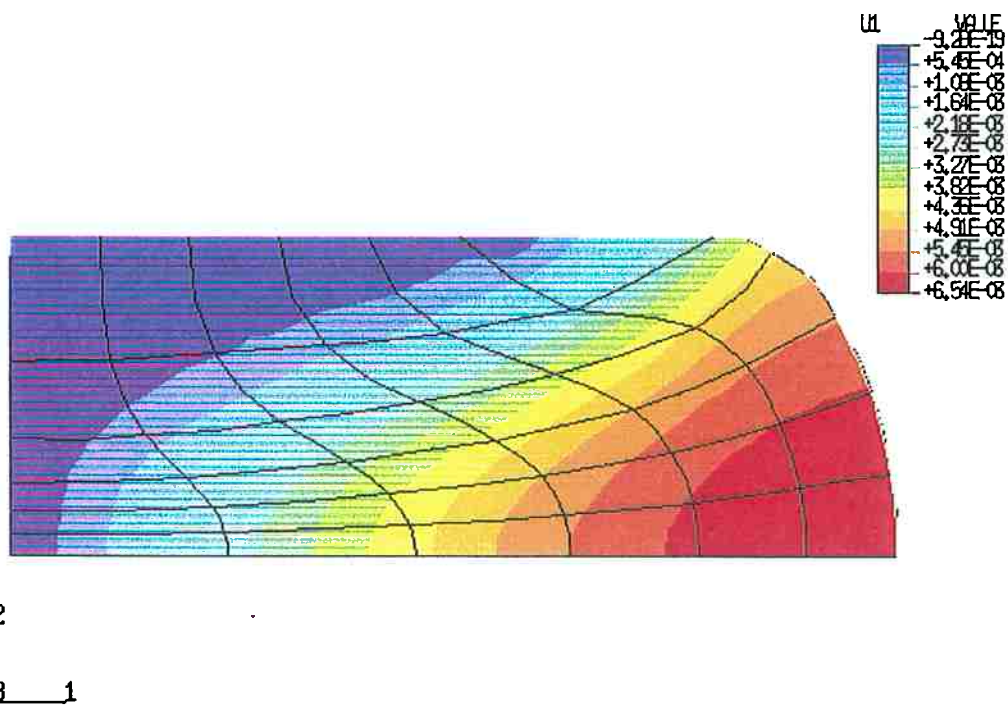


Figura 5.29 – Deslocamento na direção 1 para o material com dano.

Os deslocamentos na direção 1 são equivalentes segundo pode ser visto nas figuras 5.28 e 5.29. O mesmo acontece na direção 2 onde os deslocamentos não mostram muita diferença observando as figuras 5.30 e 5.31.

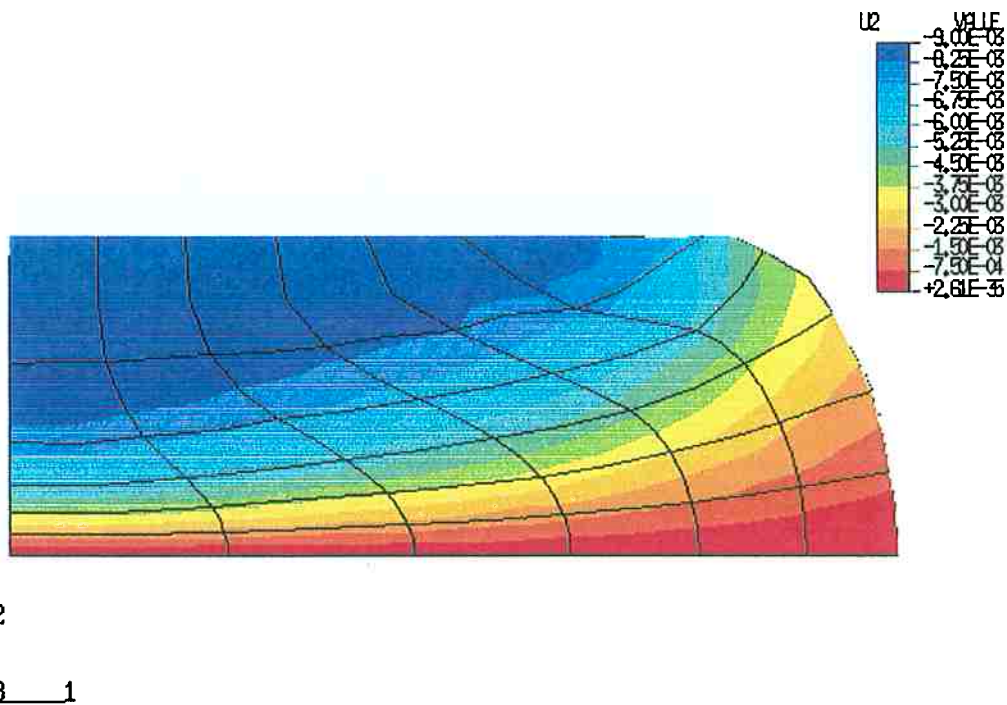


Figura 5.30 - Deslocamento na direção 2 para o material sem dano.

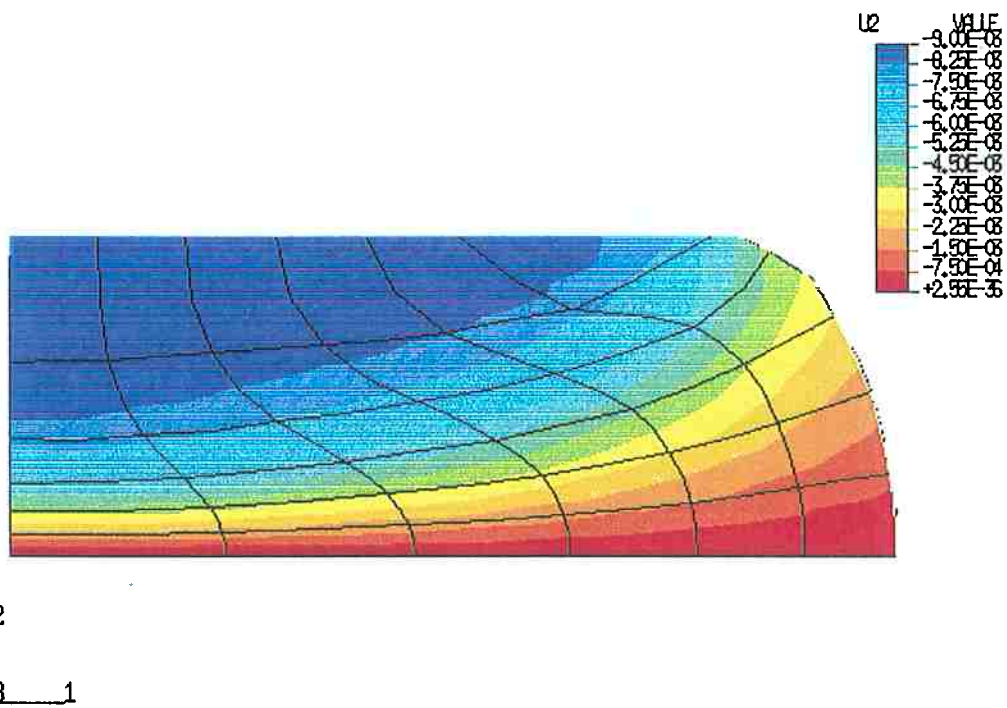


Figura 5.31 - Deslocamento na direção 2 para o material com dano.

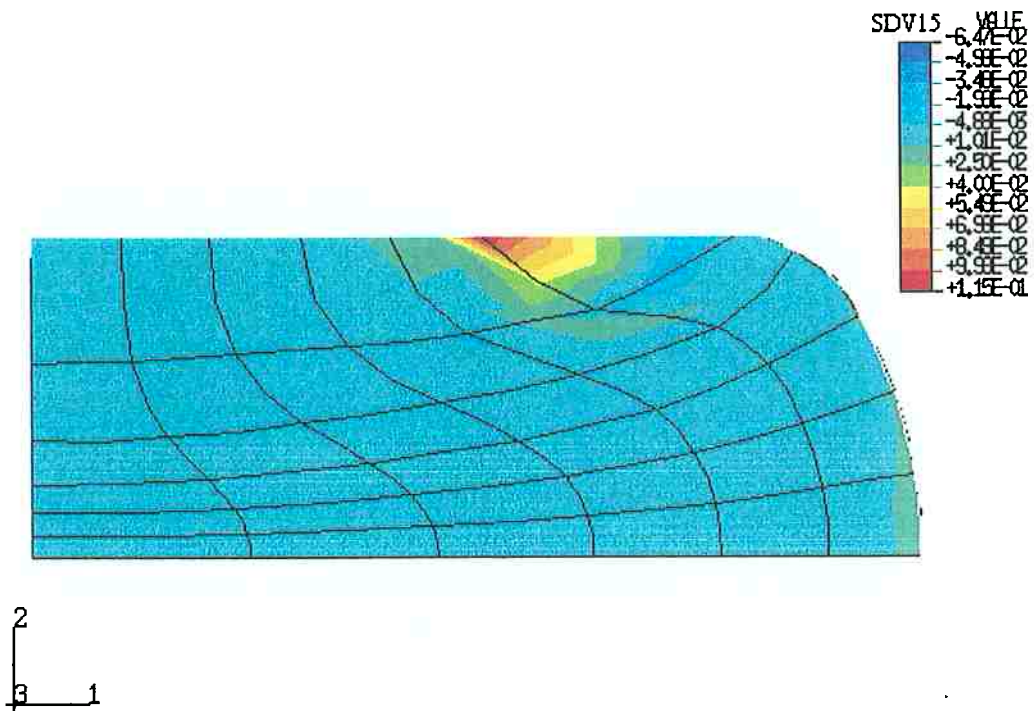


Figura 5.32 – Distribuição do dano no material.

A figura 5.32 mostra uma região de concentração de dano na região de contato entre a peça e a matriz.

5.10 DISCUSSÃO

O modelo do capítulo 3 não conjecturou a natureza do dano a priori. Por conseguinte, o modelo é capaz de adotar não somente a variação do módulo elástico, como se fez no capítulo 4, mas pode ser utilizada outra variável macro-mecânica (e.g. variação do módulo de Poisson) que seja possível medir. Isto dá uma grande versatilidade ao modelo, e dependendo das características do laboratório é possível adaptar o modelo às medições, incorporando o dano no modelo de material.

A implementação do modelo no programa ABAQUS, permite a sua difusão para a sua posterior utilização na indústria.

Como se viu no capítulo 3, o modelo pode considerar a variação da evolução do dano dependendo da direção (i.e. a anisotropia do dano).

A implementação do modelo anisotrópico depende dos valores experimentais disponíveis, portanto, a sua implementação é possível.

A adoção da equivalência da energia, possui apesar da grande utilização da equivalência de deformação como vem sendo adotado por Lemaitre e seguidores, e.g. Lemaitre (2000), uma grande vantagem devida a natureza escalar da energia.

Isso possibilita desenvolver modelos de danos de forma mais simples e intuitiva Krajcinovic (2000).

Por outro lado, apesar de modelo ser adequado para o dano dúctil e carregamentos não cíclicos. Pode ser incorporado ao modelo o efeito cinemático nas suas leis de evolução. Sendo possível modelar desta forma (depois da incorporação) casos de fadiga de baixo e alto ciclo.

Os problemas onde foram aplicados o modelo de dano são problemas típicos do processo de fabricação. É necessário realizar mais pesquisas numéricas a fim de avaliar o modelo em mais casos comparando-o com dados experimentais e analítico objetivando uma avaliação mais crítica do modelo. Até o momento o modelo ha mostrado coerência com os resultados mas pode ser observado certa dependência com o refinamento da malha (i.e. a malha não pode ser refinada demais) e para alguns problemas é necessário entrar com valores iniciais diferentes no método de Newton acoplado ao modelo.

Um critério de falha pode ser incorporado ao modelo para modelar problemas dependentes do critério, este critério vai agregar maior funcionalidade ao modelo.

Finalmente, o modelo pode ser implementado em outros programas como o ANSYS, por exemplo, para realizar simulações numéricas.

Capítulo 6

CONCLUSÕES E CONTRIBUIÇÕES

6.1 CONTRIBUIÇÕES

No capítulo 2 foram colocados conceitos clássicos, num ordenamento didático adequado, fazendo a construção da teoria, partindo dos conceitos básicos, até os requeridos para a construção do modelo.

Foi desenvolvido no capítulo 3 o modelo elasto-plástico como dano anisotrópico. O desenvolvimento depende da teoria termodinâmica adotada.

No capítulo 4 foi desenvolvido um algoritmo implícito, fazendo uma adaptação do algoritmo do retorno para o modelo desenvolvido. A formulação decorrente do algoritmo, i.e., a integração e os Jacobianos são totalmente novos.

6.2 LIMITAÇÕES DO MODELO

O modelo desenvolvido está restringido aos problemas quasi-estáticos. Uma ampliação do modelo para se ter em conta efeitos dinâmicos é possível. Porém, a utilização da Termodinâmica com Variáveis Internas limita a utilização do modelo a processos com moderada velocidade, devido à estrutura da teoria termodinâmica.

O modelo do material não considera o efeito da temperatura no comportamento do material, porém, esse efeito pode ser introduzido através de uma variável interna no modelo.

Efeitos cíclicos como fadiga não podem ser resolvidos fazendo uso do modelo do material desenvolvido no trabalho. No entanto, esses efeitos podem ser considerados pelo modelo modificando as funções de evolução do dano e da deformação plástica.

6.3 CONCLUSÕES

Foi desenvolvido um modelo matemático capaz de simular os fenômenos relacionados com as deformações elástica e plástica do material com dano.

O modelo apresentou resultados coerentes com os resultados esperados na simulação de diferentes problemas.

O modelo pode ser acrescentado para considerar outros efeitos desejados, tais como fadiga e temperatura.

A implementação no programa ABAQUS permite o tratamento de problemas complexos, fazendo possível desta forma a aplicação do modelo em forma flexível.

Outros programas comerciais também podem ser utilizados para a implementação do modelo.

Em caso de ter dados experimentais confiáveis, a implementação numérica do dano anisotrópico pode ser realizada.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Abraham and J. Marsden. *Foundations of Mechanics*. Addison-Wesley, New York, USA, 1978.
- [2] M. Alves. Some comments on material damage. Preprint submitted to Engineering Fracture Mechanics, 1998.
- [3] M. Alves and N. Jones. Influence of hydrostatic stress on failure of axisymmetric notched specimens. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 47:643–667, 1999.
- [4] A. Aquino. Modelagem e simulação do estado tenso-térmico em corpos elásticos bidimensionais: Problema inverso, 1999.
- [5] N. Aravas. On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models. *International J. for Numerical Methods in Engineering*, 24:1395–1416, 1987.
- [6] F. Armero and S. Oller. A general framework for continuum damage models. i. infinitesimal plastic damage models in stress space. *International J. of Solids and Structures*, 37:7409–7436, 2000.
- [7] F. Armero and S. Oller. A general framework for continuum damage models. ii. integration algorithms, with applications to the numerical simulation of porous metals. *International J. of Solids and Structures*, 37:7437–7464, 2000.
- [8] S. Taher; M. Baluch and A. Al-Gadhib. Towards a canonical elastoplastic damage model. *Eur. J. Mech.*, 48:151–166, 1994.
- [9] N. Bellomo and L. Preziosi. *Modelling Mathematical Methods and Scientific Computation*. CRC Press, London, UK, 1995.
- [10] B. Bhattacharya and B. Ellingwood. A new cdm-based approach to structural deterioration. *International J. of Solids and Structures*, 36:1757–1779, 1999.

- [11] B. Bhattacharya and B. Ellinwood. Continuum damage mechanics analysis of fatigue crack initiation. *International J. of Fatigue*, 20:631–639, 1998.
- [12] N. Bonora. A nonlinear cdm model for ductile failure. *Eur. J. Mech.*, 58:11–28, 1997.
- [13] N. Bonora and G. Newaz. Low cycle fatigue life estimation for ductile metals using a nonlinear continuum damage mechanics model. *International J. of Solids and Structures*, 16:1881–1894, 1998.
- [14] A. Borisenko and I. Tarapov. *Vector and Tensor Analysis With Applications*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, USA, 1968.
- [15] R. Bowen. *Introduction to Continuum Mechanics for Engineers*. Penum Press, New York, USA, 1989.
- [16] M. Brunig. A framework for large strain elastic-plastic damage mechanics based on metric transformations. *International J. of Engineering Science*, 39:1033–1056, 2001.
- [17] M. Brunig. Numerical analysis and elastic-plastic deformation behavior of anisotropically damaged solids. *International J. of Plasticity*, 18:1237–1270, 2002.
- [18] M. Brunig. Numerical analysis of anisotropic ductile continuum damage. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 192:2949–2976, 2003.
- [19] A. Cauvin and R. Testa. Damage mechanics: Basic variables in continuum theories. *International J. of Solids and Structures*, pages 747–761, 1999.
- [20] A. Cauvin and R. Testa. Elastoplastic material with isotropic damage. *International J. of Solids and Structures*, 36:727–746, 1999.
- [21] S. Chandrakanth and P. Pandey. Damage coupled elasto-plastic finite element analysis of a timoshenko layered beam. *Computer & Structures*, 69:411–420, 1998.
- [22] J. Cusumano and A. Chatterjee. Step towards a qualitative dynamics of damage evolution. *International J. of Solids and Structures*, 37:6397–6417, 2000.
- [23] J.B. de Aguiar and A. Aquino. Formulação elasto-plástica para materiais danificados. In *Proceeding II CONEM*, Brasil, 2002.

- [24] J.B. de Aguiar; A. Aquino and J.M. de Aguiar. Elasto-plastic analysis of an upsetting process using a damaging material. In *Proceeding II COBEF*, Uberlândia, MG, Brasil, 2002.
- [25] E. de Souza Neto; D. Peric and D. Owen. A model for elastoplastic damage at finite strain: Algorithmic issues and applications. *Engineering Computations*, 11:257–281, 1994.
- [26] E. de Souza Neto; D. Peric and D. Owen. Computational plasticity. Preprint, Swansea, UK, 2002.
- [27] J. Lemaitre; R. Desmorat and M. Sauzay. Anisotropic damage law of evolution. *Eur. J. Mech.*, pages 187–208, 2000.
- [28] R. Desmorat and J. Lemaitre. Stress singularities applied to crack initiation by damage of multimaterial joints. *Mechanics of Materials*, 29:153–160, 1998.
- [29] R. Echle and G. Voyiadjis. Simulation of damage evolution in a uni-directional titanium matrix composite subjected to high cycle fatigue. *International J. of Fatigue*, 21:909–923, 1999.
- [30] M. Elgueta and C. Cortés. Application of continuum damage theory in metal-forming processes. *Journal of Materials Processing Technology*, pages 122–127, 1999.
- [31] A.A. Benzerga et al. Synergistic effects of plastic anisotropy and void coalescence on fracture mode in plane strain. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, pages 73–102, 2002.
- [32] C. Chow et al. Prediction of forming limit diagrams for al6111-t4 under non-proportional loading. *International J. of Mechanical Sci.*, pages 471–486, 2001.
- [33] C. Han et al. A multiplicative finite elasto-plastic formulation with anisotropic yield functions. *International J. of Plasticity*, pages 197–211, 2003.
- [34] P. Ladevèze et al. A mesomodel for localisation and damage computation in laminates. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 183:105–122, 2000.
- [35] Y. Kaji et al. Development of structural analysis program for non-linear elasticity by continuum damage mechanics. *Nuclear Engineering and Design*, 206:1–12, 2001.

- [36] M. Frémond and B. Nedjar. Damage, gradient of damage and principle of virtual power. *International J. of Solids and Structures*, 33:1083–1103, 1996.
- [37] Y. Fung. *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, USA, 1965.
- [38] M. Gurtin. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, San Diego, USA, 1981.
- [39] R. Hambli and D. Badie-Levet. Damage and fracture simulation during the extrusion processes. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 186:109–120, 2000.
- [40] S. Hassiotis. Identification of damage using natural frequencies and markov parameters. *Computer & Structures*, 74:365–373, 2000.
- [41] HKS. *ABAQUS Theory Manual*. Hibbit; Karlson & Sorensen, INC, Pawtucket, RI, USA, 1995.
- [42] G. Johnson and D. Bammann. A discussion of stress rates in finite deformation problems. *International J. of Solids and Structures*, 20:725–737, 1984.
- [43] J. Ju. On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects. *International J. of Solids and Structures*, 25:803–833, 1989.
- [44] J. Ju and H. Lee. A micromechanical damage model for effective elastoplastic behavior of ductile matrix composites considering evolutionary complete particle debonding. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, pages 201–222, 2000.
- [45] D. Krajcinovic. Selection of damage parameter - art or science? *Mechanics of Materials*, 28:165–179, 1998.
- [46] D. Krajcinovic. Damage mechanics: Accomplishments, trends and needs. *International J. of Solids and Structures*, 37:267–277, 2000.
- [47] D. Krajcinovic and M. Vujosevic. Intrinsic failure modes of brittle materials. *International J. of Solids and Structures*, 35:2487–2503, 1998.
- [48] V. Kriukov. Fundamentos da modelagem matemática: Parte i. Cadernos UNIJUÍ, Ijuí, RS, Brasil, 1996.

- [49] M. Kuroda and V. Tvergaard. Forming limit diagrams for anisotropic metal sheets with different yield criteria. *International J. of Solids and Structures*, pages 5037–5059, 2000.
- [50] J. Lemaitre and J. Chaboche. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge Press, Cambridge, UK, 1994.
- [51] J. Lee. Finite element procedures for large strain elastic-plastic theories. *Computer & Structures*, 28:395–406, 1988.
- [52] Th. Lehmann. Thermodynamical foundations of large inelastic deformations of solid bodies including damage. *International J. of Plasticity*, 7:79–98, 1991.
- [53] J. Lemaitre. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 107:83–89, 1985.
- [54] J. Lemaitre. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, pages 31–49, 1985.
- [55] U. Lee; G. Lesieutre and L. Fang. Anisotropic damage mechanics based on strain energy equivalence and equivalent elliptical microcracks. *International J. of Solids and Structures*, 34:4377–4397, 1997.
- [56] T. Belytschko; W. Liu and B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons, New York, USA, 2000.
- [57] L. Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, USA, 1969.
- [58] P. Nagdhi. A critical review of the state of finite plasticity. *Journal of Applied Mechanics and Physics*, 41:315–394, 1990.
- [59] J. Nagtegaal and J. Jong. Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis. *International J. for Numerical Methods in Engineering*, 17:15–41, 1981.
- [60] S.A. Nazarov. Damage tensor and damage measures. *Mechanics of Solids*, 36:65–73, 2001.
- [61] S. Nemat-Nasser. On finite deformation elasto-plasticity. *International J. of Solids and Structures*, 18:857–872, 1982.

- [62] J. Nemes and E. Spécíel. Use of a rate-dependent continuum damage model to describe strain-softening in laminated composites. *Computer & Structures*, 58:1083–1092, 1996.
- [63] T. Altan; S. Oh and H. Gegel. *Conformação de Metais: Fundamentos e Aplicações*. EESC-USP, São Carlos, SP, Brasil, 1999.
- [64] M. Ortiz and E. Popov. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International J. for Numerical Methods in Engineering*, 21:1561–1576, 1985.
- [65] M. Ortiz and J. Simo. An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International J. for Numerical Methods in Engineering*, 23:353–366, 1986.
- [66] W. Chien; J. Pan and S. Tang. Modified anisotropic gurson yield criterion for porous ductile sheet metals. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 123:409–416, 2001.
- [67] T. Pardoen and J. Hutchinson. An extended model for void growth and coalescence. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48:2467–2512, 2000.
- [68] W. Prager. *Introduction to Mechanics of Continua*. Ginn and Co., Boston, USA, 1961.
- [69] S. Proença and J. Pituba. A damage constitutive model accounting for induced anisotropy and bimodular elastic response. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 1:101–117, 2003.
- [70] M. Brunig; S. Ricci and H. Obrecht. Nonlocal large deformation and localization behavior of metals. *Computer & Structures*, 79:2063–2074, 2001.
- [71] G. Rousselier. Dissipation in porous metal plasticity and ductile fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49:1727–1746, 2001.
- [72] K. Santaoja. Thermodynamics of solid materials with application to the gurson-tervergaard material model. Technical report, Technical Research Centre of Finland, Finland, 1997.

- [73] J. Simo. A framework fo finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part i. continuum formula-
tion. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 66:199–219,
1988.
- [74] J. Simo. A framework fo finite strain elastoplasticity based on maximum plas-
tic dissipation and the multiplicative decomposition. part ii: Computational
aspects. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 68:1–31,
1988.
- [75] J. Simo and M. Ortiz. A unified approach to finite deformation elastoplastic
analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Computer
Method in Applied Mechanics and Engineering*, 49:221–245, 1985.
- [76] J. Simo and K. Pister. Remarks on rate constitutive equations for finite defor-
mation problems: Computational implications. *Computer Method in Applied
Mechanics and Engineering*, 46:201–215, 1984.
- [77] J. Simo and R. Taylor. Consistent tangent operators for rate-independent
elastoplasticity. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*,
pages 101–118, 1985.
- [78] L. Zhao; R. Sowerby and M. Sklad. A theoretical and experimental investigation
of limit strains in sheet metal forming. *International J. of Mechanical Sci.*,
38:1307–1317, 1996.
- [79] W. Lee; E. Tai and C. Tang. Damage evolution and forming limit predictions
of an al2024-t3 aluminium alloy. *Journal of Materials Processing Technology*,
pages 100–104, 1997.
- [80] C. Truesdell. *Six Lectures on Modern Natural Philosophy*. Springer-Verlag, New
York, USA, 1966.
- [81] C. Truesdell. *Termodinámica Racional*. Reverté, Barcelona, España, 1973.
- [82] C. Truesdell and W. Noll. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*.
Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1965.
- [83] G. Voyiadjis and B. Deliktas. A coupled anisotropic damage model for the in-
elastic response of composite materials. *Computer Method in Applied Mechanics
and Engineering*, pages 159–199, 2000.

- [84] G. Voyiadjis and P. Kattan. A plasticity-damage theory for large deformation of solids-i. theoretical formulation. *International J. of Engineering Science*, 30:1089–1108, 1992.
- [85] G. Voyiadjis and T. Park. The kinematics of damage for finite-strain elastoplastic solids. *International J. of Engineering Science*, 37:803–830, 1999.
- [86] G. Voyiadjis and A. Zolochovsky. Thermodynamic modeling of creep damage in materials with different properties in tension and compression. *International J. of Solids and Structures*, 37:3281–3303, 2000.
- [87] C. Wang and C. Truesdell. *Introduction to Rational Elasticity*. Noordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands, 1973.
- [88] K. Williams and R. Vaziri. Application of a damage mechanics model for predicting the impact response of composite materials. *Computer & Structures*, 79:997–1011, 2001.
- [89] O. Bruhns; H. Xiao and A. Meyers. A self-consistent eulerian rate type model for finite deformation elastoplasticity with isotropic damage. *International J. of Solids and Structures*, 38:657–683, 2001.
- [90] C. Chow; X. Yang and E. Chu. Viscoplastic constitutive modeling of anisotropic damage under nonproportional loading. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 123:403–408, 2001.
- [91] G. Zhong-Heng. A note on the decomposition of elastoplastic finite deformations. *International J. of Solids and Structures*, pages 925–927, 1981.
- [92] Y. Zhu and S Cescotto. A fully coupled elasto-visco-plastic damage theory for anisotropic materials. *International J. of Solids and Structures*, 32:1607–1641, 1995.
- [93] Z. Zimniak. Application of a system for sheet metal forming design. *Journal of Materials Processing Technology*, pages 159–162, 2000.
- [94] Z. Zimniak. Problems of multi-step forming sheet metal process design. *Journal of Materials Processing Technology*, pages 152–158, 2000.