

GERALDO MAGELA BARBOSA

**ESTUDO ANALÍTICO DO PROCESSO DE DOBRAMENTO
DE CHAPAS METÁLICAS**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

Orientador:
Prof. Dr. João Batista de Aguiar

São Paulo

1999

“O adivinho tenta prever o futuro; o
sábio tenta controlá-lo”.

Russell Ackoff

Aos meus pais

JOAQUIM E ANA CLARA

pelo constante incentivo desde o início da
minha existência.

AGRADECIMENTOS

- A Deus, em primeiro lugar, fonte da vida e da sabedoria.
- Ao Prof. Dr. João Batista de Aguiar, meus sinceros agradecimentos, pela paciência, compreensão e incentivo durante o desenvolvimento desse trabalho, e principalmente pela amizade e dedicação que me foram dispensadas.
- Ao Prof. Dr. Valter Francisco Arruda Alves, orientador inicial, pelo apoio durante sua orientação.
- Aos Profs. Dr. Edison Gonçalves e Fernando Antônio da Costa Nery, pelas importantes discussões durante todo o mestrado.
- Aos Profs. Dr. Edson Gomes e Gilmar Ferreira Batalha pelas preciosas observações para a finalização deste trabalho.
- Pela paciência e eficiente trabalho de digitação da Srta. Akemi.
- A todos aqueles, cujos nomes não constam destas páginas e que, de uma forma ou de outra, colaboraram com este trabalho, a minha gratidão.

ESTUDO ANALÍTICO DO PROCESSO DE DOBRAMENTO DE CHAPAS METÁLICAS

ERRATA

PÁGINA	LINHA	ONDE SE LÊ / VÊ	LEIA-SE / ENTENDA-SE
ABSTRACT	1	"...has studied analytical... of bending..."	"...studied the analytical... of the bending..."
ABSTRACT	3	"...distribution of residual stresses..."	"...distribution of internal and residual stresses..."
3	FIG. 1.1.	T : Forças de Tração C : Forças de Compressão	T : Fibras Tracionadas C : Fibras Comprimidas
6	17	"...não contemplam atrito..."	"...não contemplam atrito, forças de cisalhamento e estiramento..."
14	10	"...trabalhabilidade..."	"...conformabilidade..."
14	19	"...entre os "produtos laminados planos de aço-carbono" - P-TB-20 de 1968..."	"...entre os Produtos Planos Laminados de Aço Número ABNT: TB00020 Número NBR: NBR05903, como sendo..."
15	2	"...CHIAVERINI [18]."	"...CHIAVERINI [18] ou $\frac{b}{t} \geq 10$."
20	10	"Nota-se que os gráficos... são descontínuos para o escoamento do material."	"Nota-se na FIG. 2.3. que os gráficos de tensão e deformação segundo a Lei de Hooke e pela Expressão de Potência são descontínuos com relação à inclinação, derivada da tensão versus deformação."
23	12	"...materiais de Von Mises moderados..."	"...materiais de Von Mises modelados..."
26	4	$M = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x y b d_y$	$M = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x y b d_y$
32	3	"...devido a ductilidade do material."	"...devido a resiliência do material."
37	FIG. 3.1.	Curva inferior, cor vermelha, Liga de Alumínio AA 6061-O Curva média, cor verde, Aço SAE 1006-1008 Curva superior, cor azul, Aço SAE 1045	Curva inferior, liga de alumínio AA 6061-O Curva média, aço SAE 1006-1008 Curva superior, aço SAE 1045
38	FIG. 3.2.	Curva inferior, cor vermelha, K = 487 MPa Curva média, cor verde, K = 541 MPa Curva superior, cor azul, K = 595 MPa	Curva inferior, K = 487 MPa Curva média, K = 541 MPa Curva superior, K = 595 MPa
39	FIG. 3.3.	Curva inferior, cor vermelha, n = 0,277 Curva média, cor verde, n = 0,252 Curva superior, cor azul, n = 0,227	Curva inferior, n = 0,277 Curva média, n = 0,252 Curva superior, n = 0,227
40	FIG. 3.4.	Curva inferior, cor vermelha, t = 0,0015 m Curva média, cor verde, t = 0,0030 m Curva superior, cor azul, t = 0,0045 m	Curva inferior, t = 0,0015 m Curva média, t = 0,0030 m Curva superior, t = 0,0045 m
42	FIG. 3.5.	Curva interna, cor verde, Liga de alumínio AA 6061-O Curva intermediária, cor azul, Aço SAE 1006-1008 Curva externa, cor vermelha, Aço SAE 1045	Curva interna, liga de alumínio AA 6061-O Curva intermediária, aço SAE 1006-1008 Curva externa, aço SAE 1045

PÁGINA	LINHA	ONDE SE LÊ / VÊ	LEIA-SE / ENTENDA-SE
44	FIG. 3.6.	Curva interna, cor verde, Liga de alumínio AA 6061-O Curva intermediária, cor azul, Aço SAE 1006-1008 Curva externa, cor vermelha, Aço SAE 1045	Curva interna, liga de alumínio AA 6061-O Curva intermediária, aço SAE 1006-1008 Curva externa, aço SAE 1045
55	5	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_e}{\frac{1}{r_c}}$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_e}{\frac{1}{r_e}}$
61	1	“A área do triângulo BCK _b (A _e)...”	“A área do triângulo BCK _b (A _e)...”
61	2	$A_e = \frac{M_b \cdot (K_b - K_c)}{2}$	$A_e = \frac{M_b \cdot (\kappa_b - \kappa_c)}{2}$
64	FIG. 5.1.	Curva inferior, cor azul, Linear / Não Linear Curva superior, cor vermelha, Não Linear / Não Linear	Curva inferior, Linear / Não Linear Curva superior, Não Linear / Não Linear
66	FIG. 5.2.	Aço SAE 1006-1008 Curva superposta, cor vermelha, Tensões Internas Linear / Não Linear Curva superposta, cor azul, Tensões Internas Não Linear / Não Linear	aço SAE 1006-1008 r = 135 mm Curva superposta, Tensões Internas Linear / Não Linear Curva superposta, Tensões Internas Não Linear / Não Linear
67	9	“...o erro entre os dois modelos é da ordem média 10%... para o aço SAE 1006-1008.”	“...o erro entre os dois modelos é da ordem média de 10% variando entre 0 e um valor de pico de 18,5% (erro de discretização) para o aço SAE 1006-1008.”
68	FIG. 5.3.	Curva com máxima tensão > 100 MPa, cor vermelha, Tensões Residuais por Difração de Raio-X Curva com máxima tensão < 100 MPa, cor azul, Tensões Residuais Analíticas	Curva com máxima tensão > 100 MPa, Tensões Residuais por Difração de Raio-X Curva com máxima tensão < 100 MPa, Tensões Residuais Analíticas
70	FIG. 5.4.	Curva inferior, para $\kappa = 1$, cor azul, Aço SAE 1006-1008 Curva superior, para $\kappa = 1$, cor vermelha, Liga de Alumínio AA 6061-O	Curva inferior, para $\kappa = 1$, aço SAE 1006-1008 Curva superior, para $\kappa = 1$, liga de alumínio AA 6061-O
VIII	5	$\therefore \varepsilon_1^{p^2} + \varepsilon_2^{p^2} + \varepsilon_3^{p^2} = \frac{\varepsilon_p^2}{S^2}$	$\therefore \varepsilon_1^{p^2} + \varepsilon_2^{p^2} + \varepsilon_3^{p^2} = \frac{\bar{\varepsilon}_p^2}{\sigma^2}$
VIII	9	$\frac{\frac{2}{3}(\varepsilon_1^{p^2} + \varepsilon_2^{p^2} + \varepsilon_3^{p^2})}{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{\varepsilon_p^2}{\sigma^2}$	$\frac{\frac{2}{3}(\varepsilon_1^{p^2} + \varepsilon_2^{p^2} + \varepsilon_3^{p^2})}{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{\bar{\varepsilon}_p^2}{\sigma^2}$

SUMÁRIO

Dedicatória	
Agradecimentos	
Sumário	
Lista de figuras	
Lista de tabelas	
Lista de símbolos	
Resumo	
Abstract	
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivo	1
1.2 Justificativa	6
1.3 Revisão bibliográfica	9
2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS DO PROCESSO DE DOBRAMENTO	13
2.1 Geometria de dobramento	14
2.2 Modelo constitutivo	19
2.2.1 Relação constitutiva: elasticidade	21
2.2.2 Relação constitutiva: plasticidade	23
2.3 Momento de dobramento	26
2.3.1 Região elástica	26
2.3.2 Região elasto-plástica	27
2.4 Distribuição de tensões internas na flexão	31
2.5 Recuperação elástica	32
3 RESULTADOS E DISCUSSÕES	35
4 APLICAÇÃO: DOBRAMENTO ENTRE ROLOS	45
4.1 Raio de dobramento após a recuperação elástica	45
4.1.1 Algoritmo do Método da Dicotomia	51
4.2 Cálculo do momento em B	54
4.3 Cálculo do torque (Q)	59
5 COMPARAÇÕES E CONCLUSÕES	63
6 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	73
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	74
Apêndice A	
Apêndice B	

LISTA DE FIGURAS

FIG.		pág.
1.1.	Detalhe geométrico de uma peça submetida a dobramento	3
2.1.	Representação do dobramento de chapas metálicas	15
2.2.	Representação de um elemento deformado no dobramento	18
2.3.	Análise do Ponto de Intersecção dos gráficos segundo a Lei de Hooke e pela Expressão de Potência	19
2.4.	Variáveis utilizadas na integração do momento de dobramento	27
2.5.	Representação de um elemento deformado após a recuperação elástica	33
3.1.	Evolução do momento de dobramento pela curvatura	37
3.2.	Influência do coeficiente de resistência no momento de dobramento	38
3.3.	Influência do grau de encruamento no momento de dobramento	39
3.4.	Influência da espessura da chapa no momento de dobramento	40
3.5.	Distribuição de tensões na posição vertical durante o dobramento para diferentes materiais	42
3.6.	Tensões residuais versus posição vertical, pós-conformação por dobramento para três materiais distintos	44
4.1.	Representação do dobramento entre rolos	54
4.2.	Diagrama do momento usado para cálculo da área AEBC	59
5.1.	Comparação entre momentos de dobramento na região elasto-plástica obtidos a partir de duas teorias	64
5.2.	Comparação entre tensões internas na flexão previstas por teorias diferentes	66
5.3.	Comparação entre tensões residuais obtidas analiticamente com valores medidos experimentalmente	68
5.4.	Recuperação elástica medida em termos de curvatura versus curvatura máxima	70

LISTA DE TABELAS

TAB.		pág.
4.1.	Solução pelo Método da Dicotomia para obter o raio de dobramento r_b ...	53
4.2.	Solução pelo Método da Dicotomia para obter o raio usado no cálculo do momento máximo M_b	57

LISTA DE SÍMBOLOS

A	- área
b	- largura da chapa
E	- módulo de elasticidade
K	- coeficiente de resistência
M	- momento resultante por unidade de largura
n	- expoente de encruamento
r	- raio de dobramento
t	- espessura
x, y, z	- coordenadas na direção axial, transversal e perpendicular ao plano de dobramento, respectivamente
ε	- deformação
ν	- coeficiente de Poisson
σ	- tensão
α	- ângulo de dobramento
$\frac{1}{r}$	- curvatura
R	- raio do rolo central (dobramento entre rolos)
Q	- torque
λ	- fator de correção

Sobrescrito

- equivalente (deformação e tensão)
- e elasticidade
- p plasticidade
- ' depois da recuperação elástica
- * específico (interface elástico - plástico)

Subscrito

- b posição B (diagrama)
- c posição C (diagrama)
- e posição E (diagrama)
- h hachura
- t total

RESUMO

No presente trabalho foi estudado a solução analítica do processo de dobramento de chapas metálicas, formulando o problema de dobramento entre rolos. Na formulação do problema é mostrado que o momento de dobramento, as tensões internas, a distribuição das tensões residuais e a recuperação elástica podem ser expressos em função de parâmetros geométricos (raio de dobramento e espessura) e propriedades do material (módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, coeficiente de resistência, expoente de encruamento). Na solução numérica do modelo de dobramento entre rolos para o cálculo do raio e do torque no rolo central de dobramento foi utilizado o Método da Dicotomia. Através da comparação dos resultados teóricos entre duas teorias e a comparação entre resultados teóricos e experimentais avaliou-se a acuidade do modelo teórico.

ABSTRACT

The present work has studied analytical solution of bending process of sheet metals, formulating the problem of three-roll bending. In the problem formulation, it has been shown that bending moment, distribution of residual stresses and springback can be expressed as a function of geometric parameters (radius of bend and thickness) and material properties (Young modulus, Poisson's ratio, resistance coefficient, work-hardening index). In the numerical solution of three-roll bending model, the Dichotomy's Method has been used for the calculation of radius and torque in the central bending roll. The accuracy of the theoretical model has been evaluated through the comparison of two theoretical results and the comparison of theoretical and experimental results.

1. INTRODUÇÃO

1.1 OBJETIVO

A capacidade de fabricação de perfis variados a partir de chapas finas de metal, com altas taxas de produção, constitui um dos grandes avanços tecnológicos do século vinte. Esta transição das operações manuais de conformação para os métodos de produção em massa foi um fator importante para a grande melhoria dos padrões de vida que se observou durante este período.

Hoje em dia as indústrias que se utilizam de alguma forma de dobramento como etapa de produção, são componentes da máxima importância na economia dos países industrializados, em particular no que tange à indústria automobilística.

A popularidade de produtos estampados é atribuída à sua leveza, bom acabamento superficial e baixo custo de fabricação.

Desde que observados os limites de conformabilidade do material, a fratura ou dano de algumas propriedades mecânicas do material não ocorre no dobramento simples de chapas metálicas ou mesmo em operações mais complexas.

O processo de conformação de chapas metálicas por dobramento envolve, em geral, localização de dobras, estrição e diminuição de espessura. Normalmente é objetivo deste processo de fabricação, criar condições para que efeitos indesejáveis não se manifestem no produto. Fisicamente a dificuldade de deformação de uma chapa metálica é expressa por variáveis qualitativas do material e quantitativas do

equipamento. A forma dobrada de uma chapa metálica depende de fatores como o ferramental, condições da superfície da chapa metálica, lubrificação e velocidade de deformação - TOH [1].

Qualitativamente, o dobramento é um processo mecânico de conformação plástica a frio, com força máxima, e portanto tensões máximas, no seu início, ponto em que é possível a ocorrência de enrugamento de aba, fissuramento da lateral em formação - BRESCIANI FILHO et al [2], além de distorções que dificilmente ocorrem nos estágios finais da operação, já que nesse momento as forças de conformação diminuíram consideravelmente.

A partir de uma chapa plana de metal pode-se obter, através de técnicas de dobramento, variados perfis. Entre as opções tecnológicas disponíveis incluem-se o dobramento em V, dobramento em U, dobramento em L, por prensa de cortina, ou prensa viradeira, dobramento entre rolos, também conhecido como calandragem, ou o dobramento em perfiladora. A utilização de cada uma destas técnicas depende do ferramental disponível e especificidades do produto em questão - GRÜNING [3].

O esforço aplicado a uma chapa plana de metal durante um processo de dobramento muda a forma da mesma, gerando uma forma deformada em estado elasto-plástico, onde estão presentes deformações permanentes, plásticas, e deformações elásticas. Após a retirada do esforço de conformação ocorre o efeito de mola, que é a recuperação elástica, que faz com que o material dobrado tenha a sua geometria alterada, resultando a partir daí a presença de tensões residuais na geometria final da chapa dobrada. O controle da geometria final do produto dobrado constitui problema importante a ser superado na aplicação industrial desta forma de produção.

De modo geral no processo de dobramento de uma tira de chapa, esforços são aplicados em duas direções opostas para provocar a flexão e a deformação plástica conseqüente, mudando a forma de uma superfície plana para duas superfícies concorrentes, em ângulo, e formando, na junção, um raio de concordância, FIG. 1.1.

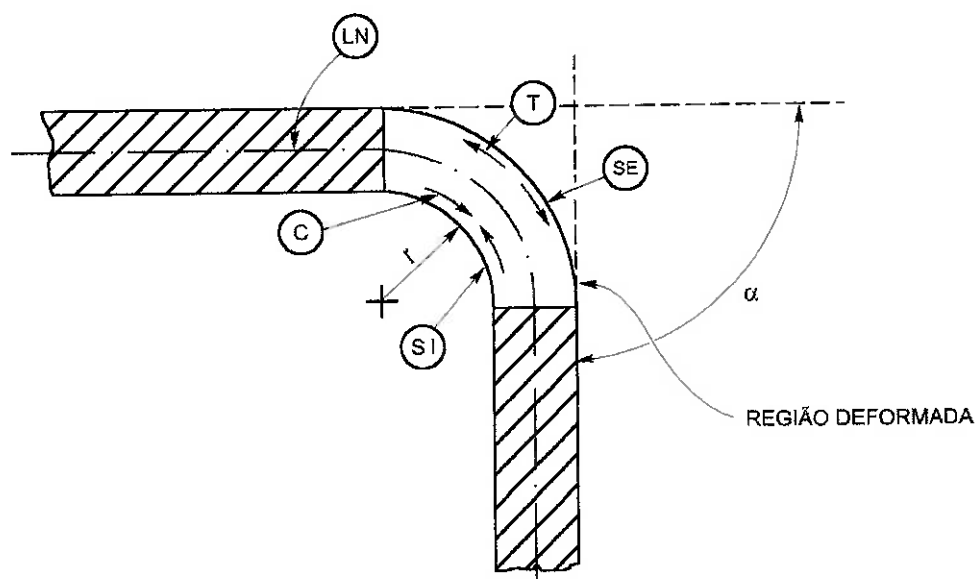


FIG. 1.1. Detalhe geométrico de uma peça submetida a dobramento, conf. ref. BRESCIANI FILHO et al [2]

- LN : Linha Neutra
- SI : Superfície Interna
- SE : Superfície Externa
- r : Raio de Concordância
- T : Forças de Tração
- C : Forças de Compressão
- α : Ângulo de Dobramento

Os esforços de conformação se concentram na região de concordância das duas superfícies. Na parte interna da região de concordância, surgem esforços de compressão e, na externa, de tração. A eventual fratura da peça ocorre na parte externa e o possível enrugamento na parte interna.

Como na parte externa atua uma força num sentido (de tração) e na interna noutro (de compressão), existe um ponto, ao longo de uma linha perpendicular à chapa, portanto, na direção do raio, em que as tensões são nulas. Este ponto é denominado ponto neutro. A linha de união de todos os pontos neutros ao longo da chapa, num corte feito pelo plano transversal, que contenha as forças e o raio de dobramento, é denominada linha neutra. O comprimento da linha neutra, antes e após o dobramento, é admitido permanecer o mesmo. As linhas correspondentes aos cortes, entre as superfícies externa e interna e o plano transversal, não mantêm o mesmo comprimento inicial: a linha correspondente à superfície externa tem seu comprimento aumentado após o dobramento e a correspondente à superfície interna diminuído. A linha neutra é utilizada como referência — pois o seu comprimento não varia na conformação —, para a verificação do desenvolvimento da peça conformada, ou seja, para a determinação das dimensões do esboço inicial que atingem, após conformado, as dimensões da peça considerada. Antes da conformação, a posição da linha neutra coincide com a linha de simetria, que divide a espessura da chapa em duas partes iguais. Após a conformação, no entanto, a linha neutra se desloca em direção à superfície interna.

A deformação plástica que surge na região do dobramento causa aí uma redução de espessura da chapa, devido à ação das tensões de tração; as tensões de compressão, por outro lado, tendem a aumentar a largura da chapa. Como a largura é muito maior que a espessura, o efeito de deformação plástica é desprezível nesse sentido, concentrando-se quase que somente ao longo da espessura, e causando pequenas distorções na secção transversal da chapa.

A possibilidade do fissuramento na superfície externa existe se as tensões nessa região ultrapassarem o limite de resistência à tração do material da chapa; na parte

interna existe a possibilidade de surgimento de enrugamentos devido à ação dos esforços de compressão principalmente para as chapas de espessuras menores. Obtém-se menores níveis de deformação plástica no dobramento da chapa quando se tem: maior raio de dobramento, menor espessura de chapa e menor ângulo de dobramento.

O ângulo de dobramento tem que ser maior na operação de conformação do que o determinado para a peça conformada, em virtude da recuperação de deformação elástica, que é tanto maior quanto maior for o limite de escoamento do material da chapa, quanto menor for o raio de dobramento, quanto maior for o ângulo de dobramento e quanto mais espessa for a chapa. O método usual de compensar a recuperação elástica, durante as operações de conformação, é a aplicação de uma intensidade de dobramento maior, ou seja, a adoção de um ângulo de dobramento maior - BRESCIANI FILHO et al [2].

Consideradas as informações acima com relação ao processo de dobramento de chapas metálicas, e dada a complexidade do mesmo, fica evidente que: tentar analisar o problema incluindo todas as variáveis que nele intervém, é uma tarefa complexa, e em geral não bem sucedidas atualmente. Nesse sentido, alguns pesquisadores [4] a [17] vêm incorporando simplificações, para modelagem do processo de dobramento. Este trabalho portanto objetiva relacionar algumas dessas soluções, estudando-as, e procurando obter delas entendimento do estudo analítico do processo de dobramento de chapas metálicas.

1.2 JUSTIFICATIVA

O entendimento do processo de dobramento de chapas metálicas conformadas a frio, como mencionado acima, é bastante importante para a fabricação de uma série de produtos que dependem de dobramento no seu processamento. Esse fator por si só justificaria a dedicação de tempo e recursos de pesquisa. Além disso, existem as necessidades tecnológicas da indústria inseridas no processo.

Entre as características importantes analisáveis incluem-se :

- Determinação da recuperação elástica após a liberação da força aplicada.
- Determinação das máximas deformações e tensões no processo analiticamente, além de deformações e tensões residuais.

O processo de dobramento vem sendo estudado em vários países tanto analítica como numericamente para se ter com precisão o valor exato da recuperação elástica do metal dobrado, conferindo assim maior precisão às peças dobradas.

O processo de dobramento de metais tem sido estudado sob diferentes enfoques considerando as diversas variáveis que intervêm no processo. Formulações diversas tem sido propostas, com grau de dificuldade variável. Do ponto de vista analítico, a solução mais tratável, se bem que dificilmente encontrada na prática, se refere à flexão pura. As condições ideais consideradas nessa análise não contemplam atrito, além de problemas de contato, com compressão de superfícies no ferramental de processo. Soluções baseadas nessa condição ideal tem a vantagem, no entanto, de incluir os principais fatores que intervêm no processo e portanto reside aí a importância das mesmas.

Dessa forma, neste estudo, primeiramente analisaremos o processo considerando soluções analíticas, incorporados efeitos diversos, como encruamento do material, e resistência ao escoamento num modelo material pela Lei Hooke e por uma Expressão de Potência, e consideradas deformações que não gerem danos à peça sendo dobrada.

Na solução analítica determina-se, para cada geometria prescrita, o momento total de dobramento, somando-se uma componente relativa às deformações elásticas a outra relativa às componentes plásticas de deformação. Retirado o esforço de conformação, recuperação elástica da chapa ocorre, com mudança de geometria do produto conformado, e desaparecimento das tensões elásticas, restando portanto somente tensões residuais. O perfil destas tensões residuais é gerado e analisado sob diversas facetas neste trabalho.

Determinação da evolução da força de dobramento durante o percurso de conformação, para quaisquer das técnicas mencionadas acima, é bastante difícil de ser considerada analiticamente, a menos que se considerem condições de dobramento livre.

No caso específico de dobramento em calandra, no entanto, várias das simplificações mencionadas acima são válidas e portanto consideraremos o cálculo de forças nesta aplicação.

O objetivo deste trabalho é estudar a modelagem do processo de dobramento de chapas finas de metal com espessura $t = 3$ mm, largura unitária e conformadas por dobramento entre rolos.

Os materiais utilizados na modelagem serão o aço SAE 1006-1008 (SS1147 - Suécia) aço SAE 1045 (laminado a quente) e a liga de alumínio AA 6061-O.

O dobramento será feito a frio e os materiais utilizados serão considerados isotrópicos com encruamento e homogêneos.

Na modelagem será utilizada a teoria linear / não linear. Na Relação Constitutiva: elasticidade será levada em consideração a Lei de Hooke. Na Relação Constitutiva: plasticidade será levada em consideração uma Expressão de Potência.

No cômputo do momento total serão levados em conta as Relações Constitutivas Elasticidade / Plasticidade para o cálculo da integral variando de $-\frac{t}{2}$ até $\frac{t}{2}$ na espessura da chapa.

Para os valores de tensões internas e tensões residuais, será calculado mediante um raio final de dobramento $r_f = 135$ mm e variando a posição y na espessura da chapa fina.

Finalmente, será feita uma comparação entre duas teorias: linear / não linear (desenvolvida neste trabalho) e outra não linear / não linear, além da comparação da teoria linear / não linear com resultados experimentais desenvolvidos por outros autores.

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

[1] TOH, Chin Hoi.

Análise numérica por elementos finitos do dobramento de chapas metálicas.

Na formulação matemática considerou: a espessura da chapa é muito menor que o raio de dobramento, a chapa metálica é considerada rígido-plástico obedecendo ao critério de anisotropia de Hill.

[2] BRESCIANI FILHO, Ettore; ZAVAGLIA, Cecília A. C.; BUTTON, Sérgio T.; GOMES, Edson; NERY, Fernando A. C.

Análise da conformação plástica dos metais, incluindo a Teoria das Tensões e Deformações em Corpos Sólidos, Teoria da Plasticidade, Método de Análise dos Processos de Conformação e a Mecânica da Estampagem (Dobramento de Chapas e Estampagem Profunda).

[3] GRÜNING, Klaus.

Fórmulas aproximadas da força aplicada no dobramento, os processos de dobramento (Dobramento Livre em V, Dobramento em L, Prensa de Cortina, Prensa Viradeira e Dobramento entre Rolos).

[4] TAN, Z.; LI, W. B.; PERSSON, B.

Na modelagem do processo de dobramento de chapas metálicas o momento de dobramento, tensões internas, tensões residuais e recuperação elástica podem ser expressos em função dos parâmetros geométricos e propriedades do material.

- [5] TAN, Z.; PERSSON, B. MAGNUSSON, C.

Na modelagem do processo de dobramento de chapas metálicas serão considerados materiais anisotrópicos (propriedades mecânicas diferentes em diferentes direções) onde dará grandes efeitos no cálculo do momento de dobramento.

- [6] QUEENER, C. A.; DE ANGELIS, R. J.

Determinação das Tensões Residuais e Recuperação Elástica para dobramento com curvatura constante, onde os resultados experimentais são mostrados.

- [7] NADAI, A.

Dobramento de chapas considerando a Lei de Hooke e encruamento do material na plasticidade.

- [8] MARIN, J.

Analisar a Teoria da Tensão e Deformação Plástica, considerando que as direções das deformações principais coincidem com as direções das tensões principais, o volume é constante, e a razão entre as três deformações principais e as tensões principais são equivalentes.

- [9] MARCINIAK, Z; DUNCAN, J. L.

Solução para materiais elasto-plástico, deformações planas, sem considerar alterações de posição da Linha Neutra.

- [10] ALEXANDER, J. M.

Analisar a solução do problema de dobramento de um material, sobre as condições de deformação plana.

[11] DENTON, A. A.

Analisar a Tensão (σ_x) e a Deformação (ϵ_x), através da função $(\sigma_x) = f(\epsilon_x)$ considerando encruamento no dobramento. Solução numérica é aplicada para dobramento do material de cobre.

[12] GARDINER, F. J.

Determinação da recuperação elástica dos metais titânio, ligas de alumínio, bronze e níquel. Comparação com resultados experimentais.

[13] EL-DOMIATY, A. A.; SHABARA, M. A. N.; AL-ANSARY, M. D.

Modelo matemático do processo de dobramento de chapas metálicas com estiramento, determinando o efeito das propriedades do material, parâmetros geométricos, recuperação elástica e tensões residuais. Valores de coeficiente de resistência e expoente de encruamento foram apreciados.

[14] SIDEBOTTOM, O. M.; GEBHARDT, C. F.

Solução de um modelo analítico de dobramento para material isotrópico considerando estado plano de deformações. Resultados experimentais foram apreciados, confirmado o estudo analítico.

[15] HILL, R.

Analisar o Critério de Escoamento de Hill para materiais anisotrópicos considerando os parâmetros: F, G, H, L, M, N das características do material no estado anisotrópico.

[16] LUBAHN, J.; SACHS, G.

Analisar as condições limites no estado plano de tensão e no estado plano de deformação para um hipotético metal através de soluções gráficas aproximadas.

[17] DIETER, George E.

•
Fundamentos da mecânica, relacionando tensão e deformação, fundamentos de metalurgia explicando fenômenos de encruamento, ensaios de materiais (tração, força e dureza) e a conformação plástica dos metais (dobramento).

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DO PROCESSO DE DOBRAMENTO

Chapas metálicas podem ser dobradas por um número diferente de técnicas — conformação, dobramento em V ou U, flexão. Muitos materiais podem ser dobrados com raios maiores ou menores dependendo da ductilidade do material. O ângulo de dobramento pode ser estabelecido pelo ângulo da ferramenta, mas todas as peças dobradas exibem recuperação elástica e isto depende da forma geométrica, atrito e características do material.

A importância dos metais na tecnologia moderna deve-se, em grande parte, à facilidade com que podem ser conformados em formas úteis, tais como tubos, barras e chapas finas.

Em diversos produtos as propriedades mecânicas dependem do controle do encruamento durante o processamento, enquanto em outros casos é necessário manter controle preciso de deformação, temperatura e taxa de deformação durante a operação para desenvolver características ótimas de estrutura e propriedades.

Na mecânica da conformação metálica, praticamente todas as análises consideram o material como sendo isotrópico e homogêneo, porém, na maioria dos casos, a deformação do metal entre as matrizes não é uniforme. O problema analítico principal consiste em prever de forma precisa a deformação não-uniforme e calcular as tensões locais - DIETER [17].

2.1 GEOMETRIA DE DOBRAMENTO

As chapas são materiais caracterizados geralmente pela ductilidade e pela grande facilidade de conformação. Não apresentam normalmente elevados valores para as propriedades mecânicas, mesmo porque as cargas que irão suportar em serviço são comumente baixas, em geral unicamente o próprio peso. Devido às condições de trabalho, esses produtos deveriam possuir certa resistência à corrosão atmosférica e mesmo, para determinadas aplicações, resistência ao ataque por parte de outros agentes químicos.

Os requisitos essenciais a que devem obedecer esses materiais para a maioria das aplicações são os seguintes:

- a) Elevada *trabalhabilidade*, ainda que à custa da resistência mecânica, para maior facilidade de conformação. Quando se deseja certa resistência e principalmente rigidez, adota-se o *corrugamento* da chapa.
- b) Boa *soldabilidade*, para maior facilidade de sua montagem em estruturas.
- c) *Superfície sem defeitos*, essencial no caso da sua aplicação em estampagem profunda.
- d) *Aspecto superficial* conveniente, igualmente exigido para a maioria das aplicações e obtido por acabamentos ou revestimentos superficiais especiais.
- e) *Baixo custo*.

A Associação Brasileira de Normas Técnicas define chapa fina entre os “produtos laminados planos de aço-carbono” - P-TB-20 de 1968 - “Produtos Laminados Planos de Aço-Carbono”, como sendo:

– *chapa fina* – chapa com espessura compreendida entre 0,30 mm e 6,00 mm, inclusive os extremos, e largura igual ou superior a 300 mm - CHIAVERINI [18].

A geometria a obter no dobramento depende do ferramental a ser utilizado, equipamento disponível e tipo de material a ser dobrado.

As técnicas de dobramento mais comuns são as de flexão e as de aplicação de momento nos extremos do material, conforme mostra a FIG. 2.1.

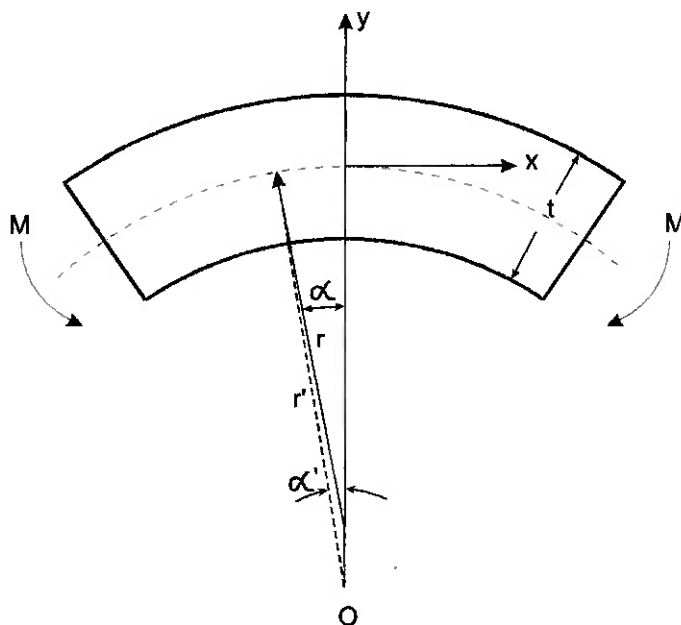


FIG. 2.1. Representação do dobramento de chapas metálicas - conf. ref. [4]

t = espessura da chapa

r = raio de dobramento

r' = raio depois da recuperação elástica

M = momento aplicado

α = ângulo de dobramento

α' = ângulo depois da recuperação elástica

Seja $\Delta \ell_0 = r \Delta \alpha$ o comprimento de um elemento na linha neutra e $\Delta \ell = (r+y) \Delta \alpha$ o comprimento de um elemento distante y da linha neutra temos -

FIG. 2.2.:

i Deformações Nominais

$$\text{Sendo } \varepsilon_0 = \frac{\Delta \ell - \Delta \ell_0}{\Delta \ell_0}$$

temos:

$$\varepsilon_0 = \frac{r \Delta \alpha - \Delta x_0}{\Delta x_0} = \frac{r \Delta \alpha}{\Delta x_0} - 1$$

ainda que um elemento distante y da Linha Neutra temos que:

$$\varepsilon_n = \frac{(r+y) \Delta \alpha - \Delta x_0}{\Delta x_0} = \frac{(r+y) \Delta \alpha}{r \Delta \alpha} - 1 = \frac{r+y}{r} - 1 = \frac{y}{r} \quad (2.1)$$

ii. Log. Deformações

temos:

$$\varepsilon_0 = \ell \ln \frac{r \Delta \alpha}{\Delta x_0}$$

e que:

$$\varepsilon = \ell \ln \frac{(r+y) \Delta \alpha}{\Delta x_0}$$

No Dobramento: Não Estiramento $\varepsilon_0 = 0$ (Não Deformação)

$$\varepsilon = \ell \ln \left[\frac{r \Delta \alpha + y \Delta \alpha}{\Delta x_0} \right] = \ell \ln \left[1 + \frac{y \Delta \alpha}{\Delta x_0} \right]$$

Considerando $\Delta x_0 = r \Delta \alpha$ temos que:

$$\varepsilon = \ell n \left[1 + \frac{y \Delta \alpha}{r \Delta \alpha} \right] = \ell n \left[1 + \frac{y}{r} \right]$$

da SÉRIE DE TAYLOR temos:

$$f = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0)^1 + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f = \ell n x$$

$$f' = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f'' = -1x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f(x) \cong f(x_0) + \frac{1}{x_0}(x - x_0) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x_0^2}(x - x_0)^2 + \dots$$

para $x_0 = 1$

$$\ell n x = f(x) \cong f(1) + (x - 1) - \frac{1}{2} \cdot (x - 1)^2 + \dots$$

sendo:

$$x - 1 = \frac{y}{r} \Rightarrow x = \frac{y}{r} + 1$$

$$\varepsilon = \ell n \left(1 + \frac{y}{r} \right) = f \left(1 + \frac{y}{r} \right) \cong \frac{y}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{r} \right)^2$$

como $\frac{y}{r} \ll 1$ temos a deformação total na elasticidade dada por:

$$\varepsilon_x^e = \ln \frac{(r+y)\Delta\alpha}{r\Delta\alpha} = \ln \left(1 + \frac{y}{r} \right) \cong \frac{y}{r} \quad (2.2)$$

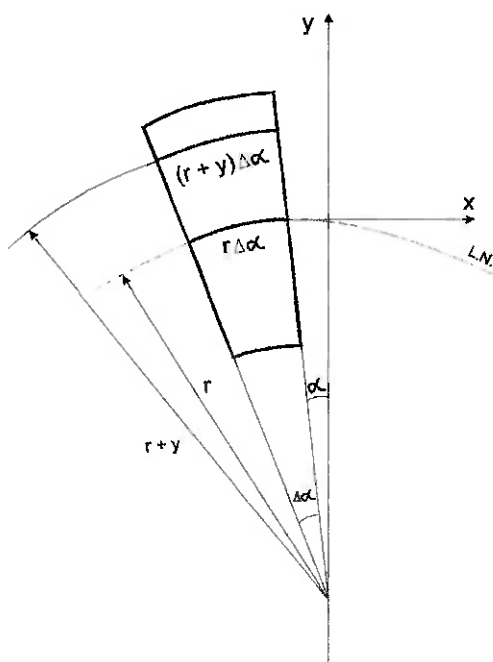


FIG. 2.2. Representação de um elemento deformado no dobramento.

- r = raio de deslocamento
- y = deslocamento da Linha Neutra
- α = ângulo de dobramento
- $\Delta\alpha$ = variação do ângulo de dobramento

2.2 MODELO CONSTITUTIVO

A curva tensão-deformação verdadeira para um metal tipicamente dúctil, como o alumínio e o aço, obedece a relação entre Tensão e Deformação uniaxial que pode ser descrita pela Lei de Hooke até uma determinada tensão σ_0 e por uma Expressão de Potência a partir da tensão σ_0 - DIETER [17] como mostra a FIG. 2.3.:

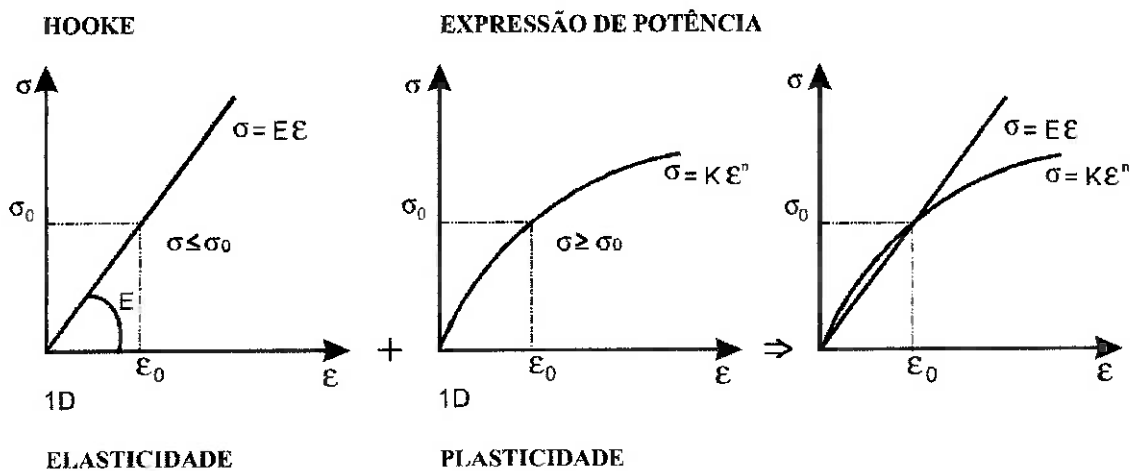


FIG. 2.3. Análise do Ponto de Intersecção dos gráficos segundo a Lei de Hooke e pela Expressão de Potência.

E = módulo de elasticidade

n = expoente de encruamento

K = coeficiente de resistência

σ_0 = tensão uniaxial na intersecção

ϵ_0 = deformação uniaxial na intersecção

Analisando o Ponto de Intersecção do gráfico temos:

$$\sigma = \begin{cases} E\epsilon & \text{se } \sigma \leq \sigma_0 \\ K\epsilon^n & \text{se } \sigma \geq \sigma_0 \end{cases}$$

Pela Expressão de Potência no Regime Plástico temos:

$$\sigma_0 = K\epsilon_0^n$$

Pela Lei de Hooke no Regime Elástico temos:

$$\sigma_0 = E\varepsilon_0$$

No Ponto de Intersecção do gráfico σ_0 , ε_0 temos:

$$E\varepsilon_0 = K\varepsilon_0^n$$

$$\frac{E}{K} = \varepsilon_0^{n-1}$$

Logo:

$$\varepsilon_0 = \left(\frac{E}{K} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Onde, segundo a Expressão de Potência temos:

$$\sigma_0 = K \cdot \varepsilon_0^n$$

Nota-se que os gráficos de tensão e deformação segundo a Lei de Hooke e pela Expressão de Potência são descontínuos para o escoamento do material.

Eliminando a descontinuidade e considerando o Ponto de Intersecção temos:

$$\sigma_0 = K \left(\frac{K}{E} \right)^{\frac{n}{1-n}} \quad (2.3)$$

2.2.1 RELAÇÃO CONSTITUTIVA: ELASTICIDADE

Na conformação por dobramento de chapas metálicas, dependendo da posição considerada no processo, por exemplo no dobramento entre rolos, cada seção passa por estados de deformação aos quais correspondem apenas tensões elásticas ou tensões elasto-plásticas. Da posição A até a posição E, FIG. 4.1, temos comportamento elástico apenas, com predominância das tensões devidas à flexão, já que as tensões de cisalhamento por força cortante são comparativamente menores. Em termos de coordenadas principais de tensões e deformações estão relacionadas pela Lei de Hooke:

$$\varepsilon_x^e = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y^e = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_z^e = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Sendo ε_x^e a deformação elástica, na direção axial, ε_y^e na direção transversal e ε_z^e na direção perpendicular ao plano de dobramento. Para condições de deformação plana, $\varepsilon_z^e = 0$, e portanto podemos reescrever as equações acima na forma:

$$\varepsilon_x^e = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} (1+\nu) \sigma_y$$

$$\varepsilon_y^e = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} (1+\nu) \sigma_x$$

(2.5)

As equações acima podem ser simplificadas ainda mais, se lembrarmos que quando as curvaturas aplicadas à chapa não são muito grandes, as tensões σ_y são praticamente nulas. Dessa forma, com $\sigma_y \sim 0$ as equações acima se reduzem a:

$$\sigma_x \cong E' \varepsilon_x^e \quad (2.6)$$

$$\sigma_z \cong \nu \sigma_x$$

sendo:

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2}$$

o módulo elástico equivalente para condições de deformação plana.

2.2.2 RELAÇÃO CONSTITUTIVA: PLASTICIDADE

Reportando-nos novamente ao processo de conformação entre rolos, passada a posição E entramos numa região em que temos em cada seção da chapa a presença de deformações elásticas, na parte mais interna, e deformações plásticas, permanentes, na parte mais externa.

Em termos de coordenadas principais, deformações plásticas e tensões estão relacionadas de acordo com:

$$\varepsilon_x^p = \frac{1}{K^n} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x \right]^{\left(\frac{1-n}{2n}\right)} \cdot \left[\sigma_x - \frac{\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_z}{2} \right]$$

$$\varepsilon_y^p = \frac{1}{K^n} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x \right]^{\left(\frac{1-n}{2n}\right)} \cdot \left[\sigma_y - \frac{\sigma_z}{2} - \frac{\sigma_x}{2} \right] \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_z^p = \frac{1}{K^n} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x \right]^{\left(\frac{1-n}{2n}\right)} \cdot \left[\sigma_z - \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_y}{2} \right]$$

que são as relações desenvolvidas nos apêndices A e B com base na teoria de deformação para materiais metálicos isotrópicos com encruamento. No desenvolvimento consideraram-se materiais de Von Mises moderados por uma relação conjunta linear / não linear, através de uma Expressão de Potência.

Considerando condições de deformação plana, ou seja, $\varepsilon_z^p = 0$, e assumindo novamente que as curvaturas aplicadas não sejam muito grandes, de forma que $\sigma_y \sim 0$ resulta em:

$$\sigma_z \sim \frac{\sigma_x}{2} \quad (2.8)$$

ou:

$$\varepsilon_x^p = \frac{1}{K^n} \bar{\sigma}^{\frac{1-n}{n}} \left[\frac{3}{4} \sigma_x \right] \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_y^p = \frac{-1}{K^n} \bar{\sigma}^{\frac{1-n}{n}} \left[\frac{3}{4} \sigma_x \right]$$

sendo:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right]} \quad (2.10)$$

ou:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x}$$

A Tensão Equivalente de Von Mises. Assim:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_x \quad (2.11)$$

Definindo a Deformação Plástica Equivalente como:

$$\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \left[\varepsilon_x^{p2} + \varepsilon_y^{p2} + \varepsilon_z^{p2} \right]} \quad (2.12)$$

e considerando a constância de volume na plasticidade:

$$\varepsilon_x^p + \varepsilon_y^p + \varepsilon_z^p = 0 \quad (2.13)$$

obtemos que:

$$\bar{\varepsilon}^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_x^p \quad (2.14)$$

Para materiais cujo comportamento na fase elasto-plástica é descrito por uma Expressão de Potência - DIETER [17]

$$\bar{\sigma} = K \bar{\varepsilon}^{p^n}$$

obtemos que:

$$\sigma_x = K \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} \varepsilon_x^{p^n} \quad (2.15)$$

2.3 MOMENTO DE DOBRAMENTO

2.3.1 REGIÃO ELÁSTICA

Na região elástica, FIG. 4.1., posições entre A e E, o momento fletor varia entre 0 e M_e , sendo M_e o momento puramente elástico máximo suportado pela chapa. De forma geral nesse intervalo o momento fletor é definido por:

$$M = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x y b dy \quad (2.16)$$

para chapas de largura b e espessura t , sob condições de deformação plana:

$$\sigma_x = E' \varepsilon_x^e \quad (2.17)$$

onde da relação (2.2) :

$$\varepsilon_x^e = \ln \frac{(r+y)\Delta\alpha}{r\Delta\alpha} \cong \frac{y}{r}$$

de forma que:

$$0 \leq M \leq M_e$$

sendo:

$$M_e = E' \frac{t^3}{12} \frac{1}{r_e} \quad (2.18)$$

com r_e o raio de dobramento na posição E.

2.3.2 REGIÃO ELASTO-PLÁSTICA

A partir da posição **E** começamos a ter uma região da seção com tensões elásticas, posições entre **0** e y^* , FIG. 2.4., seguida de outra região no estado elasto-plástico, posições entre y^* e $\frac{t}{2}$. A posição de transição y^* é tal que:

$$y^* = r \varepsilon_x^* \quad (2.19)$$

onde ε_x^* obedece a relação (2.3):

$$\varepsilon_x^* = \frac{1-\nu^2}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \left[\frac{K}{E} \right]^{\frac{1}{1-n}} \quad (2.20)$$

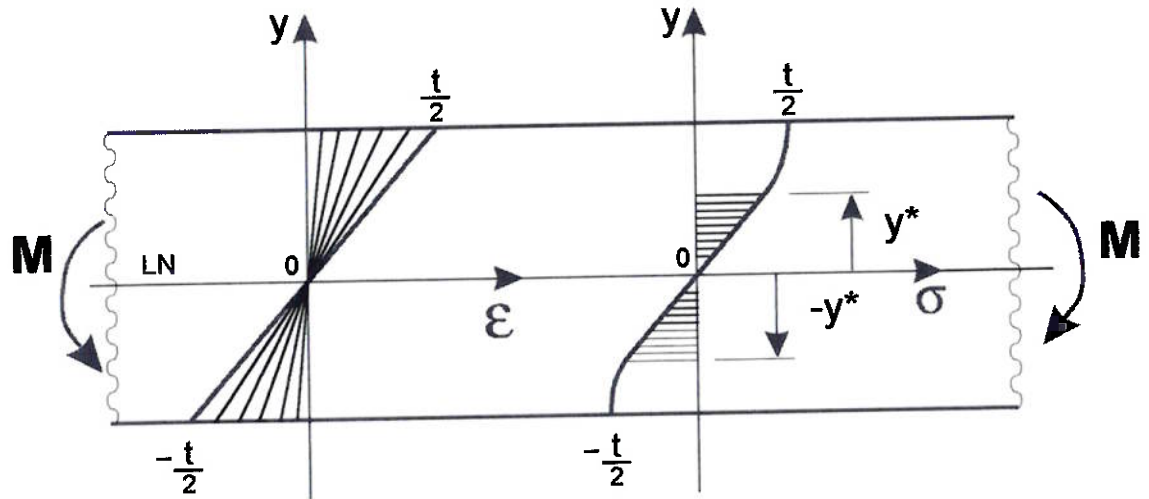


FIG. 2.4 - Variáveis utilizadas na integração do momento de dobramento.

t = espessura y^* = distância da Linha Neutra até a região elástica
 ε = deformação σ = tensão
M = momento

onde y^* é descrito como:

$$y^* = r \cdot \frac{1-v^2}{\sqrt{1-v+v^2}} \cdot \left[\frac{K}{E} \right]^{\frac{1}{1-n}} \quad (2.21)$$

Calculando o Momento Total temos:

$$M = M^e + M^p$$

Integrando o Momento para largura unitária, temos :

$$M = 2 \int_0^{+y^*} \sigma_x^e y dy + 2 \int_{+y^*}^{\frac{t}{2}} \sigma_x^p y dy$$

sendo:

$$\sigma_x^e = \frac{E}{1-v^2} \cdot \frac{y}{r}$$

$$\sigma_x^p = K \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} \left(\frac{y}{r} \right)^n$$

Integrando da linha neutra até y^* (região elástica) e de y^* até $\frac{t}{2}$ (região elasto-plástica)

temos:

$$M = 2 \int_0^{y^*} \frac{E}{1-v^2} \cdot \frac{1}{r} y^2 dy + 2 \int_{y^*}^{\frac{t}{2}} K \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} \frac{1}{r^n} y^{n+1} dy$$

$$M = 2 \cdot \frac{E}{1-v^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^{y^*} + 2K \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} \cdot \frac{1}{r^n} \frac{y^{n+2}}{n+2} \Big|_{y^*}^{\frac{t}{2}}$$

$$M = 2 \left\{ \frac{E}{1-v^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{y^{*3}}{3} + K \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{n+2} \right) \frac{1}{r^n} \left[\left(\frac{t}{2} \right)^{n+2} - y^{*n+2} \right] \right\}$$

$$M = 2 \frac{K}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2}}{(n+2)r^n} + 2 \frac{E}{1-v^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{y^{*3}}{3} - 2 \frac{K}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{(n+2)r^n} \cdot y^{*n+2}$$

onde segundo a equação (2.21), temos:

$$y^* = r \varepsilon_x^* = r \left(\frac{K}{E}\right)^{\frac{1}{1-n}} \cdot \frac{1-v^2}{(1-v+v^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Substituindo y^* na integração temos:

$$M = 2 \frac{K}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2}}{(n+2)r^n} + 2 \frac{E}{1-v^2} \cdot \frac{1}{3r} \cdot r^3 \left(\frac{K}{E}\right)^{\frac{3}{1-n}} \frac{(1-v^2)^3}{(1-v+v^2)^{\frac{3}{2}}} +$$

$$- 2 \frac{K}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{r^{n+2}}{r^n} \left(\frac{K}{E}\right)^{\frac{n+2}{1-n}} \frac{(1-v^2)^{n+2}}{(n+2)(1-v+v^2)^{\frac{n+2}{2}}}$$

$$M = 2 \frac{K}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2}}{(n+2)r^n} + 2Er^2 \left(\frac{K}{E}\right)^{\frac{3}{1-n}} \cdot \frac{(1-v^2)^2}{3(1-v+v^2)^{\frac{3}{2}}} +$$

$$- 2r^2 E \left(\frac{K}{E}\right)^{\frac{3}{1-n}} \frac{(1-v^2)^{n+2}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}} (n+2)(1-v+v^2)^{\frac{n+2}{2}}}$$

Colocando $2Er^2\left(\frac{K}{E}\right)^{\frac{3}{1-n}}$ em evidência temos:

$$M = 2Er^2\left(\frac{K}{E}\right)^{\frac{3}{1-n}} \left\{ \frac{(1-v^2)^2}{3(1-v+v^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}}{(n+2)} \left[\frac{(1-v^2)}{\sqrt{1-v+v^2}} \right]^{n+2} \right\} +$$

$$+\left(\frac{t}{r}\right)^n \frac{Kt^2}{(n+2)(\sqrt{3})^{n+1}} \cdot \frac{2 \cdot 2^{n+1}}{2^{n+2}}$$

Finalmente:

$$M = 2Er^2\left(\frac{K}{E}\right)^{\frac{3}{1-n}} \left\{ \frac{(1-v^2)^2}{3(1-v+v^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}}{(n+2)} \left[\frac{(1-v^2)}{\sqrt{1-v+v^2}} \right]^{n+2} \right\} +$$

$$+\left(\frac{t}{r}\right)^n \frac{Kt^2}{(n+2)(\sqrt{3})^{n+1}} \tag{2.22}$$

de forma que M neste caso depende de parâmetros do material (E , K , v e n) e parâmetros geométricos (r , t):

$$M = M(E, n, K, v, t, r)$$

2.4 DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES INTERNAS NA FLEXÃO

Para posições entre A e E, FIG. 4.1., temos deformações elásticas em estado plano de deformações e portando: as tensões nesse caso estão descritas segundo:

$$\sigma_x = E' \varepsilon_x^e$$

com:

$$\varepsilon_x^e = y\kappa \quad (2.23)$$

com $\kappa \leq \kappa_e$

Passada a curvatura κ_e , tensões e deformações não estão mais distribuídas de forma linear. A partir do ponto E tensões e curvaturas estão descritas por uma sentença linear / não linear:

$$\sigma_x = E' \varepsilon_x^e$$

Segundo a equação (2.15):

$$\sigma_x = K \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} \cdot \varepsilon_x^{p^n}$$

com:

$$\varepsilon_x = y\kappa$$

e:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^e + \varepsilon_x^p$$

$$\varepsilon_x^e < \varepsilon_x^*$$

2.5 RECUPERAÇÃO ELÁSTICA

No dobramento de uma chapa metálica considerando o material no regime elasto-plástico, após a retirada do esforço aplicado para dobrar a chapa, esta irá ter uma recuperação elástica - DIETER [17] - devido a ductilidade do material. No processo de dobramento entre rolos isto ocorre entre os pontos **B** e **C**, FIG. 4.1.

Se r e r' são os raios de dobramento até a linha neutra antes e depois da recuperação elástica respectivamente. Considerando um elemento deslocado de y da linha neutra de comprimento deformado $\Delta\ell = (r + y)\alpha$, após a recuperação elástica seu comprimento passa a ser $\Delta\ell' = (r' + y')\alpha'$, conforme a FIG. 2.5., de forma que:

$$\varepsilon_x^e(y) = \frac{\Delta\ell' - \Delta\ell}{\Delta\ell} = \frac{y r}{r + y} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) \quad (2.24)$$

Na derivação $y = y'$ e a condição $r \alpha = r' \alpha'$ onde α e α' são os ângulos de duas seções considerando o elemento antes e depois da recuperação elástica. Sabendo que a tensão elástica durante a recuperação elástica é dada por:

$$\sigma_x^e(y) = E' \varepsilon_x^e(y) \quad (2.25)$$

e que o momento por unidade de largura designado por M' , resulta da ação de σ_x^e temos:

$$M' = 2 \int_0^t \sigma_x^e(y) dy = r E' \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) h^2 \quad (2.26)$$

onde:

$$h^2 = -r t + r^2 \ln \left(\frac{r + \frac{t}{2}}{r - \frac{t}{2}} \right) \quad (2.27)$$

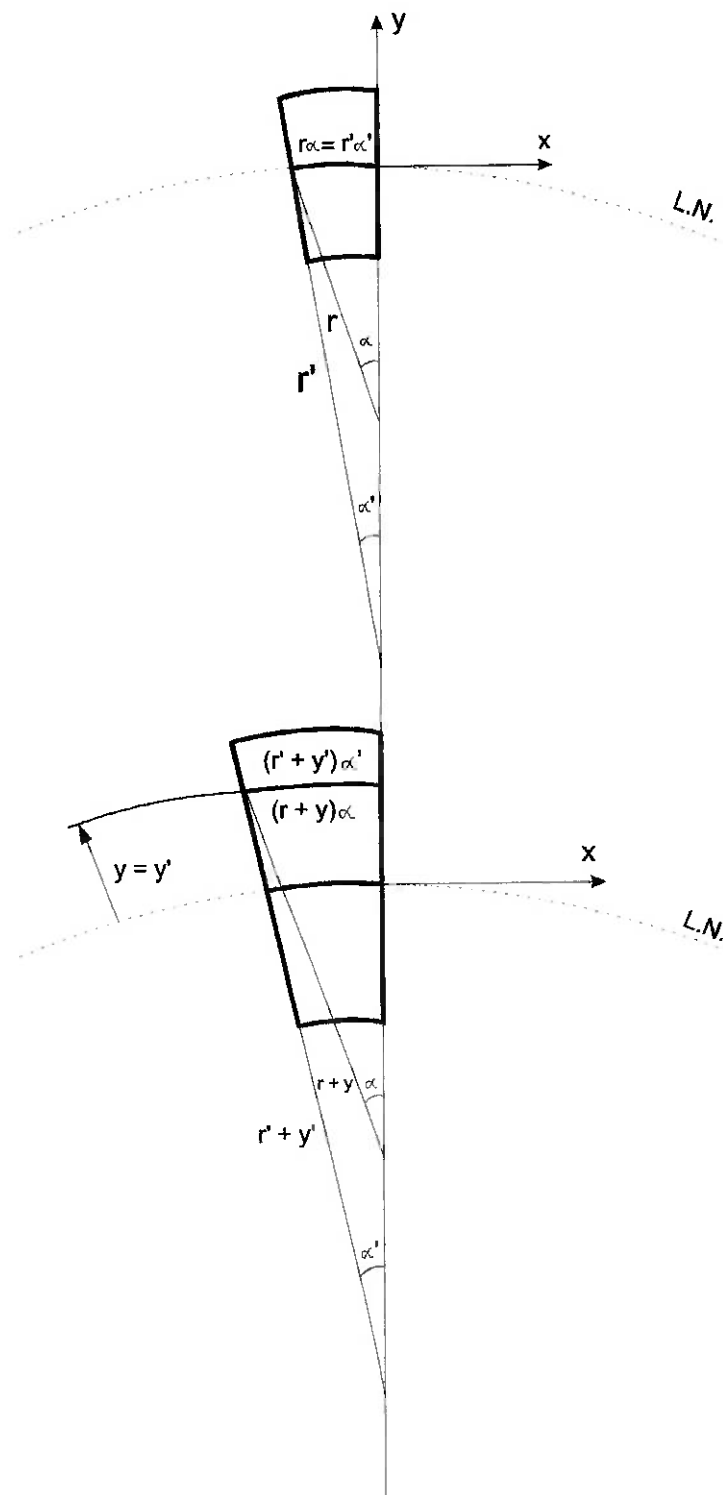


FIG. 2.5. Representação de um elemento deformado após a recuperação elástica.

- r = raio de dobramento
- r' = raio após a recuperação elástica
- $y = y'$ = deslocamento da Linha Neutra
- α = ângulo de dobramento
- α' = ângulo após a recuperação elástica

O fator 2 na equação de M' é pelo fato da σ_x^e ser simétrica em relação à linha neutra. O momento M' é equivalente em sentido oposto à aplicação do momento M . Depois da recuperação elástica, o Momento Resultante é zero, isto é: $M + M' = 0$. Usando esta condição temos:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{M}{rE'h^2} \quad (2.28)$$

Na equação acima tem-se que a variação de curvatura é dado por $\Delta \kappa = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'}$, que é linearmente proporcional à aplicação do momento M o qual é uma função da curva de dobramento, espessura da chapa e propriedades do material.

Combinando as equações (2.24), (2.25) e (2.28), a tensão elástica na recuperação elástica é dada por:

$$\sigma_x^e(y) = -\frac{yM}{(r+y)h^2} \quad (2.29)$$

A recuperação elástica resultante é redistribuída nas tensões internas, e a tensão residual, σ_{xr} , pode ser obtido superpondo a tensão elástica (2.29) e a tensão interna (2.15), logo:

$$\sigma_{xr}(y) = \sigma_x(y) + \sigma_x^e(y)$$

ou:

$$\sigma_{xr}(y) = -\frac{yM}{(r+y)h^2} + K \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} \epsilon_x^{p^n} \quad (2.30)$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

As expressões obtidas no capítulo anterior para o momento de dobramento (2.22), distribuição de tensões durante a conformação (2.15) e distribuição de tensões após a conformação (2.29), tensões residuais (2.30), portanto, a cada curvatura aplicada ao elemento de chapa sendo conformado dependem unicamente de parâmetros do material. A influência destes parâmetros é analisada de forma gráfica neste capítulo. Para tal considerou-se os seguintes materiais:

1. Aço SAE 1006-1008 (SS1147 - Suécia) - conf. [4] e [5]

$$E = 200 \text{ GPa} \quad \nu = 0,33$$

$$K = 541 \text{ MPa} \quad n = 0,252$$

2. Aço SAE 1045 - Laminado a Quente - conf. ref. [13]

$$E = 210 \text{ GPa} \quad \nu = 0,33$$

$$K = 965 \text{ MPa} \quad n = 0,14$$

3. Liga de Alumínio AA 6061-O - conf. ref. [13]

$$E = 71,7 \text{ GPa} \quad \nu = 0,33$$

$$K = 205 \text{ MPa} \quad n = 0,23$$

como constituintes do elemento a ser conformado, uma chapa metálica, de espessura $t = 3 \text{ mm}$, largura unitária e conformada por calandragem, conformação entre rolos, por exemplo (ver capítulo 4 para mais detalhes).

No primeiro gráfico, FIG. 3.1., é mostrada a evolução do momento de dobramento M (2.22), enquanto o elemento é dobrado desde a curvatura κ_e , curvatura elástica, até a curvatura máxima κ_f , neste caso correspondente a um raio $r_f = 0,135$ m. Notamos claramente a partir desta figura o aumento do esforço de dobramento, a cada curvatura, com o aumento do par (resistência ao escoamento, grau de encruamento) incluído no coeficiente de resistência K e expoente de encruamento n - BRESCIANI FILHO [2].

Esta influência conjunta é desmembrada nas FIG. 3.2. e FIG. 3.3. Na FIG. 3.2., todas as constantes do material são fixas e apenas sua resistência, coeficiente de resistência K aumentada. Na FIG. 3.3., apenas o grau de encruamento n é variado. Para um mesmo material, a variação do coeficiente de resistência K e da variação do expoente de encruamento n no modelo constitutivo só se justifica se considerarmos que diferentes lotes de peça, cortados em diferentes direções, devido a anisotropia vão ter propriedades distintas, com variações tanto para K quanto para n , dependendo de fatores metalúrgicos, mas que se pode admitir em torno de 10%.

No gráfico FIG. 3.4. é mostrada a evolução do momento de dobramento M , enquanto o elemento é dobrado desde a curvatura κ até a curvatura κ_f , para um raio $r_f = 0,135$ m.

Notamos claramente a partir desta figura o aumento do esforço de dobramento com o aumento da espessura da chapa.

MOMENTO DE DOBRAMENTO

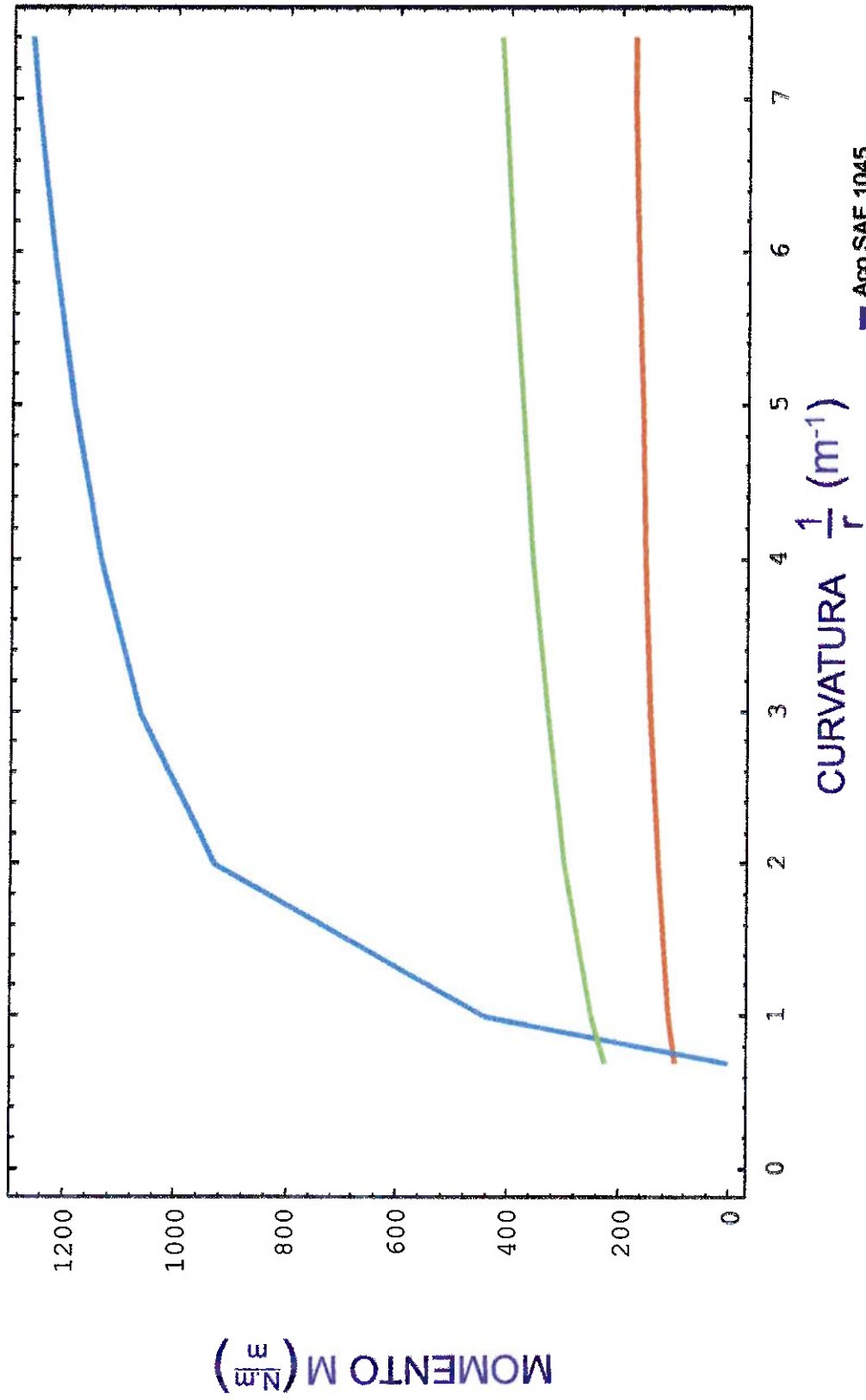


FIG. 3.1 Evolução do momento de dobramento pela curvatura

MOMENTO DE DOBRAMENTO

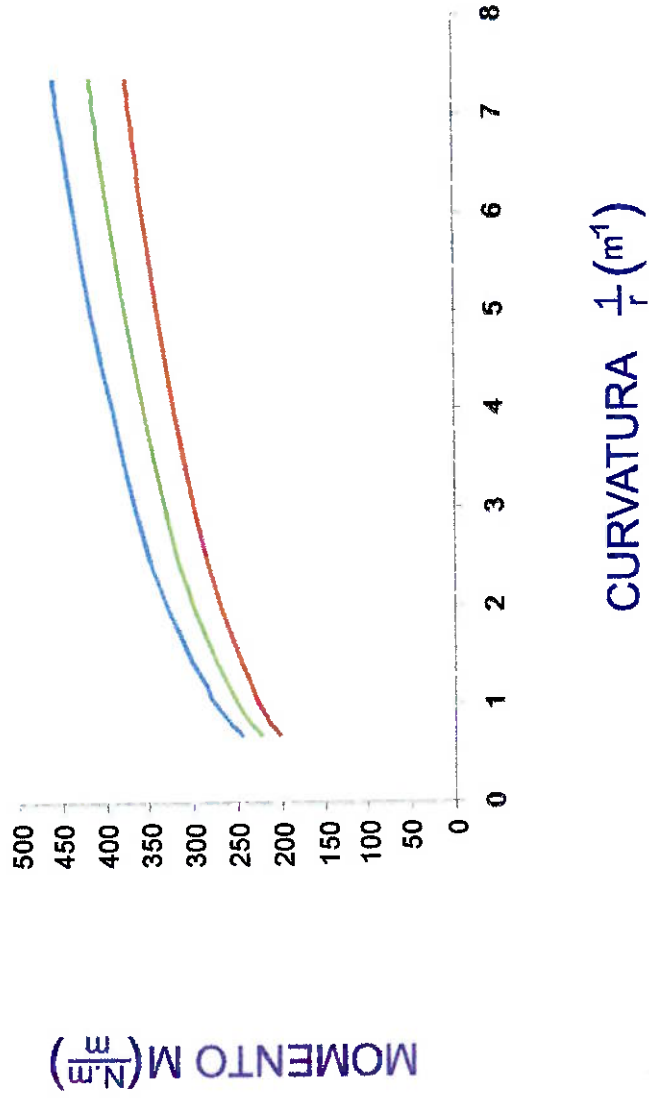


FIG. 3.2. Influência do coeficiente de resistência no momento de dobramento

MOMENTO DE DOBRAMENTO

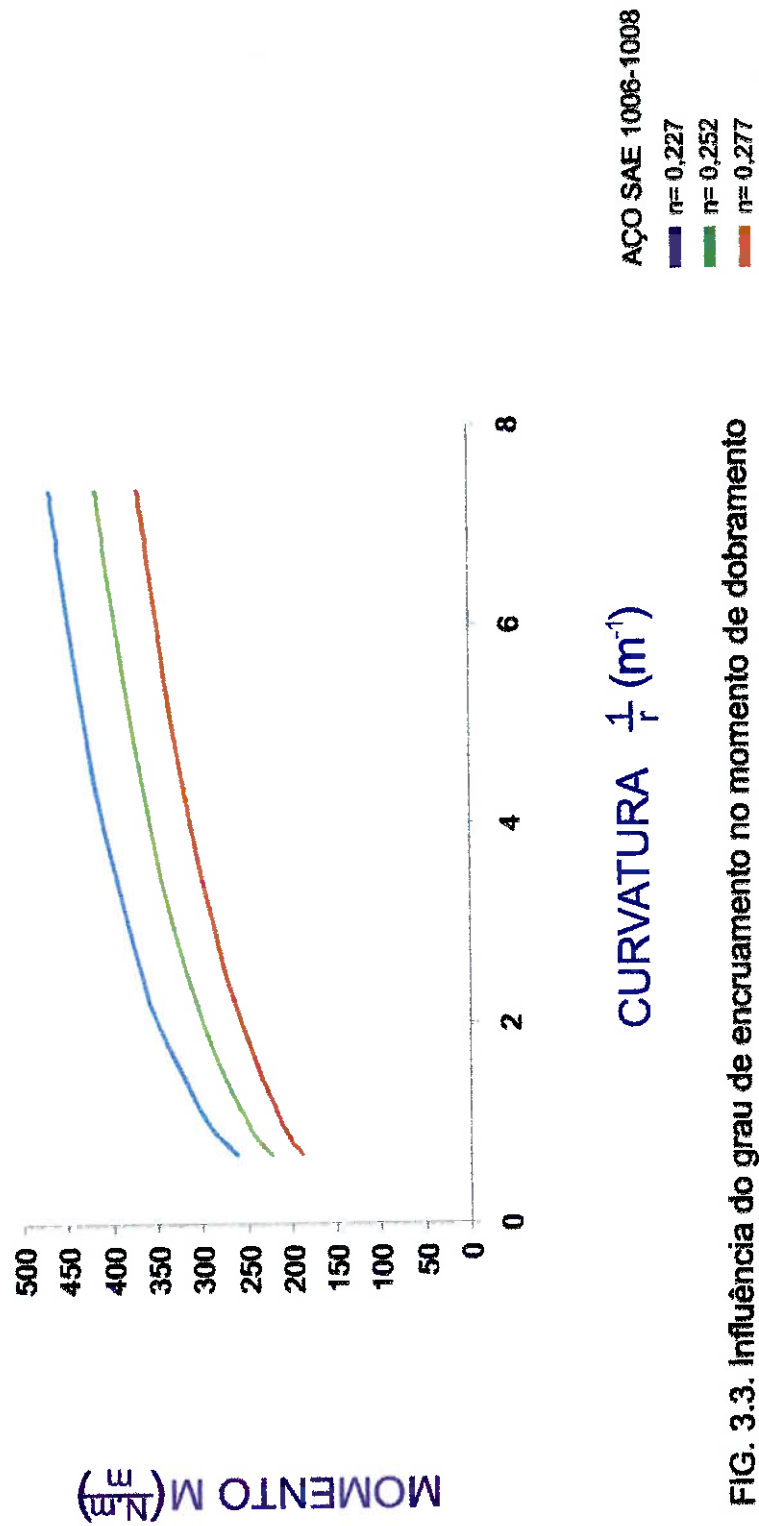


FIG. 3.3. Influência do grau de encruamento no momento de dobramento

MOMENTO DE DOBRAMENTO

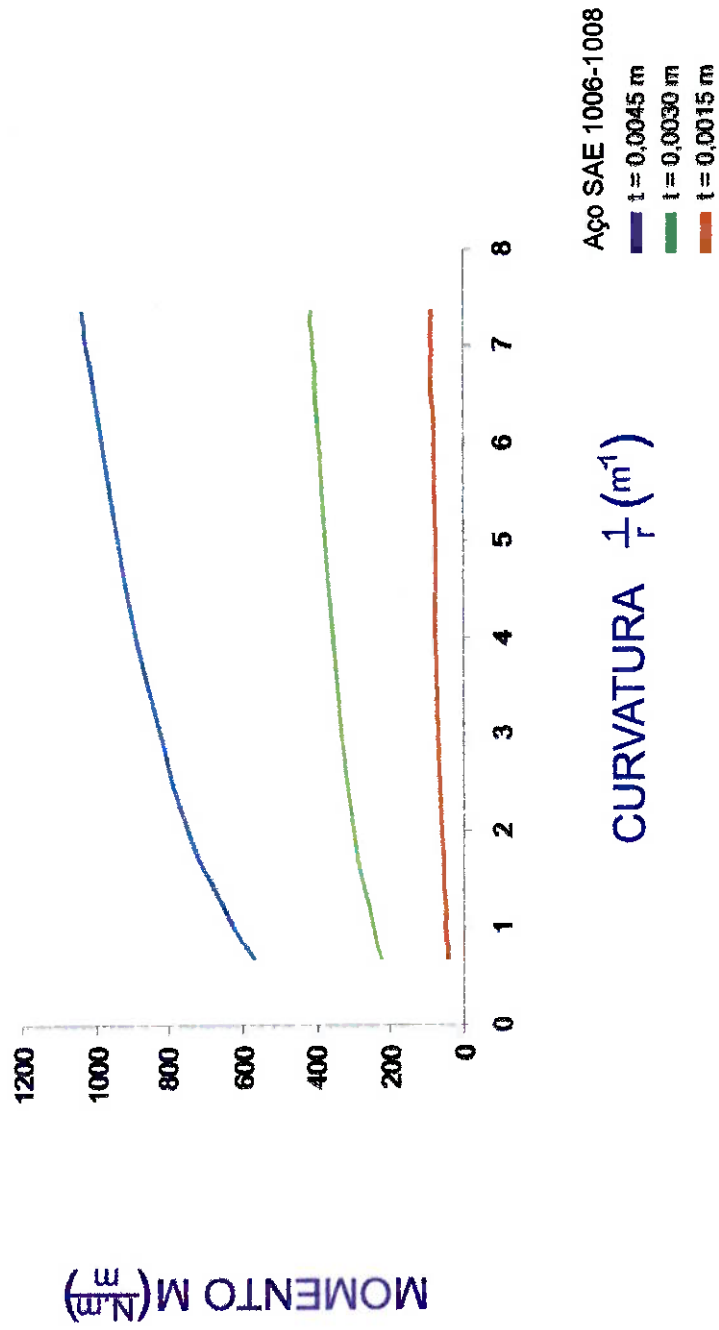


FIG. 3.4. Influência da espessura da chapa no momento de dobramento

No gráfico seguinte, FIG. 3.5., a distribuição de tensões (2.15) em função da posição vertical $y(m)$, fixa a curvatura κ_r de $7,407 (m^{-1})$, é mostrada para os três materiais. Novamente considerada uma cota qualquer y , maior será a tensão atuante aí quando o material tiver coeficiente de resistência maior.

TENSÕES INTERNAS

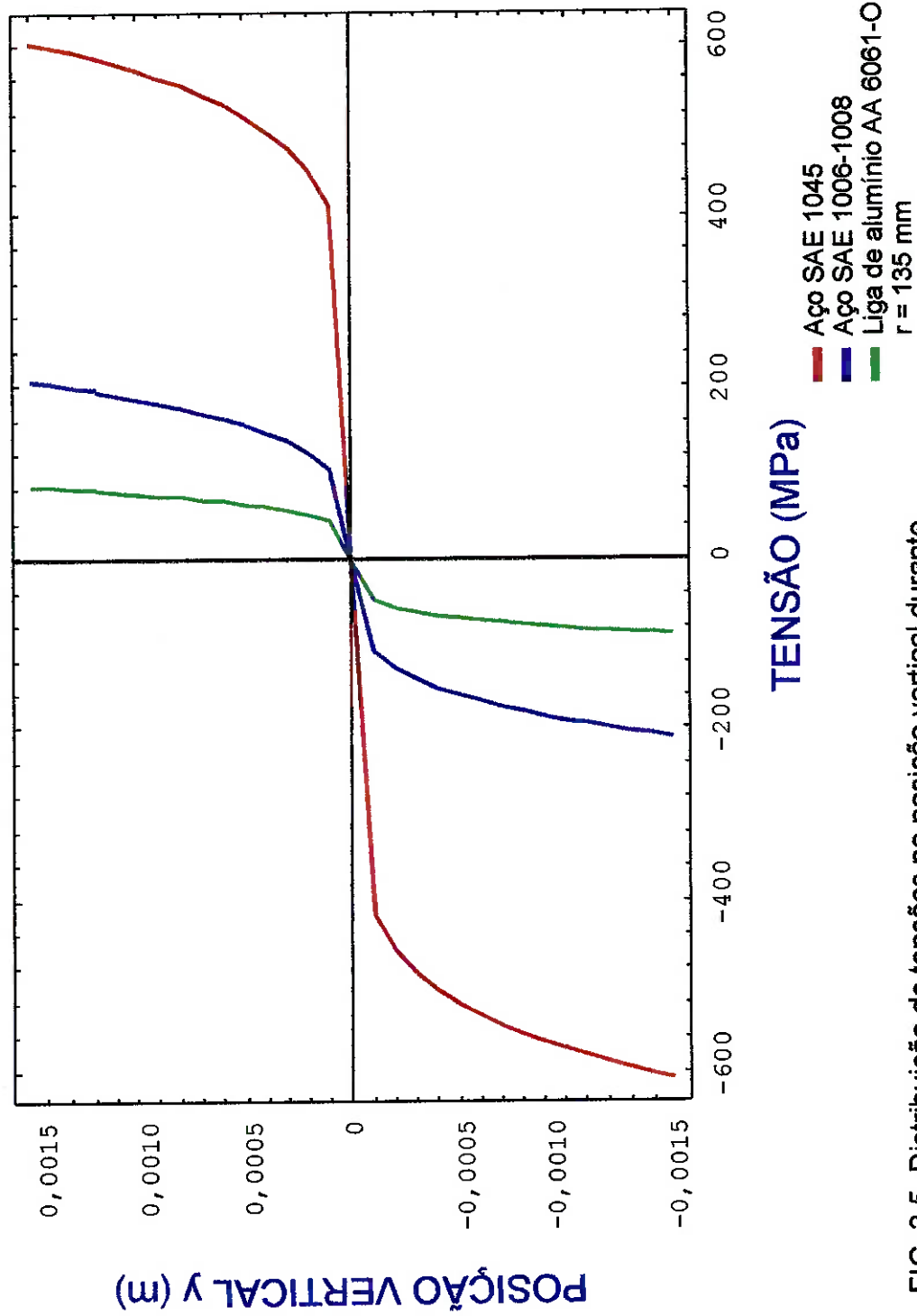


FIG. 3.5 Distribuição de tensões na posição vertical durante o dobramento para diferentes materiais

As tensões residuais (2.30) no elemento conformado se distribuem numa curva em **S** como atesta a FIG. 3.6. Nesta figura considera a recuperação elástica e conseqüente redistribuição de tensões geradas pela remoção do momento M_f atuante no instante em que se tinha uma curvatura aplicada κ_f , raio $r_f = 0,135$ m, e que sofre diferentes graus de relaxamento, gerando curvaturas κ'_f , com raios r'_f , funções do material considerado. Aliado a cada material temos uma curva **S** diferente, com tensões residuais mais pronunciadas, maiores os valores do coeficiente de resistência.

TENSÕES RESIDUAIS

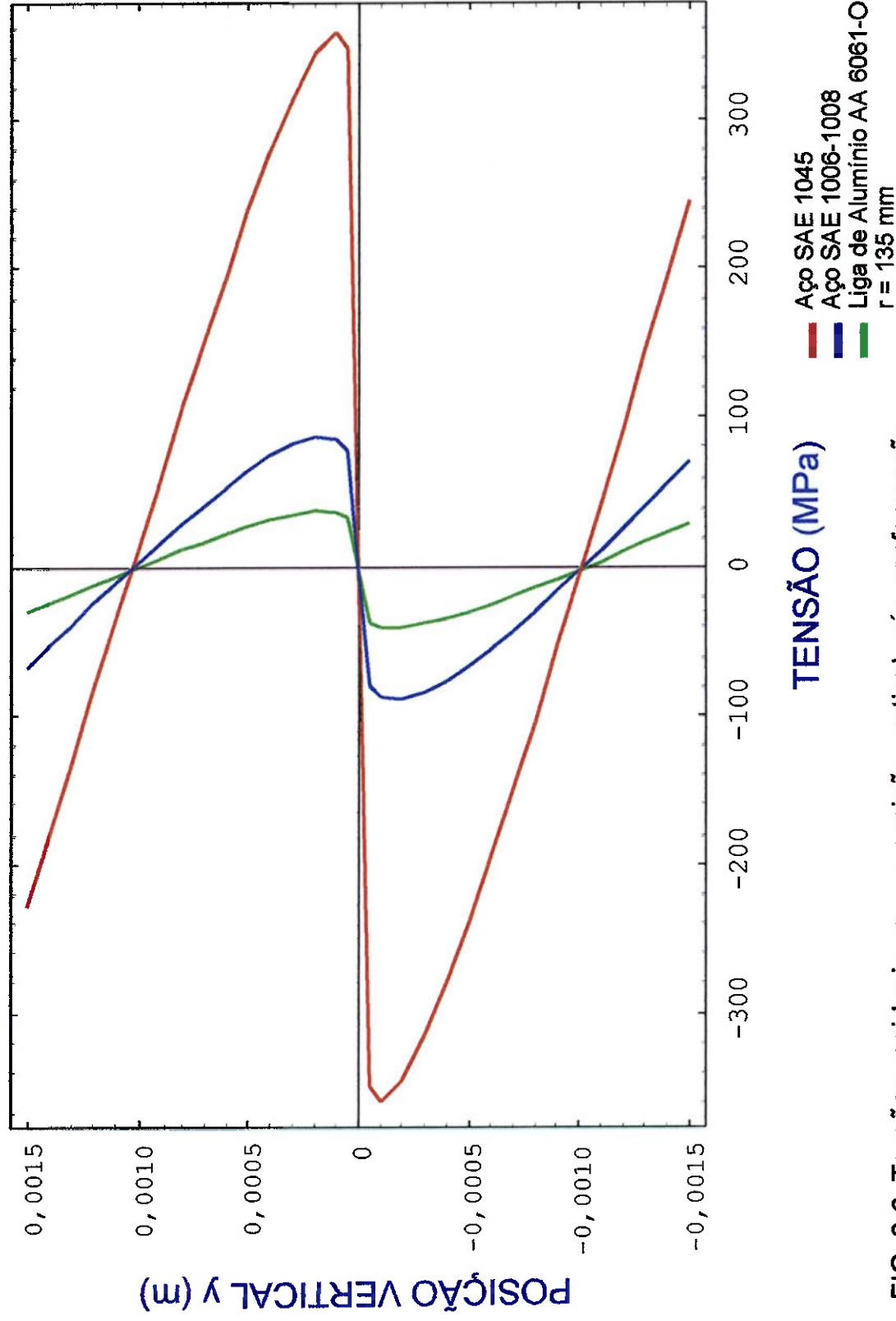


FIG. 3.6 Tensões residuais versus posição vertical, pós-conformação por dobramento para três materiais distintos

4. APLICAÇÃO: DOBRAMENTO ENTRE ROLOS

4.1 RAIOS DE DOBRAMENTO APÓS A RECUPERAÇÃO ELÁSTICA

O objetivo desta primeira parte é determinar quanto se necessita especificar de raio de dobramento na posição **B**, ou seja, quanto é r_b , conforme FIG. 4.1.(a), para se obter na posição **C** um raio requerido r_c (raio final de dobramento após a recuperação elástica).

Na solução numérica da equação que envolve o raio r_b será utilizado o Método da Dicotomia tomando como referência os parâmetros do material (E , ν , n e K) do aço SAE 1006-1008 no dobramento entre rolos.

Após a recuperação elástica do material no dobramento temos da equação (2.28):

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{M}{r E' h^2}$$

Substituindo para o problema do dobramento entre rolos, o valor de raio r' pelo valor de raio requerido r_c (raio de dobramento após a recuperação elástica) e ainda substituindo o valor r pelo valor do r_b que se deve ter para dobrar o material, temos:

$$\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_c} = \frac{M}{r_b E' h^2}$$

onde:

$$h^2 = -r_b t + r_b^2 \cdot \ln \left(\frac{r_b + \frac{t}{2}}{r_b - \frac{t}{2}} \right)$$

Obtém-se a equação:

$$\frac{M}{r_b E' h^2} + \frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_b} = 0 \quad (4.1)$$

Sabendo-se que:

$$M = M(E, r_b, K, \nu, t, n)$$

onde: E , K , ν e n são características do material.

Tomando-se como exemplo o aço SAE 1006-1008 e adotando-se os seguintes valores:

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$K = 541 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,33$$

$$n = 0,252$$

$$t = 0,003 \text{ m}$$

Aplicação:

Considerando $r_c = 100 \text{ mm} = 0,1 \text{ m}$ (Raio de Dobramento após a recuperação elástica)

Substituindo tais valores na equação temos:

$$M = 2 \cdot 200000 \cdot r_b^2 \left(\frac{541}{200000} \right)^{\frac{3}{1-0,252}} \left\{ \frac{(1-0,33)^2}{3(1-0,33+0,33^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{0,252+1}}{(0,252+2)} \right. \\ \left. \cdot \left[\frac{(1-0,33^2)}{\sqrt{1-0,33+0,33^2}} \right]^{0,252+2} \right\} + \left(\frac{0,003}{r_b} \right)^{0,252} \cdot \frac{541 \cdot 0,003^2}{(0,252+2)(\sqrt{3})^{0,252+1}}$$

$$h^2 = -r_b (0,003) + r_b^2 \ln \left(\frac{r_b + \frac{0,003}{2}}{r_b - \frac{0,003}{2}} \right)$$

$$E' = \frac{200000}{1-0,33^2} = 224442 \text{ MPa}$$

Ficamos com a equação:

$$\frac{M}{r_b \cdot E' \cdot h^2} + \frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_b} = 0$$

Em função da variável r_b (Raio de Dobramento) ou seja:

$$f(r_b) = \frac{M(r_b)}{r_b E' h^2(r_b)} + \frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_b} \quad (4.2)$$

Para a solução numérica da equação acima, utilizaremos o Método da Dicotomia.

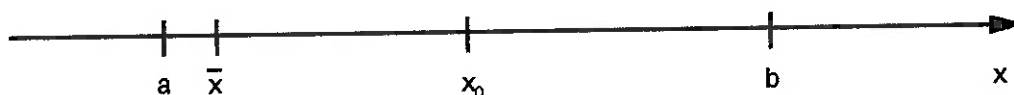
Adotaremos $r_c \in (0,08 ; 0,12)$, ou seja, o intervalo que contenha o raio $r_c = 0,1 \text{ m}$

Cálculo da raiz de uma equação (MÉTODO DA DICOTOMIA):

Dada a equação $f(x) = 0$, achar a raiz da equação no intervalo (a, b) , ou seja, $\bar{x} \in (a, b)$, devemos inicialmente verificar o Teorema de Existência e Unicidade onde:

- (i) A função $f(x)$ é contínua em (a, b)
- (ii) $f(a) \cdot f(b) < 0$ uma única raiz no intervalo

Verificado o teorema segue a interpretação geométrica do Método da Dicotomia:



onde:

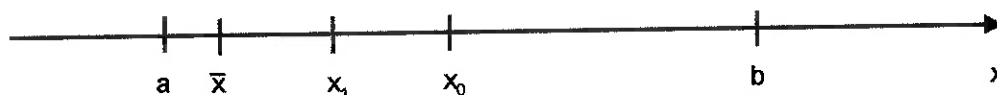
$$\bar{x} \in (a, b)$$

$$x_0 = \frac{a+b}{2} \quad (\text{Dicotomia Inicial})$$

$$E_0 = \frac{b-a}{2} \quad (\text{Erro Máximo})$$

$$|x_0 - \bar{x}| < E_0 = \frac{b-a}{2}$$

Repetindo o processo:



onde:

$$x_1 = \frac{a+x_0}{2} \quad (1^{\text{a}} \text{ Dicotomia})$$

$$E_1 = \frac{x_0 - a}{2} = \frac{E_0}{2}$$

$$|x_1 - \bar{x}| < E_1 = \frac{E_0}{2}$$

Repetindo o processo:



onde:

$$x_2 = \frac{a + x_1}{2} \quad (2^{\text{a}} \text{ Dicotomia})$$

$$E_2 = \frac{x_1 - a}{2}$$

$$|x_2 - \bar{x}| < E_2 = \frac{E_0}{2^2}$$

Generalizando:

$$|x_n - \bar{x}| < E_n = \frac{E_0}{2^n} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

Número de Dicotomias:

$$E > \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

onde:

$$E = 0,5 \cdot 10^{-m}$$

m = Número de casas decimais

$$0,5 \cdot 10^{-m} > \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

$$2^{n+1} > \frac{b-a}{0,5 \cdot 10^{-m}}$$

$$n+1 > \log_2 \left(\frac{b-a}{0,5 \cdot 10^{-m}} \right)$$

$$n > \frac{\log \left(\frac{b-a}{0,5 \cdot 10^{-m}} \right)}{\log 2} - 1$$

n = número de dicotomias

4.1.1 ALGORITMO DO MÉTODO DA DICOTOMIA:

Para calcularmos um valor aproximado de uma raiz isolada $\bar{x} \in (a, b)$ da equação $f(x) = 0$ com um certo grau de precisão $E > 0$ em que a função f satisfaça as hipóteses (i) e (ii) do Teorema da Existência e Unicidade devemos seguir o algoritmo:

1º Calcular $f(a)$ e $f(b)$ (sem perda de generalidade vamos admitir $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$).

2º Calcular $x_0 = \frac{a+b}{2}$ e $E_0 = \frac{b-a}{2}$

3º Se $E_0 \leq E$, x_0 é o valor procurado.

4º Se $E_0 > E$, calcular $f(x_0)$

5º Se $f(x_0) = 0$, então x_0 é a raiz procurada.

6º Se $f(x_0) < 0$, substituir o valor de a por x_0 e retornar ao 2º passo.

7º Se $f(x_0) > 0$, substituir o valor de b por x_0 e retornar ao 2º passo.

Método da Dicotomia: Aplicado para a solução do problema da função (4.2), que calcula o raio r_b no dobramento entre rolos da FIG. 4.1.

1ª Etapa:

Teorema da Existência e Unicidade

(i) $f(r_c)$ é contínua em $\bar{r}_c \in (0,08 ; 0,12)$ não há descontinuidade da função neste intervalo.

(ii) $f(0,08) = -2,405944005$

$f(0,12) = 1,751591672$

Logo $f(0,08) \cdot f(0,12) < 0$ há uma única raiz em $\bar{r}_c \in (0,08 ; 0,12)$

2ª Etapa:

Número de Dicotomias (n)

Considerando $m = 3$ (3 casas decimais corretas)

$$n > \frac{\log\left(\frac{0,12-0,08}{0,5 \cdot 10^{-3}}\right)}{\log 2} - 1$$

$n > 5,321928095$

Serão precisos no mínimo 5 Dicotomias para achar $\bar{r}_c \in (0,08 ; 0,12)$ de dobramento.

3ª Etapa:

Monta-se a TAB. 4.1. para o cálculo do raio r_b , segundo o **Algoritmo do Método da Dicotomia (Bisseção)**:

TAB. 4.1. Solução pelo Método da Dicotomia para obter o raio de dobramento r_b

n	a	b	$r_{b_n} = \frac{a+b}{2}$	f(a)	f(r_{b_n})	f(b)	$E_n = \frac{b-a}{2}$
0	0,08	0,12	0,1	-	+	+	0,02
1	0,08	0,1	0,09	-	-	+	0,01
2	0,09	0,1	0,095	-	+	+	0,005
3	0,09	0,095	0,0925	-	+	+	0,0025
4	0,09	0,0925	0,09125	-	-	+	0,00125
5	0,09125	0,0925	0,091875	-	+	+	$6,25 \cdot 10^{-4}$
6	0,09125	0,091875	0,0915625	-	-	+	$3,125 \cdot 10^{-4}$
7	0,0915625	0,091875	0,09171875	-	+	+	$1,5625 \cdot 10^{-4}$
8	0,0915625	0,09171875	0,091640625	-	-	+	$7,8125 \cdot 10^{-5}$
9	0,091640625	0,09171875	0,0916796875	-	+	+	$3,90625 \cdot 10^{-5}$
10	0,091640625	0,0916796875	0,09166015625	-	-	+	$1,953125 \cdot 10^{-5}$

Finalmente precisa-se de um Raio de Dobramento $r_b = 0,09166 \text{ m} = 91,66 \text{ mm}$ para obter o raio $r_c = 0,100 \text{ m} = 100 \text{ mm}$ após retirado o momento de dobramento (esforço aplicado) do aço SAE 1006-1008.

4.2 CÁLCULO DO MOMENTO EM B

O objetivo deste item é buscar qual é o momento máximo na posição **B**, ou seja, quanto é M_b (FIG. 4.1.) no dobramento entre rolos, segundo MARCINIAK; DUNCAN [9].

Através do diagrama da FIG. 4.1.(b) é obtida uma equação envolvendo M_b partindo da tg α no ponto **A** e no ponto **C** envolvendo assim o momento M_c e M_b .

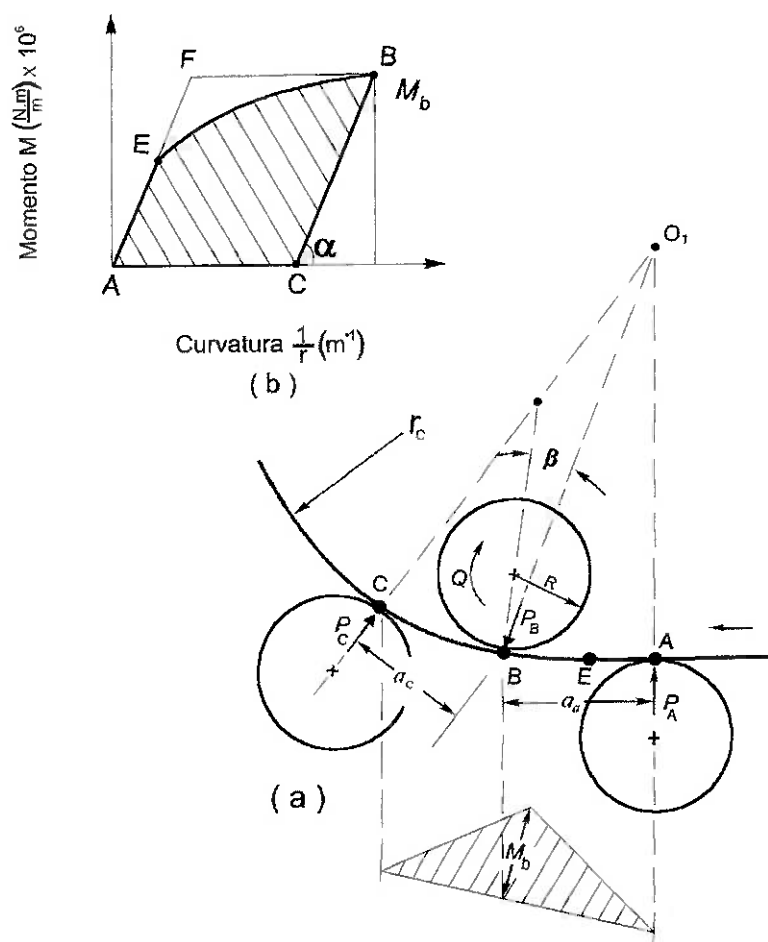


FIG. 4.1. Representação do dobramento entre rolos conf. Ref. Marciniak [9]
 (a) Chapa metálica sofrendo dobramento
 (b) Diagrama do momento para dobrar a chapa metálica

Na solução numérica da equação obtida que envolve o raio r_b adotado como no item 4.1 o raio $r_c = 0,135$ m, utiliza-se novamente o Método da Dicotomia para o cálculo do momento máximo em B (M_b).

Do diagrama de momento do dobramento entre rolos, FIG. 4.1.(b):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_e}{\frac{1}{r_c}}$$

onde:

$$M_e = E' I \frac{1}{r_e} = E' \cdot \frac{t^3}{12} \cdot \frac{1}{r_e} \quad (4.3)$$

temos:

$$\frac{1}{r_e} = \frac{M_e}{\frac{E' t^3}{12}}$$

logo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_e}{\frac{12 M_e}{E' t^3}} = \frac{E' t^3}{12}$$

Do triângulo BCK_b temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_b}{\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_c}}$$

Desenvolvendo a equação acima temos:

$$M_b - \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{r_b} + \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{r_c} = 0$$

Substituindo $\operatorname{tg} \alpha = \frac{E't^3}{12}$ tem-se:

$$M_b - \frac{E't^3}{12} \cdot \frac{1}{r_b} + \frac{E't^3}{12} \cdot \frac{1}{r_c} = 0 \quad (4.4)$$

Adotando raio após a recuperação elástica $r_c = 0,135 \text{ m}$

Considerando o aço SAE 1006-1008 tem-se:

$$E = 200 \text{ GPa} \quad n = 0,252$$

$$K = 541 \text{ MPa} \quad r_c = 0,135 \text{ m}$$

$$\nu = 0,33 \quad E' = 224442 \text{ MPa}$$

Adotando $t = 0,003 \text{ m}$

Substituindo na equação tem-se:

$$M_b = 2 \cdot 200000 \cdot r_b^2 \left(\frac{541}{200000} \right)^{\frac{3}{1-0,252}} \left\{ \frac{(1-0,33^2)^2}{3(1-0,33+0,33^2)} - \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{0,252+1}}{0,252+2} \right. \\ \left. \cdot \left[\frac{1-0,33^2}{\sqrt{1-0,33+0,33^2}} \right]^{0,252+2} \right\} + \left(\frac{0,003}{r_b} \right)^{0,252} \cdot \frac{541 \cdot 0,003^2}{(0,252+2)(\sqrt{3})^{0,252+1}}$$

Utilizando o algoritmo do "Método da Dicotomia", monta-se a TAB. 4.2. para o cálculo do raio r_b , onde:

$$\bar{r}_b \in (0,12 ; 0,16)$$

TAB. 4.2. Solução pelo Método da Dicotomia para obter o raio usado no cálculo do momento máximo M_b .

n	a	b	$r_{b_n} = \frac{a+b}{2}$	f(a)	f(r_{b_n})	f(b)	$E_n = \frac{b-a}{2}$
0	0,12	0,16	0,14	-	+	+	0,02
1	0,12	0,14	0,13	-	+	+	0,01
2	0,12	0,13	0,125	-	+	+	0,005
3	0,12	0,125	0,1225	-	+	+	0,0025
4	0,12	0,1225	0,12125	-	+	+	0,00125
5	0,12	0,12125	0,120625	-	-	+	$6,25 \cdot 10^{-4}$
6	0,120625	0,12125	0,1209375	-	-	+	$3,125 \cdot 10^{-4}$
7	0,1209375	0,12125	0,12109375	-	-	+	$1,5625 \cdot 10^{-4}$
8	0,12109375	0,12125	0,12117187	-	+	+	$7,8125 \cdot 10^{-5}$
9	0,12109375	0,12117187	0,121132812	-	-	+	$3,90625 \cdot 10^{-5}$
10	0,121132812	0,12117187	0,1211523438	-	+	+	$1,953125 \cdot 10^{-5}$

Finalmente precisa-se de um raio $r_b = 0,121$ m para calcular o momento máximo M_b , tendo sido considerado $r_c = 0,135$ m (raio de dobramento após a recuperação elástica).

Substituindo r_b na equação do momento M_b tem-se:

$$M_b = 2 \cdot 200000 \cdot 0,121^2 \left(\frac{541}{200000} \right)^{\frac{3}{1-0,252}} \left\{ \frac{(1-0,033^2)^2}{3(1-0,33+0,33^2)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\ \left. - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{0,252+1} \cdot \left[\frac{1-0,33^2}{\sqrt{1-0,33+0,33^2}} \right]^{0,252+2} \right\} + \\ + \left(\frac{0,003}{0,121} \right)^{0,252} \cdot \frac{541 \cdot 0,003^2}{(0,252+2)(\sqrt{3})^{0,252+1}}$$

Finalmente o momento em B (M_b) é:

$$M_b = 428,070095 \left(\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{m}} \right)$$

Este é o momento necessário para se ter o raio $r_b = 0,121$ m e finalmente obter, após a recuperação elástica do material, o raio $r_c = 0,135$ m.

4.3 CÁLCULO DO TORQUE (Q)

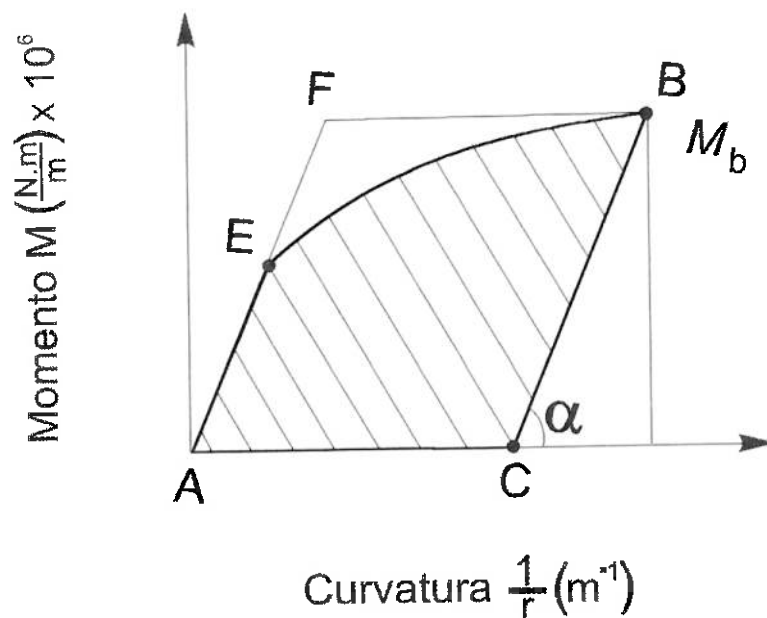
Obtido do item 4.2 o momento M_b se determina o fator λ_p para que se possa calcular a área real contra a área do paralelogramo, conforme FIG. 4.2.

Mediante o valor de λ_p , determina-se o Torque Q utilizado no rolo central de dobramento.

$$Q = \lambda_p \frac{M_b \cdot R}{r_c} \quad (4.5)$$

O trabalho total para dobrar segundo a área AEBC, conforme FIG. 4.2., é dado por:

$$A_t = \lambda_p \cdot M_b \cdot \frac{\ell}{r_c} \quad (4.6)$$



4.2. Diagrama do momento usado para cálculo da área AEBC.

Calcula-se a área AEBC (A_t) - FIG. 4.2. - como sendo:

$$A_t = A_h - A_e$$

onde:

A_h é a área total hachurada de 0 até K_b

A_e é a área do triângulo B C K_b .

A área total hachurada A_h , segundo MARCINIAK; DUNCAN [9], é dada por:

$$A_h = \int_0^{K_b} \frac{K'}{(n+2) \cdot 2^{n+1}} \left(\kappa_b^n\right) \cdot t^{n+2} d\kappa = \frac{K' t^{n+2} \cdot \kappa_b^{n+1}}{(n+2) \cdot 2^{n+1} \cdot (n+1)} \Big|_0^{K_b}$$

onde:

$$K' = K \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}$$

e que:

$$\kappa_b = \frac{1}{r_b}$$

$$A_h = \frac{K \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} \cdot t^{n+2} \cdot \left(\frac{1}{r_b}\right)^{n+1}}{(n+1)(n+2) \cdot 2^{n+1}} \quad (4.7)$$

A área do triângulo BCK_b (A_e) - FIG. 4.2. - é dada por:

$$A_e = \frac{M_b \cdot (K_b - K_c)}{2} \quad (4.8)$$

Considerando o aço SAE 1006-1008 temos:

$$E = 200 \text{ GPa} \quad n = 0,252$$

$$K = 541 \text{ MPa} \quad r_c = 0,135 \text{ m}$$

$$\nu = 0,33 \quad E' = 224442 \text{ MPa}$$

$$M_b = 428,070095 \left(\frac{\text{Nm}}{\text{m}} \right) \quad r_b = 0,121 \text{ m}$$

Adotando $t = 0,003 \text{ m}$

Logo temos que:

A área hachurada A_h é:

$$A_h = \frac{541 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1,252} \cdot (0,003)^{2,252} \cdot \left(\frac{1}{0,121} \right)^{1,252}}{(1,252)(2,252) \cdot 2^{1,252}}$$

$$A_h = 2826,028 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

A área do triângulo BCK_b (A_e) é dada por:

$$A_e = \frac{428,070095 \cdot \left(\frac{1}{0,121} - \frac{1}{0,135} \right)}{2}$$

$$A_e = 183,4398938 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Finalmente a área AEBC (A_t) é dada por:

$$A_t = A_h - A_e$$

$$A_t = 2642,587885 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Tem-se que:

Adotando : $\ell = 1000\text{mm} = 1\text{m}$ comprimento total da chapa a ser dobrada tem-se:

$$\lambda_p = \frac{A_t}{M_b \cdot \frac{\ell}{r_c}} = \frac{(2642,587885)}{428,070095 \cdot \frac{1}{0,135}}$$

$$\lambda_p = 0,8333900654 \frac{1}{\text{m}}$$

Considerando o raio do rolo central de dobramento $R = 40 \text{ cm} = 0,4 \text{ m}$ o torque Q passa a valer:

$$Q = \frac{0,8333900654 \cdot 428,070095 \cdot 0,4}{0,135}$$

Finalmente obtém-se o Torque Q :

$$Q = 1057,035154 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Este é o torque necessário para dobrar uma chapa fina com raio $r_b = 0,121 \text{ m}$ e obter após a recuperação elástica do material $r_c = 0,135 \text{ m}$.

5. COMPARAÇÕES E CONCLUSÕES

Analisando o gráfico FIG. 5.1., onde tem-se a comparação entre momentos de dobramento na região elasto-plástica obtidos a partir da teoria desenvolvida por TAN et al [4], que considera a teoria linear / não linear para cálculo do momento de dobramento, conforme equação (2.22):

$$M = 2Er^2 \left(\frac{K}{E} \right)^{\frac{3}{1-n}} \left\{ \frac{(1-v^2)^2}{3(1-v+v^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1}}{(n+2)} \left[\frac{(1-v^2)}{\sqrt{1-v+v^2}} \right]^{n+2} \right\} + \left(\frac{t}{r} \right)^n \frac{K t^2}{(n+2)(\sqrt{3})^{n+1}}$$

e a teoria não linear / não linear que considera a teoria desenvolvida por MARCINIAK; DUNCAN [9] utilizando para a integral do momento a Expressão de Potência

$\sigma = K \varepsilon^n$ para o cálculo do momento de dobramento, conforme:

$$M = K \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} \cdot \frac{1}{r^n} \left[\frac{t^{n+2}}{2^{n+1} \cdot (n+2)} \right]$$

observa-se que as curvas geradas são compatíveis para ambas teorias verificando momentos pela variação da curvatura com valores, para pequenos desvios, considerando para cálculos os dados do aço SAE 1006-1008.

MOMENTO DE DOBRAMENTO

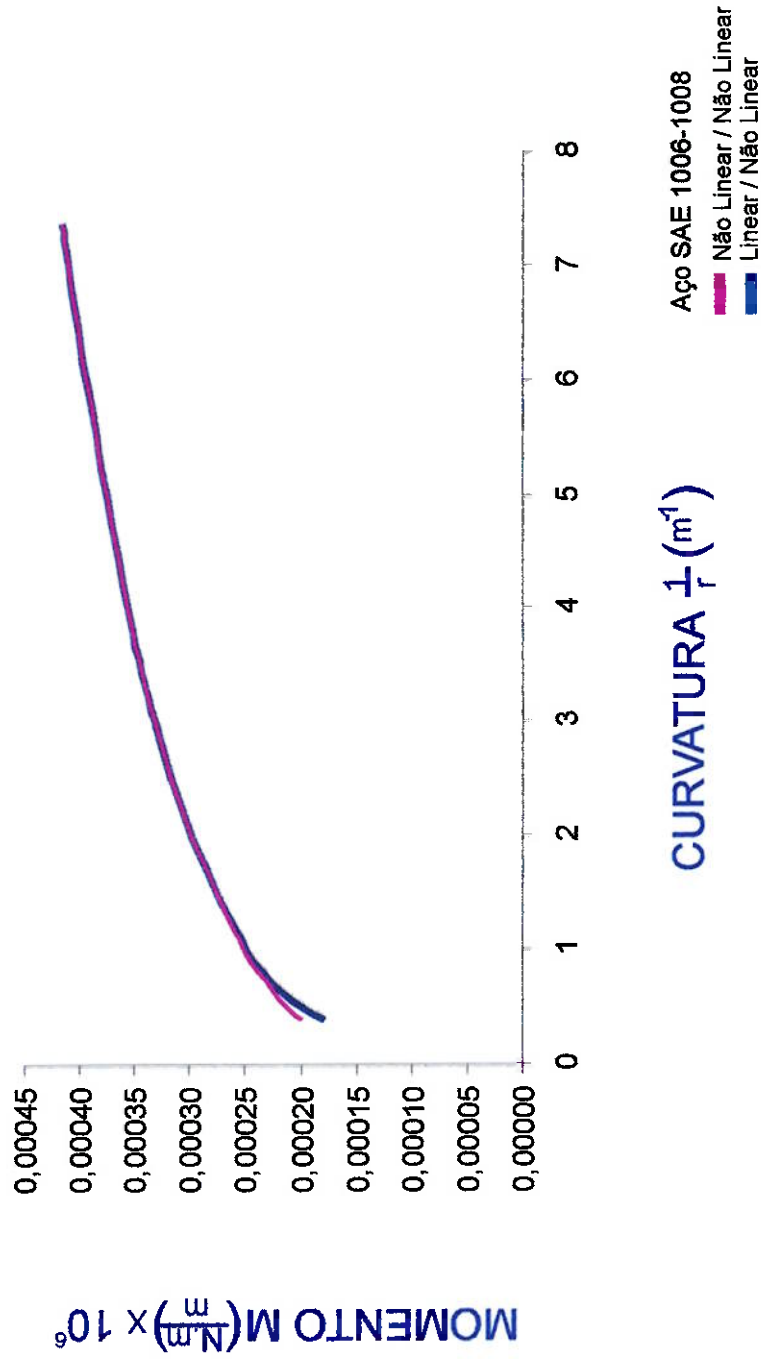


FIG. 5.1. Comparação entre momentos de dobramento na região elasto-plástica obtidos a partir de duas teorias

Analisando o gráfico FIG. 5.2. onde temos a comparação entre tensões internas na flexão obtidas pela teoria linear / não linear por TAN et al [4] para o cálculo das tensões internas, conforme:

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} \pm E' \frac{|y|}{r} & \left| \frac{y}{r} \right| \leq \varepsilon_x^* \\ \pm K \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} \left| \frac{y}{r} \right|^n & \left| \frac{y}{r} \right| \geq \varepsilon_x^* \end{cases}$$

e a teoria não linear / não linear obtida da teoria desenvolvida por MARCINIAK; DUNCAN [9] para o cálculo das tensões internas, conforme:

$$\sigma_x(y) = \pm K \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} \cdot |\varepsilon|^n \quad \text{onde} \quad \varepsilon = \frac{y}{r}$$

obtemos uma concordância bastante grande entre os resultados produzidos entre ambas teorias para o aço SAE 1006-1008.

TENSÕES INTERNAS

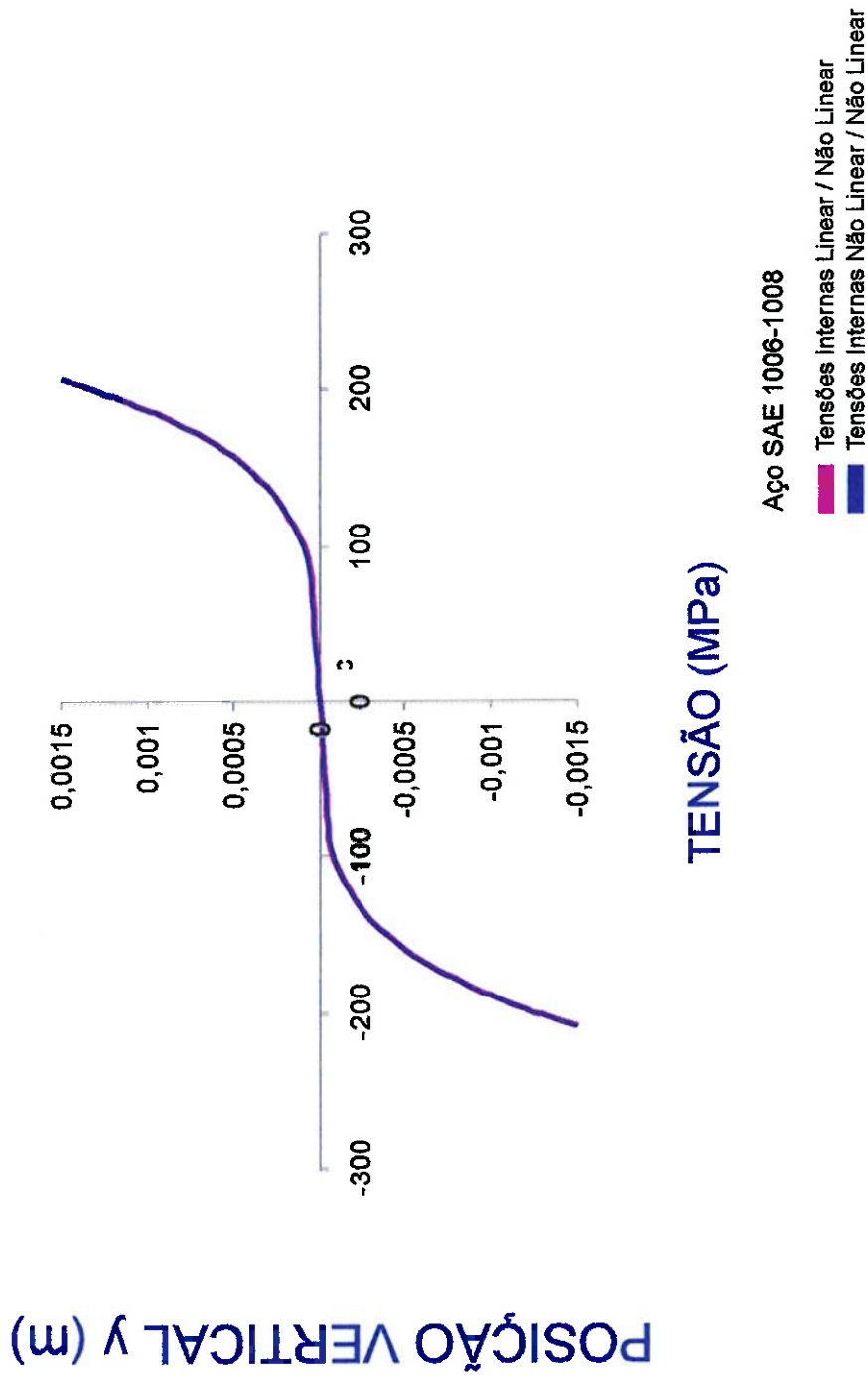


FIG.5.2. Comparação entre tensões internas na flexão previstas por teorias diferentes.

Analisando o gráfico FIG. 5.3. onde temos a comparação entre tensões residuais obtidas analiticamente com valores medidos experimentalmente por difração de raio-X pela teoria linear / não linear por TAN et al [4], conforme equação (2.30):

$$\sigma_{xr}(y) = \sigma_x(y) + \sigma_x^e(y)$$

comparando diretamente os resultados obtidos das tensões residuais, observa-se que o formato das tensões residuais as curvas em forma de S são idênticas e que as posições de picos de tensões residuais tanto no lado positivo de tração como no lado negativo de compressão ocorrem aproximadamente nas posições indicadas pela formulação analítica, o erro entre os dois modelos é da ordem média 10%, variando entre 0 e um valor de pico de 18,5% para o aço SAE 1006-1008.

TENSÕES RESIDUAIS

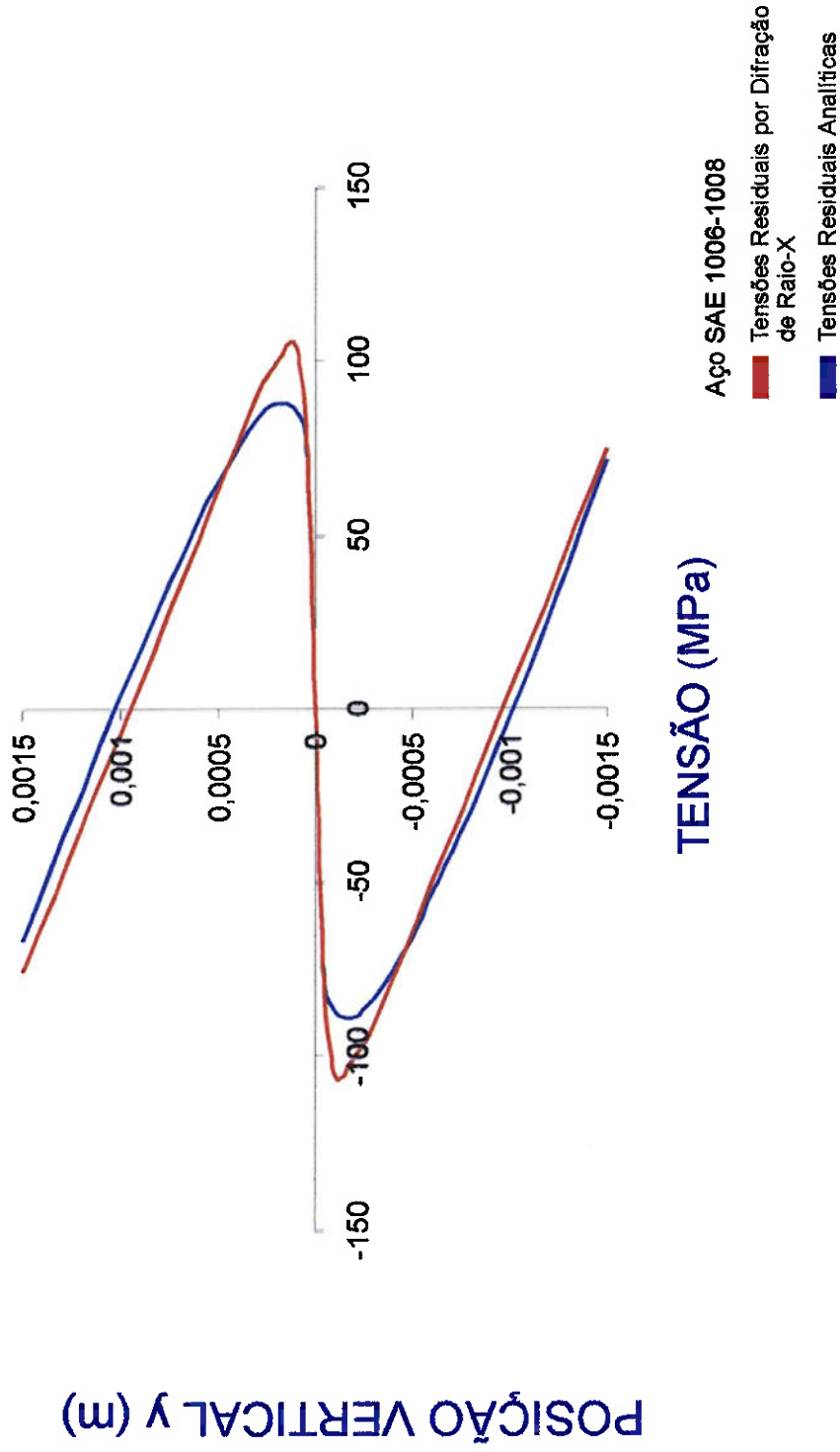


FIG.5.3. Comparação entre tensões residuais obtidas analiticamente com valores medidos experimentalmente.

Analisando o gráfico FIG. 5.4., onde temos a comparação entre a recuperação elástica em termos de curvatura pela curvatura máxima onde:

$$\mathbf{K} = \frac{1}{r} \quad \text{e} \quad \Delta \mathbf{K} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'}$$

(r = raio de dobramento, r' = raio obtido após a recuperação elástica) para o aço SAE 1006-1008 e da liga de alumínio AA 6061-O, observa-se que existe um ponto em que há uma região onde a liga de alumínio AA 6061-O tem menos recuperação elástica que o aço SAE 1006-1008 quando há pequenas curvaturas e outra região que mostra a liga de alumínio AA 6061-O com recuperação elástica muito maior que o aço SAE 1006-1008 região de grandes curvaturas.

RECUPERAÇÃO ELÁSTICA

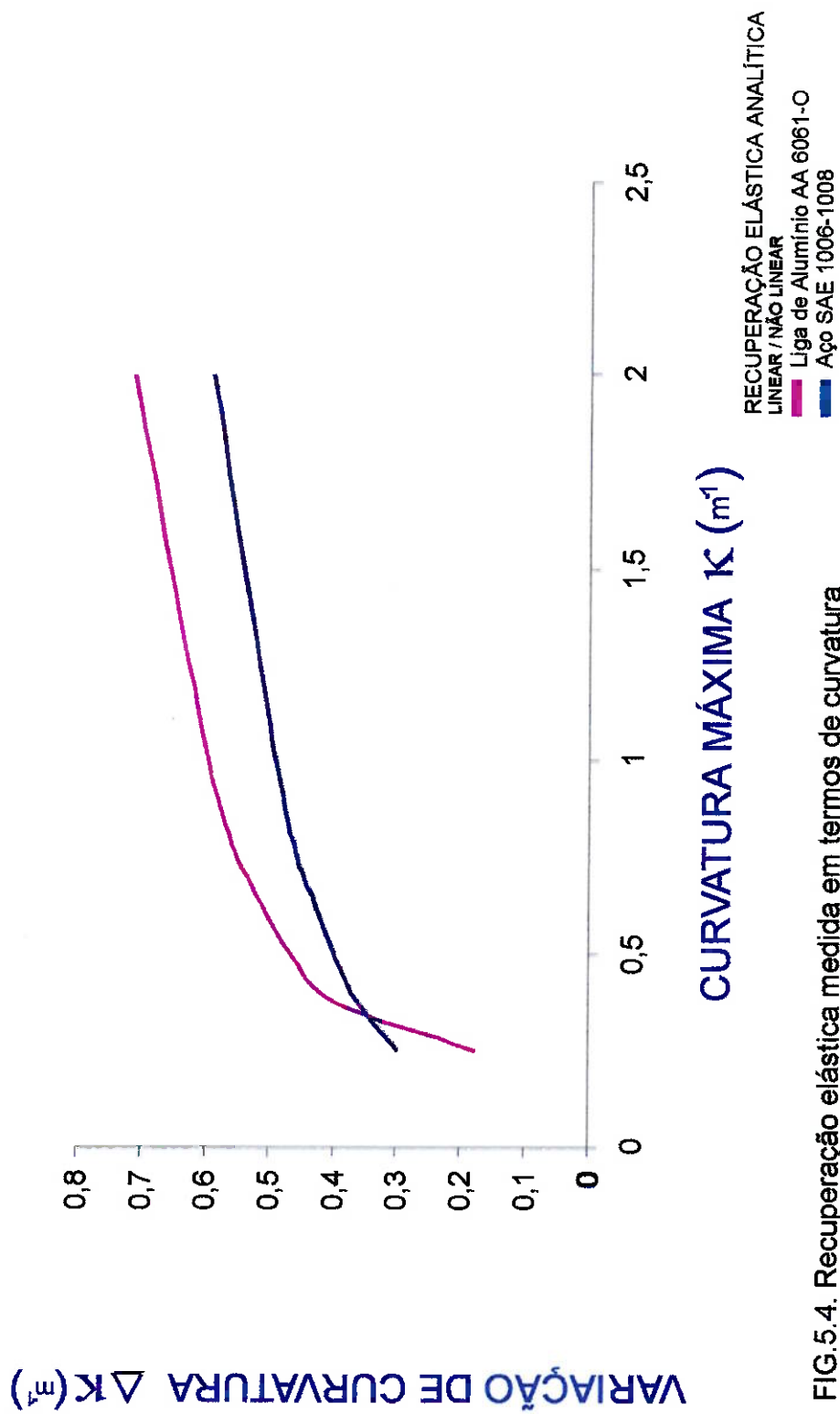


FIG.5.4. Recuperação elástica medida em termos de curvatura versus curvatura máxima.

Finalizando essa dissertação, podem ser feitas as seguintes conclusões:

- Verificou-se que a teoria adotada nesta modelagem produz resultados semelhantes a outras teorias já mencionadas.
- Os valores observados experimentalmente por outros autores comprovam que os resultados dessa teoria, quando aplicados ao modelo desenvolvido nesse trabalho, exibiu valores compatíveis.
- Comparando as tensões residuais da liga de alumínio AA 6061-O por serem menores que a do aço SAE 1006-1008, constatou-se que o fator dominante nesta variação dentre os parâmetros do material (E , ν , n e K) é o coeficiente de resistência K .
- Comparando o recuperação elástica da liga de alumínio AA 6061-O (E , ν , n e K) que tem menor recuperação elástica para pequenas curvaturas do que o aço SAE 1006-1008, e que a liga de alumínio AA 6061-O tem maior recuperação elástica para grandes curvaturas o fator que domina nesta variação é o coeficiente de resistência K .
- Da mesma forma, as máximas tensões internas em cada material durante o carregamento dependem dos parâmetros do material e parâmetros geométricos; o fator mais importante nesta variação é o coeficiente de resistência K .

Atualmente as indústrias buscam uma análise de uma chapa fina do material a ser dobrado, fazendo vários ensaios de dobramento da mesma arquivados em um banco de dados, formando um arquivo de data-base onde em geral são considerados: material a

ser dobrado, força de atuação, permanência da força aplicada após a peça dobrada, espessura da chapa e sentido de laminação.

A proposta desse trabalho foi proporcionar um estudo analítico do processo de dobramento de chapas metálicas através de um modelo simplificado. Não obstante, simplificado, proporcionou bons resultados coerentes com os resultados experimentais.

6. RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Podem ser feitas as seguintes recomendações para trabalhos futuros:

1. Na teoria linear / não linear considerar a variação da posição da LN (Linha Neutra) durante o processo de dobramento.
2. Inclusão das tensões transversais, das tensões radiais que foram desprezadas supondo $\sigma_y \sim 0$.
3. Inclusão de fatores como: razão de deformação e fatores de inércia na análise de modo a verificar qual o efeito deles no momento final das grandezas em questão.
4. Considerar efeitos como Bauschinger.
5. Foi utilizado plasticidade para materiais isotrópicos com encruamento isotrópico onde se poderia ter encruamento do tipo cinemático.
6. Incluir efeitos de dano no material durante o processamento.
7. Incluir também os fatores de anisotropia do material.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] TOH, C.H. *Process modeling of sheet metal forming of general shapes by the finite element method based on large strain formulation*. California, Berkeley, 1983. 222 p. Doctor Dissertation – University of California, Berkeley.
- [2] BRESCIANI FILHO, Ettore; ZAVAGLIA, Cecília A. C.; BUTTON, Sérgio T.; GOMES, Edson; NERY, Fernando A. C. *Conformação plástica dos metais*. 4. ed., Universidade de Campinas, 1990.
- [3] GRÜNING, Klaus. *Técnica da conformação*. São Paulo: Polígono, 1973.
- [4] TAN, Z.; LI, W. B.; PERSSON, B. On analysis and measurement of residual stresses in the bending of sheet metal. *International Journal Mechanical Sci.*, nº 5, v. 36, p. 483-491, 1993.
- [5] TAN, Z.; PERSSON, B.; MAGNUSSON, C. Plastic bending of anisotropic sheet metals. *International Journal Mechanical Sci.*, nº 4, v. 37, p. 405-421, 1994.
- [6] QUEENER, C. A.; DE ANGELIS, R. J. *Elastic springback and residual stress in sheet metal formed by bending*. Transactions of the ASME, v.61, p. 757-768, 1968, apud 4.
- [7] NADAI, A. *Theory of flow and fracture os solids*. New York, McGraw-Hill, 1950. 353 p.
- [8] MARIN, J. *Engineering materials*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1952. p. 150.
- [9] MARCINIAK, Z.; DUNCAN, J. L. *Mechanics of sheet metal forming*. A Division of Hodder & Stoughton. London, 1991.
- [10] ALEXANDER, J. M. An analysis of the plastic of wide plate, and the effect of stretching on transverse residual stresses. *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers*, v. 173, p. 73-96, 1959.
- [11] DENTON, A. A. Plane strain bending with work hardening. *Journal of Strain Analysis*. nº 3, v. 3, p. 196-203, 1966.
- [12] GARDINER, F. J. *The springback of metals*. Transactions of the ASME, v. 79, nº 1, p. 1-9, 1957, apud 4.
- [13] EL-DOMIATY, A. A.; SHABARA, M. A. N.; AL-ANSARY, M. D. Determination of stretch - bendability of sheet - metals. *Institute Journal Mechanical Tools Manufacturing*. nº 5 v. 36, p. 635-650, 1995.

- [14] SIDEBOTTOM, O. M., GEBHARDT, C. F. Elastic springback in plates and beams formed by bending. *Experimental Mech.* v. 19, 1979, p. 371-377.
- [15] HILL, R. *The mathematical theory of plasticity*. London, Oxford University Press, 1950. p. 287-294.
- [16] LUBAHN, J.; SACHS, G. *Bending of an ideal plastic metal*. Transactions of the ASME, v. 72, p. 201-208, 1950.
- [17] DIETER, George E. *Metalurgia mecânica*. 2.ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981.
- [18] CHIAVERINI, Vicente. *Aços e ferros fundidos*. Associação Brasileira de Metais. 6. ed. São Paulo, 1988.

APÊNDICE A

ANÁLISE DAS TENSÕES E DEFORMAÇÕES DO MATERIAL NO REGIME PLÁSTICO

Segundo MARIN [8] a Teoria da Deformação Plástica segue os seguintes parâmetros:

1. As direções das deformações plásticas principais coincidem com as direções das tensões principais.
2. O volume é constante na plasticidade.
3. A razão entre as três deformações de cisalhamento principais e as três tensões de cisalhamento é constante.

Componentes plásticas do tensor de deformações, supondo que os componentes de $\underline{\underline{\varepsilon}}$, em coordenadas principais, sejam proporcionais aos componentes de tensões reduzidas.

$\underline{\underline{\sigma}}$ permite escrever:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^P = \phi \underline{\underline{\sigma}}$$

$$\varepsilon_1^P = \phi \sigma_1'$$

$$\varepsilon_2^P = \phi \sigma_2'$$

$$\varepsilon_3^P = \phi \sigma_3'$$

Logo:

$$\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p = \phi(\sigma_1' - \sigma_2') \quad \varepsilon_2^p - \varepsilon_3^p = \phi(\sigma_2' - \sigma_3') \quad \varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p = \phi(\sigma_1' - \sigma_3')$$

E portanto, a razão entre as diferenças das deformações principais e tensões principais são equivalentes:

$$\frac{\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p}{\sigma_1' - \sigma_2'} = \frac{\varepsilon_2^p - \varepsilon_3^p}{\sigma_2' - \sigma_3'} = \frac{\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p}{\sigma_1' - \sigma_3'} = \phi$$

Alternativamente, poderíamos supor que os componentes de deformação plástica em cisalhamento sejam proporcionais aos componentes de tensão de cisalhamento:

$$\gamma_{12}^p = \psi \tau_{12} \quad \varepsilon_{12}^p = \frac{\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p}{2} \quad \tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$\gamma_{23}^p = \psi \tau_{23} \quad \varepsilon_{23}^p = \frac{\varepsilon_2^p - \varepsilon_3^p}{2} \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

$$\gamma_{31}^p = \psi \tau_{31} \quad \varepsilon_{31}^p = \frac{\varepsilon_3^p - \varepsilon_1^p}{2} \quad \tau_{31} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$$

Multiplicando por 2 os componentes acima resultam :

$$2 \cdot \frac{\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p}{2} = \psi \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \frac{\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\psi}{2}$$

$$2 \cdot \frac{\varepsilon_2^p - \varepsilon_3^p}{2} = \psi \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad \frac{\varepsilon_2^p - \varepsilon_3^p}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\psi}{2}$$

$$2 \cdot \frac{\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p}{2} = \psi \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad \frac{\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\psi}{2}$$

Logo:

$$\gamma^p = 2 \varepsilon^p \Rightarrow \frac{\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varepsilon_2^p - \varepsilon_3^p}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_3^p - \varepsilon_1^p}{\sigma_3 - \sigma_1} = \frac{\psi}{2}$$

Os componentes de tensão reduzida σ'_1 , σ'_2 , σ'_3 , segundo BRESCIANI FILHO et al.

[2], podem ser escritas como:

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3}$$

$$\sigma'_2 = \sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{3}$$

$$\sigma'_3 = \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3}$$

Subtraindo $\sigma'_1 - \sigma'_2$ temos :

$$\sigma'_1 - \sigma'_2 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - 2\sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_1}{3} = \frac{3\sigma_1 - 3\sigma_2}{3} = \sigma_1 - \sigma_2$$

Subtraindo $\sigma'_2 - \sigma'_3$ temos :

$$\sigma'_2 - \sigma'_3 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1 - 2\sigma_3 + \sigma_1 + \sigma_2}{3} = \frac{3\sigma_2 - 3\sigma_3}{3} = \sigma_2 - \sigma_3$$

Subtraindo $\sigma'_1 - \sigma'_3$ temos :

$$\sigma'_1 - \sigma'_3 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - 2\sigma_3 + \sigma_1 + \sigma_2}{3} = \frac{3\sigma_1 - 3\sigma_3}{3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

Finalmente, verifica-se que :

$$\therefore \frac{\Psi}{2} = \frac{\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p}{\sigma'_1 - \sigma'_2} = \frac{\varepsilon_2^p - \varepsilon_3^p}{\sigma'_2 - \sigma'_3} = \frac{\varepsilon_3^p - \varepsilon_1^p}{\sigma'_3 - \sigma'_1} = \phi$$

Portanto ϕ e ψ são múltiplos, e ambas teorias são idênticas, e podemos utilizar um módulo K para descrevê-las.

Relacionando as deformações plásticas com as tensões e comparando com K, temos:

$$\frac{\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varepsilon_2^p - \varepsilon_3^p}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_3^p - \varepsilon_1^p}{\sigma_3 - \sigma_1} = K$$

Logo:

$$\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p = K(\sigma_1 - \sigma_2)$$

$$\varepsilon_2^p - \varepsilon_3^p = K(\sigma_2 - \sigma_3)$$

$$\varepsilon_3^p - \varepsilon_1^p = K(\sigma_3 - \sigma_1)$$

E portanto:

$$\varepsilon_1^p = K(\sigma_1 - \sigma_2) + \varepsilon_2^p$$

$$\varepsilon_2^p = K(\sigma_2 - \sigma_3) + \varepsilon_3^p$$

$$\varepsilon_3^p = K(\sigma_3 - \sigma_1) + \varepsilon_1^p$$

Considerando o volume constante na plasticidade:

$$\varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p = 0$$

Logo:

$$\varepsilon_3^p = -\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p$$

$$\varepsilon_3^p = K(\sigma_3 - \sigma_1) + \varepsilon_1^p$$

$$-\varepsilon_1^p = \frac{\varepsilon_2^p}{2} + \frac{K}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)$$

$$-K(\sigma_1 - \sigma_2) - \varepsilon_2^p = \frac{\varepsilon_2^p}{2} + \frac{K}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)$$

$$3 \frac{\varepsilon_2^p}{2} = -K\sigma_1 + K\sigma_2 - \frac{K}{2}\sigma_3 + \frac{K}{2}\sigma_1$$

$$\frac{3}{2}\varepsilon_2^p = \frac{-K}{2}\sigma_1 + K\sigma_2 - \frac{K}{2}\sigma_3$$

Logo :

$$\varepsilon_2^p = \frac{2}{3}K \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \right] \quad (A1)$$

Da mesma forma:

$$\varepsilon_2^p = K(\sigma_2 - \sigma_3) + \varepsilon_3^p$$

$$\frac{2}{3}K \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \right] = K(\sigma_2 - \sigma_3) + \varepsilon_3^p ,$$

$$\varepsilon_3^p = \frac{2}{3}K\sigma_2 - \frac{1}{3}K(\sigma_3 + \sigma_1) - K(\sigma_2 - \sigma_3)$$

$$\varepsilon_3^p = \frac{2}{3}K\sigma_2 - \frac{K}{3}\sigma_3 - \frac{K}{3}\sigma_1 - K\sigma_2 + K\sigma_3$$

$$\varepsilon_3^p = \frac{2}{3}K \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_3 - \frac{\sigma_1}{2} - \frac{3}{2}\sigma_2 + \frac{3}{2}\sigma_3 \right]$$

$$\varepsilon_3^p = \frac{2}{3}K \left[\sigma_3 - \frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_2}{2} \right] ;$$

$$\varepsilon_3^p = \frac{2}{3}K \left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right] \quad (A2)$$

E finalmente:

$$\varepsilon_1^p = K(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{2}{3}K\sigma_2 - \frac{K}{3}[\sigma_3 + \sigma_1]$$

$$\varepsilon_1^p = \frac{2K}{3} \left[\frac{3}{2}\sigma_1 - \frac{3}{2}\sigma_2 + \sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_3 - \frac{1}{2}\sigma_1 \right]$$

$$\varepsilon_1^p = \frac{2K}{3} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] \quad (A3)$$

Tensões e deformações equivalentes.

Elevando ao quadrado as expressões temos :

$$\begin{aligned} \left[\sigma_1 - \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right) \right]^2 &= \sigma_1^2 - \sigma_1 (\sigma_2 + \sigma_3) + \frac{1}{4} (\sigma_2 + \sigma_3)^2 \\ &= \sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 + \frac{1}{4} (\sigma_2^2 + 2\sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\sigma_2 - \left(\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right) \right]^2 &= \sigma_2^2 - \sigma_2 (\sigma_3 + \sigma_1) + \frac{1}{4} (\sigma_3 + \sigma_1)^2 \\ &= \sigma_2^2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_1 + \frac{1}{4} (\sigma_3^2 + 2\sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\sigma_3 - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) \right]^2 &= \sigma_3^2 - \sigma_3 (\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2 \\ &= \sigma_3^2 - \sigma_3 \sigma_1 - \sigma_3 \sigma_2 + \frac{1}{4} (\sigma_1^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2) \end{aligned}$$

Somando o resultado acima temos :

$$+\Sigma = \frac{3}{2} \sigma_1^2 + \frac{3}{2} \sigma_2^2 + \frac{3}{2} \sigma_3^2 - \frac{3}{2} \sigma_1 \sigma_2 - \frac{3}{2} \sigma_2 \sigma_3 - \frac{3}{2} \sigma_3 \sigma_1$$

OBS. :

$$\begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 \\ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 &= \sigma_2^2 - 2\sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3^2 \\ (\sigma_3 - \sigma_1)^2 &= \sigma_3^2 - 2\sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 - 2\sigma_2 \sigma_3 - 2\sigma_3 \sigma_1$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$ cada diferença de quadrados e este resultado final, sendo

multiplicado por $\frac{3}{2}$ temos :

$$\Sigma = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$

porém este resultado equivale à soma dos quadrados das deformações plásticas:

$$\therefore \varepsilon_1^{p2} + \varepsilon_2^{p2} + \varepsilon_3^{p2} = \frac{\varepsilon_p^2}{S^2} \quad \Sigma = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right],$$

definindo:

$\bar{\varepsilon}^p$ = Deformação equivalente

$\bar{\sigma}$ = Tensão equivalente (Von Mises)

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\frac{2}{3} (\varepsilon_1^{p2} + \varepsilon_2^{p2} + \varepsilon_3^{p2})}{\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{\varepsilon_p^2}{\bar{\sigma}^2} \\ \text{onde:} & \left[\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^p &= \sqrt{\frac{2}{3} (\varepsilon_1^{p2} + \varepsilon_2^{p2} + \varepsilon_3^{p2})} \\ \bar{\sigma} &= \sqrt{\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\} \frac{\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} = \frac{\varepsilon^p}{\sigma} \quad (A4)$$

sendo ε^p a deformação plástica unidimensional associada e σ a correspondente tensão unidimensional associada.

Finalmente temos a Tensão Equivalente:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}[\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_3\sigma_1 + \sigma_1^2]}$$

Logo :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}$$

OBS. : $\bar{\sigma} = K \bar{\epsilon}^n$

APÊNDICE B

ANÁLISE DAS TENSÕES E DEFORMAÇÕES NAS DIREÇÕES PRINCIPAIS

ELASTICIDADE : Pela Teoria da ELASTICIDADE dos materiais temos:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Lei de Hooke : $\sigma = E \cdot \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$

Para $\sigma > \sigma_0$:

Expressão de Potência : $\sigma = K \cdot \varepsilon^n \Rightarrow \varepsilon = \left(\frac{\sigma}{K}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{K^n} \cdot \sigma^{\frac{1}{n}}$

As deformações em 1, 2, 3 são dadas por :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^e + \varepsilon_1^p \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2^e + \varepsilon_2^p \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_3^e + \varepsilon_3^p$$

Sabendo que $f = \bar{\sigma} - R$ e que:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$R = K \bar{\varepsilon}^n$$

Derivando as deformações em relação a 1, 2, 3 temos :

$$\varepsilon_1^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_1}$$

$$\varepsilon_2^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}$$

$$\varepsilon_3^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_3}$$

Obtemos os resultados:

$$\varepsilon_1^p = \lambda \cdot \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\bar{\sigma}} \cdot \frac{1}{2} = \lambda \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{2\bar{\sigma}}$$

$$\varepsilon_2^p = \lambda \cdot \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{\bar{\sigma}} \cdot \frac{1}{2} = \lambda \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{2\bar{\sigma}}$$

$$\varepsilon_3^p = \lambda \cdot \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{\bar{\sigma}} \cdot \frac{1}{2} = \lambda \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{2\bar{\sigma}}$$

Desenvolvendo as equações acima, resulta que:

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1$$

$$\lambda = \bar{\varepsilon}^p$$

Sendo:

$$\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \left[(\varepsilon_1^p)^2 + (\varepsilon_2^p)^2 + (\varepsilon_3^p)^2 \right]}$$

De forma que:

$$\bar{\sigma} = K \bar{\varepsilon}^n$$

$$\bar{\varepsilon} = \left(\frac{\bar{\sigma}}{K} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\bar{\varepsilon} \cong \bar{\varepsilon}^p = \left(\frac{\bar{\sigma}}{K} \right)^{\frac{1-n}{n}} \frac{\bar{\sigma}}{K}$$

onde:

$$\bar{\varepsilon}^p = \lambda$$

ou :

$$\varepsilon_1^p = \left(\frac{\bar{\sigma}}{K}\right)^{\frac{1-n}{n}} \frac{\bar{\sigma}}{K} \cdot \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\bar{\sigma}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon_1^p = \frac{1}{K} \left(\frac{\bar{\sigma}}{K}\right)^{\frac{1-n}{n}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) = \frac{1}{K^{\frac{1}{n}}} \left(\frac{\bar{\sigma}}{K}\right)^{\frac{1-n}{n}} (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon_1^p = \frac{1}{K^{\frac{1}{n}}} \left(\frac{\bar{\sigma}}{K}\right)^{\frac{1-n}{n}} \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_3}{2}\right)$$

$$\varepsilon_1^p = \frac{1}{K^{\frac{1}{n}}} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1\right]^{\frac{1-n}{2n}} \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_3}{2}\right) \quad (\text{B1})$$

Analogamente:

$$\varepsilon_2^p = \frac{1}{K^{\frac{1}{n}}} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1\right]^{\frac{1-n}{2n}} \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1}{2}\right) \quad (\text{B2})$$

$$\varepsilon_3^p = \frac{1}{K^{\frac{1}{n}}} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1\right]^{\frac{1-n}{2n}} \left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_2}{2}\right) \quad (\text{B3})$$

PLASTICIDADE:

Caso Universal:

Considerando $\sigma_x = \sigma_0$, do Ponto de Intersecção da Lei de Hooke e pela Expressão de Potência temos:

$$\sigma_0 = K \left(\frac{K}{E} \right)^{\frac{n}{1-n}}$$

onde do caso Universal tensão Elástica temos:

$$\sigma_0 = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \varepsilon_0$$

Isolando ε_0 e substituindo $\sigma_0 = K \left(\frac{K}{E} \right)^{\frac{n}{1-n}}$ temos:

$$\varepsilon_0 = \frac{1-\nu^2}{E} \cdot K \cdot \left(\frac{K}{E} \right)^{\frac{n}{1-n}} = (1-\nu^2) \cdot \left(\frac{K}{E} \right)^{1+\frac{n}{1-n}} = (1-\nu^2) \cdot \left(\frac{K}{E} \right)^{\frac{1}{1-n}}$$

PLASTICIDADE NAS DIREÇÕES PRINCIPAIS

Considerando:

$$\sigma_2 \cong 0$$

Temos:

$$\varepsilon_1^p = \frac{1}{K^n} \left[\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3 \right]^{\frac{1-n}{2n}} \left[\sigma_1 - \frac{\sigma_3}{2} \right] \quad (\text{B4})$$

$$\varepsilon_2^p = \frac{1}{K^n} \left[\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3 \right]^{\frac{1-n}{2n}} \left[-\frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_3}{2} \right] \quad (\text{B5})$$

$$\begin{cases} \varepsilon_3^p = \frac{1}{K^n} \left[\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3 \right]^{\frac{1-n}{2n}} \left[\sigma_3 - \frac{\sigma_1}{2} \right] \\ \varepsilon_3^p = 0 \end{cases} \quad (\text{B6})$$

onde :

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_1}{2}$$

NOTA :

$$\varepsilon_1^p = \frac{1}{K^n} \left[\sigma_1^2 + \frac{\sigma_1^2}{4} - \frac{\sigma_1 \sigma_1}{2} \right]^{\frac{1-n}{2n}} \frac{3\sigma_1}{4}$$

$$\varepsilon_2^p = \frac{1}{K^n} \left[\frac{3\sigma_1^2}{4} \right]^{\frac{1-n}{2n}} \left[-\frac{3\sigma_1}{4} \right]$$

$$\varepsilon_2^p = -\varepsilon_1^p$$

ELASTICIDADE :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

Sendo $\sigma_2 = 0$ temos:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu\sigma_3]$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\nu}{E}[\sigma_3 + \sigma_1]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[-\nu(\nu\sigma_1 + \sigma_1)]$$

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon_3 = 0 \Rightarrow \sigma_3 = \nu\sigma_1 \\ \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_1 \neq 0, \text{ P.}\varepsilon. \end{array} \right.$$

$$E\varepsilon_2 = (-\nu^2 - \nu)\sigma_1$$

$$\sigma_1 = \frac{-E}{\nu(\nu+1)}\varepsilon_2$$

$$E\varepsilon_1 = \frac{-E}{\nu(\nu+1)}\varepsilon_2 - \nu\sigma_3 = \frac{-E}{\nu+\nu^2}\varepsilon_2 - \nu^2\sigma_1 = -\frac{E}{\nu+\nu^2}\varepsilon_2 + E\frac{\nu^2}{\nu+\nu^2}\varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{\nu+\nu^2}\varepsilon_2 + \frac{\nu^2}{\nu+\nu^2}\varepsilon_2$$

Logo:

$$\varepsilon_1 = \frac{-1+\nu^2}{\nu+\nu^2}\varepsilon_2 \tag{B7}$$

E que:

$$\varepsilon_2 = \frac{\nu+\nu^2}{-1+\nu^2}\varepsilon_1 \tag{B8}$$

onde:

$$\varepsilon_2 \neq -\varepsilon_1 \text{ se. } v \neq \frac{1}{2}$$

Finalmente:

$$\sigma_1 = \frac{-E v(1+v)}{v(1+v)(-1+v^2)} \varepsilon_1 = -\frac{E}{-1+v^2} \varepsilon_1$$

Logo:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-v^2} \varepsilon_1 \tag{B9}$$