HELDER DE AGUIAR ALVES HENRIQUE
Eng. Naval, Universidade de São Paulo, 1987

ANÁLISE DINÂMICA DE SISTEMAS MULTICORPOS

UMA ABORDAGEM PELAS EQUAÇÕES DE KANE

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

ORIENTADOR: PROF. DR. LUÍS NOVAES FERREIRA FRANÇA

São Paulo, 1993

ok

Aos meus pais, Wilna e Manoel

AGRADECIMENTOS

Desejo externar os meus mais sinceros agradecimentos:

Ao meu orientador, Prof. Dr. Luís Novaes Ferreira França, pelas suas valiosas sugestões e empenho constante.

À Promon Engenharia, especialmente aos Engenheiros Carlos J. Meismith e Diogo Dominguez que tornaram possível a realização deste trabalho.

SUMARIO

LISTA DE FIGURAS

FIGURAS

LISTAS DE TABELAS

RESUMO

Neste trabalho apresentar-se-á uma metodologia de análise dinâmica para sistemas como robôs, mecanismos, cabos, sistemas biomecânicos e suspensões de veiculos.

Os sistemas analisados podem conter um conjunto de corpos rígidos com uma cadeia fechada, assim como corpos com movimentos especificados (exemplo: um corpo do sistema com aceleração velocidade e deslocamento conhecidos em função do tempo).

Para a obtenção das equações do movimento será usado o Princípio de D'Alembert na forma de Lagrange (Equações de Kane). Ele possue a vantagem do método de Lagrange (pois elimina automaticamente as forças vinculares internas, que não realizam trabalho, através de complementos ortogonais) sem a correspondente desvantagem (a derivação das funções escalares de Energia é substituida por um produto vetorial).

O uso das velocidades angulares relativas (expressas em termos de parâmetros de Euler) como velocidades generalizadas da análise permite obter vantagens computacionais com o método empregado.

O sistema de equações diferenciais é integrado pelo método de Runge Kutta de quarta ordem o qual apresenta boa estabilidade numérica.

Os dados necessários para análise são as características geométricas através do vetor de conexão dos corpos, as características fisicas dos corpos e suas propriedades, os tipos de junta existentes, as forças aplicadas e as condições iniciais. Como resultado ter-se-á a configuração e o movimento (aceleração, aceleração angular, velocidades e velocidades angulares) do sistema em intervalos de tempo iguais, assim como os esforços (forças e momentos) nas juntas.

"ABSTRACT"

This work brings forth a methodology for dynamical analysis of systems like robots, mechanisms, cables, biomechanical systems and vehicle suspensions.

The analized systems can contain sets of rigid bodies with a single closed loop and bodies with specified movements. (For example: a body system with acceleration, velocity and displacement fields known in time).

D'Alembert Principle presented in Lagrangian form (Kane's Equation) will be used to deduce the equations of the moviment. This procedure allows that the orthogonal complement eliminate the nonworking internal forces (like in Lagrange method) without the disadvantages (the derivation of energy functions is substituted by a product of vectors).

The use of relative angular velocities (expressed in terms of Euler parameters) as generalized velocities gives advantages to the computational algorithms.

The equation system is then integrated with the Runge Kutta fourth order method which present good numerical stability.

The required data for the analysis are the physical caracteristics and the geometrical ones (known through the body conection array which describe the topology of the model) , the joint types, the applied forces and the initial conditions. As final results, it will be determined the time history of the movement ,i.e., the system form and movement (acceleration, angular acceleration, velocity and angular velocity) in the same intervals of time like the strains (forces and movements) in the joints.

I. INTRODUÇÃO:

A dissertação a seguir fará um estudo dinâmico de sistemas multicorpos. Para isso um sistema físico de Engenharia será transformado em um modelo com um número finito de variáveis.

Segundo Costa Neto [3] num estudo de problemas de Engenharia, em especial de Sistemas Multicorpos cinco etapas se destacam na análise:

1. Descrever o sistema físico através de um modelo simplificado;

2. Deduzir as equações constitutivas do sistema que descrevem matematicamente o seu comportamento;

3. Resolver o sistema de equações resultantes numericamente e se possível analiticamente com o objetivo de simular o comportamento do sistema;

4. Comparar os resultados obtidos com o comportamento do sistema real;

5. Modificar o modelo do sistema, se necessário, ou então usa-lo para objetivos de análise ou de projeto.

O uso de computadores para resolver as Etapas 2 e 3 desse processo liberou os Engenheiros e os Cientistas para concentrarem mais tempo de sua análise na modelagem e verificação do sistema.

I.1 MÉTODOS NUMÉRICOS

O objetivo desse trabalho é apresentar uma técnica de modelagem em Sistemas Multicorpos baseada nas Equações de Kane. O método apresentado por Kane é a formulação utilizada em programas computacionais tais como o SD/FAST[12], ADAMS e o programa SISMUL apresentado no final dessa dissertação.

O método de Kane foi apresentado em 1961 [13]. Logo após, conforme Costa Neto [3], Hooker e Robertson, na California, apresentaram uma proposta de desenvolvimento de um programa de sistemas multicorpos. Em 1965 Hooker e Margoulis na Califória desenvolveram os primeiros programas computacionais de sistemas multicorpos contendo apenas cadeias abertas e vínculos holônomos próprios para a indústria aeroespacial.

No começo dos anos 70 pelo trabalho de Orlandea introduziram-se cadeias fechadas e vínculos não holônomos, o qual deu origem ao programa ADAMS. Este programa lida com a forma mais geral das equações do movimento, sendo que cada cada parâmetro da equação diferencial assim como seus coeficientes precisam ser calculados diversas vezes em cada intervalo de integração.

1.2 MÉTODOS SIMBÓLICOS

Para tentar solucionar esse problema Levinson em 1976 introduziu o uso de linguagens de programação simbólicas de uso genérico, tais como a MACSYMA e REDUCE, as quais por técnicas especiais geravam programação FORTRAN.

Essas técnicas através de métodos de formação simbólica de sistemas multicorpos chegavam as equações dinâmicas do sistema. Assim as resoluções numéricas dessas equações são mais eficientes do que aquela obtida com o uso de programas que lidam com as formas mais gerais das equações dos sistemas multicorpos.

Paralelamente, foi desenvolvido um método de programação simbólica para ser combinado com os formalismos dos programas numéricos de sistemas multicorpos, gerando códigos de sistemas multicorpos mais eficientes.

Em 1983 Rosenthal e Sherman desenvolveram seu programa SD/EXACT como parte de um projeto para a NASA a qual tinha por objetivo rodar programas envolvendo sistemas multicorpos não holônomos e com várias cadeias fechadas em tempo real. Os resultados foram os mais exatos até então. Eles utilizaram, também, o método de Kane porém com manipulação simbólica.

Existem ainda programas como o AUTOLEV e os desenvolvidos pelo SDRC (Structural Dynamics Research Laboratory) [16]. Estes programas que com o uso de técnicas de animação, permitem que a história no tempo do sistema dinâmico seja visualizada na tela do computador, apresentam ainda resultados já certificados pelo uso e a possibilidade de acomodar futuras implememtações.

O programa apresentado ao final dessa dissertação apresenta também uma parte de pósprocessamento gráfico. Nela é possível traçar gráficos dos esforços nas juntas, assim como deslocamentos, velocidades e acelerações dos corpos em função do tempo.

1.3 NOTAÇÕES

As notações utilizadas serão as seguintes:

-Variáveis vetoriais absolutas serão escritas com um "~" embaixo do carácter. Já as relativas serão escritas como as absolutas porém com um "^" em cima do carácter representativo.

-Variáveis escalares serão designadas sem "^" ou "~".

-Produto escalar será indicado por [.] .

-Produto vetorial será indicado por [^] .

-Produto matricial será indicado por [*] .

As variáveis escalares quando utilizadas para descrever a posição de um ponto num sistema de coordenadas cartesiano são chamadas coordenadas cartesianas e serão definidas a seguir:

$$x_i = \underset{\sim}{p}_i \cdot \underset{\sim}{n}_x$$

$$y_i = \underset{\sim}{p}_i \cdot \underset{\sim}{n}_y$$

$$z_i = \underset{\sim}{p}_i \cdot \underset{\sim}{n}_z$$

Aonde $\underset{\sim}{p}$ é o vetor posição fixo na origem do sistema cartesiano de versores $\underset{\sim}{n}_x$, $\underset{\sim}{n}_y$ e $\underset{\sim}{n}_z$ nas direções x , y e z respectivamente.

2. O MÉTODO DE KANE [5],[6],[7],[8]

Os programas ADAMS, SD/FAST e o SISMUL apresentam em comum o fato de utilizarem a metodologia de KANE.

A metodologia de Kane é também chamada de Princípio D'Alembert na forma de Lagrange. De fato, os formalismos existentes estão inter-relacionados, e todos eles se baseiam nas Equações de Newton.

2.1 TIPOS DE VÍNCULOS:[4]

(Vínculos holônomos e não holônomos)

Considere um sistema S, formado por M pontos materiais P_i, em movimento em relação a um referencial inercial. Suponha que esses pontos não estejam totalmente livres, mas sim que existam restrições ou vínculos que limitem parcialmente suas posições;

Assim, relações dos tipos:

$$F(P_i, \dot{P}_i, t) = 0 \qquad (1)$$

$$F(P_i, t) = 0 \qquad (2)$$

podem ser escritas e são ditas vínculos. A relação (1) é dita vínculo cinemático e a relação (2) vínculo geométrico.

A relação (2) pode ser escrita como sendo:

$$F(P_i, t) = F(x_i, y_i, z_i, t) = 0$$

que se for derivada levará a:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial F}{\partial z_i} \dot{z}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

A relação (1) é definida como vínculo holônomo se for integrável. Caso contrário será vínculo não holônomo. Os vínculos poderão ser classificados como reonômicos se o tempo comparecer explicitamente ou esclerônomos caso contrário.

EXEMPLO DE VÍNCULO HOLÔNOMO:

Suponha um disco que rola sem escorregar no plano XY da figura abaixo.

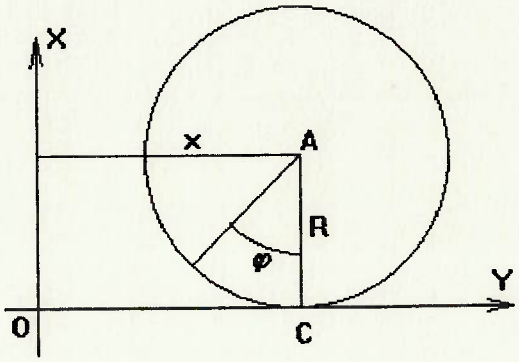


FIGURA 1 EXEMPLO DE VÍNCULO HOLÔNOMO

Nessas condições pode-se escrever:

$V_C = 0$ e

$V_A = R\,\omega$, $\dot{x} = R\,\dot{\varphi}$

$x = R\,\varphi + k$ (k é uma constante arbitrária)

$F = x - R\,\varphi - k = 0$ vínculo holônomo.

EXEMPLO DE VÍNCULO NÃO HOLÔNOMO.

Suponha uma moeda circular que role sem escorregar e se mantenha vertical conforme figura abaixo;

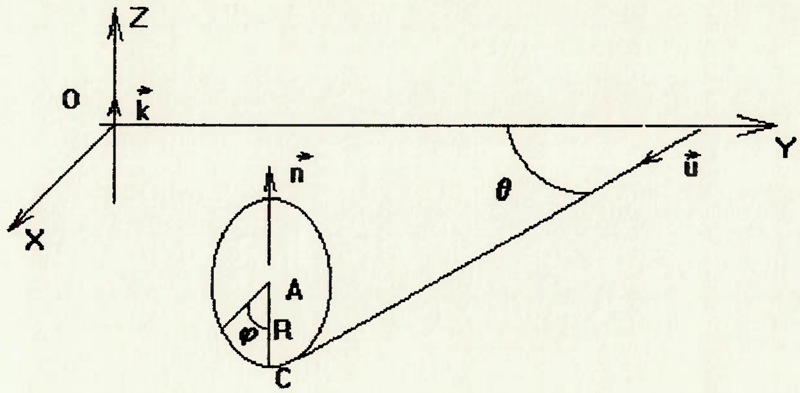


FIGURA 2 EXEMPLO DE VINCULO NÃO HOLONOMO

A posição da moeda pode ser definida por quatro variáveis x, y, θ, φ. Essas variáveis estão sujeitas a vínculos cinemáticos que decorrem da ausência de escorregamento: $\underset{\sim}{V}_C = \underset{\sim}{0}$.

$$\underset{\sim}{V}_C = \underset{\sim}{V}_A + \underset{\sim}{\omega} \wedge (C - A) = \underset{\sim}{0}$$

$$\underset{\sim}{V}_A = - R \dot{\varphi} \underset{\sim}{u}$$

com $\quad \underset{\sim}{u} = -\cos\theta \underset{\sim}{j} + \operatorname{sen}\theta \underset{\sim}{i} \quad$ tem-se

$$\dot{x} = -R\dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta$$

$$\dot{y} = -R\dot{\varphi} \cos\theta$$

Essas equações diferenciais não são solúveis antes de ser resolvido todo o problema dinâmico do movimento do disco portanto o vínculo é dito não holônomo.

2.2 EQUAÇÃO D'ALEMBERT OU EQUAÇÃO GERAL DA DINÂMICA

Suponha que os N pontos do Sistema S devam satisfazer a relações holônomas do tipo:

$$F(P_i,\ t) = 0$$

ou

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial F}{\partial z_i} \dot{z}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

O sistema S poderá também obedecer a relações não holônomas do tipo:

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \dot{P}_i + \underset{\sim}{\beta} = 0 \qquad (\ \alpha_i \text{ e } \underset{\sim}{\beta} \text{ são funções de } P_i \text{ e } t)$$

Qualquer vetor $\dot{P}_i$ que satisfaça as equações vinculares acima num certo instante ,t, é chamado uma velocidade possível para o ponto P_i pertencente a $\underset{\sim}{S}$. Dessa maneira, as velocidades possíveis são aquelas permitidas pelos vínculos (nos movimentos reais do sistema só poderão ocorrer velocidades possíveis).

Multiplicando-se por dt as relações vinculares ao qual o sistema S está sujeito obter-se-á:

$$\sum_i \frac{\partial F}{\partial P_i} \, . \, dP_i + \frac{\partial F}{\partial t} \, dt = 0$$

$$\sum_i \alpha_i \, dP_i + \beta \, dt = \underset{\sim}{0}$$

Tais vetores dP_i são chamados deslocamentos possíveis dos pontos P_i.

Ao fazer-se dt=0 nas relações acima ter-se-ão valores particulares de dP_i, que serão denotados por δP_i e serão chamados deslocamentos virtuais dos pontos P_i.

Tais deslocamentos satisfazem portanto às relações:

$$\sum_i \frac{\partial F}{\partial P_i} \, . \, \delta P_i = 0$$

$$\sum_i \alpha_i \, \delta P_i = \underset{\sim}{0}$$

Define-se como trabalho virtual do sistema de forças $(\underset{\sim}{F}_i, P_i)$ que atua nos pontos P_i a somatória:

$$\sum_i \underset{\sim}{F}_i \, . \, \delta P_i$$

Seja $\underset{\sim}{R}_i$ a resultante das forças vinculares que atuam no ponto P_i .

Os vínculos são definidos como perfeitos quando:

$$\sum_i \underset{\sim}{R}_i \cdot \delta \underset{\sim}{P}_i = 0$$

quaisquer que sejam os deslocamentos virtuais δP_i compatíveis com os vínculos.

Casos mais comuns de vínculos perfeitos são:

I. Contato com ausência de atrito;

II. Contato com rolamento sem escorregamento.

Considere o sistema S apenas com vínculos perfeitos; Neste caso a Lei de Newton aplicada aos M pontos materiais P_i fornece:

$$m_i \underset{\sim}{a}_i = \underset{\sim}{F}_i + \underset{\sim}{R}_i$$

Onde $\underset{\sim}{F}_i$ é a resultante das forças ativas e $\underset{\sim}{R}_i$ é a resultante das forças vinculares que atuam em P_i.

Substituindo na relação de vínculos perfeitos a relação acima ter-se-á:

$$\sum_{i=1}^{M} (m_i \underset{\sim}{a}_i - \underset{\sim}{F}_i) \cdot \delta P_i = 0$$

Esta é a equação de D'Alembert, ou Equação Geral da Dinâmica , para sistemas com vínculos perfeitos, supondo-se que os δP_i satisfaçam:

$$\sum_i \alpha_i \; \delta P_i = \underset{\sim}{0}$$

$$\sum_i \frac{\partial F}{\partial P_i} \cdot \delta P_i = 0$$

2.3 SISTEMAS HOLÔNOMOS - COORDENADAS GENERALIZADAS

Se o sistema S estiver sujeito a m vínculos holônomos do tipo:

$$F\,(P_i, t) = 0$$

então somente N= n-m das n coordenadas cartesianas serão independentes entre si.

Neste caso se existir um conjunto de N variáveis de modo que

$$P_i = P_i(q_j, t) \qquad j=1,\dots,N$$

a elas dá-se o nome de coordenadas generalizadas do sistema e serão escritas como q_1, q_2 ,...,q_N. O sistema S neste caso possui N graus de liberdade.

Se não houver vínculos para o sistema S, o grau de liberdade deste sistema será no máximo N = n. Os vínculos só podem diminuir os graus de liberdade de um sistema de modo que, em geral, N < n.

2.4 DESLOCAMENTOS POSSÍVEIS , DESLOCAMENTOS REAIS E DESLOCAMENTOS VIRTUAIS NO CASO DE SISTEMAS HOLÔNOMOS:

Os pontos P_i de um sistema holônomo, S , satisfazem a relações do tipo:

$$P_i = P_i\,(q_1,\ldots,q_N,t)$$

onde N é o número de graus de liberdade do sistema S.

Neste caso os deslocamentos possíveis, dP_i serão as diferenciais:

$$dP_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial P_i}{\partial q_j}\, dq_j + \frac{\partial P_i}{\partial t}\, dt$$

dq_j e dt são arbitrários.

Os deslocamentos reais obtém-se a partir dos deslocamentos possíveis fazendo-se:

$$q_j = q_j\,(t)$$

portanto nos deslocamentos reais , os dq_j não são mais arbitrários.

Sabe-se que os deslocamentos virtuais obtém-se dos deslocamentos possíveis fazendo-se dt igual a zero. Daí resultam as expressões abaixo;

$$\delta P_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial P_i}{\partial q_j}\, \delta q_j$$

2.5 EQUAÇOES DE KANE [12]

(Para o caso mais geral de sistemas não holônomos)

Seja o sistema dinâmico S descrito por q_r (r=1,...,n) coordenadas generalizadas, e suponha que as posições dos pontos do sistema se expressem por relações do tipo:

$$P = P\,(\,q_1,\ldots,q_n,t)$$

satisfazendo eventualmente m relações vinculares integráveis ou não da forma:

$$\sum_{r=1}^{n} \alpha_{rs}\dot{q}_r = 0 \qquad (\,3\,)$$

Onde α_{rs} (r=1,...,n e s=1,...,m) são funções de $q_1,q_2,\ldots,q_n$

Como a equação acima é linear em $\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_n$ ela poderá ser resolvida para os m últimos $\dot{q}_r$ dessas equações:

$$\dot{q}_{N+s} = \sum_{r=1}^{N} B_{(N+s)r}\,\dot{q}_r = 0 \qquad , (s=1,\ldots,m)$$

Sendo N o número de graus de liberdade do sistema: N = n - m .

Daí decorre:

$$\delta q_{N+s} = \sum_{r=1}^{N} B_{(N+s)r}\,\delta q_r = 0$$

Em conseqüencia os deslocamentos virtuais, δP_i vão poder se exprimir por relações do tipo:

$$\delta P_i = \sum_{r=1}^{N} \frac{\partial P_i}{\partial q_r} \delta q_r$$

onde os δq_r sendo em número de N podem ser considerados independentes e escolhidos arbitrariamente (qualquer que seja a escolha, o sistema resultará satisfeito).

O princípio de D'Alembert se escreverá, portanto:

$$\sum_{i=1}^{M} \left(-m_i \underset{\sim}{a}_i + \underset{\sim}{F}_i\right) \cdot \sum_{r=1}^{N} \frac{\partial P_i}{\partial q_r} \delta q_r = 0$$

ou

$$\sum_{r=1}^{N} \left[\sum_{i=1}^{M} \left(-m_i \underset{\sim}{a}_i + \underset{\sim}{F}_i\right) \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_r} \right] \delta q_r = 0$$

Sendo os δq_r independentes, podem-se anular sucessivamente, (N-1) deles; da arbitrariedade do δq resultante decorrem as N equações:

$$\sum_{i=1}^{M} \left(-m_i \underset{\sim}{a}_i + \underset{\sim}{F}_i\right) \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_r} = 0 \,, \qquad (r=1,\ldots,N) \qquad (4)$$

as quais são as N "equações de Kane", para o sistema em estudo, o qual tem de fato N graus de liberdade.

As derivadas $\dfrac{\partial P_i}{\partial q_r}$ foram definidas, por Kane, como "velocidades parciais"; indicando-as por $\underset{\sim}{V}_{ir}$ ter-se-ão essas equações expresssas por:

$$\sum_{i=1}^{M} \left[-m_i \underset{\sim}{a}_i + \underset{\sim}{F}_i \right] \cdot \underset{\sim}{V}_{ir} = 0 , \qquad (r=1,\ldots,N) \qquad (5)$$

Observe-se que, se podendo expressar:

$$P_i = P_i (q_1,\ldots,q_N,t)$$

decorre:

$$\underset{\sim}{v}_i = \sum_{r=1}^{N} \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_r} \dot{q}_r + \frac{\partial P_i}{\partial t} \right)$$

Verifica-se então, que as velocidades parciais

$$\underset{\sim}{V}_{ir} = \frac{\partial P_i}{\partial q_r}$$

são os coeficientes dos $\dot{q}_r$ na expressão dos $\underset{\sim}{v}_i$.

Denotam-se por V_{irw} (w=1,2,3) as compondentes do vetor $\underset{\sim}{V}_{ir}$ nos três eixos do referencial adotado

A quantidade V_{irw} desempenhará um papel fundamental na análise e é função de $q_1,\dots,q_N,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_N$.

Obs. As quantidades V_{irw} podem ser entendidas como as taxas de mudança parcial de posição do ponto P_i em relação a q_r , respeitando-se as condições impostas pelos vínculos instantâneos. Outra interpretação física foi dada por Sayer [3] ; Ele afirma que os esforços só podem realizar trabalho onde há movimento e que as velocidades parciais dão a direção em que estes movimentos ocorrem.

Segundo Kane, vai-se considerar agora uma equação mais geral, definindo outras N variáveis, u_s, tais que:

$$u_s = \sum_{r=1}^{N} C_{rs} \dot{q}_r$$

Onde os C_{rs} são funções dos q_r e eventualmente do tempo. Supondo-se a matriz (C_{rs}) inversível pode-se escrever:

$$\dot{q}_r = \sum_{s=1}^{N} D_{rs} u_s$$

Daí decorre:

$$\underset{\sim}{v}_i = \sum_{r=1}^{N} \frac{\partial P_i}{\partial q_r} \left[\sum_{s=1}^{N} D_{rs} u_s \right] + \frac{\partial P_i}{\partial t}$$

ou

$$\underset{\sim}{v}_i = \sum_{s=1}^{N} \left[\sum_{r=1}^{N} D_{rs} \frac{\partial P_i}{\partial q_r} \right] u_s + \frac{\partial \underset{\sim}{P}_i}{\partial t}$$

Os vetores $\left[\sum_{r=1}^{N} D_{rs} \frac{\partial P_i}{\partial q_r} \right]$, coeficientes das variáveis u_s, na expressão das velocidades dos pontos P_i foram definidos por Kane como "velocidades generalizadas".

Sempre que for mais conveniente expressar os $\underset{\sim}{v}_i$ em função dos u_s e não dos $\dot{q}_r$, será:

$$\delta q_r = \sum_{s=1}^{N} D_{rs} u_s \, \delta t$$

O princípio D'Alembert se escreverá, portanto:

$$\sum_{i=1}^{M} \left[-m_i \underset{\sim}{a}_i + \underset{\sim}{F}_i \right] \cdot \sum_{r=1}^{N} \frac{\partial P_i}{\partial q_r} \sum_{s=1}^{N} D_{rs} u_s \, \delta t = 0$$

$$\sum_{s=1}^{N} \left(\sum_{r=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} \left[-m_i \underset{\sim}{a}_i + \underset{\sim}{F}_i \right] \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_r} D_{rs} \right) u_s \, \delta t = 0$$

Observando que, sendo os δq_r arbitrários, o mesmo acontecerá com os $(u_s \delta t)$; resultam as equações abaixo, que serão as equações de Kane para o caso de se adotarem os u_s, em vez de $\dot{q}_r$ como variáveis.

$$\sum_{r=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{M} \left[-m_i \underset{\sim}{a}_i + \underset{\sim}{F}_i \right] \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_r} D_{rs} \right) = 0 \qquad (s=1,\ldots,N)$$

$$\sum_{i=1}^{M} \left(\left[-m_i \underset{\sim}{a}_i + \underset{\sim}{F}_i \right] \cdot \sum_{r=1}^{N} \frac{\partial P_i}{\partial q_r} D_{rs} \right) = 0 \qquad (s=1,\ldots,N)$$

Em cada parcela da somatória em relação a i tem-se o produto escalar do vetor :

$-m_i \underset{\sim}{a}_i + \underset{\sim}{F}_i$ pelo coeficiente do termo em u_s na expressão de $\underset{\sim}{v}_i$.

O cálculo das somatórias

$$\sum_r \underset{\sim}{F}_i \cdot \underset{\sim}{V}_{ir} \quad \text{e} \quad \sum_r m_i \underset{\sim}{a}_i \cdot \underset{\sim}{V}_{ir} ,$$

se simplifica no caso do sistema material ser um corpo rígido. Neste caso as forças de inércia se distribuem de maneira contínua, o mesmo acontecendo com as forças ativas quando essas forem as forças peso.

Em todos esses casos as mencionadas somatórias se obtém efetuando a redução, ao baricentro G do sólido, do sistema contínuo de forças.

Assim é imediato verificar ([12] pag.106) que a contribuição das forças ativas que constituem o peso do corpo considerado pode ser calculada da forma:

$$\sum_i m_i \underset{\sim}{g} \cdot \underset{\sim}{V}_{ir} = m \underset{\sim}{g} \cdot \underset{\sim}{V}_{Gr}$$

onde $m\underset{\sim}{g}$ é o peso do corpo e G seu baricentro.

As somatórias do tipo $\sum_i \underset{\sim}{F}_i \cdot \underset{\sim}{V}_{ir}$, serão designadas por $\underset{\sim}{F}_r$ ou $\underset{\sim}{F}_r'$, conforme se refiram as forças ativas ou vinculares, respectivamente.

As somatórias $\sum_i (-m_i \underset{\sim}{a}_i) \cdot \underset{\sim}{V}_{ir}$ serão designadas por F_r^*. Assim as Equações de Kane se escreverão:

$$\underset{\sim}{F}_r + \underset{\sim}{F}_r' + \underset{\sim}{F}_r^* = \underset{\sim}{0} \qquad (r=1,\ldots,N) \quad (6)$$

Sabe-se, por outro lado, que o sistema de forças de inércia $(-m_i \underset{\sim}{a}_i, P_i)$ é equivalente à sua resultante, $-m\,\underset{\sim}{a}_G$, aplicada em G, e mais um binário. O Teorema do momento angular aplicado ao sólido, se escreve

$$\underset{\sim}{M}_G - \dot{\underset{\sim}{K}}_G = \underset{\sim}{0} \quad , \quad (\underset{\sim}{K}_G = I_G \underset{\sim}{\omega})$$

o que mostra o momento das forças de inércia, em relação a G, ser igual a $-I_G \dot{\underset{\sim}{\omega}} - \underset{\sim}{\omega} \wedge I_G \underset{\sim}{\omega}$, onde I_G é a matriz de inércia do sólido em relação a G ; $\underset{\sim}{\omega}$ a sua velocidade angular e $\dot{\underset{\sim}{\omega}}$ a sua aceleração angular.

Segundo Kane e Levinson [12](1985, pag 124), verifica-se que os produtos escalares $F_r^* = \sum_i^N (-m_i \underset{\sim}{a}_i) . \underset{\sim}{V}_{ir}$,calculam-se então de maneira simples por:

$$F_r^* = -m\,\underset{\sim}{a}_G . \underset{\sim}{V}_{Gr} - \left[I_G \dot{\underset{\sim}{\omega}} + \underset{\sim}{\omega} \wedge I_G \underset{\sim}{\omega} \right] \underset{\sim}{\Omega}_r \qquad (7)$$

Os N vetores $\underset{\sim}{\Omega}_r$, que comparecem acima, foram denominados por Kane "velocidades angulares parciais" e são os coeficientes dos $\dot{q}_r$ (eventualmente u_r) na expressão:

$$\underset{\sim}{\omega} = \sum_{r=1}^{N} \underset{\sim}{\Omega}_r \dot{q}_r + \underset{\sim}{\omega}_t \qquad (8)$$

ou eventualmente,

$$\underset{\sim}{\omega} = \sum_{r=1}^{N} \underset{\sim}{\Omega}_r u_r + \underset{\sim}{\omega}_t$$

Denotam-se por Ω_{rw} (w=1,2,3) as compondentes do vetor $\underset{\sim}{\Omega}_r$ nos três eixos do referencial adotado.

Ω_{rm} é função de $q_1,\ldots,q_N,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_N$ e pode ser descrita como a taxa de mudança parcial de orientação do corpo considerado em relação a q_r , respeitando-se as condições impostas pelos vínculos instantâneos.

Como observam Wang e Huston [17] poderá ser mais conveniente descrever-se inicialmente o sistema por todas as variáveis $\dot{q}_j$. Denotando $\dot{q}_l = y_l$, a equação acima será escrita na forma:

$$\underset{\sim}{F}_l + \underset{\sim}{F}_l' + \underset{\sim}{F}_l^* = \underset{\sim}{0} \qquad (l=1,\ldots,n)$$

sujeitas a m restrições vinculares expressas matematicamente por:

$$B * \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{g} \qquad (9)$$

onde a matriz mXn B e o vetor $\underset{\sim}{g}$ são funções de q_l e do tempo.

Conforme Wang e Huston [17] a matriz F' correspondente às forças vinculares $\underset{\sim}{F}_l'$ pode ser escrita sob a forma: $F' = B^T * \underset{\sim}{\lambda}$ decorrendo em notação matricial:

$$F + B^T * \underset{\sim}{\lambda} + F^* = 0 \qquad (10)$$

onde $\underset{\sim}{\lambda}$ se interpreta como o multiplicador, do método clássico de Lagrange.

Supondo que possa ser obtida uma matriz C de ordem nX(n-m) tal que B*C=0 ou $C^T * B^T = 0$, tal matriz será chamada de um complemento ortogonal de B.

Pré multiplicando a equação acima por C^T, obtém-se:

$$C^T * F + C^T * F^* = 0 \qquad (11)$$

Note que nesta equação não existe o termo pertinente as forças vinculares. No item 5.2 será apresentado o método dos auto-valores nulos para obtenção de um complemento ortogonal.

3. SISTEMAS MULTICORPOS [5],[6],[7],[8]

Um sistema multicorpos ("multibody system") é um conjunto de corpos rígidos ligados vínculos, os quais serão chamados de juntas e que poderão ser:

i) Esféricas, vinculando um corpo em relação a outro apenas por um ponto, isto é, permitindo qualquer rotação de um corpo em relação a outro. Veja figura 3 página 32.

ii) De revolução, vinculando uma reta de um corpo a uma reta de outro, isto é permitindo rotações relativas dos corpos em torno desta reta. Veja figura 4 página 32.

iii) Cilíndricas, permitindo que um corpo se translade e também gire em relação ao outro em torno de um eixo. Veja figura 5 página 32.

iv) Prismáticas, permitindo apenas translação de um corpo em relação a outro. Veja figura 6 página 32.

v) Livre, um corpo poderá se mover livremente em relação ao adjacente mas estará interagindo com ele por meio de um sistema mola-amortecedor. Veja figura 7 página 32.

vi) Movida: eventualmente o movimento de um corpo em relação ao adjacente de numeração inferior poderá ser conhecido. Quando este movimento for conhecido, independente ou não de ser nulo diz-se, para efeito da metodologia apresentada nesta dissertação, que a junta que existe entre os dois corpos em questão é movida e é considerada como tal porque não contribui para os graus de liberdade do sistema. Se o movimento de um corpo for conhecido em relação ao adjacente de numeração inferior este precisará ser informado. Isto é feito através de Perfis de Aceleração que serão discutidos no item 8.11 . Veja também figura 8 página 32.

FIGURAS 3 A 8

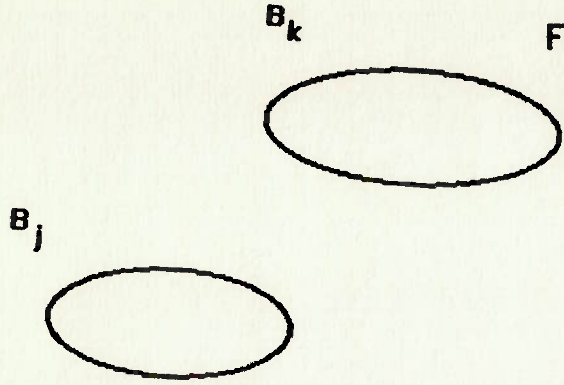


FIGURA 3 JUNTA LIVRE

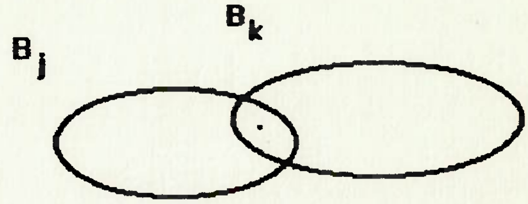


FIGURA 4 JUNTA ESFÉRICA

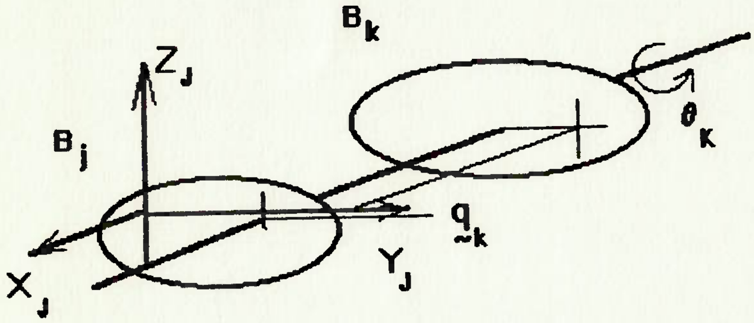


FIGURA 5 JUNTA CILINDRICA

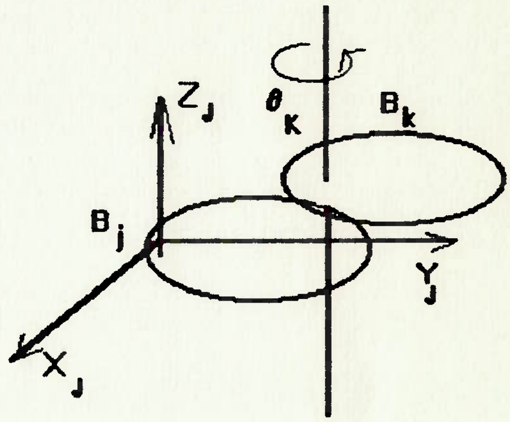


FIGURA 6 JUNTA DE REVOLUÇÃO

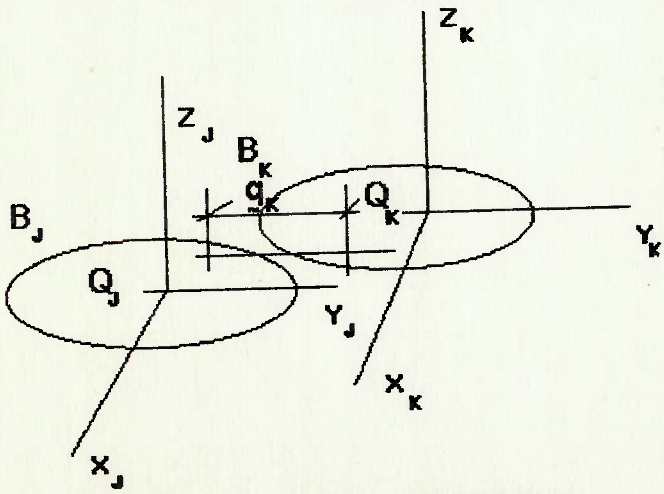


FIGURA 7 JUNTA PRISMÁTICA

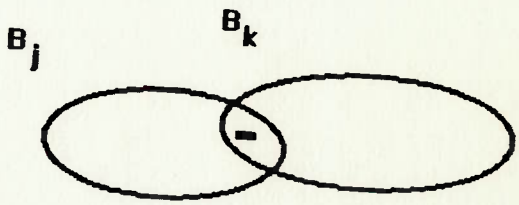


FIGURA 8 JUNTA MOVIDA ONDE NÃO HÁ DESLOCAMENTOS DESCONHECIDOS IGUAIS OU NÃO A ZERO

Suponha que seja possível numerar os corpos do sistema de maneira que, dado um corpo de numeração "i" , apenas um dos corpos vinculado a ele tenha numeração inferior. Diz-se, neste caso, que o sistema tem estrutura em cadeia aberta.

A figura 9 apresenta um esquema de um sistema multicorpos com uma numeração que satisfaz a condição enunciada. Tal sistema pode ser usado para descrever uma grande variedade de sistemas físicos incluindo cabos, correntes e robos.

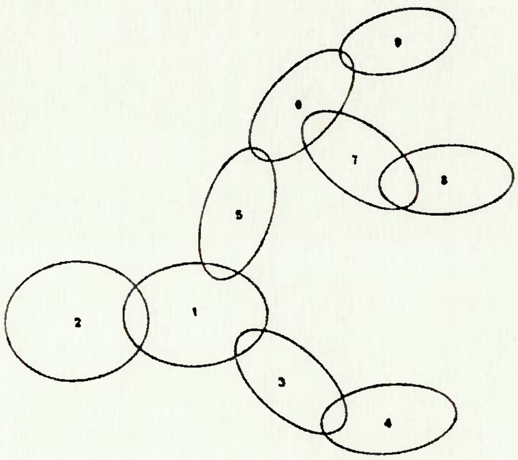


FIGURA 9 - EXEMPLO DE UM SISTEMA MULTICORPOS TíPICO

Embora sistemas em cadeia aberta sejam os objetos dessa análise, sistemas em cadeia fechada poderão ser estudados bastando para isso incluir na análise uma equação vincular de cunho geométrico para simular esta cadeia. Esta opção já se encontra disponível no programa SISMUL.

Quando um sistema é numerado conforme mostra a figura 9 cada corpo tem apenas um corpo ao qual está vinculado de numeração inferior a ele. Para o primeiro corpo ou o de número 1, o corpo de numeração inferior é o sistema inercial de referência referido como de número zero. Assim a configuração do sistema pode ser completamente descrita a partir desta numeração.

Seja R um sistema de referência inercial em relação ao qual o sistema se move.

3.1 MATRIZ CONEXÃO DE CORPOS

Vai-se considerar uma matriz cuja primeira linha será um vetor linha, $L^{o}(k)$ que indica o número k que cada corpo do sistema irá receber. No caso do exemplo (figura 9.)

$$L^{o}(k) = (1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9)$$

A segunda linha da matriz é formada por um vetor $L^{1}(k)$ contendo os corpos de numeração inferior para cada corpo do sistema.

$$L^{1}(k) = (0 , 1 , 1 , 3 , 1 , 5 , 6 , 7 , 6) \qquad (12)$$

É interessante escrever linhas sucessivas desta matriz de modo que $L^{2}(k)$ indique a qual corpo de numeração inferior se vincula o corpo mencionado em $L^{1}(k)$ e assim sucessivamente.

É fácil de se observar que uma vez que o sistema esteja numerado da forma enunciada o vetor de conexão de corpos $L^{1}(k)$ é único e define como as conexões são feitas no sistema.

Assim, uma vez conhecido $L^{1}(k)$ pode-se escrever um algoritmo capaz de descrever numericamente a configuração do sistema.
$L^{1}(k)$ pode ser considerado então um operador aplicado a um vetor genérico $L^{j}(k)$. Assim pode-se formar um vetor de conexão de corpos de segunda ordem ou $L^{1}(L^{1}(k))=L^{2}(k)$. Para o sistema mostrado na figura 9 seu vetor de conexão de corpos de segunda ordem vale:

$$L^{2}(k)= (0 , 0 , 0 , 1 , 0 , 1 , 5 , 6 , 5) \qquad (13)$$

Prosseguindo desta maneira podem-se formar vetores de conexão de ordens superiores até que todas suas componentes sejam zero. Para o sistema descrito na figura 9 o conjunto completo de vetores de conexão de corpos encontra-se a seguir:

$$
\begin{array}{c c}
 & \text{NÚMERO DO CORPO} \\
\text{VETOR} & \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{array}{c} L^{0}(K) \\ L^{1}(k) \\ L^{2}(k) \\ L^{3}(k) \\ L^{4}(k) \\ L^{5}(k) \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & 6 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right]
\end{array}
$$

TABELA I. MATRIZ DE CONEXAO PARA O SISTEMA DA FIGURA 9.

Além de definir a geometria do sistema o vetor $L^{1}(k)$ pode ser utilizado para se desenvolver a cinemática do sistema. Por exemplo, para o sistema da figura 9 a velocidade angular do corpo 9, em R, pode ser expressa como a somatória das velocidades angulares dos corpos precedentes até se atingir o referêncial inercial R, (segundo o teorema de adição de velocidades angulares):

$$\underset{\sim}{\omega}_{9} = \underset{\sim}{\omega}_{1} + \hat{\underset{\sim}{\omega}}_{5} + \hat{\underset{\sim}{\omega}}_{6} + \hat{\underset{\sim}{\omega}}_{9} \qquad (14)$$

O circunfléxo indica que a velocidade angular é relativa ao corpo adjacente de numeração inferior. Observa-se que os indices da equação (14) correspondem à coluna relativa ao corpo 9 na Tabela 1.

3.2 MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO [14]

A escolha de uma base conveniente ajuda muitas vezes a resolver um problema, tornando-o mais simples. No entanto os vetores podem já estar referidos a uma base por exemplo K = ($\underset{\sim}{n}_{k1}\underset{\sim}{n}_{k2}\underset{\sim}{n}_{k3}$). Vai-se introduzir, por conveniência, outra base , seja J = ($\underset{\sim}{n}_{j1}\underset{\sim}{n}_{j2}\underset{\sim}{n}_{j3}$) . Precisa-se saber a relação entre as duas, para que trabalhando com a solução em termos de K, possa-se no final passar para a base J.

Pode-se expressar de modo único cada elemento de K em termos da base J.

$$\underset{\sim}{n}_{k1} = a_{11}\,\underset{\sim}{n}_{j1} + a_{21}\,\underset{\sim}{n}_{j2} + a_{31}\,\underset{\sim}{n}_{j3}$$

$$\underset{\sim}{n}_{k2} = a_{12}\,\underset{\sim}{n}_{j1} + a_{22}\,\underset{\sim}{n}_{j2} + a_{32}\,\underset{\sim}{n}_{j3} \qquad (15)$$

$$\underset{\sim}{n}_{k3} = a_{13}\,\underset{\sim}{n}_{j1} + a_{23}\,\underset{\sim}{n}_{j2} + a_{33}\,\underset{\sim}{n}_{j3}$$

onde a_{ij} são números reais.

O próximo passo é resolver o seguinte problema. É dado

$$\underset{\sim}{v} = x_1\,\underset{\sim}{n}_{j1} + x_2\,\underset{\sim}{n}_{j2} + x_3\,\underset{\sim}{n}_{j3} = (x_1, x_2, x_3)_j \qquad (16)$$

onde o índice J é necessário pois pode-se também escrever:

$$\underset{\sim}{v} = y_1\,\underset{\sim}{n}_{k1} + y_2\,\underset{\sim}{n}_{k2} + y_3\,\underset{\sim}{n}_{k3} = (y_1, y_2, y_3)_k \qquad (17)$$

Objetiva-se saber qual a relação entre as coordenadas de $\underset{\sim}{v}$ em relação a base J: $\underset{\sim}{n}$ (x_1 , x_2 , x_3 $)_j$ e as coordenadas do mesmo vetor em relação a base K: $\underset{\sim}{n}$(y_1 , y_2 , y_3 $)_k$. Levando (15) em (17), ter-se-á $\underset{\sim}{v}$ em função dos elementos de J. Em seguida é só comparar com (16).

Daí vem:

$$x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3$$

$$x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3$$

$$x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3$$

Pode-se também expressar-se as fórmulas acima matricialmente, ou seja:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

A matriz 3 x 3 dá-se o nome de matriz de mudança de base de K para J. Ela será referida como *SJK* de elementos $a_{ij} = SJK_{ij}$.

Vai ser adotada a terminologia anterior para o sistema multicorpos. Conside um par típico de corpos adjacentes B_j e B_k como indicado na figura 10. Sejam $\underset{\sim}{n}_{ji}$ e $\underset{\sim}{n}_{ki}$ (i=1,2,3) bases ortonormais fixas em B_j e B_k respectivamente. As orientações relativas destes corpos podem ser definidas em termos das inclinações relativas destes conjuntos de vetores. Seja *SJK* a matriz de transformação de base cujos elementos são as projeções dos vetores unitários de um conjunto no outro (cossenos diretores). Ou seja, cada elemento da matriz de transformação pode ser calculado como abaixo:

$$SJK_{mn} = \underset{\sim}{n}_{jm} \cdot \underset{\sim}{n}_{kn} \qquad (18)$$

Onde o ponto indica o produto escalar de dois vetores. A equação acima nos diz, por exemplo que o elemento SJK_{12} é o produto escalar do vetor $\underset{\sim}{n}_{j1}$ com o vetor n_{k2}.

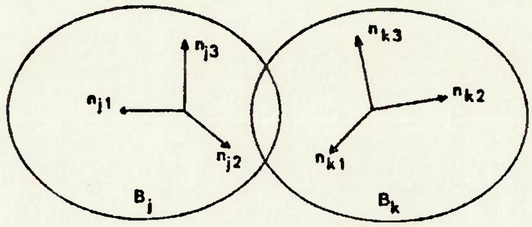


FIGURA 10. DOIS CORPOS ADJACENTES TIPICOS

Os vetores unitários são relacionados entre si pela expressão abaixo:

$$\underset{\sim}{n}_j = SJK * \underset{\sim}{n}_k$$

$$\underset{\sim}{n}_{jm} = SJK_{mn} \; \underset{\sim}{n}_{kn} \qquad (19)$$

onde J e K na matriz SJK e nos indices dos vetores unitários se referem aos corpos B_j e B_k. Os indices repetidos tal como n na equação (19) indicam uma somatória estendida a amplitude de variação desse indice.

As matrizes de transformação de base são ortogonais, ou seja de inversa igual a transposta. Elas também obedecem a relação transitiva:

$$SJL = SJK * SKL \qquad (20)$$

A equação (20) permite que se obtenha a matriz de transformação entre qualquer conjunto de vetores para um corpo dado e o referêncial inercial *R*. Por exemplo, para o corpo 9 do sistema da FIGURA 9 tem-se:

$$S09 = S01 * S15 * S56 * S69 \qquad (21)$$

Observe que os índices da equação (21) correspondem a coluna do corpo B_9 na tabela 1. Ou seja nona coluna na matriz de conexão de corpos.

A matriz de transformação é utilizada para obter em termos do referêncial inercial as componentes dos vetores dados em relação aos sistemas presos aos corpos. Ou seja, se $\underset{\sim}{V}$ é um vetor expresso na forma:

$$\underset{\sim}{V} = V_{km} \underset{\sim}{n}_{km} \quad \text{(sem somatória em } k\text{)}$$

poderá também ser expresso na forma:

$$\underset{\sim}{V} = V_{on} \underset{\sim}{n}_{on} \quad \text{(sem somatória em } o\text{)}$$

Aonde $\underset{\sim}{n}_{oj}$ são vetores unitários fixados no referencial inercial *R* e as componentes V_{on} e V_{km} são relacionadas pela expressão:

$$V_{on} = SOK_{nm} V_{km}$$

3.3 ALGORÍTMOS DE DERIVAÇÃO

Serão utilizadas as e equações de Kane, portanto, não será necessária a derivação de funções de energia como no método de Lagrange. Ela será substituida por derivação de vetores.

Como esses vetores estão escritos em termos de sistemas de coordenadas fixos aos corpos, suas derivadas são calculadas em termos de multiplicação de vetores. Por exemplo, se $\underset{\sim}{r}$ é um vetor fixo a um corpo B_k, de velocidade angular $\underset{\sim}{\omega}_k$ (dada no referencial inercial). A sua derivada em relação ao referencial inercial *R* vale:

$$d\underset{\sim}{r}/dt = \underset{\sim}{\omega}_k \wedge \underset{\sim}{r} \qquad (22)$$

A equação (22) mostra que as derivadas podem ser obtidas através da multiplicação de vetores, o que é muito útil e eficiente para elaboração de algorítmos computacionais. O mesmo é válido para matrizes, por exemplo, a matriz de transformação *SOK*, tem sua derivada calculada a partir da equação (22);

$$d(SOK)/dt = WOK * SOK \qquad (23)$$

Aonde *WOK* é uma matriz 3 x 3 cujos elementos são dados pela expressão abaixo:

$$WOK_{im} = -e_{imn}\omega_{kn} \qquad (24)$$

sendo e_{imn} o simbolo padrão de permutação e as ω_{kn} (n= 1,2,3) as componentes de $\underset{\sim}{\omega}_k$ na base $\underset{\sim}{n}_{on}$.

A matriz *WOK* pode ser escrita diretamente pela fórmula abaixo:

$$WOK = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{k3} & \omega_{k2} \\ \omega_{k3} & 0 & -\omega_{k1} \\ -\omega_{k2} & \omega_{k1} & 0 \end{bmatrix}$$

aonde ω_{ki}(i=1,2,3) são os componentes de ω_k em relação aos eixos n_{oi} do referencial inercial.

Com o uso das equações (23) e (24) pode-se expressar as componentes do vetor $\underset{\sim}{\omega}_k$ em termos dos elementos das matrizes de transformação, assim:

$$\omega_{k1}=SOK_{21}\,\dot{SOK}_{31}+ SOK_{22}\,\dot{SOK}_{32}+ SOK_{23}\,\dot{SOK}_{33}$$

$$\omega_{k2}=SOK_{31}\,\dot{SOK}_{11}+ SOK_{32}\,\dot{SOK}_{12}+ SOK_{33}\,\dot{SOK}_{13} \qquad (25)$$

$$\omega_{k3}=SOK_{11}\,\dot{SOK}_{21}+ SOK_{12}\,\dot{SOK}_{22}+ SOK_{13}\,\dot{SOK}_{23}$$

3.4 PARÂMETROS DE EULER

Para descrever a orientação relativa de 2 corpos pode-se utilizar pelo menos dois métodos: Angulos de orientação e parâmetros de Euler.

A orientação relativa de dois corpos adjacentes conectados pode ser definida em termos de angulos de orientação *dextrais*. A orientação de cada corpo requer três angulos . Eles podem ser definidos assim: Considerem-se dois corpos adjacentes genéricos B_j e B_K com seus sistemas de referências alinhados conforme mostra figura 11. B_k pode ser levado a uma posição genérica em relação a B_j mediante três rotações sucessivas através de angulos α_k, β_k, γ_k sobre os eixos X_k Y_k , Z_k.

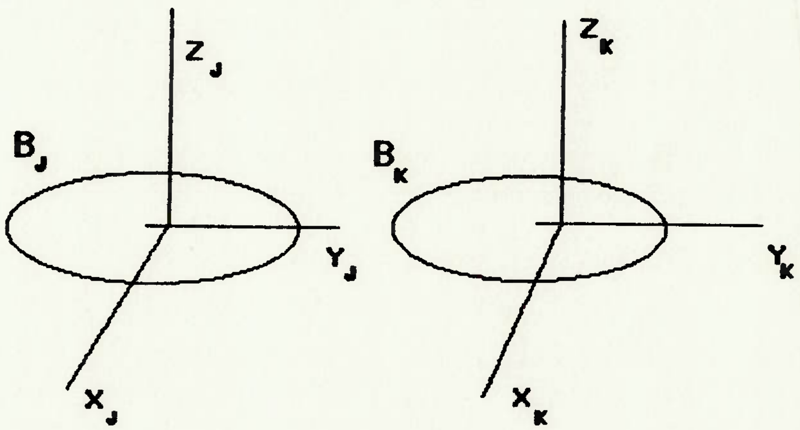


FIGURA 11 SISTEMAS ALINHADOS EM 2 CORPOS ADJACENTES

Esses angulos serão chamados *dextrais* pois o angulo é positivo quando a rotação é positiva conforme a regra da mão direita ou sentido dextral relativamente ao eixo. Por exemplo, uma rotação positiva α_k é mostrada na figura 12. Uma rotação β_k é feita sobre o eixo de rotação Y_k conforme mostrado na figura 13. γ_k é definido analogamente como uma rotação sobre o eixo de rotação Z_k. Muitas vezes a orientação do corpo B_k relativamente a B_j pode ser definida através de uma única rotação sobre um eixo coordenado. Isto ocorre com juntas de revolução, as quais serão objetos de estudo no decorrer desta dissertação. Neste caso, a orientação relativa pode ser definida usando um único angulo α_k ,β_k ou γ_k dependendo se a rotação ocorre em X_k,Y_k ou Z_k.

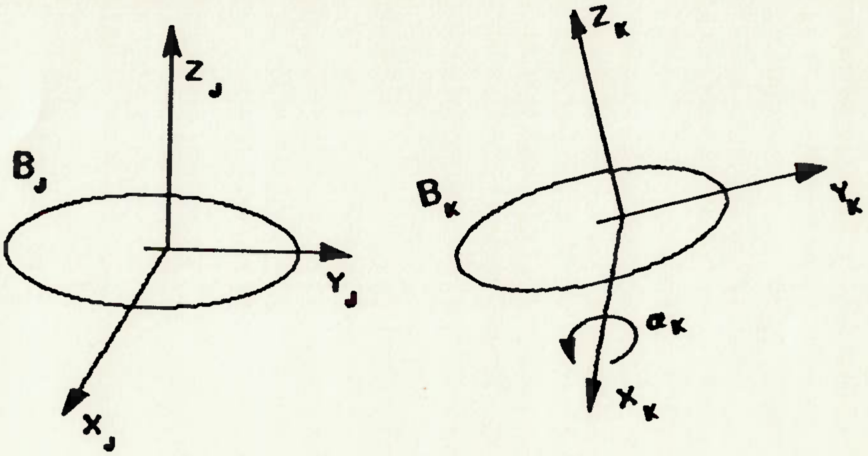


FIGURA 12 ROTAÇÃO α_k POSITIVA

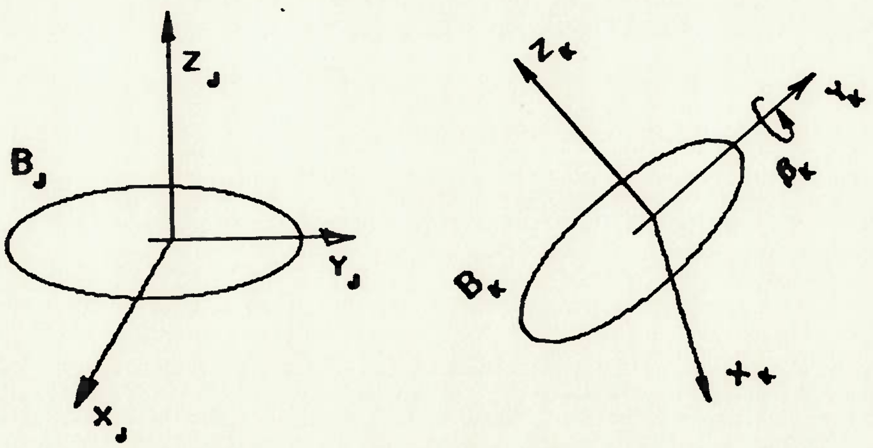


FIGURA 13 ROTAÇÃO β_k POSITIVA

Pode-se escrever as matrizes de transformação de J para K como sendo a produtória de três matrizes, cada qual representando uma rotação sobre um eixo coordenado. Assim:

$$SJK = \alpha JK * \beta JK * \gamma JK$$

Aonde αJK representa a matriz de transformação que descreve uma rotação α em torno do primeiro eixo coordenado conforme mostra figura 4.

As matrizes αJK , βJK e γJK poderão ser escritas em função dos cossenos diretores dos angulos α, β, γ [2].

Adotar-se-á para as matrizes abaixo as seguintes notações: C indicará a abreviação de cosseno e S a abreviação de seno.

$$\alpha JK = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_k & -S\alpha_k \\ 0 & S\alpha_k & C\alpha_k \end{bmatrix}$$

$$\beta JK = \begin{bmatrix} C\beta_k & 0 & S\beta_k \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\beta_k & 0 & C\beta_k \end{bmatrix}$$

$$\gamma JK = \begin{bmatrix} C\gamma_k & -S\gamma_k & 0 \\ S\gamma_k & C\gamma_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Outro modo de se definir as posições relativas de dois corpos adjacentes é pelos parâmetros de Euler . A metodologia usa estes parâmetros para evitar singularidades que ocorrem nas equações cinemáticas rotacionais quando os angulos dextrais são utilizados. Por exemplo se α e γ são diferentes de zero e $\beta = 90^{o}$, ocorre uma singularidade .

Apesar da metodologia utilizar internamente os parâmetros de Euler, para facilitar a interpretação ao escrever-se o programa tomou-se o cuidado da saida, assim como a entrada, serem expressas em termos de angulos dextrais.

Os parâmetros de Euler são definidos a seguir: Considere dois corpos típicos B_j e B_k conforme mostado na figura 11. B_k pode ser trazido numa orientação genérica em relação a B_j por meio de uma rotação única sobre um eixo apropriado. Se $\underset{\sim}{\lambda}_k$ for um vetor unitário sobre o qual a rotação θ_k é feita, os parâmetros de Euler são definidos conforme abaixo:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{k1} &= \lambda_{k1} \sin(\theta_k/2) \\
\varepsilon_{k2} &= \lambda_{k2} \sin(\theta_k/2) \qquad (26) \quad (\text{ sem somatórias em } k \text{ }) \\
\varepsilon_{k3} &= \lambda_{k3} \sin(\theta_k/2) \\
\varepsilon_{k4} &= \cos(\theta_k/2)
\end{aligned}
$$

FIGURA 14

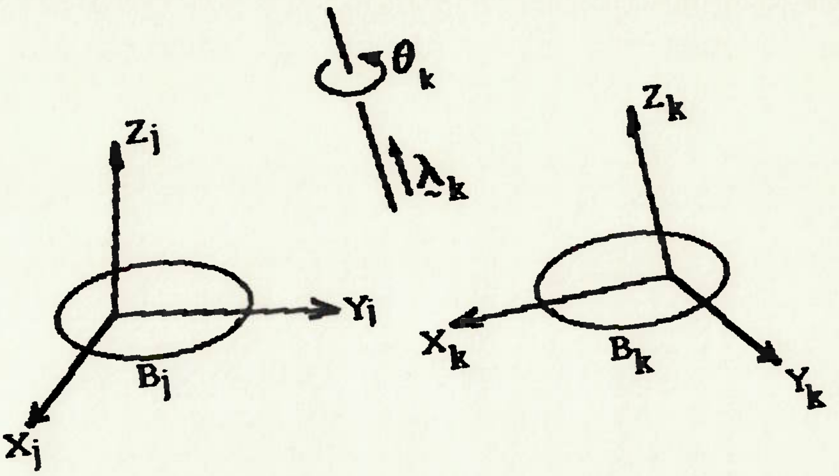


FIGURA 14: 2 CORPOS ADJACENTES TÍPICOS COM AS DEFINIÇÕES UTILIZADAS NA DEFINIÇÃO DOS PARAMETROS DE EULER

onde λ_{ki} são os componentes de $\underset{\sim}{\lambda}_k$ em termos de $\underset{\sim}{n}_{ki}$.

Os parâmetros de Euler apresentam-se como uma alternativa para a localização de um corpo relativamente a outro, entretanto, apenas 3 angulos bastariam para definir a orientação de um corpo, o que indica que os parâmetros de Euler são redundantes e que uma relação de dependência pode ser escrita entre eles:

$$\varepsilon_{k1}^2 + \varepsilon_{k2}^2 + \varepsilon_{k3}^2 + \varepsilon_{k4}^2 = 1 \qquad (27)$$

O uso dos parâmetros de Euler além de evitar singularidades permite que estes se relacionem com as velocidades angulares relativas (as quais serão as velocidades generalizadas da modelagem) através das equações a seguir:

$$\dot{\varepsilon}_{k1} = (1/2)\,(\ \varepsilon_{k4}\,\hat{\omega}_{k1} + \varepsilon_{k3}\,\hat{\omega}_{k2} - \varepsilon_{k2}\,\hat{\omega}_{k3})$$

$$\dot{\varepsilon}_{k2} = (1/2)\,(-\varepsilon_{k3}\,\hat{\omega}_{k1} + \varepsilon_{k4}\,\hat{\omega}_{k2} + \varepsilon_{k1}\,\hat{\omega}_{k3})$$

$$\dot{\varepsilon}_{k3} = (1/2)\,(\ \varepsilon_{k2}\,\hat{\omega}_{k1} - \varepsilon_{k1}\,\hat{\omega}_{k2} + \varepsilon_{k4}\,\hat{\omega}_{k3}) \qquad (28)$$

$$\dot{\varepsilon}_{k4} = (1/2)\,(-\varepsilon_{k1}\,\hat{\omega}_{k1} - \varepsilon_{k2}\,\hat{\omega}_{k2} - \varepsilon_{k3}\,\hat{\omega}_{k3})$$

A matriz de transformação de coordenadas *SJK* pode também ser escrita em termos de parâmetros de Euler :

$$SJK =$$

$$\begin{bmatrix} (\varepsilon_{k1}^2 - \varepsilon_{k2}^2 - \varepsilon_{k3}^2 + \varepsilon_{k4}^2) & 2\,(\varepsilon_{k1}\,\varepsilon_{k2} - \varepsilon_{k3}\,\varepsilon_{k4}) & 2\,(\varepsilon_{k1}\,\varepsilon_{k3} + \varepsilon_{k2}\,\varepsilon_{k4}) \\ (\varepsilon_{k1}\,\varepsilon_{k2} + \varepsilon_{k3}\,\varepsilon_{k4}) & (-\varepsilon_{k1}^2 + \varepsilon_{k2}^2 - \varepsilon_{k3}^2 + \varepsilon_{k4}^2) & 2(\varepsilon_{k2}\,\varepsilon_{k3} - \varepsilon_{k1}\varepsilon_{k4}) \\ 2(\varepsilon_{k1}\,\varepsilon_{k3} - \varepsilon_{k2}\,\varepsilon_{k4}) & 2(\varepsilon_{k2}\varepsilon_{k3} + \varepsilon_{k1}\varepsilon_{k4}) & (-\varepsilon_{k1}^2 - \varepsilon_{k2}^2 + \varepsilon_{k3}^2 + \varepsilon_{k4}^2) \end{bmatrix}$$

(29)

Na formulação das equações do movimento é conveniente o uso de combinações lineares das derivadas das coordenadas generalizadas como velocidades generalizadas. Quando essas últimas não forem integráveis diz-se que a análise é formulada em termos de quasi-coordenadas.

As componentes das velocidades angulares relativas serão as velocidades generalizadas dessa análise. Como será mostrado na equação (30), elas poderão ser expressas em função dos parâmetros de Euler.

As equações (29) em conjunto com as equações dinâmicas formam um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Aplicando-se os elementos da matriz de transformação da fórmula (29) na equação (25) chega-se a:

$$
\begin{aligned}
\hat{\omega}_{k1} &= 2\,(\varepsilon_{k4}\,\dot{\varepsilon}_{k1} - \varepsilon_{k3}\,\dot{\varepsilon}_{k2} + \varepsilon_{k2}\,\dot{\varepsilon}_{k3} - \varepsilon_{k1}\,\dot{\varepsilon}_{k4}) \\
\hat{\omega}_{k2} &= 2\,(\varepsilon_{k3}\,\dot{\varepsilon}_{k1} + \varepsilon_{k4}\,\dot{\varepsilon}_{k2} - \varepsilon_{12}\,\dot{\varepsilon}_{k3} - \varepsilon_{k2}\,\dot{\varepsilon}_{k4}) \\
\hat{\omega}_{k3} &= 2\,(-\varepsilon_{k2}\,\dot{\varepsilon}_{k1} + \varepsilon_{k1}\,\dot{\varepsilon}_{k2} + \varepsilon_{k4}\,\dot{\varepsilon}_{k3} - \varepsilon_{k3}\,\dot{\varepsilon}_{k4})
\end{aligned}
\qquad (30)
$$

As equações (30) podem ser expressas na forma matricial a seguir:

$$
\begin{bmatrix} \hat{\omega}_{k1} \\ \hat{\omega}_{k2} \\ \hat{\omega}_{k3} \\ \hat{\omega}_{k4} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \varepsilon_{k4} & -\varepsilon_{k3} & \varepsilon_{k2} & -\varepsilon_{k1} \\ \varepsilon_{k3} & \varepsilon_{k4} & -\varepsilon_{k1} & -\varepsilon_{k2} \\ -\varepsilon_{k2} & \varepsilon_{k1} & \varepsilon_{k4} & -\varepsilon_{k3} \\ \varepsilon_{k1} & \varepsilon_{k2} & \varepsilon_{k3} & \varepsilon_{k4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{k1} \\ \dot{\varepsilon}_{k2} \\ \dot{\varepsilon}_{k3} \\ \dot{\varepsilon}_{k4} \end{bmatrix} \qquad (31)
$$

onde o termo $\hat{\omega}_{k4}$ obtém-se por derivação da equação (27).

Pode-se verificar que a matriz quadrada da equação (31) é ortogonal, isto é, sua transposta é igual a inversa. Daí obtém-se diretamente de (31) a equação (28).

4. CINEMÁTICA DE SISTEMAS MULTICORPOS

Se um sistema multicorpos tiver N corpos, este poderá ter até 6N graus de liberdade. Inicialmente cada corpo será tratado da forma mais geral, portanto cada corpo é considerado com 6 graus de liberdade.

Feito isto, reduzir-se-á os graus de liberdade através das equações vinculares, tanto internas - um corpo vinculado ao adjacente, por exemplo, quanto externa, por restrições devidas a vínculos externos ao sistema.

Sejam x_l (l=1,.....,6N) os parâmetros que descrevem os graus de liberdade do sistema e sejam y_l (l=1,....,6) (velocidades generalizadas) combinações lineares das derivadas de x_l.

Para descrever os graus de liberdade de sistema utilizar-se-ão:

- Para os graus de liberdade de translação: a translação relativa entre corpos adjacentes;

- Para os graus de liberdade rotacionais: as componentes da velocidade angular relativa entre corpos, as quais podem ser expressas em termos de parâmetros de Euler e suas derivadas.

Portanto serão utilizadas coordenadas relativas.

Foi visto - vide equação (8) - que a velocidade angular de um corpo típico B_k do sistema relativamente ao referencial inercial R pode ser expressa pela fórmula:

$$\underset{\sim}{\omega}_k = \omega_{klm} \, y_l \, \underset{\sim}{n}_{om} \qquad (32)$$

onde ω_{klm} são as componentes segundo $\underset{\sim}{n}_{om}$ da velocidade angular parcial de B_k em R .

Será visto que as componentes ω_{klm} podem ser expressas em termos de matrizes de transformação e poder-se-á, com o auxílio dos vetores de conexão de corpos, desenvolver-se algoritmos para calcular os valores de ω_{klm}.

As acelerações angulares de um corpo B_k podem ser obtidas por derivação da equação (32);

$$\underset{\sim}{\alpha}_k = (\dot{\omega}_{klm} \; y_l + \omega_{klm} \dot{y}_l) \; \underset{\sim}{n}_{om} \qquad (33)$$

onde $\dot{\omega}_{klm}$ são obtidos de algoritmos baseados na equação (23).

Analogamente se G_k for o centro de gravidade do corpo B_k a velocidade e aceleração de G_k em R serão expressas pelas fórmulas:

$$\underset{\sim}{V}_k = V_{klm} \; y_l \; \underset{\sim}{n}_{om}$$

e

$$\underset{\sim}{a}_k = (V_{klm} \; \dot{y}_l + \dot{V}_{klm} \; y_l) \; \underset{\sim}{n}_{om} \qquad (34)$$

4.1 COORDENADAS E VELOCIDADES GENERALIZADAS UTILIZADAS

Cada corpo do sistema multicorpos poderá ter 6N graus de liberdade, que serão chamados de coordenadas generalizadas x_l, (l=1,2,...,6N). Vai-se considerar para cada corpo do sistema multicorpos duas ternas de coordenadas generalizadas. A última descrevendo o deslocamento relativo entre ele e o corpo precedente e a primeira terna de coordenadas generalizadas descrevendo como varia a posição angular relativa entre os corpos.

Segundo Huston [17] introduzindo 6N parâmetros y_l (=1,...,6N) definidos como:

$$y_l = x_l \qquad l = 1,\ldots,6N \tag{35}$$

As 3N primeiras coordenadas generalizadas serão:

$$\begin{aligned} y_{3k-2} &= \hat{\omega}_{k1} \\ y_{3k-1} &= \hat{\omega}_{k2} \\ y_{3k} &= \hat{\omega}_{k3} \end{aligned} \tag{36}$$

sendo;

$$\hat{\omega}_k = \hat{\omega}_{k1}\underset{\sim}{n}_{j1} + \hat{\omega}_{k2}\underset{\sim}{n}_{j2} + \hat{\omega}_{k3}\underset{\sim}{n}_{j3} \tag{37}$$

onde como dito anteriormente o circunfléxo indica que a velocidade angular é escrita em termos do sistema de eixos do corpo precedente $\underset{\sim}{n}_{ji}$(i=1,2,3).

Como as equações (36) não podem ser integradas para se obter as coordenadas generalizadas diz-se que elas são quasi-coordenadas pois na realidade não existem como coordenadas.

Os 3N parâmetros remanescentes descrevem os deslocamentos lineares relativos entre os corpos:

$$y_{3(n+k)-2} = \dot{\xi}_{k1}$$

$$y_{3(n+k)-1} = \dot{\xi}_{k2} \qquad (38)$$

$$y_{3(n+k)} = \dot{\xi}_{k3}$$

onde y_l são as velocidades generalizadas tal como exposto neste trabalho.

O vetor que mede o deslocamento relativo entre os corpos é $\underset{\sim}{\xi}$ e pode ser visualizado na figura 15 a seguir:

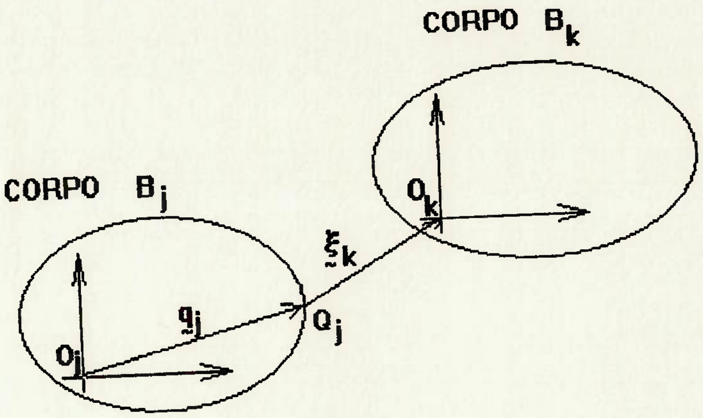


FIGURA 15 POSIÇÃO DE UM CORPO EM RELAÇÃO AO ADJACENTE

onde O_j e O_k são pontos onde estão localizados os referênciais presos os corpos adjacentes B_j e B_k respectivamente, ou seja, O_k é a origem de B_k ou seu ponto de conexão. O vetor $\underset{\sim}{\xi}$ poderá ser escrito da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{\xi}_k = \xi_{k1}\underset{\sim}{n}_{j1} + \xi_{k2}\underset{\sim}{n}_{j2} + \xi_{k3}\underset{\sim}{n}_{j3} \qquad (39)$$

As orientações relativas entre corpos são fornecidas pelos parâmetros de Euler que formam um conjunto de 4N parâmetros ε_{ki} (onde k=1,....N e i=1,...,4). Estes parâmetros em conjunto com as 3N quasi-coordenadas ω_{ki} e as 3N coordenadas ξ_{ki} (k=1,..,N e i=1,2,3) descrevem a geometria e a cinemática de todo o sistema multicorpos.

4.2 VELOCIDADES ANGULARES

A velocidade angular do corpo k é obtida como soma das velocidades angulares relativas dos corpos precedentes. Por exemplo para o corpo 9 do sistema multicorpo da figura 9. pode-se escrever:

$$\underset{\sim}{\omega}_9 = \underset{\sim}{\omega}_1 + \underset{\sim}{\hat{\omega}}_5 + \underset{\sim}{\hat{\omega}}_6 + \underset{\sim}{\hat{\omega}}_9 \qquad (40)$$

Foi dito anteriormente que os que os índices desta equação correspondem a nona linha da matriz de conexão de corpos, ou seja, correspondem a $L^0(9)=9, L^1(9)=6, L^2(9)=5, L^3(9)=1$, portanto a equação (40) poderá ser escrita da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{\omega}_9 = \sum_{p=0}^{3} \underset{\sim}{\hat{\omega}}_q$$

$$\text{onde } q = L^p(9)$$

e p = 0 , 1 , 2 , 3 sendo o número de elementos diferentes de zero na nona coluna na matriz de conexão de corpos.

Assim a velocidade angular de um corpo genérico B_k poderá ser escrita a seguir:

$$\underset{\sim}{\omega}_k = \sum_{p=0}^{r} \underset{\sim}{\hat{\omega}}_q \qquad (41)$$

$$q = L^p(k)$$

Onde r é o número de elementos diferentes de zero da k-ésima coluna da matriz de conexão de corpos.

Examinando-se as equações (36),(40) e (41) conclui-se que ω_k pode ser escrito da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{\omega}_k = \omega_{klm}\, y_l \underset{\sim}{n}_{om}$$

e sua derivada como sendo

$$\dot{\underset{\sim}{\omega}}_k = (\dot{\omega}_{klm}\, y_l + \omega_{klm}\, \dot{y}_l)\, \underset{\sim}{n}_{om}$$

Onde "O" é a origem do referencial inercial.

Está implicita uma soma sobre índices repetidos e onde os índices de ω_{klm} variam conforme a seguir: $k=1,\dots,N$, $l=1,\dots,3N$ e $m=1,2,3$ e os ω_{klm} formam um vetor de coeficientes de forma a se expressar $\underset{\sim}{\omega}_k$ em termos de $\underset{\sim}{n}_{om}$.

Pelas equações (41) , (20) , (37) e (31) percebe-se que ω_{klm} pode ser expresso em termos das matrizes de transformação *SOK*, e que a relação entre ω_{klm} e *SOK* é feita através da matriz de conexão de corpos.

Para que isso fique claro vai-se examinar a velocidade angular do corpo 4 mostrado na figura 9. Sua velocidade angular poderá ser expressa conforme equação (42) a seguir:

$$\underset{\sim}{\omega}_4 = \underset{\sim}{\omega}_1 + \hat{\underset{\sim}{\omega}}_3 + \hat{\underset{\sim}{\omega}}_4 \tag{42}$$

Por meio das equações (36), (37) e (20) pode-se escrever:

$$\underset{\sim}{\omega}_1 = y_1 \underset{\sim}{n}_{01} + y_2 \underset{\sim}{n}_{02} + y_3 \underset{\sim}{n}_{03} = y_j\, \delta_{mj}\, \underset{\sim}{n}_{om}$$

$$\hat{\underset{\sim}{\omega}}_3 = y_7 \underset{\sim}{n}_{11} + y_8 \underset{\sim}{n}_{12} + y_9 \underset{\sim}{n}_{13} = y_{6+j}\, SO1_{mh}\, \underset{\sim}{n}_{om} \tag{43}$$

$$\hat{\underset{\sim}{\omega}}_4 = y_{10} \underset{\sim}{n}_{31} + y_{11} \underset{\sim}{n}_{32} + y_{12} \underset{\sim}{n}_{33} = y_{9+j}\, SO3_{mj}\, \underset{\sim}{n}_{om}$$

Observe que esta-se lidando com os graus de liberdade rotacionais ou seja os primeiros 3N graus de liberdade do sistema multicorpos. Logo o corpo 1 terá os graus y_1 ,y_2 ,y_3 , o corpo 2 terá os graus y_4, y_5 , y_6 e assim sucessivamente.

Portanto os valores de ω_{4lm} são iguais a:

$\omega_{4lm} = \delta_{ml}$ $\quad$ l=1,2,3

$\omega_{4lm} = 0$ $\quad$ l=4,5,6

$\omega_{4lm} = SO1_{m,l-9}$ $\quad$ l=7,8,9 e m=1,2,3

$\omega_{4lm} = SO3_{m,l-9}$ $\quad$ l=10,11,12

$\omega_{4lm} = 0$ $\quad$ l > 12

Onde δ_{ij} são os componentes da matriz identidade, ou seja, quando i=j , δ vale 1. Caso contrário vale zero.

Abaixo encontra-se a tabela 2, onde se encontram os valores de ω_{klm} para os diferentes corpo do sistema descrito na figura 11 e seus respectivos graus de liberdade.

A k-ésima linha tabela 2 é obtida do seguinte modo: Seja P=L(k). Então *SOP* é colocado na k-ésima linha da terna de velocidades generalizadas de x_l . A seguir seja Q=L(P), logo *SOQ* é colocado na p-ésima coluna da terna de velocidades generalizadas de $\dot{x}_l$. Assim *SOM* é colocado na linha $L^{j-1}(k)$ onde $M=L^j(k)$, sendo que j varia de 1 até r+1 sendo r o número de componentes diferentes de zero da coluna da matriz de conexão de corpos correspondentes ao corpo k. Outra maneira de se dizer isto seria escrever r tal que $L^r(k)=1$.

TABELA 2. VALORES DE ω_{klm} PARA O SISTEMA DA FIGURA 9

X_l \ K	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 ,2 ,3	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
4 ,5 ,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7 ,8 ,9	0	S01	S01	S01	0	0	0	0	0
10,11,12	0	0	0	S03	0	0	0	0	0
13,14,15	0	0	0	0	S01	S01	S01	S01	S01
16,17,18	0	0	0	0	0	S05	S05	S05	S05
19,20,21	0	0	0	0	0	0	S06	S06	0
22,23,24	0	0	0	0	0	0	0	S07	0
25,26,27	0	0	0	0	0	0	0	0	S06

Se derivar-se a equação (34) chegar-se-á a equação (35), cujos valores de $\dot{\omega}_{klm}$ são obtidos derivando-se os elementos da tabela 2. Na tabela 3 estes valores estão mostrados:

TABELA 3. VALORES DE $\dot{\omega}_{klm}$ PARA O SISTEMA DA FIGURA 9

x_l \ K	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 ,2 ,3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4 ,5 ,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7 ,8 ,9	0	$\dot{\mathrm{S}}$01	$\dot{\mathrm{S}}$01	$\dot{\mathrm{S}}$01	0	0	0	0	0
10,11,12	0	0	0	$\dot{\mathrm{S}}$03	0	0	0	0	0
13,14,15	0	0	0	0	$\dot{\mathrm{S}}$01	$\dot{\mathrm{S}}$01	$\dot{\mathrm{S}}$01	$\dot{\mathrm{S}}$01	$\dot{\mathrm{S}}$01
16,17,18	0	0	0	0	0	$\dot{\mathrm{S}}$05	$\dot{\mathrm{S}}$05	$\dot{\mathrm{S}}$05	$\dot{\mathrm{S}}$05
19,20,21	0	0	0	0	0	0	$\dot{\mathrm{S}}$06	$\dot{\mathrm{S}}$06	0
22,23,24	0	0	0	0	0	0	0	$\dot{\mathrm{S}}$07	0
25,26,27	0	0	0	0	0	0	0	0	$\dot{\mathrm{S}}$06

4.3 VELOCIDADES DO CENTRO DE MASSA

Considere a figura 16 abaixo. Admita que se queira descrever a posição do centro de massa do corpo B_k em relação a origem do corpo B_j .

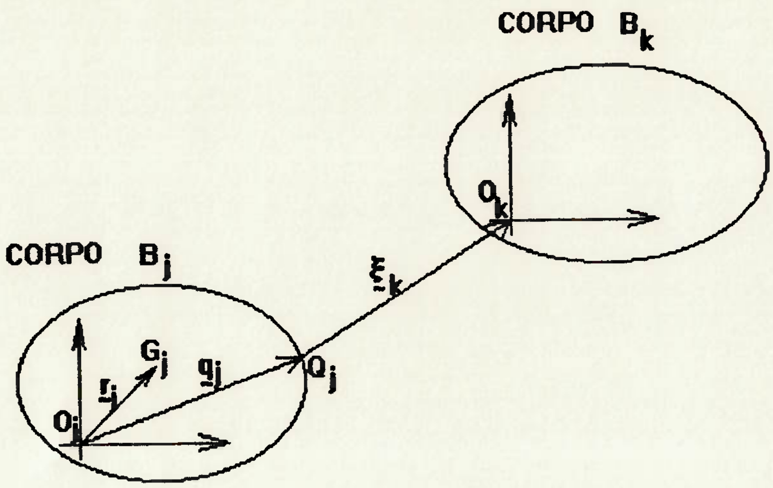


FIGURA 16 POSIÇÃO DO CENTRO DE MASSA: VETORES $\underset{\sim}{r}$, $\underset{\sim}{q}$, e $\underset{\sim}{\xi}$

Admita ainda que dois corpos B_j e B_k estejam conectados.

Sejam três vetores, $\underset{\sim}{\xi}$, $\underset{\sim}{q}$ e $\underset{\sim}{r}$ e sejam os pontos O_j , G_j , Q_j e O_k

O vetor $\underset{\sim}{r}$ indicará a posição do centro de massa relativamente ao referencial preso no corpo em questão. No caso do corpo B_j ,$\underset{\sim}{r}_j$ vale $(G_j - O_j)$.

O vetor $\underset{\sim}{q}$ define a posição da junta com o corpo adjacente de numeração superior (ao qual estiver conectado). No caso do corpo B_j ,$\underset{\sim}{q}_j$ vale $(Q_j - O_j)$.

O vetor $\underset{\sim}{\xi}$ indica a posição do sistema de referência preso ao corpo adjacente de numeração superior (no caso B_k) ao qual o corpo (B_j) estiver conectado. Neste caso, $\underset{\sim}{\xi}_j$ vale (O_k - Q_j).

$$P_{k/j} = (G_k - O_j) = g_j + \underset{\sim}{\xi}_j + \underset{\sim}{r}_k$$

Admita por exemplo que se deseja calcular a posição do centro de massa do corpo de número 8 (P_8) da figura 9, em relação ao referencial inercial (corpo de número 1).

Seu vetor posição P_8 de seu centro de massa G_8 pode ser escrito como:

$$\underset{\sim}{P}_8 = \underset{\sim}{\xi}_1 + g_5 + \underset{\sim}{\xi}_5 + g_6 + \underset{\sim}{\xi}_6 + g_7 + \underset{\sim}{\xi}_7 + g_8 + \underset{\sim}{\xi}_8 + \underset{\sim}{r}_8 \qquad (44)$$

Lembre que para o primeiro corpo o vetor g vale zero.

Para o corpo B_k , o vetor de posição P_k de G_k relativamente a O é:

$$P_k = \left[SOK_{ih}\, r_{kh} + \sum_{q=0}^{u} SOS_{ih}(q_{sh} + \xi_{sh}) \right] n_{oi} \qquad (45)$$

onde S (de SOS_{ih})= $L^{q+1}(k)$, e s (de q_{sh} e ξ_{sh}) = $L^q(k)$, e u é o índice tal que $L^u(k)=1$, ou seja o número de elementos não nulos da coluna da matriz de conexão de corpos correspondente ao elemento k.

Derivando-se a equação acima chega-se a velocidade do ponto G_k:

$$\underset{\sim}{V}_k = \left[\dot{SOK}_{ih}\, r_{kh} + \sum_{q=0}^{u} \dot{SOS}_{ih}(q_{sh} + \xi_{sh}) + \sum_{q=0}^{u} SOS_{ih}\, \dot{\xi}_{sh} \right] \underset{\sim}{n}_{oi} \qquad (46)$$

Comparando com as equações (23),(24) e (32)pode-se escrever V_k como se segue:

$$\underset{\sim}{V}_k = V_{klm}\ y_l\ \underset{\sim}{n}_{om}$$

e sua derivada como sendo

$$\underset{\sim}{a}_k = (\dot{V}_{klm}\ y_l + V_{klm}\ \dot{y}_l)\ \underset{\sim}{n}_{om}$$

Que são as equações (34), aonde V_{klm} (k= 1,...,N , l=1,...,6N e m=1,2,3) formam um bloco de coeficientes necessários pra se expressar V_k em termos de n_{om}.

Note que no caso ω_{klm} (k= 1,...,N , l=1,...,6N e m=1,2,3). Lembrando ainda que está implicita uma somatória sobre indices repetidos.

$$V_{klm} = WK_{mhl}\ r_{kh} + \sum_{q=0}^{u} WS_{mhl}\ (\xi_{sh} + q_{sh}\ ) \quad \text{para } k=1,...,N\ ,\ l=1,..,3N \text{ e } m=1,2,3 \qquad (47)$$

onde

$$WK_{mhl} = \frac{\partial\ WOK_{mp}}{\partial\ y}\ SOK_{ph} = -e_{mpi}\omega_{kli}SOK_{ph}$$

e

Da equação (47) pode-se inferir que os valore não nulos de V_{klm} são:

$$V_{k(3N+l)m} = \omega_{klm} \quad \text{para } k=1,....,N\ l=3N,....,6N \text{ e } m=1,2,3$$

Analogamente, tem-se para $\dot{V}_{klm}$

$$\dot{V}_{k(3N+l)m} = \dot{\omega}_{klm} \quad \text{para } k=1,\ldots,N \; l=3N,\ldots,6N \text{ e } m=1,2,3$$

$$\dot{V}_{klm} = \dot{WK}_{mhl} \; r_{kh} + \sum_{q=0}^{u-1} \dot{WS}_{mhl} \; (\xi_{sh} + q_{sh}) + WS_{mhl} \; (\dot{\xi}_{sh}) \qquad (48)$$

para $k=1,\ldots,N$ $l=1,\ldots,3N$ e $m=1,2,3$

onde $$\dot{WK}_{mhl} = -e_{mpi} (\dot{\omega}_{kli} SOK_{ph} + \omega_{kli} \dot{SOK}_{ph}) \qquad (49)$$

Como foram definidos por Kane, V_{klm} e ω_{klm} correspondem as componentes dos vetores das velocidades parciais, ou seja:

$$V_{klm} = \frac{\partial \underset{\sim}{V}_k}{\partial \dot{x}_l}$$

$$\omega_{klm} = \frac{\partial \underset{\sim}{\omega}_k}{\partial \dot{x}_l}$$

5. DINÂMICA DE SISTEMAS MULTICORPOS

Como foi visto as equações diferênciais do movimento são obtidas usando-se o princípio de D'Alembert na forma de Lagrange (equações de Kane).

A cinemática do sistema é determinada recursivamente, com as velocidades e acelerações sendo determinadas através de produto vetorial. Isto leva a algoritmos que são facilmente convertidos em rotinas computacionais.

As posições relativas dos corpos adjacentes são determinadas por três parâmetros de translação e quatro parâmetros de orientação de Euler. O uso dos parâmetros de Euler evita singularidades que ocorrem quando se faz uso dos ângulos orientação ou dos ângulos de Euler nas equações cinemáticas que relacionam o angulo de orientação com a velocidade angular .

Com os parâmetros de Euler é natural usar-se as velocidades angulares relativas como velocidades generalizadas. Isto por sua vez simplifica o desenvolvimento das equações cinemáticas cujos coeficientes são rapidamente calculados numericamente.

As equações advindas de um sistema formando um única cadeia fechada são determinadas por contração, na qual se transforma o sistema original em um sistema aberto, cortando uma das conexões dentro da cadeia. A seguir é introduzida uma equação vincular que em conjunto com as demais (provenientes das juntas) formam um conjunto de equações vinculares.

Essas equações vinculares em conjunto com a equação de D'Alembert na forma de Lagrange formam um conjunto de equações diferenciais acopladas. A partir de complementos ortogonais desacopla-se este sistema. Finalmente, as equações diferenciais são integradas através do método de Runge Kutta de quarta ordem.

5.1 EQUAÇÕES DINÂMICAS

Seja agora o sistema submetido a um campo de forças externas. Num corpo típico B_k os efeitos deste campo poderão ser representados por uma força $\underset{\sim}{F}_k$ passando por G_k, juntamente com um binário com um torque $\underset{\sim}{M}_k$. Logo as forças generalizadas aplicadas em B_k, correspondentes as velocidades generalizadas y_l, podem ser expressas como:

$$F_l = F_{km} V_{klm} + M_{km} \omega_{klm} \qquad (50)$$

Onde F_{km} e M_{klm} são as componentes segundo $\underset{\sim}{n}_{om}$ de $\underset{\sim}{F}_k$ e $\underset{\sim}{M}_k$.

Analogamente, as forças de inércia atuantes em um corpo típico B_k podem ser substituidas por uma única força $\underset{\sim}{F}^*_k$ atuando em G_k juntamente co um binário de torque M^*_k . Assim $\underset{\sim}{F}^*_k$ $\underset{\sim}{M}^*_k$ serão expressos por:

$$\underset{\sim}{F}^*_k = - m_k \underset{\sim}{a}_k \qquad (51)$$

$$\underset{\sim}{M}^*_k = - I_k * \underset{\sim}{\alpha}_k - \underset{\sim}{\alpha}_k \wedge (I_k * \underset{\sim}{\omega}_k)$$

(sem somatórias)

onde m_k é a massa do corpo B_k e I_k sua matriz central de inércia.

As forças de inércia que agem em B_k, correspondentes as velocidades generalizadas y_l, podem ser expressas como:

$$F^*_l = F^*_{km} V_{klm} + M^*_{km} \omega_{klm} \qquad (52)$$

Onde F^*_{km} e M^*_{km} são as componentes dos vetores $\underset{\sim}{F}^*_k$, $\underset{\sim}{M}^*_k$ na base $\underset{\sim}{n}_{om}$.

Finalmente o sistema pode estar submetido a forças vinculares que agem sobre os corpos. Sejam estas forças vinculares representadas por $\underset{\sim}{F}'_k$ passando pelo centro de gravidade G_k do corpo B_k.

Assim a força generalizada vincular devido a y_l, pode ser expressa abaixo:

$$F_l' = F_{km}' V_{klm} + M_{km}' \omega_{klm} \quad (53)$$

onde F_{km}' e M_{km}' são as componentes de $\underset{\sim}{F}_k'$ $\underset{\sim}{M}_k'$ na base $\underset{\sim}{n}_{om}$.

As equações dinâmicas do sistema podem ser escritas por intermédio das equações de Kane conforme expresso abaixo:

$$\underset{\sim}{F}_l + \underset{\sim}{F}_l^* + \underset{\sim}{F}_l' = \underset{\sim}{0} \quad (54)$$

onde l= 1,....,6N

Substituindo as equações (34) a (36) e (50) a (53) na equação (54) tem-se:

$$a_{lp} \dot{y}_p = f_l \quad (55)$$

Onde os coeficientes $\underline{a}$ e $\underline{f}$ são dados pelas fórmulas a seguir:

$$a_{lp} = m_k V_{kmp} V_{klm} + I_{kmn} \omega_{kmp} \omega_{kln} \quad (56)$$

e

$$f_l = -(F_l + m_k V_{klq} V_{kpl} y_q +$$

$$+ I_{kmn} \omega_{klm} \dot{\omega}_{kqn} y_q + \quad (57)$$

$$+ e_{nmh} I_{kmr} \omega_{kqn} \omega_{krs} \omega_{kln} y_q y_s)$$

Onde I_{kmn} são os elementos (m,n) da matriz I_k escrita em relação ao referencial R .

É fácil de se observar que V_{klm} e ω_{klm} desempenham um papel fundamental nas equações (56) e (57).

Se o sistema estiver sujeito à equações vinculares pela presença de cadeias fechadas ou por quaisquer vínculos impostos a determinados pontos do sistema, elas poderão ser expressas conforme abaixo:

$$b_{ql}\, y_l = g_q \quad (q=1,2,\ldots\ldots,m) \ (m<6N)$$

ou (58)

$$B * y = g$$

Foi visto que b_{ql} relaciona-se com as forças vinculares generalizadas pela fórmula a seguir:

$$F'_l = b_{ql}\, \lambda_q$$

ou (59)

$$F' = B^T * \underset{\sim}{\lambda}$$

aonde λ_q (q=1,....,m) são as componentes das forças e momentos vinculares e o ^{T} indica transposição de matrizes.

Uma das vantagens do método é a eliminação dos esforços vinculares que não produzem trabalho. Isto se dá através do complemento ortogonal que será explicado a seguir. Pode-se visualizar este método pelo triâgulo de Kane, mostrado na figura 17. Nela K e K^*são projeções de F e F^* na direção normal a F', de foram a reduzir as equações de Kane a uma forma mais simples:

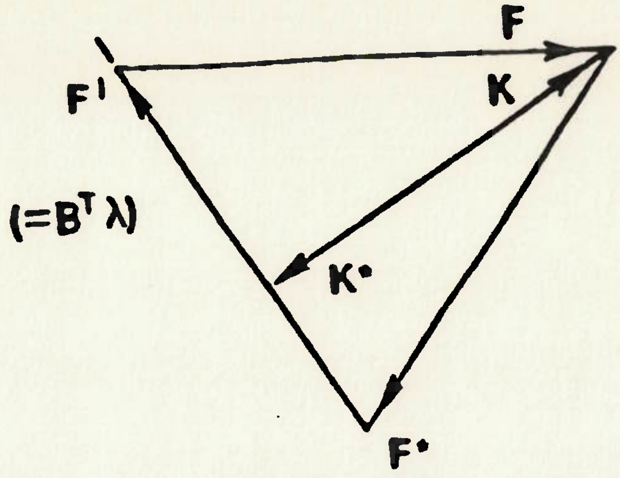


FIGURA 17 TRIANGULO DE FORÇA DE KANE

As equações (55) e (58) formam um conjunto de $m+n$ equações para os (n y_l) e os (m λ_q). Usando a equação (59), as equações (55) e (58) podem ser escritas na forma matricial ficando:

$$A * \dot{\underset{\sim}{y}} = \underset{\sim}{f} + B^T * \underset{\sim}{\lambda} \quad \text{e} \quad B * \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{g} \qquad (60)$$

onde os valores dos vetores são identificados por comparação com as equações (56) e (58).

As equações (60) constituem um sistema de equações diferenciais acopladas e de dificil integração. Tal dificuldade pode ser superada através da eliminação do vetor $\underset{\sim}{\lambda}$. Para isso lança-se mão do complemento ortogonal da matriz B chamado aqui de C. C é de ordem nx(n-m) de tal forma que:

$$B * C = 0 \quad \text{ou} \quad C^T * B^T = 0 \qquad (61)$$

Assim multiplicando as equações (60) por C^T, as equações que governam o movimento reduzem-se a:

$$C^T * A * \dot{y} = C^T * f \quad e \quad B * y = g \qquad (62)$$

Para obter o complemento ortogonal vai-se usar o método dos auto-valores nulos que foi desenvolvido por Walton e Steeves [8]. Poderia também ser usado o método da transformação Householder [1] e [2], assim como métodos numéricos e analíticos [9].

5.2 MÉTODO DOS AUTOVALORES NULOS [17]

Para um sistema multicorpo as equações que governam o movimento podem ser escritas da forma:

$$a_{ij} \ddot{x}_{ij} = f_i \qquad (i,j=1,.......,n) \qquad (63)$$

aonde x_j representa as coordenadas generalizadas do sistema e os a_{ij} são funções de x_j e das propriedades de inercia do sistema; n é o número de graus de liberdade do sistema, e f_i é função de x_j ; índices repetidos representam uma somatória.

Se existirem vínculos no sistema, haverá um conjunto adicional de equações da forma:

$$b_{ij} \dot{x}_j = g_i \qquad (i=1,......,m); \; (j=1,.....,n) \qquad (64)$$

onde b_{ij} e g_i são funções de x_j e do tempo e m<n. Assim há m+n equações para os n x_j. Como há m equações vinculares o número de graus de liberdade do sistema é reduzido de n para n-m.

Seja $E = B^T * B$ uma matriz de ordem nXn . O posto de $B * E$ será menor ou iqual a m. A equação matricial $E*\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{\lambda}^T*\underset{\sim}{v}$ terá pelo menos n-m autovalores nulos. Sejam v^r (r=1,....,s) os autovetores independentes associados com os autovalores nulos, aonde $s \geq n-m$. Seja T a matriz de ordem n X s cujas colunas são formadas pelos vetores v^r.

$$E * T = B^T * B * T = 0$$

Multiplicando-se a equação por T^T;

$$T^T * B^T * B * T = 0 \quad \text{ou} \quad (B*T)^T * (B*T) = 0 \text{ ou } B*T = 0$$

Portanto T é um complemento ortogonal de B

Existem outras maneiras de se montar a matriz de complememto ortogonal de B.

Uma delas seria analiticamente através da fórmula abaixo:

$$C = I - B^T * (B * B^T)^{-1} * B$$

A outra seria utilizando-se a transformação Householder (referência [8] e [9]). Existe ainda uma terceira possibilidade apresentada na referência [10] chamado "Coordinate Reduction".

É possivel escrever-se $\dot{x}_j$ ($\dot{x}_j = y_j$) em função das velocidades generalizadas independentes z_r (r=1,...,n-m).

$$y = T * z \quad \text{ou} \quad y_j = t_{jr} z_r \quad j=1,...,n \text{ e } r=1,...,n-m$$

Para o caso de g=0 vai ser mostrado como ficam as equações do movimento.

As equações (55) escrever-se-ão:

$$a_{lp}\, t_{rl}\, \dot{y}_p = f_l\, t_{rl} \qquad r=1,\ldots,n-m \qquad (65)$$

que juntamente com as equações vinculares (64), apresentadas na forma diferencial, considerando g=0.

$$b_{ij}\, \dot{y}_l = \dot{b}_{il}\, y_l \quad (i=1,\ldots\ldots,m)$$

(66)

e

$$\dot{x}_j = y_j \qquad (j=1,\ldots n)$$

Formam um conjunto de (2n) equações para (2n) incógnitas.

O sistema de equações diferenciais a ser integrado passará a ser expresso por:

$$\dot{y} = M^{-1} * f \qquad \text{com } \dot{x} = y$$

Sendo que M e f poderão ser escritos decompostos em 2 blocos, um bloco correspondente as equações (65) e outro as equações (66) respectivamente.

$$M = \left[\frac{a_{lq}\, t_{lr}}{b_{il}}\right] \qquad \begin{array}{l} r=1,\ldots,n-m \\ i=1,\ldots,m \\ q,l=1,\ldots,n \end{array}$$

$$f = \left[\frac{f_l\, t_{lr}}{-\dot{b}_{il} y_l}\right] \qquad \begin{array}{l} r=1,\ldots,n-m \\ i=1,\ldots,m \\ q,l=1,\ldots,n \end{array}$$

A figura 18, abaixo, mostra um sistema mecânico para o qual a matriz B será calculada.

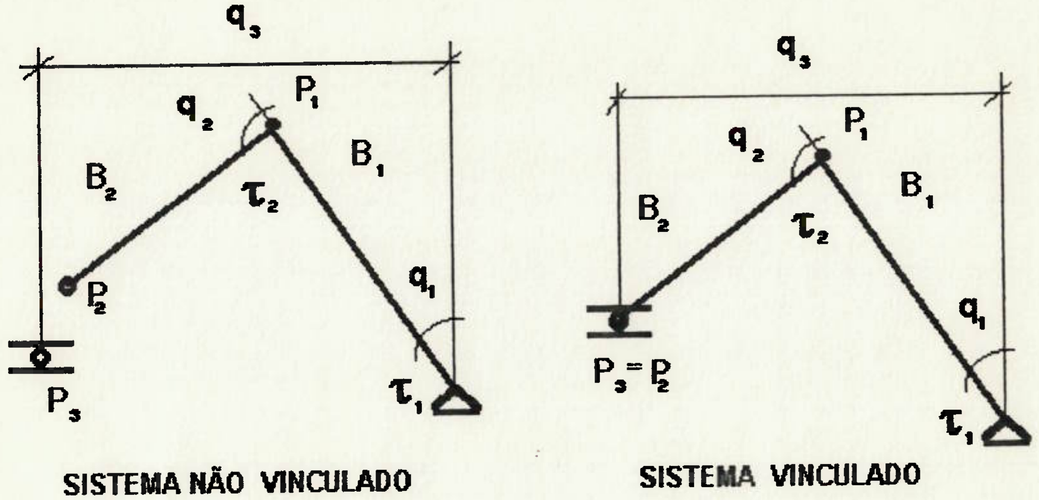


FIGURA 18, SISTEMA NÃO VINCULADO E SISTEMA VINCULADO

A configuração do sistema não vinculado pode ser descrita por três velocidades generalizadas. Os dois ângulos q_1 e q_2 e a posição de P_3 q_3. Assim as velocidades generalizadas y_l , $l=1,2,3$ são definidas como:

$$y_1=\dot{q}_1 \qquad y_2=\dot{q}_2 \qquad y_3=\dot{q}_3$$

Considerando que $V_3= -\dot{q}_3 \underset{\sim}{n}_1$

$$(p_2 -O)= (p_2-p_1) + (p_1-p_0)$$

$(p_2-O)= (-l\cos(q_1+q_2)\underset{\sim}{n}_2+ l\cos q_1 \underset{\sim}{n}_2) + l \cos(q_1+q_2)\underset{\sim}{n}_2 - \operatorname{sen}(q_1+q_2)\underset{\sim}{n}_2$

diferenciando a equação acima tem-se que:

$$V_2=l \cos q_1 \dot{q}_1 \underset{\sim}{n}_1 - l\operatorname{sen} q_1 \dot{q}_1 \underset{\sim}{n}_2 -l \operatorname{sen}(q_1+q_2)(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\underset{\sim}{n}_2 -$$

$$-l\cos(q_1+q_2)(\dot{q}_1+\dot{q}_2) \underset{\sim}{n}_1$$

Quando se vincula o ponto 2 ao 3, ou seja igualando V_2 a V_3, passam a valer as relações:

$\Sigma \underset{\sim}{n}_2=0 \qquad \operatorname{sen} q_1 \dot{q}_1 + \operatorname{sen}(q_1+q_2)(\dot{q}_1+\dot{q}_2) = 0$

$\Sigma \underset{\sim}{n}_1=\dot{q}_3 \qquad l\cos q_1 \dot{q}_1 + l \cos (q_1+q_2)(\dot{q}_1+\dot{q}_2)= \dot{q}_3$, ou ainda;

$$\operatorname{sen} q_1 y_1+ \operatorname{sen}(q_1+q_2)(y_1+y_2)= 0$$

$$l\cos q_1 y_1 + l \cos (q_1+q_2)(y_1+y_2)- y_3 = 0$$

As duas equações acima podem ser escritas sobre a forma matricial $B*y=0$ ou $B_{il}y_l=0$

onde B

$$B = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} q_1 +\operatorname{sen}(q_1+q_2) & \operatorname{sen}(q_1+q_2) & 0 \\ L(\cos q_1+\cos(q_1+q_2) & L\cos(q_1+q_2) & -1 \end{bmatrix}$$

5.3 MÉTODO NUMÉRICO DE SOLUÇÃO [5],[6],[7],[8]

As equações (56) e (57) mostram que os coeficientes das equações que governam o movimento são funções de V_{klm}, $\dot{V}_{klm}$, ω_{klm}, $\dot{\omega}_{klm}$ e dos parâmetros físicos e geométricos do sistema.

Assim um algoritmo para desenvolver a solução do problema pode ser expresso a seguir:

Depois de registrar os parâmetros físicos e geométricos assim como o vetor de conexão de corpos, são determinados valores iniciais das variáveis a partir da configuração inicial do sistema.

Esta configuração inicial também define os valores iniciais dos parâmetros de Euler que serão utilizados para calcular os valores iniciais dos quatro vetores que definem a configuração cinemática do sistema: $\dot{V}_{klm}$, V_{klm}, $\dot{\omega}_{klm}$, ω_{klm}. Uma maneira de se conseguir valores não nulos de ω_{klm} é observando que se $L(k)=p$ então ω_{klm} é SOP_{ml} $(m=1,2,3$ e $l=3p+1,3p+2,3p+3)$.

Este procedimento é repetido r vezes até que $L^r(k)=1$.

Sabendo-se os valores das forças aplicadas e vinculares podem-se calcular os valores iniciais de a_{lp}, f_l, b_{ql}, e g_q.

Integrando-se numericamente podem-se achar os valores das velocidades generalizadas e dos parâmetros de Euler(y_p e ε_{ki}) .

Pode-se repetir o processo até que toda a história no tempo do movimento seja reconstituida e a dinâmica do sistema determinada.

O programa utiliza o algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem, (o qual apresenta boa estabilidade numérica), para integrar numericamente as equações diferenciais que governam o movimento.

6. PARÂMETROS NECESSÁRIOS PARA A MODELAGEM

A modelagem do sistema far-se-á através de nós, e elementos. O elemento será representado por uma matriz (chamada matriz de Inércia) aonde existe interação entre os graus de liberdade dos nós dos elementos. Nó é o lugar geométrico em que se definem o centro de massa (vetores $\underset{\sim}{r}$) e a posição da junta de um elemento (vetores $\underset{\sim}{\xi}$ e $\underset{\sim}{g}$).

6.1 ORIGEM DOS CORPOS E SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Cada corpo possuirá a sua origem e o seu sistema de referência ortogonal, o qual estará situado na origem do corpo.

As direções dos eixos do sistema será arbitrária, mas é mais conveniente considera-las paralelas aos eixos principais de inércia do corpo.

A origem estará localizada na conexão com o corpo adjacente de numeração inferior.

A figura 19 mostra o sistema de referência para dois corpos adjacentes genéricos B_j e B_k, com origens em O_j e O_k respectivamente.

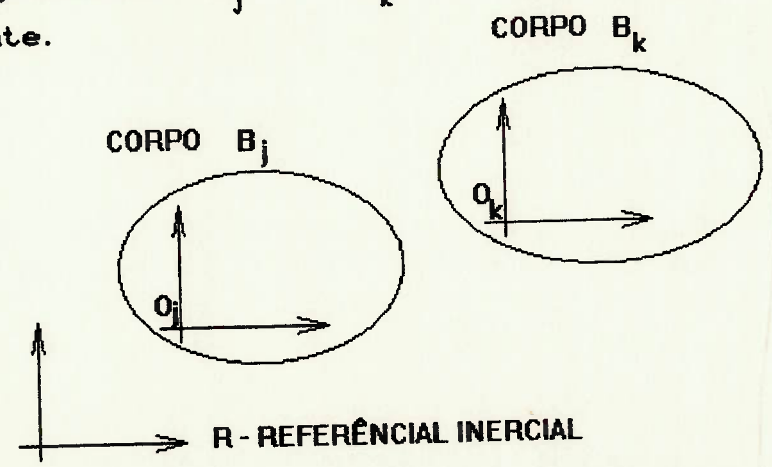


FIGURA 19 - SISTEMAS DE REFERENCIA

Deve-se notar que estes eixos não são parte da entrada de dados do programa. No entanto, como a origem e a orientação destes eixos determinam os valores do centro de massa , do ponto de conexão e dos componentes da matriz principal de inércia, a especificação das coordenadas e componentes dessa matriz podem ser vistos como a definição da localização e orientação dos eixos.

6.2 MATRIZES DE INÉRCIA

A matriz de inércia para um corpo genérico contém os momentos e produtos de inércia do corpo em relação a um sistema de referência localizado no seu centro de gravidade e paralelo aquele localizado na origem do corpo. Logo embora a orientação do sistema de referência fixo no corpo seja arbitrária é conveniente que esta seja paralela ao eixo principal de inércia para simplificação do cálculo desta matriz.

6.3 POSIÇÃO DO CENTRO DE MASSA: OS VETORES $\underset{\sim}{r}$

A posição do centro de massa de um corpo genérico B_j em relação ao sistema de referência do corpo (B_j) é dada pelo vetor $\underset{\sim}{r}_j$ $(O_j - G_j)$.

Como o corpo é rígido, o vetor $\underset{\sim}{r}$ é constante em relação ao sistema de referência do corpo B_j, ou seja, as coordenadas do centro de massa G_j são fixas em relação a O_j .

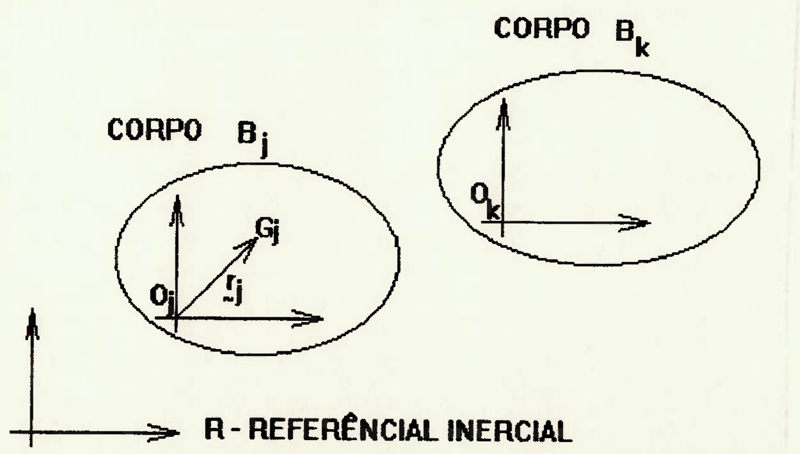


FIGURA 20 SISTEMA DE EIXOS, ORIGEM, CENTRO DE MASSA E VETOR $\underset{\sim}{r}$ DE UM CORPO GENERICO

6.4 POSIÇÃO DAS JUNTAS; OS VETORES ξ E g

Como foi observado anteriormente, um corpo típico do sistema multicorpo pode estar conectado a muitos corpos de numeração superior a sua.

Para cada junta de conexão um ponto de referência (Q) será definido. Esses pontos são fixos no corpo e localizados em relação à sua origem (ponto O) pelo vetor g. Considera-se que o vetor g para o primeiro corpo vale zero, ou seja, sua junta está posicionada juntamente com sua origem.

A origem (O) do corpo de numeração superior é definida respectivamente ao ponto de referencia da junta (Q) pelo vetor ξ, conforme está mostrado na figura 21.

O vetor ξ de um corpo típico irá descrever a translação relativa de um corpo em relação a outro na junta de conexão. Nota-se que se um corpo não transladar em relação ao corpo de numeração inferior não haverá vetor ξ.

Para o primeiro corpo, ξ_1, definirá como o primeiro corpo translada em relação ao referência inercial.

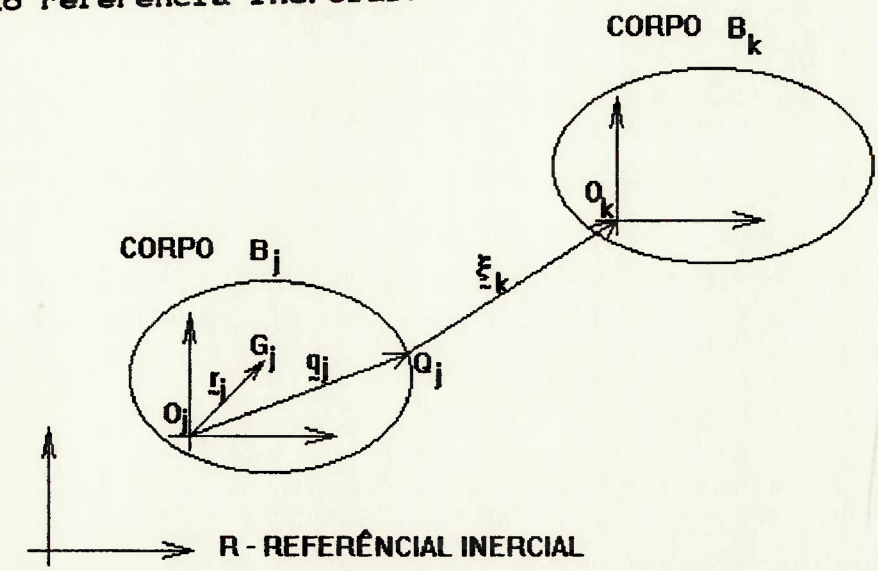


FIGURA 21 VETORES g E ξ DE DOIS CORPOS ADJACENTES

6.5 ÂNGULOS DE ORIENTAÇÃO

Estes angulos serão sempre expressos em relação ao referencial fixo no corpo adjacente de numeração inferior.

Apesar do programa utilizar internamente os parâmetros de Euler sua saida, assim como entrada são expressas em termos de angulos dextrais.

6.6 COMPONENTES DAS VELOCIDADES ANGULARES RELATIVAS

Considere dois corpos adjacentes típicos B_j e B_k como mostrado na figura 21, com B_j sendo o corpo de numeração inferior e B_k o de numeração superior. A velocidade angular de B_k em relação ao referencial inercial pode ser definido recursivamente através da relação abaixo:

$$\underset{\sim}{\omega}_k = \underset{\sim}{\omega}_j + \hat{\underset{\sim}{\omega}}_k$$

onde $\underset{\sim}{\omega}_k$ e $\underset{\sim}{\omega}_j$ são as velocidades angulares dos corpos B_j e B_k no referencial inercial e $\hat{\underset{\sim}{\omega}}_k$ é a velocidade angular de B_k relativamente a B_j. O programa utilizará as componentes de $\hat{\underset{\sim}{\omega}}_k$ nos eixos X_j, Y_j, Z_j como velocidades generalizadas na descrição cinemática e dinâmica do sistema. Portanto eles desempenham um papel fundamental na análise.

Os componentes da velocidade angular relativa podem ser utilizados para calcular tanto os parâmetros de Euler como os angulos dextrais. Uma vez que é mais prático trabalhar-se com ângulos de orientação, o programa contém uma subrotina que calcula os ângulos dextrais e suas derivadas.

6.7 JUNTAS DE CONEXÃO

No programa, os corpos podem ser conectados de seis maneiras diferentes: Livre, cilindrica, prismática, esférica, de revolução e movida.

Os graus de liberdade rotacional e translacional para cada tipo de junta são definidos relativamente ao sistema de coordenadas preso ao corpo de numeração inferior.

As juntas foram mostradas nas figuras 3 A 8. A junta livre é descrita por seis variáveis (três translacionais, e três rotacionais). A junta esférica é descrita por três variáveis de rotação, a cilindrica por duas: uma translacional e a outra rotacional. As juntas de revolução e prismática são descritas por uma variável, sendo do tipo rotacional e translacional respectivamente.

Em muitos casos as juntas estão acompanhadas por esforços vinculares (por exemplo molas e amortecedores) as quais dependem de posições relativas (angulares e lineares) das juntas e suas derivadas como mostrado na junta livre da figura 8. O programa assume que estas constantes de mola e amortecimento são nulas caso o usuário não as informe no corpo do programa.

Para cada junta do sistema, as variáveis de posição podem ser desconhecidas ou informadas em função do tempo. Se elas forem desconhecidas, contribuem para os graus de liberdade do sistema e serão determinadas por métodos de integração numéricos do programa. Se forem conhecidos e diferentes de zero precisarão ser informados através do movimento relativo dos corpos adjacentes que compõem a junta. O mais comum é não haver movimento relativo desconhecido entre as conexões como por exemplo em juntas movidas (veja figura 8) ou então haver apenas um movimento relativo como na junta de revolução (figura 6). Nestes casos as variáveis de posição relativas são usualmente constantes e iguais a zero.

Se as variaveis de posição forem conhecidas e diferentes de zero, constantes ou não, elas deverão ser especificadas pelo usuário via perfis de aceleração (maiores detalhes ver item 6.11). Assim se em uma junta de revolução sua aceleração, velocidade e deslocamento forem conhecidos e informados pelo usuário esta junta deve ser definida para efeito do programa como movida pois apesar de haver movimento de revolução, este movimento já é conhecido e portanto não contribue para os graus de liberdade do sistema.

6.8 FORÇAS E TORQUES EXTERNOS APLICADOS A SUBROTINA FORCE

Conside-se o sistema multicorpos sujeito a um campo de forças externas. Se este campo for aplicado a um corpo genérico B_k poderá ser representado por uma única força $\underset{\sim}{F}_k$ passando por seu centro de gravidade G_k juntamente com um binário $\underset{\sim}{M}_k$.

Algoritmos podem ser acoplados a subrotina FORCE para calcular $\underset{\sim}{F}_k$ e $\underset{\sim}{M}_k$ para cada corpo. Se o usuário não incluir os valores de $\underset{\sim}{F}_k$ e $\underset{\sim}{M}_k$ no corpo do programa eles serão considerados como sendo iguais a zero. Estas forças e momentos são então incluidos na análise dinâmica.

Observe que forças de peso próprio são automaticamente incluidas na análise se o usuário assim o requisitar, não precisando para isso ser computadas separadamente.

6.9 FORÇAS E TORQUES NAS CONEXÕES A SUBROTINA FORCI

Adicionalmente as forças e torques aplicados ao centro de massa de cada corpo, os corpos podem também exercer forças e momentos entre eles através das conexões simbolizadas por molas e amortecedores translacionais e rotacionais. As constantes de mola e amortecimento poderão ser informados através da subrotina MOLAR. Considerando dois corpos B_j e B_k mostrados na figura 22.

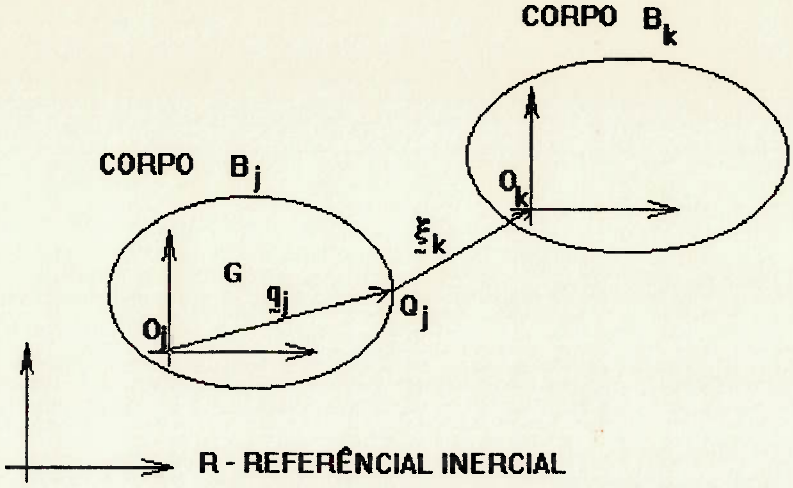


FIGURA 22 DOIS CORPOS ADJACENTES TIPICOS COM SUAS ORIGENS E PONTOS DE REFERENCIA

Seja a força aplicada pelo corpo B_j ao B_k equivalente a uma única força $\underset{\sim}{F}_{k/j}$ passando pelo ponto Q_k juntamente com um binário $\underset{\sim}{M}_{k/j}$. Se alguma componente de $\underset{\sim}{F}_{k/j}$ ou $\underset{\sim}{M}_{k/j}$ for resultado de algum movimento especificado (por exemplo, a força ser perpendicular ao eixo da junta como acontece em uma junta cilíndrica) esta componente será desconhecida e determinada no decorrer da analise pelo programa. Se no entanto qualquer força ou torque for aplicado em um direção que estiver livre (por exemplo uma força de mola sobre o eixo de uma ligação cilindrica), ela é conhecida e deve ser especificada pelo usuário ao programa.

Podem ser incluidos algoritimos à subrotina FORCI para se calcular as componentes de $\underset{\sim}{F}_{k/j}$ ou $\underset{\sim}{M}_{k/j}$ sobre os eixos X_j Y_j e Z_j para cada corpo. Só então estas forças e momentos serão automaticamente incluidas na análise pelo programa.

6.10 FORÇAS GRAVITACIONAIS

O programa pode aplica-las aos corpos do sistema em qualquer das 3 direções coordenadas do referencial inercial *R*.

6.11 PERFIS DE ACELERAÇÃO

Se a posição de um corpo for conhecida em relação ao corpo prescedente de numeração inferior ao qual estiver conectado ela poderá ser incluida na análise por meio de perfis de aceleração.

Um perfil de acelerações é um conjunto de pontos representando a curva aceleração em função do tempo, sendo que aqui a palavra aceleração serve tanto para para a segunda derivada do angulo de rotação quanto para a segunda derivada das variáveis de posicionamento linear relativos (os vetores ξ).

Note também que o angulo de orientação dextral não pode ser especificado independentemente se a junta for esférica ou livre. Ou todas são especificadas ou todas são desconhecidas.

O programa tem a capacidade de aceitar até 25 pontos da curva de aceleração. Uma aproximação linear ponto a ponto é feita desta curva. Como exemplo pode-se considerar a curva de aceleração da figura 23.

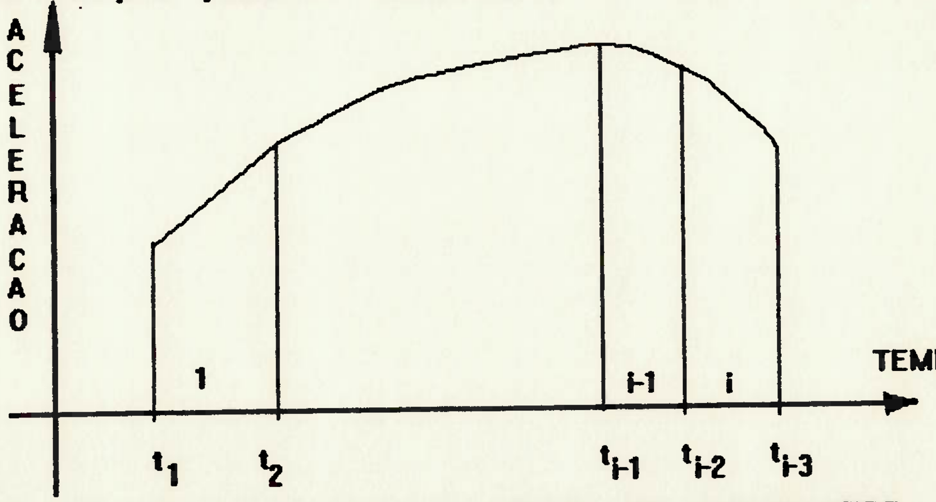


FIGURA 23 APROXIMACAO DO PERFIL DE ACELERAÇÕES

A aceleração, velocidade e deslocamento no enésimo intervalo de tempo será:

$$a = a_i + \left[\frac{a_{i+1}-a}{t_{i+1}-t_i}\right](t - t_i)$$

$$v = a_i(t - t_i) + \left[\frac{a_{i+1}-a_i}{t_{i+1}-t_i}\right](t - t_i)^2/2$$

$$d = d_i+v_i(t-t_i) + a_i(t - t_i)^2/2 + \left[\frac{a_{i+1}-a_i}{t_{i+1}-t_i}\right](t - t_i)^3/6$$

Onde a_i,v_i,d_i e t_i são a aceleração, a velocidade, o deslocamento e o intervalo de tempo no início do i-esimo intervalo. Assim todo perfil cinemático (deslocamentos,velocidades e acelerações) é conhecido quando é dado a_i e são conhecidas as condições iniciais de velocidade e deslocamento, v_1 e d_1 no intervalo de tempo t_1.

Como mostrado anteriormente pode-se especificar o movimento de um corpo em relação ao adjacente de número inferior em alguma das direções através de perfis de aceleração. Entretanto muitas vezes é necessário especificar um movimento não em relação ao inferior mas sim em relação ao referencial inercial.

No programa existe uma matriz de transformação armazenada para cada corpo. Essa matriz (chamada no programa de MATRA) permite transformar um eventual movimento especificado em relação ao referencial inercial em um movimento especificado em relação ao corpo inferior.

6.12 CADEIAS FECHADAS

O Programa deve ser utilizado em sistemas multicorpos sem cadeias fechadas, entretanto podem ser analisados sistemas contendo apenas uma cadeia.

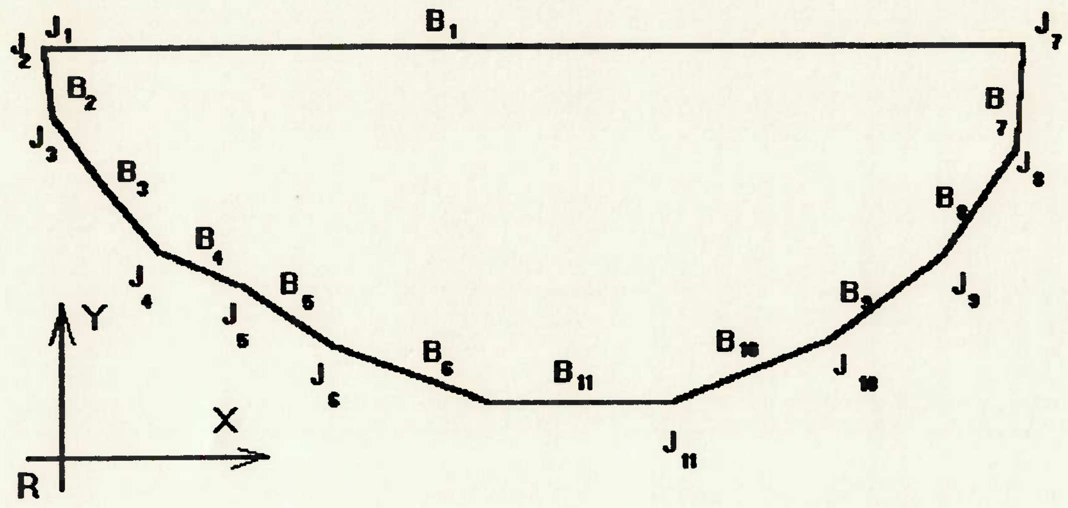


FIGURA 24. SISTEMA MULTICORPO FORMANDO UMA CADEIA FECHADA

Considere o sistema multicorpos da figura 24. A ilustração mostra que o sistema tem apenas uma cadeia fechada com um ponto fixo no referencial inercial . O programa considerará o sistema em sua análise como sendo formado sem cadeias fechadas, sendo necessário abrir-se a cadeia fechada. A figura 25 ilustra este sistema. Nela o sistema foi aberto entre os corpos B_i e B_h. Na análise da cadeia fechada os pontos D_i e D_h são ligados de modo a coincidirem.

Como a abertura da cadeia fechada é arbitrária o usuário é livre para selecionar o ponto que lhe seja mais conveniente. O programa exigirá o conhecimento do corpo que seja comum aos dois tramos da cadeia a ser aberto , usualmente este corpo é o B_1. Também o ponto comum a ser compartilhado e os vetores de posição dos pontos D_i e D_h dos corpos que coincidem devem ser informados.

Por exemplo, para o sistema da figura 25, B_1 é o corpo comum aos dois tramos e os corpos B_i e B_h são os corpos das extremidades dos dois tramos. Os vetores de posição $\underset{\sim}{d}_i$ e $\underset{\sim}{d}_h$ são especificados pelas suas componentes relativas aos eixos fixados em B_i e B_h respectivamente. Assim, as componentes de $\underset{\sim}{d}_i$ (por exemplo) são as coordenadas retangulares de D_i no sistema de coordenadas X_i, Y_i e Z_i.

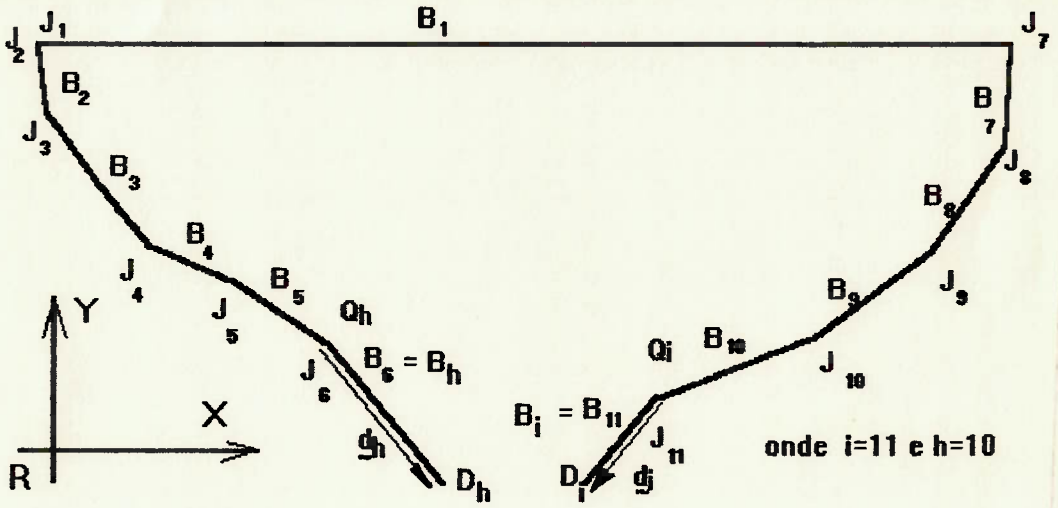


FIGURA 25. SEPARAÇÃO ARTIFICIAL DA CADEIA DA FIGURA 24

7. ENTRADA DE DADOS DO PROGRAMA

A seguir está descrito como são formatados os dados requiridos para a análise no programa SISMUL.

Os dados são fornecidos no formato FORTRAN, ou seja, números inteiros são admitidos como sendo I5 enquanto que os reais são F10.9 .

Os dados devem ser inputados na ordem descrita a seguir:

1) Título da Análise que se deseja executar com no máximo 60 caracteres.

2) Força Gravitacional. Para que esta seja incluida na análise coloque 1 até a coluna 5 (lembre-se que o formato de números inteiros é I5). Caso contrário digite o número zero.

3) Direção de Atuação da Força Gravitacional. Esta linha deve ser colocada se a opção da linha anterior for 1. Entre com ± 1 , ± 2 ,± 3 se a direção em que a força gravitacional for $\pm X$, $\pm Y$,$\pm Z$.

4) Problemas Bi/Tridimensionais. Se o problema for tridimensional coloque zero (0) nesta linha. Caso contrário coloque 1.

5) Cadeias Fechadas: Se a análise contiver cadeias fechadas coloque 1 nesta linha. Caso contrário coloque ZERO.

6) Coloque o número de corpos da análise.

7) Rótulos do Centro de Gravidade. Coloque os rótulos que poderão conter até 20 caracteres, sendo no máximo 3 por linha. O primeiro rótulo pode ocupar da coluna 1 até a coluna 20 no máximo, o segundo da coluna 21 a 40 e o terceiro da coluna 41 até a 60.

8) Rótulos das Juntas. Como nos rótulos do Centro de gravidade pode-se entrar até três rótulos por linha cada um ocupando até 20 caractéres, o primeiro começando na coluna 1, o segundo começando na coluna 21, e o terceiro começando na coluna 41.

9)Vetor de conexão de Corpos. Entre até 10 corpos por linha. O primeiro começando na coluna 1, o segundo começando na coluna 6, o terceiro começando na coluna 11, e assim sucessivamente.

10)Valor da aceleração da gravidade. Este valor deve sempre ser inputado independentemente se as forças gravitacionais forem ou não consideradas na análise.

12)Especificação dos vetores $\underset{\sim}{q}$.Os vetores $\underset{\sim}{q}$ encontram-se na figura 21. Estes vetores determinam onde se localiza a junta. Como estes vetores são sempre descritos em relação ao referencial do corpo adjacente o primeiro corpo não apresentará este vetor. Inpute um vetor por linha, sendo que a a primeira componente deverá começar na coluna 1, a segunda na coluna 11 e a terceira na coluna 21.

13)Determinação do centro de massa. Vetores $\underset{\sim}{r}$. Este vetor da a localização do centro de massa do referido corpo. Ele é fixo no sistema de coordenadas localizado no próprio corpo. A maneira de se inputar os dados é análoga ao item anterior, sendo que o primeiro corpo logicamente também apresentará seu vetor $\underset{\sim}{r}$.

14)Matrizes de Inércia. As próximas três linhas deverão conter a matriz de inércia do primeiro corpo. A matriz de inércia refere-se a a um referencial que se localize no seu centro de massa.

15) Corpo comum numa cadeia fechada. Se a análise não contiver cadeias fechadas omita esta linha. Caso contrário coloque em primeiro lugar (coluna 1 a 5) o número do corpo comum aos dois tramos e a seguir (coluna 6 a 10) o número do último corpo de cada um desses dois tramos.

16) Locação dos vetores compartilhados $\underset{\sim}{d}$. Conforme a figura 21 mostra os vetores de posição da junta compartilhada devem ser informados. Assim as próximas duas linhas servem para informar-se estes vetores. Caso não exista cadeia fechada na análise omita estas duas linhas.

17) A seguir informe o número de perfis de aceleração para as variáveis de rotação (no caso angulos de orientação).

18) Perfil de aceleração angular. Se a linha anterior for zero omita as próximas 3+p linhas. Caso contrário coloque na primeira linha o número de pontos (p) do perfil até o máximo de 20. Na linha a seguir coloque 1 ou 2 ou 3, se o angulo cuja a aceleração for especificada for α ou β ou γ . A próxima linha contém os valores iniciais do tempo, aceleração angular, velocidade angular e angulo do corpo em questão. As p linhas a seguir terão os valores do tempo, aceleração e posição.

19) A seguir informe o número de perfis de aceleração para as variáveis de translação.

20) Perfil de aceleração linear. Se a linha anterior for zero omita as próximas 3+p linhas. Caso contrário coloque na primeira linha o número de pontos (p) do perfil até o máximo de 20. Na linha a seguir coloque 1 ou 2 ou 3, se a variável cuja a aceleração for especificada for X ou Y ou Z . A próxima linha contém os valores iniciais do tempo, aceleração linear, velocidade linear e deslocamento linear do corpo em questão. As p linhas a seguir terão os valores do tempo, aceleração e posição.

21) Tipos de juntas. Para todas as juntas da análise coloque em primeiro lugar o número da junta referida e a seguir seu tipo: Se a junta 1 for livre coloque desta maneira:

```
         1         2         3         4
1234567890123456789012345678901234567890
1    0    0    0    0    0    0  Vide figura 3
```

- Se a junta 2 for esférica coloque:

```
         1         2         3         4
1234567890123456789012345678901234567890
2    0    0    0    1    1    1  Vide figura 4
```

- Se a junta 3 for cilíndrica coloque:

```
         1         2         3         4
1234567890123456789012345678901234567890
3    0    1    1    0    1    1  Vide figura 5
```

- Se a junta 4 for de revolução, ou seja indique rotação apenas no plano coloque:

```
         1         2         3         4
1234567890123456789012345678901234567890
4    1    1    0    1    1    1  Vide figura 6
```

- Se a junta 5 for prismática coloque:

```
         1         2         3         4
1234567890123456789012345678901234567890
1    1    1    1    1    0    1  Vide figura 7
```

- Se a junta 6 for engastada coloque:

```
         1         2         3         4
1234567890123456789012345678901234567890
1    1    1    1    1    1    1  Vide figura 8
```

Observe que esta junta não significa ausência de movimentos relativos entre os corpos. Isto só é válido quando não forem dados perfis de aceleração (veja itens 20 e 21).

22. Valores Iniciais das variáveis de rotação e translação e de suas variáveis. Neste item deverão ser fornecidas três linhas para cada corpo. A primeira linha deve conter o número do corpo. A segunda linha deve conter os valores iniciais das variáveis de translação (vetores ξ) referidas aos eixos X, Y, Z e de suas derivadas. A terceira linha linha deve conter os valores iniciais das variáveis de rotação, α, β, γ e de suas derivadas.

23. Parâmetros de Integração. Nesta linha deverão ser fornecidos os valores dos parâmetros de integração que são quatro. -Tempo em que se inicia a análise, Tempo que termina a análise, Passo inicial de integração (se negativo (-m) será igual a $(2)^{-m}$), e por fim o limite superior de erro na integração de quarta ordem pelo método de Runge-Kutta. O passo utilizado é o adaptativo através da técnica do "step-doubling" que consiste em integrar uma vez com o passo todo e a seguir integrar duas vezes com metade do passo. A seguir faz-se uma comparação da diferença dos valores obtidos com uma tolerância pré-especificada e ajusta-se automaticamente o passo.

24. Incremento de impressão. Imprime as informações de saida a cada intervalo de tempo especificado pelo incremento de impressão. Deve ser maior que o incremento de integração.

8. SUBROTINAS IMPORTANTES.

Existem subrotinas importantes, que o usuário deve conhecer de modo a poder rodar suas análise para carregamentos em que há esforços internos aplicados às juntas e externos aplicados ao centro de gravidade dos corpos. São as subrotinas: FORCE, FORCI, EULANG, e DANG.

8.1 SUBROTINAS DISPONIVEIS.

A elas se dá este nome pois já estão disponiveis e podem ser usadas pelos usuários do programa.

8.1.1 SUBROTINA EULANG

Esta subrotina transforma parâmetros de Euler em angulos de orientação.

8.1.2 SUBROTINA DANG

Calcula as derivadas dos angulos dextrais a partir dos angulos de orientação dextrais e das componentes das velocidades angulares do corpo em relação ao referencial inercial.

8.2 SUBROTINAS QUE DEVEM SER MODIFICADAS

São subrotinas que já existem no corpo do programa mas que devem ser modificadas para a análise conter as forças externas e internas aplicadas à junta.

8.2.1 SUBROTINA FORCE

A partir desta subrotina são especificados as forças e momentos externos agentes no centro de gravidade dos corpos em relação ao referencial inercial. As forças e momentos são calculados levando-se em consideração o número de corpos, o tempo, os quatro parâmetros de Euler, as velocidades angulares relativas de cada corpo, as três variáveis de translação e suas derivadas

8.2.2 SUBROTINA MOLAR

Nessas subrotinas são inputados os valores das constantes de amortecimento e de flexibilidade de corpos que interajem por meio de molas e amortecedores. Ela já está pronta bastando o usuário colocar os valores das constantes que são zeradas pelo programa caso o usuário não altere seus valores.

8.2.3 SUBROTINA FORCI

Esta subrotina calcula as forças e momentos internos transmitidos através das juntas de conexões por molas e amortecedores. Esta subrotina também já está pronta e não precisará ser modificada se os valores MOLAR tiverem sidos inputados.

9. RESULTADOS

A seguir dar-se-ão cinco resultados para ilustrar a utilização do método anteriormente exposto.

Resultado 1: é um exemplo literal sobre uma moeda rolando em um plano;

Resultado 2: consiste de um pêndulo duplo de 2 barras idênticas sujeito a ação da gravidade;

Resultado 3: um elo com 11 barras, contendo uma cadeia fechada é deixado cair sob a aceleração da gravidade;

Resultado 4: corpo humano sob impacto: um homem de 70 Kg sentado é submetido a uma curva de aceleração;

Resultado 5: um elo movido em uma de suas extremidades (sujeito a uma curva de acelerações) com 6 barras, contendo uma cadeia fechada submetido à aceleração da gravidade.

Por fim apresentar-se-á uma comparação dos resultados obtidos com o SISMUL com aqueles obtidos através do programa ADAMS o qual é um programa já certificado pela prática.

9.1 EXEMPLO 1 / LITERAL

Moeda Rolando:

Considere o exemplo da figura 33 (Ver Wang e Huston [17]). Consiste em uma moeda D de raio $\underset{\sim}{r}$ e massa $\underset{\sim}{m}$. Considere dois sistemas de referencia: um inercial $(O, \underset{\sim}{N}_x, \underset{\sim}{N}_y, \underset{\sim}{N}_z)$ e outro móvel $(G, \underset{\sim}{n}_1, \underset{\sim}{n}_2, \underset{\sim}{n}_3)$.

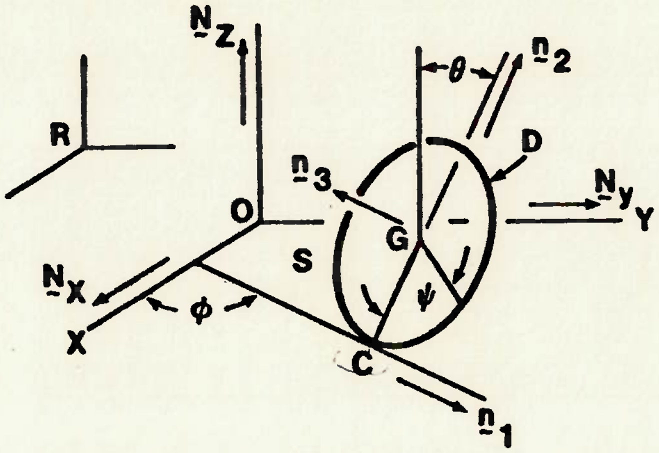


FIGURA 26 - MOEDA ROLANDO

Pode-se utilizar a metodologia para este único corpo. Neste caso ao invés de corpos de um sistema ter-se-á pontos de um corpo.

Os angulos θ, ϕ, ψ definem a orientação da moeda, assim como as funções $\xi(t), \eta(t), \zeta(t)$ define a translação do ponto C da moeda em relação ao referencial inercial.

I. Cinemática do Movimento da Moeda :

A velocidade angular da moeda será:

$$\underset{\sim}{\omega} = -\dot{\theta}\, \underset{\sim}{n}_1 + \dot{\phi} \cos\theta\, \underset{\sim}{n}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \operatorname{sen}\theta)\, \underset{\sim}{n}_3 = u_1 \underset{\sim}{n}_1 + u_2 \underset{\sim}{n}_2 + u_3 \underset{\sim}{n}_3$$

(1)

A aceleração Angular será:

$$\underset{\sim}{\alpha} = (-\ddot{\theta} + \dot{\psi}\,\dot{\phi}\cos\theta)\,\underset{\sim}{n}_1 + (\dot{\psi}\,\dot{\theta} + \ddot{\phi}\cos\theta - \dot{\phi}\,\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\theta\ \underset{\sim}{n}_2 + $$
$$+ (\ddot{\psi} + \ddot{\phi}\,\mathrm{sen}\theta \quad + \dot{\phi}\,\dot{\theta}\cos\theta\ )\,\underset{\sim}{n}_3$$

$$\underset{\sim}{\alpha} = (\dot{u}_1 - u_2^2\,(\mathrm{sen}\theta/\cos\theta) + u_2\,u_3)\,\underset{\sim}{n}_1 + (\dot{u}_2 + u_1\,u_2(\mathrm{sen}\theta/\cos\theta) - u_1 u_3)\underset{\sim}{n}_2 + $$
$$+\dot{u}_3\underset{\sim}{n}_3 \qquad (2)$$

A velocidade linear do ponto G da moeda em relação ao referencial inercial $(O,\underset{\sim}{N}_x,\underset{\sim}{N}_y,\underset{\sim}{N}_z)$ será:

$$V_G = (\dot{\xi} + \dot{x})\,\underset{\sim}{N}_x + (\dot{\eta} + \dot{y})\,\underset{\sim}{N}_y + (\dot{\zeta} + \dot{z})\,\underset{\sim}{N}_z$$

$$V_G = u_4\,\underset{\sim}{N}_x + u_5\,\underset{\sim}{N}_y + u_6\,\underset{\sim}{N}_z \qquad (3)$$

A aceleração do ponto G será :

$$a_G = (\ddot{\xi} + \ddot{x})\,\underset{\sim}{N}_x + (\ddot{\eta} + \ddot{y})\,\underset{\sim}{N}_y + (\ddot{\zeta} + \ddot{z})\,\underset{\sim}{N}_z$$

$$a_G = \dot{u}_4\,\underset{\sim}{N}_x + \dot{u}_5\,\underset{\sim}{N}_y + \dot{u}_6\,\underset{\sim}{N}_z \qquad (4)$$

II. Transformação de Coordenadas:

Os vetores contidos na base vetorial : $(G,\underset{\sim}{n}_1,\underset{\sim}{n}_2,\underset{\sim}{n}_3)$ poderão ser escritos em função dos vetores contidos na base : $(O,\underset{\sim}{N}_x,\underset{\sim}{N}_y,\underset{\sim}{N}_z)$ através das expresões vetoriais:

$\underset{\sim}{n}_1 = \cos\phi\, \underset{\sim}{N}_x + \operatorname{sen}\phi\, \underset{\sim}{N}_y$

$$\underset{\sim}{n}_2 = -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\, \underset{\sim}{N}_x + \operatorname{sen}\theta\cos\phi\, \underset{\sim}{N}_y + \cos\theta\, \underset{\sim}{N}_z \qquad (5)$$

$$\underset{\sim}{n}_3 = \cos\theta\operatorname{sen}\phi\, \underset{\sim}{N}_x - \cos\theta\cos\phi\, \underset{\sim}{N}_y + \operatorname{sen}\theta\, \underset{\sim}{N}_z$$

Como a moeda rola sem escorregar a velocidade de seu ponto C poderá ser escrita como:

$$V_C = \dot{\xi}\, \underset{\sim}{N}_x + \dot{\eta}\, \underset{\sim}{N}_y + \dot{\zeta}\, \underset{\sim}{N}_z$$

$$V_C = (u_4 - \dot{x})\, \underset{\sim}{N}_x + (u_5 - \dot{y})\, \underset{\sim}{N}_y + (u_6 - \dot{z})\, \underset{\sim}{N}_z \qquad (6)$$

Onde u_l $(l = 1\ ,\ 2\ ,\ldots,6)$ são as velocidades generalizadas do sistema.

III. Equações Vinculares:

As velocidades dos pontos G e C da moeda estão relacionadas pela equação de Poisson:

$$\underset{\sim}{V}_G = \underset{\sim}{V}_C + \underset{\sim}{\omega} \wedge (r\, \underset{\sim}{n}_2) \qquad (7)$$

Substituindo os valores de $\underset{\sim}{V}_G$ e $\underset{\sim}{V}_C$ e colocando-se o resultado em termos de $\underset{\sim}{N}_x$, $\underset{\sim}{N}_y$, $\underset{\sim}{N}_z$:

$$\dot{\xi}(t) = -r\cos\theta\,\mathrm{sen}\phi\, u_1 + r\cos\phi\, u_2 + u_4$$

$$\dot{\eta}(t) = r\cos\theta\cos\phi\, u_1 + r\,\mathrm{sen}\phi\, u_3 + u_5 \qquad (8)$$

$$\dot{\zeta}(t) = -r\,\mathrm{sen}\theta\, u_1 + u_6$$

IV. Velocidades Parciais

Segundo a metodologia de Kane as velocidades parciais são definidas da seguinte forma:

$$V_{klm} = \frac{\partial \underset{\sim}{v}_k}{\partial \dot{x}_l}$$

$$\omega_{klm} = \frac{\partial \underset{\sim}{\omega}_k}{\partial \dot{x}_l}$$

sendo $\dot{x}_l = u_l$

onde k identifica o corpo ou ponto em questão, l identifica a velocidade generalizada (m=1,2,3 identifica o eixo X, Y ou Z).

Para o baricentro G, as velocidades parciais serão:

$$\frac{\partial \underset{\sim}{V}_a}{\partial u_1} = \frac{\partial \underset{\sim}{V}_a}{\partial u_2} = \frac{\partial \underset{\sim}{V}_a}{\partial u_3} = \underset{\sim}{0} \qquad (9)$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{V}_a}{\partial u_4} = \underset{\sim}{N}_x \qquad \frac{\partial \underset{\sim}{V}_a}{\partial u_5} = \underset{\sim}{N}_y \qquad \frac{\partial \underset{\sim}{V}_a}{\partial u_6} = \underset{\sim}{N}_z$$

Para o ponto C da moeda, as velocidades parciais serão;

$$\frac{\partial \underset{\sim}{V}_c}{\partial u_1} = -r\, \underset{\sim}{n}_3 \qquad \frac{\partial \underset{\sim}{V}_c}{\partial u_4} = \underset{\sim}{N}_x \qquad (10)$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{V}_c}{\partial u_2} = \underset{\sim}{0} \qquad \frac{\partial \underset{\sim}{V}_c}{\partial u_5} = \underset{\sim}{N}_y$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{V}_c}{\partial u_3} = -r\, \underset{\sim}{n}_1 \qquad \frac{\partial \underset{\sim}{V}_c}{\partial u_6} = \underset{\sim}{N}_z$$

As velocidades parciais angulares da moeda serão;

$$\frac{\partial \underset{\sim}{\omega}}{\partial u_1} = \underset{\sim}{n}_1 \qquad \frac{\partial \underset{\sim}{\omega}}{\partial u_4} = \underset{\sim}{0}$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{\omega}}{\partial u_2} = \underset{\sim}{n}_2 \qquad \frac{\partial \underset{\sim}{\omega}}{\partial u_5} = \underset{\sim}{0} \qquad (11)$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{\omega}}{\partial u_3} = \underset{\sim}{n}_3 \qquad \frac{\partial \underset{\sim}{\omega}}{\partial u_6} = \underset{\sim}{0}$$

V. Vetor de Forças Generalizadas Ativas

As forças generalizadas aplicadas (ativas) na moeda correspondentes as velocidades generalizadas u_l, podem ser expressas como:

$$\underset{\sim}{F}_l = \underset{\sim}{F}_{km}\, \underset{\sim}{V}_{klm} + \underset{\sim}{M}_{km}\, \underset{\sim}{\omega}_{klm} \qquad (20)$$

No caso como a única força de campo agente é a força peso tem-se:

$$\underset{\sim}{F}^T = [\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ -mg\ ] \qquad (\ 12\ )$$

VI. Vetor de Forças Generalizadas Vinculares

A força generalizada vincular devido a u_l, pode ser expressa abaixo:

$$\underset{\sim}{F}'_l = \underset{\sim}{F}'_{km}\, \underset{\sim}{V}_{klm} + \underset{\sim}{M}'_{km}\, \underset{\sim}{\omega}_{klm} \qquad (\ 12.1\ )$$

Por sua vez a força vincular será representada no referencial inercial pelo vetor $\underset{\sim}{C}$;

$$\underset{\sim}{C} = C_x\, \underset{\sim}{N}_x + C_y\, \underset{\sim}{N}_y + C_z\, \underset{\sim}{N}_z \qquad (\ 13\ )$$

As equações 9,11,12.1 , 13 , 5 e 10 levam a:

$$\underset{-}{F}' = \begin{bmatrix} -r\cos\theta\ \text{sen}\phi\ C_x + r\ \cos\theta\ \cos\phi\ C_y - r\ \text{sen}\theta\ C_z \\ 0 \\ r\ \cos\phi\ C_x + r\ \text{sen}\phi\ C_y \\ C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} \qquad (\ 14\ )$$

VII. Equações Vinculares:

Se o sistema estiver sujeito à equações vinculares , elas poderão ser expressas conforme abaixo:

$$b_{ql}\, y_l \;=\; g_q \qquad (\, q=1,2,\ldots\ldots,m)\ (m<6N)$$

ou $$B * \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{g}$$

b_{ql} relaciona-se com as forças vinculares generalizadas por:

$$F'_l = b_{ql}\, \lambda_q$$

ou $$\underset{\sim}{F}' = B^T * \underset{\sim}{\lambda} \qquad (\ 15\ )$$

aonde λ_q $(q=1,\ldots,m)$ são as componentes das forças vinculares.

Por inspeção da matriz (14) tem-se :

$$B = \begin{bmatrix} -r\cos\theta\,\mathrm{sen}\phi & 0 & r\cos\phi & 1 & 0 & 0 \\ r\cos\theta\cos\phi & 0 & r\,\mathrm{sen}\phi & 0 & 1 & 0 \\ -r\,\mathrm{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\ 16\ )$$

VIII. Vetor de Forças de Inércia Generalizadas:

As forças de inércia serão expressas por:

$$\underset{\sim}{F}^* = - m \underset{\sim G}{a} = - m (a_1 \underset{\sim 1}{n} + a_2 \underset{\sim 2}{n} + a_3 \underset{\sim 3}{n}) \qquad (17)$$

$$\underset{\sim}{M}^* = -\underset{\sim}{I} * \underset{\sim}{\alpha} - \underset{\sim}{\alpha} \wedge (\underset{\sim}{I} * \underset{\sim}{\omega}) = T_1 \underset{\sim 1}{n} + T_2 \underset{\sim 2}{n} + T_3 \underset{\sim 3}{n} \qquad (18)$$

Onde T_i e a_i são as componentes da $\underset{\sim G}{a}$ e do $\underset{\sim}{M}^*$ na base móvel. $\underset{\sim 1}{n}$, $\underset{\sim 2}{n}$, $\underset{\sim 3}{n}$.

As forças de inércia correspondentes as velocidades generalizadas u_l podem ser expressas como:

$$\underset{\sim l}{F}^* = \underset{\sim km}{F}^* \underset{\sim klm}{V} + \underset{\sim km}{M}^* \underset{\sim klm}{\omega}$$

Onde $\underset{\sim km}{F}^*$ e $\underset{\sim km}{M}^*$ são as componentes dos vetores $\underset{\sim k}{F}^*$, $\underset{\sim k}{M}^*$ na base $\underset{\sim om}{n}$.

A equação acima juntamente com as equações 17 e 18 possibilita escrever-se o vetor de forças de inércia generalizadas;

$$F^* = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ -m\cos\phi\, a_1 + m\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\phi\, a_2 + m\cos\theta\,\mathrm{sen}\phi\, a_3 \\ -m\,\mathrm{sen}\phi\, a_1 - m\,\mathrm{sen}\theta\cos\phi\, a_2 + m\cos\theta\cos\phi\, a_3 \\ - m\cos\theta\, a_2 - m\,\mathrm{sen}\theta\, a_3 \end{bmatrix} \qquad (19)$$

IX. Equações do Movimento:

As equações que governam o movimento podem ser sumarizadas por:

$$\underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{F}' + \underset{\sim}{F}^{*} = 0 \qquad (20)$$

Usando-se as equações 12, 14 e 19 tem-se que para o exemplo em questão :

$$T_1 - r\cos\theta \operatorname{sen}\phi \, C_x + r\cos\theta\cos\phi \, C_y - r \operatorname{sen}\phi \, C_z = 0$$

$$T_2 = 0$$

$$T_3 + r \cos\phi \, C_x + r \operatorname{sen}\phi \, C_y = 0$$

$$- m\cos\phi \, a_1 + m\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \, a_2 - m\cos\theta\operatorname{sen}\phi \, a_3 + C_x = 0 \qquad (21)$$

$$- m\operatorname{sen}\phi \, a_1 - m \operatorname{sen}\theta\cos\phi \, a_2 + m \cos\theta\cos\phi \, a_3 + C_y = 0$$

$$- m\cos\theta \, a_2 - m\operatorname{sen}\theta \, a_3 - mg + C_z = 0$$

As equações acima juntamente com as equações:

$$\underset{\sim}{\omega} = -\dot{\theta} \, \underset{\sim}{n}_1 + \dot{\phi} \cos\theta \, \underset{\sim}{n}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \operatorname{sen}\theta) \, \underset{\sim}{n}_3 = u_1 \, \underset{\sim}{n}_1 + u_2 \, \underset{\sim}{n}_2 + u_3 \, \underset{\sim}{n}_3$$

$$(1)$$

$$\underset{\sim}{V}_G = u_4 \, \underset{\sim}{N}_x + u_5 \, \underset{\sim}{N}_y + u_6 \, \underset{\sim}{N}_z \qquad (3)$$

$$\dot{\xi}(t) = -r\cos\theta\,\mathrm{sen}\phi\; u_1 + r\cos\phi\; u_2 + u_4$$

$$\dot{\eta}(t) = r\cos\theta\cos\phi\; u_1 + r\;\mathrm{sen}\phi\; u_3 + u_5 \qquad (8)$$

$$\dot{\zeta}(t) = -r\,\mathrm{sen}\theta\; u_1 + u_6$$

Constituem um sistema com 15 equações a 15 variáveis ($\theta,\phi,\psi,x,y,z,$ C_x,C_y,C_z e $u_1,u_2,\ldots,u_6$) .

As últimas três equações de (21) poderiam ser resolvidas para C_x,C_y,C_z e substituidas nas primeiras três de (21), o que resultaria:

$$T_1 - mr\;a_3 - mgr\,\mathrm{sen}\theta = 0$$

$$T_2 = 0 \qquad (22)$$

$$T_3 + mra_1 = 0$$

X. Eliminação dos Esforços Vinculares

As equações acima (22) poderiam ser obtidas diretamente de:

$$\underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{F}' + \underset{\sim}{F}^{*} = 0 \qquad (20)$$

Para isso bastaria multiplicar esta equação por um complemento ortogonal da matriz B.

$$B = \begin{bmatrix} -r\cos\theta\ \mathrm{sen}\phi & 0 & r\cos\phi & 1 & 0 & 0 \\ r\cos\theta\cos\phi & 0 & r\,\mathrm{sen}\phi & 0 & 1 & 0 \\ -r\,\mathrm{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

A matriz B poderá ser escrita em dois blocos:

$$B = \left[\hat{B} \mid I\right] \qquad (23)$$

Onde $\hat{B}$ é obtido por comparação com as equações e I é a matriz identidade de ordem 3. Assim um complemeto ortogonal de B pode ser escrito:

$$C = \begin{bmatrix} I \\ \hline -\hat{B} \end{bmatrix} \qquad (24)$$

pois B*C=0

Das equações (14) , (16) e (24) pode-se observar que $C^T * F'$ vale zero. Assim multiplicando-se a equação (20) por C^T obtém-se:

$$C^T * \underset{\sim}{F} + C^T * \underset{\sim}{F}^* = \underset{\sim}{0}$$

que é o mesmo resultado encontrado nas equações (22).

9.2 EXEMPLO 2

Vai ser analisado um pêndulo duplo sob ação da aceleração da gravidade. Este pêndulo consiste de duas barras identicas de 2 metros com massa de 5 Kg .

Figura 27 mostra a configuração inicial das duas barras e a figura 28 mostra como o sistema evolue através de quatro intervalos de tempo.

FIGURA 27 POSIÇÃO INICIAL

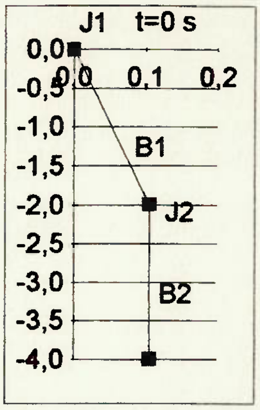
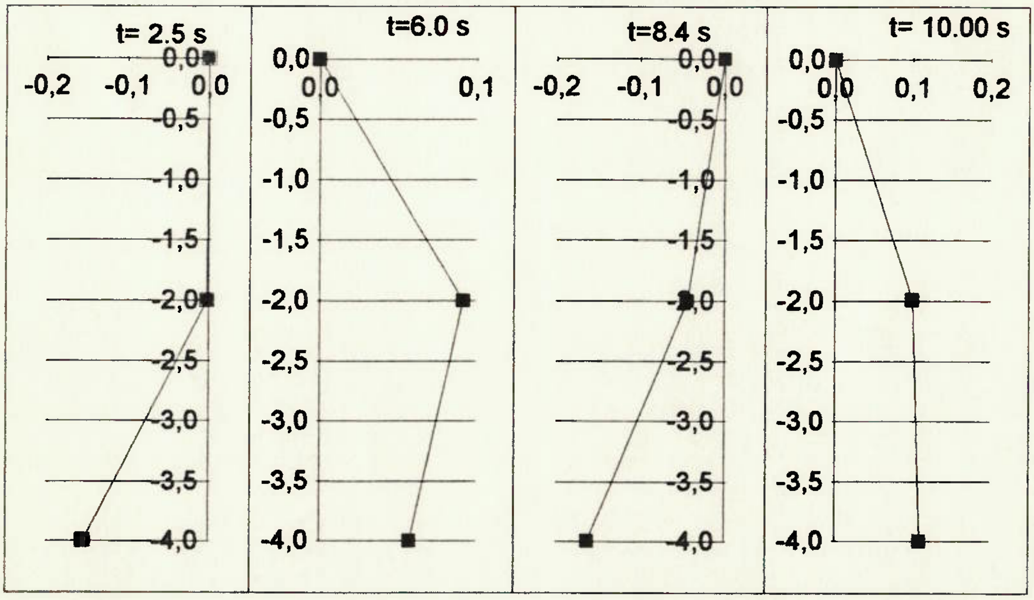


FIGURA 28 - EVOLUÇÃO DO SISTEMA NO TEMPO

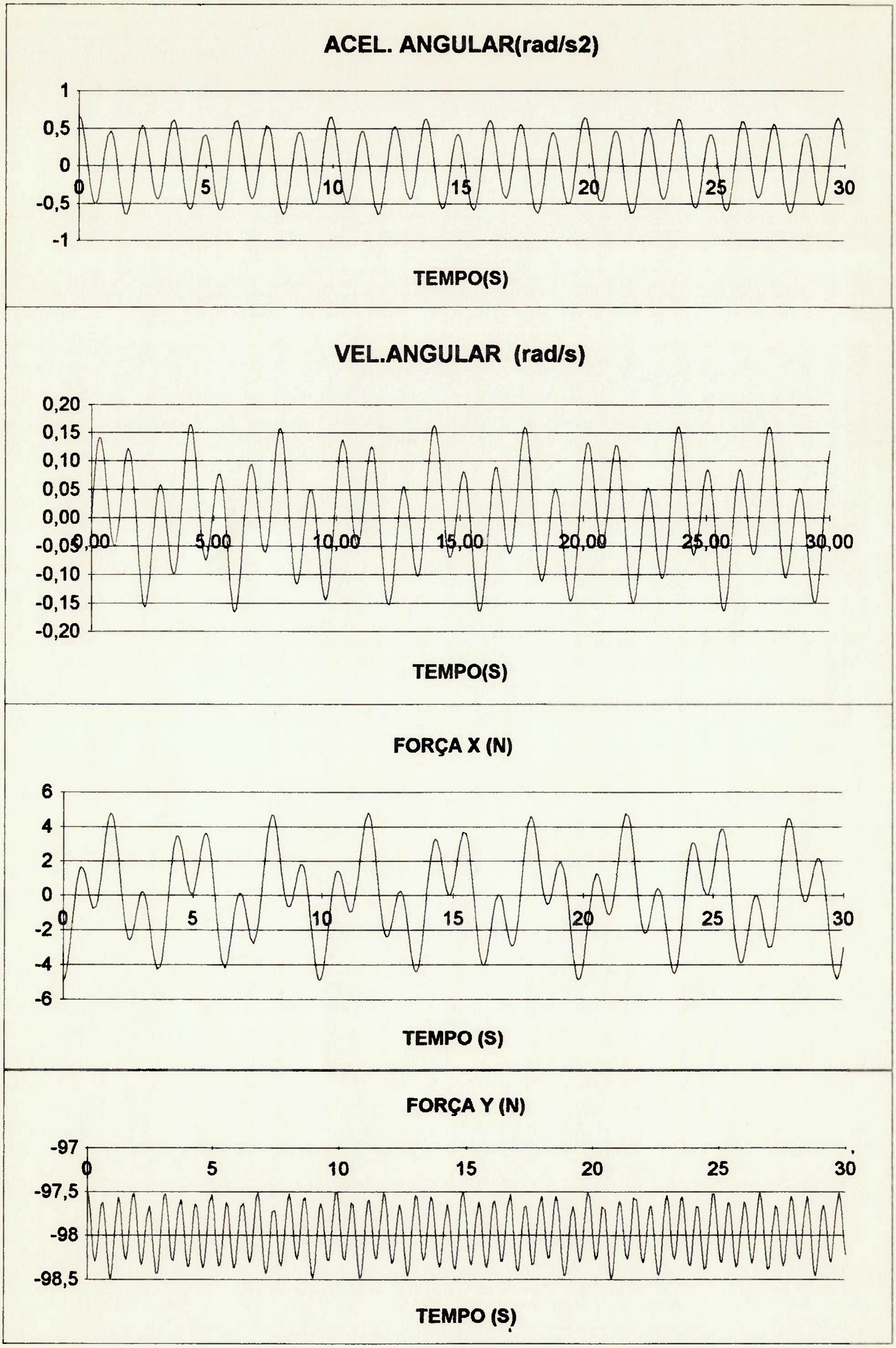


A seguir encontra-se a forma de entrar os dados para a análise deste pêndulo duplo.

```
***************         PENDULO DUPLO SE MOVENDO NO PLANO XY
    1      (FORCAS GRAVITACIONAIS SERAO CONSIDERADAS)
   -2      (-Y E' A DIRECAO VERTICAL)
    1      (O SISTEMA E' CONSIDERADO NO ESPACO 2-D)
    0      (SEM LACOS FECHADOS)
    2      (NUMEROS DOS CORPOS)
*C. M. BAR 1*       *C. M. BAR 2*
*JUNTA 1*           *JUNTA 2*
    0    1                                        VETOR DE CONEXAO
9.8                 (ACELERACAO DA GRAVIDADE)
5.0        5.0                                MASSAS
0.0        2.0        0.0      VETORES  "Q"
0.0        1.0        0.0      VETORES  "R"
0.0        1.0        0.0
1.6666667  0.0        0.0
0.0        0.0        0.0        I(1)
0.0        0.0        1.6666667
1.6666667  0.0        0.0
0.0        0.0        0.0        I(2)
0.0        0.0        1.6666667
    0            (SEM PERFIS : VARIAVEIS ANGULARES  )
    0            (SEM PERFIS : VARIAVEIS TRANSLACIONAIS)
    1     1     0     1     1     1          (Z-ROTACAO -JUNTA DE
    1     1     0     1     1     1          REVOLUÇÃO)
    1      (VALORES INICIAIS: BARRA 1)
0.0        0.0        0.0        0.0        0.0        0.0  VALORES DE ξ
0.0        0.0        3.000      0.0        0.0        0.0 ANG. DEXTRAIS
    2      (VALORES INICIAIS: BARRA 2)
0.0        0.0        0.0        0.0        0.0        0.0  VALORES DE ξ
0.0        0.0        3.000      0.0        0.0        0.0 ANG. DEXTRAIS
0.0        30.0       -6.00      0.00001       TEMPO INICIAL E FINAL
0.01                                     (INCREMENTO DE IMPRESSAO)
```

No apêndice é mostrado uma parte da saida da análise. Note que existe uma breve imagem da entrada de dados.

SISMUL-EXEMPLO 2 - PENDULO DUPLO



FORÇAS NA JUNTA 1 E ACEL. E VEL. NA BARRA 1

9.3 EXEMPLO 3

Considere um elo composto por 11 barras como mostrado na figura 29.

Este elo é um exemplo de sistema formando uma única cadeia fechado. Como definido anteriormente será necessário cortar esta cadeia em alguma junta de modo a este elo formar dois tramos independentes. A junta a ser separada é aquela entre os corpos 6 e 11.

O sistema consiste de 10 barras identicas de 1 metro com massa de 1 Kg e uma barra seis vezes maior e com massa nula. Essa barra simboliza o teto em que esse elo esta preso. A figura 27 mostra também a configuração inicial das onze barras. Este sistema é deixado cair sob a aceleração da gravidade.

A figura 30 mostra como o sistema evolue no tempo.

EXEMPLO 3 - POSIÇÃO INICIAL E EVOLUÇÃO DO SISTEMA NO TEMPO

FIGURA 29 - CONFIGURAÇÃO INICIAL DO ELO

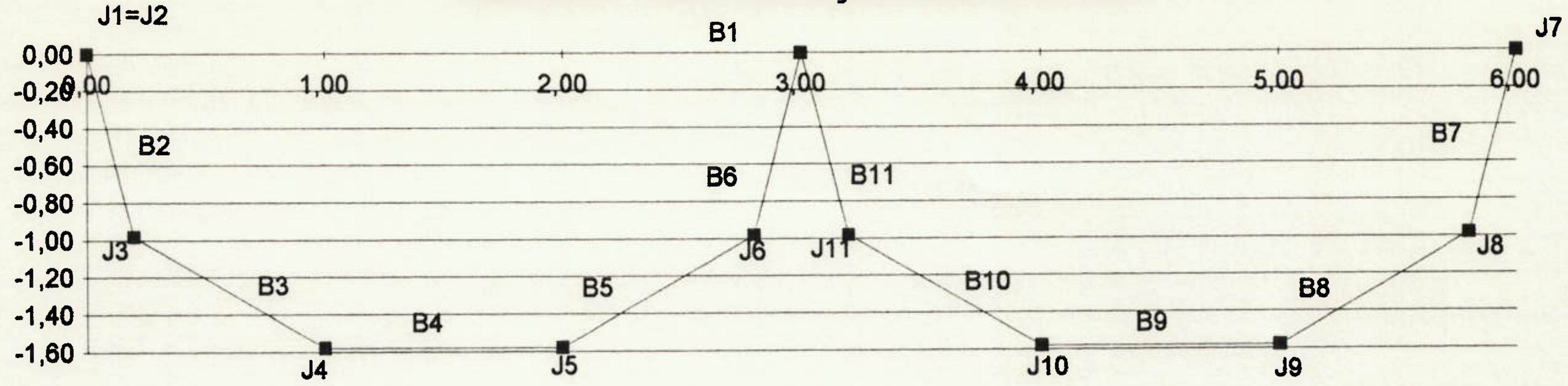
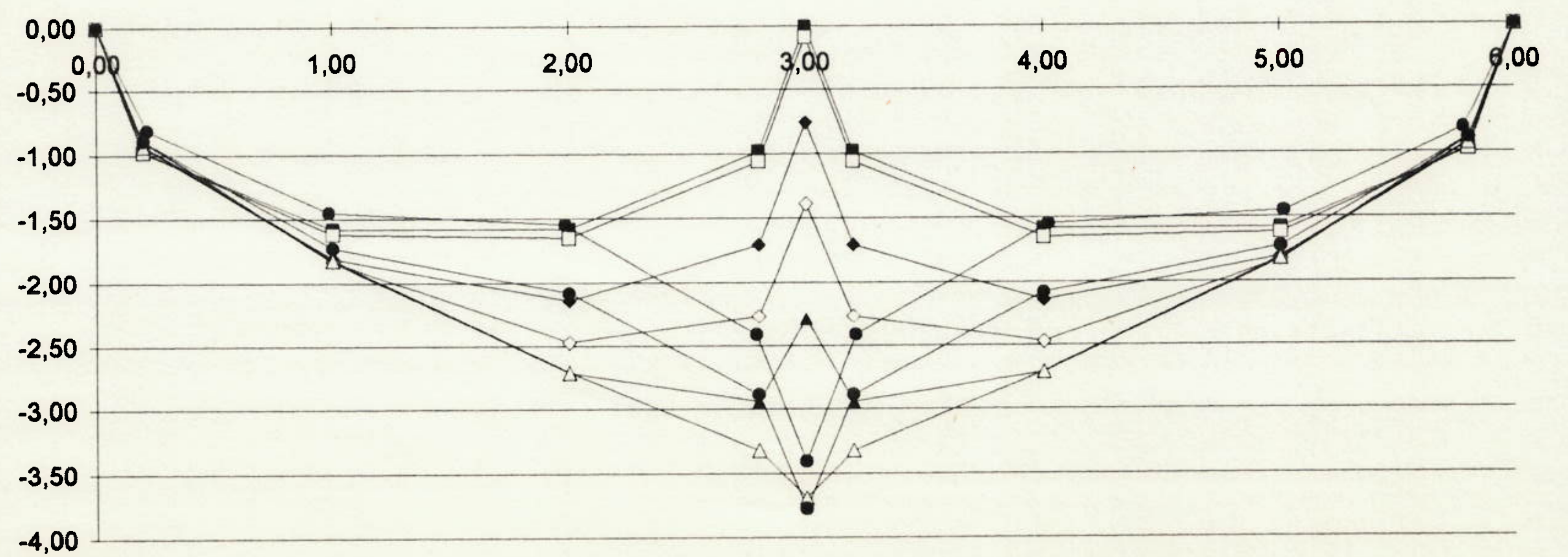


FIGURA 30 - EVOLUÇÃO DO SISTEMA NO TEMPO



INTERVALOS: 0.0 S ,0.123 S, 0.375 S , 0.500 S , 0.625 S , 0.750 S , 0.875 S E 1.000 S

A seguir encontra-se a forma de entrar os dados para a análise deste sistema composto por 11 elos. Note que ela apresenta uma cadeia fechada.

```
**************  EXEMPLO 3 ELO COM 11 BARRAS
    1          FORCAS GRAVITACIONAIS
    2          (Y É A DIREÇAO VERTICAL)
    1          (SISTEMA 2D)
    1          (COM CADEIAS FECHADAS-LAÇOS)
   11          (NUMERO DE CORPOS DA ANALISE)
*C.M.   BARRA 1*     *C.M.   BARRA 2*     *C.M.   BARRA 3*
*C.M.   BARRA 4*     *C.M.   BARRA 5*     *C.M.   BARRA 6*
*C.M.   BARRA 7*     *C.M.   BARRA 8*     *C.M.   BARRA 9*
*C.M.   BARRA10*     *C.M.   BARRA11*
*JUNTA        1*     *JUNTA        2*     *JUNTA        3*
*JUNTA        4*     *JUNTA        5*     *JUNTA        6*
*JUNTA        7*     *JUNTA        8*     *JUNTA        9*
*JUNTA       10*     *JUNTA       11*
    0    1    2    3    4    5    1    7    8    9  VETOR CONEC.
   10
9.8                                           ACEL GRAVIDADE
0.0       1.0       1.0       1.0       1.0       MASSAS
1.0       1.0       1.0       1.0       1.0       MASSAS
1.0                                               MASSAS
0.0       0.0       0.0                 2 VETOR Q
-1.0      0.0       0.0                 3 VETOR Q
-1.0      0.0       0.0                 4 VETOR Q
-1.0      0.0       0.0                 5 VETOR Q
-1.0      0.0       0.0                 6 VETOR Q
6.0       0.0       0.0                 7 VETOR Q
1.0       0.0       0.0                 8 VETOR Q
1.0       0.0       0.0                 9 VETOR Q
1.0       0.0       0.0                10 VETOR Q
1.0       0.0       0.0                11 VETOR Q
3.0       0.0       0.0                 1  VETOR R
-0.5      0.0       0.0                 2  VETOR R
-0.5      0.0       0.0                 3  VETOR R
-0.5      0.0       0.0                 4  VETOR R
```

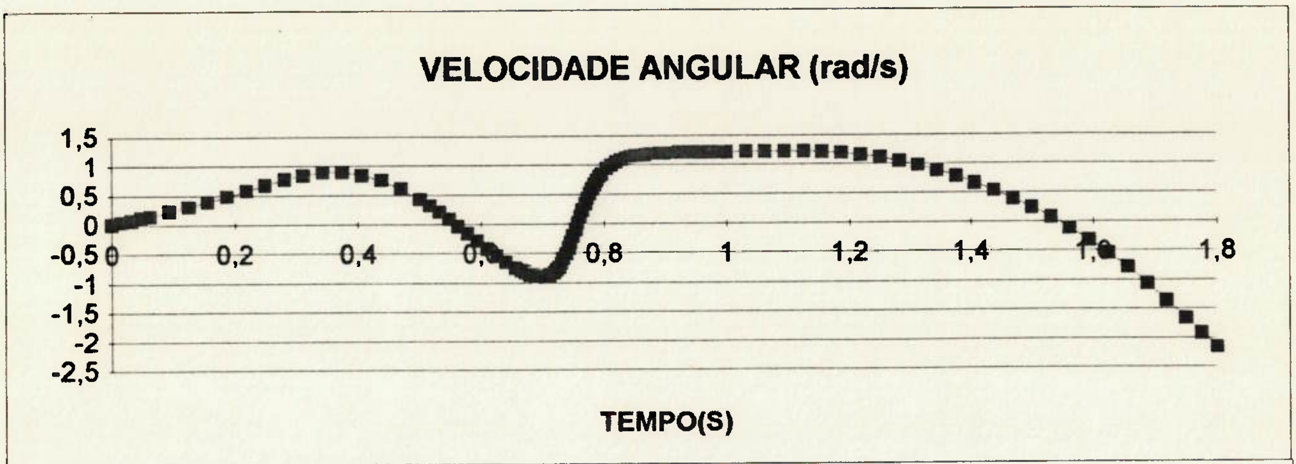
-0.5	0.0	0.0	5 VETOR R
-0.5	0.0	0.0	6 VETOR R
0.5	0.0	0.0	7 VETOR R
0.5	0.0	0.0	8 VETOR R
0.5	0.0	0.0	9 VETOR R
0.5	0.0	0.0	10 VETOR R
0.5	0.0	0.0	11 VETOR R
0.0	0.0	0.0	INERCIA 1
0.0	0.0	0.0	INERCIA 1
0.0	0.0	0.0	INERCIA 1
0.0	0.0	0.0	INERCIA 2
0.0	0.333333	0.0	INERCIA 2
0.0	0.0	0.333333	INERCIA 2
0.0	0.0	0.0	INERCIA 3
0.0	0.333333	0.0	INERCIA 3
0.0	0.0	0.333333	INERCIA 3
0.0	0.0	0.0	INERCIA 4
0.0	0.333333	0.0	INERCIA 4
0.0	0.0	0.333333	INERCIA 4
0.0	0.0	0.0	INERCIA 5
0.0	0.333333	0.0	INERCIA 5
0.0	0.0	0.333333	INERCIA 5
0.0	0.0	0.0	INERCIA 6
0.0	0.333333	0.0	INERCIA 6
0.0	0.0	0.333333	INERCIA 6
0.0	0.0	0.0	INERCIA 7
0.0	0.333333	0.0	INERCIA 7
0.0	0.0	0.333333	INERCIA 7
0.0	0.0	0.0	INERCIA 8
0.0	0.333333	0.0	INERCIA 8
0.0	0.0	0.333333	INERCIA 8
0.0	0.0	0.0	INERCIA 9
0.0	0.333333	0.0	INERCIA 9
0.0	0.0	0.333333	INERCIA 9
0.0	0.0	0.0	INERCIA 10
0.0	0.333333	0.0	INERCIA 10
0.0	0.0	0.333333	INERCIA 10

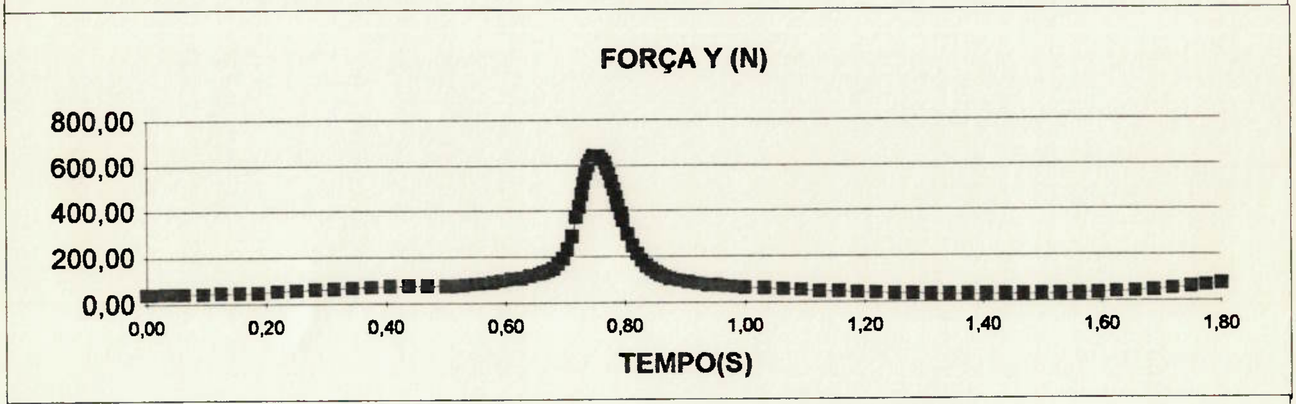
```
0.0         0.0         0.0              INERCIA 11
0.0         0.333333    0.0              INERCIA 11
0.0         0.0         0.333333         INERCIA 11
    1     6    11                        LAÇO SE FORMA NOS
-1.0        0.0         0.0              CORPOS 6 E 11
1.0         0.0         0.0
    0
    0
    1     1     1     1     1     1      JUNTA 1 MOVIDA
    1     1     0     1     1     1      JUNTA 2 DE REVOLUCAO
    1     1     0     1     1     1      JUNTA 3 DE REVOLUCAO
    1     1     0     1     1     1      JUNTA 4 DE REVOLUCAO
    1     1     0     1     1     1      JUNTA 5 DE REVOLUCAO
    1     1     0     1     1     1      JUNTA 6 DE REVOLUCAO
    1     1     0     1     1     1      JUNTA 7 DE REVOLUCAO
    1     1     0     1     1     1      JUNTA 8 DE REVOLUCAO
    1     1     0     1     1     1      JUNTA 9 DE REVOLUCAO
    1     1     0     1     1     1      JUNTA 10 DE REVOLUCAO
    1     1     0     1     1     1      JUNTA 11 DE REVOLUCAO
    1                              POSICAO SISTEMA 1 (REL REF)
0.0         0.0         0.0         0.0         0.0         0.0
0.0         0.0         0.0         0.0         0.0         0.0
    2                              POSICAO SISTEMA 2 (REL 1)
0.0         0.0         0.0         0.0         0.0         0.0
0.0         0.0         101.537     0.0         0.0         0.0
    3                              POSICAO SISTEMA 3 (REL 2)
0.0         0.0         0.0         0.0         0.0         0.0
0.0         0.0         41.593      0.0         0.0         0.0
    4                              POSICAO SISTEMA 4 (REL 3)
0.0         0.0         0.0         0.0         0.0         0.0
0.0         0.0         36.87       0.0         0.0         0.0
    5                              POSICAO SISTEMA 5 (REL 4)
0.0         0.0         0.0         0.0         0.0         0.0
0.0         0.0         36.87       0.0         0.0         0.0
    6                              POSICAO SISTEMA 6 (REL 5)
0.0         0.0         0.0         0.0         0.0         0.0
0.0         0.0         41.593      0.0         0.0         0.0
```

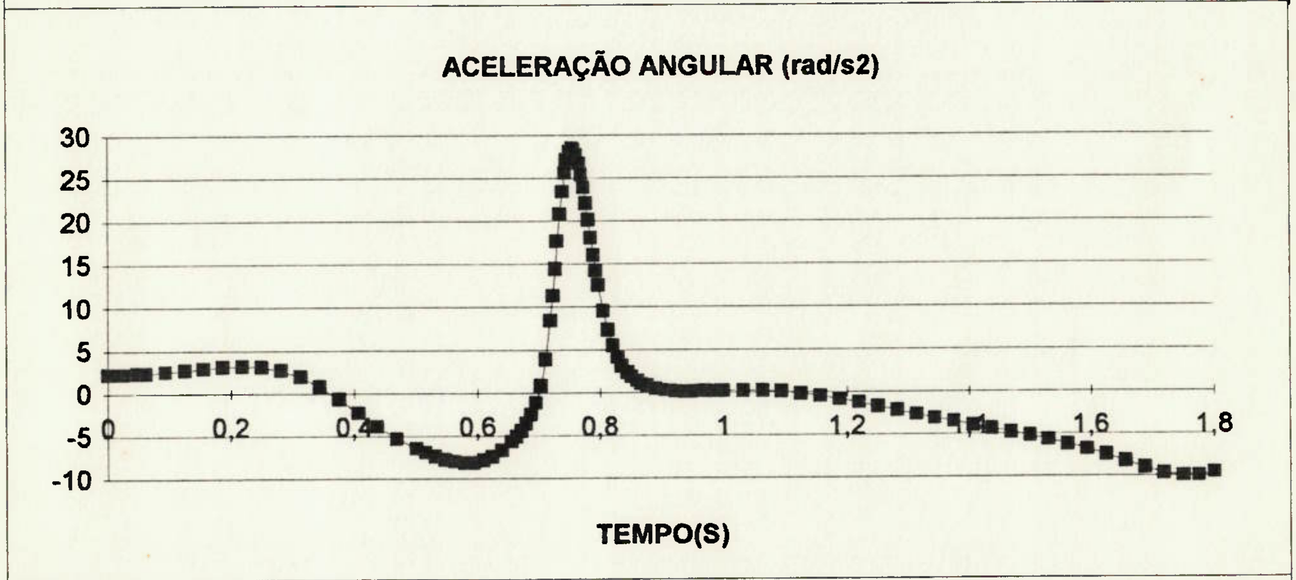
7			POSICAO SISTEMA 7 (REL 1)		
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	-101.537	0.0	0.0	0.0
8			POSICAO SISTEMA 8 (REL 7)		
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	-41.593	0.0	0.0	0.0
9			POSICAO SISTEMA 9 (REL 8)		
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	-36.87	0.0	0.0	0.0
10			POSICAO SISTEMA 10 (REL 9)		
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	-36.87	0.0	0.0	0.0
11			POSICAO SISTEMA 11 (REL 10)		
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	-41.593	0.0	0.0	0.0
0.0	1.0	-6.0	0.00001	(TO=0S TF=2S)	
0.0001				(INCREMENTO)	

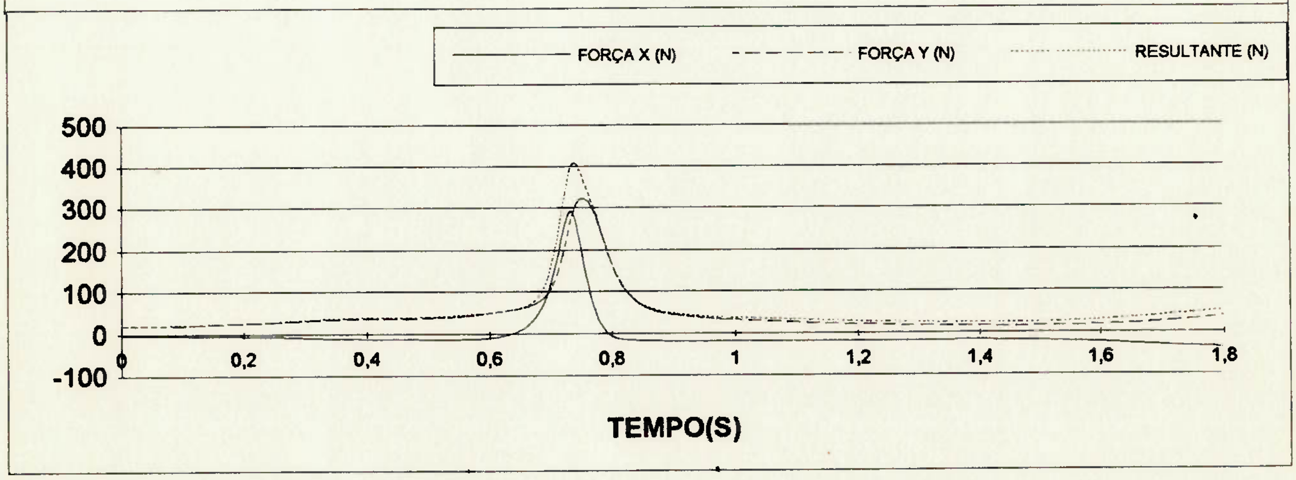
No apêndice é mostrado uma parte da saida da análise. Note que existe uma breve imagem da entrada de dados.

SISMUL-ELO COM 11 BARRAS SOB AÇÃO DA GRAVIDADE









FORÇAS NA JUNTA 2, ACEL. E VEL. NA BARRA 2

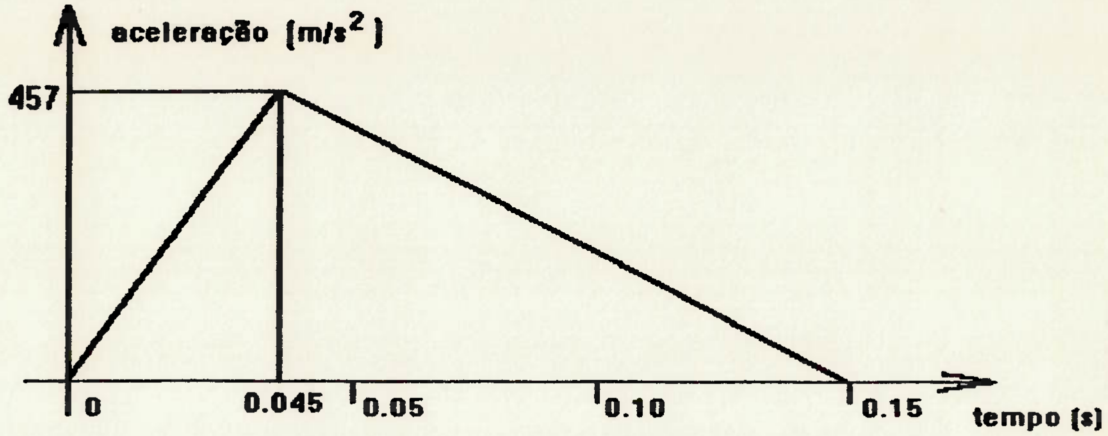


FIGURA 32 - PERFIL DE ACELERAÇÃO DO CORPO 1 DO MODELO

Os braços são girados de 77.35 graus e as pernas de 6.35 graus em relação à configuração inicial. O resultado está mostrado na figura 33.

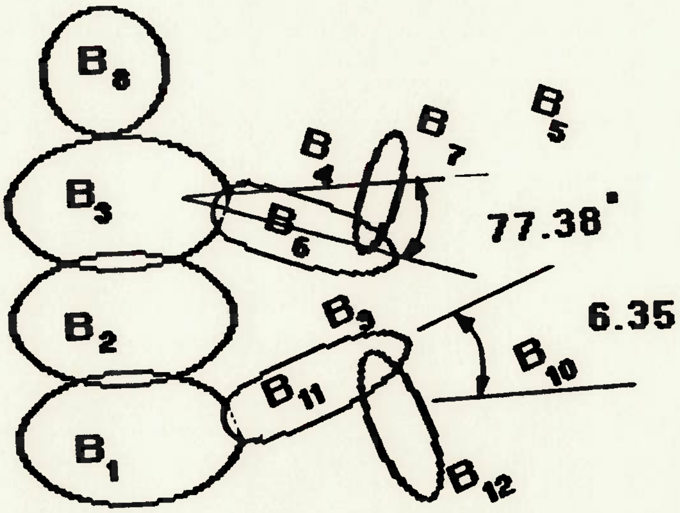


FIGURA 33 - CONFIGURAÇÃO INICIAL DO MODELO

A seguir está mostrado a entrada de dados do modelo para o programa

```
*********** EXEMPLO 4 CORPO HUMANO SOB IMPACTO
    0       (FORÇAS GRAVITACIONAIS NAO SERAO CONSIDERADAS)
    0       (O SISTEMA É 3D)
    0       (SEM LAÇOS)
   12       (NUMERO DE CORPOS)
QUADRIL              ESTOMAGO              PEITO
BRACO ESQUERDO       ANTEBRACO ESQUERDO    BRACO DIREITO
ANTEBRACO DIREITO    CABECA                PERNA ESQUEDA
CANELA ESQUERDA      PERNA DIREITA         CANELA DIREITA
QUADRIL              ESTOMAGO              PEITO
OMBRO ESQUERDO       COTOVELO ESQUERDO     OMBRO DIREITO
COTOVELO DIREITO     PESCOCO               CINTURA ESQUERDA
JOELHO ESQUERDO      CINTURA DIREITA       JOELHO DIREITO
    0    1    2    3    4    3    6    3    1    9   VETOR DE
    1   11                                           CONEXAO
117.60                                               ACELERACAO
11.6943    11.6943    9.5751    2.2725    1.8256     MASSAS
2.2725     1.8256     5.5280    7.0855    4.5705     MASSAS
7.0855     4.5705                                    MASSAS
0.0        0.0        1.2344         Q2   ESTOMAGO
0.0        0.0        2.4689         Q3   PEITO
0.0        2.5451     1.7678         Q4   BRACO
3.5662     0.0        0.0            Q5   ANTEBRACO
0.0        -2.5451    1.7678         Q6   BRACO
3.5662     0.0        0.0            Q7   ANTEBRACO
0.0        0.0        2.4079         Q8   CABECA
0.0        1.0        -0.1981        Q9   PERNA
5.6693     0.0        0.0            Q10  CANELA
0.0        -1.00      -0.1981        Q11   PERNA
5.6693     0.0        0.0            Q12   CANELA
0.0        0.0        0.0            R1   QUADRIL
0.0        0.0        1.2344         R2   ESTOMAGO
0.0        0.0        1.20           R3   PEITO
1.36       0.0        0.0            R4   OMBRO
0.0        0.0        2.141          R5   COTOVELO
1.36       0.0        0.0            R6   OMBRO
0.0        0.0        2.141          R7   COTOVELO
```

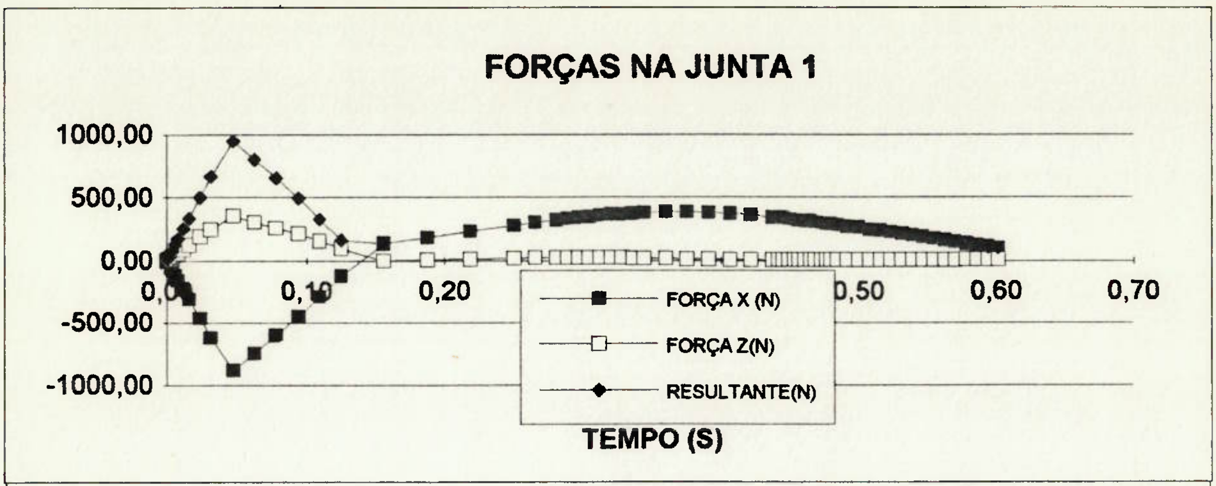
0.0	0.0	1.33	R8	PESCOCO
2.9821	0.0	0.0	R9	PERNA
0.0	0.0	-2.7432	R10	CANELA
2.9821	0.0	0.0	R11	PERNA
0.0	0.0	-2.7438	R12	CANELA
62.8	0.0	0.0	1	QUADRIL
0.0	28.06	0.0	1	QUADRIL
0.0	0.0	61.32	1	QUADRIL
62.8	0.0	0.0	2	ESTOMAGO
0.0	38.38	0.0	2	ESTOMAGO
0.0	0.0	61.32	2	ESTOMAGO
45.00	0.0	0.0	3	PEITO
0.0	30.96	0.0	3	PEITO
0.0	0.0	44.652	3	PEITO
0.0328	0.0	0.0	4	BRACO
0.0	11.266	0.0	4	BRACO
0.0	0.0	11.266	4	BRACO
12.236	0.0	0.0	5	ANTE-BRACO
0.0	12.236	0.0	5	ANTE-BRACO
0.0	0.0	0.2352	5	ANTE-BRACO
0.0328	0.0	0.0	6	BRACO
0.0	11.2624	0.0	6	BRACO
0.0	0.0	11.2624	6	BRACO
12.236	0.0	0.0	7	ANTE-BRACO
0.0	11.236	0.0	7	ANTE-BRACO
0.0	0.0	0.2352	7	ANTE-BRACO
18.572	0.0	0.0	8	CABECA
0.0	18.572	0.0	8	CABECA
0.0	0.0	9.208	8	CABECA
0.260	0.0	0.0	9	PERNA
0.0	40.648	0.0	9	PERNA
0.0	0.0	40.648	9	PERNA
48.9264	0.0	0.0	10	CANELA
0.0	49.552	0.0	10	CANELA
0.0	0.0	0.6844	10	CANELA

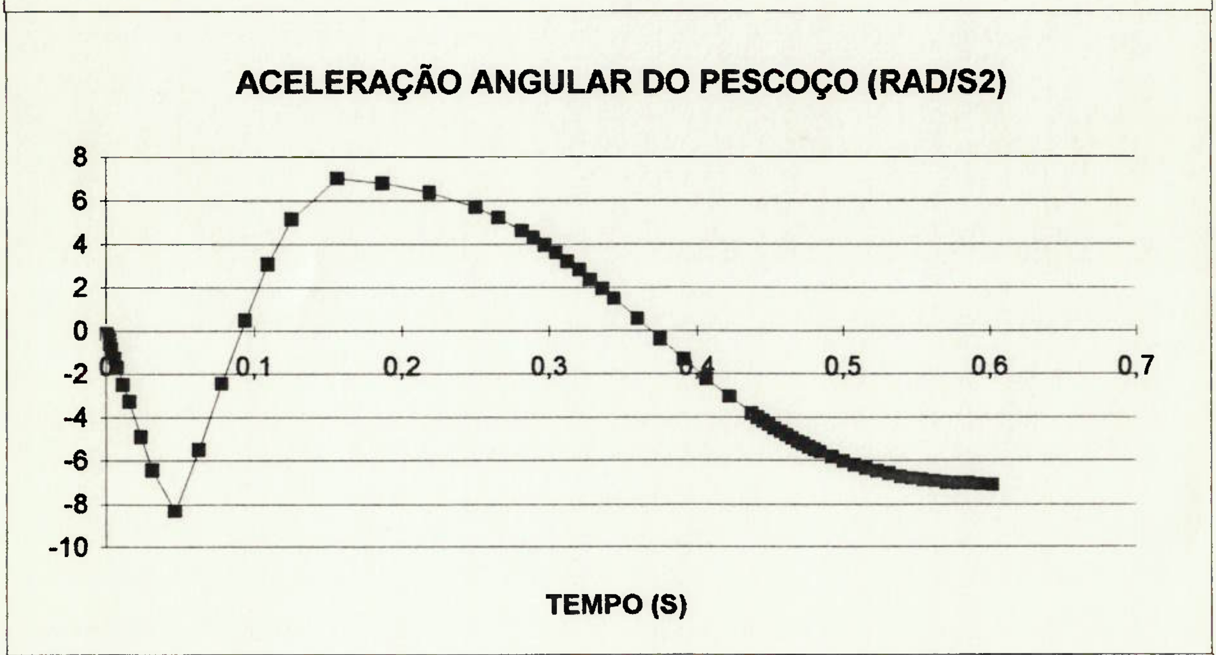
```
0.26       0.0       0.0                  11  PERNA
0.0        40.648    0.0                  11  PERNA
0.0        0.0       40.648               11  PERNA
48.9264    0.0       0.0                  12  CANELA
0.0        49.552    0.0                  12  CANELA
0.0        0.0       0.6844               12  CANELA
    0                                     NAO EXISTE CURVAS DE VAR.ANG.
    1                                     EXISTE CURVA DE ACEL. LIN.
    3                                     TRES PONTOS
    1    1                                DIRECAO X CORPO 1
0.0        0.0       107.28     0.0       TEMPO,ACEL,VEL,DESL
0.045      457.20                         TEMPO,ACEL
0.15       0.0                            TEMPO,ACEL
    1    1    1    1    1    1            JUNTA 1 MOVIDA
    0    0    0    1    1    1            JUNTA 2 ESFERICA
    0    0    0    1    1    1            JUNTA 3 ESFERICA
    0    0    0    1    1    1            JUNTA 4 ESFERICA
    1    0    1    1    1    1            JUNTA 5 DE REVOLUÇAO
    0    0    0    1    1    1            JUNTA 6 ESFERICA
    1    0    1    1    1    1            JUNTA 7 DE REVOLUCAO
    0    0    0    0    0    0            JUNTA 8 LIVRE
    0    0    0    1    1    1            JUNTA 9 ESFERICA
    1    0    1    1    1    1            JUNTA 10 DE REVOLUCAO
    0    0    0    1    1    1            JUNTA 11 ESFERICA
    1    0    1    1    1    1            JUNTA 12 DE REVOLUÇAO
    1                           REF 1 REL AO REF INERCIAL
0.0        0.0       0.0        0.0       0.0       0.0
0.0        0.0       0.0        0.0       0.0       0.0
    2                           REF 2 REL AO REF 1
0.0        0.0       0.0        0.0       0.0       0.0
0.0        0.0       0.0        0.0       0.0       0.0
    3                           REF 3 REL AO REF 2
0.0        0.0       0.0        0.0       0.0       0.0
0.0        0.0       0.0        0.0       0.0       0.0
    4                           REF 4 REL AO REF 3
0.0        0.0       0.0        0.0       0.0       0.0
0.0        77.35     0.0        0.0       0.0       0.0
```

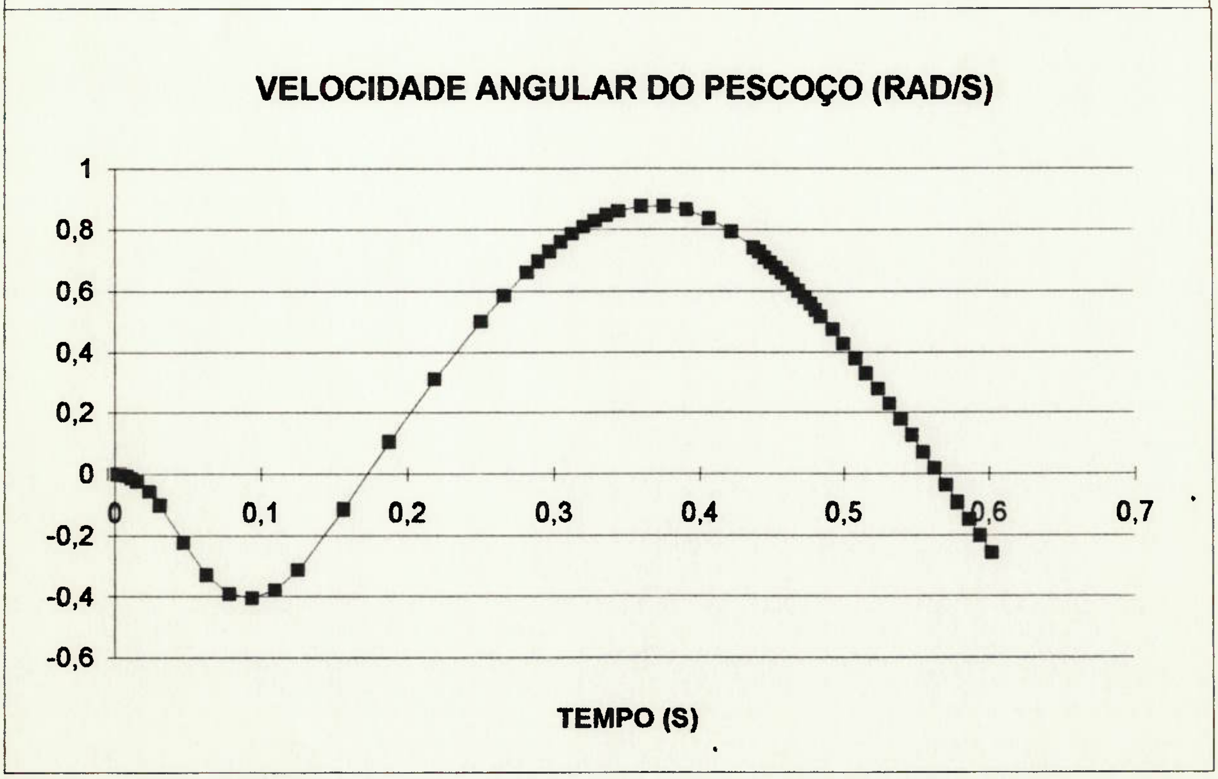
5			REF 5 REL AO REF 4		
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6			REF 6 REL AO REF 3		
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	77.35	0.0	0.0	0.0	0.0
7			REF 7 REL AO REF 6		
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
8			REF 8 REL AO REF 3		
0.0	0.0	2.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
9			REF 9 REL AO REF 1		
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	-6.36	0.0	0.0	0.0	0.0
10			REF 10 REL AO REF 9		
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
11			REF 11 REL AO REF 1		
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
-6.36	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
12			REF 12 REL AO REF 11		
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.3125	-15.0	0.001	TO=0S	TF= S
0.000125				INCREMENTO	

No apêndice é mostrado a saída de dados do programa para essa análise.

SISMUL - EXEMPLO 4 - CORPO HUMANO SOB IMPACTO







FORÇAS NA JUNTA 1 E VELOCIDADE E ACELERAÇÃO NO PESCOÇO

EXEMPLO 5

Considere um elo composto por 6 barras como mostrado na figura 34.

O sistema consiste de 5 barras identicas de 1 metro com massa de 45 Kg e uma barra três vezes maior e com massa nula. Essa barra simboliza o teto em que esse elo esta preso. A figura 34 mostra também a configuração inicial das seis barras.

É dada uma aceleração na direção Y de -1 m/s^2 para a extremidade esquerda, enquanto a outra extremidade está fixa. O sistema está também sujeito a aceleração da gravidade.

Este elo é um exemplo de sistema formando uma única cadeia fechado. Como definido anteriormente será necessário cortar esta cadeia em alguma junta de modo a este elo formar dois tramos independentes. A junta a ser separada é aquela entre os corpos 4 e 6.

Também deverá ser definido um perfil de aceleração para a extremidade direita de modo a move-la conforme desejado.

A figura 35 mostra como o sistema evolue em 8 intervalos de tempo até 1 segundo.

FIGURA 34 - POSIÇÃO INICIAL DO ELO

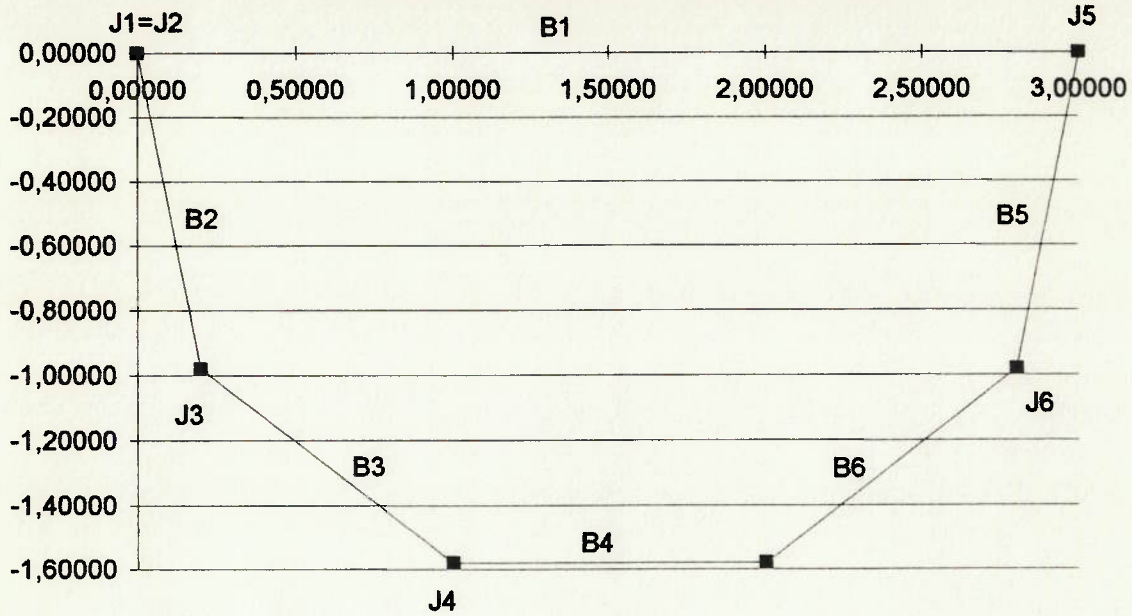
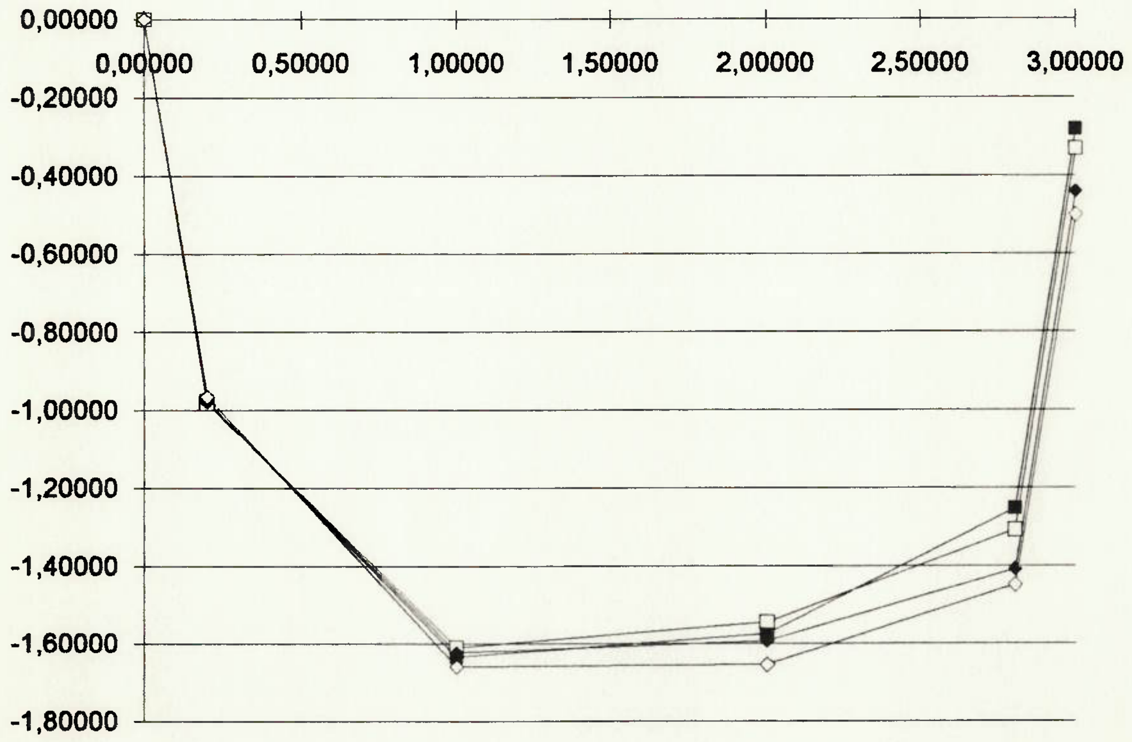


FIGURA 35 - EVOLUÇÃO DO SISTEMA EM 4 INTERVALOS DE TEMPO DE 0,125 S A 0,500 S



A seguir está mostrado a entrada de dados do modelo para o programa SISMUL;

```
***************  EXEMPLO 5 ELO GUIADO
    1
    2
    1
    1
    6
*C.M.  BARRA 1*     *C.M.  BARRA 2*     *C.M.  BARRA 3*
*C.M.  BARRA 4*     *C.M.  BARRA 5*     *C.M.  BARRA 6*
*JUNTA       1*     *JUNTA       2*     *JUNTA       3*
*JUNTA       4*     *JUNTA       5*     *JUNTA       6*
    0    1    2    3    1    5
9.8
0.0       1.0       1.0       1.0       1.0
1.0
0.0       0.0       0.0                 2 VETOR Q
-1.0      0.0       0.0                 3 VETOR Q
-1.0      0.0       0.0                 4 VETOR Q
3.0       0.0       0.0                 5 VETOR Q
1.0       0.0       0.0                 6 VETOR Q
1.5       0.0       0.0                 1  VETOR R
-0.5      0.0       0.0                 2  VETOR R
-0.5      0.0       0.0                 3  VETOR R
-0.5      0.0       0.0                 4  VETOR R
0.5       0.0       0.0                 5  VETOR R
0.5       0.0       0.0                 6  VETOR R
0.0       0.0       0.0              INERCIA 1
0.0       0.0       0.0              INERCIA 1
0.0       0.0       0.0              INERCIA 1
0.0       0.333333  0.0              INERCIA 2
0.0       0.0       0.333333         INERCIA 2
0.0       0.0       0.0              INERCIA 2
0.0       0.333333  0.0              INERCIA 3
0.0       0.0       0.333333         INERCIA 3
0.0       0.0       0.0              INERCIA 3
0.0       0.333333  0.0              INERCIA 4
```

```
0.0       0.0       0.333333      INERCIA 4
0.0       0.0       0.0           INERCIA 4
0.0       0.333333  0.0           INERCIA 5
0.0       0.0       0.333333      INERCIA 5
0.0       0.0       0.0           INERCIA 5
0.0       0.333333  0.0           INERCIA 6
0.0       0.0       0.333333      INERCIA 6
0.0       0.0       0.0           INERCIA 6
    1    4    6
-1.0      0.0       0.0
1.0       0.0       0.0
    0
    1
    3
    5   2
0.0        -5.0       0.0       0.0
0.5        -5.0
1.0        -5.0
    1    1    1    1    1    1              JUNTA  1
    1    1    0    1    1    1              JUNTA  2
    1    1    0    1    1    1              JUNTA  3
    1    1    0    1    1    1              JUNTA  4
    1    1    0    1    1    1              JUNTA  5
    1    1    0    1    1    1              JUNTA  6
    1  TRANSL. RELATIVA E ANGULOS DE ORIENTACAO
0.0       0.0       0.0       0.0       0.0       0.0
0.0       0.0       0.0       0.0       0.0       0.0
    2  TRANSL. RELATIVA E ANGULOS DE ORIENTACAO
0.0       0.0       0.0       0.0       0.0       0.0
0.0       0.0       101.537   0.0       0.0       0.0
    3  TRANSL. RELATIVA E ANGULOS DE ORIENTACAO
0.0       0.0       0.0       0.0       0.0       0.0
0.0       0.0       41.593    0.0       0.0       0.0
    4  TRANSL. RELATIVA E ANGULOS DE ORIENTACAO
0.0       0.0       0.0       0.0       0.0       0.0
0.0       0.0       36.87     0.0       0.0       0.0
    5  TRANSL. RELATIVA E ANGULOS DE ORIENTACAO
```

0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	-101.537	0.0	0.0	0.0

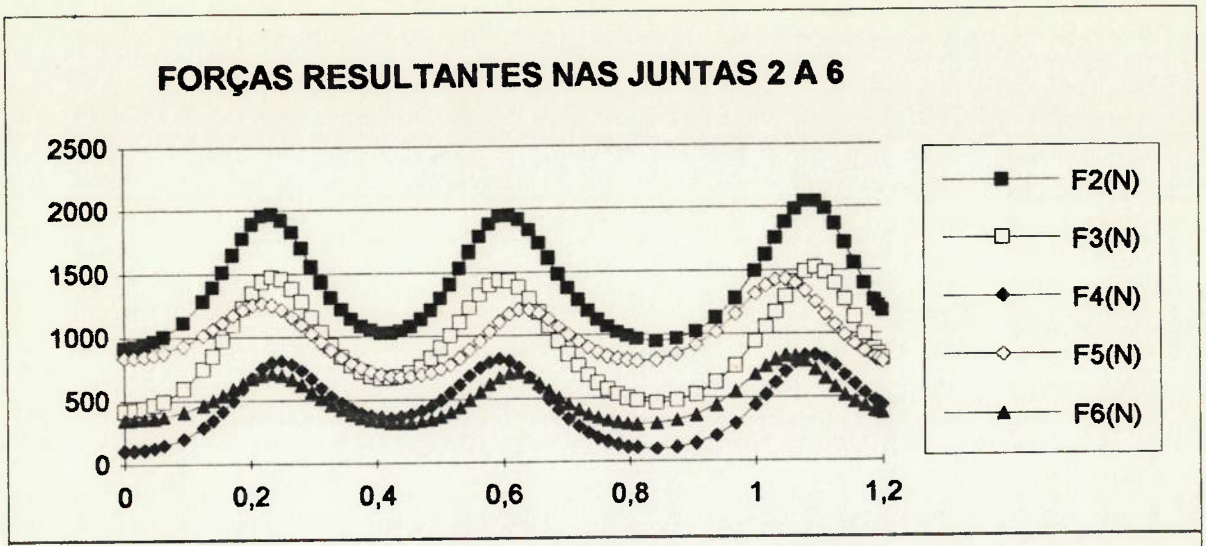
6 TRANSL. RELATIVA E ANGULOS DE ORIENTACAO

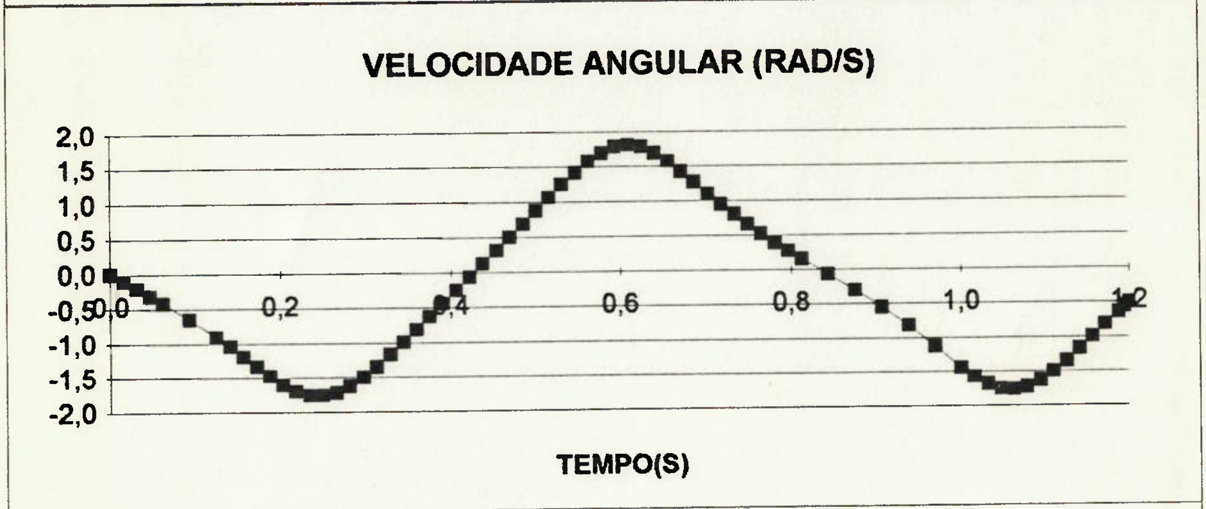
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	-41.593	0.0	0.0	0.0
0.0	1.0	-6.0	0.00001		

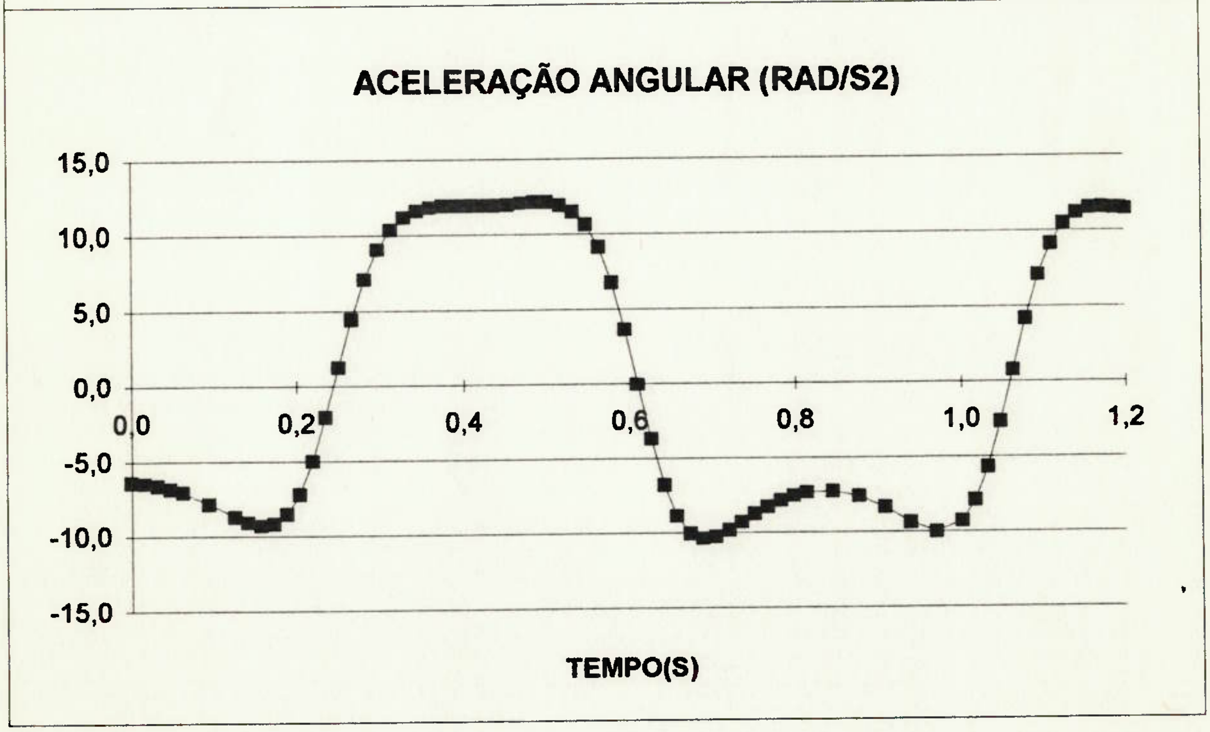
0.001

No apêndice está mostrado a saida de dados do modelo para o programa SISMUL;

SISMUL - EXEMPO 5 - ELO MOVIDO







FORÇAS NAS JUNTAS 2 A 6 E VEL. E ACEL. NA BARRA 5

9.6 COMPARAÇAO SISMUL X ADAMS

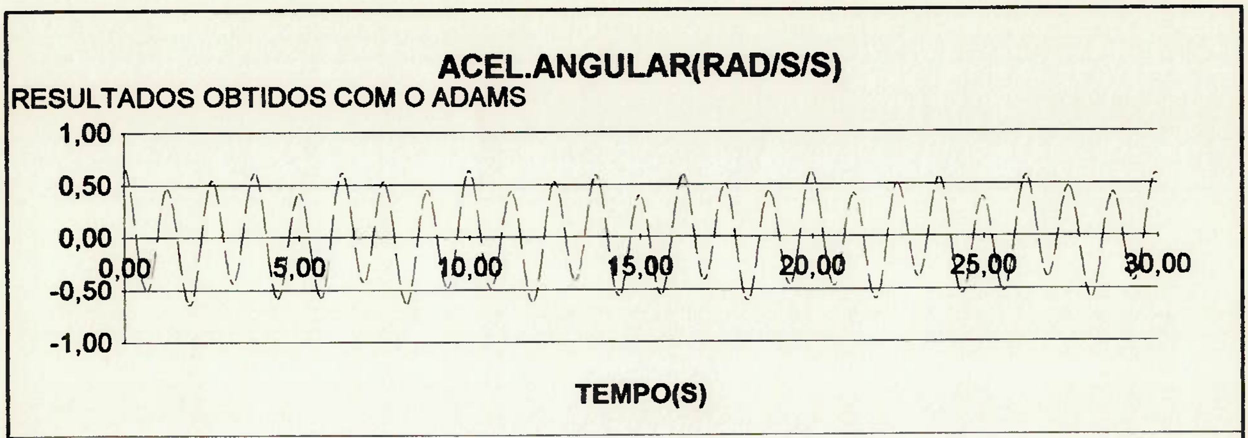
A fim de se checar os resultados obtidos numericamente, foi analisado o pêndulo duplo do exemplo 1 no SISMUL e no ADAMS. A SMI, representante do ADAMS no Brasil gentilmente, através de eng. Sílvio Onoe, analisou o referido exemplo.

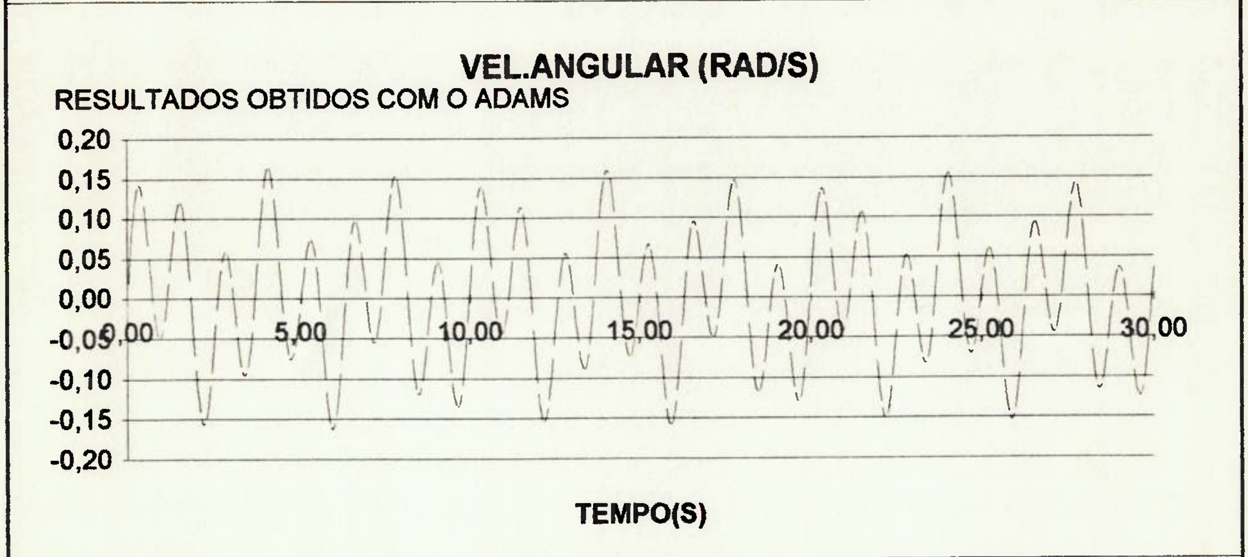
Os resultados encontram-se a seguir.

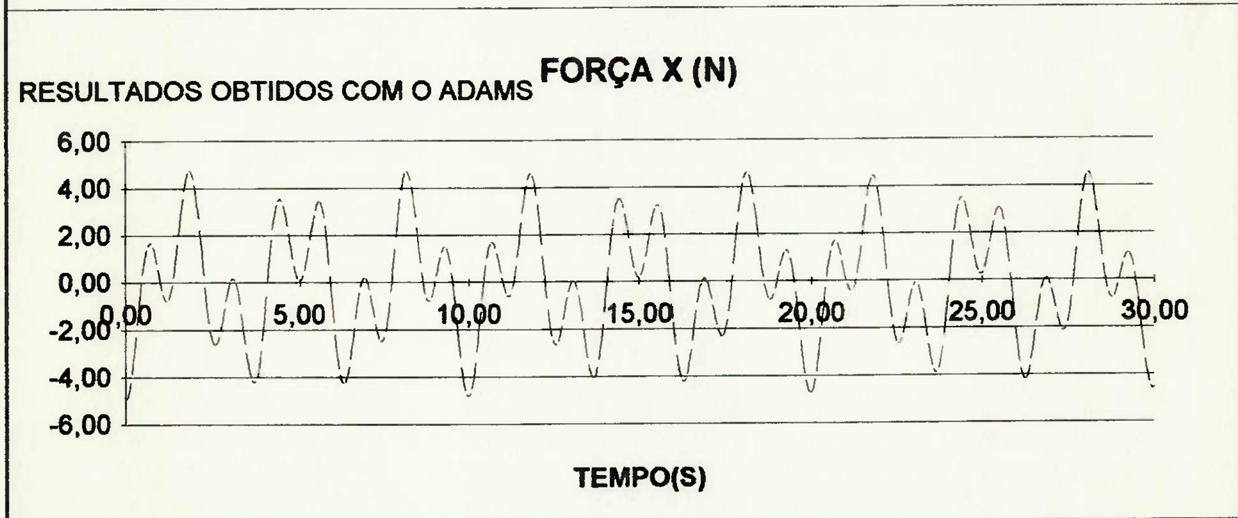
A partir deles é possível verificar a validade dos formalismos adotados.

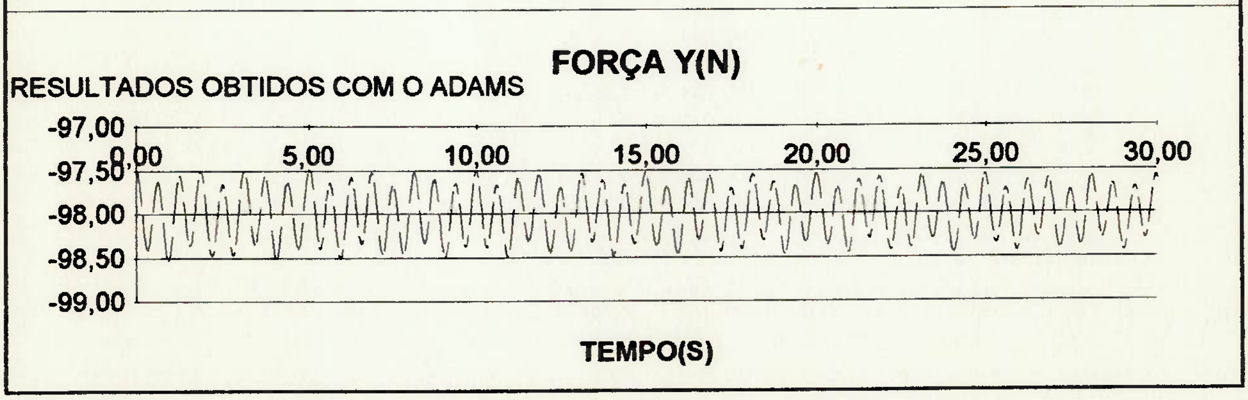
Em anexo encontra-se uma parte da listagem de saída do ADAMS.

SISMUL X ADAMS EXEMPLO 2 - PENDULO DUPLO



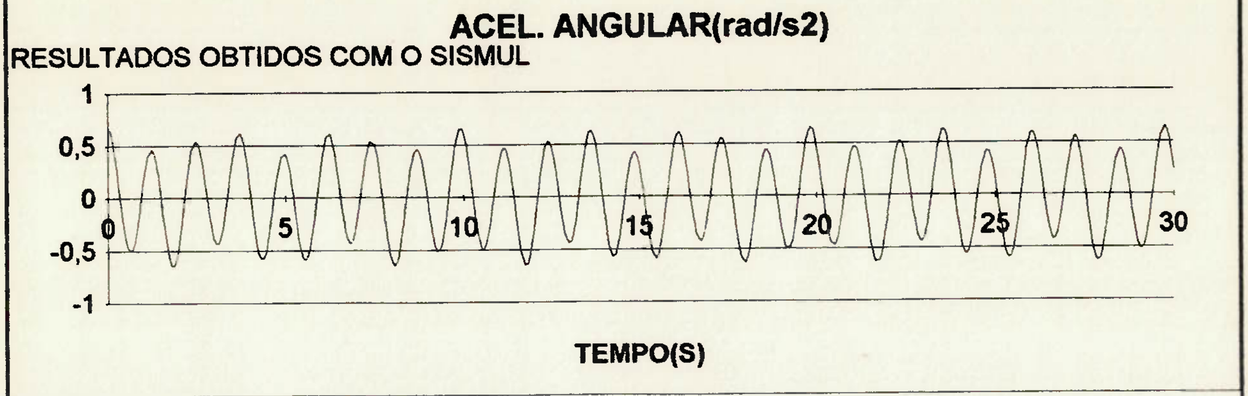


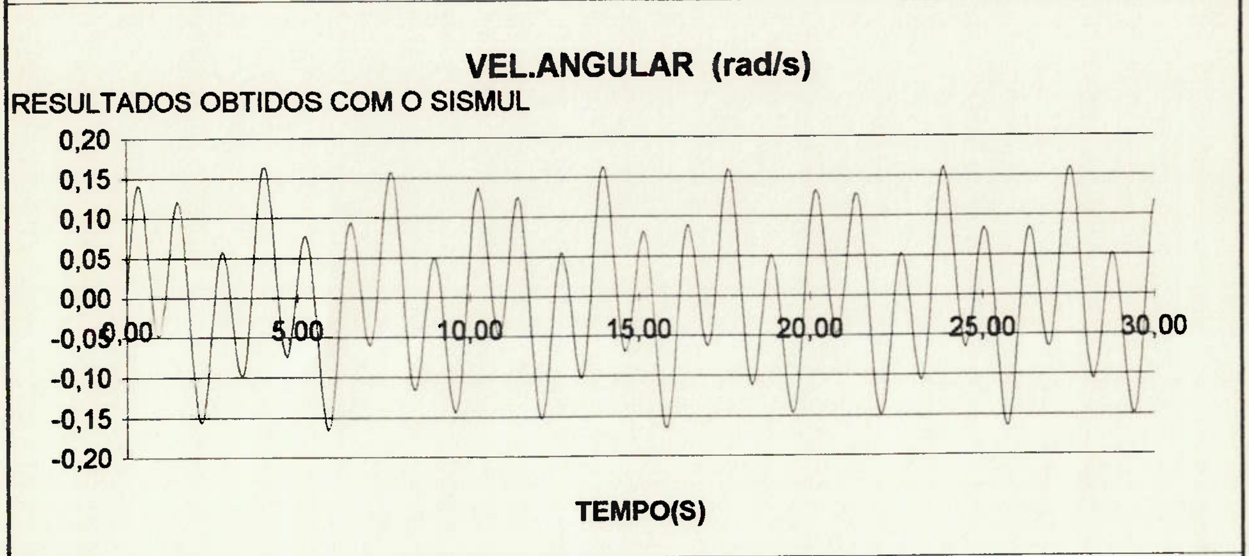


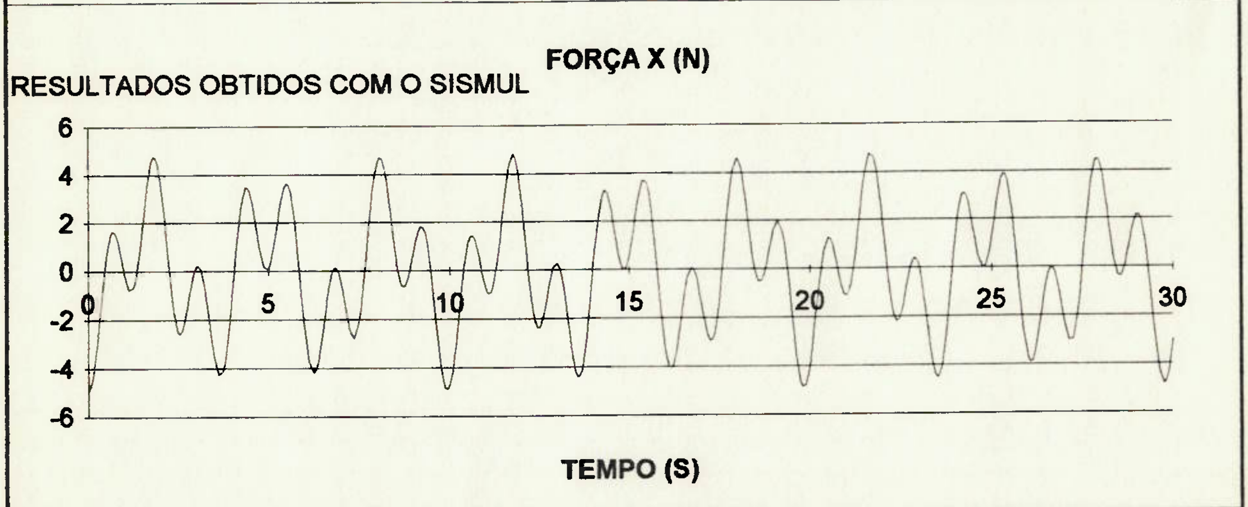


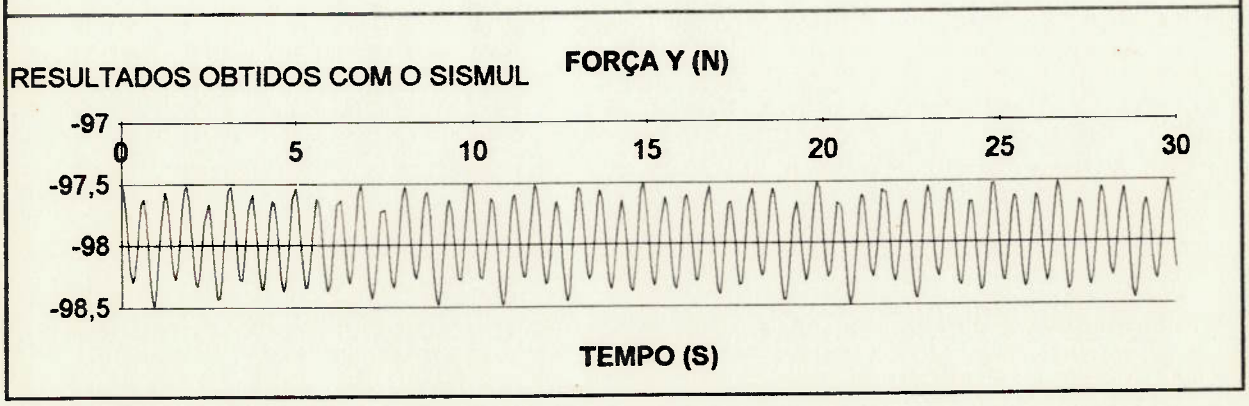
FORÇAS NA JUNTA 1 E ACEL. E VEL. NA BARRA 1

SISMUL X ADAMS EXEMPLO 2 - PENDULO DUPLO









FORÇAS NA JUNTA 1 E ACEL. E VEL. NA BARRA 1

CONCLUSÃO

Nesta dissertação procurou-se apresentar as Equações de Kane para a modelagem de sistemas dinâmicos representados por equações literais ou numéricas.

O programa apresentado ao final da dissertação mostra o desenvolvimento da análise dinâmica de sistemas a partir dessas equações. A metodologia desse programa utiliza as Equações de Kane juntamente com complementos ortogonais e parâmetros de Euler, os quais desacoplam as equações diferenciais do movimento e evitam a ocorrência de singularidades.

Deve-se observar que os formalismos matemáticos existentes no programa apresentado são os comumente usados na análise dinâmica aplicada, o que mostra a atualidade e a importância do assunto dessa dissertação.

BIBLIOGRAFIA

1. AMIROUCHE, F.M.L.,e JIA, TONGYI ,e IDER SITKI K. ,"A RECURSIVE HOUSEHOLDER TRANSFORMATION FOR COMPLEX DYNAMICAL SYSTEMS WITH CONSTRAINTS" , ASME JOURNAL OF APPLIED MECHANICS, VOL.55, SEPTEMBER,1988, pg. 729-734.

2. AMIROUCHE, F.M.L.,e JIA, TONGYI , "AUTOMATIC ELIMINATION OF UNDETERMINED MULTIPLIERS IN KANES EQUATION USING A PSEUDO UPTRIANGULAR DECOMPOSITION (PUTD) METHOD" COMPUTERS AND STRUCTURES, VOL.27,N.2 , 1987, pg.203-210.

3. COSTA NETO, "APPLICATION OF MULTIBODY SYSTEM (MBS) TECHNIQUES TO AUTOMOTIVE VEHICLE CHASSIS SIMULATION FOR MOTION CONTROL STUDIES", PhD THESIS, UNIV. OF WARWICK, 1992.

4. FRANÇA, LUIS NOVAES F, "MECANICA ANALITICA", NOTAS DE AULA, (1989).

5. HUSTON, R. L. e PASSERELLO, C.E. e HARLOW, M.W.,"DYNAMICS OF MULTIRIGIDS-BODY SYSTEMS",ASME JOURNAL OF APPLIED MECHANICS, VOL.45, N.4, 1978, pg.889-894

6. HUSTON, R. L. e PASSERELLO, C.E. ,"ON-MULTI-RIGID DYNAMICS" , COMPUTERS AND STRUCTURES, VOL.10, 1979, pg.439-446.

7. HUSTON, R. L. e PASSERELLO, C.E. ,"MULTIBODY STRUCTURAL DYNAMICS INCLUDING TRANSLATION BETWEEN THE BODIES" , COMPUTERS AND STRUCTURES, VOL.12, 1980, pg.713-720.

8. HUSTON, R. L. ,"MULTIBODY DYNAMICS - MODELING AND ANALYSIS METHODS" , ASME JOURNAL OF APPLIED MECHANICS, VOL.44, N.3, 1991, pg.109-116.

9. IDER, SITKI K.,e AMIROUCHE, F.M.L., "COORDINATE REDUCTION IN THE DYNAMICS OF CONSTRAINED MULTIBODY SYSTEMS - A NEW APPROACH" , ASME JOURNAL OF APPLIED MECHANICS, VOL.55, DECEMBER,1988, pg.899-904.

10. KAMMAN, J.W. e HUSTON, R. L. ," CONSTRAINED MULTIBODY SYSTEM DYNAMICS - AN AUTOMATED APPROACH." , COMPUTERS AND STRUCTURES, VOL.18,N.6 , 1984, pg.999-1003.

11. KAMMAN, J.W. e HUSTON, R. L. ,"DYNAMICS OF CONSTRAINED MULTIBODY SYSTEM " , ASME JOURNAL OF APPLIED MECHANICS, VOL.51/901, DECEMBER, 1984, pg. 899-903.

12. KANE, R. T. e LEVINSON, D. A., "DYNAMICS: TEORY AND APPLICATIONS", McGRAW-HILL PUBLISHING COMPANY, 1985

13. KANE, T. R., "DYNAMICS OF NONHOLONOMIC SYSTEMS", ASME JOURNAL OF APPLIED MECHANICS, DECEMBER,1961, pg. 574-578.

14. OLIVEIRA, IVAN DE CAMARGO e BOULOS, PAULO, "GEOMETRIA ANALÍTICA: UM TRATAMENTO VETORIAL",1982.

15. RAY, P.S. ,e CHENG, ZHAO ZHI, "DYNAMICS OF GENERAL FLEXIBLE MULTIBODY SYSTEMS", INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING, VOL.30, 1990 pg. 77-97.

16. SHIELEN W , MULTIBODY SYSTEMS HANDBOOK, SPRINGER-VERLAG,1990.

17. WANG, J. T. e HUSTON, R. L. ,"KANE'S EQUATION WITH UNDETERMINED MULTIPLIERS - APPLICATION TO CONSTRAINED MULTIBODY SYSTEMS", ASME JOURNAL OF APPLIED MECHANICS, VOL.54, JUNE,1987, pg. 424-429.

EXEMPLO DE SAÍDA DE DADOS DO EXEMPLO 2 - PÊNDULO DUPLO

```
1        SISTEMAS MULTICORPOS,SISMUL:DINAMICA  SISTEMAS  MULTICORPOS
1               ***** EXEMPLO 2 ***** PENDULO DUPLO SE MOVENDO NO PLANO XY
0 O EIXO  Y E VERTICAL
+  -
0O MOVIMENTO FOI INDICADO COMO SENDO BDIMENSIONAL
0O NUMERO TOTAL DE CORPOS NESSA ANALISE E     2
0A ACELERACO DA GRAVIDADE E =         9.80000
1 LNB= VETOR DE CONEXAO DE CORPOS
0 CORPO     CENTRO DE MASSA          MASSA          LNB      FIM
                                              CORPO    CORPO
0   1    *C. M. BAR 1*              5.00000       0         2
0   2    *C. M. BAR 2*              5.00000       1         2
1 CORPO     LABEL CENTRO DE MASSA      VETOR R POSICAO DO CENTRO DE MASSA
VETOR Q DE POSICAO DO REFERENCIAL
                                       FIXO NO PROPRIO CORPO                    FIXO NO CORPO
INFERIOR
0   1    *C. M. BAR 1*              1.00000      .00000      .00000
0   2    *C. M. BAR 2*              1.00000      .00000      .00000        2.00000        .00000
.00000

0            MASSA TOT.   PESO TOTAL
               10.00000     98.00000
1                                M A T R I Z E S   D E   I N E R C I A

0                        I( 1)                                    I( 2)

             .00000      .00000      .00000              .00000      .00000      .00000
             .00000     1.66667      .00000              .00000     1.66667      .00000
             .00000      .00000     1.66667              .00000      .00000     1.66667
0      0  PERFIS SAO DADOS PARA AS DERIVADAS DAS VELOCIDADES ANGULARES
RELATIVAS
0      0  PERFIS SAO DADOS PARA A SEGUNDA DERIVADA DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO

0COMPONENTES DE VELOCIDADE ANGULAR NAO CONHECIDOS
      CORPO
        1        3
        2        3

0COMPONENTES DE VELOCIDADE ANGULAR CONHECIDOS
      CORPO
        1        1
        1        2
        2        1
        2        2

0COMPONENTES DE TRANSLACAO CONHECIDOS
      CORPO
        1        1
        1        2
        1        3
        2        1
        2        2
        2        3

0PARAMETROS EULER CONHECIDOS
      CORPO
```

EXEMPLO DE SAÍDA DE DADOS DO EXEMPLO 2 - PÊNDULO DUPLO

```
        1     3
        1     4
        2     3
        2     4

0PARAMETROS EULER NAO CONHECIDOS
      CORPO
        1     1
        1     2
        2     1
        2     2

0NUM. VAR. VELOCIDADES ANGULARES NAO CONHECIDAS
   3  6

0NUM. DE VELOCIDADES ANG. CONHECIDAS
   1  2  4  5

0NUM. DE VAR. TRANSLACO CONHECIDAS
   7  8  9  10  11  12

0NUM. DE PARAMETROS DE EULER DADOS
   3  4  7  8

0NUM. DE PARAMETROS DE EULER DESCONHECIDOS
   1  2  5  6
-VALORES INICIAIS DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO
 CORPO  1):     .00000     .00000     .00000   CORPO  2):     .00000     .00000     .00000
-VALORES INICIAIS DAS DERIVADAS DAS VARIAVEIS  TRANSLACAO
 CORPO  1):     .00000     .00000     .00000   CORPO  2):     .00000     .00000     .00000
-VALORES INICIAIS DOS ANGULOS DE ORIENTACAO DEXTRAIS
 CORPO  1):     .00000     .00000   87.00000   CORPO  2):     .00000     .00000    3.00000
-VALORES INICIAIS DAS DERIVADAS DOS ANGULOS DE ORIENTACAO DEXTRAIS
 CORPO  1):     .00000     .00000     .00000   CORPO  2):     .00000     .00000     .00000
-VALORES INICIAIS DOS PARAMETROS EULER
 CORPO  1):     .00000     .00000     .68835     .72537  CORPO  2):     .00000     .00000     .02618
.99966
-VALORES INICIAIS DOS COMPONETES DAS VELOCIDADES ANGULAR RELATIVAS
 CORPO  1):     .00000     .00000     .00000   CORPO  2):     .00000     .00000     .00000
0VALOR INICIAL TEMPO=       .00000
0VALOR FINAL TEMPO=     10.00000
0INCREMENTO INICIAL DE INTEGRACAO    =       .00003
0ERRO MAXIMO    =      .00010
0IMPRESSAO IRA OCORRER A CADA      1.20000 SEGUNDOS
1                          ***** EXEMPLO 2 ***** PENDULO DUPLO SE MOVENDO NO PLANO XY
 TEMPO =        .0000    SEGUNDOS                                     INTERVALO DE  DIVISAO
=   0
                                                          INTERVALO DE TEMPO =      1
A.VALORES DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO
 CORPO  1):     .00000     .00000     .00000   CORPO  2):     .00000     .00000     .00000
B.VALORES DAS DERIVADAS DAS VAR. DE TRANSLACAO
 CORPO  1):     .00000     .00000     .00000   CORPO  2):     .00000     .00000     .00000
C.VALORES DA SEGUNDA DERIVADA DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO
 CORPO  1):     .00000     .00000     .00000   CORPO  2):     .00000     .00000     .00000
D.VALORES DOS ANGULOS DE ORIENTACAO DEXTRAIS EM  GRAUS
 CORPO  1):     .00000     .00000   86.99999   CORPO  2):     .00000     .00000    3.00000
```

EXEMPLO DE SAÍDA DE DADOS DO EXEMPLO 2 - PÊNDULO DUPLO

E.VALORES DAS DERIVADAS DOS ANGULOS DE ORIENTACAO EM GRAUS/SEGUNDOS
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .00000 .00000 .00000
F.VALORES DOS PARAMETROS DE ORIENTACAO DE EULER
CORPO 1): .00000 .00000 .68835 .72537 CORPO 2): .00000 .00000 .02618 .99966
G.VALORES DAS DERIVADAS DOS PARAMETROS DE EULER
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .00000 .00000 .00000 .00000
H.VALORES DOS COMPONENTES DAS VELOCIDADES ANG. RELATIVA EM RADIANO/SEGUNDO(EM REL. AO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .00000 .00000 .00000
I.VALORES DAS DERIVADAS DOS COMPONENTES DAS VELOCIDADE ANGULAR RELATIVA EM RADIANO/SEGUNDOS/SEGUNDOS (EM RELACAO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): .00000 .00000 .65712 CORPO 2): .00000 .00000 -1.64145
J.MOMENTOS NAS JUNTAS ENTRE CORPOS ADJACENTE
(COMPONENTES EM RELACAO AO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .00000 .00000 .00000
K.FORCAS VINCULARES ENTRE CORPOS ADJACENTES
(COMPONENTES EM RELACAO AO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): -4.92166 -97.48413 .00000 CORPO 2): -48.67527 -.90816 .00000
L.COORDENADAS DOS VETORES DE POSICAO DA JUNTA -- REFERENCIAL INERCIAL
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .10467 1.99726 .00000
M.VETOR POSICAO CENTRO MASSA -- REFERENCIAL INERCIAL
CORPO 1): .05234 .99863 .00000 CORPO 2): .10467 2.99726 .00000
1 ***** EXEMPLO 2 ***** PENDULO DUPLO SE MOVENDO NO PLANO XY
TEMPO = 1.2500 SEGUNDOS INTERVALO DE DIVISAO = -12
INTERVALO DE TEMPO = 41
A.VALORES DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .00000 .00000 .00000
B.VALORES DAS DERIVADAS DAS VAR. DE TRANSLACAO
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .00000 .00000 .00000
C.VALORES DA SEGUNDA DERIVADA DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .00000 .00000 .00000
D.VALORES DOS ANGULOS DE ORIENTACAO DEXTRAIS EM GRAUS
CORPO 1): .00000 .00000 90.07378 CORPO 2): .00000 .00000 4.30732
E.VALORES DAS DERIVADAS DOS ANGULOS DE ORIENTACAO EM GRAUS/SEGUNDOS
CORPO 1): .00000 .00000 2.70555 CORPO 2): .00000 .00000 -.04517
F.VALORES DOS PARAMETROS DE ORIENTACAO DE EULER
CORPO 1): .00000 .00000 .70749 .70672 CORPO 2): .00000 .00000 .03758 .99929
G.VALORES DAS DERIVADAS DOS PARAMETROS DE EULER
CORPO 1): .00000 .00000 .01669 -.01670 CORPO 2): .00000 .00000 -.00039 .00001
H.VALORES DOS COMPONENTES DAS VELOCIDADES ANG. RELATIVA EM RADIANO/SEGUNDO(EM REL. AO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): .00000 .00000 .04722 CORPO 2): .00000 .00000 -.00079
I.VALORES DAS DERIVADAS DOS COMPONENTES DAS VELOCIDADE ANGULAR RELATIVA EM RADIANO/SEGUNDOS/SEGUNDOS (EM RELACAO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): .00000 .00000 .46193 CORPO 2): .00000 .00000 -1.71315
J.MOMENTOS NAS JUNTAS ENTRE CORPOS ADJACENTE
(COMPONENTES EM RELACAO AO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .00000 .00000 .00000
K.FORCAS VINCULARES ENTRE CORPOS ADJACENTES
(COMPONENTES EM RELACAO AO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): -.69027 -97.56393 .00000 CORPO 2): -48.56314 -1.56647 .00000

EXEMPLO DE SAÍDA DE DADOS DO EXEMPLO 2 - PÊNDULO DUPLO

L.COORDENADAS DOS VETORES DE POSICAO DA JUNTA -- REFERENCIAL INERCIAL
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): -.00218 2.00000 .00000
M.VETOR POSICAO CENTRO MASSA -- REFERENCIAL INERCIAL
CORPO 1): -.00109 1.00000 .00000 CORPO 2): -.07837 2.99709 .00000
1 ***** EXEMPLO 2 ***** PENDULO DUPLO SE MOVENDO NO PLANO XY
TEMPO = 2.5000 SEGUNDOS INTERVALO DE DIVISAO
= -12
INTERVALO DE TEMPO = 59
A.VALORES DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .00000 .00000 .00000
B.VALORES DAS DERIVADAS DAS VAR. DE TRANSLACAO
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .00000 .00000 .00000
C.VALORES DA SEGUNDA DERIVADA DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .00000 .00000 .00000
D.VALORES DOS ANGULOS DE ORIENTACAO DEXTRAIS EM GRAUS
CORPO 1): .00000 .00000 88.75136 CORPO 2): .00000 .00000 3.71714
E.VALORES DAS DERIVADAS DOS ANGULOS DE ORIENTACAO EM GRAUS/SEGUNDOS
CORPO 1): .00000 .00000 -2.69591 CORPO 2): .00000 .00000 -3.57332
F.VALORES DOS PARAMETROS DE ORIENTACAO DE EULER
CORPO 1): .00000 .00000 .69937 .71476 CORPO 2): .00000 .00000 .03243
.99947
G.VALORES DAS DERIVADAS DOS PARAMETROS DE EULER
CORPO 1): .00000 .00000 -.01682 .01645 CORPO 2): .00000 .00000 -.03117
.00101
H.VALORES DOS COMPONENTES DAS VELOCIDADES ANG. RELATIVA EM
RADIANO/SEGUNDO(EM REL. AO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): .00000 .00000 -.04705 CORPO 2): .00000 .00000 -.06237
I.VALORES DAS DERIVADAS DOS COMPONENTES DAS VELOCIDADE ANGULAR RELATIVA
EM RADIANO/SEGUNDOS/SEGUNDOS (EM RELACAO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): .00000 .00000 .54310 CORPO 2): .00000 .00000 -1.67300
J.MOMENTOS NAS JUNTAS ENTRE CORPOS ADJACENTE
(COMPONENTES EM RELACAO AO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .00000 .00000 .00000
K.FORCAS VINCULARES ENTRE CORPOS ADJACENTES
(COMPONENTES EM RELACAO AO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): -2.49816 -97.66116 .00000 CORPO 2): -48.70398 -1.27706 .00000
L.COORDENADAS DOS VETORES DE POSICAO DA JUNTA -- REFERENCIAL INERCIAL
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .04353 1.99953 .00000
M.VETOR POSICAO CENTRO MASSA -- REFERENCIAL INERCIAL
CORPO 1): .02177 .99976 .00000 CORPO 2): .00044 2.99859 .00000
1 ***** EXEMPLO 2 ***** PENDULO DUPLO SE MOVENDO NO PLANO XY
TEMPO = 3.6250 SEGUNDOS INTERVALO DE DIVISAO
= -12
INTERVALO DE TEMPO = 76
A.VALORES DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .00000 .00000 .00000
B.VALORES DAS DERIVADAS DAS VAR. DE TRANSLACAO
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .00000 .00000 .00000
C.VALORES DA SEGUNDA DERIVADA DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .00000 .00000 .00000
D.VALORES DOS ANGULOS DE ORIENTACAO DEXTRAIS EM GRAUS
CORPO 1): .00000 .00000 87.42703 CORPO 2): .00000 .00000 2.71133
E.VALORES DAS DERIVADAS DOS ANGULOS DE ORIENTACAO EM GRAUS/SEGUNDOS
CORPO 1): .00000 .00000 -.91150 CORPO 2): .00000 .00000 9.38886
F.VALORES DOS PARAMETROS DE ORIENTACAO DE EULER

CORPO 1): .00000 .00000 .69106 .72280 CORPO 2): .00000 .00000 .02366 .99972
G.VALORES DAS DERIVADAS DOS PARAMETROS DE EULER
CORPO 1): .00000 .00000 -.00575 .00550 CORPO 2): .00000 .00000 .08191 -.00194
H.VALORES DOS COMPONENTES DAS VELOCIDADES ANG. RELATIVA EM RADIANO/SEGUNDO(EM REL. AO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): .00000 .00000 -.01591 CORPO 2): .00000 .00000 .16387
I.VALORES DAS DERIVADAS DOS COMPONENTES DAS VELOCIDADE ANGULAR RELATIVA EM RADIANO/SEGUNDOS/SEGUNDOS (EM RELACAO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): .00000 .00000 .57996 CORPO 2): .00000 .00000 -1.46683
J.MOMENTOS NAS JUNTAS ENTRE CORPOS ADJACENTE
(COMPONENTES EM RELACAO AO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .00000 .00000 .00000
K.FORCAS VINCULARES ENTRE CORPOS ADJACENTES
(COMPONENTES EM RELACAO AO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): -4.25618 -97.71082 .00000 CORPO 2): -48.85270 -.83378 .00000
L.COORDENADAS DOS VETORES DE POSICAO DA JUNTA -- REFERENCIAL INERCIAL
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .08975 1.99798 .00000
M.VETOR POSICAO CENTRO MASSA -- REFERENCIAL INERCIAL
CORPO 1): .04487 .99899 .00000 CORPO 2): .08732 2.99797 .00000
1 ***** EXEMPLO 2 ***** PENDULO DUPLO SE MOVENDO NO PLANO XY
TEMPO = 4.8750 SEGUNDOS INTERVALO DE DIVISAO = -12
INTERVALO DE TEMPO = 94
A.VALORES DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .00000 .00000 .00000
B.VALORES DAS DERIVADAS DAS VAR. DE TRANSLACAO
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .00000 .00000 .00000
C.VALORES DA SEGUNDA DERIVADA DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .00000 .00000 .00000
D.VALORES DOS ANGULOS DE ORIENTACAO DEXTRAIS EM GRAUS
CORPO 1): .00000 .00000 90.64586 CORPO 2): .00000 .00000 4.19640
E.VALORES DAS DERIVADAS DOS ANGULOS DE ORIENTACAO EM GRAUS/SEGUNDOS
CORPO 1): .00000 .00000 -1.80208 CORPO 2): .00000 .00000 7.84836
F.VALORES DOS PARAMETROS DE ORIENTACAO DE EULER
CORPO 1): .00000 .00000 .71105 .70314 CORPO 2): .00000 .00000 .03661 .99932
G.VALORES DAS DERIVADAS DOS PARAMETROS DE EULER
CORPO 1): .00000 .00000 -.01106 .01118 CORPO 2): .00000 .00000 .06844 -.00251
H.VALORES DOS COMPONENTES DAS VELOCIDADES ANG. RELATIVA EM RADIANO/SEGUNDO(EM REL. AO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): .00000 .00000 -.03145 CORPO 2): .00000 .00000 .13698
I.VALORES DAS DERIVADAS DOS COMPONENTES DAS VELOCIDADE ANGULAR RELATIVA EM RADIANO/SEGUNDOS/SEGUNDOS (EM RELACAO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): .00000 .00000 .38706 CORPO 2): .00000 .00000 -1.58598
J.MOMENTOS NAS JUNTAS ENTRE CORPOS ADJACENTE
(COMPONENTES EM RELACAO AO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): .00000 .00000 .00000
K.FORCAS VINCULARES ENTRE CORPOS ADJACENTES
(COMPONENTES EM RELACAO AO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): .17252 -97.62481 .00000 CORPO 2): -48.62365 -1.56412 .00000
L.COORDENADAS DOS VETORES DE POSICAO DA JUNTA -- REFERENCIAL INERCIAL
CORPO 1): .00000 .00000 .00000 CORPO 2): -.02236 1.99987 .00000
M.VETOR POSICAO CENTRO MASSA -- REFERENCIAL INERCIAL

EXEMPLO DE SAÍDA DE DADOS DO EXEMPLO 3 - ELO SOB AÇÃO DA GRAVIDADE

```
1                S I S M U L  : ANALISE DINAMICA DE SISTEMAS MULTICORPOS
1          *************** EXEMPLO 3 ELO COM 11 BARRAS
O EIXO  Y E O EIXO VERTICAL
O MOVIMENTO FOI INDICADO COMO SENDO DIMENSIONAL
A ANALISE APRESENTA UM LOOP FECHADO
O NUMERO DE CORPOS DESSA ANALISE E    11
A ACELERACAO DA GRAVIDADE E    9.8000
 CORPO     IDENTIFICACAO          MASSA        CORPO    CORPO FINAL
                              INFERIOR  DESSE TRAMO
 -  1   *C.M.  BARRA 1*       0.00000E+00      0       11
 -  2   *C.M.  BARRA 2*        1.0000          1      6
 -  3   *C.M.  BARRA 3*        1.0000          2      6
 -  4   *C.M.  BARRA 4*        1.0000          3      6
 -  5   *C.M.  BARRA 5*        1.0000          4      6
 -  6   *C.M.  BARRA 6*        1.0000          5      6
 -  7   *C.M.  BARRA 7*        1.0000          1      11
 -  8   *C.M.  BARRA 8*        1.0000          7      11
 -  9   *C.M.  BARRA 9*        1.0000          8      11
 -  10   *C.M.  BARRA10*        1.0000          9      11
 -  11   *C.M.  BARRA11*        1.0000          10      11
 JUNTA      IDENTIFICACAO            VETOR DE POSICAO DO CENTRO DE MASSA
VETOR DO PONTO DE REFERENCIA
                        FIXO NO CORPO                        FIXO NO CORPO INFERIOR
 -  1    *JUNTA     1*     3.0000     0.00000E+00   0.00000E+00
 -  2    *JUNTA     2*    -0.50000     0.00000E+00   0.00000E+00     0.00000E+00   0.00000E+00
0.00000E+00
 -  3    *JUNTA     3*    -0.50000     0.00000E+00   0.00000E+00     -1.0000      0.00000E+00
0.00000E+00
 -  4    *JUNTA     4*    -0.50000     0.00000E+00   0.00000E+00     -1.0000      0.00000E+00
0.00000E+00
 -  5    *JUNTA     5*    -0.50000     0.00000E+00   0.00000E+00     -1.0000      0.00000E+00
0.00000E+00
 -  6    *JUNTA     6*    -0.50000     0.00000E+00   0.00000E+00     -1.0000      0.00000E+00
0.00000E+00
 -  7    *JUNTA     7*     0.50000     0.00000E+00   0.00000E+00      6.0000      0.00000E+00
0.00000E+00
 -  8    *JUNTA     8*     0.50000     0.00000E+00   0.00000E+00      1.0000      0.00000E+00
0.00000E+00
 -  9    *JUNTA     9*     0.50000     0.00000E+00   0.00000E+00      1.0000      0.00000E+00
0.00000E+00
 -  10    *JUNTA    10*     0.50000     0.00000E+00   0.00000E+00      1.0000      0.00000E+00
0.00000E+00
 -  11    *JUNTA    11*     0.50000     0.00000E+00   0.00000E+00      1.0000      0.00000E+00
0.00000E+00

 -           MASSA TOTAL    PESO TOTAL
               10.000         98.000
1                         M A T R I Z E S  D E  I N E R C I A

 -                   I( 1)                                       I( 2)

          0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00         0.00000E+00   0.00000E+00
0.00000E+00
          0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00         0.00000E+00   0.33333
0.00000E+00
          0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00         0.00000E+00   0.00000E+00   0.33333
```

EXEMPLO DE SAÍDA DE DADOS DO EXEMPLO 3 - ELO SOB AÇÃO DA GRAVIDADE

- I(3)

0.00000E+00 0.00000E+00 0.00000E+00
0.00000E+00
0.00000E+00 0.33333 0.00000E+00
0.00000E+00 0.00000E+00 0.33333

I(4)

0.00000E+00 0.00000E+00

0.00000E+00 0.33333 0.00000E+00
0.00000E+00 0.00000E+00 0.33333

- I(5)

0.00000E+00 0.00000E+00 0.00000E+00
0.00000E+00
0.00000E+00 0.33333 0.00000E+00
0.00000E+00 0.00000E+00 0.33333

I(6)

0.00000E+00 0.00000E+00

0.00000E+00 0.33333 0.00000E+00
0.00000E+00 0.00000E+00 0.33333

- I(7)

0.00000E+00 0.00000E+00 0.00000E+00
0.00000E+00
0.00000E+00 0.33333 0.00000E+00
0.00000E+00 0.00000E+00 0.33333

I(8)

0.00000E+00 0.00000E+00

0.00000E+00 0.33333 0.00000E+00
0.00000E+00 0.00000E+00 0.33333

- I(9)

0.00000E+00 0.00000E+00 0.00000E+00
0.00000E+00
0.00000E+00 0.33333 0.00000E+00
0.00000E+00 0.00000E+00 0.33333

I(10)

0.00000E+00 0.00000E+00

0.00000E+00 0.33333 0.00000E+00
0.00000E+00 0.00000E+00 0.33333

- I(11)

0.00000E+00 0.00000E+00 0.00000E+00
0.00000E+00 0.33333 0.00000E+00
0.00000E+00 0.00000E+00 0.33333

O CORPO 1 E O CORPO COMUM AOS TRAMOS QUE TERMINAM NOS CORPOS 6 E 11 QUE FORMAM UM LOOP FECHADO

- VETORES DE POSICAO QUE COMPARTILHAM O PONTO COMUM AOS CORPOS FINAIS
FIXOS NOS CORPOS FINAISDOS TRAMOS QUE SE UNEM NA EXTREMIDADE

-1.0000 0.00000E+00 0.00000E+00 1.0000 0.00000E+00 0.00000E+00

- 0 PERFIL(S) SAO DADOS PARA AS DERIVADAS DOS COMPONENTES DA VELOCIDADE ANGULAR.
- 0 PERFIL(S) SAO DADOS PARA A SEGUNDA DERIVADA DA VARIAVEL DE TRANSLACAO

COMPONENTES DESCONHECIDOS DA VELOCIDADE ANGULAR

CORPO	PARAMETRO
2	3
3	3
4	3
5	3
6	3

7	3
8	3
9	3
10	3
11	3

COMPONENTES CONHECIDOS DA VELOCIDADE ANGULAR

CORPO	PARAMETRO
1	1
1	2
1	3
2	1
2	2
3	1
3	2
4	1
4	2
5	1
5	2
6	1
6	2
7	1
7	2
8	1
8	2
9	1
9	2
10	1
10	2
11	1
11	2

COMPONENTES CONHECIDOS DE TRANSLACAO

CORPO	PARAMETRO
1	1
1	2
1	3
2	1
2	2
2	3
3	1
3	2
3	3
4	1
4	2
4	3
5	1
5	2
5	3
6	1
6	2
6	3
7	1
7	2
7	3
8	1

EXEMPLO DE SAÍDA DE DADOS DO EXEMPLO 3 - ELO SOB AÇÃO DA GRAVIDADE

8	2
8	3
9	1
9	2
9	3
10	1
10	2
10	3
11	1
11	2
11	3

PARAMETROS DE EULER DESCONHECIDOS

CORPO	PARAMETRO
2	3
2	4
3	3
3	4
4	3
4	4
5	3
5	4
6	3
6	4
7	3
7	4
8	3
8	4
9	3
9	4
10	3
10	4
11	3
11	4

PARAMETROS DE EULER CONHECIDOS

CORPO	PARAMETRO
1	1
1	2
1	3
1	4
2	1
2	2
3	1
3	2
4	1
4	2
5	1
5	2
6	1
6	2
7	1
7	2
8	1
8	2
9	1

EXEMPLO DE SAÍDA DE DADOS DO EXEMPLO 3 - ELO SOB AÇÃO DA GRAVIDADE

9	2
10	1
10	2
11	1
11	2

NUMERO DAS COMPONENTES DE VELOCIDADE ANGULAR DESCONHECIDAS
6 9 12 15 18 21 24 27 30 33

NUMERO DAS COMPONENTES DE VELOCIDADE ANGULAR CONHECIDAS
1 2 3 4 5 7 8 10 11 13
14 16 17 19 20 22 23 25 26 28
29 31 32

NUMERO DAS COMPONENTES DE TRANSLACAO CONHECIDAS
34 35 36 37 38 39 40 41 42 43
44 45 46 47 48 49 50 51 52 53
54 55 56 57 58 59 60 61 62 63
64 65 66

NUMERO DOS PARAMETROS DE EULER DESCONHECIDOS
7 8 11 12 15 16 19 20 23 24
27 28 31 32 35 36 39 40 43 44

NUMERO DOS PARAMETROS DE EULER CONHECIDOS
1 2 3 4 5 6 9 10 13 14
17 18 21 22 25 26 29 30 33 34
37 38 41 42

VALORES INICIAIS DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO

CORPO 1):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 7):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 2):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 8):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 3):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 9):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 4):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 10):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 5):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 11):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 6):	0.00000	0.00000	0.00000				

VALORES INICIAIS DAS DERIVADAS DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO

CORPO 1):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 7):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 2):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 8):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 3):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 9):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 4):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 10):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 5):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 11):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 6):	0.00000	0.00000	0.00000				

VALORES INICIAIS DOS ANGULOS DE ORIENTACAO DEXTRAIS

CORPO 1):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 7):	0.00000	0.00000	-101.53700
CORPO 2):	0.00000	0.00000	101.53700	CORPO 8):	0.00000	0.00000	-41.59300
CORPO 3):	0.00000	0.00000	41.59300	CORPO 9):	0.00000	0.00000	-36.87000
CORPO 4):	0.00000	0.00000	36.87000	CORPO 10):	0.00000	0.00000	-36.87000
CORPO 5):	0.00000	0.00000	36.87000	CORPO 11):	0.00000	0.00000	-41.59300
CORPO 6):	0.00000	0.00000	41.59300				

VALORES INICIAIS DAS DERIVADAS DOS ANGULOS DE ORIENTACAO DEXTRAIS

CORPO 1):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 7):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 2):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 8):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 3):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 9):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 4):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 10):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 5):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 11):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 6):	0.00000	0.00000	0.00000				

EXEMPLO DE SAÍDA DE DADOS DO EXEMPLO 3 - ELO SOB AÇÃO DA GRAVIDADE

```
VALORES INICIAIS DOS PARAMETROS DE EULER
 CORPO 1):   0.00000   0.00000   0.00000   1.00000 CORPO 7):   0.00000   0.00000   -
0.77460   0.63246
 CORPO 2):   0.00000   0.00000   0.77460   0.63246 CORPO 8):   0.00000   0.00000   -
0.35505   0.93485
 CORPO 3):   0.00000   0.00000   0.35505   0.93485 CORPO 9):   0.00000   0.00000   -
0.31623   0.94868
 CORPO 4):   0.00000   0.00000   0.31623   0.94868 CORPO 10):   0.00000   0.00000   -
0.31623   0.94868
 CORPO 5):   0.00000   0.00000   0.31623   0.94868 CORPO 11):   0.00000   0.00000   -
0.35505   0.93485
 CORPO 6):   0.00000   0.00000   0.35505   0.93485
VALORES INICIAIS DOS COMPONENTES DAS VELOCIDADES ANGULARES RELATIVAS
 CORPO 1):   0.00000   0.00000   0.00000   CORPO 7):   0.00000   0.00000   0.00000
 CORPO 2):   0.00000   0.00000   0.00000   CORPO 8):   0.00000   0.00000   0.00000
 CORPO 3):   0.00000   0.00000   0.00000   CORPO 9):   0.00000   0.00000   0.00000
 CORPO 4):   0.00000   0.00000   0.00000   CORPO 10):   0.00000   0.00000   0.00000
 CORPO 5):   0.00000   0.00000   0.00000   CORPO 11):   0.00000   0.00000   0.00000
 CORPO 6):   0.00000   0.00000   0.00000
TEMPO INICIAL =   0.00000
TEMPO FINAL =   1.00000
INCREMENTO INICIAL DE INTEGRACAO =   0.01562
ERRO ESPECIFICADO =   0.00001
IMPRESSAO IRA OCORRER A CADA   0.00000 SEGUNDOS
1                   *************** EXEMPLO 3 ELO COM 11 BARRAS
 TEMPO =   0.0000   SEGUNDOS                                   INTERVALO DE DIVISAO
=   0
                                             STEP COUNT =   12
A. VALORES DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO - VETORES Q
 CORPO 1):   0.00000   0.00000   0.00000   CORPO 7):   0.00000   0.00000   0.00000
 CORPO 2):   0.00000   0.00000   0.00000   CORPO 8):   0.00000   0.00000   0.00000
 CORPO 3):   0.00000   0.00000   0.00000   CORPO 9):   0.00000   0.00000   0.00000
 CORPO 4):   0.00000   0.00000   0.00000   CORPO 10):   0.00000   0.00000   0.00000
 CORPO 5):   0.00000   0.00000   0.00000   CORPO 11):   0.00000   0.00000   0.00000
 CORPO 6):   0.00000   0.00000   0.00000
B. VALORES DAS DERIVADAS DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO DERIVADA DE Q
 CORPO 1):   0.00000   0.00000   0.00000   CORPO 7):   0.00000   0.00000   0.00000
 CORPO 2):   0.00000   0.00000   0.00000   CORPO 8):   0.00000   0.00000   0.00000
 CORPO 3):   0.00000   0.00000   0.00000   CORPO 9):   0.00000   0.00000   0.00000
 CORPO 4):   0.00000   0.00000   0.00000   CORPO 10):   0.00000   0.00000   0.00000
 CORPO 5):   0.00000   0.00000   0.00000   CORPO 11):   0.00000   0.00000   0.00000
 CORPO 6):   0.00000   0.00000   0.00000
C. VALORES DA SEGUNDA DERIVADA DAS VARIAVEIS DE  DE TRANSLACAO
 CORPO 1):   0.00000   0.00000   0.00000   CORPO 7):   0.00000   0.00000   0.00000
 CORPO 2):   0.00000   0.00000   0.00000   CORPO 8):   0.00000   0.00000   0.00000
 CORPO 3):   0.00000   0.00000   0.00000   CORPO 9):   0.00000   0.00000   0.00000
 CORPO 4):   0.00000   0.00000   0.00000   CORPO 10):   0.00000   0.00000   0.00000
 CORPO 5):   0.00000   0.00000   0.00000   CORPO 11):   0.00000   0.00000   0.00000
 CORPO 6):   0.00000   0.00000   0.00000
D. VALORES DOS ANGULOS DEXTRAIS DE ORIENTACAO EM GRAUS
 CORPO 1):   -0.00000   0.00000   -0.00000   CORPO 7):   0.00000   0.00000   258.46304
 CORPO 2):   -0.00000   0.00000   101.53701   CORPO 8):   0.00000   0.00000   -41.59299
 CORPO 3):   -0.00000   0.00000   41.59299   CORPO 9):   0.00000   0.00000   -36.86999
 CORPO 4):   -0.00000   0.00000   36.86999   CORPO 10):   0.00000   0.00000   -36.86999
 CORPO 5):   -0.00000   0.00000   36.86999   CORPO 11):   0.00000   0.00000   -41.59299
 CORPO 6):   -0.00000   0.00000   41.59299
```

EXEMPLO DE SAÍDA DE DADOS DO EXEMPLO 4 - CORPO HUMANO SOB IMPACTO

```
1                    S I S M U L  : ANALISE DINAMICA DE SISTEMAS MULTICORPOS
1              *********** EXEMPLO 4 CORPO HUMANO SOB IMPACTO
O NUMERO DE CORPOS DESSA ANALISE E   12
A ACELERACAO DA GRAVIDADE E    117.60
 CORPO     IDENTIFICACAO            MASSA         CORPO    CORPO FINAL
                                         INFERIOR  DESSE TRAMO
 -  1    QUADRIL                  15.000        0       12
 -  2    ESTOMAGO                 15.000        1       8
 -  3    PEITO                 10.000        2       8
 -  4    BRACO ESQUERDO            2.2000        3       5
 -  5    ANTEBRACO ESQUERDO         1.8000        4       5
 -  6    BRACO DIREITO           2.2000        3       7
 -  7    ANTEBRACO DIREITO         1.8000        6       7
 -  8    CABECA               6.0000        3       8
 -  9    PERNA ESQUEDA            7.0000        1       10
 -  10    CANELA ESQUERDA          4.5000        9       10
 -  11    PERNA DIREITA           7.0000        1       12
 -  12    CANELA DIREITA          4.5000        11      12
  JUNTA     IDENTIFICACAO           VETOR DE POSICAO DO CENTRO DE MASSA
VETOR DO PONTO DE REFERENCIA
                          FIXO NO CORPO                          FIXO NO CORPO INFERIOR
 -  1    QUADRIL           0.00000E+00   0.00000E+00   0.00000E+00
 -  2    ESTOMAGO            0.00000E+00   0.00000E+00   0.10000          0.00000E+00
0.00000E+00   0.10000
 -  3    PEITO    OB         0.00000E+00   0.00000E+00   0.10000          0.00000E+00   0.00000E+00
0.20000
 -  4    OMBRO ESQUERDO          0.15000      0.00000E+00   0.00000E+00       0.00000E+00
0.20000     0.15000
 -  5    COTOVELO ESQUERDO      0.00000E+00   0.00000E+00   0.15000          0.30000
0.00000E+00   0.00000E+00
 -  6    OMBRO DIREITO          0.15000      0.00000E+00   0.00000E+00       0.00000E+00   -0.20000
0.15000
 -  7    COTOVELO DIREITO       0.00000E+00   0.00000E+00   0.15100          0.30000
0.00000E+00   0.00000E+00
 -  8    PESCOCO            0.00000E+00   0.00000E+00   0.15000          0.00000E+00   0.00000E+00
0.20000
 -  9    CINTURA ESQUERDA        0.20000      0.00000E+00   0.00000E+00       0.00000E+00
0.10000     -0.20000E-01
 -  10    JOELHO ESQUERDO        0.00000E+00   0.00000E+00   -0.20000         0.40000
0.00000E+00   0.00000E+00
 -  11    CINTURA DIREITA        0.20000      0.00000E+00   0.00000E+00       0.00000E+00  -
0.10000     -0.20000E-01
 -  12    JOELHO DIREITO        0.00000E+00   0.00000E+00   -0.20000         0.40000
0.00000E+00   0.00000E+00

 -          MASSA TOTAL    PESO TOTAL
              77.000        9055.2
1                       M A T R I Z E S  D E  I N E R C I A

 -              I( 1)                                    I( 2)

        62.800     0.00000E+00   0.00000E+00           62.800     0.00000E+00   0.00000E+00
        0.00000E+00   28.060     0.00000E+00           0.00000E+00   38.380     0.00000E+00
        0.00000E+00   0.00000E+00   61.320             0.00000E+00   0.00000E+00   61.320

 -              I( 3)                                    I( 4)
```

EXEMPLO DE SAÍDA DE DADOS DO EXEMPLO 4 - CORPO HUMANO SOB IMPACTO

45.000 0.00000E+00 0.00000E+00
0.00000E+00
0.00000E+00 30.960 0.00000E+00
0.00000E+00 0.00000E+00 44.652

0.32800E-01 0.00000E+00
0.00000E+00 11.266 0.00000E+00
0.00000E+00 0.00000E+00 11.266

- I(5)

12.236 0.00000E+00 0.00000E+00
0.00000E+00
0.00000E+00 12.236 0.00000E+00
0.00000E+00 0.00000E+00 0.23520

I(6)

0.32800E-01 0.00000E+00
0.00000E+00 11.262 0.00000E+00
0.00000E+00 0.00000E+00 11.262

- I(7)

12.236 0.00000E+00 0.00000E+00
0.00000E+00 11.236 0.00000E+00
0.00000E+00 0.00000E+00 0.23520

I(8)

18.572 0.00000E+00 0.00000E+00
0.00000E+00 18.572 0.00000E+00
0.00000E+00 0.00000E+00 9.2080

- I(9)

0.26000 0.00000E+00 0.00000E+00
0.00000E+00 40.648 0.00000E+00
0.00000E+00 0.00000E+00 40.648

I(10)

48.926 0.00000E+00 0.00000E+00
0.00000E+00 49.552 0.00000E+00
0.00000E+00 0.00000E+00 0.68440

- I(11)

0.26000 0.00000E+00 0.00000E+00
0.00000E+00 40.648 0.00000E+00
0.00000E+00 0.00000E+00 40.648

I(12)

48.926 0.00000E+00 0.00000E+00
0.00000E+00 49.552 0.00000E+00
0.00000E+00 0.00000E+00 0.68440

- 0 PERFIL(S) SAO DADOS PARA AS DERIVADAS DOS COMPONENTES DA VELOCIDADE ANGULAR.
- 1 PERFIL(S) SAO DADOS PARA A SEGUNDA DERIVADA DA VARIAVEL DE TRANSLACAO

UM PERFIL DE ACELERACAO E DADO PARA A VARIAVEL DE TRANSLACAO 1 DO CORPO 1. QUE CONTEM 3 PONTOS

TEMPO(SEG)	INCLINACAO	ACELERACAO	VELOCIDADE	POSICAO
0.00000E+00	10222.	0.00000E+00	120.00	0.00000E+00
0.45000E-01	-4381.0	460.00	130.35	5.5553
0.15000	0.00000E+00	0.00000E+00	154.50	20.932

COMPONENTES DESCONHECIDOS DA VELOCIDADE ANGULAR

CORPO	PARAMETRO
2	1
2	2
2	3
3	1
3	2
3	3
4	1
4	2
4	3
5	2
6	1
6	2
6	3

7	2
8	1
8	2
8	3
9	1
9	2
9	3
10	2
11	1
11	2
11	3
12	2

COMPONENTES CONHECIDOS DA VELOCIDADE ANGULAR

CORPO	PARAMETRO
1	1
1	2
1	3
5	1
5	3
7	1
7	3
10	1
10	3
12	1
12	3

COMPONENTES DESCONHECIDOS DE TRANSLACAO

CORPO	PARAMETRO
8	1
8	2
8	3

COMPONENTES CONHECIDOS DE TRANSLACAO

CORPO	PARAMETRO
1	1
1	2
1	3
2	1
2	2
2	3
3	1
3	2
3	3
4	1
4	2
4	3
5	1
5	2
5	3
6	1
6	2
6	3
7	1
7	2
7	3

EXEMPLO DE SAÍDA DE DADOS DO EXEMPLO 4 - CORPO HUMANO SOB IMPACTO

9	1
9	2
9	3
10	1
10	2
10	3
11	1
11	2
11	3
12	1
12	2
12	3

PARAMETROS DE EULER DESCONHECIDOS

CORPO	PARAMETRO
2	1
2	2
2	3
2	4
3	1
3	2
3	3
3	4
4	1
4	2
4	3
4	4
5	2
5	4
6	1
6	2
6	3
6	4
7	2
7	4
8	1
8	2
8	3
8	4
9	1
9	2
9	3
9	4
10	2
10	4
11	1
11	2
11	3
11	4
12	2
12	4

PARAMETROS DE EULER CONHECIDOS

CORPO	PARAMETRO
1	1
1	2

EXEMPLO DE SAÍDA DE DADOS DO EXEMPLO 4 - CORPO HUMANO SOB IMPACTO

1	3
1	4
5	1
5	3
7	1
7	3
10	1
10	3
12	1
12	3

NUMERO DAS COMPONENTES DE VELOCIDADE ANGULAR DESCONHECIDAS
4 5 6 7 8 9 10 11 12 14
16 17 18 20 22 23 24 25 26 27
29 31 32 33 35

NUMERO DAS COMPONENTES DE VELOCIDADE ANGULAR CONHECIDAS
1 2 3 13 15 19 21 28 30 34
36

NUMERO DAS COMPONENTES DE TRANSLACAO DESCONHECIDAS
58 59 60

NUMERO DAS COMPONENTES DE TRANSLACAO CONHECIDAS
37 38 39 40 41 42 43 44 45 46
47 48 49 50 51 52 53 54 55 56
57 61 62 63 64 65 66 67 68 69
70 71 72

NUMERO DOS PARAMETROS DE EULER DESCONHECIDOS
5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
15 16 18 20 21 22 23 24 26 28
29 30 31 32 33 34 35 36 38 40
41 42 43 44 46 48

NUMERO DOS PARAMETROS DE EULER CONHECIDOS
1 2 3 4 17 19 25 27 37 39
45 47

VALORES INICIAIS DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO

CORPO 1):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 7):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 2):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 8):	0.00000	0.00000	2.00000
CORPO 3):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 9):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 4):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 10):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 5):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 11):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 6):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 12):	0.00000	0.00000	0.00000

VALORES INICIAIS DAS DERIVADAS DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO

CORPO 1):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 7):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 2):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 8):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 3):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 9):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 4):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 10):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 5):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 11):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 6):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 12):	0.00000	0.00000	0.00000

VALORES INICIAIS DOS ANGULOS DE ORIENTACAO DEXTRAIS

CORPO 1):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 7):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 2):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 8):	0.00000	0.00000	0.00000
CORPO 3):	0.00000	0.00000	0.00000	CORPO 9):	0.00000	-6.36000	0.00000

EXEMPLO DE SAÍDA DE DADOS DO EXEMPLO 4 - CORPO HUMANO SOB IMPACTO

```
CORPO 4):   0.00000   77.35000   0.00000  CORPO 10):   0.00000   0.00000   0.00000
CORPO 5):   0.00000   0.00000    0.00000  CORPO 11):  -6.36000   0.00000   0.00000
CORPO 6):   0.00000   77.35000   0.00000  CORPO 12):   0.00000   0.00000   0.00000
VALORES INICIAIS DAS DERIVADAS DOS ANGULOS DE ORIENTACAO DEXTRAIS
CORPO 1):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 7):   0.00000   0.00000   0.00000
CORPO 2):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 8):   0.00000   0.00000   0.00000
CORPO 3):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 9):   0.00000   0.00000   0.00000
CORPO 4):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 10):  0.00000   0.00000   0.00000
CORPO 5):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 11):  0.00000   0.00000   0.00000
CORPO 6):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 12):  0.00000   0.00000   0.00000
VALORES INICIAIS DOS PARAMETROS DE EULER
 CORPO 1):   0.00000   0.00000   0.00000   1.00000 CORPO 7):   0.00000   0.00000
0.00000   1.00000
 CORPO 2):   0.00000   0.00000   0.00000   1.00000 CORPO 8):   0.00000   0.00000
0.00000   1.00000
 CORPO 3):   0.00000   0.00000   0.00000   1.00000 CORPO 9):   0.00000  -0.05547
0.00000   0.99846
 CORPO 4):   0.00000   0.62490   0.00000   0.78070 CORPO 10):   0.00000   0.00000
0.00000   1.00000
 CORPO 5):   0.00000   0.00000   0.00000   1.00000 CORPO 11):  -0.05547   0.00000
0.00000   0.99846
 CORPO 6):   0.00000   0.62490   0.00000   0.78070 CORPO 12):   0.00000   0.00000
0.00000   1.00000
VALORES INICIAIS DOS COMPONENTES DAS VELOCIDADES ANGULARES RELATIVAS
CORPO 1):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 7):   0.00000   0.00000   0.00000
CORPO 2):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 8):   0.00000   0.00000   0.00000
CORPO 3):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 9):   0.00000   0.00000   0.00000
CORPO 4):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 10):  0.00000   0.00000   0.00000
CORPO 5):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 11):  0.00000   0.00000   0.00000
CORPO 6):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 12):  0.00000   0.00000   0.00000
TEMPO INICIAL =    0.00000
TEMPO FINAL =    0.60000
INCREMENTO INICIAL DE INTEGRACAO =    0.00003
ERRO ESPECIFICADO =    0.00100
IMPRESSAO IRA OCORRER A CADA    0.00013 SEGUNDOS
1                    *********** EXEMPLO 4 CORPO HUMANO SOB IMPACTO
 TEMPO =    0.0000   SEGUNDOS                              INTERVALO DE DIVISAO
=   0
                                          STEP COUNT =    27
A. VALORES DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO - VETORES Q
CORPO 1):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 7):   0.00000   0.00000   0.00000
CORPO 2):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 8):   0.00000   0.00000   2.00000
CORPO 3):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 9):   0.00000   0.00000   0.00000
CORPO 4):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 10):  0.00000   0.00000   0.00000
CORPO 5):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 11):  0.00000   0.00000   0.00000
CORPO 6):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 12):  0.00000   0.00000   0.00000
B. VALORES DAS DERIVADAS DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO DERIVADA DE Q
CORPO 1): 120.00000   0.00000   0.00000  CORPO 7):   0.00000   0.00000   0.00000
CORPO 2):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 8):   0.00000   0.00000   0.00000
CORPO 3):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 9):   0.00000   0.00000   0.00000
CORPO 4):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 10):  0.00000   0.00000   0.00000
CORPO 5):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 11):  0.00000   0.00000   0.00000
CORPO 6):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 12):  0.00000   0.00000   0.00000
C. VALORES DA SEGUNDA DERIVADA DAS VARIAVEIS DE  DE TRANSLACAO
CORPO 1):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 7):   0.00000   0.00000   0.00000
CORPO 2):   0.00000   0.00000   0.00000  CORPO 8):   0.00000   0.00000   0.00000
```

EXEMPLO DE SAÍDA DE DADOS DO EXEMPLO 5 - ELO MOVIDO

```
1                S I S M U L  : ANALISE DINAMICA DE SISTEMAS MULTICORPOS
1            *************** EXEMPLO 5 ELO GUIADO
O EIXO  Y E O EIXO VERTICAL
O MOVIMENTO FOI INDICADO COMO SENDO DIMENSIONAL
A ANALISE APRESENTA UM LOOP FECHADO
O NUMERO DE CORPOS DESSA ANALISE E    6
A ACELERACAO DA GRAVIDADE E   9.8000
 CORPO      IDENTIFICACAO           MASSA          CORPO    CORPO FINAL
                                 INFERIOR  DESSE TRAMO
-  1    *C.M.  BARRA 1*       0.00000E+00      0      6
-  2    *C.M.  BARRA 2*        45.000       1     4
-  3    *C.M.  BARRA 3*        45.000       2     4
-  4    *C.M.  BARRA 4*        45.000       3     4
-  5    *C.M.  BARRA 5*        45.000       1     6
-  6    *C.M.  BARRA 6*        45.000       5     6
 JUNTA     IDENTIFICACAO          VETOR DE POSICAO DO CENTRO DE MASSA
VETOR DO PONTO DE REFERENCIA
                          FIXO NO CORPO                          FIXO NO CORPO INFERIOR
-  1    *JUNTA     1*      1.5000     0.00000E+00  0.00000E+00
-  2    *JUNTA     2*     -0.50000     0.00000E+00  0.00000E+00      0.00000E+00   0.00000E+00
0.00000E+00
-  3    *JUNTA     3*     -0.50000     0.00000E+00  0.00000E+00      -1.0000      0.00000E+00
0.00000E+00
-  4    *JUNTA     4*     -0.50000     0.00000E+00  0.00000E+00      -1.0000      0.00000E+00
0.00000E+00
-  5    *JUNTA     5*      0.50000     0.00000E+00  0.00000E+00       3.0000      0.00000E+00
0.00000E+00
-  6    *JUNTA     6*      0.50000     0.00000E+00  0.00000E+00       1.0000      0.00000E+00
0.00000E+00

-          MASSA TOTAL   PESO TOTAL
             225.00        2205.0
1                        M A T R I Z E S  D E  I N E R C I A

-                 I( 1)                                 I( 2)

      0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00            0.00000E+00   0.33333
0.00000E+00
      0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00            0.00000E+00   0.00000E+00   0.33333
      0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00            0.00000E+00   0.00000E+00
0.00000E+00

-                 I( 3)                                 I( 4)

      0.00000E+00   0.33333    0.00000E+00          0.00000E+00   0.33333     0.00000E+00
      0.00000E+00  0.00000E+00  0.33333             0.00000E+00   0.00000E+00   0.33333
      0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00            0.00000E+00   0.00000E+00
0.00000E+00

-                 I( 5)                                 I( 6)

      0.00000E+00   0.33333    0.00000E+00          0.00000E+00   0.33333     0.00000E+00
      0.00000E+00  0.00000E+00  0.33333             0.00000E+00   0.00000E+00   0.33333
      0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00            0.00000E+00   0.00000E+00
0.00000E+00
```

EXEMPLO DE SAÍDA DE DADOS DO EXEMPLO 5 - ELO MOVIDO

O CORPO 1 E O CORPO COMUM AOS TRAMOS QUE TERMINAM NOS CORPOS 4 E 6 QUE FORMAM UM LOOP FECHADO

- VETORES DE POSICAO QUE COMPARTILHAM O PONTO COMUM AOS CORPOS FINAIS
FIXOS NOS CORPOS FINAISDOS TRAMOS QUE SE UNEM NA EXTREMIDADE

-1.0000 0.00000E+00 0.00000E+00 1.0000 0.00000E+00 0.00000E+00

- 0 PERFIL(S) SAO DADOS PARA AS DERIVADAS DOS COMPONENTES DA VELOCIDADE ANGULAR.
- 1 PERFIL(S) SAO DADOS PARA A SEGUNDA DERIVADA DA VARIAVEL DE TRANSLACAO
UM PERFIL DE ACELERACAO E DADO PARA A VARIAVEL DE TRANSLACAO 2 DO CORPO 5. QUE CONTEM 3 PONTOS

- TEMPO(SEG)	INCLINACAO	ACELERACAO	VELOCIDADE	POSICAO
0.00000E+00	0.00000E+00	-1.0000	0.00000E+00	0.00000E+00
0.50000	0.00000E+00	-1.0000	-0.50000	-0.12500
1.0000	0.00000E+00	-1.0000	-1.0000	-0.50000

COMPONENTES DESCONHECIDOS DA VELOCIDADE ANGULAR

CORPO	PARAMETRO
2	3
3	3
4	3
5	3
6	3

COMPONENTES CONHECIDOS DA VELOCIDADE ANGULAR

CORPO	PARAMETRO
1	1
1	2
1	3
2	1
2	2
3	1
3	2
4	1
4	2
5	1
5	2
6	1
6	2

COMPONENTES CONHECIDOS DE TRANSLACAO

CORPO	PARAMETRO
1	1
1	2
1	3
2	1
2	2
2	3
3	1
3	2
3	3

EXEMPLO DE SAÍDA DE DADOS DO EXEMPLO 5 - ELO MOVIDO

4	1
4	2
4	3
5	1
5	2
5	3
6	1
6	2
6	3

PARAMETROS DE EULER DESCONHECIDOS

CORPO	PARAMETRO
2	3
2	4
3	3
3	4
4	3
4	4
5	3
5	4
6	3
6	4

PARAMETROS DE EULER CONHECIDOS

CORPO	PARAMETRO
1	1
1	2
1	3
1	4
2	1
2	2
3	1
3	2
4	1
4	2
5	1
5	2
6	1
6	2

NUMERO DAS COMPONENTES DE VELOCIDADE ANGULAR DESCONHECIDAS
6 9 12 15 18

NUMERO DAS COMPONENTES DE VELOCIDADE ANGULAR CONHECIDAS
1 2 3 4 5 7 8 10 11 13
14 16 17

NUMERO DAS COMPONENTES DE TRANSLACAO CONHECIDAS
19 20 21 22 23 24 25 26 27 28
29 30 31 32 33 34 35 36

NUMERO DOS PARAMETROS DE EULER DESCONHECIDOS
7 8 11 12 15 16 19 20 23 24

NUMERO DOS PARAMETROS DE EULER CONHECIDOS
1 2 3 4 5 6 9 10 13 14

EXEMPLO DE SAÍDA DE DADOS DO EXEMPLO 5 - ELQ MOVIDO

17 18 21 22
VALORES INICIAIS DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000 0.00000
CORPO 2): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 5): 0.00000 0.00000 0.00000
CORPO 3): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 6): 0.00000 0.00000 0.00000
VALORES INICIAIS DAS DERIVADAS DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000 0.00000
CORPO 2): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 5): 0.00000 0.00000 0.00000
CORPO 3): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 6): 0.00000 0.00000 0.00000
VALORES INICIAIS DOS ANGULOS DE ORIENTACAO DEXTRAIS
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000 36.87000
CORPO 2): 0.00000 0.00000 101.53700 CORPO 5): 0.00000 0.00000 -101.53700
CORPO 3): 0.00000 0.00000 41.59300 CORPO 6): 0.00000 0.00000 -41.59300
VALORES INICIAIS DAS DERIVADAS DOS ANGULOS DE ORIENTACAO DEXTRAIS
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000 0.00000
CORPO 2): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 5): 0.00000 0.00000 0.00000
CORPO 3): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 6): 0.00000 0.00000 0.00000
VALORES INICIAIS DOS PARAMETROS DE EULER
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 1.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000
0.31623 0.94868
CORPO 2): 0.00000 0.00000 0.77460 0.63246 CORPO 5): 0.00000 0.00000 -
0.77460 0.63246
CORPO 3): 0.00000 0.00000 0.35505 0.93485 CORPO 6): 0.00000 0.00000 -
0.35505 0.93485
VALORES INICIAIS DOS COMPONENTES DAS VELOCIDADES ANGULARES RELATIVAS
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000 0.00000
CORPO 2): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 5): 0.00000 0.00000 0.00000
CORPO 3): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 6): 0.00000 0.00000 0.00000
TEMPO INICIAL = 0.00000
TEMPO FINAL = 1.20000
INCREMENTO INICIAL DE INTEGRACAO = 0.01562
ERRO ESPECIFICADO = 0.00001
IMPRESSAO IRA OCORRER A CADA 0.00001 SEGUNDOS
1 *************** EXEMPLO 5 ELO GUIADO
TEMPO = 0.0000 SEGUNDOS INTERVALO DE DIVISAO
= 0
STEP COUNT = 7
A. VALORES DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO - VETORES Q
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000 0.00000
CORPO 2): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 5): 0.00000 0.00000 0.00000
CORPO 3): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 6): 0.00000 0.00000 0.00000
B. VALORES DAS DERIVADAS DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO DERIVADA DE Q
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000 0.00000
CORPO 2): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 5): 0.00000 0.00000 0.00000
CORPO 3): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 6): 0.00000 0.00000 0.00000
C. VALORES DA SEGUNDA DERIVADA DAS VARIAVEIS DE DE TRANSLACAO
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000 0.00000
CORPO 2): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 5): 0.00000 -1.00000 0.00000
CORPO 3): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 6): 0.00000 0.00000 0.00000
D. VALORES DOS ANGULOS DEXTRAIS DE ORIENTACAO EM GRAUS
CORPO 1): -0.00000 0.00000 -0.00000 CORPO 4): -0.00000 0.00000 36.86999
CORPO 2): -0.00000 0.00000 101.53701 CORPO 5): 0.00000 0.00000 258.46304
CORPO 3): -0.00000 0.00000 41.59299 CORPO 6): 0.00000 0.00000 -41.59299
E. VALORES DAS DERIVADAS DOS ANGULOS DEXTRAIS EM GRAUS/SEGUNDO
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000 0.00000
CORPO 2): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 5): 0.00000 0.00000 0.00000

CORPO 3): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 6): 0.00000 0.00000 0.00000
F. VALORES DOS PARAMETROS DE ORIENTACAO DE EULER
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 1.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000
0.31623 0.94868
CORPO 2): 0.00000 0.00000 0.77460 0.63246 CORPO 5): 0.00000 0.00000 -
0.77460 0.63246
CORPO 3): 0.00000 0.00000 0.35505 0.93485 CORPO 6): 0.00000 0.00000 -
0.35505 0.93485
G. VALORES DAS DERIVADAS DOS PARAMETROS DE ORIENTACAO DE EULER
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 -0.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000
0.00000 -0.00000
CORPO 2): 0.00000 0.00000 0.00000 -0.00000 CORPO 5): 0.00000 0.00000
0.00000 0.00000
CORPO 3): 0.00000 0.00000 0.00000 -0.00000 CORPO 6): 0.00000 0.00000
0.00000 0.00000
H. VALORES DOS COMPONENTES DAS VELOCIDADES ANGULARES RELATIVAS EM RAD/SEG
(EM RELACAO AO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000 0.00000
CORPO 2): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 5): 0.00000 0.00000 0.00000
CORPO 3): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 6): 0.00000 0.00000 0.00000
I. VALORES DOS COMPONENTES DA ACELERACAO ANGULAR RELATIVA EM RAD/SEG/SEG
(REFERIDAS AO REFERENCIAL PRESO AO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000 12.92697
CORPO 2): 0.00000 0.00000 6.89078 CORPO 5): 0.00000 0.00000 -6.42693
CORPO 3): 0.00000 0.00000 -18.58997 CORPO 6): 0.00000 0.00000 16.47542
J. MOMENTOS NA JUNTA ENTRE CORPOS ADJACENTES
(COMPONENTES EM RELACAO AO REFERENCIAL PRESO NO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): 0.00000 0.00000 2496.38206 CORPO 4): 2.33984 -3.11978 0.00000
CORPO 2): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 5): 0.00000 0.00000 0.00000
CORPO 3): -3.77530 2.17721 0.00000 CORPO 6): -1.42214 -1.60219 0.00000
K. FORCA NAS JUNTAS ENTRE CORPOS ADJACENTES
(COMPONENTES EM RELACAO AO REFERENCIAL PRESO NO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): -3.66569 1661.80445 0.00000 CORPO 4): 75.33055 -80.34253 0.00000
CORPO 2): 285.73221 873.91316 0.00000 CORPO 5): -289.39790 787.89130
0.00000
CORPO 3): 367.01992 -211.49942 0.00000 CORPO 6): -282.00293 -208.32333
0.00000
L. COORDENADAS DOS VETORES DE POSICAO DA JUNTA -- REFERENCIAL INERCIAL
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 4): 1.00000 -1.57980 0.00000
CORPO 2): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 5): 3.00000 0.00000 0.00000
CORPO 3): 0.20000 -0.97980 0.00000 CORPO 6): 2.80000 -0.97980 0.00000
M. COORDENADAS DOS VETORES DE POSICAO DO CENTRO DE MASSA DOS CORPOS --
REFERENCIAL INERCIAL
CORPO 1): 1.50000 0.00000 0.00000 CORPO 4): 1.50000 -1.57980 0.00000
CORPO 2): 0.10000 -0.48990 0.00000 CORPO 5): 2.90000 -0.48990 0.00000
CORPO 3): 0.60000 -1.27980 0.00000 CORPO 6): 2.40000 -1.27980 0.00000
1 *************** EXEMPLO 5 ELO GUIADO
TEMPO = 0.0156 SEGUNDOS INTERVALO DE DIVISAO
= 0
STEP COUNT = 7
A. VALORES DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO - VETORES Q
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000 0.00000
CORPO 2): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 5): 0.00000 -0.00012 0.00000
CORPO 3): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 6): 0.00000 0.00000 0.00000
B. VALORES DAS DERIVADAS DAS VARIAVEIS DE TRANSLACAO DERIVADA DE Q
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000 0.00000

CORPO 2): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 5): 0.00000 -0.01562 0.00000
CORPO 3): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 6): 0.00000 0.00000 0.00000
C. VALORES DA SEGUNDA DERIVADA DAS VARIAVEIS DE DE TRANSLACAO
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000 0.00000
CORPO 2): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 5): 0.00000 -1.00000 0.00000
CORPO 3): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 6): 0.00000 0.00000 0.00000
D. VALORES DOS ANGULOS DEXTRAIS DE ORIENTACAO EM GRAUS
CORPO 1): -0.00000 0.00000 -0.00000 CORPO 4): -0.00000 0.00000 36.96037
CORPO 2): -0.00000 0.00000 101.58525 CORPO 5): 0.00000 0.00000 258.41804
CORPO 3): -0.00000 0.00000 41.46294 CORPO 6): 0.00000 0.00000 -41.47770
E. VALORES DAS DERIVADAS DOS ANGULOS DEXTRAIS EM GRAUS/SEGUNDO
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000 11.56220
CORPO 2): 0.00000 0.00000 6.18023 CORPO 5): 0.00000 0.00000 -5.76580
CORPO 3): 0.00000 0.00000 -16.65091 CORPO 6): 0.00000 0.00000 14.76469
F. VALORES DOS PARAMETROS DE ORIENTACAO DE EULER
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 1.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000
0.31698 0.94843
CORPO 2): 0.00000 0.00000 0.77486 0.63213 CORPO 5): 0.00000 0.00000 -
0.77485 0.63215
CORPO 3): 0.00000 0.00000 0.35399 0.93525 CORPO 6): 0.00000 0.00000 -
0.35411 0.93520
G. VALORES DAS DERIVADAS DOS PARAMETROS DE ORIENTACAO DE EULER
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 -0.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000
0.09570 -0.03198
CORPO 2): 0.00000 0.00000 0.03409 -0.04179 CORPO 5): 0.00000 0.00000 -
0.03181 -0.03899
CORPO 3): 0.00000 0.00000 -0.13590 0.05144 CORPO 6): 0.00000 0.00000
0.12050 0.04563
H. VALORES DOS COMPONENTES DAS VELOCIDADES ANGULARES RELATIVAS EM RAD/SEG
(EM RELACAO AO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000 0.20180
CORPO 2): 0.00000 0.00000 0.10787 CORPO 5): 0.00000 0.00000 -0.10063
CORPO 3): 0.00000 0.00000 -0.29061 CORPO 6): 0.00000 0.00000 0.25769
I. VALORES DOS COMPONENTES DA ACELERACAO ANGULAR RELATIVA EM RAD/SEG/SEG
(REFERIDAS AO REFERENCIAL PRESO AO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 4): 0.00000 0.00000 12.89133
CORPO 2): 0.00000 0.00000 6.92856 CORPO 5): 0.00000 0.00000 -6.46751
CORPO 3): 0.00000 0.00000 -18.61773 CORPO 6): 0.00000 0.00000 16.52610
J. MOMENTOS NA JUNTA ENTRE CORPOS ADJACENTES
(COMPONENTES EM RELACAO AO REFERENCIAL PRESO NO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): 0.01705 -0.00224 2505.86642 CORPO 4): 2.34265 -3.11349 0.00000
CORPO 2): 0.00980 -0.01049 0.00000 CORPO 5): 0.00725 0.00825 0.00000
CORPO 3): -3.80012 2.18670 0.00000 CORPO 6): -1.43403 -1.60973 0.00000
K. FORCA NAS JUNTAS ENTRE CORPOS ADJACENTES
(COMPONENTES EM RELACAO AO REFERENCIAL PRESO NO CORPO INFERIOR)
CORPO 1): -3.85196 1668.58627 0.00000 CORPO 4): 76.82533 -82.01070 0.00000
CORPO 2): 287.19307 878.68464 0.00000 CORPO 5): -291.04503 789.90164
0.00000
CORPO 3): 370.83030 -213.34764 0.00000 CORPO 6): -283.06576 -209.64895
0.00000
L. COORDENADAS DOS VETORES DE POSICAO DA JUNTA -- REFERENCIAL INERCIAL
CORPO 1): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 4): 0.99997 -1.58077 0.00000
CORPO 2): 0.00000 0.00000 0.00000 CORPO 5): 3.00000 -0.00012 0.00000
CORPO 3): 0.20083 -0.97963 0.00000 CORPO 6): 2.79923 -0.97976 0.00000
M. COORDENADAS DOS VETORES DE POSICAO DO CENTRO DE MASSA DOS CORPOS --
REFERENCIAL INERCIAL

ARQUIVO DE SAÍDA DO ADAMS PARA O EXEMPLO DO PÊNDULO DUPLO

```
*************************************************************
*                                                           *
*                Mechanical Dynamics, Inc.                  *
*                                                           *
*                      A D A M S                            *
*                                                           *
*    Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems       *
*                                                           *
*      14:52:24 16-AUG-93            Version 6.1.0          *
*                                                           *
*************************************************************
*                                                           *
*       Copyright   C   1979, 1980, 1981, 1982,             *
*       1983, 1984, 1985, 1986, 1987, 1988, 1989,           *
*                 1990, 1991, 1992                          *
*   by Mechanical Dynamics, Inc., Ann Arbor, Michigan       *
*                                                           *
*************************************************************
*                                                           *
*      Confidential and proprietary information of          *
*      Mechanical Dynamics, Inc., Ann Arbor, Michigan       *
*                                                           *
* All  rights  reserved.  This code may not be copied or    *
* reproduced in any form,  in part or in whole,  without    *
* the explicit written permission of the copyright owner.   *
*                                                           *
*************************************************************
*                                                           *
*           ADAMS is a registered trademark of              *
*                 Mechanical Dynamics, Inc.                 *
*                                                           *
*************************************************************
*                                                           *
*               RESTRICTED RIGHTS LEGEND                    *
*                                                           *
* If the Software and Documentation are provided in         *
* connection with a government contract, then they are      *
* provided with RESTRICTED RIGHTS. Use, duplication, or     *
* disclosure by the Government is subject to restrictions   *
* as set forth in subparagraph (c)(1)(ii) of the Rights in  *
* Technical Data and Computer Software clause at            *
* 252.227-7013, as amended. Title to all intellectual       *
* property remains with MDI.                                *
*                                                           *
*                Mechanical Dynamics, Inc.                  *
*                2301 Commonwealth Boulevard                *
*                Ann Arbor, MI  48105-3203                  *
*                                                           *
*************************************************************
*                                                           *
* >>>>>  Licensed to:  SMI                          >>>>>   *
*                                                           *
```

ARQUIVO DE SAÍDA DO ADAMS PARA O EXEMPLO DO PÊNDULO DUPLO

```
* >>>>> Computer:   IBM PC - INTEL 80387 / DOS    >>>>> *
*                              *
* >>>>> License:    LR-0601-911031          >>>>> *
*                              *
************************************************************
```

Data Set Title:

ADAMS/View model name: MOD1

Maximum displacement error = 0.0000000E+00

Convergence was achieved in 1 iteration(s)

Residual error less than 0.0000000E+00

1

INITIAL CONDITIONS

Rectangular Coordinates
(Part Center of Mass)

Part	X	Y	Z
1	0.0000000000000E+00	0.0000000000000E+00	0.0000000000000E+00
2	5.2340000000000E-02	9.9863000000000E-01	0.0000000000000E+00
3	1.0467000000000E-01	2.9972600000000E+00	0.0000000000000E+00

Angular Coordinates (Degrees)
(Part Center of Mass)

Part	Psi	Theta	Phi
1	0.0000000000000E+00	0.0000000000000E+00	0.0000000000000E+00
2	0.0000000000000E+00	0.0000000000000E+00	0.0000000000000E+00
3	0.0000000000000E+00	0.0000000000000E+00	0.0000000000000E+00

Velocity Solution

Rectangular Coordinates
(Part Center of Mass)

Part	Xdot	Ydot	Zdot
1	0.0000000000000E+00	0.0000000000000E+00	0.0000000000000E+00
2	0.0000000000000E+00	0.0000000000000E+00	0.0000000000000E+00
3	0.0000000000000E+00	0.0000000000000E+00	0.0000000000000E+00

Angular Coordinates (Rad/Time)
(Part Center of Mass)

ARQUIVO DE SAÍDA DO ADAMS PARA O EXEMPLO DO PÊNDULO DUPLO

```
    Part        Wx                      Wy                      Wz
      1 0.0000000000000E+00  0.0000000000000E+00  0.0000000000000E+00
      2 0.0000000000000E+00  0.0000000000000E+00  0.0000000000000E+00
      3 0.0000000000000E+00  0.0000000000000E+00  0.0000000000000E+00
1ADAMS/View model name: MOD1
 Request Number        1

 veloc ang meio

 Velocity     of Marker        5 relative to Marker        7

    Time         Vm          Vx          Vy          Vz          Wm          Wx          Wy          Wz

  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00
0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00

  3.00000E-02  1.96354E-02 -1.96087E-02  1.02288E-03  0.00000E+00  1.96353E-02
0.00000E+00  0.00000E+00  1.96353E-02
  6.00000E-02  3.88766E-02 -3.88254E-02  1.99374E-03  0.00000E+00  3.88766E-02
0.00000E+00  0.00000E+00  3.88766E-02
  9.00000E-02  5.73657E-02 -5.72944E-02  2.85945E-03  0.00000E+00  5.73656E-02
0.00000E+00  0.00000E+00  5.73656E-02
  1.20000E-01  7.47478E-02 -7.46621E-02  3.57768E-03  0.00000E+00  7.47477E-02
0.00000E+00  0.00000E+00  7.47477E-02
  1.50000E-01  9.06868E-02 -9.05934E-02  4.11509E-03  0.00000E+00  9.06867E-02
0.00000E+00  0.00000E+00  9.06867E-02

  1.80000E-01  1.04830E-01 -1.04734E-01  4.48037E-03  0.00000E+00  1.04829E-01
0.00000E+00  0.00000E+00  1.04829E-01
  2.10000E-01  1.16953E-01 -1.16862E-01  4.60683E-03  0.00000E+00  1.16952E-01
0.00000E+00  0.00000E+00  1.16952E-01
  2.40000E-01  1.26844E-01 -1.26763E-01  4.52846E-03  0.00000E+00  1.26843E-01
0.00000E+00  0.00000E+00  1.26843E-01
  2.70000E-01  1.34335E-01 -1.34267E-01  4.26417E-03  0.00000E+00  1.34334E-01
0.00000E+00  0.00000E+00  1.34334E-01
  3.00000E-01  1.39310E-01 -1.39257E-01  3.84376E-03  0.00000E+00  1.39309E-01
0.00000E+00  0.00000E+00  1.39309E-01

  3.30000E-01  1.41712E-01 -1.41674E-01  3.30539E-03  0.00000E+00  1.41712E-01
0.00000E+00  0.00000E+00  1.41712E-01
  3.60000E-01  1.41545E-01 -1.41519E-01  2.69236E-03  0.00000E+00  1.41544E-01
0.00000E+00  0.00000E+00  1.41544E-01
  3.90000E-01  1.38872E-01 -1.38857E-01  2.04957E-03  0.00000E+00  1.38871E-01
0.00000E+00  0.00000E+00  1.38871E-01
  4.20000E-01  1.33814E-01 -1.33806E-01  1.42002E-03  0.00000E+00  1.33813E-01
0.00000E+00  0.00000E+00  1.33813E-01
  4.50000E-01  1.26544E-01 -1.26542E-01  8.41661E-04  0.00000E+00  1.26543E-01
0.00000E+00  0.00000E+00  1.26543E-01

  4.80000E-01  1.17282E-01 -1.17282E-01  3.44866E-04  0.00000E+00  1.17282E-01
0.00000E+00  0.00000E+00  1.17282E-01
```

ARQUIVO DE SAÍDA DO ADAMS PARA O EXEMPLO DO PÊNDULO DUPLO

5.10000E-01 1.06286E-01 -1.06286E-01 -4.92336E-05 0.00000E+00 1.06286E-01
0.00000E+00 0.00000E+00 1.06286E-01
5.40000E-01 9.38463E-02 -9.38457E-02 -3.29570E-04 0.00000E+00 9.38458E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 9.38458E-02
5.70000E-01 8.02777E-02 -8.02762E-02 -4.95050E-04 0.00000E+00 8.02773E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 8.02773E-02
6.00000E-01 6.59135E-02 -6.59111E-02 -5.53674E-04 0.00000E+00 6.59132E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 6.59132E-02

6.30000E-01 5.10988E-02 -5.10961E-02 -5.20997E-04 0.00000E+00 5.10986E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 5.10986E-02
6.60000E-01 3.61848E-02 -3.61823E-02 -4.18091E-04 0.00000E+00 3.61847E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 3.61847E-02
6.90000E-01 2.15230E-02 -2.15213E-02 -2.69215E-04 0.00000E+00 2.15230E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 2.15230E-02
7.20000E-01 7.45939E-03 -7.45873E-03 -9.93754E-05 0.00000E+00 7.45937E-03
0.00000E+00 0.00000E+00 7.45937E-03
7.50000E-01 5.67251E-03 5.67210E-03 6.80299E-05 0.00000E+00 5.67251E-03
0.00000E+00 0.00000E+00 -5.67251E-03

7.80000E-01 1.75584E-02 1.75571E-02 2.13271E-04 0.00000E+00 1.75584E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 -1.75584E-02
8.10000E-01 2.79111E-02 2.79092E-02 3.21894E-04 0.00000E+00 2.79110E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 -2.79110E-02
8.40000E-01 3.64786E-02 3.64765E-02 3.85718E-04 0.00000E+00 3.64785E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 -3.64785E-02
8.70000E-01 4.30522E-02 4.30503E-02 4.03122E-04 0.00000E+00 4.30521E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 -4.30521E-02
9.00000E-01 4.74737E-02 4.74722E-02 3.78592E-04 0.00000E+00 4.74737E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 -4.74737E-02

9.30000E-01 4.96416E-02 4.96406E-02 3.21582E-04 0.00000E+00 4.96415E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 -4.96415E-02
9.60000E-01 4.95147E-02 4.95141E-02 2.44815E-04 0.00000E+00 4.95147E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 -4.95147E-02
9.90000E-01 4.71140E-02 4.71137E-02 1.62237E-04 0.00000E+00 4.71139E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 -4.71139E-02
1.02000E+00 4.25212E-02 4.25211E-02 8.68889E-05 0.00000E+00 4.25212E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 -4.25212E-02
1.05000E+00 3.58757E-02 3.58757E-02 2.89467E-05 0.00000E+00 3.58756E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 -3.58756E-02

1.08000E+00 2.73683E-02 2.73683E-02 -5.81867E-06 0.00000E+00 2.73682E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 -2.73682E-02
1.11000E+00 1.72346E-02 1.72346E-02 -1.69945E-05 0.00000E+00 1.72346E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 -1.72346E-02
1.14000E+00 5.74699E-03 5.74698E-03 -9.79401E-06 0.00000E+00 5.74698E-03
0.00000E+00 0.00000E+00 -5.74698E-03
1.17000E+00 6.79351E-03 -6.79351E-03 5.37206E-06 0.00000E+00 6.79351E-03
0.00000E+00 0.00000E+00 6.79351E-03
1.20000E+00 2.00648E-02 -2.00648E-02 1.39584E-05 0.00000E+00 2.00648E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 2.00648E-02

ARQUIVO DE SAÍDA DO ADAMS PARA O EXEMPLO DO PÊNDULO DUPLO

1.23000E+00 3.37309E-02 -3.37309E-02 -1.13675E-06 0.00000E+00 3.37308E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 3.37308E-02
1.26000E+00 4.74481E-02 -4.74481E-02 -5.76347E-05 0.00000E+00 4.74481E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 4.74481E-02
1.29000E+00 6.08714E-02 -6.08711E-02 -1.71757E-04 0.00000E+00 6.08713E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 6.08713E-02
1.32000E+00 7.36595E-02 -7.36586E-02 -3.56115E-04 0.00000E+00 7.36594E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 7.36594E-02
1.35000E+00 8.54807E-02 -8.54784E-02 -6.17784E-04 0.00000E+00 8.54805E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 8.54805E-02

1.38000E+00 9.60190E-02 -9.60142E-02 -9.56767E-04 0.00000E+00 9.60187E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 9.60187E-02
1.41000E+00 1.04980E-01 -1.04971E-01 -1.36499E-03 0.00000E+00 1.04980E-01
0.00000E+00 0.00000E+00 1.04980E-01
1.44000E+00 1.12099E-01 -1.12084E-01 -1.82600E-03 0.00000E+00 1.12098E-01
0.00000E+00 0.00000E+00 1.12098E-01
1.47000E+00 1.17146E-01 -1.17123E-01 -2.31544E-03 0.00000E+00 1.17146E-01
0.00000E+00 0.00000E+00 1.17146E-01
1.50000E+00 1.19936E-01 -1.19903E-01 -2.80231E-03 0.00000E+00 1.19935E-01
0.00000E+00 0.00000E+00 1.19935E-01

1.53000E+00 1.20332E-01 -1.20288E-01 -3.25109E-03 0.00000E+00 1.20332E-01
0.00000E+00 0.00000E+00 1.20332E-01
1.56000E+00 1.18255E-01 -1.18199E-01 -3.62439E-03 0.00000E+00 1.18254E-01
0.00000E+00 0.00000E+00 1.18254E-01
1.59000E+00 1.13682E-01 -1.13615E-01 -3.88608E-03 0.00000E+00 1.13681E-01
0.00000E+00 0.00000E+00 1.13681E-01
1.62000E+00 1.06653E-01 -1.06578E-01 -4.00449E-03 0.00000E+00 1.06652E-01
0.00000E+00 0.00000E+00 1.06652E-01
1.65000E+00 9.72672E-02 -9.71868E-02 -3.95543E-03 0.00000E+00 9.72668E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 9.72668E-02

1.68000E+00 8.56805E-02 -8.55995E-02 -3.72465E-03 0.00000E+00 8.56801E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 8.56801E-02
1.71000E+00 7.21003E-02 -7.20243E-02 -3.30962E-03 0.00000E+00 7.21001E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 7.21001E-02
1.74000E+00 5.67796E-02 -5.67144E-02 -2.72024E-03 0.00000E+00 5.67794E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 5.67794E-02
1.77000E+00 4.00090E-02 -3.99600E-02 -1.97868E-03 0.00000E+00 4.00089E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 4.00089E-02
1.80000E+00 2.21093E-02 -2.20810E-02 -1.11817E-03 0.00000E+00 2.21093E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 2.21093E-02

1.83000E+00 3.42387E-03 -3.41909E-03 -1.80958E-04 0.00000E+00 3.42385E-03
0.00000E+00 0.00000E+00 3.42385E-03
1.86000E+00 1.56888E-02 1.56691E-02 7.84417E-04 0.00000E+00 1.56888E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 -1.56888E-02
1.89000E+00 3.48617E-02 3.48189E-02 1.72634E-03 0.00000E+00 3.48617E-02
0.00000E+00 0.00000E+00 -3.48617E-02