

C.P.C.
ex

Agenor de Toledo Fleury

OTIMIZAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE MASSA
E DA FREQUÊNCIA FUNDAMENTAL DE UMA
VIGA EM BALANÇO

DISSERTAÇÃO APRESENTADA À ESCOLA
POLITÉCNICA DA USP PARA A OBTEN
ÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGE
NHARIA

São Paulo, 1978

CONSULTA
FD-844

À CÁSSIA

F 1) - 844

270

AGRADECIMENTOS

É nosso desejo deixar registrados sinceros -
agradecimentos ao Prof. Dr. Atair Rios Neto, não apenas pe-
la orientação desta dissertação como por todo apoio dispen-
sado. Agradecimentos também ao Prof. Dr. Giorgio E.O. Giaca-
glia, ao Prof. Dr. Otávio Maizza Neto, ao Eng. Mituru Yama-
moto, do Centro de Computação Eletrônica da USP, pela cola-
boração recebida, e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Esta-
do de São Paulo (FAPESP), pelo suporte financeiro de parte
de nosso trabalho. Finalmente, agradecimentos a todas as -
pessoas do Departamento de Engenharia Mecânica da EPUSP que
de alguma forma nos ajudaram nesta pesquisa.

RESUMO

Um procedimento de otimização para uma viga em balanço que realiza pequenas vibrações transversais é estabelecido. Para tanto, é definida uma função objetivo mista que envolve a frequência fundamental e a distribuição de massa ao longo da viga. A minimização desta função é vinculada à obediência da Equação de Euler para a viga e a condições de contorno adequadas. As variáveis de controle utilizadas, são, de forma indireta, as funções área e raio de giração, resultando num problema de Controle Ótimo. Este problema, por sua vez, é tratado numericamente de modo a se obter, segundo o critério adotado, a distribuição de massa que, para um dado comprimento e condições mínimas de resistência estabelecidas, leva à viga de menor peso e maior frequência fundamental. Dez casos, decorrentes da combinação de níveis mínimos pré-fixados de frequência e resistência, são analisados e os resultados obtidos são comparados a resultados anteriores disponíveis na literatura.

ABSTRACT

An optimization procedure to treat the problem of a cantilever beam subjected to transverse vibration is established. A performance index, which includes the first mode frequency and mass distribution, is defined. The minimization of this index is subjected to Euler's equation for the beam and to adequate boundary conditions. The optimal control problem is then formulated such as to give the minimum weight and the maximum frequency for a cantilever beam with fixed length and subjected to given strength constraints. A numerical solution is obtained in ten different cases. Each case is a combination of specified minimum levels of frequency and strength. The results are compared to other available results.

ÍNDICES

(A) ÍNDICE GERAL

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO 2 - ANÁLISE PRELIMINAR	5
2.1 - Considerações Gerais	5
2.2 - Otimização de Estruturas.....	11
2.2.1- Modelos Discretizados.....	14
2.2.2- Modelos Contínuos.....	19
2.3 - Conclusões Preliminares.....	30
CAPÍTULO 3 - DESENVOLVIMENTO DO MODELO.....	34
3.1 - Discussão do Problema.....	34
3.2 - Hipóteses e Aproximações do Modelo.....	36
3.2.1- Equações Diferenciais do Movimento de uma Viga em Flexão.....	36
3.2.2- Aproximações Necessárias.....	44
3.3 - Formulação do Problema de Controle Ótimo.....	49
3.3.1- Escolha das Variáveis de Controle.....	49
3.3.2- Definição das Variáveis de Estado e de Controle.....	51
3.3.3- Escolha da Função Objetivo.....	54
3.3.4- Vínculos de Desigualdade.....	55
3.3.5- Condições de Contorno.....	57
3.3.6- Forma Final do Problema de Controle Ótimo.....	58
CAPÍTULO 4 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS: CONTROLE ÓTIMO E MÉTODO DE SOLUÇÃO.....	61
4.1 - Condições Necessárias para Otimização.....	61
4.1.1- Colocação Geral do Problema de Contro- le Ótimo.....	61

4.1.2 - Estabelecimento das Condições Necessárias	63
4.2- Escolha do Método de Solução Numérica.....	69
4.3- Tratamento dos Vínculos de Desigualdade.....	72
4.4- Algoritmo do Gradiente de Primeira Ordem.....	77
4.4.1 - Desenvolvimento das Relações Necessárias	77
4.4.2 - Descrição do Algoritmo.....	96
4.4.3 - Diagrama de Blocos.....	100
CAPÍTULO 5 - RESULTADOS OBTIDOS E SUA ANÁLISE.....	102
5.1- Implantação do Programa de Solução Numérica..	102
5.1.1 - Critério de Comparação.....	102
5.1.2 - Condições de Contorno não Homogêneas.	104
5.1.3 - Níveis de Frequência do Primeiro Modo	105
5.1.4 - Funções de Penalização e Constantes - de Peso.....	106
5.1.5 - Fronteiras para Restrições de Desi- gualdade	108
5.1.6 - Ajuste do Tamanho do Passo e do Coefi- ciente de Correção dos Vínculos Termi- nais	113
5.1.7 - Condições de Parada do Processamento.	116
5.1.8 - Modificações para Análise de Outros - Casos	118
5.2- Casos Analisados	119
5.3- Resultados Obtidos	121
5.4- Análise dos Resultados	155
CAPÍTULO 6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES.	161
APÊNDICE A.1 - RELAÇÕES NECESSÁRIAS PARA APLICAÇÃO DO ALGORITMO	167

APÊNDICE A.2 - DIAGRAMA DE BLOCOS	187
APÊNDICE A.3 - SUBROTINAS DO PROGRAMA DE SOLUÇÃO NUMÉRICA	191
APÊNDICE A.4 - LISTAGEM DO PROGRAMA.....	196
BIBLIOGRAFIA	235
 (B) - ÍNDICE DE FIGURAS	
Figura 2.1 - Ensaio em circuito aberto.....	8
Figura 2.2 - Ensaio em circuito fechado.....	9
Figura 3.1 - Viga em Vibração de Flexão.....	37
Figura 3.2 - Diagrama de Corpo Livre de um Ele- mento de Viga.....	37
Figura 3.3 - Viga Engastada-Livre	48
Figura 4.1 - Diagrama de Blocos do Algoritmo...	101
Figura 5.1 - Função de Comparação para a Restri- ção \bar{C}_1	110
Figura 5.2 - Evolução das Funções Área e Raio - de Giração para o Caso 3	128
Figura 5.3 - (a) Evolução do Peso ao Longo do Caso 3	130
Figura 5.3 - (b) Evolução da Frequência Funda- mental ao longo do Caso 3.....	131
Figura 5.4 - Comparação das Funções Área, Raio de Giração e Momento de Inércia, Iniciais e Finais, para o Caso 5	139
Figura 5.5 - Comparação das Funções Área, Raio de Giração e Momento de Inércia, Iniciais e Finais, para o Caso 8..	148
Figura 5.6 - Comparação das Funções Área, Raio de Giração e Momento de Inércia, Iniciais e Finais, para o Caso 10	153

(C) ÍNDICE DE TABELAS

Tabela I	- Resultados para o Caso 1	122
Tabela II	- Resultados para o Caso 2	124
Tabela III.1-	Resultados para o Caso 3	127
Tabela III.2-	Resultados para uma Viga Sub-Ótima do Caso 3	133
Tabela IV.1 -	Resultados para o Caso 4	134
Tabela IV.2 -	Valores Máximos da Função Raio de Giração no Caso 4(15 ^a iteração)...	136
Tabela V.1 -	Resultados para o Caso 5	138
Tabela V.2 -	Valores Máximos da Função Raio de Giração no Caso 5(21 ^a iteração)...	140
Tabela VI	- Resultados para o Caso 6	142
Tabela VII	- Resultados para o Caso 7	143
Tabela VIII	- Resultados para o Caso 8	147
Tabela IX	- Resultados para o Caso 9	150
Tabela X	- Resultados para o Caso 10	152
Tabela XI	- Resumo dos Resultados Obtidos.....	156

LISTA DE SÍMBOLOS

- A - área da secção transversal
- a - número de variáveis de estado não especificadas na ex tremidade engastada
- B - matriz de peso na definição do passo dS^2
- b - número de vínculos terminais do problema de otimização
- C_1, C_2, C_3, C_4 - vínculos de desigualdade nas variáveis de estado
- C - constante de comparação do vínculo de desigualdade de área
- D, \bar{D} - constantes de comparação dos vínculos de desigualdade do raio de giração
- $d\psi$ - vetor de valores dos vínculos terminais
- dS^2 - tamanho possível do passo entre duas iterações
- E - módulo de elasticidade do material
- E_e - função de Erdmann - Weierstrass
- F - integrando da função objetivo estendida, \bar{J}
- F_c - função de comparação do vínculo de desigualdade C_1
- f_1, f_2, \dots, f_{10} - funções de definição das equações diferenciais de estado
- G - módulo de elasticidade transversal do material
- G_c - função de contorno ou das condições de transversalidade
- G_m - função de contorno modificada
- H - função Hamiltoniana
- H_m - função Hamiltoniana modificada

- \bar{h} - comprimento para definição da função F_c
- I - momento de inércia de área da secção transversal
- $I_{\psi\psi}$ - matriz usada para cálculo das correções $\delta\beta$ e δu
- $I_{\psi J}$ - vetor usado para cálculo das correções $\delta\beta$ e δu
- I_{JJ} - escalar usado para cálculo das correções $\delta\beta$ e δu
- J - função objetivo
- \bar{J} - função objetivo modificada para tratamento dos vínculos de desigualdade
- \tilde{J} - função objetivo estendida
- \bar{J} - momento de inércia de massa por unidade de comprimento
- K_1, K_2, K_3, K_4 - funções de penalização associadas aos vínculos de desigualdade
- $K_{p,1}; K_{p,2}; K_{p,3}; K_{p,4}$ - constantes de peso das funções de penalização
- K_J - constante de penalização da função objetivo modificada, \bar{J}
- K_s - constante dimensional do integrando da função objetivo
- k' - fator de forma da secção transversal
- k_p - constante de correção dos vínculos terminais
- L - integrando da função objetivo
- l - comprimento da viga
- \underline{k}_J - sub-matriz de $\underline{\lambda}_J$, calculada na extremidade engastada
- \underline{k}_ψ - sub-matriz de $\underline{\lambda}_\psi$, calculada na extremidade engastada
- M - momento fletor
- m - massa por unidade de comprimento da viga

- P - carregamento externo à viga
 p - expoente inteiro da função área
 q - esforço cortante
 R - quociente de Rayleigh
 r - raio de giração da secção transversal
 T - energia cinética
 t - tempo
 u_1, u_2 - variáveis de controle
 V - potencial de forças
 W - energia de deformação
 \underline{W} - matriz de peso na definição de dS^2
 x - coordenada ao longo da viga
 Y - deflexão ao longo do tempo e do comprimento da viga
 y - deflexão ao longo da viga
 y_1, \dots, y_{10} - variáveis de estado
 z - variável auxiliar
 α - coeficiente adimensional
 $\underline{\beta}$ - vetor das variáveis de estado não especificadas na extremidade engastada
 γ - ângulo de distorção devido ao cisalhamento
 δ - símbolo de indicação de variação primeira
 ϵ - símbolo de indicação de variação primeira
 ϵ_1, ϵ_2 - valores das condições de contorno não homogêneas
 η - ângulo de rotação devido à flexão
 θ_0 - ângulo de inclinação da função F_c
 $\bar{\lambda}$ - parâmetro de inclinação da função F_c
 $\underline{\lambda}$ - vetor de multiplicadores de Lagrange

- $\underline{\lambda}_\psi$ - vetor dos multiplicadores de Lagrange adjuntos dos vínculos terminais
- $\underline{\lambda}_J$ - vetor dos multiplicadores de Lagrange adjuntos da função objetivo modificada, \bar{J}
- μ - multiplicador de Lagrange associado ao passo dS^2
- \underline{v} - vetor de multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos terminais $\underline{\psi}$
- ρ - densidade volumétrica
- \emptyset - função de extremidade da função objetivo modificada, \bar{J}
- ψ_1, ψ_2, ψ_3 - vínculos terminais do problema de otimização
- ω - frequência angular natural
- ω_0 - frequência de comparação do vínculo de desigualdade C_4

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

À procura de soluções para problemas de estruturas que satisfaçam determinados critérios de otimização e que, simultaneamente, respeitem certas restrições de resistência ou de geometria, tem sido dedicada uma razoável parte das pesquisas realizadas na área de projeto estrutural. Sob o aspecto de projeto com restrições ou critérios dinâmicos, existe a preocupação de se alterar a resposta dinâmica de estruturas, notadamente sob o ponto de vista de se melhorar os níveis de frequência de vibração. É esta última situação que aqui se pretende abordar.

O presente trabalho tem por objetivo a determinação da distribuição de massa de uma viga em balanço que leve à minimização do peso e à máxima frequência natural do primeiro modo. Admite-se que tal viga realize pequenas vibrações transversais livres. Este problema, de grande aplicação a projetos mecânicos e estruturais, seja pela importância do elemento estrutural em si, seja pelas aproximações que nele podem ser baseadas, tem sido abordado em uma série de publicações por métodos em que se mantém constante a massa e maximiza-se a frequência ou, então, mantém-se constante a frequência e minimiza-se a massa. A intenção aqui é tentar combinar estes -

dois efeitos através da definição de uma função objetivo que envolve a frequência fundamental e a distribuição de massa ao longo do comprimento da viga. A minimização desta função é vinculada à obediência da Equação de Euler para vibrações livres da viga e a condições de contorno adequadas. Para se conseguir tal minimização, as funções área e raio de giração da seção transversal ao longo do comprimento são usadas, de maneira indireta, como variáveis de controle. O problema assim formulado resulta num problema do Controle Ótimo, de modelo contínuo, com duas variáveis de controle, condições de contorno não totalmente especificadas nas extremidades e com o autovalor colocado como variável de estado. São incluídas também, restrições de desigualdade sobre algumas das variáveis de estado de modo que, juntamente com condições de contorno impostas, estabeleçam vínculos de resistência mínima para a viga em estudo. Com essas considerações, o modelo matemático resultante se mostra uma ampliação dos casos anteriormente estudados na literatura, ainda com a vantagem de que a forma da viga não precisa ser definida a priori e sim ajustada a partir das soluções ótimas obtidas. Admite-se conhecido e fixo apenas o seu comprimento.

O problema resultante é tratado numericamente por um algoritmo de gradiente de primeira ordem que representa a extensão de uma técnica, já conhecida e muito bem sucedida, no sentido de permitir também o ajuste ótimo das condições de contorno não especificadas. Através desse algoritmo se obtém, então, a distribuição de massa que, para um dado comprimento e

condições de resistência estabelecidas, leva à viga de menor massa e maior frequência natural.

Um total de dez casos, resultantes de combinações possíveis de frequência e restrições de desigualdade arbitrárias, são processados e analisados de modo a se poder, primeiramente, formar uma idéia mais completa acerca das virtudes e dos defeitos de todo o encaminhamento proposto e, depois, comparar os resultados com outros obtidos anteriormente na literatura.

Quanto à sequência em que os diferentes tópicos são abordados, deve-se dizer que o capítulo 2 tem a intenção de mostrar o atual estado da arte no campo de otimização de estruturas. São citadas e comparadas as diversas técnicas disponíveis e analisados os resultados existentes, de modo a se poder estabelecer parâmetros para uma definição da abordagem a ser seguida.

No capítulo 3, é montado o modelo matemático com a obtenção das equações de controle e com a completa definição do problema de Controle Ótimo decorrente.

No capítulo 4, são desenvolvidas as condições necessárias para otimização do caso em estudo e a maneira de se chegar à verificação dessas condições por meio de um algoritmo numérico implantado em computador. São, também, descritas as maneiras de tratamento numérico dos vínculos de desigualdade colocados sobre variáveis de estado e escolhida uma técnica para executar esse tratamento no citado algoritmo.

No capítulo 5, são definidos os parâmetros necessários à simulação em computador e analisados os resultados de cada um dos dez casos processados. Os aspectos mais importantes de cada caso são, então, comparados de modo a se poder traçar um quadro geral do problema tratado.

No capítulo 6, são colocadas as considerações finais, com a comparação entre os resultados obtidos e os anteriores, existentes na literatura, e as recomendações para possíveis desenvolvimentos futuros.

O programa de solução numérica tem seus aspectos de maior interesse abordados nos apêndices que completam o trabalho apresentado.

CAPÍTULO 2

ANÁLISE PRELIMINAR

2.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

Um dos ramos mais antigos do conhecimento humano, o cálculo estrutural, passa atualmente por uma fase de acelerada evolução. Ao sempre presente problema de se conhecer o comportamento de estruturas sob condições estáticas de carregamentos diversos, o constante aperfeiçoamento das máquinas, cada vez maiores e mais velozes, veio somar a necessidade de se estabelecer também o comportamento sob condições dinâmicas, - pois, efeitos indesejados de oscilações podem representar séria restrição à consecussão dos objetivos pretendidos.

Devido às grandes dificuldades envolvidas na modelagem física e matemática das estruturas, as técnicas desenvolvidas para seu cálculo, normalmente englobando um número - muito grande de parâmetros, ficaram restritas a poucos casos mais simples. Com o aparecimento dos computadores digitais e consequente implantação e aperfeiçoamento das técnicas, permitindo a análise das mais complexas estruturas e, por outro lado, a necessidade de sofisticação da tecnologia empregada em algumas áreas da Engenharia como a Aeronáutica, a Aeroespacial, a Mecânica e a Civil, o projeto estrutural entrou em acentuado ritmo de desenvolvimento. Desta forma, ampliou-se a possibili-

dade de, sem muito esforço, montar-se uma série de projetos e "reprojetos" de estruturas, todos satisfazendo as mesmas restrições e diferindo entre si apenas por modificações nas formas ou nos materiais empregados e de se escolher, dentre os possíveis projetos, aquele que fosse mais conveniente.

O surgimento de técnicas de otimização, aplicáveis aos mais variados problemas encontrados no campo da tecnologia, veio acrescentar novo e importante dado ao projeto estrutural. Assim, a elaboração intuitiva de uma série de projetos pôde ser trocada pela busca sistemática de um projeto que é ótimo no sentido global. Ficou então criado um novo campo, ainda muito pouco explorado devido ao curto tempo de desenvolvimento, denominado genericamente Otimização de Estruturas.

Os fins a que se propõe a Otimização de Estruturas são exatamente os mesmos do cálculo estrutural. Projetar sem utilizar as teorias de otimização significa formular hipóteses e verificá-las através de cálculos. As teorias de otimização tornam possível determinar diretamente a solução ótima baseada apenas em dadas condições de resistência e geometria. Dessa maneira é teoricamente viável que qualquer projeto envolvendo estruturas possa ser tratado através de métodos de otimização. No entanto, as dificuldades inerentes tanto à modelagem estrutural como a métodos de programação para solução numérica representam obstáculos a serem ainda transpostos para uma colocação mais acessível do projeto ótimo.

Estas dificuldades aumentam quando se pretende a otimização de um problema dinâmico. O interesse por este caso

se justifica pelo fato de projetos nas áreas de Engenharia - Aeronáutica e Aeroespacial ou, ainda, na Engenharia Mecânica quase sempre envolverem restrições quanto a comportamento dinâmico. Assim, Pierson, |P1|, cita como exemplo que, na maioria dos projetos de veículos espaciais, é desejável que várias das frequências naturais associadas com os modos mais baixos de vibração estrutural estejam acima de determinados níveis de modo a não permitir interferência com os sistemas de controle. Caracteriza-se, dessa forma, a necessidade de um estudo mais cuidadoso das partes estruturais críticas com relação às suas frequências, o que pode ser feito através de algum método de otimização.

Neste trabalho, os casos considerados são também referentes à otimização quanto às frequências naturais. As origens desses casos estão ligadas a trabalho anterior, |F1|, onde foi desenvolvido o projeto de uma mesa para testes dinâmicos. Tal projeto consistia, em seus itens principais, no dimensionamento dinâmico de um conjunto formado por: a) uma mesa de ferro fundido, onde seriam fixados os instrumentos e peças em teste; b) um bloco de concreto, com a intenção de se obter maior inércia, constituindo assim um bloco sísmico; c) conjunto de isolamento do bloco sísmico formado por um sistema de molas e amortecedores; d) fundações para isolamento dos conjuntos acima em relação ao solo; e) colunas para suporte de vibradores ou de peças. Eram previstos dois tipos de testes. O primeiro, chamado em circuito aberto, usado principalmente para levantamento de características de ressonância dos

elementos em teste, exige o uso de um excitador de vibrações e de uma massa calibrada, num esquema como o mostrado na Figura 2.1.

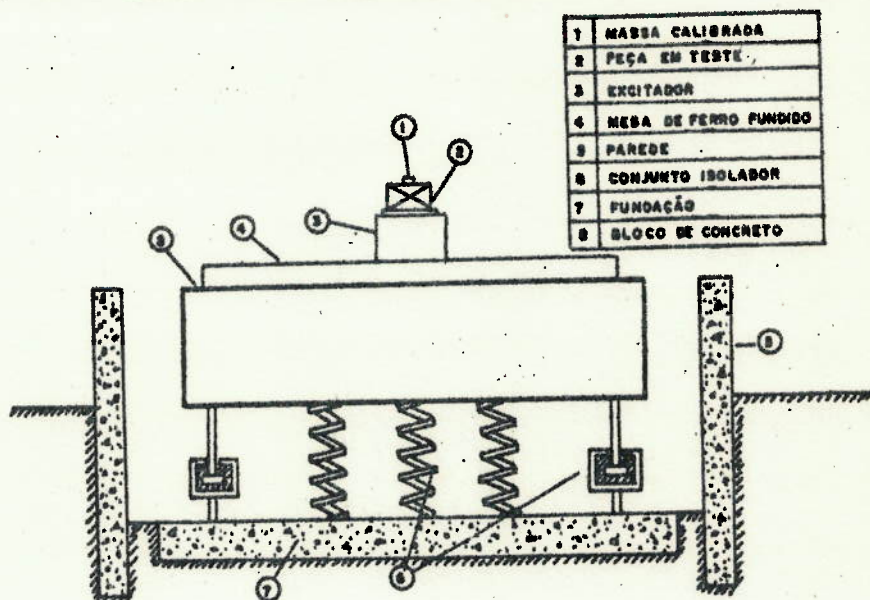


Figura 2.1 - Ensaio em Circuito Aberto

O segundo, conhecido como teste em circuito fechado, é utilizado para ensaios de fadiga ou de modelos de componentes de máquinas e estruturas. Neste caso, é necessário o uso de uma coluna-suporte para que se possa fechar o circuito de forças dentro do conjunto, como esquematizado na Figura 2.2.

A coluna-suporte para testes em circuito fechado representa a limitação neste tipo de montagem. Esta limitação ocorre porque a maioria dos excitadores colocados no mercado são estáveis para trabalhar acima de determinados níveis mínimos de frequência, $| F_1 |$. Para que possam ser feitos os testes, é necessário que a coluna tenha frequência natural não inferior, por exemplo, a cerca de dez vezes o nível mínimo da frequência de estabilidade, de modo que não haja interferência

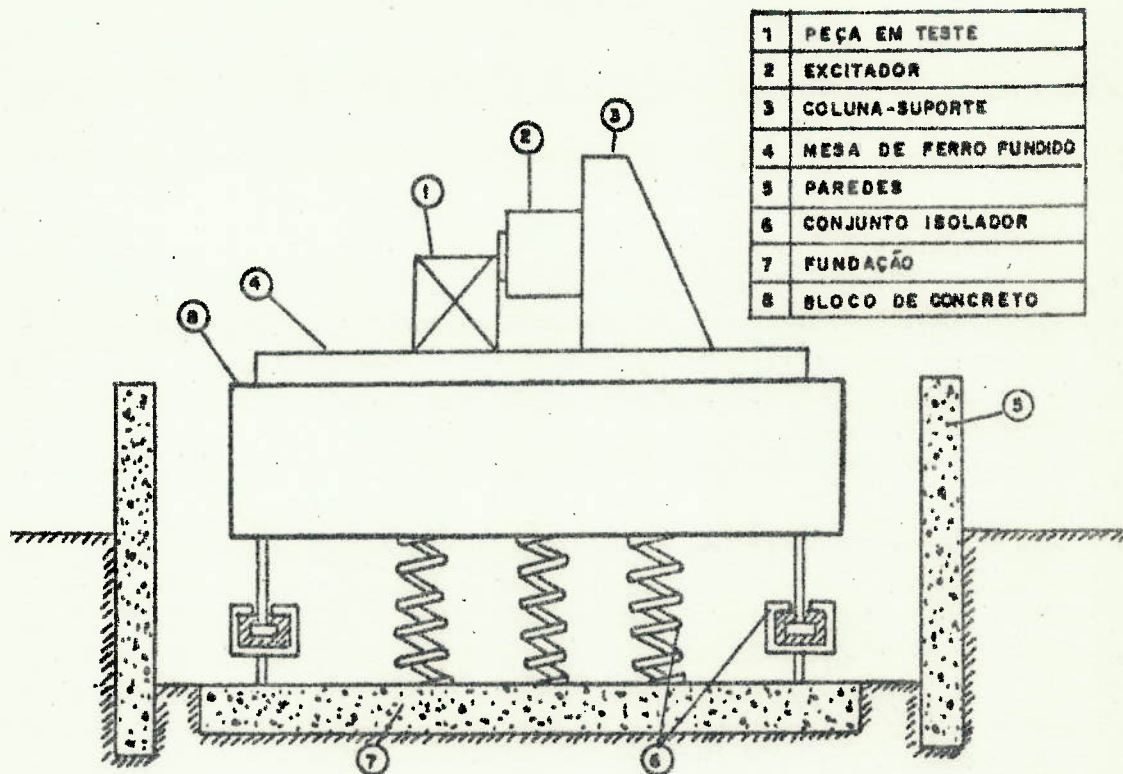


Figura 2.2 - Ensaio em Circuito Fechado

da coluna nos resultados. Como a faixa de uso dos excitadores de vibração, por outro lado, é muito larga, em termos de frequências geradas, torna-se necessário que a coluna tenha frequência natural muito alta para que se possa realizar este tipo de testes. Conclui-se, então, que a coluna deve ter a maior frequência natural acima de um certo limite. Caso contrário, os testes ficam restritos a frequências que podem não ter maior interesse prático.

Nesse trabalho anterior, | F1 |, condições de simetria de carregamento, de fixação da coluna à mesa de ferro fundido e do tipo de peças a serem testadas levaram a modelar a coluna por uma viga engastada - livre, ou, em balanço, em que deveriam ser levantadas as características de vibração em flexão. Com essas hipóteses, foi montado um programa de compu-

tador, baseado no quociente de Rayleigh, para determinação da frequência fundamental aproximada. Variações na geometria das colunas levaram à simulação de três diferentes modelos físicos. Em cada modelo simulado, a distribuição de massa foi também variada, mantendo-se a configuração básica. Os resultados obtidos, no entanto, não foram satisfatórios, razão pela qual se optou pela construção de uma coluna trabalhando apenas em vibração axial, fato que garante um nível mais alto da frequência fundamental. Pretendia-se, a partir desse ponto, ensaiar modelos em escala de colunas com outras configurações geométricas, usando os dois tipos citados de testes, até que se chegasse a uma forma definitiva que preenchesse os necessários requisitos de resposta dinâmica.

O esquema utilizado para o dimensionamento da coluna-suporte para testes em circuito fechado mostra, então, que, para certos casos, um processo repetitivo de projeto e "reprojeto" nem sempre leva a bons resultados. Nesses casos, parece necessário que se tente obter a solução através de algum processo de otimização, ou seja, que se chegue a uma solução que é ótima num sentido mais amplo que a simples comparação com outros projetos em condições pré-estabelecidas, que podem ser totalmente diferentes da ótima. Este é o enfoque aqui abordado, tratando um problema de otimização sob condições dinâmicas, com restrições quanto às frequências naturais, usando como exemplo o caso da coluna.

Segue-se o esboço de um quadro evolutivo da chamada Otimização de Estruturas, com a colocação resumida de

suas principais técnicas de modelagem e simulação.

2.2 - OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS

A caracterização de um problema de otimização estrutural é feita através da definição de variáveis de projeto ou de controle, de uma função objetivo, ou índice de desempenho, e de vínculos. O que se procura é selecionar as variáveis de projeto que, dentro de certos limites, descritos por vínculos quanto ao comportamento estrutural ou à sua geometria, tornam ótima a estrutura com relação a um critério de otimização, expresso por uma função objetivo.

Wasiutynski e Brandt, [W1], autores de um dos primeiros trabalhos de revisão dentro do campo de otimização de projeto estruturais, colocam que, se entendido do ponto de vista de um esquema iterativo, que permita a escolha do melhor entre uma série de projetos, o projeto ótimo é inerente ao cálculo estrutural. Estes autores ordenam no tempo as primeiras publicações na área, cerca de duas centenas, englobando os progressos desde Galileu até o começo da década de 60. A quase totalidade desses trabalhos se refere à otimização de estruturas de formas conhecidas sob a ação de carregamentos determinísticos e estáticos em que os critérios de otimização normalmente empregados são os de mínimo peso estrutural ou de mínima energia de deformação ou, ainda, de estruturas estaticamente indeterminadas de resistência uniforme, [W1].

O aumento da capacidade dos computadores aliada à implantação de novos métodos de análise de estruturas e de otimização, após esta época, são os responsáveis pela expansão dos horizontes do projeto ótimo. Numa segunda revisão, - compreendendo os anos de 1962 a 1968, Sheu e Prager, | S1 |, chamam a atenção para o fato de que, nesse intervalo relativamente pequeno de tempo, o número de publicações supera a meta de do número relacionado em | W1 |. Este fato sugere a importância da procura de novos métodos para que se consiga formulações mais acessíveis para problemas de otimização estrutural. Nos trabalhos revistos em | S1 |, são notadas duas tendências. A primeira se caracteriza por uma tentativa de generalização na aplicação de métodos, então já conhecidos, a estruturas de uso específico e extremamente complexas. Tais desenvolvimentos normalmente conseguem lotar a capacidade dos maiores computadores e representam uma aproximação bastante boa para com a realidade física. A segunda tendência é caracterizada pela busca de novos métodos de otimização ou da aplicação de técnicas desenvolvidas em outros campos da engenharia para solução de problemas estruturais. É claro que as primeiras aplicações, neste segundo caso, ficam restritas a estruturas mais simples ou membros estruturais e que, em alguns casos, os métodos não se prestam a soluções de estruturas muito complexas por razões tanto de modelagem matemática como de implantação em computador para solução numérica. No entanto, a aplicação a estruturas simplificadas, através destes métodos, - permite que se obtenham soluções em primeira aproximação para

casos mais complexos que se prestam como excelentes pontos de partida na formulação por métodos mais gerais.

De uma maneira geral, as duas tendências citadas são classificadas de acordo com a forma do modelo matemático que exigem. Para estruturas complexas, o tratamento viável implica a discretização do modelo físico através de qualquer das técnicas usuais de análise estrutural e a procura de um conjunto de variáveis discretas que otimizem uma dada função objetivo, impondo-se uma série de vínculos geométricos e de resistência. Resulta, normalmente, um modelo com elevado número de graus de liberdade, mesmo que sejam poucas as variáveis de projeto. A este procedimento se dá o nome de modelo discretizado, | P1 |. Em estruturas mais simples, é possível a procura de uma função ou conjunto de funções com a mesma intenção de otimização de uma função objetivo, respeitadas restrições de forma ou resistência. Este procedimento toma então o nome de formulação por modelo contínuo, | P1 |.

A já citada procura de novos métodos para a solução de problemas estruturais traz consigo a possibilidade de uma ampliação na definição dos critérios de otimização. Assim, surgem, no período descrito por | S1 |, os primeiros trabalhos na área de otimização dinâmica segundo critérios que podem ser, por exemplo, de frequências naturais ou de máxima deflexão dinâmica num dado ponto.

Após o intervalo de tempo coberto por | S1 |, o número de publicações na área de otimização estrutural dinâmica cresce rapidamente, o que torna desejável uma separação -

quanto aos procedimentos adotados para um melhor entendimento dos progressos no campo. Isto é feito com a separação segundo o modelo matemático abordado, isto é, segundo modelos discretizados ou contínuos que seguem critérios dinâmicos.

2.2.1 - MODELOS DISCRETIZADOS

Conforme citado, entende-se por otimização segundo modelos discretizados aos métodos em que se procura um conjunto de variáveis discretas que otimizam uma função objetivo para uma estrutura discretizada através de alguma das técnicas usuais de análise estrutural, como, por exemplo, elementos finitos. Modelos discretizados podem ser aplicados a estruturas altamente complexas, servindo, portanto, à solução de problemas de grande significação prática.

Embora os critérios de otimização utilizados sejam bastante variados, a maior preocupação parece estar concentrada em estruturas de mínimo peso sob condições quaisquer de carregamento externo. Sob este critério, os trabalhos pioneiros de Projeto Ótimo desenvolvem a idéia de "projeto do máximo de tensão" ("fully stressed design") onde cada um dos elementos de uma dada estrutura é dimensionado de forma a atingir um limite de tensão permissível para as condições dadas. No entanto, nem sempre este caminho leva a uma solução ótima no sentido global: isto só ocorre para alguns casos particulares,

| G1 |.

O problema de minimização do peso de uma estrutura sujeita a frequências naturais especificadas é pela primeira vez proposto por Turner, | T1 |, para o caso de uma barra engastada em um extremo, carregando uma massa puntual no outro e realizando pequenas vibrações axiais. Com a frequência natural do primeiro modo suposta conhecida, a formulação é feita através de um modelo discreto e de outro contínuo pelo uso de técnicas variacionais. O modelo contínuo e seus desdobramentos são comentados em outro item. Para o modelo discreto, as condições necessárias para otimização resultam num sistema de equações algébricas lineares e quadráticas de onde a solução é extraída através da aplicação de algoritmo que é uma modificação do algoritmo de Newton - Raphson. O procedimento consiste em se partir de uma distribuição de massa que forneça a frequência natural desejada e a cada iteração obter-se uma série de correções nessa distribuição até que a massa mínima seja conseguida. Matematicamente, esta formulação representa um problema de Programação Não Linear que consiste na minimização de um funcional linear, a massa total, sujeito a vínculos de igualdade quadráticos.

Posteriormente, Zarghamee, | Z1 |, coloca o problema anterior na forma inversa: maximizar a frequência natural do primeiro modo para um dado peso conhecido. A formulação é feita de uma maneira muito mais geral no sentido de que é aplicável a qualquer estrutura com número finito de membros. Através de variação da resistência de cada um dos membros che

ga-se à resposta pelo uso do método de direções viáveis proposto por Rosen. A importância deste trabalho reside na obtenção de uma relação explícita da variação do autovalor com uma variação da matriz de rigidez da estrutura. O método foi aplicado a uma treliça em balanço, com bons resultados.

Baseado nas relações obtidas em [Z1], Rubin, [R1], coloca uma abordagem mais ampla no problema da frequência natural, passando a tratá-lo através de um vínculo de desigualdade. O objetivo, como sempre, é a minimização do peso, o que é conseguido por meio de um processo que consiste de duas fases alternativas. Na primeira, um algoritmo de gradiente é usado para aumentar a frequência fundamental até que esta esteja dentro de uma faixa pré-estabelecida. Em seguida, o peso é minimizado através de algoritmo análogo. Se necessário, nesta segunda parte, o método de modificação da frequência é usado para manter a frequência dentro dos níveis pertinentes. As vantagens do método, na forma proposta, se referem à possibilidade de ser aplicada a partes de uma estrutura e à simulação de estruturas complexas com grande número de graus de liberdade, aliada a uma convergência extremamente rápida, necessitando de poucas iterações para se chegar à solução. O algoritmo é aplicável a qualquer técnica de discretização de estruturas, sendo que o autor usa Elementos Finitos.

Yasaka, [Y1], faz uma revisão dos métodos empregados até a época de publicação de seu trabalho, analisando detidamente técnicas de cálculo estrutural e de otimização. Dentre as estudadas, escolhe como base para proposição de um novo

método a técnica dos Elementos Finitos e algoritmos de gradiente. O método proposto consiste na minimização do peso com restrições quanto às máximas tensões e quanto às frequências naturais da estrutura. Para tanto é apresentado um procedimento bastante simples para se obter as derivadas das frequências com relação às variáveis de projeto através das matrizes de massa e rigidez. É possível, também, aplicação de métodos de sub-estruturas dentro do problema de minimização do peso estrutural. Exemplos de aplicação do método foram desenvolvidos para uma viga em balanço, sujeita a uma carga de flexão na extremidade, onde não se leva em conta o peso estrutural; para uma treliça em dois andares sujeita a cargas axiais e laterais e finalmente para a determinação da viga mais forte quando sujeita a uma carga de flambagem.

Técnicas de otimização de estruturas foram desenvolvidas também com vistas a outras aplicações que não a minimização do peso estrutural. Dessa forma, um tipo de problema que se assemelha bastante aos problemas com vínculos de frequência natural é aquele relacionado com autovalores aeroelásticos especificados. Este tipo de otimização foi objeto de análise em uma longa série de trabalhos, [P1]. Para uma outra classe de problemas, a satisfação dos vínculos nas frequências, embora afete as características de vibração da estrutura, representa apenas uma parte da solução se são consideradas quantidades vinculadas que dependam diretamente da resposta dinâmica. Nestes casos, é comum que os vínculos sejam paramétricos, como os que resultam de se colocar um limite superior na defle

xão ou nas tensões durante todo o período de tempo de interesse para a análise.

Fox e Kapoor, | F2 |, tratam o problema de minimização do peso de uma estrutura sujeita a vínculos de máxima tensão, máximo deslocamento e menor frequência fundamental que devem ser verificados ao longo do tempo. Admitem a inexistência de amortecimento estrutural, condições iniciais de velocidade e deslocamento nulos e uma força senoidal agindo sobre a estrutura. O algoritmo de direções viáveis, na forma proposta por Zarghamee, | Z1 |, é usado para a otimização. O método é então aplicado a uma série de estruturas de barras com resultados muito satisfatórios.

Ainda dentro da mesma área, outro problema que recebe muita atenção é o relacionado com o projeto ótimo de sistemas de isolamento de choque e vibração, | P1 |.

De uma maneira geral, o esforço com modelos discretizados parece agora se concentrar na viabilização dos métodos, já desenvolvidos em exemplos simples, para as estruturas mais complexas. Como exemplo, Alves de Lima, | A1 |, propõe uma reformulação do método de direções viáveis de Rosen para tornar mais rápido o processo de computação. Isto é conseguido através de modificações no tamanho do passo entre duas iterações consecutivas. As aplicações, em | A1 |, são desenvolvidas para exemplos sob condições estáticas embora o autor ressalte a possibilidade de uso para condições dinâmicas mediante pequenas alterações no algoritmo.

Outro aspecto importante e que é objeto de pesquisas atualmente se refere ao tratamento numérico dos vínculos de desigualdade. Exemplo disso é o trabalho de Haug, Pan e Streeter, | H1 |, que desenvolvem método semelhante ao proposto por Rubin, | R1 |, mas que permite tanto a colocação - mais geral do critério de otimização, ou seja, da função objetivo, como tratamento de vários vínculos de desigualdade - simultâneos. Estes vínculos de desigualdade, no caso, podem ser expressos por quantidades tão diferentes como restrições nos níveis máximos de tensão, nos níveis de frequências naturais ou de cargas de flambagem, ou ainda quanto às máximas deformações elásticas em pontos selecionados da estrutura. Usando a técnica de Elementos Finitos para análise estrutural, o algoritmo é aplicado à solução da coluna de mínimo peso para flambagem, à solução de um pórtico de mínimo peso - com restrições quanto à tensão, à deformação e à flambagem e ainda à solução de uma placa e de um pórtico plano de três - barras que devem atingir mínimo peso sujeito a vínculos de - mínima frequência fundamental.

2.2.2 - MODELOS CONTÍNUOS

No tipo de formulação denominada modelos contínuos procura-se a função ou conjunto de funções contínuas - que extremizam uma função objetivo e satisfazem certas restrições de projeto. No campo de otimização de estruturas sob

critérios dinâmicos, este tipo de formulação tem contribuído principalmente na criação de novos métodos, ainda em fase de desenvolvimento, mas que apresentam enorme potencial para posterior aplicação a casos mais gerais.

O interesse pela solução ótima de problemas contínuos é bastante antigo. Por volta de 1770, Lagrange propôs o problema de se determinar a melhor forma de uma coluna de Euler-Bernoulli sujeita a uma carga de compressão, o que significa a determinação de um autovalor. A solução de Lagrange não era correta devido a erros computacionais. A forma correta foi obtida por Clausen em 1851 e, independentemente, por Keller em 1960, | K1 |. O resultado obtido foi que, com o adelgaçamento da coluna, mantido seu volume inicial, a carga crítica poderia ser aumentada em pelo menos 33%, para o caso de uma coluna com secções transversais cilíndricas.

No campo de otimização dinâmica de estruturas, a contribuição pioneira trouxe embutida uma nova abordagem para o aspecto de otimização de frequências naturais. Niordson, | N1 |, desenvolve um novo método para a maximização da frequência fundamental de estruturas simples. Considerando o caso de uma viga bi-apoiada, o autor propõe um algoritmo que é baseado no quociente de Rayleigh e que é depois aplicado a outras estruturas simples, com pequenas alterações, como exposto mais adiante. No problema original, Niordson admite que o material é conhecido, assim como o comprimento e o volume da viga e não podem ser alterados durante o processo. Partindo da equação de Euler de vibrações livres de uma viga

em flexão, a equação e as condições de contorno são adimensionalizadas em relação a uma nova coordenada definida ao longo do eixo e a um parâmetro α que engloba o comprimento, o volume e a área da secção transversal. Admitindo que seja válida uma relação momento de inércia de área da secção transversal - área da secção na forma $I(x) = c A^2(x)$, onde c é uma constante que depende da geometria da secção transversal, chega-se a uma relação da forma:

$$(\alpha^2 y''')'' - \bar{\lambda} \alpha y = 0 \quad (2.1)$$

onde $\bar{\lambda}$ é um parâmetro que engloba todas as constantes do problema, inclusive a frequência ω^2 , e (') indica diferenciação em relação à nova coordenada ao longo do eixo da viga.

A partir de (2.1) e usando as condições de contorno do caso em estudo, é possível estabelecer uma função definida pelo quociente:

$$\bar{\lambda}(\epsilon) = R(\epsilon, \delta) = \frac{\int_0^1 [\alpha(x, \epsilon)]^2 [y''(x, \delta)]^2 dx}{\int_0^1 \alpha(x, \epsilon) [y(x, \delta)]^2 dx} \quad (2.2)$$

Para $\epsilon = 0$, a expressão (2.2) representa o quociente de Rayleigh do problema de autovalor expresso por (2.1) e pelas condições de contorno associadas. Niordson prova, então, que o valor procurado que maximiza $\bar{\lambda}$ e, consequentemente, ω^2 , é dado por:

$$\left[\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0, \delta=0} = 0 \quad (2.3)$$

ou seja, a relação (2.3) permite obter a função α , representativa da área, que extremiza o valor de \bar{A} .

A condição (2.3) aplicada a (2.2) leva, assim, às condições necessárias a serem satisfeitas. A solução é então obtida através de um processo de busca direta com iterações sucessivas, que mostra-se altamente convergente. Os resultados, no entanto, não são muito compensadores: no caso de uma viga com secções transversais circulares, o adelgaçamento mais apropriado corresponde a um aumento de 6,6%, apenas, na frequência fundamental, comparado à viga de secção constante e mesmo volume. O método, entretanto, é aplicado em uma série de outras pesquisas.

Brach, | B1 |, estende o trabalho de Niordson para o caso em que a relação momento de inércia - área da secção transversal é linear. As condições de contorno são colocadas de forma que se permita a solução de diferentes vínculos externos: viga biapoiada, engastada-apoiada, engastada-livre, livre-livre, engastada-engastada. Brach demonstra a existência de solução para vigas do tipo bi-apoiada, engastada-apoiada e engastada-engastada. Para os outros tipos, viga em balanço (engastada-livre) e livre-livre, não existe valor máximo para a frequência fundamental na condição de relação linear momento de inércia - área. A abordagem empregada por Brach difere da

proposta por Niordson apenas na forma do quociente de Rayleigh. De fato, a forma proposta por Brach é mais geral no sentido de que todas as condições de contorno são englobadas na expressão do quociente.

Ainda seguindo a mesma metodologia, Karihalo e Niordson, [K2], estudam o problema de uma viga em balanço em que se pretende maximizar a frequência fundamental, mantidos constantes o comprimento e volume, conhecidos a partir de uma viga de secção transversal constante. A relação entre o momento de inércia de área e a área de secção transversal é admitida na forma $I(x) = c \cdot A^p(x)$, onde c é uma constante. Os casos de interesse para os autores são os valores do expoente p da relação acima iguais a 1, que pode ser representado por uma viga com secções transversais retangulares onde a altura é fixa e a largura é variável; a 2, isto é, vigas com secções transversais circulares onde o raio é variável e finalmente igual a 3, o que significa vigas com secções transversais retangulares em que a largura é fixa e a altura variável. Considera-se uma viga em balanço que carrega uma massa concentrada no extremo livre e é aplicado o método de Niordson. No entanto, surgem problemas de singularidades no extremo livre que exigem pequenas modificações no algoritmo para poder contorná-los. São obtidos resultados para o valor de frequência fundamental da viga otimizada comparada com o valor de frequência da viga de secção constante de mesmo volume, para diversos valores da massa puntual Q , concentrada no extremo livre, nos casos $p = 2$ e $p = 3$. Demonstra-se então que, quanto menor o valor de Q , maior o aumento

que se consegue na frequência fundamental, com o adelgaçamento da viga, chegando, no limite de ausência de massa, $Q = 0$, a aumentos de 578%, para $p = 2$, e 325%, para $p = 3$. O caso $p = 1$, na ausência de massa concentrada no extremo livre, é um caso degenerado, isto é, não existe valor máximo, conforme estabelecido anteriormente por Brach, | B1 |. Para valores diferentes de zero dessa massa, no entanto, o caso tem solução, embora os resultados só possam ser conseguidos através de modificações sensíveis no algoritmo de Niordson. Este algoritmo é, ainda, a base para dois trabalhos de otimização de frequências fundamentais de placas. Olhoff, em uma primeira publicação, | O1 |, estuda o caso de uma placa circular apoiada em seu contorno em que a espessura é variada ao longo de toda superfície da placa. Num segundo trabalho, Olhoff, | O2 |, estuda caso semelhante para o caso de uma placa retangular também simplesmente apoiada ao longo de seu contorno.

As pesquisas feitas seguindo o desenvolvimento de Niordson, com aplicações a vigas, foram reunidas em um único trabalho de Kamat, | K1 |, através de um modelo discreto. Este autor usa uma formulação de deslocamentos por Elementos Finitos para maximizar a frequência do primeiro modo de uma viga de volume constante com vínculos externos elásticos ou não e apoiada sobre uma fundação elástica contínua. Um vínculo de desigualdade é colocado sobre o menor valor desejável para o momento de inércia. A relação momento de inércia-área da secção transversal é também da forma $I(x) = c A^p(x)$ onde p pode assumir valores 1, 2 e 3. As condições necessárias para

a otimização são obtidas de um quociente de Rayleigh de uma maneira pouco diferente do método de Niordson. Os resultados compreendem quase todas as possíveis condições de contorno para a viga e incluem efeitos de cargas axiais agindo nas extremidades da viga. São verificados os valores publicados em [N1], [B1] e [K1] com muito boa aproximação. Numa pesquisa posterior, Kamat, [K3], incorpora a esse estudo os efeitos de deformações por cisalhamento e inércia de rotação, através de alterações muito simples no procedimento antes utilizado. As modificações principais ocorrem na forma do quociente de Rayleigh e na forma da função objetivo anteriormente definidas. Elementos de viga do tipo Timoshenko são usados. Os resultados obtidos através deste novo procedimento são comparados aos valores fornecidos pelo desenvolvimento com elementos de viga do tipo Euler. Fica então caracterizado que os efeitos de inércia de rotação e deformações cisalhantes aumentam consideravelmente com o adelgaçamento da viga. No caso de uma viga bi-engastada, com valor 2 para o expoente p da relação momento de inércia-área da secção transversal, a redução na frequência fundamental otimizada devida aos efeitos citados é da ordem de 24% contra 10% de redução para o caso da viga de secção constante de mesmo volume. Para uma viga engastada e valores do expoente p iguais a 2 e 3, essas reduções da frequência ótima devidas a efeitos de cisalhamento e rotação são da ordem de 7 e 8%, respectivamente, o que mostra que, em alguns casos, esses efeitos podem ser desprezados.

Seguindo outra orientação quanto a caminhos de

obtenção de projetos ótimos, Turner, | T1 |, como já citado, propõe o problema de minimização do peso de uma estrutura sujeita a frequências naturais especificadas, usando para isto também um modelo contínuo. O exemplo físico apresentado é o de uma barra, engastada num extremo e livre na outra, que carrega uma massa concentrada na extremidade livre e realiza pequenas oscilações axiais. Com a frequência natural do primeiro modo suposta conhecida, um funcional de massa a ser minimizado e a equação do movimento levam à formulação de um problema variacional através da adição de multiplicadores de Lagrange e das condições de contorno associadas. A aplicação das condições de otimalidade resultam em três equações diferenciais que tem solução analítica, fornecendo, dessa forma, a melhor distribuição de massa.

Numa nota subsequente, Taylor, | T2 |, apresenta um método alternativo para o problema de Turner, | T1 |. Baseado num funcional relacionado com a energia, Taylor obtém a mesma solução e demonstra a equivalência entre o problema de determinação da mínima massa estrutural para uma frequência especificada e o da determinação da distribuição de massa que maximiza a frequência fundamental para um dado peso total. Taylor, | T3 |, ainda retorna a esse problema adicionando à frequência natural especificada do primeiro modo uma restrição quanto ao menor valor admitido para a área da secção transversal. A resolução é feita pelo uso do mesmo funcional de energia de | T2 |.

O problema citado, ainda na forma proposta por Turner em | T1 |, é objeto de um terceiro modo de abordagem:

Hagedorn, [H2], trata-o como um jogo diferencial de dois jogadores com soma zero. A formulação é feita por quociente de Rayleigh e a aplicação da teoria dos jogos diferenciais leva às mesmas relações obtidas em [T1] e [T2].

A abordagem proporcionada pelos trabalhos de Taylor e Turner representam casos simples de uma linha mais ampla de pesquisa de grande importância dentro do projeto ótimo que explora o potencial teórico e computacional vindo do Controle Ótimo. Esta teoria é bastante recente e necessita ainda, na sua aplicação a estruturas, de maiores desenvolvimentos no sentido de torná-la mais abrangente. A colocação mais geral desse esquema é feita primeiramente por Haug, [H3], que apresenta a teoria de Controle Ótimo e desenvolve as condições necessárias para otimização. As relações obtidas através dessas condições, via de regra, não resultam em soluções analíticas. Haug apresenta, então, um algoritmo de gradiente de primeira ordem, desenvolvido anteriormente por Bryson e Denham, [B2], de aplicação direta a problemas de Controle Ótimo. O caso de uma coluna de mínimo peso, com comprimento e carga de compressão conhecidos, é resolvido pelos dois métodos. McCart, Haug e Streeter, [M1], apresentam um novo algoritmo de gradiente de primeira ordem para aplicação a modelos contínuos e dirigido ao uso de projeto ótimo de estruturas. O algoritmo é uma modificação do método de Bryson e Denham, [B2], permitindo uma colocação direta do problema de contorno envolvido no cálculo estrutural e, assim, evitando a transformação do problema de contorno num problema de valores iniciais pela definição de variá

veis auxiliares e outras restrições. O método é aplicado à solução do caso de minimização do peso de um pórtico plano de três membros em que devem ser respeitadas restrições de desigualdade quanto à frequência natural do primeiro modo de vibração e quanto ao menor valor do momento de inércia da secção transversal ao longo dos membros da estrutura. Admite-se que o momento de inércia varia com a área da secção transversal segundo a relação $I(x) = c A^2(x)$. Os autores apresentam resultados para diversos níveis de frequência e tipos de material. Em todos os casos processados, os resultados mostram ser possível reduzir o peso do pórtico em mais de 50% em relação ao peso original, tomado como o de um pórtico de secção uniforme que tem, nos engastamentos, as mesmas características de rigidez (área e momento de inércia) do pórtico otimizado.

Finalmente, Haug, Pan e Streeter [H4], estendem o método apresentado em [H1] para o caso de modelos contínuos. Este método representa uma modificação dos propostos anteriormente em [M1] e [H3], ao qual são adicionados novos resultados de investigações sobre métodos de gradiente na área de Controle Ótimo, principalmente os de Bryson e Ho, [B3], para o tratamento dos problemas de contorno advindos da análise estrutural. Um dos aspectos importantes que resulta da nova abordagem é o aumento da flexibilidade quanto aos critérios de otimização empregados e quanto ao uso de vínculos de desigualdade em relação aos métodos anteriores citados, [H3] e [M1]. O algoritmo de gradiente de primeira ordem associado é aplicado aos mesmos casos de [H1], isto é, à minimização do peso de uma coluna, a

minimização do peso de um pórtico plano sujeito a vínculos de tensão, de deformação e de flambagem e à minimização do peso de uma placa retangular com vínculos na frequência fundamental. Os dois primeiros casos são comparados aos resultados obtidos em [H1]. Para o caso da placa retangular são verificados os resultados logrados através de um modelo discretizado, pelos mesmos autores, [H1], e através de um modelo contínuo e técnicas clássicas do Cálculo Variacional por Olhoff, [O2]. Haug e seus colaboradores ressaltam, ainda, a convergência extremamente rápida do algoritmo para os exemplos citados.

Trabalhos de otimização apoiados em modelos contínuos tem sido desenvolvidos para diversas outras aplicações estruturais que não as aqui citadas. São exemplos problemas de otimização em aeroelasticidade, problemas de vínculos de desigualdade sobre a resposta dinâmica de estruturas e problemas de otimização em sistemas de isolamento de choque e vibração, entre outros, [P1].

Embora os métodos de tratamento do projeto ótimo com modelos contínuos sejam bem mais numerosos e eficientes que para casos discretizados, a procura ou constante melhora destes métodos merece ainda grande atenção. Em particular, o tratamento correto de vínculos de desigualdade é um problema ainda não definitivamente contornado. Outro aspecto que deve ser mencionado é o esforço em se tentar colocar problemas mais complexos sob esta formulação. Este fato se desenvolve praticamente às expensas da aplicação da teoria de Controle Ótimo a sistemas de parâmetros distribuídos, que entra atualmente em

fase de grande ampliação dos horizontes, |R2|.

2.3 - CONCLUSÕES PRELIMINARES

A colocação do estado da arte da área de Otimização de Estruturas, feita até aqui, permite extrair algumas conclusões para se tomar uma linha de abordagem quanto à aplicação a um problema específico, que é o caso da coluna- suporte de testes dinâmicos, sugerida no item 2.1.

No caso de Otimização Estrutural sob o aspecto dinâmico, em se tratando de uma área muito nova, ainda há muito por se fazer. Ressente-se, por exemplo, da falta de critérios de otimização mais amplos. O caso de restrições sobre as frequências naturais de vibração se encontra, de certa forma, já razoavelmente desenvolvido. O mesmo não acontece para o caso de restrições colocadas sobre a resposta dinâmica, onde até a seleção dos índices de desempenho é bastante complicada, |P1|. Outra lacuna existente é a que se refere ao tratamento de problemas estruturais com carregamentos **estocásticos**, uma importante área que permanece praticamente intocada.

Quanto aos métodos, já implantados e de interesse para qualquer dos modelos citados, resta ainda a descoberta de um bom tratamento numérico para os vínculos de desigualdade. A grande maioria dos trabalhos na área usa funções de penalidades para esse tratamento mas, não existem maneiras de se garantir que tal seja o melhor caminho. Geralmente, a

intenção, quando do uso de funções de penalidade, é diminuir o tempo de computação gasto, o que é conseguido à custa de uma convergência não muito precisa. As outras maneiras propostas para se tratar vínculos de desigualdade pecam, ou por serem de muito difícil implantação em um programa de computador, ou por permitirem o tratamento de apenas um vínculo por vez.

Uma comparação entre os tipos de modelagem envolvidos na Otimização Estrutural fornece uma série de subsídios para a definição completa de um problema. Assim, da rápida análise de uma pequena lista de publicações apresentada no item anterior, dentro do quase meio milhar de títulos levantados, é possível atribuir as vantagens e desvantagens de se utilizar modelos discretizados ou contínuos.

Modelos discretizados tem como principal característica a possibilidade de aplicação a estruturas complexas, isto é, a problemas muito realistas. Alguns métodos se encontram já suficientemente desenvolvidos para permitir a abordagem desses problemas. No entanto, persistem também entraves a uma maior generalização. São poucos os métodos disponíveis para solução e, mesmo para métodos já testados, devido à sua natureza iterativa e à relativa lentidão das técnicas de análises estrutural, a computação se torna extremamente longa. Soma-se a isso o perigo de que o caso discretizado pode não ter as mesmas propriedades de estabilidade do sistema original o que pode acarretar em grandes erros na solução, como ressaltado por Haug, [H4]. Uma outra grande desvantagem dos modelos discreti-

zados é a reduzida flexibilidade quanto a alterações na geometria dos problemas de aplicação propostos. Quanto aos modelos contínuos, o principal obstáculo reside ainda na aplicação exclusiva a estruturas mais simples, em virtude das dificuldades na modelagem estrutural e nas técnicas de uso onde estão envolvidas duas ou mais dimensões. Esta última restrição está sendo levantada aos poucos com os progressos do ramo de Control Ótimo de sistemas com parâmetros distribuídos. Em contraposição aos modelos discretizados, para os contínuos há um grande número de métodos disponíveis, geralmente derivados do Controle Ótimo pelo uso do Princípio de Máximo de Pontryaguin ou das técnicas clássicas do Cálculo de Variações, das quais são exemplos os algoritmos que utilizam quocientes de Rayleigh utilizados por Niordson e colaboradores. Os métodos citados apresentam normalmente excelente estabilidade e rapidez de convergência, demonstrando sempre resultados um pouco melhores na comparação com métodos aplicados a problemas inicialmente discretizados. Deve-se ressaltar ainda que os casos dedicados ao tratamento de modelos contínuos são caracterizados pela simplificação do modelo matemático decorrente em virtude do estabelecimento a priori de relações entre as variáveis de projeto. Isto significa que, em termos de aplicação, os exemplos exploram muito pouco a grande potencialidade dos métodos.

Finalmente, um aspecto que se crê muito importante é o fato do modelo contínuo ser extremamente atrativo para o projeto otimizado de estruturas destinadas a fins específicos ou para a solução do modelo inicial de uma estrutura com-

plexa antes de uma discretização fina necessária para o detalhamento do projeto.

Estes dois últimos pontos de vista, a pouca - exploração dos métodos e a utilização do modelo contínuo como uma primeira aproximação a estruturas mais complicadas, - levam a se considerar a hipótese de uso de um modelo contínuo para simulação da coluna-suporte. Para tanto deve-se ampliar as possibilidades dos modelos matemáticos já simulados de modo a tornar o problema de otimização mais geral e verificar o método computacional que melhor se adapta ao modelo proposto. Não há a preocupação, neste trabalho, de se chegar a forma final da coluna mas, sim, a de se extrair o máximo de informações para a simulação de um modelo físico final. Isto significa que se deve deixar livre a geometria da coluna, o que praticamente só é possível através de modelos contínuos.

CAPÍTULO 3

DESENVOLVIMENTO DO MODELO

3.1 - DISCUSSÃO DO PROBLEMA

Conclusões apresentadas no capítulo anterior - sugerem a formulação de um problema baseado num modelo contínuo para se obter uma primeira aproximação para uma estrutura complexa. Esta, em resumo, é a linha a ser desenvolvida neste trabalho, tendo em mente a aplicação ao problema da coluna-suporte para testes dinâmicos.

Em decorrência disso, é intenção abordar aspectos de otimização dinâmica de um membro estrutural que, mesmo tendo sido objeto de várias análises recentes, não se encontra ainda suficientemente explorado. Trata-se do caso da viga, que se presta a um grande número de aplicações a projetos mecânicos e que pode ser também vista como uma primeira aproximação para uma série de projetos estruturais. Nesta última - abordagem, encaixa-se o caso da coluna que pode ser suposta como uma viga em balanço, isto é, engastada em um extremo e livre no outro, em virtude da simetria do carregamento e outros fatores já citados. Este será o particular problema aqui desenvolvido, sob condições de vibração em flexão, que é sempre o caso mais crítico.

Com o fim de se generalizar a abordagem, pre-

tende-se que o critério de otimização adotado seja expresso - por uma função objetivo que englobe a distribuição de massa - ao longo da viga e a frequência natural do seu primeiro modo de vibração. Esta colocação representa um acoplamento de critérios adotados na literatura sobre otimização dinâmica: o - que se deseja é, respeitados certos limites, se chegar à viga de menor massa e máxima frequência fundamental, ao contrário - dos exemplos citados, onde sempre uma delas, massa ou frequên- cia, é mantida constante. Na referida literatura, é fato, tam- bém, que o estabelecimento a priori de uma relação entre o mo- mento de inércia e a área da secção transversal leva a uma - considerável simplificação do modelo matemático decorrente, - tornando mais direta a aplicação dos métodos de otimização, às custas de uma menor generalidade do problema. Pretende-se - aqui tratar o caso de uma forma mais ampla, sem restrições do tipo acima, de modo que se chegue a resultados mais conclusi- vos sobre a melhor forma de uma estrutura que se pode supor - unidimensional. Do mesmo modo, entende-se que se deve cons- truir o modelo de tal forma que possa ser modificado para si- mulação com outras condições de contorno, permitindo a deter- minação das configurações ótimas para casos de vigas bi-apoi- das ou outras, assim como a simulação do modelo com vínculos realmente de interesse prático.

Todos esses quesitos conduzem à formulação do problema da viga com o auxílio da Teoria de Controle Ótimo. - Esta teoria fornece uma série de métodos que permitem a gene- ralização dos resultados já obtidos, bem como a extensão a -

problemas com outras condições a serem respeitadas, mediante pequenas modificações. Embora a parte computacional envolvida seja bastante grande, como será visto adiante, a simplicidade do modelo matemático decorrente é vantajosa, quando comparada aos outros métodos derivados diretamente do cálculo variacional, como o de Niordson, [N1]. Por outro lado, o tratamento de vínculos de desigualdade se encontra mais desenvolvido nas técnicas do Controle Ótimo que em outros métodos, embora este ainda seja um ponto a ser convenientemente estudado dentro desta teoria.

3.2 - HIPÓTESES E APROXIMAÇÕES DO MODELO

3.2.1 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO MOVIMENTO DE UMA VIGA EM FLEXÃO

Para tornar mais claras as hipóteses e aproximações usadas, neste item é desenvolvido o modelo matemático geral para o caso de pequenas oscilações transversais de flexão de uma viga. Para tanto, segue-se a orientação proposta por Meirovich, [M2], através do Princípio de Hamilton.

Considere-se um elemento qualquer ao longo de uma viga sob ação de um carregamento externo, variável com o tempo e perpendicular ao eixo, conforme indicado nas figuras 3.1 e 3.2, abaixo.

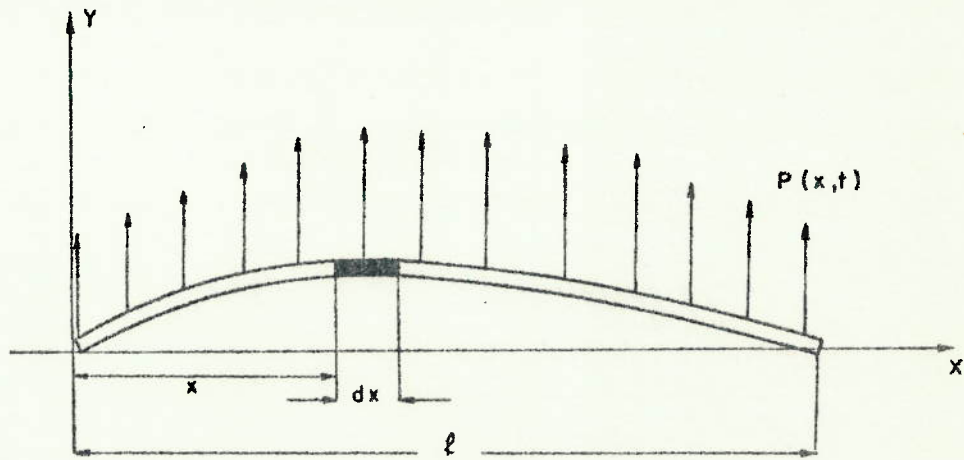


Figura 3.1- Viga em Vibração de Flexão

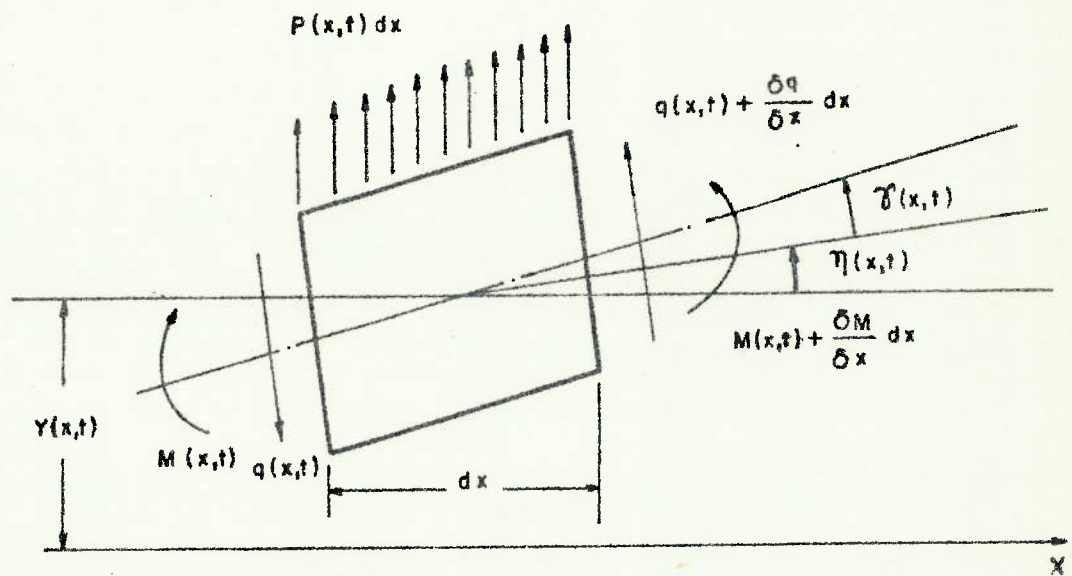


Figura 3.2- Diagrama de Corpo Livre de um Elemento de Viga

A deflexão $Y(x,t)$, para um dado ponto x ao longo da viga, num dado instante t , é constituída de duas partes, uma causada pela flexão e a outra pelo cisalhamento. Desta maneira, a inclinação da curva de deflexão no ponto x é descrita por:

$$\frac{\partial Y(x,t)}{\partial x} = \eta(x,t) + \gamma(x,t) \quad (3.1)$$

onde $\eta(x,t)$ é o ângulo de rotação devido à flexão e $\gamma(x,t)$ é o ângulo de distorção devido ao cisalhamento.

O ângulo de rotação devido à flexão é relacionado ao momento fletor $M(x,t)$ através de:

$$M(x,t) = E I(x) \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} \quad (3.2)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material da viga e $I(x)$ é o momento de inércia de área da secção transversal.

A deformação por cisalhamento, por sua vez, é ligada ao esforço cortante $q(x,t)$ por:

$$q(x,t) = k' G A(x) \gamma(x,t) \quad (3.3)$$

onde k' é uma constante que depende da forma da secção transversal, G é o módulo de elasticidade transversal do material e $A(x)$ é a área da secção transversal considerada.

O Princípio Estendido de Hamilton estabelece que, no caso da existência de forças não conservativas, a con

figuração de um sistema dinâmico varia com o tempo de modo -
que

$$t_0 \int^{t_1} (\delta T + \delta W) dt = 0 \quad (3.4)$$

onde T é a energia cinética do sistema e W a energia de deformação associada às forças externas.

No caso da viga, as parcelas de energia cinética de rotação e energia cinética de translação podem ser compostas na energia cinética total através de:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{\partial Y(x,t)}{\partial t} \right]^2 m(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} \right]^2 \bar{J}(x) dx \quad (3.5)$$

onde l é o comprimento da viga, $m(x)$ é a massa por unidade de comprimento e $\bar{J}(x)$ é o momento de inércia de massa por unidade de comprimento, tomado em relação ao eixo z (Fig. 3.1), pela linha neutra da viga.

Este momento de inércia de massa, supondo que a viga é constituída por um único material de densidade ρ , constante, se relaciona com o momento de inércia de área da secção transversal por:

$$\bar{J}(x) = \rho I(x) = \rho r^2(x) A(x) = r^2(x) m(x) \quad (3.6)$$

onde $r^2(x)$ indica o raio de giração da secção transversal -

da viga, medido a partir do eixo neutro.

Substituindo a última expressão, (3.6), em (3.5) e tomando a variação da energia cinética, encontra-se a primeira parcela do integrando de (3.4):

$$\delta T = \int_0^l m \frac{\partial Y}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial Y}{\partial t} \right) dx + \int_0^l r^2 m \frac{\partial \eta}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) dx$$

O trabalho virtual, δW , das forças externas é formado por uma parte conservativa, ligada ao momento fletor e ao esforço cortante, e uma parte não conservativa, dada pela carga externa $P(x,t)$. Como as forças conservativas derivam de um potencial V e como o deslocamento Y e a carga externa P estão na mesma direção, δW pode ser escrito:

$$\delta W(t) = - \delta V(t) + \int_0^l P(x,t) \delta Y(x,t) dt \quad (3.7)$$

O potencial $V(t)$, no caso, é:

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^l M(x,t) \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \int_0^l q(x,t) Y(x,t) dx \quad (3.8)$$

que se transforma em:

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left[\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l k' GA(x) \gamma^2(x,t) dx \quad (3.9)$$

pela utilização das relações (3.2) e (3.3).

Lembrando que γ pode ser escrito na forma:

$$\gamma = \frac{\partial Y}{\partial x} - \eta \quad (3.10)$$

a variação de V torna-se:

$$\delta V = \int_0^l EI \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) dx + \int_0^l k' GA \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \eta \right) \delta \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \eta \right) dx \quad (3.11)$$

Entrando com os valores de δT e δW obtidos acima na expressão do Princípio de Hamilton:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta W) dt = & \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_0^l m \frac{\partial Y}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial Y}{\partial t} \right) dx + \int_0^l r^2 m \frac{\partial \eta}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) dx - \right. \\ & \left. - \int_0^l EI \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) dx - \int_0^l k' GA \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \eta \right) \delta \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \eta \right) dx + \right. \\ & \left. + \int_0^l P \delta Y dx \right] dt = 0 \quad (3.12) \end{aligned}$$

Devido à possibilidade de se intercambiar a ordem de integração em x e t , da comutatividade dos operadores diferenciação e variação e da anulação de δY e δn nos extremos t_0 e t_1 , a integração por partes de parcelas da relação (3.12) conduz aos seguintes resultados:

$$t_0 \int^{t_1} m \frac{\partial Y}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial Y}{\partial t} \right) dt = - t_0 \int^{t_1} m \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \delta Y dt \quad (3.13)$$

$$t_0 \int^{t_1} r^2 m \frac{\partial \eta}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) dt = - t_0 \int^{t_1} r^2 m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \delta \eta dt \quad (3.14)$$

$$\int_0^l EI \frac{\partial \eta}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) dx = \left(EI \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \delta \eta \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} (EI \frac{\partial \eta}{\partial x}) \delta \eta dx \quad (3.15)$$

$$\int_0^l k' GA \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \eta \right) \delta \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \eta \right) dx = \left[k' GA \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \eta \right) \right] \delta Y \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left[k' GA \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \eta \right) \right] \delta Y dx - \int_0^l k' GA \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \eta \right) \delta \eta dx \quad (3.16)$$

Substituindo as relações (3.13) a (3.16) em (3.12) obtem-se :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t_1} \left\{ \int_0^l \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[k'GA \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \eta \right) \right] + P - m \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \right] \delta Y \, dx + \right. \\
& + \int_0^l \left[k'GA \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \eta \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - r_m^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right] \delta \eta \, dx - \\
& \left. - \left(EI \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \delta \eta \Big|_0^l - \left[k'GA \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \eta \right) \right] \delta Y \Big|_0^l \right\} dt = 0 \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Em virtude da independência dos deslocamentos virtuais $\delta \eta$ e δY e do fato de serem arbitrários, $\delta \eta$ e δY podem ser tomados como quaisquer ao longo do comprimento da viga ($0 < x < l$) e nulos nas extremidades $x = 0$ e $x = l$. Resultam as equações diferenciais:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k'GA \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \eta \right) \right] - m \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + P = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + k'GA \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \eta \right) - r_m^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (3.19)$$

que representam o movimento ao longo da viga em flexão.

As condições de contorno associadas ao problema de flexão resultam da anulação dos termos remanescentes dentro da integral:

$$\left(EI \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \delta \eta \Big|_0^l = 0 \quad (3.20)$$

$$\left[k' GA \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \eta \right) \right] \delta Y \Big|_0^l = 0 \quad (3.21)$$

As relações (3.20) e (3.21) representam as - possíveis restrições nos extremos, sejam eles vínculos naturais ou geométricos, isto é, resultantes do balanço de momentos fletores e de esforços cortantes ou decorrentes de pura compatibilidade geométrica, respectivamente.

3.2.2 - APROXIMAÇÕES NECESSÁRIAS

A formulação acima apresentada inclui os efeitos de inércia de rotação e de deformação por cisalhamento. - Inércia de rotação é causada pela aceleração angular de um - elemento qualquer ao longo da viga. Quando as dimensões da - secção transversal são pequenas, se comparadas ao comprimento da viga, os efeitos citados são normalmente desprezados - Além disso, os resultados de Kamat, |K3|, indicam que os efeitos de cisalhamento e inércia rotativa, no caso de uma viga - em balanço otimizada com relação à sua frequência fundamental, representam diminuição de cerca de 8% na frequência, com relação aos da viga de secção transversal constante de mesmo

volume. Sendo esse número pequeno, em comparação aos outros tipos de vínculos externos para vigas e ao aumento que se pretende na frequência fundamental, tais efeitos não serão levados em conta e a expressão (3.1), que define a inclinação da curva de deflexão, pode ser recolocada como:

$$\frac{\partial Y(x,t)}{\partial x} = \eta(x,t) \quad (3.22)$$

Da mesma forma, a parcela de energia cinética de rotação da expressão (3.5),

$$\int_0^l \left[\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x} \right]^2 \bar{J}(x) dx ,$$

é admitida nula.

O caso de interesse sendo o de vibrações livres de uma viga em flexão, o carregamento externo $P(x,t)$ deve ser nulo, isto é:

$$P(x,t) = 0 \quad (3.23)$$

Considerando a validade de (3.22), o momento fletor e o esforço cortante podem ser reescritos na forma:

$$M(x,t) = EI(x) \frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial x^2} \quad (3.24)$$

$$q(x,t) = - \frac{\partial M}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[EI(x) \frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial x^2} \right] \quad (3.25)$$

De posse destas novas relações, uma segunda - aplicação do Princípio de Hamilton leva a uma única equação:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad (3.26)$$

desde que se integre, por partes, o termo correspondente à energia potencial duas vezes.

Nesse caso, as condições de contorno associadas resultam na forma:

$$\left[EI \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right] \delta \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right) \Big|_0^l = 0 \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right] \delta Y \Big|_0^l = 0 \quad (3.28)$$

Para se poder eliminar a dependência com o tempo do movimento da viga, deve-se admitir que as variáveis tempo, t , e coordenada x sejam separáveis, isto é, o deslocamento $Y(x,t)$ pode ser colocado na forma:

$$Y(x,t) = y(x) \cdot F(t) \quad (3.29)$$

Introduzindo (3.29) em (3.26), tem-se como resultado:

$$\frac{1}{m(x) y(x)} \frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right] = - \frac{1}{f(t)} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \omega^2, (3.30)$$

se a constante de separação é chamada ω^2 , valor real positivo

Decorrem, então, as equações:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right] - \omega^2 m(x) y(x) = 0 \quad (3.31)$$

$$\frac{d^2 F(t)}{dt^2} + \omega^2 F(t) = 0 \quad (3.32)$$

A solução de (3.32) é normalmente dada por funções harmônicas, o que é consistente com o fato do sistema, em sendo conservativo, ter energia total constante.

A equação (3.31) é a conhecida equação de Euler para vibrações livres de uma viga que permite determinar os autovalores ω^2 e os modos associados a estes. Em se tratando de um meio contínuo, a solução de (3.31), para um dado comprimento finito, implica numa sequência infinita de valores discretos dos autovalores ω^2 que representam o quadrado das frequências angulares naturais da viga.

Para o caso de interesse, ou seja, para uma viga em balanço, com coordenadas definidas conforme a Figura 3.3, abaixo, as condições de contorno nas duas extremidades -

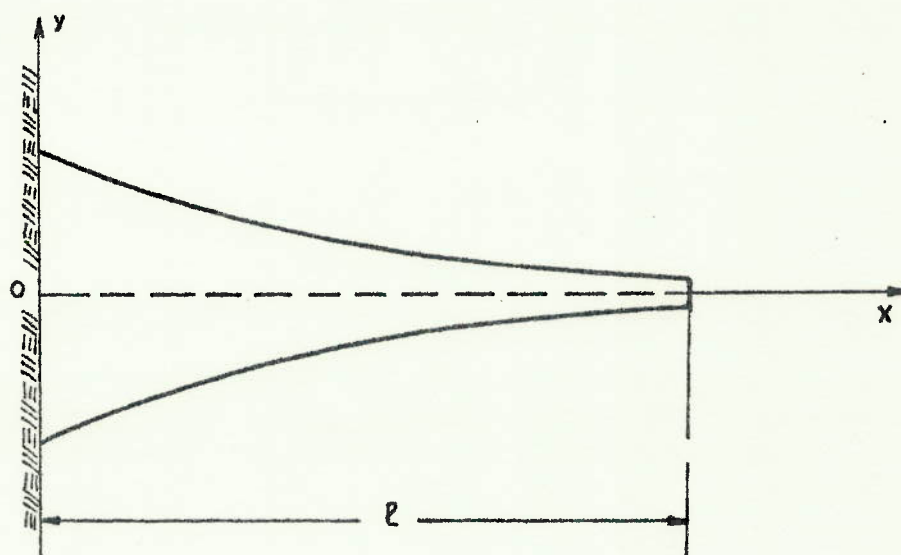


Figura 3.3- Viga Engastada - Livre

são dadas por:

(a) extremidade engastada:

$$y(0) = 0 \quad (3.33)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.34)$$

(b) extremidade livre:

$$EI \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=l} = 0 \quad (3.35)$$

$$\left. \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \right|_{x=l} = 0 \quad (3.36)$$

As relações (3.33) a (3.36) satisfazem as condições (3.27) e (3.28) obtidas pela aplicação do Princípio de Hamilton. A solução do problema de otimização deve, portanto, respeitar a equação diferencial do movimento de vibração da viga (3.31), e as condições de contorno estabelecidas por (3.33), (3.34), (3.35) e (3.36).

3.3 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROL ÓTIMO

3.3.1 - ESCOLHA DAS VARIÁVEIS DE CONTROLE.

É intenção, neste trabalho, que se chegue à determinação da distribuição de massa ao longo do comprimento l conhecido de uma viga, que leve à viga de menor massa e maior frequência natural do primeiro modo de vibração. Para tanto, uma análise da equação de Euler, (3.31), permite verificar que só se pode atuar sobre duas das variáveis envolvidas, a saber, a massa distribuída ao longo do comprimento, $m(x)$, e o momento de inércia de área da secção transversal, $I(x)$. Estabelecer uma relação entre as duas significa reduzir o problema de otimização à determinação de uma única função de controle, recaindo-se em problemas semelhantes aos tratados por Karihaloo e Niordson, [K2], e por Kamat e Simitzes, [K1], onde esta hipótese representa uma grande simplificação no modelo.

Uma forma alternativa, que se crê mais abrangente e conclusiva, é examinar separadamente a influência dessas duas variáveis no problema de otimização da frequência fundamental. Dessa maneira, admitindo que a viga em questão seja constituída de um único material, a massa por unidade de comprimento, $m(x)$, e o momento de inércia de área, $I(x)$, estão relacionadas entre si pela área da secção transversal, $A(x)$, podendo-se então escrever:

$$m(x) = \rho A(x) \quad (3.37)$$

$$I(x) = r^2(x) A(x) \quad (3.38)$$

onde ρ e $r^2(x)$, conforme definição anterior, indicam a densidade de massa e o quadrado do raio de giração da secção transversal.

Surtem, então, duas variáveis que podem ser determinadas independentemente que são a área $A(x)$ e o quadrado do raio de giração $r^2(x)$. A obtenção do comportamento destas duas funções, dentro do problema de otimização, significa determinar o quanto de massa se deve concentrar em cada ponto ao longo do comprimento e a que distância do eixo neutro esta massa deve ser colocada para que as exigências de mínima massa e máxima frequência fundamental sejam satisfeitas.

3.3.2 - DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS DE ESTADO E DE CONTROLE

Na formulação de um problema de Controle Ótimo é usual a colocação na forma de variáveis de estado e de variáveis de controle. Entende-se por variáveis de estado àquelas que definem completamente a resposta do sistema em qualquer instante. Variáveis de controle ou de projeto são as que representam a capacidade de se alterar o sistema ou sobre ele se agir.

Em geral, as variáveis de estado são definidas de forma que estabeleçam um sistema de equações diferenciais de primeira ordem com relação à variável independente, no caso, x . Uma inspeção da equação de Euler, (3.31), leva a se verificar que a transformação dessa equação de quarta ordem para um sistema de quatro equações de primeira ordem implica no aparecimento de derivadas em relação à coordenada x tanto da função raio de giração como da função de área. O mesmo sucede com relação às condições de contorno. A fim de evitar que estas derivadas apareçam explicitamente nas equações citadas, as derivadas segundas de $A(x)$ e $r^2(x)$ devem ser tomadas como as variáveis de controle do problema.

Notando por y_i as variáveis de estado e u_j as variáveis de controle e ainda reservando os índices $i = 1, 2, 3, 4$ para as equações de primeira ordem decorrentes da equação de Euler, (3.31), define-se, então, a área da secção transversal e o raio de giração, bem como suas derivadas primeiras, como variáveis de estado e as respectivas derivadas -

segundas como variáveis de controle através das seguintes relações:

$$y_5(x) = A(x) \quad (3.39)$$

$$y_6(x) = r^2(x) \quad (3.40)$$

$$\dot{y}_5(x) = f_5(x) = y_7(x) \quad (3.41)$$

$$\dot{y}_6(x) = f_6(x) = y_8(x) \quad (3.42)$$

$$\dot{y}_7(x) = f_7(x) = u_1(x) \quad (3.43)$$

$$\dot{y}_8(x) = f_8(x) = u_2(x) \quad (3.44)$$

onde (') representa a derivação em relação à coordenada x .

Pretende-se, também, que a frequência natural associada ao primeiro modo possa ser ajustada para que se consiga atingir sua condição de máximo. Para tanto, é necessário que o autovalor ω^2 possa ser alterado durante o processo de otimização. Não existem condições de se definir ω^2 como variável de controle pois se trata de um parâmetro. Resta, então, a possibilidade de defini-lo como variável de estado. Isto deve ser feito de modo que:

$$y_9 = \omega \quad (3.45)$$

$$\dot{y}_9(x) = f_9 = 0 \quad (3.46)$$

Usando as definições acima, (3.39) a (3.46) é possível transformar a equação de vibração da viga, (3.31), em um sistema de primeira ordem. Dessa maneira, (3.31) toma a forma:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right] - \omega^2 \rho A(x) y = \frac{d^2}{dx^2} \left[E y_5 y_6 \frac{d^2 y}{dx^2} \right] - \omega^2 \rho y_5 y = 0 \quad (3.47)$$

Definindo as relações:

$$y_1(x) = y(x) \quad (3.48)$$

$$\dot{y}_1 = f_1(x) = y_2(x) \quad (3.49)$$

$$\dot{y}_2 = f_2(x) = y_3(x) \quad (3.50)$$

$$\dot{y}_3 = f_3(x) = y_4(x) \quad (3.51)$$

então, (3.47) resulta numa equação diferencial de primeira ordem para y_4 :

$$\dot{y}_4 = \frac{1}{y_5 y_6} \left[\frac{\rho}{E} y_9^2 y_5 y_1 - 2(y_7 y_6 + y_5 y_8) y_4 - (u_1 y_6 + 2y_7 y_8 + u_2 y_5) y_3 \right] \quad (3.52)$$

As equações diferenciais definidas acima

constituem os chamados vínculos dinâmicos a serem satisfeitos no problema de otimização.

3.3.3 - ESCOLHA DA FUNÇÃO OBJETIVO.

A Função Objetivo, que na teoria de Controle Ótimo recebe também os nomes de Índice de Desempenho e Índice de Performance, é a "tradução matemática" do critério de otimização escolhido, em termos das configurações inicial e final do sistema, expressa em termos das variáveis de estado e de controle. Será aqui denotada por J .

Como o critério de otimização escolhido - pressupõe que se deva determinar a distribuição de massa que leva à viga de menor peso com máxima frequência natural, torna-se necessário definir uma função objetivo mista que envolva a frequência e a massa, suposto conhecido o comprimento l da viga. Dessa maneira, impõe-se um Índice de Performance a ser minimizado que é dado pelo funcional:

$$J = \int_0^l \left(\rho y_5^2 + \frac{K_s}{y_9^2} \right) dx \quad (3.53)$$

onde K_s é uma constante dimensional de peso, estimada de forma a tornar compatíveis as duas parcelas do integrando.

3.3.4 - VÍNCULOS DE DESIGUALDADE

Ao problema definido pela minimização da função objetivo, respeitadas restrições dadas pelos vínculos dinâmicos e condições de contorno adequadas, devem ser adicionados vínculos de desigualdade que tornem compatíveis as definições feitas anteriormente.

Assim, até agora foi dito que se pretende a minimização da frequência fundamental, embora todas as relações deduzidas sejam válidas para qualquer dos modos de uma viga em balanço. A fim de assegurar a existência apenas do primeiro modo de vibração, pode-se definir um vínculo de desigualdade da seguinte maneira:

$$C_1(y,x) = -y_2(x) \leq 0 \quad (3.54)$$

Se respeitada a restrição (3.54), a inclinação não troca seu sinal, positivo, ao longo do comprimento da viga, o que significa que, não existem nós e realmente o modo é o fundamental. Tenciona-se com isso evitar convergência para qualquer outro modo, um dos imprevistos enfrentados por McCart e co-autores, na aplicação de seu algoritmo de Controle Ótimo, |M1|.

Restrições devem ser colocadas também sobre as funções área e raio de giração. Estas funções devem ser estritamente positivas ao longo da viga, podendo se anular em único ponto que é o extremo livre. Além disso, a área e o raio

de giração condicionam a resistência mecânica da viga, razões pelas quais, de tais funções, deve-se exigir:

$$C_2(y,x) = C - y_5(x) \leq 0 \quad (3.55)$$

$$C_3(y,x) = D - y_6(x) \leq 0 \quad (3.56)$$

C e D das equações (3.55) e (3.56) são constantes positivas que representam os menores valores desejáveis da área e do raio de giração, inclusive no extremo livre.

Finalmente, uma quarta e última restrição deve ser colocada sobre a frequência natural da viga. Com isso, pretende-se evitar que a frequência, que pode ser alterada durante o processo de otimização, caia numa faixa fora de interesse do problema. Define-se, então:

$$C_4(y,x) = \omega_0 - y_9 \leq 0 \quad (3.57)$$

onde ω_0 é uma constante positiva que estabelece o menor valor conveniente para a frequência fundamental.

Os vínculos de desigualdade definidos acima são aqueles necessários para que o problema de procura da melhor distribuição de massa, para satisfazer o critério de otimização estabelecido, tenha um real significado prático.

3.3.5 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

Em vista das definições feitas nos itens anteriores, as condições de contorno para uma viga em balanço, obtidas em (3.33), (3.34), (3.35) e (3.36), devem ser redefinidas em termos das novas variáveis de estado.

As condições de contorno para a extremidade engastada, $x = 0$, ficam, então, na forma:

$$\psi_1(x_o, y_o) = y_1 \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.58)$$

$$\psi_2(x_o, y_o) = y_2 \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.59)$$

As condições de contorno para a extremidade livre, $x = l$, transformam-se em:

$$\psi_3(y_f, x_f) = (y_5 y_6 y_3) \Big|_{x=l} = 0 \quad (3.60)$$

$$\psi_4(y_f, x_f) = \left[y_4 y_5 y_6 + (y_5 y_8 + y_6 y_7) y_3 \right] \Big|_{x=l} = 0 \quad (3.61)$$

onde os índices o e f se referem as extremidades inicial e final.

No entanto, y_5 e y_6 estão restritas, através dos vínculos de desigualdade definidos, a assumirem apenas valores estritamente positivos. Com isso, os vínculos de contorno (3.60) e (3.61) devem ser escritos do seguinte modo:

$$\psi_3(x_f, y_f) = y_3 \Big|_{x=l} = 0 \quad (3.62)$$

$$\psi_4(x_f, y_f) = y_4 \Big|_{x=l} = 0 \quad (3.63)$$

As condições de contorno acima são homogêneas. Para se obter solução única não trivial do problema de otimização, condições não homogêneas devem ser adicionadas. Especificam-se, então, duas novas condições a serem obedecidas: a deflexão máxima y_1 no extremo livre e o valor da função y_3 no extremo engastado, que define o valor do momento fletor - neste ponto. Tais condições são dadas por:

$$\psi_5(x_f, y_f) = y_1 \Big|_{x=l} = \epsilon_1 \quad (3.64)$$

$$\psi_6(x_o, y_o) = y_3 \Big|_{x=l} = \epsilon_2 \quad (3.65)$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são constantes arbitradas e positivas.

3.3.6 - FORMA FINAL DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO

Levando em conta todas as considerações fei

tas, o problema de Controle Ótimo correspondente de se determinar a distribuição de massa de uma viga de comprimento l de forma que esta tenha mínima massa e máxima frequência fundamental pode ser então colocado da maneira a seguir.

Minimizar a Função Objetivo (Índice de Performance)

$$J = \int_0^l \left(\rho y_5^2 + \frac{K_s}{y_9^2} \right) dx \quad (3.66)$$

sujeita aos vínculos dinâmicos

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = y_3$$

$$\dot{y}_3 = y_4$$

$$\dot{y}_4 = \frac{1}{y_5 y_6} \left[\frac{\rho}{E} y_9^2 y_5 y_1 - 2(y_7 y_6 + y_5 y_8) y_4 - (u_1 y_6 + 2y_7 y_8 + u_2 y_5) y_3 \right] \quad (3.67)$$

$$\dot{y}_5 = y_7$$

$$\dot{y}_6 = y_8$$

$$\dot{y}_7 = u_1$$

$$\dot{y}_8 = u_2$$

$$\dot{y}_9 = 0$$

sujeita aos vínculos de contorno

$$\begin{aligned}
 \psi_1(x_0, y_0) = y_1 \Big|_{x=0} &= 0 \\
 \psi_2(x_0, y_0) = y_2 \Big|_{x=0} &= 0 \\
 \psi_3(x_f, y_f) = y_3 \Big|_{x=l} &= 0 \\
 \psi_4(x_f, y_f) = y_4 \Big|_{x=l} &= 0 \\
 \psi_5(x_f, y_f) = y_1 \Big|_{x=l} &= \varepsilon_1 \\
 \psi_6(x_0, y_0) = y_3 \Big|_{x=0} &= \varepsilon_2
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

e, ainda, sujeita aos vínculos adicionais de desigualdade

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -y_2 \leq 0 \\
 C_2 &= C - y_5 \leq 0 \\
 C_3 &= D - y_6 \leq 0 \\
 C_4 &= \omega_0 - y_9 \leq 0
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

CAPÍTULO 4

FUNDAMENTOS TEÓRICOS: CONTROLE ÓTIMO E MÉTODO DE SOLUÇÃO

4.1 - CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA OTIMIZAÇÃO

São desenvolvidas, neste ítem, as condições - necessárias para se obter a solução do problema de Controle - Ótimo formulado nos capítulos anteriores.

Para tanto, o problema definido é englobado - dentro da Teoria de Controle Ótimo e, em seguida, são estabele - cidas as relações que representam as condições necessárias pa - ra otimização.

4.1.1 - COLOCAÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO

No que se segue, é adotada notação vetorial. Dessa maneira, \underline{y} designa o vetor de variáveis de estado defi - nidas nas relações (3.39) a (3.42), (3.46) e (3.48) a (3.51) do ítem 3.3.2.:

$$\underline{y} = \left\{ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_9 \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

De modo análogo, \underline{u} , vetor 2×1 , designa as variáveis de controle, dadas pelas relações (3.43) e (3.44); \underline{C} passa a ser o vetor dos vínculos de desigualdade, de dimensão (4×1) , e colocados em (3.54) a (3.57); e $\underline{\psi}$ o vetor dos vínculos de contorno (6×1) , como definidos pelas relações (3.58), (3.59) e (3.62) a (3.65).

Com isso, o problema de Controle Ótimo em que se deve determinar a distribuição de massa numa viga em balanço que minimiza o peso e maximiza a frequência fundamental pode ser colocado, feitas as devidas analogias com o item 3.3.6, na forma geral:

Minimizar

$$J = \int_0^l L(\underline{y}) dx \quad (4.2)$$

sujeito aos vínculos dinâmicos de (3.67), item 3.3.6:

$$\dot{\underline{y}} = \underline{f}(\underline{y}, \underline{u}) \quad (9 \text{ eqs.}) \quad (4.3)$$

aos vínculos de contorno (3.68):

$$\underline{\psi} \left[\underline{y}(0); \underline{y}(l) \right] = 0 \quad (6 \text{ eqs.}) \quad (4.4)$$

e aos vínculos de desigualdade como (3.69):

$$\underline{C}(\underline{y}) \leq 0 \quad (4 \text{ eqs.}) \quad (4.5)$$

Sobre o problema acima descrito deve-se ter em conta que, do total de seis relações de contorno, três são definidas na extremidade engastada ($x = 0$) e as três restantes na extremidade livre ($x = l$), o que significa que em nenhuma das extremidades o estado do sistema se encontra totalmente especificado. Deve ser também notado que todos os vínculos de desigualdade são definidos apenas em termos de variáveis de estado, isto é, não existem vínculos de desigualdade nas variáveis de controle.

4.1.2 - ESTABELECIMENTO DAS CONDIÇÕES NECESSÁRIAS

O desenvolvimento das condições necessárias segue o procedimento adotado por Citron, [C1]. Admite-se, primeiramente, que o problema a ser resolvido não tenha vínculos de desigualdade na variável de estado o que equivale dizer que as restrições (4.5) são satisfeitas no sentido estrito da desigualdade. Com isso, o problema se resume a determinar as funções \underline{u} que minimizam o funcional J e respeitam as equações do movimento (4.3) e as condições de contorno (4.4).

A solução, nesse caso, pode ser obtida através da adição, à função objetivo, dos vínculos dinâmicos e das condições de contorno, através de multiplicadores de Lagrange. Assim, define-se uma função F tal que:

$$F(\underline{y}, \dot{\underline{y}}, \underline{u}, \underline{\lambda}) = L(\underline{y}) + \underline{\lambda}^T \left[\dot{\underline{y}} - \underline{f}(\underline{y}, \underline{u}) \right] \quad (4.6)$$

onde $\underline{\lambda}$, de dimensão igual ao vetor das variáveis de estado, é um vetor de multiplicadores de Lagrange.

Define-se, também:

$$G_c \left[\underline{y}(0), \underline{y}(\ell), \underline{v} \right] = \underline{v}^T \underline{\psi} \left[\underline{y}(0), \underline{y}(\ell) \right] \quad (4.7)$$

onde \underline{v} é também um vetor de multiplicadores de Lagrange, - com dimensão idêntica ao vetor de vínculos de contorno.

A partir de (4.6) e (4.7) monta-se a chamada função objetivo estendida, \tilde{J} , da seguinte maneira:

$$\tilde{J} = G_c \left[\underline{y}(0), \underline{y}(\ell), \underline{v} \right] + \int_0^\ell F(\underline{y}, \dot{\underline{y}}, \underline{u}, \underline{\lambda}) dx \quad (4.8)$$

O que se pretende, agora, é obter as funções \underline{y} , \underline{u} , $\underline{\lambda}$ e os valores de \underline{v} que tornam \tilde{J} estacionário, isto é, fazem sua variação primeira, $\delta\tilde{J}$, nula. Procedendo de acordo com as técnicas variacionais, é possível mostrar que as condições necessárias para que ocorra valor estacionário de \tilde{J} são, [C1]:

a) Equações de Euler - Lagrange para as variáveis de estado e de controle:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{z}_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial z_i} = 0 \quad (4.9)$$

onde $z_i = y_i$, $i = 1, 2, \dots, 9$ ou $z_i = u_i$, $i = 1, 2$

Resultam, de (4.9), as chamadas equações ad-
juntas:

$$\dot{\lambda}_i = \frac{\partial L}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \dots, 9 \quad (4.10)$$

e as equações de controle:

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} - \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial u_i} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (4.11)$$

No caso aqui tratado, $\frac{\partial L}{\partial u_i}$, de (4.11), é nu-
lo.

b) Condições de transversalidade, definidas nas extremi-
dades, fixas, $x = 0$ e $x = \ell$:

$$\left[\lambda_i(0) - \frac{\partial G_c}{\partial y_i(0)} \right] dy_i(0) = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, 9 \quad (4.12)$$

$$\left[\lambda_i(\ell) + \frac{\partial G_c}{\partial y_i(\ell)} \right] dy_i(\ell) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, 9 \quad (4.13)$$

Além das condições necessárias, (4.10) e (4.13), a garantia de ser a solução minimizante deve ser extraída pela verificação da chamada condição de mínimo de Weierstrass, [C1]. Para o caso presente, esta condição é expressa pela relação:

$$E_e = \left[L(x, \underline{y}, \underline{U}) - \underline{\lambda}^T \underline{f}(\underline{y}, \underline{U}) \right] - \left[L(x, \underline{y}, \underline{u}) - \underline{\lambda}^T \underline{f}(\underline{y}, \underline{u}) \right] \geq 0 \quad (4.14)$$

onde E_e é o símbolo que designa a função de Erdmann - Weierstrass, \underline{u} é o controle que minimiza o funcional \tilde{J} e \underline{U} é qualquer outro controle possível.

A condição de mínimo, acima estabelecida, é equivalente ao conhecido Princípio de Máximo de Pontryagin - que pode ser expresso nos seguintes termos:

"Definida uma função H , a Hamiltoniana do sistema, na forma

$$H = \underline{\lambda}^T \underline{f} - L \quad (4.15)$$

a função objetivo é mínima quando a Hamiltoniana é máxima em relação às variáveis de controle"

Isto significa que a condição (4.14) pode ser reescrita da maneira que se segue:

$$H(\underline{\lambda}, \underline{y}, \underline{u}) \geq H(\underline{\lambda}, \underline{y}, \underline{U}) \quad (4.16)$$

relação da qual resultam as seguintes equações de controle, -
idênticas a (4.11):

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0 \quad , \quad j = 1, 2 \quad (4.17)$$

e a relação de verificação para solução minimizante

$$\left[\frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} \right] \quad \text{definida negativa} \quad (4.18)$$

A inclusão de vínculos de desigualdade no problema de Controle Ótimo torna o estabelecimento das condições necessárias uma tarefa sensivelmente mais complexa. Em particular, se as restrições de desigualdade são definidas apenas para as variáveis de estado não existe, em princípio, uma forma de se do sar o controle de modo a se manter o sistema sobre a fronteira de estado, impedindo-o de penetrar a região proibida. Bryson - et al, [B4], propuseram uma técnica que evita este problema e que se resume na transformação da restrição sobre a variáveis de estado numa restrição sobre variáveis de estado e de contro le, simultaneamente. Isto pode ser obtido pela derivação suces siva do vínculo de desigualdade sobre variáveis de estado em relação à coordenada independente até que as variáveis de con trole apareçam explicitamente, [C1].

No caso de um único vínculo de desigualdade nas variáveis de estado, este tratamento resulta razoavelmente simples, pois o vínculo transformado pode ser adicionado às funções F , de (4.6), e G_c , (4.7), através de um multiplicador de Lagrange e pelos mesmos métodos usados para a determinação das condições necessárias (aqui não demonstrados), no caso sem vínculos de desigualdade, é possível a determinação tanto da trajetória sobre a fronteira como das condições de transversalidade na entrada da mesma, [C1]. Esta técnica, no entanto, mostra-se por demais complicada quando se tem vários vínculos sobre as variáveis de estado, pois, aí, devem ser determinados tantos multiplicadores de Lagrange e tantas condições de entrada na fronteira quantos são os vínculos. Ademais, a simples inspeção das condições necessárias para o caso sem vínculos de desigualdade mostra que se tem um sistema de dezoito - (18) equações diferenciais de primeira ordem, em \underline{y} e $\underline{\lambda}$, e duas (2) equações de controle que devem ser resolvidas com as dezoito condições de contorno decorrentes das condições de transversalidade associadas, ao mesmo tempo que se verificam os vínculos de desigualdade impostos. Isto mostra a inviabilidade de se obter uma solução analítica, fato, aliás, comum à grande maioria dos problemas de Controle Ótimo. Deve-se, então, procurar a solução através de algum método de solução numérica por computador que acarrete a verificação das condições necessárias estabelecidas.

4.2 - ESCOLHA DO MÉTODO PARA SOLUÇÃO NUMÉRICA

O desenvolvimento recente da Teoria de Controle Ótimo foi acompanhada pela implantação de um número bastante grande de métodos de solução por programação numérica. Isto se justifica pelo fato de mesmo problemas simples formulados por Controle Ótimo exigirem um número tão grande de cálculos que tornam inviável sua solução por outra forma que não um computador.

Problemas de Controle Ótimo são equivalentes, no mínimo, a "problemas de contorno em dois pontos" (two-point boundary-value problems). Casos como o que é aqui tratado, - onde existem vínculos de desigualdade nas variáveis de estado, são "problemas de contorno múltiplo" (multi-point boundary-value problem). Esta comprovação leva a se concluir que mesmo o procedimento numérico para obtenção da solução é razoavelmente complicado.

Os diversos métodos desenvolvidos para aplicação em Controle Ótimo são geralmente processos iterativos que podem ser classificados em duas categorias: métodos diretos e métodos indiretos. Entende-se por métodos indiretos de solução aqueles que se baseiam na exigência de que a variação - primeira da função objetivo, δJ , deve ser nula para encontrar a solução minimizante. Métodos diretos não levam em conta esta exigência e pode-se construir técnicas que permitem uma determinação aproximada da solução minimizante sem conhecimento prévio de que esta solução leva a um valor estacionário da

função objetivo, |C1|. Em ambos os casos, isto é, seja o método direto ou indireto, os algoritmos podem ser subdivididos - em algoritmos de primeira ordem ou de segunda ordem, conforme se baseiem em variações primeiras ou segundas, respectivamente, para efetuar as correções nos controles que levam para a solução ótima. De uma maneira geral, algoritmos de primeira ordem são extremamente rápidos para se chegar até perto da solução ótima, |B3|. À medida que se aproximam desta solução, a convergência se torna muito lenta. Algoritmos de segunda ordem dependem de uma estimativa inicial, sendo muito lentas no começo do processo, |B3|, e aumentando a velocidade de convergência quando mais perto da solução. Nesses últimos, uma estimativa inicial ruim pode causar a divergência do processo numérico. Assim, é procedimento comum em problemas onde se exige boa precisão da resposta programar-se um método de primeira ordem para se chegar até perto da solução e, quando este se tornar lento, mudar-se para um algoritmo de segunda ordem. Em problemas onde a precisão da resposta não é a grande preocupação, basta o uso de um algoritmo de primeira ordem, |B3|.

Dentre o extenso conjunto de algoritmo de aplicação a problemas de Controle Ótimo destacam-se os chamados métodos de Gradiente. Desde a publicação do trabalho pioneiro por Bryson e Denham, |B2|, uma série enorme de aperfeiçoamentos e modificações tem sido propostas de modo a tornar o método aplicável a variados tipos de problemas. Trata-se de um método de busca direta que, a partir de uma estimativa inicial, extrai as informações necessárias para chegar mais perto da -

solução extremante. Encontram-se plenamente desenvolvidos algoritmos de gradiente de primeira e de segunda ordem, que são de programação relativamente simples. Outros algoritmos também notáveis são o do gradiente conjugado, [L1], que se destaca por ser um método simultaneamente de primeira e segunda ordem e os métodos indiretos de perturbação, que são essencialmente de segunda ordem, como o de Jaswinski, [J1]. No entanto, uma importante vantagem dos métodos de gradiente sobre os demais pode ser colocada no fato de que seu desenvolvimento permite uma maior facilidade no tratamento dos vínculos de desigualdade, em particular, quando estão presentes vários desses vínculos, como é o caso aqui exposto. Da mesma forma, os algoritmos de gradiente apresentam maior simplicidade para programação numérica em computador. Por estas razões, o problema proposto é aqui tratado por um algoritmo de gradiente.

No problema de Controle Ótimo da viga procura-se uma primeira aproximação para uma estrutura complexa. Isto significa que não há necessidade de grande precisão na solução. Em vista disso, julga-se que o problema possa ser tratado unicamente através de um método de gradiente de primeira ordem para se chegar à precisão exigida. Dispensa-se, dessa forma, o acoplamento de qualquer outro método de segunda ordem para refinamento de solução.

O método usado é baseado no algoritmo proposto por Bryson e Denham, [B2], e ampliado para se poder determinar, de forma ótima, as condições iniciais não definidas. Isto se faz necessário pelo fato da frequência natural ser tratada co-

mo uma variável de estado não especificada que, portanto, deve ser modificada ao longo do processo, bem como pelo fato de não se querer especificar totalmente o estado do sistema em nenhuma das duas extremidades.

Definido o algoritmo de solução numérica, resta ainda estabelecer uma maneira de se tratar convenientemente os vínculos de desigualdade nas variáveis de estado existentes no problema.

4.3 - TRATAMENTO DOS VÍNCULOS DE DESIGUALDADE

Problemas de Controle Ótimo, em virtude de exigências do sistema considerado, podem ter de satisfazer determinadas restrições em pontos interiores ao seu intervalo de definição. Estas restrições podem ser colocadas sobre variáveis de controle ou de estado, sendo normalmente expressas por desigualdades, $|C1|$.

Vínculos de desigualdade dentro de um problema de Controle Ótimo definem as fronteiras permitidas para as variáveis de estado e de controle. Quando estas variáveis evoluem até que os vínculos de desigualdade se transformam em vínculos de igualdade, aparecem mudanças na direção da trajetória (solução) de modo a se poder respeitar os vínculos. Este fato implica a existência de descontinuidades nas derivadas de Hamiltoniana em relação à coordenada independente, ou seja, a

existência de uma quina no instante em que se tem a igualdade no vínculo. Aparecem, então, condições semelhantes às condições de transversalidade, definidas no item 4.1, a serem satisfeitas pelas funções Hamiltoniana e G_c no ponto considerado.

O tratamento dos vínculos de desigualdade nas variáveis de controle é relativamente simples de ser feito pois, nesse caso, pode-se dosar convenientemente o controle para que o sistema não atravesse a fronteira e caia dentro da região proibida. O mesmo não acontece com relação aos vínculos de desigualdade nas variáveis de estado pois, nesse caso, não existe uma dependência explícita do vínculo com relação às variáveis de controle. Bryson, Denham e Dreyfus, [B4], como já citado, criaram uma técnica de transformação do vínculo de estado numa restrição sobre variáveis de estado e de controle simultaneamente. Desta nova restrição é possível se extrair informações sobre qual o controle a ser usado para que o sistema permaneça sobre a fronteira ou volte para a região permitida. Esta técnica é, posteriormente, incorporada por Denham e Bryson, [D1], ao método do gradiente de primeira ordem. O algoritmo resultante, no entanto, é de muito difícil aplicação mesmo no caso da existência de um único vínculo de desigualdade.

Como no problema de otimização proposto devem ser satisfeitos quatro vínculos de desigualdades nas variáveis de estado, é necessária uma técnica mais simples de abordagem. Dessa forma, recorre-se à utilização de funções de penalidade.

O método das Funções de Penalidade consiste em se penalizar a função objetivo, índice de desempenho, pela adição de uma parcela positiva que representa o quanto se penetrou dentro da região proibida, se o problema for de minimização. Neste trabalho, segue-se o procedimento sugerido por Sarge, [S2]. Para tanto, as restrições de desigualdade expressas pelo vetor $\underline{C}(y)$ são transformadas em uma única restrição de igualdade através da definição de uma nova variável de estado.

Define-se, então, esta nova variável, chamada y_{10} , através da relação:

$$\dot{y}_{10} = f_{10} = K_1(C_1)C_1^2 + K_2(C_2)C_2^2 + K_3(C_3)C_3^2 + K_4(C_4)C_4^2 \quad (4.19)$$

onde K_i , $i = 1, 2, 3, 4$, são funções peso definidas de forma que:

$$K_i[C_i(y)] = \begin{cases} 0 & \text{se } C_i(y) \leq 0 \\ K_{p,i} & \text{se } C_i(y) > 0 \end{cases}, \quad i=1, \dots, 4 \quad (4.20)$$

onde $K_{p,i}$ é uma constante positiva, $i = 1, 2, 3, 4$.

A condição inicial a ser exigida para y_{10} é que

$$y_{10}(0) = 0 \quad (4.21)$$

É possível, então, observar que $y_{10}(x)$ representa uma medida direta da penetração dos vínculos de desigualdade nas respectivas fronteiras. Dada a condição acima, (4.21), se até a outra extremidade y_{10} permanece nula é porque não houve violação dos vínculos. A condição a ser, portanto, exigida é que, idealmente:

$$y_{10}(\ell) = 0 \quad (4.22)$$

No entanto, a condição expressa por (4.22) dificilmente é satisfeita pois durante a propagação das equações diferenciais do sistema não existem maneiras de assegurar que os vínculos não sejam violados. Deste modo, a condição (4.22) deve ser transformada numa função de penalidade incorporada ao Índice de Desempenho, que fica, então, na seguinte forma modificada:

$$\bar{J} = J + K_J [y_{10}(\ell)]^p \quad (4.23)$$

onde p é um expoente inteiro e K_J é um peso constante e arbitrário.

Por conveniência, o expoente p é escolhido como quadrático, embora isto não seja obrigatório. A Função Objeto Modificada assume, então, a forma:

$$\bar{J} = K_J [y_{10}(\ell)]^2 + \int_0^\ell \left[\rho y_5^2 + \frac{K_S}{y_9^2} \right] dx \quad (4.24)$$

As condições necessárias para otimização são modificadas com essa nova colocação dos vínculos de desigualdade. Dessa forma, o vetor \underline{y} das variáveis de estado passa a ter dez componentes. O mesmo ocorre para o vetor $\underline{\lambda}$ dos multiplicadores de Lagrange e para o vetor \underline{f} das funções de definição dos vínculos dinâmicos. A décima componente do vetor \underline{f} fica, então:

$$\dot{y}_{10} = f_{10} = (y_2)^2 K_1(C_1) + (y_5 - C)^2 K_2(C_2) + (y_6 - D)^2 K_3(C_3) + (y_9 - \omega_0)^2 K_4(C_4) \quad (4.25)$$

A função Hamiltoniana é também modificada, ficando na forma:

$$H_m = \lambda_{10} f_{10} + H \quad (4.26)$$

Para as equações de controle e as equações adjuntas, no entanto, as relações obtidas em (4.9), (4.10) e (4.11) permanecem as mesmas, bastando substituir H por H_m .

Para as condições de contorno, deve ser mudada a definição da função G_c de modo a englobar a função de penalidade definida no Índice de Desempenho e a condição de contorno, em $x = 0$, da nova variável de estado, y_{10} , conforme (4.21). Chamando G_m à nova função, esta é dada por:

$$G_m = K_J [y_{10}(\lambda)]^2 + \underline{v}^T \underline{\psi} \quad (4.27)$$

As condições de transversalidade, expressas por (4.12) e (4.13), não se alteram se G_c é substituída por G_m , acima definida.

De posse das novas relações agora obtidas pode-se, então, passar ao desenvolvimento do método do gradiente de primeira ordem.

4.4.- ALGORITMO GRADIENTE DE PRIMEIRA ORDEM.

4.4.1 - DESENVOLVIMENTO DAS RELAÇÕES NECESSÁRIAS

O algoritmo de gradiente de primeira ordem, que é aqui desenvolvido, representa uma extensão da técnica proposta por Bryson e Denham, [B2], onde também as condições de contorno numa das extremidades devem ser estabelecidas de forma ótima. No caso aqui tratado, das dez variáveis de estado, apenas quatro são especificadas na extremidade inicial, $x = 0$.

O algoritmo do gradiente é baseado numa estimativa inicial das variáveis a serem determinadas, ou seja, das condições de contorno e das variáveis de controle. Este algo-

ritmo permite, então, obter a lei de controle ótimo em malha aberta para o problema e é aqui desenvolvido para um número qualquer de variáveis de estado e de controle, desde que existam condições de extremos fixos e algumas das condições de contorno na extremidade inicial fixadas.

Considere-se então o problema de minimizar uma função objetivo na forma

$$\bar{J} = \phi [x_f, y(x_f)] + \int_{x_0}^{x_f} L(\underline{y}, \underline{u}, x) dx \quad (4.28)$$

onde \underline{y} é vetor de n componentes e \underline{u} de m componentes.

Vínculos dinâmicos são dados por:

$$\dot{\underline{y}} = \underline{f}(\underline{y}, \underline{u}, x) \quad (n \text{ equações}) \quad (4.29)$$

e os vínculos de contorno expressos por:

$$x_0 \text{ e } x_f \text{ fixos} \quad (4.30)$$

$$\underline{\psi} [x_0, \underline{y}(x_0), x_f, \underline{y}(x_f)] = 0 \quad (q \leq 2n \text{ relações}) \quad (4.31)$$

No caso de interesse, os vínculos $\underline{\psi}$ são de tal forma que são especificadas $n-a$ variáveis de estado na extremidade inicial. Assim, se $q = (n-a) + b$, então b condições de $\underline{\psi}$ devem ser satisfeitas na extremidade final. A es-

as b condições dá-se o nome de vínculos terminais do problema.

O primeiro passo consiste em se estimar as histórias das m variáveis de controle e as a condições restantes para as condições iniciais. Estas estimativas são aqui chamadas de $\underline{u}^{(1)}$ e $\underline{\beta}^{(1)}$. Com isso é possível integrar o sistema de equações diferenciais em \underline{y} , (4.29), entre x_0 e x_f . Logicamente, não se deve esperar que a solução assim obtida satisfaça os b vínculos terminais nem que minimize \bar{J} , mas é gerada uma trajetória nominal. O problema agora é saber como devem ser mudados o vetor de controle $\underline{u}^{(1)}$ e as condições iniciais não especificadas, aqui notadas pelo vetor $\underline{\beta}^{(1)}$, de forma a que se consiga aproximar da solução ótima desejada.

Obtida uma trajetória nominal, pequenas perturbações em torno dessa trajetória são descritas por:

$$\delta \dot{\underline{y}} = \frac{d}{dx} (\delta \underline{y}) = \frac{\partial f}{\partial \underline{y}} \delta \underline{y} + \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \delta \underline{u} \quad (4.32)$$

onde:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}, \text{ matriz } (n \times n)$$

$$e \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}, \text{ matriz } (n \times m)$$

Define-se, então, um conjunto de equações adjuntas associadas ao problema de otimização por:

$$\dot{\underline{\lambda}} = \frac{d}{dx} (\underline{\lambda}) = - \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{y}} \right)^T \underline{\lambda} \quad (4.33)$$

Premultiplicando (4.32) por $\underline{\lambda}^T$ e (4.33) por $(\delta \underline{y})^T$ e tomando a transposta desta última, obtém-se:

$$\underline{\lambda}^T \frac{d}{dx} (\delta \underline{y}) = \underline{\lambda}^T \frac{\partial f}{\partial \underline{y}} \delta \underline{y} + \underline{\lambda}^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \delta \underline{u} \quad (4.34)$$

$$\frac{d}{dx} (\underline{\lambda})^T \cdot \delta \underline{y} = - \underline{\lambda}^T \frac{\partial f}{\partial \underline{y}} \delta \underline{y} \quad (4.35)$$

Somando-se as relações acima, chega-se a:

$$\underline{\lambda}^T \frac{d}{dx} (\delta \underline{y}) + \frac{d}{dx} (\underline{\lambda})^T \cdot (\delta \underline{y}) = \underline{\lambda}^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \delta \underline{u} \quad (4.36)$$

ou

$$\frac{d}{dx} (\underline{\lambda}^T \delta \underline{y}) = \underline{\lambda}^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \delta \underline{u} \quad (4.37)$$

Integrando-se (4.37) entre os extremos x_0 e x_f vem:

$$\left(\underline{\lambda}^T \delta \underline{y} \right) \Big|_{x_0}^{x_f} = \int_{x_0}^{x_f} \left(\underline{\lambda}^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \delta \underline{u} \right) dx \quad (4.38)$$

A relação (4.38) é uma relação fundamental do algoritmo pois permite relacionar a mudança em quantidades do tipo $\underline{\lambda}^T \delta \underline{y}$ com as variações $\delta \underline{u}$ nas variáveis de controle.

Tomam-se agora as variações totais, nas extremidades inicial e final, das variáveis de estado. Tais variações são descritas por:

$$d\underline{y}(x_0) = \delta \underline{y}(x_0) + \dot{\underline{y}}(x_0) dx_0 \quad (4.39)$$

$$d\underline{y}(x_f) = \delta \underline{y}(x_f) + \dot{\underline{y}}(x_f) dx_f \quad (4.40)$$

Como se está supondo que as extremidades x_0 e

x_f são fixas, então:

$$dx_0 = dx_f = 0 \quad (4.41)$$

$$e \quad dy(x_0) = \delta y(x_0) \quad (4.42)$$

$$dy(x_f) = \delta y(x_f) \quad (4.43)$$

De posse destas novas relações, deve-se passar ao exame de variações num dos vínculos terminais. Por exemplo, - uma variação no j -ésimo vínculo terminal ψ_j , com x_f fixo, é da forma:

$$d\psi_j = \frac{\partial \psi_j}{\partial y(x_f)} dy(x_f) = \frac{\partial \psi_j}{\partial y(x_f)} \delta y(x_f) \quad (4.44)$$

Se é, então, definido um conjunto de n multiplicadores $\lambda_{\psi_j}(x)$ que satisfazem, em x_f , à condição:

$$\lambda_{\psi_j}^T(x_f) = \frac{\partial \psi_j}{\partial y(x_f)} \quad (4.45)$$

resulta que a substituição de (4.45) em (4.44) leva à uma expressão do tipo:

$$d\psi_j = \underline{\lambda}_{\psi_j}^T(x_f) \delta y(x_f) \quad (4.46)$$

que é da forma da relação (4.38). Pode-se então escrever, a partir de (4.38):

$$d\psi_j = \underline{\lambda}_{\psi_j}^T(x_0) \delta y(x_0) + \int_{x_0}^{x_f} \left(\underline{\lambda}_{\psi_j}^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \delta \underline{u} \right) dx \quad (4.47)$$

A equação (4.47) permite relacionar variações no j -ésimo vínculo terminal com mudanças tanto nas condições iniciais não definidas como nas variáveis de controle. O sistema de equações diferenciais adjuntas que devem ser satisfeitas - pelos multiplicadores acima definidos tem a forma:

$$\frac{d}{dx} \left(\underline{\lambda}_{\psi_j} \right) = - \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{y}} \right)^T \underline{\lambda}_{\psi_j} \quad (n \text{ equações}) \quad (4.48)$$

Procedendo de maneira análoga para todos os b vínculos terminais em x_f , define-se a matriz de multiplicadores

$$\underline{\lambda}_{\psi} = \left[\underline{\lambda}_{\psi_1} \quad \underline{\lambda}_{\psi_2} \quad \dots \quad \underline{\lambda}_{\psi_b} \right], \text{ matriz } n \times b$$

$$\underline{\lambda}_\psi = \begin{bmatrix} \lambda^{(n-a+1)}\psi_1 & \lambda^{(n-a+1)}\psi_2 & \dots & \lambda^{(n-a+1)}\psi_b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n \psi_1 & \lambda_n \psi_2 & & \lambda_n \psi_b \end{bmatrix}_{x=x_0}$$

matriz (axb)

$$e \quad \underline{\delta\beta} = \begin{Bmatrix} \delta\beta_1 \\ \delta\beta_2 \\ \vdots \\ \delta\beta_a \end{Bmatrix} \quad \text{vetor (ax1),}$$

e a expressão (4.48) se transforma em:

$$d\underline{\psi} = \underline{\lambda}_\psi^T \delta\underline{\beta} + \int_{x_0}^{x_f} \left(\underline{\lambda}_\psi^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \delta\underline{u} \right) dx \quad (4.50)$$

A relação (4.50) é a maneira final de se estabelecer a ligação entre os vínculos terminais, as variáveis de controle e as condições iniciais não especificadas. É necessário, a esta altura, que se crie uma expressão semelhante para a função objetivo. No problema aqui definido, ao Índice de Desempenho, dado por:

$$\bar{J} = \phi \left[x_f, \underline{y}(x_f) \right] + \int_{x_0}^{x_f} L(\underline{y}, \underline{u}, x) dx ,$$

adiciona-se os vínculos dinâmicos:

$$\underline{f}(\underline{y}, \underline{u}, x) - \dot{\underline{y}} = 0$$

através de um vetor de n multiplicadores de Lagrange, $\underline{\lambda}_J$, para se chegar à forma:

$$\bar{J} = \phi \left[x_f, \underline{y}(x_f) \right] + \int_{x_0}^{x_f} \{ L(\underline{y}, \underline{u}, x) + \underline{\lambda}_J^T [\underline{f}(\underline{y}, \underline{u}, x) - \dot{\underline{y}}] \} dx \quad (4.51)$$

Integração por partes do integrando da expressão (4.51) leva a:

$$\bar{J} = \left[\phi - (\underline{\lambda}_J^T \underline{y}) \right]_{x_f} + \underline{\lambda}_J^T \underline{y} \Big|_{x_0} + \int_{x_0}^{x_f} (L + \underline{\lambda}_J^T \underline{f} + \dot{\underline{\lambda}}_J^T \underline{y}) dx \quad (4.52)$$

Considere-se, agora, uma variação em \bar{J} devido a variações no vetor de controle $\underline{u}(x)$ com as extremidades x_0 e x_f fixas. Tal variação é descrita por:

$$\begin{aligned} \delta \bar{J} = & \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial \underline{y}} - \underline{\lambda}_J^T \right) \delta \underline{y} \right]_{x_f} + \underline{\lambda}_J^T \delta \underline{y} \Big|_{x_0} + \\ & + \int_{x_0}^{x_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{y}} + \underline{\lambda}_J^T \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{y}} + \dot{\underline{\lambda}}_J^T \right) \delta \underline{y} + \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{u}} + \underline{\lambda}_J^T \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}} \right) \delta \underline{u} \right] dx \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\text{onde } \frac{\partial \phi}{\partial \underline{y}} = \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial y_1} ; \frac{\partial \phi}{\partial y_2} ; \dots ; \frac{\partial \phi}{\partial y_n} \right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{y}} = \left\{ \frac{\partial L}{\partial y_1} ; \frac{\partial L}{\partial y_2} ; \dots ; \frac{\partial L}{\partial y_n} \right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{u}} = \left\{ \frac{\partial L}{\partial u_1} ; \frac{\partial L}{\partial u_2} ; \dots ; \frac{\partial L}{\partial u_m} \right\}$$

Os multiplicadores λ_J devem ser escolhidos de modo a anular o coeficiente de $\delta \underline{y}$ no integrando de $\delta \bar{J}$, (4.53), isto é:

$$\dot{\lambda}_J^T = - \frac{\partial L}{\partial \underline{y}} - \lambda_J^T \frac{\partial f}{\partial \underline{y}} \quad (4.54)$$

As condições de contorno associadas ao sistema de equações dado por (4.54) devem ser tais que anulem a parte da expressão (4.53) definida na extremidade final x_f e seja coerente com os vínculos terminais no mesmo ponto. Deve-se impor, então, que, |B3| :

$$\lambda_{J_i}(x_f) = \begin{cases} 0 & i = 1, \dots, b \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_i} \right)_{x_f} & i = b+1, \dots, n \end{cases} \quad (4.55)$$

A partir dessa definição, (4.53) se reduz a:

$$\delta \bar{J} = \underline{\lambda}_J^T \delta \underline{y} \Big|_{x_0} + \int_{x_0}^{x_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{u}} + \underline{\lambda}_J^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \right) \delta \underline{u} \right] dx \quad (4.56)$$

Pelas mesmas considerações feitas para o caso dos vínculos terminais, o fato de n-a variáveis de estado serem - especificadas no extremo livre permite definir um novo vetor :

$$\underline{\lambda}_J = \begin{Bmatrix} \lambda_{(n-a+1)J} \\ \lambda_{(n-a+2)J} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_{nJ} \end{Bmatrix}_{x=x_0}$$

tal que a expressão de $\delta \bar{J}$, (4.56), não é alterada se passar a ser escrita na forma (4.57) abaixo:

$$\delta \bar{J} = \underline{\lambda}_J^T \delta \underline{\beta} + \int_{x_0}^{x_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{u}} + \underline{\lambda}_J^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \right) \delta \underline{u} \right] dx \quad (4.57)$$

A equação acima representa a forma final da descrição da influência de variações nas variáveis de controle e nas condições iniciais não especificadas sobre variações na função objetivo.

Tem-se agora a possibilidade de determinar a mudança no controle, $\delta \underline{u}$, e a mudança nas condições iniciais, $\delta \underline{\beta}$, de modo a mudar a trajetória na direção do gradiente da função objetivo e que é consistente com a tentativa de se satisfazer também os vínculos terminais. Entretanto, deve ser notado que as relações que ligam estas mudanças, (4.50) e (4.57), são obtidas por aproximações lineares, ou, de primeira ordem, e que se for exigida uma mudança muito rápida, estas aproximações podem ser totalmente falhas. Em consequência, alguma limitação deve ser imposta às mudanças no espaço dos controles e no espaço das condições iniciais de maneira a permitir que as relações (4.50) e (4.57) sejam válidas, [C1]. Coloca-se, então, um valor máximo no tamanho do passo, que representa a máxima variação dos controles e das condições iniciais entre duas iterações consecutivas, e que é definido por:

$$dS^2 = \delta \underline{\beta}^T \underline{B} \delta \underline{\beta} + \int_{x_0}^{x_f} (\delta \underline{u}^T \underline{W} \delta \underline{u}) dx \quad (4.58)$$

onde \underline{B} e \underline{W} são matrizes quadradas, simétricas e definidas positivas, de dimensões $(a \times a)$ e $(m \times m)$, respectivamente.

O problema se reduz, agora, a determinar as variações $\delta \underline{u}(x)$ e $\delta \underline{\beta}$ que, somadas às estimativas iniciais, $\underline{u}^{(1)}(x)$ e $\underline{\beta}^{(1)}$, causem uma melhor aproximação em relação à solução ótima. Tal problema pode ser colocado como o de se determinar $\delta \underline{u}$ e $\delta \underline{\beta}$ de modo a minimizar:

$$\delta \bar{J} = \underline{\lambda}_J^T \delta \underline{\beta} + \int_{x_0}^{x_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{u}} + \underline{\lambda}_J^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \right) \delta \underline{u} dx \quad (4.59)$$

satisfazendo os \underline{b} vínculos terminais:

$$\underline{d}\psi = \underline{\lambda}_\psi^T \delta \underline{\beta} + \int_{x_0}^{x_f} \left(\underline{\lambda}_\psi^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \right) \delta \underline{u} dx, \quad (4.60)$$

e satisfazendo ao vínculo escalar sobre a variação das condições iniciais e do controle sobre todo o intervalo:

$$dS^2 = \delta \underline{\beta}^T \underline{B} \delta \underline{\beta} + \int_{x_0}^{x_f} \left(\delta \underline{u}^T \underline{W} \delta \underline{u} \right) dx \quad (4.61)$$

Para se resolver tal problema, os vínculos (4.60) e (4.61) são adicionados ao funcional $\delta \bar{J}$ através de multiplicadores de Lagrange $\underline{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_b\}$ e μ (escalar), respectivamente. Chega-se, então, a:

$$\delta \bar{J} = \underline{\lambda}_J^T \delta \underline{\beta} + \underline{v}^T (d\underline{\psi} - \underline{\lambda}_\psi^T \delta \underline{\beta}) + \mu (dS^2 - \delta \underline{\beta}^T \underline{B} \delta \underline{\beta}) +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_f} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{u}} + \underline{\lambda}_J^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \right) \delta \underline{u} - \underline{v}^T \underline{\lambda}_\psi^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \delta \underline{u} - \mu \delta \underline{u}^T \underline{W} \delta \underline{u} \right] dx$$

(4.62)

A variação $\delta^2 \bar{J}$ deve ser nula para se obter a minimização. Sendo $\delta \bar{J}$ função de $\delta \underline{\beta}$ e $\delta \underline{u}$, $\delta^2 \bar{J}$ fornece:

$$\delta^2 \bar{J} = \left(\underline{\lambda}_J^T - \underline{v}^T \underline{\lambda}_\psi^T - 2\mu \delta \underline{\beta}^T \underline{B} \right) \delta^2 \underline{\beta} + \int_{x_0}^{x_f} \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{u}} + \underline{\lambda}_J^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \right) - \right.$$

$$\left. - \underline{v}^T \underline{\lambda}_\psi^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} - 2\mu \delta \underline{u}^T \underline{W} \right\} \delta^2 \underline{u} \} dx$$

(4.63)

A única maneira de verificar esta igualdade é a anulação dos coeficientes de $\delta^2 \underline{\beta}$ e $\delta^2 \underline{u}$. Em consequência, obtém-se:

$$\underline{\lambda}_J^T - \underline{v}^T \underline{\lambda}_\psi^T - 2\mu \delta \underline{\beta}^T \underline{B} = 0$$

(4.64)

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{u}} + \underline{\lambda}_J^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} - 2\mu \delta \underline{u}^T \underline{W} = 0$$

(4.65)

A relação (4.64) fornece as condições para as variáveis de estado na extremidade inicial, enquanto (4.65) fornece as condições para as variáveis de controle. Resolvendo (4.64) para $\delta \underline{\beta}$ e (4.65) para $\delta \underline{u}$, usando-se o fato de \underline{B} e \underline{W} serem simétricas, chega-se a:

$$\delta \underline{\beta} = \frac{\underline{B}^{-1}}{2\mu} (\underline{\lambda}_J - \underline{\lambda}_\psi \underline{v}) \quad (4.66)$$

$$\delta \underline{u} = \frac{\underline{W}^{-1}}{2\mu} \left(\frac{\partial L^T}{\partial \underline{u}} + \frac{\partial f^T}{\partial \underline{u}} \underline{\lambda}_J - \frac{\partial f^T}{\partial \underline{u}} \underline{\lambda}_\psi \underline{v} \right) \quad (4.67)$$

Para eliminar μ e \underline{v} das relações encontradas acima devem ser usadas as definições de dS^2 e $d\underline{\psi}$. Assim, substituindo $\delta \underline{\beta}$ e $\delta \underline{u}$, de (4.66) e (4.67), na expressão de $d\underline{\psi}$, (4.60), desenvolvendo e agrupando:

$$d\underline{\psi} = \frac{1}{2\mu} \left[\underline{\lambda}_\psi^T \underline{B}^{-1} \underline{\lambda}_J + \int_{x_0}^{x_f} \underline{\lambda}_\psi^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \underline{W}^{-1} \left(\frac{\partial L^T}{\partial \underline{u}} + \frac{\partial f^T}{\partial \underline{u}} \underline{\lambda}_J \right) dx + \right. \\ \left. - \left(\underline{\lambda}_\psi^T \underline{B}^{-1} \underline{\lambda}_\psi + \int_{x_0}^{x_f} \underline{\lambda}_\psi^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \underline{W}^{-1} \frac{\partial f^T}{\partial \underline{u}} \underline{\lambda}_\psi dx \right) \underline{v} \right] \quad (4.68)$$

Definindo:

$$I_{\psi J} = \underline{\lambda}_\psi^T \underline{B}^{-1} \underline{\lambda}_J + \int_{x_0}^{x_f} \underline{\lambda}_\psi^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \underline{W}^{-1} \left(\frac{\partial L^T}{\partial \underline{u}} + \frac{\partial f^T}{\partial \underline{u}} \underline{\lambda}_J \right) dx \quad (4.69)$$

$$I_{\psi\psi} = \underline{\lambda}_\psi^T \underline{B}^{-1} \underline{\lambda}_\psi + \int_{x_0}^{x_f} \underline{\lambda}_\psi^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \underline{W}^{-1} \frac{\partial f^T}{\partial \underline{u}} \underline{\lambda}_\psi dx \dots \quad (4.70)$$

onde $I_{\psi J}$ é um vetor de b componentes e $I_{\psi\psi}$ é uma matriz $(b \times b)$, simétrica, $d\psi$ fica na forma:

$$d\psi = \frac{1}{2\mu} (I_{\psi J} - I_{\psi\psi} \underline{v}) \quad (4.71)$$

Resolvendo (4.71) para \underline{v} , chega-se a:

$$\underline{v} = I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi J} - 2\mu I_{\psi\psi}^{-1} d\psi \quad (4.72)$$

Substituindo-se, agora, $\underline{\delta\beta}$ e $\underline{\delta u}$, de (4.65) e (4.66), na expressão de dS^2 , (4.61), desenvolvendo e agrupando, vem:

$$\begin{aligned} dS^2 = & \frac{1}{4\mu^2} \left\{ \underline{\lambda}_J^T \underline{B}^{-1} \underline{\lambda}_J + \int_{x_0}^{x_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{u}} + \underline{\lambda}_J^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \right) \underline{W}^{-1} \left(\frac{\partial L^T}{\partial \underline{u}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \underline{\lambda}_J \right) dx + \right. \\ & + \underline{v}^T \left[\underline{\lambda}_\psi^T \underline{B}^{-1} \underline{\lambda}_\psi + \int_{x_0}^{x_f} \underline{\lambda}_\psi^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \underline{W}^{-1} \frac{\partial f^T}{\partial \underline{u}} \underline{\lambda}_\psi dx \right] \underline{v} - \\ & \left. - \left[\underline{\lambda}_J^T \underline{B}^{-1} \underline{\lambda}_\psi + \int_{x_0}^{x_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{u}} + \underline{\lambda}_J^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \right) \underline{W}^{-1} \frac{\partial f^T}{\partial \underline{u}} \underline{\lambda}_\psi dx \right] \underline{v} + \right\} \end{aligned}$$

$$+ \underline{v}^T \left[\underline{\lambda}_{\psi}^T \underline{B}^{-1} \underline{\lambda}_J + \int_{x_0}^{x_f} \underline{\lambda}_{\psi}^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \underline{W}^{-1} \left(\frac{\partial L^T}{\partial \underline{u}} + \frac{\partial f^T}{\partial \underline{u}} \underline{\lambda}_J \right) dx \right] \quad (4.73)$$

Definindo um escalar I_{JJ} por:

$$I_{JJ} = \underline{\lambda}_J^T \underline{B}^{-1} \underline{\lambda}_J + \int_{x_0}^{x_f} \underline{\lambda}_{\psi}^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \underline{W}^{-1} \left(\frac{\partial L^T}{\partial \underline{u}} + \frac{\partial f^T}{\partial \underline{u}} \underline{\lambda}_J \right) dx \quad (4.74)$$

e recorrendo às definições de $I_{\psi J}$ e $I_{\psi\psi}$, (4.73) pode ser resumida em:

$$dS^2 = \frac{1}{4\mu^2} (I_{JJ} + \underline{v}^T I_{\psi\psi} \underline{v} - I_{\psi J}^T \underline{v} - \underline{v}^T I_{\psi J}) \quad (4.75)$$

Na expressão acima, substituindo o valor de \underline{v} , obtido em (4.72), desenvolvendo e cancelando alguns dos termos, chega-se a:

$$4\mu^2 (dS^2 - d\underline{\psi}^T I_{\psi\psi}^{-1} d\underline{\psi}) = I_{JJ} - I_{\psi J}^T I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi J} \quad (4.76)$$

donde:

$$2\mu = \pm \left(\frac{I_{JJ} - I_{\psi J}^T I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi J}}{dS^2 - d\underline{\psi}^T I_{\psi\psi}^{-1} d\underline{\psi}} \right)^{1/2} \quad (4.77)$$

Em se tratando de um problema de minimização, μ deve ser negativo. Este fato decorre da exigência, na formulação do método, de que $\delta^2 \bar{J}$ seja nulo e, para se ter minimização, $\delta^3 \bar{J}$ deve ser positivo. Esta segunda condição é obtida se o multiplicador μ é negativo, $|C1|$. Em consequência deve ser adotado o sinal negativo em (4.77), isto é:

$$\lambda \mu = - \left(\frac{I_{JJ} - I_{\psi J}^T I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi J}}{dS^2 - d\underline{\psi}^T I_{\psi\psi}^{-1} d\underline{\psi}} \right)^{1/2} \quad (4.78)$$

Substituindo, agora, os valores de μ e \underline{v} , obtidos em (4.78) e (4.72) nas expressões de $\delta \underline{\beta}$ e $\delta \underline{u}$, respectivamente (4.66) e (4.67), são obtidos os valores ótimos das correções a serem feitas nas condições das variáveis de estado na extremidade inicial e no vetor de variáveis de controle, limitadas a um passo máximo dS^2 . São dadas por:

$$\delta \underline{\beta} = \underline{B}^{-1} (\underline{\lambda}_{\psi} I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi J} - \underline{\lambda}_J) \left(\frac{dS^2 - d\underline{\psi}^T I_{\psi\psi}^{-1} d\underline{\psi}}{I_{JJ} - I_{\psi J}^T I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi J}} \right)^{1/2} + \underline{B}^{-1} \underline{\lambda}_{\psi} I_{\psi\psi}^{-1} d\underline{\psi} \quad (4.79)$$

$$\delta \underline{u} = -\underline{W}^{-1} \left(\frac{dS^2 - d\underline{\psi}^T I_{\psi\psi}^{-1} d\underline{\psi}}{I_{JJ} - I_{\psi J}^T I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi J}} \right)^{1/2} \left[\frac{\partial L^T}{\partial \underline{u}} + \frac{\partial f^T}{\partial \underline{u}} (\underline{\lambda}_J - \underline{\lambda}_{\psi} I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi J}) \right] + \underline{W}^{-1} \frac{\partial f^T}{\partial \underline{u}} \underline{\lambda}_{\psi} I_{\psi\psi}^{-1} d\underline{\psi} \quad (4.80)$$

Decorre, então, que as novas condições iniciais e as novas funções de controle a serem usadas para gerar a nova trajetória nominal são calculadas por:

$$\underline{\beta}^{(2)} = \underline{\beta}^{(1)} + \delta \underline{\beta}^{(1)} \quad (4.81)$$

$$\underline{u}^{(2)} = \underline{u}^{(1)} + \delta \underline{u}^{(1)} \quad (4.82)$$

com $\delta \underline{\beta}^{(1)}$ e $\delta \underline{u}^{(1)}$ resultantes das expressões acima. O algoritmo, passo a passo, é estabelecido no item seguinte.

4.4.2 - DESCRIÇÃO DO ALGORITMO

Algumas observações devem ainda ser feitas para tornar viável a implantação do algoritmo. Dessa forma, na primeira integração do sistema de variáveis de estado, usando-se estimativas $\underline{u}^{(1)}$ e $\underline{\beta}^{(1)}$, os vínculos terminais $\underline{\psi}[\ell, \underline{y}(\ell)] = 0$ não são geralmente satisfeitos. O cálculo de $d\underline{\psi}$, a ser usado para cálculo das correções $\delta \underline{\beta}$ e $\delta \underline{u}$, poderia então ser feito através de:

$$d\underline{\psi}_r = - (\underline{\psi}[\ell, \underline{y}(\ell)]^{(1)} - \underline{\psi}[\ell, \underline{y}(\ell)]) \quad (4.83)$$

onde $\underline{y}(\ell)^{(1)}$ é o valor do vetor de variáveis de estado, na extremidade $x = \ell$, obtido com as estimativas $\underline{\beta}^{(1)}$ e $\underline{u}^{(1)}$ e o

índice r em $d\underline{\psi}_r$ representa o valor real de $d\underline{\psi}$.

No entanto, o uso de $d\underline{\psi}_r$, na forma dada por (4.83) pode causar transtornos pois $d\underline{\psi}_r$ pode ser muito grande e quebrar a linearidade admitida no desenvolvimento das relações necessárias para o algoritmo. Em consequência, define-se o vetor $d\underline{\psi}$ a ser usado realmente no programa de solução numérica como uma parcela do vetor $d\underline{\psi}$ calculado em (4.83), fornecida por:

$$d\underline{\psi} = -k_p \{ \underline{\psi}[l, y^{(1)}(l)] - \underline{\psi}[l, y(l)] \} = -k_p d\underline{\psi}_r \quad (4.84)$$

onde k_p é uma constante tal que $0 < k_p < 1$.

Também deve ser colocado que é característico ao método do gradiente que exista convergência para os vínculos terminais mais rápida que para a função objetivo. A fim de se estabelecer um critério de parada para o algoritmo, é necessário obter uma expressão que represente a variação do Índice de Desempenho, mantida a variação em $d\underline{\psi}$ como nula. Para tanto, substitue-se os valores de $\delta\underline{u}$ e $\delta\underline{\beta}$, (4.79) e (4.80), na expressão de $\delta\bar{J}$, (4.59). Decorre que:

$$\delta\bar{J} = -(\delta S^2 - d\underline{\psi}^T I_{\psi\psi}^{-1} d\underline{\psi})^{1/2} (I_{JJ} - I_{\psi J}^T I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi J})^{1/2} + I_{\psi J}^T I_{\psi\psi}^{-1} d\underline{\psi} \quad (4.85)$$

Em consequência, o módulo da variação da função objetivo \bar{J} na direção do gradiente que é consistente com a ma-

nutenção de $d\underline{\psi} = 0$ é dada pela derivada de $\delta\bar{J}$ em relação ao tamanho do passo usado na iteração, isto é:

$$\left[\frac{d(\delta\bar{J})}{dS} \right]_{\psi=0} = (I_{JJ} - I_{\psi J}^T I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi J})^{1/2} \quad (4.86)$$

A relação (4.85) é, então, usada como critério de parada para o algoritmo, que pode ser colocado em função dos seguintes passos:

- 1º passo: Estimar as funções de controle $\underline{u}^{(1)}(\underline{x})$ e $\underline{\beta}^{(1)}$.
- 2º passo: Integrar o sistema de equações diferenciais das variáveis de estado, (4.29), entre x_0 e x_f , usando $\underline{u}^{(1)}(\underline{x})$ e $\underline{\beta}^{(1)}$. Armazenar o valor de $d\underline{\psi}_r$ na extremidade final.
- 3º passo: Integrar os sistemas adjuntos em $\underline{\lambda}_\psi$ e $\underline{\lambda}_J$, equações (4.48) e (4.54), usando, respectivamente, as condições de contorno (4.45) e (4.55). Armazenar os valores $\underline{\lambda}_\psi$ e $\underline{\lambda}_J$ ao longo do intervalo.
- 4º passo: Avaliar as matrizes $\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}$ e $\frac{\partial L}{\partial \underline{u}}$ ao longo da trajetória e armazená-las.

- 5º passo: Avaliar, na extremidade $x = x_0$, $\underline{\dot{\psi}}$ e $\underline{\dot{J}}$.
- 6º passo: Integrar as funções associadas e calcular $I_{\psi J}$, de (4.69), $I_{\psi\psi}$ de (4.70), e I_{JJ} , de (4.74).
- 7º passo: Estimar $d\underline{\psi}$, através de (4.84), e dS^2 , tamanho do passo.
- 8º passo: Calcular $dS^2 - d\underline{\psi}^T I_{\psi\psi}^{-1} d\underline{\psi}$. Se este termo é positivo, continuar. Caso contrário, fazer correção no tamanho de $d\underline{\psi}$, de modo a tornar o termo acima positivo.
- 9º passo: Calcular $\delta\underline{\beta}$ e $\delta\underline{u}$ de (4.79) e (4.80). Avaliar as novas variáveis de controle $\underline{u}^{(2)}$ e condições iniciais $\underline{\beta}^{(2)}$ a partir de $\underline{u}^{(2)} = \underline{u}^{(1)} + \delta\underline{u}^{(1)}$ e $\underline{\beta}^{(2)} = \underline{\beta}^{(1)} + \delta\underline{\beta}^{(1)}$.
- 10º passo: Se $d\underline{\psi}_r$ já está suficientemente próximo de zero, examinar $\left[\frac{d(\delta\bar{J})}{dS} \right]_{\psi=0}$, da equação (4.86), para verificar se a solução achada já se encontra suficientemente perto da solução minimizante.
- 11º passo: Se os vínculos terminais $\underline{\psi} = 0$ são satisfeitos, mas o valor de $\left| \frac{d(\delta\bar{J})}{dS} \right|_{\psi=0}$ não é suficientemente pequeno, voltar ao 1º passo e recomeçar o processo.

12º passo: Terminar o processo quando a solução obtida satisfaz $\psi = 0$ com precisão suficiente e fornece um valor de $\left[\frac{d(\delta J)}{dS} \right]_{\psi=0}$ abaixo de um pré-determinado nível aceitável.

As equações necessárias para a solução numérica do problema proposto são obtidas no Apêndice A.

4.3 - DIAGRAMA DE BLOCOS

Para tornar claro o algoritmo acima desenvolvido segue na Figura 4.1, o diagrama de blocos que representa o processo:

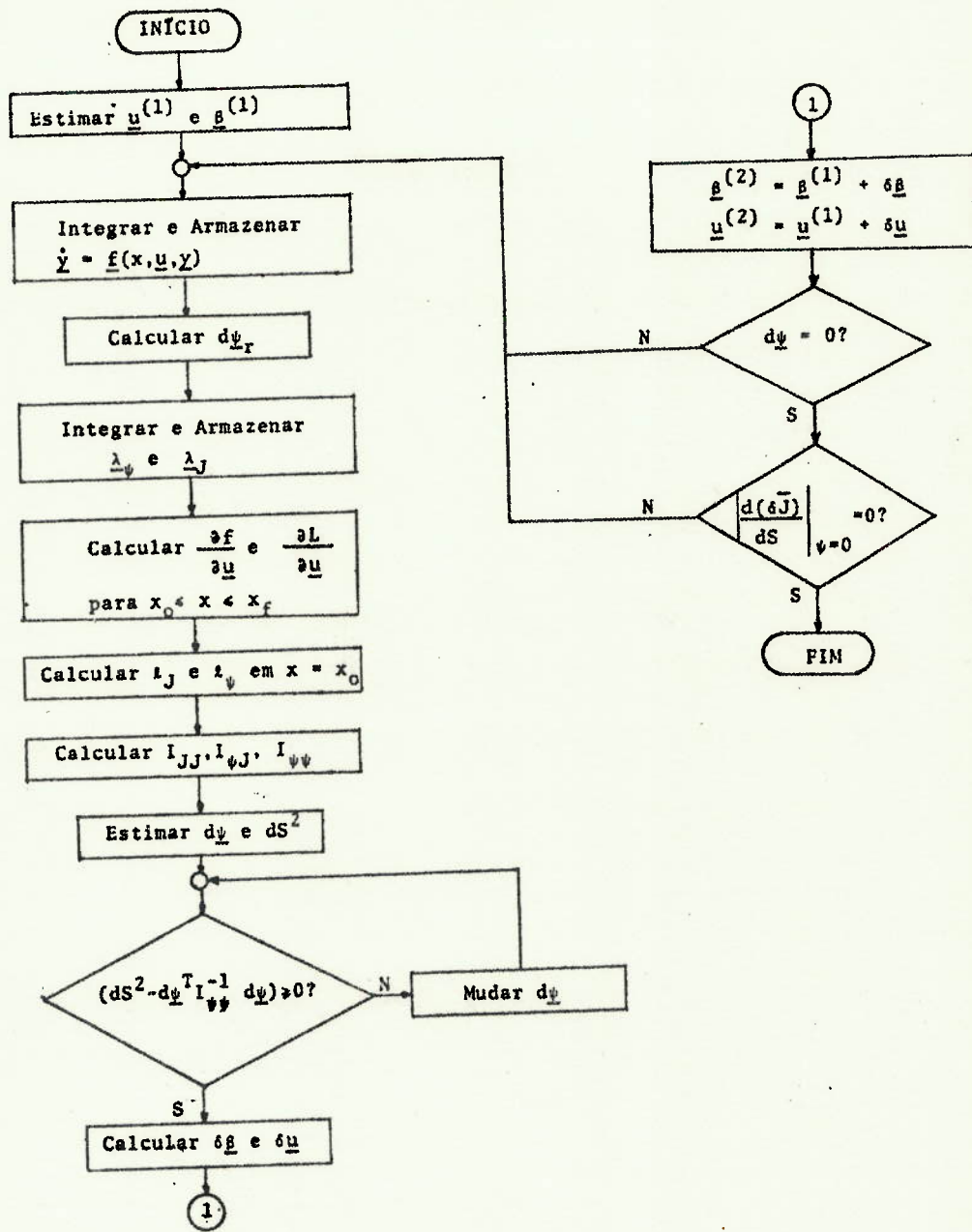


Figura 4.1 - Diagrama de Blocos do Algoritmo

CAPÍTULO 5

RESULTADOS OBTIDOS E SUA ANÁLISE

5.1 - IMPLANTAÇÃO DO PROGRAMA DE SOLUÇÃO NUMÉRICA

Uma vez definidos o modelo matemático a ser empregado no processo de otimização para a viga em balanço e o correspondente tratamento numérico, é preciso ainda estabelecer quais casos justificam análise e quais critérios de comparação são utilizados para se poder montar o conjunto de parâmetros que devem ser fornecidos para se obter a solução numérica em computador. No que se segue, pode-se notar algumas modificações na forma do problema colocado sem, no entanto, alterar a sua essência. Essas modificações tem a intenção de tornar os casos analisados mais compatíveis com a realidade.

5.1.1 - CRITÉRIO DE COMPARAÇÃO

As comparações, para efeito de análise dos resultados, são baseadas numa viga de secção transversal constante ao longo de todo o comprimento. Esse comprimento, por sua

vez, é mantido fixo durante o processamento de cada caso.

A viga de secção constante é usada como estimativa inicial do programa para todos os casos analisados. Com essa exigência, são atingidos dois objetivos: estabelece-se uma melhor comparação entre a viga otimizada e a de secção constante original e atende-se à necessidade de não violação dos vínculos de desigualdade durante a primeira iteração. Este segundo fator é muito importante, pois a técnica das funções de penalidade não se mostrou, ao menos no trabalho aqui apresentado, capaz de corrigir uma estimativa inicial que não obedece aos vínculos de desigualdade.

Quanto ao comprimento da viga, este é estimado a partir da coluna para testes dinâmicos, $|F1|$, onde foi adotado o valor $l = 1,2$ m. Tal comprimento é mantido para maioria dos casos tratados, havendo apenas uma exceção onde se usa $l = 1,8$ m.

Em princípio, os comprimentos adotados não são grandes comparados às dimensões da secção transversal o que leva a se perguntar se efeitos de cisalhamento e inércia de rotação não teriam influência sobre os resultados. No entanto, por se tratar de uma primeira aproximação ao modelo final, tais efeitos devem ser levados em conta num estudo posterior que atente para o detalhamento final do projeto.

Em todos os processamentos é admitido que a viga seja de aço. Com isso as propriedades do material, necessárias para a solução e que se resumem ao módulo de elasticidade e a densidade volumétrica, são dados por:

- Módulo de Elasticidade : $E = 2,1 \times 10^{10} \text{ kgf/m}^2$
- Densidade Volumétrica : $\rho = 7,8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

5.1.2 - CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO HOMOGÊNEAS

Como já colocado nos itens anteriores, pelo menos duas condições de contorno não homogêneas devem ser associadas ao problema, a saber, o deslocamento máximo no extremo livre da viga e o valor da função y_3 no extremo engastado. Esta última gera o valor do momento fletor na extremidade fixa, juntamente com a área e raio de giração otimizados. Na definição do modelo matemático, as condições de contorno acima recebem os símbolos ϵ_1 para o máximo deslocamento da extremidade livre e ϵ_2 para o valor de y_3 no extremo engastado.

A determinação de ϵ_1 e ϵ_2 é feita a partir da viga de secção transversal constante usada para estimativa inicial. Para essa viga inicial, a geometria é completamente definida. A secção transversal é admitida retangular e de dimensões conhecidas, o que leva a se colocar funções área e raio de giração constantes ao longo do comprimento. Com isso, dado um valor da máxima deflexão no extremo livre, ϵ_1 , o valor da função y_3 no engastamento pode ser estimado a partir da linha elástica dinâmica, $|V_1|$. O procedimento acima, isto é, dada uma deflexão ϵ_1 , calcular o valor de y_3 no engastamento, é usado para gerar os valores ϵ_1 e ϵ_2 .

Nos casos analisados são usados valores $\epsilon_1 = 0,003$ m para a deflexão e $\epsilon_2 = 0,00978$ m⁻¹ para a função y_3 em $x = 0$. Tais números tem a intenção de situar os citados casos dentro da hipótese de pequenas vibrações, feita no desenvolvimento do modelo matemático (capítulo 3). O valor acima de ϵ_2 corresponde a uma deflexão menor que 0,003m para que o momento fletor na extremidade engastada da viga final seja menor que o correspondente à viga de secção constante, tendo em vista uma melhoria da sollicitação nessa secção. Outros valores de ϵ_1 e ϵ_2 foram também testados e não apresentam obstáculos para a convergência do método.

Da equação da linha elástica dinâmica para a viga de secção constante, $|V1|$, é possível, também, obter o valor de função y_4 no engastamento. Esse valor é usado para se iniciar o processamento. Nota-se, então, que a viga usada como estimativa inicial obedece às condições de contorno impostas ao problema de otimização a menos da frequência fundamental e do valor ligeiramente modificado de ϵ_2 . Tal procedimento deve ser feito sistematicamente pois, se o processamento é iniciado com todas as condições de contorno satisfeitas, torna-se muito difícil mante-las durante a convergência para a solução ótima.

5.1.3 - NÍVEIS DE FREQUÊNCIA DO PRIMEIRO MODO

Para o algoritmo usado, com as condições de si-

mulação definidas, é possível observar que o ajuste das frequências do primeiro modo se faz de maneira muito lenta. Em outras palavras, ocorre que uma vez estimado um valor para a frequência fundamental, usado juntamente com a viga de seção constante, há convergência para a solução com respeito à área, ao raio de giração e aos vínculos terminais, enquanto a frequência permanece próxima ao nível de partida, aumentando ou diminuindo sempre muito pouco entre iterações consecutivas.

Essa constatação conduz à necessidade de se definir faixas de interesse para situar a frequência fundamental da viga. Com isso, os casos analisados são separados segundo três níveis de frequência, a saber, 2000 rd/s ou 320Hz; 3000 rd/s ou 480 Hz e 4000 rd/s ou 640 Hz. Os valores acima são, então, usados para iniciar o processamento e, como será visto mais adiante, aumentam, ou diminuem, até cerca de 5% em relação aos originais.

5.1.4 - FUNÇÕES DE PENALIZAÇÃO E CONSTANTES DE PESO.

A atribuição de valores para as funções de penalização e para as constantes de peso constitui tarefa delicada, pois é sensível a dependência, tanto da solução procurada como das linearizações feitas para obtenção do algoritmo, com relação às citadas funções. Em outras palavras, as funções de penalização e peso afetam a solução e podem causar destruição da linearidade das aproximações usadas no desenvolvimento do

algoritmo, causando divergência do processo numérico. Esses fatores se tornam críticos nas primeiras iterações do processamento.

Dessa maneira, a constante de peso K_S que comparece no integrando da função objetivo modificada:

$$\bar{J} = K_J [y_{10}(l)]^2 + \int_0^l \left[\rho y_5^2 + \frac{K_S}{y_9^2} \right] dx, \quad (5.1)$$

é calculada de modo que as duas parcelas sob o integrando tenham mesma ordem de grandeza. Como a parcela que envolve a função de área, $\rho y_5^2(x)$, integrada ao longo do comprimento tem valor da ordem de 10^2 (kg . m²) nas primeiras iterações, os valores iniciais para a frequência fundamental levam a que K_S seja da ordem de 10^9 (kg.m².rd²/s²) para compatibilizar as duas parcelas. É adotado aqui o valor $K_S = 10^9$, mantido para todos os casos analisados, pois outros valores testados causaram problemas de convergência.

Os mesmos cuidados devem ser tomados com relação às funções de penalidade. Tanto o peso K_J da função objetivo \bar{J} , (5.1), como as funções K_i englobadas na definição da variável auxiliar de estado $y_{10}(x)$:

$$\dot{y}_{10}(x) = K_1(C_1)C_1^2 + K_2(C_2)C_2^2 + K_3(C_3)C_3^2 + K_4(C_4)C_4^2 \quad (5.2)$$

$$\text{com } K_i(C_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } C_i \leq 0 \\ K_{p,i} & \text{se } C_i > 0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, 4$$

devem ser estabelecidas a partir de alguns resultados previamente processados, já que não existe maneira de se antecipar o comportamento do sistema nas vizinhanças das fronteiras. - Neste trabalho se adota o procedimento de manter os pesos K_i restritos a valores próximos à unidade e ajustar K_j segundo as conveniências de cada caso, o que parece o modo mais simples de ajuste dos referidos pesos.

Os demais elementos que guardam caráter de função de peso são analisados em item posterior.

5.1.5 - FRONTEIRAS PARA RESTRIÇÕES DE DESIGUALDADE

Para os vínculos de desigualdade envolvidos no problema de otimização são agora colocados os valores das constantes que definem as fronteiras de estado e, assim, restringem o espaço das possíveis soluções.

Das quatro restrições estabelecidas sobre as variáveis de estado, uma não traz maiores inconvenientes em virtude do comportamento do algoritmo numérico. Trata-se do vínculo:

$$C_4(\underline{y}, x) = y_9 - \omega_0 \leq 0 \quad (5.3)$$

Como já citado, nos casos simulados, a tendência da frequência natural do primeiro modo é evoluir, a partir da estimativa inicial, para um valor pouco diferente. Em assim -

sendo, como não há grande redução do valor citado nos casos - em que há convergência, conclue-se que basta tomar uma estimativa inicial maior que ω_0 necessário, para que o vínculo (5.1) seja respeitado ao longo do processamento. O valor usado para comparação, uma vez que a restrição está implantada no programa, definido como a menor frequência aceitável para dimensionamento, é $\omega_0 = 1000$ rd/s.

Quanto ao vínculo de desigualdade imposto para assegurar a existência apenas do primeiro modo de vibração, - isto é,

$$C_1(y,x) = -y_2(x) \leq 0 \quad (5.4)$$

alterações devem ser feitas para sua implantação definitiva. De fato, os processamentos realizados usando (5.4) comprovam que se a igualdade é atingida, o método converge para o segundo modo de vibração e se torna extremamente difícil trazê-lo de volta para o primeiro modo com o emprego de técnicas de penalização.

A principal modificação introduzida consiste - em se definir uma função de comparação de forma que se comece a penalizar no instante em que a função $y_2(x)$ se aproxima demasiadamente da fronteira. Como uma das condições de contorno no extremo engastado é $y_2(0) = 0$, esta função de comparação, $F_c(x)$, pode ser definida como sendo nula nos primeiros passos de integração numérica do sistema de equações diferenciais -

combinada com uma reta de pequena inclinação no comprimento - restante do intervalo de definição do problema. Este procedimento se mostrou bastante conveniente para alguns dos casos - analisados.

Tem-se, com isso, a transformação do vínculo - de desigualdade (5.4) em outra restrição \bar{C}_1 tal que:

$$\bar{C}_1(y,x) = F_c(x) - y_2(x) \leq 0 \quad (5.5)$$

onde

$$F_c(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \leq \bar{h} \\ \frac{\theta_0 x}{\ell} & \bar{h} < x \leq \ell \end{cases} \quad (5.6)$$

θ_0 define a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo x e \bar{h} define o comprimento em que se compara $y_2(x)$ com a função nula. A função de comparação $F_c(x)$ tem, então, o aspecto da Figura 5.1, abaixo:

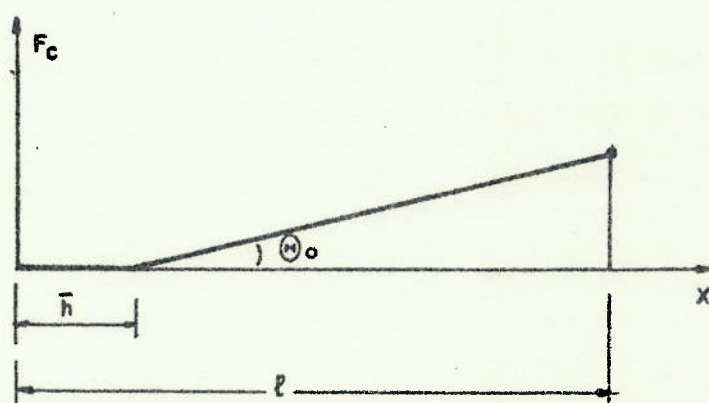


Figura 5.1- Função de Comparação para a Restrição \bar{C}_1

Para os casos aqui analisados, adota-se $\theta_0 = 10^{-4}$ e $\bar{h} = 0,012$ m.

As restantes restrições, definidas sobre a área e o raio de giração, e que são, respectivamente:

$$C_2(y,x) = C - y_5(x) \leq 0 \quad (5.7)$$

$$C_3(y,x) = D - y_6(x) \leq 0 \quad (5.8)$$

foram atribuídos, primeiramente, os valores:

$$C = 10^{-4} \text{ m}^2, \quad D = 10^{-4} \text{ m}^2 \quad (5.9)$$

Torna-se claro, então, que com os valores acima de C e D pretende-se apenas garantir a positividade das funções área e raio de giração ao longo do comprimento, pois tais valores são muito pequenos. Casos simulados com as condições C e D assim colocadas mostram, para os níveis de frequência adotados, um bom comportamento com relação a área e ao raio de giração. Este último, no entanto, resulta numa função sempre crescente a partir do extremo engastado, atingindo, às vezes, valores por demais altos. Assim, poderia ser questionado se não é mais correto colocar um limite superior no valor do raio de giração, de modo a mantê-lo numa faixa mais realista fisicamente. Esta modificação pode ser realizada de maneira simples, pela inversão da desigualdade (5.8), transformando-a numa outra restrição:

$$\bar{C}_3(\underline{y}, x) = \gamma_6(x) - \bar{D} \leq 0 \quad (5.10)$$

onde \bar{D} é o valor máximo permitido para o raio de giração.

Em vista do comportamento citado das funções - área e raio de giração, o novo vínculo, (5.10) implica criar limites inferior e superior para o momento de inércia ao longo de todo o comprimento da viga.

Para os casos analisados, com vínculos de desigualdade nas variáveis de estado na forma (5.7) e (5.10), dois conjuntos de valores são atribuídos a C e \bar{D} , a saber:

$$C = 0,002 \text{ m}^2 \quad ; \quad \bar{D} = 0,40 \text{ m}^2 \quad (5.11)$$

$$C = 0,006 \text{ m}^2 \quad ; \quad \bar{D} = 0,25 \text{ m}^2 \quad (5.12)$$

No que se segue, os casos simulados com $C = 10^{-4} \text{ m}^2$ e $D = 10^{-4} \text{ m}^2$, (5.9), são referidos como casos - com pequenas restrições; os casos em que C e \bar{D} são dados por (5.11) tomam o nome de casos com restrições médias e, finalmente, para C e \bar{D} conforme (5.12), casos com restrições fortes.

5.1.6 - AJUSTE DO TAMANHO DO PASSO E DO COEFICIENTE DE CORREÇÃO DOS VÍNCULOS TERMINAIS.

Métodos de gradiente de primeira ordem, na forma proposta por Bryson e Denham, [B2], ou por Bryson e Ho, [B3], são conhecidos por uma característica de convergência extremamente rápida para satisfação dos vínculos terminais. Citron, [C1], recomenda que uma vez satisfeitos os vínculos terminais deve-se atentar apenas para a manutenção dos mesmos vínculos nos níveis já atingidos. Esta tendência, no entanto, absolutamente não se repete no algoritmo de gradiente modificado que é desenvolvido neste trabalho. Pelo contrário, a convergência para os vínculos terminais resulta a parte de mais difícil implantação no programa de solução numérica. Acredita-se que este fato se deva à existência de duas condições nulas a serem satisfeitas no extremo livre, aliada à necessidade de seguidas correções das condições de contorno não especificadas no extremo engastado.

Resulta, daí, a necessidade de se armar um esquema que force a convergência do processo numérico para a verificação dos vínculos terminais. Tal esquema conduz a um mecanismo de controle do passo dS^2 entre duas iterações e do coeficiente k_p de correção dos vínculos terminais, onde dS^2 e k_p são definidos por:

$$dS^2 = \delta \underline{\beta}^T \underline{B} \delta \underline{\beta} + \int_{x_0}^{x_f} (\delta \underline{u}^T \underline{W} \delta \underline{u}) dx \quad , \quad (5.13)$$

$$d\underline{\psi} = - k_p d\underline{\psi}_r \quad (5.14)$$

onde $\underline{\delta\beta}$ é o vetor de correção das condições de contorno não especificadas, $\underline{\delta u}$ é o vetor de correção das funções de controle, \underline{B} e \underline{W} são matrizes de peso e $d\underline{\psi}_r$ é o valor calculado dos vínculos terminais a cada iteração.

Uma definição correta das matrizes \underline{B} e \underline{W} que comparecem em (5.13), é também fator importante para se conseguir convergência. No presente caso, as matrizes são tomadas diagonais, pois, assim, evita-se a colocação de termos de influência cruzados, nem sempre fáceis de serem usados.

A determinação dos termos das matrizes citadas deve ser feita pela observação dos resultados de alguns processamentos o que, para os casos apresentados, parece ser a única maneira de analisá-los, embora a literatura no assunto indique outros caminhos, [B3]. Assim, como um exemplo, a pequena sensibilidade a mudanças na frequência natural leva a se definir o termo correspondente da matriz \underline{B} (B_{66}) como um termo muito pequeno (10^{-6}). A mesma filosofia deve ser seguida para todos os outros termos de \underline{B} e \underline{W} , cujos valores são mantidos constantes durante o processamento de cada caso.

Obtidas matrizes \underline{B} e \underline{W} coerentes, o ajuste do tamanho do passo dS^2 e da constante k_p é realizado em duas etapas. A propagação das equações diferenciais que regem o movimento do sistema só é aceita, numa primeira etapa, se uma norma, criada a partir do valor absoluto dos três vínculos -

terminais, $d\psi_r$, diminui em relação à mesma norma obtida na -
iteração anterior. Aqui, a diminuição do valor da função obje-
tivo \bar{J} é desprezada em relação à convergência nos vínculos -
terminais. Quando essa norma atinge um pré-determinado limite
inferior, a comparação passa a ser feita com os valores da -
função objetivo entre duas iterações consecutivas, sendo a -
propagação aceita se o valor correspondente da função objeti-
vo é inferior a um valor pouco maior (2% a 5%) que o da pro-
pagação anterior. No caso de nenhuma das duas condições acima
serem satisfeitas, a propagação é então recusada e retorna-se
a iteração anterior para novo cálculo das correções nas fun-
ções de controle e nas condições de contorno não especifica-
das, com o uso de outros valores da constante k_p de correção
dos vínculos terminais. Testados vários outros valores de k_p ,
se ainda não se conseguir satisfazer nenhum dos critérios ci-
tados, o tamanho do passo dS^2 é diminuído para metade de seu
valor corrente e são novamente testados os valores possíveis
de k_p . Este procedimento é mantido até que se consiga satisfa-
zer um dos critérios ou até que o número de propagações recu-
sadas atinja um valor limite ou, ainda, que o tamanho do passo
 dS^2 se torne muito pequeno para acarretar mudanças significa-
tivas nas iterações posteriores. Sob qualquer uma das duas úl-
timas condições, o processamento numérico é suspenso.

No programa se encontra também implantado um
dispositivo para aumento do tamanho do passo dS^2 ou da cons-
tante k_p se o comportamento do sistema implica numa boa conver-
gência para um número razoável de iterações seguidas. A inten-

ção é, então, provocar uma convergência mais rápida desde -
que existam bases para tal.

Os mecanismos de ajuste do tamanho do passo e da constante de correção para os vínculos terminais acima descritos mostram-se indispensáveis para uso do algoritmo de gradiente de primeira ordem desenvolvido. Exposição mais detalhada acerca desses mecanismos pode ser observada nos diagramas de bloco do Apêndice A.2 e nas listagens do Apêndice A.4.

5.1.7 - CONDIÇÕES DE PARADA DO PROCESSAMENTO.

Uma das questões importantes que merece ser -
abordada é aquela referente ao ponto onde o processamento pode ser suspenso e a solução correspondente encontrada pode -
ser definida como a que minimiza a função objetivo dentro de -
uma precisão desejada.

A condição de parada do processamento, definida para o algoritmo de gradiente utilizado, resulta da análise do termo $[I_{JJ} - I_{\psi J}^T I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi J}]$, como já colocado no item 4.4.2. Deve-se aceitar uma solução como sendo a ótima quando tal termo se encontra dentro de uma determinada precisão ou, na realidade, o termo tende a zero, desde que já satisfeitos os vínculos terminais com a precisão desejada e já usados outros tamanhos do passo dS^2 para se tentar diminuir o valor daquele resíduo, $|B3|$. O uso desta condição de verificação da solução resulta, no entanto, difícil de ser viabilizada, pois não se -

conhece, a priori, qual o nível de precisão que pode ser satisfeito. Além disso, nos casos analisados, o comportamento do termo citado parece não obedecer critérios que permitam uma estimativa dessa precisão. Esse fato pode ser notado pela variação do termo residual de acordo com os níveis de frequência definidos e, principalmente, com a mudança nas restrições de desigualdade nas variáveis de estado, para os vários casos simulados.

Torna-se preferível, então, observar a evolução do sistema com a variação do número de iterações, uma vez que é característico ao método gradiente uma tendência à oscilação em torno da solução ótima à medida que o sistema dela se aproxima, sem, no entanto, conseguir atingi-la. Somente quando se atinge essa condição de oscilação é que se consegue detectar um valor de comparação para o termo

$[I_{JJ} - I_{\psi J}^T \quad I_{\psi\psi}^{-1} \quad I_{\psi J}]$ em cada caso, o que torna dispensável seu uso, ao menos na maneira descrita em [B3].

Com estas considerações, a condição de parada do processamento passa a ser ditada por um limite máximo de iterações e a solução adotada como ótima é a que implica menor valor do termo acima, a partir do instante em que se nota a tendência à oscilação.

Outras condições de parada se encontram embutidas no dispositivo usado para ajuste do tamanho do passo e da constante de correção dos vínculos terminais, como já comentado. O processamento é também interrompido quando não se consegue inverter a matriz $I_{\psi\psi}$ dentro da precisão exigida. Es-

tas são, então, condições de parada definidas pela falta de melhor convergência do caso analisado, fato que pode ser modificado pela mudança dos parâmetros de simulação desenvolvidos neste capítulo. Sobre esses parâmetros cabem ainda algumas observações que serão apresentadas na análise de cada caso.

5.1.8 - MODIFICAÇÕES PARA ANÁLISE DE OUTROS CASOS.

Dentre os casos que despertam interesse para uma análise mais cuidadosa existem alguns em que modificações, a serem introduzidas dentro do modelo e do processo numérico desenvolvidos, podem ser feitas de maneira bastante simples.

Uma situação que pode ser colocada sob este enfoque é o caso em que a geometria da secção transversal no engastamento deve manter uma forma pré-estabelecida, não sendo ajustada ao longo do processamento. Com isso, pretende-se impor uma certa limitação à variação das funções citadas junto à secção mais solicitada e significa que, sendo a área e raio de giração fixos para o extremo engastado, o número de condições de contorno conhecidas em $x = 0$ aumenta de quatro para seis, reduzindo o número de condições de contorno a serem ajustadas para quatro.

A introdução dessas modificações no algoritmo de solução numérica resulta extremamente simples, bastando para tanto a redefinição da matriz \underline{B} , do vetor $\underline{\beta}$ de correção

das condições de contorno, da matriz \underline{L}_ψ e do vetor \underline{L}_J (ver desenvolvimento do ítem 4.4.1) e das quantidades associadas a esses valores. No entanto, esta simplicidade não se mantém, em termos de processamento, pois se torna necessária nova de finição dos valores da matriz \underline{W} , das funções de peso e do tamanho do passo, entre outros.

Casos analisados sob condições de contorno - fixas para a área e o raio de giração no extremo engastado - representam combinações dos níveis de frequência do primeiro modo e de fronteiras de desigualdade, definidas da mesma forma que para os casos em que as referidas condições de contorno variam livremente.

5.2 - CASOS ANALISADOS

O modelo proposto nos ítems anteriores foi - processado em computador sob diversas condições decorrentes de combinações possíveis dos parâmetros estabelecidos. Os resultados obtidos são , para a quase totalidade dos casos, - bastante satisfatórios se for entendido que, para isso, a condição de solução ótima não necessariamente precisa ser atingi da. Assim sendo, julga-se satisfatória uma solução que leve a uma redução considerável do peso, verifique os vínculos terminais com a precisão exigida e tenha frequência fundamental - dentro dos níveis impostos, embora seja uma solução sub-ótima.

A adoção de tal critério é decorrente de sérios problemas numéricos de convergência que ocorrem em alguns casos.

Os casos aqui analisados, num total de dez, representam os mais significativos dentre todos aqueles processados. Alguns casos processados e não incluídos são comentados ao longo da apresentação dos resultados.

A separação entre os casos é feita em função dos níveis de restrições de desigualdade definidos sobre a área e o raio de giração e dos níveis desejados das frequências fundamentais, ficando, então, na forma:

Caso 1 : Pequenas Restrições; $\omega = 2000$ rd/s

Caso 2 : Pequenas Restrições; $\omega = 3000$ rd/s

Caso 3 : Pequenas Restrições; $\omega = 4000$ rd/s

Caso 4 : Restrições Médias ; $\omega = 3000$ rd/s

Caso 5 : Restrições Médias ; $\omega = 4000$ rd/s

Caso 6 : Restrições Fortes ; $\omega = 2000$ rd/s

Caso 7 : Restrições Fortes ; $\omega = 3000$ rd/s

Caso 8 : Restrições Fortes ; $\omega = 4000$ rd/s

Caso 9 : Pequenas Restrições; $\omega = 3000$ rd/s; Área e Raio de Giração Fixos no Engastamento.

Caso 10: Restrições Fortes ; $\omega = 4000$ rd/s; Área e Raio de Giração Fixos no Engastamento.

O tipo de restrição de cada um dos casos acima segue a terminologia dada no item 5.1.5. (Eqs.(5.9),(5.11) e (5.12)).

Essa seleção tem por justificativa estabelecer uma relação entre a variação dos parâmetros definidos e o comportamento global da solução encontrada, em termos dos níveis exigidos de frequência e do tratamento dos vínculos de desigualdade.

Nos oito primeiros casos, são combinados os níveis de frequência fundamental com as possíveis faixas de restrição de desigualdades nas variáveis de estado para se obter a evolução das diversas soluções para os casos em que não há, praticamente, limitação quanto aos valores atingidos por área e raio de giração ou por área e momento de inércia (casos 1 a 3) e para outros em que tais variáveis devem ter comportamento muito mais limitado para os objetivos que se pretende atingir (casos 4 a 8).

Os casos 9 e 10 tem intenção de repetir o procedimento dos casos anteriores quando, com área e raio de giração especificados na extremidade engastada, a forma final da viga fica condicionada por essa geometria.

5.3 - RESULTADOS OBTIDOS

São, a seguir, apresentados os resultados obtidos para cada um dos casos analisados. Em todos eles, a viga

de secção constante usada para comparação, ou seja, definida para a primeira iteração, tem peso de 4485,9 kgf e frequência natural do primeiro modo igual a 1335 rd/s.

Caso 1 : Pequenas Restrições; $\omega = 2000$ rd/s.

A Tabela I, abaixo, mostra os valores das funções área, raio de giração e momento de inércia para o caso 1, obtidos na 20^a iteração.

$x, (m)$	$A(x), (m^2)$	$r^2(x), (m^2)$	$I(x), (10^{-1} m^4)$
0,00	0,3893	0,0493	0,1920
0,12	0,3510	0,0596	0,2094
0,24	0,3128	0,0761	0,2380
0,36	0,2745	0,0974	0,2673
0,48	0,2362	0,1227	0,2899
0,60	0,1980	0,1515	0,2999
0,72	0,1597	0,1834	0,2928
0,84	0,1214	0,2179	0,2646
0,96	0,0832	0,2548	0,2119
1,08	0,0449	0,2936	0,1318
1,20	0,0066	0,3339	0,0222

Tabela I - Resultados para o Caso 1.

Deve ser notada a variação linear da função de área, que leva a um peso final de 1859,2 kgf, o que representa uma redução de 58,55% em peso comparada à viga inicial de secção constante. A frequência final atingida é de 2006 rd/s, ou

seja, é obtido um aumento de 50,26% em relação à viga inicial.

A convergência, para este caso, é, de modo geral, lenta e difícil, pois o critério de convergência estabelecido para os vínculos terminais e função objetivo exige um grande número de propagações das equações diferenciais do sistema até se conseguir ajustar tamanhos de passo e de correção dos vínculos terminais que forneçam valores aceitáveis para a iteração seguinte.

Este fato, que será doravante referido como grande número de propagação intermediárias, é sensível a partir da 15ª iteração, quando os valores de área e raio de girção já se encontram bastante próximos dos valores finais. A partir daí, o programa só consegue avançar à custa de passos muito pequenos. Estimado na primeira iteração em $dS^2 = 0,01$, o tamanho do passo é reduzido até ficar da ordem de 10^{-7} , na 30ª e última iteração, quando o programa é então truncado por não se conseguir melhoras sensíveis.

As fronteiras de desigualdade nas variáveis de estado não são atingidas ao longo do processamento e os vínculos terminais são satisfeitos dentro da precisão exigida, o que torna compatível a viga definida pelas funções da Tabela I.

Casos simulados com as mesmas características de frequência e restrições de desigualdade, mas com outras condições de contorno não homogêneas ou outras vigas iniciais, apresentam problemas de convergência e resultados semelhantes aos acima descritos. Como exemplo, a mudança das condições de

contorno não homogêneas para $\epsilon_1 = 0,01 \text{ m}$ e $\epsilon_2 = 0,0244 \text{ m}^{-1}$, dados que representam, praticamente, um limite para a hipótese de pequenas vibrações, acarreta uma pequena melhora dos resultados resumidos na Tabela I: redução de 62,9% no peso e aumento de 50,6% na frequência fundamental. A convergência continua muito lenta, com várias propagações intermediárias e os vínculos terminais são satisfeitos com a mesma boa precisão anteriormente obtida.

Caso 2 : Pequenas Restrições; $\omega = 3000 \text{ rd/s}$

Valores de área, raio de giração e momento de inércia ao longo do comprimento da viga, obtidos na 39ª iteração de uma série de 40, para o caso 2, são mostrados na Tabela II, a seguir.

$x, (\text{m})$	$A(x), (\text{m}^2)$	$r^2(x), (\text{m}^2)$	$I(x), (10^{-1} \text{ m}^4)$
0,00	0,1442	0,1094	0,1577
0,12	0,1299	0,1322	0,1717
0,24	0,1156	0,1684	0,1948
0,36	0,1013	0,2158	0,2187
0,48	0,0871	0,2727	0,2375
0,60	0,0728	0,3364	0,2464
0,72	0,0585	0,4124	0,2414
0,84	0,0433	0,4940	0,2187
0,96	0,0300	0,5828	0,1749
1,08	0,0157	0,6783	0,1068
1,20	0,0015	0,7801	0,0115

Tabela II - Resultados para o Caso 2.

Ainda no presente caso a função de área é linear ao longo da viga. O peso final desta resulta em 683,9 kgf, uma redução de 84,77% em relação ao da viga inicial. A frequência fundamental atinge 3012 rd/s, o que significa uma elevação de 125,62%.

A convergência do método parece melhorar bastante com o aumento de frequência, se a comparação é feita com o caso 1. Em cerca de 30 iterações, os valores de interesse já se encontram bastante próximos aos valores finais e, aí, o processo se torna um pouco mais lento. Ainda em comparação com o caso 1, a função de área e, conseqüentemente, o peso são bem menores, enquanto os valores do raio de giração são maiores. Também o número de propagações intermediárias decresce consideravelmente.

Para este caso os vínculos terminais são satisfeitos com precisão de 10^{-4} , que pode ser considerada boa, e as fronteiras das restrições de desigualdade não chegam a ser atingidas.

Para as condições de frequência e restrições de desigualdade do caso em análise, a mudança das condições de contorno não homogêneas para $\epsilon_1 = 0,01 \text{ m}$ e $\epsilon_2 = 0,0244 \text{ m}^{-1}$ leva a uma convergência muito mais rápida para a solução ótima. A solução ótima obtida apresenta peso final de 3,26 kgf, com redução de 99,928% em relação à viga inicial, de secção constante, e frequência fundamental de 3111 rd/s, 133,03% maior que a inicial. Valores do raio de giração permanecem, ainda assim, um pouco abaixo daqueles descritos na Tabela II e os vínculos

terminais são satisfeitos com boa precisão. A excelente convergência, nesse caso, leva a distribuições de área e momento de inércia muito pequenas, o que torna os resultados inviáveis de serem utilizados na prática, a não ser em casos muito específicos. Entretanto, o programa também fornece uma série de soluções, antes de se atingir a iteração final, com vínculos satisfeitos, frequência na faixa desejada e melhores condições de resistência e, assim, produz uma possibilidade de escolha de soluções sub-ótimas que é explicada em maiores detalhes na análise do caso 3, a seguir.

Caso 3 : Restrições Pequenas; $\omega = 4000$ rd/s

Trata-se de um caso que apresenta excelentes características de convergência em todos os sentidos. Na Tabela III se encontram os resultados obtidos para distribuição de área, raio de giração e momento de inércia, ao longo do comprimento da viga, na 49^a e penúltima iteração realizada.

Agora a função de área é não linear e toma valores muito pequenos. Isto acarreta um peso final de somente 0,55 kgf, uma redução de 99,988% em comparação à viga original. A frequência final obtida é de 4113 rd/s, o que representa aumento de 208,09%, em relação à frequência inicial.

Nota-se, numa comparação com o caso 2, uma melhora da estabilidade de convergência do processamento com o aumento do nível exigido de frequência. No presente caso, são raras as iterações que exigem propagações intermediárias enquanto, no caso 2, estas comparecem em maior número. Com praticamen

$x, (m)$	$A(x), (10^{-4}m^2)$	$r^2(x), (m^2)$	$I(10^{-4}m^4)$
0,00	1,0840	0,2517	0,2729
0,12	0,9848	0,3090	0,3043
0,24	0,8833	0,3986	0,3521
0,36	0,7794	0,5129	0,3998
0,48	0,6744	0,6478	0,4369
0,60	0,5707	0,8006	0,4569
0,72	0,4711	0,9694	0,4567
0,84	0,3783	1,152	0,4359
0,96	0,2947	1,348	0,3971
1,08	0,2216	1,554	0,3444
1,20	0,1589	1,770	0,2813

Tabela III.1 - Resultados para o Caso 3.

te o mesmo número de iterações, no caso 3 atinge-se um peso consideravelmente menor que em 2 (mais de mil vezes menor). No entanto, a função raio de giração é muito maior no caso agora em discussão, chegando, no extremo livre, aos valores mais altos de todos os casos analisados, o que leva à ausência de maior - significado físico, se aliado ao pequeno peso obtido. Conclue - se, assim, que, apesar dos excelentes resultados obtidos em - termos do problema de otimização, a solução não é fisicamente viável.

Para o caso em análise, o gráfico de evolução da convergência, colocado na figura 5.2, mostra o comportamento das funções área e raio de giração para a 1^a, 3^a, 10^a, 30^a, 40^a e 49^a iterações.

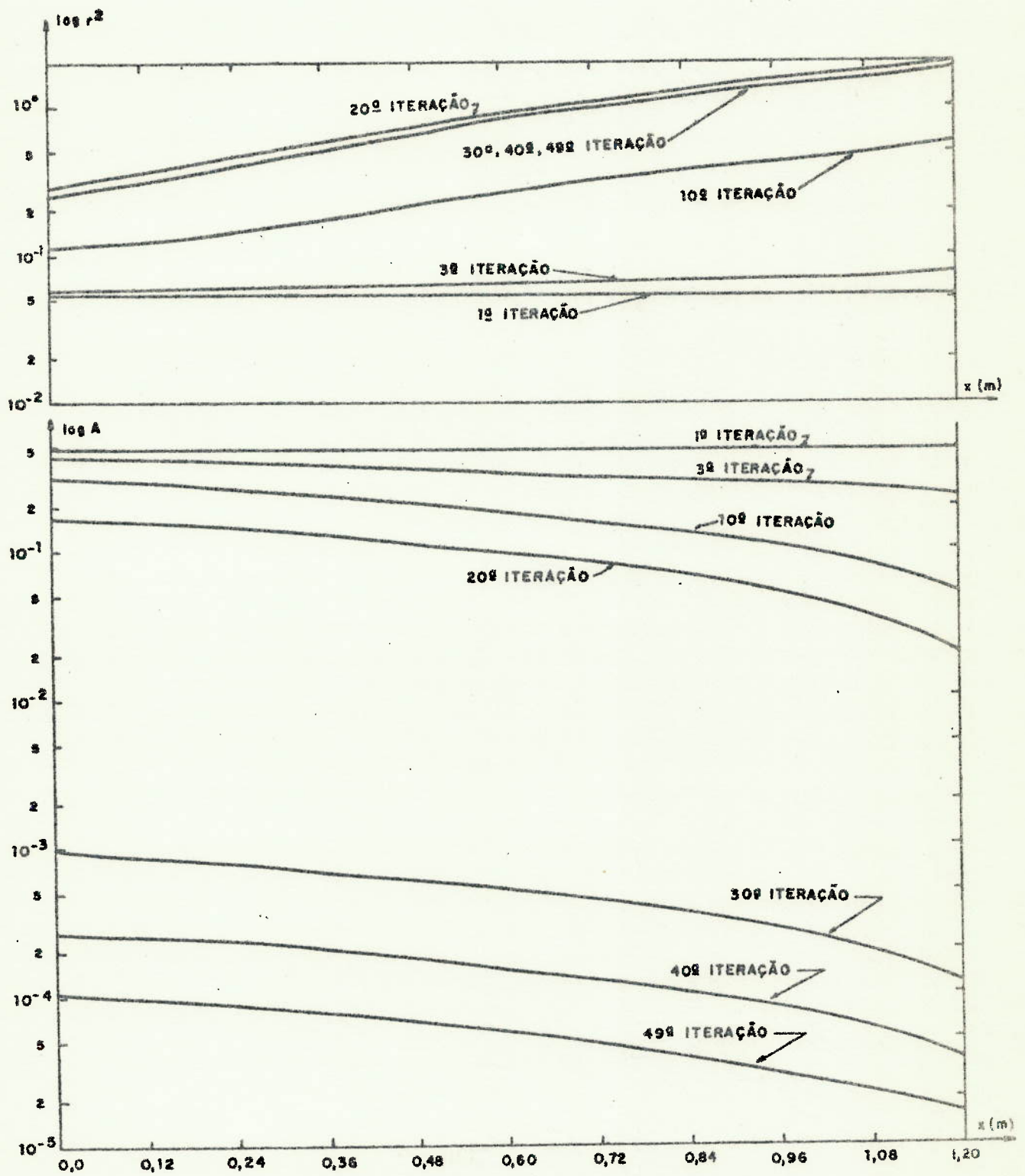


Figura 5.2- Evolução das Funções Área e Raio de Giração para o Caso 3

Nos gráficos mostrados na Figura 5.3, (a) e (b), são estabelecidas as evoluções do peso e da frequência fundamental da viga ao longo do processamento.

Este caso demonstra uma particularidade em relação aos demais casos analisados, que se caracteriza por uma pequena diminuição do valor da frequência do primeiro modo, entre a 14^a e a 24^a iterações, em relação ao valor arbitrado para a iteração inicial e, em seguida, por um rápido aumento até seu valor final. Esse fato que pode ser observado do gráfico da Figura 5.3, não se repete em nenhum dos outros processamentos. Nesses últimos, ou há diminuição da frequência em relação ao valor inicial ao longo de todas as iterações ou há elevação da frequência durante todo o tempo de processamento.

O intervalo citado acima, como referente à uma diminuição da frequência, é caracterizado por uma convergência extremamente rápida para os vínculos terminais. Logo após o final desse intervalo, na 26^a iteração, o peso já se encontra reduzido a 1% do seu valor inicial (47,53 kgf), a frequência atinge 4007 rd/s e os vínculos terminais são satisfeitos com precisão de 10^{-6} . Essa excelente precisão é ainda um pouco melhorada até a iteração final.

No caso em discussão, apenas o vínculo de desigualdade imposto sobre a função de área é violado nas últimas iterações, assim mesmo com pequena penetração. Dessa forma, a função de penalidade pouco consegue agir sobre esta violação e o sistema permanece dentro da região proibida até o final.

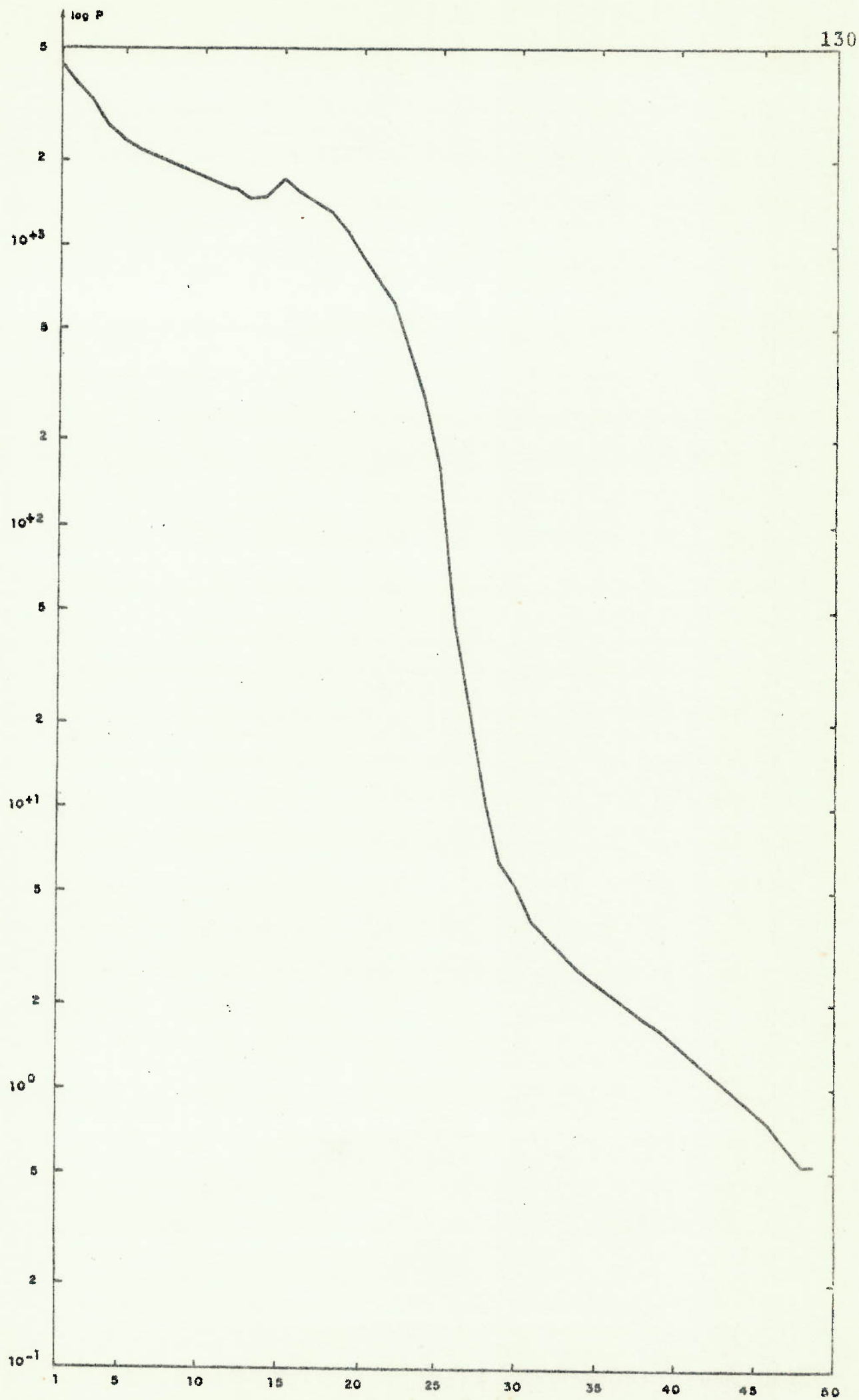


Figura 5.3-(a) Evolução do Peso ao Longo do Caso 3



Figure 5.3-(b) Evolução da Frequência Fundamental ao Longo do Caso 3.

A excelente convergência observada no presente caso, como já citado, leva a distribuições de área e momento de inércia muito pequenas, o que torna os resultados inviáveis, na prática. Isso ocorre porque a diminuição sensível de área e momento de inércia comprometem a resistência local, embora, sob o ponto de vista global, a viga com as características da Tabela III preencha todos os requisitos. No entanto, uma consideração importante é que a partir de um determinado ponto, o programa fornece, a cada iteração, até a solução ótima final, uma série de soluções que tem frequência dentro da faixa desejada, satisfazem vínculos terminais com a precisão exigida e apresentam um peso maior, com melhores condições de resistência. Assim, se a solução ótima não satisfaz do ponto de vista de resistência mecânica, uma solução sub-ótima pode ser escolhida, dentre as que são acima citadas, por uma análise das iterações intermediárias. Mesmo um processo de ajuste por interpolação entre duas iterações pode ser feito para se chegar a uma situação pré-estabelecida. Como um exemplo, a Tabela III.2, apresenta, para o caso em análise, uma viga sub-ótima que tem peso $P = 160,4$ kgf, o que representa 96,42% de redução, e frequência fundamental de 4003 rd/s, aumento, portanto, de 199,50% obtida na 25ª iteração. Vínculos terminais são satisfeitos com precisão de 10^{-4} na citada iteração.

A modificação das condições de contorno não homogêneas para $\epsilon_1 = 0,01$ m e $\epsilon_2 = 0,0244$ m⁻¹ pouco altera os resultados aqui obtidos. A convergência, com as modificações citadas, mostra-se também excelente, chegando um peso final de

$x, (m)$	$A(x), (10^{-1}m^2)$	$r^2(x), (m^2)$	$I(x), (10^{-1}m^4)$
0,00	0,3044	0,2617	0,0796
0,12	0,2777	0,3188	0,0885
0,24	0,2510	0,4080	0,1024
0,36	0,2243	0,5220	0,1171
0,48	0,1976	0,6565	0,1297
0,60	0,1709	0,8089	0,1383
0,72	0,1443	0,9772	0,1410
0,84	0,1177	1,160	0,1364
0,96	0,0910	1,355	0,1132
1,08	0,0644	1,561	0,1006
1,20	0,0378	1,776	0,0672

Tabela III.2 - Resultados para uma viga
Sub-Ótima do Caso 3.

0,46 kgf e a uma frequência fundamental de 4103 rd/s, isto é, redução de 99,990% no peso e aumento de 207,34% na frequência. A única diferença sensível é representada por valores menores do raio de giração ao longo do comprimento, em comparação com os valores tabelados em III.1. Vínculos terminais continuam satisfeitos com precisão de 10^{-6} e, quanto aos vínculos de de sigualdade sobre área e raio de giração, apenas o primeiro - chega a ser violado nas últimas iterações, mesmo assim com pe netração muito pequena na fronteira.

Caso 4 : Restrições Médias ; $\omega = 3000$ rd/s

Na Tabela IV.1, a seguir, encontram-se colocados os valores das funções área, raio de giração e momento de inércia para o caso 4, obtidos na 40^a iteração de uma série - de 41. Apenas a título de recordação, restrições médias definem valores de $C = 0,004 \text{ m}^2$ e $\bar{D} = 0,40 \text{ m}^2$ nos vínculos de desigualdade (5.7) e (5.10) da área e do raio de giração, respectivamente.

$x, (\text{m})$	$A(x), (\text{m}^2)$	$r^2(x), (\text{m}^2)$	$I(x), (10^{-1} \text{m}^4)$
0,00	0,1856	0,1081	0,2006
0,12	0,1673	0,1326	0,2219
0,24	0,1490	0,1683	0,2508
0,36	0,1307	0,2107	0,2753
0,48	0,1123	0,2582	0,2900
0,60	0,0940	0,3105	0,2918
0,72	0,0757	0,3678	0,2783
0,84	0,0573	0,4306	0,2469
0,96	0,0390	0,4994	0,1948
1,08	0,0207	0,5745	0,1189
1,20	0,0023	0,6561	0,0155

Tabela IV.1 - Resultados para o caso 4.

O peso final da viga, com as características da Tabela IV.1, é de 882,8 kgf, obtida com uma variação linear da função de área. Isso fornece uma redução de peso de 80,52% em relação ao inicial. Tem-se, como frequência final, o valor 3006 rd/s, o que significa aumento de 125,17% em comparação à

viga inicial.

A introdução de restrições maiores que as usadas para os outros casos até aqui analisados implica numa convergência bastante lenta. Em algumas iterações há necessidade de se fazer várias propagações intermediárias para melhor ajuste de todas as condições. Com isso, o tamanho do passo, para as últimas iterações, torna-se muito pequeno e apenas pequenas modificações são conseguidas. Os vínculos terminais são satisfeitos com boa precisão (menor que 10^{-4}) nas últimas iterações.

Quanto às restrições de desigualdade, o vínculo sobre a área é obedecido ao longo de todo processamento, não havendo penetração dentro dessa fronteira. O mesmo não acontece com a restrição sobre a função raio de giração, que viola a sua fronteira e permanece dentro da região proibida até o final do processamento, como é fácil de se ver pela Tabela IV.1.

Apesar dos valores relativamente altos da função raio de giração, principalmente no extremo livre, uma comparação com o caso 2 permite observar que os valores do caso presente são menores que os daquele caso. Em compensação, obtêm-se valores maiores para a função área e, em consequência, para o peso.

A função raio de giração, que representa o que se pretende realmente limitar, é levado a valores muito altos para, em seguida, começar uma queda bastante lenta que não consegue prosseguir até a fronteira. Para se formar uma

idéia acerca do comportamento da função de penalidade, na 15ª iteração, os valores da função raio de giração nas proximidades do extremo livre são dadas pela Tabela IV.2, a seguir.

$x, (m)$	$r^2(x), (m^2)$
0,84	0,6677
0,96	0,7721
1,08	0,8831
1,20	1,001

Tabela IV.2- Valores Máximos da Função Raio de Giração no Caso 4 (15ª iteração).

Esta tabela demonstra que, apesar de não se conseguir obedecer totalmente a restrição de desigualdade, a técnica de penalização permite que não se divirja completamente dos objetivos pretendidos. Nessa 15ª iteração, o termo de penalização da função objetivo modificada, $K_J [y_{10}(\ell)]^2$, tem valor 60,32. Este valor, que é uma medida da penetração nos vínculos, é reduzido na 40ª iteração para apenas 0,72. O termo de penalização K_J , usado neste caso, é $K_J = 10^4$. Outros valores usados levaram a piores resultados.

A simulação de caso semelhante com nível de frequência $\omega = 2000$ rd/s e com restrições médias resultaria inútil pois, como se pode observar do caso 1, nenhum dos vínculos definidos seria atingido. Para as condições acima foi,

então, simulado um caso com o comprimento da viga em balanço alterado para $l = 1,8$ m. Para este novo caso, o processo numérico converge em 37 iterações de maneira bastante rápida. Os vínculos terminais são satisfeitos com precisão razoável, mas o vínculo de desigualdade colocado sobre a função raio de giração não é respeitado de modo correto. Apesar de se obter valores ainda mais altos nas iterações intermediárias, o valor do raio de giração no extremo livre se mantém em $0,956 \text{ m}^2$ na última iteração. Nota-se também que a técnica de penalidade introduz oscilações nessa função raio de giração. De qualquer forma, em termos de peso e frequência fundamental, os resultados são animadores. Partindo-se de uma viga de secção transversal constante ao longo de todo o comprimento, com peso de 6728,9 kgf e frequência fundamental de 593,5 rd/s, obtem-se um peso final de 244,1 kgf (96,4% de redução) e uma frequência final de 2079 rd/s (250,6% de aumento). No entanto, a intenção que, no caso de simulação com comprimento diferente, é comprovar a eficiência do método proposto de solução para qualquer outro comprimento arbitrado, parece plenamente demonstrada.

Caso 5 : Restrições Médias ; $\omega = 4000$ rd/s

Os valores encontrados para área, raio de giração e momento de inércia na simulação com as condições do caso 5, obtidos na 40^a é última iteração, encontram-se resumidos na Tabela V.1, a seguir.

$x, (m)$	$A(x), (m^2)$	$r^2(x), (m^2)$	$I(x), (10^{-1}m^4)$
0,00	0,1332	0,1922	0,2560
0,12	0,1201	0,2379	0,2857
0,24	0,1070	0,3014	0,3226
0,36	0,0940	0,3735	0,3510
0,48	0,0809	0,4517	0,3654
0,60	0,0678	0,5363	0,3637
0,72	0,0547	0,6288	0,3442
0,84	0,0417	0,7309	0,3045
0,96	0,0286	0,8438	0,2413
1,08	0,0155	0,9681	0,1503
1,20	0,0025	1,103	0,0271

Tabela V.1 - Resultados para o Caso 5.

A função área acima tabelada é novamente linear e é responsável por um peso final de 636,9 kgf, o que significa uma redução da ordem de 85,80% em relação ao peso da viga inicial. A frequência fundamental obtida nesta última iteração é de 3987 rd/s, o que implica num aumento de 198,65% em relação à frequência inicial. O gráfico da Figura 5.4 ilustra, para este caso, a comparação entre as funções tabeladas, ou seja, finais, e seus valores iniciais.

As restrições de desigualdade são agora responsáveis por uma convergência mais lenta, com grande número de propagações intermediárias. Esse fato acarreta uma sensível diminuição do tamanho do passo para as últimas iterações e, em consequência, os resultados são pouco modificados. Os vínculos

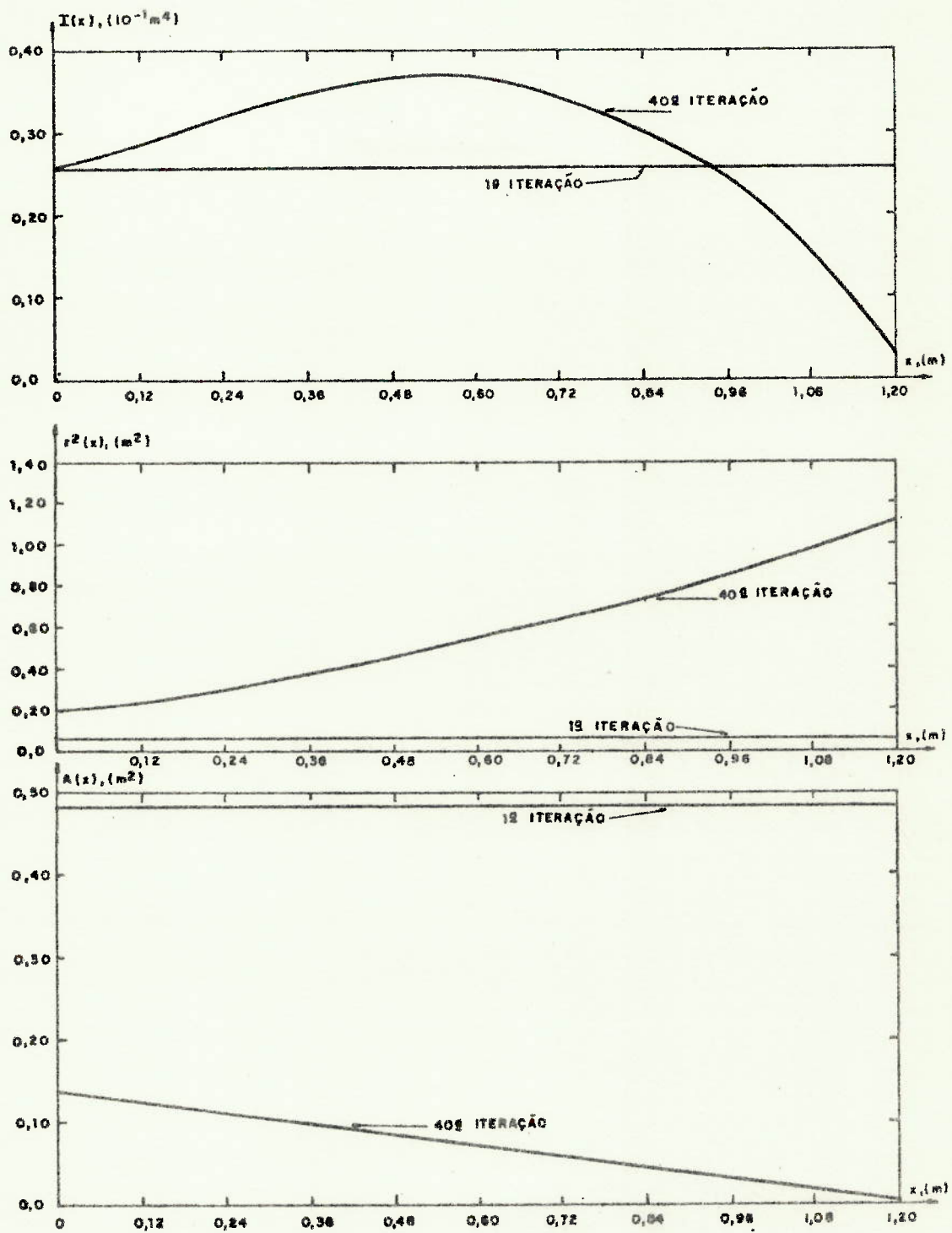


Figura 5.4- Comparação das Funções Área, Raio de Giração e Momento de Inércia, Iniciais e Finais, para o Caso 5

terminais são satisfeitos com a precisão exigida (menor que 10^{-4}) nessas últimas iterações.

O vínculo de desigualdade imposto sobre a área é respeitado ao longo de todo o processamento numérico. Tal fato não se repete com a restrição colocada sobre o raio de giração, embora uma comparação com o caso 3 permita verificar que os valores da função acima são bem menores no presente caso. No entanto, a função área e o peso são maiores aqui que no caso 3.

A função raio de giração, $y_6(x)$, é levada a valores muito altos, com grande penetração nos vínculos de desigualdade. A volta para a fronteira é feita de maneira muito lenta, principalmente porque o valor da constante de penalização K_J tem de ser mantida em valores baixos para não causar divergência. A tabela V.2, ilustra os valores da função raio de giração perto da extremidade livre da viga para a 21^a iteração, onde se dá a máxima penetração desta função na região proibida.

$x, (m)$	$r^2(x), (m^2)$
0,84	1,029
0,96	1,201
1,08	1,585
1,20	1,795

Tabela V.2- Valores Máximos da Função Raio de Giração no Caso 5 (21^a iteração).

Uma comparação entre os valores das tabelas V.1 e V.2 mostra que, apesar de não se conseguir manter o sistema fora da região proibida, a técnica de penalização corrige em parte a tendência de penetração. O termo de penalização $K_J [y_{10}^{(t)}]^2$, que chega a 319,00 na 21ª iteração, é reduzido a 12,55 na iteração final. Resultados melhores não são alcançados por não se poder trabalhar com valores maiores de K_J ou com valores diferentes de K_3 , função de peso associada a restrição sobre o raio de giração na definição da variável de estado y_{10} , (5.2), sem causar divergência do processo numérico. No presente caso, usa-se $K_3 = 10,0$, numa tentativa de se melhorar a condição de violação do vínculo, o que é, em parte, conseguido. O valor K_J é fixado em 10^3 .

Caso 6 : Restrições Fortes; $\omega = 2000$ rd/s

Valores das funções área, raio de giração e momento de inércia, obtidos na 32ª e última iteração, para a simulação do caso 6, são mostrados na tabela VI. Valores das constantes C e \bar{D} dos vínculos de desigualdade são, agora, $C = 0,006 \text{ m}^2$ e $\bar{D} = 0,25 \text{ m}^2$, conforme definido em (5.12).

O peso final obtido é de 1841,9 kgf, resultante da função linear de área da tabela acima. A redução de peso alcançada é, portanto, de 58,94%. A frequência fundamental é aumentada em 50,26%, até seu valor final, 2006 rd/s.

A convergência, como no caso 1, é também lenta e difícil pelo grande número de propagações intermediárias. No entanto, a introdução de outras restrições de desigualdade

$x, (m)$	$A(x), (m^2)$	$r^2(x), (m^2)$	$I(x), (10^{-1}m^4)$
0,00	0,3884	0,0483	0,1875
0,12	0,3500	0,0583	0,2041
0,24	0,3115	0,0743	0,2316
0,36	0,2730	0,0951	0,2598
0,48	0,2346	0,1200	0,2814
0,60	0,1961	0,1482	0,2907
0,72	0,1576	0,1796	0,2831
0,84	0,1192	0,2136	0,2546
0,96	0,0807	0,2499	0,2017
1,08	0,0423	0,2881	0,1218
1,20	0,0038	0,3279	0,0125

Tabela VI. Resultados para o Caso 6.

parece trazer uma estabilidade um pouco melhor ao processo numérico, permitindo que este avance algumas iterações a mais - que o caso 1. Mesmo assim, o processamento é encerrado por se chegar a um tamanho de passo muito pequeno na última iteração. Obtêm-se, no presente caso, valores menores de peso, área e raio de giração, em comparação com o caso 1. Os vínculos terminais são satisfeitos dentro da precisão exigida, sendo da ordem de 10^{-5} .

A técnica de penalização apresenta bom comportamento para o caso ora em discussão. O vínculo de desigualdade imposto sobre a área não é atingido em nenhum instante ao longo do processamento. Quanto à restrição colocada sobre a

função raio de giração, tem-se que essa função é levada a seu valor mais alto na 7ª iteração, chegando a $0,4163 \text{ m}^2$. Isto - corresponde a um valor do termo de penalização $K_p [\bar{y}_{10}(x)]^2$ - igual a $0,1536$. Esses números são constantemente reduzidos a partir dessa iteração, até chegarem a valores finais $0,3279 \text{ m}^2$ e $0,00226$, respectivamente. A constante K_p é estimada como 10^4 para este caso.

Caso 7 : Restrições Fortes ; $\omega = 3000 \text{ rd/s}$

Valores de área, raio de giração e momento - de inércia ao longo do comprimento da viga, para o caso 7, obtidos na 40ª e última iteração realizada, são mostrados na Tabela VII, a seguir.

$x, (m)$	$A(x), (m^2)$	$r^2(x), (m^2)$	$I(x), (10^{-1}m^4)$
0,00	0,2038	0,1086	0,2215
0,12	0,1838	0,1357	0,2495
0,24	0,1639	0,1717	0,2813
0,36	0,1439	0,2104	0,3027
0,48	0,1239	0,2504	0,3103
0,60	0,1039	0,2922	0,3037
0,72	0,0840	0,3374	0,2833
0,84	0,0640	0,3876	0,2480
0,96	0,0440	0,4442	0,1955
1,08	0,0240	0,5085	0,1223
1,20	0,0041	0,5807	0,0234

Tabela VII - Resultados para o Caso 7.

Os resultados, para a função linear de área da tabela acima, acarretam um peso de 976,1 kgf. Este dado implica que o peso inicial sofre uma redução de 78,24%. A frequência do primeiro modo para a viga com as características acima é de 3001 rd/s, o que significa um aumento de 124,79%, em comparação com a original.

A colocação de restrições mais fortes implica numa convergência lenta, com várias propagações intermediárias, fato que leva o passo a se tornar muito pequeno para as iterações finais. Os vínculos terminais são verificados com boa precisão (menor que 10^{-4}) para as últimas iterações.

O vínculo de desigualdade sobre a área é violado apenas num pequeno trecho próximo ao extremo livre nas cinco últimas iterações e mostra uma leve tendência a retornar para a região permitida, quando o processamento é encerrado. Os valores encontrados para a função área são maiores que os obtidos no caso 4 para restrições mais brandas. Em consequência, o peso final é também maior no presente caso.

Quanto à restrição de desigualdade imposta sobre a função raio de giração, esta viola a sua fronteira desde as primeiras iterações e permanece dentro da região proibida até o final do processamento. Uma comparação com o caso 4 permite observar que os valores finais do raio de giração são menores no presente caso, embora, em termos de comparação com as fronteiras definidas, a penetração seja maior agora que no caso anterior.

A função raio de giração é levada, novamente

a valores muito altos nas iterações iniciais. Na 17^a iteração a função $y_6(x)$, ou $r^2(x)$, atinge seu valor máximo: $1,027 \text{ m}^2$, no extremo livre. Este valor é ainda maior que o máximo obtido no caso 4. A volta para a fronteira é feita de maneira extremamente lenta, apesar de se usar o mesmo valor para K_J que no caso 4 e de se ter aumentado o valor da constante de peso K_3 , associada a restrição sobre o raio de giração, de 1,0 para 10,0. Outras estimativas para K_J e K_3 causam divergência do processo numérico.

Apesar de não se conseguir fazer a função raio de giração retornar para a região permitida, a técnica de penalização corrige a tendência ao contínuo aumento da função raio de giração. Valores do termo de penalização da função objetivo modificada \bar{J} , na 17^a e última iterações, são, respectivamente, 300,6 e 4,84, o que demonstra a tendência acima citada.

Bons resultados são obtidos com um caso análogo ao discutido acima, em que são modificadas apenas as condições de contorno não homogêneas e a viga inicial de comparação.

Para este novo caso, são usados $\epsilon_1 = 0,01 \text{ m}$ e $\epsilon_2 = 0,0244 \text{ m}^{-1}$ e parte-se de uma viga de peso $P = 2246,4 \text{ kgf}$ e frequência fundamental $\omega = 692,0 \text{ rd/s}$. O processo numérico converge em 25 iterações e verifica os vínculos terminais com precisão bastante boa, menor que 10^{-4} . O peso final obtido é de 512,5 kgf, o que significa uma diminuição de 77,19% em re-

lação à original, enquanto a frequência é ajustada até 3007 rd/s, um aumento de 334,5%.

Nesse caso, a característica principal nota da é um melhor respeito aos vínculos de desigualdade. A restrição sobre a área é violada apenas num pequeno trecho próximo ao extremo livre, tendo valor mínimo neste ponto igual a $A(\ell) = 0,004 \text{ m}^2$. Quanto à função raio de giração, esta sobe até um valor máximo de $0,473 \text{ m}^2$ no extremo livre, valor que é reduzido, até a iteração final, até $0,3137 \text{ m}^2$, o que, sem dúvida, representa uma satisfação bastante razoável para este vínculo de desigualdade. Tal fato parece demonstrar que o abrandamento das condições não homogêneas não apenas facilita a convergência, como permite uma melhor verificação quanto aos vínculos de desigualdade.

Caso 8 : Restrições Fortes ; $\omega = 4000 \text{ rd/s}$

As funções área, raio de giração e momento de inércia, resultantes da simulação do caso 8 e obtidas na 34ª iteração de uma série de 36, encontram-se colocadas na Tabela VIII, a seguir.

A função linear de área da tabela acima acarreta um peso final de 657,6 kgf, resultando numa redução de 85,34% em comparação ao peso inicial. A frequência final obtida é de 3987 rd/s, um aumento de 198,65% em relação à original. O gráfico da Figura 5.5 mostra, para o caso em análise, os valores iniciais e finais das funções área, raio de giração e mo

$x, (m)$	$A(x), (m^2)$	$r^2(x), (m^2)$	$I(x), (10^{-1}m^4)$
0,00	0,1366	0,1970	0,2690
0,12	0,1232	0,2434	0,3000
0,24	0,1099	0,3087	0,3394
0,36	0,0966	0,3842	0,3712
0,48	0,0833	0,4672	0,3893
0,60	0,0700	0,5580	0,3907
0,72	0,0567	0,6580	0,3732
0,84	0,0434	0,7686	0,3337
0,96	0,0301	0,8906	0,2683
1,08	0,0168	1,0240	0,1723
1,20	0,0035	1,1690	0,0412

Tabela VIII - Resultados para o Caso 8.

mento de inércia.

A análise desse caso tem a intenção de ilustrar a dificuldade de uso da técnica de penalização. Uma comparação com o caso 5 leva a se concluir que os valores finais da função raio de giração são ainda maiores no presente caso. Este fato é explicado pelo valor muito pequeno da constante K_J que deve ser usado no processamento. Tal constante tem de ser fixada em $K_J = 500$ pois qualquer outro valor de K_J causa divergência do algoritmo. Mesmo com esse valor, ocorre tendência a se divergir após a iteração de onde são obtidos os resultados acima tabelados. A convergência se dá da maneira mais lenta que no caso 5, com uma série grande de propagações inter

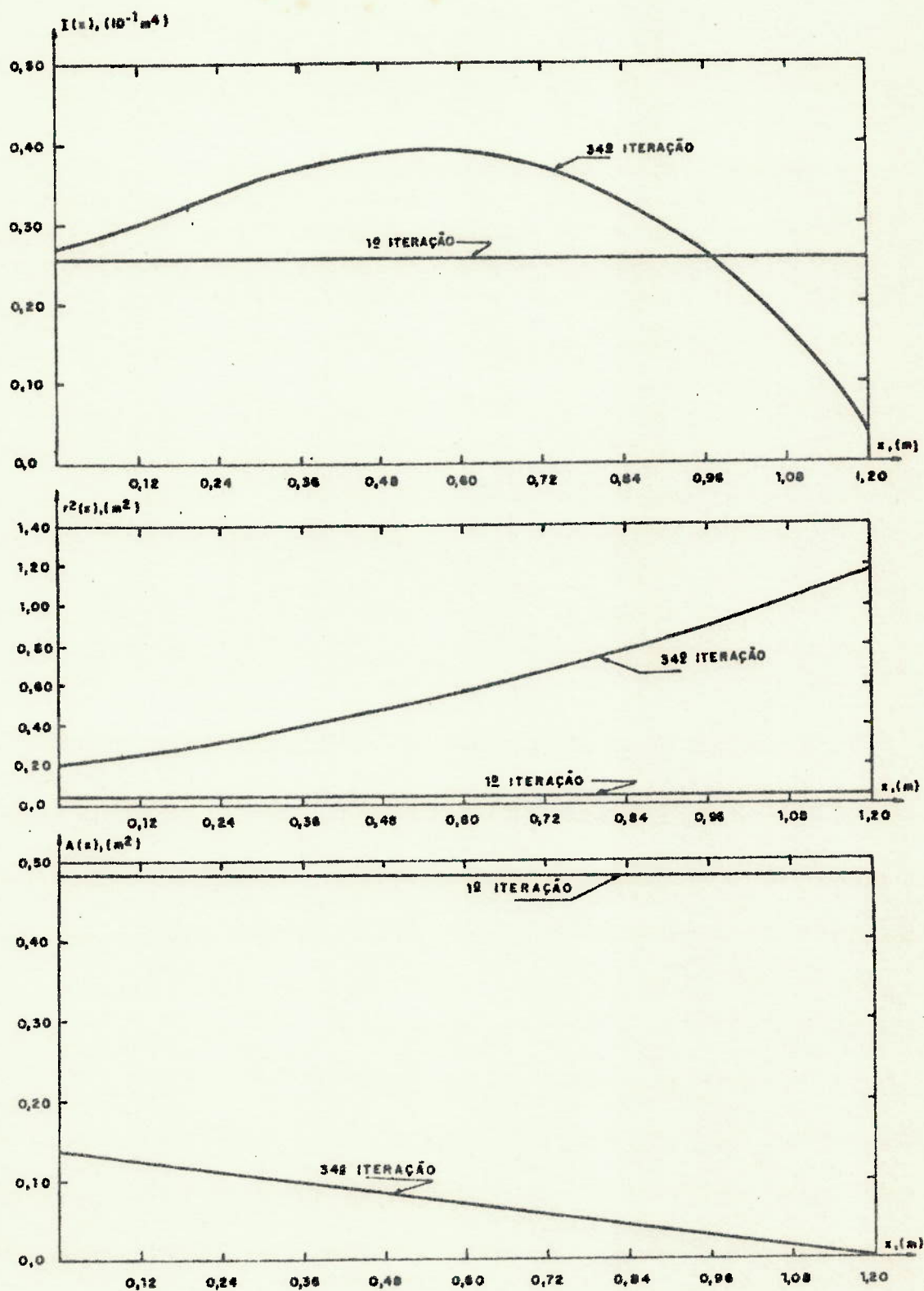


Figura 5.5- Comparação das Funções Área, Raio de Giração e Momento de Inércia, Iniciais e Finais para o Caso 8

mediárias, mas os vínculos terminais são verificados com boa precisão.

O valor máximo atingido pela função raio de giração ocorre para o extremo livre da viga, na 21ª iteração, e é pouco maior que o obtido no caso 5: 1,897 m². A tentativa de se trazer a função para dentro da região permitida fica comprometida pelo pequeno valor de K_J . De todo modo, o valor do termo de penalização $K_J [y_{10}(x)]^2$ é reduzido de 301,7 para 29,0 o que demonstra que, se a penalização não destruísse as aproximações lineares do algoritmo, haveria possibilidade de, com um grande número de iterações, conseguir satisfazer esse vínculo de desigualdade de maneira razoável.

Quanto à restrição de desigualdade imposta à área, a fronteira é violada apenas nas últimas iterações e de maneira bastante tênue. Com isso, pode-se dizer que este vínculo é razoavelmente respeitado.

Caso 9 : Restrições pequenas ; $\omega = 3000$ rd/s ; Condições de Contorno Fixas para Área e Raio de Giração no Engastamento.

A tabela IX mostra os valores das funções - área, raio de giração e momento de inércia ao longo do comprimento da viga, obtidos, para o caso 9, na 55ª e última iteração.

$x, (m)$	$A(x), (m^2)$	$r^2(x), (m^2)$	$I(x), (10^{-1}m^4)$
0,00	0,4800	0,0534	0,2563
0,12	0,4046	0,0725	0,2934
0,24	0,3318	0,0932	0,3093
0,36	0,2645	0,1164	0,3080
0,48	0,2049	0,1426	0,2921
0,60	0,1544	0,1719	0,2653
0,72	0,1138	0,2043	0,2325
0,84	0,0831	0,2399	0,1994
0,96	0,0616	0,2785	0,1716
1,08	0,0476	0,3201	0,1523
1,20	0,0386	0,3648	0,1410

Tabela IX - Resultados para o Caso 9.

A função área é, agora, claramente não linear, e é responsável por um peso final de 1803,7 kgf, o que significa uma redução de 59,79% em comparação ao peso da viga de secção constante inicial. A frequência fundamental é elevada até 2985 rd/s, valor 123,60% maior que a frequência inicial.

A especificação das condições de contorno para a área e o raio de giração na extremidade engastada força uma variação muito mais lenta nas funções associadas, ou seja, na forma da viga. Em comparação com o caso 2, a convergência se torna bem mais difícil, exigindo um grande número de propagações intermediárias para se conseguir melhor ajuste de todas as condições envolvidas. O processo numérico demonstra uma maior tendência ao acerto das funções área e raio de

giração antes de começar a progredir para a satisfação dos vínculos terminais, o que implica numa sucessiva diminuição do passo até valores muito pequenos. Tais vínculos são satisfeitos dentro da precisão exigida, embora isto ocorra com muita dificuldade. Não existe violação de nenhum dos vínculos de desigualdade sobre variáveis de estado ao longo de todo o processamento.

Tomando como valores de comparação aqueles obtidos no caso 2, a simulação do presente caso leva a valores bem mais altos da função área e, em consequência, do peso. Valores obtidos para o raio de giração são, no entanto, bem menores aqui que no caso 2. Tais considerações afirmam que o fato de se fixar os valores de área e raio de giração na extremidade engastada condiciona a forma final das funções, de modo a mantê-las compatíveis com os valores fixos, e, assim, permite menores variações de geometria.

Caso 10 : Restrições Fortes; $\omega = 4000$ rd/s; Condições de Contorno Fixas para Área e Raio de Giração no Engastamento.

Encontram-se, na Tabela X, os valores obtidos para as funções área, raio de giração e momento de inércia na 43^a iteração de uma série de 60 efetuados.

A função de área distribuída ao longo da viga se comporta de maneira não linear e leva a um valor final para o peso de 1385,5 kgf, enquanto a frequência do primeiro modo é elevada até 4004 rd/s. Estes dados representam, em rela

$x, (m)$	$A(x), (m^2)$	$r^2(x), (m^2)$	$I(x), (10^{-1}m^4)$
0,00	0,4800	0,0534	0,2563
0,12	0,3826	0,0815	0,3121
0,24	0,2912	0,1107	0,3223
0,36	0,2109	0,1410	0,2974
0,48	0,1444	0,1728	0,2495
0,60	0,0927	0,2061	0,1911
0,72	0,0556	0,2410	0,1340
0,84	0,0314	0,2774	0,0872
0,96	0,0176	0,3152	0,0554
1,08	0,0105	0,3543	0,0371
1,20	0,0057	0,3944	0,0224

Tabela X - Resultados para o Caso 10.

ção à viga de secção constante inicial, uma redução de 69,11% no peso e um aumento de 199,93% na frequência fundamental. O gráfico da Figura 5.6 ilustra, para o caso em discussão, uma comparação entre os valores iniciais e finais da área, do raio de giração e do momento de inércia.

A elevação do nível exigido de frequência e a colocação de restrições de desigualdade mais fortes trazem uma melhor estabilidade para este caso, em que são fixas as condições de contorno para área e raio de giração na extremidade engastada, quando comparado ao caso 9.

A melhora de convergência parece associada ao aumento do nível de frequência pois a simulação de um caso análogo ao aqui exposto, com $\omega = 3000$ rd/s, leva apenas a modi-

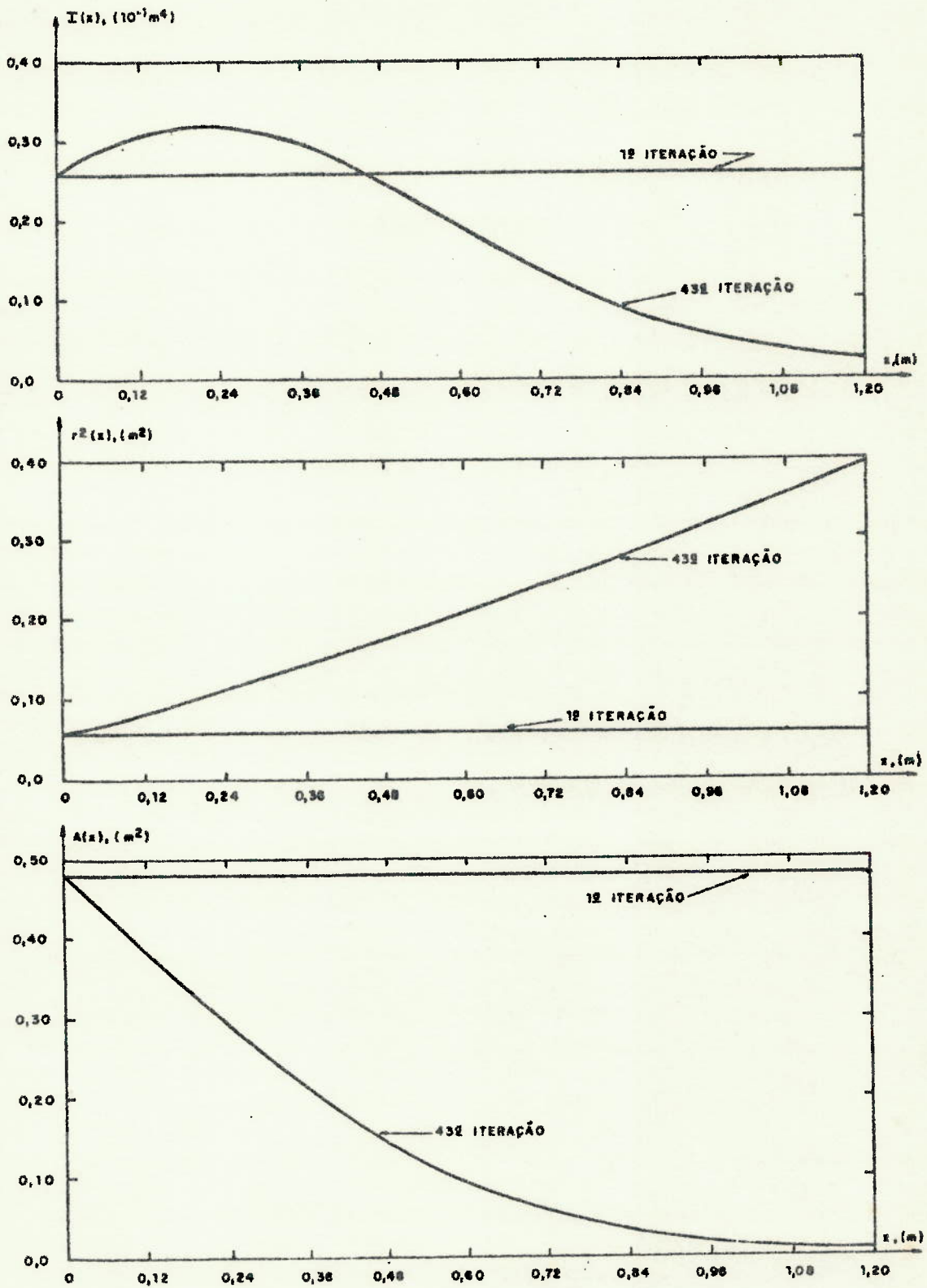


Figura 5.6- Comparação das Funções Área, Raio de Giração e Momento de Inércia, Iniciais e Finais, para o Caso 10

ficações muito pouco sensíveis em relação ao caso 9. Obtém-se, então, funções de área ligeiramente maiores e funções raio de giração menores sem, no entanto, conseguir que a técnica de penalização funcione corretamente.

Voltando ao caso 10, deve-se dizer da convergência rápida obtida. Em cerca de 35 iterações, o processo converge para valores já bastante próximos aos finais, sendo que os vínculos terminais são verificados com boa precisão, menor que 10^{-4} , a partir desse instante.

Quanto às restrições de desigualdade, este é o caso que apresenta melhor comportamento da técnica de penalização. A fronteira imposta à área é violada apenas no extremo livre e, mesmo assim, trata-se de uma penetração muito pequena, como pode ser constatado pelos valores da Tabela X. A evolução da função raio de giração difere bastante dos outros casos analisados. Essa função cresce até seu valor máximo de $0,5414 \text{ m}^2$, na 15ª iteração, como sempre, registrado no extremo livre. Em seguida, a penalização faz com que este valor decresça até sair totalmente da fronteira na 36ª iteração, o que é feito à custa de um maior afastamento dos vínculos terminais. Entre a 38ª e a 48ª iteração, registra-se uma oscilação da função entre valores máximos, no extremo livre, de $0,35 \text{ m}^2$ e $0,42 \text{ m}^2$, ao mesmo tempo que se ajustam os vínculos terminais. Após isto, nota-se uma tendência ao aumento da função raio de giração enquanto o peso e a área caem lentamente e os vínculos terminais são mantidos nos níveis já conseguidos.

O valor do termo de penalização na função objetivo modificada $K_J [y_{10}(x)]^2$, que tem máximo igual a 9,67 na 15ª iteração, é reduzido a zero na 22ª iteração e sobe a 0,56 na 43ª iteração, o que demonstra a pequena penetração nas fronteiras na iteração considerada. A constante K_J tem seu valor fixado, para o caso em discussão, em 10^4 , enquanto K_3 tem valor 10,0.

Uma comparação da solução obtida para o presente caso com a solução do caso 8, ou do caso 5, permite observar que, aqui, a função raio de giração apresenta valores muito menores enquanto o peso se mantém maior, fato que deveria ser esperado pela limitação representada pela fixação dos valores da área e do raio de giração na extremidade engastada.

5.4 - ANÁLISE DOS RESULTADOS.

Os resultados obtidos para os diversos casos analisados, em termos de redução da massa e aumento da frequência, são agora resumidos na Tabela XI, a seguir.

Da tabela acima, uma série de considerações importantes podem ser retiradas. A primeira é que a imposição de fronteiras mais estreitas para os vínculos de desigualdade leva a se conseguir menores reduções de massa ou peso, o que é justificado pelo aumento do limite inferior da função de área ao longo do comprimento, embora a principal intenção em se modificar as fronteiras seja a de limitar os valores máximos da

Caso	Redução de Massa (%)	Aumento da Frequência (%)	Nível de Frequência	Rest. Desig.
1	58,550	50,26	2000	
2	84,770	125,62	3000	Peque- nas
3	99,988	208,09	4000	
4	80,320	125,17	3000	
5	85,800	198,65	4000	Médias
6	58,940	50,26	2000	
7	78,240	124,79	3000	Fortes
8	85,340	198,65	4000	
9	59,790	123,60	3000	Peque- nas.
10	69,110	199,32	4000	Fortes

Tabela XI - Resumo dos Resultados Obtidos.

função raio de giração. Existe uma única exceção a essa consideração, representada pelo caso 6, onde a colocação de restrições mais rígidas acaba melhorando um pouco a convergência em relação ao caso 1 e, com isso, permite mais algumas iterações, com conseqüente redução do peso. Uma segunda consideração diz

respeito à especificação das condições de contorno para a área e para o raio de giração no extremo engastado. Assim, a definição, a priori, da geometria da secção engastada conduz a menores variações das funções área e raio de giração e permite menores reduções de peso em relação aos outros casos analisados. Isto pode ser verificado pela comparação dos resultados dos casos 2 e 9 e dos casos 8 e 10. A vantagem, na colocação do problema na forma do caso 9 ou do caso 10, é que são conseguidos valores menores da função raio de giração.

Sobre a convergência do processo numérico, as considerações do item anterior levam a se concluir que o aumento do nível de frequência melhora muito a convergência. No entanto, isto custa a obtenção de valores maiores da função raio de giração, o que nem sempre é desejável. Excetuando-se o caso 6, já comentado, a convergência do processo numérico é tão mais lenta quanto mais fortes forem as restrições sobre a área e o raio de giração. No caso 3 e outros, comentados no item 5.2, onde se obtém excelente convergência, as soluções ótimas decorrentes podem não ter grande significação prática. Este fato pode ser contornado pela escolha de uma viga sub-ótima que é gerada pelo processo, o que é, sem dúvida, uma vantagem do modelo aqui proposto.

Conforme já levantado no item anterior, a função de área varia linearmente com a coordenada independente. Constituem exceção a essa regra, o caso 3 e os casos em que a área e o raio de giração tem condições de contorno fixas na extremidade engastada (9 e 10). No caso 3, entretanto, qualquer

viga sub-ótima escolhida mantém essa característica de linearidade da função área. Para a função raio de giração, não é possível, em princípio, estabelecer uma regra de comportamento como esta.

Outra conclusão importante se refere à satisfação dos vínculos de desigualdade sobre as variáveis de estado. Estas restrições não são totalmente obedecidas, ao menos aquela definida sobre o raio de giração, em nenhum dos casos que se convencionou chamá-las de médias ou fortes. O fato de permanecer dentro da fronteira é inerente à técnica de penalização usada para tratamento dos vínculos. O que não se deve esperar é que o sistema permaneça na região com uma penetração muito grande. Para se tentar contornar este inconveniente, existem duas possibilidades: aumentar o valor das constantes de penalização definidas no algoritmo, de modo a não permitir grandes penetrações nos vínculos ou manter pequenas estas constantes, deixando praticamente livre a penetração e forçando o retorno após grandes valores de violação serem atingidos. Nos casos aqui tratados, a segunda opção se mostra como a única viável pois a primeira força a divergência do processo numérico. Entretanto, com condição de pequenas constantes de penalização o retorno à região permitida é sempre lento e o processo numérico se encerra sem conseguir satisfazer as restrições. Bons resultados para satisfação dos vínculos de desigualdade são conseguidos no caso 10 e no caso apenas comentado dentro da análise do caso 7, sendo os outros apenas razoáveis, fato que vem demonstrar a necessidade do surgimento de novas técnicas.

cas que permitam um melhor tratamento desse tipo de restrição.

Observações devem ser feitas, também, para certas situações encontradas na análise dos resultados. Assim, em alguns casos, não existe garantia que a solução encontrada seja a solução ótima, isto é, aquela que maximiza a frequência fundamental e minimiza a massa. Tal fato ocorre nos casos em que existem problemas numéricos de convergência para satisfação dos vínculos terminais ou dos vínculos de desigualdade. No entanto, pode-se garantir que a solução encontrada está próxima à solução ótima e que verifica todas as condições impostas, ou seja, é uma solução sub-ótima. Mesmo nos casos de excelente convergência (3 e outros), não se tem maneiras de garantir a otimalidade da solução, mas é possível afirmar que a solução gerada reproduz a ótima dentro de uma pequena precisão. Com relação aos níveis de frequência, não são usados valores mais altos, pois se verifica, dos resultados obtidos no item anterior, que níveis mais altos devem gerar valores maiores para a função raio de giração. Em vista disso, tais níveis passam a ser desinteressantes para a análise que aqui se pretendeu fazer.

Finalmente, uma consideração deve ser feita sobre o problema referente à estimativa inicial usada. É claro, que, quando existem problemas de convergência numérica, os resultados finais são afetados por essa estimativa. Na apresentação dos resultados obtidos, é adotada uma padronização com relação à viga usada para a primeira iteração, de modo a se conseguir uma visão mais ampla dos citados resultados, que englobe também os problemas de convergência. Outros casos, da longa sé-

rie de processamentos efetuados, que não respeitam a padronização, são apenas comentados para que não alterem o quadro comparativo pretendido.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES

As soluções encontradas para os casos analisados demonstram que o método desenvolvido leva a resultados muito bons para o problema de minimização da massa e maximização da frequência fundamental de uma viga em balanço. Embora subsistam entraves de convergência por razões numéricas, os resultados demonstram que é possível juntar esses dois critérios de otimização, que parecem conflitantes entre si. Valores de aumento da frequência fundamental, como os de Karihaloo e Niordson, $|K2|$, são aqui obtidos mesmo com considerável diminuição da massa e boa satisfação de restrições fortes de desigualdade, como é atestado por processamento comentado no caso 7, onde se consegue aumento de 334,5% na frequência, com redução de 77,2% na massa, em relação à viga inicial, pequena penetração na fronteira imposta sobre o raio de giração e total respeito à restrição de área.

Verifica-se, com isso, a potencialidade do tratamento de problemas de otimização estrutural por meio da teoria de Controle Ótimo. Apesar de conduzir a detalhes mais trabalhosos no aspecto de programação em computador, a modelagem do problema pode ser feita de uma maneira muito mais ampla. Em -

comparação ainda com o trabalho de Karihaloo e Niordson, [K2], torna-se possível a inclusão de vínculos de desigualdade como é desenvolvido aqui. Da mesma forma, é possível, sem grandes esforços, modificar os níveis dessas restrições ou, ainda, modificar as condições de contorno definidas, de modo a se incluir o processamento de novos casos, como feito para se impor restrições fortes ou médias e para especificar a geometria da secção transversal engastada.

A abordagem mais ampla citada torna possível o fato de não se impor uma geometria final da viga, o que permite obter, através de ajustes posteriores, a forma conveniente que mais se aproxima da viga otimizada.

O processo numérico decorrente do algoritmo de gradiente de primeira ordem mostra uma convergência razoavelmente rápida, gastando, em média 40 iterações para chegar à solução final, com variações até um mínimo de 22 iterações (caso 1) e um máximo de 55 (caso 9). Estes números indicam que a convergência se faz mais rápida no presente caso que no caso desenvolvido por Mc Cart, Haug e Streeter, [M1], para um pórtico plano, onde o número médio de iterações é sessenta. Julga-se válida esta comparação pois, em [M1], os autores chamam a atenção para as modificações introduzidas no algoritmo de Bryson e Denham, [B2], de modo a torná-lo mais compatível com a solução dos problemas de contorno associados à otimização estrutural e, assim, evitar ameaças de estimativas iniciais ruins e de instabilidade numérica. No método de solução numérica, aqui proposto e implantado, as ameaças se resumem a valores mal estimados -

para as diversas constantes de peso e funções de penalidade, de que trata o item 5.1. Uma vez razoavelmente "balanceados" esses valores e implantado o dispositivo para ajuste do tamanho do passo e do coeficiente de correção dos vínculos terminais, uma convergência razoável é conseguida com um número - aceitável de iterações.

Preocupação mais séria é aquela referente ao tratamento dos vínculos de desigualdade. Como já colocado anteriormente, o uso de técnicas de penalização é a única maneira, em termos práticos, de controlar várias restrições simultâneas. No entanto, os resultados que esta técnica fornece são pobres, o que pode ser comprovado das soluções aqui obtidas. A procura de outras técnicas de abordagem a este problema tem sido motivo de uma extensa série de pesquisas, por enquanto sem resultados muito satisfatórios. Com isso, as soluções encontradas - neste trabalho devem ser vistas como as soluções ótimas dentro dos padrões da técnica disponível, ou seja, da técnica de penalização. No entanto, deve ser dado um crédito positivo ao método usado, no sentido de que não existe, em nenhum caso, tendência a se convergir para o segundo modo de vibração, fato controlado pela imposição de uma restrição de desigualdade sobre a inclinação da linha elástica ao longo de todo o comprimento. Este inconveniente se manifesta no trabalho de Mc Cart e co-autores, [M1], onde a convergência para o segundo modo de vibração compromete totalmente um dos casos analisados.

O programa de solução numérica, apresentado em - maiores detalhes nos Apêndices, foi desenvolvido com a intenção

de se poder implantar outros problemas de otimização de estruturas simples sem a necessidade de se promover alterações profundas. Dentro de um esquema de pequenas modificações do programa desenvolvido, acredita-se ser importante recomendar o estudo de novas situações. Dessa maneira, uma sugestão seria o estabelecimento de uma comparação entre os resultados aqui descritos e outros obtidos com a simulação com diferentes valores do comprimento arbitrado ou das vigas usadas como estimativa inicial para a verificação da influência destes parâmetros na velocidade de convergência e na solução ótima, fato - que, no presente trabalho, fica mascarado pela padronização imposta. Uma outra colocação importante seria a de se tentar um mecanismo mais eficiente do controle do tamanho do passo e da constante de correção dos vínculos terminais. O mecanismo utilizado, que se mostra indispensável para a simulação nas condições aqui impostas, parece representar um caminho a ser seguido, mas acredita-se que deva ser melhorado de modo a, pelo menos, não retardar demasiadamente a convergência pela sistemática propagação das equações diferenciais. Ainda dentro de pequenas modificações do programa, uma última sugestão, para tentar melhorar o nível de satisfação das restrições sobre as variáveis de estado, é a criação de fronteiras falsas para os vínculos de área e raio de giração. Com isso, tem-se a intenção de começar a penalização antes que as fronteiras reais sejam atingidas, não se permitindo grandes penetrações para dentro da região proibida. Uma desvantagem aparente desse procedimento é que, com seu retorno, o sistema poderia se manter entre as -

fronteiras falsas e reais, com evidente perda da solução ótima.

Com mudanças de pequena monta no modelo proposto e no programa desenvolvido, poder-se-ia facilmente reproduzir, com técnicas de Controle Ótimo, os problemas abordados por Karihaloo e Niordson, [K2], e por Mc Cart, Haug e Streeter, [M1]. Entretanto, julga-se de maior interesse a extensão do modelo, na forma aqui proposta, à solução de problemas de otimização de pórticos planos, como o usado em [M1], ou a outros sistemas de vigas, o que pode ser feito pela montagem de esquemas eficientes de integração das equações diferenciais ao longo de tais sistemas.

Modificações pequenas no modelo e no programa levariam, também, à possibilidade de otimização de vigas sob outras condições de contorno. Dessa forma, vigas bi-apoiadas, bi-engastadas e outras possíveis combinações de vinculação externa, podem ser analisadas por procedimentos muito semelhantes aos aqui utilizados.

Finalmente, a inclusão de efeitos de cisalhamento e inércia de rotação ao modelo aqui utilizado conduziria a modificações mais significativas no método de solução numérica. Este novo problema, que deve ser visto como um problema de otimização dinâmica com parâmetros distribuídos, pode ser, em princípio, tratado por algoritmo de gradiente como o proposto por Sage, [S2], e que representa uma extensão para sistemas multidimensionais da técnica de Bryson e Denham, [B2]. Resultados para esse caso seriam de enorme valia numa avaliação conjunta

com os resultados do presente trabalho. Um método assim desenvolvido se prestaria também à análise de muitos outros casos de estruturas simples como, por exemplo, placas sob variadas condições de vínculos externos, fato que, sem dúvida, justifica sua realização.

APÊNDICE A1

RELAÇÕES NECESSÁRIAS PARA APLICAÇÃO DO ALGORITMO

Neste apêndice, são desenvolvidas as relações necessárias para implantação do algoritmo de gradiente de primeira ordem de que trata o ítem 4.4. Para tanto, deve-se voltar à definição do problema de Controle Ótimo correspondente à minimização da massa e maximização da frequência fundamental da viga em balanço, para o caso de pequenas restrições de desigualdade e condições de contorno de área e raio de giração não especificadas na extremidade engastada, como os casos analisados de 1 a 3. Esse problema é, então, colocado como o de minimizar um Índice de Performance, a função objetivo, dado por:

$$\bar{J} = K_J [y_{10}(\ell)]^2 + \int_0^\ell \left(\rho y_5^2 + \frac{K_s}{y_9^2} \right) dx \quad (A.1)$$

Analogia com o ítem 4.4 leva a que, de (A.1), se tem:

$$\phi \left[\ell, y(\ell) \right] = K_J \left[y_{10}(\ell) \right]^2$$

e

$$L(y) = \rho y_5^2 + \frac{K_s}{y_9^2}$$

Vínculos dinâmicos são definidos pelas equações:

$$\dot{y}_1 = f_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = f_2 = y_3$$

$$\dot{y}_3 = f_3 = y_4$$

$$\dot{y}_4 = f_4 = \frac{1}{y_5 y_6} \left[\frac{\rho}{E} y_9^2 y_5 y_1 - (u_1 y_6 + 2y_7 y_8 + u_2 y_5) y_3 + \right. \\ \left. - 2(y_6 y_7 + y_5 y_8) y_4 \right]$$

$$\dot{y}_5 = f_5 = y_7$$

$$\dot{y}_6 = f_6 = y_8$$

$$\dot{y}_7 = f_7 = u_1$$

$$\dot{y}_8 = f_8 = u_2$$

$$\dot{y}_9 = f_9 = 0$$

$$\dot{y}_{10} = f_{10} = C_1^2 (y_2 - F_C) K_{p,1} + C_2^2 (y_5 - C) K_{p,2} + C_3^2 (y_6 - D) K_{p,3} + \\ + C_4^2 (y_9 - \omega_0) K_{p,4}$$

onde, em f_{10} , $K_{p,i} = \begin{cases} 0 & \text{se } C_i < 0 \\ K_i & \text{se } C_i > 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, 4$

Como condições de contorno no extremo engastado, tem-se:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 0 \\ y_2(0) &= 0 \\ y_3(0) &= \epsilon_1 \\ y_{10}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Vínculos terminais são dados por:

$$\begin{aligned} \psi_1(x_f) &= y_1 \Big|_{x=\ell} - \epsilon_1 = 0 \\ \psi_2(x_f) &= y_3 \Big|_{x=\ell} = 0 \\ \psi_3(x_f) &= y_4 \Big|_{x=\ell} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Colocadas as relações acima, são definidos, a seguir, os sistemas adjuntos. O sistema adjunto associado aos multiplicadores $\underline{\lambda}_\psi$ é obtido de:

$$\dot{\underline{\lambda}}_\psi = - \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{y}} \right)^T \underline{\lambda}_\psi \quad (\text{A.5})$$

A matriz $(\frac{\partial f}{\partial y})$ é montada a partir dos termos obtidos da derivação de cada uma das funções f em relação a todas as variáveis de estado. Segue-se que:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_2} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_j} = 0 \quad ; \quad j \neq 2, \quad j = 1, \dots, 10$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_3} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_j} = 0 \quad ; \quad j \neq 3, \quad j = 1, \dots, 10$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y_4} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial f_3}{\partial y_j} = 0 \quad ; \quad j \neq 4, \quad j = 1, \dots, 10$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial y_1} = \frac{\rho y_9^2}{E y_6} \quad ; \quad \frac{\partial f_4}{\partial y_2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f_4}{\partial y_3} = - \left(\frac{u_1 y_6 + 2 y_7 y_8 + u_2 y_5}{y_5 y_6} \right)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial y_4} = - \frac{2(y_7 y_6 + y_5 y_8)}{y_5 y_6} \quad ; \quad \frac{\partial f_4}{\partial y_5} = \frac{(u_1 y_6 + 2 y_7 y_8) y_3 + 2 y_7 y_6 y_4}{y_5^2 y_6}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial y_6} = - \frac{[\rho y_9^2 y_1 y_5 / E - (2 y_7 y_8 + u_2 y_5) y_3 - 2 y_8 y_4 y_5]}{y_5 y_6^2}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial y_7} = - \frac{2(y_8 y_3 + y_6 y_4)}{y_5 y_6} \quad ; \quad \frac{\partial f_4}{\partial y_8} = - \frac{2(y_7 y_3 + y_5 y_4)}{y_5 y_6}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial y_9} = \frac{2 \rho y_9 y_1}{E y_6} \quad ; \quad \frac{\partial f_4}{\partial y_{10}} = 0$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial y_7} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial f_5}{\partial y_j} = 0 \quad , \quad j \neq 7 \quad , \quad j = 1, \dots, 10$$

$$\frac{\partial f_6}{\partial y_8} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial f_6}{\partial y_j} = 0 \quad , \quad j \neq 8 \quad , \quad j = 1, \dots, 10$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial y_j} = 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, 10$$

$$\frac{\partial f_8}{\partial y_j} = 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, 10$$

$$\frac{\partial f_9}{\partial y_j} = 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, 10$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial y_2} = \begin{cases} 0 & ; \text{ se } C_1(y_2 - F_C) \leq 0 \\ 2C_1(y_2 - F_C)K_1 & ; \text{ se } C_1(y_2 - F_C) > 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial y_5} = \begin{cases} 0 & ; \text{ se } C_2(y_5 - C) \leq 0 \\ 2C_2(y_5 - C)K_2 & ; \text{ se } C_2(y_5 - C) > 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial y_6} = \begin{cases} 0 & ; \text{ se } C_3(y_6 - D) \leq 0 \\ 2C_3(y_6 - D)K_3 & ; \text{ se } C_3(y_6 - D) > 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial y_9} = \begin{cases} 0 & ; \text{ se } C_4(y_9 - w_0) \leq 0 \\ 2C_4(y_9 - w_0)K_4 & ; \text{ se } C_4(y_9 - w_0) > 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial y_j} = 0 \quad \text{se } j \neq 2, 5, 6, 9.$$

Com essas relações, as equações diferenciais definidas por (A.5) ficam na forma abaixo, bastando variar os índices dos vínculos terminais para se obter as 30 equações de (A.5):

$$\dot{\lambda}_{1\psi i} = - \left(\frac{\partial f_4}{\partial y_1} \right) \lambda_{4\psi i}$$

$$\dot{\lambda}_{2\psi i} = - \lambda_{1\psi i} - \left(\frac{\partial f_{10}}{\partial y_2} \right) \lambda_{10\psi i}$$

$$\dot{\lambda}_{3\psi i} = - \lambda_{2\psi i} - \left(\frac{\partial f_4}{\partial y_3} \right) \lambda_{4\psi i}$$

$$\dot{\lambda}_{4\psi i} = - \lambda_{3\psi i} - \left(\frac{\partial f_4}{\partial y_4} \right) \lambda_{4\psi i} \quad (\text{A.6})$$

$$\dot{\lambda}_{5\psi i} = - \left(\frac{\partial f_4}{\partial y_5} \right) \lambda_{4\psi i} - \left(\frac{\partial f_{10}}{\partial y_5} \right) \lambda_{10\psi i} ; \quad i = 1, 2, 3$$

$$\dot{\lambda}_{6\psi i} = - \left(\frac{\partial f_4}{\partial y_6} \right) \lambda_{4\psi i} - \left(\frac{\partial f_{10}}{\partial y_6} \right) \lambda_{10\psi i}$$

$$\dot{\lambda}_{7\psi i} = - \left(\frac{\partial f_4}{\partial y_7} \right) \lambda_{4\psi i} - \lambda_{5\psi i}$$

$$\dot{\lambda}_{8\psi i} = - \left(\frac{\partial f_4}{\partial y_8} \right) \lambda_{4\psi i} - \lambda_{6\psi i}$$

$$\dot{\lambda}_{9\psi i} = - \left(\frac{\partial f_4}{\partial y_9} \right) \lambda_{4\psi i} - \left(\frac{\partial f_{10}}{\partial y_9} \right) \lambda_{10\psi i}$$

$$\dot{\lambda}_{10\psi i} = 0$$

As condições de contorno para o sistema acima são obtidas no extremo final, $x = l$, a partir da relação:

$$\underline{\lambda}_{\psi}^T (l) = \left. \frac{\partial \psi}{\partial \underline{y}_f} \right|_{x=l} \quad (\text{A.7})$$

Decorre, então, que:

$$\underline{\lambda}_{\psi} (l) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Quanto à matriz $\underline{\lambda}_{\psi}$, de valores de $\underline{\lambda}_{\psi}$ na extremidade inicial, é dada por:

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{4\psi 1} & \lambda_{4\psi 2} & \lambda_{4\psi 3} \\ \lambda_{5\psi 1} & \lambda_{5\psi 2} & \lambda_{5\psi 3} \\ \lambda_{6\psi 1} & \lambda_{6\psi 2} & \lambda_{6\psi 3} \\ \lambda_{7\psi 1} & \lambda_{7\psi 2} & \lambda_{7\psi 3} \\ \lambda_{8\psi 1} & \lambda_{8\psi 2} & \lambda_{8\psi 3} \\ \lambda_{9\psi 1} & \lambda_{9\psi 2} & \lambda_{9\psi 3} \end{bmatrix} \quad \text{---} \quad \begin{bmatrix} \lambda_{1\psi 1} & \lambda_{1\psi 2} & \lambda_{1\psi 3} \\ \lambda_{2\psi 1} & \lambda_{2\psi 2} & \lambda_{2\psi 3} \\ \lambda_{3\psi 1} & \lambda_{3\psi 2} & \lambda_{3\psi 3} \\ \lambda_{4\psi 1} & \lambda_{4\psi 2} & \lambda_{4\psi 3} \\ \lambda_{5\psi 1} & \lambda_{5\psi 2} & \lambda_{5\psi 3} \\ \lambda_{6\psi 1} & \lambda_{6\psi 2} & \lambda_{6\psi 3} \end{bmatrix} \quad \text{---} \quad \text{x=0}$$

O sistema adjunto associado aos multiplicadores $\underline{\lambda}_J$ é definido como:

$$\dot{\underline{\lambda}}_J = - \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{\gamma}} \right)^T - \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\gamma}} \right)^T \underline{\lambda}_J \quad (\text{A.9})$$

Resta calcular os valores do vetor $\frac{\partial L}{\partial \underline{\gamma}}$, derivada da função do integrando da função objetivo em relação às variáveis de estado. Decorre, então que:

$$\frac{\partial L}{\partial y_5} = 2\rho y_5 ; \quad \frac{\partial L}{\partial y_9} = - \frac{2K_s}{y_9^3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_j} = 0 \quad j = 1, \dots, 10 ; \quad j \neq 5, \quad j \neq 9$$

Com isso, o sistema de (A.9) pode ser escrito como:

$$\dot{\lambda}_{J1} = - \left(\frac{\partial f_4}{\partial y_1} \right) \lambda_{J4}$$

$$\dot{\lambda}_{J2} = - \lambda_{J1} - \left(\frac{\partial f_{10}}{\partial y_2} \right) \lambda_{J10} \quad (\text{A.10})$$

$$\dot{\lambda}_{J3} = - \lambda_{J2} - \left(\frac{\partial f_4}{\partial y_3} \right) \lambda_{J4}$$

$$\dot{\lambda}_{J4} = - \lambda_{J3} - \left(\frac{\partial f_4}{\partial y_4} \right) \lambda_{J4}$$

$$\dot{\lambda}_{J5} = - \left(\frac{\partial f_4}{\partial y_5} \right) \lambda_{J4} - \left(\frac{\partial f_{10}}{\partial y_5} \right) \lambda_{J10} - \left(\frac{\partial L}{\partial y_5} \right)$$

$$\dot{\lambda}_{J6} = - \left(\frac{\partial f_4}{\partial y_6} \right) \lambda_{J4} - \left(\frac{\partial f_{10}}{\partial y_6} \right) \lambda_{J10}$$

$$\dot{\lambda}_{J7} = - \left(\frac{\partial f_4}{\partial y_7} \right) \lambda_{J4} - \lambda_{J5}$$

$$\dot{\lambda}_{J8} = - \left(\frac{\partial f_4}{\partial y_8} \right) \lambda_{J4} - \lambda_{J6}$$

$$\dot{\lambda}_{J9} = - \left(\frac{\partial f_4}{\partial y_9} \right) \lambda_{J4} - \left(\frac{\partial f_{10}}{\partial y_9} \right) \lambda_{J10} - \left(\frac{\partial L}{\partial y_9} \right)$$

$$\dot{\lambda}_{J10} = 0$$

Condições de contorno para o sistema (A.10) acima, são dadas por:

$$\lambda_{Ji}(x_f) = \begin{cases} 0 & ; \quad i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial \phi}{\partial y_{f,i}} & ; \quad i = b+1, \dots, n \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

onde b é o número de variáveis de estado especificadas em $x = x_f$.

Decorre, então, que:

$$\underline{\lambda}_J(\ell) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2K_J y_{10}(\ell) \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Da mesma forma que no anterior sistema adjunto, define-se o vetor $\underline{\lambda}_J$ como sendo o vetor dos valores de interesse de $\underline{\lambda}_J$ na extremidade inicial, $x = 0$. Este é, então, obtido de:

$$\underline{\lambda}_J = \left. \begin{array}{c} \lambda_{J4} \\ \lambda_{J5} \\ \lambda_{J6} \\ \lambda_{J7} \\ \lambda_{J8} \\ \lambda_{J9} \end{array} \right\}_{x=0} = \left. \begin{array}{c} \lambda_{J1} \\ \lambda_{J2} \\ \lambda_{J3} \\ \lambda_{J4} \\ \lambda_{J5} \\ \lambda_{J6} \end{array} \right\} \quad (\text{A.13})$$

Vistos os sistemas adjuntos, passa-se à análise das matrizes $I_{\psi\psi}$, $I_{\psi J}$ e I_{JJ} .

A matriz $I_{\psi\psi}$, simétrica e de dimensão (3x3), é definida por:

$$I_{\psi\psi} = \underline{\lambda}_{\psi}^T \underline{B}^{-1} \underline{\lambda}_{\psi} + x_0 \int_0^x f \left[\underline{\lambda}_{\psi}^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \underline{W}^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \right)^T \underline{\lambda}_{\psi} \right] dx \quad (\text{A.14})$$

As matrizes de peso, \underline{B} , (6x6), e \underline{W} , (2x2), são colocadas como diagonais. Suas inversas, \underline{B}^{-1} e \underline{W}^{-1} , são também diagonais, e tais que:

nais de dois dos termos da matriz, sendo que os outros termos podem ser facilmente obtidos por mudança dos índices de λ_ψ e de λ_ψ :

$$I_{\psi\psi,11} = \frac{\lambda_{1\psi 1}^2}{B_{11}} + \frac{\lambda_{2\psi 1}^2}{B_{22}} + \frac{\lambda_{3\psi 1}^2}{B_{33}} + \frac{\lambda_{4\psi 1}^2}{B_{44}} + \frac{\lambda_{5\psi 1}^2}{B_{55}} + \frac{\lambda_{6\psi 1}^2}{B_{66}} +$$

$$+ \int_0^L \left\{ \frac{1}{W_{11}} \left[\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1} \right) \lambda_{4\psi 1} + \lambda_{7\psi 1} \right]^2 + \frac{1}{W_{22}} \left[\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_2} \right) \lambda_{4\psi 1} + \lambda_{8\psi 1} \right]^2 \right\} dx$$

$$I_{\psi\psi,31} = I_{\psi\psi,13} = \frac{\lambda_{1\psi 1} \lambda_{1\psi 3}}{B_{11}} + \frac{\lambda_{2\psi 1} \lambda_{2\psi 3}}{B_{22}} + \frac{\lambda_{3\psi 1} \lambda_{3\psi 3}}{B_{33}} + \frac{\lambda_{4\psi 1} \lambda_{4\psi 3}}{B_{44}} +$$

$$+ \frac{\lambda_{5\psi 1} \lambda_{5\psi 3}}{B_{55}} + \frac{\lambda_{6\psi 1} \lambda_{6\psi 3}}{B_{66}} + \int_0^L \left\{ \frac{1}{W_{11}} \left[\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1} \right) \lambda_{4\psi 3} + \lambda_{7\psi 3} \right] \right.$$

$$\left. \left[\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1} \right) \lambda_{4\psi 1} + \lambda_{7\psi 1} \right] + \frac{1}{W_{22}} \left[\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_2} \right) \lambda_{4\psi 3} + \lambda_{8\psi 3} \right] \right.$$

$$\left. \left[\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_2} \right) \lambda_{4\psi 1} + \lambda_{8\psi 1} \right] \right\} dx$$

O vetor $I_{\psi J}$, de dimensão (3x1), tem sua definição dada por:

$$I_{\psi J} = \underline{\lambda}_{\psi}^T \underline{B}^{-1} \underline{\lambda}_J + \int_0^L \left| \underline{\lambda}_{\psi}^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \underline{W}^{-1} \left(\frac{\partial L^T}{\partial \underline{u}} + \frac{\partial f^T}{\partial \underline{u}} \right) \underline{\lambda}_J \right| dx \quad (\text{A.15})$$

No caso aqui colocado, é fácil verificar que:

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{u}} = 0$$

o que reduz $I_{\psi J}$ a:

$$I_{\psi J} = \underline{\lambda}_{\psi}^T \underline{B}^{-1} \underline{\lambda}_J + \int_0^L \left| \underline{\lambda}_{\psi}^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \underline{W}^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \right)^T \underline{\lambda}_J \right| dx \quad (\text{A.16})$$

Já se tem todos os valores necessários para o cálculo dos três termos de $I_{\psi J}$ conforme (A.16). Designando por $I_{\psi J, i}$ o termo genérico de $I_{\psi J}$, em função do número do vínculo ψ_i , $i = 1, 2, 3$, pode-se, então escrever:

$$\begin{aligned}
I_{\psi J, i} = & \frac{\lambda_{1\psi i} \lambda_{J1}}{B_{11}} + \frac{\lambda_{2\psi i} \lambda_{J2}}{B_{22}} + \frac{\lambda_{3\psi i} \lambda_{J3}}{B_{33}} + \frac{\lambda_{4\psi i} \lambda_{J4}}{B_{44}} + \\
& + \frac{\lambda_{5\psi i} \lambda_{J5}}{B_{55}} + \frac{\lambda_{6\psi i} \lambda_{J6}}{B_{66}} + \\
& + \int_0^L \left\{ \frac{1}{W_{11}} \left[\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1} \right) \lambda_{4\psi i} + \lambda_{7\psi i} \right] \left[\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1} \right) \lambda_{J4} + \lambda_{J7} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{W_{22}} \left[\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_2} \right) \lambda_{4\psi i} + \lambda_{8\psi i} \right] \left[\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_2} \right) \lambda_{J4} + \lambda_{J8} \right] \right\} dx, \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

Quanto ao escalar I_{JJ} , que deve ser calculado de:

$$I_{JJ} = \underline{\lambda}_J^T \underline{B}^{-1} \underline{\lambda}_J + \int_0^L \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \underline{u}} + \underline{\lambda}_J^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \right) \underline{W}^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{u}} + \frac{\partial f^T}{\partial \underline{u}} \underline{\lambda}_J \right) \right] dx$$

é reduzido, pelo fato de $\frac{\partial L}{\partial \underline{u}}$ ser nulo, a:

$$I_{JJ} = \underline{\lambda}_J^T \underline{B}^{-1} \underline{\lambda}_J + \int_0^L \left[\underline{\lambda}_J^T \frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \underline{W}^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \right)^T \underline{\lambda}_J \right] dx \quad (A.18)$$

O desenvolvimento da relação acima leva a um valor I_{JJ} dado por:

$$\begin{aligned}
 I_{JJ} = & \frac{\lambda_{J1}^2}{B_{11}} + \frac{\lambda_{J2}^2}{B_{22}} + \frac{\lambda_{J3}^2}{B_{33}} + \frac{\lambda_{J4}^2}{B_{44}} + \frac{\lambda_{J5}^2}{B_{55}} + \frac{\lambda_{J6}^2}{B_{66}} + \\
 & + \int \left\{ \frac{1}{W_{11}} \left[\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1} \right) \lambda_{J4} + \lambda_{J7} \right]^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{W_{22}} \left[\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_2} \right) \lambda_{J4} + \lambda_{J8} \right]^2 \right\} dx
 \end{aligned}$$

Pode-se agora passar à uma análise das correções a serem feitas nas condições de contorno não especificadas no extremo livre. Estas correções são feitas, a cada iteração, por um vetor $\delta \underline{\beta}$, (6x1), dado por:

$$\begin{aligned}
 \delta \underline{\beta} = & \underline{B}^{-1} (\underline{\lambda}_{\psi} \underline{I}_{\psi\psi}^{-1} \underline{I}_{\psi J} - \underline{\lambda}_J) \left(\frac{dS^2 - d\underline{\psi}^T \underline{I}_{\psi\psi}^{-1} d\underline{\psi}}{\underline{I}_{JJ} - \underline{I}_{\psi J}^T \underline{I}_{\psi\psi}^{-1} \underline{I}_{\psi J}} \right)^{1/2} + \\
 & + \underline{B}^{-1} \underline{\lambda}_{\psi} \underline{I}_{\psi\psi}^{-1} d\underline{\psi}
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

O termo $\left(\frac{dS^2 - d\underline{\psi}^T I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^{-1} d\underline{\psi}}{I_{JJ} - I_{\underline{\psi}J}^T I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^{-1} I_{\underline{\psi}J}} \right)^{1/2}$ é um escalar. Se $I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^{-1}$ é es-

crita como:

$$I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^{-1} = \begin{bmatrix} I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^1 & I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^4 & I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^7 \\ I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^2 & I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^5 & I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^8 \\ I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^3 & I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^6 & I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^9 \end{bmatrix}$$

então, no numerador, aparece:

$$dS^2 - d\underline{\psi}^T I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^{-1} d\underline{\psi} = dS^2 - \begin{bmatrix} d\psi_1 & d\psi_2 & d\psi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^1 & I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^4 & I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^7 \\ I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^2 & I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^5 & I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^8 \\ I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^3 & I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^6 & I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\psi_1 \\ d\psi_2 \\ d\psi_3 \end{bmatrix}$$

e, da mesma forma, no denominador se tem:

$$I_{JJ} - I_{\underline{\psi}J}^T I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^{-1} I_{\underline{\psi}J} = I_{JJ} - \begin{bmatrix} I_{\underline{\psi}J,1} & I_{\underline{\psi}J,2} & I_{\underline{\psi}J,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^1 & I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^4 & I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^7 \\ I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^2 & I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^5 & I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^8 \\ I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^3 & I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^6 & I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\underline{\psi}J,1} \\ I_{\underline{\psi}J,2} \\ I_{\underline{\psi}J,3} \end{bmatrix}$$

Para o desenvolvimento de $\delta\beta$ usa-se a notação:

$$C_0 = \left(\frac{dS^2 - d\underline{\psi}^T I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^{-1} d\underline{\psi}}{I_{JJ} - I_{\underline{\psi}J}^T I_{\underline{\psi}\underline{\psi}}^{-1} I_{\underline{\psi}J}} \right) \quad (\text{A.20})$$

e $\delta \underline{\beta}$ fica na forma:

$$\delta \underline{\beta} = C_0 \underline{B}^{-1} (\underline{l}_{\psi} I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi J} - \underline{l}_J) + \underline{B}^{-1} \underline{l}_{\psi} I_{\psi\psi}^{-1} d\underline{\psi}$$

Os cálculos de cada um dos termos de $\delta \underline{\beta}$ não apresenta novidades, razão pela qual aqui só se mostra o termo $\delta \beta_1$. Os outros podem ser obtidos pela mudança apenas dos índices dos termos $l_{i\psi j}$ e l_{Ji} .

$$\begin{aligned} \delta \beta_1 = & \frac{C_0}{B_{11}} \left[l_{1\psi 1} (I_{\psi\psi}^1 I_{\psi J, 1} + I_{\psi\psi}^4 I_{\psi J, 2} + I_{\psi\psi}^7 I_{\psi J, 3}) + \right. \\ & + l_{1\psi 2} (I_{\psi\psi}^2 I_{\psi J, 1} + I_{\psi\psi}^5 I_{\psi J, 2} + I_{\psi\psi}^8 I_{\psi J, 3}) + \\ & \left. + l_{1\psi 3} (I_{\psi\psi}^3 I_{\psi J, 1} + I_{\psi\psi}^6 I_{\psi J, 2} + I_{\psi\psi}^9 I_{\psi J, 3}) - l_{J1} \right] + \\ & + \frac{1}{B_{11}} \left[l_{1\psi 1} (I_{\psi\psi}^1 d\psi_1 + I_{\psi\psi}^4 d\psi_2 + I_{\psi\psi}^7 d\psi_3) + \right. \\ & + l_{1\psi 2} (I_{\psi\psi}^2 d\psi_1 + I_{\psi\psi}^5 d\psi_2 + I_{\psi\psi}^8 d\psi_3) + \\ & \left. + l_{1\psi 3} (I_{\psi\psi}^3 d\psi_1 + I_{\psi\psi}^6 d\psi_2 + I_{\psi\psi}^9 d\psi_3) \right] \end{aligned}$$

Finalmente, com respeito ao vetor de correções das funções de controle $\delta \underline{u}$, (2x1), este é dado pelas funções:

$$\delta \underline{u} = - \underline{W}^{-1} \left(\frac{dS^2 - d\psi^T I_{\psi\psi}^{-1} d\psi}{I_{JJ} - I_{\psi J}^T I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi J}} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{\partial L^T}{\partial \underline{u}} \right) + \left(\frac{\partial f^T}{\partial \underline{u}} \right) (\lambda_J - \lambda_\psi I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi J}) \right] +$$

$$+ \underline{W}^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{u}} \right)^T \lambda_\psi I_{\psi\psi}^{-1} d\psi \quad (\text{A.21})$$

Tendo em vista a notação dada em (A.20) e sendo $\frac{\partial L}{\partial \underline{u}}$ um vetor de componentes nulas, $\delta \underline{u}$ pode ser escrito como:

$$\delta \underline{u} = - C_0 \underline{W}^{-1} \left(\frac{\partial f^T}{\partial \underline{u}} \right) (\lambda_J - \lambda_\psi I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi J}) + \underline{W}^{-1} \left(\frac{\partial f^T}{\partial \underline{u}} \right) \lambda_\psi I_{\psi\psi}^{-1} d\psi \quad (\text{A.22})$$

Levando-se em conta que a matriz $\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}$ tem uma série de termos nulos, a expansão da fórmula (A.22) é relativamente simples de ser feita. A relação abaixo mostra o valor de δu_1 , correção da função de controle u_1 , calculada com os valores correntes, em cada ponto ao longo do intervalo, das matrizes $\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}$, λ_J e λ_ψ .

$$\begin{aligned}
\delta u_1 = & - \frac{C_0}{W_{11}} \left\{ \left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1} \right) \left[\lambda_{J4} - \lambda_{4\psi 1} (I_{\psi J, 1} I_{\psi\psi}^1 + I_{\psi J, 2} I_{\psi\psi}^4 + I_{\psi J, 3} I_{\psi\psi}^7) + \right. \right. \\
& - \lambda_{4\psi 2} (I_{\psi J, 1} I_{\psi\psi}^2 + I_{\psi J, 2} I_{\psi\psi}^5 + I_{\psi J, 3} I_{\psi\psi}^8) - \lambda_{4\psi 3} (I_{\psi J, 1} I_{\psi\psi}^3 + I_{\psi J, 2} I_{\psi\psi}^6 + \\
& + I_{\psi J, 3} I_{\psi\psi}^9) \left. \right] + \left[\lambda_{J7} - \lambda_{7\psi 1} (I_{\psi J, 1} I_{\psi\psi}^1 + I_{\psi J, 2} I_{\psi\psi}^4 + I_{\psi J, 3} I_{\psi\psi}^7) - \right. \\
& - \lambda_{7\psi 2} (I_{\psi J, 1} I_{\psi\psi}^2 + I_{\psi J, 2} I_{\psi\psi}^5 + I_{\psi J, 3} I_{\psi\psi}^8) + \\
& - \left. \left. \lambda_{7\psi 3} (I_{\psi J, 1} I_{\psi\psi}^3 + I_{\psi J, 2} I_{\psi\psi}^6 + I_{\psi J, 3} I_{\psi\psi}^9) \right] \right\} + \\
& + \frac{1}{W_{11}} \left\{ \left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1} \right) \left[\lambda_{4\psi 1} (I_{\psi\psi}^1 d\psi_1 + I_{\psi\psi}^4 d\psi_2 + I_{\psi\psi}^7 d\psi_3) + \right. \right. \\
& + \lambda_{4\psi 2} (I_{\psi\psi}^2 d\psi_1 + I_{\psi\psi}^5 d\psi_2 + I_{\psi\psi}^8 d\psi_3) + \lambda_{4\psi 3} (I_{\psi\psi}^3 d\psi_1 + I_{\psi\psi}^6 d\psi_2 + I_{\psi\psi}^9 d\psi_3) \left. \right] + \\
& + \left[\lambda_{7\psi 1} (I_{\psi\psi}^1 d\psi_1 + I_{\psi\psi}^4 d\psi_2 + I_{\psi\psi}^7 d\psi_3) + \lambda_{7\psi 2} (I_{\psi\psi}^2 d\psi_1 + I_{\psi\psi}^5 d\psi_2 + I_{\psi\psi}^8 d\psi_3) + \right. \\
& + \left. \left. \lambda_{7\psi 3} (I_{\psi\psi}^3 d\psi_1 + I_{\psi\psi}^6 d\psi_2 + I_{\psi\psi}^9 d\psi_3) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Para se obter o termo δu_2 deve-se substituir W_{11} por W_{22} , $\frac{\partial f_4}{\partial u_1}$ por $\frac{\partial f_4}{\partial u_2}$, λ_{J7} por λ_{J8} e os $\lambda_{7\psi i}$ por $\lambda_{8\psi i}$.

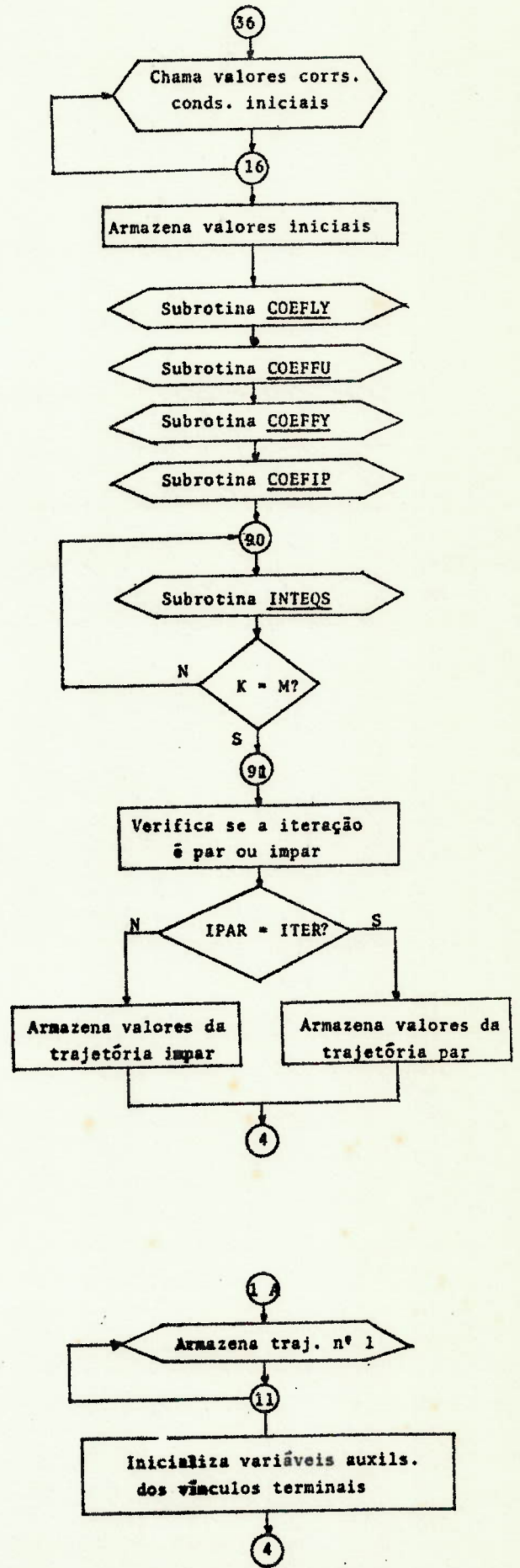
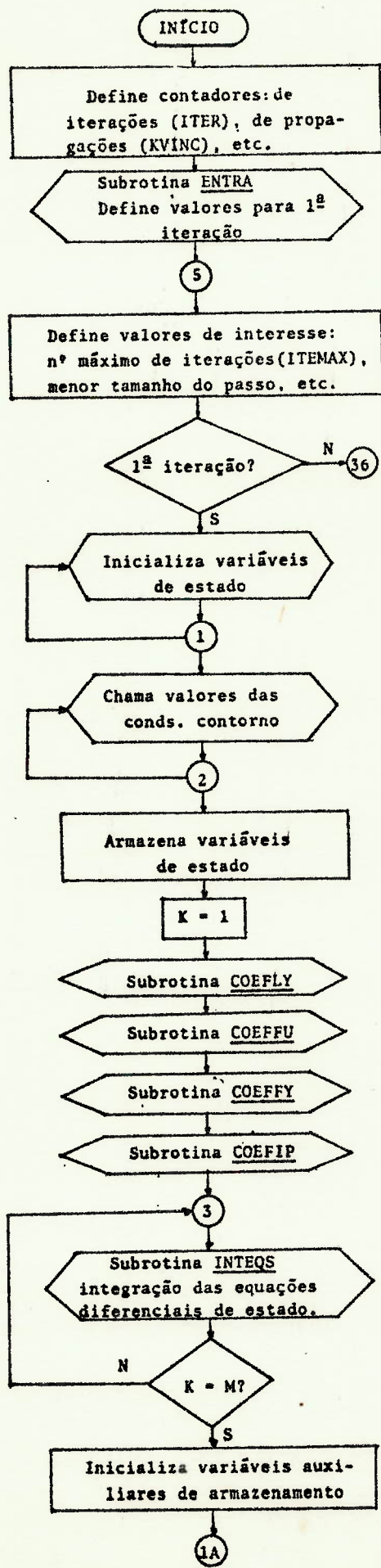
$i = 1, 2, 3.$

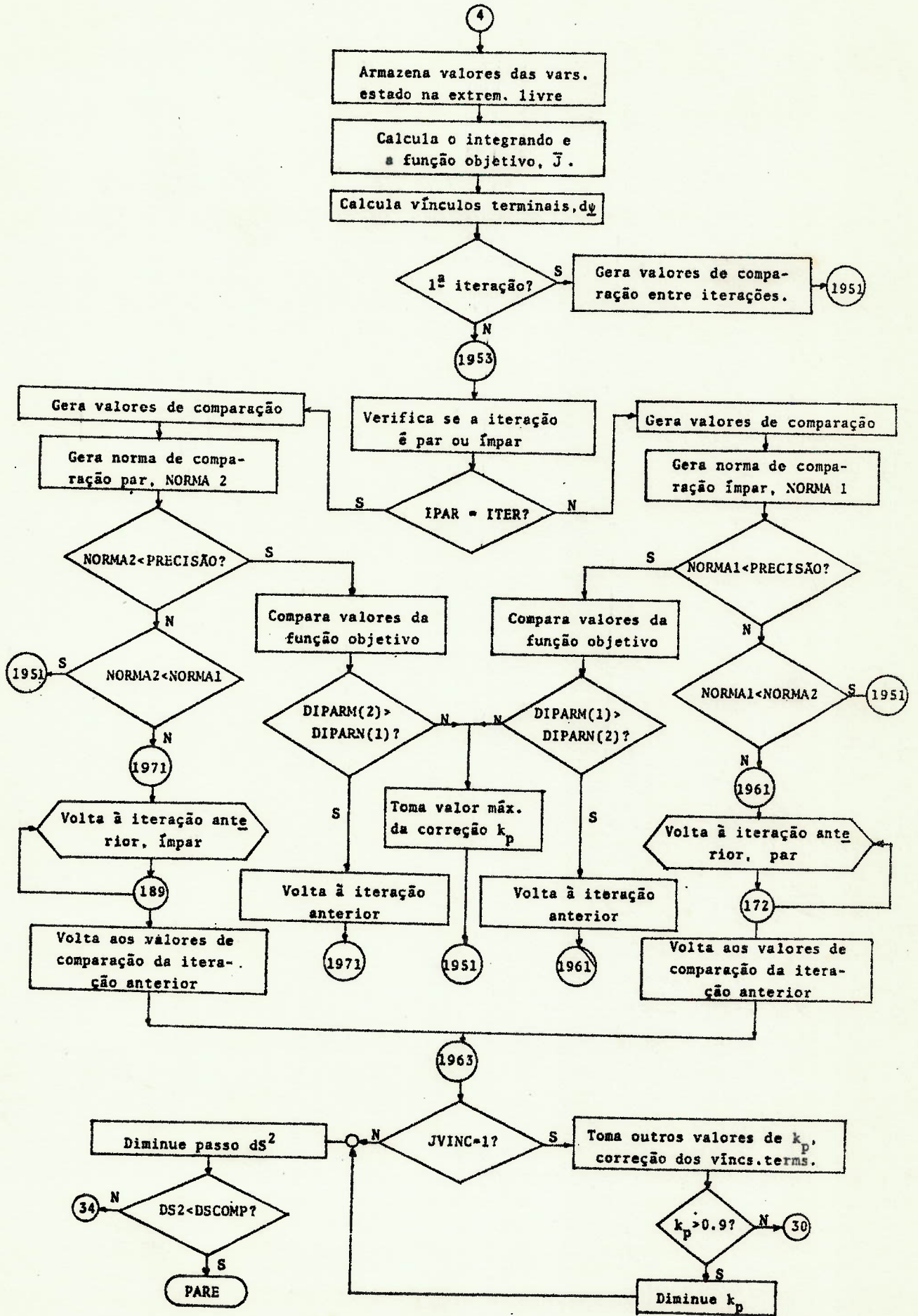
APÊNDICE A.2

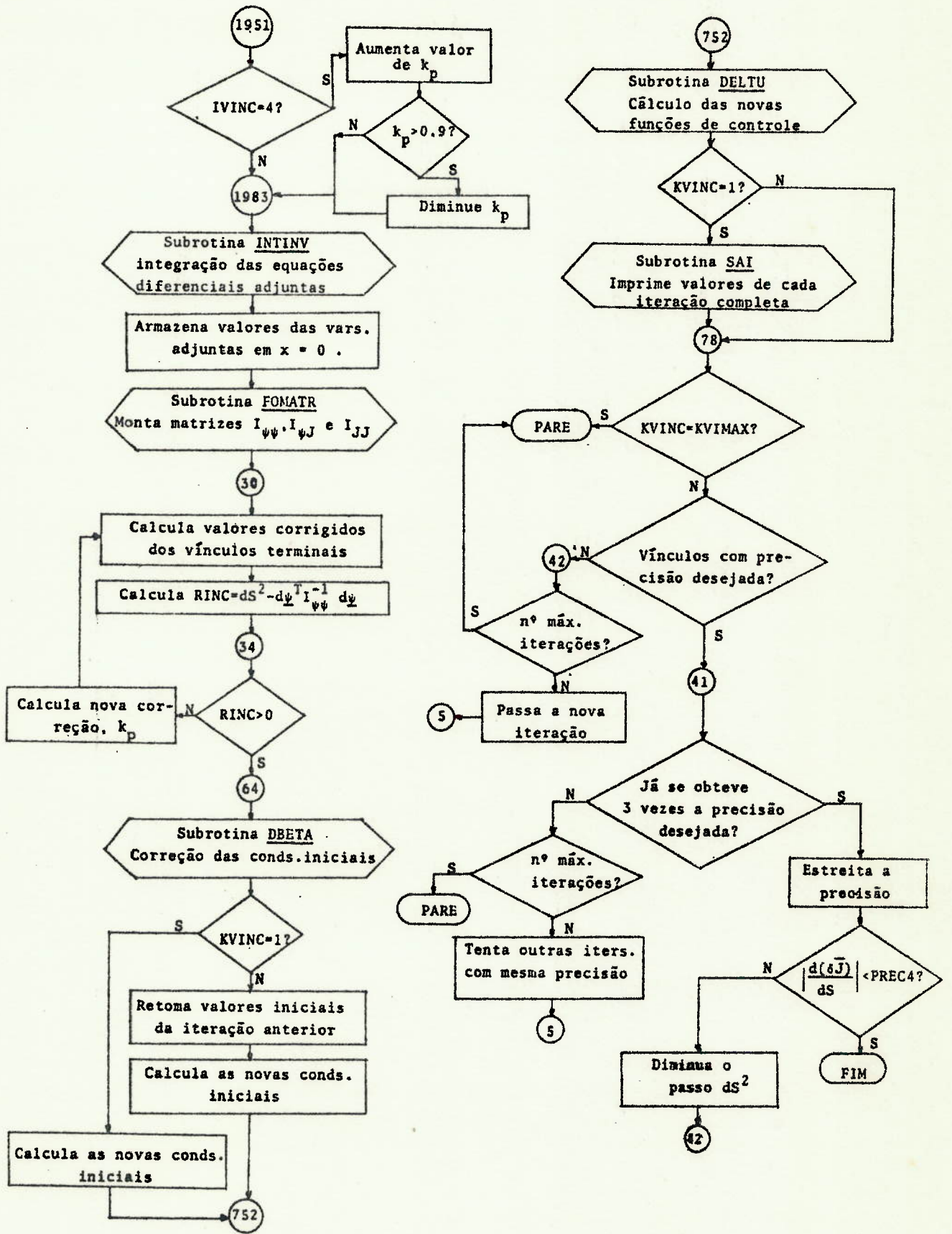
DIAGRAMA DE BLOCOS

Neste apêndice, é montado um diagrama de blocos do programa usado para solução numérica do caso em estudo. A intenção é mostrar o funcionamento do programa principal, já que as subrotinas encontram-se detalhadas no Apêndice A.3.

Para tentar facilitar o entendimento do diagrama de blocos e do programa principal, os números que comparecem no diagrama são os mesmos da listagem apresentada no Apêndice A.4.







APÊNDICE A.3

SUBROTINAS DO PROGRAMA DE SOLUÇÃO NUMÉRICA

Neste apêndice são descritas as subrotinas usadas no programa de solução numérica. O fracionamento em várias subrotinas se faz necessário para implantação do programa no computador BURROUGHS B-6700 do Centro de Computação Eletrônica da USP. A sequência de apresentação das subrotinas é feita na mesma ordem de chamada dentro do programa principal.

São elas:

A.3.1 - Subrotina ENTRA - Esta subrotina declara os valores de entrada para o programa principal, sendo chamada apenas - para iniciar o processamento da primeira iteração. Ela gera os valores das funções de controle, das constantes de peso, tamanho de passo e outros, bem como os dados da viga de seção transversal constante usada como estimativa inicial, e imprime-os.

A.3.2 - Subrotina INTEQS - Comanda o processo de integração das equações diferenciais de estado, gerando cada passo e armazenando os valores correspondentes das variáveis de estado.

A.3.3 - Subrotina RK1 - É chamada pela subrotina INTEQS e realiza um passo de integração das equações de movimento através de um método de RUNGE-KUTTA de 4ª ordem. Os valores necessários para tal são obtidos em DIFFUN.

A.3.4 - Subrotina DIFFUN - Esta subrotina declara o sistema de equações diferenciais e verifica se existe violação dos vínculos de desigualdade. Gera, então, os valores correntes das derivadas das variáveis de estado em relação à coordenada independente, inclusive para a variável auxiliar y_{10} .

A.3.5 - Subrotina COEFLY - É chamada pela subrotina INTEQS e armazena os valores da matriz $\frac{\partial L}{\partial y}$

A.3.6 - Subrotina COEFFU - É chamada pela subrotina INTEQS e armazena os valores da matriz $\frac{\partial f}{\partial u}$

A.3.7 - Subrotina COEFFY - É chamada pela subrotina INTEQS e armazena os valores da matriz $\frac{\partial f}{\partial y}$

A.3.8 - Subrotina COEFIP - É chamada pela subrotina INTEQS e armazena os valores do integrando da função objetivo, L, para posterior quadratura.

A.3.9 - Subrotina DQSF - Esta subrotina faz a quadratura de uma função equidistantemente tabelada pela Regra de Simpson ou

pela Regra de 3/8 de Newton ou, ainda, pelas duas regras usadas em conjunto. A subrotina, como usada aqui, é uma modificação da subrotina empregada pela IBM, de modo a fornecer os valores finais para um determinado número de intervalos.

A.3.10 - Subrotina INTINV - Tem como atribuição o comando da integração dos sistemas adjuntos em sentido inverso, ou seja, da extremidade final para a inicial. Esta subrotina gera os valores iniciais para tais sistemas e armazena tanto os valores iniciais como todos os valores ao longo da trajetória citada.

A.3.11 - Subrotina RK2 - A subrotina RK2 é chamada pela subrotina INTINV para executar um passo de integração das equações diferenciais adjuntas, usando, para tanto, valores de "step" negativos. Encontra-se montada de tal forma que os quatro sistemas adjuntos são integrados simultaneamente, através de um algoritmo de Runge-Kutta de 4ª ordem.

A.3.12 - Subrotina DIFFAD - Esta subrotina declara os quatro sistemas de equações diferenciais adjuntas, de modo a se ter, na subrotina que a chama, RK2, valores correntes das funções associadas às equações diferenciais.

A.3.13 - Subrotina VAMATI - Esta subrotina calcula os valores das funções dos integrandos dos termos das matrizes $I_{\psi\psi}$ e $I_{\psi J}$ e do escalar I_{JJ} , armazenando-os para posterior quadratura

numérica. Sua chamada é interna à subrotina INTINV.

A.3.14 - Subrotina FOMATR - A subrotina FOMATR monta as matrizes $I_{\psi\psi}$ e $I_{\psi J}$ e o escalar I_{JJ} , a partir da quadratura dos valores dos integrandos dos termos associados, que estão armazenados em COMMON's, e do cálculo dos termos fora dos sinais de integração, em $I_{\psi\psi}$, $I_{\psi J}$ e I_{JJ} . Comanda também o processo de inversão da matriz $I_{\psi\psi}$, ordenando a parada do processamento se não for conseguida tal inversão. Calcula, da mesma forma, o termo $[I_{JJ} - I_{\psi J}^T I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi J}]$ que influe sobre a condição de parada do processamento perto da solução ótima.

A.3.15 - Subrotina INVERT - Esta subrotina pode realizar a inversão de uma matriz $n \times n$ pelo método de Gauss-Seidel. É usada para inversão da matriz $I_{\psi\psi}$, chamada pela subrotina FOMATR.

A.3.16 - Subrotina DBETA - Calcula as correções a serem feitas para ajuste das condições de contorno não especificadas no extremo livre. Usa, para tanto, a subrotina DMPRD para produto de matrizes. Calcula o valor da constante C_0 que é também usado na estimativa das correções das funções de controle.

A.3.17 - Subrotina DMPRD - Chamada pela subrotina DBETA, executa o produto de duas matrizes quaisquer e remete a nova matriz gerada de volta a DBETA.

A.3.18 - Subrotina DELTU - Esta subrotina calcula as correções nas funções de controle u_1 e u_2 e gera as novas funções para a iteração seguinte. Tem, também, atribuições de modificar o tamanho do passo dS^2 na primeira iteração e de calcular quais as partes de dS^2 que são usadas para correções das condições de contorno não especificadas e para as correções das funções de controle.

A.3.19 - Subrotina SAI - Sempre que é completada uma iteração ou seja, não há recusa na propagação das equações de estado, a subrotina SAI imprime os valores de interesse da iteração, calculando, também, o peso obtido para a viga em estudo.

APÊNDICE A.4

LISTAGEM DO PROGRAMA

O apêndice A.4 mostra a listagem do programa para o caso de restrições fortes em que as condições de contorno para área e raio de giração não são especificadas no extremo engastado, o que corresponde aos casos 6, 7 e 8 analisados, dependendo do nível de frequência arbitrado.

Com a intenção de facilitar o entendimento do programa, é primeiramente apresentada uma relação com os nomes das variáveis importantes usadas no desenvolvimento do trabalho e os nomes correspondentes usados no programa de computador, bem como nomes e atribuições de variáveis que só comparecem no programa. Em seguida, é colocada a listagem correspondente ao processamento do programa no computador BURROUGHS B-6700 do Centro de Computação Eletrônica da USP, em linguagem FORTRAN. Todas as variáveis são definidas com dupla precisão.

A.4.1 - SIGNIFICADO DAS VARIÁVEIS USADAS NO PROGRAMA

<u>Variável do programa</u>	<u>Significado</u>	<u>Nome Anterior</u>
ITEMAX	nº máximo de iterações	-
KVIMAX	nº máximo de propagações recusadas antes de parar	-
DSCOMP	menor valor aceitável de dS^2	-
N	nº de equações de estado	n
N1	nº de intervalos para integração das equações de estado	-
H	tamanho do passo para integração das equações de estado.	-
M	nº de pontos no intervalo	-
Y1(I) a Y10(I)	variáveis de estado	$y_1(x)$ a $y_{10}(x)$
DPSI1 a DPSI3	valores dos vínculos terminais	$d\psi_{r1}$ a $d\psi_{r3}$
FIIP	função integrando de \bar{J}	$\int_0^{\ell} L dx$
PIP2	termo de penalização em \bar{J}	$K_J [\bar{y}_{10}(\ell)]^2$
PDPSI1 a PDPSI3	termo de correção dos vínculos terminais	k_p
DS2	tamanho do passo	dS^2
ELP(1) a ELP(6)	multiplicadores de Lagrange	$\lambda_{i\psi 1}, i=1, \dots, 6$
ELP(7) a ELP(12)	multiplicadores de Lagrange	$\lambda_{i\psi 2}, i=1, \dots, 6$
ELP(13) a ELP(18)	multiplicadores de Lagrange	$\lambda_{i\psi 3}, i=1, \dots, 6$

<u>Variável do programa</u>	<u>Significado</u>	<u>Nome Anterior</u>
ELJ(1) a ELJ(6)	multiplidões de Lagrange	λ_{Ji} , $i = 1, \dots, 6$
DPSC(1) a DPSC(3)	valores corrigidos dos vínculos terminais	$d\psi_1$ a $d\psi_3$
RINC	escalar	$[\bar{d}s^2 - d\psi^T I_{\psi\psi}^{-1} d\psi]$
CSI	fator de correção dos vínc. terminais	ϵ
YIN(1) a YIN(10)	valores das condições de contorno no extremo livre	-
BETA(1) a BETA(10)	valores das correções das condições de contorno	$\{ \delta \underline{\beta} \}$
DJDSPS	escalar	$[\bar{I}_{JJ} - I_{\psi J}^T I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi J}]$
B11, B22 a B66	valores da matriz B	B_{11}, B_{22} a B_{66}
HPES1 a HPES4	constantes de peso associadas à variável y_{10}	K_1 a K_4
W11, W22	valores da matriz \underline{W}	W_{11} , W_{22}
PSINT	constante de peso no integrando de \bar{J}	K_s
PSYDEZ	constante de penalização de \bar{J}	K_J
RO	densidade do material	ρ
ELAST	módulo de elasticidade do material	E

<u>Variável do programa</u>	<u>Significado</u>	<u>Nome Anterior</u>
CCOMP,DCOMP,WO	constante de comparação dos vínculos de desigualdade sobre área, raio de giração e frequência fundamental	C , D, ω_0
DEFLMX	deflexão máxima no extremo livre	ϵ_1
U1(J),U2(J)	funções de controle	$u_1(x), u_2(x)$
DIF1(K) a DIF4(K)	valor da violação de cada um dos vínculos	$C_1(y,x) a C_4(y,x)$
DIFER1(K) a DIFER4(K)	derivadas de y_{10} em relação às vars. estado	$\frac{\partial f_{10}}{\partial y_2} a \frac{\partial f_{10}}{\partial y_9}$
ATG	inclinação da reta de comparação da restrição $\bar{C}_1(y,x)$	θ_0
FCOMP	função de comparação de $\bar{C}_1(y,x)$	F_c
DLDY5(K),DLDY9(K)	valores da matriz	$\frac{\partial L}{\partial y_5}, \frac{\partial L}{\partial y_9}$
DF4DU1(K),DF4DU2(K)	valores da matriz	$\frac{\partial f_4}{\partial u_1}, \frac{\partial f_4}{\partial u_2}$
DF4DY1(K) a DF4DY9(K)	valores da matriz	$\frac{\partial f_4}{\partial y_1} a \frac{\partial f_4}{\partial y_9}$
DF10Y2(K) a DF10Y9(K)	valores da matriz	$\frac{\partial f_{10}}{\partial y_2} a \frac{\partial f_{10}}{\partial y_9}$
FINTIP(K)	valores do integrando da função objetivo	L

<u>Variável do programa</u>	<u>Significado</u>	<u>Nome Anterior</u>
ALAP11(L) a ALAP10(L)	multiplicadores de Lagrange	$\lambda_{1\psi 1}$ a $\lambda_{10\psi 1}$
ALAP21(L) a ALAP20(L)	multiplicadores de Lagrange	$\lambda_{1\psi 2}$ a $\lambda_{10\psi 2}$
ALAP31(L) a ALAP30(L)	multiplicadores de Lagrange	$\lambda_{1\psi 3}$ a $\lambda_{10\psi 3}$
FPP11(L) a FPP33(L)	valores das funções a serem integradas em $I_{\psi\psi}$	-
FPJ1(L) a FPJ3(L)	valores das funções a serem integradas em $I_{\psi J}$	-
FJJ(L)	valores da função a ser integrada em I_{JJ}	-
DIPP(1) a DIPP(9)	valores da matriz $I_{\psi\psi}$, mantidos os nomes para a inversa $I_{\psi\psi}^{-1}$	$I_{\psi\psi}^1$ a $I_{\psi\psi}^9$
DIPJ(1) a DIPJ(3)	valores da matriz $I_{\psi J}$	$I_{\psi J,1}$ a $I_{\psi J,3}$
DIJJ	valor do escalar I_{JJ}	I_{JJ}
COEM	escalar $\left(\frac{dS^2 - d\underline{\psi}^T I_{\psi\psi}^{-1} d\underline{\psi}}{I_{JJ} - I_{\psi J} I_{\psi\psi}^{-1} I_{\psi J}} \right)^{1/2}$	C_0
DELU1(K), DELU2(K)	correções nas funções de controle	$\delta u_1, \delta u_2$
FBET	parte de dS^2 usada para correção das condições de contorno	$\delta \underline{\beta}^T \underline{B} \delta \underline{\beta}$

<u>Variável do programa</u>	<u>Significado</u>	<u>Nome Anterior</u>
DUI2, DUI2	partes de dS^2 usadas para correção das funções de controle	$\int_0^L (\delta \underline{u}^T \underline{W} \delta \underline{u}) dx$
KVINC	contador de propagações recusadas	-

Todas as variáveis bi-indexadas do programa principal são variáveis auxiliares para armazenamento das trajetórias e dos correspondentes valores das matrizes $\frac{\partial L}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, das funções de controle e da função integrando da função objetivo.

B6700/B7700 F O R T R A N C O M P I L A T I O N M A R K

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
COMMON/CONTRL/U1(950),U2(950),DELU1(950),DELU2(950)
COMMON/MATRIZ/B11,B22,B33,B44,B55,B66,W11,W22
COMMON/CONDIN/YIN(10),BETA(10)
COMMON/FUNPES/HPES1,HPES2,HPES3,HPES4,PSINT,PSYDEZ
COMMON/CONTS/RO,ELAST,CCOMP,DCOMP,W0,Y3COMP,Y4COMP,DEFLMX
COMMON/PRECIS/DS2,PDPSI1,PDPSI2,PDPSI3,PREC1,PREC2,PREC3,PREC4
COMMON/VARIES/Y1(950),Y2(950),Y3(950),Y4(950),Y5(950),Y6(950),Y7(9
150),Y8(950),Y9(950),Y10(950)
COMMON/FRONT/DIFER1(950),DIFER2(950),DIFER3(950),DIFER4(950)
COMMON/FRONTA/DIFFY1,DIFFY2,DIFFY3,DIFFY4,DESV1,DESV2,DESV3,DESV4
COMMON/VINCLO/DIF1(950),DIF2(950),DIF3(950),DIF4(950)
COMMON/COFFIC/DLDY9(950),DF4DU1(950),DF4DU2(950),DF4DY1(950),DF4DY
*3(950),DF4DY4(950),DF4DY5(950),DF4DY6(950),DF4DY7(950),DF4DY8(950)
*,DF4DY9(950),DF10Y2(950),DF10Y5(950),DF10Y6(950),DF10Y9(950),FINTI
3P(950),DLDY5(950)
COMMON/VALFIN/YFIN1,YFIN2,YFIN3,YFIN4,YFIN5,YFIN6,YFIN7,YFIN8,YFIN
*9,YFIN10
COMMON/VARADJ/ALAP11(950),ALAP12(950),ALAP13(950),ALAP14(950),ALAP
*15(950),ALAP16(950),ALAP17(950),ALAP18(950),ALAP19(950),ALAP10(950
*),ALAP21(950),ALAP22(950),ALAP23(950),ALAP24(950),ALAP25(950),ALAP
*26(950),ALAP27(950),ALAP28(950),ALAP29(950),ALAP20(950),ALAJ1(950)
*,ALAJ2(950),ALAJ3(950),ALAJ4(950),ALAJ5(950),ALAJ6(950),ALAJ7(950)
*,ALAJ8(950),ALAJ9(950),ALAJ10(950)
COMMON/VARAD1/ALAP31(950),ALAP32(950),ALAP33(950),ALAP34(950),ALAP
135(950),ALAP36(950),ALAP37(950),ALAP38(950),ALAP39(950),ALAP30(950
2)
COMMON/FINAUX/FPPA11(950),FPPA12(950),FPPA13(950),FPPA21(950),FPPA
122(950),FPPA23(950),FPPA31(950),FPPA32(950),FPPA33(950),FPJA1(950)
2,FPJA2(950),FPJA3(950),FJJA(950)
COMMON/FUINTM/FPP11(950),FPP12(950),FPP13(950),FPP21(950),FPP22(95
10),FPP23(950),FPP31(950),FPP32(950),FPP33(950),FPJ1(950),FPJ2(950)
2,FPJ3(950),FJJ(950)
COMMON/LAMFIN/ELP(18),ELJ(6)
COMMON/PSIPSI/DIPP(9),CIPP(9)
COMMON/PSIJOT/DIPJ(3),DIJJ,CDD,DJDS2,DJDSPS
COMMON/PROPR1/DPSC(3),DPSI1,DPSI2,DPSI3,RINC,COEM
COMMON/INDPER/PIP1,PIP2,RIP
COMMON/AUXDS/DUI1,DUI2,FBET
COMMON/AUXIL/Y56(350)
DIMENSION Y(10),DY(10)
DIMENSION YAUX1(301,2),YAUX2(301,2),YAUX3(301,2),YAUX4(301,2),YAUX
15(301,2),YAUX6(301,2),YAUX7(301,2),YAUX8(301,2),YAUX9(301,2),YAUX1
20(301,2)
DIMENSION DLY5A(301,2),DLY9A(301,2),F4U1A(301,2),F4U2A(301,2)
DIMENSION F4Y1A(301,2),F4Y3A(301,2),F4Y4A(301,2),F4Y5A(301,2),F4Y6
1A(301,2),F4Y7A(301,2),F4Y8A(301,2),F4Y9A(301,2)
DIMENSION F10Y2A(301,2),F10Y5A(301,2),F10Y6A(301,2),F10Y9A(301,2)
DIMENSION DFAUX1(301,2),DFAUX2(301,2),DFAUX3(301,2),DFAUX4(301,2),
1FIPAUX(301,2)
DIMENSION UARM1(301,2),UARM2(301,2)
DIMENSION DIPARM(2),PSIAR1(2),PSIAR2(2),PSIAR3(2)
DIMENSION ARINIP(2),PSABS1(2),PSABS2(2),PSABS3(2)
DIMENSION DIPARN(2)

```

```

C*****
C
C          PROGRAMA PRINCIPAL
C*****
      ITER=1
      IVINC=1
      JVINC=1
      KVINC=1
      LVINC=1
      IDPSI=1
      CALL ENTRA
C  COMECO DO LOOP DE ITERACOES NUMERICAS
      5 CONTINUE
      ITEMAX=65
      KVIMAX=45
      IPREC=1
      DSCOMP=0.00000001D0
      N=10
      N1=300
      X=0.0D0
      XFINAL=1.2D0
C      H=XFINAL/N1
      H=0.004D0
      M=N1+1
C  ESCREVER O NUMERO DA ITERACAO CORRENTE
      WRITE(6,19)ITER

      19 FORMAT(////,20X,' ITERACAO NUMERO ',I2,///)
      IF(ITER.NE.1)GO TO 36
C  INICIALIZAR AS VARIABEIS DE ESTADO
      DO 1 IA=1,N
      Y(IA)=0.0D0
      DY(IA)=0.0D0
      1 CONTINUE
      DO 2 IB=1,N
      Y(IB)=YIN(IB)
      2 CONTINUE
      DO 127 ICM=1,M
      127 Y10(ICM)=0.0D0
C  ARMAZENAR VALORES INICIAIS DAS VARIABEIS DE ESTADO
      Y1(1)=Y(1)
      Y2(1)=Y(2)
      Y3(1)=Y(3)
      Y4(1)=Y(4)
      Y5(1)=Y(5)
      Y6(1)=Y(6)
      Y7(1)=Y(7)
      Y8(1)=Y(8)
      Y9(1)=Y(9)
      Y10(1)=Y(10)
C  ARMAZENAR VALORES INICIAIS DAS MATRIZES DELFDELY,DELLDELU,DELLDELY E
C  DE L
      K=1
      CALL COEFLY(K)
      CALL COEFFU(K)
      CALL COEFFY(K)
      CALL COEFIP(K)
C  LOOP DE INTEGRACAO DAS EQUACOES DE ESTADO
      3 CONTINUE

```



```

CALL INEQS(M,N,K,Y,DY,H,X)
IF(K.EQ.M) GO TO 7
GO TO 3
7 CONTINUE
C INICIALIZAR VALORES DAS VARIABEIS AUXILIARES DE ARMAZENAMENTO
DO 9 I=1,2
DO 9 J=1,M
C VARIABEIS DE ESTADO AUXILIARES
YAUX1(J,I)=0.000
YAUX2(J,I)=0.000
YAUX3(J,I)=0.000
YAUX4(J,I)=0.000
YAUX5(J,I)=0.000
YAUX6(J,I)=0.000
YAUX7(J,I)=0.000
YAUX8(J,I)=0.000
YAUX9(J,I)=0.000
YAUX10(J,I)=0.000
C VARIABEIS AUXILIARES DE DEL L/DEL Y
DLY5A(J,I)=0.000
DLY9A(J,I)=0.000
C VARIABEIS AUXILIARES DE DEL F/DEL U
F4U1A(J,I)=0.000
F4U2A(J,I)=0.000
C VARIABEIS AUXILIARES DE DEL F/DEL Y
F4Y1A(J,I)=0.000
F4Y3A(J,I)=0.000
F4Y4A(J,I)=0.000
F4Y5A(J,I)=0.000
F4Y6A(J,I)=0.000
F4Y7A(J,I)=0.000
F4Y8A(J,I)=0.000
F4Y9A(J,I)=0.000
F10Y2A(J,I)=0.000
F10Y5A(J,I)=0.000
F10Y6A(J,I)=0.000
F10Y9A(J,I)=0.000
DFAUX1(J,I)=0.000
DFAUX2(J,I)=0.000
DFAUX3(J,I)=0.000
DFAUX4(J,I)=0.000
C VARIABEIS AUXILIARES DAS FUNCOES DE CONTROLE.
UARM1(J,I)=0.000
UARM2(J,I)=0.000
C VARIABEL AUXILIAR DA FUNCAO L
FIPAUX(J,I)=0.000
9 CONTINUE
C ARMAZENAR TRAJETORIA NUMERO 1
DO 11 J=1,M
YAUX1(J,1)=Y1(J)
YAUX2(J,1)=Y2(J)
YAUX3(J,1)=Y3(J)
YAUX4(J,1)=Y4(J)
YAUX5(J,1)=Y5(J)
YAUX6(J,1)=Y6(J)
YAUX7(J,1)=Y7(J)
YAUX8(J,1)=Y8(J)
YAUX9(J,1)=Y9(J)
YAUX10(J,1)=Y10(J)
DLY5A(J,1)=DLDY5(J)

```

```

DLY9A(J,1)=DLDY9(J)
F4U1A(J,1)=DF4DU1(J)
F4U2A(J,1)=DF4DU2(J)
F4Y1A(J,1)=DF4DY1(J)
F4Y3A(J,1)=DF4DY3(J)
F4Y4A(J,1)=DF4DY4(J)
F4Y5A(J,1)=DF4DY5(J)
F4Y6A(J,1)=DF4DY6(J)
F4Y7A(J,1)=DF4DY7(J)
F4Y8A(J,1)=DF4DY8(J)
F4Y9A(J,1)=DF4DY9(J)
F10Y2A(J,1)=DF10Y2(J)
F10Y5A(J,1)=DF10Y5(J)
F10Y6A(J,1)=DF10Y6(J)
F10Y9A(J,1)=DF10Y9(J)
DFAUX1(J,1)=DIFER1(J)
DFAUX2(J,1)=DIFER2(J)
DFAUX3(J,1)=DIFER3(J)
DFAUX4(J,1)=DIFER4(J)
UARM1(J,1)=U1(J)
UARM2(J,1)=U2(J)
FIPAUX(J,1)=FINTIP(J)
11 CONTINUE
C INICIALIZAR VARIÁVEIS AUXILIARES DOS VINCULOS TERMINAIS E DA FUNCAO
C OBJETIVO
DO 1950 KZ=1,2
ARINIP(KZ)=0.000
DIPARM(KZ)=0.000
DIPARN(KZ)=0.000
PSIAR1(KZ)=0.000
PSIAR2(KZ)=0.000
PSIAR3(KZ)=0.000
PSABS1(KZ)=0.000
PSABS2(KZ)=0.000
PSABS3(KZ)=0.000
1950 CONTINUE
GO TO 4
36 CONTINUE
C INTEGRAR AS EQUACOES DE ESTADO COMO FEITO PARA A PRIMEIRA ITERACAO
DO 16 IB=1,N
Y(IB)=YIN(IB)
16 CONTINUE
Y1(1)=Y(1)
Y2(1)=Y(2)
Y3(1)=Y(3)
Y4(1)=Y(4)
Y5(1)=Y(5)
Y6(1)=Y(6)
Y7(1)=Y(7)
Y8(1)=Y(8)
Y9(1)=Y(9)
Y10(1)=Y(10)
C ARMAZENAR VALORES INICIAIS DAS MATRIZES
K=1
CALL COEFLY(K)
CALL COEFFU(K)
CALL COEFFY(K)
CALL COEFIP(K)
C LOOP DE INTEGRACAO DAS EQUACOES DE ESTADO
90 CONTINUE

```

```

CALL INTEGS(M,N,K,Y,DY,H,X)
IF(K.EQ.M)GO TO 91
GO TO 90
91 CONTINUE
IPAR=ITER/2
IPAR=IPAR*2
C SEPARAR AS ITERACOES DE NUMERO PAR DAS DE NUMERO IMPAR
IF(IPAR.EG.ITER)GO TO 92
C TRAJETORIA DE NUMERO IMPAR : ARMAZENA=LA
DO 93 J=1,M
YAUX1(J,1)=Y1(J)
YAUX2(J,1)=Y2(J)
YAUX3(J,1)=Y3(J)
YAUX4(J,1)=Y4(J)
YAUX5(J,1)=Y5(J)
YAUX6(J,1)=Y6(J)
YAUX7(J,1)=Y7(J)
YAUX8(J,1)=Y8(J)
YAUX9(J,1)=Y9(J)
YAUX10(J,1)=Y10(J)
DLY5A(J,1)=DLDY5(J)
DLY9A(J,1)=DLDY9(J)
F4U1A(J,1)=DF4DU1(J)
F4U2A(J,1)=DF4DU2(J)
F4Y1A(J,1)=DF4DY1(J)
F4Y3A(J,1)=DF4DY3(J)
F4Y4A(J,1)=DF4DY4(J)
F4Y5A(J,1)=DF4DY5(J)
F4Y6A(J,1)=DF4DY6(J)
F4Y7A(J,1)=DF4DY7(J)
F4Y8A(J,1)=DF4DY8(J)
F4Y9A(J,1)=DF4DY9(J)
F10Y2A(J,1)=DF10Y2(J)
F10Y5A(J,1)=DF10Y5(J)
F10Y6A(J,1)=DF10Y6(J)
F10Y9A(J,1)=DF10Y9(J)
DFAUX1(J,1)=DIFER1(J)
DFAUX2(J,1)=DIFER2(J)
DFAUX3(J,1)=DIFER3(J)
DFAUX4(J,1)=DIFER4(J)
UARM1(J,1)=U1(J)
UARM2(J,1)=U2(J)
FIPAUX(J,1)=FINTIP(J)
93 CONTINUE
GO TO 4
92 CONTINUE
C TRAJETORIA DE NUMERP PAR : ARMAZENA=LA
DO 95 J=1,M
YAUX1(J,2)=Y1(J)
YAUX2(J,2)=Y2(J)
YAUX3(J,2)=Y3(J)
YAUX4(J,2)=Y4(J)
YAUX5(J,2)=Y5(J)
YAUX6(J,2)=Y6(J)
YAUX7(J,2)=Y7(J)
YAUX8(J,2)=Y8(J)
YAUX9(J,2)=Y9(J)
YAUX10(J,2)=Y10(J)
DLY5A(J,2)=DLDY5(J)
DLY9A(J,2)=DLDY9(J)

```

```

F4U1A(J,2)=DF4DU1(J)
F4U2A(J,2)=DF4DU2(J)
F4Y1A(J,2)=DF4DY1(J)
F4Y3A(J,2)=DF4DY3(J)
F4Y4A(J,2)=DF4DY4(J)
F4Y5A(J,2)=DF4DY5(J)
F4Y6A(J,2)=DF4DY6(J)
F4Y7A(J,2)=DF4DY7(J)
F4Y8A(J,2)=DF4DY8(J)
F4Y9A(J,2)=DF4DY9(J)
F10Y2A(J,2)=DF10Y2(J)
F10Y5A(J,2)=DF10Y5(J)
F10Y6A(J,2)=DF10Y6(J)
F10Y9A(J,2)=DF10Y9(J)
DFAUX1(J,2)=DIFER1(J)
DFAUX2(J,2)=DIFER2(J)
DFAUX3(J,2)=DIFER3(J)
DFAUX4(J,2)=DIFER4(J)
UARM1(J,2)=U1(J)
UARM2(J,2)=U2(J)
FIPAUX(J,2)=FINTIP(J)

```

95 CONTINUE

GO TO 4

```

4 YFIN1=Y1(M)
YFIN2=Y2(M)
YFIN3=Y3(M)
YFIN4=Y4(M)
YFIN5=Y5(M)
YFIN6=Y6(M)
YFIN7=Y7(M)
YFIN8=Y8(M)
YFIN9=Y9(M)
YFIN10=Y10(M)
XFIN=X

```

C CALCULO DO INDICE DE PERFORMANCE

CALL DQSF(H,FINTIP,PIP1,N1)

FIIP=PIP1

PIP2=PSYDEZ*YFIN10*YFIN10

RIP=PIP1+PIP2

C CALCULO DE DPSI

DPSI1=YFIN1-DEFLMX

DPSI2=YFIN3-Y3COMP

DPSI3=YFIN4-Y4COMP

IF(ITER.NE.1)GO TO 1953

ARINIP(1)=FIIP

DIPARM(1)=FIIP+PIP2

PSIAR1(1)=DPSI1

PSIAR2(1)=DPSI2

PSIAR3(1)=DPSI3

PSABS1(1)=DABS(DPSI1)

PSABS2(1)=DABS(DPSI2)

PSABS3(1)=DABS(DPSI3)

C PRIMEIRA ITERACAO. NAO E NECESSARIA NENHUMA COMPARACAO; PROSSIGA

GO TO 1951

1953 CONTINUE

IF(IPAR.EQ.ITER)GO TO 1954

C ITERACAO IMPAR; GERAR A NORMA DE COMPARACAO PARA OS VINCULOS TERMINAI S

ARINIP(1)=FIIP

DIPARM(1)=FIIP+PIP2

PSIAR1(1)=DPSI1

```

PSIAR2(1)=DPSI2
PSIAR3(1)=DPSI3
PSABS1(1)=DABS(DPSI1)
PSABS2(1)=DABS(DPSI2)
PSABS3(1)=DABS(DPSI3)
V1=0.0D0
IF(PSABS1(1).GT.0.001D0) V1=1.0D0
V2=0.0D0
IF(PSABS2(1).GT.0.001D0) V2=1.0D0
V3=0.0D0
IF(PSABS3(1).GT.0.001D0) V3=1.0D0
C SE A NORMA DE COMPARACAO ESTA ABAIXO DO NIVEL MINIMO,COMPATE VALORES
C DA FUNCAO OBJETIVO
IF(((PSABS1(1)*V1)+(PSABS2(1)*V2)+(PSABS3(1)*V3)).LE.0.001D0)GO TO
11912
IF(((PSABS1(1)*V1)+(PSABS2(1)*V2)+(PSABS3(1)*V3)).LE.((PSABS1(2)*V
11)+(PSABS2(2)*V2)+(PSABS3(2)*V3)))GO TO 1951
C SE A NORMA DE COMPAACAO E MENOR QUE A DA ITERACAO ANTERIOR,PROSSIGA.
C SENAO, VOLTE A RRAJETORIA ANTERIOR
GO TO 1961
1912 CONTINUE
DIPARN(2)=1.02D0*DIPARM(2)
C SE A FUNCAO OBJETIVO E MUITO MAIOR QUE A ANTERIOR, RECUSE A PROPAGACA O
IF(DIPARM(1).GT.DIPARN(2))GO TO 5777
GO TO 1949
5777 CONTINUE
JVINC=JVINC+1
GO TO 1961
1961 CONTINUE
WRITE(6,9993)
9993 FORMAT(10X,'*****',//,10X,'* PROPAGACAO RECUSA
1DA *',//,10X,'*****',//)
ID=N1/100
DO 98 IDI=1, ID
IE=(100*IDI)+1
WRITE(6,982)(IE,Y1(IE)),(IE,Y2(IE)),(IE,Y3(IE)),(IE,Y4(IE)),(IE,Y5
1(IE)),(IE,Y6(IE)),(IE,Y7(IE)),(IE,Y8(IE)),(IE,Y9(IE)),(IE,Y10(IE))
982 FORMAT(1X,'Y1(',I3,')=',G14.7,3X,'Y2(',I3,')=',G14.7,3X,'Y3(',I3,
1)=',G14.7,3X,'Y4(',I3,')=',G14.7,/,1X,'Y5(',I3,')=',G14.7,3X,'Y6(
2,I3,')=',G14.7,3X,'Y7(',I3,')=',G14.7,3X,'Y8(',I3,')=',G14.7/1X,'Y
39(',I3,')=',G14.7,3X,'Y10(',I3,')=',G14.7)
98 CONTINUE
WRITE(6,1701)DPSI1,DPSI2,DPSI3,FIIP
1701 FORMAT(5X,'DPSI1=',G14.7,10X,'DPSI2=',G14.7,10X,'DPSI3=',G14.7,/,2
10X,'INTEGRANDO DE IP=',G14.7,//)
C RETOMAR VALORES DA ITERACAO ANTERIOR
DO 172 J=1,M
Y1(J)=YAUX1(J,2)
Y2(J)=YAUX2(J,2)
Y3(J)=YAUX3(J,2)
Y4(J)=YAUX4(J,2)
Y5(J)=YAUX5(J,2)
Y6(J)=YAUX6(J,2)
Y7(J)=YAUX7(J,2)
Y8(J)=YAUX8(J,2)
Y9(J)=YAUX9(J,2)
Y10(J)=YAUX10(J,2)
DLDY5(J)=DLY5A(J,2)
DLDY9(J)=DLY9A(J,2)
DF4DU1(J)=F4U1A(J,2)

```

```

DF4DU2(J)=F4U2A(J,2)
DF4DY1(J)=F4Y1A(J,2)
DF4DY3(J)=F4Y3A(J,2)
DF4DY4(J)=F4Y4A(J,2)
DF4DY5(J)=F4Y5A(J,2)
DF4DY6(J)=F4Y6A(J,2)
DF4DY7(J)=F4Y7A(J,2)
DF4DY8(J)=F4Y8A(J,2)
DF4DY9(J)=F4Y9A(J,2)
DF10Y5(J)=F10Y5A(J,2)
DF10Y2(J)=F10Y2A(J,2)
DF10Y6(J)=F10Y6A(J,2)
DF10Y9(J)=F10Y9A(J,2)
DIFER1(J)=DFAUX1(J,2)
DIFER2(J)=DFAUX2(J,2)
DIFER3(J)=DFAUX3(J,2)
DIFER4(J)=DFAUX4(J,2)
U1(J)=UARM1(J,2)
U2(J)=UARM2(J,2)
FINTIP(J)=FIPAUX(J,2)
172 CONTINUE
FIIP=ARINIP(2)
DPSI1=PSIAR1(2)
DPSI2=PSIAR2(2)
DPSI3=PSIAR3(2)
PIP1=FIIP
WRITE(6,1703)ITER,KVINC
1703 FORMAT(1X,'NA ITERACAO ',I3,' TENTATIVA NUM.',I3,' VINCULOS TERMIN
1AIS E',/,1X,'FUNCAO OBJETIVO NAO SAO MELHORADOS')
GO TO 1963
1954 CONTINUE
C FAZER, PARA A TRAJETORIA PAR, AS MESMAS COMPARACOES QUE A DA IMPAR
ARINIP(2)=FIIP
DIPARM(2)=FIIP+PIP2
PSIAR1(2)=DPSI1
PSIAR2(2)=DPSI2
PSIAR3(2)=DPSI3
PSABS1(2)=DABS(DPSI1)
PSABS2(2)=DABS(DPSI2)
PSABS3(2)=DABS(DPSI3)
V1=0.000
IF(PSABS1(2).GT.0.00100) V1=1.000
V2=0.000
IF(PSABS2(2).GT.0.00100) V2=1.000
V3=0.000
IF(PSABS3(2).GT.0.00100) V3=1.000
IF((((PSABS1(2)*V1)+(PSABS2(2)*V2)+(PSABS3(2)*V3)).LE.0.00100)GO TO
11913
IF((((PSABS1(2)*V1)+(PSABS2(2)*V2)+(PSABS3(2)*V3)).LE.((PSABS1(1)*V
11)+(PSABS2(1)*V2)+(PSABS3(1)*V3)))GO TO 1951
GO TO 1971
1913 CONTINUE
DIPARN(1)=1.0200*DIPARM(1)
IF(DIPARM(2).GT.DIPARN(1))GO TO 5778
GO TO 1949
5778 CONTINUE
JVINC=JVINC+1
GO TO 1971
1971 CONTINUE
WRITE(6,9992)

```

```

9992 FORMAT(10X, '*****', //, 10X, '* PROPAGACAO RECUSA
1DA *', //, 10X, '*****', //)
IC=N1/100
DO 991 ICI=1, IC
IG=(100*ICI)+1
WRITE(6, 992)(IG, Y1(IG)), (IG, Y2(IG)), (IG, Y3(IG)), (IG, Y4(IG)), (IG, Y5
1(IG)), (IG, Y6(IG)), (IG, Y7(IG)), (IG, Y8(IG)), (IG, Y9(IG)), (IG, Y10(IG))
992 FORMAT(1X, 'Y1(', I3, ')=' , G14.7, 3X, 'Y2(', I3, ')=' , G14.7, 3X, 'Y3(', I3, '
1)=' , G14.7, 3X, 'Y4(', I3, ')=' , G14.7, /, 1X, 'Y5(', I3, ')=' , G14.7, 3X, 'Y6('
2, I3, ')=' , G14.7, 3X, 'Y7(', I3, ')=' , G14.7, 3X, 'Y8(', I3, ')=' , G14.7/1X, 'Y
39(', I3, ')=' , G14.7, 3X, 'Y10(', I3, ')=' , G14.7)
991 CONTINUE
WRITE(6, 1973) DPSI1, DPSI2, DPSI3, FIIP
1973 FORMAT(5X, 'DPSI1=' , G14.7, 10X, 'DPSI2=' , G14.7, 10X, 'DPSI3=' , G14.7, /, 2
10X, 'INTEGRANDO DE IP=' , G14.7, //)
DO 189 J=1, M
Y1(J)=YAUX1(J, 1)
Y2(J)=YAUX2(J, 1)
Y3(J)=YAUX3(J, 1)
Y4(J)=YAUX4(J, 1)
Y5(J)=YAUX5(J, 1)
Y6(J)=YAUX6(J, 1)
Y7(J)=YAUX7(J, 1)
Y8(J)=YAUX8(J, 1)
Y9(J)=YAUX9(J, 1)
Y10(J)=YAUX10(J, 1)
DLDY5(J)=DLY5A(J, 1)
DLDY9(J)=DLY9A(J, 1)
DF4DU1(J)=F4U1A(J, 1)
DF4DU2(J)=F4U2A(J, 1)
DF4DY1(J)=F4Y1A(J, 1)
DF4DY3(J)=F4Y3A(J, 1)
DF4DY4(J)=F4Y4A(J, 1)
DF4DY5(J)=F4Y5A(J, 1)
DF4DY6(J)=F4Y6A(J, 1)
DF4DY7(J)=F4Y7A(J, 1)
DF4DY8(J)=F4Y8A(J, 1)
DF4DY9(J)=F4Y9A(J, 1)
DF10Y2(J)=F10Y2A(J, 1)
DF10Y5(J)=F10Y5A(J, 1)
DF10Y6(J)=F10Y6A(J, 1)
DF10Y9(J)=F10Y9A(J, 1)
DIFER1(J)=DFAUX1(J, 1)
DIFER2(J)=DFAUX2(J, 1)
DIFER3(J)=DFAUX3(J, 1)
DIFER4(J)=DFAUX4(J, 1)
U1(J)=UARM1(J, 1)
U2(J)=UARM2(J, 1)
FINTIP(J)=FIPAUX(J, 1)
189 CONTINUE
FIIP=ARINIP(1)
DPSI1=PSIAR1(1)
DPSI2=PSIAR2(1)
DPSI3=PSIAR3(1)
PIP1=FIIP
WRITE(6, 1704) ITER, KVINC
1704 FORMAT(1X, 'NA ITERACAO ', I3, ' TENTATIVA NUM. ', I3, ' VINCULOS TERMIN
1AIS E', /, 1X, 'FUNCAO OBJETIVO NAO SAO MELHORADOS')
GO TO 1963
C PROPAGACAO RECUSADA: FAZER AS MODIFICACOES NECESSARIAS

```

```

1963 CONTINUE
      IF(JVINC.NE.1)GO TO 3723
      IF(IDPSI.NE.1)GO TO 2225
      IF(ITER.GT.10)GO TO 2228
C   NAS PRIMEIRAS ITERACOES TOMAR OS VALORES ABAIXO DAS CONSTANTES DE COR REAO
C   DOS VINCULOS TERMINAIS
      PDPSI1=0.012500
      PDPSI2=0.012500
      PDPSI3=0.012500
      IDPSI=IDPSI+1
      GO TO 2226
2228 PDPSI1=0.000195312500
      PDPSI2=0.000195312500
      PDPSI3=0.000195312500
      IDPSI=IDPSI+1
      GO TO 2226
C   SE O NUMERO DA ITERACAO E MAIOR QUE 10, COMECE COM VALORES PEQUENOS
C   DE KP
2225 PDPSI1=4.000*PDPSI1
      PDPSI2=4.000*PDPSI2
      PDPSI3=4.000*PDPSI3
      IF(PDPSI1.GT.0.900.AND.PDPSI2.GT.0.900.AND.PDPSI3.GT.0.900)GO TO 1
111
      GO TO 2226
C   MODIFICAR AS CONSTANTES DE CORRECAO DOS VINCULOS TERMINAIS
2226 CONTINUE
      IVINC=1
      LVINC=1
      ITER=ITER-1
      KVINC=KVINC+1
      WRITE(6,1921)PDPSI1,PDPSI2,PDPSI3
1921 FORMAT(10X,'NOVAS CORRECOES EM DPSI1,DPSI2 E DPSI3',/,5X,'PDPSI1='
1,G14.7,10X,'PDPSI2=',G14.7,10X,'PDPSI3=',G14.7,/)
      GO TO 30
C   VALORES GERADOS SAO MAIORES QUE 1.0? DIMINUI-LOS
111 PDPSI1=0.012500
      PDPSI2=0.012500
      PDPSI3=0.012500
      JVINC=JVINC+1
      IF(ITER.GT.10)GO TO 3724
      GO TO 3723
3724 PDPSI1=0.000195312500
      PDPSI2=0.000195312500
      PDPSI3=0.000195312500
      GO TO 3723
3723 CONTINUE
      DS2=0.500*DS2
      IF(DS2.LT.DSCOMP)GO TO 61
      IVINC=1
      LVINC=1
      ITER=ITER-1
      KVINC=KVINC+1
      JVINC=1
      IDPSI=1
      WRITE(6,148)DS2
148 FORMAT(1X,'CONDICOES DE CONVERGENCIA NAO SAO OBEDECIDAS',/,5X,'NOV
10 DS2=',G14.7,/)
      GO TO 34
1949 CONTINUE
C   CONVERGENCIA JA E BOA NOS VINCULOS: TENTAR AUMENTO DA VELOCIDADE DE

```



```

C CONVERGENCIA
  PDPSI1=1.000
  PDPSI2=1.000
  PDPSI3=1.000
  GO TO 1951
1951 CONTINUE
  KVINC=1
  IDPSI=1
  IF(IVINC.EQ.4)GO TO 143
  IVINC=IVINC+1
  GO TO 1983
C AUMENTAR TAMANHO DA CONSTANTE KP A CADA 4 ITERACOES SEM PROBLEMAS
143 PDPSI1=2.000*PDPSI1
  PDPSI2=2.000*PDPSI2
  PDPSI3=2.000*PDPSI3
  IF(PDPSI1.GE.0.900.OR.PDPSI2.GE.0.900.OR.PDPSI3.GE.0.900)GO TO 192
  GO TO 193
192 PDPSI1=0.900
  PDPSI2=0.900
  PDPSI3=0.900
  GO TO 193
193 CONTINUE
  WRITE(6,147)PDPSI1,PDPSI2,PDPSI3
147 FORMAT(1X,'AUMENTO DAS CORRECOES DOS VINCULOS TERMINAIS',/,5X,'PDF
  1SI1=',G14.7,5X,'PDPSI2=',G14.7,5X,'PDPSI3=',G14.7,/)
  IVINC=1
  IF(LVINC.EQ.3)GO TO 1982
  LVINC=LVINC+1
  GO TO 1983
C AUMENTAR TAMANHO DO PASSO A CADA DEZ ITERACOES SEM PROBLEMAS
1982 DS2=2.000*DS2
  WRITE(6,149)DS2
149 FORMAT(1X,'AUMENTO DO TAMANHO DO PASSO',/,5X,'DS2=',G14.7,/)
  LVINC=1
  GO TO 1983
1983 CONTINUE
C INTEGRACAO EM SENTIDO INVERSO
  CALL INTINV(XFINAL,H,M,N)
C ARMAZENAR VALORES DE LPSI1,LPSI2,LJOTA
  ELP(1)=ALAP14(1)
  ELP(2)=ALAP15(1)
  ELP(3)=ALAP16(1)
  ELP(4)=ALAP17(1)
  ELP(5)=ALAP18(1)
  ELP(6)=ALAP19(1)
  ELP(7)=ALAP24(1)
  ELP(8)=ALAP25(1)
  ELP(9)=ALAP26(1)
  ELP(10)=ALAP27(1)
  ELP(11)=ALAP28(1)
  ELP(12)=ALAP29(1)
  ELP(13)=ALAP34(1)
  ELP(14)=ALAP35(1)
  ELP(15)=ALAP36(1)
  ELP(16)=ALAP37(1)
  ELP(17)=ALAP38(1)
  ELP(18)=ALAP39(1)
  ELJ(1)=ALAJ4(1)
  ELJ(2)=ALAJ5(1)
  ELJ(3)=ALAJ6(1)

```

```

    ELJ(4)=ALAJ7(1)
    ELJ(5)=ALAJ8(1)
    ELJ(6)=ALAJ9(1)
    CALL FOMATR(H,N1)
C   CORRIGIR DPSI
C   PARA ESTE PONTO SAO ENCAMINHADAS AS PROPAGACOES RECUSADAS
    30 CONTINUE
    DPSC(1)=- (PDPSI1*DPST1)
    DPSC(2)=- (PDPSI2*DPST2)
    DPSC(3)=- (PDPSI3*DPST3)
C   VERIFICACAO DA POSITIVIDADE DO INCREMENTO
    22 DPSIPP=(DPSC(1)*(DPSC(1)*DIPP(1)+DPSC(2)*DIPP(2)+DPSC(3)*DIPP(3))+
    1DPSC(2)*(DPSC(1)*DIPP(4)+DPSC(2)*DIPP(5)+DPSC(3)*DIPP(6))+DPSC(3)*
    2(DPSC(1)*DIPP(7)+DPSC(2)*DIPP(8)+DPSC(3)*DIPP(9)))
    GO TO 34
    34 RINC=DS2-DPSIPP
    IF(RINC.LE.0.000) GO TO 21
    GO TO 64
    21 CSI=DS2/(DPSIPP+1.D-18)
    DPSC(1)=CSI*DPSC(1)
    DPSC(2)=CSI*DPSC(2)
    DPSC(3)=CSI*DPSC(3)
    GO TO 22
    64 CONTINUE
C   CALCULAR CORRECOES NAS CONDICAOES INICIAIS
    CALL DBETA(N)
    IF(KVINC.NE.1) GO TO 191
    DO 32 IP=1,N
    YIN(IP)=YIN(IP)+BETA(IP)
    32 CONTINUE
    GO TO 752
    191 YIN(1)=Y1(1)
    YIN(2)=Y2(1)
    YIN(3)=Y3(1)
    YIN(4)=Y4(1)
    YIN(5)=Y5(1)
    YIN(6)=Y6(1)
    YIN(7)=Y7(1)
    YIN(8)=Y8(1)
    YIN(9)=Y9(1)
    YIN(10)=Y10(1)
    DO 333 IP=1,N
    YIN(IP)=YIN(IP)+BETA(IP)
    333 CONTINUE
    GO TO 752
C   CALCULO DAS CORRECOES NAS FUNCOES DE CONTROLE
    752 CONTINUE
    CALL DELTU(H,ITER,KVINC,M)
C   IMPRIMA VALORES IMPORTANTES DE CADA ITERACAO
    IF(KVINC.NE.1) GO TO 78
    CALL SAI(N1,N,ITER)
    78 CONTINUE
C   SF O NUMERO DE PROPAGACOES RECUSADAS E MAIOR QUE O MAXIMO, PARE
    IF(KVINC.EQ.KVIMAX)GO TO 61
    DAPS1=DABS(DPSI1)
    DAPS2=DABS(DPSI2)
    DAPS3=DABS(DPSI3)
    IF(DAPS1.LE.PREC1.AND.DAPS2.LE.PREC2.AND.DAPS3.LE.PREC3)GO TO 41
    42 CONTINUE
    IF(ITER.EQ.ITEMAX) GO TO 61

```

```

ITER=ITER+1
GO TO 5
C VINCULOS SATISFEITOS COM A PRECISAO EXIGIDA; AUMENTAR A PRECISAO
41 IPREC=IPREC+1
IF(IPREC.EQ.3) GO TO 51
IF(ITER.EQ.ITEMAX) GO TO 61
ITER=ITER+1
GO TO 5
51 PREC1=PREC1/5.000
PREC2=PREC2/5.000
PREC3=PREC3/5.000
IF(DJDSPTS.LE.PREC4)GO TO 61
DS2=DS2/5.000
GO TO 42
61 CONTINUE
END

```

```
=====
```

```

SUBROUTINE ENTRA
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
COMMON/MATRIZ/B11,B22,B33,B44,B55,B66,W11,W22
COMMON/CONTRL/U1(950),U2(950),DELU1(950),DELU2(950)
COMMON/CONDIN/YIN(10),BETA(10)
COMMON/FUNPES/HPES1,HPES2,HPES3,HPES4,PSINT,PSYDEZ
COMMON/CONTS/RO,ELAST,CCOMP,DCOMP,W0,Y3COMP,Y4COMP,DEFLMX
COMMON/PRECIS/DS2,PDPSI1,PDPSI2,PDPSI3,PREC1,PREC2,PREC3,PREC4
C ENTRA DECLARA OS PARAMETROS DE ENTRADA: FUNCOES PESO, CONTROLE,ETC
N=10
N1=300
M=N1+1
READ(5,111)B11,B22,B33,B44,B55,B66,W11,W22

READ(5,112)DS2,PDPSI1,PDPSI2,PDPSI3,PREC1,PREC2,PREC3,PREC4
READ(5,112)HPES1,HPES2,HPES3,HPES4,PSINT,PSYDEZ
READ(5,112)RO,ELAST,CCOMP,DCOMP,W0,Y3COMP,Y4COMP,DEFLMX
READ(5,114)(YIN(K),K=1,N)
C PARA A VIGA DE SECCAO CONSTANTE, AS FUNCOES DE CONTROLE SAO NULAS
DO 222 J=1,M
U1(J)=0.000
U2(J)=0.000
222 CONTINUE
111 FORMAT(5G16.8)
112 FORMAT(3G16.8)
113 FORMAT(5G16.8)
114 FORMAT(5G16.8)
C IMPRIMA OS VALORES INICIAIS DO PROCESSAMENTO
WRITE(6,200)
200 FORMAT(1X,'CONDICOES INICIAIS A PARTIR DE UMA VIGA DE SECCAO CONST
*ANTE')
DO 116 LK=1,N
116 WRITE(6,201)(LK,YIN(LK))
WRITE(6,202)HPES1,PSINT,RO,ELAST,PSYDEZ
WRITE(6,209)
209 FORMAT(10X,'MATRIZES=PESO : B PARA CONDICOES INICIAIS, W PARA CONT
ROLES',//)
WRITE(6,210)B11,B22,B33,B44,B55,B66

```

```

210 FORMAT(1X,'B11=',G14.7,3X,'B22=',G14.7,3X,'B33=',G14.7,3X,'B44=',G
114.7/1X,'B55=',G14.7,3X,'B66=',G14.7,3X,/)
WRITE(6,211)W11,W22
211 FORMAT(1X,'W11=',G14.7,3X,'W22=',G14.7,/)
IK=N1/50
WRITE(6,204)CCOMP,DCOMP,W0
204 FORMAT(/,10X,'RESTRICOES DE DESIGUALDADE',/,8X,'NA AREA : CCOMP='
1,G14.7,/,8X,'NO RAI0 DE GIRACAO : DCOMP=',G14.7,/,8X,'NA FREQUENCI
2A : W0= ',G14.7,/)
WRITE(6,205)DEFLMX,Y3COMP,Y4COMP
205 FORMAT(/,10X,'CONDICOES TERMINAIS',/,8X,'PSI1=Y1(L)='G14.7,/,8X,'
1PSI2=Y3(L)='G14.7,/,8X,'PSI3=Y4(L)='G14.7,/)
DO 115 IM=1,IK
IMI=(50*IM)+1
115 WRITE(6,203)(IMI,U1(IMI)),(IMI,U2(IMI))
201 FORMAT(1X,'YIN(',I2,')='G16.8/)
202 FORMAT(10X,'FUNCOES=PESO PARA VIOLACAO DOS VINCULOS DE DESIGUALDAD
1E',/,5X,'HPES1 = HPES2 = HPES3 = HPES4 =',G16.8,/,10X,'FUNCAO=PESO
2NO INTEGRANDO DO INDICE DE PERFORMANCE',/,5X,'PSINT =',G16.8,/,10
3X,'PROPRTEADES DO MATERIAL = ACO',/,5X,'DENSIDADE =',G16.8,/,5X,'
4MODULO DE FLASTICIDADE=',G16.8,/,10X,'FUNCAO DE PENALIZACAO EM IP
5MODIFICADO',/,5X,'PSYDFZ=',G16.8,/)
203 FORMAT(1X,'U1(',I3,')='G16.8,8X,'U2(',I3,')='G16.8/)
RETURN
END

```

=====

```

SUBROUTINE INTEQS(M,N,K,Y,DY,H,X)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION Y(10),DY(10)
COMMON/VARIES/Y1(950),Y2(950),Y3(950),Y4(950),Y5(950),Y6(950),Y7(9
150),Y8(950),Y9(950),Y10(950)
COMMON/FRONT/DIFFR1(950),DIFER2(950),DIFER3(950),DIFER4(950)
COMMON/FRONTA/DIFFY1,DIFFY2,DIFFY3,DIFFY4,DESV1,DESV2,DESV3,DESV4
COMMON/VINCLO/DIF1(950),DIF2(950),DIF3(950),DIF4(950)
C INTEQS ORDENA UM PASSO DE INTEGRACAO DAS EQUACOES DE ESTADO, ARMAZENA
C CADA PASSO E GERA VALORES DAS MATRIZES DE INTERESSE
CALL RK1(N,X,Y,DY,H,K)
K=K+1
Y1(K)=Y(1)
Y2(K)=Y(2)
Y3(K)=Y(3)
Y4(K)=Y(4)
Y5(K)=Y(5)
Y6(K)=Y(6)
Y7(K)=Y(7)
Y8(K)=Y(8)
Y9(K)=Y(9)
Y10(K)=Y(10)
DIFER1(K)=DIFFY1
DIFER2(K)=DIFFY2
DIFER3(K)=DIFFY3
DIFER4(K)=DIFFY4
DIF1(K)=DESV1
DIF2(K)=DESV2
DIF3(K)=DESV3
DIF4(K)=DESV4

```

```

CALL COEFLY(K)
CALL COEFFU(K)
CALL COEFFY(K)
CALL COEFIP(K)
RETURN
END

```

```

=====
SUBROUTINE RK1(N,X,Y,DY,H,K)
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
  DIMENSION Y(10),DY(10),PHI(10),YBAR(10),F(10)
C   RK1 EXECUTA UM PASSO DE RUNGE-KUTTA DE 4A. ORDEM
  CALL DIFFUN(X,Y,DY,K,H)
  DO 10 I=1,N
10  F(I)=DY(I)
     DO 11 I=1,N
       YBAR(I)=Y(I)
       PHI(I)=F(I)
11  Y(I)=YBAR(I)+0.500*H*F(I)
     X=X+0.500*H
     CALL DIFFUN(X,Y,DY,K,H)
     DO 12 I=1,N
12  F(I)=DY(I)
     DO 13 I=1,N
       PHI(I)=PHI(I)+2.000*F(I)
13  Y(I)=YBAR(I)+0.500*H*F(I)
     CALL DIFFUN(X,Y,DY,K,H)
     DO 14 I=1,N
14  F(I)=DY(I)
     DO 15 I=1,N
       PHI(I)=PHI(I)+2.000*F(I)
15  Y(I)=YBAR(I)+H*F(I)
     X=X+0.500*H
     CALL DIFFUN(X,Y,DY,K,H)
     DO 16 I=1,N
16  F(I)=DY(I)
     DO 17 I=1,N
       PHI(I)=(PHI(I)+F(I))/6.000
17  Y(I)=YBAR(I)+H*PHI(I)
  RETURN
  END

```

```

=====
SUBROUTINE DIFFUN(X,Y,DY,K,H)
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
  DIMENSION Y(10),DY(10)
  COMMON/CONTS/RO,ELAST,CCOMP,DCOMP,W0,Y3COMP,Y4COMP,DEFLMX
  COMMON/FUNPES/HPES1,HPES2,HPES3,HPES4,PSINT,PSYDEZ
  COMMON/CONTRL/U1(950),U2(950),DELU1(950),DELU2(950)
  COMMON/FRONTA/DIFFY1,DIFFY2,DIFFY3,DIFFY4,DESV1,DESV2,DESV3,DESV4
C   DIFFUN DECLARA O SISTEMA DE EQUACOES DIFERENCIAIS DO MOVIMENTO
  ATG=0.000100
  XFINAL=1.200
  DIFFY1=0.000

```

```

DIFFY2=0.000
DIFFY3=0.000
DIFFY4=0.000
DIFFY5=0.000
DIFFY6=0.000
DESV1=0.000
DESV2=0.000
DESV3=0.000
DESV4=0.000
DY(1)=Y(2)
DY(2)=Y(3)
DY(3)=Y(4)
DY(4)=(((R0*Y(5)*Y(1)*Y(9)*Y(9))/ELAST)-((U1(K)*Y(6)+2.000*Y(7)*Y(
18)+U2(K)*Y(5))*Y(3))-(2.000*Y(4)*(Y(7)*Y(6)+Y(5)*Y(8))))/(Y(5)*Y(6
*))
DY(5)=Y(7)
DY(6)=Y(8)
DY(7)=U1(K)
DY(8)=U2(K)
DY(9)=0.000
DESV1=Y(2)
DESV2=Y(5)-CCOMP
DESV3=DCOMP-Y(6)
DESV4=Y(9)-W0
C GERAR A FUNCAO DE COMPARACAO DO VINCULO C1
FCOMP=ATG*(((K-1)*H)/XFINAL)
C CALCULAR A PENETRACAO NAS FRONTEIRAS E GERAR A VARIABEL Y10
IF(K.LE.3)GO TO 1521
IF(DESV1-FCOMP)1010,1011,1011
1011 DY101=0.000
DIFFY1=0.000
GO TO 1100
1010 DY101=HPES1*(DESV1-FCOMP)*(DESV1-FCOMP)
DIFFY1=2.000*(DESV1-FCOMP)*HPES1
GO TO 1100
1521 CONTINUE
IF(DESV1)1002,1001,1001
1001 DY101=0.000
DIFFY1=0.000
GO TO 1100
1002 DY101=HPES1*DESV1*DESV1
DIFFY1=2.000*HPES1*DESV1
GO TO 1100
1100 CONTINUE
IF(DESV2)1004,1003,1003
1003 DY102=0.000
DIFFY2=0.000
GO TO 1200
1004 DY102=HPES2*DESV2*DESV2
DIFFY2=2.000*HPES2*DESV2
GO TO 1200
1200 CONTINUE
IF(DESV3)1006,1005,1005
1005 DY103=0.000
DIFFY3=0.000
GO TO 1300
1006 DY103=HPES3*DESV3*DESV3
DIFFY3=-2.000*HPES3*DESV3
GO TO 1300
1300 CONTINUE

```

```

      IF(DES4)1008,1007,1007
1007 DY104=0.000
      DIFFY4=0.000
      GO TO 1400
1008 DY104=HPES4*DES4*DES4
      DIFFY4=2.000*HPES4*DES4
      GO TO 1400
1400 CONTINUE
      DY(10)=DY101+DY102+DY103+DY104
      RETURN
      END

```

```

=====
SUBROUTINE COEFLY(K)
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
  COMMON/CONTS/RO,FLAST,CCOMP,DCOMP,W0,Y3COMP,Y4COMP,DEFLMX
  COMMON/FUNPES/HPES1,HPES2,HPES3,HPES4,PSINT,PSYDEZ
  COMMON/VARIES/Y1(950),Y2(950),Y3(950),Y4(950),Y5(950),Y6(950),Y7(9
150),Y8(950),Y9(950),Y10(950)
  COMMON/COFFIC/DLDY9(950),DF4DU1(950),DF4DU2(950),DF4DY1(950),DF4DY
*3(950),DF4DY4(950),DF4DY5(950),DF4DY6(950),DF4DY7(950),DF4DY8(950)
*,DF4DY9(950),DF10Y2(950),DF10Y5(950),DF10Y6(950),DF10Y9(950),FINTI
3P(950),DLDY5(950)
C COEFLY CALCULA E ARMAZENA VALORES DO VETOR DEL/DELY
  DLDY5(K)=2.000*RO*Y5(K)
  DLDY9(K)=-((2.000*PSINT)/(Y9(K)*Y9(K)*Y9(K)))
  RETURN
  END

```

```

=====
SUBROUTINE COEFFU(K)
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
  COMMON/VARIES/Y1(950),Y2(950),Y3(950),Y4(950),Y5(950),Y6(950),Y7(9
150),Y8(950),Y9(950),Y10(950)
  COMMON/COFFIC/DLDY9(950),DF4DU1(950),DF4DU2(950),DF4DY1(950),DF4DY
*3(950),DF4DY4(950),DF4DY5(950),DF4DY6(950),DF4DY7(950),DF4DY8(950)
*,DF4DY9(950),DF10Y2(950),DF10Y5(950),DF10Y6(950),DF10Y9(950),FINTI
3P(950),DLDY5(950)
C COEFFU CALCULA E ARMAZENA VALORES DA MATRIZ DELF/DELU
  DF4DU1(K)=- (Y3(K)/Y5(K))
  DF4DU2(K)=- (Y3(K)/Y6(K))
  RETURN
  END

```

```

=====
SUBROUTINE COEFFY(K)
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
  COMMON/VARIES/Y1(950),Y2(950),Y3(950),Y4(950),Y5(950),Y6(950),Y7(9
150),Y8(950),Y9(950),Y10(950)
  COMMON/CONTS/RO,FLAST,CCOMP,DCOMP,W0,Y3COMP,Y4COMP,DEFLMX
  COMMON/FRONT/DIFER1(950),DIFER2(950),DIFER3(950),DIFER4(950)

```



```

AUX2=HT*(Y(1)+3.875D0*(Y(2)+Y(5))+2.625D0*(Y(3)+Y(4)+Y(6)))
SUM2=Y(5)+Y(5)
SUM2=SUM2+SUM2
SUM2=AUX2-HT*(Y(4)+SUM2+Y(6))
Z(1)=0.D0
AUX=Y(3)+Y(3)
AUX=AUX+AUX
Z(2)=SUM2-HT*(Y(2)+AUX+Y(4))
Z(3)=SUM1
Z(4)=SUM2
IF (NDIM=6) 5,5,2
2 DO 4 I=7,NDIM,2
SUM1=AUX1
SUM2=AUX2
AUX1=Y(I-1)+Y(I-1)
AUX1=AUX1+AUX1
AUX1=SUM1+HT*(Y(I-2)+AUX1+Y(I))
Z(I-2)=SUM1
IF (I=NDIM) 3,6,6
3 AUX2=Y(I)+Y(I)
AUX2=AUX2+AUX2
AUX2=SUM2+HT*(Y(I-1)+AUX2+Y(I+1))
4 Z(I-1)=SUM2
5 Z(NDIM-1)=AUX1
Z(NDIM)=AUX2
Z1=Z(NDIM)
RETURN
6 Z(NDIM-1)=SUM2
Z(NDIM)=AUX1
Z1=Z(NDIM)
RETURN
7 IF (NDIM=3) 12,11,8
8 SUM2=1.125D0*HT*(Y(1)+Y(2)+Y(2)+Y(2)+Y(3)+Y(3)+Y(3)+Y(4))
SUM1=Y(2)+Y(2)
SUM1=SUM1+SUM1
SUM1=HT*(Y(1)+SUM1+Y(3))
Z(1)=0.D0
AUX1=Y(3)+Y(3)
AUX1=AUX1+AUX1
Z(2)=SUM2-HT*(Y(2)+AUX1+Y(4))
IF (NDIM=5) 10,9,9
9 AUX1=Y(4)+Y(4)
AUX1=AUX1+AUX1
Z(5)=SUM1+HT*(Y(3)+AUX1+Y(5))
Z1=Z(5)
RETURN
10 Z(3)=SUM1
Z(4)=SUM2
Z1=Z(4)
RETURN
11 SUM1=HT*(1.25D0*Y(1)+Y(2)+Y(2)-.25D0*Y(3))
SUM2=Y(2)+Y(2)
SUM2=SUM2+SUM2
Z(3)=HT*(Y(1)+SUM2+Y(3))
Z(1)=0.D0
Z(2)=SUM1
Z1=Z(3)
RETURN
12 WRITE(6,14)
14 FORMAT(1X,'INTEGRACAO NAO E POSSIVEL COM TRES VALOPES')

```

RETURN
END

=====

```

SUBROUTINE INTINV(XFINAL,H,M,N)
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
  COMMON/MATRIZ/B11,B22,B33,B44,B55,B66,W11,W22
  COMMON/VALFIN/YFIN1,YFIN2,YFIN3,YFIN4,YFIN5,YFIN6,YFIN7,YFIN8,YFIN
  19,YFIN10
  COMMON/VARADJ/ALAP11(950),ALAP12(950),ALAP13(950),ALAP14(950),ALAP
  *15(950),ALAP16(950),ALAP17(950),ALAP18(950),ALAP19(950),ALAP10(950
  *),ALAP21(950),ALAP22(950),ALAP23(950),ALAP24(950),ALAP25(950),ALAP
  *26(950),ALAP27(950),ALAP28(950),ALAP29(950),ALAP20(950),ALAJ1(950)
  *,ALAJ2(950),ALAJ3(950),ALAJ4(950),ALAJ5(950),ALAJ6(950),ALAJ7(950)
  *,ALAJ8(950),ALAJ9(950),ALAJ10(950)
  COMMON/VARAD1/ALAP31(950),ALAP32(950),ALAP33(950),ALAP34(950),ALAP
  135(950),ALAP36(950),ALAP37(950),ALAP38(950),ALAP39(950),ALAP30(950
  2)
  COMMON/FUNPES/HPES1,HPES2,HPES3,HPES4,PSINT,PSYDEZ
  COMMON/COFFIC/DLDY9(950),DF4DU1(950),DF4DU2(950),DF4DY1(950),DF4DY
  *3(950),DF4DY4(950),DF4DY5(950),DF4DY6(950),DF4DY7(950),DF4DY8(950)
  *,DF4DY9(950),DF10Y2(950),DF10Y5(950),DF10Y6(950),DF10Y9(950),FINTI
  3P(950),DLDY5(950)
  COMMON/FUINTM/FPP11(950),FPP12(950),FPP13(950),FPP21(950),FPP22(95
  10),FPP23(950),FPP31(950),FPP32(950),FPP33(950),FPJ1(950),FPJ2(950)
  2,FPJ3(950),FJJ(950)
  COMMON/FINAUX/FPPA11(950),FPPA12(950),FPPA13(950),FPPA21(950),FPPA
  122(950),FPPA23(950),FPPA31(950),FPPA32(950),FPPA33(950),FPJA1(950)
  2,FPJA2(950),FPJA3(950),FJJA(950)
  DIMENSION ALAP1(30),ALAP2(30),ALAP3(30),ALAJ(30),DALAP1(30),DALAP2
  1(30),DALAP3(30),DALAJ(30)

```

C INTINV EXECUTA A INTEGRAÇÃO DOS SISTEMAS ADJUNTOS, ARMAZENA VALORES
C DAS VARS. ADJUNTAS E TABELA VALORES DAS FCOES DE IPSIPSI, IPSIJOTS E
C IJOTAJOTA

X=XFINAL

L=M

HT=-H

C CALCULAR VALORES INICIAIS DAS VARIÁVEIS ADJUNTAS

DO 890 I=1,N

ALAP1(I)=0.000

ALAP2(I)=0.000

ALAP3(I)=0.000

ALAJ(I)=0.000

DALAP1(I)=0.000

DALAP2(I)=0.000

DALAP3(I)=0.000

890 DALAJ(I)=0.000

ALAP1(1)=1.000

ALAP2(3)=1.000

ALAP3(4)=1.000

ALAJ(10)=2.000*PSYDEZ*YFIN10

C ARMAZENAR VALORES INICIAIS DOS LAMBDA

ALAP11(M)=ALAP1(1)

ALAP12(M)=ALAP1(2)

ALAP13(M)=ALAP1(3)

ALAP14(M)=ALAP1(4)

ALAP15(M)=ALAP1(5)

ALAP16(M)=ALAP1(6)
 ALAP17(M)=ALAP1(7)
 ALAP18(M)=ALAP1(8)
 ALAP19(M)=ALAP1(9)
 ALAP10(M)=ALAP1(10)
 ALAP21(M)=ALAP2(1)
 ALAP22(M)=ALAP2(2)
 ALAP23(M)=ALAP2(3)
 ALAP24(M)=ALAP2(4)
 ALAP25(M)=ALAP2(5)
 ALAP26(M)=ALAP2(6)
 ALAP27(M)=ALAP2(7)
 ALAP28(M)=ALAP2(8)
 ALAP29(M)=ALAP2(9)
 ALAP20(M)=ALAP2(10)
 ALAP31(M)=ALAP3(1)
 ALAP32(M)=ALAP3(2)
 ALAP33(M)=ALAP3(3)
 ALAP34(M)=ALAP3(4)
 ALAP35(M)=ALAP3(5)
 ALAP36(M)=ALAP3(6)
 ALAP37(M)=ALAP3(7)
 ALAP38(M)=ALAP3(8)
 ALAP39(M)=ALAP3(9)
 ALAP30(M)=ALAP3(10)
 ALAJ1(M)=ALAJ(1)
 ALAJ2(M)=ALAJ(2)
 ALAJ3(M)=ALAJ(3)
 ALAJ4(M)=ALAJ(4)
 ALAJ5(M)=ALAJ(5)
 ALAJ6(M)=ALAJ(6)
 ALAJ7(M)=ALAJ(7)
 ALAJ8(M)=ALAJ(8)
 ALAJ9(M)=ALAJ(9)
 ALAJ10(M)=ALAJ(10)
 C VALORES DAS FUNCOES A INTEGRAR EM IPSIPSI, IPSIJOTA E IJOTAJOTA
 BIN1=ALAP17(M)+(DF4DU1(M)*ALAP14(M))
 BING1=(BIN1*BIN1)/W11
 BIN2=ALAP18(M)+(DF4DU2(M)*ALAP14(M))
 BING2=(BIN2*BIN2)/W22
 FPP11(M)=BING1+BING2
 BIN3=ALAP27(M)+(DF4DU1(M)*ALAP24(M))
 BING3=(BIN3*BIN3)/W11
 BIN4=ALAP28(M)+(DF4DU2(M)*ALAP24(M))
 BING4=(BIN4*BIN4)/W22
 FPP12(M)=BING3+BING4
 FPP21(M)=FPP12(M)
 BING5=(BIN3*BIN3)/W11
 BING6=(BIN4*BIN4)/W22
 BIN5=ALAP37(M)+(DF4DU1(M)*ALAP34(M))
 BING7=(BIN5*BIN5)/W11
 BIN6=ALAP38(M)+(DF4DU2(M)*ALAP34(M))
 BING8=(BIN6*BIN6)/W22
 FPP22(M)=BING5+BING6
 FPP13(M)=BING7+BING8
 FPP31(M)=FPP13(M)
 BING9=(BIN5*BIN5)/W11
 BING10=(BIN6*BIN6)/W22
 FPP23(M)=BING9+BING10
 FPP32(M)=FPP23(M)

```

BING11=(BIN5*BIN5)/W11
BING12=(BIN6*BIN6)/W22
FPP33(M)=BING11+BING12
CIN1=ALAJ7(M)+(DF4DU1(M)*ALAJ4(M))
CINQ1=(CIN1*BIN1)/W11
CIN2=ALAJ8(M)+(DF4DU2(M)*ALAJ4(M))
CINQ2=(CIN2*BIN2)/W22
FPJ1(M)=CINQ1+CINQ2
CINQ3=(BIN3*CIN1)/W11
CINQ4=(BIN4*CIN2)/W22
FPJ2(M)=CINQ3+CINQ4
CINQ5=(CIN1*BIN5)/W11
CINQ6=(CIN2*BIN6)/W22
FPJ3(M)=CINQ5+CINQ6
DINQ1=(CIN1*CIN1)/W11
DINQ2=(CIN2*CIN2)/W22
FJJ(M)=DINQ1+DINQ2

```

C LOOP DE INTEGRACAO DAS EQUACOES ADJUNTAS

891 CONTINUE

CALL RK2(N,X,ALAP1,DALAP1,ALAP2,DALAP2,ALAP3,DALAP3,ALAJ,DALAJ,HT,
1L)

L=L-1

IF(L.EQ.0) GO TO 892

C ARMAZENAR VALORES DAS VARIAVEIS ADJUNTAS

```

ALAP11(L)=ALAP1(1)
ALAP12(L)=ALAP1(2)
ALAP13(L)=ALAP1(3)
ALAP14(L)=ALAP1(4)
ALAP15(L)=ALAP1(5)
ALAP16(L)=ALAP1(6)
ALAP17(L)=ALAP1(7)
ALAP18(L)=ALAP1(8)
ALAP19(L)=ALAP1(9)
ALAP10(L)=ALAP1(10)
ALAP21(L)=ALAP2(1)
ALAP22(L)=ALAP2(2)
ALAP23(L)=ALAP2(3)
ALAP24(L)=ALAP2(4)
ALAP25(L)=ALAP2(5)
ALAP26(L)=ALAP2(6)
ALAP27(L)=ALAP2(7)
ALAP28(L)=ALAP2(8)
ALAP29(L)=ALAP2(9)
ALAP20(L)=ALAP2(10)
ALAP31(L)=ALAP3(1)
ALAP32(L)=ALAP3(2)
ALAP33(L)=ALAP3(3)
ALAP34(L)=ALAP3(4)
ALAP35(L)=ALAP3(5)
ALAP36(L)=ALAP3(6)
ALAP37(L)=ALAP3(7)
ALAP38(L)=ALAP3(8)
ALAP39(L)=ALAP3(9)
ALAP30(L)=ALAP3(10)
ALAJ1(L)=ALAJ(1)
ALAJ2(L)=ALAJ(2)
ALAJ3(L)=ALAJ(3)
ALAJ4(L)=ALAJ(4)
ALAJ5(L)=ALAJ(5)
ALAJ6(L)=ALAJ(6)

```

```

      ALAJ7(L)=ALAJ(7)
      ALAJ8(L)=ALAJ(8)
      ALAJ9(L)=ALAJ(9)
      ALAJ10(L)=ALAJ(10)
C   CHANAR VAMATI PARA CALCULAR VALORES DAS FUNCOES DAS MATRIZES IPSIPSI
C   IPSIJOTA E IJOTAJOTA
      CALL VAMATI(L)
      FPP11(L)=FPPA11(L)
      FPP12(L)=FPPA12(L)
      FPP13(L)=FPPA13(L)
      FPP21(L)=FPPA21(L)
      FPP22(L)=FPPA22(L)
      FPP23(L)=FPPA23(L)
      FPP31(L)=FPPA31(L)
      FPP32(L)=FPPA32(L)
      FPP33(L)=FPPA33(L)
      FPJ1(L)=FPJA1(L)
      FPJ2(L)=FPJA2(L)
      FPJ3(L)=FPJA3(L)
      FJJ(L)=FJJA(L)
      GO TO 891
892 RETURN
      END

```

```

=====

```

```

      SUBROUTINE RK2(N,X,ALAP1,DALAP1,ALAP2,DALAP2,ALAP3,DALAP3,ALAJ,DAL
1AJ,HT,L)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DIMENSION ALAP1(30),ALAP2(30),ALAP3(30),ALAJ(30),DALAP1(30),DALAP2
1(30),DALAP3(30),DALAJ(30)
      DIMENSION PHI1(30),PHI2(30),PHI3(30),PHI4(30),ALBAR1(30),ALBAR2(30
1),ALBAR3(30),AJBAR(30),F1(30),F2(30),F3(30),F4(30)
C   RK2 EXECUTA UM PASSO DE RUNGE-KUTTA PARA OS QUATRO SISTEMAS ADJUNTOS
C   SIMULTANEAMENTE
      CALL DIFFAD(X,ALAP1,DALAP1,ALAP2,DALAP2,ALAP3,DALAP3,ALAJ,DALAJ,L)
      DO 70 I=1,N
      F1(I)=DALAP1(I)
      F2(I)=DALAP2(I)
      F3(I)=DALAP3(I)
70  F4(I)=DALAJ(I)
      DO 71 I=1,N
      ALBAR1(I)=ALAP1(I)
      ALBAR2(I)=ALAP2(I)
      ALBAR3(I)=ALAP3(I)
      AJBAR(I)=ALAJ(I)
      PHI1(I)=F1(I)
      PHI2(I)=F2(I)
      PHI3(I)=F3(I)
      PHI4(I)=F4(I)
      ALAP1(I)=ALBAR1(I)+0.5D0*HT*F1(I)
      ALAP2(I)=ALBAR2(I)+0.5D0*HT*F2(I)
      ALAP3(I)=ALBAR3(I)+0.5D0*HT*F3(I)
71  ALAJ(I)=AJBAR(I)+0.5D0*HT*F4(I)
      X=X+0.5D0*HT
      CALL DIFFAD(X,ALAP1,DALAP1,ALAP2,DALAP2,ALAP3,DALAP3,ALAJ,DALAJ,L)
      DO 72 I=1,N
      F1(I)=DALAP1(I)

```

```

F2(I)=DALAP2(I)
F3(I)=DALAP3(I)
72 F4(I)=DALAJ(I)
DO 73 I=1,N
PHI1(I)=PHI1(I)+2.0D0*F1(I)
PHI2(I)=PHI2(I)+2.0D0*F2(I)
PHI3(I)=PHI3(I)+2.0D0*F3(I)
PHI4(I)=PHI4(I)+2.0D0*F4(I)
ALAP1(I)=ALBAR1(I)+0.5D0*HT*F1(I)
ALAP2(I)=ALBAR2(I)+0.5D0*HT*F2(I)
ALAP3(I)=ALBAR3(I)+0.5D0*HT*F3(I)
73 ALAJ(I)=AJBAR(I)+0.5D0*HT*F4(I)
CALL DIFFAD(X,ALAP1,DALAP1,ALAP2,DALAP2,ALAP3,DALAP3,ALAJ,DALAJ,L)
DO 74 I=1,N
F1(I)=DALAP1(I)
F2(I)=DALAP2(I)
F3(I)=DALAP3(I)
74 F4(I)=DALAJ(I)
DO 75 I=1,N
PHI1(I)=PHI1(I)+2.0D0*F1(I)
PHI2(I)=PHI2(I)+2.0D0*F2(I)
PHI3(I)=PHI3(I)+2.0D0*F3(I)
PHI4(I)=PHI4(I)+2.0D0*F4(I)
ALAP1(I)=ALBAR1(I)+HT*F1(I)
ALAP2(I)=ALBAR2(I)+HT*F2(I)
ALAP3(I)=ALBAR3(I)+HT*F3(I)
75 ALAJ(I)=AJBAR(I)+HT*F4(I)
X=X+0.5D0*HT
CALL DIFFAD(X,ALAP1,DALAP1,ALAP2,DALAP2,ALAP3,DALAP3,ALAJ,DALAJ,L)
DO 76 I=1,N
F1(I)=DALAP1(I)
F2(I)=DALAP2(I)
F3(I)=DALAP3(I)
76 F4(I)=DALAJ(I)
DO 77 I=1,N
PHI2(I)=(PHI2(I)+F2(I))/6.0D0
PHI1(I)=(PHI1(I)+F1(I))/6.0D0
PHI3(I)=(PHI3(I)+F3(I))/6.0D0
PHI4(I)=(PHI4(I)+F4(I))/6.0D0
ALAP1(I)=ALBAR1(I)+HT*PHI1(I)
ALAP2(I)=ALBAR2(I)+HT*PHI2(I)
ALAP3(I)=ALBAR3(I)+HT*PHI3(I)
77 ALAJ(I)=AJBAR(I)+HT*PHI4(I)
RETURN
END

```

```

=====
SUBROUTINE DIFFAD(X,ALAP1,DALAP1,ALAP2,DALAP2,ALAP3,DALAP3,ALAJ,DA
1LAJ,L)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION ALAP1(30),ALAP2(30),ALAP3(30),ALAJ(30),DALAP1(30),DALAP2
1(30),DALAP3(30),DALAJ(30)
COMMON/FRONT/DIFER1(950),DIFER2(950),DIFER3(950),DIFER4(950)
COMMON/COFFIC/DLDY9(950),DF4DU1(950),DF4DU2(950),DF4DY1(950),DF4DY
*3(950),DF4DY4(950),DF4DY5(950),DF4DY6(950),DF4DY7(950),DF4DY8(950)
*,DF4DY9(950),DF10Y2(950),DF10Y5(950),DF10Y6(950),DF10Y9(950),FINI
3P(950),DLDY5(950)

```

```

COMMON/VARIES/Y1(950),Y2(950),Y3(950),Y4(950),Y5(950),Y6(950),Y7(9
150),Y8(950),Y9(950),Y10(950)
COMMON/FUNPES/HPES1,HPES2,HPES3,HPES4,PSINT,PSYDEZ
COMMON/CONTS/RO,ELAST,CCOMP,DCOMP,W0,Y3COMP,Y4COMP,DEFLMX
C DIFFAD DECLARA OS QUATRO SISTEMAS ADJUNTOS
DALAP1(1)=-DF4DY1(L)*ALAP1(4)
DALAP1(2)=-ALAP1(1)-DIFER1(L)*ALAP1(10)
DALAP1(3)=-ALAP1(2)-DF4DY3(L)*ALAP1(4)
DALAP1(4)=-ALAP1(3)-DF4DY4(L)*ALAP1(4)
DALAP1(5)=-DF4DY5(L)*ALAP1(4)-DIFER2(L)*ALAP1(10)
DALAP1(6)=-DF4DY6(L)*ALAP1(4)-DIFER3(L)*ALAP1(10)
DALAP1(7)=-DF4DY7(L)*ALAP1(4)-ALAP1(5)
DALAP1(8)=-DF4DY8(L)*ALAP1(4)-ALAP1(6)
DALAP1(9)=-DF4DY9(L)*ALAP1(4)-DIFER4(L)*ALAP1(10)
DALAP1(10)=0.0D0
DALAP2(1)=-DF4DY1(L)*ALAP2(4)
DALAP2(2)=-ALAP2(1)-DIFER1(L)*ALAP2(10)
DALAP2(3)=-ALAP2(2)-DF4DY3(L)*ALAP2(4)
DALAP2(4)=-ALAP2(3)-DF4DY4(L)*ALAP2(4)
DALAP2(5)=-DF4DY5(L)*ALAP2(4)-DIFER2(L)*ALAP2(10)
DALAP2(6)=-DF4DY6(L)*ALAP2(4)-DIFER3(L)*ALAP2(10)
DALAP2(7)=-DF4DY7(L)*ALAP2(4)-ALAP2(5)
DALAP2(8)=-DF4DY8(L)*ALAP2(4)-ALAP2(6)
DALAP2(9)=-DF4DY9(L)*ALAP2(4)-DIFER4(L)*ALAP2(10)
DALAP2(10)=0.0D0
DALAP3(1)=-DF4DY1(L)*ALAP3(4)
DALAP3(2)=-ALAP3(1)-DIFER1(L)*ALAP3(10)
DALAP3(3)=-ALAP3(2)-DF4DY3(L)*ALAP3(4)
DALAP3(4)=-ALAP3(3)-DF4DY4(L)*ALAP3(4)
DALAP3(5)=-DF4DY5(L)*ALAP3(4)-DIFER2(L)*ALAP3(10)
DALAP3(6)=-DF4DY6(L)*ALAP3(4)-DIFER3(L)*ALAP3(10)
DALAP3(7)=-DF4DY7(L)*ALAP3(4)-ALAP3(5)
DALAP3(8)=-DF4DY8(L)*ALAP3(4)-ALAP3(6)
DALAP3(9)=-DF4DY9(L)*ALAP3(4)-DIFER4(L)*ALAP3(10)
DALAP3(10)=0.0D0
DALAJ(1)=-DF4DY1(L)*ALAJ(4)
DALAJ(2)=-ALAJ(1)-DIFER1(L)*ALAJ(10)
DALAJ(3)=-ALAJ(2)-DF4DY3(L)*ALAJ(4)
DALAJ(4)=-ALAJ(3)-DF4DY4(L)*ALAJ(4)
DALAJ(5)=-DF4DY5(L)*ALAJ(4)-DIFER2(L)*ALAJ(10)-DLDY5(L)
DALAJ(6)=-DF4DY6(L)*ALAJ(4)-DIFER3(L)*ALAJ(10)
DALAJ(7)=-DF4DY7(L)*ALAJ(4)-ALAJ(5)
DALAJ(8)=-DF4DY8(L)*ALAJ(4)-ALAJ(6)
DALAJ(9)=-DF4DY9(L)*ALAJ(4)-DIFER4(L)*ALAJ(10)-DLDY9(L)
DALAJ(10)=0.0D0
RETURN
END

```

```
=====
```

```

SUBROUTINE VAMATI(L)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION VAUX(18),ZAUX(10)
COMMON/MATRIZ/R11,R22,B33,B44,B55,B66,W11,W22
COMMON/COFFIC/DLDY9(950),DF4DU1(950),DF4DU2(950),DF4DY1(950),DF4DY
*3(950),DF4DY4(950),DF4DY5(950),DF4DY6(950),DF4DY7(950),DF4DY8(950)
*,DF4DY9(950),DF10Y2(950),DF10Y5(950),DF10Y6(950),DF10Y9(950),FINI
3P(950),DLDY5(950)

```

COMMON/VARADJ/ALAP11(950),ALAP12(950),ALAP13(950),ALAP14(950),ALAP
 *15(950),ALAP16(950),ALAP17(950),ALAP18(950),ALAP19(950),ALAP10(950
 *),ALAP21(950),ALAP22(950),ALAP23(950),ALAP24(950),ALAP25(950),ALAP
 *26(950),ALAP27(950),ALAP28(950),ALAP29(950),ALAP20(950),ALAJ1(950)
 *,ALAJ2(950),ALAJ3(950),ALAJ4(950),ALAJ5(950),ALAJ6(950),ALAJ7(950)
 *,ALAJ8(950),ALAJ9(950),ALAJ10(950)

COMMON/VARAD1/ALAP31(950),ALAP32(950),ALAP33(950),ALAP34(950),ALAP
 135(950),ALAP36(950),ALAP37(950),ALAP38(950),ALAP39(950),ALAP30(950
 2)

COMMON/FUINTM/FPP11(950),FPP12(950),FPP13(950),FPP21(950),FPP22(95
 10),FPP23(950),FPP31(950),FPP32(950),FPP33(950),FPJ1(950),FPJ2(950)
 2,FPJ3(950),FJJ(950)

COMMON/FINAUX/FPPA11(950),FPPA12(950),FPPA13(950),FPPA21(950),FPPA
 122(950),FPPA23(950),FPPA31(950),FPPA32(950),FPPA33(950),FPJA1(950)
 2,FPJA2(950),FPJA3(950),FJJA(950)

C VAMATI CALCULA E ARMAZENA VALORES DAS FCOES DE IPSIPSI,IPSIJOTA E
 C IJOTAJOTA

DO 661 IZ=1,18
 VAUX(IZ)=0.000

661 CONTINUE

DO 662 IW=1,10
 ZAUX(IW)=0.000

662 CONTINUE

C VALORES DE IPSIPSI

VAUX(1)=ALAP17(L)+(DF4DU1(L)*ALAP14(L))

VAUX(2)=(VAUX(1)*VAUX(1))/W11

VAUX(3)=ALAP18(L)+(DF4DU2(L)*ALAP14(L))

VAUX(4)=(VAUX(3)*VAUX(3))/W22

FPPA11(L)=VAUX(2)+VAUX(4)

VAUX(5)=ALAP27(L)+(DF4DU1(L)*ALAP24(L))

VAUX(6)=(VAUX(5)*VAUX(5))/W11

VAUX(7)=ALAP28(L)+(DF4DU2(L)*ALAP24(L))

VAUX(8)=(VAUX(7)*VAUX(7))/W22

FPPA12(L)=VAUX(6)+VAUX(8)

FPPA21(L)=FPPA12(L)

VAUX(9)=ALAP37(L)+(DF4DU1(L)*ALAP34(L))

VAUX(10)=(VAUX(9)*VAUX(9))/W11

VAUX(11)=ALAP38(L)+(DF4DU2(L)*ALAP34(L))

VAUX(12)=(VAUX(11)*VAUX(11))/W22

FPPA13(L)=VAUX(10)+VAUX(12)

FPPA31(L)=FPPA13(L)

VAUX(13)=(VAUX(5)*VAUX(5))/W11

VAUX(14)=(VAUX(7)*VAUX(7))/W22

FPPA22(L)=VAUX(13)+VAUX(14)

VAUX(15)=(VAUX(5)*VAUX(9))/W11

VAUX(16)=(VAUX(7)*VAUX(11))/W22

FPPA23(L)=VAUX(15)+VAUX(16)

FPPA32(L)=FPPA23(L)

VAUX(17)=(VAUX(9)*VAUX(9))/W11

VAUX(18)=(VAUX(11)*VAUX(11))/W22

FPPA33(L)=VAUX(17)+VAUX(18)

C VALORES DE IPSIJOTA E IJOTAJOTA

ZAUX(1)=ALAJ7(L)+(DF4DU1(L)*ALAJ4(L))

ZAUX(2)=(ZAUX(1)*VAUX(1))/W11

ZAUX(3)=ALAJ8(L)+(DF4DU2(L)*ALAJ4(L))

ZAUX(4)=(ZAUX(3)*VAUX(3))/W22

FPJA1(L)=ZAUX(2)+ZAUX(4)

ZAUX(5)=(ZAUX(1)*VAUX(5))/W11

ZAUX(6)=(ZAUX(3)*VAUX(7))/W22

FPJA2(L)=ZAUX(5)+ZAUX(6)


```

Z AUX(7)=(Z AUX(1)*V AUX(9))/W11
Z AUX(8)=(Z AUX(3)*V AUX(11))/W22
FPJA3(L)=Z AUX(7)+Z AUX(8)
Z AUX(9)=(Z AUX(1)*Z AUX(1))/W11
Z AUX(10)=(Z AUX(3)*Z AUX(3))/W22
FJJA(L)=Z AUX(9)+Z AUX(10)
RETURN
END

```

```

=====

```

```

SUBROUTINE FOMATR(H,N1)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
COMMON/MATRIZ/B11,B22,B33,B44,B55,B66,W11,W22
COMMON/PSIPSI/DIPP(9),CIPP(9)
COMMON/PSIJOT/DIPJ(3),DIJJ,COD,DJDS2,DJDSPS
COMMON/FUJNTM/FPP11(950),FPP12(950),FPP13(950),FPP21(950),FPP22(950),
FPP23(950),FPP31(950),FPP32(950),FPP33(950),FPJ1(950),FPJ2(950),
FPJ3(950),FJJ(950)
COMMON/LAMFIN/ELP(18),ELJ(6)
DIMENSION DIDENT(9)
C FOMATR MONTA AS MATRIZES IPSIPSI, IPSIJOTA E IJOTAJOTA
NDIM=N1
CALL DQSF(H,FPP11,PP11,NDIM)
CALL DQSF(H,FPP12,PP12,NDIM)
CALL DQSF(H,FPP13,PP13,NDIM)
PP21=PP12
PP31=PP13
CALL DQSF(H,FPP22,PP22,NDIM)
CALL DQSF(H,FPP23,PP23,NDIM)
PP32=PP23
CALL DQSF(H,FPP33,PP33,NDIM)
CALL DQSF(H,FPJ1,PJ1,NDIM)
CALL DQSF(H,FPJ2,PJ2,NDIM)
CALL DQSF(H,FPJ3,PJ3,NDIM)
CALL DQSF(H,FJJ,FJ,NDIM)
BP11=((ELP(1)*ELP(1))/B11)+((ELP(2)*ELP(2))/B22)+((ELP(3)*ELP(3))/
1B33)+((ELP(4)*ELP(4))/B44)+((ELP(5)*ELP(5))/B55)+((ELP(6)*ELP(6))/
2B66)
BP12=((ELP(1)*ELP(7))/B11)+((ELP(2)*ELP(8))/B22)+((ELP(3)*ELP(9))/
1B33)+((ELP(4)*ELP(10))/B44)+((ELP(5)*ELP(11))/B55)+((ELP(6)*ELP(12)
2)/B66)
BP22=((ELP(7)*ELP(7))/B11)+((ELP(8)*ELP(8))/B22)+((ELP(9)*ELP(9))/
1B33)+((ELP(10)*ELP(10))/B44)+((ELP(11)*ELP(11))/B55)+((ELP(12)*ELP
2(12))/B66)
BP13=((ELP(1)*ELP(13))/B11)+((ELP(2)*ELP(14))/B22)+((ELP(3)*ELP(15)
1)/B33)+((ELP(4)*ELP(16))/B44)+((ELP(5)*ELP(17))/B55)+((ELP(6)*ELP
2(18))/B66)
BP23=((ELP(7)*ELP(13))/B11)+((ELP(8)*ELP(14))/B22)+((ELP(9)*ELP(15)
1)/B33)+((ELP(10)*ELP(16))/B44)+((ELP(11)*ELP(17))/B55)+((ELP(12)*
2ELP(18))/B66)
BP33=((ELP(13)*ELP(13))/B11)+((ELP(14)*ELP(14))/B22)+((ELP(15)*ELP
1(15))/B33)+((ELP(16)*ELP(16))/B44)+((ELP(17)*ELP(17))/B55)+((ELP(1
28)*ELP(18))/B66)
BPJ1=((ELP(1)*ELJ(1))/B11)+((ELP(2)*ELJ(2))/B22)+((ELP(3)*ELJ(3))/
1B33)+((ELP(4)*ELJ(4))/B44)+((ELP(5)*ELJ(5))/B55)+((ELP(6)*ELJ(6))/
2B66)

```

```

BPJ2=((ELP(7)*ELJ(1))/B11)+((ELP(8)*ELJ(2))/B22)+((ELP(9)*ELJ(3))/
1833)+((ELP(10)*ELJ(4))/B44)+((ELP(11)*ELJ(5))/B55)+((ELP(12)*ELJ(6
2))/B66)
BPJ3=((ELP(13)*ELJ(1))/B11)+((ELP(14)*ELJ(2))/B22)+((ELP(15)*ELJ(3
1))/B33)+((ELP(16)*ELJ(4))/B44)+((ELP(17)*ELJ(5))/B55)+((ELP(18)*EL
2J(6))/B66)
BJJ=((ELJ(1)*ELJ(1))/B11)+((ELJ(2)*ELJ(2))/B22)+((ELJ(3)*ELJ(3))/B
133)+((ELJ(4)*ELJ(4))/B44)+((ELJ(5)*ELJ(5))/B55)+((ELJ(6)*ELJ(6))/B
266)
DO 323 IV=1,9
DIPP(IV)=0.0D0
323 CONTINUE
DIPP(1)=BP11+PP11
DIPP(2)=BP12+PP12
DIPP(3)=BP13+PP13
DIPP(4)=DIPP(2)
DIPP(5)=BP22+PP22
DIPP(6)=BP23+PP23
DIPP(7)=DIPP(3)
DIPP(8)=DIPP(6)
DIPP(9)=BP33+PP33
DO 324 IV=1,9
CIPP(IV)=DIPP(IV)
324 CONTINUE
C INVERTER A MATRIZ IPSIPSI
IN=3
CALL INVERT(DIPP,IN,IER)
IF(IER.NE.0) GO TO 325
DIPJ(1)=BPJ1+PJ1
DIPJ(2)=BPJ2+PJ2
DIPJ(3)=BPJ3+PJ3
DIJJ=BJJ+FJ
C CALCULO DO COEFIC. IJJ=IPJ(TRANSP.)*IPP(INV)*IPJ
COD=(DIPJ(1)*(DIPP(1)*DIPJ(1)+DIPP(2)*DIPJ(2)+DIPP(3)*DIPJ(3)))+(D
1IPJ(2)*(DIPP(4)*DIPJ(1)+DIPP(5)*DIPJ(2)+DIPP(6)*DIPJ(3)))+(DIPJ(3)
2*(DIPP(7)*DIPJ(1)+DIPP(8)*DIPJ(2)+DIPP(9)*DIPJ(3)))
DJDS2=DABS(DIJJ-COD)
DJDSPA=DSQRT(DJDS2)
GO TO 330
325 WRITE(6,326)
326 FORMAT(1X,'NAO EXISTE INVERSA DE IPSIPSI'/)
STOP
330 RETURN
END

```

```
=====
```

```

SUBROUTINE INVERT(B,IN,IER)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION B(9),A(3,6)
JF=IN+IN
C INVERT FAZ A INVERSAO DE UMA MATRIZ NXN
J8=IN*IN
J9=J8+1
DO 1990 I=1,J8
II=J9-I
1990 A(II,1)=B(II)
DO 1991 I=1,IN

```

```

      JZ=IN+1
      DO 1992 J=JZ,JF
      IF(I.EQ.J-IN) GO TO 1993
      A(I,J)=0.000
      GO TO 1992
1993 A(I,J)=1.000
1992 CONTINUE
1991 CONTINUE
      DO 1994 K=1,IN
      P=A(K,K)
      IF(P.NE.0.)GO TO 1995
      IER=1
      WRITE(6,2001)IER
2001 FORMAT(1X,'IER=',I5,/)
      RETURN
1995 DO 1997 J=1,JF
1997 A(K,J)=A(K,J)/P
      DO 1998 I=1,IN
      IF(I.EQ.K)GO TO 1998
      RR=A(I,K)
      DO 1999 J=1,JF
      A(I,J)=A(I,J)-RR*A(K,J)
1999 CONTINUE
1998 CONTINUE
1994 CONTINUE
      DO 2000 I=1,IN
      DO 2000 J=1,IN
      JJ=J+IN
2000 A(I,J)=A(I,JJ)
      DO 2002 I=1,J8
2002 B(I)=A(I,1)
      IER=0
      RETURN
      END

```

```

=====

SUBROUTINE DBETA(N)
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
  COMMON/LAMFIN/ELP(18),ELJ(6)
  COMMON/PSIPSI/DIPP(9),CIPP(9)
  COMMON/PSIJOT/DIPJ(3),DIJJ,COD,DJDS2,DJDSPS
  COMMON/CONDIN/YIN(10),BETA(10)
  COMMON/MATRIZ/B11,B22,B33,B44,B55,B66,W11,W22
  COMMON/PROPR1/DPSC(3),DPSI1,DPSI2,DPSI3,RINC,COEM
  DIMENSION BETA1(18),BETA2(18),RE(18),REAU(18),BET(18)
C  DBETA CALCULA AS CORRECOES NAS CONDIC0ES INICIAIS NAO ESPECIFICADAS
  DO 51 IX=1,N
  BETA(IX)=0.000
  51 CONTINUE
      J1=6
      J2=3
      J3=1
      CALL DMPRD(ELP,DIPP,RE,J1,J2,J2)
      JY=J1*J2
      DO 52 I=1,JY
      REAU(I)=RE(I)
  52 CONTINUE

```

```

COEM=DSQRT(RINC/DJDS2)
CALL DMPRD(RE,DIPJ,BET,J1,J2,J3)
DO 54 I=1,J1
BETA1(I)=COEM*(BET(I)-ELJ(I))
54 CONTINUE
CALL DMPRD(REAUX,DPSC,BETA2,J1,J2,J3)
BETA(1)=0.000
BETA(2)=0.000
BETA(3)=0.000
BETA(4)=(BETA1(1)+BETA2(1))/B11
BETA(5)=(BETA1(2)+BETA2(2))/B22
BETA(6)=(BETA1(3)+BETA2(3))/B33
BETA(7)=(BETA1(4)+BETA2(4))/B44
BETA(8)=(BETA1(5)+BETA2(5))/B55
BETA(9)=(BETA1(6)+BETA2(6))/B66
BETA(10)=0.000
RETURN
END

```

```

=====
SUBROUTINE DMPRD(A,B,R,JN,JM,JL)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION A(36),B(36),R(36)
IR=0
IK=-JM
DO 1000 K=1,JL
IK=IK+JM
DO 1000 J=1,JN
IR=IR+1
JI=J-JN
IB=IK
R(IR)=0.000
DO 1000 I=1,JM
JI=JI+JN
IB=IB+1
1000 R(IR)=R(IR)+A(JI)*B(IB)
RETURN
END

```

```

=====
SUBROUTINE DELTU(H,ITER,KVINC,M)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
COMMON/MATRIZ/B11,B22,B33,B44,B55,B66,W11,W22
COMMON/CONTRL/U1(950),U2(950),DELU1(950),DELU2(950)
COMMON/CONDIN/YIN(10),BETA(10)
COMMON/PRECI/DS2,PDPSI1,PDPSI2,PDPSI3,PREC1,PREC2,PREC3,PREC4
COMMON/COFFIC/DLDY9(950),DF4DU1(950),DF4DU2(950),DF4DY1(950),DF4DY
*3(950),DF4DY4(950),DF4DY5(950),DF4DY6(950),DF4DY7(950),DF4DY8(950)
*,DF4DY9(950),DF10Y2(950),DF10Y5(950),DF10Y6(950),DF10Y9(950),FINTI
3P(950),DLDY5(950)
COMMON/VARADJ/ALAP11(950),ALAP12(950),ALAP13(950),ALAP14(950),ALAP
*15(950),ALAP16(950),ALAP17(950),ALAP18(950),ALAP19(950),ALAP10(950
*),ALAP21(950),ALAP22(950),ALAP23(950),ALAP24(950),ALAP25(950),ALAP
*26(950),ALAP27(950),ALAP28(950),ALAP29(950),ALAP20(950),ALAJ1(950)

```

```

*,ALAJ2(950),ALAJ3(950),ALAJ4(950),ALAJ5(950),ALAJ6(950),ALAJ7(950)
*,ALAJ8(950),ALAJ9(950),ALAJ10(950)
COMMON/VARAD1/ALAP31(950),ALAP32(950),ALAP33(950),ALAP34(950),ALAP
135(950),ALAP36(950),ALAP37(950),ALAP38(950),ALAP39(950),ALAP30(950
2)
COMMON/PSIPSI/DIPP(9),CIPP(9)
COMMON/PSIJOT/DIPJ(3),DIJJ,COD,DJDS2,DJDSPS
COMMON/PROPR1/DPSC(3),DPSI1,DPSI2,DPSI3,RINC,COEM
COMMON/AUXDS/DUI1,DUI2,FBET
DIMENSION FATOR(950),FATOS(950),FATOT(950),FATOU(950),FBTOS(950),F
1BTOU(950),U1INT(950),U2INT(950)
C DELTU CALCULA CORRECOES NAS FUNCOES DE CONTROLE
DO 33 IS=1,M
  DELU1(IS)=0.0D0
  DELU2(IS)=0.0D0
33 CONTINUE
  FAP1=DIPJ(1)*DIPP(1)+DIPJ(2)*DIPP(4)+DIPJ(3)*DIPP(7)
  FAP2=DIPJ(1)*DIPP(2)+DIPJ(2)*DIPP(5)+DIPJ(3)*DIPP(8)
  FAP3=DIPJ(1)*DIPP(3)+DIPJ(2)*DIPP(6)+DIPJ(3)*DIPP(9)
  FAT1=DPSC(1)*DIPP(1)+DPSC(2)*DIPP(4)+DPSC(3)*DIPP(7)
  FAT2=DPSC(1)*DIPP(2)+DPSC(2)*DIPP(5)+DPSC(3)*DIPP(8)
  FAT3=DPSC(1)*DIPP(3)+DPSC(2)*DIPP(6)+DPSC(3)*DIPP(9)
DO 479 KA=1,M
  FATOR(KA)=ALAJ4(KA)-ALAP14(KA)*FAP1-ALAP24(KA)*FAP2-ALAP34(KA)*FAP
13
  FATOS(KA)=ALAJ7(KA)-ALAP17(KA)*FAP1-ALAP27(KA)*FAP2-ALAP37(KA)*FAP
13
  FATOT(KA)=ALAP14(KA)*FAT1+ALAP24(KA)*FAT2+ALAP34(KA)*FAT3
  FATOU(KA)=ALAP17(KA)*FAT1+ALAP27(KA)*FAT2+ALAP37(KA)*FAT3
  FBTOS(KA)=ALAJ8(KA)-ALAP18(KA)*FAP1-ALAP28(KA)*FAP2-ALAP38(KA)*FAP
13
  FBTOU(KA)=ALAP18(KA)*FAT1+ALAP28(KA)*FAT2+ALAP38(KA)*FAT3
  DELU1(KA)=- (COEM/W11)*(DF4DU1(KA)*FATOR(KA)+FATOS(KA))+(1.0D0/W11)*
1(DF4DU1(KA)*FATOT(KA)+FATOU(KA))
  DELU2(KA)=- (COEM/W22)*(DF4DU2(KA)*FATOR(KA)+FBTOS(KA))+(1.0D0/W22)*
1(DF4DU2(KA)*FATOT(KA)+FBTOU(KA))
479 CONTINUE
C CALCULO DAS NOVAS FUNCOES DE CONTROLE
DO 480 KB=1,M
  U1(KB)=U1(KB)+DELU1(KB)
  U2(KB)=U2(KB)+DELU2(KB)
480 CONTINUE
C CALCULO DAS PARCELAS QUE COMPOE O PASSO DS2
DO 482 KD=1,M
  U1INT(KD)=DELU1(KD)*DELU1(KD)*W11
  U2INT(KD)=DELU2(KD)*DELU2(KD)*W22
482 CONTINUE
  N1=M-1
  CALL DQSF(H,U1INT,DUI1,N1)
  CALL DQSF(H,U2INT,DUI2,N1)
  FBET=BETA(4)*BETA(4)*B11+BETA(5)*BETA(5)*B22+BETA(6)*BETA(6)*B33+B
1ETA(7)*BETA(7)*B44+BETA(8)*BETA(8)*B55+BETA(9)*BETA(9)*B66
  IF(ITER.EQ.1.AND.KVINC.EQ.1) GO TO 481
  GO TO 490
481 CONTINUE
C SE FOR O CASO, MODIFICAR O TAMANHO DO PASSO
DS2=1.0D0*(DUI1+DUI2+FBET)
GO TO 490
490 RETURN
END

```

```

=====
SUBROUTINE SAI(N1,N,ITER)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
COMMON/CONTS/RO,ELAST,CCOMP,DCOMP,W0,Y3COMP,Y4COMP,DEFLMX
COMMON/VARIES/Y1(950),Y2(950),Y3(950),Y4(950),Y5(950),Y6(950),Y7(9
150),Y8(950),Y9(950),Y10(950)
COMMON/CONTRL/U1(950),U2(950),DELU1(950),DELU2(950)
COMMON/PROPR1/DPSI(3),DPSI1,DPSI2,DPSI3,RINC,COEM
COMMON/CONDIN/YIN(10),BETA(10)
COMMON/INDPER/PIP1,PIP2,RIP
COMMON/VARADJ/ALAP11(950),ALAP12(950),ALAP13(950),ALAP14(950),ALAP
*15(950),ALAP16(950),ALAP17(950),ALAP18(950),ALAP19(950),ALAP10(950
*),ALAP21(950),ALAP22(950),ALAP23(950),ALAP24(950),ALAP25(950),ALAP
*26(950),ALAP27(950),ALAP28(950),ALAP29(950),ALAP20(950),ALAJ1(950)
*,ALAJ2(950),ALAJ3(950),ALAJ4(950),ALAJ5(950),ALAJ6(950),ALAJ7(950)
*,ALAJ8(950),ALAJ9(950),ALAJ10(950)
COMMON/VARAD1/ALAP31(950),ALAP32(950),ALAP33(950),ALAP34(950),ALAP
135(950),ALAP36(950),ALAP37(950),ALAP38(950),ALAP39(950),ALAP30(950
2)
COMMON/PRECI/DS2,PDPSI1,PDPSI2,PDPSI3,PREC1,PREC2,PREC3,PREC4
COMMON/PSIPSI/DIPP(9),CIPP(9)
COMMON/PSIJOT/DIPJ(3),DIJJ,COD,DJDS2,DJDSPS
COMMON/AUXDS/DUI1,DUI2,FBET
COMMON/AUXIL/Y56(350)
C SAI IMPRIME OS VALORES IMPORTANTES DE CADA ITERACAO
H=0.004D0
M=N1+1
WRITE(6,711)
711 FORMAT(3X,'X',11X,'Y1',11X,'Y2',11X,'Y3',11X,'Y4',11X,'Y5',11X,'Y6
1',12X,'I',11X,'Y9',11X,'Y10',//)
DO 4439 LX=1,M
4439 Y56(LX)=0.0D0
DO 4441 LZ=1,M
4441 Y56(LZ)=Y5(LZ)*Y6(LZ)
IY=(N1/15)+1
DO 710 JR=1,IY
AH=FLOAT(JR-1)
AX=15.0D0*H*AH
JK=(15*(JR-1))+1
WRITE(6,712)AX,Y1(JK),Y2(JK),Y3(JK),Y4(JK),Y5(JK),Y6(JK),Y56(JK),Y
19(JK),Y10(JK)
712 FORMAT(1X,10(G10.4,3X),//)
710 CONTINUE
C CALCULO E IMPRESSAO DO PESO DA VIGA OBTIDO A CADA ITERACAO
CALL DQSF(H,Y5,SMAS,N1)
BPESO=RO*SMAS
WRITE(6,7504)BPESO
7504 FORMAT(//,10X,'PESO DA VIGA : P=',G14.7,//)
WRITE(6,499)DS2,PDPSI1,PDPSI2,PDPSI3
499 FORMAT(//,10X,'TAMANHO DO PASSO : DS2=',G14.7,//,10X,'CORRECOES NO
18 VINCULOS TERMINAIS',/,4X,'PDPSI1=',G14.7,4X,'PDPSI2=',G14.7,4X,'
2PDPSI3=',G14.7,//)
WRITE(6,772)DPSI1,DPSI2,DPSI3,(DPSC(I),I=1,3),RIP,PIP2,PIP1
WRITE(6,717)
C FUNCOES DE CONTROLE PARA A ITERACAO SEGUINTE

```

```

717 FORMAT(20X,'NOVAS FUNCOES DE CONTROLE',/,8X,'PONTO',12X,'U1',13X,'
1U2',/)
      IZ=N1/50
      DO 720 JS=1,IZ
      JB=(50*JS)+1
720 WRITE(6,721)JB,U1(JB),U2(JB)
      WRITE(6,332)
332 FORMAT(10X,' DIPP INVERSA '/')
      DO 333 KI=1,3
      WRITE(6,340)(DIPP(I),I=KI,9,3)
340 FORMAT(1X,3(3X,G16.8))
333 CONTINUE
      WRITE(6,7503)
7503 FORMAT(/,10X,'MATRIZ IPSIJ',/)
      WRITE(6,350)(DIPJ(KI),KI=1,3)
350 FORMAT(1X,3(3X,G16.8))
      WRITE(6,351)DIJJ
351 FORMAT(/,10X,'ESCALAR IJJ',/,1X,'DIJJ=',G14.7,/)
      WRITE(6,352)DJDSPS
352 FORMAT(5X,' IJJ=IJP(TR)*IPP(INV)*IPJ= DJDSPS=',G16.8,/)
      WRITE(6,501)DUI1,DUI2,FBET
501 FORMAT(5X,' DUI1=',G16.8,3X,' DUI2=',G16.8,3X,' FBET=',G16.8)
721 FORMAT(9X,I3,3X,G14.7,3X,G14.7,/)
772 FORMAT(/,17X,'DPSI1=',G14.7,10X,'DPSI2=',G14.7,10X,'DPSI3=',G14.
17,/,4X,'VALORES CORRIGIDOS:',G14.7,16X,G14.7,16X,G14.7,/,4X,'INDIC
2E DE PERFORMANCE=',G14.7,/,4X,'PSYDEZ*YFIN10**2=',G14.7,/,4X,'INTE
3GRANDO DE IP=',G14.7,/)
      RETURN
      END

```

```

=====
NO ERRORS DETECTED. NUMBER OF CARDS = 1845.
COMPILATION TIME = 60 SECONDS ELAPSED. 24.74 SECONDS PROCESSING.
D2 STACK SIZE = 159 WORDS. FILESIZE = 140 WORDS. ESTIMATED CORE STORA
TOTAL PROGRAM CODE = 4990 WORDS. ARRAY STORAGE = 66314 WORDS.
NUMBER OF PROGRAM SEGMENTS = 28. NUMBER OF DISK SEGMENTS = 320.
PROGRAM CODE FILE = (137PMC)DEM161, COMPILER COMPILED ON 03/08/77

```

BIBLIOGRAFIA

- A1 - Alves de Lima, S.: "Um Método de Direções Viáveis para Otimização com Aplicação a Pórticos e Grelhas"; Tese de Doutorado, Divisão de Engenharia Aeronáutica, ITA, 1974.
- B1 - Brach, R.M.: "On the Extremal Fundamental Frequencies of Vibrating Beams"; Int. Journal of Solids and Structures, Vol.4, pp.667-674, 1968.
- B2 - Bryson, A.E.; Denham, W.F.: "A Steepest-Ascent Method for Solving Optimum Programming Problems"; Journal of Applied Mechanics, ASME, pp. 247-257, Junho, 1962.
- B3 - Bryson, A.E.; Ho, Yu-Chi: "Applied Optimal Control"; Blaisdell Publishing, USA, 1969.
- B4 - Bryson, A.E.; Denham, W.F.; Dreyfus, S.E.: "Optimal Programming Problems with Inequality Constraints I: Necessary Conditions for Extremal Solutions"; AIAA Journal, vol. 1, Nº 11, pp. 2544-2550, Novembro, 1963.
- C1 - Citron, S.J.: "Elements of Optimal Control"; Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, USA, 1969.
- D1 - Denham, W.F.; Bryson, A.E.: "Optimal Programming Problems with Inequality Constraints II: Solution by Steepest-Ascent"; AIAA Journal, vol.2, Nº 1, pp.25-34, Janeiro, 1964.
- F1 - Fleury, A.T.: "Projeto de uma Mesa de Testes", Tese de Graduação, Divisão de Engenharia Mecânica, ITA, 1973.

- F2 - Fox, R.L.; Kapoor, M.P.: "Structural Optimization in the Dynamics Response Regime: A Computational Approach"; AIAA Journal, Vol. 8, Nº 10, pp. 1798-1804, Outubro, 1970.
- G1 - Gallagher, R.H.; Zienkiewicz, O.C.: "Optimum Structural Design: Theory and Applications"; Jonh Wiley and Sons, Londres, 1973.
- H1 - Haug, Jr., E.J.; Pan, K.C.; Streeter, T.D.: "A Computational Method for Optimal Structural Design I: Piecewise Uniform Structures"; Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 5, pp. 171-184, 1972.
- H2 - Hagedorn, P.B.: "Minimum Mass Structures with Given Natural Frequencies"; Anais do 3º COBEM; Paper nº TD-7, Vol. D, pp. 1123-1128, 1975.
- H3 - Haug, Jr., E.J.: "Two Methods of Optimal Structural Design"; Developments in Mechanics, Vol. 5, Iowa State University, pp. 847-860, 1969.
- H4 - Haug, Jr., E.J.; Pan, K.C.; Streeter, T.D.: "A Computational Method for Optimal Structural Design II: Continous Problems"; Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 9, pp. 649-667, 1975.
- J1 - Jaswinski, A.H.: "Optimal Trajectories and Linear Control of Nonlinear Systems"; AIAA Journal, Vol. 2, nº 8, pp. 1371-1379, Agosto, 1964.
- K1 - Kamat, M.P.; Simitzes, G.J.: "Optimal Beam Frequencies by the Finite Element Displacement Method"; Int. Journal of Solids and Structures, Vol. 9, pp. 415-429, 1973.

- K2 - Karihaloo, B.L.; Niordson, F.I.: "Optimum Design of Vibrating Cantilevers"; Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.11, n° 6, pp. 638-654, 1973.
- K3 - Kamat, M.P.: "Effect of Shear Deformations and Rotary Inertia on Optimum Beam Frequencies"; Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.9, n° 1, pp.51 - 62, 1975.
- L1 - Lasdon, L.S.; Mitter, S.; Warren, A.: "The Method of Conjugate Gradient for Optimal Control Systems"; IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-12, n° 2, pp. 132-138, April, 1967.
- M1 - McCart, B.R. ; Haug, Jr., E.J.; Streeter, T.D.: "Optimal Design of Structures with Constraint on Natural Frequency"; AIAA Journal, Vol.8, n° 6, pp.1012-1018, Junho, 1970.
- M2 - Meirovich, L.: "Analytical Methods in Vibrations"; The Macmillan Co., New York, 1967.
- N1 - Niordson, F.I.: "On the Optimal Design of a Vibrating Beam"; Quarterly of Applied Mathematics, Vol.23, n° 1, pp.47-53, 1965.
- O1 - Olhoff, N.: "Optimal Design of Vibrating Circular Plates", Int. Journal of Solids and Structures, Vol.6, pp. 139-156, 1970.
- O2 - Olhoff, N.: "Optimal Design of Vibrating Rectangular Plates"; Int. Journal of Solids and Structures, Vol.10, pp.93-109, 1974.

- P1 - Pierson, B.L.: "A Survey of Optimal Structural Design under Dynamic Constraints"; Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.4, pp.491-499, 1972.
- R1 - Rubin, C.P.: "Minimum Weight Design of Complex Structures Subject to a Frequency Constraint"; AIAA Journal, Vol.8, n° 5, pp.923-927, 1970.
- R2 - Robinson, A.C.: "A Survey of Optimal Control of Distributed-Parameter Systems"; Automatica, Vol.7, pp.371-388, 1971.
- S1 - Sheu, C.Y.; Prager, W.: "Recent Developments in Optimal Structural Design"; Applied Mechanics Review, Vol.21, n° 10, pp.985-992, 1968.
- S2 - Sage, A.P.: "Optimum Systems Control"; Prentice-Hall Co., USA, 1968.
- T1 - Turner, M.J.: "Design of Minimum Mass Structures with Specified Natural Frequencies"; AIAA Journal, Vol.5, n° 2, pp.406-412, 1967.
- T2 - Taylor, J.E.: "Minimum Mass Bar for Axial Vibration at Specified Natural Frequency"; AIAA Journal, Vol.5, n° 10, pp.1911-1913, 1967.
- T3 - Taylor, J.E.: "Optimum Design of a Vibrating Bar with Specified Minimum Cross Section"; AIAA Journal, Vol.6, n° 7, pp.1379-1381, 1968.
- V1 - Vierck, R.K.: "Vibration Analysis", International Textbook Co., USA, 1967.

- W1 - Wasiutynski,A.; Brandt,A.: "The Present State of Knowledge in the Field of Optimum Design of Structures", Applied Mechanics Review, Vol.16, n° 5, pp.341-350, 1963.
- Y1 - Yasaka,T.: "A Method of Minimum Weight Design with Requirements Imposed on Stresses and Natural Frequencies", Institute of Space and Aeronautical Science, University of Tokyo, Report n° 452, pp.259-316, Julho, 1970.
- Z1 - Zarghamee,M.S.: "Optimum Frequency of Structures", AIAA Journal, Vol.6, n° 4, pp. 749-750, 1968.