

Paulo Henrique Martins

Projeto robusto de dispositivos piezelétricos para
coleta de energia com parâmetros incertos usando
otimização multiobjetivo

São Carlos

2022

Paulo Henrique Martins

**Projeto robusto de dispositivos piezelétricos para coleta de
energia com parâmetros incertos usando otimização
multiobjetivo**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica

Área de concentração: Dinâmica das Máquinas e Sistemas.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Areias Trindade

Coorientador: Prof. Dr. Paulo Sérgio Varoto

São Carlos
2022

**ESTE EXEMPLAR TRATA-SE
DA VERSÃO CORRIGIDA. A
VERSÃO ORIGINAL
ENCONTRA-SE DISPONÍVEL
JUNTO AO
DEPARTAMENTO DE
ENGENHARIA MECÂNICA
DA EESC-USP.**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

M379p Martins, Paulo Henrique
Projeto robusto de dispositivos piezelétricos para
coleta de energia com parâmetros incertos usando
otimização multiobjetivo / Paulo Henrique Martins;
orientador Marcelo Areias Trindade; coorientador Paulo
Sérgio Varoto. São Carlos, 2022.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica e Área de Concentração em Dinâmica
e Mecatrônica -- Escola de Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo, 2022.

1. Coleta de energia. 2. Materiais piezelétricos.
3. Quantificação de incertezas,. 4. Otimização robusta.
5. Análise de vibrações. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **PAULO HENRIQUE MARTINS**.

Título da tese: "Projeto robusto de dispositivos piezelétricos para coleta de energia com parâmetros incertos usando otimização multiobjetivo".

Data da defesa: 27/10/2022.

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Titular **Marcelo Areias Trindade**

APROVADO

(Orientador)

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Associada **Maíra Martins da Silva**

APROVADO

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Associado **André Teófilo Beck**

APROVADO

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Dr. **Vitor Ramos Franco**

Aprova do

(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

Prof. Dr. **Americo Barbosa da Cunha Junior**

APROVADO

(Universidade do Estado do Rio de Janeiro/UERJ)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica:

Prof. Associado **Adriano Almeida Gonçalves Siqueira**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

*Dedico este trabalho a minha mãe,
por acreditar em meu potencial.*

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus pela sua infinita graça, por propiciar saúde, força para continuar nos momentos difíceis e por toda provisão necessária para término dessa fase.

Ao orientador Marcelo Trindade, que propiciou essa oportunidade de realizar o doutorado, pelos ensinamentos teóricos, disposição em orientar e dar sugestões, acompanhamentos em reuniões para discutir e direcionar a evolução do trabalho, por incentivar e dar suporte na participação de congressos e publicações de artigos.

Ao coorientador Paulo Varoto, que ajudou com a parte experimental, estando disposto e fornecendo todo o necessário para a conclusão desse trabalho, bem como nos auxílios para a publicação dos artigos. Também agradeço por ter me orientado no estágio PAE com todos os ensinamentos.

Agradeço a minha mãe pela educação, carinho, exemplo, incentivo e ânimo nos momentos difíceis, sempre acreditando em meu potencial.

Ao meu irmão Ademir, por emprestar seu computador durante um bom tempo, ajudando-me a realizar as reuniões *online*.

A minha família, que esteve ao meu lado dando suporte e palavras de encorajamento para sempre prosseguir.

Aos amigos do laboratório de dinâmica, com os quais pude passar momentos de alegria, tirar dúvidas e aprender muitas coisas.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior –Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001

Resumo

MARTINS, P.H. **Projeto robusto de dispositivos piezelétricos para coleta de energia com parâmetros incertos usando otimização multiobjetivo**. 140 p. Tese de Doutorado - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

Em face do aumento da demanda energética dos últimos anos, a energia de diferentes fontes tem sido obtida e estudada, tal como aquela proveniente de fontes eólicas, térmicas, atômicas, químicas e mecânicas. Nesse contexto, o termo *energy harvesting* (colheita de energia) é empregado para se referir a energia captada de diversas fontes e convertida em eletricidade. Em virtude disso, materiais piezelétricos são utilizados com a finalidade de converter a energia de deformação devido à vibração de sistemas mecânicos em eletricidade. Para mensurar o potencial de energia coletável, uma resistência elétrica é geralmente conectada a pastilha piezelétrica. Entretanto, nesse processo, a energia disponível para conversão geralmente é baixa, o que torna necessário o estudo de metodologias de projeto que permitam maximizar a energia coletável. Esse fato deve receber maior atenção quando incertezas são consideradas no projeto, visto que a variabilidade na resposta aumenta. Desse modo, é importante escolher métodos de otimizações para projetar dispositivos que forneçam a máxima energia possível, porém que também considerem a possibilidade de minimizar o efeito das incertezas na resposta. Neste trabalho, o propósito é projetar dispositivos tipo viga cantiléver usando pastilhas piezelétricas para converter a energia mecânica proveniente de vibração em eletricidade, sabendo da existência de incertezas em alguns parâmetros incluindo o engaste. Utilizando métodos de otimização multiobjetivo, maximiza-se a potência média gerada e minimiza-se a dispersão da resposta simultaneamente. Para isso, é fundamental escolher técnicas que estimem a média e a variância da FRF de potência, com satisfatório custo computacional e precisão das respostas. Como busca-se maximização de potência, as frequências de excitação e pico de vibração dos dispositivos acabam se igualando, por isso é importante manter a sintonização. Algumas variáveis incertas de destaque abordadas são as molas que simulam o engaste do dispositivo, a camada adesiva do material piezelétrico e o fator de amortecimento, frente a diversas variáveis de projeto. Resultados mostram que dispositivos com menor comprimento de viga tendem a produzir uma maior potência média, porém com maior variabilidade na resposta frente a dispositivos de maiores comprimentos. Além disso, resistências elétricas de menores valores tendem a aumentar a robustez dos dispositivos, embora haja um decréscimo da energia, produzida pela vibração.

Palavras chave: coleta de energia, materiais piezelétricos, quantificação de incertezas, otimização robusta, análise de vibrações.

Abstract

MARTINS, P.H. **Robust design of piezoelectric devices for energy harvesting with uncertain parameters using multi-objective optimization.** 140 p. Doctoral Thesis - São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2022.

In the face of the increase in energy demand recently, energy from different sources has been obtained and studied, such as that of wind, thermal, atomic, chemical, and mechanical sources. In this context, the term energy harvesting is employed to refer to the energy captured from different sources and converted into electricity. As a consequence, piezoelectric materials are used in order to convert the deformation energy due to the vibration of mechanical systems into electricity. To measure the potential of energy harvested, an electrical resistance is usually connected to a piezoelectric patch. However, in this process, the evaluated energy for conversion is generally low, which makes it necessary to study design methodologies that allow maximizing the energy harvested. This fact should receive more attention when uncertainties are considered in the design since the variability in the response increases. Thus, it is important to choose optimization methods to design devices that provide the maximum possible energy, but also consider the possibility of minimizing the uncertainties in the response. In this work, the purpose is to design cantilever beam devices using piezoelectric patch to convert mechanical energy from vibration into electricity, knowing the existence of uncertainties in some parameters including the clamping. Using multiobjective optimization methods, the mean power is maximized and the response dispersion is minimized simultaneously. For this, it is essential to choose techniques that estimate the mean and variance of the FRF of power output with satisfactory computational cost and precision of the response. As power maximization is intended, the excitation and peak vibration frequencies of the devices end up being equal, thus it is important to preserve the tuning. Some notable uncertain variables addressed are the springs that simulate the clamping device, the adhesively bonded of the piezoelectric material and the damping factor, considering the diverse design variables. Results show that devices with shorter beam lengths tend to produce a higher mean power, but with greater variability in the response, compared to devices of longer lengths. In addition, electrical resistances of lower values tend to increase the robustness of the devices, although there is a decrease in the energy generated by vibration.

Keywords: energy harvesting, piezoelectric materials, uncertainty quantification, robust optimization, vibration analysis.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Viga engastada com sensor piezelétrico para coleta de energia.	2
Figura 2 – Processo de polarização do material piezelétrico.	5
Figura 3 – Divisão do domínio de duas variáveis aleatórias em faixas equiprováveis	21
Figura 4 – Espaço de decisão e espaço custo em duas dimensões	34
Figura 5 – Figuras geométricas descritas pelas funções J_1 e J_2 de acordo com a escolha de p	36
Figura 6 – Frentes ou <i>ranks</i> para um caso qualquer com duas funções objetivos J_1 e J_2	38
Figura 7 – Cuboide em linhas tracejadas ao redor do indivíduo i	39
Figura 8 – Figuras geométricas descritas pelas funções J_1 e J_2 de acordo com a escolha de p	40
Figura 9 – Dispositivo utilizado para estudo de coleta de energia	44
Figura 10 – Porção do dispositivo com massa sísmica sobre o substrato	45
Figura 11 – Modelo de viga de 74,7 mm em elementos finitos	50
Figura 12 – Foto da vista ampliada do dispositivo usado no teste	51
Figura 13 – Foto da visualização global da aparelhagem usada no teste com o dis- positivo.	51
Figura 14 – Diagrama da configuração experimental usada no teste	52
Figura 15 – FRFs de aceleração para $R_c = 100 \Omega$, $R_c = 1 \text{ k}\Omega$ e $R_c = 10 \text{ k}\Omega$	54
Figura 16 – FRFs de aceleração para $R_c = 100 \text{ k}\Omega$, $R_c = 500 \text{ k}\Omega$ e $R_c = 1 \text{ M}\Omega$	54
Figura 17 – FRFs de tensão para $R_c = 100 \Omega$, $R_c = 1 \text{ k}\Omega$ e $R_c = 10 \text{ k}\Omega$	55
Figura 18 – FRFs de tensão para $R_c = 100 \text{ k}\Omega$, $R_c = 500 \text{ k}\Omega$ e $R_c = 1 \text{ M}\Omega$	55
Figura 19 – Amplitude da FRF de acele- ração na massa sísmica em função de k_w para diferentes valores de R_c	56
Figura 20 – Amplitude da FRF de acele- ração na massa sísmica em função de k_θ para diferentes valores de R_c	56
Figura 21 – FRF nominal de saída potência por entrada de aceleração quadrada para dispositivos da Tab. 3.	74
Figura 22 – Frente de Pareto e barras de erro, com um intervalo de confiança de 6σ , para dispositivos da Tab. 3 e encontrados aplicando o método FTS/CP.	74
Figura 23 – Convergência para média e dispersão utilizando diferentes graus de PCE em relação aos valores encontrados com MCS e 10^4 amostras para $\delta_{k_w} = 50/3\%$, $\delta_{k_\theta} = 50/3\%$, $\delta_\zeta = 10/3\%$ e $\delta_{R_c} = 10\%$	76
Figura 24 – Frente de Pareto e barras de erro, com um intervalo de confiança de 6σ , para dispositivo da Tab. 4 e encontrados aplicando o método CP com PCE-2	77

Figura 25 – Barras de erros para dispositivos projetos por Taylor e PCE-2 com CP.	77
Figura 26 – Convergência para média e dispersão utilizando diferentes graus de PCE em relação aos valores encontrados com MCS e 10^6 amostras para $\delta_{k_w} = 30\%$, $\delta_{k_\theta} = 30\%$, $\delta_\zeta = 10/3\%$ e $\delta_{R_c} = 10\%$.	79
Figura 27 – FRF de saída potência por entrada de aceleração quadrada para dispositivos da Tab. 5	81
Figura 28 – Frente de Pareto e barras de erro, com um intervalo de confiança de 6σ , para dispositivo da Tab. 5 e encontrados aplicando o método CP com PCE-3	81
Figura 29 – Frente de Pareto e barras de erro, com um intervalo de confiança de 6σ , para dispositivo da Tab. 6 (simbolizados com ‘x’ na figura) e encontrados aplicando método PCE-3/NSGA-II	82
Figura 30 – Convergência para média e dispersão utilizando MCS e MCLHS em relação a μ_{ref} e δ_{ref} encontrados com MCS e 10^6 amostras	84
Figura 31 – Convergência para média e dispersão utilizando diferentes graus de PCE em relação aos valores encontrados com MCS e 10^6 amostras para $\delta_{k_w} = 30\%$, $\delta_{k_\theta} = 30\%$, $\delta_\zeta = 10/3\%$ e $\delta_{h_c} = 10\%$.	85
Figura 32 – Frente de Pareto e barras de erro, com um intervalo de confiança de 6σ , para dispositivos da Tab. 8 (simbolizados com ‘x’ na figura) e encontrados aplicando o método PCE-3/NSGA-II.	86
Figura 33 – Frente de Pareto e barras de erro, com um intervalo de confiança de 6σ , para dispositivos da Tab. 9 (simbolizados com ‘x’ na figura) e encontrados aplicando o método PCE-3/NSGA-II.	88
Figura 34 – Comparação das frentes de Pareto obtidas para os dispositivos projetados nos diferentes cenários estudados	90
Figura 35 – Comparação das barras de erro obtidas para os dispositivos projetados nos diferentes cenários estudados	91

Lista de tabelas

Tabela 1 – Resultados numérico e experimental para as frequências naturais em circuito aberto (OC) e curto circuito (SC) com os correspondentes EMCC efetivo para o primeiro modo.	54
Tabela 2 – Formação dos polinômios multivariados considerando grau da PCE igual a 2.	65
Tabela 3 – Dispositivos otimizados com o método FTS/CP para variáveis de projeto l_v e R_c e incertas k_w , k_θ , ζ e R_c	73
Tabela 4 – Dispositivos otimizados com o método PCE-2/CP para variáveis de projeto l_v e R_c e incertas k_w , k_θ , ζ e R_c	76
Tabela 5 – Dispositivos otimizados com o método PCE-3/CP para variáveis de projeto l_v , R_c , h_p , l_p/l_v e $d_p/(l_v - l_p)$ e incertas k_w , k_θ , ζ e R_c	80
Tabela 6 – Dispositivos otimizados com o método PCE-3/NSGA-II para variáveis de projeto l_v , R_c , h_p , l_p/l_v e $d_p/(l_v - l_p)$ e incertas k_w , k_θ , ζ e R_c	82
Tabela 7 – Média μ e dispersão relativa δ para saída de potência com o respectivo erro e_r por remover um parâmetro incerto por vez	84
Tabela 8 – Dispositivos otimizados com o método NSGA-II e PCE-3 para variáveis de projeto l_v e R_c e incertas k_w , k_θ , ζ e h_c	85
Tabela 9 – Dispositivos otimizados com o método PCE-3/NSGA-II para variáveis de projeto l_v , R_c , h_p e l_p/l_c e incertas k_w , k_θ , ζ , h_c	87

Lista de abreviaturas e siglas

AG	Algoritmo Genético
BORD	<i>bi-objective robust design</i> , ou projeto robusto com duplo objetivo
cdf	<i>cumulative density function</i> , ou função densidade acumulada
CP	<i>Compromise Programming</i> , ou programação de compromisso
EESC	Escola de Engenharia de São Carlos
eq.	Equação
fig.	Figura
FORM	<i>First Order Reliability Method</i> , ou método de confiabilidade de primeira ordem
FRF	Função de resposta em frequência
FTS	<i>First Taylor Series</i> , ou séries de Taylor de primeira ordem
LHS	<i>Latin hypercube sampling</i> , ou amostragem por hipercubo latino
NSGA	<i>Non-dominated Sorting Genetic Algorithm</i> , ou algoritmo genético com classificação por não dominância
PCE	<i>Polynomial chaos expansions</i> , ou expansão em polinômio de caos
pdf	<i>probability density function</i> , ou função densidade de probabilidade
POMO	Problema de otimização multiobjetivo
PZT	Lead Zirconate Titanate, ou Titanato Zirconato de Chumbo
RBO	<i>Reliability-Based Optimization</i> , ou otimização baseada em confiabilidade
RBDO	<i>Reliability-Based Design Optimization</i> , ou otimização de projeto baseado em confiabilidade
RDO	<i>Robust Design Optimization</i> , ou otimização de projeto robusto
RO	<i>Risk-based Optimization</i> , ou otimização baseada em risco
MCS	<i>Monte Carlo Simulation</i> ou Simulação de Monte Carlo ou

SORM	<i>Second Order Reliability Method</i> , ou método de confiabilidade de segunda ordem
tab.	Tabela
USP	Universidade de São Paulo
WS	<i>Weighted-Sum</i> , ou soma ponderada

Lista de símbolos

α	vetor de deslocamento modal
ζ	amortecimento
δ_Y	dispersão relativa da função Y
δ_{X_i}	dispersão relativa para a variável aleatória X_i
δ_Y^*	dispersão relativa para média da função Y
μ_Y	média da função Y
μ_{X_i}	média para a variável aleatória X_i
μ_Y^*	valor ideal para média da função Y
ρ	multi-índice da expansão de caos polinomial
σ_Y	desvio padrão da função Y
σ_{X_i}	desvio padrão para a variável aleatória X_i
σ_Y^*	valor ideal para desvio padrão da função Y
ϕ	matriz dos modos de vibração
Ψ_ρ	base da expansão de caos polinomial
ω_f	frequência de ressonância do dispositivo
ω	Frequência do deslocamento imposto
\mathbf{F}_p	vetor de força elástica no modelo
$F_{X_i}^{-1}$	função acumulada de probabilidade para a variável aleatória X_i
$\mathbf{J}(\mathbf{x}_p)$	função multiobjetivo para vetor de variáveis de projeto \mathbf{x}_p
I	corrente elétrica
\mathbf{K}_e	matriz dielétrica para o modelo
\mathbf{K}_m	matriz de rigidez mecânica sem molas no engaste
\mathbf{K}_{me}	matriz de rigidez eletromecânica para o modelo
\mathbf{K}_{rr}	matriz de rigidez mecânica para o modelo com molas no engaste

\mathbf{M}_{rr}	matriz de massa para o modelo com a massa sísmica
\mathbf{R}_c	matriz de resistência elétrica
R_c	Resistência Elétrica
\mathbf{Z}	vetor de variáveis aleatórias escritas no espaço normal padrão \mathbb{Z}
\mathbf{u}	vetor de deslocamentos mecânicos absoluto
\mathbf{u}_r	vetor de deslocamentos mecânicos relativo
V	tensão elétrica
\mathbf{x}	vetor de variáveis aleatória
\mathbf{x}_p	vetor de variáveis de projeto
Y	função que descreve a FRF de saída de potência
\bar{c}_{11}^D	coeficiente piezelétrico elástico para deslocamento elétrico constante
\bar{c}_{11}^E	coeficiente piezelétrico elástico para campo elétrico constante
\bar{h}_{31}	efetiva constante piezelétrica (campo elétrico/deformação elétrica)
\bar{e}_{31}	efetiva constante piezelétrica (deformação elétrica/campo elétrico)
$\bar{\beta}_{33}^\epsilon$	impermissividade piezelétrica para deformação constante
$\bar{\epsilon}_{33}^\epsilon$	permissividade piezelétrica para deformação constante
E_c	rigidez elástica da camada adesiva
c_ρ	coeficientes da expansão de caos polinomial
d_p	distância do engaste até a camada piezelétrica
f_b	força harmônica de mola
$f_i(\mathbf{x}_p)$	i-ésima função para vetor de variáveis de projeto \mathbf{x}_p
$f_{\mathbf{X}}$	função conjunta de probabilidade do vetor de variável aleatória \mathbf{X}
h_c	espessura da camada adesiva
h_p	espessura da camada piezelétrica
h_v	espessura da viga
k_i^2	coeficiente de acoplamento eletromecânico

k_w	rigidez linear do engaste
k_θ	rigidez de torção do engaste
l_b	comprimento da massa sísmica
l_p	comprimento do sensor piezelétrico
l_v	comprimento da viga
h_b	altura da massa sísmica
M_{bv}	massa sísmica com porção de viga sob a mesma
I_s	momento de inércia da massa sísmica com porção de viga sob a mesma
q_c	carga elétrica
w_i	i-ésima ponderação do método CP
w_0	deslocamento imposto

Sumário

1	INTRODUÇÃO GERAL	1
1.1	Motivações	1
1.2	Materiais piezelétricos	5
1.3	Dispositivos coletores de energia	6
1.4	Otimização na presença de incertezas	9
1.5	Justificativas	12
1.6	Objetivos	13
1.7	Contribuições Esperadas	14
2	ESTIMATIVAS PARA MÉDIA E VARIÂNCIA DE VARIÁVEIS ALE- ATÓRIAS	17
2.1	Introdução	17
2.2	Expansão em séries de Taylor	17
2.3	Simulação de Monte Carlo	19
2.4	Amostragem por hipercubo latino	21
2.5	Expansão em polinômios de caos	22
2.5.1	Construção da Base do Polinômio	23
2.5.2	Truncagem do polinômio	25
2.5.3	Transformação isoprobabilística	26
2.5.4	Estimativa dos coeficientes do polinômio e dos momentos	26
3	OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO	29
3.1	Introdução	29
3.2	Otimização	29
3.2.1	Otimização meta-heurística via algoritmo genético	31
3.3	Problemas de otimização multiobjetivo (POMO)	33
3.4	Conceitos fundamentais e critério de Pareto	33
3.5	Otimização multiobjetivo com CP	34
3.6	Otimização multiobjetivo com NSGA-II	37
4	MODELAGEM E VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL	43
4.1	Introdução	43
4.2	Modelo de viga em elementos finitos	43
4.2.1	Equacionamento do modelo em coordenadas absolutas	44
4.2.2	Descrição da matriz de massa com a inclusão da massa sísmica	45
4.2.3	Equacionamento do modelo em coordenadas relativas	46

4.3	Validação experimental e ajuste do modelo em elementos finitos	48
4.3.1	Métricas e critérios considerados para a validação	48
4.3.2	Descrição do setup experimental	50
4.3.3	Comparação entre resultados numéricos e experimentais e ajuste do modelo	53
4.4	Definição dos valores das molas de modelagem do engaste	55
5	METODOLOGIA DE PROJETO ROBUSTO	57
5.1	Introdução	57
5.2	Definição das variáveis de projeto e incertas no problema	57
5.3	Determinação da distribuição de probabilidade para os parâmetros incertos	59
5.4	Procedimento de estimativa dos momentos estatísticos da amplitude da FRF de potência	60
5.4.1	Estimação dos momentos estatísticos via MCS e LHS	61
5.4.2	Estimação dos momentos estatísticos via FTS	62
5.4.3	Estimação dos momentos estatísticos via PCE	63
5.5	Otimização multiobjetivo e projeto dos dispositivos	67
5.5.1	Otimização de dispositivos para o cenário 1	69
5.5.2	Otimização de dispositivos para o cenário 2	69
5.5.3	Otimização de dispositivos para o cenário 3	69
5.5.4	Otimização de dispositivos para o cenário 4	70
6	RESULTADOS	71
6.1	Introdução	71
6.2	Séries de Taylor e polinômio de caos para projeto de dispositivos do cenário 1	72
6.3	Projeto dos dispositivos com novas variáveis de projeto e aumento de incertezas no engaste	78
6.4	Projeto dos dispositivos com novos parâmetros incertos	83
6.5	Projeto dos dispositivos com variáveis de projeto e incertas mais influentes	86
6.6	Confrontação entre os diferentes dispositivos projetados	87
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	93
7.1	Conclusões	93
7.2	Trabalhos futuros	95
7.3	Trabalhos publicados	96
	REFERÊNCIAS	99

ANEXOS	105
ANEXO A – CONVERSÃO E DADOS DE COEFICIENTES PIEZE- LÉTRICOS	107
ANEXO B – BASES PARA VARIÁVEIS COM DISTRIBUIÇÃO GAMA	111

1 Introdução geral

1.1 Motivações

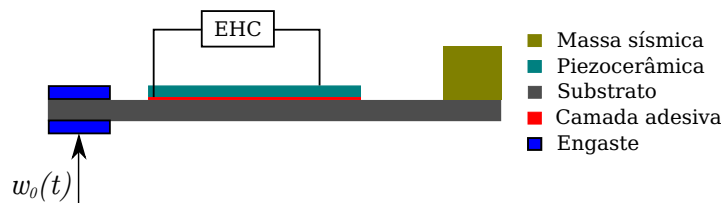
A energia para consumo pode ser proveniente de fontes termelétricas, eólicas, solares, químicas, eletromagnéticas, mecânicas, dentre outras (KONG et al., 2010). Com o aumento da população e busca por uma melhor qualidade de vida, por exemplo, o consumo energético também cresceu consideravelmente. Assim, estudar meios de aproveitamento de energia dissipada no meio ambiente é altamente interessante. Por exemplo, os computadores tiveram uma grande evolução nos últimos anos, como hardwares e softwares, porém as baterias não acompanharam esse progresso (RAFIQUE, 2018). Seria um avanço se as baterias recarregáveis de alguns equipamentos e dispositivos tivessem a vida prolongada. Há dificuldade para substituição de baterias em determinadas situações como no caso de sensores em pontes rodoviárias, rastreamento de animais, em rede de sensores sem fio ou no caso de satélites.(CAHILL et al., 2018; BEEBY; TUDOR; WHITE, 2006). Também, poder acender lâmpadas, mover catracas elétricas e prolongar a vida de dispositivos médicos como marcapassos, sem a troca de baterias, é um grande passo tecnológico (SODANO; INMAN; PARK, 2004). Nesse sentido, estudos de coleta de energia, em que partindo de determinada fonte energética ocorre a conversão em eletricidade, têm sido realizados nos últimos anos. O termo coleta de energia em inglês é *energy harvesting* e um enfoque dessa abordagem está na conversão da energia mecânica gerada por vibrações em eletricidade, com posterior utilização para diversas finalidades.

Dispositivos relativamente simples podem ser considerados para a coleta de energia a partir de vibrações como, por exemplo, aqueles compostos por vigas engastadas-livres (*cantilever*) ressonantes acopladas a materiais piezelétricos, de forma que a fonte de vibração gera oscilações ressonantes na viga e deformação no material piezelétrico que, por possuir alta densidade energética, converte boa parte da energia de entrada em energia elétrica coletável (DUTOIT; WARDLE; KIM, 2005; ERTURK; INMAN, 2011). Embora o aparato seja considerado simples, uma formulação matemática que represente adequadamente a dinâmica estrutural e o acoplamento multi-físico (eletro-mecânico) deve ser considerada. Isso é devido aos sensores, os quais estão interligados aos dispositivos e circuitos elétricos utilizados para coleta da energia. Além disso, questões podem ser levantadas em relação à maneira como o dispositivo é fixado na fonte de vibrações, como se dá a excitação do dispositivo e se existe variabilidade nas propriedades geométricas, materiais e ambientais do dispositivo e sua condição de operação. As equações do modelo podem basear-se em modelos contínuos ou em elementos finitos e a escolha de um problema linear ou não-linear tem implicações diversificadas. Partindo de vigas *cantilever*,

pode-se montar conjuntos com várias vigas acopladas para se estudar mais de uma maneira de vibrar, o que permite obter uma banda de frequência mais larga, aumentando a possibilidade de coletar mais energia. Por esses motivos dentre outros, a viga *cantilever* é muito utilizada tanto para estudo como para projetos variados em questões relacionadas a coleta de energia.

Na figura 1, está representado um modelo de dispositivo coletor de energia elétrica piezelétrico. Ele consiste em uma viga *cantiliver* com massa sísmica em sua extremidade livre, uma camada de material cerâmico piezelétrico (ou transdutor equivalente) colada à viga por meio de uma camada adesiva e um circuito de coleta de energia (*Energy Harvesting Circuit* - EHC) conectado ao transdutor piezelétrico. A vibração do dispositivo é, em geral, devida a uma entrada de deslocamento harmônica $w_0(t)$ da base à qual o dispositivo é acoplado. Graças à massa sísmica em sua extremidade livre, a frequência natural fundamental do dispositivo pode ser sintonizada à frequência de excitação ou de entrada (de vibração da base), levando a uma condição de ressonância do dispositivo, na qual as amplitudes de vibração da viga e conseqüente deformação do transdutor são maximizadas, proporcionando uma maior geração de energia elétrica coletável no circuito.

Figura 1 – Viga engastada com sensor piezelétrico para coleta de energia.



Fonte: Próprio autor.

Na prática, em geral, o circuito elétrico será formado por pontes retificadoras, para conversão da corrente alternada em contínua, um capacitor para armazenamento de energia e um circuito de monitoramento da tensão ligado a carga final (LESIEUTRE; OTTMAN; HOFMANN, 2004; NG; LIAO, 2005). Para simplificar o estudo e o projeto do dispositivo, é comum substituir o circuito coletor, que possui uma dinâmica complexa, por uma resistência elétrica (circuito resistivo). Assim, a energia dissipada no resistor (por efeito Joule) fornece uma estimativa da energia potencialmente coletável (em geral, sobre-estimada já que não leva em conta perdas no circuito coletor). Resultados anteriores indicam que esta metodologia também permite avaliar valores ótimos de resistência para maximizar a energia coletável. Estes valores dariam indicativos de impedância ótima para circuitos coletores reais.

O dispositivo apresentado na figura 1 pode ser projetado de modo a fornecer a máxima energia possível, considerando valores ideais de variáveis de projeto, que aten-

dam uma determinada finalidade. Para isso, métodos de otimizações são imprescindíveis, já que a intenção é maximizar a energia para os dispositivos. Um algoritmo de otimização geralmente encontra valores de variáveis que maximizem ou minimizem funções-custo, considerando restrições preestabelecidas (RAO, 2009). Vários métodos de otimização estão disponíveis para serem aplicados, dependendo do problema. Esses métodos podem ser baseados em programação matemática e técnicas de programação não tradicional ou modernas, as quais são de caráter meta-heurísticos, encontrando uma solução ótima ou nas vizinhanças da ótima.

As técnicas de otimização determinística contribuem muito para o projeto de dispositivos de coleta de energia. Porém, determinadas indagações surgem quando se encontra variabilidade no valor da energia coletada, que é potencialmente devido a incertezas associadas às propriedades geométricas e materiais dos dispositivos, às condições de fabricação e montagem dos dispositivos na fonte de vibrações, e/ou até mesmo condições do ambiente de operação. Assim sendo, seria fundamental determinar as variabilidades nos valores fornecidos de energia, diante das variáveis incertas, e buscar uma solução para reduzi-las. Isso se torna ainda mais importante sabendo que a quantidade de energia coletável é, em geral, pequena e, portanto, garantir a maior extração possível, mesmo em casos onde a variabilidade pode ser apenas parcialmente controlada, é uma necessidade. Um dispositivo que trabalhe considerando as incertezas mencionadas com baixa variabilidade na resposta será conhecido como robusto. Diante desse fato, sabendo-se que poucos trabalhos investigam incertezas no assunto coleta de energia, pode-se utilizar técnicas de otimização que considerem incertezas para o projeto.

Ao se projetar alguma estrutura de engenharia considerando incertezas, tal que se considere a probabilidade de falha da estrutura, métodos de otimização baseados em confiabilidade podem ser utilizados. Esses métodos estabelecem uma região de domínio seguro de trabalho e de falha, estimando um índice de confiabilidade no limite de intersecção das regiões. Através do índice de confiabilidade pode-se determinar e tentar diminuir o máximo possível a probabilidade de falha da estrutura (LOPEZ; BECK, 2012). Por outro lado, uma estrutura ou dispositivo podem ser projetados avaliando a sensibilidade da resposta em relação a flutuações externas, ou incertezas nos parâmetros. Projetos que se mostrem menos sensíveis às incertezas são desejados e esses métodos são baseados em projeto robustos (SCHUËLLER; JENSEN, 2008).

Para viabilizar métodos probabilísticos de análise, projeto e/ou otimização, é necessário estimar ao menos valores de média e variância das quantidades relevantes como função-custo e parâmetros de projeto e operação. Em relação à coleta de energia, poderia se maximizar a potência média fornecida pelo dispositivo minimizando a sua variância em simultâneo. Isto implicaria em projetar um dispositivo que talvez não seja aquele que fornece a maior quantidade nominal de energia, mas que tenha maior robustez (ou menor

variabilidade). Possivelmente, um dispositivo que apresente um bom compromisso entre desempenho nominal e robustez seja o ideal. Posto que dispositivos para coleta de energia do tipo viga *cantilever* piezelétrica podem ser modelados por meio de parâmetros distribuídos ou em elementos finitos, dependendo da escolha da metodologia para estimativa de momentos estatísticos como média e variância, poderá ocorrer elevado esforço ou tempo de processamento computacional. Assim, é importante escolher adequadamente o procedimento desse cálculo, garantindo a melhor estimativa possível a um custo computacional satisfatório.

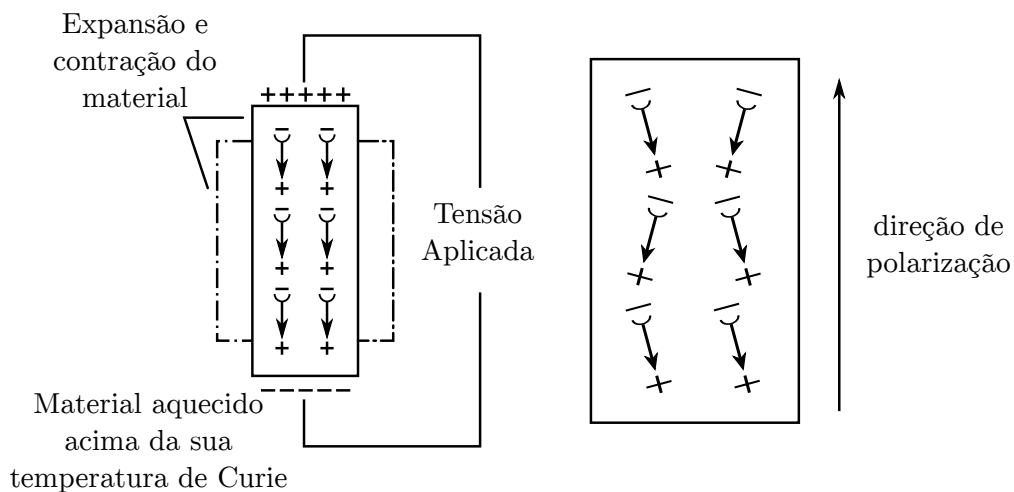
Com a estimativa dos momentos estatísticos, dois objetivos são considerados no projeto: maximizar a média, que pode ser traduzido em máxima energia coletada, e minimizar a variância, ou reduzir a dispersão da resposta. Por isso, a otimização deverá ser do tipo multiobjetivo, garantindo um compromisso entre os dois objetivos do projeto. Métodos de otimização multiobjetivo podem ser de vários tipos, considerando fatores de ponderação, limitantes superiores para restrições, funções convexas ou côncavas, além de métodos heurísticos (WALTZ, 1967; PARSOPOULOS; VRAHATIS, 2002; DAS; DENNIS, 1997; DEB et al., 2002). Em geral, esses métodos buscam estabelecer um compromisso entre os objetivos para as soluções através da chamada frente de Pareto, a qual estabelecerá que um objetivo não poderá ser melhorado sem piorar outro objetivo que estiver na fronteira (MARLER; ARORA, 2004; LOBATO; STEFFEN JR, 2017). Ainda, dependendo da escolha da função multiobjetivo ela poderá ser transformada em um caso mono objetivo equivalente e algum método de otimização determinístico poderá ser aplicado. É importante que a escolha dessas funções se adéquem ao problema e tenham um tempo de convergência satisfatório. Mesmo com uma boa aproximação por funções de baixo custo computacional dos valores de média e variância, a convergência poderia demorar muito tempo se as funções objetivo fossem escolhidas de maneira errada.

Dado o exposto anteriormente, este trabalho visa abordar o tema coleta de energia usando dispositivos coletores com vigas *cantilever* ressonantes acopladas a transdutores piezelétricos. Para isso, será proposto um modelo em elementos finitos com incertezas em parâmetros específicos. Por avaliar a função de resposta em frequência para saída de potência, os momentos estatísticos para essa função poderão ser estimados por técnicas apropriadas, como polinômio de caos e simulação de Monte Carlo. Além disso, com o uso de métodos de otimização do tipo multiobjetivo, os dispositivos robustos poderão ser projetados. Nas próximas seções, são apresentadas revisões bibliográficas sobre os temas materiais piezelétricos, dispositivos geradores de energia e otimizações na presença de incertezas. Em seguida, e com base nesta análise da literatura, serão apresentadas justificativas e objetivos do trabalho, assim como as contribuições esperadas.

1.2 Materiais piezelétricos

Os materiais piezelétricos são cristalinos e formados por células unitárias com grupos de átomos ordenados que geram dipolos elétricos. O movimento de dipolos elétricos nos materiais causam o efeito piezelétrico, provocando o deslocamento de cargas elétricas, que produzem tensão entre os eletrodos a partir de deformação mecânica, que permite o uso desses materiais como sensores, ou deformação mecânica a partir de tensão elétrica aplicada, para o uso como atuadores. Para se obter esses materiais em forma de pastilhas cerâmicas, primeiro se aquece as cerâmicas acima da chamada temperatura de Curie, aplicando um alto campo elétrico na direção que se deseja a polarização remanescente, provocando a orientação dos dipolos na direção do campo aplicado como ilustrado na Figura 2, entre 1200 e 1500 °C. Após essa fase, resfriam-se as cerâmicas e utiliza-se, em seguida, processos de manufatura apropriados para corte. Algumas misturas de materiais possuem propriedades piezelétricas, a exemplo da associação de chumbo (Pb), Zircônio (Zr) e titânio (Ti), formando o titanato zirconato de chumbo, conhecido como PZT (LEO, 2007). Outros materiais cerâmicos livres de chumbo, como BaTiO_3 , ou poliméricos, como PVDF, também são polarizáveis e, portanto, candidatos para construção de transdutores na forma de pastilhas ou camadas piezelétricas.

Figura 2 – Processo de polarização do material piezelétrico.



Fonte: Adaptação de Leo (2007).

Com aplicação de uma tensão mecânica nas pastilhas piezelétricas, ocorrerá uma deformação que induzirá movimento dos dipolos elétricos e fluxo de carga. Dado que uma aplicação de tensão mecânica pode produzir fluxo de carga, portanto, tensão elétrica, esse efeito será conhecido como direto. Por outro lado, com a aplicação de um campo elétrico, uma rotação dos dipolos elétricos pode ser imaginada, causando deformação mecânica do material e o efeito inverso. Portanto, esses materiais podem ser utilizados como transdu-

tores em dispositivos coletores de energia elétrica a partir de vibrações mecânicas, desde que estas causem deformações nos transdutores (KHAN et al., 2016).

1.3 Dispositivos coletores de energia

Em 2004, uma descrição detalha sobre utilização de materiais piezelétricos para finalidades de geração de energia foi realizada em um artigo de revisão, para isso ressaltando questões de recarregamento de baterias e outras aplicações (SODANO; INMAN; PARK, 2004). Uma ampla citação dos primeiros trabalhos que investigaram a geração de energia elétrica a partir de vibrações está presente neste artigo, desde o uso de transdutores eletromagnéticos a sensores piezelétricos. Podem ser destacados nos primeiros trabalhos, a importância na investigação da eficiência dos materiais piezelétricos, as diferentes configurações de projeto dos dispositivos e os modelos dos circuitos para captação e conversão elétrica. Para a extração de energia de circuitos elétricos, uma ampla abordagem foi realizada, estudando os efeitos da resistência elétrica e do fator de amortecimento do sistema. Como importância do estudo sobre coleta de energia, salientou-se o desenvolvimento que pode ocorrer no sentido de produzir dispositivos portáteis e sensores sem fio com vida prolongada das baterias. Para esse fim, a importância de materiais piezelétricos e a necessidade de projetos com energia maximizada foram enfatizadas.

Dutoit, Wardle e Kim (2005) introduziram o tema de coleta de energia com o uso de diferentes fontes e suas respectivas densidades energéticas, acentuando a importância de materiais piezelétricos para esses casos. No trabalho, é citado que a energia gerada por vibração mecânica pode ser captada por mecanismos de conversão eletrostáticos, eletromagnéticos e piezelétricos. Dependendo da escolha para o mecanismo de conversão e da configuração dos dispositivos, esses poderão ser classificados como lineares ou não lineares. Além disso, este trabalho explora os diferentes valores de frequências que os dispositivos de coleta de energia trabalham, sendo que faixas entre 30 e 120 Hz podem ser encontradas para casos com sensores piezelétricos. Embora toda uma introdução aprofunde no tema, o estudo desenvolveu modelos matemáticos para dispositivos de coleta de energia para sistemas microeletromecânicos. Nesses casos, valores maiores de frequência de operação devem ocorrer, por isso foi desenvolvido um modelo matemático apropriado com um grau de liberdade para estudo. Esse modelo representou uma viga *cantilever* com material piezelétrico na superfície e uma massa inercial na extremidade. Um modelo analítico mais completo com parâmetros distribuídos e excitação de base também foi desenvolvido no trabalho.

Erturk e Inman (2011) também enfatizam a importância da utilização de materiais piezelétricos para geração de energia devido à alta densidade energética associada em comparação com outros materiais. Neste trabalho, uma vasta abordagem sobre coleta de

energia envolvendo vigas com materiais piezelétricos é realizada. Pode ser encontrada toda formulação matemática para modelos com uma ou duas camadas de materiais piezelétricos associados a circuitos elétricos para coleta de energia. A formulação descrita baseia-se em modelos analíticos, sendo possível obter as funções de resposta em frequência para saídas mecânicas ou elétricas. Além de desenvolver uma extensa análise dinâmica sobre o assunto, modelos experimentais estão presentes para validação numérica. Acrescentando, análises para dispositivos não lineares foram realizadas, por associar forças eletromagnéticas aos dispositivos piezelétricos. Nesse caso, a rigidez torna-se não linear, alterando o valor da frequência natural e permitindo investigar uma maior banda de frequência.

Um interessante estudo para uma viga com vibração de base e material piezelétrico na superfície do substrato foi realizado em (ZHOU et al., 2012). Desenvolveu-se um modelo com um grau de liberdade para verificação das saídas de tensão e potência, comparando as respostas com simulações do modelo em elementos finitos no software ANSYS. Neste trabalho, valores de tensão gerada para diferentes categorias de materiais piezelétricos foram analisados ao se variar a frequência, bem como a potência e a tensão para resistências elétricas diferentes. Alguns gráficos gerados mostraram como a frequência é afetada pelo comprimento, espessura e largura da camada piezelétrica.

Godoy, Trindade e Deü (2014) desenvolveram um modelo de placa engastada-livre em elementos finitos para coleta de energia. Destacou-se a importância de estudar-se modelos com mais de um grau de liberdade, já que a frequência para um caso mais simples pode ser mal estabelecida e prejudicar a análise de potência no pico de ressonância. Isso é devido à variabilidade nas propriedades dos dispositivos ou mudança na frequência de operação, que causam dessintonização nos dispositivos. Um destaque deste trabalho foi o estudo sobre otimização topológica para averiguar a melhor distribuição de pastilhas piezelétricas na superfície da placa engastada-livre. Mudanças na forma e quantidade de material piezelétrico influenciam rigidez e massa dos dispositivos, afetando a sua frequência natural, assim como o acoplamento eletromecânico efetivo e consequente potencial de energia coletável. Com o uso de algoritmo genético, a otimização foi conduzida e encontrada a melhor distribuição de pastilhas piezelétricas.

Considerando incertezas que podem estar presentes nos dispositivos coletores de energia, um modelo piezelétrico de um grau de liberdade foi estudado em (ALI; FRISWELL; ADHIKARI, 2010). Nesse estudo, incertezas foram consideradas na frequência natural, amortecimento e fator de acoplamento eletromecânico, através de seus desvios padrões. Nesse caso, a incerteza presente na frequência natural traduz a variabilidade que pode ocorrer nos valores de rigidez. Por meio de simulações de Monte Carlo, avaliou-se a média da energia máxima gerada, em função dos valores de desvio padrão das variáveis incertas. Em uma das análises desse trabalho, uma perda de até 75 % na energia máxima ocorreu para uma mudança de 20 % no desvio padrão da frequência. As análises mostram o efeito

negativo que uma dessintonização da frequência pode acarretar à energia coletada e a necessidade de estudos aprofundados de incertezas para essa área de pesquisa.

Franco e Varoto (2017) realizaram uma análise de incertezas ao projetar-se um dispositivo tipo viga engastada-livre para coleta de energia com material piezelétrico. O dispositivo foi projetado usando modelo de parâmetros contínuos para duas camadas de materiais piezelétricas ligados em série com uma resistência elétrica. Em uma das etapas, buscou-se encontrar parâmetros de projeto maximizando a FRF (Função de Resposta em Frequência) de tensão ou potência elétrica, levando a um dispositivo apropriado. Para análises de incertezas, consideraram-se os parâmetros geométricos, resistência elétrica e amortecimento como incertos. Com distribuição de probabilidade Gaussiana para essas variáveis, simulações de Monte Carlo foram geradas e as variabilidades da resposta para tensão e potência foram analisadas. Em um intervalo de 0 a 100 Hz, verificaram-se como os parâmetros afetaram cada faixa de frequência, sendo que o efeito de incertezas na resposta aumentou para altas frequências.

Em Kim et al. (2017), foi conduzida uma análise de incertezas para um conjunto de vigas engastadas em ambas as extremidades, constituindo um coletor piezelétrico de energia para pavimentos de estradas. O projeto baseou-se em um modelo computacional em elementos finitos através do software ABAQUS. Para o estudo de incertezas, seis parâmetros geométricos diferentes foram utilizados, considerando um modelo experimental. O modelo estatístico foi calibrado com o modelo experimental e utilizada otimização multiobjetivo para realizar o projeto robusto, maximizando a média e minimizando o desvio padrão do pico de tensão. Com isso, obteve-se um coletor de energia com maior pico de tensão, menor variabilidade e menor massa em relação ao modelo inicial.

Ruiz e Meruane (2017) projetaram uma viga *cantilever* e totalmente recoberta com dupla camada de material piezelétrico via modelo em parâmetros distribuídos, seguindo com o estudo de incertezas. Vários parâmetros geométricos e eletromecânicos foram considerados como incertos neste trabalho, sendo que simulações de Monte Carlo foram utilizadas para avaliar a resposta com as incertezas. Buscou-se analisar os efeitos que um engaste imperfeito poderia gerar na resposta de tensão ao introduzir incertezas no comprimento da viga, dado que a rigidez do dispositivo e por consequência a frequência natural é modificada por esse fato. Com a utilização de índices de Sobol, foram obtidos os valores de sensibilidade dos parâmetros e como estes influenciaram a variabilidade da FRF.

Com um modelo de um grau de liberdade, um estudo sobre perdas de potência relacionadas ao desajuste do engaste e descolagem da pastilha piezelétrica da superfície da viga foi elaborado em (KHAZAEI; REZANIA; ROSENDAHL, 2019). Devido ao tempo de uso ou ao processo de manufatura, as pastilhas podem descolar de determinado substrato, diminuindo a superfície de contato, aumentando o fator de amortecimento, por

consequência, e gerando perda de potência. Além disso, esse efeito também diminui a rigidez de um dispositivo, provocando mudança na frequência natural. Em relação ao engaste, ensaios para dispositivos com dois tipos diferentes de suportes, um de alumínio e outro de plástico, foram realizados. Com isso, foi possível mostrar a variabilidade que ocorreu na frequência e as perdas de potência conforme as mudanças no aperto de parafusos dos engastes.

Em [Aloui, Larbi e Chouchane \(2018\)](#), foi realizada uma análise de sensibilidade da resistência elétrica para as FRFs de saída de tensão e deslocamento na extremidade da viga. Para isso, um modelo em elementos finitos e dupla camada de material piezolétrico foi proposto. A análise de sensibilidade foi aplicada para aproximações de séries de Taylor de primeira ordem para cada uma das FRFs. Com a vibração dos dispositivos através de excitação de base, concluiu-se que resistências de menores valores produzem uma maior sensibilidade ao redor do pico de ressonância para as FRFs.

[Varoto \(2019\)](#) projetou um dispositivo piezolétrico de coleta de energia com engaste modelado por molas e amortecedores. Incertezas foram consideradas nos seguintes parâmetros: módulos de elasticidade dos materiais, massa sísmica colocada na extremidade da viga, comprimento da viga, resistência elétrica e molas do engaste. A abordagem foi realizada para um número grande de amostras via simulação de Monte Carlo, mostrando que a incerteza na resposta é mais afetada pelo módulo de elasticidade da viga do que por aquele do material piezolétrico. Analisando a FRF de tensão, foi mostrado que a incerteza da resposta aumenta quando se diminui o valor da resistência elétrica. Para as rigidez das molas foram escolhidos valores que limitassem a FRF de tensão dentro de uma faixa determinada.

Em relação ao estudo de confiabilidade, um dispositivo para coleta de energia minimizando o volume de material necessário para essa finalidade foi proposto em ([SEONG; HU; LEE, 2017](#)). Algumas aplicações podem ter restrições quanto ao tamanho de dispositivos utilizados, sendo interessante otimizar o volume de material para esses casos. Como restrição de projeto, foi imposto que a energia gerada fosse maior que a energia requerida. Nesse caso, ficou estabelecido uma equação de estado limite para a restrição, tal que valores menores que zero representam o domínio seguro de trabalho e, caso contrário, o domínio de falha. Para solução do problema de otimização usou-se o método SQP (*Sequential Quadratic Programming*), porém foram necessários vários candidatos a valores iniciais para evitar mínimos locais como resposta.

1.4 Otimização na presença de incertezas

Em 1992, um artigo de revisão abordou amplamente uns dos primeiros métodos de otimização na presença de incertezas para projetos robustos ([NAIR et al., 1992](#)). No

artigo, é apresentado o método Taguchi, cujas primeiras ideias a respeito do método se deu por Genichi Taguchi por volta de 1950. Um desenvolvimento mais recente ocorreu em 1980, quando Taguchi buscou implementar o conceito de robustez em algumas empresas americanas, para melhorar a qualidade dos produtos. Uma ampla explanação sobre o método é apresentada no trabalho, descrevendo minuciosamente as vantagens e limitações de aplicações. Sintetizando, o método possui fatores de controle, os quais são modificados para diminuir a variabilidade da resposta e fatores de ruído, que possuem incertezas associadas. Utilizando-se uma função que mede a sensibilidade, é possível aumentar a robustez do sistema analisado, escolhendo para isso valores adequados de fatores de controle. Com matrizes conhecidas como ortogonais, funções de sensibilidade são utilizadas, permitindo estimar além de seus valores, a média e variância da função objetivo. Maximizando os valores de sensibilidade para cada fator de controle, que podem ser visualizados por gráficos de efeito e análise de variância, alcançam-se projetos com valores de robustez satisfatórios. Embora o método propicie um sistema robusto, tem como desvantagem utilizar fatores de controles discretos como entrada nas matrizes ortogonais, que também são restritas em tamanho, impondo limitações de projeto.

Em 1999, outro artigo abordou o método de Taguchi, porém são apresentados dois outros métodos como alternativas para projetos robustos (CHEN; WIECEK; ZHANG, 1999). No trabalho é realizada uma apresentação do método de programação de compromisso e do problema da soma ponderada quadrática, sendo uma extensão do primeiro caso. Os métodos são para solução de problemas com mais de um objetivo e conceitos essenciais sobre essas categorias de problemas foram abordados. Uma comparação entre os dois métodos também foi realizada para solução de problemas multiobjetivo com funções convexas e não convexas. Para um caso específico, as funções de média e desvio padrão foram desenvolvidas e os métodos aplicados, buscando a otimização simultânea dessas funções. Levando-se em conta que as funções de média e variância possibilitam um projeto robusto, a programação de compromisso e o problema da soma ponderada quadrática são de suma importância.

Lee e Park (2006) realizaram uma abordagem sobre parâmetros de projeto e fatores de ruído, bem como a estimativa de média e variância de uma função utilizando aproximações de séries de Taylor de primeira ordem. Considerando a questão de robustez, um problema em que a variância é minimizada e a média utilizada como restrição da otimização foi apresentado. Enfatiza-se também a metamodelagem com o método Kriging e simulações de Monte Carlo para modelos computacionais.

Schuëller e Jensen (2008), em um artigo de revisão, fizeram uma ampla investigação sobre incertezas e otimizações baseadas em confiabilidade ou *Reliability-Based Optimization* (RBO) e em projeto robusto ou *Robust Design Optimization* (RDO). O primeiro método apoia-se em probabilidades de falha e o trabalho aborda as técnicas

utilizadas para realizar um projeto com alta confiabilidade. Pode-se citar os métodos de confiabilidade de primeira e segunda ordem ou *First Order Reliability Method* (FORM) e *Second Order Reliability Method* (SORM), respectivamente, além do tradicional método de Monte Carlo. No caso do projeto robusto RDO, busca-se reduzir a sensibilidade diante de possíveis variabilidades de parâmetros ou mudanças externas. Neste cenário, métodos de otimização que consideram as incertezas introduzidas nos parâmetros foram citados. Um exemplo é a otimização robusta que otimiza o pior cenário com incertezas, também conhecida como técnica de contraparte robusta, porém essa otimização pode fornecer resultados com baixo desempenho. Este artigo de revisão reforça a ideia de medidas de robustez com a utilização de funções de média e variância como referência. Assim, para atingir um compromisso entre essas funções, otimizações multiobjetivos foram enfatizadas, como programação de compromisso e algoritmos evolutivos. Algumas estimativas dos momentos estatísticos foram sugeridas, como aproximações de séries de Taylor, polinômios de caos e expansão Karhunen–Loève. Para modelos com alto esforço computacional, metamodelos foram apresentados, tais como superfícies de resposta, redes neurais e o método Kriging. De acordo com o exposto neste artigo, embora esses metamodelos possam reduzir o custo computacional, quando grande número de parâmetros incertos são utilizados, a resposta pode não ser satisfatória. Por fim, modelos inversos foram abordados, em que dado um modelo experimental com incertezas, altera-se um modelo computacional para reduzir as possíveis discrepâncias entre os mesmos.

Uma ampla investigação sobre métodos determinísticos de otimização multiobjetivo, desde a transformação em problemas mono objetivos equivalentes, tratamento das restrições e resolução via métodos de otimização clássicos foi realizada em [Lobato et al. \(2008\)](#). Em geral, os algoritmos para otimização multiobjetivo utilizam o conceito de convergência e espalhamento das soluções finais em uma curva conhecida como frente de Pareto, como abordado no trabalho. Vários métodos não-determinísticos de otimização baseados em processos evolutivos e inspirados na natureza para solução de problemas multiobjetivo também foram apresentados.

Dois métodos de otimização de problemas multiobjetivo via algoritmos meta-heurísticos, usando enxame de partículas e baseado em algoritmo genético podem ser encontrados nos trabalhos de [Coello, Pulido e Lechuga \(2004\)](#) e [Deb et al. \(2002\)](#), respectivamente. Uma ampla revisão de métodos meta-heurísticos para otimização com vários objetivos está presente nestes trabalhos, destacando as vantagens e limitações de cada método. Com a aplicação dos algoritmos, busca-se convergência e bom espalhamento das soluções para a chamada frente de Pareto, que pode ocorrer em um único processamento.

Em relação aos métodos de confiabilidade, nos quais um sistema ou estrutura falha baseando-se em conceitos probabilísticos, uma grande contribuição pode ser encontrada no trabalho de [Beck et al. \(2016\)](#). Neste artigo, uma comparação entre otimização de

projeto baseada em confiabilidade ou *Reliability-Based Design Optimization* (RBDO) e otimização baseada em risco ou *Risk-based Optimization* (RO) foi conduzida. A principal diferença entre RBDO e RO reside no fato da probabilidade de falha estar nas restrições do problema via RBDO, enquanto a função objetivo contemplará a probabilidade de falha no problema via RO. Nesse sentido, o problema via RO é concebido como sendo irrestrito para o custo esperado de falha. Assim, a otimização baseada em risco foi desenvolvida de tal maneira a encontrar uma similaridade com uma otimização multiobjetivo para projeto robusto. No caso, a otimização clássica de uma função multiobjetivo tem por base um compromisso entre média e variância através de um fator de ponderação. Para a otimização de risco, uma parcela referente ao custo inicial, que aumenta com o investimento de segurança, e outra para o custo de falha multiplicado pela probabilidade de falha, compõem a função multiobjetivo. Então, um compromisso entre desempenho e probabilidade de falha (segurança) pode ser obtido.

1.5 Justificativas

Um modelo em elementos finitos para vigas engastadas com três camadas elásticas, viscoelásticas e/ou piezelétricas desenvolvido por Santos (2008) na sua dissertação de mestrado e aprimorado para o estudo de coleta de energia com incertezas no engaste em Martins (2018) é utilizado neste trabalho. Partindo do pressuposto que modelos em elementos finitos exigem considerável esforço computacional, dependendo da complexidade do problema, obter respostas para esses modelos quando incertezas são consideradas torna-se um grande desafio. Ainda assim, a indústria tem desenvolvido modelos cada vez mais complexos, exigindo elevado custo computacional. Além disso, com a utilização do modelo em elementos finitos, consegue-se modelar o dispositivo com boa aproximação de um protótipo experimental, podendo simular o engaste através de molas e posicionar a pastilha piezocerâmica no substrato da viga, inserindo a camada adesiva, por exemplo. Geralmente, o tempo de processamento do modelo em elementos finitos é maior do que modelos em parâmetros contínuos ou concentrados, porém, para o primeiro caso uma modificação no modelo pode exigir uma complexa reformulação matemática, enquanto para o último caso seria difícil de modelar o posicionamento da pastilha e inserir molas de torção e linear. Considerando que o valor médio e desvio padrão ou variância são muito utilizados em cálculos estatísticos para fins de análise de incertezas, a intenção é estimar esses valores para função de resposta em frequência de saída de potência neste trabalho. Modelos para aproximação de média e variância, utilizando amostragens por Monte Carlo são utilizados em alguns estudos de análise de incertezas (POLES; LOVISON, 2009; BECK et al., 2015). No entanto, em geral, é necessário um grande número de amostras aleatórias para estimar adequadamente média e variância das quantidades de interesse, levando a um elevado custo computacional. Por isso, para modelos com alto custo para

avaliação das quantidades de interesse é interessante fazer uso de técnicas de aproximação de média e variância que utilizem o menor número de amostras possível, reduzindo o custo computacional.

Em estudos de coleta de energia com materiais piezelétricos, poucas pesquisas consideram análises de incertezas, o que pode tornar esse trabalho de grande contribuição científica. Outro ponto que contribui para o trabalho é a análise de técnicas de otimização, visto que a intenção é maximizar a energia coletada, devido à baixa magnitude disponível para conversão. Acrescentando que incertezas estão presentes em dispositivos de coleta de energia, a otimização deve ser simultânea, ou seja, maximizar a média e minimizar a dispersão da energia coletada, levando ao estudo de otimização multiobjetivo. A escolha imprecisa de algum método de otimização pode não convergir ou tomar um tempo relativamente alto para alcançar o valor final, mesmo com aproximação dos momentos estatísticos da resposta usando técnicas que necessitem do menor número possível de amostras aleatórias. Essas abordagens têm considerável carência de pesquisa científica considerando a coleta de energia com materiais piezelétricos.

Com relação à fixação do dispositivo na fonte de vibração, quando mal ajustada ou sujeita a incertezas, observa-se um importante efeito de dessintonização entre as frequências de excitação e natural do dispositivo, levando a perdas consideráveis de energia potencialmente coletável. Alguns trabalhos abordaram os efeitos de incertezas no engaste e identificação de valores de rigidez de molas equivalentes que tentam simular um engaste imperfeito (RITTO; SAMPAIO; CATALDO, 2008; PABST; HAGEDORN, 1995). Neste sentido, espera-se ser justificável o estudo do engaste ao simulá-lo por molas e incluir incertezas nestas, devido à insuficiência de outras abordagens relacionadas a projeto robusto e coleta de energia. Outro estudo justificável, é a inclusão de incertezas na camada adesiva da pastilha piezelétrica, já que também carece de abordagens desse ponto de vista.

Em relação aos dispositivos, busca-se fundamentar a análise ao escolher uma quantidade adequada de variáveis ou parâmetros de projeto com o intuito de verificar quais delas são mais relevantes e o efeito que ocasionam na melhoria do projeto. Com a melhoria da energia coletada e mitigação da variabilidade, é possível saber quais variáveis merecem investigação especial e quais podem ser desconsideradas após realizar a otimização do projeto.

1.6 **Objetivos**

O objetivo geral deste trabalho é apresentar técnicas e resultados para o projeto robusto de dispositivos piezelétricos coletores de energia sujeitos a incertezas paramétricas com base em compromissos adequados entre média e dispersão do desempenho na coleta de energia. Para isso, os objetivos específicos são:

- apresentar o modelo em elementos finitos utilizado no cálculo da energia potencialmente coletável para um dado conjunto de variáveis de projeto, parâmetros incertos e condições de operação;
- desenvolver setup experimental e obter resultados de ensaios experimentais com protótipos laboratoriais de modo a validar o modelo numérico e obter valores adequados de determinados parâmetros;
- estudar técnicas para estimativa de momentos estatísticos, como média e variância, das quantidades de interesse considerando tanto custo computacional requerido quanto precisão alcançada na estimativa;
- definir variáveis de projeto com a intenção de projetar diferentes dispositivos e verificar o efeito de cada uma na resposta final;
- realizar uma análise crítica de incertezas para parâmetros relevantes do problema como rigidez equivalente do engaste imperfeito, propriedades da camada adesiva, amortecimento efetivo e resistência elétrica equivalente;
- descrever e implementar técnicas de otimização multiobjetivo que se sejam apropriadas ao problema de coleta de energia sujeita a incertezas e ao modelo considerado;
- apresentar e discutir resultados, comparando os dispositivos projetados e as técnicas de aproximação de média e variância para o modelo em elementos finitos, bem como os métodos de otimização em relação à eficiência e o tempo de processamento computacional.

1.7 Contribuições Esperadas

Espera-se que, com o desenvolvimento da tese, seja possível escolher diferentes maneiras de se estimar média e variância do desempenho de um coletor piezelétrico de energia. Neste aspecto, tanto o grau de complexidade teórico como o esforço computacional para as estimativas dos momentos estatísticos são apresentados, dando opções de escolha ao analista para implementação em um problema de coleta de energia com materiais piezelétricos. Essas estimativas poderiam ser úteis não só para o estudo de coleta de energia, mas também para outras categorias de problemas.

Outro aspecto, será a discussão e o desenvolvimento de técnicas de otimização multiobjetivo, que poderão ter grande contribuição para problemas de coleta de energia com incertezas. Como se busca reduzir o custo computacional no projeto robusto de dispositivos de coleta de energia, por meio do estudo de técnicas de estimativa de momentos estatísticos e otimização multiobjetivo, essas análises também serão adequadas para uso em outras classes de problemas.

Espera-se também uma contribuição mais específica ao projeto de dispositivos coletores de energia sujeito a incertezas quanto à proposição de modelos estocásticos para parâmetros incertos relevantes do problema, como rigidez do engaste imperfeito, propriedades da camada adesiva, amortecimento efetivo e resistência elétrica equivalente, e suas implicações no desempenho na coleta de energia e seus momentos estatísticos.

O desenvolvimento matemático e adequação de um modelo em elementos finitos para o caso de coleta de energia, dispositivos piezelétricos ressonantes e projeto robusto, poderá também ser utilizado para o estudo de outros problemas similares como, por exemplo, o controle passivo de vibrações. O *setup* e as análises experimentais, assim como os diferentes dispositivos que foram construídos, para validação do modelo e identificação de parâmetros poderão ainda ser úteis em outros projetos futuros.

2 Estimativas para média e variância de variáveis aleatórias

2.1 Introdução

Com a intenção de se projetar dispositivos robustos para coleta de energia, estimativas para média e variância de variáveis aleatórias são apresentadas neste capítulo. Estas estimativas também permitem solucionar outros problemas relacionados a área de incertezas. Em relação à coleta de energia com viga engastada, as escolhas serão motivadas, principalmente, por questões de custo computacional, visto que os dispositivos são projetados em elementos finitos. Obtidas as estimativas de média e variância, métodos de otimização multiobjetivos podem ser utilizados para solucionar o problema de coleta de energia. Assim, os seguintes métodos serão abordados: aproximação de séries de Taylor de primeira ordem, simulação de Monte Carlo simples, simulação de Monte Carlo com amostragem por hipercubo latino e expansão em polinômios de caos.

2.2 Expansão em séries de Taylor

Dado um vetor aleatório $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ com n variáveis e função conjunta de probabilidade $f_{\mathbf{X}}$, a média e a variância de uma função $Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ são encontradas através das equações (2.1) e (2.2) por se utilizar a esperança matemática:

$$\begin{aligned} \mu_Y &= E(Y) = E[g(X_1, X_2, \dots, X_n)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, \dots, x_n) f_{X_1, X_2, \dots, X_n} \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= E(Y - \mu_Y)^2 = E[g(X_1, X_2, \dots, X_n) - \mu_Y]^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \{g(x_1, x_2, \dots, x_n) - \mu_Y\}^2 f_{X_1, X_2, \dots, X_n} \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dependendo do número de variáveis e da função analisada em determinado problema, as resoluções das equações (2.1) e (2.2) podem ser complicadas ou até mesmo inviáveis. Uma alternativa para resolver essas questões é expandir a função em séries de Taylor. Assim, dado os valores médios $\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}$, para cada uma das variáveis aleatórias, a expansão em séries de Taylor da função $Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ em torno do valor

médio será:

$$Y = g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) + \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_{X_i}) \frac{\partial g}{\partial X_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j}) \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} + \dots \quad (2.3)$$

Na equação (2.3), as derivadas são calculadas para o valor médio das variáveis aleatórias. Acrescentando, a equação (2.3) pode ser truncada considerando apenas os termos lineares, conduzindo a seguinte equação:

$$Y \simeq g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) + \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_{X_i}) \frac{\partial g}{\partial X_i} \quad (2.4)$$

A estimativa da média e variância da equação (2.4) pode ser encontrada ao se utilizar o operador esperança de ambos os lados da equação. Com a realização deste procedimento, encontram-se as equações (2.5) e (2.7), sendo que os detalhes do procedimento poderá ser encontrado em (ANG; TANG, 1975).

$$\mu_Y = E(Y) \simeq g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) \quad (2.5)$$

$$\sigma_Y^2 = E(Y - \mu_Y)^2 \simeq \sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2 \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2 + \sum_{i,j}^n \sum_{i \neq j} \rho_{ij} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \frac{\partial g}{\partial X_i} \frac{\partial g}{\partial X_j} \quad (2.6)$$

Nas equações anteriores, ρ_{ij} é o coeficiente de correlação entre as variáveis X_i e X_j , enquanto os termos σ_{X_i} e σ_{X_j} são valores de desvio padrão predeterminados. Para variáveis independentes e não correlacionadas, uma aproximação para a equação (2.6) é descrita como:

$$\sigma_Y^2 \simeq \sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2 \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2 \quad (2.7)$$

Caso a não linearidade das funções analisadas não seja muito acentuada e as variáveis aleatórias não tenham correlações, as equações (2.5) e (2.7) poderão apresentar valores satisfatórios (BENJAMIN; CORNELL, 2014). A média de um função através da equação (2.5) é interpretada como sendo o cálculo da função nos valores médios das variáveis aleatórias. Assim, para a média, o custo computacional é apenas a avaliação da função uma única vez usando os valores médios das variáveis aleatórias. No entanto, a equação (2.7) exige o cálculo de derivadas da função para cada variável aleatória. Para casos em que determinar as derivadas analiticamente seja complicado, recorre-se a aproximações numéricas como alternativa. O método das diferenças finitas pode ser aplicado para este

caso, porém iterações são realizadas, até que o erro da estimativa seja baixo. Portanto, um custo computacional será acrescentado, sendo devido à estimativa da variância.

Outra maneira de melhorar a aproximação do cálculo dos momentos estatísticos de uma função de variáveis aleatórias seria considerar o termo de segunda ordem na expansão de Taylor. Em (ANG; TANG, 1975) estas estimativas são apresentadas, sendo que derivadas de ordem mais altas aparecem. Esse procedimento leva a um aumento na complexidade da análise e a um maior custo computacional em relação à aproximação de primeira ordem.

2.3 Simulação de Monte Carlo

O método de Monte Carlo (MCS - *Monte Carlo Simulation*) geralmente utiliza um grande número de amostras aleatórias para alcançar valores próximos dos resultados exatos. Inicialmente, constrói-se um conjunto de amostragens (ou realizações) das variáveis aleatórias, obtidas experimentalmente ou por meio de uma modelagem estocástica, na qual uma determinada função densidade de probabilidade é assumida a priori em função das melhores informações disponíveis. Para cada vetor composto por amostras combinadas das variáveis aleatórias, a função de interesse (modelo computacional) é calculada, levando a um conjunto de realizações da função, as quais podem ser utilizadas para extrair estatísticas da função (como média, variância, histogramas, intervalos de confiança, etc). O método pode resolver um grande número de problemas e com diferentes categorias de equações, limitando-se somente por questões de custos computacionais. Isso é devido ao grande número de amostras que o método em geral precisa para garantir uma convergência satisfatória, levando a várias chamadas ou avaliações de funções. Embora o método geralmente tenha um alto custo computacional, os resultados alcançados podem servir de referências para outras técnicas, além do que para alguns problemas isso pode não ser um fator determinante.

Os valores de média e variância apresentados através das equações (2.1) e (2.2) podem ser estimados pelo método de Monte Carlo para uma amostra de tamanho N do vetor de variáveis aleatórias \mathbf{X} , $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}^{(i)}, i = 1, \dots, N\}$. Cada amostragem do vetor permite estimar um valor para a função objetivo, estabelecendo a seguinte descrição (POLES; LOVISON, 2009):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &:= (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}^{(N)} &:= (x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, \dots, x_n^{(N)}) \\ y^{(j)} &:= g(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}), \quad j = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Obtidos os valores das funções para cada amostragem, a média e a variância para um vetor $Y = \{y^{(1)}, \dots, y^{(N)}\}$ são estimadas pelas equações (2.8) e (2.9), respectivamente, como segue:

$$\mu_Y \approx \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y^{(j)} \quad (2.8)$$

$$\sigma_Y^2 \approx \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (y^{(j)} - \mu_Y)^2 \quad (2.9)$$

Conforme o número de amostras N aumenta, a média e a variância tendem a apresentar valores mais próximos dos resultados exatos. Além disso, as equações (2.8) e (2.9) são fáceis de implementar, sendo que a limitação é o custo computacional, dado que aumentar N requer mais avaliações da função objetivo. Para esclarecer, considere a variância de $\bar{y} - \mu_Y$, de modo a verificar a variabilidade do estimador \bar{y} , conforme segue:

$$\begin{aligned} Var(\bar{y} - \mu_Y) &= Var(\bar{y}) - Var(\mu_Y) = \\ Var(\bar{y}) &= Var\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y^{(j)}\right) = \frac{1}{N^2} Var\left(\sum_{j=1}^N y^{(j)}\right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

No método de Monte Carlo, as amostragens randômicas são consideradas independentes. Por isso, a variância da somatória de $y^{(j)}$ é dada pela soma das respectivas variâncias, ou seja:

$$Var(\bar{y} - \mu_Y) = \frac{1}{N^2} Var\left(\sum_{j=1}^N y^{(j)}\right) = \frac{1}{N^2} N \sigma_y^2 = \frac{\sigma_y^2}{N} \quad (2.11)$$

Esse resultado tem relação com a variância $\sigma_{\bar{y}}^2$, tal que:

$$\sigma_{\bar{y}}^2 \equiv Var(\bar{y} - \mu_Y) = \frac{1}{N^2} N \sigma_y^2 = \frac{\sigma_y^2}{N} \quad (2.12)$$

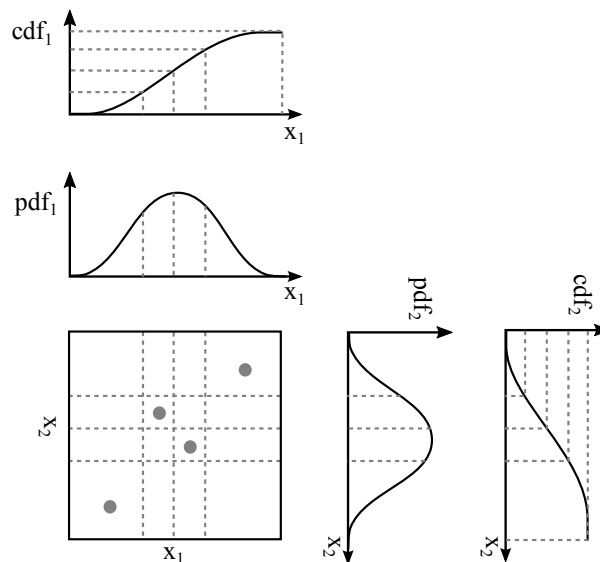
Nota-se da equação anterior, que o erro de estimativa para o desvio padrão diminui conforme o aumento de N , segundo um fator de \sqrt{N} , implicando que diminuir a variabilidade 10 vezes para o estimador da média \bar{y} requer um aumento de 100 vezes no número de amostras. Esse fato mostra como o método MCS pode tomar horas de processamento, dependendo do problema abordado e da precisão almejada da resposta.

2.4 Amostragem por hipercubo latino

A simulação direta de Monte Carlo tem como desvantagem a utilização de grande número de amostras para se atingir resultados satisfatórios. No entanto, a variância da resposta pode ser melhorada utilizando técnicas de geração e controle de amostras, conduzindo a menos chamadas da função objetivo. Neste sentido, a amostragem por hipercubo latino (*Latin Hypercube Sampling - LHS*) se caracteriza por selecionar amostras específicas para serem utilizadas na estimativa da resposta e reduzir o esforço computacional.

Na estatística, um quadrado latino é caracterizado por ter seus lados divididos em partes iguais, formando um *grid*, sendo que em cada linha e coluna existirá apenas uma amostra. Para o caso de um hipercubo latino, existirá apenas uma amostra no eixo alinhado ao hiperplano que o contém. O domínio de cada amostra é então dividido em faixas de mesma probabilidade, de maneira que cada uma dessas faixas é amostrada uma única vez. Assim, se existem M variáveis aleatórias, serão obtidas N amostras, caso o domínio de cada variável seja dividida em N partes iguais. Na Fig. 3, está representado um exemplo com duas variáveis aleatórias x_1 e x_2 com distribuições Gaussianas. O domínio de cada variável aleatória foi dividido em faixas de mesma probabilidade, conforme visto para cada função acumulada de probabilidade (*cumulative density function - cdf*) no eixo vertical. Uma única amostra estará presente em cada linha e coluna do quadrado, gerado pela divisão do domínio das variáveis, refletindo em uma única amostragem para cada faixa de probabilidade.

Figura 3 – Divisão do domínio de duas variáveis aleatórias em faixas equiprováveis



Em relação a uma função acumulada de probabilidade $F_X(x)$, esta pode ser definida conforme a equação (2.13):

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx \quad (2.13)$$

em que $f_X(x)$ é conhecida como função densidade de probabilidade (*probability density function* -pdf). A $F_X(x)$ mostrada em (2.13) representa a probabilidade da variável aleatória X assumir valores menores ou iguais a x . A função $f_X(x)$ é encontrada tomando a derivada de $F_X(x)$ com relação a x , conforme a seguinte equação:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (2.14)$$

Gráficos representativos de funções acumuladas e funções de densidade de probabilidade são mostrados na Fig. 3. A função acumulada ficou com faixas de probabilidade igualmente espaçadas, permitindo a geração de amostras por LHS. A metodologia para se obter as amostras via LHS consiste em gerar uma primeira matriz \mathbf{P} de tamanho $(N \times M)$, em que cada coluna será uma permutação aleatória com números $1, 2, \dots, M$ e uma segunda \mathbf{R} de mesma dimensão, sendo os componentes formados por números aleatórios uniformemente distribuídos entre 0 e 1. Dada as matrizes, encontra-se outra matriz pela equação (OLSSON; SANDBERG; DAHLBLOM, 2003):

$$\mathbf{S} = [s_{ij}]_{N \times M} = \frac{1}{N}(\mathbf{P} - \mathbf{R}) \quad (2.15)$$

Por fim, as amostras são geradas com base em cada elemento de \mathbf{S} , s_{ij} tal que:

$$x_{ij} = \{F_{X_j}^{-1}(s_{ij})\}_{j=1, \dots, N} \quad (2.16)$$

em que $F_{X_j}^{-1}$ representa a inversa da função acumulada de probabilidade para X_j .

O próximo procedimento do método consiste em calcular a média e variância utilizando as equações (2.8) e (2.9). Em (POLES; LOVISON, 2009) é descrito que para reduzir o erro do estimador da média, utilizando a técnica LHS, da ordem 10 vezes, é suficiente tomar um número de amostra 10 vezes maior, refletindo um ganho razoável em relação ao método MCS direto.

2.5 Expansão em polinômios de caos

Utilizando-se de um modelo computacional \mathcal{M} , é possível obter a quantidade de interesse y , neste caso sendo a potência coletada para o presente trabalho, ao definir o vetor de parâmetros $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}^T$ e utilizar a equação a seguir:

$$y = \mathcal{M}(\mathbf{x}) \quad (2.17)$$

No caso de se obter informações estatísticas sobre os parâmetros do modelo, como tipo de distribuição de probabilidade, valores médio e dispersão relativa, pode-se construir

o modelo probabilístico e obter o vetor de variável aleatória \mathbf{X} , assim como a quantidade de interesse será uma variável aleatória, por consequência, tal que:

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{X}) \quad (2.18)$$

Por isso, ao se determinar as variáveis aleatórias e realizar a quantificação de incertezas, tendo o modelo computacional, será possível se obter, além da resposta, os momentos estatísticos da quantidade de interesse analisada. Assumindo que Y tenha uma variância finita, as variáveis aleatórias pertence ao espaço de Hilbert de segunda ordem e pode-se escrever (2.18) como (SUDRET, 2014):

$$Y = \sum_{j=0}^{\infty} c_j Z_j \quad (2.19)$$

em que $\{Z_j\}_{j=0}^{\infty}$ constitui um conjunto numerável de variáveis aleatórias, enquanto $\{c_j\}_{j=0}^{\infty}$ são os coeficientes do polinômio. Além disso, $\{Z_j\}_{j=0}^{\infty}$ formam a base do espaço de Hilbert, tal que para o caos polinomial a base é formada por polinômios ortonormais multivariados em relação ao vetor \mathbf{X} e escreve-se como $Z_j = \Psi(\mathbf{X})$. Assim, a expansão em polinômio de caos (*Polynomial Chaos Expansions* - PCE) consiste em uma série de termos composta por coeficientes e bases ortonormais em relação às variáveis aleatórias. A PCE permite realizar a metamodelagem computacional e obter valores de média e variância do modelo estudado.

2.5.1 Construção da Base do Polinômio

A explanação da construção da PCE baseia no desenvolvimento estabelecido por (SUDRET, 2014). Primeiramente, é construída a base, partindo do vetor de variáveis independentes com componentes $\{X_i, i = 1, \dots, M\}$, tal que a função conjunta de probabilidade é descrita como:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^M f_{X_i}(x_i), \quad x_i \in \mathcal{D}_{X_i} \quad (2.20)$$

em que \mathcal{D}_{X_i} é o suporte da variável aleatória X_i e f_{X_i} a correspondente função densidade de probabilidade marginal. Assim, para cada variável X_i e duas funções $\pi_1, \pi_2: x \in \mathcal{D}_{X_i} \mapsto \mathbb{R}$ a seguinte integral é definida:

$$\langle \pi_1, \pi_2 \rangle_i = \int_{\mathcal{D}_{X_i}} \pi_1(x) \pi_2(x) f_{X_i}(x) dx \quad (2.21)$$

Observando a equação (2.21), nota-se que a integral é o valor esperado entre $\pi_1(X_i)$ e $\pi_2(X_i)$, ou seja, $\mathbb{E}[\pi_1(X_i) \pi_2(X_i)]$. Para obter a ortogonalidade entre as funções $\pi_1(X_i)$ e

$\pi_2(X_i)$ em relação à medida de probabilidade $\mathbb{P}(dx) = f_{X_i}(x)dx$, o valor esperado deverá ser nulo na equação (2.21). Generalizando, escreve-se o seguinte produto interno:

$$\langle \pi_j^{(i)}, \pi_k^{(i)} \rangle_i = \mathbb{E}[\pi_j^{(i)}(X_i)\pi_k^{(i)}(X_i)] = \int_{D_X} \pi_j^{(i)}(x)\pi_k^{(i)}(x)f_{X_i}(x)dx = a_j^i \delta_{jk} \quad (2.22)$$

em que $\pi_j^{(i)}$ e $\pi_k^{(i)}$ são bases ortogonais com relação à medida de probabilidade, sendo j e k naturais que determinam o grau dos polinômios, e δ_{jk} o delta de Kronecker. Duas situações são possíveis: se $j \neq k$, tem-se $\delta_{jk} = 0$, enquanto para $j = k$, tem-se $\delta_{jk} = 1$. Para o caso unitário, escreve-se a_j^i como a norma quadrada de $\pi_j^{(i)}$, da seguinte forma:

$$a_j^i \stackrel{\text{def}}{=} \|\pi_j^{(i)}\|_i^2 = \langle \pi_j^{(i)}, \pi_j^{(i)} \rangle \quad (2.23)$$

A aplicação do processo de Gram-Schmidt a partir da base de monômios permite encontrar os polinômios ortonormais para diferentes categorias de distribuição de probabilidade. Definindo a família ortonormal $\{\Psi_j^{(i)}\}_{j=0}^\infty$, escreve-se:

$$\psi_j^{(i)} = \pi(i)_j / \sqrt{a_j^i} \quad i = 1, \dots, M \quad j \in \mathbb{N} \quad (2.24)$$

Os polinômios obtidos podem compor uma família de polinômios de Hermite, para variáveis com distribuição Gaussianas; polinômios de Legendre, para variáveis com distribuição uniforme; polinômios de Laguerre, para variáveis com distribuição Gama, etc. Portanto, será possível encontrar um metamodelo e/ou os momentos estatísticos para um modelo computacional, dada as distribuições de probabilidade das variáveis.

Na sequência, para analisar vários parâmetros aleatórios de um problema, define-se o multi-índice $\boldsymbol{\varrho} \in \mathbb{N}^M$, que é uma lista de números naturais com tamanho igual ao número M de variáveis, escrito como segue:

$$\boldsymbol{\varrho} = (\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_M), \quad \varrho_i \in \mathbb{N} \quad (2.25)$$

A lista é formada por uma combinação de números naturais, cuja soma deve ser menor ou igual ao grau do polinômio. Por definição, a soma dos índices da lista é dada como:

$$\|\boldsymbol{\varrho}\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^M |\varrho_i|. \quad (2.26)$$

Para exemplificar, com um polinômio de grau 2 e duas variáveis aleatórias, os seguintes multi-índices $\boldsymbol{\varrho}$ podem ser formados: (0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2). Dois termos são esperados na lista, visto que existem duas variáveis aleatórias, com os possíveis

valores 0, 1 ou 2, já que 2 é o grau máximo do polinômio e a soma entre os termos deverá ser menor que o grau máximo.

Para cada multi-índice encontrado, associa-se o seguinte polinômio multivariado:

$$\Psi_{\boldsymbol{\varrho}}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^M \psi_{\varrho_i}^{(i)}(x_i) \quad (2.27)$$

Como se nota através da equação (2.27), o polinômio multivariado é o produto de polinômios univariados, que estão relacionados a cada variável aleatória e ao respectivo índice da lista de naturais. Então, tomando o valor esperado de dois polinômios $\Psi_{\boldsymbol{\varrho}}(\mathbf{X})$ e $\Psi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{X})$ e baseado na equação (2.22), pode-se escrever:

$$\mathbb{E}[\Psi_{\boldsymbol{\varrho}}(\mathbf{X})\Psi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{X})] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{D_{\mathbf{X}_i}} \Psi_{\boldsymbol{\varrho}}(\mathbf{x})\Psi_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d_{\mathbf{x}} = \delta_{\boldsymbol{\varrho}\boldsymbol{\nu}} \quad \forall \boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{N}^M \quad (2.28)$$

Se $\delta_{\boldsymbol{\varrho}\boldsymbol{\nu}} = 1$ tem-se $\boldsymbol{\varrho} = \boldsymbol{\nu}$, enquanto para $\boldsymbol{\varrho} \neq \boldsymbol{\nu}$, o valor do delta de Kronecker será nulo. Por consequência, o conjunto de polinômios multi-variados serão ortogonais e formarão uma base do espaço de Hilbert, resultando em:

$$Y = \sum_{\boldsymbol{\varrho} \in \mathbb{N}^M} c_{\boldsymbol{\varrho}} \Psi_{\boldsymbol{\varrho}}(\mathbf{X}) \quad (2.29)$$

A equação (2.29) deverá ser truncada, com base no grau do polinômio escolhido, para utilização prática. Isso permitirá obter uma aproximação para o modelo computacional através da expansão de caos polinomial.

2.5.2 Truncagem do polinômio

O grau da expansão polinomial representada pela equação (2.29) será dado pelo maior grau entre os polinômios multivariados $\Psi_{\boldsymbol{\varrho}}(\mathbf{X})$, que poderá ser determinado através da equação (2.26). Como vários multi-índices podem ser obtidos, desde que a soma dos termos seja menor ou igual ao grau do polinômio escolhido, um conjunto $\mathcal{A}^{M,p}$ será formado e representado como:

$$\mathcal{A}^{M,p} = \{\boldsymbol{\varrho} \in \mathbb{N}^M \mid |\boldsymbol{\varrho}| \leq p\} \quad (2.30)$$

em que p representa o grau do polinômio escolhido e M o número de variáveis aleatórias.

O número das várias combinações de termos geradas, formando os multi-índices, podem ser determinadas através da cardinalidade do conjunto $\mathcal{A}^{M,p}$, descrita pelo seguinte

binomial:

$$\text{card } \mathcal{A}^{M,p} = \binom{M+p}{p} = \frac{(M+p)!}{M!p!} \quad (2.31)$$

Com isso determina-se o número de polinômios multivariados, visto que este número está associado a quantidade de multi-índices, que comporão a expansão polinomial.

2.5.3 Transformação isoprobabilística

Na construção da equação (2.28), as variáveis aleatórias são consideradas normalizadas de acordo com determinada categoria de distribuição de probabilidade. Assim, para utilização da equação, geralmente, necessita-se realizar uma transformação isoprobabilística, visto que as variáveis não costumam aparecer normalizadas. Para um vetor de variáveis aleatórias \mathbf{X} , realiza-se a transformação conforme segue:

$$\mathbf{X} = \mathcal{T}(\mathbf{U}) \quad (2.32)$$

A partir dessa transformação, obtém-se o vetor normalizado \mathbf{U} , permitindo associar ao modelo computacional a PCE na base normalizada, através da seguinte equação:

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{X}) = \sum_{\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{N}^M} c_{\boldsymbol{\rho}} \Psi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{U}) \quad (2.33)$$

Uma exemplificação pode ser dada para a utilização das variáveis na base de Hermite, considerando a distribuição Gaussiana. Nesse caso, a transformação isoprobabilística para cada variável conduziria a $X_i = \mu_i + \sigma_i U_i$, em que μ_i e σ_i são a média e desvio padrão, respectivamente, associados a variável aleatória X_i . Portanto, através da manipulação da equação anterior, determina-se o valor de U_i que será utilizado na expansão. Para outras categorias de distribuições, aplica-se a transformação isoprobabilística, encontrando as variáveis na base normalizada, com raciocínio semelhante.

2.5.4 Estimativa dos coeficientes do polinômio e dos momentos

A determinação dos coeficientes pode ser realizada utilizando métodos de quadraturas ou minimização do erro através de mínimos quadrados (SUDRET, 2014). No presente trabalho, os coeficientes são determinados por meio da última estratégia. Neste caso, a minimização do erro irá ocorrer entre o modelo computacional e o metamodelo em

polinômio de caos. Assim, dado um determinado erro ε , o modelo computacional estará relacionado ao metamodelo pela seguinte equação:

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{X}) = \sum_{\varrho \in \mathcal{A}} c_{\varrho} \Psi_{\varrho}(\mathbf{X}) + \epsilon \quad (2.34)$$

Tomando o valor esperado do erro quadrado chega-se a:

$$\mathbb{E}[\epsilon^2] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[\left(\mathcal{M}(\mathbf{X}) - \sum_{\varrho \in \mathcal{A}} c_{\varrho} \Psi_{\varrho}(\mathbf{X}) \right)^2 \right] \quad (2.35)$$

Observando a última equação verifica-se que os coeficientes serão os valores que minimizam o erro quadrado, tal que:

$$\mathbf{c} = \arg \min_{\mathbf{c} \in \mathcal{R}^{\text{card}, \mathcal{A}}} \mathbb{E} \left[\left(\mathcal{M}(\mathbf{X}) - \sum_{\varrho \in \mathcal{A}} c_{\varrho} \Psi_{\varrho}(\mathbf{X}) \right)^2 \right] \quad (2.36)$$

O número de bases ortogonais na PCE, calculada por meio da cardinalidade do conjunto \mathcal{A} , será idêntico ao número de coeficientes a determinar, o que reflete em $y \in \mathcal{R}^{\text{card}, \mathcal{A}}$. Além disso, com o operador valor esperado utilizado na equação (2.36), uma expressão que estimará y é dada por:

$$\hat{\mathbf{c}} = \arg \min_{\mathbf{c} \in \mathcal{R}^{\text{card}, \mathcal{A}}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \sum_{\varrho \in \mathcal{A}} c_{\varrho} \Psi_{\varrho}(\mathbf{x}^{(i)}) \right)^2 \quad (2.37)$$

A estimativa do modelo computacional pela equação (2.37) é realizada com base em um conjunto de pontos de amostragens $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}^{(i)}, i = 1, \dots, n\}$, que poderão ser obtidos por diferentes técnicas como: amostragem via MCS, LHS ou sequências de Sobol. O critério para encontrar o número de amostras é baseado na cardinalidade do conjunto \mathcal{A} , recomendado-se de duas a três vezes esse valor. Assim, as várias estimativas para o modelo computacional serão armazenadas no vetor definido como:

$$\mathcal{Y} = \{y^{(1)} = M(\mathbf{x}^{(1)}), \dots, y^{(n)} = M(\mathbf{x}^{(n)})\}^T \quad (2.38)$$

O passo seguinte consiste em utilizar a base ortogonal para o conjunto de pontos amostrados $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}^{(i)}, i = 1, \dots, n\}$, conduzindo ao conjunto \mathbf{A} descrito a seguir:

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{A}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_j(\mathbf{x}^{(i)}), i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, \text{card}(\mathcal{A})\} \quad (2.39)$$

Após a determinação do vetor \mathcal{Y} e da matriz \mathbf{A} , encontra-se a solução para a equação (2.37), que será dada por:

$$\hat{\mathbf{c}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathcal{Y} \quad (2.40)$$

Com a estimativa da base ortogonal e os coeficientes da PCE, o problema para o metamodelo está solucionado, sendo que a resposta é computada por:

$$\hat{Y} = \mathcal{M}^{PC}(\mathbf{X}) = \sum_{\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{A}} \hat{c}_{\boldsymbol{\rho}} \Psi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{X}) \quad (2.41)$$

Os coeficientes estimados também permitem obter a média e variância, tal que a média será o primeiro coeficiente estimado do metamodelo, ou seja:

$$\mu_{\hat{Y}} = \mathbb{E}[\hat{Y}] = \mathbb{E}\left[\sum_{\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{A}} \hat{c}_{\boldsymbol{\rho}} \Psi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{X})\right] = c_0 \quad (2.42)$$

A variância estará relacionada a soma dos quadrados dos outros coeficientes estimados, conforme a seguinte equação:

$$\sigma_{\hat{Y}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{Var}[\hat{Y}] = \mathbb{E}\left[(\hat{Y} - c_0)^2\right] = \sum_{\substack{\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{A} \\ \boldsymbol{\rho} \neq \mathbf{0}}} \hat{c}_{\boldsymbol{\rho}}^2 \quad (2.43)$$

Para o problema de coleta de energia, a média e variância são estimadas conforme equação (2.42) e equação (2.43), utilizando as técnicas de MCS e LHS para estimativa dos coeficientes. O número de amostras necessárias para esse procedimento será baseado na cardinalidade do conjunto \mathcal{A} , conforme descrito anteriormente.

Neste capítulo, foram apresentadas as técnicas para estimativa de média e variância através de diferentes métodos. A partir disso, poderia ser calculada a dispersão relativa δ_Y para uma análise mais minuciosa do problema com parâmetros incertos. Assim sendo, a formulação é expressa como uma relação entre o desvio padrão e a média, como segue:

$$\delta_Y = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y} \quad (2.44)$$

Do exposto, os resultados alcançados para média, variância e dispersão relativa, utilizando a PCE e as outras técnicas deverão ser comparados tanto em questão de exatidão do valor quanto ao esforço computacional.

3 Otimização Multiobjetivo

3.1 Introdução

A intenção deste capítulo é abordar os conceitos fundamentais de otimização, para uma ou mais funções, constituindo o caso multiobjetivo, apresentando os métodos usados no problema de coleta de energia. Para otimização de uma única função, emprega-se no trabalho o algoritmo genético (AG), que se baseia na metaheurística e conceitos evolutivos. Quanto aos métodos de otimização multiobjetivo, uma diversidade de opções pode ser encontrada na literatura, as quais serão referenciadas. Um método mono-objetivo equivalente para Problemas de Otimização Multiobjetivo (POMO) e outro heurístico baseado em algoritmo genético serão apresentados e empregados no projeto dos dispositivos. Os algoritmos são conhecidos como *Compromise Programming* (CP) e *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGA-II). A escolha dos algoritmos é baseada na praticidade para resolução do problema de coleta de energia, dado que resolvem funções convexas ou côncavas e fornecem um bom número de soluções na convergência, como será abordado. Diferente de problemas de otimização com um objetivo, em que a solução é um ponto ou vetor que minimiza uma função, as soluções dos POMO estão localizadas em uma curva de Pareto. Portanto, as soluções podem ser diversas e um tomador de decisões escolherá uma delas *a posteriori* no NSGA-II, baseando-se em critérios subjetivos ou pré-estabelecidos, ou modificando um fator de ponderação no método CP. Para os métodos citados, a partir dos casos gerais de otimização de funções objetivo, serão mostrados os casos particulares do problema de coleta de energia, em que pretende-se maximizar a média μ_Y e minimizar o desvio padrão σ_Y ou dispersão relativa δ_Y da amplitude da FRF de saída de potência. Assim, nas seções seguintes, os temas sobre otimização, algoritmo genético, POMO, Pareto, métodos CP e NSGA-II serão apresentados e discutidos com mais detalhes.

3.2 Otimização

Com a intenção de melhorar a qualidade de projetos, otimizações são aplicadas em muitos problemas de engenharia. As variáveis resultantes ao solucionar um problema aplicando essa técnica são adequadas no sentido de não serem superestimadas, por segurança, ou escolhidas por algum processo subjetivo, por simplicidade. O conceito básico em otimização é encontrar parâmetros que minimizem ou maximizem uma função objetivo considerando restrições de projeto. Em razão disso, o problema pode ser expresso da

seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 &\text{encontrar} && \mathbf{x}_p \\
 &\text{minimizando} && f(\mathbf{x}_p) \\
 &\text{sujeito a} && h_j(\mathbf{x}_p) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \\
 &&& s_l(\mathbf{x}_p) = 0 \quad l = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que \mathbf{x}_p é o vetor para variáveis de projeto, $f(\mathbf{x}_p)$ a função objetivo a ser minimizada, $h_j(\mathbf{x}_p)$ a j -ésima inequação de restrição e $s_l(\mathbf{x}_p)$ a l -ésima equação de restrição. Assim, o problema de otimização mencionado é classificado como restrito e solucionado usando técnicas de programação matemática dependentes do tipo da função objetivo. Algumas técnicas de otimização clássicas com diferentes números de variáveis, equações e inequações de restrições são encontradas em (RAO, 2009). Por outro lado, o problema apresentado na equação (3.1) pode ser mudado para uma otimização irrestrita usando métodos de penalização de funções. Em tal caso a equação (3.1) toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 &\text{encotrar} && \mathbf{x}_p \\
 &\text{minimizando} && q(\mathbf{x}_p) = f(\mathbf{x}_p) + \sum_{j=1}^m r_j \langle h_j(\mathbf{x}_p) \rangle^2 + \sum_{l=1}^n R_l (s_l(\mathbf{x}_p))^2
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

em que $q(\mathbf{x}_p)$ é a nova função a ser minimizada, enquanto r_j e R_l são conhecidos como parâmetros de penalização relacionados a j -ésima inequação e a l -ésima equação de restrição, respectivamente. Geralmente, melhores resultados são encontrados usando valores elevados para os parâmetros de penalidade, porém com aumento do custo computacional, o que exige correta escolha para estes parâmetros. O termo $\langle h_j(\mathbf{x}_p) \rangle$ poderá ser expresso como:

$$\langle h_j(\mathbf{x}_p) \rangle = \begin{cases} h_j(\mathbf{x}_p), & \text{se } h_j(\mathbf{x}_p) > 0 \\ 0, & \text{se } h_j(\mathbf{x}_p) \leq 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Por conveniência, o problema mencionado através da equação (3.2) pode ser usado com técnicas meta-heurísticas visando encontrar o mínimo ou máximo valor para determinada função na metodologia de otimização. Em casos em que se considera a maximização do problema, basta minimizar o valor negativo da função objetivo para encontrar as variáveis de projeto. Neste trabalho, o algoritmo genético será empregado para otimização de dispositivos coletores de energia, junto a outra técnica que será apresentada. Assim, se houver restrições no problema, basta transformá-lo em um caso irrestrito como o apresentado nesta seção.

3.2.1 Otimização meta-heurística via algoritmo genético

Algumas funções são descontínuas, não convexas e/ou possuem variáveis discretas. Neste caso, os algoritmos meta-heurísticos podem ser interessantes, visto que técnicas clássicas de programação não-linear fundamentadas em equacionamentos analíticos terão limitações no sentido de encontrar o ótimo global. Por ser um algoritmo baseado na meta-heurística, os resultados encontrados geralmente são próximos ao valor exato (RAO, 2009). Algumas características do algoritmo são listadas como segue:

- É embasado nos conceitos de evolução biológica segundo a teoria de Darwin;
- É faseado de acordo com critérios da genética e seleção natural, ou seja, fases de seleção, cruzamento (*crossover*) e mutação;
- Não ocorre a aplicação de derivadas como nos métodos clássicos, apenas o valor da função objetivo é utilizado;
- O conjunto de variáveis de projeto formaram os indivíduos que são representados por cromossomos;
- O algoritmo genético buscará melhores valores para uma função de ajuste, a qual estará relacionada à função objetivo a ser minimizada, considerando um vetor de projeto \mathbf{x}_p ;
- O algoritmo inicia com uma população aleatória e cada vetor é avaliado, sendo atribuído um valor para a função de ajuste, relacionada a cada vetor;
- Os operadores de seleção, cruzamento e mutação são utilizados neste estágio, gerando uma nova população;
- A nova população é testada com respeito à função de ajuste para verificação do processo de convergência;
- Os três itens anteriores compõem uma geração para o algoritmo;
- Uns dos critérios utilizados para finalização do algoritmo pode ser o número de iterações.

As etapas ou operadores de seleção, cruzamento e mutação são descritas na sequência A, B e C, respectivamente, abaixo.

A) **Seleção.** O operador de seleção classifica os indivíduos (*strings* ou vetores de projeto) mais aptos, baseando-se no conceito de sobrevivência do mais forte. Através da verificação do valor da função de ajuste, os indivíduos mais aptos são selecionados para compor uma população intermediária, enquanto os menos aptos tendem a desaparecer.

Para isso, o uso do conceito probabilístico pode ser utilizado na seleção das *strings*. A relação entre o valor da função de ajuste de um determinado indivíduo e a soma das funções de ajuste de todos os indivíduos da população fornecerá a probabilidade de se escolher o referido indivíduo para compor a população intermediária. Assim, para uma população de n indivíduos, aqueles com maiores valores de probabilidade serão escolhidos mais vezes no processo aleatório. A seleção por roleta, em que cada parte da roleta representará a probabilidade da escolha de um indivíduo, é utilizada. Com um ponteiro, escolhe-se quais partes da roleta serão selecionados girando-a n vezes. As fatias da roleta com maiores valores serão selecionadas mais vezes, certificando a escolha dos indivíduos mais aptos.

B) **Cruzamento.** Após a etapa de seleção, os indivíduos intermediários sofrem o processo de cruzamento. Para dois indivíduos selecionados, ocorre a combinação entre os cromossomos, trocando material genético e gerando filhos, que são inseridos na população. Existem diversas maneiras ou operadores de cruzamento dos cromossomos, como por ponto simples, multiponto, uniforme e aritmético (DRÉO et al., 2006; SILVA, 2011). Os novos indivíduos poderão gerar valores melhores para a função de ajuste e assim serem escolhidas para compor a nova população. Em caso que as *strings* gerem piores valores de funções, elas tenderão a desaparecer no processo de seleção. Por isso é interessante não utilizar toda a população para o processo de cruzamento, mas apenas uma parcela.

C) **Mutação.** Na mutação ocorre a alteração de alguns indivíduos da população, fazendo com que possam ter uma melhor resposta diante da função objetivo. Como no cruzamento, existem diversos tipos de operadores de mutação, os quais acrescentam pequenas quantidades de valores aleatórios aos indivíduos, no caso destes serem representados em números reais, escolhidos respeitando a probabilidade de mutação. Alguns exemplos de operadores de mutação para indivíduos com estes casos são o uniforme e o gaussiano (DRÉO et al., 2006). Para o último operador, acrescenta-se a cada indivíduo selecionado valores aleatório com distribuição normal $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, ou seja, com média zero e desvio padrão σ . Por outro lado, se os números forem representados na forma binária, uma dada probabilidade é estipulada e um número aleatório entre 0 e 1 é gerado, com a finalidade de mudar ou não determinando bit do indivíduo selecionado. Caso o número gerado seja menor que a probabilidade especificada, muda-se o bit considerado. Ainda, a mutação pode ocorrer em único local ou mais bits do indivíduo, respeitando o critério de probabilidade estabelecido. Como no cruzamento, caso um pior indivíduo seja gerado, a tendência será o seu desaparecimento no processo de seleção.

3.3 Problemas de otimização multiobjetivo (POMO)

Um problema de otimização multiobjetivo é exposto matematicamente conforme o posicionamento seguinte ((MARLER; ARORA, 2004)):

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & \mathbf{J}(\mathbf{x}_p) = [J_1(\mathbf{x}_p), J_2(\mathbf{x}_p), \dots, J_k(\mathbf{x}_p)]^T \\ \text{sujeito a } & h_j(\mathbf{x}_p) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ & s_l(\mathbf{x}_p) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, e, \end{aligned} \quad (3.4)$$

em que k é o número de funções com objetivo único, enquanto m e e são os números de inequações e equações de restrições, respectivamente. O vetor $\mathbf{x}_p \in \mathbb{R}^n$ representa as variáveis de projeto ou decisão. $\mathbf{J}(\mathbf{x}_p) \in \mathbb{R}^k$ é o vetor de funções objetivo ou funções custo $J_i(\mathbf{x}_p) : \mathbb{R}^n \rightarrow R$.

Define-se o espaço de decisão ou espaço de projeto factível \mathbf{X}_p como sendo o conjunto $\{\mathbf{x}_p | h_j(\mathbf{x}_p) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m; \text{ e } s_l(\mathbf{x}_p) = 0, l = 1, 2, \dots, e\}$. O espaço custo ou espaço de critério factível \mathbf{Z}_c é o conjunto $\{\mathbf{J}(\mathbf{x}_p) | \mathbf{x}_p \in \mathbf{X}_p\}$, com pontos factíveis e possíveis. Neste caso, os pontos respeitam as restrições impostas, ou seja, são factíveis e cada ponto do espaço de projeto mapeia um ponto no espaço de critério, ou seja, são possíveis.

3.4 Conceitos fundamentais e critério de Pareto

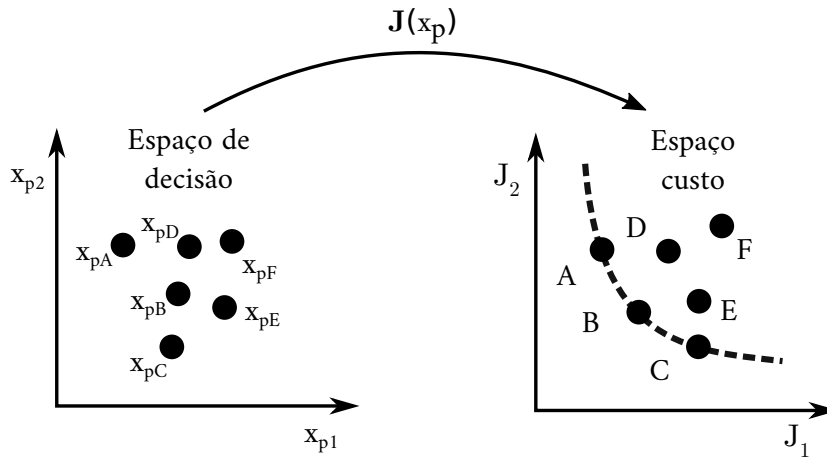
Definição 1. Ótimo de Pareto: “Um ponto $\mathbf{x}_p^* \in \mathbf{X}_p$ é um ótimo de Pareto se não existe outro ponto, $\mathbf{x}_p \in \mathbf{X}_p$, tal que $\mathbf{J}(\mathbf{x}_p) \leq \mathbf{J}(\mathbf{x}_p^*)$ e $J_i(\mathbf{x}_p) \leq J_i(\mathbf{x}_p^*)$ para, pelo menos, uma função.” (MARLER; ARORA, 2004)

Definição 2. Ponto Eficiente: “Um ponto $\mathbf{x}_p^* \in \mathbf{X}_p$ é eficiente se não existe outro ponto, $\mathbf{x}_p \in \mathbf{X}_p$, tal que $\mathbf{J}(\mathbf{x}_p) \leq \mathbf{J}(\mathbf{x}_p^*)$ com, pelo menos, uma função $J_i(\mathbf{x}_p) \leq J_i(\mathbf{x}_p^*)$. Caso contrário, \mathbf{x}_p^* é ineficiente.” (MARLER; ARORA, 2004)

Definição 3. Pontos Dominados e Não Dominados: “Um vetor de funções objetivo, $\mathbf{J}(\mathbf{x}_p^*) \in \mathbf{Z}_c$ é não dominado se não existe outro vetor, $\mathbf{J}(\mathbf{x}_p) \in \mathbf{Z}_c$, tal que $\mathbf{J}(\mathbf{x}_p) \leq \mathbf{J}(\mathbf{x}_p^*)$ com, pelo menos, um $J_i(\mathbf{x}_p) \leq J_i(\mathbf{x}_p^*)$. Caso contrário, $\mathbf{J}(\mathbf{x}_p)$ é dominado.” (MARLER; ARORA, 2004)

Para exemplificar as definições, considere os eixos coordenados x_{p1} e x_{p2} , para o espaço de decisão, e as funções J_1 e J_2 , para o espaço custo, além da ilustração de alguns pontos, no eixo cartesiano em duas dimensões da Fig. 4. Com relação ao conceito de dominância, pode ser notado que o ponto F é dominado pelos demais, já que as funções nesse ponto possuem os maiores valores, sendo que x_{pF} é ineficiente. Os pontos A e B são não dominados com respeito a D , pois A e B possuem um menor valor para J_1 analisando D , além de B ter um menor valor para J_2 . Assim, x_{pA} e x_{pB} são eficientes

Figura 4 – Espaço de decisão e espaço custo em duas dimensões



Fonte: Baseado em Deb (2001).

quando comparados a x_{pD} . Semelhantemente, o ponto C é não dominado com relação a E , por seu valor ser menor para J_2 e x_{pC} é eficiente quanto a x_{pE} . Esse critério não é possível de ser aplicado entre os pontos A , B e C , já que qualquer ponto escolhido tem menor valor de função para J_1 , mas maior para J_2 , ou vice-versa, quando comparado com outro ponto. Assim, A , B e C são pontos não dominados e formam a curva ou frente de Pareto.

3.5 Otimização multiobjetivo com CP

A convergência de um método de otimização multiobjetivo geralmente acarreta na obtenção de uma frente de Pareto. O método poderá ser avaliado quanto a convergência e quantidade de pontos distribuídos na frente de Pareto, o que constituirá a diversidade de soluções (MOREIRA, 2015). Além disso, alguns métodos multiobjetivos podem não garantir a convergência quando o problema é não convexo. Métodos de POMO mono-objetivos equivalentes geralmente possuem fatores de ponderação ou restrição. Na resolução de problemas, esses fatores devem ser escolhidos com precaução. Escolhendo um determinado fator de ponderação, é esperado que os valores das funções na frente de Pareto sejam modificados. No entanto, é preciso saber quais são os valores ou condições de contorno dos fatores que provocam essa alteração. Alguns métodos podem resolver problemas côncavos ou convexos, porém a escolha do fator de restrição mostra-se um desafio em alguns casos. Em Moreira (2015) é apresentado o método ϵ -restrito, o qual gera várias soluções na frente de Pareto ao se modificar determinado fator de restrição ϵ na otimização. A dificuldade está em escolher esse fator para alguns problemas côncavos, pois mesmo mudando o fator, a otimização pode não sofrer alteração quanto à convergência de uma função. Vários métodos de POMO com suas vantagens, desvantagens e aplicações em problemas específicos foram abordados em Lobato e STEFFEN JR (2017). Nessa

perspectiva, um método baseado no conceito de norma de Tchebycheff ou L_∞ e conhecido como *Compromise Programming* (CP) ou Programação de Compromisso é apresentado nesta seção. Além do método resolver problemas côncavos e convexos, considerando determinados coeficientes e normalizações de funções, os fatores de ponderações podem ser escolhidos com mais facilidade.

Seja o problema apresentado através da equação (3.4) e reescrito da seguinte maneira (CHEN; WIECEK; ZHANG, 1999):

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } \mathbf{J}(\mathbf{x}_p) \\ &\text{Sujeito a } \mathbf{x}_p \in \mathbf{X}_p \subset \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (3.5)$$

em que \mathbf{X}_p é o espaço de projeto factível e $\mathbf{J}(\mathbf{x}_p) = [J_1(\mathbf{x}_p), J_2(\mathbf{x}_p), \dots, J_k(\mathbf{x}_p)]$. O mínimo valor para cada função pode ser escrito como:

$$\bar{J}_i = \text{mínimo} \{J_i(\mathbf{x}_p), \mathbf{x}_p \in \mathbf{X}_p\}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.6)$$

Cada valor mínimo da função \bar{J}_i conduz ao ponto de utopia u_i , o qual é definido como:

$$u_i = \bar{J}_i - \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.7)$$

em que $\epsilon_i \geq 0$. Assim, o POMO pode ser escrito com base no conceito de norma L_p , como segue (CHEN; WIECEK; ZHANG, 1999):

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } \|\mathbf{J}(\mathbf{x}_p) - \mathbf{u}\| = \left(\sum_{i=1}^m |J_i(\mathbf{x}_p) - u_i|^p \right)^{1/p} \\ &\text{Sujeito a } \mathbf{x}_p \in \mathbf{X}_p \end{aligned} \quad (3.8)$$

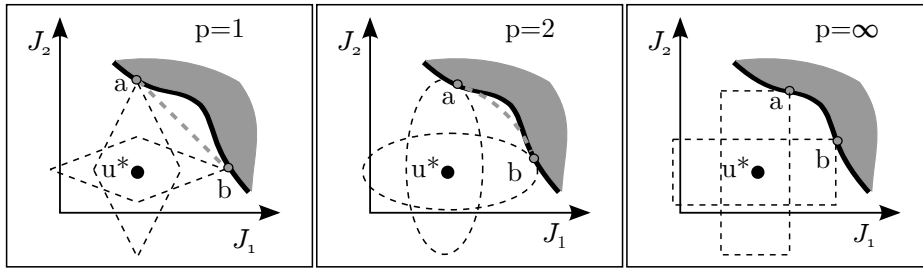
em que $\mathbf{J}(\mathbf{x}_p) \in \mathbb{R}^k$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$ são vetores formados pelos elementos $J_i(\mathbf{x}_p)$ e u_i , respectivamente, com $i = 1, 2, \dots, k$. Obviamente, a equação (3.8) depende do parâmetro p que estabelece diferentes métricas. A escolha para $p = 1$, $p = 2$ e $p = \infty$ conduz as normas Taxicab, Euclidiana e Tchebycheff, respectivamente. Além disso, o problema apresentado na equação (3.8) pode ser reformulado para considerar fatores de ponderação tal que:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } \left(\sum_{i=1}^m w_i |J_i(\mathbf{x}_p) - u_i|^p \right)^{1/p} \\ &\text{Sujeito a } \mathbf{x}_p \in \mathbf{X}_p \end{aligned} \quad (3.9)$$

em que w_i é um fator de ponderação positivo e $\sum_{i=1}^m w_i = 1$. O clássico método da soma ponderada pode ser encontrado escolhendo a métrica L_1 ($p = 1$) na equação (3.9). Embora

esse método seja de fácil compreensão e implementação, sua principal desvantagem é a não convergência para problemas côncavos. Por outro lado, o método CP baseado na norma L_∞ é usada para otimizar essas categorias de problemas e encontrar a frente de Pareto ao se modificar o fator de ponderação w_i . Para uma melhor compreensão do exposto, considere o caso bidimensional com funções J_1 e J_2 apresentadas na Fig. 5. A região sombreada representa os possíveis valores que as funções podem assumir no problema e a curva mais escura, em que se localiza os ponto a e b , a frente de Pareto. Conforme o valor de p escolhido, os pontos de convergência das funções na otimização descrevem figuras geométricas, conforme representadas em linhas pontilhadas e centradas em \mathbf{u}^* . Tanto para $p = 1$ como para $p = 2$, não será possível atingir todos os pontos da frente de Pareto, fato que não ocorre com $p = \infty$.

Figura 5 – Figuras geométricas descritas pelas funções J_1 e J_2 de acordo com a escolha de p



Fonte: Adaptação de Deb (2001).

Com a escolha da norma infinita o problema de otimização representado pela equação (3.9) poderá ser reescrito da seguinte forma:

$$\min_{\mathbf{x}_p \in \mathbf{X}_p} \max_{1 \leq i \leq m} \{w_i |J_i(\mathbf{x}_p) - u_i|\} \quad (3.10)$$

A partir da eq. (3.10) poderá ser formulado o problema de maximização de média e minimização de desvio padrão ou, possivelmente, de dispersão, que diz respeito ao projeto de dispositivos de coleta de energia. Simplificadamente, o equacionamento será expresso como:

$$\min_{\mathbf{x}_d \in \mathbf{X}_d} \max \left\{ w_1 \left| \frac{\mu_Y}{\mu_Y^*} - 1 \right|, (1 - w_1) \left| \frac{\sigma_Y}{\sigma_Y^*} - 1 \right| \right\}, \quad (3.11)$$

em que μ_Y^* e σ_Y^* são os valores ideais para a média e desvio padrão, respectivamente, obtidos via otimização de μ_Y e σ_Y separadamente. Nesse caso, o valor da utopia para os dois casos será unitário, valor ideal, visto que a função custo é normalizada pelo valor de utopia. Neste caso, as normalizações são importantes para simplificar a otimização, já que as funções podem ter ordem de grandeza muito diferentes.

De forma semelhante, a dispersão relativa poderá ser minimizada, bastando colocá-la no lugar do desvio padrão e seguir com os procedimentos de otimização. Com essa modificação, outra equação, semelhante a equação (3.11), poderá ser utilizada no problema de coleta de energia, conforme segue exposta:

$$\min_{\mathbf{x}_d \in \mathbf{X}_d} \max \left\{ w_1 \left| \frac{\mu_Y}{\mu_Y^*} - 1 \right|, (1 - w_1) \left| \frac{\delta_Y}{\delta_Y^*} - 1 \right| \right\}, \quad (3.12)$$

em que δ_Y é a dispersão relativa e δ_Y^* a dispersão relativa ótima.

Através das equações (3.11) e (3.12), realiza-se a maximização da média μ_Y e minimização do desvio padrão σ_Y ou dispersão relativa δ_Y , sendo o POMO conhecido como uma otimização de projeto robusto com dois objetivos, cujo termo em inglês é *Bi-Objective Robust Design* (BORD). Além disso, com a normalização da média, desvio padrão e dispersão, a magnitude dos termos entre parênteses será da mesma ordem de grandeza, possibilitando melhores escolhas para os fatores de ponderações w_1 e w_2 . Uma desvantagem do método é ter que realizar duas otimizações prévias, uma para a média e outra para o desvio padrão ou dispersão. Como na maioria dos POMO determinísticos, o método CP, também, necessitará de uma otimização, para cada fator de ponderação escolhido.

3.6 Otimização multiobjetivo com NSGA-II

A otimização multiobjetivo também pode ser realizada de forma mais direta escolhendo um algoritmo intrinsecamente multiobjetivo. Diferente dos métodos mono-objetivo equivalente, usando os algoritmos heurísticos e um dado número de indivíduos obtém-se a frente de Pareto em um único processamento. Nos métodos determinísticos, uma solução poderá ser alcançada modificando-se o fator de ponderação previamente. No caso dos algoritmos multiobjetivo, as soluções ótimas são escolhidas *a posteriori*, com base em algum critério preestabelecido, dentre um conjunto de soluções que estabelecem um compromisso adequado entre os diferentes objetivos e formam uma frente de Pareto. Por isso, a convergência, o número de soluções e como estas estão distribuídas na frente de Pareto serão essenciais. Isso fornecerá várias possibilidades de escolha para o tomador de decisões. Neste sentido, o algoritmo NSGA-II (*Non-dominated Sorting Genetic Algorithm*) é apresentado nesta seção e será utilizado para resolução do problema de coleta de energia.

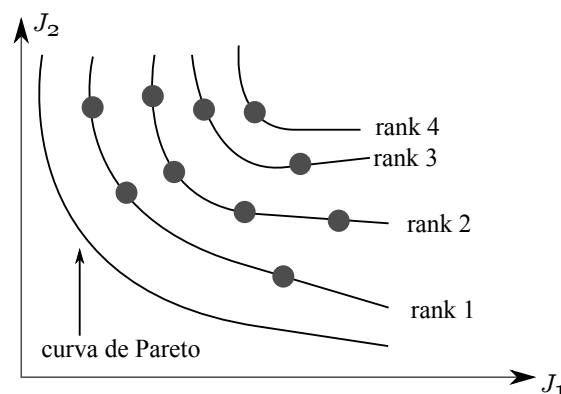
O NSGA-II é baseado no AG, o qual é dividido em estágios como na genética e na seleção natural, isto é, seleção, cruzamento e mutação. Cada indivíduo da população é formado por um conjunto factível de variáveis de projeto, sendo que uma variável de projeto constitui um gene do cromossomo que representa o indivíduo. O AG se inicia com uma população de indivíduos ou vetores e a função objetivo é avaliada para esta população. Assim, menores valores da função de objetivo, para o problema de minimização, significará

que a população correspondente será mais apta a sobrevivência. Com o processo de seleção, bons indivíduos são selecionados para compor uma população intermediária, baseando-se em conceitos probabilísticos. Na sequência, indivíduos da população intermediária são usadas, utilizando o operador de cruzamento, tal que a combinação destes indivíduos ao dividir os cromossomos visando a troca de genes entre os dois indivíduos geram filhos a serem inseridos na população. Os novos indivíduos poderão fornecer melhores valores para as funções de objetivo e serem selecionadas para compor a nova população. Por outro lado, indivíduos que produzem piores valores tendem a desaparecer no processo de seleção. Com isso, depois dos dois estágios mencionados ocorre a mutação, em que genes selecionados são mudados nos cromossomos de indivíduos selecionados com a intenção de encontrar melhores valores para as funções objetivo. Após estas etapas, o AG inicia uma nova geração repetindo os estágios mencionados, visando produzir bons indivíduos e atingir a solução ideal. Esses estágios serão utilizados no NSGA-II, porém visando encontrar vários indivíduos ótimos na frente de Pareto.

Na convergência do NSGA-II, procedimentos para **ordenamento de soluções não-dominadas** e **preservação da diversidade** são realizados (DEB et al., 2002). Esses procedimentos são explicados a seguir:

A. No **ordenamento de soluções**, os indivíduos são comparados entre si, verificando o critério de dominância. Indivíduos que se aproximem da frente de Pareto ideal serão ranqueados na primeira frente ou *rank* de soluções não dominadas. Após isso, encontram-se os indivíduos que farão parte do *rank* 2, seguindo com o *rank* 3 e assim por diante. Para um melhor entendimento, estão representados na Fig. 6 os *rank*s, que podem ser formados em uma população aleatória com 10 indivíduos, considerando duas funções objetivos J_1 e J_2 . Os indivíduos com frentes ou *rank*s menores estarão mais próximos da frente de Pareto ótima e serão não-dominados, por consequência dominam os outros indivíduos. De outro modo, indivíduos de *rank*s maiores são dominados e não dominam os outros indivíduos.

Figura 6 – Frentes ou *rank*s para um caso qualquer com duas funções objetivos J_1 e J_2

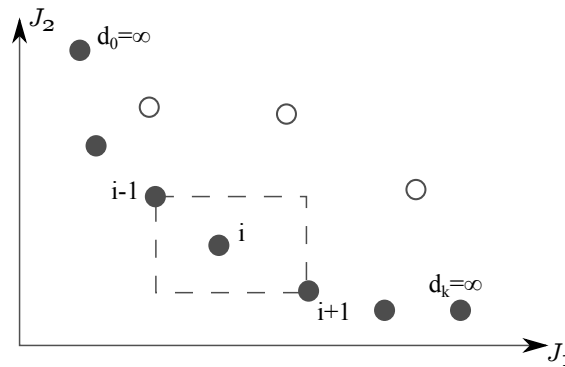


Fonte: Adaptação de Li (2003).

O procedimento para encontrar os indivíduos não-dominados consiste em comparar solução a solução na população, separando-as em um conjunto. Depois disso, os indivíduos do primeiro *rank* são descontados temporariamente e compara-se as outras soluções entre si para encontrar o segundo *rank*. Esse procedimento se repete para o restante da população até que todos os *ranks* sejam encontrados.

B. Após o ordenamento das soluções, uma boa distribuição ou espalhamento dos pontos é garantida através da **preservação da diversidade**. Se os indivíduos pertencem ao mesmo *rank*, para saber qual indivíduo escolher em uma próxima etapa, verifica-se à distância de aglomeração. Indivíduos em uma maior distância são preferíveis, garantindo uma maior diversidade na solução final. A distância de aglomeração pode ser entendida ao se estimar o perímetro de um cuboide ao redor de um ponto aleatório, considerando como vértices as soluções vizinhas. Como exemplo, a Fig. 7 é apresentada para dois objetivos, em que o perímetro do cuboide é estimado ao redor do indivíduo i , com vértices em $i - 1$ e $i + 1$. A distância de aglomeração possuirá valor infinito para pontos nas extremidades, conforme exemplo na Fig. 7 com $d_0 = \infty$ e $d_k = \infty$.

Figura 7 – Cuboide em linhas tracejadas ao redor do indivíduo i



Fonte: Adaptação de Deb et al. (2002).

Outra maneira de estabelecer tanto a dominância como a diversidade de soluções é realizar uma seleção por torneio, que será guiada por um operador conhecido como *crowded-comparison operator* (\prec_n). O operador é baseado no algoritmo que segue, considerando dois indivíduos i e j , de acordo com (DEB et al., 2002):

1. ranqueamento por não dominância (i_{rank});
2. distância de multidão ($i_{distância}$).

Define-se a ordem parcial \prec_n tal que:

$$i \prec_n j \text{ se } (i_{rank} < j_{rank})$$

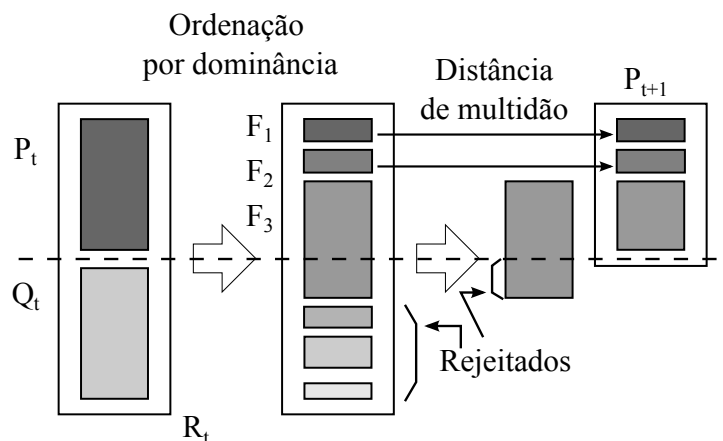
$$\text{ou } ((i_{rank} = j_{rank})$$

$$\text{e } (i_{distância} > j_{distância}))$$

O programa principal do NSGA-II tem as etapas seguintes, que podem ser melhor compreendidas observando a Fig. 8:

- Inicialização do algoritmo com uma população P_t de N indivíduos;
- Ordenamento de soluções não dominadas e estabelecimento de *ranks* para cada nível;
- Semelhante ao algoritmo genético, com indivíduos selecionados, operadores de seleção, cruzamento e mutação são aplicados gerando uma população filha Q_t com mesmo tamanho de P_t ;
- As populações P_t e Q_t são unidas formando uma nova população R_t com o dobro do tamanho, ou seja, $2N$;
- Com a população R_t , é aplicado o ordenamento de soluções não dominadas, estabelecendo *ranks* ou frentes F_1, F_2, \dots, F_k , em que F_k é a frente mais distante da curva de Pareto;
- Com a população R_t , a diversidade de soluções é preservada calculando e realizando a análise da distância de multidão;
- Com o ordenamento de soluções e cálculo da distância de multidão, a população de tamanho $2N$ é truncada, gerando uma população P_{t+1} com tamanho N ;
- Com a população P_{t+1} o procedimento do algoritmo é repetido até o número máximo de iterações.

Figura 8 – Figuras geométricas descritas pelas funções J_1 e J_2 de acordo com a escolha de p



Fonte: Adaptação de Deb et al. (2002).

Em razão do exposto para o método NSGA-II, uma formulação de otimização multiobjetivo generalizada é estruturada mediante o problema exibido em (3.13). O vetor \mathbf{x}_p contém as n variáveis de projeto $\{x_{p1}, \dots, x_{pn}\}$, enquanto k funções a serem minimizadas

estão presentes. Pelo fato do POMO gerar várias soluções na fronteira de Pareto, o valor final de \mathbf{x}_p não será único. Dependendo do número da população inicial, soluções finais diversificadas para \mathbf{x}_p serão encontradas, caso a convergência do problema seja atingido.

$$\begin{aligned} \text{encontrar} \quad & \mathbf{x}_p = (x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pn})^T \\ \text{minimizando} \quad & \mathbf{J}(\mathbf{x}_p) = \{J_1(\mathbf{x}_p), J_2(\mathbf{x}_p), \dots, J_k(\mathbf{x}_p)\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

O NSGA-II poderá ser aplicado ao problema de coleta de energia, dado que a média e variância são estimados usando várias técnicas, conforme capítulo 2, visando a maximização da primeira função e minimização do desvio padrão ou dispersão relativa, dependentes da estimativa da variância. Neste sentido, o método também deverá ser comparado com o método CP em questão de obtenção dos resultados desejados e esforço computacional.

4 Modelagem e validação experimental

4.1 Introdução

Consoante a ideia de projetar dispositivos de coleta de energia, o modelo numérico em elementos finitos e metodologia para cálculo das FRFs de aceleração, tensão elétrica e potência são apresentados neste capítulo. Ainda, utilizando as FRFs de aceleração e tensão elétrica, uma validação do modelo numérico é apresentada por meio de comparação com resultados obtidos para um *setup* experimental. Quanto à FRF de potência, essa foi usada para construção das funções objetivo de média e dispersão conforme estimativas dos momentos estatísticos retratados no capítulo 2. Outra questão importante exposta diz respeito ao engaste do dispositivo, simulado por molas linear e de torção, sendo que a estratégia para determinação dos valores dessas variáveis é mostrada no final do capítulo. Com um protótipo experimental, foi realizada a validação e determinação de parâmetros numéricos que se ajustem ao modelo. Partindo do dispositivo com parâmetros ajustados, a FRF de saída de aceleração foi estudada com relação à variação das rigidez linear e de torção do engaste. Isso permitiu definir valores de molas do engaste para análises de otimização e incertezas, sendo estes estudos mais aprofundados nos capítulos posteriores. Neste capítulo, os temas de modelagem, que permitirá definir as FRFs do modelo, validação do dispositivo e determinação dos valores da rigidez do engaste receberão especial atenção.

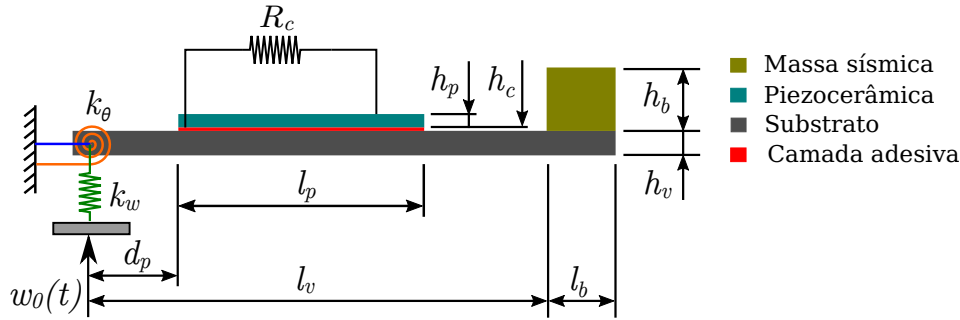
4.2 Modelo de viga em elementos finitos

O estudo sobre coleta de energia baseia-se em um modelo em elementos finitos para uma estrutura tipo viga piezolétrica com três camadas desenvolvido em Santos (2008). O modelo considera as hipóteses de Euler-Bernoulli para as camadas externas e Timoshenko para a camada central. Os eletrodos recobrem totalmente as camadas piezolétricas. Todas as camadas podem ser constituídas de materiais piezolétricos ortotrópicos. Para aplicação do modelo ao problema de coleta de energia com viga *cantilever* ressonante, alguns ajustes foram realizados para as condições específicas em Martins (2018). Sendo assim, esta seção tem como intenção fornecer o equacionamento principal, com a nomenclatura dos termos, e as condições consideradas, com o intuito de realizar a otimização de potência para o projeto robusto.

Em primeiro lugar, o dispositivo utilizado no trabalho está representado na Fig. 9. O engaste do dispositivo é simulado por duas molas, cujas rigidez linear e torcional são k_w e k_θ , respectivamente. Ainda, supõe-se que não movimento longitudinal da viga em

relação ao engaste, por isso a representação da barra em azul na Fig. 9. Com uma entrada harmônica $w_0(t)$, imposta no engaste, o dispositivo irá vibrar segundo a frequência da entrada. Isso permitirá extrair energia usando pastilhas piezocerâmicas, sendo que uma pastilha é considerada no dispositivo deste trabalho, conforme Fig. 9. A pastilha é acoplada ao substrato através de uma camada adesiva e uma resistência elétrica R_c está conectada aos eletrodos da pastilha, com o intuito de se calcular a potência coletável. Ademais, uma massa sísmica de comprimento l_b e altura h_b é rigidamente acoplada na extremidade livre da viga, com o intuito de sintonizar a frequência da entrada imposta com a frequência natural fundamental do dispositivo, maximizando a potência coletável, devido ao fenômeno ressonância. Por fim, os parâmetros geométricos do dispositivo são: distância da pastilha ao engaste d_p , comprimento da pastilha l_p , comprimento livre da viga l_v , espessura do substrato h_v , espessura da camada adesiva h_c e espessura da pastilha h_p .

Figura 9 – Dispositivo utilizado para estudo de coleta de energia



4.2.1 Equacionamento do modelo em coordenadas absolutas

Conforme a abordagem desenvolvida em trabalhos anteriores a equação diferencial que rege a dinâmica do dispositivo em coordenadas absolutas \mathbf{u} , que representa o deslocamento generalizado da viga *cantilever*, é descrita como (SANTOS, 2008; MARTINS, 2018):

$$\mathbf{M}_{rr}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{rr}\mathbf{u} - \bar{\mathbf{K}}_{me}q_c = \mathbf{F}_p, \quad (4.1)$$

$$R_c\dot{q}_c - \bar{\mathbf{K}}_{me}^t\mathbf{u} + \bar{K}_e q_c = 0, \quad (4.2)$$

em que \mathbf{M}_{rr} é a matriz de massa do sistema, já contemplando o efeito da massa sísmica, conforme descrito na próxima subseção, \mathbf{K}_{rr} a matriz de rigidez mecânica, $\bar{\mathbf{K}}_{me}$ a matriz de rigidez eletromecânica e \bar{K}_e a matriz de rigidez dielétrica. \mathbf{F}_p e \mathbf{u} são os vetores correspondentes as forças elásticas que agem no dispositivo e os deslocamentos mecânicos globais, enquanto q_c é a carga elétrica gerada no circuito.

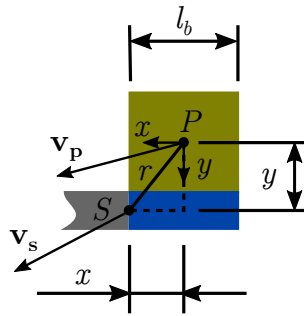
Partindo das equações anteriores, as FRFs do sistema podem ser encontradas reescrevendo-as por considerar o deslocamento absoluto \mathbf{u} como função do vetor de deslo-

camento modal $\boldsymbol{\alpha}(t)$ e da matriz dos modos de vibração $\boldsymbol{\phi}$. O vetor de forças é dado por $\mathbf{F}_p = \mathbf{b}f_p(t)$, em que \mathbf{b} é um vetor coluna que posiciona a força de mola $f_p(t) = \tilde{f}_p e^{j\omega t}$, sendo $\tilde{f}_p = k_w \tilde{w}_0$ e \tilde{w}_0 a amplitude de deslocamento absoluto imposto, na respectiva posição. Assim, com as devidas manipulações de (4.1) e (4.2), encontra-se as FRFs das saídas desejadas por entrada de deslocamento, podendo ser convertidas por entrada de aceleração, respeitando alguns procedimentos.

4.2.2 Descrição da matriz de massa com a inclusão da massa sísmica

O modelo em elementos finitos é formulado considerando duas camadas (externa e interna) para o modelo de viga. Cada elemento possui uma massa e rigidez atribuídas, sendo que o acréscimo de uma massa sísmica altera a matriz de massa de alguma forma. Por isso, a análise dessa seção visa verificar como a matriz de massa é alterada, em quais posições ou elementos da matriz serão computados ou acrescentados determinados termos. Ainda, o conjunto formado por massa sísmica e porção de viga abaixo dela é considerado como um único corpo rígido e, por isso, não contribui para a rigidez e pode ter seu movimento totalmente descrito pela translação e rotação da seção do último nó do modelo em elementos finitos.

Figura 10 – Porção do dispositivo com massa sísmica sobre o substrato



Para verificar como a massa sísmica sobre a porção final da viga influencia na matriz de massa, utiliza-se a expressão da energia cinética. As velocidades da massa sísmica \mathbf{v}_P com relação a um ponto genérico P e a velocidade da viga \mathbf{v}_S no ponto S estão representadas na figura 10. A velocidade \mathbf{v}_P é representada em função de \mathbf{v}_S , conforme a equação (4.3):

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_S + \boldsymbol{\omega}_S \times \mathbf{r} = (v_{Sx})\hat{\mathbf{i}} + (v_{Sy})\hat{\mathbf{j}} + (\omega_S)\hat{\mathbf{k}} \times [x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}] = [(v_{Sx}) - (\omega_S)y]\hat{\mathbf{i}} + [(v_{Sy}) + (\omega_S)x]\hat{\mathbf{j}} \quad (4.3)$$

Para a viga *cantiliver* em vibração transversal, considera-se os efeitos do acréscimo da massa sísmica atuando nos graus de liberdade relativo a deflexão e rotação do ponto

P , fazendo com que $v_{Sx} = 0$ e então:

$$\mathbf{v}_P = (-\omega_S)y\hat{\mathbf{i}} + [(v_{Sy}) + (\omega_S)x]\hat{\mathbf{j}} \quad (4.4)$$

Do exposto segue que:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P \cdot \mathbf{v}_P &= v_P^2 = (-\omega_S)y(-\omega_S)y + (v_{Sy})(v_{Sy}) + (v_{Sy})(\omega_S)x + (\omega_S)x(v_{Sy}) + (\omega_S)x(\omega_S)x \\ &= (v_{Sy})(v_{Sy}) + (v_{Sy})(\omega_S)x + (\omega_S)x(v_{Sy}) + \omega_S^2(x^2 + y^2) \\ &= (v_{Sy})(v_{Sy}) + (v_{Sy})(\omega_S)x + (\omega_S)(v_{Sy})x + \omega_S^2r^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

A energia cinética T_{bv} da massa sísmica com a porção da viga é escrita como:

$$T_{bv} = \frac{1}{2} \int_{M_{bv}} dm v_P^2 \quad (4.6)$$

em que M_{bv} é soma da massa sísmica e da massa da porção de viga sob ela. Substituindo a eq. (4.5) na eq. (4.6) resulta,

$$T_{bv} = \frac{1}{2} \left(\int_{M_{bv}} dm \right) v_{Sy}^2 + \frac{1}{2} (v_{Sy})\omega_S \left(\int_{M_{bv}} x dm \right) + \frac{1}{2} \omega_S (v_{Sy}) \left(\int_{M_{bv}} x dm \right) + \frac{1}{2} \omega_S^2 \left(\int_{M_{bv}} r^2 dm \right) \quad (4.7)$$

O centro de massa é determinado em relação a S pela equação $\bar{x}M_{bv} = \int_{M_{bv}} x dm$. Além disso, o momento de inércia I_S em relação ao eixo z que passa por S é representado pelo último termo de (4.7), permitindo escrever:

$$T_{bv} = \frac{1}{2} M_{bv} v_{Sy}^2 + \frac{1}{2} (v_{Sy})(\omega_S)\bar{x}M_{bv} + \frac{1}{2} (\omega_S)(v_{Sy})\bar{x}M_{bv} + \frac{1}{2} I_S \omega_S^2 \quad (4.8)$$

O termo T_{bv} deve ser somado com a energia da viga sem a massa sísmica para compor a energia cinética do dispositivo. Por isso, nos dois últimos graus de liberdade da matriz de massa, referentes a deflexão e rotação da seção transversal, são acrescentados os termos M_{bv} , $M_{bv}\bar{x}$ e I_S , conforme a disposição representada em T_{bv} .

4.2.3 Equacionamento do modelo em coordenadas relativas

As equações (4.1) e (4.2) são reescritas por considerar o deslocamento relativo $\mathbf{u}_r = \mathbf{u} - \mathbf{L}w_0(t)$, sendo \mathbf{L} um vetor booleano com valores unitários somente nas posições correspondentes aos deslocamentos transversais. Desse fato, basta substituir $\mathbf{u} = \mathbf{u}_r + \mathbf{L}w_0(t)$ em (4.1) e (4.2) para se obter as seguintes equações:

$$\mathbf{M}_{rr}\ddot{\mathbf{u}}_r + \mathbf{K}_{rr}\mathbf{u}_r - \bar{\mathbf{K}}_{me}q_c = -\mathbf{M}_{rw}\ddot{w}_0(t), \quad (4.9)$$

$$R_c\dot{q}_c - \bar{\mathbf{K}}_{me}^t\mathbf{u}_r + \bar{K}_e q_c = 0, \quad (4.10)$$

em que $\mathbf{M}_{rw} = \mathbf{M}_{rr}\mathbf{L}$ é um vetor coluna em que cada elemento é a soma dos termos referentes as respectivas linhas e graus de liberdade de deflexão da matriz \mathbf{M}_{rr} . Assim, pela aplicação do deslocamento imposto na base, uma equivalente força de inércia transversal aparece, representada pelo termo do lado direito de (4.9).

Alternativamente, as equações (4.9) e (4.10) podem ser escritas em função dos parâmetros modais, dada a matriz identidade $\mathbf{I} = \boldsymbol{\phi}^t\mathbf{M}_{rr}\boldsymbol{\phi}$, a matriz de frequências naturais quadradas $\boldsymbol{\Omega}^2 = \boldsymbol{\phi}^t\mathbf{K}_{rr}\boldsymbol{\phi}$ e por assumir uma matriz de amortecimento modal $\boldsymbol{\Lambda}$. Os graus de liberdade mecânicos serão dados pelo produto da matriz dos modos de vibração e do deslocamento modal relativo, ou seja, $\mathbf{u}_r = \boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\alpha}_r$. Ainda, define-se $\mathbf{K}_p = \boldsymbol{\phi}^t\mathbf{K}_{me}$ e $\mathbf{b}_\phi = \boldsymbol{\phi}^t\mathbf{b}$, o que permite reescrever (4.9) e (4.10) como segue:

$$(-\mathbf{I}\omega^2 + j2\omega\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^2)\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_r - \mathbf{K}_p\tilde{q}_c = \boldsymbol{\phi}^t\mathbf{M}_{rw}\tilde{a}_0, \quad (4.11)$$

$$(j\omega R_c + \bar{K}_e)\tilde{q}_c - \mathbf{K}_p^t\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_r = 0, \quad (4.12)$$

Primeiramente, resolve-se (4.11) e (4.12) para encontrar as amplitudes de deslocamento modal relativo $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_r$ ou carga elétrica \tilde{q}_c por unidade de amplitude de aceleração imposta à base \tilde{a}_0 , permitindo estabelecer as FRFs desejadas na sequência. A aceleração da massa sísmica (extremidade livre da viga) é definida como $a_t = \mathbf{c}_t\ddot{\mathbf{u}}$, em que \mathbf{c}_t é um vetor linha booleano com valor unitário no elemento correspondente ao grau de liberdade de deslocamento transversal da extremidade livre da viga. Para avaliar a aceleração na massa sísmica, escreve-se a amplitude de a_t como função da amplitude da aceleração imposta e dos deslocamentos modais, implicando em $\tilde{a}_t = \tilde{a}_0 - \omega^2\mathbf{c}_t\boldsymbol{\phi}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_r$. Resolvendo (4.12) para \tilde{q}_c e substituindo em (4.11) implica que $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_r$ será dado como:

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_r = (j\omega R_c + \bar{K}_e)\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\phi}^t\mathbf{M}_{rw}\tilde{a}_0 \quad (4.13)$$

em que $\mathbf{D} = (j\omega R_c + \bar{K}_e)(-\mathbf{I}\omega^2 + j2\omega\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^2) - \mathbf{K}_p\mathbf{K}_p^t$.

Desse fato, a FRF de saída de aceleração na extremidade livre por unidade de entrada de aceleração na base $G_{a_t a_0}(\omega) = \tilde{a}_t/\tilde{a}_0$ é encontrada ao substituir (4.13) em $\tilde{a}_t = \tilde{a}_0 - \omega^2\mathbf{c}_t\boldsymbol{\phi}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_r$ e fazer as devidas manipulações, tal que:

$$G_{a_t a_0}(\omega) = 1 - \omega^2(j\omega R_c + \bar{K}_e)\mathbf{c}_t\boldsymbol{\phi}\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\phi}^t\mathbf{M}_{rw}, \quad (4.14)$$

Definindo a corrente elétrica gerada como \dot{q}_c , a tensão elétrica será dada por $V_c = R_c\dot{q}_c$, o que permitirá encontrar a FRF de saída de tensão por unidade de aceleração

imposta $G_{V_{ca0}} = \tilde{V}_c/\tilde{a}_0$. Como q_c é do tipo $q_c = \tilde{q}_c e^{j\omega t}$, implica em $\dot{q}_c = j\omega \tilde{q}_c e^{j\omega t}$, portanto $\tilde{V}_c = j\omega R_c \tilde{q}_c$. Resolvendo (4.12) para $\tilde{\alpha}_r$ e substituindo em (4.11) chega-se a:

$$\tilde{q}_c = \mathbf{K}_p^t \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\phi}^t \mathbf{M}_{rw} \tilde{a}_0 \quad (4.15)$$

A FRF de saída de tensão $G_{V_{ca0}} = \tilde{V}_c/\tilde{a}_0 = j\omega R_c \tilde{q}_c/\tilde{a}_0$ é encontrada substituindo a expressão de \tilde{q}_c , dada em (4.15), chegando-se a:

$$G_{V_{ca0}}(\omega) = j\omega R_c \mathbf{K}_p^t \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\phi}^t \mathbf{M}_{rw}. \quad (4.16)$$

Por fim, a intenção é encontrar a FRF de saída de potência por aceleração imposta $G_{P_{ca0}}(\omega)$, que poderá ser dada escrevendo a potência gerada como $P_c = V_c^2/R_c$ e simplesmente escrever $G_{P_{ca0}}(\omega)$ como função de $G_{V_{ca0}}(\omega)$, como segue:

$$G_{P_{ca0}}(\omega) = [G_{V_{ca0}}(\omega)]^2 / R_c. \quad (4.17)$$

Para o projeto do dispositivo apresentado através da Fig. 9, a equação (4.17) será essencial, visto que a intenção é maximizar a potência coletável para um dado conjunto de parâmetros do dispositivo e condições de operação na frequência de entrada. O estudo será baseado na resposta dada por essa última equação, diante de análises de incertezas, considerando a estimativa de média e variância da potência coletável.

Nas descrições anteriores, as FRFs foram encontradas partindo das equações (4.11) e (4.12), representadas na forma modal. Neste trabalho, a energia coletada será analisada para o primeiro modo de vibração, por isso um truncamento modal pode ser realizado para avaliar as FRFs. Neste processo, de forma generalizada, escreve-se $\mathbf{u}_r \approx \boldsymbol{\phi}_n \boldsymbol{\alpha}_n$, para os n primeiros modos de vibração considerados, provocando o surgimento de matrizes reduzidas em (4.11) e (4.12), por negligenciar os modos de vibrar mais altos, portanto um problema mais simplificado, porém com menor esforço computacional.

4.3 Validação experimental e ajuste do modelo em elementos finitos

4.3.1 Métricas e critérios considerados para a validação

Dada toda formulação teórica apresentada anteriormente, que está relacionada a dinâmica do dispositivo de coleta de energia, é importante realizar um experimento para validação e ajuste do modelo. Isso ocorre antes da definição de quaisquer variáveis do problema, estudo de incertezas e aplicação de métodos de otimização. O principal critério utilizado consiste em medir as FRFs de saída de aceleração e tensão elétrica, dadas pelas

equações (4.14) e (4.16), respectivamente, para um conjunto de valores de resistências elétricas, prosseguindo com o ajuste de alguns coeficientes e parâmetros, devido a possíveis incertezas nos dados disponíveis. A FRF de aceleração possibilitará extrair o fator de amortecimento ζ do dispositivo, nesse caso utilizando o método da banda de meia-potência ou -3 dB. Nesse procedimento, mede-se dois valores de frequência, um à esquerda ω_1 e outro à direita ω_2 da ressonância ω_n e que estejam a 3dB de magnitude do pico da FRF. Ressalta-se ainda que a frequência de ressonância ω_n é maior do que a de pico, porém para pequenos valores de amortecimento estas frequências tendem a se aproximarem. Para o primeiro modo de vibração, que é o caso de estudo, o método do 3dB é bem direto e suficiente para a análise. A equação que descreve esse procedimento pode ser posta conforme segue:

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n}. \quad (4.18)$$

Na avaliação das FRFs, é importante que as curvas obtidas com o modelo numérico coincidam adequadamente com aquelas obtidas com os ensaios experimentais, com proximidade das frequências de ressonância e amplitudes de vibração. Toda abordagem do procedimento experimental com adequada aparelhagem e detalhamento da estratégia numérica para aproximação dos modelos em elementos finitos e experimental serão fornecidas. Uma faixa de frequência suficiente para observar o primeiro pico de ressonância será considerada para encontrar o fator de amortecimento do dispositivo bem como ajustar os parâmetros mecânicos e piezelétricos do mesmo. Neste sentido, as frequências de pico de vibração e amplitudes das FRFs dos modelos foram averiguadas observando a aproximação adequada dos coeficientes de acoplamento eletromecânico (EMCC), o qual fornece uma estimativa da quantidade de energia mecânica convertida em elétrica. O EMCC pode ser calculado de diferentes maneiras conforme encontrado na literatura (TRINDADE; BENJEDDOU, 2009). De modo mais simplificado, o EMCC pode ser estimado para o i -ésimo modo de vibrar por verificar um valor de frequência em curto circuito (SC) e outro em circuito aberto (OC) e empregar a seguinte equação:

$$k_i^2 = \frac{f_{i,oc}^2 - f_{i,sc}^2}{f_{i,oc}^2}, \quad (4.19)$$

em que $f_{i,oc}$ e $f_{i,sc}$ são as i -ésimas frequências naturais em OC e SC, respectivamente, enquanto k_i^2 é o EMCC para o i -ésimo modo de vibração. Com o cálculo do EMCC para o protótipo experimental e modelo numérico, os resultados podem ser comparados, implicando em ajustes de determinados coeficientes do modelo em elementos finitos. Além disso, é importante observar a amplitude dos gráficos das FRFs e aproximação das frequências de ressonância dos modelos na validação. Na sequência, valores apropriados de resistências elétricas foram utilizados com o dispositivo, permitindo medir as frequências naturais

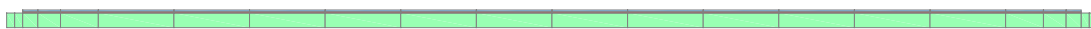
fundamentais em circuito aberto e curto-circuito, conforme será mostrado. Além disso, uma maior quantidade de resistências foram empregadas, para uma maior gama de FRFs e melhor adequação dos parâmetros do dispositivo.

4.3.2 Descrição do setup experimental

O dispositivo utilizado no experimento pode ser descrito por meio de alguns parâmetros, de acordo com a Fig. 9, sendo que os geométricos são detalhados como segue: comprimento e espessura da viga $l_v = 74,7$ mm e $h_v = 1$ mm, espessura da camada adesiva $h_c = 0,08$ mm, comprimento e espessura da pastilha piezolétrica $l_p = 73,6$ mm e $h_p = 0,13$ mm, cuja distância até o engaste é $d_p = 1,1$ mm. Todas as camadas do dispositivo possuem largura de 12,8 mm. Para a viga principal (substrato ou subestrutura), foi utilizado um alumínio com módulo de Young 69 GPa e densidade 2700 kg/m³. Um adesivo epóxi 3M Scotch-Weld DP-460 foi usado para a fixação da pastilha piezolétrica na viga considerando módulo de Young 2 GPa e densidade 1126 kg/m³ (SANTOS, 2012). Uma pastilha de material cerâmico piezolétrico PSI-5A4E (Industry type PZT-5A, Navy Type II) fabricado pela Mide Technology foi utilizada cujas propriedades são: densidade 7950 kg/m³, constantes elástica, piezolétrica e dielétrica $\bar{c}_{11}^E = 73,7$ GPa, $\bar{e}_{31} = -18,4$ C/m² e $\bar{\epsilon}_{33}^e = 9,8$ nF/m, conforme dados do fabricante (Mide Technology, 1989) e aplicação das equações do anexo A para a correta conversão dos coeficientes para a forma apropriada.

A massa sísmica na extremidade da viga é um componente que afeta consideravelmente a frequência natural de vibração do dispositivo. No caso, foi utilizada uma massa cúbica de alumínio com lado de 12,8 mm sobreposta na porção final da viga e com dois furos roscados de 2 mm, centrados no bloco e simétricos em relação à porção longitudinal do dispositivo. Assim, a massa sísmica é fixa na viga através de dois parafusos Allen que entram pela parte de baixo da viga, o que pode ser notado na figura 12. O cubo de alumínio com furos possui 5,1 g e cada parafuso 0,65 g, além do que um acelerômetro de 0,85 g foi utilizado sobre a massa sísmica, o qual possibilitou encontrar a FRF de saída de aceleração. Acrescentando a massa da porção de viga que está embaixo do cubo de alumínio, o valor total da massa sísmica translacional e do momento de inércia de rotação foram estimados em $M_t = 7,7$ g e $I_t = 0,7$ kg mm².

Figura 11 – Modelo de viga de 74,7 mm em elementos finitos



O modelo em elementos finitos para a viga de 74,7 mm de comprimento foi gerado e apresentado na figura 11. Neste modelo, a camada em verde representa a viga, sendo que o sensor piezolétrico está na camada superior, com um fina camada de cola. Para

esse modelo, um total de 22 elementos, com dois nós por elemento, foram necessários. Como a viga e sensor piezelétrico são camadas externas, são modelados pela teoria de Euler-Bernoulli, enquanto a camada interna de cola pela teoria de Timoshenko.

Figura 12 – Foto da vista ampliada do dispositivo usado no teste

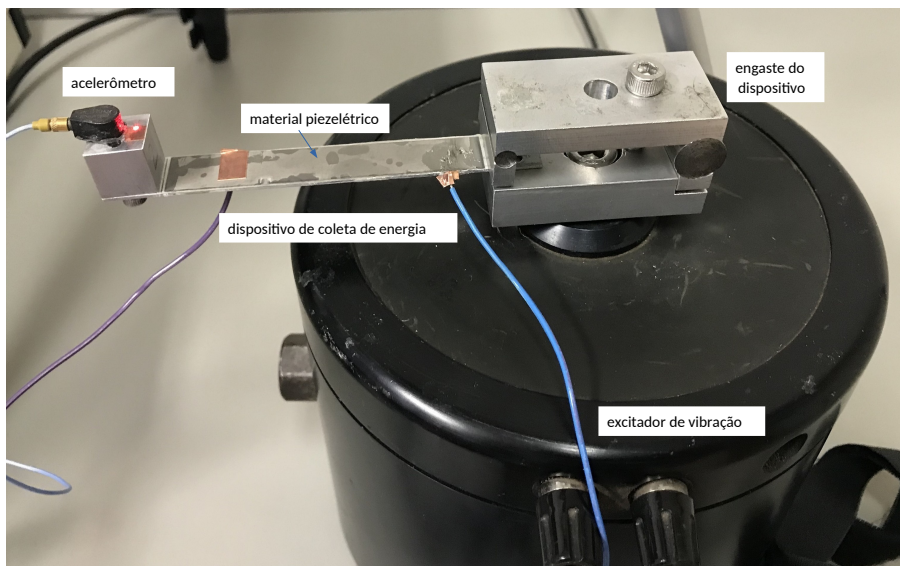
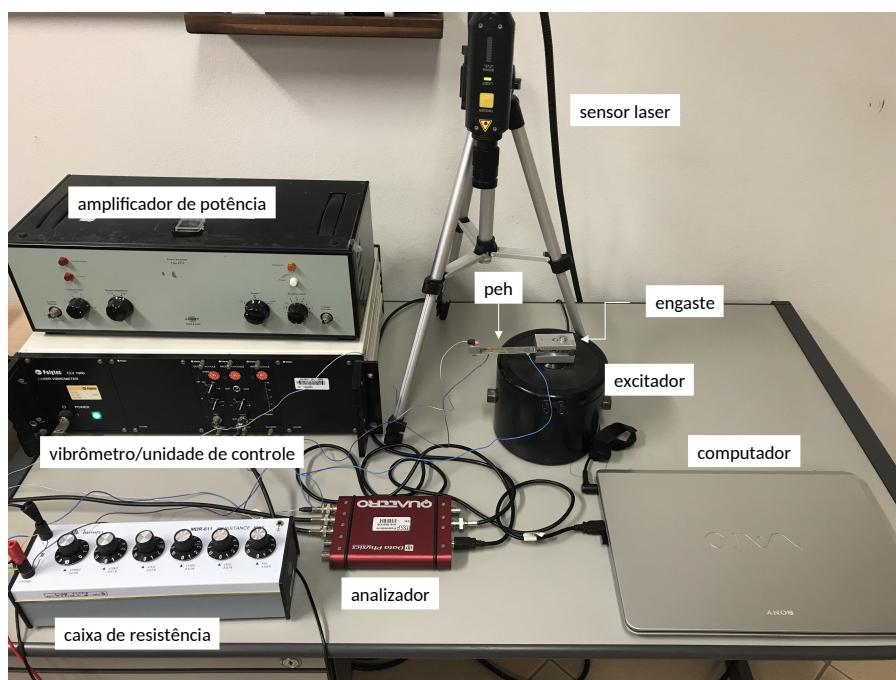


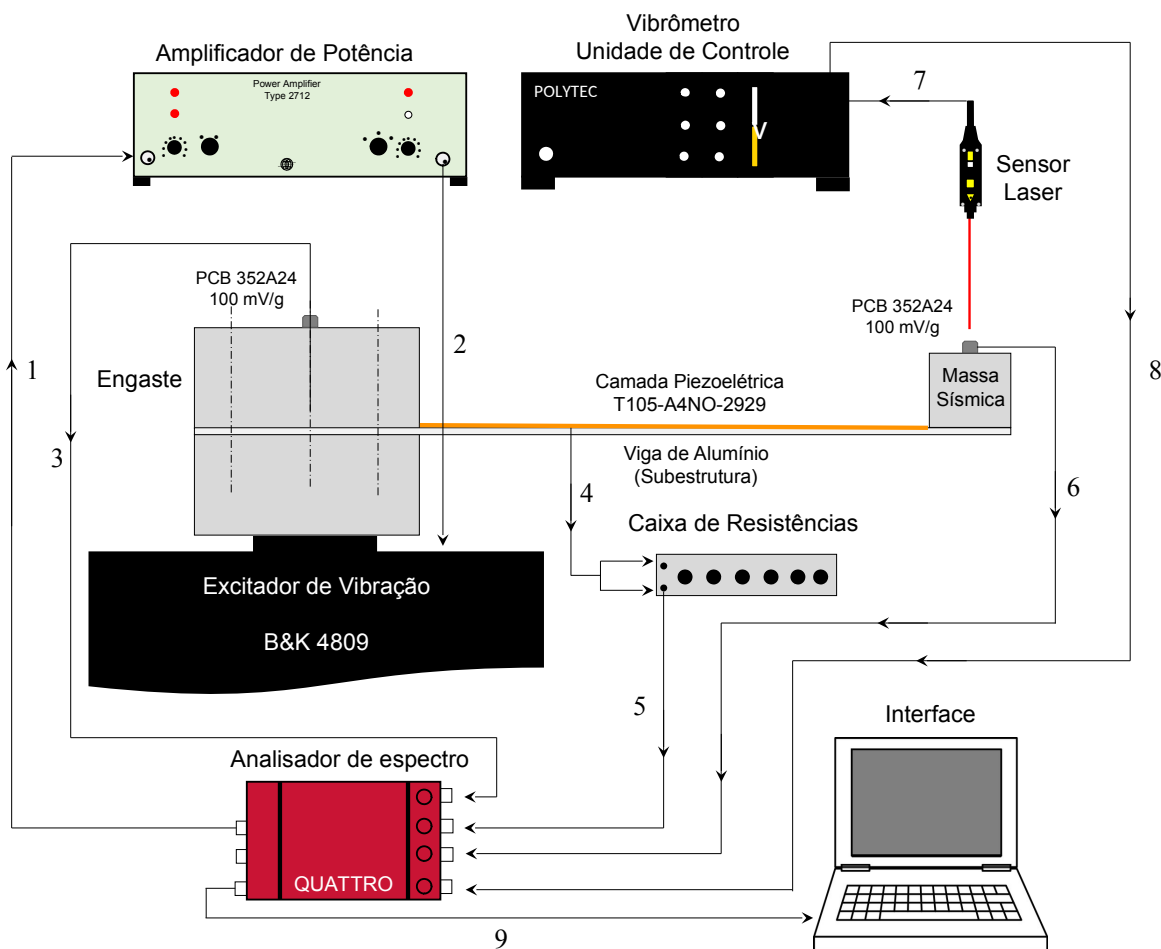
Figura 13 – Foto da visualização global da aparelhagem usada no teste com o dispositivo.



A análise experimental seguiu pela utilização dos equipamentos, cabos e conexões apropriados, conforme figura 13, com a finalidade de estimar as FRFs necessárias. O dispositivo foi posicionado no excitador de vibração (Bruel & Kjaer 4809) por um engaste adequadamente projetado conforme figura 12. Sobre a massa sísmica, um acelerômetro (PCB 325A24 com sensibilidade 100mV/g) foi colocado, possibilitando a extração da FRF de saída de aceleração, sabendo que no engaste outro acelerômetro, que não aparece

na figura, foi usado para medir a aceleração de referência na entrada. Um vibrômetro (Polytec CLV 700) associado com unidade de controle (Polytec CLV 1000) foi empregado para medir a velocidade da massa sísmica, permitindo inclusive extrair a FRF de saída de velocidade, sendo que é possível ver um ponto fixo de laser do vibrômetro na figura 12. Por fim, com o uso de valores apropriados de resistências elétricas pode-se medir a tensão elétrica gerada através do sensor piezoelétrico e extrair a FRF de saída de tensão.

Figura 14 – Diagrama da configuração experimental usada no teste



Na figura 14, está apresentado um diagrama da configuração experimental utilizada nos ensaios experimentais com o dispositivo de coleta de energia. Com isso, pode-se fazer a leitura dos dados através de um computador e comparar com o modelo numérico, que foi implementado em ambiente MATLAB. Os detalhes apresentados na figura 14 são sumarizados como segue: (1) um sinal de ruído branco de banda larga de 500 mV rms e frequência 0-100 Hz é gerado pelo analisador de espectro (Data Physics QUATTRO) e enviado ao amplificador de potência (Bruel & Kjaer Type 2712); (2) o ganho do amplificador de potência é ajustado e o sinal gerado enviado ao excitador de vibração; (3) o sinal de referência é medido com o acelerômetro e enviado ao respectivo canal; (4)/(5) um sinal

de tensão é medido pelo uso de uma caixa de resistência conectada a camada piezométrica; (6) o acelerômetro colocado na massa sísmica fornecerá o sinal para aferir a FRF de saída de aceleração; (7)/(8) um sensor a laser mede a velocidade na massa sísmica e envia a unidade de controle com vibrômetro que alimenta o analisador de espectro, possibilitando extrair a FRF de saída de velocidade por entrada de aceleração, devido ao acelerômetro no engaste.

No experimento, 3200 linhas de espectros foram amostradas para um sinal do tipo aleatório no excitador de vibração em uma faixa de frequência de 0-100 Hz, implicando em uma resolução de $\Delta f = 31,25$ mHz. Em geral, pode ocorrer o fenômeno conhecido como *leakage* (vazamento) ou distorção do espectro, quando da transformação dos dados do domínio do tempo para o domínio da frequência usando transformada rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform* - FFT) não tendo uma amostragem completa de dados amostrados no tempo ou uma adequada periodicidade. Por isso, são usadas funções de ponderação, também conhecidas como janelas (*windows*), nos dados amostrados, para melhor periodicidade quando da aplicação da FFT. Assim, janelas do tipo Hanning, que são funções de ponderação do tipo cosseno utilizadas para sinais aleatórios, foram empregadas nos dados amostrados, evitando possíveis distorções na amplitude de vibração das FRFs (MCCONNELL; VAROTO, 1995).

4.3.3 Comparação entre resultados numéricos e experimentais e ajuste do modelo

A curva experimental da FRF de saída de aceleração na condição de curto circuito com a menor resistência elétrica de $R_c = 100 \Omega$ foi utilizada com o método do -3dB para o cálculo do fator de amortecimento, o que conduziu a um valor de $\zeta = 1,1\%$. Por outro lado, a maior resistência elétrica de $R_c = 1 \text{ M}\Omega$ foi empregada para avaliar a frequência natural em circuito aberto, com a finalidade de calcular o coeficiente de acoplamento eletromecânico (EMCC), o qual quantifica a energia mecânica convertida em energia elétrica através da camada piezométrica.

Após verificação das frequências de ressonância para $R_c = 100 \Omega$ e $R_c = 1 \text{ M}\Omega$, o EMCC experimental foi encontrado com um valor 4,63% para o primeiro modo de vibração. Observando em um primeiro momento as frequências de ressonância, o modelo numérico teve um ajuste da massa sísmica translacional em 9,2 g e momento de inércia em $0,8 \text{ kg mm}^2$, devido à porção do cabo do acelerômetro e erros de estimativa devido à geometria da massa, visando aproximação das frequências dos modelos. Em relação ao EMCC, foi necessário ajustar os coeficientes da camada piezométrica com os valores de $\bar{\epsilon}_{11}^E = 66,3 \text{ GPa}$, $\bar{\epsilon}_{31} = -13,3 \text{ C/m}^2$ e $\bar{\epsilon}_{33} = 12,3 \text{ nF/m}$, bem como o módulo de elasticidade do alumínio para 68 GPa. Isso gerou um EMCC de 4,52% e frequências de ressonância com boa aproximação para o primeiro modo, conforme Tab. 1. Os gráficos das FRFs em OC

e SC podem ser vistos através das figuras 15 e 16, que também contemplam as respostas com outros valores de resistências elétricas após o ajuste dos coeficientes. Portanto, foram analisadas respostas com os seguintes valores de resistência após a validação: $R_c = 100 \Omega$, $R_c = 1 \text{ k}\Omega$, $R_c = 10 \text{ k}\Omega$, $R_c = 100 \text{ k}\Omega$, $R_c = 500 \text{ k}\Omega$ e $R_c = 1 \text{ M}\Omega$.

Tabela 1 – Resultados numérico e experimental para as frequências naturais em circuito aberto (OC) e curto circuito (SC) com os correspondentes EMCC efetivo para o primeiro modo.

	Experimental	Numérico	Erro Relativo (%)
$f_{1,sc}$ [Hz]	38,69	39,73	2,7
$f_{1,oc}$ [Hz]	39,62	40,65	2,6
k_1^2 [%]	4,63	4,52	2,4

Figura 15 – FRFs de aceleração para $R_c = 100 \Omega$, $R_c = 1 \text{ k}\Omega$ e $R_c = 10 \text{ k}\Omega$

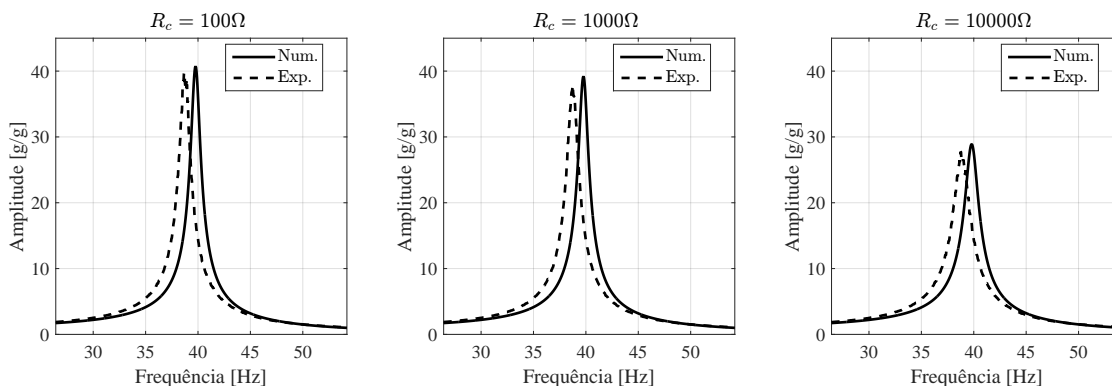
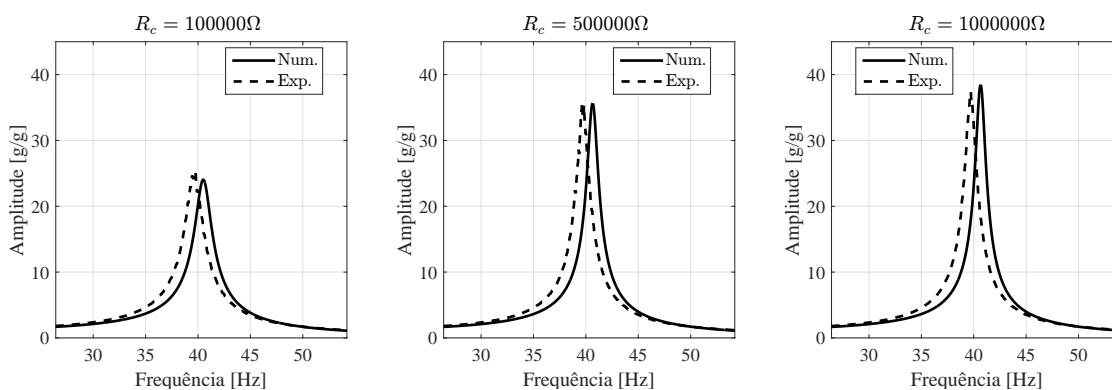
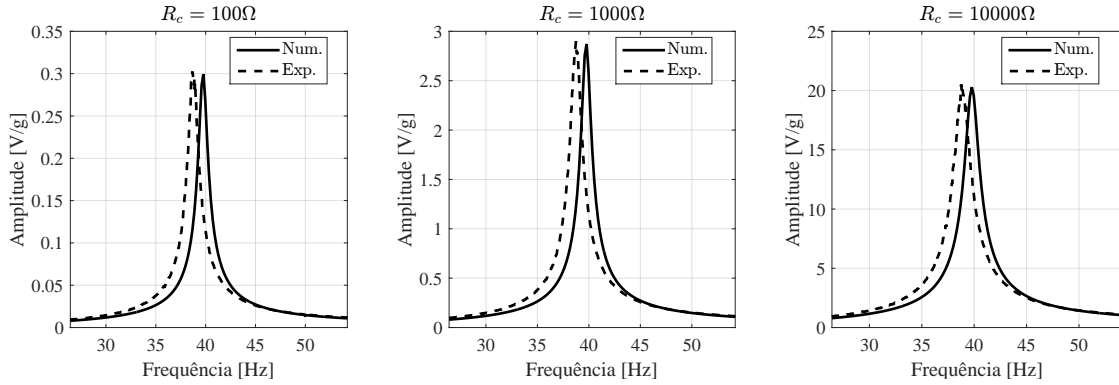
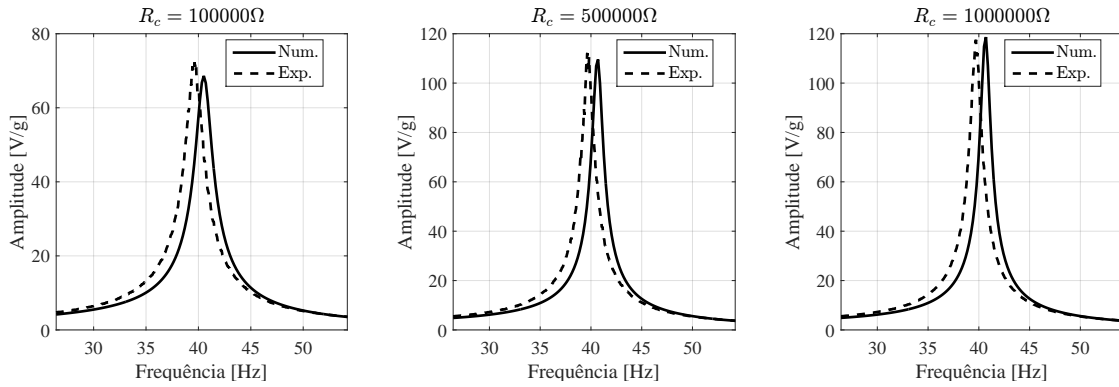


Figura 16 – FRFs de aceleração para $R_c = 100 \text{ k}\Omega$, $R_c = 500 \text{ k}\Omega$ e $R_c = 1 \text{ M}\Omega$



Em relação à saída de tensão elétrica foi utilizada a equação (4.16) para calcular a FRF e com as mesmas resistências selecionadas para a aceleração plotados os gráficos das figuras 17 e 18. Como pode ser visto, a tensão aumenta conforme se escolhe valores de resistências maiores, até que se atinja a condição de circuito aberto. Através das figuras, pode ser notado que uma boa aproximação entre os modelos foi atingida, por ajustar os coeficientes, o que foi satisfatório para toda análise subsequente.

Figura 17 – FRFs de tensão para $R_c = 100 \Omega$, $R_c = 1 \text{ k}\Omega$ e $R_c = 10 \text{ k}\Omega$ Figura 18 – FRFs de tensão para $R_c = 100 \text{ k}\Omega$, $R_c = 500 \text{ k}\Omega$ e $R_c = 1 \text{ M}\Omega$ 

4.4 Definição dos valores das molas de modelagem do engaste

Após validação do modelo numérico, é possível determinar valores das molas do engaste, para prosseguir com estudos de incertezas e otimização dos dispositivos. No modelo experimental, o protótipo é fixo com engaste ajustado, por parafusos, por isso utiliza-se valores de molas k_w e k_θ elevados, com o intuito de representação do engastamento. No entanto, para análises de incerteza, inclusive representando possíveis casos experimentais em que o engaste esteja desajustado, é importante determinar valores de molas pertinentes. Esses valores são determinados por análise paramétrica, plotando amplitudes da FRF de aceleração em determinada frequência, usando a equação (4.14), para alguns valores de resistência elétrica, contra a rigidez linear e torcional. Ainda, nesse processo utiliza-se o modelo validado, ou seja, apenas variando os valores de rigidez do engaste. Conforme se aumenta os valores k_w e k_θ , é esperado que a resposta se estabilize, fornecendo amplitudes invariáveis. No entanto, baixos valores de rigidez levam a variabilidade na resposta, representando um engaste desajustado. Por isso, a estratégia será observar amplitudes que se estabilizaram com k_w e k_θ e diminuir esses parâmetros até que determinada porcentagem das amplitudes em relação aos valores estabilizados seja atingida. Um valor de frequência adequado para se medir as amplitudes de aceleração será próximo ao pico das FRFs experimentais. Com isso, encontram-se valores médios para k_w e k_θ , prosseguindo com

a inclusão de incertezas, dado que o critério é escolher locais dos gráficos que se tenha razoável variabilidade na resposta.

O procedimento de análise gráfica foi realizado observando como a FRF de saída de aceleração $G_{a_t a_0}(\omega)$ na massa sísmica, para três valores diferentes de resistências elétricas (10, 100 e 1000 k Ω) em 40 Hz, se comportam. O modelo experimental apresentado nas seções anteriores foi utilizado para essa análise. Assim, os valores utilizados como médios para a rigidez linear e torcional foram escolhidos por observar uma redução de 5% nas amplitudes máximas para cada resistência, conforme linhas tracejadas das figuras 19 e 20. Os valores resultantes de k_w e k_θ para as diferentes resistências elétricas estão indicados na legenda das figuras. A escolha de $k_w = 50$ kN/m e $k_\theta = 0,3$ kNm/rad se deu, visto que são os valores críticos arredondados a partir dos gráficos analisados.

Figura 19 – Amplitude da FRF de aceleração na massa sísmica em função de k_w para diferentes valores de R_c

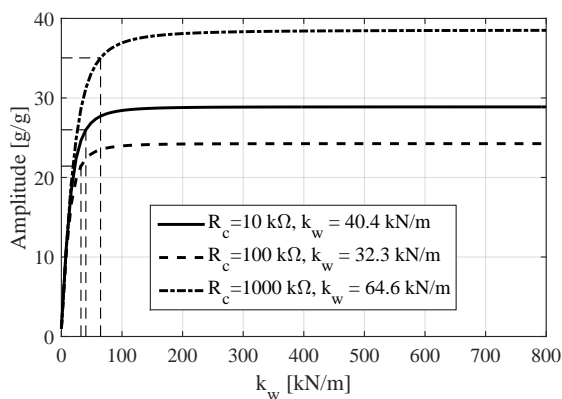
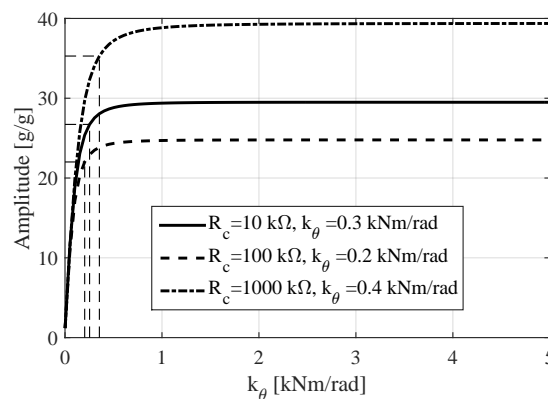


Figura 20 – Amplitude da FRF de aceleração na massa sísmica em função de k_θ para diferentes valores de R_c



Partindo dos valores médios $k_w = 50$ kN/m e $k_\theta = 0,3$ kNm/rad, uma análise de incertezas será realizada, supondo dispersões relativas para essas variáveis. Isso é fundamental para o projeto robusto, visto que a média e a variância da FRF de potência são dependentes destes valores de dispersão relativa dos parâmetros incertos e, a partir desta relação, será possível realizar otimizações multiobjetivo e encontrar variáveis de projeto adequadas. Os parâmetros k_w e k_θ foram considerados independentes, porém com análises experimentais apropriadas para diferentes vigas poderia se determinar uma possível correlação entre ambos. Sabendo que não apenas as molas do engaste serão consideradas como parâmetros incertos, a determinação dos momentos estatísticos para o dispositivo e o procedimento de aplicação das otimizações multiobjetivo serão apresentadas no próximo capítulo.

5 Metodologia de projeto robusto

5.1 Introdução

Em virtude do propósito de se projetar dispositivos robustos, é necessário estimar o primeiro e segundo momentos estatísticos para prosseguir com as otimizações e análises necessárias. Com isso, as variáveis de projeto e parâmetros incertos devem ser definidos a priori para sistematizar o problema. Assim, será possível mostrar como a estimativa dos momentos e realização das otimizações para diferentes possibilidades de projetos de coleta de energia são realizadas. Desta forma, esse capítulo detalha como e quais variáveis e parâmetros são escolhidos, com os correspondentes procedimentos para inclusão de incertezas quando conveniente, os processos para determinar os momentos estatísticos da amplitude da FRF de potência e algumas estratégias de otimização para diferentes casos de projeto.

5.2 Definição das variáveis de projeto e incertas no problema

Com a escolha a priori dos materiais a serem utilizados para substrato, pastilha piezolétrica e camada adesiva do dispositivo apresentado na Fig. 9, é necessário escolher e definir as variáveis de projeto e os parâmetros considerados incertos. Dado que a intenção é projetar diferentes dispositivos e com base em estudos anteriores e preliminares, optou-se aqui em partir dos seguintes candidatos a variáveis de projeto: comprimento livre da viga, resistência elétrica efetiva do circuito, comprimento, espessura e posicionamento da pastilha piezolétrica. Por isso, as candidatas a variáveis de projeto são a priori definidas como: l_v , R_c , h_p , l_p/l_v e $d_p/(l_v - l_p)$. A altura da massa sísmica h_b é definida como variável de projeto dependente, sendo encontrada por otimização interna ao programa, como será abordado na seção 5.5. A variável de projeto associada ao comprimento da pastilha é definida em relação ao comprimento da viga, como l_p/l_v , possibilitando manipular o programa em elementos finitos adequadamente, dado que l_p fica sempre limitado ao comprimento da viga. Como para o programa de otimização do dispositivo, l_v é aleatório, se l_p fosse uma variável de projeto, poderia ser que ficasse maior que l_v , gerando uma construção sem sentido, assim definir l_p/l_v é uma ideia interessante que evita utilizar restrições na otimização. Da mesma forma, define-se $d_p/(l_v - l_p)$ para encontrar a posição da pastilha na viga, visto que nesta relação o denominador representa a parte descoberta do substrato, sendo que a pastilha pode ocupar qualquer posição nesta parte. Tendo-se o valor dessa última relação, l_v e l_p , fica determinado d_p . Além disso, as relações mencionadas são fáceis de manipular por estarem entre 0 e 1, bem como evitar utilização de restrições em

otimizações. Quanto aos parâmetros candidatos a serem considerados incertos, decide-se pelos seguintes:

- Molas do engaste k_w , k_θ , devido à alta variabilidade inerente ao engastamento;
- Fator de amortecimento ζ , visto que este vem de muitas fontes diferentes, o que pode afetar a amplitude de energia coletável a depender das condições ambientais. Além disso, como é uma simplificação da realidade, as incertezas associadas a este parâmetro também respondem, em certa medida, pelas incertezas epistêmicas;
- Resistência elétrica R_c , pois esta é utilizada para calcular a potência dissipada em um circuito apropriado de coleta de energia, porém como há fontes de incertezas neste, determina-se que R_c é uma variável incerta;
- Espessura da camada adesiva h_c , pois na colagem da pastilha no substrato, este parâmetro se altera, devido ao processo de cura da cola, além do que a medição da espessura pode ser variável ao longo do comprimento da pastilha piezelétrica;
- Módulo de elasticidade da camada adesiva E_c , pois é um parâmetro de difícil determinação, devido às condições experimentais, como apropriadas temperatura e umidade bem como geometria da camada e cargas aplicadas para ensaio, o que provocam variabilidade de medida.

Definidos os candidatos a variáveis de projeto e parâmetros incertos, quatro problemas são estudados, aumentando ou diminuindo o número destas variáveis. No primeiro problema, considera-se um menor número de variáveis, mais fundamentais, de projeto $\mathbf{x}_p = \{l_v, R_c\}$ e parâmetros incertos mais relacionados a condições externas à construção do dispositivo (de operação ou montagem) $\mathbf{x} = \{k_w, k_\theta, \zeta, R_c\}$. No segundo problema, utiliza-se todas as candidatas a variáveis de projeto com $\mathbf{x}_p = \{l_v, R_c, l_p/l_v, d_p/(l_v - l_p)\}$ e mantém-se os parâmetros incertos anteriores. No terceiro problema, recupera-se apenas as variáveis de projeto mais fundamentais com $\mathbf{x}_p = \{l_v, R_c\}$, mas incluindo-se parâmetros ‘internos’ de construção do dispositivo, a espessura h_c e o módulo de elasticidade da camada adesiva E_c no vetor de parâmetros incertos, sendo definido como $\mathbf{x} = \{k_w, k_\theta, \zeta, R_c, h_c, E_c\}$. No quarto e último problema, as variáveis de projeto e parâmetros incertos identificados como mais significativos ou influentes na resposta são utilizados. Após projetar dispositivos para o segundo cenário via otimização, será possível verificar se alguma variável se alterou pouco, sendo descartada para o último cenário estudado. Quanto aos parâmetros incertos, pode-se verificar a influência de cada um sobre a média, desvio padrão e dispersão relativa da amplitude da FRF de potência, para descartar os que menos causam variabilidade na resposta. O procedimento para estimar os momentos estatísticos da amplitude da FRF de potência será apresentado ainda neste capítulo.

5.3 Determinação da distribuição de probabilidade para os parâmetros incertos

A hipótese assumida para se determinar a função de distribuição de probabilidade a ser empregada no problema baseia-se no Princípio da Entropia Máxima (PEM). Shannon definiu e utilizou o conceito de entropia na teoria da informação e Jaynes tomou o “Princípio da Razão Insuficiente” de Laplace como base para formular o PEM ao maximizar a entropia de Shannon (JAYNES, 1957; CURSI; JOSÉ; SAMPAIO, 2012). Basicamente o PEM determina a função de distribuição de probabilidade que maximiza a incerteza resultante com base apenas na informação disponível. Assim, com conhecimento apenas parcial a respeito das variáveis aleatórias, como suporte, média e matriz de covariância, pode-se obter as distribuições de probabilidade mais adequadas (RITTO; SAMPAIO; CATALDO, 2008; SOIZE, 2017).

Por exemplo, dado que uma variável aleatória X tenha suporte $(0, +\infty)$, definida nos reais positivos \mathbb{R}^+ , sua média $E[X] = \bar{X}$ seja conhecida, em que $E[\ln(X)] = c_1$ com $|c_1| < +\infty$ seja imposto, levando a exclusão do valor nulo, a distribuição de probabilidade encontrada será do tipo Gama, segundo o PEM. Estas propriedades são válidas para todos os parâmetros considerados incertos neste trabalho, a saber k_w , k_θ , R_c , ζ , E_c e h_c , assim se utiliza esse tipo de distribuição para análise de incertezas no problema de coleta de energia. Alguns trabalhos de vibrações também utilizaram a distribuição Gama para análises de incertezas no engaste, em propriedades da cola e resistência elétrica (SANTOS, 2012; RITTO; SAMPAIO; CATALDO, 2008). A função densidade de probabilidade (pdf) Gama é representada como:

$$f_X(x) = \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x) \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{\delta^2}} \frac{1}{\Gamma(1/\delta^2)} \left(\frac{x}{\mu}\right)^{\frac{1}{\delta^2}-1} \exp\left(-\frac{x}{\delta^2\mu}\right) \quad (5.1)$$

em que $\mathbf{1}_{]0,+\infty[}$ é a função indicadora, com valor unitário para a variável aleatória dentro do suporte e nulo caso contrário, δ a dispersão relativa e Γ a função Gama, dada por $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} \exp(-u) du$. A função Gama possui fator de forma α , que pode ser encontrado por $\alpha = 1/\delta^2$, sendo que para valores pequenos de α , ou seja alta dispersão, a distribuição Gama tende a aproximar-se da exponencial e para valores elevados de α , ou seja baixa dispersão, da distribuição Gaussiana, restrita ao suporte nos reais positivos.

No projeto dos dispositivos coletores de energia realizado neste trabalho, todos os parâmetros incertos são considerados variáveis aleatórias que assumem apenas valores positivos, para as quais supõe-se média μ conhecida e dada pelo valor nominal correspondente e dispersão δ conhecida com valor a ser analisado de forma paramétrica. Assim, a pdf Gama é utilizada para todos com parâmetros de forma $\alpha = (\mu/\sigma)^2 = 1/\delta^2$ e escala $\beta = \sigma^2/\mu = \mu\delta^2$. Assim, com base em valores pré-definidos de média e dispersão para

cada parâmetro incerto, é possível determinar os parâmetros de forma e escala da pdf Gama, necessários para geração de amostras a ser discutida na sequência.

5.4 Procedimento de estimativa dos momentos estatísticos da amplitude da FRF de potência

A estimativa dos momentos estatísticos, média, variância e derivados, como desvio-padrão e dispersão relativa, da amplitude da FRF de potência coletável de um dado dispositivo será essencial para as metodologias de otimização robusta propostas neste trabalho. Sendo assim, esta seção expõe os procedimentos propostos para tal estimativa. Quatro técnicas foram apresentadas no capítulo 2 para estimativa de média e variância: expansão em séries de Taylor de primeira ordem (FTS), simulação direta de Monte Carlo (MCS), simulação de Monte Carlo com amostragem por hipercubo latino (LHS) e expansão em polinômio de caos (PCE). O método FTS tem baixo custo computacional, porém pode retornar aproximações insatisfatórias em caso de alta variabilidade e/ou não-linearidade, por isso deve ser usado com cautela. O método de Monte Carlo, com grande número de amostras, é o mais preciso porém leva a um custo computacional excessivo para fins de otimização robusta, devido à necessidade de chamada da função (modelo computacional) para cada amostra. Este custo pode ser parcialmente reduzido, sem muita perda de precisão, com uma técnica de amostragem como LHS. Sendo assim, este método será utilizado apenas para análise de alguns dispositivos específicos e estimar valores de referência para fins de comparação e validação das outras técnicas. Para isso, pode-se utilizar um dispositivo específico e grande número de amostras. A estimativa por PCE será considerada neste trabalho como aquela de melhor compromisso custo-benefício para fins de utilização nas metodologias de otimização robusta aqui propostas. Por gerar um meta-modelo estocástico, esta técnica não requer chamada de função para tantas amostras e ainda possibilita levar em conta o tipo de distribuição de probabilidade dos parâmetros incertos. No entanto, o número de amostras e o grau do PCE considerados devem ser verificados antes de sua aplicação à otimização. Um baixo número de amostras poderia gerar um modelo com erros, enquanto aumentar demasiadamente as amostras pode provocar *overfitting* (sobreajuste), em que o modelo se comporta bem para os dados amostrados, porém fica ineficiente ao se considerar novos dados.

Lembrando que, para dados vetores contendo as variáveis de projeto, \mathbf{x}_p , e um conjunto de realizações (amostras) dos parâmetros incertos, \mathbf{X} , a amplitude da FRF de potência coletável para uma determinada frequência ω será dada conforme a seguinte equação:

$$Y = g(\mathbf{x}_p, \mathbf{X}, \omega) \quad (5.2)$$

Sendo assim, para cada dispositivo candidato, representado pelo vetor de variáveis de projeto, \mathbf{x}_p , e para uma dada frequência de interesse (ou de excitação), ω , as N amostras dos parâmetros incertos geram um conjunto de N realizações de potência coletável que serão utilizadas para o cálculo de média, variância e derivados, desvio-padrão e dispersão relativa. Os procedimentos específicos para cada técnica de estimativa serão apresentados nas próximas subseções.

5.4.1 Estimação dos momentos estatísticos via MCS e LHS

Na frequência imposta pela base e com os valores específicos do vetor \mathbf{x}_p , pode-se realizar a primeira estimativa da média e variância de Y usando o método MCS ao considerar $\mathcal{X}_u = \{\mathbf{x}^{(j)}, j = 1, \dots, N\}$, com N amostras. O vetor \mathbf{x} poderá ser dado por $\mathbf{x} = \{k_w, k_\theta, \zeta, R_c\}$ ou $\mathbf{x} = \{k_w, k_\theta, \zeta, R_c, h_c, E_c\}$, por exemplo, dependendo do problema. Várias amostras do vetor de parâmetros incertos \mathbf{x} são tomadas, possibilitando extrair valores diferentes realizações para a resposta, conforme segue para o primeiro caso:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &:= (k_w^{(1)}, k_\theta^{(1)}, \zeta^{(1)}, R_c^{(1)}) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}^{(N)} &:= (k_w^{(N)}, k_\theta^{(N)}, \zeta^{(N)}, R_c^{(N)}) \\ y^{(j)} &:= g(\mathbf{x}_p, k_w^{(j)}, k_\theta^{(j)}, \zeta^{(j)}, R_c^{(j)}, \omega), \quad j = 1, \dots, N \end{aligned} \tag{5.3}$$

Com o auxílio do software MATLAB, e em particular da função *gamrnd*, pode-se gerar amostras com distribuição Gama, fornecendo os parâmetros de forma α e de escala β do respectivo parâmetro incerto. Então, a média e a variância do vetor de realizações $\mathcal{Y} = \{y^{(j)}, \dots, y^{(N)}\}$ serão encontradas utilizando as equações (2.8) e (2.9), respectivamente. Qualquer modificação no vetor de incertezas \mathbf{x} ou no de projeto \mathbf{x}_p não irá alterar o procedimento, sendo o mesmo do exemplificado anteriormente. Nesta etapa, com um número de amostras N elevado o suficiente, determina-se μ_Y e σ_Y^2 , como sendo valores de referências. Assim, as estimativas obtidas com outras técnicas poderão ser comparadas com estes valores de referência, permitindo avaliar o erro de estimativa de cada técnica e seu correspondente número de amostras ou chamadas de função necessárias e consequente custo computacional.

O custo computacional requerido para obtenção dos valores de referência via simulação de Monte Carlo podem ser parcialmente mitigados com auxílio de uma amostragem mais eficiente como LHS, que geram N amostras mais representativas e, assim, em número possivelmente menor. Para isso, é preciso determinar os componentes da matriz \mathbf{S} apresentada por meio da equação (2.15). Para o primeiro exemplo, em que há 4 variáveis aleatórias no vetor \mathbf{x} , gera-se N amostras, que também correspondem ao número de divisões do domínio de cada variável. Por isso, na mesma equação, \mathbf{P} e \mathbf{S} terão dimensões

$(N \times 4)$, com cada coluna formada por números aleatórios entre 1 e 4 para \mathbf{P} e entre 0 e 1 para \mathbf{S} , respectivamente. Esse procedimento permitirá reescrever a equação (2.15) para o caso particular como:

$$\mathbf{S} = [s_{ji}]_{N \times 4} = \frac{1}{N}(\mathbf{P} - \mathbf{R}) \quad (5.4)$$

Encontrando os elementos s_{ji} , as amostras $x_i^{(j)}$ serão determinadas utilizando a inversa de sua função acumulada de probabilidade para os valores de s_{ji} , ou seja:

$$x_i^{(j)} = \{F_X^{-1}(s_{ji})\}_{i=1, \dots, 4} \quad (5.5)$$

Para encontrar as amostras $x_i^{(j)}$, dadas pela equação anterior, pode-se aplicar a função *icdf* do software Matlab, em um processo iterativo, para cada amostra s_{ji} . Neste caso, será necessário fornecer os parâmetros de forma α e de escala β da pdf Gama para cada parâmetro incerto k_w, k_θ, ζ e R_c .

Dado que as amostras aleatórias são obtidas para $j = 1, \dots, N$, forma-se o vetor $\mathbf{x}^{(j)} = (k_w^{(j)}, k_\theta^{(j)}, \zeta^{(j)}, R_c^{(j)})$, permitindo aplicar o método MCS a fim de determinar as realizações da resposta $\mathcal{Y} = \{y^{(j)}, \dots, y^{(N)}\}$, como na equação (5.3), e utilizá-las para estimar média e variância, de acordo com equações (2.8) e (2.9).

5.4.2 Estimação dos momentos estatísticos via FTS

Por oposição ao método de Monte Carlo, no qual muitas amostras são necessárias para os parâmetros incertos, na aproximação por expansão em séries de Taylor, requer-se apenas conhecer as médias e variâncias destes parâmetros. Usando o vetor de variáveis incertas $\mathbf{x} = \{k_w, k_\theta, \zeta, R_c\}$ como exemplo, dado o vetor de projeto \mathbf{x}_p e uma frequência ω específica, toma-se as equações (2.5) e (2.7) como base, levando a escrever:

$$\mu_Y \simeq g(\mathbf{x}_p, k_w, k_\theta, \zeta, R_c, \omega) \quad (5.6)$$

$$\sigma_Y^2 \simeq \left(\frac{\partial g}{\partial k_w}\right)^2 \sigma_{k_w}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial k_\theta}\right)^2 \sigma_{k_\theta}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \zeta}\right)^2 \sigma_\zeta^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial R_c}\right)^2 \sigma_{R_c}^2 \quad (5.7)$$

em que $\sigma_{k_w}^2, \sigma_{k_\theta}^2, \sigma_\zeta^2$ e $\sigma_{R_c}^2$ são valores predefinidos de variância dos parâmetros incertos de rigidez linear, rigidez torcional, amortecimento e resistência elétrica. Modificando o número de variáveis incertas, considerando a espessura da camada adesiva h_c e o módulo de elasticidade E_c , mais duas variâncias e derivadas parciais em relação a esses parâmetros serão inclusas na estimativa da variância da resposta. Independente do número de parâmetros incertos, o raciocínio será semelhante ao apresentado anteriormente, tanto para média como para variância.

É importante ressaltar, no entanto, que a função resposta $g(\mathbf{x}_p, k_w, k_\theta, \zeta, R_c, \omega)$ não é dada em forma analítica de maneira que não é possível escrever as derivadas parciais analiticamente. Portanto, estas são aproximadas numericamente usando diferenças finitas para cada parâmetro incerto em torno dos seus valores nominais (médios). A qualidade desejada para esta aproximação e a quantidade de parâmetros incertos define o número necessário de chamadas da função resposta. Ainda, ao se utilizar um número próximo da média do parâmetro analisado, obtém-se um valor de derivada, sendo que ao aproximar mais esse número da média um novo valor derivada será fornecido. O erro da estimativa é calculado tendo os valores anterior e posterior dessas derivadas, de modo que para verificar se o erro está satisfatório, é realizada a comparação deste com uma tolerância escolhida. Na instrução do programa, várias repetições acontecem até que o erro esteja satisfatório, ao realizar a comparação com a tolerância escolhida, por isso várias chamadas de funções podem acontecer, dependendo dessa tolerância e da complexidade da função do problema analisado.

5.4.3 Estimação dos momentos estatísticos via PCE

O método de expansão em polinômios de caos constitui outra forma, intermediária em termos de custo-benefício entre FTS e MCS/LHS, para se estimar os momentos estatísticos da amplitude da FRF de saída de potência. Porém, diferentemente dos dois métodos anteriores, o método PCE estabelece uma família de meta-modelos a depender da definição de parâmetros importantes, como o grau dos polinômios considerados e o procedimento para cálculo dos coeficientes, que pode incluir a necessidade de amostragem.

Conforme apresentado na seção 2.5, neste processo, a primeira etapa consiste em determinar a cardinalidade $\text{card}(\mathcal{A}^{M,p})$ posta pela equação (2.31), dado o número de variáveis aleatórias (aqui, parâmetros incertos pré-definidos em cada problema) M e o grau p escolhido para polinômios. Isso permite determinar o número de multi-índices $\boldsymbol{\varrho} = (\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_M)$, que possuem o módulo da soma de seus valores menor ou igual ao grau de polinômio escolhido, conforme equações (2.27) e (2.31). Esse número também será igual ao número de coeficientes do polinômio. Os multi-índices serão formados segundo este procedimento, possibilitando estabelecer os polinômios multivariados $\Psi_{\boldsymbol{\varrho}}(\mathbf{X})$ que comporão as bases da expansão. No presente trabalho, a quantidade de variáveis aleatórias varia de 4 a 6, dependendo do problema abordado. Para o caso mais simples, com 4 variáveis aleatórias, pode-se escrever os multi-índices como $\boldsymbol{\varrho} = (\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4)$ tal que $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 \leq p$.

Além disso, como as variáveis aleatórias possuem distribuição Gama, os polinômios multivariados serão determinados usando polinômios de Laguerre (SUDRET, 2014). Por uma questão prática, com o intuito de facilitar o entendimento, será exposto um caso com 4 variáveis e distribuição Gaussiana. O raciocínio para estimar a média e variância será

bem parecido para variável Gama, seguindo as mesmas linhas teóricas, com exceção das bases que são ortonormalizadas de maneira diferente. No entanto, será apresentado todo esse procedimento depois da finalização do exemplo. Assim, para uma variável aleatória U , escrita no espaço normal padrão \mathbb{U} , os polinômios de Hermite, os quais estão atrelados às variáveis com distribuição Gaussiana, até grau 4 serão escritos como:

$$\begin{aligned}
\psi_0(U) &= 1 \\
\psi_1(U) &= U \\
\psi_2(U) &= (U^2 - 1)/\sqrt{2} \\
\psi_3(U) &= (U^3 - 3U)/\sqrt{6} \\
\psi_4(U) &= (U^4 - 6U^2 + 3)/\sqrt{12}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Para aplicar o raciocínio exposto no parágrafo anterior, escolhe-se, então, o grau desejado para a PCE, determinando o número de multi-índices e polinômios multivariados. Um maior grau escolhido para o polinômio levará a uma maior precisão na estimativa de um metamodelo e momentos estatísticos, porém exigirá um maior tempo computacional. Para exemplificar, a escolha de um polinômio com grau 2 resultará em $\text{card}(\mathcal{A}^{4,2}) = 15$, que corresponderá à quantidade de multi-índices cuja soma de seus elementos é menor ou igual ao grau da PCE, conforme estão na tabela 2. A base da PCE é consequência dos polinômios multivariados, que resultam do produto de polinômios de Hermite para cada variável aleatória. Ainda, os polinômios de Hermite escolhidos baseiam-se no valor dos elementos de cada multi-índice, conforme primeira e segunda coluna da tabela 2. Neste caso, as variáveis aleatórias estão escritas no espaço normal padrão \mathbb{U} .

Com as bases determinadas, uma estimativa para a equação (5.2) pode ser determinada para a PCE de grau 2, apoiando-se na equação (2.29). Assim, a equação (5.9) representará essa estimativa.

$$\begin{aligned}
\hat{Y} &= c_0 + c_1U_1 + c_2U_2 + c_3U_3 + c_4U_4 + c_5U_1U_2 + c_6U_1U_3 + c_7U_1U_4 + c_8U_2U_3 \\
&+ c_9U_2U_4 + c_{10}U_3U_4 + c_{11}\frac{U_1^2 - 1}{\sqrt{2}} + c_{12}\frac{U_2^2 - 1}{\sqrt{2}} + c_{13}\frac{U_3^2 - 1}{\sqrt{2}} + c_{14}\frac{U_4^2 - 1}{\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

em que c_0, c_2, \dots, c_{14} são os coeficientes a serem determinados.

A primeira etapa para determinação dos coeficientes da expansão consiste em calcular o número mínimo da amostragem n para as variáveis aleatórias, que varia de 2 a 3 vezes $\text{card}(\mathcal{A}^{M,p})$. Após esse cálculo, um vetor de dimensionamento experimental $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}^{(i)}, i = 1, \dots, n\}$, para $M = 4$, é encontrado via LHS, conforme equações (5.4) e (5.5). Tendo essas amostragens, encontra-se um vetor de respostas para o modelo computacional $\mathcal{Y} = \{\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}), i = 1, \dots, n\}^T$. Como é necessário montar a matriz \mathbf{A} , definida

Tabela 2 – Formação dos polinômios multivariados considerando grau da PCE igual a 2.

j	$\boldsymbol{\varrho}$	$\Psi_{\boldsymbol{\varrho}}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^M \psi_{\varrho_i}^{(i)}(U_i)$	$\Psi_{\boldsymbol{\varrho}} \equiv \Psi_j$	$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4$
1	(0,0,0,0)	$\psi_0(U_1)\psi_0(U_1)\psi_0(U_2)\psi_0(U_4)$	1	0
2	(1,0,0,0)	$\psi_1(U_1)\psi_0(U_2)\psi_0(U_3)\psi_0(U_4)$	U_1	1
3	(0,1,0,0)	$\psi_0(U_1)\psi_1(U_2)\psi_0(U_2)\psi_0(U_4)$	U_2	1
4	(0,0,1,0)	$\psi_0(U_1)\psi_0(U_2)\psi_1(U_3)\psi_0(U_4)$	U_3	1
5	(0,0,0,1)	$\psi_0(U_1)\psi_0(U_2)\psi_0(U_3)\psi_1(U_4)$	U_4	1
6	(1,1,0,0)	$\psi_1(U_1)\psi_1(U_2)\psi_0(U_3)\psi_0(U_4)$	U_1U_2	2
7	(1,0,1,0)	$\psi_1(U_1)\psi_0(U_2)\psi_1(U_3)\psi_0(U_4)$	U_1U_3	2
8	(1,0,0,1)	$\psi_1(U_1)\psi_0(U_2)\psi_0(U_3)\psi_1(U_4)$	U_1U_4	2
9	(0,1,1,0)	$\psi_0(U_1)\psi_1(U_2)\psi_1(U_3)\psi_0(U_4)$	U_2U_3	2
10	(0,1,0,1)	$\psi_0(U_1)\psi_1(U_2)\psi_0(U_3)\psi_1(U_4)$	U_2U_4	2
11	(0,0,1,1)	$\psi_0(U_1)\psi_0(U_2)\psi_1(U_3)\psi_1(U_4)$	U_3U_4	2
12	(2,0,0,0)	$\psi_2(U_1)\psi_0(U_2)\psi_0(U_3)\psi_0(U_4)$	$\frac{U_1^2 - 1}{\sqrt{2}}$	2
13	(0,2,0,0)	$\psi_0(U_1)\psi_2(U_2)\psi_0(U_3)\psi_0(U_4)$	$\frac{U_2^2 - 1}{\sqrt{2}}$	2
14	(0,0,2,0)	$\psi_0(U_1)\psi_0(U_2)\psi_2(U_3)\psi_0(U_4)$	$\frac{U_3^2 - 1}{\sqrt{2}}$	2
15	(0,0,0,2)	$\psi_0(U_1)\psi_0(U_2)\psi_0(U_3)\psi_2(U_4)$	$\frac{U_4^2 - 1}{\sqrt{2}}$	2

pela equação (2.39), uma transformação das variáveis aleatórias para o espaço normal padrão é realizada, tal que $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{U}$. Neste sentido, um vetor de média e uma matriz de desvios padrão são definidos para as variáveis aleatórias em relação ao espaço \mathbb{X} , conforme equações (5.10) e (5.11), respectivamente, como segue:

$$\boldsymbol{\mu} = \{\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_M}\} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{X_2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{X_M} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Após essas definições, as variáveis incertas podem ser escritas no espaço \mathbb{U} , para cada amostragem, conforme equação a seguir:

$$\mathbf{z} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \quad (5.12)$$

Em particular, para o caso com quatro variáveis e polinômio de grau 2, em que a cardinalidade de $\mathcal{A}^{M,p}$ é igual a 15, a matriz será representada como segue:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{115} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{215} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{n15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1(\mathbf{z}^{(1)}) & \Psi_2(\mathbf{z}^{(1)}) & \cdots & \Psi_{15}(\mathbf{z}^{(1)}) \\ \Psi_1(\mathbf{z}^{(2)}) & \Psi_2(\mathbf{z}^{(2)}) & \cdots & \Psi_{15}(\mathbf{z}^{(2)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_1(\mathbf{z}^{(n)}) & \Psi_2(\mathbf{z}^{(n)}) & \cdots & \Psi_{15}(\mathbf{z}^{(n)}) \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Dado que a matriz \mathbf{A} e o vetor \mathcal{Y} são obtidos, os coeficientes serão estimados via mínimos quadrados, conforme equação (2.40). Um ponto a destacar é que o número de amostras n poderá ser maior que o mínimo necessário para estimar os coeficientes, desde que se tenha um valor de referência para os momentos, por exemplo, estimados via MCS. Com isso, basta aumentar o número n até que o erro esteja satisfatório em relação à referência. Dessa forma, o primeiro coeficiente fornecerá a média, enquanto a variância dependerá dos outros coeficientes, determinadas pelas equações (2.42) e (2.43), respectivamente.

No exemplo anterior, utilizou-se quatro variáveis incertas com distribuição Gaussiana, porém no projeto de dispositivos coletores de energia, todas as variáveis possuem distribuição Gama. A estratégia para estimar os momentos estatísticos é a mesma utilizada, definindo as bases conforme os polinômios de Laguerre, no caso para distribuição Gama, estimando os coeficientes e momentos estatísticos. Destaca-se também que o número de bases deverão ser encontradas conforme os múlti-índices, além de estarem ortonormalizadas, baseando-se em (2.24).

Do exposto, segue que para um caso com quatro variáveis aleatórias, representadas no problema através de $\mathbf{x} = \{k_w, k_\theta, \zeta, R_c\}$, todas com distribuição Gama, as bases ortonormalizadas escritas em (5.8) serão substituídas por aplicar (B.7) conforme o procedimento apresentado no anexo B. Após definidas as bases ortonormalizadas para distribuição Gama, segue o mesmo processo de montagem dos polinômios multivariados apresentado na Tabela 2 para uma PCE de grau 2, com base na construção dos multi-índices. De fato, para uma PCE de grau maior será necessário mais multi-índices, portanto, mais polinômios multivariados para construção das bases do PCE considerado. Ainda, é preciso definir um número de mínimo de amostras para as quais se extrai a resposta do modelo numérico. A transformação para o espaço padronizado apresentada em (5.12) será substituída por (B.3), possibilitando encontrar uma matriz semelhante àquela mostrada em (5.13). Portanto, tendo várias respostas do modelo numérico e a matriz no mesmo formato que (5.13), recorre-se a (2.40) para encontrar os coeficientes, dos quais ficam determinados os momentos estatísticos.

De toda forma é de fundamental importância determinar o grau da PCE e o número

de amostras com a finalidade de estimar os valores μ_Y , σ_Y e δ_Y , os quais permitirão prosseguir com as otimizações multiobjetivo, cuja metodologia será apresentada na sequência. Nesse sentido, é possível usar o método MCS com elevado número de amostras para um dispositivo pré-estabelecido e encontrar os valores de referência μ_R , σ_R , δ_R . Vale destacar também que estas referências são importantes para conferir a precisão das estimativas via aproximações de Taylor de primeira ordem. A estratégia empregada para estabelecer um número mínimo de amostras e um grau para a PCE será tomar números discretos de amostras dentro de um intervalo e testar alguns graus de polinômios, com a finalidade de verificar a convergência em relação aos valores de referência. Para cada ponto discreto, que representará o número de amostras geradas utilizando hipercubo latino, os resultados serão replicados N vezes, tomando-se os valores médios das respostas para calcular o erro relativo. Dessa forma, o polinômio a ser escolhido será aquele convergir primeiro em relação à referência e com menor número de amostras para ocasionar esse fato.

5.5 Otimização multiobjetivo e projeto dos dispositivos

Definindo um vetor de projeto \mathbf{x}_p e uma frequência de vibração ω , os momentos estatísticos são determinados por alguma técnica apresentada na seção anterior. Por gerar um conjunto de números randômicos associados aos parâmetros incertos, com distribuição de probabilidade Gama, os métodos MCS e LHS permitem esse procedimento com o software MATLAB. Para o PCE, um conjunto de parâmetros incertos são gerados com a técnica LHS, permitindo encontrar estimativas para a resposta do modelo numérico e, conseqüentemente, dos coeficientes do polinômio, os quais estão associados a média e variância desejadas. Já para o método FTS, é necessário calcular derivadas em torno dos valores nominais dos parâmetros incertos para estimar as variâncias, enquanto que para a média basta tomar o valor da função nos valores nominais dos parâmetros. Dado que se trabalhou o vetor de variáveis incertas \mathbf{x} nesse procedimento, segue-se que o projeto dos dispositivos pode ser realizado por modificar o vetor \mathbf{x}_p em dada frequência ω , utilizando as técnicas de otimização multiobjetivo. Para cada vetor de variáveis de projeto no processo de otimização, serão obtidos novos valores de média, desvio padrão e dispersão relativa, possibilitando que o processo realize a minimização ou maximização dessas funções e forneça valores ideais de \mathbf{x}_p , portanto, dos parâmetros dos dispositivos.

No projeto, um dos objetivos é maximizar a potência média e, portanto, requer a sintonização da frequência de ressonância (fundamental) ω_f de cada dispositivo com a frequência de excitação imposta pela base ω . Isso é feito ajustando a altura da massa sísmica h_b para minimizar o módulo da diferença absoluta entre a frequência de pico da potência e a frequência de excitação ω , para cada vetor de projeto \mathbf{x}_p . Isso faz com que a altura da massa sísmica seja encontrada internamente à rotina de otimização da função a ser maximizada (média) e minimizada (variância ou dispersão), aliviando o custo

computacional ao evitar que h_b esteja no vetor de projeto. Dessa forma, a altura h_b se torna uma variável de projeto dependente. Primeiramente, uma altura inicial auxiliar h_{aux} é encontrada resolvendo o seguinte problema de otimização internamente:

$$\begin{aligned} &\text{encontrar} && h_{aux} \\ &\text{minimizando} && \Delta\omega_f(h_{aux}) = |\omega_f(h_{aux}) - \omega| \end{aligned} \quad (5.14)$$

em que $\omega_f(h_{aux})$ é a frequência de ressonância e depende da altura de massa sísmica h_{aux} . Para encontrar a raiz da equação anterior, pode-se recorrer à função *fzero* do software MATLAB diretamente, dando um limite inferior e superior para h_{aux} , tendo a princípio os valores numéricos dos outros parâmetros necessários para se calcular a $\omega_f(h_{aux}) - \omega$. Na sequência, h_b é encontrado resolvendo a segunda otimização interna à rotina principal:

$$\begin{aligned} &\text{encontrar} && h_b \\ &\text{minimizando} && \Delta\omega_f^*(h_b) = |\omega_f^*(h_b) - \omega| \end{aligned} \quad (5.15)$$

em que $\omega_f^*(h_b)$ é a frequência de pico (na qual a amplitude da FRF de potência é máxima) e depende da altura da massa sísmica h_b . Como nos passo anterior, recorre-se a função *fzero* do MATLAB, porém dando como candidato inicial a altura h_{aux} , que tem valor próximo de h_b , aliviando o esforço computacional.

Nesse processo, busca-se garantir a sintonização dos dispositivos, pois ao minimizar o desvio padrão ou dispersão relativa ocorre a dessintonização dos mesmos. Na potência máxima, o pico é acentuado, sendo que pequenas mudanças nos parâmetros levam a grande variabilidade da resposta. Por exemplo, valores menores de desvio padrão são encontrados fora das faixas estreitas de frequência, como distante da ressonância. Por outro lado, ao se maximizar a potência, os dispositivos automaticamente sintonizam-se, pois o pico de resposta ocorre na máxima potência. Ressalta-se ainda que para dispositivos de coleta de energia puramente resistivos, é importante estar próximo a frequência de pico da FRF de potência, já que o pico da FRF é acentuado e uma variação com relação a esta frequência leva a uma perda grande de desempenho.

Dado o exposto anteriormente, encontra-se o vetor de projeto \mathbf{x}_p , com o emprego dos métodos para problemas de otimização multiobjetivo CP e NSGA II. O procedimento fundamental consiste em maximizar a média μ_Y e minimizar σ_Y ou δ_Y , estimados conforme seção anterior, dada a equação (5.2). A descrição dos quatro problemas ou cenários de otimização estudados é apresentada nas próximas subseções.

5.5.1 Otimização de dispositivos para o cenário 1

O primeiro problema consiste em definir o vetor de variáveis de projeto $\mathbf{x}_p = \{l_v, R_c\}$ e de parâmetros incertos $\mathbf{x} = \{k_w, k_\theta, \zeta, R_c\}$ para projetar dispositivos de coleta de energia. Nessa etapa, os parâmetros incertos possuem dispersões relativas dadas por $\delta_{k_w}, \delta_{k_\theta}, \delta_\zeta$ e δ_{R_c} . Os momentos estatísticos são estimados usando expansão em polinômios de caos e em séries de Taylor de primeira ordem. Com isso, aplica-se o método CP para projetar diferentes dispositivos, variando o coeficiente de ponderação das funções objetivo de média e desvio padrão. Busca-se assim otimizar a média e o desvio padrão, conforme o problema dado em (3.11). Para isso, é necessário achar os valores ótimos de média μ_Y^* e desvio padrão σ_Y^* , otimizando cada uma das correspondentes funções separadamente, usando o algoritmo genético. Em seguida, esse mesmo algoritmo é utilizado para resolver o problema multi-objetivo (3.11), para diferentes valores do coeficiente de ponderação w_1 . O procedimento de otimização e os resultados encontrados usando as duas técnicas de estimativa dos momentos estatísticos, FTS e PCE, serão comparados.

5.5.2 Otimização de dispositivos para o cenário 2

Na segunda etapa, o vetor de projeto é aumentado para $\mathbf{x}_p = \{l_v, R_c, h_p, l_p/l_v, d_p/(l_v - l_p)\}$, mantendo-se o vetor de variáveis incertas $\mathbf{x} = \{k_w, k_\theta, \zeta, R_c\}$, porém com maior variabilidade na rigidez do engaste através do aumento de δ_{k_w} e δ_{k_θ} , tanto para este cenário como para os seguintes. Quanto ao processo de otimização, minimiza-se a dispersão relativa δ_Y por aplicar o algoritmo genético e encontrar δ_Y^* ao invés de σ_Y^* . Os dispositivos projetados serão encontrados por meio das duas técnicas de otimização multiobjetivo apresentadas no capítulo 3, ou seja, via método CP e NSGA-II, de modo a compará-las quanto ao custo computacional e resultados finais. Assim, por meio das otimizações, também há a possibilidade de verificar quais são as variáveis de projeto mais e menos influentes na resposta.

5.5.3 Otimização de dispositivos para o cenário 3

Tendo em conta a influência de mais variáveis incertas no projeto dos dispositivos, explora-se o efeito do vetor $\mathbf{x} = \{k_w, k_\theta, \zeta, R_c, h_c, E_c\}$ ao realizar a otimização multiobjetivo com o vetor de projeto do cenário 1, ou seja, $\mathbf{x}_p = \{l_v, R_c\}$. Em primeiro lugar, investiga-se quão sensível à resposta é relativamente as variáveis incertas. Para tanto, emprega-se o método de Monte Carlo com a intenção de obter valores de referência para a média μ_{ref} e desvio padrão σ_{ref} , tomando um dispositivo com características semelhantes ao experimental apresentado no capítulo 4. Ademais, um número elevado de amostras aleatórias é usado com a estratégia descrita. Após encontrar μ_{ref} e σ_{ref} , efetua-se uma análise convergência utilizando as técnicas MCS e LHS, com o intuito de conseguir um número mínimo de amostras que aproxime a média e dispersão das referências. Com o

aceitável número de amostras, é possível realizar uma análise de sensibilidade da resposta por excluir uma variável aleatória por vez de \mathbf{x} . Por exemplo, a média e dispersão da resposta após a exclusão de k_w serão $\mu_{Y\bar{k}_w}$ e $\sigma_{Y\bar{k}_w}$, enquanto eliminar k_θ fornecerá $\mu_{Y\bar{k}_\theta}$ e $\sigma_{Y\bar{k}_\theta}$, valendo mesmo raciocínio para as outras variáveis incertas. Por causa disso, pode-se encontrar o erro relativo ao comparar os valores de média e dispersão relativa da resposta com os valores de referência μ_{ref} e σ_{ref} . As variáveis pouco influentes ou com baixo erro relativo quando retiradas de \mathbf{x} , caso haja, serão desconsideradas para a otimização multiobjetivo com polinômios caos. Assim, menos variáveis incertas serão necessárias para construir o polinômio de caos, portanto, menor número de amostras, aliviando o custo computacional. Além disso, entre os métodos, CP e NSGA-II, somente aquele com menor custo de processamento verificado para o cenário 2 será utilizado para a maximização de μ_Y e minimização de σ_Y . Por último, os procedimentos de otimização serão descritos semelhantemente aos apresentados para cenário 1 ou cenário 2, dependendo do método mais eficiente computacionalmente.

5.5.4 Otimização de dispositivos para o cenário 4

Considerando as etapas apresentadas anteriormente, escolhem-se dentre as variáveis de projeto do vetor $\mathbf{x}_p = \{l_v, R_c, h_p, l_p/l_v, d_p/(l_v - l_p)\}$, relativamente ao cenário 2, e os parâmetros incertos do vetor $\mathbf{x} = \{k_w, k_\theta, \zeta, R_c, h_c, E_c\}$, relacionados ao cenário 3, os mais significativos. De outro modo, as variáveis e parâmetros menos influentes serão desconsiderados no passo seguinte de otimização. Neste caso, realiza-se procedimento análogo ao cenário 3, escolhendo-se dentre os métodos CP e NSGA-II, o mais de menor custo computacional para resolver o problema de otimização do cenário 2. Com isso, um conjunto de dispositivos serão projetados, não somente deste cenário, mas dos anteriores, o que permitirá compará-los, verificando a influência das variáveis de projeto e parâmetros incertos na performance de potência média gerada e grau de variabilidade da resposta.

6 Resultados

6.1 Introdução

Este capítulo apresenta os resultados obtidos para os quatro problemas ou cenários de otimização robusta do desempenho de dispositivos coletores de energia apresentados no capítulo anterior. Além de prover propostas de configurações ótimas para dispositivos em condições específicas, as análises foram também utilizadas para avaliar e comparar desempenho e custo computacional das técnicas de estimativa de momentos estatísticos e das metodologias de otimização multiobjetivo. As análises foram realizadas tendo como base o dispositivo experimental utilizado para ajuste e validação do modelo computacional apresentado no Cap. 4. Sendo assim, as propriedades, com exceção daquelas consideradas como variáveis de projeto e/ou parâmetros incertos, são aquelas definidas no Cap. 4. Os quatro cenários de otimização robusta estudados são descritos de forma resumida a seguir:

- No primeiro cenário, o comprimento da viga e a resistência elétrica são consideradas variáveis de projeto, enquanto que a rigidez linear e torcional do engaste, o fator de amortecimento e a resistência elétrica são considerados como parâmetros incertos. Este problema é também usado para comparar duas técnicas de aproximação de média e variância via expansão em séries de Taylor e polinômio de caos à otimização robusta realizada com o auxílio do método CP;
- No segundo cenário, variáveis de projeto adicionais foram consideradas, a saber comprimento, posição e espessura da pastilha piezolétrica, considerando uma maior dispersão para a rigidez do engaste. A estimativa de média e variância da resposta foi realizada apenas com expansão em polinômios de caos, enquanto que a otimização multiobjetivo foi realizada com o auxílio de dois métodos, CP e NSGA-II, permitindo assim compara-los;
- No terceiro cenário, dois parâmetros adicionais foram considerados como incertos, a saber o módulo de elasticidade e a espessura da camada adesiva entre substrato e pastilha. Com o objetivo de reduzir a quantidade de parâmetros incertos, uma análise comparativa foi realizada permitindo selecionar aqueles mais relevantes. Em seguida, com o novo conjunto de parâmetros incertos e mantendo-se apenas as duas variáveis de projeto do primeiro cenário, procedeu-se à otimização robusta dos dispositivos coletores com o auxílio dos métodos PCE para estimativa de média e variância da resposta e NSGA-II para otimização multiobjetivo;

- No quarto cenário, combinou-se as variáveis de projetos identificadas como mais relevantes no segundo cenário com os parâmetros incertos identificados como mais influentes no terceiro cenário. A estimativa de média e variância foi realizada com PCE e o método NSGA-II foi considerado para a otimização multiobjetivo.

6.2 Séries de Taylor e polinômio de caos para projeto de dispositivos do cenário 1

O projeto inicial dos dispositivos consistiu na utilização das séries de Taylor de primeira ordem para determinação da média e desvio padrão da amplitude da FRF de potência. Partindo disso, pode-se aplicar o método CP com algum algoritmo de otimização, no caso foi escolhido o GA, para encontrar dispositivos ótimos. Assim, o comprimento da viga l_v e a resistência elétrica R_c foram escolhidos como variáveis de projeto, enquanto as molas do engaste k_w e k_θ , o fator de amortecimento ζ e a resistência elétrica efetiva do circuito coletor R_c foram definidas como parâmetros incertos. Para a otimização, as variáveis de projeto não devem violar as seguintes restrições estabelecidas: $65 \text{ mm} \leq l_v \leq 85 \text{ mm}$ e $20 \text{ k}\Omega \leq R_c \leq 400 \text{ k}\Omega$. Quanto aos limites de l_v , estes foram definidos com base no dispositivo experimental de 74,7 mm, buscando uma diferença absoluta deste vapor para o limite superior e inferior próxima de 10 mm. Para o parâmetro R_c , buscou-se um intervalo que garantisse a resistência de 100 k Ω , que gerou mais amortecimento nas amplitudes de aceleração nos gráficos das figuras 15 e 16, com possibilidade de estar próxima a resistência ótima. Assim, foram estipulados vetores para variáveis de projeto e parâmetros incertos, sendo respectivamente $\mathbf{x}_d = \{l_v, R_c\}$ e $\mathbf{x} = \{k_w, k_\theta, \zeta, R_c\}$. Para k_w , k_θ , ζ e R_c , arbitrou-se tolerâncias correspondentes a três desvios padrões de 50%, 50%, 10% e 30%, respectivamente, implicando nas seguintes dispersões relativas: $\delta_{k_w} = 50/3\%$, $\delta_{k_\theta} = 50/3\%$, $\delta_\zeta = 10/3\%$ e $\delta_{R_c} = 10\%$. A média dos três primeiros parâmetros incertos foi definida a partir do valor nominal determinado no Cap. 4 com base na validação experimental. No caso da resistência elétrica, visto que é também uma variável de projeto, a média é definida como o valor assumido pela variável de projeto correspondente em cada solução potencial.

Como no método CP é necessário maximizar a média e minimizar o desvio padrão separadamente, de modo a encontrar os valores de utopia, a primeira etapa consistiu em projetar dispositivos com média de potência maximizada e desvio padrão minimizado. O algoritmo genético foi aplicado com 30 indivíduos e 150 iterações, utilizando 90% de taxa de reprodução e 30% de taxa de mutação. O dispositivo com maior média de potência gerada foi encontrado, possuindo $l_v = 65 \text{ mm}$, $h_b = 18,58 \text{ mm}$ e $R_c = 71 \text{ k}\Omega$, sendo a média $\mu_Y^* = 60,84 \text{ mWg}^{-2}$. Por outro lado, o dispositivo com menor desvio padrão teve $l_v = 85 \text{ mm}$, $h_b = 8,26 \text{ mm}$ e $R_c = 36,4 \text{ k}\Omega$, com $\sigma_Y^* = 1,20 \text{ mWg}^{-2}$.

Após encontrar os valores de utopia $\mu_Y^* = 60,84 \text{ mWg}^{-2}$ e $\sigma_Y^* = 1,20 \text{ mWg}^{-2}$, seguiu-se a aplicação do método CP, utilizando o GA com os mesmo parâmetros já utilizados. Desse fato, 11 dispositivos foram projetados utilizando um conjunto de fatores de ponderação w_1 entre 0 e 1, com passo de 0,1. A Tab. 3 mostra as variáveis de projeto dos dispositivos com as respectivas relações de média por média máxima e desvio por desvio padrão mínimo, além das dispersões relativas. As FRFs de saída de potência para os dispositivos dessa tabela estão apresentados na Fig. 21, com frequência de pico igual a 40 Hz.

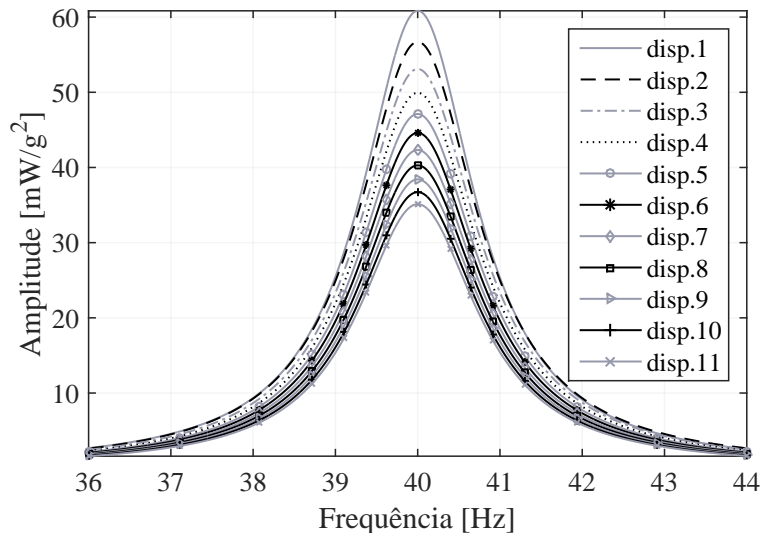
Tabela 3 – Dispositivos otimizados com o método FTS/CP para variáveis de projeto l_v e R_c e incertas k_w , k_θ , ζ e R_c .

Dispositivos	w_1	l_v (mm)	R_c (k Ω)	h_b (mm)	$\frac{\mu_Y}{\mu_Y^*}$	$\frac{\sigma_Y}{\sigma_Y^*}$	δ_Y (%)
#1	1,0	65,0	71,0	18,58	1,00	1,78	3,51
#2	0,9	66,7	50,4	17,51	0,96	1,65	3,39
#3	0,8	69,2	48,3	15,86	0,89	1,55	3,43
#4	0,7	71,5	46,6	14,46	0,84	1,45	3,40
#5	0,6	73,6	44,9	13,25	0,78	1,36	3,43
#6	0,5	75,6	43,9	12,17	0,74	1,28	3,41
#7	0,4	77,6	43,0	11,22	0,70	1,22	3,43
#8	0,3	79,5	41,5	10,37	0,67	1,16	3,41
#9	0,2	81,3	40,9	9,59	0,63	1,10	3,44
#10	0,1	83,2	39,7	8,88	0,60	1,05	3,45
#11	0,0	85,0	36,4	8,26	0,58	1,00	3,40

Para permitir uma comparação visual entre os dispositivos, é interessante analisar o desempenho médio, sua variabilidade ou dispersão, e os valores máximos (superiores) e mínimos (inferiores) esperados ou intervalo de confiança. Para tal, os resultados obtidos foram organizados de duas formas. Primeiro, por meio da frente de Pareto com os dois objetivos considerados (média e desvio padrão). Depois, usando barras de erro que apresentam média e intervalo de confiança. As duas formas facilitam a comparação entre os diferentes dispositivos ótimos encontrados.

Os dispositivos ótimos encontrados têm um compromisso entre média e desvio padrão, de tal forma que uma frente de Pareto é gerada, conforme Fig. 22. Ainda, barras de erros podem ser plotadas para cada dispositivo ao considerar um intervalo de confiança de $[-3\sigma, +3\sigma]$, de acordo com Fig. 22b. De acordo com o gráfico de barras de erro, é possível notar que o dispositivo 1 gera maior potência média, enquanto o dispositivo 11 é o mais robusto, devido a menor dispersão ou variabilidade da resposta. Na Tab. 3, um menor comprimento de viga e maior altura de massa sísmica estão relacionados ao

Figura 21 – FRF nominal de saída potência por entrada de aceleração quadrada para dispositivos da Tab. 3.

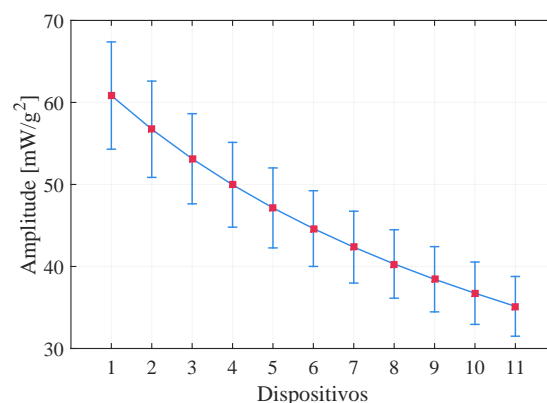
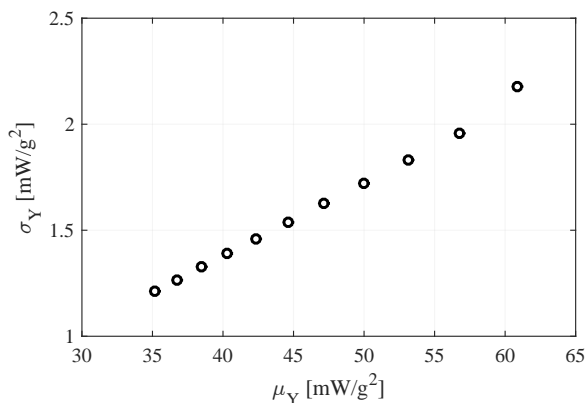


dispositivo 1, enquanto maior comprimento de viga, menor massa sísmica e resistência elétrica ao dispositivo 11. Além disso, através das barras de erro um dispositivo poderá ser comparado com seu predecessor ou sucessor, auxiliando na escolha do projeto de um dispositivo específico por um tomador de decisões. Por exemplo, o melhor caso de geração de potência do dispositivo 2 está acima da média do dispositivo 1, significando que aquele poderá ser melhor do que este para alguns casos. Observando a Tab. 3, nota-se que uma redução de apenas 4% na média levou a uma diminuição por volta de 7% no desvio padrão ao passar do dispositivo 1 para o 2. Esses fatos ajudam no projeto, visto que o tomador de decisões pode dar mais importância para o comprimento de viga, massa sísmica ou resistência elétrica disponível para a montagem do dispositivo.

Figura 22 – Frente de Pareto e barras de erro, com um intervalo de confiança de 6σ , para dispositivos da Tab. 3 e encontrados aplicando o método FTS/CP.

(a) Frente de Pareto.

(b) Barras de erro.



Em uma segunda etapa, recorre-se ao mesmo procedimento, porém utilizando ex-

pansão em polinômio caos para estimar a média e o desvio padrão. Neste caso, para fins da determinação da PCE, uma distribuição de probabilidade Gama foi considerada para todos os parâmetros incertos. Para determinar a ordem do polinômio, foi verificado o erro relativo que se gera ao aumentar o número de amostras da PCE em relação aos resultados obtidos via simulação de Monte Carlo. Com um dispositivo de 74,7 mm e 100 k Ω , os valores de média e desvio padrão encontrados por meio de uma simulação de Monte Carlo com 10⁴ amostras foram 45,0 mW/g² e 1,92 mW/g², respectivamente. Assim, nas figuras 23a e 23b estão representadas as convergências em relação às referências mencionadas para polinômios de graus 2, 3 e 4 com diferentes números de amostras. Tanto nessa análise de convergência como nas seções que seguirão, foi usada como estratégia a verificação do erro relativo. Dada a referência, que podem ser média e desvio padrão ou dispersão, verifica-se o erro relativo médio de uma série de amostragens em relação à referência. Isso é realizado porque repetindo as estimativas de média, desvio padrão ou dispersão relativa da amplitude da FRF de potência, podem ocorrer variações do erro relativo com respeito a cada amostragem, já que os coeficientes são estimados por LHS. Desse fato, optou-se por tomar o erro relativo médio do conjunto de amostragens para verificar como está a convergência do valor médio das estimativas. Após isso, é verificado o processo de convergência, a fim de encontrar um número de amostras satisfatório para utilizar na otimização dos dispositivos, empregando uma PCE por solução. Assim, utilizando 50 observações, que serão as mesmas para as análises das outras seções, foram calculados os erros relativos médios para diferentes números de amostras dos polinômios de graus 2, 3 e 4 e plotados na Fig. 23. Como pode ser observado na Fig. 23a, que corresponde a média, erros quase desprezíveis podem ser encontrados para todos os polinômios, inclusive com menos de 100 amostras. Em relação ao desvio padrão, conforme a Fig. 23b, um erro menor que 2% pode ser encontrado com qualquer um dos graus de expansões de polinômio caos. Por isso, foi escolhido um polinômio de grau 2 com 50 amostras para aplicação com o método CP, de modo a aliviar o custo computacional.

Realizando uma maximização prévia da média, o dispositivo encontrado teve 65,0 mm de comprimento de viga, 18,6 mm de altura de massa sísmica e resistência elétrica de 72,1 k Ω , gerando 60,13 mW/g² de potência. Semelhantemente, encontrou-se 85,0 mm de comprimento de viga, 8,3 mm de altura de massa sísmica e resistência elétrica de 37,7 k Ω , minimizando o desvio padrão, igual a 1,24 mW/g². Na sequência, o método CP foi aplicado para os vários valores de ponderação w_1 e os 11 dispositivos da Tab. 4 foram encontrados.

Como esperado, os dispositivos da Tab. 4 são bem parecidos com os projetados usando FTS/CP na Tab. 3. Da mesma forma, a frente de Pareto e barras de erros obtidas com PCE-2/CP, que estão nas figuras 24a e 24b, são bem próximas àquelas encontradas com FTS/CP. Para facilitar a comparação, apresenta-se a Fig. 25, que contém as barras de erros para os casos com FTS/CP e PCE-2/CP. Cada dispositivo encontrado com os

Figura 23 – Convergência para média e dispersão utilizando diferentes graus de PCE em relação aos valores encontrados com MCS e 10^4 amostras para $\delta_{k_w} = 50/3\%$, $\delta_{k_\theta} = 50/3\%$, $\delta_\zeta = 10/3\%$ e $\delta_{R_c} = 10\%$.

(a) Convergência para a média.

(b) Convergência para o desvio.

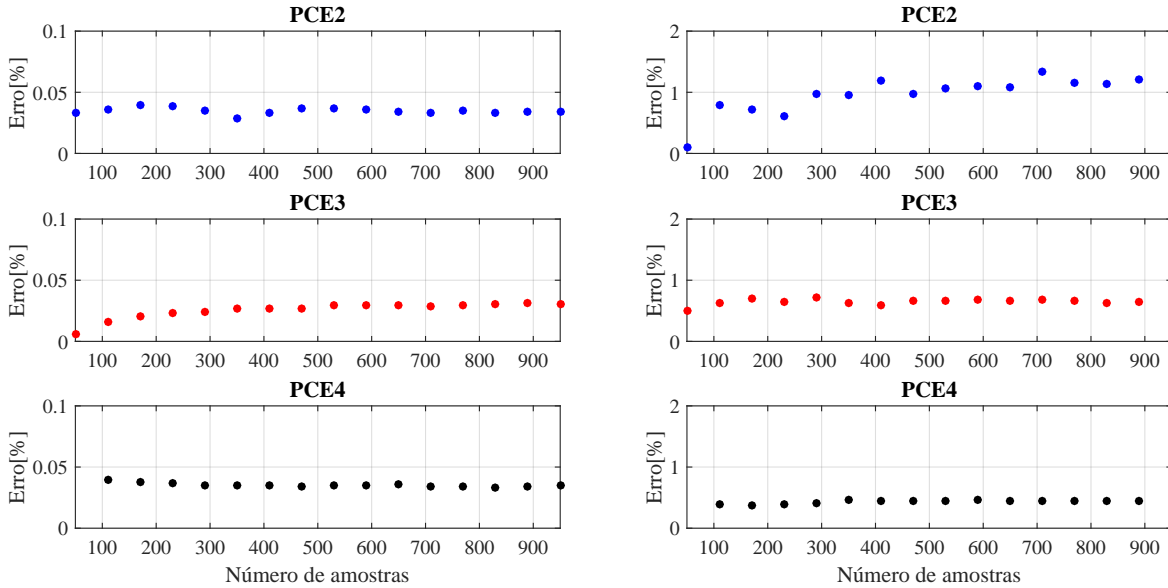


Tabela 4 – Dispositivos otimizados com o método PCE-2/CP para variáveis de projeto l_v e R_c e incertezas k_w , k_θ , ζ e R_c .

Dispositivos	w_1	l_v (mm)	R_c (k Ω)	h_b (mm)	$\frac{\mu_Y}{\mu_Y^*}$	$\frac{\sigma_Y}{\sigma_Y^*}$	δ_Y (%)
#1	1,0	65,0	72,2	18,58	1,00	1,87	3,86
#2	0,9	67,6	53,2	16,67	0,93	1,66	3,71
#3	0,8	69,8	44,2	15,17	0,86	1,54	3,68
#4	0,7	72,3	51,4	13,83	0,81	1,44	3,66
#5	0,6	74,2	44,2	12,78	0,76	1,35	3,63
#6	0,5	76,1	43,7	11,81	0,73	1,27	3,61
#7	0,4	78,0	43,2	10,96	0,69	1,20	3,60
#8	0,3	79,8	42,8	10,18	0,66	1,15	3,59
#9	0,2	81,6	42,4	9,48	0,63	1,09	3,58
#10	0,1	83,4	42,0	8,84	0,61	1,04	3,57
#11	0,0	85,0	37,7	8,26	0,58	1,00	3,56

dois métodos estão identificados com o mesmo número na Fig. 25. Como pode ser notado, as diferenças entre média e intervalo de confiança obtidos com os dois métodos foram pequenas. Porém, com o método PCE, a categoria de distribuição de probabilidade das variáveis incertas pode ser modificada, o que não acontece no método FTS.

Utilizando uma tolerância nas molas do engaste que não cause variabilidade acen-

Figura 24 – Frente de Pareto e barras de erro, com um intervalo de confiança de 6σ , para dispositivo da Tab. 4 e encontrados aplicando o método CP com PCE-2

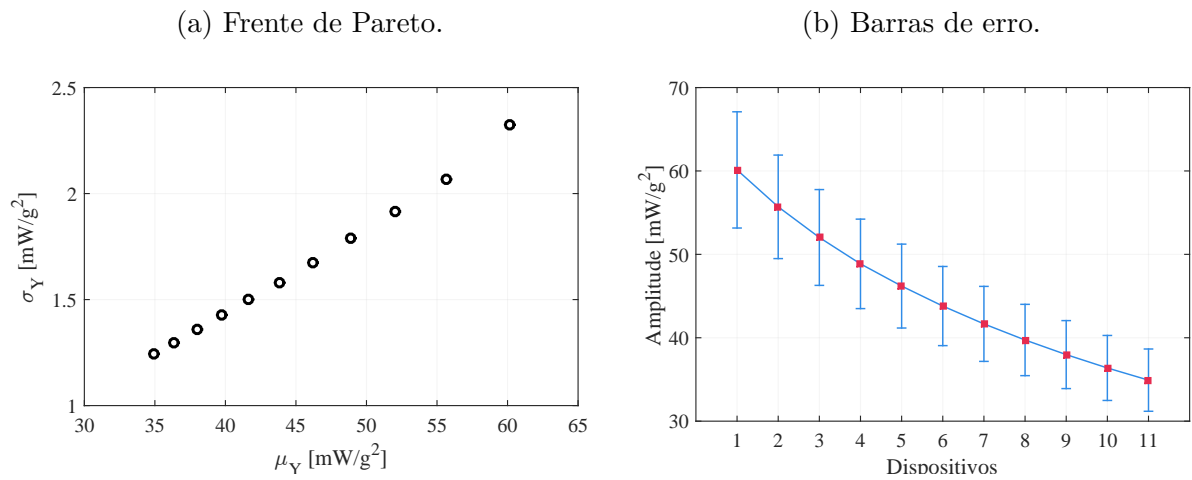
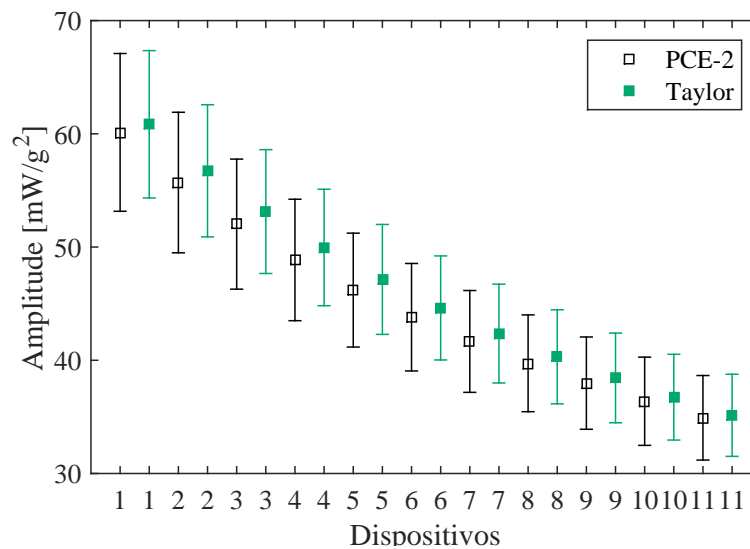


Figura 25 – Barras de erros para dispositivos projetos por Taylor e PCE-2 com CP.



tuada na resposta, a aproximação de Taylor constitui um método de custo computacional satisfatório. Como se utilizou aproximações por diferenças finitas para as derivadas, um total de 32 iterações ou chamadas de funções foram necessárias para estimativa do desvio padrão. Nesse mesmo sentido, foram necessárias 50 chamadas de funções, que correspondem ao número de amostras, para estimar a média e o desvio padrão via PCE-2 para cada conjunto de variáveis de projeto. Aumentando a variabilidade, o método de Taylor começa a divergir do valor de referência encontrado via MCS, sendo que para o PCE, mais amostras deverão ser utilizadas. Por exemplo, usando o dispositivo de referência experimental, com $R_c = 100 \text{ k}\Omega$ e o método de Monte Carlo com com 10^4 amostras implica em uma média de $45,0 \text{ mW/g}^2$ e desvio padrão de $1,92 \text{ mW/g}^2$, enquanto por Taylor esses valores correspondem a $45,5 \text{ mW/g}^2$ e $1,85 \text{ mW/g}^2$. Porém, somente modificando $\delta_{k_w} = \delta_{k_\theta} = 30\%$, tem-se $43,9 \text{ mW/g}^2$ e $3,05 \text{ mW/g}^2$ de média e desvio padrão, respec-

tivamente, por MCS com 10^4 amostras, enquanto esses valores via Taylor praticamente não se alteram. Quando se aumenta a variabilidade do problema, também será possível minimizar a dispersão ao invés do desvio padrão, já que para os dispositivos projetados nas tabelas 3 e 4 as dispersões foram muito próximas. Isso fica claro ao minimizar a dispersão com a PCE-2, levando a um dispositivo com 85,0 mm de comprimento de viga e resistência de 37,7 k Ω , sendo a dispersão igual a 3,56%, porém entre o dispositivo de maior média e este, a diferença entre as dispersões é pequena para recorrer à otimização. Ao identificar que seria necessário considerar valores maiores de dispersão para a rigidez do engaste, presumi-se que a estimativa por FTS não seja mais aceitável e também que o uso da dispersão da resposta, e não o seu desvio padrão, que também depende da média, seria um objetivo mais relevante.

6.3 Projeto dos dispositivos com novas variáveis de projeto e aumento de incertezas no engaste

Para uma análise mais abrangente, mais variáveis de projeto foram consideradas, impondo entre outras coisas um maior esforço computacional e seleção adequada das técnicas utilizadas. Nesse sentido, as variáveis, que mais afetam o projeto, devem receber especial atenção, enquanto as outras podem ser desconsideradas para uma futura otimização com outros parâmetros. Nesta seção, foi aumentada a tolerância relativa da rigidez do engaste, para observar como a incerteza afeta a média e a dispersão relativa, bem como os dispositivos projetados. Com exceção das variáveis de projeto e incertas que serão descritas na sequência, o restante dos parâmetros permanecem os mesmos do experimental, o qual foi abordado no capítulo 4.

Além do comprimento de viga e resistência elétrica, a intenção foi otimizar a espessura, comprimento e posição da camada piezolétrica. Dado o vetor de variáveis de projeto \mathbf{x}_d , os limites inferiores e superiores são armazenados e apresentados em $\mathbf{x}_d^L = \{65 \text{ mm}, 20 \text{ k}\Omega, 0,13 \text{ mm}, 0,8, 0\}$ e $\mathbf{x}_d^U = \{85 \text{ mm}, 400 \text{ k}\Omega, 0,25 \text{ mm}, 0,97, 1\}$, respectivamente. Os valores de tolerâncias para os parâmetros incertos k_w , k_θ , ζ e R_c foram assumidas em 90%, 90%, 10% e 30%, respectivamente, e iguais a três desvios padrões, conduzindo a $\delta_{k_w} = 30\%$, $\delta_{k_\theta} = 30\%$, $\delta_\zeta = 10/3\%$ e $\delta_{R_c} = 10\%$. A frequência de excitação foi mantida em 40 Hz, próxima a de ressonância do dispositivo experimental.

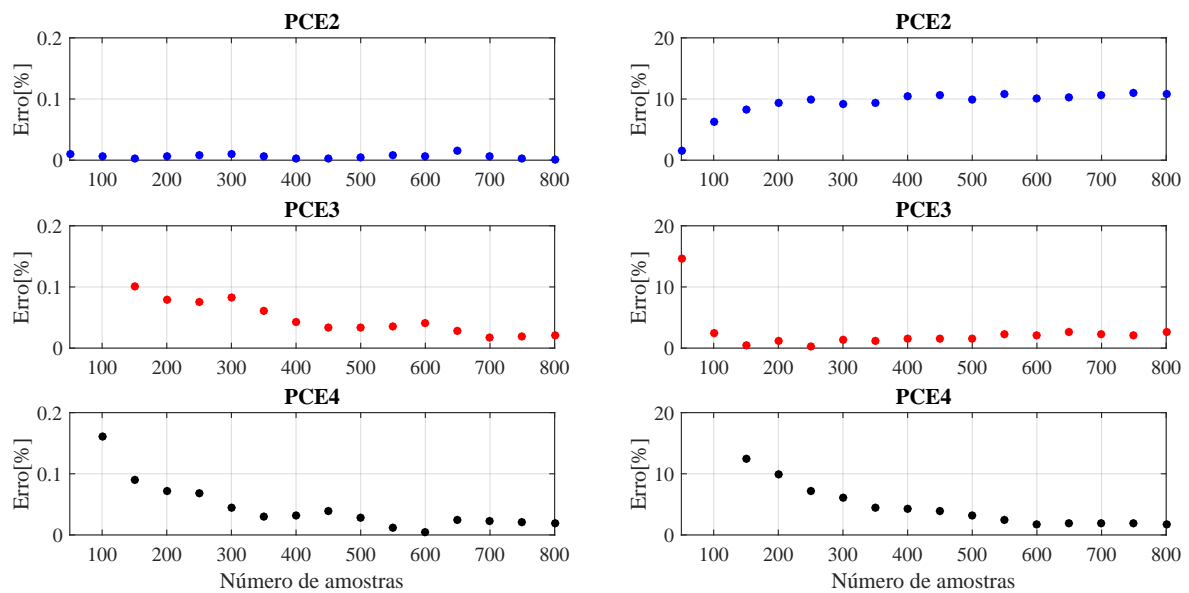
Com o aumento das incertezas no engaste, foi escolhido a PCE para estimar a média e a dispersão relativa, já que a aproximação em séries de Taylor começa a divergir nas estimativas dessas funções, devido à alta não-linearidade do problema. Para escolha do número de amostras e grau do polinômio utilizado, foi escolhido para avaliação um dispositivo com as mesmas características e dados do experimental, com $l_v = 74,7 \text{ mm}$ e resistência de 100 k Ω . Os correspondentes valores de média e dispersão de referência

encontrados foram iguais a 43,87 mW/g² e 7,09%, usando simulação de Monte Carlo com 10⁶ amostras. Para ter uma maior precisão das referências, foi aumentado o número de amostras com MCS, uma vez que as incertezas no engaste aumentaram. Assim, gráficos de convergência, expressando o erro relativo para as expansões em polinômios de caos, em relação às referências encontradas via MCS foram plotadas, conforme Fig. 26. Os gráficos correspondem aos polinômios de grau 2, 3 e 4, com amostragem por hipercubo latino para a estimativa dos coeficientes. Para a média não houve problemas em questão de convergência, visto que para todos os polinômios o erro relativo ficou menor que 0,2%. A questão mais importante foi para a dispersão, sendo que a PCE-3 começa a convergir com mais de 150 amostras, enquanto a PCE-2 apresentou um erro próximo de 10% e a PCE-4 esta convergindo, mas precisa de um número maior de amostras. Nesse caso, um PCE de grau 3 com 150 amostras para estimativa dos coeficientes foi selecionado, visto que foi encontrado um baixo erro médio absoluto em relação à referência.

Figura 26 – Convergência para média e dispersão utilizando diferentes graus de PCE em relação aos valores encontrados com MCS e 10⁶ amostras para $\delta_{k_w} = 30\%$, $\delta_{k_\theta} = 30\%$, $\delta_\zeta = 10/3\%$ e $\delta_{R_c} = 10\%$.

(a) Convergência para a média.

(b) Convergência para a dispersão.



O algoritmo genético foi aplicado em todas as fases dessa etapa, utilizando 50 indivíduos, 150 gerações, taxa de cruzamento de 90% e mutação de 30%. Os valores de média e dispersão ótimas foram encontrados pelo mesmo raciocínio apresentado na seção anterior, ao maximizar μ_Y e minimizar δ_Y separadamente, conduzindo a $\mu_Y^* = 79,5$ mW/g² e $\delta_Y^* = 3,18\%$. Os valores ótimos de μ_Y^* e δ_Y^* conduzem a dispositivos cujos vetores de projetos apresentam valores iguais a $\mathbf{x}_d = \{65$ mm, 235,4 k Ω , 0,25 mm, 0,97, 0 $\}$, significando que $l_p = 0,97$ $l_v = 63,05$ mm e $d_p = 0$, e $\mathbf{x}_d = \{85$ mm, 79,8 k Ω , 0,21 mm, 0,8, 0 $\}$, respectivamente.

Obtidos os valores de μ_Y^* e δ_Y^* , outros dispositivos foram projetados utilizando as mesmas condições do algoritmo genético junto ao método CP. Alterando o valor de w_1 de 0 a 1 com passo de 0,1, onze dispositivos foram encontrados, conforme a Tab. 5. O primeiro dispositivo possui menor comprimento e maior altura de massa sísmica, sendo o que gera mais energia na média, conforme visto pela maior relação entre média e média ótima da tabela. O último dispositivo possui maior comprimento e menor massa sísmica, gerando menos energia, porém é mais robusto, pois tem uma menor relação entre dispersão e dispersão ótima. Os casos intermediários entre geração média de potência e robustez estão entre este dois dispositivos mencionados. A camada piezolétrica ficou localizada junto ao engaste para todos os dispositivos projetados. Ainda, menores valores de comprimento da camada piezolétrica conduziu a maior robustez, embora o desempenho médio tenha reduzido. Uma melhora de robustez pode ser conseguida reduzindo o valor de resistência, mantendo os outros parâmetros inalterados, como notado pelo dispositivo 1 e 2. Para este caso, houve uma redução de apenas 6% na relação μ_Y/μ_Y^* , enquanto δ_Y/δ_Y^* reduziu quase 27%.

Tabela 5 – Dispositivos otimizados com o método PCE-3/CP para variáveis de projeto l_v , R_c , h_p , l_p/l_v e $d_p/(l_v - l_p)$ e incertas k_w , k_θ , ζ e R_c .

Dispositivos	w_1	l_v (mm)	h_b (mm)	R_c (k Ω)	h_p (mm)	$\frac{l_p}{l_v}$	$\frac{d_p}{l_v - l_p}$	$\frac{\mu_Y}{\mu_Y^*}$	$\frac{\delta_Y}{\delta_Y^*}$
#1	1	65,0	27,1	235,1	0,25	0,97	0	1,0	2,14
#2	0,9	65,0	26,4	93,4	0,25	0,94	0	0,94	1,56
#3	0,8	66,7	24,6	103,4	0,25	0,85	0	0,89	1,45
#4	0,7	69,6	22,4	103,0	0,25	0,87	0	0,84	1,37
#5	0,6	70,9	21,1	96,9	0,25	0,81	0	0,80	1,30
#6	0,5	73,5	19,4	94,8	0,25	0,84	0	0,76	1,24
#7	0,4	75,3	18,1	96,0	0,25	0,83	0	0,72	1,18
#8	0,3	77,9	16,5	94,0	0,25	0,85	0	0,68	1,13
#9	0,2	79,9	15,1	92,9	0,24	0,84	0	0,64	1,09
#10	0,1	83,0	13,8	94,8	0,25	0,83	0	0,60	1,04
#11	0	85,0	11,1	77,1	0,20	0,80	0	0,52	1,00

As FRFs de saída de potência para os dispositivos da Tab. 5 estão plotadas na Fig. 27. Conforme pode ser visto, todos os dispositivos estão sintonizados com frequência de pico em 40 Hz. A frente de Pareto e gráficos de barras de erro estão apresentadas na figura (28). A frente de Pareto garante um bom comprometimento em termos de performance e robustez, pela avaliação da média e dispersão. Uma análise mais detalhada com as barras de erro mostra que o dispositivo 1 gera maiores valores de potência, inclusive a média de potência é a maior, porém para o pior caso, o dispositivo 2 é melhor, além de ser mais robusto. Esse fato foi motivado apenas reduzindo o valor da resistência elétrica, conforme mostrado na Tab. 5. O dispositivo mais robusto é o 11, possuindo maior com-

primimento de viga e menores valores de resistência elétrica, espessura e comprimento da camada piezelétrica.

Figura 27 – FRF de saída potência por entrada de aceleração quadrada para dispositivos da Tab. 5

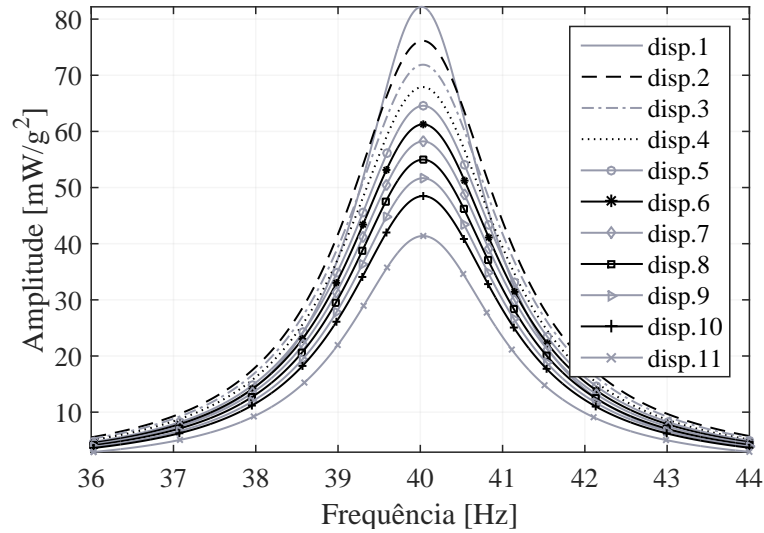
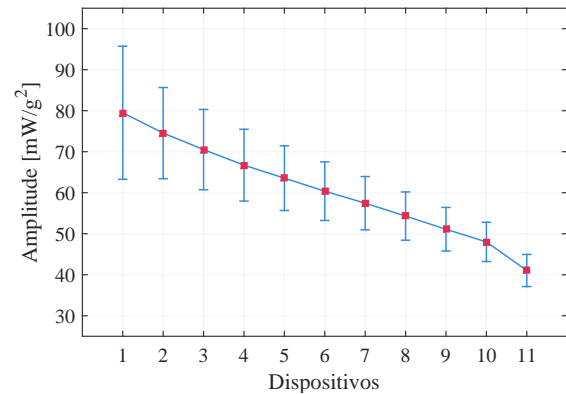
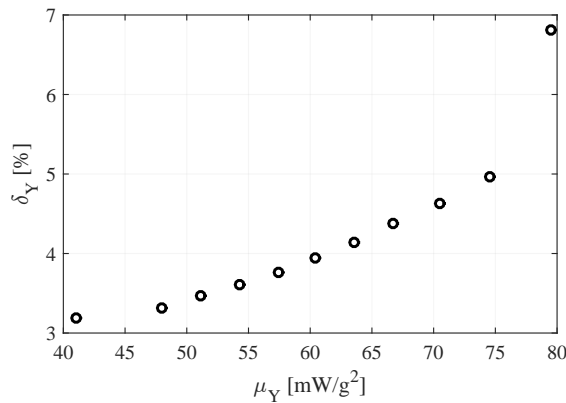


Figura 28 – Frente de Pareto e barras de erro, com um intervalo de confiança de 6σ , para dispositivo da Tab. 5 e encontrados aplicando o método CP com PCE-3

(a) Frente de Pareto.

(b) Barras de erro.



Análise parecida pode ser empregada com o NSGA-II, para projetar os dispositivos, bastando otimizar a média e dispersão, sem necessidade de encontrar os valores de utopia, como no CP. Assim, considerando 30 indivíduos e 500 gerações com taxas de crossover e mutação de 70% e 30%, respectivamente, o NSGA-II foi aplicado. Os resultados estão apresentados na Tab. 6, para dispositivos com 6 variáveis de projeto, incluindo a altura da massa sísmica. Os dispositivos encontrados também são representados nas figuras 29a e 29b, referentes a fronteira de Pareto e barras de erro, respectivamente. Na fronteira de Pareto, estão representados os 30 indivíduos após convergência, sendo que os simbolizados com ‘x’ são os que estão na Tab. 6. Para os dispositivos de 2 a 4, caracterizados na Fig. 29b,

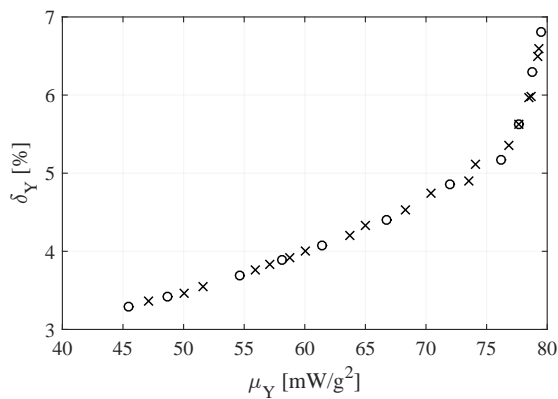
os piores casos são melhores que o pior caso do dispositivo 1, embora esse tenha maior valor de potência gerada. Esse fato também foi motivado basicamente pela diminuição da resistência elétrica, visto que o valor de l_p/l_v alterou-se muito pouco.

Tabela 6 – Dispositivos otimizados com o método PCE-3/NSGA-II para variáveis de projeto l_v , R_c , h_p , l_p/l_v e $d_p/(l_v - l_p)$ e incertas k_w , k_θ , ζ e R_c .

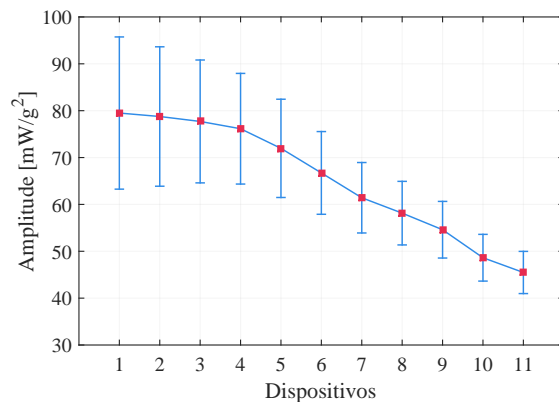
Dispositivo	l_v (mm)	h_b (mm)	R_c (k Ω)	h_p (mm)	$\frac{l_p}{l_v}$	$\frac{d_p}{l_v - l_p}$	μ_Y (mW/g ²)	δ_Y (%)
#1	65,0	27,1	234,4	0,25	0,97	0	79,50	6,81
#2	65,0	27,1	192,1	0,25	0,97	0	78,76	6,30
#3	65,0	26,9	157,8	0,25	0,97	0	77,71	5,62
#4	65,0	26,7	120,8	0,25	0,97	0	76,14	5,17
#5	66,8	24,8	95,2	0,25	0,94	0	71,96	4,86
#6	69,8	22,1	84,2	0,25	0,92	0	66,72	4,41
#7	73,4	19,4	84,3	0,25	0,92	0	61,72	4,08
#8	75,4	17,9	83,8	0,24	0,91	0	58,13	3,89
#9	78,4	16,2	84,2	0,25	0,92	0	54,60	3,69
#10	82,8	13,7	83,6	0,24	0,91	0	48,62	3,42
#11	84,7	12,4	80,2	0,23	0,90	0	45,48	3,30

Figura 29 – Frente de Pareto e barras de erro, com um intervalo de confiança de 6σ , para dispositivo da Tab. 6 (simbolizados com ‘x’ na figura) e encontrados aplicando método PCE-3/NSGA-II

(a) Frente de Pareto.



(b) Barras de erro.



Utilizando um computador com 2 processadores Intel Xeon E5530 (4 núcleos) @2.4GHz e 16GB de RAM, o NSGA-II gastou aproximadamente 4 horas de processamento, enquanto o método CP com algoritmo genético gastou ao redor de 22 horas. Embora esse fato tenha ocorrido, uma característica importante do CP é a possibilidade de projetar um dispositivo com características desejadas variando o fator de ponderação. Assim, seria possível encontrar um dispositivo que fornecesse uma potência menor que a máxima possível e tivesse um pouco mais de robustez, diminuindo ligeiramente o fator de ponderação, por exemplo, com ganho de tempo nesse caso.

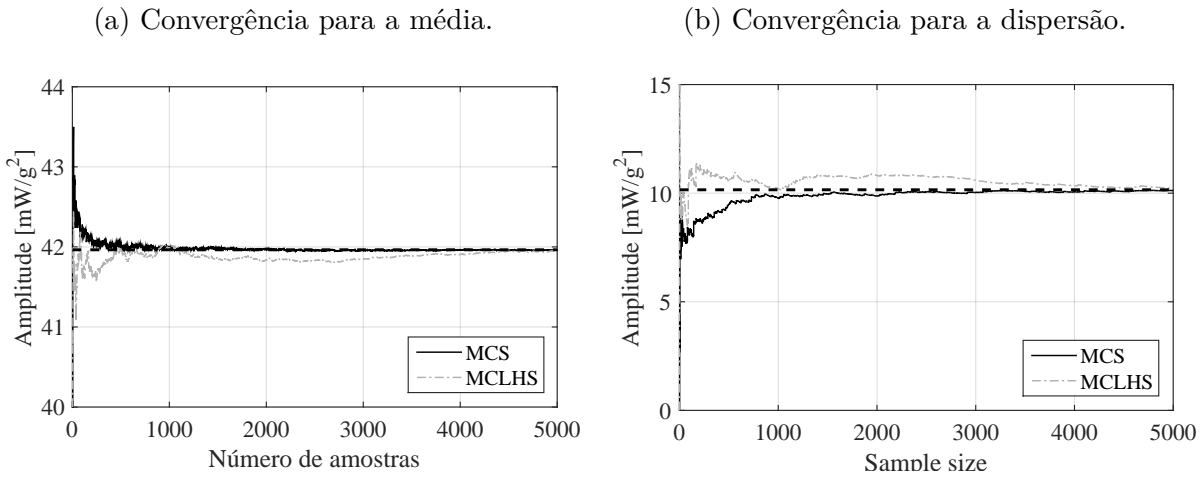
6.4 Projeto dos dispositivos com novos parâmetros incertos

Nesta seção, apenas l_v e R_c foram escolhidas como variáveis de projeto, visando focar o estudo principalmente nos parâmetros incertos, quando acrescidas da espessura e do módulo de elasticidade da camada adesiva (h_c e E_c). Disso, intencionou-se verificar como as incertezas das variáveis de entrada influenciam o projeto dos dispositivos, as respostas finais e o esforço computacional de otimização. Além disso, como propósito foram analisadas quais parâmetros incertos se mostraram mais influentes em relação à resposta de potência. Com respeito a otimização, como o NSGA-II gastou um tempo menor de processamento nas análises anteriores, apenas esse método foi aplicado para o projeto dos dispositivos com as variáveis incertas escolhidas nesta seção.

Antes de projetar os dispositivos foi verificado quão sensível é a resposta de média e dispersão da amplitude da FRF de potência em relação a cada parâmetro incerto. A análise consistiu em excluir uma variável de cada vez na análise dos resultados obtidos por MCS e verificar como cada exclusão influenciou a resposta, tanto de média como de dispersão. Primeiramente, para um dispositivo com $l_v = 75$ mm e $R_c = 100$ k Ω , mantendo outras variáveis de projeto idênticas ao caso experimental, foram encontrados os valores de referência aplicando MCS com elevado número de amostras. Os valores médios e a dispersão da espessura e módulo de elasticidade da cola foram supostos como $h_c = 0,08$ mm ($\delta_{h_c} = 10\%$) e $E_c = 2,0$ GPa ($\delta_{E_c} = 50/3\%$), sendo que as outras variáveis tiveram seus valores iguais aos da seção anterior. Com 10^6 amostras, o método de Monte Carlo forneceu referências para a média $\mu_{\text{ref}} = 41,964$ mW/g² e para a dispersão $\delta_{\text{ref}} = \sigma_{\text{ref}}/\mu_{\text{ref}} = 10,155\%$. Seguindo, uma verificação da convergência para esses valores foi realizada com simulação de Monte Carlo (MCS) e com hipercubo latino (MCLHS), conforme pode ser notado nas figuras 30a e 30b. Para a análise de convergência, os gráficos de dispersões da Fig. 30b foram mais críticos para análise, sendo que ambos se aproximaram satisfatoriamente da referência com cerca de 4000 amostras.

Com 4000 amostras, baseando-se na convergência dos gráfico da Fig. 30, uma análise da influência de cada variável na resposta foi conduzida, conforme Tab. 7, utilizando o método MCS. O erro relativo e_r é analisado para a média ou dispersão, em relação a μ_{ref} e δ_{ref} , ao remover uma variável de cada vez, sendo $\mu_{\bar{k}_w}$ a média por remover k_w , $\mu_{\bar{k}_\theta}$ a média por remover k_θ e assim por diante. Assim, a resistência elétrica R_c e o módulo de elasticidade da cola E_c tiveram baixa influência nos resultados mostrados na Tab. 7, conforme os respectivos erros relativo, e, por isso, foram removidos do conjunto de parâmetros incertos nos estudos subsequentes. O desajuste do engaste provoca variabilidade significativa na resposta, por isso os parâmetros k_w e k_θ têm sensibilidade considerável e não podem ser desprezados. Controlar a espessura da camada adesiva no processo produtivo dos dispositivos é difícil, devido ao processo de cura, além da possível variação de espessura ao longo do comprimento. Observa-se na tabela que o parâmetro h_c foi o mais importante

Figura 30 – Convergência para média e dispersão utilizando MCS e MCLHS em relação a μ_{ref} e δ_{ref} encontrados com MCS e 10^6 amostras



na questão de sensibilidade. Outro parâmetro que influencia consideravelmente o pico da amplitude da FRF de potência é o fator de amortecimento ζ , sendo associado a muitas fontes de incertezas, como as provenientes do próprio dispositivo ou fontes externas como o ar, tendo uma sensibilidade importante.

Tabela 7 – Média μ e dispersão relativa δ para saída de potência com o respectivo erro e_r por remover um parâmetro incerto por vez

	[mW/g ²]	e_r (%)		[%]	e_r (%)
$\mu_{\bar{k}_w}$	42,52	1,3	$\delta_{\bar{k}_w}$	8,66	14,7
$\mu_{\bar{k}_\theta}$	42,63	1,6	$\delta_{\bar{k}_\theta}$	8,23	18,9
$\mu_{\bar{\zeta}}$	41,88	0,2	$\delta_{\bar{\zeta}}$	9,48	6,6
$\mu_{\bar{R}_c}$	42,03	0,1	$\delta_{\bar{R}_c}$	10,04	1,0
$\mu_{\bar{E}_c}$	43,38	0,3	$\delta_{\bar{E}_c}$	9,76	3,8
$\mu_{\bar{h}_c}$	42,09	3,3	$\delta_{\bar{h}_c}$	7,50	26,1

Por meio do vetor de projeto $\mathbf{x}_d = \{74,7 \text{ mm}, 100 \text{ k}\Omega\}$ e de incertezas $\mathbf{x} = \{k_w, k_\theta, \zeta, h_c\}$, a aplicação da simulação de Monte Carlo com 10^6 amostras conduziu a uma média igual a $42,52 \text{ mW/g}^2$ e dispersão de $9,77\%$. Esses valores foram utilizados como referências para encontrar uma PCE com boa aproximação. Assim, três graus diferentes de polinômios com amostragens por hipercubo latino foram avaliados quanto a convergência, conforme figuras 31a e 31b. Um polinômio de grau 3 (PCE-3) com 300 amostras, para determinação dos coeficientes foi utilizado, pois, a partir desse número de amostras a dispersão relativa começa a convergir, com baixo erro médio absoluto. A expansão em polinômio caos de grau 4 tem boa convergência também, porém necessita de uma maior número de amostras. Ainda, para a média, todos os polinômios ficaram com erro médio absoluto abaixo de $0,2\%$.

Em seguida, para a consecução da otimização multiobjetivo, as variáveis de pro-

Figura 31 – Convergência para média e dispersão utilizando diferentes graus de PCE em relação aos valores encontrados com MCS e 10^6 amostras para $\delta_{k_w} = 30\%$, $\delta_{k_\theta} = 30\%$, $\delta_\zeta = 10/3\%$ e $\delta_{h_c} = 10\%$.

(a) Convergência para a média.

(b) Convergência para a dispersão.

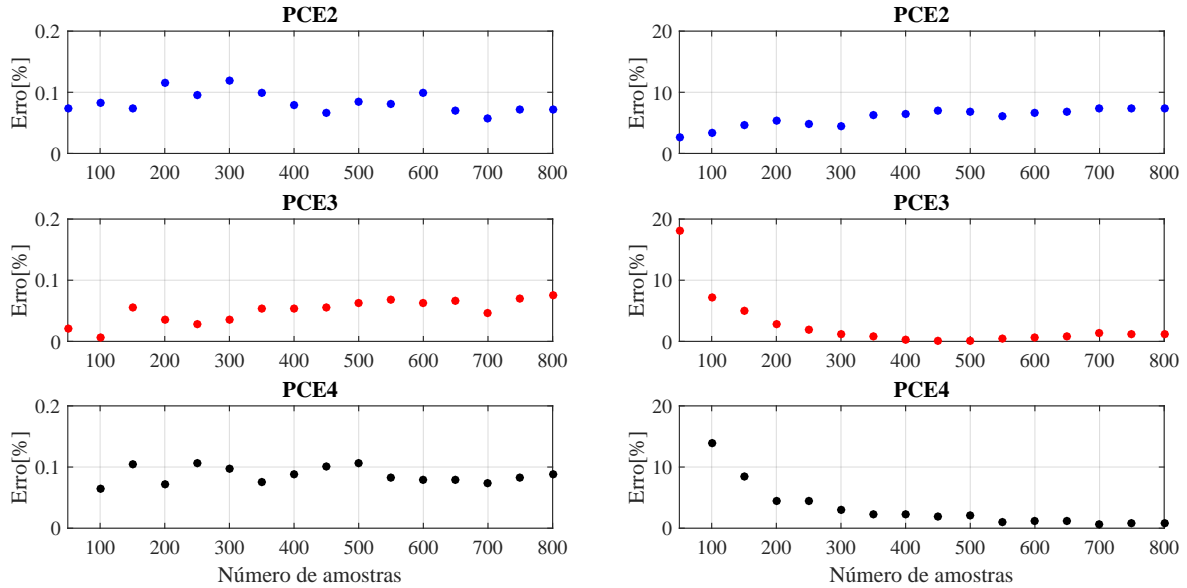
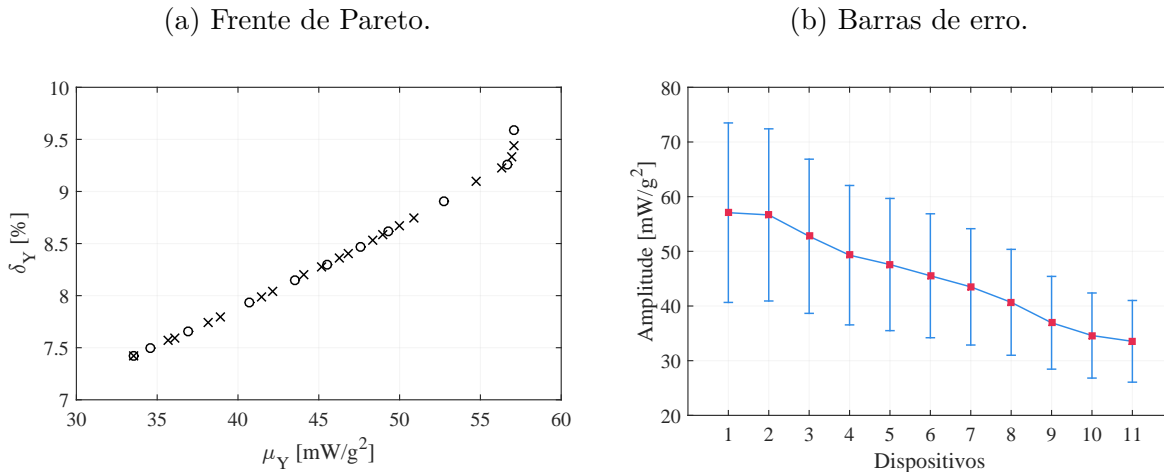


Tabela 8 – Dispositivos otimizados com o método NSGA-II e PCE-3 para variáveis de projeto l_v e R_c e incertas k_w , k_θ , ζ e h_c .

Dispositivo	l_v (mm)	h_b (mm)	R_c (k Ω)	μ_Y (mW/g ²)	δ_Y (%)
#1	65,0	18,5	64,7	57,1	9,59
#2	65,1	18,4	47,4	56,7	9,26
#3	67,7	16,6	45,5	52,8	8,90
#4	70,2	15,0	47,9	49,3	8,62
#5	71,4	14,3	43,0	47,6	8,47
#6	73,1	13,4	43,5	45,5	8,30
#7	74,8	12,5	44,9	43,5	8,15
#8	77,3	11,3	43,3	40,7	7,93
#9	81,1	9,7	39,6	36,9	7,65
#10	83,7	8,7	36,6	34,6	7,49
#11	85,0	8,3	36,6	33,5	7,42

jeto foram estipuladas com as seguintes condições de contorno $65 \text{ mm} \leq l_v \leq 85 \text{ mm}$ e $20 \text{ k}\Omega \leq R_c \leq 400 \text{ k}\Omega$. A otimização multiobjetivo para 30 indivíduos e 300 gerações foi realizada com o método NSGA-II, considerando a PCE-3 para estimativa da média e dispersão. Após a otimização, a frente de Pareto foi plotada para o conjunto de dispositivos encontrados, como caracterizada na Fig. 32a. Os círculos da frente de Pareto foram selecionados e os correspondentes dispositivos apresentados na Tab. 8, a qual fornece os valores das variáveis de projeto e as respectivas médias e dispersões relativas. O primeiro

Figura 32 – Frente de Pareto e barras de erro, com um intervalo de confiança de 6σ , para dispositivos da Tab. 8 (simbolizados com ‘x’ na figura) e encontrados aplicando o método PCE-3/NSGA-II.



dispositivo da Tab. 8 possui uma melhor média de potência, porém é muito semelhante ao segundo dispositivo, com exceção da resistência elétrica que diminuiu. Esse fato provocou uma melhora na robustez e o pior caso de potência do segundo dispositivo ficou acima do respectivo caso para o primeiro dispositivo, conforme pode ser notado nas barras de erro da Fig. 32b, para uma tolerância de $\pm 3\sigma$. Como nas análises anteriores, dispositivos com menores comprimentos de viga e maiores massas tiveram melhor performance de potência, enquanto os de menores comprimentos tiveram melhor robustez.

6.5 Projeto dos dispositivos com variáveis de projeto e incertas mais influentes

Baseando-se nas duas seções anteriores, as variáveis mais importantes foram escolhidas para projetar outros dispositivos e verificar quais são as consequências nos resultados finais. Neste sentido, a posição da camada piezolétrica foi considerada junto ao engaste, visto que para todos os casos da Tab. 6 obteve-se $d_p = 0$. Desse fato, segue que o vetor das variáveis de projeto foi estipulado como $\mathbf{x}_d = \{l_v, R_c, h_p, l_p/l_c\}$. Quanto as variáveis incertas, somente as com mais influência na resposta foram utilizadas no vetor de incertezas, conforme seção anterior, ou seja $\mathbf{x} = \{k_w, k_\theta, \zeta, h_c\}$. As condições de contorno para as variáveis de projeto permanecem as mesmas das anteriores, bem como os valores médios e dispersões para as variáveis incertas.

O procedimento de otimização foi similar as seções anteriores, escolhendo a PCE-3 com 300 amostras e aplicando o NSGA-II, o qual foi mais rápido que o método CP para projeto dos dispositivos. Assim, utilizando 50 indivíduos e 300 gerações, pode-se obter 50 dispositivos, os quais estão representados na frente de Pareto da Fig. 33a. Os dispositivos

caracterizados em vermelho na figura foram selecionados e estão detalhados na Tab. 9. Dois dispositivos intermediários estão marcados em verde na frente de Pareto, pois serão utilizados na próxima seção, em que se comparará os vários dispositivos projetados até esta seção. Como nos cenários anteriores, melhores desempenhos foram alcançadas com dispositivos de menores comprimentos de viga, maior massa sísmica e maiores espessuras de camada piezolétrica. Por outro lado, dispositivos mais robustos foram encontrados com descrições opostas as referências descritas para a performance ótima e com resistências elétricas de valores menores. A Fig. 33b representa as barras de erros dos dispositivos da Tab. 9, com tolerância de $\pm 3\sigma$. Os resultados foram parecidos com os das seções anteriores, sendo que o dispositivo 2 é o melhor, dado que seu pior caso esteve acima dos outros dispositivos.

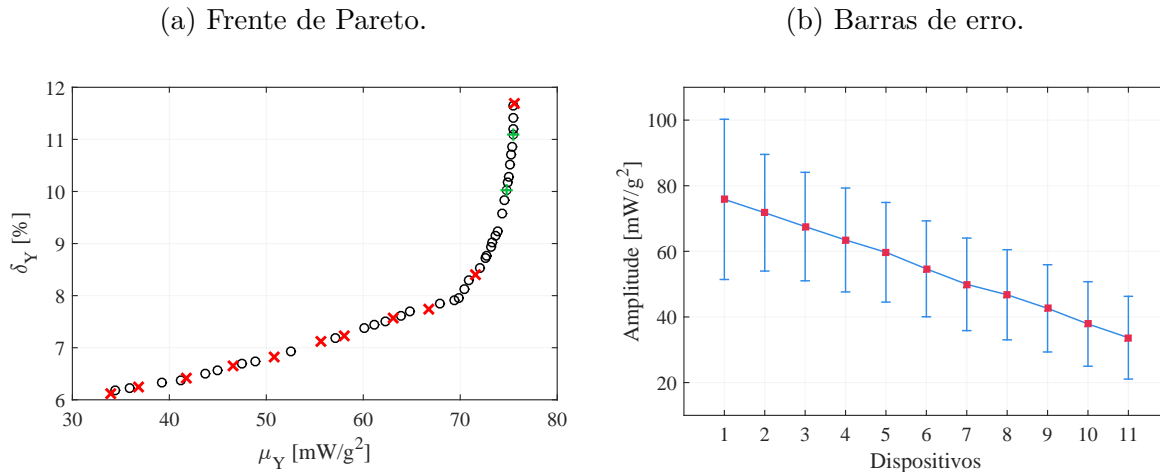
Tabela 9 – Dispositivos otimizados com o método PCE-3/NSGA-II para variáveis de projeto l_v , R_c , h_p e l_p/l_c e incertas k_w , k_θ , ζ , h_c .

Dev.	l_v (mm)	h_b (mm)	R_c (k Ω)	h_p (mm)	$\frac{l_p}{l_v}$	μ_Y (mW/g ²)	δ_Y (%)
#1	65,0	27,2	210,4	0,25	1,00	75,6	11,7
#2	65,0	26,5	120,0	0,25	0,90	71,5	8,4
#3	65,0	24,2	96,2	0,22	0,80	66,7	7,7
#4	66,1	22,1	93,2	0,19	0,81	63,1	7,6
#5	66,0	19,4	69,1	0,15	0,80	58,1	7,2
#6	68,1	18,3	66,8	0,15	0,80	55,7	7,1
#7	69,8	16,0	53,4	0,13	0,80	50,8	6,8
#8	73,8	14,2	53,7	0,14	0,80	46,6	6,6
#9	77,0	12,2	52,0	0,13	0,80	41,8	6,4
#10	82,3	10,1	48,7	0,14	0,80	36,9	6,2
#11	85,0	8,9	47,7	0,13	0,80	33,9	6,1

6.6 Confrontação entre os diferentes dispositivos projetados

Nas seções anteriores, vários dispositivos foram projetados, cada um respeitando determinados critérios, tanto nas variáveis consideradas, grau de incerteza estabelecido, como nos métodos de otimização e estimativa de média, desvio padrão e dispersão relativa. Além destas considerações, como alvo tentou-se reduzir o custo computacional o máximo possível, dado o alto grau de incertezas nas variáveis e a complexidade do problema. Os dispositivos encontrados nos diferentes cenários possuem alguns resultados conclusivos em comum, como menores resistências elétricas para aumento de robustez, menores comprimentos de vigas e maiores massas sísmicas para geração de maior potência. Outras conclusões em relação às variáveis de projeto devem ser observadas caso a

Figura 33 – Frente de Pareto e barras de erro, com um intervalo de confiança de 6σ , para dispositivos da Tab. 9 (simbolizados com ‘x’ na figura) e encontrados aplicando o método PCE-3/NSGA-II.



caso, nas respectivas seções, em que fornecem otimizações com maior número de variáveis de projeto ou incertas. Resumidamente, quatro cenários foram analisados nesse capítulo de resultados, visando projetar diferentes dispositivos de coleta de energia, listados como:

- cenário 1: variáveis iniciais com menor incerteza nas molas do engaste;
- cenário 2: novas variáveis de projeto com variáveis incertas iniciais;
- cenário 3: variáveis de projeto iniciais com novas variáveis incertas;
- cenário 4: ambas as variáveis dos cenários 2 e 3 em conjunto.

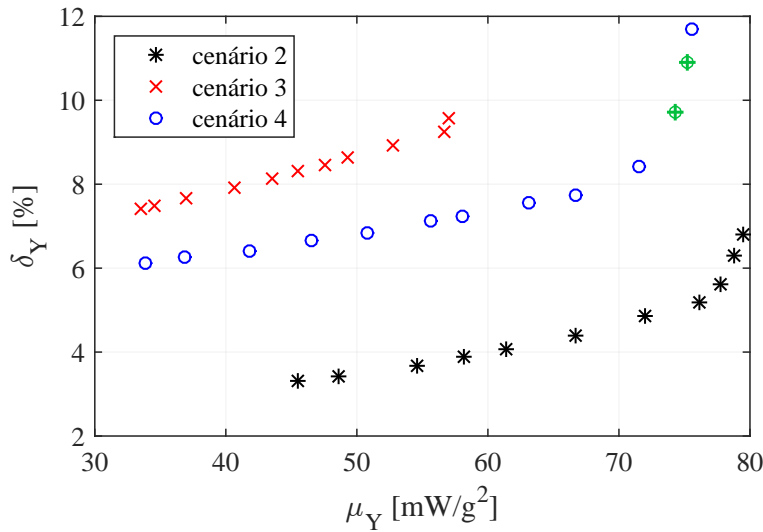
Dessas análises, uma maior e igual variabilidade nas molas do engaste foi considerada nos cenários 2, 3 e 4. Sendo assim, é importante sintetizar os resultados encontrados, os quais dizem respeito aos dispositivos, facilitando a tomada de decisão do analista no projeto e possibilitando tirar determinadas conclusões. Como as frentes de Pareto e barras de erro são comuns em todos os cenários, uma estratégia é sintetizar os resultados nessas categorias de gráficos. Outro ponto é que 11 dispositivos foram escolhidos e tiveram preferência de análise em cada seção, principalmente quanto a apresentação de tabelas referente a cada dispositivo das frentes de Pareto e barras de erro. Por isso, pode-se comparar os 11 dispositivos encontrados em cada seção por meio desses gráficos. Uma única questão é referente ao cenário 1, em que se utiliza menores valores de tolerância para as molas do engaste, conduzindo a resposta com menor variabilidade em relação aos outros cenários. Das tabelas 3 e 4, nota-se que as dispersões das resposta são muito próximas, para diferentes dispositivos, embora os desvios padrão sejam certamente diferentes. Dado esses fatos, pretende-se apresentar os dispositivos dos cenários 2, 3 e 4 em um único gráfico de Pareto o qual permite analisar a questão de dominância entre os resultados ou indivíduos,

e outro de barras de erro, avaliando questões de desempenho, robustez e probabilidade de um dispositivo ser melhor que outro.

A figura 34 mostra as frentes de Pareto para o cenário 2, com novas variáveis de projeto, para o cenário 3, com novos parâmetros incertos e para o cenário 4, com ambas as variáveis. Uma análise interessante nessas frentes diz respeito ao critério de dominância, no caso referente ao melhor desempenho (maior média) e menor dispersão relativa. Embora os pontos da figura 34 são referentes a diferentes cenários, uma análise de dominância dispositivo a dispositivo entre as diferentes frentes pode ser útil para tirar algumas conclusões. Nas frentes de Pareto, os dispositivos de 1 a 11 estão dispostos em ordem decrescente de potência, ou seja, dispositivo 1 é aquele com a maior média de potência e o dispositivo 11 o com a menor. Para o cenário 4, os pontos em verde representam os correspondentes dispositivos intermediários entre 1 e 2 da Fig. 33a. Nesta situação, estão colocados para mostrar a suavidade da frente entre os dispositivos 1 e 2. Seguindo, o indivíduo com maior média na frente com novas variáveis de projeto (cenário 2), representando o dispositivo 1 dessa frente, é dominante em relação aos respectivos dispositivos 1 das outras frentes, já que possui uma maior média e menor dispersão. Se for realizada uma comparação semelhante em relação aos outros dispositivos, isso se repete, sendo o dispositivo 2 da frente do cenário 2 superior aos dispositivos 2 das outras frentes, acontecendo o mesmo para os dispositivos de 3 até 11. Ao se considerar novas variáveis de projeto, uma maior média de potência é atingida na otimização, levando os dispositivos da frente do cenário 2 a serem superiores aos outros correspondentes. Quanto a dispersão ser menor, uma explicação está na desconsideração da espessura da cola como parâmetro incerto, sabendo que a influência desta nos resultados é importante, conforme Tab. 7. Como a principal diferença entre as frentes com novas variáveis de projeto (cenário 2) e com ambas as variáveis (cenário 4), está na desconsideração da cola como parâmetro incerto, isso também levou a média dos correspondentes dispositivos a serem diferentes.

Uma comparação a ser realizada é referente a considerar as frentes com ambas as variáveis (cenário 4) e com as novas variáveis incertas (cenário 3). O dispositivo 1 da frente com ambas as variáveis gera uma média consideravelmente maior que o correspondente dispositivo da frente com novas variáveis incertas, embora também tenha uma dispersão maior. Os outros correspondentes dispositivos da frente com ambas as variáveis são dominantes em relação à frente com as novas variáveis incertas, no sentido de maior média e menor dispersão entre si. Reforçando que essa afirmação é quando comparados dispositivos 2 com 2, 3 com 3 e assim sucessivamente. Como no caso anterior, um número maior de variáveis de projeto otimizadas levou a uma maior média para o caso dos dispositivos do cenário 4 sobre aqueles do cenário 3. Possivelmente, esse fato também ocasionou uma menor dispersão, principalmente por considerar a espessura e o comprimento da camada piezolétrica como variáveis de projeto do cenário 4, já que as outras variáveis estão presentes no cenário 3.

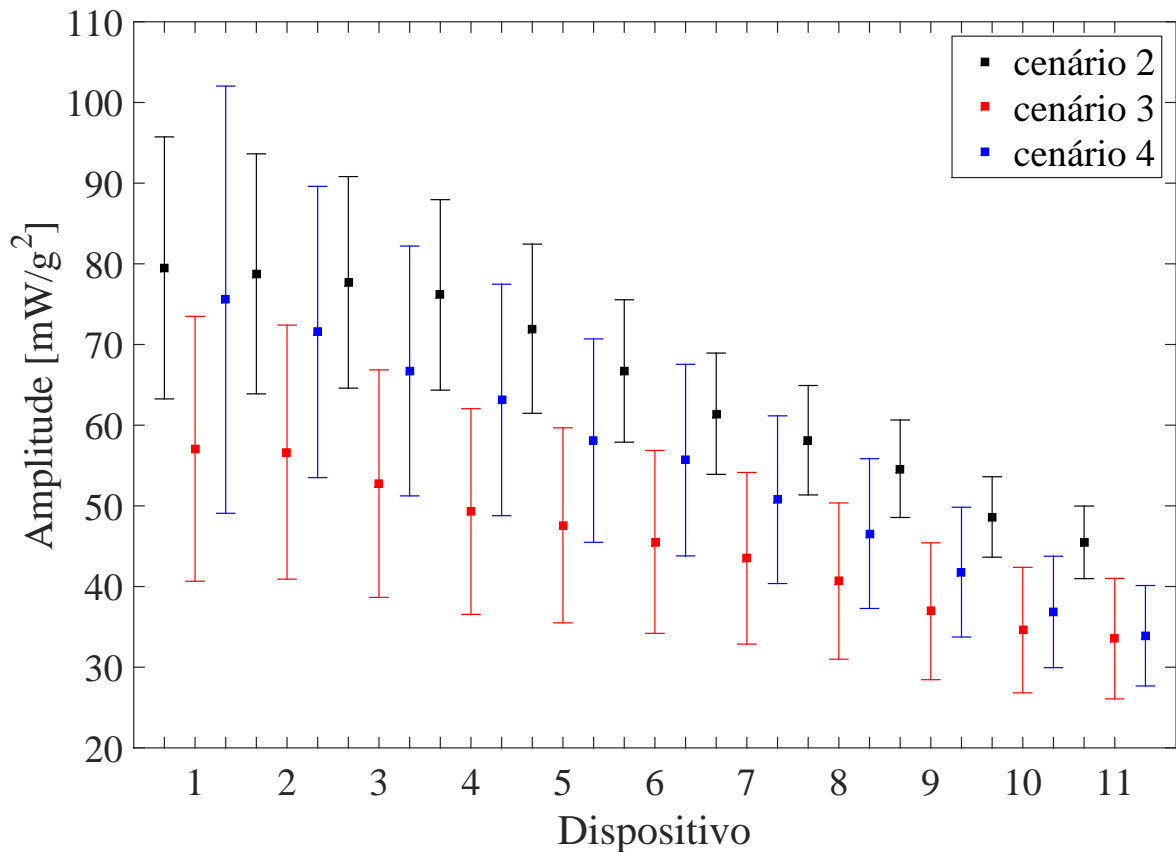
Figura 34 – Comparação das frentes de Pareto obtidas para os dispositivos projetados nos diferentes cenários estudados



Com relação às barras de erro, todos os cenários podem ser comparados, possibilitando um complemento na análise para possíveis tomadas de decisões. A Fig. 35 possui 33 dispositivos, divididos em três blocos de 11, simbolizando os diferentes cenários. O intervalo de confiança de 6σ foi mantido para os cenários analisados. O cenário com novas variáveis de projeto forneceu o dispositivo com maior média de potência, o primeiro, e entre os piores casos de potência, o melhor foi o terceiro, desse mesmo cenário. O dispositivo com maior variabilidade ou menos robusto é o primeiro do cenário com variáveis de projeto e incertas. Em termos probabilísticos, vários dispositivos podem ser comparados em relação à geração de potência. Por exemplo, o dispositivo 1 do cenário com novas variáveis incertas (cenário 3 da Fig. 35) pode ser melhor que o dispositivo 1 das outras ocorrências, embora exista uma probabilidade do correspondente dispositivo do cenário com novas variáveis de projeto (cenário 2 da Fig. 35) ser melhor. Observando a figura 35, os dispositivos com novas variáveis de projeto, cenário 2, sem incerteza na cola, tem maior tendência a serem melhores que os outros. Os dispositivos com novas variáveis incertas, cenário 3, portanto sem acréscimo de outras variáveis de projeto, tendem a ser piores ou probabilisticamente a ter uma menor potência gerada em relação as outras ocorrências com mesma dispersão no engaste. Já no caso de incluir também novas variáveis de projeto, obtém-se dispositivos que se comportam de forma intermediária aos cenários anteriores com mesma incerteza no engaste. Disso, fica claro a importância que há em se considerar uma quantidade razoável de variáveis de projeto na otimização, o efeito da incerteza no engaste e na camada adesiva no resultado, dado que desprezar estas variabilidades pode levar a resultados superestimados. Em relação a escolher um dispositivo ou outro, a tomada de decisão será baseada em critérios subjetivos, a depender das condições e viabilidade que o analista terá para montar o protótipo. Baseando-se na análise, uma

melhor estratégia poderá ser tomada, desde a escolha de um comprimento de viga, massa sísmica escolhida, disposição da pastilha piezolétrica, cuidados com a colagem da mesma e fixação do dispositivo no engaste.

Figura 35 – Comparação das barras de erro obtidas para os dispositivos projetados nos diferentes cenários estudados



7 Considerações finais

7.1 Conclusões

Neste trabalho, foi possível apresentar o desenvolvimento de projeto de dispositivos para coleta de energia formados por vigas *cantilever* e excitados por um deslocamento mecânico na sua base. Com a utilização de materiais piezelétricos como sensores e acoplados ao substrato dos dispositivos, a energia mecânica gerada por vibração é convertida em eletricidade. Desse modo, resistências elétricas conectadas aos sensores permitiram mensurar a potência elétrica máxima coletável por cada dispositivo, na ocasião em que a frequência de ressonância dos dispositivo estiveram sintonizadas com a frequência de excitação. Por isso, foi fundamental o uso de massas sísmicas nas extremidades dos dispositivos.

Alguns parâmetros do dispositivo estudado foram considerados com incertezas, induzindo uma variabilidade na resposta. Em face disso, foi importante encontrar dispositivos com potência máxima otimizada, bem como com baixa variabilidade na resposta. A estratégia para resolver esta questão foi estimar os momentos estatísticos de primeira e segunda ordem, média e variância, da amplitude da FRF de saída de potência e utilizar métodos de otimização multiobjetivo. Assim, com um especial enfoque na maximização da média e minimização da dispersão relativa da FRF de potência simultaneamente, significativos resultados foram encontrados. Decorrente dessa ideia, foi imprescindível incluir incertezas na rigidez do engaste, o qual foi simulado por molas linear e de torção, na resistência elétrica, no amortecimento do dispositivo e na espessura e módulo de elasticidade da camada adesiva que fixa o sensor piezelétrico no substrato.

O custo computacional foi colocado como fator fundamental na otimização dos dispositivos, visto que os mesmos são modelados em elementos finitos. Desse ponto de vista, é importante estimar os momentos estatísticos de tal forma que ao executar a otimização multiobjetivo o tempo de convergência seja satisfatório. Por isso, buscou-se por número de avaliações de funções ou amostras o menor possível para estimar os momentos, procurando garantir baixo erro relativo. Os métodos utilizados para estimar os momentos foram via simulação de Monte Carlo com e sem amostragem por hipercubo latino, aproximação por expansão em séries de Taylor de primeira ordem e expansão em polinômios de caos. O método de Monte Carlo tem um custo relativamente alto, porém foi fundamental para determinar valores de referência, devido à precisão quando grande número de amostras são utilizados. Em relação à expansão em séries de Taylor, um custo computacional baixo foi encontrado, porém, para um aumento considerável da variabilidade do engaste e pela alta não-linearidade da função estudada, as estimativas não foram satisfatórias. Em compensação, a aplicação da expansão em polinômios de caos para calcular os momentos estatísticos

foi adequada, com tempo computacional aceitável. Nesta mesma perspectiva, foram avaliados dois métodos de otimização multiobjetivo, a programação de compromisso CP e a versão do algoritmo genético NSGA-II para o caso multiobjetivo. O primeiro método tem um desenvolvimento matemático aprimorado e pode ser resolvido aplicando algum algoritmo de otimização clássico ou moderno, encontrando várias soluções na fronteira de Pareto através da modificação de um determinado fator de ponderação. O NSGA-II também encontra várias soluções, porém em uma única execução do programa, ficando a cargo do analista a escolha *a posteriori* da melhor solução, baseando-se em algum critério estipulado. Em relação a esses dois métodos, o NSGA-II se mostrou mais eficiente computacionalmente, embora o método CP possa ser usado para se projetar um dispositivo específico, com base na escolha apropriada do fator de ponderação preliminarmente.

No projeto dos dispositivos, quatro cenários foram considerados, para isso houve modificação do número de variáveis de projeto e parâmetros incertos em cada caso, além do grau de dispersão relativa da rigidez do engaste. Antes de realizar a otimização, foi realizada uma validação experimental com um protótipo adequadamente montado, avaliando a FRF de saída de aceleração e tensão elétrica, possibilitando ajustar alguns parâmetros e seguir com o estudo. Assim, no projeto em geral dos dispositivos, observou-se que aqueles com menor comprimento de viga e maior massa sísmica têm melhor desempenho em termos de potência média enquanto que aqueles com maior comprimento e menor massa sísmica são mais robustos, ou seja, possuem menor dispersão relativa da resposta. Além disso, resistências elétricas menores que os valores ótimos podem levar a um aumento de robustez nos dispositivos com baixa perda de potência média. Para o caso em que a posição do sensor piezoeletrico foi avaliada, a otimização convergiu para resultados em que esses estão posicionados junto ao engaste. Outro fato relacionado ao sensor piezoeletrico é que menores comprimentos aumentaram a robustez, ao passo que maiores comprimentos levaram a uma maior potência média. Os parâmetros incertos mais relevantes na análise de incertezas, ou seja, que mais modificam a média e dispersão relativa da amplitude da FRF de potência, sendo mais sensíveis, foram o fator de amortecimento, rigidez linear e torcional do engaste e espessura da camada adesiva. O fator de amortecimento provém de muitas fontes de incertezas, sendo relativas ao próprio dispositivo ou de fontes externas, afetando o pico de amplitude da FRF de potência na frequência de excitação. O desajuste do engaste afeta as rigidez linear e torcional consideravelmente, desajustando a frequência e, por isso, são parâmetros significativos, mostrando a importância da construção e ajuste do engaste. Quanto a espessura da cola, esse parâmetro foi o mais sensível, sendo que no processo produtivo dos dispositivos de coleta de energia, é difícil controlá-lo, devido ao processo de cura, além do que pode haver variação da sua espessura ao longo do comprimento da camada piezocerâmica. Comparando-se os vários cenários, foi evidenciado que quando se considera maior número de variáveis de projeto na otimização, consegue-se melhores resultados em termos de desempenho e robustez, se comparado a cenários com

grau de incerteza parecido, porém com menor número de variáveis de projeto.

As ferramentas estudadas e implementadas para o estudo de robustez e otimização de dispositivos de coleta de energia permitiram encontrar resultados interessantes. O método NSGA-II se mostrou mais eficiente do que o método CP, possibilitando encontrar mais indivíduos na frente de Pareto, com um tempo menor, por isso sendo preferível para o projeto dos dispositivos de coleta de energia. As estimativas de média e variância da amplitude da FRF de potência na frequência de excitação foram satisfatórias utilizando a expansão em polinômio de caos, tanto em questão de erro relativo quanto custo computacional. Isso pela expansão em polinômio de caos utilizar um número satisfatório de amostras para estimar os coeficientes e, conseqüentemente, os momentos estatísticos. Além disso, a expansão em polinômio de caos permite considerar a distribuição de probabilidade dos parâmetros incertos, por isso essa técnica foi escolhida. Dado esses fatos, é possível aplicar o mesmo raciocínio com essa técnica em problemas diferentes que tenham, por exemplo, limitação relacionada ao tempo de computação e estejam relacionados ao estudo de incertezas.

7.2 Trabalhos futuros

Como trabalhos futuros, as seguintes sugestões são propostas:

1. Metamodelagem e projeto robusto de dispositivos de coleta de energia utilizando expansão em polinômio de caos, krigagem adaptativa, redes neurais ou outros métodos, considerando variáveis de projeto e parâmetros incertos. Para este caso, buscar soluções para estimativas dos momentos estatísticos, dado que o metamodelo tem um erro associado.
2. Projeto robusto de outros dispositivos diferentes do apresentado, como, por exemplo, estruturas semelhantes à placa ou vigas em forma de L.
3. Estudo de otimização multiobjetivo relacionada a projeto robusto de dispositivos de coleta de energia utilizando métodos com dominância diferentes do NSGA, como otimização multiobjetivo baseada no método *cross-entropy* (entropia cruzada).
4. Como parâmetro incerto poderia ser considerada a frequência de excitação, para um dispositivo adaptativo de coleta de energia.
5. Para otimizações com restrições, pode-se recorrer e realizar estudo do Lagrangiano aumentado, que é eficiente e robusto.
6. Realizar análises de sensibilidade de parâmetros utilizando índices de Sobol.

7. Estudo de incertezas em dispositivos de coleta de energia considerando Projeto de Otimização Baseado em Confiabilidade (*Reliability-Based Design Optimization* RBDO). Para este caso, avalia-se a probabilidade de falha do dispositivo, que pode ser em relação a uma potência mínima, por exemplo, ao invés de trabalhar-se com estimativa dos momentos estatísticos.
8. Análises experimentais com diferentes dispositivos para determinação de valores de rigidez do engaste e incertezas estatísticas associadas. Além disso, também pode-se estimar incertezas relacionadas a camada adesiva e fator de amortecimento a partir dos experimentos.

7.3 Trabalhos publicados

Durante o período de doutorado alguns trabalhos foram escritos em forma de artigos, resumos e pôsteres para apresentação em congressos bem como para publicação em periódicos. Esses trabalhos são listados conforme segue:

- MARTINS, P. H.; TRINDADE, M. A. Análise de robustez para dispositivos coletores de energia com incertezas no engaste. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 6, n. 2, 2018.
- MARTINS, P. H.; TRINDADE, M. A. Robust design of energy harvesting resonant devices by multi-objective optimization. In: *25th International Congress of Mechanical Engineering (COBEM)*, Uberlândia, 2019.
- MARTINS, P. H.; TRINDADE, M. A.; VAROTO, P. S. Metamodeling techniques for robust design and multiobjective optimization of energy harvesting resonant devices. In: *Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações (DINCON)*, São Carlos, 2019.
- MARTINS, P. H.; TRINDADE, M. A.; VAROTO, P. S. Robust design of piezoelectric energy harvesting devices using multiobjective optimization techniques. In: *Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)*, Virtual Congress, 2021.
- MARTINS, P. H.; TRINDADE, M. A.; VAROTO, P. S. Robust design of energy harvesting resonant devices by multi-objective optimization techniques and polynomial chaos expansions In: *26th International Congress of Mechanical Engineering (COBEM)*, Virtual Congress, 2021.
- MARTINS, P. H.; TRINDADE, M. A.; VAROTO, P. S. Robust design of energy harvesting resonant devices using multiobjective optimization and polynomial chaos

expansions. In: *International Conference on Advances in Energy Harvesting Technology* (ICAEHT), Virtual Conference, 2021.

- MARTINS, P. H.; TRINDADE, M. A.; VAROTO, P. S. Design and analysis of robust piezoelectric energy harvesters using polynomial chaos expansions and multi-objective optimization. In: *31st International Conference on Adaptive Structures and Technologies* (ICAST), Virtual Conference, 2021.
- MARTINS, P. H.; TRINDADE, M. A.; VAROTO, P. S. Simplified robust and multi-objective optimization of piezoelectric energy harvesters with uncertain parameters. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, Springer, 18:63–85, 2022.

Referências

- ALI, S.; FRISWELL, M.; ADHIKARI, S. Piezoelectric energy harvesting with parametric uncertainty. *Smart Materials and Structures*, v. 19, n. 10, p. 105010, 2010. Citado na página 7.
- ALOUI, R.; LARBI, W.; CHOUCANE, M. Sensitivity analysis of frequency response functions for load resistance of piezoelectric energy harvesters. In: *International Conference on Acoustics and Vibration*. [S.l.: s.n.], 2018. p. 136–148. Citado na página 9.
- ANG, A. H.-S.; TANG, W. H. *Probability concepts in engineering planning and design. Vol. 1, Basic principles*. [S.l.: s.n.], 1975. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- BECK, A. T. et al. A comparison between robust and risk-based optimization under uncertainty. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 52, n. 3, p. 479–492, 2015. Citado na página 12.
- BECK, A. T. et al. Robust, risk and robust risk optimization under uncertainties. In: *Proceedings*. [S.l.: s.n.], 2016. Citado na página 11.
- BEEBY, S. P.; TUDOR, M. J.; WHITE, N. Energy harvesting vibration sources for microsystems applications. *Measurement science and technology*, v. 17, n. 12, p. R175, 2006. Citado na página 1.
- BENJAMIN, J. R.; CORNELL, C. A. *Probability, statistics, and decision for civil engineers*. [S.l.]: Courier Corporation, 2014. Citado na página 18.
- CAHILL, P. et al. Data of piezoelectric vibration energy harvesting of a bridge undergoing vibration testing and train passage. *Data in brief*, v. 17, p. 261–266, 2018. Citado na página 1.
- CHEN, W.; WIECEK, M. M.; ZHANG, J. Quality utility—a compromise programming approach to robust design. *Journal of Mechanical Design*, v. 121, p. 179–187, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 35.
- CHEVALLIER, G.; GHORBEL, S.; BENJEDDOU, A. A benchmark for free vibration and effective coupling of thick piezoelectric smart structures. *Smart Materials and Structures*, v. 17, n. 6, p. 065007, 2008. Citado na página 107.
- COELLO, C. A. C.; PULIDO, G. T.; LECHUGA, M. S. Handling multiple objectives with particle swarm optimization. *IEEE Transactions on evolutionary computation*, v. 8, n. 3, p. 256–279, 2004. Citado na página 11.
- CURSI, S. de; JOSÉ, E.; SAMPAIO, R. *Modelagem estocástica e quantificação de incertezas*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2012. v. 66. 344 p. Citado na página 59.
- DAS, I.; DENNIS, J. E. A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for pareto set generation in multicriteria optimization problems. *Structural optimization*, v. 14, n. 1, p. 63–69, 1997. Citado na página 4.

- DEB, K. *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001. v. 16. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 36.
- DEB, K. et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii. *IEEE transactions on evolutionary computation*, v. 6, n. 2, p. 182–197, 2002. Citado 5 vezes nas páginas 4, 11, 38, 39 e 40.
- DRÉO, J. et al. *Metaheuristics for hard optimization: methods and case studies*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. Citado na página 32.
- DUTOIT, N. E.; WARDLE, B. L.; KIM, S.-G. Design considerations for mems-scale piezoelectric mechanical vibration energy harvesters. *Integrated ferroelectrics*, v. 71, n. 1, p. 121–160, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 6.
- ERTURK, A.; INMAN, D. J. *Piezoelectric energy harvesting*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 6.
- FRANCO, V. R.; VAROTO, P. S. Parameter uncertainties in the design and optimization of cantilever piezoelectric energy harvesters. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 93, p. 593–609, 2017. Citado na página 8.
- GODOY, T. C.; TRINDADE, M. A.; DEÜ, J. Topological optimization of piezoelectric energy harvesting devices for improved electromechanical efficiency and frequency range. In: *10th World Congress on Computational Mechanics*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 4003–4016. Citado na página 7.
- JAYNES, E. T. Information theory and statistical mechanics. *Physical review*, v. 106, n. 4, p. 620, 1957. Citado na página 59.
- KHAN, A. et al. Piezoelectric thin films: an integrated review of transducers and energy harvesting. *Smart Materials and Structures*, v. 25, n. 5, p. 053002, 2016. Citado na página 6.
- KHAZAEI, M.; REZANIA, A.; ROSENDAHL, L. Effect of damage and support damping mechanisms on unimorph piezoelectric energy harvester. *Journal of Vibration and Control*, v. 25, n. 18, p. 2409–2422, 2019. Citado na página 8.
- KIM, J. et al. Robust design optimization of fixed-fixed beam piezoelectric energy harvester considering manufacturing uncertainties. *Sensors and Actuators A: Physical*, v. 260, p. 236–246, 2017. Citado na página 8.
- KONG, N. et al. Resistive impedance matching circuit for piezoelectric energy harvesting. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v. 21, n. 13, p. 1293–1302, 2010. Citado na página 1.
- LEE, K.-H.; PARK, G.-J. A global robust optimization using kriging based approximation model. *JSME International Journal Series C Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing*, v. 49, n. 3, p. 779–788, 2006. Citado na página 10.
- LEO, D. J. *Engineering analysis of smart material systems*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007. Citado na página 5.

- LESIEUTRE, G. A.; OTTMAN, G. K.; HOFMANN, H. F. Damping as a result of piezoelectric energy harvesting. *Journal of Sound and Vibration*, v. 269, n. 3-5, p. 991–1001, 2004. Citado na página 2.
- LI, X. A non-dominated sorting particle swarm optimizer for multiobjective optimization. In: SPRINGER. *Genetic and Evolutionary Computation Conference*. [S.l.], 2003. p. 37–48. Citado na página 38.
- LOBATO, F. S. et al. *Otimização Multi-objetivo para o Projeto de Sistemas de Engenharia*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2008. Citado na página 11.
- LOBATO, F. S.; STEFFEN JR, V. *Multi-objective optimization problems: concepts and self-adaptive parameters with mathematical and engineering applications*. [S.l.]: Springer, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 34.
- LOPEZ, R. H.; BECK, A. T. Reliability-based design optimization strategies based on form: a review. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 34, n. 4, p. 506–514, 2012. Citado na página 3.
- MAI, C. V. *Polynomial chaos expansions for uncertain dynamical systems-Applications in earthquake engineering*. Tese (Doutorado) — ETH Zurich, 2016. Citado na página 111.
- MARLER, R. T.; ARORA, J. S. Survey of multi-objective optimization methods for engineering. *Structural and multidisciplinary optimization*, v. 26, n. 6, p. 369–395, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 33.
- MARTINS, P. H. *Projeto robusto e análise de incertezas em dispositivos ressonantes para coleta de energia*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 12, 43 e 44.
- MCCONNELL, K. G.; VAROTO, P. S. *Vibration testing: theory and practice*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1995. Citado na página 53.
- Mide Technology. *Material Properties of Piezoelectric Materials*. 1989. Disponível em: <<https://support.piezo.com/article/62-material-properties>>. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 107.
- MOREIRA, F. *Otimização Robusta Multiobjetivo para o Projeto de Sistemas em Engenharia*. 230 f. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2015. Citado na página 34.
- NAIR, V. N. et al. Taguchi's parameter design: a panel discussion. *Technometrics*, v. 34, n. 2, p. 127–161, 1992. Citado na página 9.
- NG, T.; LIAO, W. Sensitivity analysis and energy harvesting for a self-powered piezoelectric sensor. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v. 16, n. 10, p. 785–797, 2005. Citado na página 2.
- OLSSON, A.; SANDBERG, G.; DAHLBLOM, O. On latin hypercube sampling for structural reliability analysis. *Structural Safety*, v. 25, n. 1, p. 47–68, 2003. Citado na página 22.

- PABST, U.; HAGEDORN, P. Identification of boundary conditions as a part of model correction. *Journal of Sound and Vibration*, v. 182, n. 4, p. 565–575, 1995. Citado na página 13.
- PARSOPOULOS, K. E.; VRAHATIS, M. N. Particle swarm optimization method in multiobjective problems. In: *Proceedings of the 2002 ACM symposium on Applied computing*. [S.l.: s.n.], 2002. p. 603–607. Citado na página 4.
- POLES, S.; LOVISON, A. A polynomial chaos approach to robust multiobjective optimization. In: *Dagstuhl Seminar Proceedings*. [S.l.: s.n.], 2009. Citado 3 vezes nas páginas 12, 19 e 22.
- RAFIQUE, S. *Piezoelectric Vibration Energy Harvesting*. [S.l.]: Springer, 2018. Citado na página 1.
- RAO, S. S. *Engineering optimization: theory and practice*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 3, 30 e 31.
- RITTO, T. G.; SAMPAIO, R.; CATALDO, E. Timoshenko beam with uncertainty on the boundary conditions. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 30, n. 4, p. 295–303, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 59.
- RUIZ, R. O.; MERUANE, V. Uncertainties propagation and global sensitivity analysis of the frequency response function of piezoelectric energy harvesters. *Smart Materials and Structures*, v. 26, n. 6, p. 065003, 2017. Citado na página 8.
- SANTOS, H. *Controle de vibrações estruturais usando cerâmicas piezoelétricas em extensão e cisalhamento conectadas a circuitos híbridos ativo-passivos*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 12, 43 e 44.
- SANTOS, H. *Controle ativo-passivo de vibrações estruturais usando materiais piezoelétricos: Otimização e quantificação de incertezas*. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 59.
- SCHUËLLER, G. I.; JENSEN, H. A. Computational methods in optimization considering uncertainties—an overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 198, n. 1, p. 2–13, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 10.
- SEONG, S.; HU, C.; LEE, S. Design under uncertainty for reliable power generation of piezoelectric energy harvester. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v. 28, n. 17, p. 2437–2449, 2017. Citado na página 9.
- SILVA, S. F. d. *Seleção de características por meio de algoritmos genéticos para aprimoramento de rankings e de modelos de classificação*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2011. Citado na página 32.
- SODANO, H. A.; INMAN, D. J.; PARK, G. A review of power harvesting from vibration using piezoelectric materials. *Shock and Vibration Digest*, v. 36, n. 3, p. 197–206, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 6.
- SOIZE, C. *Uncertainty Quantification: An Accelerated Course with Advanced Applications in Computational Engineering*. [S.l.]: Springer, 2017. Citado na página 59.

- SUDRET, B. Polynomial chaos expansions and stochastic finite element methods. *Risk and reliability in geotechnical engineering*, p. 265–300, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 23, 26 e 63.
- TRINDADE, M. A.; BENJEDDOU, A. Effective electromechanical coupling coefficients of piezoelectric adaptive structures: critical evaluation and optimization. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, v. 16, n. 3, p. 210–223, 2009. Citado na página 49.
- VAROTO, P. S. Dynamic behavior and performance analysis of piezoelectric energy harvesters under model and parameter uncertainties. In: *Sensors and Instrumentation, Aircraft/Aerospace and Energy Harvesting, Volume 8*. [S.l.]: Springer, 2019. p. 57–66. Citado na página 9.
- WALTZ, F. An engineering approach: hierarchical optimization criteria. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 12, n. 2, p. 179–180, 1967. Citado na página 4.
- ZHOU, L. et al. A model for the energy harvesting performance of shear mode piezoelectric cantilever. *Sensors and Actuators A: Physical*, v. 179, p. 185–192, 2012. Citado na página 7.

Anexos

ANEXO A – Conversão e dados de coeficientes piezelétricos

Para o material piezelétrico PZT-5A, é possível encontrar os dados necessários através do catálogo do fabricante ([Mide Technology, 1989](#)). As matrizes de flexibilidade a campo elétrico constante \mathbf{s}^E , piezelétrica \mathbf{d} e permissividade dielétrica a tensão constante $\boldsymbol{\epsilon}^T$ podem ser montadas com os dados do fabricante e com base no trabalho de ([CHEVALLIER; GHORBEL; BENJEDDOU, 2008](#)). Estas são apresentadas na seguinte sequência:

$$\mathbf{s}^E = \begin{bmatrix} 15.1 & -4.8 & -7.6 & 0 & 0 & 0 \\ -4.8 & 15.1 & -7.6 & 0 & 0 & 0 \\ -7.6 & -7.6 & 18.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39.8 \end{bmatrix} 10^{-12} m^2/N \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 460 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 460 & 0 & 0 \\ -190 & -190 & 390 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-12} C/N \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\boldsymbol{\epsilon}^\epsilon}{\epsilon_0} = \begin{bmatrix} 1600 & 0 & 0 \\ 0 & 1600 & 0 \\ 0 & 0 & 1900 \end{bmatrix}, \epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} F/m \quad (\text{A.3})$$

A partir das matrizes anteriores, as formas \mathbf{c}^E (rigidez a campo elétrico constante), \mathbf{e} (tensão piezelétrica) e $\boldsymbol{\epsilon}^\epsilon$ (permissividade dielétrica a deformação constante) são encontradas através da seguinte formulação:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^E &= (\mathbf{s}^E)^{-1} \\ \mathbf{e} &= (\mathbf{d})\mathbf{s}^E \\ \boldsymbol{\epsilon}^\epsilon &= \boldsymbol{\epsilon}^T - (\mathbf{d})\mathbf{e}^t \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

O trabalho presente considera pastilhas piezelétricas em extensão na superfície de um substrato. Além disso, supõe-se material piezelétrico ortotrópico, totalmente recoberto por eletrodos, deslocamento elétrico unidirecional e tensões planas. Isso permite simplificar equações constitutivas tridimensionais para um caso mais simples, referente a viga,

utilizando apenas as constantes necessárias c_{11}^E , e_{31} e ϵ_{33}^ϵ , que após modificadas, devido a condições de tensões planas assumidas, ficam simbolicamente representadas com barras sobrepostas, como segue:

$$\begin{aligned}\bar{c}_{11}^E &= c_{11}^E - \frac{c_{13}^E{}^2}{c_{33}^E} \\ \bar{e}_{31} &= e_{31} - \frac{c_{13}^E}{c_{33}^E} e_{33} \\ \bar{\epsilon}_{33}^\epsilon &= \epsilon_{33}^\epsilon + \frac{e_{33}^2}{c_{33}^E}\end{aligned}\tag{A.5}$$

A equação constitutiva para o material piezelétrico na superfície da viga, com as constantes já modificadas para atender a condição de tensões planas é escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11}^E & -\bar{e}_{31} \\ \bar{e}_{31} & \bar{\epsilon}_{33}^\epsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ E_3 \end{Bmatrix}\tag{A.6}$$

em que σ_1 e ε_1 são as correspondentes tensão e deformação na direção longitudinal, enquanto E_3 e D_3 o campo e deslocamento elétricos na direção transversal. Reescrevendo a equação anterior na forma de sistema tem-se,

$$\begin{cases} \sigma_1 = \bar{c}_{11}^E \varepsilon_1 - \bar{e}_{31} E_3 & \text{(i)} \\ D_3 = \bar{e}_{31} \varepsilon_1 + \bar{\epsilon}_{33}^\epsilon E_3 & \text{(ii)} \end{cases}\tag{A.7}$$

Da segunda equação de (A.7) segue que,

$$\bar{\epsilon}_{33}^\epsilon E_3 = D_3 - \bar{e}_{31} \varepsilon_1 \Rightarrow E_3 = \frac{D_3 - \bar{e}_{31} \varepsilon_1}{\bar{\epsilon}_{33}^\epsilon}\tag{A.8}$$

Substituindo (A.8) na primeira equação de (A.7) chega-se a:

$$\sigma_1 = \bar{c}_{11}^E \varepsilon_1 - \bar{e}_{31} \left(\frac{D_3 - \bar{e}_{31} \varepsilon_1}{\bar{\epsilon}_{33}^\epsilon} \right) = \left(\bar{c}_{11}^E + \frac{\bar{e}_{31}^2}{\bar{\epsilon}_{33}^\epsilon} \right) \varepsilon_1 - \frac{\bar{e}_{31}}{\bar{\epsilon}_{33}^\epsilon} D_3\tag{A.9}$$

Portanto, das equações (A.8) e (A.9) pode-se escrever σ_1 e E_3 em função de ε_1 e D_3 na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ E_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11}^E + \frac{\bar{e}_{31}^2}{\bar{\epsilon}_{33}^\epsilon} & -\frac{\bar{e}_{31}}{\bar{\epsilon}_{33}^\epsilon} \\ -\frac{\bar{e}_{31}}{\bar{\epsilon}_{33}^\epsilon} & \frac{1}{\bar{\epsilon}_{33}^\epsilon} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ D_3 \end{Bmatrix}\tag{A.10}$$

De outra forma, a equação anterior pode ser sintetizada como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ E_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11}^D & -\bar{h}_{31} \\ -\bar{h}_{31} & \bar{\beta}_{33}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ D_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

em que \bar{c}_{11}^D , \bar{h}_{31} e $\bar{\beta}_{33}^\varepsilon$ são as constantes elástica (para deslocamento elétrico constante), piezoeétrica e dielétrica (impermissividade para deformação constante).

Observando as equações (A.10) e (A.11) é fácil de notar a possibilidade de conversão dos coeficientes \bar{c}_{11}^E , \bar{e}_{31} e $\bar{\epsilon}_{33}^\varepsilon$ para \bar{c}_{11}^D , \bar{h}_{31} e $\bar{\beta}_{33}^\varepsilon$. Isso permite manipular o programa em elementos finitos para coleta de energia com os dados fornecidos pelo fabricante, uma vez que se considera nas rotinas as constantes na última forma apresentada.

ANEXO B – Bases para variáveis com distribuição Gama

A função densidade de probabilidade para variáveis aleatórias com distribuição Gama $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta_i)$ e $\alpha_i, \beta_i > 0$ é escrita como:

$$f_{X_i}(x_i) = \beta_i^{\alpha_i} \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} x_i^{\alpha_i-1} e^{-\beta_i x_i} \quad (\text{B.1})$$

A equação anterior também é escrita na forma padrão com fator de escala unitário e $U_i \sim \Gamma(\alpha_i, 1)$, levando a:

$$f_{U_i}(u_i) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} u_i^{\alpha_i-1} e^{-u_i} \quad (\text{B.2})$$

Uma maneira de se alternar entre as variáveis com distribuição Gama X_i e U_i é utilizar o fator de escala β_i , levando a:

$$U_i = \beta_i X_i \quad (\text{B.3})$$

Aqui, retorna-se a (2.22) em que foi definido o seguinte produto interno:

$$\langle \pi_j^{(i)}, \pi_k^{(i)} \rangle_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\pi_j^{(i)}(X_i) \pi_k^{(i)}(X_i)] = \int_{D_X} \pi_j^{(i)}(x) \pi_k^{(i)}(x) f_{X_i}(x) dx = a_j^i \delta_{jk} \quad (\text{B.4})$$

em que $\delta_{jk} = 0$ se $j \neq k$ e $\delta_{jk} = 1$ e $j = k$. Para um problema com M variáveis aleatórias, bases ortonormalizadas serão escritas conforme segue:

$$\psi_j^{(i)} = \pi_j^{(i)} / \sqrt{a_j^i} \quad i = 1, \dots, M \quad j \in \mathbb{N} \quad (\text{B.5})$$

Para funções de Laguerre, um produto interno a ser escrito, em que as variáveis aleatórias têm distribuição Gama e baseando-se em (MAI, 2016), é:

$$\langle L_j^{(\alpha-1)}(u), L_k^{(\alpha-1)}(u) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} L_j^{(\alpha-1)}(u) L_k^{(\alpha-1)}(u) \frac{u^{(\alpha-1)} e^{-u}}{\Gamma(\alpha)} du = \frac{\Gamma(j+\alpha)}{\Gamma(\alpha) j!} \delta_{jk} \quad (\text{B.6})$$

A partir de (B.6) e observando (B.4) e (B.5), as bases ortonormalizadas serão descritas em função da equações generalizadas de Laguerre, conforme expressas por:

$$\psi_j^{(i)} = L_j^{(\alpha-1)}(u) / \sqrt{\frac{\Gamma(j+\alpha)}{\Gamma(\alpha)n!}} = L_j^{(\alpha-1)}(u) \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha)j!}{\Gamma(j+\alpha)}} \quad i = 1, \dots, M \quad j \in \mathbb{N} \quad (\text{B.7})$$

Uma propriedade fundamental das funções Gama é que permitem simplificar as relações encontradas em (B.7) é dada por:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha) \quad (\text{B.8})$$

Em relação aos polinômios generalizados de Laguerre, dado o grau j do polinômio e o fator de forma α , recorre-se à seguinte equação a fim de encontrá-los:

$$L_j^{(\alpha)}(u) = \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{j+\alpha}{j-i} \frac{u^i}{i!} \quad (\text{B.9})$$

Os polinômios até grau 3 podem ser escritos e exemplificados conforme segue:

$$\begin{aligned} L_0^{(\alpha)}(u) &= 1 \\ L_1^{(\alpha)}(u) &= -u + (\alpha + 1) \\ L_2^{(\alpha)}(u) &= \frac{u^2}{2} - (\alpha + 2)u + \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{2} \\ L_3^{(\alpha)}(u) &= \frac{-u^3}{6} + \frac{(\alpha + 3)u^2}{2} - \frac{(\alpha + 2)(\alpha + 3)u}{2} + \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}{6} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$