

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

Patrick Bueno Lamas

**Sistemas Rotativos Periódicos: Projeto de Vazios Modais
para a Redução da Resposta Vibratória**

São Carlos

2022

Patrick Bueno Lamas

**Sistemas Rotativos Periódicos: Projeto de Vazios Modais
para a Redução da Resposta Vibratória**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Dinâmica e Mecatrônica

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Nicoletti

VERSÃO CORRIGIDA

São Carlos

2022

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

B215s Bueno Lamas, Patrick
Sistemas Rotativos Periódicos: Projeto de Vazios
Modais para a Redução da Resposta Vibratória / Patrick
Bueno Lamas; orientador Rodrigo Nicoletti. São Carlos,
2022.

Dissertação (Mestrado) - Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Área de
Concentração em Dinâmica e Mecatrônica -- Escola de
Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo,
2022.

1. dinâmica de rotores . 2. propagação de ondas.
3. estruturas periódicas. 4. sistemas contínuos. 5.
vibração estrutural. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **PATRICK BUENO LAMAS**

Título da dissertação: "Sistemas rotativos periódicos: projeto de vazios modais para a redução da resposta vibratória"

Data da defesa: 29/07/2022

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Associado **Rodrigo Nicoletti**

(Orientador)

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC-USP)

Aprovado

Prof. Associado **Samuel da Silva**

(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"/UNESP – Ilha Solteira)

APROVADO

Prof. Titular **José Roberto de França Arruda**

(Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica:

Prof. Associado **Adriano Almeida Gonçalves Siqueira**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

*Este trabalho é dedicado à minha Família:
André, Rose e Bel.*

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Rodrigo Nicoletti pela confiança, amizade, incentivo, paciência, atenção, ensinamentos filosóficos e dedicação intensa e ininterrupta neste trabalho.

A todos os Professores que me ensinaram tanto durante este Mestrado e têm contribuição direta neste trabalho através de seus cursos: Luciana Montanari, Maíra Martins da Silva, Leopoldo Pisanelli R. de Oliveira, Daniel Varela Magalhães, Mário Luiz Tronco, Ricardo Afonso Angélico, Marcelo Areias Trindade, Gilson Volpato, José Roberto de França Arruda, Aldemir Aparecido Cavallini Junior e Rodrigo Nicoletti.

Ao Professores Leopoldo Pisanelli R. de Oliveira E Carlos De Marqui Junior pelas contribuições fundamentais na Qualificação deste trabalho.

Aos técnicos do Laboratório de Dinâmica (LabDin) pelo auxílio e ideias valiosas na execução do experimento.

Aos amigos, essenciais durante esse período de mestrado, Lucas, Arthur, Camila, Felipe, Tainara, Jackson e Daltin. Além das muitas conversas que me ajudaram a resolver os problemas encontrados na pesquisa, também me fizeram crescer como Ser Humano e me proporcionaram momentos que levarei por toda vida.

À CAPES, pelo apoio financeiro indispensável.

À minha Família: André, Rose e Bel. A razão de eu ter chegado até aqui.

A Vida É Uma Grande Obra de Arte

Patrick Bueno Lamas

Um Artista, ao olhar para uma tela em branco, vê inúmeras possibilidades. Pode-se fazer qualquer coisa. O branco permite que um infinito de obras seja criado. Assim também é a vida. A vida permite que qualquer obra seja feita dela. Porém, assim como o Artista congela ao olhar para o branco e ver o infinito o assustar, nós também paralisamos e deixamos o infinito nos assustar. Pois, se posso fazer o que quiser, então o que farei? Se posso pintar o que quiser, então o que pintarei?

A falta de coragem para pegar o pincel faz com que muitos desistam da criação e partam para a reprodução. A reprodução funciona como uma cópia com alguns espaços para a interpretação. Na reprodução, pegamos obras existentes e a reproduzimos, ou seja, nós pegamos algum estilo de vida dito como grande, bonito, digno de aplausos, feliz e gratificante e o utilizamos como nosso. Às vezes, dando um pouco de nossa interpretação à obra. Às vezes, apenas seguindo o passo-a-passo que deve ser feito.

Se um Artista reproduz a Mona Lisa, ele até sente a arte passando por seus dedos e chegando à tela, porém este sentimento não é completo, pois mesmo que ele desenvolva a técnica para reproduzir esta grande obra, ao terminar ele irá contemplar algo belo, porém não será algo que saiu do fundo da sua alma e sim de outra alma. Não sendo, portanto, a sua verdade.

Essa é a vida. Todos nós estamos olhando para essa tela branca que é a nossa vida. Ouvimos dizer a todo momento de grandes telas que poderíamos pintar. Nos mostram desenhos lindos que poderíamos colocar em nosso quadro. E isso apaga e tira de nós o Artista e a possibilidade de desenharmos o que está escrito em nossa alma, o que está dentro de nós e precisa sair. Mas, ao invés de entregarmos a nossa grande obra de arte ao mundo, nos deixamos ser coagidos a seguir um dos modelos existentes e que, supostamente, são comprovados como ideais. E agora fica a pergunta:

O que faremos com o pouco tempo que nos é dado como seres Humanos?

RESUMO

LAMAS, P.B. **Sistemas Rotativos Periódicos: Projeto de Vazios Modais para a Redução da Resposta Vibratória.** 2022. 94p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

Vazios modais, regiões onde não há ressonâncias, podem ser impostos no espectro de frequência de máquinas rotativas utilizando configurações periódicas e quase periódicas. Ao projetar-se o rotor com uma geometria que se repete periodicamente, impõe-se, na resposta vibratória, um vazio modal com uma largura de banda considerável, no qual nenhuma ressonância aparece. Neste trabalho, consideramos que os elementos rotativos da máquina (e. g. volutas, engrenagens, selos, *etc*) são os elementos periódicos do rotor. Na configuração rotor com discos, o sistema apresenta vazios modais devido a duas diferentes razões: a combinação entre o número de discos e o número de onda do respectivo modo de vibrar; a presença de modos de vibração localizados. Uma modelagem analítica do sistema é apresentada, cuja solução aproximada pode ser usada para prever as frequências naturais que delimitam o vazio modal. O posicionamento dos vazios modais em regiões de interesse é feito alterando a posição dos elementos atuantes montados sobre o eixo. Por fim, a análise via ondas mostra que os vazios modais em rotores periódicos, são faixas de frequência onde não há ondas propagantes na estrutura.

Palavras-chave: dinâmica de rotores. propagação de ondas. estruturas periódicas. vibração estrutural. sistemas contínuos.

ABSTRACT

LAMAS, P.B. **Design of band gaps in periodic and quasi-periodic rotors.** 2022. 94p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

Modal spacing (band gaps) in the frequency spectrum of rotating machines can be imposed by geometric periodicity. By designing the rotor with a geometry that repeats periodically, we can impose to the vibration response of the rotor a modal gap considerably large, where no resonances appear. In this work, we consider that the rotating elements of the machine (e.g. the stages or the impellers) are the periodic elements of the rotor. In this disk-like configuration of the rotor, the system can present band gaps due to two different reasons: due to matching between the number of disks and the eigenmode wavenumber (usually in slender rotors); due to the presence of localized mode shapes. Analytical modeling of the system is presented, whose approximated solution can be used to predict the start and stop frequencies of the band gaps. It is also shown the limitations in band gap formation when the rotor is not perfectly periodic (quasi-periodic geometry). It is shown that band gaps can be moved towards desired locations in the frequency spectrum by mounting the working elements at optimized positions along the shaft. Finally, a wave analysis is made and it is shown that the band gaps, in periodic rotating machines, are frequency regions where there are no propagating waves.

Keywords: rotor dynamics. wave propagation. periodic structures. structural vibration. continuous systems.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Exemplo de periodicidade geométrica em um compressor de 5 estágios Dresser-Rand Datum: estágios com geometria similar distribuídos periodicamente no eixo. | 2 |
| Figura 2 – Exemplos de estruturas periódicas presentes na natureza e em aplicações de engenharia: (a) teias de aranha, (b) bambus, (c) colmeias de abelhas, (d) oleodutos, (e) estruturas internas de um avião, e (f) ferrovias. | 5 |
| Figura 3 – Exemplos de aplicações de sistemas rotativos em estruturas de engenharia: (a) turbina eólica, (b) turbina a gás SGT5-9000HL, (c) coluna de perfuração. | 9 |
| Figura 4 – Elementos periódicos propostos na formação de vazios modais em rotores: (a) eixo escalonado (RICHARDS; PINES, 2003),(ALSAFFAR; SASSI; BAZ, 2018), (b) absorvedor de camada única (YU <i>et al.</i> , 2006),(SONG <i>et al.</i> , 2013). | 11 |
| Figura 5 – Elementos periódicos propostos na formação de vazios modais em rotores: (a) absorvedor de múltiplas camadas (LI <i>et al.</i> , 2012),(LI; CAI, 2016),(LI <i>et al.</i> , 2018) e (b) absorvedor do tipo pilha (FAN <i>et al.</i> , 2019). | 12 |
| Figura 6 – Elementos periódicos propostos na formação de vazios modais em rotores: absorvedor do tipo anel (PRADO; RITTO, 2020). | 13 |
| Figura 7 – Rotor com discos na configuração periódica. | 14 |
| Figura 8 – Células unitárias utilizadas para construir os rotores periódicos. | 15 |
| Figura 9 – Estruturas periódicas formadas por uma mesma célula: (a) simétrica e (b) assimétrica. | 16 |
| Figura 10 – Esquema representativo do MEF do rotor com os pontos de excitação ($\mathbf{F}(\omega)$) e resposta ($\mathbf{Y}(\omega)$) utilizados nos cálculos das FRFs. | 18 |
| Figura 11 – Frequências Naturais (pontos) e amplitude das FRFs (cores) do rotor em função do número de discos periodicamente distribuídos ao longo do eixo (resultados para $\Omega = 1000$ rpm): (a) célula simétrica e (b) célula assimétrica. | 19 |
| Figura 12 – Modos de vibrar do rotor com 7 discos (célula unitária simétrica): (a) 7º modo de vibrar (início do vazio modal 1), (b) 8º modo de vibrar (término do vazio modal 1). | 20 |
| Figura 13 – Modos de vibrar do rotor com 7 discos (célula unitária assimétrica): (a) 7º modo de vibrar (início do vazio modal 1), (b) 8º modo de vibrar (término do vazio modal 1). | 20 |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 14 – Modos de vibrar do rotor com 7 discos (célula unitária simétrica): (a) 14º modo de vibrar (início do vazio modal 2), (b) 15º modo de vibrar (término do vazio modal 2). | 21 |
| Figura 15 – Modos de vibrar do rotor com 7 discos (célula unitária assimétrica): (a) 14º modo de vibrar (início do vazio modal 2), (b) 15º modo de vibrar (término do vazio modal 2). | 21 |
| Figura 16 – Modos de vibrar do rotor com 14 discos (célula unitária simétrica): (a) 13º modo de vibrar (início do vazio modal 2), (b) 14º modo de vibrar (término do vazio modal 2). | 22 |
| Figura 17 – Modos de vibrar do rotor com 14 discos (célula unitária assimétrica): (a) 15º modo de vibrar (início do vazio modal 2), (b) 16º modo de vibrar (término do vazio modal 2). | 22 |
| Figura 18 – Diagrama de Campbell do rotor com 7 discos: (a) célula unitária simétrica e (b) célula unitária assimétrica. | 22 |
| Figura 19 – Frequências Naturais (pontos) e amplitude das FRFs (cores) do rotor em função do número de discos periodicamente distribuídos ao longo do eixo (resultados para $\Omega = 1000$ rpm): (a) célula simétrica e (b) célula assimétrica. | 24 |
| Figura 20 – Modos de vibrar do rotor com 10 discos (célula unitária simétrica): (a) 10º modo de vibrar (início do vazio modal 1), (b) 11º modo de vibrar (término do vazio modal 1). | 24 |
| Figura 21 – Modos de vibrar do rotor com 10 discos (célula unitária assimétrica): (a) 10º modo de vibrar (início do vazio modal 1), (b) 11º modo de vibrar (término do vazio modal 1). | 25 |
| Figura 22 – Modos de vibrar do rotor com 10 discos (célula unitária simétrica): (a) 15º modo de vibrar (início do vazio modal 2), (b) 16º modo de vibrar (término do vazio modal 2). | 25 |
| Figura 23 – Modos de vibrar do rotor com 10 discos (célula unitária assimétrica): (a) 15º modo de vibrar (início do vazio modal 2), (b) 16º modo de vibrar (término do vazio modal 2). | 26 |
| Figura 24 – Modos de vibrar do rotor com 10 discos (célula unitária simétrica): (a) 5º modo de vibrar (início do vazio modal 3), (b) 6º modo de vibrar (término do vazio modal 3). | 26 |
| Figura 25 – Diagrama de Campbell do rotor com 10 discos: (a) célula unitária simétrica e (b) célula unitária assimétrica. | 27 |
| Figura 26 – Frequências Naturais (pontos) e amplitude das FRFs (cores) do rotor em função do número de discos periodicamente distribuídos ao longo do eixo (resultados para $\Omega = 1000$ rpm): (a) célula simétrica e (b) célula assimétrica. | 28 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 27 – Modos de vibrar do rotor com 11 discos (célula unitária simétrica): (a) 10º modo de vibrar (início do vazio modal 1), (b) 11º modo de vibrar (término do vazio modal 1). | 29 |
| Figura 28 – Modos de vibrar do rotor com 11 discos (célula unitária assimétrica): (a) 12º modo de vibrar (início do vazio modal 1), (b) 13º modo de vibrar (término do vazio modal 1). | 29 |
| Figura 29 – Modos de vibrar do rotor com 11 discos (célula unitária simétrica): (a) 22º modo de vibrar (início do vazio modal 2), (b) 23º modo de vibrar (término do vazio modal 2). | 30 |
| Figura 30 – Modos de vibrar do rotor com 11 discos (célula unitária assimétrica): (a) 22º modo de vibrar (início do vazio modal 2), (b) 23º modo de vibrar (término do vazio modal 2). | 30 |
| Figura 31 – Modos de vibrar do rotor com 11 discos (célula assimétrica): (a) 10º modo de vibrar (início do vazio modal 1), (b) 11º modo de vibrar (término do vazio modal 1). | 30 |
| Figura 32 – Diagrama de Campbell do rotor com 11 discos: célula unitária simétrica. | 31 |
| Figura 33 – Diagrama de Campbell do rotor com 11 discos: célula unitária assimétrica | 31 |
| Figura 34 – Variação linear do raio do disco, ao longo do eixo. | 33 |
| Figura 35 – Frequências naturais (pontos) e amplitude da FRF (cores) para o caso do rotor de grande porte com 7 discos em função da razão de raio dos discos (resultados para $\Omega = 0$). | 33 |
| Figura 36 – Modos de vibrar do rotor de grande porte com 7 discos e $R_{N_D}/R_1 = 1.5$: (a) 7º modo de vibrar (início do vazio modal 4), (b) 8º modo de vibrar (término do vazio modal 4). | 33 |
| Figura 37 – Variação geométrica da posição dos discos ao longo do rotor. | 34 |
| Figura 38 – Frequências naturais (pontos) e amplitude da FRF (cores) de um rotor de grande porte com 7 discos em função da razão comum q | 35 |
| Figura 39 – Esquema representativo do modelo de rotor periódico: célula unitária assimétrica. | 37 |
| Figura 40 – Frequências naturais (pontos) e predição da Eq. (4.15) para as frequências de início e término dos vazios modais (linhas) em função do número de discos (rotor delgado). | 40 |
| Figura 41 – Frequências naturais (pontos) e predição da Eq. (4.16) com os fatores de correção para as frequências que delimitam os vazios modais (linhas) em função do número de discos: rotor delgado. | 42 |
| Figura 42 – Frequências naturais (pontos) e predição da Eq. (4.16) com os fatores de correção para as frequências que delimitam os vazios modais (linhas) em função do número de discos: rotor de grande porte. | 42 |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 43 – Frequências naturais (pontos) e predição da Eq. (4.16) com os fatores de correção para as frequências que delimitam os vazios modais (linhas) em função do número de discos: (a) rotor de alumínio e (b) rotor de latão | 43 |
| Figura 44 – Bancada experimental do rotor com periodicidade longitudinal (mesma distância entre discos): eixo (1), rolamentos de esferas autocompensadores (2), motor elétrico (3), discos (4), <i>shaker</i> (5), mancal de excitação (6), célula de carga (7) e sensores indutivos de proximidade (8). | 46 |
| Figura 45 – Frequências naturais experimentais do rotor em função do número de discos montados sob o eixo (velocidade de rotação nula). Comparação com a predição dos limites dos vazios modais utilizando a Eq. (4.16). | 47 |
| Figura 46 – Largura de banda experimental do vazio modal 1 em comparação com o espaçamento modal médio (EMM) do sistema até 400 Hz. | 47 |
| Figura 47 – Análise modal do sistema com três discos: (a) bancada e instrumentação, (b) pontos de medição (distâncias em mm). | 49 |
| Figura 48 – Modos de vibrar experimentais das frequências de início e término do vazio modal 1 do sistema com três discos: (a) 3 ^a frequência natural (frequência de início), (b) 4 ^a frequência natural (frequência de término). | 50 |
| Figura 49 – Instrumentação utilizada nas medições do sistema em rotação: (a) sistema de excitação (<i>shaker</i> + célula de carga + mancal de excitação), (b) sensores indutivos de proximidade. | 51 |
| Figura 50 – FRFs experimentais do sistema com três discos em função da velocidade de rotação: (a) diagrama de cascata da receptância do sistema, (b) diagrama de Campbell. | 52 |
| Figura 51 – Cinco primeiros modos de vibrar experimentais do rotor com três discos. | 53 |
| Figura 52 – Função de Resposta em Frequência do rotor com 6 discos a 4,000 rpm. | 56 |
| Figura 53 – Modos de vibrar associados com as frequências de início e término do vazio modal: (a) frequência de início, (b) frequência de término. | 57 |
| Figura 54 – Funções de resposta em frequência dos rotores otimizados em função da variação da frequência central: resultados do rotor com os discos nas posições otimizadas. | 59 |
| Figura 55 – Erro da frequência central do vazio modal otimizado em função da variação da frequência central. | 59 |
| Figura 56 – Largura de banda do vazio modal em função da variação da frequência central para as soluções otimizadas. | 59 |
| Figura 57 – Posições otimizadas dos discos ao longo do rotor em função da variação da frequência central. | 60 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 58 – Bancada experimental do rotor com periodicidade longitudinal (mesma distância entre discos): eixo (1), rolamentos de esferas autocompensadores (2), motor elétrico (3), acomplamento de <i>kardan</i> (4), discos (5), <i>shaker</i> (6), colar de excitação (7), célula de carga (8) e acelerômetro (9). | 61 |
| Figura 59 – Montagem experimental utilizada para ajustar os parâmetros do modelo: (a) identificação experimental do eixo liso na direção vertical e (b) identificação experimental do eixo liso na direção horizontal. | 62 |
| Figura 60 – Graus de liberdade adicionais do disco em relação ao eixo (linha tracejada). | 63 |
| Figura 61 – Modelagem de elementos finitos da região onde o disco é montado. . . | 64 |
| Figura 62 – Modelagem de elementos finitos do rotor da bancada de testes (mancais são representados por triângulos pretos e os nós dos elementos por pontos verdes). | 64 |
| Figura 63 – Comparação entre a FRF numérica e a FRF experimental do rotor sem discos: (a) identificação na direção vertical, (b) identificação na direção horizontal. | 66 |
| Figura 64 – Comparação entre a FRF numérica e a FRF experimental do rotor com três discos (identificação na direção vertical). | 67 |
| Figura 65 – Funções de resposta em frequência dos rotores otimizados em função da variação da frequência central: resultados numéricos para o rotor com três discos da bancada de teste. | 68 |
| Figura 66 – Largura de banda do vazio modal em função da variação da frequência central para as soluções otimizadas. | 69 |
| Figura 67 – Erro frequência central dos vazios modais otimizados em função da variação da frequência central. | 69 |
| Figura 68 – Posições otimizadas dos discos ao longo do rotor em função da frequência central. | 70 |
| Figura 69 – Rotores na bancada de testes com as posições dos discos otimizadas: (a) $\Delta\omega_{central} = 0\%$, (b) $\Delta\omega_{central} = +5\%$, e (c) $\Delta\omega_{central} = +25\%$ | 71 |
| Figura 70 – Frequências naturais dos rotores otimizadas em função da variação da frequência central: comparação entre resultados numéricos e experimentais. | 71 |
| Figura 71 – Largura de banda do vazio modal em função da variação da frequência central: comparação entre resultados numéricos e experimentais. | 72 |
| Figura 72 – Erro frequência central dos vazios modais otimizados em função da variação da frequência central. | 72 |
| Figura 73 – Largura de banda do vazio modal (VM) em comparação com o espaçamento modal médio (EMM) do rotor em função da variação da frequência central: comparação entre resultados numéricos e experimentais. | 73 |
| Figura 74 – FRFs do rotor otimizado com $\Delta\omega_{central} = 25\%$ (resultados numéricos): (a) excitação no disco #1 e (b) excitação no disco #2. | 74 |

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 75 – Diagrama de cascata da receptância do sistema do rotor periódico e do rotor otimizado em função da velocidade de rotação: (a) rotor periódico, (b) $\Delta\omega_{central} = +15\%$ | 74 |
| Figura 76 – Diagramas de Campbell do rotor com três discos na bancada de teste: (a) rotor periódico, (b) $\Delta\omega_{central} = 0\%$, (c) $\Delta\omega_{central} = -5\%$, (d) $\Delta\omega_{central} = +15\%$ | 75 |
| Figura 77 – Malha de elementos finitos da célula unitária simétrica. | 79 |
| Figura 78 – Malha de elementos finitos de uma estrutura modelada por elementos finitos. | 80 |
| Figura 79 – Comparação entre a dispersão da célula unitária e a FRF do rotor com 7 discos: (a) célula unitária simétrica, (b) célula unitária assimétrica. | 82 |
| Figura 80 – Frequências naturais da estrutura finita (pontos) e dispersão da célula unitária (cores) em função do número de discos: (a) célula unitária simétrica, (b) célula unitária assimétrica. | 83 |
| Figura 81 – Comparação entre a dispersão da célula unitária e a FRF do rotor com 10 discos: (a) célula unitária simétrica, (b) célula unitária assimétrica. | 83 |
| Figura 82 – Frequências naturais da estrutura finita (pontos) e dispersão da célula unitária (cores) em função do número de discos: (a) célula unitária simétrica, (b) célula unitária assimétrica. | 84 |
| Figura 83 – Comparação entre a dispersão da célula unitária e a FRF do rotor com 11 discos: (a) célula unitária simétrica, (b) célula unitária assimétrica. | 85 |
| Figura 84 – Frequências naturais da estrutura finita (pontos) e dispersão da célula unitária (cores) em função do número de discos: (a) célula unitária simétrica, (b) célula unitária assimétrica. | 85 |
| Figura 85 – Comparação entre a dispersão da célula unitária e a FRF do rotor com 6 discos. | 86 |
| Figura 86 – Comparação entre a dispersão da super célula e a FRF do rotor com 6 discos: (a) periódico, (b) $\Delta\omega = 0\%$ | 87 |
| Figura 87 – Comparação entre a dispersão da super célula e a FRF do rotor com 6 discos: (a) $\Delta\omega = -5\%$, (b) $\Delta\omega = +20\%$ | 87 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1 – Propriedades do rotor delgado em estudo. | 18 |
| Tabela 2 – Propriedades do rotor delgado com discos de alta inércia em estudo. . . | 27 |
| Tabela 3 – Fatores de correção para prever as frequências que delimitam os vazios modais. | 41 |
| Tabela 4 – Propriedades de dois rotores diferentes. | 43 |
| Tabela 5 – Valores dos parâmetros do sistema na predição dos limites dos vazios modais. | 47 |
| Tabela 6 – Parâmetros do rotor com 6 discos. | 56 |
| Tabela 7 – Parâmetros ajustados nos passos 1 e 2. | 66 |
| Tabela 8 – Parâmetros ajustados no passo 3. | 67 |

SUMÁRIO

| | | |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 | Objetivos | 2 |
| 1.2 | Estrutura do Texto | 3 |
| 2 | REVISÃO BIBLIOGRÁFICA | 5 |
| 2.1 | Estruturas Periódicas | 5 |
| 2.2 | Dinâmica de Sistemas Rotativos | 8 |
| 2.3 | Conclusão | 13 |
| 3 | FORMAÇÃO DE VAZIOS MODAIS EM ROTORES COM PERIODICIDADE LONGITUDINAL | 15 |
| 3.1 | Rotores Periódicos | 15 |
| 3.2 | Modelagem Matemática | 16 |
| 3.3 | Rotores Delgados Com Discos de Baixa Inércia | 18 |
| 3.3.1 | Célula Unitária Com Um Disco | 18 |
| 3.3.2 | Célula Unitária Com Dois Discos | 23 |
| 3.4 | Rotores Delgados Com Discos de Alta Inércia | 27 |
| 3.5 | Limitações da formação de vazios modais em rotores quase periódicos | 31 |
| 3.5.1 | Variação da inércia do disco | 32 |
| 3.5.2 | Variação da posição dos discos | 34 |
| 3.6 | Conclusões | 35 |
| 4 | PREDIÇÃO DAS FREQUÊNCIAS DE INICIO E TÉRMINO DOS VAZIOS MODAIS EM ROTAÇÃO NULA | 37 |
| 4.1 | Conclusão | 43 |
| 5 | EVIDÊNCIA EXPERIMENTAL DA FORMAÇÃO DE VAZIOS MODAIS EM ROTORES COM PERIODICIDADE LONGITUDINAL | 45 |
| 5.1 | Bancada de Testes e Procedimento Experimental | 45 |
| 5.2 | Resultados Experimentais | 46 |
| 5.3 | Conclusões | 52 |
| 6 | DESLOCAMENTO DO VAZIO MODAL NO ESPECTRO DA FREQUÊNCIA | 55 |
| 6.1 | Formação de Vazios Modais em Rotores com Periodicidade Longitudinal | 55 |
| 6.2 | Otimização da Posição dos Discos | 57 |

| | | |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 6.2.1 | Deslocamento do Vazio Modal no Rotor Com Seis Discos | 58 |
| 6.3 | Bancada Experimental e Aprimoramento do Modelo | 60 |
| 6.3.1 | Aprimoramento do Modelo Matemático | 62 |
| 6.3.2 | Atualização dos Parâmetros do Modelo | 65 |
| 6.4 | Otimização do Vazio Modal na Bancada de Testes | 67 |
| 6.4.1 | Efeito da Velocidade de Rotação no Vazio Modal | 73 |
| 6.5 | Conclusões | 76 |
| 7 | PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM ROTORES PERIÓDICOS E QUASE PERIÓDICOS COM VELOCIDADE DE ROTAÇÃO NULA | 79 |
| 7.1 | Modelagem Via Ondas De Uma Malha De Elementos Finitos Delimitados Por Dois Nós Com n_{gdl} Graus De Liberdade Por Nó | 79 |
| 7.2 | Rotores Delgados Com Discos de Baixa Inércia | 82 |
| 7.2.1 | Célula Unitária com Um Disco | 82 |
| 7.2.2 | Célula Unitária com Dois Discos | 83 |
| 7.3 | Rotores Delgados Com Discos de Alta Inércia | 84 |
| 7.4 | Rotores Otimizados | 85 |
| 7.5 | Conclusões | 86 |
| 8 | CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS | 89 |
| 8.1 | Perspectivas Futuras | 90 |
| | REFERÊNCIAS | 91 |

1 INTRODUÇÃO

Para uma operação segura e eficiente, máquinas rotativas devem manter requisitos dinâmicos como, por exemplo, mínimo nível de vibração e máxima distância entre a velocidade de rotação e suas velocidades críticas. Tais requisitos, entre outros, são definidos durante a fase de projeto do sistema rotativo (API, 2014), (ISO, 2016). Manter a máquina operando dentro de níveis de vibração aceitáveis não só leva a uma menor probabilidade de falha, como também aumenta o ciclo de vida da máquina e sua disponibilidade para uso.

Considerando estes requisitos, manter a velocidade de operação da máquina distante o suficiente das velocidades críticas é crucial para evitar a amplificação da vibração. A velocidade crítica de um rotor é a região de operação de maior amplitude de vibração, pois, nela o rotor é excitado em sua frequência natural, entrando, assim, em ressonância. Portanto, deve-se evitar operar próximo dessas regiões. Para isso, o projetista se vale de modelos e analisa as frequências naturais esperadas do sistema. Se uma frequência natural está muito próxima à faixa de operação da máquina (*i.e.*, abaixo de uma distância limite aceitável definida por normas) se faz necessário a modificação do projeto (propriedades do rotor ou mancais), a fim de cumprir os padrões requeridos.

Neste contexto, o fenômeno conhecido como vazios modais (do inglês, *band gaps*) se mostra interessante a ser utilizado em rotores. Vazios modais são regiões de espaçamento modal, no espectro de frequência do sistema, com largura de banda muito maior que a distância média encontrada entre outras duas ressonâncias do sistema. São regiões caracterizadas pela não presença de ressonâncias e baixa resposta à excitação (JUNYI; RUFFINI; BALINT, 2016). Note que, tais características são especialmente úteis em rotores, pois a faixa de operação da máquina, posicionada em um vazio modal, pode ficar distante o suficiente das velocidades críticas, mantendo mínima resposta vibratória. Estruturas periódicas apresentam vazios modais em seu espectro de frequência. Neste caso, a periodicidade tem o efeito de filtrar uma faixa de ondas propagantes na estrutura, de uma maneira similar aos cristais fonônicos e metamateriais (materiais não homogêneos) (DEYMIER, 2013).

Em rotores, uma das formas de se impor vazios modais no espectro de frequência é através da periodicidade geométrica, projetando o rotor com uma geometria que se repete longitudinalmente ao longo do eixo. Fazendo isso, impõe-se à resposta vibratória do rotor um vazio modal consideravelmente largo, no qual nenhuma ressonância aparece. Portanto, projetando o rotor para obter vazios modais, pode-se alocar sua velocidade de operação e possíveis fontes de excitação dentro dele. Desse modo, o rotor apresentará mínima resposta vibratória com uma boa margem de segurança, *i.e.*, uma distância segura

entre as frequências de excitação e as velocidades críticas do sistema. Esta ideia pode soar inviável do ponto de vista de projeto de sistemas rotativos, porém um olhar atento a máquinas rotativas multi-estágios revela que essas máquinas já apresentam uma geometria periódica (ou quase-periódica) (Fig. 1).

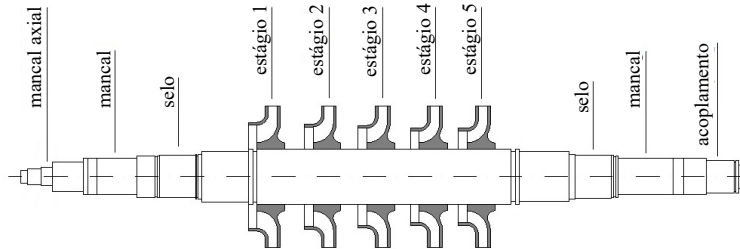


Figura 1 – Exemplo de periodicidade geométrica em um compressor de 5 estágios Dresser-Rand Datum: estágios com geometria similar distribuídos periodicamente no eixo.

Neste trabalho, são apresentados os vazios modais esperados em rotores periódicos e quase periódicos. A periodicidade será construída utilizando os elementos de trabalho, aqui representados por discos. A formação dos vazios modais em rotores periódicos é analisada levando-se em conta a forma de construção da periodicidade e a quantidade e inércia dos discos. Assim, mostra-se que o sistema pode ter vazios modais devido a duas razões principais: 1) devido ao casamento entre o número de discos e o número de onda do modo de vibrar; e 2) devido à presença de modos localizados de vibração. Uma modelagem analítica do sistema, cuja solução aproximada pode ser utilizada para prever as frequências naturais de início e fim dos vazios modais, é feita e validada experimentalmente. Uma análise numérica mostra o efeito da variação linear da inércia dos elementos em uma configuração periódica e se demonstram as limitações da formação dos vazios modais em uma configuração quase-periódica específica. Utilizando um procedimento de otimização, demonstra-se, numericamente e experimentalmente, que é possível deslocar o vazio modal para frequências mais altas ou mais baixas que a frequência do vazio modal resultante da configuração perfeitamente periódica, apenas alterando a posição dos elementos (discos), levando a uma configuração quase periódica com as mesmas características dinâmicas de interesse. Por fim, para caracterizar o tipo de vazio modal que os rotores periódicos e quase periódicos possuem, é feita uma análise numérica via ondas e os diagramas de dispersão são obtidos. Neste caso, mostra-se que os vazios modais nesses sistemas são devidos a não propagação de ondas na faixa de frequência em que aparecem.

1.1 Objetivos

O projeto como um todo aborda a análise dinâmica de rotores periódicos e quase-periódicos. Assim, os objetivos são:

- Verificar a formação dos vazios modais em rotores periódicos com periodicidade imposta via discos;
- Analisar se é possível projetar os vazios modais no sistema e posiciona-los em regiões de interesse;
- Investigar, via teoria de ondas, se o vazio modal é oriundo da não propagação de ondas na região de frequência onde ele ocorre;

Com isto, a pergunta que este trabalho visa responder é: Vazios modais podem ser utilizados no projeto de sistemas rotativos? Para que um fenômeno possa ser utilizado em uma aplicação de engenharia é importante que: 1) ele seja comprovado experimentalmente e 2) ele tenha possibilidade de projeto (pré-definição). Mostraremos isso através da validação da formação do vazios modais em rotores e do posicionamento destes no espectro da frequência.

1.2 Estrutura do Texto

No Capítulo 2, uma discussão sobre os tópicos relevantes da literatura utilizados no desenvolvimento deste trabalho é apresentada. No Capítulo 3, a formação de vazios modais em rotores delgados com discos de baixa e alta inércia é investigada. No Capítulo 4 uma modelagem analítica do sistema rotativo periódico é apresentada, cuja solução aproximada pode ser utilizada para prever as frequências naturais que delimitam os vazios modais. O Capítulo 3.5 traz uma análise da influência da variação da posição e da geometria do elemento periódico. O Capítulo 5 valida experimentalmente os resultados dos Capítulos 3 e 4. No Capítulo 6, o posicionamento dos vazios modais no espectro de frequência de rotores com periodicidade longitudinal é abordado, mostrando que é possível deslocar o vazio modal para frequências mais altas ou mais baixas, apenas alterando a posição dos elementos periódicos (discos), levando a uma configuração quase periódica. No Capítulo 7, as dispersões dos rotores são obtidas para os casos periódicos e quase periódicos. Por fim, Conclusões e Perspectivas futuras do trabalho são discutidas no Capítulo 8.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste Capítulo é apresentada uma revisão dos trabalhos encontrados na literatura considerados mais relevantes para o desenvolvimento deste projeto de pesquisa. O Capítulo foi dividido em duas seções: Estruturas Periódicas (Seção 2.1) e Dinâmica de Sistemas Rotativos (Seção 2.2).

2.1 Estruturas Periódicas

A propagação de ondas em estruturas periódicas tem sido estudada há bastante tempo. De acordo com Brillouin (1946), o primeiro trabalho que investigou uma estrutura periódica de 1D (uma dimensão) foi feito por Newton. Em sua tentativa de equacionar a velocidade do som no ar, Newton discretizou o meio em massa-molas conectadas em série, formando, assim, um cadeia periódica 1D. Conceitualmente, estruturas periódicas são estruturas compostas da repetição de elementos estruturais idênticos, também chamados de célula unitária, ligados um ao outro formando a estrutura completa em 1, 2 ou 3 dimensões (MEAD, 1996). A periodicidade pode ser inserida na estrutura via material, geometria, ressonadores ou condições de contorno. Um olhar mais atento mostra que este conceito não é novo, estruturas periódicas estão presentes desde a natureza até aplicações de engenharia (Fig. 2).



Figura 2 – Exemplos de estruturas periódicas presentes na natureza e em aplicações de engenharia: (a) teias de aranha¹, (b) bambus², (c) colmeias de abelhas³, (d) oleodutos⁴, (e) estruturas internas de um avião⁵, e (f) ferrovias⁶.

Muitas aplicações do conceito de periodicidade em 1, 2 e 3D podem ser encontradas na literatura (DEYMIER, 2013). A razão do crescente interesse nestas estruturas é a

possibilidade de seu uso no controle de ondas mecânicas e eletromagnéticas. Neste trabalho apenas com as propriedades mecânicas destas estruturas serão consideradas. O arranjo periódico destas estruturas dá origem a zonas no espectro da frequência nas quais ondas não se propagam ou são altamente atenuadas, *i.e.*, os chamados vazios modais (HAJHOSSEINI; EBRAHIMI, 2019).

Vazios modais são regiões na resposta em frequência do sistema caracterizadas por: 1) não aparecimento de ressonâncias, 2) baixa resposta do sistema à excitação, e 3) largura de banda muito maior que a distância média entre duas ressonâncias do sistema (DEYMIER, 2013). Considerando estas características, é de grande interesse ter um vazio modal na faixa de operação do sistema, pois este estará operando em condições de mínima vibração.

Este fenômeno foi primeiramente identificado em cristais fonônicos em Sigalas e Economou (1992). Cristais fonônicos são estruturas compósitas ou com não uniformidade de material consistindo de uma, duas ou mais fases (sólida e/ou fluida) de materiais diferentes arranjados periodicamente (HUSSEIN; LEAMY; RUZZENE, 2014), *i.e.*, inclusões de um material diferente do material da estrutura hospedeira são feitas de maneira periódica. Os vazios modais presentes em cristais fonônicos acontecem devido ao mecanismo de Bragg (*Bragg scattering*), o qual se baseia nas interferências destrutivas das ondas elásticas propagantes na estrutura (KUSHWAHA *et al.*, 1993). Estas estruturas são capazes de criar vazios modais apenas em comprimentos de onda comparáveis ao tamanho de rede (célula unitária) da estrutura. Sendo assim, precisam ser extremamente grandes para atenuarem ondas em baixas frequências, nas quais se encontram as principais aplicações de engenharia, fazendo-as não serem factíveis em muitas aplicações reais, tais como atenuação acústica e de vibração em estruturas leves e flexíveis.

Neste sentido, metamateriais acústicos (ou elásticos) também são capazes de criarem vazios modais em sua resposta em frequência, porém, agora, provenientes de ressonâncias locais. Estas estruturas usam o conceito da periodicidade para projetar sistemas com comportamentos dinâmicos não usuais, *e.g.*, constantes elásticas efetivas negativas em certas faixas de frequência (precisamente em frequências em torno dos vazios modais associados às ressonâncias locais) (HUSSEIN; LEAMY; RUZZENE, 2014). As inclusões periódicas interagem com a estrutura hospedeira criando vazios modais devido ao efeito de acoplamento das ressonâncias locais, introduzidas pelas inclusões periódicas de ressonadores, e ondas propagantes na estrutura (POGGETTO, 2019). Este efeito cria vazios modais em frequências muito mais baixas que os encontrados em cristais fonônicos.

Embasados na ideia de ressonância local, o trabalho de Liu *et al.* (2000) demonstrou experimentalmente a existência de vazios modais em frequências com duas ordens de magnitude menor que os vazios modais provenientes do mecanismo de *Bragg* em cristais fonônicos. Este foi um trabalho pioneiro, o qual impulsionou a pesquisa em numerosas

aplicações de metamateriais acústicos. Aplicando a periodicidade em painéis (placas finas) através da inclusão periódica de ressonadores sintonizados na mesma frequência, Claeys *et al.* (2013) também demonstraram que os vazios modais devido a ressonâncias locais surgem em frequências muito mais baixas que os vazios modais de *Bragg*, embora o primeiro tenha uma banda de atenuação menor se comparado com o segundo.

Os vazios modais de *Bragg*, tipicamente encontrados em cristais fonônicos, são criados de acordo com o comprimento da célula unitária e a posição da descontinuidade. A modelagem destes sistemas assume uma estrutura infinita, ou semi-infinita, composta pela repetição de uma célula, o que limita as análises apenas a ondas propagantes em um metamaterial perfeitamente periódico, negligenciando também os efeitos das condições de contorno que são encontrados na estrutura finita. Este tipo de metamaterial é caracterizado por sua relação de dispersão, ou relação entre a frequência e o número de onda (LAUDE, 2015). Já os vazios modais de ressonância local, tipicamente encontrados em metamateriais acústicos, são consequência da superposição do efeito de múltiplos ressonadores (elementos periódicos) sintonizados na mesma frequência natural. Ademais, devido aos vazios modais de ressonância local não dependerem do mecanismo de Bragg, não é necessário assumir uma configuração de células perfeitamente periódicas para obtê-los. Portanto, este salto, do uso do fenômeno encontrado em cristais fonônicos devido ao mecanismo de Bragg para a aplicação em metamateriais acústicos através das ressonâncias locais, foi o que possibilitou as investigações para aplicações reais de engenharia em estrutural leves e flexíveis.

Em aplicações que usam a periodicidade para o projeto de metamateriais acústicos, a formação de vazios modais em estruturas conceitualmente infinitas (ou semi-infinitas) deve ser reconciliada com as interações entre os ressonadores locais e os modos de vibrar da estrutura hospedeira finita. Sugino *et al.* (2016) mostraram que para fazer essa reconciliação, *i.e.*, ir de uma estrutura conceitualmente infinita para o projeto de uma estrutura finita, basta considerar um número infinito de ressonadores na modelagem da estrutura finita. O que a primeira vista pode soar estranho, porém da perspectiva da modelagem fez sentido, pois os autores foram capazes de desenvolver uma equação simples que determina as frequências que delimitam o vazio modal. Tal equação depende apenas da frequência natural do ressonador (elemento periódico) e da razão de massa total adicionada (através dos elementos periódicos) à estrutura sem elementos. Por fim, uma análise paramétrica que visou investigar a influência do número de ressonadores na formação do vazio modal gerado foi feita, visto que na prática não pode-se ter infinitos ressonadores. Esta análise mostrou que existe um valor ótimo (5 ressonadores) que produz um vazio modal maior que o encontrado através do modelo que considera um número infinito de ressonadores e, após este, com o aumento ressonadores seu tamanho diminui convergindo para o valor determinado pela equação de predição.

Um procedimento geral para estimar a formação dos vazios modais de ressonância

local em estruturas de 1 e 2D é apresentado em Sugino *et al.* (2017). Este procedimento também resultou em uma equação simples que depende apenas da razão de massa adicionada através dos elementos periódicos e da frequência alvo do vazio modal requerido (frequência natural do ressonador). A equação pode ser utilizada para alocar um vazio modal em uma faixa de frequência de interesse, produzindo uma visão analítica e uma regra prática para fins de projeto. Em outras palavras, dada uma região no espectro da frequência que se queira atenuar a vibração, é possível, através dessa metodologia, descobrir a razão de massa necessária a ser adicionada na estrutura lisa, *i.e.*, sem elementos periódicos, que resulte em um vazio modal na região de interesse. Além disso, os autores mostraram que o aumento da razão de massa adicionada à estrutura, aumenta o tamanho do vazio modal gerado.

Como já citado, em Sugino *et al.* (2017) os ressonadores foram sintonizados todos na mesma frequência natural, o que faz a metodologia desenvolvida resultar em apenas um vazio modal na frequência requerida. Porém, caso seja de interesse atenuar a vibração em mais de uma faixa de frequência, essa metodologia não se mostra efetiva. Recentemente, El-Borgi *et al.* (2020) propuseram uma extensão ao trabalho feito por Sugino *et al.* (2017). Neste estudo, uma metodologia capaz de posicionar múltiplos vazios modais de ressonância local em frequências de interesse é apresentada. Assim como em Sugino *et al.* (2017), os autores partiram da modelagem da estrutura finita considerando infinitos ressonadores e, posteriormente, uma análise paramétrica também mostrou que existe um número ótimo de ressonadores que abre os vazios modais no sistema. Este número depende exclusivamente da frequência que se queira centralizar o vazio modal, *i.e.*, quanto mais alta a frequência mais células unitárias são requeridas. O tamanho do vazio modal depende da razão de massa adicionada à viga lisa (sem ressonadores) e da distribuição de inércia na célula dos diferentes ressonadores, visto que para se obter mais de um vazio modal é necessário que agora tenhamos uma célula unitária com ressonadores sintonizados em diferentes frequências naturais. Para dois vazios modais, por exemplo, isto é feito adotando a célula da estrutura periódica com 2 ressonadores sintonizados nas frequências de interesse. A metodologia proposta foi validada numericamente, através de um software comercial de elementos finitos, e experimentalmente, para o caso de uma viga engastada na qual o objetivo foi centralizar vazios modais nas duas primeiras ressonâncias da viga lisa.

2.2 Dinâmica de Sistemas Rotativos

Sistemas rotativos (Fig. 3) são essenciais na cadeia de produção industrial. Estes sistemas estão presentes na: mineração, geração de energia, agricultura e na indústria de transformação (química, alimentos, máquinas, equipamentos e veículos). Além disso, estes sistemas chegam até a vida cotidiana através de produtos acabados como: ventiladores, máquinas de lavar roupa, *drive* de computadores, leitores de vinyl/CD, *etc*). Assim,

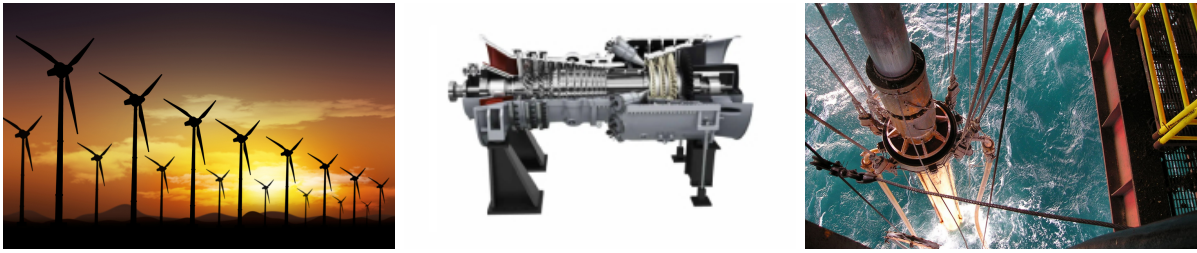


Figura 3 – Exemplos de aplicações de sistemas rotativos em estruturas de engenharia: (a) turbina eólica⁷, (b) turbina a gás SGT5-9000HL⁸, (c) coluna de perfuração⁹.

pode-se perceber a importância, da compreensão e estudo, da dinâmica destes sistemas (NICOLETTI, 2013).

Entender como sistemas rotativos se comportam, quando estão em operação, é essencial para o desenvolvimento de máquinas mais eficientes. Apesar do projeto de máquinas rotativas estar sujeito a requerimentos e normas, o crescente aumento de exigências operacionais de altas velocidades de rotação combinado com o requerimento de sistemas cada vez mais leves pode culminar em problemas vibratórios durante a operação (NICOLETTI, 2013). Em níveis indesejados, as vibrações se espalham pela fundação da máquina e para o ambiente através de máquinas adjacentes, estruturas prediais e propagação de ondas acústicas (MUSZYNSKA, 2005). Assim, seus componentes podem falhar, levando a paradas não programadas de manutenção, ou a operarem com desempenho aquém do projetado, resultando em perdas. Portanto, conhecer o comportamento dinâmico dessas máquinas em operação, com o intuito de procurar melhorias, aumentar sua eficiência e gerar consequências ambientais e econômicas positivas, se mostra essencial.

Uma maneira de minimizar a vibração de máquinas rotativas é evitar suas velocidades críticas durante a operação. As velocidades críticas acontecem quando a velocidade de rotação do rotor se iguala com alguma frequência natural do sistema (GENTA, 2005). Assim, o projetista deve garantir uma distribuição de velocidades críticas, no espectro da frequência, suficientemente grande, posicionando, portanto, as frequências de excitação da máquina em regiões de espaçamento modal, *i.e.*, regiões entre duas velocidades críticas. Portanto, posicionar um espaçamento modal suficientemente grande, dentro do qual se encontram as frequências de excitação do sistema na operação, garante mínima resposta vibratória da máquina, reduzindo as forças internas e, conseqüentemente, chances de falha mecânica.

A redução da vibração estrutural tem sido um tópico muito importante para muitas aplicações de engenharia. Em projetos tradicionais, metodologias de controle ativo,

⁷ Disponível em <https://bityli.com/qc94a>, acesso em 25/03/2021

⁸ Disponível em <https://bityli.com/cnD8Y>, acesso em 25/03/2021

⁹ Disponível em <https://bityli.com/i3Kfq>, acesso em 10/05/2021

envolvendo atuadores e sensores e diferentes técnicas de controle passivo, envolvendo o uso de materiais viscoelásticos ou absorvedores dinâmicos, têm sido empregadas com sucesso. Ambas as técnicas consistem em acoplar um dispositivo no sistema a fim de atenuar a vibração.

No controle ativo de vibrações de sistemas rotativos a máquina deve ser projetada para o uso de um sistema de controle: sensores, atuadores e um controle de *feedback* deve ser implementado. Isto resulta em estruturas com custos maiores, porém com significativa redução de vibração. Alguns exemplos de controle ativo de vibrações em máquinas rotativas incluem: o uso de mancais magnéticos (JOHNSON *et al.*, 2003), mancais hidrostáticos ativos (SANTOS; WATANABE, 2004), mancais hidrodinâmicos segmentados com lubrificação ativa (NICOLETTI; SANTOS, 2005), entre outros.

Em relação ao controle passivo de vibrações de sistemas rotativos, o custo é bem menor, se comparado com sistemas ativos. Isto se deve à não necessidade de um sistema de controle (sensores e atuadores). O controle passivo, pode ser dividido em duas abordagens: 1) métodos que reduzem a vibração da estrutura como um todo, *i.e.*, atuam de modo a reduzir a vibração em uma ampla faixa de frequência, e 2) métodos de atenuação modal, *i.e.*, atuam de modo a minimizar a vibração em uma faixa de frequência mais restrita. Os métodos que reduzem a vibração em uma ampla faixa de frequência se valem do aumento do amortecimento dos mancais ((BARRETT; GUNTER; ALLAIRE, 1978), (BAVASTRI *et al.*, 2008) e (JOHNSON *et al.*, 2003)). Já os métodos que minimizam a resposta do sistema em uma faixa de frequência específica se valem do uso de absorvedores dinâmicos de vibração montados na estrutura ((MIU, 1991) e (RADE; SILVA, 1999)). Visto que rotores possuem faixas de operação, as técnicas que minimizam a vibração em uma faixa de frequência podem ser bastante úteis no projeto de sistemas rotativos. Esta técnica se vale da alocação de antirressonâncias de modos laterais do rotor em faixas de frequência específicas de interesse, reduzindo assim a resposta do rotor na faixa desejada. O uso de vazios modais no projeto de sistemas rotativos se enquadra nos métodos de atenuação modal.

Os primeiros trabalhos nesta área focaram na mitigação da vibração torcional de eixos. Em (RICHARDS; PINES, 2003), os autores variaram periodicamente o diâmetro de um eixo de malha de engrenagens resultando, assim, em um eixo escalonado periódico (Fig. 4a). Os resultados mostraram a formação de um vazio modal na função de resposta em frequência do sistema (FRF) e o aumento da largura da banda de atenuação com o aumento do número de células (elementos periódicos no eixo). Foi observado que a vibração torcional foi reduzida não apenas no eixo, mas também no ponto de aplicação da força de excitação.

Utilizando o escalonamento de eixo (Fig. 4a), o conceito de periodicidade geométrica também foi aplicado a colunas de perfuração (ALSAFFAR; SASSI; BAZ, 2018). Neste

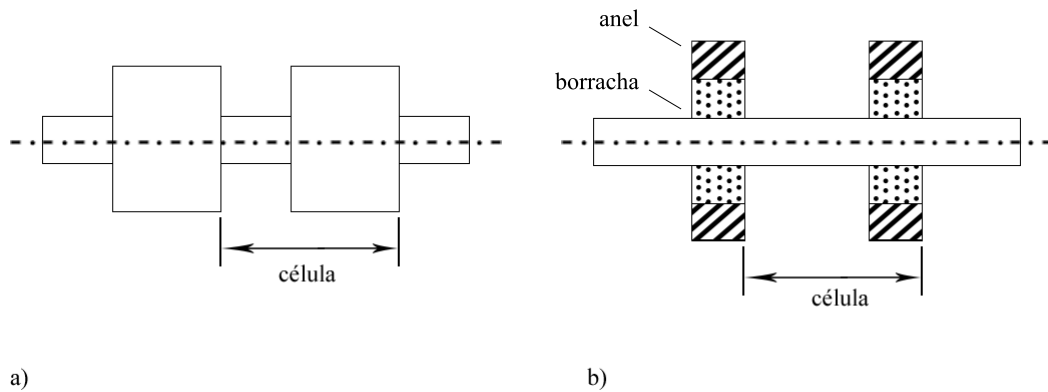


Figura 4 – Elementos periódicos propostos na formação de vazios modais em rotores: (a) eixo escalonado (RICHARDS; PINES, 2003), (ALSAFFAR; SASSI; BAZ, 2018), (b) absorvedor de camada única (YU *et al.*, 2006), (SONG *et al.*, 2013).

trabalho, os autores mostraram que é possível, através da inserção dos elementos periódicos, introduzir vazios modais no sistema e reduzir substancialmente as vibrações laterais do sistema rotativo. Além disso, foi analisado se o efeito da velocidade de rotação (efeito giroscópico) poderia diminuir a largura dos vazios modais. Os resultados, numéricos e experimentais, mostraram que mesmo com o efeito giroscópico o vazio modal não é suprimido, sendo, portanto, uma abordagem útil para a atenuação de vibrações em colunas de perfuração.

O uso de múltiplos absorvedores de vibração também resulta na formação de vazios modais no sistema. Neste caso, considerando que o sistema rotaciona, o absorvedor é composto de duas camadas diferentes: um anel sólido apoiado em um anel de borracha periodicamente montados sobre o eixo (Fig. 4b). A depender da geometria e do número de absorvedores pode-se ajustar o vazio modal, aumentando sua largura de banda e deslocando sua posição para mais altas ou mais baixas frequências (SONG *et al.*, 2013). Um procedimento para otimizar o absorvedor rotativo é apresentado em (SINHA, 2015).

Desenvolvimentos posteriores de absorvedores de vibração rotativos levaram à adição de mais camadas, *i.e.*, mais camadas de anel-borracha (Fig. 5a). Os resultados mostraram que a densidade dos anéis internos pode ser menor que a densidade dos anéis externos, pois os anéis internos não afetam significativamente o vazio modal. Além disso, pode-se aumentar as frequências de início e término do vazio modal ao aumentar o módulo de cisalhamento dos anéis de borracha (LI; CAI, 2016). Também foi constatado que vazios modais, com maiores largura de banda em frequências muito mais baixas, são obtidos espalhando os elementos de borracha internos na direção tangencial (*i.e.*, em vez de se ter um anel de borracha, pequenos elementos de borracha são montados ao redor do eixo) (LI

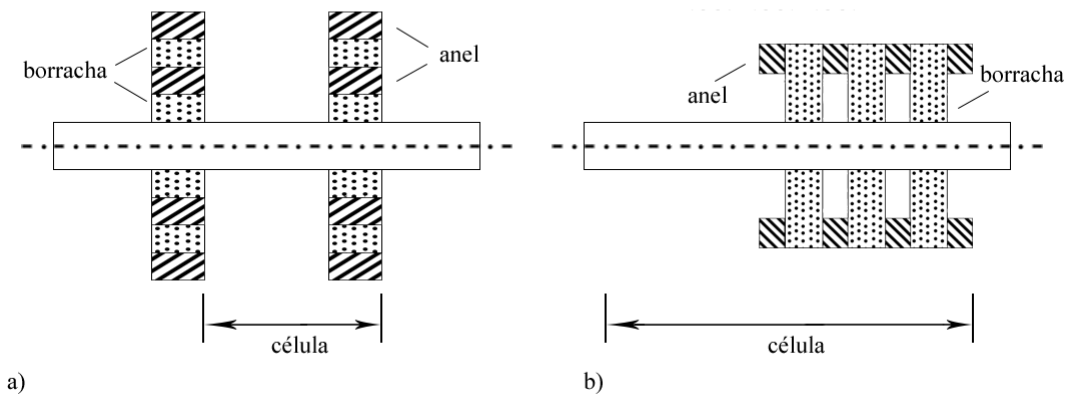


Figura 5 – Elementos periódicos propostos na formação de vazios modais em rotores: (a) absorvedor de múltiplas camadas (LI *et al.*, 2012),(LI; CAI, 2016),(LI *et al.*, 2018) e (b) absorvedor do tipo pilha (FAN *et al.*, 2019).

et al., 2018). Esta última solução de projeto resultou em uma redução de 34% do peso do absorvedor. Uma solução diferente para o absorvedor de vibração rotativo é o absorvedor do tipo pilha proposto em (FAN *et al.*, 2019) (Fig. 5b).

A periodicidade estrutural também foi aplicada para a redução de vibração em um eixo de transmissão automotiva (WU; LI; DING, 2016). A primeira frequência natural de eixos de transmissão é relativamente baixa, por volta de 110 Hz no caso analisado pelos autores, assim, seu primeiro modo de flexão é facilmente excitado durante o uso do veículo. Neste estudo, oito ressonadores do tipo anel-borracha, como em (SONG *et al.*, 2013), foram utilizados em uma configuração periódica. Um modelo feito via o Método dos Elementos Finitos (MEF), validado experimentalmente, do eixo sem ressonadores (estrutura lisa) foi comparado numericamente com o mesmo modelo do eixo com ressonadores. Os resultados numéricos mostraram que na região de interesse, faixa que contempla o primeiro modo de flexão, foi imposto um vazio modal entre 80 a 135 Hz . Além disso, ao comparar a resposta vibratória do eixo sem ressonadores com o eixo com ressonadores, os autores mostraram que a amplitude de vibração foi significativamente diminuída na faixa de 80 a 150 Hz . Sendo esta, portanto, uma alternativa efetiva na redução da vibração de modos de flexão de baixa frequência em eixos de transmissão automotivos.

Prado e Ritto (2020) fizeram o uso de vazios modais na redução da vibração lateral de um rotor simétrico com um disco no centro do eixo. Os ressonadores propostos possuem o formato de anéis, compostos por 4 vigas ligando o anel interior (o qual é montado sobre o eixo) com o anel exterior (Fig. 6). O projeto desta geometria ressonante se baseou na hipótese de que o movimento de flexão do eixo excitaria o ressonador nas direções vertical e horizontal. Por esse motivo a escolha de 4 vigas, duas para cada direção. Resultados

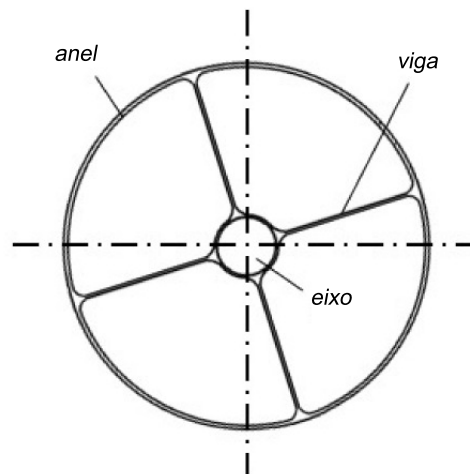


Figura 6 – Elementos periódicos propostos na formação de vazios modais em rotores: absorvedor do tipo anel (PRADO; RITTO, 2020).

numéricos mostraram que com 8 ressonadores foi possível atenuar a resposta em uma faixa de 433.55 Hz (ou 26013 rpm), na qual o sistema sem ressonadores possuía uma velocidade crítica e, após a inclusão dos anéis, o vazio modal foi imposto nesta região. Quanto a disposição dos ressonadores ao longo do eixo, uma configuração simétrica em relação ao disco central foi adotada, na qual os dois ressonadores mais próximos ao disco estão a uma distância menor que as distâncias entre os demais ressonadores, as quais são iguais, já a distância entre os ressonadores das extremidades e os mancais é o dobro da distância entre cada ressonador, o que pode-se identificar como uma configuração quase periódica. Por fim, mas não menos importante, foi investigada a influência do número de ressonadores no tamanho do vazio modal e em uma faixa de 4 a 20 ressonadores a largura do vazio modal aumentou com o aumento dos ressonadores, tendo seu ótimo em 20 ressonadores.

Recentemente, um estudo interessante da formação de vazios modais em rotores foi conduzido por Brandao, de Paula e Fabro (2022). Neste estudo, os autores propuseram dois tipos de ressonadores para atenuação de vibração: translacionais e rotacionais, em configurações periódicas e gradadas (com a variação linear da frequência natural dos ressonadores). Os resultados numéricos sugerem que esta, também, é uma abordagem que pode ser utilizada para se obter vazios modais em sistemas rotativos.

2.3 Conclusão

Para atingir os desejados vazios modais, a periodicidade do rotor proposta na literatura até agora requer a modificação da geometria do eixo (escalonamento periódico do eixo), ou a adição de elementos externos (montagem de absorvedores de vibração). Embora muito eficazes na formação de vazios modais, tais soluções de projeto podem nem

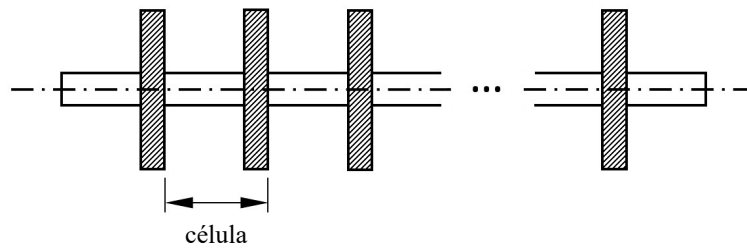


Figura 7 – Rotor com discos na configuração periódica.

sempre ser viáveis para máquinas rotativas como compressores e turbinas, onde há pouca liberdade e espaço para mudanças de geometria ou elementos adicionais. Por esta razão, considera-se neste trabalho que os elementos rotativos da máquina (*e.g.*, as volutas ou selos) são os elementos periódicos do rotor, representados aqui por discos. Assim, pode-se obter vazios modais em rotores periódicos com configuração semelhante à mostrada na Figura 7, que é similar àquela mostrada na Figura 1. Portanto, é possível obter os vazios modais sem alterar significativamente o sistema, utilizando apenas a inércia dos elementos de trabalho da máquina rotativa.

3 FORMAÇÃO DE VAZIOS MODAIS EM ROTORES COM PERIODICIDADE LONGITUDINAL

Neste capítulo, será estudada a formação de vazios modais em rotores com periodicidade longitudinal imposta via elementos de trabalho, aqui representados por discos.

3.1 Rotores Periódicos

Como já foi mencionado, conceitualmente, estruturas periódicas são estruturas compostas da repetição de uma célula unitária, as quais formam a estrutura completa em 1, 2 ou 3 dimensões (MEAD, 1996). Assim, o primeiro parâmetro de projeto a ser definido é o tipo de célula unitária que será utilizada. Neste trabalho, irá ser analisado dois tipos de células: com um disco e com dois discos. Definido isto, tem-se a questão de como o(s) disco(s) serão posicionados na célula unitária. Esta questão é importante, já que é conhecido, e será demonstrado aqui, que uma célula assimétrica, resulta em modos de defeito no meio do vazio modal, diminuindo a sua largura de banda original. Portanto, será analisado, na verdade, quatro tipos de célula unitária (Fig. 8): 1) com um disco simétrica; 2) com um disco assimétrica; 3) com dois discos simétrica; e 4) com dois discos assimétrica.

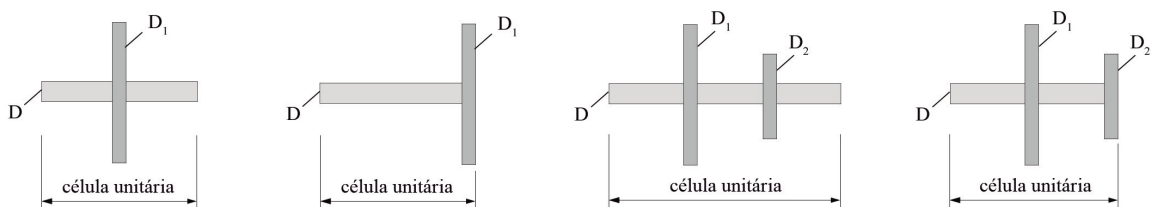


Figura 8 – Células unitárias utilizadas para construir os rotores periódicos.

O fato de uma célula unitária assimétrica resultar em uma estrutura com modo de defeito, vem da estrutura periódica, resultante deste tipo de célula, não ser conceitualmente periódica. A Figura 9 mostra duas estruturas finitas construídas com a célula simétrica e assimétrica. Como se pode notar, na estrutura com célula assimétrica (Fig. 9b) é necessário adicionar um segmento de eixo (em azul), não pertencente à periodicidade da célula. Isto é feito para que o disco não fique posicionado sobre um mancal, o que seria inviável do ponto de vista de projeto. Já a estrutura resultante da célula unitária simétrica não tem essa necessidade (Fig. 9a), sendo assim, uma estrutura conceitualmente periódica.

Embora o modo de defeito seja algo a ser evitado, será demonstrado que, ainda assim, é possível utilizar os vazios modais resultantes de estruturas periódicas com células assimétricas, ficando essa escolha por parte do projetista. A diferença se encontra apenas

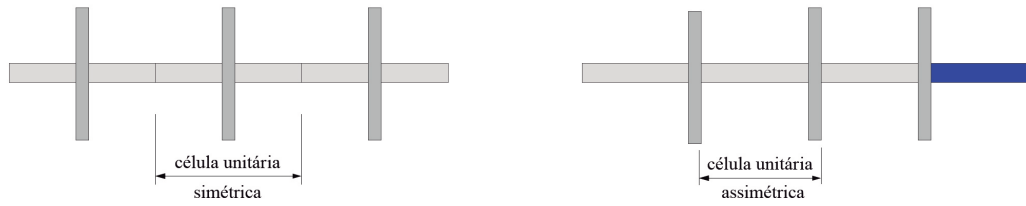


Figura 9 – Estruturas periódicas formadas por uma mesma célula: (a) simétrica e (b) assimétrica.

em um vazio modal com largura de banda um pouco menor, porém essa diminuição não é significativa. Além disso, as análises da formação de vazios modais se concentrarão em dois tipos de rotores: 1) rotores com discos de baixa inércia (seção 3.3) e 2) rotores com discos de alta inércia (seção 3.4).

3.2 Modelagem Matemática

Para estudar a formação de vazios modais primeiro se faz uma análise por elementos finitos, a maneira mais convencional de se modelar sistemas rotativos utilizada na indústria. Na análise de elementos finitos de rotores, os elementos de eixo são formulados baseados na teoria de viga Euler-Bernoulli (NELSON; MCVAUGH, 1976) ou de Timoshenko (NELSON, 1980), enquanto os discos são considerados rígidos. Neste trabalho os elementos de eixo são formulados baseados na teoria de viga de Euler-Bernoulli (NELSON; MCVAUGH, 1976), já que essa teoria se aplica para rotores com razão comprimento-diâmetro do eixo maior que 10, o qual é o caso dos exemplos estudados neste trabalho. O elemento finito de eixo possui raio e propriedades do material constantes, é delimitado por dois nós, cada um com quatro graus de liberdade: deslocamento linear nas direções laterais (x_i e y_i) e deslocamento angular em relação às direções \mathbf{X} e \mathbf{Y} (β e γ). Adotando-se uma malha com N elementos de eixo conectados, representando o eixo completo, obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{z}}_e - \Omega \mathbf{G}_e \dot{\mathbf{z}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{z}_e = \mathbf{F}_e \quad (3.1)$$

onde \mathbf{M}_e é a matriz de massa, composta pelas inércias de rotação e translação dos elementos de eixo; \mathbf{G}_e é a matriz giroscópica dos elementos de eixo; \mathbf{K}_e é a matriz de rigidez composta pelas rigidezes dos elementos de eixo; Ω é a velocidade de rotação do rotor (em rad/s), conhecida como *spin*; \mathbf{F}_e é o vetor de forças externas aplicadas nos nós do modelo; \mathbf{z}_e é o vetor de deslocamentos nodais do sistema; $\dot{\mathbf{z}}_e$ é o vetor de velocidades nodais do sistema; e $\ddot{\mathbf{z}}_e$ é o vetor de acelerações nodais do sistema.

O vetor de deslocamentos nodais, composto por deslocamentos lineares e angulares, é da forma que se segue:

$$\mathbf{z}_e = \{x_1 \ y_1 \ \beta_1 \ \gamma_1 \ \cdots \ x_i \ y_i \ \beta_i \ \gamma_i \ \cdots \ x_{N+1} \ y_{N+1} \ \beta_{N+1} \ \gamma_{N+1}\}^T \quad (3.2)$$

onde N é o número de elementos finitos do modelo.

Os elementos de disco (os quais representam palhetas, volantes, engrenagens, selos, volutas, *etc*) são formulados a partir da dinâmica de corpos rígidos. Portanto, eles são representados no modelo pelas suas massas e momentos de inércia (polar e lateral). As massas de cada disco e momentos laterais de inércia são adicionados à matriz de inercia \mathbf{M}_e de acordo com a posição do disco no modelo, dependendo do nó sobre o qual o disco é montado. Já os momentos polares de inércia dos discos são adicionados na matriz giroscópica \mathbf{G}_e da mesma maneira que foi descrita para a matriz \mathbf{M}_e . A formulação detalhada dos elementos e suas matrizes correspondentes é apresentada em Nelson e McVaugh (1976).

Com o modelo completo, as frequências naturais são calculadas resolvendo o problema de autovalor do sistema em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{z}}_e \\ \dot{\mathbf{z}}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Omega \mathbf{G}_e & \mathbf{K}_e \\ -\mathbf{M}_e & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_e \\ \mathbf{z}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \Rightarrow (\mathbf{i}\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

onde λ é o autovalor; \mathbf{u} é o autovetor do sistema; e \mathbf{A} e \mathbf{B} são as matrizes de estado;

Além disso, também é analisada a Função de Resposta em Frequência (FRF) do sistema, para demonstrar que os vazios modais são regiões de baixa amplitude de resposta vibratória. Para obter-se a FRF do sistema, calcula-se a matriz de receptância:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{Y}(\omega)}{\mathbf{F}(\omega)} = (-\omega^2 \mathbf{M}_e - i\omega \Omega \mathbf{G}_e + \mathbf{K}_e)^{-1} \quad (3.4)$$

Neste caso, será analisada a resposta na direção vertical do último nó com movimento livre (nó N) devido a uma excitação na direção vertical no primeiro nó com movimento livre (nó 2), *i.e.*, os nós mais próximos aos mancais (vide Figura 10).

Em todas as análises foi considerado que o rotor está apoiado em suas extremidades (restringindo os deslocamentos laterais e deixando livre os deslocamento angulares), representando, assim, uma configuração de rotor flexível com mancais de alta rigidez. Como regra serão adotados 10 elementos de eixo em cada célula do rotor, *i.e.*, 10 elementos serão utilizados para representar a região entre dois discos. A alta quantidade de elementos finitos escolhidos para o modelo, garante a convergência dos autovalores, especialmente os relacionados a altas frequências naturais.

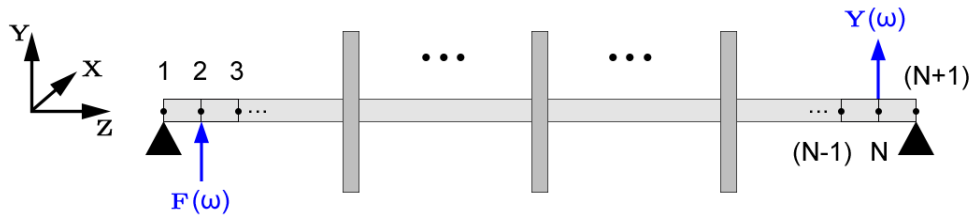


Figura 10 – Esquema representativo do MEF do rotor com os pontos de excitação ($\mathbf{F}(\omega)$) e resposta ($\mathbf{Y}(\omega)$) utilizados nos cálculos das FRFs.

3.3 Rotores Delgados Com Discos de Baixa Inércia

Considere um rotor delgado cujas propriedades são listadas na Tabela 1. Essas são as propriedades de um rotor com eixo de comprimento longo e diâmetro pequeno, com discos de baixa inércia. Assim, para estudar a formação de vazios modais nesse tipo de rotor (com discos de baixa inércia), monta-se ao longo do eixo uma série de discos iguais, periodicamente espaçados, seguindo as configurações de célula unitária mostradas na (Fig. 8). Nesta seção, será apresentado os resultados numéricos para célula unitária com um disco (subseção 3.3.1) e célula unitária com dois discos (subseção 3.3.2), separadamente.

Tabela 1 – Propriedades do rotor delgado em estudo.

| Propriedade | Valor | Unidade |
|----------------------------------|----------------------|--------------------|
| Comprimento do eixo (L) | 600 | mm |
| Diâmetro do eixo (D) | 10 | mm |
| Diâmetro do disco (D_d) | 60 | mm |
| Espessura do disco (E_d) | 5 | mm |
| Módulo de Young (E) | 2.1×10^{11} | $N \times m^{-2}$ |
| Densidade do material (ρ) | 7,850 | $kg \times m^{-3}$ |

3.3.1 Célula Unitária Com Um Disco

Dessa maneira, montando ao longo do eixo uma série de discos iguais, periodicamente espaçados, seguindo uma configuração de célula de um disco simétrica e assimétrica (Fig. 8), o sistema apresenta as frequências naturais e FRFs mostradas na Figura 11. Conforme o número de discos do sistema aumenta, surgem três regiões onde nenhuma frequência natural aparece, com baixa amplitude de resposta (regiões 1, 2 e 3 na Fig. 11a e Fig. 11b). Essas regiões são os vazios modais formados por discos periodicamente espaçados ao longo do eixo, com velocidade de rotação de 1,000 rpm. Foi adotada uma velocidade baixa para entender mais facilmente o fenômeno. Entretanto, será demonstrado mais a frente que o efeito giroscópico, em velocidades mais altas, não afeta significativamente os vazios modais.

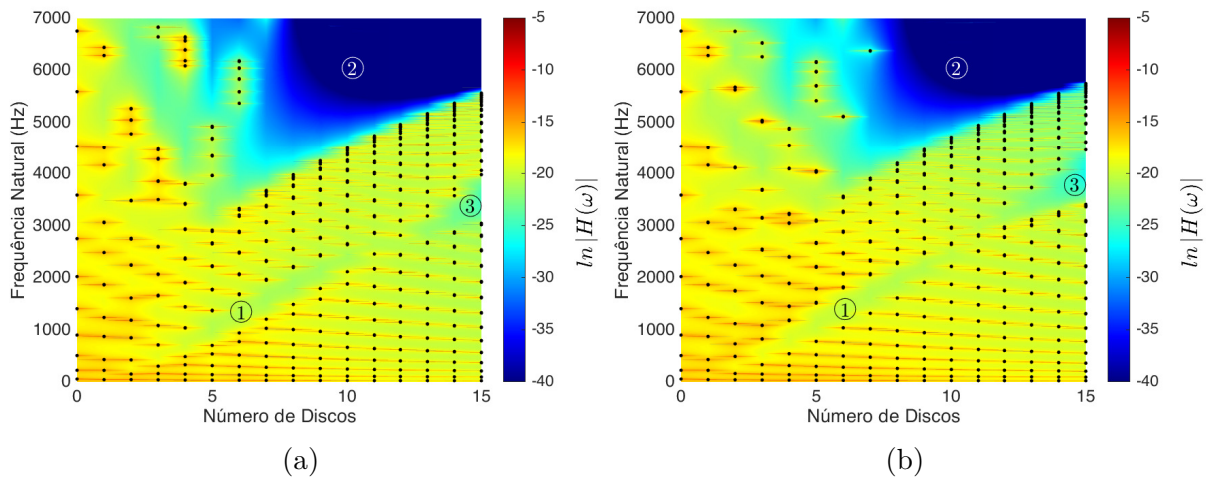


Figura 11 – Frequências Naturais (pontos) e amplitude das FRFs (cores) do rotor em função do número de discos periodicamente distribuídos ao longo do eixo (resultados para $\Omega = 1000$ rpm): (a) célula simétrica e (b) célula assimétrica.

Ao comparar a formação dos vazios modais via célula simétrica ou assimétrica, uma pequena diferença pode ser percebida e ela acontece apenas na região 2. Pegando o caso de 5 discos, por exemplo, pode-se notar que após o início do vazio modal 2 no caso simétrico há um conjunto de ressonâncias, já no caso assimétrico há apenas uma ressonância e, após ela, há o mesmo conjunto de ressonâncias. Será demonstrado mais a frente que essa ressonância do caso assimétrico está associada a um modo de defeito.

Para entender um pouco mais sobre os vazios modais, eles serão analisados individualmente, comparando as células unitárias, e olhando os modos de vibrar das frequências naturais que os delimitam. No caso do vazio modal 1 a maior largura de banda acontece na configuração com 6 discos para ambos casos: simétrico (750 Hz) e assimétrico (768 Hz). O primeiro vazio modal aparece após a N_D -ésima frequência natural para ambas as células unitárias, onde N_D é o número de discos sistema. Portanto, a frequência de início do vazio modal 1 é a N_D -ésima frequência natural e a frequência de término é a $(N_D + 1)$ -ésima frequência natural. Um olhar nos modos de vibrar associados às frequências naturais que delimitam a primeira banda de atenuação (Fig. 12 e Fig. 13) mostra que este vazio modal é derivado do casamento de impedância. Em outras palavras, os modos de vibrar são formados por ondas estacionárias se propagando ao longo do rotor e quando os nós da onda estão nas posições dos discos no rotor, a frequência natural resultante aumenta formando, assim, o vazio modal (combinação entre o número de discos N_D e o número de onda do $(N_D + 1)$ modo de vibrar). Esse efeito também é observado em rotores com número de discos diferente do mostrado nas Figuras 12 e 13.

O segundo vazio modal aparece após a $2N_D$ -ésima frequência natural do sistema para ambas células unitárias. Assim, a frequência de início do vazio modal 2 é a $2N_D$ -ésima

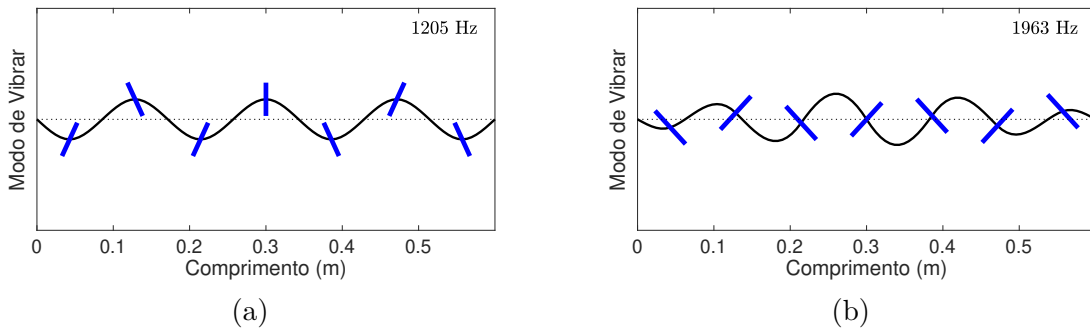


Figura 12 – Modos de vibrar do rotor com 7 discos (célula unitária simétrica): (a) 7^o modo de vibrar (início do vazio modal 1), (b) 8^o modo de vibrar (término do vazio modal 1).

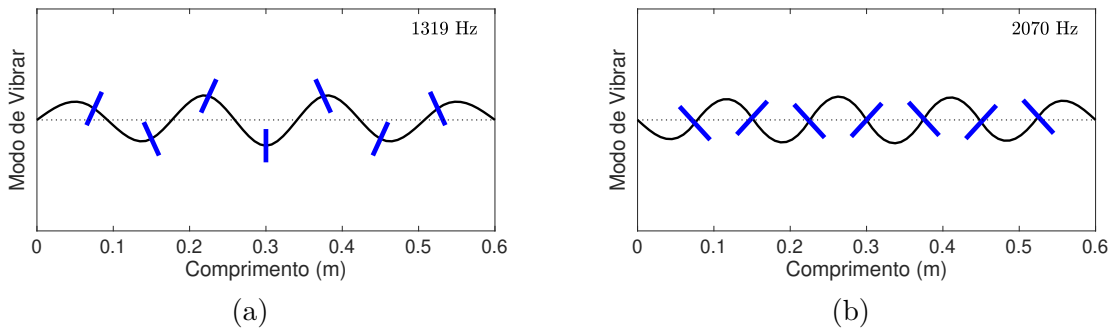


Figura 13 – Modos de vibrar do rotor com 7 discos (célula unitária assimétrica): (a) 7^o modo de vibrar (início do vazio modal 1), (b) 8^o modo de vibrar (término do vazio modal 1).

frequência natural e a frequência de término é a $(2N_D + 1)$ -ésima frequência natural. Ao olhar os modos de vibrar das frequências naturais que delimitam a segunda banda de atenuação do rotor com célula unitária simétrica (Fig. 14), duas observações podem ser feitas: 1) no modo de início (Fig. 14a) há o casamento de impedância e os discos estão todos em fase, 2) já no modo de término do vazio modal 2 (Fig. 14b) os discos não se movimentam, entretanto, há deslocamento em todas as regiões do eixo. Já na segunda banda de atenuação da célula unitária assimétrica (região 2), o modo de início (Fig. 15a) tem os discos todos em fase e bem próximos dos nós modais do eixo, já no modo de término deste vazio modal (Fig. 15b), pode-se observar que não há casamento de impedância, mas sim o aparecimento de modos localizados de vibração, nos quais os discos quase não se movimentam e a vibração ocorre principalmente na parte do eixo próxima aos mancais. Além disso, é válido notar que vazio modal 2 tem uma largura de banda muito maior se comparado com o vazio modal 1, para ambos os casos: 3443 Hz para célula simétrica e 2477 Hz para célula assimétrica. Portanto, fica claro que o modo de defeito diminui a largura de banda do segundo vazio modal, ainda assim, é uma faixa de frequência consideravelmente grande.

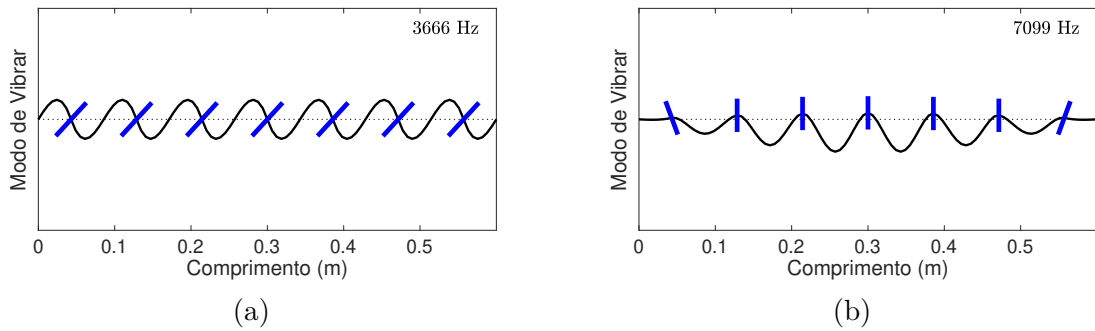


Figura 14 – Modos de vibrar do rotor com 7 discos (célula unitária simétrica): (a) 14^o modo de vibrar (início do vazio modal 2), (b) 15^o modo de vibrar (término do vazio modal 2).

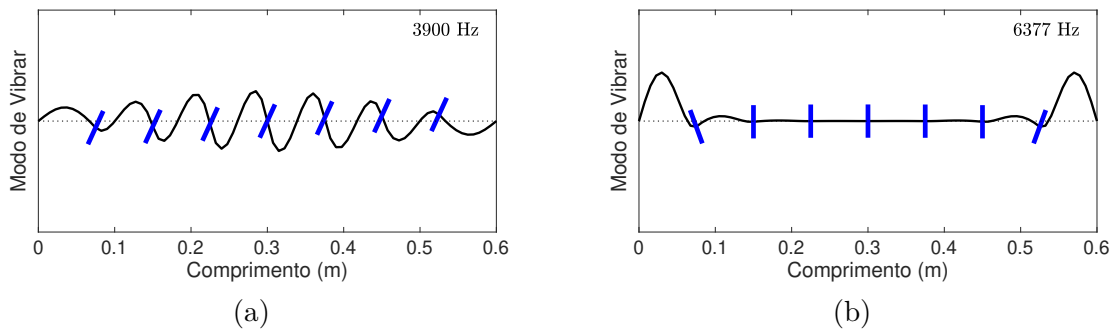


Figura 15 – Modos de vibrar do rotor com 7 discos (célula unitária assimétrica): (a) 14^o modo de vibrar (início do vazio modal 2), (b) 15^o modo de vibrar (término do vazio modal 2).

Finalmente, o terceiro vazio modal aparece no sistema com uma quantidade de discos maior que onze. Para a célula unitária simétrica, o terceiro vazio modal surge entre a $(N_D - 1)$ e N_D frequência natural. Já na célula assimétrica, o terceiro vazio modal aparece entre a $(N_D + 1)$ e $(N_D + 2)$ frequência natural. Os modos associados às frequências que delimitam esse vazio modal (Fig. 16 e 17) são similares, e pode-se observar que a inércia dos discos continua a desempenhar um papel importante na formação dos vazios modais.

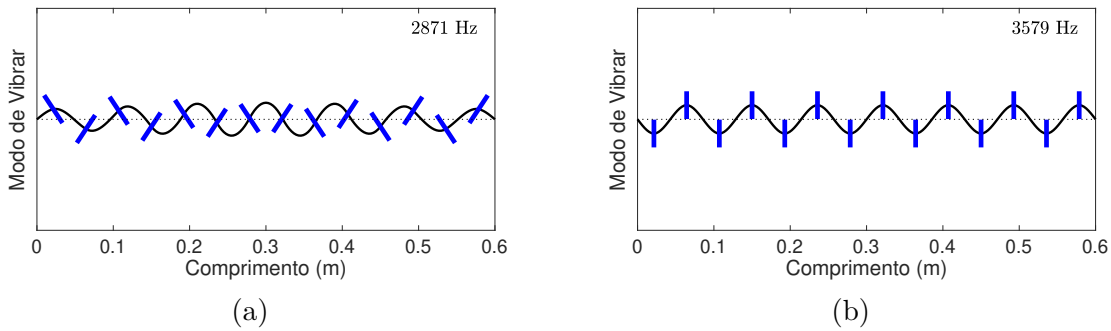


Figura 16 – Modos de vibrar do rotor com 14 discos (célula unitária simétrica): (a) 13^o modo de vibrar (início do vazio modal 2), (b) 14^o modo de vibrar (término do vazio modal 2).

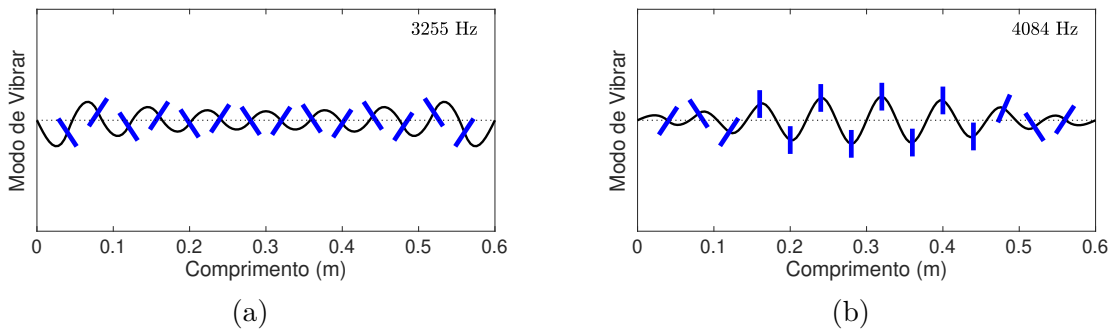


Figura 17 – Modos de vibrar do rotor com 14 discos (célula unitária assimétrica): (a) 15^o modo de vibrar (início do vazio modal 2), (b) 16^o modo de vibrar (término do vazio modal 2).

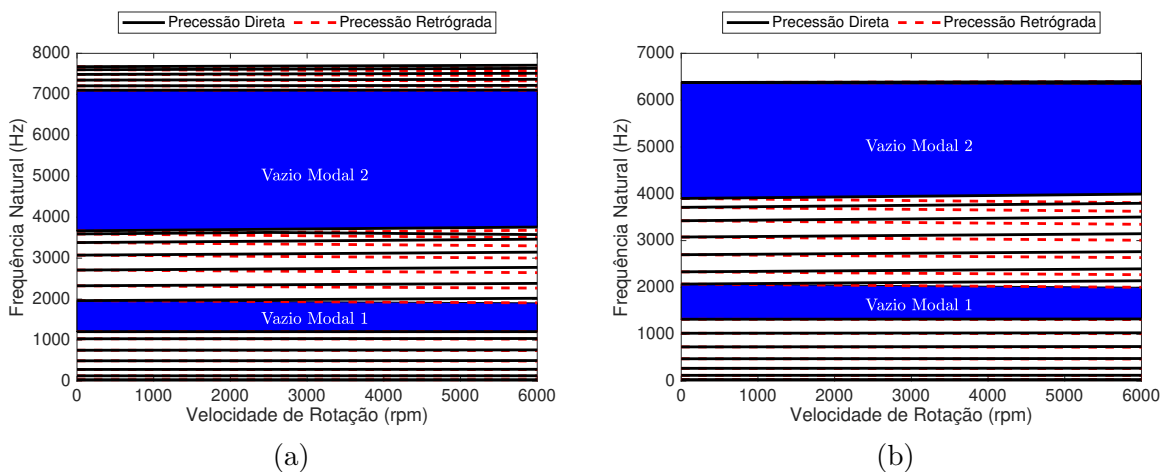


Figura 18 – Diagrama de Campbell do rotor com 7 discos: (a) célula unitária simétrica e (b) célula unitária assimétrica.

Os resultados mostrados na Figura 11 se referem ao caso com velocidade de rotação

de 1,000 rpm. Para verificar o efeito de maiores velocidades de rotação nos resultados, um Diagrama de Campbell é construído, *i.e.*, calcula-se as frequências naturais do sistema em função da velocidade de rotação, já que em sistemas rotativos as frequências naturais variam com a velocidade de rotação. Para o caso do rotor com 7 discos (Fig. 18), o aumento da velocidade de rotação divide as frequências naturais em duas, associadas aos modos de vibração de precessão direta e retrógrada (linhas divergentes). Isto acontece devido ao efeito giroscópico, um fenômeno oriundo da Conservação da Quantidade de Movimento Angular e já esperado em Dinâmica de Sistemas Rotativos. Como consequência disso, a largura da banda de atenuação diminui com o aumento da velocidade de rotação. No entanto, no caso de rotores com discos de diâmetro pequeno, o efeito giroscópico do eixo e discos são pequenos. Por esta razão, o estreitamento do vazio modal não é significativo, como observado na (Fig. 18): na velocidade de rotação de 6,000 rpm, a largura de banda dos vazios modais 1 e 2 reduziram, em relação a mesma largura com velocidade de rotação nula: (a) célula unitária simétrica: 7.5% para o vazio modal 1 e 2.6% para o vazio modal 2; (b) célula unitária assimétrica: 10% para o vazio modal 1 e 3% para o vazio modal 2.

É válido ressaltar que, um comportamento semelhante, nos modos de vibrar e diagramas de Campbell, é esperado nos rotores com um número de discos diferente dos analisados aqui.

3.3.2 Célula Unitária Com Dois Discos

Considere um rotor cujas propriedades são as mesmas da Tab. 1, com a diferença que agora, por se tratar de uma célula unitária com dois discos diferentes, os discos possuirão diâmetro de 60 mm e 50 mm. As análises são semelhantes às já feitas anteriormente. O sistema apresenta as frequências naturais e FRFs mostradas na Figura 19. Conforme o número de discos do sistema aumenta, surgem duas regiões onde nenhuma frequência natural aparece, para ambos tipos de células (regiões 1 e 2 na Fig. 19). Além disso, uma terceira região aparece apenas nos rotores com célula unitária simétrica (Fig. 19a). Essas regiões são os vazios modais formados por discos periodicamente espaçados ao longo do eixo, com velocidade de rotação de 1,000 rpm. Foi adotada uma velocidade baixa para se entender mais facilmente o fenômeno. Entretanto, será demonstrado mais a frente que o efeito giroscópico, em velocidades mais altas, não afeta significativamente os resultados.

O primeiro vazio modal aparece após a N_D -ésima frequência natural para ambas as células unitárias, onde N_D é o número de discos sistema. Portanto, a frequência de início do vazio modal 1 é a N_D -ésima frequência natural e a frequência de término é a $(N_D + 1)$ -ésima frequência natural. Um olhar nos modos de vibrar referentes às frequências naturais que delimitam a primeira banda de atenuação (Fig. 20 e Fig. 21) mostra que este vazio modal é derivado do casamento de impedância. Porém, é válido notar que o casamento de impedância não acontece perfeitamente em ambas as células unitárias. Este

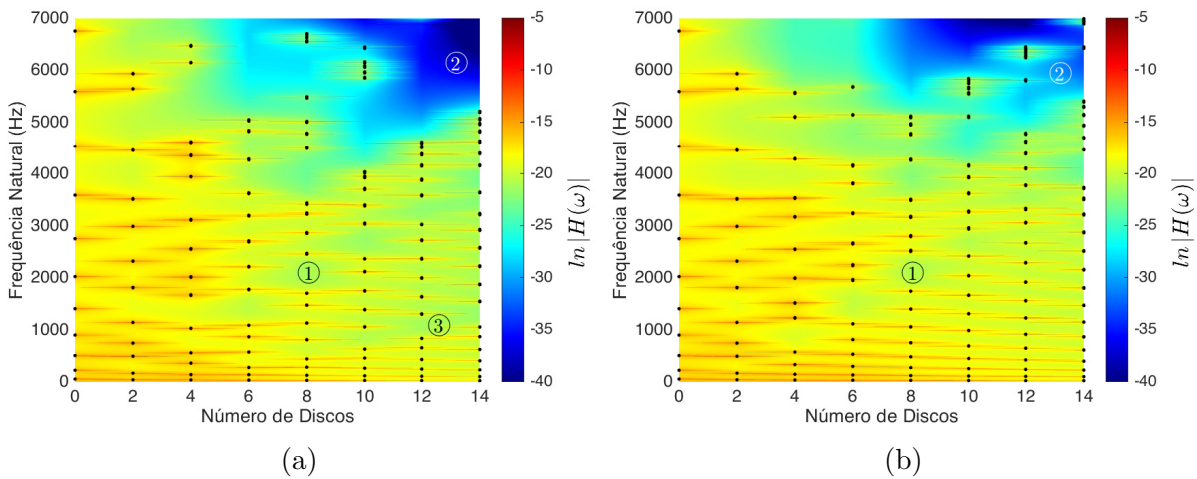


Figura 19 – Frequências Naturais (pontos) e amplitude das FRFs (cores) do rotor em função do número de discos periodicamente distribuídos ao longo do eixo (resultados para $\Omega = 1000$ rpm): (a) célula simétrica e (b) célula assimétrica.

efeito acontece porque a estrutura não é simétrica do ponto de vista das condições de contorno, o que impõe um modo de vibrar assimétrico. Esse efeito também é observado em rotores com número de discos diferente do mostrado nas Figuras 20 e 21.

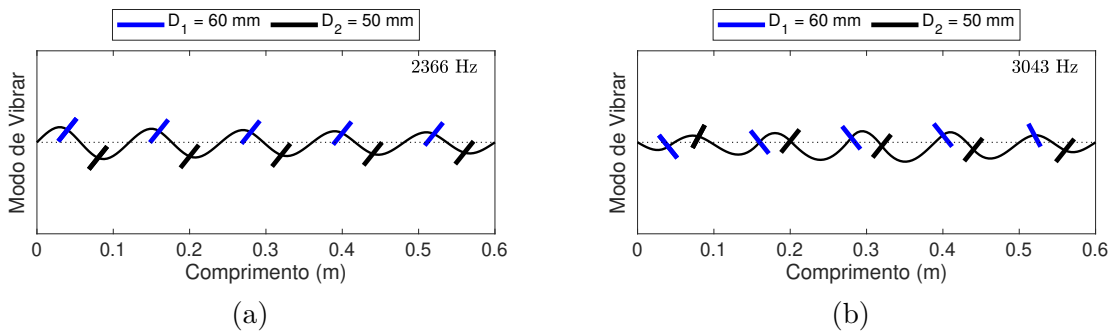


Figura 20 – Modos de vibrar do rotor com 10 discos (célula unitária simétrica): (a) 10º modo de vibrar (início do vazio modal 1), (b) 11º modo de vibrar (término do vazio modal 1).

O segundo vazio modal aparece após a $(3N_D/2)$ -ésima frequência natural do sistema para ambas células unitárias. Assim, a frequência de início do vazio modal 2 é a $(3N_D/2)$ -ésima frequência natural e a frequência de término é a $(3N_D/2 + 1)$ -ésima frequência natural. Ao olhar os modos de vibrar das frequências naturais que delimitam a segunda banda de atenuação do rotor com célula unitária simétrica (Fig. 22), no modo de início (Fig. 22a) há o casamento de impedância apenas nos disco maior (60 mm), já no modo de término do vazio modal 2 (Fig. 22b) os discos se movimentam e estão em fase na célula unitária. Na segunda banda de atenuação da célula unitária assimétrica, o modo de início (Fig. 23a) tem a mesma característica que o da célula simétrica (casamento de impedância

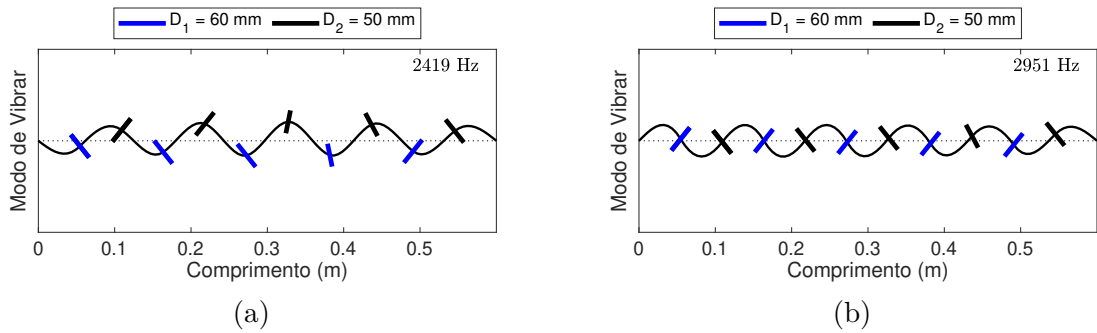


Figura 21 – Modos de vibrar do rotor com 10 discos (célula unitária assimétrica): (a) 10^o modo de vibrar (início do vazio modal 1), (b) 11^o modo de vibrar (término do vazio modal 1).

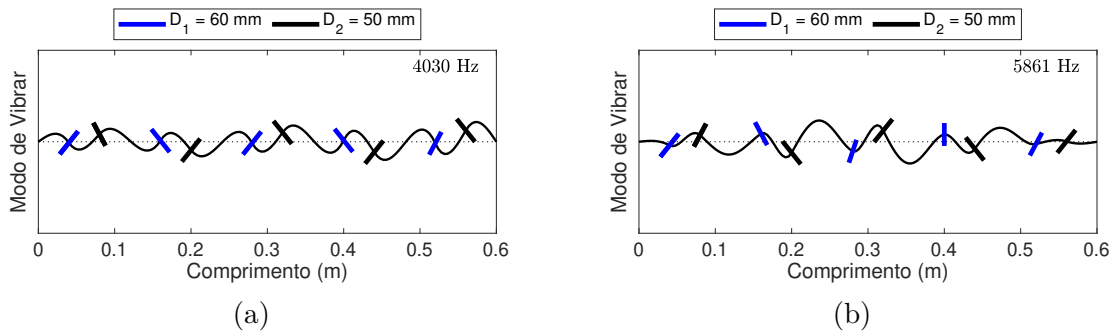


Figura 22 – Modos de vibrar do rotor com 10 discos (célula unitária simétrica): (a) 15^o modo de vibrar (início do vazio modal 2), (b) 16^o modo de vibrar (término do vazio modal 2).

apenas no disco maior), já o modo de término do vazio modal (Fig. 23b), pode-se observar que não há casamento de impedância, mas sim o aparecimento de modos localizados de vibração, nos quais os discos quase não se movimentam e a vibração ocorre principalmente na parte do eixo próxima aos mancais (modo de defeito). Além disso, é válido notar que vazio modal 2 tem uma largura de banda muito maior se comparado com o vazio modal 1, para ambos os casos: 1831 Hz para célula simétrica e 948 Hz para célula assimétrica. Portanto, fica claro que o modo de defeito diminui a largura de banda do segundo vazio modal, ainda assim, é uma faixa de frequência consideravelmente grande.

Finalmente, o terceiro vazio modal aparece no sistema com uma quantidade de discos maior que dez, apenas para a célula unitária simétrica. O terceiro vazio modal surge entre a $N_D/2$ e $N_D/2 + 1$ frequência natural. Os modos associados às frequências que delimitam esse vazio modal são mostrados na Fig. 24. É interessante notar que no modo de início deste vazio modal (Fig. 24a) os discos apenas transladam e não rotacionam. Já no modo de término (Fig. 24b), pode-se observar que nas extremidades há casamento de impedância em um dos discos, com a célula unitária central do rotor tendo um nó modal

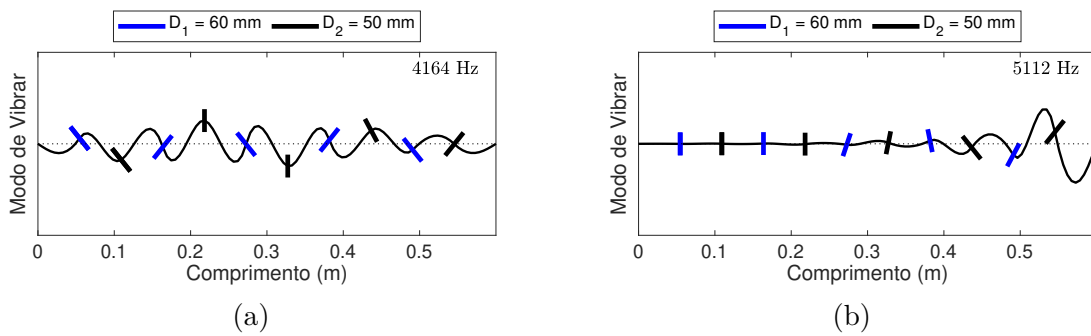


Figura 23 – Modos de vibrar do rotor com 10 discos (célula unitária assimétrica): (a) 15^o modo de vibrar (início do vazio modal 2), (b) 16^o modo de vibrar (término do vazio modal 2).

em seu centro.

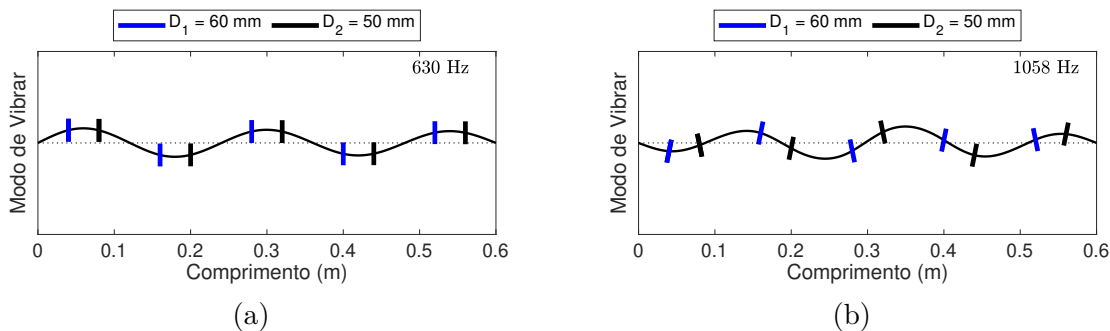


Figura 24 – Modos de vibrar do rotor com 10 discos (célula unitária simétrica): (a) 5^o modo de vibrar (início do vazio modal 3), (b) 6^o modo de vibrar (término do vazio modal 3).

Os resultados mostrados na Figura 19 se referem ao caso com velocidade de rotação de 1,000 rpm. Para verificar o efeito de maiores velocidades de rotação nos resultados, o Diagrama de Campbell é analisado. Para o caso do rotor com 10 discos (Fig. 25), na velocidade de rotação de 6,000 rpm, a largura de banda dos vazios modais 1, 2 e 3 tiveram uma variação, em relação a mesma largura com velocidade de rotação nula: (a) célula unitária simétrica: +3% para o vazio modal 1, -11% para o vazio modal 2 e -7% para o vazio modal 3; (b) célula unitária assimétrica: -18% para o vazio modal 1 e -16% para o vazio modal 2.

É válido ressaltar que, um comportamento semelhante, nos modos de vibrar e diagramas de Campbell, é esperado nos rotores com um número de discos diferente dos analisados aqui.

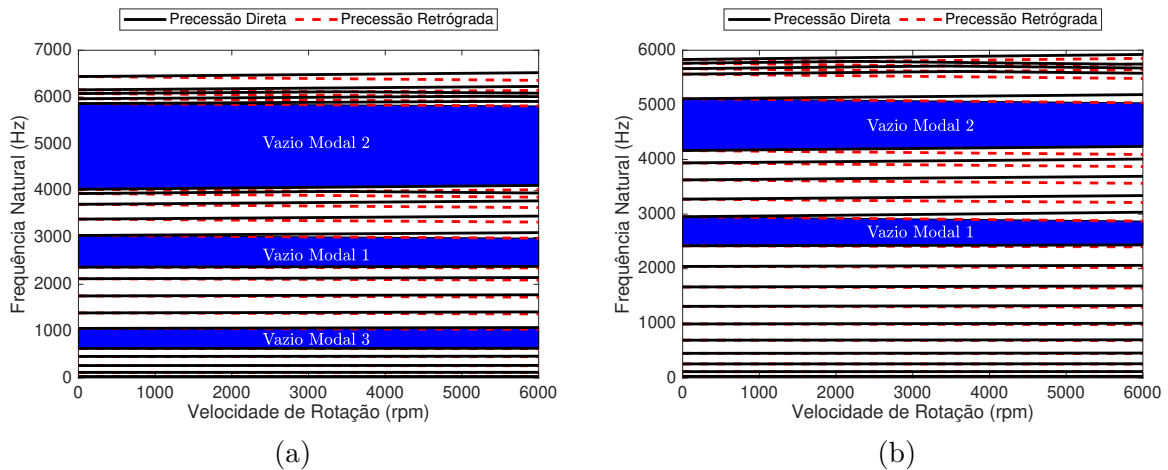


Figura 25 – Diagrama de Campbell do rotor com 10 discos: (a) célula unitária simétrica e (b) célula unitária assimétrica.

3.4 Rotores Delgados Com Discos de Alta Inércia

Considera-se agora o caso de rotores com discos de alta inércia, como o apresentado na Figura 1. As propriedades do rotor em análise são apresentadas na Tabela 2, sendo estas muito similares às propriedades do rotor da Figura 1: mesmas propriedades de material, diâmetro médio do eixo similar, mesmas propriedades dos discos e similar extensão de eixo entre mancais. Assim, para estudar a formação de vazios modais nesse tipo de rotor (com discos de alta inércia), monta-se ao longo do eixo uma série de discos iguais periodicamente espaçados, seguindo as configurações de célula unitária mostradas na (Fig. 8). Porém, aqui serão analisados rotores apenas no caso de célula unitária de um disco (subseção ??).

Tabela 2 – Propriedades do rotor delgado com discos de alta inércia em estudo.

| Propriedade | Valor | Unidade |
|----------------------------------|----------------------|--------------------|
| Comprimento do eixo (L) | 1,500 | mm |
| Diâmetro do eixo (D) | 100 | mm |
| Diâmetro do disco (D_d) | 380 | mm |
| Espessura do disco (E_d) | 22 | mm |
| Módulo de Young (E) | 2.1×10^{11} | $N \times m^{-2}$ |
| Densidade do material (ρ) | 7,850 | $kg \times m^{-3}$ |

Dessa maneira, ao montar-se ao longo do eixo uma série de discos iguais periodicamente espaçados, seguindo uma configuração de célula de um disco simétrica e assimétrica (Fig. 8), o sistema apresenta as frequências naturais e FRFs mostradas na Figura 26. Conforme o número de discos do sistema aumenta, surgem três regiões onde nenhuma frequência natural aparece (regiões 1, 2 e 3 na Fig. 26). Essas regiões são os vazios modais

formados por discos periodicamente espaçados ao longo do eixo com velocidade de rotação de 1,000 rpm. Foi adotada uma velocidade baixa para se entender mais facilmente o fenômeno. Entretanto, será demonstrado mais a frente que o efeito giroscópico, em velocidades mais altas, não afeta significativamente os vazios modais.

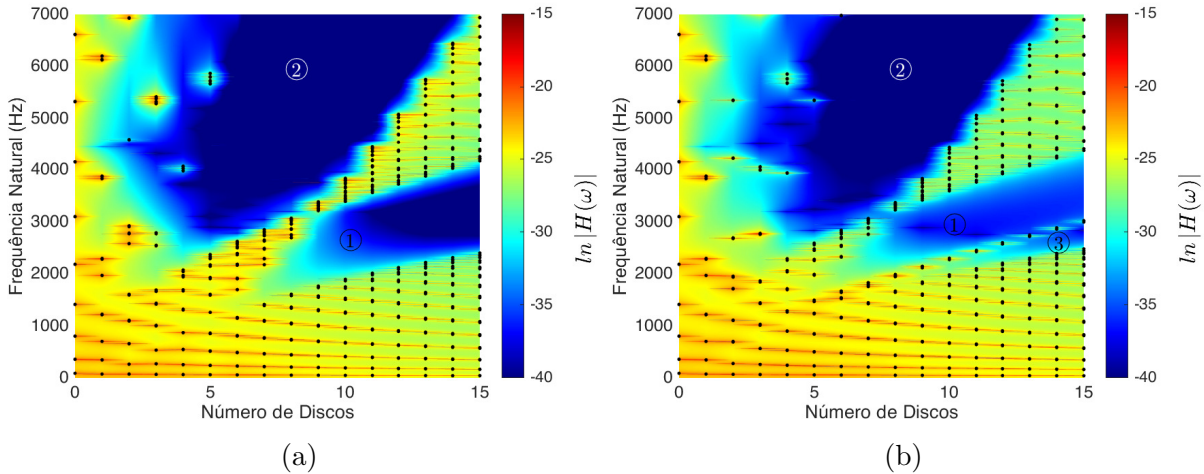


Figura 26 – Frequências Naturais (pontos) e amplitude das FRFs (cores) do rotor em função do número de discos periodicamente distribuídos ao longo do eixo (resultados para $\Omega = 1000$ rpm): (a) célula simétrica e (b) célula assimétrica.

O comportamento do vazio modal 1 é diferente para as células unitárias. Na célula simétrica, o vazio modal 1 aparece entre a $(N_D - 1)$ -ésima e a N_D frequência natural. Já na célula assimétrica, quando o vazio modal 1 aparece a N_D -ésima frequência natural está muito próxima da $(N_D + 1)$ -ésima frequência natural, sendo esta última a frequência de início do segundo vazio modal, portanto, o vazio modal 2 aparece entre a $(N_D + 1)$ e $(N_D + 2)$ -ésima frequência natural. Os modos de vibrar associados a essas frequências são mostrados nas Figuras 27 e 28, para o caso de 11 discos. Na célula unitária simétrica (Fig. 27) pode-se constatar o casamento de impedância nos modos de início e término do vazio modal, com todos os discos em fase na frequência de término do vazio modal. Já na célula unitária assimétrica (Fig 28), o modo de início do vazio modal (Fig 28a) é um modo localizado de vibração, muito similar ao que acontece em rotores periódicos com disco de baixa inércia, já o modo de término tem uma aparência peculiar, podendo observar-se que todos os discos estão em fase no modo.

O segundo vazio modal (região 2) é formado entre $2N_D$ e a $(2N_D + 1)$ -ésima frequência natural do sistema para ambos tipos de célula. Os modos de vibrar associados a estas frequências são mostrados na Figura 29 e 30, para o caso de 11 discos. Os modos de início para ambas as células unitárias são semelhantes, já no modo de término deste vazio modal, é interessante notar o casamento de impedância na célula unitária simétrica (Fig. 29b) e a presença de modos localizados na célula unitária assimétrica (Fig. 30b).

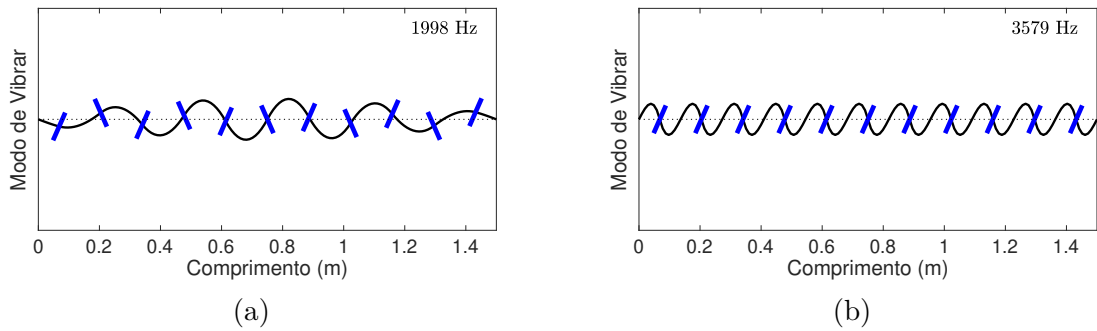


Figura 27 – Modos de vibrar do rotor com 11 discos (célula unitária simétrica): (a) 10^o modo de vibrar (início do vazio modal 1), (b) 11^o modo de vibrar (término do vazio modal 1).

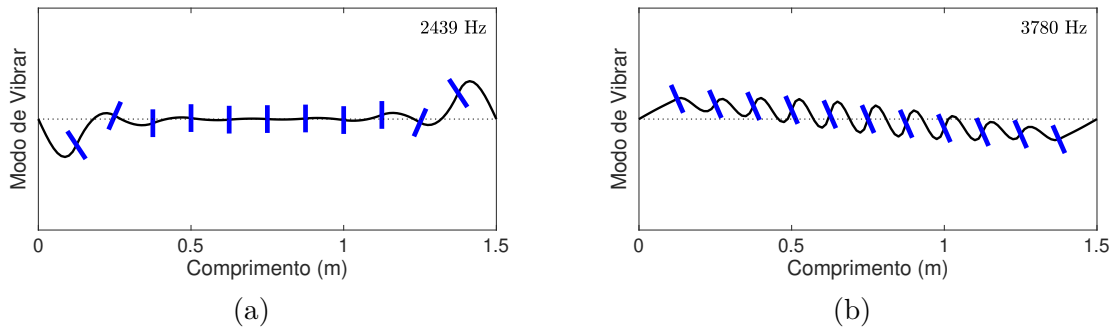


Figura 28 – Modos de vibrar do rotor com 11 discos (célula unitária assimétrica): (a) 12^o modo de vibrar (início do vazio modal 1), (b) 13^o modo de vibrar (término do vazio modal 1).

O vazio modal 3 aparece apenas para célula unitária assimétrica (Fig. 26b) entre a $(N_D - 1)$ e N_D -ésima frequência natural do sistema, quando um grande número de discos estão montados no eixo. Os modos de vibrar associados a essas frequências são mostrados na Figura 31 para o caso de 11 discos, podendo se observar que esse vazio modal é formado pela presença de um modo localizado associado à N_D -ésima frequência natural (frequência de término do vazio modal 3).

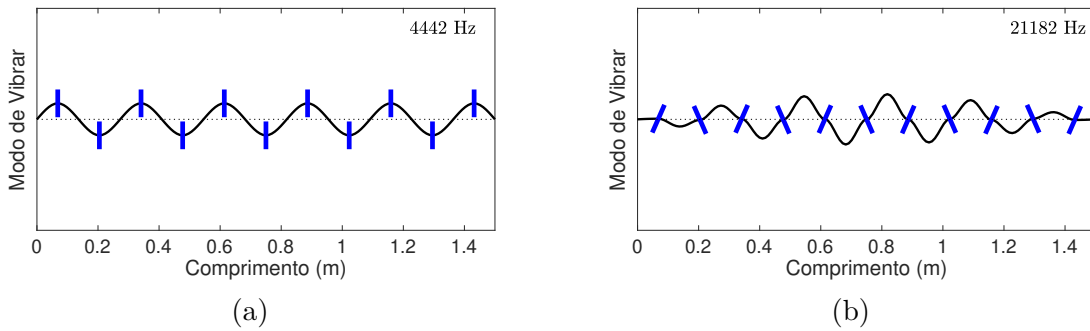


Figura 29 – Modos de vibrar do rotor com 11 discos (célula unitária simétrica): (a) 22^o modo de vibrar (início do vazio modal 2), (b) 23^o modo de vibrar (término do vazio modal 2).

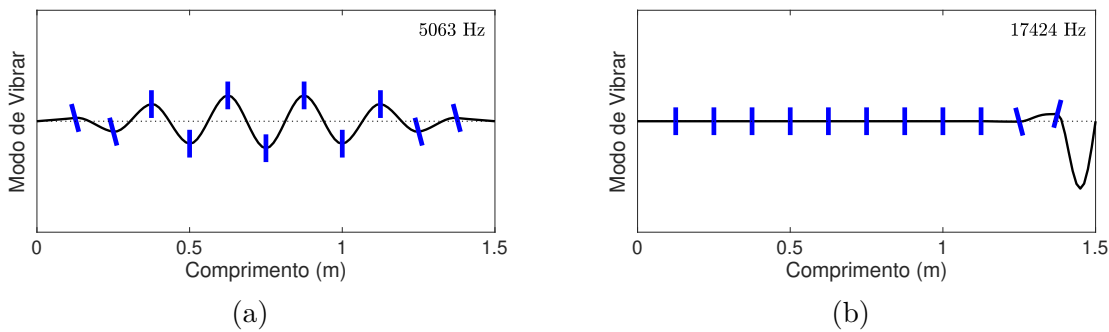


Figura 30 – Modos de vibrar do rotor com 11 discos (célula unitária assimétrica): (a) 22^o modo de vibrar (início do vazio modal 2), (b) 23^o modo de vibrar (término do vazio modal 2).

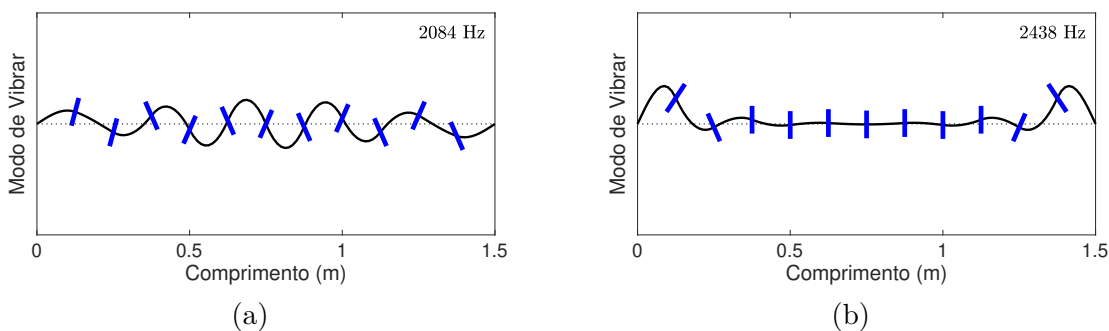


Figura 31 – Modos de vibrar do rotor com 11 discos (célula assimétrica): (a) 10^o modo de vibrar (início do vazio modal 1), (b) 11^o modo de vibrar (término do vazio modal 1).

O diagrama de Campbell do rotor com 11 discos é apresentado nas Figuras 32 e 33. Como seria esperado, com um maior efeito giroscópico no sistema, o estreitamento do vazio modal se tornaria relevante com o aumento da velocidade de rotação. Neste caso, na velocidade de rotação de 6,000 rpm, a largura de banda dos vazios modais 1, 2 e 3

tiveram uma variação, em relação a mesma largura com velocidade de rotação nula: (a) célula unitária simétrica: -8% para o vazio modal 1 e -2% para o vazio modal 2; (b) célula unitária assimétrica: -2% para o vazio modal 1, +4% para o vazio modal 2 e -7% para o vazio modal 3.

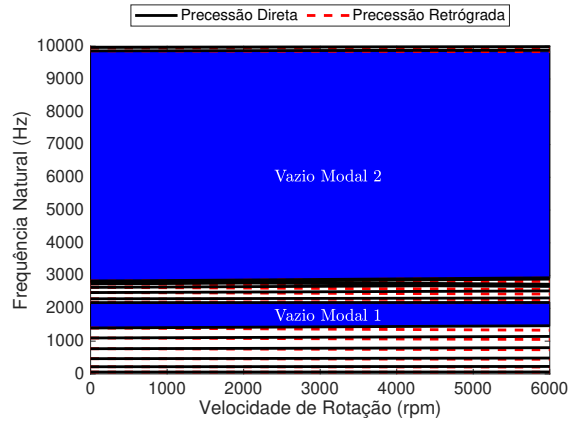


Figura 32 – Diagrama de Campbell do rotor com 11 discos: célula unitária simétrica.

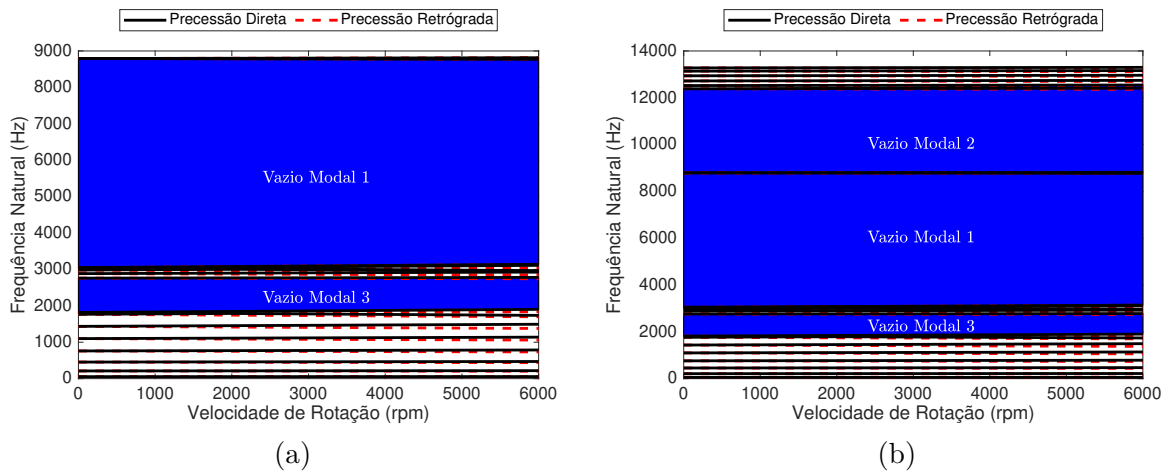


Figura 33 – Diagrama de Campbell do rotor com 11 discos: célula unitária assimétrica

É válido ressaltar que, um comportamento semelhante, nos modos de vibrar e diagramas de Campbell, é esperado nos rotores com um número de discos diferente dos analisados aqui.

3.5 Limitações da formação de vazios modais em rotores quase periódicos

Na prática, uma máquina rotativa nem sempre pode ser modelada como um rotor com discos iguais. Na verdade, os elementos rotativos da máquina possuem pequenas diferenças na geometria, a qual afeta a inércia resultante de massa e rotação. Além disso,

a distância entre os elementos pode, também, não ser perfeitamente igual, possuindo pequenas diferenças entre estes. Portanto, o rotor não é mais periódico, porém quase periódico. A quase periodicidade na geometria e posição dos discos tem um efeito na formação dos vazios modais, o qual será discutido neste Capítulo, para rotores periódicos com célula unitária assimétrica.

3.5.1 Variação da inércia do disco

A massa e inércia do disco, são dadas por:

$$m_d = \rho\pi R_d^2 E_d \quad (3.5)$$

$$I_d = \frac{1}{4}m_d R_d^2 + \frac{1}{12}m_d E_d^2 \quad (3.6)$$

onde R_d e E_d são o raio e a espessura do disco, respectivamente. Portanto, a massa do disco é proporcional ao quadrado de seu raio, enquanto a inércia de rotação é proporcional à quarta ordem do raio do disco. Assim, se o raio do disco é multiplicado por 1.5, sua massa será 2 vezes maior e sua inércia de rotação 5 vezes maior, aproximadamente.

Considere que o raio do disco varia linearmente do primeiro ao último disco, mantendo uma configuração periódica na posição (Fig. 34). Aplicando essa variação para o caso do rotor de grande porte com 7 discos, chegam-se nas frequências naturais mostradas na Figura 35 em função da razão de raio dos discos R_{N_D}/R_1 . Assim, pode-se notar que o vazio modal 3 não é afetado significativamente pela variação linear do raio dos discos. Entretanto, o vazio modal 2 tende a desaparecer com o aumento da razão de raio dos discos, dando lugar a um quarto vazio modal, com frequência de início na N_D -ésima frequência natural e frequência de parada na $(N_D + 1)$ -ésima frequência natural. Ao olhar os modos associados a estas frequências (Fig. 36), não fica muito claro a causa do surgimento do vazio modal 4, embora pode-se inferir que o 8º modo de vibrar (Fig. 36b) é um modo de vibrar localizado do rotor.

Apesar desses efeitos, os vazios modais originais (2 e 3) não foram significativamente afetados até uma razão de raios de $R_{N_D}/R_1 = 1.15$. Nesta razão de 1.15, a massa do último disco é 1.3 vezes maior que do primeiro, enquanto a inércia de rotação do último disco é 1.75 vezes maior que o do primeiro, aproximadamente.

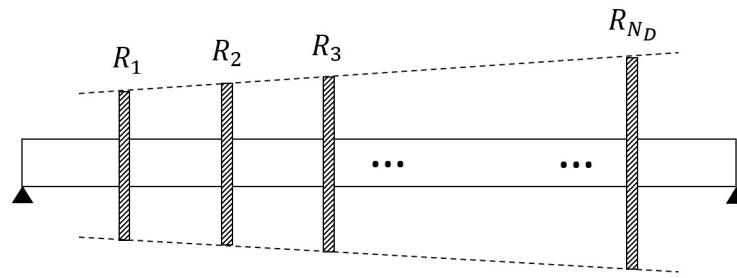


Figura 34 – Variação linear do raio do disco, ao longo do eixo.

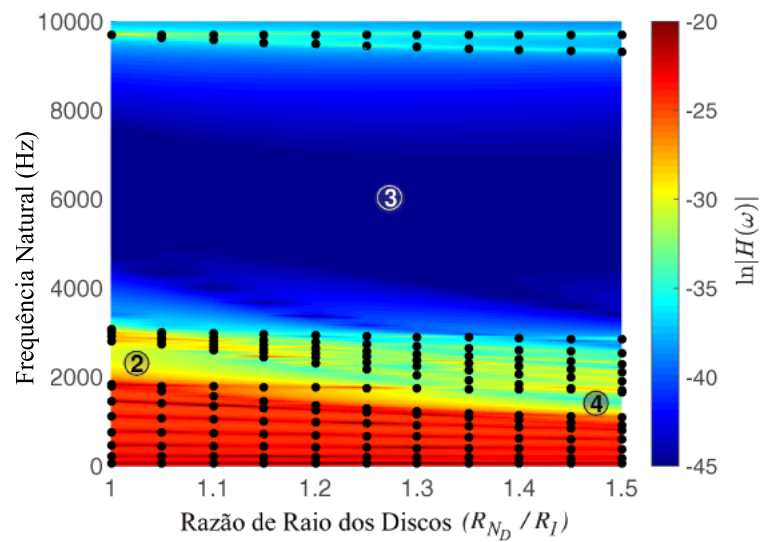


Figura 35 – Frequências naturais (pontos) e amplitude da FRF (cores) para o caso do rotor de grande porte com 7 discos em função da razão de raio dos discos (resultados para $\Omega = 0$).

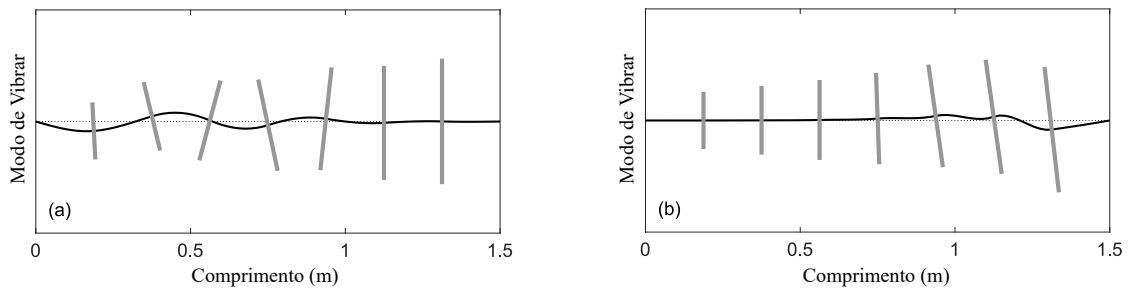


Figura 36 – Modos de vibrar do rotor de grande porte com 7 discos e $R_{N_D}/R_1 = 1.5$: (a) 7º modo de vibrar (início do vazio modal 4), (b) 8º modo de vibrar (término do vazio modal 4).

3.5.2 Variação da posição dos discos

Agora, consideram-se os discos iguais, porém com as distâncias entre discos variando. Neste caso, adota-se que a distância entre discos segue uma progressão geométrica de razão comum q (Fig. 37), uma configuração que pode aparecer em máquinas rotativas. A distância do i -ésimo disco até o disco anterior é dada por:

$$\Delta z_i = q^{i-1} \left(\frac{q-1}{q^{N_D+1}-1} \right) L \quad (3.7)$$

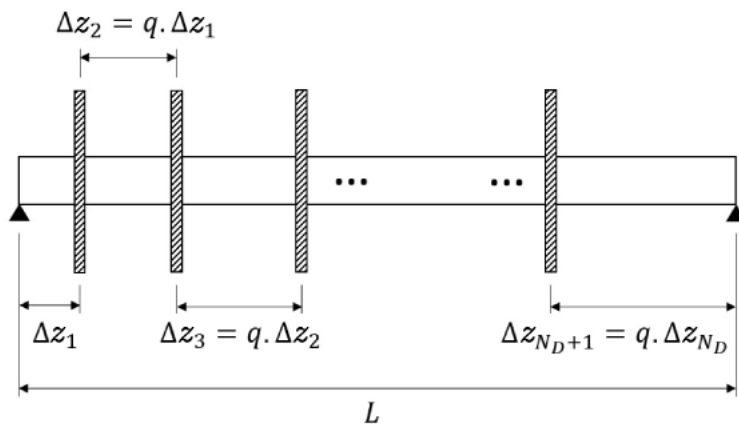


Figura 37 – Variação geométrica da posição dos discos ao longo do rotor.

Aplicando essa variação para o caso do rotor de grande porte com 7 discos, chega-se nas frequências naturais mostradas na Figura 38 em função da razão comum q . Em geral, com o aumento de q , as frequências de início dos vazios modais aumentam seus valores, enquanto as frequências de término diminuem os seus valores. Esse efeito tende a fechar o vazio modal original (2 e 3) para razões acima de 1.1. Este efeito, também, cria novas regiões (vazios modais 4 a 8 na Fig. 38), as quais também desaparecem com o aumento da razão q .

Assim, a variação geométrica na posição dos discos tem uma forte influência na formação dos vazios modais. O rotor de grande porte em estudo, com uma quase periodicidade na posição ($q \leq 1.05$), ainda apresenta os vazios modais 2 e 3, encontradas na configuração periódica, porém com menores larguras de banda. Uma razão de raio dos discos de 1.05 significa que $\Delta_{N_D+1} = 1.5\Delta_1$ (a distância do último disco até o mancal mais próximo é 1.5 vezes maior que a distância do primeiro disco ao outro mancal - veja a Fig 37). Para $q > 1.1$, a dinâmica do rotor é completamente diferente da dinâmica do rotor perfeitamente periódico e o mecanismo de formação dos vazios modais se torna mais complicado. Mesmo assim, os rotores com configurações quase periódicas apresentam vazios modais.

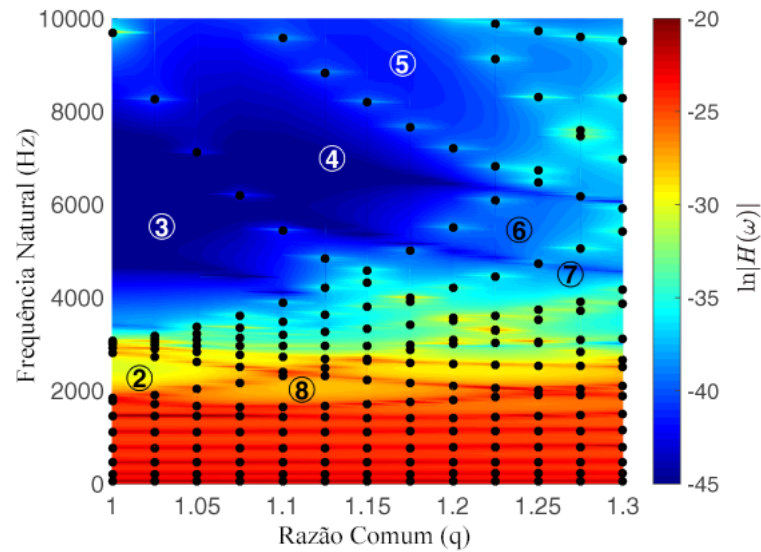


Figura 38 – Frequências naturais (pontos) e amplitude da FRF (cores) de um rotor de grande porte com 7 discos em função da razão comum q .

3.6 Conclusões

As principais conclusões deste Capítulo são:

- Vazios modais podem ser impostos em rotores via periodicidade longitudinal. A periodicidade é imposta utilizando o disco como elemento periódico em quatro configurações de célula unitária: com um disco (simétrica e assimétrica) e com dois discos (simétrica e assimétrica);
- Na configuração rotor com discos posicionados periodicamente, o sistema apresenta vazios modais devido a duas diferentes razões: o casamento de impedância e a presença de modos de vibração localizados (ou modos de defeito). A presença de modos localizados acontece devido à assimetria da célula unitária utilizada para construir a estrutura periódica;
- Devido ao efeito giroscópico, a velocidade de rotação diminui a largura de banda dos vazios modais, porém a diminuição não é significativa a ponto de inviabilizar seu uso no projeto.
- Rotores com uma variação linear no raio dos discos em uma configuração periódica possuem vazios modais em sua resposta em frequência. Embora com o aumento da variação os mecanismos de formação fiquem mais complexos, o vazio modal não deixa de ser formado, podendo ser utilizado na redução de vibração;
- Uma variação geométrica na posição dos discos afeta significativamente o mecanismo de formação de vazios modais. Apesar de não ficar muito clara a causa da formação destes, este tipo de configuração (quase periódica) também pode ser implementada

no projeto de máquinas rotativas com mínima resposta vibratória, pois também possui vazios modais.

4 PREDIÇÃO DAS FREQUÊNCIAS DE INÍCIO E TÉRMINO DOS VAZIOS MODAIS EM ROTAÇÃO NULA

Neste Capítulo será apresentado uma modelagem analítica do sistema, cuja solução aproximada pode ser utilizada para prever as frequências naturais de início e fim dos vazios modais.

Rotores com discos, com velocidade de rotação nula, podem ser representados analiticamente pelo modelo de uma viga contínua com massas pontuais distribuídas (BOTTEGA, 2014). Neste caso, os discos são representados por essas massas pontuais, as quais também possuem inércia rotacional. O modelo analítico da viga com massas pontuais adicionadas, com inércia rotacional (Fig. 39), é dado por:

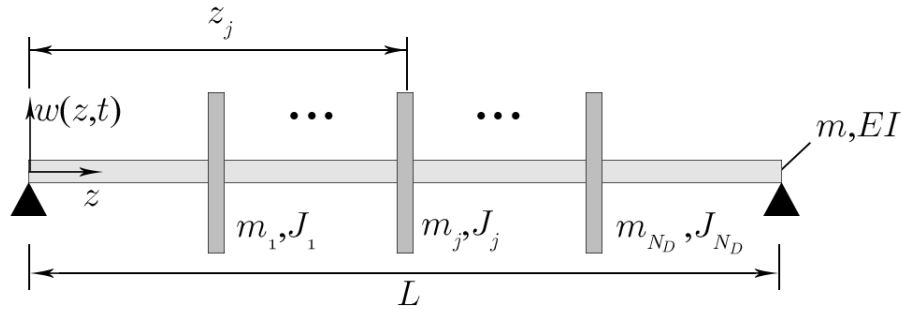


Figura 39 – Esquema representativo do modelo de rotor periódico: célula unitária assimétrica.

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \sum_{j=1}^{N_D} m_j \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta(z - z_j) - \sum_{j=1}^{N_D} J_j \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial t^2} \delta(z - z_j) = f \quad (4.1)$$

onde $w = w(z, t)$ é o deslocamento lateral da viga, ρ é a densidade do material da viga, A é a área da seção transversal da viga, E é o módulo de Young da viga, I é o momento de inércia de área da seção transversal da viga, m_j é a massa do j -ésimo disco, J_j é o momento de inércia do j -ésimo disco, δ é a função delta de Dirac, N_D é o número de discos montados ao longo da viga e $f = f(z, t)$ é o carregamento externo.

Adotando a resposta do sistema utilizando a expansão de modos assumidos, pode-se descrever o deslocamento lateral da viga como uma combinação linear dos modos de vibrar da viga lisa (sem discos) (GüRGÖZE, 1984), (WU; LIN, 1990):

$$w(z, t) = \sum_{k=1}^M \phi_k(z) \eta_k(t) \quad (4.2)$$

onde ϕ_k é o k -ésimo modo de vibrar da viga lisa, η_k é a k -ésima coordenada generalizada e M é o número de modos adotados na expansão.

Substituindo a Eq. (4.2) na Eq. (4.1) e multiplicando pelo i -ésimo modo de vibrar ϕ_i da viga lisa, tem-se:

$$\begin{aligned} \rho A \sum_{k=1}^M \phi_i(z) \phi_k(z) \ddot{\eta}_k(t) + EI \sum_{k=1}^M \phi_i(z) \frac{d^4 \phi_k(z)}{dz^4} \eta_k(t) + \sum_{j=1}^{N_D} m_j \sum_{k=1}^M \phi_i(z) \phi_k(z) \ddot{\eta}_k(t) \delta(z - z_j) \\ - \sum_{j=1}^{N_D} J_j \sum_{k=1}^M \phi_i(z) \frac{d^2 \phi_k(z)}{dz^2} \ddot{\eta}_k(t) \delta(z - z_j) = f(z, t) \phi_i(z) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Considerando que os modos de vibrar da viga lisa (sem discos) são normalizados como se segue:

$$\int_0^L \phi_i(z) \phi_k(z) dz = L \delta_{ik} \quad (4.4)$$

onde L é o comprimento da viga e δ_{ik} é o delta de Kronecker, e integrando a Eq. (4.3) ao longo do comprimento da viga, e rearranjando-a utilizando a propriedade de ortogonalidade (4.4), obtém-se:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_k(t) + \omega_k^2 \eta_k(t) + \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{N_D} \frac{m_j}{\rho AL} \phi_i(z_j) \phi_k(z_j) \ddot{\eta}_k(t) \\ - \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{N_D} \frac{J_j}{\rho AL} \phi_i(z_j) \frac{d^2 \phi_k(z_j)}{dz^2} \ddot{\eta}_k(t) = \frac{1}{\rho AL} \int_0^L f(z, t) \phi_i(z) dz \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde ω_k é a k -ésima frequência natural da viga lisa.

De acordo com a soma de Riemann (HALLETT, 2017):

$$\int_0^L f(z) dz \approx \Delta z \sum_{j=1}^n f(z_j) \quad (4.6)$$

onde Δz é a discretização da função $f(z)$ no intervalo $[0, L]$. Portanto, considerando a viga com comprimento L composta por N_D discos igualmente espaçados por $\Delta z = L/(N_D + 1)$ e iguais com massas $m_j = m$ e momentos de inércia $J_j = J$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{m}{\rho AL} \sum_{j=1}^{N_D} \phi_i(z_j) \phi_k(z_j) \approx \left(\frac{m}{\rho AL} \right) \frac{1}{\Delta z} \int_0^L \phi_i(z) \phi_k(z) dz = \frac{\hat{m}}{\Delta z} L \delta_{ik} \\ = \hat{m} (N_D + 1) \delta_{ik} = \mu \delta_{ik} \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde $\hat{m} = m/\rho AL$ e $\mu = \hat{m}(N_D + 1)$, o qual pode-se chamar de massa de disco específica do rotor.

Analogamente:

$$\frac{J}{\rho AL} \sum_{j=1}^{N_D} \phi_i(z_j) \frac{d^2 \phi_k(z_j)}{dz^2} \approx \left(\frac{J}{\rho AL} \right) \frac{1}{\Delta z} \int_0^L \phi_i(z) \frac{d^2 \phi_k(z)}{dz^2} dz \quad (4.8)$$

Considerando que o modo de vibrar da viga lisa bi-apoiada, o qual obedece a propriedade de ortogonalidade (4.4), é dado por:

$$\phi_k(z) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{k\pi}{L} z \right) \quad (4.9)$$

Então:

$$\frac{d^2 \phi_k(z)}{dz^2} = -\sqrt{2} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{k\pi}{L} z \right) = - \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \phi_k(z) \quad (4.10)$$

Da Eq. (4.10) na Eq. (4.8):

$$\begin{aligned} \frac{J}{\rho AL} \sum_{j=1}^{N_D} \phi_i(z_j) \frac{d^2 \phi_k(z_j)}{dz^2} &\approx - \frac{\hat{J}}{\Delta z} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \int_0^L \phi_i(z) \phi_k(z) dz \\ &= -\hat{J}(N_D + 1) \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \delta_{ik} = -\lambda \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \delta_{ik} \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde $\hat{J} = J/\rho AL$ e $\lambda = \hat{J}(N_D + 1)$, o qual pode-se chamar de inércia de disco específica do rotor.

Assim, substituindo as Eqs. (4.7) e (4.11) na Eq.(4.5) e utilizando a propriedade do delta de Kronecker, tem-se:

$$\left[1 + \mu + \lambda \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \right] \ddot{\eta}_k(t) + \omega_k^2 \eta_k(t) = Q_k \quad (4.12)$$

onde $Q_k = 1/(\rho AL) \int_0^L f(z, t) \phi_k(z) dz$.

Considerando uma resposta harmônica devido a uma excitação de mesma natureza:

$$\eta_k = \bar{\eta} e^{i\omega t} \quad (4.13)$$

De (4.13) em (4.12) e rearranjando os termos:

$$\bar{\eta}_k = \frac{Q_k}{\omega_k^2 - \omega^2 \left[1 + \mu + \lambda \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \right]} \quad (4.14)$$

As raízes do denominador da Eq. (4.14) são as frequências naturais da viga com discos em função das frequências naturais da viga lisa (sem discos), ou seja:

$$\omega = \sqrt{\frac{\omega_k^2}{1 + \mu + \lambda \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2}} \quad (4.15)$$

Aplicando-se a Eq. (4.15) para prever as frequências de início e término dos vazios modais em rotores delgados, por exemplo, o resultado obtido pode ser visto na Figura 40. Como se pode ver, só foi possível prever as frequências de início do vazio modal 1. A razão para esta discrepância nos resultados se deve ao modo assumido na expansão não representar a real solução da equação da viga com discos. A adoção da expansão de modos assumidos (4.2), utilizando como base os modos de vibrar da viga lisa (sem discos), normalmente funciona bem quando a viga tem massas pontuais (GÜR GÖZE, 1984), (WU; LIN, 1990) ou absorvedores de vibração (SUGINO *et al.*, 2016). Na verdade, a Eq. (4.15) com $\lambda = 0$ funciona bem e prevê as frequências de início e término dos vazios modais, para o caso de uma viga com massas pontuais periodicamente distribuídas. Entretanto, no caso em estudo há massas pontuais e, também, inercias de rotação distribuídas ao longo da viga (discos).

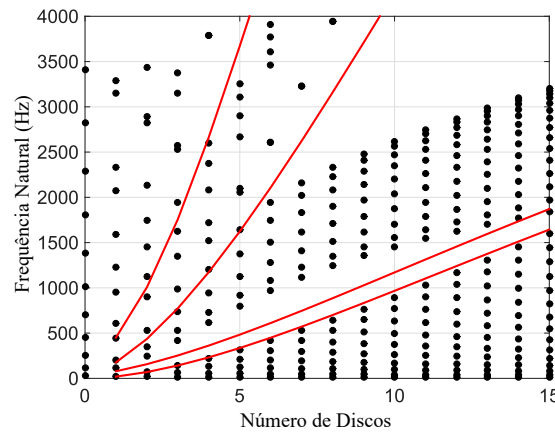


Figura 40 – Frequências naturais (pontos) e previsão da Eq. (4.15) para as frequências de início e término dos vazios modais (linhas) em função do número de discos (rotor delgado).

No entanto, ainda é possível utilizar a Eq. (4.15) para prever as frequências naturais que delimitam os vazios modais, adotando os fatores de correção C_1 e C_2 :

$$\omega = \sqrt{\frac{\omega_k^2}{1 + C_1\mu + C_2\lambda \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2}} \quad (4.16)$$

Tabela 3 – Fatores de correção para prever as frequências que delimitam os vazios modais.

| Limite do vazio modal | k | C_1 | C_2 |
|-----------------------|---------------------------------------|------------------|-------|
| $\bar{\omega}_1$ | N_D | 1 | 1 |
| $\bar{\omega}_2$ | $N_D + 1$ | 0 | 2.3 |
| $\bar{\omega}_3$ | $2N_D$ | 0 | 2.8 |
| $\bar{\omega}_4$ | $2N_D + 1$ | $\frac{6D}{D_d}$ | 0 |
| $\bar{\omega}_5$ | $N_D + 1$ | 2 | 0 |
| $\bar{\omega}_{12}$ | $(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2)/2$ | | |

Utilizando os valores da Tabela 3 para os fatores de correção, os quais foram obtidos por tentativa e erro, obtêm-se os resultados mostrados nas Figuras 41 e 42, para rotores delgados e de grande porte, respectivamente. No caso do rotor delgado (Fig. 41), a frequência de início do vazio modal 1 ($\bar{\omega}_1$) é definida pela expressão na Eq. (4.15), *i.e.*, sem utilizar os fatores de correção. A frequência de término do vazio modal 1 ($\bar{\omega}_2$) é dada pela Eq.(4.16) considerando $\mu = 0$ e um fator de correção (C_2) de 2.3 no parâmetro λ . O parâmetro μ está relacionado com a inércia de translação dos discos e ao observar o modo de vibrar na frequência ω_{N_D+1} (Fig. 13b), pode-se notar que os discos não transladam nesta frequência (apenas rotacionam). Portanto, faz sentido que o parâmetro μ seja zero neste caso e a contribuição do parâmetro λ (o qual está relacionado com a inércia de rotação dos discos) seja ajustada por um fator de correção. Isto também acontece para a frequência de início do vazio modal 2 (note o modo de vibrar da Fig. 15a, onde os discos, também, apenas rotacionam). Assim, a frequência de início do vazio modal 2 ($\bar{\omega}_3$) é dada pela Eq.(4.16) considerando $\mu = 0$ e um fator de correção (C_2) de 2.8 no parâmetro λ . Por fim, a frequência de término do vazio modal 2 ($\bar{\omega}_4$), associada a um modo localizado do eixo (vide Fig. 15b), é dado pela Eq.(4.16) considerando $\lambda = 0$ e um fator de correção (C_1) no parâmetro μ , o qual depende do diâmetro do eixo (D) e do diâmetro do disco (D_d).

Utilizando a Eq. (4.16), no caso de rotores de grande porte, obtêm-se os resultados mostrados na Figura 42. Como se pode observar, as linhas de $\bar{\omega}_1$ e $\bar{\omega}_2$ se cruzam e, após isso, $\bar{\omega}_2$ se torna a frequência de início do vazio modal 1. A frequência de término do vazio modal 1 é a média entre $\bar{\omega}_1$ e $\bar{\omega}_2$, mostrada na Fig. 42 pela linha tracejada $\bar{\omega}_{12}$. A frequência $\bar{\omega}_{12}$ também pode ser considerada como frequência de início do vazio modal 2. A frequência de término do vazio modal 2 é $\bar{\omega}_3$, enquanto $\bar{\omega}_4$ é a frequência de término do vazio modal 3. Neste caso, a frequência de início do vazio modal 3 é definida como $\bar{\omega}_5$, considerando $\lambda = 0$ e um fator de correção $C_1 = 2$ para o parâmetro μ .

Ao comparar as Figuras 41 e 42, é interessante notar que a Fig. 41 é um zoom da Fig. 42 nas regiões de 0 a 5 discos. Esses resultados indicam que ao aumentar, ainda mais, o número de discos no caso do rotor delgado é provável que se chegue em resultados

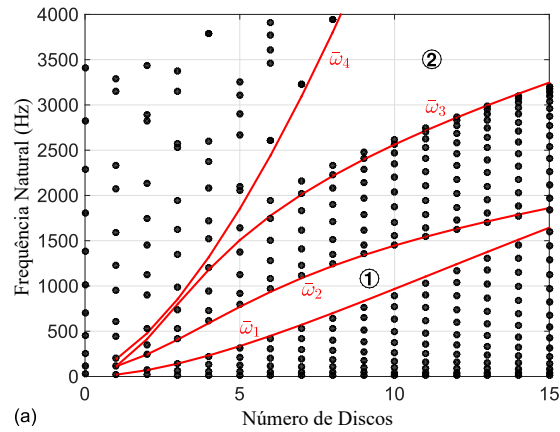


Figura 41 – Frequências naturais (pontos) e predição da Eq. (4.16) com os fatores de correção para as frequências que delimitam os vazios modais (linhas) em função do número de discos: rotor delgado.

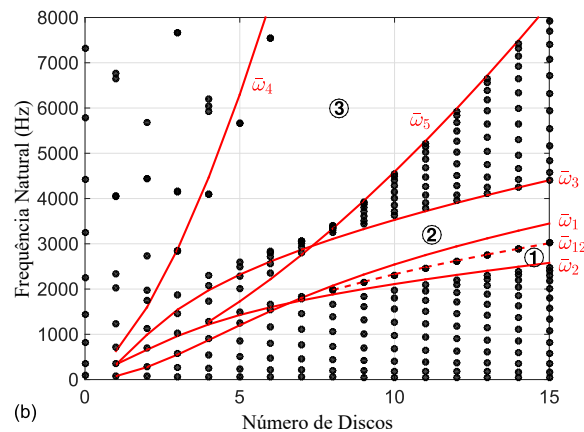


Figura 42 – Frequências naturais (pontos) e predição da Eq. (4.16) com os fatores de correção para as frequências que delimitam os vazios modais (linhas) em função do número de discos: rotor de grande porte.

similares aos do rotor de grande porte, *i.e.*, regiões onde a inércia de rotação dos discos têm uma maior influência na dinâmica do sistema.

A Equação (4.16) também pode ser utilizada em rotores com diferentes geometrias e materiais (Tab. 4 e Fig. 43). O comportamento dinâmico é praticamente o mesmo em todos os casos.

Tabela 4 – Propriedades de dois rotores diferentes.

| Propriedade | Rotor | Rotor | Unidade |
|----------------------------------|------------------|------------------|--------------------|
| | Alumínio | Latão | |
| Comprimento do eixo (L) | 800 | 1,000 | mm |
| Diâmetro do eixo (D) | 20 | 50 | mm |
| Diâmetro do disco (D_d) | 50 | 120 | mm |
| Espessura do disco (E_d) | 5 | 20 | mm |
| Módulo de Young (E) | 69×10^9 | 12×10^9 | N.m ⁻² |
| Densidade do material (ρ) | 2,700 | 8,900 | kg.m ⁻³ |

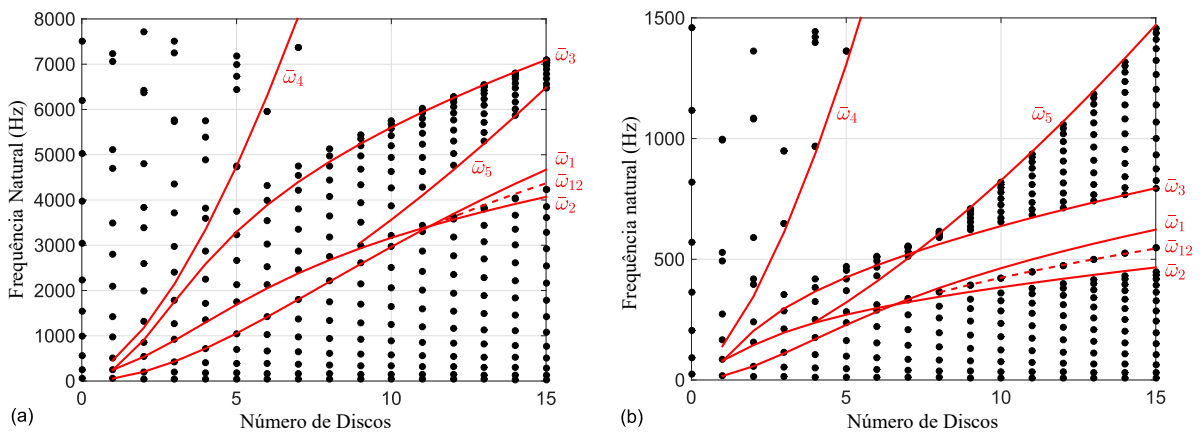


Figura 43 – Frequências naturais (pontos) e previsão da Eq. (4.16) com os fatores de correção para as frequências que delimitam os vazios modais (linhas) em função do número de discos: (a) rotor de alumínio e (b) rotor de latão

4.1 Conclusão

A principal conclusão deste Capítulo é: a solução aproximada da modelagem analítica do sistema, pode ser utilizada para prever as frequências naturais de início e fim dos vazios.

5 EVIDÊNCIA EXPERIMENTAL DA FORMAÇÃO DE VAZIOS MODAIS EM ROTORES COM PERIODICIDADE LONGITUDINAL

Este Capítulo valida experimentalmente os resultados numéricos apresentados sobre a formação de vazios modais em rotores com periodicidade longitudinal. Os resultados experimentais corroboram o aparecimento de vazios modais em sistemas rotativos com o aumento do número de discos igualmente espaçados (utilizando uma célula unitária assimétrica), e validam a equação de predição das frequências que delimitam os vazios modais. Além disso, o resultado do casamento de impedância que ocorre no modo de vibrar de término do primeiro vazio modal, também é validado experimentalmente. Por fim, o estreitamento da largura de banda do vazio modal, devido ao efeito giroscópico, é demonstrado.

5.1 Bancada de Testes e Procedimento Experimental

A bancada de testes é composta de um rotor flexível de aço (1) (Fig.44), o qual possui um eixo de diâmetro 20 mm, sustentado por dois rolamentos de esferas autocompensadores (2). A distância entre mancais é de 960 mm, o eixo é rotacionado por um motor elétrico (3) conectado no eixo por um acoplamento de *kardan*. A velocidade de rotação do motor elétrico é controlada por um inversor de frequência (não mostrado na Fig. 44). Os discos de aço (4) são montados periodicamente no eixo através de buchas cônicas. Cada disco possui diâmetro de 200 mm, espessura de 12 mm, flange de 13 mm e massa de 3 kg (incluindo as buchas cônicas). Na identificação experimental do sistema, quando a velocidade de rotação é nula, o rotor é excitado por um *shaker* eletrodinâmico (5) o qual é ligado ao eixo através de um rolamento de excitação (6). A força de excitação é medida por uma célula de carga piezométrica (7) e a resposta do rotor é medida por um acelerômetro piezométrico (quando a velocidade de rotação é nula) ou por sensores indutivos de proximidade (8) (quando o sistema está rotacionando)

As frequências naturais do sistema são obtidas através das FRFs, as quais são calculadas utilizando os estimadores H_1 and H_2 (MAIA; SILVA, 1997), definidos como:

$$H_1(\omega) = \frac{S_{fx}}{S_{ff}} \quad (5.1)$$

$$H_2(\omega) = \frac{S_{xx}}{S_{xf}} \quad (5.2)$$

onde S_{xf} e S_{fx} são as funções de densidade espectral cruzada entre os sinais da força e resposta; S_{xx} e S_{ff} são as auto funções de densidade espectral dos sinais da resposta e força, respectivamente. O sinal da força é medido pela célula de carga montada sobre o

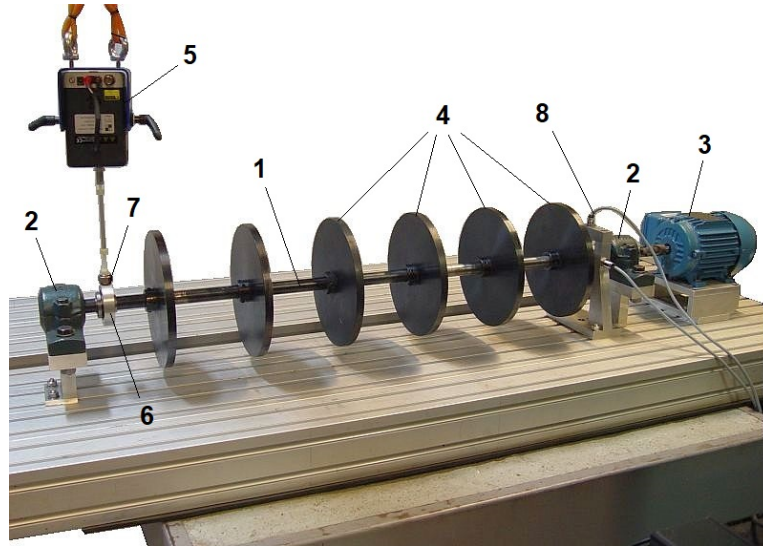


Figura 44 – Bancada experimental do rotor com periodicidade longitudinal (mesma distância entre discos): eixo (1), rolamentos de esferas autocompensadores (2), motor elétrico (3), discos (4), *shaker* (5), mancal de excitação (6), célula de carga (7) e sensores indutivos de proximidade (8).

dispositivo de excitação (colar ou mancal), enquanto o sinal da resposta é medido pelo acelerômetro ou pelos sensores de proximidade indutivos.

Nos testes experimentais com discos montados sobre o eixo, um sinal *chirp* foi enviado para o *shaker*, variando de 10 a 1,000 Hz e voltando para 10 Hz em um período total de 10 s. Este sinal foi repetido 5 vezes, resultando em um período de aquisição total de 50 s, com um taxa de aquisição de 2 kHz. No cálculo das densidades espectrais, foram adotados blocos de 10,000 amostras (período de 5 segundos), janela *Hanning* e sobreposição de 67%.

Adicionalmente, as buchas cônicas, adotadas para fixar os discos no eixo, permitem a montagem de discos em qualquer posição no eixo. A posição dos discos depende do número de discos montados no eixo, porém mantendo sempre uma distribuição periódica (mesma distâncias entre discos).

5.2 Resultados Experimentais

De acordo com o Capítulo 4, os limites dos vazios modais (frequência de início e término) que aparecem no espectro de frequência de um rotor periódico podem ser estimados pela Eq.(4.16). O valores dos parâmetros do sistema em estudo são apresentados na Tabela 5.

Com a montagem de até 6 discos no sistema apresentado na Figura 44 e medindo as frequências naturais de acordo com o procedimento descrito na seção 5.1, foram obtidos os resultados apresentados na Fig. 45. Como se pode observar, duas regiões de vazio

Tabela 5 – Valores dos parâmetros do sistema na predição dos limites dos vazios modais.

| Parâmetro | Valor | Unidade |
|-----------------------------|--------|-------------------|
| Número de discos (N_D) | 0 to 6 | — |
| Diâmetro do disco (D_d) | 200 | mm |
| Massa do disco (m_D) | 3 | kg |
| Inércia do disco (J_D) | 0.074 | kg.m ² |
| Diâmetro do eixo (D) | 20 | mm |
| Massa do eixo (m_e) | 2.43 | kg |

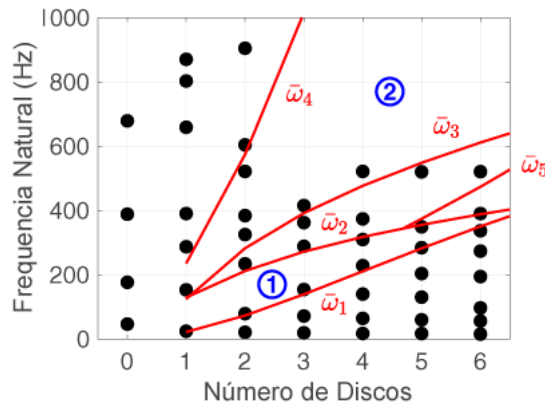


Figura 45 – Frequências naturais experimentais do rotor em função do número de discos montados sob o eixo (velocidade de rotação nula). Comparação com a predição dos limites dos vazios modais utilizando a Eq. (4.16).

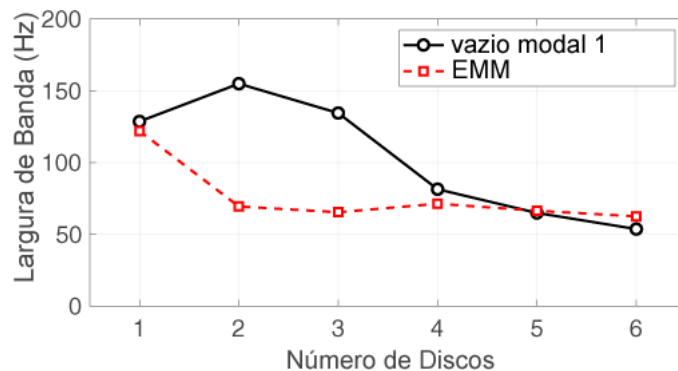


Figura 46 – Largura de banda experimental do vazio modal 1 em comparação com o espaçamento modal médio (EMM) do sistema até 400 Hz.

modal aparecem no espectro de frequência do sistema (regiões 1 e 2). A região 2 pode ser facilmente identificada pela clara ausência de frequências naturais entre as frequências preditas $\bar{\omega}_1$ e $\bar{\omega}_2$, podendo notar-se que, de fato, são vazios modais, através da comparação do tamanho da banda de frequência com o espaçamento modal médio do sistema de 0 a 400 Hz (Fig. 46). A largura de banda do vazio modal 1 é aproximadamente 2 vezes o espaçamento modal médio do sistema, nos casos de 2 e 3 discos montados periodicamente no eixo. Tais resultados, não só mostram que os vazios modais aparecem em rotores periódicos, como esperado, mas, também, mostra que a predição teórica das frequências

de início e término dos vazios modais está em acordo com os resultados experimentais. Portanto, a Eq.(4.16) foi validada experimentalmente. A faixa de 400 Hz foi escolhida porque, para o sistema em estudo, a maioria das frequências naturais permaneceram dentro desta faixa independente do número de discos (vide Fig. 45). Se fosse considerada uma maior faixa de frequência para calcular o espaçamento modal médio, a presença do vazio modal 2 poderia enviesar a análise, devido a um aumento no valor médio do espaçamento para sistemas com mais de três discos.

Com o aumento do número de discos no sistema, o vazio modal 1 tem sua largura de banda diminuída, enquanto o vazio modal 2 aumenta. Tais resultados validam os obtidos numericamente no Capítulo 3, no qual sistemas rotativos com diferentes geometrias são analisados. Fica claro que o padrão da formação de vazios modais, observado numericamente, permanece independente da geometria do sistema rotativo: 1) vazios modais 1 e 2 aparecem com um número baixo de discos; 2) com o aumento do número de discos, o vazio modal 1 fecha e o vazio modal 2 aumenta suas larguras de banda. Devido à similaridade dos resultados da Fig. 45 (experimentais) com aqueles apresentados no Capítulo 4 (numéricos), pode-se inferir que um novo vazio modal aparece abaixo da linha $\bar{\omega}_5$, o qual não foi possível ser verificado aqui devido ao número limitado de discos disponíveis.

De acordo com os resultados numéricos, a formação do vazio modal 1 é resultado da combinação da posição dos discos e o número de onda da $(N_D + 1)$ -ésima frequência natural do sistema. O modo de vibrar na frequência de ressonância do sistema é formado por ondas estacionárias viajando através do rotor e quando os nós da onda combinam com a posição dos discos, a frequência natural resultante aumenta, formando o vazio modal. Para checar esse efeito experimentalmente, foi realizada uma análise modal do sistema com três discos montados periodicamente ao longo do eixo, como mostrado na Fig. 47. A excitação é feita por um *shaker* eletrodinâmico (1) conectado ao eixo através de um colar. Uma célula de carga (2) mede a força de excitação, enquanto um acelerômetro (3), montado em diferentes pontos ao longo do eixo, mede a resposta do sistema. A excitação e os pontos de medição do sistema são mostrados na Fig. 47b, onde os pontos 16 a 18 se referem ao movimento dos discos na direção longitudinal do eixo. A excitação e a medição das respostas (1 a 15) foram feitas na direção vertical.

Os modos de vibrar experimentais associados com as frequências de início (3^a frequência natural) e término (4^a frequência natural) do sistema com três discos são mostrados na Fig. 48. Como se pode observar, o modo de vibrar experimental associado com a frequência de término (4^a frequência em 288.6 Hz) tem seus nós modais coincidindo com a posição dos discos (Fig. 48b). Assim, a formação do vazio modal 1 é, de fato, um resultado da combinação de impedância entre a posição dos discos e o número de onda da $(N_D + 1)$ -ésima frequência natural do sistema.

Finalmente, o sistema é testado sob diferentes velocidades de rotação para medir

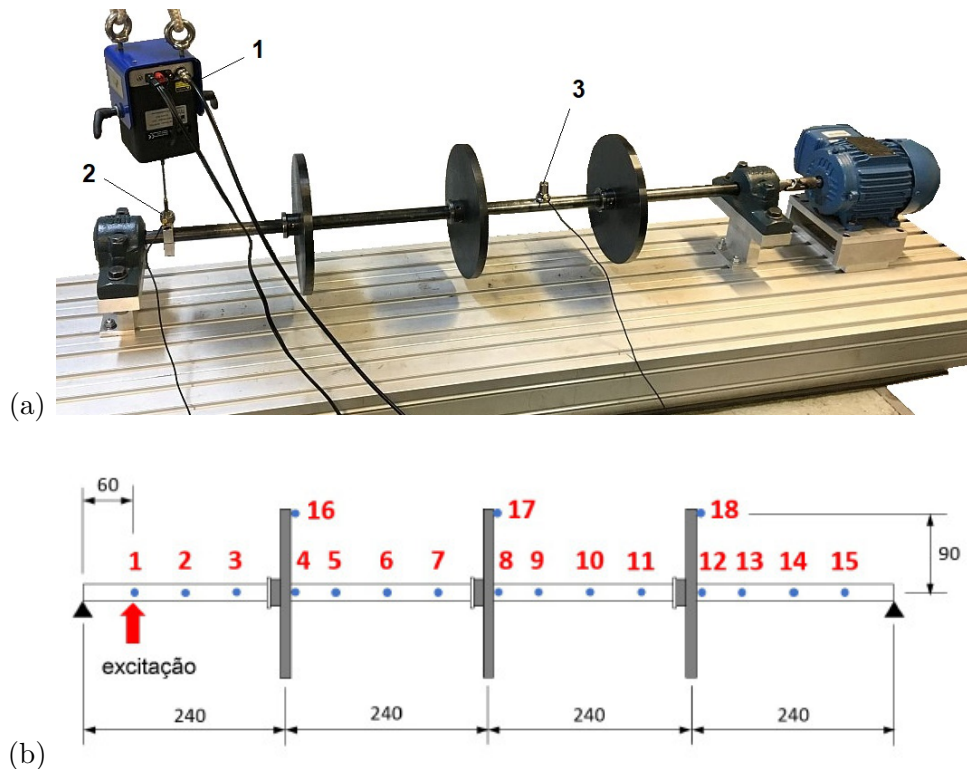


Figura 47 – Análise modal do sistema com três discos: (a) bancada e instrumentação, (b) pontos de medição (distâncias em mm).

o efeito giroscópico na largura de banda do vazio modal. As FRFs do sistema foram obtidas seguindo o procedimento descrito na seção 5.1. A excitação é feita por um *shaker* eletrodinâmico (1) conectado ao eixo através de uma célula de carga (2) e um mancal de excitação (3) (Fig.49a). O mancal de excitação é composto de um colar metálico e um rolamento agulha que permite a rotação do eixo. A sistema de excitação (*shaker* + célula de carga + mancal de excitação) é montado a uma distância de 90 mm do mancal de rolamento autocompensador que suporta o eixo em sua extremidade, no lado oposto ao acoplado ao motor elétrico. As respostas de deslocamento do eixo foram medidas por sensores indutivos de proximidade montados a uma distância de 60 mm do mancal de rolamento autocompensador que suporta o eixo em sua extremidade próxima à acoplada ao motor elétrico (Fig. 49b). Os resultados obtidos são mostrados na Figura 50.

A Figura 50a apresenta o diagrama de cascata da receptância (deslocamento/força) do sistema em função da frequência de excitação e velocidade de rotação. A faixa de frequência dessa análise foi limitada até 400 Hz, pois a resposta da receptância do sistema diminui fortemente com o aumento das frequência, comprometendo assim a relação sinal-ruído da resposta acima de 400 Hz. Por esta razão, foi possível verificar o efeito giroscópico na largura de banda apenas do vazio modal 1.

Como pode-se observar na Fig. 50, as três primeiras ressonâncias do sistema não são afetadas significativamente pelo efeito giroscópico. Entretanto, a 4^a ressonância do sistema

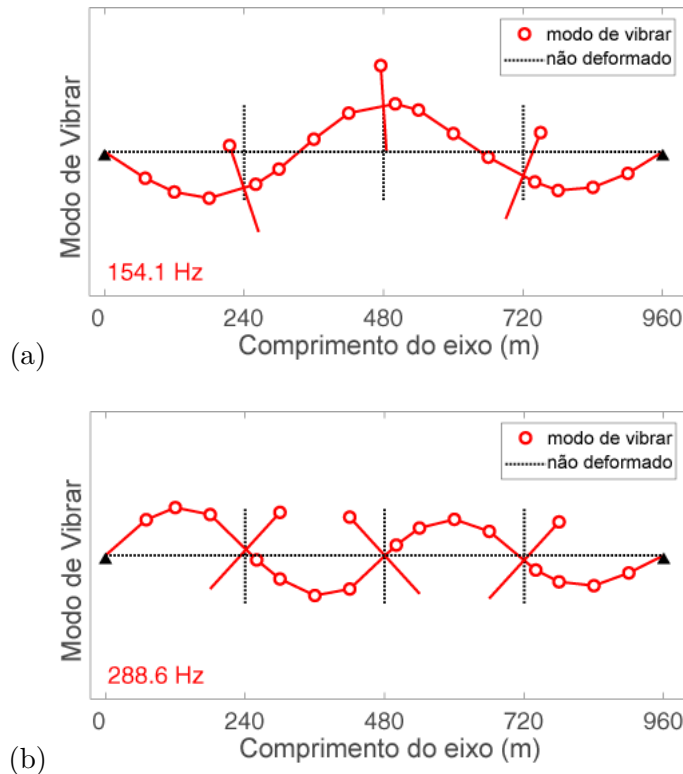


Figura 48 – Modos de vibrar experimentais das frequências de início e término do vazio modal 1 do sistema com três discos: (a) 3^a frequência natural (frequência de início), (b) 4^a frequência natural (frequência de término).

(frequência de término do vazio modal 1 se divide em dois picos de ressonância associados com os modos de precessão direta e retrógrada do sistema rotativo. O modo de precessão direta aumenta sua frequência de ressonância com o aumento da velocidade de rotação, enquanto o modo de precessão retrógrada diminui sua frequência de ressonância com o aumento da velocidade de rotação. Este efeito é também observado na 5^a ressonância do sistema Fig. 50b.

Como consequência do efeito giroscópico, a divisão das ressonâncias tende a diminuir o vazio modal com o aumento da velocidade de rotação. Este efeito é também observado na 5^a ressonância do sistema (Fig. 50b). Neste caso, a largura de banda original do vazio modal 1, que era de 134 Hz para a rotação nula, diminui para 109 Hz na velocidade de rotação de 1800 rpm. Isto representa uma redução de aproximadamente 19%. Entretanto, está é uma análise conservativa do sistema, pois a frequência que diminui a largura do vazio modal está associada com o modo de precessão retrógrada do eixo. Considerando que a maioria dos sistemas rotativos estão sujeitos a forças de excitação que não excitam modos de precessão retrógrada (*e.g.* desbalanceamento, desalinhamento, enpenamento térmico), o vazio modal, na verdade, aumenta. Neste caso, houve um aumento de aproximadamente 19% da largura de banda do vazio modal 1 na velocidade de rotação de 1800 rpm em comparação com a largura de banda em velocidade nula. Assim, é preciso estar claro

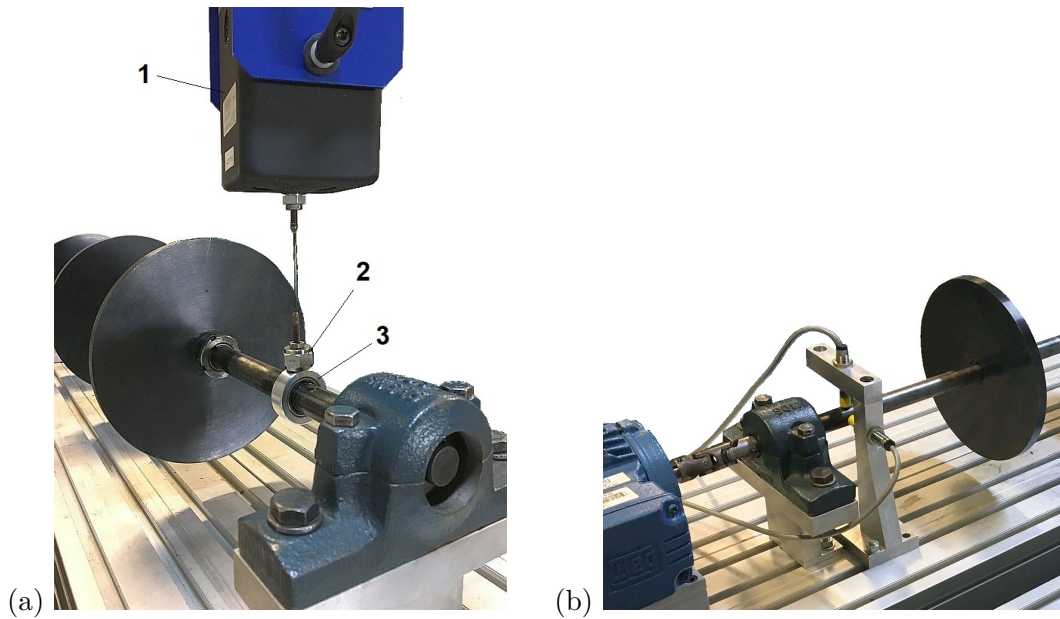


Figura 49 – Instrumentação utilizada nas medições do sistema em rotação: (a) sistema de excitação (*shaker* + célula de carga + mancal de excitação), (b) sensores indutivos de proximidade.

para o Engenheiro quais tipos de modos (precessão direta ou retrógrada) o sistema irá apresentar na operação. Assim, pode-se melhor prever o comportamento dos vazios modais. Estes resultados também validam os apresentados numericamente na seções que analisam os diagramas de Campbell numericamente em rotores periódicos, os quais preveem essa variação da largura do vazio modal devido ao efeito giroscópico sob condição de operação de rotação.

Como mencionado acima, a divisão das ressonâncias em sistemas rotativos é consequência do efeitos giroscópico, causado pela inclinação dos discos rotativos. Neste caso, os três primeiros modos do sistema rotativo não são fortemente afetados pelo efeito giroscópico por causa da forma desses modos: eles não inclinam significativamente os discos, como mostrado na Fig. 51. Quando isso acontece (por exemplo, no modo #2), apenas um disco é fortemente inclinado pela forma do modo, resultando assim em um fraco efeito giroscópico. Por outro lado, os modos #4 e #5 inclinam significativamente dois ou mais discos do sistema. Por esta razão, o efeito de divisão é mais evidente nestes modos.

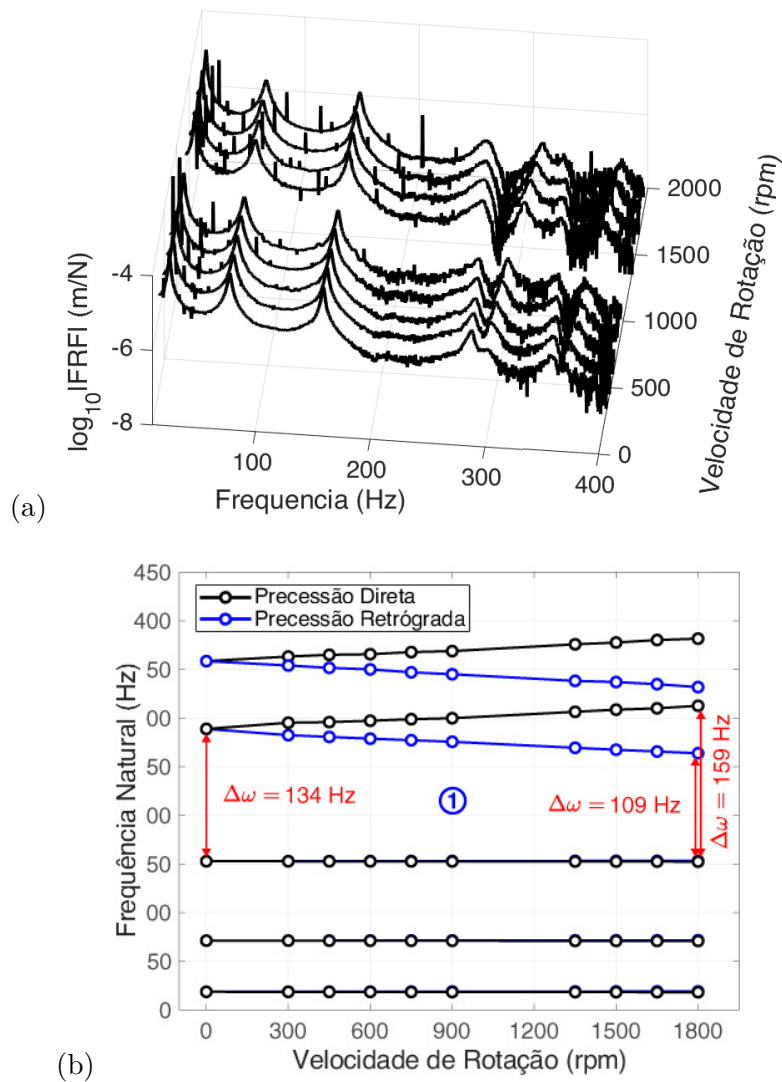


Figura 50 – FRFs experimentais do sistema com três discos em função da velocidade de rotação: (a) diagrama de cascata da receptância do sistema, (b) diagrama de Campbell.

5.3 Conclusões

Este Capítulo valida experimentalmente os resultados numéricos apresentados da formação de vazios modais em rotores com periodicidade longitudinal. Os resultados obtidos corroboram o aparecimento de diferentes vazios modais no sistema rotativos com o aumento do número de discos no sistema. Os resultados validam a Eq.(4.16), a qual dá uma estimativa dos valores das frequências de início e término dos vazios modais. Os resultados para o caso de três discos montados periodicamente no eixo mostram que o vazio modal 1 é resultado da combinação entre o número de discos e 4º número de onda (modo $N_D + 1$). Sob a condição de rotação, o efeito giroscópico tende a fechar o vazio modal devido à divisão da ressonância em modos de precessão direta e retrógrada. Entretanto, a maioria dos sistemas rotativos estão sujeitos a forças de excitação que não excitam modos de

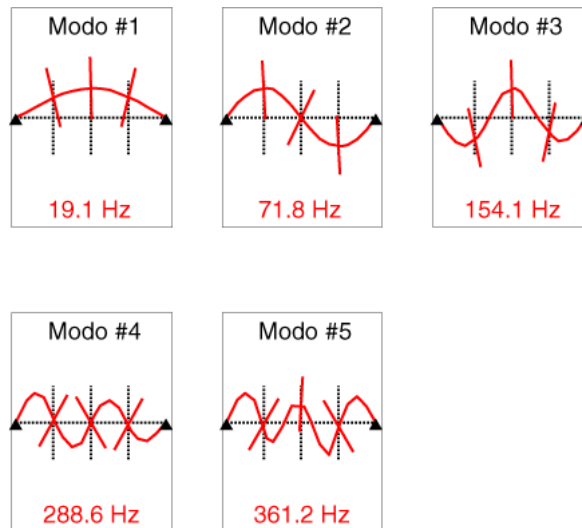


Figura 51 – Cinco primeiros modos de vibrar experimentais do rotor com três discos.

precessão retrógrada. Portanto, pode-se considerar que o vazio modal, na prática, aumenta sua largura de banda com o aumento da velocidade de rotação.

6 DESLOCAMENTO DO VAZIO MODAL NO ESPECTRO DA FREQUÊNCIA

O problema agora é que os vazios modais obtidos são fixos, *i.e.*, dada uma geometria de rotor, o vazio modal irá se formar em uma região de frequência com uma largura de banda e frequência central fixa. Se o vazio modal aparecer em uma região que não é interessante para as condições de operação, deve-se mudar a geometria do rotor, o que nem sempre é possível devido a restrições de projeto. A geometria do elemento de trabalho (e conseqüentemente sua inércia) é definida pelas condições de trabalho e não há muito espaço para modificações geométricas a fim formar vazios modais.

Considerando isto, a questão que fica é: É possível deslocar o vazio modal e aumentar sua largura de banda mudando o posição dos discos, sem alterar sua inércia? Se sim, será possível projetar sistemas rotativos que possuam vazios modais em frequências de interesse, sem adotar nenhuma modificação na estrutura, *e.g.* escalonamento do eixo ou adição de ressonadores. Apenas a manipulação da distribuição de inércia ao longo do rotor possibilitará o aumento e o alocação dos vazios modais.

O presente Capítulo mostra que é, de fato, possível deslocar e aumentar os vazios modais em rotores com periodicidade de inércia longitudinal. Isto é alcançado através da otimização da posição dos discos ao longo do rotor. Para fazê-lo, deve-se desenvolver um modelo matemático do sistema, correlacionado com dados experimentais. O modelo é então utilizado em um procedimento de otimização para encontrar as posições dos discos que formam o vazio modal na região de interesse. Após isso, a formação dos vazios modais, previstos numericamente pelo procedimento, é verificada experimentalmente através de uma bancada de testes de laboratório, validando a metodologia.

6.1 Formação de Vazios Modais em Rotores com Periodicidade Longitudinal

Considere um rotor com 6 discos periodicamente montados sobre o eixo (célula unitária assimétrica), cujas propriedades são listadas na Tabela 6. O rotor é considerado bi-apoiado nas extremidades, *i.e.* os mancais nas extremidades do eixo permitem somente movimentos angulares (deslocamentos laterais são considerados nulos), o que representa uma configuração de mancais de alta rigidez. Como regra, foram adotados 10 elementos finitos para representar o eixo na região entre dois discos ou entre o disco e o mancal.

A FRF do sistema é calculada considerando a resposta na direção vertical do primeiro nó livre próximo do primeiro mancal, devido a uma excitação na direção vertical do primeiro nó livre próximo do segundo mancal do sistema, na direção oposta do eixo. Para a velocidade de rotação de 4,000 rpm, foi obtida a função de resposta em frequência mostrada na Fig. 52. Como pode-se notar, o vazio modal aparece na FRF entre 689 Hz e

Tabela 6 – Parâmetros do rotor com 6 discos.

| Parâmetro | Valor | Unidade |
|---------------------|----------------------|--------------------|
| comprimento do eixo | 600 | mm |
| diâmetro do eixo | 10 | mm |
| número de discos | 6 | – |
| diâmetro do disco | 70 | mm |
| espessura do disco | 10 | mm |
| Módulo de Young | 2.1×10^{11} | N.m^{-2} |
| Densidade | 7,850 | kg.m^{-3} |

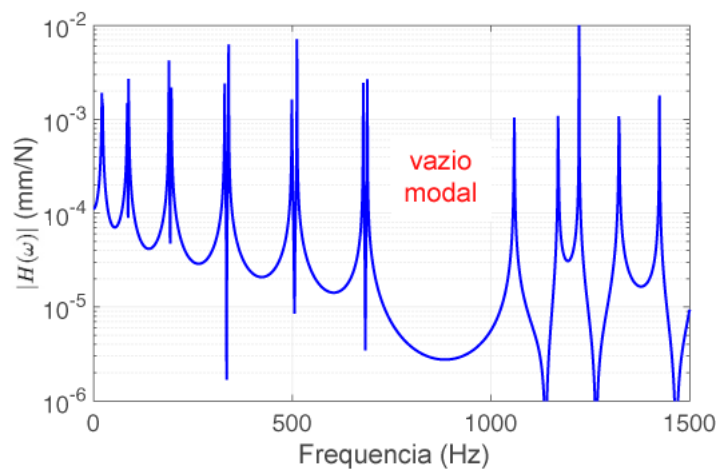


Figura 52 – Função de Resposta em Frequência do rotor com 6 discos a 4,000 rpm.

1059 Hz (largura de banda de 370 Hz), onde há uma clara distância entre as ressonâncias, a qual possui um grande espaçamento modal se comparado com o espaçamento modal médio na FRF, e uma baixa resposta do rotor.

Como já foi visto, esse vazio modal aparece devido à combinação de impedância entre os nós do modo do eixo e a posição dos discos. Como pode ser visto na Fig. 53(b), o modo de vibrar associado à frequência de término do vazio modal a 1059 Hz tem seus nós modais na mesma posição dos discos. Tal comportamento dinâmico é uma característica do sistema e sempre aparece quando um sistema tem algum tipo de periodicidade (neste caso, periodicidade longitudinal de inércia).

Como já foi mencionado, o vazio modal é fixo e não pode ser deslocado, nem sua largura de banda pode ser aumentada, sem a mudança no número de discos ou da inércias do discos. Entretanto, se a posição dos discos for otimizada ao longo do rotor sem mudar a sua inércia (nem seu número), é possível deslocar o vazio modal e, também, aumentá-lo, como será mostrado na próxima seção.

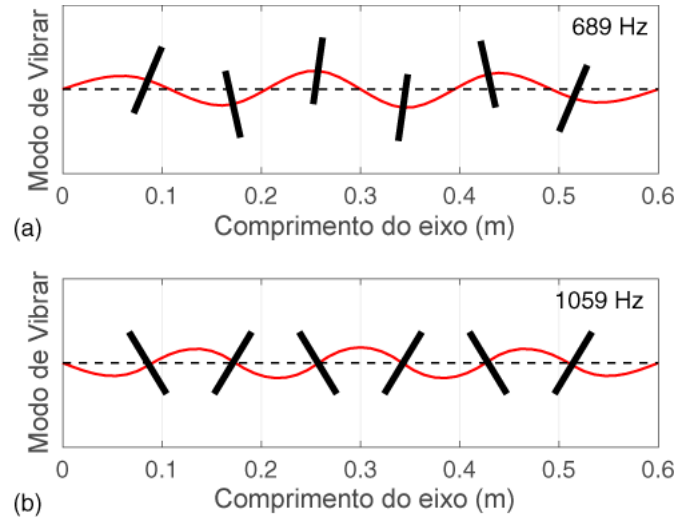


Figura 53 – Modos de vibrar associados com as frequências de início e término do vazio modal: (a) frequência de início, (b) frequência de término.

6.2 Otimização da Posição dos Discos

A posição dos discos ao longo do rotor que resulta em um vazio modal localizado em uma frequência de interesse é obtida através de um procedimento de otimização. O objetivo do procedimento de otimização adotado é:

1. mover a frequência central do vazio modal para um valor desejado;
2. maximizar a largura de banda do vazio modal na frequência central de interesse;

As variáveis de projeto do procedimento de otimização são as posições dos discos ao longo do eixo:

$$\mathbf{q} = \{z_1 \cdots z_i \cdots z_{N_D}\}^T \quad (6.1)$$

onde z_i são as coordenadas do disco na direção longitudinal do rotor e N_D é o número de discos.

Assim, o problema de otimização pode ser formulado como:

$$\arg \max f(\mathbf{q}) = \omega_{início} - \omega_{parada} = \Delta\omega(\mathbf{q}) \quad (6.2)$$

sujeito a:

$$g_1(\mathbf{q}) = |z_{i+1} - z_i| \geq 20 \text{ mm} \quad (6.3)$$

$$g_2(\mathbf{q}) = |\omega_{central} - \omega_{desejado}| \leq 1 \text{ Hz} \quad (6.4)$$

A restrição $g_1(\mathbf{q})$ limita as distâncias otimizadas entre 2 discos consecutivos a serem maiores que 20 mm (*i.e.*, distância mínima entre discos). A restrição $g_2(\mathbf{q})$ estabelece uma tolerância aceitável entre a frequência central do vazio modal otimizado e a frequência central desejada ($\omega_{desejada}$).

Uma metodologia híbrida (heurística + busca direta) é empregada para encontrar as soluções ótimas. Primeiro, um Algoritmo Genético (AG) é usado para encontrar a região no domínio da solução com bons candidatos. Duzentas amostras foram randomicamente escolhidas no domínio da solução e uma taxa de *cross-over* de 80% a cada geração foi adotada. O algoritmo rodou 10 gerações com uma tolerância de convergência de 10^{-6} . Em seguida, o algoritmo Programação Sequencial Quadrática (do inglês *Sequential Quadratic Program* - SQP) refina a solução obtida pelo AG até que a otimalidade seja alcançada. Nesta etapa, o algoritmo rodou o máximo de 50 iterações, com uma tolerância de convergência de 10^{-6} . O procedimento de otimização foi implementado no software Matlab.

6.2.1 Deslocamento do Vazio Modal no Rotor Com Seis Discos

Considere o rotor com seis discos descrito anteriormente neste Capítulo. Adotando-se o procedimento de otimização descrito acima, pode-se chegar às posições ótimas dos discos ao longo do rotor que deslocam o vazio modal para uma frequência central desejada $\omega_{central}$, maximizando sua largura de banda. Para cada solução otimizada, foi calculada a FRF do sistema e foi verificado se o vazio modal tem sua frequência central localizada na frequência desejada.

A figura 54 apresenta as funções de resposta em frequência dos rotores otimizados (em cores) quando a frequência central do vazio modal é movida de -6% até +20% em relação à frequência central original encontrada no rotor periódico. As cores quentes representam resposta vibracional alta (picos de ressonância), enquanto as cores frias representam resposta vibracional baixa. Neste caso, a região do vazio modal é a zona de cor azul clara ao redor da linha tracejada $\omega_{central}$.

Como pode ser visto na Fig. 54, o procedimento de otimização obteve sucesso em encontrar as posições dos discos que movem o vazio modal para um local desejado. Os erros entre as frequências centrais obtidas do vazio modal e as desejadas são apresentados na Fig. 55. O erro entre o valor desejado e o obtido permaneceu menor que 1 Hz, conforme imposto pela restrição $g_2(\mathbf{q})$.

A largura de banda da região do vazio modal foi, também, maximizada pelo procedimento de otimização. A Figura 56 apresenta a largura de banda dos vazios modais otimizados em função da variação da frequência central. Como pode ser visto, a largura de banda aumenta com o deslocamento da frequência central, permanecendo acima de 500 Hz em todos os casos. Este valor é maior que o encontrado no rotor periódico (370 Hz), o que significa que o procedimento de otimização foi capaz de aumentar a região de

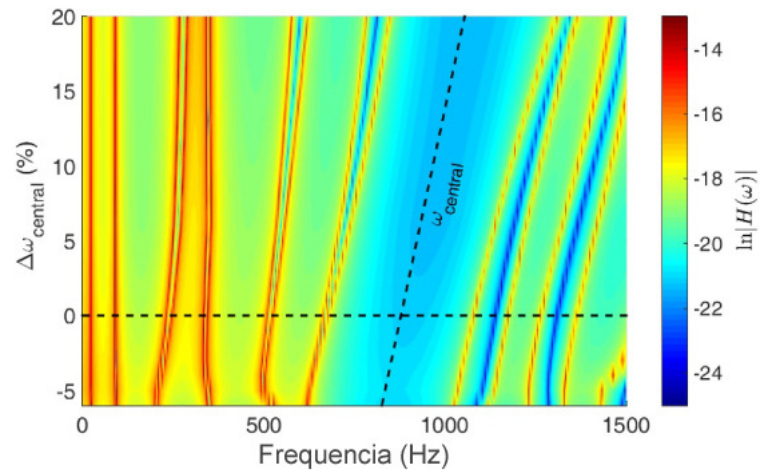


Figura 54 – Funções de resposta em frequência dos rotores otimizados em função da variação da frequência central: resultados do rotor com os discos nas posições otimizadas.

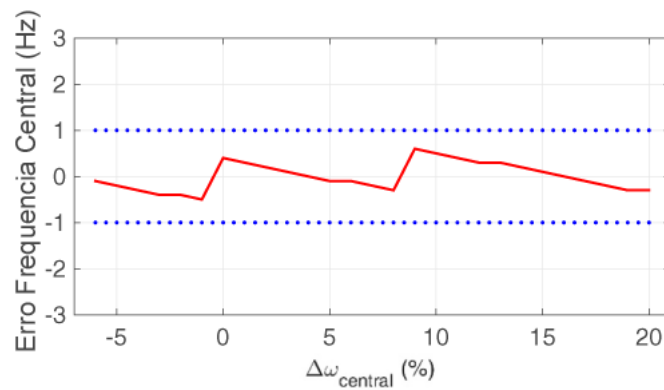


Figura 55 – Erro da frequência central do vazio modal otimizado em função da variação da frequência central.

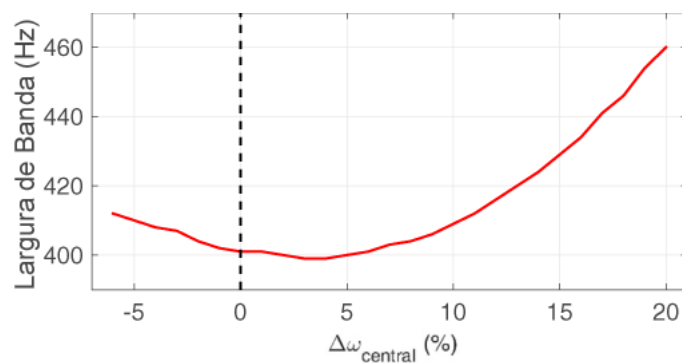


Figura 56 – Largura de banda do vazio modal em função da variação do frequência central para as soluções otimizadas.

vazio modal mesmo para a frequência central original. Para isso acontecer, foi necessário a mudança da posição dos discos mesmo para o caso $\Delta\omega_{central} = 0$.

As posições otimizadas dos discos são mostradas na Fig. 57. Como pode ser visto,

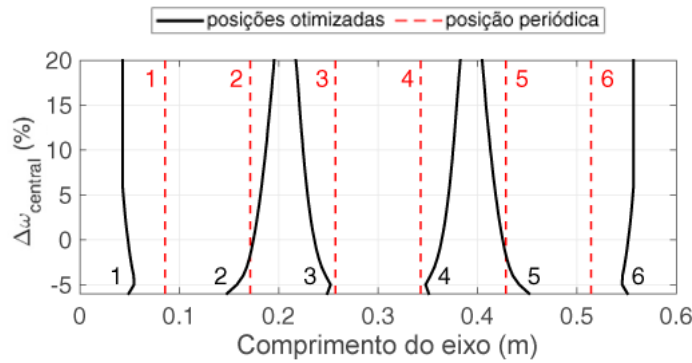


Figura 57 – Posições otimizados dos discos ao longo do rotor em função da variação da frequência central.

há um padrão na otimização do rotor. Em geral, os discos 1 e 6 são montados mais perto dos mancais (próximo das extremidades do eixo). Para mover o vazio modal para frequências mais altas, os discos 2 e 3 tendem a se aproximar, assim como os discos 4 e 5. Para mover o vazio modal para frequências mais baixas, a posição dos discos tendem a se espalharem ao longo do eixo. É interessante notar que, o rotor não tem mais uma periodicidade monotônica em todos os casos otimizados. Ao contrário disto, os rotores otimizados apresentam uma configuração periódica diatômica, *i.e.* o espaçamento entre os discos foi de uma configuração igualmente distribuída para uma configuração com distribuição 'curta-longa-curta-longa-curta'.

Neste presente estudo, o procedimento de otimização não foi capaz de reduzir a frequência central do vazio modal abaixo de -6% em relação à frequência original central do caso periódico. Neste caso, o procedimento falhou em encontrar soluções ótimas para o problema. O quanto é possível mover o vazio modal depende fortemente do número de discos, da inércia dos discos em comparação com a inércia do eixo e da rigidez do eixo.

6.3 Bancada Experimental e Aprimoramento do Modelo

Para validar a metodologia proposta, testes experimentais, em uma bancada de laboratório, são realizados. A bancada experimental é composta de um rotor flexível de aço (1) (Fig. 58), o qual possui um eixo de diâmetro 20 mm e comprimento 1026 mm, sustentado por dois rolamentos de esferas autocompensadores (2). A distância entre mancais é de 960 mm, o eixo é rotacionado por um motor elétrico (3) conectado no eixo por um acomplamento de kardan (4). A velocidade de rotação do motor elétrico é controlada por um inversor de frequência (não mostrado na Fig. 58). Os discos de aço (5) são montados no eixo através de buchas cônicas. Cada disco possui diâmetro de 200 mm, espessura de 12 mm, flange de 13 mm e massa de 3 kg (incluindo as buchas cônicas). Na identificação experimental do sistema, quando a velocidade de rotação é nula, o rotor é excitado por um *shaker* eletrodinâmico (6) o qual é ligado ao eixo por um colar (7). A

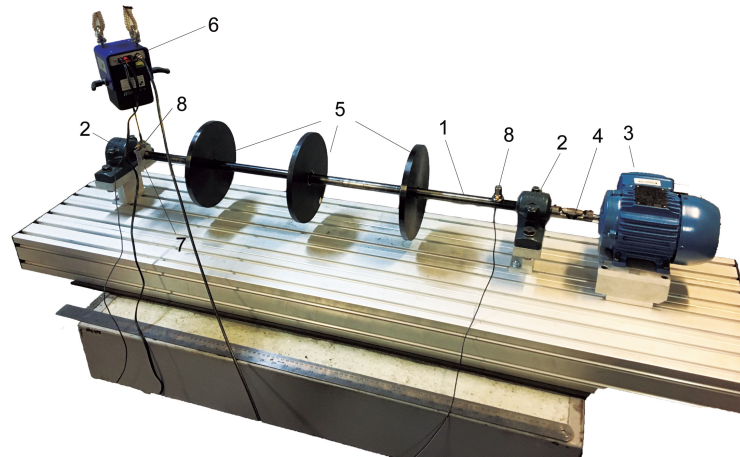


Figura 58 – Bancada experimental do rotor com periodicidade longitudinal (mesma distância entre discos): eixo (1), rolamentos de esferas autocompensadores (2), motor elétrico (3), acoplamento de *kardan* (4), discos (5), *shaker* (6), colar de excitação (7), célula de carga (8) e acelerômetro (9).

força de excitação é medida por uma célula de carga piezelétrica (8) e a resposta do rotor é medida por um acelerômetro piezelétrico (9). Quando o sistema está em rotação o *shaker* é ligado ao rotor através de um mancal de excitação (10) (Fig. 49a), o qual é composto de um colar metálico e rolamento agulha que permitem a rotação do eixo. Neste caso, a resposta do rotor é medida por sensores indutivos de proximidade nas direções horizontal (11) e vertical (12) (Fig. 49b).

As frequências naturais do sistema são obtidas através das FRFs, as quais são calculadas utilizando os estimadores H_1 and H_2 (MAIA; SILVA, 1997), já apresentados no Capítulo 5.

A identificação das frequências naturais do eixo sem discos precisa ser feita. Neste caso, um sinal *chirp* foi enviado para o *shaker*, variando de 10 a 3,000 Hz e voltando para 10 Hz em um período total de 10 s. Este sinal foi repetido 5 vezes, resultando em um período de aquisição total de 50 s, com um taxa de aquisição de 10 kHz. No cálculo das densidades espectrais, foram adotados blocos de 50,000 amostras (período de 5 segundos), janela *Hanning* e sobreposição de 67%. Este procedimento foi feito para ambas direções: vertical (Fig. 59a) and horizontal (Fig. 59b).

Nos testes experimentais com 3 discos montados sobre o eixo, o sinal *chirp* foi enviado para o *shaker*, variando de 10 a 1,000 Hz e voltando para 10 Hz em um período total de 10 s. Este sinal foi repetido 5 vezes, resultando em um período de aquisição total de 50 s, com um taxa de aquisição de 2 kHz. No cálculo das densidades espectrais, foram adotados blocos de 10,000 amostras (período de 5 segundos), janela *Hanning* e sobreposição de 67%.

Adicionalmente, as buchas cônicas, adotadas para fixar os discos no eixo, permitem

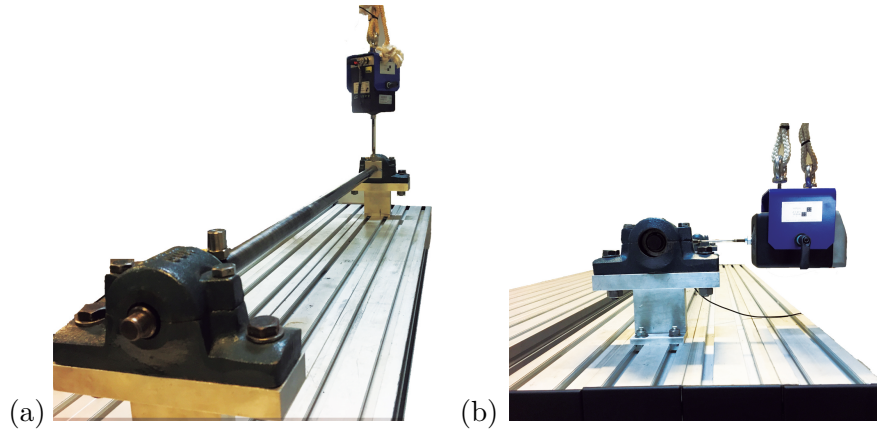


Figura 59 – Montagem experimental utilizada para ajustar os parâmetros do modelo: (a) identificação experimental do eixo liso na direção vertical e (b) identificação experimental do eixo liso na direção horizontal.

a montagem de discos em qualquer posição do eixo. A posição dos discos depende do número de discos montados no eixo, porém mantendo sempre uma distribuição periódica (mesma distâncias entre discos).

6.3.1 Aprimoramento do Modelo Matemático

Para capturar a física da bancada de testes, deve-se aprimorar o modelo utilizado até agora. Os mancais do sistema não são apoios perfeitos, portanto, devem ser representados no modelo por uma matriz de rigidez:

$$\mathbf{K}^m = \begin{bmatrix} k_x^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_\beta^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_\gamma^m \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

onde \mathbf{K}^m é a matriz de rigidez do mancal; k_x^m e k_y^m são as rigidezes lineares do mancal nas direções horizontal e vertical, respectivamente; e k_β^m e k_γ^m são as rigidezes torcionais do mancal nas direções horizontal e vertical, respectivamente. A matriz de rigidez do mancal é adicionada diretamente na matriz de rigidez global do rotor na posição (nó) onde o mancal está localizado.

Como já foi mencionado na seção 3.2, os discos são rígidos e são representados no modelo pelas suas massas e momentos de inércia, os quais são adicionadas nas matrizes globais de inércia e giroscópica de acordo com sua posição na malha do rotor. Entretanto, as buchas cônicas utilizadas para montar os discos sob o eixo introduzem um movimento relativo entre o disco e o eixo. Esses graus de liberdade adicionais são ilustrados na Figura 60: os deslocamentos laterais x_d e y_d e os deslocamentos angulares α e θ . Para capturar esse movimento relativo dos discos, deve-se escrever as equações de movimento dos discos como se segue:

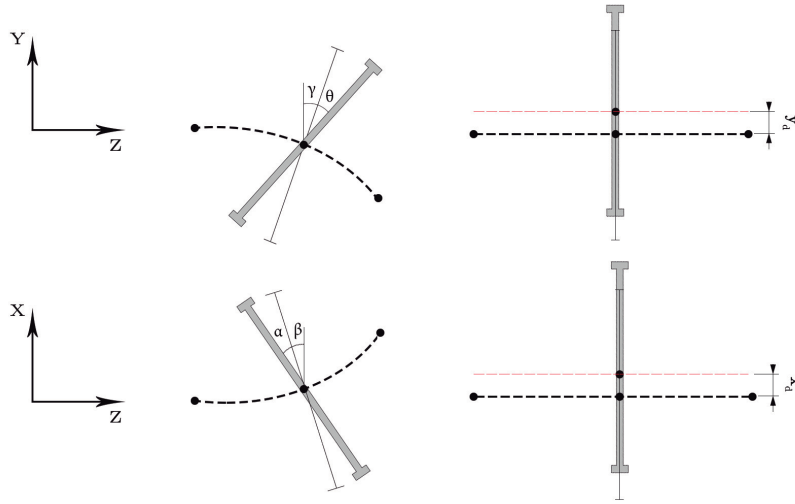


Figura 60 – Graus de liberdade adicionais do disco em relação ao eixo (linha tracejada).

$$\mathbf{M}_i^d \ddot{\mathbf{z}}_i^d - \Omega \mathbf{G}_i^d \dot{\mathbf{z}}_i^d + \mathbf{K}_i^d \mathbf{z}_i^d - \mathbf{K}_i^d \mathbf{z}_i^e = \mathbf{0} \quad (6.6)$$

onde \mathbf{M}_i^d e \mathbf{G}_i^d são as matrizes de inércia e giroscópica do i -ésimo disco ((NELSON; MCVAUGH, 1976)), \mathbf{K}_i^d é a matriz de rigidez do i -ésimo disco, \mathbf{z}_i^d é o vetor de graus de liberdade do i -ésimo disco, e \mathbf{z}_i^e é o vetor de graus de liberdade do eixo onde o i -ésimo disco está montado. A matriz de rigidez do i -ésimo disco é:

$$\mathbf{K}_i^d = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_\theta \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

onde k_{x_d} e k_{y_d} são os coeficientes de rigidez linear, e k_α e k_θ são os coeficientes de rigidez torcional na interface entre o i -ésimo disco e o eixo.

Assim, combinando as equações de movimento de todos os discos no sistema com as equações de movimento do eixo (Eq.(3.1)), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{z}}_S \\ \ddot{\mathbf{z}}_D \end{Bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} \mathbf{D}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \Omega \begin{bmatrix} \mathbf{G}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_D \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_S \\ \dot{\mathbf{z}}_D \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{K}_{SD} \\ \mathbf{K}_{SD} & \mathbf{K}_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{z}_S \\ \mathbf{z}_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (6.8)$$

onde \mathbf{M}_D é a matriz global de inércia, \mathbf{G}_D é a matriz global giroscópica, \mathbf{K}_D é a matriz global de rigidez, e \mathbf{z}_D é o vetor de graus de liberdade de todos os discos no sistema. A

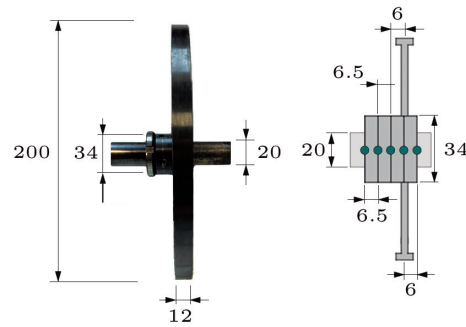


Figura 61 – Modelagem de elementos finitos da região onde o disco é montado.

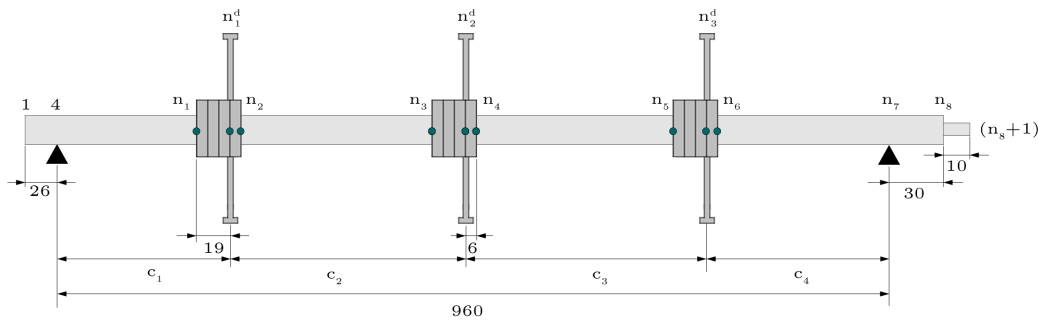


Figura 62 – Modelagem de elementos finitos do rotor da bancada de testes (mancais são representados por triângulos pretos e os nós dos elementos por pontos verdes).

matriz de rigidez \mathbf{K}_{SD} é a matriz global de rigidez que acopla os discos nos graus de liberdade do eixo.

As buchas cônicas usadas para montar os discos no eixo da bancada têm um certo comprimento, o qual enrijece localmente o eixo. Um estudo interessante sobre como considerar este enrijecimento local no modelo de elementos finitos de um rotor pode ser encontrado em (LALANNE; FERRARIS, 1998), no qual três alternativas são apresentadas e as frequências de ressonância resultantes são comparadas. Aqui, será adotado o segundo método apresentado em (LALANNE; FERRARIS, 1998), no qual a região do eixo onde a bucha é localizada é enrijecida através de elementos de eixo com diâmetro maiores (veja a Fig. 61). Neste caso, a inércia dos discos é adicionada em um dos nós da região enrijecida. O diâmetro que será utilizado nesta região será o diâmetro da flange, e o comprimento da região será o comprimento da bucha cônica. É válido ressaltar que deve-se corrigir a massa e momento de inércia adicionados pelo disco no modelo. Esta correção está relacionada com a massa e momento de inércia adicionada na região onde o diâmetro do eixo foi aumentado

A modelagem de elementos finitos da bancada de testes é apresentada na Figura 62,

para o caso de três discos periodicamente montados no eixo. Como pode ser notado, a distância entre os discos (c_i) é arbitrária e na configuração periódica $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 240$ mm. Há, também, nós específicos (n_i para $i = 1, \dots, 8$ e n_i^d para $i = 1, 2, 3$) que são utilizados para definir a malha final do sistema. Dependendo do valor de c_i , o comprimento dos elementos de eixo entre dois nós n_i variam. O número de elementos de eixo no modelo é definido por uma análise de convergência de malha. Esta análise consiste em refinar a malha até que os valores das frequências naturais de interesse convirjam numericamente.

É válido lembrar que, as frequências naturais são obtidas resolvendo o problema de autovalor e autovetor em espaço de estados (Eq.(3.3)). As FRFs são obtidas calculando a matriz de receptância do sistema, conforme já foi apresentado.

6.3.2 Atualização dos Parâmetros do Modelo

Os parâmetros desconhecidos do modelos são o módulo de Young do eixo, a densidade do material do eixo, a densidade do material do disco, a rigidez dos mancais (k_x^m , k_y^m , k_β^m e k_γ^m), os coeficientes de rigidez de cada disco (k_{x_d} , k_{y_d} , k_α e k_θ). As densidades dos materiais são obtidas pesando as massas do eixo, discos, buchas cônicas e considerando suas geometrias. O módulo de Young do eixo, a rigidez dos mancais e os coeficientes de rigidez dos discos são obtidos através de dados experimentais e um procedimento de otimização.

O procedimento de otimização deve encontrar os valores dos parâmetros que ajustam as frequências naturais do modelo às frequências naturais obtidas experimentalmente. Assim, o problema de otimização pode ser formulado como:

$$\arg \min_{\mathbf{q}} f(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n_{exp}} |\omega_{n_i}^{exp} - \omega_{n_i}^{modelo}| \quad (6.9)$$

onde ω_{n_i} é a i -ésima frequência natural, n_{exp} é o número de frequências naturais utilizadas para ajustar o modelo e \mathbf{q} é o vetor de parâmetros do modelo que serão ajustados.

Um método híbrido é empregado para encontrar as soluções ótimas, no qual um algoritmo heurístico é associado com um algoritmo de busca direta (RAO, 2009). Primeiro, o algoritmo *Particle Swarm Optimization* (PSO, heurístico) é utilizado para encontrar a região no domínio da solução com bons candidatos. O número de iterações máximo utilizado foi 100, com uma tolerância de convergência de 10^{-6} . Segundo, foi adotado o *Sequential Quadratic Programming* (SQP, busca direta) para refinar a busca da solução ótima entre os bons candidatos. Como os algoritmos de busca direta precisam de um ponto inicial para começar a busca, é adotado como ponto inicial a solução obtida pelo algoritmo heurístico, o que é conhecido como metodologia híbrida. No SQP foi utilizado um máximo de 500 iterações com tolerância de convergência de 10^{-6} . O algoritmo completo

foi programado em Matlab e o procedimento foi realizado três vezes, afim de garantir que a solução ótima foi obtida.

Este procedimento de ajuste de parâmetros foi executado em três passos consecutivos para o caso de velocidade nula do rotor:

1. identificação experimental do eixo sem discos na direção vertical para obter os valores dos parâmetros módulo de Young do eixo e rigidezes verticais dos mancais;
2. identificação experimental do eixo sem discos na direção horizontal para obter os valores as rigidezes horizontais dos mancais;
3. identificação experimental do eixo com três discos para obter os valores dos coeficientes de rigidez dos discos.

Os parâmetros ajustados obtidos nos passo 1 e 2 (eixo liso) são mostrados na Tabela 7. Uma comparação entre as FRFs obtidas no experimento e o modelo ajustado do rotor sem discos é mostrado na Fig. 63. Como pode-se notar, o modelo ajustado está em boa concordância com os dados experimentais para o caso do eixo liso em velocidade de rotação nula.

Tabela 7 – Parâmetros ajustados nos passos 1 e 2.

| Parametro | Valor | Unidade |
|--------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| rigidez linear horizontal do mancal (k_x^m) | 1.1×10^8 | N.m^{-1} |
| rigidez linear vertical do mancal (k_y^m) | 6.1×10^{11} | N.m^{-1} |
| rigidez torcional horizontal do mancal (k_β^m) | 6.5×10^2 | N.m.rad^{-1} |
| rigidez torcional vertical do mancal (k_γ^m) | 1×10^2 | N.m.rad^{-1} |
| módulo de Young do material do eixo | 2.07×10^{11} | N.m^{-2} |
| densidade de massa do eixo | 7,820 | kg.m^{-3} |
| densidade de massa do disco | 7,834 | kg.m^{-3} |

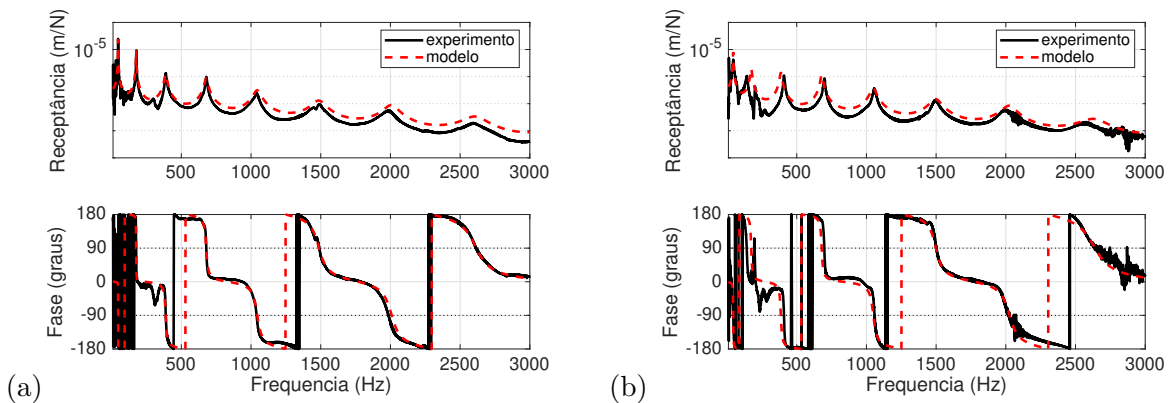


Figura 63 – Comparação entre a FRF numérica e a FRF experimental do rotor sem discos: (a) identificação na direção vertical, (b) identificação na direção horizontal.

Tabela 8 – Parâmetros ajustados no passo 3.

| Parâmetro | Disco 1 | Disco 2 | Disco 3 | Unidade |
|----------------------------------|-------------------|----------------------|-------------------|-----------------------|
| rigidez linear (k_x) | 3.8×10^9 | 5.6×10^{10} | 7.7×10^8 | N.m ⁻¹ |
| rigidez linear (k_y) | 3.8×10^9 | 5.6×10^{10} | 7.7×10^8 | N.m ⁻¹ |
| rigidez torcional (k_α) | 1.3×10^5 | 1.0×10^5 | 1.1×10^5 | N.m.rad ⁻¹ |
| rigidez torcional (k_θ) | 1.3×10^5 | 1.0×10^5 | 1.1×10^5 | N.m.rad ⁻¹ |

Utilizando os parâmetros obtidos e listados na Tabela 7, pode-se proceder para o passo 3 (rotor com três discos) e obter os valores ajustados dos parâmetros listados na Tabela 8. Por simplicidade, os coeficientes de rigidez dos discos são considerados iguais em ambas direções, *i.e.* $k_x = k_y$ and $k_\alpha = k_\theta$. Neste caso, o disco 1 é montado próximo do primeiro mancal, o disco 2 é montado no meio do rotor e o disco três é montado próximo do segundo mancal, o qual está acoplado com o motor elétrico (veja Fig. 58).

Uma comparação entre as FRFs obtidas no experimento e a obtida com o modelo ajustado do rotor com três discos é mostrada na Fig. 64. Como pode-se notar, o modelo ajustado está em boa concordância com os dados experimentais para o caso do rotor com três discos em velocidade de rotação nula.

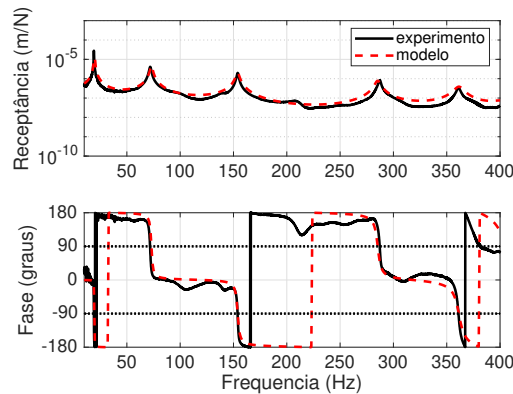


Figura 64 – Comparação entre a FRF numérica e a FRF experimental do rotor com três discos (identificação na direção vertical).

Como já foi visto anteriormente, o vazio modal deve aparecer entre a N_D -ésima e $(N_D + 1)$ -ésima ressonância do rotor periódico, onde N_D é o número de discos. Na Figura 64, há um vazio modal entre a terceira e quarta ressonância do sistema, como esperado ($N_D = 3$). Neste caso, a largura de banda experimental do vazio modal é de 133.3 Hz e sua frequência central é 220.5 Hz.

6.4 Otimização do Vazio Modal na Bancada de Testes

Considerando que o modelo da bancada de testes está correlacionado experimentalmente, pode-se utiliza-lo para otimizar a posição dos discos visando deslocar o vazio modal para uma frequência de interesse. Para fazer isto, adota-se o problema de otimização

formulado nas eqs.(6.2) até (6.4). Neste caso, um algoritmo de busca direta é empregado para encontrar as soluções ótimas. O algoritmo adotado foi o SQP, rodando um máximo de 500 iterações com uma tolerância de convergência de 10^{-16} para a função objetivo. O ponto inicial para começar a busca é a posição dos discos na configuração periódica e para cada incremento na frequência central do vazio modal, a última solução ótima é utilizada como ponto inicial de busca da próxima otimização. A frequência central desejada é deslocada por incrementos de $\pm 1\%$.

Adotando o modelo ajustado e este procedimento de otimização, chega-se aos resultados numéricos mostrados na Fig. 65. Como pode-se notar, o procedimento de otimização convergiu para um solução que varia a frequência central do vazio modal entre -5% e $+27\%$ em relação à frequência central do rotor periódico. As cores quentes representam alta amplitude da resposta (picos de ressonância), enquanto as cores frias representam baixa resposta vibratória. A região de vazio modal é a zona em azul claro ao redor da linha $\omega_{central}$. Assim, os vazios modais resultantes foram deslocados com sucesso para as regiões desejadas, com um aumento significativo da largura de banda quando a frequência central vai para frequências mais altas (Fig. 66).

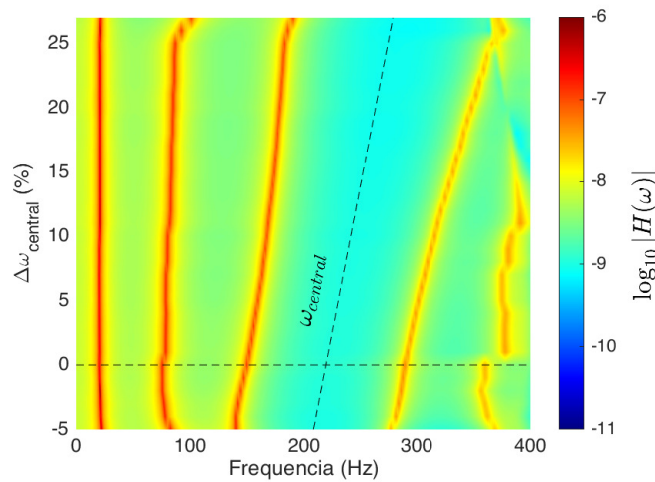


Figura 65 – Funções de resposta em frequência dos rotores otimizados em função da variação da frequência central: resultados numéricos para o rotor com três discos da bancada de teste.

A Figura 66 apresenta a largura de banda dos vazios modais otimizados em função da variação da frequência central. Como pode-se notar, a largura de banda foi maximizada mesmo para a frequência central do caso periódico, permanecendo acima de 137 Hz em todos os casos estudados (a largura de banda do vazio modal do rotor periódico é 133.3 Hz). Conforme a frequência central vai para frequências mais altas, a largura de banda aumenta consideravelmente, alcançando 183 Hz em $\Delta\omega_{central} = +25\%$. O erro entre as frequências centrais obtidas do vazio modal e as desejadas é apresentado na Fig. 67. O erro entre o valor desejado e o obtido permaneceu abaixo de 0.5%, conforme imposto pela

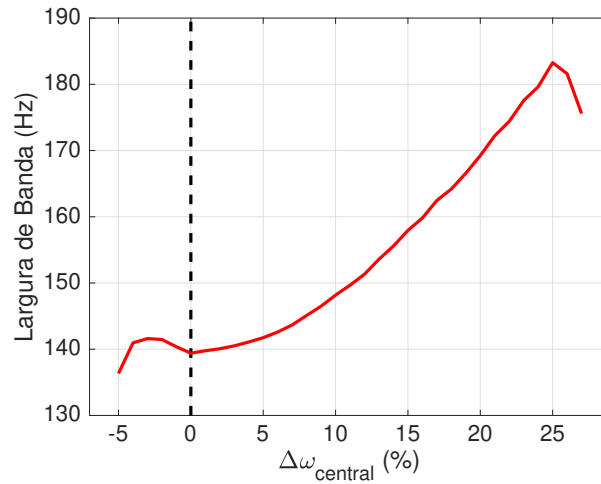


Figura 66 – Largura de banda do vazio modal em função da variação da frequência central para as soluções otimizadas.

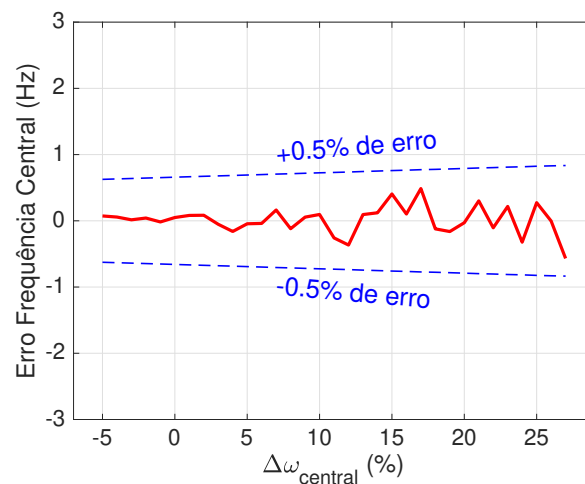


Figura 67 – Erro frequência central dos vazios modais otimizados em função da variação da frequência central.

restrição $g_2(\mathbf{q})$ (eq.(6.4)).

As posições otimizadas dos discos são mostradas na Fig. 68. Novamente, há um padrão na otimização do rotor, onde os discos 2 e 3 se aproximam, tendendo a uma geometria periódica diatômica como previamente observada no rotor com seis discos (Fig. 57). Na solução otimizada, o espaçamento entre os discos foi de uma configuração com distribuição igualitária para uma configuração com distribuição 'curta-longa-curta-longa'. Note que, para o caso periódico ($\Delta\omega_{central} = 0\%$), a posição dos discos não casam com as posições periódicas. Esta é uma consequência do procedimento de otimização, o qual maximiza o vazio modal, mesmo para o caso periódico original

Os resultados numéricos obtidos são validados experimentalmente na bancada de testes. Para isso, sete rotores otimizados são testados: -5% , 0% , $+5\%$, $+10\%$, $+15\%$, $+20\%$,

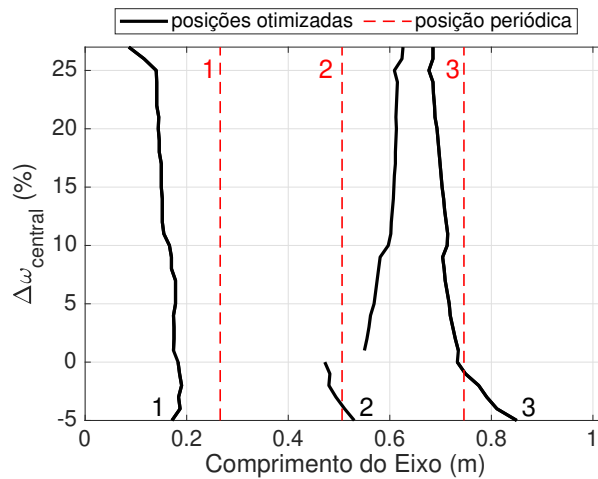


Figura 68 – Posições otimizadas dos discos ao longo do rotor em função da frequência central.

e +25%. A Figura 69 apresenta três dos sete rotores otimizados testados. A posição dos discos são aquelas definidas pelo procedimento de otimização e a identificação dos sete casos segue o procedimento experimental descrito na seção 6.3.

As configurações ótimas de rotor mostradas na Fig. 69 parecem ser completamente não periódicas. No entanto, se olharmos para um rotor com mais discos e com um número par de discos (por exemplo, o rotor com seis discos cujas posições otimizadas são mostradas na Fig. 57), veremos que os rotores ótimos tendem a ter um ciclo diatômico-periódico distribuição dos discos, caracterizada por:

- discos nas extremidades do rotor deslocados em direção aos mancais;
- discos não nas extremidades do rotor agrupados em pares;

Observando a Fig. 68, pode-se notar que isso acontece com o rotor com três discos na bancada de teste: um dos discos na extremidade do rotor é deslocado em direção ao mancal (mancal esquerdo na Fig. 69) e os outros dois discos ficam agrupados juntos. A presença de apenas três discos no sistema não permite a visualização da periodicidade diatômica, mas ela existe (veja a semelhança entre as Figs. 57 e 68).

A Figura 70 apresenta as frequências naturais dos rotores obtidas experimentalmente para todos os casos otimizados em comparação com as predições numéricas. Como pode-se notar, uma boa concordância é observada entre os resultados numéricos e experimentais, mostrando, assim, que o procedimento de otimização é efetivo. A possibilidade de deslocar o vazio modal sem mudar a inércia dos discos, apenas a distribuição de inércia ao longo do rotor, também é validada. Uma pequena divergência é observada quando o vazio modal é deslocado para frequências mais altas: a largura de banda experimental do vazio modal

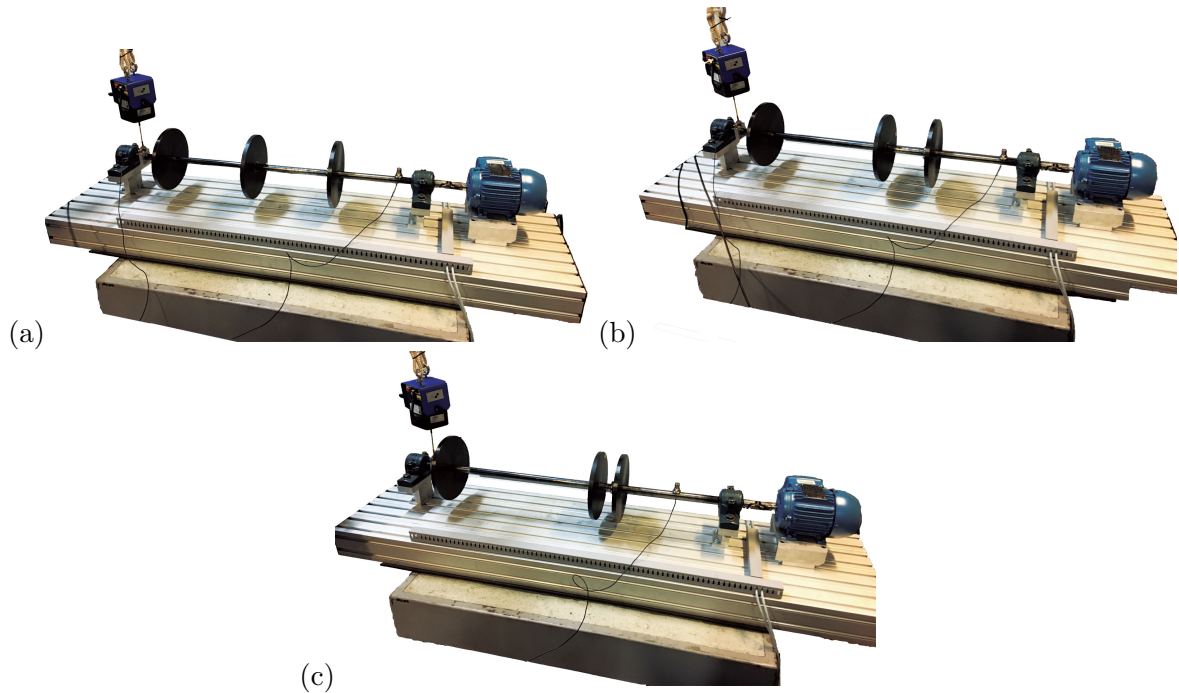


Figura 69 – Rotores na bancada de testes com as posições dos discos otimizadas: (a) $\Delta\omega_{central} = 0\%$, (b) $\Delta\omega_{central} = +5\%$, e (c) $\Delta\omega_{central} = +25\%$.

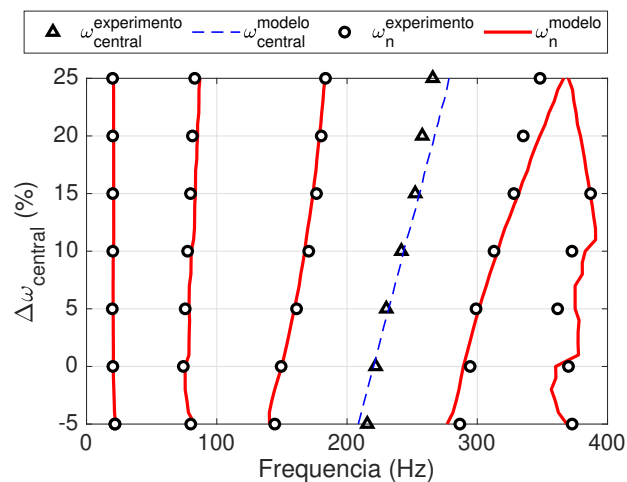


Figura 70 – Frequências naturais dos rotores otimizadas em função da variação da frequência central: comparação entre resultados numéricos e experimentais.

obtida é menor que a encontrada nas predições numéricas (Fig. 71). Entretanto, é possível alcançar maiores larguras de banda que a encontrada no rotor periódico para todos os casos experimentais, uma consequência do procedimento de otimização, que maximiza o tamanho do vazio modal.

O erro entre as frequências centrais numéricas dos vazios modais e experimentais é apresentado na Fig. 72. O erro entre o valor desejado (previsto numericamente) e o valor obtido (experimental) permaneceu abaixo de 4% em todos os casos. Entretanto, é

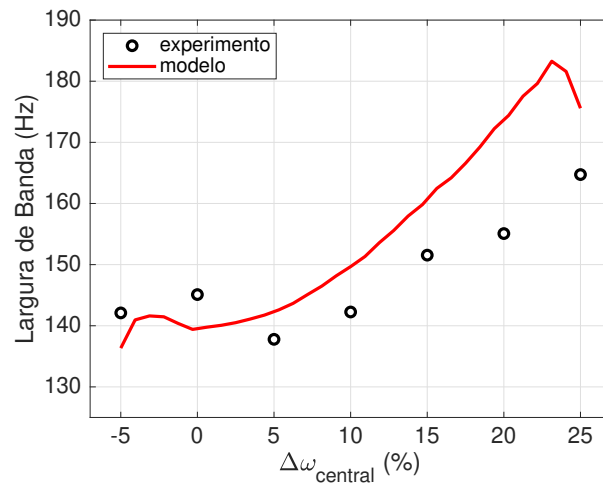


Figura 71 – Largura de banda do vazio modal em função da variação da frequência central: comparação entre resultados numéricos e experimentais.

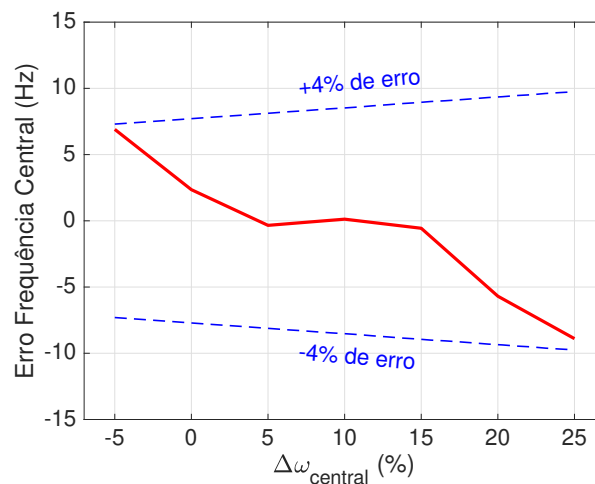


Figura 72 – Erro frequência central dos vazios modais otimizados em função da variação da frequência central.

importante notar que o erro foi próximo a zero para variações da frequência central entre +5% e +15%.

A Figura 73 apresenta uma comparação entre a largura de banda dos vazios modais e o espaçamento modal médio do rotor até 400 Hz. A largura de banda dos vazios modais é aproximadamente duas vezes o espaçamento modal médio do sistema para os resultados experimentais. Tais resultados não somente mostram que os vazios modais aparecem nos rotores otimizados, como esperado, mas, também, mostra que a predição teórica de maiores larguras de banda está em boa concordância com os resultados experimentais.

Os vazios modais em estruturas periódicas, principalmente os devido ao mecanismo de *Bragg* como os observados neste trabalho, tendem a reduzir a vibração da estrutura devido à baixa transmissibilidade da estrutura dentro da região de frequência do vazio

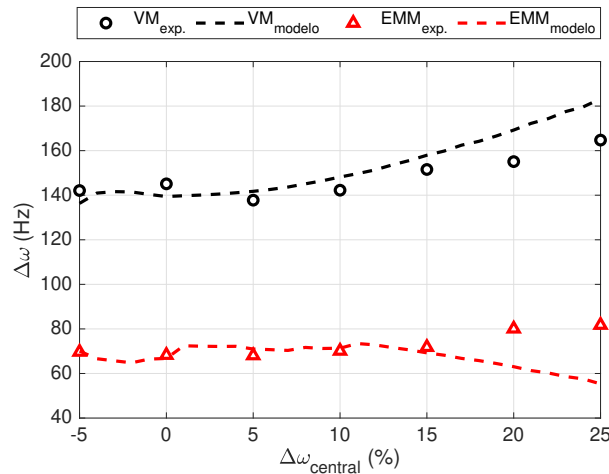


Figura 73 – Largura de banda do vazio modal (VM) em comparação com o espaçamento modal médio (EMM) do rotor em função da variação da frequência central: comparação entre resultados numéricos e experimentais.

modal. Isso significa que qualquer onda de vibração com frequências dentro da largura de banda do vazio modal não propagará ao longo da estrutura. Em vez disso, elas sofrerão uma forte atenuação. Assim, espera-se que a vibração seja localizada próximo à fonte de excitação na região do vazio modal. A ideia da formação do vazio modal é isolar a estrutura da fonte de excitação na faixa do vazio modal.

Quando a estrutura perde sua periodicidade, como os rotores otimizados neste trabalho, pode levar a um fenômeno chamado de localização de modo. Este fenômeno é caracterizado por um nível de vibração excessivo em uma região específica da estrutura sob excitação. De fato, esse fenômeno ocorre no presente estudo. Tomando o rotor otimizado com $\Delta\omega_{central} = 25\%$ (Fig. 69c), e excitando o sistema na posição do disco #1, obtêm-se as FRFs mostradas na Fig. 74a. Como se pode observar, o fenômeno de localização ocorre no modo de vibrar #4, onde a região do eixo entre os discos #1 e #2 apresenta níveis de vibração mais elevado que o restante do rotor. Por outro lado, se a excitação for na posição do disco #2 (Fig. 74b), tal fenômeno não é claramente observado. Embora não seja esperado que máquinas rotativas sejam excitadas em suas frequências de ressonância durante a operação, é importante estar atento a tal fenômeno de localização da resposta vibratória do rotor no processo de otimização do sistema.

6.4.1 Efeito da Velocidade de Rotação no Vazio Modal

O rotor com três discos (periódico e otimizado) foi testado sob diferentes velocidades de rotação para medir os efeitos giroscópicos na largura de banda do vazio modal. As FRFs dos rotores são medidas de acordo com o procedimento descrito na seção 6.3. A Figura 75 apresenta o diagrama de cascata experimental da receptância do sistema em função da frequência de excitação e da velocidade de rotação para dois casos: rotor periódico e rotor

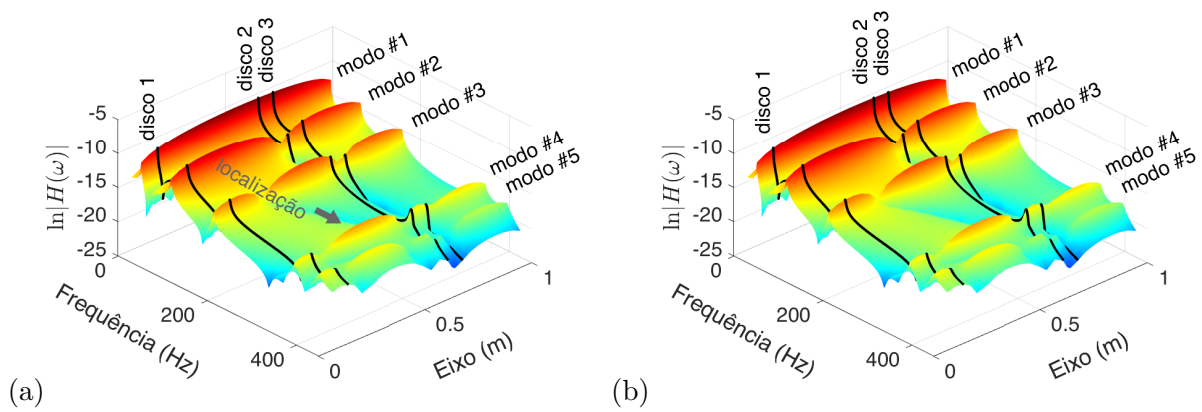


Figura 74 – FRFs do rotor otimizado com $\Delta\omega_{central} = 25\%$ (resultados numéricos): (a) excitação no disco #1 e (b) excitação no disco #2.

otimizado com frequência central deslocada em $+15\%$. A faixa de frequência desta análise foi limitada até 400 Hz porque a resposta de receptância do sistema diminui fortemente com o aumento das frequências, comprometendo assim a relação sinal-ruído da resposta acima de 400 Hz.

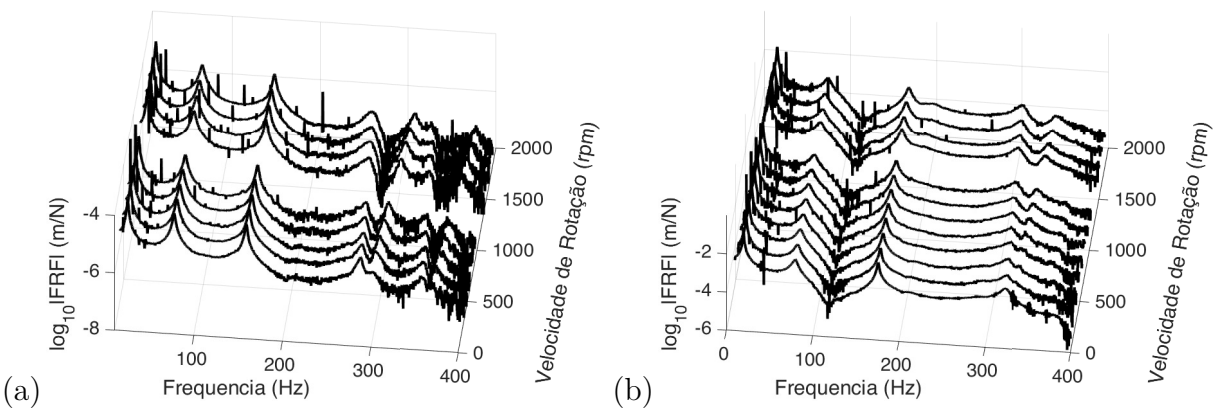


Figura 75 – Diagrama de cascata da receptância do sistema do rotor periódico e do rotor otimizado em função da velocidade de rotação: (a) rotor periódico, (b) $\Delta\omega_{central} = +15\%$

Nos diagramas de cascata (Fig. 75), pode-se observar que os três primeiros picos de ressonância não são afetados significativamente quando a velocidade de rotação varia. Isso significa que a frequência de início do vazio modal não é afetada significativamente pelo efeito giroscópico. Entretanto, o quarto pico de ressonância (frequência de término do vazio modal) se divide em dois modos, precessão direta e precessão retrógrada, devido ao efeito giroscópico. Este efeito, estreita o vazio modal com o aumento da velocidade de rotação.

Dos diagramas de cascata, podem-se extrair os diagramas de Campbell experimentais do sistema. A Figura 76 apresenta os diagramas de Campbell para o rotor periódico e

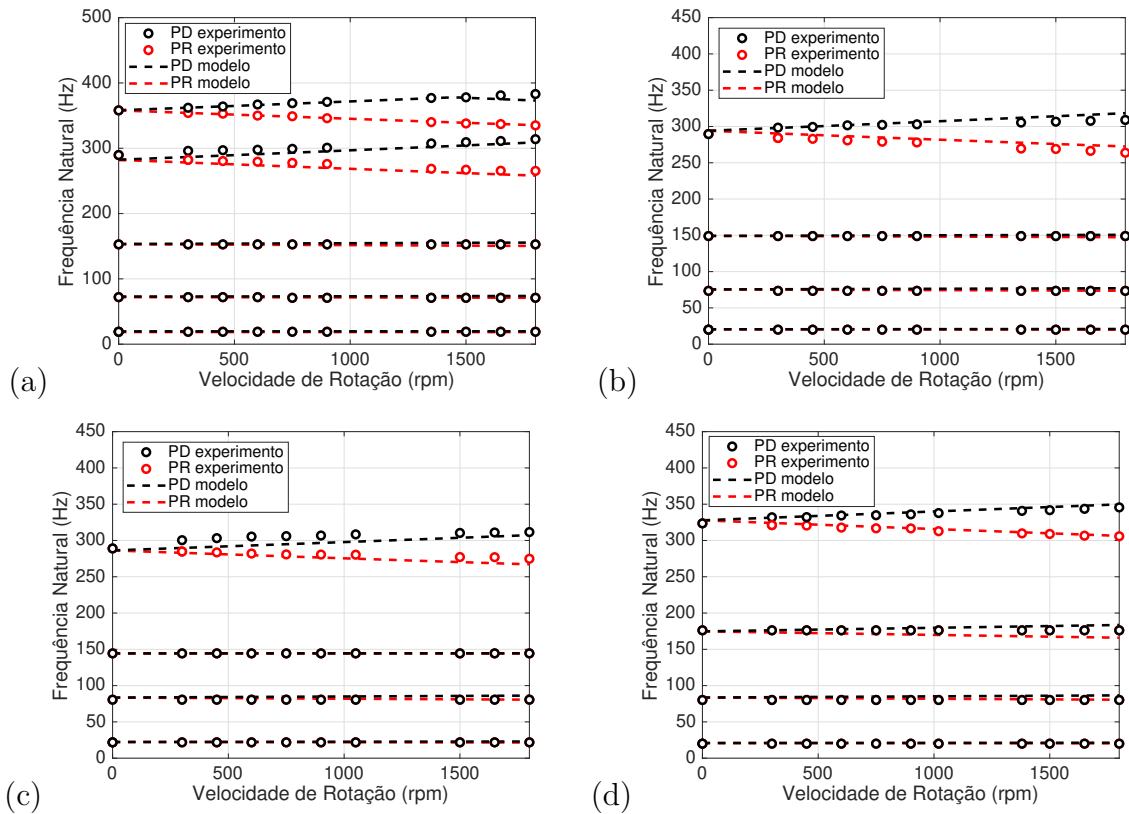


Figura 76 – Diagramas de Campbell do rotor com três discos na bancada de teste: (a) rotor periódico, (b) $\Delta\omega_{central} = 0\%$, (c) $\Delta\omega_{central} = -5\%$, (d) $\Delta\omega_{central} = +15\%$.

para três casos otimizados, com sua respectiva predição numérica. Mais uma vez, pode-se notar que as três primeiras frequências naturais são afetadas significativamente pela velocidade de rotação. Fica, também, claro no diagrama de Campbell o efeito de separação da quarta ressonância (frequência de término do vazio modal). Neste caso, a frequência associada com o modo de precessão retrógrada se desloca para frequências mais baixas, enquanto a frequência associada com o modo de precessão direta se descola para frequências mais altas. Este efeito pode ser observado, também, na quinta frequência natural do rotor periódico (Fig. 76(a)).

Assim sendo, ao dividir o quarto pico de ressonância em dois, o efeito giroscópico tende a diminuir a largura de banda dos vazios modais com o aumento da velocidade de rotação (Fig. 76). Na velocidade de rotação de 1,800 rpm, o vazio modal no rotor periódico diminuiu em 19% (de 134 Hz para 109 Hz); o vazio modal do rotor otimizado com $\Delta\omega_{central} = 0\%$ diminuiu em 19% (de 140 Hz para 114 Hz); o vazio modal do rotor otimizado com $\Delta\omega_{central} = -5\%$ diminuiu em 10% (de 145 Hz para 130 Hz); e o vazio modal do rotor otimizado com $\Delta\omega_{central} = +15\%$ diminuiu em 12% (de 147 Hz para 129 Hz).

Entretanto, esta é uma análise conservativa do sistema, já que a frequência que fecha o vazio modal está associada a um modo de precessão retrógrada. Considerando que a

maioria dos sistemas rotativos não excitam modos de precessão retrógrada (*e.g.* desbalanço, desalinhamento, empenamento térmico), o vazio modal, na verdade, aumenta devido ao deslocamento da frequência associada ao modo de precessão direta para frequências mais altas. Nestes casos, na velocidade de rotação de 1,800 rpm, o vazio modal do rotor periódico aumentou em 19%; o vazio modal do rotor otimizado com $\Delta\omega_{central} = 0\%$ aumentou em 19%; o vazio modal do rotor otimizado com $\Delta\omega_{central} = -5\%$ aumentou em 10%; e o vazio modal do rotor otimizado com $\Delta\omega_{central} = +15\%$ aumentou em 12%.

6.5 Conclusões

Este Capítulo apresenta a evidência numérica e experimental da formação de vazios modais em sistemas rotativos. Considerando a questão se é possível deslocar estes vazios modais, a resposta é sim, é possível. Ao adotar um procedimento de otimização, é possível deslocar o vazio modal aproximadamente entre -5% e +25% no domínio de frequência do vazio modal do rotor perfeitamente periódico. O procedimento de otimização, também, aumenta a largura de banda do vazio modal, mesmo para o caso de $\Delta\omega_{central} = 0\%$. Tudo isso, é alcançado através da otimização da posição dos discos ao longo do rotor

Ao deslocar o vazio modal para frequências mais altas, o rotor não apresenta mais uma distribuição periódica-monotônica. Ao invés disso, os discos tendem a se agrupar em pares, resultando em uma distribuição periódica-diatômica. Este fenômeno foi observado no exemplo numérico e foi experimentalmente verificado em uma bancada de testes de laboratório.

Nos testes experimentais do rotor com três discos, a velocidade de rotação não afeta significativamente a frequência de início do vazio modal (terceiro pico de ressonância). Por outro lado, a frequência de término do vazio modal se divide em dois picos de ressonância associados com os modos de precessão direta e retrógrada (um resultado esperado do efeito giroscópico). O pico de ressonância do modo de precessão retrógrada desloca para frequências mais baixas, enquanto o pico de ressonância do modo de precessão direta desloca para frequências mais altas, com o aumento da velocidade de rotação. Portanto, pode-se inferir que a largura de banda do vazio modal diminui com o aumento da velocidade de rotação. Entretanto, considerando que a maioria dos sistemas rotativos são sujeitos a forças de excitação que não excitam modos de precessão retrógrada, o pico de ressonância associado com este modo, na verdade, não aparece. Como consequência disto, a largura de banda do vazio modal aumenta com o aumento da velocidade de rotação. Foi obtido um aumento de até 19% na largura de banda do vazio modal na velocidade de rotação de 1,800 rpm.

Os resultados experimentais obtidos corroboram os numéricos. Entretanto, torna-se evidente que o modelo numérico do sistema deve representar, apropriadamente, a física do problema para alcançar bons resultados. As correções adotadas no modelo foram

necessárias para melhorar a sua qualidade, podendo ajudar outros pesquisadores a obter melhores representações de sistemas rotativos em simulações numéricas.

Na prática, a realocação dos elementos de trabalho ao longo do rotor afetará a posição e a geometria das palhetas e volutas na máquina rotativa, o que afeta a dinâmica interna do fluido em escoamento. Conseqüentemente, poderá exigir um reprojeto da carcaça da máquina considerando sua eficiência e fluxo. O presente trabalho destaca a possibilidade de projetar a máquina considerando o fenômeno dinâmico de formação de vazios modais devido à distribuição periódica da inércia ao longo do rotor, o que pode reduzir significativamente a vibração durante a operação. Mais importante, isso pode ser alcançado simplesmente montando os elementos de trabalho em posições apropriadas no rotor sem quaisquer dispositivos adicionais que ocupariam um espaço precioso dentro da máquina

7 PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM ROTORES PERIÓDICOS E QUASE PERIÓDICOS COM VELOCIDADE DE ROTAÇÃO NULA

Neste Capítulo, serão analisados, numericamente, as dispersões dos rotores periódicos e quase periódicos. Os casos analisados serão os mesmo do Capítulo 3 (de formação dos vazios modais), além disso, também serão analisados os rotores otimizados apresentados na seção 6.1. Isto será feito, a fim de caracterizar o tipo de vazio modal que os rotores periódicos e quase periódicos possuem. Portanto, mostra-se que os vazios modais nesses sistemas são devidos à não propagação de ondas na faixa de frequência em que aparecem.

7.1 Modelagem Via Ondas De Uma Malha De Elementos Finitos Delimitados Por Dois Nós Com n_{gdl} Graus De Liberdade Por Nó

O método WFE (*Wave Finite Element*) é utilizado para estudar a propagação de ondas em estruturas periódicas. O método consiste em dois passos: 1) o sistema de interesse é modelado via elementos finitos e 2) as equações de movimentos são obtidas no domínio da frequência e a condição de periodicidade é aplicada. Isto leva a um problema de autovalor e autovetor, cuja solução fornece as curvas de dispersão e modos de onda. Para estruturas periódicas, o comportamento dinâmico da estrutura pode ser obtido através da análise apenas da célula unitária (Fig. 77). Já estruturas que não são estritamente periódicas, como os rotores otimizados, o comportamento dinâmico é obtido fazendo a análise da super célula, *i.e.*, considera-se que a célula unitária é a estrutura completa (Fig. 78). Para que a análise tenha uma boa precisão, o tamanho dos elementos finitos deve ser menor que um sexto do comprimento de onda esperado. Além disso, para evitar problemas numéricos, a malha de elementos finitos construída deve possuir elementos de tamanho semelhante, quando possível de tamanhos iguais.

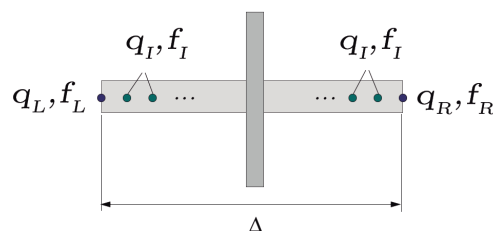


Figura 77 – Malha de elementos finitos da célula unitária simétrica.

Considere uma malha de elementos finitos com elementos delimitados por dois nós (Fig. 77 e 78), estes nós podem ter n_{gdl} graus de liberdade (gdl) por nó. As equações de movimento no domínio da frequência são dadas por:

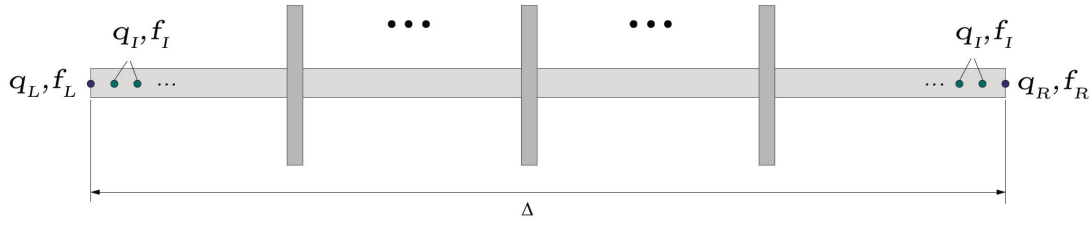


Figura 78 – Malha de elementos finitos de uma estrutura modelada por elementos finitos.

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (7.1)$$

onde, \mathbf{K} e \mathbf{M} são as matrizes de rigidez e inércia do sistema, respectivamente; \mathbf{q} é o vetor de deslocamentos nodais; e \mathbf{f} é o vetor de forças nodais;

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_R \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_I \\ \mathbf{f}_R \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

onde \mathbf{q}_L , \mathbf{q}_R , \mathbf{f}_L e \mathbf{f}_R são os vetores, compostos pelos graus de liberdade à esquerda (L) e à direita (R), de deslocamentos e forças nodais, respectivamente; e \mathbf{q}_I , \mathbf{f}_I são os vetores, compostos pelos graus de liberdade internos (I), de deslocamentos e forças nodais, respectivamente.

A condição de periodicidade é dada por:

$$\mathbf{q}_R = \lambda \mathbf{I}_{n_{gdl}} \mathbf{q}_L \quad (7.4)$$

onde λ é o numero de onda de Bloch:

$$\lambda = e^{-ik\Delta} \quad (7.5)$$

Assim, aplicando a condição de periodicidade, pode-se reescrever \mathbf{q} como se segue:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_R \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda}_R \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_{gdl}} & \mathbf{0}_{n_{gdl} \times n_{gi}} \\ \mathbf{0}_{n_{gi} \times n_{gdl}} & \mathbf{I}_{n_{gi}} \\ \lambda \mathbf{I}_{n_{gdl}} & \mathbf{0}_{n_{gdl} \times n_{gi}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_I \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

onde n_{gi} é o numero de graus de liberdade internos da malha; n_i é o número de nós internos da malha; e $n_{gi} = n_i \cdot n_{gdl}$.

Equilíbrio no nó L implica em:

$$\mathbf{f}_L + \lambda^{-1}\mathbf{f}_R = \mathbf{0} \quad (7.7)$$

Além disso, as forças nodais dos nós internos são consideradas nulas. O que significa:

$$\mathbf{f}_I = \mathbf{0} \quad (7.8)$$

Na forma matricial:

$$\mathbf{\Lambda}_L \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (7.9)$$

ou,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_{gdL}} & \mathbf{0}_{n_{gdL} \times n_{id}} & \lambda^{-1}\mathbf{I}_{n_{gdL}} \\ \mathbf{0}_{n_{id} \times n_{gdL}} & \mathbf{I}_{n_{id}} & \mathbf{0}_{n_{id} \times n_{gdL}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_I \\ \mathbf{f}_R \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (7.10)$$

Substituindo a Eq. (7.6) em (7.1) e pré-multiplicando por $\mathbf{\Lambda}_L$, tem-se:

$$\mathbf{\Lambda}_L [\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{\Lambda}_R \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_I \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda}_L \begin{bmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_I \\ \mathbf{f}_R \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

$$\bar{\mathbf{D}}(\lambda, \omega) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_I \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (7.12)$$

onde,

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{\Lambda}_L \mathbf{K} \mathbf{\Lambda}_R - \omega^2 \mathbf{\Lambda}_L \mathbf{M} \mathbf{\Lambda}_R \quad (7.13)$$

onde, $\bar{\mathbf{D}}$ é a matriz de rigidez dinâmica da malha com o nó R projetado no nó L .

Essa projeção do nó R no nó L , feita pela condição de periodicidade, é o artifício matemático que cria a estrutura infinita. Isso pode ser observado ao percorrer dos nós da malha (Fig. 77 ou 78) começando no nó L , então seguem-se os nós internos e quando o nó R é encontrado, descobre-se que, na verdade, este é o nó L propagado pelo número de onda de Bloch, após o nó L os nós internos se seguem, e assim por diante. Portanto, a estrutura infinita é criada e pode-se obter o diagrama de dispersão da estrutura, *i.e.*, a propagação de ondas sem considerar as reflexões nas condições de contorno.

Nota-se que o WFE é um método muito prático. Isso pode ser inferido ao perceber que, uma vez que as matrizes $\mathbf{\Lambda}_L$ e $\mathbf{\Lambda}_R$ são construídas, pode-se facilmente obter os diagramas de dispersão de qualquer estrutura arbitrária modelada com o tipo de elemento finito definido.

7.2 Rotores Delgados Com Discos de Baixa Inércia

Nesta seção serão comparadas as dispersões das células unitárias com as FRFs da estrutura finita resultante. Os rotores analisados são os mesmos da seção 3.3.

7.2.1 Célula Unitária com Um Disco

A Figura 79 apresenta as dispersões para a célula unitária simétrica e assimétrica do rotor com 7 discos, em comparação com a FRF da estrutura finita. Na Figura 79a pode-se observar que, na faixa de frequência referente ao vazios modais na FRF, não há ondas propagantes na dispersão da célula unitária. O que demonstra que o vazio modal é caracterizado pela não propagação de ondas em sua faixa de frequência. Já na Figura 79b, é interessante notar que o modo de defeito que aparece no segundo vazio modal, não aparece na dispersão, uma consequência da quebra da periodicidade ao construir a estrutura finita. A dispersão não mostra o modo de defeito, pois independente da simetria ou assimetria da célula, a estrutura infinita é perfeitamente periódica.

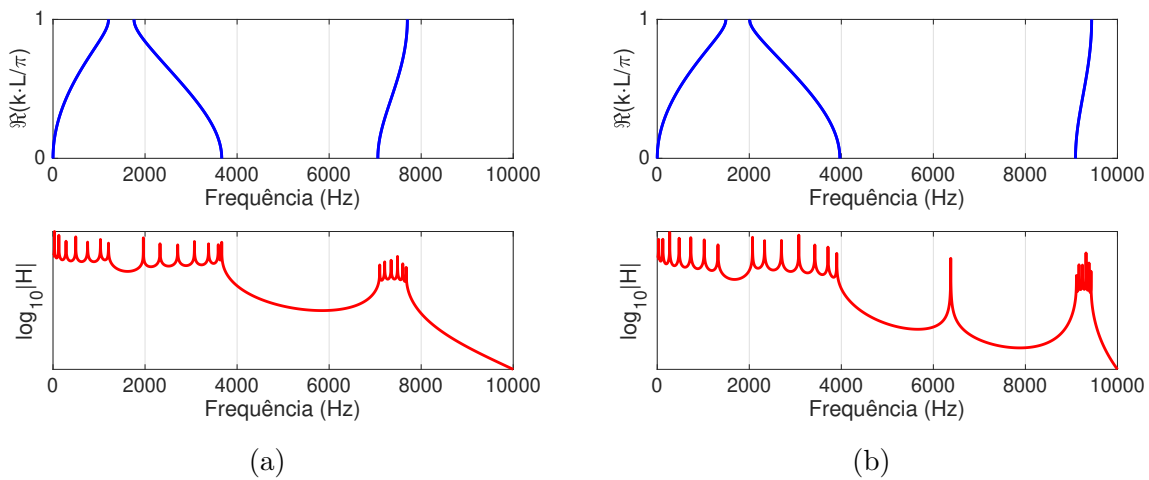


Figura 79 – Comparação entre a dispersão da célula unitária e a FRF do rotor com 7 discos: (a) célula unitária simétrica, (b) célula unitária assimétrica.

A Fig. 80 mostra os diagramas de dispersão em função da célula unitária para cada número de discos em rotação nula. Como pode-se observar, com o aumento de número de discos, ou seja, com a diminuição do tamanho da célula unitária, aparecem três regiões onde não há ondas propagantes (regiões brancas 1, 2 e 3 na Fig. 80). Além disso, na Fig. 80a pode-se notar que em todas as zonas de não propagação (zonas brancas), não há frequências naturais (pontos pretos) da estrutura finita correspondente. O mesmo não acontece na Fig. 80b, pois as estruturas finitas correspondentes, foram obtidas utilizando uma célula unitária assimétrica. Portanto, os modos na zonas de não propagação, são os modos de defeito.

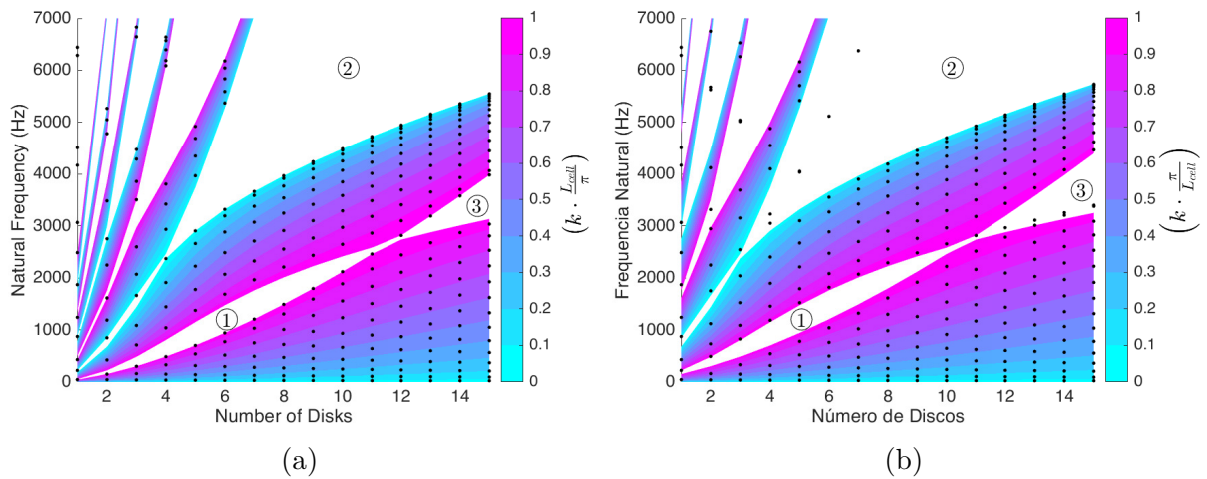


Figura 80 – Frequências naturais da estrutura finita (pontos) e dispersão da célula unitária (cores) em função do número de discos: (a) célula unitária simétrica, (b) célula unitária assimétrica.

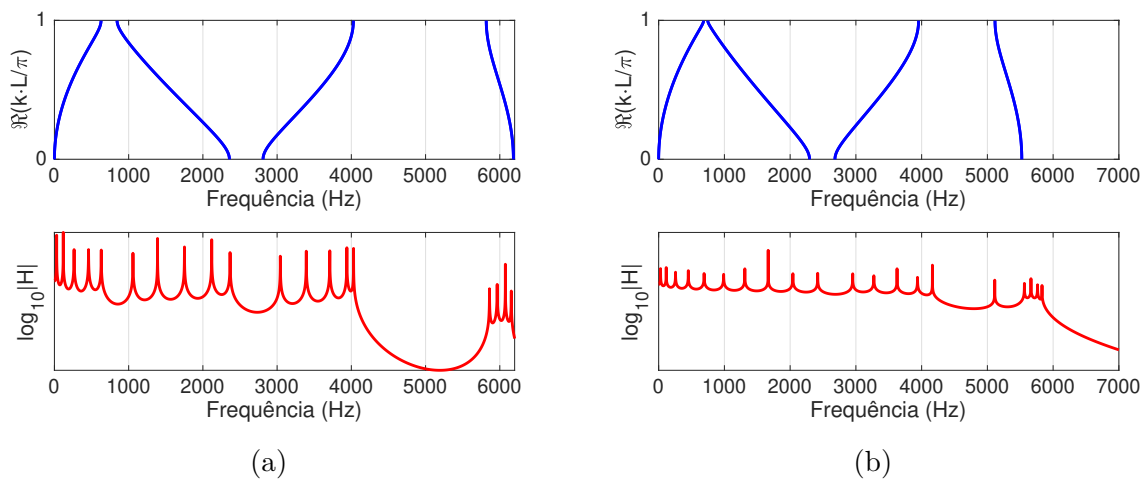


Figura 81 – Comparação entre a dispersão da célula unitária e a FRF do rotor com 10 discos: (a) célula unitária simétrica, (b) célula unitária assimétrica.

7.2.2 Célula Unitária com Dois Discos

A Figura 81 apresenta as dispersões para a célula unitária com dois discos, simétrica e assimétrica, do rotor com 10 discos, em comparação com a FRF da estrutura finita. Na Figura 81a pode-se observar que, na faixa de frequência referente ao três vazios modais na FRF, não há ondas propagantes na dispersão da célula unitária. O que demonstra que o vazio modal é caracterizado pela não propagação de ondas em sua faixa de frequência. Já na Figura 81b, é interessante notar que o modo de defeito que aparece no segundo vazio modal (pico de ressonância na região acima de 4000 Hz), não aparece na dispersão, uma consequência da quebra da periodicidade ao construir a estrutura finita.

A Fig. 82 mostra os diagramas de dispersão em função da célula unitária para cada

número de discos em rotação nula. Como pode-se observar, com o aumento de número de discos, ou seja, com a diminuição do tamanho da célula unitária, aparecem três regiões onde não há ondas propagantes (regiões brancas 1, 2 e 3 na Fig. 82). Além disso, na Fig. 82a e b pode-se notar que em todas as zonas de não propagação (zonas brancas), há frequências naturais (pontos pretos) da estrutura finita correspondente. Isso acontece devido a célula com dois discos ser intrinsecamente assimétrica do ponto de vista radial e das condições de contorno (já que há dois discos com diferentes diâmetros). Estes modos em zonas de não propagação, são os modos de defeito.

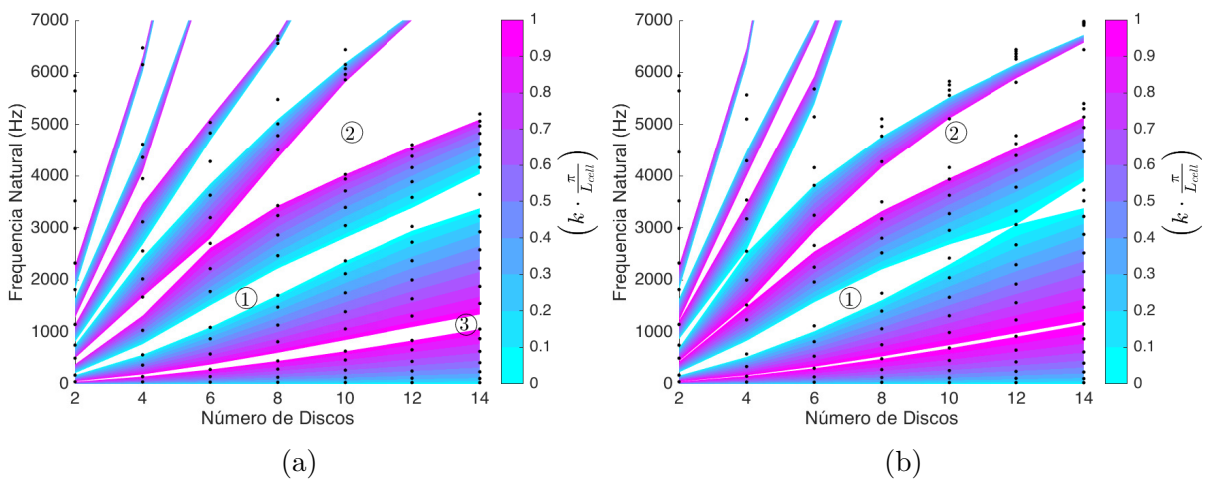


Figura 82 – Frequências naturais da estrutura finita (pontos) e dispersão da célula unitária (cores) em função do número de discos: (a) célula unitária simétrica, (b) célula unitária assimétrica.

7.3 Rotores Delgados Com Discos de Alta Inércia

Nesta seção serão comparadas as dispersões das células unitárias com as FRFs da estrutura finita resultante. Os rotores analisados são os mesmos da seção 3.4.

A Figura 83 apresenta as dispersões para a célula unitária, simétrica e assimétrica, do rotor com 11 discos, em comparação com a FRF da estrutura finita. Na Figura 83a pode-se observar que, na faixa de frequência referente ao dois vazios modais na FRF, não há ondas propagantes na dispersão da célula unitária. O que demonstra que o vazio modal é caracterizado pela não propagação de ondas em sua faixa de frequência. Já na Figura 83b, é interessante notar que o modo de defeito que aparece no segundo vazio modal (pico de ressonância na região acima de 2000 Hz), não aparece na dispersão, uma consequência da quebra da periodicidade ao construir a estrutura finita.

A Fig. 84 mostra os diagramas de dispersão em função da célula unitária para cada número de discos em rotação nula. Como pode-se observar, com o aumento de número de discos, ou seja, com a diminuição do tamanho da célula unitária, aparecem três regiões

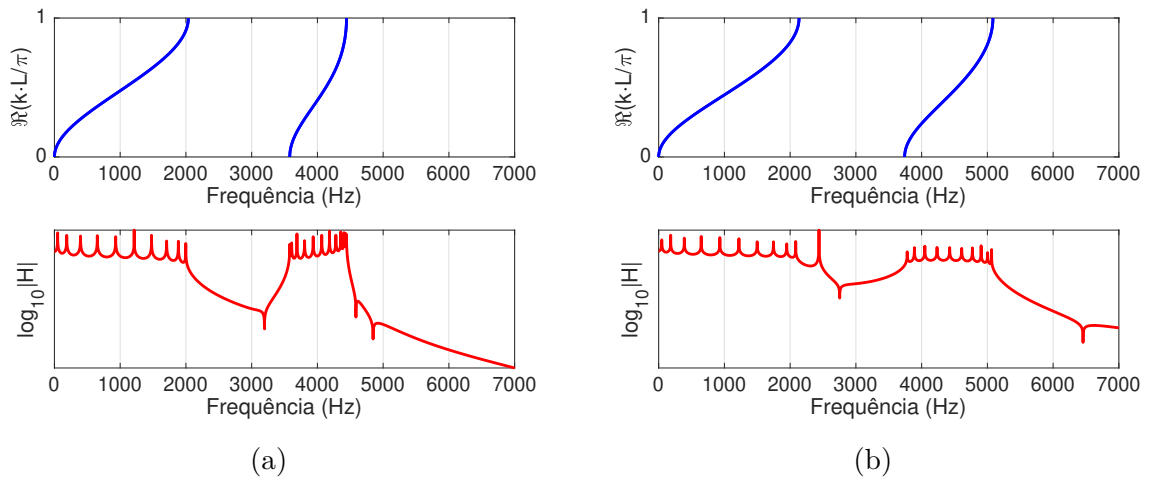


Figura 83 – Comparação entre a dispersão da célula unitária e a FRF do rotor com 11 discos: (a) célula unitária simétrica, (b) célula unitária assimétrica.

onde não há ondas propagantes (regiões brancas 1, 2 e 3 na Fig. 84). Além disso, na Fig. 84a pode-se notar que em todas as zonas de não propagação (zonas brancas), não há frequências naturais (pontos pretos) da estrutura finita correspondente. O mesmo não acontece na Fig. 84b, pois as estruturas finitas correspondentes, foram obtidas utilizando uma célula unitária assimétrica. Portanto, os modos na zonas de não propagação, são os modos de defeito.

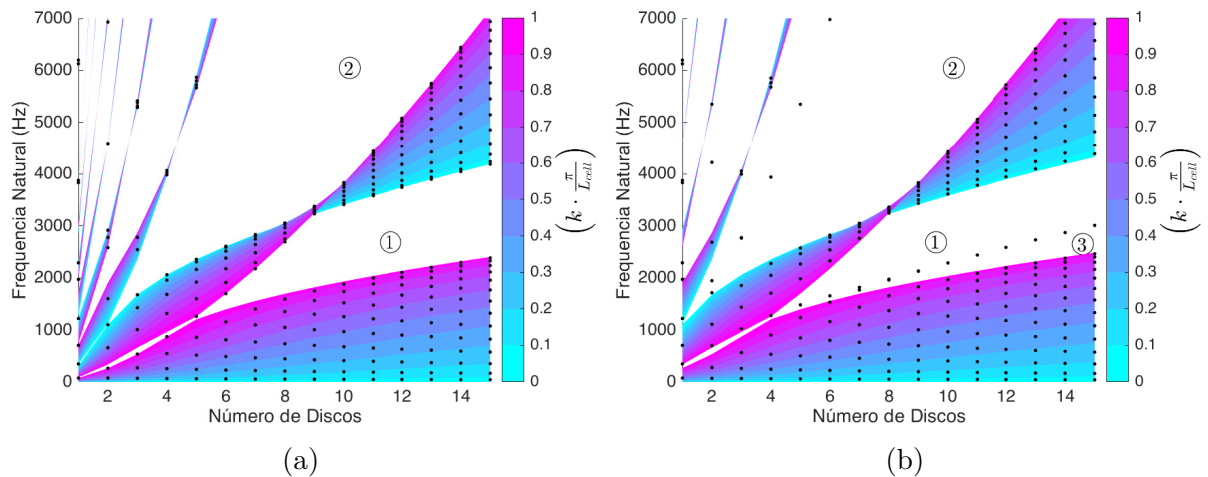


Figura 84 – Frequências naturais da estrutura finita (pontos) e dispersão da célula unitária (cores) em função do número de discos: (a) célula unitária simétrica, (b) célula unitária assimétrica.

7.4 Rotores Otimizados

Nesta seção serão comparadas as dispersões da super célula, *i.e.*, obtida com o modelo de elementos finitos completo da estrutura, com as FRFs da estrutura finita

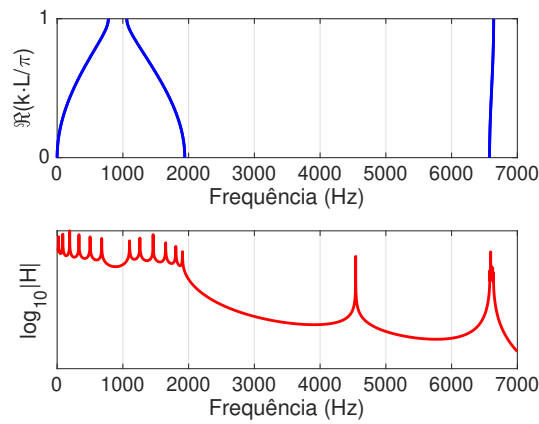


Figura 85 – Comparação entre a dispersão da célula unitária e a FRF do rotor com 6 discos.

resultante. Os rotores analisados são os mesmos da seção 6.1. A Figura 85 apresenta a dispersão para a célula unitária assimétrica, do rotor com 6 discos, em comparação com a FRF da estrutura finita. Na Figura 85 pode-se observar que, os dois vazios modais são caracterizados pela não propagação de ondas. É interessante notar o modo de defeito que aparece na FRF e não aparece na dispersão, uma consequência da quebra da periodicidade ao construir a estrutura finita.

A Figura 86 apresenta as dispersões para a super célula do rotor periódico (Fig. 86a) e otimizado na mesma frequência central do periódico (Fig. 86b), com 6 discos, em comparação com a FRF da estrutura finita. Em ambas as figuras, pode-se observar que, na faixa de frequência referente ao vazio modal na FRF (100 Hz), não há ondas propagantes na dispersão da super célula. O que demonstra que o vazio modal otimizado, também é caracterizado pela não propagação de ondas em sua faixa de frequência. O mesmo efeito é observado na Figura 87.

7.5 Conclusões

As principais conclusões deste Capítulo são:

- Os vazios modais em rotores com periodicidade e quase periodicidade longitudinal são caracterizados pela não propagação de ondas na faixa de frequência em que ocorrem;
- Os modos localizados de vibração são modos de defeito da estrutura, introduzidos pela quebra da periodicidade. Isto pode ser notado ao olhar a dispersão da estrutura com célula assimétrica e perceber que o modo de defeito aparece em uma região onde não deveria haver propagação.

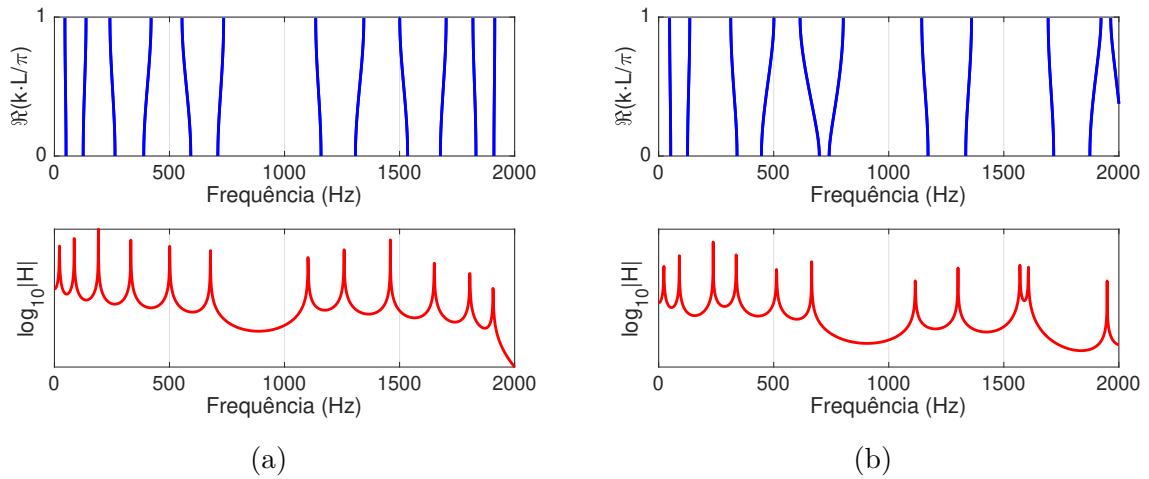


Figura 86 – Comparação entre a dispersão da super célula e a FRF do rotor com 6 discos: (a) periódico, (b) $\Delta\omega = 0\%$.

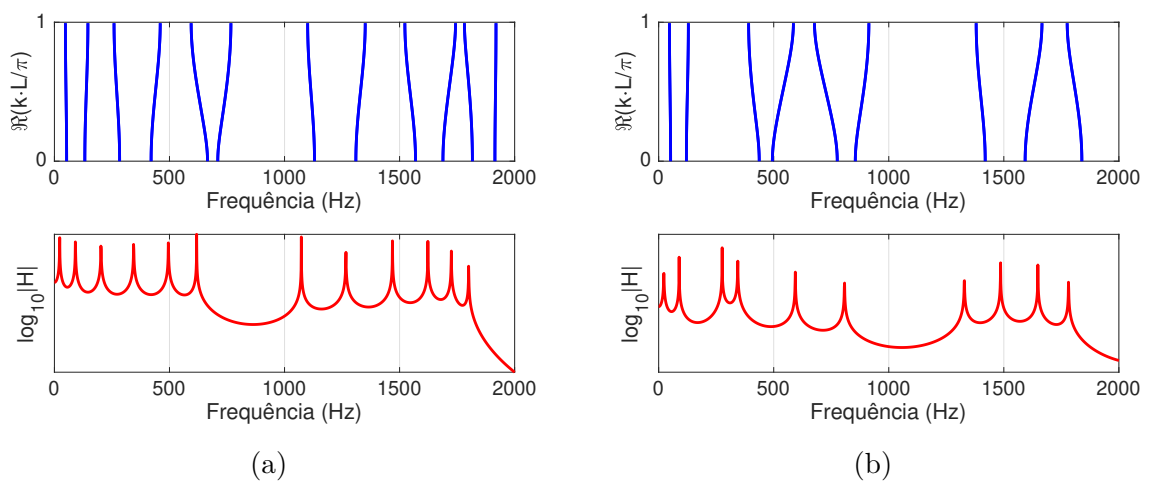


Figura 87 – Comparação entre a dispersão da super célula e a FRF do rotor com 6 discos: (a) $\Delta\omega = -5\%$, (b) $\Delta\omega = +20\%$.

8 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

A utilização de vazios modais, oriundos da periodicidade, é uma abordagem eficiente para projeto de sistemas rotativos. O mecanismo por trás da formação dos vazios modais está relacionado a dois mecanismos: 1) combinação entre o número de discos (N_D) e o número de onda do $(N_D + 1)$ -ésimo modo de vibrar (efeito fonônico), e 2) o surgimento de modos locais de vibração. Os mecanismos de formação dependem da simetria da célula unitária utilizada para construir a estrutura periódica.

As frequências de início e término do vazios modais podem ser determinadas através da solução aproximada de um modelo analítico apresentado. A equação de predição (Eq.(4.16)) foi validada experimentalmente, podendo ser utilizada para fins de projeto.

Uma variação linear no raio dos discos em uma configuração periódica não afeta significativamente os vazios modais. Uma variação geométrica na posição dos discos, afeta significativamente o mecanismos de formação do vazio modal, porém esta configuração ainda resulta na formação de vazios modais.

O aumento da velocidade de rotação tende a diminuir o tamanho dos vazios modais, devido ao efeito giroscópico que divide as frequências naturais em dois modos de vibrar (precessão direta e retrógrada). Entretanto, está é uma análise conservativa do sistema, pois a frequência que diminui a largura do vazio modal está associada com o modo de precessão retrógrada do eixo. Considerando que a maioria dos sistemas rotativos estão sujeitos a forças de excitação que não excitam modos de precessão retrógrada (*e.g.* desbalanceamento, desalinhamento, empenamento térmico), o vazio modal, na verdade, aumenta.

A frequência central da banda de atenuação pode ser deslocada para mais altas ou mais baixas regiões no espectro de frequência do sistema rotativo. O deslocamento dos vazios modais é feito através de um procedimento de otimização que além de posicionar o vazio modal na região de interesse, aumenta sua largura de banda. Para fazer isto, o procedimento altera a distribuição de inércia ao longo do rotor, quebrando a periodicidade longitudinal. Porém, é válido ressaltar que ainda há a periodicidade geométrica dos discos. O efeito giroscópico para os rotores otimizados é semelhante ao que acontece nos rotores periódicos, *i.e.*, o vazio modal aumenta com o aumento da velocidade de rotação.

Os vazios modais em rotores com periodicidade e quase periodicidade longitudinal são caracterizados pela não propagação de ondas na faixa de frequência em que ocorrem. Os modos localizados de vibração ou modos de defeito da estrutura, são introduzidos pela quebra da periodicidade. Isto pode ser notado ao olhar a dispersão da estrutura com célula assimétrica e perceber que o modo de defeito aparece em uma região onde não deveria haver propagação.

8.1 Perspectivas Futuras

Os próximos passos que podem ser dados na investigação do uso de vazios modais, impostos via periodicidade, podem ser dados nas seguintes direções são:

- desenvolver um modelo com predição das frequências que delimitam o vazio modal para célula simétrica;
- analisar a dispersão experimental dos rotores periódicos e otimizados;
- analisar as dispersões numéricas e comparação com as FRFs em velocidade de rotação não nula;

REFERÊNCIAS

- ALSAFFAR, Y.; SASSI, S.; BAZ, A. Band gap characteristics of periodic gyroscopic systems. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier BV, v. 435, p. 301–322, nov 2018.
- API. **617 - Axial and centrifugal compressors and expander-compressors**. Washington: American Petroleum Institute, 2014.
- BARRETT, L. E.; GUNTER, E. J.; ALLAIRE, P. E. Optimum Bearing and Support Damping for Unbalance Response and Stability of Rotating Machinery. **Journal of Engineering for Power**, v. 100, n. 1, p. 89–94, 01 1978. ISSN 0022-0825.
- BAVASTRI, C. A. *et al.* Modeling of dynamic rotors with flexible bearings due to the use of viscoelastic materials. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, scielo, v. 30, p. 22 – 29, 03 2008. ISSN 1678-5878.
- BOTTEGA, W. J. **Engineering Vibrations**. [*S.l.: s.n.*]: CRC PR INC, 2014. ISBN 1439830355.
- BRANDAO, A. A.; de Paula, A. S.; FABRO, A. T. Rainbow gyroscopic disk metastructures for broadband vibration attenuation in rotors. **J. Sound Vib.**, v. 532, p. 116982, 2022.
- BRILLOUIN, L. **Wave Propagation in Periodic Structures: Electric Filters and Crystal Lattices**. [*S.l.: s.n.*]: Dover Publications, 1946. (Chemische Reihe. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften). ISBN 9780486600345.
- CLAEYS, C. C. *et al.* On the potential of tuned resonators to obtain low-frequency vibrational stop bands in periodic panels. **Journal of Sound and Vibration**, v. 332, n. 6, p. 1418–1436, 2013. ISSN 0022-460X.
- DEYMIER, P. A. (ed.). **Acoustic Metamaterials and Phononic Crystals**. [*S.l.: s.n.*]: Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- EL-BORGI, S. *et al.* Multiple bandgap formation in a locally resonant linear metamaterial beam: Theory and experiments. **Journal of Sound and Vibration**, v. 488, p. 115647, 2020. ISSN 0022-460X.
- FAN, L. *et al.* Elastic metamaterial shaft with a stack-like resonator for low-frequency vibration isolation. **Journal of Physics D: Applied Physics**, IOP Publishing, v. 53, n. 10, p. 105101, dec 2019.
- GENTA, G. **Dynamics of Rotating Systems**. [*S.l.: s.n.*]: Springer US, 2005.
- GÜRGOZE, M. A note on the vibrations of restrained beams and rods with point masses. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier BV, v. 96, n. 4, p. 461–468, oct 1984.
- HAJHOSSEINI, M.; EBRAHIMI, S. Analysis of vibration band gaps in an euler–bernoulli beam with periodic arrays of meander-shaped beams. **Journal of Vibration and Control**, v. 25, n. 1, p. 41–51, 2019.
- HALLETT, D. **Calculus**. Hoboken, NJ: Wiley, 2017. ISBN 9781119374268.

- HUSSEIN, M. I.; LEAMY, M. J.; RUZZENE, M. Dynamics of Phononic Materials and Structures: Historical Origins, Recent Progress, and Future Outlook. **Applied Mechanics Reviews**, v. 66, n. 4, 05 2014. ISSN 0003-6900. 040802.
- ISO. **20816-1:2016 - Mechanical vibration — Measurement and evaluation of machine vibration**. Geneva: International Organization for Standardization, 2016.
- JOHNSON, M. E. *et al.* The Effect of Actuator and Sensor Placement on the Active Control of Rotor Unbalance . **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 125, n. 3, p. 365–373, 06 2003. ISSN 1048-9002.
- JUNYI, L.; RUFFINI, V.; BALINT, D. Measuring the band structures of periodic beams using the wave superposition method. **J. Sound Vib.**, v. 382, p. 158–178, 2016.
- KUSHWAHA, M. S. *et al.* Acoustic band structure of periodic elastic composites. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 71, p. 2022–2025, Sep 1993.
- LALANNE, M.; FERRARIS, G. **Rotordynamics prediction in engineering**. New York: John Wiley Sons, 1998.
- LAUDE, V. **Phononic crystals : artificial crystals for sonic, acoustic, and elastic waves**. Berlin Boston: De Gruyter, 2015. ISBN 3110302659.
- LI, L.; CAI, A. Low-frequency band gap mechanism of torsional vibration of lightweight elastic metamaterial shafts. **The European Physical Journal Applied Physics**, EDP Sciences, v. 75, n. 1, p. 10501, jul 2016.
- LI, L. *et al.* Hybrid method for analyzing the torsional vibration of one-dimensional phononic-band-gap shafts. **Japanese Journal of Applied Physics**, IOP Publishing, v. 51, p. 052001, may 2012.
- LI, L. *et al.* Low-frequency vibration suppression of a multi-layered elastic metamaterial shaft with discretized scatters. **Journal of Physics D: Applied Physics**, IOP Publishing, v. 52, n. 5, p. 055105, nov 2018.
- LIU, Z. *et al.* Locally resonant sonic materials. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 289, n. 5485, p. 1734–1736, 2000. ISSN 0036-8075.
- MAIA, N. M. M.; SILVA, J. M. M. **Theoretical and experimental modal analysis**. Taunton: Research Studies Press, 1997.
- MEAD, D. Wave propagation in continuous periodic structures: Research contributions from southampton, 1964–1995. **Journal of Sound and Vibration**, v. 190, n. 3, p. 495–524, 1996. ISSN 0022-460X.
- MIU, D. K. Physical Interpretation of Transfer Function Zeros for Simple Control Systems With Mechanical Flexibilities. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, v. 113, n. 3, p. 419–424, 09 1991. ISSN 0022-0434.
- MUSZYNSKA, A. **Rotordynamics**. [*S.l.*: *s.n.*]: CRC Press, 2005. (Mechanical Engineering).
- NELSON, H. D. A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory. **Journal of Mechanical Design**, v. 102, n. 4, p. 793–803, 10 1980. ISSN 0161-8458.

-
- NELSON, H. D.; MCVAUGH, J. M. The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements. **Journal of Engineering for Industry**, v. 98, n. 2, p. 593–600, 05 1976. ISSN 0022-0817.
- NICOLETTI, R. **Estudo do controle ativo e passivo de vibrações em sistemas rotativos e estruturais**. 2013 — Livre Docência. Escola de Engenharia de São Carlos, 2013.
- NICOLETTI, R.; SANTOS, I. F. Frequency Response Analysis of an Actively Lubricated Rotor/Tilting-Pad Bearing System . **Journal of Engineering for Gas Turbines and Power**, v. 127, n. 3, p. 638–645, 06 2005. ISSN 0742-4795.
- POGGETTO, V. F. D. **Numerical investigation on periodic plate structures for the reduction of vibrations**. 2019. Tese (phdthesis) — Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, 2019.
- PRADO, L. S.; RITTO, T. G. Vibration reduction of a rotating machine using resonator rings. **Mech. Res. Commun.**, v. 107, p. 103533, 2020.
- RADE, D. A.; SILVA, L. A. On The Usefulness of Antiresonances in Structural Dynamics. **Revista Brasileira de Ciências Mecânicas**, XXI, n. 1, p. 82–90, 1999.
- RAO, S. **Engineering Optimization: Theory and Practice**. [*S.l.: s.n.*]: Wiley, 2009. ISBN 9780470183526.
- RICHARDS, D.; PINES, D. Passive reduction of gear mesh vibration using a periodic drive shaft. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier BV, v. 264, n. 2, p. 317–342, jul 2003.
- SANTOS, I. F.; WATANABE, F. Y. Compensation of Cross-Coupling Stiffness and Increase of Direct Damping in Multirecess Journal Bearings Using Active Hybrid Lubrication: Part I—Theory . **Journal of Tribology**, v. 126, n. 1, p. 146–155, 01 2004. ISSN 0742-4787.
- SIGALAS, M.; ECONOMOU, E. Elastic and acoustic wave band structure. **Journal of Sound and Vibration**, v. 158, n. 2, p. 377–382, 1992. ISSN 0022-460X.
- SINHA, A. Optimal damped vibration absorber: Including multiple modes and excitation due to rotating unbalance. **Journal of Vibration and Acoustics**, ASME International, v. 137, n. 6, dec 2015.
- SONG, Y. *et al.* Analysis and enhancement of torsional vibration stopbands in a periodic shaft system. **Journal of Physics D: Applied Physics**, IOP Publishing, v. 46, n. 14, p. 145306, mar 2013.
- SUGINO, C. *et al.* On the mechanism of bandgap formation in locally resonant finite elastic metamaterials. **Journal of Applied Physics**, AIP Publishing, v. 120, n. 13, p. 134501, oct 2016.
- SUGINO, C. *et al.* A general theory for bandgap estimation in locally resonant metastructures. **Journal of Sound and Vibration**, v. 406, p. 104–123, 2017. ISSN 0022-460X.

WU, J.-S.; LIN, T.-L. Free vibration analysis of a uniform cantilever beam with point masses by an analytical-and-numerical-combined method. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier BV, v. 136, n. 2, p. 201–213, jan 1990.

WU, Y.; LI, R.; DING, W. The application of locally resonant phononic crystals in automotive drive-shaft vibration damper. *In: . [S.l.: s.n.]: International Conference on Noise and Vibration Engineering, 2016.*

YU, D. *et al.* Low frequency torsional vibration gaps in the shaft with locally resonant structures. **Physics Letters A**, Elsevier BV, v. 348, n. 3-6, p. 410–415, jan 2006.