UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

MARCELO BOTELHO DA COSTA MORAES

Políticas de Gerenciamento de Caixa: uma Abordagem por Modelos Computacionais Evolutivos

São Carlos
2011

MARCELO BOTELHO DA COSTA MORAES

Políticas de Gerenciamento de Caixa: uma Abordagem por Modelos Computacionais Evolutivos

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Produção.

Área de Concentração: Economia, Organizações e Gestão do Conhecimento.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Seido Nagano

São Carlos

2011

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

M827s

Moraes, Marcelo Botelho da Costa.
Políticas de gerenciamento de caixa: uma abordagem por modelos computacionais evolutivos / Marcelo Botelho da Costa Moraes; orientador Marcelo Seido Nagano. São Carlos, 2011.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Área de Concentração em Economia, Organizações e Gestão do Conhecimento) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2011.

1. Saldo de caixa. 2. Otimização. 3. Modelos evolutivos. 4. Simulação computacional. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Bacharel **MARCELO BOTELHO DA COSTA MORAES**

Título da tese: **Políticas de gerenciamento de caixa: uma abordagem por Modelos Computacionais Evolutivos.**

Data da defesa: 08/08/2011:

Comissão Julgadora:	**Resultado:**
Prof. Dr. **Marcelo Seido Nagano (Orientador)** (Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)	Aprovado
Prof. Dr. **Walther Azzolini Júnior** (Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)	Aprovado
Prof. Associado **Milton Barossi Filho** (Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto/USP)	APROVADO
Prof. Titular **Alberto Borges Matias** (Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto/USP)	APROVADO
Prof. Dr. **Renato Tinós** (Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto/USP)	APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção:
Prof. Titular **Henrique Rozenfeld**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Paulo Cesar Lima Segantine**

Aos meus amores, Vivian e Isabelle, por me fazerem feliz.

AGRADECIMENTOS

A minha família, meus pais Renato e Eliza, e meus irmãos Patrícia e Ricardo, Rodrigo e Juliana, pelo apoio, incentivo e amor que sempre dedicaram a mim. Aos meus sogros Rubens (*in memoriam*) e Marly e minha cunhada Thaís.

Ao Prof. Dr. Marcelo Seido Nagano, pela orientação e amizade de uma vida.

Aos Funcionários do Departamento de Engenharia de Produção, especialmente na figura da secretária da Pós Graduação Claudete Poianas, por serem sempre solícitos no atendimento.

À Escola de Engenharia de São Carlos e ao Departamento de Engenharia de Produção pela excelente acolhida.

Aos Professores Milton Barossi e Renato Tinós na indicação do caminho durante a qualificação deste trabalho.

Aos amigos de pesquisa e docência Luciano Pimentel, Maurílio Benite, Leandro Torres, José Rampazzo, Claudio e Raïssa Miranda, Marcos Mattos e tantos outros que sempre me apoiaram.

Ao NMC (André, Daniel, Leonardo, Luis Fernando, Marcos, Raoni, Ricardo e Victor), que além de amigos são irmãos para toda a vida.

A todos que de alguma maneira fizeram parte da minha vida durante o desenvolvimento deste trabalho, o meu muito obrigado.

Se o dinheiro for a sua esperança de independência, você jamais a terá. A única segurança verdadeira consiste numa reserva de sabedoria, de experiência e de competência.

Henry Ford

RESUMO

MORAES, M. B. C. **Políticas de gerenciamento de caixa: uma abordagem por modelos computacionais evolutivos**. 2011. 131 f. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

O presente trabalho tem por objetivo o desenvolvimento de políticas de administração do saldo de caixa. Este problema de finanças abordado inicialmente por Baumol (1952) e Tobin (1956) teve sua origem na aplicação de modelos determinísticos de controle de inventário ao caixa existente nas empresas. Desta forma, os autores traçaram um paralelo entre o saldo de caixa e os estoques de ativos, de maneira a minimizar os custos relativos ao caixa. Posteriormente Miller e Orr (1966) aperfeiçoaram a abordagem ao introduzirem um modelo estocástico que não mais definia o ponto ideal do saldo de caixa, mas uma faixa de oscilação. Apesar disso, os modelos apresentavam apenas uma única opção de investimento em detrimento ao caixa. Mais recentemente uma série de trabalhos resgatou o problema com novas metodologias, diversificando os custos de transferência e manutenção do caixa e aplicando, principalmente, modelos estocásticos em sua resolução, melhorando seu desempenho. Este trabalho aplica uma modelagem para gerenciamento do saldo ideal de caixa, considerando para isso os custos de manutenção, custos de transferência, diversificação em mais de dois ativos, liquidez associada aos investimentos, além da ruptura de caixa. Para isso, são utilizados modelos computacionais de meta-heurística, com a utilização de algoritmos genéticos (AG), *particle swarm optimization* (PSO) e *simulated annealing* (SA). Assim, a partir da simulação de fluxos líquidos de caixa, de acordo com as premissas apresentadas na literatura, considerando as distribuições Normal, de Poisson, Triangular e Movimento Browniano (processo de *Wiener*) foram realizadas experimentações computacionais a fim de desenvolver uma política de gerenciamento de caixa multiobjetivo capaz de minimizar o custo do saldo de caixa ao mesmo tempo em que minimiza o risco associado ao caixa. Os resultados demonstram que os modelos empregados são válidos para o desenvolvimento das políticas de gerenciamento de caixa, com a prevalência do PSO em problemas mais simples e do AG em problemas mais complexos, com grandes perspectivas para uso prático na definição de políticas de gerenciamento do saldo de caixa.

Palavras-chave: Saldo de Caixa. Otimização. Modelos Evolutivos. Simulação.

ABSTRACT

MORAES, M. B. C. **Cash management policies: an evolutionary approach**. 2011. 131 f. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

The present work aims at the development of cash balance management policies. This financial problem initially by Baumol (1952) and Tobin (1956) had its origin in the application of deterministic models for inventory control to the existing cash in companies. These authors drew a parallel between the cash balance and asset inventories in order to minimize the cost of the cash balance. Later, Miller and Orr (1966) refined the approach by introducing a stochastic model that no longer defined the ideal point of cash balance, but an oscillation range. Nevertheless, the models had only one investment option over the cash. More recently a series of studies rescued the problem with new methods, diversifying the transfer and cash maintenance costs, applying stochastic models in its resolution and improving their performance. This work applies a modeling for managing the ideal cash balance, considering maintenance costs, transfer costs, diversification of financial investment in more than two assets, the liquidity associated with investments and penalty costs for the lack of cash. For this, meta-heuristics computer models are used for, with the use of genetic algorithms (GA), particle swarm optimization (PSO) and simulated annealing (SA). Thus, based on the simulation of net cash flows in accordance with the assumptions presented in the literature, considering the distributions Normal, Poisson, Triangular and Brownian motion (Wiener process) computational experiments were performed to develop a multi-objective cash balance management policy able to minimize the cost of the cash balance at the same time then minimizes the risk associated with cash. The results demonstrate that the models used are valid for the development of cash management policies, with better results for the PSO in simple problems and GA on more complex problems, with great perspective for practical use in policy management for cash balance.

Keywords: Cash Balance. Optimization. Evolutionary Models. Simulation.

LISTA DE SIGLAS

AG	Algoritmos Genéticos
CFaR	Fluxo de Caixa em Risco - *Cash Flow at Risk*
CFC	Custo Fixo de Transferência para o Caixa
CFI	Custo Fixo de Investimento
CMC	Custo de Manutenção do Caixa
CP	Custo de Penalidade
CT	Custo de Transferência
CVC	Custo Variável de Transferência para o Caixa
CVI	Custo Variável de Investimento
DFC	Demonstração dos Fluxos de Caixa
DMC	*Déficit* Máximo de Caixa
FC	Fluxo de Caixa
fdp	Função Densidade de Probabilidade
LEC	Lote Econômico de Compra
PSO	*Particle Swarm Optimization*
PR	Prazo de Resgate
PUD	Política Única Dinâmica
SA	*Simulated Annealing*
SC	Saldo de Caixa
VaR	Valor em Risco - *Value at Risk*

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 9

1.1 Justificativa 10

1.2 Problema de Pesquisa 19

1.3 Objetivo 19

2 REFERENCIAL TEÓRICO 22

2.1 Modelos de Administração de Caixa 22

2.2 Modelos Evolutivos e Meta-heurísticas 40

2.2.1 Algoritmos Genéticos 44

2.2.2 *Particle Swarm Optimization* 47

2.2.3 *Simulated Annealing* 49

2.2.4 Métodos de Otimização Multiobjetivo 51

3 MÉTODOS DE PESQUISA 55

3.1 Materiais e Métodos 61

3.2 Análise dos Resultados 86

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS 121

REFERÊNCIAS 123

1 INTRODUÇÃO

Gerenciar o saldo disponível de caixa é um problema constante em todo tipo de organização, que ocorre em função das entradas e saídas diárias de dinheiro, sejam elas pela atividade operacional da empresa ou por operações financeiras negociadas. Assim, existe a necessidade de controlar os recursos financeiros de maneira a obter o melhor resultado para a organização.

Nesse sentido, a função da administração de caixa tem como responsabilidades mobilizar, controlar e planejar os recursos financeiros das empresas (SRINIVASAN; KIM, 1986). Com isso, a utilização de modelos de apoio à tomada de decisão se torna pertinente, uma vez que podem proporcionar uma visão abrangente e com melhores resultados, de acordo com os objetivos estabelecidos, algo que dificilmente pode ser obtido sem a utilização de metodologias para tal.

O saldo de caixa consiste nos recursos financeiros disponíveis, em determinado momento no tempo, para a organização. Ele é afetado constantemente pelas entradas e saídas de dinheiro, provenientes em sua maioria dos recebimentos e resgates de aplicações financeiras como entradas e pagamentos, e investimentos financeiros como forma de saídas de recursos, ambos realizados pela organização. Assim, o saldo de caixa é o resultado de um saldo de caixa em uma data anterior, modificado pelo fluxo líquido de caixa ocorrido no período.

Dessa forma, a utilização de modelos no problema de definição do nível ideal de recursos disponíveis em caixa teve sua origem nos trabalhos de Baumol (1952) e Tobin (1956). Os autores partem do pressuposto de que o saldo disponível em caixa pode ser definido como uma *commodity* em estoque, cujo controle pode ser diário, semanal, mensal, etc., dependendo do nível de detalhamento temporal exigido pela empresa.

Assim, a definição do saldo de caixa ótimo segue o padrão dos modelos de dimensionamento de estoque, onde se considera o recurso financeiro disponível como um estoque, possuindo certos custos associados a sua origem e manutenção, mas que também gera benefícios indispensáveis para a organização.

Dessa forma, a definição do saldo de caixa passou a ter uma abordagem quantitativa no intuito de promover a otimização deste estoque financeiro, de modo a minimizar os custos associados à manutenção ou falta de dinheiro em caixa. Posteriormente, Miller e Orr (1966) analisaram o saldo de caixa como tendo uma flutuação irregular, se caracterizando como uma variável aleatória e propuseram um modelo estocástico para o gerenciamento do saldo de caixa.

Assim, este trabalho foca no desenvolvimento de políticas de definição do caixa ideal, que possam contribuir para o estudo das finanças corporativas e promover uma melhor gestão financeira, atendendo aos objetivos das organizações de maximizar seu valor ou em último caso, a maximização da riqueza de seus proprietários (GITMAN, 2006).

1.1 Justificativa

Em um mercado perfeito, com ausência de impostos, custos de transação e limitações ao crédito, além da simetria de informação (pressuposto de mesma informação disponível a todos), a rentabilidade de uma empresa não seria afetada pela forma como seus recursos são alocados, ficando o saldo de caixa irrelevante, desde que suficiente para liquidar os compromissos no seu vencimento.

Já no mundo real, os mercados não são perfeitos, e a sobra de recursos financeiros nas organizações, também conhecida como liquidez, possui um custo associado. Nesses casos, a estratégia ótima para uma empresa é reter dinheiro, prevendo sazonalidades na demanda por seus produtos e fatores externos que possam afetar seus negócios (BERK; DEMARZO, 2008).

Assim, entender os motivos que levam as organizações a possuir a necessidade de manter recursos em caixa é fundamental para uma melhor gestão financeira. Além de considerar o caixa como uma forma de recurso financeiro disponível em moeda, possuindo a capacidade de ser utilizado para realizar transações (SACHS; LARRAIN, 1995).

Outro ponto de destaque é a existência de crédito disponível e as taxas de juros incidentes sobre o crédito, afetando diretamente a quantidade de dinheiro necessária para as organizações (MANKIW, 2003).

Uma importante característica da moeda é a possibilidade de ser utilizada como reserva de valor, ou seja, o dinheiro acaba sendo um estoque de recursos financeiros por manter valor de troca, com exceção de períodos de alta inflação, quando deixa de ser utilizado como reserva de valor (SACHS; LARRAIN, 1995).

Além disso, a moeda, por ser o principal ativo utilizado nas transações, apresenta alta liquidez. Assim, sendo a liquidez a capacidade de converter rapidamente um ativo em dinheiro, sem que haja perda de valor, então o dinheiro é o mais líquido dos ativos que uma organização pode manter (SACHS; LARRAIN, 1995).

Por isso, segundo a teoria de Keynes, o fato do dinheiro ser o principal meio de troca, com a maior liquidez, já explica sua demanda, uma vez que a preferência por manter dinheiro em caixa ao invés de optar por outros ativos com maiores taxas de rentabilidade advém da possibilidade de utilizar o dinheiro para comprar bens e serviços (MANKIW, 2003).

Dessa maneira, a definição do saldo de caixa advém de um dilema entre a rentabilidade proporcionada pelo investimento do dinheiro em outros ativos, principalmente ativos financeiros, contra a dificuldade de conversão destes ativos em caixa, quando for necessário, em função de sua menor liquidez.

Com isso, podem ser apontados alguns motivos para a manutenção do saldo de caixa (SACHS; LARRAIN, 1995):

1. Transações – recursos mantidos em caixa para honrar compromissos em vista do descompasso temporal entre as saídas (pagamentos) e as entradas (recebimentos) de dinheiro;

2. Reserva de valor – recursos mantidos líquidos em caixa como manutenção de uma reserva de segurança;

3. Especulação – recursos mantidos em caixa para aproveitar oportunidades de obtenção de descontos ou aplicações favoráveis.

Ainda assim, a definição da quantidade de dinheiro a ser mantida em caixa não é algo tão facilmente compreendida ou realizada. Alguns fatores são determinantes na manutenção do caixa necessário para a atividade produtiva, conhecido como caixa operacional (DAMODARAN, 2004, p. 354):

- O tamanho da empresa: com a igualdade de condições de mercado é de se esperar que empresas maiores mantenham um saldo de caixa mais baixo, em relação às receitas brutas, do que as empresas menores. Isso ocorre em função de economias de escala que estas empresas desfrutam, além de um maior poder de barganha junto a seus credores, fornecedores e clientes;

- A sofisticação da tecnologia bancária e os procedimentos de pagamentos: estes fatores também determinam o tamanho dos saldos de caixa, devido à facilidade de transações por meio de um sistema financeiro sofisticado;

- A disponibilidade de investimentos: em mercados onde exista facilidade para investimentos com liquidez imediata e com pouco ou nenhum custo, a tendência é manutenção de um saldo de caixa reduzido em função da facilidade de aplicação e resgate financeiro dos investimentos.

Assim, estudos empíricos têm demonstrado aspectos significantes relativos à manutenção de caixa. O trabalho de Foley et al. (2007) indica que em média, no ano fiscal de 2004, o caixa representou 10,5% dos ativos das empresas norte americanas que formavam a base de dados da Standard´s & Poors Compustat. Nesse mesmo sentido, Ferreira e Vilela (2004) indicam que no ano de 2000 as empresas da União Europeia listadas na Datastream mantiveram 15% de seus ativos em caixa ou em ativos equivalentes a caixa (ativos financeiros de alta liquidez).

No caso brasileiro, dados da Economática referentes ao período de 2004 a 2010 indicam que as empresas de atividade não financeira, com ações negociadas em bolsa, obtiveram um saldo médio ponderado de disponibilidades de 11,54% no período, com crescimento nos últimos anos, conforme suas demonstrações consolidadas (Quadro 1).

Brasil	2010	2009	2008	2007	2006	2005	2004
% Disponível (Médio)	13,58%	12,27%	11,90%	13,18%	10,90%	9,92%	9,04%
Desvio-padrão	16,23%	15,33%	16,03%	16,65%	15,79%	15,59%	14,50%
Quantidade Empresas	381	416	424	436	429	404	404

Quadro 1 – Participação das disponibilidades no total dos ativos – empresas brasileiras (elaborado pelo autor, Fonte: Economática)

No caso das empresas dos Estados Unidos, dados da Economática referentes ao mesmo período indicam que as empresas de atividade não financeira, com ações negociadas em bolsa, obtiveram um saldo médio ponderado de disponibilidades de 11,98% no período (Quadro 2).

Estados Unidos	2010	2009	2008	2007	2006	2005	2004
% Disponível (Médio)	12,26%	12,46%	12,59%	10,79%	11,35%	12,11%	12,43%
Desvio-padrão	14,76%	15,06%	14,53%	14,77%	15,40%	16,34%	16,70%
Quantidade Empresas	1.089	1.134	949	1.182	1.208	1.230	1.246

Quadro 2 – Participação das disponibilidades no total dos ativos – empresas norte-americanas (elaborado pelo autor, Fonte: Economática)

As disponibilidades compreendem os valores disponíveis em saldo de caixa e os valores de investimentos de alta liquidez, indicando que a decisão entre caixa e investimento disponível corresponde a aproximadamente 12% dos investimentos em ativos tanto para empresas brasileiras quanto para empresas norte-americanas, demonstrando a relevância financeira da decisão de gerenciamento de caixa e de outros ativos financeiros.

Outro fator de relevância na definição de políticas de gerenciamento do saldo de caixa é a dependência de fatores restritivos. Nesse sentido, empresas que possuem restrições financeiras também possuem uma maior demanda de liquidez, sendo comprovada pelo trabalho de Almeida, Campello e Weisbach (2004) na análise da relação entre restrições financeiras e padrões de liquidez de empresas norte-americanas entre 1971 e 2000.

Almeida, Campello e Weisbach (2004) puderam comprovar empiricamente que empresas com restrições financeiras devido a imperfeições no mercado de capitais aumentam seus ativos de liquidez, essencialmente caixa, quando possuem maiores fluxos de caixa, enquanto empresas sem estas restrições não apresentam um padrão sistemático.

Além disso, a pesquisa de Liu, Tsou e Wang (2008), com base em dados em painel de empresas Taiwanesas no período de 1990-1997, demonstra que a necessidade de caixa é influenciada diretamente pelas restrições ao caixa, baixa alavancagem financeira e alta rentabilidade, implicando em aumentos significativos da necessidade de caixa.

Também nesse sentido, Drobetz e Grüninger (2007) focaram seu estudo em empresas suíças no período de 1995 a 2004, demonstrando que as organizações não financeiras neste país possuem quase o dobro de disponibilidades que as empresas médias nos Estados Unidos e Reino Unido. Além disso, os autores indicam que a existência de ativos tangíveis e o tamanho da organização são negativamente relacionados com a manutenção do caixa, enquanto o pagamento de dividendos e o fluxo de caixa operacional são positivamente relacionados com as reservas de caixa.

Outro estudo, elaborado por Han e Qiu (2007), ao observar empresas americanas, entre 1997 e 2002, destaca que em organizações com restrições financeiras, nas quais o risco do fluxo de caixa futuro não possa ser diversificado, existe um ponto de equilíbrio entre os investimentos presentes e futuros, o que provoca um aumento nos saldos de caixa como resposta ao aumento da volatilidade do fluxo de caixa, ou seja, para empresas com restrições financeiras o risco está associado ao nível de saldo de caixa.

Neste mesmo sentido, o trabalho de Jung e Kim (2008) indica uma relação positiva entre o saldo disponível mantido em caixa e a alavancagem financeira apresentada pelas empresas em função de benefícios tributários. Desta forma, os autores comprovam que o saldo de caixa é uma variável significativa na política de financiamento de uma organização.

Considerando uma amostra de mais de 5.000 empresas em 31 países, Kalcheva e Lins (2007) indicam que em organizações situadas em países com baixa proteção ao investidor, organizações que mantém maiores níveis de disponibilidades possuem menor valor do que aquelas que distribuem dividendos, enquanto a manutenção do caixa não se relaciona com o valor da empresa em países com maior proteção ao investidor.

Analisando empresas espanholas de pequeno e médio porte, García-Teruel e Martínez-Solano (2008) observam que a maioria destas empresas busca a manutenção do saldo de caixa dentro de um nível pré-estabelecido, e que o ajuste do nível ideal tende a acontecer com maior agilidade do que em empresas de grande porte, em função da maior assimetria de informação e conflitos de agência aos quais as pequenas e médias empresas são mais suscetíveis.

Além disso, pesquisa de Harford, Mansi e Maxwell (2008) demonstra que para 1872 empresas norte-americanas avaliadas entre 1993 e 2004 existe uma relação onde estruturas de governança corporativa mais fraca são negativamente relacionadas com o valor das empresas e que esta relação é maior ainda quando combinada com o excesso do saldo de caixa.

Já na questão da Governança Corporativa, Yun (2009) aponta que organizações com melhores estruturas de governança interna mantêm menores níveis de caixa em relação a suas linhas de crédito.

Em outro estudo observando o efeito das restrições financeiras sobre as empresas, Denis e Sibilkov (2010) indicam que maiores níveis de caixa estão associados a maiores níveis de investimentos para empresas com restrições que apresentam alta necessidade de *hedge*, bem como uma associação mais forte entre investimento e valor da organização para empresas com restrições financeiras do que em empresas sem estas restrições.

Desenvolvendo sua pesquisa em empresas australianas, Lee e Powell (2011) demonstram que um excesso de caixa transitório apresenta um retorno maior do que a manutenção de um nível excedente de caixa persistente, de maneira que o mercado penaliza esta disponibilidade.

O trabalho de Kusnadi e Wei (2011) reforça a importância de estruturas legais na proteção dos investidores, especialmente os minoritários, como fator de impacto na redução do saldo de caixa, a partir da análise de empresas em 39 países.

Estudos como estes demonstram a relevância da pesquisa sobre o gerenciamento de caixa, uma vez que indicam um volume de investimentos muito alto e significativo na estratégia empresarial, especialmente em momentos de crise financeira ou falta de recursos disponíveis para investimento no mercado.

Diversas determinantes da manutenção dos recursos em caixa são apontadas na literatura, onde se destacam os fatores de impacto positivo e negativo sobre o nível de caixa:

Impacto positivo, promovendo aumento do saldo de caixa:

- Restrições Financeiras: estudos demonstram que organizações com restrições financeiras tendem a reter um maior nível de caixa para compensar a dificuldade no acesso a recursos de liquidez, conforme trabalhos de Almeida, Campello e Weisbach (2004); Ozkan e Ozkan (2004); Liu, Tsou e Wang (2008); Han e Qiu (2007);

- Alavancagem financeira - com benefício tributário: neste caso, o endividamento da organização, considerado juntamente com o benefício tributário gerado pela redução no pagamento de impostos, seria um motivador ao aumento do saldo de caixa, mesmo que elevando a alavancagem e o risco da empresa, Jung e Kim (2008);

- Custos de transação, incluindo impostos na movimentação internacional de caixa: maiores custos associados à obtenção de caixa, incluindo em outros países, leva as organizações a manter um maior nível de caixa, conforme Foley et al. (2007);

- Assimetria de informação: em organizações atuantes em mercados com maior assimetria de informação, ocasionando maiores riscos, existe a tendência de manter maiores níveis de caixa, indicado por Dittmar, Mahrt-Smith e Servaes (2003);

- Problemas e custos de agência: o problema de agência e os custos decorrentes deste geram maior incerteza sobre a gestão organizacional, elevando também seu risco, daí a existência de maiores níveis do disponível, apresentados por Dittmar, Mahrt-Smith e Servaes (2003); Ferreira e Vilela (2004);

- Oportunidades de investimento: organizações com maiores oportunidades de investimento tendem a reter caixa para efetuar tais investimentos e obter maiores ganhos, conforme Opler et al. (1999); Ferreira e Vilela (2004); Ozkan e Ozkan (2004); Haushaulter, Klasa e Maxwell (2007); García-Teruel, Martínez-Solano e Sánches-Ballesta (2008);

- Países com maior proteção ao investidor: neste estudo, Dittmar, Mahrt-Smith e Servaes (2003), argumentam que uma maior proteção ao investidor eleva as dificuldades em obtenção de recursos, ocasionando maior saldo de caixa para as organizações;

- Risco nos fluxos de caixa: nos casos em que existe uma maior variabilidade ou imprevisibilidade nos fluxos de caixa, as organizações correm maior risco de falta de caixa, tendo assim a necessidade de manter um saldo maior de dinheiro, Opler et al. (1999); García-Teruel e Martínez-Solano (2008); García-Teruel, Martínez-Solano e Sánches-Ballesta (2008);

- Interdependência de investimentos com concorrentes: neste estudo, Haushaulter, Klasa e Maxwell (2007) demonstram que quando ocorre interdependência dos investimentos da empresa com seus demais concorrentes, dada a necessidade deste investimento e sua relevância perante a concorrência, as organizações tendem a manter mais dinheiro em caixa;

- Empresas que buscam maximizar a riqueza dos acionistas: a relação entre reter ou distribuir dividendos é verificada neste estudo de Opler et al. (1999), obtendo como resultado uma associação de que empresas voltadas a geração de valor tendem a reter dividendos e mantê-los em seu disponível.

Impacto negativo, proporcionando redução do saldo de caixa:

- Ativos de liquidez substitutos ao dinheiro: na existência de ativos financeiros de alta liquidez as empresas podem utilizá-los como um substituto ao dinheiro em caixa, conforme Ferreira e Vilela (2004); Ozkan e Ozkan (2004); García-Teruel e Martínez-Solano (2008);

- Alavancagem financeira: ao contrário do apresentado por Jung e Kim (2008), maiores níveis de endividamento elevam o risco de empresa e tendem a dificultar o acesso a crédito, elevando também seus níveis de disponibilidades, apontado por Ferreira e Vilela (2004); Ozkan e Ozkan (2004); Liu, Tsou e Wang (2008);

- Uso de débitos bancários: a existência de soluções em gerenciamento de caixa por parte das instituições financeiras reduz a necessidade de investimento em caixa frente aos produtos financeiros, como demonstram Ozkan e Ozkan (2004); García-Teruel e Martínez-Solano (2008); García-Teruel, Martínez-Solano e Sánches-Ballesta (2008);

- Qualidade da informação contábil (redução da assimetria de informação) e Governança Corporativa: estruturas de governança corporativa e uma maior qualidade da informação contábil melhora a transparência da organização, reduzindo incertezas para o mercado e consequentemente diminuindo seu risco, ocasionando em maior facilidade para obtenção de recursos financeiros, de modo a reduzir a necessidade de caixa, conforme Dittmar, Mahrt-Smith e Servaes (2003); García-Teruel e Martínez-Solano (2008); García-Teruel, Martínez-Solano e Sánches-Ballesta (2008);

- Aumento da taxa de juros corrente da economia no caso de pequenas e médias empresas: para organizações de pequeno e médio porte, o aumento da taxa de juros da economia eleva o custo de obtenção de recursos financeiros, fazendo com que estas optem por manter maiores níveis de caixa, de acordo com García-Teruel, Martínez-Solano e Sánches-Ballesta (2008);

- Países com maior proteção ao investidor: no trabalho de Ferreira e Vilela (2004) e Kusnadi e Wei (2011), os autores argumentam que países com maior proteção ao investidor

apresentam exigências de controle que reduzem os riscos, por conta da melhoria em governança corporativa, redução da assimetria de informação e redução do problema de agência;

- Concentração da propriedade nas empresas: neste caso, o mesmo trabalho de Ferreira e Vilela (2004) indica que uma maior concentração da propriedade diminui o saldo de caixa, uma vez que o controle e a tomada de decisão tendem a ser centralizados;

- Acesso ao mercado de capitais - grandes empresas com alta classificação de crédito: nestes casos, Opler et al. (1999) demonstram que a facilidade de acesso aos mercados de capitais e de crédito possibilita a estas empresas uma maior redução no caixa;

- Acesso aos fundos de investimento: de maneira semelhante ao estudo anterior, um acesso facilitado a estes fundos proporciona redução do caixa, como apontam Dittmar, Mahrt-Smith e Servaes (2003);

- Tamanho das empresas, no caso de grandes empresas: maiores empresas tendem a apresentar maiores fluxos de caixa e facilidade em obter recursos, daí a menor necessidade de caixa, conforme Opler et al. (1999); Ferreira e Vilela (2004);

- Desenvolvimento do mercado de capitais: novamente, em países com mercados de capitais mais desenvolvidos, as empresas apresentam maior facilidade no acesso a recursos financeiros, reduzindo o nível de disponibilidade, como apresenta Ferreira e Vilela (2004).

Dessa forma, aspectos como custos de transação, assimetria de informação e problemas de agência, por aumentarem o custo ou risco associado, dificultam a tomada de recursos financeiros, fazendo com que a organização mantenha por si mesma um saldo maior de disponível. Além disso, um maior nível de proteção ao investidor diminui incertezas quanto ao investimento, o que deixa as empresas com menor necessidade de distribuição de recursos sob a forma de dividendos.

Por outro lado, a existência de ativos com alta liquidez e certo nível de rentabilidade torna a aplicação financeira uma possibilidade mais atrativa do que a manutenção do saldo em caixa. A alavancagem financeira, por meio do uso de recursos de terceiros, e o uso de sistemas automáticos de débitos bancários reduzem a necessidade de recursos próprios em caixa.

Outro ponto de destaque na redução da necessidade de caixa é a qualidade das informações contábeis provenientes da organização, que reduzem a assimetria de informação e facilitam o acesso a financiamentos externos, reduzindo a necessidade de caixa frente à possibilidade de rápida captação de recursos.

Ainda, segundo Berk e DeMarzo (2008) as empresas arriscadas e aquelas com oportunidade de grande crescimento tendem a reter uma porcentagem relativamente alta de seus ativos em dinheiro.

Diante de tantos aspectos impactantes na determinação de uma política de definição do saldo de caixa, torna-se relevante compreender as necessidades por parte das empresas e o desenvolvimento de métodos que possam auxiliar a tomada de decisões sobre o investimento financeiro na manutenção do caixa.

1.2 Problema de Pesquisa

Para compreender melhor a proposta deste projeto, o seguinte problema é apresentado:

Como desenvolver políticas de gestão do saldo de caixa, que obtenham o mínimo custo, mediante diferentes níveis de liquidez e exposição financeira ao risco, considerando mais de uma opção de investimento financeiro?

1.3 Objetivo

Com o intuito de atender ao problema de pesquisa proposto, têm-se como objetivo geral da pesquisa *desenvolver uma metodologia de gerenciamento do saldo disponível de*

caixa, com base nas premissas de minimização do custo, considerando diferentes níveis de liquidez e risco, dados por diversas formas de aplicação de recursos financeiros.

Assim, o trabalho apresenta sua contribuição nos seguintes aspectos:

- Desenvolver uma metodologia para gerenciamento do saldo de caixa que considere concomitantemente:
    - Custos diferenciados na aplicação e resgate;
    - Utilização de mais de um ativo financeiro, com diferentes prazos de resgate (liquidez) ao mesmo tempo;
    - Existência de um limite máximo de *déficit* de caixa, que representa o risco da falta de caixa;
    - Desenvolvimento de uma política de gerenciamento multiobjetivo que visa o menor custo com o menor risco de ruptura de caixa.
- Utilização de modelos computacionais baseados em meta-heurísticas que possibilitem atender aos objetivos de reduzir o custo e o risco do caixa:
    - Com a aplicação destes modelos, não há a necessidade de conhecer a distribuição de probabilidades relativa ao fluxo de caixa da organização;
    - Utilização de algoritmos genéticos (AG), *particle swarm optimization* (PSO) e *simulated annealing* (SA), sendo que estes dois últimos não foram aplicados a este problema, a utilização de AG no problema foi apresentado apenas por Gormley e Meade (2007) e mesmo assim limitado ao modelo original Miller-Orr com custos diferenciados para o caixa, conforme exposto nas referências do problema.

Para alcançar o objetivo proposto, são necessários os seguintes objetivos específicos:

- Modelar matematicamente as possibilidades de investimento em caso de *superávit* financeiro, considerando os diferentes investimentos em prazo e rentabilidade;

- Modelar matematicamente a possibilidade de fonte de financiamento em caso de *déficit* financeiro, considerando o limite máximo da dívida, os custos financeiros em taxas de juros e as tarifas incidentes na operação;

- Gerar, por meio de simulações, séries históricas de fluxos de caixa, com diferentes distribuições de probabilidade (Normal, Poisson, Triangular e Movimento Browniano), baseadas em premissas observadas na literatura sobre o tema;

- Desenvolver algoritmos computacionais que tenham como função objetivo a definição de uma política ideal do saldo de caixa;

- Realizar uma experimentação computacional, aplicando os algoritmos desenvolvidos nos fluxos de caixa simulados e comparando seus resultados, visando identificar as melhores políticas de gerenciamento de caixa em relação aos métodos utilizados.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O presente trabalho tem seu foco no desenvolvimento de modelos de otimização do saldo de caixa, necessitando, para isso, apresentar os conceitos aplicados no problema abordado, bem como as técnicas propostas para sua elucidação. A seguir são apresentadas as teorias que dão suporte para este trabalho, primeiramente revisando os conceitos de gestão do saldo de caixa e em seguida apresentando os modelos computacionais de meta-heurística e o seu emprego em problemas de otimização.

2.1 Modelos de Administração de Caixa

Os modelos de administração de caixa tiveram sua origem no trabalho de Baumol (1952), nele o autor faz um paralelo entre o caixa com os demais estoques das empresas. Observando o modelo geral de estoques, tem-se um sistema no qual o nível de um item (Figura 1) é afetado por um processo de entrada e por um processo de saída, onde $P(t)$ é a taxa em que o ativo é adicionado ao estoque no tempo t e $W(t)$ é a taxa em que o ativo é reduzido do estoque (BEDWORTH; BAILEY, 1987). Normalmente se assume que a saída ocorre em função de uma demanda $D(t)$, consistindo em uma força externa.

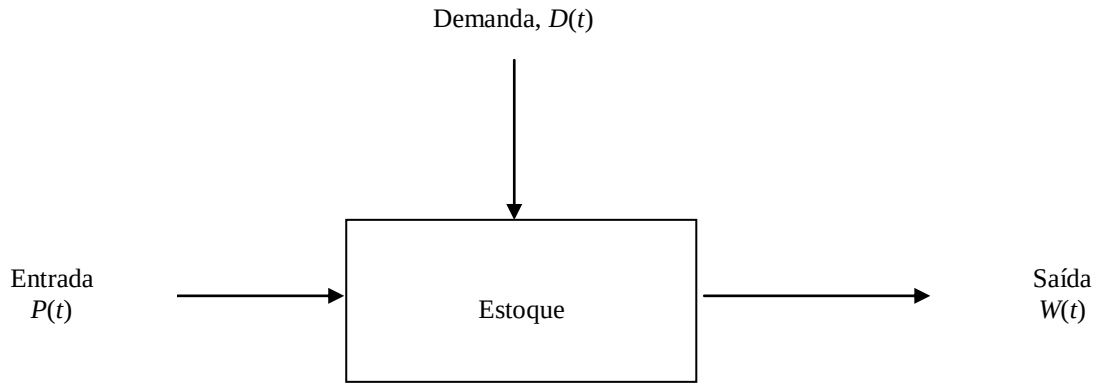

Figura 1 – Um sistema de estoque (BEDWORTH; BAILEY, 1987, p. 14)

No caso dos estoques em geral a abordagem mais comum quando se necessita definir o reabastecimento do estoque é o lote econômico de compra (LEC), que visa encontrar o melhor posicionamento entre as vantagens e desvantagens de possuir estoque. Apesar disso, o LEC (Figura 2) possui restrições ao utilizar os pressupostos de demanda fixa e previsível, bem como entregas instantâneas quando existe solicitação da reposição do estoque (SLACK et al., 1997).

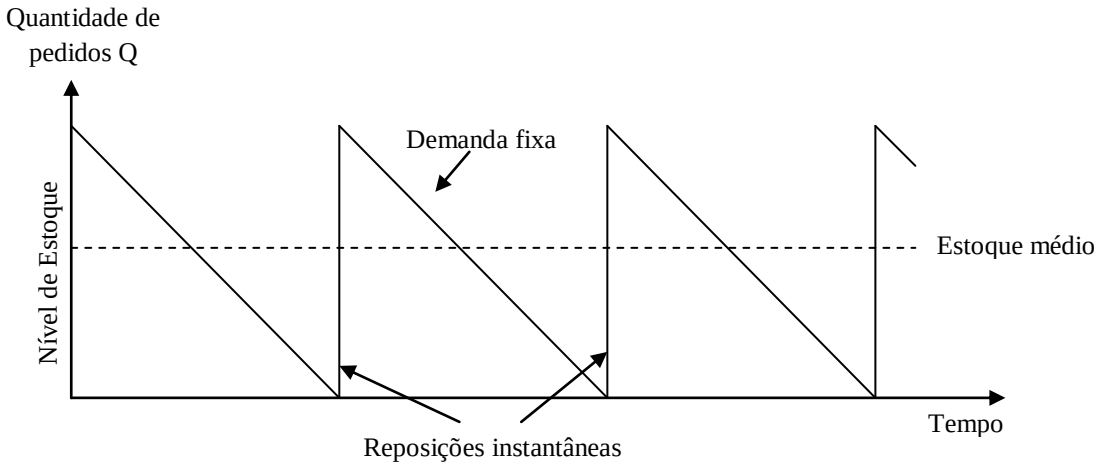

Figura 2 – Perfis de estoque que ilustram a variação do nível de estoques (Adaptado de SLACK et al., 1997, p. 388)

Segundo Baumol (1952) o estoque de caixa pode ser observado como um inventário de um meio de troca. Em seu modelo o LEC é adaptado para otimização de caixa, sendo a configuração ótima obtida em função da relação entre o custo de oportunidade e o custo de transferência (Figura 3). No modelo de Baumol o custo total de transferência de recursos aumenta quando a empresa precisa vender títulos para acumular caixa, já os custos de

oportunidade crescem com a existência do saldo de caixa, pois é uma aplicação do recurso que não possui rendimento (ROSS; WESTERFIELD; JAFFE, 2002).

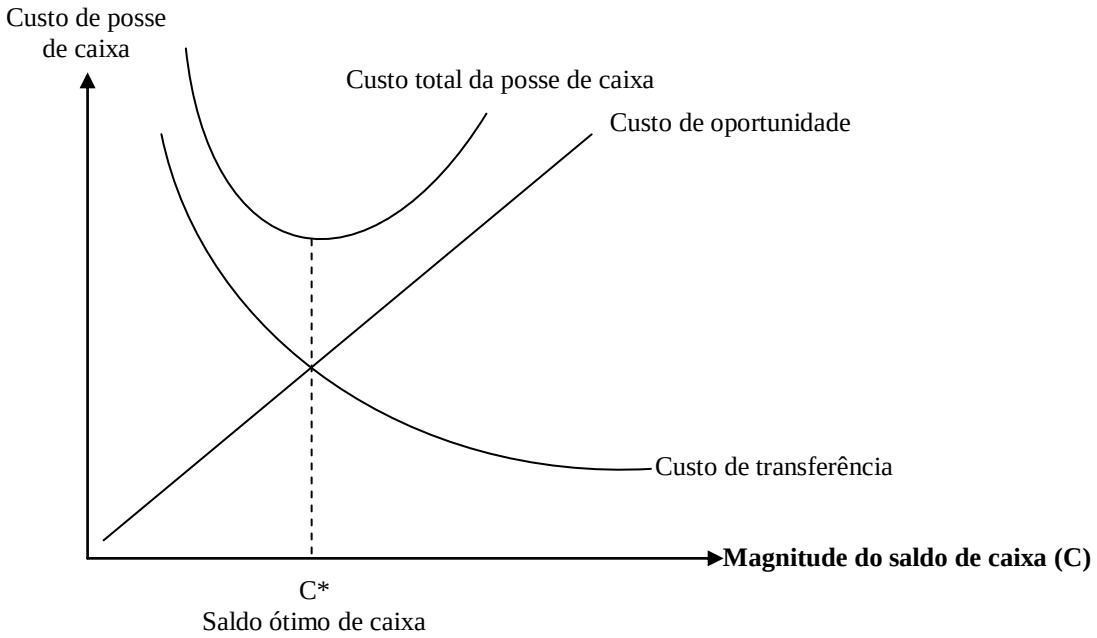

Figura 3 – Custos da posse de caixa (ROSS; WESTERFIELD; JAFFE, 2002, p. 618)

O modelo efetua a análise do custo associado à manutenção de dinheiro em caixa, ou seja, o custo de oportunidade determinado pelos juros que a empresa deixa de receber por não aplicar os recursos em investimentos financeiros, e do custo de obtenção do dinheiro pela conversão dos investimentos em caixa (ROSS; WESTERFIELD; JAFFE, 2002). Já o custo de transferência representa o dispêndio incorrido na aplicação ou resgate dos recursos financeiros, como taxas e impostos incidentes.

Segundo Ross, Westerfield e Jaffe (2002, p. 617) o modelo de Baumol pode ser apresentado isoladamente da seguinte forma:

$$\text{Custo de obtenção} = \frac{T}{C} \times F$$

Com,

F = custo fixo identificado nas transferências de investimento ou resgate;

T = valor total de caixa que se prevê utilizar em determinado período em seu valor líquido, ou seja, a sobra do fluxo de caixa;

C = saldo monetário inicial em caixa (em $).

$$\text{Custo de manutenção} = \frac{C}{2} \times K$$

Sendo,

K = custo de oportunidade da posse de caixa, neste caso, a taxa de juros definida pela aplicação financeira;

C / 2 = saldo médio de caixa, admitindo-se que seu volume se reduza a uma taxa constante (demanda fixa).

Assim, o custo total associado ao saldo de caixa representa a soma dos custos de obtenção, também conhecido como custos de negociação, com os custos de manutenção que representam o custo de oportunidade do investimento.

$$\text{Custo total} = \left(\frac{C}{2} \times K\right) + \left(\frac{T}{C} \times F\right)$$

A solução ótima para o saldo de caixa "C*" é obtida ao se determinar o valor de C na seguinte expressão matemática:

$$\frac{K}{2} = \frac{TF}{C^2}$$

Assim, por meio da intersecção das duas retas, igualando-se as fórmulas, obtém-se o valor ótimo de caixa "C*", sendo ele:

$$C^* = \sqrt{\frac{2TF}{K}}$$

Mas, conforme apontados pelos autores citados, o modelo de Baumol apresenta limitações ao considerar que a demanda por dinheiro seja constante, que não existem recebimentos durante o período de projeção e que a reposição do dinheiro, por meio do resgate financeiro, seja imediata. Além disso, o modelo limita-se a utilizar apenas dois ativos, o próprio caixa e algum título específico como forma de investimento.

Em virtude destas limitações o estudo de Beckman e Foreman (1988) demonstra que o modelo de Baumol, ou Baumol-Tobin, não é universalmente aplicável, apresentando custo de aprendizagem até que a utilização do modelo seja compreendida pelas pessoas que o estão aplicando e a relevância da motivação na tomada de decisão para o gerenciamento do caixa.

Nesta mesma linha de desenvolvimento, Whalen (1966) apresenta um modelo também baseado na concepção de inventários de estoques, mas utilizando uma abordagem de prevenção relativa ao saldo de caixa que leva em conta três aspectos:

1) O custo da falta de liquidez;

2) O custo de oportunidade de manter um saldo de caixa de precaução; e

3) O volume médio e a variabilidade dos recebimentos e desembolsos.

Mesmo assim, o modelo de Whalen não apresentou ganhos significativos sobre o modelo original de Baumol. Isso se deve a uma grande similaridade entre os modelos onde o custo da falta de liquidez e o custo de oportunidade da manutenção do saldo de caixa de precaução encontram suas contrapartes no custo de transferência (obtenção) e no custo de oportunidade (manutenção) do saldo de caixa respectivamente (WHALEN, 1966).

Posteriormente, Miller e Orr (1966) apresentam um modelo que atende a premissa da aleatoriedade dos fluxos de caixa, conforme a distribuição Normal. Além disso, considera a existência de apenas dois ativos, caixa e investimento, sendo este último uma opção de baixo risco e alta liquidez (Figura 4).

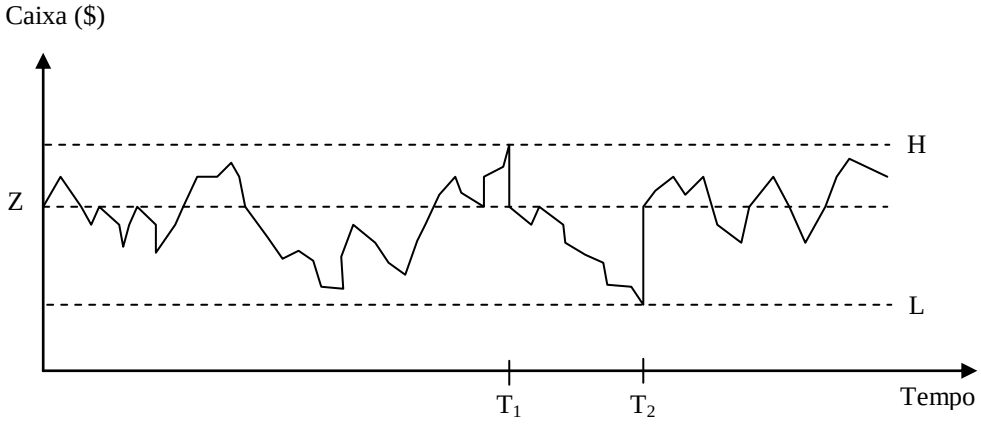

Figura 4 – Variação dos fluxos de caixa (Adaptado de MILLER e ORR, 1966, p. 415)

Neste modelo procura-se definir dois limites para o nível de recursos em caixa: o mínimo e o máximo, de tal forma que, ao se atingir o nível máximo (momento T_1), representado pelo limite superior (H), efetua-se aplicação de recursos, em valor que proporcione o saldo de caixa voltar ao nível ideal de caixa (Z). E, ao atingir o nível mínimo (momento T_2) no limite inferior (L), deve ser efetuado um resgate para obter o nível ótimo de caixa novamente (ROSS; WESTERFIELD; JAFFE, 2002).

Assim, ao trabalhar os fluxos líquidos de caixa (entradas menos saídas) o modelo de Miller e Orr possibilita a otimização do caixa, com base nos custos de transferência (representados por F) e oportunidade (representados por K), obtendo-se a seguinte formulação (ROSS; WESTERFIELD; JAFFE, 2002):

$$Z^* = \sqrt[3]{3F\sigma^2 / 4K} + L \text{ e } H^* = 3Z^* - 2L$$

Sendo que o "*" denota valores ótimos e σ^2 é a variância dos fluxos líquidos de caixa históricos observados. Desta forma, o saldo ideal de caixa é dado por:

$$\text{Saldo Ideal de Caixa} = \frac{4Z - L}{3}$$

Mesmo com o ganho em relação ao modelo de Baumol, por considerar a aleatoriedade dos fluxos de caixa, o modelo Miller-Orr pressupõe a definição do limite inferior (L), ou seja, o risco de falta de caixa, associado a uma margem mínima de segurança, depende de uma escolha da administração e não é tratado no modelo.

Assim, os modelos de otimização acabaram sendo divididos entre os determinísticos e estocásticos, sendo que após o modelo Miller-Orr os trabalhos subsequentes até a década de 1970 apresentaram apenas variações da modelagem (GREGORY, 1976).

Mesmo assim, os modelos não chegaram a apresentar soluções efetivas e práticas para o problema de três ativos, como por exemplo, a decisão entre o investimento caixa, títulos privados (*bonds*) e ações. A divisão do investimento entre *bonds* e ações é relevante devido ao fato de que títulos tendem a render menos e apresentar menores custos de transferência, mas o desenvolvimento dos modelos não considerou o tempo de negociação dos ativos nem o melhor momento para negociar as ações, sendo este último problema uma limitação intransponível (GREGORY, 1976).

Fazendo uma análise da aplicabilidade dos modelos desenvolvidos até então, e utilizando simulações para definição do saldo de caixa em condições de incerteza, Daellenbach (1974) utiliza modelos existentes em fluxos de caixa simulados. O autor conclui que nos casos nos quais os fluxos de caixa apresentam séries não estacionárias os modelos de otimização podem não apresentar ganhos significativos caso os custos de transferência venham a ser financeiramente baixos, sendo que apresentam melhores resultados em grandes empresas devido ao volume financeiro.

Mesmo assim, o problema não perdeu sua relevância, apenas teve seu foco voltado ao aperfeiçoamento metodológico das técnicas utilizadas. A partir da década de 80, diversos autores trabalharam com o problema de otimização do saldo de caixa, mas devido à incerteza associada às entradas e saídas de recursos do fluxo de caixa, o que torna o resultado do fluxo uma composição de variáveis aleatórias, foram implementados modelos com novas abordagens, principalmente baseadas em processos estocásticos.

A programação estocástica proporciona um modelo de aplicação geral que captura as características do mundo real. Esses modelos podem ser divididos basicamente em três categorias (YU; JI; WANG, 2003, p. 2):

1. Modelos Antecipativos: também conhecidos como modelos estáticos, onde a decisão não depende em nada da observação futura do ambiente;

2. Modelos Adaptativos: nesses modelos, a informação relacionada com a incerteza torna-se parcialmente disponível antes da tomada de decisão, tomando lugar em um ambiente de aprendizado; e

3. Modelos Recorrentes: provenientes da combinação dos dois modelos anteriores, que normalmente, em uma modelagem matemática, procuram por políticas que não apenas antecipem observações futuras, mas que também sejam capazes de se adaptar.

Nesta linha de pesquisa, o trabalho desenvolvido por Tapiero e Zuckerman (1980), apresenta um modelo estocástico baseado na premissa de que as entradas e saídas de caixa possuem um comportamento aleatório segundo um processo de Poisson Composto, que consiste na distribuição de probabilidade da somatória de números individualmente distribuídos conforme a função densidade de probabilidade (fdp) de Poisson.

Posteriormente Milbourne (1983) apresenta um modelo que se diferencia ao separar os custos de transferência de recursos em duas categorias, sendo β_1 o custo proporcional por unidade monetária de ajustar o saldo de caixa para cima e β_2 o custo proporcional por unidade monetária de ajustar o saldo de caixa para baixo. Assim, β_1 consiste na proporção de custos no resgate de recursos de outros ativos para o caixa e β_2 representa o custo proporcional na aplicação do caixa em outros ativos, além de custos de penalidade pela falta de caixa que demanda operações de crédito, ou custos de penalidade por não efetuar determinado pagamento.

A partir da formulação de Milbourne, Smith (1986) desenvolveu um modelo estocástico dinâmico, considerando o fluxo de caixa como um processo difuso, temporalmente independente, conforme um processo de *Wiener*, conhecido como movimento Browniano.

No final da década de 1990, Ogden e Sundaram (1998) utilizaram as mesmas premissas de Baumol, considerando o fluxo de caixa regular, com saídas constantes, incorporando a possibilidade de uma linha de crédito, caso a empresa obtenha um *déficit* de caixa, a fim de sanar a falta de caixa, considerando uma taxa de juros associada a esta linha de crédito superior à taxa de juros obtida no investimento utilizado pela empresa.

Assim, o problema de entradas e saídas de caixa (fluxos de caixa) que seguem processos estocásticos pode ser definido como:

$$f(s_n) = \begin{cases} S^-, & s_n \leq S^-, \\ s_n, & S^- < s_n < S^+, \\ S^+, & s_n \geq S^+ \end{cases}$$

Sendo que a quantia de dinheiro a ser transferida no início de cada período n = 1, 2, 3, ... é obtida pela regra de transferência de acordo com o modelo aplicado. Isso significa que o valor do saldo de caixa (s_n) no começo do período n é imutável se estiver dentro dos limites superior (S^+) e inferior (S^-) devendo ser mantido, caso contrário deve ser ajustado ao valor limite extrapolado (HINDERER; WALDMANN, 2001) de maneira análoga ao desenvolvido por Miller e Orr.

Mais recentemente, uma série de trabalhos retoma o problema, dentre eles o estudo desenvolvido por Pacheco et al. (2000), onde é desenvolvido um algoritmo genético para

determinar investimentos em produtos financeiros disponíveis no mercado, a partir da projeção de fluxos de caixa, obtendo a máxima rentabilidade para períodos específicos.

O trabalho de Hinderer e Waldmann (2001) considera o problema de saldo de caixa como uma possível aplicação do modelo *markoviano* geral e estacionário. Nele os autores utilizam uma modelagem por processos de cadeias de *Markov* em ambientes aleatórios que apresentam um processo estacionário, ou seja, de baixa variação ao longo do tempo.

Outra técnica utilizada na resolução do problema é a programação linear. Nesse caso, o fluxo de caixa pode ser desenvolvido em determinada base de periodicidade, a partir do saldo de caixa inicial, tendo os suportes de entrada de caixa e um plano de pagamentos com base nas previsões de despesas (BARBOSA; PIMENTEL, 2001).

A aplicação desenvolvida por Barbosa e Pimentel (2001) obteve grande êxito por tratar de projetos em construção civil, onde as saídas de caixa apresentam grande previsibilidade dentro do planejamento de obras pré-estabelecido, ou seja, menor grau de aleatoriedade dos fluxos de caixa.

Ainda assim, a abordagem computacional como as de Pacheco et al. (2000) e de Barbosa e Pimentel (2001) tendem a facilitar a aplicação prática por parte das organizações ao possibilitar a utilização de *softwares* de fácil acesso e uso.

Mesmo com as variações de concepção dos modelos discutidos, ainda existem dificuldades técnicas na definição de uma política de caixa relativa à obtenção de um ponto (ou faixa) ideal de caixa. Isso se deve ao fato de que os modelos foram desenvolvidos com uma abordagem de tempo discreta, mesmo considerando o caixa como uma cadeia de *Markov* que depende do valor existente anterior.

Esse problema, quando se assumem as premissas de custos de manutenção do caixa lineares além de custos fixos e proporcionais de controle, pode ser evitado com a reformulação para tempo contínuo, onde o fundo de caixa varia de acordo um movimento *Browniano* de média μ e variância σ^2 que é capaz de fornecer uma banda (faixa definida por limites superior e inferior) do saldo de caixa indicando uma política ótima de controle em pontos do tempo isolados (BACCARIN, 2002).

Em seu modelo, Baccarin (2002) muda o foco do problema a ser otimizado, não mais buscando a maximização da rentabilidade do uso dos recursos financeiros, ou mesmo a

minimização do custo da opção do uso do recurso sob a forma de caixa, mas sim na obtenção da otimização do nível ideal de liquidez, o que pressupõe a existência negativa do saldo de caixa. Seus resultados apontam que sendo os custos de penalidade finitos, o limite inferior tende a ser sempre abaixo de zero.

Outra variação de modelagem é apresentada no trabalho de Premachandra (2004), onde o autor desenvolve um modelo de aproximação difusa para problemas com dois ativos como proposto nos modelos clássicos. Nele as premissas de distribuição normal dos fluxos líquidos de caixa e custos de transferência fixos são relaxadas, de modo a obter um modelo mais próximo da realidade e com resultados significativamente superiores ao modelo Miller-Orr.

O modelo de Premachandra também utiliza os limites superiores e inferiores, e o nível ideal de caixa (Z), adotados por Miller e Orr, mas levando em consideração o pequeno lapso temporal entre o investimento do caixa ou o seu resgate, neste caso, pela compra e venda de títulos, calculando o tempo em uma base horária e o custo de manutenção do saldo de caixa por dia.

Sendo m_1 e m_2 as densidades de probabilidades dos limites inferior e superior, respectivamente, as condições de limite adequadas são dadas por $-\lambda m_2$ e λm_1, conforme apresentado por Premachandra (2004). Além disso, o modelo trata α como sendo a variação infinitesimal do processo de difusão, por exemplo, a taxa de oscilação da variância do saldo de caixa diário e β a média infinitesimal do processo de difusão, por exemplo, a taxa de oscilação do saldo médio diário.

Assim, tendo os valores do limite superior como *b*, do limite inferior como *a*, e de uma constante de integração *c*, o saldo de caixa diário ponderado (ABC - *average daily cash balance*) é obtido por,

$$
\begin{aligned}
ABC &= \int_a^c x \frac{\lambda m_1}{\beta}\left[-1+e^{\frac{2\beta(x-a)}{\alpha}}\right]dx \\
&+ \int_c^b x \frac{\lambda m_2}{\beta}\left[-1+e^{\frac{2\beta(x-b)}{\alpha}}\right]dx + m_2 b + m_1 a \\
&= -\frac{\lambda m_1}{2\beta}\left(c^2-a^2\right)+\frac{\lambda m_2}{2\beta}\left(b^2-c^2\right) \\
&+ X(c)-Y(c)
\end{aligned}
$$

Sendo,

$$X(c) = \lambda m_1 \alpha (c\gamma_2 - a)/2\beta^2 - \lambda m_1 \alpha^2 (\gamma_2 - 1)/4\beta^3 + m_2 b + m_1 a$$

e

$$Y(c) = \lambda m_2 \alpha (b - c\gamma_2)/2\beta^2 - \lambda m_2 \alpha^2 (1 - \gamma_1)/4\beta^3$$

Desta maneira, foram simulados fluxos de caixa (com entradas e saídas) segundo distribuições normais com média (μ) e variância (σ^2) em diversas grandezas, além de utilizar diferentes custos de transferência para aplicações e resgates, obtendo menores custos e possibilitando que o próprio modelo identifique os limites superior e inferior (PREMANCHANDRA, 2004), uma vantagem sobre o modelo Miller-Orr, que não define o limite inferior.

Evoluindo nesta linha de modelos estocásticos, o trabalho de Volosov et al. (2005) apresenta um modelo de programação estocástica em dois estágios, com base em árvores de cenários, que não apenas considera o problema de saldo de caixa, bem como a exposição ao câmbio internacional, abordando o risco da variação cambial.

Neste modelo os autores consideram os fluxos de caixa provenientes de diferentes moedas, relacionando o aspecto do câmbio existente e da necessidade de *hedge* para proteção cambial. Desta forma, os autores obtêm resultados positivos na determinação do caixa ideal em conjunto com as definições sobre como utilizar o *hedge*, mesmo que de maneira limitada (VOLOSOV et al. 2005).

Já o trabalho de Yao, Chen e Lu (2006) apresenta uma formulação diferente, ao considerar a demanda por dinheiro de acordo com os conceitos de lógica nebulosa (*fuzzy*), desenvolvendo um modelo uni-período, ou seja, sem a utilização de dados passados, devido à incapacidade dos dados históricos propiciarem suficientemente uma previsão de demanda de caixa.

Assim, sendo utilizada uma modelagem próxima a do inventário estocástico uni-período, onde o estoque de um dia não poderá ser utilizado para o dia seguinte, uma vez que perde seu valor, sendo considerado o custo de oportunidade. Assim, o administrador deve definir o saldo de estoque em caixa em um nível cujo valor da função distribuição acumulada seja igual ao custo/taxa de juros do dinheiro (YAO; CHEN; LU, 2006).

Este tipo de modelagem considera a relação entre o custo de sobra do recurso financeiro e o custo de penalidade pela sua falta, mas se diferenciando ao considerar um ambiente nebuloso (*fuzzy*).

Dentre as pesquisas mais recentes, o trabalho de Gormley e Meade (2007) se diferencia ao apresentar uma política de saldo de caixa dinâmica que minimiza os custos de transferência quando os fluxos de caixa não são independentes ou identicamente distribuídos sob uma estrutura de custos geral.

Por meio dessa metodologia, os autores utilizaram uma série de dados históricos para desenvolver um modelo de séries temporais para prever fluxos de caixa, promovendo uma expectativa condicional dos fluxos futuros e obtendo resultados de redução de custos de transferência.

Nesse modelo chamado de política única dinâmica (PUD), a não necessidade dos fluxos serem identicamente distribuídos é representada por:

$$E(w_{t+\tau} \mid w_t, w_{t-1}, \ldots) \neq E(w_t) = \text{constante}$$

Onde $w_t \in (-\infty, \infty)$, sendo uma modificação exógena realizada no saldo de caixa na data *t*. Isso permite que não haja necessidade de assumir uma distribuição dos fluxos de caixa, mas a metodologia exige um fluxo de caixa histórico para adaptação do modelo e τ corresponde à quantidade de tempo no futuro em que se deseja realizar o ajuste de caixa.

Desta forma, o modelo PUD calcula os custos associados ao fluxo de caixa, divididos em (GORMLEY; MEADE, 2007, p. 927):

- manutenção do fluxo de caixa: *holding cost – h*;
- custo de *déficit* de caixa: *shortage cost – u*; e
- os custos de transferência, divididos em:
    - custo fixo de transferência para investimento: γ_0^+;
    - custo fixo de transferência para resgate: γ_0^-;
    - custo variável de transferência para investimento: γ_1^+;

- custo variável de transferência para resgate: γ_1^-.

Neste caso, os autores consideram que toda transferência possui um custo associado, que varia de acordo com seu tipo, seja na aplicação do caixa para outro ativo ou em seu resgate do ativo para o caixa. Além disso, este custo de transferência possui um valor fixo por operação, normalmente associado a taxas bancárias ou de intermediação, e um valor variável que normalmente representa um percentual de comissão ou impostos relativos à operação.

Assim, o valor em caixa (O) na data t + 1 é: $O_{t+1} = O_t + K_t + w_t$.

Onde, K representa a alteração realizada pela gestão ao investir e resgatar e w, conforme já mencionado, as alterações exógenas do saldo decorrentes de entradas e saídas não controladas (fluxo de caixa).

Sendo o custo de transferência (γ) do dinheiro em aplicação ou resgate em cada dia (t), no período previsto:

$$\Gamma(K_t) = \begin{cases} \gamma_0^- - \gamma_1^- K_t, & K_t < 0, \\ 0, & K_t = 0, \\ \gamma_0^+ - \gamma_1^+ K_t, & K_t > 0, \end{cases}$$

Já os custos de manutenção (h) e de *déficit* de caixa (u) são associados aos respectivos percentuais de custos financeiros estabelecidos.

Após a formatação do modelo PUD, Gormley e Meade utilizaram dados de uma empresa multinacional e um modelo de algoritmo genético aplicado à solução de problemas contínuos, proposto por Chelouad e Siarry (GORMLEY; MEADE, 2007) para obter os parâmetros que minimizam o custo total (manutenção, *déficit* e transferência) do saldo em caixa e obtendo resultados significativos, principalmente em um horizonte de tempo de previsão superior a 2 dias.

Seguindo este mesmo modelo de problema estocástico em condições de incerteza, Liu e Xin (2008) apresentam um algoritmo adaptativo com as características de alterar a política de gestão apenas ao início de cada período e conhecer o limite superior e inferior da demanda por dinheiro, mesmo sem o conhecimento sobre a distribuição de probabilidades da demanda de caixa.

Já em outro modelo recente, Baccarin (2009) desenvolve a otimização do saldo de caixa por meio de um processo de *Wiener* padrão *n*-dimensional adaptado ao problema utilizando o método de controle de impulso. A grande contribuição desta metodologia é a aplicação multidimensional, que permite eliminar a restrição a duas opções de ativos (caixa ou investimento), uma vez que a restrição a apenas dois ativos financeiros raramente ocorre na prática.

Dessa forma, Baccarin (2009) descreve a função de custo de controle como sendo:

$$C(\xi_1, \xi_2) = C + c_1(|\xi_1 + \xi_2|) + c_2(|\xi_2|)$$

No qual C > 0 é um custo fixo, $c_1(|\xi_1 + \xi_2|)$ é um custo variável relacionado com a compra e venda de investimentos de alta liquidez e $c_2(|\xi_2|)$ é uma variável de custo paga pela transferência de dinheiro entre as diferentes contas de investimento.

Além disso, o modelo de Baccarin possibilita a utilização de funções não lineares para determinação dos custos de transferência e manutenção/penalidade do saldo de caixa, com regras de investimento e resgate semelhantes aos modelos anteriores.

Apesar destas vantagens, o modelo utiliza técnicas de processos estocásticos, o que apresenta grandes custos computacionais no desenvolvimento de modelos mais complexos (BACCARIN, 2009).

Os problemas relacionados ao risco de falta de caixa e a preferência pela liquidez são retomados no trabalho de Mierzejewski (2010), onde o autor elabora um modelo estocástico considerando a premissa da demanda por saldo de caixa com distribuição normal e a aplicação do valor em risco (VaR - *Value a Risk*), porém com a limitação do equilíbrio de mercado para os fluxos de caixa e no portfólio de investimentos utilizado, a partir de uma taxa média de retorno.

Outra questão pouco explorada é o comportamento do fluxo de caixa ao longo do tempo. Nos modelos tradicionais, a partir da formulação de Miller e Orr (1966), o fluxo de caixa é considerado uma variável aleatória estacionária, usualmente com distribuição Normal ou de acordo com um processo de *Wiener*. Porém, o trabalho de Higson, Yoshikatsu e Tippett (2010) demonstra empiricamente que a demanda por caixa tende a crescer com o crescimento

das próprias organizações, prejudicando a efetividade da maioria dos modelos desenvolvidos até então.

Neste modelo, os valores obtidos para o ponto de retorno (Z) e o limite superior (H) são os mesmos obtidos pelo modelo Miller-Orr, se diferenciando apenas na função de custo médio, quando o fluxo de caixa apresenta maiores valores para limite superior e uma maior variância.

Outra forma de tratar este problema foi apresentada por Melo e Bilich (2011). Assim, os autores propõem a utilização de programação dinâmica para minimizar o custo do caixa, considerando conjuntamente o custo de ruptura de caixa. Neste modelo, o fluxo de caixa é separado em duas partes: uma parte determinística, pela qual a empresa espera ter recebimentos e pagamentos, e outra estocástica. Assim, a função de menor custo pode ser expressa por:

$$C_{\Delta t} = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{\Delta t}\left(B_{i,\Delta t}\right) \gamma_{i,\Delta t} P\left(B_{i,\Delta t}\right) dB_{i,\Delta t} \right] \right\}$$

No qual $C_{\Delta t} = 0$ é o custo total mínimo. Existindo N blocos (N intervalos de fluxos de caixa estocásticos). Assim, o fluxo de caixa do período anterior $B_{\Delta t\text{-}1}$ é adicionado ao fluxo de caixa esperado (determinístico), ao fluxo de caixa estocástico líquido e a variável de decisão sobre resgatar investimentos ($X_{\Delta t}$), obtendo assim o fluxo de caixa atual $B_{\Delta t}$.

O resultado ($B_{\Delta t}$) é multiplicado pela probabilidade $P(B_{i,\Delta t})$ que representa a expectativa do saldo. A taxa de juros que representa o custo de falta ou sobra de caixa (dependendo do saldo positivo/negativo do fluxo) $\gamma_{i,\Delta t}$ é aplicada.

Assim, o valor $X_{\Delta t}$ de atua na minimização da função custo (MELO; BILICH, 2011). Porém, a grande limitação do modelo se encontra na definição dos intervalos correspondentes aos fluxos estocásticos e na definição da probabilidade associadas a estes. Os próprios autores colocam a utilização de técnicas de inteligência artificial como possibilidades de aplicação para previsão, realizando o ajuste das variáveis do modelo.

Dessa forma, dos trabalhos originais, aos mais atuais, a conceituação teórica do problema de gerenciamento do saldo de caixa ainda apresenta limitações práticas como restrições quanto à aplicação do modelo e as formas de desenvolvimento essencialmente focadas em modelos estocásticos.

A grande limitação dos modelos estocásticos está na necessidade do conhecimento prévio sobre a distribuição dos fluxos de caixa (KACHANI; LANGELLA, 2005). Mesmo em projetos de investimento onde são utilizadas previsões, muitas vezes sem a possibilidade de estabelecer uma determinada distribuição de probabilidades, a estimativa dos fluxos de caixa é necessária para a análise do investimento (KACHANI; LANGELLA, 2005).

No caso de projetos de investimento podem ser aplicadas distribuições de probabilidades do tipo Normal (BENATI, 2006), Uniforme (PADMAN; SMITH-DANIELS; SMITH-DANIELS, 1997) e Triangular (MILANOVIC; MILANOVIC; MISITA, 2010 e JAIMUNGAL; LAWRYSHYN, 2011).

Estas limitações demonstram a importância do levantamento do referencial sobre o assunto e o delineamento dos modelos desenvolvidos sob tal ótica (Quadro 3), abrindo perspectivas sobre novas abordagens e aplicação de ferramentas computacionais para tal.

Ano	**Autores**	**Contribuição**
1952	Baumol	Considerar o saldo de caixa como um estoque, aplicando o modelo do Lote Econômico de Compra, com custo de transferência e custo de oportunidade. Sendo considerada a origem da estruturação do problema com um modelo determinístico.
1956	Tobin	Adapta o modelo de Baumol para que o número de transações se torne um número inteiro positivo.
1966	Whalen	Incorpora o custo da falta de liquidez, o volume médio e a variabilidade dos fluxos de caixa.
1966	Miller e Orr	Considera o saldo de caixa como uma variável aleatória com distribuição Normal, definindo não um caixa ideal, mas uma faixa de oscilação do saldo de caixa, utilizando um investimento de alta liquidez para tal (problema com dois ativos). A partir de então os modelos de administração de caixa passam a ser tratados como modelos estocásticos.
Década de 1970		Os modelos se diferem apenas na forma de estruturação, mas ainda limitados a dois

		ativos.
1974	Daellenbach	Estuda os efeitos de séries não estacionárias sobre os modelos de otimização do saldo de caixa.
1976	Gregory	Discussão sobre as limitações de tempo entre nas operações de investimento e resgate, ainda mais se considerado o "momento certo" para resgate de títulos negociáveis.
Década de 1980		O problema é essencialmente tratado em periódicos da área de Economia e Finanças.
1980	Tapiero e Zuckerman	Utilização da distribuição de Poisson Composta substituindo a distribuição Normal.
1983	Milbourne	Utilização de diferentes custos de transferência para aplicação e resgate do investimento para o saldo de caixa.
1986	Smith	Conceituação do fluxo de caixa como um evento independente, por meio de um processo de *Wiener* (Movimento Browniano).
1988	Beckman e Foreman	Os modelos de gerenciamento de caixa desenvolvidos até então apresentam grande dificuldade de aplicação prática, mesmo em testes controlados.
Década de 1990		O problema é raramente abordado na literatura, com poucas variações sobre os modelos anteriores.
1998	Ogden e Sundaram	Incorporação da linha de crédito em casos de *déficit* de caixa.
Década de 2000		Resgate do problema, principalmente no campo da Pesquisa Operacional, voltada a melhoria dos modelos, com o suporte de novos modelos estocásticos e simulações computacionais.
2000	Pacheco et al.	Projeções de fluxos de caixa para maximização da rentabilidade de investimentos financeiros utilizando algoritmos genéticos.
2001	Hinderer e Waldmann	Utilização de cadeias de *Markov* em processos estacionários.
2001	Barbosa e Pimentel	Aplicação de Programação Linear na

		definição da política de saldo de caixa.
2002	Baccarin	Utilização do movimento *Browniano* em tempo contínuo, buscando a otimização da liquidez, com o pressuposto de saldo de caixa negativo.
2004	Premachandra	Desenvolvimento do modelo de aproximação difusa e gerenciamento do saldo de caixa em base horária.
2005	Volosov et al.	Considera a exposição cambial por meio do uso de árvores de cenários.
2006	Yao, Chen e Lu	Modelo estocástico uni-período considerando a demanda por dinheiro por lógica nebulosa.
2007	Gormley e Meade	Utilização de modelos de séries temporais para a previsão dos fluxos de caixa com base em históricos, permitindo não assumir uma distribuição de probabilidades ao modelo.
2008	Liu e Xin	Desenvolvimento de um algoritmo adaptativo que não necessita do conhecimento sobre a distribuição de probabilidades da demanda de caixa.
2009	Baccarin	Elimina a restrição de dois ativos com a aplicação multidimensional e funções não lineares de custos de transferência, manutenção e penalidade, com a utilização de movimento *Browniano* (processo de *Wiener*) *n*-dimensional.
2010	Mierzejewski	Incorporação do fator risco, por meio da aplicação do Valor em Risco (VaR).
2010	Higson, Yoshikatsu e Tippett	Os fluxos de caixa tendem a crescer com o crescimento das organizações, ou seja, não necessariamente é uma série estacionária.
2011	Melo e Bilich	Divisão dos fluxos de caixa em duas partes: uma parte determinística esperada pela organização e outra estocástica.

Quadro 3 – Evolução da pesquisa nos modelos de gerenciamento de caixa

2.2 Modelos Evolutivos e Meta-heurísticas

Os modelos evolutivos possuem sua origem na inteligência artificial. A inteligência artificial é um campo que busca o desenvolvimento de sistemas que sejam capazes de tomar decisões com base em modelos artificiais que simulam o raciocínio. Assim, esses sistemas computadorizados devem aprender de acordo com uma base de informação e serem capazes de extrapolar esta informação, generalizando a aplicação desse conhecimento a novas possibilidades.

A computação evolutiva tem sua origem no estudo da teoria de evolução natural, sendo modelos de algoritmos que buscam atingir funções objetivo pré-definidas, para isso, partem de possibilidades de resolução aleatórias e de acordo com seu algoritmo de desenvolvimento evoluem no sentido de obter melhores resultados na busca do objetivo estabelecido (REZENDE, 2005).

Já a meta-heurística é uma estratégia interativa de alto nível que orienta uma heurística subjacente a resolver um determinado problema, ou seja, realiza uma série de decisões, com base em estratégias, a fim de executar movimentos em sua busca inteligente por uma (ou um conjunto) de soluções (VOβ, 2001).

Os modelos evolutivos são uma parte dos modelos de meta-heurística, especificamente os bioinspirados, que possuem algoritmos que buscam a otimização pela evolução das possíveis soluções criadas, utilizando operadores e estratégias com diferentes abordagens (PREUX; TALBI, 1999).

Assim, os processos adaptativos são provenientes de diferentes contextos, como a psicologia ("aprendizagem"), biologia ("evolução"), física ("arrefecimento") e neurologia ("impulsos nervosos") e têm servido de base para o desenvolvimento de meta-heurísticas (VOβ, 2001).

Em função das abordagens empregadas, diferentes metodologias podem apresentar desempenho diferenciado para os variados problemas de otimização, bem como são

dependentes da implementação e da parametrização, como a função objetivo, suas restrições e demais parâmetros associados ao modelo.

Normalmente as meta-heurísticas buscam a otimização de um problema definido por meio de uma formulação matemática de seu propósito, denominada função objetivo. Os modelos computacionais evolutivos são um caso especial em termos de aprendizado, pois dependem do aprendizado dedutivo na formulação de sua função objetivo para posteriormente utilizar algoritmos específicos na obtenção da resposta esperada.

Para se tornarem úteis, os algoritmos tradicionais de descoberta de soluções mais apropriadas, os chamados algoritmos de otimização, utilizam uma série de suposições ou hipóteses sobre como avaliar o quão adequado é uma determinada solução, sendo esta a sua heurística.

Outra forma tradicional de otimização, baseada em gradiente-descendente, depende da ocorrência de baixa variabilidade no espaço de possíveis soluções ao problema, sob pena de obter uma otimização local e não global ao objetivo proposto.

A aplicação de meta-heurísticas ainda apresenta como vantagem o fato de não depender de premissas ou hipóteses sobre as variáveis que impactam em sua função objetivo, como considerar distribuições de probabilidade específicas ou, ainda, a necessidade de constituir uma série estacionária.

Fundamentalmente, a medição de desempenho dos algoritmos evolutivos (e meta-heurísticas) deve ser capaz apenas de ordenar duas soluções comparativas e determinar aquela, que de alguma forma, é melhor do que a outra (FOGEL, 2000).

Em geral os algoritmos evolutivos possuem uma estrutura básica, conforme a figura 5.

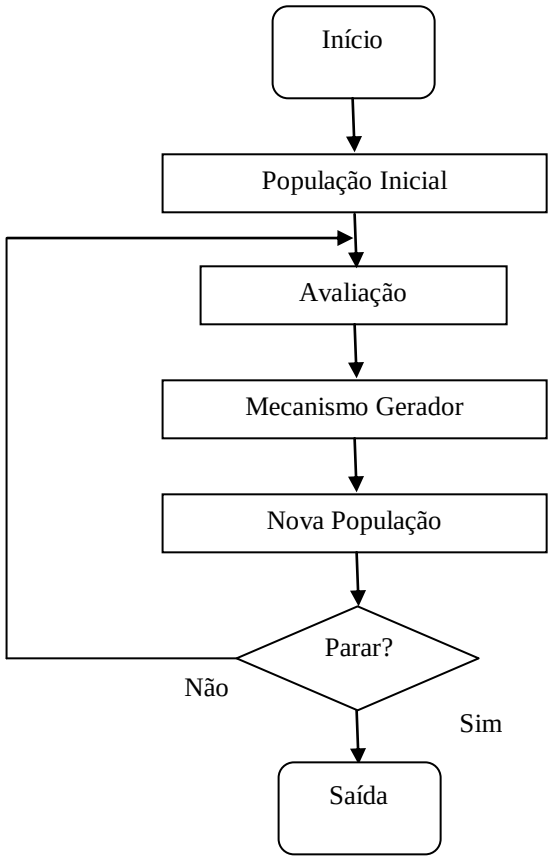

Figura 5 – Estrutura de um algoritmo evolutivo (ZHOU, 2008, p. 33)

Os sistemas de computação evolutiva, também chamados de algoritmos evolutivos podem ser divididos em 3 grandes grupos: Algoritmos Genéticos, Estratégias de Evolução e Programação Genética (REZENDE, 2005).

Algoritmos Genéticos (AG) são os modelos mais conhecidos, baseados na teoria da evolução natural e na genética, estes modelos de otimização possuem a capacidade de trabalhar problemas com uma grande gama de soluções. Nos algoritmos genéticos (Figura 6) a população é um conjunto de possíveis soluções ao problema determinado, sendo cada indivíduo dessa população com uma estrutura semelhante aos cromossomos.

Algoritmo 1 – Algoritmo Genético

```
1:  γ = 0;
2:  Gerar População Inicial P(0);
3:  para todo cada indivíduo i da população atual P(t) faça
4:      Avaliar aptidão do indivíduo i;
5:  fim para
6:  enquanto Critério de parada não for satisfeito faça
7:      t = t + 1;
8:      Selecionar população P(t) a partir de P(t-1);
9:      Aplicar operadores de cruzamento sobre P(t);
10:     Aplicar operadores de mutação sobre P(t);
11:     Avaliar P(t);
12: fim enquanto
```

Figura 6 – Diagrama geral do ciclo de vida de um algoritmo genético (REZENDE, 2005, p. 230)

A possibilidade de sobrevivência de cada indivíduo é avaliada por uma função objetivo, função esta a ser otimizada, sendo o resultado desta função a aptidão de cada indivíduo como melhor resultado ao problema, funcionando como forma de seleção dos indivíduos para reprodução. Finalmente a evolução é propiciada pela aplicação de operadores genéticos como seleção, cruzamento e mutação (MARTINEZ et al., 2009).

Os operadores de seleção buscam averiguar o quão apto cada indivíduo está para ser considerado como a melhor solução ao problema encontrado, depois disso, os indivíduos são cruzados, ou seja, pela junção de partes de cada um dos indivíduos aptos é formada uma nova população de indivíduos e, eventualmente, alguns destes indivíduos sofrem alterações aleatórias de mutação, segundo uma determinada probabilidade de ocorrência.

Existem implicações no resultado final do modelo de acordo com os parâmetros e técnicas destes operadores, mas a função de seleção, que ordena os indivíduos mais aptos garante que as melhores alternativas encontradas ao problema sejam em geral mantidas. Já a mutação proporciona que alterações aleatórias possibilitem melhorias na solução, abrangendo uma maior área de possibilidades de respostas.

Além dos 3 grupos citados, outras meta-heurísticas podem ser utilizadas em problemas de otimização como Algoritmos Genéticos Construtivos (OLIVEIRA; LORENA, 2002),

Algoritmos Meméticos (MOSCATO, 1989), Colônia de Formigas (DORIGO, 1992), *Particle Swarm Optimization* (EBERHART; KENNEDY, 1995), *Simulated Annealing* (KIRKPATRICK; GELATT; VECCHI, 1983) e *Tabu Search* (GLOVER, 1986).

Apesar de não serem inspirados na teoria genética, se caracterizando como algoritmos evolutivos, estes outros algoritmos apresentam resultados promissores por desenvolverem soluções geradas de maneira aleatória que evoluem em direção a uma solução potencialmente ótima, de acordo com as heurísticas empregadas em cada modelo.

A seguir são detalhados os modelos utilizados neste trabalho.

2.2.1 Algoritmos Genéticos

Os algoritmos genéticos (AGs) são a forma mais clássica de modelos evolutivos, tendo sua origem na década de 1950 com as pesquisas de Barricelli (1954 e 1957). Posteriormente Fraser (1957) aplicou esta teoria para simular artificialmente o processo de seleção natural dos organismos.

Assim, os AGs se diferenciam dos modelos tradicionais de otimização realizando seu procedimento de busca pela solução ideal com as seguintes características (GOLDBERG, 1989, p. 7):

1. AGs trabalham com a codificação de um conjunto de parâmetros, não com os parâmetros em si;
2. AGs realizam sua busca a partir de uma população de indivíduos, não um único indivíduo;
3. AGs utilizam a informação da função objetivo, não derivadas de outro conhecimento auxiliar;
4. AGs utilizam regras de transição probabilísticas, não regras determinísticas.

Assim, nos algoritmos genéticos, cada possível solução do algoritmo é considerada um "indivíduo", que possui um cromossomo, geralmente corresponde à forma binária deste indivíduo (Figura 7).

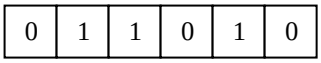

Figura 7 – Exemplo de cromossomo (GOLDBERG, 1989, p. 10)

Cada gene (*bit*) que forma esse indivíduo corresponde a uma característica, sendo o indivíduo a concatenação da sequência de *bits* que formam o cromossomo. Já a população corresponde ao conjunto de indivíduos que são inicialmente gerados aleatoriamente e que posteriormente são submetidos a três tipos de operadores (GOLDBERG, 1989):

1. Seleção;
2. Cruzamento;
3. Mutação.

Os operados de seleção avaliam cada indivíduo (possível resposta) em atender ao objetivo proposto, utilizando para isso uma função que avalia sua aptidão. Desta maneira, os indivíduos mais aptos são selecionados por elitismo, ou possuem maior probabilidade de serem selecionados pelo método da roleta, para compor uma nova população de soluções, conforme a teoria da evolução.

Posteriormente os indivíduos selecionados pelo operador de seleção serão cruzados, onde dois indivíduos selecionados como pais formarão dois novos indivíduos filhos através dos operadores de cruzamento. Os operadores de cruzamento trocam parte dos genes de cada pai, podendo fazer isso em um único ponto, em dois pontos ou de maneira uniforme, seguindo uma máscara pré-definida (Figura 8).

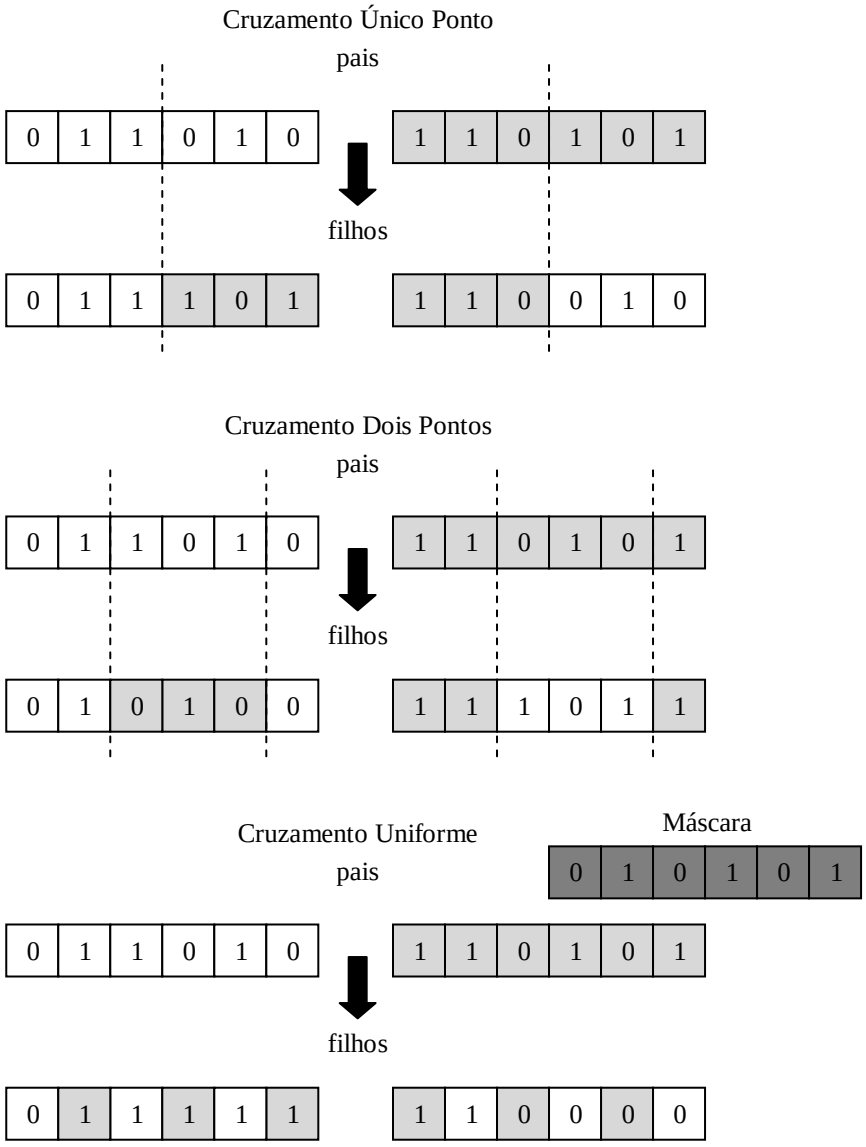

Figura 8 – Exemplos de operadores de cruzamento

Além dos operadores de seleção e cruzamento existem os operadores de mutação, que aleatoriamente, dada certa probabilidade definida, alteram o valor de um gene (*bit*) a fim de gerar um indivíduo mutante. Esse operador tem como finalidade representar a evolução das soluções por meio de mutações e possibilita uma forma de evolução dos indivíduos que correspondem a soluções além do cruzamento (Figura 9).

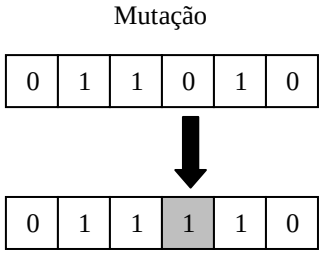

Figura 9 – Exemplo de operador de mutação

2.2.2 *Particle Swarm Optimization*

O modelo de *particle swarm optimization* (PSO) consiste em um método computacional de otimização similar aos algoritmos genéticos, mas baseado nos movimentos de um enxame de *M* partículas que procuram um objetivo, onde cada indivíduo, chamado de partícula, é uma possível solução ao problema proposto.

Apesar disso, o modelo se difere dos algoritmos genéticos pelo fato de que cada possível solução (partícula) possui uma velocidade aleatória, flutuando pelo hiperespaço, assim, cada partícula do enxame é avaliada por uma função de aptidão, sendo armazenada a melhor solução da partícula, chamada de *pbest*, assim como também é armazenada a melhor solução global, *gbest* (EBERHART; KENNEDY, 1995).

A partir da posição atual da partícula (x_i) que corresponde à solução atual, sua velocidade atual (v_i), sua melhor posição passada ($pbest_i$) e da melhor posição global de todas as partículas do enxame (*gbest*), cada partícula é atualizada interativamente de acordo os atributos anteriores (TSAI et al., 2010).

O vetor de velocidade é atualizado por:

$$v_i(t+1) = \omega v(t) + c_1 r_1 (pbest - x_i(t)) + c_2 r_2 (gbest - x_i(t))$$

Onde, ω é a constante de inércia definida para a velocidade, c_1 e c_2 são os pesos das melhores soluções locais e solução global respectivamente, sendo uma taxa de aprendizado, e r_1 e r_2 são números aleatórios uniformemente distribuídos [0, 1] (UNLER; MURAT, 2010).

A velocidade ainda pode ter como parâmetros valores de máximo e mínimo, e a nova posição da partícula obtida por:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1)$$

Assim, a partir das novas posições das partículas, suas aptidões são novamente calculadas, atualizando o valor de *pbest*, caso a nova posição obtenha um resultado melhor que o melhor resultado da própria partícula (ótimo local), e o valor de *gbest* (o melhor ótimo encontrado), caso alguma das novas posições obtenha uma aptidão melhor que o *gbest* anterior (TSAI et al., 2010).

Algoritmo PSO (*Particle Swarm Optimization*)

```
1:  Procedimento - função objetivo (f)
2:  Inicializar o enxame de m partículas
3:  enquanto o critério de parada não seja satisfeito faça
4:      Avaliar cada partícula
5:      para partícula i, i = 1, 2, . . . , m faça (atualizar as melhores posições)
6:          se f(x_i) < f (pbest_i) então
7:              pbest_i = x_i
8:              se f(pbest_i) < f (gbest) então
9:                  gbest = pbest_i
10:             fim se
11:         fim se
12:     fim para
13:     para partícula i, i = 1, 2, . . . , m faça (gerar a próxima geração)
14:         v_i(t + 1) =  ω v_i(t) + c_1 r_1(pbest_i − x_i) + c_2 r_2(gbest − x_i)
15:         x_i (t + 1) = x_i (t) + v_i (t + 1)
16:     fim para
17: fim enquanto
18: fim procedimento
```

Figura 10 – Algoritmo *particle swarm optimization* (Adaptado de CHEN; JIANG, 2010, p. 2102)

Com isso, o modelo evolui pela interação entre a partícula e o enxame ao qual faz parte, observando seu melhor resultado obtido e o melhor resultado global obtido, demonstrando convergência das soluções em direção a melhor solução encontrada, conforme seu algoritmo (Figura 10).

2.2.3 *Simulated Annealing*

O modelo de *simulated annealing* (SA) é baseado em um processo físico de aquecimento e então um lento resfriamento de uma substância cristalina e sua observação, em que, se o resfriamento tiver sido suficientemente lento, as moléculas irão se alinhar em um padrão rígido, correspondente ao estado de energia mínima (KIRKPATRICK; GELATT; VECCHI, 1983).

Assim, o algoritmo SA imita este processo pela produção de uma sequência de respostas a partir de uma série de distribuições estatísticas que se movem em direção ao ponto de mínimo, de acordo com a função objetivo, conforme a temperatura é reduzida (BROOKS; FRIEL; KING, 2003).

Esse processo de arrefecimento proporciona que a cada iteração o algoritmo aceite uma solução gerada aleatoriamente na vizinhança direta da solução atual, verificando se a nova solução é melhor ou se é probabilisticamente pior do que a atual (PAILLA et al., 2010).

Assim, os elementos que compõem o algoritmo SA podem ser descritos como (BERTSIMAS; TSISIKLIS, 1993, p. 10):

1. Um conjunto finito de soluções (S).
2. Uma função objetivo baseada em números reais J definida em S. Sendo, o valor ótimo $S^* \subset S$, sendo o valor mínimo global de J.
3. Para cada $i \in S$, um conjunto $S(i) \subset S - \{i\}$, chamado de conjunto vizinhança de i.

4. Para cada i, uma coleção de coeficientes positivos q_{ij}, $j \in S(i)$, em que $\sum_{j \in S(i)} q_{ij} = 1$. Assumindo que $j \in S(i)$ se e somente se $i \in S(j)$.

5. Uma função não crescente T: $N \rightarrow (0, \infty)$, chamada de *programação de arrefecimento*. N é um conjunto de inteiros positivos, e $T(t)$ é chamado de temperatura na data t.

6. Um "estado" inicial $x(0) \in S$.

Obtendo o algoritmo (Figura 11), para 100 soluções no conjunto $S_{(1)}$.

Algoritmo SA (*Simulated Annealing*)

```
1:  Procedimento - função objetivo f(S(i))
2:  Gerar Conjunto de Soluções Iniciais S(1);
3:  γ = 1
4:  enquanto γ < número máx. de iterações, ou nSucessos < número máx. de sucessos faça
5:      para S(i), i = 1, 2, . . . , n faça
6:          S(i+1) = função Perturbação S(i)
7:          Δf(i+1) = f(S(i+1)) - f(S(i))
8:              se Δf(i+1)< 0, ou exp(-Δf(i+1)/T) > aleatório[0,1] então
9:                  S(i+1) = S(i)
10:                 nSucessos = nSucessos + 1
11:             fim se
12:         i = i + 1
13:     fim para
14:     T = αT (α = fator de arrefecimento)
15: fim enquanto
16: fim procedimento
```

Figura 11 – Algoritmo *simulated annealing* (Adaptado de BERTSIMAS; TSISIKLIS, 1993, p. 10)

Dados os elementos apresentados anteriormente, o algoritmo SA consiste em uma cadeia de *Markov* $x(t)$ não homogênea de tempo discreto (BERTSIMAS; TSISIKLIS, 1993). Os modelos de meta-heurística ou bioinspirados, como apresentados, possuem algoritmos que buscam a otimização pela evolução das possíveis soluções criadas, utilizando operadores e estratégias que possuem diferentes abordagens.

Assim, diferentes metodologias podem apresentar desempenho diferenciado para os diversos problemas de otimização, bem como são dependentes da implementação e da parametrização, como a função objetivo, suas restrições e demais parâmetros associados ao modelo.

Mesmo assim, podem existir componentes diferentes que apresentam vantagens pontuais na aplicação, que juntos tornam este novo algoritmo desenvolvido, chamado de algoritmo híbrido, melhor em termos de desempenho.

Apesar das vantagens, a hibridização é um processo complexo, que demanda uma série de problemas, tornando-se um tipo de arte, conforme apontado por Preux e Talbi (1999, p. 558):

- *Quais algoritmos devem ser combinados?*
- *Como eles devem ser combinados?*
- *Como cada algoritmo deve ser escrito?*

Estas questões ainda não foram respondidas, uma vez que a complexidade do processo é alta e demanda o conhecimento e contato com os algoritmos e o problema envolvido, portanto, o presente trabalho não investigará os efeitos da hibridização nos algoritmos propostos.

2.2.4 Métodos de Otimização Multiobjetivo

Quando existe a necessidade de obter um resultado que atenda a mais de uma função objetivo então o emprego de modelos multiobjetivos deve ser feito, a fim de atender aos dois ou mais objetivos propostos, respeitando as limitações existentes.

Assim, no problema proposto, existe a necessidade de desenvolver políticas de gerenciamento do saldo de caixa com o objetivo de obter o menor custo associado ao caixa ao

mesmo tempo em que se busca o menor risco de falta de caixa, algo que pode prejudicar a empresa no curto prazo.

Dessa forma, não há como estabelecer se uma solução é a melhor solução dentro de um grupo de possíveis soluções, uma vez que diversos critérios devem ser analisados, observando a otimização de todos os objetivos propostos.

Assim, em problemas de otimização multiobjetivo pode existir um conjunto de soluções melhores, uma vez que não existe uma solução ótima, sendo este conjunto conhecido por Pareto ótimo, não sendo inferiores nem dominadas por outras soluções possíveis (Figura 12).

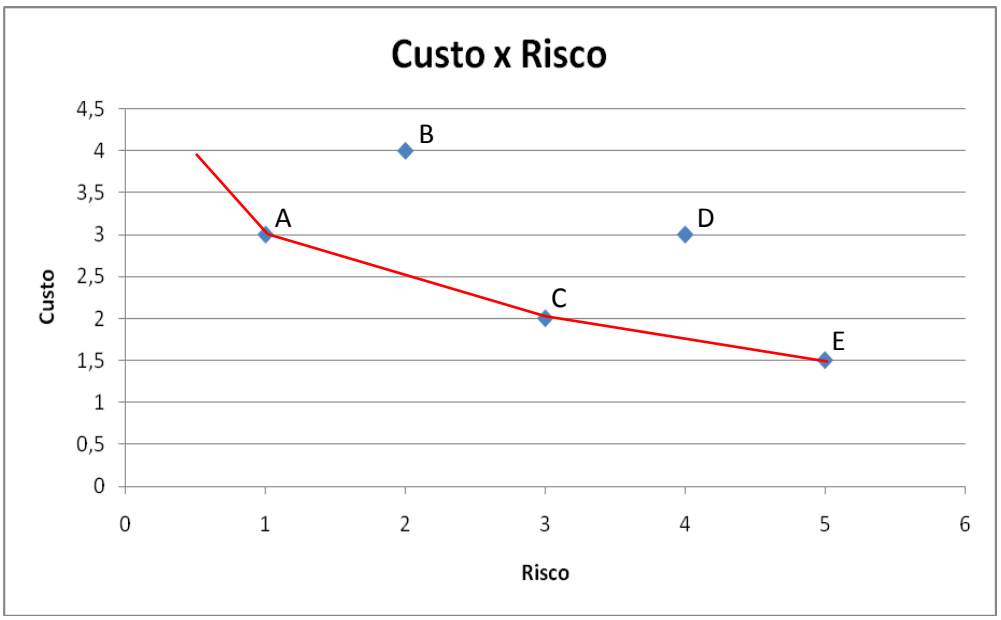

Figura 12 – Possíveis soluções Pareto ótimo

Assim, conforme demonstrado na figura 12, numa relação entre custo e risco estabelecida, cujo objetivo é minimizar ambos (custo e risco), as soluções A, C e E são não dominadas, ou seja, estas soluções são as melhores, formando o conjunto Pareto ótimo, não existindo dominância entre elas.

Já as soluções B e D são dominadas, a solução B é dominada pela solução A que apresenta menor custo e menor risco, enquanto a solução D é dominada pela solução C que também representa menor custo e risco do que esta.

Assim, segundo o conceito de dominância de Pareto, uma solução *x* domina uma solução *y* ($x \succeq y$) se:

1. A solução *x* não é pior que a solução *y* em nenhum dos objetivos requeridos;
2. Pelo menos um objetivo da solução *x* é melhor que a solução *y*.

Conforme Suman e Kumar (2006), o conceito de soluções Pareto ótimo foi formulado por Vilfredo Pareto no século XIX, devido à necessidade de otimização simultânea em problemas da vida real, com vários objetivos, muitas vezes conflitantes. Normalmente, não existe uma solução única ideal, e sim um conjunto de soluções alternativas. Estas soluções são ideais no sentido mais amplo que nenhuma outra solução no espaço de busca é superior às demais quando todos os objetivos são considerados.

A partir do emprego da dominância de Pareto, existe uma série de metodologias específicas para a otimização multiobjetivo para as meta-heurísticas apresentadas, onde se destacam:

- Algoritmos Genéticos: *Multiobjective Genetic Algorithm - MOGA* (FONSECA; FLEMING, 1993), *Niched Pareto Genetic Algorithm - NPGA* (HORN et al., 1994), Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm - NSGA (SRINIVAS; DEB, 1994);
- *Particle Swarm Optimization*: *Non-dominated Sorting Particle Swarm Optimizer - NSPSO* (LI, 2003), *Ranked Pareto Particle Swarm Optimization - RPPSO* (WANG et al., 2009);
- *Simulated Annealing*: *Pareto Simulated Annealing - PSA* (HAPKE; JASZKIEWICS; SLOWINSKI, 2000) e *Multiobjective Simulated Annealing - MOSA* (PAYA et al., 2008).

Observando os principais modelos de otimização multiobjetivo, nota-se a preferência pela utilização da dominância de Pareto, por isso, nos modelos desenvolvidos neste trabalho este conceito é utilizado para todos os modelos desenvolvidos (AG, PSO e SA), a fim de comparar os efeitos nos diferentes algoritmos.

Apesar da utilização da dominância de Pareto, podem existir casos em que não há uma dominância clara, pois nenhuma solução apresenta um fator melhor que as demais, desta forma, pode-se utilizar o método da ponderação dos objetivos para a definição das melhores soluções dentre o conjunto Pareto ótimo.

O método da ponderação dos objetivos é um dos mais simples a ser aplicado, onde a definição da solução ótima é realizada através de um *ranking* das possíveis soluções constantes no conjunto Pareto ótimo, por meio de uma função do tipo:

$$f(x) = \sum_{i=i}^{k} w_i \, f_i(x)$$

Sendo w_i os coeficientes de ponderação em forma de pesos, indicando a importância relativa dos objetivos, servindo para elencar as melhores soluções dentre aquelas que não são dominadas. Normalmente, assume-se:

$$\sum_{i=i}^{k} w_i = 1$$

Assim, de acordo com os pesos definidos para cada objetivo, o resultado será uma solução potencialmente diferente, porém, não existem bases claras para a definição metodológica dos pesos, sendo comum a utilização de diferentes coeficientes de ponderação para um mesmo problema, a fim de comparar os resultados obtidos com base no conhecimento sobre o problema real.

Outro aspecto importante é a escala de grandeza entre os objetivos, assim, é recomendável que estejam em uma mesma unidade de mensuração, a fim de que um objetivo em escala maior não seja priorizado em função de sua grandeza.

3 MÉTODOS DE PESQUISA

O procedimento metodológico deste trabalho está voltado ao desenvolvimento de modelos de gerenciamento do saldo de caixa que atendam aos objetivos proposto. Nesse sentido, é necessária a aplicação destes modelos em ambientes compostos por diferentes cenários a fim de obter séries de fluxos líquidos de caixa que possibilitem a validação dos algoritmos desenvolvidos.

A necessidade de simulações advém da variabilidade existente nos fluxos e saldos de caixa. Esta variabilidade consiste na oscilação de determinada variável sendo ela uma medida de dispersão da função densidade de probabilidade (PINDYCK; RUBINFELD, 2004).

Duas funções densidade são apresentadas na figura 13, onde a função densidade apresentada na linha pontilhada apresenta maior dispersão (variabilidade). Uma das medidas mais comum de mensuração da dispersão é o desvio-padrão, isto é, a raiz quadrada de sua variância (SPIEGEL, 1993).

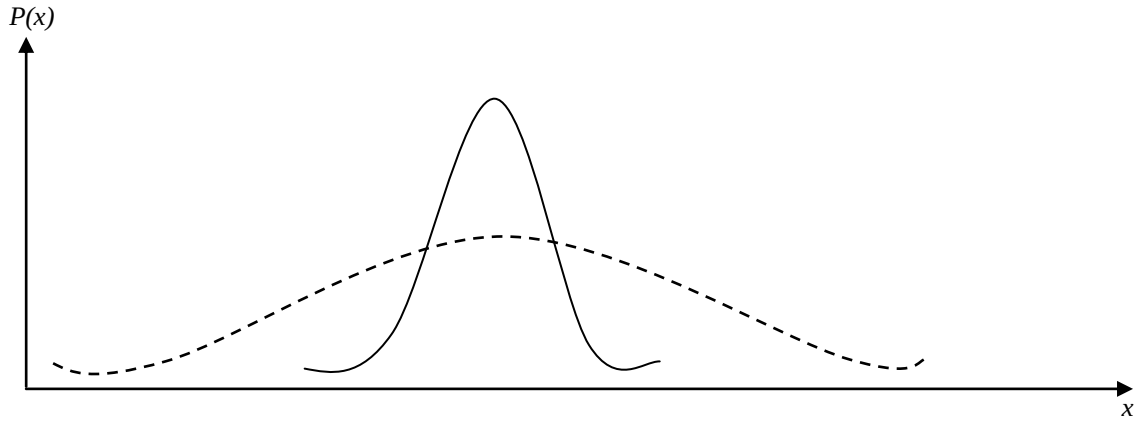

Figura 13 – Diferentes densidades de probabilidade

No caso específico do problema abordado, as referências já apresentadas destacam a necessidade de não considerar o saldo de caixa como uma variável aleatória exclusivamente com distribuição Normal. Dessa forma, investigar os resultados obtidos em simulações com diferentes características é de suma importância.

Assim, a análise do gerenciamento de caixa deve atender a uma ótica de investimento em caixa, observando os aspectos de rentabilidade, liquidez e risco:

- **Rentabilidade**: a existência de caixa por si só não gera rentabilidade para a empresa, mas ela é necessária ao desenvolvimento de sua atividade, assim, ao observar o custo associado ao caixa, assim, a organização pode buscar a melhoria de sua rentabilidade pela minimização do custo;

- **Liquidez**: o investimento em caixa possui total liquidez, mas os investimentos financeiros, que são a opção para direcionamento do excedente de caixa e obtenção de caixa quando há necessidade de resgate, podem não possuir uma liquidez imediata, esta é uma forte limitação dos modelos tradicionais;

- **Risco**: o risco deve ser observado, tanto pela ocorrência de *déficit* de caixa, onde há necessidade da tomada de recursos de terceiros, quanto do *overtrading*, quando a empresa extrapola suas linhas de crédito frente à necessidade de caixa, podendo incorrer em insolvência por falta de recursos.

Resgatando o objetivo geral proposto, torna-se necessário desenvolver uma série de procedimentos que atendam aos objetivos específicos, de maneira a obter os resultados desejados. Dessa forma, o desenvolvimento dos modelos deve considerar:

- Possibilidade de investimento dos recursos de caixa em mais de uma única opção, com rentabilidades, períodos mínimos de resgate (liquidez) e custos de transferência, fixos e variáveis, diferentes para cada opção;

- Possibilidade de obtenção de recursos financeiros em caso de *déficit* de caixa, novamente com custos financeiros (juros) e de transferência diferenciados.

Dessa forma, o desenvolvimento dos modelos deve atender a estas necessidades, que existem na prática, mas são pouco observadas nos modelos atuais de gerenciamento de caixa.

A função objetivo dos modelos desenvolvidos pode ser dividida em três funções:

- Função Objetivo 1: identificar a política de gerenciamento de caixa ideal do saldo dos fluxos de caixa que seja capaz de **minimizar o Custo Total do Caixa** (CTC), com base nos limites inferir (L), superior (H) e ponto de retorno (Z) do saldo de caixa;

- Função Objetivo 2: identificar a política de gerenciamento de caixa ideal do saldo dos fluxos de caixa que seja capaz de **minimizar o Risco Total do Caixa** (RTC), com base nos limites inferir (L), superior (H) e ponto de retorno (Z) do saldo de caixa, com base na probabilidade do saldo de caixa extrapolar o *déficit* máximo de caixa possível;

- Função Objetivo 3: junção das funções objetivo 1 e 2, tornando-se uma função multiobjetivo, consiste em identificar a política de gerenciamento de caixa ideal do saldo dos fluxos de caixa que seja capaz de **minimizar o Custo e o Risco Total do Caixa** (CRTC).

Nesse sentido, o custo total do caixa é formado por três custos:

1. Custo de Manutenção do Caixa (CMC): é o custo de possuir recursos financeiros em caixa. Neste caso, o custo de manutenção é definido a partir de uma abordagem do custo de oportunidade de se manter o dinheiro em caixa, ou seja, o quanto a empresa ganharia em sua segunda opção se não mantivesse este recurso. A definição do custo de oportunidade deve permear as opções de investimentos financeiros bem como a opção do investimento na própria atividade da empresa, como projetos de investimento, financiamento de clientes ou aumento de estoques;

2. Custo de Penalidade (CP): é o custo relativo à inexistência ou falta de recursos em caixa para efetuar pagamentos necessários. Este custo ocorre quando há *déficit* de caixa, ou seja, o saldo inicial do caixa acrescido das entradas de caixa é inferior às saídas de caixa, ocasionando um "caixa negativo", que apesar de não existir financeiramente no conceito restrito do caixa é algo que ocorre na prática das disponibilidades, com a tomada de recursos financeiros de curtíssimo prazo, como por exemplo, a figura do cheque especial ou da conta garantida. Outra variante do custo de penalidade está nos custos financeiros pelo não cumprimento das obrigações existentes pela falta de recursos, incorrendo em multa e juros pelo atraso no pagamento; e

3. Custo de Transferência (CT): são os custos relativos às movimentações entre o saldo de caixa e as opções de investimento, decorrem de taxas bancárias e impostos que incidem tanto no momento do investimento quando em seu

resgate. É importante destacar que os custos de transferência possuem normalmente um componente fixo (valor monetário por operação) e uma componente variável (percentual sobre a operação), sendo diferenciados na aplicação e resgate de recursos.

Dessa forma, a função objetivo 1 pode ser estabelecida como:

$$\text{Função Objetivo 1: Min CTC,}$$
$$CTC = CMC + CP + CT$$

Já a função objetivo 2 deve possuir uma medida de risco associado. As medidas de risco financeiro costumam estar associada a medidas de volatilidade, neste caso a volatilidade dos fluxos de caixa. Assim, o risco inerente ao fluxo de caixa se deve a possibilidade do *déficit* de caixa ser suficientemente grande a ponto de esgotar as possibilidades de obtenção de recursos de terceiros para fazer frente a esta necessidade, ou mesmo, nos casos em que se extrapolem as linhas de financiamento existentes.

Medir risco é equivalente a estabelecer uma determinada correspondência entre um espaço (área) de variáveis aleatórias e um número real não negativo, ou seja, a probabilidade de ocorrência de um valor não desejado (valor negativo) em uma distribuição qualquer (SZËGO, 2005).

Existem medidas de risco de caixa, como o Fluxo de Caixa em Risco (CFaR - *Cash Flow at Risk*), baseado no mesmo conceito do Valor em Risco (VaR) esta metodologia visa calcular a probabilidade existente do fluxo de caixa operacional ser inferior a um determinado limite, dentro de um intervalo de confiança.

Apesar da metodologia CFaR não utilizar a premissa de que o fluxo de caixa atende a uma distribuição Normal, diferentemente do VaR, sua análise é realizada em uma base de tempo entre um quadrimestre e um ano (STEIN et al., 2001), a partir de informações da Demonstração dos Fluxos de Caixa (DFC), de maneira diferente aos objetivos de gerenciamento de caixa deste trabalho.

Assim, a função objetivo 2 pode ser descrita como:

$$\text{Função Objetivo 2: Min RTC,}$$
$$f(RTC) = P(SC_t < DMC \mid SC_{t-1} + FC_t + \Delta I_t)$$

A função RTC (risco total de caixa) corresponde à probabilidade do saldo de caixa (SC) na data *t* ser inferior ao *déficit* máximo de caixa (DMC) que a empresa é capaz de suportar dado em função de seu limite de crédito. Desta forma, o saldo de caixa na data *t* é o resultado do saldo de caixa na data *t - 1* acrescido do fluxo de caixa (FC) na data *t* e da variação dos investimentos (ΔI) também na data *t*, caso ocorra algum investimento (negativo) ou resgate (positivo) nesta data.

Sendo assim, o valor do DMC deve ser menor do que zero (pressuposto de caixa negativo) ou em última instância igual a zero, quando a empresa não possuir linhas imediatas de crédito.

Neste ponto, é importante ressaltar que a minimização total do risco de caixa acarretaria na probabilidade nula de existência do saldo de caixa inferior ao DMC (ou um saldo de caixa negativo em caso de DMC igual a zero), uma vez que isso implica em tendência para concentração de saldo em caixa, é aceitável a definição de perfis de risco a serem minimizados.

Como a função de probabilidade associada ao saldo de caixa depende da conceituação de uma distribuição de probabilidades, para manter a abrangência dos modelos sem a limitação de fluxos de caixa associados à determinada distribuição, a probabilidade calculada é uma probabilidade empírica, ou seja, dentro do histórico de fluxos de caixa é calculado o percentual de vezes em que o saldo de caixa atinge níveis inferiores ao DMC.

A função objetivo 3, por agregar as funções anteriores, torna-se então uma função multiobjetivo e pode ser descrita como:

$$\text{Função Objetivo 3: Min CTC e Min RTC}$$

Utilizando a dominância de Pareto com a ponderação dos objetivos foram estabelecidos como pesos dos objetivos:

	Peso do objetivo Risco (wRisco)	**Peso do objetivo Custo (wCusto)**
Preferência pelo Risco (RTC)	**0.75**	**0.25**
Indiferença entre Risco (RTC) e Custo (CTC)	**0.50**	**0.50**
Preferência pelo Custo (CTC)	**0.25**	**0.75**

Quadro 4 – Pesos dos objetivos na função objetivo 3

Com isso, observa-se:

$$\text{wCusto} = 1 - \text{wRisco},$$

portanto

$$\text{wCusto}(i) + \text{wRisco}(i) = 1$$

Assim, o desenvolvimento dos algoritmos de gerenciamento de caixa, que atendam a estes objetivos, se diferencia dos modelos tradicionais apresentados na literatura existentes nos seguintes pontos:

- **Utilização de mais de dois ativos:** tradicionalmente os modelos de gerenciamento de caixa indicam a opção entre manter o recurso em caixa ou em uma única opção de investimento, normalmente um ativo de alta liquidez, algo que prejudica a aplicação prática dos modelos existentes, uma vez que opções de investimento possuem rentabilidade, risco e liquidez diferenciados. (Figura 14);

- **Risco associado à falta de recursos financeiros:** nos modelos tradicionais é rara a mensuração e controle do risco financeiro da falta de caixa, algo que na prática pode gerar problemas de insolvência para a organização. Além disso, a utilização do modelo multiobjetivo, na busca pela minimização do risco ao mesmo tempo em que visa o mínimo do custo do saldo de caixa é algo pouco explorado na literatura;

- **Utilização de modelos computacionais:** para este problema a aplicação de modelos computacionais evolutivos e meta-heurísticas é algo que foi pouco explorado, com a utilização de algoritmos genéticos apenas. Os modelos

apresentados na literatura optam em sua maioria pela modelagem estocástica. Além disso, tal opção se demonstra relevante devido à facilidade de adaptação do próprio algoritmo a diferentes padrões de distribuição dos fluxos de caixa, ou seja, não há necessidade de conhecimento prévio da distribuição dos fluxos de caixa, pois o modelo se adapta com base em dados históricos ou projetados. Os modelos de *particle swarm optimization* e *simulated annealing* não foram observados na aplicação deste tipo de problema.

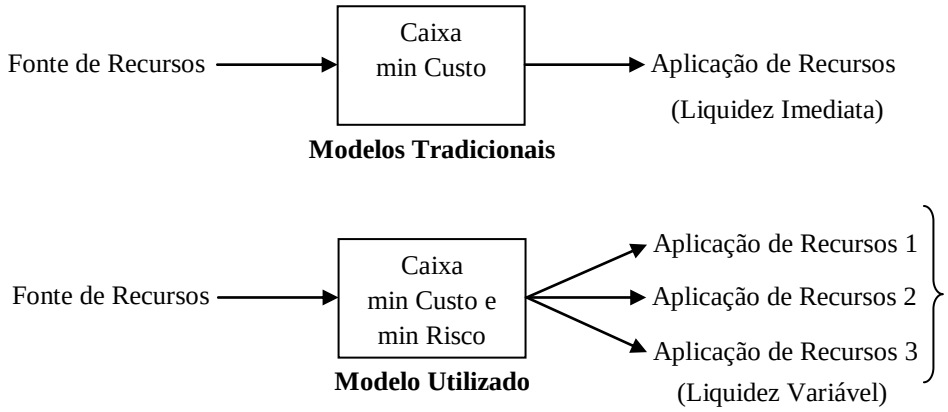

Figura 14 – Fonte e aplicação de recursos financeiros do caixa

Para o desenvolvimento e validação dos algoritmos computacionais de AG, PSO e SA foram utilizadas experimentações computacionais segundo as proposições expostas, descritos a seguir.

3.1 Materiais e Métodos

Para a realização da experimentação computacional são necessários fluxos líquidos de caixa, além de opções de investimento, financiamento, custos de transferência e custos de oportunidade, que atendam as mais diversas possibilidades, de modo a compreender melhor a formação dos custos e riscos relativos ao saldo de caixa.

Assim, é necessária uma vasta experimentação computacional que alcance os objetivos e leve aos resultados. Um experimento pode ser definido como um teste ou uma série de testes onde mudanças intencionais são feitas nas variáveis de entrada de um processo ou sistema a fim de observar e identificar as razões para as modificações que podem ser observadas na resposta de saída (MONTGOMERY, 2009).

Desta forma, os experimentos podem ser delineados segundo as principais estratégias (MONTGOMERY, 2009):

- **Abordagem da melhor suposição**: frequentemente utilizada esta abordagem funciona quando há conhecimento prévio sobre o comportamento do experimento em questão, onde se realizam testes com os parâmetros supostamente considerados os melhores. Apesar disso, apresenta duas desvantagens:

    1. No caso da suposição inicial não ser a melhor existe a necessidade de novas suposições e testes, que podem continuar por um longo tempo, sem garantia de sucesso;

    2. No caso da suposição inicial produzir um resultado aceitável existe a possibilidade de terminar os testes sem a garantia de que a melhor solução foi encontrada.

- **Abordagem de um fator de cada vez**: consiste na seleção de um ponto de partida para cada fator, com a sucessiva variação de cada fator em uma variação, com os demais fatores mantidos em seus valores originais. Isso permite a geração de uma série de gráficos e análise, mas apresenta como principal desvantagem não considerar qualquer possível interação entre os fatores. Uma interação é a falta de capacidade de um fator em produzir o mesmo efeito de resposta em diferentes níveis de outro fator;

- **Abordagem fatorial**: é a correta abordagem para lidar com diversos fatores, onde os fatores variam em conjunto, ao invés de um por vez. Assim, com a utilização de direcionadores para compreender o impacto de cada fator ou o efeito principal.

Como os modelos AG, PSO e SA possuem parâmetros próprios estes foram estabelecidos com base na literatura, utilizando a abordagem da melhor suposição, a partir de testes realizados em amostras e buscando uma isonomia entre os algoritmos. Assim, como o objetivo do trabalho é focado no desenvolvimento de modelos mais complexos para o gerenciamento de caixa não foram utilizadas técnicas além das tradicionalmente empregadas:

- Algoritmos Genéticos:
    - População: 100 indivíduos (soluções);
    - Seleção: elitismo dos 20 melhores indivíduos em cada geração;
    - Cruzamento: método da roleta, inversamente proporcional à função objetivo que se deseja minimizar com probabilidade de 70% de ocorrência, sendo o cruzamento uniforme em 1 ponto central para cada variável da solução;
    - Mutação: probabilidade de 1% de mudança de 1 *bit* (do estado "0" para "1" ou de "1" para "0") na sequência binária;
    - Valores: binários, com a utilização de 48 bits, equivalente a um valor monetário de 6 dígitos.
- *Particle Swarm Optimization*:
    - Nuvem de partículas: 100 partículas (soluções);
    - Taxa de aprendizado do ótimo local (melhor solução de cada partícula): 0,20;
    - Taxa de aprendizado do ótimo global (melhor solução de encontrada de todas as partículas): 0,20;
    - Taxa de inércia: 0,10;
    - Valores: números reais positivos.
- *Simulated Annealing*:
    - Número de soluções: 100 pontos (soluções);

- Vizinhança: 100 pontos (soluções);
- Temperatura: 10;
- Taxa de arrefecimento: 0,90;
- Valores: números reais positivos.

Assim, independentemente do algoritmo, cada iteração computacional (geração, no caso dos algoritmos genéticos, por exemplo) implica em uma avaliação de 100 possíveis soluções ao problema.

Além disso, o procedimento de um planejamento de experimentos pode ser desenvolvido em 7 etapas, conforme Montgomery (2009):

1. **Reconhecimento e confirmação do problema**: pode parecer óbvio, mas na prática nem sempre é simples reconhecer o problema, sua necessidade de experimento ou desenvolver claramente uma conceituação aceita sobre o problema. Assim, pode ser útil preparar uma lista de problemas e questões específicas a serem observadas no experimento, uma vez que a clara definição do problema contribui para uma melhor compreensão do fenômeno estudado e da solução final;
2. **Seleção da variável de resposta**: é necessário ter certeza se a variável realmente proporciona uma informação útil sobre o problema estudado. Múltiplas variáveis de resposta podem ser comuns, aspectos como variância, desvio-padrão e mensurações de erro são fatores importantes. Normalmente é importante identificar problemas relacionados com a definição de respostas de interesse e como elas podem ser mensuradas antes de conduzir o experimento;
3. **Definição de fatores, níveis e variação**: selecionar os fatores relevantes, identificando aqueles que são controláveis e incontroláveis, fatores de ruído, fatores sem interferência, além de seus níveis e faixas de variação, permitem uma melhor identificação da metodologia a ser empregada e do impacto destes fatores sobre a variável de resposta;

4. **Definição do planejamento experimental**: indicando o tamanho da amostra, número de réplicas, ordem de ensaio dos experimentos e outras restrições de randomização;

5. **Desenvolvendo o experimento**: ao desempenhar o experimento é vital o monitoramento cuidadoso do processo para ter certeza que tudo está correndo conforme planejado. Erros nesta etapa normalmente destroem a validade do experimento. Podem-se utilizar alguns ensaios ou pilotos do experimento para analisar sua consistência e verificar o sistema de avaliação, possibilitando ajustes nas etapas de 1 a 4;

6. **Análise estatística dos dados**: métodos estatísticos podem ser utilizados para analisar os dados, de modo a obter resultados e conclusões objetivos, com o emprego de pacotes estatísticos, método gráfico, testes de hipóteses, intervalos de confiança e outros;

7. **Conclusões e recomendações**: após a análise devem ser apresentadas conclusões práticas sobre os resultados e recomendações de ações a serem empregadas, também devem ser indicadas perspectivas para dar seguimento à pesquisa e testes de confirmação para validar as conclusões.

Dessa maneira, as etapas 1 a 3 são etapas de planejamento pré-experimental, que foram apresentadas referenciando a etapa 1 aos objetivos propostos na definição da política de gerenciamento de caixa, na etapa 2 as variáveis a serem definidas (Função Objetivo 1, 2 e 3) e a etapa 3 compondo os fatores de custos de manutenção, penalidade, transferência e ao *déficit* máximo de caixa.

Com relação à etapa 4 do planejamento experimental optou-se pelo desenvolvimento de fluxos líquidos de caixa, cada um destes considerado um "problema", sendo formado por uma série de 500 fluxos líquidos diários de caixa.

Para obter dados que atendam a estes requisitos é utilizado o método de simulação de Monte Carlo (MC). O método de Monte Carlo consiste em um método numérico que permite resolver problemas matemáticos mediante a simulação de variáveis aleatórias (SÓBOL, 1976).

A geração de números pseudoaleatórios pode ser realizada por diversas técnicas numéricas, de acordo com a função densidade probabilidade (fdp) que se deseja, sendo cada grupo de distribuições geradas uma *classe de problemas* distinta. De acordo com a literatura apresentada serão gerados fluxos líquidos de caixa para cada classe de problema (conforme descrito abaixo), bem como os fatores que envolvem os custos e tarifas das fontes de recursos, a rentabilidade do investimento dos recursos e os prazos envolvidos no resgate.

Dessa forma, foram gerados problemas segundo as seguintes distribuições:

- **Fluxo de Caixa com Distribuição Normal**: com média μ e variância σ^2 esta distribuição possui uma tendência central e segue o teorema do limite central (Figura 15). Nesta experimentação foram desenvolvidas três possibilidades de valores (baixo, intermediário e alto) para cada parâmetro (média e variância), totalizando nove *classes de problemas* (Quadro 4);

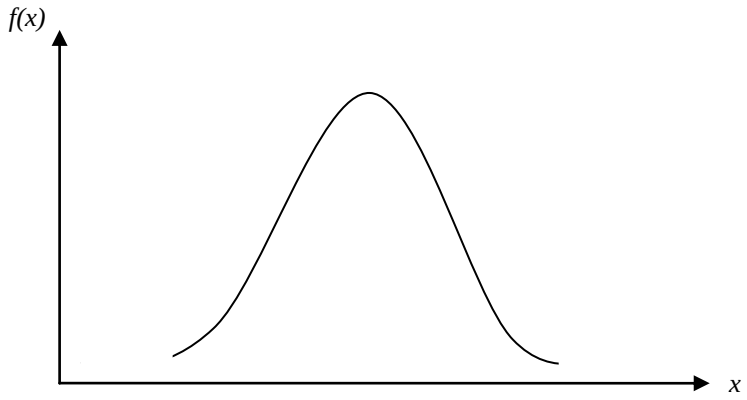

Figura 15 – Distribuição normal (Adaptado de STEVENSON, 1981)

Classes	**Variância Baixa ($500)**	**Variância Intermediária ($5.000)**	**Variância Alta ($50.000)**
Média Baixa ($1.000)	Classe 1	Classe 2	Classe 3
Média Intermediária ($20.000)	Classe 4	Classe 5	Classe 6
Média Alta ($100.000)	Classe 7	Classe 8	Classe 9

Quadro 4 – Classes dos fluxos de caixa com distribuição normal

Com isso, foram gerados 100 problemas para cada classe, totalizando 900 problemas, cada um composto por um fluxo de caixa de 500 dias.

- **Fluxo de Caixa com Distribuição de Poisson**: distribuição relativa a eventos que ocorrem em ritmo constante, com média e variância λ, que ao se aumentar o parâmetro λ obtém uma tendência central (Figura 16). Nesta experimentação foram desenvolvidas três possibilidades de valores (baixo, intermediário e alto) para o parâmetro λ, totalizando três *classes de problemas* (Quadro 5);

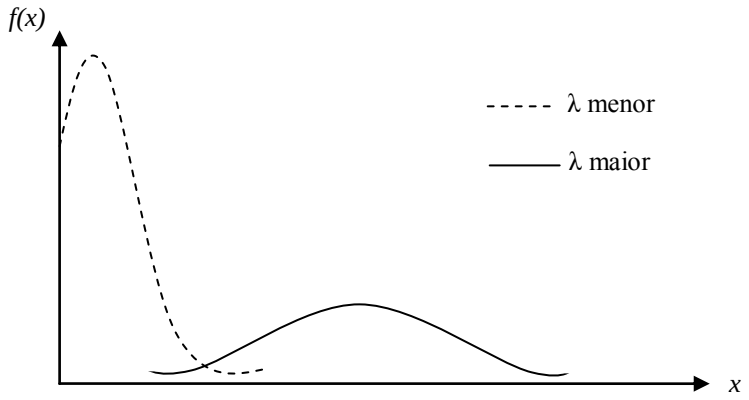

Figura 16 – Distribuição de Poisson (Adaptado de STEVENSON, 1981)

Classes	**λ Baixa ($1.000)**	**λ Intermediária ($20.000)**	**λ Alta ($100.000)**
λ	Classe 1	Classe 2	Classe 3

Quadro 5 – Classes dos fluxos de caixa com distribuição de Poisson

Como a distribuição de Poisson é uma distribuição discreta, os valores obtidos para os fluxos de caixa são valores inteiros. Esta distribuição se justifica, além da indicação na literatura, por considerar a concentração dos fluxos de caixa em determinados valores.

- **Fluxos de Caixa com Distribuição Triangular**: distribuição muito comum em simulações quando se conhece (ou estima) a média e os valores de mínimo e máximo, considerando uma variação linear uniforme entre estes pontos (Figura 17), sendo obtida pela multiplicação de duas variáveis aleatórias

uniformes. Nesta experimentação foram desenvolvidas três possibilidades de valores (baixo, intermediário e alto) para cada parâmetro da distribuição triangular (valores de mínimo e máximo), totalizando nove *classes de problemas* (Quadro 6);

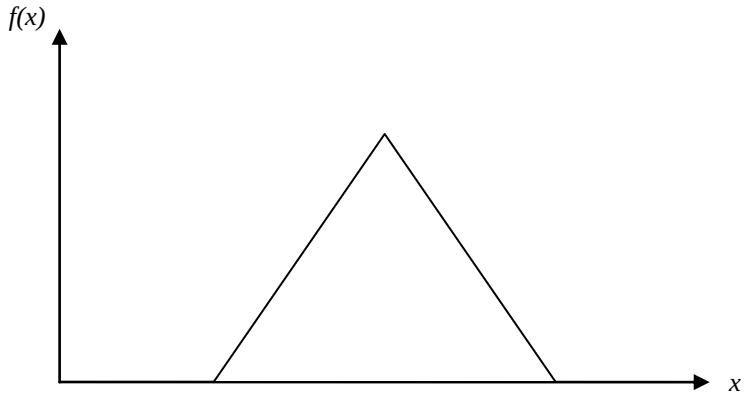

Figura 17 – Distribuição triangular

Classes	**Mínimo Baixo (-$1.000)**	**Mínimo Intermediário (-$20.000)**	**Mínimo Alto (-$200.000)**
Máximo Baixo ($3.000)	Classe 1	Classe 2	Classe 3
Máximo Intermediário ($20.000)	Classe 4	Classe 5	Classe 6
Máximo Alto ($200.000)	Classe 7	Classe 8	Classe 9

Quadro 6 – Classes dos fluxos de caixa com distribuição triangular

Útil na simulação de projetos de investimento esta distribuição considera a linearidade da função, porém, com uma tendência central.

- **Fluxos de Caixa com Processo de *Wiener*:** foram gerados números aleatórios segundo o processo de *Wiener*, também conhecido como movimento *Browniano*, devido à independência dos números gerados em relação aos valores anteriores. Nesta experimentação foram desenvolvidas três possibilidades de valores (baixo, intermediário e alto) para o parâmetro Δt, totalizando três *classes de problemas* (Quadro 7).

Classes	**Δt Baixo (1 dia)**	**Δt Intermediário (2 dias)**	**Δt Alto (3 dias)**
Δt	Classe 1	Classe 2	Classe 3

Quadro 7 – Classes dos fluxos de caixa com processo de *Wiener*

Assim, o parâmetro Δt considera a quantidade de dias anteriores que o fluxo de caixa atual depende:

$$SC_t = SC_{t-\Delta t} + \xi\sqrt{\Delta t}$$

Sendo, então, o saldo de caixa (SC) na data t o valor do saldo de caixa Δt dias antes acrescido de uma variável Normal e multiplicado pela raiz quadrada da variação de dias (Δt).

O processo de *Wiener*, é um tipo particular de cadeia de *Markov*, sendo um processo contínuo com 3 propriedades importantes (DIXIT; PINDYCK, 1993):

1. É um Processo de *Markov*. Assim, tudo que se precisa para fazer uma previsão do valor futuro da variável é a sua distribuição de probabilidade e o seu valor atual;
2. Possui incrementos independentes;
3. Mudanças no processo sobre qualquer intervalo de tempo são normalmente distribuídas, com uma variância que aumenta linearmente com o intervalo de tempo.

Dessa forma, os incrementos do processo de *Wiener* seguem uma distribuição normal $N(0, \Delta t)$.

Com relação às demais variáveis de impacto sobre o problema de gerenciamento de caixa, foram considerados ainda:

- Custos de Transferência (CT): custos envolvidos nas decisões de retirar dinheiro do caixa para investimento e resgatar os investimentos de volta ao caixa. Pode ser dividido em:

  - Custos Fixos: correspondente ao valor monetário fixo, sendo o custo fixo de investimento (CFI) o gasto a cada decisão de retirar dinheiro do caixa para investimento e custo fixo de transferência para o caixa (CFC) incorrendo sobre o resgate de valores dos investimentos. Variável uniforme, mínimo de $50,00 e máximo de $200,00.

  - Custos Variáveis: taxa percentual incidente sobre o volume transferido, podendo ser o custo variável de investimento (CVI) ou o custo variável de transferência para o caixa (CVC) no resgate. Variável uniforme, mínimo de 0,10% e máximo de 1,00% da operação.

- Custo de Oportunidade (CMC ou *h*): custo do não investimento do caixa em outras opções que apresentem rentabilidade. Considerada uma variável uniforme, com valor mínimo de 0,01% e máximo de 0,10% do saldo de caixa disponível ao final do dia;

- Custo de Penalidade (CP ou *u*): custo correspondente à taxa de juros cobrada pela obtenção de recursos pela falta de caixa. Sendo esta uma variável uniforme com valor mínimo de 0,05% e máximo de 0,5% ao dia;

- *Déficit* Máximo de Caixa (DMC): limite correspondente ao volume de linhas de crédito disponíveis para a empresa. Considerada uma variável uniforme, com valor mínimo de -$20.000,00 e máximo de $0,00;

- Rentabilidade do Ativo 1, com Liquidez (R1): taxa de juros diária obtida pelo investimento no ativo 1, considerado um investimento de resgate imediato. Variável uniforme, com valor mínimo de 0,001% e valor máximo de 0,005% ao dia;

- Rentabilidade do Ativo 2 (R2): taxa de juros diária, obtida pelo investimento no ativo 2, considerado um investimento que apresenta um prazo de resgate (liquidez variável). Sendo uma variável uniforme, com valor mínimo de 0,005% e valor máximo de 0,010% ao dia, possuindo maior rentabilidade em função da menor liquidez;

- Prazo de Resgate do Ativo 2 (Liq2): tempo em dias que o resgate do investimento no ativo 2 leva para retornar ao caixa. Considerada uma variável uniforme, com valores inteiros de 0 (liquidez imediata) até 30 dias.

Foi gerado 1 valor de cada uma destas variáveis (CFI, CFC, CVI, CVC, *h*, *u*, DMC, R1, R2 e Liq2) para cada problema. Assim, totalizaram 900 valores para a distribuição Normal, 300 valores para a distribuição de Poisson, 900 valores para a distribuição Triangular e 300 valores para o Processo de *Wiener* de cada variável.

Todos os problemas possuem como valor do saldo de caixa inicial como sendo $10.000,00.

Os valores gerados aleatoriamente devem ainda passar por um processo de validação, a fim de comprovar sua distribuição de probabilidade particular. Uma maneira de realizar o teste de ajuste de uma distribuição é particionando os possíveis valores dos números aleatórios em um número finito de regiões, sendo uma amostra destes valores observada e comparada entre os números delas que estão em cada região e os números esperados teoricamente, quando a distribuição de probabilidade especificada é de fato existente (ROSS, 2006).

Para este procedimento de validação, podem ser empregados (ROSS, 2006):

- **Teste Chi-Quadrado** (χ^2) para as distribuições Normal, Poisson e Processo de *Wiener*; e

- **Teste Kolmogorov-Smirnov** (KS) para as distribuições Normal, Triangular, Poisson e Processo de *Wiener*.

Os dois testes foram aplicados com um grau de confiança de 95%, sendo os fluxos de caixa não aceitos por um dos testes substituído. Os algoritmos de geração e validação das quatro distribuições (Normal, Poisson, Triangular e Processo de *Wiener*) não foram apresentados devido a sua grande extensão.

Com a obtenção dos números gerados foi possível desenvolver os modelos computacionais dentro das premissas estabelecidas e alternando experimentalmente os parâmetros.

Dessa maneira, o desenvolvimento dos algoritmos foi dividido em 6 famílias de algoritmos:

1. **Família M-O Parcial**: utilizando o modelo original de Miller-Orr, onde o custo do caixa é uma função obtida a partir da definição do limite inferior (L), foram desenvolvidos os algoritmos AG, PSO e SA, a fim de obter o menor custo (Função Objetivo 1), a partir da variável L apenas. Assim, a política de gerenciamento do caixa seria definir L, enquanto Z e H seriam obtidos pela aplicação do modelo Miller-Orr. Como esta modelagem depende apenas de uma variável, foi criado um algoritmo de controle que procede no aumento incremental da variável L, obtendo a melhor solução com a modelagem Miller-Orr;

2. **Família M-O Completo**: também utilizando as premissas de Miller-Orr, foram desenvolvidos os algoritmos AG, PSO e SA, a fim de obter uma polícia de gerenciamento de caixa com menor custo (Função Objetivo 1), a partir das variáveis L, H e Z (limite inferior, limite superior e caixa ideal, respectivamente). Esta alteração do modelo torna a política de caixa flexível, diferente do modelo Miller-Orr, a fim de verificar se ocorrem reduções de custos nestes casos;

3. **Família Função Objetivo 1 com Custos Diferenciados**: alterando os algoritmos anteriores, foram desenvolvidos AG, PSO e SA, a fim de obter uma polícia de gerenciamento de caixa com menor custo (Função Objetivo 1), a partir das variáveis L, H e Z em uma situação em que existem custos diferenciados na aplicação e resgate de recursos (CFI, CFC, CVI, CVC, h, u);

4. **Família Função Objetivo 1 com Custos Diferenciados e 3 Ativos**: considerando o custo do caixa como uma função obtida a partir da definição do limite inferior (L), limite superior (H) e saldo ideal de caixa (Z), foram desenvolvidos os algoritmos AG, PSO e SA, a fim de obter uma política com menor custo (Função Objetivo 1), a partir das variáveis L, H e Z considerando custos diferenciados e aplicações de recursos financeiros em outros dois ativos além do caixa, com rentabilidades diferenciadas, sendo um ativo de liquidez imediata e outro com prazos para resgate (PR ou Liq2) variável;

5. **Família Função Objetivo 2**: considerando o risco do caixa como uma função obtida a partir do limite inferior (L), limite superior (H) e saldo ideal de caixa (Z), sujeitos ao *déficit* máximo de caixa (DMC), foram desenvolvidos os algoritmos AG, PSO e SA, a fim de obter o menor risco (Função Objetivo 2) de ruptura de caixa superior ao DMC, a partir dos parâmetros L, H e Z;

6. **Família Função Objetivo 3**: considerando os fatores de custo e risco, foram desenvolvidos algoritmos AG, PSO e SA, a fim de obter uma função multiobjetivo com o menor custo e risco (Função Objetivo 3), a partir das variáveis L, H e Z, considerando custos variáveis (CFI, CFC, CVI, CVC, *h*, *u*), *déficit* máximo de caixa (DMC), rentabilidades diferenciadas (R1 e R2), além do prazo de resgate (Liq2) no investimento no ativo tipo 2.

Dessa forma, cada família de algoritmos será aplicada a cada classe de problemas, sendo gerados 100 problemas para cada classe, onde cada problema corresponde a uma série de 500 fluxos líquidos de caixa (Figura 18).

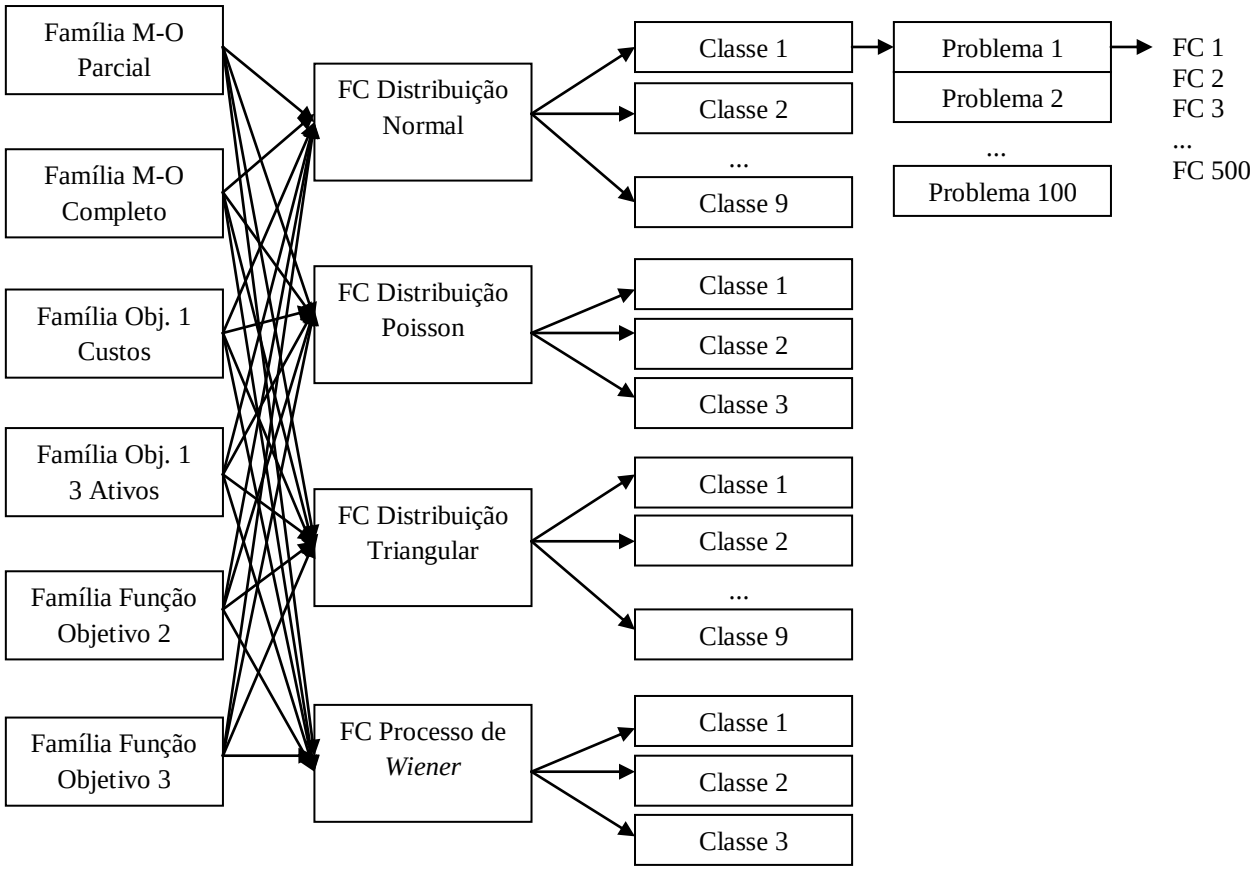

Figura 18 – Relacionamento entre as famílias

Assim, foram desenvolvidos os algoritmos referentes aos modelos de Algoritmos Genéticos, *Particle Swarm Optimization* e *Simulated Annealing* para cada uma das famílias de problemas, sendo aplicados sobre as diferentes classes de problemas.

Como os modelos computacionais utilizados são estocásticos e suas soluções partem do uso de variáveis aleatórias, cada algoritmo foi aplicado dez vezes em cada problema, a fim de aumentar a probabilidade de encontrar a melhor solução, sendo mantida solução com melhor avaliação obtida nas dez experimentações, para fins de comparação dos modelos.

A seguir seguem as descrições dos parâmetros utilizados nos algoritmos para cada família de problemas, sendo os algoritmos completos desenvolvidos em Matlab®. Os algoritmos completos não são apresentados em virtude do tamanho resultante da quantidade de algoritmos e sua complexidade.

Família M-O Parcial:

Custo de transferência fixo (F) de $100 por operação (investimento ou resgate) e uma taxa de juros de 10% ao ano, equivalente a uma taxa diária 0,0261158% ao dia como custo de oportunidade (K) pela existência de saldo em caixa.

A variável L foi delimitada entre $0,00 (mínimo) e $50.000,00 (máximo).

O saldo de caixa na data $t + 1$ foi definido como: $SC_{t+1} = SC_t + FC_t + w_t$, sendo w_t uma função investimento ou resgate, de acordo com a função:

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} \geq L}$ e $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} \leq H}$

Então $\mathbf{SC_{(t+1)} = SC_{(t)} + FC_{(t)}}$

$\mathbf{Custo_{(t+1)} = SC_{(t+1)} \,.\, K}$

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} \geq H}$

Então $\mathbf{SC_{(t+1)} = Z}$ (volta ao ponto de retorno)

$\mathbf{Custo_{(t+1)} = F + SC_{(t+1)} \,.\, K}$

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} \leq L}$

Então $\mathbf{SC_{(t+1)} = Z}$ (volta ao ponto de retorno)

$$\mathbf{Custo_{(t+1)} = F + Z - [(SC_{(t)} + FC_{(t)}) \, . \, K]}$$

Sendo a função objetivo:

$$\mathrm{Min} CTC = \sum_{t=1}^{501} Custo_{(t)}$$

Sujeito a,

$0 \leq L \leq 50.000$

As variáveis Z e H são obtidas a partir do modelo Miller-Orr.

Para comparativo, foi desenvolvido um algoritmo de controle, alterando a variável L de $0,00 até $50.000,00 de maneira incremental, acrescendo $0,01 a cada iteração, obtendo o custo para cada valor possível de L no intervalo estabelecido, segundo o modelo Miller-Orr.

Os algoritmos AG, PSO e SA tiveram como limitadores um total de 500 iterações, sendo que a repetição do menor custo obtido 10 vezes seguidas implica em uma condição de parada pela não melhoria da solução dos modelos.

Família M-O Completo:

Custo de transferência fixo (F) de $100 por operação (investimento ou resgate) e uma taxa de juros de 10% ao ano, equivalente a uma taxa de 0,0261158% ao dia como custo de oportunidade (K) pela existência de saldo em caixa.

As variáveis L, Z e H foram delimitadas entre $0,00 (mínimo) e $300.000,00 (máximo).

O saldo de caixa na data $t + 1$ foi definido como: $SC_{t+1} = SC_t + FC_t + w_t$, sendo w_t uma função investimento ou resgate, de acordo com a função:

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} \geq L}$ e $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} \leq H}$

Então $\mathbf{SC_{(t+1)} = SC_{(t)} + FC_{(t)}}$

$$\mathbf{Custo_{(t+1)} = SC_{(t+1)} \, . \, K}$$

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} \geq H}$

Então $\mathbf{SC_{(t+1)} = Z}$ (volta ao ponto de retorno)

$$\mathbf{Custo_{(t+1)} = F + SC_{(t+1)} \,.\, K}$$

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} \leq L}$

Então $\mathbf{SC_{(t+1)} = Z}$ (volta ao ponto de retorno)

$$\mathbf{Custo_{(t+1)} = F + Z - [(SC_{(t)} + FC_{(t)}) \,.\, K]}$$

Sendo a função objetivo:

$$\mathrm{Min} CTC = \sum_{t=1}^{501} Custo_{(t)}$$

Sujeito a,

$0 \leq L \leq 300.000$

$0 \leq Z \leq 300.000$

$0 \leq H \leq 300.000$

$L \leq Z \leq H$

Assim, todas as variáveis são obtidas pelos modelos de maneira flexível.

O foco dessa modelagem é verificar se uma política completa de gerenciamento de caixa, que envolve L, Z e H, pode obter um custo menor ao apresentado pelo modelo Miller-Orr.

Apesar da variável L estar limitada até $300.000, na prática os modelos não excederam $50.000.

Os algoritmos AG, PSO e SA tiveram como limitadores um total de 500 iterações, sendo que a repetição do menor custo obtido 10 vezes seguidas implica em uma condição de parada pela não melhoria da solução dos modelos.

Família Função Objetivo 1 com Custos Diferenciados:

Os custos (CFI, CFC, CVI, CVC, *h* e *u*) foram gerados aleatoriamente, conforme apresentado anteriormente.

As variáveis L, Z e H foram delimitadas entre \$0,00 (mínimo) e \$300.000,00 (máximo).

O saldo de caixa na data $t + 1$ foi definido como: $SC_{t+1} = SC_t + FC_t + w_t$, sendo w_t uma função investimento ou resgate, de acordo com a função:

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} \geq L}$ e $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} \leq H}$

Então $\mathbf{SC_{(t+1)} = SC_{(t)} + FC_{(t)}}$

$\mathbf{Custo_{(t+1)} = SC_{(t+1)} \,.\, h_{(i)}}$

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} \geq H}$

Então $\mathbf{SC_{(t+1)} = Z}$ (volta ao ponto de retorno)

$\mathbf{Custo_{(t+1)} = CFI_{(i)} + [(SC_{(t)} + FC_{(t)} - Z) \,.\, CVI_{(i)}] + SC_{(t+1)} \,.\, h_{(i)}}$

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} \leq L}$

Então $\mathbf{SC_{(t+1)} = Z}$ (volta ao ponto de retorno)

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} \leq 0}$

Então $\mathbf{Custo_{(t+1)} = CFC_{(i)} + [Z - (SC_{(t)} + FC_{(t)}) \,.\, CVC_{(i)}] + (SC_{(t)} + FC_{(t)}) \,.\, u_{(i)}}$

Senão $\mathbf{Custo_{(t+1)} = CFC_{(i)} + [Z - (SC_{(t)} + FC_{(t)}) \,.\, CVC_{(i)}] + SC_{(t+1)} \,.\, h_{(i)}}$

Sendo a função objetivo:

$$\mathrm{Min} CTC = \sum_{t=1}^{501} Custo_{(t)}$$

Sujeito a,

$$0 \leq L \leq 300.000$$

$$0 \leq Z \leq 300.000$$

$$0 \leq H \leq 300.000$$

$$L \leq Z \leq H$$

Todas as variáveis são obtidas pelos modelos.

O foco desta modelagem é verificar se uma política completa de gerenciamento de caixa, que envolve L, Z e H, pode obter um custo menor.

Apesar da variável L estar limitada até $300.000, na prática os resultados obtidos não excederam $50.000.

Os algoritmos AG, PSO e SA tiveram como limitadores um total de 500 iterações, sendo que a repetição do menor custo obtido 10 vezes seguidas implica em uma condição de parada pela não melhoria da solução dos modelos.

Família Função Objetivo 1 com 3 Ativos:

Os custos (CFI, CFC, CVI, CVC, *h* e *u*), a rentabilidade dos investimentos em outros ativos (R1 e R2) e o prazo de resgate do ativo 2 (Liq2) gerados aleatoriamente, conforme apresentado anteriormente.

As variáveis L, Z e H foram delimitadas entre $0,00 (mínimo) e $300.000,00 (máximo).

As variáveis P1 (percentual do investimento no Ativo 1) e P2 (percentual do investimento no Ativo 2), sendo P1 delimitado entre 0,00 e 1,00 e P2 = 1 - P1.

Para simplificação do problema, os ganhos obtidos com os investimentos são redutores do custo do investimento, não considerando seu acréscimo ao saldo das contas investimento (C1 e C2).

O saldo de caixa na data $t + 1$ foi definido como: $SC_{t+1} = SC_t + FC_t + w_t$, sendo w_t uma função investimento ou resgate, de acordo com a função:

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} \geq L}$ e $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} \leq H}$

Então $\mathbf{SC_{(t+1)} = SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)}}$

$\mathbf{C1_{(t+1)} = C1_{(t)}}$

$\mathbf{C2_{(t+1)} = C2_{(t)}}$

$\mathbf{Custo_{(t+1)} = SC_{(t+1)} \,.\, h_{(i)} - [(C1_{(t+1)} \,.\, R1) + (C2_{(t+1)} \,.\, R2)]}$

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} \geq H}$

Então $\mathbf{SC_{(t+1)} = Z}$ (volta ao ponto de retorno)

$\mathbf{C1_{(t+1)} = C1_{(t)} + (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} - Z) - [CFI_{(i)} + (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} - Z) \,.\, CVI_{(i)}] \,.\, P1_{(i)}}$

$\mathbf{C2_{(t+1)} = C2_{(t)} + (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} - Z) - [CFI_{(i)} + (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} - Z) \,.\, CVI_{(i)}] \,.\, P2_{(i)}}$

$\mathbf{Custo_{(t+1)} = CFI_{(i)} + [(SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} - Z) \,.\, CVI_{(i)}] + SC_{(t+1)} \,.\, h_{(i)} - [(C1_{(t+1)} \,.\, R1) + (C2_{(t+1)} \,.\, R2)]}$

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} \leq L}$

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} \geq Z}$

Então $\mathbf{SC_{(t+1)} = Z}$ (volta ao ponto de retorno)

$\mathbf{C1_{(t+1)} = C1_{(t)} - (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} - Z) - [CFC_{(i)} + (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)}) \,.\, CVC_{(i)}]}$

$\mathbf{C2_{(t+1)} = C2_{(t)}}$

$\mathbf{Custo_{(t+1)} = CFC_{(i)} + [Z - (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)}) \,.\, CVC_{(i)}] + SC_{(t+1)} \,.\, h_{(i)} - [(C1_{(t+1)} \,.\, R1) + (C2_{(t+1)} \,.\, R2)]}$

Senão $\mathbf{SC_{(t+1)} = Z}$ (volta ao ponto de retorno)

$\mathbf{C1_{(t+1)} = 0}$

$$\mathbf{C2_{(t+1)} = C2_{(t)} - [Z - (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} + C1_{(t)})] - CFC \,.\, [Z - (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} + C1_{(t)})}$$

$$\mathbf{Custo_{(t+1)} = CFC_{(i)} + [Z - (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)}) \,.\, CVC_{(i)}] + SC_{(t+1)} \,.\, h_{(i)} + [Z - (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} + C1_{(t)}) \,.\, u] - [(C1_{(t+1)} \,.\, R1) + (C2_{(t+1)} \,.\, R2)]}$$

$$\mathbf{Resgate_{(t+Liq2)} = C2_{(t)} - C2_{(t+1)}}$$

Nota-se que o valor obtido a ser resgatado da conta investimento 2 (C2), em função da necessidade atual do caixa, só irá retornar ao fluxo de caixa em data posterior, de acordo com seu prazo de resgate (Liq2).

Sendo a função objetivo:

$$\mathrm{Min} CTC = \sum_{t=1}^{501} Custo_{(t)}$$

Sujeito a,

$0 \leq L \leq 300.000$

$0 \leq Z \leq 300.000$

$0 \leq H \leq 300.000$

$L \leq Z \leq H$

$0 \leq P1 \leq 1$

$0 \leq P2 \leq 1$

$P1 + P2 = 1$

Assim, todas as variáveis (L, Z, H, P1 e P2) são obtidas pelos modelos.

O foco dessa modelagem é verificar se uma política completa de gerenciamento de caixa, que envolve L, Z e H, pode obter um custo menor ao apresentado pelo modelo Miller-Orr. Além disso, o modelo possibilita a criação de uma carteira de investimentos formada por dois ou mais ativos financeiros, com diferentes prazos de resgate.

Apesar de considerar apenas dois investimentos alternativos ao caixa, o algoritmo pode ser adaptado para *n* ativos, sendo:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{(i)} = 1$$

Os algoritmos AG, PSO e SA tiveram como limitadores um total de 150 iterações, uma vez que foi verificado nos modelos anteriores que dificilmente as melhores soluções extrapolaram 50 iterações, reduzindo o tempo computacional total do experimento.

Com a repetição do menor custo obtido 2 vezes seguidas, foi determinada a condição de parada pela não melhoria da solução dos modelos, a fim de reduzir o tempo computacional, já que cada iteração corresponde à avaliação de 100 possíveis soluções.

Família Função Objetivo 2:

A única variável de impacto neste modelo é o *déficit* máximo de caixa (DMC) gerado aleatoriamente, conforme apresentado anteriormente.

As variáveis L, Z e H foram delimitadas entre \$0,00 (mínimo) e \$300.000,00 (máximo).

O saldo de caixa na data $t + 1$ foi definido como: $SC_{t+1} = SC_t + FC_t + w_t$, sendo w_t uma função investimento ou resgate, de acordo com a função:

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} \geq L}$ e $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} \leq H}$

Então $\mathbf{SC_{(t+1)} = SC_{(t)} + FC_{(t)}}$

$\mathbf{Risco_{(t+1)} = 0}$

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} \geq H}$

Então $\mathbf{SC_{(t+1)} = Z}$ (volta ao ponto de retorno)

$\mathbf{Risco_{(t+1)} = 0}$

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} \leq DMC}$

Então $\mathbf{SC_{(t+1)} = Z}$ (volta ao ponto de retorno)

$\mathbf{Risco_{(t+1)} = 1}$

Sendo a função objetivo:

$$\text{Min}RTC = \frac{\sum_{t=1}^{501} Risco_{(t)}}{t}$$

Sujeito a,

$0 \leq \text{L} \leq 300.000$

$0 \leq \text{Z} \leq 300.000$

$0 \leq \text{H} \leq 300.000$

$\text{L} \leq \text{Z} \leq \text{H}$

$0 \leq \text{Min}RTC \leq 1$

O foco dessa modelagem é verificar se uma política completa de gerenciamento de caixa, que envolve L, Z e H, pode obter um menor risco, evitando que o saldo de caixa exceda o limite de crédito existente.

A medida do risco é a probabilidade empírica, evitando a necessidade do conhecimento sobre a distribuição dos fluxos de caixa, porém, com menor rigor estatístico para análise.

Os algoritmos AG, PSO e SA tiveram como limitadores um total de 150 iterações, sendo que a repetição do menor risco obtido 2 vezes seguidas implica em uma condição de parada pela não melhoria da solução dos modelos.

Família Função Objetivo 3:

Nesta família a função e multiobjetivo, buscando minimizar o risco e o custo do saldo de caixa.

Os custos (CFI, CFC, CVI, CVC, *h* e *u*), a rentabilidade dos investimentos em outros ativos (R1 e R2), o prazo de resgate do ativo 2 (Liq2) e o *déficit* máximo de caixa (DMC), gerados aleatoriamente, conforme apresentado anteriormente.

As variáveis L, Z e H foram delimitadas entre \$0,00 (mínimo) e \$300.000,00 (máximo).

As variáveis P1 (percentual do investimento no Ativo 1) e P2 (percentual do investimento no Ativo 2), sendo P1 delimitado entre 0,00 e 1,00 e P2 = 1 - P1.

Foi aplicada a dominância de Pareto, elencando as soluções não dominadas e indicando as melhores soluções pela ponderação de pesos dos objetivos, sendo definidos os pesos do risco (wRisco) como sendo [0,75; 0,50; 0,25] e o peso do custo (wCusto) como 1 - wRisco.

O saldo de caixa na data $t + 1$ foi definido como: $SC_{t+1} = SC_t + FC_t + w_t$, sendo w_t uma função investimento ou resgate, de acordo com a função:

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} \geq L}$ e $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} \leq H}$

Então $\mathbf{SC_{(t+1)} = SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)}}$

$\mathbf{C1_{(t+1)} = C1_{(t)}}$

$\mathbf{C2_{(t+1)} = C2_{(t)}}$

$\mathbf{Custo_{(t+1)} = SC_{(t+1)} \,.\, h_{(i)} - [(C1_{(t+1)} \,.\, R1) + (C2_{(t+1)} \,.\, R2)]}$

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} \geq H}$

Então $\mathbf{SC_{(t+1)} = Z}$ (volta ao ponto de retorno)

$\mathbf{C1_{(t+1)} = C1_{(t)} + (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} - Z) - [CFI_{(i)} + (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} - Z) \,.\, CVI_{(i)}] \,.\, P1_{(i)}}$

$\mathbf{C2_{(t+1)} = C2_{(t)} + (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} - Z) - [CFI_{(i)} + (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} - Z) \,.\, CVI_{(i)}] \,.\, P2_{(i)}}$

$\mathbf{Custo_{(t+1)} = CFI_{(i)} + [(SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} - Z) \,.\, CVI_{(i)}] + SC_{(t+1)} \,.\, h_{(i)} - [(C1_{(t+1)} \,.\, R1) + (C2_{(t+1)} \,.\, R2)]}$

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} \leq L}$

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} \geq Z}$

Então $\mathbf{SC_{(t+1)} = Z}$ (volta ao ponto de retorno)

$$\mathbf{C1_{(t+1)} = C1_{(t)} - (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} - Z) - [CFC_{(i)} + (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)}) \,.\, CVC_{(i)}]}$$

$$\mathbf{C2_{(t+1)} = C2_{(t)}}$$

$$\mathbf{Custo_{(t+1)} = CFC_{(i)} + [Z - (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)}) \,.\, CVC_{(i)}] + SC_{(t+1)} \,.\, h_{(i)} - [(C1_{(t+1)} \,.\, R1) + (C2_{(t+1)} \,.\, R2)]}$$

Senão $\mathbf{SC_{(t+1)} = Z}$ (volta ao ponto de retorno)

$$\mathbf{C1_{(t+1)} = 0}$$

$$\mathbf{C2_{(t+1)} = C2_{(t)} - [Z - (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} + C1_{(t)})] - CFC \,.\, [Z - (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} + C1_{(t)})}$$

$$\mathbf{Custo_{(t+1)} = CFC_{(i)} + [Z - (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)}) \,.\, CVC_{(i)}] + SC_{(t+1)} \,.\, h_{(i)} + [Z - (SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} + C1_{(t)}) \,.\, u] - [(C1_{(t+1)} \,.\, R1) + (C2_{(t+1)} \,.\, R2)]}$$

$$\mathbf{Resgate_{(t+Liq2)} = C2_{(t)} - C2_{(t+1)}}$$

Se $\mathbf{SC_{(t)} + FC_{(t)} + Resgate_{(t)} \leq DMC}$

Então $\mathbf{Risco_{(t+1)} = 1}$

Novamente o valor obtido a ser resgatado da conta investimento 2 (C2), em função da necessidade atual do caixa, só irá retornar ao fluxo de caixa em data posterior, de acordo com seu prazo de resgate (Liq2). Além disso, como o valor do DMC é um valor negativo, caso o saldo de caixa (mesmo com os resgates efetuados) exceda este limite de crédito existe risco.

Sendo a função objetivo:

$$\mathrm{Min} CTC = \sum_{t=1}^{501} Custo_{(t)} \quad \text{e} \quad \mathrm{Min} RTC = \frac{\sum_{t=1}^{501} Risco_{(t)}}{t}$$

Sujeito a,

$0 \leq L \leq 300.000$

$0 \leq Z \leq 300.000$

$0 \leq H \leq 300.000$

$L \leq Z \leq H$

$0 \leq P1 \leq 1$

$0 \leq P2 \leq 1$

$P1 + P2 = 1$

$0 \leq \text{Min}RTC \leq 1$

Para deixar os dois objetivos em uma mesma escala de grandeza a fim de realizar a análise entre as soluções Pareto ótimo, o valor de cada solução ponderada (Otm) é dado por:

$$Otm_i = \left[\left(\frac{Risco_{(t)}}{\sum_{i=1}^{n} Risco} \right) \times wRisco \right] + \left[\left(\frac{Custo_{(t)}}{\sum_{i=1}^{n} Custo} \right) \times wCusto \right]$$

Desta maneira, cada solução Pareto ótimo é avaliada em relação às demais, sendo mantidas as soluções com menor Otm, uma vez que minimizam Risco e Custo simultaneamente.

Assim, o modelo possibilita a criação de uma carteira de investimentos formada por dois ou mais ativos financeiros, com diferentes prazos de resgate, considerando o risco associado à falta de caixa em excesso ao DMC.

Novamente, apesar de considerar apenas dois investimentos alternativos ao caixa, o algoritmo pode ser adaptado para *n* ativos, sendo:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{(i)} = 1$$

Os algoritmos AG, PSO e SA tiveram como limitadores um total de 50 iterações, com a repetição da melhor solução obtida 2 vezes seguidas, foi determinada a condição de parada pela não melhoria das soluções.

Assim, com base na aplicação dos modelos desenvolvidos para AG, PSO e SA, dentro das famílias de problemas elaboradas, foram empregadas as experimentações computacionais, sendo apresentados a seguir os resultados, suas medidas de comparação, bem como sua análise.

O desenvolvimento dos algoritmos foi feito em linguagem de programação no *software* Matlab® R2009b, sendo utilizando para a experimentação um microcomputador HP Pavillion, processador Intel Core2Quad™ Q8300 com 2.50GHz e 4 MB de memória RAM, em Windows 7© em sistema operacional de 64 Bits.

3.2 Análise dos Resultados

A partir do desenvolvimento dos modelos foi realizada uma etapa de avaliação, comparando os modelos desenvolvidos. Desse modo, os fluxos de caixa simulados, bem como os demais fatores servem para aplicação dos modelos, de maneira a confrontar não apenas seus resultados com relação a melhor solução, uma vez que alguns modelos, tanto na literatura quanto os desenvolvidos, partem de premissas diferenciadas, mas também em uma análise sobre a viabilidade e relevância proporcionada pela aplicação da técnica.

Desta forma, são utilizadas quatro métricas para comparação dos resultados.

A primeira métrica é o percentual de sucesso de cada algoritmo, dado pela contagem do número de vezes em que o algoritmo obteve a melhor solução em relação ao número total de problemas avaliados:

$$\text{Melhor Solução} = \frac{\text{Quantidade de Melhores Soluções do Algoritmo}}{\text{Número de Problemas}}$$

Esta medida proporciona uma visão da eficácia dos modelos, indicando aquele que possui um maior número de melhores soluções.

Uma segunda métrica comparativa é obtida pelo desvio relativo (DR) da experimentação comparando a solução do algoritmo em relação a melhor solução obtida para cada problema, da seguinte forma:

$$\text{DR} = \frac{\text{Solução Algoritmo - Melhor Solução}}{\text{Melhor Solução}}$$

Ao final será possível o cálculo do desvio relativo médio (DRM) para cada modelo:

$$\mathrm{DRM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{DR}}{n}$$

Sendo *n* o número de problemas existentes.

A terceira métrica comparativa é o tempo computacional empreendido na obtenção da solução para cada problema, em segundos, obtida com a utilização da função TIC TOC no Matlab®.

Por fim, a aplicação de técnicas estatísticas de comparação dos melhores resultados para cada algoritmo, verificando se existem diferenças significativas entre os resultados obtidos pelos algoritmos AG, PSO e SA.

Para a análise estatística foi empregado o Teste *t* para duas amostras em par para médias, a partir de um teste de hipótese, onde a Hipótese H_0 (hipótese nula) de que as soluções não apresentam diferenças estatísticas significativas com 95% de confiança (PYNDICK; RUBINFELD, 2004).

Desta forma, uma estatística é considerada significativa se o valor do teste estatístico está dentro da região crítica, ou seja, a hipótese nula deve ser rejeitada. Da mesma maneira, o teste é considerado estatisticamente insignificante se o valor do teste está dentro da região de aceitação (GUJARATI, 2006).

Com isso, na aplicação do Teste *t* bi-caudal, sendo a Hipótese H_0 aceita, a diferença entre a média das soluções obtidas entre os diferentes modelos é estatisticamente insignificante, ou seja, os modelos apresentam resultados semelhantes entre si.

A Hipótese H_0 é aceita se a estatística *t* estiver compreendida dentro do intervalo do *t* crítico

$$-t_c \leq t \leq t_c$$

Ou ainda, no caso do *p value* dado por P(T<=t) bi-caudal ser superior ao nível de significância de 5%.

Os resultados obtidos por problema, custo e/ou risco, bem como as variáveis (L, Z, H, P1 e P2) não são apresentados detalhadamente em função da extensão necessária. Assim, são apresentados os valores médios obtidos por classe de problema, lembrando que cada classe de problema é composta por 100 problemas.

Família M-O Parcial:

Neste primeiro modelo cuja função objetivo é minimizar o custo do caixa, apenas a variável L é definida, além disso, foi utilizado um algoritmo de controle, tendo este o melhor resultado possível dentro do modelo Miller-Orr. Assim, esse algoritmo exaustivo, visa obter o valor de mínimo custo alterando a variável L com acréscimo de $0,01 a cada iteração.

- *Distribuição Normal*

Classe de	Algoritmo de Controle		
Problemas	L	Custo	Tempo
1	4287,08	4638,63	196,04
2	482,93	5346,83	196,25
3	477,50	20740,28	196,51
4	24596,24	18895,27	189,63
5	15566,96	19694,68	196,09
6	720,52	24517,72	200,66
7	30975,16	36110,19	178,35
8	24151,33	37227,33	182,92
9	813,39	40346,49	194,90

Tabela 1 – Resultados algoritmo de controle - distribuição Normal

Tempo médio de 192,37 segundos por problema. Comparando com os algoritmos desenvolvidos (Tabela 2), o tempo computacional é consideravelmente menor nos algoritmos, isso devido ao emprego das meta-heurísticas.

Classe de	AG			PSO			SA		
Problemas	Custo	Iteração	Tempo	Custo	Iteração	Tempo	Custo	Iteração	Tempo
1	4642,94	3,19	2,09	4638,81	55,51	9,69	4646,08	11,00	1,14
2	5353,76	19,00	2,15	5361,53	24,13	6,42	5373,22	11,00	1,14
3	20743,38	35,13	2,16	20743,77	14,70	4,24	20749,11	11,00	1,14
4	18899,40	7,85	2,12	18895,70	47,72	9,22	18901,02	11,00	1,13
5	19699,86	2,96	2,15	19694,84	47,45	9,19	19701,97	11,00	1,15
6	24525,93	14,90	2,24	24522,64	18,93	5,28	24533,51	11,00	1,14
7	36115,72	2,91	2,04	36110,24	87,56	10,22	36117,34	11,00	1,10
8	37231,47	3,12	2,07	37227,58	46,44	8,47	37232,94	11,00	1,12
9	40352,35	28,76	2,14	40349,44	22,19	6,30	40356,28	11,00	1,14

Tabela 2 – Resultados família M-O parcial com distribuição Normal

Observando as medidas comparativas (Tabela 3) as melhores soluções são dadas pelo PSO em 74,44% dos problemas.

Classe de	Melhor Solução			
Problemas	Melhor	Ganho AG	Ganho PSO	Ganho SA
1	4638,72	12,00%	84,00%	4,00%
2	5347,09	48,00%	55,00%	5,00%
3	20740,81	60,00%	61,00%	3,00%
4	18895,45	15,00%	82,00%	3,00%
5	19694,79	13,00%	86,00%	1,00%
6	24517,85	60,00%	58,00%	3,00%
7	36110,23	6,00%	92,00%	2,00%
8	37227,48	13,00%	83,00%	4,00%
9	40346,79	34,00%	69,00%	2,00%

Tabela 3 – Melhor solução para família M-O parcial com distribuição Normal

Apesar disso, nas classes de problemas com maior variância (classes 3, 6 e 9) o desempenho do AG melhora, possivelmente em função da maior complexidade do problema, que neste algoritmo, auxiliado pelo operador de mutação, ganha abrangência na busca por soluções dentro do espaço amostral.

Eventualmente a soma dos percentuais excede 100% devido ao fato de que pode haver empate entre os algoritmos, obtendo pontuação de ganho para todas as melhores soluções.

Analisando a eficiência dos algoritmos, o PSO também apresenta os melhores resultados (Tabela 4).

Classe de	DRM		
Problemas	Erro AG	Erro PSO	Erro SA
1	0,09%	0,00%	0,16%
2	0,13%	0,28%	0,51%
3	0,01%	0,02%	0,04%
4	0,02%	0,00%	0,03%
5	0,03%	0,00%	0,04%
6	0,03%	0,02%	0,06%
7	0,02%	0,00%	0,02%
8	0,01%	0,00%	0,02%
9	0,01%	0,01%	0,02%

Tabela 4 – DRM para família M-O parcial com distribuição Normal

O DRM geral do algoritmo PSO foi de 0,04%, demonstrando ser uma solução de alta eficiência se comparada ao algoritmo de controle. Os demais algoritmos também obtiveram alta eficiência com 0,04% e 0,10% para AG e SA respectivamente.

Em relação ao tempo, o SA foi o mais rápido de todos. Porém, cabe aqui uma ressalva quanto à dimensão de tempo. O dispêndio de 2 segundos, ou 20 segundos, chegando até 200 segundos no algoritmo de controle não é um fator limitador para a definição da política de gerenciamento de caixa para uma empresa.

Com relação à diferença entre as soluções dos problemas, o Teste *t* obtido rejeita a Hipótese H_1, ou seja, as médias não são significantemente diferentes entre os algoritmos AG, PSO e SA em relação ao algoritmo de controle, tais análises são comprovadas pela estatística *t* ser inferior ao ponto crítico mínimo e do baixo *p value*, inferior ao nível de significância de 5%.

- *Distribuição de Poisson*

Classe de	Algoritmo de Controle		
Problemas	L	Custo	Tempo
1	6533,86	4523,23	158,99
2	25651,34	18754,53	154,73
3	31545,80	36042,70	145,40

Tabela 5 – Resultados algoritmo de controle - distribuição de Poisson

Tempo médio de 153,04 segundos por problema.

Comparando com os algoritmos desenvolvidos (Tabela 6), o tempo computacional é consideravelmente menor nos algoritmos, mais uma vez.

Classe de	AG			PSO			SA		
Problemas	Custo	Iteração	Tempo	Custo	Iteração	Tempo	Custo	Iteração	Tempo
1	4525,59	8,25	1,79	4523,31	51,83	7,96	4527,32	11,00	1,13
2	18764,68	3,02	1,84	18754,74	61,56	8,20	18767,93	11,00	1,13
3	36048,06	3,20	1,72	36042,74	77,67	7,95	36051,32	11,00	1,11

Tabela 6 – Resultados família M-O parcial com distribuição de Poisson

Nesta distribuição, as medidas comparativas (Tabela 7) indicam que as melhores soluções são dadas pelo PSO em 93,33% dos problemas.

Classe de	Melhor Solução			
Problemas	Melhor	Ganho AG	Ganho PSO	Ganho SA
1	4523,29	9,00%	90,00%	1,00%
2	18754,73	5,00%	95,00%	0,00%
3	36042,74	5,00%	95,00%	0,00%

Tabela 7 – Melhor solução para família M-O parcial com distribuição de Poisson

Em termos de eficiência medida pelo desvio relativo médio (DRM), o algoritmo PSO tem um erro médio de 0,001% em comparação ao algoritmo de controle (Tabela 8).

Classe de	DRM		
Problemas	Erro AG	Erro PSO	Erro SA
1	0,05%	0,00%	0,09%
2	0,05%	0,00%	0,07%
3	0,01%	0,00%	0,02%

Tabela 8 – DRM para família M-O parcial com distribuição de Poisson

Para os demais algoritmos a eficiência foi de 0,04% e 0,06% para AG e SA respectivamente, demonstrando alta qualidade também.

Em relação ao tempo, o SA foi o mais rápido de todos novamente. Já, com relação às soluções dos problemas, o Teste *t* obtido rejeita a Hipótese H_1, ou seja, as médias não são significantemente diferentes entre os algoritmos AG, PSO e SA em relação ao algoritmo de controle, tais análises são indicadas pela estatística *t* ser inferior ao ponto crítico mínimo e do baixo *p value*, inferior ao nível de significância de 5%, de maneira semelhante a distribuição Normal.

- *Distribuição Triangular*

Classe de	Algoritmo Ótimo		
Problemas	L	Custo	Tempo
1	0,25	6095,68	194,64
2	1183,47	5847,18	194,53
3	711,62	21658,09	195,85
4	0,00	49459,90	169,87
5	0,00	32007,33	180,68
6	763,26	14499,32	195,07
7	0,00	72816,04	167,70
8	0,00	72536,98	167,67
9	0,00	72523,24	168,14

Tabela 9 – Resultados algoritmo de controle - distribuição Triangular

Tempo médio de 181,57 segundos por problema.

Comparando com os algoritmos desenvolvidos (Tabela 10), o tempo computacional é consideravelmente menor para os algoritmos AG, PSO e SA.

Classe de	AG			PSO			SA		
Problemas	Custo	Iteração	Tempo	Custo	Iteração	Tempo	Custo	Iteração	Tempo
1	6095,83	56,04	2,20	6098,46	12,80	2,03	6101,98	11,00	1,15
2	5855,62	8,30	2,08	5848,30	39,58	8,03	5857,82	11,00	1,14
3	21662,45	29,73	2,17	21662,53	22,99	6,17	21674,17	11,00	1,15
4	49459,93	31,33	2,11	49460,11	10,85	1,80	49460,34	11,00	1,09
5	32007,45	46,40	2,19	32008,90	12,71	1,93	32009,50	11,00	1,14
6	14505,28	24,11	2,13	14504,97	18,21	5,70	14506,87	11,00	1,13
7	72816,04	51,15	2,12	72816,04	8,51	1,78	72816,05	11,00	1,05
8	72536,98	31,13	2,11	72536,98	10,48	1,80	72536,99	11,00	1,05
9	72523,24	51,41	2,10	72523,24	9,61	1,75	72523,25	11,00	1,05

Tabela 10 – Resultados família M-O parcial com distribuição Triangular

Nesta distribuição, as medidas comparativas (Tabela 11) indicam que as melhores soluções são dadas pelo AG em 77,11% dos problemas.

Classe de	Melhor Solução			
Problemas	Melhor	Ganho AG	Ganho PSO	Ganho SA
1	6095,72	98,00%	50,00%	1,00%
2	5847,67	14,00%	82,00%	4,00%
3	21658,91	50,00%	56,00%	3,00%
4	49459,90	95,00%	52,00%	1,00%
5	32007,40	98,00%	44,00%	0,00%
6	14499,57	52,00%	55,00%	7,00%
7	72816,04	95,00%	57,00%	2,00%
8	72536,98	97,00%	49,00%	0,00%
9	72523,24	95,00%	50,00%	1,00%

Tabela 11 – Melhor solução para família M-O parcial com distribuição Triangular

Apesar da prevalência do AG, o PSO foi melhor nas classes 2, 3 e 6, tendo um êxito de 55,00% de acertos.

Na análise do desvio relativo médio (DRM), o algoritmo PSO teve um erro médio de 0,01% em comparação ao algoritmo de controle (Tabela 12).

Classe de	DRM		
Problemas	Erro AG	Erro PSO	Erro SA
1	0,00%	0,05%	0,10%
2	0,14%	0,02%	0,18%
3	0,02%	0,02%	0,07%
4	0,00%	0,00%	0,00%
5	0,00%	0,00%	0,01%
6	0,04%	0,04%	0,05%
7	0,00%	0,00%	0,00%
8	0,00%	0,00%	0,00%
9	0,00%	0,00%	0,00%

Tabela 12 – DRM para família M-O parcial com distribuição Triangular

Para os demais algoritmos a eficiência foi de 0,02% e 0,05% para AG e SA respectivamente, demonstrando alta qualidade das soluções mais uma vez.

Novamente, em relação ao tempo, o SA foi o mais rápido de todos mais uma vez. Também nesta distribuição, o Teste *t* obtido rejeita a Hipótese H_1 entre os algoritmos AG, PSO e SA em relação ao algoritmo de controle, a partir da análise do ponto crítico e *p value*.

- *Distribuição processo de Wiener*

Classe de	Algoritmo Ótimo		
Problemas	L	Custo	Tempo
1	1114,93	790,28	157,44
2	660,13	576,67	157,37
3	487,94	550,25	157,39

Tabela 13 – Resultados algoritmo de controle - distribuição processo de *Wiener*

Tempo médio de 157,40 segundos por problema.

Comparando com os algoritmos desenvolvidos (Tabela 14), o tempo computacional é consideravelmente menor para os algoritmos AG, PSO e SA, de forma igual as demais distribuições.

Classe de	AG			PSO			SA		
Problemas	Custo	Iteração	Tempo	Custo	Iteração	Tempo	Custo	Iteração	Tempo
1	793,76	2,72	1,62	791,08	20,16	4,96	795,27	11,00	1,12
2	578,58	8,28	1,64	578,01	19,24	4,92	583,42	11,00	1,11
3	552,56	14,27	1,67	552,52	19,63	4,73	555,19	11,00	1,12

Tabela 14 – Resultados família M-O parcial com distribuição processo de *Wiener*

Nesta distribuição, as medidas comparativas (Tabela 15) indicam que as melhores soluções são dadas pelo AG em 70,67% dos problemas.

Classe de	Melhor Solução			
Problemas	Melhor	Ganho AG	Ganho PSO	Ganho SA
1	790,52	41,00%	83,00%	31,00%
2	576,90	52,00%	70,00%	20,00%
3	550,54	65,00%	59,00%	16,00%

Tabela 15 – Melhor solução para família M-O parcial com distribuição processo de *Wiener*

Apesar da prevalência do PSO, o AG foi melhor na classe 3, tendo uma taxa de êxito de 52,67%.

Na análise do desvio relativo médio (DRM), o algoritmo PSO teve um erro médio de 0,39% em comparação ao algoritmo de controle (Tabela 16).

Classe de	DRM		
Problemas	Erro AG	Erro PSO	Erro SA
1	0,68%	0,19%	1,03%
2	0,53%	0,35%	1,62%
3	0,65%	0,64%	1,36%

Tabela 16 – DRM para família M-O parcial com distribuição Triangular

Para os demais algoritmos a eficiência foi de 0,62% e 1,34% para AG e SA respectivamente, demonstrando alta qualidade das soluções em todas as distribuições.

Em relação ao tempo, novamente, o SA foi o mais rápido. Semelhante às distribuições anteriores, o Teste *t* obtido rejeita a Hipótese H_1 entre os algoritmos AG, PSO e SA em relação ao algoritmo de controle.

Como existe a possibilidade de utilização de um algoritmo de controle, que obtém a melhor solução do modelo Miller-Orr com o incremento da variável L não haveria necessidade da aplicação dos modelos computacionais desenvolvidos se estes não fossem capazes de reduzir o custo do saldo de caixa.

Assim, o foi desenvolvida uma política flexível de gerenciamento de caixa, onde as variáveis L, Z e H não dependem de proporções entre si, como no modelo Miller-Orr.

Dessa maneira, a Família M-O Completo foi elaborada a fim de verificar se existe redução do custo em relação ao algoritmo de controle no modelo Miller-Orr.

Família M-O Completo:

Neste modelo a função objetivo é minimizar o custo do caixa, com as variáveis L, Z e H sendo definidas pelos algoritmos.

- *Distribuição Normal*

Classe de	AG		PSO		SA	
Problemas	Redução Custo	Var %	Redução Custo	Var %	Redução Custo	Var %
1	706,30	18,60%	799,60	21,28%	639,58	16,65%
2	52,60	1,28%	778,07	17,08%	-96,59	-1,43%
3	1569,66	8,24%	2424,52	13,28%	1385,73	7,23%
4	3816,06	25,33%	3897,31	26,00%	3720,81	24,55%
5	4702,15	31,38%	4813,70	32,36%	4612,03	30,61%
6	4350,83	21,65%	5073,37	26,15%	4224,29	20,88%
7	6309,63	21,17%	6292,74	21,11%	6297,06	21,12%
8	7413,58	24,87%	7415,29	24,87%	7358,61	24,64%
9	11356,21	39,18%	11517,13	39,96%	11301,37	38,92%

Tabela 17 – Redução do custo pelo modelo completo em relação ao algoritmo de controle - distribuição Normal

No geral a política flexível conseguiu uma redução superior a 20% no custo em relação ao modelo Miller-Orr. Isso significa que a política proporcionada pelo modelo Miller-Orr, com proporções fixas de L, Z e H, apresenta custos maiores em relação os algoritmos desenvolvidos, em que as variáveis da política de gerenciamento de caixa são flexíveis.

Comparando com os algoritmos desenvolvidos (Tabela 18), o menor tempo computacional continua sendo do SA, bem como um menor número de iterações, em função do número de sucessos do algoritmo. O algoritmo PSO apresenta maior tempo e maior número médio de iterações.

Classe de	AG		PSO		SA	
Problemas	Iteração	Tempo	Iteração	Tempo	Iteração	Tempo
1	18,88	2,88	131,44	23,54	11,00	1,19
2	4,20	3,03	123,24	23,46	11,00	1,16
3	48,55	2,93	150,22	23,34	11,00	1,17
4	13,07	2,89	70,78	23,24	11,00	1,14
5	8,33	2,88	118,48	23,52	11,00	1,15
6	13,80	2,97	164,92	23,60	11,00	1,17
7	3,10	2,84	17,06	23,28	11,00	1,14
8	13,41	2,92	41,68	23,36	11,00	1,14
9	13,61	3,02	92,06	23,91	11,00	1,15

Tabela 18 – Iteração e tempo para família M-O completo com distribuição Normal

Observando as medidas comparativas (Tabela 19) as melhores soluções foram obtidas pelo PSO em 64,33% dos problemas.

Classe de	Melhor Solução		
Problemas	Ganho AG	Ganho PSO	Ganho SA
1	34,00%	44,00%	22,00%
2	0,00%	100,00%	0,00%
3	0,00%	100,00%	0,00%
4	33,00%	49,00%	18,00%
5	28,00%	56,00%	16,00%
6	0,00%	100,00%	0,00%
7	37,00%	27,00%	36,00%
8	42,00%	35,00%	23,00%
9	18,00%	68,00%	14,00%

Tabela 19 – Melhor solução para família M-O completo com distribuição Normal

Apesar disso, nas classes 7 e 8 o desempenho do AG é melhor. Destacam-se as classes 2, 3 e 6 em que o PSO teve 100% de ganho, sendo que no modelo parcial seu desempenho não se destacava tanto, justamente nestas classes.

Analisando o DRM dos algoritmos, o PSO também apresenta os melhores resultados com 0,63% na média geral (Tabela 20).

Classe de	DRM		
Problemas	Erro AG	Erro PSO	Erro SA
1	6,71%	4,17%	8,60%
2	15,94%	0,00%	19,18%
3	4,68%	0,00%	5,67%
4	1,04%	0,50%	1,68%
5	1,10%	0,34%	1,71%
6	3,73%	0,00%	4,37%
7	0,24%	0,29%	0,28%
8	0,24%	0,24%	0,43%
9	0,69%	0,12%	0,88%

Tabela 20 – DRM para família M-O completo com distribuição Normal

Os demais algoritmos também obtiveram alta eficiência, com 3,82% e 4,76% para AG e SA respectivamente.

Com relação à diferença entre as soluções dos problemas, o Teste *t* realizado para comparar os custos obtidos entre AG x PSO, AG x SA e PSO x SA rejeitam a Hipótese H_1 de que as médias são insignificantemente diferentes entre os algoritmos.

- *Distribuição de Poisson*

Classe de	AG		PSO		SA	
Problemas	Redução Custo	Var %	Redução Custo	Var %	Redução Custo	Var %
1	559,29	14,76%	659,43	17,43%	514,08	13,50%
2	3705,58	24,64%	3751,01	25,01%	3622,37	23,96%
3	6256,71	21,01%	6251,72	20,99%	6244,38	20,96%

Tabela 21 – Redução do custo pelo modelo completo em relação ao algoritmo de controle - distribuição de Poisson

Novamente, a política flexível de caixa proporcionou uma considerável redução de custos, acima de 20%.

Comparando com os algoritmos desenvolvidos (Tabela 22), o tempo computacional é consideravelmente menor nos algoritmos AG e SA em relação ao PSO.

Classe de	AG		PSO		SA	
Problemas	Iteração	Tempo	Iteração	Tempo	Iteração	Tempo
1	28,44	2,41	102,60	18,36	11,00	1,12
2	3,50	2,41	70,96	18,21	11,00	1,11
3	3,19	2,45	21,12	18,63	11,00	1,11

Tabela 22 – Iteração e tempo para família M-O completo com distribuição de Poisson

Na distribuição de Poisson, as medidas comparativas (Tabela 23) indicam que as melhores soluções ficaram divididas entre os algoritmos, com pequena vantagem para o PSO.

Classe de	Melhor Solução		
Problemas	Ganho AG	Ganho PSO	Ganho SA
1	30,00%	38,00%	32,00%
2	39,00%	41,00%	20,00%
3	33,00%	36,00%	31,00%

Tabela 23 – Melhor solução para família M-O completa com distribuição de Poisson

Em termos de eficiência medida pelo DRM, o algoritmo PSO teve um erro médio de 1,57% com pequena vantagem sobre os demais (Tabela 24).

Classe de	DRM		
Problemas	Erro AG	Erro PSO	Erro SA
1	6,62%	3,93%	7,88%
2	0,86%	0,55%	1,42%
3	0,20%	0,22%	0,24%

Tabela 24 – DRM para família M-O completo com distribuição de Poisson

Em relação ao tempo, o SA teve o menor tempo. Com relação à diferença entre as soluções dos problemas, o Teste *t* rejeita a Hipótese H_1 entre os algoritmos AG, PSO e SA, indicando médias insignificativamente distintas.

- Distribuição Triangular

Classe de	AG		PSO		SA	
Problemas	Redução Custo	Var %	Redução Custo	Var %	Redução Custo	Var %
1	3507,92	135,57%	3629,13	147,02%	3453,77	130,78%
2	918,26	19,07%	1314,20	29,21%	861,25	17,54%
3	6379,41	41,79%	6696,03	44,77%	6268,05	40,77%
4	34243,79	225,06%	34473,54	230,03%	34163,68	223,35%
5	17795,16	125,20%	18016,81	128,76%	17725,80	124,11%
6	1809,78	14,35%	2754,25	23,53%	1611,39	12,62%
7	22752,84	45,46%	23350,77	47,21%	22713,78	45,34%
8	22637,47	45,37%	23224,40	47,10%	22580,89	45,21%
9	22556,76	45,15%	23209,06	47,06%	22551,82	45,13%

Tabela 25 – Redução do custo pelo modelo completo em relação ao algoritmo de controle - distribuição Triangular

A redução do custo, proporcionada pela política flexível das variáveis L, Z e H gerou uma redução de custos de mais de 70%.

Na comparação com os algoritmos desenvolvidos (Tabela 26), o menor tempo computacional é do algoritmo SA, com menores números de iterações AG e SA.

Classe de	AG		PSO		SA	
Problemas	Iteração	Tempo	Iteração	Tempo	Iteração	Tempo
1	8,47	3,09	82,94	23,03	11,00	1,13
2	13,31	2,95	112,48	23,38	11,00	1,13
3	3,32	2,84	111,44	23,11	11,00	1,15
4	12,93	2,84	109,78	22,69	11,00	1,12
5	8,09	2,85	76,84	22,76	11,00	1,12
6	18,14	3,01	147,98	22,84	11,00	1,14
7	2,71	2,69	169,64	22,30	11,00	1,08
8	12,78	2,72	170,54	22,30	11,00	1,08
9	3,04	2,71	164,64	22,32	11,00	1,08

Tabela 26 – Iteração e tempo para família M-O completo com distribuição Triangular

Observando as medidas comparativas (Tabela 27) as melhores soluções são dadas pelo PSO em 96,67% dos problemas.

Classe de	Melhor Solução		
Problemas	Ganho AG	Ganho PSO	Ganho SA
1	0,00%	100,00%	0,00%
2	14,00%	83,00%	3,00%
3	10,00%	87,00%	3,00%
4	0,00%	100,00%	0,00%
5	0,00%	100,00%	0,00%
6	0,00%	100,00%	0,00%
7	0,00%	100,00%	0,00%
8	0,00%	100,00%	0,00%
9	0,00%	100,00%	0,00%

Tabela 27 – Melhor solução para família M-O completo com distribuição Triangular

Apenas nas classes 2 e 3 não houve 100% de ganho do PSO.

Analisando o DRM dos algoritmos, o PSO também apresenta os melhores resultados com 0,09% na média geral, enquanto o AG tem 3,52% e SA com 4,31% (Tabela 28).

Classe de	DRM		
Problemas	Erro AG	Erro PSO	Erro SA
1	4,92%	0,00%	7,12%
2	9,66%	0,71%	10,90%
3	2,19%	0,07%	2,94%
4	1,53%	0,00%	2,07%
5	1,59%	0,00%	2,08%
6	8,09%	0,00%	9,76%
7	1,21%	0,00%	1,29%
8	1,19%	0,00%	1,30%
9	1,32%	0,00%	1,33%

Tabela 28 – DRM para família M-O completo com distribuição Triangular

Com relação à diferença entre as soluções dos problemas, o Teste *t* realizado para comparar os custos obtidos entre AG x PSO, AG x SA e PSO x SA rejeitam a Hipótese H_0, indicando que as médias são significantemente diferentes entre os algoritmos.

- *Distribuição processo de Wiener*

Classe de	AG		PSO		SA	
Problemas	Redução Custo	Var %	Redução Custo	Var %	Redução Custo	Var %
1	-192,25	-1,26%	-131,98	6,52%	-209,26	-9,72%
2	-454,97	-34,48%	-388,77	-23,98%	-477,85	-37,52%
3	-394,74	-27,36%	-444,77	-28,67%	-524,16	-39,25%

Tabela 29 – Redução do custo pelo modelo completo em relação ao algoritmo de controle - distribuição processo de *Wiener*

Especificamente, nesta distribuição, foram raros os casos em que houve uma redução do custo obtido pelo algoritmo completo em relação ao algoritmo de controle com Miller-Orr. Mesmo assim, nota-se um melhor resultado no PSO.

Comparando com os algoritmos (Tabela 30), o tempo computacional é menor nos algoritmos AG e SA em relação ao PSO.

Classe de	AG		PSO		SA	
Problemas	Iteração	Tempo	Iteração	Tempo	Iteração	Tempo
1	1,38	1,98	31,03	4,40	11,00	1,15
2	1,26	1,96	15,06	3,57	11,00	1,15
3	1,19	1,97	16,71	3,23	11,00	1,15

Tabela 30 – Iteração e tempo para família M-O completo com distribuição processo de *Wiener*

As medidas comparativas nesta distribuição (Tabela 31) indicam que as melhores soluções ficam divididas entre os algoritmos, com pequena vantagem do PSO.

Classe de	Melhor Solução		
Problemas	Ganho AG	Ganho PSO	Ganho SA
1	40,00%	50,00%	44,00%
2	43,00%	52,00%	41,00%
3	57,00%	43,00%	42,00%

Tabela 31 – Melhor solução para família M-O completa com distribuição processo de *Wiener*

Em termos de eficiência medida pelo DRM, o algoritmo PSO tem um erro médio de 57,70%, enquanto AG tem 67,99% e SA 87,93% (Tabela 32).

Classe de	DRM		
Problemas	Erro AG	Erro PSO	Erro SA
1	69,45%	54,40%	81,97%
2	82,73%	51,72%	84,35%
3	51,78%	66,98%	97,46%

Tabela 32 – DRM para família M-O completo com distribuição processo de *Wiener*

Em relação ao tempo, o SA teve o melhor desempenho. Especificamente nesta distribuição, apesar dos maiores erros, analisando diferença entre as soluções dos problemas por meio do Teste *t* é aceita a Hipótese H_0 entre os algoritmos AG e PSO e entre AG e SA, rejeitando-se a Hipótese H_0 entre PSO e SA.

Família Objetivo 1 com Custos Diferenciados:

Neste modelo a função objetivo é minimizar o custo do caixa, com as variáveis L, Z e H sendo definidas pelos algoritmos, considerando diferentes custos fixos e variáveis na aplicação e resgate.

- *Distribuição Normal*

Observando as medidas comparativas (Tabela 32) as melhores soluções são obtidas pelo algoritmo PSO em 69,89% dos problemas.

Classe de	Melhor Solução		
Problemas	Ganho AG	Ganho PSO	Ganho SA
1	26,00%	52,00%	22,00%
2	1,00%	98,00%	1,00%
3	4,00%	95,00%	1,00%
4	17,00%	66,00%	17,00%
5	23,00%	67,00%	10,00%
6	3,00%	95,00%	2,00%
7	38,00%	37,00%	25,00%
8	32,00%	48,00%	20,00%
9	19,00%	71,00%	10,00%

Tabela 33 – Melhor solução para família objetivo 1 custos diferenciados com distribuição Normal

Apesar disso, nas classes 7 e 8 o desempenho do AG apresenta melhora. Destacam-se as classes 2, 3 e 6 em que o PSO teve mais de 90% de ganho, de maneira semelhante aos resultados da família M-O completo.

Comparando com os algoritmos desenvolvidos, o menor tempo computacional continua sendo do SA, bem como um menor número de iterações, contra o algoritmo PSO que apresenta maior tempo e maior número médio de iterações.

Analisando o DRM dos algoritmos, o PSO também apresenta os melhores resultados com 0,53% na média geral (Tabela 34).

Classe de	DRM		
Problemas	Erro AG	Erro PSO	Erro SA
1	5,24%	4,21%	8,59%
2	13,10%	0,01%	16,69%
3	3,83%	0,19%	5,35%
4	0,73%	0,25%	0,75%
5	0,66%	0,18%	0,96%
6	3,17%	0,03%	3,76%
7	0,08%	0,06%	0,11%
8	0,09%	0,06%	0,12%
9	0,18%	0,03%	0,24%

Tabela 34 – DRM para família objetivo 1 custos diferenciados com distribuição Normal

Os demais algoritmos também obtiveram alta eficiência com 3,01% e 4,06% para AG e SA respectivamente.

Com relação à diferença entre as soluções dos problemas, o Teste *t* realizado para comparar os custos obtidos entre AG x PSO, AG x SA e PSO x SA, novamente rejeitam a Hipótese H_1 de que as médias são significantemente diferentes entre os algoritmos.

- *Distribuição de Poisson*

Observando as medidas comparativas (Tabela 35) as melhores soluções são dadas pelo PSO em 53,67% dos problemas, contra 26,67% do AG e 16,67% do SA.

Classe de	Melhor Solução		
Problemas	Ganho AG	Ganho PSO	Ganho SA
1	33,00%	45,00%	22,00%
2	25,00%	64,00%	11,00%
3	31,00%	52,00%	17,00%

Tabela 35 – Melhor solução para família objetivo 1 custos diferenciados com distribuição de Poisson

Comparando com os algoritmos desenvolvidos, o menor tempo computacional continua sendo do SA, bem como um menor número de iterações, contra o algoritmo PSO que apresenta maior tempo e maior número médio de iterações.

Analisando o DRM dos algoritmos, o PSO também apresenta os melhores resultados com 1,28% na média geral (Tabela 36).

Classe de	DRM		
Problemas	Erro AG	Erro PSO	Erro SA
1	6,68%	3,52%	8,32%
2	0,64%	0,28%	0,85%
3	0,10%	0,05%	0,11%

Tabela 36 – DRM para família objetivo 1 custos diferenciados com distribuição de Poisson

Os demais algoritmos também obtiveram alta eficiência, com 2,47% e 3,09% para AG e SA respectivamente.

Com relação à diferença entre as soluções dos problemas, o Teste *t* realizado para comparar os custos obtidos entre os algoritmos, novamente rejeitam a Hipótese H_1 de que as médias são significantemente diferentes entre os algoritmos.

- *Distribuição Triangular*

As melhores soluções são dadas pelo PSO em 77,78% dos problemas (Tabela 37).

Classe de	Melhor Solução		
Problemas	Ganho AG	Ganho PSO	Ganho SA
1	0,00%	100,00%	0,00%
2	13,00%	79,00%	8,00%
3	10,00%	82,00%	8,00%
4	0,00%	100,00%	0,00%
5	0,00%	99,00%	1,00%
6	1,00%	99,00%	0,00%
7	49,00%	48,00%	3,00%
8	46,00%	51,00%	3,00%
9	54,00%	42,00%	4,00%

Tabela 37 – Melhor solução para família objetivo 1 custos diferenciados com distribuição Triangular

Mais uma vez o menor tempo computacional continua sendo do SA, bem como um menor número de iterações, contra o algoritmo PSO que apresenta maior tempo e maior número médio de iterações.

Analisando o DRM dos algoritmos, o PSO apresenta novamente os melhores resultados com 0,17% na média geral (Tabela 38).

Classe de	DRM		
Problemas	Erro AG	Erro PSO	Erro SA
1	4,61%	0,00%	7,47%
2	8,12%	1,32%	8,91%
3	0,85%	0,06%	0,90%
4	0,73%	0,00%	0,90%
5	0,74%	0,00%	0,92%
6	5,95%	0,01%	7,03%
7	0,02%	0,03%	0,14%
8	0,03%	0,03%	0,14%
9	0,02%	0,04%	0,13%

Tabela 38 – DRM para família objetivo 1 custos diferenciados com distribuição Triangular

Os demais algoritmos também obtiveram alta eficiência com 2,34% e 2,95% para AG e SA respectivamente.

Novamente, o Teste *t* realizado para comparar os custos obtidos entre os algoritmos, novamente rejeitam a Hipótese H_1 de que as médias são significantemente diferentes entre os algoritmos.

- *Distribuição processo de Wiener*

As melhores soluções são dadas pelo PSO em 55,00%, seguido por AG com 51,67% e SA com 40,67% dos problemas (Tabela 39).

Classe de	Melhor Solução		
Problemas	Ganho AG	Ganho PSO	Ganho SA
1	49,00%	56,00%	37,00%
2	53,00%	53,00%	40,00%
3	53,00%	56,00%	45,00%

Tabela 39 – Melhor solução para família objetivo 1 custos diferenciados com distribuição processo de *Wiener*

O menor tempo computacional continua sendo do SA, bem como um menor número de iterações, contra o algoritmo PSO que apresenta maior tempo e maior número médio de iterações.

Analisando o DRM dos algoritmos, o PSO apresenta novamente os melhores resultados com 53,95%, AG com 78,70% e SA com 100,37% na média geral (Tabela 40).

Classe de	DRM		
Problemas	Erro AG	Erro PSO	Erro SA
1	63,13%	53,58%	87,75%
2	84,60%	51,77%	93,80%
3	88,37%	56,48%	119,54%

Tabela 40 – DRM para família objetivo 1 custos diferenciados com distribuição processo de *Wiener*

O Teste *t* realizado para comparar os custos obtidos entre os algoritmos, aceita a Hipótese H_1 na comparação dos custos entre AG e PSO, mas, novamente rejeita a Hipótese H_1 nos demais casos.

Família Objetivo 1 com três Ativos:

Neste modelo a função objetivo é minimizar o custo do caixa, com as variáveis L, Z, H, P1 e P2 sendo definidas pelos algoritmos, considerando diferentes custos fixos e variáveis na aplicação e resgate, além da rentabilidade dos ativos 1 e 2 e do prazo de resgate do ativo 2.

- *Distribuição Normal*

Observando as medidas comparativas (Tabela 41) as melhores soluções são dadas pelo AG em 63,00% dos problemas, seguido do PSO com 29,78% e SA com 7,22%.

Classe de	Melhor Solução		
Problemas	Ganho AG	Ganho PSO	Ganho SA
1	51,00%	35,00%	14,00%
2	19,00%	75,00%	6,00%
3	49,00%	44,00%	7,00%
4	83,00%	12,00%	5,00%
5	86,00%	6,00%	8,00%
6	36,00%	52,00%	12,00%
7	84,00%	12,00%	4,00%
8	82,00%	14,00%	4,00%
9	77,00%	18,00%	5,00%

Tabela 41 – Melhor solução para família objetivo 1 com três ativos com distribuição Normal

Apesar disso, nas classes 2 e 6 o desempenho do PSO é melhor.

Comparando com os algoritmos desenvolvidos, o menor tempo computacional continua com o algoritmo SA, além do menor número de iterações, já o algoritmo PSO apresenta maior tempo e maior número de iterações.

Analisando o DRM dos algoritmos, o PSO apresenta os menores erros com 29,93% na média geral (Tabela 42).

Classe de	DRM		
Problemas	Erro AG	Erro PSO	Erro SA
1	350,60%	215,16%	965,38%
2	127,79%	14,76%	203,91%
3	664,58%	23,27%	1150,27%
4	0,55%	3,56%	4,73%
5	0,65%	4,39%	6,22%
6	8,48%	4,28%	14,30%
7	0,06%	1,36%	1,88%
8	0,13%	1,42%	1,73%
9	0,62%	1,19%	2,09%

Tabela 42 – DRM para família objetivo 1 com três ativos com distribuição Normal

Neste caso, as classes 4, 5, 7, 8 e 9 tiveram menor DRM com o AG e as classes 1, 2, 3 e 6 apresentam menor DRM com PSO.

Com relação à diferença entre as soluções dos problemas, o Teste *t* realizado para comparar os custos obtidos entre AG x PSO, AG x SA e PSO x SA, novamente rejeitam a Hipótese H_1 entre os algoritmos.

- *Distribuição de Poisson*

Observando as medidas comparativas (Tabela 43) as melhores soluções são dadas pelo AG em 77,67% dos problemas, contra 15,67% do PSO e 6,67% do SA.

Classe de	Melhor Solução		
Problemas	Ganho AG	Ganho PSO	Ganho SA
1	59,00%	26,00%	15,00%
2	91,00%	7,00%	2,00%
3	83,00%	14,00%	3,00%

Tabela 43 – Melhor solução para família objetivo 1 com três ativos com distribuição de Poisson

Quando consideradas as classes 2 e 3 apenas, o ganho do AG é muito superior aos demais.

Comparando com os algoritmos desenvolvidos, o melhor tempo computacional e o menor número de iterações continuam sendo do AS, contra o algoritmo PSO que apresenta maior tempo e maior número médio de iterações.

Analisando o DRM dos algoritmos, o AG também apresenta os melhores resultados com 8,65% na média geral (Tabela 44).

Classe de	DRM		
Problemas	Erro AG	Erro PSO	Erro SA
1	25,57%	1595,82%	1669,42%
2	0,31%	4,49%	6,40%
3	0,07%	1,19%	2,21%

Tabela 44 – DRM para família objetivo 1 com três ativos com distribuição de Poisson

Os demais algoritmos também obtiveram grande queda na eficiência com 533,83% e 559,34% para AG e SA respectivamente, principalmente em virtude da classe 1.

Também neste caso o Teste *t* realizado para comparar os custos obtidos entre os algoritmos rejeita a Hipótese H_1 de que as médias são significantemente diferentes entre os algoritmos.

- *Distribuição Triangular*

As melhores soluções são dadas pelo PSO em 56,33% dos problemas (Tabela 45).

Classe de	Melhor Solução		
Problemas	Ganho AG	Ganho PSO	Ganho SA
1	2,00%	98,00%	0,00%
2	59,00%	34,00%	7,00%
3	79,00%	16,00%	5,00%
4	5,00%	87,00%	8,00%
5	14,00%	77,00%	9,00%
6	38,00%	49,00%	13,00%
7	29,00%	54,00%	17,00%
8	30,00%	43,00%	27,00%
9	29,00%	49,00%	22,00%

Tabela 45 – Melhor solução para família objetivo 1 com três ativos com distribuição Triangular

Observe que AG obtém melhores soluções nas classes 2 e 3, sendo a melhor solução em 31,67% no geral e SA com 12,00%.

Mais uma vez o menor tempo computacional continua sendo do SA, bem como um menor número de iterações, nesta distribuição o pior tempo computacional passa a ser do AG, mantendo o algoritmo PSO com o maior número médio de iterações.

A análise do desvio relativo médio ficou impossibilitada por uma característica deste modelo, como existe rentabilidade proporcionada pelos investimentos (R1 e R2), em muitos problemas o custo do caixa foi nulo, tornando impossível determinar um desvio percentual (Tabela 46).

Classe de	DRM		
Problemas	Erro AG	Erro PSO	Erro SA
1	243,14%	1,08%	258,71%
2	78,98%	74,25%	362,58%
3	0,35%	3,10%	5,43%
4	N/D	N/D	N/D
5	N/D	N/D	N/D
6	13,22%	17,32%	36,21%
7	N/D	N/D	N/D
8	N/D	N/D	N/D
9	N/D	N/D	N/D

Tabela 46 – DRM para família objetivo 1 com três ativos com distribuição Triangular

Ainda assim, nota-se a prevalência do PSO nas classes 1 e 2 e do AG nas classes 2 e 6.

Nesta distribuição, o Teste *t*, realizado para comparar os custos obtidos entre os algoritmos, aceita a Hipótese H_1 para os custos de AG x SA, rejeitando nos demais casos.

- *Distribuição processo de Wiener*

As melhores soluções são dadas pelo SA com 53,00%, seguido de muito perto pelo PSO com 50,67% e AG com 50,33% dos problemas (Tabela 47). O total excede 100% pela existência de problemas com mais de um algoritmo apresentando a melhor solução.

Classe de	Melhor Solução		
Problemas	Ganho AG	Ganho PSO	Ganho SA
1	40,00%	53,00%	49,00%
2	48,00%	44,00%	60,00%
3	63,00%	55,00%	50,00%

Tabela 47 – Melhor solução para família objetivo 1 com três ativos com distribuição processo de *Wiener*

O menor tempo computacional continua sendo do SA, bem como um menor número de iterações, novamente o maior tempo e maior número médio de iterações são do PSO.

Analisando o DRM dos algoritmos, o PSO apresenta novamente os melhores resultados com 133,02%, principalmente em função da classe 2 que prejudicou os demais algoritmos (Tabela 48).

Classe de	DRM		
Problemas	Erro AG	Erro PSO	Erro SA
1	180,30%	155,47%	144,64%
2	10885,29%	122,29%	4267,07%
3	216,41%	121,30%	222,11%

Tabela 48 – DRM para família objetivo 1 com três ativos com distribuição processo de *Wiener*

Apesar da grande variabilidade entre os erros, o Teste *t* rejeita a Hipótese H_0 de que as médias são insignificantemente diferentes entre os algoritmos.

Família Objetivo 2:

A função objetivo, neste caso, é minimizar risco da falta de caixa acima do *déficit* máximo de caixa, com as variáveis L, Z e H sendo definidas pelos algoritmos.

Como a medida de risco é dada pela probabilidade empírica de ruptura, medida pelo percentual de vezes em que isso ocorre no fluxo de caixa, o valor ótimo a ser obtido não pode ser menor do que zero. Assim, a medida de desvio relativo médio fica comprometida, não sendo empregada na análise desta família de problemas.

Pelo mesmo problema, de obter o mínimo risco com valor de 0,00%, o Teste *t*, ou qualquer outro teste de desvio de médias, não pode ser empregado.

- *Distribuição Normal*

As melhores soluções foram dadas pelo AG e PSO, com uma pequena redução no desempenho para SA (Tabela 49).

Classe de	Melhor Solução		
Problemas	Ganho AG	Ganho PSO	Ganho SA
1	100,00%	100,00%	100,00%
2	100,00%	100,00%	100,00%
3	100,00%	100,00%	70,00%
4	100,00%	100,00%	100,00%
5	100,00%	100,00%	100,00%
6	100,00%	100,00%	94,00%
7	100,00%	100,00%	100,00%
8	100,00%	100,00%	100,00%
9	100,00%	100,00%	100,00%

Tabela 49 – Melhor solução para família objetivo 2 com distribuição Normal

Comparando com os algoritmos desenvolvidos, o menor tempo computacional médio é do SA, contra o algoritmo AG que apresenta maior tempo. O menor número médio de iterações é do AG e PSO ao mesmo tempo.

- *Distribuição de Poisson*

Nesta distribuição o percentual de sucesso foi de 100% para todos os algoritmos, ou seja, todos foram capazes de minimizar o risco em 0,00% (Tabela 50).

Classe de	Melhor Solução		
Problemas	Ganho AG	Ganho PSO	Ganho SA
1	100,00%	100,00%	100,00%
2	100,00%	100,00%	100,00%
3	100,00%	100,00%	100,00%

Tabela 50 – Melhor solução para família objetivo 2 com distribuição de Poisson

Neste caso não há diferença entre os modelos, com exceção do tempo computacional que foi menos de 1 segundo em cada algoritmo, ou do número de iterações, que não ultrapassou 3. Assim, torna-se irrelevante uma comparação, dada a proximidade das métricas.

- *Distribuição Triangular*

As melhores soluções são dadas pelos algoritmos AG e PSO, sendo que nas classes 7, 8 e 9 o algoritmo SA teve um baixo rendimento comparativo (Tabela 51).

Classe de	Melhor Solução		
Problemas	Ganho AG	Ganho PSO	Ganho SA
1	100,00%	100,00%	100,00%
2	100,00%	100,00%	100,00%
3	100,00%	100,00%	100,00%
4	100,00%	100,00%	100,00%
5	100,00%	100,00%	100,00%
6	100,00%	100,00%	100,00%
7	100,00%	100,00%	7,00%
8	100,00%	100,00%	7,00%
9	100,00%	100,00%	6,00%

Tabela 51 – Melhor solução para família objetivo 2 com distribuição Triangular

Como as classes 7, 8 e 9 apresentam os valores de mínimo da ordem de -$200.000, o algoritmo não conseguiu evitar que o saldo de caixa extrapole o DMC em mais de 90% das vezes.

As medidas de tempo computacional e número de iterações também ficaram próximas entre si.

- *Distribuição processo de Wiener*

De maneira semelhante à distribuição de Poisson, o percentual de sucesso foi de 100% para todos os algoritmos, ou seja, todos foram capazes de minimizar o risco em 0,00% (Tabela 52).

Classe de	Melhor Solução		
Problemas	Ganho AG	Ganho PSO	Ganho SA
1	100,00%	100,00%	100,00%
2	100,00%	100,00%	100,00%
3	100,00%	100,00%	100,00%

Tabela 52 – Melhor solução para família objetivo 2 com distribuição processo de *Wiener*

O menor tempo computacional continua sendo do SA, bem como um menor número de iterações, novamente o maior tempo e maior número médio de iterações são do PSO.

Também aqui as medidas de tempo computacional e número de iterações tiveram pouca variação.

Família Objetivo 3:

Neste modelo a função é multiobjetivo buscando minimizar o custo do caixa e minimizar o risco, com as variáveis L, Z, H, P1 e P2 sendo definidas pelos algoritmos, considerando diferentes custos fixos e variáveis na aplicação e resgate, além da rentabilidade dos ativos 1 e 2, do prazo de resgate do ativo 2 e do *déficit* máximo de caixa que a organização possui.

Como se trata de um algoritmo multiobjetivo, devem ser avaliados simultaneamente o desempenho em minimizar o custo e minimizar o risco. Na questão do risco, novamente existe o problema no cálculo do DRM e do Teste *t*, não sendo utilizados.

Além disso, o comparativo deve possibilitar a diferenciação entre os pesos do Risco e do Custo, existindo:

- Preferência pelo Risco: wRisco = 0,75 e wCusto = 0,25;
- Indiferença: wRisco = 0,50 e wCusto = 0,50;
- Preferência pelo Custo: wRisco = 0,25 e wCusto = 0,75;

- *Distribuição Normal*

Na análise do percentual de sucesso, a ponderação entre os pesos das funções Risco e Custo quase não alterou a análise, com o AG tendo obtido melhores resultados nas classes 1, 2, 4, 5, 7, 8 e 9 independentemente do peso, tendo uma pequena redução no resultado do Risco quando ocorreu a preferência pelo custo (Tabela 53).

Preferência pelo Risco						
Classe de	**Melhor Solução - Custo**			**Melhor Solução - Risco**		
Problemas	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**
1	71,00%	13,00%	16,00%	100,00%	100,00%	100,00%
2	51,00%	21,00%	28,00%	100,00%	100,00%	100,00%
3	29,00%	30,00%	41,00%	91,00%	87,00%	77,00%
4	85,00%	10,00%	5,00%	100,00%	100,00%	100,00%
5	91,00%	4,00%	5,00%	100,00%	100,00%	100,00%
6	21,00%	47,00%	32,00%	96,00%	93,00%	92,00%
7	91,00%	2,00%	7,00%	100,00%	100,00%	100,00%
8	90,00%	4,00%	6,00%	100,00%	100,00%	100,00%
9	81,00%	6,00%	13,00%	100,00%	100,00%	100,00%
Indiferença						
Classe de	**Melhor Solução - Custo**			**Melhor Solução - Risco**		
Problemas	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**
1	77,00%	10,00%	13,00%	100,00%	100,00%	100,00%
2	46,00%	29,00%	25,00%	100,00%	100,00%	100,00%
3	28,00%	35,00%	37,00%	77,00%	74,00%	74,00%
4	90,00%	4,00%	6,00%	100,00%	100,00%	100,00%
5	82,00%	9,00%	9,00%	100,00%	100,00%	100,00%
6	29,00%	38,00%	33,00%	95,00%	93,00%	93,00%
7	87,00%	2,00%	11,00%	100,00%	100,00%	100,00%
8	88,00%	7,00%	5,00%	100,00%	100,00%	100,00%
9	84,00%	6,00%	10,00%	100,00%	100,00%	100,00%
Preferência pelo Custo						
Classe de	**Melhor Solução - Custo**			**Melhor Solução - Risco**		
Problemas	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**
1	67,00%	14,00%	19,00%	100,00%	100,00%	100,00%
2	50,00%	18,00%	32,00%	97,00%	99,00%	97,00%
3	29,00%	47,00%	24,00%	75,00%	65,00%	66,00%
4	93,00%	3,00%	4,00%	100,00%	100,00%	100,00%
5	90,00%	6,00%	4,00%	100,00%	100,00%	100,00%
6	23,00%	41,00%	36,00%	92,00%	95,00%	94,00%
7	87,00%	8,00%	5,00%	100,00%	100,00%	100,00%
8	88,00%	10,00%	2,00%	100,00%	100,00%	100,00%
9	70,00%	14,00%	16,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Tabela 53 – Melhor solução para família objetivo 3 com distribuição Normal

Já o PSO obteve as melhores soluções na classe 6 em todos os cenários e na classe 3 quando foi dada preferência ao custo. O algoritmo SA teve o pior desempenho, com melhores resultados apenas na classe 3, com exceção de quando é dada preferência ao custo.

No geral os riscos ficaram semelhantes entre si, também prevalecendo o AG.

O DRM apresenta melhores resultados para o AG em quase todas as classes de problemas, com exceção da classe 6 (Tabela 54).

Classe de	DRM - Custo (Preferência pelo Risco)		
Problemas	Erro AG	Erro PSO	Erro SA
1	77,57%	2039,33%	4281,38%
2	56,39%	130,87%	121,54%
3	440,49%	2986,16%	9861,59%
4	0,21%	4,79%	5,74%
5	0,12%	5,78%	5,77%
6	54,48%	53,29%	34,75%
7	0,02%	2,00%	1,79%
8	0,05%	1,61%	1,45%
9	0,11%	1,46%	1,40%
Classe de	**DRM - Custo (Indiferença)**		
Problemas	**Erro AG**	**Erro PSO**	**Erro SA**
1	7,63%	185,06%	215,28%
2	42,22%	169,33%	131,00%
3	8063,70%	1690,40%	1035,16%
4	0,11%	5,80%	5,11%
5	0,39%	5,42%	5,24%
6	27,89%	40,12%	35,88%
7	0,04%	1,80%	1,56%
8	0,04%	1,68%	1,49%
9	0,07%	1,44%	1,24%
Classe de	**DRM - Custo (Preferência pelo Custo)**		
Problemas	**Erro AG**	**Erro PSO**	**Erro SA**
1	32,08%	239,19%	211,39%
2	56,83%	238,07%	104,43%
3	68,38%	236,35%	1965,23%
4	0,09%	5,61%	5,02%
5	0,23%	5,59%	5,65%
6	32,88%	50,76%	24,25%
7	0,04%	1,82%	1,92%
8	0,04%	1,71%	1,70%
9	0,14%	1,25%	1,27%

Tabela 54 – DRM para família objetivo 3 com distribuição Normal

Observando o número de iterações o PSO é o melhor, e no tempo computacional se destaca o SA, independentemente dos pesos de ponderação de risco e custo.

Com relação à diferença entre as soluções dos problemas, o Teste *t* realizado para comparar os custos obtidos entre AG x PSO, AG x SA e PSO x SA, considerando as diferentes preferências, a maioria aceita a Hipótese H_0 considerando que as médias das soluções são insignificantemente diferentes entre os algoritmos, apenas os comparativos de AG x PSO na preferência pelo risco e AG x SA na preferência pelo custo.

- *Distribuição de Poisson*

Nesta distribuição, o AG obteve os melhores resultados, com os menores custos que os demais em todas as classes e empatando com o menor risco (Tabela 55).

Preferência pelo Risco						
Classe de	**Melhor Solução - Custo**			**Melhor Solução - Risco**		
Problemas	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**
1	71,00%	18,00%	11,00%	100,00%	100,00%	100,00%
2	89,00%	3,00%	8,00%	100,00%	100,00%	100,00%
3	96,00%	2,00%	2,00%	100,00%	100,00%	100,00%
Indiferença						
Classe de	**Melhor Solução - Custo**			**Melhor Solução - Risco**		
Problemas	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**
1	71,00%	18,00%	11,00%	100,00%	100,00%	100,00%
2	88,00%	3,00%	9,00%	100,00%	100,00%	100,00%
3	94,00%	2,00%	4,00%	100,00%	100,00%	100,00%
Preferência pelo Custo						
Classe de	**Melhor Solução - Custo**			**Melhor Solução - Risco**		
Problemas	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**
1	71,00%	18,00%	11,00%	100,00%	100,00%	100,00%
2	89,00%	3,00%	8,00%	100,00%	100,00%	100,00%
3	96,00%	2,00%	2,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Tabela 55 – Melhor solução para família objetivo 3 com distribuição de Poisson

Nesta distribuição a mudança dos pesos não gerou mudanças nos resultados.

O DRM apresenta melhores resultados para o AG em todas as classes de problemas, também sem alterações em função dos pesos de preferência entre risco e custo (Tabela 56).

Classe de	**DRM - Custo (Preferência pelo Risco)**		
Problemas	**Erro AG**	**Erro PSO**	**Erro SA**
1	67,22%	1976,38%	1166,09%
2	0,24%	5,70%	5,18%
3	0,01%	1,71%	1,61%
Classe de	**DRM - Custo (Indiferença)**		
Problemas	**Erro AG**	**Erro PSO**	**Erro SA**
1	35,29%	1877,39%	1061,57%
2	0,27%	5,73%	5,60%
3	0,01%	1,71%	1,79%
Classe de	**DRM - Custo (Preferência pelo Custo)**		
Problemas	**Erro AG**	**Erro PSO**	**Erro SA**
1	28,74%	1869,63%	1490,84%
2	0,28%	5,74%	5,42%
3	0,01%	1,71%	1,72%

Tabela 56 – DRM para família objetivo 3 com distribuição de Poisson

Também nessa distribuição, no número de iterações o PSO é o melhor, e no tempo computacional SA apresenta menor tempo, independentemente dos pesos de ponderação de risco e custo.

Com relação à diferença entre as soluções dos problemas, o Teste *t* realizado para comparar os custos obtidos entre AG x PSO, AG x SA e PSO x SA rejeita a Hipótese H_0 de que as médias são insignificantemente diferentes entre os algoritmos para os resultados de PSO x SA nas três combinações de pesos. Assim, demonstra-se que os custos do AG são estatisticamente distintos dos demais.

- *Distribuição Triangular*

Na distribuição Triangular, os menores custos foram obtidos pelo SA, principalmente nas classes 1, 4, 5, 6, 7 e 9, associado também com o menor risco nas classes 1, 4, 5 e 6. Enquanto o AG se destacou nas classes 2 e 3 (Tabela 57).

Para esta distribuição o SA teve um desempenho geral melhor, mas não foi efetivamente acima dos demais quando considerados os riscos.

Preferência pelo Risco						
Classe de	**Melhor Solução - Custo**			**Melhor Solução - Risco**		
Problemas	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**
1	34,00%	12,00%	55,00%	100,00%	100,00%	100,00%
2	72,00%	13,00%	15,00%	100,00%	100,00%	100,00%
3	84,00%	9,00%	7,00%	100,00%	100,00%	100,00%
4	18,00%	16,00%	66,00%	90,00%	97,00%	98,00%
5	16,00%	28,00%	56,00%	88,00%	95,00%	98,00%
6	32,00%	29,00%	39,00%	100,00%	97,00%	98,00%
7	32,00%	28,00%	40,00%	80,00%	74,00%	17,00%
8	31,00%	39,00%	30,00%	72,00%	70,00%	14,00%
9	38,00%	24,00%	38,00%	76,00%	80,00%	16,00%
Indiferença						
Classe de	**Melhor Solução - Custo**			**Melhor Solução - Risco**		
Problemas	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**
1	30,00%	8,00%	63,00%	100,00%	100,00%	100,00%
2	74,00%	17,00%	9,00%	100,00%	100,00%	100,00%
3	89,00%	6,00%	5,00%	100,00%	100,00%	100,00%
4	19,00%	24,00%	57,00%	82,00%	85,00%	84,00%
5	17,00%	30,00%	53,00%	63,00%	85,00%	81,00%
6	36,00%	27,00%	37,00%	93,00%	91,00%	95,00%
7	26,00%	12,00%	62,00%	48,00%	56,00%	12,00%
8	22,00%	27,00%	51,00%	51,00%	61,00%	9,00%
9	19,00%	25,00%	56,00%	58,00%	47,00%	9,00%
Preferência pelo Custo						
Classe de	**Melhor Solução - Custo**			**Melhor Solução - Risco**		
Problemas	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**
1	23,00%	13,00%	64,00%	100,00%	99,00%	100,00%
2	78,00%	8,00%	14,00%	100,00%	100,00%	100,00%
3	87,00%	8,00%	5,00%	100,00%	100,00%	100,00%
4	21,00%	30,00%	49,00%	40,00%	61,00%	61,00%
5	21,00%	39,00%	40,00%	48,00%	53,00%	66,00%
6	26,00%	32,00%	42,00%	93,00%	91,00%	93,00%
7	33,00%	31,00%	36,00%	43,00%	50,00%	29,00%
8	37,00%	31,00%	32,00%	44,00%	57,00%	22,00%
9	31,00%	33,00%	36,00%	44,00%	50,00%	33,00%

Tabela 57 – Melhor solução para família objetivo 3 com distribuição Triangular

Em termos de eficiência medida pelo DRM, no caso de preferência pelo risco e indiferença o algoritmo SA se destaca, porém, na preferência pelo custo os resultados ficam mais próximos, ainda que apresente um DRM geral menor para este caso (Tabela 58).

Classe de	DRM - Custo (Preferência pelo Risco)		
Problemas	Erro AG	Erro PSO	Erro SA
1	41,14%	1067,73%	16,81%
2	13,90%	122,07%	129,19%
3	0,34%	4,55%	4,38%
4	2435,41%	1193,68%	19,15%
5	1498,24%	10129,38%	10,07%
6	45,27%	58,88%	15,35%
7	17564,57%	4434,72%	1952,84%
8	6227,06%	6147,62%	3635,37%
9	6898,26%	6951,25%	1136,53%
Classe de	DRM - Custo (Indiferença)		
Problemas	Erro AG	Erro PSO	Erro SA
1	135,68%	1143,10%	8,66%
2	7,59%	148,76%	153,83%
3	0,21%	5,19%	5,32%
4	4417,48%	980,12%	150,85%
5	13718,35%	15353,71%	91,72%
6	98,48%	74,83%	78,46%
7	74887,91%	19164,60%	1528,89%
8	12204,18%	12397,39%	4132,39%
9	19202,16%	11676,12%	1552,39%
Classe de	DRM - Custo (Preferência pelo Custo)		
Problemas	Erro AG	Erro PSO	Erro SA
1	94,09%	1523,43%	18,05%
2	5,48%	246,16%	222,45%
3	0,21%	4,36%	4,47%
4	6600,28%	848,44%	1290,33%
5	2684,89%	1613,69%	375,03%
6	41,08%	79,38%	176,60%
7	1978,30%	574,85%	273,40%
8	949,33%	1729,07%	1227,12%
9	1365,59%	1003,63%	3431,47%

Tabela 58 – DRM para família objetivo 3 com distribuição Triangular

Também nesta distribuição, analisando-se o número de iterações o algoritmo PSO é melhor, e com relação ao tempo computacional SA é o melhor, independentemente dos pesos de ponderação de risco e custo.

O Teste *t* realizado para comparar os custos obtidos entre AG x PSO, AG x SA e PSO x SA, considerando as diferentes preferências, a maioria rejeita a Hipótese H_0 de que as médias são insignificantemente diferentes entre os algoritmos, apenas os comparativos de AG x SA e PSO x SA na indiferença e AG x PSO e AG x SA na preferência pelo custo.

- *Distribuição processo de Wiener*

Nesta distribuição os melhores resultados ficaram bem divididos entre os três algoritmos, buscando o menor custo e obtendo a melhor solução de risco em todas as classes, independentemente da preferência por risco, custo ou indiferença (Tabela 59).

No geral, AG teve uma maior média de melhores soluções em relação aos demais.

Preferência pelo Risco						
Classe de	**Melhor Solução - Custo**			**Melhor Solução - Risco**		
Problemas	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**
1	53,00%	49,00%	44,00%	100,00%	100,00%	100,00%
2	51,00%	47,00%	48,00%	100,00%	100,00%	100,00%
3	48,00%	38,00%	54,00%	100,00%	100,00%	100,00%
Indiferença						
Classe de	**Melhor Solução - Custo**			**Melhor Solução - Risco**		
Problemas	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**
1	46,00%	50,00%	48,00%	100,00%	100,00%	100,00%
2	59,00%	53,00%	46,00%	100,00%	100,00%	100,00%
3	48,00%	46,00%	54,00%	100,00%	100,00%	100,00%
Preferência pelo Custo						
Classe de	**Melhor Solução - Custo**			**Melhor Solução - Risco**		
Problemas	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**	**Ganho AG**	**Ganho PSO**	**Ganho SA**
1	42,00%	47,00%	53,00%	100,00%	100,00%	100,00%
2	53,00%	46,00%	43,00%	100,00%	100,00%	100,00%
3	48,00%	46,00%	52,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Tabela 59 – Melhor solução para família objetivo 3 com distribuição processo de *Wiener*

Na avaliação do DRM o AG obteve uma maior eficiência, dados os menores erros apresentados (Tabela 60).

Classe de	**DRM - Custo (Preferência pelo Risco)**		
Problemas	**Erro AG**	**Erro PSO**	**Erro SA**
1	279,04%	300,35%	114,79%
2	153,10%	929,41%	876,86%
3	121,73%	205,04%	130,70%
Classe de	**DRM - Custo (Indiferença)**		
Problemas	**Erro AG**	**Erro PSO**	**Erro SA**
1	109,40%	95,67%	104,27%
2	99,87%	214,49%	252,99%
3	532,21%	2057,13%	175,90%
Classe de	**DRM - Custo (Preferência pelo Custo)**		
Problemas	**Erro AG**	**Erro PSO**	**Erro SA**
1	84,06%	1010,95%	803,11%
2	96,92%	385,34%	392,51%
3	108,51%	121,41%	129,55%

Tabela 60 – DRM para família objetivo 3 com distribuição processo de *Wiener*

Nesta distribuição, analisando-se o número de iterações o algoritmo PSO é melhor, e com relação ao tempo computacional SA é melhor, independentemente dos pesos de ponderação de risco e custo.

O Teste *t* realizado para comparar os custos obtidos entre AG x PSO, AG x SA e PSO x SA, considerando as diferentes preferências, em todas as comparações a Hipótese H_0 de que as médias são insignificantemente diferentes entre os algoritmos é rejeitada.

Assim, em uma análise geral dos resultados é possível observar:

- Os modelos computacionais AG, PSO e SA estão aptos ao desenvolvimento de políticas de gerenciamento do saldo de caixa, mesmo quando são utilizados problemas complexos;

- Políticas flexíveis de caixa, sem uma proporção estabelecida entre L, Z e H, proporcionam menores custos de manutenção do saldo de caixa;

- Nos problemas menos complexos, o algoritmo PSO apresenta melhor desempenho, com maiores taxas de sucesso e menor DRM, porém, a medida que os problemas ganham complexidade, principalmente nas famílias Função Objetivo 1 com três Ativos e Função Objetivo 3, o AG obtém resultados relativamente melhores. Possivelmente este efeito seja causado pela própria metodologia de convergência dos algoritmos, pois, como os operadores de cruzamento e mutação no AG tendem a possibilitar uma solução de grande variabilidade, isso lhe proporciona uma busca mais abrangente no espaço amostral;

- Os algoritmos com melhor desempenho tendem a apresentar um maior tempo computacional. Nos casos em que obteve melhor desempenho PSO apresentava maior tempo, a partir dos problemas mais complexos em que AG demonstrou melhor desempenho seu tempo computacional deixou de ser menor do que o tempo do PSO. Os algoritmos SA possuem os menores tempos computacionais, porém, também apresentaram os piores resultados;

- Como a função objetivo de minimizar o risco (Função Objetivo 2) representa um problema de menor complexidade, os resultados entre os algoritmos foram mais equilibrados;

- Nas distribuições de Poisson e processo de *Wiener*, em virtude da menor concentração em torno de uma tendência central, principalmente no processo de *Wiener*, os resultados entre os algoritmos também apresentaram maior equilíbrio.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a análise dos dados e a comparação quantitativa entre os modelos, o melhor desempenho global para os problemas de menor complexidade (M-O Parcial, M-O Completo, Função Objetivo 1 com Custos Diferenciados e Função Objetivo 2) foi apresentado pelo modelo PSO. Já para os problemas mais complexos (Função Objetivo 1 com três Ativos e Função Objetivo 3) o modelo AG teve um êxito maior.

Apesar de computacionalmente mais rápido, o modelo SA não obteve resultados expressivos em termos de eficiência (DRM) e eficácia (percentual de melhores resultados). Porém, seu desempenho também não ficou excessivamente abaixo dos demais modelos, lembrando que o fator tempo não é um problema, seja ele de 2 segundos ou 200 segundos para a definição da política de gerenciamento de caixa para uma empresa.

A experimentação demonstrou a possibilidade de obter ganhos com o gerenciamento do saldo de caixa (problemas em que o custo se tornou negativo), indicando que as organizações poderiam fazer uma gestão ativa destes recursos a fim de obter uma maior rentabilidade.

O risco se demonstrou associado à existência de valores negativos extremos. Assim, fluxos de caixa com saídas de maior volume apresentam maior dificuldade em minimizar o risco, algo já esperado.

Na Função Objetivo 3, dentro da experimentação, a ponderação entre o objetivo de minimizar o risco e o objetivo de minimizar o custo não gerou impactos significativos sobre os resultados, possivelmente pela facilidade apresentada pelos modelos em obter o risco mínimo na maioria dos problemas.

Outro destaque é a facilidade da modelagem computacional da função objetivo e suas restrições, bem como as formas de avaliação das soluções possíveis, indicando boas perspectivas para implantação deste tipo de aplicação nos sistemas computacionais de gestão organizacional, para que estas desenvolvam suas políticas de gerenciamento do saldo de caixa de maneira contínua e flexível.

Vale destacar que a própria comparação entre os resultados proporcionou discussões a respeito das pré-disposições e limitações dos modelos computacionais utilizados na resolução dos problemas propostos, bem como a relação entre o tipo de distribuição e os resultados.

Porém a grande contribuição do trabalho é a apresentação de uma modelagem mais completa, considerando não apenas custos diferenciados, várias opções de investimento, liquidez envolvida nestes investimentos, como também o controle do risco financeiro associado ao caixa.

Assim, o gerenciamento do saldo de caixa deve ser analisado sob a ótica de investimento, considerando não apenas o custo (em relação à rentabilidade), como também o risco e a liquidez envolvida.

Além disso, a relevância da aplicação prática proporciona novas discussões sobre a adequação dos modelos de gerenciamento de caixa, de modo a obter modelos com maior aderência aos problemas reais enfrentados pelas organizações.

O trabalho teve como limitação uma maior simulação sobre os impactos dos parâmetros relativos aos modelos computacionais (AG, PSO e SA) nos resultados obtidos, algo que demandaria uma maior experimentação computacional, além dos milhares de experimentos que foram realizados neste trabalho.

Como perspectivas para estudos futuros, além de extrapolar as limitações apresentadas, existe a possibilidade de desenvolver novas funções objetivo, utilizando um maior número de ativos financeiros ou, ainda, o uso da alavancagem financeira no caixa.

Portanto, o estudo do saldo disponível de caixa, aliado a modernas técnicas computacionais, pode proporcionar um incremento significativo nos resultados práticos para a tomada de decisão deste clássico problema de finanças.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, H.; CAMPELLO, M.; WEISBACH, M. S. The Cash Flow Sensitivity of Cash. **The Journal of Finance**, v. 59, n. 4, p. 1777-1804, 2004.

BACCARIN, S. Optimal impulse control for cash management with quadratic holding-penalty costs. **Decision in Economics and Finance**, v. 25, p. 19-32, 2002.

BACCARIN, S. Optimal impulse control for a multidimensional cash management system with generalized cost functions. **European Journal of Operational Research**, v. 196, p. 198-206, 2009.

BAUMOL, W. The transaction demand for cash-an inventory theoretic approach. **The Quarterly Journal of Economics**, v. 66, p. 545-556, 1952.

BARBOSA, P. S. F.; PIMENTEL, P. R. A linear programming model for cash flow management in the Brazilian construction industry. **Construction Management and Economics**, v. 19, p. 469-479, 2001.

BARRICELLI, N. A. Esempi numerici di processi di evoluzione. **Methodos**, p. 45-68, 1954.

BARRICELLI, N. A. Symbiogenetic evolution processes realized by artificial methods. **Methodos**, p. 143-182, 1957.

BECKMAN, S. R.; FOREMAN, J. N. An Experimental Test of the Baumol Tobin Transactions Demand for Money. **Journal of Money, Credit and Banking**, v. 20, n. 3, p. 291-305, 1988.

BEDWORTH, D. D.; BAILEY, J. E. **Integrated Production, Control Systems: Management, Analysis and Design**. John Wiley and Sons, 496 p., 1987.

BENATI, S. An optimization model for stochastic project networks with cash flows. **Computational Management Science**, v. 3, p. 271-284, 2006.

BERK, J.; DEMARZO, P. **Finanças Empresariais**. Bookman, 1048 p., 2008.

BERTSIMAS, D.; TSITSIKLIS, J. Simulated Annealing. **Statistical Science**, v. 8, n. 1, p. 10-15, 1993.

BROOKS, S. P.; FRIEL, N.; KING, R. Classical Model Selection via Simulated Annealing. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology)**, v. 65, n. 2, p. 503-520, 2003.

CHEN, Y.-P.; JIANG, P. Analysis of particle interaction in particle swarm optimization. **Theoretical Computer Science,** v. 411, p. 2101-2115, 2010.

DAELLENBACH, H. G. Are Cash Management Optimization Models Worthwhile? **The Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 9, n. 4, p. 607-626, 1974.

DAMODARAN, A. **Finanças Corporativas - Teoria e Prática**. Bookman, 796 p., 2004.

DENIS, D. J.; SIBILKOV, V. Financial Constraints, Investment, and the Value of Cash Holdings. **The Review of Financial Studies**, v. 23, n. 1, p. 247-269, 2010.

DITTMAR, A.; MAHRT-SMITH, J.; SERVAES, H. International Corporate Governance and Corporate Cash Holdings. **The Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 38, n. 1, p. 111-133, 2003.

DIXIT, A. K.; PINDYCK, R. S. **Investment under uncertainty**. Princeton University Press, 468 p., 1993.

DORIGO, M. **Optimization, Learning and Natural Algorithms**. Tese de doutorado, Dipartimento di Elettronica, Politecnico di Milano, Italy, 140 p., 1992.

DROBETZ, W.; GRÜNINBER, M. C. Corporate cash holdings: Evidence from Switerland. **Financial Markets Portfolio Management**, v. 21, p. 293-324, 2007.

EBERHART, R. C.; KENNEDY, J. A new optimizer using particle swarm theory. **Sixth international symposium on micro machine and human science**, Nagoya, Japão, 1995.

FERREIRA, M. A.; VILELA, A. S. Why Do Firms Hold Cash? Evidences from EMU Countries. **European Financial Management**, v. 10, n. 2, 295-319, 2004.

FOGEL, D. B. What is evolutionary computation? **IEEE Spectrum**, p. 26-32, fev., 2000.

FOLEY, C. F.; HARTZELL, J. C.; TITMAN, S.; TWITE, G. Why do firms hold so much cash? A tax-based explanation. **Journal of Financial Economics**, v. 86, p. 579-607, 2007.

FONSECA, C. M.; FLEMING, P. J. Genetic algorithms for multiobjective optimization: Formulation, discussion and generalization. **Genetic Algorithms: Proceeding of Fifth International Conference**, Urbana-Champaing, IL. p. 416-423, 1993.

FRASER, A. S. Simulation of genetic systems by automatic digital computers: I. Introduction. **Australian Journal of Biological Science**, v. 10, p. 484-491, 1957.

GARCÍA-TERUEL, P. J.; MARTÍNEZ-SOLANO, P. On the determinants of SME Cash Holdings: Evidences from Spain. **Journal of Business Finance ξ Accounting**, v. 35, p. 127-149, mar., 2008.

GARCÍA-TERUEL, P. J.; MARTÍNEZ-SOLANO, P.; SÁNCHEZ-BALLESTA, J .P. Accruals quality and corporate cash holding. **Accounting and Finance**, p. 1-21, 2008.

GITMAN, L. J. **Princípios de Administração Financeira**. Pearson, 745 p., 2006.

GLOVER, F. Future paths for Integer Programming and links to Artificial Intelligence. **Computers and Operations Research**, v. 13, n. 5, p. 553-549, 1986.

GOLDBERG, D. E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning**. Addison Wesley, 412 p., 1989.

GORMLEY, F. M.; MEADE, N. The utility of cash flow forecasts in the management of corporate cash balances. **European Journal of Operational Research**, v. 182, p. 923-935, 2007.

GREGORY, G. Cash Flow Models: A Review. **OMEGA, The International Journal of Management Sciences**, v. 4, n. 6, p. 643-656, 1976.

GUJARATI, D. **Econometria Básica**. Campus, 812 p., 2006.

HAN, S.; QIU, J. Corporate precautionary cash holdings. **Journal of Corporate Finance**, v. 13, p. 47-57, 2007.

HAPKE, M.; JASZKIEWICS, A.; SLOWINSKI, R. Pareto Simulated Annealing for Fuzzy Multi-Objective Combinatorial Optimization. **Journal of Heuristics**, v. 6, p. 329-345, 2000.

HARFORD, J.; MANSI, S. A.; MAXWELL, W. F. Corporate governance and firm cash holdings in the US. **Journal of Financial Economics**, v. 87, p. 535-555, 2008.

HAUSHALTER, D.; KLASA, S.; MAXWELL, W. F. The influence of product market dynamics on a firm's cash holdings and hedging behavior. **Journal of Financial Economics**, v. 84, p. 797-825, 2007.

HIGSON, A.; YOSHIKATSU, S.; TIPPETT, M. Organization size and the optimal investment in cash. **IMA Journal of Management Mathematics**, v. 21, p. 27-38, 2010.

HINDERER, K.; WALDMANN, K.-H. Cash management in randomly varying environment. **European Journal of Operational Research**, v. 130, p. 468-485, 2001.

HORN, J.; NAFPLIOTIOS, N.; GOLDBERG, D. E. A niched Pareto genetic algorithm for multiobjective optimization. **Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation, IEEE World Congress on Computational Intelligence**, Orlando, FL, p. 82-87, 1994.

JAIMUNGAL, S.; LAWRYSHYN, Y. Incorporating Managerial Information into Real Option Valuation. **Managerial Information & Real Options**. P. 1-33, 2011.

JUNG, K.; KIM, B. Corporate Cash Holdings and Tax-induced Debt Financing. **Asia-Pacific Journal of Financial Studies**, v. 37, n.6, p. 983-1023, 2008.

KACHANI, S.; LANGELLA, J. A Robust Optimization Approach to Capital Rationing and Capital Budgeting. **The Engineering Economist**, v. 50, p. 195-229, 2005.

KALCHEVA, I.; LINS, K. V. International Evidence on Cash Holdings and Expected Managerial Agency Problems. **The Review of Financial Studies**. v. 20, n. 4, p. 1087-1112, 2007.

KIRKPATRICK, S.; GELATT, C. D.; VECCHI, M. P. Optimization by Simulated Annealing. **Science**. v. 220, n. 4598, p. 671-680, 1983.

KUSNADI, Y.; WEI, K. C. J. The determinants of corporate cash management policies: Evidences from around the world. **Journal of Corporate Finance**. v. 17, p. 725-740, 2011.

LEE, E.; POWELL, R. Excess cash holdings and shareholder value. **Accounting and Finance**. v. 51, p. 549-574, 2011.

LI, X. A Non-dominated Sorting Particle Swarm Optimizer for Multiobjective Optimization. **Lecture Notes in Computer Science Genetic and Evolutionary Computation - GECCO 2003**. Springer Berlin / Heidelberg, v.2723/2003 p. 198, 2003.

LIU, B; XIN, C. An Online Model for Managing Cash: An Alternative Approach to the Miller-Orr Model. **Fourth International Conference on Natural Computation – IEEE Computer Society**, 2008.

LIU, J; TSOU, M.-W.; WANG, P. Differential cash constraints, financial leverage and the demand for money: Evidence from a complete panel of Taiwanese firms. **Journal of Macroeconomics**, v. 30, p. 523-542, 2008.

MANKIW, G. **Principles of Macroeconomics**. South-Western College Pub, 604 p., 2003.

MARTÍNEZ, M.; GARCÍA-NIETO, S.; SANCHIS, J.; BLASCO, X. Genetic algorithms optimization for normalized normal constraint method under Pareto construction. **Advances in Engineering Software**, v. 40, p. 260-267, 2009.

MELO, M. A. S.; BILICH, F. Expectancy balance model for cash flow. **Journal of Economics and Finance**, p. 1-13, 2011.

MIERZEJEWSKI, F. A model of equilibrium in markets of cash balances. **IMA Journal of Management Mathematics**, p. 1-18, 2010. doi: 10.1093/imaman/dpq001.

MILANOVIC, D. L.; MILANOVIC, D. D.; MISITA, M. The Evaluation of Risky Investment Projects. **FME Transactions**, v. 38, p. 103-106, 2010.

MILBOURNE, R. Optimal Money Holding under Uncertainty. **International Economic Review**, v. 24, n. 3, p. 685-698, 1983.

MILLER, M.; ORR, D. A model of the demand for money by firms. **The Quarterly Journal of Economics**, v. 81, p. 413-435, 1966.

MONTGOMERY, D. C. **Design and Analysis of Experiments**. 7th Ed., John Wiley & Sons, 656 p., 2009.

MOSCATO, P. On Evolution, Search, Optimization, Genetic Algorithms and Martial Arts: Towards Memetic Algorithms. **Caltech Concurrent Computation Program**, p. 1-68, 1989.

OGDEN JR, W. A.; SUNDARAM, S. A Model for Optimal Utilization of a Firm´s Line of Credit. **Journal of Finance and Strategic Decisions**, v. 11, n. 1, p. 27-36, 1998.

OLIVEIRA, A. C. M.; LORENA, L. A. N. A Constructive Genetic Algorithm for Gate Matrix Layout Problems. **IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems**, v. 21, p. 969-974, 2002.

OPLER, T.; PINKOWITZ, L.; STULZ, R.; WILLIAMSON, R. The determinants and implications of corporate cash holdings. **Journal of Financial Economics**, v. 52, p. 3-46, 1999.

OZKAN, A.; OZKAN, N. Corporate cash holding: An empirical investigation of UK companies. **Journal of Banking & Finance**, v. 28, p. 2103-2134, 2004.

PACHECO, M. A.; VELLASCO, M.; NORONHA, M.; LOPES, C. Cash Flow Planning and Optimization Through Genetic Algorithms. **Computing in Economics and Finance 2000**, Society for Computational Economics, p. 1-6, 2000.

PADMAN, R.; SMITH-DANIELS, D. E.; SMITH-DANIELS, V. L. Heuristic Scheduling of Resource-Constrained Projects with Cash Flows. **Naval Research Logistics**, v. 44, p. 365-381, 1997.

PAILLA, A.; TRINDADE, A. R.; PARADA, V.; OCHI, L. S. A numerical comparison between simulated annealing and evolutionary approaches to the cell formation problem. **Expert Systems with Applications**, v. 37, p. 5476-5483, 2010.

PAYA, I.; YEPES, V.; GONZÁLEZ-VIDOSA, F.; HOSPITALER, A. Multiobjective Optimization of Concrete Frames by Simulated Annealing. **Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering**, v. 23, p. 596-610, 2008.

PINDYCK, R. S.; RUBINFELD, D. L. **Econometria – Modelos & Previsões**. Campus, 726 p., 2004.

PREMACHANDRA, I. M. A diffusion approximation model for managing cash in firms: An alternative approach to the Miller-Orr model. **European Journal of Operational Research**, v. 157, p. 218-226, 2004.

PREUX, Ph.; TALBI, E.-G. Towards hybrid evolutionary algorithms. **International Transactions in Operational Research**, v. 6, p. 557-570, 1999.

REZENDE, S. O. (Organizador). **Sistemas Inteligentes – Fundamentos e Aplicações**. Ed. Manole, 525 p., 2005.

ROSS, S. M. **Simulation**. Academic Press, 298 p., 2006.

ROSS, S. A.; WESTERFIELD, R. W.; JAFFE, J. F. **Administração Financeira – Corporate Finance**. Ed. Atlas, 776 p., 2002.

SACHS, J. D.; LARRAIN, F. L. **Macroeconomia**. Makron Books, 904 p., 1995.

SLACK, N.; CHAMBERS, S.; HARLAND, C.; HARRISON, A.; JOHNSTON, R. **Administração da Produção**. Ed. Atlas, 726 p., 1997.

SMITH, G. W. A Dynamic Baumol-Tobin Model of Money Demand. **The Review of Economic Studies**, v. 53, n. 3, p. 465-469, 1986.

SPIEGEL, M. R. **Estatística**. Pearson Makron Books, 643 p., 1993.

SÓBOL, L. M. **Método de Monte Carlo**. Ed. MIR, 78 p., 1976.

SRINIVAS, N.; DEB, K. Multiobjective optimization using non-dominated sorting in genetic algorithms. **Evolutionary Computation**, v. 2, v. 3, p. 221-248, 1994.

SRINIVASAN, V.; KIM, Y. H. Deterministic Cash Flow Management: State of Art and Research Directions. **OMEGA – International Journal of Management Sciences**, v. 14, n. 2, p. 145-166, 1986.

STEIN, J.; USHER, S. E.; LAGUTTA, D.; YOUNGEN, J. A Comparables Approach to Measuring Cashflow-At-Risk For Non-Financial Firma. **Journal of Applied Corporate Finance**, v. 13, n. 4, p. 100-109, 2001.

SUMAN, B.; KUMAR, P. A survey of simulated annealing as a tool for single and multiobjective optimization. **Journal of the Operational Research Society**, v. 57, p. 1143-1160, 2006.

SZEGÖ, G. Measures of Risk. **European Journal of Operational Research**, v. 163, p. 5-19, 2005.

TAPIERO, C. S.; ZUCKERMAN, D. A Note on the Optimal Control of a Cash Balance Problem. **Journal of Banking and Finance**, v. 4, p. 345-352, 1980.

TOBIN, J. The interest elasticity of the transaction demand for cash. **The Review of Economic Statistics**, v. 38, p. 241-247, 1956.

TSAI, S.-J.; SUN, T.-Y.; LIU, C.-C.; HSIEH, S.-T.; WU, W.-C.; CHIU, S-Y. An improved multi-objective particle swarm optimizer for multi-objective problems. **Expert Systems with Applications**, v. 37, p. 5872-5886, 2010.

UNLER, A.; MURAT, A. A discrete particle swarm optimization method for feature selection in binary classification problems. **European Journal of Operational Research**, v. 206, p. 528-539, 2010.

VOβ, S. Meta-heuristics: The State of the Art. In: NAREYEK, A. **Local Search for Planning and Scheduling**, Lecture Notes in Computer Science, v. 2148. Springer Berlin / Heidelberg, 2001. p. 1-23. doi:10.1007/3-540-45612-0_1.

VOLOSOV, K.; MITRA, G.; SPAGNOLO, F.; CARISMA, C. L. Treasury Management Model with Foreign Exchange Exposure. **Computational Optimization and Applications**, v. 39, p. 179-207, 2005.

WANG, D.; KWOK, N. M.; LIU, D. K.; HA, K. P. Ranked Pareto Particle Swarm Optimization for Mobile Robot Motion Planning. **Design and Control of Intelligent Robotic Systems**, v. 177, p. 97-118, 2009.

WHALEN, E. L. A Rationalization of the Precautionary Demand for Cash. **The Quarterly Journal of Economics**, v. 80, n. 2, p. 314-324, 1966.

YAO, J.-S.; CHEN, M.-S.; LU, H.-F. A fuzzy stochastic single-period model for cash management. **European Journal of Operational Research**, v. 170, p. 72-90, 2006.

YU, L.-Y.; JI, X.-D.; WANG, S.-Y. Stochastic programming models in financial optimization: A survey. **AMO – Advanced Modeling and Optimization**, v. 5, n.1, 2003.

YUN, H. The Choice of Corporate Liquidity and Corporate Governance. **The Review of Financial Studies**, v. 22, n. 4, 2009.

ZHOU, X. Evolutionary algorithm and its application in artificial immune system. **Second International Symposium on Intelligent Information Technology Application**, p. 32-36, 2008.