

CAMILA FERNANDA BASSETTO

**TÉCNICAS DE CLUSTER PARA ANALISAR RESTRIÇÃO FINANCEIRA E
DECISÃO DE INVESTIMENTO: UMA ABORDAGEM BAYESIANA**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos
da Universidade de São Paulo para obtenção de título de
doutora em Engenharia de Produção.

Orientador: Prof. Assoc. Aquiles Elie Guimarães Kalatzis

Financiamento: Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP



SÃO CARLOS

2010

Class.	TESE ✓
Cutt.	7726
Tombo	70265/10
Sysno	2136434

2136434

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

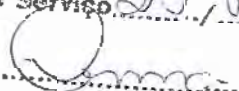
Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

B319t Bassetto, Camila Fernanda
Técnicas de cluster para analisar restrição financeira e decisão de investimento : uma abordagem bayesiana / Camila Fernanda Bassetto ; orientador Aquiles Elie Guimarães Kalatzis. -- São Carlos, 2010.

Tese (Doutorado- Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Área de Concentração em Economia, Organização e Gestão do Conhecimento) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2010.

1. Restrição financeira. 2. Decisão de investimento.
3. Técnicas de cluster. 4. Inferência bayesiana.
I. Título.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

Serviço de Pós-Graduação EESC/USP
EXEMPLAR REVISADO
Data de entrada no Serviço 25/01/10
Ass.: 

TÉCNICAS DE CLUSTER PARA ANALISAR RESTRIÇÃO FINANCEIRA E
DECISÃO DE INVESTIMENTO: UMA ABORDAGEM BAYESIANA

CAMILA FERNANDA BASSETTO

SÃO CARLOS

2010

1

2

3

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato(a): Licenciada CAMILA FERNANDA BASSETTO.

tese defendida e julgada em 10/11/2010 perante a Comissão Julgadora:



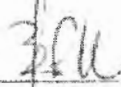
APROVADA

Prof. Associado **AQUILES ELIE GUIMARÃES KALATZIS** – (Orientador)
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)




APROVADA

Prof. Dr. **MÁRIO DE CASTRO ANDRADE FILHO**
(Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação/USP)



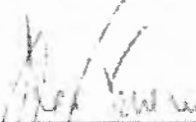
APROVADA

Prof. Associado **MILTON BAROSSO FILHO**
(Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto/USP)



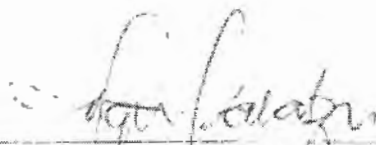
APROVADA

Prof. Dr. **MARCELO SEIDO NAGANO**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)



APROVADA

Prof. Dr. **ALEX LUIZ FERREIRA**
(Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto/USP)



Prof. Associado **AQUILES ELIE GUIMARÃES KALATZIS**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Produção



Prof. Associado **PAULO CÉSAR LIMA SEGANTINE**
Suplente do Presidente da Comissão da Pós-Graduação da UFSC

DEDICATÓRIA

*Dedico este trabalho a Deus
e à minha família.*

AGRADECIMENTOS

Os resultados alcançados nesta tese não teriam sido possíveis se não fosse a contribuição de inúmeras pessoas das mais diversas formas.

Agradeço a Deus acima de tudo por tantas vezes que providenciou e providencia oportunidades para a minha vida e por conduzir acontecimentos que me levam à realização de desejos e grandes sonhos.

Sou eternamente grata aos meus pais José Renato e Iracema, e ao meu irmão José Renato Filho, por serem os principais incentivadores para a construção da minha carreira, por acreditarem na necessidade da educação como forma emancipadora do ser humano e pela educação na medida certa com amor e limites para que eu me torne uma pessoa melhor.

Manifesto meus agradecimentos ao professor Aquiles E. G. Kalatzis, cuja orientação representou importante contribuição para a realização deste trabalho, tendo seus exemplos me servido como espelhos para a formação de um perfil profissional. Agradeço ao meu orientador também pela amizade, paciência, pelas palavras de conforto nos momentos de desânimo e pela cooperação na realização de muitas das minhas conquistas.

Sou grata ao professor Mario de Castro pelas sugestões sempre esclarecedoras e construtivas sobre os assuntos relacionados à elaboração desta tese.

Agradeço aos professores e funcionários do departamento de Engenharia de Produção que passaram pela minha vida nestes quatro anos de doutorado, de modo especial ao técnico de informática Luiz Fernando Ferreira e à auxiliar administrativo Sueli Regina Ferreira pela amizade e inúmeros favores a mim prestados durante o período de realização deste trabalho.

Expresso minha gratidão à amiga Patrícia Benites pela amizade, carinho, incentivo e por estar presente em todos os momentos. Agradeço também a amiga Regiane. Juntas, aprendemos a vencer e sermos exemplos de harmonia e persistência.

Sou grata às amigas Karina, Débora e Naja pela amizade, por estarem ao meu lado por tornarem nosso local de trabalho um espaço alegre e agradável. E também a todos que, de forma direta ou indireta, conviveram comigo e participaram da minha vida neste período.

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.

Agradeço a todos aqueles que não souberam me cativar com sua arte, mas que me demonstraram competência e comprometimento com a educação. Embora tenham deixado pequenas marcas, me servirão de modelos para serem lembrados como ponto de partida ao repensar meu papel de profissional.

EPÍGRAFE

“Só existem dois dias no ano que nada pode ser feito: um se chama ONTEM e o outro se chama AMANHÃ. Portanto, HOJE é o dia certo para amar, acreditar, fazer e, principalmente, viver”.

Dalai Lama

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo investigar a presença de restrição financeira nas decisões de investimento de 564 firmas brasileiras no período de 1996 a 2006. A análise das decisões de investimento e restrição financeira é realizada utilizando uma abordagem bayesiana e um banco de dados longitudinais com informações variando por firma e no tempo, possibilitando considerar a heterogeneidade entre as firmas. O agrupamento proposto utiliza técnicas sob uma abordagem bayesiana e a estimação dos parâmetros do modelo de investimento é realizada considerando um modelo econométrico com os parâmetros variando por grupo. A motivação para a utilização de técnicas de agrupamento considerando a teoria bayesiana para agrupar as firmas deve-se ao fato de tal abordagem não ter sido considerada na literatura sobre decisões de investimento e restrição financeira como critério de classificação. Além disso, o critério adotado neste estudo permite identificar grupos de forma endógena, diferentemente dos estudos encontrados na literatura, os quais assumem critérios de agrupamento definidos *a priori* e classificam as firmas de forma exógena. Por tratar-se de uma abordagem bayesiana, distribuições *a priori* são assumidas para os parâmetros do modelo, classificando o modelo de investimento como sendo de efeito fixo ou efeito aleatório. O critério das ordenadas das densidades preditivas é utilizado para selecionar o modelo mais adequado aos dados e com maior poder de predição para observações futuras. Foram testados oito modelos e o mais apropriado foi o modelo de efeito fixo com as firmas classificadas em dois grupos. A utilização de técnicas de agrupamento sob um enfoque bayesiano resultou em dois grupos de firmas com características financeiramente distintas. De acordo com os resultados, o método de classificação bayesiano considerado forneceu indícios de que as firmas enfrentam restrição financeira em suas decisões de investimento. Adicionalmente, a variável fluxo de caixa está atuando como uma *proxy* para restrição financeira e não sinaliza um potencial de rentabilidade futura, dado que o parâmetro do fluxo de caixa foi maior para as firmas com índices mais baixos de rentabilidade.

Palavras-chave: Restrição Financeira, Decisão de Investimento, Técnicas de Agrupamento, Inferência Bayesiana.

ABSTRACT

This study aims to investigate the presence of financial constraints on investment decisions of 564 Brazilian firms in the period 1996 – 2006. The analysis is performed considering a bayesian approach and a longitudinal data in which informations are varying by firm and time, allowing to consider the heterogeneity between firms. The proposed clustering uses cluster techniques with a bayesian approach and the parameters estimations is carried out considering an econometric model with parameters varying by groups. The motivation for using clustering techniques is due to the fact that it not has been considered in the literature on investment decisions and financial constraints as a criterion for clustering firms. This approach allows identifying endogenously homogeneous groups, different from previous studies, which take a priori clustering criteria and divide the sample in an exogenous way. Prior distributions are assumed for the parameters, classifying the model in fixed effect or random effect model. The ordinate predictive density criterion is used to select the model that provides better prediction of the results. Eight models were tested and the most appropriate was the fixed effect model with two groups in the sample. The clustering techniques with a bayesian approach provided two groups of firms with distinct financial characteristics. According to the results, this bayesian clustering method indicated that firms faced financial constraint in their investment decision. Also, the cash flow variable is a proxy to financial constraint on firms' investment decision and it not represents future profitability potential, given that the higher cash flow parameter was obtained for firms with lower profitability index.

Keywords: Financial Constraint, Investment Decision, Clustering Techniques, Bayesian Inference.

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1 – Estudos empíricos realizados compreendidos entre os anos de 1990 e 1997.

Quadro 2.2 – Estudos empíricos realizados na literatura do investimento considerando diferentes critérios de classificação das firmas.

LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1 – Gráficos das densidades da variável categórica $Z_{i,t}$, para $i=2$ e $t=1,\dots,10$, obtidos considerando o modelo de investimento como sendo de efeito fixo, com mistura de duas distribuições normal para o erro.

Figura 4.2 – Gráficos dos valores simulados para a proporção de observações nas primeira e segunda componentes, respectivamente, da mistura de duas distribuições normal para o erro do modelo de investimento.

Figura 4.3 – Gráficos da convergência dos valores simulados.

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Seleção de Modelos: Ordenadas das Densidades Preditivas.

Tabela 4.2 – Valores estimados para o fator de redução potencial de escala: $\sqrt{\hat{R}}$.

Tabela 4.3 – Indicadores Financeiros das Firmas - Valores Médios e Desvios Padrão.

Tabela 4.4 – Estimativas considerando o modelo de efeito fixo, com as firmas classificadas endogenamente em dois grupos.

SUMÁRIO

RESUMO

ABSTRACT

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

1 - Introdução	12
2 – Restrição Financeira e Decisões de Investimento da Firma	18
2.1 – Introdução – O Despertar do Interesse sobre a Sensibilidade do Investimento ao Fluxo de Caixa.....	18
2.2 – Diferentes Critérios de Classificação para Investigar Restrição Financeira nas Decisões de Investimento da Firma.....	26
3 – Modelos Bayesianos para Dados Longitudinais	41
3.1 – Abordagem Bayesiana com Dados Longitudinais	41
3.1.1 – Amostrador de Gibbs e Critério de Convergência de Gelman e Rubin	46
3.2 – Técnicas de Agrupamento Bayesianas: Misturas de Distribuições.....	49
4 – Decisão de Investimento e Restrição Financeira: Técnicas de Agrupamento com Abordagem Bayesiana	58
4.1 – Dados em Painel e Modelo Econométrico Dinâmico.....	58
4.2 – Distribuições <i>a Priori</i> e <i>a Posteriori</i> para Modelos de Efeito Fixo e Efeito Aleatório	63
4.3 – Critério de Classificação Bayesiano utilizando Misturas de Distribuições.....	73
4.4 – Seleção de Modelos – Critério das Ordenadas das Densidades Preditivas	77
4.5 – Resultados – Análise e Interpretação Econômica.....	81
5 – Conclusão	91
Referências Bibliográficas	97
Apêndice	102

1 - Introdução

Existe uma extensa literatura empírica e teórica sobre a relação investimento–fluxo de caixa para testar a presença de restrições financeiras nas decisões de investimento a fim de responder a uma questão referente à sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa das firmas. A sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa mede a resposta do investimento ao fluxo de caixa gerado internamente pela firma e tem sido bastante utilizada na literatura do investimento por estar positivamente correlacionada com o nível de restrição financeira enfrentado pela firma.

A literatura do investimento busca verificar se o gasto com investimento das firmas é afetado pela disponibilidade de recursos gerados internamente, representados por lucros retidos, refletindo alguma restrição na habilidade destas firmas obterem recursos externos por meio de novas dívidas ou emitindo ações para novos investimentos. Embora conclusões semelhantes sobre o papel do nível de restrição financeira enfrentado pelas firmas em suas decisões de investimento tenham sido obtidas, ainda há um intenso debate teórico considerando a natureza da relação investimento–fluxo de caixa.

A resposta para a questão referente à sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa era que a disponibilidade de recursos internos não importava para o investimento, uma vez que o nível de investimento seria determinado em um mercado de capital em perfeito funcionamento¹. De acordo com Meyer e Kuh (1957), a importância das variáveis financeiras para o investimento da firma estava estreitamente relacionada à preferência por recursos internos no financiamento de novos investimentos. No ano seguinte, Modigliani e Miller (1958) publicaram um estudo sobre a estrutura de capital da firma ser considerada irrelevante nas decisões de investimento, sendo indiferente para as firmas utilizar recursos internos ou externos para financiar seus investimentos². Em outras palavras, de acordo com Modigliani e Miller (1958), em um mercado perfeito de capital, uma determinada combinação de títulos é considerada tão boa quanto qualquer outra, e o valor da empresa não é afetado pela sua escolha de capital. Neste contexto, estão sendo ignorados os impostos, os problemas de informação que favorecem a dívida sobre o patrimônio quando há a necessidade de novas

¹ No mercado perfeito de capital, qualquer taxa ou custo de transação que pudesse tornar as fontes de recursos externos mais caras era negligenciada, além de não haver diferenças nas informações disponíveis para os investidores internos e externos à firma.

² A estrutura de capital refere-se à forma como uma empresa financia seus ativos. A emissão de títulos de dívida ou obrigações está associada ao capital de terceiros, enquanto emissões de títulos de propriedade ou ações estão associadas ao capital próprio.

emissões de títulos para obtenção de caixa, e também os efeitos da alavancagem financeira e da distribuição de dividendos sobre as decisões de investimento.

Procurando analisar o efeito dos impostos sobre as decisões de investimento da firma, Modigliani e Miller (1963) incorporaram o papel dos tributos sobre a estrutura de capital, aceitando que a irrelevância da estrutura de capital pudesse não valer em qualquer circunstância. Na presença de assimetria de informação e problemas contratuais, a hipótese referente à irrelevância da estrutura de capital não seria válida. Para as firmas que operam em mercados imperfeitos ou incompletos, isto é, onde o custo de capital externo excede o custo de fundos internos, a estrutura financeira pode ser bastante relevante nas decisões de investimento. Neste sentido, as informações assimétricas afetariam a escolha entre financiamento interno e externo e também entre novas emissões e títulos de dívida e de patrimônio.

Além da assimetria de informação, as imperfeições do mercado de capitais são decorrentes de problemas como seleção adversa, risco moral e custo de agência. O problema de seleção adversa ocorre quando os provedores de crédito não conseguem diferenciar entre bons e maus tomadores de empréstimos, tendo como consequência o fato que não só as empresas com dificuldades financeiras, mas também empresas com baixo risco poderiam sofrer restrições de crédito.

Enquanto o problema de seleção adversa surge antes que a transação financeira ocorra, o problema de risco moral ocorre após a efetivação da transação. O risco moral nos mercados financeiros refere-se ao risco de o tomador de recursos utilizá-los em atividades indesejáveis ou consideradas imorais, podendo comprometer o pagamento aos credores ou provocar a desvalorização de títulos emitidos pela firma em posse dos investidores. Da mesma forma que no problema de seleção adversa, o problema do risco moral teria como consequência a presença de restrição de crédito no mercado financeiro e de capitais.

Os problemas de agência surgem com a divergência de interesses entre acionistas e credores e entre gestores e acionistas da firma, devido aos distintos interesses sobre o fluxo de caixa da empresa. Na presença de assimetrias de informação, assume-se que os gestores das firmas possuem mais informação que seus investidores externos sobre as possibilidades de retorno do empreendimento. Myers (1984) e Myers e Majluf (1984) mostraram que se os gestores estiverem mais bem informados sobre o valor dos ativos da firma, de tal forma que os favoreça frente aos investidores externos, o valor de mercado da firma poderá ser subavaliado, tornando a captação de recursos via emissão de ações para novos projetos de investimento inviabilizada ou exercida a um custo muito elevado. Segundo Myers (1984),

haveria uma ordenação na obtenção de recursos para a firma financiar seus investimentos, denominada hierarquia financeira. A teoria da hierarquia financeira defende que as firmas preferem capital próprio a recursos externos como fonte de financiamento dos investimentos. Neste sentido, os ganhos acumulados seriam preferíveis a capital de terceiros, com as firmas dando preferência em um primeiro momento a recursos internos, seguidos de recursos externos como empréstimos e financiamentos, títulos como debêntures³ e *commercial papers* (acesso ao mercado de títulos⁴), ações, etc. Por outro lado, a teoria da estrutura de capital defende que haveria uma estrutura ótima de capital que as firmas deveriam seguir na presença de benefícios tributários⁵, risco de inadimplência e problemas de agência.

O problema associado à assimetria de informações e à presença de custos de transações, além de fazer com que os fundos internos e a obtenção de recursos não sejam substitutos perfeitos, invalidando o teorema de Modigliani e Miller (1958), pode acarretar algum grau de restrição financeira nas decisões de investimento das empresas.

Para analisar os efeitos dos recursos gerados internamente sobre as decisões de investimento da firma na presença de restrição financeira, modelos econométricos de investimento foram propostos na literatura do investimento considerando a inclusão de lucros ou fluxo de caixa no modelo. No entanto, a inclusão de tais variáveis não propriamente testava a idéia que restrições financeiras afetavam a decisão de investimento da firma. Um coeficiente significativo para o parâmetro correspondente ao fluxo de caixa não estabelecia que a decisão da firma em investir pudesse ser restrita pela disponibilidade de fundos internos, uma vez que um aumento no fluxo de caixa poderia sinalizar uma maior lucratividade futura da empresa. Assim, a distinção entre os efeitos do fluxo de caixa sobre o investimento tornou-se crucial para verificar se o gasto com investimento da firma é afetado pela disponibilidade de recursos internos.

O interesse sobre restrições financeiras intensificou-se com o estudo de Fazzari, Hubbard e Petersen – FHP (1988), no qual os autores adotaram a taxa de pagamento de dividendos, dada pela razão dividendos/lucro líquido, como critério de classificação das firmas. Os resultados mostraram que a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa está positivamente relacionada à existência de restrições financeiras nas decisões de investimento

³ Título que garante ao comprador uma renda fixa, ao contrário das ações, cuja renda é variável, tendo como garantia todo o patrimônio da empresa.

⁴ Títulos que servem para a realização de empréstimos entre empresas mediadas por um banco. São títulos de crédito emitidos por uma empresa, representativos de sua dívida perante o credor, utilizados para a captação de recursos.

⁵ Os benefícios tributários para as firmas decorrem da dedução do imposto sobre o pagamento de juros sobre a dívida.

da firma. Kaplan e Zingales (1997) criticaram o procedimento utilizado por FHP (1988) para classificar as firmas como restritas financeiramente, enfatizando a importância do critério de classificação para identificar firmas restritas. Este debate deu origem a uma intensa discussão sobre restrição financeira na literatura do investimento.

Estudos empíricos têm procurado identificar a presença de restrição financeira nas decisões de investimento considerando diferentes critérios para classificar as firmas, a fim de identificá-las como sendo restritas ou não-restritas financeiramente. Dentre os critérios utilizados estão a taxa de pagamento de dividendos, tamanho e idade da firma, presença de *bond rating* (classificação de risco da firma⁶), acesso a *commercial paper*, intensidade de capital, entre outros. Estes critérios de classificação têm um caráter exógeno, isto é, são escolhidos *a priori* e os grupos são determinados baseados na variável *proxy* considerada para a restrição financeira.

Apesar da ampla literatura sobre decisões de investimento e restrição financeira, não existe ainda uma conclusão definitiva sobre qual variável representa de forma precisa a restrição financeira e que permite identificar uma firma como restrita ou não-restrita financeiramente, permanecendo tal questão em debate. Diante da dificuldade em encontrar uma *proxy* adequada para a restrição financeira, este estudo procura contribuir com a literatura do investimento utilizando técnicas de agrupamento sob uma abordagem bayesiana para classificar as firmas. Esta técnica permite que os grupos sejam determinados de forma endógena, considerando características próprias das firmas. A análise nas decisões de investimento e das restrições financeiras ocorre dentro de um contexto teórico e aplicado, utilizando uma abordagem econométrica bayesiana.

Neste trabalho, técnicas de agrupamento bayesiana foram utilizadas como critério de agrupamento de um banco de dados em painel de firmas para investigar a presença de restrição financeira nas suas decisões de investimento. Os dados utilizados nesta pesquisa referem-se a um conjunto de dados longitudinais com 564 firmas durante um período de 11 anos compreendido entre 1996 e 2006. Este banco de dados tem como fonte as 500 maiores e melhores da Gazeta Mercantil – Revista Exame Maiores e Melhores – e foi obtido pela Fundação Instituto de Pesquisas Contábeis, Atuariais e Financeiras do Departamento de Contabilidade da Universidade de São Paulo. As empresas estatais, financeiras e aquelas que apresentaram dados inconsistentes foram excluídas do banco de dados.

⁶ Quando uma firma é classificada por *bond rating*, considera-se que ela está sujeita a avaliações detalhadas realizadas por agências de classificação de riscos, e estas informações estariam disponíveis publicamente, reduzindo os problemas de assimetrias de informações.

A motivação para utilização de técnicas de agrupamento sob uma abordagem bayesiana deve-se ao fato de ser uma técnica ainda não utilizada na análise das decisões de investimentos das firmas. Diferentemente dos estudos encontrados na literatura, o critério de agrupamento utilizado neste estudo tem um caráter endógeno, uma vez que os grupos são determinados baseando-se somente nas observações contidas na amostra.

Nesta pesquisa, o comportamento do investimento é analisado considerando um modelo dinâmico dentro de um contexto teórico e aplicado, utilizando uma abordagem econométrica bayesiana. Neste modelo, o investimento é explicado por dois efeitos não-observáveis, sendo um específico da firma e o outro um efeito temporal, e tem como covariáveis a variável dependente defasada, o fluxo de caixa, as vendas e o financiamento da firma, todos em razão do estoque de capital.

Para atingir o objetivo proposto, o presente trabalho está estruturado em cinco capítulos, incluindo esta introdução. No Capítulo 2 faz-se uma breve revisão de literatura sobre restrição financeira enfatizando o papel das variáveis financeiras na discussão recente sobre as decisões de investimento da firma.

No Capítulo 3 apresenta-se a metodologia para utilização de técnicas de agrupamento sob uma abordagem bayesiana. O amostrador de Gibbs e o critério de convergência proposto por Gelman e Rubin também são descritos no Capítulo 3. Ainda neste capítulo, modelos bayesianos são apresentados juntamente com as distribuições *a priori* e *a posteriori* para os parâmetros, além da função de verossimilhança com variável latente.

O Capítulo 4 apresenta a descrição do agrupamento bayesiano realizado neste trabalho. O capítulo foi estruturado em seções, sendo a primeira referente a dados em painel e modelo econométrico dinâmico. A segunda seção apresenta as distribuições *a priori* para modelos de efeito fixo e efeito aleatório e foi dividida em duas subseções. A primeira subseção contém as distribuições *a priori* para o modelo de efeito fixo e na segunda subseção as distribuições *a priori* apresentadas correspondem ao modelo de efeito aleatório. Na terceira seção descreve-se o agrupamento bayesiano das firmas considerado neste estudo. Na quarta seção, faz-se uma seleção de modelos baseada no critério das ordenadas das densidades preditivas, a fim de identificar o modelo mais apropriado aos dados utilizados. Finalmente, na quinta seção, são apresentados os resultados obtidos com o modelo selecionado por meio do critério utilizado e, juntamente, faz-se uma análise e interpretação econômica das estimativas obtidas.

Finalmente, no Capítulo 5 são apontadas as conclusões deste trabalho sobre a presença de restrição financeira nas decisões de investimento da firma, agrupadas conforme uma

metodologia baseada em técnicas de grupamento bayesiana, ainda não utilizada na literatura do investimento. Este critério de classificação permitiu a identificação endógena de grupos de firmas com diferentes características financeiras. Os resultados alcançados por meio desta metodologia têm aspectos interessantes, visto que foi possível identificar a presença de dois grupos totalmente distintos na amostra.

2 – Restrição Financeira e Decisões de Investimento da Firma

Neste capítulo são apresentados os principais trabalhos realizados na literatura do investimento considerando diferentes critérios de classificação das firmas com o intuito de investigar a presença de restrições financeiras em suas decisões de investimento. O capítulo está estruturado em três seções, sendo a primeira seção correspondente a uma breve introdução sobre o despertar do interesse sobre a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa, proveniente do estudo de Fazzari, Hubbard e Petersen (1988). Na segunda seção, são descritos estudos realizados após o debate iniciado por Fazzari, Hubbard e Petersen (1988) e Kaplan e Zingales (1997), devido às diferentes conclusões alcançadas em seus trabalhos. Os estudos realizados na literatura do investimento consideram diferentes critérios de classificação para investigar a restrição financeira nas decisões de investimento das firmas. Finalmente, na terceira seção, avanços recentes na literatura do investimento, correspondentes a estudos realizados nos últimos cinco anos são apresentados.

2.1 – Introdução – O Despertar do Interesse sobre a Sensibilidade do Investimento ao Fluxo de Caixa

As principais discussões sobre as decisões de investimento da firma referem-se às restrições financeiras sobre os investimentos. Embora a literatura do investimento tenha feito importantes contribuições ao conhecimento, uma importante questão permanece em investigação. Esta questão refere-se à existência de divergências na escolha da variável utilizada para classificar as firmas de maneira que se possa controlar e isolar os efeitos originados das restrições financeiras.

Sob uma perspectiva empírica, restrições financeiras não são diretamente observáveis e, conseqüentemente, o uso de diferentes *proxies* produz diferentes resultados. A forma como as firmas são classificadas é fundamental para identificar a presença de restrições financeiras. A existência de resultados contraditórios na literatura do investimento conduz a um avanço no debate sobre quais fatores melhor representam *proxies* para a restrição financeira.

O debate sobre a presença de restrição financeira sobre as decisões de investimento intensificou-se com o trabalho de Fazzari, Hubbard e Petersen – FHP (1988). Os autores analisaram os efeitos financeiros sobre o investimento estudando o comportamento do investimento em grupos de firmas com diferentes características financeiras. Considerando uma amostra de 422 firmas americanas no período de 1969 a 1984, FHP (1988) classificaram

as firmas de acordo com a política de pagamento de dividendos, tendo como objetivo testar a presença de restrição financeira nas decisões de investimento das firmas. Conforme argumentado pelos autores, a consideração da taxa de pagamento de dividendos, medida por meio da razão “dividendos/rendimentos”, é um critério de classificação útil para identificar as firmas que gastam suas retenções e enfrentam altos custos por recursos externos. FHP (1988) observaram que as firmas mais prováveis de enfrentar restrição financeira em suas decisões de investimento eram as que pagavam uma taxa mais baixa de dividendos aos acionistas. Estas firmas mantiveram 94% de seus lucros retidos no período considerado e emitiram ações com maior frequência. Além disso, as firmas que pagavam taxas mais baixas de dividendos investiram mais, tiveram o maior crescimento de vendas e apresentaram o maior valor para o coeficiente da variável fluxo de caixa quando comparadas com as firmas que pagaram maiores taxas de dividendos aos acionistas. De acordo com os autores, as empresas podem pagar baixos dividendos por necessitarem de financiamento para novos investimentos que excedem seus fluxos de caixa interno, e por isso, retêm todos os recursos internos de baixo custo que podem gerar, e também porque teriam pouco ou nenhum lucro para distribuir aos seus acionistas.

A metodologia utilizada por FHP (1988) despertou interesse sobre como considerar uma firma restrita ou não-restrita financeiramente considerando diferentes critérios de classificação. O Quadro 2.1 contém alguns dos trabalhos realizados após o seminal estudo de FHP (1988).

Dois anos após a realização do estudo de FHP (1988), Devereux e Schiantarelli (1990) analisaram uma amostra de 720 firmas britânicas no período de 1969 a 1986, considerando três critérios de classificação: porte⁷, idade e setor. No primeiro critério as firmas foram classificadas em pequenas, médias e grandes e os resultados mostraram que o fluxo de caixa desempenhou um papel mais importante nas decisões de investimento das firmas maiores, as quais apresentaram uma taxa de pagamento de dividendos mais alta. Este resultado pode ser explicado pelo fato de tais firmas serem mais propensas a apresentar um fluxo de caixa relativamente baixo e uma estrutura de capital mais diversificada, a qual tenderia a aumentar os custos de agência.

O porte é uma variável amplamente considerada na literatura como *proxy* para o nível de restrição financeira, sob a suposição que o porte da firma é altamente correlacionado com fatores que determinam a probabilidade de a firma ser restrita financeiramente. As firmas de

⁷ Sob tal critério, uma vez que o porte é dado pelo valor real do seu estoque de capital, as firmas podem mudar de grupo à medida que aumentam ou diminuem o estoque de capital.

menor porte são esperadas enfrentar níveis mais altos de restrição financeira, visto que tais firmas podem ter menos acesso a fontes externas de capital devido a problemas de seleção adversa. Já as firmas de porte maior podem aumentar suas dívidas mais facilmente por serem mais diversificadas e menos propensas à falência. Neste sentido, é provável que firmas menores e mais jovens enfrentem níveis mais altos de restrição financeira.

Autor(es)	Critério de Classificação	Principal Conclusão
Devereux e Schiantarelli (1990)	porte, idade e setor	Investimento das firmas maiores, mais novas e de setores em crescimento é mais sensível ao fluxo de caixa.
Hoshi, Kashyap e Scharfstein (1991)	relação com bancos (<i>keiretsu</i>)	Investimento das firmas que não são membros de grupos <i>keiretsu</i> é mais sensível ao fluxo de caixa.
Schaller (1993)	maturidade, concentração de propriedade e disponibilidade de ativos colaterais	Investimento das firmas jovens, independentes e com estrutura de propriedade diversificada é mais sensível ao fluxo de caixa.
Gertler e Gilchrist (1994)	porte	Investimento das firmas de menor porte é mais sensível ao fluxo de caixa.
Bond e Meghir (1994)	regime de financiamento: taxa de pagamento de dividendos e emissão de ações	Firmas que não pagam dividendos e não emitem ações foram consideradas como sendo restritas financeiramente.
Gilchrist e Himmelberg (1995)	taxa de pagamento de dividendos, porte, <i>commercial papers</i> e <i>bond rating</i>	Investimento das firmas com altas taxas de pagamento de dividendos, menores, sem acesso a <i>bond rating</i> e com dificuldade de acesso a <i>commercial papers</i> é mais sensível ao fluxo de caixa.
Elston (1996)	taxa de pagamento de dividendos	Investimento das firmas com altas taxas de pagamento de dividendos é mais sensível ao fluxo de caixa.
Hsiao e Tahmiscioglu (1997)	intensidade de capital	Investimento das firmas mais intensivas em capital é mais sensível às flutuações do fluxo de caixa.
Kaplan e Zingales (1997)	taxa de pagamento de dividendos	Investimento das firmas com taxas mais altas de pagamento de dividendos é mais sensível ao fluxo de caixa.

Quadro 2.1 – Estudos empíricos realizados compreendidos entre os anos de 1990 e 1997⁸.

⁸ Os estudos listados no Quadro 2.1 foram selecionados baseando-se nas datas de realização dos estudos de FHP (1988) e Kaplan e Zingales (1997), os quais deram início ao debate sobre a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa e restrição financeira nas decisões de investimento da firma. Outros estudos podem ser citados como Whited (1992) o qual considerou a razão “dívida/ativo”, taxa de cobertura de juros e *bond rating*, Chirinko e Schaller (1995) os quais dividiram a amostra conforme a idade e estrutura de propriedade, Oliner e Rudebusch (1996), os quais utilizaram a idade da firma como critério de classificação, entre outros.

No entanto, alguns estudos associam firmas de grande porte à estrutura de propriedade mais diversificada, maiores problemas de agência e maior flexibilidade na realização de novos investimentos, conduzindo a sensibilidades mais altas do investimento ao fluxo de caixa. Portanto, conclusões obtidas em estudos que consideram o porte da firma como critério de classificação são ambíguas. Estudos realizados na literatura do investimento mostram a obtenção de resultados distintos considerando o porte como critério de classificação das firmas.

Quando a idade foi considerada, Devereux e Schiantarelli (1990) classificaram como novas as firmas com até 12 anos e como mais maduras aquelas existentes há mais de 12 anos. Com esta classificação, os resultados indicaram que o investimento das firmas mais novas é mais sensível ao fluxo de caixa quando comparado com as mais maduras. A sensibilidade apresentada pelas firmas mais novas deve-se ao fato de tais firmas enfrentarem maiores problemas de assimetria de informação e precisarem financiar-se sob taxas mais altas de investimento. Quando classificadas conforme o setor, o papel do fluxo de caixa tende a ser maior para as firmas pertencentes aos setores em crescimento.

No estudo realizado por Hoshi, Kashyap e Scharfstein (1991) a relação com bancos foi considerada como critério de classificação de uma amostra de firmas japonesas, a fim de verificar a presença de restrição financeira em suas decisões de investimento. A estratégia considerada no estudo foi verificar se a liquidez é um determinante mais importante do investimento para as firmas independentes ou para as firmas afiliadas a bancos (*keiretsu*)⁹. Os autores analisaram uma amostra de 145 firmas japonesas no período de 1971 a 1985, divididas em dois grupos: firmas afiliadas com bancos e firmas independentes. A idéia era que diferenças no custo de fundos internos e externos resultantes da assimetria de informação poderiam ser menos importantes quando o banco mantivesse uma relação de longo prazo com a firma. As estimativas obtidas para a variável de liquidez foram bem maiores para as firmas independentes e os autores interpretaram este resultado como evidência que as firmas independentes enfrentavam maiores restrições em suas decisões de investimento quando comparadas com aquelas afiliadas a bancos. De acordo com Hoshi et al. (1991), "*One possible explanation of our results is that independent firms may operate in high growth industries where current liquidity is likely to proxy well for value of investment opportunities,*

⁹ O termo *keiretsu* é de origem japonesa e é utilizado para designar um modelo empresarial com estrutura baseada em duas partes, sendo a primeira parte formada por um núcleo central onde existe uma organização de grande poder econômico e a segunda composta por um conjunto de pequenas organizações autônomas, mas que dividem departamentos e acordos econômicos.

whereas group firms may operate in low growth industries where liquidity is an uninformative proxy”, (pág. 50).

Considerando diferentes critérios de classificação àqueles utilizados por Devereux e Schiantarelli (1990) e Hoshi et al. (1991), Schaller (1993) analisou uma amostra de 212 firmas canadenses no período de 1973 a 1986 para testar a presença de assimetria de informação nas decisões de investimentos da firma. O autor classificou a amostra por maturidade¹⁰, concentração de propriedade e disponibilidade de ativos colaterais, sendo as firmas datadas desde 1965 consideradas maduras, e mais concentradas se um acionista mantém 50% ou mais das ações. Schaller (1993) argumentou que as firmas mais maduras provavelmente enfrentariam menores problemas de assimetria de informação, uma vez que os credores saberiam mais sobre as firmas. Quanto mais concentrada a estrutura de propriedade da uma firma, mais próximos estariam os interesses dos gestores e acionistas, diminuindo assim a diferença entre os custos de fundos internos e externos. O resultado mostrou que a presença de assimetria de informações desempenha um importante papel nos mercados de capitais, já que as firmas apresentaram custos de captação de recursos distintos de acordo com o agrupamento definido. Firmas jovens e firmas com uma estrutura de propriedade mais diversificada captaram recursos a custos maiores quando comparados com os custos enfrentados pelas firmas maduras e firmas com uma estrutura de propriedade mais concentrada. Os investimentos das firmas com maior disponibilidade de ativos colaterais mostraram-se menos sensíveis ao fluxo de caixa, já que tais ativos poderiam mais facilmente servir como garantia colateral, facilitando a obtenção de recursos. Neste sentido, o autor concluiu que os investimentos de firmas em desvantagens nas suas informações disponibilizadas para o mercado seriam mais sensíveis às variáveis de liquidez.

Gertler e Gilchrist (1994) estudaram o comportamento das variáveis vendas, estoque e dívida de curto prazo de uma amostra de firmas, classificadas por porte em pequenas e grandes, em períodos de contrações monetárias significativas. Diferentemente da conclusão de Devereux e Schiantarelli (1990) os quais também utilizaram o porte como critério de classificação, Gertler e Gilchrist (1994) concluíram que o investimento das firmas menores é mais sensível ao fluxo de caixa. O resultado mostrou que as firmas de menor porte dependem mais em financiamentos bancários e que a maioria delas não emite títulos, enquanto as firmas de grande porte utilizam *commercial paper* para financiar seus investimentos. Os autores concluíram então que as firmas de pequeno e grande porte reagem de forma diferente após

¹⁰ Vencimento de algum título a pagar ou a receber. Um dos estágios do ciclo de vida, muitas vezes chamado maturação.

períodos de contração monetária, já que as firmas menores exibiram maiores quedas em períodos de contração monetária, indicando que tais firmas provavelmente seriam mais restritas ao crédito.

Considerando o regime de financiamento e o pagamento de dividendo como critérios de classificação e utilizando um modelo da equação de Euler para analisar o comportamento do investimento, Bond e Meghir (1994) consideraram uma amostra de 626 firmas inglesas no período de 1971 a 1986 para testar o modelo de hierarquia financeira. O regime de financiamento seria dado de acordo com o pagamento de dividendos e através da emissão de ações. As firmas consideradas restritas financeiramente estariam em um regime em que não haveria pagamento de dividendos e nem emissão de ações, enquanto para as firmas consideradas não-restritas, o regime seria aquele em que haveria pagamento de dividendos ou emissão de ações. Buscando responder à questão se o gasto com investimento de determinadas firmas é afetado pela disponibilidade de recursos gerados internamente, evidenciando dificuldade na obtenção de recursos externos, os autores encontraram resposta positiva, isto é, existem firmas que sofrem restrição na obtenção de crédito para novos investimentos. Os resultados mostraram que, independente do regime em que operam, as firmas podem enfrentar restrições financeiras em suas decisões de investimento.

Gilchrist e Himmelberg (1995) analisaram o comportamento de 428 firmas americanas no período de 1979 a 1989 para tentar explicar a importância do fluxo de caixa na equação do investimento. O objetivo dos autores foi verificar se um aumento no fluxo de caixa diminuiria o nível de restrição financeira e aumentaria o investimento, ou apenas indicaria futuras oportunidades de investimento para a firma. As firmas foram classificadas de acordo com a taxa de pagamento de dividendos, porte, *commercial papers* e *bond rating*. Usando a política de pagamento de dividendos, os resultados mostraram que o investimento das firmas com altas taxas de pagamentos de dividendos são mais sensíveis ao fluxo de caixa¹¹. Ao considerar o porte como critério de classificação das firmas, resultados similares àqueles alcançados no estudo de Gertler e Gilchrist (1994) foram obtidos, levando os autores a concluir que o investimento das firmas menores é mais sensível ao fluxo de caixa. Quando *bond rating* e acesso a *commercial paper* foram usados para dividir a amostra, a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa foi mais alta para as firmas sem acesso a *bond rating* ou com dificuldades de acesso a *commercial paper*, cuja explicação deve-se a fatores financeiros.

¹¹ Este resultado pode ser devido ao fato que a política de pagamento de dividendo é altamente correlacionada com a liquidez da firma.

A taxa de pagamento de dividendos também foi considerada como critério de classificação no estudo de Elston (1996) para analisar uma amostra de 220 firmas americanas no período de 1975 a 1988. O autor encontrou que a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa foi maior para as firmas que pagavam taxas mais altas de dividendos, resultado contrário à descoberta de FHP (1988).

Considerando a intensidade de capital como critério de classificação, Hsiao e Tahmiscioglu (1997) investigaram o comportamento do investimento de 561 firmas americanas no período de 1971 a 1992. Dois grupos foram obtidos correspondendo a empresas com alta e baixa intensidade de capital¹². Para testar a influência da variável de liquidez sobre as decisões de investimento, foram utilizados modelos de efeito fixo e de efeito aleatório, e também um modelo misto. Comparando os três modelos pelo critério da densidade preditiva, os autores concluíram em favor do modelo misto e os resultados mostraram que as firmas mais intensivas em capital apresentaram menores valores para o investimento e para o fluxo de caixa e tiveram uma taxa menor de crescimento das vendas quando comparadas com as firmas menos intensivas em capital. Este resultado pode ser decorrente do valor mais baixo para o capital circulante em relação ao estoque de capital apresentado pelas firmas mais intensivas em capital, evidenciando uma fraca posição financeira¹³.

Embora a metodologia utilizada por FHP (1988) tenha sido amplamente aplicada à identificação das firmas que possuem os investimentos mais afetados pela presença de restrição financeira e também tenha proporcionado uma significativa contribuição para a teoria do investimento, o estudo realizado por FHP (1988) sofreu severas críticas quanto aos seus resultados.

O primeiro estudo a explicitar críticas sobre o trabalho de FHP (1988) foi realizado por Kaplan e Zingales – KZ (1997), os quais questionaram se a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa era uma boa medida para restrição financeira e se existiria uma relação monotonicamente crescente entre a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa e o grau de restrição referente ao financiamento. Os autores argumentaram que não haveria razão teórica forte para que a sensibilidade do investimento em relação ao fluxo de caixa fosse considerada uma função monotônica dos fundos internos disponíveis pelas firmas ou do grau de assimetria de informação por elas enfrentado. As razões para tal afirmação são que o fluxo

¹² Hsiao e Tahmiscioglu (1997) consideraram a intensidade de capital da firma como sendo o valor mínimo da razão “estoque de capital/vendas” sobre o período amostral analisado.

¹³ Enquanto a razão “capital circulante/estoque de capital” foi 17% para as firmas classificadas como menos intensivas em capital, para as firmas mais intensivas este valor corresponde a 1.2%.

de caixa poderia estar atuando apenas como uma *proxy* para futuras oportunidades de investimento, e também devido à presença de informações influentes (*outliers*) na amostra, as quais causam diferenças na sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa nos diferentes grupos de firmas. Os autores apontaram ainda que a política de pagamento de dividendos é determinada pela firma, isto é, as firmas podem escolher pagar baixos dividendos mesmo sendo não-restritas financeiramente.

Procurando investigar a relação entre a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa e restrição financeira, KZ (1997) analisaram a mesma amostra de empresas classificadas como sendo de baixo pagamento de dividendos no estudo de FHP (1988). KZ (1997) agruparam as firmas conforme seus respectivos desempenhos operacionais e encontraram que 85% das firmas classificadas no estudo anterior como restritas financeiramente não poderiam assim ser consideradas, uma vez que tais firmas aumentaram seus investimentos com recursos externos ou com reservas de caixa. Também concluíram que as firmas que pagavam taxas mais altas de dividendos exibiram maior sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa quando comparadas com aquelas que pagavam baixas taxas de dividendos, seguindo em direção oposta à conclusão de FHP (1988).

Assim como o estudo de FHP (1988), o trabalho de KZ (1997) também foi criticado e suas conclusões foram contestadas. FHP (2000) fizeram críticas sobre o critério de classificação e sobre o tamanho da amostra considerado por KZ (1997), argumentando que a classificação das firmas de acordo com seus respectivos desempenhos operacionais não seria suficiente para identificar a presença de restrição financeira e alegando que uma amostra de apenas 49 firmas não poderia sustentar com tanta evidência os resultados obtidos por KZ (1997).

Diante da discussão de FHP (1988) e KZ (1997) devido às diferentes conclusões alcançadas em cada um dos estudos, e também com as críticas de FHP (2000), KZ (2000) apresentaram sua versão quanto às críticas recebidas. Os autores mostraram que o único ponto de contradição com FHP (2000) referia-se à existência de uma função monotonicamente crescente entre sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa e restrições de financiamento, já que ambos concordavam que o investimento das firmas consideradas mais restritas financeiramente era menos sensível ao fluxo de caixa quando comparado com a sensibilidade do investimento das firmas classificadas como mais restritas financeiramente.

O debate iniciado com as diferentes conclusões alcançadas nos estudos de FHP (1988) e KZ (1997) despertou o interesse de muitos autores motivando-os a investigar a sensibilidade

do investimento ao fluxo de caixa considerando a metodologia proposta por FHP (1988), mas considerando diferentes critérios para classificar e dividir as firmas em grupos.

Na próxima seção são descritos os estudos empíricos realizados após o debate iniciado por FHP (1988) e KZ (1997). Tais estudos são referentes à utilização de diferentes critérios de classificação para analisar a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa de firmas pertencentes a grupos com características financeiras distintas.

2.2 – Diferentes Critérios de Classificação para Investigar Restrição Financeira nas Decisões de Investimento da Firma

Logo após o debate iniciado por FHP (1988) e KZ (1997) sobre como identificar ou quando considerar uma firma como restrita ou não-restrita financeiramente, estudos empíricos foram realizados na literatura do investimento considerando diferentes critérios de classificação, conforme mostrado do Quadro 2.2.

Para investigar o impacto das imperfeições do mercado sobre o investimento da firma¹⁴, Hu e Schiantarelli (1998) utilizaram um modelo de regressão *switching* para classificar as firmas conforme o pagamento do prêmio de risco sobre a obtenção de recursos externos. Os autores analisaram o comportamento do investimento de uma amostra de 584 firmas americanas no período de 1978 a 1987, assumindo que as firmas podiam operar em dois regimes, um deles caracterizado por elevado pagamento do prêmio de risco sobre a obtenção de recursos externos e o outro com baixo pagamento do prêmio de risco. As firmas que operavam em regime de elevado pagamento do prêmio pelo risco eram aquelas que enfrentavam problemas mais severos de assimetria de informação, implicando que a disponibilidade de recursos internos é um importante determinante do investimento. A função *switching* foi utilizada para determinar a probabilidade de a firma operar em cada regime e foi definida como sendo uma função das variáveis financeiras da firma que atuam como *proxies* para a assimetria de informação e problemas de agência.

Estimando o modelo de regressão *switching*, os autores observaram que as firmas com elevado nível de endividamento em relação ao seu valor de mercado, alto pagamento de juros como razão das receitas e baixo nível de liquidez em relação ao seu estoque de capital, tinham uma probabilidade mais alta em ter que pagar maior prêmio por recursos externos, apresentando assim uma elevada sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa.

¹⁴ Essas imperfeições podem levar a firma a sofrer restrições no acesso a recursos externos.

Autor(es)	Critério de Classificação	Principal Conclusão
Hu e Schiantarelli (1998)	modelo de regressão <i>switching</i>	Investimento das firmas com maior probabilidade em ter que pagar maior prêmio por recursos externos foi mais sensível ao FC.
Kadapakkam, Kumar e Riddick (1998)	porte	Investimento das firmas maiores teve maior sensibilidade ao FC.
Cleary (1999)	análise discriminante	Investimento foi menos sensível ao FC para as firmas menos restritas.
Chirinko e Kalckreuth (2002)	análise discriminante	Investimento das firmas com alto grau de solvência foi mais sensível ao FC.
Terra (2003)	porte, multinacionais e domésticas, e dependência de financiamento externo	Firmas brasileiras enfrentam restrições financeiras em suas decisões de investimento.
Moyen (2004)	taxa de pagamento de dividendos e o valor do FC	A sensibilidade do investimento ao FC depende do critério utilizado.
Allayannis e Mozumdar (2004)	fragilidade financeira ¹⁵	Descartar observações negativas do FC pode conduzir a um aumento na sensibilidade do investimento ao FC.
Almeida, Campello e Weisbach (2004)	fragilidade financeira	A sensibilidade do investimento ao FC foi maior para as firmas com alta volatilidade do FC.
Bhagat, Moyen e Suh (2005)	desempenho operacional	Investimento das firmas frágeis financeiramente com perdas operacionais exibiu sensibilidade negativa ao FC.
Cleary (2006)	taxa de pagamento de dividendos, porte e <i>status</i> financeiro	Investimento das firmas com taxas mais altas de pagamento de dividendos, grande porte e em melhores posições financeiras é mais sensível ao FC.
Khurana, Pereira e Martin (2006)	porte	Firmas de pequeno porte apresentaram sensibilidade mais alta do investimento ao FC.
Hovakimian e Titman (2006)	modelo de regressão <i>switching</i>	Sensibilidade mais baixa do investimento à venda de ativos e ao FC mostrada pelas firmas maiores, com <i>bond rating</i> e que com maiores taxas de dividendos.

Quadro 2.2 – Estudos empíricos realizados na literatura do investimento considerando diferentes critérios de classificação das firmas.

Nota: Na tabela, a sigla FC foi utilizada para representar fluxo de caixa.

¹⁵ Para Hovakimian e Titman (2006) “A firm is classified as financially distressed in a given year if the firm’s earnings before interest, taxes, depreciation, and amortization (EBITDA) is less than 80% of its interest expense in 1 year or if EBITDA is less than the interest expense for two consecutive years”, (p. 360).

O resultado também indicou que as firmas maiores têm maior probabilidade de operar em regime de alto pagamento do prêmio pelo risco na obtenção de recursos externos. Segundo os autores, *“This may be due to the nature of the sample chosen for estimation (relatively large, quoted firms) in conjunction with the possibility that size may be negatively associated with concentration of ownership”* (pág. 478). A conclusão de Hu e Schiantarelli (1998) segue em direção oposta à descoberta de Gilchrist e Himmelberg (1995), que afirmaram que a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa é mais alta para as firmas menores.

Outro estudo empírico que considerou o porte como critério de classificação das firmas foi o estudo de Kadapakkam, Kumar e Riddick (1998). Os autores utilizaram uma amostra de 1400 firmas localizadas no Canadá, França, Alemanha, Grã-Bretanha, Japão e Estados Unidos durante o período de 1982 a 1991, classificando-as de acordo com o porte, medido sob três diferentes maneiras: valor de mercado do patrimônio líquido, ativo total e vendas. Inicialmente, os autores analisaram a sensibilidade do investimento à disponibilidade de fundos internos em cada país separadamente sem classificar as firmas em grupos e, para os seis países, concluíram que o investimento é sensível à quantidade de fundos internos disponíveis. Ao agrupar as firmas por porte, considerando as três medidas citadas acima, em cada país os resultados mostraram que o investimento das firmas maiores apresentou uma maior sensibilidade ao fluxo de caixa quando comparado com o investimento das firmas de pequeno porte.

Kadapakkam et al. (1998) consideraram duas explicações para a sensibilidade mais alta do investimento ao fluxo de caixa mostrada pelas firmas de grande porte. A primeira explicação refere-se à preferência por fundos internos devido aos custos mais altos de recursos externos baseados nos custos de transação e problemas de agência. A ideia é que, na ausência de fundos internos disponíveis, as firmas de grande porte teriam uma flexibilidade maior em adiar suas decisões de investimento. Para as firmas menores, pressões competitivas no mercado poderiam ser mais intensas, forçando-as a realizar investimentos mesmo se houvesse a necessidade de obter recursos externos a um alto custo. Isto resultará em uma relação mais fraca do investimento com o fluxo de caixa para as firmas de pequeno porte quando comparadas com as firmas de grande porte. A segunda explicação pode estar associada ao fato de os problemas de agência serem mais pronunciados para as firmas de grande porte devido à estrutura de propriedade mais diversificada destas firmas. Neste sentido, os gestores enfrentariam uma menor disciplina em relação às obrigações da firma e tenderiam a aumentar o tamanho da firma sempre que fundos internos estivessem disponíveis.

Utilizando análise discriminante¹⁶, Cleary (1999) analisou o padrão de financiamento de 1317 firmas americanas no período de 1987 a 1994. O autor encontrou evidências de que firmas consideradas menos restritas financeiramente apresentariam uma elevada sensibilidade do investimento em relação ao fluxo de caixa, confirmando os resultados de KZ (1997). Cleary (1999) classificou as firmas conforme um índice de *status* financeiro, calculado considerando valores referentes à liquidez, folga financeira, lucro líquido, taxa de crescimento de vendas e dívida da firma. De acordo com o valor deste índice, as firmas foram divididas em três grupos, sendo consideradas restritas financeiramente as firmas com menores valores para o índice discriminante. O primeiro grupo foi composto pelas firmas que aumentaram seus dividendos e provavelmente não enfrentavam restrição financeira. No segundo grupo estavam as firmas que reduziram seus dividendos e provavelmente poderiam enfrentar altos níveis de restrição financeira, e o terceiro grupo foi composto pelas firmas que não alteraram seus pagamentos de dividendos durante o período considerado. Os resultados mostraram que os gastos com investimento das firmas que enfrentavam níveis mais altos de restrição financeira são mais sensíveis à liquidez quando comparados com os gastos com investimento das firmas pertencentes aos outros grupos, fornecendo suporte às descobertas de KZ (1997).

Diferente dos estudos empíricos descritos até o momento, Povel e Raith (2001) analisaram como o investimento de firmas restritas financeiramente depende da disponibilidade de recursos internos e da assimetria de informação no mercado de capital. Para alcançar tal objetivo, uma firma foi considerada como sendo restrita financeiramente “*if it requires outside capital but faces imperfections in the capital market. It can be said to be financially ‘more constrained’ than another firm either if it requires outside capital, or if it faces a higher cost of raising any given amount.*” (pág. 1). De acordo com os autores, a medida utilizada para classificar uma firma como restrita ou não-restrita financeiramente exerce forte influência sobre a relação existente entre restrição financeira e a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa. Segundo os autores, quando o mercado de capitais é imperfeito, alterações nos recursos internos da firma deveriam provocar um efeito significativo sobre o investimento se estes recursos são limitados. Por outro lado, nada aconteceria em um cenário de mercado perfeito ou se a firma dispõe de recursos internos sem restrição para financiar novos investimentos. Os autores concluíram que a restrição financeira

¹⁶ A análise discriminante é uma técnica que pode ser utilizada para classificação de elementos de uma amostra. Para sua aplicação é necessário que os grupos para os quais cada elemento amostral pode ser classificado sejam pré-definidos, ou seja, conhecidos *a priori* considerando-se suas características gerais. Este conhecimento permite a elaboração de uma função matemática chamada de regra de classificação, que é utilizada para classificar novos elementos amostrais nos grupos já existentes.

depende da assimetria de informação no mercado de capitais e da disponibilidade de fundos internos da firma, e mostraram que, quando ocorrem reduções nos fundos internos surge uma severa restrição financeira, afetando o investimento da firma.

Assim como no estudo de Cleary (1999), Chirinko e Kalckreuth (2002) utilizaram a análise discriminante no processo de classificação de uma amostra de firmas alemãs no período de 1988 a 1997. Os autores mostraram que a utilização da análise discriminante não necessariamente conduz aos resultados de KZ (1997) e Cleary (1999), mas que as conclusões de FHP (1988) podem ser mantidas quando as firmas são classificadas por meio desta técnica. Para analisar o impacto do fluxo de caixa sobre o investimento destas firmas, o grau de solvência da firma foi utilizado como variável discriminante para classificar as firmas em grupos¹⁷. A análise discriminante determina dois valores críticos para o grau de solvência da firma, dividindo a amostra em duas categorias: alto e baixo grau de solvência. Os resultados mostraram que a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa é mais alta para as firmas com baixo grau de solvência, consideradas restritas financeiramente.

Existe uma escassa literatura sobre restrição financeira e decisão de investimento para dados brasileiros. Poucos estudos empíricos foram realizados para verificar a presença de restrição financeira nas decisões de investimento de firmas situadas no Brasil. Dentre tais estudos, pode ser citado o trabalho de Terra (2003), no qual a autora investigou se as decisões de investimento de firmas brasileiras são afetadas por restrições ao crédito.

Terra (2003) considerou uma amostra de 550 firmas durante o período de 1986 a 1997, agrupando-as em grandes e pequenas, multinacionais e domésticas, e firmas mais e menos dependentes de financiamento externo, isto é, as firmas pertencentes aos setores com maior dependência externa foram separadas das firmas em setores com menor dependência financeira¹⁸. De acordo com as estimativas obtidas, não foi possível identificar qual dos grupos possui maior restrição ao crédito, pois os coeficientes do fluxo de caixa foram estatisticamente significativos para os dois grupos considerando os três critérios de classificação. Ao classificar as firmas conforme o tamanho, embora o coeficiente do fluxo de caixa tenha sido maior para o grupo das firmas maiores, não foi possível identificar qual dos grupos continha as firmas mais restritas ao crédito, já que o fluxo de caixa foi estatisticamente

¹⁷ O termo insolvência significa a incapacidade de uma empresa quitar suas obrigações. Analogamente, o grau de solvência representa a probabilidade de sua sobrevivência. Portanto, firmas com alto grau de solvência estão em boas condições financeiras, e provavelmente não enfrentam restrições financeiras em suas decisões de investimento.

¹⁸ As firmas que exibiram maior dependência ao financiamento externo foram aquelas pertencentes aos setores de Móveis, Produtos Químicos, Produtos de Madeira, Equipamentos de Transporte, Têxtil, Máquinas, Produtos de Perfumaria e Sabão, Equipamentos Elétricos, Produtos Plásticos, Drogas e Outras Indústrias.

significante para ambos os grupos. Quando as firmas foram comparadas entre multinacionais e domésticas, não foi possível identificar qual dos dois grupos é mais restrito ao crédito, uma vez que os coeficientes do fluxo de caixa foram positivos e significantes para explicar o investimento dos dois grupos, indicando restrição de crédito para ambos. Considerando a dependência externa, os coeficientes do fluxo de caixa foram significativos para explicar o investimento nos dois grupos, mas um valor maior foi obtido para o fluxo de caixa correspondente às firmas com menor dependência sobre financiamento externo. Uma explicação para este resultado é que as firmas menos dependentes utilizariam menos recursos externos e assim seu investimento seria mais sensível ao fluxo de caixa. Os resultados indicaram restrição de crédito em toda a amostra e também entre os grupos formados por firmas pequenas e grandes, multinacionais e domésticas e também entre as mais e menos dependentes de financiamento externo, levando a autora a concluir que as firmas brasileiras enfrentam restrição de crédito em suas decisões de investimento.

Com o objetivo de esclarecer qual o efeito da restrição financeira sobre a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa da firma, Moyen (2004) propôs uma justificativa para as conflitantes conclusões alcançadas nos estudos empíricos realizados na literatura do investimento. A autora ressaltou as diferentes conclusões obtidas nos estudos de FHP (1988) e KZ (1997) sobre a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa quando diferentes critérios são considerados para classificar as firmas. Dois modelos foram construídos, sendo um restrito, no qual as firmas não têm acesso ao mercado externo, e outro não-restrito, caracterizado pelas firmas com perfeito acesso ao mercado externo. A partir destes modelos, uma amostra de dados em painel com 2000 firmas durante um período de 10 anos foi simulada para comparar o comportamento do investimento das firmas consideradas restritas financeiramente com o investimento das firmas classificadas como não-restritas financeiramente. A taxa de pagamento de dividendos e o valor do fluxo de caixa foram utilizados como critérios de classificação das firmas. Ao considerar as firmas com baixas taxas de pagamento de dividendos como restritas financeiramente, os resultados foram condizentes com as conclusões de FHP (1988), isso é, que o investimento das firmas que enfrentam níveis mais altos de restrição financeiramente é mais sensível ao fluxo de caixa. Por outro lado, ao considerar o modelo restrito, os resultados mostraram que a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa das firmas classificadas como restritas financeiramente foi menor quando comparada com a sensibilidade das firmas consideradas restritas financeiramente, semelhante às conclusões de KZ (1997).

Os resultados encontrados por Moyen (2004) mostraram que, dependendo do critério utilizado para classificar as firmas, a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa das firmas consideradas restritas financeiramente pode ser mais alta ou mais baixa quando comparada com a sensibilidade das firmas não-restritas financeiramente. Estes resultados levaram a autora a concluir que é difícil identificar uma firma com restrições financeiras e que diferentes conclusões podem ser obtidas conforme o critério utilizado para identificar as firmas como restritas ou não-restritas financeiramente.

As conclusões de KZ (1997) e Cleary (1999) despertaram o interesse de Allayannis e Mozumdar (2004) devido ao fato de tais conclusões divergirem da maioria dos resultados alcançados nos estudos empíricos realizados na literatura do investimento. Por este motivo, Allayannis e Mozumdar (2004) procuraram evidências para mostrar que, tanto os resultados de KZ (1997) como aqueles de Cleary (1999), poderiam ser influenciados pela amostra considerada em cada um desses estudos. Considerando a fragilidade financeira como forma de restrição financeira, Allayannis e Mozumdar (2004) estimaram a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa utilizando na amostra valores positivos e negativos para a variável fluxo de caixa. As estimativas obtidas permitiram verificar que a maior sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa foi mostrada para as firmas em situação de fragilidade financeira. No entanto, ao excluir da amostra as observações negativas da variável fluxo de caixa, a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa estimada foi semelhante entre os grupos, tornando impossível identificar qual dos grupos estaria frente a níveis mais altos de restrição financeira.

Diante de tal resultado, os autores explicaram as diferenças entre as conclusões de KZ (1997) e Cleary (1999) e a maioria dos estudos empíricos realizados, argumentando que, enquanto as conclusões de KZ (1997) podem ter sido influenciadas pelo tamanho da amostra considerada¹⁹, no estudo de Cleary (1999) a presença de firmas com observações negativas para o fluxo de caixa, pode ter levado o autor a concluir que o investimento das firmas consideradas menos restritas financeiramente seria mais sensível ao fluxo de caixa. Neste sentido, Allayannis e Mozumdar (2004) argumentaram que descartar observações negativas do fluxo de caixa pode conduzir a um aumento na sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa, confirmando que a fragilidade financeira representada pelo fluxo de caixa negativo é um boa *proxy* para identificar restrição financeira nas decisões de investimento da firma.

¹⁹ A amostra utilizada por KZ (1997) corresponde às 49 firmas identificadas como restritas financeiramente no estudo de FHP (1988).

Assim como Allayannis e Mozumdar (2004), Almeida, Campello e Weisbach (2004) também consideraram a fragilidade financeira, medida por valores negativos do fluxo de caixa, como *proxy* para a restrição financeira, mas deram maior ênfase ao papel da folga financeira e da sensibilidade do saldo de caixa em relação ao fluxo de caixa. Assim como o fluxo de caixa, a folga financeira também é usada como uma medida de liquidez interna, a qual, similar ao fluxo de caixa, pode afetar diretamente o investimento da firma. Ter folga financeira significa ter caixa, títulos negociáveis e pronto acesso aos mercados de dívida ou ao financiamento bancário. No entanto, se por um lado as firmas com amplas reservas de caixa não são realmente restritas financeiramente, uma vez que elas podem utilizar tais reservas para investir em projetos desejáveis, por outro lado as firmas não precisariam manter níveis relativamente altos de reservas de caixa a menos que elas enfrentassem dificuldades no acesso ao capital externo e antecipam uma escassez de liquidez interna. Existe também uma desvantagem em relação à disponibilidade de folga financeira, visto que um excesso de folga de caixa pode encorajar os gestores a expandirem os seus próprios benefícios ou a utilizarem o caixa que deveria ser restituído aos acionistas, para novos investimentos.

Ainda no estudo de Almeida et al. (2004), as decisões de investimento das firmas foram analisadas considerando o papel desempenhado pela volatilidade do fluxo de caixa, da folga financeira e da interação de ambos nas decisões de investimento da firma. Para os autores, enquanto as firmas que enfrentam restrição financeira mantêm saldo de caixa para financiar investimentos futuros, as firmas consideradas não-restritas financeiramente têm pouca razão para manter saldo de caixa. Se as firmas não-restritas têm acesso irrestrito ao crédito externo, não há necessidade de manter um saldo de caixa para investimentos futuros. Diante de tal argumento, os autores sugeriram que as firmas consideradas restritas financeiramente deveriam apresentar uma maior tendência em manter saldo de caixa, evidenciando uma sensibilidade positiva do investimento ao fluxo de caixa, enquanto as firmas consideradas não-restritas financeiramente não teriam motivos para manter saldo de caixa.

Para confirmar o argumento sugerido, Almeida et al. (2004) consideraram a taxa de pagamento de dividendos, o porte (medido pelo ativo total), *bond rating* e *commercial paper* como critérios de classificação das firmas no período de 1971 a 2000. De acordo com a política de pagamento de dividendos, firmas consideradas restritas financeiramente foram as que exibiram taxas mais baixas de pagamento de dividendos. Para a classificação utilizando o ativo total, as firmas menores foram consideradas restritas financeiramente, enquanto para *bond rating* e *commercial paper*, as firmas consideradas restritas foram aquelas sem *bond*

rating e sem *commercial paper*. De acordo com os resultados, as firmas consideradas restritas financeiramente mantiveram maiores saldos de caixa e apresentaram maior volatilidade do fluxo de caixa. Enquanto as firmas consideradas não-restritas financeiramente mantiveram de 8 a 9% de seu ativo total como caixa e títulos comercializáveis, para as firmas consideradas restritas o saldo de caixa correspondeu a 15% do ativo total. A sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa foi maior para as firmas com alta volatilidade do fluxo de caixa, consideradas restritas financeiramente, e uma razão para isso é que elas iriam construir uma folga financeira devido ao conhecimento de que tal volatilidade de caixa poderia reduzir oportunidades de investimentos futuros.

O estudo empírico realizado por Bhagat, Moyen e Suh (2005) é visto como complementar ao estudo de Allayannis e Mozumdar (2004), uma vez que investigaram a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa de firmas considerando a fragilidade financeira.

Bhagat, Moyen e Suh (2005) analisam o desempenho operacional na firma para investigar se a política de investimento de firmas em situação de fragilidade financeira difere da política de investimento das firmas que estão em melhores posições financeiramente. Os autores consideraram uma amostra de firmas no período de 1979 a 1996 e dividiram as firmas frágeis financeiramente em dois grupos de acordo com o desempenho operacional: um grupo contendo as firmas que apresentavam lucro operacional e o outro formado pelas firmas com perdas operacionais. As firmas frágeis financeiramente que tiveram perdas operacionais exibiram sensibilidade negativa do investimento ao fluxo de caixa, enquanto para as demais firmas contidas na amostra, a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa foi positiva, consistentes com os resultados de Allayannis e Mozumdar (2004). De acordo com Bhagat et al. (2005), nem todas as firmas utilizam recursos internos para financiar seus investimentos. Firms em situação de fragilidade financeira e com perdas operacionais aumentam seus investimentos emitindo novas ações como fonte de financiamento, possibilitando lucrativos investimentos para a empresa.

Semelhante ao estudo de Bhagat et al. (2004), Cleary (2006) buscou investigar se o nível de restrição financeira enfrentado pelas firmas em suas decisões de investimento difere conforme suas posições financeiras. Para isso, o autor utilizou uma amostra composta por informações referentes aos países que compõem as maiores economias do mundo²⁰ e classificou as firmas em grupos de acordo com três critérios já utilizados na literatura. O

²⁰ Os países que compõem as maiores economias do mundo são Austrália, Canadá, França, Alemanha, Japão, Reino Unido e Estados Unidos.

primeiro critério foi a taxa de pagamento de dividendos, com a idéia que as firmas que enfrentam níveis mais altos de restrição financeira teriam taxas mais baixas de pagamento de dividendos para não serem forçadas a obter recursos externos para novos investimentos. O segundo critério foi o porte e o último critério foi o *status* financeiro, determinado utilizando-se valores do ativo circulante, dívida e lucro líquido da firma.

Os resultados indicaram que o investimento das firmas em melhores posições financeiras é mais sensível ao fluxo de caixa quando comparada as firmas frágeis financeiramente, mesmo depois de terem sido controladas conforme a taxa de pagamento de dividendos e porte. Além disso, as firmas com taxas mais altas de pagamento de dividendos apresentaram maior sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa. Quando controladas por porte, firmas de maior porte apresentaram sensibilidade mais alta do investimento ao fluxo de caixa²¹. A explicação para tal resultado sugerida pelo autor é baseada no fato de que a posição financeira da firma pode influenciar a relação entre investimento e fluxo de caixa com respeito ao porte da firma. Com os resultados alcançados, Cleary (2006) verificou que há diferenças no comportamento do investimento das firmas conforme suas posições financeiras, sendo o investimento das firmas em melhores condições financeiras mais sensível à disponibilidade de recursos internos quando comparadas com as firmas em situação de fragilidade financeira.

Enquanto diversos autores têm procurado identificar a presença de restrição financeira nas decisões de investimento da firma, Khurana, Pereira e Martin (2006) mostraram como a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa da firma está associada ao desenvolvimento do mercado financeiro. Considerando uma amostra de firmas no período de 1994 a 2002, situadas em 35 países, os autores encontraram que a sensibilidade do caixa diminui de acordo com o grau de desenvolvimento financeiro do país, isto é, quanto mais desenvolvido financeiramente for o país, menor será a sensibilidade do caixa. O argumento sugerido para tal resultado é que o desenvolvimento financeiro facilita o acesso da firma a recursos externos a um custo mais baixo.

Khurana et al. (2006) verificaram também que existem diferenças do impacto do desenvolvimento financeiro na sensibilidade do caixa ao classificar as firmas conforme o porte, medido pelo ativo total. As firmas de pequeno porte apresentaram sensibilidade mais alta do caixa tanto nos países mais desenvolvidos quanto nos países subdesenvolvidos financeiramente. Os resultados mostraram que a sensibilidade do caixa é mais baixa em países

²¹ Esta conclusão é consistente com o resultado encontrado por Kadapakkam et al. (1998), mas contradiz as descobertas de Gilchrist e Himmelberg (1995).

mais desenvolvidos financeiramente, indicando que as firmas são menos restritas financeiramente e, portanto, estão mantendo menores quantidades de caixa para investimentos futuros. Dessa forma, as firmas manteriam menos caixa para financiar investimentos futuros e o desenvolvimento financeiro facilitaria o acesso da firma a recursos externos de baixo custo para o financiamento de novos investimentos.

Similar ao estudo de Hu e Schiantarelli (1998), Hovakimian e Titman (2006) também analisaram a importância das restrições financeiras nas decisões de investimento da firma utilizando um modelo de regressão *switching* como critério de separação da amostra²². Os autores assumiram a presença de dois regimes de investimento, sendo que em um deles o investimento apresentava-se mais sensível à disponibilidade de fundos internos do que no outro regime. As estimativas do modelo de regressão *switching* revelaram que o caixa gerado pela venda de ativos é um determinante importante do gasto com investimento corporativo. Os resultados indicaram também que uma sensibilidade mais baixa do investimento à venda de ativos e ao fluxo de caixa foi mostrada pelas firmas maiores, com *bond rating* e que pagavam maiores dividendos aos seus acionistas. A utilização da regressão *switching* no processo de classificação das firmas apresentou um desempenho satisfatório, mostrando que o comportamento do investimento das firmas é diferente entre os regimes, pois o coeficiente da variável de liquidez foi mais de 10 vezes maior para as firmas consideradas restritas financeiramente. Assim como KZ (2000), Hovakimian e Titman (2006) também mostraram que não existe uma relação monotônica entre a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa e o nível de restrição financeira, fluxo de caixa e oportunidades de crescimento da firma.

Kalatzis, Azzoni e Achcar (2008) analisaram a presença de restrição financeira nas decisões de investimento de 497 firmas brasileiras no período de 1986 a 1997. Os autores utilizaram uma versão do modelo Acelerador e classificaram as firmas de acordo com a intensidade de capital, separando-as em grupos de alta e baixa intensidade de capital. As firmas classificadas como menos intensivas em capital investiram mais e apresentaram maiores valores médios para o fluxo de caixa, vendas, lucro líquido e capital circulante, evidenciando menor necessidade em obter recursos externos. Já as firmas mais intensivas em capital apresentaram baixos valores médios para os indicadores financeiros considerados no estudo, refletindo uma situação de fragilidade financeira e maior necessidade sobre

²² De acordo com os autores, “The switching regression approach allow us to control for multiple indicators that jointly determine the group in which a firm is likely to belong without the need for splitting the sample into many smaller parts of including many interaction terms is usually limited to one or two.” (pág. 365).

financiamentos externos. Teoricamente, espera-se que as firmas mais intensivas em capital apresentem baixa rentabilidade devido à presença de elevados custos fixos e de uma estrutura de propriedade mais diversificada, elevando os custos de agência.

As estimativas obtidas para a variável de liquidez mostrou-se significativa para explicar o investimento tanto das firmas de baixa intensidade de capital quanto para as firmas mais intensivas em capital. No entanto, analisando o coeficiente da variável fluxo de caixa aliado à situação de fragilidade financeira enfrentada pelas firmas mais intensivas em capital, os autores concluíram que o fluxo de caixa foi capaz de captar restrição financeira. Por outro lado, embora o fluxo de caixa tenha sido um fator determinante para o investimento das firmas menos intensivas em capital, não foi possível considerá-las como sendo restritas financeiramente, já que estão em melhores posições financeiras, conforme mostrado pelos indicadores financeiros. Neste caso, a variável de liquidez pode ser considerada somente como uma *proxy* para a rentabilidade futura da firma.

Em estudo semelhante ao descrito anteriormente, Kalatzis e Azzoni (2009) analisaram o papel da restrição financeira sobre as decisões de investimento da firma considerando três modelos econométricos. No primeiro estavam presentes um efeito específico da firma e também um efeito temporal, no segundo foi introduzido um efeito de interação entre o efeito específico da firma e o efeito temporal e no terceiro modelo, os autores consideraram o efeito específico da firma correlacionado com o fluxo de caixa. Kalatzis e Azzoni (2009) consideraram a mesma amostra de 497 firmas brasileiras no período de 1986 a 1997 e as classificaram novamente conforme a intensidade de capital. Utilizando o critério das ordenadas das densidades preditivas, verificou-se que o modelo mais adequado aos dados foi o que continha a estrutura de correlação entre o efeito específico da firma e a variável fluxo de caixa. Os resultados corroboraram as conclusões de Kalatzis et al. (2008), isto é, enquanto a variável de liquidez captou a restrição financeira para as firmas mais intensivas em capital, para as firmas menos intensivas, o fluxo de caixa atuou apenas como uma *proxy* para a rentabilidade futura.

A abordagem empírica utilizada no estudo de Hovakimian and Hovakimian (2009) difere-se da maioria dos estudos empíricos anteriormente descritos. Inicialmente, os autores identificaram empiricamente as firmas com alta e baixa sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa, classificando-as em grupos. Em seguida, exploraram as diferenças no comportamento do investimento e no método de financiamento em períodos de alto e baixo fluxo de caixa entre os grupos. Os resultados mostraram que em períodos de baixo fluxo de caixa, as firmas com sensibilidade mais alta do investimento ao fluxo de caixa investem

menos quando comparadas com as demais firmas. No entanto, em períodos de alto fluxo de caixa as firmas com investimento mais sensível investem bem mais do que as firmas com sensibilidade mais baixa do investimento ao fluxo de caixa. A explicação para tal resultado é que em períodos de baixo fluxo de caixa, os gestores investiriam mais do que as fontes de financiamento permitem e então, a folga de caixa é utilizada para suprir a falta de recursos para novos investimentos. Conseqüentemente, as firmas com sensibilidade mais alta do investimento ao fluxo de caixa reduzem significativamente suas folgas financeiras.

Por outro lado, em períodos de alto fluxo de caixa os gestores investiriam menos do que as fontes de financiamento permitem, acumulando excesso de folga financeira para se prevenir de futuras indisponibilidades de recursos internos para novos investimentos. As conclusões indicam que firmas com alta sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa sofrem restrições financeiras em períodos em que o fluxo de caixa é baixo e que o financiamento é restrito devido à baixa liquidez interna e também devido a alta alavancagem, a qual torna o capital externo mais caro.

Em um estudo bastante recente, Kalatzis, Bassetto e Azzoni (2010) analisaram o comportamento das decisões de investimento na presença de restrições financeiras de uma amostra de 373 firmas brasileiras no período de 1997 a 2004, agrupando-as conforme a intensidade de capital. Os autores investigaram também o papel da multicolinearidade entre as variáveis sob as estimativas dos parâmetros. Sob uma abordagem bayesiana, os autores testaram vinte modelos econométricos e verificaram que o modelo de efeito fixo considerando uma regressão *ridge*²³ seria preferível quando comparados com os demais. Utilizando um modelo com regressão *ridge*, as estimativas revelaram que firmas mais intensivas em capital são mais restritas financeiramente e confiam mais em recursos externos para seus investimentos quando comparadas com as firmas menos intensivas em capital. A explicação para tal resultado deve-se, provavelmente, aos baixos índices de rentabilidade, altos custos fixos e estrutura de propriedade mais diversificada apresentados pelas firmas mais intensivas em capital. As conclusões deste estudo corroboram com os resultados de Kalatzis et al. (2008) e Kalatzis e Azzoni (2009), nos quais identificou-se que firmas mais intensivas em capital enfrentam nível mais altos de restrição financeira em suas decisões de investimento.

Os estudos citados e vários outros têm investigado e tentado suplantar o problema referente à escolha do critério utilizado para classificar as firmas em restritas ou não-restritas

²³ A regressão *ridge* é uma forma de introduzir informação *a priori* na estimação e foi inicialmente considerada por Hoerl (1962) para resolver problemas relacionados à engenharia química. Para mais informações, consulte Birkes e Dodge (1993).

financeiramente. O fluxo de caixa é amplamente considerado para detectar a presença de restrição financeira, mas a adição desta variável aos modelos econométricos não é suficiente para identificar a restrição financeira nas decisões de investimento das firmas. Coeficientes significantes sobre os termos do fluxo de caixa poderiam refletir restrições financeiras ou rentabilidade futura. Neste sentido, o fato dessa variável apresentar-se significativa para explicar o investimento na maioria dos estudos não implica que as firmas sejam restritas financeiramente. Pode ser que o investimento das firmas consideradas menos restritas financeiramente seja mais sensível à disponibilidade de fundos internos do que o investimento das firmas consideradas mais restritas financeiramente.

Uma intensa discussão presente na literatura do investimento refere-se ao critério utilizado para classificar as firmas em grupos de maneira que seja possível isolar os efeitos das restrições financeiras sobre as decisões de investimento da firma. A utilização de variáveis financeiras que explicam o comportamento do investimento e que, ao mesmo tempo controlam a lucratividade futura da firma, tem sido uma alternativa no processo de agrupamento de firmas.

No estudo de Hu e Schiantarelli (1998) descrito anteriormente, os autores chamaram atenção para alguns problemas referentes à questão da forma como as firmas são classificadas. O primeiro problema refere-se aos critérios de classificação considerados na maioria dos estudos empíricos, os quais são de caráter exógeno, isto é, escolhidos *a priori* antes que a classificação seja realizada. O segundo problema refere-se ao fato de os critérios de classificação mais utilizados na literatura do investimento fixar as firmas em um único grupo durante todo o período considerado, sem permitir uma permutação das firmas entre os grupos no decorrer do tempo. Este problema é facilmente contornado utilizando características que variam no tempo no critério de classificação das firmas. Outro problema refere-se à quantidade de características consideradas na classificação das firmas, uma vez que, à medida que aumenta a quantidade de variáveis consideradas, aumenta também o número de parâmetros a ser estimado, o que pode resultar em inferências inconsistentes dependendo do método de estimação utilizado.

Diante dos problemas citados por Hu e Schiantarelli (1998), nota-se que até o momento, não foram encontrados na literatura do investimento estudos empíricos que considerassem um critério totalmente endógeno para classificar uma amostra de firmas, sem se preocupar com a quantidade de variáveis utilizadas.

Baseado em tal fato e considerando a intensa discussão sobre o papel das variáveis de liquidez nas decisões de investimento, este trabalho busca preencher esta lacuna existente na

literatura do investimento, propondo um critério de classificação diferente daqueles utilizados pela maioria dos estudos realizados na literatura.

Neste trabalho os grupos de firmas são identificados de forma totalmente endógena por meio da utilização de técnicas de agrupamento sob uma abordagem bayesiana. Considerando um modelo econométrico bayesiano, misturas de distribuições são utilizadas para agrupar as firmas em grupos distintos e tentar identificar a restrição financeira em suas decisões de investimento. Esta metodologia é implementada sob uma abordagem bayesiana, a qual permite a obtenção de estimativas precisas e consistentes para os parâmetros de interesse, e proporciona uma classificação endógena das firmas.

Enquanto nos estudos descritos neste capítulo a classificação das firmas é feita de forma exógena, por meio de um critério de classificação escolhido *a priori*, no presente estudo buscou-se utilizar um critério de classificação baseado nas características próprias das firmas, isto é, considerando apenas informações contidas na amostra.

3 – Modelos Bayesianos para Dados Longitudinais

Neste trabalho buscou-se realizar um agrupamento bayesiano endógeno de uma amostra de 564 firmas brasileiras no período de 1996 a 2006 a fim de identificar grupos de firmas e testar a presença de restrição financeira em suas decisões de investimento. A abordagem considerada como critério de classificação das firmas para identificar a presença de restrição financeira em suas decisões de investimento é baseada na utilização de técnicas de agrupamento sob um enfoque bayesiano. No procedimento desenvolvido, são consideradas características próprias das firmas, tais como investimento, fluxo de caixa, vendas e financiamento. Nesta abordagem, distribuições *a priori* são especificadas para os parâmetros do modelo de investimento, classificando-o como sendo de efeito fixo ou de efeito aleatório.

As estimativas para os parâmetros do modelo dinâmico de investimento utilizado foram obtidas utilizando o *software* WinBUGS (Spiegelhalter et al. 1995), considerando as quantidades iniciais como fixas, representadas pelo vetor de médias anuais correspondentes ao investimento das firmas. O critério das ordenadas das densidades preditivas foi considerado na seleção e discriminação do modelo mais adequado aos dados e com melhor poder de predição para observações futuras.

O capítulo está estruturado em duas seções. Na seção 3.1, apresenta-se uma abordagem bayesiana com dados longitudinais. Esta seção contém uma subseção onde são descritos de forma sucinta o amostrador de Gibbs e o critério de convergência proposto por Gelman e Rubin. Na seção 3.2, uma breve introdução sobre aspectos relacionados as técnicas de agrupamento voltados para mistura de distribuições é apresentada, juntamente com as distribuições *a priori* e as funções de verossimilhanças com variáveis latentes, correspondentes a modelos bayesianos considerando misturas de distribuições normal.

3.1 – Abordagem Bayesiana com Dados Longitudinais

Uma importante diferença entre estatística frequentista e estatística bayesiana refere-se à interpretação do conceito de probabilidade. Para os defensores da estatística frequentista, a probabilidade de um evento é dada pelo limite de sua frequência relativa a longo-prazo, isto é, é a frequência com que o evento ocorre quando a quantidade de dados aumenta sem limite. No entanto, essa interpretação nem sempre é possível na prática. Quando eventos raros são estudados, por exemplo, grandes amostras podem não ser disponíveis, levando os frequentistas a recorrerem a resultados teóricos. Diferentemente, a estatística bayesiana atribui

à probabilidade uma interpretação subjetiva como sendo o grau de convicção que é atualizado quando informações ou dados são adquiridos.

Relacionado à probabilidade está o conceito de incerteza. Para os frequentistas, as distribuições de probabilidade das variáveis não estão sujeitas a incerteza, uma vez que a aleatoriedade é vista como fonte de incerteza nas realizações de uma variável aleatória. Ao contrário, para a estatística bayesiana, a incerteza é implicitamente incorporada nas distribuições de probabilidade, as quais são consideradas incertas e sujeitas a modificações quando novas informações estão disponíveis.

Partindo do princípio de que não há impedimento no ajuste de modelos com uma grande quantidade de parâmetros e com especificações de probabilidade complicadas, os problemas relacionados à quantificação da incerteza sobre as inferências realizadas sobre um conjunto de dados são solucionados utilizando a abordagem bayesiana.

Assim como na inferência frequentista, a inferência bayesiana trabalha na presença de observações cujos valores são inicialmente incertos e descritos por uma distribuição de probabilidades. As características de interesse que se deseja conhecer para obter uma descrição completa do processo em estudo são representadas por quantidades desconhecidas θ . Na especificação de um modelo bayesiano são consideradas duas fontes de informações sobre as quantidades desconhecidas θ , sendo uma proveniente das informações contidas nos dados y e a outra denominada de informações *a priori*, as quais não estão contidas nos dados²⁴. As informações contidas nos dados são representadas pela função de verossimilhança, denotada por $f(y|\theta)$, a qual fornece as chances de cada valor θ ter levado àquele valor observado para y . A função de verossimilhança tem um papel de extrema importância tanto na inferência bayesiana quanto na frequentista. Esta função dá origem ao Princípio da Verossimilhança, que postula que toda a informação contida na amostra está representada na função de verossimilhança.

A segunda fonte de informação, chamada de informação *a priori*, denotada por $p(\theta)$, representa as informações que não estão presentes nos dados. A informação *a priori* sobre uma quantidade desconhecida θ é a distribuição de probabilidade que expressa o grau de incerteza quanto aos parâmetros antes de considerar os dados, e tem por objetivo proporcionar

²⁴ A diferença entre os métodos bayesiano e frequentista está na admissão desta fonte de informação, uma vez que, enquanto no método frequentista informações *a priori* não são consideradas por serem não-observáveis, o método bayesiano sempre incorpora essa informação mesmo que esta não seja precisa.

a introdução do conhecimento prévio na estimação dos parâmetros²⁵. Este conhecimento pode ser introduzido utilizando um método subjetivo ou objetivo. O primeiro caso define uma situação em que não se tem qualquer conhecimento sobre a distribuição de probabilidade *a priori* o que significa que estas distribuições teriam como base a opinião ou intuição do pesquisador ou de outros especialistas. Considerando o método objetivo, com ou sem nenhuma informação prévia, é possível atribuir uma distribuição de probabilidade *a priori*. Sob a hipótese de nenhuma informação, situação caracterizada pela ocorrência de todos os possíveis valores de θ igualmente prováveis, uma distribuição *a priori* não-informativa seria atribuída.

Quando estas duas fontes de informações são combinadas, obtém-se a função densidade de probabilidade *a posteriori*, denotada por

$$p(\theta|y) = \frac{f(y|\theta)p(\theta)}{p(y)} \quad (3.1)$$

O termo $p(y)$ é chamado de constante normalizadora e é calculado da seguinte forma:

$$p(y) = \begin{cases} \sum_{\theta} p(\theta) p(y|\theta), & \text{quando } \theta \text{ é uma variável aleatória discreta;} \\ \int_{-\infty}^{\infty} p(\theta) p(y|\theta) d\theta, & \text{quando } \theta \text{ é uma variável aleatória contínua.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Com y fixo, $p(y)$ não depende de θ e tem a função de evitar que a integral da densidade *a posteriori* seja imprópria, isto é, que $\int p(\theta|y) d\theta \neq 1$. Considerando $p(y)$ constante, a densidade *a posteriori* pode ser escrita como

$$p(\theta|y) \propto f(y|\theta)p(\theta) \quad (3.3)$$

A expressão (3.1) é conhecida como Fórmula de Bayes e mostra que a distribuição *a posteriori* é proporcional ao produto da função de verossimilhança pela distribuição *a priori* de θ , como mostrado na expressão (3.3). A partir da distribuição *a posteriori* é possível fazer inferência sobre o parâmetro de interesse.

Inferências sobre uma quantidade observável desconhecida podem ser feitas através das densidades preditivas *a priori* e *a posteriori*, definida respectivamente como:

²⁵ O impacto da distribuição *a priori* sobre a distribuição *a posteriori* depende do tamanho da amostra tal que, quanto maior o número de observações presentes na amostra, menor é a influência da distribuição *a priori*.

$$p(y) = \int p(y, \theta) d\theta = \int p(y|\theta)p(\theta) d\theta \quad (3.4)$$

$$p(\tilde{y}|y) = \int p(\tilde{y}, \theta|y) d\theta = \int p(\tilde{y}|\theta, y)p(\theta|y) d\theta \quad (3.5)$$

A expressão dada em (3.4) é chamada densidade preditiva *a priori*, pois é a distribuição de uma quantidade observável e não é condicional às observações prévias do processo. Esta expressão é chamada também de distribuição marginal de y . A expressão (3.5) é denominada distribuição preditiva *a posteriori*. O termo *a posteriori* aplica-se porque a distribuição é feita condicionalmente sobre os dados observados y . Antes de observar os dados, a densidade preditiva é útil para checar a adequação da distribuição *a priori* através das predições que ela fornece para os dados y . Depois de observar os dados, a densidade preditiva serve para testar o modelo de uma forma geral.

Questões referentes à escolha da distribuição *a priori* persistem na literatura sobre a teoria bayesiana. Diversos autores afirmam que a incerteza referente ao conhecimento de um determinado parâmetro pode ser representada por uma distribuição *a priori* com grande variância. Uma maneira bastante utilizada na especificação da *priori* é através da inspeção da função de verossimilhança, proporcionando uma idéia da forma da distribuição condicional sobre um ou mais parâmetros, que poderá ser assumida como a distribuição *a priori*. Se as distribuições *a priori* e *a posteriori* pertencerem à mesma família paramétrica, tem-se uma distribuição *a priori* conjugada²⁶. A utilização de tais distribuições proporciona uma grande facilidade prática e conveniência computacional, já que apresenta uma forma conhecida. Um dos problemas relacionados ao uso de distribuições *a prioris* conjugadas é que muitas vezes elas não representam a incerteza *a priori* adequadamente, e em modelos mais complexos, sua utilização não é possível, o que torna as inferências menos transparentes e computacionalmente mais complicadas.

Existe muita controvérsia entre os bayesianos sobre a especificação de distribuições *a priori* não-informativas devido ao fato que muitas vezes são consideradas distribuições *a priori* impróprias, isto é, com integral diferente de um, contradizendo a teoria de probabilidades. Diferentes definições são atribuídas à distribuição *a priori* não-informativa, mas a especificação mais aceita é a distribuição *a priori* de Jeffrey.

²⁶ Informações sobre distribuições *a priori* conjugadas podem ser encontradas em Gelman et al. (1995). Os autores mostraram que a distribuição *a priori* Beta é uma família conjugada para a verossimilhança Binomial, já que pertencem à mesma família de distribuições.

Geralmente, a *priori* de Jeffrey de um vetor de parâmetros θ dada por²⁷:

$$p(\theta) \propto |I(\theta)|^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

em que $I(\theta)$ é a medida de informação esperada de Fisher, dada por

$$I(\theta) = E \left[\left(\frac{\partial \log f(y|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -E \left[\left(\frac{\partial^2 \log f(y|\theta)}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (3.7)$$

Em alguns modelos pode acontecer de não serem atribuídos valores numéricos fixos para os parâmetros da distribuição *a priori*, os quais são chamados de hiperparâmetros, para diferenciá-los dos parâmetros de interesse. Neste caso, a especificação da distribuição *a priori* é dividida em estágios. Teoricamente, não há restrição quanto ao número de estágios, mas devido às complexidades resultantes, as distribuições *a priori* hierárquicas são especificadas em dois ou três estágios. Além disso, devido à dificuldade de interpretação dos hiperparâmetros em estágios mais altos, é prática comum especificar distribuições *a priori* não-informativas para estes níveis.

Definidas as distribuições *a priori* e combinando-as com a função de verossimilhança, obtém-se a distribuição *a posteriori* dos parâmetros. Geralmente, o cálculo da distribuição *a posteriori* pode não ser possível devido ao complexo processo no cálculo das integrais que compõem tal distribuição mesmo em modelos simples com poucos parâmetros. Quando estas integrais não podem ser calculadas analiticamente, aproximações através de métodos numéricos devem ser usadas. O mesmo acontece para modelos complexos, com grandes quantidades de parâmetros. Para estes modelos, as amostras das distribuições *a posteriori* também não podem ser obtidas diretamente. Nestes casos, as densidades *a posteriori* para os parâmetros podem ser calculadas utilizando algoritmos de simulação através do método de Monte Carlo por cadeia de Markov (MCMC). Embora a utilização de cadeia de Markov em simulações seja um tanto complicada, quando usada com cautela é a maneira mais simples e fácil de resolver determinados problemas obtendo resultados confiáveis.

Uma cadeia de Markov é definida como sendo uma seqüência de variáveis aleatórias $\{\theta_1, \dots, \theta_{t-1}, \theta_t, \theta_{t+1}, \dots, \theta_p\}$, com dimensão p , de forma que a distribuição de θ_t depende somente de θ_{t-1} , $t \leq p$. Em outras palavras, uma seqüência de variáveis aleatórias

²⁷ Se θ for um vetor, tem-se $p(\theta) \propto |I(\theta)|^{\frac{1}{2}}$, onde $I(\theta) = E \left[\left(\frac{\partial \log f(y|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -E \left[\left(\frac{\partial^2 \log f(y|\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right) \right]$.

$\{\theta_1, \dots, \theta_{t-1}, \theta_t, \theta_{t+1}, \dots, \theta_p\}$ caracteriza uma cadeia de Markov se a probabilidade de θ_t pertencer ao espaço amostral Θ depender apenas do seu valor anterior, θ_{t-1} , isto é, se:

$$P(\theta_t \in \Theta | \theta_1, \dots, \theta_{t-1}) = P(\theta_t \in \Theta | \theta_{t-1}) \quad (3.8)$$

A expressão (3.8) mostra que a probabilidade de θ_t pertencer ao espaço amostral Θ só depende de seu valor passado mais recente θ_{t-1} . A idéia da simulação usando uma cadeia de Markov é simular um passeio aleatório no espaço amostral Θ que converge para uma distribuição estacionária, ou de equilíbrio, dada pela distribuição *a posteriori* conjunta dos parâmetros, $p(\theta | y)$. O objetivo desta simulação é gerar um processo de Markov com distribuição estacionária especificada $p(\theta | y)$ e simular valores até que a distribuição da amostra atual aproxime-se o máximo possível da distribuição de equilíbrio. Quando a dimensão p do vetor aleatório $\{\theta_1, \dots, \theta_{t-1}, \theta_t, \theta_{t+1}, \dots, \theta_p\}$ for muito grande, a integração para obter as densidades marginais de cada parâmetro torna-se inviável. Neste caso, uma alternativa é a utilização de métodos baseados em simulação estocástica, como por exemplo, o amostrador de Gibbs, descrito na subseção seguinte.

3.1.1 – Amostrador de Gibbs e Critério de Convergência de Gelman e Rubin

O amostrador de Gibbs é um algoritmo com cadeia de Markov amplamente utilizado em problemas multidimensionais. Foi introduzido por Geman e Geman (1984) com o intuito de utilizá-lo em problemas de reconstrução de imagens. Posteriormente, Gelfand e Smith (1990) mostraram como este algoritmo poderia ser utilizado na obtenção de amostras através das distribuições *a posteriori* e, conseqüentemente, como ser usado para resolver problemas relacionados à teoria bayesiana. O algoritmo para o amostrador de Gibbs é um esquema iterativo de amostragem de uma cadeia de Markov, cujo núcleo de transição é formado pelas distribuições condicionais completas dos parâmetros do modelo. É um método de simulação em que os vetores de parâmetros são particionados em blocos e que define a densidade de transição como o produto das densidades condicionais completas $\pi(\theta_t | \theta_{-t})$, onde $\theta_{-t} = (\theta_1, \dots, \theta_{t-1}, \theta_{t+1}, \dots, \theta_p)$ é o vetor aleatório de dimensão $p-1$. A utilização deste algoritmo só é possível se todas as densidades condicionais completas *a posteriori*

$\pi_i(\theta_i) = \pi(\theta_i | \boldsymbol{\theta}_{-i})$, $i = 1, \dots, p$ forem conhecidas²⁸. Dados os valores iniciais $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_p^{(0)})$, o algoritmo gera um novo vetor $\boldsymbol{\theta}^{(j)} = (\theta_1^{(j)}, \dots, \theta_p^{(j)})$ a partir de $\boldsymbol{\theta}^{(j-1)} = (\theta_1^{(j-1)}, \dots, \theta_p^{(j-1)})$, utilizando a densidade condicional completa nas sucessivas gerações dos valores:

$$\begin{aligned} \theta_1^{(j)} &\sim \pi(\theta_1 | y, \theta_2^{(j-1)}, \dots, \theta_p^{(j-1)}) \\ \theta_2^{(j)} &\sim \pi(\theta_2 | y, \theta_1^{(j)}, \theta_3^{(j-1)}, \dots, \theta_p^{(j-1)}) \\ &\vdots \\ \theta_p^{(j)} &\sim \pi(\theta_p | y, \theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)}, \dots, \theta_{p-1}^{(j)}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Cada iteração é composta por p passos e no final da iteração, tem-se um novo vetor $\boldsymbol{\theta}^{(j)} = (\theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)}, \dots, \theta_p^{(j)})$. Este ciclo é repetido um número suficiente de vezes para que a cadeia atinja um estado de equilíbrio, isto é, até que a distribuição da amostra gerada esteja bastante próxima da distribuição estacionária. À medida que o número de iterações aumenta, a cadeia se aproxima da condição de equilíbrio e a convergência é atingida quando a distribuição se aproxima da distribuição de equilíbrio.

Gelman et al. (1995) destacaram duas dificuldades existentes na verificação do processo de convergência do algoritmo. A primeira dificuldade refere-se à presença de correlação entre os valores dentro da seqüência gerada, o que diminui a precisão das inferências. Uma forma de contornar o problema de correlação serial é escolher uma seqüência de valores simulados não sucessivos, isto é, selecionar valores espaçados por uma defasagem, de maneira que se evite a correlação entre os valores gerados.

A segunda dificuldade refere-se ao número de iterações realizadas, uma vez que se as iterações do processo não forem suficientes para a convergência do algoritmo, as simulações podem não ser representativas da distribuição estacionária. Outro problema relacionado ao número de iterações realizadas é que, mesmo quando as simulações efetuadas atingem a convergência desejada, a presença de dependência dos valores iniciais pode comprometer a convergência à distribuição de equilíbrio. Para evitar que esta dependência comprometa o algoritmo, os valores simulados nas primeiras iterações de cada seqüência gerada é

²⁸ Quando as densidades condicionais *a posteriori* dos parâmetros não têm formas conhecidas, o algoritmo Metropolis-Hastings é utilizado. Para mais informações sobre o algoritmo Metropolis-Hastings, ver Chib e Greenberg (1996).

desconsiderada (*burn-in*) e a atenção é focada nas iterações restantes da cadeia²⁹. A convergência do algoritmo é supostamente atingida em uma iteração cuja distribuição esteja arbitrariamente próxima da distribuição de equilíbrio.

Neste trabalho, a verificação formal da convergência dos parâmetros é analisada através do método proposto por Gelman e Rubin (1992). Os autores propuseram um método de convergência baseado na simulação de várias cadeias de Markov, partindo de pontos iniciais dispersos, para avaliar a convergência do algoritmo. O método é baseado na comparação da variabilidade existente entre as cadeias e entre os valores de cada uma das cadeias geradas a partir do *burn-in*, e assume a convergência apenas quando a variância entre as cadeias for bem menor que a variância entre os valores de cada cadeia.

As variâncias entre as cadeias e entre os valores de cada uma das cadeias geradas são definidas da seguinte forma:

$$\begin{cases} B = \frac{N}{J-1} \sum_{j=1}^J (\bar{\theta}_j - \bar{\theta}_\cdot)^2, \text{ onde } \bar{\theta}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta_{ij} \text{ e } \bar{\theta}_\cdot = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \bar{\theta}_j \\ W = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \sigma_j^2, \text{ onde } \sigma_j^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\theta_{ij} - \bar{\theta}_j)^2 \end{cases} \quad (3.10)$$

onde B é a variância entre as cadeias e W é a variância dentro das cadeias, j representa o número de cadeias paralelas, $j = 1, \dots, J$ e i representa o comprimento da cadeia, $i = 1, \dots, N$.

A variância estimada \hat{V} é definida como:

$$\hat{V}(\theta | y) = \frac{N-1}{N} W + \frac{1}{N} B \quad (3.11)$$

O indicador de convergência proposto por Gelman e Rubin (1992) é definido como:

$$\sqrt{\hat{R}} = \sqrt{\frac{\hat{V}(\theta | y)}{W}} \quad (3.12)$$

sendo \hat{R} o valor estimado para o fator de redução potencial de escala. Os autores propuseram monitorar a convergência da simulação iterativa estimando o fator pelo qual a escala da distribuição atual de θ pode ser reduzida se a simulação continuasse à medida que $N \rightarrow \infty$. A convergência do algoritmo é assumida quando $\sqrt{\hat{R}} \approx 1$. Quando o fator de redução de escala $\sqrt{\hat{R}}$ apresentar um valor elevado, recomenda-se que o número de simulações seja aumentado.

²⁹ Quando a amostra gerada é grande o suficiente, o efeito do período de aquecimento (*burn-in*) sobre o cálculo da distribuição *a posteriori* é mínimo.

Quando a convergência é atingida, os valores gerados após o período de *burn-in* podem ser utilizados para fazer inferências sobre os parâmetros do modelo.

Muitas vezes é de interesse descrever o comportamento dos erros do modelo considerando misturas de distribuições, em vez de atribuir somente uma distribuição normal para este termo. Estes modelos possuem características distintas daquelas associadas ao modelo com uma única distribuição normal para o erro como mostra a próxima seção.

3.2 – Técnicas de Agrupamento Bayesianas: Misturas de Distribuições

Neste trabalho foram utilizados modelos com misturas de distribuições normal como proposta de agrupamento de um banco de dados em painel sob uma abordagem bayesiana. Modelos com misturas de distribuições constituem-se de ferramentas adequadas para análise de amostras com grande heterogeneidade entre as observações, as quais provavelmente são provenientes de uma população com distribuições de probabilidade com diferentes valores para a média e variância.

A utilização de modelos com mistura de distribuições têm se tornado amplamente popular em problemas que envolvem modelagem estatística e reconhecimento de padrões. Nestes modelos, uma distribuição de probabilidade é representada por uma superposição linear das distribuições componentes da mistura e são úteis para controlar a heterogeneidade não-observada entre as observações, além de capturar propriedades específicas dos dados como multimodalidade, assimetria e curtose.

A estrutura de mistura de distribuições surge devido ao fato de a origem de cada observação contida na amostra analisada ser desconhecida ou ter sido perdida. Neste sentido, cada observação é considerada ser proveniente *a priori* de uma função densidade com determinada probabilidade.

Dentre os objetivos ao utilizar-se de modelos com misturas de distribuições está a determinação do número adequado de componentes (ou grupos) em uma mostra, principalmente quanto esta é formada por observações heterogêneas ou por dados incompletos. A reconstituição dos grupos também é de interesse quando misturas de distribuições são consideradas com o intuito de obter estimadores para os parâmetros dos diferentes grupos.

Modelos com mistura de distribuições também são frequentemente utilizados quando se tem por objetivo o agrupamento de observações ou a identificação de grupos homogêneos

em uma determinada amostra. Nesta abordagem é considerada a existência de K grupos e espera-se identificá-los a partir de um modelo com mistura de distribuições com K densidades componentes.

Visando os objetivos da utilização de modelos com mistura de distribuições, a abordagem bayesiana tem atraído grande interesse entre pesquisadores e profissionais que utilizam tais modelos, uma vez que, nesta abordagem é permitido fazer afirmações probabilísticas diretamente sobre os parâmetros desconhecidos antes que informações *a priori* sejam incluídas na análise. Além disso, considerando uma abordagem bayesiana, a complexa estrutura dos modelos com mistura de distribuições pode ser decomposta em um conjunto de estruturas mais simples considerando variáveis latentes.

Uma das primeiras aplicações de modelos com mistura de distribuições foi considerada no ajustamento de um modelo com uma mistura de duas funções densidades de probabilidade com diferentes médias e variâncias em proporções distintas para analisar um conjunto de dados referentes a medidas do corpo de caranguejos. A assimetria observada no histograma destas observações poderia indicar que na população de caranguejos estavam presentes duas espécies diferentes. Utilizando um modelo com mistura de distribuições, verificou-se a existência de duas espécies de caranguejos na amostra analisada e os dados foram modelados considerando uma soma ponderada de duas distribuições normal da seguinte forma:

$$f(x) = pN(\mu_1, \sigma_1) + (1-p)N(\mu_2, \sigma_2) \quad (3.13)$$

onde p representa a proporção de caranguejos na população para uma das espécies, cuja distribuição de probabilidade é definida como uma distribuição normal com média μ_1 e desvio padrão σ_1 , enquanto $(1-p)$ representa a proporção de caranguejos na população da outra espécie, cuja distribuição de probabilidade é definida como uma distribuição normal com média μ_2 e desvio padrão σ_2 . O objetivo era estimar a proporção p de observações provenientes da distribuição $N(\mu_1, \sigma_1)$ e, em seguida, obter a proporção $(1-p)$ da distribuição $N(\mu_2, \sigma_2)$.

Considere uma variável aleatória X ou vetor aleatório \mathbf{X} assumindo valores em um espaço amostral \mathcal{X} , discreto ou contínuo, univariado ou multivariado. Diz-se que X tem uma mistura finita de distribuições se a sua distribuição puder ser representada por uma função densidade de probabilidade da seguinte forma:

$$\pi(x) = \sum_{j=1}^K p_j f_j(x) = p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x) + \dots + p_K f_K(x) \quad (3.14)$$

onde $p_j > 0$, $j = 1, \dots, K$ são as proporções da mistura, satisfazendo a condição $\sum_{j=1}^K p_j = 1$;

$f_j(\cdot) \geq 0$ são as densidades componentes da mistura, sujeitas à condição que $\int_x f_j(x) dx = 1$, $j = 1, \dots, K$. Em muitas situações, as densidades componentes da mistura terão

formas paramétricas conhecidas e então $p(x)$ tem a seguinte representação:

$$\pi(x|\theta) = \sum_{j=1}^K p_j f_j(x|\theta_j) = p_1 f_1(x|\theta_1) + p_2 f_2(x|\theta_2) + \dots + p_K f_K(x|\theta_K) \quad (3.15)$$

onde θ é o vetor de parâmetros.

Não existe exigência que as densidades componentes da mistura pertençam à mesma família paramétrica, mas em muitas situações, isto acontecerá. Neste caso, a função densidade de probabilidade com mistura finita de distribuições será dada por

$$\sum_{j=1}^K p_j f(x|\theta_j) = p_1 f(x|\theta_1) + p_2 f(x|\theta_2) + \dots + p_K f(x|\theta_K) \quad (3.16)$$

A função densidade de probabilidade dada em (3.16) é expressa como uma soma ponderada das K densidades, sendo a ponderação associada a cada densidade componente da mistura dada pelas proporções p_j , $j = 1, \dots, K$.

Em muitas aplicações, os dados assumem a forma de uma amostra aleatória de observações $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$ a qual permite a construção da função de verossimilhança representada por

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^K p_j f(x_i|\theta_j) \right] \quad (3.17)$$

A expressão da função de verossimilhança (3.17) pode ser simplificada utilizando variáveis latentes, as quais representam a presença de informações ocultas nos dados. Usando variáveis latentes, um vetor de variáveis aleatórias indicadoras não-observadas $\mathbf{z}_j = (z_{1j}, z_{2j}, \dots, z_{Nj})$, $j = 1, \dots, K$ é incorporado à amostra $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$.

As variáveis indicadoras não-observadas são consideradas no modelo para classificar a densidade componente à qual a observação pertence, e são representadas por:

$$\begin{cases} z_{ij} = 1, & \text{se a } i\text{-ésima observação é proveniente da } j\text{-ésima componente da mistura;} \\ z_{ij} = 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.18)$$

em que $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N$ são independentes e identicamente distribuídas conforme uma distribuição multinomial $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N \stackrel{iid}{\sim} Mult(1; q_{i1}, \dots, q_{iK})$, sendo

$q_{ij} = p_j f(x_i | \theta_j) / \sum_{j=1}^K p_j f(x_i | \theta_j)$, para $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, K$, representando a probabilidade da i -ésima observação pertencer à j -ésima componente da mistura.

A distribuição conjunta dos dados observados $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$ e das variáveis latentes $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N)$ pode ser representada pela seguinte função de verossimilhança:

$$L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Z}) = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^K [p_j f(x_i | \theta_j)]^{z_{ij}} \quad (3.19)$$

Combinando-se a distribuição *a priori* atribuída aos parâmetros do modelo com a função de verossimilhança, obtém-se a densidade *a posteriori*. Se as densidades condicionais dos parâmetros tiverem formas conhecidas, é possível a utilização do amostrador de Gibbs, descrito na seção anterior.

Dois casos especiais são considerados quando misturas de duas e três distribuições normal são consideradas no modelo. Para duas distribuições normal, a função de verossimilhança pode ser expressa como:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^2 p_j f(\varepsilon_i | \mu_j, \sigma_j^2) \right] \quad (3.20)$$

em que $\boldsymbol{\theta} = (\mu_j, \sigma_j^2, p_j)$. Introduzindo variáveis latentes na função de verossimilhança, tem-se que $\mathbf{Z} = (z_{i1}, z_{i2})$ segue uma distribuição de Bernoulli, isto é, $z_i \sim Bernoulli(h_{i1})$ e $\pi(\mathbf{Z}_i) \propto h_{i1}^{z_{i1}} (1 - h_{i1})^{z_{i2}}$, em que $h_{i1} = p_1 f_1(\varepsilon_{i1} | \mu_1, \sigma_1^2) / \sum_{j=1}^2 p_j f_j(\varepsilon_{i1} | \mu_j, \sigma_j^2)$.

A distribuição *a posteriori* conjunta para os parâmetros $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Z})$ é dada por

$$\pi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Z} | \mathbf{x}) \propto \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^2 p_j f(\varepsilon_i | \mu_j, \sigma_j^2)^{z_{ij}} \quad (3.21)$$

Para mistura com três distribuições normal no modelo, a função de verossimilhança é representada da seguinte forma:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^3 p_j f(\varepsilon_i | \mu_j, \sigma_j^2) \right] \quad (3.22)$$

No caso de mistura com três distribuições normal, considera-se o vetor de variáveis latentes $\mathbf{Z}_i = (Z_{i1}, Z_{i2}, Z_{i3})$, sendo que $\mathbf{Z}_i \stackrel{iid}{\sim} Mult(1; q_{ij})$, isto é, $\pi(\mathbf{Z}_i) \propto q_{i1}^{Z_{i1}} \cdot q_{i2}^{Z_{i2}} \cdot q_{i3}^{Z_{i3}}$, onde $q_{ij} = p_j f_j(\varepsilon_i | \mu_j, \sigma_j^2) / \sum_{j=1}^3 p_j f_j(\varepsilon_i | \mu_j, \sigma_j^2)$. A distribuição *a posteriori* conjunta para os parâmetros $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Z})$ é dada por

$$\pi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Z} | \mathbf{x}) \propto \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^3 p_j f_j(\varepsilon_i | \mu_j, \sigma_j^2)^{Z_{ij}} \quad (3.23)$$

As densidades *a posteriori* conjuntas podem ser calculadas utilizando-se algoritmos de simulação pelo método MCMC.

Modelos com misturas de distribuições são aplicados a dados em que as observações se originam de vários grupos e as afiliações dos grupos não são conhecidas. Um dos maiores problemas em modelos com mistura de distribuições refere-se ao número de componentes. Na maioria das análises de modelagem com mistura, o número de componentes é assumido conhecido. Se tal quantidade é aleatória, pode-se considerar uma distribuição *a priori* discreta sobre possíveis valores da quantidade de componentes e realizar uma análise bayesiana. No entanto, encontrar uma distribuição *a priori* adequada para essa quantidade não é uma tarefa fácil.

Uma questão freqüente na literatura sobre misturas de distribuições refere-se ao problema de identificabilidade, também chamado de *label switching*³⁰, o qual ocorre quando os parâmetros são diferentes, mas a distribuição de probabilidade é a mesma.

A falta de identificabilidade dos componentes em um modelo com mistura de distribuições surge quando distribuições *a priori* permutáveis são atribuídas aos parâmetros. Com isso, as distribuições *a posteriori* serão invariantes às permutações dos parâmetros, resultando em distribuições *a posteriori* marginais idênticas para cada componente da mistura, uma vez que a função de verossimilhança será a mesma para qualquer permutação considerada para os parâmetros. Adicionalmente, a simetria na distribuição *a posteriori* dos parâmetros causa problemas na realização de inferências ao considerar os componentes individuais da mistura de distribuições. Isso ocorre devido ao fato de não haver informações que permitam fazer uma distinção entre as densidades componentes na distribuição *a priori*

³⁰ O termo *label switching* foi usado para descrever a invariância da função de verossimilhança sob qualquer permutação considerada para os componentes da mistura. Em um contexto bayesiano, esta invariância pode resultar em distribuições *a posteriori* altamente simétricas e multimodais, tornando difícil fazer inferências a partir de tais distribuições.

ou na função de verossimilhança, uma vez que as informações disponíveis referentes aos parâmetros são as mesmas para todas as componentes da mistura.

A motivação para a utilização de restrições de identificabilidade sobre os parâmetros do modelo com mistura de distribuições deve-se ao fato de tal restrição quebrar a simetria existente na distribuição *a posteriori* dos parâmetros. De acordo com Jasra et al. (2005), “*Since the likelihood and prior are invariant to the labelling of the parameters, if we impose an identifiability constraint on the parameter space we break the symmetry in the posterior and the labelling problem should be solved*”, (p. 59). Dessa forma, ao impor uma restrição de identificabilidade sobre os parâmetros do modelo, a realização de inferências sensíveis aos parâmetros correspondentes a cada densidade componente da mistura seria permitida.

Considerando uma abordagem bayesiana, o problema da invariância da função de verossimilhança sob qualquer permutação considerada para os componentes da mistura, não é facilmente resolvido como ocorre na inferência frequentista. Enquanto restrições artificiais de identificabilidade impostas por praticidade e conveniência referentes às inferências podem ser facilmente consideradas em inferência frequentista, no contexto bayesiano estas restrições nem sempre executam adequadamente.

Ao considerar restrições de identificabilidade sobre os parâmetros de modelos com misturas de distribuições, tem-se que em cada iteração do processo de simulação os valores gerados são permutados de forma que a restrição imposta seja satisfeita. Uma alternativa à utilização de restrições de identificabilidade sobre os parâmetros de modelos com misturas de distribuições é impor uma restrição após a estimação dos parâmetros. Stephens (1997) mostrou que “*inference conditional on an identifiability constraint can be performed when the constraint is imposed after the MCMC run*”, (p.59).

A questão das restrições de identificabilidade está sob debate na literatura referente a misturas de distribuições. Stephens (1997) e Celeux (1997) aproveitaram o estudo de Richardson e Green (1997) para manifestar suas preocupações com o problema relacionado a restrições de identificabilidade. Stephens (1997) ressaltou que em alguns casos impor uma ordem nas médias ou nas variâncias dos parâmetros das densidades componentes da mistura não é o procedimento mais apropriado, exigindo estratégias mais sofisticadas. O autor considerou um exemplo sob uma abordagem bayesiana para ilustrar o problema ao impor uma restrição de identificabilidade na estimação dos parâmetros. Duas restrições foram consideradas, sendo uma correspondente às médias e a outra sobre as variâncias. Os resultados mostraram que ambas as restrições de identificabilidade falharam ao separar a

amostra em grupos com médias e variâncias satisfazendo as restrições consideradas, sendo então necessário utilizar outro critério para resolver o problema da identificabilidade.

Os comentários de Celeux (1997) também ficaram restritos ao problema da invariância da função de verossimilhança independente da permutação dos parâmetros considerada, tendo como consequência uma distribuição *a posteriori* simétrica e multimodal. O autor argumentou que impor uma restrição de ordem nas médias das densidades componentes da mistura não é uma solução adequada para o problema de identificabilidade, já que tal restrição pode alterar a forma da distribuição *a posteriori*. Como consequência, as médias das densidades que compõem o modelo com mistura poderiam ser severamente viesadas. A sugestão que o autor propõe para resolver o problema da identificabilidade é a utilização de algoritmos MCMC sem qualquer restrição sob os parâmetros e em seguida permutar os valores estimados.

A busca por soluções para o problema da identificabilidade em modelos com mistura de distribuições ficou limitada ao efeito dos algoritmos utilizados na estimação dos parâmetros das densidades componentes da mistura. Neste contexto, uma vez que as restrições de identificabilidade não necessariamente devem ser colocadas no início da simulação, pode-se fazer estimativas baseadas em distribuições *a posteriori* sem qualquer restrição e somente após a simulação considerar uma restrição nos parâmetros. Dessa forma, não haverá problemas de efeitos adversos na simulação ou estimativas viesadas para os parâmetros.

Dentre a ampla literatura referente a misturas de distribuições, podem ser citados os estudos de Diebolt e Robert (1994), Roeder e Wasserman (1997), Richardson e Green (1997) e Frühwirth-Schnatter e Kaufmann (2008), os quais têm mostrado que a abordagem com modelos considerando misturas de distribuições tornou-se bastante flexível com avanços em métodos computacionais. Na literatura sobre modelos com misturas de distribuições, o método mais utilizado para evitar problemas de identificabilidade é considerar uma restrição nas médias dos grupos, como feito nos estudos de Roeder e Wassermann (1997), Richardson e Green (1997) e Viele e Tong (2002). No entanto, de acordo com a restrição considerada, resultados distintos podem ser obtidos

Considerando a presença de cálculos de integrais referentes a distribuições *a posteriori* intratáveis na análise de modelos com mistura de distribuições sob uma abordagem bayesiana, Diebolt e Robert (1994) apresentaram métodos de aproximação para distribuição *a posteriori* e estimadores bayesianos utilizando o amostrador de Gibbs. Uma vez que distribuições *a priori* impróprias não podem ser utilizadas, os autores consideraram distribuições *a priori* não-informativas baseadas na *priori* de Jeffreys. O número de componentes da mistura foi

considerado fixo e desconhecido e, para evitar problemas de identificabilidade do modelo, Diebolt e Robert (1994) sugeriram uma restrição nas proporções da forma $p \leq 0.5$, mas afirmaram que “*although theoretically necessary for identifiability, could lead to poor estimates of p*”, (p. 374). No entanto, optaram por retirá-las devido à obtenção de melhores resultados terem sido alcançados na ausência de restrições sobre os parâmetros do modelo considerado. Diebolt e Robert (1994) concluíram que a inferência bayesiana proporciona soluções práticas aos problemas de estimação em modelos com mistura de distribuições quando comparada com outros métodos de estimação.

De acordo com Roeder e Wasserman (1997), embora modelos com mistura de distribuições normal permitam estimar distribuições *a posteriori* de forma bastante flexível, existem algumas dificuldades relacionadas a tais modelos. Os autores destacaram a presença de distribuições *a posteriori* impróprias decorrentes da utilização de distribuições *a priori* impróprias atribuídas aos parâmetros de locação, a falta de uma distribuição *a posteriori* bem definida para o número de componentes da mistura, além de os métodos de simulação não conduzirem a uma estimativa direta da distribuição *a posteriori* correspondente ao número de componentes na mistura. Roeder e Wasserman (1997) apresentaram alguns métodos práticos para resolver os problemas citados, com o objetivo de obter um método simples e prático para estimar a distribuição do número de componentes na mistura. Os autores utilizaram distribuições *a priori* não-informativas e, para evitar problemas de identificação, consideraram uma restrição nas médias assumindo que $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k$. A quantidade de componentes foi considerada fixa e desconhecida pertencente a um intervalo iniciado em 1 e com limite superior igual a uma constante conhecida. O amostrador de Gibbs e o critério de informação bayesiana (*BIC*) foram utilizados no processo de simulação e seleção do número de componentes da mistura, sendo o mais adequado aquele que maximizasse a densidade *a posteriori*. Uma maneira alternativa de estimar as densidades de modelos com mistura é utilizando o processo de Dirichlet. No entanto, uma vez que tal processo envolve problemas com densidades *a posteriori* impróprias, e que parece mais simples controlar o número de componentes diretamente, os autores optaram pelo método por eles proposto.

A maioria dos estudos sobre misturas de distribuições separam a questão de testar o número de componentes da questão referente à estimação do número de componentes. No entanto, estudos como o de Richardson e Green (1997) e Frühwirth-Schnatter e Kaufmann (2008) buscaram analisar as questões correspondentes ao número de componentes e à estimação dos parâmetros simultaneamente.

Richardson e Green (1997) consideraram uma restrição análoga à de Roeder e Wasserman (1997) para tratar do problema de identificabilidade, isto é, assumiram que $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k$. Diferente dos demais estudos, os autores estimaram simultaneamente o número de componentes da mistura e os parâmetros do modelo. A quantidade de componentes foi considerada aleatória e os autores propuseram um método de estimação utilizando o algoritmo *reversible jump* com métodos MCMC. Os autores enfatizaram a flexibilidade do método proposto na resolução de problemas envolvendo modelos com misturas de distribuições sendo o número de componentes uma quantidade aleatória.

Semelhante ao estudo de Richardson e Green (1997), Frühwirth-Schnatter e Kaufmann (2008) utilizaram misturas de distribuições para agrupar séries temporais, utilizando inferência bayesiana e métodos de simulação MCMC. Uma característica importante desse estudo é que as autoras não consideraram conhecimento *a priori* sobre qual grupo pertencia cada uma das séries temporais e também não consideraram restrições sobre o agrupamento. O método proposto consistiu em realizar a estimação do grupo que cada uma das séries temporais pertencia simultaneamente à estimação dos demais parâmetros, sendo esta a principal diferença desse estudo quando comparado com a maioria dos estudos que tratam de misturas de distribuições.

Devido à dificuldade ao considerar o número de componentes da mistura como sendo uma quantidade aleatória, a maioria dos estudos encontrados na literatura que tratam de modelos com misturas de distribuições considera o número de componentes conhecido ou desconhecido, mas fixo. Diante disso, no presente trabalho, o número de componentes da mistura é assumido ser desconhecido, mas não aleatório, e é determinado utilizando um critério de seleção de modelos.

A teoria sobre misturas de distribuições normal para um modelo apresentada nesta seção é utilizada no agrupamento bayesiano das firmas. No próximo capítulo é implementada a metodologia proposta nesta pesquisa.

4 – Decisão de Investimento e Restrição Financeira: Técnicas de Agrupamento com Abordagem Bayesiana

Neste trabalho buscou-se realizar um agrupamento bayesiano de uma amostra de firmas brasileiras a fim verificar a presença de restrição financeira nas decisões de investimento das firmas. Técnicas de agrupamento baseadas em modelos com mistura de distribuições normal foram utilizadas no agrupamento das firmas, considerando um modelo econométrico de investimento dentro de uma abordagem bayesiana. Buscando realizar um agrupamento com caráter endógeno, diferenciando-se dos trabalhos encontrados na literatura, os grupos foram determinados considerando somente características financeiras das firmas dadas pelas variáveis investimento, fluxo de caixa, vendas e financiamento.

Simultaneamente ao agrupamento das firmas, foram realizadas simulações no *software* WinBUGS para obter estimativas correspondentes aos parâmetros das variáveis do modelo considerado. Nas simulações, distribuições *a priori* foram especificadas para os parâmetros do modelo de investimento, classificando-o em modelo de efeito fixo ou modelo de efeito aleatório. As quantidades iniciais correspondentes à variável resposta defasada foram representadas por um vetor de médias anuais cujos valores foram calculados para cada firma.

O capítulo está estruturado em seções. Na seção 4.1, os dados e o modelo de investimento utilizados neste trabalho são apresentados. Na seção 4.2 são apresentadas as distribuições *a priori* para os modelos de efeito fixo e aleatório com misturas de distribuições, divididas em subseções. Enquanto na subseção 4.2.1 são especificadas as distribuições *a priori* para o modelo de efeito fixo, na subseção 4.2.2 estão as distribuições *a priori* para o modelo de efeito aleatório. A seção 4.3 contém a descrição do procedimento adotado para o agrupamento bayesiano das firmas utilizando técnicas de agrupamento. Na seção 4.4 realiza-se a seleção de modelos utilizando o critério das ordenadas das densidades preditivas e, finalmente, na seção 4.5 são apresentados os resultados juntamente com a análise e interpretação econômica.

4.1 – Dados em Painel e Modelo Econométrico Dinâmico

Para analisar o comportamento do investimento neste estudo, foram utilizados dados referentes a um conjunto de 564 firmas, acompanhadas durante um período de 11 anos, compreendido entre os anos de 1996 e 2006. As informações contidas no banco de dados tem como fonte as 500 maiores e melhores da Gazeta Mercantil – Revista Exame Maiores e

Melhores – e foi obtido pela Fundação Instituto de Pesquisas Contábeis, Atuariais e Financeiras do Departamento de Contabilidade da Universidade de São Paulo. O banco de dados contém firmas pertencentes a diversos setores, tais como Atacado e Comércio Exterior, Automotivo, Comércio Varejista, Confeccões e Têxteis, Eletroeletrônico, Farmacêutico, Higiene e Cosméticos, Mecânica, Mineração, Papel e Celulose, Plásticos e Borracha, Química e Petroquímica, Siderurgia e Metalurgia, Tecnologia e Computação, Clubes e Confederações e Serviços Públicos. As firmas pertencentes aos dois últimos setores e aquelas que não apresentavam informações todos os anos foram retiradas no banco de dados. O Índice Geral de Preços – Disponibilidade Interna (IGP – DI) foi considerado para corrigir a inflação do período considerado.

Para explicar o comportamento do investimento da firma e identificar a presença de restrição financeira, utilizou-se uma versão do modelo acelerador de investimento inicialmente proposto por Jorgenson (1963).

No presente estudo, o modelo dinâmico do investimento é representado por

$$\left(\frac{I}{K}\right)_it = \alpha_i + \omega_t + \gamma_{1j} \left(\frac{I}{K}\right)_{i,t-1} + \gamma_{2j} \left(\frac{I}{K}\right)_{i,t-1}^2 + \beta_{1j} \left(\frac{FC}{K}\right)_it + \beta_{2j} \left(\frac{V}{K}\right)_it + \beta_{3j} \left(\frac{FIN}{K}\right)_it + \varepsilon_{it} \quad (4.1)$$

em que i representa a firma, $i = 1, \dots, N$; t é o ano, $t = 1, \dots, T$; j é o grupo, $j = 1, \dots, J$; α_i é o efeito específico da firma, o qual procura contemplar o comportamento peculiar das características não-observáveis; ω_t é o componente temporal, que tem por objetivo incorporar os efeitos não-observados que variam entre os anos, mas que não variam entre as firmas; K é o estoque de capital (imobilizado); I é o investimento da firma, definido como sendo a diferença entre o estoque de capital no tempo t e $t-1$, e é representado por $I = K_t - K_{t-1}$. Quando dividido pelo estoque de capital, tem-se o investimento medido em taxa dado por $I/K_{t-1} = (K_t - K_{t-1})/K_{t-1}$.

O fluxo de caixa sobre o estoque de capital, representado por (FC/K) , foi obtido somando os valores correspondentes ao lucro líquido e a depreciação, e dividindo-se pelo imobilizado. A receita operacional líquida e o exigível a longo prazo, ambos divididos pelo imobilizado, correspondem às variáveis vendas e dívida sobre o estoque de capital, denotadas por (V/K) e (FIN/K) . O erro do modelo é dado por ε_{it} , $i = 1, \dots, N$ e $t = 1, \dots, T$. A divisão de todas as variáveis pelo estoque de capital proporciona que o investimento seja medido em taxa.

A utilização dos valores defasados da variável dependente no modelo procura contemplar o aspecto dinâmico do comportamento do investimento. A variável quadrática foi introduzida com o objetivo de refletir a presença de um comportamento não-linear no processo de ajustamento do estoque de capital. A variável (FC/K) procura considerar o efeito de possíveis restrições de liquidez sobre o comportamento do investimento, embora possa representar também o potencial de rentabilidade futura da firma. A razão (V/K) procura considerar o papel da taxa de mudança esperada no nível de vendas ou de produção, conforme o princípio inicial do modelo acelerador, em que o estoque de ativo fixo real da firma é proporcional às alterações positivas na taxa de seu produto. A introdução da variável (FIN/K) deve-se à idéia referente aos benefícios tributários da dívida e ao fato de que uma maior alavancagem pode elevar o valor da firma.

Dados em painel ou longitudinais são formados por informações sobre vários indivíduos observados durante um período de tempo e possuem a vantagem de permitir a consideração de características próprias dos indivíduos contidos na amostra, além de proporcionar a realização de uma análise dinâmica do modelo devido à disposição das observações em séries temporais. Além disso, ao utilizar dados em painel, o pesquisador dispõe de um grande número de observações, maior grau de liberdade na estimação dos parâmetros e uma redução na colinearidade entre as variáveis explicativas, melhorando assim a eficiência das estimativas econométricas³¹. No entanto, embora a utilização apresente vantagens, dados em painel são propensos à existência de heterogeneidade por considerar micro unidades como indivíduos, empresas, países, etc.

A fim de amenizar os problemas causados pela presença de heterogeneidade entre as observações, a estimação por dados em painel considera explicitamente a introdução de um efeito específico da firma e um efeito temporal no modelo, os quais têm por finalidade representar quantidades não-observáveis. Enquanto o efeito específico da firma procura contemplar o comportamento peculiar das características não-observáveis, como por exemplo, a capacidade gerencial, que é específica para cada firma, o componente temporal procura incorporar o efeito de todas as variáveis observadas e não-observadas que não variam entre as firmas, mas que variam entre anos.

Sob uma abordagem bayesiana, os efeitos específicos da firma e temporal são quantidades aleatórias e desconhecidas. No entanto, dependendo da distribuição *a priori*

³¹ Hsiao (2003) argumenta que ignorar a heterogeneidade dos parâmetros entre séries temporais e dados *cross-sectional* pode conduzir a estimadores inconsistentes ou sem sentido.

atribuída a esses efeitos, pode-se classificar o modelo como sendo de efeito fixo ou efeito aleatório. O modelo é considerado como sendo de efeito fixo se forem atribuídas distribuições *a priori* fixas para os efeitos específicos da firma e temporal. Por outro lado, se forem atribuídas distribuições *a priori* com algum dos hiperparâmetros desconhecido, tem-se um modelo de efeito aleatório.

Decidir qual dos modelos – de efeito fixo ou de efeito aleatório – é o mais apropriado não é uma tarefa fácil. Enquanto a estimação considerando o modelo como sendo de efeito aleatório permite fazer inferência sobre a população como um todo, no modelo de efeito fixo a inferência restringe-se à amostra. Por outro lado, no modelo de efeito aleatório não é admitida a possibilidade de correlação entre os efeitos específicos da firma e alguma das variáveis explicativas, distintamente do modelo de efeito fixo em que esta hipótese é possível. Embora o modelo de componente estocástico permita fazer inferências para toda população, o que aparentemente poderia ser mais interessante, o estimador de efeito fixo pode ser mais apropriado quando se trata de dados econômicos. A razão é que o componente específico da firma afeta de alguma forma a gestão do capital próprio e a forma de alavancagem financeira e, conseqüentemente, as decisões de investimento da firma. Nesse caso, a estimação pelo método dos efeitos aleatórios desconsiderando tal correlação poderia conduzir a estimadores inconsistentes.

Modelos com coeficientes autoregressivos e com dados em painel têm sido amplamente utilizados na análise de dados econômicos e na estimação de parâmetros em pesquisas aplicadas quando se dispõe de uma amostra com dados por firma e variando no tempo. Em econometria, a modelagem das relações dinâmicas exige a inclusão de variáveis dependentes defasadas como explicativas no modelo, atribuindo um aspecto dinâmico ao modelo econométrico.

Quando um modelo dinâmico é considerado, os coeficientes autoregressivos e os valores iniciais exigem atenção e a maneira como as observações iniciais são tratadas é um problema prático e teórico bastante importante. De acordo com Anderson e Hsiao (1981, 1982) e Hsiao (2003), não apenas os estimadores dos parâmetros de um modelo econométrico dinâmico podem ser inconsistentes, mas também a interpretação do modelo é dependente das suposições atribuídas às observações iniciais. Anderson e Hsiao (1981, 1982) buscaram esclarecer questões relacionadas à interpretação do modelo e à consistência das estimativas obtidas sob diferentes hipóteses sobre os valores iniciais considerando modelos dinâmicos, com e sem a variável dependente defasada como explicativa.

Ao assumir os valores iniciais da variável dependente defasada como sendo constantes fixas observáveis, é permitido que um processo inicie em alguma posição arbitrária e mova em direção a um nível individual seguindo uma lei de probabilidade. Embora este modelo pareça razoável, considerar os valores iniciais y_{i0} como fixos pode ser questionável, já que a decisão sobre quando iniciar o processo é arbitrária e independente de y_{i0} , implicando que $E(\alpha, y_{i0}) = 0$. Além disso, considerar y_{i0} como quantidades fixas pode não ser realista, pois implicaria que tais efeitos seriam distribuídos independentemente dos valores iniciais. Isto significa que os efeitos individuais não afetam o modelo no tempo $t = 0$, mas interfere no processo do tempo $t = 1$ em diante. Dizer que o processo só é afetado pelos efeitos específicos a partir de $t = 1$ não faz sentido, pois se o processo está vindo de algum tempo, não existem motivos para considerar y_{i0} diferentes dos demais valores de y_{it} , $i = 1, \dots, N$; $t = 1, \dots, T$.

Hsiao e Pesaran (2004) consideraram um modelo dinâmico com coeficientes aleatórios e afirmaram que se a suposição de independência entre os regressores do modelo e os efeitos individuais for ignorada, as estimativas obtidas para os parâmetros serão inconsistentes. No entanto, de acordo com Pesaran e Smith (1995), considerando a teoria bayesiana os estimadores obtidos serão consistentes mesmo sob a suposição de que os valores iniciais y_{i0} são quantidades fixas e conhecidas.

Hsiao, Pesaran e Tahmiscioglu (1999) também assumiram os valores iniciais y_{i0} fixos e conhecidos e mostraram que a abordagem bayesiana funciona muito bem na estimação dos coeficientes aleatórios de modelos dinâmicos. Os autores usaram métodos MCMC e consideraram uma distribuição normal na geração dos valores do coeficiente da variável defasada para satisfazer a condição de estacionariedade. Os resultados indicaram que, quando T é grande, há diversos estimadores que funcionam bem e produzem estimativas consistentes, mas quando T é pequeno, o estimador bayesiano hierárquico é preferível aos outros estimadores consistentes. Os autores concluíram que a abordagem bayesiana resulta em boas estimativas para os parâmetros mesmo quando T é pequeno e mostraram que os métodos bayesianos podem ser utilizados como alternativa na estimação dos coeficientes de modelos dinâmicos com dados em painel, mesmo se os valores iniciais forem tratados como quantidades fixas³².

³² Os valores iniciais também podem ser considerados como quantidades aleatórias, mas o processo de simulação é bastante complexo. Dentre os autores que consideraram tal situação, podem ser citados os estudos e Kiviet (1995), Zhang e Small (2006) e Juarez e Steel (2010).

Baseado nos estudos citados anteriormente sobre o valor inicial, neste trabalho os valores iniciais foram tratados como fixos e conhecidos, visto que, sob um ponto de vista bayesiano, as estimativas são consistentes mesmo quando o período amostral é curto.

O modelo de investimento apresentado na equação (4.1) foi considerado como sendo de efeito fixo e efeito aleatório, considerando misturas de distribuição normal em ambos. Na próxima seção, as distribuições *a priori* para os modelos de efeito fixo e aleatório são especificadas na presença de misturas de distribuições normal.

4.2 – Distribuições *a Priori* e *a Posteriori* para Modelos de Efeito Fixo e Efeito Aleatório

Por tratar-se de um modelo bayesiano, na estimação dos parâmetros é necessário especificar as distribuições *a priori*. Nesta seção são apresentadas as distribuições *a priori* para os parâmetros do modelo de investimento apresentado na equação (4.1), considerando-o como sendo de efeito fixo e efeito aleatório, assumindo misturas de duas e três distribuições normal no modelo. As quantidades iniciais correspondentes à variável dependente defasada foram consideradas fixas, dadas pelo vetor de médias anuais³³.

Tanto no modelo de efeito fixo quanto no modelo de efeito aleatório, os coeficientes das variáveis explicativas defasadas γ_{1j} e γ_{2j} estão sob condição de estacionariedade, isto é, foi considerado que $|\gamma_{1j}| < 1$ e $|\gamma_{2j}| < 1$ na estimação dos parâmetros. Dessa forma, seguindo o estudo de Zhang e Small (2006), uma distribuição *a priori* logitnormal foi atribuída aos parâmetros γ_{1j} e γ_{2j} , satisfazendo a condição de estacionariedade e escrita da seguinte forma:

$$\gamma_{1j} = 2 \left[\frac{\exp(\gamma_{1j}^*)}{1 + \exp(\gamma_{1j}^*)} - 0.5 \right] \text{ e } \gamma_{2j} = 2 \left[\frac{\exp(\gamma_{2j}^*)}{1 + \exp(\gamma_{2j}^*)} - 0.5 \right] \quad (4.2)$$

em que γ_{1j}^* e γ_{2j}^* são hiperparâmetros com uma distribuição normal, isto é,

$$\begin{aligned} \gamma_{1j}^* &\sim N(r_{1j}, s_{1j}^2); r_{1j}, s_{1j} \text{ conhecidos, } j = 1, \dots, J; \\ \gamma_{2j}^* &\sim N(r_{2j}, s_{2j}^2); r_{2j}, s_{2j} \text{ conhecidos, } j = 1, \dots, J. \end{aligned} \quad (4.3)$$

³³ Realizou-se também uma análise de sensibilidade assumindo os valores iniciais da variável dependente defasada dados somente pelos valores do investimento referentes ao primeiro ano da amostra. As estimativas obtidas para os parâmetros sob as duas condições acima para os valores iniciais da variável defasada foram idênticas.

Os seguintes valores foram assumidos para os hiperparâmetros: $r_{1j} = r_{2j} = 0$ e $s_{1j}^2 = s_{2j}^2 = 10^3$, $j = 1, \dots, J$.

Para facilitar a notação utilizada nas expressões referentes às distribuições de probabilidade, utilizou-se a seguinte notação:

$$\left(\frac{I}{K}\right)_it = y_{it}, \quad \left(\frac{I}{K}\right)_{i,t-1} = y_{i,t-1}, \quad \left(\frac{FC}{K}\right)_it = x_{1it}, \quad \left(\frac{V}{K}\right)_it = x_{2it}, \quad \left(\frac{FIN}{K}\right)_it = x_{3it} \quad (4.4)$$

Nas subseções seguintes são apresentadas características e as distribuições *a priori* para os parâmetros quando o modelo é considerado como sendo de efeito fixo e efeito aleatório, respectivamente. Tanto para o modelo de efeito fixo quanto para o modelo de efeito aleatório, diferentes valores foram atribuídos aos hiperparâmetros das distribuições *a priori* a fim de verificar a sensibilidade dessas distribuições. As estimativas obtidas sob diferentes valores para os hiperparâmetros das distribuições *a priori* consideradas foram ocultadas no texto devido à semelhança entre si.

4.2.1 – Distribuições *a priori* para o modelo de efeito fixo

Ao considerar o modelo dado na equação (4.1) como sendo de efeito fixo, admite-se a possibilidade da existência de correlação entre os efeitos específicos da firma α_i e alguma das variáveis explicativas do modelo.

Assumindo que os erros do modelo do investimento dado em (4.1) são independentes entre si e identicamente distribuídos de acordo com uma distribuição normal, isto é, $\varepsilon_{it} \sim N(\mu = 0, \sigma^2)$, tem-se que a função densidade de probabilidade dada por:

$$f(\varepsilon_{it} | \mu = 0, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\varepsilon_{it})^2\right\} \propto (\sigma)^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\varepsilon_{it})^2\right\} \quad (4.5)$$

sendo $\varepsilon_{it} = y_{it} - \alpha_i - \omega_t - \gamma_1 y_{i,t-1} - \gamma_2 y_{i,t-1}^2 - \beta_1 x_{1it} - \beta_2 x_{2it} - \beta_3 x_{3it}$. Considerando o modelo como sendo de efeito fixo, são atribuídas distribuições uniformes com hiperparâmetros fixos e conhecidos para o efeito específico das firmas α_i , $i = 1, \dots, N$, e temporal ω_t , $t = 1, \dots, T$:

$$\begin{cases} \alpha_i \sim U(e_1, f_1); e_1, f_1 \text{ conhecidos, } i = 1, \dots, N; \\ \omega_t \sim U(e_2, f_2); e_2, f_2 \text{ conhecidos, } t = 1, \dots, T; \\ \beta_l \sim N(u_l, v_l^2); u_l, v_l \text{ conhecidos, } l = 1, 2, 3; \\ \sigma^2 \sim IG(c, d); c, d \text{ conhecidos,} \end{cases} \quad (4.6)$$

sendo que $U(e, f)$ denota uma distribuição uniforme e $IG(c, d)$ indica uma distribuição gama inversa. Os valores dos hiperparâmetros das distribuições *a priori* foram $e_1 = e_2 = -100$, $f_1 = f_2 = 100$, $u_l = 0$, $v_l^2 = 10^6$, $l = 1, 2, 3$ e $c = d = 10^2$.

A função de verossimilhança para o modelo de efeito fixo com os erros normalmente distribuídos é dada por

$$\begin{aligned} L(\theta_f) &= \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T f(\varepsilon_{it} | \mu = 0, \sigma^2) \\ &\propto (\sigma^2)^{-\frac{NT}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (y_{it} - \alpha_i - \omega_t - \gamma_1 y_{i,t-1} - \gamma_2 y_{i,t-1}^2 - \beta_1 x_{1it} - \beta_2 x_{2it} - \beta_3 x_{3it})^2 \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

sendo $\theta_f = (\alpha_i, \omega_t, \gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, N$; $t = 1, \dots, T$, o vetor de parâmetros do modelo.

Sendo as distribuições *a priori* definidas em (4.6) independentes e combinando-as entre si e com a função de verossimilhança dada em (4.7), obtém-se a densidade *a posteriori* conjunta para os parâmetros do modelo de efeito fixo, representada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \pi(\theta_f | y_{it}, y_{i0}) &\propto \prod_{l=1}^3 \exp \left\{ -\frac{1}{2v_l^2} (\beta_l - u_l)^2 \right\} \cdot \prod_{k=1}^2 \exp \left\{ \frac{\gamma_k^*}{1 + \exp(\gamma_k^*)} - 0.5 \right\} (\sigma^2)^{-(c+1)} \exp \left\{ -\frac{d}{\sigma^2} \right\} \\ &\times (\sigma^2)^{-\frac{NT}{2}} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (y_{it} - \alpha_i - \omega_t - \gamma_1 y_{i,t-1} - \gamma_2 y_{i,t-1}^2 - \beta_1 x_{1it} - \beta_2 x_{2it} - \beta_3 x_{3it})^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

em que y_{it} , $i = 1, \dots, N$; $t = 1, \dots, T$ representam os dados e y_{i0} , $i = 1, \dots, N$, são as quantidades fixas e conhecidas correspondentes aos valores iniciais da variável dependente defasada.

Considerando os erros do modelo de efeito fixo distribuídos conforme uma mistura de duas distribuições normal, isto é, $\varepsilon_{it} \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$, $j = 1, 2$, com μ_1 e μ_2 satisfazendo a condição $\sum_{j=1}^2 \mu_j p_j = 0$, a função densidade de probabilidade de $(\varepsilon_{it} | \mu_j, \sigma_j^2)$ é dada por

$$f(\varepsilon_{it} | \mu = 0, \sigma^2) = \sum_{j=1}^2 [p_j f_j(\varepsilon_{it} | \mu_j, \sigma_j^2)] = \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{p_j}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp \left[-\left(\frac{\varepsilon_{it} - \mu_j}{\sigma_j} \right)^2 \right] \right\} \quad (4.9)$$

As distribuições *a priori* assumidas para os parâmetros do modelo são as seguintes:

$$\begin{cases} \alpha_i \sim U(e_1, f_1); e_1, f_1 \text{ conhecidos, } i = 1, \dots, N; \\ \omega_t \sim U(e_2, f_2); e_2, f_2 \text{ conhecidos, } t = 1, \dots, T; \\ \beta_{lj} \sim N(u_{lj}, v_{lj}^2); u_{lj}, v_{lj} \text{ conhecidos, } l = 1, 2, 3; j = 1, 2; \\ \sigma_j^2 \sim IG(c_j, d_j); c_j, d_j \text{ conhecidos, } j = 1, 2; \\ \mu_j \sim N(m_j, n_j^2), m_j, n_j \text{ conhecidos, } j = 1, 2; \\ p_1 \sim \text{Beta}(g, h), g, h \text{ conhecidos,} \end{cases} \quad (4.10)$$

em que $\text{Beta}(g, h)$ representa uma distribuição Beta com hiperparâmetros g e h . Os valores dos hiperparâmetros foram $e_1 = e_2 = -100$, $f_1 = f_2 = 100$, $u_{lj} = 0$, $v_{lj}^2 = 10^6$, $l = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$, $c_j = d_j = 10^2$ e $g = h = 1$.

Para o modelo de efeito fixo com duas distribuições normais, a função de verossimilhança é dada da seguinte forma:

$$L(\Phi_f) = \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \left[\sum_{j=1}^2 p_j f_j(\varepsilon_{it} | \mu_j, \sigma_j^2) \right] = \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \left\{ \sum_{j=1}^2 \frac{p_j}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp \left[-\left(\frac{\varepsilon_{it} - \mu_j}{\sigma_j} \right)^2 \right] \right\} \quad (4.11)$$

sendo $\Phi_f = (\alpha_i, \omega_t, \gamma_{1j}, \gamma_{2j}, \beta_{1j}, \beta_{2j}, \beta_{3j}, \mu_j, \sigma_j^2)$, $i = 1, \dots, N$; $t = 1, \dots, T$; $j = 1, 2$.

Variáveis latentes são introduzidas para simplificar a função de verossimilhança (4.11). Para o caso de duas distribuições normal, $J = 2$, considere o vetor de variáveis latentes dado por $\mathbf{Z}_i = (\mathbf{Z}_{i1}, \mathbf{Z}_{i2})$, $i = 1, \dots, N$. Tem-se que o vetor \mathbf{Z}_i é distribuído conforme uma distribuição de Bernoulli ($\mathbf{Z}_i \sim \text{Bernoulli}(h_{i1})$), isto é, $\pi(\mathbf{Z}_i) \propto h_{i1}^{Z_{i1}} (1 - h_{i1})^{2 - Z_{i1}}$, onde $h_{i1} = p_1 f_1(\varepsilon_{it} | \mu_1, \sigma_1^2) / \sum_{j=1}^2 p_j f_j(\varepsilon_{it} | \mu_j, \sigma_j^2)$, $i = 1, \dots, N$, $t = 1, \dots, T$. Após a introdução de variáveis latentes, a função de verossimilhança dada em (4.11) assume a forma

$$L(\Phi_f) = \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \prod_{j=1}^2 [p_j f_j(\varepsilon_{it} | \mu_j, \sigma_j^2)]^{Z_{ij}} = \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \prod_{j=1}^2 \left\{ \frac{p_j}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp \left[-\left(\frac{\varepsilon_{it} - \mu_j}{\sigma_j} \right)^2 \right] \right\}^{Z_{ij}} \quad (4.12)$$

Como anteriormente, considerando as distribuições *a priori* em (4.10) independentes e combinando-as com a função de verossimilhança (4.12), obtém-se a distribuição *a posteriori* conjunta dos parâmetros dada por

$$\begin{aligned} & \pi(\Phi_f | y_{it}, y_{i0}) \\ & \propto \prod_{l=1}^3 \exp\left\{-\frac{1}{2v_l^2}(\beta_l - u_l)^2\right\} \cdot \prod_{k=1}^2 \exp\left\{\frac{\gamma_k^*}{1 + \exp(\gamma_k^*)} - 0.5\right\} \cdot \prod_{j=1}^2 (\sigma_j^2)^{-(c_j+1)} \exp\left\{-\frac{d_j}{\sigma_j^2}\right\} \\ & \times \prod_{j=1}^2 \exp\left\{-\frac{1}{2n_j^2}(\mu_j - m_j)^2\right\} \cdot p_1^{s-1} (1-p_1)^{h-1} \cdot \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \prod_{j=1}^2 \left\{\frac{p_j}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp\left[-\left(\frac{\varepsilon_{it} - \mu_j}{\sigma_j}\right)^2\right]\right\}^{z_{ij}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para um modelo de efeito fixo com uma mistura de três distribuições normal, isto é, $\varepsilon_{it} \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$, $j=1,2,3$, a função densidade de probabilidade de $(\varepsilon_{it} | \mu_j, \sigma_j^2)$ é dada por

$$f(\varepsilon_{it} | \mu = 0, \sigma^2) = \sum_{j=1}^3 [p_j f_j(\varepsilon_{it} | \mu_j, \sigma_j^2)] = \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{p_j}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp\left[-\left(\frac{\varepsilon_{it} - \mu_j}{\sigma_j}\right)^2\right] \right\} \quad (4.14)$$

sob a suposição que $\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \mu_3 p_3 = 0$.

As distribuições *a priori* atribuídas aos parâmetros do modelo são as seguintes:

$$\begin{cases} \alpha_i \sim U(e_1, f_1); e_1, f_1 \text{ conhecidos, } i=1, \dots, N; \\ \omega_t \sim U(e_2, f_2); e_2, f_2 \text{ conhecidos, } t=1, \dots, T; \\ \beta_{lj} \sim N(u_{lj}, v_{lj}^2); u_{lj}, v_{lj} \text{ conhecidos, } l=1,2,3; j=1,2,3; \\ \sigma_j^2 \sim IG(c_j, d_j); c_j, d_j \text{ conhecidos, } j=1,2,3; \\ \mu_j \sim N(m_j, n_j^2); m_j, n_j \text{ conhecidos, } j=1,2,3; \\ \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \sim Dirch(g_1, g_2, g_3), g_1, g_2, g_3 \text{ conhecidos.} \end{cases} \quad (4.15)$$

sendo $Dirch(g_1, g_2, g_3)$ uma distribuição Dirichlet com hiperparâmetros g_1, g_2 e g_3 . Os valores dos hiperparâmetros foram $e_1 = e_2 = -100$, $f_1 = f_2 = 100$, $u_{lj} = 0$, $v_{lj}^2 = 10^6$, $l=1,2,3$; $c_j = d_j = 10^2$, $j=1,2,3$ e $g_1 = g_2 = g_3 = 1$.

Para o modelo de efeito fixo com três distribuições normais, a função de verossimilhança é representada por

$$L(\zeta_f) = \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \left[\sum_{j=1}^3 p_j f_j(\varepsilon_{it} | \mu, \sigma^2) \right] = \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \left\{ \sum_{j=1}^3 \frac{p_j}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp\left[-\left(\frac{\varepsilon_{it} - \mu_j}{\sigma_j}\right)^2\right] \right\} \quad (4.16)$$

em que $\zeta_f = (\alpha_i, \omega_t, \gamma_{1j}, \gamma_{2j}, \beta_{1j}, \beta_{2j}, \beta_{3j}, \mu_j, \sigma_j^2, \mathbf{p})$, $i=1, \dots, N$; $t=1, \dots, T$; $j=1,2,3$.

Assim como no caso anterior onde foi considerada mistura de duas distribuições normal, ao considerar o modelo de efeito fixo com três distribuições normal para o erro, variáveis latentes também devem ser introduzidas para simplificar a função de verossimilhança do modelo.

Assumindo uma mistura de três distribuições normal, $J=3$, considere o vetor de variáveis latentes $\mathbf{Z}_i = (\mathbf{Z}_{i1}, \mathbf{Z}_{i2}, \mathbf{Z}_{i3})$, $i=1, \dots, N$. Então, uma distribuição multinomial pode ser atribuída ao vetor \mathbf{Z}_i ($\mathbf{Z}_i \sim \text{Multinomial}(1; q_{ij})$). Tem-se que $\pi(\mathbf{Z}_i) \propto q_{i1}^{z_{i1}} q_{i2}^{z_{i2}} q_{i3}^{z_{i3}}$, onde $h_{it} = p_1 f_1(\varepsilon_{it} | \mu_1, \sigma_1^2) / \sum_{j=1}^3 p_j f_j(\varepsilon_{it} | \mu_j, \sigma_j^2)$, $i=1, \dots, N$; $t=1, \dots, T$. Após a introdução de variáveis latentes, a função de verossimilhança dada em (4.15) é representada por

$$L(\zeta_f) = \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \prod_{j=1}^3 [p_j f_j(\varepsilon_{it} | \mu_j, \sigma_j^2)]^{z_{itj}} = \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \prod_{j=1}^3 \left\{ \frac{p_j}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp \left[- \left(\frac{\varepsilon_{it} - \mu_j}{\sigma_j} \right)^2 \right] \right\}^{z_{itj}} \quad (4.17)$$

Como anteriormente, considerando as distribuições *a priori* dadas em (4.15) independentes e combinando-as com a função de verossimilhança (4.17), obtém-se a distribuição *a posteriori* conjunta dos parâmetros dada por:

$$\begin{aligned} & \pi(\zeta_f | y_{it}, y_{i0}) \\ & \propto \prod_{i=1}^3 \exp \left\{ - \frac{1}{2v_i^2} (\beta_i - u_i)^2 \right\} \cdot \prod_{k=1}^2 \exp \left\{ \frac{\gamma_k^*}{1 + \exp(\gamma_k^*)} - 0.5 \right\} \cdot \prod_{j=1}^3 (\sigma_j^2)^{-(c_j+1)} \exp \left\{ - \frac{d_j}{\sigma_j^2} \right\} \\ & \times \prod_{j=1}^3 \exp \left\{ - \frac{1}{2n_j^2} (\mu_j - m_j)^2 \right\} \cdot p_1^{g_1} p_2^{g_2} (1 - p_1 - p_2)^{g_3} \cdot \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \prod_{j=1}^3 \left\{ \frac{p_j}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp \left[- \left(\frac{\varepsilon_{it} - \mu_j}{\sigma_j} \right)^2 \right] \right\}^{z_{itj}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

A partir da densidade *a posteriori*, é possível fazer inferências para os parâmetros do modelo.

Na próxima subseção são apresentadas as distribuições *a priori* para os parâmetros considerando o modelo do investimento como sendo de efeito aleatório.

4.2.2 – Distribuições *a priori* para o modelo de efeito aleatório

Ao assumir o modelo de investimento dado na equação (4.1) como sendo de efeito aleatório, é possível fazer inferência sobre a população como um todo, diferente do modelo de efeito fixo. Outra diferença quando comparado com o modelo de efeito fixo é que não se

admite a possibilidade da existência de correlação existente entre o efeito específico da firma com alguma das covariáveis do modelo.

Assim como para o modelo de efeito fixo, considerando os erros do modelo de efeito aleatório como independentes entre si e identicamente distribuídos conforme uma distribuição normal, a função densidade de probabilidade $f(\varepsilon_{it} | \mu = 0, \sigma^2)$ é dada na expressão (4.5).

Quando o modelo é considerado como sendo de efeito aleatório, distribuições normais com variâncias desconhecidas são assumidas para os efeitos específico da firma $\alpha_i, i = 1, \dots, N$, e temporal $\omega_t, t = 1, \dots, T$. No modelo de efeito aleatório, as distribuições *a priori* são especificadas hierarquicamente, em dois estágios, da seguinte forma:

Primeiro estágio:

$$\begin{cases} \alpha_i | \sigma_\alpha^2 \sim N(\eta_1, \sigma_\alpha^2); \eta_1 \text{ conhecido}, i = 1, \dots, N; \\ \omega_t | \sigma_\omega^2 \sim N(\eta_2, \sigma_\omega^2); \eta_2 \text{ conhecido}, t = 1, \dots, T; \\ \beta_l \sim N(u_l, v_l^2); u_l, v_l \text{ conhecidos}, l = 1, 2, 3; \\ \sigma^2 \sim IG(c_1, d_1); c_1, d_1 \text{ conhecidos}, \end{cases} \quad (4.19)$$

Segundo estágio:

$$\begin{cases} \sigma_\alpha^2 \sim IG(c_2, d_2); c_2, d_2 \text{ conhecidos}; \\ \sigma_\omega^2 \sim IG(c_3, d_3); c_3, d_3 \text{ conhecidos}. \end{cases} \quad (4.20)$$

Os valores dos hiperparâmetros foram $\eta_1 = \eta_2 = 0$, $u_l = 0$, $v_l^2 = 10^6$ e $c_l = d_l = 10^2$, $l = 1, 2, 3$. Para o modelo de efeito aleatório³⁴, a função de verossimilhança com os erros normalmente distribuídos é dada por

$$\begin{aligned} L(\theta_a) &= \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T f(\varepsilon_{it} | \mu, \sigma^2) \\ &= (\sigma^2)^{\frac{NT}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (y_{it} - \alpha_i - \omega_t - \gamma_1 y_{i,t-1} - \gamma_2 y_{i,t-1}^2 - \beta_1 x_{1it} - \beta_2 x_{2it} - \beta_3 x_{3it})^2 \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

sendo $\theta_a = (\alpha_i, \omega_t, \gamma_1, \gamma_2, \beta_l, \sigma^2, \sigma_\alpha^2, \sigma_\omega^2)$, $i = 1, \dots, N$; $t = 1, \dots, T$; $l = 1, 2, 3$ o vetor de parâmetros do modelo.

Considerando as distribuições *a priori* definidas em (4.19) e (4.20) independentes e combinando-as entre si e com a função de verossimilhança dada em (4.21), obtém-se a

³⁴ Os parâmetros do modelo também foram estimados considerando os valores dos hiperparâmetros η_1 e η_2 desconhecidos, atribuindo uma distribuição *a priori* não-informativa para ambos, mas as diferenças nas estimativas foram insignificantes.

densidade *a posteriori* conjunta para os parâmetros do modelo de efeito aleatório, representada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \pi(\boldsymbol{\theta}_a | y_{it}, y_{i0}) \\
& \propto \prod_{i=1}^N \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\alpha^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(\alpha_i - \eta_1)^2}{2\sigma_\alpha^2}\right) \right] \cdot \prod_{t=1}^T \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\omega^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(\omega_t - \eta_2)^2}{2\sigma_\omega^2}\right) \right] \cdot \prod_{l=1}^3 \exp\left\{-\frac{1}{2v_l^2}(\beta_l - u_l)^2\right\} \\
& \times \prod_{k=1}^2 \exp\left\{\frac{\gamma_k^*}{1 + \exp(\gamma_k^*)} - 0.5\right\} \cdot (\sigma^2)^{-(c_1+1)} \exp\left\{-\frac{d_1}{\sigma^2}\right\} \cdot (\sigma_\alpha^2)^{-(c_2+1)} \exp\left\{-\frac{d_2}{\sigma_\alpha^2}\right\} \cdot (\sigma_\omega^2)^{-(c_3+1)} \exp\left\{-\frac{d_3}{\sigma_\omega^2}\right\} \\
& \times (\sigma^2)^{\frac{NT}{2}} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (y_{it} - \alpha_i - \omega_t - \gamma_1 y_{i,t-1} - \gamma_2 y_{i,t-1}^2 - \beta_1 x_{1it} - \beta_2 x_{2it} - \beta_3 x_{3it})^2\right\}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

sendo que y_{it} representa os dados e y_{i0} são os valores iniciais correspondentes à variável dependente defasada, os quais foram considerados fixos e conhecidos.

Considerando os erros do modelo de efeito aleatório distribuídos conforme uma mistura de duas distribuições normal, a função densidade de probabilidade de $(\varepsilon_{it} | \mu_j, \sigma_j^2)$ é como na equação (4.9), com $\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 = 0$. As distribuições *a priori* são especificadas hierarquicamente como:

Primeiro estágio:

$$\begin{cases}
\alpha_i | \sigma_\alpha^2 \sim N(\eta_1, \sigma_\alpha^2); \eta_1 \text{ conhecido}, i = 1, \dots, N; \\
\omega_t | \sigma_\omega^2 \sim N(\eta_2, \sigma_\omega^2); \eta_2 \text{ conhecido}, t = 1, \dots, T; \\
\beta_{lj} \sim N(u_{lj}, v_{lj}^2); u_{lj}, v_{lj} \text{ conhecidos}, l = 1, 2, 3; j = 1, 2; \\
\sigma_j^2 \sim IG(c_{lj}, d_{lj}); c_{lj}, d_{lj} \text{ conhecidos}, j = 1, 2; \\
\mu_j \sim N(m_j, n_j^2), m_j, n_j \text{ conhecidos}, j = 1, 2; \\
p_1 \sim Beta(g, h), g, h \text{ conhecidos},
\end{cases} \tag{4.23}$$

O segundo estágio é análogo àquele apresentado em (4.20). Os valores dos hiperparâmetros foram $\eta_1 = \eta_2 = 0$, $u_{lj} = 0$, $v_{lj}^2 = 10^6$ e $c_{lj} = d_{lj} = 10^2$, $l = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2$.

Para o modelo de efeito aleatório com duas distribuições normal, a função de verossimilhança é dada por

$$L(\boldsymbol{\Phi}_a) = \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \left[\sum_{j=1}^2 p_j f_j(\varepsilon_{it} | \mu_j, \sigma_j^2) \right] = \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \left\{ \sum_{j=1}^2 \frac{p_j}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp\left[-\frac{(\varepsilon_{it} - \mu_j)^2}{\sigma_j^2}\right] \right\} \tag{4.24}$$

em que $\Phi_a = (\alpha_i, \omega_t, \gamma_{1j}, \gamma_{2j}, \beta_{lj}, \mu_j, \sigma_j^2, \sigma_\alpha^2, \sigma_\omega^2, p_1)$, $l = 1, 2, 3$; $i = 1, \dots, N$; $t = 1, \dots, T$; $j = 1, 2$

Novamente, variáveis latentes são introduzidas para simplificar a função de verossimilhança. Após a introdução de variáveis latentes, a função de verossimilhança dada em (4.24) assume a seguinte forma:

$$L(\Phi_a) = \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \prod_{j=1}^2 [p_j f_j(\varepsilon_{it} | \mu_j, \sigma_j^2)]^{Z_{ij}} = \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \prod_{j=1}^2 \left\{ \frac{p_j}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp \left[- \left(\frac{\varepsilon_{it} - \mu_j}{\sigma_j} \right)^2 \right] \right\}^{Z_{ij}} \quad (4.25)$$

Como anteriormente, considerando as distribuições *a priori* independentes e multiplicando-se com a função de verossimilhança, obtém-se a distribuição *a posteriori* conjunta dos parâmetros dada por

$$\begin{aligned} & \pi(\Phi_a | \mathcal{Y}_a, \mathcal{Y}_{i0}) \\ & \propto \prod_{i=1}^N \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\alpha^2}} \cdot \exp \left(- \frac{(\alpha_i - \eta_1)^2}{2\sigma_\alpha^2} \right) \right] \cdot \prod_{t=1}^T \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\omega^2}} \cdot \exp \left(- \frac{(\omega_t - \eta_2)^2}{2\sigma_\omega^2} \right) \right] \cdot \prod_{l=1}^3 \exp \left\{ - \frac{1}{2\nu_l^2} (\beta_l - u_l)^2 \right\} \\ & \times \prod_{k=1}^2 \exp \left\{ \frac{\gamma_k^*}{1 + \exp(\gamma_k^*)} - 0.5 \right\} \cdot p_1^{g-1} (1 - p_1)^{h-1} \cdot \prod_{j=1}^2 (\sigma_j^2)^{-(c_j+1)} \exp \left\{ - \frac{d_{1j}}{\sigma_j^2} \right\} \cdot (\sigma_\alpha^2)^{-(c_\alpha+1)} \exp \left\{ - \frac{d_\alpha}{\sigma_\alpha^2} \right\} \\ & \times (\sigma_\omega^2)^{-(c_\omega+1)} \exp \left\{ - \frac{d_\omega}{\sigma_\omega^2} \right\} \cdot \prod_{j=1}^2 \exp \left\{ - \frac{1}{2n_j^2} (\mu_j - m_j)^2 \right\} \cdot \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \prod_{j=1}^2 \left\{ \frac{p_j}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp \left[- \left(\frac{\varepsilon_{it} - \mu_j}{\sigma_j} \right)^2 \right] \right\}^{Z_{ij}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Para um modelo de efeito aleatório com uma mistura de três distribuições normal para o erro, a função densidade de probabilidade de $(\varepsilon_{it} | \mu_j, \sigma_j^2)$, $j = 1, 2, 3$ é análoga a equação (4.14). Neste caso, as distribuições *a priori* para os parâmetros do modelo também são especificadas em dois estágios:

Primeiro estágio:

$$\begin{cases} \alpha_i | \sigma_\alpha^2 \sim N(\eta_1, \sigma_\alpha^2); \eta_1 \text{ conhecido}, i = 1, \dots, N; \\ \omega_t | \sigma_\omega^2 \sim N(\eta_2, \sigma_\omega^2); \eta_2 \text{ conhecido}, t = 1, \dots, T; \\ \beta_{lj} \sim N(u_{lj}, \nu_{lj}^2); u_{lj}, \nu_{lj} \text{ conhecidos}, l = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; \\ \sigma_j^2 \sim IG(c_j, d_j); c_j, d_j \text{ conhecidos}, j = 1, 2, 3; \\ \mu_j \sim N(m_j, n_j), m_j, n_j \text{ conhecidos}, j = 1, 2, 3; \\ \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \sim Dirch(g_1, g_2, g_3), g_1, g_2, g_3 \text{ conhecidos.} \end{cases} \quad (4.27)$$

O segundo estágio é idêntico à expressão (4.20) e foram assumidos os seguintes valores para os hiperparâmetros: $\eta_1 = \eta_2 = 0$, $u_{ij} = 0$, $v_{ij}^2 = 10^6$, $c_{ij} = d_{ij} = 10^2$, $l = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$ e $g_1 = g_2 = g_3 = 1$, com μ_1 , μ_2 e μ_3 satisfazendo a condição $\sum_{j=1}^3 \mu_j p_j = 0$.

Para o modelo de efeito aleatório com três distribuições normal, a função de verossimilhança é representada por

$$L(\zeta_a) = \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \left[\sum_{j=1}^3 p_j f_j(\varepsilon_{it} | \mu, \sigma^2) \right] = \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \left\{ \sum_{j=1}^3 \frac{p_j}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp \left[- \left(\frac{\varepsilon_{it} - \mu_j}{\sigma_j} \right)^2 \right] \right\} \quad (4.28)$$

sendo $\zeta_a = (\alpha_i, \omega_t, \gamma_{1j}, \gamma_{2j}, \beta_{ij}, \mu_j, \sigma_j^2, \sigma_a^2, \sigma_w^2, \mathbf{p})$, $l = 1, 2, 3$; $i = 1, \dots, N$; $t = 1, \dots, T$; $j = 1, 2, 3$.

Após a introdução de variáveis latentes, como feito para o modelo de efeito fixo, a função de verossimilhança (4.28) é representada por

$$L(\zeta_a) = \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \prod_{j=1}^3 \left[p_j f_j(\varepsilon_{it} | \mu_j, \sigma_j^2) \right]^{Z_{ij}} = \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \prod_{j=1}^3 \left\{ \frac{p_j}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp \left[- \left(\frac{\varepsilon_{it} - \mu_j}{\sigma_j} \right)^2 \right] \right\}^{Z_{ij}} \quad (4.29)$$

Considerando as distribuições *a priori* independentes e multiplicando-se com a função de verossimilhança, obtém-se a distribuição *a posteriori* conjunta dos parâmetros dada por

$$\begin{aligned} & \pi(\zeta_a | y_{it}, y_{i0}) \\ & \propto \prod_{i=1}^N \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}} \exp \left(- \frac{(\alpha_i - \eta_1)^2}{2\sigma_a^2} \right) \right] \cdot \prod_{t=1}^T \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp \left(- \frac{(\omega_t - \eta_2)^2}{2\sigma_w^2} \right) \right] \\ & \times \prod_{k=1}^2 \exp \left\{ \frac{\gamma_k^*}{1 + \exp(\gamma_k^*)} - 0.5 \right\} \cdot \prod_{j=1}^3 \exp \left\{ - \frac{1}{2n_j^2} (\mu_j - m_j)^2 \right\} \cdot p_1^{g_1} p_2^{g_2} (1 - p_1 - p_2)^{g_3} \quad (4.30) \\ & \times (\sigma_a^2)^{-(c_2+1)} \exp \left\{ - \frac{d_2}{\sigma_a^2} \right\} \cdot (\sigma_w^2)^{-(c_3+1)} \exp \left\{ - \frac{d_3}{\sigma_w^2} \right\} \cdot \prod_{j=1}^3 (\sigma_j^2)^{-(c_j+1)} \exp \left\{ - \frac{d_{1j}}{\sigma_j^2} \right\} \\ & \times \prod_{i=1}^N \exp \left\{ - \frac{1}{2v_i^2} (\beta_i - u_i)^2 \right\} \cdot \prod_{i=1}^N \prod_{t=1}^T \prod_{j=1}^3 \left\{ \frac{p_j}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp \left[- \left(\frac{\varepsilon_{it} - \mu_j}{\sigma_j} \right)^2 \right] \right\}^{Z_{ij}} \end{aligned}$$

Nesta seção foram apresentadas as distribuições *a priori*, a função de verossimilhança e as distribuições *a posteriori* conjuntas para os parâmetros do modelo considerando-o como sendo de efeito fixo e efeito aleatório, na presença de misturas de distribuições. No entanto, devido ao fato de no *software* considerado ser necessárias somente as distribuições *a priori* e

a função de verossimilhança para a estimação dos parâmetros, maior atenção não foi destinada à obtenção da distribuição *a posteriori* condicional para cada parâmetro.

A estimação dos parâmetros do modelo apresentado em (4.1), utilizando-se mistura com duas e três distribuições normais para erro, procura atender a uma finalidade muito importante na investigação de restrição financeira das firmas. Essa metodologia possibilita a identificação de grupos de empresas que apresentam um comportamento distinto em relação às suas decisões de investimentos, determinada pelo próprio modelo, ou seja, de forma endógena, e não como tem sido realizada na quase totalidade da literatura sobre o investimento, isto é, considerando os grupos definidos *a priori*.

Na próxima seção é descrito o procedimento bayesiano utilizado no agrupamento das observações a fim de identificar, de forma endógena, grupos de firmas e então tentar identificar aquelas que podem ser consideradas restritas financeiramente.

4.3 – Critério de Classificação Bayesiano utilizando Misturas de Distribuições

O procedimento considerado no agrupamento das observações correspondentes as 564 firmas no período de 1996 a 2006 foi realizado utilizando o modelo do investimento dado na equação (4.1), considerando-o como sendo de efeito fixo e efeito aleatório. Inicialmente uma distribuição normal foi considerada e, em seguida, foram assumidas misturas de duas, três e quatro distribuições normal para o erro.

No procedimento considerado para agrupar as firmas, considerou-se uma variável latente Z_{it} , $i=1,\dots,N$; $t=1,\dots,T$ para representar a componente à qual pertencia determinada observação. Uma distribuição *a priori* categórica foi atribuída à variável latente Z_{it} da seguinte forma:

$$Z_{it} \sim \text{Categórica}(P), \quad i=1,\dots,N; \quad t=1,\dots,T \quad (4.31)$$

em que P é o hiperparâmetro da distribuição e é dado por um vetor de probabilidades de uma observação pertencer a um dentre os possíveis grupos existentes na amostra. Devido à característica da variável latente T , isto é, de auxiliar na identificação do grupo em que está a observação, tal variável torna-se de grande interesse no processo de estimação. Assim, é fundamental conhecer os valores de Z_{it} , $i=1,\dots,N$; $t=1,\dots,T$ e, portanto, além dos parâmetros correspondentes às variáveis do modelo, foram analisadas também as estimativas da variável Z . Foram geradas duas cadeias com 10000 valores cada uma e o grupo a qual

cada observação pertencida foi selecionado baseando-se na moda de Z_{it} , $i=1,\dots,N$; $t=1,\dots,T$, identificada por meio dos gráficos da densidade das variáveis latentes.

Ao considerar uma mistura de duas distribuições normal para o erro do modelo de investimento, o hiperparâmetro da distribuição categórica é representado por $\mathbf{P}=(p_1, p_2)$, sendo p_1 a probabilidade de a observação pertencer ao grupo 1 e $p_2=1-p_1$ a probabilidade de a observação pertencer ao grupo 2. Os valores estimados para a variável latente Z_{it} , $i=1,\dots,N$; $t=1,\dots,T$ permaneceram no conjunto $\{1,2\}$.

Analisando os gráficos das densidades de Z_{it} , $i=1,\dots,N$; $t=1,\dots,T$, foi possível identificar a moda de Z_{it} , $i=1,\dots,N$; $t=1,\dots,T$ e assim especificar os grupos para cada uma das observações. Esse procedimento é ilustrado pelos gráficos das densidades de Z_{it} para $i=2$ e $t=1,\dots,10$:

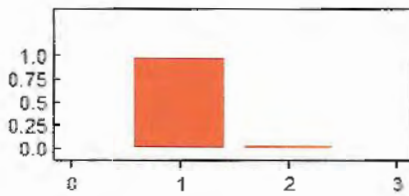


Gráfico 1(a): Densidade de $Z_{2,1}$

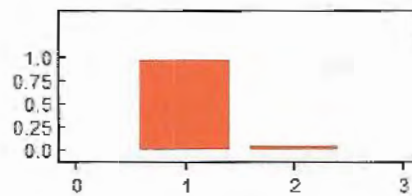


Gráfico 1(b): Densidade de $Z_{2,2}$

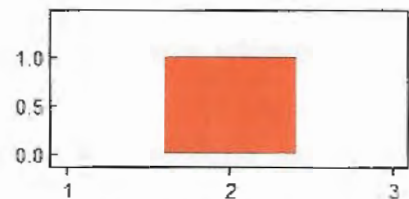


Gráfico 1(c): Densidade de $Z_{2,3}$

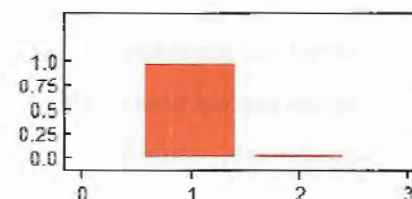


Gráfico 1(d): Densidade de $Z_{2,4}$

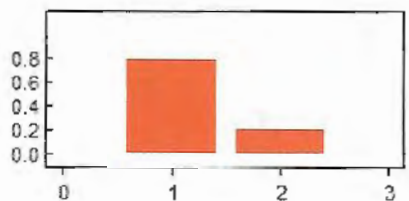


Gráfico 1(e): Densidade de $Z_{2,5}$

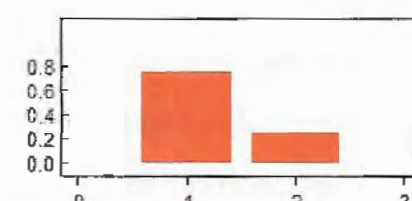


Gráfico 1(f): Densidade de $Z_{2,6}$

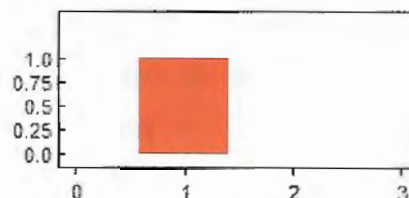


Gráfico 1(g): Densidade de $Z_{2,7}$

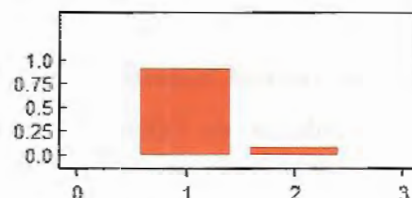


Gráfico 1(h): Densidade de $Z_{2,8}$

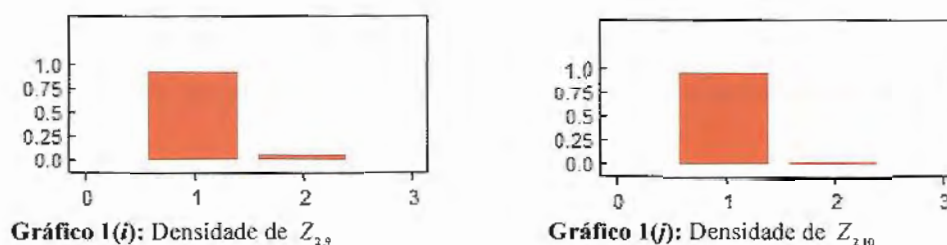


Figura 4.1 – Gráficos das densidades da variável categórica $Z_{i,t}$, para $i=2$ e $t=1, \dots, 10$, obtidos considerando o modelo de investimento como sendo de efeito fixo, com mistura de duas distribuições normal para o erro.

Considerando os gráficos das densidades da variável latente $Z_{i,t}$ para $i=2$ e $t=1, \dots, 10$ mostrados na Figura 4.1, e analisando a moda de tais variáveis latentes, tem-se, por exemplos, que a segunda firma da amostra no ano $t=3$ foi classificada no grupo 2 (ver gráfico 1(c)) e para os demais anos, a segunda firma foi classificada no grupo 1. O mesmo procedimento foi realizado para todas as demais firmas contidas na amostra. Após a definição dos grupos de observações, buscou-se analisar as estimativas obtidas para os parâmetros do modelo de investimento, juntamente com os indicadores financeiros correspondentes ao agrupamento obtido.

Para uma mistura de três distribuições normal para o erro do modelo de investimento, o hiperparâmetro da distribuição categórica é representado por $\mathbf{P}=(p_1, p_2, p_3)$, sendo p_1 , p_2 e p_3 as probabilidades de a observação pertencer aos grupos 1, 2 e 3 respectivamente. Neste caso, os valores estimados para a variável latente $Z_{i,t}$, $i=1, \dots, N$; $t=1, \dots, T$ permaneceram no conjunto $\{1,2,3\}$. Novamente, os gráficos das densidades da variável latente são analisados e identifica-se a moda de $Z_{i,t}$, $i=1, \dots, N$; $t=1, \dots, T$ especificando-se os grupos para cada uma das observações.

Como feito para a mistura de duas distribuições normal, após a identificação dos grupos, as estimativas obtidas para os parâmetros do modelo de investimento foram analisadas, juntamente com os indicadores financeiros correspondentes ao agrupamento obtido. O mesmo procedimento foi adotado ao assumir uma mistura de quatro distribuições normais para o erro, com a diferença que o hiperparâmetro da distribuição categórica passa a ser representado por $\mathbf{P}=(p_1, p_2, p_3, p_4)$, sendo p_1 , p_2 , p_3 e p_4 as probabilidades de a observação pertencer aos grupos 1, 2, 3 e 4, respectivamente.

A quantidade máxima de distribuições normal considerada no modelo com mistura foi quatro, visto que, a partir daí os grupos não são consideráveis no sentido de as estimativas

obtidas para os parâmetros tornarem-se praticamente iguais, assim como os valores médios para os indicadores financeiros entre os grupos, conforme mostrado nas tabelas apresentadas no Apêndice.

Simulações foram realizadas para estimar os parâmetros do modelo de investimento considerando-o como sendo de efeito fixo e efeito aleatório, com uma distribuição normal e também assumindo misturas de duas, três e quatro distribuições normais para o erro. Para cada um dos modelos, foram geradas duas cadeias independentes com 10000 iterações cada uma, descartando-se as 5000 primeiras (*burn-in*). Para evitar problemas de correlação serial, uma a cada cinco iterações foi aproveitada para extrair estatísticas da distribuição *a posteriori*, resultando em amostras com 2000 valores para cada parâmetro.

Conforme destacado no Capítulo 3, problemas de identificabilidade são freqüentes na literatura sobre modelos com misturas de distribuições. Uma alternativa proposta na literatura sobre misturas de distribuições para evitar problemas de identificabilidade é considerar uma restrição nas médias dos grupos, como feito nos estudos de Roeder e Wassermann (1997), Richardson e Green (1997) e Viele e Tong (2002), descritos no capítulo anterior. No entanto, de acordo com a restrição considerada, resultados distintos podem ser obtidos. No presente estudo, o problema da identificabilidade presente em modelos com misturas de distribuições foi tratado conforme sugerido por Jasra et al. (2005) e Geweke (2007), isto é, sem considerar qualquer restrição nas médias dos grupos. O critério adotado foi analisar o gráfico das cadeias correspondentes aos valores simulados para as proporções da mistura. Por este critério, observa-se se houve inversão entre os valores das proporções no decorrer da simulação.

O critério das ordenadas das densidades preditivas foi considerado para selecionar o modelo mais adequado aos dados e com melhor poder de predição. A próxima seção faz uma breve descrição deste critério de seleção de modelos e apresenta o valor das ordenadas das densidades preditivas para cada modelo, permitindo selecionar o mais apropriado para os dados desta pesquisa.

4.4 – Seleção de Modelos – Critério das Ordenadas das Densidades Preditivas

A comparação do modelo de investimento assumindo efeito fixo e efeito aleatório foi realizada pelo do critério das ordenadas das densidades preditivas – ODP³⁵. Outros critérios como o fator de Bayes e o critério de informação bayesiano (*BIC*) têm sido frequentemente utilizados na discriminação de modelos. No entanto, como o fator de Bayes é altamente sensível à escolha da distribuição *a priori* e ao número de parâmetros, e o *BIC* apresenta uma tendência de escolha de modelos mais simples, optou-se pelo critério das ordenadas das densidades preditivas.

Na seleção de modelos pelo critério das ordenadas das densidades preditivas, escolhe-se o modelo que apresentar o maior valor de predição para as observações futuras. O critério de seleção de modelos baseado nas densidades preditivas *a posteriori* é implementado pelo método de simulação MCMC (Gelfand e Dey, 1993).

A densidade preditiva para o modelo m dado y_i e o vetor $y_{(i)}$ é:

$$f^{(m)}(y_i | y_{(i)}) = \int \dots \int f^{(m)}(y_i | \theta, y_{(i)}) \pi(\theta | y_{(i)}) d\theta \quad (4.32)$$

onde m representa o modelo, $m = 1, \dots, M$, $i = 1, \dots, N$, θ indica o vetor de parâmetros, $y_{(i)}$ representa o vetor de valores observados sem a observação referente à i -ésima firma.

A quantidade $f^{(m)}(y_i | y_{(i)})$ é conhecida como a ordenada da densidade preditiva.

Estimativas para $f^{(m)}(y_i | y_{(i)})$ podem ser obtidas utilizando métodos MCMC com cadeias de Markov. A partir das amostras geradas para cada parâmetro, a densidade em (4.32) pode ser aproximada pela estimativa de Monte Carlo como

$$\hat{f}^{(m)}(y_i | y_{(i)}) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S f^{(m)}(y_i | \theta^{(s)}) \quad (4.33)$$

em que S é o número de amostras geradas.

A comparação de modelos pelo método das ordenadas das densidades preditivas é feita utilizando-se um índice dado por

$$c(m) = \prod_{i=1}^N \hat{f}^{(m)}(y_i | y_{(i)}) \quad (4.34)$$

³⁵ Dey, Kuo e Sahu (1995) utilizaram modelos com misturas de distribuições e um método baseado na distribuição preditiva para determinar o número de componentes da mistura.

em que $c(m)$ é a ordenada da densidade preditiva para o modelo m . Também pode-se utilizar o *logaritmo* de $c(m)$, dado por

$$\log(c(m)) = \log\left(\prod_{i=1}^N \hat{f}^{(m)}(y_i | y_{(i)})\right) = \sum_{i=1}^N \log\left(\hat{f}^{(m)}(y_i | y_{(i)})\right) \quad (4.35)$$

Por este critério escolhe-se o modelo que apresentar o maior valor para $c(m)$.

Os valores das ordenadas das densidades preditivas para o modelo de investimento, considerando-o como sendo de efeito fixo e aleatório, com uma distribuição normal e assumindo misturas de duas, três e quatro distribuições normal para o erro são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Seleção de Modelos: Ordenadas das Densidades Preditivas.

Modelos	1 Normal	Misturas de Distribuições Normal		
		2	3	4
Efeito Fixo	8.39E+27	1.21E+35	2.87E+24	1.07E+20
Efeito Aleatório	1.437E+29	3.54E+30	8.10E+22	2.47E+16

Utilizando o critério das ordenadas das densidades preditivas tem-se que o modelo de efeito fixo considerando uma mistura de duas distribuições normal para o erro é preferível aos demais modelos.

No entanto, após selecionar o modelo por meio do critério das ordenadas das densidades preditivas, verificou-se não havia problemas de identificabilidade conforme citado acima. A fim de analisar se não há inversão nos valores simulados para as proporções da mistura, analisou-se os gráficos correspondentes aos gerados para cada uma das proporções durante o processo de simulação.

Seguindo o estudo de Jasra et al. (2005), no processo de simulação não foi considerada qualquer restrição sob os parâmetros das densidades componentes do modelo com mistura de distribuições. Os gráficos contendo os valores simulados para as proporções da mistura foram analisados a fim de verificar a presença ou não de efeitos adversos entre os valores.

Na Figura 4.2, os gráficos 2(a) e 2(b) mostram o comportamento dos valores simulados para as proporções de observações pertencentes à primeira e segunda componentes da mistura, respectivamente, nas duas cadeias geradas e são apresentados abaixo.

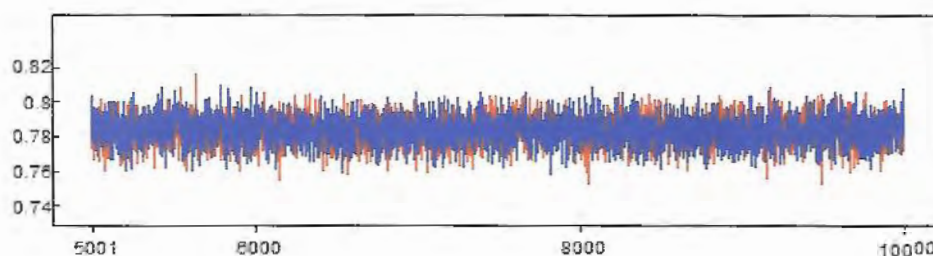


Gráfico 2(a): valores simulados para a proporção de observações na primeira componente da mistura.

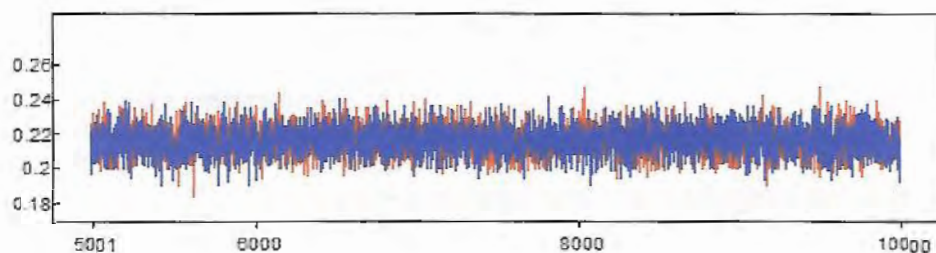


Gráfico 2(b): valores simulados para a proporção de observações na segunda componente da mistura.

Figura 4.2 – Gráficos dos valores simulados para a proporção de observações na primeira e segunda componentes, respectivamente, da mistura de duas distribuições normal para o erro do modelo de investimento.

Na Figura 4.2, o gráfico 2(a) mostra que os valores simulados para a proporção de observações na primeira componente da mistura permaneceram no intervalo compreendido entre 0.7673 e 0.7976, enquanto o gráfico 2(b) mostra que para a proporção de observações na segunda componente da mistura, os valores simulados estiveram entre 0.2024 e 0.2327. Devido ao fato de os valores simulados tanto para a proporção de observações na primeira componente quanto para a proporção de observações na segunda componente terem mantido o mesmo comportamento durante todo o processo de simulação, pode-se dizer que não há problemas de identificabilidade no modelo de mistura considerado. Em determinado momento da simulação poderia ter ocorrido uma inversão na ordem de magnitude dos valores gerados para as proporções de observações nas primeira e segunda componentes, gerando problemas de identificabilidade do modelo com mistura de distribuições normal.

Antes de fazer conclusões sobre as estimativas obtidas para os parâmetros considerando o modelo selecionado, verificou-se a convergência dos valores simulados. Para verificar a convergências das estimativas para cada parâmetro estimado, considerou-se o valor estimado para o fator de redução potencial de escala proposto por Gelman e Rubin (1992), apresentado no capítulo anterior na equação (3.12).

Na Figura 4.3, os gráficos mostram o comportamento dos valores gerados nas duas cadeias para os parâmetros γ_1 , γ_2 , β_1 , β_2 e β_3 , $j = 1, 2$.



Gráficos 3(a) e 3(b): Convergência dos valores simulados para γ_{1j} , $j=1,2$.



Gráficos 3(c) e 3(d): Convergência dos valores simulados para γ_{2j} , $j=1,2$.



Gráficos 3(e) e 3(f): Convergência dos valores simulados para β_{1j} , $j=1,2$.



Gráficos 3(g) e 3(h): Convergência dos valores simulados para β_{2j} , $j=1,2$.



Gráficos 3(i) e 3(j): Convergência dos valores simulados para β_{3j} , $j=1,2$.

Figura 4.3 – Gráficos da convergência dos valores simulados.

Conforme mostrado nos gráficos da Figura 4.3, os valores simulados apresentam indícios de convergência.

Os valores estimados para o fator de redução potencial de escala $\sqrt{\hat{R}}$ correspondentes aos parâmetros são mostrados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Valores estimados para o fator de redução potencial de escala: $\sqrt{\hat{R}}$.

Parâmetros	Grupos	Fator de redução potencial de escala: $\sqrt{\hat{R}}$
γ_1	$j=1$	0.993
	$j=2$	0.9961
γ_2	$j=1$	1.006
	$j=2$	0.9994
β_1	$j=1$	1.002
	$j=2$	0.9999
β_2	$j=1$	0.9981
	$j=2$	1.001
β_3	$j=1$	0.9981
	$j=2$	1.004

Os valores estimados para $\sqrt{\hat{R}}$, mostrados na Tabela 4.2, foram todos próximos de 1 indicando a convergência dos parâmetros do modelo. Após a verificação da ausência de problemas de identificabilidade do modelo e de convergência dos parâmetros³⁶, conclui-se que o modelo de efeito fixo com duas distribuições normal, selecionado utilizando o critério das ordenadas das densidades preditivas, será o modelo considerado para análise dos resultados.

Na próxima seção são apresentadas as estimativas dos parâmetros obtidas considerando o modelo selecionado juntamente com a análise e interpretação econômica dos resultados.

4.5 – Resultados – Análise e Interpretação Econômica

A partir do arcabouço teórico e da estrutura proposta neste trabalho, esta seção tem por objetivo analisar a perspectiva econômica e os resultados estimados considerando o modelo de investimento dado na equação 4.1.

A estimação dos parâmetros do modelo proposto foi realizada no *software* WinBUGS considerando o modelo de investimento como sendo de efeito fixo para toda a amostra e para as firmas divididas em dois grupos conforme o critério bayesiano proposto. As firmas foram

³⁶ A convergência foi verificada também para os efeitos específico da firma e temporal, mas não foi mostrada no texto devido à quantidade de gráficos visto que $i = 1, \dots, 564$ e $t = 1, \dots, 10$.

classificadas endogenamente considerando suas características financeiras, possibilitando às firmas alterar suas posições ao longo do tempo. Como aponta Schiantarelli (1996), desconsiderar tal possibilidade poderia implicar em perda de informação: “*For instance, if average firm characteristics (such as dividend behavior or size) over the sample, or presample characteristics are used, one is neglecting the information that the financial constraints may be binding for the same firm in some years but not in others*” (p. 78).

Alguns indicadores financeiros foram calculados para auxiliar na análise e interpretação dos resultados. Dentre os indicadores financeiros considerados estão o investimento, o fluxo de caixa, as vendas e a dívida, todos em razão do estoque de capital, representados por (I/K) , (FC/K) , (V/K) e (D/K) , respectivamente, os indicadores de rentabilidade lucro líquido em razão do estoque de capital, patrimônio líquido e margem de lucro, dados por (LL/K) , (LL/PL) e (LL/V) , respectivamente. Foram considerados dois indicadores de endividamento, sendo o primeiro dado pela razão da dívida sobre o estoque de capital e o segundo calculado dividindo-se a dívida pelo patrimônio líquido da empresa, representados respectivamente por (D/K) e (D/PL) . Outros indicadores financeiros considerados foram a variação da porcentagem de vendas ($\Delta\%V$), o capital circulante líquido em razão do estoque de capital (CCL/K), a intensidade de capital (IC), calculada dividindo-se o estoque de capital pelas vendas, o índice de liquidez (IL), dado pela razão ativo circulante/passivo circulante e o tamanho, representado pelo ativo total (AT).

A Tabela 4.3 apresenta os valores médios e os desvios padrão dos indicadores financeiros calculados para a amostra toda e para as firmas classificadas em dois grupos, denominados grupo I e grupo II.

Analisando os valores médios dos indicadores financeiros considerando a amostra toda como um único grupo, observa-se que, entre outras características, as firmas tiveram uma taxa média de investimento de 14% em relação ao estoque de capital, margem de lucro de quase 5% e índice de rentabilidade de pouco mais de 4% no período considerado. Ainda para a amostra toda, o indicador que apresentou a maior volatilidade (representada pelo desvio padrão) foi vendas sobre o estoque de capital (V/K).

Ao separar as firmas em grupos conforme o critério de classificação bayesiano proposto neste trabalho, foram observadas diferenças nos valores médios dos indicadores financeiros entre as firmas dos grupos I e II.

Tabela 4.3 – Indicadores Financeiros das Firms - Valores Médios e Desvios Padrão.

Indicadores Financeiros	Amostra		Mistura de Duas Distribuições Normal			
	Médias	Desvios Padrão	Grupo I		Grupo II	
			Médias	Desvios Padrão	Médias	Desvios Padrão
I/K	0.1466	0.7093	0.1482	0.6992	0.1394	0.7549
FC/K	0.4447	0.8701	0.4556	0.9006	0.3942	0.7102
V/K	5.7445	7.3369	5.8621	7.5632	5.1992	6.1543
D/K	0.6593	1.1093	0.6752	1.1570	0.5852	0.8506
D/PL	0.6390	2.4052	0.6280	1.9480	0.7901	3.7343
$\Delta\%V$	0.0695	1.5314	0.0729	1.6791	0.0520	0.3789
LL/K	0.3175	0.8466	0.3263	0.8767	0.2768	0.6890
LL/V	0.0499	0.5354	0.0547	0.5195	0.0269	0.7112
CCL/K	1.1691	2.8217	1.1929	2.9844	1.0586	1.8894
LL/PL	0.0456	1.0405	0.0527	0.6968	0.0101	2.0777
IL	2.4048	7.0097	2.4306	7.9621	2.3864	2.4126
IC	0.6057	1.8157	0.5889	1.3232	0.6513	3.3574
AT	416222	2443695	450423.2	2623868	281588	1831292
Obs.	5640		4641		999	

Nota: Nesta tabela foram usadas as seguintes equivalências: I : investimento, K : estoque de capital, FC : fluxo de caixa, V : vendas, D : dívida, CCL : capital circulante líquido, LL : lucro líquido, PL : patrimônio líquido, IL : índice de liquidez, IC : intensidade de capital, AT : ativo total.

Analisando os indicadores financeiros, merece destaque os valores médios correspondentes aos indicadores de rentabilidade dados pelas razões (LL/PL) e (LL/V) . Enquanto para as firmas do grupo II o valor médio do (LL/PL) foi 0.0101, para as firmas do grupo I esse valor foi igual a 0.0527, ou seja, mais de cinco vezes maior quando comparado com as firmas do grupo II. Considerando a margem de lucro (LL/V) , para as firmas do grupo I, o valor médio correspondente a esta razão foi 0.0547, pouco mais de duas vezes maior que o valor médio para as firmas do grupo II, igual a 0.0269. Para o indicador (LL/K) , o qual

também representa rentabilidade, embora com pequena diferença, as firmas pertencentes ao grupo I apresentaram maior valor médio para tal indicador, sendo igual a 0.3263. Para as firmas do grupo II, o valor médio da razão (LL/K) foi pouco menor, igual a 0.2768. Os valores médios dos indicadores financeiros citados acima mostram que as firmas do grupo I apresentaram maiores índices de rentabilidade quando comparados com os índices de rentabilidade das firmas do grupo II.

A Tabela 4.3 mostra também que, tanto as vendas em razão do estoque de capital quanto a variação percentual de vendas apresentaram maiores valores médios para as firmas do grupo I quando comparados com os valores médios para as firmas do grupo II. Enquanto para as firmas do grupo I os valores médios das razões (V/K) e $(\Delta\%V)$ foram iguais a 5.8621 e 0.0729, respectivamente, para as firmas do grupo II, os valores médios foram 5.1992 e 0.0520. No entanto, vale ressaltar que, embora as firmas do grupo I tenham apresentado maiores valores médios para (V/K) e $(\Delta\%V)$, quando comparados com as firmas do grupo II, a volatilidade destes dois indicadores também foi maior para as firmas do grupo I, merecendo destaque a diferença na volatilidade da variação percentual média de vendas. Enquanto para as firmas do grupo II a volatilidade do indicador $(\Delta\%V)$ foi igual a 0.3789, para as firmas do grupo I esse valor foi igual a 1.6791, isto é, mais de quatro vezes maior, evidenciando maior instabilidade sobre a variação percentual de vendas. Os maiores valores médios dos indicadores (V/K) e $(\Delta\%V)$ apresentados pelas firmas do grupo I podem estar representando uma maior necessidade em manter uma capacidade de reserva de ativos líquidos para suavizar os períodos de elevada volatilidade das receitas com vendas.

Os valores médios da intensidade de capital apresentados pelas firmas dos grupos I e II mostram que as firmas mais intensivas em capital tiveram menor valor médio para o fluxo de caixa em relação ao estoque de capital. Este resultado foi similar àqueles encontrados no estudo de Scherer (1980) em que as empresas com maior intensidade de capital apresentaram uma menor razão para o (FC/K) .

As firmas do grupo I são substancialmente maiores quando comparadas com as firmas do grupo II, conforme mostrado pelo valor médio do ativo total. Enquanto o ativo total médio para as firmas do grupo II foi igual a 281588, para as firmas do grupo I, o ativo total médio foi 450423.2, mostrando que o ativo total médio das firmas do grupo I é mais de 60% maior quando comparado com o ativo total médio das firmas do grupo II. Essa diferença nos valores médios do ativo total das firmas pertencentes aos grupos I e II pode favorecer as firmas do

grupo I na obtenção de recursos externos. A maior capacidade de endividamento das firmas do grupo I deve-se ao fato de tais firmas serem capazes de proporcionar mais garantias por disponibilizarem de mais ativos dados como colaterais na obtenção de recursos externos.

Tal fato pode ser comprovado pelos valores médios da dívida em relação ao estoque de capital obtidos para as firmas dos grupos I e II. Ao analisar o indicador de alavancagem financeira representado por (D/K) , nota-se que, enquanto para as firmas do grupo II o endividamento foi igual a 0.5852, para as firmas do grupo I esse índice foi um tanto maior, igual a 0.6752, refletindo uma maior facilidade na obtenção de financiamentos externos e permitindo tais firmas endividarem-se mais. Por outro lado, reduzidas disponibilidades de colaterais na obtenção de recursos externos por parte das firmas do grupo II podem implicar em um baixo grau da dívida como razão do estoque de capital.

A alavancagem financeira também pode ser avaliada considerando a dívida sobre o patrimônio líquido (D/PL) . Ao analisar os valores médios desta razão mostrados na Tabela 4.3, verificou-se que as firmas pertencentes ao grupo II mostraram-se mais endividadas quando comparadas com as firmas do grupo I. Enquanto para as firmas do grupo II o valor médio da razão (D/PL) foi igual a 0.7901, para as firmas do grupo I, este valor foi igual a 0.6280. O maior valor médio apresentado pelas firmas do grupo II pode ser devido ao fato de tais firmas serem menores, conforme mostrado pelo ativo total, ou seja, à medida que o patrimônio líquido diminui e o endividamento aumenta, a razão (D/PL) tende a aumentar. Diferentemente, para as firmas pertencentes ao grupo I, o valor médio da dívida em relação ao patrimônio líquido foi menor, dado que tais firmas são bem maiores quando comparadas com as firmas do grupo I.

Ainda de acordo com a Tabela 4.3, as firmas do grupo I apresentaram um valor médio mais alto para o índice de liquidez, indicando maior capacidade em cumprir obrigações de curto prazo. No entanto, ao analisar a volatilidade correspondente ao índice de liquidez, verifica-se uma maior instabilidade para as firmas do grupo I, uma vez que tais firmas apresentaram uma volatilidade mais de três vezes maior do que aquela correspondente às firmas do grupo II.

Os indicadores financeiros do grupo I mostram que as firmas pertencentes a esse grupo possuem índices de rentabilidade mais altos quando comparados com a rentabilidade das firmas do grupo II. No entanto, as firmas do grupo I também mostram características de empresas com alguma dificuldade financeira, dado que possuem altas volatilidades para

alguns dos indicadores financeiros, tais como (V/K) , (CCL/K) e (IL) , indicando instabilidade sobre os mesmos.

Embora com pequenas diferenças, os valores médios dos indicadores (I/K) , (FC/K) e (CCL/K) foram mais baixos para as firmas pertencentes ao grupo II quando comparados com os valores obtidos para as firmas do grupo I. Estes valores podem estar indicando que as firmas do grupo II têm maiores necessidades de caixa, proporcionando expectativas de que seus coeficientes de liquidez sejam maiores do que aqueles correspondentes as firmas do grupo I. Dessa forma, as firmas do grupo II poderiam ser consideradas restritas financeiramente.

Por outro lado, se o fluxo de caixa estiver sinalizando expectativas de potencial de rentabilidade futura, espera-se que as firmas do grupo I apresentem um coeficiente maior para tal variável, dado que tais firmas possuem maior lucratividade. Para Devereux e Schiantarelli (1990), o fluxo de caixa apresenta-se diferente em sua magnitude para as firmas, além de desempenhar um papel mais importante para as firmas de maior porte do que para as firmas de menor porte.

Para verificar se a variável fluxo de caixa está atuando como uma *proxy* para restrição financeira ou apenas sinaliza um potencial de rentabilidade futura para as firmas, as estimativas obtidas para os parâmetros do modelo de investimento dado na equação 4.1 foram analisadas conjuntamente com os indicadores financeiros mostrados na Tabela 4.3.

As simulações para os parâmetros do modelo são apresentadas na Tabela 4.4. Os coeficientes correspondentes às variáveis fluxo de caixa, vendas e financiamento, todas em razão do estoque de capital, são representados por β_1 , β_2 e β_3 , respectivamente³⁷. A Tabela 4.3 contém as estimativas dos parâmetros e os respectivos desvios padrão, o intervalo de credibilidade³⁸ e o número de simulações efetivamente utilizado para cada parâmetro, representado por N_{ef} .

Os valores mostrados na Tabela 4.4 mostraram que a estimativa para a variável investimento como razão do estoque de capital defasada temporalmente em um período apresentaram-se importantes para explicar o investimento das firmas pertencentes aos grupos I e II. As estimativas apresentaram sinal negativo para os dois grupos indicando que o

³⁷ No Apêndice são apresentadas as estimativas para os parâmetros do modelo de investimento, assumindo misturas de duas, três e quatro distribuições normal, considerando o modelo como sendo de efeito fixo e efeito aleatório.

³⁸ Sob um ponto de vista bayesiano, o intervalo de credibilidade é interpretado como uma probabilidade a *posteriori* de o parâmetro estimado pertencer ao intervalo obtido.

investimento passado estaria relacionado negativamente ao investimento presente tanto para as firmas do grupo I quanto para as firmas do grupo II.

Tabela 4.4 – Estimativas considerando o modelo de efeito fixo, com as firmas classificadas endogenamente em dois grupos.

Grupo	Parâmetro	Média	Desvio Padrão	Intervalo de credibilidade	N_{ef}
I	γ_1	-0.023	0.007	(-0.036; -0.006)	2000
	γ_2	0.006	0.002	(1.85E-4; 0.008)	2000
	β_1	0.013	0.003	(0.006; 0.019)	2000
	β_2	0.002	3.89E-4	(0.001; 0.003)	2000
	β_3	-0.004	0.002	(-0.007; 4.2E-4)	2000
	σ^2	0.013	5.74E-4	(0.012; 0.014)	2000
II	γ_1	-0.112	0.073	(-0.256; 0.030)	2000
	γ_2	0.007	0.013	(-0.018; 0.032)	2000
	β_1	0.044	0.033	(-0.018; 0.108)	2000
	β_2	0.028	0.004	(0.020; 0.036)	2000
	β_3	0.264	0.023	(0.219; 0.310)	2000
	σ^2	1.393	0.065	(1.275; 1.53)	2000

Diferentemente do comportamento da variável $(I/K)_{i,t-1}$, as estimativas para a variável dependente defasada ao quadrado $(I/K)_{i,t-1}^2$ apresentaram-se distintas entre os grupos. Enquanto para as firmas do grupo I o valor estimado foi importante para explicar o investimento, para as firmas do grupo II, tal variável não desempenhou papel significativo para explicar o investimento.

As estimativas obtidas para os parâmetros do modelo de investimento apresentadas na Tabela 4.4 mostram que o fluxo de caixa em relação ao estoque de capital (FC/K) é importante para explicar o investimento tanto das firmas pertencentes ao grupo I quanto das firmas do grupo II, dadas as probabilidades *a posteriori* de o parâmetro pertencer ao intervalo de credibilidade obtido.

O fato de o fluxo de caixa desempenhar papel importante nas decisões de investimento das firmas não é suficiente para afirmar que as empresas presentes na amostra sejam restritas financeiramente, já que esta variável poderia estar representando um potencial de rentabilidade futura e não dificuldades na obtenção de recursos externos.

No entanto, enquanto para as firmas do grupo I o coeficiente da variável (FC/K) foi igual a 0.013, para as firmas do grupo II, a média *a posteriori* da variável (FC/K) foi igual a 0.044, indicando que, possivelmente, as firmas pertencentes ao grupo I são mais sensíveis à flutuações em seus recursos internos. Como para as firmas do grupo II o coeficiente do (FC/K) foi mais de três vezes maior quando comparado com a estimativa para as firmas do grupo I, e considerando que as firmas do grupo II tiveram uma rentabilidade bem inferior à rentabilidade das firmas do grupo I, é provável que o fluxo de caixa esteja atuando como *proxy* para restrição financeira e não indicando potencial de rentabilidade futura da firma.

Para Schaller (1993), firmas com uma estrutura de propriedade mais concentrada são menos dependentes do fluxo de caixa do que firmas com uma estrutura de propriedade mais diversificada, devido à redução no conflito de interesses entre os acionistas e gestores da firma, o que diminuiria os custos da agência. Já Almeida e Campello (2002) argumentam que, como a capacidade de obtenção de recursos externos é determinada endogenamente pelo nível de novos empreendimentos e pelo grau de imperfeições do mercado, a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa poderia ser maior para firmas consideradas menos restritas. Isso pode estar ocorrendo quando se observa a existência de maior rentabilidade para as firmas do grupo I em comparação com a rentabilidade das firmas do grupo II. No entanto, o grupo I apresenta uma maior sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa, sugerindo que as firmas pertencentes a este grupo possam ser mais restritas.

As estimativas para o coeficiente da variável vendas sobre o estoque de capital (V/K) tiveram uma probabilidade *a posteriori* de pertencer ao intervalo de credibilidade obtido igual a 0.99, desempenhando importante papel na explicação do investimento das firmas nos dois grupos. Para as firmas pertencentes ao grupo II, a estimativa para o coeficiente da variável (V/K) foi significativamente maior. Enquanto para as firmas do grupo I o coeficiente dessa variável foi igual a 0.002, para o grupo II a estimativa foi 0.028. Esses valores mostram que as firmas do grupo II tendem a depender mais das vendas para obtenção de recursos para seus investimentos quando comparadas com as firmas do grupo I.

Para a variável financiamento sobre o estoque de capital (FIN/K), a probabilidade *a posteriori* das estimativas pertencerem aos intervalos de credibilidade estimados também foi 0.99, indicando que a dívida também é importante para explicar o investimento das firmas pertencentes aos dois grupos. Enquanto para as firmas do grupo I o valor estimado para a variável dívida foi negativa e igual a -0.004, para as firmas pertencentes ao grupo II esse valor

foi substancialmente maior, igual a 0.264, indicando uma maior dificuldade no acesso a financiamento de longo prazo para seus investimentos. Este valor mais alto para as firmas do grupo II pode estar indicando uma maior necessidade de financiamento externo por unidade de capital, uma vez que tais firmas são mais intensivas em capital.

Pode ser que o sinal negativo da estimativa para a razão (FIN/K) esteja indicando que o nível de endividamento em que as firmas se encontram está causando uma redução no investimento. Isso significa que as firmas encontram-se em um estágio de alavancagem financeira suficientemente maior que o endividamento das firmas do grupo II, ao ponto que dívidas adicionais podem reduzir o investimento. Além disso, a volatilidade mais alta apresentada pela dívida em relação ao estoque de capital para as firmas do grupo I, conforme mostrado na Tabela 4.3, pode estar influenciando tal estimativa.

Considerando que o coeficiente da variável de liquidez para as firmas do grupo II foi mais de três vezes maior quando comparado com o valor estimado para as firmas do grupo I, e dado que as firmas do grupo II apresentaram índices de rentabilidade mais baixos do que a rentabilidade das firmas do grupo I, conclui-se que a variável fluxo de caixa provavelmente esteja atuando como *proxy* para restrição financeira das firmas.

A interpretação dos resultados foi realizada considerando a classificação das firmas em grupos conforme um método bayesiano utilizando um modelo de investimento com mistura de distribuição. O método de classificação considerado permitiu a identificação de grupos financeiramente distintos na amostra, conforme os valores obtidos para os indicadores financeiros, mostrados na Tabela 4.3, e as estimativas apresentadas na Tabela 4.4. Além disso, com esse método de classificação, pôde-se verificar que, possivelmente, as firmas não estejam sob a crítica de que a variável fluxo de caixa sinalize um potencial de rentabilidade futura, mas esteja identificando a presença de restrição financeira em suas decisões de investimento.

A utilização de técnicas de agrupamento bayesianas considerando mistura de distribuição no agrupamento das firmas proporcionou uma forma de classificação ainda não considerada na literatura do investimento. Por esta técnica de classificação, o principal resultado econômico alcançado indica que as firmas analisadas sofrem de restrição financeira em suas decisões de investimento, como encontrado no estudo de Terra (2003). Em seu estudo, Terra (2003) apresentou evidências de que as firmas brasileiras enfrentam restrição financeira em suas decisões de investimento. A autora estimou os parâmetros de interesse considerando a classificação das firmas por tamanho e por grau de dependência financeira externa, encontrando evidências de que as firmas são restritas financeiramente.

Os resultados obtidos permitiram verificar também que o método de classificação endógena das firmas por meio de técnicas de agrupamento bayesiana permitiram fazer conclusões similares às reportadas no seminal estudo realizado por Fazzari et al. (1988), dado que as estimativas para o parâmetro da variável do fluxo de caixa indicaram que tal variável está atuando como *proxy* para restrição financeira e não somente sinalizando um potencial de rentabilidade futura da firma.

5 – Conclusão

Existe uma extensa literatura empírica e teórica que tenta identificar a presença de restrições financeiras nas decisões de investimento de firmas. A discussão sobre o papel de fatores financeiros sobre as decisões de investimento da firma foi intensificado a partir do seminal estudo de Fazzari et al. (1988), embora Meyer e Kuh (1957) já tivessem abordado o tema na literatura do investimento.

Fazzari et al. (1988) consideraram a taxa de pagamento de dividendos como critério de classificação das firmas e concluíram que a sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa era maior para as firmas com baixo pagamento de dividendos, as quais foram consideradas restritas financeiramente. O baixo pagamento de dividendos estaria relacionado à ausência de retenção de lucros, o que forçaria esse grupo de empresas a depender mais de recursos externos para novos empreendimentos.

A partir do estudo de FHP (1988), diferentes critérios foram utilizados para classificar as firmas e tentar identificar se poderiam ser consideradas restritas ou não-restritas financeiramente. Diferentes definições para firmas restritas financeiramente também foram introduzidas na literatura do investimento. De acordo com Kaplan e Zingales (1997), uma firma é restrita financeiramente se os custos ou a disponibilidade de fundos externos a impedem de realizar novos empreendimentos que ela teria escolhido se recursos internos estivessem disponíveis. Para Bond e Reenen (2002), uma firma é restrita financeiramente se um aumento inesperado na disponibilidade de seus recursos internos provocar um aumento nos gastos com investimentos, sem que este aumento proporcione qualquer tipo de informação sobre o potencial de lucratividade futura da firma.

Estudos realizados indicaram que a restrição financeira desempenha um papel importante nas decisões de investimento. A sensibilidade do investimento às variáveis de liquidez tem sido utilizada na literatura para identificar a presença de restrição financeira enfrentada pelas firmas em suas decisões de investimento. Considera-se uma firma como restrita financeiramente se qualquer aumento de recursos internos induzir a um aumento nos gastos com investimento, sem que este aumento represente qualquer tipo de informação sobre o potencial de rentabilidade futura.

Na tentativa de testar a presença de restrição financeira nas decisões de investimento diferentes critérios de classificação tem sido propostos na literatura. Dentre os critérios de classificação mais utilizados estão o tamanho e a idade da firma (Gertler e Gilchrist, 1994;

Gilchrist e Himmelberg, 1995; Kadapakkam et al., 1998), taxa de pagamento de dividendos (FHP, 1988), intensidade de capital (Hsiao e Tahmiscioglu, 1997; Kalatzis et al., 2008, Kalatzis e Azzoni, 2009; Kalatzis, Bassetto e Azzoni, 2010), acesso ao mercado de títulos (*commercial paper*) e presença de *bond rating* (Gilchrist e Himmelberg, 1995), membros em grupos corporativos (Hoshi et al., 1991), idade e dispersão de propriedade (Schaller, 1993), entre outros.

Devido à utilização de diferentes critérios de agrupamento das firmas, resultados contraditórios foram obtidos entre os estudos realizados na literatura. Podem ser citados os trabalhos de FHP (1988) e KZ (1997), os quais agruparam as firmas conforme a taxa de pagamento de dividendos. Enquanto os resultados de FHP (1988) mostraram que firmas que pagavam baixas taxas de dividendos eram mais restritas financeiramente, KZ (1997) obteve conclusões opostas, uma vez que o investimento das firmas com taxas mais altas de pagamento de dividendos mostrou-se mais sensível ao fluxo de caixa.

A consideração do porte como critério de classificação também resultou em conclusões distintas nos estudos de Kadapakkam et al. (1998), Devereux Schiantarelli (1990) e Gertler e Gilchrist (1994). Nos estudos de Kadapakkam et al. (1998) e Devereux e Schiantarelli (1990) os resultados foram similares entre si e mostraram que o investimento das firmas de maior porte é mais sensível ao fluxo de caixa. Já as conclusões de Gertler e Gilchrist (1994) seguiram em direção oposta às descobertas de Kadapakkam et al. (1998) e Devereux e Schiantarelli (1990), isto é, que a maior sensibilidade do investimento ao fluxo de caixa foi evidenciada pelas firmas de menor porte. Estes critérios de classificação têm um caráter exógeno e são definidos *a priori*.

O fato de um grupo de firmas apresentar maiores coeficientes para a variável fluxo de caixa não significa que sejam mais restritas que as firmas de outro grupo com coeficientes menores, já que o fluxo de caixa poderia estar atuando como uma *proxy* para lucratividade futura. Dessa forma, quando as firmas são classificadas conforme suas características comuns, procura-se considerar aspectos que possibilitem identificar grupos com níveis diferenciados de restrição financeira. É fundamental combinar informações quantitativas e qualitativas que permitam uma real identificação de restrição financeira nas decisões de investimento da firma.

Embora estudos empíricos tenham sido realizados na literatura propondo diferentes variáveis como *proxy* para a restrição financeira, não existe ainda uma conclusão sobre quando uma firma pode ser considerada restrita financeiramente. Neste sentido, o presente estudo procurou contribuir com a discussão sobre restrição financeira considerando técnicas de agrupamento sob uma abordagem bayesiana como critério de classificação das firmas,

permitindo que os grupos fossem identificados endogenamente, diferentemente dos critérios propostos na literatura do investimento.

Para identificar a presença de restrição financeira nas decisões de investimentos das firmas, este estudo considerou uma amostra de 564 firmas brasileiras no período de 1996 a 2006 classificadas de forma totalmente endógena, utilizando técnicas de agrupamento bayesianas. Para isso, foram atribuídas misturas de distribuições aos erros do modelo de investimento dado na equação (4.1). A quantidade de grupos, representados pelas componentes da mistura, foi considerada fixa, mas desconhecida.

Para determinar a quantidade de grupos existente na amostra, inicialmente os parâmetros do modelo foram estimados atribuindo uma única distribuição normal aos erros, o que equivale a considerar a amostra toda como um único grupo. Em seguida, considerou-se a presença de dois, três e quatro grupos na amostra, por meio de misturas de duas, três e quatro distribuições normal para o erro. O número máximo de componentes considerado na mistura foi quatro, uma vez que, a partir dessa quantidade, a identificação das observações nos grupos tornou-se difícil e as estimativas para os parâmetros das variáveis entre os diferentes grupos passaram a ser idênticas umas as outras. Variando o número de componentes da mistura, o modelo foi assumido como sendo de efeito fixo e efeito aleatório, com os parâmetros variando por grupo.

Baseado em estudos sobre a questão do valor inicial (Anderson e Hsiao, 1981, 1982; Hsiao, 2003; Hsiao e Pesaran, 2004), neste trabalho os valores iniciais da variável dependente defasada no modelo de investimento foram considerados como quantidades fixas e observáveis, representada por um vetor de médias anuais correspondentes às firmas da amostra³⁹.

As estimativas para os parâmetros variando por grupo foram obtidas por meio de simulações no *software* WinBUGS. A convergência destas estimativas foi verificada considerando o índice $\sqrt{\hat{R}}$ proposto por Gelman e Rubin (1992). Na seleção de modelos utilizou-se o critério das ordenadas das densidades preditivas. Foram comparados os resultados obtidos assumindo misturas de duas, três e quatro distribuições normal e considerando o modelo como sendo de efeito fixo e efeito aleatório. De acordo com o critério das ordenadas das densidades preditivas, o modelo preferível foi o modelo de efeito fixo, com as firmas classificadas em dois grupos.

³⁹ Conforme já ressaltado anteriormente, como um teste de sensibilidade, os valores iniciais da variável dependente defasada também foram representados por um vetor de observações correspondente aos valores da variável resposta referente ao primeiro ano da amostra. Os resultados não sofreram alterações.

Considerando a classificação endógena das firmas por meio de técnicas de agrupamento baseadas em misturas de distribuições e os indicadores financeiros obtidos para cada grupo, a análise das estimativas dos parâmetros considerando uma abordagem econométrica bayesiana pôde fornecer resultados robustos.

Os resultados econômicos da estimação dos parâmetros permitiram notar que o parâmetro do fluxo de caixa foi importante para explicar o investimento tanto das firmas do grupo I quanto das firmas do grupo II. Conforme mostrado na Tabela 4.3, enquanto para as firmas do grupo I, o coeficiente do fluxo de caixa foi igual a 0.013, para as firmas do grupo II, esse valor foi igual a 0.044, ou seja, mais de três vezes maior quando comparado com a estimativa para as firmas do grupo I.

Além de terem apresentado um maior valor estimado para o parâmetro do fluxo de caixa, as firmas do grupo II tiveram um valor médio para o índice de rentabilidade (LL/PL) inferior ao valor correspondente às firmas do grupo I, como mostra a Tabela 4.2. Enquanto para as firmas do grupo II esta razão foi 0.0101, para as firmas do grupo I, este valor médio foi igual a 0.0527, isto é, mais de cinco vezes maior. Além do lucro líquido sobre o patrimônio líquido, o valor médio da variável margem de lucro (LL/V) foi aproximadamente duas vezes maior para as firmas do grupo I quando comparado com o valor apresentado pelas firmas do grupo II. Estes indicadores mostram que as firmas pertencentes ao grupo I tiveram índices de rentabilidade mais altos quando comparados com os índices de rentabilidade das firmas do grupo II.

Comparando o grau de alavancagem das firmas entre os grupos, pouca diferença foi notada entre os valores médios dos indicadores (D/K) e (D/PL). No entanto, considerando a dívida sobre o patrimônio líquido, a volatilidade foi aproximadamente duas vezes maior para as firmas do grupo II quando comparada com a volatilidade da razão (D/PL) para as firmas do grupo I.

Analisando os resultados econômicos alcançados, pode-se concluir que há indícios de que a variável fluxo de caixa esteja atuando como *proxy* para restrição financeira para as firmas analisadas, e não esteja sinalizando potencial de rentabilidade futura. Tal conclusão deve-se ao fato de a maior estimativa para o parâmetro do fluxo de caixa ter sido obtida para as firmas do grupo II, as quais apresentaram índices de rentabilidade mais baixos quando comparados com a rentabilidade das firmas do grupo I.

Por outro lado, se a estimativa para o coeficiente da variável fluxo de caixa tivesse sido maior para as firmas do grupo I, as quais apresentaram níveis mais altos de rentabilidade,

então as firmas não poderiam ser consideradas restritas financeiramente, uma vez que a variável fluxo de caixa estaria sinalizando somente um potencial de rentabilidade futura para as firmas. Neste caso, as firmas estariam sujeitas à crítica de que o fluxo de caixa não estaria evidenciando a presença de restrição financeira em suas decisões de investimento.

A conclusão obtida neste estudo foi similar aos resultados de Kalatzis e Azzoni (2009) e Kalatzis et al. (2010), os quais classificaram as firmas de acordo com a intensidade de capital. Kalatzis e Azzoni (2009) analisaram as decisões de investimento de uma amostra de 497 firmas brasileiras no período de 1986 a 1997, período em que o Brasil sofreu significativas transformações na economia incluindo a estabilização de seis planos econômicos. Os resultados indicaram que as firmas estavam sujeitas à restrição de liquidez, dado que a maior estimativa para o parâmetro da variável fluxo de caixa foi obtida para as firmas mais intensivas em capital, as quais tiveram índices de rentabilidade mais baixos quando comparados com os valores correspondentes às firmas menos intensivas em capital. A significância do parâmetro da variável fluxo de caixa aliada ao baixo índice de rentabilidade das firmas mais intensivas em capital forneceu evidências de que o fluxo de caixa não estava sinalizando potencial de rentabilidade futura para as firmas, mas sim a presença de restrição financeira.

Com o mesmo critério de classificação considerado por Kalatzis e Azzoni (2009), Kalatzis et al. (2010) analisaram uma amostra de 373 firmas brasileiras no período de 1997 a 2004, considerando um modelo de regressão ridge. Os resultados econômicos mostraram que a variável de liquidez estava atuando como *proxy* para restrição financeira, dado que o parâmetro da variável fluxo de caixa foi maior para as firmas menos intensivas em capital, as quais tiveram índices mais baixos de rentabilidade.

A utilização de técnicas de agrupamento sob uma abordagem bayesiana utilizando misturas de distribuições normal para o erro do modelo de investimento proporcionou a realização de uma classificação endógena das firmas, até então não considerado na literatura do investimento para verificar a presença de restrição financeira. Esta classificação permitiu a identificação de grupos distintos de firmas, com características financeiras diferentes entre si e os resultados possibilitaram concluir que a variável fluxo de caixa está atuando como *proxy* para a restrição financeira nas decisões de investimento das firmas.

Esta pesquisa procurou aprofundar e contribuir com o processo de investigação do comportamento do investimento da firma considerando uma abordagem mais complexa, flexível e ainda não utilizada na teoria do investimento, utilizando um critério de classificação bayesiano para encontrar endogenamente grupos distintos de firmas. Os resultados

encontrados permitiram avançar no conhecimento e entendimento do complexo fenômeno do investimento da firma. No entanto, deve-se ressaltar que novos campos de análise do investimento revelam-se de grande importância para consolidar tal conhecimento, dado que não há um consenso na literatura sobre quando considerar uma firma como restrita financeiramente. Essa investigação é um desafio para futuras pesquisas, cujo interesse cresce em função dos resultados encontrados no presente estudo.

Referências Bibliográficas

Allayannis, G.; Mozumdar, M. (2004). The Impact of Negative Flow and Inflow Observations on Investment-Cash Flow Sensitivity Estimates. *Journal of Banking & Finance*, v.28, n.5, p.901–930.

Almeida, H.; Campello, M. (2002). Financial Constraints and Investment-Cash Flow Sensitivities: New Research Directions, Working paper, New York University and University of Illinois.

Almeida, H.; Campello, M.; Weisbach, M.S. (2004). The Cash Flow Sensitivity of Cash. *Journal of Finance*, v.59, n.4, p.1777–1804.

Anderson, T.W.; Hsiao, C. (1981). Estimation of Dynamic Models with Error Components. *Journal of the American Statistical Association*, v.76, n.375, p.598–606.

Anderson, T.W.; Hsiao, C. (1982). Formulation and Estimation of Dynamic Models Using Panel Data. *Journal of Econometrics*, v.18, n.1, p.47–82.

Bhagat, S.; Moyen, N.T.; Suh, I. (2005). Investment and Internal Funds of Distressed Firms. *Journal of Corporate Finance*, v.11, n.3, p.449–472.

Birkes, D.; Dodge, Y. *Alternative Methods of Regression*. John Wiley & Sons, USA, 1993.

Bond, S.; Meghir, C. (1994). Dynamic Investment Models and Firm's Financial Policy. *Review of Economics Studies*, v.61, n.2, p.197–222.

Bond, S.; Reenen, V.J. (2002). Chapter 65 Microeconomic Models of Investment and Employment. *Handbook of Econometrics*, v.6, Parte 1, p.4417–4498.

Celeux, G. (1997). Discussion of “On Bayesian Analysis of Mixtures with an Unknown Number of Components”, by S. Richardson and P.J. Green. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, v.59, n.4, p.777–790.

Chib, S.; Greenberg, E. (1996). Markov Chain Monte Carlo Simulation Methods in Econometrics. *Econometric Theory*, v.12, n.3, p.409–431.

Chirinko, R.S.; Kalckreuth, U. (2002). Further Evidence on the Relationship Between Firm Investment and Financial Status. *Economic Research Centre of the Deutsche Bundesbank*. <http://217.110.182.54/download/volkswirtschaft/dkp/2002/200228dkp.pdf>.

Chirinko, R.S., Schaller, H. (1995). Why Does Liquidity Matter in Investment Equations? *Journal of Money, Credit, and Banking*, v.27, n.2, p.523–548.

Cleary, S. (1999). The Relationship between Firm Investment and Financial Status. *Journal of Finance*, v.54, n.2, p.673–92.

Cleary, S. (2006). International Corporate Investment and the Relationships between Financial Constraint Measures. *Journal of Banking & Finance*, v.30, n.5, p.1559–1580.

- Devereux, M.; Schiantarelli, F. (1990). Investment, Financial Factors and Cash Flow: Evidence from UK Panel Data. In: Glenn Hubbard (ed.). *Information, Capital Market and Investment*. University of Chicago Press.
- Dey, D.K.; Kuo, L.; Sahu, S.K. (1995). A Bayesian Predictive Approach to Determining the Number of Components in a Mixture Distribution. *Statistics and Computing*, v.5, n.4, p.297–305.
- Diebolt, J.; Robert, C.P. (1994). Estimation of Finite Mixture Distributions through Bayesian Sampling. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, v.56, n.2, p.363–375.
- Elston, J.A. (1996). Dividend Policy and Investment: Theory and Evidence from US Panel Data. *Managerial and Decision Economics*, v.17, n.3, p.267–275.
- Fazzari, S.M.; Hubbard, G.; Petersen, B. (1988). Financing Constraints and Corporate Investment. *Brookings Papers on Economic Activity*, v.1, n.1, p.141–195.
- Fazzari, S.M.; Hubbard, G.; Petersen, B. (2000). Investment-Cash Flow Sensitivities are Useful: A Comment on Kaplan and Zingales. *Quarterly Journal of Economics*, v.25, n.2, p.695–705.
- Frühwirth-Schnatter, S.; Kauffman, S. (2008). Model-Based Clustering of Multiple Time Series. *Journal of Business & Economics Statistics*, v.26, n.1, p.78–89.
- Gelfand, A.; Dey D.K (1993). Bayesian Model Choice: Asymptotics and Exact Calculations. *Journal of the Royal Statistician Society B*, v.56, n.3, p.501–514.
- Gelfand, E.A.; Smith, F.A. (1990). Sampling-Based Approaches to Calculating Marginal Densities. *Journal of the American Statistical Association*, v.85, n.410, p.398–409.
- Gelman, A.; Carlin, J.B.; Rubin, D.B. *Bayesian Data Analysis*. Great Britain: Chapman & Hall, 1995.
- Gelman, A.; Rubin, D. (1992). Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequence. *Statistical Science*, v.7, n.4, p.457–511.
- Geman, S.; Geman, D. (1984). Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images. *IEEE-PAMI*, v.6, p.721–741.
- Gertler, M.; Gilchrist, S. (1994). Monetary Policy, Business Cycles, and the Behavior of Small Manufacturing Firms. *The Quarterly Journal of Economics*, v.109, n.2, p.309–340.
- Geweke, J. (2007). Interpretation and Inference in Mixture Models: Simple MCMC Works. *Computational Statistics & Data Analysis*, v.51, p.3529–3550.
- Gilchrist, S.; Himmelberg, C.P. (1995). Evidence on the Role of Cash Flow for Investment. *Journal of Monetary Economics*, v.36, n.3, p.541–572.

- Hoerl, A.E. *Applications of Ridge Analysis to Regression Problems*, Chem. Eng. Prog. 58, p.54–59, 1962.
- Hoshi, T.; Kashyap, A.K.; Scharfstein, D. (1991). Corporate Structure, Liquidity and Investment: Evidence from Japanese Industrial Groups. *Quarterly Journal of Economics*, v.101, p.33–60.
- Hovakimian, A.; Hovakimian, G. (2009). Cash Flow Sensitivity of Investment. *European Financial Management*, v.15, n.1, p.47–65.
- Hovakimian, G.; Titman, S. (2006). Corporate Investment with Financial Constraints: Sensitivity of Investment to Funds from Voluntary Asset Sales. *Journal of Money, Credit, and Banking*, v.38, n.2, p.357–374.
- Hsiao, C. *Analysis of Panel Data*. Cambridge: University Press, 2003.
- Hsiao, C.; Pesaran, M. (2004). Random Coefficient Panel Data Models. Cambridge Working Papers in Economics 0434, Faculty of Economics (formerly DAE), University of Cambridge. Disponível em <http://ideas.repec.org/p/cam/camdae/0434.html>
- Hsiao, C., Pesaran, M. H.; Tahmiscioglu, A. K. (1999). Bayes Estimation of Short-Run Coefficients in Dynamic Panel Data Models. In: Hsiao, C.; Lahiri, K.; Lee, L.; Pesaran, M.H. (Eds.). *Analysis of Panels and Limited Dependent Variables: A Volume in Honour of G. S. Maddala*. Cambridge: University Press.
- Hsiao, C.; Tahmiscioglu, A.K. (1997). A Panel Analysis of Liquidity Constraints and Firm Investment. *Journal of the Statistical Association*, v.92, n.438, p.455–465.
- Hu, X.; Schiantarelli, F. (1998). Investment and Capital Market Imperfections: A Switching Regression Approach Using U.S. Firm Panel Data. *The Review of Economics and Statistics*, v.80, n.3, p.466–479.
- Jasra, A.; Holmes, C.C.; Stephens, D.A. (2005). Markov Chain Monte Carlo Methods and the Label Switching Problem in Bayesian Mixture Modeling. *Statistical Science*, v.20, n.1, p.50–67.
- Jorgenson, W.D. (1963). Capital Theory and Investment Behavior. *American Economic Review*, v.53, n.2, p.247–59.
- Juarez, M.A.; Steel, M.F.J. (2010). Non-Gaussian dynamic Bayesian Modelling for panel data. *Journal of Applied Econometrics*, v.25, p.1128–1154.
- Kadapakkam, P.R.; Kumar, P.C.; Riddick, L.A. (1998). The Impact of Cash Flows and Firm Size on Investment: The International Evidence. *Journal of Banking & Finance*, v.22, n.3, p.293–320.
- Kalatzis, A.E.G.; Azzoni, C.; Achcar, J.A. (2008). Financial Constraint and Investment Decisions: Evidence from Highly Unstable Emerging Economy. *Applied Economics*, v.40, n.10, p.1425–1434.

Kalatzis, A.E.G.; Azzoni, C. (2009). Investment Decisions in Troubled Times: A Bayesian Approach Applied to Brazilian Firms. *Int. J. Production Economics*, v.120, n.12, p.595–606.

Kalatzis, A.E.G.; Bassetto, C.F.; Azzoni, C. (2010). Multicollinearity and Financial Constraint in Investment Decisions: A Bayesian Generalized Ridge Regression, *Journal of Applied Statistics* (forthcoming).

Kaplan, S.; Zingales, L. (1997). Do Investment-Cash Flow Sensitivities Provide Useful Measures of Financing Constraints? *Quarterly Journal of Economics*, v.122, n.1, p.169–215.

Kaplan, S.; Zingales, L. (2000). Investment – Cash Flow Sensitivities are not Valid Measures of Financing Constraints. *NBER*, Working Paper, n.7659, USA.

Khurana, I.; Pereira, R.; Martin, X. (2006). Financial Development and the Cash Flow Sensitivity of Cash. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v.41, n.4, p.787–818.

Kiviet, J. (1995). On Bias, Inconsistency, and Efficiency of Various Estimators in Dynamic Panel Data Models, *Journal of Econometrics*, v.68, n.1, p.53–78.

Meyer, J.R.; Kuh, E. *The investment Decision*. Cambridge: Harvard University Press, 1957.

Modigliani, F.; Miller, M.H. (1958). The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment. *The American Economic Review*, v.48, n.3, p.162–97.

Modigliani, F.; Miller, M. H. (1963). Corporate Income Taxes and the Cost of Capital: A Correction. *American Economic Review*, 1963, v.53, n.3, p.433–443.

Moyen, N. (2004). Investment-Cash Flow Sensitivities: Constrained versus Unconstrained Firms. *The Journal of Finance*, v.59, n.5, p.2061–2092.

Myers, S.C. (1984). The Capital Structure Puzzle. *Journal of Finance*, v.39, p. 575–592.

Myers, S.; Majluf, N.S. (1984). Corporate Financing and Investment Decision when Firms Have Information that Investors Do Not Have. *Journal of Financial Economics*, v.13, n.32, p.187–221.

Oliner, D.S.; Rudebusch, D.G. (1996). Is There a Broad Credit Channel for Monetary Policy? *FRBSF Economic Review*, n.4, p.3–13.

Pesaran, M.H.; Smith, R. (1995). Estimating Long-Run Relationships from Dynamic Heterogeneous Panels. *Journal of Econometrics*, v.68, p.79–113.

Povel, P.; Raith, M. (2001). Optimal Investment Under Financial Constraints: The Roles of Internal Funds and Asymmetric. University of Chicago.

Richardson, S.; Green, S. (1997). On Bayesian Analysis of Mixtures with an Unknown Number of Components (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, v.59, n.4, p.731–792.



- Roeder K.; Wasserman L. (1997). Practical Bayesian Density Estimation Using Mixtures of Normals. *Journal of the American Statistical Association*, v.92, n.439, p.894–902.
- Schaller, H. (1993). Asymmetric information, Liquidity Constraints, and Canadian Investment. *Canadian Journal of Economics*, v.26, n.3, p.552–574.
- Scherer, F. (1980). *Industrial Market Structure and Economic Performance*. Houghton Mifflin, New York.
- Schiantarelli, F. (1996). Financial Constraints and Investment: Methodological Issues and International Evidence. *Oxford Review of Economic Policy*, v.12, p.70-89.
- Spiegelhalter, D.J.; Thomas, A.; Best, N.G.; Gilks, W.R. (1995). *Winbugs: Bayesian Inference using Gibbs Sampling*. Cambridge: Biostatistics Unit.
- Stephens, M. *Bayesian Methods for Mixture of Normal Distributions*, PhD thesis, University of Oxford, 1997.
- Terra, C.M. (2003). Credit Constraints in Brazilian Firms: Evidence from Panel Data. *Revista Brasileira de Economia*, v.57, n.2, p.444–464.
- Viele, K.; Tong, B. (2002). Modeling with Mixtures of Linear Regressions. *Statistics and Computing*, v.12, n.4, p.315–330.
- Whited, T.M. (1992). Debt, Liquidity Constraints and Corporate Investment: Evidence from Panel Data, *Journal of Finance*, v.47, n.4, p.425–460.
- Zhang, P.; Small, D. (2006). Bayesian inference for random coefficient dynamic panel data models. Working paper, University of Pennsylvania, Wharton School, Philadelphia, USA.
http://www-stat.wharton.upenn.edu/~dsmall/randomcoefficientmodel_submittedversion.pdf.

Apêndice

O Apêndice contém as tabelas dos indicadores financeiros e das estimativas considerando o modelo de investimento utilizado nesta pesquisa assumindo-o como sendo de efeito fixo e aleatório, com misturas de duas, três e quatro distribuições normais para os erros.

As tabelas estão dispostas na seguinte ordem:

Tabela A.1 – Indicadores Financeiros obtidos para a amostra toda e para as firmas agrupadas em dois, três e quatro grupos, utilizando o modelo de efeito fixo com misturas de duas, três e quatro distribuições normal.

Tabela A.2 – Estimativas considerando o modelo de efeito fixo, assumindo uma distribuição normal para o erro e também com misturas de duas, três e quatro distribuições normal.

Tabela A.3 – Indicadores Financeiros obtidos para a amostra toda e para as firmas agrupadas em dois, três e quatro grupos, utilizando o modelo de efeito aleatório com misturas de duas, três e quatro distribuições normal.

Tabela A.4 – Estimativas considerando o modelo de efeito aleatório, assumindo uma distribuição normal para o erro e também com misturas de duas, três e quatro distribuições normal.

Nas tabelas A.2 e A.4, sob uma interpretação bayesiana, os intervalos de credibilidade indicam a probabilidade *a posteriori* de o parâmetro estimado pertencer ao intervalo obtido. O segundo subscrito de cada parâmetro, dado por I, II, III e IV, indicam os grupos.

Tabela A.1 – Indicadores Financeiros obtidos para a amostra toda e para as firmas agrupadas em dois, três e quatro grupos, utilizando o modelo de efeito fixo com misturas de duas, três e quatro distribuições normal.

Indicadores Financeiros	Dois grupos		Três grupos			Quatro grupos			
	grupo I	grupo II	grupo I	grupo II	grupo III	grupo I	grupo II	grupo III	grupo IV
<i>I/K</i>	0.1482 (0.6992)	0.1394 (0.7549)	0.1413 (0.6731)	0.1171 (0.5453)	0.1692 (0.8387)	0.1414 (0.6724)	0.1469 (0.7373)	0.1683 (1.1026)	0.1714 (0.7168)
<i>FC/K</i>	0.4556 (0.9006)	0.3942 (0.7102)	0.4537 (0.9018)	0.3885 (0.4739)	0.4235 (0.8094)	0.4557 (0.8652)	0.4305 (0.9798)	0.4311 (0.7926)	0.4132 (0.6348)
<i>V/K</i>	5.8621 (7.5632)	5.1992 (6.1543)	5.8436 (7.5494)	5.3434 (6.0392)	5.4784 (6.7830)	5.8340 (7.5041)	5.7406 (7.2544)	5.2474 (6.6819)	5.3594 (6.6458)
<i>D/K</i>	0.6752 (1.1570)	0.5852 (0.8506)	0.6799 (1.1744)	0.4635 (0.5359)	0.6218 (0.9374)	0.6776 (1.1504)	0.6622 (1.1698)	0.5679 (0.7097)	0.5689 (0.7574)
<i>D/PL</i>	0.6280 (1.9480)	0.7901 (3.7343)	0.6318 (1.9945)	0.5154 (1.1451)	0.7627 (3.4174)	0.6437 (2.0163)	0.6099 (2.3645)	0.9027 (4.2912)	0.7651 (3.3295)
$\Delta\%V$	0.0729 (1.6791)	0.0520 (0.3789)	0.0749 (1.7659)	0.0562 (0.3127)	0.0526 (0.3654)	0.0729 (1.8696)	0.0604 (0.6973)	0.0303 (0.2834)	0.0602 (0.2702)
<i>LL/K</i>	0.3263 (0.8767)	0.2768 (0.6890)	0.3231 (0.8771)	0.2729 (0.4754)	0.3062 (0.7874)	0.3252 (0.8443)	0.3082 (0.9498)	0.3121 (0.7402)	0.2930 (0.6201)
<i>LL/V</i>	0.0547 (0.5195)	0.0269 (0.7112)	0.0536 (0.5445)	0.0440 (0.1107)	0.0388 (0.6428)	0.0534 (0.5847)	0.0420 (0.6352)	0.0492 (0.1343)	0.0469 (0.1442)
<i>CCL/K</i>	1.1929 (2.9844)	1.0586 (1.8894)	1.2040 (3.0667)	1.1827 (1.8699)	1.0505 (1.9639)	1.1928 (3.0365)	1.1566 (2.6886)	1.2378 (2.1953)	1.0325 (1.7034)
<i>LL/PL</i>	0.0527 (0.6968)	0.0101 (2.0777)	0.0497 (0.7122)	0.0835 (0.2577)	0.0240 (1.8805)	0.0446 (0.7651)	0.0301 (1.8336)	0.0763 (0.4438)	0.0723 (0.3642)
<i>IL</i>	2.4306 (7.9621)	2.3864 (2.4126)	2.3367 (4.9217)	2.5660 (3.1076)	2.2986 (2.2914)	2.3344 (5.1786)	2.2901 (2.5310)	2.6622 (3.2103)	2.3270 (2.4259)
<i>IC</i>	0.5889 (1.3232)	0.6513 (3.3574)	0.5859 (1.1911)	0.4902 (0.5473)	0.6646 (3.2683)	0.5789 (1.2025)	0.7023 (3.2687)	0.4857 (0.5175)	0.5368 (0.7044)
<i>AT</i>	450423 (2623868)	281588 (1831292)	459903.3 (2668283)	150513.9 (345461.6)	332367.4 (2089828)	429827.7 (2581741)	540878.9 (2934265)	213424.1 (678131.6)	160877.4 (538109.1)
Obs.	4641	999	4182	201	1257	3572	1302	176	590

Tabela A.2 – Estimativas considerando o modelo de efeito fixo, com uma normal e com misturas de três e quatro distribuições normal.

Parâmetros	Uma Distribuição Normal				Mistura de Três Distribuições Normais				Mistura de Quatro Distribuições Normais			
	Média	Des. Pad.	Intervalo de Credibilidade	$\sqrt{\hat{R}}$	Média	Des. Pad.	Intervalo de Credibilidade	$\sqrt{\hat{R}}$	Média	Des. Pad.	Intervalo de Credibilidade	$\sqrt{\hat{R}}$
γ_{1I}	-0.14	(0.023)	[-0.179; -0.087]	0.998	-0.017	(0.008)	[-0.035; -0.002]	1.002	-0.02	(0.007)	[-0.03; -2.9E-4]	1.002
γ_{1II}	—	—	—	—	0.045	(0.329)	[-0.529; 0.881]	1.003	-0.008	(0.025)	[-0.054; 0.043]	0.999
γ_{1III}	—	—	—	—	0.100	(0.059)	[-0.026; 0.199]	0.998	-0.145	(0.673)	[-1.0; 1.0]	1.0
γ_{1IV}	—	—	—	—	—	—	—	—	-0.420	(0.571)	[-1.0; 0.269]	0.998
γ_{2I}	0.005	(0.004)	[-0.003; 0.012]	1.002	0.002	(0.003)	[-0.001; 0.008]	1.0	4.21E-4	(0.001)	[-0.001; 0.003]	0.995
γ_{2II}	—	—	—	—	-0.019	(0.111)	[-0.298; 0.202]	0.993	0.005	(0.003)	[-0.001; 0.011]	0.997
γ_{2III}	—	—	—	—	0.002	(0.016)	[-0.017; 0.045]	0.999	0.243	(0.452)	[-0.434; 1.0]	1.006
γ_{2IV}	—	—	—	—	—	—	—	—	0.395	(0.432)	[-0.022; 1.0]	0.998
β_{1I}	0.011	(0.011)	[-0.010; 0.031]	0.992	0.010	(0.003)	[0.003; 0.016]	0.993	0.006	(0.003)	[4.93E-4; 0.011]	1.002
β_{1II}	—	—	—	—	0.254	(0.137)	[-0.012; 0.519]	0.999	0.034	(0.013)	[0.010; 0.060]	1.001
β_{1III}	—	—	—	—	0.015	(0.015)	[-0.013; 0.044]	1.003	0.152	(0.189)	[-0.047; 0.586]	0.999
β_{1IV}	—	—	—	—	—	—	—	—	0.15	(0.187)	[-0.052; 0.571]	1.001
β_{2I}	0.012	(0.001)	[0.009; 0.014]	1.001	9.2E-4	(3.5E-4)	[2.56E-4; 0.002]	1.002	1.71E-4	(2.8E-4)	[-3.7E-4; 7.3E-4]	0.998
β_{2II}	—	—	—	—	0.116	(0.025)	[0.066; 0.159]	1.001	0.009	(0.001)	[0.007; 0.012]	1.002
β_{2III}	—	—	—	—	0.015	(0.002)	[0.011; 0.019]	0.999	0.108	(0.082)	[0.023; 0.250]	0.998
β_{2IV}	—	—	—	—	—	—	—	—	0.108	(0.082)	[0.024; 0.25]	0.999
β_{3I}	0.105	(0.007)	[0.090; 0.119]	1.0	-0.06	(0.002)	[-0.010; -0.002]	0.995	-0.008	(0.002)	[-0.011; -0.005]	1.003
β_{3II}	—	—	—	—	0.389	(0.074)	[0.252; 0.538]	0.998	0.027	(0.012)	[0.005; 0.051]	1.001
β_{3III}	—	—	—	—	0.075	(0.018)	[0.045; 0.114]	1.002	0.245	(0.139)	[0.088; 0.510]	1.0
β_{3IV}	—	—	—	—	—	—	—	—	0.241	(0.135)	[0.088; 0.500]	0.997
σ_I^2	0.362	(0.007)	[0.348; 0.377]	0.999	0.007	(5.1E-4)	[0.006; 0.008]	1.001	0.004	(3.3E-4)	[0.003; 0.005]	1.001
σ_{II}^2	—	—	—	—	2.695	(0.272)	[2.215; 3.283]	1.0	0.033	(0.005)	[0.024; 0.043]	1.0
σ_{III}^2	—	—	—	—	0.208	(0.024)	[0.162; 0.254]	0.999	1.89	(1.476)	[0.371; 4.22]	0.999
σ_{IV}^2	—	—	—	—	—	—	—	—	1.872	(1.448)	[0.380; 4.128]	1.003

Tabela A.3 – Indicadores financeiros obtidos para a amostra toda e para as firmas agrupadas em dois, três e quatro grupos, utilizando o modelo de efeito aleatório com misturas de duas, três e quatro distribuições normal.

Indicadores Financeiros	Dois grupos		Três grupos			Quatro grupos			
	grupo I	grupo II	grupo I	grupo II	grupo III	grupo I	grupo II	grupo III	grupo IV
I/K	0.1482 (0.6992)	0.1394 (0.7549)	0.1413 (0.6731)	0.1171 (0.5453)	0.1692 (0.8387)	0.1414 (0.6724)	0.1469 (0.7373)	0.1683 (1.1026)	0.1714 (0.7168)
FC/K	0.4556 (0.9006)	0.3942 (0.7102)	0.4537 (0.9018)	0.3885 (0.4739)	0.4235 (0.8094)	0.4557 (0.8652)	0.4305 (0.9798)	0.4311 (0.7926)	0.4132 (0.6348)
V/K	5.8621 (7.5632)	5.1992 (6.1543)	5.8436 (7.5494)	5.3434 (6.0392)	5.4784 (6.7830)	5.8340 (7.5041)	5.7406 (7.2544)	5.2474 (6.6819)	5.3594 (6.6458)
D/K	0.6752 (1.1570)	0.5852 (0.8506)	0.6799 (1.1744)	0.4635 (0.5359)	0.6218 (0.9374)	0.6776 (1.1504)	0.6622 (1.1698)	0.5679 (0.7097)	0.5689 (0.7574)
D/PL	0.6280 (1.9480)	0.7901 (3.7343)	0.6318 (1.9945)	0.5154 (1.1451)	0.7627 (3.4174)	0.6437 (2.0163)	0.6099 (2.3645)	0.9027 (4.2912)	0.7651 (3.3295)
$\Delta\%V$	0.0729 (1.6791)	0.0520 (0.3789)	0.0749 (1.7659)	0.0562 (0.3127)	0.0526 (0.3654)	0.0729 (1.8696)	0.0604 (0.6973)	0.0303 (0.2834)	0.0602 (0.2702)
LL/K	0.3263 (0.8767)	0.2768 (0.6890)	0.3231 (0.8771)	0.2729 (0.4754)	0.3062 (0.7874)	0.3252 (0.8443)	0.3082 (0.9498)	0.3121 (0.7402)	0.2930 (0.6201)
LL/V	0.0547 (0.5195)	0.0269 (0.7112)	0.0536 (0.5445)	0.0440 (0.1107)	0.0388 (0.6428)	0.0534 (0.5847)	0.0420 (0.6352)	0.0492 (0.1343)	0.0469 (0.1442)
CCL/K	1.1929 (2.9844)	1.0586 (1.8894)	1.2040 (3.0667)	1.1827 (1.8699)	1.0505 (1.9639)	1.1928 (3.0365)	1.1566 (2.6886)	1.2378 (2.1953)	1.0325 (1.7034)
LL/PL	0.0527 (0.6968)	0.0101 (2.0777)	0.0497 (0.7122)	0.0835 (0.2577)	0.0240 (1.8805)	0.0446 (0.7651)	0.0301 (1.8336)	0.0763 (0.4438)	0.0723 (0.3642)
IL	2.4306 (7.9621)	2.3864 (2.4126)	2.3367 (4.9217)	2.5660 (3.1076)	2.2986 (2.2914)	2.3344 (5.1786)	2.2901 (2.5310)	2.6622 (3.2103)	2.3270 (2.4259)
IC	0.5889 (1.3232)	0.6513 (3.3574)	0.5859 (1.1911)	0.4902 (0.5473)	0.6646 (3.2683)	0.5789 (1.2025)	0.7023 (3.2687)	0.4857 (0.5175)	0.5368 (0.7044)
AT	450423 (2623868)	281588 (1831292)	459903.3 (2668283)	150513.9 (345461.6)	332367.4 (2089828)	429827.7 (2581741)	540878.9 (2934265)	213424.1 (678131.6)	160877.4 (538109.1)
Obs.	4641	999	4182	201	1257	3572	1302	176	590

Tabela A.4 – Estimativas considerando o modelo de efeito aleatório, com uma normal e com misturas de três e quatro distribuições normal.

Parâmetros	1 Distribuição Normal				Mistura de 3 Distribuições Normal				Mistura de 4 Distribuições Normal			
	Média	Des. Pad.	Intervalo de Credibilidade	$\sqrt{\hat{R}}$	Média	Des. Pad.	Intervalo de Credibilidade	$\sqrt{\hat{R}}$	Média	Des. Pad.	Intervalo de Credibilidade	$\sqrt{\hat{R}}$
γ_{1I}	0.049	(0.024)	[-0.018; -0.004]	0.995	0.008	(0.006)	[-0.004; 0.018]	1.001	-0.009	(0.008)	[-0.023; 0.007]	1.012
γ_{1II}	—	—	—	—	0.975	(0.085)	[0.575; 1.0]	0.998	0.805	(0.180)	[0.545; 1.0]	0.998
γ_{1III}	—	—	—	—	0.438	(0.033)	[0.379; 0.520]	0.999	0.807	(0.184)	[0.531; 1.0]	0.999
γ_{1IV}	—	—	—	—	—	—	—	—	0.124	(0.048)	[0.011; 0.225]	1.001
γ_{2I}	-0.011	(0.004)	[-0.018; -0.004]	0.998	-0.001	(0.001)	[-0.003; 8.2E-4]	1.0002	0.002	(0.003)	[-0.002; 0.007]	0.999
γ_{2II}	—	—	—	—	-0.18	(0.066)	[-0.303; -0.055]	0.995	-0.125	(0.081)	[-0.328; -0.045]	1.005
γ_{2III}	—	—	—	—	-0.03	(0.008)	[-0.060; -0.026]	0.999	-0.139	(0.097)	[-0.357; -0.011]	0.997
γ_{2IV}	—	—	—	—	—	—	—	—	0.010	(0.024)	[-0.023; 0.070]	0.999
β_{1I}	0.019	(0.011)	[-0.002; 0.040]	1.002	0.010	(0.003)	[0.004; 0.015]	1.001	0.006	(0.003)	[0.001; 0.012]	1.001
β_{1II}	—	—	—	—	0.187	(0.107)	[-0.014; 0.40]	0.998	0.218	(0.190)	[0.019; 0.625]	1.003
β_{1III}	—	—	—	—	0.022	(0.014)	[-0.005; 0.050]	1.001	0.225	(0.188)	[0.020; 0.615]	1.002
β_{1IV}	—	—	—	—	—	—	—	—	0.035	(0.014)	[0.004; 0.061]	1.0
β_{2I}	0.013	(0.001)	[0.010; 0.015]	0.999	8.1E-4	(3.07E-4)	[2.08E-4; 0.001]	0.999	1.71E-4	(2.89E-4)	[-2.67E-4; 8.7E-4]	0.999
β_{2II}	—	—	—	—	0.124	(0.017)	[0.089; 0.154]	1.002	0.107	(0.080)	[0.023; 0.230]	1.001
β_{2III}	—	—	—	—	0.017	(0.001)	[0.014; 0.020]	1.001	0.106	(0.080)	[0.023; 0.227]	1.002
β_{2IV}	—	—	—	—	—	—	—	—	0.010	(0.001)	[0.008; 0.013]	0.998
β_{3I}	0.107	(0.007)	[0.093; 0.122]	1.003	-0.007	(0.002)	[-0.011; -0.003]	0.999	-0.009	(0.002)	[-0.012; -0.005]	0.999
β_{3II}	—	—	—	—	0.389	(0.060)	[0.279; 0.513]	1.003	0.265	(0.129)	[0.117; 0.500]	1.003
β_{3III}	—	—	—	—	0.095	(0.013)	[0.071; 0.123]	1.001	0.268	(0.130)	[0.12; 0.503]	1.002
β_{3IV}	—	—	—	—	—	—	—	—	0.029	(0.011)	[0.009; 0.052]	0.999
σ_I^2	0.362	(0.007)	[0.348; 0.377]	1.001	0.007	(3.641E-4)	[0.006; 0.008]	1.002	0.005	(3.71E-4)	[0.004; 0.006]	0.998
σ_{II}^2	—	—	—	—	2.378	(0.214)	[2.005; 2.838]	1.001	1.483	(1.168)	[0.293; 3.215]	1.002
σ_{III}^2	—	—	—	—	0.1884	(0.013)	[0.164; 0.215]	0.998	1.469	(1.145)	[0.296; 3.149]	1.0
σ_{IV}^2	—	—	—	—	—	—	—	—	0.034	(0.006)	[0.024; 0.046]	1.001