

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

Vinicius Soares de Angelis

**Feixes microestruturados compostos de superposições
contínuas de feixes de Bessel ideais de ordem arbitrária
para aplicações em aprisionamento óptico**

São Carlos

2022

Vinicius Soares de Angelis

**Feixes microestruturados compostos de superposições
contínuas de feixes de Bessel ideais de ordem arbitrária
para aplicações em aprisionamento óptico**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Telecomunicações

Orientador: Prof. Dr. Leonardo André Ambrosio

VERSÃO CORRIGIDA

**São Carlos
2022**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

A582f Angelis, Vinicius Soares de
 Feixes microestruturados compostos de
superposições contínuas de feixes de Bessel ideais de
ordem arbitrária para aplicações em aprisionamento
óptico / Vinicius Soares de Angelis; orientador
Leonardo André Ambrosio. São Carlos, 2022.

 - Programa de e Área de Concentração em --
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de
São Paulo, 2022.

 1. Feixes estruturados. 2. Aprisionamento óptico.
3. Forças ópticas. 4. Transferência de momento angular.
5. Teoria generalizada de Lorenz-Mie. 6. Expansão
multipolar da força óptica. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **VINICIUS SOARES DE ANGELIS**.

Título da dissertação: “Feixes microestruturados compostos de superposições contínuas de feixes de Bessel ideais de ordem arbitrária para aplicações em aprisionamento óptico”.

Data da defesa: 19/01/2022.

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Associado **Leonardo André Ambrosio**
(Orientador)
(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

APROVADO

Prof. Dr. **Marcos Roberto da Rocha Gesualdi**
(Universidade Federal do ABC/UFABC)

APROVADO

Prof. Dr. **Michel Zamboni Rached**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica:
Prof. Associado **João Bosco Augusto London Junior**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

Este trabalho é dedicado aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus pela minha existência.

Aos meus familiares.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Leonardo André Ambrosio, pelo apoio, confiança e paciência.

Agradeço também ao Prof. Dr. Michel Zamboni Rached que, durante suas visitas à São Carlos, esclareceu minhas dúvidas sobre ondas localizadas e feixes estruturados.

Por fim, o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES). Por isso, agradeço à CAPES, pelo apoio financeiro durante o Mestrado.

“Success is the sum of small efforts, repeated day in and day out.”
Robert Collier

RESUMO

DE ANGELIS, V. S. **Feixes microestruturados compostos de superposições contínuas de feixes de Bessel ideais de ordem arbitrária para aplicações em aprisionamento óptico.** 2022. 130p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

A utilização de feixes estruturados em sistemas de aprisionamento óptico tem possibilitado a obtenção de características inovadoras de manipulação óptica. Este trabalho lida com um feixe estruturado não difrativo construído por meio de uma superposição de feixes de Bessel ideais co-propagantes de mesma ordem, mesma frequência angular mas com diferentes ângulos de *áxicon* que ficou conhecida na literatura como *Frozen wave*. De carácter teórico-computacional, este trabalho teve como primeiro objetivo comparações gráficas de forças ópticas calculadas pelo método da expansão multipolar da força óptica truncado em termos de quadrupolo com a rigorosa e exata teoria generalizada de Lorenz-Mie para diferentes tipos de feixes incidentes sobre uma partícula esférica homogênea. Os resultados mostram que os dois métodos estão de acordo, sugerindo, portanto, que há uma conexão intrínseca entre eles. O segundo objetivo consistiu na análise de forças ópticas produzidas por uma superposição contínua de feixes de Bessel ideais de ordem arbitrária sobre partículas de Rayleigh. As simulações revelam que tal superposição, estruturada sobre distâncias longitudinais da ordem de dezenas de micrômetros, consegue aprisionar estavelmente partículas absorptivas em três dimensões, além de permitir o aprisionamento destas partículas em múltiplos planos paralelos ao longo da direção de propagação e a transferência de momento angular orbital.

Palavras-chave: Feixes estruturados. Aprisionamento óptico. Forças ópticas. Transferência de momento angular.

ABSTRACT

DE ANGELIS, V. S **Microstructured light beams composed of a continuous superposition of arbitrary order ideal Bessel beams for applications in optical trapping.** 2022. 130p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

Structured light beams have been used in optical trapping systems allowing innovative functionalities to optical manipulation. This work deals with a nondiffracting structured beam composed of a superposition of ideal Bessel beams with the same order and angular frequency but with different axicon angles, known in the literature as Frozen wave. Being a computational and theoretical work, the first aim was to explore graphical comparisons of the radiation forces calculated via the multipole expansion of optical force up to quadrupole terms with the rigorous and exact generalized Lorenz–Mie theory for different incident beams on a homogeneous spherical particle. The results show a great agreement between both methods, thus suggesting an intrinsic connection between them. The second aim was to analyse optical forces produced by a continuous superposition of ideal Bessel beams with arbitrary order on Rayleigh particles. The simulations reveal that this superposition when structured over longitudinal distances of tens of micrometers is able to stably trap absorptive particles in three dimensions, besides allowing trapping of these particles in multiple parallel planes along the propagation direction and the transfer of orbital angular momentum.

Keywords: Structured beams. Optical trapping. Radiation forces. Transfer of angular momentum.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Perfil de intensidade transversal de um FB ideal de ordem $\nu = 0$ (a) e de ordem $\nu = 5$ (b).	30
Figura 2 – Representação dos vetores de onda que compõem um feixe de Bessel ideal.	39
Figura 3 – Sistemas de coordenadas adotados para a determinação de forças ópticas sobre a partícula esférica no contexto da GLMT.	52
Figura 4 – Sistemas de coordenadas adotados para a determinação de forças ópticas sobre a partícula esférica no contexto da MEOF.	71
Figura 5 – Sistemas de coordenadas adotados para a determinação de forças ópticas em partículas de Rayleigh.	82
Figura 6 – Componente transversal F_x ao longo do eixo x calculado pelo MEFO (linhas sólidas pretas) e pela GLMT (linhas azuis pontilhadas com círculos) sobre uma partícula dielétrica com $M = 1,2$ e raio $a = 0,2 \lambda_m$ (a), $a = 0,3 \lambda_m$ (b) e $a = 0,35 \lambda_m$ (c). O campo incidente é um feixe de Bessel ideal de ordem $\nu = 1$ (linhas vermelhas pontilhadas) com ângulo de cone $\beta = 10^\circ$	88
Figura 7 – Componente longitudinal F_z da força óptica ao longo do eixo z calculada pelo MEOF (linhas sólidas pretas) e pela GLMT (linhas pretas pontilhadas com círculos). A partícula é dielétrica com $M = 1.2$ e raio $a = 0,2 \lambda_m$ (a), $a = 0,3 \lambda_m$ (b) e $a = 0,35 \lambda_m$ (c). Os termos da força de extinção e de recuo são representados, respectivamente, por linhas sólidas e pontilhadas. O campo incidente é um feixe Gaussiano com $s = 0,02$ ($W_0/\lambda_m = 25/\pi$). A mesma análise é feita para a componente transversal F_x ao longo do eixo x nas figuras (d)-(f).	90
Figura 8 – Análise para uma FW discreta contendo 31 feixes de Bessel ideais de ordem $\nu = 0$. (a) $ F(z) ^2$ (linha vermelha tracejada) e $ \mathbf{E} ^2/ E_0 ^2$ ao longo do eixo z (linha sólida preta). (b) Amplitude e fase dos coeficientes A_n . (c) $ \mathbf{E}_{\text{inc}}^{\text{FWD}} ^2/ E_0 ^2$ no plano xz . Nas figuras (d)-(l), forças ópticas calculadas pelo método da MEOF (linhas sólidas pretas) e pela GLMT (linhas azuis pontilhadas com círculos) sobre uma partícula dielétrica com $M = 1.2$. Componente longitudinal $F_z/ E_0 ^2$ ao longo do eixo z para $a = 0,2 \lambda_m$ (d), $a = 0,3 \lambda_m$ (e) e $a = 0,35 \lambda_m$ (f). A mesma análise para a componente transversal $F_x/ E_0 ^2$ em $z = -100 \mu\text{m}$ ao longo do eixo x é mostrada nas figuras (g)-(i). Para melhor visualização, $ \mathbf{E}_{\text{inc}}^{\text{FWD}} ^2/ E_0 ^2$ nas figuras (d)-(l), mostrado em linhas tracejadas vermelhas, é multiplicado por $\max[F_z/ E_0 ^2] \times 1,5$ ou $\max[F_x/ E_0 ^2] \times 1,5$.	91

Figura 9 – Análise para uma FW discreta contendo 31 feixes de Bessel ideais de ordem $\nu = 3$ com $Q = 0,60(\omega_0/u_m)$ e $L = 50\mu\text{m}$. (a) $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{\text{FWD}}|^2/|E_0|^2$ no plano xz . Componente longitudinal $F_z/|E_0|^2$ sobre uma partícula dielétrica com $M = 1.2$ ao longo do cilindro de raio $\rho = \rho_c$ para $a = 0,2 \lambda_m$ (b), $a = 0,3 \lambda_m$ (c), $a = 0,35 \lambda_m$ (d), $a = 0,4 \lambda_m$ (e) e $a = 0,5 \lambda_m$ (f). Linhas sólidas pretas: força óptica calculada pelo método da MEOF e linhas azuis pontilhadas com círculos pela GLMT. Para melhor visualização, $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{\text{FWD}}|^2/|E_0|^2$ nas figuras (b)-(f), mostrado em linhas tracejadas vermelhas, é multiplicado por $\max[F_z/|E_0|^2] \times 1,5$. . . 92

Figura 10 – Comparação entre o método da MEOF (linhas sólidas) e a GLMT (linhas tracejadas) em função do raio a da partícula. (a) Componente transversal F_x exercida pelo feixe Gaussiano (linhas pretas) na posição $(x_0 = -W_0/2, y_0 = 0, z_0 = 0)$ e pelo FB ideal (linhas vermelhas) na posição $(x_0 = \rho_c/2, y_0 = 0, z_0 = 0)$. (b) Componente transversal F_z exercida pelo feixe Gaussiano (linhas pretas) na posição $(x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0)$ e pela superposição discreta de FBs ideais DVFW da figura 8 (linhas vermelhas) na posição $(x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 158\mu\text{m})$. . . 93

Figura 11 – Superposição contínua de FBs ideais de ordem zero com função $F(z)$ definida pela equação 5.3 com $Q = 0,6 \omega_0/u_m$. Módulo ao quadrado do campo elétrico ao longo do eixo z (a) e no plano xz (b). (c) Fluxo de potência médio normalizado (para $E_0 = 1 \text{ V/m}$) no plano $z = -Z$. (d) Força óptica longitudinal F_z no plano xz sobre uma partícula de poliestireno sem perdas e raio $a = 0,01\lambda_m$. As linhas escuras indicam pontos onde a componente F_x é nula. 95

Figura 12 – Força óptica longitudinal F_z ao longo do eixo óptico produzida pela superposição contínua de FBs ideais de ordem zero da figura 11. (a) Para diferentes valores de coeficiente de absorção α da partícula e (b) para diferentes valores de índice de refração $n_p = Mn_m$ 96

Figura 13 – $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{\text{FWC}}|^2/|E_0|^2$ no plano xz para polarização circular (a) à esquerda e (b) à direita. As figuras inseridas mostram $(|E_z|/E_0)^2$ e $(|E_x|/E_0)^2 = (|E_y|/E_0)^2$ em azul tracejado e em magenta, respectivamente, para $y = z = 0$. (c) $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{\text{FWC}}|^2/|E_0|^2$ e $|F(z)|^2$ no cilindro de máxima intensidade da figura 13(a). $|S_1(k_z)|$ na figura inserida. 98

Figura 14 – (a) Componente longitudinal da força óptica F_z ao longo do cilindro de máxima amplitude de campo $\rho = \rho_c$. (b) e (c) Componentes transversais F_x (linhas em preto) e F_y (linhas em verde) em $(x_0, y_0 = 0, z_0 = 1, 263\mu\text{m})$ para PCE (b) e para PCD (c). Pontos de equilíbrio estáveis longitudinais são indicados pelas setas pretas em (a). As setas azuis [em (b) e (c)] indicam pontos onde $F_x = 0$ e $dF_x/dx < 0$. O módulo ao quadrado da amplitude de campo $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWC})}|^2/|E_0|^2$ é mostrado em linha vermelha tracejada. As forças são calculadas sobre uma partícula com $a = 50$ nm, $n_p = 1, 59 - j0, 05$ e imersa em água ($n_m = 1, 33$). 99

Figura 15 – Distribuições de forças ópticas transversais (F_x e F_y) no plano $z = 1, 263\mu\text{m}$ [um dos pontos de aprisionamento longitudinal estável da figura 14(a)] para polarização (a) circular à esquerda, (b) circular à direita, (c) linearmente polarizada em x , (d) polarização elíptica à esquerda com $[X, Y] = [1, \sqrt{2} \exp(j\pi/4)]$ e (e) polarização elíptica à direita com $[X, Y] = [1, \sqrt{2} \exp(-j\pi/4)]$. As linhas vermelhas referem-se a locais onde a componente radial de força F_ρ é nula. As forças são calculadas sobre uma partícula com $a = 50$ nm, $n_p = 1, 59 - j0, 05$ e imersa em água ($n_m = 1, 33$). (f) Força tangencial $F_\phi(\rho, \phi)$ nos locais onde a componente F_ρ é nula para a polarização da figura 15(d). Nos demais pontos da figura 15(f), adotou-se $F_\phi(\rho, \phi) = 0$ 101

Figura 16 – Superposição contínua de FBs ideais construída a partir da função $F(z)$ da equação 5.6 e PCE. Para ordem $\nu = 0$: (a) $|F(z)|^2$ (linha vermelha tracejada) e $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWC})}|^2/|E_0|^2$ (linha em preto) ao longo de z e no plano xz (b). Para ordem $\nu = 3$: $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWC})}|^2/|E_0|^2$ no plano xz (c) e em vários planos paralelos ao plano xy (d). (e) Amplitudes dos espectros $S_3(k_z)$ (linha em preto) e $N^3 S_0(k_z)$ (linha vermelha tracejada). 104

Figura 17 – Superposição contínua de FBs ideais construída a partir da função $F(z)$ da equação 5.6 de ordem $\nu = 5$ e PCD. $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWC})}|^2/|E_0|^2$ no plano xz (a) e em vários planos paralelos ao plano xy (b). (c) Amplitudes dos espectros $S_5(k_z)$ (linha em preto) e $N^5 S_0(k_z)$ (linha vermelha tracejada). 105

Figura 18 – Forças ópticas produzidas pela superposição contínua de FBs ideais de ordem $\nu = 3$ e PCE da figura 16 sobre uma partícula com $a = 0,02\lambda_m$ e $M_R = 1,2$. (a) Componente longitudinal F_z ao longo do cilindro de máxima amplitude de campo para distintos valores de constante de perdas M_I . As setas indicam posições $z = Z_p$ onde há aprisionamento estável na longitudinal. (b) Componentes radial F_ρ e azimutal F_ϕ no plano $z = Z_p$ em função da distância radial ρ . $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWC})}|^2/|E_0|^2$ é representado pela linha vermelha tracejada em ambas as figuras. (c)-(d) Mesma análise das figuras 18(a)-(b) mas para a superposição contínua de FBs ideais de ordem $\nu = 5$ e PCD (figura 17). 106

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LMT	Teoria de <i>Lorenz-Mie</i> , do inglês <i>Lorenz-Mie Theory</i>
DOE	Elementos Ópticos Difrativos, do inglês <i>Diffraction Optical Elements</i>
SLM	Modulador Espacial de Luz, do inglês <i>Spatial Light Modulator</i>
OAM	Momento Angular Orbital, do inglês <i>Orbital Angular Momentum</i>
FB	Feixe de Bessel
FBG	Feixe de Bessel-Gauss
FW	<i>Frozen Wave</i>
GLMT	Teoria Generalizada de <i>Lorenz-Mie</i> , do inglês <i>Generalized Lorenz-Mie Theory</i>
MEOF	Expansão Multipolar da Força Óptica, do inglês <i>Multipolar Expansion of Optical Force</i>
TM	Transverso Magnético (TM, do inglês, <i>Transverse Magnetic</i>)
TE	Transverso elétrico (TE, do inglês, <i>Transverse Electric</i>)
ILA	Aproximação Localizada Integral (ILA, do inglês: <i>Integral Localized Approximation</i>)
PCE	Polarização Circular à Esquerda
PCD	Polarização Circular à Direita

LISTA DE SÍMBOLOS

∇^2	Operador Laplaciano escalar
∇^2	Operador Laplaciano vetorial
∇	Operador gradiente
$\nabla \cdot$	Operador divergente
$\nabla \times$	Operador rotacional
\cdot	Produto escalar usual do R^3
\times	Produto vetorial usual do R^3
j	Unidade imaginária
$\text{Re}\{.\}$	Parte real de um número complexo
$\text{Im}\{.\}$	Parte imaginária de um número complexo
$J_\nu(.)$	Função de Bessel de primeira espécie e de ordem ν
$Y_\nu(.)$	Função de Bessel de segunda espécie e de ordem ν
$P_n^m(.)$	Polinômio associado de Legendre de primeira espécie de grau n e ordem m
$Q_n^m(.)$	Polinômio associado de Legendre de segunda espécie de grau n e ordem m
$j_n(.)$	Função esférica de Bessel de primeira espécie e de ordem n
$y_n(.)$	Função esférica de Bessel de segunda espécie e de ordem n
$\delta(.)$	Função delta de <i>Dirac</i>
$H(.)$	Função de <i>Heaviside</i>
*	Complexo conjugado

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	27
1.1	Pinças ópticas	27
1.2	Aprisionamento óptico utilizando feixes estruturados	28
1.3	Cálculo de forças ópticas	32
1.4	Objetivos	33
1.5	Estrutura do trabalho	33
2	DESCRIÇÃO DOS FEIXES ESTRUTURADOS	35
2.1	Feixe escalar	35
2.1.1	Feixe Gaussiano	37
2.1.2	Feixe de Bessel ideal	38
2.1.3	Superposição discreta de feixes de Bessel	39
2.1.4	Superposição contínua de feixes de Bessel	41
2.1.4.1	Ordem zero	41
2.1.4.2	Ordens superiores	43
2.2	Feixe Vetorial	45
2.2.1	Feixe Gaussiano	46
2.2.2	Superposição discreta de feixes de Bessel	46
2.2.3	Feixe de Bessel ideal	46
2.2.4	Superposição contínua de feixes de Bessel	47
2.3	Cálculo da potência do feixe	49
3	TEORIA GENERALIZADA DE LORENZ-MIE	51
3.1	Equações de Maxwell em coordenadas curvilíneas ortogonais	52
3.2	Potenciais de Bromwich	54
3.2.1	Modos TM	54
3.2.2	Modos TE	56
3.2.3	Em coordenadas esféricas	57
3.3	Soluções eletromagnéticas a partir dos potenciais de Bromwich	57
3.3.1	Campo incidente	59
3.3.2	Campo interno	60
3.3.3	Campo espalhado	61
3.4	Forças ópticas	63
3.4.1	Seções de choque associadas ao balanço de energia radiativa	64
3.4.2	Balanço de momento e pressão de radiação	65
3.5	Determinação dos fatores de forma	67

4	EXPANSÃO MULTIPOLAR DA FORÇA ÓPTICA	71
4.1	Conservação do momento linear e o tensor de stress de Maxwell	72
4.2	Força de extinção e força de recuo	73
4.3	Expansão multipolar até termos de quadrupolo	75
4.3.1	Força de extinção	75
4.3.1.1	Força dipolar elétrica	75
4.3.1.2	Força dipolar magnética	76
4.3.1.3	Força quadrupolar elétrica	76
4.3.1.4	Força quadrupolar magnética	77
4.3.2	Força de recuo	77
4.4	Momentos dipolares e quadrupolares em função dos campos incidentes	80
4.5	Forças ópticas em partículas de Rayleigh	82
5	RESULTADOS	87
5.1	Comparação entre o método da expansão multipolar da força óptica e a Teoria Generalizada de Lorenz-Mie	87
5.2	Forças ópticas produzidas por superposições contínuas de feixes de Bessel em partículas de Rayleigh	94
5.2.1	Ordem zero	94
5.2.2	Ordens superiores	96
5.2.2.1	Ordem unitária	96
5.2.2.2	Outras ordens superiores	102
6	CONCLUSÕES	107
	REFERÊNCIAS	109
	APÊNDICES	117
	APÊNDICE A – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO 2.36	119
	APÊNDICE B – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO 2.54	121
	APÊNDICE C – COMPROVAÇÃO QUE OS FEIXES VETORIAIS CONSTRUÍDOS NA SEÇÃO 2.2 SATISFAZEM TODAS AS EQUAÇÕES DE MAXWELL	125
	APÊNDICE D – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO 4.2	127

	APÊNDICE E – DEFINIÇÕES DE CÁLCULO VETORIAL UTILIZADAS NO TRABALHO	129
E.1	Produto diádico	129
E.2	Tensor diádico unitário	129
E.3	Tensor simétrico e sem traço	129
E.4	Duplo produto escalar	130

1 INTRODUÇÃO

Na segunda metade do século XIX, Maxwell previu a natureza eletromagnética da luz,¹ o que implica, tanto do ponto de vista do eletromagnetismo clássico quanto da mecânica quântica, que a luz carrega momento linear.² Nos processos de interação da luz com a matéria ocorrem os fenômenos de espalhamento, refração e absorção, os quais alteram o momento linear da luz. Como consequência, pela segunda lei de Newton, a variação temporal deste momento sugere que a luz exerce uma força sobre a matéria, denominada de força de radiação.^{3,4}

A força de radiação foi verificada experimentalmente pela primeira vez por [Lebedev](#)⁵ e [Nichols e Hull](#)⁶ em 1901, os quais observaram deflexões em uma balança de torsão produzidas por uma lâmpada a arco voltaico. [Mie](#)⁷ e [Debye](#)⁸ respectivamente, em 1908 e em 1909, assumindo uma onda plana como luz incidente, formularam um modelo físico exato para o cálculo da força de radiação sobre partículas esféricas a partir das equações de Maxwell. Este modelo é conhecido como teoria de Lorenz-Mie (LMT, do inglês *Lorenz-Mie theory*) sendo também denominado de teoria de Lorenz-Mie-Debye. A força de radiação produzida por uma onda plana sempre atua na direção de propagação da onda, tendendo, portanto, a empurrar a partícula. Forças de radiação que atuam na direção de propagação da onda são categorizadas como força de pressão de radiação, também conhecida como força de espalhamento.^{3,9}

Como tanto as forças de pressão de radiação previstas pela LMT quanto as forças medidas experimentalmente eram muito pequenas em relação às forças de atrito atuantes sobre as partículas, não havia muito interesse prático na força de radiação na primeira metade do século XX.³ Os únicos trabalhos envolviam a análise da força de radiação no espaço como em sistemas de propulsão à vela solar.¹⁰ Devido à ausência de forças de atrito no espaço e pelo fato do material da vela ser altamente reflexivo, aumentando, desta forma, a força de pressão de radiação produzida pela luz do Sol, a vela solar consegue ser impulsionada com uma aceleração considerável. Para uma vela de formato quadrado de área $0,820 \text{ km}^2$ e densidade superficial $5,27 \text{ g/m}^2$, uma aceleração de $1,56 \text{ mm/s}^2$ pode ser obtida.¹¹

1.1 Pinças ópticas

O aprisionamento óptico começou a ter interesse prático após a invenção do laser na década de 1960.¹² Utilizando um feixe altamente focalizado, [Ashkin et al.](#)¹³ reportaram em 1986 a primeira observação do aprisionamento estável em três dimensões de partículas micrométricas próximo do foco do feixe. Esta técnica de manipulação óptica não invasiva que faz uso de apenas um único feixe laser para aprisionamento ficou conhecida na

literatura como pinça óptica.^{3,14,15} Deste experimento, foi identificado outro tipo de força de radiação: a força gradiente, a qual é proporcional ao gradiente de intensidade do feixe e atrai a partícula para as regiões de máxima intensidade.¹³ Para que haja o aprisionamento tridimensional estável de uma partícula em um sistema de pinça óptica, a força gradiente deve ser maior do que a força de espalhamento. Por isso, para aumentar o gradiente de intensidade do feixe, se faz necessário que o feixe incidente passe por uma lente objetiva de alta abertura numérica e de baixas aberrações ópticas.^{16,17}

Experimentos com pinças ópticas mostram que tais sistemas conseguem aprisionar desde partículas muito pequenas com tamanho de 1 nanômetro¹⁸ até partículas com tamanho de dezenas de micrômetros.¹⁷ A força de radiação pode atingir desde alguns femtonewtons até cerca de 100 pN¹⁹ e a partícula consegue ser movimentada com resolução de poucos Angstroms (10^{-10} m).¹⁴ Tanto esta faixa de tamanho da partícula quanto da amplitude da força de radiação torna a pinça óptica uma ótima ferramenta para manipulação e caracterização de partículas biológicas e macromoléculas, o que tem sido realizado desde a década de 1990.³ Com a pinça óptica foi possível, por exemplo, caracterizar as propriedades mecânicas de biomoléculas e motores biológicos naturais como a miosina e a cinesina, estruturas responsáveis pela maioria das formas de movimento dentro da célula.^{20,21}

A pinça óptica também tem sido utilizada em outras áreas do conhecimento. A habilidade deste sistema em transportar e modificar células com precisão tem sido testada, por exemplo, em técnicas de fertilização em vitro.²² Outras aplicações são encontradas em áreas da física e da química. Na área de nanotecnologia, a pinça óptica tem sido utilizada na caracterização e no controle de nanodispositivos.¹⁸ Já na área de termodinâmica estocástica, a pinça óptica tem permitido a investigação de propriedades estatísticas em nano sistemas chegando-se a conclusões surpreendentes como a violação da segunda lei da termodinâmica por curtos intervalos de tempo nestes sistemas por causa da presença de flutuações térmicas.^{15,23}

1.2 Aprisionamento óptico utilizando feixes estruturados

Nas primeiras décadas após o desenvolvimento da pinça óptica, apenas era utilizado como feixe incidente o modo Gaussiano fundamental da fonte laser. A partir do final dos anos 1990, feixes estruturados começaram a ser introduzidos em sistemas de pinça óptica.^{3,14,24-26}

A geração de feixes estruturados ocorre por meio de elementos ópticos difrativos (DOE, do inglês *Diffraction Optical Elements*). O funcionamento dos DOEs se dá no plano de Fourier da objetiva tal que a distribuição de campo do feixe estruturado no plano de aprisionamento (foco da objetiva) corresponde à transformada de Fourier da distribuição no plano do DOE. O mais comum destes elementos é o modulador espacial de luz (SLM, do

inglês *Spatial Light Modulator*). A luz do feixe laser difratada pelo SLM adquire o padrão de fase de um holograma gerado por computador. Um sistema de aprisionamento óptico que faz uso de feixes gerados holograficamente, como no caso de SLMs, é comumente denominado de pinça óptica holográfica.^{3,24,25}

Devido a propriedades intrínsecas de determinados feixes estruturados, novas características de manipulação óptica podem ser obtidas.^{25,27} Dentre tais propriedades destacam-se as encontradas em feixes de ordem superior, ou seja, que apresentam carga topológica não nula e em feixes invariantes à propagação, os quais pertencem à classe de ondas eletromagnéticas não difrativas.²⁸

Feixes estruturados de ordem superior via de regra apresentam a propriedade de seus campos elétrico e magnético terem um termo de fase com dependência azimutal ϕ da forma $\exp(j\nu\phi)$, sendo ν um número inteiro que representa a ordem e a carga topológica do feixe*. Este termo faz com que as frentes de onda tornam-se helicoidais, sendo, portanto, associado à helicidade do feixe. Para $\nu > 0$, a helicidade é positiva enquanto que para $\nu < 0$, ela é negativa.³⁰ Por causa deste termo de fase, feixes de ordem superior apresentam intensidade nula no centro, e, por isso, recebem a categorização de feixes ocos ou vórtices ópticos.³¹ Além disso, como consequência da helicidade, tais feixes carregam momento angular orbital (OAM, do inglês, *Orbital Angular Momentum*) que pode ser transferido para a partícula fazendo a mesma orbitar em relação ao eixo óptico do feixe.^{30,32} Esta transferência foi observada em partículas absorptivas (com perdas)^{33,34} e em partículas birrefringentes.³⁵ Em um sistema de pinça óptica, a transferência de OAM para partículas absorptivas foi demonstrada pela primeira vez utilizando feixe de Laguerre-Gauss de ordem superior.^{36,37}

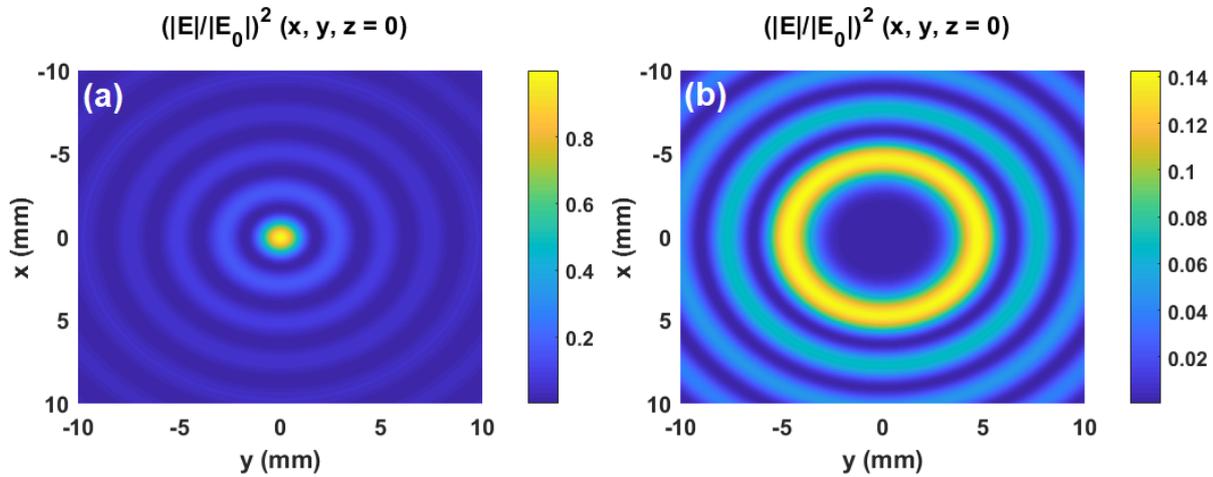
Soluções eletromagnéticas não difrativas são aquelas que conseguem manter a distribuição espacial de campo inalterada por distâncias muito maiores do que aquelas observadas, por exemplo, em um feixe Gaussiano.^{28,38} O feixe não difrativo mais comum é o feixe de Bessel (FB).^{39,40} O perfil de intensidade transversal de um FB ideal é caracterizado por uma função de Bessel de primeira espécie, a qual apresenta múltiplos anéis que se estendem indefinitivamente na direção transversal ao eixo óptico, como mostrado na figura 1(a) para um FB ideal de ordem zero ($\nu = 0$). Logo, o FB ideal apresenta fluxo de energia infinito. A realização prática do FB se dá por meio dos feixes de Bessel-Gauss (FBG), cujo perfil de intensidade transversal é dado por função de Bessel apodizada por um envelope gaussiano.^{41,42}

Ao contrário de FBs de ordem zero, FBs de ordem superior $\nu \geq 1$ apresentam intensidade nula ao longo do eixo óptico e a região de intensidade máxima é caracterizada por um cilindro de intensidade constante (não nula) como mostrado na figura 1(b) para um

* Uma exceção a esta regra são os feixes de ordem superior com polarização azimutal e simetria azimutal.²⁹

FB ideal de ordem $\nu = 5$. Assim como feixes de Laguerre-Gauss de ordem superior, FBs de ordem superior carregam OAM.⁴³ Foi demonstrado experimentalmente, utilizando-se partículas de poliestireno absorptivas, que caso, a partícula seja muito menor do que o raio do cilindro de máxima intensidade, ela, além de ser aprisionada nesta região, irá orbitá-la, adquirindo OAM. Caso a dimensão da partícula seja da ordem do raio do cilindro, há apenas aprisionamento estável sem transferência OAM.⁴⁴ Aprisionamento óptico de partículas dielétricas nos múltiplos anéis de um FB também foi observado experimentalmente, tanto para um FB de ordem zero^{45,46} quanto para FBs de ordens superiores.⁴⁷

Figura 1 – Perfil de intensidade transversal de um FB ideal de ordem $\nu = 0$ (a) e de ordem $\nu = 5$ (b).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Sendo um feixe não difrativo, o FB consegue manter o perfil de intensidade transversal [figuras 1(a)-(b)] à medida que se propaga.⁴⁰ No caso do FB ideal, esta manutenção se dá ao longo de todo o eixo de propagação devido aos infinitos anéis que fornecem energia constantemente para que o perfil permaneça inalterado evitando, portanto, o alargamento espacial provocado pela difração.²⁸ No caso do FBG, a manutenção do perfil transversal ocorre até certa distância, denominada de zona de Bessel ou distância de propagação não difrativa, a qual é limitada pelo *spot* do envelope gaussiano e pelo ângulo de áxicon, parâmetro intrínseco do FB. Portanto, quando um objeto opaco é colocado dentro da zona de Bessel, o FB apresenta a propriedade de se auto reconstruir, recuperando o perfil de intensidade transversal original após certa distância.⁴⁸

Um método teórico baseado em uma superposição de FBs co-propagantes de mesma frequência angular ω_0 mas com diferentes ângulos de áxicon foi desenvolvido em 2004⁴⁹ e ficou conhecido na literatura como *Frozen Wave* (FW). Realizando-se uma escolha adequada da amplitude e da fase de cada FB constituinte da superposição, a intensidade

do feixe ao longo da direção de propagação (daqui para frente correspondente ao eixo z) pode ser controlada de forma que a mesma siga a amplitude de uma função $F(z)$ arbitrária dentro de um intervalo $-L/2 \leq z \leq L/2$. Desde então, duas metodologias foram adotadas na formulação das FWs. Na primeira, a FW é construída por meio de uma superposição discreta de FBs de $2N + 1$ FBs.⁴⁹ Já na segunda, a construção é realizada por meio de uma superposição contínua de FBs.⁵⁰

Na literatura, os estudos sobre FWs iniciaram-se com uma formulação escalar para a superposição discreta de FBs ideais, tanto de ordem $\nu = 0$ ⁴⁹ quanto de ordem superior.⁵¹ Sendo de natureza escalar, tal formulação é adequada apenas sob condições paraxiais de modo que a intensidade do feixe resultante pode ser controlada apenas em um intervalo longitudinal L da ordem de centímetros (aproximadamente 1000 vezes o comprimento de onda λ_m do feixe).^{49,52} Uma FW escalar de energia finita construída por meio de uma superposição discreta de FBGs de ordem arbitrária também já foi estudada.⁵³

Posteriormente, uma formulação vetorial, aplicada para diversos tipos de polarização, foi desenvolvida para a superposição discreta de FBs permitindo a estruturação do feixe em um comprimento longitudinal L na faixa micrométrica.⁵⁴ No entanto, tal formulação é limitada a valores de L da ordem de centenas de micrômetros, já que para valores de L menores (como na faixa de dezenas de micrômetros) o número de FBs propagantes na superposição é reduzido e, por consequência, o feixe resultante não consegue seguir satisfatoriamente a amplitude da função $F(z)$ ao longo da direção de propagação.

Gerações experimentais de superposições discretas escalares de FBs têm sido reportadas na literatura.^{55,56} Naturalmente, sendo escalares, elas são não adequadas para aplicações na área de aprisionamento óptico, já que os perfis gerados se estendem por dezenas de centímetros sobre a direção de propagação. No entanto, elas podem ser aplicadas em outras áreas como no guiamento de átomos.⁵⁷

Apesar de ainda não terem sido geradas experimentalmente, as superposições contínuas de FBs têm-se mostrado muito promissoras para aplicações em aprisionamento óptico. Enquanto a formulação vetorial das superposições discretas são limitadas à modelagem de um padrão longitudinal sobre distâncias na faixa de centenas de micrômetros, a formulação vetorial das superposições contínuas consegue reproduzir a amplitude da função $F(z)$ satisfatoriamente em distâncias longitudinais da ordem de dezenas de micrômetros. Além disso, ao contrário da superposição discreta de FBs ideais, a superposição contínua de FBs ideais é de energia finita sendo, portanto, possível de ser gerada na prática, sem a necessidade de ser formulada em termos de FBGs.²⁹

A FW tem se mostrado muito promissora na área de aprisionamento óptico, permitindo novas possibilidades de manipulação óptica. Como tal feixe estruturado mantém as mesmas propriedades não difrativas e de auto-reconstrução dos FBs, múltiplos planos de aprisionamento estáveis e tridimensionais ao longo da direção de propagação podem ser

obtidos. Além disso, as posições destes planos podem ser controladas bastando garantir que a derivada da função $F(z)$ tenha um alto valor nestes planos de forma que a força gradiente supere a força de espalhamento e, logo, o aprisionamento tridimensional possa ser atingido. O uso de FBs de ordem superior na superposição permite ainda a transferência de OAM.

Em 2020, foi demonstrado experimentalmente o aprisionamento óptico de micropartículas utilizando uma superposição discreta de FBs de ordem zero. Modelada por meio de uma função $F(z)$ descrita por dois degraus unitários localizados em pontos distintos ao longo de z , a superposição foi capaz de gerar pontos de aprisionamento estáveis e tridimensionais em diferentes planos ao longo da direção de propagação.⁵⁸

1.3 Cálculo de forças ópticas

O cálculo exato da força óptica produzida por um feixe incidente arbitrário sobre uma partícula de raio a pode ser realizado por meio da Teoria Generalizada de *Lorenz-Mie* (GLMT, do inglês *Generalized Lorenz-Mie Theory*). Sendo uma generalização da LMT, os campos incidente e espalhado pela partícula são descritos por meio de uma expansão de ondas parciais com coeficientes, denominados de fatores de forma, responsáveis pela completa caracterização do feixe incidente.^{59,60}

Outro método exato é por meio da expansão multipolar da força óptica (MEOF, do inglês *Multipolar Expansion of Optical Force*) na qual o campo espalhado é escrito como a soma dos campos radiados por multipolos elétricos e magnéticos. Dessa forma, uma expressão analítica para a força óptica é obtida resolvendo-se a integral de superfície do tensor de stress de Maxwell sobre a partícula.^{61,62} Existem métodos numéricos que se baseiam na determinação numérica do campo espalhado e no cálculo numérico da integral de superfície do tensor de stress de Maxwell para a determinação da força óptica. Dentre eles destacam-se o método de elementos finitos e o método das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD, do inglês, *Finite-Difference Time-Domain*).^{3,63}

Aproximações podem ser realizadas no cálculo da força óptica à depender do tamanho da partícula em comparação com o comprimento de onda λ_m do feixe incidente. Com tais aproximações, o cálculo da força é simplificado e expressões analíticas simples são obtidas. Quando $a \ll \lambda_m$, o comportamento da partícula pode ser aproximado para o de um dipolo elétrico em um campo elétrico não uniforme.^{64,65} Este regime é denominado de regime de Rayleigh. Já quando $a \gg \lambda$, a interação entre a partícula e o feixe é descrita pelas leis da óptica geométrica: reflexão e refração, já que nesse caso a propagação do feixe por meio de raios de luz é precisa e os efeitos difrativos tornam-se desprezíveis. Esse regime é conhecido na literatura como aproximação por óptica de raios ou regime de Óptica Geométrica.^{3,17,66}

1.4 Objetivos

Este trabalho é de carácter teórico-computacional e apresenta dois objetivos detalhados à seguir.

Por meio de uma revisão de literatura, observou-se a ausência de trabalhos explorando a comparação entre o método da MEOF e outra teoria exata como a GLMT para uma partícula esférica. Considerando uma onda plana como feixe incidente, [Mobini et al.](#)⁶⁷ comparou o método da MEOF com o método numérico da FDTD realizado no software comercial COMSOL. Diante disto, o primeiro objetivo deste trabalho consistiu em realizar comparações entre o método da MEOF e a GLMT para diferentes tipos de feixes incidentes dentre eles o feixe Gaussiano, o FB ideal e a superposição discreta de FBs ideais. Limitou-se a análise para o método da MEOF truncado até termos de quadrupolos elétrico e magnético.

O segundo objetivo consistiu em simulações de forças ópticas produzidas pela superposição contínua de FBs ideais de ordem arbitrária ν sobre uma partícula esférica visando aplicações em aprisionamento óptico. Explorou-se possibilidades de se obter pontos de aprisionamento estáveis e tridimensionais em diferentes planos ao longo da direção de propagação além da transferência de OAM para a partícula. A análise das forças foi realizada apenas no regime de Rayleigh.

Os algoritmos foram desenvolvidos em *Matlab*, já que este é um dos *softwares* mais utilizados em engenharia e no meio científico.

1.5 Estrutura do trabalho

O capítulo 2 realiza a descrição dos feixes incidentes utilizados no cálculo das forças ópticas. Partindo-se da solução da equação de onda escalar em coordenadas cilíndricas, obtém-se a descrição do feixe escalar Gaussiano modo fundamental ($\nu = 0$), do FB ideal de ordem arbitrária ν e de ambas as superposições discreta e contínua de FBs ideais também de ordem arbitrária ν . Logo após, as soluções vetoriais de todos estes feixes são construídas.

No capítulo 3 tem-se a descrição da GLMT conforme apresentado por [Gouesbet e Gréhan](#).⁵⁹ As soluções eletromagnéticas dos campos incidente, espalhado e interno são determinadas a partir dos potenciais escalares de Bromwich. Depois, as forças ópticas são determinadas em termos dos fatores de forma do feixe incidente e dos coeficientes de Mie de espalhamento.

Já no capítulo 4, o método da MEOF é descrito. A expressão da força óptica truncada até termos de quadrupolos é obtida limitando a descrição do campo espalhado a apenas contribuições de dipolos e quadrupolos (elétricos e magnéticos). Depois, o regime de Rayleigh é apresentado, mostrando que na formulação da MEOF a força óptica em

partículas de Rayleigh corresponde apenas à contribuição de dipolo elétrico.

Os resultados são apresentados no capítulo 5. No capítulo 6 tem-se as conclusões e as perspectivas para trabalhos futuros.

2 DESCRIÇÃO DOS FEIXES ESTRUTURADOS

Neste capítulo é apresentado o formalismo matemático para a descrição de feixes de luz. Inicialmente, parte-se da descrição escalar na seção 2.1. Já na seção 2.2, as soluções vetoriais, ou seja, aquelas que satisfazem todas as equações de Maxwell, são construídas a partir das soluções escalares. Por fim, a consideração da potência da fonte óptica é tratada na seção 2.3.

2.1 Feixe escalar

Considere a equação de onda escalar em coordenadas cartesianas (x, y, z) em um meio homogêneo, isotrópico, não dispersivo, sem perdas e sem absorção, caracterizado por uma permissividade ϵ_m e uma permeabilidade μ_m , ambas reais⁶⁸:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{u_m^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(x, y, z, t) = 0, \quad (2.1)$$

em que $u_m = 1/\sqrt{\epsilon_m \mu_m}$ é a velocidade de fase da onda no meio e $\Psi(x, y, z, t)$ uma função escalar.

Como os feixes mais comuns produzidos em laboratório apresentam simetria cilíndrica, é conveniente expressar a equação 2.1 em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) ⁶⁸:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{u_m^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(\rho, \phi, z, t) = 0. \quad (2.2)$$

Por separação de variáveis, pode-se expressar a função escalar $\Psi(\rho, \phi, z, t)$ como:

$$\Psi(\rho, \phi, z, t) = g_\rho(\rho)g_\phi(\phi)g_z(z)g_t(t), \quad (2.3)$$

em que $g_\rho(\rho)$ é uma função que depende apenas de ρ . Analogamente para as demais funções $g_\phi(\phi)$, $g_z(z)$ e $g_t(t)$. Substituindo a equação 2.3 na equação de onda escalar 2.2, obtém-se as seguintes equações diferenciais:

$$\rho^2 \frac{d^2 g_\rho}{d\rho^2} + \rho \frac{d g_\rho}{d\rho} = g_\rho [(k_\rho \rho)^2 - \nu^2], \quad (2.4a)$$

$$\frac{d^2 g_\phi}{d\phi^2} = g_\phi \nu^2, \quad (2.4b)$$

$$\frac{d^2 g_z}{dz^2} = g_z k_z^2, \quad (2.4c)$$

$$\frac{d^2 g_t}{dt^2} = g_t \omega^2, \quad (2.4d)$$

em que identificam-se as constantes reais k_ρ , k_z e ω como sendo o número de onda transversal, o número de onda longitudinal k_z e a frequência angular (temporal), respectivamente. A

constante ν será identificada como a ordem do feixe, como será visto a seguir. Substituindo-se as equações diferenciais na equação 2.2, obtém-se a seguinte relação entre as constantes:

$$\frac{\omega^2}{u_m^2} = k_\rho^2 + k_z^2, \quad (2.5)$$

conhecida como relação de dispersão.⁶⁸

A equação 2.4a refere-se à equação diferencial de Bessel e suas soluções linearmente independentes são dadas por $J_\nu(k_\rho\rho)$ e $Y_\nu(k_\rho\rho)$ em que $J_\nu(\cdot)$ e $Y_\nu(\cdot)$ referem-se às funções de Bessel de ordem ν de primeira espécie e de segunda espécie, respectivamente.^{69,70} Como as soluções abordadas neste trabalho são finitas na origem, $g_\rho(\rho)$ é expresso apenas em função de $J_\nu(k_\rho\rho)$.

As soluções linearmente independentes da equação 2.4b são $g_\phi(\phi) = \exp(\pm j\nu\phi)$. Como a condição de fronteira $g_\phi(\phi + 2\pi) = g_\phi(\phi)$ deve ser satisfeita, segue que $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, ou seja, $\nu \in \mathbb{Z}$.

Já as soluções linearmente independentes das equações 2.4c e 2.4d são, respectivamente, $g_z(z) = \exp(\pm jk_z z)$ e $g_t(t) = \exp(\pm j\omega t)$.

Portanto, as soluções das equações diferenciais em 2.4 são dadas por:

$$g_\rho(\rho) = \int_0^\infty G_{k_\rho}(k_\rho) k_\rho J_\nu(k_\rho\rho) dk_\rho, \quad (2.6a)$$

$$g_\phi(\phi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} G_\nu e^{j\nu\phi}, \quad (2.6b)$$

$$g_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{k_z}(k_z) e^{-jk_z z} dk_z, \quad (2.6c)$$

$$g_t(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\omega(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.6d)$$

em que $G_{k_\rho}(k_\rho)$ refere-se à transformada de Hankel de ordem ν da função $g_\rho(\rho)$ e G_ν aos coeficientes da série de Fourier associada à função $g_\phi(\phi)$. Já $G_{k_z}(k_z)$ e $G_\omega(\omega)$ referem-se, respectivamente, às transformadas de Fourier de $g_z(z)$ e $g_t(t)$. O sinal negativo da exponencial $\exp(-jk_z z)$ se dá pela escolha da convenção $\exp(j\omega t)$ para a dependência temporal de tal forma que $\exp(j\omega t - jk_z z)$ representa uma onda plana propagante na direção $+z$ quando $\omega > 0$ e $0 < k_z \leq \omega/u_m$.

Portanto, para uma determinada ordem $\nu \in \mathbb{Z}$, a solução $\Psi_\nu(\rho, \phi, z, t)$ da equação de onda escalar em coordenadas cilíndricas é dada por²⁸:

$$\Psi_\nu(\rho, \phi, z, t) = e^{j\nu\phi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_\rho J_\nu(k_\rho\rho) e^{-jk_z z} e^{j\omega t} \bar{\Psi}(k_z, k_\rho, \omega) dk_z d\omega dk_\rho, \quad (2.7)$$

sendo

$$\bar{\Psi}(k_z, k_\rho, \omega) = G_{k_\rho}(k_\rho) G_{k_z}(k_z) G_\omega(\omega), \quad (2.8)$$

a função espectral de $\Psi_\nu(\rho, \phi, z, t)$.

Pela relação de dispersão, nota-se que as variáveis k_z , k_ρ e ω não são totalmente independentes entre si. Desse modo, o feixe escalar pode ser caracterizado por uma nova função espectral $A(k_\rho, \omega)$ com dependência em k_ρ e ω , por exemplo. Assumindo-se que apenas ondas propagantes ($0 \leq k_z \leq \omega_0/u_m$) estão presentes na superposição Ψ_ν , tem-se²⁸:

$$\bar{\Psi}(k_z, k_\rho, \omega) = A(k_\rho, \omega) \delta\left(k_z - \sqrt{\frac{\omega^2}{u_m^2} - k_\rho^2}\right), \quad (2.9)$$

sendo $\delta(\cdot)$ a função de *Dirac*. Logo, substituindo-se 2.9 em 2.7 tem-se:

$$\Psi_\nu(\rho, \phi, z, t) = e^{j\nu\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\omega_0/u_m} k_\rho J_\nu(k_\rho \rho) e^{-jz\sqrt{\frac{\omega^2}{u_m^2} - k_\rho^2}} e^{j\omega t} A(k_\rho, \omega) dk_\rho d\omega. \quad (2.10)$$

Como este trabalho envolve apenas soluções monocromáticas (feixes), ou seja, ondas eletromagnéticas com frequência angular única $\omega = \omega_0 > 0$, o espectro $A(k_\rho, \omega)$ deve satisfazer: $A(k_\rho, \omega) = S(k_\rho) \delta(\omega - \omega_0)$. Considerando soluções harmônicas com dependência temporal da forma $\exp(j\omega_0 t)$, a solução $\Psi_\nu(\rho, \phi, z, t)$ passa a ser expressa em termos de uma função espectral unidimensional na variável k_ρ , ou seja, $S(k_\rho)$ ²⁸:

$$\Psi_\nu(\rho, \phi, z, t) = e^{j\nu\phi} e^{j\omega_0 t} \int_0^{\omega_0/u_m} k_\rho J_\nu(k_\rho \rho) e^{-jz\sqrt{\frac{\omega_0^2}{u_m^2} - k_\rho^2}} S(k_\rho) dk_\rho. \quad (2.11)$$

A solução apresentada em 2.11 é interpretada como uma sobreposição de ondas harmônicas propagantes em $+z$ cujas amplitudes e fase são determinadas pelo espectro $S(k_\rho)$.

A equação 2.11 pode ser reescrita em termos do número de onda longitudinal k_z . Da relação de dispersão em 2.5, tem-se que $dk_\rho = -(k_z/k_\rho) dk_z$. Logo:

$$\Psi_\nu(\rho, \phi, z, t) = e^{j\nu\phi} e^{j\omega_0 t} \int_0^{\omega_0/u_m} J_\nu\left(\rho\sqrt{\frac{\omega_0^2}{u_m^2} - k_z^2}\right) e^{-jk_z z} k_z S(k_z) dk_z, \quad (2.12)$$

agora com o espectro S dado em termos de k_z .

Como todos os feixes presentes neste trabalho apresentam dependência temporal da forma $\exp(j\omega_0 t)$, este fator será omitido daqui em diante.

2.1.1 Feixe Gaussiano

O feixe Gaussiano escalar apresenta o seguinte espectro²⁸:

$$S(k_\rho) = \frac{W_0^2}{2} e^{-k_\rho^2 \frac{W_0^2}{4}}, \quad (2.13)$$

em que W_0 se refere ao raio do *spot* do feixe no plano $z = 0$, ou seja, no plano onde o feixe apresenta menor largura, conhecido como plano da cintura do feixe Gaussiano. A análise será feita para o modo fundamental que corresponde à $\nu = 0$, modo de mais baixa ordem gerado pelas fontes *lasers*.³¹

Uma solução analítica para o feixe Gaussiano escalar $\Psi_0(\rho, z)$ pode ser obtida utilizando-se a aproximação paraxial, que considera que o feixe é extremamente direcional e propaga-se aproximadamente na direção z , com variação lenta na direção transversal. Matematicamente, tal aproximação é dada reescrevendo o número de onda longitudinal da forma³¹:

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{u_m^2} - k_\rho^2} \approx \frac{\omega_0}{u_m} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k_\rho^2}{\frac{\omega_0^2}{u_m^2}} \right). \quad (2.14)$$

Substituindo-se as equações 2.13 e 2.14 na equação 2.11, obtém-se:

$$\begin{aligned} \Psi_0(\rho, z) &= \frac{W_0^2}{2} e^{-j \frac{\omega_0}{u_m} z} \int_0^\infty k_\rho J_0(k_\rho \rho) e^{-k_\rho^2 \left(\frac{W_0^2}{4} - j \frac{z}{2} \frac{u_m}{\omega_0} \right)} dk_\rho \\ &= e^{-j \frac{\omega_0}{u_m} z} \frac{1}{1 - j \frac{2z}{W_0^2} \frac{u_m}{\omega_0}} e^{\frac{-\rho^2}{W_0^2} \left(\frac{1}{1 - j \frac{2z}{W_0^2} \frac{u_m}{\omega_0}} \right)} \\ &= e^{-j \frac{\omega_0}{u_m} z} D(z) e^{\frac{-\rho^2}{W_0^2} D(z)}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

com:

$$D(z) = \frac{1}{1 - j \frac{2z}{W_0^2} \frac{u_m}{\omega_0}} = \frac{1}{1 - j 2z \frac{s}{W_0}}, \quad (2.16)$$

em que o parâmetro $s = u_m/(\omega_0 W_0)$, definido como o fator de confinamento do feixe Gaussiano, quantifica quão focalizado é o mesmo em $z = 0$ (cintura do feixe). Nota-se que, pela equação 2.15, W_0 refere-se, de fato, ao raio da cintura do feixe no plano $z = 0$, ou seja, à distância transversal nesse plano sobre a qual a amplitude do perfil $\Psi_0(\rho, z)$ ao quadrado ($|\Psi_0(\rho, z)|^2$) decai em $1/e^2$.^{31,71}

Observa-se que quando $s \rightarrow 0$ ($W_0 \rightarrow \infty$) tem-se $D(z) \rightarrow 1$, ou seja, o perfil transversal de campo não depende de z e $\Psi_0(\rho, z)$ equivale a uma onda plana. Feixes Gaussianos colimados apresentam $s \approx 10^{-3}$ e convergem (divergem) lentamente do plano $z = 0$. Já feixes Gaussianos altamente focalizados apresentam $s \approx 10^{-2}$ e convergem (divergem) rapidamente do plano $z = 0$, ou seja, são altamente difrativos. O limite teórico para o parâmetro s corresponde à $W_0 \approx \lambda_m = 2\pi/(\omega_0/u_m)$, ou seja, $s \approx 0, 16$.

2.1.2 Feixe de Bessel ideal

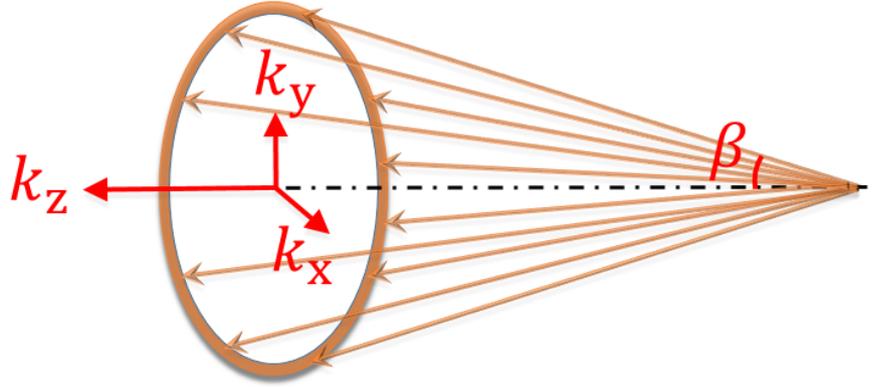
O espectro de um FB ideal é caracterizado por k_ρ constante²⁸:

$$S(k_\rho) = \frac{1}{k_\rho} \delta\left(k_\rho - \frac{\omega_0}{u_m} \text{sen}\beta\right), \quad (2.17)$$

com $\beta \in [0, \pi/2]$. Logo, $k_\rho = (\omega_0/u_m)\text{sen}\beta$ e, pela equação 2.5, $k_z = (\omega_0/u_m)\text{cos}\beta$. Como k_ρ é constante, o espectro do FB é caracterizado por um anel de amplitude constante no plano $k_x \times k_y$ (plano de Fourier). Portanto, um FB ideal pode ser interpretado como uma superposição de ondas planas de mesma amplitude e fase e cujos vetores de onda localizam-se em uma superfície cônica com ângulo de cone β , como mostrado na figura 2. O

ângulo β é denominado de ângulo de *áxicon* em referência ao elemento óptico responsável por gerar FBs em laboratório. Tal elemento constitui em uma lente refrativa de formato cônico responsável por orientar os vetores de onda sobre esta superfície cônica.^{28,72}

Figura 2 – Representação dos vetores de onda que compõem um feixe de Bessel ideal.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Substituindo-se a equação 2.17 em 2.11, obtém-se a expressão analítica para o FB escalar ideal de ordem ν ³⁹:

$$\Psi_\nu(\rho, \phi, z) = e^{j\nu\phi} J_\nu\left(\frac{\omega_0}{u_m} \text{sen}(\beta)\rho\right) e^{-jn_m \frac{\omega_0}{u_m} \cos(\beta)z}. \quad (2.18)$$

Observe que a amplitude do FB ideal escalar $|\Psi_\nu(\rho, \phi, z)|$ independe da distância longitudinal z , demonstrando a natureza não-difrativa desse feixe. Além disso, essa amplitude é dada por uma função de Bessel de ordem ν , cuja região de máxima intensidade consiste em uma superfície cilíndrica de raio $\rho = \rho_{c,\text{esc}}$ dado pela primeira raiz da equação:

$$\left. \frac{dJ_\nu(k_\rho \rho)}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_{c,\text{esc}}} = 0 \quad (2.19)$$

Para $\nu = 0$, tem-se um caso especial em que a superfície cilíndrica de intensidade máxima colapsa sobre o eixo z , ou seja, $\rho_{c,\text{esc}} = 0$.

2.1.3 Superposição discreta de feixes de Bessel

O espectro de uma superposição de $2N + 1$ FBs ideais de mesma frequência angular ω_0 mas com diferentes ângulos de áxicons β_n é dado por:

$$S(k_\rho) = \frac{1}{k_\rho} \sum_{n=-N}^N A_n \delta\left(k_\rho - \frac{\omega_0}{u_m} \text{sen}\beta_n\right), \quad (2.20)$$

em que os coeficientes A_n ponderam a amplitude e a fase de cada FB. Nota-se que os números de onda transversais e longitudinais de cada FB que compõe a superposição são dados por: $k_{\rho n} = (\omega_0/u_m)\text{sen}(\beta_n)$ e $k_{zn} = (\omega_0/u_m)\cos(\beta_n)$.

Substituindo a equação 2.20 em 2.11, obtém-se o feixe escalar correspondente a superposição discreta de FBs⁴⁹:

$$\Psi_\nu(\rho, \phi, z) = e^{j\nu\phi} \sum_{n=-N}^N A_n J_\nu(k_{\rho n} \rho) e^{-jk_{zn}z}. \quad (2.21)$$

Seja os números de onda longitudinais k_{zn} da forma:

$$k_{zn} = Q + \frac{2\pi}{L}n, \quad (2.22)$$

sendo $Q > 0$ o número de onda longitudinal central da superposição e L uma distância longitudinal (em z). Substituindo-se a equação 2.22 em 2.21 para $\nu = 0$, a amplitude de campo ao quadrado sobre o eixo z é dada por:

$$|\Psi_0(\rho = 0, \phi, z)|^2 = \left| \sum_{n=-N}^N A_n e^{-j\frac{2\pi}{L}nz} \right|^2, \quad (2.23)$$

já que $J_\nu(0) = 1$. O termo envolvendo a somatória representa uma série de Fourier truncada. Fazendo:

$$\sum_{n=-N}^N A_n e^{-j\frac{2\pi}{L}nz} \approx F(z) \quad (2.24)$$

em que $F(z)$ representa a função responsável por definir a intensidade do feixe escalar no intervalo $0 \leq z \leq L$.⁴⁹ Calculando os coeficientes A_n a partir da função $F(z)$:

$$A_n = \frac{1}{L} \int_0^L F(z) e^{j\frac{2\pi}{L}nz} dz, \quad (2.25)$$

tem-se que a amplitude de campo ao quadrado $|\Psi_0(\rho = \rho_c, \phi, z)|^2$ segue aproximadamente o padrão definido por $|F(z)|^2$. Quanto maior o valor de N , mais o perfil $|\Psi_0(\rho = \rho_c, \phi, z)|^2$ se aproxima de $|F(z)|^2$.

O valor máximo de N , N_{\max} , de forma a garantir que a superposição em 2.21 envolva apenas FBs propagantes em $+z$, ou seja, $0 \leq k_{zn} \leq \omega_0/u_m$, é obtido a partir das condições $k_{z,n=N_{\max}} = \omega_0/u_m$ e $k_{z,n=-N_{\max}} = 0$, resultando em⁵²:

$$N_{\max} = \min\left(n_m \frac{\omega_0}{c} - Q, Q\right) \frac{L}{2\pi} \quad (2.26)$$

em que a função $\min(a, b)$ retorna o valor mínimo entre os argumentos a e b .

Para ordens superiores ($\nu \geq 1$), observa-se que a amplitude da superposição $|\Psi_\nu(\rho, \phi, z)|$ está aproximadamente concentrada em torno do cilindro definido pelo FB central da superposição ($k_{z,n=0} = Q$) de forma que o raio $\rho_{c,\text{esc}}$ do cilindro de máxima intensidade é aproximadamente dado pela primeira solução de⁵¹:

$$\left. \frac{dJ_\nu(k_{\rho,n=0} \rho)}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_{c,\text{esc}}} = \left. \frac{dJ_\nu\left(\rho \sqrt{(\omega_0/u_m)^2 - Q^2}\right)}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_{c,\text{esc}}} = 0, \quad \text{para } \nu \geq 1. \quad (2.27)$$

Para $\nu = 0$, a amplitude da superposição $|\Psi_0(\rho, \phi, z)|$ está concentrada sobre o eixo z ($\rho_{c,esc} = 0$) e o raio do *spot* é aproximadamente dado por:

$$r_0 \approx 2.4048/\sqrt{(\omega_0/u_m)^2 - Q^2}, \quad (2.28)$$

já que a função $J_0(x)$ apresenta o primeiro zero em $x = 2,4048$.

2.1.4 Superposição contínua de feixes de Bessel

Seja $S(k_z)$ dada por uma superposição contínua de FBs de mesma frequência angular ω_0 mas com diferentes ângulos de cone $s = \cos\theta$:

$$S(k_z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta[k_z - (\omega_0/u_m)s]}{k_z} S_0\left(\frac{\omega_0}{u_m}s\right) ds, \quad (2.29)$$

em que $S_0[(\omega_0/u_m)s]$ contabiliza a amplitude e a fase de cada FB presente na superposição. Substituindo-se a equação 2.29 na equação 2.12, tem-se:

$$\Psi_\nu(\rho, \phi, z) = e^{j\nu\phi} \int_0^{\omega_0/u_m} J_\nu\left(\rho\sqrt{\frac{\omega_0^2}{u_m^2} - k_z^2}\right) e^{-jk_z z} S_0(k_z) dk_z. \quad (2.30)$$

Impondo que não haja ondas contra propagantes na superposição, ou seja, $S_0(k_z) = 0$ para $-\omega_0/u_m \leq k_z \leq 0$, a equação pode ser reescrita como:

$$\Psi_\nu(\rho, \phi, z) = e^{j\nu\phi} \int_{-\omega_0/u_m}^{\omega_0/u_m} J_\nu\left(\rho\sqrt{\frac{\omega_0^2}{u_m^2} - k_z^2}\right) e^{-jk_z z} S_0(k_z) dk_z. \quad (2.31)$$

Esta alteração no limite inferior da integral na equação 2.31 irá facilitar a resolução da mesma, como será visto nos passos à seguir.

2.1.4.1 Ordem zero

Para superposições contínuas de FBs de ordem $\nu = 0$, segue-se da equação 2.31 que^{29,50}:

$$\Psi_0(\rho, z) = \int_{-\omega_0/u_m}^{\omega_0/u_m} S_0(k_z) J_0\left(\rho\sqrt{\frac{\omega_0^2}{u_m^2} - k_z^2}\right) e^{-jk_z z} dk_z. \quad (2.32)$$

Seja $k_z = (\omega/u_m) s$. Logo, a equação 2.32 pode ser escrita por meio da variável auxiliar s como:

$$\Psi_0(\rho, z) = \frac{\omega_0}{u_m} \int_{-1}^1 S_0(s) J_0\left(\frac{\omega_0}{u_m} \rho \sqrt{1 - s^2}\right) e^{-j\frac{\omega_0}{u_m} z s} ds. \quad (2.33)$$

Expandindo o espectro $S_0(k_z)$ em uma série de Fourier, tem-se:

$$S_0(k_z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{j\frac{n2\pi}{K}k_z}, \quad (2.34)$$

com $K = 2\omega_0/u_m$ e os coeficientes A_n dados por:

$$A_n = \frac{1}{K} \int_{-\omega_0/u_m}^{\omega_0/u_m} S_0(k_z) e^{-j \frac{n2\pi}{K} k_z} dk_z. \quad (2.35)$$

Substituindo-se 2.34 na equação 2.33, é possível demonstrar que a superposição $\Psi_0(\rho, z)$ pode ser escrita como:

$$\Psi_0(\rho, z) = K \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \text{sinc}(\xi), \quad (2.36)$$

em que:

$$\xi = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{u_m^2} \rho^2 + \left(n\pi - \frac{\omega_0}{u_m} z\right)^2}, \quad (2.37)$$

e $\text{sinc}(\xi) = \text{sen}(\xi)/\xi$. Para mais detalhes da dedução desta equação, veja o Apêndice A.

Seja $F(z)$ uma função complexa sob a qual a intensidade do feixe escalar ao longo do eixo z é construída, ou seja, $|\Psi_0(\rho = 0, z)|^2 = |F(z)|^2$. Da equação 2.36, tem-se:

$$|\Psi_0(\rho = 0, z)| = K \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \text{sinc}\left(n\pi - \frac{\omega_0}{u_m} z\right) = |F(z)|. \quad (2.38)$$

Além disso, da equação 2.32:

$$|\Psi_0(\rho = 0, z)| = \int_{-\omega_0/u_m}^{\omega_0/u_m} S_0(k_z) e^{-jk_z z} dk_z = |F(z)|. \quad (2.39)$$

Substituindo a equação 2.35 na equação 2.38, obtém-se:

$$\begin{aligned} |F(z)| &= K \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{K} \left[\int_{-\omega_0/u_m}^{\omega_0/u_m} S_0(k_z) e^{-j \frac{n2\pi}{K} k_z} dk_z \right] \text{sinc}\left(n\pi - \frac{\omega_0}{u_m} z\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(n\pi - \frac{\omega_0}{u_m} z\right) \int_{-\omega_0/u_m}^{\omega_0/u_m} S_0(k_z) e^{-j \frac{n2\pi}{K} k_z} dk_z. \end{aligned} \quad (2.40)$$

As equações 2.39 e 2.40 são iguais se, e somente se:

$$n\pi - \frac{\omega_0}{u_m} z = 0 \rightarrow z = n\pi \frac{u_m}{\omega_0} = \frac{2\pi n}{K}. \quad (2.41)$$

Portanto, da equação 2.38 segue que:

$$F\left(z = \frac{2\pi n}{K}\right) = K A_n \rightarrow A_n = \frac{1}{K} F\left(z = \frac{2\pi n}{K}\right), \quad (2.42)$$

ou seja, os coeficientes A_n são obtidos discretizando a função $F(z)$ com período espacial de amostragem igual a $2\pi/K$. Substituindo a equação 2.42 em 2.34, obtém-se a expressão do espectro $S_0(k_z)$ em termos da função $F(z)$:

$$S_0(k_z) = \frac{1}{K} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2n\pi}{K}\right) e^{j \frac{n2\pi}{K} k_z}. \quad (2.43)$$

A expressão do feixe escalar de ordem zero em termos da função $F(z)$ é obtida substituindo a equação 2.42 na equação 2.36, resultando em⁵⁰:

$$\Psi_0(\rho, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \text{sinc}(\xi). \quad (2.44)$$

Seja $F(z)$ definido entre $-Z_{\max} \leq z \leq Z_{\max}$ com $F(z) = 0$ fora deste intervalo, o número máximo de termos na série da equação 2.43 é igual a $2N_{\max} + 1$ sendo:

$$N_{\max} = \frac{KZ_{\max}}{2\pi}. \quad (2.45)$$

Para garantir que o espectro $S_0(k_z)$ seja praticamente nulo para $k_z < 0$ e, desse modo, a superposição $\Psi_0(\rho, z)$ é construída apenas com FBs propagantes em $+z$, deve-se realizar uma pré-modulação da função $F(z)$, ou seja, $F(z) = f(z)\exp(-jQz)$, com $Q > 0$ e $f(z)$ uma função real, o que desloca o espectro relativo à função $f(z)$ para o ponto $k_z = Q$.²⁹

2.1.4.2 Ordens superiores

Uma superposição contínua de ordem superior ν pode ser obtida aplicando-se ν vezes o operador:

$$U = e^{j\phi} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{j}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \quad (2.46)$$

sobre a superposição de ordem zero $\Psi_0(\rho, z)$, já que é possível demonstrar que se $\Psi_0(\rho, z)$ é solução da equação de onda escalar em 2.2, então $\Psi_\nu(\rho, z) = \underbrace{UU \cdots U}_{\nu \text{ vezes}} \Psi_0(\rho, z, t)$ também é solução.²⁹

Aplicando o operador U uma vez na equação 2.32 tem-se:

$$\Psi_1(\rho, \phi, z) = e^{j\phi} \int_{-\omega/u_m}^{\omega/u_m} \left[-\sqrt{(\omega_0/u_m)^2 - k_z^2} S_0(k_z) \right] J_1 \left(\rho \sqrt{\frac{\omega_0^2}{u_m^2} - k_z^2} \right) e^{-jk_z z} dk_z. \quad (2.47)$$

Note que a solução encontrada para ordem $\nu = 1$ não corresponde à solução de ordem zero $\nu = 0$ com $J_0 \left(\rho \sqrt{\frac{\omega_0^2}{u_m^2} - k_z^2} \right)$ substituído por $J_1 \left(\rho \sqrt{\frac{\omega_0^2}{u_m^2} - k_z^2} \right) e^{j\phi}$. Isto se deve ao fato da solução de ordem $\nu = 1$ (equação 2.47) apresentar espectro dado por:

$$S_1(k_z) = -\sqrt{(\omega_0/u_m)^2 - k_z^2} S_0(k_z), \quad (2.48)$$

e, portanto, não ser igual à $S_0(k_z)$. No entanto, o fator $-\sqrt{(\omega_0/u_m)^2 - k_z^2}$ não deteriora significativamente o espectro $S_0(k_z)$ principalmente nos casos em que a banda espectral de $S_0(k_z)$ não é muito larga. Nestes casos pode-se escrever:

$$S_1(k_z) = -\sqrt{(\omega_0/u_m)^2 - k_z^2} S_0(k_z) \approx N S_0(k_z), \quad (2.49)$$

com N uma constante. Logo, $S_1(k_z)$ difere de $S_0(k_z)$ a menos de uma constante e, portanto, a solução de ordem $\nu = 1$ (equação 2.47) trata-se de um feixe oco não-difrativo que apresenta o mesmo perfil de intensidade longitudinal da solução de ordem zero mas ao longo de uma superfície cilíndrica de raio $\rho_{c,esc}$, ou seja, $|\Psi_1(\rho = \rho_{c,esc}, \phi, z, t)|^2 \approx |F(z)|^2$, com $\rho_{c,esc}$ determinado a partir da equação 2.27.

A constante N pode ser escrita da forma: $N = -\sqrt{[(\omega_0/u_m)^2 - \overline{k_z}^2]}$ para algum $\overline{k_z}$ no intervalo $-\omega_0/u_m \leq k_z \leq \omega_0/u_m$. Para espectro $S_0(k_z)$ relativamente concentrado em torno de $k_z = Q$, pode-se adotar $N \approx -\sqrt{[(\omega_0/u_m)^2 - Q^2]}$.

Dado que pode-se assumir $S_1(k_z) \approx NS_0(k_z)$, segue que para $NS_0(k_z)$ ser igual ao lado direito da equação 2.43, deve-se discretizar a função $F(z)/N$. Ou seja, a aplicação do operador U uma única vez sobre Ψ_0 implica que a discretização de $F(z)$ deva passar pela transformação $F \rightarrow F/N$. Portanto, aplicando o operador U na equação 2.44, obtém-se a superposição contínua de FBs de ordem $\nu = 1$ em termos da função $F(z)$:

$$\Psi_1(\rho, \phi, z) = e^{j\phi} \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \frac{\partial}{\partial \rho} \text{sinc}(\xi) \quad . \quad (2.50)$$

Aplicando ν vezes o operador U na equação 2.32, obtém-se a generalização para qualquer ordem ν :

$$\Psi_\nu(\rho, \phi, z) = e^{j\nu\phi} \int_{-\omega_0/u_m}^{\omega_0/u_m} [(\omega_0/u_m)^2 - k_z^2]^{\nu/2} (-1)^\nu S_0(k_z) J_\nu\left(\rho \sqrt{\frac{\omega_0^2}{u_m^2} - k_z^2}\right) e^{-jk_z z} dk_z, \quad (2.51)$$

cujo espectro é dado por:

$$S_\nu(k_z) = S_0(k_z) (-1)^\nu [(\omega_0/u_m)^2 - k_z^2]^{\nu/2}. \quad (2.52)$$

A seguinte aproximação pode ser realizada sobre o espectro $S_\nu(k_z)$ da superposição em 2.51:

$$S_\nu(k_z) = S_0(k_z) (-1)^\nu [(\omega_0/u_m)^2 - k_z^2]^{\nu/2} \approx N^\nu S_0(k_z), \quad (2.53)$$

com $N = -\sqrt{[(\omega_0/u_m)^2 - Q^2]}$. Ressalta-se, porém, que tal aproximação é válida apenas até um certo valor de ν , valor o qual depende da largura de banda do espectro $S_0(k_z)$ que é inversamente proporcional ao comprimento longitudinal $L = 2Z_{\max}$ em que a função $F(z)$ é definida. Nota-se que quanto maior o valor de ν , mais significativo torna-se o fator $[(\omega_0/u_m)^2 - k_z^2]^{\nu/2}$ e, por consequência, maior a deterioração do espectro $S_\nu(k_z)$ em frente ao espectro $S_0(k_z)$. De maneira geral, observa-se que quanto maior ν , menor deve ser a largura de banda do espectro $S_0(k_z)$ para que $S_\nu(k_z)$ seja aproximadamente igual a $N^\nu S_0(k_z)$.

Ao aplicar ν vezes o operador U na equação 2.44 e utilizando a transformação $F \rightarrow F/N^\nu$ na função $F(z)$, é possível obter uma expressão para o feixe escalar da

superposição contínua de ordem $\nu \geq 1$:

$$\Psi_\nu(\rho, \phi, z) = e^{j\nu\phi} \frac{1}{N^\nu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \left[\sum_{m=0}^{\nu-1} (-1)^m \frac{c_{\nu,m}}{\rho^m} \frac{\partial^{\nu-m}}{\partial \rho^{\nu-m}} \right] \text{sinc}(\xi) \quad , \quad (2.54)$$

em que:

$$c_{\nu,m} = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ c_{\nu,m-1}(\nu - m) + c_{\nu-1,m}, & m = 1, \dots, \nu - 1 \\ 0, & m \geq \nu. \end{cases} \quad (2.55)$$

O apêndice B contém toda a descrição matemática para a obtenção da equação 2.54.

2.2 Feixe Vetorial

Como as soluções eletromagnéticas neste trabalho apresentam dependência temporal da forma $\exp(j\omega_0 t)$, os campos elétrico e magnético associados ao feixe vetorial são dados por:

$$\mathcal{E}_{\text{inc}}(\rho, \phi, z, t) = \text{Re}[\mathbf{E}_{\text{inc}}(\rho, \phi, z)\exp(j\omega_0 t)] \quad (2.56a)$$

$$\mathcal{H}_{\text{inc}}(\rho, \phi, z, t) = \text{Re}[\mathbf{H}_{\text{inc}}(\rho, \phi, z)\exp(j\omega_0 t)]. \quad (2.56b)$$

O fasor $\mathbf{E}_{\text{inc}}(\rho, \phi, z)$ é construído considerando apenas polarizações no plano xy , ou seja, polarizações elípticas no geral descritas pelo vetor de Jones $[X, Y] = X\hat{x} + Y\hat{y}$, em que X e Y são parâmetros complexos.⁷¹ A função escalar $\Psi_\nu(\rho, \phi, z)$, obtida na seção 2.1 é tomada, portanto, como a componente transversal de campo elétrico. Logo, as componentes cartesianas do campo elétrico fasorial são dadas por:

$$\mathbf{E}_{\text{inc}}(\rho, \phi, z) = E_0(X\hat{x} + Y\hat{y})\Psi_\nu(\rho, \phi, z) + E_z\hat{z}, \quad (2.57)$$

em que E_0 é uma constante com dimensão de campo elétrico e E_z é a componente de campo longitudinal, a qual será determinada utilizando a Lei de Gauss elétrica $\nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{inc}} = 0$ ²⁹:

$$E_z = -E_0 \left[X \frac{\partial}{\partial x} \int \Psi dz - Y \frac{\partial}{\partial y} \int \Psi dz \right], \quad (2.58)$$

que para campos descritos em coordenadas cilíndricas é reescrita da forma⁷³:

$$E_z(\rho, \phi, z) = -E_0 \left[M_1(\phi) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{M_2(\phi)}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \int \Psi(\rho, \phi, z) dz, \quad (2.59)$$

com $M_1(\phi) = X \cos \phi + Y \sin \phi$ e $M_2(\phi) = Y \cos \phi - X \sin \phi$.

Já o campo magnético \mathbf{H}_{inc} associado a \mathbf{E}_{inc} é obtido a partir da lei de Faraday:

$$\mathbf{H}_{\text{inc}} = \frac{\nabla \times \mathbf{E}_{\text{inc}}}{-j\omega_0 \mu_m}. \quad (2.60)$$

No apêndice C, é demonstrado que os campos elétrico e magnético construídos por meio das equações 2.57, 2.59 e 2.60 satisfazem todas as equações de Maxwell, e que, portanto, o feixe vetorial trata-se, de fato, de um feixe Maxwelliano.

2.2.1 Feixe Gaussiano

Substituindo-se a equação 2.15 em 2.59, tem-se:

$$E_z(\rho, \phi, z) = E_0 \frac{2\rho}{W_0^2} M_1(\phi) \int e^{-j\frac{\omega_0}{u_m}z} D(z)^2 e^{\frac{-\rho^2}{W_0^2}D(z)} dz \quad (2.61)$$

cuja integral não apresenta solução analítica. No entanto, dentro do regime paraxial pode-se supor que o termo $D(z)^2 \exp(-D(z)\rho^2/W_0^2)$ varia lentamente em relação à exponencial $e^{-j(\omega_0/u_m)z}$ e, portanto, obtém-se:

$$\int e^{-j\frac{\omega_0}{u_m}z} D(z)^2 e^{\frac{-\rho^2}{W_0^2}D(z)} dz \approx D(z)^2 e^{\frac{-\rho^2}{W_0^2}D(z)} \int e^{-j\frac{\omega_0}{u_m}z} dz = j\frac{u_m}{\omega_0} D(z) \Psi_0(\rho, z). \quad (2.62)$$

Logo, a descrição do feixe Gaussiano vetorial é dada por:

$$\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FG})} = E_0 \Psi_0(X\hat{x} + Y\hat{y}) + E_z \hat{z}, \quad (2.63a)$$

$$\Psi_0 = e^{-jk_m z} D(z) e^{\frac{-\rho^2}{W_0^2}D(z)}, \quad (2.63b)$$

$$E_z = 2js \frac{\rho}{W_0} \left(X \cos\phi + Y \sin\phi \right) D(z) \Psi_0(\rho, z) E_0. \quad (2.63c)$$

Devido às aproximações paraxiais realizadas nas equações 2.14 e 2.62, a descrição vetorial em 2.63 não é Maxwelliana, ou seja, ela não satisfaz todas as equações de Maxwell de forma exata. O feixe Gaussiano descrito pelas equações em 2.63 corresponde à formulação de Davis de mais baixa ordem em s , comumente denominada de aproximação de ordem zero. Quanto menor o valor de s , mais próximo esta descrição se aproxima de um feixe Maxwelliano. Para $s = 0,02$, obtém-se erro percentual médio de 0,817% quando as componentes de campo são substituídas nas equações de Maxwell.^{74,75} Portanto, a descrição em 2.63 apenas é adequada para baixos valores de s .

2.2.2 Superposição discreta de feixes de Bessel

Substituindo-se a equação 2.21 em 2.57 e 2.59, obtém-se a descrição do feixe vetorial associado à superposição discreta de feixes de Bessel:

$$\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWD})} = E_0 \Psi_\nu(X\hat{x} + Y\hat{y}) + E_z \hat{z}, \quad (2.64a)$$

$$\Psi_\nu(\rho, \phi, z) = e^{j\nu\phi} \sum_{n=-N}^N A_n J_\nu(k_{\rho,n}\rho) e^{-jk_{z,n}z} \quad (2.64b)$$

$$E_z = -je^{j\nu\phi} E_0 \sum_{n=-N}^N \frac{A_n}{k_{z,n}} e^{-jk_{z,n}z} \left[M_1(\phi) \frac{d}{d\rho} + \frac{j\nu}{\rho} M_2(\phi) \right] J_\nu(k_{\rho,n}\rho) \quad (2.64c)$$

2.2.3 Feixe de Bessel ideal

A descrição vetorial do feixe de Bessel ideal é obtida tomando-se $N = 0$ e $A_n = 1$ na equação 2.64. Os números de onda longitudinal e transversal são, portanto,

iguais a $k_z = (\omega_0/u_m)\cos\beta = k_{z,0} = Q$ e $k_\rho = (\omega_0/u_m)\sen\beta = k_{\rho,0} = \sqrt{(\omega_0/u_m)^2 - Q^2}$, respectivamente. Logo:

$$\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FB})} = E_0\Psi_\nu(X\hat{x} + Y\hat{y}) + E_z\hat{z}, \quad (2.65a)$$

$$\Psi_\nu(\rho, \phi, z) = e^{j\nu\phi}J_\nu(k_{\rho,0}\rho)e^{-jk_{z,0}z} \quad (2.65b)$$

$$E_z = -je^{j\nu\phi}E_0\frac{1}{k_{z,0}}e^{-jk_{z,0}z}\left[M_1(\phi)\frac{d}{d\rho} + \frac{j\nu}{\rho}M_2(\phi)\right]J_\nu(k_{\rho,0}\rho). \quad (2.65c)$$

2.2.4 Superposição contínua de feixes de Bessel

Para determinar a componente E_z , calcula-se primeiro a integral da função escalar $\Psi_\nu(\rho, \phi, z)$ em relação à z . Para ordem $\nu = 0$, tem-se:

$$\int \Psi_0(\rho, z) dz = \int_{-\omega_0/u_m}^{\omega_0/u_m} S(k_z) \frac{e^{-jk_z z}}{-jk_z} J_0\left(\rho\sqrt{\frac{\omega_0^2}{u_m^2} - k_z^2}\right) dk_z, \quad (2.66)$$

ou seja, o espectro correspondente à função $\int \Psi_0 dz$ é igual à $S(k_z)/(-jk_z)$. Logo, pela propriedade de integração em séries de Fourier, segue que os coeficientes do espectro $S(k_z)/(-jk_z)$ são dados por:

$$B_n = g\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \frac{1}{K}, \quad (2.67)$$

com $g(z) = \int F(z)dz$. Portanto a função $\int \Psi_0 dz$ pode ser obtida a partir da equação 2.44 utilizando-se a seguinte transformação: $F(z) \rightarrow g(z)$. Dessa forma, segue que:

$$\int \Psi_0(\rho, z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \text{sinc}(\xi), \quad (2.68)$$

e, portanto, substituindo 2.68 na equação 2.59, a componente longitudinal de campo elétrico E_z para a superposição contínua de FBs de ordem zero é:

$$E_z(\rho, \phi, z) = -E_0(X \cos \phi + Y \sin \phi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \frac{\partial}{\partial \rho} \text{sinc}(\xi). \quad (2.69)$$

Para $\nu = 1$, integrando a equação 2.47 em relação à z , tem-se:

$$\int \Psi_1(\rho, \phi, z) dz = e^{j\phi} \int_{-\omega_0/u_m}^{\omega_0/u_m} S_1(k_z) \frac{e^{-jk_z z}}{-jk_z} J_1\left(\rho\sqrt{\frac{\omega_0^2}{u_m^2} - k_z^2}\right) e^{-jk_z z} dk_z, \quad (2.70)$$

ou seja, o espectro correspondente à $\int \Psi_1 dz$ é igual à $S_1(k_z)/(-jk_z)$. Portanto, a função $\int \Psi_1 dz$ é obtida a partir da equação 2.50 aplicando-se a transformação $F(z) \rightarrow g(z)$:

$$\int \Psi_1(\rho, \phi, z) dz = \frac{1}{N} e^{j\phi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \frac{\partial}{\partial \rho} \text{sinc}(\xi) . \quad (2.71)$$

Logo, utilizando-se a equação 2.59, obtém-se a componente longitudinal E_z de campo elétrico para a superposição contínua de FBs de ordem $\nu = 1$:

$$E_z(\rho, \phi, z) = -E_0 e^{j\phi} \frac{1}{N} \left[M_1(\phi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \text{sinc}(\xi) + j \frac{M_2(\phi)}{\rho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \frac{\partial}{\partial \rho} \text{sinc}(\xi) \right]. \quad (2.72)$$

Generalizando para qualquer ordem $\nu \geq 1$ (a partir da equação 2.54), obtém-se a descrição do feixe vetorial associado à superposição contínua de feixes de Bessel de ordem ν arbitrária:

$$\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWC})} = E_0 \Psi_\nu (X \hat{x} + Y \hat{y}) + E_z \hat{z}, \quad (2.73a)$$

$$\Psi_\nu(\rho, \phi, z) = e^{j\nu\phi} \frac{1}{N^\nu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \left[\sum_{m=0}^{\nu-1} (-1)^m \frac{c_{\nu,m}}{\rho^m} \frac{\partial^{\nu-m}}{\partial \rho^{\nu-m}} \right] \text{sinc}(\xi), \quad (2.73b)$$

$$E_z(\rho, \phi, z) = -E_0 e^{j\phi} \frac{1}{N^\nu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \left[M_1(\phi) \sum_{m=0}^{\nu-1} (-1)^m c_{\nu,m} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho^m} \frac{\partial^{\nu-m}}{\partial \rho^{\nu-m}} \right] + j\nu M_2(\phi) \sum_{m=0}^{\nu-1} (-1)^m \frac{c_{\nu,m}}{\rho^{m+1}} \frac{\partial^{\nu-m}}{\partial \rho^{\nu-m}} \right] \text{sinc}(\xi), \quad (2.73c)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{u_m^2} \rho^2 + \left(n\pi - \frac{\omega_0}{u_m} z \right)^2} \quad (2.73d)$$

$$N = -\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{u_m} \right)^2 - Q^2}, \quad (2.73e)$$

em que $g(z) = \int F(z) dz$, $M_1(\phi) = X \cos \phi + Y \sin \phi$, $M_2(\phi) = Y \cos \phi - X \sin \phi$ e $c_{\nu,m}$ dado pela equação 2.55.

Em relação aos feixes vetoriais de ordens superiores ($\nu \geq 1$) associados ao FB ideal (equação 2.65), à superposição discreta de FBs (equação 2.64) e à superposição contínua de FBs (equação 2.73), ressalta-se que, devido à presença da componente longitudinal E_z de campo elétrico, a distribuição de campo $|\mathbf{E}_{\text{inc}}|^2/|E_0|^2$ é modificada podendo não corresponder à distribuição de campo de feixe oco definida pelo feixe escalar $|\Psi_\nu(\rho, \phi, z)|^2$. Esta modificação depende da polarização do feixe vetorial e dos ângulos de áxicons da superposição. Quanto maiores forem estes ângulos, ou seja, quanto menor for o parâmetro Q , a componente E_z torna-se mais significativa. Exemplos contemplando este fenômeno são estudados na subseção 5.2.2 do capítulo 5. Uma das consequências é que o raio ρ_c do cilindro da região de máxima amplitude do feixe vetorial é alterado e não corresponde ao raio do cilindro do feixe escalar ($\rho_c \neq \rho_{c,\text{esc}}$), não seguindo, portanto, a equação 2.27.

2.3 Cálculo da potência do feixe

O cálculo da potência P do feixe vetorial é determinado a partir da integração do fluxo de potência médio em um plano $z = Z$:

$$P = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[S_z(\rho, \phi, z = Z) \right] \rho d\phi d\rho, \quad (2.74)$$

sendo S_z a componente longitudinal do vetor de Poynting complexo:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}_{\text{inc}} \times \mathbf{H}_{\text{inc}}^*, \quad (2.75)$$

em que o símbolo $*$ representa a operação complexo conjugado.

Portanto, dada a potência P do feixe, pode-se utilizar a equação 2.74 para determinar a amplitude da constante E_0 .

Dentre os feixes analisados neste trabalho, apenas o feixe Gaussiano e a superposição contínua de FBs apresentam fluxo de energia finito. Observa-se que a descrição matemática destes dois feixes (equações 2.63 e 2.73) tratam-se de funções quadraticamente integráveis. Especificadamente, tem-se que o feixes escalares Ψ_ν destes feixes (equações 2.63b e 2.73b) são funções quadraticamente integráveis, ou seja, a integral:

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} |\Psi_\nu(\rho, \phi, z = Z)|^2 \rho d\phi d\rho, \quad (2.76)$$

é convergente.

Para o feixe Gaussiano, utilizando-se as equações 2.63, 2.60 e 2.75, é possível obter uma expressão analítica que relaciona P e $|E_0|$ avaliando-se a equação 2.74 em $z = Z = 0$:

$$P = |E_0|^2 \frac{\pi}{4} \varepsilon_m u_m W_0^2 (1 + s^2). \quad (2.77)$$

Não é possível obter uma expressão analítica que relaciona P e $|E_0|$ para a superposição contínua de FBs. Por isso, neste trabalho, para o cálculo de $|E_0|$ associado a este feixe para uma dada potência P , a integral em 2.74 foi calculada numericamente.

O FB ideal e a superposição discreta de FBs apresentam fluxo de energia infinito, ou seja, a integral presente na equação 2.74 é divergente. Isto se deve ao fato da função escalar Ψ_ν destes feixes (equações 2.18 e 2.21) não serem funções quadraticamente integráveis. Alternativamente, observa-se que os espectros destas funções escalares (equações 2.17 e 2.20) também não são quadraticamente integráveis, já que consistem, respectivamente, em uma função de Dirac e em uma soma discreta de funções de Dirac. Este fato faz com que a superposição discreta de FBs seja periódica ao longo de z com período definido pelo comprimento L .

3 TEORIA GENERALIZADA DE LORENZ-MIE

Neste capítulo, o espalhamento de luz por uma partícula esférica e a obtenção da força óptica a partir deste espalhamento são analisados utilizando a GLMT seguindo-se o formalismo apresentado por Gouesbet e Gréhan.⁵⁹

Assume-se o campo incidente como uma onda eletromagnética com dependência temporal da forma $\exp(j\omega_0 t)$. O meio em que a partícula está imersa é isotrópico, linear, homogêneo, não dispersivo e sem perdas, caracterizado por uma permissividade ϵ_m e permeabilidade μ_m , ambas reais. Logo, a velocidade de fase de propagação do campo incidente é $u_m = 1/\sqrt{\mu_m \epsilon_m}$. O comprimento de onda da mesma é dado por $\lambda_m = 2\pi u_m / \omega_0$.⁵⁹

A partícula, com formato esférico, também é composta por um meio isotrópico, linear, homogêneo e não dispersivo, caracterizado por uma permissividade ϵ_p e permeabilidade μ_p , ambas podendo assumir valores complexos. Portanto, a partícula é definida por meio de dois parâmetros: raio a e índice de refração relativo $M = \sqrt{\epsilon_p \mu_p / (\epsilon_m \mu_m)} = M_R - jM_I$, com $M_R > 0$ e $M_I > 0$. Para uma partícula com perdas tem-se $M_I \neq 0$.

A figura 3 mostra os sistemas de coordenadas adotados para a descrição dos campos eletromagnéticos e para a determinação de forças ópticas sobre a partícula esférica no contexto da GLMT. Adotou-se um sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) cuja origem O_p coincide com o centro da partícula. Em coordenadas esféricas, este sistema tem representação dada por (r, θ, ϕ) . O campo incidente é descrito por outro sistema de coordenadas cartesianas (u, v, w) de origem O_F . A representação em coordenadas cilíndricas deste sistema equivale às coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) adotadas no capítulo 2. No sistema (x, y, z) , o ponto O_F está localizado em (x_0, y_0, z_0) .

Tanto os campos eletromagnéticos totais quanto a força óptica atuante sobre a partícula são descritos em termos do sistema (x, y, z) e, portanto, são dados em função da posição (x_0, y_0, z_0) do campo incidente no sistema (x, y, z) . Além disso, devido à simetria esférica, será utilizado a representação em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) para o sistema (x, y, z) .

Sendo \mathbf{r} o vetor posição no sistema (x, y, z) , o campo elétrico total externo à partícula apresenta duas contribuições: o campo incidente $\mathcal{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t)$ e o campo espalhado $\mathcal{E}_s(\mathbf{r}, t)$ pela partícula. Já no interior da partícula, o campo elétrico total é denominado de campo interno $\mathcal{E}_{\text{int}}(\mathbf{r}, t)$. Portanto, em todo o espaço (r, θ, ϕ) , o campo elétrico total é descrito por:

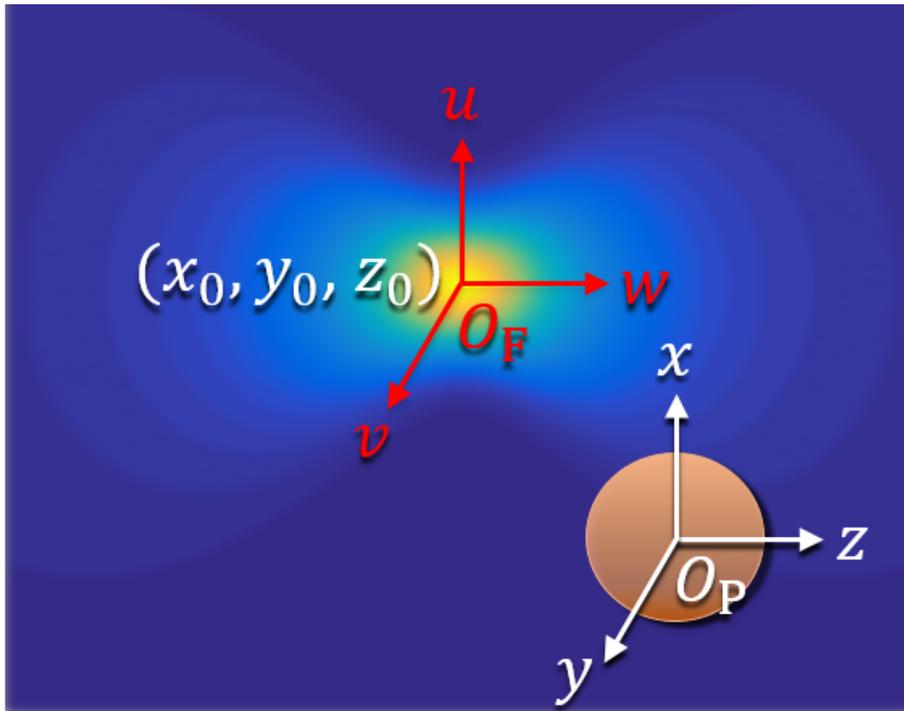
$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \mathcal{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{E}_s(\mathbf{r}, t), & r \geq a \\ \mathcal{E}_{\text{int}}(\mathbf{r}, t), & r \leq a. \end{cases} \quad (3.1)$$

De maneira análoga, o campo magnético total em todo o espaço (r, θ, ϕ) é dado por:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \mathbf{H}_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}_s(\mathbf{r}, t), & r \geq a \\ \mathbf{H}_{\text{int}}(\mathbf{r}, t), & r \leq a, \end{cases} \quad (3.2)$$

em que $\mathbf{H}_{\text{inc}}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{H}_s(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{H}_{\text{int}}(\mathbf{r}, t)$ referem-se, respectivamente, ao campo magnético incidente, espalhado e interno.

Figura 3 – Sistemas de coordenadas adotados para a determinação de forças ópticas sobre a partícula esférica no contexto da GLMT.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.1 Equações de Maxwell em coordenadas curvilíneas ortogonais

Bromwich⁷⁶ desenvolveu um método para a resolução das equações de Maxwell a partir de potenciais escalares denominados de potenciais de Bromwich. Na GLMT, os campos incidente, espalhado e interno são escritos em termos destes potenciais. O método de Bromwich permite encontrar soluções em sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonais. Logo, nesta seção, as equações de Maxwell são escritas em tais sistemas.

Um sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) é curvilíneo ortogonal se apresenta a seguinte métrica:

$$g_{km} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (e_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (e_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (e_3)^2 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

e cujo diferencial de comprimento é, portanto, $ds^2 = (e_1 dx_1)^2 + (e_2 dx_2)^2 + (e_3 dx_3)^2$.⁷⁷

O sistema de coordenadas esférico (r, θ, ϕ) , o qual é de interesse neste trabalho, é um sistema curvilíneo ortogonal com métrica:

$$g_{km} = \begin{bmatrix} (1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (r)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (r \operatorname{sen} \theta)^2 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

e diferencial de comprimento $ds^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2 + (r \operatorname{sen} \theta d\phi)^2$.

À seguir, as Equações de Maxwell são reescritas em coordenadas curvilíneas ortogonais.

Para o meio considerado neste trabalho, as relações constitutivas são dadas por: $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_m \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_m \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, sendo \mathbf{D} o vetor de deslocamento elétrico, \mathbf{B} o vetor de indução magnética e \mathbf{E} e \mathbf{H} os vetores campo elétrico e magnético, respectivamente. Logo, a forma diferencial das equações de Maxwell em termos do campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e do campo magnético $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ são:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_m} \quad (3.5a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.5b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (3.5c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (3.5d)$$

em que $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ refere-se a densidade total de corrente elétrica e $\rho(\mathbf{r}, t)$ a densidade de cargas elétricas.

Como o meio considerado é sem fontes, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$ e $\rho(\mathbf{r}, t) = 0$, segue que:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.6a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.6b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (3.6c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (3.6d)$$

Seja (E_1, E_2, E_3) e (H_1, H_2, H_3) , respectivamente, as componentes do campo elétrico e do campo magnético no sistema de coordenadas curvilínea ortogonal (x_1, x_2, x_3) . Logo, as equações de Maxwell em 3.6 são reescritas conforme segue-se à seguir.

Lei de Gauss elétrica (equação 3.6a):

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (e_2 e_3 E_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (e_3 e_1 E_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (e_1 e_2 E_3) = 0. \quad (3.7)$$

Lei de Gauss magnética (equação 3.6b):

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (e_2 e_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (e_3 e_1 H_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (e_1 e_2 H_3) = 0. \quad (3.8)$$

Lei de Faraday (equação 3.6c):

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(e_3 E_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(e_2 E_2) = -\mu_m e_2 e_3 \frac{\partial H_1}{\partial t} \quad (3.9a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(e_1 E_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(e_3 E_3) = -\mu_m e_3 e_1 \frac{\partial H_2}{\partial t} \quad (3.9b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(e_2 E_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(e_1 E_1) = -\mu_m e_1 e_2 \frac{\partial H_3}{\partial t}, \quad (3.9c)$$

e lei de Ampère-Maxwell (equação 3.6d):

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(e_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(e_2 H_2) = \epsilon_m e_2 e_3 \frac{\partial E_1}{\partial t} \quad (3.10a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(e_1 H_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(e_3 H_3) = \epsilon_m e_3 e_1 \frac{\partial E_2}{\partial t} \quad (3.10b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(e_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(e_1 H_1) = \epsilon_m e_1 e_2 \frac{\partial E_3}{\partial t}. \quad (3.10c)$$

3.2 Potenciais de Bromwich

Nesta seção, os potenciais de Bromwich são definidos para modos transversos magnéticos (TM, do inglês, *transverse magnetic*) e para modos transversos elétricos (TE, do inglês, *transverse electric*). Em um sistema de coordenadas curvilíneo ortogonal, um modo TM é caracterizado pela componente H_1 ser nula, ou seja, $H_1 = 0$. Por outro lado, um modo TE é caracterizado por $E_1 = 0$. Portanto, no sistema de coordenadas esférico, modos TM não apresentam componente radial de campo magnético enquanto que modos TE não apresentam componente radial de campo elétrico. A solução eletromagnética geral é escrita como a soma dos modos TM e TE.⁵⁹

3.2.1 Modos TM

Da equação 3.9a com $H_1 = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(e_3 E_3) = \frac{\partial}{\partial x_3}(e_2 E_2). \quad (3.11)$$

Definindo:

$$e_2 E_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial U_{\text{TM}}}{\partial x_1} \quad (3.12a)$$

$$e_3 E_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial U_{\text{TM}}}{\partial x_1}, \quad (3.12b)$$

em que U_{TM} é uma função potencial auxiliar denominada de potencial de Bromwich para modos TM. À seguir, todas as componentes de campo elétrico ($E_{1,\text{TM}}, E_{2,\text{TM}}, E_{3,\text{TM}}$) e magnético ($H_{1,\text{TM}}, H_{2,\text{TM}}, H_{3,\text{TM}}$) de modos TM são escritas em função do potencial U_{TM} .

Segue das equações em 3.12 que as componentes de campo elétrico E_2 e E_3 em função do potencial U_{TM} são dadas por:

$$E_{2,\text{TM}} = \frac{1}{e_2} \frac{\partial^2 U_{\text{TM}}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (3.13a)$$

$$E_{3,\text{TM}} = \frac{1}{e_3} \frac{\partial^2 U_{\text{TM}}}{\partial x_1 \partial x_3}. \quad (3.13b)$$

Substituindo-se as equações em 3.13 na equação 3.10c (com $H_1 = 0$), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (e_2 H_2) = \epsilon_m \frac{e_1 e_2}{e_3} \frac{\partial^2 U_{\text{TM}}}{\partial x_1 \partial x_3 \partial t} = \epsilon_m \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{e_1 e_2}{e_3} \frac{\partial^2 U_{\text{TM}}}{\partial x_3 \partial t} \right) - \epsilon_m \frac{\partial^2 U_{\text{TM}}}{\partial x_3 \partial t} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{e_1 e_2}{e_3} \right) \quad (3.14)$$

Seis sistemas de coordenadas curvilíneos ortogonais, incluindo o sistema de coordenadas esférico, satisfazem as seguintes relações⁵⁹:

$$e_1 = 1 \quad (3.15a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{e_2}{e_3} \right) = 0. \quad (3.15b)$$

Restringindo a sistemas de coordenadas que satisfazem as expressões presentes em 3.15, a equação 3.14 reduz a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} (e_2 H_2) &= \epsilon_m \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{e_1 e_2}{e_3} \frac{\partial^2 U_{\text{TM}}}{\partial x_3 \partial t} \right) \\ \iff H_{2,\text{TM}} &= \frac{\epsilon_m}{e_3} \frac{\partial^2 U_{\text{TM}}}{\partial x_3 \partial t}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

e, portanto, obtém-se a expressão da componente $H_{2,\text{TM}}$ em função de U_{TM} .

De maneira análoga ao procedimento utilizado para a determinação da componente $H_{2,\text{TM}}$, ao substituir-se as equações em 3.13 na equação 3.10b e utilizando-se as equações em 3.15, segue que a componente $H_{3,\text{TM}}$ é dada por:

$$H_{3,\text{TM}} = \frac{\epsilon_m}{e_2} \frac{\partial^2 U_{\text{TM}}}{\partial x_2 \partial t}. \quad (3.17)$$

Resta apenas, portanto, a determinação da componente $E_{1,\text{TM}}$. Substituindo-se as expressões de $H_{2,\text{TM}}$ (equação 3.16) e de $E_{3,\text{TM}}$ (equação 3.13b) na equação 3.9b, obtém-se:

$$E_{1,\text{TM}} = \frac{\partial^2 U_{\text{TM}}}{(\partial x_1)^2} - \mu_m \epsilon_m \frac{\partial^2 U_{\text{TM}}}{(\partial t)^2}. \quad (3.18)$$

Observa-se que a equação 3.18 também pode ser obtida substituindo-se as expressões de $H_{3,\text{TM}}$ (equação 3.17) e de $E_{2,\text{TM}}$ (equação 3.13a) na equação 3.9c. Outra expressão para $E_{1,\text{TM}}$ pode ser obtida ao substituir as expressões de $H_{2,\text{TM}}$ (equação 3.16) e de $H_{3,\text{TM}}$ (equação 3.17) na equação 3.10a:

$$E_{1,\text{TM}} = -\frac{1}{e_2 e_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{e_3}{e_2} \frac{U_{\text{TM}}}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{e_2}{e_3} \frac{U_{\text{TM}}}{\partial x_3} \right) \right] \quad (3.19)$$

Igualando-se as equações 3.18 e 3.19 obtém-se a equação diferencial parcial para o potencial de Bromwich U_{TM} :

$$\frac{\partial^2 U_{\text{TM}}}{(\partial x_1)^2} - \mu_m \epsilon_m \frac{\partial^2 U_{\text{TM}}}{(\partial t)^2} + \frac{1}{e_2 e_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{e_3 U_{\text{TM}}}{e_2 \partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{e_2 U_{\text{TM}}}{e_3 \partial x_3} \right) \right] = 0. \quad (3.20)$$

Para campos harmônicos com dependência temporal da forma $\exp(j\omega_0 t)$, a equação 3.20 é reescrita como:

$$\frac{\partial^2 U_{\text{TM}}}{(\partial x_1)^2} + \frac{1}{e_2 e_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{e_3 U_{\text{TM}}}{e_2 \partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{e_2 U_{\text{TM}}}{e_3 \partial x_3} \right) \right] + k_m^2 U_{\text{TM}} = 0, \quad (3.21)$$

agora com U_{TM} sendo um fasor, ou seja, $U_{\text{TM}} = U_{\text{TM}}(e_1, e_2, e_3)$.

3.2.2 Modos TE

Da equação 3.10a com $E_1 = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (e_3 H_3) = \frac{\partial}{\partial x_3} (e_2 H_2). \quad (3.22)$$

Definindo:

$$e_2 H_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial U_{\text{TE}}}{\partial x_1} \quad (3.23a)$$

$$e_3 H_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial U_{\text{TE}}}{\partial x_1}, \quad (3.23b)$$

em que U_{TE} refere-se ao potencial de Bromwich para modos TE. O procedimento para a determinação das componentes de campo elétrico e magnético de modos TE em função do potencial U_{TE} é análogo ao realizado para modos TM. Obtém-se:

$$E_{2,\text{TE}} = -\frac{\mu_m}{e_3} \frac{\partial^2 U_{\text{TE}}}{\partial x_3 \partial t} \quad (3.24a)$$

$$E_{3,\text{TE}} = \frac{\mu_m}{e_2} \frac{\partial^2 U_{\text{TE}}}{\partial x_2 \partial t} \quad (3.24b)$$

$$H_{1,\text{TE}} = \frac{\partial^2 U_{\text{TE}}}{(\partial x_1)^2} - \mu_m \epsilon_m \frac{\partial^2 U_{\text{TE}}}{(\partial t)^2} \quad (3.24c)$$

$$H_{2,\text{TE}} = \frac{1}{e_2} \frac{\partial^2 U_{\text{TE}}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (3.24d)$$

$$H_{3,\text{TE}} = \frac{1}{e_3} \frac{\partial^2 U_{\text{TE}}}{\partial x_1 \partial x_3}. \quad (3.24e)$$

A equação diferencial parcial para U_{TE} é idêntica à equação diferencial parcial para U_{TM} .

3.2.3 Em coordenadas esféricas

Para o sistema de coordenadas esférico (equação 3.4), a equação 3.21 torna-se:

$$\frac{\partial^2 U_{\text{TM}}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \text{sen}(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen}(\theta) \frac{\partial U_{\text{TM}}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2(\theta)} \frac{\partial^2 U_{\text{TM}}}{\partial \phi^2} + k_m^2 U_{\text{TM}} = 0, \quad (3.25)$$

com $U_{\text{TM}} = U_{\text{TM}}(r, \theta, \phi)$. Segue-se a mesma equação 3.25 para $U_{\text{TE}} = U_{\text{TE}}(r, \theta, \phi)$.

Considerando-se dependência temporal da forma $\exp(j\omega_0 t)$ e utilizando-se as equações 3.16-3.18, tem-se que as componentes fasoriais de campo elétrico e magnético para modos TM tornam-se:

$$E_{r,\text{TM}} = \frac{\partial^2 U_{\text{TM}}}{\partial r^2} + k_m^2 U_{\text{TM}} \quad (3.26a)$$

$$E_{\theta,\text{TM}} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_{\text{TM}}}{\partial r \partial \theta} \quad (3.26b)$$

$$E_{\phi,\text{TM}} = \frac{1}{r \text{sen}(\theta)} \frac{\partial^2 U_{\text{TM}}}{\partial r \partial \phi} \quad (3.26c)$$

$$H_{r,\text{TM}} = 0 \quad (3.26d)$$

$$H_{\theta,\text{TM}} = \frac{j\omega_0 \epsilon_m}{r \text{sen}(\theta)} \frac{\partial U_{\text{TM}}}{\partial \phi} \quad (3.26e)$$

$$H_{\phi,\text{TM}} = -\frac{j\omega_0 \epsilon_m}{r} \frac{\partial U_{\text{TM}}}{\partial \theta}, \quad (3.26f)$$

e para modos TE, a partir das equações em 3.24, as componentes fasoriais de campo elétrico e magnético são:

$$E_{r,\text{TE}} = 0 \quad (3.27a)$$

$$E_{\theta,\text{TE}} = -\frac{j\omega_0 \mu_m}{r \text{sen}(\theta)} \frac{\partial^2 U_{\text{TE}}}{\partial \phi} \quad (3.27b)$$

$$E_{\phi,\text{TE}} = \frac{j\omega_0 \mu_m}{r} \frac{\partial^2 U_{\text{TE}}}{\partial \theta} \quad (3.27c)$$

$$H_{r,\text{TE}} = \frac{\partial^2 U_{\text{TE}}}{\partial r^2} + k_m^2 U_{\text{TE}} \quad (3.27d)$$

$$H_{\theta,\text{TE}} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_{\text{TE}}}{\partial r \partial \theta} \quad (3.27e)$$

$$H_{\phi,\text{TE}} = \frac{1}{r \text{sen}(\theta)} \frac{\partial^2 U_{\text{TE}}}{\partial r \partial \phi}. \quad (3.27f)$$

3.3 Soluções eletromagnéticas a partir dos potenciais de Bromwich

Para resolver a equação diferencial parcial 3.25, utiliza-se o método de separação de variáveis. Logo, escrevendo $U(r, \theta, \phi)$ da forma:

$$U(r, \theta, \phi) = rR(k_m r)\Theta(u)\Phi(\phi), \quad (3.28)$$

com $u = \cos(\theta)$. Substituindo-se a equação 3.28 na equação 3.25, obtém-se as seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0 \quad (3.29a)$$

$$(1 - u^2)\frac{d^2\Theta}{du^2} - 2u\frac{d\Theta}{du} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-u^2} \right] \Theta = 0 \quad (3.29b)$$

$$\frac{d}{d(k_m r)} \left[(k_m r)^2 \frac{dR}{d(k_m r)} \right] + [(k_m r)^2 - n(n+1)]R = 0, \quad (3.29c)$$

com n e m constantes.

Como já visto no capítulo 2, as soluções linearmente independentes da equação diferencial 3.29a são $\exp(\pm jm\phi)$. Além disso, m deve ser inteiro para satisfazer a condição de fronteira $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$.

A equação 3.29b trata-se da equação diferencial associada de Legendre. Como m deve ser inteiro, as soluções linearmente independentes são dadas pelos polinômios associados de Legendre de primeira espécie $P_n^m(\cos\theta)$ e de segunda espécie $Q_n^m(\cos\theta)$, ambos de grau n e ordem m . Os polinômios $Q_n^m(\cos\theta)$ não são regulares (ou seja, apresentam comportamento assintótico) em $\cos(\theta) = \pm 1$. Além disso, os polinômios $P_n^m(\cos\theta)$ são definidos para todo valor de $\cos(\theta)$ apenas se n for um inteiro positivo.⁷⁸ Portanto, a dependência polar de todos os campos (incidentes, espalhados e internos) deve ser dada em termos de $P_n^m(\cos\theta)$ com n e m inteiros tal que $n \geq 1$ e $-n \leq m \leq n$. Para $|m| > n$ tem-se, por definição, que $P_n^m(\cos\theta) = 0$ e, portanto, é conveniente expressar a solução da equação 3.29b como $P_n^{|m|}(\cos\theta)$.

Como n deve ser um inteiro positivo, as soluções de interesse da equação 3.29c neste trabalho são dadas por pela função esférica de Bessel de primeira espécie $j_n(k_m r)$ e pela função esférica de Hankel de segunda espécie $h_n^{(2)}(k_m r)$ que é dada por $h_n^{(2)}(k_m r) = j_n(k_m r) - jy_n(k_m r)$, sendo $y_n(k_m r)$ a função esférica de Bessel de segunda espécie.⁶⁹ Como a expressão de U na equação 3.28 envolve a multiplicação pelo termo r , é conveniente utilizar as funções de Ricatti-Bessel $\Psi_n(k_m r)$ e de Ricatti-Hankel $\xi_n(k_m r)$:

$$\Psi_n(k_m r) = k_m r j_n(k_m r) \quad (3.30a)$$

$$\xi_n(k_m r) = k_m r h_n^{(2)}(k_m r). \quad (3.30b)$$

Para campos que satisfazem a condição de radiação no infinito, como os campos espalhados, a dependência radial é dada em termos de $\xi_n(k_m r)$, a qual no infinito ($r \rightarrow \infty$) assume comportamento de uma onda esférica de saída (propagando da origem até o infinito) *. Já para campos definidos na origem, ou seja, regulares na origem, como os

* Caso a dependência temporal dos campos fosse $\exp(-j\omega_0 t)$, ao invés de $\exp(j\omega_0 t)$, os campos espalhados deveriam ser escritos em termos de $k_m r h_n^{(1)}(k_m r)$, com $h_n^{(1)}(k_m r) = j_n(k_m r) + jy_n(k_m r)$.⁵⁹

campos incidentes e internos, a dependência radial é dada em termos de $\Psi_n(k_m r)$, a qual é definida para todos os valores de r e não apresenta singularidade em $r = 0$, ao contrário do que acontece com a função $\xi_n(k_m r)$.

Portanto, os potenciais de Bromwich associados ao campo incidente e ao interno são escritos como uma superposição das funções $(1/k_m)\Psi_n(k_m r)P_n^{|m|}(\cos\theta)e^{jm\phi}$. Por outro lado, o potencial de Bromwich associado ao campo espalhado é escrito como uma superposição das funções $(1/k_m)\xi_n(k_m r)P_n^{|m|}(\cos\theta)e^{jm\phi}$, com n e m inteiros, $n \geq 1$ e $-n \leq m \leq n$.

3.3.1 Campo incidente

Os potenciais de Bromwich para modos TM e para modos TE associados ao campo incidente são, portanto, dados por:

$$U_{\text{inc, TM}} = \frac{E_0}{k_m} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} g_{n, \text{TM}}^m \Psi_n(k_m r) P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{jm\phi}, \quad (3.31a)$$

$$U_{\text{inc, TE}} = \frac{H_0}{k_m} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} g_{n, \text{TE}}^m \Psi_n(k_m r) P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{jm\phi}, \quad (3.31b)$$

em que E_0 e H_0 são identificados como as amplitudes de campo elétrico e magnético, respectivamente, com $H_0 = E_0(1/\mu)(1/u_m) = E_0\sqrt{\epsilon_m/\mu_m}$. Os coeficientes de cada superposição são desmembrados em duas parcelas. O termo c_n^{pw} , dado por:

$$c_n^{\text{pw}} = \frac{1}{jk_m} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}, \quad (3.32)$$

corresponde aos coeficientes que aparecem na teoria de Lorenz-Mie e, portanto, são exclusivos de ondas planas (o índice pw refere-se a *plane waves*, ondas planas, em inglês). Já os coeficientes $g_{n, \text{TM}}^m$ e $g_{n, \text{TE}}^m$ são denominados de fatores de forma do feixe, respectivamente, para modos TM e modos TE, e são responsáveis, portanto, pela completa caracterização do campo incidente. A determinação destes fatores de forma deve ser obtida por meio da descrição do feixe incidente, como será descrito na seção 3.5.

Substituindo-se as equações em 3.31 nas expressões para as componentes de campo fasoriais elétrico e magnético para modos TM (equações em 3.26) e para modos TE (equações em 3.27) e somando as componentes desses dois modos, obtém-se as componentes

esféricas do campo elétrico e do campo magnético incidente:

$$\begin{aligned} E_{\text{inc},r} &= E_{\text{inc},r,\text{TM}} + E_{\text{inc},r,\text{TE}} = k_m E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} g_{n,\text{TM}}^m \left[\Psi_n''(k_m r) + \Psi_n(k_m r) \right] P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{jm\phi} \\ &= \frac{E_0}{k_m r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) c_n^{\text{pw}} g_{n,\text{TM}}^m \Psi_n(k_m r) P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{jm\phi}, \end{aligned} \quad (3.33a)$$

$$\begin{aligned} E_{\text{inc},\theta} &= E_{\text{inc},\theta,\text{TM}} + E_{\text{inc},\theta,\text{TE}} = \frac{E_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} \left[g_{n,\text{TM}}^m \Psi_n'(k_m r) \tau_n^{|m|}(\cos\theta) + \right. \\ &\quad \left. m g_{n,\text{TE}}^m \Psi_n(k_m r) \pi_n^{|m|}(\cos\theta) \right] e^{jm\phi}, \end{aligned} \quad (3.33b)$$

$$\begin{aligned} E_{\text{inc},\phi} &= E_{\text{inc},\phi,\text{TM}} + E_{\text{inc},\phi,\text{TE}} = j \frac{E_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} \left[m g_{n,\text{TM}}^m \Psi_n'(k_m r) \pi_n^{|m|}(\cos\theta) + \right. \\ &\quad \left. g_{n,\text{TE}}^m \Psi_n(k_m r) \tau_n^{|m|}(\cos\theta) \right] e^{jm\phi}, \end{aligned} \quad (3.33c)$$

$$\begin{aligned} H_{\text{inc},r} &= H_{\text{inc},r,\text{TM}} + H_{\text{inc},r,\text{TE}} = k_m H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} g_{n,\text{TE}}^m \left[\Psi_n''(k_m r) + \Psi_n(k_m r) \right] P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{jm\phi} \end{aligned} \quad (3.34a)$$

$$\begin{aligned} H_{\text{inc},\theta} &= H_{\text{inc},\theta,\text{TM}} + H_{\text{inc},\theta,\text{TE}} = -\frac{H_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} \left[m g_{n,\text{TE}}^m \Psi_n(k_m r) \pi_n^{|m|}(\cos\theta) - \right. \\ &\quad \left. g_{n,\text{TM}}^m \Psi_n'(k_m r) \tau_n^{|m|}(\cos\theta) \right] e^{jm\phi}, \end{aligned} \quad (3.34b)$$

$$\begin{aligned} H_{\text{inc},\phi} &= H_{\text{inc},\phi,\text{TM}} + H_{\text{inc},\phi,\text{TE}} = -j \frac{H_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} \left[g_{n,\text{TE}}^m \Psi_n(k_m r) \tau_n^{|m|}(\cos\theta) - \right. \\ &\quad \left. m g_{n,\text{TM}}^m \Psi_n'(k_m r) \pi_n^{|m|}(\cos\theta) \right] e^{jm\phi}, \end{aligned} \quad (3.34c)$$

em que o símbolo ' representa derivada em relação ao argumento e $\tau_n^m(\cos\theta)$ e $\pi_n^m(\cos\theta)$ são as funções generalizadas de Legendre de ordem m e grau n dadas por:

$$\tau_n^m(\cos\theta) = \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \quad (3.35a)$$

$$\pi_n^m(\cos\theta) = \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}. \quad (3.35b)$$

3.3.2 Campo interno

Como o número de onda na partícula é $k_{\text{int}} = M k_m$, em que $M = \sqrt{\varepsilon_p \mu_p / \varepsilon_m \mu_m}$ é o índice de refração relativo da partícula, os potenciais de Bromwich para modos TM e para modos TE associados ao campo interno são:

$$U_{\text{int},\text{TM}} = \frac{E_0}{M k_m} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} C_n^m \Psi_n(M k_m r) P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{jm\phi}, \quad (3.36a)$$

$$U_{\text{int},\text{TE}} = \frac{H_0}{M k_m} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} D_n^m \Psi_n(M k_m r) P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{jm\phi}. \quad (3.36b)$$

Logo, as componentes esféricas do campo elétrico e do campo magnético interno, utilizando-se a equação em 3.36 nas equações 3.26 e 3.27, são dadas por:

$$E_{\text{int},r} = E_{\text{int},r,\text{TM}} + E_{\text{int},r,\text{TE}} = \frac{E_0}{Mk_m r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) c_n^{\text{pw}} C_n^m \Psi_n(Mk_m r) P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{jm\phi}, \quad (3.37a)$$

$$E_{\text{int},\theta} = E_{\text{int},\theta,\text{TM}} + E_{\text{int},\theta,\text{TE}} = \frac{E_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} \left[C_n^m \Psi'_n(Mk_m r) \tau_n^{|m|}(\cos\theta) + m D_n^m \Psi_n(Mk_m r) \pi_n^{|m|}(\cos\theta) \right] e^{jm\phi}, \quad (3.37b)$$

$$E_{\text{int},\phi} = E_{\text{int},\phi,\text{TM}} + E_{\text{int},\phi,\text{TE}} = j \frac{E_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} \left[m C_n^m \Psi'_n(Mk_m r) \pi_n^{|m|}(\cos\theta) + D_n^m \Psi_n(Mk_m r) \tau_n^{|m|}(\cos\theta) \right] e^{jm\phi}, \quad (3.37c)$$

$$H_{\text{int},r} = H_{\text{int},r,\text{TM}} + H_{\text{int},r,\text{TE}} = \frac{H_0}{Mk_m r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n n(n+1) c_n^{\text{pw}} D_n^m \Psi_n(Mk_m r) P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{jm\phi}, \quad (3.38a)$$

$$H_{\text{int},\theta} = H_{\text{int},\theta,\text{TM}} + H_{\text{int},\theta,\text{TE}} = -\frac{H_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} \left[m D_n^m \Psi_n(Mk_m r) \pi_n^{|m|}(\cos\theta) - C_n^m \Psi'_n(Mk_m r) \tau_n^{|m|}(\cos\theta) \right] e^{jm\phi}, \quad (3.38b)$$

$$H_{\text{int},\phi} = H_{\text{int},\phi,\text{TM}} + H_{\text{int},\phi,\text{TE}} = -j \frac{H_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} \left[m D_n^m \Psi_n(Mk_m r) \tau_n^{|m|}(\cos\theta) - C_n^m \Psi'_n(Mk_m r) \pi_n^{|m|}(\cos\theta) \right] e^{jm\phi}, \quad (3.38c)$$

em que C_n^m e D_n^m são denominados de coeficientes internos de Mie generalizados.

3.3.3 Campo espalhado

Os potenciais de Bromwich para modos TM e para modos TE associados ao campo espalhado são dados por:

$$U_{s,\text{TM}} = -\frac{E_0}{k_m} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} A_n^m \xi_n(k_m r) P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{jm\phi}, \quad (3.39a)$$

$$U_{s,\text{TE}} = -\frac{H_0}{k_m} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} B_n^m \xi_n(k_m r) P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{jm\phi}, \quad (3.39b)$$

em que a presença do sinal negativo tem como objetivo apenas de evitar sinais nas expressões para A_n^m e B_n^m . Desse modo, substituindo-se a equação em 3.39 nas equações 3.26 e 3.27, obtém-se as componentes esféricas do campo elétrico e do campo magnético

espalhado:

$$E_{s,r} = E_{s,r,\text{TM}} + E_{s,r,\text{TE}} = -k_m E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} A_n^m \left[\xi_n''(k_m r) + \xi_n(k_m r) \right] P_n^{|\text{m}|}(\cos\theta) e^{jm\phi}, \quad (3.40a)$$

$$E_{s,\theta} = E_{s,\theta,\text{TM}} + E_{s,\theta,\text{TE}} = -\frac{E_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} \left[A_n^m \xi_n'(k_m r) \tau_n^{|\text{m}|}(\cos\theta) + m B_n^m \xi_n(k_m r) \pi_n^{|\text{m}|}(\cos\theta) \right] e^{jm\phi}, \quad (3.40b)$$

$$E_{s,\phi} = E_{s,\phi,\text{TM}} + E_{s,\phi,\text{TE}} = -j \frac{E_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} \left[m A_n^m \xi_n'(k_m r) \pi_n^{|\text{m}|}(\cos\theta) + B_n^m \xi_n(k_m r) \tau_n^{|\text{m}|}(\cos\theta) \right] e^{jm\phi}, \quad (3.40c)$$

$$H_{s,r} = H_{s,r,\text{TM}} + H_{s,r,\text{TE}} = -k_m H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} B_n^m \left[\xi_n''(k_m r) + \xi_n(k_m r) \right] P_n^{|\text{m}|}(\cos\theta) e^{jm\phi}, \quad (3.41a)$$

$$H_{s,\theta} = H_{s,\theta,\text{TM}} + H_{s,\theta,\text{TE}} = \frac{H_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} \left[m A_n^m \xi_n(k_m r) \pi_n^{|\text{m}|}(\cos\theta) - m B_n^m \xi_n'(k_m r) \tau_n^{|\text{m}|}(\cos\theta) \right] e^{jm\phi}, \quad (3.41b)$$

$$H_{s,\phi} = H_{s,\phi,\text{TM}} + H_{s,\phi,\text{TE}} = j \frac{H_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^{\text{pw}} \left[A_n^m \xi_n(k_m r) \tau_n^{|\text{m}|}(\cos\theta) - m B_n^m \xi_n'(k_m r) \pi_n^{|\text{m}|}(\cos\theta) \right] e^{jm\phi}, \quad (3.41c)$$

em que A_n^m e B_n^m são denominados de coeficientes de espalhamento de Mie generalizados.

Os coeficientes de Mie generalizados A_n^m , B_n^m , C_n^m e D_n^m são determinados pela condição de fronteira na superfície da partícula. Como não há a presença de fontes, é requerido que em $r = a$ tenha-se a continuidade das componentes tangenciais tanto do campo elétrico quanto do campo magnético. Logo⁷⁹:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}_{\text{s}} - \mathbf{E}_{\text{int}}) \Big|_{r=a} = 0 \quad (3.42a)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{H}_{\text{s}} - \mathbf{H}_{\text{int}}) \Big|_{r=a} = 0, \quad (3.42b)$$

em que $\hat{\mathbf{n}}$ é o versor normal à superfície da partícula, ou seja: $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$.

Ao substituir as expressões dos campos incidente, espalhado e interno nas expressões em 3.42, obtém-se um sistema de quatro equações relacionando A_n^m , B_n^m , C_n^m e D_n^m . Da

resolução deste sistema obtém-se:

$$A_n^m = a_n g_{n,\text{TM}}^m \quad (3.43a)$$

$$B_n^m = b_n g_{n,\text{TE}}^m \quad (3.43b)$$

$$C_n^m = c_n g_{n,\text{TM}}^m \quad (3.43c)$$

$$D_n^m = d_n g_{n,\text{TE}}^m, \quad (3.43d)$$

em que:

$$a_n = \frac{\Psi_n(k_m a) \Psi'_n(M k_m a) - M \Psi'_n(k_m a) \Psi_n(M k_m a)}{\xi_n(k_m a) \Psi'_n(M k_m a) - M \xi'_n(k_m a) \Psi_n(M k_m a)} \quad (3.44a)$$

$$b_n = \frac{M \Psi_n(k_m a) \Psi'_n(M k_m a) - \Psi'_n(k_m a) \Psi_n(M k_m a)}{M \xi_n(k_m a) \Psi'_n(M k_m a) - \xi'_n(k_m a) \Psi_n(M k_m a)}, \quad (3.44b)$$

$$c_n = \frac{M [\xi_n(k_m a) \Psi'_n(k_m a) - \xi'_n(k_m a) \Psi_n(k_m a)]}{\xi_n(k_m a) \Psi'_n(M k_m a) - M \xi'_n(k_m a) \Psi_n(M k_m a)} \quad (3.44c)$$

$$d_n = \frac{M^2 [\xi_n(k_m a) \Psi'_n(k_m a) - \xi'_n(k_m a) \Psi_n(k_m a)]}{M \xi_n(k_m a) \Psi'_n(M k_m a) - \xi'_n(k_m a) \Psi_n(M k_m a)}, \quad (3.44d)$$

são os coeficientes de Mie, já conhecidos da LMT.⁸⁰ Os coeficientes a_n e b_n são denominados de coeficientes de espalhamento de Mie enquanto que c_n e d_n de coeficientes de Mie para campos internos.

3.4 Forças ópticas

Nesta seção, as expressões das forças ópticas no contexto da GLMT são determinadas seguindo-se o formalismo descrito por Gouesbet e Gréhan.⁵⁹ Apenas os campos externos à partícula, ou seja, incidente e espalhado, produzem força óptica. Portanto, os campos totais fasoriais externos à partícula são dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}_s &= (E_{\text{inc},r} + E_{s,r}) \hat{r} + (E_{\text{inc},\theta} + E_{s,\theta}) \hat{\theta} = \\ &E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta} + E_\phi \hat{\phi} \end{aligned} \quad (3.45a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{H}_s &= (H_{\text{inc},r} + H_{s,r}) \hat{r} + (H_{\text{inc},\theta} + H_{s,\theta}) \hat{\theta} = \\ &H_r \hat{r} + H_\theta \hat{\theta} + H_\phi \hat{\phi}. \end{aligned} \quad (3.45b)$$

Como o meio onde a partícula se encontra é assumido sem perdas, o fluxo de potência médio calculado por meio da integração do vetor de Poynting complexo sobre uma superfície esférica S contendo a partícula e com orientação dada pelo versor $\hat{\mathbf{n}} = \hat{r}$:

$$\oint_S \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{1}{2} \text{Re} \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_S S_r dS, \quad (3.46)$$

fornece uma medida da quantidade de energia saindo da partícula. Na equação 3.46, S_r refere-se à componente radial do vetor de Poynting complexo, dada por:

$$S_r = \frac{1}{2} (E_\theta H_\phi - E_\phi H_\theta). \quad (3.47)$$

3.4.1 Seções de choque associadas ao balanço de energia radiativa

Convencionalmente na GLMT, os problemas de espalhamento eletromagnético trabalham com seções de choque dadas em m^2 . Por isso, em todas as expressões dos diferentes tipos de seções de choque, os campos elétrico e magnético totais são normalizados de forma que:

$$\frac{E_0 H_0^*}{2} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_m}{\mu_m} |E_0|^2 = 1, \quad (3.48)$$

e, portanto, a componente S_r passa a ser uma grandeza adimensional.⁵⁹

A seção de choque de absorção C_{abs} é definida como uma medida da quantidade de energia da onda eletromagnética absorvida pela partícula. Logo, ela se relaciona com a equação 3.46 por:

$$-C_{\text{abs}} = \oint_S S_r dS = \Omega_{\text{inc}} + \Omega_s + \Omega_{\text{mix}}, \quad (3.49)$$

em que os três termos: Ω_{inc} , Ω_s e Ω_{mix} são dados por:

$$\Omega_{\text{inc}} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \text{Re} \left[E_{\text{inc},\theta} H_{\text{inc},\phi}^* - E_{\text{inc},\phi} H_{\text{inc},\theta}^* \right] r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (3.50a)$$

$$\Omega_s = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \text{Re} \left[E_{s,\theta} H_{s,\phi}^* - E_{s,\phi} H_{s,\theta}^* \right] r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (3.50b)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{mix}} = & \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \text{Re} \left[E_{\text{inc},\phi} H_{s,\theta}^* + E_{s,\phi} H_{\text{inc},\theta}^* \right. \\ & \left. - E_{\text{inc},\theta} H_{s,\phi}^* - E_{s,\theta} H_{\text{inc},\phi}^* \right] r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (3.50c)$$

O termo Ω_{inc} (equação 3.50a) envolve apenas o campo incidente. Como o meio onde está a partícula é sem perdas, não há perda de energia associada apenas ao campo incidente. Logo, Ω_{inc} é nulo. Já o termo Ω_s envolve apenas o campo espalhado e, portanto, Ω_s é denominado de seção de choque de espalhamento C_{sca} (O prefixo *sca* provém de *scattering*, do inglês, espalhamento). Logo:

$$\Omega_{\text{inc}} = 0, \quad (3.51a)$$

$$\Omega_s = C_{\text{sca}}. \quad (3.51b)$$

Portanto, das equações 3.49 e 3.51 tem-se que:

$$\Omega_{\text{mix}} = -C_{\text{abs}} - C_{\text{sca}} = -C_{\text{ext}}, \quad (3.52)$$

ou seja, o termo misto Ω_{mix} , que envolve tanto o campo incidente quanto o campo espalhado, define a seção de choque de extinção C_{ext} a qual corresponde à soma da perda de energia por absorção mais a de espalhamento.

3.4.2 Balanço de momento e pressão de radiação

No campo distante, ou seja, para $k_m r \gg 1$, as funções $\Psi(k_m r)$ e $\xi(k_m r)$ assumem os seguintes comportamentos assintóticos⁸¹:

$$\Psi(k_m r) \rightarrow j^{n+1} e^{-jk_m r}, \quad (3.53a)$$

$$\xi(k_m r) \rightarrow j^{n+1} e^{-jk_m r}, \quad (3.53b)$$

e além disso, tem-se que $\Psi_n''(k_m r) + \Psi_n(k_m r) = 0$ e $\xi_n''(k_m r) + \xi_n(k_m r) = 0$. Como consequência, as componentes radiais de campo elétrico e magnético dos campos incidente e espalhado (equações 3.33a, 3.34a, 3.40a e 3.41a) tornam-se nulas: $E_{\text{inc},r} = H_{\text{inc},r} = E_{s,r} = H_{s,r}$. As demais componentes no campo distante são dadas por:

$$E_{\text{inc},\theta} = j \frac{E_0}{k_m r} e^{-jk_m r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[g_{n,\text{TM}}^m \tau_n^{|m|}(\cos\theta) + j m g_{n,\text{TE}}^m \tau_n^{|m|}(\cos\theta) \right] e^{jm\phi}, \quad (3.54a)$$

$$E_{s,\phi} = -\frac{E_0}{k_m r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[m g_{n,\text{TM}}^m \tau_n^{|m|}(\cos\theta) + j g_{n,\text{TE}}^m \tau_n^{|m|}(\cos\theta) \right] e^{jm\phi}, \quad (3.54b)$$

$$E_{s,\theta} = j \frac{E_0}{k_m r} e^{-jk_m r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \left[A_n^m \tau_n^{|m|}(\cos\theta) + j m B_n^m \tau_n^{|m|}(\cos\theta) \right] e^{jm\phi}, \quad (3.54c)$$

$$E_{s,\phi} = -\frac{E_0}{k_m r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[m A_n^m \tau_n^{|m|}(\cos\theta) + j B_n^m \tau_n^{|m|}(\cos\theta) \right] e^{jm\phi}, \quad (3.54d)$$

$$H_{\text{inc},\theta} = -\frac{H_0}{E_0} E_{\text{inc},\phi} \quad (3.55a)$$

$$H_{\text{inc},\phi} = \frac{H_0}{E_0} E_{\text{inc},\theta} \quad (3.55b)$$

$$H_{s,\theta} = -\frac{H_0}{E_0} E_{s,\phi} \quad (3.55c)$$

$$H_{s,\phi} = \frac{H_0}{E_0} E_{s,\theta}, \quad (3.55d)$$

em que a expressão de c_n^{pw} (equação 3.32) foi substituída.

Portanto, no campo distante o campo total comporta-se como uma onda transversal, ou seja, \mathbf{E} e \mathbf{H} são ambos perpendiculares ao versor radial $\hat{\mathbf{n}}$. Como consequência o vetor de Poynting apresenta apenas componente radial S_r . Diante disso, tratando-se de uma onda transversal, a variação temporal do momento da mesma, calculado sobre qualquer superfície fechada S é dada por:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{1}{u_m} \oint_S S_r \hat{r} dS. \quad (3.56)$$

Pela segunda Lei de Newton, o negativo do lado esquerdo da equação 3.56 corresponde à força total radiativa \mathbf{F}_{rad} atuante sobre a partícula. Logo:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = -\frac{1}{u_m} \oint_S S_r \hat{r} dS. \quad (3.57)$$

Tradicionalmente, os problemas de espalhamento na GLMT expressão a força óptica de radiação em termos de seções de choque de pressão de radiação \mathbf{C}_{pr} , com dimensão em m^2 , e que se relaciona com a força total radiativa \mathbf{F}_{rad} por:

$$\mathbf{C}_{\text{pr}} = u_m \mathbf{F}_{\text{rad}} = - \oint_S S_r \hat{r} dS, \quad (3.58)$$

em que os campos elétrico e magnético envolvidos na expressão de S_r (equação 3.47) são normalizados conforme a equação 3.48.

Como $\hat{r} = \sin(\theta)\cos(\phi)\hat{\mathbf{x}} + \sin(\theta)\sin(\phi)\hat{\mathbf{y}} + \cos(\theta)\hat{\mathbf{z}}$, e utilizando-se das equações 3.49-3.52, as componentes cartesianas da seção de choque de pressão de radiação são:

$$C_{pr,x} = \overline{\sin(\theta)\cos(\phi)} C_{\text{ext}} - \overline{\sin(\theta)\cos(\phi)} C_{\text{sca}} \quad (3.59a)$$

$$C_{pr,y} = \overline{\sin(\theta)\sin(\phi)} C_{\text{ext}} - \overline{\sin(\theta)\sin(\phi)} C_{\text{sca}}, \quad (3.59b)$$

$$C_{pr,z} = \overline{\cos(\theta)} C_{\text{ext}} - \overline{\cos(\theta)} C_{\text{sca}}, \quad (3.59c)$$

em que o termo $\overline{\sin(\theta)\cos(\phi)} C_{\text{ext}}$ representa a integração da expressão de C_{ext} (equação 3.50c) com a inclusão do termo $\sin(\theta)\cos(\phi)$. Segue-se de maneira análoga para os demais termos.

Substituindo-se as expressões dos campo incidente e espalhado no campo distante (equações 3.54 e 3.55) nas equações em 3.50, obtém-se as expressões das componentes cartesianas da seção de choque de pressão de radiação em função dos fatores de forma e dos coeficientes de Mie (para mais detalhes matemáticos veja as seções 3.12.2 e 3.12.3 da referência 59):

$$\begin{aligned} C_{pr,z} = & \frac{\lambda_m^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=-n}^n \left[\frac{1}{(n+1)^2} \frac{(n+1+|p|)!}{(n-|p|)!} \right. \\ & \times \text{Re}[(a_n + a_{n+1}^* - 2a_n a_{n+1}^*) g_{n,\text{TM}}^p g_{n+1,\text{TM}}^{p*} \\ & + (b_n + b_{n+1}^* - 2b_n b_{n+1}^*) g_{n,\text{TE}}^p g_{n+1,\text{TE}}^{p*}] \\ & \left. + p \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \frac{(n+|p|)!}{(n-|p|)!} \text{Re}[j(2a_n b_n^* - a_n - b_n^*) g_{n,\text{TM}}^p g_{n,\text{TE}}^{p*}] \right], \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} C = & \frac{\lambda_m^2}{2\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=p}^{\infty} \sum_{m=p-1 \neq 0}^{\infty} \left[\frac{(n+|p|)!}{(n-|p|)!} \right. \\ & (S_{m,n}^{p-1} + S_{n,m}^{-p} - 2U_{m,n}^{p-1} - 2U_{n,m}^{-p}) \left(\frac{1}{m^2} \delta_{m,n+1} - \frac{1}{n^2} \delta_{n,m+1} \right) \\ & \left. + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \delta_{n,m} (T_{m,n}^{p-1} - T_{n,m}^{-p} - 2V_{m,n}^{p-1} + 2V_{n,m}^{-p}) \right], \end{aligned} \quad (3.61)$$

em que $C_{pr,x} = \text{Re}[C]$, $C_{pr,y} = \text{Im}[C]$ e

$$S_{n,m}^p = (a_n + a_m^*)g_{n,\text{TM}}^p(g_{m,\text{TM}}^{p+1})^* + (b_n + b_m^*)g_{n,\text{TE}}^p(g_{m,\text{TE}}^{p+1})^* \quad (3.62a)$$

$$U_{n,m}^p = a_n a_m^* g_{n,\text{TM}}^p(g_{m,\text{TM}}^{p+1})^* + b_n b_m^* g_{n,\text{TE}}^p(g_{m,\text{TE}}^{p+1})^* \quad (3.62b)$$

$$T_{n,m}^p = j(b_n + a_m^*)g_{n,\text{TE}}^p(g_{m,\text{TM}}^{p+1})^* - j(a_n + b_m^*)g_{n,\text{TM}}^p(g_{m,\text{TE}}^{p+1})^* \quad (3.62c)$$

$$V_{n,m}^p = j b_n a_m^* g_{n,\text{TE}}^p(g_{m,\text{TM}}^{p+1})^* - j a_n b_m^* g_{n,\text{TM}}^p(g_{m,\text{TE}}^{p+1})^*. \quad (3.62d)$$

A força de radiação total em newtons, obtida por meio das expressões da seção de choque de pressão de radiação das equações 3.60 e 3.61, é dada por⁵⁹:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = |E_0|^2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{\mu_m}} \frac{1}{u_m} \mathbf{C}_{\text{pr}}, \quad (3.63)$$

em que foi utilizado a equação 3.58 juntamente com a normalização em 3.48.

3.5 Determinação dos fatores de forma

O método mais direto para a determinação dos fatores de forma $g_{n,\text{TM}}^m$ e $g_{n,\text{TE}}^m$ é conhecido como método de quadratura.⁵⁹ Este método é exato e equivalente ao método utilizado para o cálculo de coeficientes em uma série de Fourier.

A função exponencial complexa apresenta a seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^{2\pi} e^{jm\phi} e^{-jp\phi} d\phi = 2\pi \delta_{mp} \quad (3.64)$$

em que δ_{mp} se refere ao delta de Kronecker:

$$\delta_{mp} = \begin{cases} 1, & m = p \\ 0, & m \neq p. \end{cases} \quad (3.65)$$

De maneira similar, os polinômios associados de Legendre satisfazem a seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) P_l^m(\cos\theta) \sin(\theta) d\theta = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nl}, \quad (3.66)$$

e as funções esféricas de Bessel de primeira ordem satisfazem:

$$\int_0^\infty j_n(k_m r) j_q(k_m r) d(k_m r) = \begin{cases} \frac{\pi}{2(2n+1)}, & n = q \\ \frac{\text{sen}[(n-q)\pi/2]}{n(n+1) - q(q+1)}, & n \neq q. \end{cases} \quad (3.67)$$

Multiplicando-se ambos os lados das equações das componentes radiais de campo elétrico $E_{\text{inc},r}$ e magnético $H_{\text{inc},r}$ incidente (equações 3.33a e 3.34a) por $e^{-jp\phi} P_l^m(\cos\theta) \Psi_q(k_m r)$, realizando-se o processo de integração nas variáveis r , θ e ϕ dos dois lados das equações e

utilizando-se das propriedades de ortogonalidade em 3.64, 3.66 e 3.67, é possível expressar os fatores de forma $g_{n,\text{TM}}^m$ e $g_{n,\text{TE}}^m$ em função das componentes radiais:

$$g_{n,\text{TM}}^m = \frac{1}{k_m c_n^{\text{pw}}} \frac{(2n+1)^2}{2\pi^2 n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{E_r(r, \theta, \phi)}{E_0} \Psi_n(k_m r) P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{-jm\phi} \sin(\theta) d\theta d\phi d(k_m r) \quad (3.68a)$$

$$g_{n,\text{TE}}^m = \frac{1}{k_m c_n^{\text{pw}}} \frac{(2n+1)^2}{2\pi^2 n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{H_r(r, \theta, \phi)}{H_0} \Psi_n(k_m r) P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{-jm\phi} \sin(\theta) d\theta d\phi d(k_m r). \quad (3.68b)$$

O caso mais simples de cálculo dos coeficientes $g_{n,\text{TM}}^m$ e $g_{n,\text{TE}}^m$ a partir das equações em 3.68 é para uma onda plana com polarização linear em x , cujo campo elétrico descrito no sistema de coordenadas (u, v, w) da figura 3 é dado por: $\mathbf{E}_{\text{pw}} = \hat{\mathbf{u}} E_0 \exp(-jk_m w)$. No sistema (x, y, z) , tem-se $\mathbf{E}_{\text{inc}} = \mathbf{E}_{\text{pw}}(z = -w) = \hat{\mathbf{x}} E_0 \exp(jk_m z)$. A componente radial $E_{\text{inc},r}$, portanto, é igual a $E_{\text{inc},r} = \mathbf{E}_{\text{inc}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = E_0 \exp(jk_m z) \sin(\theta) \cos(\phi)$. O campo magnético, obtido pela lei de Faraday fasorial (2.60), vale $\mathbf{H}_{\text{inc}} = \hat{\mathbf{y}} (1/\mu_m) (1/u_m) E_0 \exp(jk_m z)$ e, logo, $H_{\text{inc},r} = \mathbf{H}_{\text{inc}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = H_0 \exp(jk_m z) \sin(\theta) \sin(\phi)$.

Portanto, substituindo-se as expressões de $E_{\text{inc},r}$ e $H_{\text{inc},r}$ nas expressões em 3.68, os fatores de forma associados à onda plana com polarização linear em x avaliados na posição $z = z_0$ são dados por⁵⁹:

$$\begin{cases} g_{n,\text{TM}}^m = g_{n,\text{TE}}^m = 0, |m| \neq 1 \\ g_{n,\text{TM}}^1 = g_{n,\text{TM}}^{-1} = jg_{n,\text{TE}}^1 = -jg_{n,\text{TE}}^{-1} = \frac{1}{2}g_n, \end{cases} \quad (3.69)$$

com:

$$g_n = e^{jk_m z_0}. \quad (3.70)$$

Para um feixe estruturado, o processo matemático para determinação dos coeficientes $g_{n,\text{TM}}^m$ e $g_{n,\text{TE}}^m$ a partir das equações em 3.68 é envolvente e está fora do escopo deste trabalho. Nem sempre é possível resolver as equações em 3.68 de forma analítica.⁵⁹ Para os feixes analisados no capítulo 2, apenas para o feixe de Bessel ideal e a superposição discreta de feixes de Bessel ideais é possível obter soluções analíticas as quais apenas mostradas neste trabalho. Para detalhes do processo de determinação dos fatores de forma destes feixes podem ser encontrados em [Ambrosio, Rached e Gouesbet](#).⁸²

Sendo (ρ_0, ϕ_0, z_0) as coordenadas cilíndricas associadas à posição $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$, os fatores de forma avaliados em (ρ_0, ϕ_0, z_0) associados à superposição discreta de feixes de Bessel de ordem ν e polarização linear em x (equações em 2.64 com $X = 1$ e $Y = 0$)

são dados por⁸²:

$$g_{n,\text{TM}}^m = C_m \sum_{q=-N}^{q=N} A_q e^{jk_{z,q}z_0} \left(J_{m-\nu-1}(k_{\rho,q}) e^{-j(m-\nu-1)\phi_0} \left[m \frac{\pi_n^m(\cos\alpha_q)}{\cos\alpha_q} + \tau_n^m(\cos\alpha_q) \right] \right. \\ \left. + J_{m-\nu+1}(k_{\rho,q}) e^{-j(m-\nu+1)\phi_0} \left[m \frac{\pi_n^m(\cos\alpha_q)}{\cos\alpha_q} - \tau_n^m(\cos\alpha_q) \right] \right), \quad (3.71a)$$

$$g_{n,\text{TE}}^m = -jC_m \sum_{q=-N}^{q=N} A_q e^{jk_{z,q}z_0} \left(J_{m-\nu-1}(k_{\rho,q}) e^{-j(m-\nu-1)\phi_0} \left[m \frac{\pi_n^m(\cos\alpha_q)}{\cos\alpha_q} + \tau_n^m(\cos\alpha_q) \right] \right. \\ \left. - J_{m-\nu+1}(k_{\rho,q}) e^{-j(m-\nu+1)\phi_0} \left[m \frac{\pi_n^m(\cos\alpha_q)}{\cos\alpha_q} - \tau_n^m(\cos\alpha_q) \right] \right), \quad (3.71b)$$

em que:

$$C_m = \frac{1}{2} j^{m+1} (-1)^{\frac{m-|m|}{2}} \frac{(n-m)!}{(n+|m|)!}. \quad (3.72)$$

Nas equações em 3.71, A_q refere-se aos coeficientes A_n da equação 2.25. Os parâmetros $k_{z,q}$ e $k_{\rho,q}$, aos números de onda longitudinais e transversais, respectivamente. E os parâmetros $\alpha_{\rho,q} = \cos^{-1}(k_{z,q}/k_m)$ aos números de áxicons da superposição[†]. Os fatores de forma associados ao feixe de Bessel ideal são obtidos tomando-se $N = 0$ e $A_q = 1$.

Não é possível obter uma solução analítica para os fatores de forma $g_{n,\text{TM}}^m$ e $g_{n,\text{TE}}^m$ associados ao feixe Gaussiano utilizando-se as equações em 3.68.⁵⁹ Por isso, para este feixe recorre-se ao método da aproximação localizada integral (ILA, do inglês: *integral localized approximation*),⁸³ método adequado apenas para a descrição de feixes paraxiais.⁸⁴ Expressões para estes coeficientes associados à formulação de Davis de mais baixa ordem para polarização linear em x (equações em 2.63 com $X = 1$ e $Y = 0$) são dados por^{59,85}:

$$g_{n,\text{TM}}^m = S(n) R_{n,\text{TM}}^m (-j)^{|m|} j F_{n,\text{TM}}^m, \quad (3.73a)$$

$$g_{n,\text{TE}}^m = S(n) R_{n,\text{TE}}^m (-j)^{|m|} F_{n,\text{TE}}^m, \quad (3.73b)$$

em que:

$$S(n) = \frac{1}{2(1+2jz_0^+)} \exp\left(j \frac{z_0^+}{s^2} - \frac{x_0^+ + y_0^+}{1+2jz_0^+} - \frac{(n+1/2)^2 s^2}{1+2jz_0^+} \right), \quad (3.74)$$

sendo $x_0^+ = x_0/W_0$, $y_0^+ = y_0/W_0$ e $z_0^+ = z_0/(k_m W_0^2)$, e

$$R_{n,\text{TM}}^0 = R_{n,\text{TE}}^0 = \frac{2n(n+1)}{2n+1} \quad (3.75a)$$

$$R_{n,\text{TM}}^m = R_{n,\text{TE}}^m = \left(\frac{2}{2n+1} \right)^{|m|-1}, \quad |m| \geq 1 \quad (3.75b)$$

[†] Nas equações 28 e 31 da referência 82 há um erro de digitação nas expressões dos fatores de forma. Nestas equações, os termos entre colchetes estão escritos como $[m\pi_n^m(\cos\alpha_{q\nu}) \pm \tau_n^m(\cos\alpha_{q\nu})/\cos\alpha_{q\nu}]$ ao invés de $[m\pi_n^m(\cos\alpha_{q\nu})/\cos\alpha_{q\nu} \pm \tau_n^m(\cos\alpha_{q\nu})]$. Este erro de digitação está corrigido nas equações em 3.71.

$$\begin{bmatrix} F_{n,\text{TM}}^0 \\ F_{n,\text{TE}}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_0^+ \\ 2jy_0^+ \end{bmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} a^{2j+1} \frac{X_-^j X_+^j}{j!(j+1)!} \quad (3.76a)$$

$$\begin{bmatrix} F_{n,\text{TM}}^m \\ F_{n,\text{TE}}^m \end{bmatrix} = a^{m-1} \frac{X_-^{m-1}}{(m-1)!} + \sum_{j=m}^{\infty} a^{2j-m+1} \frac{X_-^j X_+^{j-m}}{j!(j-m)!} \begin{bmatrix} \frac{X_+}{j-m+1} + \frac{X_-}{j+1} \\ \frac{X_+}{j-m+1} - \frac{X_-}{j+1} \end{bmatrix}, \quad m > 0, \quad (3.76b)$$

$$\begin{bmatrix} F_{n,\text{TM}}^{-|m|} \\ -F_{n,\text{TE}}^{-|m|} \end{bmatrix} = a^{|m|-1} \frac{X_-^{|m|-1}}{(|m|-1)!} + \sum_{j=m}^{\infty} a^{2j-|m|+1} \frac{X_-^{j-|m|} X_+^j}{j!(j-|m|)!} \begin{bmatrix} \frac{X_-}{j-|m|+1} + \frac{X_+}{j+1} \\ \frac{X_-}{j-|m|+1} - \frac{X_+}{j+1} \end{bmatrix}, \quad m < 0, \quad (3.76c)$$

onde:

$$a = \frac{(n+1)s}{1+2jz_0^+}, \quad (3.77a)$$

$$X_- = x_0^+ - jy_0^+, \quad (3.77b)$$

$$X_+ = x_0^+ + jy_0^+. \quad (3.77c)$$

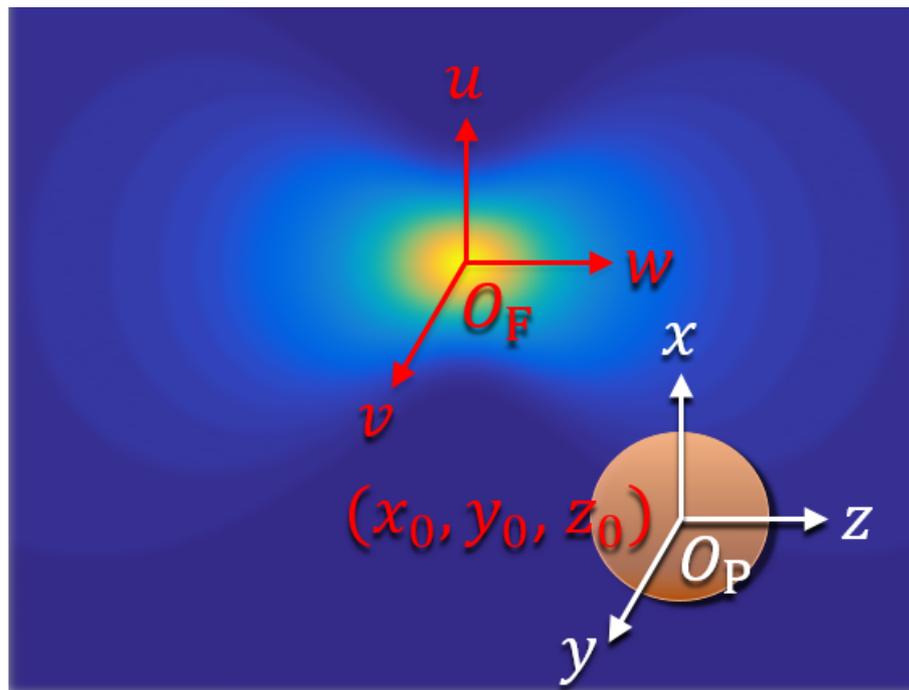
Observa-se, que a descrição do campo incidente utilizando os coeficientes das equações em 3.73 satisfazem exatamente todas as equações de Maxwell e que, portanto, não é equivalente à aproximação de ordem zero (equações em 2.63). Mostrou-se que as componentes transversais (E_x e E_y) do feixe Gaussiano remodelado pela GLMT segue quase exatamente um padrão Gaussiano desde que $s \leq 0,15$ ao longo do eixo óptico z ⁸⁶ e $s \leq 0,1$ para pontos fora do eixo óptico.⁸⁷ Portanto, para valores de s pequenos como $s = 0,02$, espera-se uma pequena diferença entre a descrição de Davis de mais baixa ordem (equações em 2.63) e a descrição do feixe incidente utilizando os fatores de forma obtidos pela ILA.

4 EXPANSÃO MULTIPOLAR DA FORÇA ÓPTICA

Neste capítulo, o espalhamento de luz por uma partícula esférica e a obtenção da força óptica são analisados utilizando o método da expansão multipolar da força óptica.

A figura 4 mostra os sistemas de coordenadas adotados para a descrição dos campos eletromagnéticos e para a determinação de forças ópticas sobre a partícula esférica no contexto da MEOF. Similarmente ao adotado no capítulo 4, adotou-se um sistema de coordenadas cartesiano (x,y,z) cuja origem O_P coincide com o centro da partícula. Em coordenadas esféricas, este sistema tem representação dada por (r,θ,ϕ) . O campo incidente é descrito por outro sistema de coordenadas cartesiano (u,v,w) de origem O_F . A representação em coordenadas cilíndricas deste sistema equivale às coordenadas cilíndricas (ρ,ϕ,z) adotadas no capítulo 2.

Figura 4 – Sistemas de coordenadas adotados para a determinação de forças ópticas sobre a partícula esférica no contexto da MEOF.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A diferença em relação à configuração adotada na GLMT é que, no sistema (u,v,w) , o ponto O_P está localizado em (x_0,y_0,z_0) . No contexto da MEOF, os campos eletromagnéticos totais são descritos em termos do sistema (x,y,z) , assim como na GLMT. No entanto, a força óptica atuante sobre a partícula é descrita em termos do sistema (u,v,w) e, logo, ela é dada em função da posição (x_0,y_0,z_0) da partícula no sistema (u,v,w) .

4.1 Conservação do momento linear e o tensor de stress de Maxwell

Considere a partícula como sendo uma distribuição de cargas com densidade $\rho(\mathbf{r}, t)$ e de correntes com densidade $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, sendo \mathbf{r} o vetor posição no sistema (x, y, z) . A onda eletromagnética incidente sobre a partícula é caracterizada por um campo elétrico $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t)$ e um campo magnético $\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{r}, t)$. A força de Coulomb-Lorentz que a onda exerce sobre as distribuições $\rho(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ corresponde à variação do momento linear mecânico da partícula \mathbf{P}_{mec} ⁸⁸:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}_{\text{mec}} = \int_V \left(\rho\boldsymbol{\mathcal{E}} + \mathbf{j} \times \mu_m\boldsymbol{\mathcal{H}} \right) dV, \quad (4.1)$$

em que V é um volume arbitrário envolvendo a partícula.

É possível demonstrar utilizando as equações de Maxwell (veja mais detalhes no Apêndice D) que a equação 4.1 é reescrita da forma^{79,89}:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}_{\text{mec}} = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{\boldsymbol{\mathcal{S}}}{u_m^2} dV + \int_V \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} dV, \quad (4.2)$$

sendo $\boldsymbol{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}$ o vetor de Poynting e $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ é denominado tensor de stress de Maxwell:

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \epsilon_m \boldsymbol{\mathcal{E}} \otimes \boldsymbol{\mathcal{E}} + \mu_m \boldsymbol{\mathcal{H}} \otimes \boldsymbol{\mathcal{H}} - \frac{1}{2} \overleftrightarrow{\mathbf{I}} \left(\epsilon_m \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} + \mu_m \boldsymbol{\mathcal{H}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{H}} \right), \quad (4.3)$$

em que \otimes representa o produto diádico e $\overleftrightarrow{\mathbf{I}}$ o tensor diádico unitário (veja definições no Apêndice E).

A integral no segundo termo da equação 4.2 corresponde ao momento linear da onda eletromagnética:

$$\int_V \frac{\boldsymbol{\mathcal{S}}}{u_m^2} dV = \mathbf{P}_{\text{onda}}. \quad (4.4)$$

Logo, substituindo-se a equação 4.4 em 4.2, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{P}_{\text{mec}} + \mathbf{P}_{\text{onda}} \right) = \int_V \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} dV. \quad (4.5)$$

Aplicando-se o teorema da divergência no lado direito da equação 4.5, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{P}_{\text{mec}} + \mathbf{P}_{\text{onda}} \right) = \oint_S \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = - \oint_S (-\overleftrightarrow{\mathbf{T}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (4.6)$$

em que S é uma superfície fechada regular, fronteira do volume V e com versor unitário $\hat{\mathbf{n}}$ orientado para fora de S . A equação 4.6 trata-se da lei de conservação de momento linear em eletrodinâmica.

Pela segunda Lei de Newton, o lado esquerdo da equação 4.6 é igual à força de radiação total \mathbf{F}_{rad} atuante sobre a partícula:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \oint_S \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (4.7)$$

que corresponde, portanto, ao fluxo do tensor de stress de Maxwell sobre uma superfície fechada S que envolve a partícula.⁸⁸

Para campos harmônicos com dependência temporal da forma $\exp(j\omega_0 t)$, ou seja: $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r})\exp(j\omega_0 t)]$ e $\mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{H}(\mathbf{r})\exp(j\omega_0 t)]$, a força de radiação média $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{rad}}$ em função dos fasores $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ é dada por^{79,88}:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \oint_S \text{Re} \left[\epsilon_m \mathbf{E}(\mathbf{E}^* \cdot \hat{\mathbf{n}}) + \mu_m \mathbf{H}(\mathbf{H}^* \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \frac{1}{2} \left(\epsilon_m \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \mu_m \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \right) \hat{\mathbf{n}} \right] dS. \quad (4.8)$$

Na equação 4.8, \mathbf{E} e \mathbf{H} referem-se, respectivamente, aos campos elétrico e magnético (fasoriais) totais externos à partícula, ou seja, eles são dados pela soma do campo incidente (\mathbf{E}_{inc} and \mathbf{H}_{inc}) com o campo espalhado pela partícula (\mathbf{E}_s and \mathbf{H}_s). Logo: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}_s$ and $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{H}_s$.

4.2 Força de extinção e força de recuo

À seguir, avalia-se a equação 4.8 em uma superfície esférica S_∞ com raio $R \rightarrow \infty$. Neste cenário, a integral envolve os campos distantes de \mathbf{E} e \mathbf{H} . Tais campos distantes são ortogonais ao vetor unitário radial $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$. Logo, substituindo $\mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}_s$ e $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{H}_s$ na equação 4.8 e sabendo que $\text{Re}[\mathbf{E}_{\text{inc}}\mathbf{E}_s^*] = \text{Re}[\mathbf{E}_s^*\mathbf{E}_{\text{inc}}]$ e $\text{Re}[\mathbf{H}_{\text{inc}}\mathbf{H}_s^*] = \text{Re}[\mathbf{H}_s^*\mathbf{H}_{\text{inc}}]$, tem-se que a força de radiação é dada por $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{inc}} + \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{rec}}$, em que:

$$\mathbf{F}_{\text{inc}} = -\frac{1}{4} \oint_{S_\infty} \left[\epsilon_m |\mathbf{E}_{\text{inc}}|^2 + \mu_m |\mathbf{H}_{\text{inc}}|^2 \right] \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = -\frac{1}{2} \oint_{S_\infty} \text{Re} \left[\epsilon_m \mathbf{E}_{\text{inc}}^* \cdot \mathbf{E}_s + \mu_m \mathbf{H}_{\text{inc}} \cdot \mathbf{H}_s^* \right] \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{F}_{\text{rec}} = -\frac{1}{4} \oint_{S_\infty} \left[\epsilon_m |\mathbf{E}_s|^2 + \mu_m |\mathbf{H}_s|^2 \right] \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (4.11)$$

A equação 4.9 envolve apenas os campos incidentes e, logo, pela conservação de momento linear, é identicamente nula ($\mathbf{F}_{\text{inc}} = 0$), já que corresponde ao caso da propagação do feixe na ausência da partícula.⁹⁰ O termo \mathbf{F}_{ext} (equação 4.10) envolve tanto os campos incidentes quanto os espalhados e, portanto, representa a força média temporal de extinção (do inglês, *extinction force*), resultante da interação dos campos incidente e espalhado. Já o termo \mathbf{F}_{rec} envolve apenas os campos espalhados e representa a força média temporal de recuo (do inglês, *recoil force*), proveniente da reação radiativa da partícula.

A radiação de campo distante dos campos espalhados apresenta a seguinte forma:

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}}} \frac{e^{-jk_m r}}{r} \quad (4.12a)$$

$$\mathbf{H}_s = \mathbf{b}_{\hat{\mathbf{n}}} \frac{e^{-jk_m r}}{r}, \quad (4.12b)$$

em que $\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}}}$ e $\mathbf{b}_{\hat{\mathbf{n}}}$ dependem de $\hat{\mathbf{n}}$, são ambos ortogonais entre si e ao vetor unitário $\hat{\mathbf{n}}$, e satisfazem $\mathbf{b}_{\hat{\mathbf{n}}} = (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}}})/\sqrt{\mu_m/\epsilon_m}$.⁶¹

Substituindo as expressões da equação 4.12 na equação 4.11, obtém-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{rec}} &= -\frac{1}{4}r^2 \oint_{4\pi} \left[\frac{\epsilon_m}{r^2} |\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}}}|^2 + \mu_m \frac{\epsilon_m}{\mu_m} \frac{|\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}}}|^2}{r^2} \right] \hat{\mathbf{n}} d\Omega \\ &= -\frac{\epsilon_m}{2} \oint_{4\pi} |\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}}}|^2 \hat{\mathbf{n}} d\Omega,\end{aligned}\quad (4.13)$$

em que a integração é avaliada sobre a esfera de raio unitário com $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$.

Os campos incidentes são escritos como uma superposição de ondas planas:

$$\mathbf{E}_{\text{inc}} = \oint_{4\pi} \mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}} e^{-jk_m \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}} d\Omega \quad (4.14a)$$

$$\mathbf{H}_{\text{inc}} = \oint_{4\pi} \mathbf{h}_{\hat{\mathbf{u}}} e^{-jk_m \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}} d\Omega, \quad (4.14b)$$

em que $k_m = 2\pi/\lambda_m$ e $\hat{\mathbf{u}}$ é um vetor real unitário que denota a direção de propagação de cada onda plana. Os vetores $\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}$ e $\mathbf{h}_{\hat{\mathbf{u}}}$ são ambos ortogonais à $\hat{\mathbf{u}}$, dependem de $\hat{\mathbf{u}}$ mas não de \mathbf{r} e se relacionam por $\mathbf{h}_{\hat{\mathbf{u}}} = (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}})/\sqrt{\mu_m/\epsilon_m}$.

Substituindo as expressões das equações 4.12 e 4.14 em 4.10, obtém-se:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = -\frac{1}{2} \text{Re} \left[\oint_{4\pi} d\Omega \oint_{S_\infty} \left[\epsilon_m (\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \cdot \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}}}) \frac{e^{-jk_m r}}{r} e^{jk_m \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}} + \mu_m (\mathbf{h}_{\hat{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{b}_{\hat{\mathbf{n}}}^*) \frac{e^{jk_m r}}{r} e^{-jk_m \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}} \right] \hat{\mathbf{n}} dS \right]. \quad (4.15)$$

Pode-se simplificar a equação 4.15 no campo distante fazendo uso do lema de Jones (veja o Apêndice 12 da referência 90):

$$\frac{1}{R_s} \oint_{S_\infty} \mathbf{G}(\hat{\mathbf{n}}) e^{-jk_m \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}} R_s} dS \approx \frac{2\pi j}{k_m} \left[\mathbf{G}(\hat{\mathbf{u}}) e^{-jk_m R_s} - \mathbf{G}(-\hat{\mathbf{u}}) e^{jk_m R_s} \right], \quad (4.16)$$

o qual descreve o comportamento assintótico quando $k_m R_s \rightarrow \infty$. Na equação 4.16, $\mathbf{G}(\hat{\mathbf{n}})$ é uma função arbitrária de $\hat{\mathbf{n}}$. Portanto, utilizando o lema de Jones, obtém-se para \mathbf{F}_{ext} :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{ext}} &= -\frac{1}{2} \text{Re} \left[\frac{2\pi j}{k_m} \oint_{4\pi} d\Omega \left[-\epsilon_m (\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \cdot \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{u}}}) \hat{\mathbf{u}} + \epsilon_m (\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \cdot \mathbf{a}_{-\hat{\mathbf{u}}}) \hat{\mathbf{u}} e^{-2jk_m R_s} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \mu_m (\mathbf{h}_{\hat{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{b}_{\hat{\mathbf{u}}}^*) \hat{\mathbf{u}} - \mu_m (\mathbf{h}_{\hat{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{b}_{-\hat{\mathbf{u}}}^*) \hat{\mathbf{u}} e^{2jk_m R_s} \right] \right].\end{aligned}\quad (4.17)$$

Como:

$$\mathbf{h}_{\hat{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{b}_{\hat{\mathbf{u}}}^* = \frac{\epsilon_m}{\mu_m} (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}) \cdot (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{u}}}^*) = \frac{\epsilon_m}{\mu_m} (\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}} \times \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{u}}}^*), \quad (4.18)$$

e analogamente, $\mathbf{h}_{\hat{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{b}_{-\hat{\mathbf{u}}}^* = -\frac{\epsilon_m}{\mu_m} (\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}} \times \mathbf{a}_{-\hat{\mathbf{u}}}^*)$, a equação 4.17 torna-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{ext}} &= -\frac{\pi \epsilon}{k_m} \text{Re} \left[j \oint_{4\pi} d\Omega \hat{\mathbf{u}} \left[-(\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \cdot \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{u}}}) + (\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \cdot \mathbf{a}_{-\hat{\mathbf{u}}}) e^{-2jk_m R_s} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{u}}}^*) + (\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{a}_{-\hat{\mathbf{u}}}^*) e^{2jk_m R_s} \right] \right].\end{aligned}\quad (4.19)$$

Sabendo que $\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{u}}}^* - \mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \cdot \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{u}}} = -2j \operatorname{Im}[\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \cdot \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{u}}}]$ e que $(\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \cdot \mathbf{a}_{-\hat{\mathbf{u}}})e^{-2jk_m R_s} + (\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{a}_{-\hat{\mathbf{u}}}^*)e^{2jk_m R_s} = 2[\cos(2k_m R_s) \operatorname{Re}(\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \cdot \mathbf{a}_{-\hat{\mathbf{u}}}) + \operatorname{sen}(2k_m R_s) \operatorname{Re}(\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{a}_{-\hat{\mathbf{u}}})]$ é grandeza puramente real, obtém-se⁶¹:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = -\frac{2\pi\epsilon_m}{k_m} \oint_{4\pi} \operatorname{Im} \left[\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \cdot \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{u}}} \right] \hat{\mathbf{u}} d\Omega. \quad (4.20)$$

4.3 Expansão multipolar até termos de quadrupolo

O campo espalhado \mathbf{E}_s pode ser escrito como a soma dos campos elétricos radiados por multipolos elétricos e magnéticos. No campo distante ($k_m r \gg 1$), tem-se apenas os termos proporcionais a $1/r$. Considerando apenas dipolos e quadrupolos elétricos e magnéticos, tem-se:⁹¹:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}}} &= \frac{k_m^2}{4\pi\epsilon_m} \left[\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{n}}) + \frac{1}{u_m} (\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{n}}) - \right. \\ &\quad \left. j \frac{k_m}{2} \hat{\mathbf{n}} \times [\hat{\mathbf{n}} \times (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e \cdot \hat{\mathbf{n}})] - j \frac{k_m}{2u_m} \hat{\mathbf{n}} \times (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_m \cdot \hat{\mathbf{n}}) \right] \\ &= \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},p} + \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},m} + \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},Q_e} + \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},Q_m}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

em que \mathbf{p} e \mathbf{m} são o momento de dipolo elétrico e magnético, respectivamente. Já $\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e$ e $\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_m$ são o momento de quadrupolo elétrico e magnético, respectivamente,⁶¹ os quais são tensores simétricos e sem traço (veja definição no Apêndice E).

À seguir, obtém-se as forças de extinção e de recuo em função dos momentos de dipolo e de quadrupolo avaliadas na origem O_P , ou seja, na posição (x_0, y_0, z_0) .

4.3.1 Força de extinção

Nota-se que, ao substituir a equação 4.21 na equação 4.20, obtém-se quatro termos, cada um correspondendo à contribuição de cada dipolo ou quadrupolo. Tem-se: $\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_{Q_e} + \mathbf{F}_{Q_m}$.

4.3.1.1 Força dipolar elétrica

A força dipolar elétrica é obtida considerando-se apenas o termo $\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{u}},p}$ na equação 4.20. Logo, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p &= -\frac{2\pi\epsilon_m}{k_m} \oint_{4\pi} \operatorname{Im} \left[\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \cdot \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{u}},p} \right] \hat{\mathbf{u}} d\Omega = -\frac{k_m}{2} \oint_{4\pi} \operatorname{Im} \left[\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \cdot [\hat{\mathbf{u}} \times (\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{u}})] \right] \hat{\mathbf{u}} d\Omega \\ &= -\frac{k_m}{2} \oint_{4\pi} \operatorname{Im} \left[\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \cdot \mathbf{p} \right] \hat{\mathbf{u}} d\Omega, \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde foi utilizado propriedade vetorial: $\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{b})] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.

Aplicando o gradiente no conjugado da expressão do campo elétrico incidente (equação 4.14a), tem-se:

$$\nabla \mathbf{E}_{\text{inc}}^* = (jk_m) \oint_{4\pi} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^*) e^{jk_m \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}} d\Omega, \quad (4.23)$$

em que foi utilizado a propriedade vetorial $\nabla(\Psi \mathbf{A}) = \nabla\Psi \otimes \mathbf{A} + \Psi \nabla \mathbf{A}$ e o fato de $\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^*$ não depender de r . Logo, a força dipolar elétrica, avaliada na origem O_P é dada por⁶¹:

$$\mathbf{F}_p = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[(\nabla \mathbf{E}_{\text{inc}}^*) \cdot \mathbf{p}]. \quad (4.24)$$

4.3.1.2 Força dipolar magnética

É conveniente expressar inicialmente \mathbf{F}_{ext} em função de $\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^*$ e $\mathbf{b}_{\hat{\mathbf{u}}}$. Como tem-se que $\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{u}}} = (\mathbf{b}_{\hat{\mathbf{u}}} \times \hat{\mathbf{u}})\mu_m u_m$ e $\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^* = (\mathbf{h}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \times \hat{\mathbf{u}})\mu_m u_m$, e utilizando a propriedade vetorial: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, segue que:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = -\frac{2\pi}{k_m} \mu_m \oint_{4\pi} \operatorname{Im} \left[\mathbf{h}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \cdot \mathbf{b}_{\hat{\mathbf{u}}} \right] \hat{\mathbf{u}} d\Omega. \quad (4.25)$$

Logo, a força dipolar magnética é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_m &= -\frac{2\pi\epsilon_m}{k_m} \mu_m \oint_{4\pi} \operatorname{Im} \left[\mathbf{h}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \cdot \mathbf{b}_{\hat{\mathbf{u}},m} \right] \hat{\mathbf{u}} d\Omega = -\frac{k_m}{2} \mu_m \oint_{4\pi} \operatorname{Im} \left[\mathbf{h}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \cdot [\hat{\mathbf{u}} \times (\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{u}})] \right] \hat{\mathbf{u}} d\Omega \\ &= -\frac{k_m}{2} \mu_m \oint_{4\pi} \operatorname{Im} \left[\mathbf{h}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \cdot \mathbf{m} \right] \hat{\mathbf{u}} d\Omega, \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde novamente foi utilizado a propriedade vetorial: $\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{b})] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$. Portanto, de maneira análoga ao procedimento realizado para a força dipolar elétrica (subseção 4.3.1.1), tem-se que a força dipolar magnética avaliada na origem O_P é⁶¹:

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[(\nabla \mathbf{B}_{\text{inc}}^*) \cdot \mathbf{m}], \quad (4.27)$$

onde $\mathbf{B}_{\text{inc}} = \mu_m \mathbf{H}_{\text{inc}}$.

4.3.1.3 Força quadrupolar elétrica

Considerando-se apenas o termo $\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{u}},\text{Qe}}$ na equação 4.20, obtém-se a força quadrupolar elétrica:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{Qe}} &= -\frac{2\pi\epsilon_m}{k_m} \oint_{4\pi} \operatorname{Im} \left[\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \cdot \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{u}},\text{Qe}} \right] \hat{\mathbf{u}} d\Omega = \frac{k_m^2}{4} \oint_{4\pi} \operatorname{Im} \left[j \mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \cdot [\hat{\mathbf{u}} \times (\mathbf{u} \times (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e \cdot \hat{\mathbf{u}}))] \right] \hat{\mathbf{u}} d\Omega \\ &= -\frac{k_m}{2} \oint_{4\pi} \operatorname{Im} \left[j (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e \cdot \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \right] \hat{\mathbf{u}} d\Omega, \end{aligned} \quad (4.28)$$

em que foi utilizado a propriedade tensorial $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times [\mathbf{b} \times (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{b})] = -(\overleftrightarrow{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$.

Aplicando o gradiente duas vezes no conjugado da expressão do campo elétrico incidente (equação 4.14a), tem-se:

$$\nabla \nabla \mathbf{E}_{\text{inc}}^* = (jk_m)^2 \oint_{4\pi} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^*) e^{jk_m \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}} d\Omega, \quad (4.29)$$

em que novamente foi utilizado a propriedade vetorial $\nabla(\Psi \mathbf{A}) = \nabla\Psi \otimes \mathbf{A} + \Psi\nabla\mathbf{A}$ e o fato de $\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{u}}}^*$ não depender de r . Portanto, a força quadrupolar elétrica avaliada na origem O_P é dada por⁶¹:

$$\mathbf{F}_{Q_e} = \frac{1}{4} \text{Re}[(\nabla\nabla\mathbf{E}_{\text{inc}}^*) : \overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e], \quad (4.30)$$

em que $:$ indica a operação duplo produto escalar (veja definição no Apêndice E).

4.3.1.4 Força quadrupolar magnética

Considerando-se apenas o termo $\mathbf{b}_{\hat{\mathbf{u}},Q_m}$ na equação 4.25, obtém-se a força quadrupolar magnética:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{Q_m} &= -\frac{2\pi\epsilon_m}{k_m} \mu_m \oint_{4\pi} \text{Im} \left[\mathbf{h}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \cdot \mathbf{b}_{\hat{\mathbf{u}},Q_m} \right] \hat{\mathbf{u}} d\Omega = \frac{k_m}{4} \mu_m \oint_{4\pi} \text{Im} \left[j \mathbf{h}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \cdot [\hat{\mathbf{u}} \times (\hat{\mathbf{u}} \times (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_m \cdot \hat{\mathbf{u}}))] \right] \hat{\mathbf{u}} d\Omega \\ &= -\frac{k_m}{2} \mu_m \oint_{4\pi} \text{Im} \left[j (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_m \cdot \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{h}_{\hat{\mathbf{u}}}^* \right] \hat{\mathbf{u}} d\Omega, \end{aligned} \quad (4.31)$$

De maneira análoga ao procedimento realizado para a força quadrupolar elétrica (subseção 4.3.1.3):

$$\nabla\nabla\mathbf{H}_{\text{inc}}^* = (jk_m)^2 \oint_{4\pi} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{h}_{\hat{\mathbf{u}}}^*) e^{jk_m \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}} d\Omega, \quad (4.32)$$

e, portanto⁶¹:

$$\mathbf{F}_{Q_m} = \frac{1}{4} \text{Re}[(\nabla\nabla\mathbf{B}_{\text{inc}}^*) : \overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_m]. \quad (4.33)$$

4.3.2 Força de recuo

Ao substituir a equação 4.21 na equação 4.13, observa-se que os únicos termos não nulos (e que, portanto, contribuem para a força de recuo) são aqueles envolvendo o produto do campo elétrico radiado por um multipolo simétrico com o campo radiado de um multipolo antissimétrico. Um multipolo é simétrico quando o campo elétrico por ele radiado apresenta a propriedade de invariância à transformação $\hat{\mathbf{n}} \rightarrow -\hat{\mathbf{n}}$. Por outro lado, ele é dito antissimétrico se há uma mudança de fase de 180° em seu campo elétrico quando aplicado a transformação $\hat{\mathbf{n}} \rightarrow -\hat{\mathbf{n}}$. O dipolo elétrico $\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},p}$ e o quadrupolo magnético $\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},Q_m}$ são simétricos, enquanto que o dipolo magnético $\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},m}$ e o quadrupolo elétrico $\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},Q_e}$ são antissimétricos. Apenas os produtos envolvendo os campos de um multipolo simétrico com um antissimétrico resulta em um padrão de radiação não simétrico e, por consequência, em uma força óptica de recuo não nula.⁹² Logo, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{rec}} &= -\epsilon_m \oint_{4\pi} \text{Re} \left[\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},p} \cdot \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},m}^* + \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},Q_e} \cdot \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},p}^* + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},Q_m} \cdot \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},m}^* + \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},Q_e} \cdot \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},Q_m}^* \right] \hat{\mathbf{n}} d\Omega. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Na equação 4.34 é possível identificar quatro termos que compõem a força de recuo: $\mathbf{F}_{\text{rec}} = \mathbf{F}_{p_m} + \mathbf{F}_{p_{Q_e}} + \mathbf{F}_{m_{Q_m}} + \mathbf{F}_{Q_e Q_m}$, os quais representam, respectivamente, as

contribuições de força provenientes da interação entre os dipolos elétrico e magnético (\mathbf{F}_{pm}), entre o dipolo elétrico e o quadrupolo elétrico (\mathbf{F}_{pQe}), entre o dipolo magnético e o quadrupolo magnético (\mathbf{F}_{mQm}) e entre os quadrupolos elétrico e magnético (\mathbf{F}_{QeQm}).

A primeiro termo da equação 4.34 é igual a:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{pm}} &= -\epsilon_m \oint_{4\pi} \text{Re}[\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},\text{p}} \cdot \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},\text{m}}^*] \hat{\mathbf{n}} d\Omega \\ &= -\frac{k_m^4}{16\pi^2 \epsilon_m u_m} \oint_{4\pi} \text{Re} \left[[\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{n}})] \cdot [\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{n}}] \right] \hat{\mathbf{n}} d\Omega \\ &= -\frac{k_m^4}{16\pi^2 \epsilon_m u_m} \oint_{4\pi} \text{Re} \left[(p_\theta m_\phi^* - p_\phi m_\theta^*) \right] \hat{\mathbf{n}} \text{sen}(\theta) d\theta d\phi.\end{aligned}\quad (4.35)$$

Em coordenadas Cartesianas, tem-se:

$$\hat{\mathbf{n}} = \text{sen}(\theta)\cos(\phi)\hat{\mathbf{x}} + \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)\hat{\mathbf{y}} + \cos(\theta)\hat{\mathbf{z}}, \quad (4.36)$$

$$p_\theta = p_x \cos(\theta)\cos(\phi) + p_y \cos(\theta)\text{sen}(\phi) - p_z \text{sen}(\theta) \quad (4.37a)$$

$$p_\phi = -p_x \text{sen}(\phi) + p_y \cos(\phi), \quad (4.37b)$$

e

$$m_\theta = m_x \cos(\theta)\cos(\phi) + m_y \cos(\theta)\text{sen}(\phi) - m_z \text{sen}(\theta) \quad (4.38a)$$

$$m_\phi = -m_x \text{sen}(\phi) + m_y \cos(\phi). \quad (4.38b)$$

Logo, Substituindo-se as equações em 4.36, 4.37 e 4.38, a força de recuo proveniente da interação entre os dipolos elétrico e magnético, avaliada na origem O_P é⁶¹:

$$\mathbf{F}_{\text{pm}} = -\frac{k_m^4}{16\pi\epsilon_m u_m} \text{Re}[\mathbf{p} \times \mathbf{m}^*]. \quad (4.39)$$

A força de recuo proveniente da interação entre o dipolo elétrico com o quadrupolo elétrico (\mathbf{F}_{pQe}) é obtida substituindo-se as expressões de $\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},\text{p}}$ e $\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},\text{Qe}}$ no segundo termo da equação 4.34:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{pQe}} &= -\epsilon_m \oint_{4\pi} \text{Re}[\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},\text{p}}^* \cdot \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},\text{Qe}}] \hat{\mathbf{n}} d\Omega \\ &= \frac{k_m^5}{32\pi^2 \epsilon_m} \oint_{4\pi} \text{Re} \left[j[\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{p}^* \times \hat{\mathbf{n}})] \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e \cdot \hat{\mathbf{n}}))] \right] \hat{\mathbf{n}} d\Omega \\ &= -\frac{k_m^5}{32\pi^2 \epsilon_m} \oint_{4\pi} \text{Im} \left[(\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e \cdot \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}^* \cdot \hat{\mathbf{n}}) - (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e \cdot \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{p}^* \right] \hat{\mathbf{n}} \text{sen}(\theta) d\theta d\phi.\end{aligned}\quad (4.40)$$

Como:

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \text{sen}(\theta)\cos(\phi)(Q_{e,xx}\hat{\mathbf{x}} + Q_{e,yx}\hat{\mathbf{y}} + Q_{e,zx}\hat{\mathbf{z}}) + \\ &\quad \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)(Q_{e,xy}\hat{\mathbf{x}} + Q_{e,yy}\hat{\mathbf{y}} + Q_{e,zy}\hat{\mathbf{z}}) + \\ &\quad \cos(\theta)(Q_{e,xz}\hat{\mathbf{x}} + Q_{e,yz}\hat{\mathbf{y}} + Q_{e,zz}\hat{\mathbf{z}}),\end{aligned}\quad (4.41)$$

e utilizando-se as equações 4.36 e 4.37, segue-se que a força de interação entre o dipolo elétrico e o quadrupolo elétrico, avaliada na origem O_P é⁶¹:

$$\mathbf{F}_{pQe} = \frac{k_m^5}{40\pi\epsilon_m} \text{Im}[\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e \cdot \mathbf{p}^*]. \quad (4.42)$$

De maneira análoga ao procedimento realizado para a força \mathbf{F}_{pQe} , a força de interação entre o dipolo magnético e o quadrupolo magnético, avaliada na origem O_P é dada por⁶¹:

$$\mathbf{F}_{mQm} = \frac{k_m^5}{40\pi\epsilon_m u_m} \text{Im}[\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_m \cdot \mathbf{m}^*]. \quad (4.43)$$

Finalmente, o último termo da equação 4.13 (\mathbf{F}_{QeQm}) é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{QeQm} &= -\epsilon_m \oint_{4\pi} \text{Re}[\mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},Qe} \cdot \mathbf{a}_{\hat{\mathbf{n}},Qm}^*] \hat{\mathbf{n}} d\Omega \\ &= -\frac{k_m^6}{64\pi^2\epsilon_m u_m} \oint_{4\pi} \text{Re} \left[[\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e \cdot \hat{\mathbf{n}}))] \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_m \cdot \hat{\mathbf{n}})] \right] \hat{\mathbf{n}} d\Omega \\ &= -\frac{k_m^6}{64\pi^2\epsilon_m u_m} \oint_{4\pi} \text{Re} \left[(\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e \cdot \hat{\mathbf{n}})_\theta (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_m^* \cdot \hat{\mathbf{n}})_\phi - (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e \cdot \hat{\mathbf{n}})_\phi (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_m^* \cdot \hat{\mathbf{n}})_\theta \right] \hat{\mathbf{n}} \text{sen}(\theta) d\theta d\phi, \end{aligned} \quad (4.44)$$

em que $(\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e \cdot \hat{\mathbf{n}})_\theta = (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e \cdot \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\theta}$, $(\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e \cdot \hat{\mathbf{n}})_\phi = (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e \cdot \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\phi}$, $(\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_m \cdot \hat{\mathbf{n}})_\theta = (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_m \cdot \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\theta}$ e $(\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_m \cdot \hat{\mathbf{n}})_\phi = (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_m \cdot \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\phi}$, sendo $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ os versores polar e azimutal, respectivamente, que em coordenadas cartesianas são descritos por: $\hat{\theta} = \cos(\theta)\cos(\phi)\hat{x} + \cos(\theta)\text{sen}(\phi)\hat{y} - \text{sen}(\theta)\hat{z}$ e $\hat{\phi} = -\text{sen}(\phi)\hat{x} + \cos(\phi)\hat{y}$.

Portanto, segue da equação 4.44 que a força de interação entre os quadrupolos elétrico e magnético, avaliada na origem O_P é⁶¹:

$$\mathbf{F}_{QeQm} = -\frac{k_m^6}{240\pi\epsilon_m u_m} \text{Re}[\mathbf{Q}_{e,x} \times \mathbf{Q}_{m,x}^* + \mathbf{Q}_{e,y} \times \mathbf{Q}_{m,y}^* + \mathbf{Q}_{e,z} \times \mathbf{Q}_{m,z}^*], \quad (4.45)$$

em que $\mathbf{Q}_{e,x} = Q_{xx}\hat{x} + Q_{xy}\hat{y} + Q_{xz}\hat{z}$ (ou seja, vetor formado pelos elementos da primeira linha do tensor $\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e$). Análogo para os demais termos.

Deste modo, em notação indicial, as componentes cartesianas ($i = x, y, z$) da força média de extinção e de recuo, avaliadas na origem O_P , são dadas por⁶¹:

$$\begin{aligned} F_{\text{ext},i} &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[p_j \nabla_i E_{\text{inc},j}^* \right] + \frac{1}{2} \text{Re} \left[m_j \nabla_i B_{\text{inc},j}^* \right] + \\ &\quad \frac{1}{4} \text{Re} \left[Q_{jk}^e \nabla_i \nabla_k E_{\text{inc},j}^* \right] + \frac{1}{4} \text{Re} \left[Q_{jk}^m \nabla_i \nabla_k B_{\text{inc},j}^* \right], \end{aligned} \quad (4.46)$$

e

$$\begin{aligned} F_{\text{rec},i} &= -\frac{k_m^4}{12\pi\epsilon_m u_m} \text{Re} \left[\epsilon_{ijk} p_j m_k^* \right] + \frac{k_m^5}{40\pi\epsilon_m} \text{Im} \left[Q_{ij}^e p_j^* \right] + \\ &\quad \frac{k_m^5}{40\pi\epsilon_m u_m} \text{Im} \left[Q_{ij}^m m_j^* \right] - \frac{k_m^6}{240\pi\epsilon_m u_m} \text{Re} \left[\epsilon_{ijk} Q_{lj}^e (Q_{lk}^m)^* \right], \end{aligned} \quad (4.47)$$

em que ϵ_{ijk} refere-se ao tensor de Levi-Civita. Nas equações 4.46 e 4.47 adotou-se a notação de Einstein, em que somatórios sobre índices repetidos são implícitos.

4.4 Momentos dipolares e quadrupolares em função dos campos incidentes

Nesta seção, os momentos de dipolo e quadrupolo são determinados em função dos campos incidentes \mathbf{E}_{inc} e \mathbf{H}_{inc} . Expandindo-se estes campos em uma série de Taylor centrada no centro da partícula $\vec{0} = O_P = (x_0, y_0, z_0)$, as componentes cartesianas desta expansão são dadas por:

$$E_{\text{inc},i}(\mathbf{r}) = E_{\text{inc},i}(\vec{0}) + \nabla_j E_{\text{inc},i} \Big|_{\mathbf{r}=\vec{0}} r_j + \frac{1}{2} \nabla_k \nabla_j E_{\text{inc},i} \Big|_{\mathbf{r}=\vec{0}} r_j r_k + \dots \quad (4.48a)$$

$$B_{\text{inc},i}(\mathbf{r}) = B_{\text{inc},i}(\vec{0}) + \nabla_j B_{\text{inc},i} \Big|_{\mathbf{r}=\vec{0}} r_j + \frac{1}{2} \nabla_k \nabla_j B_{\text{inc},i} \Big|_{\mathbf{r}=\vec{0}} r_j r_k + \dots, \quad (4.48b)$$

com $i = x, y, z$. Cada termo da equação 4.48 é responsável pela excitação de um multipolo em particular.^{93,94} O dipolo elétrico \mathbf{p} é proporcional ao primeiro termo da equação 4.48a. E o dipolo magnético \mathbf{m} é proporcional ao primeiro termo da equação 4.48b. Logo:

$$\mathbf{p} = \alpha_e \mathbf{E}_{\text{inc}} \quad (4.49a)$$

$$\mathbf{m} = \alpha_m \mathbf{B}_{\text{inc}}, \quad (4.49b)$$

cujas constantes de proporcionalidade α_e e α_m são denominadas de polarizabilidade elétrica e magnética, respectivamente. Como os momentos de quadrupolo $\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e$ e $\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_m$ devem ser tensores simétricos, eles interagem apenas com a parte simétrica do gradiente dos campos incidentes (segundo termo das equações 4.48a e 4.48b, respectivamente). Para um tensor $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ de ordem 2, a parte simétrica é dada por:

$$\overleftrightarrow{\mathbf{A}}_S = \frac{1}{2} \left(\overleftrightarrow{\mathbf{A}} + \overleftrightarrow{\mathbf{A}}^T \right), \quad (4.50)$$

em que $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}^T$ refere-se à transposta do tensor $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$.

Logo, as componentes de $\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e$ e $\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_m$ são⁹⁴:

$$Q_{ij}^e = \frac{\alpha_{Qe}}{2} (\partial_i E_{\text{inc},j} + \partial_j E_{\text{inc},i}) \quad (4.51a)$$

$$Q_{ij}^m = \frac{\alpha_{Qm}}{2} (\partial_i B_{\text{inc},j} + \partial_j B_{\text{inc},i}), \quad (4.51b)$$

em que as constantes de proporcionalidade α_{Qe} e α_{Qm} referem-se à quadrupolarizabilidade elétrica e magnética, respectivamente. Nota-se que os tensores $\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e$ e $\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_m$, obtidos por meio das expressões em 4.51, são tensores sem traço, já que seus traços são, respectivamente, $\nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{inc}}$ e $\nabla \cdot \mathbf{B}_{\text{inc}}$, os quais são nulos por causa da lei de Gauss elétrica (em um meio sem fontes) e da lei de Gauss magnética (equações 3.6a e 3.6b).

Comparando-se o campo elétrico espalhado radiado pelos dipolos e quadrupolos (equações 4.12 e 4.21) com o campo elétrico espalhado obtido pela GLMT no campo

distante, é possível relacionar as polarizabilidades elétrica e magnética, α_e e α_m , com os coeficientes de Mie a_1 e b_1 , respectivamente. Do mesmo modo, é possível relacionar as quadrupolarizabilidades elétrica e magnética, α_{Qe} e α_{Qm} , com os coeficientes de Mie a_2 e b_2 , respectivamente.

Considera-se como feixe incidente uma onda plana polarizada em x . No sistema de coordenadas (u,v,w) , $\mathbf{E}_{\text{pw}} = \hat{\mathbf{x}}E_0\exp(-jk_m w)$. Logo, no sistema (x,y,z) tem-se: $\mathbf{E}_{\text{inc}} = \mathbf{E}_{\text{pw}}(z = -w) = \hat{\mathbf{x}}E_0\exp(jk_m z)$ e $\mathbf{B}_{\text{inc}} = \hat{\mathbf{y}}(1/u_m)E_0\exp(jk_m z)$. Portanto, o campo espalhado no campo distante calculado pela GLMT na posição $z = z_0$ é obtido substituindo-se os fatores de forma associados à onda plana (equações 3.69 e 3.70) nas equações em 3.54c e 3.54d. Deste processo, obtém-se: $\mathbf{E}_{\text{s}} = E_{s,\theta}\hat{\theta} + E_{s,\phi}\hat{\phi}$, com:

$$E_{s,\theta} = jE_0 \frac{e^{-jk_m r}}{k_m r} \cos\phi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} g_n \left[a_n \tau_n(\cos\theta) + b_n \pi_n(\cos\theta) \right] \quad (4.52a)$$

$$E_{s,\phi} = -jE_0 \frac{e^{-jk_m r}}{k_m r} \sin\phi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} g_n \left[a_n \pi_n(\cos\theta) + b_n \tau_n(\cos\theta) \right], \quad (4.52b)$$

em que $\tau_n^1(\cos\theta)$ e $\pi_n^1(\cos\theta)$ são as funções generalizadas de Legendre de ordem 1 e grau n (veja equações em 3.35) e $g_n = \exp(jk_m z_0)$.⁵⁹

A partir das equações 4.12 e 4.21, segue que a contribuição para o campo elétrico espalhado devido aos dipolos elétrico e magnético é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{s,dipolos}} &= \frac{e^{-jk_m r}}{r} \frac{k_m^2}{4\pi\epsilon_m} \left[\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{n}}) + \frac{1}{u_m} (\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{n}}) \right] = \\ &= \frac{e^{-jk_m r}}{r} \frac{k_m^2}{4\pi\epsilon_m} \left[p_\theta \hat{\theta} + p_\phi \hat{\phi} + \frac{1}{u_m} (m_\phi \hat{\theta} - m_\theta \hat{\phi}) \right]. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Os momentos dipolares (equações em 4.49) para a onda plana polarizada em x são: $\mathbf{p} = \alpha_e \hat{\mathbf{x}}E_0\exp(jk_m z)$ e $\mathbf{m} = \alpha_m \hat{\mathbf{y}}(1/u_m)E_0\exp(jk_m z)$. Logo, substituindo-os na equação 4.53 e comparando a expressão obtida avaliada em $z = z_0$ com as equações em 4.52 para $n = 1$, obtém-se:

$$\alpha_e = -j \frac{6\pi\epsilon_m}{k_m^3} a_1 \quad (4.54a)$$

$$\alpha_m = -j \frac{6\pi}{\mu_m k_m^3} b_1. \quad (4.54b)$$

De maneira análoga, a contribuição para o campo elétrico espalhado devido aos quadrupolos elétrico e magnético é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{s,quadrupolos}} &= -\frac{e^{-jk_m r}}{r} j \frac{k_m^3}{8\pi\epsilon_m} \left[\hat{\mathbf{n}} \times [\hat{\mathbf{n}} \times (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e \cdot \hat{\mathbf{n}})] + \frac{1}{u_m} \hat{\mathbf{n}} \times (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_m \cdot \hat{\mathbf{n}}) \right] = \\ &= -\frac{e^{-jk_m r}}{r} j \frac{k_m^3}{8\pi\epsilon_m} \left[-(\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e \cdot \hat{\mathbf{n}})_\theta \hat{\theta} - (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_e \cdot \hat{\mathbf{n}})_\phi \hat{\phi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{u_m} (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_m \cdot \hat{\mathbf{n}})_\theta \hat{\phi} - \frac{1}{u_m} (\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}_m \cdot \hat{\mathbf{n}})_\phi \hat{\theta} \right]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

O momento quadrupolar elétrico (equação 4.51a) para a onda plana polarizada em x é dado por: $Q_{xz}^e = Q_{zx}^e = (\alpha_{Qe}/2)E_0jk_m \exp(jk_m z)$ e os demais elementos do tensor \vec{Q}_e são nulos. Já para o momento quadrupolar magnético (equação 4.51b), tem-se: $Q_{yz}^m = Q_{zy}^m = (\alpha_{Qm}/2)(jk_m/u_m)E_0 \exp(jk_m z)$ e os demais elementos do tensor \vec{Q}_m são nulos. Substituindo-os na equação 4.55 e comparando a expressão obtida avaliada em $z = z_0$ com as equações em 4.52 para $n = 2$, tem-se:

$$\alpha_{Qe} = -j \frac{40\pi\epsilon_m}{k_m^5} a_2 \quad (4.56a)$$

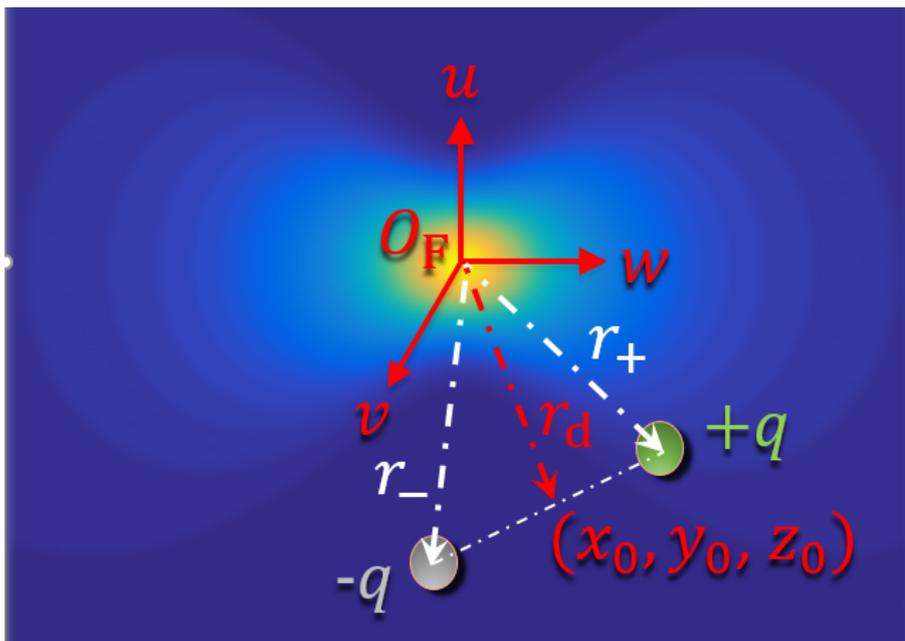
$$\alpha_{Qm} = -j \frac{40\pi}{\mu_m k_m^5} b_2. \quad (4.56b)$$

4.5 Forças ópticas em partículas de Rayleigh

Uma partícula de Rayleigh satisfaz a condição $k_m a \ll 1$, ou seja $a \ll \lambda_m$. Nesta seção é mostrado que a força radiativa sobre partículas de Rayleigh corresponde apenas à força dipolar elétrica (equação 4.24) com a polarizabilidade elétrica α_e (equação 4.54a) avaliada sob a condição $k_m a \ll 1$.

A partícula de Rayleigh é pequena o suficiente de tal modo que seu comportamento se assemelha a um dipolo elétrico em um campo elétrico não homogêneo, como ilustrado na figura 5. O dipolo elétrico é formado por duas cargas opostas, $+q$ e $-q$, localizadas, respectivamente, em \mathbf{r}_+ e \mathbf{r}_- . O centro da partícula está localizado, portanto, em $\mathbf{r}_d = (\mathbf{r}_+ + \mathbf{r}_-)/2$. As cargas estão separadas por uma distância d , tal que $\mathbf{d} = \mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-$.³

Figura 5 – Sistemas de coordenadas adotados para a determinação de forças ópticas em partículas de Rayleigh.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A força total instantânea sobre o dipolo é dada pela soma das forças de Lorentz em cada carga⁶⁵:

$$\mathbf{F} = q \left[\mathcal{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_+, t) - \mathcal{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_-, t) \right] + q \left[\frac{d}{dt} \mathbf{r}_+ \times \mathcal{B}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_+, t) - \frac{d}{dt} \mathbf{r}_- \times \mathcal{B}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_-, t) \right]. \quad (4.57)$$

A partícula é pequena o suficiente para assumir que $|\mathbf{d}| \ll |\mathbf{r}_+|$ e $|\mathbf{d}| \ll |\mathbf{r}_-|$. Neste cenário, pode-se expandir os campos incidentes \mathcal{E}_{inc} e \mathcal{B}_{inc} em uma série de Taylor centrada no centro da partícula $\mathbf{r}_d = (\mathbf{r}_+ + \mathbf{r}_-)/2$, retendo-se apenas aos dois primeiros termos⁹⁵:

$$\mathcal{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_\pm, t) \approx \mathcal{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_d, t) + \left[(\mathbf{r}_\pm - \mathbf{r}_d) \cdot \nabla \right] \mathcal{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_d, t) \quad (4.58a)$$

$$\mathcal{B}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_\pm, t) \approx \mathcal{B}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_d, t) + \left[(\mathbf{r}_\pm - \mathbf{r}_d) \cdot \nabla \right] \mathcal{B}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_d, t) \quad (4.58b)$$

Substituindo-se as equações em 4.58 na equação 4.57, e sabendo-se que o momento de dipolo é $\mathcal{P}_d = q\mathbf{d}$, a força total instantânea sobre o dipolo, avaliada em $\mathbf{r} = \mathbf{r}_d$ é:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_d, t) = \mathcal{P}_d \cdot \nabla \mathcal{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_d, t) + \frac{d\mathcal{P}_d}{dt} \times \mathcal{B}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_d, t) + \frac{d}{dt} \mathbf{r}_d \times (\mathcal{P}_d \cdot \nabla) \mathcal{B}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_d, t). \quad (4.59)$$

Tratando-se de uma partícula não relativística, o módulo da velocidade $d\mathbf{r}_d/dt$ é muito menor do que a velocidade da luz no espaço livre c , de tal forma que o último termo da equação 4.59 pode ser desprezado.

Por propriedade vetorial, o segundo termo da equação 4.59 pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}_d}{dt} \times \mathcal{B}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_d, t) &= \frac{d}{dt} \left[\mathcal{P}_d \times \mathcal{B}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_d, t) \right] - \mathcal{P}_d \times \frac{d}{dt} \mathcal{B}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_d, t) = \\ &= \frac{d}{dt} \left[\mathcal{P}_d \times \mathcal{B}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_d, t) \right] + \mathcal{P}_d \times \left[\nabla \times \mathcal{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_d, t) \right], \end{aligned} \quad (4.60)$$

em que a Lei de Faraday foi aplicada no último termo.

Portanto:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_d, t) = \mathcal{P}_d \cdot \nabla \mathcal{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_d, t) + \mathcal{P}_d \times \left[\nabla \times \mathcal{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_d, t) \right] + \frac{d}{dt} \left[\mathcal{P}_d \times \mathcal{B}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_d, t) \right]. \quad (4.61)$$

Considerando-se campos harmônicos, tal que $\mathcal{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_d, t) = \text{Re} \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}_d) \exp(j\omega_0 t) \right]$, $\mathcal{B}_{\text{inc}}(\mathbf{r}_d, t) = \text{Re} \left[\mathbf{B}(\mathbf{r}_d) \exp(j\omega_0 t) \right]$ e $\mathcal{P}_d = \text{Re} \left[\mathbf{p}(\mathbf{r}_d) \exp(j\omega_0 t) \right]$, tem-se que a média temporal do último termo da equação 4.61 é nula enquanto que a média temporal dos demais termos em função dos fasores $\mathbf{E}(\mathbf{r}_d)$ e $\mathbf{p}(\mathbf{r}_d)$ é:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_d) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[(\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{inc}}^* + \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}_{\text{inc}}^*) \right]. \quad (4.62)$$

Utilizando a propriedade vetorial $\mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}_{\text{inc}}^*) = \mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{E}_{\text{inc}}^* - (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{inc}}^*$, a força média temporal sobre a partícula de Rayleigh é dada por³:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_d) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{E}_{\text{inc}}^* \right], \quad (4.63)$$

que corresponde à força dipolar elétrica da equação 4.24.

Dentro do contexto de dipolo elétrico, a polarizabilidade elétrica α_e de uma partícula de Rayleigh ($\alpha_{e,R}$), pode ser determinada seguindo-se o formalismo desenvolvido por [Draine e Goodman](#)⁹⁶ e detalhada à seguir.

O vetor polarização da partícula é dado por:

$$\mathbf{P} = \epsilon_m \chi (\mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}_s) = \epsilon_m (M^2 - 1) (\mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}_s), \quad (4.64)$$

em que \mathbf{E}_s refere-se ao campo espalhado e $M = \sqrt{\epsilon_p \mu_p / \epsilon_m \mu_m}$ é o índice de refração relativo da partícula, que se relaciona com a susceptibilidade χ por $M = \sqrt{1 + \chi}$.⁷¹ O momento de dipolo é igual a $\mathbf{p} = V \mathbf{P}$, sendo V o volume da partícula. Como $k_m a \ll 1$ e logo $a \ll \lambda_m$, pode-se assumir que \mathbf{E}_{inc} , \mathbf{E}_s e \mathbf{P} são uniforme dentro do volume V .

Cada elemento infinitesimal de volume dV da partícula apresenta momento de dipolo $d\mathbf{p} = \mathbf{P} dV$ e possui campo espalhado, definido a partir do centro do dipolo $d\mathbf{p}$, dado pelo campo radiado por um dipolo elétrico no campo próximo (em inglês, *near field*)^{88,95}:

$$d\mathbf{E}_s = \frac{k_m^3}{4\pi\epsilon_m} \frac{e^{-jk_m r}}{k_m r} \left[2\cos\theta \left(\frac{1}{(k_m r)^2} + j \frac{1}{k_m r} \right) \hat{r} + \sin\theta \left(\frac{1}{(k_m r)^2} + j \frac{1}{k_m r} - 1 \right) \hat{\theta} \right] d\mathbf{p}. \quad (4.65)$$

Devido à simetria esférica da partícula, a obtenção do campo espalhado no centro da mesma devido a todas as contribuições dos dipolos $d\mathbf{p}$ é equivalente à integração ao longo do volume V do campo espalhado produzido por um dipolo elétrico no centro da partícula:

$$\mathbf{E}_s = \int_V d\mathbf{E}_s = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a d\mathbf{E}_s r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi. \quad (4.66)$$

Como a partícula é pequena, pode-se expandir a exponencial complexa da equação 4.65 em uma série de Taylor centrada na origem até a terceira potência:

$$e^{-jk_m r} \approx 1 - j(k_m r) - \frac{1}{2}(k_m r)^2 + j\frac{1}{6}(k_m r)^3, \quad (4.67)$$

já que $(k_m r)^n$, $n > 3$, torna-se desprezível no processo de integração em 4.66, uma vez que $k_m a \ll 1$.

Para fins de determinação de α_e , basta considerar apenas uma componente de \mathbf{E}_{inc} , \mathbf{E}_s e \mathbf{P} . Tomando-se a componente longitudinal (ao longo do eixo z) da equação 4.65 já com a aproximação em 4.67, tem-se:

$$dE_{s,z} \approx \frac{k_m^3}{4\pi\epsilon_m} \frac{1}{(k_m r)^3} \left[(3\cos^2(\theta) - 1) + \frac{1}{2}(\cos^2(\theta) + 1)(k_m r)^2 - j\frac{2}{3}(k_m r)^3 \right] P_z dV, \quad (4.68)$$

sendo P_z a componente longitudinal de \mathbf{P} . E, logo, realizando-se o processo de integração em 4.66, obtém-se:

$$E_{s,z} = \frac{1}{3\epsilon_m} \left[-1 + (k_m a)^2 - j \frac{2}{3} (k_m a)^3 \right] P_z. \quad (4.69)$$

Logo, substituindo-se a equação 4.69 na relação constitutiva da equação 4.64, obtém-se a seguinte relação entre o vetor polarização \mathbf{P} e o campo incidente \mathbf{E}_{inc} :

$$\mathbf{P} = 3\epsilon_m \left(\frac{M^2 - 1}{M^2 + 2} \right) \left[1 - \frac{M^2 - 1}{M^2 + 2} \left((k_m a)^2 - j \frac{2}{3} (k_m a)^3 \right) \right]^{-1} \mathbf{E}_{\text{inc}}. \quad (4.70)$$

Portanto, como $\mathbf{p} = V\mathbf{P}$ e $V = (4/3)\pi a^3$, segue que:

$$\mathbf{p} = \alpha_{e,R} \mathbf{E}_{\text{inc}}, \quad (4.71)$$

com

$$\alpha_{e,R} = \alpha_{\text{CM}} \left[1 - \frac{M^2 - 1}{M^2 + 2} \left((k_m a)^2 - j \frac{2}{3} (k_m a)^3 \right) \right]^{-1} \quad (4.72a)$$

$$\alpha_{\text{CM}} = 4\pi\epsilon_m a^3 \left(\frac{M^2 - 1}{M^2 + 2} \right). \quad (4.72b)$$

O termo α_{CM} (equação 4.72b) corresponde à relação de Clausius-Mossotti e descreve a polarizabilidade elétrica no limite quase estático, ou seja, $k_m \rightarrow 0$.

À seguir, o coeficiente de Mie a_1 é avaliado sob a condição $k_m a \ll 1$. Seja $x = k_m a$, comumente denominado de parâmetro de tamanho da partícula. Expandindo-se as funções $\Psi_n(x)$ e $\xi_n(x)$ e suas derivadas $\Psi'_n(x)$ e $\xi'_n(x)$ em série de potência e restringindo-se aos primeiros termos, tem-se⁹⁷:

$$\Psi_n(x) \approx \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{30} \quad (4.73a)$$

$$\Psi'_n(x) \approx \frac{2x}{3} - \frac{2x^3}{15} \quad (4.73b)$$

$$\xi_n(x) = \frac{j}{x} + j \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \quad (4.73c)$$

$$\xi'_n(x) = -\frac{j}{x^2} + \frac{j}{2} + \frac{2x}{3}. \quad (4.73d)$$

Logo, a expressão para o coeficiente de Mie a_1 (equação 3.44a com $n = 1$) utilizando-se as aproximações da equação 4.73 é dada por⁹⁷:

$$a_1 = \frac{4}{9} \left(\frac{M^2 - 1}{M^2 + 2} \right)^2 (k_m a)^6 + j \frac{2}{3} \left(\frac{M^2 - 1}{M^2 + 2} \right) (k_m a)^3, \quad (4.74)$$

em que restringiu-se tanto a parte real quanto a parte imaginária apenas ao termo de mais baixa ordem em $(k_m a)^n$.

Portanto, substituindo-se a equação 4.74 em 4.54a, segue que a polarizabilidade elétrica sob a condição $k_m a \ll 1$ é dada por:

$$\alpha_e = \alpha_{\text{CM}} \left(1 + \frac{k_m^6 \alpha_{\text{CM}}^2}{36\pi^2 \epsilon_m^2} \right) \left(1 + j \frac{k_m^3}{6\pi \epsilon_m} \alpha_{\text{CM}} \right)^{-1}. \quad (4.75)$$

Como $k_m^6 \alpha_{\text{CM}}^2$ é proporcional a $(k_m a)^6$, que assume valor desprezível sob a condição de $k_m a \ll 1$, tem-se:

$$\alpha_e \approx \alpha_{\text{CM}} \left(1 + j \frac{k_m^3}{6\pi \epsilon_m} \alpha_{\text{CM}} \right)^{-1} = \alpha_{\text{CM}} \left[1 + j \frac{2}{3} \left(\frac{M^2 - 1}{M^2 + 2} \right) (k_m a)^3 \right], \quad (4.76)$$

que corresponde à equação 4.72 desprezando-se o termo $(k_m a)^2$, simplificação usualmente realizada na literatura para análise de forças ópticas no regime de Rayleigh.^{95,98,99}

5 RESULTADOS

5.1 Comparação entre o método da expansão multipolar da força óptica e a Teoria Generalizada de Lorenz-Mie

Nesta seção, a força óptica média total calculada pelo método MEOF truncado até termos de quadrupolos é comparada com a força radiativa obtida pela GLMT. Resultados e análises provenientes desta comparação foram publicados no periódico internacional "*Journal of the Optical Society of America B*" e estão presentes no artigo 100.

Utilizando-se o método da MEOF, a força óptica é calculada por meio das equações 4.46 e 4.47, com os momentos dipolares e quadrupolares dados pelas expressões em 4.49 e 4.51; as polarizabilidades e quadrupolarizabilidades pelas equações em 4.54 e 4.56 e os coeficientes de Mie a_1 , b_1, a_2 e b_2 pelas equações em 3.44a e 3.44b.

Para que a força óptica obtida pela GLMT siga a configuração adotada no método da MEOF (descrita na figura 4), é necessário realizar-se a transformação $(x_0, y_0, z_0) \rightarrow (-x_0, -y_0, -z_0)$ na expressão 3.63 do cálculo de forças na GLMT:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}}(x_0, y_0, z_0) = |E_0|^2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{\mu_m}} \frac{1}{u_m} \mathbf{C}_{\text{pr}}(-x_0, -y_0, -z_0). \quad (5.1)$$

com \mathbf{C}_{pr} calculado por meio das equações 3.61 e 3.63.

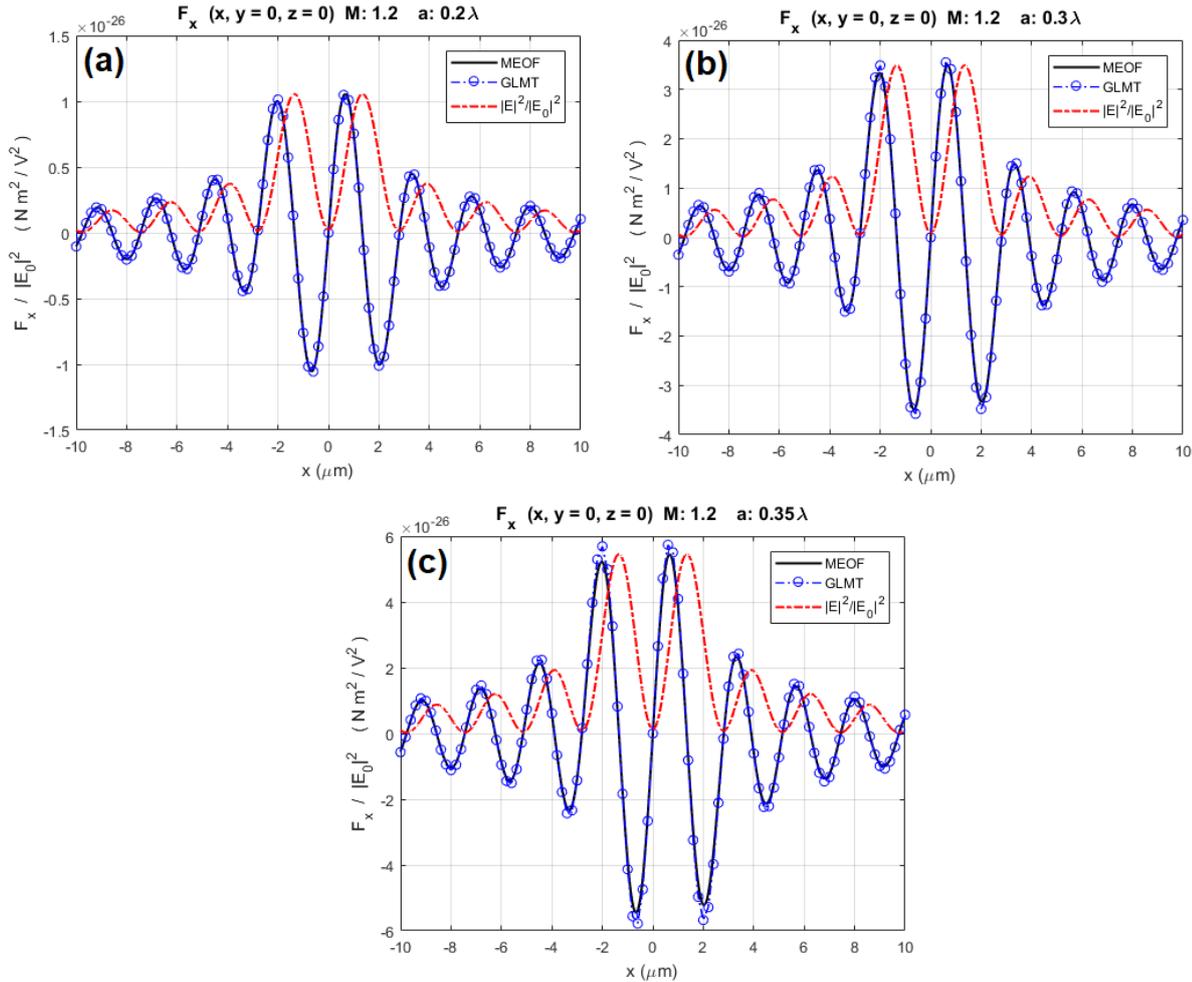
Adotou-se como campos incidentes o feixe Gaussiano descrito pela equações em 2.63, o feixe de Bessel ideal (equações em 2.65) e a superposição discreta de feixes de Bessel ideais (equações em 2.64). Para todos estes feixes incidentes, assumiu-se polarização linear em x , ou seja, $X = 1$ e $Y = 0$. Os fatores de forma $g_{n,\text{TM}}^m$ e $g_{n,\text{TE}}^m$ associados a estes feixes são os descritos pelas equações 3.73 e 3.71.

O meio onde a partícula está imersa é dielétrico ($\mu_m = \mu_0$) com índice de refração $n_m = \sqrt{\epsilon_m/\epsilon_0} = 1,33$, que corresponde a água destilada. A partícula também é dielétrica ($\mu_p = \mu_0$) com índice de refração relativo $M = \sqrt{\epsilon_p/\epsilon_m} = 1,2$, que corresponde a uma partícula de poliestireno. O comprimento de onda da fonte laser (no espaço livre) é $\lambda_0 = 1064$ nm. Logo, $\lambda_m = \lambda_0/n_m = 800$ nm. Adotou-se $P = 100$ mW para a potência do feixe. No caso do FB ideal e da superposição discreta de FBs (os quais apresentam fluxo de energia infinito), a força óptica é expressa em termos de $\mathbf{F}/|E_0|^2$.

A componente transversal F_x da força óptica total ao longo do eixo nas posições $(x_0, y_0 = 0, z_0 = 0)$ é analisada na figura 6 para um FB ideal (equação 2.65) de ordem $\nu = 1$ e ângulo de cone $\beta = 10^\circ$. Nas linhas sólidas pretas a componente F_x é calculada pelo método da MEOF enquanto nas linhas azuis pontilhadas com círculos pela GLMT. A análise é realizada para raio da partícula $a = 0,2 \lambda_m$ (a), $a = 0,3 \lambda_m$ (b) e $a = 0,35 \lambda_m$

(c). A amplitude ao quadrado do feixe incidente $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FB})}|^2/|E_0|^2$ é representada pelas linhas vermelhas pontilhadas.

Figura 6 – Componente transversal F_x ao longo do eixo x calculado pelo MEOF (linhas sólidas pretas) e pela GLMT (linhas azuis pontilhadas com círculos) sobre uma partícula dielétrica com $M = 1,2$ e raio $a = 0,2 \lambda_m$ (a), $a = 0,3 \lambda_m$ (b) e $a = 0,35 \lambda_m$ (c). O campo incidente é um feixe de Bessel ideal de ordem $\nu = 1$ (linhas vermelhas pontilhadas) com ângulo de cone $\beta = 10^\circ$.



Fonte: Extraída da referência 100, publicada pelo autor.

Na figura 7, a comparação é feita para um feixe Gaussiano (equação 2.63) com $W_0/\lambda_m = 25/\pi$ ($s = 0,02$). As linhas sólidas pretas representam a força óptica total em piconewtons (pN) calculada pelo MEOF. Os termos da força de extinção estão representados pelas demais linhas sólidas: forças dipolares elétrica e magnética, \mathbf{F}_p e \mathbf{F}_m , em vermelho e em azul respectivamente; e forças quadrupolares elétrica e magnética, \mathbf{F}_{Qe} e \mathbf{F}_{Qm} , em magenta e em verde, respectivamente. Os termos da força de recuo estão representados pelas linhas tracejadas: \mathbf{F}_{pm} (vermelho), \mathbf{F}_{pQe} (azul), \mathbf{F}_{pQm} (magenta) e \mathbf{F}_{QeQm} (verde).

A força óptica calculada pela GLMT é mostrada pelas linhas pretas pontilhadas com círculos. Nas figuras 7(a)-(c) tem-se a análise para a componente longitudinal F_z nas posições $(x_0 = 0, y_0 = 0, z_0)$, respectivamente para $a = 0,2 \lambda_m$ (a), $a = 0,3 \lambda_m$ (b) e $a = 0,35 \lambda_m$ (c). A mesma análise é realizada nas figuras 7(d)-(f) para a componente transversal F_x nas posições $(x_0, y_0 = 0, z_0 = 0)$.

Na figura 8, a comparação entre o método da MEOF e a GLMT é realizada considerando como feixe incidente uma superposição discreta de FBs (equação 2.64) composta por 31 FBs ($N = 15$) de ordem $\nu = 0$. O comprimento de onda central da superposição é igual a $Q = 0,95\omega_0/u_m$ e a função $F(z)$, definida sobre o intervalo $-L/2 \leq z_0 \leq L/2$, é dada por:

$$F(z) = \begin{cases} 1, & -(7/20)L \leq z \leq -(3/20)L \text{ e } (3/20)L \leq z \leq (7/20)L \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (5.2)$$

com $L = 500 \mu\text{m}$. O maior ângulo de áxicons presente na superposição é $\beta_{\text{max}} = \text{acos}[k_{z,-N}/(\omega_0/u_m)] \approx 22,17^\circ$.

A amplitude de campo ao quadrado $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWD})}|^2/|E_0|^2$ ao longo do eixo z_0 e sobre o plano $y_0 = 0$ são mostradas, respectivamente, nas figuras 8(a) (linhas sólidas pretas) e 8(c). As linhas tracejadas vermelhas na figura 8(a) corresponde a $|F(z)|^2$ e a 8(b) apresenta a amplitude e a fase de cada FB que compõe a superposição (coeficientes A_n obtidos por meio da equação 2.25) em função de seus respectivos número de onda longitudinais. Observa-se na figura 8(a) que a amplitude de campo ao quadrado não é exatamente igual às funções degrau que definem $F(z)$ na equação 5.2 já que para uma reprodução perfeita de $|F(z)|^2$ seria necessário $N \rightarrow \infty$.

A componente longitudinal F_z nas posições $(x_0 = 0, y_0 = 0, z_0)$ e a componente transversal F_x em $(x_0, y_0 = 0, z_0 = -100\mu\text{m})$ calculadas pelo MEOF (linhas sólidas pretas) e pela GLMT (linhas azuis tracejadas com círculos) são mostradas, respectivamente, nas figuras 8(d)-(f) e 8(g)-(i) para $a = 0,2 \lambda_m$ [figuras (d) e (g)], $a = 0,3 \lambda_m$ [figuras (e) e (h)] e $a = 0,35 \lambda_m$ [figuras (f) e (i)].

Na figura 9 tem-se uma análise similar ao da figura 8 alterando-se apenas a ordem dos FBs que compõem a superposição para $\nu = 3$ e o número de onda longitudinal central para $Q = 0,60\omega_0/u_m$. A amplitude de campo ao quadrado $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWD})}|^2/|E_0|^2$ sobre o plano $y_0 = 0$ é mostrada na figura 9(a). Nas figuras 9(b)-(f) tem-se a componente longitudinal da força óptica F_z ao longo do cilindro de máxima intensidade, localizado em $\rho = \rho_c = 0,66764\mu\text{m}$. O método da MEOF (linhas pretas sólidas) é comparado com a GLMT (linhas azuis tracejadas com círculos), respectivamente, para $a = 0,2 \lambda_m$ (b), $a = 0,3 \lambda_m$ (c), $a = 0,35 \lambda_m$ (d), $a = 0,4 \lambda_m$ (e) e $a = 0,5 \lambda_m$ (f). As linhas vermelhas tracejadas representam $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWD})}|^2/|E_0|^2$ ao longo do cilindro de raio $\rho = \rho_c$.

Figura 7 – Componente longitudinal F_z da força óptica ao longo do eixo z calculada pelo MEOF (linhas sólidas pretas) e pela GLMT (linhas pretas pontilhadas com círculos). A partícula é dielétrica com $M = 1.2$ e raio $a = 0,2 \lambda_m$ (a), $a = 0,3 \lambda_m$ (b) e $a = 0,35 \lambda_m$ (c). Os termos da força de extinção e de recuo são representados, respectivamente, por linhas sólidas e pontilhadas. O campo incidente é um feixe Gaussiano com $s = 0,02$ ($W_0/\lambda_m = 25/\pi$). A mesma análise é feita para a componente transversal F_x ao longo do eixo x nas figuras (d)-(f).

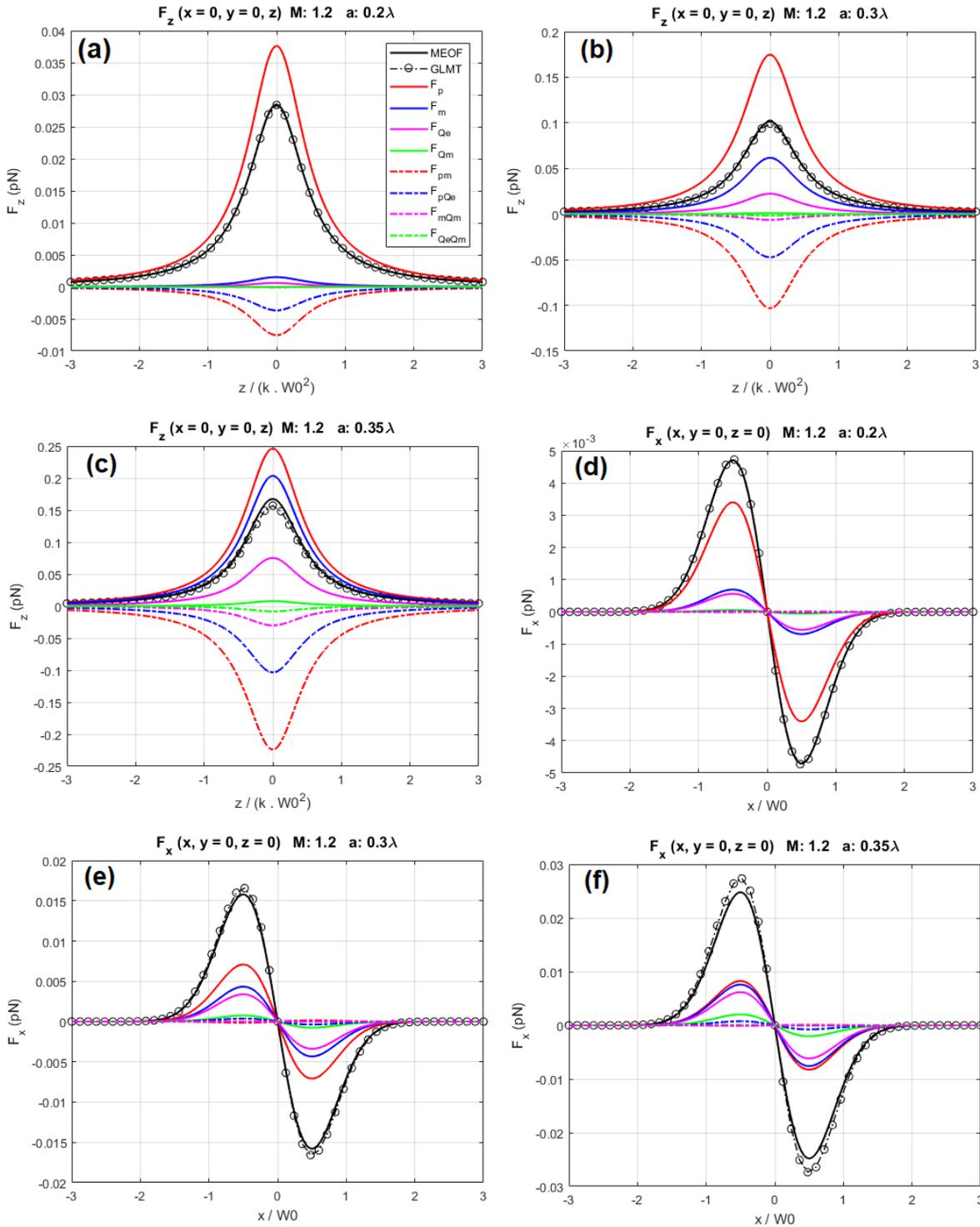
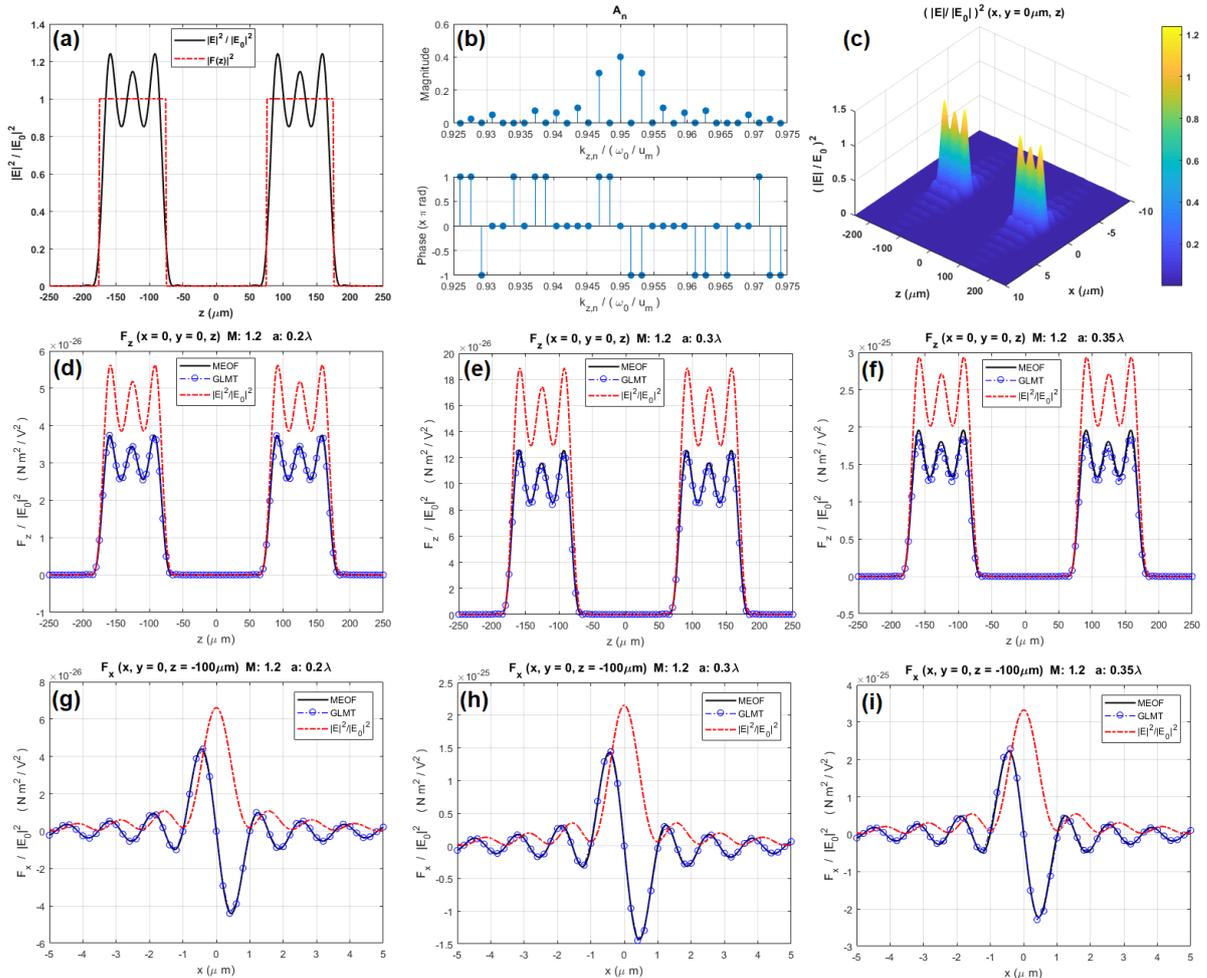
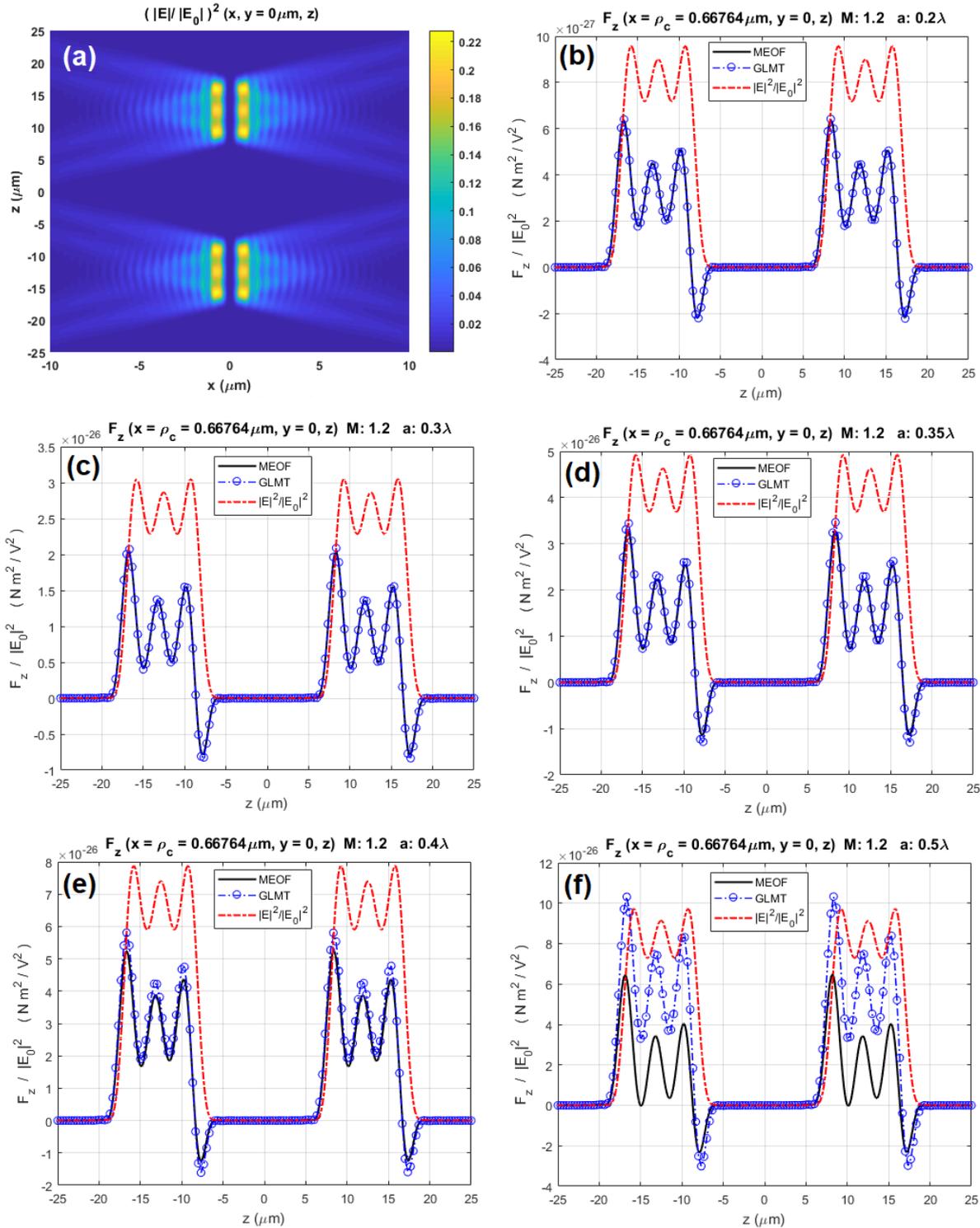


Figura 8 – Análise para uma FW discreta contendo 31 feixes de Bessel ideais de ordem $\nu = 0$. (a) $|F(z)|^2$ (linha vermelha tracejada) e $|\mathbf{E}|^2/|E_0|^2$ ao longo do eixo z (linha sólida preta). (b) Amplitude e fase dos coeficientes A_n . (c) $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{\text{FWD}}|^2/|E_0|^2$ no plano xz . Nas figuras (d)-(l), forças ópticas calculadas pelo método da MEOF (linhas sólidas pretas) e pela GLMT (linhas azuis pontilhadas com círculos) sobre uma partícula dielétrica com $M = 1.2$. Componente longitudinal $F_z/|E_0|^2$ ao longo do eixo z para $a = 0,2 \lambda_m$ (d), $a = 0,3 \lambda_m$ (e) e $a = 0,35 \lambda_m$ (f). A mesma análise para a componente transversal $F_x/|E_0|^2$ em $z = -100 \mu\text{m}$ ao longo do eixo x é mostrada nas figuras (g)-(i). Para melhor visualização, $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{\text{FWD}}|^2/|E_0|^2$ nas figuras (d)-(l), mostrado em linhas tracejadas vermelhas, é multiplicado por $\max[F_z/|E_0|^2] \times 1,5$ ou $\max[F_x/|E_0|^2] \times 1,5$.



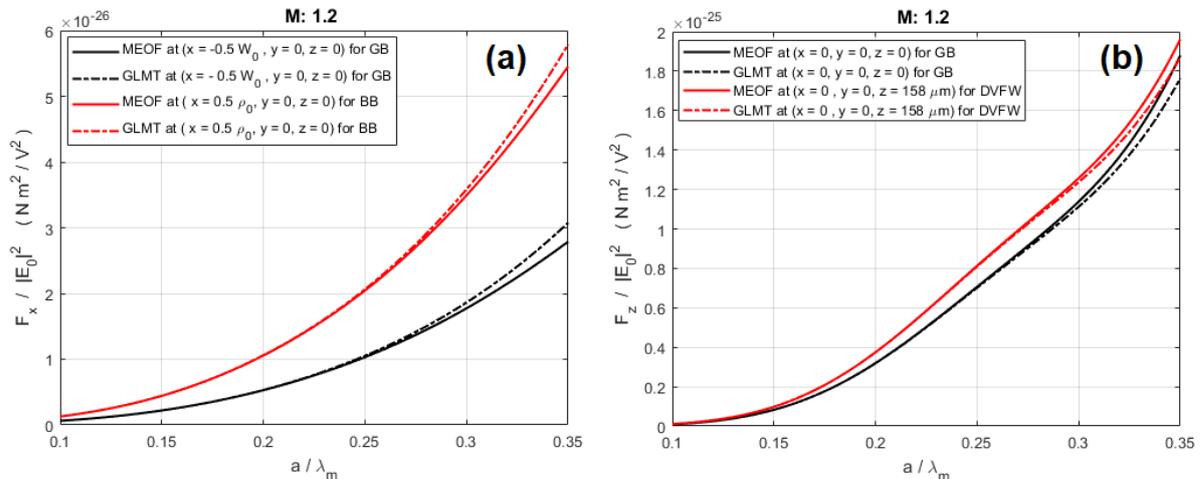
Fonte: Extraída da referência 100, publicada pelo autor.

Figura 9 – Análise para uma FW discreta contendo 31 feixes de Bessel ideais de ordem $\nu = 3$ com $Q = 0,60(\omega_0/u_m)$ e $L = 50\mu\text{m}$. (a) $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{\text{FWD}}|^2/|E_0|^2$ no plano xz . Componente longitudinal $F_z/|E_0|^2$ sobre uma partícula dielétrica com $M = 1.2$ ao longo do cilindro de raio $\rho = \rho_c$ para $a = 0,2 \lambda_m$ (b), $a = 0,3 \lambda_m$ (c), $a = 0,35 \lambda_m$ (d), $a = 0,4 \lambda_m$ (e) e $a = 0,5 \lambda_m$ (f). Linhas sólidas pretas: força óptica calculada pelo método da MEOF e linhas azuis pontilhadas com círculos pela GLMT. Para melhor visualização, $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{\text{FWD}}|^2/|E_0|^2$ nas figuras (b)-(f), mostrado em linhas tracejadas vermelhas, é multiplicado por $\max[F_z/|E_0|^2] \times 1,5$



Observa-se nas figuras 6, 7, 8 e 9 que para $a = 0,2 \lambda_m$ o método da MEOF truncado até termos de quadrupolo consegue reproduzir os resultados obtidos com a GLMT com precisão. Para $a = 0,3 \lambda_m$ e $a = 0,35 \lambda_m$, nota-se diferenças notáveis nos locais de máxima amplitude de força, como em $x_0 = \pm W_0/2$ e $z_0 = 0$ para o feixe Gaussiano e em $x_0 = \pm \rho_c/2$ para o FB ideal. Tais diferenças indicam que para estes dois valores de raio a se faz necessário ao menos incluir os termos de octupolo elétrico e octupolo magnético no método da MEOF. Para $a = 0,4 \lambda_m$ e $a = 0,5 \lambda_m$, analisados nas figuras 9(e)-(f), observa-se diferenças notáveis entre os dois métodos em vários pontos indicando que, possivelmente, para estes casos mais termos multipolares além dos de octupolos devem ser incluídos no método da MEOF.

Figura 10 – Comparação entre o método da MEOF (linhas sólidas) e a GLMT (linhas tracejadas) em função do raio a da partícula. (a) Componente transversal F_x exercida pelo feixe Gaussiano (linhas pretas) na posição $(x_0 = -W_0/2, y_0 = 0, z_0 = 0)$ e pelo FB ideal (linhas vermelhas) na posição $(x_0 = \rho_c/2, y_0 = 0, z_0 = 0)$. (b) Componente transversal F_z exercida pelo feixe Gaussiano (linhas pretas) na posição $(x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0)$ e pela superposição discreta de FBs ideais DVFW da figura 8 (linhas vermelhas) na posição $(x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 158 \mu\text{m})$.



Fonte: Extraída da referência 100, publicada pelo autor.

Na figura 10 tem-se a comparação entre o método da MEOF (linhas sólidas) com a GLMT (linhas tracejadas) em função do raio a da partícula nos pontos onde observou-se maior diferença entre a força óptica obtida pelos dois métodos. Na figura 10(a), a componente transversal F_x é avaliada na posição $(x_0 = -W_0/2, y_0 = 0, z_0 = 0)$ para o feixe Gaussiano (linhas pretas) e na posição $(x_0 = \rho_c/2, y_0 = 0, z_0 = 0)$ para o FB ideal (linhas vermelhas). Já na figura 10(b), a componente longitudinal F_z é avaliada na posição $(x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0)$ para o feixe Gaussiano (linhas pretas) e na posição

($x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 158\mu\text{m}$) para a superposição discreta de FBs ideais da figura 8 (linhas vermelhas).

Na análise da convergência dos coeficientes de Mie a_n e b_n para um determinado valor de a e de M ,⁹⁷ nota-se que estes coeficientes tornam-se desprezíveis quando $n > L_{\text{Mie}}$. Uma primeira aproximação para o parâmetro L_{Mie} é dada por $L_{\text{Mie}} \approx k_m a$.¹⁰¹ Logo, pode-se utilizar desta expressão para estimar o limite superior para o raio da partícula a_{max} de modo que o método da MEOF truncado em termos de quadrupolo consegue reproduzir os resultados da GLMT satisfatoriamente. Logo, para $L_{\text{Mie}} = 2$, que envolve, portanto, apenas os coeficientes a_1, a_2, b_1 e b_2 , tem-se $a_{\text{max}} = (1/\pi)\lambda_m \approx 0,318\lambda_m$.

5.2 Forças ópticas produzidas por superposições contínuas de feixes de Bessel em partículas de Rayleigh

As forças ópticas foram calculadas no regime de Rayleigh por meio da equação 4.63, que, como visto na seção 4.5, corresponde à força dipolar elétrica (equação 4.24). A expressão da polarizabilidade elétrica α_e (equação 4.54a) simplifica-se para a equação em 4.72. A superposição contínua de FBs ideais é descrita por meio das equações em 2.73.

5.2.1 Ordem zero

Os resultados relativos a análise de forças ópticas produzidas pelas superposições contínuas de FBs ideais de ordem zero ($\nu = 0$) no regime de Rayleigh foram apresentados e publicados nos anais da Conferência nacional SBFoton IOPC 2018.¹⁰²

Assumiu-se comprimento de onda no espaço livre $\lambda_0 = 1064$ nm, potência $P = 1$ mW, polarização linear em x ($X = 1$ e $Y = 0$) e água ($n_m = 1,33$) sendo o meio contendo a partícula. A função $F(z)$ é dada por:

$$F(z) = \cos\left(\frac{6\pi z}{Z_{\text{max}}}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\frac{3}{16}Z_{\text{max}}}\right)^2\right] \exp(-jQz), \quad (5.3)$$

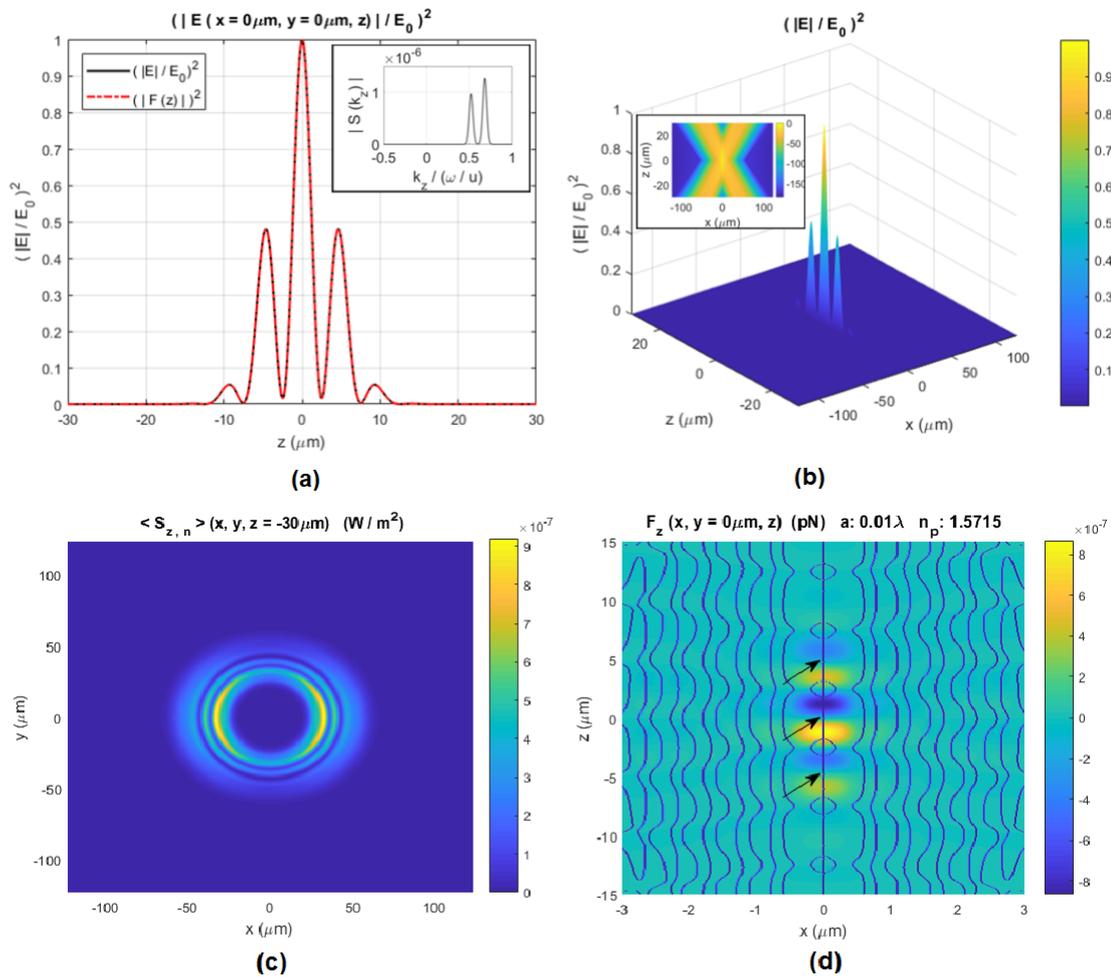
a qual é definida entre $-30\mu\text{m} \leq z \leq Z_{\text{max}} = 30\mu\text{m}$. Adotou-se $Q = 0,6\omega_0/u_m$.

As figuras 11(a) e 11(b) apresentam o módulo ao quadrado do campo elétrico da superposição contínua de FBS ideais de ordem zero $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWC})}|^2/|E_0|^2$ ao longo do eixo z (eixo óptico) e no plano xz , respectivamente. A linha vermelha tracejada na figura 11(a) refere-se à $|F(z)|^2$. Nota-se que, de fato, $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWC})}|^2/|E_0|^2$ segue $|F(z)|^2$ ao longo do eixo z .

As figuras inseridas presentes nas figuras 11(a) e 11(b) mostram, respectivamente, o módulo do espectro de ordem zero $|S_0(k_z)|$, calculado pela equação 2.43, e $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWC})}|^2/|E_0|^2$ em escala logarítmica. Na figura 11(c) tem-se o fluxo de potência médio normalizado $(1/2)\text{Re}(S_z)$ (para $E_0 = 1$ V/m) no plano $z = -30\mu\text{m}$. A integração desse fluxo é utilizado para o cálculo da constante E_0 a partir da equação 2.74, o que permite expressar as forças ópticas em newtons.

Na figura 11(d) tem-se a componente longitudinal F_z da força óptica no plano xz sobre uma partícula de poliestireno sem perdas ($M = 1,1798$) de raio $a = 0,01\lambda_m$. As linhas escuras indicam pontos onde a componente transversal F_x é nula. Ao longo do eixo óptico ($x_0 = y_0 = 0$), é possível identificar três pontos de aprisionamento estáveis os quais estão indicados pelas setas. Nestes pontos, tem-se $F_z = F_x = 0$ e $dF_z/dz < 0$.

Figura 11 – Superposição contínua de FBs ideais de ordem zero com função $F(z)$ definida pela equação 5.3 com $Q = 0,6 \omega_0/u_m$. Módulo ao quadrado do campo elétrico ao longo do eixo z (a) e no plano xz (b). (c) Fluxo de potência médio normalizado (para $E_0 = 1$ V/m) no plano $z = -Z$. (d) Força óptica longitudinal F_z no plano xz sobre uma partícula de poliestireno sem perdas e raio $a = 0,01\lambda_m$. As linhas escuras indicam pontos onde a componente F_x é nula.



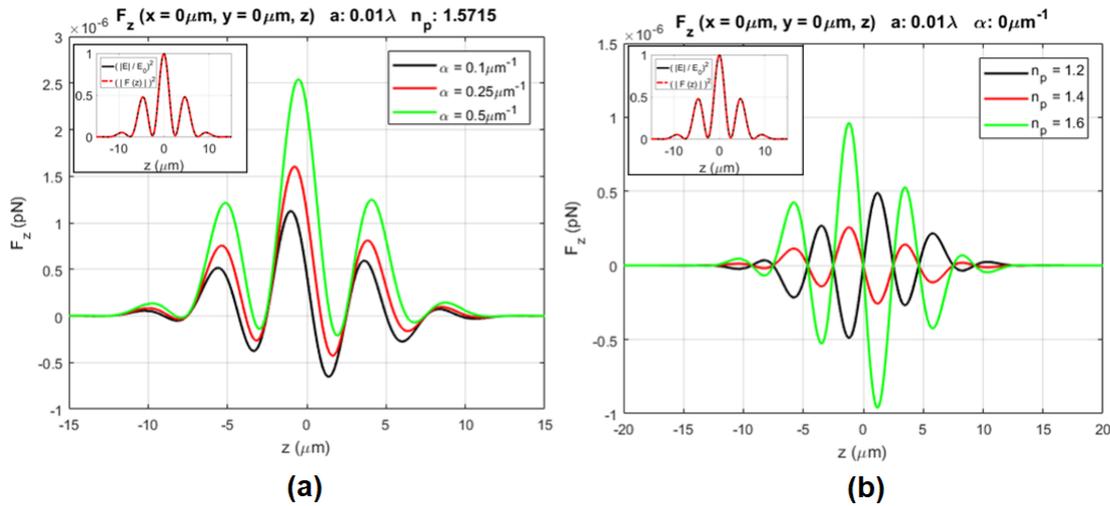
Fonte: Extraída da referência 102, publicada pelo autor.

A componente longitudinal F_z nas posições ($x_0 = y_0 = 0, z_0$) é mostrada na figura 12(a) para uma partícula de poliestireno com perdas ($M = 1,1798 - jM_I$, com $M_I \neq 0$). Na figura, as perdas são expressas em termos do coeficiente de absorção $\alpha = 4\pi M_I/\lambda_m$. Os seguintes valores de coeficiente de absorção α são considerados: $\alpha = 0, 1\mu\text{m}^{-1}$ (linha em preto), $\alpha = 0, 25\mu\text{m}^{-1}$ (linha em vermelho) e $\alpha = 0, 5\mu\text{m}^{-1}$ (linha em verde). Como

esperado, quanto mais absorptiva a partícula, mais difícil torna-se o aprisionamento devido ao aumento da força de espalhamento perante à força gradiente. A figura inserida corresponde ao gráfico da figura 11(a).

Na figura 12(b), tem-se a componente longitudinal F_z nas posições ($x_0 = y_0 = 0, z_0$) para uma partícula sem perdas para diferentes valores de índice de refração $n_p = Mn_m$: $n_p = 1,2$ (linha em preto), $n_p = 1,4$ (linha em vermelho) e $n_p = 1,6$ (linha em verde). Como esperado, observa-se que os pontos de aprisionamento estáveis para os casos em que $M > 1$ (linhas em vermelho e em verde) correspondem a pontos de aprisionamento instáveis para os casos em que $M < 1$ (linha em preto).

Figura 12 – Força óptica longitudinal F_z ao longo do eixo óptico produzida pela superposição contínua de FBs ideais de ordem zero da figura 11. (a) Para diferentes valores de coeficiente de absorção α da partícula e (b) para diferentes valores de índice de refração $n_p = Mn_m$.



Fonte: Extraída da referência 102, publicada pelo autor.

5.2.2 Ordens superiores

5.2.2.1 Ordem unitária

Os resultados relativos a análise de forças ópticas produzidas pelas superposições contínuas de FBs ideais de ordem $\nu = 1$ no regime de Rayleigh foram publicados no periódico internacional "*Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer (JQSRT)*" e estão presentes no artigo 73.

O meio onde a partícula está imersa é água $n_m = 1,33$, o comprimento de onda no espaço livre é $\lambda_0 = 1064$ nm (e, portanto, $\lambda_m = \lambda_0/n_m = 800$ nm) e a potência do feixe incidente é $P = 100$ mW. A partícula apresenta índice de refração $n_p = 1,59 - j0,05$ ($M = 1,195 - j0,0376$) e raio $a = 50$ nm = $0,0625\lambda_m$. Para $F(z)$ adotou-se a seguinte

função:

$$F(z) = \exp\left[-\frac{(z-\delta)^2}{2\sigma^2}\right] \left[\cos(\Omega_1 z)u_1 + \cos(\Omega_2 z)u_2 \right] \exp(-jQz), \quad (5.4)$$

com $u_1 = H(z + 0, 95Z_{\max}) - H(z)$ e $u_2 = H(z) - H(z - 0, 95Z_{\max})$, onde $H(\cdot)$ é a função de Heaviside:

$$H(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1/2, & z = 0 \\ 1, & z > 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

A função $F(z)$ da equação 5.4 é definida no intervalo $-30 \mu\text{m} \leq z \leq Z_{\max} = +30 \mu\text{m}$. Além disso, adotou-se $Q = 0, 7\omega_0/u_m$, $\Omega_1 = 0, 05\omega_0/u_m$, $\Omega_2 = 0, 1\omega_0/u_m$, $\sigma = 0, 35Z_{\max}$ e $\delta = 0$.

As figuras 13(a) e 13(b) apresentam o módulo ao quadrado do campo elétrico da FW contínua de ordem $\nu = 1$ $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWC})}|^2/|E_0|^2$ no plano xz , respectivamente, para polarização circular à esquerda (PCE) $[X, Y] = (1/\sqrt{2})[1, j]$ e polarização circular à direita (PCD) $[X, Y] = (1/\sqrt{2})[1, -j]$. As figuras inseridas mostram a amplitude quadrado das componentes de campo elétrico ao longo do eixo x ($y_0 = z_0 = 0$). Em magenta tem-se $(|E_x|/E_0)^2 = (|E_y|/E_0)^2$ e em azul, $(|E_z|/E_0)^2$.

Na figura 13(c) tem-se $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWC})}|^2/|E_0|^2$ para o caso de PCE [figura 13(a)] ao longo da superfície cilíndrica de máxima amplitude a qual está localizada em $\rho = \rho_c = 0,3758 \mu\text{m}$. A linha vermelha tracejada refere à $|F(z)|^2$. O módulo do espectro $|S_1(k_z)|$ é mostrado na figura inserida.

Observa-se que no case de PCE [figura 13(a)], a amplitude ao quadrado do campo elétrico $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWC})}|^2/|E_0|^2$ está concentrada ao longo de uma superfície cilíndrica enquanto que no caso da PCD tem-se valor máximo ao longo do eixo z . Este fato ocorre devido à presença da componente longitudinal de campo E_z . Nota-se pela figura inserida em 13(a) que no caso da PCE a componente E_z apresenta ordem maior do que a ordem $\nu = 1$ da componente transversal E_x . Já no caso da PCD, E_z apresenta ordem $\nu = 0$. Esta diferença na composição da componente E_z para cada tipo de polarização (PCE ou PCD) resulta em configurações diferentes para a amplitude de campo $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWC})}|^2/|E_0|^2$.

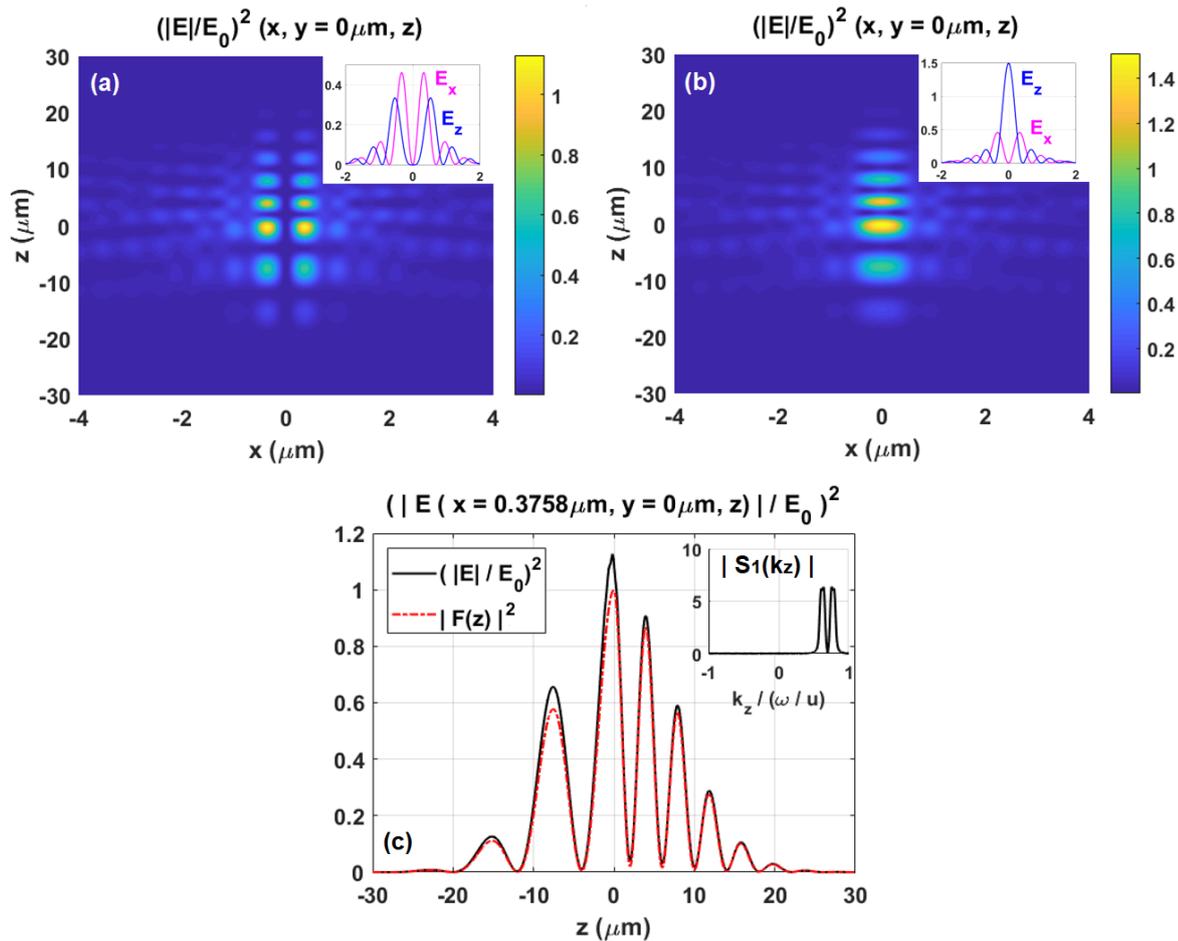
A ordem da componente E_z pode ser analisada por meio da equação 2.73c. Para o caso de PCE, tem-se $M_1(\phi) = M_2(\phi) = \exp(j\phi)/\sqrt{2}$ e, logo, a dependência azimutal de E_z é igual a $\exp[j(\nu + 1)\phi]$, ou seja, E_z apresenta ordem $\nu + 1$. Já para o caso de PCD, $M_1(\phi) = M_2(\phi) = \exp(-j\phi)/\sqrt{2}$ e, portanto, a dependência azimutal de E_z é dada por $\exp[j(\nu - 1)\phi]$, ou seja, E_z apresenta ordem $\nu - 1$. Esta conclusão também é válida a componente E_z dos demais feixes vetoriais analisados seção 2.2 do capítulo 2. Em particular para um FB, esta conclusão está de acordo com os resultados encontrados na referência 43.

A região de máxima amplitude do feixe escalar (definido apenas pelas componentes

transversais E_x e E_y , ambas de ordem $\nu = 1$) corresponde a uma superfície cilíndrica com raio $\rho = \rho_{c,esc} = 0,3283 \mu\text{m}$, calculado pela equação 2.27. No caso da figura 13(a), ou seja, PCE, observa-se que, por causa da componente E_z , de ordem $\nu = 2$, a região de máxima amplitude do feixe vetorial passa a ser uma superfície cilíndrica de raio $\rho = \rho_c = 0,3758 \mu\text{m}$.

Já no caso da figura 13(b), ou seja, PCD, a amplitude da componente E_z , de ordem $\nu = 0$, é significativamente maior do que as amplitudes das componentes transversais E_x e E_y e, portanto, apesar destas serem de ordem $\nu = 1$, o feixe vetorial não apresenta a característica de um feixe oco assumindo uma distribuição de campo tal que a região de máxima amplitude se concentra ao longo do eixo z .

Figura 13 – $|\mathbf{E}_{inc}^{(FWC)}|^2/|E_0|^2$ no plano xz para polarização circular (a) à esquerda e (b) à direita. As figuras inseridas mostram $(|E_z|/E_0)^2$ e $(|E_x|/E_0)^2 = (|E_y|/E_0)^2$ em azul tracejado e em magenta, respectivamente, para $y = z = 0$. (c) $|\mathbf{E}_{inc}^{(FWC)}|^2/|E_0|^2$ e $|F(z)|^2$ no cilindro de máxima intensidade da figura 13(a). $|S_1(k_z)|$ na figura inserida.

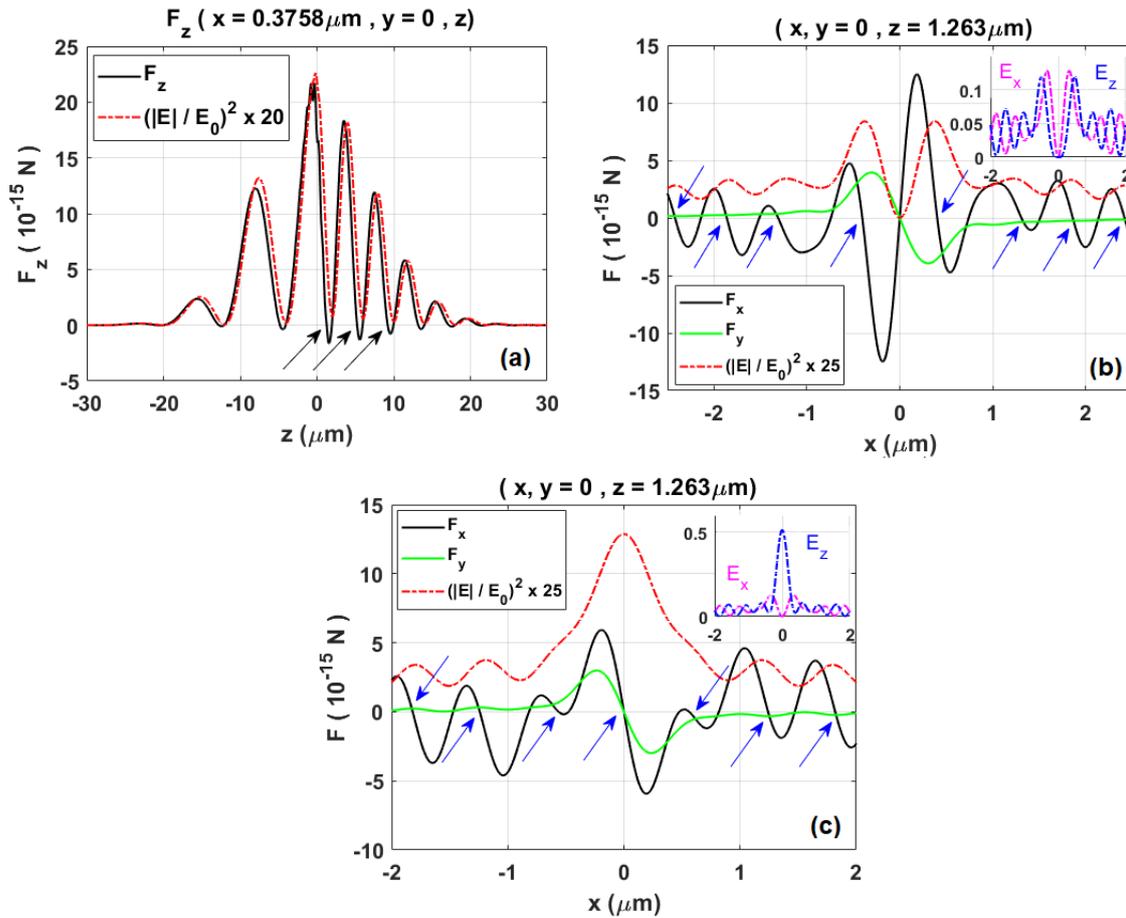


Fonte: Extraída da referência 73, publicada pelo autor.

Na figura 14(a) a força óptica longitudinal F_z (linha em preto) é calculada ao longo

do cilindro de máxima amplitude para o caso de PCE. Em vermelho tracejado tem-se $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWC})}|^2/|E_0|^2$ nesta superfície. As setas indicam pontos de aprisionamento estáveis ao longo de z . O primeiro ponto de equilíbrio longitudinal estável está localizado em $z_0 = 1,263 \mu\text{m}$. Para o caso de PCD obtém-se a mesma curva para F_z no entanto ao longo do eixo z . Dessa forma, os pontos de equilíbrio estáveis ao longo de z são os mesmos para ambas as polarizações (PCE e PCD). Para outras polarizações (linear e elíptica) também observa-se os mesmos pontos de equilíbrio estáveis ao longo de z .

Figura 14 – (a) Componente longitudinal da força óptica F_z ao longo do cilindro de máxima amplitude de campo $\rho = \rho_c$. (b) e (c) Componentes transversais F_x (linhas em preto) e F_y (linhas em verde) em $(x_0, y_0 = 0, z_0 = 1,263 \mu\text{m})$ para PCE (b) e para PCD (c). Pontos de equilíbrio estáveis longitudinais são indicados pelas setas pretas em (a). As setas azuis [em (b) e (c)] indicam pontos onde $F_x = 0$ e $dF_x/dx < 0$. O módulo ao quadrado da amplitude de campo $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWC})}|^2/|E_0|^2$ é mostrado em linha vermelha tracejada. As forças são calculadas sobre uma partícula com $a = 50 \text{ nm}$, $n_p = 1,59 - j0,05$ e imersa em água ($n_m = 1,33$).



Fonte: Extraída da referência 73, publicada pelo autor.

A figura 14(b) mostra as componentes transversais F_x (linha em preto) e F_y (linha

em verde) ao longo do eixo x em $z_0 = 1,263 \mu\text{m}$ para o caso de PCE. A mesma análise é realizada na figura 14(c) para PCD. Em ambas as figuras, $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWC})}|^2/|E_0|^2$ é mostrado em linha vermelha tracejada e as setas azuis indicam pontos onde $F_x = 0$ e $dF_x/dx < 0$, logo, pontos de aprisionamento estáveis ao longo de x .

Os resultados das figuras 14(b)-(c) se generalizam-se para qualquer eixo ρ tomado a partir da origem no plano xy com $F_\rho = F_x \cos\phi + F_y \sin\phi$ no lugar de F_x e $F_\phi = -F_x \sin\phi + F_y \cos\phi$ no lugar de F_y . As setas azuis (no lado direito) das figuras 14(b)-(c) representam, portanto, pontos onde $F_\rho = 0$ e $dF_\rho/d\rho < 0$, ou seja, pontos de equilíbrio estáveis ao longo do eixo ρ . Nota-se que nestes pontos, tem-se $F_\phi < 0$ e, logo, a partícula está sujeita a uma força óptica que a faz percorrer uma trajetória circular no sentido horário, orbitando o eixo óptico (z). Portanto, como a partícula adquire OAM, conclui-se que, de fato, tem-se transferência de OAM do feixe para a partícula.

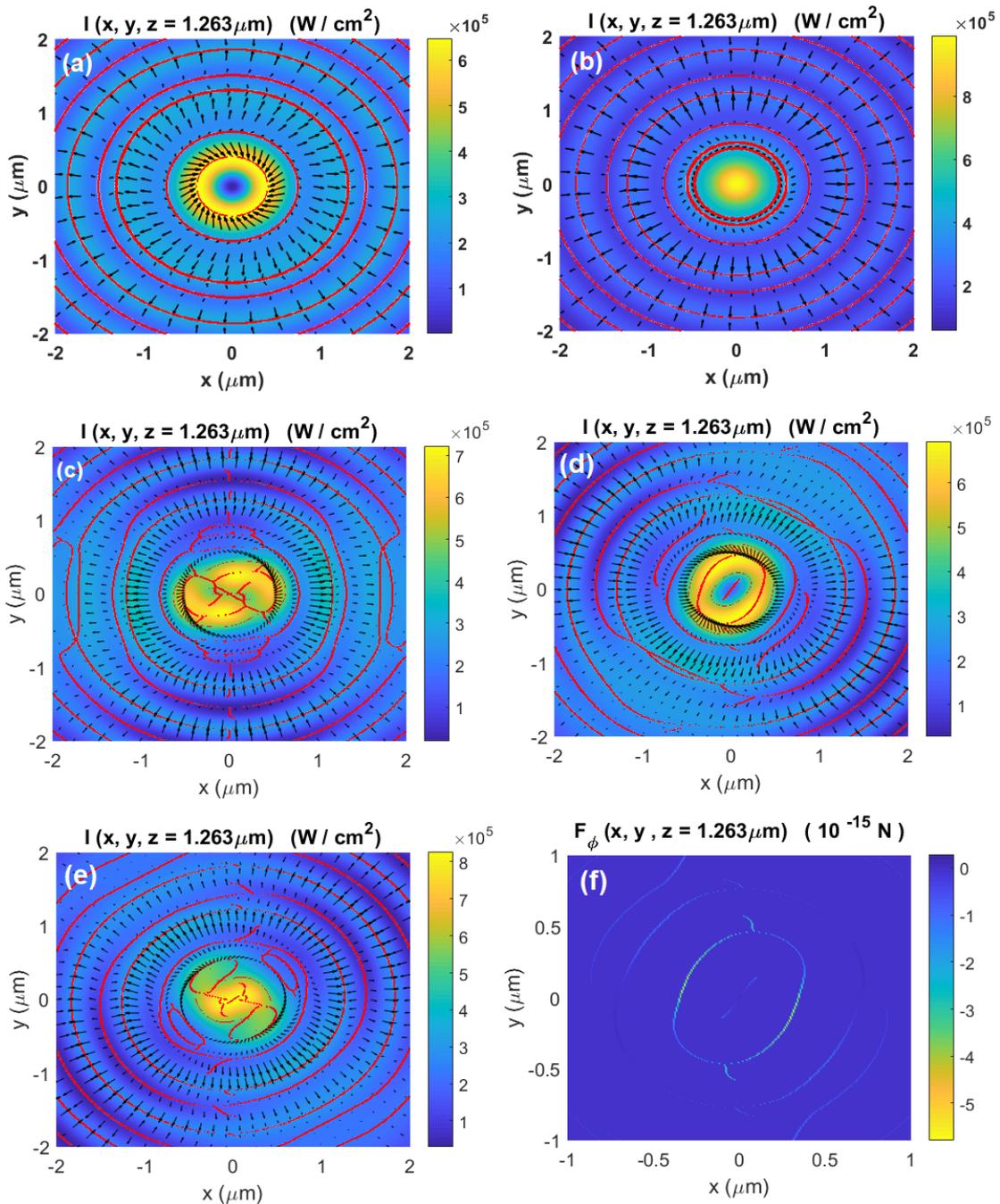
As distribuições das forças transversais (F_x e F_y) em $z = 1,263 \mu\text{m}$ para PCE, PCD e polarização linear em x ($X = 1$ e $Y = 0$) são apresentadas nas figuras 15(a), 15(b) e 15(c), respectivamente pelas setas em preto. A intensidade do feixe em W/cm^2 é mostrada no plano de fundo. As linhas vermelhas indicam pontos onde a componente radial F_ρ é nula. Observa-se que há, de fato, transferência de OAM do feixe para a partícula, como evidenciado pelo fato das linhas de força se curvarem, particularmente notório no anel de máxima amplitude de campo da figura 15(a).

Para os casos das figuras 15(a) e 15(b), a partícula é aprisionada de forma estável em circunferências onde se verifica $F_\rho = 0$ e $dF_\rho/d\rho < 0$. Nestes locais, a partícula é submetida a uma força $\mathbf{F} = F_\phi \hat{\phi}$ de amplitude constante. Para a circunferência estável mais interna no caso de PCE [figura 15(a)], tem-se $F_\phi = -3,52 \text{ fN}$. E no caso de PCD [figura 15(b)], tem-se $F_\phi = -1,22 \text{ fN}$.

Apesar de haver transferência de OAM na circunferência estável mais interna no caso de PCD, a estabilidade do aprisionamento nesta circunferência, ou seja $|dF_\rho/d\rho|$, é muito pequena sendo muito menor do que a estabilidade na circunferência estável mais interna no caso de PCE conforme pode ser observado comparando as figuras 14(b) e 14(c). Logo, na prática, devido à presença de forças exercidas pelo meio, a partícula dificilmente será aprisionada nesta circunferência (no caso de PCD).

Para as circunferências estáveis mais externas das figuras 15(a) e 15(b), observa-se que a amplitude de F_ϕ torna-se cada vez menor quanto maior o raio da circunferência. Nota-se que o torque adquirido pela partícula, ou seja, o produto de F_ϕ pelo raio da circunferência, é constante em todas as circunferências, indicando que, para uma mesma polarização, em todos estes locais a partícula adquire a mesma quantidade de OAM.

Figura 15 – Distribuições de forças ópticas transversais (F_x e F_y) no plano $z = 1,263\mu\text{m}$ [um dos pontos de aprisionamento longitudinal estável da figura 14(a)] para polarização (a) circular à esquerda, (b) circular à direita, (c) linearmente polarizada em x , (d) polarização elíptica à esquerda com $[X, Y] = [1, \sqrt{2} \exp(j\pi/4)]$ e (e) polarização elíptica à direita com $[X, Y] = [1, \sqrt{2} \exp(-j\pi/4)]$. As linhas vermelhas referem-se a locais onde a componente radial de força F_ρ é nula. As forças são calculadas sobre uma partícula com $a = 50 \text{ nm}$, $n_p = 1,59 - j0,05$ e imersa em água ($n_m = 1,33$). (f) Força tangencial $F_\phi(\rho, \phi)$ nos locais onde a componente F_ρ é nula para a polarização da figura 15(d). Nos demais pontos da figura 15(f), adotou-se $F_\phi(\rho, \phi) = 0$.



Fonte: Extraída da referência 73, publicada pelo autor.

Já no caso de polarização linear em x [figura 15(c)], verifica-se que os pontos onde $F_\rho = 0$ e $dF_\rho/d\rho < 0$ não seguem um padrão (como circunferências). Além disso, a força em que a partícula está submetida $\mathbf{F} = F_\phi(x, y)$ nestes pontos não é constante.

Nas figuras 15(d) e 15(e) tem-se as distribuições de forças transversais em $z = 1,263 \mu\text{m}$ respectivamente para polarização elíptica à esquerda com $[X, Y] = [1, \sqrt{2} \exp(j\pi/4)]$ e polarização elíptica à direita com $[X, Y] = [1, \sqrt{2} \exp(-j\pi/4)]$. Nota-se a que os locais em que a componente radial F_ρ é nula são caracterizadas por elipses. Além disso, verifica-se que nas elipses de aprisionamento estável (onde $F_\rho = 0$ e $dF_\rho/d\rho < 0$), a força em que a partícula está submetida $\mathbf{F} = F_\phi(x, y)\hat{\phi}$ não constante. Este fato pode ser observado na figura 15(f) a qual mostra $F_\phi(x, y)$ nos locais onde a componente F_ρ é nula para o caso de polarização elíptica à esquerda [figura 15(d)].

A predição do comportamento dinâmico da partícula sob a ação da força $\mathbf{F} = F_\phi(x, y)\hat{\phi}$, principalmente nos casos de polarização linear e elíptica [figuras 15(c)-(e)] é envolvente e está fora do escopo deste trabalho. Nos casos de polarização circular [figuras 15(a)-(b)] onde F_ϕ é constante, é possível prever tomando-se como base o estudo realizado por Reichert e Stark,¹⁰³ que a partícula tende a descrever as trajetórias circulares com velocidade angular constante proporcional à amplitude de F_ϕ caso o meio onde ela está imersa satisfaça o regime de fluxo laminar, ou seja, tenha número de Reynolds baixo. Logo, como na circunferência estável mais interna $|F_\phi|$ é maior no caso de PCE [figura 15(a)] em comparação com o caso de PCD [figura 15(b)], segue que a partícula adquire maior velocidade angular no caso em que o sentido da polarização (*spin*) é o mesmo da helicidade do feixe (caso da PCE). Este resultado está de acordo com os experimentos realizados por Friese et al.³⁶ em que, utilizando-se de um feixe de Laguerre-Gauss polarizado circularmente com *spin* no mesmo sentido da helicidade, foi observado que a partícula absorviva adquire uma velocidade angular maior em comparação com a utilização do feixe polarizado circularmente com *spin* contrário ao sentido da helicidade.

5.2.2.2 Outras ordens superiores

Nas simulações desta sub-subseção manteve-se os parâmetros $n_m = 1,33$, $\lambda_0 = 1064 \text{ nm}$ e $P = 100 \text{ mW}$. A função $F(z)$ é dada por:

$$F(z) = \left[\exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z + Z_{\max}/2}{Z_{\max}/8} \right)^8 \right] + \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - Z_{\max}/2}{Z_{\max}/8} \right)^8 \right] \right] \exp(-jQz), \quad (5.6)$$

sendo definida no intervalo $-40 \mu\text{m} \leq z \leq Z_{\max} = 40 \mu\text{m}$. Adotou-se $Q = 0, 6\omega_0/u_m$.

Nas figuras 16(a) e 16(b) tem-se a amplitude ao quadrado da superposição contínua de ordem zero ($\nu = 0$) e PCE ao longo do eixo óptico e no plano xz , respectivamente. A linha vermelha tracejada na figura 16(a) refere-se à $|F(z)|^2$. Similarmente, a figura 16(c) mostra $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{\text{FWC}}|^2/|E_0|^2$ para ordem $\nu = 3$ e PCE no plano xz . As figuras inseridas em

16(b)-(c) apresentam $(|E_x|/E_0)^2$ em magenta e $(|E_z|/E_0)^2$ em azul nas posições $(x, y = 0, z = 20 \mu\text{m})$.

A figura 16(d) mostra a $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{\text{FWC}}|^2/|E_0|^2$ da superposição contínua de ordem $\nu = 3$ e PCE em vários planos paralelos ao plano xy . Devido ao fato da componente E_z ser de ordem $\nu = 4$, o raio do cilindro de máxima amplitude, dado por $\rho_c = 0,7224\mu\text{m}$, é maior do que o raio $\rho_{c,\text{esc}} = 0,6686\mu\text{m}$, calculado por meio da equação 2.27.

Na figura 16(e), a amplitude do espectro $S_3(k_z)$ (linha preta sólida), calculada por meio da equação 2.52, é comparada com a amplitude do espectro $N^3S_0(k_z)$ (linha vermelha tracejada). O erro médio entre as duas curvas é igual a $\Delta = 1,52 \times 10^{-3}$ *. Portanto, conclui-se que o espectro $S_3(k_z)$ preserva o espectro de ordem zero $S_0(k_z)$, justificando-se a aproximação $S_3(k_z) \approx N^3S_0(k_z)$.

Análise similar é realizada na figura 17 para a superposição contínua de ordem $\nu = 5$ e PCD. A amplitude ao quadrado do campo elétrico $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{\text{FWC}}|^2/|E_0|^2$ no plano xz é mostrada na figura 17(a). Na figura inserida tem-se $(|E_x|/E_0)^2$ em magenta e $(|E_z|/E_0)^2$ em azul nas posições $(x, y = 0, z = 20 \mu\text{m})$. E na figura 17(b), tem-se $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{\text{FWC}}|^2/|E_0|^2$ em vários planos paralelos ao plano xy . Devido ao fato da componente E_z ser de ordem $\nu = 4$, o raio do cilindro de máxima amplitude, dado por $\rho_c = 0,9365\mu\text{m}$, é menor do que o raio $\rho_{c,\text{esc}} = 1,0221\mu\text{m}$, calculado por meio da equação 2.27.

A amplitude do espectro $S_5(k_z)$ (linha preta sólida), calculada por meio da equação 2.52, é comparada com a amplitude do espectro $N^5S_0(k_z)$ (linha vermelha tracejada) na figura 17(c). O erro médio entre as duas curvas vale $\Delta = 2,51 \times 10^{-3}$, que, como esperado, é maior que o erro obtido para a superposição de ordem $\nu = 3$ [figura 16(e)]. No entanto, este erro é ainda pequeno de forma que a aproximação $S_5(k_z) \approx N^5S_0(k_z)$ permanece válida.

As figuras 18(a)-(b) apresentam a análise de forças ópticas produzidas pela superposição contínua de FBs ideais de ordem $\nu = 3$ e PCE (figura 16). Na figura 18(a) tem-se a força longitudinal F_z ao longo do cilindro de máxima amplitude $\rho = \rho_c = 0,7224\mu\text{m}$. O raio da partícula é igual a $a = 0,02\lambda_m$ e a parte real do índice de refração relativo vale $M_R = 1,2$. A análise é realizada para diferentes valores de M_I . As setas indicam posições $z = Z_p$ onde há aprisionamento estável na longitudinal para cada um dos valores de M_I . As componentes radial F_ρ e azimutal F_ϕ no plano $z = Z_p$ são mostradas na figura 18(b), respectivamente, pelas linhas sólidas e pelas linhas tracejadas em função da distância radial ρ . Em ambas as figuras, o módulo ao quadrado do campo elétrico $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{\text{FWC}}|^2/|E_0|^2$ é representado pela linha vermelha tracejada. O raio ρ_c do cilindro de máxima amplitude é indicado pela linha vertical tracejada laranja na figura 18(b).

* O erro médio entre as duas curvas é calculado por meio da seguinte expressão: $\Delta = |\overline{\Delta S}/\max(S_3(k_z))|$, em que $\Delta S = N^3S_0(k_z) - S_3(k_z)$. A sobrelinha indica a operação de média e $\max(\cdot)$ retorna o valor máximo.

Figura 16 – Superposição contínua de FBs ideais construída a partir da função $F(z)$ da equação 5.6 e PCE. Para ordem $\nu = 0$: (a) $|F(z)|^2$ (linha vermelha tracejada) e $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWC})}|^2/|E_0|^2$ (linha em preto) ao longo de z e no plano xz (b). Para ordem $\nu = 3$: $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWC})}|^2/|E_0|^2$ no plano xz (c) e em vários planos paralelos ao plano xy (d). (e) Amplitudes dos espectros $S_3(k_z)$ (linha em preto) e $N^3 S_0(k_z)$ (linha vermelha tracejada).

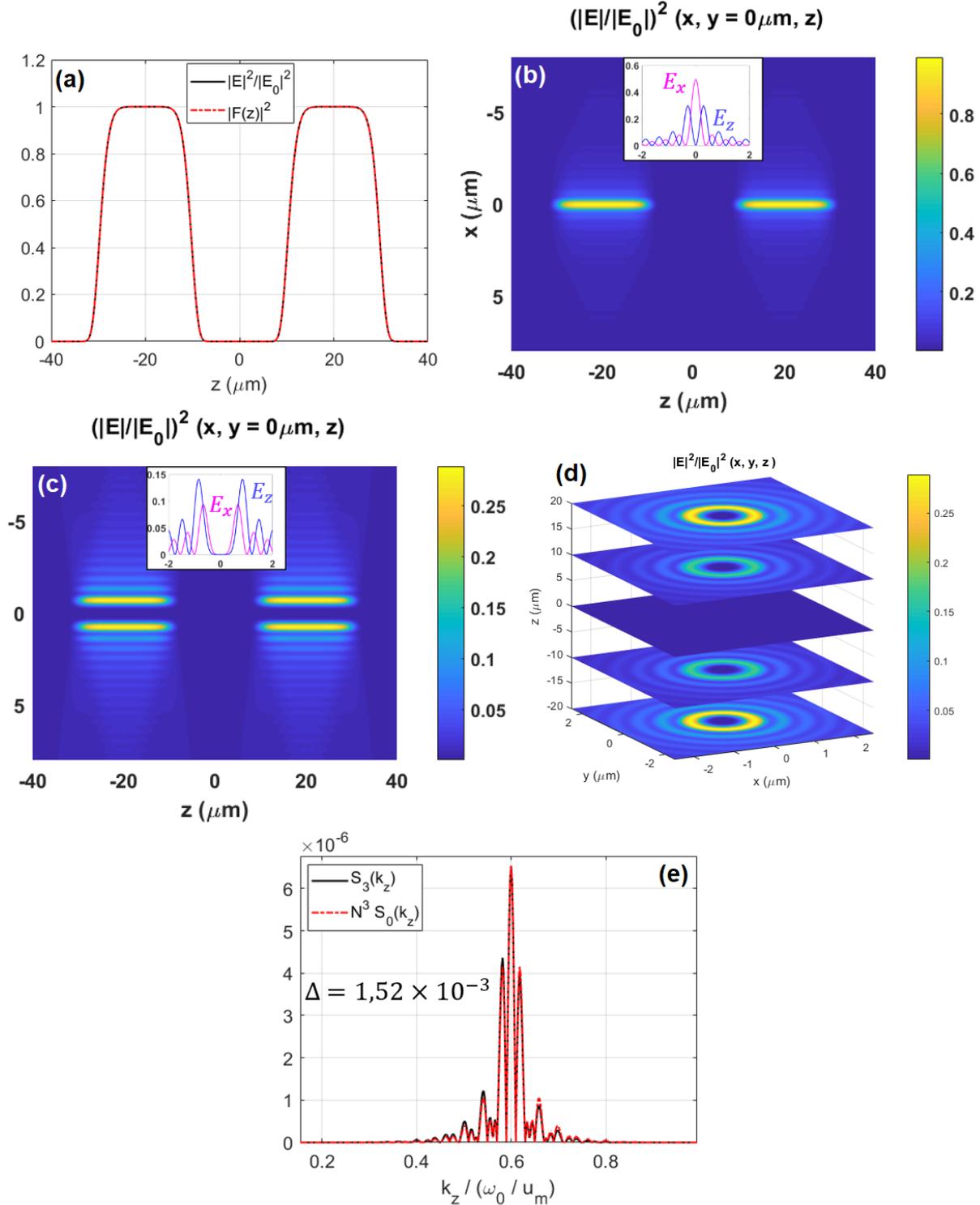
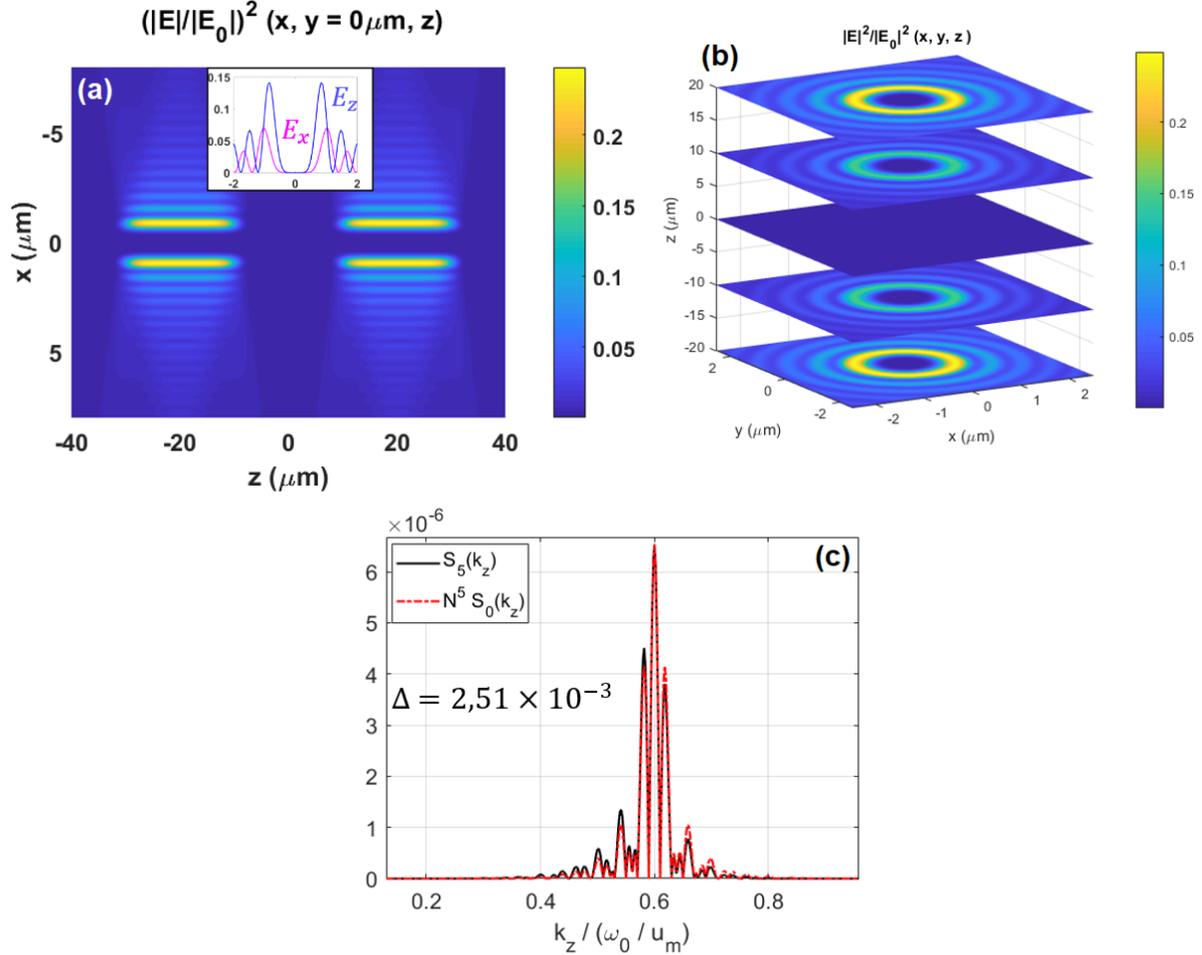


Figura 17 – Superposição contínua de FBs ideais construída a partir da função $F(z)$ da equação 5.6 de ordem $\nu = 5$ e PCD. $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{(\text{FWC})}|^2/|E_0|^2$ no plano xz (a) e em vários planos paralelos ao plano xy (b). (c) Amplitudes dos espectros $S_5(k_z)$ (linha em preto) e $N^5 S_0(k_z)$ (linha vermelha tracejada).

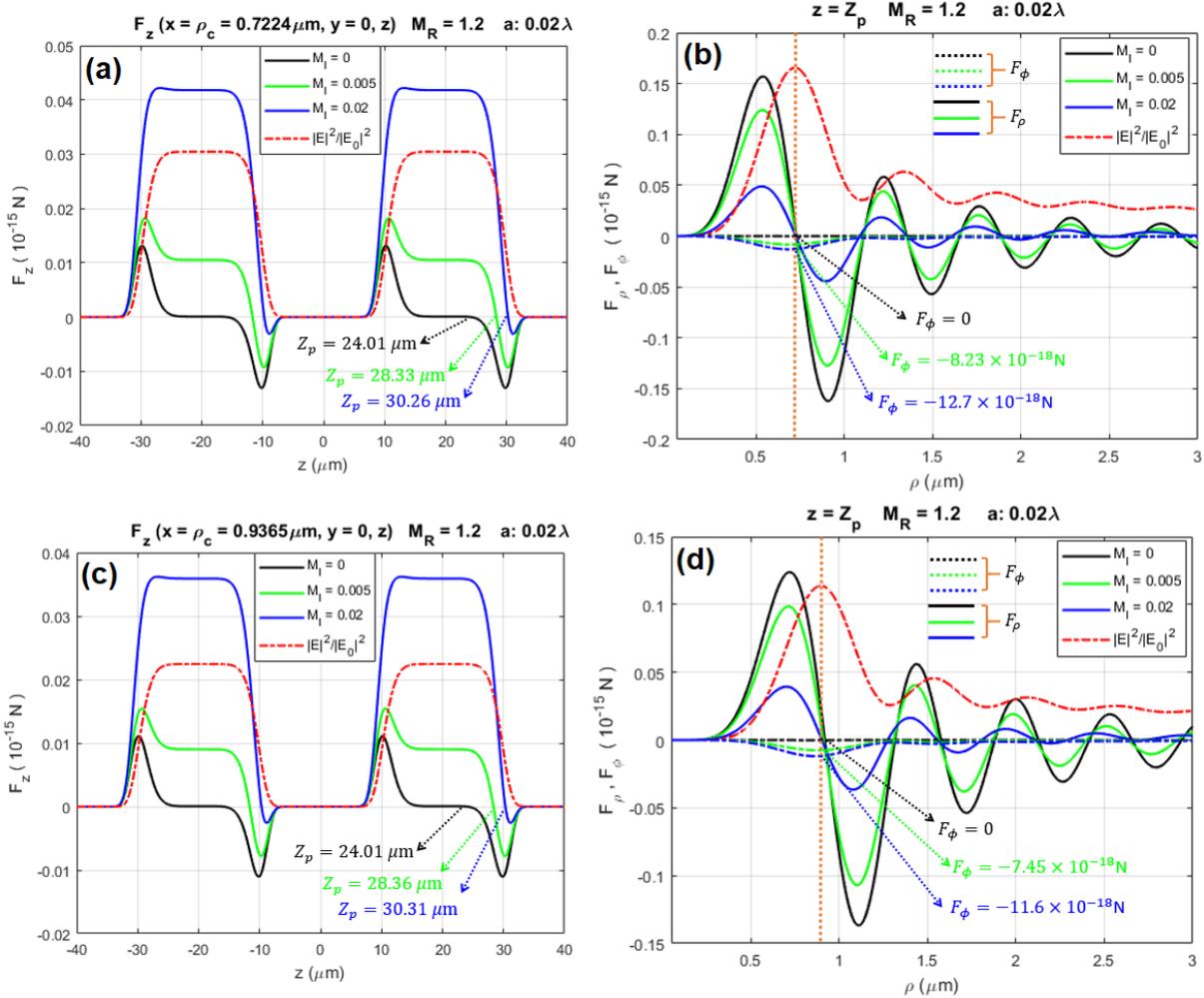


Fonte: Elaborada pelo autor.

O raio da primeira circunferência onde há aprisionamento estável na radial ($F_\rho = 0$ e $dF_\rho/d\rho < 0$), é ligeiramente maior do que o raio ρ_c do cilindro de máxima amplitude e levemente influenciado pelo valor de M_I . Os valores da componente azimutal F_ϕ nesta circunferência para cada valor de M_I estão indicados pelas setas. Nota-se que, como esperado, quanto mais absorptiva a partícula, maior a amplitude de F_ϕ e, por consequência, maior a transferência de OAM do feixe para a partícula. Para o caso sem perdas, tem-se $F_\phi = 0$ e, logo, não há transferência de OAM do feixe para a partícula.

Nas figuras 18(c)-(d) tem-se análise similar às figuras 18(a)-(b) mas para a superposição contínua de FBs ideais de ordem $\nu = 5$ e PCD da figura 17. Observa-se que, diferentemente do caso de $\nu = 1$ e PCD, a circunferência estável mais interna apresenta uma boa estabilidade apresentando valor de $|dF_\rho/d\rho|$ similar ao do caso de $\nu = 3$ e PCE.

Figura 18 – Forças ópticas produzidas pela superposição contínua de FBs ideais de ordem $\nu = 3$ e PCE da figura 16 sobre uma partícula com $a = 0,02\lambda_m$ e $M_R = 1,2$. (a) Componente longitudinal F_z ao longo do cilindro de máxima amplitude de campo para distintos valores de constante de perdas M_I . As setas indicam posições $z = Z_p$ onde há aprisionamento estável na longitudinal. (b) Componentes radial F_ρ e azimutal F_ϕ no plano $z = Z_p$ em função da distância radial ρ . $|\mathbf{E}_{\text{inc}}^{\text{FWC}}|^2/|E_0|^2$ é representado pela linha vermelha tracejada em ambas as figuras. (c)-(d) Mesma análise das figuras 18(a)-(b) mas para a superposição contínua de FBs ideais de ordem $\nu = 5$ e PCD (figura 17).



Fonte: Elaborada pelo autor.

6 CONCLUSÕES

Em relação ao primeiro objetivo deste trabalho, as comparações gráficas das forças ópticas calculadas para diferentes tipos de feixes incidentes permitiu concluir que o método da expansão multipolar da força óptica truncado em termos de quadrupolo está de acordo, de fato, com a rigorosa e exata teoria generalizada de Lorenz-Mie para partículas esféricas homogêneas com raio de até aproximadamente um quinto do comprimento de onda do feixe incidente ($a \leq 0,2\lambda_m$).

Como perspectiva futura, propõe-se obter uma especificação precisa e teórica do intervalo de validade, em termos do raio a da partícula e do índice de refração relativo M , da expansão multipolar da força óptica truncada em termos de quadrupolo com a teoria generalizada de Lorenz-Mie. Para isto, se faz necessário realizar uma identificação matemática completa e rigorosa entre estes dois métodos. Recentemente, uma identificação formal e rigorosa da força dipolar elétrica dentro da formulação da teoria generalizada de Lorenz-Mie foi realizada, tanto para a componente longitudinal da força óptica¹⁰⁴ quanto para as componentes de força transversais.¹⁰⁵

Já em relação ao segundo objetivo deste trabalho conclui-se que, de fato, as superposições contínuas de feixes de Bessel ideais são feixes promissores para serem aplicados na área de aprisionamento óptico. As simulações das forças ópticas produzidas por estes feixes estruturados sobre partículas de Rayleigh revelaram características interessantes de manipulação óptica. Dentre elas, a presença de múltiplos planos paralelos de aprisionamento estáveis e tridimensionais ao longo da direção de propagação, assim como observado em superposições discretas de feixes de Bessel. Além disso, a vantagem das superposições contínuas em modelar um padrão longitudinal sobre distâncias longitudinais da ordem de dezenas de micrômetros resulta em forças gradientes maiores e, portanto, em pontos de aprisionamento mais estáveis do que aqueles obtidos com superposições discretas. Conseqüentemente, para partículas absorptivas, que são mais difíceis de serem aprisionadas tridimensionalmente devido ao aumento da força de espalhamento por causa da absorção, pontos de aprisionamento mais estáveis podem ser obtidos com a utilização de superposições contínuas de feixes de Bessel ideais.

O segundo objetivo deste trabalho também contemplou a análise da transferência de momento angular orbital de superposições contínuas de feixes de Bessel ideais de ordem arbitrária ν para partículas de Rayleigh absorptivas. A análise foi realizada para diferentes tipos de polarização. Observou-se que, em se tratando de um feixe altamente não paraxial, a componente longitudinal de campo elétrico E_z pode alterar significativamente a distribuição de campo. Em particular para ordem $\nu = 1$ e polarizações circulares e elípticas à direita, cujo sentido de *spin* é contrário ao da helicidade do feixe, nota-se que,

como a componente de campo longitudinal E_z apresenta ordem zero, a distribuição pode ser alterada de forma a não corresponder ao feixe oco descrito pelas componentes de campo transversais. Como consequência, a estabilidade das circunferências e elipses de aprisionamento pode ser prejudicada tornando-se inviável a utilização desta configuração ($\nu = 1$ e polarização à direita) para aplicações envolvendo transferência de momento angular orbital.

Para outras ordens superiores ($\nu \geq 2$), a influência da componente E_z apenas provoca uma alteração do raio do cilindro de máxima amplitude ρ_c em relação ao raio do cilindro $\rho_{c,esc}$ do feixe oco escalar descrito pelas componentes de campo transversais. Para polarização circular à direita, a componente E_z apresenta ordem $\nu - 1$ e tem-se $\rho_c < \rho_{c,esc}$ enquanto que para polarização circular à esquerda, a componente E_z apresenta ordem $\nu + 1$ e tem-se $\rho_c > \rho_{c,esc}$. Observa-se valores similares de estabilidade $|dF_\rho/d\rho|$ para os dois tipos de polarização. Como consequência, para tais ordens, o sentido da polarização circular apenas altera a velocidade angular adquirida pela partícula.

Por fim, os resultados apresentados contemplando as simulações das forças ópticas produzidas pela superposição contínua de feixes de Bessel ideais de ordem arbitrária fornecem subsídios teóricos para possíveis aplicações deste feixe estruturado em um sistema de aprisionamento óptico. As forças avaliadas neste trabalho podem ser comparadas com as obtidas na prática em um sistema real, permitindo averiguar a influência de outras forças, de natureza não óptica, no aprisionamento da partícula. Outros parâmetros também podem ser comparados como a estabilidade dos pontos de aprisionamento e o momento angular orbital adquirido pela partícula.

REFERÊNCIAS

- 1 MAXWELL, J. C. **A Treatise on Electricity and Magnetism**. [S.l.]: Clarendon Press, London, 1873. v. 2.
- 2 GRIFFITHS, D. J. Resource letter em-1: Electromagnetic momentum. **American Journal of Physics**, v. 80, n. 1, p. 7–18, 2012.
- 3 JONES, P. H.; MARAGÒ, O. M.; VOLPE, G. **Optical Tweezers: Principles and Applications**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015.
- 4 GORDON, J. P. Radiation forces and momenta in dielectric media. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 8, p. 14–21, Jul 1973.
- 5 Lebedev, P. Experimental Investigation of the Pressure of Light. **Astrophys. J.**, v. 15, p. 60, jan. 1902.
- 6 NICHOLS, E. F.; HULL, G. F. A preliminary communication on the pressure of heat and light radiation. **Phys. Rev. (Series I)**, American Physical Society, v. 13, p. 307–320, Nov 1901.
- 7 MIE, G. Beiträge zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metallösungen. **Annalen der Physik**, v. 330, n. 3, p. 377–445, 1908.
- 8 DEBYE, P. Der lichtdruck auf kugeln von beliebigem material. **Annalen der Physik**, v. 335, n. 11, p. 57–136, 1909.
- 9 ASHKIN, A. Acceleration and trapping of particles by radiation pressure. **Physical Review Letters**, v. 24, n. 4, p. 156–159, 1970.
- 10 ROBERTSON, H. P.; RUSSELL, H. N. Dynamical effects of radiation in the solar system. **Mon. Not. R. Astron. Soc**, v. 97, n. 6, p. 423–437, 04 1937.
- 11 WRIGHT, J. **Space Sailing**. [S.l.]: Gordon and Breach Science Publishers, 1992. ISBN 9782881248030.
- 12 TOWNES, C. H. **How the Laser Happened: Adventures of a Scientist**. [S.l.]: Oxford University Press, 1999. v. 1.
- 13 ASHKIN, A. et al. Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles. **Optics Letters**, v. 11, n. 5, p. 288–290, may 1986. ISSN 0146-9592.
- 14 GRIER, D. A revolution in optical manipulation. **Nature**, 424, n. 6950, p. 810–816, AUG 14 2003. ISSN 0028-0836.
- 15 POLIMENO, P. et al. Optical tweezers and their applications. **Journal of quantitative spectroscopy & radiative transfer**, v. 218, p. 131–150, oct 2018. ISSN 0022-4073.
- 16 NIEMINEN, T. A. et al. Physics of optical tweezers. In: BERNIS, M.; GREULICH, K. (Ed.). **Laser Manipulation Of Cells And Tissues**. [S.l.: s.n.], 2007, (Methods in Cell Biology, v. 82). p. 207–236. ISBN 978-0-12-370648-5.

- 17 ASHKIN, A. Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime. **Biophysical journal**, v. 61, n. 2, p. 569–582, feb 1992. ISSN 0006-3495.
- 18 MARAGO, O. M. et al. Optical trapping and manipulation of nanostructures. **Nature nanotechnology**, v. 8, n. 11, p. 807–819, nov 2013. ISSN 1748-3387.
- 19 KE, P.; GU, M. Characterization of trapping force on metallic mie particles. **Applied Optics**, v. 38, n. 1, p. 160–167, jan 1999. ISSN 1559-128X.
- 20 FINER, J. T.; SIMMONS, R. M.; SPUDICH, J. A. Single myosin molecule mechanics: piconewton forces and nanometre steps. **Nature**, v. 368, n. 6467, p. 113–119, Mar 1994. ISSN 1476-4687.
- 21 BLOCK, S.; GOLDSTEIN, L.; SCHNAPP, B. Bead movement by single kinesin molecules studied with optical tweezers. **Nature**, v. 348, n. 6299, p. 348–352, NOV 22 1990. ISSN 0028-0836.
- 22 WRIGHT, G. et al. Micromanipulation in assisted reproduction: a review of current technology. **Current Opinion In Obstetrics & Gynecology**, v. 10, n. 3, p. 221–226, jun 1998. ISSN 1040-872X.
- 23 WANG, G. M. et al. Experimental demonstration of violations of the second law of thermodynamics for small systems and short time scales. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 89, p. 050601, Jul 2002.
- 24 WOERDEMANN, M. et al. Advanced optical trapping by complex beam shaping. **Laser & Photonics Reviews**, v. 7, n. 6, p. 839–854, nov 2013. ISSN 1863-8880.
- 25 YANG, Y. et al. Optical trapping with structured light: a review. **Advanced Photonics**, v. 3, n. 3, may 2021.
- 26 DHOLAKIA, K.; CIZMAR, T. Shaping the future of manipulation. **Nature Photonics**, v. 5, n. 6, p. 335–342, JUN 2011. ISSN 1749-4885.
- 27 RUBINSZTEIN-DUNLOP, H. et al. Roadmap on structured light. **Journal of optics**, v. 19, n. 1, jan 2017. ISSN 2040-8978.
- 28 HERNANDEZ-FIGUEROA, H. E.; ZAMBONI-RACHED, M.; RECAMI, E. **Non-Diffracting Waves**. Weinheim: Wiley-VCH, 2013.
- 29 ZAMBONI-RACHED, M. et al. Structuring light under different polarization states within micrometer domains: exact analysis from the maxwell equations. **Optics Express**, v. 25, n. 9, p. 10051–10056, may 2017.
- 30 ALLEN, L. et al. Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 45, p. 8185–8189, Jun 1992.
- 31 JONES, P. H.; MARAGÒ, O. M.; VOLPE, G. Optical beams and focusing. In: _____. **Optical Tweezers: Principles and Applications**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015. p. 76–105.

-
- 32 IBENECHÉ, C. Torque and optical traps. **African Journal Of Biotechnology**, v. 7, p. 4663–4666, Dec 2008.
- 33 HE, H. et al. Direct observation of transfer of angular momentum to absorptive particles from a laser beam with a phase singularity. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 75, p. 826–829, Jul 1995.
- 34 HE, H.; HECKENBERG, N.; RUBINSZTEIN-DUNLOP, H. Optical particle trapping with higher-order doughnut beams produced using high efficiency computer generated holograms. **Journal of Modern Optics**, Taylor and Francis, v. 42, n. 1, p. 217–223, 1995.
- 35 GARCÉS-CHÁVEZ, V. et al. Observation of the transfer of the local angular momentum density of a multiringed light beam to an optically trapped particle. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 91, p. 093602, Aug 2003.
- 36 FRIESE, M. et al. Optical angular-momentum transfer to trapped absorbing particles. **Physical Review A**, v. 54, n. 2, p. 1593–1596, Aug 1996. ISSN 1050-2947.
- 37 SIMPSON, N. B. et al. Mechanical equivalence of spin and orbital angular momentum of light: an optical spanner. **Opt. Lett.**, OSA, v. 22, n. 1, p. 52–54, Jan 1997.
- 38 BOUCHAL, Z. Nondiffracting optical beams: Physical properties, experiments, and applications. **Czechoslovak Journal of Physics**, v. 53, n. 7, p. 537–578, Jul 2003. ISSN 1572-9486.
- 39 DURNIN J MICELI JR, J.; EBERLY. Diffraction-free beams. **Physical Review Letters**, v. 58, n. 15, p. 1499–1501, 1987. ISSN 0031-9007.
- 40 MCGLOIN, D.; DHOLAKIA, K. Bessel beams: diffraction in a new light. **CONTEMPORARY PHYSICS**, v. 46, n. 1, p. 15–28, JAN-FEB 2005. ISSN 0010-7514.
- 41 GORI, F.; GUATTARI, G.; PADOVANI, C. Bessel-gauss beams. **Optics Communications**, v. 64, n. 6, p. 491–495, 1987. ISSN 0030-4018.
- 42 BAGINI, V. et al. Generalized bessel-gauss beams. **Journal of Modern Optics**, Taylor and Francis, v. 43, n. 6, p. 1155–1166, 1996.
- 43 VOLKE-SEPULVEDA, K. et al. Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam. **Journal of Optics B Quantum and Semiclassical Optics**, v. 4, n. 2, p. S82–S89, apr 2002. ISSN 1464-4266.
- 44 SILER, M. et al. Optical forces induced behavior of a particle in a non-diffracting vortex beam. **Opt. Express**, OSA, v. 20, n. 22, p. 24304–24319, Oct 2012.
- 45 ARLT, J. et al. Optical micromanipulation using a bessel light beam. **Optics Communications**, v. 197, n. 4, p. 239–245, 2001. ISSN 0030-4018.
- 46 CIZMAR, T. et al. Optical conveyor belt for delivery of submicron objects. **Applied Physics Letters**, v. 86, n. 17, APR 25 2005. ISSN 0003-6951.
- 47 VOLKE-SEPULVEDA, K. et al. Orbital angular momentum of a high-order bessel light beam. **Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics**, IOP Publishing, v. 4, n. 2, p. S82–S89, mar 2002.

- 48 BOUCHAL, Z.; WAGNER, J.; CHLUP, M. Self-reconstruction of a distorted nondiffracting beam. **Optics Communications**, v. 151, n. 4, p. 207–211, 1998. ISSN 0030-4018.
- 49 ZAMBONI-RACHED, M. Stationary optical wave fields with arbitrary longitudinal shape by superposing equal frequency Bessel beams: Frozen waves. **Optics Express**, v. 12, n. 17, p. 4001–4006, 2004. ISSN 1094-4087.
- 50 ZAMBONI-RACHED, M.; RECAMI, E. Subluminal wave bullets: Exact localized subluminal solutions to the wave equations. **Physical Review a**, v. 77, n. 3, mar 2008. ISSN 2469-9926.
- 51 ZAMBONI-RACHED, M.; AMBRÓSIO, L. A.; HERNÁNDEZ-FIGUEROA, H. E. Diffraction–attenuation resistant beams: their higher-order versions and finite-aperture generations. **Applied Optics**, The Optical Society, v. 49, n. 30, p. 5861, Oct 2010. ISSN 1539-4522.
- 52 ZAMBONI-RACHED, M.; RECAMI, E.; HERNÁNDEZ-FIGUEROA, H. E. Theory of "frozen waves": modeling the shape of stationary wave fields. **Journal of the Optical Society of America. A, Optics, image science, and vision**, v. 22, n. 11, p. 2465–75, 2005.
- 53 ZAMBONI-RACHED, M.; MOJAHEDI, M. Shaping finite energy diffraction/attenuation resistant beams through bessel-gauss beams superposition. **Physical Review A**, v. 92, p. 43839, Oct 2015.
- 54 CORATO-ZANARELLA, M.; ZAMBONI-RACHED, M. Electromagnetic frozen waves with radial, azimuthal, linear, circular, and elliptical polarizations. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 94, p. 053802, Nov 2016.
- 55 VIEIRA, T. A.; GESUALDI, M. R. R.; ZAMBONI-RACHED, M. Frozen waves: experimental generation. **Optics Letters**, v. 37, n. 11, p. 2034–2036, jun 2012. ISSN 0146-9592.
- 56 CORATO-ZANARELLA, M. et al. Arbitrary control of polarization and intensity profiles of diffraction-attenuation-resistant beams along the propagation direction. **Phys. Rev. Applied**, American Physical Society, v. 9, p. 024013, Feb 2018.
- 57 PACHON, E. G. P. et al. Architecting new diffraction-resistant light structures and their possible applications in atom guidance. **Opt. Express**, OSA, v. 24, n. 22, p. 25403–25408, Oct 2016.
- 58 SUAREZ, R. A. B. et al. Experimental optical trapping with frozen waves. **Opt. Lett.**, OSA, v. 45, n. 9, p. 2514–2517, May 2020.
- 59 GOUESBET, G.; GRÉHAN, G. **Generalized Lorenz-Mie Theories**. [S.l.]: Springer, 2017.
- 60 LOCK, J. A.; GOUESBET, G. Generalized lorenz–mie theory and applications. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, v. 110, n. 11, p. 800–807, 2009. ISSN 0022-4073. Light Scattering: Mie and More Commemorating 100 years of Mie’s 1908 publication.

-
- 61 CHEN, J. et al. Optical pulling force. **Nature Photonics**, v. 5, n. 9, p. 531–534, sep 2011. ISSN 1749-4885.
- 62 JIANG, Y. et al. **Decomposition of optical force into conservative and nonconservative components**. 2017.
- 63 LUEBBERS, K. S. K. R. J. **The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics**. [S.l.]: CRC Press, 1993.
- 64 GAO, D. et al. Optical manipulation from the microscale to the nanoscale: fundamentals, advances and prospects. **Light: Science & Applications**, v. 6, n. 9, p. e17039–e17039, Sep 2017. ISSN 2047-7538.
- 65 CHAUMET, P. C.; NIETO-VESPERINAS, M. Time-averaged total force on a dipolar sphere in an electromagnetic field. **Optics Letters**, Optics Letters, v. 25, n. 15, p. 1065, 2000. ISSN 0146-9592.
- 66 CALLEGARI, A. et al. Computational toolbox for optical tweezers in geometrical optics. **J. Opt. Soc. Am. B**, OSA, v. 32, n. 5, p. B11–B19, May 2015.
- 67 MOBINI, E. et al. Theory of optical forces on small particles by multiple plane waves. **Journal of Applied Physics**, v. 124, n. 17, NOV 7 2018. ISSN 0021-8979.
- 68 BALANIS, C. A. **Advanced Engineering Electromagnetics**. Canada: John Wiley and Sons Inc., 1989.
- 69 WATSON, G. N. **A treatise on the theory of Bessel functions**. 2nd. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1962.
- 70 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. Chapter 14 - bessel functions. In: **Mathematical Methods for Physicists**. Seventh edition. Boston: Academic Press, 2013. p. 643–713. ISBN 978-0-12-384654-9.
- 71 PEATROSS, J.; MICHAEL, W. **Physics of Light and Optics**. Brigham Young University, 2015. Disponível em: <optics.byu.edu>. Acesso em: 20 mar. 2017.
- 72 MCLEOD, J. H. The Axicon: A New Type of Optical Element. **Journal of the Optical Society of America**, v. 44, n. 8, p. 592, 1954.
- 73 de Angelis, V. S.; Ambrosio, L. A.; Zamboni Rached, M. Simulations of optical forces by a microstructured continuous superposition of first-order nonparaxial Bessel beams on Rayleigh particles. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, v. 261, p. 107481, mar. 2021.
- 74 BARTON, J.; ALEXANDER, D. 5th-order corrected electromagnetic-field components for a fundamental Gaussian-beam. **Journal of Applied Physics**, v. 66, n. 7, p. 2800–2802, oct 1 1989. ISSN 0021-8979.
- 75 GOUESBET, G.; MAHEU, B.; GRÉHAN, G. The order of approximation in a theory of the scattering of a Gaussian beam by a Mie scatter center. **Journal of Optics**, IOP Publishing, v. 16, n. 5, p. 239–247, sep 1985.
- 76 BROMWICH, T. J. **Electromagnetic waves**. [S.l.]: Phil. Mag., 1919.

- 77 POINCELOT, P. **Précis d'électromagnétisme théorique**. [S.l.]: Masson, 1965.
- 78 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. Chapter 15 - legendre functions. In: **Mathematical Methods for Physicists**. Seventh edition. Boston: Academic Press, 2013. p. 715–772. ISBN 978-0-12-384654-9.
- 79 JONES, P. H.; MARAGÒ, O. M.; VOLPE, G. Electromagnetic theory. In: _____. **Optical Tweezers: Principles and Applications**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015. p. 106–153.
- 80 BOHREN, C.; HUFFMAN, D. R. **Absorption and Scattering of Light by Small Particles**. [S.l.]: Wiley Science Paperback Series, 1998.
- 81 KERKER, M. **The scattering of light and other electromagnetic radiation**. [S.l.]: Academic Press, New York, 1969.
- 82 AMBROSIO, L. A.; RACHED, M. Z.; GOUESBET, G. Discrete vector frozen waves in generalized Lorenz-Mie theory: linear, azimuthal, and radial polarizations. **Appl. Opt.**, OSA, v. 57, n. 12, p. 3293–3300, Apr 2018.
- 83 REN, K. F.; GOUESBET, G.; GRÉHAN, G. Integral localized approximation in generalized Lorenz-Mie theory. **Appl. Opt.**, OSA, v. 37, n. 19, p. 4218–4225, Jul 1998.
- 84 GOUESBET, G. Validity of the localized approximation for arbitrary shaped beams in the generalized Lorenz-Mie theory for spheres. **Journal of the Optical Society of America A-Optics Image Science and Vision**, v. 16, n. 7, p. 1641–1650, jul 1999. ISSN 0740-3232.
- 85 GOUESBET, G.; MAHEU, B.; GRÉHAN, G. Light-scattering from a sphere arbitrarily located in a Gaussian-beam, using a Bromwich formulation. **Journal of the Optical Society of America A-Optics Image Science and Vision**, v. 5, n. 9, p. 1427–1443, sep 1988. ISSN 0740-3232.
- 86 LOCK, J. A.; GOUESBET, G. Rigorous justification of the localized approximation to the beam-shape coefficients in generalized Lorenz-Mie theory. i. On-axis beams. **J. Opt. Soc. Am. A**, OSA, v. 11, n. 9, p. 2503–2515, Sep 1994.
- 87 GOUESBET, G.; LOCK, J. A. Rigorous justification of the localized approximation to the beam-shape coefficients in generalized Lorenz-Mie theory. ii. Off-axis beams. **J. Opt. Soc. Am. A**, OSA, v. 11, n. 9, p. 2516–2525, Sep 1994.
- 88 JACKSON, J. D. **Classical electrodynamics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007.
- 89 YE, Q.; LIN, H. On deriving the maxwell stress tensor method for calculating the optical force and torque on an object in harmonic electromagnetic fields. **Eur. J. Phys.**, v. 38, n. 4, p. 045202, May 2017.
- 90 BORN, M.; WOLF, E. **Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light (7th Edition)**. 7th. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1999. ISBN 0521642221.
- 91 RAAB, R. E.; LANGE, O. L. D. **Multipole theory in electromagnetism: classical, quantum and symmetry aspects, with applications**. Oxford: Clarendon Press, 2005. (International series of monographs on physics).

-
- 92 KISELEV, A.; ACHOURI, K.; MARTIN, O. J. F. Multipole interplay controls optical forces and ultra-directional scattering. **Optics Express**, v. 28, n. 19, p. 27547–27560, sep 14 2020.
- 93 BLADEL, J. V. **Electromagnetic fields**. [S.l.]: John Wiley ‘I&’ Sons, 2007.
- 94 ALU, A.; ENGHETA, N. Guided propagation along quadrupolar chains of plasmonic nanoparticles. **Physical Review B**, v. 79, n. 23, jun 2009. ISSN 2469-9950.
- 95 JONES, P. H.; MARAGÒ, O. M.; VOLPE, G. Dipole approximation. In: _____. **Optical Tweezers: Principles and Applications**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015. p. 42–75.
- 96 Draine, B. T.; Goodman, J. Beyond Clausius-Mossotti: Wave Propagation on a Polarizable Point Lattice and the Discrete Dipole Approximation. **Astrophys. J.**, v. 405, p. 685, mar. 1993.
- 97 HULST, H. C. V. de. **Light scattering by small particles**. [S.l.]: New York: John Wiley and Sons, 1957.
- 98 Draine, B. T. The Discrete-Dipole Approximation and Its Application to Interstellar Graphite Grains. **Astrophysical Journal**, v. 333, p. 848, out. 1988.
- 99 SPESYVTSEVA, S. E. S.; DHOLAKIA, K. Trapping in a material world. **ACS Photonics**, American Chemical Society, v. 3, n. 5, p. 719–736, May 2016.
- 100 ANGELIS, V. S. D.; AMBROSIO, L. A.; GOUESBET, G. Comparative numerical analysis between the multipole expansion of optical force up to quadrupole terms and the generalized lorenz–mie theory. **J. Opt. Soc. Am. B**, OSA, v. 38, n. 8, p. 2353–2361, Aug 2021.
- 101 WISCOMBE, W. J. Improved Mie scattering algorithms. **Appl. Opt.**, OSA, v. 19, n. 9, p. 1505–1509, May 1980.
- 102 ANGELIS, V. S.; AMBROSIO, L. A. Microstructured light fields for optical trapping: Zero order continuous vector frozen waves in the rayleigh regime. In: **2018 SBFoton International Optics and Photonics Conference (SBFoton IOPC)**. Campinas: IEEE, 2018.
- 103 REICHERT, M.; STARK, H. Circling particles and drafting in optical vortices. **Journal of Physics Condensed Matter**, v. 16, n. 38, SI, p. S4085–S4094, 2004. ISSN 0953-8984.
- 104 Ambrosio, L. A.; Gouesbet, G. On the Rayleigh limit of the generalized Lorenz-Mie theory and its formal identification with the dipole theory of forces. I. The longitudinal case. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, v. 262, p. 107531, mar. 2021.
- 105 _____. On the Rayleigh limit of the generalized Lorenz-Mie theory and its formal identification with the dipole theory of forces. II. The transverse case. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, v. 266, p. 107591, maio 2021.
- 106 GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of Integrals, Series, and Products**. 2nd. ed. [S.l.]: Elsevier Inc, Academic Press Inc, 1980.

Apêndices

APÊNDICE A – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO 2.36

A substituição da equação 2.34 na equação 2.33 leva a:

$$\begin{aligned}\Psi_0(\rho, z) &= \frac{\omega_0}{u_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \int_{-1}^1 J_0\left(\frac{\omega_0}{u_m} \rho \sqrt{1-s^2}\right) e^{-j\frac{\omega_0}{u_m} z s} e^{jn\pi} ds \\ &= \frac{\omega_0}{u_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left[\int_{-1}^1 J_0\left(\frac{\omega_0}{u_m} \rho \sqrt{1-s^2}\right) \cos\left[\left(n\pi - \frac{\omega_0}{u_m} z\right)s\right] ds + \right. \\ &\quad \left. j \int_{-1}^1 J_0\left(\frac{\omega_0}{u_m} \rho \sqrt{1-s^2}\right) \operatorname{sen}\left[\left(n\pi - \frac{\omega_0}{u_m} z\right)s\right] ds \right],\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

onde foi aplicado a identidade de Euler.

Como a função $J_0(\cdot)$ é par, a segunda integral na equação A.1 se anula já que $\operatorname{sen}(\cdot)$ é uma função ímpar, resultando, portanto, no integrando uma função ímpar. Na primeira integral, por outro lado, tem-se uma função par no integrando. Logo, segue que:

$$\Psi_0(\rho, z) = 2 \frac{\omega_0}{u_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \int_0^1 J_0\left(\frac{\omega_0}{u_m} \rho \sqrt{1-s^2}\right) \cos\left[\left(n\pi - \frac{\omega_0}{u_m} z\right)s\right] ds \quad (\text{A.2})$$

Realizando-se as seguintes trocas de variáveis:

$$\begin{aligned}a &= 1 \\ b &= \frac{\omega_0}{u_m} \rho \\ c &= n\pi - \frac{\omega_0}{u_m} z \\ x &= s\end{aligned}\quad (\text{A.3})$$

Da tabela de integrais (equação 6.677-6) presente na referência 106, tem-se que:

$$\int_0^a J_0\left(b\sqrt{a^2-x^2}\right) \cos(cx) dx = a \operatorname{sinc}(a\sqrt{b^2+c^2}), \quad b > 0 \quad (\text{A.4})$$

Logo, segue que:

$$\int_0^1 J_0\left(\frac{\omega_0}{u_m} \rho \sqrt{1-s^2}\right) \cos\left[\left(n\pi - \frac{\omega_0}{u_m} z\right)s\right] ds = \operatorname{sinc}\left[\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{u_m} \rho\right)^2 + \left(n\pi - \frac{\omega_0}{u_m} z\right)^2}\right], \quad (\text{A.5})$$

e, portanto:

$$\Psi_0(\rho, z) = K \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \operatorname{sinc}\left[\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{u_m} \rho\right)^2 + \left(n\pi - \frac{\omega_0}{u_m} z\right)^2}\right], \quad (\text{A.6})$$

com $K = 2\omega_0/u_m$.

APÊNDICE B – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO 2.54

De acordo com a equação 2.44, o feixe escalar da superposição contínua de FBs de ordem zero é dado por:

$$\Psi_0(\rho, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \text{sinc}(\xi). \quad (\text{B.1})$$

com:

$$\xi = \xi(\rho, z) = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{u_m^2} \rho^2 + \left(n\pi - \frac{\omega_0}{u_m} z\right)^2}. \quad (\text{B.2})$$

Aplicando o operador U , dado por:

$$U = e^{j\phi} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{j}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right], \quad (\text{B.3})$$

uma única vez na equação B.1 e a transformação $F \rightarrow F/N$, com $N = -\sqrt{[(\omega_0/u_m)^2 - Q^2]}$ na função $F(z)$, obtém-se a seguinte descrição para o feixe escalar da superposição contínua de FBs de ordem $\nu = 1$:

$$\Psi_1(\rho, \phi, z) = U\Psi_0(\rho, z) = e^{j\phi} \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \frac{\partial}{\partial \rho} \text{sinc}(\xi) \quad (\text{B.4})$$

O feixe escalar da superposição contínua de FBs de ordem $\nu = 2$ é obtido aplicando-se o operador U duas vezes na equação B.1 ou, equivalentemente, uma vez na equação B.4, obtendo-se:

$$\begin{aligned} \Psi_2(\rho, \phi, z) &= U \left[U\Psi_0(\rho, z) \right] = U\Psi_1(\rho, \phi, z) = e^{j\phi} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{j}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \Psi_1(\rho, \phi, z) \\ &= e^{j2\phi} \frac{1}{N^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{j}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \text{sinc}(\xi) \\ &= e^{j2\phi} \frac{1}{N^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \text{sinc}(\xi), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

em que a transformação $F(z) \rightarrow F(z)/N^2$ foi aplicada.

De maneira análoga, segue-se à seguir a obtenção das expressões dos feixes escalares de ordem $\nu = 3$, $\nu = 4$, $\nu = 5$ e $\nu = 6$:

$$\begin{aligned} \Psi_3(\rho, \phi, z) &= U \left\{ U \left[U\Psi_0(\rho, z) \right] \right\} = U\Psi_2(\rho, \phi, z) = e^{j\phi} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{j}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \Psi_2(\rho, \phi, z) \\ &= e^{j3\phi} \frac{1}{N^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \left[\frac{\partial^3}{\partial \rho^3} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{2}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \text{sinc}(\xi) \\ &= e^{j3\phi} \frac{1}{N^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \left[\frac{\partial^3}{\partial \rho^3} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{3}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \text{sinc}(\xi), \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned}
\Psi_4(\rho, \phi, z) &= U\Psi_3(\rho, \phi, z) = e^{j\phi} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{j}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \Psi_3(\rho, \phi, z) \\
&= e^{j4\phi} \frac{1}{N^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \left[\frac{\partial^4}{\partial \rho^4} - 3 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) + 3 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{\rho} \frac{\partial^3}{\partial \rho^3} + \frac{9}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{9}{\rho^3} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \text{sinc}(\xi) \\
&= e^{j4\phi} \frac{1}{N^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \left[\frac{\partial^4}{\partial \rho^4} - \frac{6}{\rho} \frac{\partial^3}{\partial \rho^3} + \frac{15}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{15}{\rho^3} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \text{sinc}(\xi),
\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_5(\rho, \phi, z) &= U\Psi_4(\rho, \phi, z) = e^{j\phi} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{j}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \Psi_4(\rho, \phi, z) \\
&= e^{j5\phi} \frac{1}{N^5} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \left[\frac{\partial^5}{\partial \rho^5} - 6 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^3}{\partial \rho^3} \right) + 15 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - 15 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{4}{\rho} \frac{\partial^4}{\partial \rho^4} + \frac{24}{\rho^2} \frac{\partial^3}{\partial \rho^3} - \frac{60}{\rho^3} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{60}{\rho^4} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \text{sinc}(\xi) \\
&= e^{j5\phi} \frac{1}{N^5} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \left[\frac{\partial^5}{\partial \rho^5} - \frac{10}{\rho} \frac{\partial^4}{\partial \rho^4} + \frac{45}{\rho^2} \frac{\partial^3}{\partial \rho^3} - \frac{105}{\rho^3} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{105}{\rho^4} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \text{sinc}(\xi),
\end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_6(\rho, \phi, z) &= U\Psi_5(\rho, \phi, z) = e^{j\phi} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{j}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \Psi_5(\rho, \phi, z) \\
&= e^{j6\phi} \frac{1}{N^6} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \left[\frac{\partial^6}{\partial \rho^6} - 10 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^4}{\partial \rho^4} \right) + 45 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^3}{\partial \rho^3} \right) - 105 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + 105 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho^4} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{5}{\rho} \frac{\partial^5}{\partial \rho^5} + \frac{50}{\rho^2} \frac{\partial^4}{\partial \rho^4} - \frac{225}{\rho^3} \frac{\partial^3}{\partial \rho^3} + \frac{525}{\rho^4} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{525}{\rho^5} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \text{sinc}(\xi) \\
&= e^{j6\phi} \frac{1}{N^6} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \left[\frac{\partial^6}{\partial \rho^6} - \frac{15}{\rho} \frac{\partial^5}{\partial \rho^5} + \frac{105}{\rho^2} \frac{\partial^4}{\partial \rho^4} - \frac{420}{\rho^3} \frac{\partial^3}{\partial \rho^3} + \frac{945}{\rho^4} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{945}{\rho^5} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \text{sinc}(\xi).
\end{aligned} \tag{B.9}$$

nas quais foram aplicadas as transformações $F(z) \rightarrow F(z)/N^3$, $F(z) \rightarrow F(z)/N^4$, $F(z) \rightarrow F(z)/N^5$ e $F(z) \rightarrow F(z)/N^6$, respectivamente.

Portanto, generalizando-se para qualquer ordem $\nu \geq 1$, a expressão do feixe escalar da superposição contínua de FBs ideais pode ser escrita como:

$$\Psi_\nu(\rho, \phi, z) = e^{j\nu\phi} \frac{1}{N^\nu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2n\pi}{K}\right) \left[\sum_{m=0}^{\nu-1} (-1)^m \frac{c_{\nu,m}}{\rho^m} \frac{\partial^{\nu-m}}{\partial \rho^{\nu-m}} \right] \text{sinc}(\xi) , \tag{B.10}$$

em que $c_{\nu,m}$ são coeficientes. Os valores destes coeficientes para as ordens $\nu=1, \dots, 6$ (equações B.4 a B.9) estão presentes na tabela 1.

Tabela 1 – Valores dos coeficientes $c_{\nu,m}$ para $\nu = 1, \dots, 6$.

$\nu \backslash m$	0	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0
3	1	3	3	0	0	0
4	1	6	15	15	0	0
5	1	10	45	105	105	0
6	1	15	105	420	945	945

Nota-se que os coeficientes $c_{\nu,m}$ podem ser obtidos por meio da seguinte fórmula recursiva:

$$c_{\nu,m} = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ c_{\nu,m-1}(\nu - m) + c_{\nu-1,m}, & m = 1, \dots, \nu - 1 \\ 0, & m \geq \nu. \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

**APÊNDICE C – COMPROVAÇÃO QUE OS FEIXES VETORIAIS
CONSTRUÍDOS NA SEÇÃO 2.2 SATISFAZEM TODAS AS EQUAÇÕES DE
MAXWELL**

As componentes transversais do campo elétrico E_x e E_y são dadas por:

$$E_x = E_0 X \Psi_\nu, \quad (\text{C.1a})$$

$$E_y = E_0 Y \Psi_\nu, \quad (\text{C.1b})$$

em que Ψ_ν é solução da equação escalar de Helmholtz:

$$\nabla^2 \Psi_\nu + k^2 \Psi_\nu = 0, \quad (\text{C.2})$$

with $k = \omega_0 \sqrt{\epsilon_m \mu_m} = \omega_0 / u_m$, com $u_m = 1 / \sqrt{\epsilon_m \mu_m}$.

A componente longitudinal de campo elétrico E_z é calculada utilizando-se a lei de Gauss elétrica: $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, resultando em:

$$E_z = -\frac{\partial}{\partial x} \int E_x dz - \frac{\partial}{\partial y} \int E_y dz. \quad (\text{C.3})$$

E o campo magnético é obtido a partir da lei de Faraday:

$$\mathbf{H} = \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{-j\omega_0 \mu_m} \quad (\text{C.4})$$

Aplicando o divergente ($\nabla \cdot$) em ambos os lados da equação C.4, tem-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (\text{C.5})$$

Portanto, calculando-se o campo magnético \mathbf{H} a partir da equação C.4, tanto a lei de Faraday quanto a lei de Gauss magnética são satisfeitas. E, por construção, a lei de Gauss elétrica é satisfeita por meio da equação C.3.

À seguir, é mostrado que o campo elétrico formado pelas componentes nas equações C.1a, C.1b e C.3, juntamente com o campo magnético dado pela equação C.4, satisfazem a lei de Ampère-Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega_0 \epsilon_m \mathbf{E}. \quad (\text{C.6})$$

Substituindo-se o campo magnético da equação C.4 na equação C.6, tem-se:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \omega_0^2 \epsilon_m \mu_m \mathbf{E} = k^2 \mathbf{E}, \quad (\text{C.7})$$

Como $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ e as componentes do campo elétrico satisfazem a lei de Gauss elétrica $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, a equação C.7 reduz a:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad (\text{C.8})$$

que corresponde à equação vetorial de Helmholtz. Como $\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla^2 E_x \hat{x} + \nabla^2 E_y \hat{y} + \nabla^2 E_z \hat{z}$, tem-se que:

$$\nabla^2 E_x + k^2 E_x = 0, \quad (\text{C.9a})$$

$$\nabla^2 E_y + k^2 E_y = 0, \quad (\text{C.9b})$$

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0. \quad (\text{C.9c})$$

Substituindo-se as equações C.1a e C.1b nas equações C.9a e C.9b, respectivamente, obtém-se a equação C.2:

$$\nabla^2 (X E_0 \Psi_\nu) + k^2 (X E_0 \Psi_\nu) = 0 \rightarrow \nabla^2 \Psi_\nu + k^2 \Psi_\nu = 0 \quad (\text{C.10a})$$

$$\nabla^2 (Y E_0 \Psi_\nu) + k^2 (Y E_0 \Psi_\nu) = 0 \rightarrow \nabla^2 \Psi_\nu + k^2 \Psi_\nu = 0 \quad (\text{C.10b})$$

e, portanto, as equações C.9a e C.9b são satisfeitas.

Substituindo-se a equação C.3 na equação C.9c, tem-se:

$$\nabla^2 \left(-\frac{\partial}{\partial x} \int E_x dz - \frac{\partial}{\partial y} \int E_y dz \right) + k^2 \left(-\frac{\partial}{\partial x} \int E_x dz - \frac{\partial}{\partial y} \int E_y dz \right) = 0. \quad (\text{C.11})$$

Segue que:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(-\partial_x \int E_x dz \right) &= (\nabla_T^2 + \partial_z^2) \left(-\partial_x \int E_x dz \right) \\ &= -\partial_x \left(\int \nabla_T^2 E_x dz + \partial_z^2 \int E_x dz \right) \\ &= -\partial_x \int \nabla_T^2 E_x dz - \partial_x \partial_z E_x \\ &= -\partial_x \int (\nabla^2 - \partial_z^2) E_x dz - \partial_x \partial_z E_x \\ &= -\partial_x \int \nabla^2 E_x dz + \partial_x \int \partial_z^2 E_x dz - \partial_x \partial_z E_x \\ &= -\partial_x \int \nabla^2 E_x dz + \partial_x (\partial_z E_x + C) - \partial_x \partial_z E_x \\ &= -\partial_x \int \nabla^2 E_x dz, \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

e analogamente para $\nabla^2 (-\partial_y \int E_y dz)$. Na equação C.12, $\nabla_T^2 \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2$ corresponde ao laplaciano transversal e C é uma constante. Portanto:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \int (\nabla^2 E_x + k^2 E_x) dz - \frac{\partial}{\partial y} \int (\nabla^2 E_y + k^2 E_y) dz = 0. \quad (\text{C.13})$$

Logo, das equações C.9a e C.9b, conclui-se que a equação C.9c também é satisfeita. Portanto, segue-se que os campos elétrico e magnético construídos a partir das equações C.1, C.3 e C.4, satisfazem a lei de Ampère-Maxwell (equação C.6).

APÊNDICE D – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO 4.2

O integrando da equação 4.1 é:

$$\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mu_m \mathbf{H}. \quad (\text{D.1})$$

Segue-se da lei de Gauss elétrica e da lei de Ampère-Maxwell em um meio com fontes que:

$$\rho = \epsilon_m (\nabla \cdot \mathbf{E}) \quad (\text{D.2a})$$

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H} - \epsilon_m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}. \quad (\text{D.2b})$$

Logo, substituindo-se as equações em D.2 na equação D.1, tem-se:

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mu_m \mathbf{H} &= \epsilon_m (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \mu_m \left[\nabla \times \mathbf{H} - \epsilon_m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right] \times \mathbf{H} \\ &= \epsilon_m (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \mu_m \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \epsilon_m \mu_m \mathbf{H} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Por propriedade vetorial:

$$\mathbf{H} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (\text{D.4})$$

Aplicando-se a lei de Faraday na equação D.4:

$$\mathbf{H} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = -\frac{1}{\mu_m} \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (\text{D.5})$$

Substituindo-se a equação D.5 na equação D.3 e adicionando o termo $\mu_m (\nabla \cdot \mathbf{H}) \mathbf{H}$ que pela lei de Gauss magnética é nulo, tem-se:

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mu_m \mathbf{H} &= \epsilon_m (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \epsilon_m \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mu_m (\nabla \cdot \mathbf{H}) \mathbf{H} - \mu_m \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}) \\ &\quad - \epsilon_m \mu_m \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Por propriedade vetorial tem-se que:

$$\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \quad (\text{D.7a})$$

$$\mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -(\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}). \quad (\text{D.7b})$$

Logo, segue que:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \\ &= \nabla \cdot \left[\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \right], \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

em que \otimes representa o produto diádico e $\overleftrightarrow{\mathbf{I}}$ o tensor diádico unitário (veja definições no Apêndice E). E, de forma análoga:

$$(\nabla \cdot \mathbf{H})\mathbf{H} - \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \left[\mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{1}{2} \overleftrightarrow{\mathbf{I}} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) \right]. \quad (\text{D.9})$$

Portanto:

$$\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mu_m \mathbf{H} = \nabla \cdot \left[\epsilon_m \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} - \frac{1}{2} \overleftrightarrow{\mathbf{I}} (\epsilon_m \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + \mu_m \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{1}{2} \overleftrightarrow{\mathbf{I}} (\mu_m \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) \right] - \epsilon_m \mu_m \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (\text{D.10})$$

O termo entre colchetes da equação D.10 é definido como o tensor de stress de Maxwell $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$. A expressão entre parênteses no último termo corresponde ao vetor de Poynting $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. E, portanto, a equação 4.1 é reescrita como:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}_{\text{mec}} = \int_V \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} dV - \frac{d}{dt} \int_V \frac{\mathbf{S}}{u_m^2} dV, \quad (\text{D.11})$$

com $u_m^2 = 1/(\epsilon_m \mu_m)$.

APÊNDICE E – DEFINIÇÕES DE CÁLCULO VETORIAL UTILIZADAS NO TRABALHO

Para todas as definições à seguir, considere uma base cartesiana. Em uma base cartesiana $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$.

E.1 Produto diádico

O produto diádico, também denominado de produto tensorial, de dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} resulta em um tensor de ordem $n = 2$ cuja matriz é dada por:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}. \quad (\text{E.1})$$

É comum simplificar a notação de produto diádico escrevendo-se $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{ab}$.

Portanto, sendo $\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = A_{ij}(\hat{e}_i \otimes \hat{e}_j) = A_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j$ o tensor resultante do produto diádico entre \mathbf{a} e \mathbf{b} , tem-se: $a_i b_j = A_{ij}$, com $i, j = x, y, z$.

E.2 Tensor diádico unitário

O tensor diádico unitário é composto pelas componentes dos vetores ortonormais da base cartesiana. Logo, a matriz que o define corresponde à matriz identidade de ordem 2:

$$\overleftrightarrow{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.2})$$

E.3 Tensor simétrico e sem traço

Um tensor $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ de ordem n é dito simétrico quando os elementos da matriz que o define são invariantes a permutações dos seus índices. Para $n = 2$, tal condição se resume a: $\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \overleftrightarrow{\mathbf{A}}^T$, em que $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}^T = A_{ji}\hat{e}_i\hat{e}_j$ é a transposta de $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$.

Um tensor de ordem n é dito sem traço quando o traço da matriz que o define, ou seja, a soma dos elementos da diagonal, é nula.

Portanto, um tensor $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ de ordem $n = 2$ é simétrico e sem traço se os seus elementos satisfazem:

$$A_{ij} = A_{ji} \quad \text{com} \quad i, j = x, y, z \quad (\text{E.3a})$$

$$A_{xx} + A_{yy} + A_{zz} = 0. \quad (\text{E.3b})$$

E.4 Duplo produto escalar

Define-se o duplo produto escalar, também denominado de dupla contração, entre dois tensores como a multiplicação dos produtos escalares dos vetores que o formam. Há dois tipos de duplo produto escalar: vertical ($:$) e horizontal ($\cdot\cdot$). Considerando-se dois tensores $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ e $\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$, ambos de ordem $n = 2$, tem-se:

$$\overleftrightarrow{\mathbf{A}} : \overleftrightarrow{\mathbf{B}} = (A_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j) : (B_{mn}\hat{e}_m\hat{e}_n) = A_{ij}B_{mn}(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_m)(\hat{e}_j \cdot \hat{e}_n) = A_{ij}B_{mn}\delta_{im}\delta_{jn} = A_{ij}B_{ij} \quad (\text{E.4a})$$

$$\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot\cdot \overleftrightarrow{\mathbf{B}} = (A_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j) \cdot\cdot (B_{mn}\hat{e}_m\hat{e}_n) = A_{ij}B_{mn}(\hat{e}_j \cdot \hat{e}_m)(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_n) = A_{ij}B_{mn}\delta_{jm}\delta_{in} = A_{ij}B_{ji}, \quad (\text{E.4b})$$

em que δ refere-se ao delta de Kronecker. Ambos os produtos resultam em um escalar.

O duplo produto escalar vertical entre um tensor $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ de ordem $n = 3$ e um tensor $\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$ de ordem $n = 2$ resulta em um vetor dado por:

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\mathbf{A}} : \overleftrightarrow{\mathbf{B}} &= (A_{ijk}\hat{e}_i\hat{e}_j\hat{e}_k) : (B_{mn}\hat{e}_m\hat{e}_n) = A_{ijk}B_{mn}\hat{e}_i(\hat{e}_j \cdot \hat{e}_m)(\hat{e}_k \cdot \hat{e}_n) \\ &= A_{ijk}B_{mn}\hat{e}_i\delta_{jm}\delta_{kn} = A_{ijk}B_{jk}\hat{e}_i. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$