

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Nereida Celina Llerena Valdivia

Descrição de feixes de Bessel-Gauss e suas superposições
do tipo *Frozen Wave* na teoria generalizada de
Lorenz-Mie

São Carlos

2020

Nereida Celina Llerena Valdivia

**Descrição de feixes de Bessel-Gauss e suas superposições
do tipo *Frozen Wave* na teoria generalizada de
Lorenz-Mie**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutora em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Telecomunicações

Orientador: Prof. Dr. Leonardo André Ambrosio

**São Carlos
2020**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

L135d Llerena Valdivia, Nereida Celina
Descrição de feixes de Bessel-Gauss e suas
superposições do tipo Frozen Wave na teoria
generalizada de Lorenz-Mie / Nereida Celina Llerena
Valdivia; orientador Leonardo André Ambrosio. São
Carlos, 2020.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica e Área de Concentração em
Telecomunicações -- Escola de Engenharia de São Carlos
da Universidade de São Paulo, 2020.

1. GLMT. 2. Feixe de Bessel-Gauss. 3. Frozen waves.
4. Coeficientes de forma. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Bacharel **NEREIDA CELINA LLERENA VALDIVIA.**

Título da tese: " Descrição de feixes de Bessel-Gauss e suas superposições do tipo *frozen wave* na teoria generalizada de Lorenz-Mie".

Data da defesa: 14/08/2020

Comissão Julgadora:

Resultado

Prof. Dr. **Leonardo André Ambrosio**
(Orientador)

APROVADO

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Profa. Dra. **Mônica de Lacerda Rocha**

APROVADO

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Dr. **Hugo Enrique Hernández Figueroa**

APROVADO

(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Prof. Dr. **Gilliard Nardel Malheiros Silveira**

APROVADO

(Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”/UNESP – São João da Boa Vista)

Prof. Dr. **Carlos Henrique da Silva Santos**

APROVADO

(Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia/IFSP - Itapetininga)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica:

Prof. Titular **Ivan Nunes da Silva**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

Para minha vovó

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer inicialmente ao meu orientador Leonardo André Ambrosio, pela oportunidade e apoio para desenvolver este trabalho, pela sua paciência, compreensões nos anos todos. Por me apresentar este novo mundo de feixes, *frozen waves*, pinças óticas e GLTM. Pela oportunidade de apresentar trabalhos em diferentes cantos do mundo e de conhecer o criador da nossa abençoada teoria, e até ganhar um prêmio por melhor pôster. Obrigada de coração por tudo. Quero agradecer também ao nosso grupo de pesquisa, em especial ao Luiz Machado Votto, pelo apoio para a geração de gráficos dos campos elétricos reconstruídos na GLMT. Gostaria de agradecer também aos professores e funcionários da USP que contribuíram direta ou indiretamente na conclusão desse trabalho, em especial ao professor Amílcar Careli César que me brindou a primeira oportunidade na pós-graduação e a professora Mônica de Lacerda Rocha que foi membro de banca das duas qualificações, da defesa de mestrado e agora de doutorado.

Se me for permitido, quero agradecer a meu círculo hispanofalante em espanhol. Gracias por todo el amor y apoyo a mis abuelitos que me vieron comenzar esta jornada pero no van a poder acompañarme al terminarla. Gracias a mi mami por todo el apoyo aunque no tenga ni idea de lo que hago, gracias también por los paseos para despejar la mente. A mis amigas del colegio que pase lo que pase, así no estemos siempre de acuerdo, siempre están dispuestas a dar un hombro amigo. Quiero agradecer en especial a Nitza, Vilma y Nadia porque a pesar de la distancia siempre me hicieron sentir cerca. A mi papá y hermanitos Luciana y Alejandro por el cariño. A los que ya no están pero llevo conmigo Danae y Germacito. A mi querida Rossana que siempre me hace reír de madrugada con sus ocurrencias.

A mi Pao por su apoyo incondicional, por las noches de laboratorio, por los videos tontos, por ser la hermana "mayor", por la paciencia que sé que algunas veces hace falta, mucha. Por ayudarme a ganar la batalla al editor de texto. Porque así estés a kilómetros de distancia estamos juntas.

Un agradecimiento muy especial a Jorge por la paciencia infinita por creer en mi cuando muchas veces a mi no me alcanza la fuerza. Por el amor bonito, por aprender conmigo de Bessel y de Gauss, por las sonrisas, por los buenos tiempos y por los que hubieran sido peores sin ti. Gracias también a los suegritos por acogerme en su casa estos últimos meses.

Voltando para o português, quero agradecer também a todos os amigos que fiz em São Carlos, a Áurea pela amizade sincera, a Oscar pelo computador poderoso sem o qual as quadraturas não teriam sido possíveis, a ambos pelo carinho e apoio em bons tempos

e tempos difíceis. A Carlos e Karla pela comida gostosa, as risadas e a conversa sem rodeios. A Karen e Rafa pelos tantos sábados de churrasco e conversa gostosa. A Edna pela amizade e por lavar os pratos. A Flor Karina pelos memes no grupo. A Alfredo, Erick e Hugo (um abraço onde quer que estejam) pela amizade e pelo aluguel.

É impossível defender uma tese na metade de 2020 sem mencionar a pandemia. Sem intenção de menosprezar as consequências na vida de milhões de pessoas no mundo, ela tirou a oportunidade de voltar para o Brasil e fazer a defesa pessoalmente. Tirou a oportunidade de dizer adeus a essa terra preciosa que me deu tanto nesses anos. Sem perceber passei uma quarta parte da minha vida em São Carlos, cidade singular com amigos que vou levar comigo para sempre.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Dans la vie, rien n’est à craindre, tout est à comprendre.”
Marie Curie

RESUMO

VALDIVIA, N. L. **Descrição de feixes de Bessel-Gauss e suas superposições do tipo *Frozen Wave* na teoria generalizada de Lorenz-Mie.** 2020. 174p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

Na análise do espalhamento da luz por partículas micrométricas a Teoria Generalizada de Lorenz Mie (GLMT) descreve o feixe incidente com um conjunto de coeficientes de forma (BSCs) que podem ser calculados mediante três abordagens teóricas diferentes, que são, quadraturas, séries finitas e aproximações localizadas. A escolha entre eles pode não ser evidente. Um feixe de Bessel-Gauss (BGB) é um feixe eletromagnético de energia finita, fisicamente realizável, resultante da apodização de um feixe de Bessel por uma função gaussiana. Com o objetivo de ampliar o número de feixes analiticamente descritos na GLMT e viabilizar descrições teóricas confiáveis de BGBs para aplicações, por exemplo, em aprisionamento óptico, o presente trabalho fornece uma comparação entre as técnicas acima mencionadas para a avaliação dos BSCs de BGBs escalares e suas superposições (*Frozen Waves*) com distintos ângulos axicon, cargas topológicas e parâmetros de confinamento, incluindo tempo de processamento, reconstruções de campo e cálculos de seções de choque de pressão de radiação. Todos os três métodos concordam bem entre si no regime paraxial, embora à medida que o ângulo axicon ou a carga topológica ou o parâmetro de confinamento aumentam, as diferenças nos BSCs para cada método se tornam cada vez mais evidentes devido aos distintos processos de remodelagem do feixe.

Palavras-chave: GLMT. Feixes de Bessel-Gauss. Frozen Waves. Fatores de forma.

ABSTRACT

VALDIVIA, N. L. **Description of Bessel-Gauss beams and their *Frozen Wave*-type superpositions in the generalized Lorenz-Mie theory.** 2020. 174p.
Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

In the analysis of light scattering by micrometric particles the Generalized Lorenz-Mie Theory (GLMT) describes the incident beam with a set of Beam Shape Coefficients (BSCs) that can be calculated with three theoretical different approaches, namely, quadratures, finite series and localized approximations. Choosing between them may not be self-evident. A Bessel-Gauss beam (BGB) is a finite energy, physically realizable electromagnetic beam resulting from the apodization of a Bessel beam by a Gaussian function. In order to increase the number of beams analytically described in the GLMT and enable reliable theoretical descriptions of BGBs for applications, for example, in optical trapping, this thesis provides a comparison between the aforementioned techniques for the evaluation of the BSCs of scalar BGBs and their superpositions (*Frozen Waves*) with distinct axicon angles, topological charges, and confinement parameters, including processing time, field reconstructions and calculation of radiation pressure cross-sections. All three methods agree quite well with each other in the paraxial regime, although as the axicon angle, the topological charge or the confinement parameter increases, the differences in the BSCs for each method become more evident due to the different remolding processes.

Keywords: GLMT. Bessel-Gauss beams. Frozen Waves. Beam Shape Coefficients.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistemas de coordenadas paralelos usadas pela GLMT.	36
Figura 2 – Experimento de Durnin para a geração de BBs.	52
Figura 3 – BB de ordem zero.	53
Figura 4 – Possibilidades de construção de FWs	54
Figura 5 – (a) Comparação entre intensidade longitudinal desejada $F(z)$ e FW obtida pelo método de Zamboni-Rached. (b) gráfico 3D da intensidade de campo da FW	59
Figura 6 – Perfil longitudinal de intensidade de uma FW, projetado sobre um intervalo longitudinal estendido (a) Perfil longitudinal em um meio não absorvente. (b) O mesmo feixe em um meio absorvente	61
Figura 7 – Solução de FW apodizada usando superposições de BGBs em meios não absorventes para distintos valores de $\Delta\rho_G$	63
Figura 8 – Gráfico 3D de $ \Psi(\rho, z) ^2$ para uma FW de energia finita, com $\lambda = 632,8$ nm, $r_0 \approx 9 \mu\text{m}$, $l = 3$, $N = 60$. As figuras (a) e (b) correspondem a meio não absorvente, (c) e (d) para meio absorvente. Intervalos para as figuras (a, c) $0 \leq z \leq L/2 = 0,37$ m e para (b, d) intervalo estendido $0 \leq z \leq 2L = 1,48$ m.	67
Figura 9 – Ampliação da projeção ortogonal da intensidade da FW de energia finita em meio sem perdas, (a), e com perdas, (b).	68
Figura 10 – $ g_{n,\text{TM}}^{v\pm 1} $ quando $s = 0,001$ e $\alpha = 2^\circ$ para (a) $v = 0$, (b) $v = 2$, (c) $v = 5$, e (d) $v = 15$	98
Figura 11 – $ g_{n,\text{TM}}^{v\pm 1} $ quando $s = 0,001$ e $\alpha = 10^\circ$ para (a) $v = 0$, (b) $v = 2$, (c) $v = 5$, e (d) $v = 15$	99
Figura 12 – $ g_{n,\text{TM}}^{v\pm 1} $ quando $s = 0,01$ e $\alpha = 2^\circ$ para (a) $v = 0$, (b) $v = 2$, (c) $v = 5$, e (d) $v = 15$	100
Figura 13 – $ g_{n,\text{TM}}^{v\pm 1} $ quando $s = 0,01$ e $\alpha = 10^\circ$ para (a) $v = 0$, (b) $v = 2$, (c) $v = 5$, e (d) $v = 15$	101
Figura 14 – $ g_{n,\text{TM}}^{v\pm 1} $ quando $s = 0,05$ e $\alpha = 2^\circ$ para (a) $v = 0$, (b) $v = 2$, (c) $v = 5$, e (d) $v = 15$	102
Figura 15 – $ g_{n,\text{TM}}^{v\pm 1} $ quando $s = 0,05$ e $\alpha = 10^\circ$ para (a) $v = 0$, (b) $v = 2$, (c) $v = 5$, e (d) $v = 15$	103
Figura 16 – $ E_r ^2$ no plano x - z quando $\alpha = 2^\circ$ e $s = 0,001$. <i>Linha superior: $v = 0$. Linha do meio: $v = 2$. Linha inferior: $v = 5$.</i> As primeiras duas colunas correspondem à Eq. (4.32), as demais representam uma técnica de remodelação específica.	105

Figura 17 – $ E_r ^2$ no plano x - z quando $\alpha = 10^\circ$ e $s = 0,05$. <i>Linha superior:</i> $v = 0$. <i>Linha do meio:</i> $v = 2$. <i>Linha inferior:</i> $v = 5$. As primeiras duas colunas correspondem à Eq. (4.32), as demais representam uma técnica de remodelação específica.	106
Figura 18 – Cortes de $ E_r ^2$ em $x = x_0$ para $s = 0,05$, $\alpha = 10^\circ$. (a) $v = 0$ ($x_0 = 0,6 \mu\text{m}$), (b) $v = 2$ ($x_0 = 1,8 \mu\text{m}$) e (c) $v = 5$ ($x_0 = 2,7 \mu\text{m}$).	107
Figura 19 – Cortes de $ E_r ^2$ em $z = z_0 = 0$ para $s = 0,05$, $\alpha = 10^\circ$. (a) $v = 0$, (b) $v = 2$ e (c) $v = 5$	108
Figura 20 – Número de termos em A_p dada pela Eq. (3.41) para a FW.	109
Figura 21 – LIP, $ \Psi(\rho, z) ^2$, para uma FW de energia finita (a) Gráfico 3D do LIP, $ \Psi(\rho, z) ^2$, onde $\bar{F}(z)$ é dado pela Eq. (5.1), com $\lambda = 1064 \text{ nm}$, $r_0 \approx 9 \mu\text{m}$, $L = 74 \text{ mm}$, $l_{max} = 3$, $N = 53$. (b) Gráfico em 2D do LIP do mesmo feixe.	110
Figura 22 – Seção transversal de pressão de radiação longitudinal $C_{pr,z}$ em função de z_0 para a FW da Fig. 21, com $\rho_0 = 0$ (no eixo). O espalhador tem três raios a distintos e um índice de refração fixo, $M = 1,1$. Fatores multiplicativos foram introduzidos para uma melhor visualização.	111
Figura 23 – Seção transversal de pressão de radiação radial (transversal) $C_{pr,x}$ como uma função de ρ_0 para a FW da Figura 21. A partícula espalhadora tem raio $a = \lambda/20$. Índice de refração para (a) $M = 1,1$ e (b) $M = 0,9$. As três curvas correspondem a três posições relativas distintas z_0 do feixe.	112
Figura 24 – $ \Psi(\rho, z) ^2$, para FW de energia finita (a) Gráfico 3D do LIP, $ \Psi(\rho, z) ^2$, onde $\bar{F}(z)$ é dado pela Eq. (5.2), com $\lambda = 1064 \text{ nm}$, $r_0 \approx 9 \mu\text{m}$, $L = 80 \text{ mm}$, $l = 3$, $N = 57$. (b) Gráfico em 2D do LIP do mesmo feixe.	114
Figura 25 – Seção transversal de pressão de radiação longitudinal $C_{pr,z}$ em função de z_0 para a FW da Figura 24, com $\rho_0 = 0$ (no eixo). O espalhador tem três raios a distintos e um índice de refração fixo, $M = 1,1$. Fatores multiplicativos foram introduzidos para uma melhor visualização.	115
Figura 26 – Seção transversal de pressão de radiação radial (transversal) $C_{pr,x}$ como uma função de ρ_0 para a FW da Figura 24. A partícula espalhadora tem raio $a = \lambda/20$. Índice de refração para (a) $M = 1,1$ e (b) $M = 0,9$. As três curvas correspondem a três posições relativas distintas z_0 do feixe.	115
Figura 27 – (a) Gráficos 3D e (b) 2D de $ \Psi(\rho, \phi, z) ^2$ para FW de ordem $v = 4$ com $\lambda = 1064 \text{ nm}$, $r_0 \approx 9 \mu\text{m}$, $L = 74 \text{ mm}$ e $N = 53$	116
Figura 28 – RPCS ($C_{pr,z}$) longitudinal como função de z_0 para a FW da Fig. 27 com $\rho = 7,75 \mu\text{m}$. Para partículas de três raios distintos a e um índice de refração fixo de $M = 1,1$	117

Figura 29 – RPCS ($C_{pr,x}$) transversal como função de $\rho = 7,75 \mu\text{m}$ para a FW da Fig. 27. Para uma partícula de raio $a = \lambda/20$ e índices de refração de $M = 1,1$ para a figura (a) e $M = 0,9$ para (b).	118
Figura 30 – $ g_{n,\text{TM}}^{v\pm 1} $ para (a) $v = 0$, (b) $v = 1$, (c) $v = 2$, (d) $v = 3$, e (e) $v = 4$	120

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tempo de processamento dos BSCs para BGB com $\alpha = 2^\circ$ e $s = 0,001$ medidos com a função <i>TIMING</i>	102
Tabela 2 – Tempo de processamento dos BSCs para BGB com $\alpha = 10^\circ$ e $s = 0,001$ medidos com a função <i>TIMING</i>	103
Tabela 3 – Tempo de processamento dos BSCs para BGB com $\alpha = 2^\circ$ e $s = 0,05$ medidos com a função <i>TIMING</i> para 50 valores de n	104
Tabela 4 – Tempo de processamento dos BSCs para BGB com $\alpha = 10^\circ$ e $s = 0,05$ medidos com a função <i>TIMING</i> para 50 valores de n	104
Tabela 5 – Tempo de processamento BSCs para FW medidos com a função <i>TIMING</i> para 50 valores de n	119

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BBs	Feixes de Bessel (<i>Bessel Beams</i>)
BGBs	Feixes de Bessel-Gauss (<i>Bessel-Gauss Beams</i>)
HBGBs	Feixes de Bessel-Gauss de ordem superior (<i>High-order Bessel-Gauss Beams</i>)
FWs	<i>Frozen Waves</i>
DARBs	Feixes Resistentes à Atenuação e Difração (<i>Diffraction-Attenuation Resistant Beams</i>)
LBGs	Feixes de Laguerre-Gauss (<i>Laguerre-Gauss Beams</i>)
GLMT	Teoria Generalizada de Lorenz-Mie (<i>Generalized Lorenz-Mie Theory</i>)
LMT	Teoria de Lorenz-Mie (<i>Lorenz-Mie Theory</i>)
LA	Localização Aproximada (<i>Localized Approximation</i>)
FS	Séries Finitas (<i>Finite Series</i>)
BSCs	Fatores de Forma (<i>Beam Shape Coefficients</i>)
LIP	Perfil Longitudinal de Intensidade (<i>Longitudinal Intensity Pattern</i>)
TE	Transversal Elétrico
TM	Transversal Magnético
NET	Teorema de Expansão de Neumann (<i>Neumann Expansion Theorem</i>)
RPCS	Seções de Choque de Pressão de Radiação (<i>Radiation Pressure Cross-sections</i>)

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbf{E}	Campo elétrico
\mathbf{H}	Campo magnético
E_0	Intensidade de campo elétrico
H_0	Intensidade de Campo magnético
α	Ângulo de áxicon
λ	Comprimento de onda
k	Número de onda
k_ρ	Número de onda transversal
k_z	Número de onda longitudinal
ω	Frequência angular
q	Parâmetro de apodização gaussiano
s	Parâmetro de confinamento
$J_\nu(x)$	Função de Bessel de primeira espécie e ordem ν
Ψ	Solução de equação de onda escalar ou componente transversal do campo elétrico
$g_{n,TE}^m$	Fator de forma para o modo transversal elétrico
$g_{n,TM}^m$	Fator de forma para o modo transversal magnético
A_p	Coefficiente constante e complexo do p -ésimo feixe de Bessel para <i>frozen waves</i>
$k_{\rho p}$	p -ésimo número de onda transversal
$k_{z p}$	p -ésimo número de onda longitudinal
$C_{pr,i}$	Componentes cartesianas de seção de choque de pressão de radiação ($i = x, y, z$)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	27
1.1	Justificativa	31
1.2	Objetivos	32
1.3	Metodologia	33
2	TEORIA GENERALIZADA DE LORENZ-MIE	35
2.1	Considerações Sobre a Teoria Generalizada de Lorenz Mie (GLMT)	35
2.2	Componentes da Expansão de Campos	36
2.3	Fatores de Forma	41
2.3.1	O Método das Quadraturas	42
2.3.2	Aproximação Localizada	43
2.3.3	Séries Finitas	45
2.4	Seções de Choque de Pressão de Radiação	47
2.5	Comentários Finais e Conclusões	49
3	FEIXES DE BESSEL-GAUSS E SUAS SUPERPOSIÇÕES	51
3.1	Ondas Localizadas	51
3.2	Feixes de Bessel-Gauss	53
3.3	<i>Frozen Waves</i>	54
3.3.1	Ondas Estacionárias ou <i>Frozen Waves</i> através de Superposições de Feixes de Bessel	55
3.3.2	Feixes de Energia Finita Resistentes a Difração e Atenuação Através de Superposições de Feixes Bessel-Gauss	58
3.3.2.1	FWs com Número de Onda Transversal Puramente Real	59
3.3.2.2	FWs de Energia Finita Usando BGB	61
3.3.2.3	FWs de Superposições de Feixes de Bessel-Gauss de Energia Finita sem Periodicidade Espacial	63
4	FEIXES DE BESSEL-GAUSS E <i>FROZEN WAVES</i> NA GLMT	69
4.1	Descrição Analítica de BGBs Usando a ILA	69
4.2	Descrição Analítica de BGBs Usando a FS	75
4.2.1	BSCs para Modos TM, $(n - m)$ par	76
4.2.2	BSCs para Modos TM, $(n - m)$ ímpar	82
4.2.3	BSCs para Modos TE	92
4.3	Fatores de Forma para FWs	93
4.4	Conclusões	95

5	RESULTADOS NUMÉRICOS	97
5.1	Resultados para BGBs	97
5.1.1	Comparação de BSCs para BGBs.	97
5.1.2	Perfil de Intensidade de Campo Elétrico	105
5.2	Resultados Numéricos para FW	108
5.2.1	FW de Ordem Zero	108
5.2.2	FW de Ordem Superior	116
5.2.3	Comparação de BSCs para FWs	119
6	CONCLUSÃO	121
	REFERÊNCIAS	123
	ANEXOS	131
	ANEXO A – BESSEL-GAUSS BEAMS IN THE GENERALIZED LORENZ-MIETHEORY USING THREE REMODE- LING TECHNIQUES. ENVIADO PARA PUBLICA- ÇÃO NA JOURNAL OF QUANTITATIVE SPECTROS- COPY AND RADIATIVE TRANSFER	133
	ANEXO B – ON ANALYTICAL DESCRIPTIONS OF FINITE-ENERGY PARAXIALFROZEN WAVES IN GENERALIZED LORENZ- MIE THEORY. APRESENTADO NO IMOC 2017 . . .	161
	ANEXO C – ANALYTICAL DESCRIPTION OF PARAXIAL HIGHER- ORDER FROZEN WAVES IN GENERALIZED LORENZ- MIE THEORY: THE FINITE-ENERGY CASE. APRE- SENTADO NO LIP 2018	167
	ANEXO D – BESSEL-GAUSS BEAM DESCRIPTION IN THE GE- NERALIZED LORENZ-MIE THEORY: THE FINITE SERIES METHOD. APRESENTADO NO IMOC 2019	171

1 INTRODUÇÃO

Aprisionamento óptico se refere às técnicas de captura e manipulação de partículas micrométricas usando a luz. Através de um sistema de microscopia e de feixes de laser com perfis espaciais de intensidade específicos é possível a criação de simples ou múltiplas armadilhas ópticas bi ou tridimensionais para as mais diversas aplicações em engenharia biomédica e física, por exemplo, em [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Entre os feixes comumente utilizados, encontram-se os feixes gaussianos e os de Bessel. Os feixes de Bessel (BBs) são uma solução eletromagnética não difrativa, ou seja, utilizam recursos energéticos (energia lateral) de forma a manterem inalterados seus perfis espaciais, independentemente da distância longitudinal ou de propagação. Isso é válido pelo menos até certa distância máxima limitada, em geral, pelo raio da abertura e do ângulo de áxicon correspondente [7, 8, 9, 10, 11].

As propriedades dos feixes não difrativos são estudadas com foco em aplicações tanto em física básica como aplicada [12, 13]. Por exemplo, tem-se os feixes Airy que conseguem propriedades de micromanipulação óptica devido as suas características de auto-reconstrução [14]. Em micro-imagem os BBs, além de diminuírem a difração produzida por artefatos espalhadores, apresentam robustez contra a deflexão desses objetos e incrementam a qualidade da imagem e profundidade de penetração em meios densos [15, 16, 17]. Em comunicação óptica na atmosfera os feixes não difrativos oferecem maior resiliência a perturbações [18, 19].

Os BBs ideais mantêm seu perfil de campo transversal ao longo da sua propagação, independentemente da distância desde a fonte, em outras palavras são resistentes à difração [8], [7]. Porém, isso também faz com que, fatores multiplicativos à parte, seus perfis longitudinais de intensidade não possam ser controlados no espaço pois são incapazes de prover armadilhas ópticas tridimensionais efetivas, pelo menos dentro da sua região de foco estendido. Contudo, eles são usados em variadas aplicações como aprisionamento óptico bidimensional, manipulação de partículas em múltiplos planos transversais ao eixo óptico e deslocamento de partículas ao longo de tal eixo usando a pressão de radiação [20, 21, 22] devido a suas propriedades não difrativas e de auto-reconstrução [23].

Em 1987 Guattari e Padovani [24] introduziram pela primeira vez os feixes de Bessel-Gauss (BGB) de ordem zero como uma nova solução à equação de onda paraxial, onde o BGB corresponde a um BB multiplicado por um perfil Gaussiano. Em [25, 26] os autores apresentaram a solução generalizada de BGBs de ordem superior (HBGBs) (*High order Bessel Gauss Beams*). Os *dark hollow beams* têm sido estudados pelas suas propriedades que possibilitam aplicações em manipulação e guiamento de átomos e partículas usando

forças ópticas [27, 28, 29, 29, 30] conhecidas como pinças ópticas. Os HBGBs são um bom modelo para descrever *dark hollow beams*, onde as forças de radiação dos HBGBs podem ser utilizadas para manipulação de partículas milimétricas [31].

Neste contexto, há quase quinze anos foi proposto um método teórico e experimental simples usando BBs [32] para ampliar as propriedades de captura de BBs escalares criando aprisionamento óptico efetivamente tridimensionais, mantendo concomitantemente suas propriedades não difrativas. Para tanto, utilizou-se de superposições discretas de tais feixes, todos com mesma frequência e ordem, porém com números de onda longitudinais (ou radiais) distintos. O feixe resultante de tal superposição ficou conhecido como *Frozen Wave* (FW) escalar de ordem arbitrária [32, 33] e, em meios com perdas, como Feixes Resistentes à Atenuação e Difração (*Diffraction-Attenuation Resistant Beam*) (DARB) [34, 35]. Recentemente foi introduzida uma extensão para o método de FW usando BGBs [36], obtindo uma versão de FW de energia finita e sem o inconveniente da periodicidade espacial presente em versões anteriores [37].

Na prática, a geração de BBs apresenta limitações de distância devido à sua baixa potência. Para a geração de feixes não difrativos com alta potência, Chu *et al.* [13] validaram o uso de tecnologia de combinação coerente para a geração de BGBs. Zhao *et al.* [38, 39] apresentaram ferramentas analíticas para o estudo da propagação de HBGB em sistemas ópticos ABCD não alinhados. Gerações práticas de FWs têm sido demonstradas em [40, 41, 42, 43].

A grande maioria de ferramentas de manipulação óptica envolvem armadilhas ópticas complexas que dependem da manipulação independente de múltiplas armadilhas, estas últimas, por vezes, requerendo configurações experimentais ainda mais complexas [44]. Entre 2012 e 2015 [40, 42] conseguiram gerar FWs através de hologramas gerados por computador reproduzidos por moduladores espaciais de luz. Neste ano, Suarez *et al.* [44] apresentaram pela primeira vez uma demonstração de aprisionamento óptico de micropartículas utilizando FWs. O aprisionamento foi conseguido através de uma configuração experimental de pinças ópticas holográficas usando moduladores espaciais de luz. Com essa configuração eles conseguiram uma boa estabilidade para o aprisionamento óptico usando FWs, demonstrando de maneira experimental o potencial desses feixes para o aprisionamento longitudinal de micropartículas.

Uma das principais características das FWs é que o perfil longitudinal de intensidade pode ser arbitrariamente escolhido *a priori*, o que traz a possibilidade de um maior controle no espaço, e expande a gama de aplicações. O uso de uma FW como uma alternativa de feixe não difrativo para aprisionamento óptico começou a ser sustentado por Ambrosio em 2015 [45] com o cálculo de forças de pressão de radiação, ou seções de choque, no regime de Rayleigh e em um regime arbitrário usando a teoria generalizada de Lorenz-Mie (GLMT) [46, 47] supondo FWs discretas escalares. Porém, os feixes escalares não satisfazem as

equações de Maxwell e, para antecipar corretamente a interação entre feixes e partículas, torna-se indispensável usar um feixe vetorial. Assim, em 2018 estendeu-se a descrição de FWs usando a GLMT, para uma versão discreta vetorial [23].

A determinação teórica ou numérica das propriedades físicas de interesse dependem de uma descrição precisa do perfil de campo do feixe incidente sobre o espalhador. Para isso, é frequente e recorrente o uso da chamada GLMT, ver [48] e referências ali contidas. A GLMT trata do problema de espalhamento eletromagnético e, conseqüentemente, da interação luz-matéria entre feixes de perfis espaciais arbitrários e partículas esféricas de raios também arbitrários em relação ao comprimento de onda. Para tanto, os campos eletromagnéticos incidentes, espalhados e internos são expandidos em termos de funções harmônicas esféricas ou equivalentes, utilizando o sistema de coordenadas esféricas devido à simetria do problema [48].

Essa teoria nasceu da frustração de um dos seus autores, Gérard Gouesbet, porque na época não lhe foi possível obter algumas medidas simultâneas de tamanho e velocidades de partículas necessárias para um estudo de fenômenos de difusão e termodifusão em plasma usando uma sonda laser Doppler. Após algum tempo ficou evidente para ele a necessidade de dominar a teoria de interação entre feixes de luz e partículas. Dado que a teoria clássica de Lorenz-Mie somente é válida para quando o feixe iluminante é uma onda plana, tornou-se indispensável para Gouesbet a construção de uma teoria generalizada de Lorenz-Mie que incluísse diferentes tipos de feixes e, com o tempo, diferentes formas de partículas (ver o comentário do próprio Gouesbet na secção 2.1 da Ref. [49]).

A GLMT, como originalmente surgiu no começo dos anos 80 do século passado, lida com o problema de espalhamento entre feixes arbitrários e partículas esféricas homogêneas [50]. Os campos eletromagnéticos internos, incidentes e espalhados são expandidos em termos de funções especiais sejam elas funções de onda esféricas vetoriais (VSWFs, *Vector Spherical Wave Functions*) [51, 52] ou campos escalares auxiliares como os potenciais de Bromwich [53]. Os coeficientes de expansão para o feixe incidente são os fatores de forma do feixe (BSCs, *Beam Shape Coefficients*) e carregam toda a informação relacionada à forma espacial do feixe. Para os campos espalhados e internos, tem-se também os coeficientes de Mie, resultantes da imposição de relações de continuidade para as componentes tangenciais do campo elétrico e magnético na superfície da esfera. Achar os BSCs $g_{m, TM}^n$ e $g_{m, TE}^n$ ($1 \leq n < \infty$, $-n \leq m \leq +n$) para os modos magnético (TM) e elétrico (TE), respetivamente, nem sempre é uma tarefa fácil, podendo demandar um esforço algébrico e computacional considerável. Alguns métodos para o cálculo desses coeficientes são apresentados em [48].

O método mais geral é o esquema de quadratura porém, que pode depender do cálculo de integrações duplas ou triplas com integrandos altamente oscilantes que demandam um alto custo computacional. Outra técnica para calcular BSCs a partir de um feixe Maxwelliano é o método das Série Finitas (FS). Apesar de ser um método exato

e de evitar integrações complexas em coordenada polar ele foi desenvolvido apenas para alguns feixes como feixes Gaussianos [54], *laser-sheet* [55] e recentemente, Laguerre-Gauss (LGB) [56, 57], BBs [58] e BGBs [59], alguns deles de natureza escalar intrínseca.

A aproximação localizada (LA) [48] é a última das técnicas disponíveis para a avaliação dos BSCs. Como o próprio nome indica o método é uma aproximação, ele é baseado no princípio de localização de van de Hulst, mas foi rigorosamente justificada para feixes gaussianos [60, 61], assim como também para o que foi descrito como “feixes arbitrários”, tratando-se porém de feixes com perfis espaciais com exponencial de propagação (assumindo propagação em $\pm z$) na forma $\exp(\pm ikz)$, onde k é o número de onda [62].

O fato da LA ter sido amplamente utilizada é uma consequência de cálculos confiáveis sobre feixes gaussianos paraxiais e do fato de que acelera os cálculos em várias ordens de magnitude quando os BSCs de quadratura não puderem ser calculados analiticamente. No entanto, na LA os campos ópticos não são tão arbitrários, pois estão restritos a um fator de propagação específico $\exp(\pm ikz)$, onde k é o número de onda, assumindo-se propagação ao longo de $\mp z$. Foi demonstrado recentemente em [63, 64], que, tanto analiticamente, quanto a partir de cálculos explícitos de BSCs e reconstruções de campos elétricos, que a LA apresenta falhas em várias classes de campos de ondas maxwellianos ou não-maxwellianos que são também arbitrários no sentido amplo, como BBs, feixes helicoidais e LGBs [65, 66, 67].

Em 2017, Ambrosio *et al.* [68] apresentaram uma justificativa para utilizar LA em BB escalares, com base no fato de que, para feixes com um ângulo pequeno de axicon, ou seja no regime paraxial, o feixe escalar pode ser interpretado como uma aproximação precisa do feixe vetorial correspondente [23]. Assim, a LA fornecerá uma remodelação ou descrição acertada do feixe.

Para BBs há fórmulas explícitas e analíticas para os BSCs que podem ser encontradas por métodos de quadratura [69, 70] e FS [58]. Nesse caso, a disponibilidade de BSCs exatos dispensa o uso da LA, que deve ser evitado. No entanto, na prática, os BBs ideais e paraxiais são descritos com mais precisão por suas versões de energia finita, como BGBs [24], cujos BSCs não podem ser extraídos analiticamente através do esquema de quadraturas. Portanto, é útil ter descrições confiáveis de BGBs usando a GLMT, tanto com a FS quanto com a LA.

Parte dessa tarefa foi realizada recentemente para BGBs de ordem zero [71], para FW de energia finita de ordem zero [72] e de ordem superior [73] - todos usando o esquema de LA. Além destas demonstrações, Valdivia e Ambrosio [59] apresentaram uma primeira tentativa de introduzir o método FS para BGBs. Recentemente, a autora, em conjunto com pesquisadores internacionais, enviou para publicação um artigo de comparação entre os três métodos em termos de BSCs para BGBs, com diferentes ângulos de axicon, ordens de Bessel ou cargas topológicas e parâmetros de confinamento, incluindo reconstruções de

campo e remodelação dos feixes na GLMT. O artigo submetido fornece uma comparação entre BSCs de quadratura, LA e FS para BGBs, talvez o último de uma série de feixes de forma arbitrária usados para descrever propriedades ópticas com o auxílio da LA, que não atendem às condições de arbitrariedade apresentadas em [62] para justificar totalmente o uso de esquemas localizados.

Escolher entre as técnicas ou esquemas de quadratura, FS ou LA pode não ser tão evidente. Se o tempo de processamento e a carga computacional é um problema a ser evitado, o primeiro método, quadraturas, certamente deve ser descartado. Por outro lado, se for necessário reconstruir o campo incidente em uma região suficientemente grande no espaço, então, à medida que n aumenta, as FS podem precisar de uma precisão numérica alta, ou seja, uma grande quantidade de números significativos, tornando-o proibitivo [59]. Restaria a LA, pelo menos desde que sejam impostas condições estritas, como a paraxialidade e que seja possível demonstrar que ela pode ser aplicada com segurança para uma determinada carga topológica. Nesta última situação, são esperadas comparações entre LA e quadratura que podem ser obtidas pela reconstrução do campo elétrico na GLMT.

1.1 Justificativa

Nosso grupo de Telecomunicações do Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação (SEL) da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC/USP), na figura do Prof. Leonardo André Ambrosio, vem se dedicando à incorporação teórica de BBs, FWs e DARBs dentro do contexto da GLMT para estudos de aprisionamento óptico, assim como sustentando o uso de FWs como uma alternativa interessante, por suas propriedades inerentes não difrativas, para aprisionamento óptico. Para tanto, tais feixes devem ser gerados por aberturas finitas da ordem de milímetros e possuem profundidade de campo da ordem de alguns centímetros, milímetros ou, na situação não paraxial, de micrômetros. Até o início deste trabalho os estudos nesse tema encontravam-se restritos a descrições ideais de FWs [74, 46, 47, 45, 75, 76].

Por disporem de imenso grau de liberdade na escolha do perfil longitudinal de intensidade, as FWs possuem grande potencial de aplicação em aprisionamento óptico através da criação de armadilhas estruturadas. Inclusive, vislumbra-se o uso de FWs em guiamento atômico, através de perfis longitudinais que podem, naturalmente, ser interpretados como poços ou barreiras de potencial. Demonstrações de gerações práticas de FW têm sido apresentadas em [40, 41, 42, 43]. Nesse ano, tem-se demonstrando de maneira experimental o potencial das FW para aprisionamento óptico longitudinal em [44].

Para aproximar teoria e experimento é necessário buscar descrições teóricas fiéis do perfil de campo do feixe incidente. Usando a GLMT podem ser calculados os BSCs, que são coeficientes que carregam consigo toda a descrição espacial do feixe. O conhecimento

desses coeficientes é de fundamental importância para previsões teóricas precisas acerca de forças ópticas, torques ópticos, seções eficazes, análises de arco-íris, etc.[48].

FWs de energia finita são formadas por superposições de BGBs, mas primeiro é importante e necessário ter descrições confiáveis das mesmas. A presente tese representa uma contribuição para o entendimento de BGBs usando a GLMT e as técnicas disponíveis para o cálculo dos BSCs que carregam a descrição espacial do feixe, comparando os resultados e validando a escolha das técnicas. Além disso, amplia esta descrição das BGBs para as FWs no contexto da GLMT.

1.2 Objetivos

Pelo exposto, são objetivos do trabalho de doutorado:

1. Estudo da viabilidade de descrição analítica de BGBs de ordem arbitrária;
2. Estudo da viabilidade de descrição analítica de FWs truncadas e de ordem arbitrária. Pela natureza de construção, as FWs estudadas foram discretas e escalares;
3. Estudo da GLMT e as técnicas para o cálculo dos BSCs: quadraturas, ILA e FS.
4. Descrição de BGBs escalares de ordem arbitrária citados no objetivo 1 em termos de seus BSCs, permitindo a incorporação no contexto da GLMT;
5. Comparação e escolha da técnica adequada, segundo o requerimento para o cálculo de BSCs para BGBs escalares.
6. Descrição das FWs truncadas citadas no objetivo 2 em termos de seus BSCs, permitindo a incorporação dentro do contexto da GLMT;
7. Análise das propriedades ópticas de captura para perfis pré-escolhidos, focando-se na análise de forças ópticas;
8. Prover subsídios teóricos para a comunidade científica da área, tanto como de BGBs como FWs, visando a adoção de FWs como feixes não difrativos alternativos e interessantes em aprisionamento óptico;

Os objetivos 1 e 2 envolveram grande familiarização com a bibliografia técnica da área, além de estudos em eletrodinâmica.

O objetivo 3 incluiu o estudo da GLMT, compreendendo fenômenos físicos de espalhamento eletromagnético. Assim como o aprofundamento nas técnicas para o cálculo de BSCs.

Os objetivos 4 e 6 atingiram o cálculo dos BSCs para BGBs e FW respectivamente, assim como o fornecimento de um conjunto de equações segundo o método aplicado. De

fato, o cálculo dos BSCs é o maior desafio dentro do contexto da GLMT. Soluções exatas envolvem, muitas vezes, cálculos numéricos com integrais duplas e triplas e processos algébricos complexos.

O objetivo 5 fornece uma comparação entre os resultados das técnicas aplicadas e uma análise da literatura para a escolha adequada da técnica segundo a necessidade.

O objetivo 7 estabelece que serão escolhidas FWs truncadas, discretas e escalares, com perfis longitudinais dentro da faixa espacial ao longo do eixo óptico para a qual todos os feixes mantêm suas propriedades relativamente intactas e de possível interesse prático.

O objetivo 8 é consequência dos objetivos anteriores.

1.3 Metodologia

O presente estudo tem caráter teórico-computacional. O primeiro passo foi um estudo geral de feixes não difrativos seguido do estudo de BGBs e a superposição deles chamada de FW. Após esse primeiro passo, foi feito o estudo da teoria generalizada de Lorenz-Mie e das abordagens para a descrição analítica destes feixes. Em seguida, aplicamos as técnicas para a descrição tanto de BGBs como de FW. Foram obtidos vários conjuntos de equações que descrevem os fatores de forma. Com estes coeficientes que carregam toda a informação do feixe, foram feitas simulações no software *Mathematica* com a finalidade de comparar e validar os resultados obtidos. Assim, todos os objetivos da seção anterior envolvem análises físicas e matemáticas de problemas específicos, com posterior investigação através de simulações em códigos desenvolvidos pela autora e alguns já desenvolvidos por nosso grupo¹. Para a parte numérica, o software *Mathematica* foi suficiente para o desenvolvimento dos códigos, uma vez que não havia previsão de estudos experimentais.

Organizamos o texto nos seguintes capítulos:

Capítulo 2: é apresentada uma revisão da GLMT, que descreve a interação entre um feixe incidente e uma partícula espalhadora. O capítulo inclui as abordagens para o cálculo dos fatores de forma, quadratura, ILA e FS, além de uma descrição das seções de choque de pressão de radiação (RPCS);

Capítulo 3: são apresentados os feixes de interesse deste trabalho, que são, BGBs e FWs discretas e escalares;

¹ Outros códigos utilizados e não desenvolvidos pela autora estão relacionados com cálculos de campos elétricos reconstruídos na GLMT desenvolvidos por Luiz Felipe Machado Votto a quem agradecemos

Capítulo 4: contém os resultados analíticos dos BSCs para BGBs e FW usando ILA e FS;

Capítulo 5: são apresentados os resultados de validação, simulações e comparações entre as abordagens para descrever BGBs e FWs, e

Capítulo 6: são apresentadas as conclusões finais e perspectivas de trabalhos futuros.

2 TEORIA GENERALIZADA DE LORENZ-MIE

2.1 Considerações Sobre a Teoria Generalizada de Lorenz Mie (GLMT)

A teoria generalizada Lorenz-Mie (GLMT, *Generalized Lorenz-Mie Theory*) proposta por Gouesbet e Gréhan em [50], descreve a interação entre partículas espalhadoras esféricas iluminadas por feixes arbitrários.

O problema da interação de uma partícula e uma onda eletromagnética plana foi resolvido por G. Mie em 1908 [77]. Más, apesar de não fazer referência explícita às equações de Maxwell, Lorenz em 1890 [78] resolveu também o problema de espalhamento de ondas por uma esfera dielétrica, porém sob uma perspectiva baseada em mecânica clássica. Por estes estudos, a teoria de espalhamento eletromagnético por partículas é chamada de Teoria de Mie ou de Lorenz-Mie (LMT, *Lorenz-Mie Theory*) [48].

Gouesbet e Gréhan viram a necessidade de elaborar uma versão generalizada da LMT, já que ela não era aplicável em várias situações práticas. De fato, a LMT é válida quando a partícula apresenta simetria esférica e o feixe incidente é uma onda plana ou pode ser considerado como tal (com partículas suficientemente pequenas a onda incidente pode ser considerada como uma onda plana) [48]. Na prática, feixes de laser comumente utilizados apresentam perfil de campo gaussiano. Assim, a Teoria Generalizada de Lorenz Mie GLMT trata do problema de espalhamento eletromagnético e a interação luz-matéria entre feixes de perfis espaciais arbitrários e partículas esféricas de raios também arbitrários.

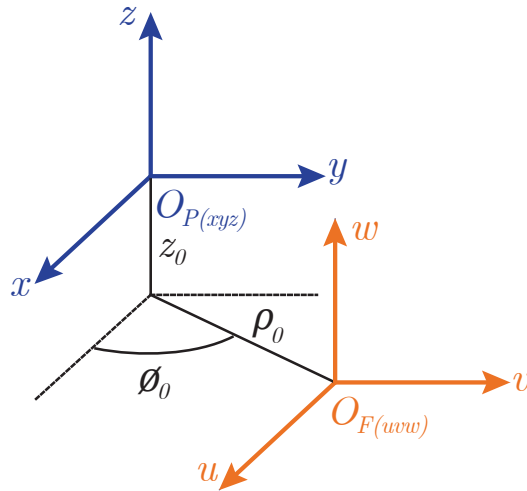
Essa extensão da LMT é bastante usada em investigações e predições de diversas propriedades físicas como forças e torques ópticos, amplitudes de espalhamento, RPCS, etc. [48, 79, 80]. Essas propriedades são relevantes para a descrição, por exemplo, de armadilhas ópticas [71].

Na GLMT os campos eletromagnéticos incidentes, espalhados pelas partículas e internos a estas são expandidos em termos de funções harmônicas esféricas. Os coeficientes de tal expansão carregam consigo a descrição espacial do feixe relativamente à onda plana. Conhecer esses coeficientes - chamados de fatores de forma (BSCs, *Beam Shape Coefficients*) é importante para predições teóricas precisas e necessárias em diversas aplicações ópticas.

A teoria considera uma partícula esférica de diâmetro d e índice de refração complexo M . Embora proposta originalmente para feixes de Gauss [53], a teoria facilmente admite generalização para outros tipos de feixes, contando para tanto com três técnicas diferentes para determinação dos BSCs.

A GLMT usa dois sistemas paralelos de coordenadas cartesianas O_{Fuvw} e O_{Pxyz} (ver Figura 1). A origem do sistema de coordenadas O_{Pxyz} está localizado no centro

Figura 1: Sistemas de coordenadas paralelos usadas pela GLMT.



Fonte: Elaborada pela autora.

da partícula esférica espalhadora, enquanto que o sistema O_{Fuvw} descreve o feixe e é escolhido segundo a sua natureza (por exemplo, para feixes de Gauss, a origem do sistema pode estar localizada no centro da cintura do feixe. Em contrapartida, para BB ideais com eixo óptico sobre, digamos, o eixo w coincidente com o eixo z , a localização da origem sobre o eixo óptico tem como única consequência uma variação de fase, podendo muitas vezes ser desprezada).

O objetivo deste Capítulo é apresentar a GLMT e seu formalismo em coordenadas esféricas, expressando os campos eletromagnéticos em termos dos BSCs. Além disso, são resumidamente revistas as três técnicas ou esquemas de determinação dos BSCs, cada qual com suas particularidades, vantagens e desvantagens. Em razão de nosso maior interesse em aplicações voltadas a aprisionamento óptico e cálculo de forças, aqui também relembre-se expressões para as RPCS, proporcionais às forças ópticas [48]. Em todo o restante desta tese, a menos que explicitamente dito, assume-se a convenção de variação harmônica no tempo usual da engenharia, qual seja, $\exp(+i\omega t)$.

2.2 Componentes da Expansão de Campos

Expressões para as componentes de campo incidente em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) são obtidas da Ref. [48]. Sendo λ o comprimento de onda no meio circundante e $k = 2\pi/\lambda$ o respectivo número de onda,

$$E_{r, TM}^i = kE_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} g_{n, TM}^m [\Psi_n''(kr) + \Psi_n(kr)] P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.1)$$

$$E_{\theta, TM}^i = \frac{E_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} g_{n, TM}^m \Psi_n'(kr) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.2)$$

$$E_{\phi, TM}^i = i \frac{E_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} m c_n^{pw} g_{n, TM}^m \Psi_n'(kr) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.3)$$

$$H_{r, TM}^i = 0 \quad (2.4)$$

$$H_{\theta, TM}^i = \frac{-H_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} m c_n^{pw} g_{n, TM}^m \Psi_n(kr) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.5)$$

$$H_{\phi, TM}^i = \frac{-iH_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} g_{n, TM}^m \Psi_n(kr) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.6)$$

$$E_{r, TE}^i = 0 \quad (2.7)$$

$$E_{\theta, TE}^i = \frac{E_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} m c_n^{pw} g_{n, TE}^m \Psi_n(kr) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.8)$$

$$E_{\phi, TE}^i = \frac{iE_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} g_{n, TE}^m \Psi_n(kr) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.9)$$

$$H_{r, TE}^i = kH_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} g_{n, TE}^m [\Psi_n''(kr) + \Psi_n(kr)] P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.10)$$

$$H_{\theta, TE}^i = \frac{H_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} g_{n, TE}^m \Psi_n'(kr) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.11)$$

$$H_{\phi, TE}^i = \frac{iH_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} m c_n^{pw} g_{n, TE}^m \Psi_n'(kr) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (2.12)$$

Nas Eqs. (2.1) a (2.12) o superíndice “i” indica campo incidente, e as componentes de campo são desmembradas em modos TM (Transverso Magnético), Eqs. (2.1) a (2.6), e TE (Transverso Elétrico), (Eqs. (2.7) a (2.12)). E_0 e H_0 representam as intensidades de campo elétrico e magnético referenciais, respectivamente. A dependência em θ é dada em termos de funções associadas de Legendre, $P_n^m(\cos \theta)$ (n e m inteiros, $n \geq 1$, $-n \leq m \leq +n$) e funções generalizadas de Legendre:

$$\tau_n^k(\cos \theta) = \frac{d}{d\theta} P_n^k(\cos \theta) \quad (2.13)$$

$$\pi_n^k(\cos \theta) = \frac{P_n^k(\cos \theta)}{\sin \theta} \quad (2.14)$$

Os fatores c_n^{pw} representam os coeficientes ou fatores de forma da onda plana que aparecem na formulação de Bromwich da LMT [50], dados pela Eq. (2.15):

$$c_n^{pw} = \frac{1}{ik} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}. \quad (2.15)$$

Como é usual na GLMT, os c_n^{pw} 's são isolados de maneira a desconectá-los dos BSCs de feixes arbitrários, $g_{n,TM}^m$ e $g_{n,TE}^m$, sobre os quais falaremos mais adiante (seção 2.3).

A dependência radial dos campos incidentes aparece dada nas Eqs. (2.1) a (2.12) em termos de funções de Ricatti-Bessel, $\Psi_n(x)$, definidas por:

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x). \quad (2.16)$$

Na Eq. (2.16) $J_{n+1/2}$ é a função de Bessel de primeira espécie e ordem fracionária $n + 1/2$. Sempre que necessário, derivadas de 1a., 2a., 3a., etc. ordens de $\Psi_n(x)$ em relação ao argumento são expressas como $\Psi'(x)$, $\Psi''(x)$, $\Psi'''(x)$, etc. Tendo em vista a periodicidade dos campos em relação à coordenada angular ϕ (em períodos de 2π), a dependência de suas componentes se dá na forma $\exp(im\phi)$ ¹

De maneira similar, as componentes de campo para as ondas espalhadas são expressas como:

$$E_{r,TM}^s = -kE_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} A_n^m [\xi_n''(kr) + \xi_n(kr)] P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.17)$$

$$E_{\theta,TM}^s = -\frac{E_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} A_n^m \xi_n'(kr) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.18)$$

$$E_{\phi,TM}^s = -i\frac{E_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} m c_n^{pw} A_n^m \xi_n(kr) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.19)$$

$$H_{r,TM}^s = 0 \quad (2.20)$$

$$H_{\theta,TM}^s = \frac{H_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} m c_n^{pw} A_n^m \xi_n(kr) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.21)$$

¹ A proposta de solução, como dada nas Eqs. (2.1) a (2.12) e assim como na LMT, é baseada no método de separação de variáveis para equações diferenciais de segunda ordem no tempo e no espaço. Originalmente, na GLMT, Eqs. (2.1) a (2.12) foram derivadas a partir das equações de Maxwell e expressas em termos dos chamados *potenciais escalares de Bromwich* [48].

$$H_{\phi, TM}^s = \frac{iH_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} A_n^m \xi_n(kr) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.22)$$

$$E_{r, TE}^s = 0 \quad (2.23)$$

$$E_{\theta, TE}^s = -\frac{E_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} m c_n^{pw} B_n^m \xi_n(kr) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.24)$$

$$E_{\phi, TE}^s = -\frac{iE_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} B_n^m \xi_n(kr) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.25)$$

$$H_{r, TE}^s = -kH_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} B_n^m [\xi_n''(kr) + \xi_n(kr)] P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.26)$$

$$H_{\theta, TE}^s = -\frac{H_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} B_n^m \xi_n'(kr) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.27)$$

$$H_{\phi, TE}^s = -\frac{iH_0}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} m c_n^{pw} B_n^m \xi_n'(kr) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (2.28)$$

Nas Eqs. (2.17) a (2.28), o superíndice “s” indica campo espalhado, e a dependência em r fica dada em termos das funções de Ricatti-Bessel $\xi_n(x)$ definidas a partir das funções de Hankel de segunda ordem, $H_{n+1/2}^{(2)}$:

$$\xi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+1/2}^{(2)}(x), \quad (2.29)$$

já que estas não são definidas na origem (assim como os campos espalhados só são definidos externamente ao espalhador) e possuem comportamento assintótico de saída (*outgoing*), ou de propagação em sentido $r \rightarrow \infty$. Sempre que necessário, derivadas de 1a., 2a., 3a., etc. ordens de $\xi_n(x)$ em relação ao argumento são expressas como $\xi'(x)$, $\xi''(x)$, $\xi'''(x)$, etc.

Finalmente, as componentes dos campos elétrico e magnético internos à esfera são dadas por:

$$E_{r, TM}^{sp} = kE_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} C_n^m [\Psi_n''(k_{sp}r) + \Psi_n(k_{sp}r)] P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.30)$$

$$E_{\theta, TM}^{sp} = \frac{E_0}{r} \frac{k}{k_{sp}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} C_n^m \Psi_n'(k_{sp}r) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.31)$$

$$E_{\phi, TM}^{sp} = i \frac{E_0}{r} \frac{k}{k_{sp}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} m c_n^{pw} C_n^m \Psi_n'(k_{sp}r) \pi_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.32)$$

$$H_{r, TM}^{sp} = 0 \quad (2.33)$$

$$H_{\theta, TM}^{sp} = -\frac{H_0}{r} \frac{\mu}{\mu_{sp}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} m c_n^{pw} C_n^m \Psi_n(k_{sp}r) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.34)$$

$$H_{\phi, TM}^{sp} = -\frac{iH_0}{r} \frac{\mu}{\mu_{sp}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} C_n^m \Psi_n(k_{sp}r) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.35)$$

$$E_{r, TE}^{sp} = 0 \quad (2.36)$$

$$E_{\theta, TE}^{sp} = \frac{E_0}{r} \frac{\mu_{sp}}{\mu} \frac{k^2}{k_{sp}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} m c_n^{pw} D_n^m \Psi_n(k_{sp}r) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.37)$$

$$E_{\phi, TE}^{sp} = \frac{iE_0}{r} \frac{\mu_{sp}}{\mu} \frac{k^2}{k_{sp}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} D_n^m \Psi_n(k_{sp}r) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.38)$$

$$H_{r, TE}^{sp} = kH_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} D_n^m \left[\Psi_n''(k_{sp}r) + \Psi_n(k_{sp}r) \right] P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.39)$$

$$H_{\theta, TE}^{sp} = \frac{H_0}{r} \frac{k}{k_{sp}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} D_n^m \Psi_n'(k_{sp}r) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.40)$$

$$H_{\phi, TE}^{sp} = \frac{iH_0}{r} \frac{k}{k_{sp}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} m c_n^{pw} D_n^m \Psi_n'(k_{sp}r) \tau_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (2.41)$$

Nas Eqs. (2.30) a (2.41), k_{sp} é o número de onda na partícula. Além disso, A_n^m , B_n^m , C_n^m e D_n^m são os coeficientes de espalhamento generalizados, dados por:

$$A_n^m = a_n g_{n, TM}^m \quad (2.42)$$

$$B_n^m = b_n g_{n, TE}^m \quad (2.43)$$

$$C_n^m = c_n g_{n, TM}^m \quad (2.44)$$

$$D_n^m = d_n g_{n, TE}^m, \quad (2.45)$$

Nas Eqs. (2.42) a (2.45), a_n , b_n , c_n e d_n são os coeficientes de Mie para campos espalhados e internos, de acordo com a LMT:

$$a_n = \frac{|\mu_{sp}| \Psi_n(\alpha) \Psi_n'(\beta) - |\mu| M \Psi_n'(\alpha) \Psi_n(\beta)}{|\mu_{sp}| \xi_n(\alpha) \Psi_n'(\beta) - |\mu| M \xi_n'(\alpha) \Psi_n(\beta)} \quad (2.46)$$

$$b_n = \frac{|\mu|M\Psi_n(\alpha)\Psi'_n(\beta) - |\mu_{sp}|\Psi'_n(\alpha)\Psi_n(\beta)}{|\mu|M\xi_n(\alpha)\Psi'_n(\beta) - |\mu_{sp}|\xi'_n(\alpha)\Psi_n(\beta)} \quad (2.47)$$

$$c_n = \frac{M|\mu_{sp}|\left[\xi_n(\alpha)\Psi'_n(\alpha) - \xi'_n(\alpha)\Psi_n(\alpha)\right]}{|\mu_{sp}|\xi_n(\alpha)\Psi'_n(\beta) - |\mu|M\xi'_n(\alpha)\Psi_n(\beta)} \quad (2.48)$$

$$d_n = \frac{|\mu|M^2\left[\xi_n(\alpha)\Psi'_n(\alpha) - \xi'_n(\alpha)\Psi_n(\alpha)\right]}{|\mu|M\xi_n(\alpha)\Psi'_n(\beta) - |\mu_{sp}|\xi'_n(\alpha)\Psi_n(\beta)} \quad (2.49)$$

Nas Eqs. (2.46) a (2.49), M é o índice de refração da partícula em relação ao meio no qual se encontra imersa, μ e μ_{sp} são as permeabilidades do meio externo e da partícula, respectivamente. O parâmetro de tamanho α e o parâmetro de tamanho óptico β dados por:

$$\alpha = \frac{\pi d}{\lambda} \quad (2.50)$$

$$\beta = M\alpha, \quad (2.51)$$

onde $d = 2r$ é o diâmetro da esfera.

2.3 Fatores de Forma

Os fatores de forma (BSCs) que descrevem o feixe são denotados por dois conjuntos de coeficientes sendo $g_{n,TE}^m$ para os modos TE e $g_{n,TM}^m$ para os modos TM, onde $1 \leq n < \infty$ e $-n \leq m \leq n$. Os coeficientes podem ser determinados a partir das expressões matemáticas dos campos elétricos e magnéticos radiais incidentes, E_r^i e H_r^i .

O procedimento para se obter os BSCs deve, sempre que possível, ser eficiente (rápido) do ponto de vista computacional e flexível o suficiente para não exigir extenso trabalho analítico em caso de mudança da posição do feixe incidente ou do próprio perfil de campo da onda incidente.

Os BSCs podem ser avaliados usando três métodos distintos, cada qual com suas peculiaridades, vantagens e desvantagens. São eles: quadraturas, séries finitas (FS, *Finite Series*) e aproximação localizada (LA, *Localized Approximation*) – ou sua versão na forma *integral* (ILA, *Integral Localized Approximation*). O método de quadraturas é flexível mas não é rápido. Os métodos FS e LA são rápidos, porém não flexíveis. Já a versão integral da LA (método híbrido entre o método de quadraturas e a LA [81]) é rápida e flexível, tendo como ponto negativo, assim como a LA, o fato de ser baseada em aproximações que se aplicam com maior grau de confiança a feixes paraxiais. Assim, sempre que a paraxialidade for uma característica patente do feixe sob análise, a ILA se apresenta como método eficiente e confiável para o cálculo dos BSCs.

A seguir, descrevemos em linhas gerais os três métodos acima descritos. No caso da LA, atemo-nos apenas à ILA, por ter sido a que efetivamente adotamos no restante do trabalho.

2.3.1 O Método das Quadraturas

O método das quadraturas se baseia na ortogonalidade das funções associadas de Legendre (na variável θ) e das funções exponenciais (variável ϕ) para isolar os BSCs $g_{n,TM}^m$ e $g_{n,TE}^m$ nas Eqs. (2.1) e (2.10), respectivamente. Isso porque tais fatores aparecem isoladamente apenas nas expansões das componentes radiais de campo [48].

Seja

$$\int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) P_l^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nl} \quad (2.52)$$

e

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi} d\phi = 2\pi \delta_{mm'}, \quad (2.53)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. A partir das Eqs. (2.52) e (2.53), as somatórias em Eqs. (2.1) e (2.10) em n e m podem ser eliminadas. De fato, multiplicando-se ambos os lados das Eqs. (2.1) e (2.10) por $P_l^m(\cos\theta) \exp(-im'\phi) \sin\theta$ e usando as condições de ortogonalidade acima, obtém-se

$$g_{n,TM}^m = \frac{1}{E_0 c_n^{pw}} \frac{2n+1}{4\pi n(n+1)} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \frac{r}{\Psi_n^{(1)}(kr)} \times \int_0^\pi \int_0^{2\pi} E_r P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{-im'\phi} \sin\theta d\theta d\phi \quad (2.54)$$

e

$$g_{n,TE}^m = \frac{1}{H_0 c_n^{pw}} \frac{2n+1}{4\pi n(n+1)} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \frac{r}{\Psi_n^{(1)}(kr)} \times \int_0^\pi \int_0^{2\pi} H_r P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{-im'\phi} \sin\theta d\theta d\phi. \quad (2.55)$$

Nas Eqs. (2.54) e (2.55), utilizou-se o fato de que, da equação diferencial para funções de Ricatti-Bessel, $\Psi_n''(x) + \Psi_n(x) = n(n+1)/x^2$, e $\Psi_n^{(1)}(\cdot) \equiv j_n(x)$ é a função esférica de Bessel de primeira espécie, de forma que $\Psi_n(x) = x\Psi_n^{(1)}(x) \equiv xj_n(x)$.

Embora $g_{n,TM}^m$ e $g_{n,TE}^m$ carreguem uma dependência visual em r , ela é apenas aparente. Na literatura, encontramos duas possíveis maneiras de removermos explicitamente essa dependência. A primeira é recorrer à seguinte relação [48]²:

$$\int_0^\infty \Psi_n^{(1)}(kr) \Psi_{n'}^{(1)}(kr) d(kr) = \frac{\pi}{2(2n+1)}, \quad \text{para } n = n', \quad (2.56)$$

escrevendo Eq. (2.54) e Eq. (2.55) em termos de uma integral tripla. A segunda opção é a solução direta da integral dupla, que necessariamente e independentemente dos perfis de E_r e H_r , deve gerar um fator $\Psi^{(1)}(kr)/r$. Este segundo procedimento, todavia, nem sempre é possível. Finalmente, vale ressaltar que este procedimento é, em essência, equivalente àqueles baseados em solução via transformação para um espaço de fase [70] e que exploram integrais da forma

$$\int_0^\pi P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta J_m(Z) e^{-ik_z r \cos \theta} = 2\Psi_n(kr) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (-1)^{(m-|m|)/2} (-i)^{n-m} P_n^m(\cos \alpha). \quad (2.57)$$

Integrais da forma vista em Eq. (2.57) foram, até onde se sabe, utilizadas primeiramente por Podolski e Pauling em 1929 no estudo da distribuição de momento em átomos do tipo hidrogênio [83] e recentemente redescobertas por diversos autores³.

2.3.2 Aproximação Localizada

O procedimento para obter os BSCs no contexto da LA pode ser resumido nos seguintes passos:

- (i) Expandir os campos radiais elétricos $E_r(r, \theta, \phi)$ e $H_r(r, \theta, \phi)$ em seus modos azimutais E_r^m e H_r^m ;
- (ii) Remover as contribuições de onda plana, $E_0 \sin(\theta) \exp(-ikr \cos \theta) \exp(im\phi)$ e $H_0 \sin \theta \exp(-ikr \cos \theta) \exp(im\phi)$ dos modos azimutais;
- (iii) Aplicar o operador \hat{G} para realizar as operações $kr \rightarrow n + 1/2$ e $\theta \rightarrow \pi/2$. Com isso, as dependências radial e polar são removidas, e

² A integral na Eq. (2.56) não é condição de ortogonalidade, e valores não nulos são também obtidos para $n \neq n'$, o que nos leva a infinitas formulações do método de quadraturas, todas elas, porém, equivalentes. Veja, por exemplo, [82]

³ Veja, p. ex., o contexto histórico apresentado na Ref. [84].

(iv) Multiplicar as expressões resultantes pelos fatores de normalização:

$$\begin{aligned} Z_n^0 &= \frac{2n(n+1)i}{2n+1}, & m &= 0. \\ Z_n^m &= \left(\frac{-2i}{2n+1} \right)^{|m|-1}, & m &\neq 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

No passo (i) o super-índice m dos modos azimutais é proporcional a $\exp(im\phi)$. Em (ii), após a remoção das contribuições de onda plana, E_r^m pode ser escrito como F_r^m e H_r^m como I_r^m . O operador \hat{G} aplicado sobre F_r^m e I_r^m no passo (iii) elimina qualquer dependência dos campos em r e θ . Isso, seguindo o chamado princípio de localização de van de Hulst, de acordo com o qual um termo de ordem n corresponde a um raio que passa pela origem a uma distância $(n+1/2)(\lambda/2\pi)$, onde n está associado com o subíndice dos coeficientes $g_{n,TM}^m$ e $g_{n,TE}^m$ [85].

Resumindo, os BSCs são dados por:

$$\begin{aligned} g_{n,TM}^m &= Z_n^m \hat{G}(F_r^m) \\ g_{n,TE}^m &= Z_n^m \hat{G}(I_r^m) \end{aligned} \quad (2.59)$$

No método ILA o primeiro passo é simplificado para ganhar flexibilidade. Sendo o modo azimutal proporcional a $\exp(im\phi)$ e devido à relação de ortogonalidade dos exponenciais, Ren *et al.* em [81] propuseram, com grande êxito no caso de feixe de Gauss, avaliar os modos azimutais segundo as Eqs. (2.60) e (2.61):

$$E_r^m = \frac{1}{2\pi} e^{im\phi} \int_0^{2\pi} E_r(r, \theta, \phi') e^{-im\phi} d\phi' \quad (2.60)$$

$$H_r^m = \frac{1}{2\pi} e^{im\phi} \int_0^{2\pi} H_r(r, \theta, \phi') e^{-im\phi} d\phi'. \quad (2.61)$$

Com isso, os BSCs para feixes arbitrários, como calculados pela ILA, são expressos na forma:

$$g_{n,TM}^m = \frac{Z_n^m}{2\pi E_0} \int_0^{2\pi} \hat{G}[E_r(r, \theta, \phi)] e^{-im\phi} d\phi \quad (2.62)$$

$$g_{n,TE}^m = \frac{Z_n^m}{2\pi H_0} \int_0^{2\pi} \hat{G}[H_r(r, \theta, \phi)] e^{-im\phi} d\phi, \quad (2.63)$$

sendo que os modos azimutais dos campos E_r e H_r não são mais calculados (Eqs. (2.60) e (2.63)). No lugar, são usadas as Eqs. (2.61) e (2.63), nas quais, em caso de mudança do perfil espacial do feixe incidente, faz-se necessário apenas trocar, nos integrandos, $E_r(r, \theta, \phi)$ ou $H_r(r, \theta, \phi)$, respectivamente, para suas novas expressões.

2.3.3 Séries Finitas

O cálculo dos coeficientes de forma usando séries finitas está baseado no teorema de expansão de Neumann (NET) [48]. A sucessão de passos para estabelecer as expressões dos BSCs na FS é chamada de procedimento-NET, a qual depende das expansões das funções de Neumann e de Bessel.

O procedimento começa com as expressões do campo radial elétrico E_r e magnético H_r em coordenadas esféricas. Das Eqs. (2.1) e (2.10), e lembrando que, da equação diferencial para funções de Ricatti-Bessel, $\Psi_n''(x) + \Psi_n(x) = n(n+1)/x^2$,

$$\begin{pmatrix} E_r \\ H_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} \begin{pmatrix} g_{n, TM}^m \\ g_{n, TE}^m \end{pmatrix} \frac{n(n+1)}{r} \Psi_n^{(1)}(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi). \quad (2.64)$$

Em Eq. (2.64), $g_{n, TM}^m$ e $g_{n, TE}^m$ são os BSCs que serão calculados sob o procedimento-NET, e novamente considerados que $\Psi_n^{(1)}(\cdot) \equiv j_n(x)$ é a função esférica de Bessel de primeira espécie, tal que $\Psi_n(x) = x\Psi_n^{(1)}(x) \equiv xj_n(x)$. $P_n^{|m|}(\cdot)$ são as funções associadas de Legendre e c_n^{pw} os coeficientes de expansão de Bromwich para onda plana na teoria clássica de Lorenz-Mie [50], c_n^{pw} é dada por Eq. (2.65).

$$c_n^{pw} = \frac{(-i)^n}{ik} \frac{2n+1}{n(n+1)} \quad (2.65)$$

Tem-se duas maneiras de expressar os coeficientes c_n , como uma função de Bessel ou como uma expansão de Maclaurin. O procedimento-NET resulta de igualar as duas expressões para c_n e assim estabelecer as series finitas que permitem calcular os BSCs [48]. Sendo $J_{n+1/2}(\cdot)$ a função clássica de Bessel de meia ordem e considerando os resultados publicados em [86] temos a Eq. (2.66)

$$x^{1/2}g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_{n+1/2}(x) \quad (2.66)$$

A expansão de Maclaurin da função $g(x)$ é dada pela Eq. (2.67):

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (2.67)$$

Logo os coeficientes c_n no NET são expressados por:

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \sum_{m=0}^{\leq n/2} 2^{\frac{1}{2}+n-2m} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n - m)}{m!} b_{n-2m} \quad (2.68)$$

onde $\Gamma(n) = (n-1)!$ é a função Gamma.

Continuando com o procedimento-NET para descartar a dependência em ϕ , aplica-se a relação de ortogonalidade $\int_0^{2\pi} \exp[i(m-m')\phi]d\phi = 2\pi\delta_{mm'}$ na Eq. (2.64). Assim temos:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} E_r \\ H_r \end{pmatrix} \exp(-im\phi)d\phi \\ = 2\pi \begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix} \sum_{n=|m|}^{\infty} c_n^{pw} \begin{pmatrix} g_{n,TM}^m \\ g_{n,TE}^m \end{pmatrix} \frac{n(n+1)}{r} \Psi_n^{(1)}(kr) P_n^{|m|}(\cos\theta). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Observe que $P_n^{|m|} = 0$ se $n < |m|$.

O passo seguinte é descartar a dependência em θ . Aproveitando expressões fechadas para $P_n^m(0)$ e $[dP_n^m(\cos\theta)/d\cos\theta]_{\cos\theta=0}$, temos dois caminhos, fazendo $\theta = \pi/2$ na Eq. (2.69) ou derivando a Eq. (2.69) em relação a $\cos\theta$ e, então, impondo $\theta = \pi/2$. Assim, quando $\theta = \pi/2$ tem-se a Eq. (2.70) [87]:

$$P_n^m(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+m}{2}} \frac{(n+m-1)!!}{2^{\frac{n-m}{2}} (\frac{n-m}{2})!}, & (n-m) \text{ par} \\ 0, & (n-m) \text{ ímpar} \end{cases} \quad (2.70)$$

Similarmente, derivando em relação a $\cos\theta$ tem-se a Eq. (2.71):

$$\left[\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\cos\theta} \right]_{\cos\theta=0} = \begin{cases} 0, & (n-m) \text{ par} \\ (-1)^{\frac{n+m-1}{2}} \frac{(n+m)!!}{2^{\frac{n-m-1}{2}} (\frac{n-m-1}{2})!}, & (n-m) \text{ ímpar} \end{cases} \quad (2.71)$$

Portanto, para $(n-m)$ par a Eq. Eq. (2.69) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} (kr)^{1/2} \int_0^{2\pi} r \begin{pmatrix} E_r(\theta = \pi/2) \\ H_r(\theta = \pi/2) \end{pmatrix} \exp(-im\phi)d\phi \\ = \pi\sqrt{2\pi} \begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix} \sum_{n=|m|, (n-m)\text{par}}^{\infty} c_n^{pw} n(n+1) \begin{pmatrix} g_{n,TM}^m \\ g_{n,TE}^m \end{pmatrix} P_n^{|m|}(0) J_{n+1/2}(kr). \end{aligned} \quad (2.72)$$

e, para $(n - m)$ ímpar,

$$\begin{aligned}
& (kr)^{1/2} \int_0^{2\pi} r \left[\frac{\partial}{\partial \cos \theta} \begin{pmatrix} E_r \\ H_r \end{pmatrix} \right]_{\theta=\pi/2} \exp(-im\phi) d\phi \\
& = \pi \sqrt{2\pi} \begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix} \sum_{n=|m|, (n-m) \text{ ímpar}}^{\infty} c_n^{pw} n(n+1) \begin{pmatrix} g_{n, TM}^m \\ g_{n, TE}^m \end{pmatrix} \left[\frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d \cos \theta} \right]_{\cos \theta=0} J_{n+1/2}(kr)
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Finalmente, para obter as expressões das series finitas para obter os BSCs reescrevemos as Eqs. (2.72) e (2.73) no formato da Eq. (2.66) considerando o feixe a ser avaliado.

2.4 Seções de Choque de Pressão de Radiação

Quando a luz do feixe incidente é absorvida pela partícula espalhadora a transferência de *momentum* é associada com a transferência de energia produzindo uma força de pressão de radiação. Essa força pode ser caracterizada pela seção de choque de pressão de radiação definida pelo vetor $C_{pr,i}$.

Na região de campo distante, os campos incidentes e espalhados são ondas transversais, logo o campo total é uma onda transversal. Expandindo o campo total em ondas incidentes e espalhadas, aparecem três contribuições ao balanço de *momentum* associado com os campos incidentes, campos espalhados e seções de choque [48].

A dedução das componentes da seção de choque de pressão de radiação é extensa e, também por não ser objeto de estudo, uso ou necessidade desta tese, não será reproduzida aqui. As expressões finais para as três componentes da pressão de radiação longitudinal z , e transversais x e y , no contexto da GLMT são apresentadas para uso posterior. A componente longitudinal é dada pela equação Eq. (2.74):

$$\begin{aligned}
C_{pr,z} = & \frac{\lambda^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=-n}^{+n} \left\{ \frac{1}{(n+1)^2} \frac{(n+1+|p|)!}{(n-|p|)!} \operatorname{Re} \left[(a_n + a_{n+1}^* - 2a_n a_{n+1}^*) \right. \right. \\
& \left. \left. g_{n, TM}^p g_{n+1, TM}^{p*} + (b_n + b_{n+1}^* - 2b_n b_{n+1}^*) g_{n, TE}^p g_{n+1, TE}^{p*} \right] \right. \\
& \left. + p \frac{2n+1}{n^2(n+1)2} \frac{(n+|p|)!}{(n-|p|)!} \operatorname{Re} \left[i(2a_n b_n^* - a_n - b_n^*) g_{n, TM}^p g_{n, TE}^{p*} \right] \right\},
\end{aligned} \tag{2.74}$$

onde um asterisco representa complexo conjugado. As componentes transversais de pressão de radiação em x e y são dadas por $C_{pr,x} = \operatorname{Re}(C)$ e $C_{pr,y} = \operatorname{Im}(C)$, onde C é dada pela

Eq. (2.75):

$$\begin{aligned}
C = & \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=p}^{\infty} \sum_{m=p-1 \neq 0}^{\infty} \left\{ \frac{(n+|p|)!}{(n-|p|)!} \left[(S_{m,n}^{p-1} + S_{n,m}^{-p} \right. \right. \\
& - 2U_{m,n}^{p-1} - 2U_{n,m}^{-p}) \left(\frac{1}{m^2} \delta_{m,n+1} - \frac{1}{n^2} \delta_{n,m+1} \right) \\
& \left. \left. + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \delta_{n,m} (T_{m,n}^{p-1} - T_{n,m}^{-p} - 2V_{m,n}^{p-1} + 2V_{n,m}^{-p}) \right] \right\}, \tag{2.75}
\end{aligned}$$

Após redução do triplo somatório na Eq. (2.75), expressando os deltas e trocando índices, a componente $C_{pr,x}$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
C_{pr,x} = & \frac{\lambda^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left\{ (n+2) \operatorname{Re}(2U_{n,n+1}^0 + 2U_{n+1,n}^{-1} - S_{n,n+1}^0 - S_{n+1,n}^{-1}) \right. \\
& + \frac{1}{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{(n+p)!}{(n-p)!} \left[\operatorname{Re}(S_{n+1,n}^{p-1} + S_{n,n+1}^{-p} - 2U_{n+1,n}^{p-1} - 2U_{n,n+1}^{-p}) \right. \\
& \frac{2n+1}{n^2} \operatorname{Re}(T_{nn}^{p-1} - T_{nn}^{-p} - 2V_{nn}^{p-1} + 2V_{nn}^{-p}) - (n+p+1)(n+p+2) \\
& \left. \left. \operatorname{Re}(S_{n,n+1}^p + S_{n+1,n}^{-p-1} - 2U_{n,n+1}^p - 2U_{n+1,n}^{-p-1}) \right] \right\}, \tag{2.76}
\end{aligned}$$

Da mesma forma, a componente em y pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
C_{pr,y} = & \frac{\lambda^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left\{ (n+2) \operatorname{Im}(2U_{n,n+1}^0 + 2U_{n+1,n}^{-1} - S_{n,n+1}^0 - S_{n+1,n}^{-1}) \right. \\
& + \frac{1}{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{(n+p)!}{(n-p)!} \left[\operatorname{Im}(S_{n+1,n}^{p-1} + S_{n,n+1}^{-p} - 2U_{n+1,n}^{p-1} - 2U_{n,n+1}^{-p}) \right. \\
& \frac{2n+1}{n^2} \operatorname{Im}(T_{nn}^{p-1} - T_{nn}^{-p} - 2V_{nn}^{p-1} + 2V_{nn}^{-p}) - (n+p+1)(n+p+2) \\
& \left. \left. \operatorname{Im}(S_{n,n+1}^p + S_{n+1,n}^{-p-1} - 2U_{n,n+1}^p - 2U_{n+1,n}^{-p-1}) \right] \right\}, \tag{2.77}
\end{aligned}$$

Nas Eqs. (2.76) e (2.77), está implícita a dependência das componentes das RPCS em termos dos BSCs, embutidos em U_{nm}^p , V_{nm}^p , S_{nm}^p e T_{nm}^p :

$$U_{nm}^p = a_n a_m^* \mathfrak{g}_{n, TM}^p \mathfrak{g}_{n, TE}^{p+1*} + b_n b_m^* \mathfrak{g}_{n, TM}^p \mathfrak{g}_{n, TE}^{p+1*} \tag{2.78}$$

$$V_{nm}^p = i b_n a_m^* \mathfrak{g}_{n, TE}^p \mathfrak{g}_{n, TM}^{p+1*} - i a_n b_m^* \mathfrak{g}_{n, TM}^p \mathfrak{g}_{n, TE}^{p+1*} \tag{2.79}$$

$$S_{nm}^p = (a_n + a_m^*) \mathfrak{g}_{n, TM}^p \mathfrak{g}_{n, TM}^{p+1*} + (b_n + b_m^*) \mathfrak{g}_{n, TE}^p \mathfrak{g}_{n, TE}^{p+1*} \tag{2.80}$$

$$T_{nm}^p = -i(a_n + b_m^*)g_{n, TM}^p g_{n, TE}^{p+1*} + i(b_n + a_m^*)g_{n, TE}^p g_{n, TM}^{p+1*} \quad (2.81)$$

Detalhes do cálculo das componentes de pressão de radiação podem ser encontrados na Seção 12, Cap. III da Ref. [48].

Para a predição de forças ópticas há algumas alternativas dependendo do cenário e da precisão necessária na aplicação pretendida, o que pode até mesmo vir a dispensar o uso da GLMT. Quando o diâmetro da partícula é muito maior do que o comprimento de onda do feixe incidente ($d > 10\lambda$), pode-se utilizar o modelo de óptica geométrica. Por outro lado, quando a partícula é muito menor do que o comprimento de onda ($d \ll \lambda$), pode-se utilizar o modelo dipolar para a partícula espalhadora (regime de Rayleigh). Nessa situação particular e desconsiderando possibilidades de observação de ressonâncias de Mie, para partículas dielétricas apenas os coeficientes de Mie a_1 contribuem nas expressões das componentes de campo como dadas nas seções anteriores. Não obstante, tanto a óptica de raios quanto o regime de Rayleigh são aproximações, sendo que para a análise e predição exata das forças ópticas exercidas pelo feixe sobre partículas espalhadoras, faz-se imperativo a adoção da teoria eletromagnética baseada na rigorosa solução das equações de Maxwell ou, equivalentemente, a teoria generalizada de Lorenz-Mie GLMT [88].

Contudo, nesse trabalho é usada, quando necessária, a GLMT para a análise das forças ópticas exercidas sobre as partículas espalhadoras pelas FWs com superposição de BGBs. As forças de pressão de radiação podem ser caracterizadas por RPCS, dadas por suas componentes $C_{pr,x}$, $C_{pr,y}$ e $C_{pr,z}$, que na GLMT dependem dos fatores de forma do feixe incidente, descritos por os BSCs. Portanto, a descrição dos FWs e a predição precisa das forças ópticas de pressão de radiação dependerá do adequado cálculo dos BSCs.

2.5 Comentários Finais e Conclusões

Para finalizar este Capítulo, uma observação importante deve ser feita. Como dito anteriormente, a quadratura e a FS são métodos exatos para determinação dos BSCs. Contudo, por “exato” devemos entender que os BSCs representarão fielmente o feixe a ser descrito sempre que o mesmo satisfaça, rigorosamente, as equações de Maxwell. Por outro lado, a LA pode não descrever tais feixes *Maxwellianos* adequadamente, com desvios tanto maiores quanto, por exemplo, mais altamente não paraxiais estes campos ópticos forem.

Consideremos, como exemplo, um feixe de Gauss, que é na verdade a solução de primeira ordem da equação de onda escalar, sendo um feixe escalar, ele obviamente não satisfaz as equações de Maxwell. Ainda assim, assumindo-se que seja altamente paraxial e que sua representação escalar possa ser tomada como uma componente transversal de campo (com componente longitudinal nula), a GLMT fornecerá BSCs capazes de gerar feixes vetoriais e que satisfazem exatamente as equações de Maxwell. Naturalmente, este

feixe *remodelado* não corresponde ao feixe de Gauss inicialmente considerado, o grau de desvio sendo tanto maior quanto mais os BSCs predisserem componentes longitudinais de campo com significativa amplitude relativa.

Deve-se, portanto, concluir que, uma vez determinados os BSCs por quaisquer dos três métodos aqui apresentados, o feixe remodelado assim gerado pelo formalismo da GLMT é vetorial e exato, mas não necessariamente corresponde à descrição do feixe originalmente tomado como referência inicial. Se este, todavia, for também Maxwelliano, então o feixe remodelado pela GLMT com uso de quadraturas ou da FS é idêntico ao pretendido. É nesse sentido que se deve entender que estes dois métodos são “exatos”, enquanto que a LA (ou ILA) são métodos aproximados.

3 FEIXES DE BESSEL-GAUSS E SUAS SUPERPOSIÇÕES

3.1 Ondas Localizadas

Propagações ondulatórias, como feixes e pulsos, são afetados por fenômenos como a difração (alargamento espacial) e dispersão (alargamento temporal). Esses fenômenos limitam suas utilizações que necessitam de certa localização espacial ou temporal, principalmente para aplicações envolvendo longas distâncias. Os feixes são soluções monocromáticas da equação onda com um único comprimento de onda, enquanto pulsos são soluções com diferentes comprimentos de onda.

A difração produz um alargamento espacial de pulsos e feixes, inclusive em meios homogêneos, sendo que em aplicações como pinças ópticas, comunicação no espaço livre, formação de imagens, etc, é necessário manter sua localização transversal que pode ser afetada por esse efeito.

A dispersão produz alargamento temporal em pulsos que se propagam em meios materiais. Esse fenômeno constitui um fator limitante em várias aplicações, como nos sistemas de comunicação onde o pulso tem que manter sua largura temporal, evitando interferência entre símbolos [89].

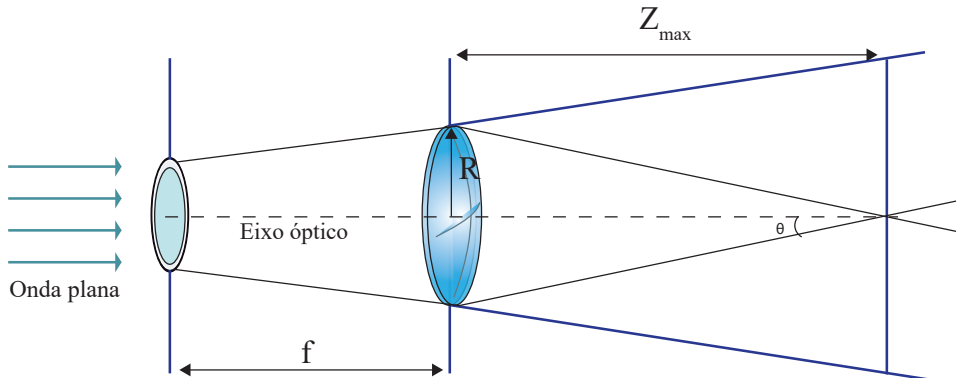
O conceito de ondas localizadas ou ondas não difrativas surge do desenvolvimento de técnicas para reduzir o fenômeno de difração. As ondas localizadas são ondas capazes de resistir à difração por longas distâncias, mantendo seu formato original idealmente intacto. Particularmente, feixes localizados são uma solução monocromática com localização transversal da equação de onda, ou seja, são feixes resistentes à difração [90].

Nesse sentido, embora o feixe de Gauss (GB) sejam um dos feixes mais comuns, ele apresenta difração e sua forma transversal alarga-se rapidamente durante sua propagação. Em contrapartida, até meados do século passado as ondas planas foram as únicas ondas teóricas resistentes à difração, mas elas são ondas ideais que requerem uma fonte infinita de energia, não aplicável na prática. Em 1941 Stratton [91] obteve uma solução monocromática da equação de onda representada por uma função de Bessel que é, atualmente, chamada de feixe de Bessel. A forma transversal do feixe está concentrada no eixo de propagação e não sofre difração. Porém, da mesma forma que a onda plana, essa solução precisava de energia infinita.

Em 1987 Durnin *et al.* [7] desenvolveram um experimento para gerar um BB truncado por uma abertura finita, usando uma fonte de laser com uma abertura anular e uma lente convergente [92], como se pode observar na Figura 2.

O feixe obtido mantém sua intensidade transversal por uma distância 28 vezes

Figura 2: Experimento de Durnin para a geração de BBs.



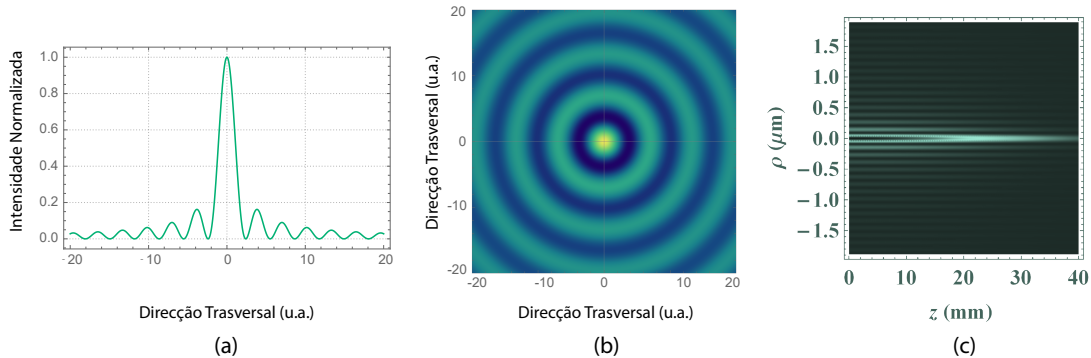
Fonte: Elaborada pela autora [7].

maior que no caso de GBs. Isso ocorre porque o perfil transversal de campo é reconstruído pela energia lateral associada aos anéis que formam a estrutura do BB. Os BBs gerados por aberturas finitas, como no experimento de Durnin, mantêm seu perfil não difrativo até uma distância máxima na qual o feixe ainda têm a capacidade de auto-reconstrução, dada por $Z_{max} = R / \tan \theta$.

Como ilustrado na Figura 2, a distância Z_{max} depende do raio do gerador e do ângulo de meio cônico ou ângulo de áxicon θ . Como sumarizado em [92], BBs podem ser gerados tanto por áxicons iluminados por feixes gaussianos [93], quanto por holografia [94, 95]. Outras técnicas mais recentes de geração de feixes de Bessel incluem a utilização de dispositivo de microespelhos digitais, moduladores de luz espaciais e superposição de feixes Airy [96, 97, 98].

O perfil de intensidade transversal do BB é descrito pelo quadrado da função de Bessel. Na Figura 3 podemos observar o caso mais simples, com um BB de ordem zero. As primeiras duas imagens mostram a projeção longitudinal (a) e transversal (b) do perfil de intensidade do feixe. Em comparação com os GBs, os BBs têm duas propriedades de interesse. Como já mencionado, tratam-se de solução escalar não difrativa da equação de onda em coordenadas cilíndricas que mantêm sua localização transversal ao longo do eixo de propagação. Como pode ser observado na Figura 3(c) o feixe mantém efetivamente seu formato ao longo do eixo de propagação, z , sem sofrer alargamento espacial. A segunda propriedade dos BBs é a auto-reconstrução, se o feixe fosse bloqueado por um objeto (que deve ser menor que a abertura usada na geração do feixe) o seu perfil de intensidade será reconstruído pela energia lateral produto dos anéis que constroem o feixe [99].

Figura 3: BB de ordem zero.



Fonte: Elaborada pela autora.

3.2 Feixes de Bessel-Gauss

A resistência à difração e auto-reconstrução [7] são características atraentes dos BBs para diversas aplicações ópticas. Na prática, no entanto, eles podem ser descritos de maneira mais apropriada em termos de BGBs.

Um BGB resulta da apodização de um BB por um GB, que trunca o BB a fim de obter um feixe de energia finita fisicamente realizável [24, 37]. O BGB pode ser calculado com a integral de difração de Fresnel, considerando a aproximação paraxial [24, 25, 100]. Seguindo a notação da ref. [37] e omitindo o fator dependente do tempo $\exp(+i\omega t)$, onde ω é a frequência angular, a equação pode ser escrita usando um sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) como:

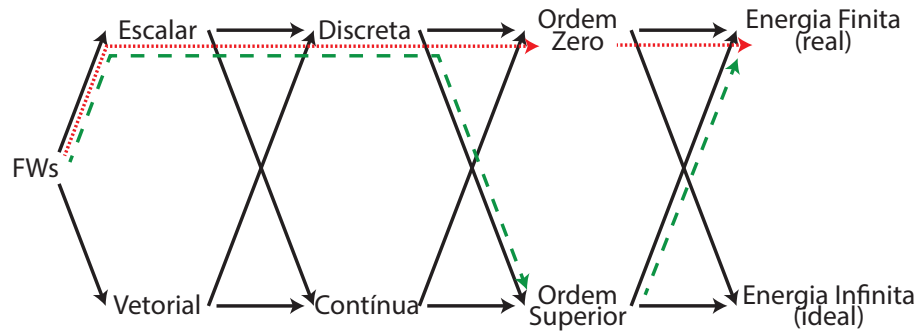
$$\Psi_{BGB}(\rho, \phi, z) = \frac{E_0}{\mu} \exp\left(-q^2 \frac{\rho^2}{\mu}\right) J_v\left(k_\rho \frac{\rho}{\mu}\right) \times \exp\left(i \frac{k_\rho^2}{2k} \frac{z}{\mu}\right) e^{iv\phi} e^{-ikz}, \quad (3.1)$$

onde $J_v(\cdot)$ é a função de Bessel de ordem v do primeiro tipo, $k = 2\pi/\lambda$ é o número da onda (λ é o comprimento de onda) e $k_\rho = k \sin \alpha$ seu componente transversal e α representa o ângulo do axicon. Na Eq. (3.1), E_0 é a força do campo elétrico, $q = 1/w_0 \in \mathfrak{R}$ é um parâmetro que regula a largura da intensidade transversal da apodização gaussiana, sendo w_0 o raio da cintura do feixe, μ é dado por:

$$\mu = 1 - i2ks^2z \quad (3.2)$$

onde $s = 1/kw_0$ é o fator de confinamento.

Figura 4: Possibilidades de construção de FWs



Fonte: Elaborada pela autora.

3.3 Frozen Waves

Em 2004, Zamboni-Rached [32] apresentou um método simples que permite obter campos de onda estacionários localizados onde o perfil longitudinal de intensidade (LIP) (*Longitudinal Intensity Pattern*) do feixe pode ser escolhido *a priori*. O método usa superposições de BBs de ordem zero, monocromáticos de propagação direta. Essa solução escalar da equação de onda foi chamada de FW, nome dado pelo fato de que o envelope de intensidade obtido permanece estacionário (velocidade nula). Dentro do envelope das FWs somente a onda portadora se propaga.

O método foi estendido em [37], apresentando uma metodologia experimental para construir esses campos de onda estacionários. O perfil longitudinal, no intervalo $0 \leq z \leq L$ no eixo de propagação z , pode ser escolhido para que nenhum campo não desprezível exista fora da região predeterminada, considerando-se que L deve ser muito maior que o comprimento de onda.

As características não difrativas e a liberdade na escolha do perfil do feixe resultante faz das FWs uma interessante solução à equação de onda, tendo diversas possibilidades de aplicação em áreas como biologia e medicina, pinças ópticas, guiamento atômico, bisturis ópticos e acústicos, etc. [37]. Essas características ou vantagens das FWs conduziram a novos trabalhos que exploram novas possibilidades na construção desses feixes.

Na Figura 4 estão ilustradas algumas dessas possibilidades, onde a proposta inicial de FWs baseia-se em soluções *escalares* [32], construídas com uma superposição *discreta* de BBs *ideais* de *ordem zero*. Já em [37], é considerada a possibilidade de estender a solução anterior para feixes de *ordem superior*. Dartora *et al.* [101] apresentam uma generalização das FWs apresentadas em [32] usando superposições *contínuas* de BBs ideais de ordem zero. Corato e Zamboni [102] estudam propriedades de FWs *vetoriais* com polarizações

radiais, azimutais, lineares, circulares e elíptico sob regimes paraxiais e não-paraxiais em meios não absorventes. Em [37] é apresentada uma solução escalar de FWs de *energia finita* construída com superposições de BGBs de ordens arbitrárias, zero e superiores conforme as linhas vermelhas pontilhadas e verde tracejada na Figura 4, respectivamente. Versões estendidas de FWs vêm sendo atualmente investigadas e são baseadas em superposições de FWs para obtenção das FWs de superfície [103].

3.3.1 Ondas Estacionárias ou *Frozen Waves* através de Superposições de Feixes de Bessel

A metodologia matemática para obter as ondas localizadas mediante superposições discretas, apresentada em [33], começa com a conhecida solução da equação de onda escalar a partir de BBs de ordem zero, em meios homogêneos, isotrópicos e lineares, sem perdas. Em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) e assumindo propagação em $+z$, temos

$$\Psi(\rho, z, t) = J_0(k_\rho \rho) e^{-ik_z z} e^{i\omega t}, \quad (3.3)$$

com o número de onda $k = \omega/c$ em um meio sem perdas descrito através da relação de dispersão expressada pela Eq. (3.4):

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_\rho^2 + k_z^2, \quad (3.4)$$

onde k_ρ é o número de onda transversal, k_z o número de onda longitudinal e ω a frequência angular.

Nesse caso pode-se condicionar $\omega/k_z > 0$ e $k_\rho^2 \geq 0$, o que implica $0 \leq k_z \leq \omega/c$ para garantir o comportamento físico desejado da função de Bessel. Assim, com $k_z \geq 0$ assegura-se a existência de ondas apenas propagantes e sem retro-propagação quando $k_z \leq \omega/c$ há inexistência de ondas evanescentes. Além disso, para que a solução dada pela Eq. (3.3) seja válida dentro do regime paraxial, há que se garantir $k_z \gg k_\rho$ ¹.

No método é feita uma superposição de $2N + 1$ BBs com a mesma frequência angular ω , mas com diferentes números de onda longitudinais k_{zp} dadas pela Eq. (3.5).

$$\Psi(\rho, z, t) = e^{i\omega_0 t} \sum_{p=-N}^N A_p J_0(k_{pp} \rho) e^{-ik_{zp} z} \quad (3.5)$$

A escolha de um número ímpar de BBs ($2N + 1$) tem razão puramente estética para a Eq. (3.5), enquanto que a imposição de uma mesma frequência ω_0 se deve a questões práticas, tendo em vista a possibilidade de geração experimental a partir de um mesmo feixe de laser. Na Eq. (3.5) $p \in \mathbb{Z}$ e A_p são coeficientes constantes que podem ser complexos.

¹ A condição de paraxialidade assegura, por exemplo, que os feixes remodelados na GLMT, por quaisquer dos três métodos apresentados no Capítulo anterior, representarão com precisão as soluções escalares aqui obtidas.

Considerando $\omega_0 > 0$ e dadas as restrições anteriores envolvendo k_z , k_ρ e k , temos que a FW será constituída por BBs propagantes (sem contribuições de ondas contra propagantes ou evanescentes), caso cada um dos p números de onda longitudinais dos $2N + 1$ BBs satisfizer à condição dada pela Eq. (3.6):

$$0 \leq k_{zp} \leq \frac{\omega_0}{c} \quad (3.6)$$

Supondo que no intervalo $0 \leq z \leq L$ o $|F(z)|^2$ represente o perfil de intensidade $|\Psi(\rho = 0, z, t)|^2$ da Eq. (3.5), isto é, perfil de intensidade sobre o eixo $\rho = 0$, tem-se a Eq. (3.7):

$$|\Psi(\rho = 0, z, t)|^2 = \left| \sum_{p=-N}^N A_p e^{-ik_{zp}z} \right|^2 \approx |F(z)|^2, \quad (3.7)$$

onde $F(z)$ é uma função integrável em um determinado intervalo de $0 \leq z \leq L$ e que pode ser expandida como uma série de Fourier em forma complexa como na Eq. (3.8):

$$F(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m e^{i(2\pi/L)mz}, \quad (3.8)$$

onde, pela identidade de Euler, os coeficiente B_m são dados pela Eq. (3.9):

$$B_m = \frac{1}{L} \int_0^L F(z) e^{-i(2\pi/L)mz} dz \quad (3.9)$$

Nas Eqs. (3.7) e (3.8) pode-se considerar que $k_{zp} = 2\pi p/L$, como já foi utilizado em [104], mas não seria uma escolha adequada para se obter os feixes desejados por Zamboni-Rached [32]. Para determinar os valores de k_{zp} e, conseqüentemente, de A_p , os autores consideram as seguintes condições:

- Para se obter apenas ondas propagantes o número de onda longitudinal k_{zp} deve ser positivo. Considerando o intervalo $-N \leq p \leq N$, se k_{zp} fosse $2\pi p/L$, quando $p < 0$, k_{zp} teria valores negativos, o que implicaria na existência de ondas contra-propagantes não desejadas nesse caso;
- Como $L \gg \lambda_0$ os termos da série teriam valores muito pequenos para k_{zp} , resultando em uma profundidade de campo muito curta dos BBs gerados por aberturas finitas, o que não permitiria obter os envelopes desejados longe da fonte.

Para que os valores de k_{zp} sejam adequados, segundo as condições anteriores, Zamboni-Rached [32] propôs como número de onda longitudinal:

$$k_{zp} = Q + \frac{2\pi p}{L}, \quad (3.10)$$

onde Q é positivo, real e o mesmo para todos os BBs que compõem a FW. Substituindo a Eq. (3.10) na Eq. (3.6) obtém-se:

$$0 \leq Q \pm \frac{2\pi}{L}N \leq \frac{\omega_0}{c}, \quad (3.11)$$

o sinal negativo na Eq. (3.11) sendo aplicado para $p = -N$ e o positivo para $p = N$. O compromisso entre os valores de L , Q e N asseguram feixes propagantes e paraxiais.

Contudo, a Eq. (3.5) pode ser reescrita para se obter aproximadamente a intensidade do perfil longitudinal desejado de $|F(z)|^2$ no intervalo $0 \leq z \leq L$, com $\rho = 0$. O valor é aproximado pois a superposição na Eq. (3.7) está limitada a $2N + 1$ termos, enquanto que a série na Eq. (3.8) é infinita. Assim,

$$\Psi(\rho = 0, z, t) = e^{i\omega_0 t} e^{-iQz} \sum_{p=-N}^N A_p e^{-i(2\pi/L)pz}, \quad (3.12)$$

e, a menos de um fator de fase que pode ser absorvido em A_p sem maiores problemas,

$$A_p = \frac{1}{L} \int_0^L F(z) e^{i(2\pi/L)pz} dz. \quad (3.13)$$

Para $\rho \neq 0$ o campo de onda é dado pela Eq. (3.14)

$$\Psi(\rho, z, t) = e^{i\omega_0 t} e^{-iQz} \sum_{p=-N}^N A_p J_0(k_{\rho p} \rho) e^{i(2\pi/L)pz}. \quad (3.14)$$

Com os valores de Q , L e ω_0 inferidos pode-se achar o valor máximo $N = N_{max}$ [90] que satisfaça a inequação em Eq. (3.11). Após alguma álgebra simples, obtém-se a Eq. (3.15):

$$N_{max} = \left\lfloor \frac{L(k_r - Q)}{2\pi} \right\rfloor \quad (3.15)$$

Assim, o método define as FW como uma superposição de BBs de ordem zero, mas ele pode ser expandido para feixes de ordem superior [105, 33], bastando substituir $J_0(x)$ por $J_v(x)$ na Eq. (3.5) e incluir o fator de fase $\exp(iv\phi)$. Os coeficientes A_p determinam a amplitude e a fase relativa de cada BB na superposição. A localização transversal do campo resultante é esperada ao redor de $\rho = 0$ por serem usados BBs de ordem zero na construção das FWs (no caso de feixes de ordem superior, o máximo de intensidade de campo se desloca de $\rho = 0$ para $\rho = \rho_0$, onde ρ_0 corresponde, aproximadamente, ao primeiro nulo de $dJ_v(x)/dx|_{\rho=0} = 0$).

Cada feixe na superposição é associado com um *spot* central, onde sua largura central resultante está associada ao primeiro zero da função de Bessel de ordem zero, a qual pode ser estimada pela convergência da série da Eq. (3.14) [105] pela Eq. (3.16):

$$\Delta\rho \approx \frac{2,405}{k_{\rho\rho=0}} = \frac{2,405}{\sqrt{\omega_0^2/c^2 - Q^2}} \quad (3.16)$$

Na Eq. (3.16) observa-se que com o valor de Q há certo controle sob o *spot* dos feixes. Quanto menor o valor de Q menor a largura do *spot* central resultante, o que implica que o feixe resultante terá maior concentração transversal.

No entanto, deve-se lembrar que valores de Q pequenos resultam em maiores valores de número de onda transversal k_ρ , o que poderia implicar fugir da condição de paraxialidade $k_z \gg k_\rho$. Para garantir a paraxialidade deve-se assegurar $Q \approx \omega_0/c$.

Dessa forma a alta concentração transversal pode implicar estar fora do regime paraxial, sendo que uma outra forma de conseguir a alta concentração transversal e ao mesmo tempo incrementar o controle sob o perfil transversal, é usando BBs de ordem superior [33].

A Figura 5 é uma reprodução da Figura 1 em [32], nela é mostrada uma comparação entre um exemplo de intensidade longitudinal desejada $F(z)$ e a correspondente FW, $\Psi(\rho = 0, z, t)$, obtida pelo método de Zamboni. Em (a) a linha sólida representa a função de referência $F(z)$ e a linha tracejada a FW obtida. Neste exemplo, $F(z)$ é dada por:

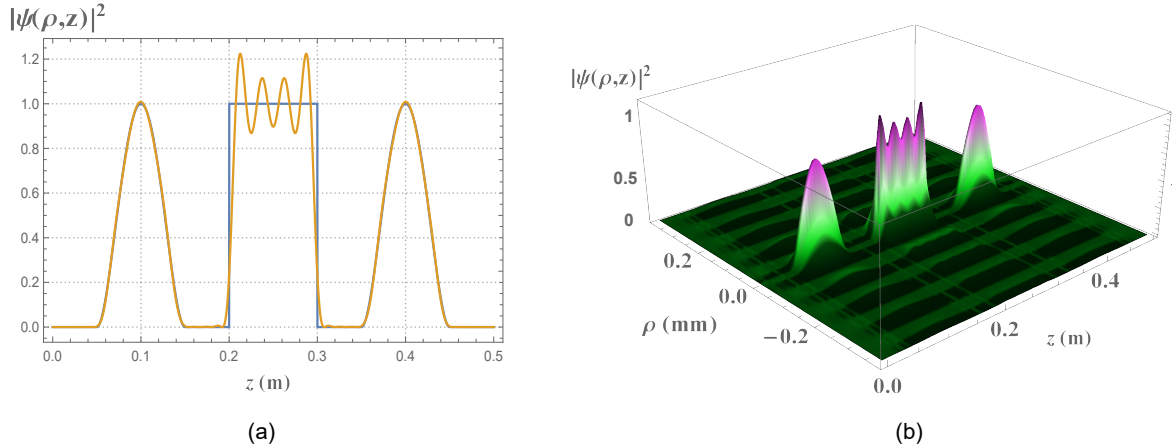
$$F(z) = \begin{cases} \frac{-4(z-l_1)(z-l_2)}{(l_2-l_1)^2} & \text{para } l_1 < z < l_2 \\ 1 & \text{para } l_3 < z < l_4 \\ \frac{-4(z-l_5)(z-l_6)}{(l_6-l_5)^2} & \text{para } l_5 < z < l_6 \\ 0 & \text{outro caso,} \end{cases} \quad (3.17)$$

Na Figura 5 (b) é mostrado o gráfico 3D da intensidade de campo da FW do exemplo apresentado em [32]. Pode-se observar a boa concordância entre a FW resultante e o perfil de intensidade desejado $F(z)$.

3.3.2 Feixes de Energia Finita Resistentes a Difração e Atenuação Através de Superposições de Feixes Bessel-Gauss

Zamboni e Mojahedi, em [36] e [37] propuseram a construção de *Fozen Waves* através de superposição de BGBs. A proposta é uma extensão do método de FWs apresentado em [32] e [33], como mostrado na seção anterior (3.3.1). Nessa extensão mantem-se as propriedades de interesse das FWs mas resolvem-se alguns inconvenientes como fluxo infinito de energia e periodicidade espacial. A proposta inicial de FWs apresentada em [32] que permitia obter feixes ideais resistentes à atenuação e difração, em que o perfil

Figura 5: (a) Comparação entre intensidade longitudinal desejada $F(z)$ e FW obtida pelo método de Zamboni-Rached. (b) gráfico 3D da intensidade de campo da FW



Fonte: Elaborada pela autora.

longitudinal de intensidade pode ser escolhido *a priori*, foi estendido para feixes com viés prático, de energia finita, portanto, capazes de serem gerados experimentalmente. Isso mediante superposição discreta de BBs não ideais co-propagantes da mesma ordem em meios não absorventes.

Para contornar os inconvenientes apontados, devem ser consideradas algumas modificações. Por exemplo, a periodicidade espacial, ou seja, a repetição do perfil longitudinal ao longo do eixo de propagação, resultante da aproximação mediante séries de Fourier usada na superposição discreta da solução em [32]. Para evitar essa periodicidade podem ser usadas superposições contínuas no lugar de discretas, mas devido à integração obter soluções analíticas é matematicamente complexas [101]. Quanto ao fluxo infinito de energia, pode ser feito um truncamento espacial no campo inicial da FW, mas mediante este procedimento a obtenção de uma solução analítica pode ser ainda mais complexa [35].

3.3.2.1 FWs com Número de Onda Transversal Puramente Real

Zamboni e Mojahedi em [37] sugerem uma versão modificada de FWs onde os números de onda transversal (k_ρ), dos BBs usados na superposição sejam reais em meios absorventes. Esse tipo de feixe com k_ρ real em meios absorventes ocorre quando o mesmo é gerado em um meio não absorvente e é parcialmente transmitido ao meio absorvente com incidência normal.

Consideremos um meio absorvente linear, isotrópico e homogêneo com índice de refração complexo dado por $n_{ref} = n_r - in_i$, em que o perfil longitudinal de intensidade

esteja na superfície cilíndrica de raio $\rho_0 \geq 0$ (e que converge para um eixo no caso $\rho_0 = 0$), supõe-se que $|\Psi(\rho = 0, \phi, z, t)|^2 \approx |F(z)|^2$ no intervalo $0 \leq z \leq L$, onde Ψ representa a componente cartesiana transversal de um campo elétrico, $E = \Psi \hat{x} + E_z \hat{z}$. Assim, a componente longitudinal de campo elétrico (E_z) é calculada pela Lei de Gauss em regiões sem fontes ($\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$), tal que $E_z = -\int \partial_x \Psi dz$. Desse modo, os autores de [37] apresentam a Eq. (3.18):

$$\Psi(\rho, \phi, z, t) = \mathcal{N}_v e^{i\omega t} \sum_{p=-N}^N A_p J_v(k_{\rho p} \rho) e^{iv\phi} e^{-ik_{zp} z}, \quad (3.18)$$

onde v é a ordem dos BBs na superposição, $\mathcal{N}_v = 1/[J_v(\cdot)]_{max}$ é o valor máximo da função de Bessel de primeira espécie $J_v(\cdot)$ e os números de onda transversal e longitudinal ($k_{\rho p}$ e k_{zp}) necessariamente mantêm a relação de dispersão $k_{\rho p}^2 = k^2 - k_{zp}^2$ da Eq. (3.4). Os números de onda total (k), transversal e longitudinal, em meios absorventes, são vinculados de acordo com a Eq. (3.19):

$$k = n_{ref} \frac{\omega}{c} = (n_r - in_i) \frac{\omega}{c} = k_r - ik_i \quad (3.19)$$

sendo $k_{\rho p}$ descrita conforme a Eq. (3.20) [37]:

$$k_{\rho p} = \sqrt{(n_r^2 + n_i^2) \frac{\omega^2}{c^2} - \left(Q + \frac{2\pi p}{L}\right)^2 + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \frac{n_r n_i}{Q + \frac{2\pi p}{L}}\right)^2} \quad (3.20)$$

O número de onda longitudinal apresenta parte real k_{zpR} e imaginária k_{zpI} ,

$$\begin{aligned} k_{zp} &= k_{zpR} - ik_{zpI}, \\ k_{zpR} &= Q + \frac{2\pi p}{L}, \\ k_{zpI} &= \frac{\omega^2 n_r n_i}{c^2 k_{zpR}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

lembrando que Q é uma constante real positiva relacionada com a dimensão transversal do feixe, como definido na seção 3.3.1.

Para garantir números de onda transversal $k_{\rho p}$ reais e valores positivos para a parte real do número de onda longitudinal k_{zp} , k_{zpR} deve variar de acordo com a Eq. (3.22) [37].

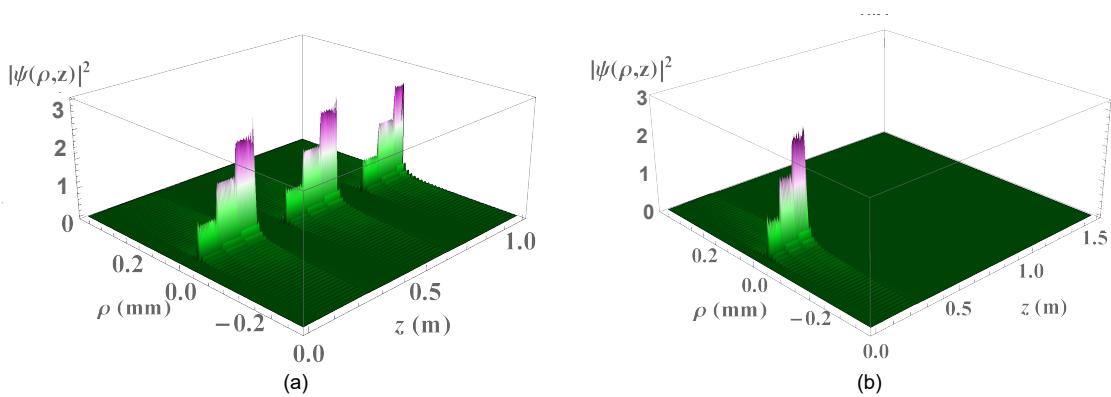
$$0 \leq k_{zpR} \leq \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{(n_r^2 - n_i^2) + \sqrt{(n_r^2 + n_i^2)^2 + 4(n_r^2 n_i^2)}}{2}} \quad (3.22)$$

Finalmente, os coeficientes A_p , a menos novamente de um fator de fase arbitrário e constante, são definidos pela Eq. (3.23):

$$A_p = \frac{1}{L} \int_0^L F(z) e^{(i\frac{2\pi}{L}p - k_{z0}r)z} dz \quad (3.23)$$

Assim, o método de FWs com número de onda puramente real é capaz de modelar feixes resistentes à atenuação e à difração, com superposição de BBs de qualquer ordem em meios tanto não-absorventes como absorventes. Porém, ele ainda apresenta fluxo infinito de energia e periodicidade longitudinal em meios não-absorventes, como mostrado na Figura 6(a), onde o perfil desejado da FW foi definido no intervalo $0 \leq z \leq L$ com $L = 0,37 \text{ m}$ e projetado sobre um intervalo estendido. Já em meios absorventes, como pode ser observado na Figura 6(b), a periodicidade não é perceptível devido à atenuação exponencial causada pelas perdas do meio. A Figura 6 é uma reprodução da figura 1(b,d) referente ao exemplo 1 em [37]

Figura 6: Perfil longitudinal de intensidade de uma FW, projetado sobre um intervalo longitudinal estendido (a) Perfil longitudinal em um meio não absorvente. (b) O mesmo feixe em um meio absorvente



Fonte: Elaborada pela autora.

3.3.2.2 FWs de Energia Finita Usando BGB

Zamboni e Mojahedi aplicaram a teoria óptica paraxial com a intenção de obter uma versão apodizada de FWs mediante um BGB [37], com o intuito de conseguir uma solução de FWs com energia finita.

A função de onda complexa monocromática para um feixe paraxial que se propaga por um meio linear, isotrópico, homogêneo e absorvente é dada pela Eq. (3.24):

$$\Psi = e^{-ikz} E(x, y, z), \quad (3.24)$$

onde E satisfaz:

$$\nabla_T^2 E - 2ik \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \quad (3.25)$$

Considerando $E(x, y, z)$ como uma solução da Eq. (3.25) Zamboni e Mojahedi apresentam $E_G(x, y, z)$ como uma solução da Eq. (3.25) [solução paraxial de Helmholtz-Gauss [106]]

$$E_G(x, y, z) = \frac{1}{\mu} e^{-q^2 \frac{\rho^2}{\mu}} E \left(\frac{x}{\mu}, \frac{y}{\mu}, \frac{z}{\mu} \right), \quad (3.26)$$

com $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\text{Re}(q) > 0$, e μ definido pela Eq. (3.27).

$$\mu = 1 - i2 \frac{q^2}{k} z. \quad (3.27)$$

O parâmetro q regula a largura da intensidade transversal da apodização Gaussiana $\Delta\rho_G$, dada por $\Delta\rho_G = 1/\sqrt{2}q$.

Supondo o regime paraxial, [37] fazem algumas modificações para aplicar os resultados acima e que a nova solução de FW continue sendo descrita pela Eq. (3.18). Assim, o número de onda transversal também pode ser dado por:

$$k_{\rho\rho} = \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{1}{kr} \left(Q + \frac{2\pi p}{L} \right)} |k| \quad (3.28)$$

Logo, a parte imaginária do número de onda longitudinal na Eq. (3.21) é reescrita como:

$$k_{Izp} = k_i \left(2 - \frac{k_{Rzp}}{k_r} \right). \quad (3.29)$$

Para manter as características das FWs apresentadas na descrição do método original (seção 3.3.1, ondas somente propagantes e inexistência de ondas evanescente) a Eq. (3.11) é reescrita pela Eq. (3.30):

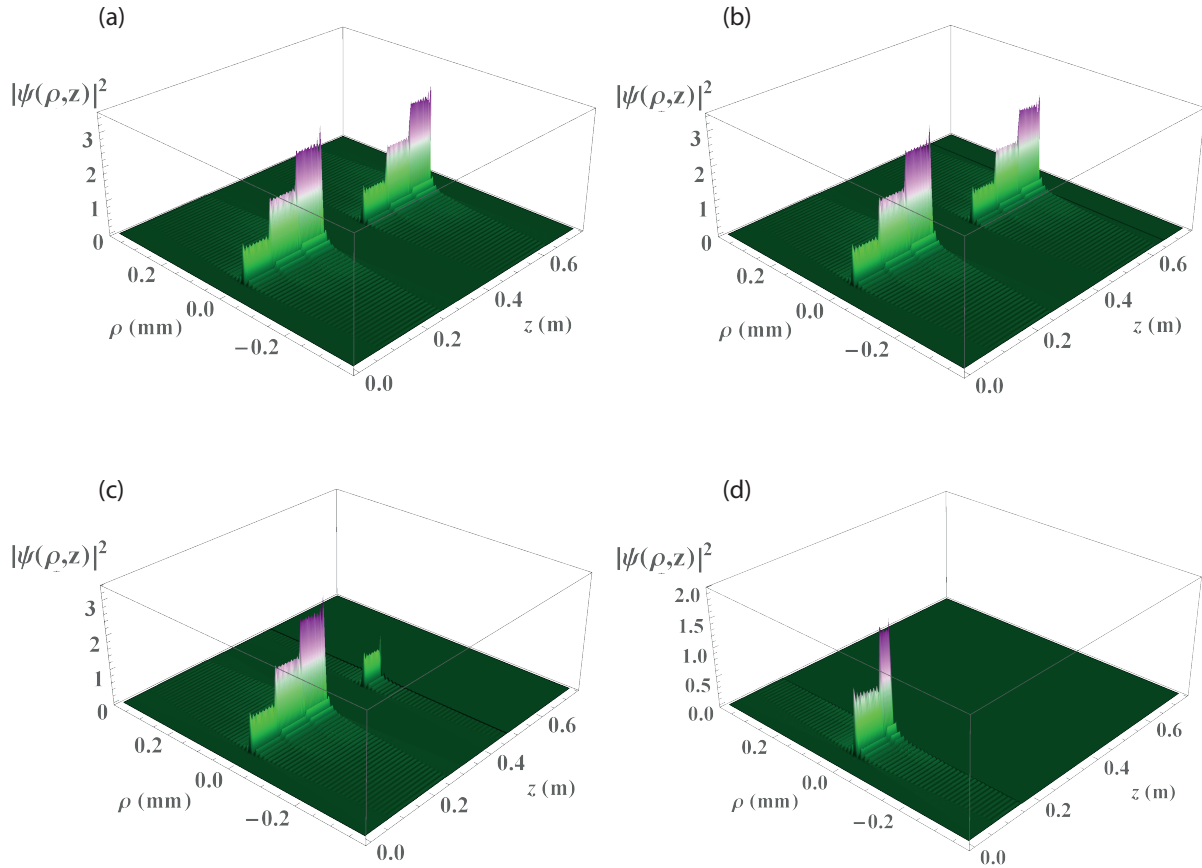
$$0 \leq Q + \frac{2\pi}{L} N \leq n_r \frac{\omega}{c} = k_r \quad (3.30)$$

Assim, a solução de FW com energia finita usando apodização Gaussiana é obtida reescrevendo a Eq. (3.18) na forma da Eq. (3.24), aplicando as equações Eqs. (3.21), (3.23), (3.26), (3.28) e (3.29):

$$\Psi(\rho, \phi, z, t) = e^{i\omega t} e^{-ikz} \frac{e^{\left(-q^2 \frac{\rho^2}{\mu}\right)}}{\mu} e^{ik \frac{z}{\mu}} \sum_{p=-N}^N A_p J_v \left(k_{\rho\rho} \frac{\rho}{\mu} \right) e^{-iv\phi} e^{-ik_{zp} \frac{z}{\mu}} \quad (3.31)$$

A nova solução de FWs na Eq. (3.31) é uma superposição de BGBs. No entanto, essa versão de FW apodizada ainda apresenta intensidades residuais não desejadas. Com menores valores de largura da apodização gaussiana, $\Delta\rho_G$, as intensidades residuais diminuem, mas o perfil desejado é comprometido.

Figura 7: Solução de FW apodizada usando superposições de BGBs em meios não absorventes. Resultados para distintos valores de largura de apodização $\Delta\rho_G$. (a) $\Delta\rho_G = 10^4 r_0$, (b) $\Delta\rho_G = 3000 r_0$, (c) $\Delta\rho_G = 2000 r_0$ e (d) $\Delta\rho_G = 650 r_0$.



Fonte: Elaborada pela autora.

A solução não consegue mais reproduzir o perfil $F(z)$ escolhido *a priori*. Na Figura 7 pode ser observado os resultados dessa versão de FW em meios não absorventes. Foram usados diferentes valores de largura de apodização para cada figura com (a) $\Delta\rho_G = 10^4 r_0$, (b) $\Delta\rho_G = 3000 r_0$, (c) $\Delta\rho_G = 2000 r_0$ e (d) $\Delta\rho_G = 650 r_0$. Nota-se que quanto menor $\Delta\rho_G$, menores são as intensidades residuais, mas o perfil de intensidade é claramente prejudicado.

3.3.2.3 FWs de Superposições de Feixes de Bessel-Gauss de Energia Finita sem Periodicidade Espacial

Os BGBs são o resultado de uma apodização gaussiana de $\exp(-q^2 \rho^2)$, em um BB dado por $J_\nu(k_\rho \rho) e^{-i\nu\phi} e^{-ik_z z} e^{i\omega t}$, tal que podemos escrever conforme [37] como:

$$\Psi_{BGB}(\rho, \phi, z, t) = e^{i\omega t} e^{-ik_z z} \frac{e^{\left(-q^2 \frac{\rho^2}{\mu}\right)}}{\mu} J_\nu\left(k_\rho \frac{\rho}{\mu}\right) e^{-i\nu\phi} \exp\left(i \frac{k_\rho^2 z}{2k \mu}\right) \quad (3.32)$$

Os BGBs na Eq. (3.32) dependem da largura do *spot* central do BB, $\Delta\rho_{Bb}$ e da largura da apodização Gaussiana $\Delta\rho_G$. Para que um feixe apresente resistência à difração deve-se manter sua localização espacial ou o tamanho do *spot* ao longo da propagação. Assim, para BGBs com $\Delta\rho_G \gg \Delta\rho_{Bb}$ ou $k_\rho \gg q$. Deve ser lembrado que o *spot* central de um BB ideal, dado pela Eq. (3.16), é $\Delta\rho_{Bb} \approx 2,4/k_\rho$ e $\Delta\rho_G = 1/\sqrt{2}q$.

Zamboni e Mojahedi [37] estimam a distância de resistência à difração dos BGBs como sendo:

$$Z_{BG} \approx \frac{k_r}{qk_\rho} \quad (3.33)$$

Os principais fatores responsáveis pela degradação da intensidade do feixe na Eq. (3.32) são $\exp(-ikz)$ e $\exp[i(k_\rho^2/2k)(z/\mu)]$. Podemos escrever que a degradação de intensidade está dada pela função:

$$G_{BG}^2(z) \equiv \left| \exp(-ikz) \exp\left(i \frac{k_\rho^2 z}{2k \mu}\right) \right|^2 \quad (3.34)$$

Usando a Eq. (3.27), reescrevemos a Eq. (3.34) como:

$$G_{BG}(z) = \exp(-k_i z) \exp\left(\frac{-k_\rho^2(k_i + 2q^2 z)z}{2k[k_r^2 + (k_i + 2q^2 z)^2]}\right) \quad (3.35)$$

Na Eq. (3.31) cada feixe apresenta diferente número de onda transversal, mas eles variam muito pouco entre si. Logo, nas Eqs. (3.33) e (3.35) k_ρ pode ser aproximado pelo $k_{\rho 0}$ correspondente.

Por último, os autores de [37] propuseram uma redefinição adequada da função de referência $F(z)$ e dos coeficientes A_p para conseguir FWs de energia finita sem periodicidade espacial. Para garantir que os valores de intensidade sejam desprezíveis a partir do intervalo $L/2 < z \leq L$, $F(z)$ é redefinida como:

$$F(z) = \begin{cases} F(z), & \text{para } 0 \leq z \leq L/2 \\ 0, & \text{para } L/2 < z \leq L, \end{cases} \quad (3.36)$$

onde $|F(z)|^2 \approx \Psi(\rho = 0, \phi, z, t)$, sendo Ψ solução da FW como dada pela Eq. (3.31).

O valor de q é escolhido de forma a garantir que os feixes na superposição cheguem em $z = L/2$ mantendo suas características não difrativas. Portanto, considerando $L/2$ como distância máxima de reconstrução, Z_{BG} , na Eq. (3.33), q é definido por:

$$q = \frac{k_r}{Z_{BG}k_{\rho 0}} = \frac{2k_r}{Lk_{\rho 0}} \quad (3.37)$$

Para compensar a atenuação definida pela função G_{BG} na Eq. (3.35) o novo coeficiente A_p é dado por:

$$A_p = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{F(z)}{G(z)} e^{i\frac{2\pi}{L}pz} dz \quad (3.38)$$

Para o cálculo dos coeficientes A_p é necessário simplificar $G(z)$. Em um meio com moderada absorção, $k_r \gg k_i$. Assumindo $k_{\rho 0} \gg q \gg k_i$ e considerando que unicamente há contribuições, para A_p , no intervalo $0 \leq z \leq L/2$, temos:

$$G(z) \approx e^{-k_i z} \exp\left(\frac{-k_{\rho 0}^2 q^2 z^2}{k_r^2}\right) \quad (3.39)$$

$$G^{-1}(z) \approx e^{k_i z} \exp\left(\frac{k_{\rho 0}^2 q^2 z^2}{k_r^2}\right) \quad (3.40)$$

Como a função exponencial pode ser definida como uma série de potências, podemos escrever $G^{-1}(z)$ como:

$$G^{-1}(z) \approx e^{k_i z} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\mathcal{X}^l}{l!} \quad (3.41)$$

sendo $\mathcal{X} = k_{\rho 0}^2 q^2 z^2 / k_r^2$.

Portanto, os coeficientes A_p podem ser finalmente escritos como:

$$A_p \approx \frac{1}{L} \int_0^L \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\mathcal{X}^l}{l!} \right) e^{k_i z} F(z) e^{i\frac{2\pi}{L}pz} dz \quad (3.42)$$

As Eqs. (3.31) e (3.42) são as equações principais do método e as que usaremos para nossos propósitos nos capítulos subsequentes sempre que nos referirmos às FWs. Por meio das Eqs. (3.31) e (3.42) são descritas FWs-BGBs com energia finita resistentes à atenuação e difração e sem periodicidade espacial em meios com e sem perdas. Com o intuito de ganhar familiaridade com o software *Mathematica* e com o presente formalismo aqui apresentado, foi reproduzido o exemplo 3 proposto em [37] para FWs através de superposições de BGBs. Foi considerado um meio não absorvente com índice de refração $n_{ref} = n_r = 2$ e um meio absorvente com $n_{ref} = 2 - i7,5 \times 10^{-7}$, comprimento de onda $\lambda = 632,8$ nm e raio do *spot* $r_0 \approx 9$ μm , assumindo-se a seguinte

função de referência $F(z)$:

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq z < l_1 \\ 1 & \text{para } l_1 < z < l_2 \\ \sqrt{2} & \text{para } l_2 < z < l_3 \\ \sqrt{3} & \text{para } l_3 < z < l_4 \\ 0 & \text{para } l_4 < z \leq L/2 \\ 0 & \text{para } L/2 < z \leq L \end{cases} \quad (3.43)$$

onde, na Eq. (3.43), $l_1 = 0,05$ m, $l_2 = l_1 + \delta z$, $l_3 = l_2 + \delta z$, $l_4 = l_3 + \delta z$, $L = 0,74$ m e $\delta z = 0,08$ m.

As Figuras 8 e 9 são uma reprodução das Figuras 3 e 4 em [37], para a qual foi considerado $N = 60$, isto é 121 feixes na superposição. O valor de $Q \approx 0,999991k_r = 1,98566 \times 10^7$ m⁻¹.

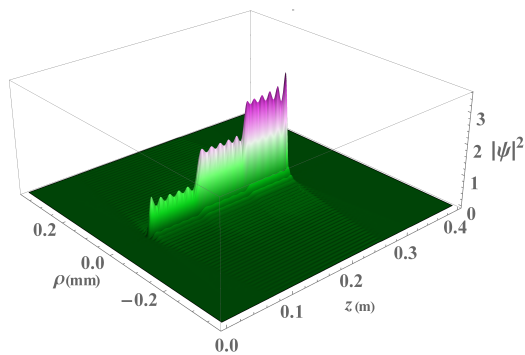
Nas Figuras 8 (a) e (b) são mostrados os resultados para o meio sem perdas e em (c) e (d) para o meio com perdas. As Figuras 8 (a) e (c) foram projetadas para o intervalo $0 \leq z \leq L/2 = 0,37$ m, enquanto que a (b) e (d) para o intervalo estendido $0 \leq z \leq 2L = 1,48$ m

Os quatro resultados mostram a capacidade do método de reproduzir o perfil desejado $F(z)$ em ambos os meios. Podemos observar, também, que não há intensidades residuais. O método consegue usar a apodização gaussiana eficientemente, evitando (de fato, eliminando) a periodicidade espacial sem perder a capacidade de reproduzir o perfil escolhido *a priori*.

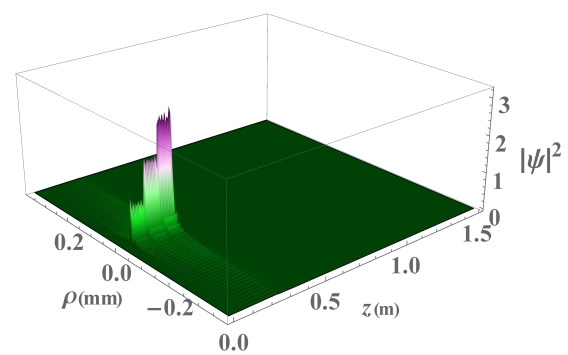
Na Figura 9 é mostrada a projeção ortogonal (plano ρz) do perfil de intensidade da FW obtida no exemplo. Para melhor visualização, é mostrada uma ampliação da referida projeção em (a) para o meio não absorvente e em (b) para o absorvente. Nos resultados apresentados nas Figuras 8 e 9 observamos o caráter não difrativo das FWs conseguidas por esse método, o perfil de intensidade sendo muito similar tanto para meios com perdas como sem perdas.

Em resumo, é apresentado um método analítico eficiente para a modelagem espacial de feixes com energia finita, resistentes à difração e atenuação tanto em meios não absorventes como não absorventes como mostrado em [37]. Isto é, FW de energia finita sem periodicidade espacial, através de superposição discreta de BGBs, sendo elas o tipo de FWs que serão estudadas nesse trabalho de doutorado e incorporadas no contexto da GLMT através da determinação de seus BSCs usando os três métodos apresentados no Capítulo anterior, sendo as quadraturas, FS e ILA.

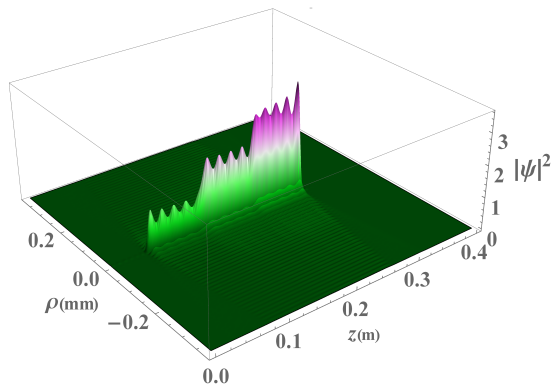
Figura 8: Gráfico 3D de $|\Psi(\rho, z)|^2$ para uma FW de energia finita, com $\lambda = 632,8$ nm, $r_0 \approx 9$ μm , $l = 3$, $N = 60$. As figuras (a) e (b) correspondem a meio não absorvente, (c) e (d) para meio absorvente. Intervalos para as figuras (a, c) $0 \leq z \leq L/2 = 0,37$ m e para (b, d) intervalo estendido $0 \leq z \leq 2L = 1,48$ m.



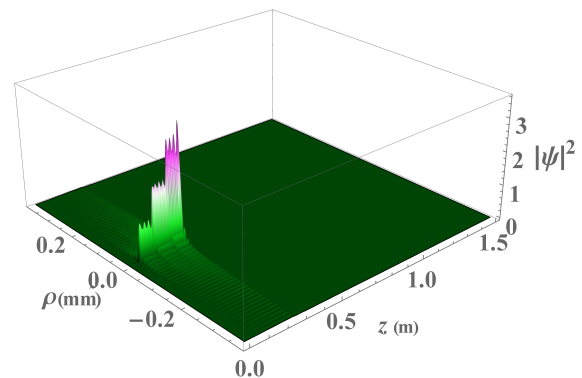
(a)



(b)



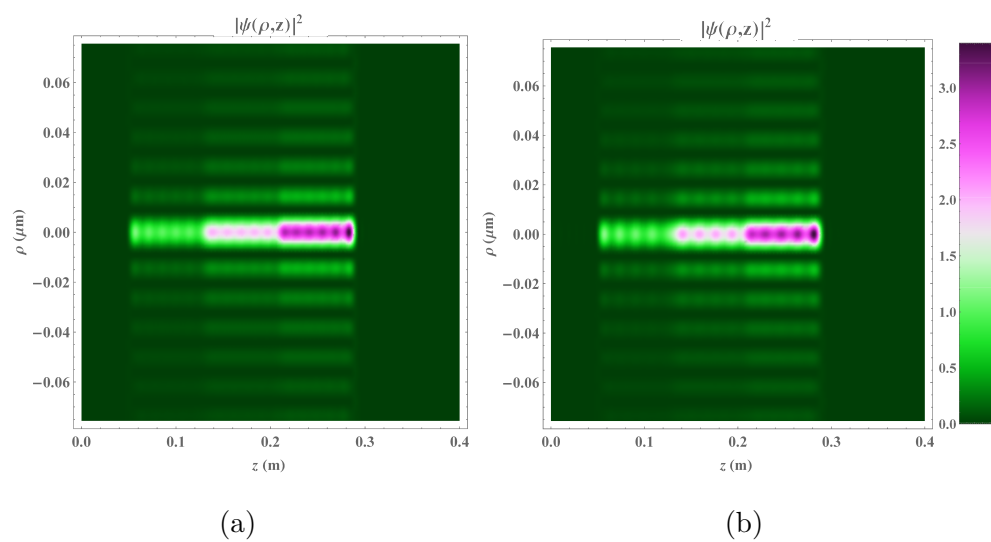
(c)



(d)

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 9: Ampliação da projeção ortogonal da intensidade da FW de energia finita em meio sem perdas, (a), e com perdas, (b).



Fonte: Elaborada pela autora.

4 FEIXES DE BESSEL-GAUSS E FROZEN WAVES NA GLMT

Na GLMT o feixe incidente é descrito com um conjunto de coeficientes (os BSCs) que podem ser calculados usando diferentes métodos, como apresentado no Cap. 2. Com isso, todas as propriedades ópticas de interesse podem ser calculadas e preditas. A seguir são apresentados os resultados da descrição analítica de BGBs de ordem arbitrária no contexto da GLMT usando a LA na sua versão integral (ILA) assim como a FS. Os fatores para as FWs do capítulo anterior também são calculados via princípio da superposição linear dos campos eletromagnéticos.

Este Capítulo representa a contribuição teórica desta tese, em que todo o desenvolvimento analítico é novo e, como será visto, extenso, principalmente no que se refere à aplicação do método FS, pois o mesmo envolve expressões complicadas e com desmembramentos em etapas, a depender da paridade em $(n - m)$, conforme mencionado no Cap. 2. Como consequência desta contribuição que é apresentada aqui, com resultados computacionais a serem apreciados no Cap. 5, foram publicados alguns trabalhos na literatura que servem de referência para o presente texto e que, embora já descritos no Cap. 1, são elencados a seguir:

4.1 Descrição Analítica de BGBs Usando a ILA

Como foi apresentado na Seção 2.3.2 do Capítulo 2, a ILA segue certos passos para a obtenção dos BSCs que descrevem o BGB.

Os BSCs $g_{n, TM}^m$ e $g_{n, TE}^m$ para modos transverso magnético (TM) e transverso elétrico (TE), respectivamente, são descritos a partir das componentes radiais do campo elétrico E_r e magnético H_r . A Eq. (3.1) apresentada no Cap. 3 descreve um BGB escalar, cuja contrapartida vetorial pode, por exemplo, ser obtida assumindo tal solução como componente transversal (ao eixo z de propagação) de campo elétrico, ou até mesmo impondo esta solução como componente do potencial vetor magnético \mathbf{A} . Assim, para trabalhar com a componente radial E_r , por exemplo, podemos ou reescrever a Eq. (3.1) em forma vetorial, ou simplesmente desprezar, em primeira aproximação relacionada ao regime paraxial, a componente longitudinal E_z e assumir $\mathbf{E} \approx E_x \hat{x}$ ou $E_y \hat{y}$, o que nos daria uma onda transversa eletromagnética (TEM). O mesmo se aplica ao campo magnético, que é então deduzido a partir da lei de Faraday $\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}$.

Para melhor visualização a Eq. (3.1) é aqui reproduzida:

$$\Psi_{BGB}(\rho, \phi, z) = \frac{E_0}{\mu} \exp\left(-q^2 \frac{\rho^2}{\mu}\right) J_\nu\left(k_\rho \frac{\rho}{\mu}\right) \exp\left(i \frac{k_\rho^2}{2k} \frac{z}{\mu}\right) e^{i\nu\phi} e^{-ikz} \quad (4.1)$$

Aqui, obtém-se a forma vetorial assumindo-se Ψ_{BGB} como uma componente transversal elétrica, por exemplo a componente x , assim $\mathbf{E} \approx E_x \hat{x} = \Psi_{BGB} \hat{x}$. Logo, tem-se a componente radial Eq. (4.2):

$$E_r = \Psi_{BGB} \text{sen } \theta \cos \phi \quad (4.2)$$

De acordo com a lei de Faraday tem-se o campo magnético $\mathbf{H} = (-i\omega\mu)^{-1} \nabla \times \mathbf{E}$. Dado que \mathbf{E} somente tem componente em \hat{x} , \mathbf{H} somente terá componente em \hat{y} . Assim, o campo magnético pode ser calculado diretamente com $\mathbf{H} = (-i\omega\mu)^{-1} (0, \partial E_x / \partial z, 0)$.

A restrição a feixes TEM, além de se apoiar no regime paraxial, garante que as deduções deste Capítulo sejam tratáveis analiticamente. De fato, caso desejarmos incluir uma componente E_z não nula a partir da lei de Gauss, a integral em z em $E_z = -\int (\partial E_x / \partial x) dz$ seria já extremamente proibitiva, conforme se nota da Eq. (4.1) uma vez que sua derivada em relação a x seja tomada. Finalmente, as próprias expressões para as componentes de campo magnético, obtidas a partir da lei de Faraday, seriam por demais extensas. Essas considerações, por si só, justificam a restrição aqui imposta em termos de ondas TEM¹.

Seguindo a abordagem da ILA [81], deve-se deslocar o feixe de (ρ_0, ϕ_0, z_0) com relação à partícula, o centro desta devendo coincidir com a origem do sistema de coordenadas esféricas atrelado ao sistema cartesiano. Dada a Eq. (4.1), sua componente radial deslocada é definida pela Eq. (4.3):

$$E_r(\rho, \phi, z) = E_0 \frac{1}{\mu} \exp\left(-q^2 \frac{\rho_G^2}{\mu}\right) J_v\left(k_\rho \frac{\rho_G}{\mu}\right) \exp\left(i \frac{k_\rho^2}{2k} \frac{(z - z_0)}{\mu}\right) \times e^{-ik(z-z_0)} e^{iv\phi_G} \text{sen } \theta \cos \phi, \quad (4.3)$$

onde

$$\begin{aligned} \rho_G &= \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)}, \\ \phi_G &= \tan^{-1}\left(\frac{\rho \text{sen } \phi - y_0}{\rho \cos \phi - x_0}\right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

e

$$\bar{\mu} = 1 - i \frac{2q^2(z - z_0)}{k}. \quad (4.5)$$

Sendo α o ângulo de áxicon, o número de onda transversal e longitudinal estão dados pelas Eqs. (4.6) e (4.7), respectivamente:

¹ Além de todas essas considerações, ainda que para a ILA pudéssemos tratar as expressões resultantes para as componentes dos campos elétrico e magnético do ponto de vista computacional, a suposição de componentes longitudinais não nulas inviabilizaria não só a própria aplicação do método da FS, como também o próprio cálculo das integrações duplas do método de quadratura.

$$k_\rho = k \sin \alpha_p \quad (4.6)$$

$$k_z = k \cos \alpha_p \quad (4.7)$$

Escrevendo $k_\rho \rho_G$ e ρ_G^2 em coordenadas esféricas, tem-se:

$$k_\rho \rho_G = \sin \alpha_p \sqrt{(k^2 r^2 \sin^2 \theta) + (k \rho_0)^2 - 2(kr \sin \theta)(k \rho_0) \cos(\phi - \phi_0)} \quad (4.8)$$

$$\rho_G^2 = \frac{k^2 \rho_G^2}{k^2} = \frac{1}{k^2} \left[(kr \sin \theta)^2 + (k \rho_0)^2 - 2(kr \sin \theta)(k \rho_0) \cos(\phi - \phi_0) \right] \quad (4.9)$$

Em seguida, para se obter os BSCs usando a ILA deve-se eliminar a dependência em r e θ [81], para isso aplica-se o operador \hat{G} definido na seção 2.3.2 do Cap. 2. Seguindo o princípio de localização de van Hulst, \hat{G} define kr como $kr \rightarrow n + 1/2$ e θ como $\theta \rightarrow \pi/2$ [48]. Aplicando \hat{G} nas Eqs. (4.5), (4.8) e (4.9) tem-se:

$$k_\rho \rho_G = \sin \alpha_p \sqrt{(n + 1/2) + (k \rho_0)^2 - 2(n + 1/2)(k \rho_0) \cos(\phi - \phi_0)} \quad (4.10)$$

$$\rho_G^2 = \frac{1}{k^2} \left[(n + 1/2)^2 + (k \rho_0)^2 - 2(n + 1/2)(k \rho_0) \cos(\phi - \phi_0) \right] \quad (4.11)$$

$$\mu_G = 1 + i \frac{2q^2(z_0)}{k} \quad (4.12)$$

Seja, agora,

$$w_p = \sin \alpha_p (n + 1/2) \quad (4.13)$$

$$\xi_p = k \rho_0 \sin \alpha_p \quad (4.14)$$

Usando as Eqs. (4.13) e (4.14), podemos reescrever a Eq. (4.11) como Eq. (4.15):

$$k_\rho^2 \rho_G^2 = \left[w_p^2 + \xi_p^2 - 2w_p \xi_p \cos(\phi - \phi_0) \right] \quad (4.15)$$

Finalmente, aplicando \hat{G} em E_r [Eq. (4.3)], obtém-se a Eq. (4.16):

$$\hat{G}(E_r) = e^{i\omega t} e^{ikz_0} \frac{1}{\mu_G} \exp\left(-i \frac{k_\rho^2}{2k} \frac{z_0}{\mu_G}\right) \exp\left[-q^2 \frac{(w_p^2 + \xi_p^2 - 2w_p \xi_p \cos(\phi - \phi_0))}{k_\rho^2 \mu_G}\right] J_\nu \left[\frac{(w_p^2 + \xi_p^2 - 2w_p \xi_p \cos(\phi - \phi_0))^{1/2}}{\mu_G} \right] e^{i\nu\phi_G} \cos \phi \quad (4.16)$$

Levando-se em consideração o teorema da adição de Neumann's para a função de Bessel dado por [86]:

$$e^{i\nu\phi_G} J_\nu(\rho_G) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} J_{j+\nu}(\rho) J_j(\rho_0) e^{i(v+j)\phi} e^{-ij\phi_0}, \quad (4.17)$$

podemos reescrever a função de Bessel na Eq. (4.16) como:

$$e^{i\nu\phi_G} J_\nu \left[\left(\frac{w_p^2}{\mu_G} + \frac{\xi_p^2}{\mu_G} - 2 \frac{w_p \xi_p}{\mu_G \mu_G} \cos(\phi - \phi_0) \right)^{1/2} \right] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} J_{j+\nu} \left(\frac{w_p}{\mu_G} \right) J_j \left(\frac{\xi_p}{\mu_G} \right) e^{i(v+j)\phi} e^{-ij\phi_0}. \quad (4.18)$$

A partir das Eqs. (4.6), (4.13) e (4.14), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{2q^2 w_p \xi_p}{k_\rho^2 \mu_G} &= \frac{2q^2 \rho_0 (n + 1/2)}{k \mu_G} \\ &= \frac{2q^2}{k} \rho_0 (n + 1/2) \mu_G^* = \frac{2q^2}{k} \rho_0 (n + 1/2) \left(1 - i2 \frac{q^2}{k} z_0 \right) \\ &= 2 \frac{q^2}{k} \rho_0 (n + 1/2) - i4 \left(\frac{q^2}{k} \right)^2 \rho_0 (n + 1/2) z_0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Definamos, agora, os seguintes parâmetros:

$$\gamma = 2 \frac{q^2}{k} \rho_0 (n + 1/2) \quad (4.20)$$

$$\delta = i4 \left(\frac{q^2}{k} \right)^2 \rho_0 (n + 1/2) z_0 \quad (4.21)$$

Rearranjando a Eq. (4.16) como se segue,

$$\begin{aligned} &\exp \left[-q^2 \frac{(w_p^2 + \xi_p^2 - 2w_p \xi_p \cos(\phi - \phi_0))}{k_\rho^2 \mu_G} \right] \\ &= \exp \left[-\frac{q^2 (w_p^2 + \xi_p^2)}{k_\rho^2 \mu_G} \right] \exp \left[\frac{2q^2 w_p \xi_p}{k_\rho^2 \mu_G} \cos(\phi - \phi_0) \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

e usando as Eqs. (4.20) e (4.21) reescreve-se o último termo da Eq. (4.22) como:

$$\exp \left[\frac{2q^2 w_p \xi_p}{k_\rho^2 \mu_G} \cos(\phi - \phi_0) \right] = \exp[\gamma \cos(\phi - \phi_0)] \exp[-\delta \cos(\phi - \phi_0)] \quad (4.23)$$

Sendo que γ e δ são suficientemente pequenos (considerando valores fronteiraços para λ_0 , n_m , $rho_{0,max}$), pode-se considerar $e^x \approx 1+x$ e $e^{-ix} \approx 1-ix$. Portanto, a Eq. (4.23) se simplifica:

$$\exp \left[\frac{2q^2 w_p \xi_p}{k_\rho^2 \mu_G} \cos(\phi - \phi_0) \right] = 1 + (\gamma - i\delta) \cos(\phi - \phi_0) \quad (4.24)$$

Substituindo as Eqs. (4.18), (4.20), (4.21) e (4.24) na Eq. (4.16), obtém-se:

$$\begin{aligned} \hat{G}(E_r) &= e^{i\omega t} e^{ikz_0} \frac{1}{\mu_G} \exp \left(-i \frac{k_\rho^2}{2k} \frac{z_0}{\mu_G} \right) \exp \left[-q^2 \frac{(w_p^2 + \xi_p^2)}{k_\rho^2 \mu_G} \right] \\ & [1 + (\gamma - i\delta) \cos(\phi - \phi_0)] \sum_{j=-\infty}^{\infty} J_{(j+v)} \left(\frac{w_p}{\mu_G} \right) J_j \left(\frac{\xi_p}{\mu_G} \right) \\ & e^{i(v+j)\phi} e^{-ij\phi_0} \cos \phi \end{aligned} \quad (4.25)$$

Finalmente, o último passo na ILA para obter os BSCs $g_{m,TM}^m$ e $g_{m,TE}^m$ consiste em uma integração em relação à variável ϕ [81], conforme as Eqs. (2.62) e (2.63) do Cap. 2 e aqui reproduzidas por conveniência:

$$\begin{aligned} g_{n,TM}^m &= \frac{Z_n^m}{2\pi E_0} \int_0^{2\pi} \hat{G}(E_r) e^{-im\phi} d\phi \\ g_{n,TE}^m &= \frac{Z_n^m}{2\pi H_0} \int_0^{2\pi} \hat{G}(H_r) e^{-im\phi} d\phi, \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde Z_n^m são pré-fatores que somente dependem de n e m , definidos de acordo com a Eq. (2.58) [81].

Quebrando as integrais na Eq. (4.26) e depois de algumas operações algébricas obtemos uma relação entre valores de j no somatório na equação e os resultados na integral em ϕ . Assim quando:

$$\begin{aligned} j = m \mp 2 - v &\Rightarrow \int_0^{2\pi} \hat{G}(E_r) e^{-im\phi} d\phi = \frac{1}{2} \pi (\gamma - i\delta) e^{-i(\pm 1 + m - v)\phi_0} \dots \\ j = m \mp 1 - v &\Rightarrow \int_0^{2\pi} \hat{G}(E_r) e^{-im\phi} d\phi = \pi e^{-i(\pm 1 + m - v)\phi_0} \dots \\ j = m - v &\Rightarrow \int_0^{2\pi} \hat{G}(E_r) e^{-im\phi} d\phi = \pi (\gamma - i\delta) \cos \phi_0 e^{-i(m-v)\phi_0} \dots \end{aligned}$$

Finalmente, juntando os resultados anteriores obtém-se os BSCs de modos TM para BGBs usando a ILA:

$$\begin{aligned}
g_{n,TM}^m &= \frac{Z_n^m}{2\bar{\mu}} e^{ikz_0} \exp \left[\frac{-ik \operatorname{sen}^2 \alpha z_0}{2\bar{\mu}} \right] \exp \left[\frac{-s^2 (w_p^2 + \xi_p^2)}{\operatorname{sen}^2 \alpha \bar{\mu}} \right] \\
&\times \left\{ \frac{\gamma_n - i\delta_n}{2} e^{-i(m-v)\phi_0} [2J_m(w_p) J_{m-v}(\xi_p) \cos \phi_0 \right. \\
&+ J_{m-2}(w_p) J_{m-2-v}(\xi_p) e^{i\phi_0} + e^{-i\phi_0} J_{m+2}(w_p) \\
&\times J_{m+2-v}(\xi_p)] + e^{-i(m-v+1)} [e^{2i\phi_0} J_{m-1}(w_p) \\
&\times J_{m-1-v}(\xi_p) + J_{m+1}(w_p) J_{m+1-v}(\xi_p)] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

O mesmo procedimento aplicado aos BSCs de modo TE, a partir da componente radial de campo magnético, fornece-nos:

$$\begin{aligned}
g_{n,TE}^m &= \frac{iZ_n^m}{2\bar{\mu}} F_p e^{ikz_0} \exp \left[\frac{-ik \operatorname{sen}^2 \alpha z_0}{2\bar{\mu}} \right] \exp \left[\frac{-s^2 (w_p^2 + \xi_p^2)}{\operatorname{sen}^2 \alpha \bar{\mu}} \right] \\
&\times \left\{ \frac{\gamma_n - i\delta_n}{2} e^{-i(m-v)\phi_0} [2J_m(w_p) J_{m-v}(\xi_p) \operatorname{sen} \phi_0 \right. \\
&- J_{m-2}(w_p) J_{m-2-v}(\xi_p) e^{i\phi_0} - e^{-i\phi_0} J_{m+2}(w_p) \\
&\times J_{m+2-v}(\xi_p)] + e^{-i(m-v+1)} [e^{2i\phi_0} J_{m-1}(w_p) \\
&\times J_{m-1-v}(\xi_p) - J_{m+1}(w_p) J_{m+1-v}(\xi_p)] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

com

$$\begin{aligned}
F_p &= 1 + \frac{\cos \alpha - 1}{\bar{\mu}}; \quad \bar{\mu} = 1 + i2ks^2 z_0; \\
\gamma_n &= 2ks^2 \rho_0 (n + 1/2); \quad \delta_n = 4(s^2 k)^2 \rho_0 (n + 1/2) z_0; \\
w_p &= \operatorname{sen} \alpha (n + 1/2); \quad \xi_p = k\rho_0 \operatorname{sen} \alpha;
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Assumindo $z_0 = 0$ e feixes para os quais o eixo óptico coincide com o eixo z ($\phi_0 = \gamma_n = \delta_n = \xi_p = 0$ e $F_p = \cos \alpha$), as Eqs. (4.27) e (4.28) se simplificam significativamente:

$$\begin{aligned}
g_{n,TM}^m &= \frac{Z_n^m}{2} \exp \left(\frac{-s^2 w_p^2}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \right) \\
&\times [J_{m-1}(w_p) \delta_{m,v+1} + J_{m+1}(w_p) \delta_{m,v-1}],
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$g_{n,TE}^m = -i \frac{Z_n^m}{2} \exp\left(\frac{-s^2 w_p^2}{\sin^2 \alpha}\right) \times [J_{m-1}(w_p) \delta_{m,v+1} - J_{m+1}(w_p) \delta_{m,v-1}], \quad (4.31)$$

onde $\delta_{i,j}$ é o delta de Kronecker.

Expressões similares às aqui apresentadas [Eqs. (4.27) a (4.29)] foram recentemente obtidas para versões de FWs de energia finita por Valdivia e Ambrosio [72, 73].

4.2 Descrição Analítica de BGBs Usando a FS

Para o cálculo dos BSCs usando séries finitas seguiremos o procedimento-NET apresentado na seção 2.3.3 do Cap. 2. Da mesma maneira que com o método ILA, começamos com a equação que descreve o BGBs [Eq. (4.1)].

Para obter os BSCs usando a FS, fixamo-nos apenas no caso de feixes *on-axis*, para os quais $\rho_0 = \phi_0 = z_0 = 0$, ou seja, feixes cujo eixo óptico coincide com o eixo z . Como veremos, a determinação dos BSCs para este caso particular já é extremamente extensa e morosa. Para o caso em que o eixo óptico do BGB é paralelo ao eixo z – caso *off-axis* –, poderíamos usar teoremas de translação, o que foge ao escopo deste trabalho em sua proposta inicial de uma primeira abordagem da BGBs no contexto da GLMT, ficando este estudo para trabalhos subsequentes. Assim, fixamos $\rho_0 = \phi_0 = z_0 = 0$ e reescrevemos a Eq. (4.1) em termos de r , θ e ϕ , obtendo-se:

$$E_r(r, \theta, \phi) = \frac{E_0}{\mu} \exp(-ikr \cos \theta) \exp\left(-\frac{k^2 r^2 s^2 \sin^2 \theta}{\mu}\right) \times \exp\left(\frac{ikr \sin^2 \alpha \cos \theta}{\mu}\right) J_\nu\left(\frac{k \sin \alpha r \sin \theta}{\mu}\right) \times e^{i\nu\phi} \sin \theta \cos \phi, \quad (4.32)$$

onde o parâmetro de confinamento s é dado por $s = 1/kw_0$ e μ reescrevesse como:

$$\mu = 1 - i2s^2 \cos \theta kr \quad (4.33)$$

Em conformidade com as propriedades associadas às funções associadas de Legendre e dadas pela Eqs. (2.13) e (2.14), vamos agora dividir a análise e a dedução dos BSCs em razão da paridade par ou ímpar da diferença $n - m$.

4.2.1 BSCs para Modos TM, $(n - m)$ par

Depois de fazer a integração da Eq. (2.72) em ϕ , substituindo a Eq. (2.65) e fazendo $x = kr$ obtém-se a Eq. (4.34) com a forma da Eq. (2.66) usada no procedimento-NET.

$$\begin{aligned} x^{1/2}g(x) [\delta_{m,v+1} + \delta_{m,v-1}] \\ = \sum_{n=|m|, (n-m) \text{ par}}^{\infty} (-i)^n (2n+1) g_{n, TM}^m P_n^{|m|}(0) J_{n+1/2}(x) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Combinando as Eqs. (4.32) e (4.34) e considerando $k_\rho = k \sin \alpha$ tem-se:

$$g(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} x \exp(-x^2 s^2) J_v(x \sin \alpha), \quad (4.35)$$

Como pode ser notado a partir da presença de funções delta de Kronecker, a Eq. (4.34) somente tem resultados não nulos para $m = v \pm 1$, o que está em concordância com o fato de que BSCs para feixes do tipo *on-axis* são 0 para $m \neq v \pm 1$ [67].

Dentro do procedimento NET encontra-se um conjunto de expressões para os coeficientes c_n , considerando $v \geq 0$ e tendo três casos não nulos para m na Eq. (4.34) [57]:

(i) $m = v + 1, \forall v \geq 0$

$$x^{1/2}g(x) = \sum_{n=v+1}^{\infty} (-i)^n (2n+1) g_{n, TM}^{v+1} P_n^{v+1}(0) J_{n+1/2}(x), \quad (n-v) \text{ ímpar.} \quad (4.36)$$

Usando a Eq. (2.66), obtém-se:

$$c_n = \begin{cases} (-i)^n (2n+1) g_{n, TM}^{v+1} P_n^{v+1}(0), & n \geq v+1, (n-v) \text{ ímpar} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.37)$$

(ii) $m = v - 1, v > 0$

$$x^{1/2}g(x) = \sum_{n=v-1}^{\infty} (-i)^n (2n+1) g_{n, TM}^{v-1} P_n^{v-1}(0) J_{n+1/2}(x), \quad (n-v) \text{ ímpar} \quad (4.38)$$

Usando a Eq. (2.66), obtém-se:

$$c_n = \begin{cases} (-i)^n (2n+1) g_{n, TM}^{v-1} P_n^{v-1}(0), & n \geq v-1, (n-v) \text{ ímpar} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.39)$$

(iii) $m = v - 1, v = 0$

$$x^{1/2}g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n (2n+1) g_{n, TM}^{-1} P_n^1(0) J_{n+1/2}(x), \quad n \text{ ímpar} \quad (4.40)$$

Usando novamente a Eq. (2.66), obtém-se:

$$c_n = \begin{cases} (-i)^n (2n+1) g_{n, TM}^{-1} P_n^1(0), & n \geq 1, n \text{ ímpar} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.41)$$

A seguir, calculamos o segundo conjunto de expressões para coeficiente c_n utilizando as Eqs. (2.67) e (2.68). Primeiro, a função de Bessel da Eq. (4.35) é definida em termos de uma expansão em série [107],

$$J_v(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+v}. \quad (4.42)$$

Reescrevendo a Eq. (4.35) com a Eq. (4.42) e junto com a função exponencial na forma de uma séries de potência, obtém-se:

$$g(x) = G x \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-x^2 s^2)^t}{t!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+v+1)} \left(\frac{x \operatorname{sen} \alpha}{2}\right)^{2j+v} \quad (4.43)$$

Rearranjando a Eq. (4.43), têm-se:

$$g(x) = G \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+t}}{t! j! \Gamma(j+v+1)} \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{2}\right)^{2j+v} s^{2t} x^{2j} x^{2t+v+1} \quad (4.44)$$

Introduzindo a notação $E_v(j, t)$,

$$g(x) = G \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} E_v(j, t) x^{2t} x^{2j+v+1}, \quad (4.45)$$

onde:

$$E_v(j, t) = \frac{(-1)^{j+t}}{(t)! j! \Gamma(j+v+1)} \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{2}\right)^{2j+v} s^{2t} \quad (4.46)$$

Com o intuito de reescrever a Eq. (4.45) na forma da Eq. (2.67) é introduzido $n = 2j + v + 1$. Como $n = v + 1$ para $j = 0$, tem-se:

$$g(x) = G \sum_{n=v+1}^{\infty} \left[\sum_{t=0}^{\infty} E_v(j, t) x^{2t} \right] x^n, \quad (4.47)$$

tal que a Eq. (4.46) reescreve-se como:

$$E_v(j = \frac{n-v-1}{2}, t) = E_v(t) = \frac{(-1)^{\frac{n-v-1}{2}+t}}{t! (\frac{n-v-1}{2})! \Gamma(\frac{n-v+1}{2})} \left(\frac{\text{sen } \alpha}{2}\right)^{n-1} s^{2t}. \quad (4.48)$$

Expandindo a Eq. (4.47), têm-se:

$$g(x) = G \sum_{n=v+1}^{\infty} [E_v(0)x^0 + E_v(1)x^2 + E_v(2)x^4 + \dots] x^n, \quad (4.49)$$

$$g(x) = G \sum_{n=v+1}^{\infty} [E_v(0)x^n + E_v(1)x^{n+2} + E_v(2)x^{n+4} + \dots], \quad (4.50)$$

$$g(x) = G \left[\sum_{n=v+1}^{\infty} E_v(0)x^n + \sum_{n=v+1}^{\infty} E_v(1)x^{n+2} + \sum_{n=v+1}^{\infty} E_v(2)x^{n+4} + \dots \right] \quad (4.51)$$

Forçando os diferentes expoentes de x a assumirem um mesmo índice k ,

$$g(x) = G \left[\sum_{k=v+1}^{\infty} E_v(0)x^k + \sum_{k=v+3}^{\infty} E_v(1)x^k + \sum_{k=v+5}^{\infty} E_v(2)x^k + \dots \right]. \quad (4.52)$$

Sendo, agora, $k = n + 2t$, tem-se:

$$E_v(n = k - 2t, t) = \frac{(-1)^{\frac{k-2t-v-1}{2}+t}}{t! (\frac{k-2t-v-1}{2})! \Gamma(\frac{k-2t-v+1}{2})} \left(\frac{\text{sen } \alpha}{2}\right)^{k-2t-1} s^{2t}, \quad (4.53)$$

Logo, a Eq. (4.52) é reescrita como:

$$g(x) = G \left[\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_0 E_v(0)x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_1 E_v(1)x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_2 E_v(2)x^k + \dots \right]. \quad (4.54)$$

A Eq. (4.54) pode ser rearranjada e colocada na forma:

$$g(x) = G \sum_{k=0}^{\infty} [\varepsilon_0 E_v(0) + \varepsilon_1 E_v(1) + \varepsilon_2 E_v(2) + \dots] x^k \quad (4.55)$$

onde, na Eq. (4.55), foi introduzido o parâmetro $\varepsilon(k; 0, 1, 2, \dots, l) = 0$ para $k \leq l$, 1 caso contrário, tal que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \varepsilon(k; 0, 1, 2, \dots, v); \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon(k; 0, 1, 2, \dots, v+2); \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon(k; 0, 1, 2, \dots, v+4) \end{aligned} \quad (4.56)$$

ou, de forma compacta em termos do índice t ,

$$\varepsilon_t = \varepsilon(k; 0, 1, 2, \dots, v + 2t) \quad (4.57)$$

Com isso, na Eq. (4.55) pode ser reescrita como:

$$g(x) = G \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \varepsilon_t E_v(t) x^k \quad (4.58)$$

Assim, a Eq. (4.58) pode finalmente ser colocada na forma desejada:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (4.59)$$

onde b_n e a versão final de $E_v(t)$, Eq. (4.60), Eq. (4.61) respectivamente:

$$b_n = G \sum_{t=0}^{\infty} \varepsilon(n; 0, 1, \dots, v + 2t) E_v(t) \quad (4.60)$$

$$E_v(t) = \frac{(-1)^{\frac{n-v-1}{2}}}{t! \left(\frac{n-2t-v-1}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2t-v+1}{2}\right)} \left(\frac{\text{sen } \alpha}{2}\right)^{n-2t-1} s^{2t} \quad (4.61)$$

Com os coeficientes b_n calculam-se os coeficientes b_{n-2m} necessários para obter as coeficientes c_n na Eq. (2.68). Essas expressões serão igualadas com os coeficientes c_n obtidos anteriormente nas Eqs. (4.36) a (4.41) para obter os $g_{n, TM}$ BSCs [57]. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} c_n &= (-i)^n (2n + 1) g_{n, TM}^{v+1} P_n^{v+1}(0) \quad (4.62) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \sum_{m=0}^{\leq n/2} 2^{\frac{1}{2}+n-2m} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n - m\right)}{m!} b_{n-2m}, \text{ para } n \geq v + 1, (n - v) \text{ ímpar}, v \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_n &= (-i)^n (2n + 1) g_{n, TM}^{v-1} P_n^{v-1}(0) \quad (4.63) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \sum_{m=0}^{\leq n/2} 2^{\frac{1}{2}+n-2m} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n - m\right)}{m!} b_{n-2m}, \text{ para } n \geq v - 1, (n - v) \text{ ímpar}, v > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_n &= (-i)^n (2n + 1) g_{n, TM}^{-1} P_n^1(0) \quad (4.64) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \sum_{m=0}^{\leq n/2} 2^{\frac{1}{2}+n-2m} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n - m\right)}{m!} b_{n-2m}, \text{ para } n \geq +1, n \text{ ímpar} \end{aligned}$$

Substituindo as expressões para $P_n^m(0)$, dadas pela Eq. (2.70), nas Eqs. (4.62) a (4.64) são obtidas as expressões para os BSCs de modos TM, $g_{n, TM}^m$, especificamente para $(n - m)$ par ou, equivalentemente, para $(n - v)$ ímpar:

$$g_{n, TM}^{v+1} = \frac{i^n \sqrt{\pi}}{2^{v+2}} \frac{(-1)^{\frac{n+v+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+v}{2} + 1)} \left(\frac{n-v-1}{2}\right)! \sum_{m=0}^{\leq n/2} 2^{\frac{1}{2}+n-2m} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n - m)}{m!} b_{n-2m}, \quad (4.65)$$

para $n \geq v + 1$, $(n - v)$ ímpar, $v \geq 0$

$$g_{n, TM}^{v-1} = \frac{i^n \sqrt{\pi}}{2^v} \frac{(-1)^{\frac{n+v-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+v}{2})} \left(\frac{n-v+1}{2}\right)! \sum_{m=0}^{\leq n/2} 2^{\frac{1}{2}+n-2m} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n - m)}{m!} b_{n-2m}, \quad (4.66)$$

para $n \geq v - 1$, $(n - v)$ ímpar, $v > 0$

$$g_{n, TM}^{-1} = \frac{i^n \sqrt{\pi}}{4} \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \left(\frac{n-1}{2}\right)! \sum_{m=0}^{\leq n/2} 2^{\frac{1}{2}+n-2m} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n - m)}{m!} b_{n-2m}, \quad (4.67)$$

para $n \geq +1$, n ímpar

Nas Eqs. (4.65) a (4.67), vemos que precisamos dos coeficientes b_{n-2p} . Para tanto, substituindo $E_v(j)$, Eq. (4.61), na Eq. (4.60) com $n - 2p$, obtém-se:

$$b_{n-2p} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \sum_{t=0}^{\infty} \varepsilon(n - 2p - 2t; v) \frac{(-1)^{\frac{n-2p-v-1}{2}}}{t! \left(\frac{n-2p-2t-v-1}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2p-2t+v+1}{2}\right)} \left(\frac{\text{sen } \alpha}{2}\right)^{n-2p-2t-1} s^{2t} \quad (4.68)$$

Substituindo a Eq. (4.68) na Eq. (4.65) temos:

$$[g_{n, TM}^{v+1}] = \frac{i^n \sqrt{\pi}}{2^{v+2}} \frac{(-1)^{\frac{n+v+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+v}{2} + 1)} \left(\frac{n-v-1}{2}\right)! \sum_{p=0}^{\leq n/2} 2^{\frac{1}{2}+n-2p} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n - p)}{p!} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \sum_{t=0}^{\infty} \varepsilon(n - 2p - 2t; v) \frac{(-1)^{\frac{n-2p-v-1}{2}}}{t! \left(\frac{n-2p-2t-v-1}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2p-2t+v+1}{2}\right)} \left(\frac{\text{sen } \alpha}{2}\right)^{n-2p-2t-1} s^{2t},$$

para $n \geq v + 1$, $(n - v)$ ímpar, $v \geq 0$

(4.69)

$$[g_{n, TM}^{v+1}] = \frac{i^{n+1}}{2^{v+2}} \frac{\left(\frac{n-v-1}{2}\right)!}{\Gamma(\frac{n+v}{2} + 1)} \sum_{p=0}^{\leq n/2} 2^{n-2p} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n - p)}{p!} (-1)^{\frac{n+v+1}{2}} \sum_{t=0}^{\infty} \varepsilon(n - 2p - 2t; v) \frac{(-1)^{\frac{n-2p-v-1}{2}}}{t! \left(\frac{n-2p-2t-v-1}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2p-2t+v+1}{2}\right)} \left(\frac{\text{sen } \alpha}{2}\right)^{n-2p-2t-1} s^{2t},$$

para $n \geq v + 1$, $(n - v)$ ímpar, $v \geq 0$

(4.70)

$$\begin{aligned}
[g_{n, TM}^{v+1}] &= \frac{i^{n+1}}{2^{v+2}} \frac{(\frac{n-v-1}{2})!}{\Gamma(\frac{n+v}{2} + 1)} \sum_{p=0}^{\leq n/2} \frac{2^{n-2p} \Gamma(\frac{1}{2} + n - p)}{p!} (-1)^{n-p} \left(\frac{\text{sen } \alpha}{2}\right)^{n-2p-1} \\
&\quad \sum_{t=0}^{\infty} \varepsilon(n - 2p - 2t; v) \frac{s^{2t}}{t! (\frac{n-2p-2t-v-1}{2})! \Gamma(\frac{n-2p-2t+v+1}{2})} \left(\frac{\text{sen } \alpha}{2}\right)^{-2t}, \quad (4.71)
\end{aligned}$$

para $n \geq v + 1$, $(n - v)$ ímpar, $v \geq 0$

$$\begin{aligned}
[g_{n, TM}^{v+1}] &= \frac{i^{n+1}}{2^{v+1}} \frac{(\frac{n-v-1}{2})!}{\Gamma(\frac{n+v}{2} + 1)} \sum_{p=0}^{\leq n/2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n - p)}{p!} (-1)^{n-p} (\text{sen } \alpha)^{n-2p-1} \\
&\quad \sum_{t=0}^{\infty} \varepsilon(n - 2t; v) \frac{s^{2t}}{t! (\frac{n-2p-2t-v-1}{2})! \Gamma(\frac{n-2p-2t+v+1}{2})} \left(\frac{\text{sen } \alpha}{2}\right)^{-2t}, \quad (4.72)
\end{aligned}$$

para $n \geq v + 1$, $(n - v)$ ímpar, $v \geq 0$

$$\begin{aligned}
[g_{n, TM}^{v+1}] &= \frac{i^{n+1}}{2^{v+1}} \frac{(\frac{n-v-1}{2})! (\text{sen } \alpha)^{n-1}}{\Gamma(\frac{n+v}{2} + 1)} \sum_{p=0}^{\leq n/2} \frac{(-1)^{n-p} \Gamma(\frac{1}{2} + n - p) (\sin \alpha)^{-2p}}{p!} \\
&\quad \sum_{t=0}^{\infty} \varepsilon(n - 2t; v) \frac{s^{2t}}{t! (\frac{n-2p-2t-v-1}{2})! \Gamma(\frac{n-2p-2t+v+1}{2})} \left(\frac{\text{sen } \alpha}{2}\right)^{-2t}, \quad (4.73)
\end{aligned}$$

para $n \geq v + 1$, $(n - v)$ ímpar, $v \geq 0$

$$\begin{aligned}
[g_{n, TM}^{v+1}] &= \frac{i^{n+1}}{2^{v+1}} \frac{(\frac{n-v-1}{2})! (\text{sen } \alpha)^{n-1}}{\Gamma(\frac{n+v+2}{2})} \sum_{p=0}^{\leq n/2} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-p} \Gamma(\frac{1}{2} + n - p)}{p! (\text{sen } \alpha)^{2p}} \\
&\quad \times \varepsilon(n - 2t; v) \frac{(2s)^{2t} (\text{sen } \alpha)^{-2t}}{t! (\frac{n-2p-2t-v-1}{2})! \Gamma(\frac{n-2p-2t+v+1}{2})}, \quad (4.74)
\end{aligned}$$

para $n \geq v + 1$, $(n - v)$ ímpar, $v \geq 0$

Substituindo a Eq. (4.68) na Eq. (4.66) tem-se:

$$\begin{aligned}
[g_{n, TM}^{v-1}] &= \frac{i^{n+1}}{2^{v-1}} \frac{(\frac{n-v+1}{2})! (\text{sen } \alpha)^{n-1}}{\Gamma(\frac{n+v}{2})} \sum_{p=0}^{\leq n/2} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-p-1} \Gamma(\frac{1}{2} + n - p)}{p! (\text{sen } \alpha)^{2p}} \\
&\quad \times \varepsilon(n - 2t; v) \frac{(2s)^{2t} (\text{sen } \alpha)^{-2t}}{t! (\frac{n-2p-2t-v-1}{2})! \Gamma(\frac{n-2p-2t+v+1}{2})}, \quad (4.75)
\end{aligned}$$

para $n \geq v + 1$, $(n - v)$ ímpar, $v \geq 0$

E substituindo a Eq. (4.68) na Eq. (4.67) obtém-se:

$$\begin{aligned}
[g_{n, TM}^{-1}] &= \frac{i^{n+1}}{2} \frac{(\frac{n-1}{2})! (\text{sen } \alpha)^{n-1}}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \sum_{p=0}^{\leq n/2} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-p} \Gamma(\frac{1}{2} + n - p)}{p! (\text{sen } \alpha)^{2p}} \\
&\quad \times \varepsilon(n - 2t; 0) \frac{(2s)^{2t} (\text{sen } \alpha)^{-2t}}{t! (\frac{n-2p-2t-1}{2})! \Gamma(\frac{n-2p-2t+1}{2})}, \\
&\quad \text{para } n \geq v + 1, (n - v) \text{ ímpar}, v \geq 0
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Finalmente, sendo $\Gamma(n) = (n - 1)!$, pode-se expressar os BSCs anteriormente obtidos em termos de $\Gamma(n)$, eliminando-se os fatoriais. As expressões finais para os BSCs de modos TM, $g_{n, TM}^m$, com $(n - m)$ par [ou, equivalentemente, $(n - v)$ ímpar], estão dadas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
[g_{n, TM}^{v+1}] &= \frac{i^{n+1}}{2^{v+1}} \frac{(\Gamma \frac{n-v+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+v+2}{2})} \sum_{p=0}^{\leq n/2} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{n-p} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n - p)}{\Gamma(p + 1)} \\
&\quad \times \varepsilon(n - 2p - 2t; v) \frac{(2s)^{2t} (\text{sen } \alpha)^{n+1-2p-2t}}{\Gamma(t + 1) \Gamma(\frac{n-v+1-2p-2t}{2}) \Gamma(\frac{n+v+1-2p-2t}{2})}, \\
&\quad \text{para } n \geq v + 1, (n - v) \text{ ímpar}, v \geq 0
\end{aligned} \tag{4.77}$$

$$\begin{aligned}
[g_{n, TM}^{v-1}] &= \frac{i^{n+1}}{2^{v-1}} \frac{(\Gamma \frac{n-v+3}{2})}{\Gamma(\frac{n+v}{2})} \sum_{p=0}^{\leq n/2} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{n-p-1} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n - p)}{\Gamma(p + 1)} \\
&\quad \times \varepsilon(n - 2p - 2t; v) \frac{(2s)^{2t} (\text{sen } \alpha)^{n+1-2p-2t}}{\Gamma(t + 1) \Gamma(\frac{n-v+1-2p-2t}{2}) \Gamma(\frac{n+v+1-2p-2t}{2})}, \\
&\quad \text{para } n \geq v + 1, (n - v) \text{ ímpar}, v \geq 0
\end{aligned} \tag{4.78}$$

$$\begin{aligned}
[g_{n, TM}^{-1}] &= \frac{i^{n+1}}{2} \frac{(\Gamma \frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \sum_{p=0}^{\leq n/2} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{n-p} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n - p)}{\Gamma(p + 1)} \\
&\quad \times \varepsilon(n - 2p - 2t; v) \frac{(2s)^{2t} (\text{sen } \alpha)^{n+1-2p-2t}}{\Gamma(t + 1) \Gamma(\frac{n+1-2p-2t}{2}) \Gamma(\frac{n+1-2p-2t}{2})}, \\
&\quad \text{para } n \geq v + 1, (n - v) \text{ ímpar}, v \geq 0
\end{aligned} \tag{4.79}$$

4.2.2 BSCS para Modos TM, $(n - m)$ ímpar

O procedimento para $(n - m)$ ímpar é bastante semelhante ao procedimento para $(n - m)$ par, mas partimos da Eq. (2.73) que requer avaliar a derivada $[\partial E_r / \partial \cos \theta]_{\theta=\pi/2}$. Depois de alguns cálculos da derivada da Eq. (4.32), obtém-se:

$$\left[\frac{\partial E_r(\cos \theta)}{\partial \cos \theta} \right]_{\theta=\pi/2} = iE_0 e^{iv\phi} \cos \phi \exp(-s^2 x^2) x \left\{ \left[-1 - \sin^2 \alpha + 2s^2(v-1) + 2s^4 x^2 \right] J_v(x \sin \alpha) - 2s^2 \sin \alpha x J_{v-1}(x \sin \alpha) \right\} \quad (4.80)$$

onde $x = kr$ e $s = 1/kw_0$.

Como no caso par obtém-se $x^{1/2}g(x)[\delta_{m,v+1} + \delta_{m,v-1}]$ mas substituindo a Eq. (2.72) pela Eq. (2.73) na Eq. (4.34), obtendo assim:

$$\begin{aligned} x^{1/2}g(x)[\delta_{m,v+1} + \delta_{m,v-1}] \\ = \sum_{n=|m|}^{\infty} (-i)^n (2n+1) g_{n, TM}^m \left[\frac{dP_n^{|m|}(\cos \theta)}{d \cos \theta} \right]_{\theta=\pi/2} J_{n+1/2}(x), \quad (n-m) \text{ ímpar,} \end{aligned} \quad (4.81)$$

onde a função $g(x)$ é dada por:

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} x^2 \exp(-s^2 x^2) \left\{ -2s^2 \sin \alpha x J_{v-1}(x \sin \alpha) \right. \\ \left. + \left[-1 - \sin^2 \alpha + 2s^2(v-1) + 2s^4 x^2 \right] J_v(x \sin \alpha) \right\} \end{aligned} \quad (4.82)$$

Do mesmo modo que no caso anterior, tem-se três casos de valores de m para BSCs não nulos: (i) $m = v + 1, \forall v \geq 0$; (ii) $m = v - 1, v > 0$, e (iii) $m = v - 1, v = 0$, isto é, $m = -1$. Assim, os valores para os coeficientes c_n serão parecidos com os do caso de paridade par mas, para $(n-m)$ ímpar, é substituído $P_n^{v\pm 1}(0)$ por $[dP_n^{v\pm 1}(\cos \theta)/d \cos \theta]_{\theta=\pi/2}$ nas Eqs. (4.36) a (4.41). Desse modo, tem-se:

(i) $m = v + 1, \forall v \geq 0$

$$c_n = \begin{cases} (-i)^n (2n+1) g_{n, TM}^{v+1} \left[\frac{dP_n^{v+1}(\cos \theta)}{d \cos \theta} \right]_{\theta=\pi/2}, & n \geq v+1, n-v \text{ par} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.83)$$

(ii) $m = v - 1, v > 0$

$$c_n = \begin{cases} (-i)^n (2n+1) g_{n, TM}^{v-1} \left[\frac{dP_n^{v-1}(\cos \theta)}{d \cos \theta} \right]_{\theta=\pi/2}, & n \geq v-1, n-v \text{ par} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.84)$$

(iii) $m = v - 1, v = 0$

$$c_n = \begin{cases} (-i)^n (2n+1) g_{n, TM}^{-1} \left[\frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d \cos \theta} \right]_{\theta=\pi/2}, & n \geq 2, n \text{ par} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.85)$$

Seguidamente, reescreve-se a Eq. (4.82) como:

$$g(x) = Gx^2 \exp(-s^2x^2) \left\{ Hx J_{v-1}(k_\rho x s w_0) - [Kv + Qx^2] J_v(k_\rho x s w_0) \right\} \quad (4.86)$$

onde G , H , K_v e Q estão dados por:

$$G = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4.87)$$

$$H = 2s^2 \operatorname{sen} \alpha, \quad (4.88)$$

$$K_v = \left[-1 - \operatorname{sen}^2 \alpha + 2s^2(v-1) \right], \quad (4.89)$$

$$Q = 2s^4. \quad (4.90)$$

Reescrevendo novamente a Eq. (4.86), usa-se a função de Bessel em expansão de séries de potência, Eq. (4.42), e a função exponencial também como uma série de potência. Assim:

$$\begin{aligned} g(x) = & Gx^2 \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-s^2x^2)^t}{t!} \left\{ Hx \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+v)} \left(\frac{x \operatorname{sen} \alpha}{2} \right)^{2j+v-1} \right. \\ & \left. - [K_v + Qx^2] \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+v+1)} \left(\frac{x \operatorname{sen} \alpha}{2} \right)^{2j+v} \right\} \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned} g(x) = & Gx^2 \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-s^2x^2)^t}{t!} Hx \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+v)} \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{2} s x \right)^{2j+v-1} \\ & - Gx^2 \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-s^2x^2)^t}{t!} K_v \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+v+1)} \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{2} s x \right)^{2j+v} \\ & - Gx^2 \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-s^2x^2)^t}{t!} Qx^2 \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+v+1)} \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{2} s x \right)^{2j+v} \end{aligned} \quad (4.92)$$

Para efeitos de simplificação, divide-se $g(x)$ em termos, $g(x) = g_1(x) - g_2(x) - g_3(x)$, tais que:

$$g_1(x) = GH \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} E_{1v}(j, t) x^{2j+2t+v+2}, \quad (4.93)$$

$$g_2(x) = GK_v \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} E_{2v}(j, t) x^{2j+2t+v+2}, \quad (4.94)$$

e

$$g_3(x) = GK_v \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} E_{2v}(j, t) x^{2j+2t+v+2}, \quad (4.95)$$

onde

$$E_{1v}(j, t) = \frac{(-1)^{t+j}}{t! j! \Gamma(j+v)} \left(\frac{\text{sen } \alpha}{2} \right)^{2j+v-1} s^{2t}, \quad (4.96)$$

$$E_{2v}(j, t) = \frac{(-1)^{t+j}}{t! j! \Gamma(j+v+1)} \left(\frac{\text{sen } \alpha}{2} \right)^{2j+v} s^{2t} \quad (4.97)$$

e

$$E_{3v}(j, t) = E_{2v}(j, t). \quad (4.98)$$

Trabalharemos com cada parcela de $g(x)$, começando com $g_1(x)$. Para que $g_1(x)$ tenha a forma da Eq. (4.59), introduz-se o índice $n = 2j + v + 2$ tal que, quando $j = 0$, $n = v + 2$. Reescrevendo a Eq. (4.93) tem-se:

$$g_1(x) = G H \sum_{n=v+2}^{\infty} \left[\sum_{t=0}^{\infty} E_{1v}(t) x^{2t} \right] x^n, \quad (4.99)$$

sendo

$$E_{1v}(j = \frac{n-v-2}{2}, t) \equiv E_{1v}(t) = \frac{(-1)^{\frac{n-v-2}{2}} (-1)^t}{(\frac{n-v-2}{2})! \Gamma(\frac{n+v-2}{2})} \frac{(\text{sen } \alpha)^{n-3}}{2^{n-3}} s^{2t}. \quad (4.100)$$

Rearranjando a Eq. (4.99) tem-se as equações:

$$g_1(x) = G H \sum_{n=v+2}^{\infty} \left[E_{1v}(0) x^0 + E_{1v}(1) x^2 + E_{1v}(2) x^4 + \dots \right] x^n, \quad (4.101)$$

$$g_1(x) = G H \sum_{n=v+2}^{\infty} \left[E_{1v}(0) x^n + E_{1v}(1) x^{n+2} + E_{1v}(2) x^{n+4} + \dots \right] \quad (4.102)$$

e

$$g_1(x) = G H \left[\sum_{n=v+2}^{\infty} E_{1v}(0) x^n + \sum_{n=v+2}^{\infty} E_{1v}(1) x^{n+2} + \sum_{n=v+2}^{\infty} E_{1v}(2) x^{n+4} + \dots \right]. \quad (4.103)$$

Fazendo a substituição $k = n - 2t$, reescreve-se a Eq. (4.103) como:

$$g_1(x) = G H \left[\sum_{k=v+2}^{\infty} E_{1v}(0) x^k + \sum_{k=v+4}^{\infty} E_{1v}(1) x^k + \sum_{k=v+6}^{\infty} E_{1v}(2) x^k + \dots \right]. \quad (4.104)$$

Rearranjando a Eq. (4.104) tem-se:

$$g_1(x) = G H \left[\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_0 E_{1v}(0) x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_1 E_{1v}(1) x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_2 E_{1v}(2) x^k + \dots \right], \quad (4.105)$$

ou

$$g_1(x) = G H \left[\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_0 E_{1v}(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_1 E_{1v}(1) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_2 E_{1v}(2) + \dots \right] x^k \quad (4.106)$$

onde ε_0 , ε_1 e ε_2 agora valem:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \varepsilon(k; 0, 1, 2, \dots, v+1); \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon(k; 0, 1, 2, \dots, v+3); \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon(k; 0, 1, 2, \dots, v+5). \end{aligned} \quad (4.107)$$

A Eq. (4.107) pode ser compactada na forma:

$$\varepsilon_t = \varepsilon(k; 0, 1, 2, \dots, v+2t+1). \quad (4.108)$$

Trocando k por um novo índice n ,

$$g_1(x) = G H \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \varepsilon_t E_{1v}(t) x^n. \quad (4.109)$$

Substituindo G , H , como dados pelas Eqs. (4.87) e (4.88), na Eq. (4.109) obtém-se:

$$g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2s^2 \sin \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_t(n-2t-1; v) E_{1v}(t) x^n. \quad (4.110)$$

Sendo $k = n + 2t$, a Eq. (4.100) pode ser reescrita como:

$$E_{1v}(t) = \frac{(-1)^{\frac{n-v-2}{2}}}{\left(\frac{n-2t-v-2}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2t+v-2}{2}\right) t!} \left(\frac{\sin \alpha}{2}\right)^{n-2t-3} s^{2t}. \quad (4.111)$$

O mesmo procedimento é aplicado para $g_2(x)$ e $g_3(x)$. No caso de $g_2(x)$ [Eq. (4.94)], fazendo-se $n = 2j + v + 2$ como feito para $g_1(x)$, tem-se:

$$g_2(x) = G K_v \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \varepsilon_j E_{2v}(t) x^n. \quad (4.112)$$

Substituindo G e K_v nas Eqs. (4.87) e (4.89) com $j = (n - v - 2)/2$ e $k = n + 2t$ na Eq. (4.112), obtém-se:

$$g_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-1 - \sin^2 \alpha + 2s^2(v-1) \right] \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \varepsilon_t(n-2t-1; v) E_{2v}(t) x^n. \quad (4.113)$$

Reescrevendo a Eq. (4.97), $E_{2v}(t)$ fica dada por:

$$E_{2v}(t) = \frac{(-1)^{\frac{n-v-2}{2}}}{\left(\frac{n-2t-v-2}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2t+v}{2}\right) t!} \left(\frac{\sin \alpha}{2}\right)^{n-2t-2} s^{2t}. \quad (4.114)$$

Sendo que tem-se $x^{2j+2t+v+4}$ para $g_3(x)$, como dada na Eq. (4.95), n é agora definido como $n = 2j + v + 4$. Então, aplicando o mesmo procedimento que nas parcelas de g anteriores obtém-se um novo ε_t o qual, de maneira a evitar confusões, será definido como ε_{3t} de acordo com:

$$\varepsilon_{3t} = \varepsilon(n; 0, 1, 2, \dots, v + 2t + 3). \quad (4.115)$$

Assim, reescreve-se a Eq. (4.95) como:

$$g_3(x) = G Q \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \varepsilon_{t3} E_{3v}(t) x^n. \quad (4.116)$$

Substituindo G e Q [Eqs. (4.87) e (4.90)] e $j = (n - v - 4)/2$ na Eq. (4.116), obtém-se:

$$g_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2s^4 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \varepsilon_t(n-2t-3; v) E_{3v}(t) x^n, \quad (4.117)$$

onde a Eq. (4.98) com $j = (n - v - 4)/2$ e $k = n + 2t$ reescreve-se como:

$$E_{3v}(t) = \frac{(-1)^{\frac{n-v-4}{2}}}{\left(\frac{n-2t-v-4}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2t+v-2}{2}\right) t!} \left(\frac{\text{sen } \alpha}{2}\right)^{n-2t-4} s^{2t}. \quad (4.118)$$

Finalmente, juntando as parcelas $g(x) = g_1(x) - g_2(x) - g_3(x)$, tem-se:

$$\begin{aligned} g(x) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \varepsilon_t(n-2t-1; v) 2s^2 \text{sen } \alpha E_{1v}(t) \right. \\ & - \varepsilon_t(n-2t-1; v) \left[-1 - \text{sen}^2 \alpha + 2s^2(v-1) \right] E_{2v}(t) \\ & \left. - \varepsilon_t(n-2t-3; v) 2s^4 E_{3v}(t) \right\} x^n. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Portanto, os coeficientes b_n para $(n - m)$ ímpar ficam dados por:

$$\begin{aligned} b_n = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \varepsilon_t(n-2t-1; v) 2s^2 \text{sen } \alpha E_{1v}(t) \right. \\ & - \varepsilon_t(n-2t-1; v) \left[-1 - \text{sen}^2 \alpha + 2s^2(v-1) \right] E_{2v}(t) \\ & \left. - \varepsilon_t(n-2t-3; v) 2s^4 E_{3v}(t) \right\}. \end{aligned} \quad (4.120)$$

Desse modo, no lugar das Eqs. (4.62) a (4.64) tem-se:

$$\begin{aligned} c_n &= (-i)^n (2n+1) g_{n, TM}^{v+1} \left[\frac{dP_n^{v+1}(\cos \theta)}{d \cos \theta} \right]_{\theta=\pi/2} \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \sum_{m=0}^{\leq n/2} 2^{\frac{1}{2}+n-2m} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n - m\right)}{m!} b_{n-2m}, \text{ for } n \geq v+1, (n-v) \text{ par}, v \geq 0 \end{aligned} \quad (4.121)$$

$$\begin{aligned} c_n &= (-i)^n (2n+1) g_{n, TM}^{v-1} \left[\frac{dP_n^{v-1}(\cos \theta)}{d \cos \theta} \right]_{\theta=\pi/2} \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \sum_{m=0}^{\leq n/2} 2^{\frac{1}{2}+n-2m} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n - m\right)}{m!} b_{n-2m}, \text{ for } n \geq v-1, (n-v) \text{ par}, v > 0 \end{aligned} \quad (4.122)$$

$$\begin{aligned}
c_n &= (-i)^n (2n+1) g_{n,TM}^{-1} \left[\frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d \cos \theta} \right]_{\theta=\pi/2} \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right) \sum_{m=0}^{\leq n/2} 2^{\frac{1}{2}+n-2m} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n-m)}{m!} b_{n-2m}, \text{ for } n \geq +2, n \text{ par}
\end{aligned} \tag{4.123}$$

Continuando com o procedimento, reescreve-se a Eq. (2.71) para os valores de m associados aos BSCs não nulos:

$$\left[\frac{dP_n^{v+1}(\cos \theta)}{d \cos \theta} \right]_{\theta=\pi/2} = \frac{(-1)^{\frac{n+v}{2}} 2^{v+2}}{\sqrt{\pi} \left(\frac{n-v}{2} - 1\right)!} \Gamma\left(\frac{n+v}{2} + \frac{3}{2}\right) \tag{4.124}$$

$$\left[\frac{dP_n^{v-1}(\cos \theta)}{d \cos \theta} \right]_{\theta=\pi/2} = \frac{(-1)^{\frac{n+v}{2}-1} 2^v}{\sqrt{\pi} \left(\frac{n-v}{2}\right)!} \Gamma\left(\frac{n+v}{2} + \frac{1}{2}\right) \tag{4.125}$$

$$\left[\frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d \cos \theta} \right]_{\theta=\pi/2} = \frac{4(-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi} \left(\frac{n}{2} - 1\right)!} \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right) \tag{4.126}$$

Logo, obtém-se os BSCs de modos TM para $n - m$ ímpar:

$$\begin{aligned}
g_{n,TM}^{v+1} &= \frac{i^n \sqrt{\pi}}{2^{v+3}} \frac{(-1)^{\frac{n+v}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+v}{2} + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{n-v}{2} - 1\right)! \\
&\quad \times \sum_{p=0}^{\leq n/2} 2^{\frac{1}{2}+n-2p} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n-p\right)}{p!} b_{n-2p}, \\
&\text{para } n \geq v+1, (n-v) \text{ par}, v \geq 0
\end{aligned} \tag{4.127}$$

$$\begin{aligned}
g_{n,TM}^{v-1} &= \frac{i^n \sqrt{\pi}}{2^{v+1}} \frac{(-1)^{\frac{n+v}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n+v}{2} + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{n-v}{2}\right)! \\
&\quad \times \sum_{p=0}^{\leq n/2} 2^{\frac{1}{2}+n-2p} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n-p\right)}{p!} b_{n-2p}, \\
&\text{para } n \geq v-1, (n-v) \text{ par}, v > 0
\end{aligned} \tag{4.128}$$

$$\begin{aligned}
g_{n,TM}^{-1} &= \frac{i^n \sqrt{\pi}}{8} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{n}{2} - 1\right)! \\
&\quad \times \sum_{p=0}^{\leq n/2} 2^{\frac{1}{2}+n-2p} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n-p\right)}{p!} b_{n-2p}, \\
&\text{para } n \geq +2, n \text{ par}
\end{aligned} \tag{4.129}$$

onde o coeficiente b_n na Eq. (4.120) fica explicitamente dado por:

$$\begin{aligned}
b_n = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \varepsilon_t(n-2t-1; v) \frac{(-1)^{\frac{n-v-2}{2}}}{\left(\frac{n-2t-v-2}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2t+v-2}{2}\right)} \frac{(\text{sen } \alpha)^{n-2t-2}}{2^{n-2t-4}} s^{2t+2} \right. \\
& - \varepsilon_t(n-2t-1; v) \left[-1 - \text{sen}^2 \alpha + 2s^2(v-1) \right] \frac{(-1)^{\frac{n-v-2}{2}} s^{2t}}{\left(\frac{n-2t-v-2}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2t+v}{2}\right)} \left(\frac{\text{sen } \alpha}{2}\right)^{n-2t-2} \\
& \left. - \varepsilon_t(n-2t-3; v) \frac{(-1)^{\frac{n-v-4}{2}}}{\left(\frac{n-2t-v-4}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2t+v-2}{2}\right)} \frac{(\text{sen } \alpha)^{n-2t-4}}{2^{n-2t-5}} s^{2t+4} \right\}. \quad (4.130)
\end{aligned}$$

Calculando b_{n-2p} a partir da Eq. (4.130), tem-se:

$$\begin{aligned}
b_{n-2p} = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \varepsilon_t(n-2p-2t-1; v) \frac{(-1)^{\frac{n-2p-v-2}{2}} s^{2t+2}}{\left(\frac{n-2p-2t-v-2}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2p-2t+v-2}{2}\right)} t! \right. \\
& \times \frac{(\text{sen } \alpha)^{n-2p-2t-2}}{2^{n-2p-2t-4}} - \varepsilon_t(n-2p-2t-1; v) \left[-1 - \text{sen}^2 \alpha + 2s^2(v-1) \right] \\
& \times \frac{(-1)^{\frac{n-2p-v-2}{2}} s^{2t}}{\left(\frac{n-2p-2t-v-2}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2p-2t+v}{2}\right)} t! \left(\frac{\text{sen } \alpha}{2}\right)^{n-2p-2t-2} - \varepsilon_t(n-2p-2t-3; v) \\
& \left. \times \frac{(-1)^{\frac{n-2p-v-4}{2}} s^{2t+4}}{\left(\frac{n-2p-2t-v-4}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2p-2t+v-2}{2}\right)} t! \frac{(\text{sen } \alpha)^{n-2p-2t-4}}{2^{n-2p-2t-5}} \right\}. \quad (4.131)
\end{aligned}$$

Finalmente, os BSCs de modos TM para $(n-m)$ ímpar (ou, equivalentemente, $n-v$ par), são dados por:

$$\begin{aligned}
g_{n, TM}^{v+1} = & \frac{i^n \sqrt{\pi}}{2^{v+3}} \frac{(-1)^{\frac{n+v}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+v}{2} + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{n-v}{2} - 1\right)! \sum_{p=0}^{\leq n/2} 2^{\frac{1}{2}+n-2p} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n-p\right)}{p!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{t=0}^{\infty} \quad (4.132) \\
& \left\{ \varepsilon_t(n-2p-2t-1; v) \frac{(-1)^{\frac{n-2p-v-2}{2}} s^{2t+2}}{\left(\frac{n-2p-2t-v-2}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2p-2t+v-2}{2}\right)} t! \frac{(\text{sen } \alpha)^{n-2p-2t-2}}{2^{n-2p-2t-4}} \right. \\
& - \varepsilon_t(n-2p-2t-1; v) \left[-1 - \text{sen}^2 \alpha + 2s^2(v-1) \right] \frac{(-1)^{\frac{n-2p-v-2}{2}} s^{2t}}{\left(\frac{n-2p-2t-v-2}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2p-2t+v}{2}\right)} t! \\
& \left(\frac{\text{sen } \alpha}{2}\right)^{n-2p-2t-2} - \varepsilon_t(n-2p-2t-3; v) \frac{(-1)^{\frac{n-2p-v-4}{2}} s^{2t+4}}{\left(\frac{n-2p-2t-v-4}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2p-2t+v-2}{2}\right)} t! \\
& \left. \frac{(\text{sen } \alpha)^{n-2p-2t-4}}{2^{n-2p-2t-5}} \right\},
\end{aligned}$$

para $n \geq v+1$, $(n-v)$ par, $v \geq 0$

$$\begin{aligned}
g_{n,TM}^{v+1} &= \frac{i^n}{2^{v+1}} \frac{\left(\frac{n-v}{2} - 1\right)!}{\Gamma\left(\frac{n+v}{2} + \frac{3}{2}\right)} \sum_{p=0}^{\leq n/2} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n - p\right)}{p!} (-1)^{n-p-1} (\text{sen } \alpha)^{n-2p-2t-2-2t} \\
&\quad \frac{s^{2t} 2^{-2t}}{t!} \left\{ \varepsilon_t(n-2p-2t-1; v) \frac{2^2 s^2}{\left(\frac{n-2p-2t-v-2}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2p-2t+v-2}{2}\right)} \right. \\
&\quad - \varepsilon_t(n-2p-2t-1; v) \frac{-1 - \text{sen}^2 \alpha + 2s^2(v-1)}{\left(\frac{n-2p-2t-v-2}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2p-2t+v}{2}\right)} \\
&\quad \left. + \varepsilon_t(n-2p-2t-3; v) \frac{2^3 s^4 (\text{sen } \alpha)^{-2}}{\left(\frac{n-2p-2t-v-4}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2p-2t+v-2}{2}\right)} \right\}, \quad (4.133)
\end{aligned}$$

para $n \geq v+1$, $(n-v)$ par, $v \geq 0$

$$\begin{aligned}
g_{n,TM}^{v-1} &= \frac{i^n}{2^{v-1}} \frac{\left(\frac{n-v}{2}\right)!}{\Gamma\left(\frac{n+v}{2} + \frac{1}{2}\right)} \sum_{p=0}^{\leq n/2} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n - p\right)}{p!} (-1)^{n-p-2} (\text{sen } \alpha)^{n-2p-2t-2-2t} \\
&\quad \frac{s^{2t} 2^{-2t}}{t!} \left\{ \varepsilon_t(n-2p-2t-1; v) \frac{2^2 s^2}{\left(\frac{n-2p-2t-v-2}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2p-2t+v-2}{2}\right)} \right. \\
&\quad - \varepsilon_t(n-2p-2t-1; v) \frac{-1 - \text{sen}^2 \alpha + 2s^2(v-1)}{\left(\frac{n-2p-2t-v-2}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2p-2t+v}{2}\right)} \\
&\quad \left. + \varepsilon_t(n-2p-2t-3; v) \frac{2^3 s^4 (\text{sen } \alpha)^{-2}}{\left(\frac{n-2p-2t-v-4}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2p-2t+v-2}{2}\right)} \right\}, \quad (4.134)
\end{aligned}$$

para $n \geq v-1$, $(n-v)$ par, $v \geq 0$

$$\begin{aligned}
g_{n,TM}^{-1} &= \frac{i^n}{2} \frac{\left(\frac{n}{2} - 1\right)!}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right)} \sum_{p=0}^{\leq n/2} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n - p\right)}{p!} (-1)^{n-p-1} (\text{sen } \alpha)^{n-2p-2t-2-2t} \\
&\quad \frac{s^{2t} 2^{-2t}}{t!} \left\{ \varepsilon_t(n-2p-2t-1; v) \frac{2^2 s^2}{\left(\frac{n-2p-2t-v-2}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2p-2t+v-2}{2}\right)} \right. \\
&\quad - \varepsilon_t(n-2p-2t-1; v) \frac{-1 - \text{sen}^2 \alpha - 2s^2}{\left(\frac{n-2p-2t-v-2}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2p-2t+v}{2}\right)} \\
&\quad \left. + \varepsilon_t(n-2p-2t-3; v) \frac{2^3 s^4 (\text{sen } \alpha)^{-2}}{\left(\frac{n-2p-2t-v-4}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2p-2t+v-2}{2}\right)} \right\}, \quad (4.135)
\end{aligned}$$

for $n \geq v+1$, $(n-v)$ par, $v \geq 0$

Reescrevendo os BSCs em termos de $\Gamma(n) = (n-1)!$, isto é, novamente eliminando-se os fatoriais, têm-se as expressões finais para os BSCs de modos TM $g_{n,TM}^m$ com $(n-m)$ ímpar, dadas pelas Eqs. (4.136) a (4.138):

$$\begin{aligned}
g_{n, TM}^{v+1} &= \frac{i^n}{2^{v+1}} \frac{\Gamma(\frac{n-v}{2})}{\Gamma(\frac{n+v}{2} + \frac{3}{2})} \sum_{p=0}^{\leq n/2} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n - p)}{\Gamma(p+1)} (-1)^{n-p-1} (\text{sen } \alpha)^{n-2p-2t-2-2t} \\
&\quad \frac{s^{2t} 2^{-2t}}{\Gamma(t+1)} \left\{ \varepsilon_t(n-2p-2t-1; v) \frac{2^2 s^2}{\Gamma(\frac{n-2p-2t-v}{2}) \Gamma(\frac{n-2p-2t+v-2}{2})} \right. \\
&\quad - \varepsilon_t(n-2p-2t-1; v) \frac{-1 - \text{sen}^2 \alpha + 2s^2(v-1)}{\Gamma(\frac{n-2p-2t-v}{2}) \Gamma(\frac{n-2p-2t+v}{2})} \\
&\quad \left. + \varepsilon_t(n-2p-2t-3; v) \frac{2^3 s^4 (\text{sen } \alpha)^{-2}}{\Gamma(\frac{n-2p-2t-v-2}{2}) \Gamma(\frac{n-2p-2t+v-2}{2})} \right\}, \quad (4.136)
\end{aligned}$$

para $n \geq v+1$, $(n-v)$ par, $v \geq 0$

$$\begin{aligned}
g_{n, TM}^{v-1} &= \frac{i^n}{2^{v-1}} \frac{\Gamma(\frac{n-v}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{n+v}{2} + \frac{1}{2})} \sum_{p=0}^{\leq n/2} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n - p)}{\Gamma(p+1)} (-1)^{n-p-2} (\text{sen } \alpha)^{n-2p-2t-2-2t} \\
&\quad \frac{s^{2t} 2^{-2t}}{\Gamma(t+1)} \left\{ \varepsilon_t(n-2p-2t-1; v) \frac{2^2 s^2}{\Gamma(\frac{n-2p-2t-v}{2}) \Gamma(\frac{n-2p-2t+v-2}{2})} \right. \\
&\quad - \varepsilon_t(n-2p-2t-1; v) \frac{-1 - \text{sen}^2 \alpha + 2s^2(v-1)}{\Gamma(\frac{n-2p-2t-v}{2}) \Gamma(\frac{n-2p-2t+v}{2})} \\
&\quad \left. + \varepsilon_t(n-2p-2t-3; v) \frac{2^3 s^4 (\text{sen } \alpha)^{-2}}{\Gamma(\frac{n-2p-2t-v-2}{2}) \Gamma(\frac{n-2p-2t+v-2}{2})} \right\}, \quad (4.137)
\end{aligned}$$

para $n \geq v-1$, $(n-v)$ par, $v \geq 0$

$$\begin{aligned}
g_{n, TM}^{-1} &= \frac{i^n}{2^1} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{3}{2})} \sum_{p=0}^{\leq n/2} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n - p)}{\Gamma(p+1)} (-1)^{n-p-1} (\text{sen } \alpha)^{n-2p-2t-2-2t} \\
&\quad \frac{s^{2t} 2^{-2t}}{\Gamma(t+1)} \left\{ \varepsilon_t(n-2p-2t-1; v) \frac{2^2 s^2}{\Gamma(\frac{n-2p-2t}{2}) \Gamma(\frac{n-2p-2t-2}{2})} \right. \\
&\quad - \varepsilon_t(n-2p-2t-1; v) \frac{-1 - \text{sen}^2 \alpha + 2s^2(v-1)}{\Gamma(\frac{n-2p-2t}{2}) \Gamma(\frac{n-2p-2t}{2})} \\
&\quad \left. + \varepsilon_t(n-2p-2t-3; v) \frac{2^3 s^4 (\text{sen } \alpha)^{-2}}{\Gamma(\frac{n-2p-2t-2}{2}) \Gamma(\frac{n-2p-2t-2}{2})} \right\}, \quad (4.138)
\end{aligned}$$

para $n \geq +2$, n par, $v \geq 0$

4.2.3 BSCs para Modos TE

O cálculo dos BSCs para modos TE, $g_{n, TE}^m$, é segue o procedimento para o cálculo dos BSCs de modos TM apresentado na seção anterior, porém usando o campo magnético radial H_r nas Eqs. (2.69) e (2.72) no lugar do campo elétrico E_r .

Alternativamente, há uma forma mais direta para calcular os BSCs para modos TE e se baseia em propriedades de simetria destes coeficientes, no caso de feixes *on-axis*. Tais propriedades se resume, matematicamente, às condições [56]:

$$g_{n,TM}^m = ig_{n,TE}^m, \quad m = v + 1, \forall v \geq 0 \quad (4.139)$$

$$g_{n,TM}^m = -ig_{n,TE}^m, \quad m = v - 1, v > 0 \quad (4.140)$$

$$g_{n,TM}^{-1} = -ig_{n,TE}^{-1}, \quad m = v - 1, v = 0 \quad (4.141)$$

Logo, a implantação computacional destes BSCs, uma vez conhecidos os BSCs para modos TM, é trivial.

4.3 Fatores de Forma para FWs

Como mencionado no Cap. 3, FWs são baseadas em superposições lineares de BGBs, como descrito no Cap. 3 e de acordo, por exemplo, com as Eqs. (3.5), (3.19) e (3.31).

Como comentado na seção 4.1, o princípio da superposição linear, por se aplicar aos campos elétrico e magnético, estende-se também aos BSCs e, dessa forma, as expressões aqui deduzidas usando a FS, para BGBs *on-axis*, são facilmente superpostas de maneira a se obterem, com as devidas ponderações de amplitude e fase impostas pelos coeficientes A_p [vide Eq. (3.41)] sobre cada BGB, os BSCs para as FWs dadas pela Eq. (3.31). Isso elimina a necessidade de refazer todo o passo a passo realizado para BGBs, mas deve-se ter em mente que a condição na Eq. (3.28) está implicitamente incorporada na Eq. (3.31).

Assim, supomos que a polarização das FWs vetoriais adotadas a partir de suas versões escalares dadas na Eq. (3.31) é a mesma que a dos BGBs constituintes (polarização em x), e os BSCs das FWs aqui consideradas, tanto na ILA quanto na FS, são aqui reproduzidos sem maiores detalhes (veja, por exemplo, as Refs. [72, 73]).

Das Eqs. (3.31), (4.27) e (4.28), temos

$$\begin{aligned}
g_{n,TM}^m &= \frac{Z_n^m}{2} e^{ikz_0} \frac{e^{-ikz_0/\mu_G}}{\mu_G} \sum_{p=-N}^N \frac{A_p}{A_{p,|\max|}} e^{ik_{zp}z_0/\mu_G} \\
&\times \exp \left[\frac{-q^2 (w_p^2 + \xi_p^2)}{k_{pp}^2 \mu_G} \right] \left\{ \frac{\gamma_n - i\delta_n}{2} e^{-i(m-v)\phi_0} \right. \\
&\times \left[J_{m-2}(w_p) J_{m-2-v}(\xi_p) e^{i\phi_0} + 2J_m(w_p) \right. \\
&\times J_{m-v}(\xi_p) \cos \phi_0 + J_{m+2}(w_p) J_{m+2-v}(\xi_p) \\
&\times e^{-i\phi_0} \left. \right] + e^{-i(m-v+1)} \left[e^{2i\phi_0} J_{m-1}(w_p) \right. \\
&\times J_{m-1-v}(\xi_p) + J_{m+1}(w_p) J_{m+1-v}(\xi_p) \left. \right] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{4.142}$$

e

$$\begin{aligned}
g_{n,TE}^m &= \frac{Z_n^m}{2} e^{ikz_0} \frac{e^{-ikz_0/\mu_G}}{\mu_G} \sum_{p=-N}^N \frac{F_p A_p}{A_{p,|\max|}} e^{ik_{zp}z_0/\mu_G} \\
&\times \exp \left[\frac{-q^2 (w_p^2 + \xi_p^2)}{k_{pp}^2 \mu_G} \right] \left\{ \frac{\gamma_n - i\delta_n}{2} e^{-i(m-v)\phi_0} \right. \\
&\times \left[J_{m-2}(w_p) J_{m-2-v}(\xi_p) e^{i\phi_0} + 2J_m(w_p) \right. \\
&\times J_{m-v}(\xi_p) \sin \phi_0 + J_{m+2}(w_p) J_{m+2-v}(\xi_p) \\
&\times e^{-i\phi_0} \left. \right] + e^{-i(m-v+1)} \left[e^{2i\phi_0} J_{m-1}(w_p) \right. \\
&\times J_{m-1-v}(\xi_p) + J_{m+1}(w_p) J_{m+1-v}(\xi_p) \left. \right] \left. \right\},
\end{aligned} \tag{4.143}$$

onde $A_{p,|\max|}$ é o coeficiente com o maior valor absoluto entre os $2N + 1$ BGBs. Essa escolha é arbitrária e não envolve quaisquer tentativas de normalização em termos de potência disponível no gerador. Além disso, nas Eqs. (4.142) e (4.143),

$$\begin{aligned}
Z_n^0 &= \frac{2n(n+1)i}{2n+1}; & Z_n^{m \neq 0} &= \left(\frac{-2i}{2n+1} \right)^{|m|-1}; \\
\mu_G &= 1 + i \frac{2q^2 z_0}{k}; & F_p &= 1 - \frac{1}{\mu_G} + \frac{k_{zp}}{k\mu_G}; \\
\gamma_n &= 2 \frac{q^2}{k} \rho_0 (n+1/2); & \delta_n &= 4 \left(\frac{q^2}{k} \right)^2 \rho_0 (n+1/2); \\
w_p &= \sin \alpha (n+1/2); & \xi_p &= k\rho_0 \sin \alpha; \\
&& \sin \alpha &\approx \sqrt{2} (1 - k_{zp}/k)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{4.144}$$

No caso da FS, os BSCs para FWs são diretamente obtidos por superposição de $2N + 1$ BSCs e escritos na forma

$$g_{n, TM}^m|_{FW} = \sum_{p=-N}^N (A_p/A_{p,|max|}) g_{n, TM}^m|_{BGBs} \quad (4.145)$$

e

$$g_{n, TE}^m|_{FW} = \sum_{p=-N}^N (A_p/A_{p,|max|}) g_{n, TE}^m|_{BGBs} \quad (4.146)$$

Para modos TM, os BSCs $g_{n, TM}^m|_{BGBs}$ são dados pelas Eqs. (4.77) a (4.79) para $(n - m)$ par, e as Eqs. (4.136) a (4.138) para $(n - m)$ ímpar. Para modos TE, usam-se as condições de simetria impostas nas Eqs. (4.139) a (4.141) para se obterem $g_{n, TE}^m|_{FW}$ [Eq. (4.146)] a partir de $g_{n, TM}^m|_{FW}$ [Eq. (4.145)].

Por fim, os BSCs de FWs usando quadraturas envolvem o cálculo de $2N + 1$ integrais duplas na forma das Eqs. (2.54) e (2.55), o que torna esse procedimento altamente custoso do ponto de vista computacional e, portanto, também altamente não recomendado.

4.4 Conclusões

Nesse Capítulo foram apresentados, em detalhes, o cálculo dos BSCs para BGBs e, conseqüentemente, para as FWs como dadas na Eq. (3.31), usando os três métodos distintos disponíveis no contexto da GLMT para tanto.

O método da quadratura envolve integrais que não são solucionáveis analiticamente, fato este que, como será visto no próximo Capítulo, implica em enormes esforços computacionais. Por outro lado, a ILA provê expressões analíticas e facilmente implementáveis do ponto de vista computacional, sendo muito eficiente sob este aspecto. Por fim, como foi aqui exposto, a FS também possibilita a eliminação de integrações nas variáveis angulares do sistema de coordenadas esféricas, embora a obtenção das expressões finais para os BSCs demande enorme esforço braçal, este último sendo necessário ser completamente refeito caso o feixe incidente seja modificado.

Os objetivos iniciais deste projeto não contemplavam investigações computacionais dos BSCs de FWs usando a FS, pois havia a perspectiva de impossibilidade de realização desses estudos em razão do tempo disponível. De fato, tal perspectiva se mostrou acertada e, embora tenhamos incluído comentários acerca das expressões para os BSCs de FWs construídas a partir de BGBs usando a FS, o desenvolvimento de algoritmos para cálculo de forças ópticas e/ou para reconstrução de campos na GLMT fica como perspectiva para futuras investigações.

No próximo Capítulo, comparamos os resultados apresentados pelos três métodos (quadratura, ILA e FS) no caso de BGBs e para a ILA no caso de FWs, resultados estes expostos na forma de gráficos envolvendo os BSCs, campos reconstruídos a partir destes coeficientes, e exemplos de cálculos de seção de choque de pressão de radiação.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

O Cap. 4 apresentou a principal contribuição deste trabalho, que são, a determinação de fatores de forma na GLMT, a partir dos métodos da aproximação localizada e da série finita.

Do ponto de vista computacional, o cálculo dos valores de BSCs para BGBs usando as expressões finais obtidas através da ILA é mais rápido do que aquele realizado a partir da FS, tendo em vista que, neste último, há somatórios não presentes no primeiro. Como consequência, o mesmo comportamento é esperado para os BSCs de FWs.

No presente Capítulo mostramos resultados comparativos entre os valores de BSCs, calculando inclusive os fatores a partir do método das quadraturas, o que exige grande esforço numérico, pois um simples valor (para valores fixos de n e m) pode levar até horas, tendo em vista o caráter altamente complexo e oscilatório dos integrandos apresentados na Eq. (2.54) e Eq. (2.55).

5.1 Resultados para BGBs

No Capítulo 4 derivamos todos os BSCs para descrever os BGBs no contexto da GLMT usando as abordagens LA e FS. Nesta seção, calculamos esses BSCs e os comparamos com os obtidos em quadratura com dupla integração [48]. Além dessa comparação, será apresentada a reconstrução da componente radial de campo elétrico, E_r , assim como um teste de validade para os métodos aqui considerados.

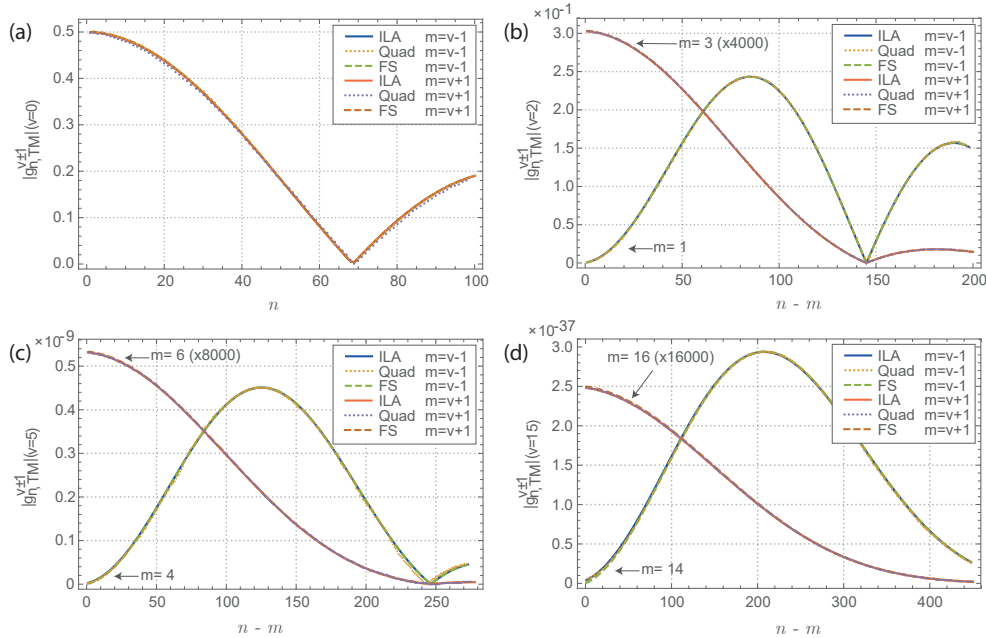
5.1.1 Comparação de BSCs para BGBs.

Para calcular os BSCs implementamos um código com as Eqs. (4.27) e (4.28) [ou Eqs. (4.30) e (4.31)] para os LA BSCs e Eqs. (4.77) a (4.79) e (4.136) a (4.138) para os FS BSCs usando o software comercial *Mathematica 12 Student Edition*. Assim também foram implementadas equações para o método de quadraturas para o cálculo dos BSCs, ele se baseia nas condições de ortogonalidade das funções de Legendre $P_n^{|m|}(\cdot)$, levando a integrações múltiplas [48].

Para as comparações, foram calculados coeficientes para quatro cargas topológicas $v = 0, 2, 5, \text{ e } 15$ para dois ângulos de axicon $\alpha = 2^\circ$ e 10° e para alguns parâmetros de confinamento $s = 0,001, 0,01, 0,05$ e $0,1$

Nas Figuras 10 e 11 são apresentados os resultados para os BSCs usando os três métodos ILA, FS e quadraturas em função a n para o parâmetro de confinamento $s = 0,001$ para $\alpha = 2^\circ$ e 10° . As curvas formadas por pontos discretos para valores inteiros de n foram unidas para melhor visualização.

Figura 10: $|g_{n,\text{TM}}^{v\pm 1}|$ quando $s = 0,001$ e $\alpha = 2^\circ$ para (a) $v = 0$, (b) $v = 2$, (c) $v = 5$, e (d) $v = 15$.



Fonte: Elaborada pela autora.

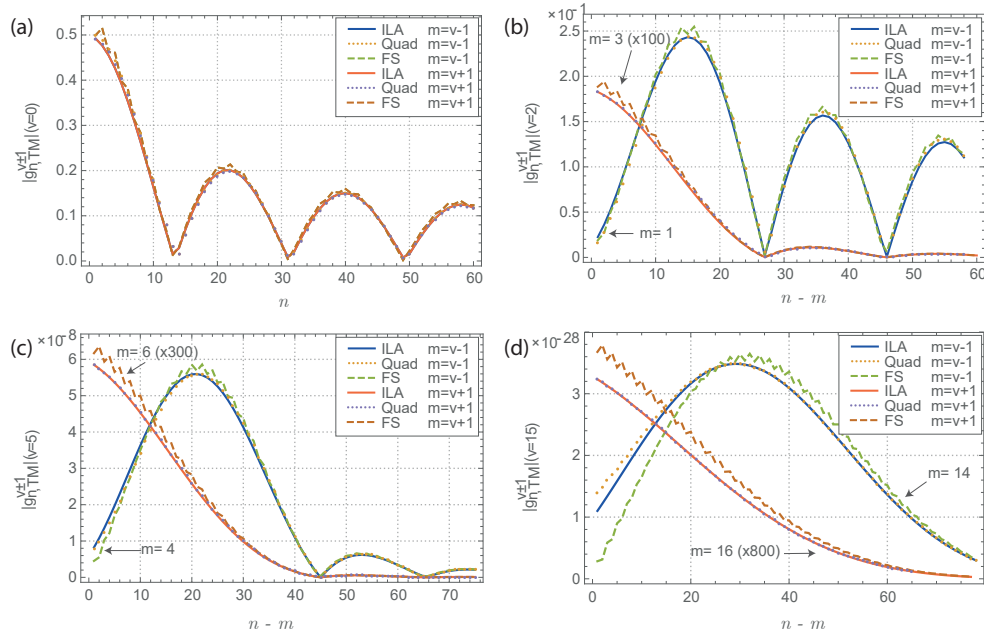
Na Figura 10 os resultados para $\alpha = 2^\circ$ para os três métodos foram concordantes para as quatro cargas topológicas. O que é esperado já que o feixe avaliado está no regime paraxial, no qual a aproximação localizada fornece valores confiáveis [65, 68].

Para $\alpha = 10^\circ$ na Figura 11 algumas diferenças começam a aparecer entre os BSCs resultantes especialmente para FS. Essa diferença está relacionada com o fato do feixe ser uma solução escalar, quer dizer, de não satisfazer as equações de Maxwell. O mesmo comportamento foi observado para LBG em [57]. Quanto maior o valor de α , a diferença numérica na remodelação do feixe entre os métodos é maior.

No entanto, para $\alpha = 10^\circ$ é possível observar sutis diferenças, especialmente para BSCs da FS. Essas diferenças têm sido observadas previamente para feixes do tipo LGB [57], elas estão associados ao fato de que o feixe original não satisfaz exatamente as equações de Maxwell, sendo uma solução da equação de onda escalar. Assim, ainda que os três métodos coincidam bem no regime paraxial ($s \ll 1$ e baixo α), à medida que α aumenta, cada método remodela o feixe em um campo vetorial de uma maneira muito particular.

Os BSCs resultantes para ILA, FS com o parâmetro de confinamento $s = 0,01$, para $\alpha = 2^\circ$ e $\alpha = 10^\circ$, são apresentados nas Figuras 12 e 13, respectivamente. A concordância

Figura 11: $|g_{n,\text{TM}}^{v\pm 1}|$ quando $s = 0,001$ e $\alpha = 10^\circ$ para (a) $v = 0$, (b) $v = 2$, (c) $v = 5$, e (d) $v = 15$.



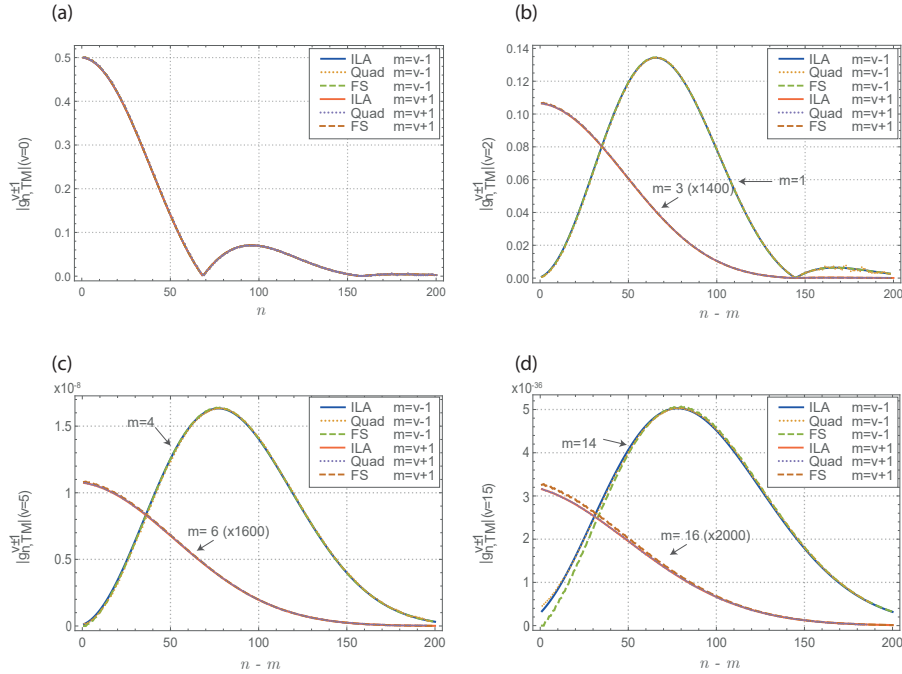
Fonte: Elaborada pela autora.

entre os métodos é similar à apresentada para $s = 0,001$. Para $\alpha = 2^\circ$, com exceção de $v = 15$, os resultados coincidem satisfatoriamente (Figura 10). Para um maior valor de axicon $\alpha = 10^\circ$ as curvas começam a apresentar diferenças.

Nas Figuras 14 e 15 gráficos das BSCs são apresentados novamente para $\alpha = 2^\circ$ e 10° , respectivamente, mas agora com um parâmetro de confinamento $s = 0,05$. Nesse caso, são observadas discrepâncias tanto para os valores de áxicon quanto para as cargas topológicas aqui escolhidas. A discordância é mais evidente à medida que α e v aumentam. Como mencionado anteriormente, para valores de s muito pequenos e ângulos α baixos, os resultados obtidos para os diferentes métodos são concordantes. No entanto, o incremento do parâmetro de confinamento também influencia no grau de paraxialidade do BGB. Portanto, valores maiores de s tornam as discrepâncias entre os métodos mais evidentes.

Outra característica importante dos FS BSCs são as oscilações crescentes em suas curvas devido às variações entre os valores das BSCs para $(n-m)$ ímpar e par, característica também observada para os LGBs [57]. Isso é mais pronunciado para altas cargas topológicas e ângulos de axicon, sendo que os FS BSCs para $(n-m)$ par estão em melhor concordância com os outros métodos. De fato, esse comportamento peculiar pode ser interpretado como uma resposta do FS à natureza escalar do feixe original e a sua posterior descrição em termos de um campo de onda vetorial TEM. Isto pode ser explicado da seguinte forma: para

Figura 12: $|g_{n,\text{TM}}^{v\pm 1}|$ quando $s = 0,01$ e $\alpha = 2^\circ$ para (a) $v = 0$, (b) $v = 2$, (c) $v = 5$, e (d) $v = 15$.



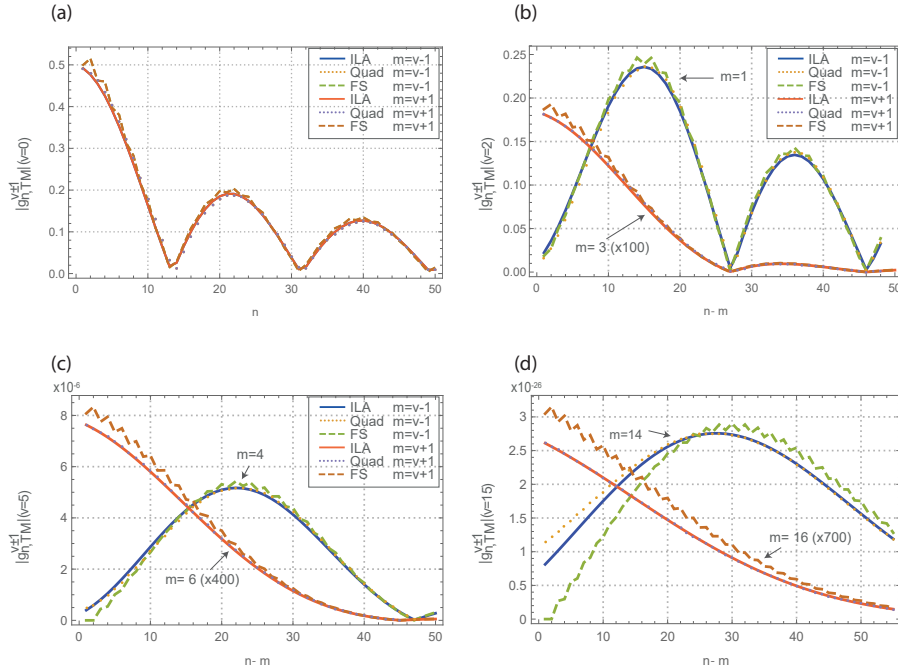
Fonte: Elaborada pela autora.

$(n - m)$ ímpar, a opção $\pi/2$ elimina automaticamente qualquer contribuição da componente longitudinal do campo elétrico. Portanto, as Eqs. (4.77) a (4.79) são insensíveis à existência de um componente de campo longitudinal, o mesmo sendo aplicado aos TE BSCs com $(n - m)$ par. No entanto, quando se avalia $\partial E_r / \partial \cos \theta|_{\theta=\pi/2}$, o componente E_z certamente afetará as expressões finais [Eqs. (4.136) a (4.138)] para os TM BSCs com $(n - m)$ ímpar. tivéssemos partido de um feixe vetorial, as curvas FS nas Figuras 10 a 11 certamente exibiriam um padrão mais suave, como recentemente demonstrado para um BB vetorial e que satisfaz as equações de Maxwell [58].

Resultados semelhantes foram obtidos para $s = 0,1$, incluindo ângulos axicon tão altos quanto 40° . As conclusões e observações descritas nos parágrafos anteriores são verdadeiras, independentemente de quaisquer outras opções de parâmetros.

Usando a função *TIMING* no *Mathematica* foi medido o tempo de processamento em segundos para o cálculo dos BSCs para os três métodos, ILA, FS e Quadraturas. Para melhor comparação dos tempos, os valores mostrados nas tabelas foram normalizados para 50 valores de n , com o parâmetro de confinamento $s = 0,001$, para $\alpha = 2^\circ$ e $\alpha = 10^\circ$ (Tabela 1 e Tabela 2 respectivamente), e para $s = 0,05$, Para $\alpha = 2^\circ$ e $\alpha = 10^\circ$ (Tabela 3

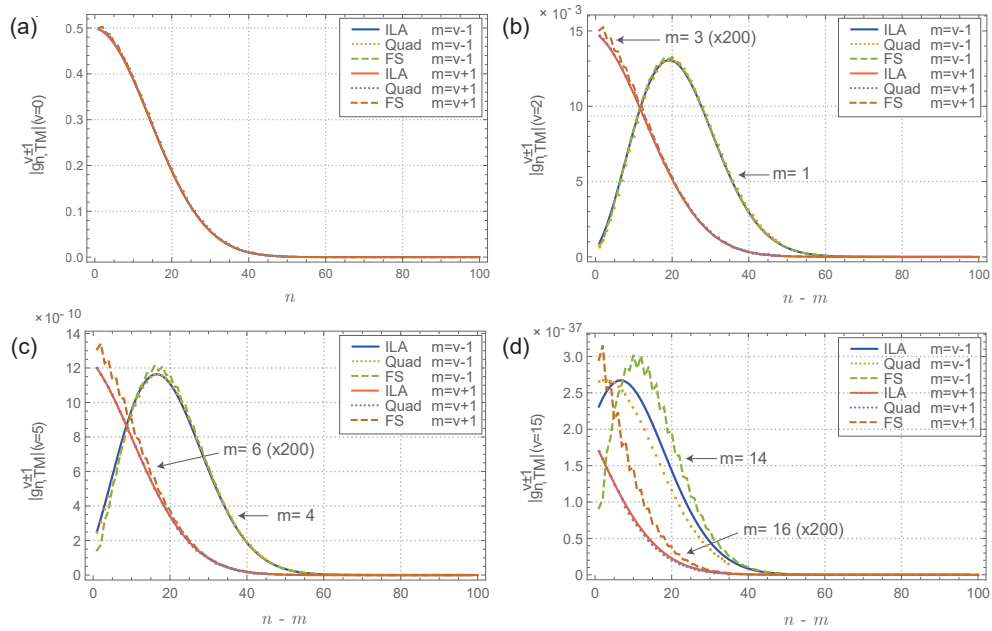
Figura 13: $|g_{n, \text{TM}}^{v \pm 1}|$ quando $s = 0,01$ e $\alpha = 10^\circ$ para (a) $v = 0$, (b) $v = 2$, (c) $v = 5$, e (d) $v = 15$.



Fonte: Elaborada pela autora.

e Tabela 4) respectivamente. Podemos observar claramente a diferença em tempo de processamento para os métodos, sendo a ILA a mais rápida na ordem de segundos, seguida pela FS na ordem de minutos e a Quadratura a mais demorada, chegando a tomar varias horas (até dias) para processar 50 valores de n . Por exemplo, para $v = 15$ na Figura 10 (d) o cálculos dos 450 BSCs o tempo de processamento para a Quadratura foi de 113,87 horas para $m = 14$ e 106,883 horas para $m = 16$, pouco mais de 9 dias para ambas curvas.

Figura 14: $|g_{n, \text{TM}}^{v \pm 1}|$ quando $s = 0,05$ e $\alpha = 2^\circ$ para (a) $v = 0$, (b) $v = 2$, (c) $v = 5$, e (d) $v = 15$.



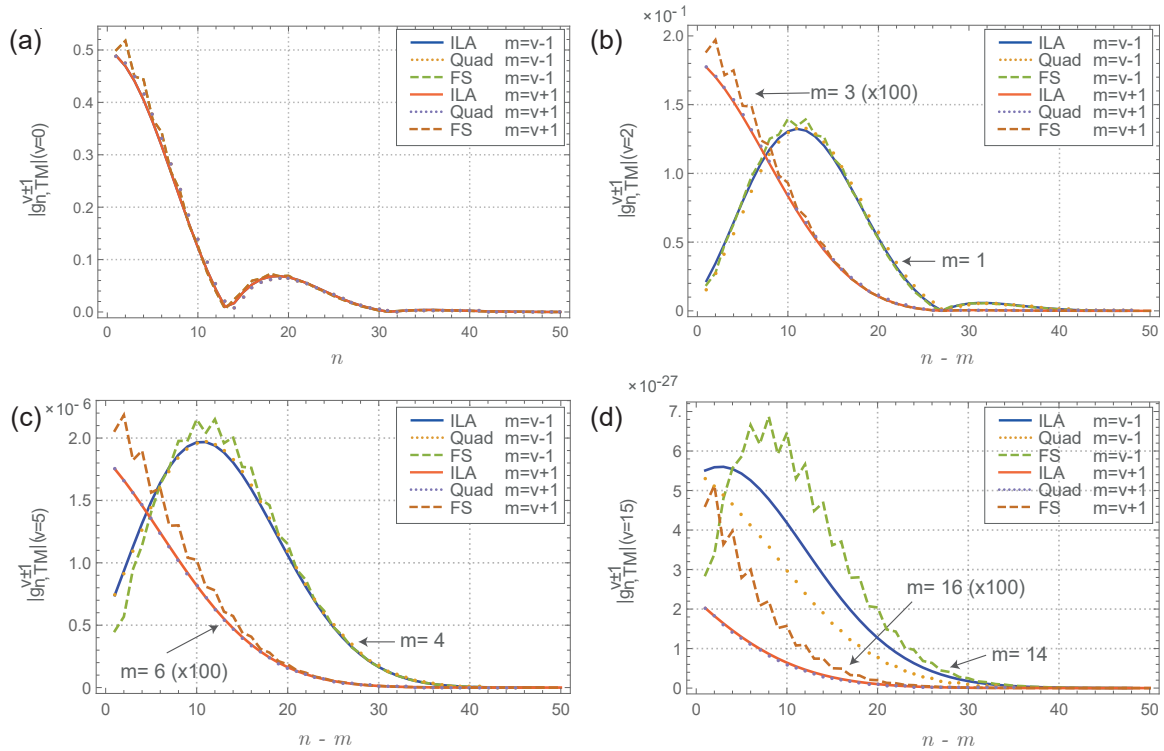
Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 1: Tempo de processamento dos BSCs para BGB com $\alpha = 2^\circ$ e $s = 0,001$ medidos com a função *TIMING*.

v	m	ILA	FS			Quadratura		
		segundos	Par segundos	Impar segundos	Total segundos	minutos	segundos	horas
0	-1	0,602	214,620	389,906	604,526	10,08	46306,461	12,86
0	1	0,658	248,536	395,656	644,192	10,74	35588,489	9,89
2	1	0,692	190,766	163,222	353,988	5,90	42080,191	11,69
2	3	0,639	104,138	180,525	284,663	4,74	47732,947	13,26
5	4	0,641	93,145	149,400	242,545	4,04	21244,912	5,90
5	6	0,519	92,759	147,533	240,292	4,00	35415,585	9,84
15	14	0,355	89,450	156,483	245,933	4,10	42700,708	11,86
15	16	0,525	97,766	160,558	258,324	4,31	41801,674	11,61
Média		0,58	141,40	217,91	359,31	5,99	39108,87	10,86

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 15: $|g_{n, TM}^{v \pm 1}|$ quando $s = 0,05$ e $\alpha = 10^\circ$ para (a) $v = 0$, (b) $v = 2$, (c) $v = 5$, e (d) $v = 15$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 2: Tempo de processamento dos BSCs para BGB com $\alpha = 10^\circ$ e $s = 0,001$ medidos com a função *TIMING*.

v	m	ILA	FS			Quadratura		
		segundos	Par segundos	Impar segundos	Total segundos	minutos	segundos	horas
0	-1	0,283	10,367	17,400	27,767	0,46	54106,688	15,03
0	1	0,119	9,206	14,127	23,333	0,39	132027,422	36,67
2	1	0,073	6,648	12,423	19,072	0,32	38687,018	10,75
2	3	0,069	6,672	11,845	18,517	0,31	79331,065	22,04
5	4	0,072	6,777	11,956	18,733	0,31	32347,396	8,99
5	6	0,072	9,636	31,258	40,894	0,68	92933,802	25,81
15	14	0,064	18,408	17,664	36,072	0,60	174406,667	48,45
15	16	0,064	6,425	11,116	17,541	0,29	136344,167	37,87
Média		0,10	9,27	15,97	25,24	0,42	92523,03	25,70

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 3: Tempo de processamento dos BSCs para BGB com $\alpha = 2^\circ$ e $s = 0,05$ medidos com a função *TIMING* para 50 valores de n .

v	m	ILA	FS			Quadratura		
		segundos	Par	Impar	Total	segundos	horas	
			segundos	segundos	segundos			minutos
0	-1	0,238	23,938	41,317	65,254	1,09	75068,800	20,85
0	1	0,129	27,692	46,188	73,879	1,23	75068,800	20,85
2	1	0,152	27,785	44,715	72,500	1,21	84747,000	23,54
2	3	0,133	25,516	43,602	69,117	1,15	322178,172	89,49
5	4	0,133	26,500	43,617	70,117	1,17	104082,000	28,91
5	6	0,133	27,078	45,500	72,578	1,21	109171,000	30,33
15	14	0,133	17,156	27,744	44,900	0,75	312248,219	86,74
15	16	0,316	17,213	26,925	44,138	0,74	77330,700	21,48
Média		0,17	24,11	39,95	64,06	1,07	144986,84	40,27

Fonte: Elaborada pela autora.

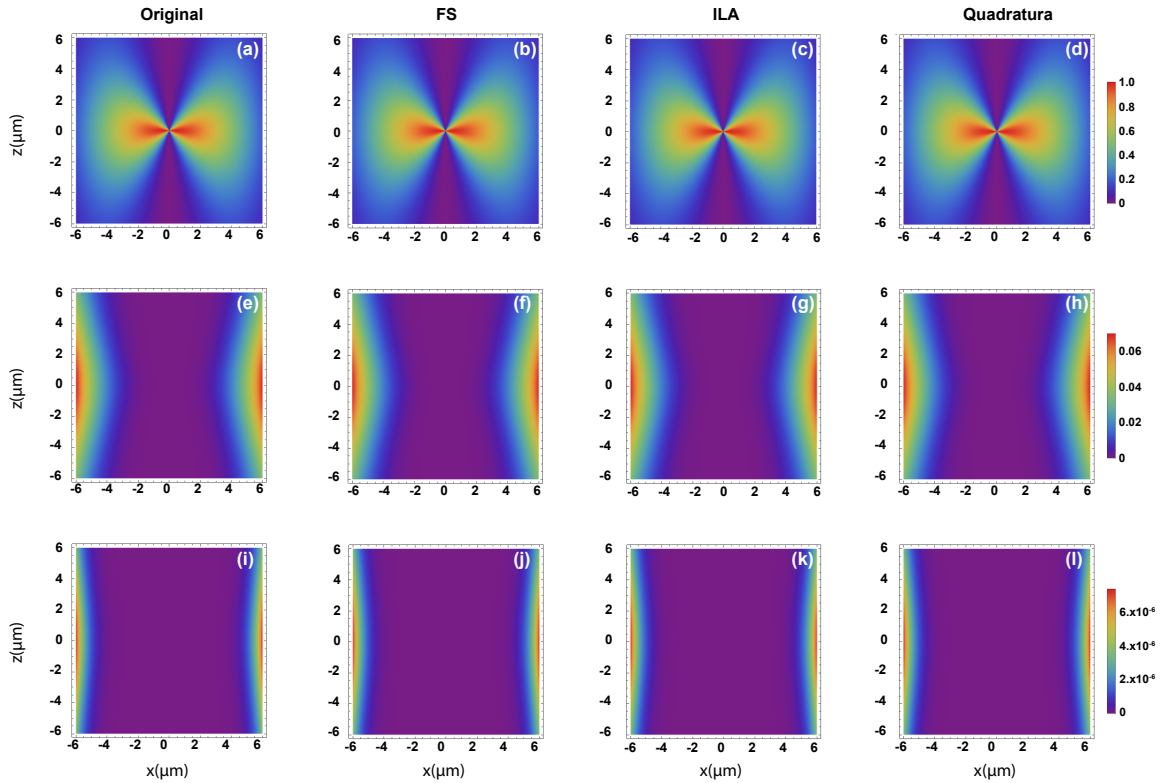
Tabela 4: Tempo de processamento dos BSCs para BGB com $\alpha = 10^\circ$ e $s = 0,05$ medidos com a função *TIMING* para 50 valores de n .

v	m	ILA	FS			Quadratura		
		segundos	Par	Impar	Total	segundos	horas	
			segundos	segundos	segundos			minutos
0	-1	0,969	7,313	17,477	24,789	0,41	93013,900	25,84
0	1	0,742	9,422	15,250	24,672	0,41	93013,900	25,84
2	1	2,066	9,359	15,891	25,250	0,42	99921,300	27,76
2	3	2,203	9,031	16,219	25,250	0,42	105127,000	29,20
5	4	1,344	9,867	17,633	27,500	0,46	123455,000	34,29
5	6	0,734	9,641	16,703	26,344	0,44	132487,000	36,80
15	14	0,727	11,305	21,008	32,313	0,54	101926,000	28,31
15	16	0,777	13,336	22,797	36,133	0,60	94607,900	26,28
Média		1,20	9,91	17,87	27,78	0,46	105444,00	29,29

Fonte: Elaborada pela autora.

5.1.2 Perfil de Intensidade de Campo Elétrico

Figura 16: $|E_r|^2$ no plano x - z quando $\alpha = 2^\circ$ e $s = 0,001$. *Linha superior:* $v = 0$. *Linha do meio:* $v = 2$. *Linha inferior:* $v = 5$. As primeiras duas colunas correspondem à Eq. (4.32), as demais representam uma técnica de remodelação específica.

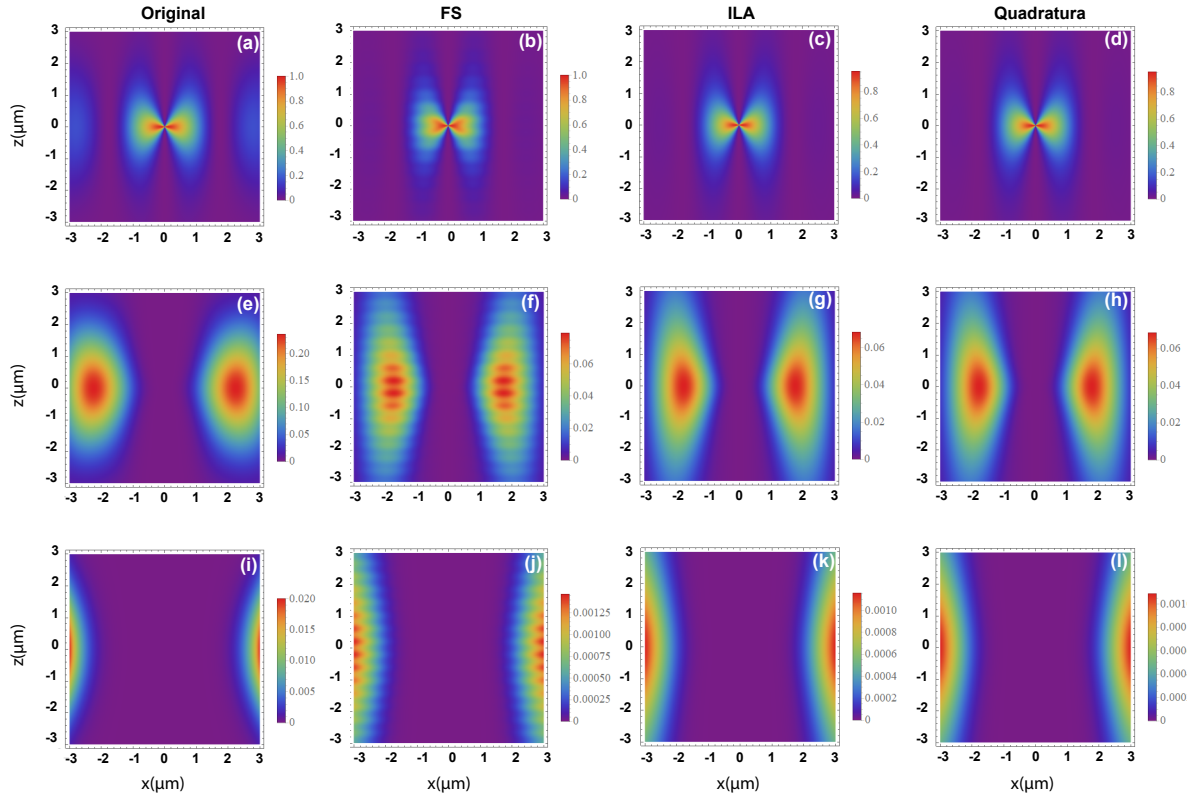


Fonte: Elaborada pela autora.

Para complementar as informações fornecidas pelos BSCs e verificar a remodelação do BGB, reconstruímos também a componente de campo elétrico radial usando os TM BSCs apresentados na seção anterior e recorrendo à integral dupla do esquema de quadratura [48]. Os resultados são apresentados para as cargas topológicas de $v = 0, 2$ e 5 . A Figura 16 corresponde a $\alpha = 2^\circ$ e $s = 0,001$, enquanto que na Figura 17 gráficos de densidade são apresentados para $\alpha = 10^\circ$ e $s = 0,05$.

Para $\alpha = 2^\circ$ e $s = 0,001$ (Figura 16), os perfis de intensidade de campo são muito semelhantes para todos os valores de cargas topológicas. Como esperado, os três métodos de remodelação fornecem campos radiais que concordam muito bem com o original [dado pela Eq. (4.32)]. Isso é uma consequência da concordância entre as BSCs, conforme revelado na Figura 10. A concordância entre os métodos pode ser melhor visualizada plotando curvas de E_r em eixos específicos (por exemplo, $z = z_0$ ou $x = x_0$). Embora não mostradas aqui, essas curvas foram calculadas e revelam uma excelente concordância.

Figura 17: $|E_r|^2$ no plano x - z quando $\alpha = 10^\circ$ e $s = 0,05$. *Linha superior*: $v = 0$. *Linha do meio*: $v = 2$. *Linha inferior*: $v = 5$. As primeiras duas colunas correspondem à Eq. (4.32), as demais representam uma técnica de remodelação específica.



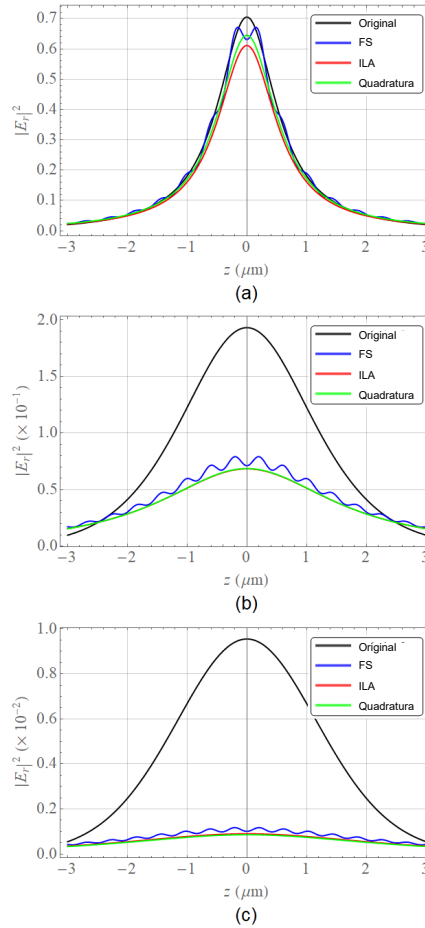
Fonte: Elaborada pela autora.

Portanto, feixes escalares podem de fato ser completamente descritos no GLMT por feixes paraxiais remodelados, satisfazendo as equações de Maxwell.

Em contraste, à medida que a condição paraxial é relaxada, cada método (quadratura, FS e ILA) fornecerá um feixe remodelado cujos padrões de intensidade espacial podem divergir significativamente do esperado, conforme mostrado na Figura 17. Observa-se também o efeito deletério de incrementar a carga topológica na ILA, o que afeta significativamente a amplitude do campo reconstruído. Quanto à FS, as oscilações de amplitude são claramente vistas no plano xz e é uma consequência do crescente comportamento oscilatório observado na Figura 11, à medida que n aumenta, devido às diferenças de amplitude entre os BSCs pares e ímpares na diferença $n - m$. Tais oscilações podem ser interpretadas como uma indicação da natureza escalar do feixe original no formalismo de FS, uma vez que teriam sido completamente eliminadas se tivéssemos considerado BGBs Maxwellianos em vez da Eq. (4.32).

As curvas de E_r ao longo de pontos transversais específicos $x = x_0$ são mostradas

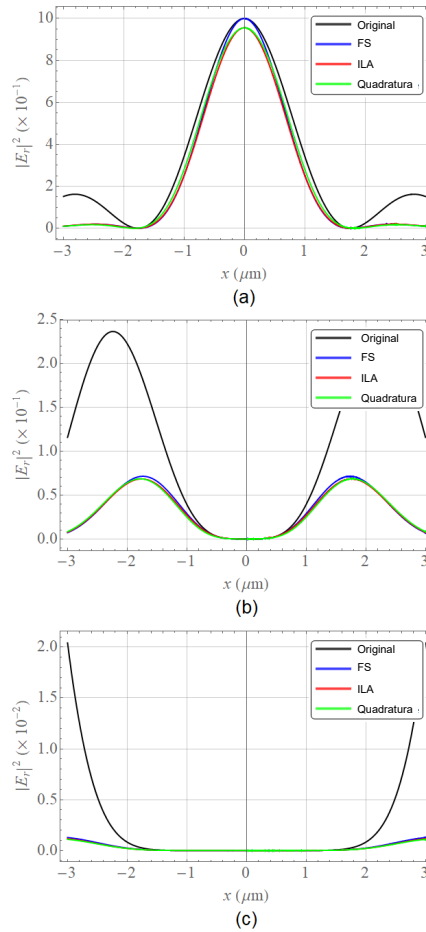
Figura 18: Cortes de $|E_r|^2$ em $x = x_0$ para $s = 0,05$, $\alpha = 10^\circ$. (a) $v = 0$ ($x_0 = 0,6 \mu\text{m}$), (b) $v = 2$ ($x_0 = 1,8 \mu\text{m}$) e (c) $v = 5$ ($x_0 = 2,7 \mu\text{m}$).



Fonte: Elaborada pela autora.

na Figura 18 para $s = 0,05$, $\alpha = 10^\circ$ e $v = 0$ [Figura 18(a)], $v = 2$ [Figura 18(b)] e $v = 5$ [Figura 18(c)]. Os valores de x_0 correspondem às regiões da Figura 17 onde E_r tem amplitude significativa. Observa-se que todos os três métodos de remodelação falham em prever o E_r original (linhas sólidas pretas) associado a um BGB escalar à medida que o valor de v aumenta. Isso também é visto na Figura 19, que corresponde a $v = 0, 2$ e 5 , mas para os campos E_r ao longo do eixo definido por $z = z_0 = 0$. Isso reforça a necessidade de descrições vetoriais de BGBs que satisfaçam totalmente as equações de Maxwell, uma investigação fora do escopo do presente trabalho.

Figura 19: Cortes de $|E_r|^2$ em $z = z_0 = 0$ para $s = 0,05$, $\alpha = 10^\circ$. (a) $v = 0$, (b) $v = 2$ e (c) $v = 5$.



Fonte: Elaborada pela autora.

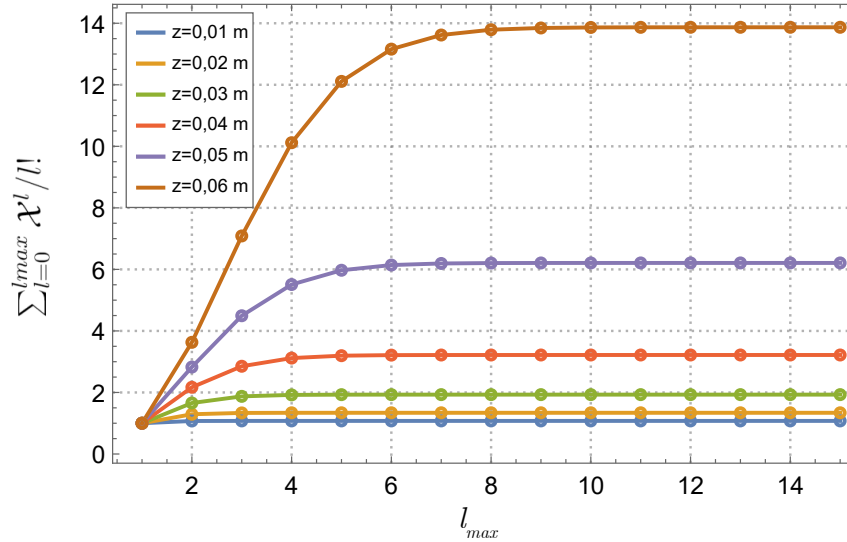
5.2 Resultados Numéricos para FW

5.2.1 FW de Ordem Zero

Nesta seção são apresentados exemplos de aplicação dos resultados teóricos obtidos na seção 4.3. Todas as simulações foram desenvolvidas usando o software *Mathematica* (versão 10.3). A partícula dielétrica de *Rayleigh* tem um raio $a = \lambda/20$, o comprimento de onda no vácuo é $\lambda = 1064$ nm. Os índices de refração do meio circundante e do espalhador são $n_m = 1,33$ e $n_p = 1,62$, respectivamente.

No primeiro exemplo é considerado como $\bar{F}(z)$ na Eq. (3.36), um perfil semelhante

Figura 20: Número de termos em A_p dada pela Eq. (3.41) para a FW.



Fonte: Elaborada pela autora.

ao exemplo apresentado em [37] e de acordo com Eq. (5.1).

$$\bar{F}(z) = \begin{cases} 0, & 0 \leq z < l_1 \\ 1, & l_1 \leq z < l_2 \\ \sqrt{3}, & l_2 \leq z < l_3 \\ \sqrt{2}, & l_3 \leq z < l_4 \\ 0, & l_4 \leq z \leq L/2 \end{cases} \quad (5.1)$$

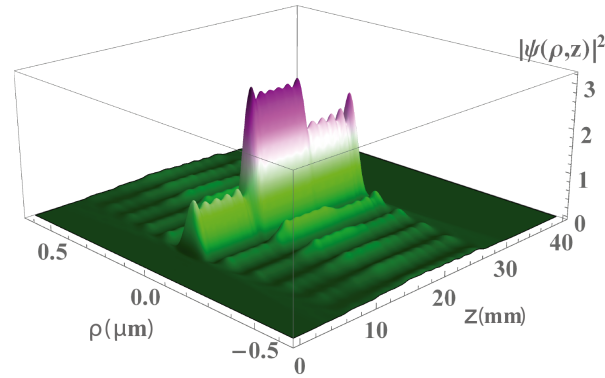
onde $l_1 = 5$ mm, $l_2 = l_1 + \delta_z$, $l_3 = l_2 + \delta_z$, e $l_4 = l_3 + \delta_z$, com $L = 74$ mm e $\delta_z = 8$ mm.

Os valores de A_p foram aproximados usando a Eq. (3.41) com quatro termos na série $\sum_{l=0}^{l_{max}} \mathcal{X}^l/l!$, quer dizer $l_{max} = 3$, o que se mostrou suficiente. Na Figura 20 mostra-se os resultados para até 15 termos no somatório para diferentes valores de z m. Sendo este o único termo variável em $\mathcal{X} = k_{\rho 0}^2 q^2 z^2 / k_r^2$, e o valor máximo de $z = L/2 = 0,034$ m na função $F(z)$ na Eq. (5.1).

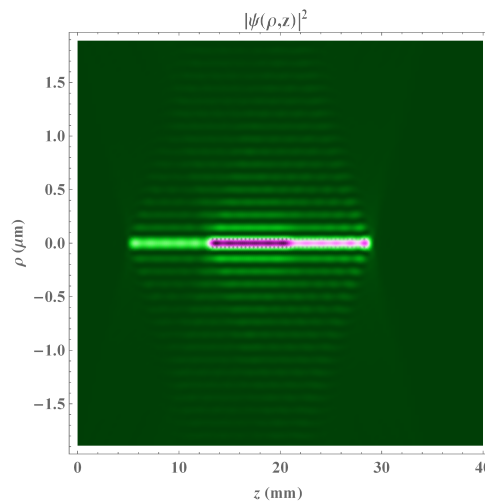
O parâmetro de confinamento considerado para a FW foi $s = 0,0001$. O valor do parâmetro s está relacionado ao parâmetro q , dado pela Eq. (3.37), que regula a apodização Gaussiana já que $s = 1/(kw_0) = q/k$. Assim s dependerá do valor de L na função $F(z)$.

Visto que a FW é dada por um somatório de BGBs onde cada um dos feixes têm um valor distinto de número de onda transversal, $k_{\rho p}$, logo cada feixe apresenta um axicon

Figura 21: LIP, $|\Psi(\rho, z)|^2$, para uma FW de energia finita (a) Gráfico 3D do LIP, $|\Psi(\rho, z)|^2$, onde $\bar{F}(z)$ é dado pela Eq. (5.1), com $\lambda = 1064 \text{ nm}$, $r_0 \approx 9 \text{ }\mu\text{m}$, $L = 74 \text{ mm}$, $l_{max} = 3$, $N = 53$. (b) Gráfico em 2D do LIP do mesmo feixe.



(a)



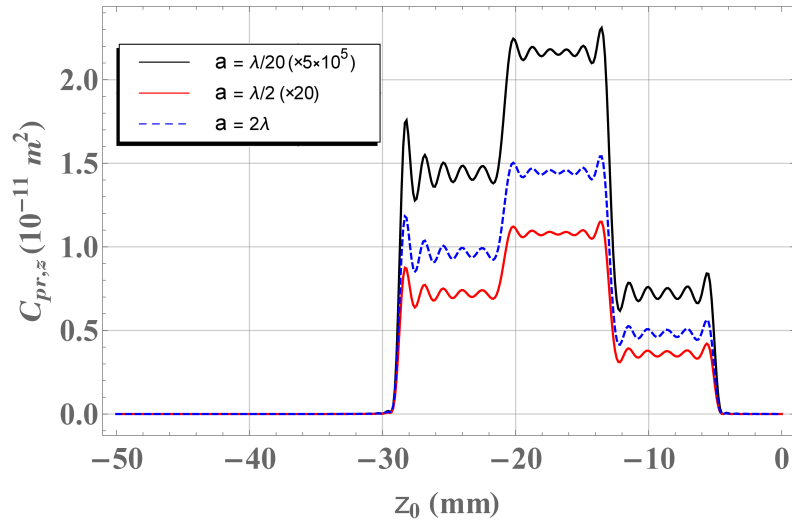
(b)

Fonte: Elaborado pela autora.

distinto. Os valores dos axicons para a FW no exemplo variam entre $2,74812^\circ$ e $0,15011^\circ$ sendo altamente paraxial.

O valor máximo de N obtido a partir de Eq. (3.15) foi 53, $2N + 1$ definindo o número de feixes na superposição, conforme Eq. (3.31). Para este exemplo foi escolhido usar o valor máximo de feixes na superposição 107. O valor do *spot* correspondente é $r_0 \approx 9 \text{ }\mu\text{m}$. A intensidade do campo $|\Psi(\rho, z)|^2$ da FW em um meio não absorvente é mostrado na Figura 21. O perfil longitudinal de intensidade desejado pode ser observado, em 3D (a)

Figura 22: Seção transversal de pressão de radiação longitudinal $C_{pr,z}$ em função de z_0 para a FW da Fig. 21, com $\rho_0 = 0$ (no eixo). O espalhador tem três raios a distintos e um índice de refração fixo, $M = 1,1$. Fatores multiplicativos foram introduzidos para uma melhor visualização.



Fonte: Elaborada pela autora.

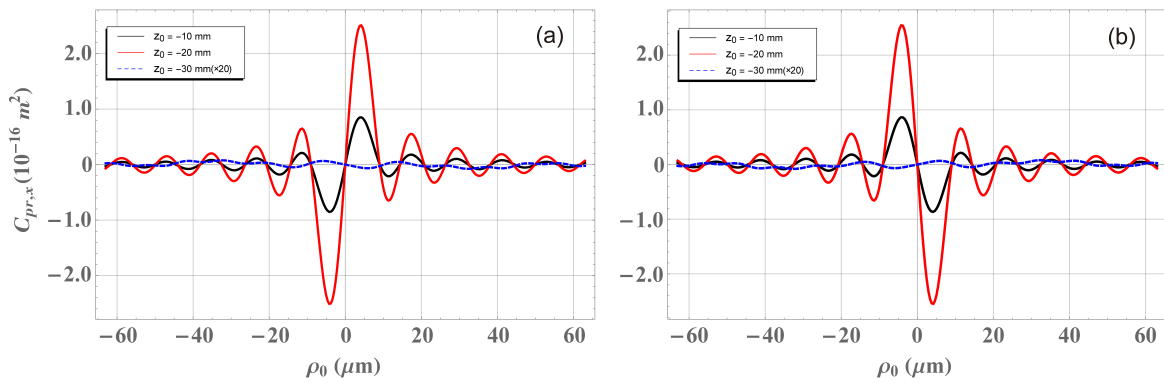
e 2D (b), no intervalo longitudinal escolhido. O perfil exibe uma rápida degradação de intensidade após $z \approx l_4 = 29$ mm, como é esperado e validado.

Na Figura 22 a seção transversal de pressão de radiação longitudinal $C_{pr,z}$ é representada como uma função de z_0 ($\rho_0 = 0$) e para espalhadores com raio $a = \lambda/20$, $\lambda/2$ e 2λ todos com o mesmo índice de refração relativo à água, $M = 1,1$, próximo ao índice de partículas biológicas.

Observe-se que $C_{pr,z}$ se assemelha ao perfil oscilatório ao longo de z para todos os raios das partículas. Isso acontece devido à aproximação paraxial, uma vez que as forças gradientes são incapazes de superar as forças de espalhamento. Para fins de visualização, foram introduzidos fatores multiplicativos.

Vários pontos radiais de equilíbrio estável são teoricamente esperados devido ao perfil transversal de Bessel-Gauss, tanto em picos de anéis alta intensidade (se $M > 1,0$) ou em regiões de nulos (se $M < 1,0$). Considerando $a = \lambda/20$, deslocando-se a FW ao longo de $x(\rho_0 = x_0)$ de $z_0 = -0,01$, $-0,02$ e $-0,03$, para observar os esperados pontos de equilíbrio *radial*. $C_{pr,x}$ como uma função de ρ_0 é mostrado na Figura 23 (a) e (b) para os índices de refração $M = 1,1$ e $M = 0,9$, respectivamente

Figura 23: Seção transversal de pressão de radiação radial (transversal) $C_{pr,x}$ como uma função de ρ_0 para a FW da Figura 21. A partícula espalhadora tem raio $a = \lambda/20$. Índice de refração para (a) $M = 1,1$ e (b) $M = 0,9$. As três curvas correspondem a três posições relativas distintas z_0 do feixe.



Fonte: Elaborada pela autora.

Para o segundo exemplo, consideramos como função de referência $\bar{F}(z)$ na Eq. (3.36) com um perfil semelhante ao exemplo apresentado em [33] dado pela Eq. (5.2):

$$\bar{F}(z) = \begin{cases} -4 \frac{(z-l_1)(z-l_2)}{(l_2-l_1)^2}, & l_1 \leq z < l_2 \\ 1, & l_3 \leq z < l_4 \\ -4 \frac{(z-l_5)(z-l_6)}{(l_6-l_5)^2}, & l_5 \leq z < l_6 \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases} \quad (5.2)$$

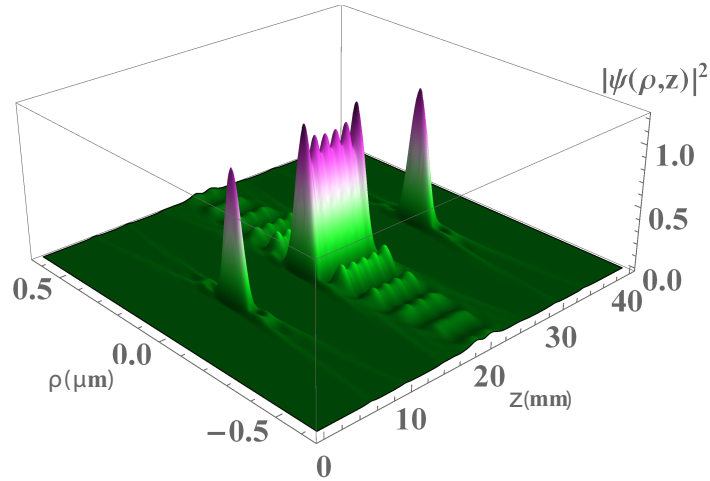
onde $l_1 = (L/2)/5 - \delta_1$, $l_2 = (L/2)/5 + \delta_1$, $l_3 = (L/2)/2 - \delta_2$, $l_4 = (L/2)/2 + \delta_2$, $l_5 = (L/2)/5 - \delta_1$, $l_6 = (L/2)/5 + \delta_1$ com $L = 80$ mm e $\delta_1 = (L/2)/10$ e $\delta_2 = (L/2)/50$.

Na construção da FW, a partir da Eq. (3.31), foi usado como número máximo de termos na superposição, 115, dado que $N_{max} = 57$ na Eq. (3.15).

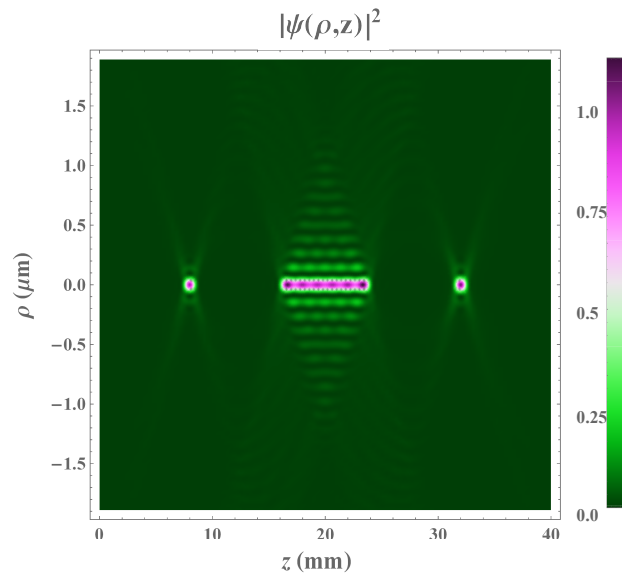
Da mesma forma que no exemplo anterior, os coeficientes A_p foram aproximados usando quatro termos na série [ver Eq. (3.42)]. Também foram mantidos os valores do comprimento de onda, o tamanho da partícula dielétrica e os índices de refração do meio circundante e de espalhamento com $n_m = 1,33$ e $n_p = 1,62$, respetivamente.

Na Figura 24 é mostrado o LIP obtido usando FWs. Como esperado, a FW consegue reproduzir a função de referência (5.2), no intervalo escolhido. A simulação em 3D é mostrada na Figura 24 (a) e em 2D em (b).

Figura 24: $|\Psi(\rho, z)|^2$, para FW de energia finita (a) Gráfico 3D do LIP, $|\Psi(\rho, z)|^2$, onde $\bar{F}(z)$ é dado pela Eq. (5.2), com $\lambda = 1064 \text{ nm}$, $r_0 \approx 9 \mu\text{m}$, $L = 80 \text{ mm}$, $l = 3$, $N = 57$. (b) Gráfico em 2D do LIP do mesmo feixe.



(a)

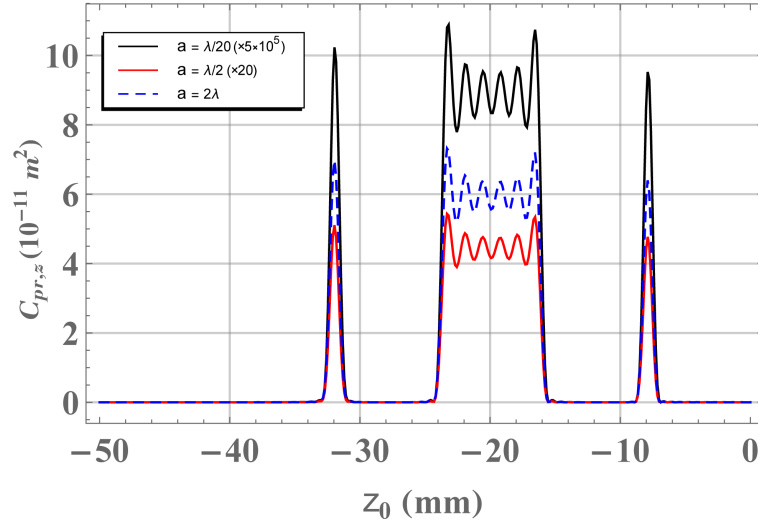


(b)

Fonte: Elaborada pela autora

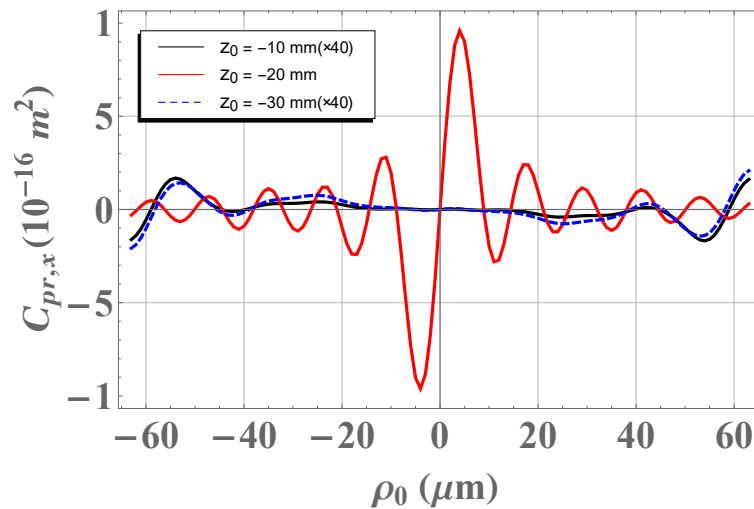
Na Figura 25 é apresentada a seção transversal de pressão de radiação longitudinal $C_{pr,z}$, representada como uma função de $z_0(\rho_0 = 0)$, para partículas espalhadoras com raio $a = \lambda/20$, $\lambda/2$ e 2λ , todos com o mesmo índice de refração $M = 1,1$. Na figura observamos como $C_{pr,z}$ se assemelha ao perfil de intensidade ao longo de z para todos os raios das partículas. Também foram introduzidos fatores multiplicativos para fins de visualização.

Figura 25: Seção transversal de pressão de radiação longitudinal $C_{pr,z}$ em função de z_0 para a FW da Figura 24, com $\rho_0 = 0$ (no eixo). O espalhador tem três raios a distintos e um índice de refração fixo, $M = 1,1$. Fatores multiplicativos foram introduzidos para uma melhor visualização.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 26: Seção transversal de pressão de radiação radial (transversal) $C_{pr,x}$ como uma função de ρ_0 para a FW da Figura 24. A partícula espalhadora tem raio $a = \lambda/20$. Índice de refração para (a) $M = 1,1$ e (b) $M = 0,9$. As três curvas correspondem a três posições relativas distintas z_0 do feixe.

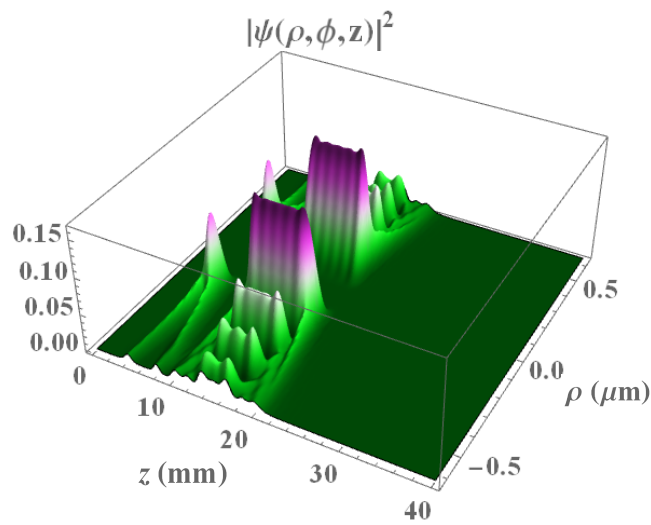


Fonte: Elaborada pela autora.

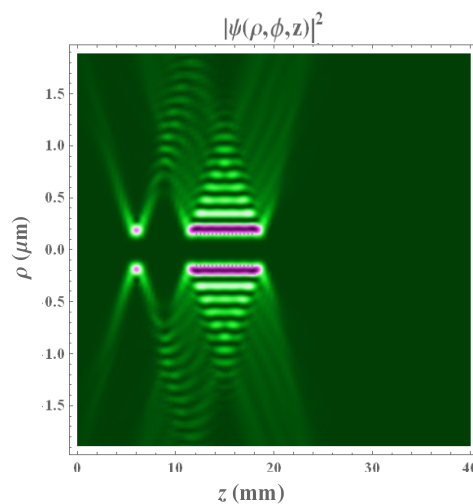
O $C_{pr,x}$, como uma função de ρ_0 , é mostrado na Figura 26 para o índice de refração $M = 1,1$. Devido ao perfil transversal de Bessel-Gauss, vários pontos radiais de equilíbrio estável são esperados em picos de anéis alta intensidade, por M ser maior a 1,0. Considerando $a = \lambda/20$, deslocamos a FW ao longo de $x(\rho_0 = x_0)$ de $z_0 = -0,01, -0,02$ e $-0,03$ para observar os pontos de equilíbrio *radial*.

5.2.2 FW de Ordem Superior

Figura 27: (a) Gráficos 3D e (b) 2D de $|\Psi(\rho, \phi, z)|^2$ para FW de ordem $v = 4$ com $\lambda = 1064$ nm, $r_0 \approx 9 \mu\text{m}$, $L = 74$ mm e $N = 53$.



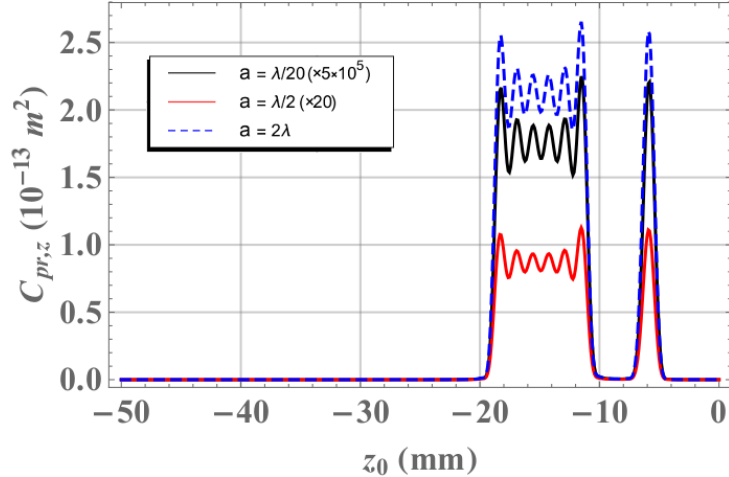
(a)



(b)

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 28: RPCS ($C_{pr,z}$) longitudinal como função de z_0 para a FW da Fig. 27 com $\rho = 7,75 \mu\text{m}$. Para partículas de três raios distintos a e um índice de refração fixo de $M = 1,1$.



Fonte: Elaborada pela autora.

Para aplicar os BSCs resultantes para FW de ordem superior, apresentado na seção 4.3, será considerado um exemplo de um LIP projetado para o intervalo $0 \leq z \leq L$ e dado por:

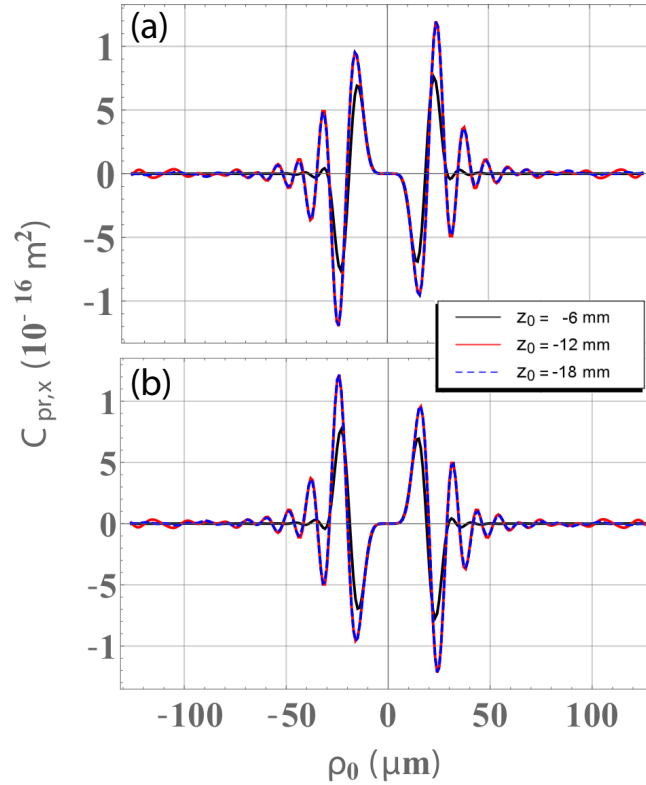
$$F(z) = \begin{cases} 0, & 0 \leq z < l_1, l_2 \leq z < l_3, l_4 \leq z < L \\ -4 \frac{(z-l_1)(z-l_2)}{(l_2-l_1)^2}, & l_1 \leq z < l_2 \\ 1, & l_3 \leq z < l_4 \end{cases} \quad (5.3)$$

onde $l_1 = 0,5 \text{ mm}$, $l_2 = l_1 + \delta_z/2$, $l_3 = l_2 + \delta_z$, $l_4 = l_3 + 2\delta_z$ com $L = 0,74 \text{ mm}$ e $\delta_z = 0,4 \text{ mm}$. O spot considerado é $r_0 \approx 9 \mu\text{m}$ e o comprimento de onda no vácuo é $\lambda = 1064 \text{ nm}$. O LIP na Eq. (5.3) considerado é similar ao apresentado em [33] para FW de ordem superior.

Fazendo uso das Eqs. (4.142) a (4.144) foi desenvolvida uma simulação no software *Mathematica*. Considerou-se 107 feixes na superposição, isto é $N = 53$, e uma função de Bessel de ordem ou carga topológica $v = 4$. Na Figura 27 é mostrada a distribuição da intensidade de campo, ela segue o perfil proposto na Eq. (5.3), na ordem de micrometros.

Na Figura 28 é apresentada a RPCS $C_{pr,z}$ para três tamanhos de partículas de raio $a = \lambda/20$, $\lambda/2$ e 2λ , com índice de refração $M = 1,1$ constante. Foram introduzidos fatores multiplicativos para melhor visualização. Na figura observa-se que a seção $C_{pr,z}$ apresenta a mesma forma que o LIP ao longo de $\rho = 7,75 \mu\text{m}$. O exemplo não apresenta armadilhas ópticas tridimensionais, isto devido a que as forças gradientes, proporcionais

Figura 29: RPCS ($C_{pr,x}$) transversal como função de $\rho = 7,75 \mu\text{m}$ para a FW da Fig. 27. Para uma partícula de raio $a = \lambda/20$ e índices de refração de $M = 1,1$ para a figura (a) e $M = 0,9$ para (b).



Fonte: Elaborada pela autora.

as RPCS, não se equilibram com as forças de espalhamento. Isso poderia ser contornado indo além dos feixes paraxiais e considerando campos vetoriais reais e campos de ondas altamente não paraxiais.

A seção transversal de choque $C_{pr,x}$ como função de ρ_0 é mostrada na Figura 29. O feixe é deslocado ao longo do eixo x ($\rho_0 = x_0$) para 3 posições longitudinais $z_0 = -6, -12, -18$ mm. A partícula Rayleigh escolhida tem raio $a = \lambda/20$ com índices de refração $M = 1,1$ [Figura 29(a)] e $M = 0,9$ [Figura 29(b)].

Vários pontos de equilíbrio estável são esperados devido ao perfil transversal do feixe resultante. Para índices de refração maiores a 1,0, os pontos de equilíbrio são esperados nos picos de intensidade da FW [Figura 29(a)] e para índices de refração menores a 1,0 os pontos são esperados nas regiões nulas ou obscuras do feixe como mostrado na Figura 29(b).

5.2.3 Comparação de BSCs para FWs

Os BSCs de FWs para o modo TM foram calculados para dois métodos, ILA e quadraturas ¹. Consideramos cargas topológicas para os BBs na superposição de $v = 0, 1, 2, 3$ e 4 para valores de m cujos BSCs são não nulos, a saber, $m = v - 1$ e $v + 1$. Limitamo-nos aos 50 primeiros valores de n , devido ao tempo excessivamente longo para cômputo, via quadratura, dos BSCs de elevados valores de n . Para avaliar o esforço computacional, foi utilizada a função *TIMING* do *Wolfram Mathematica 11.3*. Assim, o cálculo dos BSCs com a aproximação localizada levou, em média, 3,6 segundos para cada uma das curvas aqui apresentadas. Já para o método exato de quadraturas foram necessários, em média, 20 horas para os 50 valores de n de cada curva (ver [Tabela 5](#)). Na [Figura 30](#) é apresentada uma comparação entre ambas as técnicas, os resultados para ILA e quadraturas são muito semelhantes para todos os valores de cargas topológicas consideradas. Dada a natureza escalar dos feixes que compõem a FW e seu alto grau de paraxialidade, essa concordância é esperada. A diferença no tempo de processamento é um elemento a ser considerado na escolha entre as técnicas de cálculo de BSCs. Portanto, faz-se necessário um maior número de simulações (mais valores de n , variação entre os ângulos de axicon e o parâmetro de confinamento s) para se chegar a conclusões mais adequadas, além, é claro, da incorporação do método da FS.

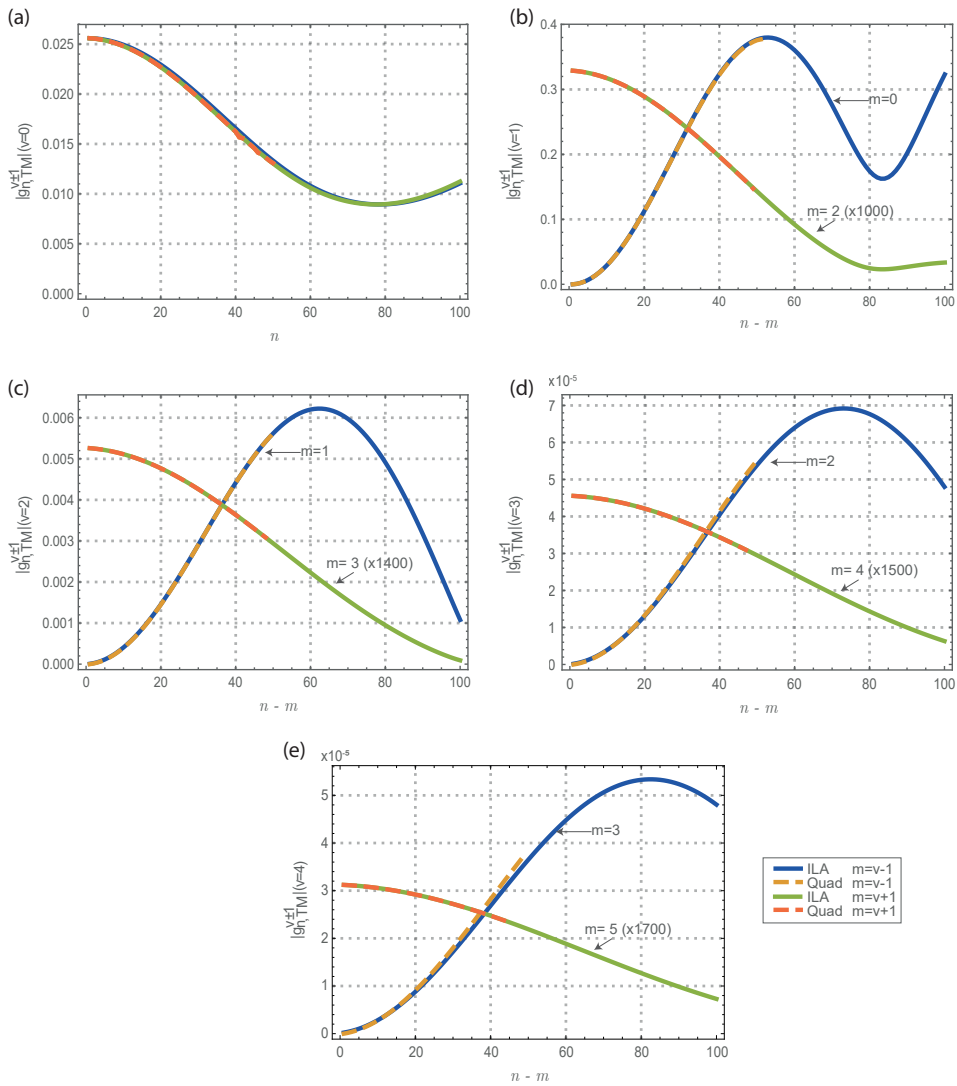
Tabela 5: Tempo de processamento BSCs para FW medidos com a função *TIMING* para 50 valores de n .

v	m	ILA	Quadratura	
		segundos	segundos	horas
0	-1	4,1563	75230,30	20,90
0	1	3,7656	86540,20	24,04
1	0	3,2578	62092,60	17,25
1	2	3,6172	67843,40	18,85
2	1	2,9961	43522,20	12,09
2	3	2,3633	82900,40	23,03
3	2	3,7227	66675,50	18,52
3	4	4,0313	91925,40	25,53
4	3	4,4063	70645,20	19,62
4	5	3,9688	81345,60	22,60
Média		3,6285	72872,08	20,24

Fonte: Elaborada pela autora.

¹ Equações para BSCs de FWs usando FS foram apresentadas na Eq. (4.145) e Eq. (4.146), a análise computacional, em função do tempo disponível, foi estipulada como fora do escopo do presente trabalho, sendo sugerido como perspectivas futuras a validação da FS nesse caso

Figura 30: $|g_{n, \text{TM}}^{v \pm 1}|$ para (a) $v = 0$, (b) $v = 1$, (c) $v = 2$, (d) $v = 3$, e (e) $v = 4$.



Fonte: Elaborada pela autora.

6 CONCLUSÃO

Consideramos que os objetivos propostos neste trabalho foram atingidos. Primeiramente foi estabelecida a viabilidade da descrição analítica de BGBs e FW de ordem arbitrária no contexto da GLMT. Foram incorporados pela primeira vez BGBs e FWs dentro do contexto da GLMT. Para isso foram utilizadas as técnicas disponíveis para a obtenção de BSCs dentro da GLMT e com elas obtidas diferentes conjuntos de equações que permitem o cálculo de coeficientes altamente valiosos, pois carregam a informação necessária para descrição e remodelação dos feixes.

Como parte dos resultados foram apresentados em detalhe o cálculo dos BSCs usando ILA e FS para BGBs escalares e, conseqüentemente, o procedimento para se determinar os BSCs de FWs a partir desses mesmos métodos. Para complementar a comparação entre as técnicas foi utilizado também o método de quadraturas que envolve integrais que não são solucionáveis analiticamente e implicam em enormes esforços computacionais. Por outro lado, a ILA provê expressões analíticas e facilmente implementáveis do ponto de vista computacional. A FS também possibilita a eliminação de integrações nas variáveis angulares do sistema de coordenadas esféricas, embora a obtenção das expressões finais para os BSCs demande enorme esforço matemático, e tenha que ser completamente refeito caso o feixe incidente seja modificado.

Os objetivos iniciais deste projeto não contemplavam investigações computacionais dos BSCs de FWs usando a FS, pois havia a perspectiva de impossibilidade de realização desses estudos em razão do tempo disponível. De fato, tal perspectiva se mostrou acertada e, embora tenhamos incluído comentários acerca das expressões para os BSCs de FWs construídas a partir de BGBs usando a FS, o desenvolvimento de algoritmos para cálculo de forças ópticas e/ou para reconstrução de campos na GLMT fica como perspectiva para futuras investigações. Esperamos realizá-lo em breve.

Foram apresentadas também comparações mediante resultados gráficos para os três métodos (quadratura, ILA e FS) no caso de BGBs e usando quadratura e ILA no caso de FWs. Incluindo gráficos envolvendo os BSCs, campos reconstruídos a partir destes coeficientes, e exemplos de cálculos de seção de choque de pressão de radiação. Também foram apresentadas comparações do tempo de processamento para o cálculo dos BSCs, observando-se diferenças notórias entre os três métodos, sendo a ILA a mais rápida e a quadratura computacionalmente intensiva, podendo ser proibitiva dependendo do número de fatores calculados. A diferença no tempo de processamento é um elemento a ser considerado na escolha da técnica de cálculo de BSCs.

Como exposto na tese, uma observação importante deve ser apresentada. Qua-

dratura e FS são métodos exatos para determinação dos BSCs. Por “exato” deve ser entendido que os BSCs representam fielmente o feixe a ser descrito somente se o feixe satisfaz, rigorosamente, as equações de Maxwell. Por outro lado, a LA pode não descrever adequadamente tais feixes *Maxwellianos*.

Como o feixe original tanto para BGB como para FW foi uma solução para a equação da onda escalar, os gráficos envolvendo os BSCs e os campos remodelados a partir deles foram diferentes à medida em que a condição de paraxialidade foi relaxada e à medida em que a carga topológica aumentou. Mesmo para abordagens “exatas”, como séries finitas e quadraturas, divergências entre seus BSCs tornaram-se evidentes.

Uma vez determinados os BSCs por quaisquer dos três métodos aqui apresentados, o feixe remodelado assim gerado pelo formalismo da GLMT é vetorial e exato, mas não necessariamente corresponde à descrição do feixe originalmente tomado como referência inicial. Deste trabalho podemos concluir que existe a necessidade de descrever BGBs e FWs vetoriais no contexto da GLMT já que, se estes forem também Maxwellianos, então os respectivos feixes remodelados pela GLMT com uso de quadraturas ou da FS seriam idênticos aos pretendidos.

Por fim, o trabalho apresenta subsídios teóricos para a comunidade científica da área, tanto como de BGBs como FWs, promovendo a adoção de FWs como feixes não difrativos para diversas aplicações ópticas.

REFERÊNCIAS

- 1 ASHKIN, A. Acceleration and trapping of particles by radiation pressure. **Physical review letters**, APS, v. 24, n. 4, p. 156, 1970.
- 2 ASHKIN, A.; DZIEDZIC, J. M. Optical trapping and manipulation of viruses and bacteria. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 235, n. 4795, p. 1517–1520, 1987.
- 3 ASHKIN, A. Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime. **Biophysical journal**, Elsevier, v. 61, n. 2, p. 569–582, 1992.
- 4 SVOBODA, K.; BLOCK, S. M. Biological applications of optical forces. **Annual review of biophysics and biomolecular structure**, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 23, n. 1, p. 247–285, 1994.
- 5 ASHKIN, A. Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime. In: **Methods in cell biology**. [S.l.]: Elsevier, 1997. v. 55, p. 1–27.
- 6 JONES, P. H.; MARAGÒ, O. M.; VOLPE, G. **Optical tweezers: Principles and applications**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015.
- 7 DURININ, J.; JR, J. M.; EBERLY, J. Diffraction-free beams. **Physical review letters**, APS, v. 58, n. 15, p. 1499, 1987.
- 8 DURININ, J. Exact solutions for nondiffracting beams. i. the scalar theory. **JOSA A**, Optical Society of America, v. 4, n. 4, p. 651–654, 1987.
- 9 DURININ, J.; MICELI, J.; EBERLY, J. H. Comparison of bessel and gaussian beams. **Optics letters**, Optical Society of America, v. 13, n. 2, p. 79–80, 1988.
- 10 VASARA, A.; TURUNEN, J.; FRIBERG, A. T. Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms. **JOSA A**, Optical Society of America, v. 6, n. 11, p. 1748–1754, 1989.
- 11 OVERFELT, P.; KENNEY, C. Comparison of the propagation characteristics of bessel, bessel-gauss, and gaussian beams diffracted by a circular aperture. **JOSA A**, Optical Society of America, v. 8, n. 5, p. 732–745, 1991.
- 12 MAZILU, M. et al. Light beats the spread: “non-diffracting” beams. **Laser & Photonics Reviews**, Wiley Online Library, v. 4, n. 4, p. 529–547, 2010.
- 13 CHU, X. et al. Generating a bessel-gaussian beam for the application in optical engineering. **Scientific reports**, Nature Publishing Group, v. 5, p. 18665, 2015.
- 14 BAUMGARTL, J.; MAZILU, M.; DHOLAKIA, K. Optically mediated particle clearing using airy wavepackets. **Nature photonics**, Nature Publishing Group, v. 2, n. 11, p. 675–678, 2008.
- 15 FAHRBACH, F. O.; SIMON, P.; ROHRBACH, A. Microscopy with self-reconstructing beams. **Nature photonics**, Nature Publishing Group, v. 4, n. 11, p. 780–785, 2010.

- 16 FAHRBACH, F. O. et al. Self-reconstructing sectioned bessel beams offer submicron optical sectioning for large fields of view in light-sheet microscopy. **Optics Express**, Optical Society of America, v. 21, n. 9, p. 11425–11440, 2013.
- 17 PLANCHON, T. A. et al. Rapid three-dimensional isotropic imaging of living cells using bessel beam plane illumination. **Nature methods**, Nature Publishing Group, v. 8, n. 5, p. 417–423, 2011.
- 18 EYYUBOĞLU, H. T. et al. Intensity fluctuations in j-bessel–gaussian beams of all orders propagating in turbulent atmosphere. **Applied Physics B**, Springer, v. 93, n. 2-3, p. 605, 2008.
- 19 ZHU, K. et al. Propagation of bessel-gaussian beams with optical vortices in turbulent atmosphere. **Optics Express**, Optical Society of America, v. 16, n. 26, p. 21315–21320, 2008.
- 20 ARLT, J. et al. Optical micromanipulation using a bessel light beam. **Optics Communications**, Elsevier, v. 197, n. 4-6, p. 239–245, 2001.
- 21 GARCÉS-CHÁVEZ, V. et al. Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 419, n. 6903, p. 145–147, 2002.
- 22 _____. Optical levitation in a bessel light beam. **Applied physics letters**, American Institute of Physics, v. 85, n. 18, p. 4001–4003, 2004.
- 23 AMBROSIO, L. A.; RACHED, M. Z.; GOUESBET, G. Discrete vector frozen waves in generalized lorenz–mie theory: linear, azimuthal, and radial polarizations. **Applied Optics**, Optical Society of America, v. 57, n. 12, p. 3293–3300, 2018.
- 24 GORI, F.; GUATTARI, G.; PADOVANI, C. Bessel-Gauss beams. **Optics communications**, Elsevier, v. 64, n. 6, p. 491–495, 1987.
- 25 PALMA, C. et al. Imaging of generalized Bessel-Gauss beams. **journal of modern optics**, Taylor & Francis, v. 43, n. 11, p. 2269–2277, 1996.
- 26 BAGINI, V. et al. Generalized bessel-gauss beams. **Journal of modern Optics**, Taylor & Francis, v. 43, n. 6, p. 1155–1166, 1996.
- 27 YIN, J. et al. Optical potential for atom guidance in a dark hollow laser beam. **JOSA B**, Optical Society of America, v. 15, n. 1, p. 25–33, 1998.
- 28 _____. Atom guiding and cooling in a dark hollow laser beam. **Physical Review A**, APS, v. 58, n. 1, p. 509, 1998.
- 29 YAN, M.; YIN, J.; ZHU, Y. Dark-hollow-beam guiding and splitting of a low-velocity atomic beam. **JOSA B**, Optical Society of America, v. 17, n. 11, p. 1817–1820, 2000.
- 30 RIVERO, D. et al. Hollow bessel beams for guiding atoms between vacuum chambers: A proposal and efficiency study. **aceito para publicação na J. Opt. Soc. Am. B**, 2020.
- 31 ZHAO, C.; WANG, L.; LU, X. Radiation forces of highly focused bessel–gaussian beams on a dielectric sphere. **Optik**, Elsevier, v. 119, n. 10, p. 477–480, 2008.

-
- 32 ZAMBONI-RACHED, M. Stationary optical wave fields with arbitrary longitudinal shape by superposing equal frequency bessel beams: Frozen waves. **Optics Express**, Optical Society of America, v. 12, n. 17, p. 4001–4006, 2004.
- 33 ZAMBONI-RACHED E. RECAMI, H. E. H.-F. M. Theory of frozen waves: modeling the shape of stationary wave fields. **J. Opt. Soc. Am. A**, p. 2465–24755, 2005.
- 34 ZAMBONI-RACHED, M. Diffraction-attenuation resistant beams in absorbing media. **Optics Express**, Optical Society of America, v. 14, n. 5, p. 1804–1809, 2006.
- 35 ZAMBONI-RACHED, M.; AMBRÓSIO, L. A.; HERNÁNDEZ-FIGUEROA, H. E. Diffraction–attenuation resistant beams: their higher-order versions and finite-aperture generations. **Applied optics**, Optical Society of America, v. 49, n. 30, p. 5861–5869, 2010.
- 36 ZAMBONI-RACHED, M.; RECAMI, E.; BALMA, M. Simple and effective method for the analytic description of important optical beams when truncated by finite apertures. **Applied optics**, Optical Society of America, v. 51, n. 16, p. 3370–3379, 2012.
- 37 ZAMBONI-RACHED, M.; MOJAHEDI, M. Shaping finite-energy diffraction-and attenuation-resistant beams through bessel-gauss–beam superposition. **Physical Review A**, APS, v. 92, n. 4, p. 043839, 2015.
- 38 ZHAO, C. et al. Propagation of high-order bessel–gaussian beam through a misaligned first-order optical system. **Optics & Laser Technology**, Elsevier, v. 39, n. 6, p. 1199–1203, 2007.
- 39 ZHAO, C.-L.; WANG, L.-G. Propagation of high-order bessel–gaussian beams through a hard-aperture misaligned optical system. **Journal of Modern Optics**, Taylor & Francis, v. 55, n. 14, p. 2269–2277, 2008.
- 40 VIEIRA, T. A.; GESUALDI, M. R.; ZAMBONI-RACHED, M. Frozen waves: experimental generation. **Optics Letters**, Optical Society of America, v. 37, n. 11, p. 2034–2036, 2012.
- 41 VIEIRA, T. A.; ZAMBONI-RACHED, M.; GESUALDI, M. R. Modeling the spatial shape of nondiffracting beams: Experimental generation of frozen waves via holographic method. **Optics Communications**, Elsevier, v. 315, p. 374–380, 2014.
- 42 VIEIRA, T. A. et al. Production of dynamic frozen waves: controlling shape, location (and speed) of diffraction-resistant beams. **Optics letters**, Optical Society of America, v. 40, n. 24, p. 5834–5837, 2015.
- 43 _____. Optical generation of non-diffracting beams via photorefractive holography. **arXiv preprint arXiv:1511.08944**, 2015.
- 44 SUAREZ, R. A. et al. Experimental optical trapping of micro-particles with frozen waves. **arXiv preprint arXiv:2003.11051**, 2020.
- 45 AMBROSIO, L. A.; FERREIRA, M. de M. Time-average forces over rayleigh particles by superposition of equal-frequency arbitrary-order bessel beams. **JOSA B**, Optical Society of America, v. 32, n. 5, p. B67–B74, 2015.

- 46 AMBROSIO, L. A.; ZAMBONI-RACHED, M. Analytical approach of ordinary frozen waves for optical trapping and micromanipulation. **Applied optics**, Optical Society of America, v. 54, n. 10, p. 2584–2593, 2015.
- 47 _____. Optical forces experienced by arbitrary-sized spherical scatterers from superpositions of equal-frequency bessel beams. **JOSA B**, Optical Society of America, v. 32, n. 5, p. B37–B46, 2015.
- 48 GOUESBET, G.; GRÉHAN, G. **Generalized Lorenz-Mie Theories**. 2. ed. [S.l.]: Springer, 2017.
- 49 GOUESBET, G. Van de hulst essay: A review on generalized lorenz-mie theories with wow stories and an epistemological discussion. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, Elsevier, p. 107117, 2020.
- 50 GOUESBET, G. et al. Sur la généralisation de la théorie de lorenz-mie. v. 13, n. 2, p. 97–103, 1982.
- 51 GOUESBET, G.; GRÉHAN, G.; MAHEU, B. Expressions to compute the coefficients gmn in the generalized lorenz-mie theory using finite series. **Journal of optics**, IOP Publishing, v. 19, n. 1, p. 35, 1988.
- 52 MAHEU, B.; GOUESBET, G.; GRÉHAN, G. A concise presentation of the generalized lorenz-mie theory for arbitrary location of the scatterer in an arbitrary incident profile. **Journal of optics**, IOP Publishing, v. 19, n. 2, p. 59, 1988.
- 53 GOUESBET, G.; MAHEU, B.; GRÉHAN, G. Light scattering from a sphere arbitrarily located in a gaussian beam, using a bromwich formulation. **JOSA A**, Optical Society of America, v. 5, n. 9, p. 1427–1443, 1988.
- 54 GOUESBET, G.; GREHAN, G.; MAHEU, B. Computations of the gn coefficients in the generalized lorenz-mie theory using three different methods. **Applied optics**, Optical Society of America, v. 27, n. 23, p. 4874–4883, 1988.
- 55 REN, K.; GRÉHAN, G.; GOUESBET, G. Evaluation of laser-sheet beam shape coefficients in generalized lorenz–mie theory by use of a localized approximation. **JOSA A**, Optical Society of America, v. 11, n. 7, p. 2072–2079, 1994.
- 56 GOUESBET, G.; VOTTO, L. F. M.; AMBROSIO, L. A. Finite series expressions to evaluate the beam shape coefficients of a Laguerre–Gauss beam freely propagating. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, Elsevier, v. 227, p. 12–19, 2019.
- 57 VOTTO, L. F. M.; AMBROSIO, L. A.; GOUESBET, G. Evaluation of beam shape coefficients of paraxial laguerre–gauss beam freely propagating by using three remodeling methods. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, v. 239, p. 106618, 2019. ISSN 0022-4073. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022407319304297>.
- 58 AMBROSIO, L. A.; GOUESBET, G. Modified finite series technique for the evaluation of beam shape coefficients in the t-matrix methods for structured beams with application to bessel beams. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, v. 248, p. 107007, 2020. ISSN 0022-4073. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022407319309240>.

- 59 VALDIVIA, N. L.; AMBROSIO, L. A. Bessel-gauss beam description in the generalized lorenz-mie theory: the finite series method. In: **International Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC**. [S.l.]: SBMO, 2019.
- 60 LOCK, J. A.; GOUESBET, G. Rigorous justification of the localized approximation to the beam-shape coefficients in generalized lorenz-mie theory. i. on-axis beams. **JOSA A**, Optical Society of America, v. 11, n. 9, p. 2503–2515, 1994.
- 61 GOUESBET, G.; LOCK, J. A. Rigorous justification of the localized approximation to the beam-shape coefficients in generalized lorenz-mie theory. ii. off-axis beams. **JOSA A**, Optical Society of America, v. 11, n. 9, p. 2516–2525, 1994.
- 62 GOUESBET, G. Validity of the localized approximation for arbitrary shaped beams in the generalized Lorenz-Mie theory for spheres. **JOSA A**, Optical Society of America, v. 16, n. 7, p. 1641–1650, 1999.
- 63 GOUESBET, G.; LOCK, J. A. Comments on localized and integral localized approximations in spherical coordinates. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, v. 179, p. 132 – 136, 2016. ISSN 0022-4073. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022407316300255>>.
- 64 GOUESBET, G. On the validity of localized approximations for bessel beams: All n-bessel beams are identically equal to zero. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, v. 176, p. 82 – 86, 2016. ISSN 0022-4073. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022407316300383>>.
- 65 _____. On the validity of localized approximations for bessel beams: all n-bessel beams are identically equal to zero. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, Elsevier, v. 176, p. 82–86, 2016.
- 66 AMBROSIO, L. A.; GOUESBET, G. On localized approximations for laguerre-gauss beams focused by a lens. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, Elsevier, v. 218, p. 100–114, 2018.
- 67 _____. On the validity of the use of a localized approximation for helical beams. ii. numerical aspects. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, v. 215, p. 41 – 50, 2018. ISSN 0022-4073. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022407318301742>>.
- 68 AMBROSIO, L. A.; WANG, J.; GOUESBET, G. On the validity of the integral localized approximation for bessel beams and associated radiation pressure forces. **Applied Optics**, Optical Society of America, v. 56, n. 19, p. 5377–5387, 2017.
- 69 LOCK, J. A. Angular spectrum and localized model of davis-type beam. **J. Opt. Soc. Am. A**, OSA, v. 30, n. 3, p. 489–500, Mar 2013. Disponível em: <<http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-30-3-489>>.
- 70 MOREIRA, W. L. et al. Expansion of arbitrary electromagnetic fields in terms of vector spherical wave functions. **Opt. Express**, OSA, v. 24, n. 3, p. 2370–2382, Feb 2016. Disponível em: <<http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-24-3-2370>>.
- 71 AMBROSIO, L. A. Analytical descriptions of finite-energy bessel beams in the generalized lorenz-mie theory. In: IEEE. **2018 SBFoton International Optics and Photonics Conference (SBFoton IOPC)**. [S.l.], 2018. p. 1–5.

- 72 VALDIVIA, N. L.; AMBROSIO, L. A. On analytical descriptions of finite-energy paraxial frozen waves in generalized lorenz-mie theory. In: IEEE. **2017 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC)**. [S.l.], 2017. p. 1–5.
- 73 _____. Analytical description of paraxial higher-order frozen waves in generalized lorenz-mie theory: the finite-energy case. In: **Laser-Light and Interactions with Particles, College Station, TX, USA**. [S.l.: s.n.], 2018.
- 74 AMBROSIO, L. A. Superpositions of equal-frequency ordinary bessel beams: frozen waves for optical trapping and micromanipulation. In: **Laser-Light and Interactions with Particles, Marselha, França**. [S.l.: s.n.], 2014.
- 75 _____. Discrete superposition of equal-frequency bessel beams: Time-average forces exerted on dielectric and magnetodielectric rayleigh particles. In: IEEE. **2015 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC)**. [S.l.], 2015. p. 1–5.
- 76 ARANTES, P. et al. Método simples em óptica de raios para cálculo de forças radiais exercidas por superposições discretas de feixes de bessel escalares. In: **2016 Brazilian Congress on Electromagnetism**. [S.l.: s.n.], 2016.
- 77 MIE, G. Beiträge zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metallösungen. **Annalen der physik**, Wiley Online Library, v. 330, n. 3, p. 377–445, 1908.
- 78 LORENZ, L. Lysbevægelsen i og uden for en af plane Lysbølger belyst Kugle. [S.l.]: na, 1890.
- 79 LOCK, J. A.; GOUESBET, G. Generalized lorenz–mie theory and applications. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, Elsevier, v. 110, n. 11, p. 800–807, 2009.
- 80 GOUESBET, G. Generalized lorenz–mie theories, the third decade: a perspective. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, Elsevier, v. 110, n. 14-16, p. 1223–1238, 2009.
- 81 REN, K. F.; GOUESBET, G.; GRÉHAN, G. Integral localized approximation in generalized lorenz–mie theory. **Applied optics**, Optical Society of America, v. 37, n. 19, p. 4218–4225, 1998.
- 82 GOUESBET, G.; AMBROSIO, L. A.; LOCK, J. A. On an infinite number of quadratures to evaluate beam shape coefficients in generalized lorenz-mie theory and the extended boundary condition method for structured em beams. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, v. 242, p. 106779, 2020. ISSN 0022-4073. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022407319307575>>.
- 83 PODOLSKY, B.; PAULING, L. The momentum distribution in hydrogen-like atoms. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 34, p. 109–116, Jul 1929. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.34.109>>.
- 84 CREGG, P. J.; SVEDLINDH, P. Comment on ‘analytical results for a bessel function times legendre polynomials class integrals’. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, IOP Publishing, v. 40, n. 46, p. 14029–14031, oct 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1751-8113%2F40%2F46%2Fn01>>.

-
- 85 GOUESBET, G.; GREHAN, G.; MAHEU, B. Localized interpretation to compute all the coefficients gnm in the generalized lorenz–mie theory. **JOSA A**, Optical Society of America, v. 7, n. 6, p. 998–1007, 1990.
- 86 WATSON, G. **A Treatise on the Theory of Bessel Functions**. Cambridge University Press, 1995. (Cambridge Mathematical Library). ISBN 9780521483919. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Mlk3FrNoEVoC>>.
- 87 ROBIN, L. Fonctions sphériques de legendre et fonctions sphéroïdales, vol. 1, 2, 3. Gauthier-Villars, 1957.
- 88 LI, R. et al. Analysis of radiation pressure force exerted on a biological cell induced by high-order bessel beams using debye series. **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, Elsevier, v. 126, p. 69–77, 2013.
- 89 HERNÁNDEZ-FIGUEROA, H. E.; ZAMBONI-RACHED, M.; RECAMI, E. **Localized waves**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. v. 194.
- 90 _____. **Non-diffracting waves**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.
- 91 STRATTON, J. A. Electromagnetic theory. McGraw-Hill, 1941.
- 92 RACHED, M. Z. et al. Ondas localizadas aplicadas aos meios difrativos/dispersivos. [sn], 2004.
- 93 MULSER, P. Radiation pressure on macroscopic bodies. **JOSA B**, Optical Society of America, v. 2, n. 11, p. 1814–1829, 1985.
- 94 HULST, H. C.; HULST, H. C. van de. **Light scattering by small particles**. [S.l.]: Courier Corporation, 1981.
- 95 WILLIAMS, M. C. Optical tweezers: measuring piconewton forces. **Biophysics Textbook Online**: <http://www.biophysics.org/btol>, 2002.
- 96 GONG, L. et al. Generation of nondiffracting bessel beam using digital micromirror device. **Applied optics**, Optical Society of America, v. 52, n. 19, p. 4566–4575, 2013.
- 97 VASILYEU, R. et al. Generating superpositions of higher–order bessel beams. **Optics express**, Optical Society of America, v. 17, n. 26, p. 23389–23395, 2009.
- 98 HWANG, C.-Y.; KIM, K.-Y.; LEE, B. Bessel-like beam generation by superposing multiple airy beams. **Optics express**, Optical Society of America, v. 19, n. 8, p. 7356–7364, 2011.
- 99 ARNOLD, C. B.; MCLEOD, E. A new approach to adaptive optics for materials processing. **Photonics Spectra**, v. 41, n. 11, p. 78–79, 2007.
- 100 MCLAREN, M. et al. Entangled Bessel-Gaussian beams. **Optics express**, Optical Society of America, v. 20, n. 21, p. 23589–23597, 2012.
- 101 DARTORA, C. et al. Study of frozen waves’ theory through a continuous superposition of bessel beams. **Optics & Laser Technology**, Elsevier, v. 39, n. 7, p. 1370–1373, 2007.

102 CORATO-ZANARELLA, M.; ZAMBONI-RACHED, M. Electromagnetic frozen waves with radial, azimuthal, linear, circular, and elliptical polarizations. **Physical Review A**, APS, v. 94, n. 5, p. 053802, 2016.

103 AMBROSIO, L. A. Millimeter-structured nondiffracting surface beams. **J. Opt. Soc. Am. B**, OSA, v. 36, n. 3, p. 638–645, Mar 2019. Disponível em: <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-36-3-638>.

104 BOUCHAL, Z. Controlled spatial shaping of nondiffracting patterns and arrays. **Optics letters**, Optical Society of America, v. 27, n. 16, p. 1376–1378, 2002.

105 RECAMI, E.; ZAMBONI-RACHED, M. Localized waves: a review. In: **Advances in Imaging and Electron Physics**. [S.l.]: Elsevier, 2009. v. 156, p. 235–353.

106 GUIZAR-SICAIROS, M.; GUTIÉRREZ-VEGA, J. C. Propagation of helmholtz-gauss beams in absorbing and gain media. **JOSA A**, Optical Society of America, v. 23, n. 8, p. 1994–2001, 2006.

107 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. Bessel functions. In: **Mathematical methods for physicists**. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2003. cap. 12, p. 589–637.

Anexos

**ANEXO A – BESSEL-GAUSS BEAMS IN THE GENERALIZED
LORENZ-MIETHEORY USING THREE REMODELING TECHNIQUES.
ENVIADO PARA PUBLICAÇÃO NA JOURNAL OF QUANTITATIVE
SPECTROSCOPY AND RADIATIVE TRANSFER**

Bessel-Gauss beams in the generalized Lorenz-Mie theory using three remodeling techniques

Nereida C. L. Valdivia^a, Luiz F. M. Votto^a, Gérard Gouesbet^b, Jiajie Wang^c, Leonardo A. Ambrosio^a

^a*Department of Electrical and Computer Engineering. São Carlos School of Engineering, University of São Paulo. 400 Trabalhador são-carlense Ave. 13566-590, São Carlos, SP, Brazil.*

^b*CORIA-UMR 6614 - Normandie Université. CNRS-Université et INSA de Rouen. Campus Universitaire du Madrillet. 76800, Saint-Etienne du Rouvray, France.*

^c*School of Physics and Optoelectronic Engineering, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China.*

Abstract

In the analysis of light scattering by small particles, the Generalized Lorenz-Mie Theory (GLMT) describes the incident beam with a set of Beam Shape Coefficients (BSCs) that can be calculated with three different approaches, viz., quadratures, finite series and localized approximations. Choosing between them may not be self-evident. A Bessel-Gauss beam (BGB) is a finite energy, physically realizable wave field resulting from the apodization of a Bessel beam by a Gaussian function. This paper provides a comparison between the aforementioned techniques for the evaluation of the BSCs of scalar BGBs with distinct axicon angles and confinement parameters, including field reconstructions. All three methods agree quite well in the paraxial regime, although as the axicon angle or the topological charge increases, differences in the BSCs for each method become more and more evident.

1. Introduction

2 The generalized Lorenz-Mie theory (GLMT), as originally appeared during
3 the beginning 80's, deals with the scattering problem between an arbitrary-
4 shaped beam and a homogeneous spherical particle [1]. The incident, scat-
5 tered and internal wave fields are expanded in terms of special functions either
6 having recourse to vector spherical wave functions (VSWFs) [2, 3, 4, 5], or

7 to auxiliary scalar fields such as the Bromwich potentials [6, 7, 8] The coeffi-
8 cients of the expansion for the incident beam are the beam shape coefficients
9 (BSCs) and carry all information regarding the spatial shape of the beam
10 relative to a plane wave.

11 Finding the TM (Transverse Magnetic) and TE (Transverse Electric)
12 BSCs $g_{m, \text{TM}}^n$ and $g_{m, \text{TE}}^n$ ($1 \leq n < \infty$, $-n \leq m \leq +n$), respectively, may
13 not always be an easy or computationally effortless task. The most general
14 method – the quadrature scheme – relies on the calculation of time-consuming
15 double or triple integrations with highly oscillating integrands [9, 10]. An-
16 other technique for calculating BSCs, the Finite Series (FS) method, despite
17 being exact for Maxwellian beams and avoiding complicated integrations over
18 the polar coordinates, has only been developed for a few beams (Gaussian
19 [11, 12], laser-sheet [13] and, more recently, Laguerre-Gauss [14, 15], Bessel
20 [16] and Bessel-Gauss beams [17]), some of which with an intrinsic scalar
21 nature.

22 The last of the arsenal of techniques available for the evaluation of the
23 BSCs is the localized approximation (LA) [18]. As it names states, it is
24 an approximation based on van de Hulst principle of localization, but has
25 been rigorously justified for Gaussian beams by Gouesbet and Lock [19, 20]
26 and also for “arbitrary-shaped” beams carrying an exponential propagation
27 factor $\exp(\pm ikz)$, where k is the wave number [21, 22]. Its widespread use
28 has been a consequence of both reliable calculations for paraxial Gaussian
29 beams and its ability to speed up computations by orders of magnitude with
30 respect to quadratures whenever the latter cannot be analytically resolved.

31 It has been recently shown, both analytically [23, 24] and from explicit
32 calculations of BSCs and electric field reconstructions, that the LA fails for
33 several classes of Maxwellian or non-Maxwellian wave fields which are also
34 “arbitrary-shaped” in their own right, e.g. Bessel beams (BBs) and helicoidal
35 beams such as Laguerre-Gauss beams [25, 26, 27]. Works having support on
36 the LA for prediction of optical properties in the context of the GLMT had to
37 be subsequently revisited (see, e.g., Refs. [28, 25, 29, 30, 31, 32]. The failure
38 of the LA has then been observed for beams with propagation factors other
39 than $\exp(\pm ikz)$, with different degrees of paraxiality and having distinct
40 topological charges.

41 Choosing between quadrature schemes, FS or LA may not be so easy.
42 For BBs, explicit and analytic formulas for the BSCs can be found from both
43 quadrature [33] and FS methods [16], and the use of LA schemes should be
44 avoided. However, in practice ideal and paraxial BBs are more accurately

45 described by their finite-energy versions, viz. Bessel-Gauss beams (BGBs)
46 [34], whose BSCs cannot be analytically extracted from quadratures. It is of
47 interest, therefore, to have reliable descriptions of BGBs in the GLMT either
48 from FS or LA. Part of this task has been accomplished recently by Ambrosio
49 for zero-order BGBs using a LA scheme [35], Valdivia and Ambrosio for finite-
50 energy zero-order [30] and higher-order [31] *frozen waves* again using the LA
51 and in a first attempt to introduce the FS method for BGBs [17]. There
52 still remains a comparison between the three methods in terms of the BSCs
53 for distinct axicon angles and orders and of field reconstructions and beam
54 remodeling in the GLMT.

55 This paper is devoted to the task of providing a comparison between
56 quadrature, LA and FS BSCs for arbitrary-order scalar BGBs, perhaps the
57 last of a series of “arbitrary-shaped” beams used to describe optical proper-
58 ties with the aid of LA BSCs, but which do not satisfy the “arbitrariness”
59 conditions stated in Ref. [21] to fully justify the use of localized schemes.
60 The choice of a scalar beam has several reasons. First, its BSCs have al-
61 ready been computed using the LA. Second, intractable expressions for the
62 longitudinal electric field and for the magnetic field appear from Gauss’ and
63 Fadaray’s law if we were to consider Maxwellian BGBs. Finally, even if we
64 could deal with such expressions for the fields, evaluation of their BSCs from
65 FS and numerical computation of quadratures would be so prohibitive that
66 we would have to give up the task proposed here.

67 In Section 2, analytic expressions are derived for the LA and FS BSCs.
68 Computations are provided in Section 3 for distinct topological charges and
69 axicon angles, from paraxial to non-paraxial beams. Electric field reconstruc-
70 tion is considered first to illustrate the remodeling of the BGB in the GLMT
71 so as satisfy Maxwell’s equations, and second to serve as a checking for the
72 validity of the LA and give further support to the use of the FS, which has
73 been largely overlooked over the last decades. Section 4 is a conclusion.

74 2. Background

75 BBs carry resistance to diffraction and self-reconstruction [36], which are
76 compelling characteristics for diverse optical applications. In practice, how-
77 ever, they can be more appropriately described in terms of BGBs.

78 A BGB results from apodization of a BB by a Gaussian beam, which
79 truncates the BB in order to obtain a finite energy, physically realizable beam
80 [34, 37]. The BGB can be computed with the Fresnel diffraction integral,

81 considering the paraxial approximation [34, 38, 39]. Following the notation
 82 in Ref. [37] and omitting a time-dependent factor $\exp(+i\omega t)$, where ω is
 83 the angular frequency, a BGB can be written using a cylindrical coordinate
 84 system (ρ, ϕ, z) as:

$$\begin{aligned} \Psi_{BGB}(\rho, \phi, z) = & \frac{E_0}{\mu} \exp\left(-q^2 \frac{\rho^2}{\mu}\right) J_v\left(k_\rho \frac{\rho}{\mu}\right) \\ & \times \exp\left(i \frac{k_\rho^2}{2k} \frac{z}{\mu}\right) e^{iv\phi} e^{-ikz}, \end{aligned} \quad (1)$$

85 where $J_v(\cdot)$ is the v -th order Bessel function of the first kind, $k = 2\pi/\lambda$
 86 is the wave number (λ is the wavelength) and $k_\rho = k \sin \alpha$ its transverse
 87 component, α being the axicon angle. In (1), E_0 is the electric field strength,
 88 $q = 1/w_0 \in \text{Re}$ is a parameter that regulates the transverse intensity width
 89 of the Gaussian apodization, with w_0 being the beam waist radius, and $\mu =$
 90 $1 - i2ks^2z$, where $s = 1/kw_0$ is the confinement factor.

91 2.1. Analytical description of BGBs using ILA

92 In the GLMT, the TM and TE BSCs $g_{n,TM}^m$ and $g_{n,TE}^m$ are completely
 93 described from the radial electric (E_r) and magnetic (H_r) field components
 94 using a spherical coordinate system (r, θ, ϕ) . To obtain a vector beam from
 95 (1), we take Ψ_{BGB} to represent a transverse electric field component, say the
 96 x component, i.e., $\mathbf{E} \approx E_x \hat{x} = \Psi_{BGB} \hat{x}$. Therefore, $E_r = \Psi_{BGB} \sin \theta \cos \phi$,
 97 and the magnetic field \mathbf{H} has only a y component which can be calculated
 98 from Faraday's law. Displacing the beam by (ρ_0, ϕ_0, z_0) with respect to the
 99 particle, whose center is supposed to coincide with the origin of the spherical
 100 coordinate system, one then has from (1),

$$\begin{aligned} E_r(\rho, \phi, z) = & E_0 \frac{1}{\mu} \exp\left(-q^2 \frac{\rho_G^2}{\mu}\right) J_v\left(k_\rho \frac{\rho_G}{\mu}\right) \exp\left(i \frac{k_\rho^2}{2k} \frac{(z - z_0)}{\mu}\right) \\ & \times e^{-ik(z-z_0)} e^{iv\phi_G} \sin \theta \cos \phi, \end{aligned} \quad (2)$$

101 with $\rho_G = [\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)]^{1/2}$ and $\phi_G = \tan^{-1}[(\rho \sin \phi - y_0)/(\rho \cos \phi -$
 102 $x_0)]$.

103 The ILA follows prescribed steps for the evaluation of the BSCs [40]. To
 104 eliminate the dependence on r and θ , an operator \hat{G} is applied. \hat{G} follows the

105 localization principle of van de Hulst, which sets $kr \rightarrow n + 1/2$ and $\theta \rightarrow \pi/2$
 106 [18]. Finally, an integration over ϕ is performed [40]:

$$g_{n, TM}^m = \frac{Z_n^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{G}(E_r/E_0) e^{-im\phi} d\phi, \quad (3)$$

107 where Z_n^m are pre-factors that depend only on n and m [40]. The TE BSCs
 108 are found by replacing E_r/E_0 by H_r/H_0 (H_0 is the magnetic field strength)
 109 in (3).

110 Substituting (2) in (3) and after some algebra, the TM and TE BSCs are
 111 found to read as

$$\begin{aligned} g_{n, \begin{pmatrix} TM \\ TE \end{pmatrix}}^m &= \frac{Z_n^m}{2\bar{\mu}} F_p \exp\left(\frac{-ik \sin^2 \alpha z_0}{2\bar{\mu}}\right) \exp\left[\frac{-s^2 (w_p^2 + \xi_p^2)}{\sin^2 \alpha \bar{\mu}}\right] \\ &\times \left\{ \frac{\gamma_n - i\delta_n}{2} e^{-i(m-v)\phi_0} [2J_m(w_p)J_{m-v}(\xi_p)f(\phi_0) \right. \\ &\pm J_{m-2}(w_p)J_{m-2-v}(\xi_p)e^{i\phi_0} \pm e^{-i\phi_0} J_{m+2}(w_p) \\ &\times J_{m+2-v}(\xi_p)] + e^{-i(m-v+1)\phi_0} [e^{2i\phi_0} J_{m-1}(w_p) \\ &\times J_{m-1-v}(\xi_p) \pm J_{m+1}(w_p)J_{m+1-v}(\xi_p)] \left. \right\} e^{ikz_0}, \end{aligned} \quad (4)$$

112 with $F_p = 1$ and $f(\phi_0) = \cos \phi_0$ for TM and $F_p = i[1 + (\cos \alpha - 1)/\bar{\mu}]$
 113 and $f(\phi_0) = \sin \phi_0$ for TE BSCs, $\bar{\mu} = 1 + i2ks^2z_0$, $\gamma_n = 2k^2s^2\rho_0(n + 1/2)$,
 114 $\delta_n = 4s^4k^2\rho_0z_0(n + 1/2)$, $w_p = (n + 1/2) \sin \alpha$ and $\xi_p = k\rho_0 \sin \alpha$. Expressions
 115 similar to Eq. (4) have recently been obtained for finite-energy versions of
 116 *frozen wave*-type beams by Valdivia and Ambrosio [30, 31].

117 2.2. Analytical description of BGBs using FS

118 The computation of BSCs using the FS method has its roots in the Neu-
 119 mann expansion theorem (NET) procedure, which is well detailed elsewhere
 120 [18, 14]. Here we shall present the main steps required to obtain analytical
 121 FS BSCs for on-axis arbitrary-order BGBs, the off-axis case being found from
 122 the one presented here by having recourse to translation addition theorems.
 123 So, setting $\rho_0 = \phi_0 = z_0 = 0$ in (2) and writing the expression in terms of r ,

124 θ and ϕ , one gets

$$\begin{aligned}
E_r(r, \theta, \phi) = & \frac{E_0}{\mu} \exp(-ikr \cos \theta) \exp\left(-\frac{k^2 r^2 s^2 \sin^2 \theta}{\mu}\right) \\
& \times \exp\left(\frac{-ikr \sin^2 \alpha \cos \theta}{\mu}\right) J_\nu\left(\frac{k \sin \alpha r \sin \theta}{\mu}\right) \\
& \times e^{iv\phi} \sin \theta \cos \phi.
\end{aligned} \tag{5}$$

125 In the NET-procedure the radial field components and the BSCs are
126 linked by [18]:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} E_r \\ H_r \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} c_n^{pw} \begin{pmatrix} g_{n,TM}^m \\ g_{n,TE}^m \end{pmatrix} \\
& \times \frac{n(n+1)}{r} j_n(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi)
\end{aligned} \tag{6}$$

127 where $P_n^{|m|}(\cdot)$ are the associated Legendre functions, and c_n^{pw} are the expansion
128 Bromwich coefficients in the LMT and H_0 is the magnetic field strength
129 [14].

130 For establishing FS expressions from the NET-procedure, the BSCs are
131 calculated separately depending on the even or odd parity of $(n - m)$. The
132 procedure specifies $\theta = \pi/2$ in (5) for $(n - m)$ even and $(\partial E_r / \partial \cos \theta)_{\theta=\pi/2}$
133 for the odd case, in order to discard dependency on θ and take advantage of
134 specific expressions and non-zero values of the associated Legendre functions
135 and their derivatives [18, 14].

136 In view of that and using the fact that the spherical Bessel function $j_n(x)$
137 is related to half-order Bessel functions of the first kind through $j_n(x) =$
138 $\sqrt{\pi/2x} J_{n+1/2}(x)$, the TM-BSCs for $(n - m)$ even can be put into the form
139 [18]:

$$\begin{aligned}
(kr)^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} r E_r \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) e^{-im\phi} d\phi = & \pi \sqrt{2\pi} E_0 \\
& \times \sum_{n=|m|}^{\infty} \frac{(-i)^n}{ik} 2n + 1 g_{n,TM}^m P_n^{|m|}(0) J_{n+1/2}(kr),
\end{aligned} \tag{7}$$

140 while for $(n - m)$ odd:

$$\begin{aligned}
& (kr)^{1/2} \int_0^{2\pi} r \left[\frac{\partial}{\partial \cos \theta} E_r \right]_{\theta=\pi/2} \exp(-im\varphi) d\varphi \\
& = \pi \sqrt{2\pi} E_0 \sum_{n=|m|, (n-m) \text{ odd}}^{\infty} \frac{(-i)^n}{ik} 2n + 1 g_{n, TM}^m \\
& \quad \times \left[\frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d \cos \theta} \right]_{\cos \theta=0} J_{n+1/2}(kr).
\end{aligned} \tag{8}$$

141 *2.2.1. TM-BSCs, $(n - m)$ even*

142 From (5) and defining $x = kr$, (7) becomes, after performing the integra-
 143 tion over ϕ :

$$\begin{aligned}
& x^{1/2} g(x) [\delta_{m, v+1} + \delta_{m, v-1}] \\
& = \sum_{n=|m|, (n-m) \text{ even}}^{\infty} (-i)^n (2n + 1) g_{n, TM}^m P_n^{|m|}(0) J_{n+1/2}(x)
\end{aligned} \tag{9}$$

144 Comparison between Eqs. (9) and (5) allows one to write:

$$g(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} x \exp(-x^2 s^2) J_v(x \sin \alpha), \tag{10}$$

145 The NET procedure considers an expansion of the following form [14]:

$$x^{1/2} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_{n+1/2}(x), \tag{11}$$

146 and states that, if $g(x)$ in (11) can be expanded in a Maclaurin series, viz.,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \tag{12}$$

147 then the coefficients c_n are given in terms of the coefficients b_n according to:

148

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=0}^{\leq n/2} 2^{\frac{1}{2}+n-2p} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n - p)}{p!} b_{n-2p}. \tag{13}$$

149 In (13), $\Gamma(\cdot)$ are gamma functions. Comparison between the left hand
 150 sides of Eqs. (7) and (11) allows us to determine the TM BSCs $g_{n, TM}^m$ from
 151 c_n , once the coefficients b_n in (12) have been properly found and replaced in
 152 (13).

153 To do so, let us rewrite (10) in the form of (12). The idea here is to work
 154 with the Bessel function as defined in terms of a series expansion [41]:

$$J_v(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+v} \quad (14)$$

155 Rewriting (10) using (14) along with the exponential function in the form
 156 of a power series and after some rearrangement, we obtain:

$$g(x) = G \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} E_v(j, t) x^{2t} x^{2j+v+1} \quad (15)$$

157 where $G = i/\sqrt{2\pi}$ and

$$E_v(j, t) = \frac{(-1)^{j+t}}{(t)! j! \Gamma(j+v+1)} \left(\frac{\sin \alpha}{2}\right)^{2j+v} s^{2t} \quad (16)$$

158 To display (15) in the form of a Maclaurin expansion of the function $g(x)$,
 159 we set $n = 2j + v + 1$ and rearrange it. After some algebra, one gets:

$$b_n = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \sum_{t=0}^{\infty} \varepsilon(n; 0, 1, \dots, v+2t) E_v(t) \quad (17)$$

160 where now, instead of (16),

$$E_v(t) = \frac{(-1)^{\frac{n-v-1}{2}}}{t! \left(\frac{n-2t-v-1}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2t-v+1}{2}\right)} \left(\frac{\sin \alpha}{2}\right)^{n-2t-1} s^{2t} \quad (18)$$

161 Finally, the explicit expressions for the TM-BSCS with even parity on
 162 $(n - m)$ become:

$$\begin{aligned} g_{n, TM}^{v+1} &= \frac{i^{n+1}}{2^{v+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+v+2}{2}\right)} \sum_{p=0}^{\leq n/2} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{n-p} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n - p\right)}{\Gamma(p+1)} \\ &\times \frac{\varepsilon(n - 2p - 2t; v) (2s)^{2t} (\sin \alpha)^{n-2p-1-2t}}{\Gamma(t+1) \Gamma\left(\frac{n-v+1}{2} - p - t\right) \Gamma\left(\frac{n+v+1}{2} - p - t\right)}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
g_{n,\text{TM}}^{v-1} &= \frac{i^{n+1}}{2^{v-1}} \frac{\Gamma(\frac{n-v+3}{2})}{\Gamma(\frac{n+v}{2})} \sum_{p=0}^{\leq n/2} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{n-p-1} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n - p)}{\Gamma(p+1)} \\
&\times \frac{\varepsilon(n-2p-2t; v)(2s)^{2t}(\sin \alpha)^{n-2p-1-2t}}{\Gamma(t+1)\Gamma(\frac{n-v+1}{2} - p - t)\Gamma(\frac{n+v+1}{2} - p - t)},
\end{aligned} \tag{20}$$

163 where $\varepsilon(n-2p-2t; v) = 0$ for all $n-2p-2t \leq v$, and 1 otherwise. The
164 BSCs $g_{n,\text{TM}}^{-1}$ are obtained from Eq.(19), for $n > 1$ even, after imposing $v = 0$.
165 In Eqs. (19) and (20), the only non-zero BSCs are those with $m = v \pm 1$
166 (on-axis case).

167 *2.2.2. TM-BSCs, $(n-m)$ odd.*

168 The procedure for determining the TM BSCs for $(n-m)$ odd is similar
169 to the previous one, now starting with (8), which requires us to evaluate the
170 derivative $[\partial E_r / \partial \cos \theta]_{\theta=\pi/2}$ from (5):

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial E_r(\cos \theta)}{\partial \cos \theta} \right]_{\theta=\pi/2} &= iE_0 e^{iv\phi} \cos \phi \exp(-x^2 s^2) x \\
&\times \left\{ \begin{aligned} &[-1 - \sin^2 \alpha + 2s^2(v-1) + 2x^2 s^4] \\ &\times J_v(x \sin \alpha) - 2s^2 x \sin \alpha J_{v-1}(x \sin \alpha) \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{21}$$

171 One now obtains $g(x)$ from (8) using (21):

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} x^2 \exp(-s^2 x^2) \left\{ \begin{aligned} &-2s^2 \sin \alpha x J_{v-1}(x \sin \alpha) \\ &+ [-1 - \sin^2 \alpha + 2s^2(v-1) + 2s^4 x^2] \\ &\times J_v(x \sin \alpha) \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{22}$$

172 Next, we rewrite (22) under the form:

$$g(x) = Gx^2 \exp(-s^2x^2) \left\{ HxJ_{v-1}(x \sin \alpha) - [Kv + Qx^2] J_v(x \sin \alpha) \right\} \quad (23)$$

173 where $G = 1/\sqrt{2\pi}$, $H = 2s^2 \sin \alpha$, $Q = 2s^4$ and $K_v = [-1 - \sin^2(\alpha) + 2s^2(v-1)]$.
 174 With the aid of (14) and of power series expansion for exponential functions,
 175 (23) can be put into the following form:

$$\begin{aligned} g(x) &= Gx^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-s^2x^2)^t}{t!} Hx \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(j+v)} \left(\frac{x \sin \alpha}{2}\right)^{2j+v-1} \\ &\quad - Gx^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-s^2x^2)^t}{t!} K_v \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(j+v+1)} \left(\frac{x \sin \alpha}{2}\right)^{2j+v} \\ &\quad - Gx^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-s^2x^2)^t}{t!} Qx^2 \frac{(-1)^j}{j!\Gamma(j+v+1)} \left(\frac{x \sin \alpha}{2}\right)^{2j+v} \\ &= G[g_1(x) - g_2(x) - g_3(x)]. \end{aligned} \quad (24)$$

176 Working separately on $g_1(x)$, $g_2(x)$ and $g_3(x)$ and rearranging, (24) be-
 177 comes

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \varepsilon_t(n-2t-1; v) 2s^2 \sin \alpha E_{1v}(t) \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon_t(n-2t-1; v) \left[-1 - \sin^2 \alpha + 2s^2(v-1) \right] \right. \\ &\quad \left. \times E_{2v}(t) - \varepsilon_t(n-2t-3; v) 2s^4 E_{3v}(t) \right\} x^n \end{aligned} \quad (25)$$

178 where

$$E_{1v}(t) = \frac{(-1)^{\frac{n-v-2}{2}}}{\left(\frac{n-2t-v-2}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2t+v-2}{2}\right) t!} \left(\frac{\sin \alpha}{2}\right)^{n-2t-3} s^{2t} \quad (26)$$

$$E_{2v}(t) = \frac{(-1)^{\frac{n-v-2}{2}}}{\left(\frac{n-2t-v-2}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2t+v}{2}\right) t!} \left(\frac{\sin \alpha}{2}\right)^{n-2t-2} s^{2t} \quad (27)$$

$$E_{3v}(t) = \frac{(-1)^{\frac{n-v-4}{2}}}{\left(\frac{n-2t-v-4}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{n-2t+v-2}{2}\right) t!} \left(\frac{\sin \alpha}{2}\right)^{n-2t-4} s^{2t} \quad (28)$$

179 The b_n 's are immediately extracted from Eqs. (25)-(28):

$$\begin{aligned} b_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{t=0}^{\infty} & \left\{ \varepsilon_t(n-2t-1; v) 2s^2 \sin \alpha E_{1v}(t) \right. \\ & - \varepsilon_t(n-2t-1; v) \left[-1 - \sin^2 \alpha + 2s^2(v-1) \right] \\ & \left. \times E_{2v}(t) - \varepsilon_t(n-2t-3; v) 2s^4 E_{3v}(t) \right\} \quad (29) \end{aligned}$$

180 Finally, the expressions for the TM BSCs with $(n-m)$ odd are found
181 from comparison between (8), (12) and (29):

$$\begin{aligned} g_{n, TM}^{v+1} = \frac{i^n}{2^{v+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+v}{2} + \frac{3}{2}\right)} & \sum_{p=0}^{\leq n/2} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n - p\right)}{\Gamma(p+1)} \frac{(-1)^{n-p-1}}{\Gamma(t+1)} \\ & \times (\sin \alpha)^{n-2p-2t-2} (2s)^{2t} \left\{ \varepsilon_t(n-2p-2t-1; v) \right. \\ & \times \frac{2^2 s^2}{\Gamma\left(\frac{n-2p-2t-v}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-2p-2t+v-2}{2}\right)} - \varepsilon_t(n-2p-2t-1; v) \\ & \times \frac{[-1 - \sin^2 \alpha + 2s^2(v-1)]}{\Gamma\left(\frac{n-2p-2t-v}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-2p-2t+v}{2}\right)} + \varepsilon_t(n-2p-2t-3; v) \\ & \left. \frac{2^3 s^4 (\sin \alpha)^{-2}}{\Gamma\left(\frac{n-2p-2t-v-2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-2p-2t+v-2}{2}\right)} \right\}, \quad (30) \end{aligned}$$

182 for $n \geq v + 1$ ($v \geq 0$) and $(n - v)$ even, and

$$\begin{aligned}
g_{n, TM}^{v-1} &= \frac{i^n}{2^{v-1}} \frac{\Gamma(\frac{n-v}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{n+v}{2} + \frac{1}{2})} \sum_{p=0}^{\leq n/2} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n - p)}{\Gamma(p + 1)} \frac{(-1)^{n-p-2}}{\Gamma(t + 1)} \\
&\times (\sin \alpha)^{n-2p-2t-2} (2s)^{2t} \left\{ \varepsilon_t(n - 2p - 2t - 1; v) \right. \\
&\times \frac{2^2 s^2}{\Gamma(\frac{n-2p-2t-v}{2}) \Gamma(\frac{n-2p-2t+v-2}{2})} - \varepsilon_t(n - 2p - 2t - 1; v) \quad (31) \\
&\times \frac{[-1 - \sin^2 \alpha + 2s^2(v - 1)]}{\Gamma(\frac{n-2p-2t-v}{2}) \Gamma(\frac{n-2p-2t+v}{2})} + \varepsilon_t(n - 2p - 2t - 3; v) \\
&\left. \frac{2^3 s^4 (\sin \alpha)^{-2}}{\Gamma(\frac{n-2p-2t-v-2}{2}) \Gamma(\frac{n-2p-2t+v-2}{2})} \right\},
\end{aligned}$$

183 for $n \geq v - 1$ ($v > 0$, $n \geq 1$) and $(n - v)$ even.

184 The BSCs $g_{n, TM}^{-1}$ are again extracted from (30) by setting $v = 0$ ($n > 1$
185 even). For the TE BSCs $g_{n, TE}^m$, they are directly calculated from the TM
186 BSCs through the use of the symmetry relations $g_{n, TM}^{v\pm 1} = \pm i g_{n, TE}^{v\pm 1}$ ($v \geq 0$)
187 [14].

188 3. Examples

189 In the previous section we have derived all BSCs for describing BGBs in
190 the GLMT using both LA and FS approaches. In this Section we compute
191 these BSCs and compare them with those obtained from quadrature with
192 double integration [18]. The reconstruction of the radial electric field compo-
193 nents is also presented as a test of validity for the methods here considered.

194 3.1. Comparison of BSCs.

195 An algorithm has been written using the commercial software *Mathemat-*
196 *ica 12 Student Edition*, based on Eq. (4) for LA BSCs and Eqs. (19), (20),
197 (30) and (31) for FS BSCs. We have calculated coefficients for four differ-
198 ent topological charges, viz., $v = 0, 2, 5$, and 15 , and for two confinement
199 parameters $s = 0.001$ and 0.05 for axicon angles of $\alpha = 2^\circ$ and 10° .

200 In Figs. 1 and 2, plots of the quadrature, ILA and FS BSCs are presented
201 as a function of n [or $(n - m)$] so that the horizontal axis always starts from

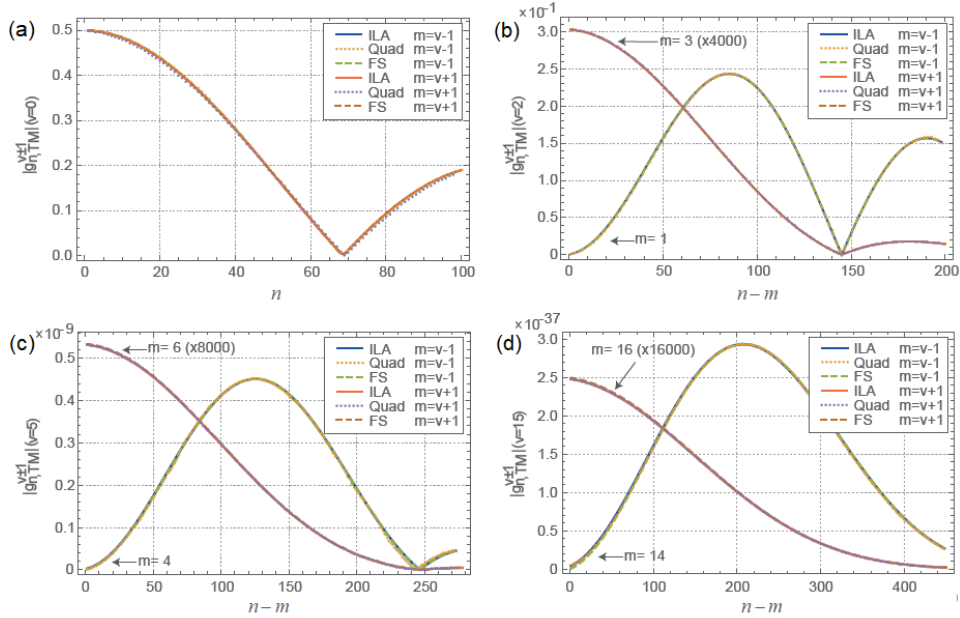


Figure 1: $|g_{n,TM}^{v\pm 1}|$ when $s = 0.001$ and $\alpha = 2^\circ$ for (a) $v = 0$, (b) $v = 2$, (c) $v = 5$, and (d) $v = 15$. To have all BSCs starting from unity in the horizontal axis, the latter has been defined as $n - m$ in (b)-(d) and in (f)-(h).

202 unity] with a confinement parameter $s = 0.001$ for $\alpha = 2^\circ$ [Fig. 1] and 10°
 203 [Fig. 2]. The curves are formed by a set of discrete points over n that have
 204 been joined for better visualization. For $\alpha = 2^\circ$, a good agreement between
 205 the BSCs for all three methods is observed. This is expected, since in the
 206 paraxial regime localized approximations also provide reliable values of BSCs
 207 [25, 28] even for large topological charges.

208 However, for $\alpha = 10^\circ$, subtle differences can be appreciated, especially
 209 for the FS BSCs. This issue has also been observed for Laguerre-Gauss
 210 beams [15] and is intimately connected to the fact that the original beam
 211 is a solution of the scalar wave equation which obviously will not exactly
 212 satisfy Maxwell's equations. Therefore, although all three methods agree
 213 quite well in the paraxial regime ($s \ll 1$ and low α), as α increases each
 214 method remodels the beam into a vector one in a very particular fashion.

215 In Figs. 3 and 4 plots of the BSCs are presented again for $\alpha = 2^\circ$
 216 and 10° , respectively, but now with a confinement parameter $s = 0.05$. In
 217 this case, some discrepancies are observed for both axicon angles and all

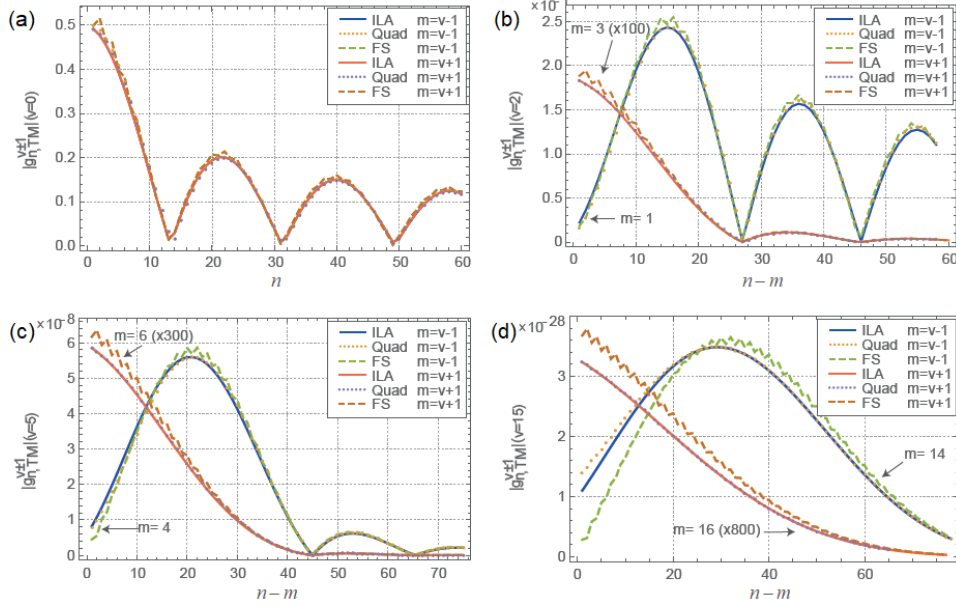


Figure 2: Same as Fig. 1, for $\alpha = 10^\circ$.

218 v values, the disagreement being more evident as α and v increase. As
 219 mentioned previously, for very small s and low α , the results obtained for
 220 the different methods are in accordance. Here, however, the increment of
 221 the confinement parameter also influences in the degree of paraxiality of
 222 the BGB. Therefore, higher values of s makes the discrepancies between the
 223 methods clearly visible.

224 Another important feature of the FS BSCs is the increasing oscillations
 225 on their curves due to variations between the values of the BSCs for $(n - m)$
 226 odd and even (this has also been observed for Laguerre-Gauss beams [15]).
 227 This is more pronounced for high topological charges and axicon angles, and
 228 FS BSCs for $(n - m)$ even are in better agreement with the other methods.
 229 In fact, such peculiar behavior may be interpreted as a response of the FS
 230 to the scalar nature of the original beam and its description in terms of a
 231 TEM vector wave field. It can be explained as follows. For $(n - m)$ odd,
 232 the choice $\pi/2$ automatically eliminates any contribution of a longitudinal
 233 electric field component. Therefore, Eqs. (19) and (20) are insensitive to the
 234 existence of a longitudinal field component, the same being applied to TE
 235 BSCs with $(n - m)$ even. However, when one evaluates $\partial E_r / \partial \cos \theta|_{\theta=\pi/2}$,

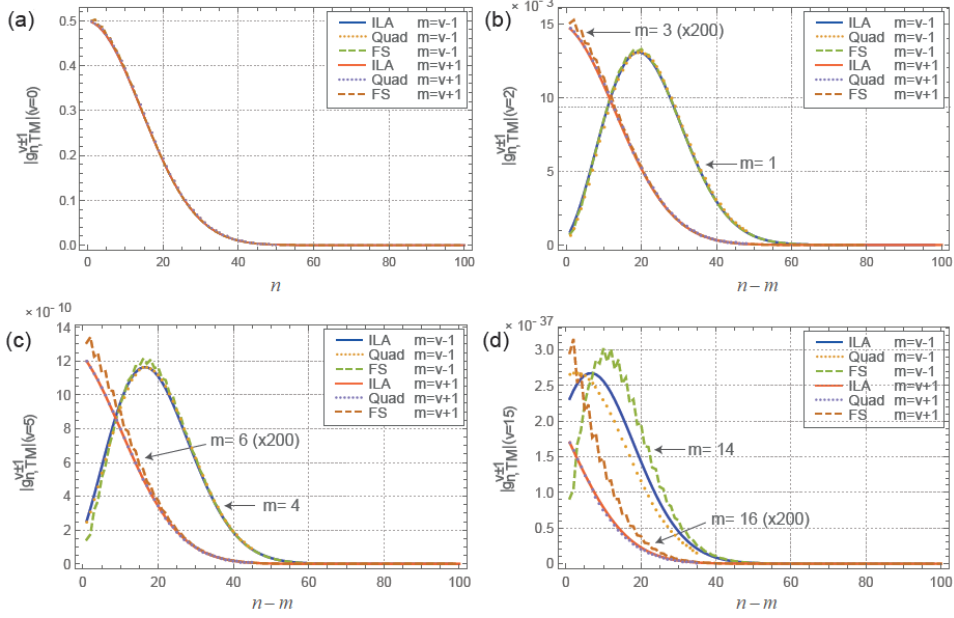


Figure 3: Same as Fig. 1, for $s = 0.05$.

236 a E_z component would certainly affect the final expressions [Eqs. (30) and
 237 (31)] for the TM BSCs with $(n-m)$ odd. Had we started with a vector beam,
 238 the FS curves in Figs. 1 to 2 would certainly exhibit a smoother pattern.

239 Similar results have been obtained for $s = 0.01$ and $s = 0.1$, including
 240 axicon angles as high as 40° , but they shall not be reproduced here. The
 241 conclusions and observations outlined in the preceding paragraphs hold true
 242 regardless of any other choices of such parameters.

243 3.2. Electrical field intensity profile

244 To complement the information on the BSCs and to check the remodeling
 245 of the BGB, we have also reconstructed the radial electric field component
 246 using the TM BSCs presented in the previous section and having recourse
 247 to the double integral of the quadrature scheme [18]. Results are presented
 248 for topological charges of $v = 0, 2$ and 5 . Figure 5 corresponds to $\alpha = 2^\circ$
 249 and $s = 0.001$, while in Fig. 6 density plots are presented for $\alpha = 10^\circ$ and
 250 $s = 0.05$.

251 For $\alpha = 2^\circ$ and $s = 0.001$ [Fig. 5], the field intensity profiles are very
 252 similar for all values of topological charges, and the three remodeling methods

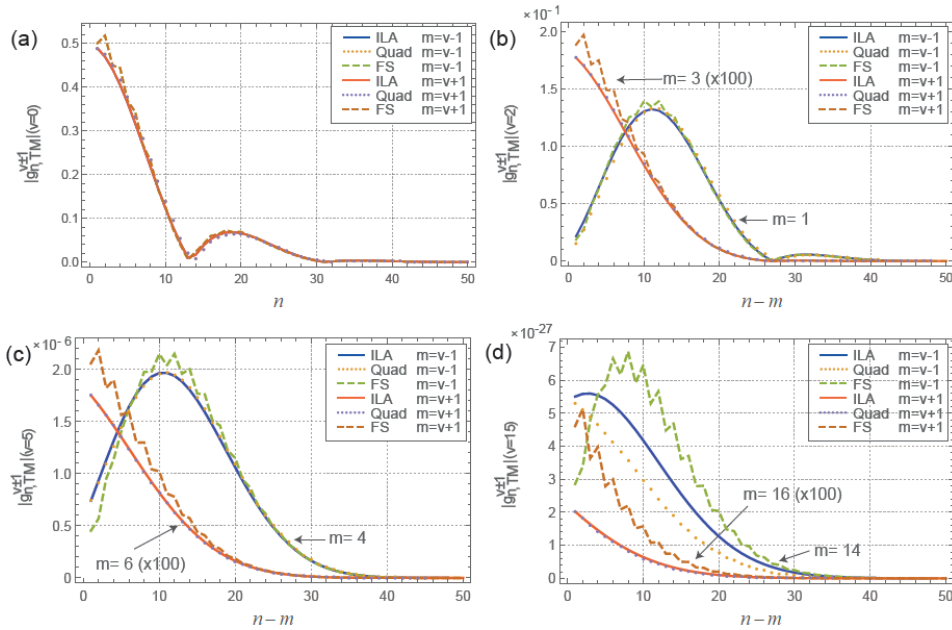


Figure 4: Same as Fig. 2, for $s = 0.05$.

253 provides radial fields which agree quite well with the original one [given by
 254 (5)], as expected. This is a consequence of the agreement between BSCs
 255 as revealed in Fig. 1. The agreement between the methods can be better
 256 visualized by plotting curves of E_r at specific axis (e.g., $z = z_0$ or $x = x_0$).
 257 Although not shown here, such curves have been computed and reveal indeed
 258 an excellent agreement. Therefore, scalar beams can indeed be fully described
 259 in the GLMT by remodeled paraxial beams satisfying Maxwell's equations.

260 In contrast, as the paraxial condition is relaxed, each method (quadra-
 261 ture, FS and ILA) will provide a remodeled beam whose spatial intensity
 262 patterns may significantly deviate from the expected ones, as shown in Fig.
 263 6. Also notice the deleterious effect of an increasing topological charge in
 264 the ILA, which significantly affects the amplitude of the reconstructed field.
 265 As for the FS, amplitude oscillations are clearly seen in the xz plane and is
 266 a consequence of the increasing oscillatory behavior observed in Fig. 2 as n
 267 increases due to amplitude differences between the BSCs with even and odd
 268 parities in the difference $n - m$. Such oscillations may be interpreted as an
 269 indication of the scalar nature of the original beam in the FS formalism, since
 270 they would have been completely eliminated had we considered Maxwellian

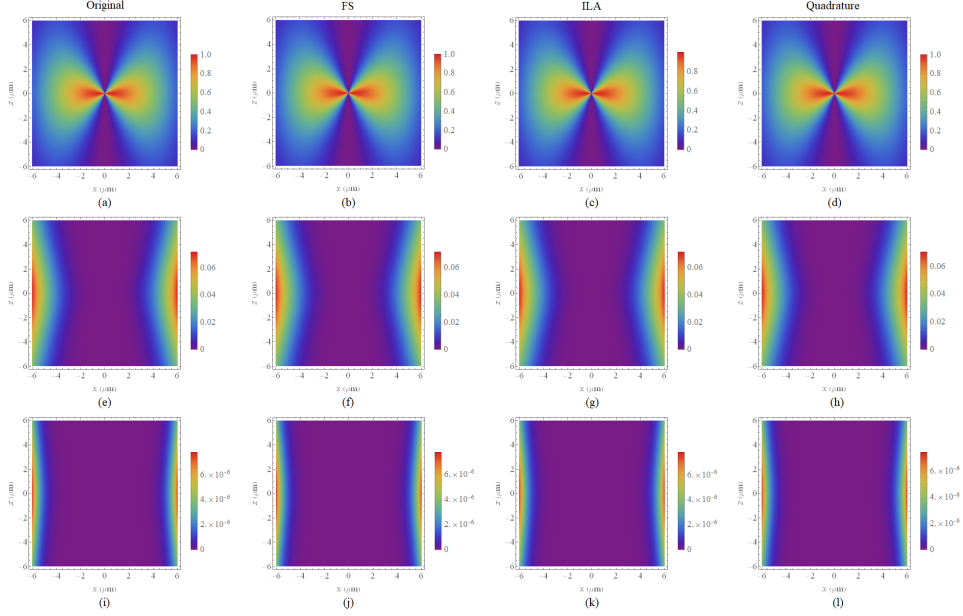


Figure 5: $|E_r|^2$ at x - z plane when $\alpha = 2^\circ$ and $s = 0.001$. *Top row:* $v = 0$. *Middle row:* $v = 2$. *Bottom row:* $v = 5$. The first column corresponds to (5), each of the other columns representing a particular remodeling technique.

271 BGBs instead of (5). Curves of E_r along specific transverse locations $x = x_0$
 272 are shown in Fig. 7 for $s = 0.05$, $\alpha = 10^\circ$ and $v = 0$ [Fig. 7(a)], $v = 2$ [Fig.
 273 7(b)] and $v = 5$ [Fig. 7(c)]. The values of x_0 correspond to regions in Fig. 6
 274 where E_r has significant amplitude. One sees that all three remodeling meth-
 275 ods fail to predict the original E_r (black solid lines) associated with a scalar
 276 BGB as v increases. This is also seen in Fig. 8, which corresponds to $v = 0$,
 277 2 and 5, but for the E_r fields along the axis defined by $z = z_0 = 0$. Here, the
 278 presence of a non-zero topological charge affects the relative contribution of
 279 each Cartesian (transverse and longitudinal) field components either by the
 280 appearance of new terms not included in (1) or by an intensification of the
 281 E_z . This reinforces the need for vector descriptions of BGBs fully satisfying
 282 Maxwell's equations, an investigation which is out of the scope of the present
 283 work.

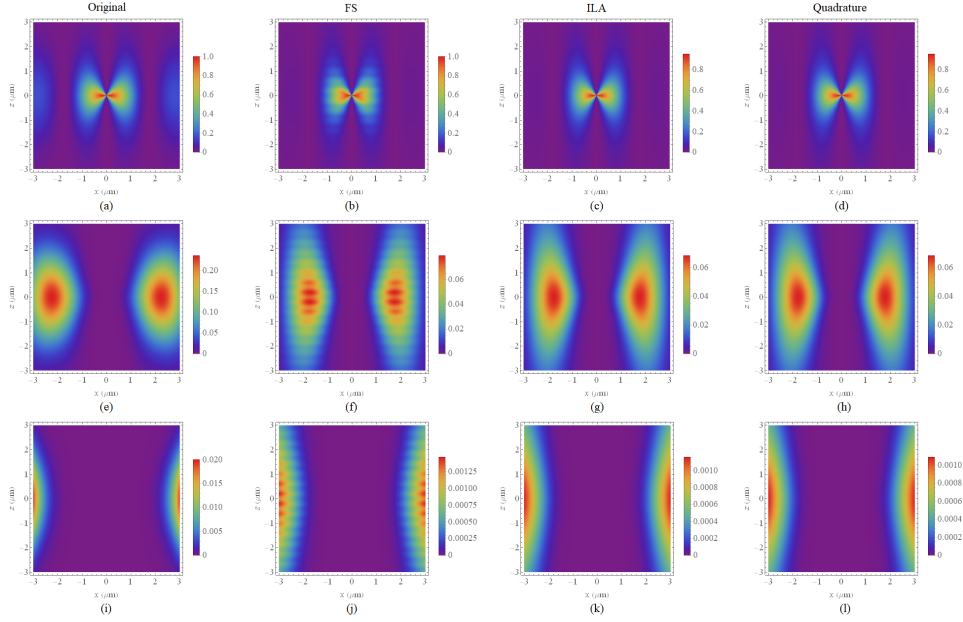


Figure 6: Same as Fig. 5, now for $s = 0.05$ and $\alpha = 10^\circ$.

284 4. Conclusion

285 In this paper paraxial arbitrary order Bessel-Gauss beams have been de-
 286 scribed using three methods, viz., integral localized approximation, finite
 287 series and quadratures, in the context of the GLMT. Comparisons have been
 288 established in terms of computation of beam shape coefficients and field re-
 289 modeling.

290 Since the original beam has been assumed as a solution to the scalar
 291 wave equation, one expects that remodeled fields will be different as the
 292 paraxiality condition is relaxed and as the topological charge increases. Even
 293 for “exact” approaches such as finite series and quadratures, divergences
 294 between their beam shape coefficients become evident. If, at one hand, the
 295 beam shape coefficients as calculated from finite series and quadratures would
 296 agree for Maxwellian Bessel-Gauss beams, a mathematical description in
 297 terms of electric and magnetic fields is awkward and makes the application
 298 of the finite series technique and the evaluation of quadratures prohibitive.

299 However, a description of vector Bessel-Gauss beams from (1) would sig-
 300 nificantly increase the complexity of the equations corresponding to the elec-
 301 tric and magnetic field components. Either by taking the scalar beam to be

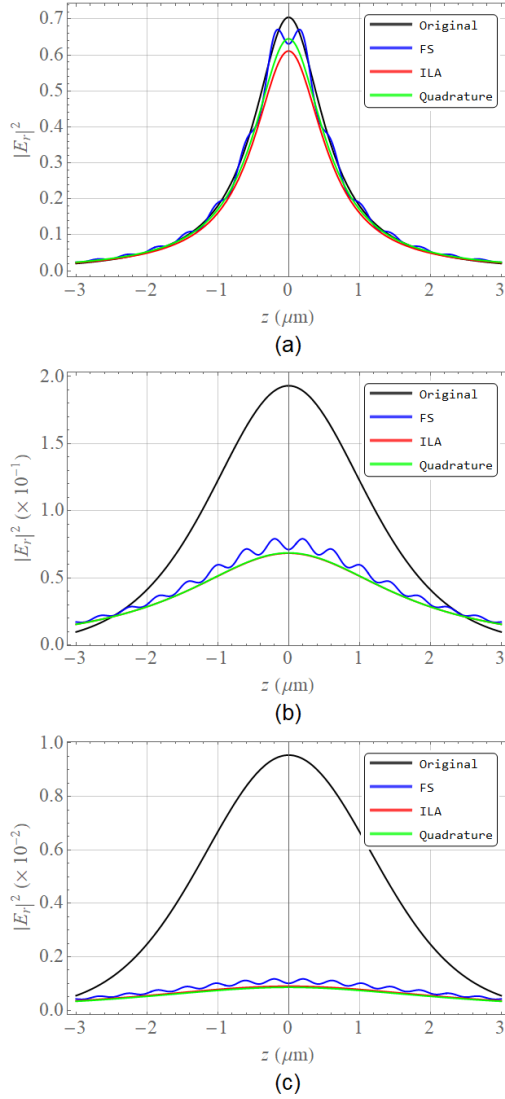


Figure 7: Cuts of $|E_r|^2$ at $x = x_0$ for $s = 0.05$, $\alpha = 10^\circ$. (a) $v = 0$ ($x_0 = 0.6 \mu\text{m}$), (b) $v = 2$ ($x_0 = 1.8 \mu\text{m}$), and (c) $v = 5$ ($x_0 = 2.7 \mu\text{m}$).

302 one of the transverse electric field components, or by forcing it to correspond
 303 to a particular component of the vector potential, derivatives (or integra-
 304 tions) with respect to space coordinates would lead to extremely lengthy and
 305 cumbersome expressions. The final form of these expressions would make it

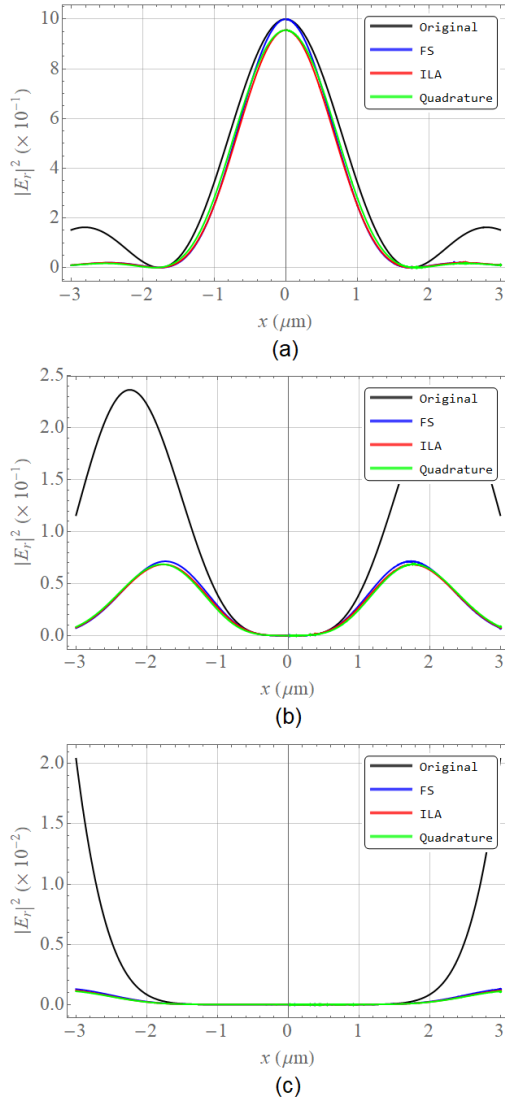


Figure 8: Cuts of $|E_r|^2$ at $z = z_0 = 0$ for $s = 0.05$, $\alpha = 10^\circ$. (a) $v = 0$, (b) $v = 2$ and (c) $v = 5$.

306 impossible to work with the finite series method in an analytic fashion.

307 The introduction of beams carrying a finite instead of an infinite amount
 308 of energy in the generalized Lorenz-Mie theory has an obvious advantage,
 309 viz., bringing the theory into closer contact with experiments. Since paraxial

310 beams such as Bessel beams and Bessel-Gauss beams are of great interest in a
311 variety of applications in light scattering problems, the present investigation
312 is an important contribution to the field and may also bring greater interest
313 in the use of the finite series method to compute beam shape coefficients.

314 **Funding:** São Paulo Research Foundation (FAPESP) (2017/10445-0);
315 National Council for Scientific and Technological Development (CNPq) (426990/2018-
316 8, 307898/2018-0); Coordination for the Improvement of Higher Education
317 Personnel (CAPES) (Valdivia's Doctoral grant)

318 **References**

- 319 [1] G. Gouesbet, G. Gréhan, Sur la généralisation de la théorie de Lorenz-
320 Mie, *Journal of Optics* 13 (1982) 97–103.
- 321 [2] G. Gouesbet, G. Gréhan, Generalized Lorenz-Mie theory for assemblies
322 of spheres and aggregates, *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*
323 1 (1999) 706.
- 324 [3] G. Gouesbet, G. Gréhan, Generalized Lorenz-Mie theory for a sphere
325 with an eccentrically located spherical inclusion, *Journal of Modern*
326 *Optics* 47 (2000) 821–837.
- 327 [4] G. Gouesbet, T-matrix formulation and generalized Lorenz-Mie theories
328 in spherical coordinates, *Optics communications* 283 (2010) 517–521.
- 329 [5] G. Gouesbet, J. A. Lock, On the electromagnetic scattering of arbi-
330 trary shaped beams by arbitrary shaped particles: a review, *Journal of*
331 *Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 162 (2015) 31–49.
- 332 [6] G. Gouesbet, B. Maheu, G. Gréhan, Light scattering from a sphere
333 arbitrarily located in a Gaussian beam, using a Bromwich formulation,
334 *J. Opt. Soc. Am. A* 5 (1988) 1427–1443.
- 335 [7] B. Maheu, G. Gouesbet, G. Gréhan, A concise presentation of the
336 generalized Lorenz-Mie theory for arbitrary location of the scatterer in
337 an arbitrary incident profile, *Journal of Optics* 19 (1988) 59–67.
- 338 [8] G. Gouesbet, G. Gréhan, B. Maheu, Generalized Lorenz-Mie theory
339 and applications to optical sizing, *Combustion Measurements* (1991)
340 339–384.
- 341 [9] G. Gouesbet, C. Letellier, K. Ren, G. Gréhan, Discussion of two
342 quadrature methods of evaluating beam-shape coefficients in general-
343 ized Lorenz-Mie theory, *Applied optics* 35 (1996) 1537–1542.
- 344 [10] G. Gouesbet, L. A. Ambrosio, J. A. Lock, On an infinite number of
345 quadratures to evaluate beam shape coefficients in generalized Lorenz-
346 Mie theory and the extended boundary condition method for structured
347 em beams, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*
348 242 (2020) 106779.

- 349 [11] G. Gouesbet, G. Grehan, B. Maheu, Expressions to compute the co-
350 efficients g_n^m in the generalized Lorenz-Mie theory using finite series,
351 *Journal of Optics* 19 (1988) 35–48.
- 352 [12] G. Gouesbet, G. Grehan, B. Maheu, Computations of the g_n coeffi-
353 cients in the generalized Lorenz-Mie theory using three different meth-
354 ods, *Appl. Opt.* 27 (1988) 4874–4883.
- 355 [13] K. F. Ren, G. Grehan, G. Gouesbet, Evaluation of laser-sheet beam
356 shape coefficients in generalized Lorenz–Mie theory by use of a localized
357 approximation, *J. Opt. Soc. Am. A* 11 (1994) 2072–2079.
- 358 [14] G. Gouesbet, L. F. M. Votto, L. A. Ambrosio, Finite series expres-
359 sions to evaluate the beam shape coefficients of a Laguerre–Gauss beam
360 freely propagating., *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative*
361 *Transfer* 227 (2019) 12–19.
- 362 [15] L. F. M. Votto, L. A. Ambrosio, G. Gouesbet, Evaluation of beam shape
363 coefficients of paraxial Laguerre–Gauss beam freely propagating by using
364 three remodeling methods, *Journal of Quantitative Spectroscopy and*
365 *Radiative Transfer* 239 (2019) 106618.
- 366 [16] L. A. Ambrosio, G. Gouesbet, Modified finite series technique for the
367 evaluation of beam shape coefficients in the T-matrix methods for struc-
368 tured beams with application to Bessel beams, *Journal of Quantitative*
369 *Spectroscopy and Radiative Transfer* 248 (2020) 107007.
- 370 [17] N. L. Valdivia, L. A. Ambrosio, Bessel-Gauss beam description in the
371 generalized Lorenz-Mie theory: the finite series method, in: *Interna-*
372 *tional Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC, SBMO, 2019.*
- 373 [18] G. Gouesbet, G. Gréhan, *Generalized Lorenz-Mie Theories*, 2 ed.,
374 Springer, 2017.
- 375 [19] J. A. Lock, G. Gouesbet, Rigorous justification of the localized approxi-
376 mation to the beam-shape coefficients in generalized Lorenz–Mie theory.
377 i. On-axis beams, *JOSA A* 11 (1994) 2503–2515.
- 378 [20] G. Gouesbet, J. A. Lock, Rigorous justification of the localized approxi-
379 mation to the beam-shape coefficients in generalized Lorenz–Mie theory.
380 ii. Off-axis beams, *JOSA A* 11 (1994) 2516–2525.

- 381 [21] G. Gouesbet, Validity of the localized approximation for arbitrary
382 shaped beams in the generalized Lorenz–Mie theory for spheres, *JOSA*
383 *A* 16 (1999) 1641–1650.
- 384 [22] G. Gouesbet, J. Lock, G. Gréhan, Generalized Lorenz–Mie theories
385 and description of electromagnetic arbitrary shaped beams: localized
386 approximations and localized beam models, a review, *Journal of Quan-*
387 *titative Spectroscopy and Radiative Transfer* 112 (2011) 1–27.
- 388 [23] G. Gouesbet, J. A. Lock, Comments on localized and integral local-
389 ized approximations in spherical coordinates, *Journal of Quantitative*
390 *Spectroscopy and Radiative Transfer* 179 (2016) 132 – 136.
- 391 [24] G. Gouesbet, On the validity of localized approximations for Bessel
392 beams: All N-Bessel beams are identically equal to zero, *Journal of*
393 *Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 176 (2016) 82 – 86.
- 394 [25] G. Gouesbet, J. Lock, L. Ambrosio, J. Wang, On the validity of local-
395 ized approximation for an on-axis zeroth-order Bessel beam, *Journal of*
396 *Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 195 (2017) 18–25.
- 397 [26] L. A. Ambrosio, G. Gouesbet, On localized approximations for Laguerre-
398 Gauss beams focused by a lens, *Journal of Quantitative Spectroscopy*
399 *and Radiative Transfer* 218 (2018) 100–114.
- 400 [27] L. A. Ambrosio, G. Gouesbet, On the validity of the use of a local-
401 ized approximation for helical beams. ii. Numerical aspects, *Journal of*
402 *Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 215 (2018) 41 – 50.
- 403 [28] L. A. Ambrosio, J. Wang, G. Gouesbet, On the validity of the inte-
404 gral localized approximation for Bessel beams and associated radiation
405 pressure forces, *Applied optics* 56 (2017) 5377–5387.
- 406 [29] R. Li, K. F. Ren, Z. Wu, L. Guo, S. Gong, et al., Analysis of radiation
407 pressure force exerted on a biological cell induced by high-order Bessel
408 beams using Debye series, *Journal of Quantitative Spectroscopy and*
409 *Radiative Transfer* 126 (2013) 69–77.
- 410 [30] N. L. Valdivia, L. A. Ambrosio, On analytical descriptions of finite-
411 energy paraxial frozen waves in generalized Lorenz-Mie theory, in:

- 412 2017 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectron-
413 ics Conference (IMOC), IEEE, 2017, pp. 1–5.
- 414 [31] N. L. Valdivia, L. A. Ambrosio, Analytical description of paraxial
415 higher-order frozen waves in generalized Lorenz-Mie theory: the finite-
416 energy case, in: *Laser-Light and Interactions with Particles*, College
417 Station, TX, USA, 2018.
- 418 [32] A. Chafiq, L. A. Ambrosio, G. Gouesbet, A. Belafhal, On the valid-
419 ity of integral localized approximation for on-axis zeroth-order Mathieu
420 beams, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*
421 204 (2018) 27–34.
- 422 [33] J. A. Lock, Angular spectrum and localized model of Davis-type beam,
423 *J. Opt. Soc. Am. A* 30 (2013) 489–500.
- 424 [34] F. Gori, G. Guattari, C. Padovani, Bessel-Gauss beams, *Optics com-
425 munications* 64 (1987) 491–495.
- 426 [35] L. A. Ambrosio, Analytical Descriptions of Finite-Energy Bessel Beams
427 in the Generalized Lorenz-Mie Theory, in: *2018 SBFoton International
428 Optics and Photonics Conference (SBFoton IOPC)*, 2018, pp. 1–5.
- 429 [36] J. Durnin, J. Miceli Jr, J. Eberly, Diffraction-free beams, *Physical
430 review letters* 58 (1987) 1499.
- 431 [37] M. Zamboni-Rached, M. Mojahedi, Shaping finite-energy diffraction-
432 and attenuation-resistant beams through Bessel-Gauss-beam superpo-
433 sition, *Physical Review A* 92 (2015) 043839.
- 434 [38] C. Palma, G. Cincotti, G. Guattari, M. Santarsiero, Imaging of general-
435 ized Bessel-Gauss beams, *journal of modern optics* 43 (1996) 2269–2277.
- 436 [39] M. McLaren, M. Agnew, J. Leach, F. S. Roux, M. J. Padgett, R. W.
437 Boyd, A. Forbes, Entangled Bessel-Gaussian beams, *Optics express* 20
438 (2012) 23589–23597.
- 439 [40] K. F. Ren, G. Gouesbet, G. Gréhan, Integral localized approximation
440 in generalized Lorenz–Mie theory, *Applied optics* 37 (1998) 4218–4225.

441 [41] G. B. Arfken, H. J. Weber, Bessel functions, in: Mathematical methods
442 for physicists, American Association of Physics Teachers, 2003, pp. 589–
443 637.

**ANEXO B – ON ANALYTICAL DESCRIPTIONS OF FINITE-ENERGY
PARAXIALFROZEN WAVES IN GENERALIZED LORENZ-MIE THEORY.
APRESENTADO NO IMOC 2017**

On Analytical Descriptions of Finite-Energy Paraxial Frozen Waves in Generalized Lorenz-Mie Theory

Nereida L. Valdivia, Leonardo André Ambrosio

Department of Electrical and Computer Engineering (SEL)

São Carlos School of Engineering, University of São Paulo (EESC/USP)

São Carlos, Brazil

Email: nereida@usp.br, leo@sc.usp.br

Abstract—This paper aims to achieve analytical descriptions of specific classes of finite-energy non-diffracting beams, viz. the so-called Frozen Waves, envisioning applications in optical trapping. Such solutions to the Fresnel diffraction integral can be constructed from specific discrete superpositions of finite-energy zero-order scalar Bessel-Gauss beams. Here, we present expressions for their beam shape coefficients in the context of the generalized Lorenz-Mie theory. The paraxial regime is valid for all Bessel-Gauss beams, thus allowing the method here presented to be purely analytic. The analyticity avoids both extensive numerical computation and optimization schemes. Radiation pressure cross sections, which are proportional to optical forces, are then evaluated for Rayleigh particles as an example of application. We expect Frozen Waves to serve, in the near future, as alternative laser beams in biomedical optics and in the optical micromanipulation of biological or auxiliary particles.

Keywords—Mie theory, optical trapping and micromanipulation, scattering theory.

I. INTRODUCTION

Discrete or continuous superpositions of ideal Bessel beams (BBs) have been, during the last years, under intense theoretical and numerical investigation [1]–[9]. Also called Frozen Waves (FWs) in absorption-free media or Diffraction-Attenuation Resistant Beams (DARBs) in lossy media, they were first constructed from scalar BBs of the same order, all with infinite energy and possessing the same frequency, but with distinct longitudinal or transverse wave numbers [1]–[9].

From its construction, an ideal FW naturally carries all non-diffracting properties of its constituents, e.g. resistance to attenuation, depth of focus and self-healing [1]. In addition, they easily allow for virtually any longitudinal intensity pattern of interest, at least up to the diffraction limit (of the order of a wavelength). This is possible because each BB has a particular axicon angle and a specific field strength, the former being related to the power flux in space, the latter weighting the contribution of a specific BB to the resultant FW.

Arbitrary-order BBs have been widely employed in the optical manipulation of biological particles, since their non-diffracting properties allow for simultaneous trapping and guiding of particles in multiple planes [10]–[12]. Orbital angular momentum transfer can take place between particles and higher-order BBs, thus allowing for mechanical rotation

in addition to mechanical displacement arisen from linear momentum transfer [13], [14]. However, single BBs cannot provide effective (three-dimensional) traps. Furthermore, physical BBs have finite energy since they are generated from finite apertures [12], [15], [16].

Ideal FWs are promising candidates for serving as alternative laser beams in optical tweezers systems. They allow for effective traps. Optical forces exerted over Rayleigh, Mie and larger (ray optics) spherical scatterers have been recently theoretically and numerically investigated [17]–[19].

The theoretical framework in the analysis of light scattering (arbitrary-shaped beams) by spherical particles is the generalized Lorenz-Mie theory (GLMT). In its context, the electromagnetic fields are expanded in terms of special functions (spherical Bessel, Ricatti-Bessel, and so on [20]–[24]) using a spherical coordinate system. The spatial field distribution of the incident field is taken into account by the beam shape coefficients (BSCs), while the scattered and internal fields depend upon the electromagnetic and geometrical properties of the scatterer through the Mie coefficients (MCs). The problem is then completely solved once both the BSCs and the MCs have been found.

For ideal discrete FWs, analytical expressions for the BSCs have been recently presented using a localized approximation [17], [18]. The employed method relies on the paraxial approximation and serves its purpose as long as all axicon angles remain small [1]. Optical properties of interest can then readily and confidently be evaluated and studied. A recurrent “problem”, however, persists not only for FWs, but for almost all other types of laser beams theoretically and numerically investigated using the GLMT: they are not quadratically integrable and, therefore, are not physical.

Recently, Zamboni-Rached proposed a simple and effective method for analytically describing special classes of wave fields under the paraxial approximation, viz. azimuthally symmetric finite energy beams such as truncated Gaussian, Bessel-Gauss and zero-order Bessel beams [25]. The main idea here is that, in contrast with Gaussian beams, Bessel-Gauss beams do form an orthogonal basis. This property allows for the description of classes of optical beams in terms of their discrete superpositions. The advantage is immediately inferred from the fact that it avoids, from the outset, the need for optimization schemes (which can be very time-consuming)

This work was supported by CAPES and FAPESP (project 2016/11174-8).

usually demanded by superpositions of Gaussian beams [26], [27]. With such a method, finite-energy versions of FWs and DARBs have been proposed at the literature [8].

One of the authors have recently shown that, with Zamboni-Rached's method, the BSCs of finite-energy zero-order paraxial BBs can be analytically derived [28]. This is certainly interesting, since one now can deal with the GLMT using physical beams instead of unrealistic ideal wave fields.

In view of that, this paper extends the previous analysis of single finite-energy scalar BBs to analytical descriptions of the BSCs of truncated FWs, envisioning future applications of such laser beams in the field of biomedical optics and, in particular, their adoption as alternative laser beams in optical trapping systems. Only zero-order FWs are considered, and the paraxial approximation is tacitly assumed hereafter. In Section II, some mathematical and physical aspects of both the GLMT and Zamboni-Rached's method are presented, and the BSCs for finite-energy FWs are derived. Section III gives a few examples of FWs with distinct longitudinal intensity patterns. The corresponding radiation pressure cross sections (or, equivalently, optical forces) exerted over spherical dielectric particles are calculated for specific values of refractive index and radius, using the BSCs previously presented. Finally, our conclusions are presented.

II. TRUNCATED FWS IN THE FRAMEWORK OF THE GLMT

Let us take a superposition of $2N + 1$ equal-frequency Bessel-Gauss beams propagating along $+z$ and conceived in such a manner that, within a specific range $0 \leq z \leq L$, the paraxial wave equation in cylindrical coordinates has, for lossless dielectric media, the finite-energy FW solution [8]

$$\begin{aligned} \Psi(\rho, z, t) = & e^{i\omega t} e^{-ikz} \frac{e^{\left(-q^2 \frac{\rho^2}{\mu}\right)}}{\mu} e^{ik \frac{z}{\mu}} \\ & \times \sum_{p=-N}^N A_p J_0\left(k_{pp} \frac{\rho}{\mu}\right) e^{-ik_{zp} \frac{z}{\mu}}, \end{aligned} \quad (1)$$

where ω is the angular frequency, k the wave number and $J_0(\cdot)$ the ordinary Bessel function. The function Ψ may represent one of the transverse electric field components, z being taken as the propagating axis. Additionally, q is a possibly complex constant with $Re(q) > 0$ which regulates the transverse intensity width of the Gaussian apodization, and $\mu = 1 - i(2q^2/k)z$. longitudinal and transverse wave numbers k_{zp} and k_{pp} , respectively, are given by

$$k_{zp} = Q + \frac{2\pi p}{L}, \quad k_{pp} = \sqrt{2}k \sqrt{1 - \frac{k_{zp}}{k}} \quad (2)$$

with Q a positive real constant. They must satisfy the inequality below in order to ensure propagating beams only (no evanescent and counter propagating beams):

$$0 \leq Q + \frac{2\pi}{L}N \leq k = n_m \frac{\omega}{c} \quad (3)$$

In Eq. (3), n_m represents the refractive index of the host medium. The p -th Bessel-Gauss beam in Eq. (1) has a complex weighting constant coefficient A_p [8]:

$$A_p \approx \frac{1}{L} \int_0^L \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\mathcal{X}^l}{l!} \right) F(z) e^{i \frac{2\pi}{L} p z} dz \quad (4)$$

with $\mathcal{X} = (k_{\rho 0} q z / k)^2 < 1$ for all cases considered here, being then sufficient to consider only a few terms of the power series in (4). The longitudinal intensity pattern within $0 \leq z \leq L$ is $\Psi(\rho = 0, z, t) \approx |F(z)|^2$, where

$$F(z) = \begin{cases} \bar{F}(z), & 0 \leq z \leq L/2 \\ 0, & L/2 < z \leq L \end{cases} \quad (5)$$

For applications in optical trapping, the solution Eq. (1) is not in its most suited form, since the GLMT is the theoretical framework and presupposes the vector nature of the electromagnetic fields, i.e., the incident field must satisfy Maxwell's equations. To overcome this issue, we first take the paraxial regime in advantage and write the electric field as $\mathbf{E} \approx E_x \hat{x} = \Psi \hat{x}$, the magnetic field being directly derived from Faraday law and possessing (approximately) only a y component. Then, the fields are expanded in terms of spherical functions (Bessel, Ricatti-Bessel or harmonics), the coefficients of such an expansion being the BSCs [24]. A spherical coordinate system (r, θ, ϕ) is chosen.

Several techniques can be employed to find the BSCs of finite-energy FWs. In this paper, considering previous works on the paraxial regime and having its validity well established in the literature, we use the localized approximation in its integral form (ILA) [29]–[33]. Apart from its simplicity, it has been tested on ideal paraxial BBs, FWs and DARBs. As long as the paraxial approximation remains valid for all $2N + 1$ Bessel-Gauss beams in 1, the ILA can be safely adopted (for details on the theoretical aspects of this method and its validity for paraxial beams see, e.g. [29]–[33]).

The ILA proposes a few "receipts" for finding the BSCs [29]. First, one writes from Eq. (1) the radial electric and magnetic field components E_r and H_r . They are the only field components needed to compute the BSCs. Then, E_r and H_r are displaced from the center of the spherical particle (which is assumed to be at the origin of the spherical coordinate system chosen) by a distance (x_0, y_0, z_0) or, in cylindrical coordinates, (ρ_0, ϕ_0, z_0) . On the resulting expressions, an operator is applied which simply sets (following the so-called localization principle of van de Hulst [24]) $kr \rightarrow n + 1/2$ and $\theta \rightarrow \pi/2$. This last step eliminates any dependence of the fields on r and θ . Finally, a certain integration over ϕ is performed, and pre-factors are added to the final result.

Performing the above-mentioned steps, the BSCs $g_{n, TM}^m$ and $g_{n, TE}^m$ of TM and TE modes, respectively, can be given in analytical form for *finite-energy* FWs as:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{n, TM}^0 &= iZ_n^0 e^{ikz_0} \frac{e^{-ikz_0/\mu_G}}{\mu_G} \sum_{p=-N}^N \frac{A_p}{A_{p,|\max|}} \exp \left[\frac{-q^2 (w_p^2 + \xi_p^2)}{k_{pp}^2 \mu_G} \right] \\ &\times \left\{ J_1(\tau_{pG}) J_1(\sigma_{pG}) - \frac{(\gamma_n - i\delta_n)}{2} [J_0(\tau_{pG}) J_0(\sigma_{pG}) \right. \\ &\left. + J_2(\tau_{pG}) J_2(\sigma_{pG})] \right\} \cos \phi_0 e^{ik_{zp}z_0/\mu_G}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{n, TM}^{m=\pm 1} &= \frac{1}{2} e^{ikz_0} \frac{e^{-ikz_0/\mu_G}}{\mu_G} \sum_{p=-N}^N \frac{A_p}{A_{p,|\max|}} \exp \left[\frac{-q^2 (w_p^2 + \xi_p^2)}{k_{pp}^2 \mu_G} \right] \\ &\times \left\{ J_{|m|-1}(\tau_{pG}) J_{|m|-1}(\sigma_{pG}) e^{\mp i(|m|-1)\phi_0} \right. \\ &+ J_{|m|+1}(\tau_{pG}) J_{|m|+1}(\sigma_{pG}) e^{\mp i(|m|+1)\phi_0} \\ &- (\gamma_n - i\delta_n) [J_{|m|}(\tau_{pG}) J_{|m|}(\sigma_{pG}) (\cos(|m|-1)\phi_0 \\ &+ 0.5e^{\mp i(|m|+1)\phi_0}) + 0.5J_{|m|+2}(\tau_{pG}) J_{|m|+2}(\sigma_{pG}) \\ &\left. \times e^{\mp i(|m|+1)\phi_0} \right\} e^{ik_{zp}z_0/\mu_G}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{n, TM}^{m < -1} &= \frac{1}{2} Z_n^m e^{ikz_0} \frac{e^{-ikz_0/\mu_G}}{\mu_G} \sum_{p=-N}^N \frac{A_p}{A_{p,|\max|}} \exp \left[\frac{-q^2 (w_p^2 + \xi_p^2)}{k_{pp}^2 \mu_G} \right] \\ &\times \left\{ J_{|m|-1}(\tau_{pG}) J_{|m|-1}(\sigma_{pG}) e^{\mp i(|m|-1)\phi_0} \right. \\ &+ J_{|m|+1}(\tau_{pG}) J_{|m|+1}(\sigma_{pG}) e^{\mp i(|m|+1)\phi_0} \\ &- (\gamma_n - i\delta_n) [J_{|m|}(\tau_{pG}) J_{|m|}(\sigma_{pG}) \cos \phi_0 e^{\mp i|m|\phi_0} \\ &+ 0.5J_{|m|+2}(\tau_{pG}) J_{|m|+2}(\sigma_{pG}) (\cos \phi_0 e^{\mp i(|m|+2)\phi_0} \\ &\pm i \sin \phi_0 e^{-i(|m|+2)\phi_0}) + 0.5J_{|m|-2}(\tau_{pG}) J_{|m|-2}(\sigma_{pG}) \\ &\left. \times (\cos \phi_0 e^{\mp i(|m|-2)\phi_0} \pm i \sin \phi_0 e^{+i(|m|-2)\phi_0}) \right\} e^{ik_{zp}z_0/\mu_G}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{n, TE}^0 &= iZ_n^0 e^{ikz_0} \frac{e^{-ikz_0/\mu_G}}{\mu_G} \sum_{p=-N}^N \frac{F_p A_p}{A_{p,|\max|}} \exp \left[\frac{-q^2 (w_p^2 + \xi_p^2)}{k_{pp}^2 \mu_G} \right] \\ &\times \left\{ J_1(\tau_{pG}) J_1(\sigma_{pG}) - 0.5(\gamma_n - i\delta_n) [J_0(\tau_{pG}) J_0(\sigma_{pG}) \right. \\ &\left. + J_2(\tau_{pG}) J_2(\sigma_{pG})] \right\} \sin \phi_0 e^{ik_{zp}z_0/\mu_G}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{n, TE}^{m=\pm 1} &= \mp \frac{i}{2} e^{ikz_0} \frac{e^{-ikz_0/\mu_G}}{\mu_G} \sum_{p=-N}^N \frac{F_p A_p}{A_{p,|\max|}} \exp \left[\frac{-q^2 (w_p^2 + \xi_p^2)}{k_{pp}^2 \mu_G} \right] \\ &\times \left\{ J_{|m|-1}(\tau_{pG}) J_{|m|-1}(\sigma_{pG}) e^{\mp i(|m|-1)\phi_0} \right. \\ &- J_{|m|+1}(\tau_{pG}) J_{|m|+1}(\sigma_{pG}) e^{\mp i(|m|+1)\phi_0} \\ &- (\gamma_n - i\delta_n) [J_{|m|}(\tau_{pG}) J_{|m|}(\sigma_{pG}) (\cos(|m|-1)\phi_0 \\ &- 0.5e^{\mp i(|m|+1)\phi_0}) - 0.5J_{|m|+2}(\tau_{pG}) J_{|m|+2}(\sigma_{pG}) \\ &\left. \times e^{\mp i(|m|+1)\phi_0} \right\} e^{ik_{zp}z_0/\mu_G}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{n, TE}^{m > 1} &= \frac{1}{2} Z_n^m e^{ikz_0} \frac{e^{-ikz_0/\mu_G}}{\mu_G} \sum_{p=-N}^N \frac{F_p A_p}{A_{p,|\max|}} \exp \left[\frac{-q^2 (w_p^2 + \xi_p^2)}{k_{pp}^2 \mu_G} \right] \\ &\times \left\{ \mp i [J_{|m|-1}(\tau_{pG}) J_{|m|-1}(\sigma_{pG}) e^{\mp i(|m|-1)\phi_0} \right. \\ &+ J_{|m|+1}(\tau_{pG}) J_{|m|+1}(\sigma_{pG}) e^{\mp i(|m|+1)\phi_0}] \\ &- (\gamma_n - i\delta_n) [J_{|m|}(\tau_{pG}) J_{|m|}(\sigma_{pG}) \sin \phi_0 e^{\mp i|m|\phi_0} \\ &\pm i0.5J_{|m|+2}(\tau_{pG}) J_{|m|+2}(\sigma_{pG}) (\cos \phi_0 e^{-i(|m|+2)\phi_0} \\ &\pm i \sin \phi_0 e^{\mp i(|m|+2)\phi_0}) \mp i0.5J_{|m|-2}(\tau_{pG}) J_{|m|-2}(\sigma_{pG}) \\ &\left. \times (\cos \phi_0 e^{+i(|m|-2)\phi_0} \mp i \sin \phi_0 e^{\mp i(|m|+2)\phi_0}) \right\} e^{ik_{zp}z_0/\mu_G}, \end{aligned} \quad (11)$$

where $\tau_{pG} = w_p/\mu_G$, $\sigma_{pG} = \xi_p/\mu_G$ and

$$\begin{aligned} Z_n^0 &= \frac{2n(n+1)}{2n+1}; \quad Z_n^{m \neq 0} = \left(\frac{-2i}{2n+1} \right)^{|m|-1}; \\ \mu_G &= 1 + i \frac{2q^2 z_0}{k}; \quad F_p = 1 - \frac{1}{\mu_G} + \frac{k_{zp}}{k\mu_G}; \\ \gamma_n &= -2 \frac{q^2}{k} \rho_0 (n+1/2); \quad \delta_n = -4 \left(\frac{q^2}{k} \right)^2 \rho_0 (n+1/2); \\ w_p &= \sin \alpha (n+1/2); \quad \xi_p = k\rho_0 \sin \alpha; \\ \sin \alpha &\approx \sqrt{2} (1 - k_{zp}/k)^{1/2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Equations (6) to (12) are the main theoretical result of our work. They show that, just as for BBs, finite-energy FWs can also be incorporated within the framework of the GLMT with analytical expressions for their BSCs. It must be remembered that the above results are valid as long as the paraxial regime is valid and, consequently, the axicon angles are small. For non-paraxial beams, the ILA will generally fail to provide accurate values of $\mathfrak{g}_{n, TM}^m$ and $\mathfrak{g}_{n, TE}^m$. This happens because its applicability is restricted to beams with a propagating factor $\exp(-ikz)$ not observed for high axicon angles, since the condition $k_{pp}/k_{zp} \ll 1$ will no longer hold.

From Eqs. (13) and (14), the Cartesian radiation pressure cross-section components $C_{pr,x}$, $C_{pr,y}$ and $C_{pr,z}$ (which are proportional to optical forces) can be readily evaluated [24]:

$$\begin{aligned} C_{pr,z} &= \frac{\lambda^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=-n}^n \left\{ \frac{1}{(n+1)^2} \frac{(n+1+|p|)!}{(n-|p|)!} \right. \\ &\times \text{Re} \left[(a_n + a_{n+1}^* - 2a_n a_{n+1}^*) \mathfrak{g}_{n, TM}^p \mathfrak{g}_{n+1, TM}^{p*} \right. \\ &+ (b_n + b_{n+1}^* - 2b_n b_{n+1}^*) \mathfrak{g}_{n, TE}^p \mathfrak{g}_{n+1, TE}^{p*} \left. \right] \\ &+ p \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \frac{(n+|p|)!}{(n-|p|)!} \\ &\left. \times \text{Re} \left[i(2a_n b_n^* - a_n - b_n^*) \mathfrak{g}_{n, TM}^p \mathfrak{g}_{n, TE}^{p*} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=p}^{\infty} \sum_{m=p-1 \neq 0}^{\infty} \left\{ \frac{(n+|p|)!}{(n-|p|)!} [(S_{m,n}^{p-1} + S_{n,m}^{-p}) \right. \\ &- 2U_{m,n}^{p-1} - 2U_{n,m}^{-p}] \left(\frac{1}{m^2} \delta_{m,n+1} - \frac{1}{n^2} \delta_{n,m+1} \right) \\ &\left. + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \delta_{n,m} (T_{m,n}^{p-1} - T_{n,m}^{-p} - 2V_{m,n}^{p-1} + 2V_{n,m}^{-p}) \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

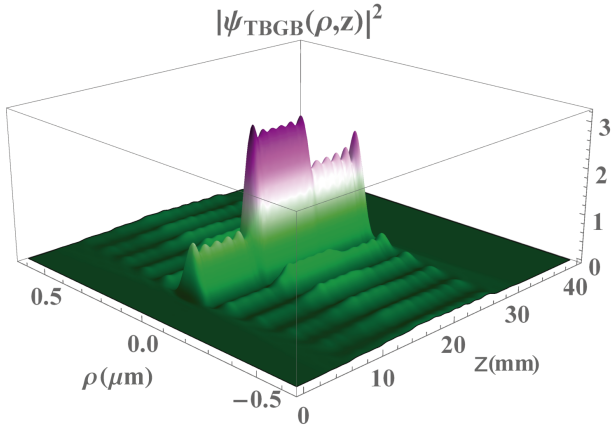


Fig. 1: 3D plot of $|\Psi(\rho, z)|^2$ for a truncated Bessel-Gauss Beam, with $\lambda = 1064$ nm, $r_0 \approx 9\mu\text{m}$, $L = 74$ mm, $l = 3$, $N = 53$.

where $C_{pr,x} = \text{Re}(C)$ and $C_{pr,y} = \text{Im}(C)$. In Eqs. (6) to (14), n and m are integers such that $1 \leq n < \infty$ and $-n \leq m \leq n$, and $U_{n,m}^p, V_{n,m}^p, S_{n,m}^p, T_{n,m}^p$, depends on both the MCs and the BSCs [24]. The MCs for scattered fields are represented in Eqs. (13) and (14) as a_n and b_n , and it is clear that $C_{pr,x}$, $C_{pr,y}$ and $C_{pr,z}$ depend solely on (awkward relations between) the BSCs and the MCs.

III. FINITE-ENERGY FWS IN OPTICAL TRAPPING

In this section, we present an example of application of the theoretical results obtained in the last section. All simulations have been developed using software *Mathematica* (version 10.3). The dielectric Rayleigh particle has radius $a = \lambda/20$, $\lambda = 1064$ nm being the wavelength in vacuum. The refractive indices of the surrounding medium and scatterer are $n_m = 1.33$ and $n_p = 1.62$, respectively. We consider as $\bar{F}(z)$ in (5) a similar pattern presented in [8], viz. $\bar{F}(z) = 0$ if $0 \leq z < l$; 1 if $l_1 \leq z < l_2$; $\sqrt{3}$ if $l_2 \leq z < l_3$; $\sqrt{2}$ if $l_3 \leq z < l_4$; and 0 if $l_4 \leq z \leq L/2$. Where $l_1 = 5$ mm, $l_2 = l_1 + \delta_z$, $l_3 = l_2 + \delta_z$, and $l_4 = l_3 + \delta_z$, with $L = 74$ mm and $\delta_z = 8$ mm. The corresponding spot is $r_0 \approx 9\mu\text{m}$.

The values of A_p were approximated using Eq. (4) with four terms in the series ($l = 3$). The maximum value of N , is obtained from Eq. (3), N defines the number of beams in Eq. (1). We chose to use the maximum value for this example, $N = 53$. The field intensity $|\Psi(\rho, z)|^2$ in a non-absorbing medium is shown in Fig. 1. The desired longitudinal intensity pattern can be observed for the chosen longitudinal range with a rapidly intensity decay after $z \approx l_4 = 29$ mm.

In Fig. 2, the longitudinal radiation pressure cross section $C_{pr,z}$ is represented as a function of z_0 ($\rho_0 = 0$) and for scatterers with radius $a = \lambda/20$, $\lambda/2$ and 2λ all with the same relative (to water) refractive index $M = 1.1$ (typical of biological particles). Notice that $C_{pr,z}$ resembles the oscillatory profile along z for all the scatterers radius. This happens because of the paraxial approximation, since gradient

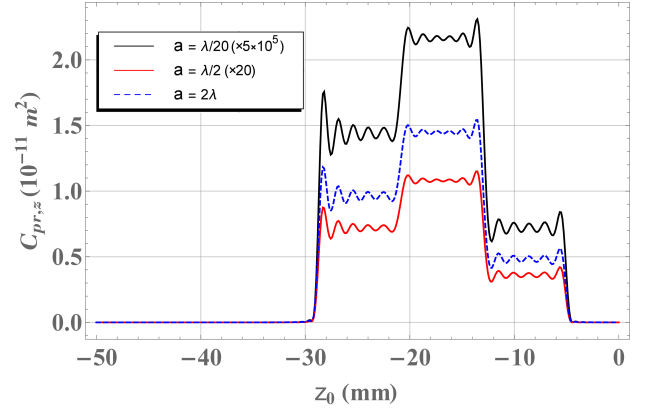


Fig. 2: Longitudinal radiation pressure cross section $C_{pr,z}$ as a function of z_0 for the FW of Fig. 1, with $\rho_0 = 0$ (on-axis case). The scatterer has three distinct radius a and fixed relative refractive index $M = 1.1$. Multiplicative factors have been introduced for better visualization.

forces are incapable of overcoming scattering forces. For visualization purposes, multiplicative factors were introduced.

Several radial points of stable equilibrium are expected, due to the transverse Bessel-Gauss profile, either at peaks of high intensity rings (if $M > 1.0$) or at nulls of dark regions (if $M < 1.0$). Considering $a = \lambda/20$, we displace the TBGB along x ($\rho_0 = x_0$) for $z_0 = -0.01$, -0.02 and -0.03 , to observe those expected *radial* points of equilibrium. $C_{pr,x}$ as a function of ρ_0 is shown in Fig. 3 (a) and (b) for relative refractive index $M = 0.9$ and $M = 1.1$ respectively.

IV. CONCLUSIONS

Using the localized approximation in its integral version, in the context of the generalized Lorenz-Mie theory, a specific class of non-diffracting beams (Frozen Wave) with finite-energy has been described. The paraxial approximation enables the method to be purely analytic, therefore allowing for fast and reliable computation of the optical properties of interest. It is important to emphasize the finite-energy nature of the non-diffracting beams here considered, which turns out to be important in the sense that, at the end, every realizable beam in the laboratory is necessarily generated by truncated apertures. This feature adds to the fact that Frozen Waves are easily modeled in its longitudinal intensity pattern, thus allowing, in principle, for potential simultaneous trap and manipulation of several particles at multiple planes. Obviously, the paraxial nature of the presented beams does not allow for the direct observation of such traps, since scattering forces prevails over gradient ones.

In view of that, it is of utmost importance to consider, as an extension of this work, the vector nature of Frozen Waves in order to include highly non-paraxial beams. The problem now becomes that of finding - if possible at all - an analytical description of such Maxwellian beams, a challenge that is under current consideration.

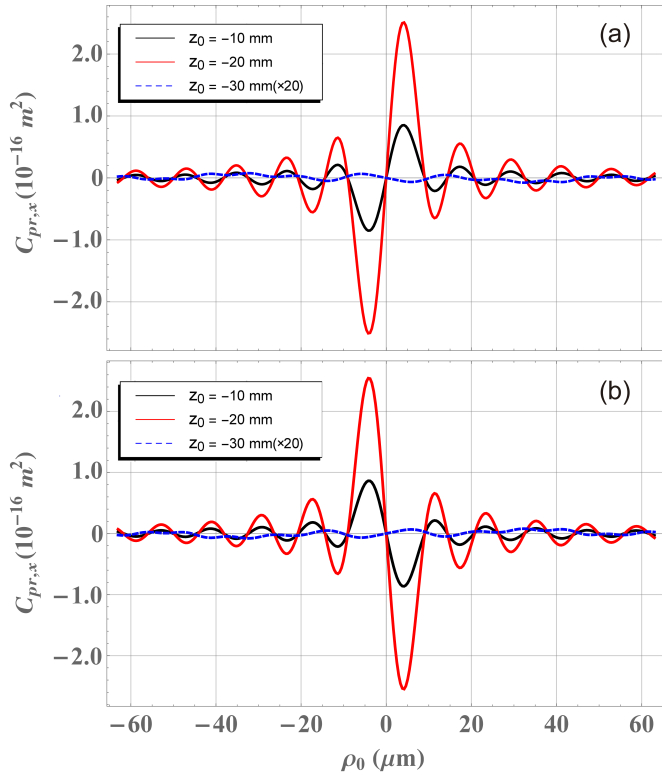


Fig. 3: Radial (transverse) radiation pressure cross section $C_{pr,x}$ as a function of ρ_0 for the FW of Fig. 1. The particle has scatterer radius $a = \lambda/20$. Relative refractive index for (a) $M = 0.9$. and (b) $M = 1.1$. The three curves correspond to three distinct relative positions z_0 of the beam.

REFERENCES

- [1] M. Zamboni-Rached, "Stationary optical wavefields with arbitrary longitudinal shape, by superposing equal frequency Bessel beams: Frozen Waves," *Opt. Express*, vol. 12, pp. 4001-4006, 2004.
- [2] M. Zamboni-Rached, E. Recami, and H. E. Hernández-Figueroa, "Theory of "frozen waves": modeling the shape of stationary wave fields," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 22, pp. 2465-2475, 2005.
- [3] M. Zamboni-Rached, "Diffraction-attenuation resistant beams in absorbing media," *Opt. Express*, vol. 14, pp. 1804-1809, 2006.
- [4] C. A. Dartora, K. Z. Nóbrega, A. Dartora, G. A. Vianad, H. Tertuliano, and S. Filho, "Study of FrozenWaves' theory through a continuous superposition of Bessel beams," *Opt. Laser Technol.*, vol. 39, pp. 1370-1373, 2007.
- [5] M. Zamboni-Rached, L. A. Ambrosio, and H. E. Hernández-Figueroa, "Diffraction-attenuation resistant beams: their higher order versions and finite-aperture generations," *Appl. Opt.*, vol. 49, pp. 5861-5869, 2010.
- [6] T. A. Vieira, M. R. R. Gesualdi, and M. Zamboni-Rached, "Frozen waves: experimental generation," *Opt. Lett.*, vol. 37, pp. 2034-2036, 2012.
- [7] T. A. Vieira, M. Zamboni-Rached, and M. R. R. Gesualdi, "Modeling the spatial shape of nondiffracting beams: Experimental generation of Frozen Waves via holographic method," *Opt. Commun.*, vol. 315, pp. 374-380, 2014.
- [8] M. Zamboni-Rached, and M. Mojahedi, "Shaping finite-energy diffraction- and attenuation-resistant beams through Bessel-Gauss-beam superposition," *Phys. Rev. A*, vol. 92, 043839, 2015.
- [9] A. H. Dorrah, M. Zamboni-Rached, and M. Mojahedi, "Generating attenuation-resistant frozen waves in absorbing fluid" *Opt. Lett.*, vol. 41, pp. 3702-3705, 2016.

- [10] V. Garcés-Chávez, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett, and K. Dholakia. "Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam" *Nature*, vol. 419, pp. 145-147, 2002.
- [11] V. Garcés-Chavez, D. Roskey, M. D. Summers, H. Melville, D. McGloin, E. M. Wright, and K. Dholakia, "Optical levitation in a Bessel light beam," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 85, pp. 4001-4003, 2004.
- [12] Z. Bouchal, "Nondiffracting optical beams: physical properties, experiments, and applications," *Czech. J. Phys.*, vol. 53, pp. 537-578, 2003.
- [13] K. Volke-Sepulveda, V. Garcés-Chávez, S. Chávez-Cerda, J. Arlt, and K. Dholakia, "Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam," *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt.*, vol. 4, S82-S89, 2002.
- [14] V. Garcés-Chávez, D. McGloin, M. J. Padgett, W. Dultz, H. Schmitzer, and K. Dholakia, "Observation of the transfer of the local angular momentum density of a multiringed light beam to an optically trapped particle," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, 093602, 2003.
- [15] J. Durnin, "Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 4, pp. 651-654, 1987.
- [16] J. Durnin, and J. J. Miceli Jr., "Diffraction-Free Beams," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, pp. 1499-1501, 1987.
- [17] L. A. Ambrosio, and M. Zamboni-Rached, "Analytical approach of ordinary frozen waves for optical trapping and micromanipulation," *Appl. Opt.*, vol. 54, pp. 2584-2593, 2015.
- [18] L. A. Ambrosio, and M. Zamboni-Rached, "Optical forces experienced by arbitrary-sized spherical scatterers from superpositions of equal-frequency Bessel beams," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 32, pp. 37-46, 2015.
- [19] L. A. Ambrosio, and M. M. Ferreira, "Time-average forces over Rayleigh particles by superposition of equal-frequency arbitrary-order Bessel beams," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 32, pp. 67-74, 2015.
- [20] G. Gouesbet, and G. Gréhan, "Sur la généralisation de la théorie de Lorenz-Mie," *J. Opt. (Paris)*, vol. 13, pp. 97-103, 1982.
- [21] B. Maheu, G. Gouesbet, and G. Gréhan, "A concise presentation of the generalized Lorenz-Mie theory for arbitrary incident profile," *J. Opt. (Paris)*, vol. 19, pp. 59-67, 1988.
- [22] J. A. Lock, and G. Gouesbet, "Generalized Lorenz-Mie theory and applications," *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 110, pp. 800-807, 2009.
- [23] G. Gouesbet, "Generalized Lorenz-Mie theories, the third decade: A perspective," *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 110, pp. 1223-1238, 2009.
- [24] G. Gouesbet, and G. Gréhan. *Generalized Lorenz-Mie Theories*. Berlin-Heidelberg: Springer, 2011.
- [25] M. Zamboni-Rached, "Simple and effective method for the analytic description of important optical beams when truncated by finite apertures," *Appl. Opt.*, vol. 51, pp. 3370-3379, 2012.
- [26] J. J. Wen, and M.A. Breazele, "A diffraction beam field expressed as the superposition of Gaussian beams," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 83, pp. 1752-1756, 1988.
- [27] D. Ding, and Y. Zhang, "Notes on the Gaussian beam expansion," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 116, pp. 1401-1405, 2004.
- [28] L. A. Ambrosio, "On Analytical Descriptions of Finite-Energy Bessel Beams in the Generalized Lorenz-Mie Theory," to be published.
- [29] K. F. Ren, G. Gouesbet, and G. Gréhan, "Integral localized approximation in generalized Lorenz-Mie theory," *Appl. Opt.*, vol. 37, pp. 4218-4225, 1998.
- [30] L. A. Ambrosio, and H. E. Hernández-Figueroa, "Integral localized approximation description of ordinary Bessel beams and application to optical trapping forces," *Biomed. Opt. Express*, vol. 2, pp. 1893-1906, 2011.
- [31] G. Gouesbet, "On the validity of localized approximations for Bessel beams: all N-Bessel beams are identically equal to zero," *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, vol. 176, pp. 82-86, 2016.
- [32] G. Gouesbet, J. A. Lock, L. A. Ambrosio, and J. J. Wang, "On the validity of localized approximation for an on-axis zeroth-order Bessel beam," to appear in *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* (2016).
- [33] L. A. Ambrosio, J. J. Wang, and G. Gérard, "On the validity and reliability of the integral localized approximation for ordinary Bessel beams and associated radiation pressure forces," to be published.

**ANEXO C – ANALYTICAL DESCRIPTION OF PARAXIAL HIGHER-ORDER
FROZEN WAVES IN GENERALIZED LORENZ-MIE THEORY: THE
FINITE-ENERGY CASE. APRESENTADO NO LIP 2018**



ANALYTICAL DESCRIPTION OF PARAXIAL HIGHER-ORDER FROZEN WAVES IN GENERALIZED LORENZ-MIE THEORY: THE FINITE-ENERGY CASE

Nereida L. VALDIVIA* and Leonardo A. AMBROSIO*

Department of Electrical and Computer Engineering (SEL)
São Carlos School of Engineering, University of São Paulo (EESC/USP)
São Carlos, Brazil

*Corresponding authors: nereida@usp.br, leo@sc.usp.br

Abstract

Envisioning applications in optical trapping, this work aims to provide an analytical description of finite-energy higher order paraxial Frozen Waves in the Generalized Lorenz-Mie Theory. The beam shape coefficients are evaluated with the integral version of the localized approximation, the paraxial condition ensuring the validity of the approach. With these kind of waves, constructed from discrete superpositions of higher order Bessel-Gauss beams, more control over the intensity pattern of the resulting beam can be achieved, which may certainly be of interest in a wide range of areas such as optical trapping and bistouries, atom guiding and cooling, remote sensing, system alignment and so on.

1 Introduction

When an incident beam is not a plane wave, or when the particle has no spherical symmetry, it is necessary either to apply an extension of the Lorenz-Mie theory or matrix-based numerical schemes in order to describe and analyse the electromagnetic interaction between light and matter [1]. The Generalized Lorenz-Mie Theory (GMLT) is broadly used in the analysis of physical quantities in optical trapping, such as radiation pressure force induced by a laser beam over a small particle over spherical scatterers.

In this work, we rely on specific classes of non-diffracting beams which have been first introduced by Zamboni-Rached [2]. Originally, the name Frozen Wave (FW) has been given to them, and describes a particular electromagnetic static wave solution created from discrete superposition of equal-frequency scalar Bessel beams (BBs), carrying infinite energy [2]. To overcome this infinite energy issue, a truncated version of FWs was introduced recently, based on superpositions of Bessel-Gauss beams (BGBs) [3]. This truncated version is described, in cylindrical coordinates (ρ, ϕ, z) , by

$$\psi(\rho, \phi, z, t) = e^{i\omega t} e^{-ikz} \left[\exp(-q^2 \rho^2 / \mu) / \mu \right] e^{ikz/\mu} \sum_{p=-N}^N A_p \times J_0(k_{\rho p} \rho / \mu) e^{-ik_{\rho p} z / \mu} e^{-iv\phi}, \quad (1)$$

with

$$A_p \approx (1/L) \int_0^L \sum_{l=0}^{\infty} (\chi^l / l!) F(z) e^{i(2\pi/L)lz} dz, \quad (2)$$

In Eq. (1), $\psi(\rho, \phi, z, t)$ represents the longitudinal intensity pattern (LIP), q is a complex constant which regulates the transverse intensity of the Gaussian apodization, and A_p are complex coefficients of the p -th BGB in the superposition [3]. In Eq. (2), $F(z)$ is the function that describes the LIP in the range $0 \leq z \leq L$ and χ is given by $(k_{\rho 0} q z / k)^2$. The longitudinal and transverse wave numbers are given by $k_{z p} = Q + 2\pi p / L$, $k_{\rho p} = \sqrt{2k \sqrt{1 - k_{z p} / k}}$ where Q is positive real constant that guarantees the existence of forward propagating beams only (see [3] for detailed information).

FWs allow us to design an arbitrary pre-chosen LIP, within a specific range, maintaining the non-diffractive nature of BBs. The truncated (finite-energy) version based on BGBs is interesting since it could readily be generated experimentally.

Higher-order BGBs, just as higher-order BBs, increases the control over the transverse shape of the FW of either finite or infinite energy, respectively, and provides interesting stationary field distributions. In this situation, the desired LIP will be obtained over the cylindrical surface $\rho = \rho' > 0$, where ρ' is approximately the first positive root of $J'_v(k_{\rho n} \rho)$ [4].

In the GMLT a set of beam shape coefficients (BSCs) describes the incident beam [1]. To calculate them we use an integral version of the localized approximation (ILA) technique [5]. This is acceptable since it has been adopted, tested and validated for paraxial beams such as Bessel, Mathieu and helical beams, besides finite and infinite energy FWs [6,7,8,9,10,11].

2 Analytical description of finite-energy higher order FWs and optical force calculation with the GLMT

To calculate the BSCs using the ILA, some steps (detailed in [2]) must be followed. First, the radial components of the electromagnetic wave, E_r and H_r are found from the Cartesian or cylindrical components; then the beam is displaced an amount of (ρ_0, ϕ_0, z_0) and an operator \hat{G} , that eliminates the dependence on r and θ , is applied. Finally, an integration over ϕ , to obtain the BSCs $g_{n, TM}^m$ and $g_{n, TE}^m$ of TM and TE modes, respectively, is

performed. Once they are given, all optical quantities which may be of interest can be calculated.

Under the paraxial regime, Eq. (1) represents a particular transverse field component, say E_x , and assume further that $E_z \approx 0$. In this way, $E_r = E_x \sin \theta \cos \phi$, and H_r is found from Faraday's law. The abovementioned procedure associated with the localized approximation involves lengthy algebra, considerations on the validity of the paraxial approximation, Newman's addition theorem [12], etc., more details shall be presented during the conference. Hence, the BSCs for the higher order paraxial FW-BGBs are given by

$$\mathbf{g}_{n, TM}^m = \frac{Z_n^m}{2} e^{ikz_0} \frac{e^{-ikz_0/\mu_G}}{\mu_G} \sum_{p=-N}^N \frac{A_p}{A_{p,|\max|}} \exp \left[\frac{-q^2 (w_p^2 + \xi_p^2)}{k_{\rho p}^2 \mu_G} \right] \times \left\{ \frac{(\gamma_n - i\delta_n)}{2} e^{-i(m-v)\phi_0} \left[J_{(m-2)} w_p J_{(m-2-v)} \xi_p e^{i\phi_0} \right. \right. \quad (3)$$

$$+ 2J_m w_p J_{(m-v)} \xi_p \cos \phi_0 + J_{(m+1)} w_p J_{(m+1-v)} \xi_p e^{-i\phi_0} \left. \right] + e^{-i(m-v+1)\phi_0} \left[e^{2i\phi_0} J_{(m-1)} w_p J_{(m-1-v)} \xi_p e^{i\phi_0} \right. \left. \right. \\ \left. \left. + J_{(m+1)} w_p J_{(m+1-v)} \xi_p \right] \right\};$$

$$\mathbf{g}_{n, TE}^m = \frac{Z_n^m}{2} e^{ikz_0} \frac{e^{-ikz_0/\mu_G}}{\mu_G} \sum_{p=-N}^N \frac{F_p A_p}{A_{p,|\max|}} \exp \left[\frac{-q^2 (w_p^2 + \xi_p^2)}{k_{\rho p}^2 \mu_G} \right] \times \left\{ \frac{(\gamma_n - i\delta_n)}{2} e^{-i(m-v)\phi_0} \left[J_{(m-2)} w_p J_{(m-2-v)} \xi_p e^{i\phi_0} \right. \right. \quad (4)$$

$$+ 2J_m w_p J_{(m-v)} \xi_p \cos \phi_0 + J_{(m+1)} w_p J_{(m+1-v)} \xi_p e^{-i\phi_0} \left. \right] + e^{-i(m-v+1)\phi_0} \left[e^{2i\phi_0} J_{(m-1)} w_p J_{(m-1-v)} \xi_p e^{i\phi_0} \right. \left. \right. \\ \left. \left. + J_{(m+1)} w_p J_{(m+1-v)} \xi_p \right] \right\};$$

with $A_{p,|\max|}$ representing the coefficient A_p with the highest absolute value among the $2N + 1$ BGBs, and

$$Z_n^0 = \frac{2n(n+1)i}{2n+1}; \quad Z_n^{m \neq 0} = \left(\frac{-2i}{2n+1} \right)^{|m|-1};$$

$$\mu_G = 1 + i \frac{2q^2 z_0}{k}; \quad F_p = 1 - \frac{1}{\mu_G} + \frac{k_{zp}}{k \mu_G};$$

$$\gamma_n = 2 \frac{q^2}{k} \rho_0 (n+1/2); \quad \delta_n = 4 \left(\frac{q^2}{k} \right)^2 z_0 \rho_0 (n+1/2); \quad (5)$$

$$w_p = \sin \alpha (n+1/2); \quad \xi_p = k \rho_0 \sin \alpha;$$

$$\sin \alpha \approx \sqrt{2} \left(1 - k_{zp}/k \right)^{1/2}.$$

Eqs. (3), (4) and (5) are the main theoretical result of this work.

Additionally, the radiation pressure force induced by a laser beam over a particle can be characterized by a longitudinal ($C_{pr,z}$) and two transverse ($C_{pr,x}$, $C_{pr,y}$) radiation pressure cross-section (RPCS) components. Those cross-section components, intrinsically dependent upon the BSCs and the Mie coefficients, can be computed by means of ready-to-use expressions found in the literature [1].

3 Numerical results

As an example of application of the analytical results, let us consider $|\psi(\rho, \phi, z)|^2 \approx |F(z)|^2$ as the desired LIP, within $0 \leq z \leq L$, given by

$$F(z) = \begin{cases} 0, & 0 \leq z < l_1, \quad l_2 \leq z < l_3, \quad l_4 \leq z \leq L \\ \frac{-4(z-l_1)(z-l_2)}{(l_1-l_2)^2}, & l_1 \leq z < l_2 \\ 1, & l_3 \leq z < l_4 \end{cases} \quad (6)$$

Where $l_1 = 0.5$ mm, $l_2 = l_1 + \Delta z/2$, $l_3 = l_2 + \Delta z$, $l_4 = l_3 + 2\Delta z$, with $L = 0.74$ mm and $\Delta z = 0.4$ mm. The corresponding spot is $r_0 \approx 9$ μ m and the wavelength in vacuum is $\lambda = 1064$ nm. A similar pattern has already been considered in the context of higher order FWs [4].

With Eqs. (1) and (2) we developed simulations using the software *Mathematica* (version 11.2), with 107 beams in the superposition ($N = 53$), and Bessel functions of order $v = 4$. Figure. 1 shows the field intensity distribution $|\psi(\rho, \phi, z)|^2$. It can be noticed that the intended LIP given in Eq. (6) is obtained at $\rho \approx 7.75$ μ m.

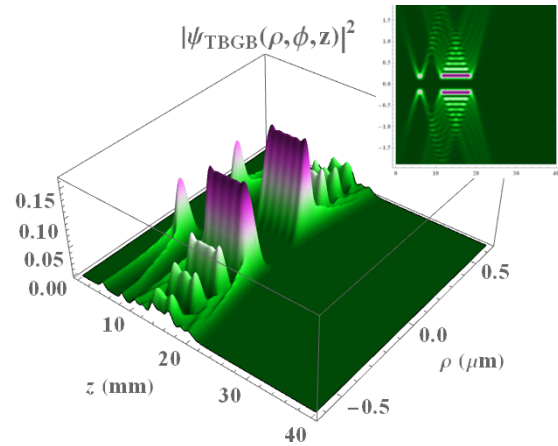


Figure 1 2D (inset) and 3D plots of $|\psi(\rho, \phi, z)|^2$ for a truncated 4th order FW-BGBs with $\lambda = 1064$ nm, $r_0 \approx 9$ μ m, $L = 74$ mm, $N = 53$.

The longitudinal RPCS $C_{pr,z}$ is shown in Figure. 2 for three particle sizes of radius $a = \lambda/20$, $\lambda/2$ and 2λ . The relative refractive index was kept constant, $M = 1.1$. Multiplicative factors were introduced for visualization purposes. From this figure it can be seen that $C_{pr,z}$ mimics the LIP along z , at $\rho \approx 7.75$ μ m. No three-dimensional optical trap was observed in this example since the gradient forces, proportional to the RPCS, cannot balance the scattering forces. This could possibly be circumvented by going beyond paraxial beams and considering true vector and highly non-paraxial wave fields.

The longitudinal RPCS $C_{pr,x}$ as a function of ρ_0 is shown in Figure. 3. The beam is displaced along the x axis, i.e., $\rho_0 = x_0$, and three distinct longitudinal positions are assumed, viz. $z_0 = -6, -12, \text{ and } -18$ mm. We have chosen a Rayleigh particle of radius $a = \lambda/20$ and relative refractive index $M = 1.1$ [Fig. 3(a)] and $M = 0.9$ [Fig. 3(b)]. Due to the transverse profile of the resulting beam, several radial

points of stable equilibrium are expected. For relative refractive indices greater than 1.0 [Figure. 3 (a)] those points are expected at peaks of high intensity of the FW, and for $M < 1.0$ at nulls or dark regions of the beam [Figure. 3 (b)].

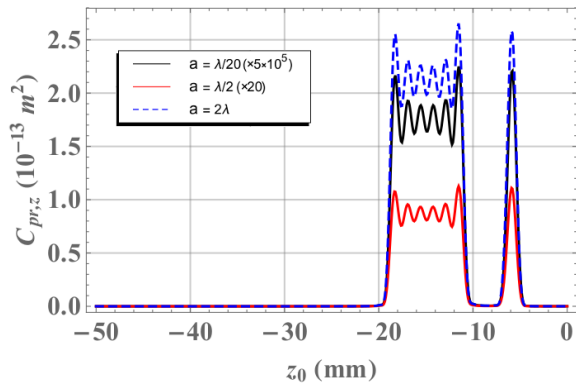


Figure 2 Longitudinal RPCS ($C_{pr,z}$) as a function of z_0 for the FW of Figure. 1, with $\rho = 7.75 \mu\text{m}$. The scatterer has three distinct radius a and fixed relative refractive index $M = 1.1$.

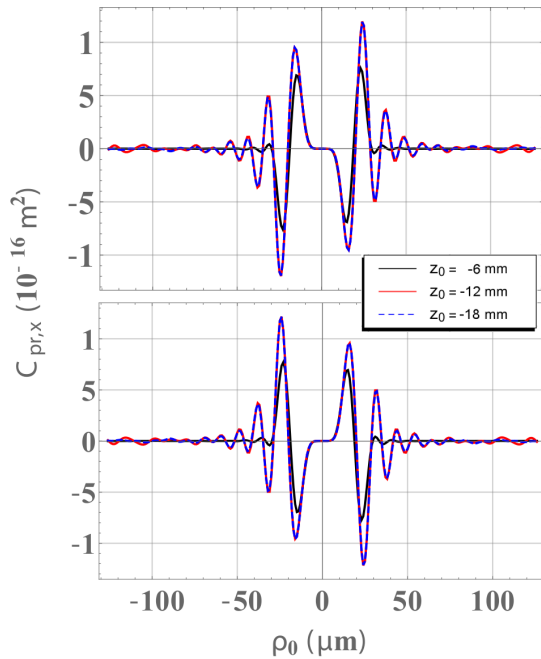


Figure 3 Transverse RPCS ($C_{pr,x}$) as a function of $\rho = 7.75 \mu\text{m}$ for the FW of Figure. 1. The particle has scatterer radius $a = \lambda/20$. Relative refractive index for (a) $M = 1.1$. and (b) $M = 0.9$.

4 Conclusions

Higher-order truncated FWs were successfully described in the context of the GLMT using an analytical approach, thus extending previous works of the same authors on zeroth-order beams. The BSCs have been calculated using the ILA aiming to better describe a physical realizable beam for optical trapping purposes. Usually, related works in this field are restricted to interactions between particles and infinite energy beams.

Bs ensure non-diffractive properties for infinite energy FWs, whereas the Gaussian apodization which is introduced by adopting BGBs allows FW to have finite energy. In addition, the use of higher order Bessel functions provides some control over the transverse position of the desired longitudinal intensity pattern.

It must be emphasized that only Rayleigh particles and paraxial beams have been considered here, the analysis being of an essentially scalar nature. An extension to full Maxwellian (vector) beams is in progress and we expect effective three-dimensional traps to become possible. We intend to comment more on that during the conference.

5 References

- [1] Gouesbet, Gérard, and Gérard Gréhan, *Generalized Lorenz-Mie Theories* (Springer, 2017).
- [2] Zamboni-Rached, M., Stationary optical wave fields with arbitrary longitudinal shape by superposing equal frequency Bessel beams: Frozen Waves. *Optics Express* 12(17):4001-4006 (2004).
- [3] Zamboni-Rached and M, Mojahedi M., Shaping finite-energy diffraction-and attenuation-resistant beams through Bessel-Gauss-beam superposition, *Physical Review A*. 92(4):043839 (2015).
- [4] Zamboni-Rached M, Recami E, Hernández-Figueroa HE. Theory of "frozen waves": modeling the shape of stationary wave fields, *JOSA A* 22(11):2465-75 (2005).
- [5] Ren KF, Gouesbet G, Gréhan G., Integral localized approximation in generalized Lorenz-Mie theory, *Applied optics* 37(19):4218-25 (1998).
- [6] Gouesbet G., On the validity of localized approximations for Bessel beams: All N-Bessel beams are identically equal to zero, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 176:82-6 (2016).
- [7] Gouesbet G, Lock JA, Ambrosio LA, Wang JJ, On the validity of localized approximation for an on-axis zeroth-order Bessel beam, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 195:18-25 (2017).
- [8] Chafiq A, Ambrosio LA, Gouesbet G, Belafhal A, On the validity of integral localized approximation for on-axis zeroth-order Mathieu beams, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. 204:27-34 (2018).
- [9] Gouesbet G and Ambrosio LA, A warning against the use of a localized approximation for helical beams, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, in press (2018).
- [10] Ambrosio LA, Wang J, Gouesbet G., On the validity of the integral localized approximation for Bessel beams and associated radiation pressure forces, *Applied optics* 56(19):5377-87 (2017).
- [11] Valdivia NL and Ambrosio LA, On Analytical Descriptions of Finite-Energy Paraxial Frozen Waves in Generalized Lorenz-Mie Theory, *International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC17)*, 27-30 August, Aguas de Lindoia, Brazil, 2017.
- [12] Watson GN., *Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge 19:22 (1944).

**ANEXO D – BESSEL-GAUSS BEAM DESCRIPTION IN THE GENERALIZED
LORENZ-MIE THEORY: THE FINITE SERIES METHOD. APRESENTADO NO
IMOC 2019**

Bessel-Gauss Beam Description in the Generalized Lorenz-Mie Theory: The Finite Series Method

Nereida L. Valdivia

Department of Electrical and Computer Engineering
EESC - University of São Paulo
São Carlos, Brazil
nereida@usp.br

Leonardo A. Ambrosio

Department of Electrical and Computer Engineering
EESC - University of São Paulo
São Carlos, Brazil
leo@sc.usp.br

Abstract—Expansions over spherical harmonic functions are needed to describe electromagnetic beams in the Generalized Lorenz-Mie theory, the coefficients of which – the Beam Shape Coefficients (BSCs)– are related to the beam’s spatial shape. Bearing in mind applications in optical trapping, this work provides a set of finite series expressions for the BSCs, as an alternative exact method to analytically describe paraxial arbitrary order Bessel-Gauss beams. These beams are solutions to the Fresnel diffraction integral constructed from a Gaussian-apodized Bessel beam. A comparison between finite series, localized approximation (LA) and the time-consuming quadrature schemes are presented in terms of BSCs. It is shown that finite series and LA approaches agree with great precision. Taking into consideration its natural limitations, the LA approach computes BSCs with lower computational burden than the finite series, although the latter is an exact method which can also be extended to nonparaxial vector beams.

Index Terms—Bessel-Gauss beams, finite series, GLMT, BSCs

I. INTRODUCTION

Bessel-Gauss beams (BGBs) result from the apodization of a Bessel beam (BB) realized by a Gaussian beam (GB). BBs are well-known for their diffraction resistance and self-reconstruction characteristics [1]. Those properties make them appealing for a variety of optical applications. The Gaussian apodization aims to truncate the BB, thus leading to a finite energy and physically realizable solution [2]. In the paraxial approximation, a BGB can be calculated from the Fresnel diffraction integral [3], [4], resulting in [2] [$\exp^{i\omega t}$ omitted]:

$$\Psi_{BGB}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{1}{\mu} \exp\left(-q^2 \frac{\rho^2}{\mu}\right) J_\nu\left(k_\rho \frac{\rho}{\mu}\right) \times \exp\left(i \frac{k^2}{2k} \frac{z}{\mu}\right) e^{i\nu\varphi} e^{-ikz}, \quad (1)$$

where $J_\nu(\cdot)$ is the ν -th order Bessel function of the first kind, k is the wave number and k_ρ its transverse component, q is a parameter that regulates the transverse intensity width of the Gaussian apodization, and $\mu = 1 - i2(q^2/k)z$.

Equation (1) is a solution subjected to the paraxial approximation. Under this approximation, $k_\rho \approx \sqrt{2}\sqrt{1 - (k_z/k)}$ [2].

The authors thank FAPESP (2017/10445-0), CNPq (426990/2018-8 and 307 898/2018-0) and CAPES (Nereida’s Doctoral grant) for supporting this work.

The value of the parameter q has been chosen by comparison between the BGB equation given in [2] and the one given in [5] and [3], $q = 1/w_0$, where w_0 is the beam waist radius.

The Generalized Lorenz-Mie Theory (GLMT) describes arbitrary shaped beams, such as BGBs, and their interaction with particles. As a result of its versatility, the GLMT is widely adopted in the analysis of diverse physical phenomena and quantities such as optical forces, scattering and absorption cross sections, electromagnetic fields, etc. [6]. In the GLMT, the incident field is expanded as a set of harmonic wave functions, in spherical coordinates (r, θ, φ) , with expansion coefficients called beam shape coefficients (BSCs) for TM and TE modes, $g_{n, \text{TM}}^m$ and $g_{n, \text{TE}}^m$, respectively. These coefficients can be basically evaluated from three distinct approaches, viz., quadrature schemes with double or triple integrals, localized approximations (LAs) and finite series (FS). Each method has its advantages and drawbacks: quadrature techniques are exact and flexible but, unless the integrals can be resolved, it may be prohibitively time consuming [7]. LA is flexible and numerically fast, but has validity limitations depending on the degree of paraxiality of the beam [8]. FS is also much faster than quadratures but are not flexible, demanding heavy algebraic manipulations whenever the incident beam is changed.

In previous works the integral version of the LA (ILA) was used to obtain the BSCs of finite energy “frozen waves”, which are the result of a summation of several BGBs. Expressions for TM BSCs, $g_{n, \text{TM}}^m$, and TE BSCs, $g_{n, \text{TE}}^m$ ($n \geq 1$, $-n \leq m \leq n$ integers) are presented in [9] and [10]. Here we shall derive the BSCs of a single BGB of such “frozen waves”, but now using the FS method and then comparing it with those computed from quadratures and the ILA. It must be emphasized that FS was originally proposed in 1988 [11] and applied exclusively to GB until last year, when introduced in the GLMT for the derivation of the BSCs of Laguerre-Gauss beams (LGBs) [12].

To do so, we rely on (1) and take it to represent a single transverse electric field component of a paraxial beam, $\vec{E} = \hat{x}E_x = \Psi_{BGB}$. The BSCs are then evaluated with the FS method. Despite the lack of flexibility in the mathematical procedure whenever the beam description changes, the FS is exact and analytic. This work extends the application of the FS method beyond GBs and LGBs [12], although it remains to be

applied to true vector beams. The expressions so derived for the BSC are compared with those obtained using LA technique and quadratures. Finally, our conclusions are presented.

II. FINITE SERIES EXPRESSIONS

In order to provide FS expressions for the BSCs we must use the Neumann expansion theorem (NET) procedure (see [13] and [12] for mathematical details). First, from (1) we find the radial components of the electric and magnetic fields. Discarding the contribution of the longitudinal field components ($E_z = H_z \approx 0$), $E_r = E_x \sin \theta \cos \varphi$ and (from simplification of Faraday's law), $H_r = H_y \sin \theta \sin \varphi$. In spherical coordinates (r, θ, φ) ,

$$\begin{aligned} E_r(r, \theta, \varphi) = & E_0 e^{-ikr \cos \theta} \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{r^2 \sin^2 \theta}{w_0^2 \mu}\right) \\ & \times J_\nu\left(k_\rho \frac{r \sin \theta}{\mu}\right) \exp\left(-i \frac{k_\rho^2 r \cos \theta}{2k \mu}\right) \\ & \times e^{i\nu\varphi} \sin \theta \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

In the NET-procedure we must follow two paths to express the BSCs using FS, namely, one for $(n-m)$ even and the other for $(n-m)$ odd. To discard the θ dependency, the procedure specifies $\theta = \pi/2$ in (2) for $(n-m)$ even and $(\partial E_r / \partial \theta)_{\theta=\pi/2}$ for the odd case, in order to take advantage of nonzero values of the associated Legendre functions [12], [13]. In the GLMT and within the NET procedure, one has for $(n-m)$ even [13]:

$$\begin{aligned} (kr)^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} r E_r\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) e^{-im\varphi} d\varphi = & \pi \sqrt{2\pi} E_0 \\ & \times \sum_{n=|m|}^{\infty} \frac{(-i)^n}{ik} 2n + 1 g_{n,\text{TM}}^m P_n^{|m|}(0) J_{n+1/2}(kr) \end{aligned} \quad (3)$$

Solving the integral in (3), rearranging it and relying on orthogonality conditions for the associated Legendre functions, $P_n^{|m|}(\cdot)$ [13], we obtain:

$$g(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} x \exp(-x^2 s^2) J_\nu(k_\rho x s w_0), \quad (4)$$

where $x = kr$ and $s = 1/kw_0$ is the confinement parameter.

Equation (4) can be expanded in a Maclaurin series of the form $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, so we can get the b_n coefficients, which are explicitly related to the BSCs. After some mathematical work, the b_n 's are obtained and replaced in the explicit expressions for the BSCs [12]. All in one, we find the FS expressions for the TM-BSCs, valid for $g_{n,\text{TM}}^m$, $(n-m)$ even:

$$\begin{aligned} g_{n,\text{TM}}^{\nu+1} = & \frac{i^{n+1}}{2^{\nu+1}} \frac{\left(\frac{n-\nu-1}{2}\right)!}{\Gamma\left(\frac{n+\nu+2}{2}\right)} \sum_{p=0}^{\leq n/2} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{t+n-p} \frac{s^{2t}}{t!} \\ & \times \varepsilon(n-2p; \nu) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n - p\right) (\sin \alpha)^{n-2p-1}}{p! \left(\frac{n-\nu-1}{2} - p\right)! \Gamma\left(\frac{n+\nu+1}{2} - p\right)}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} g_{n,\text{TM}}^{\nu-1} = & \frac{i^{n+1}}{2^{\nu-1}} \frac{\left(\frac{n-\nu-1}{2}\right)!}{\Gamma\left(\frac{n+\nu}{2}\right)} \sum_{p=0}^{\leq n/2} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{t+n-p-1} \frac{s^{2t}}{t!} \\ & \times \varepsilon(n-2p; \nu) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n - p\right) (\sin \alpha)^{n-2p-1}}{p! \left(\frac{n-\nu-1}{2} - p\right)! \Gamma\left(\frac{n+\nu+1}{2} - p\right)}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} g_{n,\text{TM}}^{-1} = & \frac{i^{n+1}}{2} \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \sum_{p=0}^{\leq n/2} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{t+n-p} \frac{s^{2t}}{t!} \\ & \times \varepsilon(n-2p; 0) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n - p\right) (\sin \alpha)^{n-2p-1}}{p! \left(\frac{n-1}{2} - p\right)! \Gamma\left(\frac{n+1}{2} - p\right)}, \end{aligned} \quad (7)$$

In (5)-(7), the only nonzero BSCs are those with $m = \nu \pm 1$, where α is the axicon angle and $\varepsilon(n-2p; \nu) = 0$ for all $n-2p \leq \nu$, and 1 otherwise.

Similar expressions have been obtained for $(n-m)$ odd, but they shall not be reproduced here. Combining the results for all $(n-m)$, $g_{n,\text{TM}}^m$ can be then computed. For the TE-BSCs $g_{n,\text{TE}}^m$, they can be found easily from the symmetry relations $g_{n,\text{TM}}^{\nu \pm 1} = \pm i g_{n,\text{TE}}^{\nu \pm 1}$ ($\nu \geq 0$) [12].

III. NUMERICAL RESULTS

Based on (5)-(7) for $(n-m)$ even and similar expressions for $(n-m)$ odd, a numerical code has been developed in the commercial software *Mathematica 12 Student Edition* to calculate the BSCs for BGBs. They are then compared with the BSCs calculated with the ILA method and quadrature schemes. To obtain accurate results it is important to consider parameters with high numeric precision, meaning a high number of significant figures. Disregarding this can lead to blowing ups issues for the FS method, as n increases. Hence, all the simulations here were performed with a precision of 50 decimals.

The coefficients $g_{n,\text{TM}}^m$ are plotted in Figs. 1 to 3 as a function of n , for $m = \nu + 1$, $m = \nu - 1$ and $m = 0$. Different values of ν were considered, viz., $\nu = 0, 1$ and 2 , and two axicon angles ($\alpha = 2^\circ, 10^\circ$) have also been assumed.

Fig. 1 shows comparisons between FS, ILA and quadratures $\nu = 0, m = 1$ and $\alpha = 2^\circ$. The BSCs for the three approaches are in quite good agreement, the ILA being the fastest (0.315 s) for n up to 200. The FS method took 37.79 s, which is more than 100 times that of the ILA, but much faster than quadrature. Indeed, the latter took more than 7 days for n up to 100, after which it began to fail due to highly oscillatory integrands and, consequently, lack of convergence. The simulation was then interrupted.

Figs. 2(a) and 2(b) shows the expected BSCs for $\nu = 2, m = 1$ using (6) for $\alpha = 2^\circ$ and 10° . In these figures we compare the FS expressions with the ILA approach. The FS agrees with great precision with the ILA results. In Fig. 2(a), for $1 \leq n \leq 1200$, FS took ≈ 3.02 h to compute the results while the ILA took 1.078 s. In Fig. 2(b) the running time for FS was 12.86 min, this for $1 \leq n \leq 500$, and for ILA 0.45 s. The computation time of FS does not increase linearly with n , as n gets bigger the FS takes more time to compute the

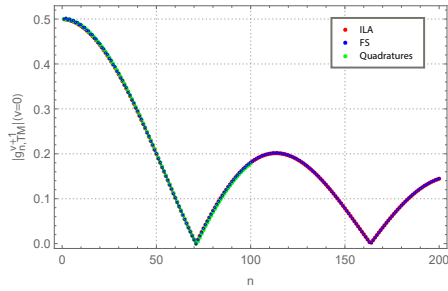


Fig. 1. TM BSCs as a function of n , for $\alpha = 2^\circ$, $v = 0$ and $m = 1$.

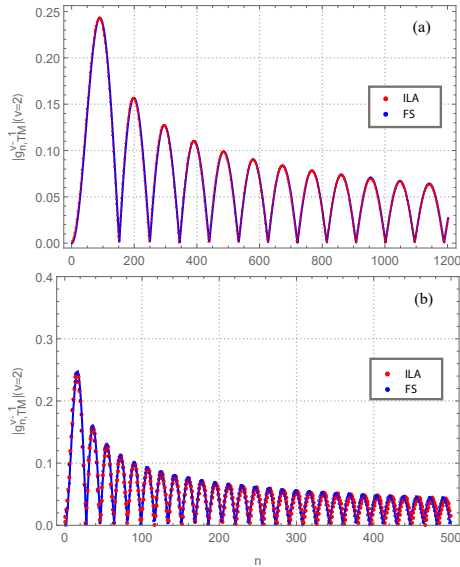


Fig. 2. Same as Fig. 1, but now for $v = 2$ and $m = 1$, for (a) $\alpha = 2^\circ$ and (b) $\alpha = 10^\circ$.

coefficients because of recursions needed to evaluate factorials and gamma functions.

Fig. 3 shows the resulting BSCs given in (7) for $v = 0$ and $m = -1$, with $\alpha = 10^\circ$. In the same way, we compare the coefficients obtained with the FS expressions and the ILA. As in the previous examples, the results were equivalent for the 500 n values evaluated. The running time for FS was 12.02 min and for ILA 0.55 s.

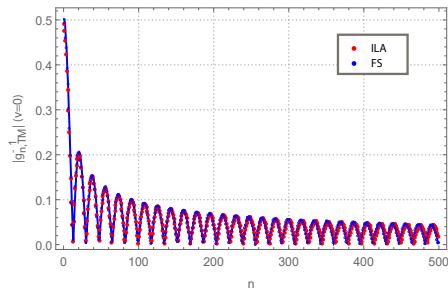


Fig. 3. Same as Fig. 1, but now for $\alpha = 10^\circ$, $v = 0$ and $m = -1$.

IV. CONCLUSION

For the first time, an exact and analytic set of finite series expressions for the beam shape coefficients describing paraxial arbitrary order Bessel-Gauss beams has been successfully presented under the framework of the generalized Lorenz-Mie theory. As well as a comparison between such coefficients and those evaluated from the other well-established two approaches, viz., the localized approximation and the quadrature (double and triple integrals) scheme. Finite series and localized approximation agree with great precision. As known from previous works, although the localized approximation is the fastest method, it is limited in practice to small axicon angles. Our approach allows to have a full set of analytical coefficients valid whatever the paraxial or nonparaxial nature of the beam, and can certainly be extended to vector beams, since it is an exact method. Finally, it is of interest to extend the analysis to a fully vectorial beam. This is currently in progress.

REFERENCES

- [1] J. Durnin, J. Miceli Jr, and J. Eberly, "Diffraction-free beams," *Physical review letters*, vol. 58, no. 15, p. 1499, 1987.
- [2] M. Zamboni-Rached and M. Mojahedi, "Shaping finite-energy diffraction- and attenuation-resistant beams through Bessel-Gauss-beam superposition," *Physical Review A*, vol. 92, no. 4, p. 043839, 2015.
- [3] F. Gori, G. Guattari, and C. Padovani, "Bessel-Gauss beams," *Optics communications*, vol. 64, no. 6, pp. 491–495, 1987.
- [4] C. Palma, G. Cincotti, G. Guattari, and M. Santarsiero, "Imaging of generalized Bessel-Gauss beams," *journal of modern optics*, vol. 43, no. 11, pp. 2269–2277, 1996.
- [5] M. McLaren, M. Agnew, J. Leach, F. S. Roux, M. J. Padgett, R. W. Boyd, and A. Forbes, "Entangled Bessel-Gaussian beams," *Optics express*, vol. 20, no. 21, pp. 23 589–23 597, 2012.
- [6] G. Gouesbet, "Validity of the localized approximation for arbitrary shaped beams in the generalized Lorenz-Mie theory for spheres," *JOSA A*, vol. 16, no. 7, pp. 1641–1650, 1999.
- [7] K. F. Ren, G. Gouesbet, and G. Gréhan, "Integral localized approximation in generalized Lorenz-Mie theory," *Applied optics*, vol. 37, no. 19, pp. 4218–4225, 1998.
- [8] L. A. Ambrosio, J. Wang, and G. Gouesbet, "On the validity of the integral localized approximation for bessel beams and associated radiation pressure forces," *Applied optics*, vol. 56, no. 19, pp. 5377–5387, 2017.
- [9] N. L. Valdivia and L. A. Ambrosio, "On analytical descriptions of finite-energy paraxial frozen waves in generalized lorenz-mie theory," in *2017 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC)*. IEEE, 2017, pp. 1–5.
- [10] —, "Analytical description of paraxial higher-order frozen waves in generalized lorenz-mie theory: the finite-energy case," in *Laser-Light and Interactions with Particles, College Station, TX, USA*, 2018.
- [11] G. Gouesbet, G. Gréhan, and B. Maheu, "Expressions to compute the coefficients gmn in the generalized lorenz-mie theory using finite series," *Journal of Optics*, vol. 19, no. 1, pp. 35–48, jan 1988. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1088%2F0150-536x%2F19%2F1%2F005>
- [12] G. Gouesbet, L. F. M. Votto, and L. A. Ambrosio, "Finite series expressions to evaluate the beam shape coefficients of a Laguerre-Gauss beam freely propagating," *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 227, pp. 12–19, 2019.
- [13] G. Gouesbet and G. Gréhan, *Generalized Lorenz-Mie Theories*, 2nd ed. Springer, 2017.