

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO–USP  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**Guilherme Machado Gagliardi**

**Algoritmos para Controle e Filtragem de Sistemas  
Lineares com Atraso Variante no Estado**

São Carlos  
2018



**Guilherme Machado Gagliardi**

**Algoritmos para Controle e Filtragem de Sistemas  
Lineares com Atraso Variante no Estado**

Dissertação de mestrado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências, Programa de Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos

Orientador: Marco Henrique Terra

São Carlos

2018

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

G135a           Gagliardi, Guilherme Machado  
                  Algoritmos para Controle e Filtragem de Sistemas Lineares com Atraso Variante no Estado / Guilherme Machado Gagliardi; orientador Marco Henrique Terra. São Carlos, 2018.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Área de Concentração em Sistemas Dinâmicos -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2018.

1. Sistemas lineares com atraso. 2. Sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos. 3. Controle Robusto. 4. Filtragem Robusta. 5. Mínimos quadrados regularizados robustos. 6. Estimativa mínima quadrática. I. Título.

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **GUILHERME MACHADO GAGLIARDI**.

Título da dissertação: "Algoritmos para controle e filtragem de sistemas lineares com atraso variante no Estado".

Data da defesa: 19/10/2018.

### Comissão Julgadora:

### Resultado:

Prof. Titular **Marco Henrique Terra**  
**(Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Titular **Oswaldo Luiz do Valle Costa**  
(Escola Politécnica/EP-USP)

Aprovado

Dr. **Marcos Garcia Todorov**  
(Laboratório Nacional de Computação Científica/LNCC)

Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica:  
Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:  
Prof. Associado **Luís Fernando Costa Alberto**



*Dedico este trabalho aos meus pais e a todos os meus demais mestres.*





---

# Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Marco Henrique Terra, pela competência na orientação, pelas lições transmitidas e pelo incentivo persistente e paciente.

Às colegas de laboratório Daiane, pelo auxílio fundamental, e Elizandra, pelos conselhos e pelo estímulo.

Aos meus colegas de trabalho, especialmente ao Tales, pelo encorajamento e pelo compartilhamento de experiências. Também ao Dr. Marcelo Prado, pela oportunidade oferecida e pela compreensão.

Aos docentes e aos funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica, bem como à Escola de Engenharia de São Carlos e à Universidade de São Paulo, por proporcionarem um ambiente de aprendizagem e de desenvolvimento intelectual.

Muito especialmente, à minha família: meus pais, Almiro e Alzira, e meu irmão, Davi, pelo estímulo, pela paciência e pela oportunidade, não apenas durante o desenvolvimento deste trabalho, mas em todas as etapas da minha vida.

Aos autores dos trabalhos que inspiraram e fundamentaram esta dissertação, e a todas as pessoas que de alguma maneira contribuíram para que ela se tornasse possível.



*“Querem que vos ensine o modo de chegar à ciência verdadeira?  
Aquilo que se sabe, saber que se sabe;  
aquilo que não se sabe, saber que não se sabe;  
na verdade, é este o saber.”  
(Confúcio)*



---

# Resumo

Gagliardi, G. M. **Algoritmos para Controle e Filtragem de Sistemas Lineares com Atraso Variante no Estado.** 104 p. Dissertação de mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2018.

Esta dissertação apresenta soluções recursivas para os problemas de controle e de filtragem robustos para sistemas lineares de tempo discreto com atraso variante no estado. O atraso é assumido desconhecido no problema de controle, enquanto tanto a situação de atraso conhecido quanto a de atraso desconhecido são consideradas no problema de filtragem. A metodologia utilizada supõe que os valores do atraso obedecem a uma cadeia de Markov finita de tempo discreto subjacente, e baseia-se em um procedimento de aumento que transforma o sistema com atraso em um sistema linear sujeito a saltos Markovianos livre de atrasos, a partir do qual os reguladores e os filtros são deduzidos. Assim, o conhecimento do atraso do sistema original torna-se equivalente à observação do modo de operação do sistema Markoviano. Sendo o atraso desconhecido, uma representação que engloba todos os possíveis estados da cadeia de Markov é construída, possibilitando-se a obtenção de soluções independentes de modo. Os problemas são estabelecidos como otimizações do tipo min-max de um funcional de custo quadrático, através das quais buscam-se as soluções ótimas sob a máxima influência das incertezas, e são resolvidos pela combinação do método de funções penalidade à solução ótima de problemas de mínimos quadrados, resultando soluções dadas em termos de equações de Riccati organizadas em uma estrutura matricial. Exemplos numéricos ilustram o desempenho das soluções propostas, e mostram que elas podem oferecer vantagens quando comparadas a abordagens alternativas existentes na literatura.

**Palavras-chave:** Sistemas lineares com atraso. Sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos. Controle Robusto. Filtragem Robusta. Mínimos quadrados regularizados robustos. Estimativa mínima quadrática.



---

# Abstract

Gagliardi, G. M. **Control and Filtering Algorithms for Linear Systems with Varying State Delay**. 104 p. Master Thesis – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, 2018.

This master thesis presents recursive solutions to the robust control and filtering problems for discrete-time linear systems with a varying state delay. The delay is assumed to be known in the control problem, while both the situations of known and unknown delays are considered in the filtering problem. The applied methodology assumes that the values of the delay are governed by an underlying discrete-time finite Markov chain, and is based on an augmentation procedure that transforms the delay system into a delay-free Markovian jump linear system, which the regulators and filters are deduced from. Thus, knowledge of the delay of the original system becomes equivalent to mode observation in the Markovian system. If the delay is unknown, a model which encompasses every possible state of the Markov chain is formulated, making it possible to obtain mode-independent solutions. The problems are established as min-max optimizations of a quadratic cost functional, in which the optimal solutions are sought under the worst influence of the uncertainties, and are solved by combination of the penalty function method and the optimal solution to least squares problems, which results in solutions given in terms of Riccati equations arranged in a matrix structure. Numerical examples illustrate the performance of the proposed solutions, and show that they might offer advantages when compared to existing alternative approaches.

**Keywords:** Linear time-delay systems. Markovian jump linear systems. Robust control. Robust filtering. Robust regularized least squares. Minimal quadratic estimation.





---

## Lista de ilustrações

Figura 1.1 – Organização dos capítulos da dissertação. . . . .	33
Figura 3.1 – Comparação das médias das normas dos estados regulados. . . . .	51
Figura 3.2 – Comparação das médias dos custos de $N$ passos $J_N$ . . . . .	52
Figura 3.3 – Comparação das médias dos custos totais ótimos $J_{1000}^*$ em função de $d_{max}$ . . . . .	53
Figura 3.4 – Comparação das médias dos tempos de CPU em função de $d_{max}$ . . . . .	53
Figura 3.5 – Comparação das médias das normas dos estados regulados. . . . .	54
Figura 3.6 – Comparação das médias dos custos de $N$ passos $J_N$ . . . . .	55
Figura 3.7 – Comparação das médias dos custos totais ótimos $J_{300}^*$ em função de $d_{max}$ . . . . .	55
Figura 3.8 – Comparação das médias dos tempos de CPU em função de $d_{max}$ . . . . .	56
Figura 3.9 – Médias dos estados obtidas pelo regulador robusto recursivo para $d_{max} = 1$ . . . . .	56
Figura 4.1 – Comparação das médias dos erros de estimativa. . . . .	68
Figura 4.2 – Comparação das médias dos erros de estimativa. . . . .	69
Figura 5.1 – Comparação das médias dos erros de estimativa. . . . .	86
Figura 5.2 – Comparação das médias dos erros de estimativa. . . . .	87
Figura 5.3 – Médias dos erros de estimativa produzidos pelo filtro robusto com atraso para $d_{max} = 1$ . . . . .	87
Figura A.1 – Diagrama de transições para a cadeia de Markov de tempo discreto do exemplo. . . . .	101



---

## Lista de tabelas

Tabela 3.1 – Médias do custo ótimo de $N$ passos para cada método, conforme $d_{max}$ . . . .	52
Tabela 3.2 – Médias do custo ótimo de $N$ passos para cada método conforme $d_{max}$ . . . .	54



---

# Lista de algoritmos

Algoritmo 3.1	Regulador Robusto Recursivo para Sistemas com Atraso Desconhecido	50
Algoritmo 4.1	Estimativas Filtrada e Preditora Recursivas para Sistemas com Atraso Conhecido . . . . .	66
Algoritmo 5.1	Estimativas Filtrada e Preditora Recursivas para Sistemas com Atraso Desconhecido . . . . .	84
Algoritmo A.1	Código para simulação computacional de uma cadeia de Markov de tempo discreto. . . . .	104



---

## Lista de abreviaturas e siglas

SLAE	Sistema Linear com Atraso no Estado
SLSM	Sistema Linear sujeito a Saltos Markovianos
SAS	Sistema Aumentado Singular
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i>
MMSE	<i>Minimum Mean Square Error</i>





---

# Lista de símbolos

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	Conjunto dos vetores reais $n$ -dimensionais
$\mathbb{R}^{n,m}$	Conjunto das matrizes reais de dimensão $n \times m$
$\theta(k)$	Estado da cadeia de Markov no passo $k$
$\mathcal{S}$	Espaço de estados da cadeia de Markov
$Pr[\mathcal{C}]$	Probabilidade de ocorrência do evento $\mathcal{C}$
$p_{ij}$	Probabilidade de transição do modo $i$ para o modo $j$
$\mathbb{P}$	Matriz de probabilidades de transição
$\pi_{i,k}$	Distribuição de probabilidade do modo $i$ no instante $k$
$\pi_k$	Vetor distribuição de probabilidades no instante $k$
$\mathbb{E}\{\cdot\}$	Valor esperado
$\mathbf{1}_e$	Função indicadora para um conjunto $\mathcal{C}$
$A \otimes B$	Produto de Kronecker de $A$ por $B$
$diag(A,B)$	Matriz bloco diagonal formada pelas matrizes $A$ e $B$
$\mu$	Parâmetro de penalidade
$\lambda$	Parâmetro de minimização
$\delta A$	Matriz de parâmetros incertos
$\delta b$	Vetor de parâmetros incertos
$\Delta, \triangle$	Matriz de contração

$I_n$	Matriz identidade de ordem $n \times n$
$I$	Matriz identidade com dimensões apropriadas
$0_n$	Matriz nula de ordem $n \times n$
$0$	Matriz nula com dimensões apropriadas
$A^{-1}$	Inversa da matriz $A$
$A^\dagger$	Pseudo-inversa da matriz $A$
$A^T$	Transposta da matriz $A$
$A \succeq 0$	$A$ é uma matriz semidefinida positiva
$A \succ 0$	$A$ é uma matriz definida positiva
$A \succeq B$	$A - B$ é uma matriz semidefinida positiva
$A \succ B$	$A - B$ é uma matriz definida positiva
$\ x\ $	Norma Euclidiana de $x$ , definida por $(x^T x)^{\frac{1}{2}}$
$\ x\ _P$	Norma ponderada de $x$ , definida por $(x^T P x)^{\frac{1}{2}}$ , com $P \succ 0$
$x^T W(\bullet)$	Expressão simplificada para $x^T W x$
*	Como entrada de uma matriz, representa valor desprezível

---

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>27</b>
1.1	Objetivos	30
1.2	Metodologia	30
1.3	Organização do Texto	31
1.4	Publicações Decorrentes deste Trabalho	32
<b>2</b>	<b>Resultados Preliminares</b>	<b>35</b>
2.1	Funções Penalidade	35
2.2	Mínimos Quadrados Regularizados Robustos	37
2.3	Estimativa Mínima Quadrática Ponderada	38
2.4	Estimativa Mínima Regularizada Robusta	39
<b>3</b>	<b>Reguladores Recursivos para Sistemas com Atraso Desconhecido</b>	<b>41</b>
3.1	Formulação do Problema	42
3.1.1	Equivalência com Sistema Linear Sujeito a Saltos Markovianos	43
3.2	Sistema Aumentado Singular	45
3.3	Reguladores Robustos Recursivos via SAS	47
3.4	Exemplos Numéricos	49
<b>4</b>	<b>Filtros de Kalman para Sistemas com Atraso Conhecido</b>	<b>57</b>
4.1	Formulação do Problema	58
4.1.1	Equivalência com Sistema Linear Sujeito a Saltos Markovianos	60
4.2	Filtros de Kalman via SLSM	62
4.3	Exemplos Numéricos	66
<b>5</b>	<b>Filtros de Kalman para Sistemas com Atraso Desconhecido</b>	<b>71</b>
5.1	Formulação do Problema	72
5.2	Sistema Aumentado	74
5.3	Filtros de Kalman via Sistema Aumentado	79
5.4	Exemplos Numéricos	83
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>89</b>
6.1	Trabalhos Futuros	90

<b>Referências . . . . .</b>	<b>91</b>
------------------------------	-----------

<b>Apêndices</b>	<b>97</b>
------------------	-----------

<b>APÊNDICE A Conceito e Simulação Computacional de Cadeias de Markov . . . .</b>	<b>99</b>
---	-----------

A.1 Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos . . . . .	99
---	----

A.2 Conceito de Cadeias de Markov de Tempo Discreto . . . . .	100
---	-----

A.3 Simulação Computacional de Cadeias de Markov de Tempo Discreto . . . . .	102
--	-----

---

# Introdução

Uma grande variedade de sistemas dinâmicos tem a presença de atraso em seus modelos. Segundo Mahmoud (2000, Cap. 1), o atraso pode advir de características físicas inerentes à planta ou processo representado, ou pode ser introduzido pelos meios de comunicação ou de transporte, ou mesmo deliberadamente, para fins de controle.

O atraso pode ter impacto considerável sobre a estabilidade e o desempenho de um sistema (BOUKAS; LIU, 2002; FRIDMAN, 2014). Conseqüentemente, sistemas com atraso podem exibir comportamento complexo, e os problemas de análise e controle dos mesmos são capazes de impor dificuldades significativas (MAHMOUD, 2000; WU et al., 2010).

Pela complexidade de seu estudo e por terem aplicações importantes, os sistemas com atraso mobilizam esforços que podem ser traçados desde os primeiros trabalhos sobre equações com atraso no século XVIII, com maior sistematização desde a década de 1940 e uma forte acentuação a partir da última década do século XX, quando começaram a surgir pesquisas com enfoque na robustez do tratamento de sistemas com atraso incertos (FRIDMAN, 2014; GU; NICULESCU, 2003).

Os resultados obtidos encontram utilidade em áreas tão diversas quanto gerenciamento de estoque (IGNACIUK, 2014), modelos de infecções virais (WANG; LIU, 2015; YI et al., 2008), modelos fisiológicos (VIELLE; CHAUVET, 1998; NICULESCU et al., 2010), processos químicos (GARCÍA-SANZ et al., 2001) e automação e robótica (AILON; GIL, 2000; MASOUD et al., 2003).

Algumas das principais aplicações surgem, naturalmente, em situações que envolvem sistemas distribuídos ou a comunicação remota entre dispositivos, sensores ou atuadores, como em sistemas de controle em rede (QIU et al., 2015; LIU et al., 2014), controle de congestionamento em redes de comunicação (MASCOLO, 1999) e teleoperação de equipamentos (LELEVE et al., 2001; NIEMEYER; SLOTINE, 1997). Outras aplicações podem ser encontradas nas extensas pesquisas apresentadas por Gu e Niculescu (2003), Richard (2003) e Sipahi et al. (2011), e nas referências nelas contidas.

Nesta dissertação, o interesse estará em sistemas lineares com atraso no estado (SLAEs) de tempo discreto, caracterizados pelo fato de que seu estado no passo corrente depende não

apenas do valor deste no passo anterior, mas também de valores mais antigos. Contudo, a variação de tempo contínuo também já recebeu grande atenção (FRIDMAN; SHAKED, 2003; JIANG; HAN, 2005; ZHANG et al., 2013), e, de acordo com a natureza do processo modelado, o atraso pode surgir, alternativamente, nas entradas de controle (TZES et al., 2005; XIAO et al., 2000; KEQI; ZHI, 2015) ou nas variáveis de medidas (SAHEBSARA et al., 2007; HAN; ZHANG, 2009). Por vezes, adotam-se modelos com múltiplos atrasos (GAO; WANG, 2004; KIM, 2010; KWAKERNAAK, 1967; KEQI; ZHI, 2015; ZHANG et al., 2013).

Em algumas situações, assume-se que o atraso pode ser medido, e é conhecido a todo instante (SUN; CHEN, 2012; DU et al., 2007); em outras, ele é assumido desconhecido (SHI et al., 2003). Alguns modelos apresentam atraso constante (FRIDMAN; SHAKED, 2005; WANG et al., 2006), enquanto em outros ele é variante no tempo, embora com frequência estabeleçam-se limites conhecidos para os valores que ele pode tomar (MENG et al., 2010; SEURET et al., 2015; SU et al., 2014; KAO, 2012).

As abordagens mais comumente encontradas para a análise da estabilidade e para o controle de sistemas com atraso fornecem soluções calculadas por meio de desigualdades matriciais lineares (ou LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*), frequentemente derivadas de critérios escritos com base em funcionais de Lyapunov-Krasovskii ou em funções de Razumikhin, tanto em tempo discreto (SEURET et al., 2015; XU et al., 2014; MIRANDA; LEITE, 2008; LIU et al., 2010; MENG et al., 2010; GAO; CHEN, 2007; KEQI; ZHI, 2015), quanto em tempo contínuo (FEI et al., 2009; YU; CHU, 1999; JIANG; HAN, 2005).

Tratamentos envolvendo LMIs são também comuns no caso do problema de filtragem para sistemas com atraso; por exemplo, Wang et al. (2006), e Du et al. (2007), que assumem atrasos constantes, e, no caso dos primeiros, incertezas paramétricas limitadas em norma no modelo; Zhang et al. (2013), que consideram atrasos variantes no estado, e fazem uso de funcionais de Lyapunov-Krasovskii para obter as soluções e Gao e Wang (2004), que obtiveram um filtro  $H_\infty$  para um sistema com múltiplos atrasos constantes e conhecidos, e sujeito a incertezas paramétricas politópicas.

Os SLAEs de tempo discreto são passíveis de um processo de transformação em um sistema aumentado livre de atrasos. Esse processo é denominado *método de elevação* (do inglês *lifting method*), e já foi aplicado principalmente à área de Sistemas de Controle em Rede (MAO et al., 2007; QIU et al., 2015). A transformação facilita o desenvolvimento de estratégias recursivas, em termos de equações de Riccati, para o tratamento de SLAEs. Fridman (2014, Cap. 6), por exemplo, utilizou-a para a obtenção um regulador linear quadrático para SLAEs, supondo um atraso constante. Seguindo a mesma linha, Bortolin et al. (2018) apresentaram um regulador linear quadrático robusto para SLAEs incertos com atraso constante, deduzido com base na técnica de mínimos quadrados regularizados robustos.

Embora o método de elevação simplifique o tratamento de SLAEs quando o atraso é conhecido e constante, o problema continua complexo quando o atraso é desconhecido ou variante (FRIDMAN, 2014, Cap. 6), (MAHMOUD, 2010). Como observa-se na primeira referência, a

utilização do método quando o atraso é variante resulta em um sistema aumentado que pode ser considerado um sistema chaveado.

Sistemas chaveados constituem uma classe de modelos que são compostos por uma família de subsistemas, ou modos de operação, e por uma regra que coordena a transição entre estes (MAHMOUD, 2010). No contexto dos SLAEs transformados pelo método de elevação, cada modo do sistema aumentado corresponde a um dos valores dentre o conjunto de possíveis valores do atraso, e a regra que coordena a transição entre os valores do atraso determina também a transição entre os modos do sistema transformado. Hetel et al. (2008) estabeleceram a equivalência entre as abordagens de análise de estabilidade por meio de funcionais de Lyapunov-Krasovskii para sistemas com atraso discretos e as condições de estabilidade para sistemas chaveados construídos através do método de elevação.

O tratamento de sistemas com atraso variante através de um sistema chaveado equivalente, por meio do método de elevação, já foi realizado principalmente no caso dos problemas de análise de estabilidade e de controle (XIA et al., 2007; ZHANG; SHI, 2012; SUN; CHEN, 2012); Sun et al. (2009) empregam o conceito de tempo médio de permanência, bastante comum no estudo de sistemas chaveados. Todas essas referências apresentam suas soluções em termos de LMIs.

Fazendo-se a suposição adicional de que a transição entre os valores do atraso a cada passo obedece a uma cadeia de Markov finita de tempo discreto subjacente, as transições entre os modos do sistema resultante do método de elevação serão coordenadas pela mesma cadeia, de modo que este pode ser reconhecido como um tipo particular de sistema chaveado: um sistema linear sujeito a saltos Markovianos (SLSM) (COSTA et al., 2005). Dessa forma, o conhecimento do atraso do sistema original corresponde à observação do modo de operação do sistema Markoviano, ou, equivalentemente, ao conhecimento da cadeia de Markov associada.

A modelagem do atraso como uma cadeia de Markov pode ser adequada em diversas situações, especialmente na área de Controle em Rede. Segundo Zhang et al. (2005), por exemplo, os atrasos existentes em sistemas de comunicação em um instante estão, em geral, correlacionados com o atraso ocorrido no instante anterior, e, de acordo com Xiao et al. (2000), essa modelagem é geral o bastante para descrever esse tipo de sistema.

O atraso também tem comportamento Markoviano em Bahreini et al. (2015), supondo-se que a matriz de probabilidades de transição de estado associada à cadeia de Markov é parcialmente desconhecida, bem como em Li et al. (2014), Zhang et al. (2014), Khalil e Wang (2012) e Shi e Yu (2009); em todas essas referências, o problema de controle para sistemas com atraso recebe soluções baseadas em LMIs. Fazendo uso da transformação em um SLSM com cadeia de Markov observada, Odorico (2018) propôs reguladores lineares quadráticos robustos para sistemas lineares com atraso variante conhecido. Han e Zhang (2009) propuseram um filtro para sistemas lineares de tempo discreto com atraso Markoviano nas observações, com a solução dada em termos de equações de Riccati.

A transformação do sistema com atraso em um SLSM é útil, pois os problemas de controle

e filtragem para esta classe de sistemas já foram bastante estudados, e diversos resultados já foram estabelecidos, tanto dependentes de modo, para os casos em que a cadeia de Markov é conhecida, quanto independentes de modo, para as situações em que a cadeia não é observada. Por exemplo, soluções recursivas em termos de equações de Riccati para esse tipo de problema foram obtidas por Costa (1994), Costa et al. (2005), Cerri (2013) e Bortolin (2017).

## 1.1 Objetivos

Este trabalho tem por objetivos obter soluções recursivas para os problemas de controle e de filtragem robustos para SLAEs de tempo discreto. No caso mais geral, o modelo estudado é do tipo

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A_k + \delta A_k) x_k + (A_{d,k} + \delta A_{d,k}) x_{k-d_k} + (B_k + \delta B_k) u_k + (C_k + \delta C_k) w_k, \\ y_k &= (D_k + \delta D_k) x_k + (E_k + \delta E_k) v_k, \quad \forall k \geq 0, \\ x_k &= \varphi_0(k), \quad k \in [-d_{max}, 0], \end{aligned}$$

onde  $x_k$  é o estado no passo  $k$ ,  $x_{k-d_k}$  é o estado atrasado em  $d_k$  amostras,  $y_k$  é o vetor de medida,  $u_k$  é a entrada de controle,  $w_k$  e  $v_k$  são ruídos aleatórios gaussianos mutuamente independentes com média nula e  $\varphi_0(k)$  é a condição inicial do sistema para  $k = -d_{max}, -d_{max} + 1, \dots, 0$ .

As incertezas paramétricas são do tipo limitado em norma, modeladas como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta A_k & \delta A_{d,k} & \delta B_k & \delta C_k \end{bmatrix} &= L_{1,k} \Delta_{1,k} \begin{bmatrix} N_{A_k} & N_{A_{d,k}} & N_{B_k} & N_{C_k} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \delta D_k & \delta E_k \end{bmatrix} &= L_{2,k} \Delta_{2,k} \begin{bmatrix} N_{D_k} & N_{E_k} \end{bmatrix}, \quad \|\Delta_{q,k}\| \leq 1, \quad q = 1, 2, \end{aligned}$$

sendo  $L_{1,k}$  e  $L_{2,k}$  matrizes não-nulas,  $N_{A_k}, N_{A_{d,k}}, N_{B_k}, N_{C_k}, N_{D_k}$  e  $N_{E_k}$  matrizes conhecidas com dimensões apropriadas e  $\Delta_{1,k}$  e  $\Delta_{2,k}$  matrizes de contração arbitrárias.

O atraso variante no tempo  $d_k$  é um inteiro com valores mínimo e máximo conhecidos. As transições entre os valores do atraso a cada passo serão assumidas governadas por uma cadeia de Markov finita de tempo discreto, associada a uma dada matriz de probabilidades de transição. No caso do regulador, o atraso será suposto desconhecido, enquanto para o filtro serão estudadas tanto a situação de atraso desconhecido quanto a de atraso conhecido, ou mensurável.

Para ambos os problemas, controle e filtragem, serão considerados tanto o caso nominal, em que o SLAE é livre de incertezas ( $\delta A_k, \delta A_{d,k}, \delta B_k, \delta C_k, \delta D_k$  e  $\delta E_k$  nulas), quanto o caso incerto, em que o SLAE está sujeito às incertezas paramétricas.

## 1.2 Metodologia

Para que se atinjam os objetivos estabelecidos, propõe-se uma extensão das estratégias de Fridman (2014, Cap. 6), de Bortolin et al. (2018) e de Odorico (2018) para o caso de atraso variante e desconhecido, e uma adaptação da metodologia utilizada nesses trabalhos para o problema de filtragem.



Fazendo-se a suposição de que as transições entre os valores do atraso obedecem a uma cadeia de Markov de tempo discreto, realiza-se a transformação por meio do método de elevação, e os reguladores e os filtros para o SLAE são deduzidos a partir do SLSM equivalente.

A dedução dos reguladores segue, então, a abordagem de Bortolin (2017, Cap. 7) para SLSMs com cadeia de Markov não observada, segundo a qual utiliza-se a função indicadora para reformular o SLSM como um sistema determinístico sem saltos denominado *sistema aumentado singular*, o qual engloba todos os possíveis estados da cadeia. Os filtros do tipo Kalman, por sua vez, são obtidos conforme as técnicas de Cerri (2013) para a filtragem dependente e independente de modo de SLSMs, que também emprega a função indicadora para construir uma reformulação independente de modo para o SLSM, no caso de cadeia de Markov não observada.

Dando continuidade às metodologias de Bortolin (2017) e de Cerri (2013), os problemas de controle e de filtragem dos sistemas reformulados são estabelecidos, de maneira determinística, em termos da otimização de funções de custo quadrático sob a máxima influência das incertezas paramétricas. Os problemas de otimização são resolvidos com base nas técnicas de mínimos quadrados regularizados robustos, no caso do controle, e das estimativas mínimas quadráticas, no caso da filtragem.

Essas duas técnicas proveem soluções que são calculadas, de maneira semelhante àquela proposta por Cerri (2009) para o controle de sistemas lineares de tempo discreto, pela combinação do método de funções penalidade, o qual permite aproximar um problema de otimização restrito por uma sequência de problemas de otimização irrestritos, aos problemas clássicos de mínimos quadrados ponderados e mínimos quadrados regularizados. A recursividade das soluções é constituída por equações de Riccati apresentadas em uma estrutura matricial.

Exemplos numéricos são fornecidos, após as deduções, para ilustrar o desempenho das soluções desenvolvidas. Os reguladores são comparados a abordagens dadas em termos de LMIs existentes na literatura, enquanto os filtros são comparados a estimadores recursivos nominais e robustos para sistemas sem atraso, de forma a permitir a avaliação do impacto do atraso no desempenho destes e da superioridade oferecida pelas soluções desenvolvidas aqui.

## 1.3 Organização do Texto

São apresentadas, a seguir, breves descrições dos demais capítulos desta dissertação, cuja organização está ilustrada na Figura 1.1.

- ❑ **Capítulo 2:** Apresenta resultados preliminares que fundamentam os desenvolvimentos dos próximos capítulos, como o método de funções penalidade e as técnicas de mínimos quadrados regularizados robustos e das estimativas mínimas quadráticas;
- ❑ **Capítulo 3:** Contém o desenvolvimento dos reguladores nominal e robusto para sistemas com atraso desconhecido, incluindo a transformação desse tipo de sistema em SLSMs,

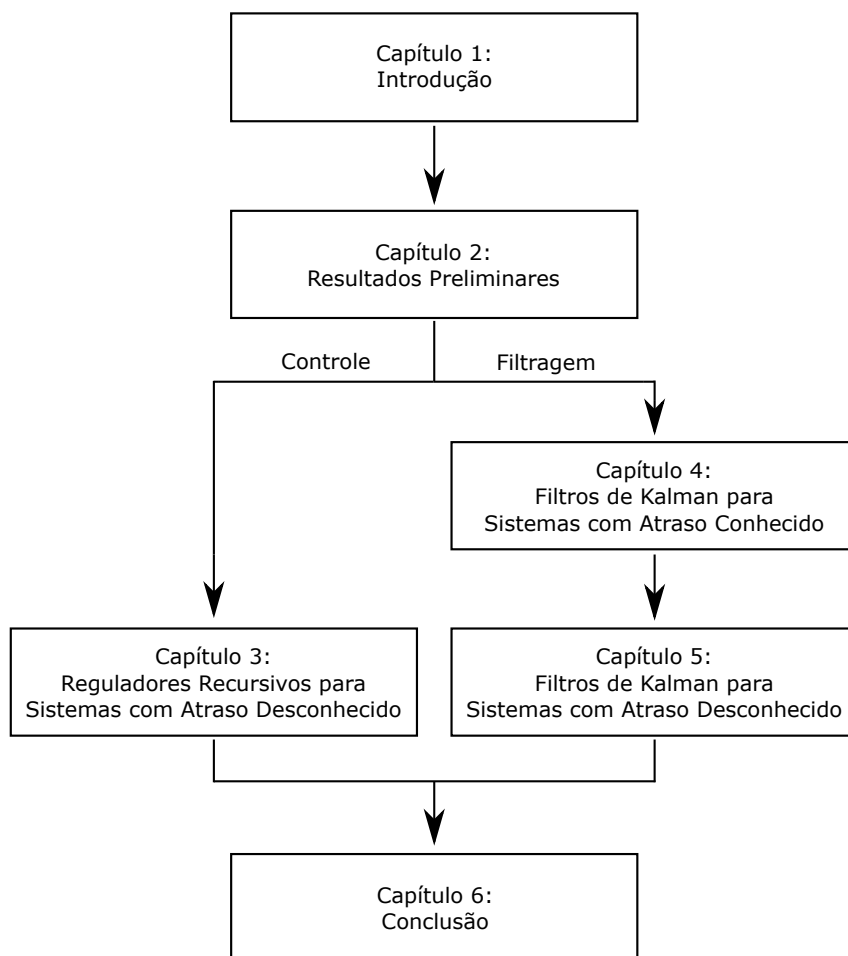
a construção da representação independente de modo denominada sistema aumentado singular, a obtenção da solução recursiva por meio da técnica de mínimos quadrados regularizados robustos e exemplos numéricos;

- ❑ **Capítulo 4:** Apresenta os filtros nominal e robusto para sistemas com atraso conhecido, o que inclui a transformação do SLAE em um SLSM e o cálculo das soluções com base nas técnicas de estimativas mínimas quadráticas. Por fim, apresenta exemplos numéricos ilustrativos;
- ❑ **Capítulo 5:** Contém o desenvolvimento dos filtros nominal e robusto para sistemas com atraso desconhecido, com a construção de um sistema aumentado independente de modo equivalente ao SLSM transformado e a dedução das soluções, de modo análogo ao do caso de atraso conhecido, pela aplicação das técnicas de estimativas mínimas quadráticas. Ao final, os desempenhos dos filtros são ilustrados através de exemplos numéricos;
- ❑ **Capítulo 6:** Apresenta as conclusões sobre os desenvolvimentos realizados e os resultados obtidos, bem como alguns dos trabalhos futuros que podem dar prosseguimento a eles.

O Apêndice A contém uma breve revisão sobre cadeias de Markov de tempo discreto e sua simulação computacional, conceitos extensivamente empregados neste trabalho.

## 1.4 Publicações Decorrentes deste Trabalho

- ❑ GAGLIARDI, G. M.; BORTOLIN, D. C.; TERRA, M. H. Regulador robusto recursivo para sistemas lineares com atraso variante nos estados: uma abordagem via cadeia de Markov. In: **Congresso Brasileiro de Automática (CBA)**. João Pessoa, PB, Brasil, 2018.
- ❑ BORTOLIN, D. C.; GAGLIARDI, G. M.; TERRA, M. H. Recursive Robust Regulator for Uncertain Linear Systems with Random Delays Based on Unknown Markov Chain. In: **Conference on Decision and Control (CDC)**. Miami, FL, USA, 2018.

**Figura 1.1** – Organização dos capítulos da dissertação.



## Resultados Preliminares

Este capítulo apresenta alguns resultados que fundamentam o desenvolvimento dos reguladores e filtros para sistemas lineares com atraso variante no estado. Inicialmente, define-se o método de funções penalidade (LUENBERGER; YE, 2008) para a solução de problemas de otimização restrita. A combinação desse método com a solução ótima para os problemas de mínimos quadrados (KAILATH et al., 2000; SAYED; NASCIMENTO, 1999) dá origem aos resultados apresentados, que constituem as técnicas de mínimos quadrados regularizados robustos e das estimativas mínimas quadráticas. Essas técnicas permitem o desenvolvimento de soluções em termos de equações de Riccati para os problemas de controle e de filtragem robustos para sistemas lineares sujeitos a incertezas.

### 2.1 Funções Penalidade

O método de funções penalidade, descrito nesta seção, permite que se aproxime um problema de otimização com restrições por uma sequência iterativa de problemas irrestritos, cuja solução converge para a solução do problema original. As demonstrações dos resultados apresentados podem ser encontradas com detalhes em Luenberger e Ye (2008).

Considere o seguinte problema de minimização restrito:

$$\min_{x \in S} f(x), \quad (2.1)$$

onde a função objetivo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e  $S \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto de restrições.

O método consiste em incorporar as restrições à função objetivo através do *parâmetro de penalidade*  $\mu \in \mathbb{R}$ , de forma que, para cada  $\mu > 0$ , o problema (2.1) possa ser substituído pelo seguinte problema irrestrito:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} q(\mu, x) := f(x) + \mu P(x), \quad (2.2)$$

onde  $P(x)$  é denominada *função penalidade*, e possui as seguintes propriedades:

□  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua;

- $P(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ;
- $P(x) = 0 \Leftrightarrow x \in S$ .

Note que, nas regiões em que as restrições não são respeitadas, o termo  $\mu P(x)$  impõe uma penalização à função objetivo.

O procedimento para a solução do problema restrito (2.1) pelo método de funções penalidade é composto pelos seguintes passos:

1. Define-se uma sequência de números reais  $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$  tal que

$$\mu_k > 0; \mu_{k+1} > \mu_k \text{ e } \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k = +\infty; \quad (2.3)$$

2. Obtém-se, para cada  $\mu_k$ , a função objetivo penalizada  $q(\mu_k, x)$ ;
3. Resolve-se, para cada  $k$ , o problema irrestrito (2.2), com  $\mu = \mu_k$ , obtendo-se a solução  $x_{\mu, k}$ .

Resolvendo-se (2.2) iterativamente dessa forma, obtém-se uma sequência de soluções  $\{x_{\mu, k}\}$  que converge para a solução ótima global de (2.1) à medida em que  $\mu \rightarrow \infty$ . A convergência é assegurada pelos resultados apresentados a seguir.

**Lema 2.1.** (CERRI, 2013) *Seja  $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$  uma sequência de números reais definida de acordo com as propriedades (2.3) e  $q(\mu_k, x)$  a função dada por  $q(\mu_k, x) = f(x) + \mu_k P(x)$ . Então, as seguintes sentenças são verdadeiras:*

- (i)  $q(\mu_k, x_{\mu, k}) \leq q(\mu_{k+1}, x_{\mu, k+1})$ ;
- (ii)  $P(x_{\mu, k}) \geq P(x_{\mu, k+1})$ ;
- (iii)  $f(x_{\mu, k}) \leq f(x_{\mu, k+1})$ .

**Lema 2.2.** (CERRI, 2013) *Seja  $x^*$  uma solução para o problema (2.1). Então, para cada  $k = 1, \dots, +\infty$ , tem-se  $f(x^*) \geq q(\mu_k, x_{\mu, k}) \geq f(x_{\mu, k})$ .*

Antes da apresentação do resultado principal, define-se o conceito de ponto de acumulação de uma sequência.

**Definição 2.1.** *Um ponto  $\mathbf{a}$  é um ponto de acumulação da sequência  $\{a_k\}$  se existir uma subseqüência de  $\{a_k\}$  que converge para  $\mathbf{a}$ . Dessa maneira,  $\mathbf{a}$  é um ponto de acumulação de  $\{a_k\}$  se existir um subconjunto  $K$  dos inteiros positivos tal que a sequência  $\{a_k\}_{k \in K}$  converge para  $\mathbf{a}$ .*

O próximo teorema, que segue dos lemas 2.1 e 2.2, afirma que qualquer ponto de acumulação da sequência  $\{x_{\mu, k}\}$  construída pelo método de funções penalidade é uma solução para o problema restrito (2.1).

**Teorema 2.1.** (LUENBERGER; YE, 2008) *Seja  $\{x_{\mu,k}\}$  uma sequência gerada pelo método de funções penalidade. Então, qualquer ponto de acumulação dessa sequência é uma solução para o problema de otimização (2.1).*

## 2.2 Mínimos Quadrados Regularizados Robustos

Nesta seção, apresenta-se um resultado que permite a obtenção de uma solução recursiva para o problema de controle robusto para sistemas lineares sujeitos a incertezas. O resultado baseia-se em uma estrutura que combina o método de funções penalidade à solução ótima do problema de mínimos quadrados regularizados com incertezas (SAYED; NASCIMENTO, 1999).

Considere o problema de determinar a solução ótima  $z^*$  para

$$\begin{aligned} \min_z \max_{\delta M, \delta w, \delta N, \delta y} F(z) &= \|z\|_U^2 + \|(M + \delta M)z - (w + \delta w)\|_V^2, \\ \text{s.a. } (N + \delta N)z &= y + \delta y, \end{aligned} \quad (2.4)$$

com  $M \in \mathbb{R}^{r,s}$  e  $N \in \mathbb{R}^{l,s}$  matrizes conhecidas,  $w \in \mathbb{R}^r$  e  $y \in \mathbb{R}^l$  vetores de medidas,  $z \in \mathbb{R}^s$  um vetor desconhecido,  $U \succ 0$  e  $V \succ 0$  matrizes de ponderação e  $\{\delta M, \delta w, \delta N, \delta y\}$  incertezas modeladas por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta M & \delta w \end{bmatrix} &= L_1 \Delta_1 \begin{bmatrix} E_M & E_w \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \delta N & \delta y \end{bmatrix} &= L_2 \Delta_2 \begin{bmatrix} E_N & E_y \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

sendo  $\{L_1, L_2\}$  matrizes não-nulas,  $\{\Delta_1, \Delta_2\}$  matrizes de contração arbitrárias e  $\{E_M, E_w, E_N, E_y\}$  matrizes conhecidas.

De acordo com o método de funções penalidade, o problema de otimização restrito (2.4) pode ser aproximado por uma sequência de problemas irrestritos. Assim, associado a (2.4), tem-se, para cada parâmetro de penalidade  $\mu > 0$ , o seguinte problema de otimização irrestrito:

$$\begin{aligned} \min_{x_\mu} \max_{\delta A, \delta b} J(x_\mu) &= \|x_\mu\|_Q^2 + \|(A + \delta A)x_\mu - (b + \delta b)\|_{W_\mu}^2, \\ \text{com } \begin{bmatrix} \delta A & \delta b \end{bmatrix} &= H \Delta \begin{bmatrix} E_A & E_b \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

sendo  $x_\mu = z$ ,  $Q = U$ ,  $A = \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$ ,  $\delta A = \begin{bmatrix} \delta M \\ \delta N \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix}$ ,  $\delta b = \begin{bmatrix} \delta w \\ \delta y \end{bmatrix}$ ,

$$W_\mu = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & \mu I_l \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix}, \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix}, E_A = \begin{bmatrix} E_M \\ E_N \end{bmatrix} \text{ e } E_b = \begin{bmatrix} E_w \\ E_y \end{bmatrix}.$$

A solução ótima  $x_\mu^*$  para o problema de otimização (2.6) foi apresentada por Sayed e Nascimento (1999) e reescrita em termos de uma estrutura matricial por Cerri e Terra (2017). Considera-se, aqui, o caso geral do funcional apresentado por esta última referência, assumindo-se a existência de parâmetros incertos na função objetivo. O Lema 2.3 apresenta a solução ótima para os problemas (2.4) e (2.6).

**Lema 2.3.** (BORTOLIN, 2017) Considere os problemas de otimização (2.4) e (2.6). Suponha que a matriz  $\begin{bmatrix} I_s \\ A \\ E_A \end{bmatrix}$  tem posto coluna pleno. Então,

(i) para cada  $\mu > 0$ , a solução ótima  $x_\mu^*$  e o valor mínimo  $J(x_\mu^*)$  referentes ao problema irrestrito (2.6) são dados por

$$\begin{bmatrix} x_\mu^* \\ J(x_\mu^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \\ 0 & E_b \\ I_s & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 & 0 & I_s \\ 0 & \widehat{W}_\mu^{-1} & 0 & A \\ 0 & 0 & \widehat{\lambda}_\mu^{-1} I & E_A \\ I_s & A^T & E_A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ E_b \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} \widehat{W}_\mu^{-1} &= \text{diag} \left( V^{-1} - \widehat{\lambda}_\mu^{-1} L_1 L_1^T, \mu^{-1} I - \widehat{\lambda}_\mu^{-1} L_2 L_2^T \right) \\ \text{e } \widehat{\lambda}_\mu &= (1 + \alpha) \|\text{diag}(L_1^T V L_1, \mu L_2^T L_2)\|, \text{ para algum } \alpha > 0; \end{aligned}$$

(ii) quando a matriz  $\begin{bmatrix} N \\ E_M \\ E_N \end{bmatrix}$  tem posto linha pleno, a solução ótima  $z^* = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} x_\mu^*$  e o valor mínimo  $F(z^*) = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} J(x_\mu^*)$  referentes ao problema restrito (2.4) são dados por

$$\begin{bmatrix} z^* \\ F(z^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w \\ 0 & y \\ 0 & E_w \\ 0 & E_y \\ I_s & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I_s \\ 0 & V^{-1} & 0 & 0 & 0 & M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_N \\ I_s & M^T & N^T & E_M^T & E_N^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ w \\ y \\ E_w \\ E_y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## 2.3 Estimativa Mínima Quadrática Ponderada

É apresentado, nesta seção, um resultado que serve de base para a solução do problema de filtragem para sistemas lineares nominais. A demonstração desse resultado é obtida pela combinação do método de funções penalidade à solução ótima do problema de mínimos quadrados ponderados.

Considere o problema de estimativa de um vetor de estado  $y$  por meio de um vetor de observação  $z$  proveniente do seguinte sistema dinâmico:

$$z = Cy + Dv, \quad (2.7)$$

onde  $C$  e  $D$  são matrizes conhecidas e  $v$  é um vetor de ruído aleatório com média  $\mathbb{E}\{v\} = 0$  e matriz de variância  $\mathbb{E}\{vv^T\} = R \succ 0$ . As estimativas ótimas do estado,  $\hat{y}^*$ , e do ruído,  $\hat{v}^*$ , são definidas como as soluções para o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min_{y,v} F(v) &= \|v\|_{R^{-1}}^2, \\ \text{s. a } z &= Cy + Dv. \end{aligned} \quad (2.8)$$



Sendo  $\tilde{e} = (y - \hat{y}^*)$  o erro de estimativa do estado, define-se a matriz de variância desse erro como  $P := \mathbb{E}\{\tilde{e}\tilde{e}^T\}$ .

De acordo com o método de funções penalidade, o problema restrito (2.8) pode ser aproximado por uma sequência de problemas irrestritos. Assim, associado a (2.8), tem-se, para cada  $\mu > 0$ , o seguinte problema irrestrito:

$$\min_{x_\mu \in \mathbb{R}^m} J(x_\mu) = (Ax_\mu - b)^T W_\mu (Ax_\mu - b), \quad (2.9)$$

$$\text{sendo } x_\mu = \begin{bmatrix} v \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ D & C \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix} \quad \text{e } W_\mu = \begin{bmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix}.$$

A solução ótima  $x_\mu^*$  do problema (2.9) foi apresentada por Kailath et al. (2000) e reescrita em termos de uma estrutura matricial por Cerri e Terra (2012), conforme o Lema 2.4, que apresenta as soluções ótimas para os problemas (2.8) e (2.9).

**Lema 2.4.** (CERRI; TERRA, 2012) *Considere os problemas de otimização (2.8) e (2.9). Suponha que a matriz  $A$  tem posto coluna pleno. Então,*

(i) *para cada  $\mu > 0$ , a solução ótima  $x_\mu^*$ , o valor mínimo  $J(x_\mu^*)$  e a matriz de variância do erro de estimativa  $P_\mu$  referentes ao problema irrestrito (2.9) são dados por*

$$\begin{bmatrix} x_\mu^* \\ J(x_\mu^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W_\mu^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P_\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W_\mu^{-1} & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix};$$

(ii) *quando a matriz  $[D \ C]$  tem posto linha pleno, as estimativas ótimas  $(\hat{v}^*, \hat{y}^*)^T = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} x_\mu^*$ , o valor mínimo  $F(\hat{v}^*) = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} J(x_\mu^*)$  e a matriz de variância do erro de estimativa  $P = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} P_\mu$  referentes ao problema restrito (2.8) são dados por*

$$\begin{bmatrix} \hat{v}^* \\ \hat{y}^* \\ F(\hat{v}^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & D & C \\ I & D^T & 0 & 0 \\ 0 & C^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & D & C \\ I & D^T & 0 & 0 \\ 0 & C^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}.$$

## 2.4 Estimativa Mínima Regularizada Robusta

Nesta seção, apresenta-se um resultado que serve como base para a obtenção de uma solução recursiva para o problema de filtragem para sistemas lineares sujeitos a incertezas. A demons-

tração desse resultado é obtida através da solução ótima do problema de mínimos quadrados regularizados com incertezas.

Considere o problema de estimar um vetor de estado  $y$  por meio de um vetor de observação incerto  $(z + \delta z)$ , proveniente do sistema linear sujeito a incertezas paramétricas

$$(z + \delta z) = (C + \delta C)y + v,$$

onde  $v$  é um vetor de ruído aleatório independente de  $y$ , com média  $\mathbb{E}\{v\} = 0$  e matriz de variância  $\mathbb{E}\{vv^T\} = R$ . As incertezas são modeladas como

$$\begin{bmatrix} \delta C & \delta z \end{bmatrix} = H\Delta \begin{bmatrix} E_C & E_z \end{bmatrix}, \|\Delta\| \leq 1.$$

Segundo Cerri (2013), a estimativa mínima quadrática regularizada robusta do vetor  $y$  é definida como a solução para o seguinte problema de otimização do tipo min-max:

$$\min_y \max_{\delta C, \delta z} \|y\|_Q^2 + \|(C + \delta C)y - (z + \delta z)\|_{R^{-1}}^2. \quad (2.10)$$

Pode-se reconhecer (2.10) como um problema de mínimos quadrados regularizados com incertezas, cuja solução ótima foi apresentada por Sayed e Nascimento (1999), para  $Q \succ 0$ , e reescrita em uma estrutura matricial por Cerri (2013).

Considerando-se que, como nos problemas de filtragem que serão tratados mais à frente, tenha-se

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ com } Q_1 \succ 0,$$

então, segundo Cerri (2013), a existência e a unicidade da solução continuam garantidas, e ela é calculada como na proposição a seguir.

**Proposição 2.1.** (CERRI, 2013) A estimativa mínima quadrática regularizada robusta  $\hat{y}^*$  e a respectiva matriz de variância  $P = \mathbb{E}\{\tilde{e}\tilde{e}^T\}$  do erro de estimativa  $\tilde{e} = (\hat{y}^* - y)$  são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}^* & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_1^{-1} & 0 & 0 & \mathcal{J} \\ 0 & \hat{R}^{-1} & 0 & C \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}^{-1}I & E_C \\ \mathcal{J}^T & C^T & E_C^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \\ E_z & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{R} &= R^{-1} + R^{-1}H(\hat{\lambda}I - H^T R^{-1}H)^\dagger H^T R^{-1} \\ e \hat{\lambda} &= (1 + \alpha) \|H^T R^{-1}H\|, \text{ para algum } \alpha > 0. \end{aligned}$$

---

## Reguladores Recursivos para Sistemas com Atraso Desconhecido

Este capítulo tem por objetivo desenvolver uma estratégia recursiva para o problema de controle robusto de sistemas lineares com atraso variante e desconhecido no estado. Assumindo-se que o atraso pode ser representado por uma cadeia de Markov, o SLAE é transformado, pela aplicação do método de elevação, em um sistema linear sujeito a saltos Markovianos (COSTA et al., 2005). Dessa forma, o problema de controle do SLAE é reduzido ao problema de controle de um SLSM sem observação da cadeia de Markov. Uma estratégia análoga foi seguida por Odorico (2018, Cap. 4), que deduziu reguladores lineares quadráticos robustos para sistemas com atraso variante conhecido no estado, através de um SLSM equivalente com observação da cadeia de Markov.

Para a solução do problema Markoviano, utiliza-se uma metodologia proposta por Bortolin (2017, Cap. 7), a qual, com o uso da função indicadora, reformula o SLSM como um sistema determinístico que engloba todos os possíveis estados da cadeia, denominado *sistema aumentado singular* (SAS).

Assim, a solução para o problema de controle do SLAE é obtida através de outro equivalente definido para o SAS, o qual consiste na otimização de um funcional de custo quadrático sujeito a uma restrição linear. A solução é dada pela aplicação da técnica de mínimos quadrados regularizados robustos (Seção 2.2), de maneira semelhante à abordagem proposta por Cerri (2009) para sistemas lineares de tempo discreto no espaço de estados, cuja recursividade é estabelecida por meio de equações de Riccati apresentadas em uma estrutura matricial.

Ao final do capítulo, exemplos numéricos ilustram o desempenho dos reguladores propostos e os comparam a alternativas existentes na literatura que são dadas em termos de LMIs.

### 3.1 Formulação do Problema

Considere o seguinte SLAE:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathcal{A}_k x_k + \mathcal{A}_{d,k} x_{k-d_k} + \mathcal{B}_k u_k, \quad \forall k \geq 0, \\ x_k &= \varphi_0(k), \quad k \in [-d_{max}, 0], \end{aligned} \quad (3.1)$$

sendo  $x_k \in \mathbb{R}^n$  o estado no passo  $k$ ,  $x_{k-d_k} \in \mathbb{R}^n$  o estado atrasado em  $d_k$  amostras,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  a entrada de controle e  $\varphi_0(k)$  a condição inicial do sistema para  $k = -d_{max}, -d_{max} + 1, \dots, 0$ .

O atraso desconhecido  $d_k$  é variante no tempo tal que

$$0 \leq d_{min} \leq d_k \leq d_{max}, \quad (3.2)$$

com os inteiros conhecidos  $d_{min}$  e  $d_{max}$  representando os valores mínimo e máximo de  $d_k$ , respectivamente. Observe que, na situação de atraso conhecido e constante, tem-se  $d_{min} = d_{max}$ .

Dois possíveis casos são considerados para as matrizes de parâmetros:

#### Caso A: SLAE Nominal

$$\mathcal{A}_k \leftarrow A_k, \quad \mathcal{A}_{d,k} \leftarrow A_{d,k} \text{ e } \mathcal{B}_k \leftarrow B_k;$$

#### Caso B: SLAE Incerto

$$\mathcal{A}_k \leftarrow A_k + \delta A_k, \quad \mathcal{A}_{d,k} \leftarrow A_{d,k} + \delta A_{d,k} \text{ e } \mathcal{B}_k \leftarrow B_k + \delta B_k,$$

sendo as matrizes  $A_k, A_{d,k} \in \mathbb{R}^{n,n}$  e  $B_k \in \mathbb{R}^{n,m}$  conhecidas e as matrizes de incertezas  $\delta A_k, \delta A_{d,k} \in \mathbb{R}^{n,n}$  e  $\delta B_k \in \mathbb{R}^{n,m}$  modeladas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \delta A_k & \delta A_{d,k} & \delta B_k \end{bmatrix} = L_k \Delta_k \begin{bmatrix} N_{A_k} & N_{A_{d,k}} & N_{B_k} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

onde  $L_k \in \mathbb{R}^{n,q}$  é uma matriz não-nula,  $N_{A_k}, N_{A_{d,k}} \in \mathbb{R}^{q,n}$  e  $N_{B_k} \in \mathbb{R}^{q,m}$  são matrizes conhecidas e  $\Delta_k \in \mathbb{R}^{q,q}$  é uma matriz de contração tal que  $\|\Delta_k\| \leq 1$ .

Segundo Nilsson (1998), em muitas aplicações reais, o atraso em um determinado passo está correlacionado com o atraso no passo anterior. Assim, neste trabalho, assume-se que o atraso  $d_k$  comporta-se como uma cadeia de Markov de tempo discreto. A hipótese de que o atraso é regido por uma cadeia de Markov é muito utilizada na área de Sistemas de Controle em Rede, como nos trabalhos de Chan e Ozguner (1995), Mao et al. (2007) e Qiu et al. (2015). As probabilidades de transição, que governam as variações do atraso  $d_k$ , podem ser obtidas através de experimentos físicos ou de simulações numéricas.

Associado ao SLAE (3.1), considere o custo de  $N$  passos  $J_N(x,u)$  definido por

$$J_N(x,u) = x_N^T P_N x_N + \sum_{k=0}^{N-1} \left( x_k^T Q_k x_k + u_k^T R_k u_k \right), \quad (3.4)$$

onde  $Q_k \succeq 0$ ,  $R_k \succ 0$  e  $P_N \succeq 0$  são matrizes de ponderação com dimensões apropriadas.

O problema de regulação robusta para o SLAE (3.1) consiste em determinar uma sequência de controle ótimo admissível  $\mathcal{U} = \{u_0^*, \dots, u_{N-1}^*\}$  que minimiza o valor esperado do custo (3.4) sob a máxima influência das incertezas paramétricas (3.3), sujeito à restrição (3.1), ou seja,

$$\begin{aligned} \min_{u_k} \max_{\delta A_k, \delta A_{d,k}, \delta B_k} \mathbb{E} \left\{ J_N(x, u) \right\}, \\ \text{s.a } x_{k+1} = A_k x_k + A_{d,k} x_{k-d_k} + B_k u_k. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Observe que o problema (3.5) reduz-se ao seguinte problema de minimização quando considera-se o SLAE nominal (3.5, Caso A):

$$\begin{aligned} \min_{u_k} \mathbb{E} \left\{ J_N(x, u) \right\}, \\ \text{s.a } x_{k+1} = A_k x_k + A_{d,k} x_{k-d_k} + B_k u_k. \end{aligned} \quad (3.6)$$

### 3.1.1 Equivalência com Sistema Linear Sujeito a Saltos Markovianos

Um procedimento denominado *método de elevação* (XIA et al., 2007; HETEL et al., 2008) pode ser aplicado ao SLAE (3.1) para a obtenção de um sistema aumentado livre de atrasos, mantendo-se a dinâmica do sistema original. Com base nesse método, o projeto do controlador para o SLAE (3.1), cujos atrasos possuem comportamento Markoviano, pode ser reduzido ao problema de regulação de um SLSM (COSTA et al., 2005).

Com este propósito, considere que os valores assumidos pelo atraso  $d_k$  sejam governados pela cadeia de Markov de tempo discreto  $\theta(k)$  que assume valores no conjunto  $\mathcal{S} = \{1, \dots, s\}$ , sendo  $s = d_{max} - d_{min} + 1$ , de modo que  $d_k = d_{min} + \theta(k) - 1$ . Associada à cadeia, tem-se uma *matriz de probabilidades de transição*  $\mathbb{P} = [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{s,s}$ , para todo  $i, j \in \mathcal{S}$ , cujas entradas satisfazem a:

$$\begin{aligned} Pr[\theta(k+1) = j | \theta(k) = i] = p_{ij}, \quad Pr[\theta(k) = i] = \pi_{i,k}, \\ \sum_{j=1}^s p_{ij} = 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Definindo-se, então, o vetor de estado aumentado  $z_k$ , a condição inicial  $z_0$  e a entrada de controle  $v_k$  como

$$z_k := \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_{k-d_{max}+1} \\ x_{k-d_{max}} \end{bmatrix}, \quad z_0 := \begin{bmatrix} \varphi_0(0) \\ \varphi_0(-1) \\ \vdots \\ \varphi_0(-d_{max}+1) \\ \varphi_0(-d_{max}) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_k := u_k, \quad (3.8)$$

o SLAE (3.1) pode ser reescrito como o seguinte SLSM:

$$z_{k+1} = \mathcal{F}_{\theta(k),k} z_k + \mathcal{G}_{\theta(k),k} v_k, \quad \forall k \geq 0, \quad (3.9)$$

em que as matrizes  $\mathcal{F}_{\theta(k),k} \in \mathbb{R}^{n_d, n_d}$  e  $\mathcal{G}_{\theta(k),k} \in \mathbb{R}^{n_d, m}$ , com  $n_d = (d_{max} + 1)n$ , são definidas de acordo com o caso considerado para o SLAE:

**Caso A: SLAE Nominal**

$$\mathcal{F}_{\theta(k),k} \leftarrow F_{\theta(k),k} \text{ e } \mathcal{G}_{\theta(k),k} \leftarrow G_{\theta(k),k},$$

**Caso B: SLAE Incerto**

$$\mathcal{F}_{\theta(k),k} \leftarrow F_{\theta(k),k} + \delta F_{\theta(k),k} \text{ e } \mathcal{G}_{\theta(k),k} \leftarrow G_{\theta(k),k} + \delta G_{\theta(k),k},$$

onde, para todo  $\theta(k) = i \in \mathcal{S}$ , tem-se

$$F_{i,k} := \begin{bmatrix} A_k & 0 & \cdots & 0 & \overbrace{A_{d,k}}^{(i+d_{min})^a \text{ coluna}} & \cdots & 0 \\ \hline & & & I_{d_{max}n} & & & 0 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta F_{i,k} := \begin{bmatrix} \delta A_k & 0 & \cdots & 0 & \overbrace{\delta A_{d,k}}^{(i+d_{min})^a \text{ coluna}} & \cdots & 0 \\ \hline & & & 0_{d_{max}n} & & & 0 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_{i,k} := \begin{bmatrix} B_k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \delta G_i := \begin{bmatrix} \delta B_k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

As matrizes de parâmetros incertos são definidas como

$$\begin{bmatrix} \delta F_{i,k} & \delta G_{i,k} \end{bmatrix} = M_{i,k} \Delta_{i,k} \begin{bmatrix} N_{F_{i,k}} & N_{G_{i,k}} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

onde

$$M_{i,k} := \begin{bmatrix} L_k^T & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_d, q}, \quad \Delta_{i,k} := \Delta_k \in \mathbb{R}^{q, q},$$

$$N_{F_{i,k}} := \begin{bmatrix} N_{A_k} & 0 & \cdots & 0 & \overbrace{N_{A_{d,k}}}^{(i+d_{min})^a \text{ coluna}} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q, n_d}$$

e  $N_{G_{i,k}} := N_{B_k} \in \mathbb{R}^{q, m}, \forall i \in \mathcal{S}.$

Deve-se ressaltar que, quando  $i + d_{min} = 1$ , o elemento da primeira coluna da matriz  $N_{F_{i,k}}$  é igual a  $E_{A_k} + E_{A_{d,k}}$ , e os outros são nulos. Uma observação análoga é válida para os elementos da primeira coluna das matrizes  $F_{i,k}$  e  $\delta F_{i,k}$ .

De forma semelhante, define-se uma versão do custo (3.4) associada ao SLSM (3.9) como

$$\mathcal{J}_N(\theta, z, v) = z_N^T P_{\theta(N),N} z_N + \sum_{k=0}^{N-1} \left( z_k^T Q_{\theta(k),k} z_k + v_k^T R_{\theta(k),k} v_k \right), \quad (3.12)$$

com as seguintes matrizes de ponderação:

$$P_{\theta(N),N} := \text{diag}(P_N, 0, \dots, 0), \quad Q_{\theta(k),k} := \text{diag}(Q_k, 0, \dots, 0) \text{ e } R_{\theta(k),k} := R_k.$$

Pelo que foi apresentado até aqui, estabeleceu-se uma equivalência entre o SLAE (3.1) e o SLSM (3.9), sendo cada possível valor assumido pelo atraso  $d_k \in [d_{min}, d_{max}]$  do SLAE correspondente a um modo de operação diferente do SLSM.

Portanto, o problema de projetar um regulador recursivo para o SLAE (3.1) é equivalente ao problema de controle para o SLSM (3.9), definido por

$$\begin{aligned} \min_{v_k} \quad & \max_{\delta F_{\theta(k),k}, \delta G_{\theta(k),k}} \mathbb{E} \left\{ \mathcal{J}_N(\theta, z, v) \right\}, \\ \text{s.a} \quad & z_{k+1} = \mathcal{F}_{\theta(k),k} z_k + \mathcal{G}_{\theta(k),k} v_k. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Como, por hipótese, o atraso  $d_k$  é desconhecido, então o controlador não tem acesso aos estados da cadeia de Markov. Assim, assume-se uma lei de controle por realimentação de estado independente de modo dada por

$$v_k = \mathcal{K}_k z_k, \quad \forall k \geq 0, \quad (3.14)$$

onde a matriz  $\mathcal{K}_k \in \mathbb{R}^{m,n_d}$  é o ganho de realimentação a ser determinado. Note que (3.13) reduz-se a um problema de minimização no caso nominal.

A solução para o problema (3.13) será determinada a partir de uma metodologia que consiste em reformular o SLSM como um sistema determinístico que independe da cadeia de Markov, a partir da função indicadora, resultando em um *sistema aumentado singular* (BORTOLIN, 2017, Cap. 7). Então, o regulador recursivo será projetado através da aplicação da técnica de mínimos quadrados regularizados robustos (Seção 2.2), da qual resultará uma solução recursiva em termos de equações de Riccati para o SLSM sem observação da cadeia de Markov.

## 3.2 Sistema Aumentado Singular

Nesta seção, considera-se uma abordagem determinística do problema (3.13), segundo a qual o SLSM (3.9) é reescrito como um sistema que agrega todos os possíveis estados da cadeia de Markov. Para a obtenção desse novo sistema, considere a função indicadora  $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ , para um conjunto  $\mathcal{C}$ , definida por

$$\mathbf{1}_{\mathcal{C}}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in \mathcal{C}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.15)$$

Para todo  $i \in \mathcal{S}$ , tem-se que  $\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}(\omega) = 1$  se  $\theta(k) = i$ , e  $\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}(\omega) = 0$  em caso contrário. O SLSM (3.9) pode ser reescrito em termos da função indicadora da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^s \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} z_{k+1} = \sum_{i=1}^s (F_{i,k} \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) z_k + \sum_{i=1}^s (G_{i,k} \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}) v_k. \quad (3.16)$$

Pré- e pós- multiplicando (3.16) pelas probabilidades de transição  $p_{ij}$ , segue que

$$\left( \sum_{i=1}^s p_{ij} \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \right) z_{k+1} = \left( \sum_{i=1}^s p_{ij} \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \mathcal{F}_{i,k} \right) z_k + \left( \sum_{i=1}^s p_{ij} \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \mathcal{G}_{i,k} \right) v_k, \quad \forall j \in \mathcal{S}. \quad (3.17)$$

Sendo o estado da cadeia de Markov  $\theta(k)$  desconhecido a cada passo  $k$ , a função indicadora  $\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}}$  pode ser considerada um parâmetro incerto. Assim, a partir da representação matricial do sistema de equações formado por (3.17), define-se um sistema dinâmico composto apenas por matrizes de parâmetros incertas, denominado *sistema aumentado singular* (BORTOLIN, 2017), o qual é representado por

$$\delta \bar{E}_k z_{k+1} = \delta \mathcal{M}_k z_k + \delta \mathcal{N}_k v_k, \quad (3.18)$$

sendo

$$\delta \bar{E}_k = \mathcal{J} \begin{bmatrix} I_{n_d} \\ I_{n_d} \\ \vdots \\ I_{n_d} \end{bmatrix}, \quad \delta \mathcal{M}_k = \mathcal{J} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{1,k} \\ \mathcal{F}_{2,k} \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{s,k} \end{bmatrix}, \quad \delta \mathcal{N}_k = \mathcal{J} \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{1,k} \\ \mathcal{G}_{2,k} \\ \vdots \\ \mathcal{G}_{s,k} \end{bmatrix}, \quad \text{com}$$

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\{\theta(k)=1\}} p_{11} I_{n_d} & \mathbf{1}_{\{\theta(k)=2\}} p_{21} I_{n_d} & \cdots & \mathbf{1}_{\{\theta(k)=s\}} p_{s1} I_{n_d} \\ \mathbf{1}_{\{\theta(k)=1\}} p_{12} I_{n_d} & \mathbf{1}_{\{\theta(k)=2\}} p_{22} I_{n_d} & \cdots & \mathbf{1}_{\{\theta(k)=s\}} p_{s2} I_{n_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{1}_{\{\theta(k)=1\}} p_{1s} I_{n_d} & \mathbf{1}_{\{\theta(k)=2\}} p_{2s} I_{n_d} & \cdots & \mathbf{1}_{\{\theta(k)=s\}} p_{ss} I_{n_d} \end{bmatrix}.$$

As matrizes de incertezas são modeladas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \delta \bar{E}_k & \delta \mathcal{M}_k & \delta \mathcal{N}_k \end{bmatrix} = \mathcal{H} \Delta_{\mathcal{J},k} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{\bar{E}_k} & \mathcal{E}_{\mathcal{M}_k} & \mathcal{E}_{\mathcal{N}_k} \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

em que

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & 0 & h_{12} & \cdots & 0 & \cdots & h_{1s} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & h_{s1} & 0 & \cdots & h_{s2} & \cdots & 0 & \cdots & h_{ss} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{E}_{\bar{E}_k}^T = [\mathbf{e}_{11} \cdots \mathbf{e}_{1s} \cdots \mathbf{e}_{s1} \cdots \mathbf{e}_{ss}],$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}_k}^T = [\mathbf{m}_{11} \cdots \mathbf{m}_{1s} \cdots \mathbf{m}_{s1} \cdots \mathbf{m}_{ss}],$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{N}_k}^T = [\mathbf{n}_{11} \cdots \mathbf{n}_{1s} \cdots \mathbf{n}_{s1} \cdots \mathbf{n}_{ss}],$$

$$\Delta_{\mathcal{J},k} = \text{diag}(\Delta_{\mathcal{J},11}, \dots, \Delta_{\mathcal{J},1s}, \dots, \Delta_{\mathcal{J},s1}, \dots, \Delta_{\mathcal{J},ss}),$$

e os elementos de cada matriz são dados de acordo com o caso considerado para o SLSM, definido a partir do SLAE:

#### Caso A: SLSM Nominal

$$h_{ij} = I_{n_d}, \quad \mathbf{e}_{ij} = p_{ij} I_{n_d}, \quad \mathbf{m}_{ij} = p_{ij} F_{i,k}^T, \quad \mathbf{n}_{ij} = p_{ij} G_{i,k}^T \quad \text{e} \quad \Delta_{\mathcal{J},ij} = \text{diag}(\mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} I_{n_d});$$



**Caso B: SLSM Incerto**

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{ij} &= \begin{bmatrix} I_{n_d} & M_{i,k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_{ij} = \begin{bmatrix} p_{ij} I_{n_d} & 0_{n_d,q}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_{ij} = \begin{bmatrix} p_{ij} F_{i,k}^T & p_{ij} N_{F_{i,k}}^T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{n}_{ij} &= \begin{bmatrix} p_{ij} G_{i,k}^T & p_{ij} N_{G_{i,k}}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} \Delta_{\mathcal{T},ij} = \text{diag} \left( \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} I_{n_d}, \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} \Delta_i \right). \end{aligned}$$

Similarmente, a função indicadora também pode ser utilizada para reescrever o custo (3.12), resultando na seguinte função de custo associada ao sistema (3.18):

$$\mathcal{V}(z,v) = z_N^T \mathcal{P}_N z_N + \sum_{k=0}^{N-1} \left[ z_k^T (\delta_{\mathcal{Q},k}^T \mathcal{Q}_k \delta_{\mathcal{Q},k}) z_k + v_k^T (\delta_{\mathcal{R},k}^T \mathcal{R}_k \delta_{\mathcal{R},k}) v_k \right], \quad (3.20)$$

onde  $\mathcal{P}_N \in \mathbb{R}^{n_d, n_d}$ ,  $\mathcal{Q}_k = \text{diag}(\mathcal{Q}_{1,k}, \dots, \mathcal{Q}_{s,k})$  e  $\mathcal{R}_k = \text{diag}(\mathcal{R}_{1,k}, \dots, \mathcal{R}_{s,k})$ . Os parâmetros incertos  $\delta_{\mathcal{R},k}$  e  $\delta_{\mathcal{Q},k}$  são modelados por

$$\delta_{\mathcal{R},k} = \mathcal{H}_{\mathcal{R}} \Delta_{\mathcal{R},k} \mathcal{E}_{\mathcal{R}} \quad \text{e} \quad \delta_{\mathcal{Q},k} = \mathcal{H}_{\mathcal{Q}} \Delta_{\mathcal{Q},k} \mathcal{E}_{\mathcal{Q}}, \quad (3.21)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathcal{R}} &= I_{sm}, \quad \mathcal{E}_{\mathcal{R}} = I_m, \quad \Delta_{\mathcal{R},k} = \left[ \mathbf{1}_{\{\theta(k)=1\}} I_m \dots \mathbf{1}_{\{\theta(k)=s\}} I_m \right]^T, \\ \mathcal{H}_{\mathcal{Q}} &= I_{sn_d}, \quad \mathcal{E}_{\mathcal{Q}} = I_{n_d} \quad \text{e} \quad \Delta_{\mathcal{Q},k} = \left[ \mathbf{1}_{\{\theta(k)=1\}} I_{n_d} \dots \mathbf{1}_{\{\theta(k)=s\}} I_{n_d} \right]^T. \end{aligned}$$

Portanto, o problema de projetar um regulador recursivo para o SLSM (3.13) é equivalente ao problema de controle para o SAS, definido por

$$\begin{aligned} \min_{v_k} \max_{\delta_{\mathcal{T}}} \mathcal{V}(z,v), \\ \text{s.a } \delta \bar{E}_k z_{k+1} = \delta \mathcal{M}_k z_k + \delta \mathcal{N}_k v_k, \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde  $\delta_{\mathcal{T}} = \{\delta_{\mathcal{Q},k}, \delta_{\mathcal{R},k}, \delta \bar{E}_k, \delta \mathcal{M}_k, \delta \mathcal{N}_k\}$ , e com uma lei de controle por realimentação de estado

$$v_k = \mathcal{K}_k z_k, \quad \forall k \geq 0. \quad (3.23)$$

Observe que o vetor de estado  $z_k$  e a entrada de controle  $v_k$  pertencem tanto ao SAS (3.18) quanto ao SLSM (3.9). Consequentemente, o ganho de realimentação que estabiliza o SAS poderá estabilizar o SLSM.

### 3.3 Reguladores Robustos Recursivos via SAS

A solução para o problema (3.22) pode ser obtida recursivamente através da técnica de programação dinâmica (BERTSEKAS, 1995), resolvendo-se a seguinte sequência de problemas de otimização irrestrita:

$$\begin{aligned} \min_{z_1, v_0} \max_{\delta_{\mathcal{T},0}} \left\{ \mathcal{L}_{\mu,0}(z_1, v_0) + \min_{z_2, v_1} \max_{\delta_{\mathcal{T},1}} \left\{ \mathcal{L}_{\mu,1}(z_2, v_1) + \dots + \min_{z_t, v_{t-1}} \max_{\delta_{\mathcal{T},t-1}} \left\{ \mathcal{L}_{\mu,t-1}(z_t, v_{t-1}) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \dots + \min_{z_N, v_{N-1}} \max_{\delta_{\mathcal{T},N-1}} \left\{ \mathcal{L}_{\mu,N-1}(z_N, v_{N-1}) + z_N^T \mathcal{P}_N z_N \right\} \right\} \right\} \right\}, \quad (3.24) \end{aligned}$$

sendo  $\delta_{\mathcal{J},k} = \{\delta_{\mathcal{Q}_k}, \delta_{\mathcal{R}_k}, \delta \bar{E}_k, \delta \mathcal{M}_k, \delta \mathcal{N}_k\}$  e o custo por estágio  $\mathfrak{L}_{\mu,k}$  obtido pela aplicação do método de funções penalidade (Seção 2.1) ao problema (3.22) a cada passo  $k \geq 0$ , resultando em

$$\mathfrak{L}_{\mu,k}(z_{k+1}, v_k) = \left( \begin{bmatrix} 0 & \delta_{\mathcal{R},k} \\ 0 & 0 \\ \delta \bar{E}_k & -\delta \mathcal{N}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ v_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -\delta_{\mathcal{Q},k} \\ \delta \mathcal{M}_k \end{bmatrix} z_k \right)^T \times \begin{bmatrix} \mathcal{R}_k & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_k & 0 \\ 0 & 0 & \mu I_{n_d} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

com  $\mu > 0$  fixo. Assim, a solução para (3.24) pode ser obtida iterativamente pela otimização do funcional (3.25) a cada passo, ou seja, resolvendo-se o seguinte problema:

$$\min_{z_{k+1}, v_k} \max_{\delta_{\mathcal{J},k}} \mathfrak{J}_{\mu,k}(z_{k+1}, v_k) := \mathfrak{L}_{\mu,k}(z_{k+1}, v_k) + z_{k+1}^T \mathcal{P}_{k+1} z_{k+1}. \quad (3.26)$$

Note que (3.26) é um caso particular do problema de mínimos quadrados regularizados com incertezas (2.6). Assim, a solução para (3.26) pode ser obtida, a cada passo, através da técnica de mínimos quadrados regularizados robustos (Seção 2.2), a partir das seguintes identificações entre (2.6) e (3.25):

$$\begin{aligned} Q &\leftarrow \mathcal{P}_{k+1}, \quad x \leftarrow \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ v_k \end{bmatrix}, \\ A &\leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta A \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & \delta_{\mathcal{R}_k} \\ 0 & 0 \\ \delta E_k & -\delta \mathcal{N}_k \end{bmatrix}, \quad b \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z_k, \\ \delta b &\leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -\delta_{\mathcal{Q}_k} \\ \delta \mathcal{M}_k \end{bmatrix} z_k, \quad E_A \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{\mathcal{R}_k} \\ 0 & 0 \\ \varepsilon_{E_k} & -\varepsilon_{\mathcal{N}_k} \end{bmatrix}, \quad E_b \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -\varepsilon_{\mathcal{Q}_k} \\ \varepsilon_{\mathcal{M}_k} \end{bmatrix}, \\ W_\mu &\leftarrow \text{diag}(\mathcal{R}_k, \mathcal{Q}_k, \mu I_{n_d}), \quad H \leftarrow \text{diag}(\mathcal{H}_{\mathcal{R}}, \mathcal{H}_{\mathcal{Q}}, \mathcal{H}) \quad \text{e} \quad \Delta \leftarrow \text{diag}(\Delta_{\mathcal{R}_k}, \Delta_{\mathcal{Q}_k}, \Delta_{\mathcal{J},k}). \end{aligned} \quad (3.27)$$

O Lema 3.1 apresenta a solução ótima para (3.26), por meio da aplicação do Lema 2.3, com o relaxamento da condição sobre a positividade de  $\mathcal{P}_{\lambda, k+1}$ .

**Lema 3.1.** (BORTOLIN, 2017) *Considere o problema de otimização (3.26), com  $\hat{\lambda} > 0$  fixado. A solução ótima  $(z_{\lambda, k+1}^*, v_{\lambda, k}^*)$  para cada  $k \geq 0$  é dada por*

$$\begin{bmatrix} z_{\lambda, k+1}^* \\ v_{\lambda, k}^* \\ \mathfrak{J}_{\lambda, k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_d} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & z_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\lambda, k} \\ \mathcal{K}_{\lambda, k} \\ \mathcal{P}_{\lambda, k} \end{bmatrix} z_k,$$

sendo que as matrizes  $\mathcal{L}_{\lambda,k}$ ,  $\mathcal{K}_{\lambda,k}$  e  $\mathcal{P}_{\lambda,k}$  são determinadas por meio de

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\lambda,k} \\ \mathcal{K}_{\lambda,k} \\ \mathcal{P}_{\lambda,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & \widehat{\mathcal{M}}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_{n_d} & 0 & I_{n_d} & 0 \\ I_{n_d} & -\mathcal{P}_{\lambda,k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & \widehat{E}_k & -\widehat{\mathcal{N}}_k \\ I_{n_d} & 0 & \widehat{E}_k^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\widehat{\mathcal{N}}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \widehat{\mathcal{M}}_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

com os blocos matriciais

$$\begin{aligned} \widehat{E}_k &\leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathcal{E}_{\widehat{E}_k}^T \end{bmatrix}^T, \quad \widehat{\mathcal{M}}_k \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{E}_{\mathcal{Q}}^T & \mathcal{E}_{\mathcal{M}_k}^T \end{bmatrix}^T, \quad \widehat{\mathcal{N}}_k \leftarrow \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{\mathcal{R}}^T & 0 & \mathcal{E}_{\mathcal{N}_k}^T \end{bmatrix}^T, \\ \Sigma &\leftarrow \text{diag}(\widehat{\lambda}^{-1}I_m, \widehat{\lambda}^{-1}I_{n_d}, \widehat{\lambda}^{-1}I) \text{ e } \widehat{\lambda} > 0. \end{aligned}$$

A solução apresentada pelo Lema 3.1 pode ser reduzida para a forma algébrica, resultando nas equações de Riccati clássicas obtidas para o problema de controle de sistemas sem a presença de incertezas. Dessa forma, quando o regulador robusto recursivo fornece uma solução para o problema de regulação do SLSM, e conseqüentemente para o SLAE, as condições de estabilidade e convergência são equivalentes às dos sistemas lineares de tempo discreto no espaço de estados (LANCASTER; RODMAN, 1995).

O Teorema 3.1 apresenta a solução algébrica robusta recursiva obtida a partir de manipulações algébricas de (3.28).

**Teorema 3.1.** (BORTOLIN, 2017) *Considere o problema de otimização (3.26). A solução algébrica robusta recursiva para cada  $\widehat{\lambda}$  é dada por*

$$\mathcal{L}_{\lambda,k} = \left( \mathcal{E}_{\widehat{E}_k}^T \mathcal{E}_{\widehat{E}_k} \right)^{-1} \mathcal{E}_{\widehat{E}_k}^T \left\{ \left[ I - \widehat{\lambda}^{-1} \left( \widehat{\Psi}_{k+1}^{-1} + \widehat{\lambda}^{-1} \mathcal{E}_{\mathcal{N}_k} \mathcal{E}_{\mathcal{N}_k}^T \right)^{-1} \right] \mathcal{E}_{\mathcal{M}_k} - \mathcal{E}_{\mathcal{N}_k} \left( \widehat{\lambda} I_m + \mathcal{E}_{\mathcal{N}_k}^T \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{E}_{\mathcal{N}_k} \right)^{-1} \times \right. \\ \left. \mathcal{E}_{\mathcal{N}_k}^T \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{E}_{\mathcal{M}_k} \right\},$$

$$\mathcal{K}_{\lambda,k} = - \left( \widehat{\lambda} I_m + \mathcal{E}_{\mathcal{N}_k}^T \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{E}_{\mathcal{N}_k} \right)^{-1} \mathcal{E}_{\mathcal{N}_k}^T \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{E}_{\mathcal{M}_k},$$

$$\mathcal{P}_{\lambda,k} = \overline{\mathcal{Q}} + \mathcal{E}_{\mathcal{M}_k}^T \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{E}_{\mathcal{M}_k} - \mathcal{E}_{\mathcal{M}_k}^T \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{E}_{\mathcal{N}_k} \left( \widehat{\lambda} I_m + \mathcal{E}_{\mathcal{N}_k}^T \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{E}_{\mathcal{N}_k} \right)^{-1} \mathcal{E}_{\mathcal{N}_k}^T \widehat{\Psi}_{k+1} \mathcal{E}_{\mathcal{M}_k},$$

$$\text{sendo } \widehat{\Psi}_{k+1} = \left( \widehat{\lambda}^{-1} I + \mathcal{E}_{\widehat{E}_k} \mathcal{P}_{\lambda,k+1}^{-1} \mathcal{E}_{\widehat{E}_k}^T \right)^{-1} \text{ e } \overline{\mathcal{Q}} = \widehat{\lambda} I_{n_d}.$$

O Algoritmo 3.1 sumariza os desenvolvimentos deste capítulo, apresentando o procedimento para a obtenção da sequência ótima  $\{v_k^*\}_{k=0}^{N-1}$  para o problema (3.22), que pode ser uma solução para o problema de controle do SLAE (3.5).

## 3.4 Exemplos Numéricos

São apresentados, nesta seção, dois exemplos ilustrativos da aplicação dos reguladores recursivos para SLAEs desenvolvidos no capítulo. Para que tenham seus desempenhos avaliados,

**Algoritmo 3.1** Regulador Robusto Recursivo para Sistemas com Atraso Desconhecido

**SLSM:** Determine os parâmetros do SLSM:  $F_{\theta^{(k)},k}$ ,  $G_{\theta^{(k)},k}$ ,  $M_{\theta^{(k)},k}$ ,  $N_{F_{\theta^{(k)},k}}$ ,  $N_{G_{\theta^{(k)},k}}$  e  $z_0$ .

**SAS:** Defina os parâmetros do SAS:  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{E}_{\bar{E}_k}$ ,  $\mathcal{E}_{\mathcal{M}_k}$ ,  $\mathcal{E}_{\mathcal{N}_k}$ ,  $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$ ,  $\mathcal{E}_{\mathcal{Q}}$ ,  $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$  e  $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}$ .

**Regulador Robusto Recursivo:**

*Passo 1:* Defina  $\hat{\lambda}$ ,  $N$  e  $\mathcal{P}_N \succeq 0$ .

*Passo 2:* Calcule, para cada  $k = N - 1, \dots, 0$ :

$$\mathcal{L}_{\lambda,k}, \mathcal{K}_{\lambda,k} \text{ e } \mathcal{P}_{\lambda,k} \text{ via (3.28).}$$

**SLAE:** Obtenha, para cada  $k = 0, \dots, N - 1$ :

$$x_{k+1} = \mathcal{A}_k x_k + \mathcal{A}_{d,k} x_{k-d_k} + \mathcal{B}_k v_k,$$

com  $v_k = \mathcal{K}_{\lambda,k} z_k$ .

esses reguladores são comparados a abordagens existentes na literatura que apresentam suas soluções em termos de LMIs.

Cada curva de trajetória e de custo apresentada corresponde à média calculada considerando-se simulações de Monte Carlo com 1000 diferentes realizações da cadeia de Markov, com horizonte definido.

Em cada realização, o atraso  $d_k$  foi selecionado aleatoriamente, a cada passo  $k$ , no intervalo  $[d_{min}, d_{max}]$ , segundo a matriz de probabilidades de transição  $\mathbb{P}$ , de acordo com o algoritmo proposto por Häggström (2002, Cap. 3), apresentado no Apêndice A. No caso incerto, o parâmetro de contração  $\Delta_k$  foi selecionado aleatoriamente, com distribuição uniforme, no intervalo  $[-1, 1]$ , e fixado a cada passo de cada realização.

O desempenho de cada método de controle será avaliado de acordo com o valor máximo do atraso,  $d_{max} \in [1, 7]$ , com  $d_{min} = 0$  fixo.

Todas as rotinas foram implementadas no software *MATLAB*<sup>®</sup>, versão 9.0.0.341360 (R2016a), em um computador com processador *Intel*<sup>®</sup> *Core*<sup>™</sup> i7-3770 com frequência de 3,40 GHz, memória RAM de 8,0 GB e sistema operacional *Windows*<sup>®</sup> 10 *Home*. As LMIs foram implementadas na plataforma Yalmip (LÖFBERG, 2004), com o *solver* SeDuMi (STURM, 1999).

**Exemplo 3.1** (SLAE Nominal). *Considere o SLAE nominal (3.1, Caso A) com as seguintes matrizes de parâmetros:*

$$A_k = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,5 \\ 0,8 & 1,0 \end{bmatrix}, \quad A_{d,k} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0 \\ 0,8 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

e a condição inicial  $\phi_0(k) = [1 \ -1]^T$ , para todo  $k \leq 0$ . *Considera-se, neste exemplo, um horizonte de valor igual a 1000.*

Com relação ao custo de  $N$  passos (3.4), adotam-se as seguintes matrizes:

$$P_N = Q_k = I_2 \text{ e } R_k = 1, \forall k \geq 0.$$

Para as probabilidades de transição, tomam-se:

$$p_{ij} = \frac{1}{s}, \pi_{i,0} = \frac{1}{s}, \forall i, j \in \mathcal{S},$$

$$\text{sendo } s = d_{\max} - d_{\min} + 1,$$

ou seja, a cada passo  $k$ , todos os possíveis valores do atraso são igualmente prováveis.

O regulador robusto recursivo, implementado conforme o Algoritmo 3.1, terá seu desempenho comparado às abordagens baseadas em LMIs propostas por Xia et al. (2007, Cor. 4) e Sun et al. (2009, Thm. 2).

Para o Algoritmo 3.1, assumem-se os seguintes parâmetros:

$$\hat{\lambda} = 1,5 \text{ e } \mathcal{P}_N = \text{diag}(I_2, 0, \dots, 0).$$

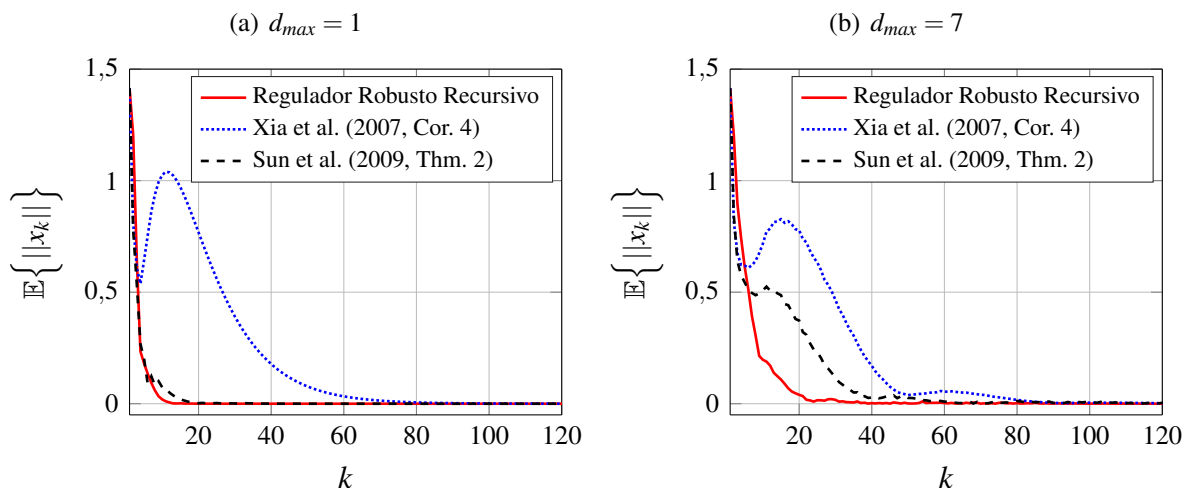
Consideram-se os seguintes valores para os parâmetros da abordagem de Sun et al. (2009, Thm. 2):

$$\lambda_0 = \lambda_1 = 1,3, \lambda_i = 1,2, i \in [2,7]$$

$$\delta_0 = 0,2, \delta_1 = 0,3, \delta_j = 0,1, j \in [2,7] \text{ e } \mu = 1,2.$$

A Figura 3.1 apresenta o comportamento da média da norma euclidiana dos estados do SLAE obtida por cada método, para  $d_{\min} = 1$  e  $d_{\max} = 7$ . Observe que, apesar de o valor de  $d_{\max}$  ter influência sobre o desempenho de todos os métodos, todas as trajetórias convergem para zero. No entanto, o regulador robusto recursivo apresenta um desempenho mais suave em relação às abordagens via LMIs.

**Figura 3.1** – Comparação das médias das normas dos estados regulados.



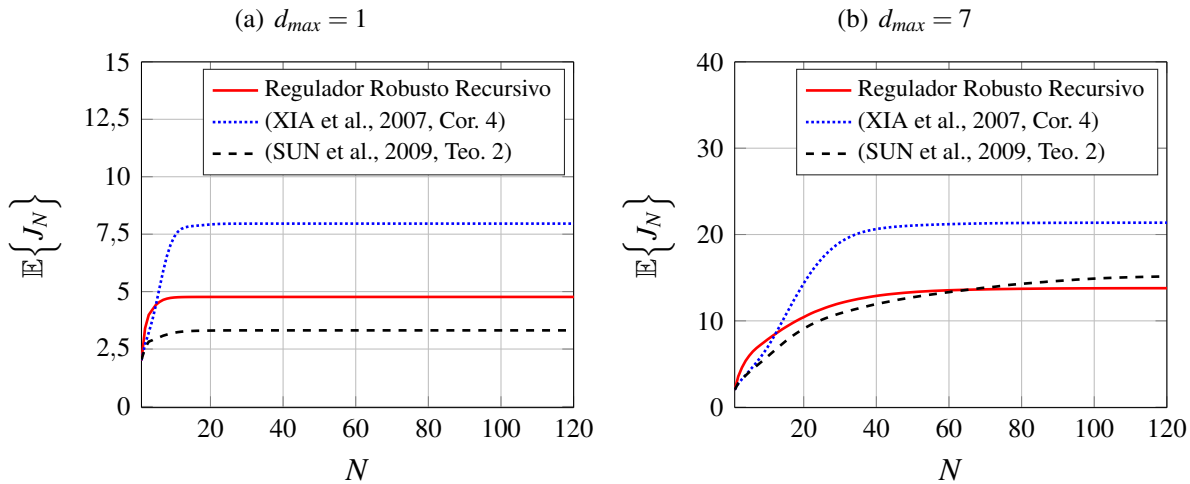
Os ganhos de realimentação obtidos pelo regulador robusto recursivo e pelas abordagens de Xia et al. (2007, Cor. 4) e Sun et al. (2009, Thm. 2) para  $d_{max} = 1$  foram, respectivamente,

$$\mathcal{K}_{R,1000}^* = \begin{bmatrix} -0,3754 & -0,2659 & -0,1233 & -0,0380 \end{bmatrix},$$

$$K_X^* = \begin{bmatrix} -0,3394 & -0,1753 \end{bmatrix} \text{ e } K_S^* = \begin{bmatrix} -0,4553 & -0,2409 \end{bmatrix}.$$

O comportamento da média do custo de  $N$  passos  $J_N$  (3.4) obtida por cada método é apresentado na Figura 3.2, para  $d_{max} = 1$  e  $d_{max} = 7$ . Observe que, para cada método,  $J_N$  converge conforme o valor de  $N$  aumenta. As médias do custo ótimo de  $N$  passos obtidas por cada método são apresentadas na Tabela 3.1.

**Figura 3.2** – Comparação das médias dos custos de  $N$  passos  $J_N$ .

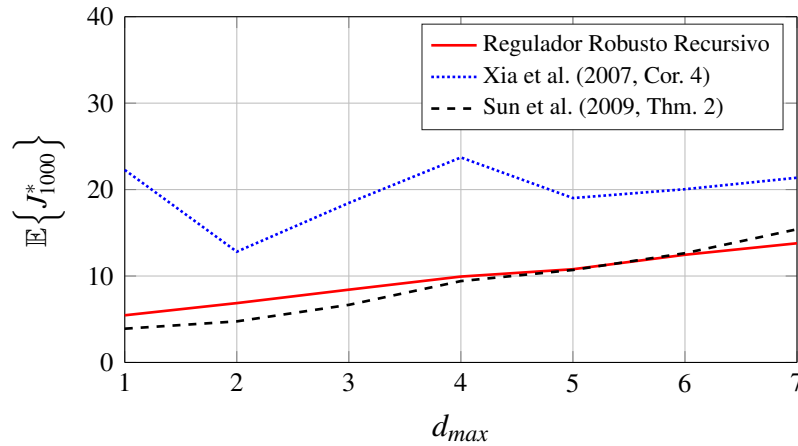
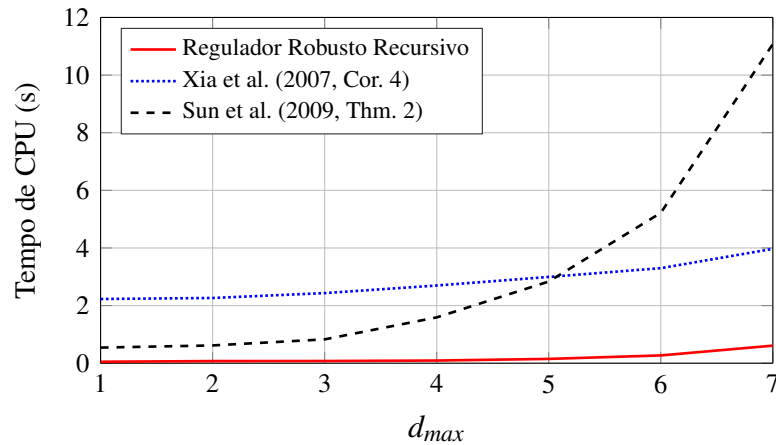


**Tabela 3.1** – Médias do custo ótimo de  $N$  passos para cada método, conforme  $d_{max}$ .

Atraso	Média do custo ótimo $J_{1000}^*$		
	Regulador	Xia et al. (2007)	Sun et al. (2009)
$d_{max} = 1$	4,77	7,96	3,31
$d_{max} = 7$	13,78	21,37	15,40

Na Figura 3.3 são ilustradas as médias dos custos totais ótimos  $J_{1000}^*$  obtidos por cada método, conforme o valor de  $d_{max}$ . Note que a abordagem de Xia et al. (2007, Cor. 4) obtém os maiores valores, ao passo que o regulador robusto recursivo e o método de Sun et al. (2009, Thm. 2) obtêm valores próximos.

Na Figura 3.4 são apresentadas as médias, obtidas a partir de 100 experimentos, dos tempos de CPU despendidos por cada método para determinar o valor do ganho de realimentação. Consideraram-se o tempo necessário para a resolução das LMIs de cada abordagem e o tempo para o regulador robusto recursivo determinar o ganho ótimo em regime  $\mathcal{K}_{\lambda, N_c}^*$ , sendo  $N_c$  o horizonte que satisfaz a condição  $\|\mathcal{P}_{\lambda, N_c+1} - \mathcal{P}_{\lambda, N_c}\| < 0,001$ .

**Figura 3.3** – Comparação das médias dos custos totais ótimos  $J_{1000}^*$  em função de  $d_{max}$ .**Figura 3.4** – Comparação das médias dos tempos de CPU em função de  $d_{max}$ .

Como a dimensão do sistema aumentado cresce com o aumento de  $d_{max}$ , o tempo de CPU despendido também cresce. No entanto, o regulador recursivo se destaca em relação às abordagens via LMIs por despende o menor tempo para todos os valores atribuídos a  $d_{max}$ . Em particular, para  $d_{max} = 7$ , as abordagens de Xia et al. (2007, Cor. 4) e Sun et al. (2009, Thm. 2) apresentaram os tempos de CPU  $T_X \approx 3,97$  s e  $T_S \approx 11,08$  s, respectivamente, enquanto o tempo do regulador recursivo foi  $T_R \approx 0,61$  s.

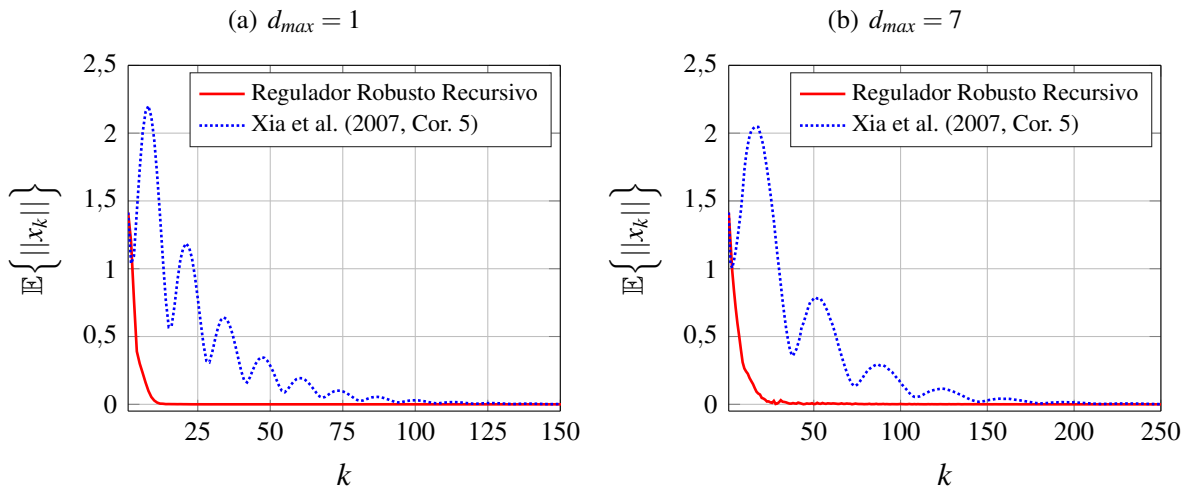
**Exemplo 3.2** (SLAE Incerto). Considere o SLAE incerto (3.1, Caso B), sendo que as matrizes de parâmetros nominais, a condição inicial e as matrizes de ponderação do custo são como no Exemplo 3.1. As matrizes de parâmetros incertos são dadas por

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad N_{A_k} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 \end{bmatrix}, \quad N_{A_{d,k}} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad N_{B_k} = \begin{bmatrix} 1,5 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, o regulador robusto recursivo terá seu desempenho comparado à abordagem baseada em LMIs proposta por Xia et al. (2007, Cor. 5). As probabilidades de transição e os parâmetros para a execução do Algoritmo 3.1 são os mesmos que foram adotados no Exemplo 3.1, sendo o horizonte igual a 300.

As médias das normas euclidianas dos estados do SLAE obtidas por cada método são mostradas na Figura 3.5, para  $d_{max} = 1$  e  $d_{max} = 7$ . Embora o aumento no valor máximo do atraso impacte os desempenhos dos métodos, todas as trajetórias convergem para zero, e o regulador recursivo apresenta um comportamento mais suave comparado à abordagem via LMIs.

**Figura 3.5** – Comparação das médias das normas dos estados regulados.



Os ganhos de realimentação obtidos pelo regulador robusto recursivo e pela abordagem de Xia et al. (2007, Cor. 5) para  $d_{max} = 1$  foram, respectivamente,

$$\mathcal{K}_{R,300}^* = \begin{bmatrix} -0,3509 & -0,2607 & -0,1152 & -0,0372 \end{bmatrix}$$

$$e K_X^* = \begin{bmatrix} -0,2596 & -0,2043 \end{bmatrix}.$$

O comportamento da média do custo de  $N$  passos  $J_N$  (3.4) obtida por cada método é apresentado na Figura 3.6, para  $d_{max} = 1$  e  $d_{max} = 7$ . Observe que, para cada método,  $J_N$  converge conforme o valor de  $N$  aumenta. As médias do custo ótimo de  $N$  passos obtidas por cada método são apresentadas na Tabela 3.2.

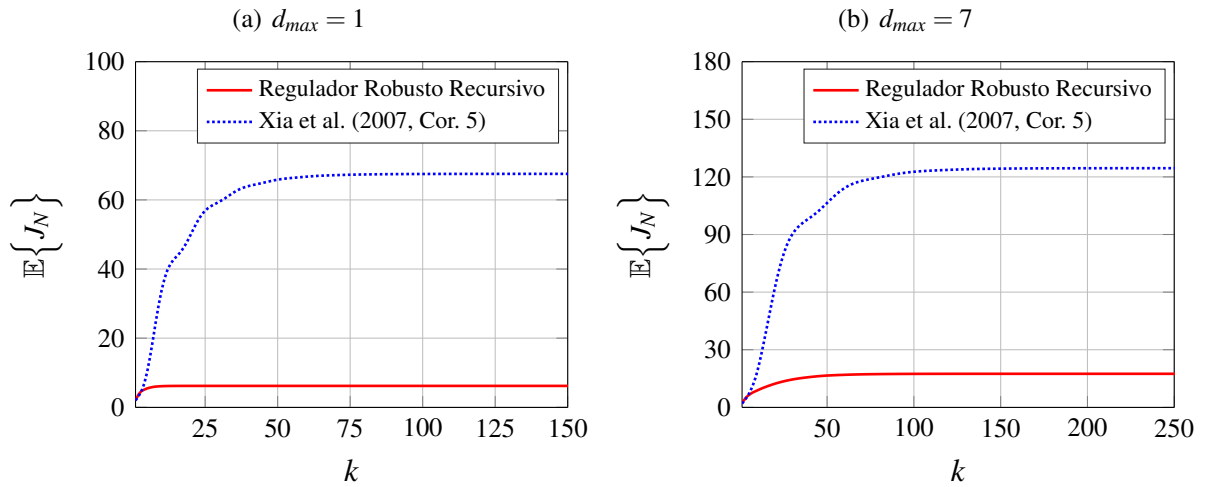
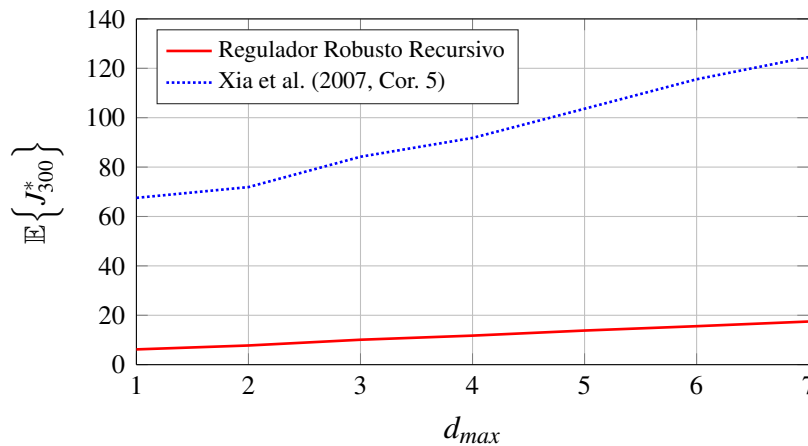
**Tabela 3.2** – Médias do custo ótimo de  $N$  passos para cada método conforme  $d_{max}$ .

Atraso	Média do custo ótimo $J_{300}^*$	
	Regulador	Xia et al. (2007)
$d_{max} = 1$	6,18	67,54
$d_{max} = 7$	17,47	124,54

A Figura 3.7 ilustra as médias dos custos totais ótimos  $J_{300}^*$  obtidos por cada método, conforme o valor de  $d_{max}$ . Note que o regulador robusto recursivo obteve os menores valores quando comparado à abordagem de Xia et al. (2007, Cor. 5).

Na Figura 3.8, apresentam-se as médias, obtidas a partir de 100 experimentos, dos tempos de CPU despendidos por cada regulador para calcular o valor do ganho de realimentação.



**Figura 3.6** – Comparação das médias dos custos de  $N$  passos  $J_N$ .**Figura 3.7** – Comparação das médias dos custos totais ótimos  $J_{300}^*$  em função de  $d_{max}$ .

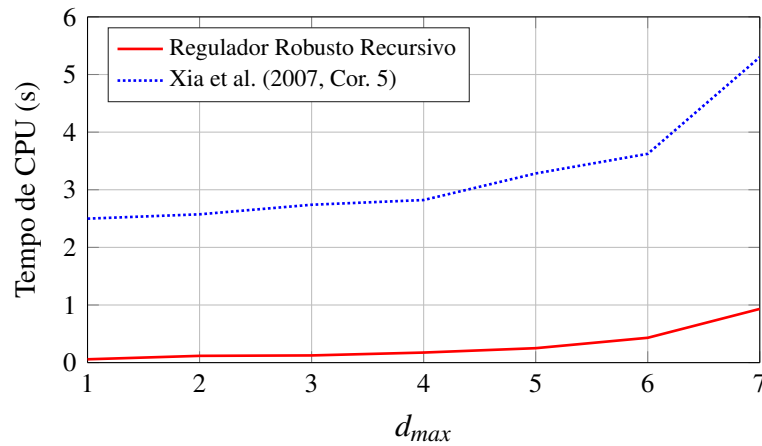
Consideraram-se o tempo necessário para a resolução das LMIs da abordagem de Xia et al. (2007, Cor. 5) e o tempo para o regulador robusto recursivo determinar o ganho ótimo em regime  $\mathcal{K}_{\lambda, N_c}^*$ , sendo  $N_c$  tal que  $\|\mathcal{P}_{\lambda, N_c+1} - \mathcal{P}_{\lambda, N_c}\| < 0,001$ .

Observe que o regulador robusto recursivo despendeu menores tempos de CPU em relação à abordagem via LMIs. Em particular, para  $d_{max} = 7$ , tem-se que  $T_R \approx 0,93$  s e  $T_X \approx 5,30$  s.

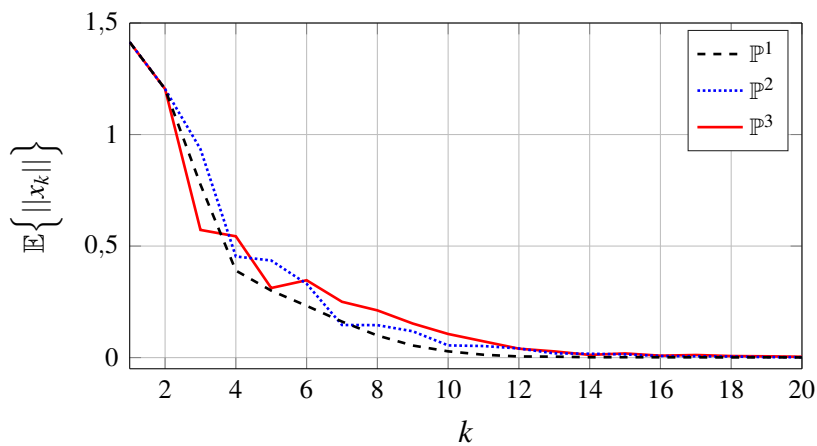
Para ilustrar a influência da matriz de probabilidades de transição  $\mathbb{P}$  sobre desempenho do regulador robusto recursivo, a simulação de Monte Carlo foi realizada considerando-se três matrizes distintas, dadas por:

$$\mathbb{P}^1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{P}^2 = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,20 & 0,80 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } \mathbb{P}^3 = \begin{bmatrix} 0,05 & 0,95 \\ 0,80 & 0,20 \end{bmatrix}.$$

**Figura 3.8** – Comparação das médias dos tempos de CPU em função de  $d_{max}$ .

A Figura 3.9 apresenta as médias das normas dos estados regulados obtidas pelo regulador robusto recursivo para cada matriz de probabilidades de transição, com  $d_{max} = 1$ . Note que a dinâmica do sistema depende dos valores atribuídos às probabilidades de transição.

**Figura 3.9** – Médias dos estados obtidas pelo regulador robusto recursivo para  $d_{max} = 1$ .

---

# Filtros de Kalman para Sistemas com Atraso Conhecido

Apresenta-se, neste capítulo, um método recursivo para a filtragem robusta de sistemas lineares com atraso variante no estado, supondo-se que o valor do atraso pode ser medido, e é, portanto, conhecido a cada passo. Como em um típico problema de filtragem, deseja-se obter, através das variáveis de medidas, a melhor estimativa para o estado do sistema, o qual não é perfeitamente observado.

De maneira semelhante à do desenvolvimento dos reguladores, faz-se uso da suposição de que as transições entre os valores do atraso obedecem a uma cadeia de Markov de tempo discreto. Realiza-se, então, a transformação do SLAE em um SLSM equivalente, e o problema de filtragem é redefinido em termos do SLSM, assumindo-se que há observação do modo de operação.

A partir da definição do problema de filtragem Markoviano, segue-se a estratégia de Cerri (2013) para a obtenção das estimativas de estado para SLSMs com cadeia de Markov observada. As soluções recursivas são obtidas segundo uma metodologia determinística, através da otimização de um funcional de custo quadrático de um passo sujeito a uma restrição linear, com base nas técnicas de estimativas mínimas quadráticas, apresentadas no Capítulo 2.

A recursividade das soluções obtidas é estabelecida em termos de uma estrutura matricial que pode ser reduzida para uma forma algébrica análoga à do filtro de Kalman convencional.

Exemplos numéricos fornecidos ao final do capítulo avaliam o desempenho das estimativas preditoras propostas, e as comparam a outras obtidas por filtros recursivos que não incorporam informações sobre o atraso em suas formulações.

## 4.1 Formulação do Problema

Considere o seguinte SLAE:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathcal{A}_k x_k + \mathcal{A}_{d,k} x_{k-d_k} + \mathcal{C}_k w_k, \\ y_k &= \mathcal{D}_k x_k + \mathcal{E}_k v_k, \end{aligned} \quad \forall k \geq 0, \quad (4.1)$$

sendo  $x_k \in \mathbb{R}^n$  o estado no passo  $k$ ,  $x_{k-d_k} \in \mathbb{R}^n$  o estado atrasado em  $d_k$  amostras e  $y_k \in \mathbb{R}^p$  o vetor de medida. Os vetores  $w_k \in \mathbb{R}^m$  e  $v_k \in \mathbb{R}^r$  são ruídos aleatórios gaussianos mutuamente independentes, ambos com média nula, e com matrizes de variância  $\mathbb{E}\{w_k w_l^T\} = Q_k \delta_{kl} \in \mathbb{R}^{m,m}$  e  $\mathbb{E}\{v_k v_l^T\} = R_k \delta_{kl} \in \mathbb{R}^{r,r}$ , respectivamente, com  $\delta_{kl} = 1$  se  $k = l$  e  $\delta_{kl} = 0$  em caso contrário. Adicionalmente, as sequências  $\{w_k\}$  e  $\{v_k\}$  e a variável aleatória  $x_0$  são mutuamente independentes.

O atraso variante  $d_k$  é um inteiro que atende à condição

$$0 \leq d_{min} \leq d_k \leq d_{max},$$

onde os inteiros  $d_{min}$  e  $d_{max}$  são assumidos conhecidos. A situação de atraso constante pode ser tratada tomando-se  $d_{min} = d_{max}$ .

Assim como no estudo do problema de controle, segue-se a linha de trabalhos como os de Chan e Ozguner (1995), Mao et al. (2007) e Qiu et al. (2015), e supõe-se que as transições entre os valores de  $d_k$  a cada passo obedecem a uma cadeia de Markov finita de tempo discreto.

As matrizes de parâmetros são dadas segundo dois casos considerados para o SLAE (4.1):

### Caso A: SLAE Nominal

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k &\leftarrow A_k, \mathcal{A}_{d,k} \leftarrow A_{d,k}, \mathcal{C}_k \leftarrow C_k, \\ \mathcal{D}_k &\leftarrow D_k \text{ e } \mathcal{E}_k \leftarrow E_k; \end{aligned}$$

### Caso B: SLAE Incerto

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k &\leftarrow A_k + \delta A_k, \mathcal{A}_{d,k} \leftarrow A_{d,k} + \delta A_{d,k}, \mathcal{C}_k \leftarrow C_k + \delta C_k, \\ \mathcal{D}_k &\leftarrow D_k + \delta D_k \text{ e } \mathcal{E}_k \leftarrow E_k + \delta E_k, \end{aligned}$$

com  $A_k, A_{d,k} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $C_k \in \mathbb{R}^{n,m}$ ,  $D_k \in \mathbb{R}^{p,n}$  e  $E_k \in \mathbb{R}^{p,r}$  assumidas conhecidas. Para o SLAE incerto, as incertezas paramétricas limitadas em norma  $\delta A_k, \delta A_{d,k} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $\delta C_k \in \mathbb{R}^{n,m}$ ,  $\delta D_k \in \mathbb{R}^{p,n}$  e  $\delta E_k \in \mathbb{R}^{p,r}$  seguem o seguinte modelo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta A_k & \delta A_{d,k} & \delta C_k \end{bmatrix} &= L_{1,k} \Delta_{1,k} \begin{bmatrix} N_{A_k} & N_{A_{d,k}} & N_{C_k} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \delta D_k & \delta E_k \end{bmatrix} &= L_{2,k} \Delta_{2,k} \begin{bmatrix} N_{D_k} & N_{E_k} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde  $L_{1,k} \in \mathbb{R}^{n,q_1}$  e  $L_{2,k} \in \mathbb{R}^{p,q_2}$  são matrizes não-nulas, as matrizes  $N_{A_k} \in \mathbb{R}^{q_1,n}$ ,  $N_{A_{d,k}} \in \mathbb{R}^{q_1,n}$ ,  $E_{C_k} \in \mathbb{R}^{q_1,m}$ ,  $N_{D_k} \in \mathbb{R}^{q_2,n}$  e  $N_{E_k} \in \mathbb{R}^{q_2,r}$  são conhecidas e  $\Delta_{1,k} \in \mathbb{R}^{q_1,q_1}$  e  $\Delta_{2,k} \in \mathbb{R}^{q_2,q_2}$  são matrizes de contração arbitrárias tais que  $\|\Delta_{j,k}\| \leq 1$ ,  $j = 1, 2$ .

Admitindo-se que o processo  $\{x_k\}$  associado ao SLAE (4.1) não é perfeitamente observado, tem-se por objetivo obter, a cada passo, a melhor estimativa para o estado  $x_k$  do sistema. Mais precisamente, deseja-se, com base no conjunto  $\mathbf{Z}_k$  de informações disponíveis até o passo  $k$ , calcular recursivamente as estimativas ótimas *filtrada*,  $\hat{x}_{k|k}$ , e *preditora*,  $\hat{x}_{k+1|k}$ , para  $x_k$  e  $x_{k+1}$ , respectivamente. A saída do sistema,  $y_k$ , é sempre assumida mensurável, e  $d_k$  é suposto conhecido, embora não de forma antecipada, de modo que

$$\mathbf{Z}_k = \{y_1, \dots, y_k, d_0, \dots, d_k\}. \quad (4.3)$$

Serão denotados por  $e_{k|k} = (x_k - \hat{x}_{k|k})$  o erro da estimativa filtrada e por  $e_{k+1|k} = (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})$  o erro da estimativa preditora, sendo suas respectivas matrizes de variância  $P_{k|k}$  e  $P_{k+1|k}$ .

Para que se atinja o objetivo estabelecido, será utilizada a interpretação determinística do problema seguida por Cerri (2013), baseada na solução de um problema de mínimos quadrados. Segundo essa interpretação, as variáveis  $\hat{x}_{k+1}$ ,  $\hat{x}_k$ ,  $\hat{w}_k$  e  $\hat{v}_k$  substituem as variáveis aleatórias  $x_{k+1}$ ,  $x_k$ ,  $w_k$  e  $v_k$ , e considera-se, no lugar do sistema (4.1), o modelo determinístico equivalente

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= A_k \hat{x}_k + A_{d,k} \hat{x}_{k-d_k} + C_k \hat{w}_k, \\ y_k &= D_k \hat{x}_k + E_k \hat{v}_k, \end{aligned} \quad \forall k \geq 0. \quad (4.4)$$

Associa-se, então, ao modelo (4.4), o seguinte funcional de custo quadrático de um passo:

$$J_k(\hat{x}_k, \hat{w}_k, \hat{v}_k) := \|\hat{x}_k - \hat{x}_{k|k-1}\|_{P_{k|k-1}^{-1}}^2 + \|\hat{w}_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|\hat{v}_k\|_{R_k^{-1}}^2, \quad (4.5)$$

no qual as matrizes  $Q_k$  e  $R_k$  são reinterpretadas como ponderações para os desvios de ajuste  $\hat{w}_k$  e  $\hat{v}_k$ , respectivamente. Da mesma forma,  $P_{k|k}$  e  $P_{k+1|k}$  passam a ser tratadas como ponderações para os respectivos erros de aproximação  $\hat{e}_{k|k} = (\hat{x}_k - \hat{x}_{k|k})$  e  $\hat{e}_{k+1|k} = (\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})$ .

O problema estudado é então estabelecido como a determinação, para cada  $k \geq 0$ , das soluções ótimas  $\hat{x}_{k+1}^*$ ,  $\hat{x}_k^*$ ,  $\hat{w}_k^*$  e  $\hat{v}_k^*$  que minimizam  $J_k(\hat{x}_k, \hat{w}_k, \hat{v}_k)$  sob a máxima influência das incertezas paramétricas, ou

$$\begin{aligned} & \min_{\hat{w}_k, \hat{v}_k, \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}} \max_{\delta_k} J_k(\hat{x}_k, \hat{w}_k, \hat{v}_k), \\ \text{s. a } & \begin{cases} \hat{x}_{k+1} = A_k \hat{x}_k + A_{d,k} \hat{x}_{k-d_k} + C_k \hat{w}_k, \\ y_k = D_k \hat{x}_k + E_k \hat{v}_k, \end{cases} \quad \forall k \geq 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

com  $\delta_k = \{\delta A_k, \delta A_{d,k}, \delta C_k, \delta D_k, \delta E_k\}$  e  $P_{0|-1} \succ 0$ . Note que, no caso do SLAE nominal, o problema (4.6) reduz-se a uma minimização simples.

A partir das soluções para o problema, definem-se

$$\hat{x}_{k+1|k} := \hat{x}_{k+1}^*, \quad \hat{x}_{k|k} := \hat{x}_k^*, \quad \hat{w}_{k|k} := \hat{w}_k^*, \quad \text{e} \quad \hat{v}_{k|k} := \hat{v}_k^*,$$

onde estão incluídas as estimativas filtrada e preditora desejadas.

A exemplo dos desenvolvimentos do capítulo anterior, apresenta-se, a seguir, um processo de transformação do SLAE (4.4) em um SLSM livre de atrasos, o que permitirá que o problema de filtragem seja reestabelecido em termos deste.

#### 4.1.1 Equivalência com Sistema Linear Sujeito a Saltos Markovianos

Adota-se aqui novamente a estratégia de transformação do SLAE em um SLSM livre de atrasos, através do método de elevação. Para isso, os atrasos  $d_k$  são uma vez mais assumidos governados por uma cadeia de Markov de tempo discreto  $\theta(k) \in \mathcal{S} = \{1, \dots, s\}$ ,  $s = d_{max} - d_{min} + 1$ , de modo que  $d_k = d_{min} + \theta(k) - 1$ , com uma matriz de probabilidades de transição  $\mathbb{P} = [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{s,s}$ ,  $i, j \in \mathcal{S}$ , sendo que

$$\begin{aligned} Pr[\theta(k+1) = j | \theta(k) = i] &= p_{ij}, \quad Pr[\theta(k) = i] = \pi_{i,k}, \\ \sum_{j=1}^s p_{ij} &= 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dessa maneira, o SLAE (4.1) pode ser reescrito como o seguinte SLSM:

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \mathcal{F}_{\theta(k),k} z_k + \mathcal{W}_{\theta(k),k} w_k, \\ y_k &= \mathcal{H}_{\theta(k),k} z_k + \mathcal{V}_{\theta(k),k} v_k, \quad \forall k \geq 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde o estado aumentado  $z_k$  é dado por

$$z_k := \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_{k-d_{max}+1} \\ x_{k-d_{max}} \end{bmatrix},$$

e as matrizes de parâmetros são dadas de acordo com o caso considerado para o SLAE:

##### **Caso A: SLAE Nominal**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\theta(k),k} &\leftarrow F_{\theta(k),k}, \quad \mathcal{W}_{\theta(k),k} \leftarrow W_{\theta(k),k}, \\ \mathcal{H}_{\theta(k),k} &\leftarrow H_{\theta(k),k} \quad \text{e} \quad \mathcal{V}_{\theta(k),k} \leftarrow V_{\theta(k),k}; \end{aligned}$$

##### **Caso B: SLAE Incerto**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\theta(k),k} &\leftarrow F_{\theta(k),k} + \delta F_{\theta(k),k}, \quad \mathcal{W}_{\theta(k),k} \leftarrow W_{\theta(k)} + \delta W_{\theta(k),k}, \\ \mathcal{H}_{\theta(k),k} &\leftarrow H_{\theta(k),k} + \delta H_{\theta(k),k} \quad \text{e} \quad \mathcal{V}_{\theta(k),k} \leftarrow V_{\theta(k),k} + \delta V_{\theta(k),k}, \end{aligned}$$

sendo, para cada  $i = \theta(k) \in \mathcal{S}$ ,

$$\begin{aligned}
F_{i,k} &:= \begin{bmatrix} A_k & 0 & \cdots & 0 & \overbrace{A_{d,k}}^{(i+d_{min})^a \text{ coluna}} & \cdots & 0 \\ \hline & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta F_{i,k} := \begin{bmatrix} \delta A_k & 0 & \cdots & 0 & \overbrace{\delta A_{d,k}}^{(i+d_{min})^a \text{ coluna}} & \cdots & 0 \\ \hline & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \\
W_{i,k} &:= \begin{bmatrix} C_k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \delta W_{i,k} := \begin{bmatrix} \delta C_k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \\
H_{i,k} &:= [D_k \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0], \quad \delta H_{i,k} := [\delta D_k \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0], \\
V_{i,k} &:= E_k \text{ e } \delta V_{i,k} := \delta E_k,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

com  $F_{i,k}, \delta F_{i,k} \in \mathbb{R}^{n_d, n_d}$ ;  $W_{i,k}, \delta W_{i,k} \in \mathbb{R}^{n_d, m}$ ;  $H_{i,k}, \delta H_{i,k} \in \mathbb{R}^{p, n_d}$  e  $V_{i,k}, \delta V_{i,k} \in \mathbb{R}^{p, r}$ , sendo  $n_d = (d_{max} + 1)n$ . Assim, tem-se o seguinte modelo para as matrizes de incertezas:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \delta F_{i,k} & \delta W_{i,k} \end{bmatrix} &= M_{1,i,k} \Delta_{1,i,k} \begin{bmatrix} N_{F_{i,k}} & N_{W_{i,k}} \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} \delta H_{i,k} & \delta V_{i,k} \end{bmatrix} &= M_{2,i,k} \Delta_{2,i,k} \begin{bmatrix} N_{H_{i,k}} & N_{V_{i,k}} \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{4.10}$$

com as matrizes aumentadas

$$\begin{aligned}
M_{1,i,k} &:= [L_{1,k}^T \ 0 \ \cdots \ 0]^T \in \mathbb{R}^{n_d, q_1}, \quad \Delta_{1,i,k} := \Delta_{1,k} \in \mathbb{R}^{q_1, q_1}, \\
N_{F_{i,k}} &:= \begin{bmatrix} N_{A_k} & 0 & \cdots & 0 & \overbrace{N_{A_{d,k}}}^{(i+d_{min})^a \text{ coluna}} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q_1, n_d}, \quad N_{W_{i,k}} := N_{C_k} \in \mathbb{R}^{q_1, m}, \\
M_{2,i,k} &:= L_{2,k} \in \mathbb{R}^{p, q_2}, \quad \Delta_{2,i,k} := \Delta_{2,k} \in \mathbb{R}^{q_2, q_2}, \\
N_{H_{i,k}} &:= [N_{D_k} \ 0 \ \cdots \ 0] \in \mathbb{R}^{q_2, n_d}, \quad N_{V_{i,k}} := N_{E_k} \in \mathbb{R}^{q_2, r}, \quad \forall i \in \mathcal{S}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Nota-se que, quando  $i + d_{min} = 1$ , o elemento da primeira coluna da matriz  $N_{F_{i,k}}$  é igual a  $E_{A_k} + E_{A_{d,k}}$ , e os demais são nulos. Os elementos da primeira coluna das matrizes  $F_{i,k}$  e  $\delta F_{i,k}$  estão sujeitos a uma observação análoga.

Foi estabelecida, então, uma equivalência entre o SLAE (4.1) e o SLSM (4.8), segundo a qual cada possível valor do atraso  $d_k \in [d_{min}, d_{max}]$  do SLAE corresponde a um modo de operação diferente do SLSM. As estimativas para o SLAE podem, então, ser obtidas a partir

das estimativas filtrada e preditora para o SLSM, denotadas, respectivamente, por

$$\hat{z}_{k|k} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} \\ \hat{x}_{k-1|k} \\ \vdots \\ \hat{x}_{k-d_{\max}+1|k} \\ \hat{x}_{k-d_{\max}|k} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{z}_{k+1|k} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1|k} \\ \hat{x}_{k|k} \\ \vdots \\ \hat{x}_{k-d_{\max}+2|k} \\ \hat{x}_{k-d_{\max}+1|k} \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

cujas respectivas matrizes de variância do erro de estimativa são denotadas por  $\mathcal{P}_{k|k}$  e  $\mathcal{P}_{k+1|k}$ .

Adotando-se novamente a interpretação determinística utilizada para formular o sistema (4.4), com as variáveis  $\hat{w}_k, \hat{v}_k, \hat{z}_k$  e  $\hat{z}_{k+1}$  substituindo as variáveis aleatórias  $w_k, v_k, z_k$  e  $z_{k+1}$  do sistema (4.8), o custo quadrático (4.5) pode ser reescrito em termos do SLSM como:

$$\mathcal{J}_k(\hat{z}_k, \hat{w}_k, \hat{v}_k) := \|\hat{z}_k - \hat{z}_{k|k-1}\|_{\mathcal{P}_{k|k-1}^{-1}}^2 + \|\hat{w}_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|\hat{v}_k\|_{R_k^{-1}}^2. \quad (4.13)$$

O problema de filtragem para o SLAE é equivalente, portanto, ao problema definido para o SLSM, estabelecido da seguinte maneira:

$$\text{s. a} \quad \begin{cases} \min_{\hat{w}_k, \hat{v}_k, \hat{z}_k, \hat{z}_{k+1}} \max_{\delta'_k} \mathcal{J}_k(\hat{z}_k, \hat{w}_k, \hat{v}_k), \\ \hat{z}_{k+1} = \mathcal{F}_{\theta(k),k} \hat{z}_k + \mathcal{W}_{\theta(k),k} \hat{w}_k, \\ y_k = \mathcal{H}_{\theta(k),k} \hat{z}_k + \mathcal{V}_{\theta(k),k} \hat{v}_k, \quad \forall k \geq 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

cujas soluções minimizam o custo (4.13) sob a máxima influência das incertezas paramétricas  $\delta'_k := \{\delta F_{\theta(k),k}, \delta W_{\theta(k),k}, \delta H_{\theta(k),k}, \delta V_{\theta(k),k}\}$ , e incluem as estimativas filtrada e preditora para o SLSM, respectivamente:

$$\hat{z}_{k|k} := \hat{z}_k^* \quad \text{e} \quad \hat{z}_{k+1|k} := \hat{z}_{k+1}^*. \quad (4.15)$$

Note que, no caso do sistema nominal, o problema (4.14) reduz-se a uma minimização simples.

Na equivalência construída, o conhecimento do atraso do SLAE a cada passo corresponde à observação do modo de operação do SLSM. Sendo assim, será apresentada, na próxima seção, a solução para o problema (4.14), sob a suposição de que o modo de operação do SLSM é observado.

## 4.2 Filtros de Kalman via SLSM

Nesta seção, buscam-se soluções para o problema (4.14) na situação em que o atraso  $d_k$  do sistema (4.1) é conhecido a cada passo, o que, no contexto da transformação realizada na seção anterior, corresponde à observação do modo  $\theta(k)$  do sistema (4.8).



As estratégias para a obtenção da solução baseiam-se no método de funções penalidade e nos resultados para as estimativas mínimas quadráticas ponderada e regularizada robusta, apresentados no Capítulo 2. Inicialmente, o problema (4.14) é colocado em um formato conveniente, a depender do caso considerado para o SLSM, derivado do SLAE: nominal ou incerto.

### Caso A: SLSM Nominal

Neste caso, reescreve-se o problema (4.14) como

$$\begin{aligned} \min_{\psi_k, \mathcal{X}_{k+1}} \|\psi_k\|_{\mathcal{P}_k^{-1}}, \\ \text{s. a } \mathcal{Y}_k = \mathcal{M}_k \mathcal{X}_{k+1} + \mathcal{N}_k \psi_k, \end{aligned} \quad (4.16)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k &:= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k|k-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}_{k+1} := \begin{bmatrix} \hat{z}_k \\ \hat{z}_{k+1} \end{bmatrix}, \quad \psi_k := \begin{bmatrix} \hat{z}_k - \hat{z}_{k|k-1} \\ \hat{w}_k \\ \hat{v}_k \end{bmatrix}, \\ \mathcal{M}_k &:= \begin{bmatrix} I & 0 \\ F_{\theta(k),k} & -I \\ H_{\theta(k),k} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_k := \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & W_{\theta(k),k} & 0 \\ 0 & 0 & V_{\theta(k),k} \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{Y}_k := \begin{bmatrix} \hat{z}_{k|k-1} \\ 0 \\ y_k \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

### Caso B: SLSM Incerto

Pelo método de funções penalidade, o problema de otimização restrito (4.14) pode, neste caso, ser aproximado, para cada  $k \geq 0$  e cada  $\mu > 0$ , como o problema irrestrito

$$\min_{\mathcal{X}_k} \max_{\delta \mathcal{T}_k} \mathcal{X}_k^T \mathcal{Q}_k \mathcal{X}_k + ((\mathcal{T}_k + \delta \mathcal{T}_k) \mathcal{X}_k - \mathcal{Z}_k)^T \mu I ((\mathcal{T}_k + \delta \mathcal{T}_k) \mathcal{X}_k - \mathcal{Z}_k), \quad (4.18)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_k &:= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k|k-1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}_k := \begin{bmatrix} \hat{z}_k - \hat{z}_{k|k-1} \\ \hat{w}_k \\ \hat{v}_k \\ \hat{z}_k \\ \hat{z}_{k+1} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{T}_k &:= \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & W_{\theta(k),k} & 0 & F_{\theta(k),k} & -I \\ 0 & 0 & V_{\theta(k),k} & H_{\theta(k),k} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Z}_k := \begin{bmatrix} \hat{z}_{k|k-1} \\ 0 \\ y_k \end{bmatrix} \\ \text{e } \delta \mathcal{T}_k &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta W_{\theta(k),k} & 0 & \delta F_{\theta(k),k} & 0 \\ 0 & 0 & \delta V_{\theta(k),k} & \delta H_{\theta(k),k} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Com o problema reformulado convenientemente, ele pode ser reconhecido como um caso particular do problema de mínimos quadrados ponderados (Seção 2.3), no caso nominal, e de

mínimos quadrados regularizados com incertezas (Seção 2.4), no caso incerto. Estabelecem-se, então, as seguintes identificações entre (4.16) e (2.8):

$$\begin{aligned} v &\leftarrow \Psi_k, \quad y \leftarrow \mathcal{X}_{k+1}, \quad R \leftarrow \mathcal{P}_k, \\ C &\leftarrow \mathcal{M}_k, \quad D \leftarrow \mathcal{N}_k, \quad z \leftarrow \mathcal{Y}_k, \end{aligned} \quad (4.19)$$

e as seguintes identificações entre (4.18) e (2.10):

$$\begin{aligned} Q &\leftarrow \mathcal{Q}_k, \quad y \leftarrow \mathcal{X}_k, \quad C \leftarrow \mathcal{T}_k, \quad z \leftarrow \mathcal{Z}_k, \quad \delta C \leftarrow \delta \mathcal{T}_k, \\ \delta z &\leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_C \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & N_{W_{\theta(k),k}} & 0 & N_{F_{\theta(k),k}} & 0 \\ 0 & 0 & N_{V_{\theta(k),k}} & N_{H_{\theta(k),k}} & 0 \end{bmatrix}, \quad E_z \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ H &\leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_{1,\theta(k),k} & 0 \\ 0 & M_{2,\theta(k),k} \end{bmatrix}, \quad \Delta \leftarrow \begin{bmatrix} \Delta_{1,\theta(k),k} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,\theta(k),k} \end{bmatrix}, \quad R \leftarrow \mu^{-1}I. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Tendo-se em vista as identificações realizadas, o problema (4.14) pode ser solucionado pela aplicação do Lema 2.4, no caso nominal, e da Proposição 2.1, no caso incerto.

Após manipulações algébricas, é possível mostrar que as estimativas filtrada e preditora para o SLSM (4.8), a partir das quais podem ser obtidas as estimativas para o SLAE (4.1), podem ser calculadas através de uma mesma estrutura matricial, tanto no caso nominal quanto no caso incerto, como no lema a seguir.

**Lema 4.1.** (CERRI, 2013) *As estimativas de estado para o sistema (4.8) e as respectivas matrizes de variância do erro, para cada  $\mu > 0$ , são dadas por:*

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_{k|k} & \mathcal{P}_{k|k} & * \\ \hat{z}_{k+1|k} & * & \mathcal{P}_{k+1|k} \end{bmatrix}_\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_k & 0 & I & 0 \\ 0 & \mathfrak{S}_{\mu,k} & \mathcal{A}_k & \mathcal{B}_k \\ I & \mathcal{A}_k^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{Y}_k & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k &:= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k|k-1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_k := \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{W}_{\theta(k),k} & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{V}_{\theta(k),k} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B}_k &:= \begin{bmatrix} I & 0 \\ \widehat{F}_{\theta(k),k} & -\widehat{I} \\ \widehat{H}_{\theta(k),k} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y}_k := \begin{bmatrix} \hat{z}_{k|k-1} \\ 0 \\ \mathcal{Y}_k \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

sendo as matrizes de parâmetros dadas de acordo com o caso considerado para o SLSM:

**Caso A: SLSM Nominal**

$$\begin{aligned}\widehat{F}_{\theta(k),k} &= F_{\theta(k),k}, \quad \widehat{W}_{\theta(k),k} = W_{\theta(k),k}, \quad \widehat{H}_{\theta(k),k} = H_{\theta(k),k}, \quad \widehat{V}_{\theta(k),k} = V_{\theta(k),k}, \\ \widehat{I} &= I, \quad \mathfrak{S}_{\mu,k} = \mu^{-1}I, \quad \mathfrak{y}_k = y_k;\end{aligned}$$

**Caso B: SLSM Incerto**

$$\begin{aligned}\widehat{F}_{\theta(k),k} &= \begin{bmatrix} F_{\theta(k),k} \\ N_{F_{\theta(k),k}} \end{bmatrix}, \quad \widehat{W}_{\theta(k),k} = \begin{bmatrix} W_{\theta(k),k} \\ N_{W_{\theta(k),k}} \end{bmatrix}, \quad \widehat{H}_{\theta(k),k} = \begin{bmatrix} H_{\theta(k),k} \\ N_{H_{\theta(k),k}} \end{bmatrix}, \quad \widehat{V}_{\theta(k),k} = \begin{bmatrix} V_{\theta(k),k} \\ N_{V_{\theta(k),k}} \end{bmatrix}, \\ \widehat{I} &= \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{S}_{\mu,k} = \begin{bmatrix} \mu^{-1}I & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{1,\mu,k} & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{2,\mu,k} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{y}_k = \begin{bmatrix} y_k \\ 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

onde

$$\Sigma_{j,\mu,k} = \begin{bmatrix} \mu^{-1}I - \widehat{\lambda}^{-1}M_{j,\theta(k),k}M_{j,\theta(k),k}^T & 0 \\ 0 & \widehat{\lambda}^{-1}I \end{bmatrix}, \quad j = 1,2,$$

e  $\widehat{\lambda}$  é obtido de acordo com a Proposição 2.1, levando-se em conta as identificações (4.20).

Pelo método de funções penalidade, a solução ótima para o problema (4.14) é fornecida pelo Lema 4.1 à medida em que  $\mu \rightarrow \infty$ . Como a Proposição 2.1 estabelece que

$$\widehat{\lambda} \in \left( \left\| \mu \operatorname{diag} \left( M_{1,\theta(k),k}^T M_{1,\theta(k),k}, M_{2,\theta(k),k}^T M_{2,\theta(k),k} \right) \right\|, \infty \right),$$

tem-se que  $\mu \rightarrow \infty$  implica  $\widehat{\lambda} \rightarrow \infty$ , de forma que  $\mathfrak{S}_{\mu \rightarrow \infty, k} \rightarrow 0$ , tanto no caso nominal quanto no caso incerto.

Na situação descrita no parágrafo anterior, as estimativas preditoras fornecidas em (4.21) e suas respectivas matrizes de variância do erro podem ser escritas como soluções algébricas, as quais assemelham-se às equações do filtro de Kalman padrão (KALMAN, 1960; SAYED, 2001), como mostra o próximo lema.

**Lema 4.2.** (CERRI, 2013) *A estimativa preditora  $\widehat{z}_{k+1|k}$  e sua matriz de variância do erro, apresentadas no Lema 4.1, podem ser reescritas, quando  $\mu \rightarrow \infty$ , como:*

**Caso A: SLSM Nominal**

$$\begin{aligned}\widehat{z}_{k+1|k} &= F_{\theta(k),k}\widehat{z}_{k|k-1} + F_{\theta(k),k}\mathcal{P}_{k|k-1}H_{\theta(k),k}^T(H_{\theta(k),k}\mathcal{P}_{k|k-1}H_{\theta(k),k}^T + V_{\theta(k),k}R_kV_{\theta(k),k}^T)^{-1}(y_k - H_{\theta(k),k}\widehat{z}_{k|k-1}), \\ \mathcal{P}_{k+1|k} &= F_{\theta(k),k}\mathcal{P}_{k|k}F_{\theta(k),k}^T + W_{\theta(k),k}Q_kW_{\theta(k),k}^T,\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{P}_{k|k} = \mathcal{P}_{k|k-1} - \mathcal{P}_{k|k-1}H_{\theta(k),k}^T(H_{\theta(k),k}\mathcal{P}_{k|k-1}H_{\theta(k),k}^T + V_{\theta(k),k}R_kV_{\theta(k),k}^T)^{-1}H_{\theta(k),k}\mathcal{P}_{k|k-1}.$$

**Caso B: SLSM Incerto**

$$\hat{z}_{k+1|k} = -\Upsilon_k \left( \hat{F}_{\theta(k),k} \hat{z}_{k|k-1} + \hat{F}_{\theta(k),k} \mathcal{P}_{k|k-1} \hat{H}_{\theta(k),k}^T \times \right. \\ \left. \left( \hat{H}_{\theta(k),k} \mathcal{P}_{k|k-1} \hat{H}_{\theta(k),k}^T + \hat{V}_{\theta(k),k} R_k \hat{V}_{\theta(k),k}^T \right)^{-1} \right) \left( y_k - \hat{H}_{\theta(k),k} \hat{z}_{k|k-1} \right),$$

em que  $\Upsilon_k = \left( \hat{I}^T \Xi_k^{-1} \hat{I} \right)^{-1} \hat{I}^T \Xi_k^{-1}$ , com

$$\Xi_k = \hat{F}_{\theta(k),k} \left( \mathcal{P}_{k|k-1} - \mathcal{P}_{k|k-1} \hat{H}_{\theta(k),k}^T \times \right. \\ \left. \left( \hat{H}_{\theta(k),k} \mathcal{P}_{k|k-1} \hat{H}_{\theta(k),k}^T + \hat{V}_{\theta(k),k} R_k \hat{V}_{\theta(k),k}^T \right)^{-1} \hat{H}_{\theta(k),k} \mathcal{P}_{k|k-1} \right) \hat{F}_{\theta(k),k}^T + \hat{W}_{\theta(k),k} Q_k \hat{W}_{\theta(k),k}^T,$$

sendo  $\mathcal{P}_{k+1|k} = \left( \hat{I}^T \Xi_k^{-1} \hat{I} \right)^{-1}$ .

O Algoritmo 4.1 sintetiza os desenvolvimentos do capítulo, fornecendo os passos para a obtenção das estimativas de estado para o SLAE (4.1), cujo atraso é conhecido, através da metodologia proposta.

---

**Algoritmo 4.1** Estimativas Filtrada e Preditora Recursivas para Sistemas com Atraso Conhecido

---

**SLSM:** Determine os parâmetros do SLSM:  $F_{\theta(k),k}$ ,  $W_{\theta(k),k}$ ,  $H_{\theta(k),k}$ ,  $V_{\theta(k),k}$ ,  $M_{1,\theta(k),k}$ ,  $M_{2,\theta(k),k}$ ,  $N_{F_{\theta(k),k}}$ ,  $N_{W_{\theta(k),k}}$ ,  $N_{H_{\theta(k),k}}$  e  $N_{V_{\theta(k),k}}$ .

**Filtro Recursivo:**

*Passo 1:* Defina  $\mu$ ,  $N$ ,  $\hat{z}_{0|-1}$  e  $\mathcal{P}_{0|-1} \succeq 0$ .

*Passo 2:* Calcule, para cada  $k = 0, \dots, N-1$ :

$$\hat{z}_{k|k}, \hat{z}_{k+1|k}, \mathcal{P}_{k|k} \text{ e } \mathcal{P}_{k+1|k} \text{ via (4.21).}$$

*Passo 3:* Obtenha, para cada  $k = 0, \dots, N-1$ ,

$$\hat{x}_{k|k} \text{ de } \hat{z}_{k|k} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} \\ \hat{x}_{k-1|k} \\ \vdots \\ \hat{x}_{k-d_{\max}|k} \end{bmatrix} \text{ e } \hat{x}_{k+1|k} \text{ de } \hat{z}_{k+1|k} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1|k} \\ \hat{x}_{k|k} \\ \vdots \\ \hat{x}_{k-d_{\max}+1|k} \end{bmatrix}.$$


---

### 4.3 Exemplos Numéricos

São apresentados, nesta seção, dois exemplos de aplicação dos filtros nominal e robusto para sistemas com atraso conhecido apresentados no Algoritmo 4.1, denominados aqui "filtros com atraso". Nesses exemplos, seus desempenhos são comparados aos de filtros nominais e

robustos que não incorporam explicitamente em sua formulação a presença de atraso no sistema estudado, chamados de "filtros sem atraso". Assim, pode-se avaliar o nível de degradação imposto pelo atraso no desempenho dos filtros sem atraso, e a vantagem oferecida pelas estratégias propostas neste trabalho, nesta situação. No primeiro exemplo, considera-se o caso do SLAE nominal, e, no segundo, o do SLAE incerto.

Como filtros sem atraso, foram empregados para estimar o estado do sistema (4.1) os próprios filtros nominal e robusto do Lema 4.1, mas sem aplicar ao sistema o processo de transformação apresentado no capítulo. Dessa forma, os filtros tratam o modelo como um SLSM degenerado, com um único modo ( $s = 1, \theta_k = 1 \forall k, \mathbb{P} = 1$ ), e o termo do atraso é completamente ignorado por eles. Conforme notado por Cerri (2013), esses filtros assemelham-se a abordagens tradicionais como o filtro de Kalman padrão (KALMAN, 1960), no caso nominal, e o filtro robusto para sistemas lineares proposto por Sayed (2001), no caso incerto.

As comparações são estabelecidas por meio do critério (4.23), utilizado por Sayed e Nascimento (1999), de forma que, nas figuras 4.1 e 4.2, cada ponto no passo  $k$  do horizonte  $N = 1000$  corresponde à média do quadrado das normas dos erros das estimativas predictoras, calculada considerando-se simulações de Monte Carlo com  $T = 1000$  realizações da cadeia de Markov, ou

$$\mathbb{E}\{\|e_k\|^2\} = \mathbb{E}\{\|x_k - \hat{x}_{k|k-1}\|^2\} \approx \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \|x_k^{(j)} - \hat{x}_{k|k-1}^{(j)}\|^2, \quad (4.23)$$

onde  $x_k^{(j)}$  e  $\hat{x}_{k|k-1}^{(j)}$  representam, respectivamente, o estado real no passo  $k$  e a estimativa preditora no passo  $k - 1$ , na realização  $j$ .

Os processos de ruído  $\{w_k\}$  e  $\{v_k\}$  foram selecionadas aleatoriamente para cada realização, com distribuição normal, média nula e variâncias  $Q_k$  e  $R_k$ , respectivamente. O atraso  $d_k$  foi selecionado aleatoriamente no intervalo  $[d_{min}, d_{max}]$ , segundo a matriz de probabilidades de transição  $\mathbb{P}$ , de acordo com o algoritmo de Häggström (2002, Cap. 3), e fixado a cada passo  $k$  de cada realização, conforme os desenvolvimentos do Apêndice A. As contrações  $\Delta_{1,k}$  e  $\Delta_{2,k}$  foram selecionadas aleatoriamente, com distribuição uniforme, no intervalo  $[-1, 1]$ , e fixadas a cada passo.

O desempenho de cada filtro será avaliado de acordo com o valor máximo do atraso, para  $d_{max} = 1$  e  $d_{max} = 7$ , com  $d_{min} = 0$  fixo.

Todas as rotinas foram implementadas no software *MATLAB*<sup>®</sup>, versão 9.0.0.341360 (R2016a), em um computador com processador *Intel*<sup>®</sup> *Core*<sup>™</sup> i7-3770 com frequência de 3,40 GHz, memória RAM de 8,0 GB e sistema operacional *Windows*<sup>®</sup> 10 *Home*.

**Exemplo 4.1** (SLAE Nominal). *Considere o SLAE nominal (4.1, Caso A) com as seguintes matrizes de parâmetros:*

$$A_k = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,5 \\ 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad A_{d,k} = \begin{bmatrix} -0,45 & 0,25 \\ 0 & -0,45 \end{bmatrix}, \quad C_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_k = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad E_k = 0,5.$$

Para as matrizes de variância dos ruídos, tomam-se:

$$Q_k = 2I_2 \text{ e } R_k = 1, \forall k \geq 0.$$

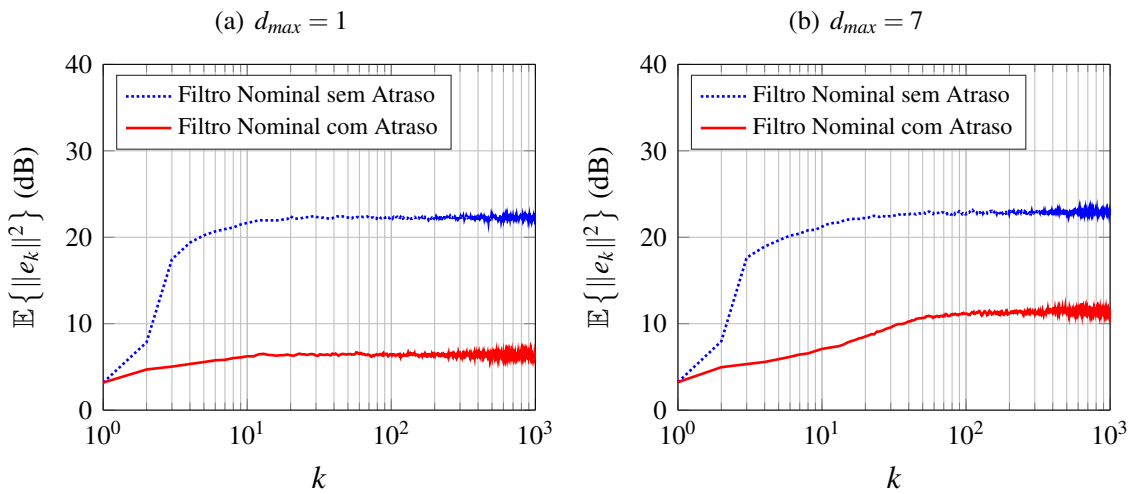
Além disso, os seguintes valores são adotados para os parâmetros de inicialização do Algoritmo 4.1 e para as entradas da matriz de probabilidades de transição do valor do atraso:

$$\begin{aligned} \mu &= 10^8, \mathcal{P}_{0|-1} = I, \hat{z}_{0|-1} = 0, \\ p_{ij} &= \frac{1}{s}, \pi_{i,0} = \frac{1}{s}, \forall i, j \in \mathcal{S}, \text{ sendo } s = d_{\max} - d_{\min} + 1, \end{aligned}$$

de forma que, a cada passo, todos os possíveis valores do atraso são igualmente prováveis.

A Figura 4.1 apresenta as médias dos erros de estimativa obtidas pelo filtro nominal com atraso e pelo filtro nominal sem atraso, para  $d_{\max} = 1$  e para  $d_{\max} = 7$ , para o caso do SLAE nominal. É possível observar que o filtro com atraso foi capaz de obter erros menores em relação ao filtro nominal sem atraso, para os dois valores de atraso máximo.

**Figura 4.1** – Comparação das médias dos erros de estimativa.



**Exemplo 4.2** (SLAE Incerto). Considere o SLAE incerto (4.1, caso B) com os parâmetros nominais iguais àqueles utilizados no Exemplo 4.1, e com os seguintes parâmetros de incertezas:

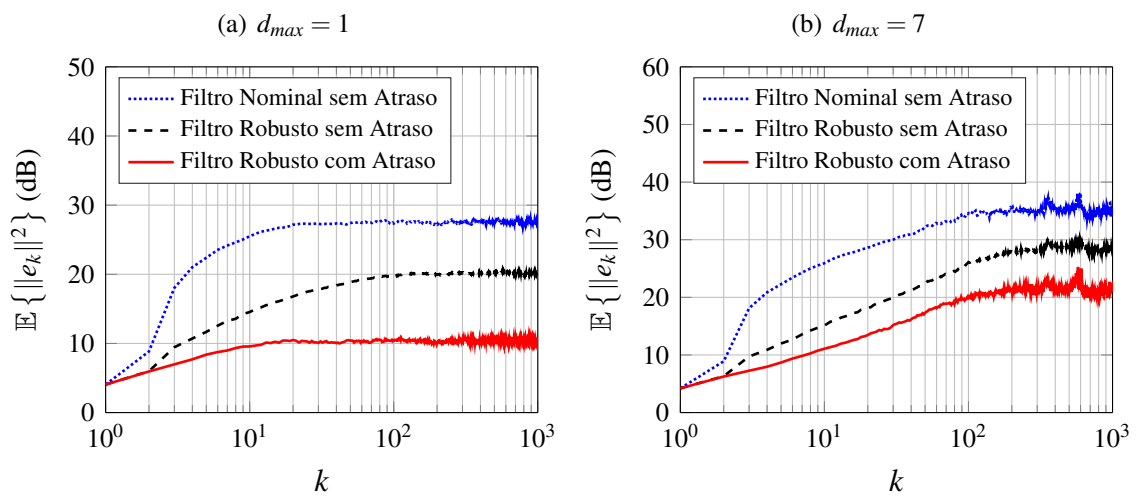
$$\begin{aligned} L_{1,k} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L_{2,k} = 1, \\ N_{A_k} &= \begin{bmatrix} 0,01 & 0,6 \end{bmatrix}, \quad N_{A_{d,k}} = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,6 \end{bmatrix}, \quad N_{C_k} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \\ N_{D_k} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad N_{E_k} = 0,75. \end{aligned}$$

Consideram-se os mesmos valores adotados no Exemplo 4.1 para as matrizes de variância dos ruídos, para os parâmetros de inicialização do Algoritmo 4.1, para  $\mu$  e para as entradas da matriz de probabilidades de transição do valor do atraso.

Para o parâmetro  $\hat{\lambda}$ , toma-se  $\hat{\lambda} = 1,5\|H^T R^{-1}H\|$ , com  $H$  e  $R$  dados de acordo com as identificações (4.20).

As médias dos erros de estimativa obtidas pelo filtro robusto com atraso e pelos filtros nominal e robusto sem atraso são apresentadas na Figura 4.2, para  $d_{max} = 1$  e para  $d_{max} = 7$ . Observa-se que todos os filtros tiveram seus desempenhos afetados pelo aumento do valor de  $d_{max}$ . Apesar disso, para ambos os valores considerados, os menores erros de estimativa foram obtidos pelo filtro robusto com atraso. O filtro robusto sem atraso apresentou erros menores em relação ao filtro nominal sem atraso.

**Figura 4.2** – Comparação das médias dos erros de estimativa.







---

# Filtros de Kalman para Sistemas com Atraso Desconhecido

Este capítulo é dedicado à apresentação de um método recursivo para a filtragem robusta de sistemas lineares com atraso variante e desconhecido no estado.

Uma vez mais, faz-se uso da suposição de que as transições entre os valores do atraso obedecem a uma cadeia de Markov finita de tempo discreto, e estabelece-se o problema de filtragem em termos de um SLSM equivalente, assumindo-se que não há observação do modo de operação.

Utiliza-se, então, a abordagem de Cerri (2013) para a obtenção das estimativas de estado para SLSMs com cadeia de Markov não observada, segundo a qual o SLSM é reformulado como um *sistema sumentado*, o qual é independente do modo de operação, através da função indicadora. Essa reformulação é inspirada no filtro linear recursivo baseado no critério de erro mínimo quadrático médio (MMSE, do inglês *Minimum Mean Square Error*), proposto por Costa (1994).

Seguindo-se uma metodologia determinística, as soluções recursivas são obtidas por meio da otimização de um funcional de custo quadrático de um passo sujeito a uma restrição linear, com base nas técnicas de estimativas mínimas quadráticas, apresentadas no Capítulo 2. Elas são calculadas por meio de uma estrutura matricial análoga àquela apresentada no caso de atraso conhecido, e que pode ser reduzida a uma forma algébrica semelhante à do filtro de Kalman convencional.

O desempenho das estimativas predictoras propostas é ilustrado por meio de exemplos apresentados ao final do capítulo, nos quais elas são comparadas a estimativas obtidas por filtros recursivos que não incorporam, em suas formulações, informações sobre o atraso.

## 5.1 Formulação do Problema

Considere o seguinte SLAE:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathcal{A}_k x_k + \mathcal{A}_{d,k} x_{k-d_k} + C_k w_k, \\ y_k &= \mathcal{D}_k x_k + E_k v_k, \end{aligned} \quad \forall k \geq 0, \quad (5.1)$$

sendo  $x_k \in \mathbb{R}^n$  o estado no passo  $k$ ,  $x_{k-d_k} \in \mathbb{R}^n$  o estado atrasado em  $d_k$  amostras e  $y_k \in \mathbb{R}^p$  o vetor de medida. Os vetores  $w_k \in \mathbb{R}^m$  e  $v_k \in \mathbb{R}^r$  são ruídos aleatórios gaussianos mutuamente independentes, ambos com média nula e com variância unitária, isto é, com as respectivas matrizes de variância  $\mathbb{E}\{w_k w_k^T\} = Q_k = I_m \delta_{kl}$  e  $\mathbb{E}\{v_k v_k^T\} = R_k = I_r \delta_{kl}$ , para todo  $k$ , com  $\delta_{kl} = 1$  se  $k = l$  e  $\delta_{kl} = 0$  em caso contrário. As sequências  $\{w_k\}$  e  $\{v_k\}$  e a variável aleatória  $x_0$  são mutuamente independentes.

O atraso variante  $d_k$  é um inteiro desconhecido tal que

$$0 \leq d_{min} \leq d_k \leq d_{max},$$

onde os inteiros  $d_{min}$  e  $d_{max}$  são assumidos conhecidos.

Como já é usual neste trabalho, segue-se a linha de abordagens como as de Chan e Ozguner (1995), Mao et al. (2007) e Qiu et al. (2015), supondo-se que as transições entre os valores de  $d_k$  a cada passo obedecem a uma cadeia de Markov de tempo discreto  $\theta(k) \in \mathcal{S} = \{1, \dots, s\}$ ,  $s = d_{max} - d_{min} + 1$ , de forma que  $d_k = d_{min} + \theta(k) - 1$ , com uma matriz de probabilidades de transição  $\mathbb{P} = [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{s,s}$ ,  $i, j \in \mathcal{S}$ , sendo que

$$\begin{aligned} Pr[\theta(k+1) = j | \theta(k) = i] &= p_{ij}, \quad Pr[\theta(k) = i] = \pi_{i,k}, \\ \sum_{j=1}^s p_{ij} &= 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

As matrizes  $C_k \in \mathbb{R}^{n,m}$  e  $E_k \in \mathbb{R}^{p,r}$  são conhecidas, sendo  $E_k E_k^T \succ 0$  para todo  $k$ . Consideram-se dois casos para as demais matrizes de parâmetros do SLAE (5.1):

### Caso A: SLAE Nominal

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k &\leftarrow A_k, \quad \mathcal{A}_{d,k} \leftarrow A_{d,k} \\ \text{e } \mathcal{D}_k &\leftarrow D_k; \end{aligned}$$

### Caso B: SLAE Incerto

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k &\leftarrow A_k + \delta A_k, \quad \mathcal{A}_{d,k} \leftarrow A_{d,k} + \delta A_{d,k} \\ \text{e } \mathcal{D}_k &\leftarrow D_k + \delta D_k, \end{aligned}$$

com  $A_k, A_{d,k} \in \mathbb{R}^{n,n}$  e  $D_k \in \mathbb{R}^{p,n}$  assumidas conhecidas. No caso incerto, as incertezas paramétricas limitadas em norma  $\delta A_k, \delta A_{d,k} \in \mathbb{R}^{n,n}$  e  $\delta D_k \in \mathbb{R}^{p,n}$  são modeladas como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta A_k & \delta A_{d,k} \end{bmatrix} &= L_{1,k} \Delta_{1,k} \begin{bmatrix} N_{A_k} & N_{A_{d,k}} \end{bmatrix}, \\ \delta D_k &= L_{2,k} \Delta_{2,k} N_{D_k}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde as matrizes  $L_{1,k} \in \mathbb{R}^{n,q_1}$  e  $L_{2,k} \in \mathbb{R}^{p,q_2}$  são não-nulas, as matrizes  $N_{A_k} \in \mathbb{R}^{q_1,n}$ ,  $N_{A_{d,k}} \in \mathbb{R}^{q_1,n}$  e  $N_{D_k} \in \mathbb{R}^{q_2,n}$  são conhecidas e  $\Delta_{1,k} \in \mathbb{R}^{q_1,q_1}$  e  $\Delta_{2,k} \in \mathbb{R}^{q_2,q_2}$  são matrizes de contração tais que  $\|\Delta_{j,k}\| \leq 1, j = 1,2$ .

Supondo-se que o processo  $\{x_k\}$  não é perfeitamente observado, tem-se por objetivo calcular recursivamente, a cada passo, as estimativas ótimas *filtrada*,  $\hat{x}_{k|k}$ , e *preditora*,  $\hat{x}_{k+1|k}$ , para  $x_k$  e  $x_{k+1}$ , respectivamente, com base no conjunto  $\mathbf{Z}_k$  de informações disponíveis até o passo  $k$ . A saída do sistema,  $y_k$ , é sempre assumida mensurável, de forma que

$$\mathbf{Z}_k = \{y_1, \dots, y_k\}. \quad (5.4)$$

Assim como no capítulo anterior, adota-se aqui a abordagem segundo a qual o SLAE (5.1) é reescrito como o seguinte SLSM:

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \mathcal{F}_{\theta(k),k} z_k + \mathcal{W}_{\theta(k),k} w_k, \\ y_k &= \mathcal{H}_{\theta(k),k} z_k + \mathcal{V}_{\theta(k),k} v_k, \quad \forall k \geq 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

sendo as matrizes de parâmetros dadas de acordo com o caso considerado para o SLAE:

#### **Caso A: SLAE Nominal**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\theta(k),k} &\leftarrow F_{\theta(k),k}, \quad \mathcal{W}_{\theta(k),k} \leftarrow W_{\theta(k),k}, \\ \mathcal{H}_{\theta(k),k} &\leftarrow H_{\theta(k),k} \text{ e } \mathcal{V}_{\theta(k),k} \leftarrow V_{\theta(k),k}; \end{aligned}$$

#### **Caso B: SLAE Incerto**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\theta(k),k} &\leftarrow F_{\theta(k),k} + \delta F_{\theta(k),k}, \quad \mathcal{W}_{\theta(k),k} \leftarrow W_{\theta(k),k} + \delta W_{\theta(k),k}, \\ \mathcal{H}_{\theta(k),k} &\leftarrow H_{\theta(k),k} + \delta H_{\theta(k),k} \text{ e } \mathcal{V}_{\theta(k),k} \leftarrow V_{\theta(k),k} + \delta V_{\theta(k),k}, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta F_{i,k} & \delta W_{i,k} \end{bmatrix} &= M_{1,i,k} \Delta_{1,i,k} \begin{bmatrix} N_{F_{i,k}} & N_{W_{i,k}} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \delta H_{i,k} & \delta V_{i,k} \end{bmatrix} &= M_{2,i,k} \Delta_{2,i,k} \begin{bmatrix} N_{H_{i,k}} & N_{V_{i,k}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

O estado aumentado  $z_k$  e as matrizes de parâmetros nominais e de incertezas do sistema (5.5),  $F_{i,k}, \delta F_{i,k} \in \mathbb{R}^{n_d,n_d}$ ;  $W_{i,k}, \delta W_{i,k} \in \mathbb{R}^{n_d,m}$ ;  $H_{i,k}, \delta H_{i,k} \in \mathbb{R}^{p,n_d}$  e  $V_{i,k}, \delta V_{i,k} \in \mathbb{R}^{p,r}$ , com  $n_d =$

$(d_{max} + 1)n$ , são construídas pelo método de elevação, de maneira idêntica àquela apresentada na Subseção 4.1.1. Note que aqui assumem-se  $\delta C_k$  e  $\delta E_k$  nulas, de forma que

$$\delta W_{\theta(k),k} = 0 \quad \text{e} \quad \delta V_{\theta(k),k} = 0.$$

Além disso, os processos  $\{w_k\}$  e  $\{v_k\}$  e a cadeia de Markov  $\theta(k)$  são assumidos mutuamente independentes, e as variáveis aleatórias  $z_0$  e  $\theta(0)$ , independentes.

As estimativas para o SLAE podem, portanto, ser obtidas a partir das estimativas filtrada e preditora para o SLSM, as quais são denotadas, respectivamente, por

$$\hat{z}_{k|k} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} \\ \hat{x}_{k-1|k} \\ \vdots \\ \hat{x}_{k-d_{max}+1|k} \\ \hat{x}_{k-d_{max}|k} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{z}_{k+1|k} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1|k} \\ \hat{x}_{k|k} \\ \vdots \\ \hat{x}_{k-d_{max}+2|k} \\ \hat{x}_{k-d_{max}+1|k} \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Como, neste capítulo, supõe-se que o atraso  $d_k$  do sistema (5.1) é desconhecido, então não há observação do modo de operação  $\theta(k)$  do SLSM (5.5). Sendo assim, apresenta-se, na próxima seção, uma metodologia através da qual o SLSM é reescrito como um sistema aumentado que engloba todos os possíveis modos de operação. Observe que, diferentemente do sistema aumentado singular (Capítulo 3), este modelo é obtido por meio de uma variável auxiliar dada em termos da função indicadora.

## 5.2 Sistema Aumentado

Para que seja possível obter as estimativas para o sistema (5.5) sem observação do modo de operação, constrói-se, nesta seção, uma representação equivalente independente de modo.

A metodologia, apresentada por Cerri (2013), consiste na aplicação de um segundo processo de aumento ao sistema (5.5), fazendo-se uso, novamente, da função indicadora  $1_{\mathcal{C}}$ , para um conjunto  $\mathcal{C}$ , definida por

$$1_{\mathcal{C}}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in \mathcal{C}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (5.8)$$

de modo que, para todo  $i \in \mathcal{S}$ ,  $1_{\{\theta(k)=i\}}(\omega) = 1$  se  $\theta(k) = i$ , e  $1_{\{\theta(k)=i\}}(\omega) = 0$  em caso contrário.

Definindo-se, para cada  $j \in \mathcal{S}$ , a variável auxiliar

$$\mathfrak{z}_{j,k} := z_k 1_{\{\theta(k)=j\}} \in \mathbb{R}^{n_d}, \quad (5.9)$$

constrói-se o estado aumentado

$$\mathfrak{z}_k := \begin{bmatrix} \mathfrak{z}_{1,k} \\ \vdots \\ \mathfrak{z}_{s,k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{sn_d}. \quad (5.10)$$

A equação de estado do SLSM (5.5) pode ser reescrita em termos da variável auxiliar (5.9) como

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \mathcal{F}_{\theta(k),k} z_k + \mathcal{W}_{\theta(k),k} w_k \\ &= \sum_{i=1}^s \mathcal{F}_{i,k} z_k \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} + \mathcal{W}_{\theta(k),k} w_k \\ &= \sum_{i=1}^s \mathcal{F}_{i,k} \delta_{i,k} + \mathcal{W}_{\theta(k),k} w_k, \end{aligned}$$

de modo que, para cada  $j \in \mathcal{S}$ , tem-se

$$\delta_{j,k+1} := z_{k+1} \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} = \left( \sum_{i=1}^s \mathcal{F}_{i,k} \delta_{i,k} \right) \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} + \mathcal{W}_{\theta(k),k} w_k \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}}.$$

Somando-se e subtraindo-se o termo  $\begin{bmatrix} p_{1j} \mathcal{F}_{1,k} & \cdots & p_{sj} \mathcal{F}_{s,k} \end{bmatrix} \delta_k$  ao segundo membro dessa igualdade, vem

$$\begin{aligned} \delta_{j,k+1} &= \begin{bmatrix} p_{1j} \mathcal{F}_{1,k} & \cdots & p_{sj} \mathcal{F}_{s,k} \end{bmatrix} \delta_k + \mathcal{W}_{\theta(k),k} w_k \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} \\ &\quad + \left( \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=j\}} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{1,k} & \cdots & \mathcal{F}_{s,k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{1j} \mathcal{F}_{1,k} & \cdots & p_{sj} \mathcal{F}_{s,k} \end{bmatrix} \right) \delta_k. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Por sua vez, a equação de saída do SLSM pode ser representada em termos do estado aumentado (5.10), como:

$$\begin{aligned} y_k &= \mathcal{H}_{\theta(k),k} z_k + \mathcal{V}_{\theta(k),k} v_k \\ &= \sum_{i=1}^s \mathcal{H}_{i,k} z_k \mathbf{1}_{\{\theta(k)=i\}} + \mathcal{V}_{\theta(k),k} v_k \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{1,k} & \mathcal{H}_{2,k} & \cdots & \mathcal{H}_{s,k} \end{bmatrix} \delta_k + \mathcal{V}_{\theta(k),k} v_k. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Empilhando-se as equações (5.11) para todos os  $j \in \mathcal{S}$  e tomando-se (5.12), é possível representar o SLSM (5.5) em termos do estado aumentado (5.10) como o seguinte sistema auxiliar:

$$\begin{aligned} \delta_{k+1} &= \mathfrak{F}_k \delta_k + \mathfrak{M}_{k+1} \delta_k + \mathfrak{v}_k, \\ y_k &= \mathfrak{H}_k \delta_k + \mathcal{V}_{\theta(k),k} v_k, \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde as matrizes de parâmetros  $\mathfrak{F}_k \in \mathbb{R}^{s^2, s^2}$  e  $\mathfrak{H}_k \in \mathbb{R}^{p, s^2}$  são dadas de acordo com o caso considerado para o SLSM:

#### **Caso A: SLSM Nominal**

$$\mathfrak{F}_k \leftarrow \mathcal{F}_k, \mathfrak{H}_k \leftarrow \mathcal{H}_k;$$

#### **Caso B: SLSM Incerto**

$$\mathfrak{F}_k \leftarrow \mathcal{F}_k + \delta \mathcal{F}_k, \mathfrak{H}_k \leftarrow \mathcal{H}_k + \delta \mathcal{H}_k,$$

com

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k &= (\mathbb{P}^T \otimes I_{n_d}) \mathbb{F}_k, \quad \delta \mathcal{F}_k = (\mathbb{P}^T \otimes I_{n_d}) \delta \mathbb{F}_k, \\ \mathfrak{M}_{k+1} &= (\mathcal{J}_{k+1} \otimes I_{n_d}) \mathbb{F}_k \in \mathbb{R}^{s n_d, s n_d},\end{aligned}$$

onde

$$\mathbb{F}_k := \text{diag}(F_{1,k}, \dots, F_{s,k}), \quad \delta \mathbb{F}_k := \text{diag}(\delta F_{1,k}, \dots, \delta F_{s,k}) \text{ e}$$

$$\mathcal{J}_{k+1} := \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=1\}} - p_{11} & \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=1\}} - p_{21} & \cdots & \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=1\}} - p_{s1} \\ \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=2\}} - p_{12} & \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=2\}} - p_{22} & \cdots & \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=2\}} - p_{s2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=s\}} - p_{1s} & \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=s\}} - p_{2s} & \cdots & \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=s\}} - p_{ss} \end{bmatrix},$$

e

$$\vartheta_k = \begin{bmatrix} W_{\theta(k),k} w_k \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=1\}} \\ W_{\theta(k),k} w_k \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=2\}} \\ \vdots \\ W_{\theta(k),k} w_k \mathbf{1}_{\{\theta(k+1)=s\}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{s n_d},$$

$$\mathcal{H}_k = \begin{bmatrix} H_{1,k} & H_{2,k} & \cdots & H_{s,k} \end{bmatrix}, \quad \delta \mathcal{H}_k = \begin{bmatrix} \delta H_{1,k} & \delta H_{2,k} & \cdots & \delta H_{s,k} \end{bmatrix} \in \mathbb{E}^{p, s n_d}.$$

As matrizes de incertezas paramétricas podem ser escritas segundo o modelo limitado em norma, como:

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{F}_k &= \mathcal{M}_{1,k} \Delta_{\mathcal{F},k} N_{\mathcal{F}_k}, \\ \delta \mathcal{H}_k &= \mathcal{M}_{2,k} \Delta_{\mathcal{H},k} N_{\mathcal{H}_k},\end{aligned} \tag{5.14}$$

onde

$$\mathcal{M}_{1,k} = (\mathbb{P}^T \otimes I_{n_d}) \text{diag}(M_{1,j,k})_{j=1}^s, \quad \Delta_{\mathcal{F},k} = \text{diag}(\Delta_{1,j,k})_{j=1}^s, \quad N_{\mathcal{F}_k} = \text{diag}(N_{F_{j,k}})_{j=1}^s$$

e

$$\mathcal{M}_{2,k} = \begin{bmatrix} M_{2,1,k} & M_{2,2,k} & \cdots & M_{2,s,k} \end{bmatrix}, \quad \Delta_{\mathcal{H},k} = \text{diag}(\Delta_{2,j,k})_{j=1}^s, \quad N_{\mathcal{H}_k} = \text{diag}(N_{H_{j,k}})_{j=1}^s.$$

Definindo-se, a partir do sistema auxiliar (5.13),

$$\begin{aligned}\xi_k &:= \mathfrak{M}_{k+1} \mathfrak{z}_k + \vartheta_k, \\ \varphi_k &:= V_{\theta(k),k} v_k,\end{aligned} \tag{5.15}$$

é possível reescrevê-lo uma vez mais como o *sistema aumentado* independente de modo

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}_{k+1} &= \tilde{\mathfrak{F}}_k \mathfrak{z}_k + \xi_k, \\ y_k &= \tilde{\mathfrak{H}}_k \mathfrak{z}_k + \varphi_k,\end{aligned} \tag{5.16}$$

no qual  $\xi_k$  e  $\varphi_k$  são interpretados como ruídos aleatórios aditivos.

A estratégia para a obtenção das estimativas de estado para o SLSM (5.5) consiste, então, em calculá-las a partir das estimativas filtrada e preditora para o sistema aumentado (5.16), dadas, respectivamente, por

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_{1,k|k} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{z}}_{s,k|k} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_{1,k+1|k} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{z}}_{s,k+1|k} \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

e que estão associadas às respectivas matrizes de variância do erro de estimativa  $\tilde{\mathbf{Z}}_{k|k}$  e  $\tilde{\mathbf{Z}}_{k+1|k}$ .

Antes que o problema de estimativa para o sistema (5.16) seja definido, apresentam-se, no próximo lema, expressões para as médias e as matrizes de covariância dos ruídos  $\xi_k$  e  $\varphi_k$ . Os detalhes de demonstração podem ser encontrados em Cerri (2013).

**Lema 5.1.** (CERRI, 2013) *Sejam  $\{w_k\}$  e  $\{v_k\}$  sequências de ruídos aleatórios satisfazendo:*

$$\square \mathbb{E}\{w_k\} = 0, \mathbb{E}\{w_k w_k^T\} = I \text{ e } \mathbb{E}\{w_k w_l^T\} = 0 \text{ para } k \neq l;$$

$$\square \mathbb{E}\{v_k\} = 0, \mathbb{E}\{v_k v_k^T\} = I \text{ e } \mathbb{E}\{v_k v_l^T\} = 0 \text{ para } k \neq l;$$

$$\square \mathbb{E}\{w_k v_l^T\} = 0 \text{ para todo } k \text{ e } l.$$

*Considere as sequências  $\{\xi_k\}$  e  $\{\varphi_k\}$  geradas por meio de (5.15). Então, para todo  $k$  e  $l$ :*

$$(i) \mathbb{E}\{\xi_k\} = 0 \text{ e } \mathbb{E}\{\varphi_k\} = 0;$$

(ii) *Tem-se*

$$\mathcal{Q}_k := \mathbb{E}\{\xi_k \xi_k^T\} = \text{diag} \left( \sum_{i=1}^s p_{ij} \mathcal{F}_{i,k} Z_{i,k} \mathcal{F}_{i,k}^T \right) - \mathfrak{F}_k Z_k \mathfrak{F}_k^T + \text{diag} \left( \sum_{i=1}^s p_{ij} \pi_{i,k} W_{i,k} W_{i,k}^T \right) \succ 0,$$

*sendo  $Z_k := \mathbb{E}\{\hat{\mathbf{z}}_k \hat{\mathbf{z}}_k^T\} = \text{diag}(Z_{j,k})$  e  $Z_{j,k} := \mathbb{E}\{\hat{\mathbf{z}}_{j,k} \hat{\mathbf{z}}_{j,k}^T\}$ , com  $Z_{j,k}$  dada pela seguinte equação recursiva:*

$$Z_{j,k+1} = \sum_{i=1}^s p_{ij} \mathcal{F}_{i,k} Z_{i,k} \mathcal{F}_{i,k}^T + \sum_{i=1}^s p_{ij} \pi_{i,k} W_{i,k} W_{i,k}^T;$$

$$(iii) \mathcal{R}_k := \mathbb{E}\{\varphi_k \varphi_k^T\} = \sum_{i=1}^s \pi_{i,k} V_{i,k} V_{i,k}^T;$$

$$(iv) \mathbb{E}\{\xi_k \xi_l^T\} = 0 \text{ e } \mathbb{E}\{\varphi_k \varphi_l^T\} = 0, \text{ se } k \neq l;$$

$$(v) \mathbb{E}\{\xi_k z_k^T\} = 0, \mathbb{E}\{\varphi_k z_k^T\} = 0 \text{ e } \mathbb{E}\{\xi_k \varphi_l^T\} = 0.$$

É possível obter limites superiores e inferiores para as matrizes de variância incertas  $Z_{j,k}$  e  $\mathcal{Q}_k$  (CERRI, 2013). Para todo  $j \in \mathcal{S}$  e todo instante  $k$ , verifica-se

$$Z_{I,j,k+1} \preceq Z_{j,k+1} \preceq Z_{S,j,k+1},$$

com

$$\begin{aligned} Z_{I,j,k+1} := & \sum_{i=1}^s p_{ij} \left( F_{i,k} (Z_{I,i,k}^{-1} + \alpha_{I,i,k}^{-1} N_{F_{i,k}}^T N_{F_{i,k}})^{-1} F_{i,k}^T - \alpha_{I,i,k} M_{1,i,k} M_{1,i,k}^T \right) + \\ & \sum_{i=1}^s p_{ij} \pi_{i,k} W_{i,k} W_{i,k}^T, \quad Z_{I,j,0} = \mathbb{E}\{z_0 z_0^T\} \pi_{j,0} \end{aligned} \quad (5.18)$$

e

$$\begin{aligned} Z_{S,j,k+1} := & \sum_{i=1}^s p_{ij} \left( F_{i,k} (Z_{S,i,k}^{-1} - \alpha_{S,i,k}^{-1} N_{F_{i,k}}^T N_{F_{i,k}})^{-1} F_{i,k}^T + \alpha_{S,i,k} M_{1,i,k} M_{1,i,k}^T \right) + \\ & \sum_{i=1}^s p_{ij} \pi_{i,k} W_{i,k} W_{i,k}^T, \quad Z_{S,j,0} = \mathbb{E}\{z_0 z_0^T\} \pi_{j,0}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Como consequência, tem-se também

$$\mathcal{Q}_{I,k} \preceq \mathcal{Q}_k \preceq \mathcal{Q}_{S,k},$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{I,k} = & \text{diag} \left( \sum_{i=1}^s p_{ij} \left( F_{i,k} (Z_{I,i,k}^{-1} + \alpha_{I,i,k}^{-1} N_{F_{i,k}}^T N_{F_{i,k}})^{-1} F_{i,k}^T - \alpha_{I,i,k} M_{1,i,k} M_{1,i,k}^T \right) \right) - \\ & \left( \mathcal{F}_k (Z_{S,k}^{-1} - \beta_{S,i,k}^{-1} N_{\mathcal{F}_k}^T N_{\mathcal{F}_k})^{-1} \mathcal{F}_k^T + \beta_{S,i,k} \mathcal{M}_{1,k} \mathcal{M}_{1,k}^T \right) + \text{diag} \left( \sum_{i=1}^s p_{ij} \pi_{i,k} W_{i,k} W_{i,k}^T \right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{S,k} = & \text{diag} \left( \sum_{i=1}^s p_{ij} \left( F_{i,k} (Z_{S,i,k}^{-1} - \alpha_{S,i,k}^{-1} N_{F_{i,k}}^T N_{F_{i,k}})^{-1} F_{i,k}^T + \alpha_{S,i,k} M_{1,i,k} M_{1,i,k}^T \right) \right) - \\ & \left( \mathcal{F}_k (Z_{I,k}^{-1} + \beta_{I,i,k}^{-1} N_{\mathcal{F}_k}^T N_{\mathcal{F}_k})^{-1} \mathcal{F}_k^T - \beta_{I,i,k} \mathcal{M}_{1,k} \mathcal{M}_{1,k}^T \right) + \text{diag} \left( \sum_{i=1}^s p_{ij} \pi_{i,k} W_{i,k} W_{i,k}^T \right), \end{aligned} \quad (5.21)$$

sendo  $Z_{I,k} = \text{diag}(Z_{I,j,k})$  e  $Z_{S,k} = \text{diag}(Z_{S,j,k})$ . Em (5.19)-(5.18) e (5.20)-(5.21), os escalares  $\alpha_{I,i,k}$ ,  $\alpha_{S,i,k}$ ,  $\beta_{I,i,k}$  e  $\beta_{S,i,k}$  são ajustados de forma apropriada para garantir a invertibilidade das expressões matriciais associadas.

Note que, no caso do SLSM nominal ( $N_{F_{i,k}}$ ,  $M_{1,i,k}$ ,  $N_{\mathcal{F}_k}$  e  $\mathcal{M}_{1,k}$  nulas), tem-se

$$Z_{I,j,k+1} = Z_{j,k+1} = Z_{S,j,k+1} \text{ e } \mathcal{Q}_{I,k} = \mathcal{Q}_k = \mathcal{Q}_{S,k}.$$

Será adotada novamente a abordagem determinística segundo a qual as estimativas  $\hat{\xi}_k, \hat{\varphi}_k, \hat{\mathfrak{z}}_k$  e  $\hat{\mathfrak{z}}_{k+1}$  são consideradas, respectivamente, no lugar das variáveis aleatórias  $\xi_k, \varphi_k, \mathfrak{z}_k$  e  $\mathfrak{z}_{k+1}$  do sistema (5.16). Associa-se, então, a esse sistema, o funcional de custo quadrático de um passo

$$\mathcal{J}_k \left( \hat{\mathfrak{z}}_k, \hat{\xi}_k, \hat{\varphi}_k \right) := \|\hat{\mathfrak{z}}_k - \hat{\mathfrak{z}}_{k|k-1}\|_{\tilde{Z}_{k|k-1}^{-1}}^2 + \|\hat{\xi}_k\|_{\mathcal{Q}_{S,k}^{-1}}^2 + \|\hat{\varphi}_k\|_{\mathcal{R}_k^{-1}}^2, \quad (5.22)$$

onde  $\tilde{Z}_{k|k-1}$ ,  $\mathcal{Q}_{S,k}$  e  $\mathcal{R}_k$  são tratadas como ponderações para o erro de aproximação  $\hat{e}_{k|k-1} := \hat{\mathfrak{z}}_k - \hat{\mathfrak{z}}_{k|k-1}$  e para os desvios  $\hat{\xi}_k$  e  $\hat{\varphi}_k$ , respectivamente.



As matrizes de ponderação dos desvios,  $\mathcal{Q}_{S,k}$  e  $\mathcal{R}_k$ , são calculadas a partir das expressões para as matrizes de variância dos respectivos ruídos aleatórios associados,  $\xi_k$  e  $\varphi_k$ , conforme o Lema 5.1, sendo que, para o desvio  $\hat{\varphi}_k$ , considera-se o limite superior da matriz de variância, fornecido em (5.21).

O problema de filtragem para o sistema aumentado (5.16) é então estabelecido como

$$\begin{aligned} & \min_{\hat{\xi}_k, \hat{\varphi}_k, \hat{\delta}_k, \hat{\delta}_{k+1}} \max_{\delta_{\mathcal{F}_k}, \delta_{\mathcal{H}_k}} \mathcal{J}_k \left( \hat{\delta}_k, \hat{\xi}_k, \hat{\varphi}_k \right), \\ & \text{s. a } \begin{cases} \hat{\delta}_{k+1} = \mathfrak{F}_k \hat{\delta}_k + \hat{\xi}_k \\ y_k = \mathfrak{H}_k \hat{\delta}_k + \hat{\varphi}_k \end{cases}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

dentre cujas soluções definem-se as estimativas filtrada e preditora para o sistema aumentado (5.16) como, respectivamente,

$$\hat{\delta}_{k|k} := \hat{\delta}_k^* \quad \text{e} \quad \hat{\delta}_{k+1|k} := \hat{\delta}_{k+1}^*. \quad (5.24)$$

Observe que o problema reduz-se a uma minimização simples no caso do SLSM nominal.

Uma vez obtidas as estimativas  $\hat{\delta}_{k|k}$  e  $\hat{\delta}_{k+1|k}$  para o estado do sistema aumentado (5.16), as estimativas  $\hat{z}_{k|k}$  e  $\hat{z}_{k+1|k}$  para o SLSM (5.5) podem ser recuperadas, por construção, como

$$\hat{z}_{k|k} = \sum_{i=1}^s \hat{\delta}_{i,k|k} \quad \text{e} \quad \hat{z}_{k+1|k} = \sum_{i=1}^s \hat{\delta}_{i,k+1|k}. \quad (5.25)$$

### 5.3 Filtros de Kalman via Sistema Aumentado

As soluções para (5.23) são calculadas de modo completamente análogo ao que foi utilizado para solucionar o problema (4.14), na situação de atraso conhecido, valendo-se do método de funções penalidade e dos resultados para as estimativas mínimas quadráticas ponderada e regularizada robusta, apresentados no Capítulo 2.

Inicialmente, o problema (5.23) é reformulado convenientemente, de acordo com o caso considerado para o SLSM, derivado do SLAE: nominal ou incerto.

#### *Caso A: SLSM Nominal*

O problema (5.23) pode ser reescrito, neste caso, como

$$\begin{aligned} & \min_{\psi_k, \mathcal{X}_{k+1}} \|\psi_k\|_{\mathcal{P}_k^{-1}}, \\ & \text{s. a } \mathcal{Y}_k = \mathcal{M}_k \mathcal{X}_{k+1} + \mathcal{N}_k \psi_k, \end{aligned} \quad (5.26)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k & := \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{Z}}_{k|k-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_{S,k} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_k \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}_{k+1} := \begin{bmatrix} \hat{\delta}_k \\ \hat{\delta}_{k+1} \end{bmatrix}, \quad \psi_k := \begin{bmatrix} \hat{\delta}_k - \hat{\delta}_{k|k-1} \\ \hat{\xi}_k \\ \hat{\varphi}_k \end{bmatrix}, \\ \mathcal{M}_k & := \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{F}_k & -I \\ \mathcal{H}_k & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_k := \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{Y}_k := \begin{bmatrix} \hat{\delta}_{k|k-1} \\ 0 \\ y_k \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

**Caso B: SLSM Incerto**

Neste caso, faz-se uso do método de funções penalidade para aproximar o problema restrito (5.28), para cada  $k \geq 0$  e cada  $\mu > 0$ , pelo seguinte problema irrestrito:

$$\min_{\mathcal{X}_k} \max_{\delta \mathcal{T}_k} \mathcal{X}_k^T \mathcal{Q}_k \mathcal{X}_k + ((\mathcal{T}_k + \delta \mathcal{T}_k) \mathcal{X}_k - \mathcal{Z}_k)^T \mu I ((\mathcal{T}_k + \delta \mathcal{T}_k) \mathcal{X}_k - \mathcal{Z}_k), \quad (5.28)$$

com

$$\mathcal{Q}_k := \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{Z}}_{k|k-1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_{S,k}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}_k := \begin{bmatrix} \hat{\delta}k - \hat{\delta}k|k-1 \\ \hat{\xi}_k \\ \hat{\phi}_k \\ \hat{\delta}k \\ \hat{\delta}k+1 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{T}_k := \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & \mathcal{F}_k & -I \\ 0 & 0 & I & \mathcal{H}_k & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Z}_k := \begin{bmatrix} \hat{\delta}k|k-1 \\ 0 \\ y_k \end{bmatrix}$$

$$\text{e } \delta \mathcal{T}_k := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \mathcal{F}_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \mathcal{H}_k & 0 \end{bmatrix}.$$

Tendo o problema sido reestabelecido de maneira conveniente, ele pode ser reconhecido como um caso particular do problema de mínimos quadrados ponderados (Seção 2.3), no caso nominal, e de mínimos quadrados regularizados com incertezas (Seção 2.4), no caso incerto. Desse modo, podem ser estabelecidas as seguintes identificações entre (5.26) e (2.8):

$$\begin{aligned} v &\leftarrow \psi_k, \quad y \leftarrow \mathcal{X}_{k+1}, \quad R \leftarrow \mathcal{P}_k, \\ C &\leftarrow \mathcal{M}_k, \quad D \leftarrow \mathcal{N}_k, \quad z \leftarrow \mathcal{Y}_k, \end{aligned} \quad (5.29)$$

e as seguintes identificações entre (5.28) e (2.10):

$$\begin{aligned} Q &\leftarrow \mathcal{Q}_k, \quad y \leftarrow \mathcal{X}_k, \quad C \leftarrow \mathcal{T}_k, \quad z \leftarrow \mathcal{Z}_k, \quad \delta C \leftarrow \delta \mathcal{T}_k, \\ \delta z &\leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_C \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{\mathcal{F}_k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{\mathcal{H}_k} & 0 \end{bmatrix}, \quad E_z \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ H &\leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{M}_{1,k} & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_{2,k} \end{bmatrix}, \quad \Delta \leftarrow \begin{bmatrix} \Delta_{\mathcal{F},k} & 0 \\ 0 & \Delta_{\mathcal{H},k} \end{bmatrix}, \quad R \leftarrow \mu^{-1} I. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Com as identificações realizadas, o problema (4.14) pode ser solucionado pela aplicação do Lema 2.4, no caso nominal, e da Proposição 2.1, no caso incerto.

Após manipulações algébricas, as estimativas filtradas e predictoras para os casos nominal e incerto do SLSM (5.5), a partir das quais podem ser obtidas as estimativas para o SLAE (5.1), são obtidas conforme o Lema 5.2. Novamente, as estimativas podem ser calculadas através de uma mesma estrutura matricial, análoga àquela do Lema 4.1.

**Lema 5.2.** (CERRI, 2013) *As estimativas filtrada  $\hat{z}_{k|k}$  e predictoras  $\hat{z}_{k+1|k}$  para o sistema (5.5) são dadas por*

$$\hat{z}_{k|k} = \sum_{i=1}^s \hat{\delta}_{i,k|k} \text{ e } \hat{z}_{k+1|k} = \sum_{i=1}^s \hat{\delta}_{i,k+1|k}, \quad (5.31)$$

com as estimativas  $\hat{\delta}_{k|k}$  e  $\hat{\delta}_{k+1|k}$  e suas respectivas matrizes de variância do erro de estimativa calculadas, para cada  $\mu > 0$ , como:

$$\begin{bmatrix} \hat{\delta}_{k|k} & \tilde{Z}_{k|k} & * \\ \hat{\delta}_{k+1|k} & * & \tilde{Z}_{k+1|k} \end{bmatrix}_{\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_k & 0 & I & 0 \\ 0 & \mathfrak{S}_{\mu,k} & \mathcal{A}_k & \mathcal{B}_k \\ I & \mathcal{A}_k^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{Y}_k & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad (5.32)$$

com

$$\mathcal{P}_k := \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{k|k-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_{S,k} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_k \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_k := \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{I}_{\mathcal{F}} & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{I}_{\mathcal{H}} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}_k := \begin{bmatrix} I & 0 \\ \widehat{\mathcal{F}}_k & -\widehat{I}_{\mathcal{F}} \\ \widehat{\mathcal{H}}_k & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y}_k := \begin{bmatrix} \hat{\delta}_{k|k-1} \\ 0 \\ \mathcal{Y}_k \end{bmatrix},$$

onde  $\mathcal{R}_k$  é atualizada como

$$\mathcal{R}_k := \sum_{i=1}^s \pi_{i,k} V_{i,k} V_{i,k}^T,$$

os parâmetros de inicialização são

$$\hat{\delta}_{0|-1} = q_0 = \begin{bmatrix} \mu_0 \pi_{1,0} \\ \vdots \\ \mu_0 \pi_{s,0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{Z}_{0|-1} = Z_0 - q_0 q_0^T, \quad \text{com } \mu_0 = \mathbb{E}\{z_0\}, \quad (5.33)$$

e as matrizes de parâmetros e de ponderação são dadas de acordo com o caso considerado para o SLSM:

**Caso A: SLSM Nominal**

$$\widehat{\mathcal{F}}_k = \mathcal{F}_k, \quad \widehat{I}_{\widehat{\mathcal{F}}} = I, \quad \widehat{\mathcal{H}}_k = \mathcal{H}_k, \quad \widehat{I}_{\widehat{\mathcal{H}}} = I,$$

$$\mathfrak{S}_{\mu,k} = \mu^{-1} I, \quad \mathcal{Y}_k = y_k,$$

e a matriz  $\mathcal{Q}_{S,k}$  é atualizada como:

$$\mathcal{Q}_{S,k} := \text{diag} \left( \sum_{i=1}^s p_{ij} F_{i,k} Z_{i,k} F_{i,k}^T \right) - \mathcal{F}_k Z_k \mathcal{F}_k^T + \text{diag} \left( \sum_{i=1}^s p_{ij} \pi_{i,k} W_{i,k} W_{i,k}^T \right),$$

em que  $Z_k = \text{diag}(Z_{j,k})$ , com  $Z_{j,k}$  dada pela equação recursiva

$$Z_{j,k+1} = \sum_{i=1}^s p_{ij} F_{i,k} Z_{i,k} F_{i,k}^T + \sum_{i=1}^s p_{ij} \pi_{i,k} W_{i,k} W_{i,k}^T, \quad Z_{j,0} = \mathbb{Z}_0 \pi_{j,0}, \quad \text{com } \mathbb{Z}_0 = \mathbb{E} \{ z_0 z_0^T \}.$$

### Caso B: SLSM Incerto

$$\widehat{\mathcal{F}}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_k \\ N_{\mathcal{F}_k} \end{bmatrix}, \quad \widehat{I}_{\widehat{\mathcal{F}}} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{H}}_k = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_k \\ N_{\mathcal{H}_k} \end{bmatrix}, \quad \widehat{I}_{\widehat{\mathcal{H}}} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{S}_{\mu,k} = \begin{bmatrix} \mu^{-1} I & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{1,\mu,k} & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{2,\mu,k} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{y}_k = \begin{bmatrix} y_k \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde

$$\Sigma_{j,\mu,k} = \begin{bmatrix} \mu^{-1} I - \widehat{\lambda}^{-1} \mathcal{M}_{j,k} \mathcal{M}_{j,k}^T & 0 \\ 0 & \widehat{\lambda}^{-1} I \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2,$$

sendo  $\widehat{\lambda}$  obtido de acordo com a Proposição 2.1, levando-se em conta as identificações (5.30), e a matriz  $\mathcal{Q}_{S,k}$  atualizada como:

$$\mathcal{Q}_{S,k} = \text{diag} \left( \sum_{i=1}^s p_{ij} \left( F_{i,k} (Z_{S,i,k}^{-1} - \alpha_{S,i,k}^{-1} N_{F_{i,k}}^T N_{F_{i,k}})^{-1} F_{i,k}^T + \alpha_{S,i,k} M_{1,i,k} M_{1,i,k}^T \right) \right) -$$

$$\left( \mathcal{F}_k (Z_{I,k}^{-1} + \beta_{I,i,k}^{-1} N_{\mathcal{F}_k}^T N_{\mathcal{F}_k})^{-1} \mathcal{F}_k^T - \beta_{I,i,k} \mathcal{M}_{1,k} \mathcal{M}_{1,k}^T \right) + \text{diag} \left( \sum_{i=1}^s p_{ij} \pi_{i,k} W_{i,k} W_{i,k}^T \right),$$

com  $Z_{I,k} = \text{diag}(Z_{I,j,k})$  e  $Z_{S,k} = \text{diag}(Z_{S,j,k})$ , sendo  $Z_{I,j,k}$  e  $Z_{S,j,k}$  calculadas pela seguinte recursão:

$$Z_{I,j,k+1} := \sum_{i=1}^s p_{ij} \left( F_{i,k} (Z_{I,i,k}^{-1} + \alpha_{I,i,k}^{-1} N_{F_{i,k}}^T N_{F_{i,k}})^{-1} F_{i,k}^T - \alpha_{I,i,k} M_{1,i,k} M_{1,i,k}^T \right) +$$

$$\sum_{i=1}^s p_{ij} \pi_{i,k} W_{i,k} W_{i,k}^T, \quad Z_{I,j,0} = \mathbb{Z}_0 \pi_{j,0}, \quad \text{com } \mathbb{Z}_0 = \mathbb{E} \{ z_0 z_0^T \}$$

e

$$Z_{S,j,k+1} := \sum_{i=1}^s p_{ij} \left( F_{i,k} (Z_{S,i,k}^{-1} - \alpha_{S,i,k}^{-1} N_{F_{i,k}}^T N_{F_{i,k}})^{-1} F_{i,k}^T + \alpha_{S,i,k} M_{1,i,k} M_{1,i,k}^T \right) +$$

$$\sum_{i=1}^s p_{ij} \pi_{i,k} W_{i,k} W_{i,k}^T, \quad Z_{S,j,0} = \mathbb{Z}_0 \pi_{j,0}, \quad \text{com } \mathbb{Z}_0 = \mathbb{E} \{ z_0 z_0^T \},$$

e os escalares  $\alpha_{I,i,k} > 0$ ,  $\beta_{I,i,k} > 0$  e  $\alpha_{S,i,k} > \|N_{F_{i,k}} Z_{S,i,k} N_{F_{i,k}}^T\|$  calculados apropriadamente de forma a assegurar a invertibilidade das expressões matriciais associadas.

Assim como no caso de atraso conhecido, observa-se que o método de funções penalidade estabelece que a solução ótima para o problema (5.23) é calculada pelo Lema 5.2 com  $\mu \rightarrow \infty$ , e como, segundo a Proposição 2.1,

$$\widehat{\lambda} \in \left( \left\| \mu \operatorname{diag} (\mathcal{M}_{1,k}^T \mathcal{M}_{1,k}, \mathcal{M}_{2,k}^T \mathcal{M}_{2,k}) \right\|, \infty \right),$$

então  $\mu \rightarrow \infty$  implica  $\widehat{\lambda} \rightarrow \infty$ , de modo que  $\mathfrak{S}_{\mu \rightarrow \infty, k} \rightarrow 0$ , tanto no caso nominal quanto no caso incerto.

Com  $\mu \rightarrow \infty$ , as estimativas predictoras fornecidas em (5.32) e suas respectivas matrizes de variância do erro podem ser reduzidas a um formato semelhante ao do filtro de Kalman padrão (KALMAN, 1960; SAYED, 2001), como mostra o Lema 5.3.

**Lema 5.3.** (CERRI, 2013) *A estimativa preditora  $\widehat{\delta}_{k+1|k}$  e sua respectiva matriz de variância do erro  $\widetilde{Z}_{k+1|k}$ , apresentadas no Lema 5.2, podem ser reescritas, quando  $\mu \rightarrow \infty$ , como:*

**Caso A: SLSM Nominal**

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}_{k+1|k} &= \mathcal{F}_k \widehat{\delta}_{k|k-1} + \mathcal{F}_k \widetilde{Z}_{k|k-1} \mathcal{H}_k^T (\mathcal{H}_k \widetilde{Z}_{k|k-1} \mathcal{H}_k^T + \mathcal{R}_k)^{-1} (y_k - \mathcal{H}_k \widehat{\delta}_{k|k-1}), \\ \widetilde{Z}_{k+1|k} &= \mathcal{F}_k \widetilde{Z}_{k|k-1} \mathcal{F}_k^T + \mathcal{Q}_k, \end{aligned}$$

com

$$\widetilde{Z}_{k|k} = \widetilde{Z}_{k|k-1} - \widetilde{Z}_{k|k-1} \mathcal{H}_k^T (\mathcal{H}_k \widetilde{Z}_{k|k-1} \mathcal{H}_k^T + \mathcal{R}_k)^{-1} \mathcal{H}_k \widetilde{Z}_{k|k-1}.$$

**Caso B: SLSM Incerto**

$$\widehat{\delta}_{k+1|k} = -\Upsilon_{k+1} \left( \widehat{\mathcal{F}}_k \widehat{\delta}_{k|k-1} + \widehat{\mathcal{F}}_k \widetilde{Z}_{k|k-1} \widehat{\mathcal{H}}_k^T \left( \widehat{\mathcal{H}}_k \widetilde{Z}_{k|k-1} \widehat{\mathcal{H}}_k^T + \widehat{I}_{\mathcal{H}} \mathcal{R}_k \widehat{I}_{\mathcal{H}}^T \right)^{-1} \right) (y_k - \widehat{\mathcal{H}}_k \widehat{\delta}_{k|k-1}),$$

sendo  $\Upsilon_{k+1} = \left( \widehat{I}_{\mathcal{F}}^T \widehat{\Xi}_k^{-1} \widehat{I}_{\mathcal{F}} \right)^{-1} \widehat{I}_{\mathcal{F}}^T \widehat{\Xi}_k^{-1}$ , com

$$\widehat{\Xi}_k = \widehat{\mathcal{F}}_k \left( \widetilde{Z}_{k|k-1} - \widetilde{Z}_{k|k-1} \widehat{\mathcal{H}}_k^T \left( \widehat{\mathcal{H}}_k \widetilde{Z}_{k|k-1} \widehat{\mathcal{H}}_k^T + \widehat{I}_{\mathcal{H}} \mathcal{R}_k \widehat{I}_{\mathcal{H}}^T \right)^{-1} \widehat{\mathcal{H}}_k \widetilde{Z}_{k|k-1} \right) \widehat{\mathcal{F}}_k^T + \widehat{I}_{\mathcal{F}} \mathcal{Q}_{S,k} \widehat{I}_{\mathcal{F}}^T,$$

e  $\widetilde{Z}_{k+1|k} = \left( \widehat{I}_{\mathcal{F}}^T \widehat{\Xi}_k^{-1} \widehat{I}_{\mathcal{F}} \right)^{-1}$ .

Os desenvolvimentos do capítulo são sintetizados no Algoritmo 5.1, o qual apresenta o procedimento para a obtenção das estimativas filtradas e predictoras para SLAEs cujo atraso é desconhecido, através da metodologia proposta.

## 5.4 Exemplos Numéricos

Esta seção apresenta dois exemplos de aplicação dos filtros nominal e robusto para sistemas com atraso desconhecido implementados pelo Algoritmo 5.1. Seguindo a nomenclatura do

---

**Algoritmo 5.1** Estimativas Filtrada e Preditora Recursivas para Sistemas com Atraso Desconhecido
 

---

**SLSM:** Determine os parâmetros do SLSM:  $F_{\theta(k),k}$ ,  $W_{\theta(k),k}$ ,  $H_{\theta(k),k}$ ,  $V_{\theta(k),k}$ ,  $M_{1,\theta(k),k}$ ,  $M_{2,\theta(k),k}$ ,  $N_{F_{\theta(k),k}}$ ,  $N_{W_{\theta(k),k}}$ ,  $N_{H_{\theta(k),k}}$  e  $N_{V_{\theta(k),k}}$ .

**Sistema Aumentado:** Defina os parâmetros do sistema aumentado (5.16):  $\tilde{\mathcal{F}}_k$ ,  $\tilde{\mathcal{H}}_k$ ,  $\mathcal{M}_{1,k}$ ,  $\mathcal{M}_{2,k}$ ,  $N_{\tilde{\mathcal{F}}_k}$  e  $N_{\tilde{\mathcal{H}}_k}$ .

**Filtro Recursivo:**

*Passo 1:* Defina  $\mu$ ,  $N$ ,  $\tilde{Z}_{0|-1} \succeq 0$  e  $Z_0$  (caso nominal) ou  $Z_{I,0}$  e  $Z_{S,0}$  (caso incerto).

*Passo 2:* Calcule, para cada  $k = 0, \dots, N - 1$ :

$$\hat{z}_{k|k}, \hat{z}_{k+1|k}, \tilde{Z}_{k|k} \text{ e } \tilde{Z}_{k+1|k} \text{ via (5.31)-(5.32).}$$

*Passo 3:* Obtenha, para cada  $k = 0, \dots, N - 1$ ,

$$\hat{x}_{k|k} \text{ de } \hat{z}_{k|k} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} \\ \hat{x}_{k-1|k} \\ \vdots \\ \hat{x}_{k-d_{\max}|k} \end{bmatrix} \text{ e } \hat{x}_{k+1|k} \text{ de } \hat{z}_{k+1|k} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1|k} \\ \hat{x}_{k|k} \\ \vdots \\ \hat{x}_{k-d_{\max}+1|k} \end{bmatrix}.$$


---

capítulo anterior, estes serão denominados aqui "filtros com atraso". Nos exemplos, seus desempenhos são comparados aos de filtros nominais e robustos que não incorporam explicitamente em sua formulação a presença de atraso no sistema estudado, os "filtros sem atraso".

O objetivo é, novamente, avaliar o nível de degradação imposto pelo atraso no desempenho dos filtros sem atraso, e a vantagem oferecida pelas estratégias propostas nesta situação. No primeiro exemplo, considera-se o SLAE nominal, e, no segundo, o SLAE incerto.

De maneira análoga à do capítulo anterior, empregaram-se, como filtros sem atraso, os filtros nominal e robusto do Lema 4.1, mas sem aplicar ao sistema (5.1) nenhum dos processos de aumento apresentados. Assim, os filtros tratam o modelo como um SLSM degenerado, com um único modo ( $s = 1$ ,  $\theta_k = 1 \forall k$ ,  $\mathbb{P} = 1$ ), e o termo do atraso é completamente ignorado por eles. Como observa Cerri (2013), esses filtros assemelham-se a abordagens tradicionais como o filtro de Kalman padrão (KALMAN, 1960), no caso nominal, e o filtro robusto proposto por Sayed (2001), no caso incerto.

Os desempenhos dos filtros são avaliados por meio do critério (5.34), empregado por Sayed e Nascimento (1999). Dessa forma, cada ponto no passo  $k$  do horizonte  $N = 1000$  nas figuras (5.1-5.3) é dado pela média do quadrado das normas dos erros das estimativas preditoras, calculada considerando-se simulações de Monte Carlo com  $T = 1000$  realizações da cadeia de

Markov, ou

$$\mathbb{E}\{\|e_k\|^2\} = \mathbb{E}\{\|x_k - \hat{x}_{k|k-1}\|^2\} \approx \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \|x_k^{(j)} - \hat{x}_{k|k-1}^{(j)}\|^2, \quad (5.34)$$

onde  $x_k^{(j)}$  e  $\hat{x}_{k|k-1}^{(j)}$  representam, respectivamente, o estado real no passo  $k$  e a estimativa preditora no passo  $k - 1$ , na realização  $j$ .

Os processos de ruído  $\{w_k\}$  e  $\{v_k\}$  foram selecionadas aleatoriamente para cada realização, com distribuição normal, média nula e variâncias  $Q_k$  e  $R_k$ , respectivamente. O atraso  $d_k$  foi selecionado aleatoriamente no intervalo  $[d_{min}, d_{max}]$ , segundo a matriz de probabilidades de transição  $\mathbb{P}$ , de acordo com o algoritmo de Häggström (2002, Cap. 3), detalhado no Apêndice A, e fixado a cada passo  $k$  de cada realização. As contrações  $\Delta_{1,k}$  e  $\Delta_{2,k}$  foram selecionadas aleatoriamente, no intervalo  $[-1, 1]$ , com distribuição uniforme, e fixadas a cada passo.

O desempenho de cada filtro será avaliado de acordo com o valor máximo do atraso, para  $d_{max} = 1$  e  $d_{max} = 7$ , com  $d_{min} = 0$  fixo.

Todas as rotinas foram implementadas no software *MATLAB*<sup>®</sup>, versão 9.0.0.341360 (R2016a), em um computador com processador *Intel*<sup>®</sup> *Core*<sup>™</sup> i7-3770 com frequência de 3,40 GHz, memória RAM de 8,0 GB e sistema operacional *Windows*<sup>®</sup> 10 *Home*.

**Exemplo 5.1** (SLAE Nominal). *Considere o SLAE nominal (5.1, Caso A) com as seguintes matrizes de parâmetros:*

$$A_k = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,5 \\ 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad A_{d,k} = \begin{bmatrix} -0,45 & 0,25 \\ 0 & -0,45 \end{bmatrix}, \quad C_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ D_k = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0,05 \end{bmatrix}, \quad E_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e com as seguintes matrizes de variância para os ruídos:

$$Q_k = 1 \quad e \quad R_k = 1, \quad \forall k \geq 0.$$

Os seguintes valores são adotados para o parâmetro  $\mu$  e para as entradas da matriz de probabilidades de transição do valor do atraso:

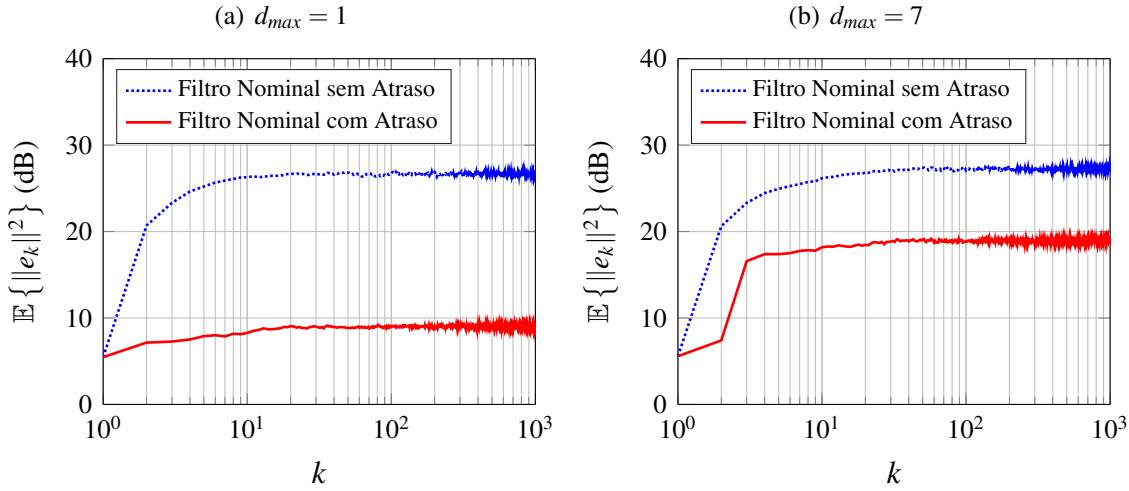
$$\mu = 10^8, \\ p_{ij} = \frac{1}{s}, \quad \pi_{i,0} = \frac{1}{s}, \quad \forall i, j \in \mathcal{S}, \quad \text{sendo } s = d_{max} - d_{min} + 1,$$

de forma que, a cada passo, todos os possíveis valores do atraso são igualmente prováveis.

Os parâmetros de inicialização da recursão do Algoritmo 5.1 são:

$$\tilde{Z}_{0|-1} = I, \quad Z_0 = I, \quad \hat{z}_{0|-1} = 0.$$

A Figura 5.1 mostra as médias dos erros de estimativa obtidas pelo filtro nominal com atraso e pelo filtro nominal sem atraso, para  $d_{max} = 1$  e para  $d_{max} = 7$ . Para os dois valores de  $d_{max}$ , o filtro com atraso forneceu erros menores em relação ao filtro nominal sem atraso.

**Figura 5.1** – Comparação das médias dos erros de estimativa.

**Exemplo 5.2** (SLAE Incerto). *Considere o SLAE incerto (5.1, caso B) com os parâmetros nominais iguais àqueles utilizados no Exemplo 5.1, e com os seguintes parâmetros de incertezas:*

$$L_{1,k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L_{2,k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$N_{A_k} = \begin{bmatrix} 0,05 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad N_{A_{d,k}} = \begin{bmatrix} 0,05 & 0,5 \end{bmatrix},$$

$$N_{D_k} = \begin{bmatrix} 0,05 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Adotam-se os mesmos valores utilizados no Exemplo 5.1 para as matrizes de variância dos ruídos, para  $\mu$ , para as probabilidades de transição do valor do atraso e para os parâmetros de inicialização do Algoritmo 5.1, sendo  $Z_{I,0} = Z_{S,0} = I$ .

Os parâmetros  $\alpha_{I,i,k}$ ,  $\beta_{I,i,k}$  e  $\alpha_{S,i,k}$  foram escolhidos, de forma automática, como os menores valores para os quais a invertibilidade das expressões matriciais que compõem fosse garantida, respeitando-se as restrições para seus limitantes inferiores.

Para o parâmetro  $\hat{\lambda}$ , usa-se  $\hat{\lambda} = 1,5\|H^T R^{-1} H\|$ , com  $H$  e  $R$  como nas identificações (5.30).

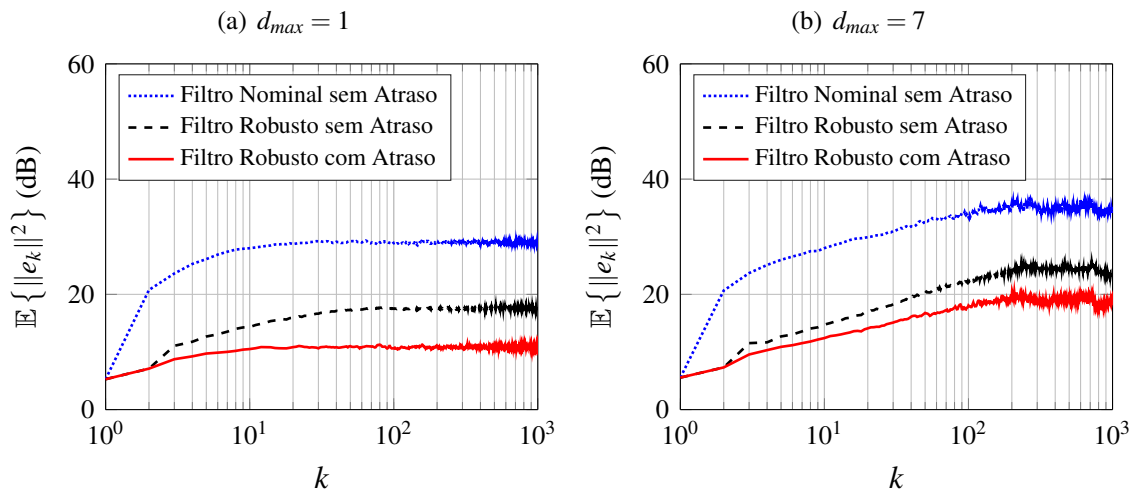
Na Figura 5.2 são ilustradas as médias dos erros de estimativa obtidas pelo filtro robusto com atraso e pelos filtros nominal e robusto sem atraso, para  $d_{max} = 1$  e para  $d_{max} = 7$ . Assim como no caso de atraso conhecido, nota-se que o filtro robusto com atraso conseguiu os menores erros, com o filtro robusto sem atraso apresentando vantagem sobre sua versão nominal.

Para exemplificar os efeitos da matriz  $\mathbb{P}$  sobre o desempenho do filtro, considere  $d_{max} = 1$  e três matrizes distintas dadas por:

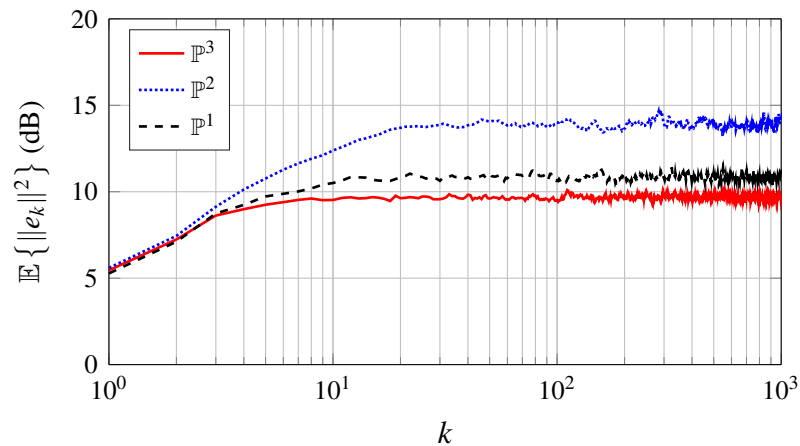
$$\mathbb{P}^1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{P}^2 = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,20 & 0,80 \end{bmatrix}$$

$$e \quad \mathbb{P}^3 = \begin{bmatrix} 0,05 & 0,95 \\ 0,80 & 0,20 \end{bmatrix}.$$



**Figura 5.2** – Comparação das médias dos erros de estimativa.

A Figura 5.3 apresenta os erros de estimativa resultantes da aplicação do filtro robusto recursivo para SLAEs com atraso desconhecido proposto, para cada uma das três matrizes de probabilidades. Nota-se que a matriz de probabilidades de transição teve impacto sobre o desempenho do filtro; em particular, com  $\mathbb{P} = \mathbb{P}^2$ , os erros de estimativa produzidos foram maiores em relação àqueles obtidos com as outras matrizes.

**Figura 5.3** – Médias dos erros de estimativa produzidos pelo filtro robusto com atraso para  $d_{max} = 1$ .



---

## Conclusão

Este trabalho apresentou algoritmos recursivos para o controle e a filtragem robustos de sistemas lineares de tempo discreto com atraso variante no estado. As estratégias baseiam-se na suposição de que as transições entre os valores do atraso obedecem a uma cadeia de Markov finita de tempo discreto, e têm como ponto de partida a transformação do sistema com atraso em um sistema linear sujeito a saltos Markovianos livre de atrasos, segundo uma técnica denominada método de elevação. Assim, os reguladores e filtros foram desenvolvidos a partir do SLSM.

No caso do problema de controle, o atraso foi assumido desconhecido, o que se traduz em um SLSM equivalente sem observação do modo de operação. Seguiu-se, então, a abordagem de Bortolin (2017, Cap. 7) para o controle de SLSMs com cadeia de Markov não observada. Com o auxílio da função indicadora, um modelo determinístico denominado sistema aumentado singular foi construído, o qual engloba todos os possíveis estados da cadeia de Markov, e permite a dedução das leis de controle nominal e robusta independentes de modo.

Os filtros foram desenvolvidos tanto sob a hipótese de atraso conhecido quanto sob a de atraso desconhecido. Foram empregados os resultados de Cerri (2013) para a filtragem de SLSMs nominais e incertos, que também empregam um sistema aumentado determinístico, obtido através da função indicadora, quando o atraso é desconhecido.

Tanto os ganhos das leis de controle quanto as estimativas filtradas e preditoras foram obtidos por meio de problemas de otimização do tipo min-max, nos quais um funcional de custo quadrático é minimizado sob a máxima influência das incertezas paramétricas. As soluções foram calculadas com base em técnicas que combinam o método de funções penalidade às soluções ótimas para problemas de mínimos quadrados. Essas técnicas permitem a obtenção de soluções recursivas em termos de equações de Riccati, dadas em uma estrutura matricial, para problemas de otimização com incertezas nos parâmetros.

Os reguladores foram comparados, para valores crescentes do limite máximo do atraso, a soluções existentes na literatura dadas em termos de LMIs. Nos exemplos fornecidos, eles foram capazes de obter trajetórias mais suaves do que estas e menores tempos de processamento para a convergência da equação de Riccati em relação ao tempo para a resolução das LMIs.

Exemplos numéricos também foram apresentados ilustrando a aplicação dos filtros desenvolvidos, nos quais eles foram comparados a filtros recursivos que não incorporam em sua formulação a existência de atraso no sistema, e os primeiros foram capazes de fornecer menores erros de estimativa, tanto na situação de atraso conhecido quanto na de atraso desconhecido, especialmente para valores menores do atraso.

Tendo-se em vista os desenvolvimentos realizados e os resultados obtidos, pode-se afirmar que os reguladores e filtros recursivos para SLAEs deduzidos a partir do modelo Markoviano equivalente mostraram-se uma estratégia viável. Observa-se, contudo, que, no caso de sistemas sujeitos a atrasos de alta magnitude, a transformação resulta em modelos de alta dimensão, o que pode ocasionar o comprometimento do desempenho computacional dos algoritmos propostos.

## 6.1 Trabalhos Futuros

Alguns dos trabalhos futuros que podem dar continuidade aos resultados apresentados nesta dissertação são:

- ❑ Desenvolvimento de técnicas de redução de ordem do SLSM equivalente ou, até mesmo, a investigação de abordagens que não utilizem o método de elevação, a fim de evitar o problema de dimensionalidade do sistema;
- ❑ Extensão dos resultados para sistemas com atraso nas entradas de controle ou com múltiplos atrasos;
- ❑ Extensão dos resultados para o caso em que as probabilidades de transição que regem a alternância dos valores do atraso são incertas ou desconhecidas.

---

## Referências

AILON, A.; GIL, M. I. Stability analysis of a rigid robot with output-based controller and time delay. **Systems & Control Letters**, v. 40, n. 1, p. 31–35, 2000. ISSN 0167-6911.

BAHREINI, M.; FARSANGI, M. M.; LEE, K. Y. Output feedback stabilization of networked brushless DC motor with random delay via markovian jump systems. **IFAC-PapersOnLine**, v. 48, n. 30, p. 55–60, 2015. 9th IFAC Symposium on Control of Power and Energy Systems CPES 2015.

BERTSEKAS, D. P. **Dynamic Programming and Optimal Control**. Belmont, Massachusetts: Athena Scientific, 1995. v. 1.

BORTOLIN, D. C. **Reguladores Robustos Recursivos para Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos com Matrizes de Transição Incertas**. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia Elétrica de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2017.

BORTOLIN, D. C.; ODORICO, E. K.; TERRA, M. H. Robust linear quadratic regulator for uncertain linear discrete-time systems with delay in the states: an augmented system approach. In: **IEEE European Control Conference (ECC)**. Limassol, Cyprus: IEEE, 2018. p. 1578–1583.

BOUKAS, E.-K.; LIU, Z.-K. **Deterministic and Stochastic Time-Delay Systems**. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.

CERRI, J. P. **Regulador Robusto Recursivo para Sistemas Lineares de Tempo Discreto no Espaço de Estados**. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2009.

CERRI, J. P. **Controle e Filtragem para Sistemas Lineares Discretos Incertos Sujeitos a Saltos Markovianos**. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia Elétrica de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2013.

CERRI, J. P.; TERRA, M. H. Estimativas de estados para sistemas lineares discretos sujeitos a saltos Markovianos via função penalidade. In: **Congresso Brasileiro de Automática (CBA)**. Campina Grande, PB, Brasil: SBA, 2012. p. 2906–2913.

\_\_\_\_\_. Recursive robust regulator for discrete-time Markovian jump linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 62, n. 11, p. 6004 – 6011, 2017.

- CHAN, H.; OZGUNER, U. Optimal control of systems over a communication network with queues via a jump system approach. In: **Conference on Control Applications (CCA)**. Albany, NY, USA: IEEE, 1995. p. 1148–1153.
- COSTA, O. L. V. Linear minimum mean square error estimation for discrete-time Markovian jump linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 39, n. 8, p. 1685–1689, 1994.
- COSTA, O. L. V.; FRAGOSO, D. M.; MARQUES, R. P. **Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems**. New York: Springer-Verlag, 2005.
- DU, D.; JIANG, B.; SHI, P.; ZHOU, S.  $H_\infty$  filtering of discrete-time switched systems with state delays via switched Lyapunov function approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 52, n. 8, p. 1520–1525, 2007.
- FEI, Z.; GAO, H.; SHI, P. New results on stabilization of markovian jump systems with time delay. **Automatica**, Elsevier, v. 45, n. 10, p. 2300–2306, 2009.
- FRIDMAN, E. **Introduction to Time-Delay Systems: analysis and control**. 1. ed. Basiléia, Suíça: Birkhäuser Basel, 2014. (Systems & Control: Foundations & Applications).
- FRIDMAN, E.; SHAKED. Delay-dependent  $H_\infty$  control of uncertain discrete delay systems. **European Journal of Control**, v. 11, p. 29–37, 2005.
- FRIDMAN, E.; SHAKED, U. Delay-dependent stability and  $H_\infty$  control: constant and time-varying delays. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 76, n. 1, p. 48–60, 2003.
- GAO, H.; CHEN, T. New results on stability of discrete-time systems with time-varying state delay. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 52, n. 2, p. 328–334, 2007.
- GAO, H.; WANG, C. A delay-dependent approach to robust  $H_\infty$  filtering for uncertain discrete-time state-delayed systems. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 52, n. 6, p. 1631–1640, 2004.
- GARCÍA-SANZ, M.; GUILLÉN, J.; IBARROLA, J. Robust controller design for uncertain systems with variable time delay. **Control Engineering Practice**, v. 9, n. 9, p. 961–972, 2001.
- GU, K.; NICULESCU, S. Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, v. 125, n. 2, p. 158–165, 2003.
- HÄGGSTRÖM, O. **Finite Markov Chains and Algorithmic Applications**. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2002. (London Mathematical Society Student Texts).
- HAN, C.; ZHANG, H. Linear optimal filtering for discrete-time systems with random jump delays. **Signal Processing**, Elsevier, v. 89, n. 6, p. 1121–1128, 2009.
- HETEL I.; DAAFOUZ, J.; IUNG, C. Equivalence between the Lyapunov-Krasovskii functional approach for discrete delay systems and the stability conditions for switched systems. **Nonlinear Analysis: Hybrid Systems**, Elsevier, v. 2, n. 3, p. 697–705, 2008.
- IGNACIUK, P. Discrete inventory control in systems with perishable goods - a time-delay system perspective. **IET Control Theory & Applications**, Institution of Engineering and Technology, v. 8, p. 11–21, 2014.

- JIANG, X.; HAN, Q.-L. On  $H_\infty$  control for linear systems with interval time-varying delay. **Automatica**, Elsevier, v. 41, n. 12, p. 2099–2106, 2005.
- KAILATH, T.; SAYED, A. H.; HASSIBI, B. **Deterministic Least-Squares Problems**. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, 2000.
- KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. **Journal of Basic Engineering**, American Society of Mechanical Engineers, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960.
- KAO, C.-Y. On stability of discrete-time LTI systems with varying time delays. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 57, n. 5, p. 1243–1248, 2012.
- KEQI, W.; ZHI, Y. Guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems with state and input delays. In: **IEEE Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference (IAEAC)**. Chongqing, China: IEEE, 2015. p. 216–220.
- KHALIL, A.; WANG, J. Robust stabilization of networked control systems using the Markovian jump system approach. In: **IEEE. Proceedings of 2012 UKACC International Conference on Control**. Cardiff, UK, 2012. p. 316–321.
- KIM, J.-H. Delay-dependent approach to robust  $H_\infty$  filtering for discrete-time singular systems with multiple time-varying delays and polytopic uncertainties. **International Journal of Control, Automation and Systems**, Springer, v. 8, n. 3, p. 655–661, 2010.
- KWAKERNAAK, H. Optimal filtering in linear systems with time delays. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 12, n. 2, p. 169–173, 1967.
- LANCASTER, P.; RODMAN, L. **Algebraic Riccati Equations**. Oxford: Clarendon Press, 1995. (Oxford Science Publications).
- LELEVE, A.; FRAISSE, P.; DAUCHEZ, P. Telerobotics over IP networks: Towards a low-level real-time architecture. In: **Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems**. Maui, Hawaii, USA: IEEE, 2001. v. 2, p. 643–648.
- LI, B.; SHEN, H.; SONG, X.; ZHAO, J. Robust exponential  $H_\infty$  control for uncertain time-varying delay systems with input saturation: a Markov jump model approach. **Applied Mathematics and Computation**, Elsevier, Strasbourg, France, v. 237, p. 190–202, 2014.
- LIU, K.; FRIDMAN, E.; HETEL, L. Networked control systems: A time-delay approach. In: **European Control Conference (ECC)**. Strasbourg, France: IEEE, 2014. p. 1434–1439.
- LIU, Z.; LÜ, S.; ZHONG, S.; YE, M. Stabilization analysis for discrete-time systems with time delay. **Applied Mathematics and Computation**, Elsevier, New York, USA, v. 216, n. 7, p. 2024–2035, 2010.
- LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: **Proceedings of the CACSD Conference**. Taipei, Taiwan: CACSD, 2004. Disponível em: <yalmip.github.io>.
- LUENBERGER, D. G.; YE, Y. **Penalty and Barrier Methods**. 3rd. ed. New York: Springer, 2008. (International series in operations research & management science 116).
- MAHMOUD, M. S. **Robust control and filtering for time-delay systems**. New York: Marcel Dekker, 2000.

\_\_\_\_\_. **Switched time-delay systems**. Berlin: Springer, 2010.

MAO, Z.; JIANG, B.; SHI, P.  $H_\infty$  fault detection filter design for networked control systems modelled by discrete Markovian jump systems. **IET Control Theory Applications**, v. 1, n. 5, p. 1336–1343, 2007.

MASCOLO, S. Congestion control in high-speed communication networks using the Smith principle. **Automatica**, Elsevier, v. 35, n. 12, p. 1921–1935, 1999.

MASOUD, Z. N.; NAYFEH, N. A.; NAYFEH, A. H. Sway reduction on container cranes using delayed feedback controller: Simulations and experiments. In: **ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference**. Chicago, Illinois, USA: ASME, 2003. v. 5, p. 2221–2229.

MENG, X.; LAM, J.; DU, B.; GAO, H. A delay-partitioning approach to the stability analysis of discrete-time systems. **Automatica**, Elsevier, v. 46, n. 3, p. 610–614, 2010.

MIRANDA, M. F.; LEITE, V. J. S. Convex analysis and synthesis for uncertain discrete-time systems with time-varying state delay. In: **IEEE American Control Conference (ACC)**. Seattle, WA, USA: IEEE, 2008. p. 4910–4915.

NICULESCU, S.-I.; KIM, P. S.; GU, K.; LEE, P. P.; LEVY, D. Stability crossing boundaries of delay systems modeling immune dynamics in leukemia. **Discrete and continuous dynamical systems Series B**, v. 13, n. 1, p. 129–156, 2010.

NIEMEYER, G.; SLOTINE, J. J. E. Designing force reflecting teleoperators with large time delays to appear as virtual tools. In: **Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation**. Albuquerque, NM, USA: IEEE, 1997. v. 3, p. 2212–2218.

NILSSON, J. **Real-Time Control Systems with Delays**. Tese (Doutorado) — Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Sweden, 1998.

ODORICO, E. K. **Reguladores Lineares Quadráticos Robustos para Sistemas Lineares com Atrasos nos Estados**. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2018.

QIU, L.; LI, S.; XU, B.; XU, G.  $H_\infty$  control of networked control systems based on Markov jump unified model. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 25, n. 15, p. 2770–2786, 2015.

RICHARD, J.-P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. **Automatica**, v. 39, n. 10, p. 1667–1694, 2003.

SAHEBSARA, M.; CHEN, T.; SHAH, S. L. Optimal filtering with random sensor delay, multiple packet dropout and uncertain observations. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 80, n. 2, p. 292–301, 2007.

SAYED, A. H. A framework for state-space estimation with uncertain models. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 46, n. 7, p. 998–1013, Jul. 2001.

SAYED, A. H.; NASCIMENTO, V. H. Design criteria for uncertain models with structured and unstructured uncertainties. In: GARULLI, A.; TESI, A.; VICINO, A. (Ed.). **Robustness in Identification and Control**. London: Springer-Verlag, 1999. v. 245, p. 159–173.



SEURET, A.; GOUAISBAUT, F.; FRIDMAN, E. et al. Stability of discrete-time systems with time-varying delays via a novel summation inequality. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 60, n. 10, p. 2740–2745, 2015.

SHI, P.; BOUKAS, E. K.; SHI, Y.; AGARWAL, R. K. Optimal guaranteed cost control of uncertain discrete time-delay systems. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Elsevier, v. 157, n. 2, p. 435–451, 2003.

SHI, Y.; YU, B. Output feedback stabilization of networked control systems with random delays modeled by Markov chains. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 54, n. 7, p. 1668–1674, 2009.

SIPAHI, R.; NICULESCU, S. i.; ABDALLAH, C. T.; MICHIELS, W.; GU, K. Stability and stabilization of systems with time delay. **IEEE Control Systems**, v. 31, n. 1, p. 38–65, 2011.

STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization Methods and Software**, v. 11–12, p. 625–653, 1999. Disponível em: <sedumi.ie.lehigh.edu/>.

SU, X.; SHI, P.; WU, L.; BASIN, M. V. et al. Reliable filtering with strict dissipativity for T-S fuzzy time-delay systems. **IEEE Transactions on Cybernetics**, v. 44, n. 12, p. 2470–2483, 2014.

SUN, J.; CHEN, J. A note on stability and stabilization of discrete-time systems with time-varying delay. In: **Proceedings of the 31st Chinese Control Conference**. Hefei, China: TCCT, 2012. p. 1430–1434.

SUN, J.; CHEN, J.; LIU, G. P.; REES, D. Stability and stabilization for discrete systems with time-varying delays based on the average dwell-time method. In: **IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics**. San Antonio, TX, USA: IEEE, 2009. p. 4786–4790.

TZES, A.; NIKOLAKOPOULOS, G.; KOUTROULIS, I. Development and experimental verification of a mobile client-centric networked controlled system. **European Journal of Control**, Elsevier, v. 11, n. 3, p. 229–241, 2005.

VIELLE, B.; CHAUVET, G. Delay equation analysis of human respiratory stability. **Mathematical Biosciences**, v. 152, n. 2, p. 105–122, 1998.

WANG, J.; LIU, S. The stability analysis of a general viral infection model with distributed delays and multi-staged infected progression. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 20, n. 1, p. 263–272, 2015.

WANG, Z.; YANG, F.; HO, D. W.; LIU, X. Robust  $H_\infty$  filtering for stochastic time-delay systems with missing measurements. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 54, n. 7, p. 2579–2587, 2006.

WU, M.; HE, Y.; SHE, J.-H. **Stability analysis and robust control of time-delay systems**. Berlin: Springer-Verlag, 2010.

XIA, Y.; LIU, G. P.; SHI, P.; REES, D.; THOMAS, E. J. C. New stability and stabilization conditions for systems with time-delay. **International Journal of Systems Science**, Taylor & Francis, v. 38, n. 1, p. 17–24, 2007.

XIAO, L.; HASSIBI, A.; HOW, J. P. Control with random communication delays via a discrete-time jump system approach. In: **Proceedings of the American Control Conference (ACC)**. Chicago, Illinois, USA: IEEE, 2000. v. 3, p. 2199–2204.

XU, S.; LAM, J.; ZHANG, B.; ZOU, Y. A new result on the delay-dependent stability of discrete systems with time-varying delays. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 24, n. 16, p. 2512–2521, 2014.

YI, S.; NELSON, P. W.; ULSOY, A. G. Eigenvalues and sensitivity analysis for a model of HIV-1 pathogenesis with an intracellular delay. In: **ASME Dynamic Systems and Control Conference**. Ann Arbor, Michigan, USA: ASME, 2008. p. 1549–1557.

YU, L.; CHU, J. An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems. **Automatica**, Elsevier, v. 35, n. 6, p. 1155–1159, 1999.

ZHANG, B.; ZHENG, W. X.; XU, S. Filtering of Markovian jump delay systems based on a new performance index. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers**, v. 60, n. 5, p. 1250–1263, 2013.

ZHANG, H.; SHI, Y. Delay-dependent stabilization of discrete-time systems with time-varying delay via switching technique. **ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, v. 134, n. 4, p. 044503–044503–5, 2012.

ZHANG, J.; LAM, J.; XIA, Y. Output feedback delay compensation control for networked control systems with random delays. **Information Sciences**, Elsevier, v. 265, p. 154–166, 2014.

ZHANG, L.; SHI, Y.; CHEN, T.; HUANG, B. A new method for stabilization of networked control systems with random delays. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 50, n. 8, p. 1177–1181, 2005.

# Apêndices



# Conceito e Simulação Computacional de Cadeias de Markov

As técnicas desenvolvidas neste trabalho para o controle e a filtragem de sistemas lineares com atraso variante no estado têm por base a transformação destes em sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos. Desta forma, é importante que se tenha uma compreensão do modelo subjacente à formulação deste último tipo de sistema: as cadeias de Markov de tempo discreto.

As cadeias de Markov constituem um importante tipo de processo estocástico, com propriedades que as tornam interessantes para a modelagem de diversos tipos de situações e fenômenos. Esta seção inicia-se, portanto, com uma breve revisão dos conceitos de variável aleatória e de processo estocástico. A seguir, apresentam-se a definição e algumas das características das cadeias de Markov de tempo discreto propriamente ditas.

No estudo desse tipo de modelo, um aspecto de particular interesse para este trabalho é sua simulação computacional. Logo, a seção é finalizada com a formulação do algoritmo utilizado para esse fim nos exemplos numéricos dos capítulos precedentes. As definições e os desenvolvimentos apresentados a seguir são baseados em Häggström (2002).

## A.1 Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos

Dado um espaço amostral  $\Omega$ , define-se a *variável aleatória*  $X \in \mathcal{S}$  como uma função  $X(\omega) : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$ , a qual associa um valor  $X(\omega)$  a cada evento  $\omega \in \Omega$ .

Se  $\mathcal{S}$  é um conjunto enumerável – por exemplo, como ocorre com frequência, se  $\mathcal{S}$  é um subconjunto dos números inteiros –, então  $X$  é denominada uma variável aleatória discreta.

Um *processo estocástico* com espaço de estados  $\mathcal{S}$  é definido como uma coleção  $\{X(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$  de variáveis aleatórias  $X(t)$  que assumem valores em  $\mathcal{S}$ . Frequentemente, os elementos  $t$  do conjunto de parâmetros  $T$  representam tempo, e  $X(t)$  é compreendido como o estado do processo no instante  $t$ . Nessa situação, e sendo  $T$  um conjunto enumerável, o processo estocástico é denominado de tempo discreto.

## A.2 Conceito de Cadeias de Markov de Tempo Discreto

As cadeias de Markov são um importante tipo de processo estocástico, que se caracteriza principalmente por uma propriedade de "ausência de memória", a qual o torna especialmente adequado para a modelagem de sistemas e fenômenos em muitas aplicações na engenharia e nas ciências (HÄGGSTRÖM, 2002).

Para estudar as características desse tipo de modelo, tomemos novamente um espaço amostral  $\Omega$ , ao qual associa-se uma medida de probabilidade  $Pr$ . Consideremos, então, o processo estocástico de tempo discreto  $\Theta = \{\theta(k)\}$ , sendo  $k$  um inteiro não-negativo, que assume valores no espaço de estados enumerável  $\mathcal{S}$ , isto é,  $\theta(k, \omega) \in \mathcal{S}$ , com  $\omega \in \Omega$ . Nesta situação, diz-se que o processo  $\Theta$  está no estado  $i$  no passo  $k$  se  $\theta(k) = i \in \mathcal{S}$ .

O processo  $\Theta$  é definido como uma *cadeia de Markov* se ele possui a propriedade de que, a cada passo  $k$ , o estado seguinte  $\theta(k+1)$  é condicionalmente independente dos estados passados  $\theta(0), \dots, \theta(k-1)$ , dado o estado presente  $\theta(k)$ , ou

$$Pr[\theta(k+1) = j \mid \theta(0), \dots, \theta(k)] = Pr[\theta(k+1) = j \mid \theta(k)], \quad \forall j \in \mathcal{S} \text{ e } k \geq 0.$$

Informalmente, pode-se afirmar que, para uma cadeia de Markov, basta o conhecimento do estado atual da cadeia para que se estabeleça a distribuição de probabilidades do estado seguinte, sendo irrelevantes os estados passados. Essa é a propriedade de "ausência de memória" referida anteriormente, com frequência denominada *propriedade de Markov*.

Adicionalmente, este texto concentra-se em cadeias com *homogeneidade temporal*, cujas probabilidades condicionais do estado seguinte dado o estado atual são independentes do passo  $k$ . Definem-se, então, as *probabilidades de transição* do estado  $i$  para o estado  $j$  como

$$p_{ij} := Pr[\theta(k+1) = j \mid \theta(k) = i], \quad \forall i, j \in \mathcal{S}.$$

É usual organizar as probabilidades de transição  $p_{ij}$  em uma *matriz de probabilidades de transição*  $\mathbb{P}$ , cujas linhas e colunas representam, respectivamente, o estado atual e o estado seguinte da cadeia.

As cadeias de Markov consideradas neste trabalho possuem um conjunto de estados finito do tipo  $\mathcal{S} = \{1, \dots, s\}$ , de modo que estão associadas a uma matriz de probabilidades de transição  $\mathbb{P} = [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{s,s}$ , para todo  $i, j \in \mathcal{S}$ . De acordo com as propriedades usuais de probabilidades, as entradas dessa matriz satisfazem a

$$\sum_{j=1}^s p_{ij} = 1 \text{ e } 0 \leq p_{ij} \leq 1. \quad (\text{A.1})$$

A distribuição de probabilidades da cadeia no passo  $k$  é representada por

$$\pi_k := [\pi_{1,k} \quad \pi_{2,k} \quad \dots \quad \pi_{s,k}], \quad (\text{A.2})$$

onde

$$\pi_{i,k} := Pr[\theta(k) = i]$$

denota a probabilidade de que a cadeia esteja no estado  $i$  no passo  $k$ . Pode-se mostrar (HÄGGSTRÖM, 2002, Th. 2.1) que, para uma cadeia de Markov com homogeneidade temporal, verifica-se

$$\pi_k = \pi_0 \mathbb{P}^k, \quad (\text{A.3})$$

sendo  $\pi_0$  a distribuição de probabilidades inicial da cadeia, assumida conhecida.

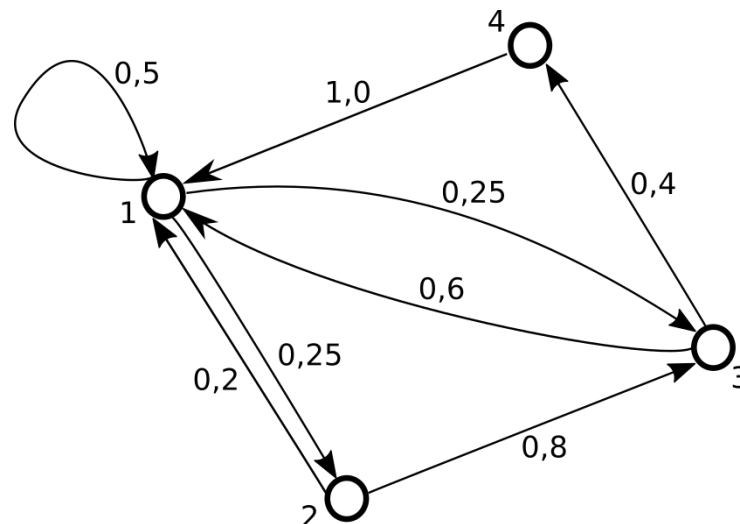
Frequentemente, uma cadeia de Markov de tempo discreto é representada graficamente como um grafo orientado, denominado *diagrama de transição*, no qual os nós correspondem aos estados possíveis, e, as arestas, às transições entre esses estados, com as probabilidades associadas. O Exemplo A.1 a seguir ilustra essa representação e os demais conceitos apresentados.

**Exemplo A.1** (Cadeia de Markov de tempo discreto). *Consideremos uma cadeia de Markov de tempo discreto com  $s = 4$ , ou, equivalentemente, conjunto de estados  $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4\}$ . Suponhamos, associada a este modelo, a seguinte matriz de probabilidades de transição:*

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,50 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0,20 & 0 & 0,80 & 0 \\ 0,60 & 0 & 0 & 0,40 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A Figura A.1 apresenta a representação do modelo deste exemplo como um diagrama de transição.

**Figura A.1** – Diagrama de transições para a cadeia de Markov de tempo discreto do exemplo.



### A.3 Simulação Computacional de Cadeias de Markov de Tempo Discreto

Os exemplos numéricos deste trabalho utilizam extensivamente simulações computacionais de cadeias de Markov de tempo discreto. Nesta seção, discute-se esse item de grande relevância em aplicações desse tipo de modelo. A abordagem seguida aqui foi desenvolvida por Häggström (2002, Cap. 3), e é apresentada a seguir.

A metodologia adotada permite a simulação de uma cadeia de Markov  $\Theta = (\theta(0), \theta(1), \dots)$  com espaço de estados  $\mathcal{S} = \{1, \dots, s\}$ , matriz de probabilidades de transição  $\mathbb{P} = [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{s,s}$ , para todo  $i, j \in \mathcal{S}$ , e distribuição de probabilidades inicial  $\pi_0$ , e requer, inicialmente, a construção de duas funções, denominadas *função de inicialização* e *função de atualização*.

A função de inicialização  $\Phi_0(\mathbf{v}) : [0,1] \rightarrow \mathcal{S}$  é utilizada para gerar o estado inicial da cadeia,  $\theta(0)$ , e deve obedecer a duas condições:

1. A função  $\Phi_0(\mathbf{v})$  deve ser constante por partes em seu domínio  $[0,1]$ ;
2. A soma dos comprimentos dos intervalos nos quais  $\Phi_0(\mathbf{v}) = i$  deve ser igual a  $\pi_{i,0}$ ,  $\forall i \in \mathcal{S}$ , ou, equivalentemente,

$$\int_0^1 \mathbf{1}_{\{\Phi_0(\mathbf{v})=i\}} d\mathbf{v} = \pi_{i,0},$$

onde  $\mathbf{1}_{\{\Phi_0(\mathbf{v})=i\}}$  é a função indicadora, definida por

$$\mathbf{1}_{\{\Phi_0(\mathbf{v})=i\}} = \begin{cases} 1, & \text{se } \Phi_0(\mathbf{v}) = i, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Após a obtenção do estado inicial  $\theta(0)$ , a função de atualização  $\Phi(i, \mathbf{v}) : \mathcal{S} \times [0,1] \rightarrow \mathcal{S}$  é empregada sucessivamente para a geração de cada estado  $\theta(k+1)$ , a partir do estado  $\theta(k)$ ; ela deve atender a duas condições, semelhantes àquelas estabelecidas para a função de inicialização:

1. Para cada  $i \in \mathcal{S}$ , a função  $\Phi(i, \mathbf{v})$  deve ser constante por partes para  $\mathbf{v} \in [0,1]$ ;
2. A soma dos comprimentos dos intervalos nos quais  $\Phi(i, \mathbf{v}) = j$  deve ser igual a  $p_{ij}$ ,  $\forall i, j \in \mathcal{S}$ , ou, equivalentemente,

$$\int_0^1 \mathbf{1}_{\{\Phi(i,\mathbf{v})=j\}} d\mathbf{v} = p_{ij}.$$

As propriedades de construção de  $\Phi_0(\mathbf{v})$  e  $\Phi(i, \mathbf{v})$ , permitem a geração da sequência de estados a partir de uma sequência independente e identicamente distribuída (i.i.d.)  $\{U(k)\}$  de números (pseudo-)aleatórios com distribuição uniforme no intervalo  $[0,1]$ . Assumindo-se que  $\{U(k)\}$  esteja disponível, os  $\theta(k)$  podem ser calculados como a seguir:

$$\begin{aligned} \theta(0) &= \Phi_0(U(0)) \\ \theta(k) &= \Phi(\theta(k-1), U(k)), \quad k > 0. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$



Resta, portanto, escolher funções de inicialização e de atualização que obedeçam às condições estabelecidas, o que também pode ser realizado segundo as sugestões de Häggström (2002, Cap. 3), como a seguir. Uma função de inicialização  $\Phi_0(\mathbf{v})$  válida pode ser construída da seguinte maneira:

$$\Phi_0(\mathbf{v}) = \begin{cases} 1, & \text{para } \mathbf{v} \in [0, \pi_{1,0}), \\ 2, & \text{para } \mathbf{v} \in [\pi_{1,0}, \pi_{1,0} + \pi_{2,0}), \\ \vdots & \\ i, & \text{para } \mathbf{v} \in \left[ \sum_{j=1}^{i-1} \pi_{j,0}, \sum_{j=1}^i \pi_{j,0} \right), \\ \vdots & \\ s, & \text{para } \mathbf{v} \in \left[ \sum_{j=1}^{s-1} \pi_{j,0}, 1 \right]. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Similarmente, a função de atualização  $\Phi(i, \mathbf{v})$  pode ser construída como

$$\Phi(i, \mathbf{v}) = \begin{cases} 1, & \text{para } \mathbf{v} \in [0, p_{i1}), \\ 2, & \text{para } \mathbf{v} \in [p_{i1}, p_{i1} + p_{i2}), \\ \vdots & \\ j, & \text{para } \mathbf{v} \in \left[ \sum_{l=1}^{j-1} p_{il}, \sum_{l=1}^j p_{il} \right), \\ \vdots & \\ s, & \text{para } \mathbf{v} \in \left[ \sum_{l=1}^{s-1} p_{il}, 1 \right]. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

O Algoritmo A.1 a seguir contém o algoritmo de simulação de cadeia de Markov de tempo discreto utilizado neste trabalho, implementado, segundo o desenvolvimento teórico apresentado nesta seção, na plataforma *MATLAB*<sup>®</sup>. No código apresentado, tem-se uma função que retorna o próximo estado ou estado inicial  $j$  da cadeia, com base no estado corrente  $i$  (um valor especial indica que se trata do cálculo do estado inicial) e na matriz de probabilidades de transição  $\mathbb{P}$  ou na distribuição de probabilidades inicial  $\pi_0$ .

A cada passo  $k$  da simulação, deve-se realizar uma chamada a *nextStateMarkovChain()*, com os parâmetros adequados. O número (pseudo-)aleatório  $U(k)$  é obtido através da função *rand()*, e as linhas 18 e 15 implementam, respectivamente, as funções  $\Phi_0(\mathbf{v})$  e  $\Phi(i, \mathbf{v})$ , conforme dadas nas equações (A.6) e (A.7). Para isso, faz-se uso das funções embutidas do *MATLAB*<sup>®</sup> *cumsum()*, a qual retorna um vetor com a soma acumulada dos elementos de um vetor recebido como parâmetro, e da função *find()*, para selecionar, no vetor recebido como parâmetro, a posição correspondente ao próximo estado.

---

**Algoritmo A.1** Código para simulação computacional de uma cadeia de Markov de tempo discreto.

---

```
1      % Funcao nextStateMarkovChain()
2      %   Calcula o proximo estado ou o estado inicial
3      %   de uma cadeia de Markov de tempo discreto.
4      % Retorno:
5      %   j – proximo estado da cadeia;
6      % Argumentos:
7      %   i – estado atual da cadeia (ou 0 para indicar
8      %   que deve ser calculado o estado inicial);
9      %   P – matriz de probabilidades de transicao;
10     %   pi0 – distribuicao de probabilidades inicial.
11     function [ j ] = nextStateMarkovChain( i, P, pi0 )
12
13     % Obtem o proximo estado da cadeia
14     if i > 0
15         j = find(cumsum(P(i, :)) > rand(), 1);
16     % Obtem o estado inicial da cadeia
17     else
18         j = find(cumsum(pi0) > rand(), 1);
19     end
20     end
```

---