

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

**Elizandra Karla Odorico**

**Reguladores Robustos Recursivos para Sistemas  
Lineares sujeitos a Saltos Markovianos com  
Atraso no Estado**

São Carlos  
2023



**Elizandra Karla Odorico**

**Reguladores Robustos Recursivos para Sistemas  
Lineares sujeitos a Saltos Markovianos com  
Atraso no Estado**

Tese de doutorado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutora em Ciências, Programa de Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos

Orientador: Marco Henrique Terra

São Carlos

2023

Trata-se da versão corrigida da tese. A versão original se encontra disponível na EESC/USP que aloja o Programa de Pós-Graduação de Engenharia Elétrica.

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da  
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

025r Odorico, Elizandra Karla  
Reguladores Robustos Recursivos para Sistemas  
Lineares sujeitos a Saltos Markovianos com Atraso no  
Estado / Elizandra Karla Odorico; orientador Marco  
Henrique Terra. São Carlos, 2023.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica e Área de Concentração em Sistemas  
Dinâmicos -- Escola de Engenharia de São Carlos da  
Universidade de São Paulo, 2023.

1. Sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos.  
2. Sistemas com atraso no estado. 3. Reguladores  
robustos recursivos. 4. Realimentação de estado. 5.  
Equação de Riccati. I. Título.

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Licenciada **ELIZANDRA KARLA ODORICO**.

Título da tese: "Reguladores robustos recursivos para sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos com atraso no estado".

Data da defesa: 06/06/2023.

### Comissão Julgadora

### Resultado

Prof. Titular **Marco Henrique Terra**  
**(Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC-USP)

Aprovada

Prof. Dr. **Amit Bhaya**  
(Universidade Federal do Rio de Janeiro/UFRJ)

Aprovada

Profa. Dra. **Grace Silva Deaecto**  
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Aprovada

Prof. Dr. **João Bosco Ribeiro do Val**  
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Aprovada

Prof. Dr. **Pedro Luis Dias Peres**  
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Aprovada

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica:  
Prof. Associado **Marcelo Andrade da Costa Vieira**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:  
Prof. Titular **Carlos De Marqui Junior**



*Para meus pais, Cidinha e Carlos.  
Para meus irmãos, Lalinha e Binho.*





---

# Agradecimentos

Eu agradeço à Deus pelos sonhos Dele serem maiores do que os meus.

Agradeço de todo o meu coração a minha amada família, Cidinha, Carlos, Lalinha e Binho por tanto amor, carinho, incentivo e apoio incondicional.

Agradeço ao meu noivo, Mauricio, o melhor presente da pós-graduação.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Marco Terra, pela oportunidade de realizar este projeto de pesquisa sob sua supervisão, pelas valiosas ideias e direcionamentos.

Agradeço todas as amizades que o Laboratório de Sistemas Inteligentes (LASI) me proporcionou. Obrigada por todo o apoio, troca de conhecimentos, companheirismo e por todos os momentos divertidos como as comemorações de aniversários, os amigos secretos e os cafezinhos.

Agradeço também à Universidade de São Paulo, à Escola de Engenharia de São Carlos e ao LASI pela excelente infraestrutura que possibilitou este projeto de pesquisa, além das oportunidades de expor os resultados dessa pesquisa em diversas conferências nacionais e internacionais.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro durante toda a duração deste projeto.



---

# Resumo

Odorico, Elizandra K.. **Reguladores Robustos Recursivos para Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos com Atraso no Estado**. 166 p. Tese de doutorado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2023.

A modelagem e regulação de sistemas dinâmicos que sofrem mudanças bruscas e dependem de dados passados são tarefas desafiantes e fundamentais em aplicações de diferentes domínios da engenharia. A teoria de controle ótimo tem sido amplamente utilizada para desenvolver condições eficientes tanto para a análise de estabilidade quanto para o projeto de reguladores. Desta forma, o objetivo principal desta tese é desenvolver estratégias robustas de regulação para sistemas lineares Markovianos sujeitos a atraso no estado e incertezas paramétricas. O atraso é variante no tempo e pertence a um intervalo conhecido e a taxa máxima de variação entre dois consecutivos atrasos é considerada. Além disso, dois tipos de incertezas são assumidos: limitadas em norma e politópicas. A cadeia de Markov pode ser completamente conhecida ou incerta. Para cada tipo de incerteza e cenário da cadeia, problemas de otimização min-max são formulados cujas soluções fornecem leis de controle de realimentação de estado e dependentes do modo. Uma característica do método proposto, ao contrário da maioria das abordagens presentes na literatura, é a sua recursividade e condições de estabilidade que são alcançáveis através de equação algébrica recursiva de Riccati. O desempenho dos reguladores propostos é avaliado por meio de exemplos numéricos, sendo também comparados com abordagens existentes na literatura relacionada.

**Palavras-chave:** Sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos, sistemas com atraso no estado, reguladores robustos recursivos, realimentação de estado, equação de Riccati.



---

# Abstract

Odorico, Elizandra K.. **Robust Recursive Regulation for Markovian Jump Linear Systems with State Delays**. 166 p. Ph.D. Thesis – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, 2023.

Modeling and regulation of dynamic systems that undergo abrupt changes and depend on past data are challenging and fundamental tasks in applications of different engineering domains. Optimal control theory has been widely used to develop efficient conditions for both stability analysis and regulator design. Thus, the main objective of this thesis is to develop robust regulation strategies for linear Markovian systems subject to state delay and parametric uncertainties. The delay is time-varying and belongs to a known interval and the maximum rate of change between two consecutive delays is considered. Moreover, two types of uncertainties are assumed: norm bounded and polytopic. The Markov chain can be completely known or uncertain. For each type of uncertainty and chain scenario, min-max optimization problems are formulated whose solutions provide state feedback and mode-dependent control laws. A feature of the proposed method, unlike most approaches present in the literature, is its recursiveness and stability conditions that are achievable through recursive algebraic Riccati equation. The performance of the proposed regulators is evaluated by means of numerical examples, being also compared with existing approaches in the specialized literature.

**Keywords:** Markovian jump linear systems, systems with delayed state, robust recursive regulation, state-feedback, Riccati equation.



---

## Lista de ilustrações

Figura 2.1 – Comportamento das funções $f(x_k, y_k)$ , $q(\mu_k, x_k, y_k)$ e $P(x_k, y_k)$ . . . . .	36
Figura 2.2 – Solução obtida para o Exemplo 2.2. . . . .	44
Figura 2.3 – Solução obtida para o Exemplo 2.3. . . . .	50
Figura 3.1 – Resultados obtidos pelo RRN quando $d_k \in [1, 15]$ . . . . .	62
Figura 3.2 – Comutação dos modos de operação do SLSM quando $d_k \in [1, 15]$ . . . . .	62
Figura 3.3 – Efeito do parâmetro de penalidade $\mu$ nas médias das normas dos estados do SLSMA quando $d_k \in [1, 2]$ . . . . .	63
Figura 4.1 – Resultados obtidos pelo RRR quando $d_k \in [1, 6]$ . . . . .	79
Figura 4.2 – Comutação dos modos de operação do SLSM incerto com o atraso $d_k \in [1, 6]$ . . . . .	79
Figura 4.3 – Efeito do parâmetro de penalidade $\mu$ nos valores médios das normas dos estados do SLSMA incerto quando $d_k \in [1, 2]$ . . . . .	80
Figura 5.1 – Comparação das médias das normas de estado e dos planos de fase de malha-fechada obtidos pelos reguladores quando $d_k \in [0, 15]$ . . . . .	95
Figura 5.2 – Comutação dos modos de operação do SLSMAP quando $d_k \in [0, 15]$ . . . . .	96
Figura 5.3 – Efeito do parâmetro de penalidade $\mu$ nos valores médios das normas dos estados do SLSMAP quando $d_k \in [0, 1]$ . . . . .	96
Figura 6.1 – Resultados obtidos pelo RRN-MTI quando $d_{max} \in [1, 10]$ . . . . .	113
Figura 6.2 – Comutação dos modos de operação do SLSMA quando $d_k \in [1, 10]$ . . . . .	114
Figura 6.3 – Resultados obtidos pelo RRN-MTI quando $d_k \in [1, 10]$ . . . . .	114
Figura 6.4 – Efeito do parâmetro de penalidade $\mu$ nos valores médios das normas dos estados do SLSMA quando $d_k \in [1, 2]$ . . . . .	115
Figura 6.5 – Resultados obtidos pelo RRR-MTI quando $d_{max} = 7$ . . . . .	117
Figura 6.6 – Comutação dos modos de operação do SLSM quando $d_k \in [1, 7]$ . . . . .	117
Figura 7.1 – Comparação dos valores médios das normas de estados regulados quando $d_k \in [1, 10]$ . . . . .	136
Figura 7.2 – Comutação dos modos de operação do SLSM quando $d_k \in [1, 10]$ . . . . .	136

Figura 7.3 – Efeito do parâmetro de penalidade $\mu$ nos valores médios das normas dos estados do SLSMA quando $d_k \in [1, 2]$ . . . . .	137
Figura 7.4 – Resultados obtidos pelo RRR-MTIP quando $d_{max} = 10$ . . . . .	139
Figura 7.5 – Comutação dos modos de operação do SLSM quando $d_k \in [1, 10]$ . . . . .	139
Figura C.1 – Comparação dos valores médios das normas dos estados regulados quando $d = 1$ . . . . .	162
Figura C.2 – Comparação dos valores médios da normas dos estados regulados quando $d = 10$ . . . . .	162



---

## Lista de tabelas

Tabela 2.1 – Solução para o Exemplo 2.1 . . . . .	35
Tabela 2.2 – Resultados obtidos para o Exemplo 2.2. . . . .	44
Tabela 2.3 – Resultados obtidos para o Exemplo 2.3. . . . .	49
Tabela 3.1 – Desempenho dos controladores sobre 5000 experimentos para $d_k \in [1, 10]$ . . . . .	61
Tabela 4.1 – Matrizes de probabilidade de transição $\bar{\mathbb{P}}$ definida de acordo com o $d_{max}$ e $\Delta d = d_{max}$ . . . . .	77
Tabela 4.2 – Desempenho dos controladores sobre 5000 experimentos para $d_{max} = 2$ . . . . .	78
Tabela 5.1 – Desempenho dos controladores sobre 5000 experimentos para $d_k \in [0, 11]$ . . . . .	95
Tabela 6.1 – Matrizes de probabilidades de transição. . . . .	112
Tabela 6.2 – Desempenho dos controladores sobre 5000 experimentos para $d_{max} = 7$ . . . . .	113
Tabela 6.3 – Desempenho dos controladores sobre 5000 experimentos para $d_{max} = 3$ . . . . .	116
Tabela 7.1 – Desempenho dos controladores sobre 5000 experimentos para $d_{max} = 2$ . . . . .	135
Tabela 7.2 – Desempenho dos controladores sobre 5000 experimentos para $d_{max} = 4$ . . . . .	138



---

## Lista de abreviaturas e siglas

SLSM	Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos
SLSMA	Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos e Atraso
SLSMAP	Sistemas Lineares sujeitos a Saltos Markovianos, Atraso e Incertezas Politópicas
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i>
MTI	Matriz de Transição Incerta
MTIP	Matriz de Transição Incerta Politópica
RRN	Regulador Recursivo Nominal
RRR	Regulador Recursivo Robusto
RRRP	Regulador Recursivo Robusto Politópico
RRN-MTI	Regulador Recursivo Nominal com Matriz de Transição Incerta
RRR-MTI	Regulador Recursivo Robusto com Matriz de Transição Incerta
RRN-MTIP	Regulador Recursivo Nominal com Matriz de Transição Incerta Politópica
RRR-MTIP	Regulador Recursivo Robusto com Matriz de Transição Incerta Politópica



---

## Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	Conjunto dos vetores reais $n$ -dimensionais
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto das matrizes reais de ordem $n \times m$
$I_n$	Matriz identidade de ordem $n \times n$
$\mathbf{1}_N$	Vetor coluna de dimensões $N \times 1$ composta por 1
$A^T$	Transposta da matriz $A$
$A^{-1}$	Inversa da matriz $A$
$A^{\frac{1}{2}}$	Fator de raiz quadrada da matriz $A$
$A^\dagger$	Pseudo-inversa da matriz $A$
$A \succ 0$	$A$ é uma matriz definida positiva
$A \succeq 0$	$A$ é uma matriz semi-definida positiva
$\mathbf{col}(\bullet)$	Operador que empilha os operandos em uma matriz ou vetor como um bloco-coluna
$\mathbf{diag}(\bullet)$	Operador que representa uma matriz bloco-diagonal com os operandos sendo os elementos diagonais
$\otimes$	Produto de Kronecker
$A \oplus B$	$\mathbf{diag}(A, B)$
$ a $	Valor absoluto do escalar $a$

$\ x\ $	Norma Euclidiana de $x$
$\ x\ _P^2$	Norma ponderada de $x$ definida por $x^T P x$
$Y^T X(\bullet)$	Expressão simplificada para $Y^T X Y$
$\mathbb{E}(\cdot)$	Esperança matemática
$Pr$	Probabilidade
$\mathbb{H}^{n \times n}$	o espaço linear composto por todas as $s$ -sequências de matrizes $A = (A_1, \dots, A_s)$ , $A_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , $i \in \{1, \dots, s\}$
$\mathbb{H}_+^n$	o conjunto formado por todas as $s$ -sequências de matrizes $A = (A_1, \dots, A_s)$ , $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tal que $A_i = A_i^T \succ 0$ , $i \in \{1, \dots, s\}$
$A \oplus B$	<b>diag</b> ( $A, B$ )
$A \leftarrow B$	$A$ recebe $B$
$A \rightarrow B$	$A$ converge para $B$
$:=$	Operador de definição

---

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>25</b>
1.1	Regulador Robusto	27
1.2	Regulador para SLSMA com MT conhecida	28
1.3	Regulador para SLSMA com MTI	30
1.4	Lista de Publicações	31
1.5	Estrutura da Tese	32
<b>2</b>	<b>Conceitos Auxiliares</b>	<b>33</b>
2.1	Método de Funções Penalidade	33
2.2	Problemas de Mínimos-Quadrados	37
2.3	Mínimos-Quadrados não Regularizados	37
2.3.1	Mínimos-Quadrados Ponderados	38
2.3.2	Mínimos-Quadrados Regularizados	39
2.3.3	Mínimos-Quadrados Regularizados com Incertezas Limitadas em Norma	39
2.3.4	Mínimos-Quadrados Regularizados Restritos com Incertezas Limitadas em Norma	41
2.3.5	Mínimos-Quadrados Regularizados Restritos com Incertezas Politépicas	45
<b>3</b>	<b>Controle de Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos e Atraso</b>	<b>51</b>
3.1	Formulação do problema	51
3.1.1	Modelo do Sistema	51
3.1.2	Descrição do Modelo Aumentado Nominal	53
3.1.3	Problema de Controle Nominal	53
3.2	Regulador Recursivo Nominal	54
3.3	Condições para Estabilidade e Convergência	59
3.4	Exemplo Ilustrativo	60
<b>4</b>	<b>Controle de SLSMA com Incertezas Limitadas em Norma</b>	<b>65</b>
4.1	Formulação do problema	65

4.1.1	Modelo do Sistema . . . . .	65
4.1.2	Descrição do Modelo Aumentado com Incertezas Limitadas em Norma	67
4.1.3	Problema de Controle Robusto . . . . .	68
4.2	Regulador Robusto Recursivo . . . . .	68
4.3	Condições para Estabilidade e Convergência . . . . .	75
4.4	Exemplo Ilustrativo . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Controle de SLSMA com Incertezas Politópicas . . . . .</b>	<b>81</b>
5.1	Formulação do problema . . . . .	81
5.1.1	Modelo do Sistema . . . . .	81
5.1.2	Descrição do Modelo Aumentado com Incertezas Politópicas . . . . .	83
5.1.3	Problema de Controle Robusto Politópico . . . . .	84
5.2	Regulador Robusto Recursivo Politópico . . . . .	85
5.3	Condições para a Estabilidade e Convergência . . . . .	92
5.4	Exemplo Ilustrativo . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Controle de SLSMA com MTI Limitada em Norma . . . . .</b>	<b>97</b>
6.1	Formulação do problema . . . . .	97
6.1.1	Modelo do Sistema . . . . .	97
6.1.2	Problema de Controle Robusto com MTI . . . . .	99
6.2	Regulador Recursivo Robusto com MTI Limitada em Norma . . . . .	100
6.3	Condições para a Estabilidade e Convergência . . . . .	110
6.4	Exemplos Ilustrativos . . . . .	111
<b>7</b>	<b>Controle de SLSMAP com MTI Politópica . . . . .</b>	<b>119</b>
7.1	Formulação do problema . . . . .	119
7.1.1	Modelo do Sistema . . . . .	119
7.1.2	Problema de Controle Robusto com MTIP . . . . .	121
7.2	Regulador Recursivo Robusto com MTIP . . . . .	122
7.3	Condições para Estabilidade e Convergência . . . . .	133
7.4	Exemplos Ilustrativos . . . . .	134
<b>8</b>	<b>Conclusões . . . . .</b>	<b>141</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>145</b>
	<b>APÊNDICE A Álgebra Matricial . . . . .</b>	<b>153</b>
A.1	Matrizes Semidefinidas e Definidas Positivas . . . . .	153
A.2	Lemas de Inversão de Matrizes . . . . .	154
A.3	Complemento de Schur e Matrizes Particionadas . . . . .	154
A.4	Produto de Kronecker . . . . .	155
	<b>APÊNDICE B Análise do parâmetro <math>\hat{\lambda}</math> para o RRR com MTI Limitada em Norma . . . . .</b>	<b>157</b>
	<b>APÊNDICE C Análise do RRR para Sistemas com Atraso Constante no Estado e Incertezas Politópicas . . . . .</b>	<b>161</b>



APÊNDICE D Equação de Riccati . . . . .	165
-----------------------------------------	-----



---

# Introdução

Os sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos (SLSM) representam um caso particular de um sistema chaveado, cujos parâmetros da planta alteram-se de forma abrupta em momentos aleatórios. Estas alterações podem ser motivadas por diversos fatores, como perturbações bruscas no ambiente, alterações nas interconexões de subsistemas, falha de componentes ou reparos (COSTA et al., 2005).

Um SLSM é composto por vários subsistemas determinísticos, chamados de modos de operação. Os momentos em que ocorrem as transições entre os modos, ou seja, as alterações repentinas nos parâmetros do sistema, são denominados de saltos. A alternância entre esses modos é governada por uma variável aleatória que assume valores de acordo com uma cadeia de Markov de tempo discreto associada a uma matriz de transição (MT). Assim, a cada momento existe uma probabilidade do sistema saltar de um modo para outro, dependendo apenas do modo naquele instante.

Uma vez que as alterações repentinas entre os modos de operação ocorrem de acordo com as probabilidades de transição, o estudo para obter modelos matemáticos que representem as matrizes de transição tem se destacado ao longo dos anos. Na maioria dos trabalhos, é usual considerar a priori o conhecimento completo das probabilidades de transição da cadeia de Markov, como em Kang et al. (2013), Luan et al. (2014), Yang et al. (2014), Cerri e Terra (2017), que é um processo dispendioso na prática. Desta forma, muitos pesquisadores incorporaram a imprecisão no modelo, assumindo uma matriz de transição incerta (MTI). Dentre as diferentes formas de incorporar a incerteza nas probabilidades de transição, na literatura encontram-se as intervalares (Chitraganti et al. (2013), Chitraganti et al. (2016)), as limitadas em normas (Wan et al. (2015), Bortolin e Terra (2015)), as pertencentes a um domínio politópico (Costa et al. (1997), Lun et al. (2016), Bueno et al. (2022a)) ou probabilidades parcialmente conhecidas (Xie et al. (2012), Bueno et al. (2022c)). No entanto, este último modelo pode, equivalentemente, ser descrito por uma combinação convexa de vértices, conforme discutido em Gonçalves et al. (2011).

Desta forma, o SLSM tem atraído a atenção de muitos pesquisadores por causa das

extensas aplicações, como na mudança do cenário econômico (BLAIR; SWORDER, 1975), no controle de manipuladores robóticos (SIQUEIRA et al., 2011), em sistemas de controle em rede (ZHANG et al., 2013), na alteração na marcha de veículos autônomos (MARCOS; TERRA, 2020), nas falhas de comunicação entre robôs móveis (NAKAI et al., 2018), isto é, quando os sistemas estão sujeitos a alterações repentinas de comportamento.

Portanto, esta tese se concentra principalmente na classe de sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos e atraso (SLSMA) de tempo discreto. O interesse reside no fato de que o atraso de tempo é um fenômeno frequentemente encontrado em manipuladores robóticos (KANG et al., 2013), problemas de atraso na transferência de informações e risco de perda de dados (ZHANG et al., 2013), em sistemas de veículos aéreos não tripulados (LI et al., 2016) e em sistemas de controle em rede (CHAE et al., 2010), entre outros.

Geralmente, o tempo de atraso pode estar presente no estado (Hetel et al. (2008), Fridman (2014)), na entrada de controle (Ignaciuk (2015), Keqi e Zhi (2015)) ou na saída de um sistema dinâmico (Sahebsara et al. (2007), Han e Zhang (2009)), entre outros. O tempo de atraso pode ser considerado conhecido a todo instante de tempo (Sun et al. (2006), Chen e Zheng (2007)) ou desconhecido (SHI et al., 2003). Além disso, o atraso pode ser assumido invariante no tempo (Fridman (2014), Wang et al. (2006)) ou variante no tempo, porém limitado em um intervalo com os extremos conhecidos (Hetel et al. (2008), Baleghi e Shafiei (2019a)). No entanto, a existência do tempo de atraso em um modelo pode degradar o desempenho e aumentar a dificuldade da análise de estabilidade e do projeto de controladores (FRIDMAN, 2014).

A análise de estabilidade e síntese de controladores para sistemas com atraso podem ser realizadas de maneira independente do atraso, incorporando-o em um sistema aumentado (Aström e Wittenmark (1984), Niculescu (2001), Hetel et al. (2008)). Além disso, as técnicas mais usadas para o estudo de sistemas com atraso são as baseadas em funções de Lyapunov-Krasoviskii ou em funções de Razumikhin (NICULESCU, 2001). Estas abordagens têm sido utilizadas para obter problemas de otimização convexa em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) que podem ser resolvidas por algoritmos numéricos especializados.

Desde a década de 1990, a abordagem de sistema aumentado tem sido empregada para representar os sistemas com atraso de tempo (ASTRÖM; WITTENMARK, 1984), facilitando a análise de estabilidade e o projeto de controladores para tais sistemas. Posteriormente, Hetel et al. (2008) reescreveram os sistemas com atraso variante no tempo por meio de um sistema chaveado aumentado, sendo o chaveamento governado pelo valor do atraso. Recentemente, muitos pesquisadores como Chae et al. (2010), Qiu et al. (2015) e Bortolin et al. (2018a) modelaram a variação aleatória do atraso como uma cadeia de Markov na qual, cada modo corresponde a um tempo de atraso. Em particular, Qiu et al. (2015) investigaram a classe de SLSMA através de um SLSM governado por duas cadeias de Markov mutuamente independentes, sendo uma cadeia para governar a dinâmica do

sistema e a outra, a variação do tempo de atraso.

Adicionalmente, incertezas paramétricas é uma característica inerente ao modelo utilizado para descrever os processos físicos reais. Essas incertezas podem existir na própria planta ou na representação do modelo, sendo causadas por vários fatores, como dinâmicas negligenciadas da planta, não-linearidades, parâmetros imprecisos ou desconhecidos e podem, como o tempo de atraso, degradar o desempenho do sistema.

Portanto, o objetivo desta tese consiste na regulação de estados para a classe de sistemas Markovianos incertos com tempo de atraso no estado. Além disso, duas suposições são consideradas sobre a cadeia de Markov: quando ela é completamente conhecida e quando for considerada incerta. A seção a seguir apresenta uma breve revisão da literatura para esses problemas de regulação.

## 1.1 Regulador Robusto

O controle ótimo consiste em operar um sistema dinâmico a um custo mínimo. Uma ampla gama de aplicações emprega essa abordagem de controle, como robótica, aeroespacial, finanças, comunicação e química, entre outras. Devido à sua importância, o controle ótimo atraiu muita atenção nas últimas décadas, especialmente após o início dos anos 1960, quando Rudolf Emil Kalman resolveu o problema do regulador linear quadrático (RLQ) ótimo sem saltos em Kalman (1960).

O RLQ padrão é um dos principais resultados da teoria de sistemas de controle, devido à sua recursividade e condições de existência que são facilmente alcançáveis através da equação algébrica de Riccati. Como uma extensão do RLQ, os trabalhos de Blair e Sworder (1975), Chizeck et al. (1986) e Costa et al. (2005) tratam da classe de sistemas Markovianos de tempo discreto, cuja a solução é obtida por um conjunto de equações algébricas de Riccati acopladas. Recentemente, Cerri e Terra (2017) apresentam um regulador recursivo para SLSM com incertezas limitadas em norma, baseado na combinação do problema de mínimos-quadrados e o método de função penalidade (LUENBERGER; YE, 2008). No entanto, Bueno et al. (2022a) estendeu essa solução para abordar incertezas pertencentes a um domínio politópico. No entanto, essas abordagens consideram que as matrizes de probabilidades de transição são completamente conhecidas, o que na prática, é difícil obter o valor preciso de todos os elementos da MT.

Cabe ressaltar que o sinal de transição caracterizado por uma cadeia de Markov é um fator importante dos SLSMs. Desta forma, o desempenho do sistema é influenciado diretamente pelas probabilidades de transição. Assim, muitos pesquisadores têm investigado o problema de controle de SLSMs com MTs gerais, especialmente, quando as probabilidades de transição são parcialmente conhecidas ou desconhecidas, veja, por exemplo, Zhang e Boukas (2009) e Sun et al. (2020). Em particular, Bortolin e Terra (2016) fornecem um regulador robusto em uma estrutura matricial simétrica para SLSM com todas as matri-

zes paramétricas e probabilidades de transição sujeitas a incertezas limitadas em norma. A versão politópica dessa abordagem foi proposta em Bueno et al. (2022b).

Por outro lado, a otimalidade do regulador padrão também tem sido investigada na presença de atrasos. O trabalho pioneiro de Uchida et al. (1988) apresenta uma solução para sistemas lineares de tempo contínuo com atraso constante no estado. Para tempo discreto, Kapila e Haddad (1998) e Song e Kim (1998) também propõem abordagens baseadas em equações de Riccati. Mais recentemente, Fridman (2014) aplica a abordagem aumentada em um sistema com atraso constante e propõe uma solução para o problema de RLQ. Bortolin et al. (2018b) estendeu o resultado de Fridman (2014) para lidar com incertezas limitadas em normas em todas as matrizes paramétricas.

Inúmeros trabalhos têm proposto maneiras para modelar as incertezas paramétricas e projetar reguladores para SLSMA. Uma vez que as incertezas podem degradar consideravelmente o desempenho dos controladores. Nesta tese concentramos, mais especificamente, em dois modelos: limitadas em normas e pertencentes a um domínio politopo. Cabe ressaltar que as incertezas presentes nas matrizes paramétricas não são as únicas que consideramos. Assume-se também a presença de incertezas nas matrizes de probabilidades de transição.

## 1.2 Regulador para SLSMA com MT conhecida

Para a classe de sistemas Markovianos com atraso no estado, algumas das abordagens encontradas na literatura são controle  $H_\infty$ , controle de custo garantido e condições de estabilização.

O objetivo do problema de controle  $H_\infty$  consiste em encontrar uma lei de controle de realimentação de estado que estabiliza o sistema, bem como atenuar a sua resposta para o pior caso de perturbação do processo. ( ver, por exemplo, para a classe de SLSMA nominal (CAO; LAM, 1999), com incertezas limitadas em normas (CHEN et al., 2004) e incertezas politópicas (BOUKAS; LIU, 2000) e as referências neles contidas). Especialmente, o trabalho de Chen et al. (2004) que apresentam condições dependentes do atraso usando controladores de realimentação de estado para a estabilização robusta e o controle  $H_\infty$ , ambos estabelecidos em termos de LMIs. No entanto, uma desvantagem dessa abordagem é garantir que o parâmetro de desempenho  $H_\infty$  satisfaça as condições existentes do controlador em situações práticas.

Por outro lado, a abordagem de custo garantido projeta uma lei de controle tal que o sistema de malha fechada é estável para quaisquer incertezas admissíveis e a função de custo tem um limite superior garantido. Alguns resultados são apresentados em Boukas e Liu (2002) e Li et al. (2013) para SLSMA de tempo discreto com incertezas limitadas em norma e atraso variante no tempo, e em Luo et al. (2010) e Liu et al. (2022b) para tempo contínuo. Geralmente, esta técnica depende da seleção de parâmetros de escalonamento

para garantir uma solução a cada intervalo de tempo, o que em muitas vezes, não é algo trivial realizar essa seleção.

A condição de estabilização é outro resultado efetivo e tem sido amplamente desenvolvida a partir de um problema de otimização de desigualdade matricial linear. Particularmente, em Chen e Zheng (2007) uma lei de controle de realimentação dos estados atrasados é fornecida para SLSMA com incertezas limitadas em norma. Zhang et al. (2008) propõem condições de estabilidade e estabilização dependentes do intervalo de atraso para os SLSMAs com os parâmetros completamente conhecidos. Por outro lado, baseado na técnica de programação linear, Liu et al. (2022a) investigaram o problema da estabilidade estocástica, através de um funcional de Lyapunov-Krasovskii, e a estabilização de SLSMA conhecidos, por meio de controlador de realimentação de saída.

Adicionalmente, a análise de estabilidade e o projeto de controladores de sistemas chaveados com atraso também têm recebido muita atenção na literatura devido às suas amplas aplicações. Sun et al. (2006) apresentaram um funcional de Lyapunov comutado para estabelecer condições de estabilização dependentes de atraso, para o sistema chaveado nominal e incerto com atraso variante no tempo, sendo as incertezas modeladas em limitantes por norma. Por outro lado, para incertezas paramétricas afins, (BALEGHI; SHAFIEI, 2019a) forneceram condições dependentes dos limites superiores do atraso e dos parâmetros incertos, baseadas em um funcional de Lyapunov-Krasovskii. Estas condições foram estendidas para tratar sistemas chaveados não-lineares em Baleghi e Shafiei (2019b), as quais também dependem do limite máximo do termo não-linear.

Motivado pelas discussões acima, esta tese propõe reguladores robustos recursivos (RRRs) para sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos de tempo discreto incertos com atraso variante no tempo. Assumimos que todas as matrizes paramétricas do sistema estão sujeitas a dois tipos de incertezas: limitadas em norma e politópicas. Além disso, consideramos a taxa de variação do atraso, conforme assumido em Souza et al. (2019).

Adotamos a abordagem aumentada, logo o SLSMA original é reescrito como um sistema linear sujeito a saltos Markovianos aumentado sem atraso, governado por duas cadeias de Markov mutuamente independentes, cujas probabilidades de transição são consideradas completamente conhecidas. Baseado em Cerri e Terra (2017) e Bueno et al. (2022a), problemas de controladores de mínimos-quadrados regularizados incertos com restrição são formulados. O método de função penalidade (LUENBERGER; YE, 2008) é aplicado para transformá-los em problemas irrestritos. As soluções desses problemas fornecem os reguladores robustos propostos, que são apresentados em uma estrutura matricial simétrica e em expressões algébricas que se assemelham ao Regulador Linear Quadrático clássico. Diferente das abordagens encontradas na literatura, não são necessários pacotes numéricos para obter as expressões dos controladores propostos para sistemas Markovianos com atraso no estado.

Uma versão do regulador robusto recursivo para sistemas sem saltos Markovianos com

atraso invariante no tempo e incertezas politópicas foi apresentada no artigo de número 1, listado na Seção 1.4. A versão do regulador robusto recursivo para SLSMA com incertezas limitadas em norma foi apresentada no artigo 2 da lista de publicações.

### 1.3 Regulador para SLSMA com MTI

Como já foi mencionado, o conhecimento completo das matrizes de probabilidades de transição em SLSMA é dispendiosa (ZHANG et al., 2008), ou mesmo proibitiva em certos casos. Portanto, investigar processos sujeitos a saltos Markovianos gerais com probabilidades de transição incertas, com a perspectiva de controle, é significativo e desafiador. Especialmente quando os atrasos são variantes no tempo.

Uma das principais aplicações de modelos Markovianos é em sistemas de controle em rede com atraso variante no tempo (QIU et al., 2015). Efeitos induzidos pela rede, como interrupções aleatórias de pacotes ou atrasos de tempo, que são introduzidos pelos links de comunicação não confiáveis entre sensores remotos, atuadores e controladores, são exemplos representativos. Podem ser modelados por uma cadeia de Markov ou múltiplas cadeias de Markov, veja, por exemplo, Xiao et al. (2000), Zhang et al. (2005), Luan et al. (2011), e as referências neles contidas. No entanto, esses resultados são investigados para as cadeias de Markov governadas com conhecimento completo das probabilidades de transição, que é um processo caro em situações práticas (ZHANG et al., 2008).

Desta forma, investigar reguladores para sistemas Markovianos com probabilidades de transição incertas e atraso no estado é significativo e desafiador. Particularmente, Dzung e Hien (2017) propuseram um controlador de realimentação de estado dependente do modo para SLSMA nominal. Uma condição de estabilização estocástica de sistemas Markovianos nominais com atraso variante no tempo e dois processos de Markov homogêneos mutuamente não correlacionados é fornecido por Li et al. (2021). Para SLSMA com incertezas limitadas em norma, Qiu et al. (2015) fornece uma lei de controle de realimentação de estado atrasado dependente de duas cadeias de Markov mutuamente independentes. Todas essas abordagens são baseadas em procedimentos de otimização com restrições de desigualdades matriciais lineares. Abordagens robustas para SLSMA com incertezas nas matrizes paramétricas e nas probabilidades de transição são escassas na literatura especializada.

Considerando o baixo número de trabalhos sobre o assunto, propomos reguladores robustos recursivos para SLSMA com incertezas limitadas em norma e politópicas nas matrizes paramétricas e nas probabilidades de transição. Modelamos a ocorrência do tempo de atraso por meio de uma cadeia de Markov independente adicional e a taxa máxima de variação do atraso pela matriz de probabilidade. Em seguida, um sistema aumentado é definido, onde os atrasos são inseridos no novo vetor de estado. Baseado em (BORTOLIN; TERRA, 2016) e (BUENO et al., 2022b), problemas min-max são for-



mulados, combinando os problemas de mínimos-quadrados regularizados com incertezas e funções de penalidade. As soluções destes problemas de otimização produzem recursivamente os ganhos de realimentação de estado dependentes do modo, capazes de estabilizar o SLSMA de malha fechada, apesar da presença de atrasos aleatórios no estado e das probabilidades incertas limitadas em norma ou politópicas.

O artigo de número 3, mostrado na Seção 1.4, consiste no regulador robusto recursivo para SLSMA nominal com as MTI pertencentes a um domínio politópico que também é proposto nesta tese.

## 1.4 Lista de Publicações

A lista a seguir contém todas as publicações sobre os resultados diretos da pesquisa relatada nesta tese:

1. ODORICO, E.; TERRA, M. H. Regulador robusto recursivo para sistemas politópicos de tempo-discreto com atraso nos estados. **Anais do 24<sup>o</sup> Congresso Brasileiro de Automática (CBA), 2022, Fortaleza (Brasil)**. 2022.
2. ODORICO, E. K.; TERRA, M. H. Recursive robust control for uncertain discrete-time Markovian jump linear systems with Markov time-delays. In: **Proceedings of the 20th European Control Conference (ECC), 2022, London (England)**. 2022. p. 1478–1483.
3. ODORICO, E. K.; BUENO, J. N. A. D.; TERRA, M. H. Robust regulator for Markov jump linear systems with random state delays and uncertain transition probabilities. In: **IFAC-PapersOnline**. p. 4564-4569, 22st IFAC World Congress, Yokohama (Japan), 2023.

A autora também desenvolveu outros tópicos de pesquisa relacionados que resultaram nas publicações apresentadas a seguir:

4. ODORICO, E. K.; ROCHA, K. D. T.; TERRA, M. H. Recursive estimation for discrete-time Markovian jump singular systems with random state delays. **IFAC-PapersOnline**, v. 52, n. 18, p. 168-173, 15th IFAC Workshop on Time Delay Systems (TDS), Sinaia (Romania), 2019.
5. ODORICO, E. K.; ROCHA, K. D. T.; TERRA, M. H. Estimador robusto recursivo para sistemas singulares com atraso invariante no estado via método de elevação. In: **Anais do 14<sup>o</sup> Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI), 2019, Ouro Preto (Brasil)**. 2019. p. 2384-2389.
6. ODORICO, E. K.; TERRA, M. H. Regulador robusto recursivo com matrizes de ponderação incertas para sistemas com atrasos os estados. **Anais do 15<sup>o</sup> Simpósio**

**Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI), 2021, Pelotas (Brasil).** 2021. p. 1773-1778.

7. ODORICO, E.; TERRA, M. H. Robust regulation of discrete-time systems subject to parameter uncertainties and state delay. **Automatica**, v. 156, p. 111179, 2023.

## 1.5 Estrutura da Tese

Este trabalho está organizado em oito capítulos e três apêndices, descritos a seguir:

- ❑ **Capítulo 1:** Apresenta o tema central deste trabalho, os sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos e atraso no estado. Além disso, explica os diferentes problemas de regulação robusta a serem abordados, apresentando breves revisões dos trabalhos encontrados na literatura.
- ❑ **Capítulo 2:** Apresenta os conceitos auxiliares fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho: o método de função penalidade e os problemas de mínimos-quadrados e suas variações.
- ❑ **Capítulos 3, 4 e 5:** Abordam os problemas de regulação de estado no cenário de matriz de transição completamente conhecida, explicando a metodologia utilizada para derivar os reguladores nominais e robustos como soluções de problemas de mínimos-quadrados regularizados. Além disso, apresentam os dois reguladores robustos propostos para sistemas Markovianos com atraso e incertezas limitadas em norma e pertencentes ao domínio politópico.
- ❑ **Capítulos 6 e 7:** Os resultados dos capítulos 3, 4 e 5 são estendidos para tratar matrizes de probabilidades incertas, considerando os dois tipos distintos de incertezas paramétricas: limitadas em norma e politópicas.
- ❑ **Capítulo 8:** Apresenta as considerações finais deste trabalho e sugere possíveis direções para estender os resultados apresentados nesta tese.
- ❑ **Apêndices:** O primeiro fornece alguns resultados de análise de matriz utilizados ao longo desta tese. O segundo apresenta a dedução de um dos reguladores propostos. O terceiro e último fornece um exemplo numérico do regulador robusto em sistemas sem saltos.

---

## Conceitos Auxiliares

Neste capítulo são introduzidos conceitos fundamentais para a dedução dos controladores robustos propostos nesta tese. Os problemas a serem resolvidos são formulados por meio de otimização de funcionais sujeitos a restrições lineares de igualdade. Uma abordagem clássica para esses problemas consiste no método de funções penalidade, sendo caracterizado por aproximar problemas restritos por uma sequência de problemas irrestritos. Tal aproximação é realizada ao inserir o termo a ser minimizado na função objetivo por meio de um parâmetro que penaliza qualquer violação às restrições. Ao atribuir valores crescentes a este parâmetro, tem-se uma sucessão de problemas irrestritos cujas soluções convergirão para a solução do problema restrito.

As demais abordagens que serão apresentadas consideram as variações do problema de mínimos-quadrados, como ponderação e regularização. O problema de mínimos-quadrados consiste em determinar soluções de sistemas de equações lineares sobredeterminadas, isto é, sistemas que possuem mais equações do que incógnitas. A solução para este problema pode ser obtida por meio das equações normais e apresentada na estrutura de blocos matriciais. Além disso, o problema dos mínimos-quadrados regularizados com incertezas é apresentado, o qual será a base dos algoritmos de controle propostos nesta tese.

### 2.1 Método de Funções Penalidade

Nesta seção são apresentados os conceitos relacionados ao problema de otimização não-linear sujeito a restrições lineares de igualdade. Mais detalhes sobre os resultados que serão apresentados podem ser encontrados em Luenberger e Ye (2008).

Considere o problema de otimização restrito

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{sujeito a } h(x) = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . O método de funções penalidade consiste em adicionar as restrições do problema (2.1) na função objetivo através de um parâmetro positivo, aproximando o problema restrito (2.1) por um problema irrestrito na seguinte forma:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} q(\mu, x) = f(x) + \mu P(x) , \quad (2.2)$$

sendo  $q(\mu, x)$  a função auxiliar,  $\mu > 0$  é o parâmetro de penalidade e  $P(x) = h(x)^T h(x)$  é a função penalidade. Observe que o parâmetro de penalidade  $\mu$  está associado às restrições do problema irrestrito, de modo a penalizar qualquer violação das restrições. Desta forma,  $\mu$  determina o grau de penalidade e aproximação entre os problemas restrito e irrestrito.

De maneira geral, o método de funções penalidade é um processo iterativo, sendo que a cada passo  $k \geq 0$ , o parâmetro de penalidade  $\mu_k$  é fixado para obter a solução ótima  $x_k$  do problema irrestrito (2.2). Desta forma, a cada iteração, ocorre a atualização do parâmetro  $\mu_k$ , de modo que  $\{\mu\}_{k=0}^{+\infty}$  seja uma seqüência crescente. Assim, à medida que  $\mu \rightarrow \infty$ , as violações das restrições são penalizadas de forma que a função penalidade  $P(x) \rightarrow 0$  e, conseqüentemente, as soluções do problema irrestrito (2.2) convergem para a solução do problema restrito (2.1).

Portanto, o método de funções penalidade consiste em obter a solução do problema restrito (2.1), a partir da minimização de uma seqüência de funções objetivo auxiliares, com valores crescentes do parâmetro de penalidade e com uma precisão suficiente para se obter a síntese de controladores estáveis, por exemplo. A formalização deste método é apresentado no Algoritmo 2.1.

---

### Algoritmo 2.1 Método de Funções Penalidade

---

**Inicializações:** Defina uma precisão desejada  $\epsilon > 0$ , um escalar  $\beta > 0$  e um valor inicial para o parâmetro de penalidade  $\mu_0 > 0$ .

**Passo 1:** Para cada  $k \geq 0$ , determine a solução  $x_k$  do problema irrestrito:

$$\min_x q(\mu_k, x) = f(x) + \mu_k P(x).$$

**Critério de parada:** Se  $\mu_k P(x_k) < \epsilon$ , então pare. Caso contrário, faça  $\mu_{k+1} = \beta \mu_k$ , substitua  $k$  por  $k + 1$  e retorne para o passo 1.

---

A seguir é apresentado um exemplo numérico para ilustrar o método de funções penalidade na solução de problemas de otimização com restrições lineares de igualdade.

**Exemplo 2.1.** Considere o seguinte problema de otimização restrito

$$\begin{aligned} \min_{x,y} f(x, y) &= 2x^2 + 3y^2 + 4 \\ \text{sujeito a } x + y + 2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Seja  $P(x, y) = (x + y + 2)^2$ , com  $x, y \in \mathbb{R}$ . Logo, o problema (2.3) pode ser aproximado pelo seguinte problema irrestrito:

$$\min_{x_k, y_k} q(\mu_k, x_k, y_k) = 2x_k^2 + 3y_k^2 + 4 + \mu_k(x_k + y_k + 2)^2.$$

Observe que a função objetivo  $q(\mu_k, x_k, y_k)$  do problema irrestrito é convexa para todo valor de  $\mu_k > 0$ . Deste modo, uma condição necessária e suficiente para se obter a solução ótima é que o gradiente da função auxiliar  $q(\mu_k, x_k, y_k)$  seja nulo, resultando em

$$\begin{aligned} \frac{\partial q(\mu_k, x_k, y_k)}{\partial x_k} &= 2x_k + \mu_k(x_k + 2y_k + 1) = 0 \quad e \\ \frac{\partial q(\mu_k, x_k, y_k)}{\partial y_k} &= 3y_k + \mu_k(x_k + 2y_k + 1) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Resolvendo o sistema de equações (2.4), tem-se que

$$x_k = \frac{-6\mu_k}{6 + 5\mu_k} \quad e \quad y_k = \frac{-4\mu_k}{6 + 5\mu_k}.$$

Quando  $k$  tende ao infinito, obtém-se a solução ótima para o problema restrito

$$x^* = -1, 2; \quad y^* = -0, 8 \quad \text{com} \quad f(x^*, y^*) = 8, 8.$$

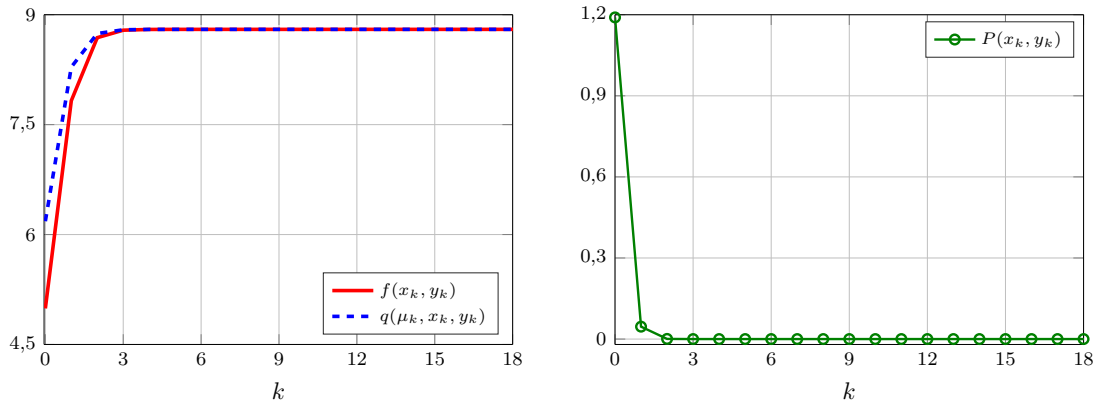
A Tabela 2.1 apresenta os resultados obtidos pelo método de funções penalidade para  $\mu_k = 10^k$ . Observe o comportamento das funções  $f(x_k, y_k)$  e  $q(\mu_k, x_k, y_k)$ , que convergem para o mesmo valor e a função penalidade  $P(x_k, y_k)$  tende a zero.

Tabela 2.1 – Solução para o Exemplo 2.1

$k$	$\mu_k$	$x_k$	$y_k$	$f(x_k, y_k)$	$q(\mu_k, x_k, y_k)$	$\mu_k P(x_k, y_k)$	$P(x_k, y_k)$
0	1	-0,5454	-0,3636	4,9917	6,1818	1,1900	1,1900
1	10	-1,0714	-0,7142	7,8265	8,2857	0,4591	0,0459
2	$10^2$	-1,1857	-0,7905	8,6868	8,7430	0,0562	0,0005
3	$10^3$	-1,1985	-0,7990	8,7885	8,7942	0,0057	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
16	$10^{16}$	-1,1999	-0,7999	8,7999	8,7999	$4,9303 \times 10^{-15}$	0
17	$10^{17}$	-1,2	-0,8	8,8	8,8	$1,9721 \times 10^{-15}$	0
18	$10^{18}$	-1,2	-0,8	8,8	8,8	0	0

A Figura 2.1 ilustra o comportamento da função objetivo do problema restrito  $f(x_k, y_k)$ , da função auxiliar  $q(\mu_k, x_k, y_k)$  e da função penalidade  $P(x_k, y_k)$ , respectivamente.

Figura 2.1 – Comportamento das funções  $f(x_k, y_k)$ ,  $q(\mu_k, x_k, y_k)$  e  $P(x_k, y_k)$ .



A convergência do método das funções penalidade é garantida pelos resultados apresentados a seguir. As demonstrações podem ser encontrados em Luenberger e Ye (2008).

**Definição 2.1.** Uma função  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de função penalidade se satisfaz as seguintes condições:

- i.*  $P$  é uma função contínua;
- ii.*  $P(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ;
- iii.*  $P(x) = 0$  se, e somente se,  $x$  é viável, ou seja,  $h(x) = 0$ .

Os Lemas 2.1 e 2.2 descrevem as relações entre os problemas restrito e irrestrito. Observe que no Exemplo 2.1 as propriedades apresentadas nos seguintes lemas são satisfeitas.

**Lema 2.1.** (LUENBERGER; YE, 2008) Sejam  $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$  uma seqüência de parâmetros de penalidade e a função  $q(\mu_k, x_k) = f(x_k) + \mu_k P(x_k)$ . Então, as seguintes propriedades são válidas:

- i.*  $q(\mu_k, x_k) \leq q(\mu_{k+1}, x_{k+1})$ ;
- ii.*  $P(x_k) \geq P(x_{k+1})$ ;
- iii.*  $f(x_k) \leq f(x_{k+1})$ .

**Lema 2.2.** (LUENBERGER; YE, 2008) Seja  $x^*$  uma solução para o problema (2.1). Então, para cada  $k$  tem-se

$$f(x^*) \geq q(\mu_k, x_k) \geq f(x_k).$$

**Definição 2.2.** Um ponto  $x^*$  é um ponto limite da seqüência  $\{x_k\}$  se existir uma subseqüência de  $\{x_k\}$  que converge para  $x^*$ . Deste modo,  $x^*$  é um ponto limite de  $\{x_k\}$  se existir um subconjunto  $\mathcal{K}$  dos números inteiros positivos tal que  $\{x_k\}_{k \in \mathcal{K}}$  converge para  $x^*$ .

Observe que o método de funções penalidade define uma sequência de soluções para o problema irrestrito (2.2) cujo ponto limite é uma solução ótima para o problema original (2.1), como é apresentado no Teorema 2.1.

**Teorema 2.1.** (LUENBERGER; YE, 2008) *Seja  $\{x_k\}$  uma sequência gerada pelo método de funções penalidade. Logo, qualquer ponto limite da sequência é uma solução para o problema (2.1).*

## 2.2 Problemas de Mínimos-Quadrados

Nesta seção é apresentada a abordagem de solução para os problemas de mínimos-quadrados, tratada em uma estrutura alternativa dada na forma de blocos matriciais, útil para síntese de controladores. A combinação do método de função penalidade com os problemas de mínimos-quadrados regularizados restritos fornecem uma técnica que permite a solução de problemas de controle robusto, que serão considerados nos próximos capítulos.

## 2.3 Mínimos-Quadrados não Regularizados

Considere o problema de otimização

$$\min_x J(x), \quad (2.5)$$

com a função custo  $J(x)$  dada por

$$J(x) = \|Ax - b\|^2 = (Ax - b)^T(Ax - b), \quad (2.6)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é um vetor desconhecido e  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $b \in \mathbb{R}^m$  são conhecidos.

**Lema 2.3.** (KAILATH et al., 2000) *Um vetor  $x^*$  é uma solução para o problema (2.5)-(2.6) se, e somente se, ele satisfaz*

$$A^T Ax^* = A^T b. \quad (2.7)$$

*Então, o valor mínimo da função custo é dado por*

$$J(x^*) = \|Ax^* - b\|^2 = \|b\|^2 - \|Ax^*\|^2.$$

*Se  $A$  tem posto coluna pleno, então  $A^T A$  é não-singular e existe um único  $x^*$  satisfazendo (2.7) dado por*

$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

*Além disso, o valor mínimo da função custo é*

$$J(x^*) = \|Ax^* - b\|^2 = b^T (I_m - A(A^T A)^{-1} A^T) b.$$

### 2.3.1 Mínimos-Quadrados Ponderados

Considere o problema de otimização quadrática

$$\min_x J(x), \quad (2.8)$$

com a função custo quadrática  $J(x)$  dada por

$$J(x) = \|Ax - b\|_{\mathcal{W}}^2 = (Ax - b)^T \mathcal{W} (Ax - b), \quad (2.9)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é um vetor desconhecido,  $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é uma *matriz de ponderação* definida positiva conhecida e  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $b \in \mathbb{R}^m$  são conhecidos. Claramente, selecionando  $\mathcal{W} = I$  no problema (2.8)-(2.9), obtemos o problema de mínimos-quadrados apresentado na Seção 2.2.

**Lema 2.4.** (KAILATH et al., 2000) *Um vetor  $x^*$  é uma solução para o problema (2.8)-(2.9) se, e somente se, satisfaz a equação normal*

$$A^T \mathcal{W} A x^* = A^T \mathcal{W} b. \quad (2.10)$$

*O valor mínimo da função objetivo resultante é dado por*

$$J(x^*) = \|Ax^* - b\|_{\mathcal{W}}^2 = b^T \mathcal{W} b - b^T \mathcal{W} A x^*.$$

*Se  $A$  tem posto coluna pleno, então  $A^T \mathcal{W} A$  é não singular e existe um único  $x^*$  satisfazendo a equação normal (2.10) dado por*

$$x^* = (A^T \mathcal{W} A)^{-1} A^T \mathcal{W} b.$$

*Além disso, o valor mínimo da função objetivo é*

$$J(x^*) = \|Ax^* - b\|_{\mathcal{W}}^2 = b^T (\mathcal{W} - \mathcal{W} A (A^T \mathcal{W} A)^{-1} A^T \mathcal{W}) b.$$

Em (CERRI et al., 2010), uma forma alternativa de representar a solução do problema (2.8)-(2.9) foi proposta, diferente daquela no Lema 2.4. A solução é apresentada em um conveniente arranjo matricial simétrico, conforme mostrado no Lema 2.5.

**Lema 2.5.** (CERRI et al., 2010) *Considere o problema (2.8)-(2.9) com  $\mathcal{W} \succ 0$  e  $A$  é posto coluna pleno. As seguintes expressões são equivalentes:*

$$(i) \quad x^* = \arg \min_x (Ax - b)^T \mathcal{W} (Ax - b).$$

$$(ii) \quad x = x^* \text{ é uma solução para } A^T \mathcal{W} A x^* = A^T \mathcal{W} b.$$



$$(iii) (\lambda, x) = (\lambda^*, x^*) \text{ é uma solução para } \begin{bmatrix} \mathcal{W}^{-1} & \mathcal{A} \\ \mathcal{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se  $\mathcal{A}$  é posto coluna pleno, então a solução  $x^*$  é única e dada por:

$$x^* = (\mathcal{A}^T \mathcal{W} \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^T \mathcal{W} b.$$

O valor mínimo da função custo é dado por:

$$[J(x^*)] = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{W}^{-1} & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A não-singularidade do bloco matricial central é assegurada pelo Lema A.6 no Apêndice A.

### 2.3.2 Mínimos-Quadrados Regularizados

Considere o seguinte problema de minimização

$$\min_x J(x), \quad (2.11)$$

com a função objetivo  $J(x)$  dada por

$$J(x) = \|x\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|Ax - b\|_{\mathcal{W}}^2 = x^T \mathcal{Q} x + (Ax - b)^T \mathcal{W} (Ax - b), \quad (2.12)$$

com a matriz de regularização  $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  simétrica e definida positiva,  $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica e definida positiva,  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  matriz conhecida,  $b \in \mathbb{R}^n$  vetor conhecido e  $x \in \mathbb{R}^m$  o vetor de incógnita. A solução do problema (2.11) é dada no Lema 2.6 cuja demonstração pode ser encontrada em Kailath et al. (2000).

**Lema 2.6.** (KAILATH et al., 2000) A solução  $x^*$  do problema de minimização (2.11)-(2.12) é dada por:

$$x^* = (\mathcal{Q} + \mathcal{A}^T \mathcal{W} \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^T \mathcal{W} b.$$

O valor mínimo da função objetivo  $J(x^*)$  pode ser reescrito como

$$J(x^*) = b^T (\mathcal{W} - \mathcal{W} \mathcal{A} (\mathcal{Q} + \mathcal{A}^T \mathcal{W} \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^T \mathcal{W}) b = b^T (\mathcal{W}^{-1} + \mathcal{A} \mathcal{Q}^{-1} \mathcal{A}^T)^{-1} b.$$

### 2.3.3 Mínimos-Quadrados Regularizados com Incertezas Limitadas em Norma

Considere o problema de mínimos-quadrados regularizados definido em (2.11)-(2.12). Agora, suponha que a matriz  $\mathcal{A}$  e o vetor  $b$  estejam sob a influência de incertezas limitadas em norma  $\delta \mathcal{A}$  e  $\delta b$ , respectivamente. Assim, o problema de otimização é definido da seguinte forma

$$\min_x \max_{\delta \mathcal{A}, \delta b} J(x) \quad (2.13)$$

com a função custo  $J(x)$  dada por

$$\begin{aligned} J(x) &= \|x\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|(\mathcal{A} + \delta\mathcal{A})x - (b + \delta b)\|_{\mathcal{W}}^2 \\ &= x^T \mathcal{Q}x + \left[ (\mathcal{A} + \delta\mathcal{A})x - (b + \delta b) \right]^T \mathcal{W} \left[ (\mathcal{A} + \delta\mathcal{A})x - (b + \delta b) \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^n$  o vetor desconhecido,  $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  matrizes de ponderação simétricas conhecidas,  $\mathcal{A}$  e  $b$  conhecidos e sujeitos a incertezas paramétricas  $\delta\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $\delta b \in \mathbb{R}^m$  modeladas por

$$\begin{bmatrix} \delta\mathcal{A} & \delta b \end{bmatrix} = \mathcal{H}\Delta \begin{bmatrix} E_{\mathcal{A}} & E_b \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

onde  $\mathcal{H}$  é uma matriz não-nula,  $E_{\mathcal{A}}$  e  $E_b$  são matrizes conhecidas de dimensões apropriadas,  $\Delta$  é uma matriz de contração arbitrária com  $\|\Delta\| \leq 1$ . A solução ótima do problema (2.13) é apresentada no Lema 2.7 cuja demonstração pode ser encontrada em Sayed e Nascimento (1999).

**Lema 2.7.** (SAYED; NASCIMENTO, 1999) *O problema (2.13)-(2.14) admite uma única solução  $x^*$  dada por*

$$x^* = \left( \widehat{\mathcal{Q}} + \mathcal{A}^T \widehat{\mathcal{W}} \mathcal{A} \right)^{-1} \left( \mathcal{A}^T \widehat{\mathcal{W}} b + \widehat{\lambda} E_{\mathcal{A}}^T E_b \right), \quad (2.16)$$

com as matrizes de ponderação modificadas  $\widehat{\mathcal{Q}}$  e  $\widehat{\mathcal{W}}$  definidas por

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{Q}} &:= \mathcal{Q} + \widehat{\lambda} E_{\mathcal{A}}^T E_{\mathcal{A}}, \\ \widehat{\mathcal{W}} &:= \mathcal{W} + \mathcal{W} \mathcal{H} (\widehat{\lambda} I - \mathcal{H}^T \mathcal{W} \mathcal{H})^\dagger \mathcal{H}^T \mathcal{W}, \end{aligned}$$

e o parâmetro escalar não-negativo  $\widehat{\lambda}$  obtido como a solução do seguinte problema de minimização

$$\widehat{\lambda} \in \arg \min_{\lambda \geq \|\mathcal{H}^T \mathcal{W} \mathcal{H}\|} \Gamma(\lambda), \quad (2.17)$$

onde a função objetivo  $\Gamma(\lambda)$  é dada por

$$\Gamma(\lambda) := \|x(\lambda)\|_{\mathcal{Q}}^2 + \lambda \|E_{\mathcal{A}} x(\lambda) - E_b\|^2 + \|\mathcal{A} x(\lambda) - b\|_{\mathcal{W}(\lambda)}^2, \quad (2.18)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\lambda) &:= \mathcal{Q} + \lambda E_{\mathcal{A}}^T E_{\mathcal{A}}, \\ \mathcal{W}(\lambda) &:= \mathcal{W} + \mathcal{W} \mathcal{H} (\lambda I - \mathcal{H}^T \mathcal{W} \mathcal{H})^\dagger \mathcal{H}^T \mathcal{W}, \\ x(\lambda) &:= \left( \mathcal{Q}(\lambda) + \mathcal{A}^T \mathcal{W}(\lambda) \mathcal{A} \right)^{-1} \left( \mathcal{A}^T \mathcal{W}(\lambda) b + \lambda E_{\mathcal{A}}^T E_b \right). \end{aligned}$$

**Observação 2.1.** De acordo com Sayed (2001), uma vez que  $\lambda \geq \|\mathcal{H}^T \mathcal{W} \mathcal{H}\|$  e  $\mathcal{W}$  é definida positiva, o termo  $(\lambda I - \|\mathcal{H}^T \mathcal{W} \mathcal{H}\|)$  será definido positivo no Lema 2.7. Neste caso, as operações de pseudo-inversas nas expressões  $\widehat{\mathcal{W}}$  e  $\mathcal{W}(\lambda)$  podem ser substituídas por operações inversas de matrizes.

**Observação 2.2.** Ao invés de resolver explicitamente o problema de otimização auxiliar (2.17)-(2.18) no Lema 2.7, uma aproximação para o parâmetro ótimo  $\hat{\lambda}$  é proposta por Sayed (2001), dada por  $\hat{\lambda} = \beta \|\mathcal{H}^T \mathcal{W} \mathcal{H}\|$ , para algum  $\beta > 1$ . De acordo com Sayed e Chen (2002), a função objetivo  $\Gamma(\lambda)$  tende a atingir amplitudes próximas de seu mínimo para valores de  $\lambda$  que geralmente estão próximos de seu limitante inferior  $\|\mathcal{H}^T \mathcal{W} \mathcal{H}\|$ .

### 2.3.4 Mínimos-Quadrados Regularizados Restritos com Incertezas Limitadas em Norma

Considere o problema de obter o valor mínimo de um vetor desconhecido  $z \in \mathbb{R}^s$  sob a máxima influência das incertezas paramétricas  $\{\delta M, \delta N, \delta w, \delta y\}$ , de acordo com o problema de otimização restrito:

$$\begin{aligned} \min_z \max_{\delta M, \delta N, \delta w, \delta y} F(z) &= \|z\|_U^2 + \|(M + \delta M)z - (w + \delta w)\|_V^2 \\ \text{sujeito a} \quad (N + \delta N)z &= y + \delta y, \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde  $M \in \mathbb{R}^{r \times s}$  e  $N \in \mathbb{R}^{l \times s}$  são matrizes conhecidas,  $w \in \mathbb{R}^r$  e  $y \in \mathbb{R}^l$  são vetores de medida,  $U \succ 0$  e  $V \succ 0$  são matrizes de ponderação e  $\delta M, \delta N, \delta w$  e  $\delta y$  são incertezas modeladas por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta M & \delta w \end{bmatrix} &= L_1 \Delta_1 \begin{bmatrix} E_M & E_w \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \delta N & \delta y \end{bmatrix} &= L_2 \Delta_2 \begin{bmatrix} E_N & E_y \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde  $\{L_1, L_2\}$  são matrizes não-nula,  $\{\Delta_1, \Delta_2\}$  são matrizes de contração arbitrárias e  $\{E_M, E_N, E_w, E_y\}$  são matrizes conhecidas. Para cada parâmetro de penalidade  $\mu > 0$ , o problema (2.19), pode ser reescrito como o seguinte problema de otimização irrestrito

$$\min_x \max_{\delta \mathcal{A}, \delta b} J(x) \quad (2.20)$$

com a função custo quadrática  $J(x)$  dada por

$$J(x) = \|x\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|(\mathcal{A} + \delta \mathcal{A})x - (b + \delta b)\|_{\mathcal{W}_\mu}^2 \quad (2.21)$$

e as incertezas paramétricas limitadas em norma,

$$\begin{bmatrix} \delta \mathcal{A} & \delta b \end{bmatrix} = \mathcal{H} \Delta \begin{bmatrix} E_{\mathcal{A}} & E_b \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}, \quad \delta \mathcal{A} := \begin{bmatrix} \delta M \\ \delta N \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix}, \quad \delta b := \begin{bmatrix} \delta w \\ \delta y \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W}_\mu := \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & \mu I_l \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H} := \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix}, \\ x &:= z, \quad \mathcal{Q} := U, \quad \Delta := \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix}, \quad E_{\mathcal{A}} := \begin{bmatrix} E_M \\ E_N \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_b := \begin{bmatrix} E_w \\ E_y \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Observe que o problema restrito (2.19) pode ser aproximado pelo problema de mínimos-quadrados regularizados com incertezas (Seção 2.3.2), através do método de funções penalidade. Em Cerri e Terra (2017), uma forma alternativa de representar a solução do problema (2.20)-(2.21) foi proposta, diferente daquela apresentada no Lema 2.7. A solução é apresentada em um conveniente arranjo matricial simétrico, conforme o seguinte lema.

**Lema 2.8.** *Considere o problema de otimização (2.20)-(2.21) com  $\mathcal{Q} \succ 0$  e  $\mathcal{W}_\mu \succ 0$ . Então, para cada  $\mu > 0$ , a solução  $x_\mu^*$  e o valor mínimo  $J(x_\mu^*)$  são dados por*

$$\begin{bmatrix} x_\mu^* \\ J(x_\mu^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \\ 0 & E_b \\ I_s & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{Q}^{-1} & 0 & 0 & I_s \\ 0 & \widehat{\mathcal{W}}_\mu^{-1} & 0 & \mathcal{A} \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}^{-1}I & E_A \\ I_s & \mathcal{A}^T & E_A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ E_b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

onde

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{W}}_\mu &= \mathbf{diag}(V^{-1} - \hat{\lambda}^{-1}L_1L_1^T, \mu^{-1}I - \hat{\lambda}^{-1}L_2L_2^T) \\ \hat{\lambda} &= \beta \|\mathbf{diag}(L_1^TVL_1, \mu L_2^TL_2)\| \text{ para algum } \beta > 1. \end{aligned}$$

### Prova 2.1.

Pelo método de funções penalidade, a restrição do problema (2.19) pode ser inserida na função objetivo através de um parâmetro de penalidade  $\mu > 0$ , obtendo a seguinte função auxiliar,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z) &= \|z\|_U^2 + \|(M + \delta M)z - (w + \delta w)\|_V^2 + \|(N + \delta N)z - y - \delta y\|_{\mu I}^2 \\ &= \|z\|_U^2 + \left\| \left( \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta M \\ \delta N \end{bmatrix} \right) z - \left( \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta w \\ \delta y \end{bmatrix} \right) \right\|_{V \oplus \mu I}^2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Observe que o problema de otimização (2.19) é um caso particular do problema de mínimos-quadrados regularizados com incertezas (2.20), cuja solução  $x^*$  é dada em (2.16). Assim, assumindo as identificações em (2.23),  $x^*$  pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} x^* &= (\mathcal{Q} + \mathcal{A}^T \mathcal{W}_\mu \mathcal{A} + \hat{\lambda} E_A^T E_A)^{-1} (\mathcal{A}^T \mathcal{W}_\mu b + \hat{\lambda} E_A^T E_b) \\ &= \left( \begin{bmatrix} I & \bar{\mathcal{A}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Q} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathcal{W}}_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \bar{\mathcal{A}} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} I & \bar{\mathcal{A}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Q} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathcal{W}}_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathcal{B}} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde  $\bar{\mathcal{A}} := \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ E_A \end{bmatrix}$ ,  $\bar{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} b \\ E_b \end{bmatrix}$  e  $\widehat{\mathcal{W}}_\mu := \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{W}}_\mu & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}I \end{bmatrix}$ .

Definindo uma variável auxiliar:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathcal{Q} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathcal{W}}_\mu \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} I \\ \bar{\mathcal{A}} \end{bmatrix} x^* - \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathcal{B}} \end{bmatrix} \right)$$

então, de (2.26) tem-se o seguinte sistema de equações na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q} & 0 & I \\ 0 & \widehat{\mathcal{W}}_\mu^{-1} & \bar{A} \\ I & \bar{A}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ x^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como  $\begin{bmatrix} I & \bar{A} \end{bmatrix}^T$  é posto coluna pleno, de acordo com Luenberger e Ye (2008, Cap. 24, p. 424), segue que  $x^*$  é dado por (2.24). A invertibilidade do bloco matricial central em (2.24) é garantida pelo Lema A.6. A prova de  $J(x_\mu^*)$  é análoga a de  $x^*$ . Além disso, note que a aproximação para  $\hat{\lambda}$  descrita na Observação 2.2 foi considerada.  $\square$

**Observação 2.3.** De acordo com o método de função penalidade, quando o parâmetro de penalidade  $\mu \rightarrow \infty$ , tem-se que os problemas de otimização (2.19) e (2.20)-(2.21) se tornam equivalentes. Neste caso, a solução para o problema irrestrito fornece o vetor ótimo  $z^*$ , que não depende mais de  $\mu$ . Consequentemente,  $\widehat{\mathcal{W}}_\mu \rightarrow 0$ ,  $\hat{\lambda}^{-1} \rightarrow 0$  e a matriz  $\begin{bmatrix} A & E_A \end{bmatrix}^T$  deve ter posto linha pleno para garantir a não-singularidade do bloco matricial central.

A seguir é apresentado um exemplo numérico para ilustrar a aplicabilidade do Lema 2.8 na solução de problemas de otimização com incertezas limitadas em norma.

**Exemplo 2.2.** Considere o seguinte problema de otimização restrito:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \max_{\delta_1} F(x,y) &= x^2 + y^2 + 1 \\ \text{sujeito a } x + (2 + \delta_1)y + (3 - \delta_1) &= 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

com  $\delta_1 \in [-3, 3]$ . Observe que este problema pode ser reescrito na forma de mínimos-quadrados regularizados com incertezas limitadas em norma (2.20)-(2.21),

$$\begin{aligned} \min_x \max_{\delta\mathcal{M}, \delta\mathcal{W}} \mathcal{F}(\mathcal{X}) &= \|\mathcal{X}\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|(\mathcal{M} + \delta\mathcal{M})\mathcal{X} - (\mathcal{W} + \delta\mathcal{W})\|_{\mathcal{V}}^2 \\ \text{com } \begin{bmatrix} \delta\mathcal{M} & \delta\mathcal{W} \end{bmatrix} &= \mathcal{N} \Delta \begin{bmatrix} E_{\mathcal{M}} & E_{\mathcal{W}} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

com as seguintes identificações

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \delta\mathcal{M} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W} := \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \delta\mathcal{W} := \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_1 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{V} &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Q} &:= I_2, \quad \Delta = \frac{\delta_1}{3}, \quad E_{\mathcal{M}} := \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } E_{\mathcal{W}} := 3. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Aplicando o Lema 2.8, obtém-se a solução que é determinada iterativamente através dos valores atribuídos ao parâmetro de penalidade  $\mu$ . Desta forma, a solução  $\mathcal{X}^* = (x^*, y^*)$

é dada da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} x \\ \mathcal{F}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_k^{-1} - \hat{\lambda}^{-1} & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}^{-1} & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

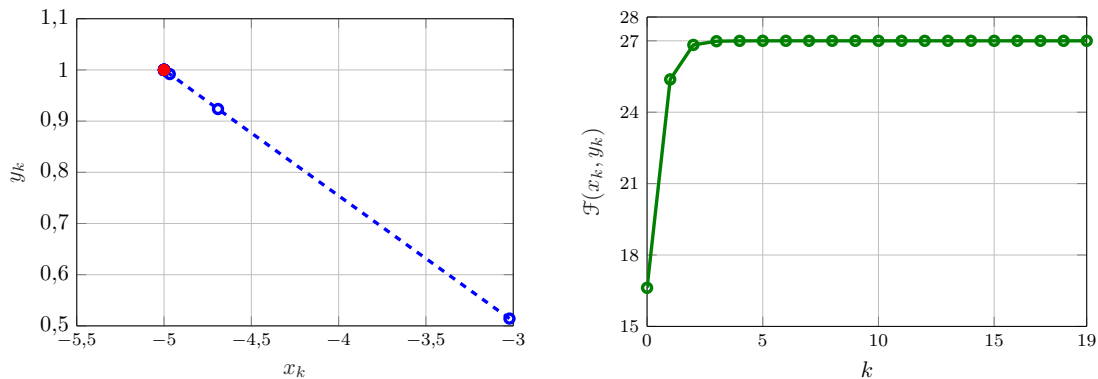
Logo, para cada passo de tempo  $k$ , considerando  $\mu_k = 10^k$  e a aproximação do parâmetro  $\hat{\lambda}_k = 1,5\mu$ , conforme a Observação 2.2, a solução para o problema de mínimos-quadrados regularizados robustos com incerteza limitadas em norma (2.28) é apresentada na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Resultados obtidos para o Exemplo 2.2.

$k$	$\mu_k$	$x_k$	$y_k$	$\mathcal{F}(x_k, y_k)$
0	1	-3,0214	0,5142	16,6214
1	$10^1$	-4,6909	0,9236	25,3784
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
17	$10^{17}$	-4,9999	0,9999	26,9999
18	$10^{18}$	-5	1	27
19	$10^{19}$	-5	1	27

Na Figura 2.2 é ilustrada a convergência da solução  $(x_k, y_k)$  para a solução  $(x_k^*, y_k^*)$ , representada pelo ponto vermelho no gráfico, e o comportamento da função  $\mathcal{F}(x_k, y_k)$ , respectivamente.

Figura 2.2 – Solução obtida para o Exemplo 2.2.



De acordo com a Observação 2.3, a solução ótima pode ser obtida em apenas um passo, fazendo com que  $\mu \rightarrow \infty$ . Assim, ao analisar  $\mu \rightarrow \infty$ , segue que

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ F(x_k, y_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 27 \end{bmatrix}.$$

### 2.3.5 Mínimos-Quadrados Regularizados Restritos com Incertezas Politópicas

Considere o seguinte problema de otimização restrito, em que almeja-se obter o valor mínimo de um vetor desconhecido  $z \in \mathbb{R}^s$  sob a máxima influência das incertezas paramétricas politópicas  $\{\delta\mathbf{M}, \delta\mathbf{N}, \delta\mathbf{w}, \delta\mathbf{y}\}$ :

$$\begin{aligned} \min_z \quad & \max_{\delta\mathbf{M}, \delta\mathbf{N}, \delta\mathbf{w}, \delta\mathbf{y}} \quad \mathcal{F}(z) = \|z\|_{\mathcal{U}}^2 + \|(M_0 + \delta\mathbf{M})z - (w_0 + \delta\mathbf{w})\|_{\mathcal{V}}^2 \\ \text{sujeito a} \quad & (N_0 + \delta\mathbf{N})z = y_0 + \delta\mathbf{y}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

com as matrizes conhecidas  $M_0 \in \mathbb{R}^{r \times s}$  e  $N_0 \in \mathbb{R}^{l \times s}$ , os vetores de medida  $w_0 \in \mathbb{R}^r$  e  $y_0 \in \mathbb{R}^l$ , as matrizes de ponderação  $\mathcal{U} \succ 0$  e  $\mathcal{V} \succ 0$  e as incertezas politópicas  $\{\delta\mathbf{M}, \delta\mathbf{N}, \delta\mathbf{w}, \delta\mathbf{y}\}$  pertencentes a um domínio poliédrico descrito por

$$\begin{aligned} \Omega &:= \left\{ (\delta\mathbf{M}, \delta\mathbf{w}) = \sum_{\nu=1}^{\bar{V}} \xi_{\nu} (\mathbf{M}^{(\nu)}, \mathbf{w}^{(\nu)}) \right\}, \\ \Pi &:= \left\{ (\delta\mathbf{N}, \delta\mathbf{y}) = \sum_{\ell=1}^V \alpha_{\ell} (\mathbf{N}^{(\ell)}, \mathbf{y}^{(\ell)}) \right\}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

sendo  $\{\mathbf{M}^{(\nu)}, \mathbf{N}^{(\ell)}, \mathbf{w}^{(\nu)}, \mathbf{y}^{(\ell)}\}$  os vértices conhecidos do politopo e  $\xi_{\nu} := [\xi_1 \ \dots \ \xi_{\bar{V}}]^T \in \Upsilon_{\bar{V}}$  e  $\alpha_{\ell} := [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_V]^T \in \Lambda_V$ , definidos por:

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\bar{V}} &:= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{\bar{V}} : \xi_{\bar{\ell}} \geq 0 \text{ e } \sum_{\bar{\ell}=1}^{\bar{V}} \xi_{\bar{\ell}} = 1 \right\}, \\ \Lambda_V &:= \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^V : \alpha_{\ell} \geq 0 \text{ e } \sum_{\ell=1}^V \alpha_{\ell} = 1 \right\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

**Observação 2.4.** Considere individualmente cada vértice do politopo então, parte da função custo quadrática e a restrição do problema de otimização (2.30) pode ser reescrita,

respectivamente, como:

$$\left( \begin{bmatrix} M_0 \\ \vdots \\ M_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1 \bar{V} \mathbf{M}^{(1)} \\ \vdots \\ \xi_{\bar{V}} \bar{V} \mathbf{M}^{(\bar{V})} \end{bmatrix} \right) z - \begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1 \bar{V} \mathbf{w}^{(1)} \\ \vdots \\ \xi_{\bar{V}} \bar{V} \mathbf{w}^{(\bar{V})} \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

$$\left( \begin{bmatrix} N_0 \\ \vdots \\ N_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 V \mathbf{N}^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha_V V \mathbf{N}^{(V)} \end{bmatrix} \right) z = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 V \mathbf{y}^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha_V V \mathbf{y}^{(V)} \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Observe que pré-multiplicando ambos os lados das expressões (2.33) e (2.34) por  $\mathbf{1}_{\bar{V}} \otimes I$  e  $\mathbf{1}_V \otimes I$ , respectivamente, obtém-se

$$\begin{aligned} \left( \bar{V} M_0 + \bar{V} \sum_{\nu=1}^{\bar{V}} \xi_{\nu} \mathbf{M}^{(\nu)} \right) z - \bar{V} w_0 + \bar{V} \sum_{\nu=1}^{\bar{V}} \xi_{\nu} \mathbf{w}^{(\nu)}, \\ \left( V N_0 + V \sum_{\ell=1}^V \alpha_{\ell} \mathbf{N}^{(\ell)} \right) z = V y_0 + V \sum_{\ell=1}^V \alpha_{\ell} \mathbf{w}^{(\ell)}, \end{aligned}$$

que correspondem às mesmas expressões presentes no problema de otimização (2.30).

Desta forma, com o intuito de simplificar a notação das expressões (2.33) e (2.34), podemos reescrevê-las da seguinte forma,

$$(\mathbf{M}_0 + \delta \widetilde{\mathbf{M}})z - \mathbf{w}_0 + \delta \widetilde{\mathbf{w}}, \quad (2.35)$$

$$(\mathbf{N}_0 + \delta \widetilde{\mathbf{N}})z = \mathbf{y}_0 + \delta \widetilde{\mathbf{y}}, \quad (2.36)$$

onde  $\mathbf{M}_0 := \mathbf{1}_{\bar{V}} \otimes M_0$ ,  $\mathbf{N}_0 := \mathbf{1}_V \otimes N_0$ ,  $\mathbf{w}_0 := \mathbf{1}_{\bar{V}} \otimes w_0$ ,  $\mathbf{y}_0 := \mathbf{1}_V \otimes y_0$ , e as incertezas modeladas como

$$\begin{aligned} [\delta \widetilde{\mathbf{M}} \quad \delta \widetilde{\mathbf{w}}] &= \mathcal{H}_1 \tilde{\xi} [\widetilde{\mathbf{M}} \quad \widetilde{\mathbf{w}}], \\ [\delta \widetilde{\mathbf{N}} \quad \delta \widetilde{\mathbf{y}}] &= \mathcal{H}_2 \tilde{\alpha} [\widetilde{\mathbf{N}} \quad \widetilde{\mathbf{y}}], \end{aligned}$$

sendo  $\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}$  matrizes constantes de dimensões adequadas e

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &:= \mathbf{diag}(\xi_1, \dots, \xi_{\bar{V}}) \otimes I, \quad \tilde{\alpha} := \mathbf{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_V) \otimes I, \\ \widetilde{\mathbf{M}} &:= \bar{V} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{M}^{(\bar{V})} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{N}} := V \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{N}^{(V)} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{w}} := \bar{V} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{w}^{(\bar{V})} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{y}} := V \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(V)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, considerando as expressões redefinidas (2.35) e (2.36), o problema de otimização (2.30) pode ser reescrito da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \min_z \quad & \max_{\delta \widetilde{\mathbf{M}}, \delta \widetilde{\mathbf{N}}, \delta \widetilde{\mathbf{w}}, \delta \widetilde{\mathbf{y}}} \mathcal{F}(z) = \|z\|_{\mathcal{U}}^2 + \left\| (\mathbf{M}_0 + \delta \widetilde{\mathbf{M}})z - \mathbf{w}_0 + \delta \widetilde{\mathbf{w}} \right\|_V^2 \\ \text{sujeito a} \quad & (\mathbf{N}_0 + \delta \widetilde{\mathbf{N}})z = \mathbf{y}_0 + \delta \widetilde{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (2.37)$$



Para resolver o problema de otimização (2.37), o método da função penalidade é aplicado, sendo a restrição redefinida (2.36) incluída na função custo através de um parâmetro de penalidade  $\mu > 0$ . Assim, qualquer violação desta restrição será penalizada por este parâmetro. Portanto, (2.37) pode ser reescrito pelo seguinte problema irrestrito,

$$\min_x \max_{\delta \mathbf{A}, \delta \mathbf{b}} J(x) \quad (2.38)$$

com a função custo quadrática  $J(x)$  dada por

$$J(x) = \|x\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|(\mathcal{A}_0 + \delta \mathbf{A})x - (b_0 + \delta \mathbf{b})\|_{\mathcal{W}_\mu}^2 \quad (2.39)$$

e as incertezas  $\delta \mathbf{A}$  e  $\delta \mathbf{b}$  pertencem a um domínio poliédrico descrito por

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{A} & \delta \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathcal{H} \Phi \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{A}} & \tilde{b} \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

sendo  $\mathcal{H}$  uma matriz conhecida de dimensão adequada,

$$\begin{aligned} x &:= z, \quad \mathcal{Q} := \mathcal{U}, \quad \mathcal{A}_0 := \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{N}_0 \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{A} := \begin{bmatrix} \widetilde{\delta \mathbf{M}} \\ \widetilde{\delta \mathbf{N}} \end{bmatrix}, \quad b_0 := \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{y}_0 \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{b} := \begin{bmatrix} \widetilde{\delta \mathbf{w}} \\ \widetilde{\delta \mathbf{y}} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{W}_\mu &:= \begin{bmatrix} \mathcal{V} & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H} := \begin{bmatrix} \mathcal{H}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_2 \end{bmatrix}, \quad \Phi := \begin{bmatrix} \tilde{\xi} & 0 \\ 0 & \tilde{\alpha} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{A}} := \begin{bmatrix} \bar{V} \widetilde{\mathbf{M}} \\ V \widetilde{\mathbf{N}} \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{b} := \begin{bmatrix} \bar{V} \tilde{\mathbf{w}} \\ V \tilde{\mathbf{y}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

**Observação 2.5.** Uma vez que  $\xi = [\xi_1 \ \dots \ \xi_{\bar{V}}]^T \in \Upsilon_{\bar{V}}$  e  $\alpha = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_V]^T \in \Lambda_V$ , logo  $\|\Phi\| \leq 1$  em (2.40).

O procedimento para resolver o problema de otimização (2.38)-(2.39) consiste em, iterativamente, obter uma solução ótima  $x^*$  para (2.38)-(2.39), à medida que a sequência  $\{\mu_k\}$  tende ao infinito, de acordo com Luenberger e Ye (2008). Caso contrário,  $x_\mu^*$  é uma solução subótima para o problema de otimização.

No próximo resultado é apresentada a solução do problema de mínimos-quadrados regularizados com incertezas politópicas, obtida através da aplicação do Lema 2.8.

**Lema 2.9.** Considere o problema de otimização (2.38)-(2.39) com  $\mathcal{Q} \succ 0$  e  $\mathcal{W}_\mu \succ 0$ . Então, para cada  $\mu > 0$ , a solução  $x^*$  e o valor mínimo da função custo  $J(x^*)$  são dados por

$$\begin{bmatrix} x^* \\ J(x^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_0 \\ 0 & \tilde{b} \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{Q}^{-1} & 0 & 0 & I \\ 0 & \widehat{\mathcal{W}}_\mu^{-1} & 0 & \mathcal{A}_0 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}^{-1} I & \tilde{\mathcal{A}} \\ I & \mathcal{A}_0^T & \tilde{\mathcal{A}}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \\ \tilde{b} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

onde

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{W}}_\mu &= \mathbf{diag}(\mathcal{V}^{-1} - \hat{\lambda}^{-1} \mathcal{H}_1 \mathcal{H}_1^T, \mu^{-1} I - \hat{\lambda}^{-1} \mathcal{H}_2 \mathcal{H}_2^T), \\ \hat{\lambda} &= \beta \|\mathbf{diag}(\mathcal{H}_1^T \mathcal{V} \mathcal{H}_1, \mu \mathcal{H}_2^T \mathcal{H}_2)\| \text{ para algum } \beta > 1. \end{aligned}$$

**Prova 2.2.** *Segue da solução apresentada em termos de um arranjo matricial simétrico no Lema 2.8, a qual é reescrita por Bueno et al. (2021) para tratar as incertezas politópicas. De acordo com o Lema A.6, no Apêndice A, a invertibilidade do bloco matricial central em (2.42) é garantida.  $\square$*

O exemplo numérico apresentado a seguir ilustra a aplicabilidade do Lema 2.9 na solução de problemas de otimização com incertezas politópicas.

**Exemplo 2.3.** *Considere o seguinte problema de otimização restrito:*

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \max_{\alpha_1, \alpha_2, \xi_1, \xi_2} F(x, y) &= \left(1 + 1, 5 \sum_{\ell=1}^2 \xi_\ell\right) x^2 + \left(5 + 1, 5 \sum_{\ell=1}^2 \xi_\ell\right) y^2 - 1 \\ \text{sujeito a} \quad &\begin{cases} x + \left(3 + \sum_{\ell=1}^2 \alpha_\ell\right) y + \left(1 - 2 \sum_{\ell=1}^2 \alpha_\ell\right) = 0, \\ \xi \in \mathbb{R}^2, \sum_{\ell=1}^2 \xi_\ell = 1 \text{ e } \xi_\ell \geq 0, \\ \alpha \in \mathbb{R}^2, \sum_{\ell=1}^2 \alpha_\ell = 1 \text{ e } \alpha_\ell \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.43)$$

*Considerando individualmente cada vértice do politopo, parte da função custo e a restrição do problema (2.43) podem ser reescritas, respectivamente, como*

$$\begin{cases} (0 + 3\xi_1)x + (0 + 3\xi_1)y = 1, \\ (0 + 3\xi_2)x + (0 + 3\xi_2)y = 1, \end{cases} \implies \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\xi_1 & 3\xi_1 \\ 3\xi_2 & 3\xi_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + (3 + 2\alpha_1)y + (1 - 4\alpha_1) = 0, \\ x + (3 + 2\alpha_2)y + (1 - 4\alpha_2) = 0, \end{cases} \implies \left( \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2\alpha_1 \\ 0 & 2\alpha_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\alpha_1 \\ 4\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

*Observe que este problema pode ser reescrito como um problema de mínimos-quadrados regularizados com incertezas politópicas (2.38)-(2.39):*

$$\begin{aligned} \min_x \max_{\delta\mathcal{M}, \delta\mathcal{W}} \mathcal{F}(\mathcal{X}) &= \|\mathcal{X}\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|(\mathcal{M}_0 + \delta\mathcal{M})\mathcal{X} - (\mathcal{W}_0 + \delta\mathcal{W})\|_{\mathcal{S}}^2 \\ \text{com} \quad &[\delta\mathcal{M} \quad \delta\mathcal{W}] = \mathcal{N} \Phi [\tilde{\mathcal{M}} \quad \tilde{\mathcal{W}}], \end{aligned} \quad (2.44)$$

*com as seguintes identificações*

$$\mathcal{M}_0 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \delta\mathcal{M} := \begin{bmatrix} 3\xi_1 & 3\xi_1 \\ 3\xi_2 & 3\xi_2 \\ 0 & 2\alpha_1 \\ 0 & 2\alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W}_0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \delta\mathcal{W} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4\alpha_1 \\ 4\alpha_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{S} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Q} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{M}} := \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{\mathcal{W}} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Aplicando o Lema 2.8, obtém-se a solução que é determinada iterativamente através dos valores atribuídos ao parâmetro de penalidade  $\mu$ . Desta forma, a solução  $\mathcal{X}^* = (x^*, y^*)$  é dada da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \mathcal{X}^* \\ \mathcal{F}(\mathcal{X}^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \times$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \hat{\lambda}_k^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \hat{\lambda}_k^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_k^{-1} - \hat{\lambda}_k^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_k^{-1} - \hat{\lambda}_k^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_k^{-1} & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_k^{-1} & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_k^{-1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}_k^{-1} & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

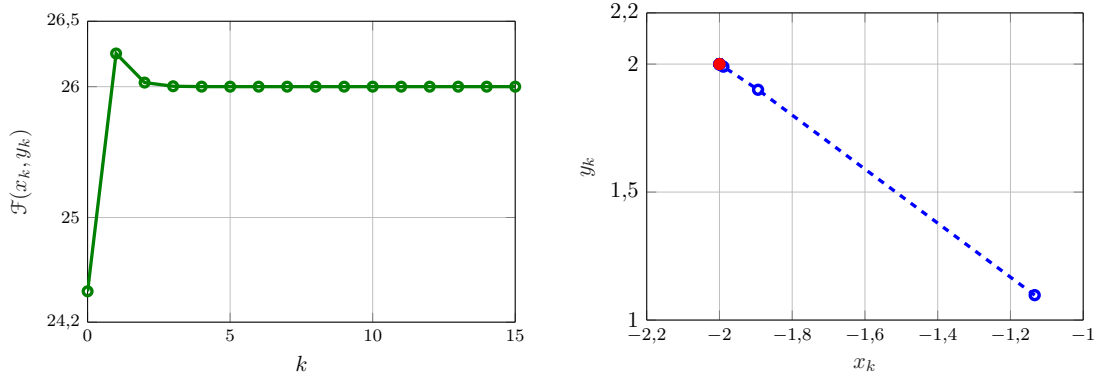
Para cada passo de tempo  $k$ , assumindo  $\mu_k = 10^k$  e a aproximação do parâmetro  $\hat{\lambda}_k = 1,5 \|\mathbf{diag}(\mu, \mu)\|$ , conforme a Observação 2.2, a solução para o problema de mínimos-quadrados regularizados robustos com incertezas politópicas (2.28) é apresentada na Tabela 2.3.

Tabela 2.3 – Resultados obtidos para o Exemplo 2.3.

$k$	$\mu_k$	$x_k$	$y_k$	$\mathcal{F}(x_k, y_k)$
0	1	-1,1333	1,0973	24,4359
1	$10^1$	-1,8938	1,8997	26,2534
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9	$10^9$	-1,9999	1,9999	25,9999
10	$10^{10}$	-2	2	26
11	$10^{11}$	-2	2	26

A convergência da solução  $(x_k, y_k)$  para a solução  $(x_k^*, y_k^*)$  é ilustrada na Figura 2.3, a qual é representada pelo ponto vermelho no gráfico, e o comportamento da função  $\mathcal{F}(x_k, y_k)$ , respectivamente.

Figura 2.3 – Solução obtida para o Exemplo 2.3.



# Controle de Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos e Atraso

Neste capítulo, o Regulador Recursivo Nominal (RRN) para sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos e atraso no estado de tempo discreto é proposto, considerando as matrizes paramétricas perfeitamente conhecidas. Uma estratégia de controle é proposta com base no Regulador Linear Quadrático (KALMAN, 1960). Para projetar o regulador para os sistemas com atraso no estado, o método de elevação (HETEL et al., 2008) é adotado.

O problema de controle é formulado através de um problema de mínimos-quadrados regularizados restrito (Seção 2.3.2). Este problema é transformado em um irrestrito pela aplicação do método de função penalidade (Seção 2.1). A solução do problema irrestrito fornece as expressões do Regulador Recursivo Nominal. A análise de convergência e estabilidade do regulador proposto é investigada assumindo um modelo invariante no tempo. O capítulo é concluído com um exemplo numérico.

## 3.1 Formulação do problema

### 3.1.1 Modelo do Sistema

Considere o sistema linear sujeito a saltos Markovianos e atraso de tempo discreto:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_{\theta_k, k} x_k + A_{d, \theta_k, k} x_{k-d_k} + B_{\theta_k, k} u_k, \\ x_k &= \varphi_0(k), \quad k \in [-d_{max}, 0], \end{aligned} \tag{3.1}$$

para  $k = 0, 1, \dots, N$ , na qual  $x_k \in \mathbb{R}^n$  é o estado no instante  $k$ ,  $x_{k-d_k} \in \mathbb{R}^n$  é o estado atrasado de  $d_k$  amostras,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle,  $\varphi_0(k)$  é a condição inicial para  $k = -d_{max}, -d_{max} + 1, \dots, 0$  e  $A_{\theta_k, k}, A_{d, \theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B_{\theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são as matrizes paramétricas conhecidas.

O processo estocástico  $\{\theta_k, k \geq 0\}$  é descrito por uma cadeia de Markov de estado finito e tempo discreto  $\theta_k \in \mathcal{S} = \{1, \dots, s\}$  associado à matriz de probabilidade de transição

conhecida  $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{s \times s}$ ,  $i, j \in \mathcal{S}$ , cuja as entradas satisfazem as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= \Pr(\theta_{k+1} = j \mid \theta_k = i) = p_{ij}, \\ \sum_{j=1}^s p_{ij} &= 1, \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1, \quad \text{e} \quad \Pr(\theta_0 = i) = \pi_i. \end{aligned} \quad (3.2)$$

O atraso de tempo  $d_k$  é considerado governado aleatoriamente por uma segunda cadeia de Markov  $\bar{\theta}_k \in \bar{\mathcal{S}} = \{1, \dots, \bar{s}\}$ ,  $\bar{s} = d_{max} - d_{min} + 1$ , com

$$0 \leq d_{min} \leq d_k \leq d_{max} \quad \text{e} \quad \|d_{k+1} - d_k\| \leq \Delta d \leq d_{max}, \quad (3.3)$$

onde  $d_{min} = \min\{d_k\}$ ,  $d_{max} = \max\{d_k\}$  e  $\Delta d$  é a taxa máxima de variação de atraso entre dois instantes consecutivos, em que a amostra futura  $d_{k+1}$  pode assumir quaisquer valores pertencentes ao intervalo  $[\bar{d}_{min}, \bar{d}_{max}]$ , com  $\bar{d}_{min} = \max(d_{min}, d_k - \Delta d)$  e  $\bar{d}_{max} = \min(d_{max}, d_k + \Delta d)$ . A cadeia de Markov  $\bar{\theta}_k$  é associada a uma matriz de probabilidade de transição  $\bar{\mathbb{P}} = [\bar{p}_{\bar{i}\bar{j}}] \in \mathbb{R}^{\bar{s} \times \bar{s}}$ ,  $\bar{i}, \bar{j} \in \bar{\mathcal{S}}$  com o vetor de distribuição inicial  $\bar{\pi}_{\bar{i},0}$  e as entradas satisfazendo analogamente as condições estabelecidas em (3.2). Além disso, a probabilidade de transição  $\bar{\mathbb{P}}$  é definida de acordo com a taxa máxima de variação de atraso, ou seja,

$$\bar{p}_{\bar{i}\bar{j}} = \begin{cases} 1/\bar{s} & \begin{cases} \bar{j} \in (\bar{d}_{min} + 1, \bar{d}_{max} + 1), & d_{min} = 0, \\ \bar{j} \in (\bar{d}_{min}, \bar{d}_{max}), & d_{min} \neq 0, \end{cases} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Para regular o SLSMA (3.1) sob probabilidades de transição conhecidas, a seguinte lei de controle dependente do modo é adotada:

$$u_k = K_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k, \quad \forall k \geq 0, \quad (3.5)$$

onde  $z_k$  é o estado do sistema aumentado relacionado a condição inicial  $z_0$ , nomeadamente

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_{k-d_{max}+1} \\ x_{k-d_{max}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad z_0 = \begin{bmatrix} \varphi_0(0) \\ \varphi_0(-1) \\ \vdots \\ \varphi_0(-d_{max}+1) \\ \varphi_0(-d_{max}) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

e  $K_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = [K_{1, \theta_k, k} \quad K_{2, \theta_k, k} \quad \dots \quad K_{\bar{s}, \theta_k, k}] \in \mathbb{R}^{m \times n_d}$ , com  $n_d = d_{max}n + n$ , é o ganho a ser determinado.

**Observação 3.1.** O ganho de realimentação de estado  $K_k$  juntamente com o estado aumentado  $z_k$  fornece a entrada  $u_k$  com a dimensão do sistema linear nominal com atraso.

Observe que (3.5) é uma lei de controle de realimentação de estado dependente dos modos e independente do atraso. Portanto, como a lei de controle proposta descarta o conhecimento em tempo real do atraso  $d_k$ , o SLSMA (3.1) será transformado em um sistema livre da presença de atraso correspondente, de modo que a lei de controle proposta garanta estabilidade em malha fechada. Na seção a seguir, este procedimento será descrito.

### 3.1.2 Descrição do Modelo Aumentado Nominal

Com base na abordagem de sistema aumentado (HETEL et al., 2008) e no tempo de atraso exibindo comportamento Markoviano (QIU et al., 2015), podemos reescrever o Sistema (3.1) como um SLSM sem atraso em termos do estado aumentado (3.6) e governado por duas cadeias de Markov mutuamente independentes, definido por

$$z_{k+1} = F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} u_k, \quad (3.7)$$

para cada  $k = 0, 1, \dots, N$ , onde as matrizes aumentadas  $F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$  e  $G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n_d \times m}$ ,  $\forall \theta_k \in \mathcal{S}$  e  $\bar{\theta}_k \in \bar{\mathcal{S}}$  são definidas por

$$F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} := \begin{bmatrix} A_{\theta_k, k} & \overbrace{0 \ \cdots \ 0}^{\bar{\theta}_k + d_{min} - 2} & A_{d, \theta_k, k} & \cdots & 0 \\ \hline & I_{d_{max} n} & & & 0_{d_{max} n \times n} \end{bmatrix},$$

$$G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} := \begin{bmatrix} B_{\theta_k, k} \\ 0_{d_{max} n \times m} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

onde  $\bar{\theta}_k + d_{min} - 2$  representa o número de matrizes nulas  $0_{n \times n}$  entre  $A_{\theta_k, k}$  e  $A_{d, \theta_k, k}$ . Se  $\bar{\theta}_k + d_{min} - 2 = 1$ , então o elemento da primeira coluna de  $F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  é igual a  $A_{\theta_k, k} + A_{d, \theta_k, k}$  e os outros elementos da linha são nulos. Além disso, observe que o chaveamento dos modos de operação do SLSM (3.7) ocorre de acordo com as duas cadeias de Markov  $\theta_k \in \mathcal{S}$  e  $\bar{\theta}_k \in \bar{\mathcal{S}}$ , sendo  $\theta_k$  relacionada com os modos de operação do sistema original (3.1) e a segunda cadeia  $\bar{\theta}_k$  com a variação do tempo de atraso definindo a estrutura das matrizes aumentadas do sistema.

### 3.1.3 Problema de Controle Nominal

O objetivo deste capítulo consiste em determinar as sequências de controle de realimentação de estado  $U^* = \{u_0^*, \dots, u_{N-1}^*\}$  que regulam o sistema Markoviano com atraso variante no tempo (3.1). Como (3.1) é equivalente ao SLSM (3.7) governado por duas cadeias de Markov mutuamente independentes, o problema de controle pode ser desenvolvido em termos do SLSM (3.7) equivalente.

Para alcançar este objetivo, baseado em Cerri e Terra (2017), o seguinte problema de otimização restrito é considerado, em que o valor esperado da função custo ao longo da

seqüência de trajetória  $z_k$  deve ser minimizado:

$$\begin{aligned} & \min_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \left\{ J_N(z_{k+1}, u_k) \middle| \bar{\mathcal{O}}_0, \mathcal{O}_0 \right\} \\ & \text{sujeito a } z_{k+1} = F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} u_k, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde

$$J_N(z_{k+1}, u_k) = z_N^T P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} z_N + \sum_{k=0}^{N-1} (z_k^T Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k + u_k^T R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} u_k), \quad (3.10)$$

para todo  $k = 0, 1, \dots, N$ , onde  $\bar{\mathcal{O}}_0 = \{\bar{\theta}_0 = \bar{i}, z_0\}$ ,  $\mathcal{O}_0 = \{\theta_0 = i, x_0\}$  e  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N}$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  e  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  são as matrizes de ponderação definidas positivas. A solução deste problema fornece a entrada de controle  $u_k^* \in \mathcal{U}^*$  que regula o SLSM (3.7) e, conseqüentemente, o sistema Markoviano com atraso (3.1).

## 3.2 Regulador Recursivo Nominal

A solução do problema de controle (3.9)-(3.10) será encontrada pela aplicação do princípio de otimalidade de Bellman. O problema de otimização restrita (3.9) é dividido em problemas de otimização de um passo, de modo que a programação dinâmica forneça a solução. Assim, a cada passo de tempo  $k = N, \dots, 0$ , consideramos o seguinte problema de otimização com restrição, em uma etapa:

$$\begin{aligned} & \min_{z_{k+1}, u_k} \mathbb{E} \left\{ J_k(z_{k+1}, u_k) \middle| \bar{\mathcal{O}}_k, \mathcal{O}_k \right\} \\ & \text{sujeito a } z_{k+1} = F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} u_k, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde

$$\mathbb{E} \left\{ J_k(z_{k+1}, u_k) \middle| \bar{\mathcal{O}}_k, \mathcal{O}_k \right\} = z_{k+1}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} z_{k+1} + z_k^T Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k + u_k^T R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} u_k,$$

com o operador  $\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}$  definido por

$$\begin{aligned} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} &= \mathbb{E} \{ P_{\bar{\theta}_{k+1}, \theta_{k+1}, k+1} \middle| \bar{\mathcal{O}}_k, \mathcal{O}_k \} \\ &= \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{s}} \sum_{j=1}^s \bar{p}_{\bar{\theta}_k \bar{j}} p_{\theta_k j} P_{j, j, k+1}. \end{aligned}$$

Pelo método da função penalidade, a restrição do problema (3.11) é incluída na função custo e ponderada por um parâmetro de penalidade  $\mu > 0$ . Portanto, para cada  $\mu > 0$ , o problema restrito (3.11) pode ser reescrito como

$$\min_{z_{k+1}, u_k} \mathcal{J}_{\mu, k}(z_{k+1}, u_k) \quad (3.12)$$



com uma nova função custo quadrática

$$\mathcal{J}_{\mu,k}(z_{k+1}, u_k) = \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{n_d} & -G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -I_{n_d} \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k \right)^T \begin{bmatrix} Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 \\ 0 & \mu I_{n_d} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Observe que o problema (3.12)-(3.13) se tornou um caso especial do problema de mínimos-quadrados regularizados (Seção 2.3.2). Além disso, a função custo (3.13) pode ser reescrita de tal forma que o problema (3.12) se torne um problema de mínimos-quadrados ponderados (Subseção 2.3.1), como segue:

$$\mathcal{J}_{\mu,k}(z_{k+1}, u_k) = \left( \begin{bmatrix} I_{n_d} & 0 \\ 0 & I_m \\ 0 & 0 \\ I_{n_d} & -G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{n_d} \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k \right)^T \begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu I_{n_d} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Referimos ao problema (3.12)-(3.13) como um *problema de controle de mínimos-quadrados regularizados*. No próximo teorema é descrita uma solução na forma de um arranjo matricial simétrico.

**Teorema 3.1.** *Considere o problema de controle de mínimos-quadrados regularizados (3.12)-(3.13), com  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ ,  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ . O estado do sistema  $z_{\mu, k+1}^*$ , a entrada de controle  $u_{\mu, k}^*$  e a função custo  $\mathcal{J}_{\mu, k}^*$ , condicionados pelo parâmetro de penalidade  $\mu > 0$ , são dados por:*

$$\begin{bmatrix} z_{\mu, k+1}^* \\ u_{\mu, k}^* \\ \mathcal{J}_{\mu, k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_d} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & z_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k, \quad (3.15)$$

onde, para  $k = N, \dots, 0$ , a matriz do sistema em malha fechada  $L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ , o ganho de realimentação  $K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  e a equação de Riccati  $P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ , são obtidos de (3.16).

$$\begin{bmatrix} L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & -I_{n_d} & F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} I_{n_d} & I_{n_d} & -G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ I_{n_d} & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & -G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{n_d} \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

**Prova 3.1.** Como mencionado, o problema (3.12)-(3.13) é um caso particular do problema de mínimos-quadrados ponderado, considerando as seguintes identificações entre os problemas (2.8)-(2.9) e (3.12)-(3.13):

$$x := \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W}_\mu := \begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu I_{n_d} \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

$$\mathcal{A} := \begin{bmatrix} I_{n_d} & 0 \\ 0 & I_m \\ 0 & 0 \\ I_{n_d} & -G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad e \quad b := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{n_d} \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k.$$

Como  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ ,  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  e  $\mu > 0$ , segue que  $\mathcal{W}_\mu \succ 0$ . Assim, podemos aplicar o item (iii) do Lema 2.5 e obter a solução dada em (3.15)-(3.16).  $\square$

O arranjo matricial simétrico apresentado no Teorema 3.1 fornece uma maneira unificada de obter o estado futuro  $z_{\mu, k+1}$ , a entrada de controle  $u_{\mu, k}^*$ , e a função custo quadrática  $\mathcal{J}_{\mu, k}^*$  para o SLSM (3.7), que engloba atraso variante no tempo. No entanto, os esforços computacionais de inversão da matriz do bloco central em (3.17) podem aumentar, dependendo da dimensão do atraso. Desta forma, através de manipulações algébricas em (3.17) podemos reduzir  $\{L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}, K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}, P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}\}$  para expressões algébricas explícitas, conforme apresentado no próximo resultado.

**Teorema 3.2.** Considere o problema de controle de mínimos-quadrados regularizados (3.12)-(3.13), com as condições iniciais conhecidas  $N$ ,  $\mu > 0$ ,  $x_0$ ,  $\pi_0$ ,  $\bar{\pi}_0$ ,  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ ,  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ . Para cada  $k = N - 1, \dots, 0$ , sua solução recursiva fornece  $L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  do SLSM (3.7) e, conseqüentemente, para cada  $k = 0, \dots, N - 1$ , concede o Sistema (3.1) em malha-fechada, conforme descrito no Algoritmo 3.1.

**Prova 3.2.** Segue da solução fornecida pelo arranjo matricial simétrico (3.16), que também pode ser compreendida com um sistema de equações lineares simultâneas,

$$\begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} I_{n_d} & I_{n_d} & -G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ I_{n_d} & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & -G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{n_d} \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Algoritmo 3.1** Regulador Recursivo Nominal (RRN)

**Modelo:** Assumir o modelo de SLSMA (3.1).

**SLSM:** Definir o SLSM aumentado (3.7) conforme (3.6)-(3.8), com  $\theta_k$  e  $\bar{\theta}_k$  associadas às  $\mathbb{P}$  e  $\bar{\mathbb{P}}$ , respectivamente, satisfazendo (3.2).

**Regulador Recursivo Nominal:**

*Condições iniciais:* Sejam  $N$ ,  $\mu > 0$ ,  $x_0$ ,  $\pi_0$ ,  $\bar{\pi}_0$ ,  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  e  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ .

Para todo  $k = N - 1, \dots, 0$ :

1: Calcular as matrizes auxiliares:

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} &= (\mu^{-1} I_{n_d} + \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1})^{-1}, \\ \Omega_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= I_{n_d} + \mu^{-1} I_{n_d} \left( \mathbb{X}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1}. \end{aligned}$$

2: Calcular a matriz do sistema em malha fechada, o ganho de realimentação e a equação de Riccati, respectivamente:

$$L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \Omega_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad (3.18)$$

$$K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = -R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \mathbb{X}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad (3.19)$$

$$P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \mathbb{X}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}. \quad (3.20)$$

**SLSMA:** Obter para cada  $k = 0, \dots, N - 1$ :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_{\theta_k, k} x_k + A_{d, \theta_k, k} x_{k-d_k} + B_{\theta_k, k} u_k, \\ \text{com } u_k &= K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k. \end{aligned}$$

e o conjunto de equações equivalente,

$$\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} X_1 + X_5 = 0, \quad (3.21)$$

$$R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} X_2 + X_6 = 0, \quad (3.22)$$

$$Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} X_3 = -I_{n_d}, \quad (3.23)$$

$$\mu^{-1} X_4 + X_5 - G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} X_6 = F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad (3.24)$$

$$X_1 + X_4 = 0, \quad (3.25)$$

$$X_2 - G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T X_4 = 0. \quad (3.26)$$

De (3.21) com (3.25) e (3.22) com (3.26), temos que

$$X_5 = \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} X_4 \text{ e } X_6 = -R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T X_4, \quad (3.27)$$

que combinando com (3.24), resulta em

$$\begin{aligned} X_4 &= \left( \underbrace{\mu^{-1}I_{n_d} + \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1}}_{\mathbb{X}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1}} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \\ &= \left( \mathbb{X}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

Substituindo (3.27) e (3.28) em (3.24), tem-se

$$\begin{aligned} X_5 &= F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} X_6 - \mu^{-1} X_4 \\ &= F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \left( G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T - \mu I_r \right) \left( \mathbb{X}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \end{aligned}$$

e, de (3.27) com (3.28),

$$X_6 = -R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \hat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}.$$

De (3.16) segue que:

$$\begin{bmatrix} L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{n_d} \\ 0 & 0 & F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^- \\ I_{n_d} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_5 \\ X_6 \\ -X_3 + F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T X_4 \end{bmatrix}.$$

Logo,  $L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = X_5$ ,  $K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = X_6$ . De (3.23) e (3.28), temos que:

$$P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \mathbb{X}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}.$$

□

**Observação 3.2.** Se  $\mu \rightarrow \infty$ , então  $\mathbb{X}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \rightarrow \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}$  e  $\Omega_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \rightarrow I_{n_d}$ . Portanto, (3.20) torna-se

$$\begin{aligned} P_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ &= Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \left( R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \right. \\ &\quad \left. G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

que representa uma equação de Riccati acoplada padrão (COSTA et al., 2005) governada por duas cadeias de Markov independentes.

### 3.3 Condições para Estabilidade e Convergência

Nesta seção o comportamento do regulador recursivo nominal, descrito no Algoritmo 3.1, é investigado quando as matrizes paramétricas do sistema são constantes. Assim, considere o SLSM (3.7) e a função custo quadrática (3.10) com os parâmetros constantes,

$$z_{k+1} = F_{\bar{i},i} z_k + G_{\bar{i},i} u_k, \quad (3.30)$$

com a lei de controle  $u_k = K_{\bar{i},i} z_k$ , sendo  $K_{\bar{i},i}$ ,  $i \in \mathcal{S}$  e  $\bar{i} \in \bar{\mathcal{S}}$ , definido em (3.19).

Considerando o sistema (3.30), a expressão algébrica (3.20) pode ser reescrita como

$$P_{\mu,\bar{i},i,k} = Q_{\bar{i},i} + F_{\bar{i},i}^T \left( \mathbb{X}_{\bar{i},i,k+1}^{-1} + G_{\bar{i},i}^T I_m G_{\bar{i},i}^T \right)^{-1} F_{\bar{i},i},$$

ou ainda, pelo lema de inversão de matrizes (veja o Lema A.7 no Apêndice A), podemos expandir essa expressão e obter,

$$P_{\mu,\bar{i},i,k} = Q_{\bar{i},i} + F_{\bar{i},i}^T \mathbb{X}_{\bar{i},i,k+1} F_{\bar{i},i} - F_{\bar{i},i}^T \mathbb{X}_{\bar{i},i,k+1} G_{\bar{i},i} \left( I_m + G_{\bar{i},i}^T \mathbb{X}_{\bar{i},i,k+1} G_{\bar{i},i} \right)^{-1} G_{\bar{i},i}^T \mathbb{X}_{\bar{i},i,k+1} F_{\bar{i},i}. \quad (3.31)$$

Observe que a expressão (3.31) possui uma estrutura semelhante a uma equação de Riccati recursiva acoplada padrão (COSTA et al., 2005), a qual é representada por

$$P_{i,k} = \mathbb{Q}_i + \mathbb{A}_i^T \mathcal{E}_{i,k+1} \mathbb{A}_i - \mathbb{A}_i^T \mathcal{E}_{i,k+1} \mathbb{B}_i \left( \mathcal{R}_i + \mathbb{B}_i^T \mathcal{E}_{i,k+1} \mathbb{B}_i \right)^{-1} \mathbb{B}_i^T \mathcal{E}_{i,k+1} \mathbb{A}_i, \quad (3.32)$$

e nos possibilita realizar as seguintes identificações entre (3.31) e (3.32):

$$P_{i,k} \leftarrow P_{\mu,\bar{i},i,k}, \quad \mathbb{Q}_i \leftarrow \widehat{Q}_{\bar{i},i}, \quad \mathbb{A}_i \leftarrow \widehat{F}_{\bar{i},i}, \quad \mathcal{E}_{i,k+1} \leftarrow \mathbb{X}_{\bar{i},i,k+1}, \quad \mathbb{B}_i \leftarrow \widehat{G}_{\bar{i},i}, \quad \mathcal{R}_i \leftarrow I_m. \quad (3.33)$$

Desta forma, a análise da estabilidade e convergência do regulador recursivo nominal pode ser desenvolvida baseada no problema clássico do regulador linear quadrático para SLSM. Com este propósito, primeiramente, as seguintes matrizes são definidas:  $\mathbf{F} = (F_{1,1}, \dots, F_{1,s}, \dots, F_{\bar{s},1}, \dots, F_{\bar{s},s}) \in \mathbb{H}^{n_d \times n_d}$ ,  $\mathbf{G} = (G_{1,1}, \dots, G_{1,s}, \dots, G_{\bar{s},1}, \dots, G_{\bar{s},s}) \in \mathbb{H}^{n_d \times m}$ ,  $\mathbf{P}_k = (P_{1,1,k}, \dots, P_{1,s,k}, \dots, P_{\bar{s},1,k}, \dots, P_{\bar{s},s,k}) \in \mathbb{H}_+^{n_d}$ ,  $\mathbf{Q} = (Q_{1,1}, \dots, Q_{1,s}, \dots, Q_{\bar{s},1}, \dots, Q_{\bar{s},s}) \in \mathbb{H}_+^{n_d}$  e  $\mathbf{R} = (R_{1,1}, \dots, R_{1,s}, \dots, R_{\bar{s},1}, \dots, R_{\bar{s},s}) \in \mathbb{H}_+^m$ . Além disso, assume-se que  $Q_{\bar{i},i} \succ 0$ ,  $R_{\bar{i},i} \succ 0$  e  $p_{ij}$  e  $\bar{p}_{\bar{i},\bar{j}}$  são constantes, para  $i, j \in \mathcal{S}$  e  $\bar{i}, \bar{j} \in \bar{\mathcal{S}}$ .

**Proposição 3.1.** *Considere  $\mathbf{F} \in \mathbb{H}^{n_d \times n_d}$ ,  $\mathbf{G} \in \mathbb{H}^{n_d \times m}$  e  $\mathbf{Q} \in \mathbb{H}_+^{n_d}$  conhecidos a priori. Assuma que  $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$  é estabilizável e  $(\mathbf{Q}, \mathbf{F})$  é detectável. Então, para qualquer condição inicial  $P_{\mu,N,N} \succ 0$ , e  $\mu > 0$  fixado,  $\mathbf{P}_k \in \mathbb{H}_+^{n_d}$  converge para a única solução estabilizante  $\mathbf{P} = (P_{\mu,1,1}, \dots, P_{\mu,1,s}, \dots, P_{\mu,\bar{s},1}, \dots, P_{\mu,\bar{s},s}) \in \mathbb{H}_+^{n_d}$  da equação de Riccati algébrica (3.20), tal que a matriz em malha-fechada  $L_{\mu,\bar{i},i}$  em (3.18), com  $i \in \mathcal{S}$  e  $\bar{i} \in \bar{\mathcal{S}}$ , do SLSM (3.7) é estável.*

**Prova 3.3.** De acordo com os resultados apresentados no Apêndice D, a estabilizabilidade de  $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$  e a detectabilidade de  $(\mathbf{Q}, \mathbf{F})$  garantem a convergência de  $\mathbf{P}_k$  para a solução estabilizante única  $\mathbf{P} \in \mathbb{H}_+^{n_d}$  de (3.20) que estabiliza a matriz de malha fechada  $L_{\mu, \bar{i}, i}$  em (3.18) quando  $u_k = K_{\mu, \bar{i}, i} z_k$ .  $\square$

Conforme a Proposição 3.1, as condições de convergência e estabilidade são garantidas para qualquer  $\mu > 0$ . Observe que a seleção de  $\mu$  é conveniente em situações práticas, pois não é necessário métodos de pesquisa numérica. Além disso, no exemplo numérico é possível verificar que o desempenho do sistema permanece o mesmo após atingir uma certa ordem de grandeza.

### 3.4 Exemplo Ilustrativo

Nesta seção, o desempenho do regulador recursivo nominal (Algoritmo 3.1) é avaliado por meio de um exemplo numérico. Além disso, o regulador proposto é comparado com outras abordagens apresentadas na literatura.

Considere o SLSMA (3.1) com quatro modos de operação e as seguintes matrizes nominais estudadas em (ZHANG et al., 2008):

$$\begin{aligned} A_{1,k} &= \begin{bmatrix} -1,16 & 0,54 \\ 0,23 & -0,92 \end{bmatrix}, \quad A_{d,1,k} = \begin{bmatrix} -0,02 & 0,12 \\ 0,07 & -0,14 \end{bmatrix}, \quad B_{1,k} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1,6 \end{bmatrix}, \\ A_{2,k} &= \begin{bmatrix} 0,92 & 0,54 \\ 0,23 & 0,92 \end{bmatrix}, \quad A_{d,2,k} = \begin{bmatrix} 0,02 & 0,12 \\ 0,07 & 0,02 \end{bmatrix}, \quad B_{2,k} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,08 \end{bmatrix}, \\ A_{3,k} &= \begin{bmatrix} 0,77 & 0,54 \\ 0,23 & -0,92 \end{bmatrix}, \quad A_{d,3,k} = \begin{bmatrix} -0,02 & 0,12 \\ 0,07 & 0,02 \end{bmatrix}, \quad B_{3,k} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,2 \end{bmatrix}, \\ A_{4,k} &= \begin{bmatrix} -1,16 & 0,54 \\ 0,23 & 0,92 \end{bmatrix}, \quad A_{d,4,k} = \begin{bmatrix} 0,02 & 0,12 \\ 0,07 & -0,14 \end{bmatrix}, \quad \text{e } B_{4,k} = \begin{bmatrix} -0,7 \\ 0,2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

para todo  $k \geq 0$ , com a condição inicial  $x_0 = [0,2 \quad -0,2]^T$  e  $\varphi_0(k) = x_0, \forall k \leq 0$ . As matrizes de ponderação, definida em (3.10), são dadas por

$$\begin{aligned} P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} &= Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = I_{n_d} \text{ e } R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = I_m, \\ \forall \bar{\theta}_k &= 1, \dots, \bar{s} \text{ e } \forall \theta_k = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Assume-se que a matriz de probabilidade de transição seja completamente conhecida, proposta por Zhang et al. (2008),

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,19 & 0,01 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \forall i, j \in \mathcal{S}.$$

O atraso é considerado variante no tempo com os limitantes  $d_{min} = 1$  e  $d_{max} = 10$  ou 15, com a taxa máxima de variação do atraso  $\Delta d = d_{max}$ . Assim, a probabilidade de transição da cadeia de Markov  $\bar{\theta}_k$ , definida em (3.4), é dada por:

$$\bar{p}_{\bar{i}\bar{j}} = \frac{1}{\bar{s}}, \text{ com } \bar{s} = d_{max} - d_{min} + 1, \forall \bar{i}, \bar{j} \in \bar{\mathcal{S}}.$$

O Algoritmo 3.1 para SLSM nominal com atraso variante no tempo, intitulado Regulador Recursivo Nominal, é avaliado através de uma comparação com duas abordagens baseadas em LMIs: o controlador de sistemas chaveados apresentado em Sun et al. (2006, Teo. 2) e o controlador de sistemas Markovianos proposto por Zhang et al. (2008, Teo. 2). Uma vez que essas abordagens consideram um modelo de sistema Markoviano completamente conhecido e atraso aleatório no estado.

Todas as rotinas foram escritas e executadas no software *MATLAB*<sup>®</sup>, versão 9.8 (R2020a), utilizando *YALMIP*<sup>®</sup> *Toolbox* (LÖFBERG, 2004) para resolução das LMIs. Para a inicialização do Algoritmo 3.1, adota-se

$$N = 50, \pi_0 = 0,25 \times \mathbf{1}_s^T, \bar{\pi}_0 = 1/\bar{s} \times \mathbf{1}_{\bar{s}}^T, P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} = I_{n_d} \text{ e } \mu = 10^{16}.$$

A simulação consiste em realizar  $T = 5000$  experimentos de Monte Carlo, no horizonte de tempo  $N = 50$ . Os modos de operação do sistema  $\theta_k$  e  $\bar{\theta}_k$  são selecionados de acordo com suas matrizes de probabilidade de transição,  $\mathbb{P}$  e  $\bar{\mathbb{P}}$ , respectivamente. Além disso, em cada passo de tempo,  $d_k$  é um número inteiro aleatoriamente sorteado no intervalo  $[d_{min}, d_{max}]$ .

Na Tabela 3.1 são apresentados os resultados médios e desvios padrão relativos às normas dos estados e das entradas de controle, denotados por  $\|x_k\|$ ,  $\sigma_x$ ,  $\|u_k\|$  e  $\sigma_u$ , respectivamente. Os resultados mostram que, apesar da presença do atraso variante no tempo ( $d_k \in [1, 10]$ ), o desempenho em termos das normas dos estados são semelhantes para o RRN (Algoritmo 3.1) e o controlador de Zhang et al. (2008, Teo. 2). Com relação às normas das entradas de controle, o regulador proposto apresenta um valor maior do que a abordagem de Zhang et al. (2008, Teo. 2), uma vez que a lei de controle proposta considera o vetor de estado aumentado. Por outro lado, o controlador de Sun et al. (2006, Teo. 2) não forneceu um ganho de realimentação de estado capaz de controlar o SLSMA, apresentando uma solução ineficaz. Por este motivo, não está apresentado na tabela.

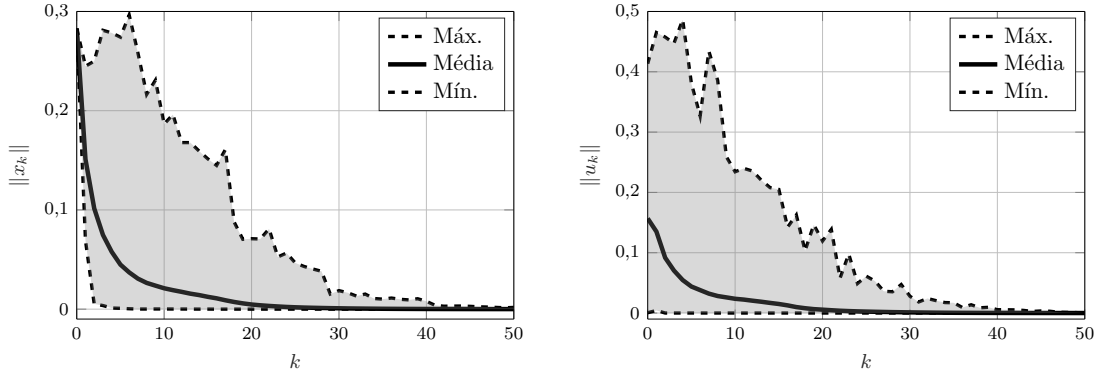
Tabela 3.1 – Desempenho dos controladores sobre 5000 experimentos para  $d_k \in [1, 10]$ .

Controladores	$\ x_k\ $	$\sigma_x$	$\ u_k\ $	$\sigma_u$
RRN (Algoritmo 3.1)	<b>0,2848</b>	<b>0,0400</b>	0,1552	0,02185
Zhang et al. (2008, Teo. 2)	0,2921	0,0412	<b>0,0950</b>	<b>0,0134</b>

O regulador recursivo proposto regula o SLSM nominal com o atraso de tempo por pelo menos  $d_{max} = 15$ , com  $d_{min} = 1$ , enquanto que o limitante máximo de atraso permitido

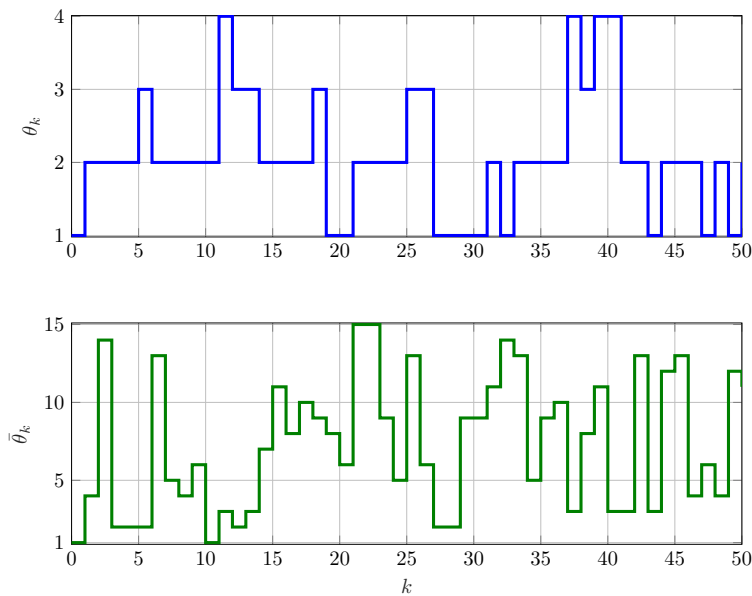
em Zhang et al. (2008, Teo. 2) é  $d_{max} = 10$  e, o controlador de Sun et al. (2006, Teo. 2) é ineficaz para qualquer  $d_k \in [1, 15]$ , como pode ser visto na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Resultados obtidos pelo RRN quando  $d_k \in [1, 15]$ .



A Figura 3.2 ilustra a comutação dos modos de operação das cadeias de Markov  $\theta_k$  e  $\bar{\theta}_k$  correspondentes a um dos experimentos mostrado na Figura 3.1. A permutação ocorre de acordo com as matrizes de probabilidade de transição  $\mathbb{P}$  e  $\bar{\mathbb{P}}$ .

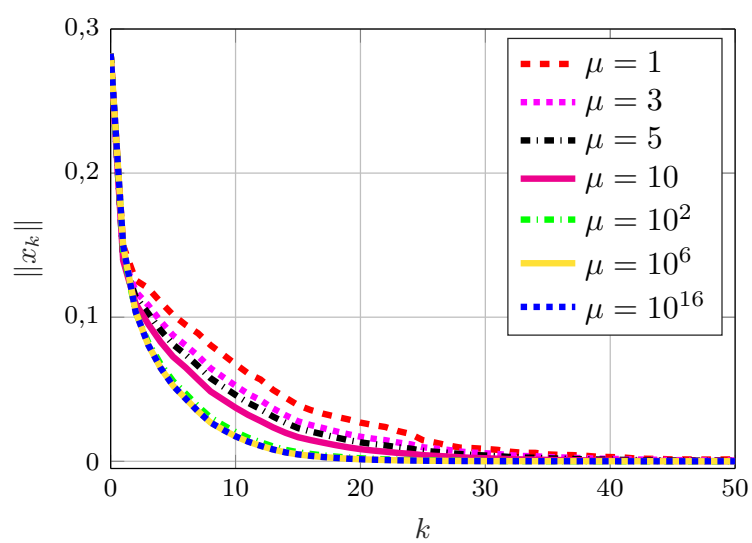
Figura 3.2 – Comutação dos modos de operação do SLSM quando  $d_k \in [1, 15]$ .



Para concluir a avaliação do RRN proposto, analisa-se a influência do parâmetro de penalidade  $\mu$  no desempenho do regulador. A Figura 3.3 ilustra os resultados das simulações com diversos valores assumidos para  $\mu$ . Para cada valor, calcula-se a média da norma do estado, conforme descrito anteriormente, considerando o atraso  $d_k \in [1, 2]$ . De acordo com o método de função penalidade (Seção 2.1), assumir  $\mu \rightarrow \infty$  obtém-se a solução ótima. No entanto, note que o regulador recursivo proposto estabiliza o sistema mesmo para pequenos valores de  $\mu$ .



Figura 3.3 – Efeito do parâmetro de penalidade  $\mu$  nas médias das normas dos estados do SLSMA quando  $d_k \in [1, 2]$ .





# Controle de SLSMA com Incertezas Limitadas em Norma

Neste capítulo, apresentamos uma versão robusta do Regulador Recursivo Nominal apresentado no Capítulo 3. Neste caso, o sistema Markoviano com atraso no estado também estará sujeito a incertezas paramétricas limitadas em norma.

O procedimento utilizado no Capítulo 3 é estendido para o desenvolvimento de um regulador robusto. De modo similar, a dedução do controle robusto é realizada através da solução de um problema de otimização restrito. Em seguida, o método da função penalidade (Seção 2.1) é aplicado para transformá-lo em um problema irrestrito, obtendo um problema de mínimos-quadrados regularizados com incertezas limitadas em norma (Seção 2.3.3), cuja a solução fornece as expressões do Regulador Robusto Recursivo (RRR). O regulador é apresentado na forma de um arranjo matricial simétrico e como expressões algébricas explícitas. As propriedades de estabilidade e convergência do regulador proposto são discutidas e o capítulo é finalizado com um exemplo ilustrativo.

## 4.1 Formulação do problema

### 4.1.1 Modelo do Sistema

Considere o SLSMA com incertezas paramétricas limitadas em norma de tempo discreto

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A_{\theta_k,k} + \delta A_{\theta_k,k})x_k + (A_{d,\theta_k,k} + \delta A_{d,\theta_k,k})x_{k-d_k} + (B_{\theta_k,k} + \delta B_{\theta_k,k})u_k, \\ x_k &= \varphi_0(k), \quad k \in [-d_{max}, 0], \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde  $x_k \in \mathbb{R}^n$  é o estado no instante  $k$ ,  $x_{k-d_k} \in \mathbb{R}^n$  é o estado atrasado por  $d_k$  amostras,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle,  $\varphi_0(k)$  é a condição inicial para  $k = -d_{max}, -d_{max} + 1, \dots, 0$ . As matrizes paramétricas  $A_{\theta_k,k}, A_{d,\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são conhecidas e as incertezas paramétricas  $\delta A_{\theta_k,k}, \delta A_{d,\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\delta B_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são limitadas em

norma e modeladas por

$$\begin{bmatrix} \delta A_{\theta_k,k} & \delta A_{d,\theta_k,k} & \delta B_{\theta_k,k} \end{bmatrix} = H_{\theta_k,k} \Delta_{\theta_k,k} \begin{bmatrix} E_{A_{\theta_k,k}} & E_{A_{d,\theta_k,k}} & E_{B_{\theta_k,k}} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

com  $H_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  sendo uma matriz não-nula,  $E_{A_{\theta_k,k}}, E_{A_{d,\theta_k,k}} \in \mathbb{R}^{q \times n}$  e  $E_{B_{\theta_k,k}} \in \mathbb{R}^{q \times m}$  matrizes conhecidas e  $\Delta_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{p \times q}$  uma matriz de contração com  $\|\Delta_{\theta_k,k}\| \leq 1$ . As incertezas da forma (4.2) são comuns em problemas robustos de controle e filtragem, uma vez que são úteis para modelar especificações de tolerância nos parâmetros de um sistema físico (SAYED, 2001).

A comutação dos modos de operação do Sistema (4.1) ocorre de acordo com uma cadeia de Markov de tempo discreto de estado finito  $\theta_k \in \mathcal{S} = \{1, \dots, s\}$  associada a uma matriz de probabilidade de transição  $\mathbb{P} = [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{s \times s}$ ,  $i, j \in \mathcal{S}$  com entradas satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \Pr[\theta_{k+1} = j \mid \theta_k = i] &= p_{ij}, \quad \Pr[\theta_0 = i] = \pi_{i,0}, \\ \sum_{j=1}^s p_{ij} &= 1 \text{ e } 0 \leq p_{ij} \leq 1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

O atraso de tempo é considerado governado aleatoriamente por uma segunda cadeia de Markov  $\bar{\theta}_k \in \bar{\mathcal{S}} = \{1, \dots, \bar{s}\}$ ,  $\bar{s} = d_{max} - d_{min} + 1$ , onde

$$0 \leq d_{min} \leq d_k \leq d_{max} \text{ e } \|d_{k+1} - d_k\| \leq \Delta d \leq d_{max} \quad (4.4)$$

com  $d_{min} = \min\{d_k\}$ ,  $d_{max} = \max\{d_k\}$  e  $\Delta d$  a taxa máxima de variação do atraso entre dois instantes consecutivos, sendo que a amostra futura  $d_{k+1}$  pode assumir quaisquer valores pertencentes ao intervalo  $[\bar{d}_{min}, \bar{d}_{max}]$ , com  $\bar{d}_{min} = \max(d_{min}, d_k - \Delta d)$  e  $\bar{d}_{max} = \min(d_{max}, d_k + \Delta d)$ . Além disso, a cadeia de Markov  $\bar{\theta}_k$  está associada a uma matriz de probabilidade de transição  $\bar{\mathbb{P}} = [\bar{p}_{\bar{i}\bar{j}}] \in \mathbb{R}^{\bar{s} \times \bar{s}}$ ,  $\bar{i}, \bar{j} \in \bar{\mathcal{S}}$ , com o vetor de distribuição inicial  $\bar{\pi}_{\bar{i},0}$ , satisfazendo as condições estabelecidas em (4.3) e definida de acordo com a taxa máxima de variação de atraso,

$$\bar{p}_{ij} = \begin{cases} 1/\bar{s} & \begin{cases} j \in (\bar{d}_{min} + 1, \bar{d}_{max} + 1), & d_{min} = 0, \\ j \in (\bar{d}_{min}, \bar{d}_{max}), & d_{min} \neq 0, \end{cases} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Uma lei de controle independente do atraso é considerada para regular o SLSMA (4.1),

$$u_k = K_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k, \quad \forall k \geq 0, \quad (4.6)$$

onde  $K_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = [K_{1, \theta_k, k} \quad K_{2, \theta_k, k} \quad \dots \quad K_{\bar{s}, \theta_k, k}] \in \mathbb{R}^{m \times n_d}$ , com  $n_d = d_{max}n + n$ , é o ganho a ser determinado e  $z_k$  é o estado aumentado relacionado a condição inicial  $z_0$ , dada por

$$z_k := \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_{k-d_{max}+1} \\ x_{k-d_{max}} \end{bmatrix} \text{ e } z_0 := \begin{bmatrix} \varphi_0(0) \\ \varphi_0(-1) \\ \vdots \\ \varphi_0(-d_{max}+1) \\ \varphi_0(-d_{max}) \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

**Observação 4.1.** *O ganho de realimentação de estado  $K_k$  juntamente com o vetor de estado aumentado  $z_k$  fornece uma entrada de controle  $u_k$  com a dimensão do SLSMA.*

Observe que a lei de controle (4.6) descarta o conhecimento em tempo real do atraso  $d_k$ , por isso é nomeada independente de atraso. Além disso, sua aplicação em processo real é mais fácil do que leis de controle dependentes de atraso (SOUZA et al., 2019).

### 4.1.2 Descrição do Modelo Aumentado com Incertezas Limitadas em Norma

Uma abordagem para tratar sistemas com tempo de atraso consiste no aumento do vetor de estado do sistema através da aplicação do método de elevação (HETEL et al., 2008), de tal forma que se obtém um sistema sem atrasos correspondente. Baseado nesta técnica e considerando que o tempo de atraso tem comportamento Markoviano (QIU et al., 2015), o SLSMA (4.1) pode ser reescrito como o SLSM aumentado sem atrasos

$$z_{k+1} = (F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k})z_k + (G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k})u_k, \quad k \in [0, N], \quad (4.8)$$

que, por sua vez, tem os modos de operação governados por duas cadeias de Markov mutuamente independentes. As matrizes de parâmetros incertos são modeladas como

$$\begin{bmatrix} \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} = M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \Delta_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \begin{bmatrix} N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} & N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

As matrizes paramétricas aumentadas  $F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $\delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$  e  $G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $\delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n_d \times m}$ ,  $M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n_d \times p}$ ,  $\Delta_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} := \Delta_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ,  $N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \in \mathbb{R}^{q \times n_d}$  e  $N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \in \mathbb{R}^{q \times m}$ , para todo  $\forall \theta_k \in \mathcal{S}$  e  $\bar{\theta}_k \in \bar{\mathcal{S}}$ , são dadas por

$$\begin{aligned} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &:= \begin{bmatrix} \overbrace{A_{\theta_k, k} \quad 0 \cdots 0 \quad A_{d, \theta_k, k} \cdots}^{\bar{\theta}_k + d_{min} - 2} & 0 \\ \hline I_{d_{max} n} & 0_{d_{max} n \times n} \end{bmatrix}, \quad G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} := \begin{bmatrix} B_{\theta_k, k} \\ 0_{d_{max} n \times m} \end{bmatrix}, \\ \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &:= \begin{bmatrix} \overbrace{\delta A_{\theta_k, k} \quad 0 \cdots 0 \quad \delta A_{d, \theta_k, k} \cdots}^{\bar{\theta}_k + d_{min} - 2} & 0 \\ \hline 0_{d_{max} n} & 0_{d_{max} n \times n} \end{bmatrix}, \quad \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} := \begin{bmatrix} \delta B_{\theta_k, k} \\ 0_{d_{max} n \times m} \end{bmatrix}, \\ M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &:= \begin{bmatrix} H_{\theta_k, k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} := \begin{bmatrix} E_{A_{\theta_k, k}} & \overbrace{0 \cdots 0}^{\bar{\theta}_k + d_{min} - 2} & E_{A_{d, \theta_k, k}} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{ e } N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} := E_{B_{\theta_k, k}}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde  $\bar{\theta}_k + d_{min} - 2$  representa a quantidade de matrizes nulas entre  $A_{\theta_k, k}$  e  $A_{d, \theta_k, k}$  e, quando  $\bar{\theta}_k + d_{min} - 2 = 1$ , o elemento da primeira coluna da matriz  $F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  é igual a  $A_{\theta_k, k} + A_{d, \theta_k, k}$

e os demais são nulos. Uma observação análoga é válida para os elementos da primeira coluna das matrizes  $\delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  e  $N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}$ .

Deve-se notar que a comutação das matrizes originais do sistema é governada pela cadeia de Markov  $\theta_k \in \mathcal{S}$ , enquanto  $\bar{\theta}_k \in \bar{\mathcal{S}}$  está relacionada com a variação do tempo de atraso. As cadeias de Markov são mutuamente independentes e definem os modos de operação das matrizes paramétricas do sistema aumentado, com ambas as variáveis de salto consideradas conhecidas a cada instante  $k$ . Em (QIU et al., 2015), a fim de resolver o problema de controle para o SLSM com atraso de tempo Markoviano, dois processos de Markov de tempo discreto são adotados.

### 4.1.3 Problema de Controle Robusto

O objetivo deste capítulo consiste em fornecer um conjunto de ganhos estabilizadores  $\mathbb{K}_k = \{\mathcal{K}_k \in \mathbb{H}^{m \times nd}\}$ , tal que  $\mathcal{K}_k = [K_{1,1,k} \ \dots \ K_{1,s,k} \ \dots \ K_{\bar{s},1,k} \ \dots \ K_{\bar{s},s,k}] \in \mathbb{H}^{m \times nd}$  estabiliza o SLSMA (4.1) na média quadrática quando  $u_k = K_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k$ , com  $\theta_k \in \mathcal{S}$  e  $\bar{\theta}_k \in \bar{\mathcal{S}}$ . Para alcançar este objetivo, o Sistema (4.1) foi transformado em um SLSM (4.8) incerto governado por duas cadeias de Markov mutuamente independentes. Assim, o projeto de um Regulador Robusto Recursivo para o SLSMA (4.1) pode ser realizado, equivalentemente, em termos do SLSM (4.8).

Desta forma, baseado em Cerri e Terra (2017), o seguinte problema de otimização min-max é proposto, onde o valor esperado da função custo quadrática ao longo da sequência de trajetória  $z_k$  é minimizado sob a máxima influência das incertezas paramétricas  $\{\delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}\}$ :

$$\begin{aligned} & \min_{u_k, z_{k+1}} \max_{\delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \mathbb{E} \left\{ J_N(z_{k+1}, u_k) | \bar{\mathcal{O}}_0, \mathcal{O}_0 \right\} \\ & \text{sujeito a } z_{k+1} = (F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}) z_k + (G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}) u_k, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde

$$J_N(z_{k+1}, u_k) = z_N^T P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} z_N + \sum_{k=0}^{N-1} (z_k^T Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k + u_k^T R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} u_k), \quad (4.12)$$

para todo  $k = 0, 1, \dots, N$ , na qual  $\bar{\mathcal{O}}_0 = \{\bar{\theta}_0 = \bar{i}, z_0\}$ ,  $\mathcal{O}_0 = \{\theta_0 = i, x_0\}$ ,  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N}$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  e  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ . A solução para este problema fornece, recursivamente, a sequência de controle de realimentação de estado  $\{u_k\}_{k=0}^{N-1}$  que estabiliza o SLSM (4.8) e, conseqüentemente, o sistema Markoviano com atraso aleatório no estado e incertezas paramétricas.

## 4.2 Regulador Robusto Recursivo

Semelhante ao procedimento realizado na Seção 3.2 para o problema de controle de mínimos-quadrados regularizados, primeiramente, o princípio de otimalidade de Bellman

é aplicado. Desta forma, o problema de otimização (4.11)-(4.12) pode ser resolvido recursivamente por meio do método de programação dinâmica. Assim, a cada passo de tempo  $k = N, \dots, 0$ , o seguinte problema de otimização min-max de um passo é considerado:

$$\begin{aligned} & \min_{z_{k+1}, u_k} \max_{\delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \mathbb{E} \left\{ J_k(z_{k+1}, u_k) \middle| \bar{\mathcal{O}}_k, \mathcal{O}_k \right\} \\ & \text{sujeito a } z_{k+1} = (F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}) z_k + (G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}) u_k, \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde

$$\mathbb{E} \left\{ J_k(z_{k+1}, u_k) \middle| \bar{\mathcal{O}}_k, \mathcal{O}_k \right\} = z_{k+1}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} z_{k+1} + z_k^T Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k + u_k^T R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} u_k, \quad (4.14)$$

com o operador  $\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}$  definido por

$$\begin{aligned} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} &= \mathbb{E} \{ P_{\bar{\theta}_{k+1}, \theta_{k+1}, k+1} \middle| \bar{\mathcal{O}}_k, \mathcal{O}_k \} \\ &= \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{s}} \sum_{j=1}^s \bar{p}_{\bar{\theta}_k, \bar{j}} p_{\theta_k, j} P_{\bar{j}, j, k+1}. \end{aligned}$$

Pelo método da função penalidade apresentado na Seção 2.1, o problema restrito (4.13) é transformado em um irrestrito. A restrição linear do problema (4.13) tem uma forma geral e não pode ser inserida diretamente na função custo por substituição. Portanto, a restrição é incluída na função custo como um termo quadrático multiplicado por um parâmetro de penalidade  $\mu > 0$ , que penaliza as violações da restrição. Para um  $\mu > 0$  fixado, o problema (4.13) é reescrito como

$$\min_{z_{k+1}, u_k} \max_{\delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \mathcal{J}_{\mu, k}(z_{k+1}, u_k) \quad (4.15)$$

com uma nova função custo quadrática

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\mu, k}(z_{k+1}, u_k) &= \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} + \\ & \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{n_d} & -(G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -I_{n_d} \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k \right)^T \begin{bmatrix} Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 \\ 0 & \mu I_{n_d} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Observe que (4.15)-(4.16) tem a forma de um problema de mínimos-quadrados regularizados. Assim, refere-se a (4.15)-(4.16) como um *problema de controle de mínimos-quadrados regularizados com incertezas limitadas em norma*. Portanto, os resultados apresentados na Seção 2.3.4 são utilizados para propor uma solução ao problema (4.15)-(4.16), a qual é descrita em um arranjo matricial simétrico no próximo teorema.

**Teorema 4.1.** *Considere o problema de controle de mínimos-quadrados regularizados com incertezas limitadas em norma (4.15)-(4.16), com  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ ,  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$*

e  $N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}$  é posto linha pleno. O estado do sistema  $z_{\mu, k+1}^*$ , a entrada de controle  $u_{\mu, k}^*$  e a função custo  $\mathcal{J}_{\mu, k}^*$ , condicionados pelo parâmetro de penalidade  $\mu > 0$ , são dados por:

$$\begin{bmatrix} z_{\mu, k+1}^* \\ u_{\mu, k}^* \\ \mathcal{J}_{\mu, k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_d} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & z_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k, \quad (4.17)$$

onde, para  $k = N, \dots, 0$ , a matriz do sistema em malha fechada  $L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ , o ganho de realimentação  $K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  e a equação de Riccati  $P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ , são obtidos de (4.18).

$$\begin{bmatrix} L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & -I_{n_d} & F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi(\mu, \hat{\lambda}) & 0 & I_{n_d} & -G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}^{-1} I_q & 0 & -N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \\ I_{n_d} & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & -G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & -N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{n_d} \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

com  $\Phi(\mu, \hat{\lambda}) = \mu^{-1} I_{n_d} - \hat{\lambda}^{-1} M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T$  e  $\hat{\lambda} = \beta \| \mu M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \|$ , para algum  $\beta > 1$ ;

**Prova 4.1.** Como mencionado anteriormente, (4.15)-(4.16) é um problema de mínimos-quadrados regularizados, considerando os seguintes mapeamentos entre os problemas (2.20)-(2.21) e (4.15)-(4.16):

$$\begin{aligned} x &:= \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} := \begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W} := \begin{bmatrix} Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 \\ 0 & \mu I_{n_d} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A} &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{n_d} & -G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad \delta \mathcal{A} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} -I_{n_d} \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k \quad \text{e} \quad \delta b := \begin{bmatrix} 0 \\ \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Além disso, considerando as identificações entre os modelos de incertezas (2.22)-(4.16):

$$\mathcal{H} := \begin{bmatrix} 0 \\ M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad \Delta := \Delta_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad E_A := \begin{bmatrix} 0 & N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_b := N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}. \quad (4.20)$$

Uma vez que  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ ,  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  e  $\mu > 0$ , temos que  $\mathcal{Q} \succ 0$  e  $\mathcal{W} \succ 0$ . Logo, podemos utilizar o Lema (2.8) com as identificações (4.19)-(4.20) para obter



a solução (4.17)-(4.18). Adicionalmente, para o cálculo do parâmetro  $\hat{\lambda}$ , a aproximação prática discutida na Observação 2.2 foi utilizada.  $\square$

Semelhante ao Regulador Recursivo Nominal (Capítulo 3), aqui também pode-se obter as expressões algébricas explícitas para  $L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  e  $P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ . Lembrando que o arranjo matricial simétrico proposto no Teorema 4.1 representa um sistema de equações lineares. Desta forma, evita-se realizar a inversão do bloco matricial central em (4.18), que pode demandar esforços computacionais. Para esta proposta, um resultado auxiliar para a obtenção das expressões algébricas será apresentado a seguir.

**Lema 4.1.** *Suponha que  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  e  $\Phi(\mu, \hat{\lambda}) \succeq 0$ . Então,*

(i) *A matriz*

$$\hat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} - R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T (\hat{\lambda}^{-1} I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T)^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1}$$

*é simétrica definida positiva.*

(ii) *A matriz*

$$U = \begin{bmatrix} \Phi(\mu, \hat{\lambda}) + \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \\ N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & \hat{\lambda}^{-1} I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \end{bmatrix}$$

*é não-singular.*

**Prova 4.2.**

(i) *Ao aplicar a Fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury (Lema A.7), segue que*

$$\hat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = (R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \hat{\lambda} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}})^{-1}.$$

*Como  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ ,  $\hat{\lambda} > 0$  e  $N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \hat{\lambda} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \succeq 0$  (Lema A.1), segue da propriedade de positividade (Lema A.4) que  $\hat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ .*

(ii) *Observe que a matriz  $D = \hat{\lambda}^{-1} I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T$  é definida positiva. De fato, como  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \succ 0$  e  $N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \succeq 0$  (Lema A.2), temos que  $D \succ 0$  (Lema A.4) e, conseqüentemente, não-singular. Agora, basta mostrar que o complemento de Schur de  $D$  em  $U$  é não-singular. Note que*

$$(U/D) = \Phi(\mu, \hat{\lambda}) + \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T.$$

*Como  $\Phi(\mu, \hat{\lambda}) + \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} \succ 0$  e  $G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \succeq 0$  (A.2), segue que  $(U/D) \succ 0$ , de acordo com o Lema A.4. Pelo complemento de Schur (Lema A.11), tem-se que  $U \succ 0$  e, portanto, não-singular.  $\square$*

**Teorema 4.2.** *Considere o problema de controle de mínimos-quadrados regularizados com incertezas limitadas em norma (4.15)-(4.16), com as condições iniciais conhecidas  $N$ ,  $\mu > 0$ ,  $\beta > 1$ ,  $x_0$ ,  $\pi_0$ ,  $\bar{\pi}_0$ ,  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ ,  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ . Para cada  $k = N - 1, \dots, 0$ , sua solução recursiva fornece  $L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  do SLSM (4.8) e, conseqüentemente, para cada  $k = 0, \dots, N - 1$ , concede o Sistema (3.1) em malha-fechada, conforme descrito no Algoritmo 4.1.*

---

**Algoritmo 4.1** Regulador Robusto Recursivo (RRR)
 

---

**Modelo:** Assumir o modelo de SLSMA (4.1)-(4.2).

**SLSM:** Definir o SLSM aumentado (4.8)-(4.9) conforme (4.7)-(4.10), com  $\theta_k$  e  $\bar{\theta}_k$  associadas às  $\mathbb{P}$  e  $\bar{\mathbb{P}}$ , respectivamente, satisfazendo (4.3).

**Regulador Robusto Recursivo:**

*Condições iniciais:* Sejam  $N$ ,  $\mu > 0$ ,  $\beta > 1$ ,  $x_0$ ,  $\pi_0$ ,  $\bar{\pi}_0$ ,  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  e  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ .

Para todo  $k = N - 1, \dots, 0$ :

1: Calcular as matrizes auxiliares:

$$\begin{aligned} \Phi(\mu, \hat{\lambda}) &= \mu^{-1} I_{n_d} - \hat{\lambda}^{-1} M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T, & \hat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} &= (\Phi(\mu, \hat{\lambda}) + \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1})^{-1}, \\ \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2}, & \hat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= (R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \hat{\lambda} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}})^{-1}, \\ \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T (\hat{\lambda}^{-1} I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T)^{-1} N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}), \\ \hat{Q}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T (\hat{\lambda}^{-1} I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T)^{-1} N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}, \\ \hat{\Omega}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= I_{n_d} - \Phi(\mu, \hat{\lambda}) (\hat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} + \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1}. \end{aligned}$$

2: Calcular a matriz do sistema em malha fechada, o ganho de realimentação e a equação de Riccati, respectivamente:

$$L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \hat{\Omega}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} (I_m + \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \hat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k})^{-1} \times \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \hat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad (4.21)$$

$$K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = -\hat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} (I_m + \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \hat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k})^{-1} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \hat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T (\hat{\lambda}^{-1} I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T)^{-1} N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}, \quad (4.22)$$

$$P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \hat{Q}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T (\hat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} I_m \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}. \quad (4.23)$$

**SLSMA:** Obter para cada  $k = 0, \dots, N - 1$ :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A_{\theta_k, k} + \delta A_{\theta_k, k}) x_k + (A_{d, \theta_k, k} + \delta A_{d, \theta_k, k}) x_{k-d_k} + (B_{\theta_k, k} + \delta B_{\theta_k, k}) u_k, \\ &\text{com } u_k = K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k. \end{aligned}$$


---

**Prova 4.3.** *Segue da solução dada pelo arranjo matricial simétrico (4.18)- (4.17), que também representa um sistema de equações lineares simultâneas,*

$$\begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi(\mu, \hat{\lambda}) & 0 & I_{n_d} & -G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}^{-1} I_q & 0 & -N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \\ I_{n_d} & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & -G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & -N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{n_d} \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e o conjunto de equações equivalente,

$$\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} Y_1 + Y_6 = 0, \quad (4.24)$$

$$R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} Y_2 + Y_7 = 0, \quad (4.25)$$

$$Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} Y_3 = -I_{n_d}, \quad (4.26)$$

$$\Phi(\mu, \hat{\lambda}) Y_4 + Y_6 - G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} Y_7 = F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad (4.27)$$

$$\hat{\lambda}^{-1} Y_5 - N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} Y_7 = N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}, \quad (4.28)$$

$$Y_1 + Y_4 = 0, \quad (4.29)$$

$$Y_2 - G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T Y_4 - N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T Y_5 = 0. \quad (4.30)$$

De (4.24) com (4.29) e (4.25) com (4.30), segue que

$$\begin{aligned} Y_6 &= \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} Y_4 \text{ e} \\ Y_7 &= -R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} (G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T Y_4 + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T Y_5), \end{aligned} \quad (4.31)$$

que combinando com (4.27), resulta em

$$(\Phi(\mu, \hat{\lambda}) + \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T) Y_4 + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T Y_5 = F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}. \quad (4.32)$$

Combinando (4.28) e (4.32), resulta em

$$U \begin{bmatrix} Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

onde  $U$  está definido no Lema 4.1. Como a inversa de  $U$  está garantida pelo Lema 4.1,

a solução do sistema de equações (4.33) pode ser obtida pelo Lema A.10. Assim,

$$\begin{aligned}
Y_4 &= \underbrace{(\Phi(\mu, \hat{\lambda}) + \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1})}_{\widehat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1}} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \underbrace{(R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \hat{\lambda} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}})}_{\widehat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1} \times \\
&\quad \underbrace{(F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T (\hat{\lambda}^{-1} I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T)^{-1} N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}})}_{\widehat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \\
&= (\widehat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \widehat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1} \widehat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \tag{4.34}
\end{aligned}$$

$$Y_5 = (\hat{\lambda}^{-1} I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T)^{-1} (N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} - N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T Y_4). \tag{4.35}$$

Substituindo (4.34) e (4.35) em  $Y_7$  de (4.31) e aplicando o Lema A.8:

$$\begin{aligned}
Y_7 &= -\widehat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} \underbrace{\widehat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T}_{\widehat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T} \left( \widehat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + \underbrace{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \widehat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2}}_{\widehat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \underbrace{\widehat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T}_{\widehat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T} \right)^{-1} \widehat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \\
&\quad R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \left( \hat{\lambda}^{-1} I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \right)^{-1} N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \\
&= -\widehat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} \left( I_m + \widehat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \widehat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \widehat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} \widehat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \widehat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \widehat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \\
&\quad R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \left( \hat{\lambda}^{-1} I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \right)^{-1} N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}. \tag{4.36}
\end{aligned}$$

Combinando (4.27), (4.34) e (4.36), tem-se

$$\begin{aligned}
Y_6 &= F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} Y_7 - \Phi(\mu, \hat{\lambda}) Y_4 \\
&= \underbrace{\left( I_{n_d} - \Phi(\mu, \hat{\lambda}) (\widehat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} + \widehat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \widehat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1} \right)}_{\widehat{\Omega}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \widehat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \\
&\quad \underbrace{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \widehat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2}}_{\widehat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \left( I_m + \widehat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \widehat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \widehat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} \widehat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \widehat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \widehat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\
&= \widehat{\Omega}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \widehat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \widehat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \left( I_m + \widehat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \widehat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \widehat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} \widehat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \widehat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \widehat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}.
\end{aligned}$$

De (4.18) segue que:

$$\begin{bmatrix} L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{n_d} \\ 0 & 0 & F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 & 0 & N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \\ I_{n_d} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_6 \\ Y_7 \\ -Y_3 + F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T Y_4 + N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T Y_5 \end{bmatrix}.$$

Logo,  $L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = Y_6$ ,  $K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = Y_7$ . De (4.26) e (4.34) e (4.35), segue que:

$$\begin{aligned} P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= \underbrace{Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \left( \hat{\lambda}^{-1} I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \right)^{-1} N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}}_{\hat{Q}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} + \\ &\quad \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \hat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} + \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} I_m \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ &= \hat{Q}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \hat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} + \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} I_m \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}. \end{aligned}$$

□

**Observação 4.2.** As expressões do Regulador Robusto Recursivo descritas no Algoritmo 4.1 se assemelham às do Regulador Recursivo Nominal (Algoritmo 3.1). De fato, se o SLSM (4.8) não está sujeito a incertezas paramétricas,  $M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}$  e  $N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}$  são matrizes nulas. Conseqüentemente, as matrizes auxiliares do Algoritmo 4.1 colapsam com as matrizes do Algoritmo 3.1.

**Observação 4.3.** Se  $\mu \rightarrow \infty$ , então  $\hat{\lambda}^{-1} \rightarrow \infty$ ,  $\Phi(\mu, \hat{\lambda}) \rightarrow 0$ ,  $\hat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \rightarrow \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}$  e  $\hat{\Omega}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \rightarrow I_{n_d}$ . Portanto, (3.20) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} P_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= \hat{Q}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} + \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} I_m \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ &\stackrel{\text{(Lema A.7)}}{=} \hat{Q}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \left( I_m + \right. \\ &\quad \left. \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad (4.37) \end{aligned}$$

que representa uma equação de Riccati recursiva acoplada padrão (COSTA et al., 2005) governada por duas cadeias de Markov independentes, sendo  $\hat{Q}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $\hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $\hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  definidas no Algoritmo 4.1.

### 4.3 Condições para Estabilidade e Convergência

Nesta seção, as condições de convergência do regulador robusto recursivo proposto são investigadas quando as matrizes paramétricas do sistema são constantes. No entanto, a matriz de contração  $\Delta_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  ainda é considerada variante no tempo. Assim, considere o SLSM descrito em (4.8) e a função custo quadrática (4.14) com os parâmetros constantes,

$$z_{k+1} = (F_{\bar{i}, i} + M_{\bar{i}, i} \Delta_{\bar{i}, i, k} N_{F_{\bar{i}, i}}) z_k + (G_{\bar{i}, i} + M_{\bar{i}, i} \Delta_{\bar{i}, i, k} N_{G_{\bar{i}, i}}) u_k, \quad (4.38)$$

onde  $u_k = K_{\bar{i}, i} z_k$ , com  $K_{\bar{i}, i}$ ,  $i \in \mathcal{S}$  e  $\bar{i} \in \bar{\mathcal{S}}$ , determinado por (4.22). Considerando o sistema (4.38), a expressão algébrica (4.23) torna-se

$$P_{\mu, \bar{i}, i, k} = \hat{Q}_{\bar{i}, i} + \hat{F}_{\bar{i}, i}^T \left( \hat{\Psi}_{\bar{i}, i, k+1}^{-1} + \hat{G}_{\bar{i}, i} I_m \hat{G}_{\bar{i}, i}^T \right)^{-1} \hat{F}_{\bar{i}, i},$$

aplicando o lema de inversão de matrizes (Lema A.7), obtém-se

$$P_{\mu,\bar{i},i,k} = \widehat{Q}_{\bar{i},i} + \widehat{F}_{\bar{i},i}^T \widehat{\Psi}_{\bar{i},i,k+1} \widehat{F}_{\bar{i},i} - \widehat{F}_{\bar{i},i}^T \widehat{\Psi}_{\bar{i},i,k+1} \widehat{G}_{\bar{i},i} \left( I_m + \widehat{G}_{\bar{i},i}^T \widehat{\Psi}_{\bar{i},i,k+1} \widehat{G}_{\bar{i},i} \right)^{-1} \widehat{G}_{\bar{i},i}^T \widehat{\Psi}_{\bar{i},i,k+1} \widehat{F}_{\bar{i},i}, \quad (4.39)$$

com as matrizes auxiliares  $\widehat{Q}_{\bar{i},i}$ ,  $\widehat{\Psi}_{\bar{i},i,k+1}$ ,  $\widehat{F}_{\bar{i},i}$  e  $\widehat{G}_{\bar{i},i}$  definidas no Algoritmo 4.1, assumindo parâmetros constantes.

Assim, note que (4.39) pertence à classe de equações de Riccati recursivas acopladas (COSTA et al., 2005), definida em (3.32), possibilitando o seguinte mapeamento entre (4.39) e (3.32):

$$\begin{aligned} P_{i,k} &\leftarrow P_{\mu,\bar{i},i,k}, & Q_i &\leftarrow \widehat{Q}_{\bar{i},i}, & A_i &\leftarrow \widehat{F}_{\bar{i},i}, & \mathcal{E}_{i,k+1} &\leftarrow \widehat{\Psi}_{\bar{i},i,k+1}, \\ & & & & B_i &\leftarrow \widehat{G}_{\bar{i},i}, & \mathcal{R}_i &\leftarrow I_m. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Baseado na semelhança estrutural entre as equações, as condições para a estabilidade e convergência do regulador proposto podem ser estabelecidas conforme o problema clássico do regulador linear quadrático para SLSM. Além disso, uma vez que  $Q_{\bar{i},i} \succ 0$ , para todo  $i \in \mathcal{S}$  e  $\bar{i} \in \bar{\mathcal{S}}$ , tem-se que  $\widehat{Q}_{\bar{i},i} \succ 0$ . Assim, considere as seguintes definições:  $\widehat{\mathbf{P}}_k = (P_{\mu,1,1,k}, \dots, P_{\mu,1,s,k}, \dots, P_{\mu,\bar{s},1,k}, \dots, P_{\mu,\bar{s},s,k}) \in \mathbb{H}_+^{n_d}$ ,  $\widehat{\mathbf{Q}} = (\widehat{Q}_{1,1}, \dots, \widehat{Q}_{1,s}, \dots, \widehat{Q}_{\bar{s},1}, \dots, \widehat{Q}_{\bar{s},s}) \in \mathbb{H}_+^{n_d}$ ,  $\widehat{\mathbf{F}} = (\widehat{F}_{1,1}, \dots, \widehat{F}_{1,s}, \dots, \widehat{F}_{\bar{s},1}, \dots, \widehat{F}_{\bar{s},s}) \in \mathbb{H}^{n_d \times n_d}$  e  $\widehat{\mathbf{G}} = (\widehat{G}_{1,1}, \dots, \widehat{G}_{1,s}, \dots, \widehat{G}_{\bar{s},1}, \dots, \widehat{G}_{\bar{s},s}) \in \mathbb{H}^{n_d \times m}$ .

**Proposição 4.1.** *Considere  $\widehat{\mathbf{F}} \in \mathbb{H}^{n_d \times n_d}$ ,  $\widehat{\mathbf{G}} \in \mathbb{H}^{n_d \times m}$  e  $\widehat{\mathbf{Q}} \in \mathbb{H}_+^{n_d}$  conhecidas a priori. Assuma que  $(\widehat{\mathbf{F}}, \widehat{\mathbf{G}})$  é estabilizável e  $(\widehat{\mathbf{Q}}, \widehat{\mathbf{F}})$  é detectável. Então, para qualquer condição inicial  $P_{\mu,N,N} \succ 0$ ,  $\mu > 0$  e  $\beta > 1$ ,  $\widehat{\mathbf{P}}_k \in \mathbb{H}^{n_d}$  converge para a única solução estabilizante  $\widehat{\mathbf{P}} = (P_{\mu,1,1}, \dots, P_{\mu,1,s}, \dots, P_{\mu,\bar{s},1}, \dots, P_{\mu,\bar{s},s}) \in \mathbb{H}_+^{n_d}$  da equação de Riccati algébrica (4.23), tal que a matriz em malha-fechada*

$$L_{\mu,\bar{i},i} = \widehat{\Omega}_{\bar{i},i} \widehat{F}_{\bar{i},i} - \widehat{G}_{\bar{i},i} (I_m + \widehat{G}_{\bar{i},i}^T \widehat{\Psi}_{\bar{i},i} \widehat{G}_{\bar{i},i})^{-1} \widehat{G}_{\bar{i},i}^T \widehat{\Psi}_{\bar{i},i} \widehat{F}_{\bar{i},i},$$

com  $\bar{i} \in \bar{\mathcal{S}}$  e  $i \in \mathcal{S}$ , do SLSM (4.8) é estável.

**Prova 4.4.** *Uma vez que  $\mu > 0$  e  $\beta > 1$ , segue que  $\Phi(\mu, \hat{\lambda}) > 0$  e  $\hat{\lambda} > 0$ , garantindo que  $\widehat{\mathbf{F}}$  e  $\widehat{\mathbf{Q}}$  estão bem-definidas. De acordo com as definições apresentadas no Apêndice D, ao considerar a estabilizabilidade de  $(\widehat{\mathbf{F}}, \widehat{\mathbf{G}})$  e a detectabilidade de  $(\widehat{\mathbf{Q}}, \widehat{\mathbf{F}})$ , tem-se que  $\widehat{\mathbf{P}}_k$  converge para a solução estabilizante única  $\widehat{\mathbf{P}} \in \mathbb{H}_+^{n_d}$  de (4.23). Desta forma,  $\widehat{\mathbf{P}}$  garante a estabilidade na média quadrática da matriz de malha fechada  $L_{\mu,\bar{i},i}$  do SLSM (4.8).  $\square$*

Para concluir este capítulo, enfatizamos a importância do método da função penalidade no desenvolvimento do regulador robusto proposto. Esta estratégia permitiu considerar atraso aleatório no estado e incertezas paramétricas em todas as matrizes do sistema. Além disso, as expressões algébricas recursivas descritas no Algoritmo 4.1 recaem em equações de Riccati acopladas e, facilmente, garantem as condições de convergência e estabilidade para qualquer  $\mu > 0$ .

## 4.4 Exemplo Ilustrativo

Nesta seção, o desempenho do regulador robusto recursivo proposto (Algoritmo 4.1) é avaliado através de um exemplo numérico. Além disso, o RRR é comparado com outras abordagens de controle robusto existentes na literatura.

Considere o SLSM incerto com atraso de tempo, como descrito em (4.1)-(4.2), com dois modos de operação e as seguintes matrizes de parâmetros adaptadas de (SUN et al., 2006):

$$\begin{aligned}
 A_{1,k} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1,01 \end{bmatrix}, \quad A_{d,1,k} = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,5 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix}, \quad B_{1,k} = \begin{bmatrix} 1 & 0,3 \\ 1 & 0,6 \end{bmatrix}, \quad A_{2,k} = \begin{bmatrix} 0,96 & 0,1 \\ 0 & 1,03 \end{bmatrix}, \\
 A_{d,2,k} &= \begin{bmatrix} 0,3 & -0,1 \\ 0 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad B_{2,k} = \begin{bmatrix} 1,2 & 0,5 \\ 2 & 1,6 \end{bmatrix}, \quad H_{1,k} = H_{2,k} = \begin{bmatrix} 2,8 \\ 1,5 \end{bmatrix}, \\
 E_{A,1,k} &= E_{A_d,1,k} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,05 \end{bmatrix}, \quad E_{A,2,k} = E_{A_d,2,k} = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \\
 E_{B,1,k} &= \begin{bmatrix} 1,1 & 1,3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_{B,2,k} = \begin{bmatrix} 1,3 & 1,1 \end{bmatrix}, \quad \forall k \geq 0,
 \end{aligned}$$

com o estado inicial  $x_0 = [0,2 \ 0,2]^T$ ,  $\varphi_0(k) = x_0$ , para todo  $k \leq 0$  e a matriz de probabilidade de transição da cadeia de Markov  $\theta_k$ ,

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}, \quad \forall i, j \in \mathcal{S}.$$

Dois casos de atraso são considerados. No primeiro, assume-se que  $d_{max} = 2$ , enquanto no segundo,  $d_{max} = 6$ , com  $d_{min} = 1$  e  $\Delta d = d_{max}$ , para ambos os casos. Desta forma, as matrizes de probabilidade de transição da cadeia de Markov  $\bar{\theta}$ , conforme descrita em (4.5), são dadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Matrizes de probabilidade de transição  $\bar{\mathbb{P}}$  definida de acordo com o  $d_{max}$  e  $\Delta d = d_{max}$ .

Matrizes de probabilidade de transição $\bar{\mathbb{P}}$						
$d_k \in [1, 2]$	$d_k \in [1, 6]$					
$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$					

O desempenho do RRR proposto é avaliado através de uma comparação com os controladores baseados em LMIs: o controlador de sistemas chaveados incertos apresentado em Sun et al. (2006, Teo. 4) e o controlador de sistemas Markovianos incertos desenvolvido por Chen e Zheng (2007, Teo. 4).

Todas as rotinas foram escritas e executadas no software *MATLAB*<sup>®</sup>, versão 9.8 (R2020a), utilizando *YALMIP*<sup>®</sup> *Toolbox* (LÖFBERG, 2004) para resolução das LMIs. Os seguintes parâmetros de inicialização do Algoritmo 4.1 são adotados,

$$P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} = Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = I_{n_d}, \quad R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = I_m, \quad \forall \bar{\theta}_k = 1, \dots, \bar{s} \text{ e } \forall \theta_k = 1, \dots, 2, \\ N = 100, \quad \pi_0 = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\pi}_0 = 1/\bar{s} \times \mathbf{1}_{\bar{s}}^T, \quad \mu = 10^{16} \text{ e } \beta = 1,1.$$

A simulação consiste em realizar  $T = 5000$  experimentos de Monte Carlo, no horizonte de tempo  $N = 100$ . Os modos de operação do sistema  $\theta_k$  e  $\bar{\theta}_k$  são selecionados de acordo com suas matrizes de probabilidade de transição,  $\mathbb{P}$  e  $\bar{\mathbb{P}}$ , respectivamente. Além disso, a cada passo de tempo,  $\Delta_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  é um número real escolhido aleatoriamente de uma distribuição uniforme com intervalo  $[-1, 1]$ . Todas as abordagens de controle são aplicadas no SLSM incerto com atraso variante no tempo (4.1).

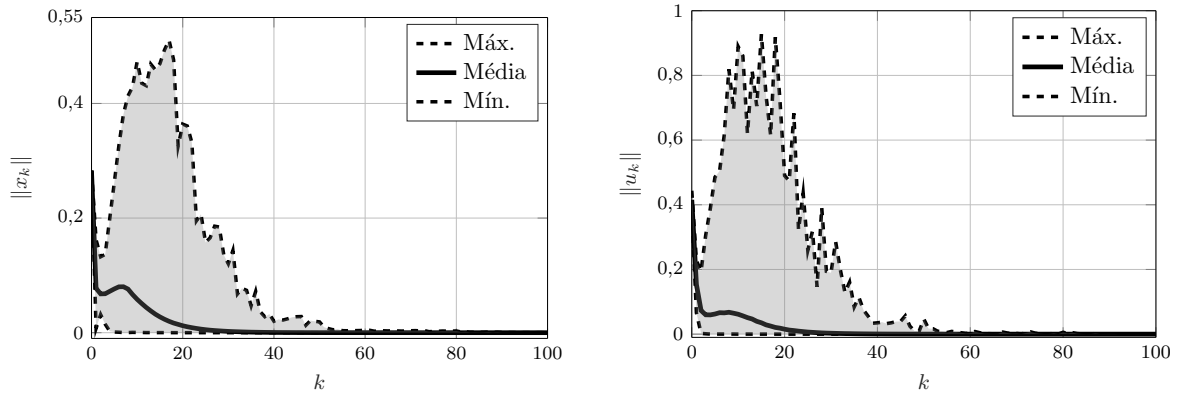
As médias e os desvios padrão das normas dos vetores de estado e das entradas de controle são apresentados na Tabela 4.2, como  $\|x_k\|$ ,  $\sigma_x$ ,  $\|u_k\|$  e  $\sigma_u$ , respectivamente. Os resultados mostram que, apesar da presença de atraso variante no tempo ( $d_k \in [1, 2]$ ) e das incertezas paramétricas limitadas em norma, o desempenho em termos de normas de estado, o RRR (Algoritmo 4.1) apresenta um valor menor quando comparado ao controlador proposto por Sun et al. (2006, Teo. 4). Com relação às normas das entradas de controle, o RRR (Algoritmo 4.1) obteve maiores valores, pois considera o ganho de realimentação aumentado. Por outro lado, a abordagem de Chen e Zheng (2007, Teo. 4) apresentou uma solução infactível, não sendo capaz de regular o SLSM com o atraso pertencente ao intervalo  $[1, 2]$ , por este motivo, não está apresentado na tabela.

Tabela 4.2 – Desempenho dos controladores sobre 5000 experimentos para  $d_{max} = 2$ .

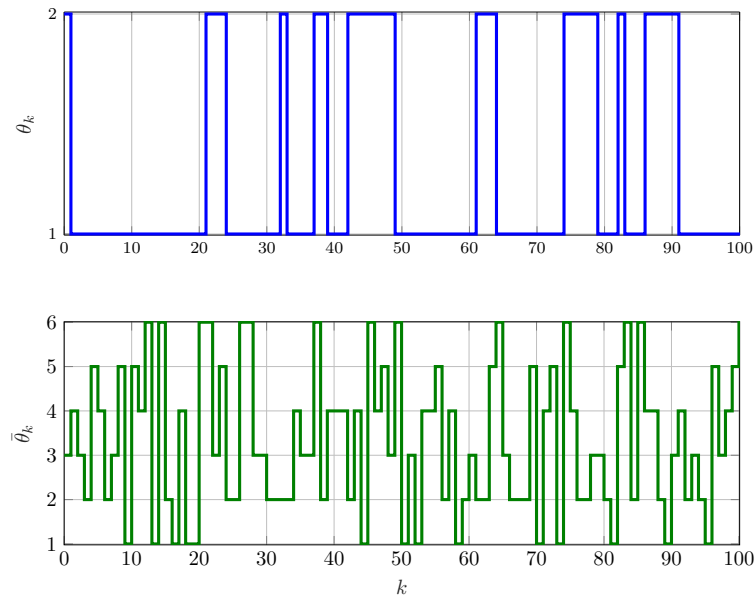
Controladores	$\ x_k\ $	$\sigma_x$	$\ u_k\ $	$\sigma_u$
RRR (Algoritmo 4.1)	<b>0,3133</b>	<b>0,0310</b>	0,3497	0,0345
Sun et al. (2006, Teo. 4)	0,4397	0,0419	<b>0,2461</b>	<b>0,0237</b>

O regulador robusto recursivo proposto regula o SLSM incerto com atraso variante no tempo para pelo menos  $d_{max} = 6$ , com  $d_{min} = 1$ , enquanto que em Sun et al. (2006, Teo. 4) o limite máximo de atraso permitido é  $d_{max} = 2$  e a abordagem de Chen e Zheng (2007, Teo. 4) é infactível para qualquer valor de atraso pertencente ao intervalo  $[1, 6]$ , como pode ser visto na Figura 4.1.



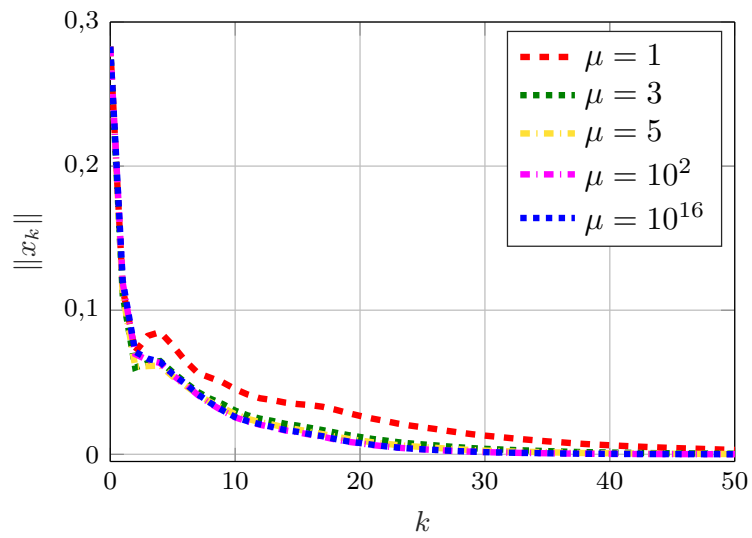
Figura 4.1 – Resultados obtidos pelo RRR quando  $d_k \in [1, 6]$ .

A Figura 4.2 ilustra a comutação dos modos de operação das cadeias de Markov  $\theta_k$  e  $\bar{\theta}_k$  correspondentes a um dos experimentos mostrado na Figura 4.1. A permutação ocorre de acordo com as matrizes de probabilidade de transição  $\mathbb{P}$  e  $\bar{\mathbb{P}}$ .

Figura 4.2 – Comutação dos modos de operação do SLSM incerto com o atraso  $d_k \in [1, 6]$ .

Para concluir a avaliação, analisa-se como o parâmetro de penalidade  $\mu$  influencia o desempenho do Algoritmo 4.1. A Figura 4.3 ilustra os valores médios das normas dos estados do sistema com o atraso  $d_k \in [1, 2]$ , considerando vários valores do parâmetro  $\mu$ . De acordo com a Seção 2.1, escolhendo  $\mu \rightarrow \infty$  obtém-se a solução ótima. No entanto, observe que o sistema estabiliza com valores pequenos de  $\mu$ , bem como o desempenho do sistema permanece o mesmo após o parâmetro  $\mu$  atingir uma certa ordem de grandeza.

Figura 4.3 – Efeito do parâmetro de penalidade  $\mu$  nos valores médios das normas dos estados do SLSMA incerto quando  $d_k \in [1, 2]$ .



---

# Controle de SLSMA com Incertezas Politópicas

Neste capítulo, outra versão robusta do Regulador Recursivo Nominal apresentado no Capítulo 3 é proposta. Neste caso, o sistema Markoviano com atraso no estado estará sujeito a incertezas paramétricas politópicas. Os parâmetros do sistema estão dentro de um poliedro convexo centrado no sistema nominal (YANG et al., 2005).

Um procedimento semelhante ao descrito no Capítulo 4 é utilizado para propor um regulador robusto recursivo para sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos, atraso no estado e incertezas politópicas. Primeiramente, um problema de controle robusto é formulado como um problema de otimização restrito, cujas restrições lineares correspondem a cada vértice do politopo. O método de função penalidade é utilizado para transformá-lo em um problema irrestrito de mínimos-quadrados regularizados com incertezas politópicas (Seção 2.3.5). A solução deste problema fornece as expressões recursivas do Regulador Robusto Recursivo Politópico (RRRP). Da mesma forma que os controladores anteriores foram apresentados, o RRRP será proposto em um arranjo matricial simétrico e na forma de expressões recursivas explícitas. Além disso, as condições de estabilidade e convergência são analisadas e o capítulo é concluído através de um exemplo ilustrativo.

## 5.1 Formulação do problema

### 5.1.1 Modelo do Sistema

Considere o sistema linear sujeito a saltos Markovianos, atraso no estado e incertezas paramétricas politópicas (SLSMAP) de tempo discreto,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A_{\theta_k, k} + \delta A_{\theta_k, k})x_k + (A_{d, \theta_k, k} + \delta A_{d, \theta_k, k})x_{k-d_k} + (B_{\theta_k, k} + \delta B_{\theta_k, k})u_k, \\ x_k &= \varphi_0(k), \quad k \in [-d_{max}, 0], \end{aligned} \tag{5.1}$$

para  $k = 0, 1, \dots, N$ , onde  $x_k \in \mathbb{R}^n$  é o estado no instante  $k$ ,  $x_{k-d_k} \in \mathbb{R}^n$  é o estado atraso por  $d_k$  amostras,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle e  $\varphi_0(k)$  é a condição inicial para  $k = -d_{max}, -d_{max} + 1, \dots, 0$ . As matrizes  $A_{\theta_k, k}, A_{d, \theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B_{\theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são conhecidas e  $\delta A_{\theta_k, k}, \delta A_{d, \theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\delta B_{\theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são incertezas desconhecidas pertencentes ao domínio poliédrico descrito por  $V$  vértices,

$$\mathbb{V}_k := \left\{ \left( \delta A_{\theta_k, k}, \delta A_{d, \theta_k, k}, \delta B_{\theta_k, k} \right) = \sum_{\ell=1}^V \alpha_{\ell, k} \left( A_{\theta_k, k}^{(\ell)}, A_{d, \theta_k, k}^{(\ell)}, B_{\theta_k, k}^{(\ell)} \right) \right\}, \quad (5.2)$$

com  $A_{\theta_k, k}^{(\ell)}, A_{d, \theta_k, k}^{(\ell)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B_{\theta_k, k}^{(\ell)} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sendo matrizes conhecidas e  $\alpha_k := [\alpha_{1, k} \dots \alpha_{V, k}]^T$  os coeficientes pertencem ao simplex unitário

$$\Lambda_V := \left\{ \alpha_k \in \mathbb{R}^V : \sum_{\ell=1}^V \alpha_{\ell, k} = 1, \alpha_{\ell, k} \geq 0 \right\}. \quad (5.3)$$

O processo estocástico  $\{\theta_k, k \geq 0\}$  é descrito por uma cadeia de Markov de estado finito e tempo discreto  $\theta_k \in \mathcal{S} = \{1, \dots, s\}$  associado à matriz de probabilidade de transição conhecida  $\mathbb{P} \in \mathbb{R}^{s \times s}$ ,  $i, j \in \mathcal{S}$  com entradas satisfazendo as seguintes condições

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= \Pr[\theta_{k+1} = j \mid \theta_k = i] = p_{ij}, \quad \Pr[\theta_0 = i] = \pi_{i, 0}, \\ &\sum_{j=1}^s p_{ij} = 1 \text{ e } 0 \leq p_{ij} \leq 1. \end{aligned} \quad (5.4)$$

O atraso de tempo  $d_k$  é considerado governado aleatoriamente por uma segunda cadeia de Markov  $\bar{\theta}_k \in \bar{\mathcal{S}} = \{1, \dots, \bar{s}\}$ ,  $\bar{s} = d_{max} - d_{min} + 1$ , e tem os seguinte limitantes mínimos e máximos,

$$0 \leq d_{min} \leq d_k \leq d_{max} \text{ e } \|d_{k+1} - d_k\| \leq \Delta d \leq d_{max} \quad (5.5)$$

onde  $d_{min}$  e  $d_{max}$  são os limitantes inferiores e superiores, respectivamente, e  $\Delta d$  é a taxa máxima de variação do atraso, com a amostra futura  $d_{k+1}$  pertencente ao intervalo  $[\bar{d}_{min}, \bar{d}_{max}]$ , sendo  $\bar{d}_{min} = \max(d_{min}, d_k - \Delta d)$  e  $\bar{d}_{max} = \min(d_{max}, d_k + \Delta d)$ .

A cadeia de Markov  $\bar{\theta}_k$  está associada a uma matriz de probabilidade de transição  $\bar{\mathbb{P}} = [\bar{p}_{\bar{i}\bar{j}}] \in \mathbb{R}^{\bar{s} \times \bar{s}}$ ,  $\bar{i}, \bar{j} \in \bar{\mathcal{S}}$ , com o vetor de distribuição inicial  $\bar{\pi}_{\bar{i}, 0}$ , cujas entradas satisfazem analogamente as condições estabelecidas em (5.4). Neste caso, a matriz de probabilidade de transição  $\bar{\mathbb{P}}$  é definida de acordo com a taxa máxima de variação de atraso,

$$\bar{p}_{ij} = \begin{cases} 1/\bar{s} & \begin{cases} j \in (\bar{d}_{min} + 1, \bar{d}_{max} + 1), & d_{min} = 0, \\ j \in (\bar{d}_{min}, \bar{d}_{max}), & d_{min} \neq 0, \end{cases} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.6)$$

Para regular o Sistema (5.1) sob tempo de atraso e incertezas politópicas, adota-se a seguinte lei de controle dependente do modo,

$$u_k = K_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k, \quad \forall k \geq 0, \quad (5.7)$$

onde  $z_k$  é o estado aumentado relacionado a condição inicial  $z_0$ , definido por

$$z_k := \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_{k-d_{max}+1} \\ x_{k-d_{max}} \end{bmatrix}, \quad z_0 := \begin{bmatrix} \varphi_0(0) \\ \varphi_0(-1) \\ \vdots \\ \varphi_0(-d_{max}+1) \\ \varphi_0(-d_{max}) \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

e  $K_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \in \mathbb{R}^{m \times n_d}$ , com  $n_d = d_{max}n + n$ , é o ganho a ser determinado.

Observe que (5.7) é um controle de realimentação de estado dependente do modo e independente de atraso (o ganho do regulador  $K_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  é dependente das cadeias de Markov  $\theta_k$  e  $\bar{\theta}_k$ , mas independe do atraso variante no tempo  $d_k$ ). Desta forma, se faz necessário transformar o Sistema (5.1) em um sistema equivalente independente de atraso, de forma que a lei de controle proposta garanta a estabilidade em malha fechada do sistema. Na seção a seguir descreveremos esse procedimento.

### 5.1.2 Descrição do Modelo Aumentado com Incertezas Politépicas

Baseado no modelo aumentado com incertezas limitadas em norma, apresentado na Subseção 4.1.2, o Sistema (3.1) pode ser reescrito como um sistema linear sujeito a saltos Markovianos e incertezas politópicas (SLSMP) aumentado livre da presença de atraso, em termos do estado aumentado (4.7), definido por

$$z_{k+1} = (F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^- + \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^-)z_k + (G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^- + \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^-)u_k, \quad (5.9)$$

para  $k = 0, 1, \dots, N$ , com as matrizes do sistema sendo governadas por duas cadeias de Markov mutuamente independentes. As matrizes incertas  $\delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^-$  e  $\delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^-$  pertencem ao seguinte politopo

$$\bar{V}_k := \left\{ \left( \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^-, \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^- \right) = \sum_{\ell=1}^V \alpha_{\ell, k} \left( F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(\ell)}, G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(\ell)} \right), \alpha_k \in \Lambda_V \right\}. \quad (5.10)$$

As matrizes aumentadas  $F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^-, \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^-, F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(\ell)} \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$  e  $G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^-, \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^-, G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(\ell)} \in \mathbb{R}^{n_d \times m}$ ,  $\forall \theta_k \in \mathcal{S}$ ,  $\bar{\theta}_k \in \bar{\mathcal{S}}$  e  $\ell = 1, \dots, V$ , são definidas por

$$\begin{aligned} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^- &:= \begin{bmatrix} \overbrace{A_{\theta_k, k} \quad 0 \cdots 0 \quad A_{d, \theta_k, k} \cdots}^{\bar{\theta}_k + d_{min} - 2} & 0 \\ \hline I_{d_{max}n} & 0_{d_{max}n \times n} \end{bmatrix}, \quad G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^- := \begin{bmatrix} B_{\theta_k, k} \\ 0_{d_{max}n \times m} \end{bmatrix}, \\ \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^- &:= \begin{bmatrix} \overbrace{\delta A_{\theta_k, k} \quad 0 \cdots 0 \quad \delta A_{d, \theta_k, k} \cdots}^{\bar{\theta}_k + d_{min} - 2} & 0 \\ \hline 0_{d_{max}n} & 0_{d_{max}n \times n} \end{bmatrix}, \quad \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^- := \begin{bmatrix} \delta B_{\theta_k, k} \\ 0_{d_{max}n \times m} \end{bmatrix}, \quad (5.11) \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(\ell)} &:= \begin{bmatrix} \overbrace{A_{\theta_k, k}^{(\ell)} \quad 0 \cdots 0 \quad A_{d, \theta_k, k}^{(\ell)} \cdots}^{\bar{\theta}_k + d_{min} - 2} & 0 \\ \hline 0_{d_{max}n} & 0_{d_{max}n \times n} \end{bmatrix}, \quad G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(\ell)} := \begin{bmatrix} B_{\theta_k, k}^{(\ell)} \\ 0_{d_{max}n \times m} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde  $\bar{\theta}_k + d_{min} - 2$  representa o número de matrizes nulas  $0_{n \times n}$  entre  $A_{\theta_k, k}$  e  $A_{d, \theta_k, k}$ . Analogamente, para os elementos das matrizes  $\delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k}$  e  $F_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^{(\ell)}$ .

### 5.1.3 Problema de Controle Robusto Politópico

O objetivo deste capítulo consiste em estabilizar o sistema Markoviano (5.1) em malha fechada na média quadrática, quando está sujeito a atraso no estado e a incertezas politópicas. Assim, como o Sistema (5.1) é equivalente ao SLSMP (5.9) regido por duas cadeias de Markov mutuamente independentes, o desenvolvimento do regulador robusto recursivo politópico para o Sistema (5.1) pode ser realizado em termos do SLSMP (5.9). Desta forma, um conjunto de ganhos estabilizadores  $\mathcal{K}_k = (K_{1, \theta_k, k}, \dots, K_{\bar{s}, \theta_k, k}) \in \mathbb{H}^{m \times nd}$  é investigado, tal que  $u_k = K_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k$ , com  $\theta_k \in \mathcal{S}$  e  $\bar{\theta}_k \in \bar{\mathcal{S}}$ , garanta a estabilidade do Sistema (5.1).

Assim, baseado em Bueno et al. (2022a), consideramos o seguinte problema de otimização restrito min-max para minimizar o valor esperado da função custo quadrática  $J_N$  sob a influência máxima das incertezas politópicas  $\{\delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k}, \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k}\}$ , ou seja, para  $k = 0, 1, \dots, N$ ,

$$\min_{u_k, z_{k+1}} \max_{\delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k}, \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k}} \mathbb{E} \left\{ J_N(z_{k+1}, u_k) \mid \bar{\Theta}_0, \Theta_0 \right\} \quad (5.12)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} I_{nd} \\ \vdots \\ I_{nd} \end{bmatrix} z_{k+1} = \begin{bmatrix} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(1)} \\ \vdots \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(V)} \end{bmatrix} z_k + \begin{bmatrix} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(1)} \\ \vdots \\ G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(V)} \end{bmatrix} u_k, \quad (5.13)$$

com

$$J_N(z_{k+1}, u_k) = z_N^T P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} z_N + \sum_{k=0}^{N-1} (z_k^T Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k + u_k^T R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} u_k), \quad (5.14)$$

onde  $\bar{\Theta}_0 = \{\bar{\theta}_0 = \bar{i}, z_0\}$ ,  $\Theta_0 = \{\theta_0 = i, x_0\}$  e  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  e  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  são as matrizes de ponderação. Além disso, para cada  $\ell = 1, 2, \dots, V$ ,

$$\left( \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(\ell)}, \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(\ell)} \right) = \alpha_{\ell, k} V \left( F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(\ell)}, G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(\ell)} \right). \quad (5.15)$$

**Observação 5.1.** Cada vértice do politopo (5.10) é representado individualmente por uma restrição no problema de otimização (5.12). No entanto, as restrições definidas em (5.13) correspondem à equação do Sistema (5.9). A equivalência entre eles pode ser obtida pré-multiplicando ambos os lados de (5.13) por  $[I \dots I] = \mathbf{1}_V^T \otimes I_{nd}$ , resultando em

$$V z_{k+1} = V \left( F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \sum_{\ell=1}^V \alpha_{\ell, k} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(\ell)} \right) z_k + V \left( G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \sum_{\ell=1}^V \alpha_{\ell, k} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(\ell)} \right) u_k.$$

A solução do problema (5.12)-(5.15) fornece o estado  $z_{k+1}^*$ , a entrada de controle  $u_k^*$ , e a função custo quadrática  $J_k^*$ , que compõem o regulador robusto recursivo politópico. O processo de solução é descrito na seção a seguir.

## 5.2 Regulador Robusto Recursivo Politópico

O primeiro passo para resolver o problema de otimização (5.12)-(5.15) é transformá-lo em  $N$  problemas de otimização min-max de um passo. Assim, pela aplicação da programação dinâmica, (5.12)-(5.15) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} \min_{z_{k+1}, u_k} \max_{\delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \mathbb{E} \left\{ J_k(z_{k+1}, u_k) \middle| \bar{\Theta}_k, \mathcal{O}_k \right\} \\ \text{sujeito ao conjunto de restrições (5.13)} \end{aligned} \quad (5.16)$$

com o valor esperado da função custo quadrática de um passo

$$\mathbb{E} \left\{ J_k(z_{k+1}, u_k) \middle| \bar{\Theta}_k, \mathcal{O}_k \right\} = z_N^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} z_N + z_k^T Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k + u_k^T R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} u_k,$$

onde  $\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}$  é o operador definido por

$$\begin{aligned} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} &= \mathbb{E} \{ P_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} | \bar{\Theta}_k, \mathcal{O}_k \} \\ &= \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{s}} \sum_{j=1}^s P_{\bar{j}, j, k+1} \Pr[\bar{\theta}_{k+1} = \bar{j} | \bar{\theta}_k = \bar{i}] \Pr[\theta_{k+1} = j | \theta_k = i] \\ &= \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{s}} \sum_{j=1}^s \bar{p}_{i\bar{j}} p_{ij} P_{\bar{j}, j, k+1}. \end{aligned}$$

Posteriormente, o problema de otimização de um passo restrito (5.16) é transformado em um problema irrestrito. Aplicando o método da função de penalidade, incluímos o conjunto de restrições (5.13) na função de custo como termos quadráticos multiplicados por um parâmetro de penalidade  $\mu > 0$ , que penaliza as violações dessas restrições. Assim, para um  $\mu > 0$  fixado, reescrevemos (5.13) como sendo um problema irrestrito,

$$\min_{z_{k+1}, u_k} \max_{\delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \mathcal{J}_{\mu, k}(z_{k+1}, u_k) \quad (5.17)$$

com uma nova função custo quadrática

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_k(z_{k+1}, u_k) &= \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} + \\ &\left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{n_d} - (G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(1)}) \\ \vdots & \vdots \\ I_{n_d} - (G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(V)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -I_{n_d} \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(1)} \\ \vdots \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(V)} \end{bmatrix} z_k \right)^T \begin{bmatrix} Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 \\ 0 & \mu I_{n_d V} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

**Observação 5.2.** *É importante observar que no problema de otimização (5.17)-(5.18) todos os vértices do politopo são ponderados em uma estrutura unificada, através de um único parâmetro de penalidade  $\mu > 0$ . Esta é a principal vantagem deste método, uma vez que evita a resolução de um problema de otimização sujeito a um conjunto de desigualdades lineares matriciais dependentes de parâmetros.*

O problema (5.17)-(5.18) é um caso especial de mínimos-quadrados regularizados. Assim, (5.17)-(5.18) é definido como sendo um *problema de controle de mínimos-quadrados regularizados com incertezas politópicas*. Antes de apresentar a solução do problema de controle robusto do SLSMAP (5.1), considere a  $\bar{s}s$ -sequência  $\mathcal{P}_N = (P_{1,1,N}, \dots, P_{1,s,N}, \dots, P_{\bar{s},1,N}, \dots, P_{\bar{s},s,N}) \in \mathbb{H}_+^{n_d}$ ,  $\mathcal{Q}_k = (\hat{Q}_{1,1,k}, \dots, \hat{Q}_{1,s,k}, \dots, \hat{Q}_{\bar{s},1,k}, \dots, \hat{Q}_{\bar{s},s,k}) \in \mathbb{H}_+^{n_d}$  e  $\mathcal{R}_k = (\hat{R}_{1,1,k}, \dots, \hat{R}_{1,s,k}, \dots, \hat{R}_{\bar{s},1,k}, \dots, \hat{R}_{\bar{s},s,k}) \in \mathbb{H}_+^m$ . Dessa maneira, no próximo teorema será apresentada uma solução para o problema (5.17)-(5.18) baseada nos resultados apresentados na Seção 2.3.5.

**Teorema 5.1.** *Considere o problema de controle de mínimos-quadrados regularizados com incertezas politópicas (5.17)-(5.18), com  $\mathcal{P}_N \in \mathbb{H}_+^m$ ,  $\mathcal{Q}_k \in \mathbb{H}_+^m$ ,  $\mathcal{R}_k \in \mathbb{H}_+^m$ . O estado do sistema  $z_{\mu,k+1}^*$ , a entrada de controle  $u_{\mu,k}^*$  e a função custo  $\mathcal{J}_{\mu,k}^*$ , condicionados pelo parâmetro de penalidade  $\mu > 0$ , são dados por:*

$$\begin{bmatrix} z_{\mu,k+1}^* \\ u_{\mu,k}^* \\ \mathcal{J}_{\mu,k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_d} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & z_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k, \quad (5.19)$$

onde, para  $k = N, \dots, 0$ , a matriz do sistema em malha fechada  $L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ , o ganho de realimentação  $K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  e a equação de Riccati  $P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ , são obtidos de (5.20).

$$\begin{bmatrix} L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & -I_{n_d} & \mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\Phi}_1 & 0 & I_{n_d} & -\mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\Phi}_2 & 0 & -\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ I_{n_d} & 0 & 0 & \mathbf{I}_{n_d}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & -\mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & -\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{n_d} \\ \mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

com  $\tilde{\Phi}_1 := (\mu^{-1} - \hat{\lambda}^{-1})I_{n_d}V$  e  $\tilde{\Phi}_2 := \hat{\lambda}^{-1}I_{n_d}V$ , com  $\hat{\lambda} = \beta\mu$ , para algum  $\beta > 1$ , e as seguintes matrizes,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{n_d} &:= \mathbf{1}_V \otimes I_{n_d}, \quad \mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} := \mathbf{1}_V \otimes F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad \mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} := \mathbf{1}_V \otimes G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \\ \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &:= \text{col}\left(VF_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(1)}, \dots, VF_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(V)}\right) \text{ e } \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} := \text{col}\left(VG_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(1)}, \dots, VG_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(V)}\right), \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde  $\mathbf{1}_V := [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^V$  e  $\otimes$  denota o produto de Kronecker.



**Prova 5.1.** De acordo com a Seção 2.3.5, podemos realizar as seguintes identificações entre os problemas (2.38)-(2.39) e (5.17)-(5.18):

$$\begin{aligned} x &:= \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} := \begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W}_\mu := \begin{bmatrix} Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 \\ 0 & \mu I_{n_d V} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A}_0 &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{I}_{n_d} & -\mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{A} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\delta \mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad b_0 := \begin{bmatrix} -I_{n_d} \\ \mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k \quad \text{e} \quad \delta \mathbf{b} := \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k, \end{aligned} \quad (5.22)$$

com  $\mathbf{I}_{n_d}$ ,  $\mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  e  $\mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  definidas em (5.21) e  $\delta \mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} := \text{col}(\delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(1)}, \dots, \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(V)})$  e  $\delta \mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} := \text{col}(\delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(1)}, \dots, \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(V)})$ . Além disso, podemos fazer os mapeamentos entre os modelos de incertezas (2.40) e (5.18):

$$\mathcal{H} := \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_d V} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{A}} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -V \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{b}} := \begin{bmatrix} 0 \\ V \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k, \quad (5.23)$$

onde  $\tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  e  $\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  são definidas em (5.21).

Portanto, a solução (5.19)-(5.20) é obtida pela aplicação do Lema (2.9) com as identificações (5.22)-(5.23). Utiliza-se a aproximação para  $\hat{\lambda}$ , assumindo  $\hat{\lambda} = \beta \mu$ , para algum  $\beta > 1$ , de acordo com a Observação 2.2. Além disso, de acordo com o Lema A.5, tem-se a garantia da invertibilidade da matriz central em (5.20).  $\square$

Observe que a solução apresentada no arranjo matricial simétrico (5.19)-(5.20) também pode ser reduzida em expressões algébricas explícitas. Uma vez que evita os esforços computacionais com relação ao cálculo da matriz inversa do bloco central, bem como facilita a análise de convergência e estabilidade do regulador proposto. Para este propósito, um resultado auxiliar será apresentado.

**Lema 5.1.** Suponha que  $\mathcal{R} \in \mathbb{H}_+^m$ . Então,

(i) A matriz

$$\hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} - R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T (\tilde{\Phi}_2 + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1}$$

é simétrica definida positiva.

(ii) A matriz

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \phi_1 + V \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} V G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \\ \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & V^{-1} (\tilde{\Phi}_2 + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T) \end{bmatrix}$$

com  $\phi_1 := (\mu^{-1} - \hat{\lambda}^{-1}) I_{n_d}$ , é não-singular.

**Prova 5.2.**

(i) Aplicando a Fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury (Lema A.7),  $\hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = (R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \tilde{\Phi}_2^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k})^{-1}.$$

Uma vez que  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  e  $\tilde{\Phi}_2^{-1} = \beta \mu I_{n_d} \succ 0$ , visto que  $\beta > 1$  e  $\mu > 0$ , segue do Lema A.2 que  $\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \tilde{\Phi}_2^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succeq 0$ . Portanto,  $\hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ , pela propriedade de positividade (Lema A.4).

(ii) Observe que a matriz  $\mathcal{D} = \tilde{\Phi}_2 + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T$  é definida positiva. De fato, como  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ , logo pelo Lema A.2,  $\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \succeq 0$ . Assim, segue que  $\mathcal{D} \succ 0$ , pela propriedade de positividade (Lema A.4). Além disso, observe que o complemento de Schur de  $\mathcal{D}$  em  $\mathcal{U}$  é não-singular. De fato,

$$(\mathcal{U}/\mathcal{D}) = \phi_1 + V \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + V G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T.$$

Uma vez que  $\phi_1 + V \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} \succ 0$ , visto que  $\phi_1 \succ 0$ ,  $V > 0$  e  $\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \succ 0$ , e  $V G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \succeq 0$  (Lema A.2). Logo, pela propriedade de positividade (Lema A.4), segue que  $(\mathcal{U}/\mathcal{D}) \succ 0$ . Logo, de acordo com o complemento de Schur (Lema A.11), tem-se que  $\mathcal{U} \succ 0$  e, portanto, não-singular.  $\square$

**Teorema 5.2.** Considere o problema de controle de mínimos-quadrados regularizados com incertezas politópicas (5.17)-(5.18), com as condições iniciais conhecidas  $N$ ,  $\mu > 0$ ,  $\beta > 1$ ,  $x_0$ ,  $\pi_0$ ,  $\bar{\pi}_0$ ,  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ ,  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ . Para cada  $k = N-1, \dots, 0$ , sua solução recursiva fornece  $L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  do SLSMP (5.9) e, conseqüentemente, para cada  $k = 0, \dots, N-1$ , concede o Sistema (5.1) em malha-fechada, conforme descrito no Algoritmo 5.1.

**Prova 5.3.** Observe que a solução representada por um arranjo matricial simétrico no Teorema 4.1, compõe a solução do seguinte sistema de equações lineares,

$$\begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\Phi}_1 & 0 & \mathbf{I}_{n_d} & -\mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\Phi}_2 & 0 & -\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ I_{n_d} & 0 & 0 & \mathbf{I}_{n_d}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & -\mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & -\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \bar{Z}_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \\ Z_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{n_d} \\ \mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

---

**Algoritmo 5.1** Regulador Robusto Recursivo Politópico (RRRP)
 

---

**Modelo:** Assumir o modelo de SLSMAP (5.1)-(5.2).

**SLSMP:** Definir o SLSMP aumentado (5.9)-(5.10) conforme (5.8), com  $\theta_k$  e  $\bar{\theta}_k$  associadas às  $\mathbb{P}$  e  $\bar{\mathbb{P}}$ , respectivamente, satisfazendo (5.4).

**Regulador Robusto Recursivo Politópico:**

*Condições iniciais:* Sejam  $N$ ,  $\mu > 0$ ,  $\beta > 1$ ,  $x_0$ ,  $\pi_0$ ,  $\bar{\pi}_0$ ,  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  e  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ .

Para todo  $k = N - 1, \dots, 0$ :

1: Calcular as matrizes auxiliares:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \mu^{-1}(1 - \beta^{-1})I_{n_d}, \quad \tilde{\Phi}_2 = (\beta\mu)^{-1}I_{n_d}V, \quad \bar{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} = (V\phi_1 + \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1})^{-1}, \\ \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2}, \quad \hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = (R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \tilde{\Phi}_2^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k})^{-1}, \\ \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T (\tilde{\Phi}_2 + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \\ \hat{\mathcal{Q}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T (\tilde{\Phi}_2 + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \\ \bar{\Omega}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= I_{n_d} - V^{-1} \phi_1 (\bar{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1}. \end{aligned}$$

2: Calcular a matriz do sistema em malha fechada, o ganho de realimentação e a equação de Riccati, respectivamente:

$$L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \bar{\Omega}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} (I_m + \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \bar{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k})^{-1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \bar{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= -\hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} \left( I_m + \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \bar{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \bar{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \\ &\quad R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T (\tilde{\Phi}_2 + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \hat{\mathcal{Q}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \bar{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} I_m \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}. \quad (5.26)$$

**SLSMAP:** Obter para cada  $k = 0, \dots, N - 1$ :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A_{\theta_k, k} + \delta A_{\theta_k, k})x_k + (A_{d, \theta_k, k} + \delta A_{d, \theta_k, k})x_{k-d_k} + (B_{\theta_k, k} + \delta B_{\theta_k, k})u_k, \\ &\quad \text{com } u_k = K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k. \end{aligned}$$


---

onde  $\bar{Z}_4 := \mathbf{1}_V \otimes Z_4$ , com  $Z_4 \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$ , e o seguinte conjunto de equações equivalentes,

$$\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} Z_1 + Z_6 = 0, \quad (5.27)$$

$$R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} Z_2 + Z_7 = 0, \quad (5.28)$$

$$Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} Z_3 = -I_{n_d}, \quad (5.29)$$

$$\tilde{\Phi}_1 \bar{Z}_4 + \mathbf{I}_{n_d} Z_6 - \mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} Z_7 = \mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad (5.30)$$

$$\tilde{\Phi}_2 Z_5 - \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} Z_7 = \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad (5.31)$$

$$Z_1 + \mathbf{I}_{n_d}^T \bar{Z}_4 = 0, \quad (5.32)$$

$$Z_2 - \mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \bar{Z}_4 - \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T Z_5 = 0. \quad (5.33)$$

De (5.32), temos que  $Z_1 + V Z_4 = 0$ , que combinado com (5.27),

$$Z_6 = \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} V Z_4, \quad (5.34)$$

e de (5.33), segue que  $Z_2 - G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T V Z_4 - \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T Z_5 = 0$ , logo, combinando com (5.28),

$$Z_7 = -R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} (G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T V Z_4 + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T Z_5). \quad (5.35)$$

Podemos reescrever (5.30) da seguinte maneira:

$$\phi_1 Z_4 + I_{n_d} Z_6 - G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} Z_7 = F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad (5.36)$$

com  $\phi_1 = \mu^{-1}(1 - \beta^{-1})I_{n_d}$ , que combinado com (5.34) e (5.35), segue que

$$(\phi_1 + V \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} V G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T) Z_4 + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T Z_5 = F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}. \quad (5.37)$$

Substituindo (5.35) em (5.31), temos que

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T V Z_4 + (\tilde{\Phi}_2 + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T) Z_5 = \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k},$$

ou ainda,

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T Z_4 + V^{-1} (\tilde{\Phi}_2 + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T) Z_5 = V^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}. \quad (5.38)$$

Combinando (5.37) e (5.38), resulta em

$$\mathcal{U} \begin{bmatrix} Z_4 \\ Z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ V^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad (5.39)$$

onde  $\mathcal{U}$  está definido no Lema 5.1. De acordo com Lema 5.1, tem-se a garantia da invertibilidade da matriz  $\mathcal{U}$ . Assim, aplicando o Lema A.10, obtém-se a solução do sistema de equações (5.39), dado por

$$\begin{aligned} Z_4 &= V^{-1} \underbrace{(V \phi_1 + \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1})}_{\bar{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1}} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \underbrace{(R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \tilde{\Phi}_2^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k})^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T}_{\hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}})^{-1} \times \\ &\quad \underbrace{(F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T (\tilde{\Phi}_2 + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k})}_{\hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \\ &= V^{-1} (\bar{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$Z_5 = (\tilde{\Phi}_2 + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1} (\tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T V Z_4). \quad (5.41)$$

Substituindo (5.40) e (5.41) em  $Z_7$  de (5.35) e aplicando o Lema A.8:

$$\begin{aligned}
Z_7 &= -R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} (G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T V Z_4 + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T Z_5), \\
&= -\hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} \underbrace{\hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T}_{\hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T} \left( \bar{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + \underbrace{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} \hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T}_{\hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T} \right)^{-1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \\
&\quad R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \tilde{\Phi}_2 + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\
&= -\hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} \left( I_m + \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \bar{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \bar{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \\
&\quad R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \tilde{\Phi}_2 + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}. \tag{5.42}
\end{aligned}$$

Agora, substituindo (5.40) e (5.42) em  $Z_6$  de (5.36), tem-se

$$\begin{aligned}
Z_6 &= F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} Z_7 - \phi_1 Z_4 \\
&= \underbrace{\left( I_{n_d} - V^{-1} \phi_1 \left( \bar{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} \right)}_{\bar{\Omega}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \\
&\quad \underbrace{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2}}_{\hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T} \left( I_m + \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \bar{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \bar{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\
&= \bar{\Omega}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \left( I_m + \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \bar{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \bar{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}.
\end{aligned}$$

De (5.20) segue que:

$$\begin{bmatrix} L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & -I_{n_d} & \mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \bar{Z}_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \\ Z_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_6 \\ Z_7 \\ -Z_3 + \mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \bar{Z}_4 + \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T Z_5 \end{bmatrix}.$$

Logo,  $L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = Z_6$ ,  $K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = Z_7$ . De (5.29) e (5.40) e (5.41), segue que:

$$\begin{aligned}
P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= -Z_3 + \mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \bar{Z}_4 + \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T Z_5 \\
&= -Z_3 + V F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T Z_4 + \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T Z_5 \\
&= \underbrace{Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \tilde{\Phi}_2 + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}_{\hat{\mathcal{Q}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} + \\
&\quad \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \bar{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} I_m \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\
&= \hat{\mathcal{Q}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \bar{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} I_m \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}.
\end{aligned}$$

□

**Observação 5.3.** As expressões do Regulador Robusto Recursivo Politépico descritas no Algoritmo 5.1 assemelham-se às do Regulador Recursivo Nominal apresentado no Algoritmo 3.1. De fato, se não há incertezas paramétricas politépicas no sistema, ou seja,  $F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(\ell)}$  e  $G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(\ell)}$  são matrizes nulas, segue que  $\phi_1 \rightarrow \mu^{-1}I_{n_d}$ ,  $\tilde{\Phi}_2 \rightarrow 0$ ,  $\hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \rightarrow G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1}$ ,  $\hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \rightarrow R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1}$ ,  $\hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \rightarrow F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $\hat{\mathcal{Q}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \rightarrow Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  e  $\bar{\Omega}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \rightarrow I_{n_d}$ . Dessa forma, as matrizes auxiliares do Algoritmo 5.1 se reduzem às matrizes do Algoritmo 3.1.

**Observação 5.4.** Se o Sistema (5.1) não está sujeito a saltos Markovianos e o atraso é invariante no tempo, o Algoritmo 5.1 ainda fornece um ganho de realimentação de estado que estabiliza o sistema linear politépico com atraso constante. Veja um exemplo numérico no Apêndice C.

**Observação 5.5.** Para qualquer  $\mu > 0$ , se  $\beta \rightarrow 1^+$ , então  $\bar{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \rightarrow \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}$  e  $\bar{\Omega}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \rightarrow I_{n_d}$ . Portanto, (5.26) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} P_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= \hat{\mathcal{Q}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} I_m \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ &\stackrel{\text{(Lema A.7)}}{=} \hat{\mathcal{Q}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \left( I_m + \right. \\ &\quad \left. \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \end{aligned} \quad (5.43)$$

que é uma equação de Riccati acoplada padrão (COSTA et al., 2005) governada por duas cadeias de Markov independentes, com as matrizes  $\hat{\mathcal{Q}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $\hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $\hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  definidas no Algoritmo 5.1.

### 5.3 Condições para a Estabilidade e Convergência

Esta seção aborda as propriedades de estabilidade e convergência do regulador robusto recursivo politépico proposto. Seguindo um procedimento similar ao descrito na Seção 4.3, o SLSMP (5.9) e a função custo quadrática (5.14) são considerados com os parâmetros fixados, mas, ainda, com o coeficiente do politopo  $\alpha_k$  variando no tempo. Dessa maneira, o sistema pode ser reescrito como

$$z_{k+1} = \left( F_{\bar{i}, i} + \sum_{\ell=1}^V \alpha_{\ell, k} F_{\bar{i}, i}^{\ell} \right) z_k + \left( G_{\bar{i}, i} + \sum_{\ell=1}^V \alpha_{\ell, k} G_{\bar{i}, i}^{\ell} \right) u_k,$$

onde  $u_k = K_{\bar{i}, i} z_k$ , sendo o ganho de realimentação  $K_{\bar{i}, i}$ , com  $i \in \mathcal{S}$  e  $\bar{i} \in \bar{\mathcal{S}}$ , determinado por (5.25). Além disso, aplicando o lema de inversão de matrizes (Lema A.7), a expressão (5.26) pode ser reescrita com os parâmetros fixados da seguinte maneira:

$$P_{\mu, \bar{i}, i, k} = \hat{\mathcal{Q}}_{\bar{i}, i} + \hat{\mathcal{F}}_{\bar{i}, i}^T \bar{\Psi}_{\bar{i}, i, k+1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{i}, i} - \hat{\mathcal{F}}_{\bar{i}, i}^T \bar{\Psi}_{\bar{i}, i, k+1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{i}, i} \left( I_m + \hat{\mathcal{G}}_{\bar{i}, i}^T \bar{\Psi}_{\bar{i}, i, k+1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{i}, i} \right)^{-1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{i}, i}^T \bar{\Psi}_{\bar{i}, i, k+1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{i}, i}. \quad (5.44)$$

Uma vez que (5.44) se assemelha às equações algébricas acopladas de Riccati (COSTA et al., 2005), então nos possibilita realizar o seguinte mapeamento entre (3.32) e (5.44):  $P_{i,k} \leftarrow P_{\mu,\bar{i},i,k}$ ,  $Q_i \leftarrow \widehat{Q}_{\bar{i},i}$ ,  $A_i \leftarrow \widehat{\mathcal{F}}_{\bar{i},i}$ ,  $\mathcal{E}_{i,k+1} \leftarrow \widehat{\Psi}_{\bar{i},i,k+1}$ ,  $B_i \leftarrow \widehat{\mathcal{G}}_{\bar{i},i}$  e  $\mathcal{R}_i \leftarrow I_m$ . Desta forma, as condições para a estabilidade e convergência do regulador proposto podem ser estabelecidas com base no problema clássico do regulador linear quadrático para SLSM. Para estabelecer essas condições, primeiramente, considere as seguintes matrizes:  $\widehat{\mathcal{F}} = (\widehat{\mathcal{F}}_{1,1}, \dots, \widehat{\mathcal{F}}_{1,s}, \dots, \widehat{\mathcal{F}}_{\bar{s},1}, \dots, \widehat{\mathcal{F}}_{\bar{s},s}) \in \mathbb{H}^{n_d \times n_d}$ ,  $\widehat{\mathcal{G}} = (\widehat{\mathcal{G}}_{1,1}, \dots, \widehat{\mathcal{G}}_{1,s}, \dots, \widehat{\mathcal{G}}_{\bar{s},1}, \dots, \widehat{\mathcal{G}}_{\bar{s},s}) \in \mathbb{H}^{n_d \times m}$ ,  $\mathcal{P}_k = (P_{\mu,1,1,k}, \dots, P_{\mu,1,s,k}, \dots, P_{\mu,\bar{s},1,k}, \dots, P_{\mu,\bar{s},s,k}) \in \mathbb{H}_+^{n_d}$  e  $\mathcal{Q} = (\widehat{Q}_{1,1}, \dots, \widehat{Q}_{1,s}, \dots, \widehat{Q}_{\bar{s},1}, \dots, \widehat{Q}_{\bar{s},s}) \in \mathbb{H}_+^{n_d}$ . Observe que como  $Q_{\bar{i},i} \succ 0$ , para todo  $i \in \mathcal{S}$  e  $\bar{i} \in \bar{\mathcal{S}}$ , segue que  $\widehat{Q}_{\bar{i},i} \succ 0$ .

**Proposição 5.1.** *Considere  $\widehat{\mathcal{F}} \in \mathbb{H}^{n_d \times n_d}$ ,  $\widehat{\mathcal{G}} \in \mathbb{H}^{n_d \times m}$  e  $\widehat{\mathcal{Q}} \in \mathbb{H}^{n_d}$  conhecidos a priori. Assuma que  $(\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{G}})$  é estabilizável e  $(\widehat{\mathcal{Q}}, \widehat{\mathcal{F}})$  é detectável. Então, para qualquer condição inicial  $P_{\mu,\theta_N,\theta_N} \succ 0$ ,  $\mu > 0$  e  $\beta > 1$ ,  $\mathcal{P}_k \in \mathbb{H}^{n_d}$  converge para a única solução estabilizante  $\mathcal{P} = (P_{\mu,1,1}, \dots, P_{\mu,1,s}, \dots, P_{\mu,\bar{s},1}, \dots, P_{\mu,\bar{s},s}) \in \mathbb{H}_+^{n_d}$  da equação de Riccati algébrica (5.26), tal que a matriz em malha-fechada*

$$L_{\mu,\bar{i},i} = \bar{\Omega}_{\bar{i},i} \widehat{\mathcal{F}}_{\bar{i},i} - \widehat{\mathcal{G}}_{\bar{i},i} (I_m + \widehat{\mathcal{G}}_{\bar{i},i}^T \bar{\Psi}_{\bar{i},i} \widehat{\mathcal{G}}_{\bar{i},i})^{-1} \widehat{\mathcal{G}}_{\bar{i},i}^T \bar{\Psi}_{\bar{i},i} \widehat{\mathcal{F}}_{\bar{i},i},$$

com  $i \in \mathcal{S}$  e  $\bar{i} \in \bar{\mathcal{S}}$ , do SLSMP (5.9) é estável.

**Prova 5.4.** *As condições  $\mu > 0$  e  $\beta > 1$  garantem que  $\phi_1 > 0$  e  $\tilde{\Phi}_2 > 0$ , tal que as matrizes  $\widehat{\mathcal{R}}$ ,  $\widehat{\mathcal{F}}$  e  $\widehat{\mathcal{Q}}$  são bem-definidas. Além disso, conforme os resultados do Apêndice D, a estabilizabilidade de  $(\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{G}})$  e a detectabilidade de  $(\widehat{\mathcal{Q}}, \widehat{\mathcal{F}})$  asseguram a convergência de  $\mathcal{P}_k$  para a solução estabilizante única  $\mathcal{P} \in \mathbb{H}_+^{n_d}$  de (5.26), que estabiliza a matriz de malha fechada  $L_{\mu,\bar{i},i}$  do SLSMP (5.9).  $\square$*

Para finalizar este capítulo, reforçamos a importância do método da função penalidade no desenvolvimento do regulador robusto politópico proposto. Essa técnica nos permitiu considerar atraso aleatório no estado e incertezas politópicas em todas as matrizes paramétricas do SLSM, além de ponderar de uma forma unificada todos os vértices do politopo, por meio de um único parâmetro. Além disso, observe que este regulador robusto também não depende da solução de LMIs ou do uso de métodos numéricos auxiliares, o que é uma grande vantagem computacional em situações reais.

## 5.4 Exemplo Ilustrativo

Nesta seção, o desempenho do Regulador Robusto Recursivo Politópico é avaliado com um exemplo numérico. O regulador proposto é comparado com outras abordagens de controle robusto existentes na literatura.

Considere o SLSMAP, como descrito em (5.1)-(5.2), com dois modos de operação e as seguintes matrizes de parâmetros nominais (adaptadas de Sun et al. (2006)):

$$A_{1,k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1,01 \end{bmatrix}, \quad A_{2,k} = \begin{bmatrix} 0,96 & 0,1 \\ 0 & 1,03 \end{bmatrix}, \quad A_{d,1,k} = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,5 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix}, \quad A_{d,2,k} = \begin{bmatrix} 0,3 & -0,1 \\ 0 & 0,2 \end{bmatrix},$$

$$B_{1,k} = \begin{bmatrix} 1 & 0,3 \\ 1 & 0,6 \end{bmatrix}, \quad B_{2,k} = \begin{bmatrix} 1,2 & 0,5 \\ 2 & 1,6 \end{bmatrix}, \quad \forall k \geq 0,$$

e incertezas limitadas por um politopo de 2-vértices dado por

$$A_{1,k}^{(1)} = A_{d,1,k}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,07 & 0,035 \\ 0,06 & 0,03 \end{bmatrix}, \quad A_{2,k}^{(1)} = A_{d,2,k}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,08 & 0,008 \\ 0,05 & 0,005 \end{bmatrix},$$

$$B_{1,k}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,14 & 0,14 \\ 0,12 & 0,12 \end{bmatrix}, \quad B_{2,k}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,24 & 0,08 \\ 0,15 & 0,05 \end{bmatrix},$$

$$(A_{1,k}^{(2)}, A_{2,k}^{(2)}, A_{d,1,k}^{(2)}, A_{d,2,k}^{(2)}, B_{1,k}^{(2)}, B_{2,k}^{(2)}) = -(A_{1,k}^{(1)}, A_{2,k}^{(1)}, A_{d,1,k}^{(1)}, A_{d,2,k}^{(1)}, B_{1,k}^{(1)}, B_{2,k}^{(1)}).$$

O estado inicial é  $x_0 = [0,5 \quad 0,5]^T$  e a condição inicial é dada por  $\varphi_0(k) = x_0$ , para todo  $k \leq 0$ . Assume-se a seguinte matriz de probabilidade de transição da cadeia de Markov  $\theta_k$ ,

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

O atraso variante no tempo possui os seguintes limitantes:  $d_{max} = 11$  ou  $d_{max} = 15$ , com  $d_{min} = 0$  e  $\Delta d = 1$ , para ambos limitantes superiores. A matriz de probabilidade de transição para cada intervalo de atraso pode ser obtida facilmente seguindo a definição estabelecida em (5.6).

O desempenho do RRRP proposto é avaliado através de uma comparação com outras abordagens de reguladores robustos existentes. Especialmente, os controladores para sistemas chaveados com incertezas paramétricas afins e atraso no estado, desenvolvidos em termos de LMIs por Baleghi e Shafiei (2019a) e Baleghi e Shafiei (2019b), as quais foram calculadas com *YALMIP<sup>®</sup> Toolbox* (LÖFBERG, 2004). Para modelar as incertezas afins, considera-se um parâmetro incerto  $\delta p_1 \in [-1, 1]$  somado a cada elemento das matrizes nominais. As condições iniciais adotadas para o Algoritmo 4.1 são:

$$P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} = Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = I_{n_d}, \quad R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = I_m, \quad \forall \bar{\theta}_k = 1, \dots, \bar{s} \text{ e } \forall \theta_k = 1, \dots, 2,$$

$$N = 160, \quad \pi_0 = [0,5 \quad 0,5], \quad \bar{\pi}_0 = 1/\bar{s} \times \mathbf{1}_{\bar{s}}^T, \quad \mu = 10^{12} \text{ e } \beta = 1,5.$$

Para fins de comparação, um total de 5000 experimentos foram realizados, considerando um horizonte de tempo  $N = 160$ . Os experimentos tiveram diferentes realizações das cadeias de Markov  $\theta_k$  e  $\bar{\theta}_k$  de acordo com suas matrizes de probabilidade de transição,  $\mathbb{P}$  e  $\bar{\mathbb{P}}$ , respectivamente. A cada passo de tempo, os coeficientes  $\alpha_{\ell,k}$ , com  $\ell \in \{1, 2\}$  foram



selecionados aleatoriamente. Todas as estratégias de controle são aplicadas no SLSM (5.1) com atraso variante no tempo e incertezas politópicas.

A Tabela 5.1 apresenta os resultados médios e desvios padrão referentes às normas dos estados e das entradas de controle, denotados por  $\|x_k\|$ ,  $\sigma_x$ ,  $\|u_k\|$  e  $\sigma_u$ , respectivamente. Observe que apesar da presença do tempo de atraso ( $d_k \in [0, 11]$ ) e das incertezas politópicas, o desempenho em termos de normas dos estados, o RRRP (Algoritmo 5.1) apresenta valores menores quando comparado as outras duas abordagens de controle. No entanto, como esperado, as normas das entradas de controle são maiores do que a proposta de Baleghi e Shafiei (2019b, Teo. 1), uma vez que consideramos o ganho de realimentação de estado aumentado, bem como apresenta valores menores do que a metade do controlador apresentado em Baleghi e Shafiei (2019a, Teo. 1).

Tabela 5.1 – Desempenho dos controladores sobre 5000 experimentos para  $d_k \in [0, 11]$ .

Controladores	$\ x_k\ $	$\sigma_x$	$\ u_k\ $	$\sigma_u$
RRRP (Algoritmo 5.1)	<b>0,7456</b>	<b>0,0526</b>	0,7253	0,0505
Baleghi e Shafiei (2019a, Teo. 1)	1,5578	0,1099	2,8587	0,2019
Baleghi e Shafiei (2019b, Teo. 1)	1,4611	0,1017	<b>0,5603</b>	<b>0,0412</b>

O regulador robusto recursivo politópico proposto e o controlador desenvolvido em Baleghi e Shafiei (2019b, Teo. 1) regulam o SLSMP com atraso variante no tempo para pelo menos  $d_{max} = 15$ , com  $d_{min} = 0$ , como pode ser visto na Figura 5.1. No entanto, a abordagem de Baleghi e Shafiei (2019a, Teo. 1) apresenta soluções infactíveis para  $d_{max} \geq 12$ , por este motivo não está representado na Figura 5.1. Observe que mesmo com o aumento do tempo de atraso, os reguladores garantem a estabilidade em malha-fechada do SLSM com o atraso variante no tempo ( $d_k \in [0, 15]$ ) e incertezas em todas as matrizes paramétricas do sistema. Na Figura 5.2, uma dada realização da cadeia de Markov é ilustrada.

Figura 5.1 – Comparação das médias das normas de estado e dos planos de fase de malha-fechada obtidos pelos reguladores quando  $d_k \in [0, 15]$ .

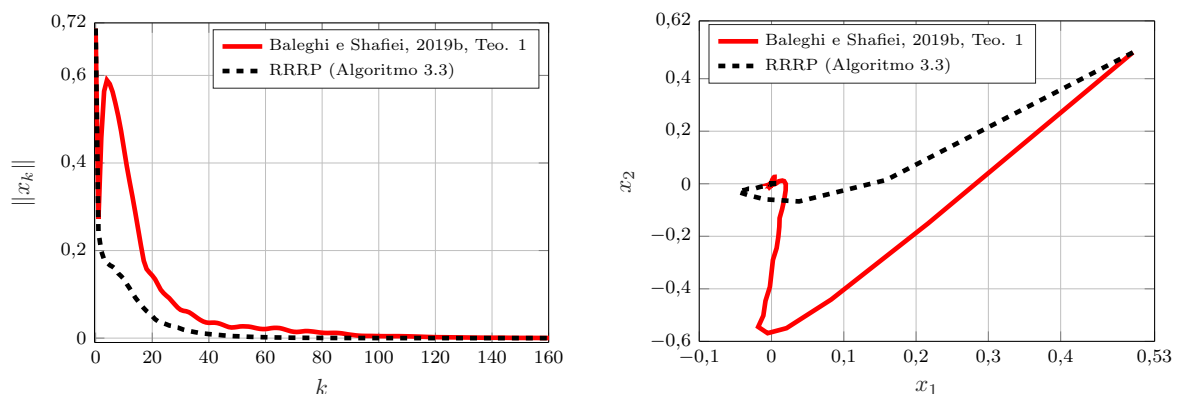
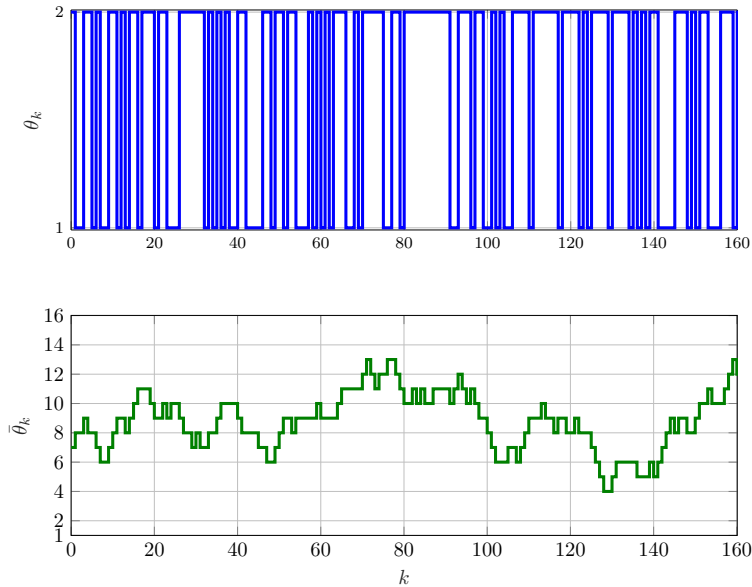
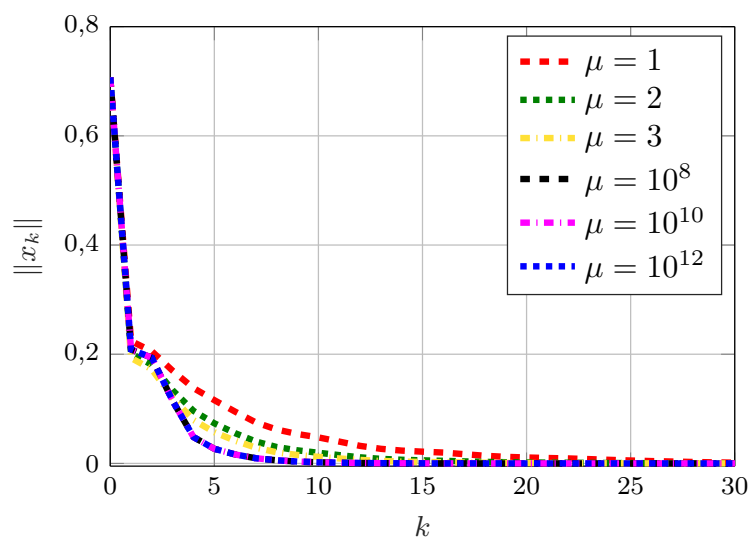


Figura 5.2 – Comutação dos modos de operação do SLSMAP quando  $d_k \in [0, 15]$ .

Para analisar a influência do parâmetro de penalidade  $\mu$  no desempenho do RRRP (Algoritmo 5.1), obtém-se os valores médios das normas dos estados do sistema assumindo alguns valores para o parâmetro  $\mu$ . Na Figura 5.3 é possível observar que o sistema estabiliza para valores pequenos de  $\mu$ , além de manter o mesmo desempenho após o parâmetro  $\mu$  atingir uma certa ordem de grandeza.

Figura 5.3 – Efeito do parâmetro de penalidade  $\mu$  nos valores médios das normas dos estados do SLSMAP quando  $d_k \in [0, 1]$ .

# Controle de SLSMA com MTI Limitada em Norma

Neste capítulo, o regulador robusto recursivo proposto no Capítulo 4 é estendido para quando as matrizes de transição são incertas. Assume-se um sistema Markoviano com atraso aleatório no estado e incertezas limitadas em norma nas matrizes paramétricas e nas probabilidades de transição. Seguindo os procedimentos apresentados no Capítulo 4, um problema de regulação é formulado para o sistema Markoviano aumentado, o qual é transformado em um problema de controle de mínimos-quadrados regularizados com incertezas limitadas em norma (Seção 2.3.4), cuja solução fornece o Regulador Robusto Recursivo com MTI (RRR-MTI). A partir desta solução, deriva-se o Regulador Recursivo Nominal com MTI (RRN-MTI), como a denominação nominal sugere, as matrizes paramétricas são perfeitamente conhecidas. Os reguladores são fornecidos em uma estrutura matricial simétrica e, também, através de expressões algébricas recursivas que se assemelham com as do regulador linear quadrático padrão. A análise de estabilidade e convergência do regulador robusto proposto é realizada, assumindo um modelo com parâmetros invariantes no tempo. O capítulo finaliza com dois exemplos ilustrativos.

## 6.1 Formulação do problema

### 6.1.1 Modelo do Sistema

Considere o modelo dinâmico de um SLSMA com incertezas paramétricas limitadas em norma de tempo discreto

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A_{\theta_k,k} + \delta A_{\theta_k,k})x_k + (A_{d,\theta_k,k} + \delta A_{d,\theta_k,k})x_{k-d_k} + (B_{\theta_k,k} + \delta B_{\theta_k,k})u_k, \\ x_k &= \varphi_0(k), \quad k \in [-d_{max}, 0], \end{aligned} \quad (6.1)$$

para  $k = 0, 1, \dots, N$ , com o vetor de estado  $x_k \in \mathbb{R}^n$  no instante  $k$ , o estado atrasado por  $d_k$  amostras  $x_{k-d_k} \in \mathbb{R}^n$ , a entrada de controle  $u_k \in \mathbb{R}^m$ , a condição inicial  $\varphi_0(k)$  para

$k = -d_{max}, -d_{max} + 1, \dots, 0$ , as matrizes paramétricas conhecidas  $A_{\theta_k, k}, A_{d, \theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B_{\theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e as incertezas paramétricas limitadas em norma  $\delta A_{\theta_k, k}, \delta A_{d, \theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\delta B_{\theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  modeladas por

$$\begin{bmatrix} \delta A_{\theta_k, k} & \delta A_{d, \theta_k, k} & \delta B_{\theta_k, k} \end{bmatrix} = H_{\theta_k, k} \Delta_{\theta_k, k} \begin{bmatrix} E_{A_{\theta_k, k}} & E_{A_{d, \theta_k, k}} & E_{B_{\theta_k, k}} \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

onde  $H_{\theta_k, k} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  é uma matriz não-nula,  $E_{A_{\theta_k, k}}, E_{A_{d, \theta_k, k}} \in \mathbb{R}^{q \times n}$  e  $E_{B_{\theta_k, k}} \in \mathbb{R}^{q \times m}$  são matrizes conhecidas e  $\Delta_{\theta_k, k} \in \mathbb{R}^{p \times q}$  é uma matriz de contração com  $\|\Delta_{\theta_k, k}\| \leq 1$ . Observe que se  $\{\delta A_{\theta_k, k}, \delta A_{d, \theta_k, k}, \delta B_{\theta_k, k}\}$  são matrizes nulas, então assumimos o conhecimento exato do sistema.

Assumimos o cenário de observação completa do estado do sistema, ou seja,  $\theta_k$  e  $x_k$  são conhecidos. O processo estocástico  $\{\theta_k, k \geq 0\}$  é descrito por uma cadeia de Markov de estado finito e tempo discreto  $\theta_k \in \mathcal{S} = \{1, \dots, s\}$  associado à matriz de probabilidade de transição incerta  $\mathbb{P}^\delta \in \mathbb{R}^{s \times s}$ ,  $i, j \in \mathcal{S}$ , definido por  $\mathbb{P}^\delta = \mathbb{P} + \delta \mathbb{P}$ , com

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^\delta &= \Pr[\theta_{k+1} = j \mid \theta_k = i] = [p_{ij} + \delta p_{ij}], \quad \Pr[\theta_0 = i] = \pi_i + \delta \pi_i, \\ &\sum_{j=1}^s (p_{ij} + \delta p_{ij}) = 1, \quad 0 \leq p_{ij} + \delta p_{ij} \leq 1, \end{aligned} \quad (6.3)$$

onde  $\mathbb{P}$  é uma matriz de parâmetros nominais e  $\delta \mathbb{P}$  uma matriz de incertezas modelada por

$$\delta p_{ij} = h_{ij} \Delta_{ij} e_{ij} \quad (6.4)$$

com os escalares conhecidos  $h_{ij}$  e  $e_{ij}$  e o escalar  $\Delta_{ij}$  pertencente ao intervalo  $[\underline{\eta}_{ij}, \bar{\eta}_{ij}]$ .

Com relação ao atraso, consideramos uma segunda cadeia de Markov  $\bar{\theta}_k \in \bar{\mathcal{S}} = \{1, \dots, \bar{s}\}$ ,  $\bar{s} = d_{max} - d_{min} + 1$ , para governar o seu comportamento aleatório, cujo os limitantes inferiores e superiores são modelados por

$$0 \leq d_{min} \leq d_k \leq d_{max} \text{ e } \|d_{k+1} - d_k\| \leq \Delta d \leq d_{max} \quad (6.5)$$

onde  $d_{min} = \min\{d_k\}$ ,  $d_{max} = \max\{d_k\}$  e  $\Delta d$  é a taxa máxima de variação do atraso, com a amostra futura  $d_{k+1}$  assumindo quaisquer valores pertencentes ao intervalo  $[\bar{d}_{min}, \bar{d}_{max}]$ , onde  $\bar{d}_{min} = \max(d_{min}, d_k - \Delta d)$  e  $\bar{d}_{max} = \min(d_{max}, d_k + \Delta d)$ .

A cadeia de Markov  $\bar{\theta}_k$  está associada a uma matriz de probabilidade de transição conhecida  $\bar{\mathbb{P}} = \bar{p}_{\bar{i}\bar{j}} \in \mathbb{R}^{\bar{s} \times \bar{s}}$ ,  $\bar{i}, \bar{j} \in \bar{\mathcal{S}}$  cujas as entradas satisfazem as seguintes condições

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}} &= \Pr[\bar{\theta}_{k+1} = \bar{j} \mid \bar{\theta}_k = \bar{i}] = \bar{p}_{\bar{i}\bar{j}}, \quad \Pr[\bar{\theta}_0 = \bar{i}] = \bar{\pi}_{\bar{i}, 0}, \\ &\sum_{\bar{j}=1}^{\bar{s}} \bar{p}_{\bar{i}\bar{j}} = 1, \quad 0 \leq \bar{p}_{\bar{i}\bar{j}} \leq 1, \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde a matriz de probabilidade de transição  $\bar{\mathbb{P}}$  é definida de acordo com a taxa máxima de variação do atraso,

$$\bar{p}_{\bar{i}\bar{j}} = \begin{cases} 1/\bar{s} & \begin{cases} j \in (\bar{d}_{min} + 1, \bar{d}_{max} + 1), & d_{min} = 0, \\ j \in (\bar{d}_{min}, \bar{d}_{max}), & d_{min} \neq 0, \end{cases} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (6.7)$$

Com o objetivo de regular o SLSMA (6.1) sob probabilidades de transição sujeitas a incertezas limitadas em norma, adotamos a seguinte lei de controle de realimentação de estado dependente do modo,

$$u_k = K_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k, \quad \forall k \geq 0, \quad (6.8)$$

com o estado aumentado  $z_k$  e a condição inicial  $z_0$  definidos em (4.7) e o ganho  $K_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = [K_{1, \theta_k, k} \quad K_{2, \theta_k, k} \quad \dots \quad K_{\bar{s}, \theta_k, k}] \in \mathbb{R}^{m \times n_d}$ , onde  $n_d = d_{max}n + n$ .

Portanto, como o regulador proposto dispensa o conhecimento em tempo real do atraso  $d_k$ , o SLSMA (6.1) pode ser tratado por um sistema correspondente independente do atraso, de modo que a lei de controle proposta garanta estabilidade em malha fechada. Desta forma, consideramos a descrição do modelo aumentado com incertezas limitadas em norma (Seção 4.1.2) para representar o SLSMA (6.1). No entanto, assumimos que o SLSM (4.8) é governado pelas duas cadeias de Markov mutuamente independentes  $\theta_k$  e  $\bar{\theta}_k$ , que estão associadas às probabilidades de transição  $\mathbb{P}^\delta$  definida em (6.3) e  $\bar{\mathbb{P}}$  em (6.6), respectivamente.

### 6.1.2 Problema de Controle Robusto com MTI

O objetivo principal deste capítulo é estabilizar o Sistema (6.1) em malha fechada na média quadrática, quando o modelo dinâmico está sujeito a incertezas limitadas em norma nas matrizes paramétricas e nas probabilidades de transição. Uma sequência de controle  $\mathcal{U} = \{u_0^*, \dots, u_{N-1}^*\}$  é investigada, tal que garanta que os autovalores do Sistema (6.1) realimentado estejam dentro do círculo unitário aberto. Desta forma, através da abordagem aumentada (Subseção 4.1.2), projeta-se um regulador em termos do sistema Markoviano aumentado correspondente (4.8).

Baseado em Bortolin e Terra (2016), considera-se o seguinte problema de otimização min-max restrito para minimizar o valor esperado da função de custo quadrático sob a máxima influência das incertezas relacionadas às matrizes paramétricas e às probabilidades de transição:

$$\begin{aligned} & \min_{u_k, z_{k+1}} \max_{\delta \mathbb{P}, \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \mathbb{E} \left\{ J_N(z_{k+1}, u_k) \mid \bar{\mathcal{O}}_0, \mathcal{O}_0 \right\} \\ & \text{sujeito a } z_{k+1} = (F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}) z_k + (G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}) u_k, \end{aligned} \quad (6.9)$$

com

$$J_N(z_{k+1}, u_k) = z_N^T P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} z_N + \sum_{k=0}^{N-1} (z_k^T Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k + u_k^T R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} u_k), \quad (6.10)$$

onde  $\mathcal{O}_0 := \{\bar{\theta}_0, \theta_0, z_0, x_0\}$ , e  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  e  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  são as matrizes de ponderação. Observe que a solução do problema (6.9)-(6.10) fornece o regulador robusto recursivo para o SLSM (4.8) com duas cadeias de Markov independentes e, consequentemente, uma sequência de controle ótima que estabiliza o sistema Markoviano original com atraso aleatório no estado e probabilidades de transição incertas (6.1).

## 6.2 Regulador Recursivo Robusto com MTI Limitada em Norma

Baseado no procedimento descrito na Seção 4.2 para o Regulador Robusto Recursivo, o problema de otimização (6.9)-(6.10) é transformado em  $N$  problemas de otimização de um passo, através da programação dinâmica. Assim, a cada passo de tempo  $k = N, \dots, 0$ , considera-se o seguinte problema

$$\begin{aligned} \min_{u_k, z_{k+1}} \max_{\delta \mathbb{P}, \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \mathbb{E} \left\{ J_k(z_{k+1}, u_k) \mid \bar{\mathcal{O}}_k, \mathcal{O}_k \right\} \\ \text{sujeito ao SLSM (4.8)} \end{aligned} \quad (6.11)$$

com o valor esperado da função de custo quadrático de uma etapa

$$\mathbb{E} \left\{ J_k(z_{k+1}, u_k) \mid \bar{\mathcal{O}}_k, \mathcal{O}_k \right\} = z_{k+1}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^\delta z_{k+1} + z_k^T Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k + u_k^T R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} u_k, \quad (6.12)$$

na qual  $\mathcal{O}_k := \{\theta_k, x_k\}$ ,  $\bar{\mathcal{O}}_k := \{\bar{\theta}_k, z_k\}$  e o operador  $\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^\delta$  definido por

$$\begin{aligned} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^\delta &= \mathbb{E} \{ P_{\bar{\theta}_{k+1}, \theta_{k+1}, k+1} \mid \bar{\mathcal{O}}_k, \mathcal{O}_k \} \\ &= \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{s}} \sum_{j=1}^s \bar{p}_{\bar{\theta}_k, \bar{j}} (p_{\theta_k, j} + \delta p_{\theta_k, j}) P_{\bar{j}, j, k+1} \\ &= \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} + \delta \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}, \end{aligned}$$

onde

$$\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} := \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{s}} \sum_{j=1}^s \bar{p}_{\bar{i}\bar{j}} p_{ij} P_{\bar{j}, j, k+1} \quad \text{e} \quad \delta \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} := \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{s}} \sum_{j=1}^s \bar{p}_{\bar{i}\bar{j}} \delta p_{ij} P_{\bar{j}, j, k+1}.$$

Observe que para todo  $\theta_k = i \in \mathcal{S}$  e  $\bar{\theta}_k = \bar{i} \in \bar{\mathcal{S}}$ , o operador  $\delta \Psi_{\bar{i}, i, k+1}$  pode ser escrito na forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \delta \Psi_{\bar{i}, i, k+1} &= \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{s}} \sum_{j=1}^s \bar{p}_{\bar{i}\bar{j}} \delta p_{ij} P_{\bar{j}, j, k+1}, \\ &= \bar{p}_{\bar{i}1} \delta p_{i1} P_{11, k+1} + \dots + \bar{p}_{\bar{i}1} \delta p_{is} P_{1s, k+1} + \dots + \bar{p}_{\bar{i}\bar{s}} \delta p_{i1} P_{\bar{s}1, k+1} + \dots + \bar{p}_{\bar{i}\bar{s}} \delta p_{is} P_{\bar{s}s, k+1} \\ &= (\bar{p}_{\bar{i}1} \delta p_{i1})^{1/2} P_{11, k+1}(\bullet) + \dots + (\bar{p}_{\bar{i}1} \delta p_{is})^{1/2} P_{1s, k+1}(\bullet) + \dots + \\ &\quad (\bar{p}_{\bar{i}\bar{s}} \delta p_{i1})^{1/2} P_{\bar{s}1, k+1}(\bullet) + \dots + (\bar{p}_{\bar{i}\bar{s}} \delta p_{is})^{1/2} P_{\bar{s}s, k+1}(\bullet) \\ &= \left[ (\bar{p}_{\bar{i}1} \delta p_{i1})^{1/2} I_{n_d} \quad \dots \quad (\bar{p}_{\bar{i}1} \delta p_{is})^{1/2} I_{n_d} \quad \dots \quad (\bar{p}_{\bar{i}\bar{s}} \delta p_{i1})^{1/2} I_{n_d} \quad \dots \quad (\bar{p}_{\bar{i}\bar{s}} \delta p_{is})^{1/2} I_{n_d} \right] \times \\ &\quad \begin{bmatrix} P_{11, k+1} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & P_{1s, k+1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & P_{\bar{s}1, k+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & P_{\bar{s}s, k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\bar{p}_{\bar{i}1} \delta p_{i1})^{1/2} I_{n_d} \\ \vdots \\ (\bar{p}_{\bar{i}1} \delta p_{is})^{1/2} I_{n_d} \\ \vdots \\ (\bar{p}_{\bar{i}\bar{s}} \delta p_{i1})^{1/2} I_{n_d} \\ \vdots \\ (\bar{p}_{\bar{i}\bar{s}} \delta p_{is})^{1/2} I_{n_d} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo, definindo

$$\delta \mathbf{p}_{\bar{i},i}^T := \left[ (\bar{p}_{\bar{i}1} \delta p_{i1})^{1/2} I_{n_d} \quad \dots \quad (\bar{p}_{\bar{i}1} \delta p_{is})^{1/2} I_{n_d} \quad \dots \quad (\bar{p}_{\bar{i}s} \delta p_{i1})^{1/2} I_{n_d} \quad \dots \quad (\bar{p}_{\bar{i}s} \delta p_{is})^{1/2} I_{n_d} \right],$$

$$\mathcal{P}_{k+1} := \mathbf{diag}(P_{1,1,k+1}, \dots, P_{1,s,k+1}, \dots, P_{\bar{s},1,k+1}, \dots, P_{\bar{s},s,k+1}),$$

sendo  $\delta \mathbf{p}_{\bar{i},i}^T \in \mathbb{R}^{n_d \times \bar{s}n_d}$  e  $\mathcal{P}_{k+1} \in \mathbb{R}^{\bar{s}n_d \times \bar{s}n_d}$ , segue que

$$\delta \Psi_{\bar{i},i,k+1} = \delta \mathbf{p}_{\bar{i},i}^T \mathcal{P}_{k+1} \delta \mathbf{p}_{\bar{i},i},$$

onde  $\delta \mathbf{p}_{\bar{i},i}$  é a matriz de incertezas das probabilidades de transição modelada por

$$\delta \mathbf{p}_{\bar{i},i} = M_{\mathbf{p}_{\bar{i},i}} \Delta_{\mathbf{p}_i} N_{\mathbf{p}_i},$$

com

$$M_{\mathbf{p}_{\bar{i},i}} := \begin{bmatrix} \sqrt{\bar{p}_{\bar{i}1}} \\ \sqrt{\bar{p}_{\bar{i}2}} \\ \vdots \\ \sqrt{\bar{p}_{\bar{i}s}} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \sqrt{h_{i1}} I_{n_d} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{i2}} I_{n_d} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{h_{is}} I_{n_d} \end{bmatrix}, \quad \Delta_{\mathbf{p}_i} := \begin{bmatrix} \sqrt{\Delta_{i1}} I_{n_d} \\ \sqrt{\Delta_{i2}} I_{n_d} \\ \vdots \\ \sqrt{\Delta_{is}} I_{n_d} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N_{\mathbf{p}_i} := \sqrt{e_i} I_{n_d}$$

para todo  $\theta_k = i$  e  $\bar{\theta}_k = \bar{i}$ , onde  $M_{\mathbf{p}_{\bar{i},i}} \in \mathbb{R}^{\bar{s}n_d \times n_d}$  é uma matriz não-nula conhecida,  $\Delta_{\mathbf{p}_i} \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$  é uma matriz de contração tal que  $\|\Delta_{\mathbf{p}_i}\| \leq 1$  e  $N_{\mathbf{p}_i} \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$  é uma matriz conhecida, cujo os elementos  $h_{ij}$ ,  $\Delta_{ij}$  e  $e_i = e_{ij}$  são escaleres definidos em (6.4). Portanto, o valor esperado da função (6.12) pode ser reescrita como

$$\mathbb{E} \left\{ J_k(z_{k+1}, u_k) \mid \bar{\mathcal{O}}_k, \mathcal{O}_k \right\} = z_{k+1}^T \left( \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} + \delta \mathbf{p}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T \mathcal{P}_{k+1} \delta \mathbf{p}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} \right) z_{k+1} + z_k^T Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k + u_k^T R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} u_k. \quad (6.13)$$

O problema de otimização restrito (6.11) com a função objetivo (6.13) pode ser aproximado por um problema irrestrito, através do método da função de penalidade descrito na Seção 2.1. A restrição é inserida como um termo quadrático na função objetivo por meio de um parâmetro de penalidade  $\mu > 0$ , que penaliza as violações da restrição. Portanto, para um  $\mu > 0$  fixado, o problema (6.11)- (6.13) pode ser reescrito da seguinte forma,

$$\min_{z_{k+1}, u_k} \max_{\delta \mathbf{p}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}, \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \mathcal{J}_{\mu, k}(z_{k+1}, u_k) \quad (6.14)$$

com o funcional de custo quadrático

$$\mathcal{J}_{\mu, k}(z_{k+1}, u_k) = \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} & 0 \\ 0 & 0 \\ I_{n_d} & -(G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -I_{n_d} \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k \right)^T \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 \\ 0 & 0 & \mu I_{n_d} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

O problema (6.14)-(6.15) representa um caso particular de um problema de mínimos-quadrados regularizados. Desta forma, referimos ao problema (6.14)-(6.15) como um *problema de controle de mínimos-quadrados regularizados com incertezas limitadas em norma nas matrizes paramétricas e na matriz de transição*. O teorema a seguir apresenta um arranjo matricial simétrico que determina uma solução para o problema (6.14)-(6.15), o qual é obtido por meio dos resultados apresentados na Seção 2.3.4.

**Teorema 6.1.** *Considere o problema de controle de mínimos-quadrados regularizados com incertezas limitadas em norma nas matrizes paramétricas e na matriz de transição (6.14)-(6.15), com  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ ,  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  e  $\tilde{N}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  é definida positiva com*

$$\tilde{N}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = I_{n_d} - N_{\mathbf{P}\theta_k}^T \left( \hat{\lambda}^{-1} I_{n_d} + N_{\mathbf{P}\theta_k} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} N_{\mathbf{P}\theta_k}^T \right)^{-1} N_{\mathbf{P}\theta_k} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1}.$$

Então, o estado do sistema  $z_{\mu, k+1}^*$ , a entrada de controle  $u_{\mu, k}^*$  e a função custo  $\mathcal{J}_{\mu, k}^*$ , condicionados pelo parâmetro de penalidade  $\mu > 0$ , são dados por:

$$\begin{bmatrix} z_{\mu, k+1}^* \\ u_{\mu, k}^* \\ \mathcal{J}_{\mu, k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_d} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & z_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k, \quad (6.16)$$

onde, para  $k = N, \dots, 0$ , a matriz do sistema em malha fechada  $L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ , o ganho de realimentação  $K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  e a equação de Riccati  $P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ , são obtidos de (6.17),

$$\begin{bmatrix} L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & -I_{n_d} & \bar{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma & \bar{I}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & -\bar{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ I_{n_d} & 0 & 0 & \bar{I}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & -\bar{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{n_d} \\ \bar{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

com as matrizes  $\bar{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $\bar{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $\bar{I}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  e  $\Sigma$  definidas por:

$$\bar{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \begin{bmatrix} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \\ N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \end{bmatrix}, \quad \bar{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \begin{bmatrix} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \\ N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \end{bmatrix}, \quad \bar{I}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \begin{bmatrix} I_{n_d} \\ N_{\mathbf{P}\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \end{bmatrix},$$



$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Phi(\mu, \hat{\lambda}) & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}^{-1}I_{n_d} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\lambda}^{-1}I_q \end{bmatrix}, \quad \Phi(\mu, \hat{\lambda}) = \mu^{-1}I_{n_d} - \hat{\lambda}^{-1}M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \quad (6.18)$$

e  $\hat{\lambda} = \beta \|\mu M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}\|$ , para algum  $\beta > 1$ .

**Prova 6.1.** Observe que (6.14)-(6.15) é um problema de mínimos-quadrados regularizados com incertezas limitadas em norma quando são realizadas as seguintes identificações entre os problemas (2.20)-(2.21) e (6.14)-(6.15):

$$x := \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} := \begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W} := \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 \\ 0 & 0 & \mu I_{n_d} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I_{n_d} & -G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad \delta \mathcal{A} := \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 0 \\ -I_{n_d} \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k \quad \text{e} \quad \delta b := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k. \quad (6.19)$$

Além disso, considerando as identificações entre os modelos de incertezas (2.22)-(6.15):

$$\mathcal{H} := \begin{bmatrix} M_{\mathbf{p}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad \Delta := \begin{bmatrix} \Delta_{\mathbf{p}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}} & 0 \\ 0 & \Delta_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad E_{\mathcal{A}} := \begin{bmatrix} N_{\mathbf{p}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}} & 0 \\ 0 & N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

e  $E_b := \begin{bmatrix} 0 \\ N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \end{bmatrix}$ .

Como  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ ,  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  e  $\mu > 0$ , tem-se que  $\mathcal{Q} \succ 0$  e  $\mathcal{W} \succ 0$  e, conseqüentemente, pode-se aplicar o Lema (2.8) e obter o seguinte arranjo matricial:

$$\begin{bmatrix} L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & 0 & -I_{n_d} & \bar{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & \Phi(\mathcal{P}, \hat{\lambda}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma & \bar{I}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & -\bar{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ I_{n_d} & 0 & 0 & 0 & \bar{I}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 & -\bar{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I_{n_d} \\ \bar{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

com  $\Phi(\mathcal{P}, \hat{\lambda}) = \mathcal{P}_{k+1}^{-1} - \hat{\lambda}^{-1} M_{\mathbf{P}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}} M_{\mathbf{P}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}}^T$  e as matrizes  $\bar{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $\bar{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $\bar{I}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  e  $\Sigma$  definidas em (6.18). Além disso, adota-se a aproximação prática descrita na Observação 2.2 para o cálculo de  $\hat{\lambda}$ . Desta forma, considera-se

$$\hat{\lambda} = \beta \|\mathbf{diag}(M_{\mathbf{P}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}}^T, \mathcal{P}_{k+1} M_{\mathbf{P}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}}, \mu M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k})\|.$$

No entanto, uma vez que a função  $\Gamma(\lambda)$ , definida no Teorema 2.7, independe da matriz  $\Phi(\mathcal{P}, \hat{\lambda})$ , veja a demonstração no Apêndice B, segue que  $\hat{\lambda} = \beta \|\mu M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}\|$ , para algum  $\beta > 1$ . Adicionalmente, algumas manipulações algébricas adicionais são realizadas para remover linhas e colunas redundantes do arranjo matricial (6.21) para obter a solução (6.16)-(6.18).  $\square$

**Observação 6.1.** Assume-se a condição  $\tilde{N}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  para garantir a recursividade da solução proposta no Teorema 6.1. Veja a Observação 6.4 para maiores detalhes.

**Observação 6.2.** Considere que o SLSMA (6.1) não está sujeito a incertezas paramétricas. Logo, os parâmetros incertos do SLSM aumentado (4.8) são nulos, isto é,  $M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} = N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} = 0$ . Desta forma, as expressões do Teorema 6.1 se reduzem ao Regulador Recursivo Nominal com Matriz de Transição Incertas (RRN-MTI). Para verificar esta redução, considere as seguintes matrizes em (6.17):

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= \begin{bmatrix} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \begin{bmatrix} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{I}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \begin{bmatrix} I_{n_d} \\ N_{\mathbf{P}_{\theta_k}} \end{bmatrix}, \\ \Sigma &= \begin{bmatrix} \Phi(\mu) & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}^{-1} I_{n_d} \end{bmatrix}, \quad \Phi(\mu) = \mu^{-1} I_{n_d} \text{ e } \hat{\lambda} > 0. \end{aligned} \quad (6.22)$$

O arranjo matricial simétrico no Teorema 6.1 fornece uma estrutura unificada para obter o estado futuro  $z_{\mu, k+1}^*$ , a entrada de controle  $u_{\mu, k}^*$  e a função custo  $\mathcal{J}_{\mu, k}^*$ . No entanto, o resultado do Teorema 6.1 pode ser reduzido em expressões algébricas recursivas, as quais fornecem uma generalização daquelas descritas no Algoritmo 6.1. Para obter as expressões algébricas, um resultado preliminar é apresentado a seguir.

**Lema 6.1.** Suponha que  $\tilde{N}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ ,  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  e  $\Phi(\mu, \hat{\lambda}) \succeq 0$ . Então, a matriz

$$\mathcal{U} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} & & \overline{\mathcal{U}} & & & G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \\ & & & & & 0 \\ \hline N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & 0 & & \hat{\lambda}^{-1} I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T & & \end{array} \right] \quad (6.23)$$

é não-singular, sendo a matriz  $\overline{\mathcal{U}}$  dada por

$$\overline{\mathcal{U}} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \Phi(\mu, \hat{\lambda}) + \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & & & \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} N_{\mathbf{P}_{\theta_k}}^T & & \\ & N_{\mathbf{P}_{\theta_k}} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} & & \hat{\lambda}^{-1} I_{n_d} + N_{\mathbf{P}_{\theta_k}} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} N_{\mathbf{P}_{\theta_k}}^T & & \end{array} \right].$$

**Prova 6.2.** A matriz  $\mathcal{D} = \hat{\lambda}^{-1} I_{n_d} + N_{\mathbf{P}_{\theta_k}} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} N_{\mathbf{P}_{\theta_k}}^T$  é não-singular. De fato, como  $\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \succ 0$  e  $N_{\mathbf{P}_{\theta_k}} = e_{\theta_k} I_{n_d} \succ 0$ , segue que  $N_{\mathbf{P}_{\theta_k}} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} N_{\mathbf{P}_{\theta_k}}^T \succ 0$  (Lema A.3). De acordo com a propriedade de positividade (Lema A.4),  $\mathcal{D} \succ 0$  e, portanto, não-singular.

Adicionalmente, a matriz  $\mathcal{E} = \hat{\lambda}^{-1}I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T$  também é não-singular. De fato, como  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ , então  $N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \succeq 0$ , conforme o Lema A.2. Assim, pela propriedade de positividade (Lema A.4), segue que  $\mathcal{E} \succ 0$ . Desta forma, o bloco diagonal  $\mathcal{S} = \mathbf{diag}(\mathcal{U}, \mathcal{E})$  é não-singular.

O complemento de Schur de  $\mathcal{S}$  em  $\mathcal{U}$  é não-singular. De fato,

$$(\mathcal{U} / \mathcal{S}) = \Phi(\mu, \hat{\lambda}) + \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} \widetilde{N}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \widehat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T.$$

Como  $\Phi(\mu, \hat{\lambda}) \succeq 0$ ,  $\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \succ 0$ ,  $\widetilde{N}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  e  $\widehat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  (Lema 4.1), segue que  $\Phi(\mu, \hat{\lambda}) + \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} \widetilde{N}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  e pela propriedade de positividade (Lema A.2),  $G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \widehat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \succeq 0$ . Assim, de acordo com o Lema A.4, tem-se que  $(\mathcal{U} / \mathcal{S}) \succ 0$ . Portanto, pelo complemento de Schur (Lema A.11),  $\mathcal{U}$  é definida positiva e, consequentemente, não-singular.  $\square$

**Teorema 6.2.** Considere o problema de controle de mínimos-quadrados regularizados com incertezas limitadas em norma nas matrizes paramétricas e na matriz de transição (6.14)-(6.15), com as condições iniciais conhecidas  $N$ ,  $\mu > 0$ ,  $\beta > 1$ ,  $x_0$ ,  $\pi_0$ ,  $\bar{\pi}_0$ ,  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ ,  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ . Para cada  $k = N - 1, \dots, 0$ , sua solução recursiva fornece  $L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  do SLSM (4.8) e, consequentemente, para cada  $k = 0, \dots, N - 1$ , concede o SLSMA (6.1) em malha-fechada, conforme descrito no Algoritmo 6.1.

**Prova 6.3.** Como já foi mencionado, o problema de controle (6.14)-(6.15) representa um problema de mínimos-quadrados regularizados (Seção 2.3.4) com as identificações (6.19)-(6.20). Assim, aplicando o Lema 2.8, obtém-se o arranjo matricial (6.21) que também representa um sistema de equações lineares simultâneas,

$$\begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & \Phi(\mathcal{P}, \hat{\lambda}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi(\mu, \hat{\lambda}) & 0 & 0 & I_{n_d} & -G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}^{-1}I_{n_d} & 0 & N_{\mathbf{P}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}^{-1}I_q & 0 & -N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \\ I_{n_d} & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & N_{\mathbf{P}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 & -G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & 0 & -N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \\ W_6 \\ W_7 \\ W_8 \\ W_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I_{n_d} \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \\ N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Algoritmo 6.1** Regulador Robusto Recursivo com MTI (RRR-MTI)

**Modelo:** Assumir o modelo de SLSMA (6.1)-(6.2).

**SLSM:** Definir o SLSM aumentado (4.8)-(4.9) conforme (4.7)-(4.10), com  $\theta_k$  e  $\bar{\theta}_k$  associadas às matrizes  $\mathbb{P}^\delta$  em (6.3) e  $\bar{\mathbb{P}}$  em (6.6), respectivamente.

**Regulador Robusto Recursivo com MT incerta:**

*Condições iniciais:* Seja  $N$ ,  $\mu > 0$ ,  $\beta > 1$ ,  $x_0$ ,  $\pi_0$ ,  $\bar{\pi}_0$ ,  $P_{\bar{\theta}_k, \theta_k, N} \succ 0$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ ,  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  e  $\tilde{N}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ .

Para todo  $k = N - 1, \dots, 0$ :

1: Calcular as matrizes auxiliares:

$$\begin{aligned} \Phi(\mu, \hat{\lambda}) &= \mu^{-1} I_{n_d} - \hat{\lambda}^{-1} M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T, & \tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} &= (\Phi(\mu, \hat{\lambda}) + \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} \tilde{N}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k})^{-1}, \\ \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2}, & \hat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= (R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \hat{\lambda} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}})^{-1}, \\ \tilde{N}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= I_{n_d} - N_{\mathbf{p}_{\theta_k}}^T \left( \hat{\lambda}^{-1} I_{n_d} + N_{\mathbf{p}_{\theta_k}} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} N_{\mathbf{p}_{\theta_k}}^T \right)^{-1} N_{\mathbf{p}_{\theta_k}} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1}, \\ \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \left( \hat{\lambda}^{-1} I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \right)^{-1} N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}, \\ \hat{Q}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \left( \hat{\lambda}^{-1} I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \right)^{-1} N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}, \\ \tilde{\Omega}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= I_{n_d} - \Phi(\mu, \hat{\lambda}) (\tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1}. \end{aligned}$$

2: Calcular a matriz do sistema em malha fechada, o ganho de realimentação e a equação de Riccati, respectivamente:

$$L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \tilde{\Omega}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} (I_m + \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k})^{-1} \times \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad (6.24)$$

$$K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = -\hat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} \left( I_m + \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \left( \hat{\lambda}^{-1} I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \right)^{-1} N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}, \quad (6.25)$$

$$P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \hat{Q}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \left( I_m + \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad (6.26)$$

**SLSMA:** Obter para cada  $k = 0, \dots, N - 1$ :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A_{\theta_k, k} + \delta A_{\theta_k, k}) x_k + (A_{d, \theta_k, k} + \delta A_{d, \theta_k, k}) x_{k-d_k} + (B_{\theta_k, k} + \delta B_{\theta_k, k}) u_k, \\ &\text{com } u_k = K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k. \end{aligned}$$

e o conjunto de equações equivalente,

$$\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} W_1 + W_8 = 0, \quad (6.27)$$

$$R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} W_2 + W_9 = 0, \quad (6.28)$$

$$\Phi(\mathcal{P}, \hat{\lambda}) W_3 = 0 \quad (6.29)$$

$$Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} W_4 = -I_{n_d}, \quad (6.30)$$

$$\Phi(\mu, \hat{\lambda}) W_5 + W_8 - G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} W_9 = F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^-, \quad (6.31)$$

$$\hat{\lambda}^{-1} W_6 + N_{\mathbf{P}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}} W_8 = 0, \quad (6.32)$$

$$\hat{\lambda}^{-1} W_7 - N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} W_9 = N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^-}, \quad (6.33)$$

$$W_1 + W_5 + N_{\mathbf{P}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}}^T W_6 = 0, \quad (6.34)$$

$$W_2 - G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T W_5 - N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T W_7 = 0. \quad (6.35)$$

De (6.27) com (6.32) e (6.28) com (6.33), temos que

$$\begin{aligned} W_8 &= \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} (W_5 + N_{\mathbf{P}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}}^T W_6) \text{ e} \\ W_9 &= -R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} (G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T W_5 + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T W_7), \end{aligned} \quad (6.36)$$

que combinado com (6.31),

$$\begin{aligned} (\Phi(\mu, \hat{\lambda}) + \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T) W_5 + \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} N_{\mathbf{P}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}}^T W_6 + \\ G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T W_7 = F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^-. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Combinando (6.32) e (6.33) com (6.36), resulta em

$$\mathcal{U} \begin{bmatrix} W_5 \\ W_6 \\ W_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^- \\ 0 \\ N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^-} \end{bmatrix}, \quad (6.38)$$

onde  $\mathcal{U}$  está definido no Lema 6.1. Como a inversa de  $\mathcal{U}$  está garantida pelo Lema 6.1,

a solução do sistema de equações (6.37) pode ser obtida pelo Lema A.9. Assim,

$$\begin{aligned}
W_5 &= \left( \Phi(\mu, \hat{\lambda}) + \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} \underbrace{\left( I_{n_d} - N_{\mathbf{P}\theta_k}^T (\hat{\lambda}^{-1} I_{n_d} + N_{\mathbf{P}\theta_k} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} N_{\mathbf{P}\theta_k}^T)^{-1} N_{\mathbf{P}\theta_k} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} \right)}_{\tilde{N}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \right) + \\
& G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \left( R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} - R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T (\hat{\lambda}^{-1} I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T)^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \right) \times \\
& G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T (\hat{\lambda}^{-1} I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T)^{-1} N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \right) \\
& \underbrace{\hspace{10em}}_{\hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \\
& = \left( \Phi(\mu, \hat{\lambda}) + \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} \underbrace{\tilde{N}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}_{\tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1}} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \underbrace{\left( R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \hat{\lambda} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \right)^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1}}_{\hat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right) \\
& = \left( \tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \tag{6.39}
\end{aligned}$$

$$W_6 = -(\hat{\lambda}^{-1} I_{n_d} + N_{\mathbf{P}\theta_k} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} N_{\mathbf{P}\theta_k}^T)^{-1} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} N_{\mathbf{P}\theta_k}^T W_5, \tag{6.40}$$

$$W_7 = (\hat{\lambda}^{-1} I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T)^{-1} (N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} - N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T W_5). \tag{6.41}$$

Substituindo (6.39) e (6.41) em  $W_9$  de (6.36) e aplicando o Lema A.8:

$$\begin{aligned}
W_9 &= -\hat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} \underbrace{\hat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T}_{\hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T} \left( \hat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \underbrace{\hat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} \hat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T}_{\hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T} \right)^{-1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \\
& R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \left( \hat{\lambda}^{-1} I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \right)^{-1} N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \\
& = -\hat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} \left( I_m + \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \hat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \hat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \\
& R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \left( \hat{\lambda}^{-1} I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \right)^{-1} N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}. \tag{6.42}
\end{aligned}$$

Combinando (6.31), (6.39) e (6.42), tem-se

$$\begin{aligned}
W_8 &= F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} W_9 - \Phi(\mu, \hat{\lambda}) W_5 \\
&= \underbrace{\left( I_{n_d} - \Phi(\mu, \hat{\lambda}) (\tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} + \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1} \right)}_{\tilde{\Omega}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \\
& \underbrace{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2}}_{\hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \left( I_m + \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\
& = \tilde{\Omega}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \left( I_m + \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}.
\end{aligned}$$

De (6.21) temos que:

$$\begin{bmatrix} L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{n_d} \\ 0 & 0 & F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 & 0 & N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \\ 0 & 0 & 0 \\ I_{n_d} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \\ W_6 \\ W_7 \\ W_8 \\ W_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & & & W_8 \\ & & & & & & & W_9 \\ -W_4 + F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T W_5 + N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T W_7 & & & & & & & & \end{bmatrix}.$$

Portanto,  $L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = W_8$ ,  $K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = W_9$ . De (6.30) e (6.39) e (6.40), segue que:

$$\begin{aligned} P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= \underbrace{Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \left( \hat{\lambda}^{-1} I_q + N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}^T \right)^{-1} N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}}_{\hat{Q}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} + \\ &\quad \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} + \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} I_m \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ &= \hat{Q}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} + \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} I_m \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ &= \hat{Q}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \left( I_m + \right. \\ &\quad \left. \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} \hat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \tilde{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}. \end{aligned}$$

Desta forma, podemos observar que as expressões algébricas recursivas do sistema em malha fechada  $L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ , do ganho de realimentação  $K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  e da equação de Riccati  $P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  independem da matriz  $\Phi(\mathcal{P}, \hat{\lambda})$ . Portanto, as expressões são obtidas por meio do arranjo matricial simétrico (6.17) ao invés de (6.21).  $\square$

**Observação 6.3.** De modo análogo ao Teorema 6.2, a estrutura matricial simétrica (6.16)-(6.17) com as matrizes (6.18) também representa um sistema de equações lineares, que pode ser reduzido em expressões algébricas recursivas, conforme descrito no Algoritmo 6.1. Neste caso, considere  $\Phi(\mu, \hat{\lambda}) = \mu^{-1} I_{n_d}$ ,  $\hat{R}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1}$ ,  $\hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  e  $\hat{Q}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ . Desta forma, as expressões algébricas recursivas para o RRN-MTI são obtidas.

**Observação 6.4.** A condição  $\hat{N}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  garante a recursividade da solução proposta no Algoritmo 6.1. De fato, se  $\hat{\lambda} \rightarrow \infty$ , então  $\hat{N}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \rightarrow 0$ . Observe que para  $\theta_k = i$  e  $\bar{\theta}_k = \bar{i}$ ,

tem-se

$$\begin{aligned}
\widehat{N}_{\bar{i},i,k} &= I_{n_d} - N_{\mathbf{P}_i}^T \left( \hat{\lambda}^{-1} I_{n_d} + N_{\mathbf{P}_i} \Psi_{\bar{i},i,k+1}^{-1} N_{\mathbf{P}_i}^T \right)^{-1} N_{\mathbf{P}_i} \Psi_{\bar{i},i,k+1}^{-1} \\
&\stackrel{N_{\mathbf{P}_i} := \sqrt{e_i} I_{n_d}}{=} I_{n_d} - e_i \left( \hat{\lambda}^{-1} I_{n_d} + e_i \Psi_{\bar{i},i,k+1}^{-1} \right)^{-1} \Psi_{\bar{i},i,k+1}^{-1} \\
&\stackrel{\hat{\lambda} \rightarrow \infty}{=} I_{n_d} - e_i \left( e_i \Psi_{\bar{i},i,k+1}^{-1} \right)^{-1} \Psi_{\bar{i},i,k+1}^{-1} \\
&= I_{n_d} - e_i \left( e_i^{-1} \Psi_{\bar{i},i,k+1} \right)^{-1} \Psi_{\bar{i},i,k+1}^{-1} = 0.
\end{aligned}$$

Assim,  $\widehat{\Psi}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \rightarrow \Phi^{-1}(\mu, \hat{\lambda}) = (\mu^{-1} I_{n_d} - \hat{\lambda}^{-1} M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1} \stackrel{\hat{\lambda} \rightarrow \infty}{=} \mu I_{n_d}$ . Desta forma, (6.26) é definida como

$$P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \widehat{Q}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \widehat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \mu \widehat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \widehat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \mu \widehat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \left( I_m + \widehat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \widehat{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} \mu \widehat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k},$$

ou seja,  $P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  é constante  $\forall k \geq 0$ . Portanto, adota-se algum  $\hat{\lambda} > 0$  tal que  $\widehat{N}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  para garantir a convergência para uma solução estabilizadora.

### 6.3 Condições para a Estabilidade e Convergência

Para analisar as condições de estabilidade e convergência do regulador robusto recursivo com MTI proposto, considere o SLSM (4.8) e a função de custo quadrático (6.12) com os parâmetros fixados. No entanto, assuma que as matrizes com valores randômicos  $\Delta_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  e  $\Delta_{\mathbf{P}_i}$  sejam matrizes de contração. Desta forma, o SLSMP pode ser reescrito em termos dos parâmetros constante da seguinte forma:

$$z_{k+1} = \left( F_{\bar{i},i} + M_{\bar{i},i} \Delta_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} N_{F_{\bar{i},i}} \right) z_k + \left( G_{\bar{i},i} + M_{\bar{i},i} \Delta_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} N_{G_{\bar{i},i}} \right) u_k, \quad (6.43)$$

onde a entrada de controle é  $u_k = K_{\bar{i},i} z_k$ , sendo o ganho de realimentação  $K_{\bar{i},i}$ ,  $i \in \mathcal{S}$  e  $\bar{i} \in \bar{\mathcal{S}}$ , calculado em (6.25).

Considere o sistema (6.43) e assuma que  $\widehat{N}_{\bar{i},i,k}$  é definido positivo. Logo, (6.24) e (6.26) podem ser reescritos com os parâmetros fixados,

$$L_{\mu, \bar{i}, i} = \widetilde{\Omega}_{\bar{i}, i} \widehat{F}_{\bar{i}, i} - \widehat{G}_{\bar{i}, i} \left( I_m + \widehat{G}_{\bar{i}, i}^T \widetilde{\Psi}_{\bar{i}, i, k+1} \widehat{G}_{\bar{i}, i} \right)^{-1} \widehat{G}_{\bar{i}, i}^T \widetilde{\Psi}_{\bar{i}, i, k+1} \widehat{F}_{\bar{i}, i}, \quad (6.44)$$

$$P_{\mu, \bar{i}, i, k} = \widehat{Q}_{\bar{i}, i} + \widehat{F}_{\bar{i}, i}^T \widetilde{\Psi}_{\bar{i}, i, k+1} \widehat{F}_{\bar{i}, i} - \widehat{F}_{\bar{i}, i}^T \widetilde{\Psi}_{\bar{i}, i, k+1} \widehat{G}_{\bar{i}, i} \left( I_m + \widehat{G}_{\bar{i}, i}^T \widetilde{\Psi}_{\bar{i}, i, k+1} \widehat{G}_{\bar{i}, i} \right)^{-1} \widehat{G}_{\bar{i}, i}^T \widetilde{\Psi}_{\bar{i}, i, k+1} \widehat{F}_{\bar{i}, i}. \quad (6.45)$$

Assim, como (6.45) pertence a classe de equações algébricas acopladas de Riccati (COSTA et al., 2005), a qual é definida em (3.32), as condições de estabilidade e convergência são formuladas conforme o problema clássico do regulador linear quadrático. Desta maneira, considere o seguinte mapeamento entre (3.32) e (6.45):

$$P_{i,k} \leftarrow P_{\mu, \bar{i}, i, k}, \quad Q_i \leftarrow \widehat{Q}_{\bar{i}, i}, \quad A_i \leftarrow \widehat{F}_{\bar{i}, i}, \quad \varepsilon_{i,k+1} \leftarrow \widetilde{\Psi}_{\bar{i}, i, k+1}, \quad B_i \leftarrow \widehat{G}_{\bar{i}, i} \text{ e } \mathcal{R}_i \leftarrow I_m. \quad (6.46)$$



Para estabelecer tais condições, primeiramente, define-se as seguintes matrizes  $\widehat{\mathbf{F}} = (\widehat{F}_{1,1}, \dots, \widehat{F}_{1,s}, \dots, \widehat{F}_{\bar{s},1}, \dots, \widehat{F}_{\bar{s},s}) \in \mathbb{H}^{n_d \times n_d}$ ,  $\widehat{\mathbf{G}} = (\widehat{G}_{1,1}, \dots, \widehat{G}_{1,s}, \dots, \widehat{G}_{\bar{s},1}, \dots, \widehat{G}_{\bar{s},s}) \in \mathbb{H}^{n_d \times m}$ ,  $\widehat{\mathbf{P}}_k = (P_{\mu,1,1,k}, \dots, P_{\mu,1,s,k}, \dots, P_{\mu,\bar{s},1,k}, \dots, P_{\mu,\bar{s},s,k}) \in \mathbb{H}_+^{n_d}$  e  $\widehat{\mathbf{Q}} = (\widehat{Q}_{1,1}, \dots, \widehat{Q}_{1,s}, \dots, \widehat{Q}_{\bar{s},1}, \dots, \widehat{Q}_{\bar{s},s}) \in \mathbb{H}_+^{n_d}$ .

**Proposição 6.1.** *Considere a matriz  $\widehat{N}_{i,i,k} \succ 0$  e os pares  $(\widehat{\mathbf{Q}}, \widehat{\mathbf{F}})$  e  $(\widehat{\mathbf{F}}, \widehat{\mathbf{G}})$  detectável e estabilizável, respectivamente. Assuma que os parâmetros  $\mu > 0$  e  $\beta > 1$  são fixos e a condição inicial  $P_{\mu,N,N}$  é definida positiva. Logo,  $\widehat{\mathbf{P}}_k \in \mathbb{H}_+^{n_d}$  determinada por (6.26) converge para a sua única solução  $\widehat{\mathbf{P}} = (P_{\mu,1,1}, \dots, P_{\mu,1,s}, \dots, P_{\mu,\bar{s},1}, \dots, P_{\mu,\bar{s},s}) \in \mathbb{H}_+^{n_d}$ . Além disso, a matriz em malha-fechada (6.44) associada ao sistema (6.43) é estável.*

**Prova 6.4.** *Segue das identificações diretas entre (6.45) e as equações algébricas acopladas de Riccati, descritas em (6.46), juntamente, com os conceitos fundamentais apresentados no Apêndice D sobre a estabilizabilidade e a detectabilidade do SLSM.  $\square$*

Para finalizar este capítulo, reafirma-se sobre a importância do método da função de penalidade ao derivar o regulador robusto recursivo com matriz de transição incerta. Essa estratégia permitiu considerar tempo de atraso no estado e incertezas paramétricas em todas as matrizes do sistema, bem como nas probabilidades de transição. Além disso, as expressões recursivas do regulador robusto recursivo descritas no Algoritmo 6.1, podem ser facilmente implementadas em situações práticas, uma vez que depende apenas do parâmetro  $\mu$  que é ajustado antecipadamente e não requer nenhum método de pesquisa de solução numérica auxiliar.

## 6.4 Exemplos Ilustrativos

Nesta seção são apresentados dois exemplos numéricos onde os desempenhos do RRN-MTI (Observação 6.3) e do RRR-MTI (Algoritmo 6.1) são analisados. Além disso, ambos os reguladores propostos são comparados com outros controladores existentes na literatura.

**Observação 6.5.** *Nos exemplos a seguir, para fins de comparação, realiza-se  $T = 5000$  experimentos com horizonte de tempo  $N$ . Em cada experimento, diferentes realizações das cadeias de Markov  $\theta_k$  e  $\bar{\theta}_k$  são geradas, com base nas probabilidades de transição  $\mathbb{P}^\delta$  e  $\mathbb{P}$ , respectivamente. Em cada passo de tempo,  $d_k$  é um número inteiro aleatoriamente escolhido no intervalo  $[d_{\min}, d_{\max}]$ . Quando o SLSMA é incerto,  $\Delta_{\theta_k,k}$  é um número real escolhido de modo aleatório em uma distribuição uniforme com intervalo  $[-1, 1]$ .*

**Exemplo 6.1.** *Considere o SLSMA (6.1) com as seguintes matrizes nominais estudadas*

em Zhang et al. (2008) e na Seção 3.4:

$$\begin{aligned}
 A_{1,k} &= \begin{bmatrix} -1,16 & 0,54 \\ 0,23 & -0,92 \end{bmatrix}, \quad A_{d,1,k} = \begin{bmatrix} -0,02 & 0,12 \\ 0,07 & -0,14 \end{bmatrix}, \quad B_{1,k} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1,6 \end{bmatrix}, \\
 A_{2,k} &= \begin{bmatrix} 0,92 & 0,54 \\ 0,23 & 0,92 \end{bmatrix}, \quad A_{d,2,k} = \begin{bmatrix} 0,02 & 0,12 \\ 0,07 & 0,02 \end{bmatrix}, \quad B_{2,k} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,08 \end{bmatrix}, \\
 A_{3,k} &= \begin{bmatrix} 0,77 & 0,54 \\ 0,23 & -0,92 \end{bmatrix}, \quad A_{d,3,k} = \begin{bmatrix} -0,02 & 0,12 \\ 0,07 & 0,02 \end{bmatrix}, \quad B_{3,k} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,2 \end{bmatrix}, \\
 A_{4,k} &= \begin{bmatrix} -1,16 & 0,54 \\ 0,23 & 0,92 \end{bmatrix}, \quad A_{d,4,k} = \begin{bmatrix} 0,02 & 0,12 \\ 0,07 & -0,14 \end{bmatrix} \quad e \quad B_{4,k} = \begin{bmatrix} -0,7 \\ 0,2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Seguindo o exemplo numérico estudado em Zhang et al. (2008), a matriz de probabilidade de transição da cadeia de Markov  $\theta_k$  não é completamente conhecida, mas pode ser modelada por limitantes em norma da seguinte forma,

$$\mathbb{P}^\delta = [\mathbb{P} + \delta\mathbb{P}],$$

sendo as matrizes  $\mathbb{P}$  e  $\delta\mathbb{P}$  apresentadas na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Matrizes de probabilidades de transição.

Casos	$\mathbb{P}$	$\delta\mathbb{P}$	Parâmetros
I	$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,19 & 0,01 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0,1 \\ 0,3 & 0 & 0,3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,2\Delta_1 & 0 & 1,2\Delta_2 & 0 \\ 0 & 0,8\Delta_1 & 0 & 0,8\Delta_2 \end{bmatrix}$	$\Delta_1 \in [0; 0,5]$ $\Delta_2 = 0,5 - \Delta_1$
II	$\begin{bmatrix} 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,19 & 0,01 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0,1 \\ 0,3 & 0 & 0,3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,8\Delta_1 & 0 & 0 & 0,8\Delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,2\Delta_1 & 0 & 1,2\Delta_2 & 0 \\ 0 & 0,8\Delta_1 & 0 & 0,8\Delta_2 \end{bmatrix}$	$\Delta_1 \in [0; 0,5]$ $\Delta_2 = 0,5 - \Delta_1$

Assim, os valores dos parâmetros incertos de  $\delta p_{ij}$ , para cada caso de probabilidade de transição, são dados por:

Caso I)  $h_{11} = h_{12} = h_{13} = h_{14} = 0$ ;  $h_{21} = h_{22} = h_{23} = h_{24} = 0$ ;  $h_{31} = 0,4$ ;  $h_{32} = 0$ ;  $h_{33} = 0,4$ ;  $h_{34} = 0$ ;  $h_{41} = 0$ ;  $h_{42} = 0,2$ ;  $h_{43} = 0$ ;  $h_{44} = 0,2$ ;  $e_1 = e_2 = 0$ ;  $e_3 = 3$ ;  $e_4 = 4$ .

Caso II)  $h_{11} = 0,4$ ;  $h_{12} = h_{13} = 0$ ;  $h_{14} = 0,4$ ;  $h_{21} = h_{22} = h_{23} = h_{24} = 0$ ;  $h_{31} = 0,6$ ;  $h_{32} = 0$ ;  $h_{33} = 0,6$ ;  $h_{34} = 0$ ;  $h_{41} = 0$ ;  $h_{42} = 0,2$ ;  $h_{43} = 0$ ;  $h_{44} = 0,2$ ;  $e_1 = 2$ ;  $e_2 = 0$ ;  $e_3 = 2$ ;  $e_4 = 4$ .

Para ambos os casos de probabilidade de transição, assume-se dois casos de tempo de atraso: o primeiro caso,  $d_{max} = 7$  ou  $10$  e o segundo,  $d_{max} = 5$  ou  $10$ , sendo o limitante inferior  $d_{min} = 1$  e a taxa máxima de variação do atraso  $\Delta d = 1$  para ambos os

casos. Desta forma, a probabilidade de transição da cadeia de Markov  $\bar{\theta}_k$ , pode ser obtida facilmente seguindo a definição (3.4).

O Regulador Recursivo Nominal com para SLSM nominal com atraso variante no tempo MTI (Observação 6.3) é comparado com o controlador proposto em Zhang et al. (2008, Teo. 2). Para a inicialização do RRN-MTI, adota-se

$$N = 70, \mu = 10^{15}, \beta = 1,5, x_0 = [0,2 \quad 0,2]^T, \pi_0 = 0,25 \times \mathbf{1}_s^T, \\ \bar{\pi}_0 = 1/\bar{s} \times \mathbf{1}_s^T, P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} = Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = I_{nd} \text{ e } R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = I_m, \\ \forall \bar{\theta}_k = 1, \dots, \bar{s} \text{ e } \forall \theta_k = 1, \dots, 4.$$

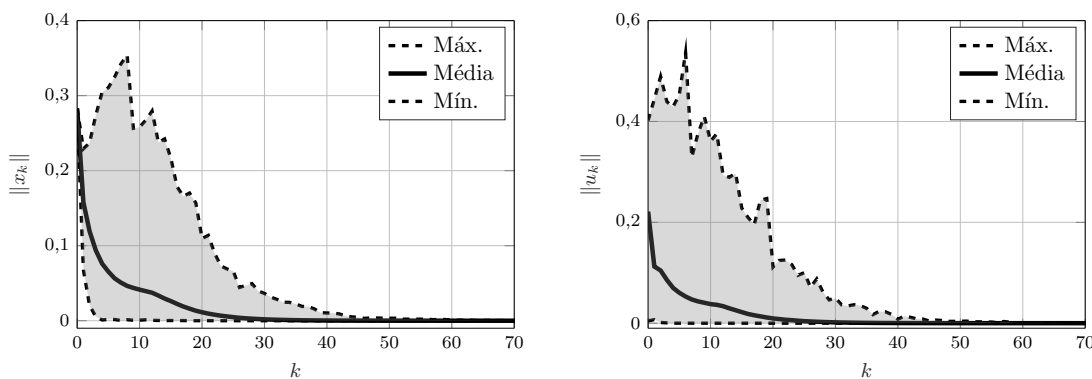
Como pode ser visto na Tabela 6.2, para o primeiro caso da matriz de probabilidade de transição, o RRN-MTI apresenta valores menores em termos das médias e dos desvios padrão relativos às normas dos estados quando comparado ao método proposto por Zhang et al. (2008, Teo. 2), bem como valores similares com relação às entradas de controle.

Tabela 6.2 – Desempenho dos controladores sobre 5000 experimentos para  $d_{max} = 7$ .

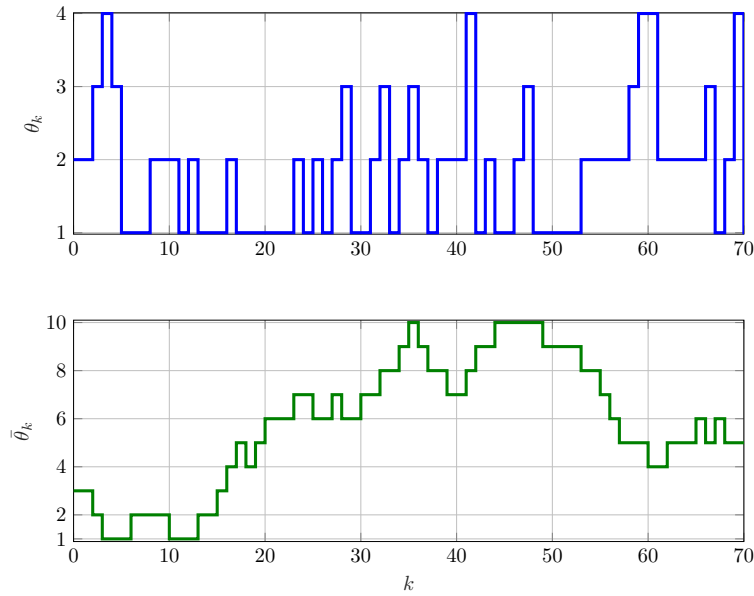
Controladores	$\ x_k\ $	$\sigma_x$	$\ u_k\ $	$\sigma_u$
RRN-MTI	<b>0,2862</b>	<b>0,0318</b>	<b>0,2173</b>	<b>0,0241</b>
Zhang et al. (2008, Teo. 2)	0,3294	0,0367	0,2200	0,0245

Na Figura 6.1 é possível verificar a factibilidade do RRN-MTI proposto, fornecendo um ganho de realimentação de estado que estabiliza o SLSM nominal com o atraso de tempo por pelo menos  $d_{max} = 10$ , com  $d_{min} = 1$ . Por outro lado, o controlador proposto por Zhang et al. (2008, Teo. 2) é factível apenas quando  $d_{max} \leq 7$ .

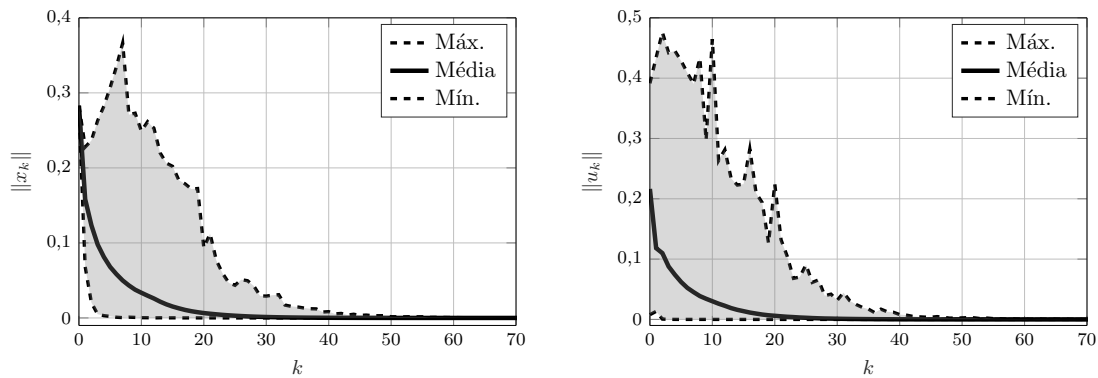
Figura 6.1 – Resultados obtidos pelo RRN-MTI quando  $d_{max} \in [1, 10]$ .



Os saltos dos modos de operação das cadeias de Markov  $\theta_k$  e  $\bar{\theta}_k$  correspondentes a um dos experimentos mostrado na Figura 6.1 são ilustrados na Figura 6.2. A permutação ocorre de acordo com as matrizes de probabilidade de transição  $\mathbb{P}^\delta$  e  $\bar{\mathbb{P}}$ .

Figura 6.2 – Comutação dos modos de operação do SLSMA quando  $d_k \in [1, 10]$ .

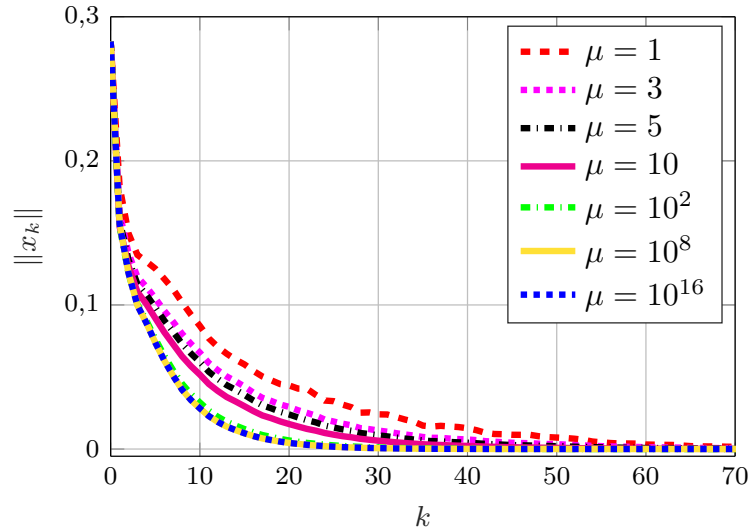
De acordo com o controlador proposto por Zhang et al. (2008), o limitante superior do atraso pode assumir valores maiores à medida que se tem mais conhecimento sobre a matriz de probabilidade de transição. Assim, no segundo caso da matriz de transição considerada, com mais incertezas nos parâmetros, a faixa de atraso permitida pelo controlador de Zhang et al. (2008, Teo. 2) é  $d_k \in [1, 5]$ . No entanto, o regulador proposto ainda supera o controlador desenvolvido em Zhang et al. (2008), uma vez que o RRN-MTI regula o SLSMA para pelo menos  $d_{max} = 10$ , com  $d_{min} = 1$ , como pode ser visto na Figura 6.3.

Figura 6.3 – Resultados obtidos pelo RRN-MTI quando  $d_k \in [1, 10]$ .

Na Figura 6.4 as médias das normas dos estados obtidas pelo RRN-MTI são analisadas, considerando diversos valores para o parâmetro de penalidade  $\mu$ . É possível notar que o comportamento do sistema estabiliza para ambos os valores assumidos para o parâ-

metro de penalidade, além de apresentar um comportamento dinâmico semelhante quando  $\mu \geq 10^8$ .

Figura 6.4 – Efeito do parâmetro de penalidade  $\mu$  nos valores médios das normas dos estados do SLSMA quando  $d_k \in [1, 2]$ .



**Exemplo 6.2.** Considere o SLSMA incerto de tempo discreto, conforme descrito em (6.1)-(6.2) com três modos de operação, sendo as matrizes paramétricas nominais estudadas em (LI et al., 2021):

$$\begin{aligned} A_{1,k} &= \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0,6 \end{bmatrix}, & A_{d,1,k} &= \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 \\ 0,1 & 0 \end{bmatrix}, & B_{1,k} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ A_{2,k} &= \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0 \end{bmatrix}, & A_{d,2,k} &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}, & B_{2,k} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ A_{3,k} &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 1 & 0,4 \end{bmatrix}, & A_{d,3,k} &= \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,3 \end{bmatrix}, & B_{3,k} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e as seguintes matrizes paramétricas incertas,

$$\begin{aligned} H_{1,k} &= \begin{bmatrix} 2,8 \\ 1,5 \end{bmatrix}, & H_{2,k} &= H_{3,k} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,5 \end{bmatrix}, & E_{A,1,k} &= E_{A_d,1,k} = [0,1 \ 0,05], \\ E_{A,2,k} &= E_{A_d,2,k} = [0 \ 0,1], & E_{A,3,k} &= E_{A_d,3,k} = [0 \ 0,01], \\ E_{B,1,k} &= 1,1, & E_{B,2,k} &= 0,3 \text{ e } E_{B,3,k} = 0,1, \forall k \geq 0. \end{aligned}$$

A matriz de probabilidade de transição da cadeia de Markov  $\theta_k$  é considerada incerta, modelada por limitantes em norma da seguinte forma,

$$\mathbb{P}^\delta = [\mathbb{P} + \delta\mathbb{P}],$$

sendo

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,55 & 0,45 \\ 0,35 & 0 & 0,65 \end{bmatrix} \text{ e } \delta\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,1250\Delta_1 & -0,1250\Delta_1 & 0 \\ 0 & 0,1875\Delta_2 & -0,1875\Delta_2 \\ -0,2500\Delta_3 & 0 & 0,2500\Delta_3 \end{bmatrix},$$

com  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \in [0; 0,8]$ . Além disso, os valores dos parâmetros incertos de  $\delta p_{ij}$ , são dados por:

$$\begin{aligned} h_{11} &= 0,25; & h_{12} &= -0,25; & h_{13} &= 0; & h_{21} &= 0; & h_{22} &= 0,625; & h_{23} &= -0,625; \\ h_{31} &= -0,5; & h_{32} &= 0; & h_{33} &= 0,5; & e_1 &= 0,5; & e_2 &= 0,3; & e_3 &= 0,5. \end{aligned}$$

Dois intervalos para o tempo de atraso são assumidos. No primeiro intervalo, considera-se que o  $d_{max} = 3$ , enquanto que no segundo,  $d_{max} = 7$ , sendo  $d_{min} = 1$  e a taxa máxima de variação do atraso  $\Delta d = d_{max}$  para ambos os casos. Assim, a probabilidade de transição da cadeia de Markov  $\bar{\theta}_k$  é obtida conforme a definição (3.4).

O desempenho do Regulador Recursivo Robusto com MTI para SLSM incerto com atraso variante no tempo, apresentado no Algoritmo 6.1, é comparado com o controlador baseado em termos de LMIs proposto por Qiu et al. (2015, Teo. 3), sendo calculado com o YALMIP® Toolbox (LÖFBERG, 2004). Assim, para a inicialização do RRR-MTI, adota-se

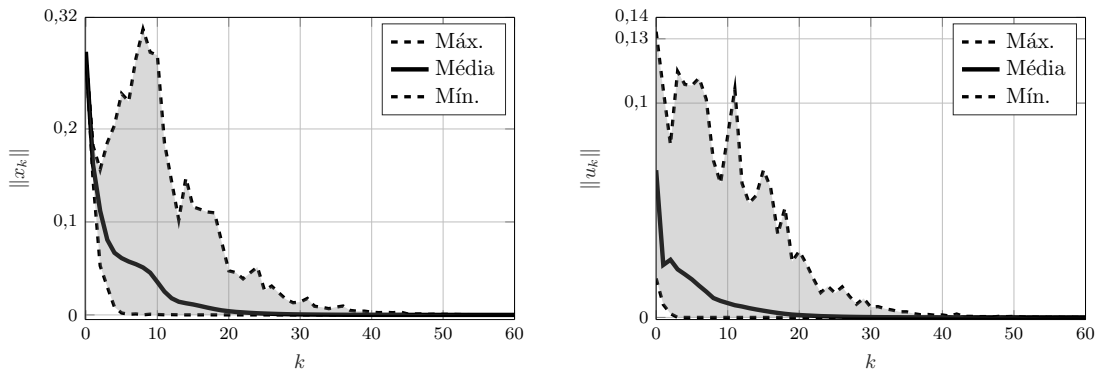
$$\begin{aligned} N &= 60, \quad \mu = 10^{10}, \quad \beta = 1,5, \quad x_0 = [-0,2 \quad 0,2]^T, \quad \pi_0 = [0,16 \quad 0,30 \quad 0,54], \\ \bar{\pi}_0 &= 1/\bar{s} \times \mathbf{1}_{\bar{s}}^T, \quad P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} = Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = I_{n_d} \text{ e } R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = I_m, \\ \forall \bar{\theta}_k &= 1, \dots, \bar{s} \text{ e } \forall \theta_k = 1, \dots, 3. \end{aligned}$$

Para o primeiro intervalo de atraso considerado, a Tabela 6.3 resume os resultados gerais dos experimentos. Observe que o RRR-MTI supera o controlador proposto por Qiu et al. (2015, Teo. 3) com relação a média e ao desvio padrão relativos às normas dos estados e às entradas de controle.

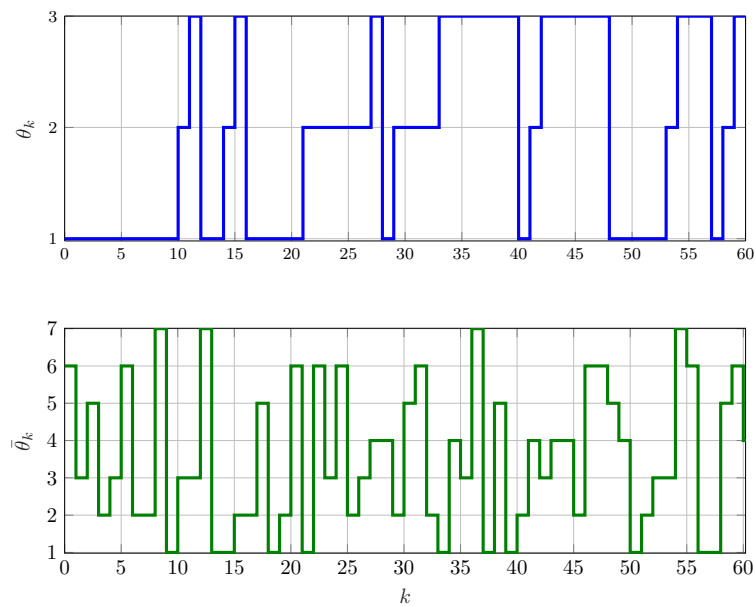
Tabela 6.3 – Desempenho dos controladores sobre 5000 experimentos para  $d_{max} = 3$ .

Controladores	$\ x_k\ $	$\sigma_x$	$\ u_k\ $	$\sigma_u$
RRR-MTI (Algoritmo 6.1)	<b>0,3297</b>	<b>0,0325</b>	<b>0,0407</b>	<b>0,0040</b>
Qiu et al. (2015, Teo. 3)	0,3384	0,0337	0,1096	0,0109

A Figura 6.1 ilustra a factibilidade do RRR-MTI proposto para quando o atraso de tempo assume  $d_{max} = 7$ , com  $d_{min} = 1$ . No entanto, o controlador desenvolvido por Qiu et al. (2015, Teo. 3) é factível apenas para quando o atraso é menor igual a três.

Figura 6.5 – Resultados obtidos pelo RRR-MTI quando  $d_{max} = 7$ .

A Figura 6.6 ilustra a comutação dos modos de operação das cadeias de Markov  $\theta_k$  e  $\bar{\theta}_k$  correspondentes a um dos experimentos mostrado na Figura 6.5. A permutação ocorre de acordo com a matriz de probabilidade de transição incerta  $\mathbb{P}^\delta$  e a conhecida  $\bar{\mathbb{P}}$ .

Figura 6.6 – Comutação dos modos de operação do SLSM quando  $d_k \in [1, 7]$ .





---

# Controle de SLSMAP com MTI Politópica

Neste capítulo, apresentamos outra versão do regulador robusto apresentada no Capítulo 5. Nesta proposta, considera-se que as matrizes paramétricas do sistema e as probabilidades de transição estão sujeitas a incertezas politópicas. Novamente, assume-se que o conjunto de parâmetros do sistema é um poliedro convexo centrado no sistema nominal (YANG et al., 2005).

Similar ao procedimento adotado para o caso de MTI limitada em norma, descrito no capítulo anterior, inicialmente, propõe-se um regulador robusto para sistemas Markovianos com atraso variante no tempo, quando há incertezas politópicas nas matrizes paramétricas do sistema e nas probabilidades de transição. Ao aplicar o método de elevação (HETEL et al., 2008), obtém-se um sistema Markoviano politópico aumentado sem atraso, para o qual é formulado um problema de controle robusto, cujas restrições lineares correspondem a cada vértice das incertezas politópicas. Este problema é reescrito como um problema de mínimos-quadrados regularizados com incertezas politópicas (Seção 2.3.5), através do método de função penalidade (Seção 2.1). A solução deste problema fornece as expressões recursivas do Regulador Robusto Recursivo com Matriz de Transição Incerta Politópica (RRR-MTIP). Como os controladores anteriores, as soluções são fornecidas em um arranjo matricial simétrico, bem como em expressões algébricas explícitas. Além disso, as condições de estabilidade e convergência são analisadas e dois exemplos ilustrativos concluem o capítulo.

## 7.1 Formulação do problema

### 7.1.1 Modelo do Sistema

Considere o sistema Markoviano com atraso aleatório no estado e incertezas paramétricas politópicas de tempo discreto,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A_{\theta_k,k} + \delta A_{\theta_k,k})x_k + (A_{d,\theta_k} + \delta A_{d,\theta_k,k})x_{k-d_k} + (B_{\theta_k,k} + \delta B_{\theta_k,k})u_k, \\ x_k &= \varphi_0(k), \quad k \in [-d_{max}, 0], \end{aligned} \quad (7.1)$$

para  $k = 0, 1, \dots, N$ , no qual  $x_k \in \mathbb{R}^n$  é o estado no instante  $k$ ,  $x_{k-d_k} \in \mathbb{R}^n$  é o estado atraso por  $d_k$  amostras,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle e  $\varphi_0(k)$  é a condição inicial para  $k = -d_{max}, -d_{max} + 1, \dots, 0$ .

As matrizes  $A_{\theta_k,k}, A_{d,\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são conhecidas e as matrizes de incertezas  $\delta A_{\theta_k,k}, \delta A_{d,\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\delta B_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são desconhecidas pertencentes ao domínio poliédrico convexo descrito por:

$$\mathbb{V}_k := \left\{ \left( \delta A_{\theta_k,k}, \delta A_{d,\theta_k,k}, \delta B_{\theta_k,k} \right) = \sum_{\ell=1}^V \alpha_{\ell,k} \left( A_{\theta_k,k}^{(\ell)}, A_{d,\theta_k,k}^{(\ell)}, B_{\theta_k,k}^{(\ell)} \right) \right\}, \quad (7.2)$$

onde  $A_{\theta_k,k}^{(\ell)}, A_{d,\theta_k,k}^{(\ell)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B_{\theta_k,k}^{(\ell)} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são conhecidas e  $\alpha_k := [\alpha_{1,k} \dots \alpha_{V,k}]^T$  pertence ao simplex unitário

$$\bar{\Lambda}_V := \left\{ \alpha_k \in \mathbb{R}^V : \sum_{\ell=1}^V \alpha_{\ell,k} = 1, \alpha_{\ell,k} \geq 0 \right\}. \quad (7.3)$$

O processo estocástico  $\{\theta_k, k \geq 0\}$  é descrito por uma cadeia de Markov de estado finito e tempo discreto  $\theta_k \in \mathcal{S} = \{1, \dots, s\}$  associada à matriz de probabilidade de transição incerta  $\hat{\mathbb{P}}^\delta \in \mathbb{R}^{s \times s}$ ,  $i, j \in \mathcal{S}$ , definida por  $\hat{\mathbb{P}}^\delta = \mathbb{P}^{(0)} + \delta \mathbb{P}$ , com

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}^\delta &= \Pr(\theta_{k+1} = j \mid \theta_k = i) = [p_{ij}^{(0)} + \delta p_{ij}], \quad \Pr(\theta_0 = i) = \pi_i + \delta \pi_i, \\ \sum_{j=1}^s (p_{ij}^{(0)} + \delta p_{ij}) &= 1, \quad \text{e } 0 \leq p_{ij}^{(0)} + \delta p_{ij} \leq 1, \end{aligned} \quad (7.4)$$

onde a incerteza  $\delta \mathbb{P} \in \mathbb{R}^{s \times s}$  pertence ao domínio poliédrico

$$\mathbb{V}_{p,k} := \left\{ \delta \mathbb{P} = \sum_{\bar{\ell}=1}^{V_p} \xi_{\bar{\ell},k} \mathbb{P}^{(\bar{\ell})} = \sum_{\bar{\ell}=1}^{V_p} \xi_{\bar{\ell},k} p_{ij}^{(\bar{\ell})} = \delta p_{ij} \right\}, \quad (7.5)$$

com  $\mathbb{P}^{(\bar{\ell})} \in \mathbb{R}^{s \times s}$  sendo os vértices conhecidos do politopo,  $p_{ij}^{(\bar{\ell})}$  o elemento  $(i, j)$  de  $\mathbb{P}^{(\bar{\ell})}$  e  $\xi_k := [\xi_{1,k} \dots \xi_{V_p,k}]^T$  os coeficientes desconhecidos pertencentes ao simplex unitário  $\Lambda_{V_p}$  definido por:

$$\Lambda_{V_p} := \left\{ \xi_k \in \mathbb{R}^{V_p} : \sum_{\bar{\ell}=1}^{V_p} \xi_{\bar{\ell},k} = 1, \xi_{\bar{\ell},k} \geq 0 \right\}. \quad (7.6)$$

Considera-se que o tempo de atraso  $d_k$  é governado aleatoriamente por uma segunda cadeia de Markov  $\bar{\theta}_k \in \bar{\mathcal{S}} = \{1, \dots, \bar{s}\}$ , com  $\bar{s} = d_{max} - d_{min} + 1$ , e tem limites superior e inferior

$$0 \leq d_{min} \leq d_k \leq d_{max} \quad \text{e} \quad \|d_{k+1} - d_k\| \leq \Delta d \leq d_{max},$$

onde  $d_{min} = \min\{d_k\}$ ,  $d_{max} = \max\{d_k\}$  e  $\Delta d$  é a taxa máxima de variação do atraso entre dois instantes consecutivos, na qual a amostra futura  $d_{k+1}$  pode assumir quaisquer valores pertencentes ao intervalo  $[\bar{d}_{min}, \bar{d}_{max}]$ , com  $\bar{d}_{min} = \max(d_{min}, d_k - \Delta d)$ ,  $\bar{d}_{max} = \min(d_{max}, d_k + \Delta d)$ .

A cadeia de Markov  $\bar{\theta}_k$  está associada a uma matriz de probabilidade de transição conhecida  $\bar{\mathbb{P}} = [\bar{p}_{\bar{i}\bar{j}}] \in \mathbb{R}^{\bar{s} \times \bar{s}}$ ,  $\bar{i}, \bar{j} \in \bar{\mathcal{S}}$  cuja as entradas satisfazem analogamente as condições estabelecidas em (6.6). Neste caso, a matriz de probabilidade de transição  $\bar{\mathbb{P}}$  também é definida de acordo com a taxa máxima de variação de atraso, como estabelecida em (6.7).

Para regular o Sistema (7.1) sob incertezas politópicas relacionadas as matrizes paramétricas e as probabilidades de transição, adota-se a seguinte lei de controle dependente do modo,

$$u_k = K_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k, \quad \forall k \geq 0, \quad (7.7)$$

onde o estado aumentado  $z_k$  e a condição inicial  $z_0$  são definidos em (5.8) e  $K_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = [K_{1, \theta_k, k} \quad K_{2, \theta_k, k} \quad \dots \quad K_{\bar{s}, \theta_k, k}] \in \mathbb{R}^{m \times n_d}$  é o ganho a ser determinado, com  $n_d = d_{max}n + n$ .

Portanto, como a lei de controle proposta dispensa o conhecimento em tempo real do atraso  $d_k$ , então pode-se tratar o SLSMAP (7.1) por um sistema correspondente independente do atraso. Desta forma, análogo ao Capítulo 5, o modelo de sistema aumentado politópico (5.9) é considerado para representar o SLSMAP (7.1). No entanto, assume-se que o SLSM (5.9) é governado por  $\theta_k$  e  $\bar{\theta}_k$  que são associados às probabilidades de transição  $\hat{\mathbb{P}}^\delta$  em (7.4) e  $\bar{\mathbb{P}}$  em (6.7), respectivamente.

## 7.1.2 Problema de Controle Robusto com MTIP

O principal objetivo é projetar a sequência de controle de realimentação de estado  $\mathcal{U}^* = \{u_k^*\}_{k=0}^N$  para garantir a estabilidade em malha fechada do SLSMAP (7.1) com as matrizes paramétricas e as probabilidades de transição sujeitas a incertezas politópicas. No entanto, a aplicação do método de elevação permite desenvolver um regulador robusto recursivo para SLSMAP (7.1) em termos do sistema Markoviano politópico equivalente (5.9) governado por duas cadeias de Markov mutuamente independentes.

Baseado em Bueno et al. (2022c), um problema de otimização min-max restrito é formulado, onde o valor esperado da função de custo quadrático  $J_N$  ao longo da trajetória  $z_k$  deve ser minimizada sob a máxima influência das incertezas politópicas relacionadas às matrizes paramétricas e às probabilidades de transição  $\{\delta\mathbb{P}, \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}\}$ , ou seja,

for  $k = 0, 1, \dots, N$ ,

$$\min_{u_k, z_{k+1}} \max_{\delta \mathbb{P}, \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \mathbb{E} \left\{ J_N(z_{k+1}, u_k) \mid \bar{\Theta}_0, \Theta_0 \right\} \quad (7.8)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} I_{n_d} \\ \vdots \\ I_{n_d} \end{bmatrix} z_{k+1} = \begin{bmatrix} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(1)} \\ \vdots \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(V)} \end{bmatrix} z_k + \begin{bmatrix} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(1)} \\ \vdots \\ G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(V)} \end{bmatrix} u_k, \quad (7.9)$$

com

$$J_N(z_{k+1}, u_k) = z_N^T P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} z_N + \sum_{k=0}^{N-1} \left( z_k^T Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k + u_k^T R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} u_k \right), \quad (7.10)$$

onde  $\bar{\Theta}_0 = \{\bar{\theta}_0 = \bar{i}, z_0\}$ ,  $\Theta_0 = \{\theta_0 = i, x_0\}$  e  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  e  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  são as matrizes de ponderação. Além disso, para cada  $\ell = 1, 2, \dots, V$ ,

$$\left( \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(\ell)}, \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(\ell)} \right) = \alpha_{\ell, k} V \left( F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(\ell)}, G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(\ell)} \right). \quad (7.11)$$

**Observação 7.1.** De modo análogo à Observação 5.1, pré-multiplicando ambos os lados das restrições (7.9) por  $\mathbf{1}_V^T \otimes I_{n_d}$ , verifica-se que o conjunto de restrições (7.9) corresponde à equação do SLSMP (5.9).

A solução deste problema de otimização min-max fornece o estado  $z_{k+1}^*$ , a entrada de controle  $u_k^*$  e a função de custo quadrático  $J_k^*$ . Refere-se a esta solução como regulador robusto recursivo com matriz de transição incerta politópico, que é o tema da próxima seção.

## 7.2 Regulador Recursivo Robusto com MTIP

Com base nos procedimentos apresentados na Seção 5.2 para o Regulador Robusto Recursivo Politópico, o problema (7.8)-(7.10) é transformado em  $N$  problemas de otimização de um passo. Desta forma, pela aplicação da programação dinâmica, separa-se (7.8)-(7.10) da seguinte forma

$$\min_{z_{k+1}, u_k} \max_{\delta \mathbb{P}, \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \mathbb{E} \left\{ J_k(z_{k+1}, u_k) \mid \bar{\Theta}_k, \Theta_k \right\} \quad (7.12)$$

sujeito ao conjunto de restrições (7.9)

com o valor esperado da função custo de um passo

$$\mathbb{E} \left\{ J_k(z_{k+1}, u_k) \mid \bar{\Theta}_k, \Theta_k \right\} = z_{k+1}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^\delta z_{k+1} + z_k^T Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k + u_k^T R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} u_k, \quad (7.13)$$

na qual  $\mathcal{O}_k := \{\theta_k, x_k\}$  e  $\bar{\mathcal{O}}_k := \{\bar{\theta}_k, z_k\}$ , onde  $\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^\delta$  é o operador definido por

$$\begin{aligned}\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^\delta &= \mathbb{E} \left\{ P_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} | \bar{\mathcal{O}}_k, \mathcal{O}_k \right\} \\ &= \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{s}} \sum_{j=1}^s \bar{p}_{\bar{i}\bar{j}} \left( p_{ij}^{(0)} + \delta p_{ij} \right) P_{\bar{j}, j, k+1} \\ &= \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)} + \delta \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1},\end{aligned}$$

onde

$$\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)} := \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{s}} \sum_{j=1}^s \bar{p}_{\bar{i}\bar{j}} p_{ij}^{(0)} P_{\bar{j}, j, k+1} \quad \text{e} \quad \delta \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} := \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{s}} \sum_{j=1}^s \bar{p}_{\bar{i}\bar{j}} \delta p_{ij} P_{\bar{j}, j, k+1},$$

para todo  $\bar{j} \in \bar{\mathcal{S}}$ ,  $j \in \mathcal{S}$  e  $k = N-1, \dots, 0$ . Observe que para todo  $\bar{\theta}_k = \bar{i} \in \bar{\mathcal{S}}$  e  $\theta_k = i \in \mathcal{S}$ , o operador  $\delta \Psi_{\bar{i}, i, k+1}$  pode ser reescrito por

$$\begin{aligned}\delta \Psi_{\bar{i}, i, k+1} &= \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{s}} \bar{p}_{\bar{i}\bar{j}} \left( \sum_{j=1}^s \left( \sum_{\bar{\ell}=1}^{V_p} \xi_{\bar{\ell}, k} p_{ij}^{(\bar{\ell})} \right) P_{\bar{j}, j, k+1} \right), \\ &= \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{s}} \bar{p}_{\bar{i}\bar{j}} \left( (\xi_{1, k} p_{i1}^{(1)} + \dots + \xi_{V_p, k} p_{i1}^{(V_p)}) P_{\bar{j}, 1, k+1} + \dots + (\xi_{1, k} p_{is}^{(1)} + \dots + \xi_{V_p, k} p_{is}^{(V_p)}) P_{\bar{j}, s, k+1} \right), \\ &= \sum_{\bar{j}=1}^{\bar{s}} \bar{p}_{\bar{i}\bar{j}} \left[ \left( \sqrt{\xi_{1, k} p_{i1}^{(1)}} \right) P_{\bar{j}, 1, k+1}(\bullet) + \dots + \left( \sqrt{\xi_{V_p, k} p_{i1}^{(V_p)}} \right) P_{\bar{j}, 1, k+1}(\bullet) + \dots + \right. \\ &\quad \left. \left( \sqrt{\xi_{1, k} p_{is}^{(1)}} \right) P_{\bar{j}, s, k+1}(\bullet) + \dots + \left( \sqrt{\xi_{V_p, k} p_{is}^{(V_p)}} \right) P_{\bar{j}, s, k+1}(\bullet) \right],\end{aligned}$$

e expandindo-o e reescrevendo-o em relação a cada vértice, temos que

$$\begin{aligned}\delta \Psi_{\bar{i}, i, k+1} &= \sqrt{\bar{p}_{i1}} \left\{ \left( \sqrt{\xi_{1, k} p_{i1}^{(1)}} \right) P_{1, 1, k+1}(\bullet) + \dots + \left( \sqrt{\xi_{1, k} p_{is}^{(1)}} \right) P_{1, s, k+1}(\bullet) + \dots + \right. \\ &\quad \left. \left( \sqrt{\xi_{V_p, k} p_{i1}^{(V_p)}} \right) P_{1, 1, k+1}(\bullet) + \dots + \left( \sqrt{\xi_{V_p, k} p_{is}^{(V_p)}} \right) P_{1, s, k+1}(\bullet) \right\} \sqrt{\bar{p}_{i1}} + \dots + \sqrt{\bar{p}_{i\bar{s}}} \times \\ &\quad \left\{ \left( \sqrt{\xi_{1, k} p_{i1}^{(1)}} \right) P_{\bar{s}, 1, k+1}(\bullet) + \dots + \left( \sqrt{\xi_{1, k} p_{is}^{(1)}} \right) P_{\bar{s}, s, k+1}(\bullet) + \dots + \left( \sqrt{\xi_{V_p, k} p_{i1}^{(V_p)}} \right) \times \right. \\ &\quad \left. P_{\bar{s}, 1, k+1}(\bullet) + \dots + \left( \sqrt{\xi_{V_p, k} p_{is}^{(V_p)}} \right) P_{\bar{s}, s, k+1}(\bullet) \right\} \sqrt{\bar{p}_{i\bar{s}}}.\end{aligned}$$

Portanto,  $\delta \Psi_{\bar{i}, i, k+1} = \delta \mathbf{p}_{\bar{i}, i}^T \mathcal{P}_{k+1} \delta \mathbf{p}_{i, i}$ , onde

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{k+1} &:= I_{V_p} \otimes \mathbf{diag}(P_{1, 1, k+1}, \dots, P_{1, s, k+1}, \dots, P_{\bar{s}, 1, k+1}, \dots, P_{\bar{s}, s, k+1}) \\ \text{e } \delta \mathbf{p}_{i, i} &:= \begin{bmatrix} \sqrt{\xi_{1, k} I_{\bar{s}s n_d}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\xi_{V_p, k} I_{\bar{s}s n_d}} \end{bmatrix} \left( \sqrt{\bar{p}_i} \otimes \begin{bmatrix} \sqrt{p_i^{(1)}} \\ \vdots \\ \sqrt{p_i^{(V_p)}} \end{bmatrix} \right),\end{aligned}$$

onde,  $\bar{p}_i = [\bar{p}_{i1} \ \cdots \ \bar{p}_{i\bar{s}}]^T$ ,  $p_i^{(l)} = [p_{i1}^{(l)} I_{n_d} \ \cdots \ p_{i\bar{s}}^{(l)} I_{n_d}]^T$  e  $\xi_k \in \Lambda_{V_p}$ . Desta forma, a função custo (7.13) pode ser reescrita como

$$\mathbb{E} \left\{ J_k(z_{k+1}, u_k) \middle| \bar{\Theta}_k, \Theta_k \right\} = z_{k+1}^T \left( \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)} + \delta \mathbf{P}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T \mathcal{P}_{k+1} \delta \mathbf{P}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} \right) z_{k+1} + z_k^T Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k + u_k^T R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} u_k. \quad (7.14)$$

Semelhante ao procedimento descrito na Seção (5.2), o problema de otimização restrito de um passo (7.12) com a função (7.14) é transformado em um problema irrestrito equivalente. Desta forma, através do método da função penalidade (Seção 2.1), o conjunto de restrições é incluído na função custo como termos quadráticos multiplicados por um parâmetro de penalidade  $\mu > 0$ , que penaliza violações dessas restrições. Assim, para  $\mu > 0$  fixado, o problema (7.12) é reescrito como o problema irrestrito

$$\min_{z_{k+1}, u_k} \max_{\delta \mathbf{P}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}, \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \mathcal{J}_{\mu, k}(z_{k+1}, u_k) \quad (7.15)$$

com uma nova função custo quadrática

$$\mathcal{J}_{\mu, k}(z_{k+1}, u_k) = \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} \delta \mathbf{P}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} & 0 \\ 0 & 0 \\ I_{n_d} & -(G_{\bar{\theta}_k, \theta_k} + \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^{(1)}) \\ \vdots & \vdots \\ I_{n_d} & -(G_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^- + \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^{(V)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -I_{n_d} \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k} + \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^{(1)} \\ \vdots \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^- + \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^{(V)} \end{bmatrix} z_k \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 \\ 0 & 0 & \mu I_{n_d V} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bullet \end{pmatrix} \right)^T. \quad (7.16)$$

Denomina-se o problema (7.15)-(7.16) como um *problema de controle de mínimos-quadrados regularizados com incertezas politópicas nas matrizes paramétricas e na matriz de transição*, visto que o problema tem a forma de um problema de mínimos-quadrados regularizados com incertezas politópicas (Seção 2.3.5). Portanto, a solução desse problema é obtida por meio da aplicação do Lema 2.9, a qual é apresentada no Teorema 7.1.

**Teorema 7.1.** *Considere o problema de controle de mínimos-quadrados regularizados com incertezas politópicas nas matrizes paramétricas e na matriz de transição (7.15)-(7.16), com  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ ,  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  e  $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  é definida positiva com*

$$\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = I_{n_d} - \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T (\hat{\lambda}^{-1} I_{\bar{s} n_d V_p} + \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T)^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1}.$$

Assim, o estado do sistema  $z_{\mu, k+1}^*$ , a entrada de controle  $u_{\mu, k}^*$  e a função custo  $\mathcal{J}_{\mu, k}^*$ , condicionados pelo parâmetro de penalidade  $\mu > 0$ , são dados por:

$$\begin{bmatrix} z_{\mu, k+1}^* \\ u_{\mu, k}^* \\ \mathcal{J}_{\mu, k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_d} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & z_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ K_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ P_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k, \quad (7.17)$$

onde, para  $k = N, \dots, 0$ , a matriz do sistema em malha fechada  $L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ , o ganho de realimentação  $K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  e a equação de Riccati  $P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ , são obtidos de (7.18).

$$\begin{bmatrix} L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & -I_{n_d} & \widehat{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi & \hat{\mathbf{I}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & -\widehat{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ I_{n_d} & 0 & 0 & \hat{\mathbf{I}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & -\widehat{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I_{n_d} \\ \widehat{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

com as matrizes  $\widehat{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $\widehat{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $\hat{\mathbf{I}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  e  $\Sigma$  definidas por:

$$\widehat{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \\ \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \\ \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{I}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_d} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.19)$$

$$\Pi = \text{diag}(\tilde{\Phi}_1, \hat{\lambda}^{-1} I_{\bar{s} s n_d V_p}, \hat{\lambda}^{-1} I_{n_d V}),$$

sendo  $\tilde{\Phi}_1 := \mu^{-1}(1 - \beta^{-1})I_{n_d V}$  e  $\hat{\lambda} := \beta\mu$ , para algum  $\beta > 1$  e as seguintes matrizes,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{n_d} &:= \mathbf{1}_V \otimes I_{n_d}, \quad \mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} := \mathbf{1}_V \otimes F_{\bar{\theta}_k, \theta_k}, \quad \mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} := \mathbf{1}_V \otimes G_{\bar{\theta}_k, \theta_k}, \\ \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} &:= \text{col}(VF_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^{(1)}, \dots, VF_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^{(V)}), \quad \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} := \text{col}(VG_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^{(1)}, \dots, VG_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^{(V)}) \\ &\text{e } \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} := \sqrt{p_{\bar{\theta}_k}} \otimes \left( \left[ \sqrt{p_{\theta_k}^{(1)}} \quad \dots \quad \sqrt{p_{\theta_k}^{(V_p)}} \right]^T \right), \end{aligned} \quad (7.20)$$

onde  $\mathbf{1}_V := [1 \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^V$ .

**Prova 7.1.** *Sabe-se que (7.15)-(7.16) representa um problema dos mínimos-quadrados regularizados com incertezas politópicas (Seção 2.3.5). Desta forma, podemos realizar o seguinte mapeamento entre os problemas (2.38)-(2.39) e (7.15)-(7.16):*

$$\begin{aligned} x &:= \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} := \begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W}_\mu := \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 \\ 0 & 0 & \mu I_{n_d V} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_0 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I_{n_d} & -\mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \\ \delta \mathbf{A} &:= \begin{bmatrix} \delta \mathbf{P}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\delta \mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad b_0 := \begin{bmatrix} 0 \\ -I_{n_d} \\ \mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k \quad \text{e} \quad \delta \mathbf{b} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta \mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k, \end{aligned} \quad (7.21)$$

onde  $\mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}$  e  $\mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}$  são definidas em (7.20) e  $\delta \mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} := \text{col}(\delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(1)}, \dots, \delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(V)})$  e  $\delta \mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} := \text{col}(\delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(1)}, \dots, \delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(V)})$ . Além disso, pode-se realizar as identificações entre os modelos de incertezas (2.40) e (7.16):

$$\mathcal{H} := \begin{bmatrix} I_{\bar{s}sn_d V_p} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_{n_d V} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{A}} := \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} & 0 \\ 0 & -V \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad \text{e } \tilde{\mathbf{b}} := \begin{bmatrix} 0 \\ V \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k, \quad (7.22)$$

com  $\tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}$  e  $\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}$  definidas em (7.20).

Observe que  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ ,  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  e  $\mu > 0$ , logo  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{W}$  são definidas positivas. Assim, através do Lema (2.8) obtém-se a seguinte solução:

$$\begin{bmatrix} L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & 0 & -I_{n_d} & \hat{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & \Phi(\mathcal{P}, \hat{\lambda}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi & \hat{\mathbf{I}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & -\hat{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ I_{n_d} & 0 & 0 & 0 & \hat{\mathbf{I}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 & -\hat{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I_{n_d} \\ \hat{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

sendo  $\Phi(\mathcal{P}, \hat{\lambda}) = \mathcal{P}_{k+1}^{-1} - \hat{\lambda}^{-1} I_{\bar{s}sn_d V_d}$  e as matrizes  $\hat{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $\hat{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $\hat{\mathbf{I}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  e  $\Pi$  definidas em (7.19). Além disso, através da aproximação prática descrita na Observação 2.2 para o cálculo de  $\hat{\lambda}$ , segue que

$$\hat{\lambda} = \beta \|\mathbf{diag}(\mathcal{P}_{k+1}, \mu I_{n_d V})\|.$$

No entanto, como a função  $\Gamma(\lambda)$ , definida no Teorema 2.7, é independente da matriz  $\Phi(\mathcal{P}, \hat{\lambda})$  (a demonstração é análoga aquela apresentada no Apêndice B), segue que  $\hat{\lambda} = \beta \mu$ , para algum  $\beta > 1$ . Consequentemente, a solução não depende da matriz  $\Phi(\mathcal{P}, \hat{\lambda})$ , conforme será demonstrado no Teorema 7.2. Desta forma, é possível eliminar as linhas e colunas referentes a  $\Phi(\mathcal{P}, \hat{\lambda})$  em (7.23), resultando em (7.18)-(7.19).  $\square$

**Observação 7.2.** Assume-se a condição  $\hat{N}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  para assegurar a recursividade da solução proposta no Teorema 7.1. Veja a Observação 7.5 para maiores detalhes.

**Observação 7.3.** Considere que o SLSMAP (7.1) não está sujeito a parâmetros incertos, consequentemente, os vértices do politopo do Sistema Markoviano aumentado (5.9) são nulos, ou seja,  $F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(\ell)} = 0$  e  $G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{(\ell)} = 0$ . Logo, as expressões do Teorema 7.1 se reduzem a uma versão nominal que consiste no Regulador Recursivo Nominal com Matriz



de Transição Incertas Politópicas (RRN-MTIP). Para verificar esta redução, considere as seguintes matrizes em (7.18):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= \begin{bmatrix} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \begin{bmatrix} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{I}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \begin{bmatrix} I_{n_d} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} \end{bmatrix}, \\ \Pi &= \mathbf{diag}(\Phi, \hat{\lambda}^{-1} I_{\bar{s}sn_d V_p}), \quad \text{com } \Phi = \mu^{-1} I_{n_d} \text{ e } \hat{\lambda} > 0. \end{aligned} \quad (7.24)$$

No próximo teorema, a solução fornecida no Teorema 7.1 são reduzidas em expressões algébricas explícitas. Ao longo da próxima seção será possível ver que essas expressões são mais adequadas para realizar análises de convergência e estabilidade do regulador proposto. A seguir será apresentado um resultado preliminar, necessário para obter as expressões de  $L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  e  $P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ .

**Lema 7.1.** *Suponha que  $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ ,  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  e  $\phi_1 \succeq 0$ . Então, a matriz*

$$\mathcal{N} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{M} & \begin{matrix} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & 0 \end{matrix} & V^{-1}(\hat{\lambda}^{-1} I_{\bar{r}_2} + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T) \end{array} \right] \quad (7.25)$$

é não-singular, sendo a matriz  $\mathcal{M}$  dada por

$$\mathcal{M} = \left[ \begin{array}{cc} \phi_1 + V(\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} V G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T \\ \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} & V^{-1}(\hat{\lambda}^{-1} I_{\bar{r}_1} + \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T) \end{array} \right]$$

com  $\phi_1 = \mu^{-1}(1 - \beta^{-1})I_{n_d}$ , é não-singular.

**Prova 7.2.** *O bloco matricial  $\mathcal{Z} = V^{-1}(\hat{\lambda}^{-1} I_{\bar{r}_1} + \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T)$  é não-singular. De fato, como  $V > 0$ ,  $\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)} \succ 0$  e  $\tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} \succ 0$ , segue que  $\tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T \succ 0$  (Lema A.3). De acordo com a propriedade de positividade (Lema A.4),  $\mathcal{Z} \succ 0$  e, portanto, não-singular.*

Além disso, a matriz  $\mathcal{Y} = V^{-1}(\hat{\lambda}^{-1} I_{\bar{r}_2} + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)$  também é não-singular. De fato, como  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ , então  $\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \succeq 0$ , conforme o Lema A.2. Assim, pela propriedade de positividade (Lema A.4), segue que  $\mathcal{Y} \succ 0$ . Desta forma, o bloco diagonal  $\mathcal{H} = \mathbf{diag}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y})$  é não-singular.

O complemento de Schur de  $\mathcal{H}$  em  $\mathcal{N}$  é não-singular. De fato,

$$(\mathcal{N} / \mathcal{H}) = \tilde{\Phi}_1 + V(\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} \hat{\mathcal{N}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + V G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T.$$

Como  $V > 0$ ,  $\tilde{\Phi}_1 \succeq 0$ ,  $\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)} \succ 0$  e  $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ , então  $\tilde{\Phi}_1 + V \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1}$  é definida positiva. De acordo com o Lema 5.1,  $\hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ , logo pela propriedade de positividade (Lema A.2), segue que  $G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \succeq 0$ . Assim, segundo o Lema A.4, tem-se que  $(\mathcal{N} / \mathcal{H}) \succ 0$ . Portanto, pelo complemento de Schur (Lema A.11),  $\mathcal{N}$  é definida positiva e não-singular.  $\square$

**Teorema 7.2.** *Considere o problema de controle resolvido através de mínimos-quadrados regularizados com incertezas politópicas nas matrizes paramétricas e na matriz de transição (7.15)-(7.16), com as condições iniciais conhecidas  $N$ ,  $\mu > 0$ ,  $\beta > 1$ ,  $x_0$ ,  $\pi_0$ ,  $\bar{\pi}_0$ ,  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ ,  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ . Para cada  $k = N-1, \dots, 0$ , sua solução recursiva fornece  $L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  do SLSMP (4.8) com MTI politópica e, consequentemente, para cada  $k = 0, \dots, N-1$ , obtém-se o SLSMAP (7.1) em malha-fechada, conforme descrito no Algoritmo 7.1.*

**Prova 7.3.** *O problema de controle (7.15)-(7.16) é um caso especial de um problema de mínimos-quadrados regularizados com incertezas politópicas (Seção 2.3.5) com as identificações (7.21) -(7.22). Logo, ao aplicar o Lema 2.9, obtém-se a solução dada pelo arranjo matricial (7.23), o qual também representa um sistema de equações lineares simultâneas,*

$$\begin{bmatrix} (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & \Phi(\mathcal{P}, \hat{\lambda}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi & 0 & 0 & \mathbf{I}_{n_d} & -\mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}^{-1} I_{\bar{r}_1} & 0 & \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\lambda}^{-1} I_{\bar{r}_2} & 0 & -\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ I_{n_d} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_{n_d}^T & \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 & -\mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & 0 & -\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \\ \bar{\chi}_5 \\ \chi_6 \\ \chi_7 \\ \chi_8 \\ \chi_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I_{n_d} \\ \mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \\ \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sendo  $\bar{\chi}_5 := 1_V \otimes \chi_5$ , com  $\chi_5 \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$ ,  $\bar{r}_1 = \bar{s}n_d V_p$  e  $\bar{r}_2 = n_d V$  e o conjunto de equações equivalentes,

$$(\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} \chi_1 + \chi_8 = 0, \quad (7.29)$$

$$R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \chi_2 + \chi_9 = 0, \quad (7.30)$$

$$\Phi(\mathcal{P}, \hat{\lambda}) \chi_3 = 0 \quad (7.31)$$

$$Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \chi_4 = -I_{n_d}, \quad (7.32)$$

$$\tilde{\Phi}_1 \bar{\chi}_5 + \mathbf{I}_{n_d} \chi_8 - \mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \chi_9 = \mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad (7.33)$$

$$\hat{\lambda}^{-1} \chi_6 + \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} \chi_8 = 0, \quad (7.34)$$

$$\hat{\lambda}^{-1} \chi_7 - \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \chi_9 = \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad (7.35)$$

$$\chi_1 + \mathbf{I}_{n_d}^T \bar{\chi}_5 + \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T \chi_6 = 0, \quad (7.36)$$

$$\chi_2 - \mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \bar{\chi}_5 - \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \chi_7 = 0. \quad (7.37)$$

De (7.36), tem-se que  $\chi_1 + V \chi_5 + \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T \chi_6 = 0$  que ao combinar com (7.29) resulta em,

$$\chi_8 = (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} (V \chi_5 + \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T \chi_6), \quad (7.38)$$

e de (7.37), segue que  $\chi_2 - \mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T V \chi_5 - \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \chi_7 = 0$ , que combinado com (7.30) fornece,

$$\chi_9 = -R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} (\mathbf{G}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T V \chi_5 + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \chi_7). \quad (7.39)$$

**Algoritmo 7.1** Regulador Robusto Recursivo com MTIP (RRR-MTIP)

**Modelo:** Assumir o modelo de SLSMAP (7.1)-(7.2).

**SLSM:** Definir o SLSMP aumentado (5.9)-(5.10) conforme (5.11), com  $\theta_k$  e  $\bar{\theta}_k$  associadas às  $\hat{\mathbb{P}}^\delta$  em (7.4) e  $\bar{\mathbb{P}}$  em (6.6), respectivamente.

**Regulador Robusto Recursivo com MTIP:**

*Condições iniciais:* Seja  $N$ ,  $\mu > 0$ ,  $\beta > 1$ ,  $x_0$ ,  $\pi_0$ ,  $\bar{\pi}_0$ ,  $P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} \succ 0$ ,  $Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ ,  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  e  $\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$ .

Para todo  $k = N - 1, \dots, 0$ :

1: Calcular as matrizes auxiliares:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \mu^{-1}(1 - \beta^{-1})I_{n_d}, \quad \hat{\lambda} = \beta\mu I_{n_d}V, & \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} &= (V^{-1}\phi_1 + (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1}\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k})^{-1}, \\ \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}\hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2}, & \hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= (R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \hat{\lambda}\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k})^{-1}, \\ \hat{\mathcal{N}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= I_{n_d} - \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T(\hat{\lambda}^{-1}I_{\bar{s}s}n_dV_p + \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}(\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1}\tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T)^{-1}\tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}(\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} \\ \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1}\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T(\hat{\lambda}^{-1}I_{n_d}V + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1}\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1}\tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \\ \hat{\mathcal{Q}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T(\hat{\lambda}^{-1}I_{n_d}V + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1}\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1}\tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \\ \Omega_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= I_{n_d} - \phi_1V^{-1}(\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}\hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1}. \end{aligned}$$

2: Calcular a matriz do sistema em malha fechada, o ganho de realimentação e a equação de Riccati, respectivamente:

$$L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \Omega_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}\hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}(I_m + \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}\hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k})^{-1} \times \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}\hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad (7.26)$$

$$K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = -\hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2}\left(I_m + \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}\hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}\right)^{-1}\hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}\hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1}\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T\left(\hat{\lambda}^{-1}I_{n_d}V + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1}\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T\right)^{-1}\tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad (7.27)$$

$$P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \hat{\mathcal{Q}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}\hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}\hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}\left(I_m + \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}\hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}\right)^{-1}\hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}\hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}. \quad (7.28)$$

**SLSMAP:** Obter para cada  $k = 0, \dots, N - 1$ :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A_{\theta_k, k} + \delta A_{\theta_k, k})x_k + (A_{d, \theta_k, k} + \delta A_{d, \theta_k, k})x_{k-d_k} + (B_{\theta_k, k} + \delta B_{\theta_k, k})u_k, \\ &\text{com } u_k = K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}z_k. \end{aligned}$$

Observe que (7.33) pode ser reescrito como

$$\phi_1 \chi_5 + I_{n_d} \chi_8 - G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \chi_9 = F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \quad (7.40)$$

onde  $\phi_1 := \mu^{-1}(1 - \beta^{-1})I_{n_d}$ , que combinado com (7.38) e (7.39), obtém-se

$$\begin{aligned} (\phi_1 + V(\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} V G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T) \chi_5 + (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T \chi_6 + \\ G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \chi_7 = F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Substituindo (7.38) em (7.34), tem-se

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} V(\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} \chi_5 + (\hat{\lambda}^{-1} I_{\bar{r}_1} + \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T) \chi_6 = 0$$

ou ainda,

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} \chi_5 + V^{-1} (\hat{\lambda}^{-1} I_{\bar{r}_1} + \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T) \chi_6 = 0 \quad (7.42)$$

Agora, substituindo (7.39) em (7.35),

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T V \chi_5 + (\hat{\lambda}^{-1} I_{\bar{r}_2} + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T) \chi_7 = \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$$

ou, podemos reescrever como

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \chi_5 + V^{-1} (\hat{\lambda}^{-1} I_{\bar{r}_2} + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T) \chi_7 = V^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \quad (7.43)$$

Assim, de (7.41), (7.42) e (7.43), segue que

$$\mathcal{N} \begin{bmatrix} \chi_5 \\ \chi_6 \\ \chi_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 \\ V^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad (7.44)$$

onde  $\mathcal{N}$  está definido no Lema 7.1. Como a inversa de  $\mathcal{V}$  está garantida pelo Lema 7.1,

a solução do sistema de equações (7.41) pode ser obtida através do Lema A.9. Assim,

$$\begin{aligned}
\chi_5 &= \left( \phi_1 + V(\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} \times \right. \\
&\quad \left. \underbrace{\left( I_{n_d} - \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T (\hat{\lambda}^{-1} I_{S_{nd} V_p} + \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T)^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} \right)}_{\hat{\mathcal{N}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} + V G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \times \right. \\
&\quad \left. \left( R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} - R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T (\hat{\lambda}^{-1} I_{\bar{r}_2} + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \right) G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} \\
&\quad \left. \underbrace{\left( F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T (\hat{\lambda}^{-1} I_{\bar{r}_2} + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)}_{\hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \right) \\
&= V^{-1} \left( \underbrace{V^{-1} \phi_1 + (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} \hat{\mathcal{N}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}_{\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1}} + \right. \\
&\quad \left. G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \underbrace{\left( R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \hat{\lambda} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T}_{\hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \right)^{-1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\
&= V^{-1} \left( \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}, \tag{7.45}
\end{aligned}$$

$$\chi_6 = -(\hat{\lambda}^{-1} I_{n_d} + \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T)^{-1} (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T \chi_5, \tag{7.46}$$

$$\chi_7 = (\hat{\lambda}^{-1} I_{\bar{r}_2} + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1} (\tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T V \chi_5). \tag{7.47}$$

Substituindo (7.45) e (7.47) em  $\chi_9$  de (7.39) e aplicando o Lema A.8, obtém-se

$$\begin{aligned}
\chi_9 &= -\hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} \underbrace{\hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T}_{\hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T} \left( \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + \underbrace{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} \hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T}_{\hat{\mathcal{S}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \right)^{-1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \\
&\quad R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \hat{\lambda}^{-1} I_{\bar{r}_2} + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\
&= -\hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} \left( I_m + \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{S}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \\
&\quad R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \hat{\lambda}^{-1} I_{\bar{r}_2} + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}. \tag{7.48}
\end{aligned}$$

Agora, substituindo (7.45) e (7.48) em  $\chi_8$  de (7.40), resulta em

$$\begin{aligned}
\chi_8 &= F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \chi_9 - \phi_1 \chi_5 \\
&= \underbrace{\left( I_{n_d} - \phi_1 V^{-1} (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + \hat{\mathcal{S}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1} \right)}_{\Omega_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \\
&\quad \underbrace{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2}}_{\hat{\mathcal{S}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} \left( I_m + \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{S}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\
&= \Omega_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \hat{\mathcal{S}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \left( I_m + \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{S}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}.
\end{aligned}$$

De (7.23) tem-se que as matrizes  $L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  e  $P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  são dadas por:

$$\begin{bmatrix} L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{n_d} \\ 0 & 0 & \mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ I_{n_d} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \\ \bar{\chi}_5 \\ \chi_6 \\ \chi_7 \\ \chi_8 \\ \chi_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & & & \chi_8 \\ & & & & & & & \chi_9 \\ -\chi_4 + \mathbf{F}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \bar{\chi}_5 + \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \chi_7 & & & & & & & \end{bmatrix}.$$

Logo,  $L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \chi_8$  e  $K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} = \chi_9$ . De (7.32) e (7.45) e (7.47), obtém-se

$$\begin{aligned} P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= -\chi_4 + V F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \chi_5 + \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \chi_7 \\ &= \underbrace{Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \hat{\lambda}^{-1} I_{\bar{r}_2} + \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}_{\hat{Q}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}} + \\ &\quad \tilde{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} I_m \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} \tilde{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ &= \hat{Q}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left( \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} + \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} I_m \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ &= \hat{Q}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} - \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \left( I_m + \right. \\ &\quad \left. \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^{-1} \hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}. \end{aligned}$$

Portanto, a solução do regulador robusto para SLSMP com MTI politópica independe da matriz  $\Phi(\mathcal{P}, \hat{\lambda})$ , como comprovado pelas soluções algébricas recursivas do regulador. Desta forma, as expressões são obtidas por meio do arranjo matricial simétrico (7.18) ao invés de (7.23).  $\square$

**Observação 7.4.** Observe que através do Teorema 7.2 é possível determinar de modo recursivo os ganhos robustos de realimentação de estado  $K_{\mu, k} = (K_{\mu, 1, \theta_k}, \dots, K_{\mu, \bar{s}, \theta_k, k}) \in \mathbb{H}^{m \times n_d}$ , onde o tempo de atraso, juntamente, com todos os vértices do politopo são considerados em cada modo de Markov. Além disso, note que  $z_{k+1} = L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k$ , na qual  $L_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ , definida em (7.26), é a matriz de malha-fechada correspondente associada a (7.27), quando  $u_k = K_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k} z_k$ .

**Observação 7.5.** A versão nominal do regulador para SLSMA com probabilidades de transição incertas politópicas, proposta na forma matricial simétrica (veja a Observação 7.3), pode ser reduzida conforme descrito no Algoritmo 7.1. Neste caso, considere  $\phi_1 = \mu^{-1} I_{n_d}$ ,  $\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} = \Phi + (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1} \hat{\mathcal{N}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $\hat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T = \hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{1/2} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T$ ,  $\hat{\mathcal{R}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1}$ ,  $\hat{\mathcal{F}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $\hat{Q}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $\Omega_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = I_{n_d} - \Phi(\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{-1} +$

$\widehat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \widehat{\mathcal{G}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T)^{-1}$ . Este resultado consiste nas expressões algébricas recursivas para o RRN-MTIP.

**Observação 7.6.** Ao aplicar a Fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury (Lema A.7) na expressão de  $\widehat{\mathcal{N}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ , obtém-se que  $\widehat{\mathcal{N}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = (I_{n_d} + \widehat{\lambda} \widetilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}^T \widetilde{\mathbf{P}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} (\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1}^{(0)})^{-1})^{-1}$ . Logo, se  $\lambda \rightarrow \infty$ , então  $\widehat{\mathcal{N}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \rightarrow 0$  e  $P_{\mu, \bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  se torna uma matriz constante para cada passo de tempo  $k$ . Desta forma, adota-se  $\beta > 1$  para que  $\widehat{\mathcal{N}}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  seja definida positiva e, assim, tem-se a garantia de convergência para a solução estabilizadora. Além disso, conforme discutido em Rocha e Terra (2021), adotando algum  $\beta \in (1, 2]$  tem-se resultados numéricos adequados em termos de estabilidade.

### 7.3 Condições para Estabilidade e Convergência

Esta seção estabelece as condições de estabilidade e convergência do regulador robusto recursivo com MTIP proposto. Análogo ao procedimento descrito na Seção 5.3, considere o SLSMP (5.9) e a função de custo quadrático (7.10) com parâmetros invariantes no tempo. No entanto, ainda assuma que os coeficientes do politopo  $\alpha_k$  e  $\xi_k$  são variantes no tempo. Logo, pode-se reescrever o SLSMP da seguinte maneira:

$$z_{k+1} = \left( F_{\bar{i}, i} + \sum_{\ell=1}^V \alpha_{\ell, k} F_{\bar{i}, i}^{\ell} \right) z_k + \left( G_{\bar{i}, i} + \sum_{\ell=1}^V \alpha_{\ell, k} G_{\bar{i}, i}^{\ell} \right) u_k, \quad (7.49)$$

sendo  $u_k = K_{\bar{i}, i} z_k$ , onde  $K_{\bar{i}, i}$ , com  $i \in \mathcal{S}$  e  $\bar{i} \in \bar{\mathcal{S}}$ , é o ganho de realimentação obtido em (7.27).

Considerando o sistema (7.49) e assumindo que  $\widehat{\mathcal{N}}_{i, i, k} \succ 0$ , as expressões (7.26) e (7.28) podem ser reescritas com os parâmetros invariantes no tempo:

$$L_{\mu, \bar{i}, i} = \mathbf{\Omega}_{\bar{i}, i} \widehat{F}_{\bar{i}, i} - \widehat{\mathcal{G}}_{\bar{i}, i} (I_m + \widehat{\mathcal{G}}_{\bar{i}, i}^T \mathbf{\Psi}_{\bar{i}, i, k+1} \widehat{\mathcal{G}}_{\bar{i}, i})^{-1} \widehat{\mathcal{G}}_{\bar{i}, i}^T \mathbf{\Psi}_{\bar{i}, i, k+1} \widehat{F}_{\bar{i}, i}, \quad (7.50)$$

$$P_{\mu, \bar{i}, i, k} = \widehat{\mathcal{Q}}_{\bar{i}, i} + \widehat{\mathcal{F}}_{\bar{i}, i}^T \mathbf{\Psi}_{\bar{i}, i, k+1} \widehat{\mathcal{F}}_{\bar{i}, i} - \widehat{\mathcal{F}}_{\bar{i}, i}^T \mathbf{\Psi}_{\bar{i}, i, k+1} \widehat{\mathcal{G}}_{\bar{i}, i} (I_m + \widehat{\mathcal{G}}_{\bar{i}, i}^T \mathbf{\Psi}_{\bar{i}, i, k+1} \widehat{\mathcal{G}}_{\bar{i}, i})^{-1} \widehat{\mathcal{G}}_{\bar{i}, i}^T \mathbf{\Psi}_{\bar{i}, i, k+1} \widehat{\mathcal{F}}_{\bar{i}, i}. \quad (7.51)$$

Observe que, (7.51) se assemelha às equações algébricas acopladas de Riccati (COSTA et al., 2005), quando são feitas as seguintes identificações entre (3.32) e (7.51):

$$P_{i, k} \leftarrow P_{\mu, \bar{i}, i, k}, \quad \mathcal{Q}_i \leftarrow \widehat{\mathcal{Q}}_{\bar{i}, i}, \quad \mathbb{A}_i \leftarrow \widehat{\mathcal{F}}_{\bar{i}, i}, \quad \mathcal{E}_{i, k+1} \leftarrow \mathbf{\Psi}_{\bar{i}, i, k+1}, \quad \mathbb{B}_i \leftarrow \widehat{\mathcal{G}}_{\bar{i}, i} \text{ e } \mathcal{R}_i \leftarrow I_m. \quad (7.52)$$

Devido a esta semelhança, as condições de estabilidade e convergência do regulador proposto são dadas baseadas no problema do regulador linear quadrático padrão. Assim, antes de apresentar as condições, considere as seguintes matrizes:  $\widehat{\mathcal{F}} = (\widehat{\mathcal{F}}_{1,1}, \dots, \widehat{\mathcal{F}}_{1,s}, \dots, \widehat{\mathcal{F}}_{\bar{s},1}, \dots, \widehat{\mathcal{F}}_{\bar{s},s}) \in \mathbb{H}^{n_d \times n_d}$ ,  $\widehat{\mathcal{G}} = (\widehat{\mathcal{G}}_{1,1}, \dots, \widehat{\mathcal{G}}_{1,s}, \dots, \widehat{\mathcal{G}}_{\bar{s},1}, \dots, \widehat{\mathcal{G}}_{\bar{s},s}) \in \mathbb{H}^{n_d \times m}$ ,  $\mathcal{P}_k = (P_{\mu, 1,1,k}, \dots, P_{\mu, 1,s,k}, \dots, P_{\mu, \bar{s},1,k}, \dots, P_{\mu, \bar{s},s,k}) \in \mathbb{H}_+^{n_d}$  e  $\mathcal{Q} = (\widehat{\mathcal{Q}}_{1,1}, \dots, \widehat{\mathcal{Q}}_{1,s}, \dots, \widehat{\mathcal{Q}}_{\bar{s},1}, \dots, \widehat{\mathcal{Q}}_{\bar{s},s}) \in \mathbb{H}_+^{n_d}$ .

**Proposição 7.1.** *Considere  $\widehat{N}_{i,i,k} \succ 0$ ,  $(\widehat{\mathcal{D}}, \widehat{\mathcal{F}})$  detectável e  $(\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{G}})$  estabilizável. Assuma  $\mu > 0$  e  $\beta > 1$  fixados e a condição inicial  $P_{\mu,N,N} \succ 0$ . Logo,  $\mathcal{P}_k \in \mathbb{H}_+^{n_d}$  determinada por (7.28) converge para a sua única solução  $\mathcal{P} = (P_{\mu,1,1}, \dots, P_{\mu,1,s}, \dots, P_{\mu,\bar{s},1}, \dots, P_{\mu,\bar{s},s}) \in \mathbb{H}_+^{n_d}$ . Além disso, a matriz em malha-fechada (7.50) associada ao sistema (7.49) é estável.*

**Prova 7.4.** *Com as identificações diretas entre (7.51) e as equações algébricas acopladas de Riccati, definidas em (7.52), a prova segue baseada nos conceitos apresentados no Apêndice D.  $\square$*

Para finalizar este capítulo, destaca-se novamente o método da função penalidade no projeto de reguladores robustos recursivos com matriz de transição incerta politópica. Essa técnica permitiu considerar atraso aleatório no estado e incertezas politópicas relacionadas as matrizes paramétricas e as probabilidades de transição. Além disso, todos os vértices do politopo foram ponderados de uma forma unificada por meio de um único parâmetro de penalidade  $\mu > 0$ , o qual pode ser compreendido como um parâmetro de ponderação adicional. Por sua vez, tal característica é adequada para implementações online, pois  $\mu$  é ajustado a priori sem nenhuma complexidade adicional.

## 7.4 Exemplos Ilustrativos

Nesta seção são apresentados dois exemplos numéricos. No primeiro, o desempenho do RRN-MTIP (Observação 7.5) é avaliado, enquanto que no segundo, a performance do RRR-MTIP (Algoritmo 7.1) é analisada. Além disso, as duas versões do regulador são comparadas com controladores robustos alternativos existentes na literatura.

**Observação 7.7.** *Nos exemplos a seguir, 5000 experimentos Monte Carlo foram realizados, considerando um horizonte de tempo  $N$ . Os modos de operação do sistema  $\theta_k$  e o tempo de atraso  $\bar{\theta}_k$  são selecionados com base em suas probabilidades  $\widehat{\mathbb{P}}^\delta$  e  $\bar{\mathbb{P}}$ , respectivamente. Além disso, a cada intervalo de tempo, o coeficiente do politopo  $\alpha_k \in \Lambda_{V_p}$ , definido em (7.6), é selecionado aleatoriamente. Quando o SLSMA possui incertezas politópicas, o coeficiente  $\alpha_k \in \bar{\Lambda}_V$  também é escolhido de modo aleatório.*

**Exemplo 7.1.** *Considere um SLSMAP de tempo discreto conforme descrito em (7.1) com três modos de operação, sendo as matrizes paramétricas propostas em (LI et al., 2021) e estudadas no Capítulo 6:*

$$\begin{aligned} A_{1,k} &= \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0,6 \end{bmatrix}, & A_{d,1,k} &= \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 \\ 0,1 & 0 \end{bmatrix}, & B_{1,k} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ A_{2,k} &= \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0 \end{bmatrix}, & A_{d,2,k} &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}, & B_{2,k} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ A_{3,k} &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 1 & 0,4 \end{bmatrix}, & A_{d,3,k} &= \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,3 \end{bmatrix}, & B_{3,k} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$



com condições iniciais  $x_0 = [0,5 \ 0,5]^T$  e  $\varphi_0(k) = x_0$ , para todo  $k \leq 0$ , e a matriz de probabilidade de transição incerta  $\widehat{\mathbb{P}}^\delta$  modelada por um politopo de 2-vértices,

$$\mathbb{P}_0 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{P}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{P}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dois casos de tempo de atraso são considerados. No primeiro, assume-se que  $d_{max} = 2$ , enquanto no segundo,  $d_{max} = 10$ , com  $d_{min} = 1$  e  $\Delta d = 1$ , para ambos os casos.

Para o primeiro caso de atraso, a matriz de probabilidade de transição conhecida  $\bar{\mathbb{P}}$ , conforme descrita em (6.7), é dada por

$$\bar{\mathbb{P}} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix},$$

e para o segundo, pode ser obtida facilmente seguindo as orientações definidas em (3.4).

A eficácia do RRN-MTIP (Observação 7.5) é verificada comparando-o com os controladores em termos de LMIs desenvolvidos em Dzung e Hien (2017, Teo. 2) e Li et al. (2021, Teo. 2), os quais foram calculados com o YALMIP<sup>®</sup> Toolbox (LÖFBERG, 2004). Aplica-se o RRN-MTIP com os seguintes dados de inicialização,

$$\begin{aligned} N &= 80, \quad \mu = 10^{15}, \quad \beta = 1,5, \quad x_0 = [0,5 \ 0,5]^T, \\ \pi_0 &= 1/3 \times \mathbf{1}_s^T, \quad \bar{\pi}_0 = 1/\bar{s} \times \mathbf{1}_{\bar{s}}^T, \quad P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} = Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = I_{n_d}, \\ R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= I_m, \quad \forall \bar{\theta}_k = 1, \dots, \bar{s}, \quad \theta_k = \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

A Tabela 7.1 resume os resultados dos experimentos, onde  $\|x_k\|$ ,  $\sigma_x$ ,  $\|u_k\|$  e  $\sigma_u$  são os valores médios e os desvios padrão das normas de estados e entradas de controle, respectivamente. Observe que o RRN-MTIP supera as outras abordagens de controle robusto em termos de normas de estados, apresentando valores menores para a situação de tempo de atraso  $d_k \in [1, 2]$ . No entanto, o controlador de Dzung e Hien (2017, Teo. 2) forneceu melhores resultados com relação às normas de entrada de controle.

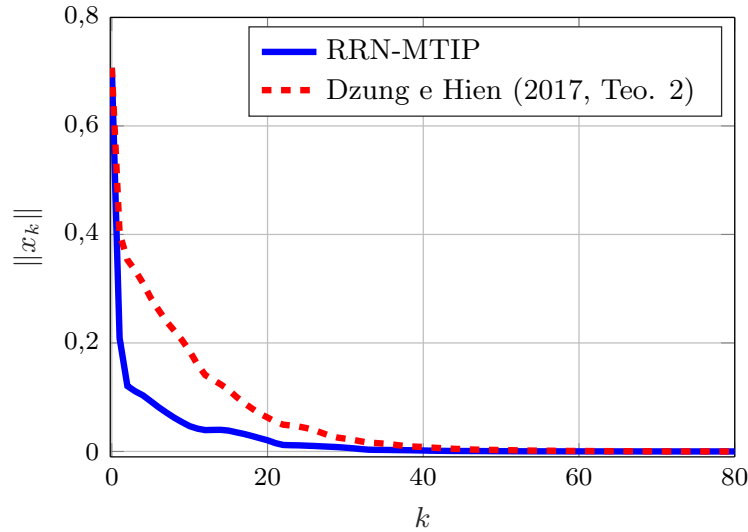
Tabela 7.1 – Desempenho dos controladores sobre 5000 experimentos para  $d_{max} = 2$ .

Controladores	$\ x_k\ $	$\sigma_x$	$\ u_k\ $	$\sigma_u$
RRN-MTIP	<b>0,7299</b>	<b>0,0809</b>	0,46325	0,0511
Dzung e Hien (2017, Teo. 2)	0,8748	0,0949	<b>0,3142</b>	<b>0,0342</b>
Li et al. (2021, Teo. 2)	0,82214	0,0900	0,3675	0,0403

Adicionalmente, no segundo caso de atraso, mais severo, o controlador em Li et al. (2021, Thm. 2) não conseguiu fornecer uma lei de controle capaz de regular o SLSMA nominal, apresentando uma solução infactível. No entanto, como pode ser visto na Figura

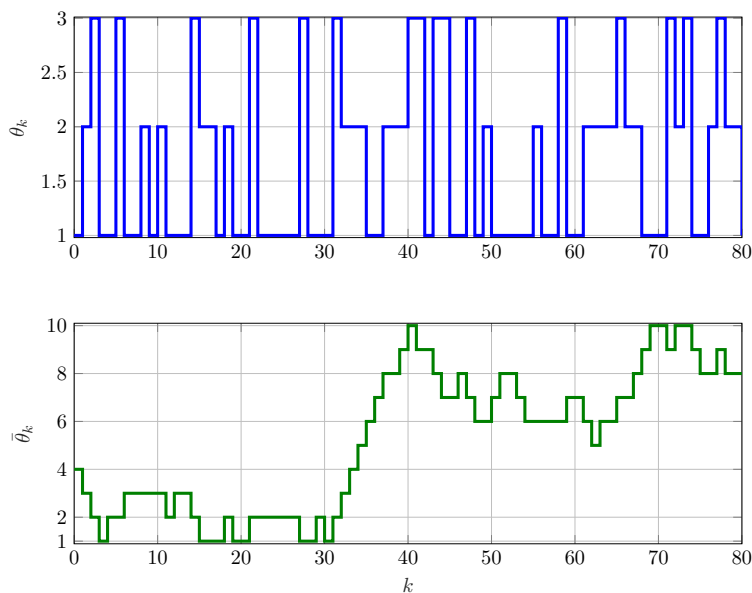
7.1, o regulador proposto e o controlador de Dzung e Hien (2017, Teo. 2) ainda estabilizam o sistema Markoviano com atraso  $d_k \in [1, 10]$ . Isso enfatiza como o atraso de tempo pode causar instabilidade e degradar o desempenho dos sistemas.

Figura 7.1 – Comparação dos valores médios das normas de estados regulados quando  $d_k \in [1, 10]$ .



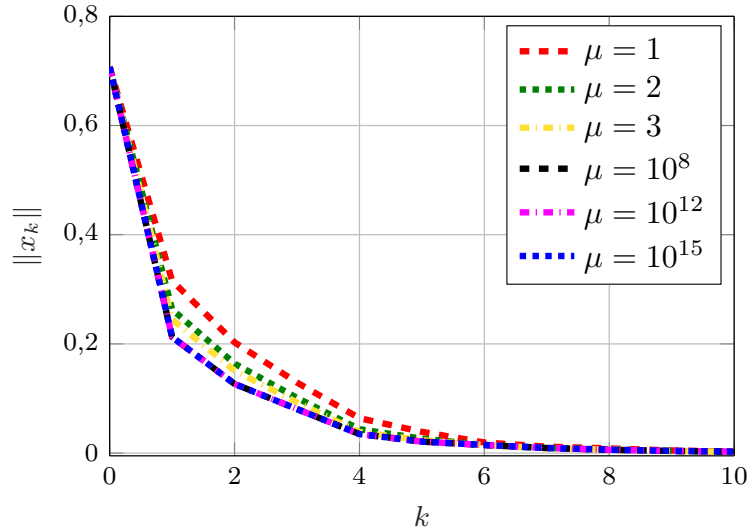
A Figura 7.2 ilustra os saltos dos modos de operação das cadeias de Markov  $\theta_k$  e  $\bar{\theta}_k$  correspondentes a um dos experimentos apresentado na Figura 7.1. A comutação ocorre conforme as probabilidades de transição  $\hat{\mathbb{P}}^\delta$  e  $\bar{\mathbb{P}}$ .

Figura 7.2 – Comutação dos modos de operação do SLSM quando  $d_k \in [1, 10]$ .



A Figura 7.3 ilustra o efeito do parâmetro de penalidade  $\mu$  no desempenho do RRN-MTIP. Novamente, podemos perceber que mesmo com a presença de incertezas nas probabilidades de transição, o sistema estabiliza com os valores pequenos de  $\mu$ , além de apresentar um comportamento dinâmico semelhante quando  $\mu \geq 10^8$ .

Figura 7.3 – Efeito do parâmetro de penalidade  $\mu$  nos valores médios das normas dos estados do SLSMA quando  $d_k \in [1, 2]$ .



**Exemplo 7.2.** Considere um SLSMAP incerto de tempo discreto conforme descrito em (7.1)-(7.2) com dois modos de operação, sendo as matrizes paramétricas propostas por Qiu et al. (2015):

$$A_{1,k} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,9 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad A_{d,1,k} = \begin{bmatrix} -0,02 & 0,12 \\ 0,07 & -0,14 \end{bmatrix}, \quad B_{1,k} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,9 \end{bmatrix},$$

$$A_{2,k} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}, \quad A_{d,2,k} = \begin{bmatrix} 0,02 & 0,12 \\ 0,07 & 0,02 \end{bmatrix}, \quad B_{2,k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,9 \end{bmatrix},$$

para todo  $k \geq 0$  e as incertezas limitadas modeladas por um politopo de 2-vértices, obtidos de acordo com o modelo de incerteza limitada em norma proposto por Qiu et al. (2015), considerando  $\Delta_{\theta_k,k} = -1$  e  $\Delta_{\theta_k,k} = 1$ ,

$$A_{1,k}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,03 & 0,02 \\ 0,06 & 0,04 \end{bmatrix}, \quad A_{d,1,k}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,02 & 0,03 \\ 0,04 & 0,06 \end{bmatrix}, \quad B_{1,k}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,02 \end{bmatrix},$$

$$A_{2,k}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,04 & 0,06 \\ 0,02 & 0,03 \end{bmatrix}, \quad A_{d,2,k}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,06 & 0,04 \\ 0,03 & 0,02 \end{bmatrix}, \quad B_{2,k}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,06 \\ 0,03 \end{bmatrix},$$

$$(A_{1,k}^{(2)}, A_{d,1,k}^{(2)}, B_{1,k}^{(2)}, A_{2,k}^{(2)}, A_{d,2,k}^{(2)}, B_{2,k}^{(2)}) = -(A_{1,k}^{(1)}, A_{d,1,k}^{(1)}, B_{1,k}^{(1)}, A_{2,k}^{(1)}, A_{d,2,k}^{(1)}, B_{2,k}^{(1)}).$$

Assume-se o estado inicial  $x_0 = [-0,2 \ 0,2]^T$ , sendo  $\varphi_0(k) = x_0, \forall k \leq 0$ . Além disso, considera-se a matriz de probabilidade de transição incerta  $\hat{\mathbb{P}}^\delta$  modelada limitada

em norma em (QIU et al., 2015), a qual pode ser representada por um politopo de 2-vértices obtidos quando  $\Delta_{\theta_k,k} = -1$  e  $\Delta_{\theta_k,k} = 1$ , dadas por

$$\mathbb{P}_0 = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{P}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,03 & -0,03 \\ 0,01 & -0,01 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{P}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0,03 & 0,03 \\ -0,01 & 0,01 \end{bmatrix},$$

Dois intervalos de tempo de atraso são considerados. No primeiro, o limitante superior é  $d_{max} = 4$ , e no segundo,  $d_{max} = 10$ , com o limitante inferior  $d_{min} = 1$  e a taxa de variação  $\Delta d = d_{max}$  fixados para ambos intervalos.

O desempenho do RRR-MTIP (Algoritmo 7.1) é analisado por meio de uma comparação com a abordagem dada em termos de LMIs desenvolvida por Qiu et al. (2015, Teo. 3), sendo calculada com o YALMIP<sup>®</sup> Toolbox (LÖFBERG, 2004). Todas as abordagens são aplicadas no SLSMAP (7.1)-(7.2). Para este propósito, inicializa-se o RRR-MTIP (Algoritmo 7.1) com os seguintes parâmetros,

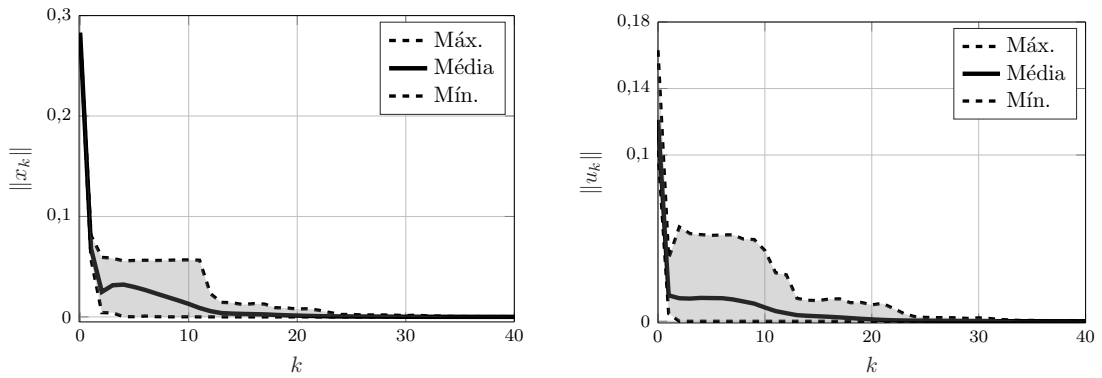
$$\begin{aligned} N &= 40, \quad \mu = 10^{14}, \quad \beta = 1,5, \quad x_0 = [-0,2 \quad 0,2]^T, \\ \pi_0 &= [0,5 \quad 0,5], \quad \bar{\pi}_0 = 1/\bar{s} \times \mathbf{1}_{\bar{s}}^T, \quad P_{\bar{\theta}_N, \theta_N, N} = Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} = I_{n_d}, \\ R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} &= I_m, \quad \forall \bar{\theta}_k = 1, \dots, \bar{s}, \quad \theta_k = \{1, 2\}. \end{aligned}$$

A Tabela 7.2 apresenta os valores médios e os desvios padrão das normas de estados e entradas de controle. Novamente, o RRR-MTIP supera o controlador robusto proposto por Qiu et al. (2015, Teo. 3), uma vez que apresenta valor menor em termos de normas dos estados. Por outro lado, a abordagem de Qiu et al. (2015, Teo. 3) forneceu melhores resultados com relação as normas de entrada de controle, pois não considera um vetor de estado aumentado.

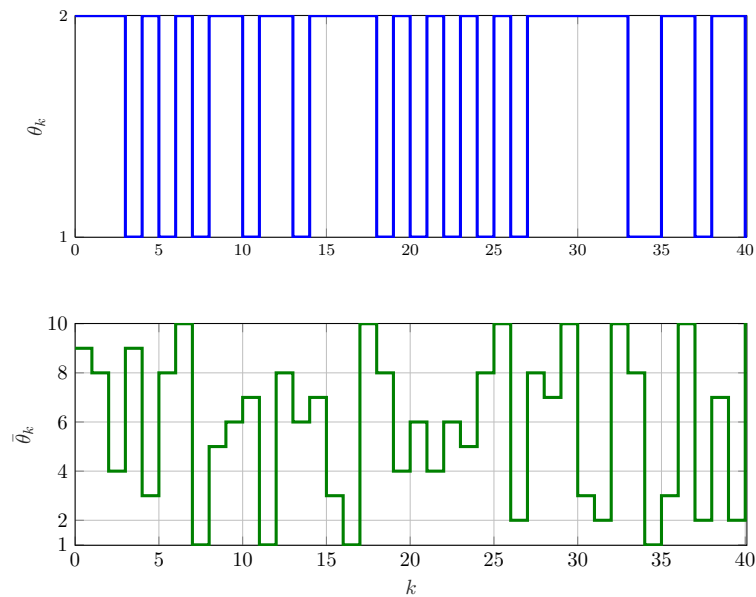
Tabela 7.2 – Desempenho dos controladores sobre 5000 experimentos para  $d_{max} = 4$ .

Controladores	$\ x_k\ $	$\sigma_x$	$\ u_k\ $	$\sigma_u$
RRR-MTIP (Algoritmo 7.1)	<b>0,2873</b>	<b>0,0286</b>	0,1167	0,0116
Qiu et al. (2015, Teo. 3)	0,3214	0,0320	<b>0,0746</b>	<b>0,0074</b>

No segundo intervalo de tempo de atraso, quando  $d_k \in [1, 10]$ , o regulador proposto ainda fornece um ganho de realimentação de estado que estabiliza o sistema Markoviano com atraso e incertezas politópicas, como pode ser visto na Figura 7.4. No entanto, o controlador desenvolvido por Qiu et al. (2015, Teo. 3) forneceu uma solução ineficaz, sendo  $d_{max} = 4$  o limitante superior máximo permitido.

Figura 7.4 – Resultados obtidos pelo RRR-MTIP quando  $d_{max} = 10$ .

A Figura 7.5 ilustra os saltos dos modos de operação das cadeias de Markov  $\theta_k$  e  $\bar{\theta}_k$  correspondentes a um dos experimentos apresentado na Figura 7.4. A comutação ocorre conforme as probabilidades de transição  $\hat{\mathbb{P}}^\delta$  e  $\bar{\mathbb{P}}$ .

Figura 7.5 – Comutação dos modos de operação do SLSM quando  $d_k \in [1, 10]$ .



---

## Conclusões

Esta tese aborda o problema de regulação linear de sistemas Markovianos de tempo discreto com atraso no estado. Este problema consiste em regular o estado do sistema através de uma lei de controle de realimentação estado dependente dos modos de operação. Desta maneira, consideramos dois cenários para a cadeia de Markov: completamente conhecida e completamente incerta. Além disso, para cada cenário, três classes de sistemas são considerados. Primeiro, assume-se que o sistema Markoviano com atraso é perfeitamente conhecido. Para as outras duas classes, lida-se com um sistema dinâmico mais realista que está sujeito a incertezas paramétricas, sendo modeladas por limitantes em norma ou pertencentes a um domínio politópico. Desta forma, propõe-se estratégias de controle que se assemelham com as expressões e simplicidade do regulador linear quadrático clássico para SLSM (COSTA et al., 2005).

Para o primeiro cenário da cadeia de Markov, uma metodologia é proposta para a regulação de sistemas Markovianos nominais com atraso no estado. De acordo com a abordagem aumentada e a modelagem do tempo de atraso por uma cadeia de Markov conhecida, o sistema Markoviano com atraso é convertido em um SLSM nominal sem atraso aumentado, sendo governado por duas cadeias de Markov mutuamente independentes. Para o sistema aumentado, um problema de controle é formulado como um problema de otimização restrito, conforme discutido em Cerri e Terra (2017). A restrição é uma equação que define o SLSM aumentado, que engloba todos os atrasos do sistema. Para solucionar o problema restrito e, conseqüentemente, obter o Regulador Recursivo Nominal (RRN), aplica-se o método da função de penalidade (LUENBERGER; YE, 2008) para transformá-lo em um problema de mínimos-quadrados regularizados irrestrito equivalente. Além disso, o regulador recursivo proposto se assemelha às expressões do regulador linear quadrático padrão, que é apresentado em uma estrutura matricial simétrica e por um algoritmo recursivo dado em termos de equações de Riccati acopladas, que facilitam a análise de estabilidade e convergência. Os exemplos numéricos mostram a eficácia do regulador proposto quando comparado com outras abordagens da literatura, uma vez que o regulador recursivo apresenta soluções factíveis para atraso de tempo de tamanhos

diversos.

Posteriormente, com base nos trabalhos de Cerri e Terra (2017) e Bueno et al. (2022a), essa metodologia é estendida para tratar os casos em que o sistema Markoviano com atraso está sujeito a incertezas paramétricas limitadas em normas ou politópicas. Novamente, com base na abordagem aumentada e modelando o tempo de atraso por uma cadeia de Markov conhecida, obtém-se um SLSM incerto sem atraso aumentado. Considerando o sistema aumentado, problemas de otimização min-max restrito são formulados e através do método da função penalidade, transformamos-os em problemas de mínimos-quadrados regularizados com incertezas irrestritos e mais conveniente para serem solucionados. Desta forma, o Regulador Robusto Recursivo (RRR) e o Regulador Robusto Recursivo Politépico (RRRP) são fornecidos em um arranjo matricial simétrico, bem como em algoritmos recursivos que se assemelham à versão nominal. Além disso, as condições de estabilidade e convergência são estabelecidas por meio das equações de Riccati acopladas. O desempenho dos reguladores é avaliado através de exemplos numéricos, exibindo soluções factíveis para intervalos de tempo de atraso maiores do que os controladores baseados em LMIs, que dependendo do limitante superior do atraso podem apresentar resultados infactíveis nas soluções.

Essas soluções são estendidas para lidar com o problema de regulação quando os modos de operação são governados por uma cadeia de Markov incerta. Neste caso, baseado nos trabalhos de Bortolin e Terra (2016) e Bueno et al. (2022b), propomos um modelo para representar as matrizes de transição incertas, modelando-as por limitantes em normas e politopos. Desta forma, o Regulador Recursivo Nominal com Matriz de Transição Incerta (RRN-MTI), o Regulador Recursivo Robusto com Matriz de Transição Incerta (RRR-MTI), o Regulador Recursivo Nominal com Matriz de Transição Incerta Politépica (RRN-MTIP) e o Regulador Recursivo Robusto com Matriz de Transição Incerta Politépica (RRR-MTIP) são fornecidos em um arranjo matricial simétrico e no formato de algoritmos recursivos. Adicionalmente, uma vez que as soluções são recursivas e assemelham-se às equações algébricas de Riccati clássicas, garante-se facilmente as condições de estabilidade e convergência. Os exemplos numéricos mostraram que os reguladores propostos superaram as abordagens baseadas em LMIs, que apresentam soluções infactíveis à medida que o intervalo de atraso aumenta.

Em resumo, a abordagem proposta é promissora para aplicações online, pois não é necessário utilizar nenhum pacote de otimização numérica para verificar, por exemplo, a viabilidade da solução de controle. Vale a pena enfatizar que todos os resultados propostos dependem apenas de um único parâmetro a ser ajustado, o parâmetro de penalidade  $\mu$ , que define o desempenho e a estabilidade do sistema. Além disso, os reguladores propostos apresentam um bom desempenho com relação às médias de normas dos estados e limitantes máximos permitidos do tempo de atraso, devido à sua estrutura recursiva simples que independe do tempo de atraso. Enfatizamos que a lei de controle independente



do atraso proposta para o sistema aumentado possui a dimensão do sistema original com atraso. A abordagem aumentada se mostra uma técnica eficaz para tratar sistemas com atraso variante no tempo, uma vez que nos permite englobar os tempos de atraso no estado de um sistema Markoviano e, assim, se torna possível a aplicação de reguladores clássicos.

Portanto, os reguladores robustos recursivos foram desenvolvidos com o objetivo de reduzir a lacuna na literatura sobre a teoria de reguladores robustos recursivos para sistemas lineares Markovianos incertos com atraso no estado, cuja taxa de variação entre dois atrasos consecutivos é limitada, as incertezas modeladas por limitantes em normas e politopos e a cadeia de Markov considerada completamente conhecida e incerta. No entanto, com a finalidade de complementar e estender este estudo, sugere-se:

- Extensão dos reguladores propostos para lidar com o sistema Markoviano com atraso, sendo a cadeia de Markov não observada.
- Abordar o problema de controle robusto para sistemas Markovianos com o atraso incerto ou completamente desconhecido.
- Estender os resultados propostos para lidar com a filtragem robusta de sistemas Markovianos com atraso no estado.
- Aplicação dos reguladores robustos propostos em sistemas físicos.



---

## Referências

ABADIR, K. M.; MAGNUS, J. R. **Matrix Algebra**. Universidade de Cambridge: Cambridge University Press, 2005. v. 22.

ASTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. **Computer Controlled Systems: Theory and Design**. 3. ed. Sweden: Prentice Hall, 1984.

BALEGHI, N.; SHAFIEI, M. Design of a stabilizing controller for discrete-time switched delay systems with affine parametric uncertainties. **Transactions of the Institute of Measurement and Control**, v. 41, n. 1, p. 14–22, 2019.

\_\_\_\_\_. Stability analysis and stabilization of a class of discrete-time nonlinear switched systems with time-delay and affine parametric uncertainty. **Journal of Vibration and Control**, v. 25, n. 7, p. 1326–1340, 2019.

BLAIR, W. P.; SWORDER, D. D. Feedback control of a class of linear discrete systems with jump parameters and quadratic cost criteria. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 21, n. 5, p. 833–841, 1975.

BORTOLIN, D. C.; GAGLIARDI, G. M.; TERRA, M. H. Recursive robust regulator for uncertain linear systems with random state delay based on Markovian jump model. In: **2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)**. Miami, USA: IEEE, 2018. p. 6228–6233.

BORTOLIN, D. C.; ODORICO, E. K.; TERRA, M. H. Robust linear quadratic regulator for uncertain linear discrete-time systems with delay in the states: an augmented system approach. In: **2018 European Control Conference (ECC)**. Limassol, Cyprus: IEEE, 2018. p. 1578–1583.

BORTOLIN, D. C.; TERRA, M. H. Recursive robust regulator for Markovian jump linear systems subject to uncertain transition probabilities. In: **2015 European Control Conference (ECC)**. Linz, Austria: IEEE, 2015. p. 3215–3219.

\_\_\_\_\_. Recursive robust regulator for Markovian jump linear systems subject to uncertain transition probabilities with unknown Markov chain. In: **2016 IEEE Conference on Control Applications (CCA)**. Buenos Aires, Argentina: IEEE, 2016. p. 774–779.

BOUKAS, E.; LIU, Z. Robust stability and  $H_\infty$  control of discrete-time jump linear systems with time-delay: an LMI approach. In: **Proceedings of the 39th IEEE**

**Conference on Decision and Control**. Sydney, Australia: IEEE, 2000. v. 2, p. 1527–1532.

\_\_\_\_\_. Guaranteed cost control for discrete-time Markovian jump linear system with mode-dependent time-delays. In: **Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002**. Las Vegas, USA: IEEE, 2002. v. 4, p. 3794–3798.

BUENO, J. N. A. D.; MARCOS, L. B.; ROCHA, K. D. T.; TERRA, M. H. Regulation of Markov jump linear systems subject to polytopic uncertainties. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 67, n. 11, p. 6279–6286, 2022.

\_\_\_\_\_. Robust regulation of Markov jump linear systems with uncertain polytopic transition probabilities. In: **2022 European Control Conference (ECC)**. London, United Kingdom: IEEE, 2022. p. 1373–1378.

BUENO, J. N. A. D.; ROCHA, K. D. T.; MARCOS, L. B.; TERRA, M. H. Mode-independent regulator for polytopic Markov jump linear systems. In: **2022 30th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)**. Vouliagmeni, Greece: IEEE, 2022. p. 277–282.

BUENO, J. N. A. D.; ROCHA, K. D. T.; TERRA, M. H. Robust recursive regulator for systems subject to polytopic uncertainties. **IEEE Access**, v. 9, p. 139352–139360, 2021.

CAO, Y.-Y.; LAM, J. Stochastic stabilizability and  $H_\infty$  control for discrete-time jump linear systems with time delay. **Journal of the Franklin Institute**, v. 336, n. 8, p. 1263–1281, 1999.

CERRI, J. P.; TERRA, M. H. Recursive robust regulator for discrete-time Markovian jump linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 62, n. 11, p. 6004 – 6011, 2017.

CERRI, J. P.; TERRA, M. H.; ISHIHARA, J. Y. Recursive robust regulator for discrete-time Markovian jump linear systems via penalty game approach. In: **49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)**. Atlanta, USA: IEEE, 2010. p. 597–602.

CHAE, S.; RASOOL, F.; NGUANG, S.; SWAIN, A. K. Robust mode delay-dependent  $H_\infty$  control of discrete-time systems with random communication delays. **IET Control Theory and Applications**, v. 4, p. 936 – 944, 06 2010.

CHEN, W.-H.; GUAN, Z.-H.; YU, P. Delay-dependent stability and  $H_\infty$  control of uncertain discrete-time Markovian jump systems with mode-dependent time delays. **Systems & Control Letters**, v. 52, n. 5, p. 361–376, 2004.

CHEN, W.-H.; ZHENG, W. X. Robust stabilization of delayed Markovian jump systems subject to parametric uncertainties. In: **2007 46th IEEE Conference on Decision and Control**. New Orleans, USA: IEEE, 2007. p. 3054–3059.

CHITRAGANTI, S.; ABERKANE, S.; AUBRUN, C. Mean square stability of non-homogeneous Markov jump linear systems using interval analysis. In: **2013 European Control Conference (ECC)**. Zurich, Switzerland: IEEE, 2013. p. 3724–3729.

- \_\_\_\_\_. Stochastic stabilization of a discrete-time inhomogeneous Markov jump linear system with interval transition probability matrix. In: **2016 3rd Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol)**. Barcelona, Spain: IEEE, 2016. p. 838–842.
- CHIZECK, H. J.; WILLSKY, A. S.; CASTANON, D. Discrete-time Markovian-jump linear quadratic optimal control. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 43, n. 1, p. 213–231, 1986.
- COSTA, O.; FRAGOSO, M.; MARQUES, R. **Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems**. New York: Springer-Verlag, 2005.
- COSTA, O. L. V.; VAL, J. B. R. D.; GEROMEL, J. C. A convex programming approach to  $H_2$  control of discrete-time Markovian jump linear systems. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 66, n. 4, p. 557–580, 1997.
- DZUNG, N. T.; HIEN, L. V. Stochastic stabilization of discrete-time Markov jump systems with generalized delay and deficient transition rates. **Circuits, Systems, and Signal Processing**, v. 36, n. 6, p. 2521–2541, 2017.
- FRIDMAN, E. **Introduction to Time-Delay Systems: analysis and control**. 1. ed. Switzerland: Birkhäuser Basel, 2014. (Systems & Control: Foundations & Applications).
- GONÇALVES, A. P. C.; FIORAVANTI, A. R.; GEROMEL, J. C. Filtering of discrete-time Markov jump linear systems with uncertain transition probabilities. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 21, n. 6, p. 613–624, 2011.
- HAN, C.; ZHANG, H. Linear optimal filtering for discrete-time systems with random jump delays. **Signal Processing**, v. 89, n. 6, p. 1121–1128, 2009.
- HETEL, L.; DAAFOUZ, J.; IUNG, C. Equivalence between the Lyapunov Krasovskii functionals approach for discrete delay systems and that of the stability conditions for switched systems. **Nonlinear Analysis Hybrid Systems**, v. 2, n. 3, p. 697 – 705, 2008.
- HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. **Matrix Analysis**. 2. ed. Cambridge University Press: Cambridge, 2013.
- IGNACIUK, P. Approximate solution of linear-quadratic problem in discrete-time multi-delay systems: Derivation and quality assessment. **IFAC-PapersOnLine**, v. 48, n. 25, p. 97 – 102, 2015. 16th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO).
- KAILATH, T.; SAYED, A. H.; HASSIBI, B. Deterministic least-squares problems. In: \_\_\_\_\_. **Linear Estimation**. New Jersey: Prentice-Hall, 2000. cap. 2.
- KALMAN, R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. **Journal of Basic Engineering**, v. 82, n. 1, p. 35–45, 03 1960.
- KANG, Y.; LI, Z.; CAO, X.; ZHAI, D. Robust control of motion/force for robotic manipulators with random time delays. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 21, n. 5, p. 1708–1718, 2013.

- KAPILA, V.; HADDAD, W. M. Memoryless  $H_\infty$  controllers for discrete-time systems with time delay. **Automatica**, v. 34, n. 9, p. 1141–1144, 1998.
- KEQI, W.; ZHI, Y. Guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems with state and input delays. In: **IEEE Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference (IAEAC)**. Chongqing, China: IEEE, 2015. p. 216–220.
- LEITE, V. J. S.; TARBOURIECH, S.; PERES, P. L. D. A convex approach for robust state feedback control of discrete-time systems with state delay. In: **Proceedings of the American Control Conference**. Boston: IEEE, 2004. v. 3, p. 2870–2875.
- LI, M.; HU, Z.; XIE, F.; FAN, D. Stability of dynamic quantized UAV airborne system with packet losses and time-varying delay. In: **15th International Symposium on Parallel and Distributed Computing (ISPDC)**. China: IEEE, 2016. p. 406–411.
- LI, Y.; YU, Z.; LIU, Y.; REN, J. Stochastic stabilization for discrete-time Markovian jump systems with time-varying delay and two Markov chains under partly known transition probabilities. **IEEE Access**, v. 9, p. 26937–26947, 2021.
- LI, Z.; SUN, G.; GAO, H. Guaranteed cost control for discrete-time Markovian jump linear system with time delay. **International Journal of Systems Science**, Taylor & Francis, n. 7, p. 1312–1324, 2013.
- LIU, L.-J.; ZHANG, X.; ZHAO, X.; YANG, B. Stochastic finite-time stabilization for discrete-time positive Markov jump time-delay systems. **Journal of the Franklin Institute**, v. 359, n. 1, p. 84–103, 2022.
- LIU, X.; LI, W.; YAO, C.; LI, Y. Finite-time guaranteed cost control for Markovian jump systems with time-varying delays. **Mathematics**, v. 10, n. 12, 2022.
- LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: **Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design CACSD, 2004, Taipei, Taiwan**. Piscataway: IEEE, 2004. p. 284–289.
- LUAN, X.; SHI, P.; LIU, F. Stabilization of networked control systems with random delays. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 58, n. 9, p. 4323–4330, 2011.
- LUAN, X.; ZHAO, C.; LIU, F. Finite-time  $H_\infty$  control with average dwell-time constraint for time-delay Markov jump systems governed by deterministic switches. **IET Control Theory & Applications**, v. 8, n. 11, p. 968–977, 2014.
- LUENBERGER, D. G.; YE, Y. **Linear and Nonlinear Programming**. 3. ed. New York: Springer, 2008. Chap. 13.
- LUN, Y. Z.; D’INNOCENZO, A.; BENEDETTO, M. D. D. On stability of time-inhomogeneous Markov jump linear systems. In: **2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)**. Las Vegas, USA: IEEE, 2016. p. 5527–5532.

- LUO, Y.; ZHOU, M.; ZHANG, X.; QI, X.; WEN, X.; CHEN, R. Robust guaranteed cost control for Markovian jump systems with time delay. In: **The 2010 IEEE International Conference on Information and Automation**. Harbin, China: IEEE, 2010. p. 323–328.
- MARCOS, L. B.; TERRA, M. H. Markovian filtering for driveshaft torsion estimation in heavy vehicles. **Control Engineering Practice**, v. 102, p. 104552, 2020.
- MIRANDA, M. F.; LEITE, V. J. S.; CALDEIRA, A. F. Robust stabilization of polytopic discrete-time systems with time-varying delay in the states. In: **49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)**. Atlanta, GA, USA: IEEE, 2010. p. 152–157.
- NAKAI, M. E.; INOUE, R. S.; TERRA, M. H.; GRASSI, V. Robust discrete-time Markovian control for wheeled mobile robot formation: A fault tolerant approach. **Journal of Intelligent & Robotic Systems**, v. 91, n. 2, p. 233–247, Aug 2018.
- NICULESCU, S. **Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach**. London: Springer-Verlag, 2001. v. 269. (Lecture Notes in Control and Information Sciences, v. 269).
- NIKOUKHAH, R.; WILLSKY, A. S.; LEVY, B. C. Kalman filtering and Riccati equations for descriptor systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 37, n. 9, p. 1325–1342, 1992.
- QIU, L.; SHI, Y.; XU, B.; YAO, F. Robust stochastic stability and delayed-state-feedback stabilisation of uncertain Markovian jump linear systems with random time delays. **IET Control Theory & Applications**, v. 9, n. 12, p. 1878–1886, 2015.
- ROCHA, K. D.; TERRA, M. H. Robust Kalman filter for systems subject to parametric uncertainties. **Systems & Control Letters**, v. 157, p. 105034, 2021.
- SAHEBSARA, M.; CHEN, T.; SHAH, S. L. Optimal filtering with random sensor delay, multiple packet dropout and uncertain observations. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 80, n. 2, p. 292–301, 2007.
- SAYED, A. H. A framework for state-space estimation with uncertain models. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 46, n. 7, p. 998–1013, Jul. 2001.
- SAYED, A. H.; CHEN, H. A uniqueness result concerning a robust regularized least-squares solution. **Systems & Control Letters**, v. 46, n. 5, p. 361–369, 2002.
- SAYED, A. H.; NASCIMENTO, V. H. Design criteria for uncertain models with structured and unstructured uncertainties. In: \_\_\_\_\_. **Robustness in identification and control**. London: Springer London, 1999. p. 159–173.
- SHI, P.; BOUKAS, E. K.; SHI, Y.; AGARWAL, R. K. Optimal guaranteed cost control of uncertain discrete time-delay systems. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Elsevier, v. 157, n. 2, p. 435–451, 2003.
- SIQUEIRA, A. A. G.; TERRA, M. H.; BERGERMAN, M. Markov jump linear systems-based control. In: \_\_\_\_\_. **Robust Control of Robots: Fault Tolerant Approaches**. London: Springer London, 2011. p. 101–149.

- SONG, S.; KIM, J.  $H_\infty$  control of discrete-time linear systems with norm-bounded uncertainties and time delay in state. **Automatica**, v. 34, n. 1, p. 137–139, 1998.
- SOUZA, C. de; LEITE, V. J. S.; SILVA, L. F. P.; CASTELAN, E. B. ISS robust stabilization of state-delayed discrete-time systems with bounded delay variation and saturating actuators. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 64, n. 9, p. 3913–3919, 2019.
- SUN, H.-J.; ZHANG, Y.; WU, A.-G.  $H_\infty$  control for discrete-time Markovian jump linear systems with partially uncertain transition probabilities. **Optimal Control Applications and Methods**, v. 41, n. 5, p. 1796–1809, 2020.
- SUN, Y. G.; WANG, L.; XIE, G. Delay-dependent robust stability and stabilization for discrete-time switched systems with mode-dependent time-varying delays. **Applied Mathematics and Computation**, v. 180, n. 2, p. 428–435, 2006.
- UCHIDA, K.; SHIMEMURA, E.; KUBO, T.; ABE, N. The linear-quadratic optimal control approach to feedback control design for systems with delay. **Automatica**, v. 24, n. 6, p. 773–780, 1988.
- WAN, X.; XU, L.; FANG, H.; LING, G. Robust non-fragile  $H_\infty$  state estimation for discrete-time genetic regulatory networks with Markov jump delays and uncertain transition probabilities. **Neurocomputing**, v. 154, p. 162–173, 04 2015.
- WANG, Z.; YANG, F.; HO, D. W.; LIU, X. Robust  $H_\infty$  filtering for stochastic time-delay systems with missing measurements. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 54, n. 7, p. 2579–2587, 2006.
- XIAO, L.; HASSIBI, A.; HOW, J. Control with random communication delays via a discrete-time jump system approach. In: **Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC**. Chicago, IL, USA: IEEE, 2000. v. 3, p. 2199–2204.
- XIE, X.; GUO, Y.; ZHU, F. New results on stability and stabilization of Markovian jump systems with partly known transition probabilities. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi Publishing Corporation, v. 2012, 2012.
- YANG, R.; LU, L.; XIE, L. Robust  $H_2$  and  $H_\infty$  control of discrete-time systems with polytopic uncertainties via dynamic output feedback. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 78, n. 16, p. 1285–1294, 2005.
- YANG, T.; ZHANG, L.; LI, Y.; LENG, Y. Stabilization of Markov jump linear systems subject to both state and mode detection delays. **IET Control Theory & Applications**, v. 8, n. 4, p. 260–266, 2014.
- ZHANG, L.; BOUKAS, E.-K. Stability and stabilization of Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities. **Automatica**, v. 45, n. 2, p. 463–468, 2009.
- ZHANG, L.; BOUKAS, E.-K.; LAM, J. Analysis and synthesis of Markov jump linear systems with time-varying delays and partially known transition probabilities. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 53, n. 10, p. 2458–2464, 2008.



---

ZHANG, L.; GAO, H.; KAYNAK, O. Network induced constraints in networked control systems a survey. **IEEE Transactions on Industrial Informatics**, v. 9, n. 1, p. 403–416, 2013.

ZHANG, L.; SHI, Y.; CHEN, T.; HUANG, B. A new method for stabilization of networked control systems with random delays. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 50, n. 8, p. 1177–1181, 2005.



## Álgebra Matricial

Neste apêndice são apresentados conceitos e propriedades da álgebra matricial, os quais foram utilizados no desenvolvimento deste trabalho. As demonstrações destas expressões podem ser encontradas nas referências apresentadas.

### A.1 Matrizes Semidefinidas e Definidas Positivas

**Definição A.1.** (HORN; JOHNSON, 2013) Uma matriz simétrica  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é dita definida positiva (negativa), denotada como  $A \succ 0$  ( $A \prec 0$ ), se  $x^T A x > 0$  ( $x^T A x < 0$ ),  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , e  $x^T A x = 0$  se  $x = 0$ .

**Definição A.2.** (HORN; JOHNSON, 2013) Uma matriz simétrica  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é dita semidefinida positiva (negativa), denotada como  $A \succeq 0$  ( $A \preceq 0$ ), se  $x^T A x \geq 0$  ( $x^T A x \leq 0$ ),  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

**Lema A.1.** (ABADIR; MAGNUS, 2005) Seja a matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Então,  $AA^T$  e  $A^T A$  são semidefinidas positivas.

**Lema A.2.** (ABADIR; MAGNUS, 2005) Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz definida positiva e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Então,  $B^T A B$  é semidefinida positiva.

**Lema A.3.** (ABADIR; MAGNUS, 2005) Sejam as matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica e  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  não-singular. Então,

*i.*  $B^T A B \succ 0$  se e somente se  $A \succ 0$ .

*ii.*  $B^T A B \succeq 0$  se e somente se  $A \succeq 0$ .

**Lema A.4.** (ABADIR; MAGNUS, 2005) Sejam as matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica e semidefinida positiva e  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Então,

*i.*  $A + B \succ 0$  somente se  $B \succ 0$ .

**ii.**  $A + B \succeq 0$  somente se  $B \succeq 0$ .

**Lema A.5.** (LUENBERGER; YE, 2008) Sejam  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz definida positiva e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  uma matriz posto linha pleno. Então, a matriz

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \succ 0.$$

## A.2 Lemas de Inversão de Matrizes

**Lema A.6.** (NIKOUKHAH et al., 1992) Sejam  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz simétrica e semi-definida positiva e  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz posto coluna pleno. Então, se  $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$  tem posto linha pleno, a matriz

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$$

é invertível.

**Lema A.7.** (HORN; JOHNSON, 2013, **Fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury**) Sejam  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Suponha que  $A$ ,  $C$ ,  $(A + BCD)$  e  $(C^{-1} + DA^{-1}B)$  sejam não-singulares. Então,

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}.$$

**Lema A.8.** Como uma consequência do Lema A.7, se  $A$ ,  $C$ ,  $A + BC^{-1}D$  e  $(C + DA^{-1}B)$  forem invertíveis, então,

$$(A + BC^{-1}D)^{-1}BC^{-1} = A^{-1}B(C + DA^{-1}B)^{-1}.$$

## A.3 Complemento de Schur e Matrizes Particionadas

**Definição A.3.** (HORN; JOHNSON, 2013, **Complemento de Schur**) Sejam  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz não-singular,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $M \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  a matriz particionada definida por

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Se  $A$  é não-singular, então o complemento de Schur de  $A$  em  $M$  é definido por

$$(M/A) = D - CA^{-1}B.$$

Da mesma forma, se  $D$  é não-singular, então o complemento de Schur de  $D$  em  $M$  é definido por

$$(M/D) = A - BD^{-1}C.$$

**Lema A.9.** *Sejam  $D$  e  $E$  matrizes invertíveis. Considere a matriz simétrica*

$$M = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B^T & D & 0 \\ C^T & 0 & E \end{bmatrix}.$$

*Então, o complemento de Schur de  $S = \mathbf{diag}(D, E)$  em  $M$  é não-singular,  $M$  é não-singular e*

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} (M/S)^{-1} & -(M/S)^{-1}BD^{-1} & -(M/S)^{-1}CE^{-1} \\ -D^{-1}B^T(M/S)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}B^T(M/S)^{-1}BD^{-1} & D^{-1}B^T(M/S)^{-1}CE^{-1} \\ -E^{-1}C^T(M/S)^{-1} & E^{-1}C(M/S)^{-1}BD^{-1} & E^{-1} + E^{-1}C^T(M/S)^{-1}CE^{-1} \end{bmatrix}.$$

**Lema A.10.** (HORN; JOHNSON, 2013, **Fórmula da Inversão de Banachiewicz**) *ejam  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz não-singular,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $M \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  a matriz particionada definida por*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

*i. Suponha que  $A$  e  $M$  sejam não-singulares, tal que  $(M/A)$  também é não-singular.*

*Então,*

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{bmatrix}.$$

*ii. Suponha que  $D$  e  $M$  sejam não-singulares, tal que  $(M/D)$  também é não-singular.*

*Então,*

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} (M/D)^{-1} & -(M/D)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(M/D)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}.$$

**Lema A.11.** (HORN; JOHNSON, 2013) *Sejam  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz não-singular,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $M \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  a matriz particionada dada por*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

*Então:*

*i.  $M \succ 0$  se e somente se  $D \succ 0$  e  $(M/D) \succ 0$ .*

*ii.  $M \succeq 0$  se e somente se  $D \succ 0$  e  $(M/D) \succeq 0$ .*

## A.4 Produto de Kronecker

**Definição A.4.** (HORN; JOHNSON, 2013) *Sejam  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ . O produto de Kronecker de  $A$  por  $B$  é a matriz de dimensão  $mp \times nq$  definida por*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm}B \end{bmatrix}.$$



## Análise do parâmetro $\hat{\lambda}$ para o RRR com MTI Limitada em Norma

A seguir será demonstrado que o parâmetro escalar  $\hat{\lambda}$  considerado no projeto do RR-RMTI (Capítulo 6), independe da matriz  $\Phi(\mathcal{P}, \hat{\lambda}) = \mathcal{P}_{k+1}^{-1} - \hat{\lambda}^{-1} M_{\mathbf{p}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}} M_{\mathbf{p}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}}^T$ , uma vez que  $\hat{\lambda}$  é obtido como a solução de um problema de minimização, cuja a função objetivo  $\Gamma(\lambda)$  não depende de  $\Phi(\mathcal{P}, \hat{\lambda})$ .

Considerando as identificações em (6.20)-(6.19) quando o SLSM com MTI limitada em norma não está sujeito a incertezas paramétricas, ou seja,  $\delta F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $\delta G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $M_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$ ,  $N_{F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}$  e  $N_{G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}}$  são matrizes nulas, segue que

$$x := \begin{bmatrix} z_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q} := \begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W} := \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 \\ 0 & 0 & \mu I_{n_d} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I_{n_d} & -G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad \delta \mathcal{A} := \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p}_{\bar{\theta}_k, \theta_k} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 0 \\ -I_{n_d} \\ F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} z_k, \quad \delta b := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z_k, \quad \mathcal{H} := \begin{bmatrix} M_{\mathbf{p}_{\bar{\theta}_k, \theta_k}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta := \Delta_{\mathbf{p}_{\theta_k}}, \quad E_{\mathcal{A}} := \begin{bmatrix} N_{\mathbf{p}_{\theta_k}} & 0 \end{bmatrix} \text{ e } E_b := 0.$$

De acordo com o Lema 2.7, o parâmetro  $\hat{\lambda}$  é obtido como a solução do seguinte problema de minimização

$$\hat{\lambda} \in \arg \min_{\lambda \geq \|\mathcal{H}^T \mathcal{W} \mathcal{H}\|} \Gamma(\lambda),$$

onde a função objetivo  $\Gamma(\lambda)$  é dada por

$$\Gamma(\lambda) := \|x(\lambda)\|_{\mathcal{Q}}^2 + \lambda \|E_{\mathcal{A}} x(\lambda) - E_b\|^2 + \|\mathcal{A} x(\lambda) - b\|_{\mathcal{W}(\lambda)}^2,$$

com

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(\lambda) &:= \mathcal{Q} + \lambda E_A^T E_A, \\ \mathcal{W}(\lambda) &:= \mathcal{W} + \mathcal{W}\mathcal{H}(\lambda I - \mathcal{H}^T \mathcal{W}\mathcal{H})^\dagger \mathcal{H}^T \mathcal{W}, \\ x(\lambda) &:= \left( \mathcal{Q}(\lambda) + \mathcal{A}^T \mathcal{W}(\lambda) \mathcal{A} \right)^{-1} \left( \mathcal{A}^T \mathcal{W}(\lambda) b + \lambda E_A^T E_b \right).\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{Q}(\lambda) = \begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} + \lambda N_{\mathbf{p}_{\theta_k}}^T N_{\mathbf{p}_{\theta_k}} & 0 \\ 0 & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W}(\lambda) = \begin{bmatrix} \Phi(\mathcal{P}, \hat{\lambda})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} & 0 \\ 0 & 0 & \mu I_{n_d} \end{bmatrix}$$

$$\text{e } x(\lambda) = \begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} + \lambda N_{\mathbf{p}_{\theta_k}}^T N_{\mathbf{p}_{\theta_k}} + \mu I_{n_d} & -\mu G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ -\mu G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \mu G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mu F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ -\mu G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}.$$

A matriz

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} + \lambda N_{\mathbf{p}_{\theta_k}}^T N_{\mathbf{p}_{\theta_k}} + \mu I_{n_d} & -\mu G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ -\mu G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T & R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \mu G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}.$$

é não-singular. Observe que o bloco matricial  $\mathcal{T}_{22} = R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \mu G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}$  é não-singular. De fato, como  $\mu > 0$ ,  $R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succ 0$  e pelo Lema A.1, tem-se que  $G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \succeq 0$ . Logo, pela propriedade de positividade (Lema A.4), segue que  $\mathcal{T}_{22} \succ 0$  e, portanto, não-singular.

O complemento de Schur de  $\mathcal{T}_{22}$  em  $\mathcal{T}$  é não-singular. De fato,

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}/\mathcal{T}_{22}) &= \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} + \lambda N_{\mathbf{p}_{\theta_k}}^T N_{\mathbf{p}_{\theta_k}} + \mu I_{n_d} - \mu G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} (R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} + \mu G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}) \mu G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \\ &\stackrel{(Lema A.7)}{=} \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} + \lambda N_{\mathbf{p}_{\theta_k}}^T N_{\mathbf{p}_{\theta_k}} + \left( \mu^{-1} I_{n_d} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1}.\end{aligned}$$

Pelo Lema A.2, tem-se que o bloco matricial  $G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \succ 0$  e, pela propriedade de positividade (Lema A.4), segue que  $\mu^{-1} I_{n_d} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \succ 0$ .

Além disso, como  $\lambda > 0$ ,  $\Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} \succ 0$  e  $N_{\mathbf{p}_{\theta_k}} = \sqrt{\epsilon_i} I_{n_d}$ , segue da propriedade de positividade (Lema A.4) que  $(\mathcal{T}/\mathcal{T}_{22}) \succ 0$ . Assim, pela propriedade de Schur (Lema A.11), tem-se que  $\mathcal{T} \succ 0$  e, portanto, não-singular.

Logo, como  $\mathcal{T}$  é não-singular, podemos obter  $\mathcal{T}^{-1}$  a partir da *Fórmula da Inversão de Banachiewicz* (Lema A.10). Desta forma,

$$\mathcal{T}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathcal{T}/\mathcal{T}_{22})^{-1} & \mu (\mathcal{T}/\mathcal{T}_{22})^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \mathcal{T}_{22}^{-1} \\ -\mathcal{T}_{22}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T (\mathcal{T}/\mathcal{T}_{22})^{-1} & \mu \mathcal{T}_{22}^{-1} + \mu^2 \mathcal{T}_{22}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T (\mathcal{T}/\mathcal{T}_{22})^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \mathcal{T}_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}x(\lambda) &:= \begin{bmatrix} x_1(\lambda) \\ x_2(\lambda) \end{bmatrix} = \mathcal{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mu F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ -\mu G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\mathcal{T}/\mathcal{T}_{22})^{-1} \left( \mu^{-1} I_{n_d} + G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right)^{-1} F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \\ \mu \mathcal{T}_{22}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \left[ (\mathcal{T}/\mathcal{T}_{22})^{-1} \left( \mu I - \mu^2 G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \mathcal{T}_{22}^{-1} G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}^T \right) - I \right] F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$



Por fim, tem-se que

$$\Gamma(\lambda) = x_1(\lambda)^T \left( \Psi_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k+1} + 2\lambda N_{\mathbf{p}_{\theta_k}}^T N_{\mathbf{p}_{\theta_k}} \right) x_1(\lambda) + x_2(\lambda)^T R_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} x_2(\lambda) + \left( x_1(\lambda) - G_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} x_2(\lambda) - F_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k} \right)^T \mu(\bullet) + Q_{\bar{\theta}_k, \theta_k, k}.$$

Portanto, o parâmetro escalar não-negativo  $\hat{\lambda}$  não depende da matriz  $\Phi(\mathcal{P}, \hat{\lambda})$ .



## Análise do RRR para Sistemas com Atraso Constante no Estado e Incertezas Politópicas

O exemplo apresentado a seguir ilustra a eficiência da abordagem proposta no Capítulo 5 para lidar com o problema de regulação de sistemas lineares sujeitos a atraso constante no estado e incertezas politópicas. Assim, pode-se perceber que a metodologia proposta também se mostra eficaz para regular sistemas com atraso, porém sem saltos Markovianos. Para fins de comparação, utilizam-se outras duas abordagens de controle de sistemas lineares de tempo discreto com atraso invariante no tempo e incertezas politópicas.

Considere o sistema politópico de tempo-discreto com atraso no estado:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A_k + \delta A_k)x_k + (A_{d,k} + \delta A_{d,k})x_{k-d} + (B_k + \delta B_k)u_k, \\ x_k &= \varphi_0(k), \quad k \in [-d, 0], \end{aligned} \tag{C.1}$$

com as incertezas pertencentes ao politopo de 2-vértices (estudado em (LEITE et al., 2004)),

$$\begin{aligned} A_{0,k} &= \begin{bmatrix} 1 & -0,6 \\ 0,4 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad A_{d,0,k} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad B_{0,k} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \\ A_k^{(1)} &= 10^{-3} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{d,k}^{(1)} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_k^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,15 \\ 0,2 & 0,15 \end{bmatrix}, \\ (A_k^{(2)}, A_{d,k}^{(2)}, B_k^{(2)}) &= -(A_k^{(1)}, A_{d,k}^{(1)}, B_k^{(1)}), \quad \forall k \geq 0, \end{aligned}$$

com a condição inicial  $x_0 = [1 \ -0,5]^T$  e  $\varphi_0(k) = x_0$ , para todo  $k \leq 0$ . Assume-se as seguintes matrizes de ponderação,  $P_N = Q_k = R_k = I_{n_d}$  juntamente com os parâmetros  $\mu = 10^{12}$  e  $\beta = 1,5$ .

Para realizar esta comparação, consideramos dois cenários para o atraso no estado:  $d = 1$  e  $d = 10$ . Os resultados obtidos estão ilustrados nas Figuras C.1 e C.2. A simulação consiste em realizar  $T = 1000$  experimentos Monte Carlo. Para cada experimento, os

coeficientes  $\alpha_{\ell,k}$  que pertencem ao simplex unitário  $\Lambda_V$ , são selecionados aleatoriamente para cada instante de tempo  $k$ .

Nas Figuras C.1 e C.2 é possível observar que, para os dois cenários de atraso, o regulador robusto proposto apresentou rápida convergência quando comparado com as abordagens baseadas em LMIs. Além disso, no segundo caso de atraso, os desempenhos de ambos os reguladores são afetados com o aumento do atraso, porém, as abordagens de Leite et al. (2004) e Miranda et al. (2010) apresentam sobressinais mais acentuados em comparação com o regulador proposto.

Figura C.1 – Comparação dos valores médios das normas dos estados regulados quando  $d = 1$ .

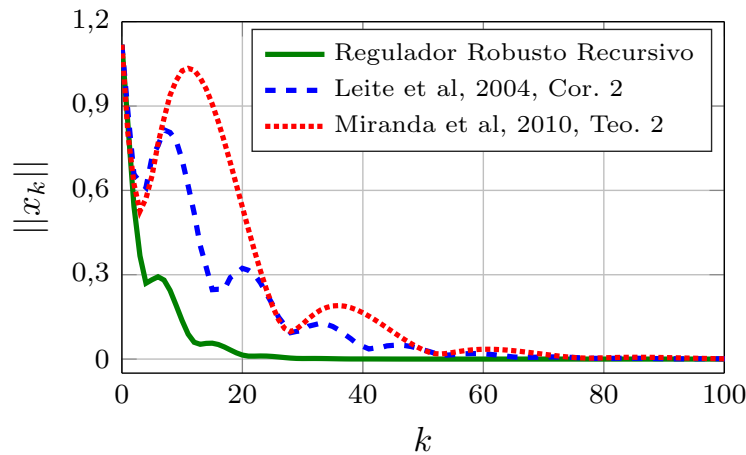
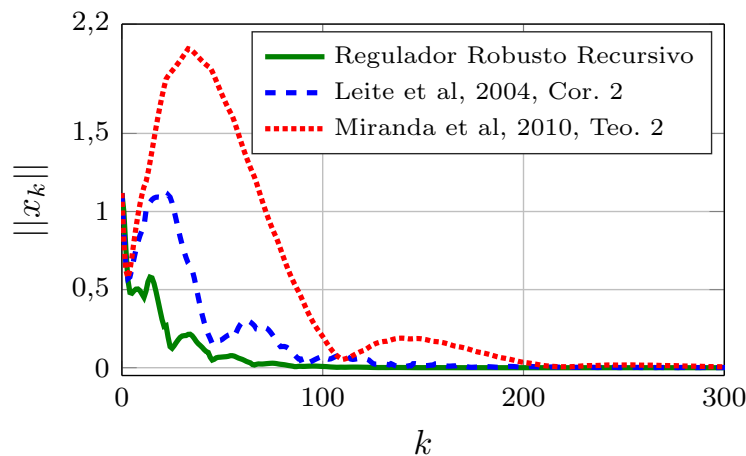


Figura C.2 – Comparação dos valores médios da normas dos estados regulados quando  $d = 10$ .



Os ganhos de realimentação  $K_{RRR}^*$ ,  $K_L^*$  e  $K_M^*$ , considerando  $d = 1$ , obtidos pelo regulador robusto recursivo e as abordagens baseadas em LMI [Leite et al. (2004, Cor. 2)]

e Miranda et al. (2010, Teo. 2)], respectivamente, são dadas por:

$$K_{RRR}^* = \begin{bmatrix} 3,9707 & 0,1695 & 1,8311 & 0,9379 \\ -5,3076 & -0,2460 & -2,4547 & -1,2572 \end{bmatrix},$$
$$K_L^* = \begin{bmatrix} 4,6907 & -0,4151 \\ -6,2837 & 0,6122 \end{bmatrix} \text{ e } K_M^* = \begin{bmatrix} 4,8870 & -1,3413 \\ -6,5019 & 1,7582 \end{bmatrix}.$$



## Equação de Riccati

As condições de estabilidade e convergência do regulador linear quadrático clássico para SLSMs nominais com matriz de transição conhecida são garantidas pelos resultados apresentados a seguir.

**Definição D.1.** *O sistema linear sujeito a saltos Markovianos nominal com  $u \equiv 0$  é estável na média quadrática (MS-estável, do inglês, Mean Square Stable) se para quaisquer condições iniciais  $x_0$  e  $\theta_0$  existir  $\bar{x}$  e  $\bar{X}$ , independente de  $x_0$  e  $\theta_0$ , tais que:*

$$\|\mathbb{E}\{x_k\} - \bar{x}\| \rightarrow 0 \quad e \quad \|\mathbb{E}\{x_k x_k^T\} - \bar{X}\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

**Definição D.2.** *Sejam  $F = (F_1, \dots, F_s)$  e  $G = (G_1, \dots, G_s)$ . Então, o par  $(F, G)$  é estabilizável na média quadrática (MS-estabilizável, do inglês, Mean Square Stabilizable) se existir um conjunto de matrizes  $K = (K_1, \dots, K_s)$  tal que  $L = F + GK$  é estável na média quadrática, ou seja,  $K$  estabiliza o par  $(F, G)$ .*

**Definição D.3.** *Suponha que  $Q_{\theta_k}$  possa ser escrita como  $C_{\theta_k}^T C_{\theta_k}$  e seja  $C = (C_1, \dots, C_s)$ . O par  $(C, F)$  é detectável na média quadrática (MS-detectável, do inglês, Mean Square Detectable) se existir um conjunto de matrizes  $M = (M_1, \dots, M_s)$  tal que o raio espectral da matriz*

$$\mathcal{A}_M = (\mathbb{P}^T \otimes I_{n^2}) \mathbf{diag}(\Gamma_i \otimes \Gamma_i), \quad \text{com } \Gamma_i = F_i + M_i C_i,$$

é menor que 1.

**Definição D.4.** *Diz-se que  $P = (P_1, \dots, P_s)$  é uma solução estabilizante na média quadrática para as equações algébricas de Riccati acopladas (D.1) se ela satisfaz, para cada  $i \in \mathcal{S}$ ,*

$$P_i = F_i^T \Psi_i F_i - F_i^T \Psi_i G_i (R_i + G_i^T \Psi_i G_i)^{-1} G_i^T \Psi_i F_i + Q_i, \quad (\text{D.1})$$

e o raio espectral da matriz

$$\mathcal{A}_K = (\mathbb{P}^T \otimes I_{n^2}) \mathbf{diag}(L_i \otimes L_i),$$

com  $L_i = F_i + G_i K_i$  e  $K_i = -(R_i + G_i^T \Psi_i G_i)^{-1} G_i^T \Psi_i F_i$ ,

é menor que 1.

**Corolário D.1.** (COSTA et al., 2005) Se  $(F, G)$  é um par estabilizável e  $(C, F)$  é um par detectável então a solução estabilizante para (D.1) existe.