

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

CÉSAR AUGUSTO GALVÃO DE MORAIS

**SISTEMAS REDUNDANTES DE MEDIÇÃO PARA SEPARAÇÃO DE ERROS
EM MÁQUINAS DE MEDIR POR COORDENADAS**

São Carlos

2015

CÉSAR AUGUSTO GALVÃO DE MORAIS

**SISTEMAS REDUNDANTES DE MEDIÇÃO PARA SEPARAÇÃO DE ERROS
EM MÁQUINAS DE MEDIR POR COORDENADAS**

Tese apresentada ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade de São Paulo, como requisito para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Projeto Mecânico
Orientador: Prof. Titular Benedito Di Giacomo

ESTE EXEMPLAR TRATA-SE DA VERSÃO CORRIGIDA. A VERSÃO ORIGINAL ENCONTRA-SE DISPONÍVEL JUNTO AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA EESC – USP.

São Carlos

2015

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTA TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

MM827m
s
Morais, César Augusto Galvão de
SISTEMAS REDUNDANTES DE MEDIÇÃO PARA SEPARAÇÃO DE
ERROS EM MÁQUINAS DE MEDIR POR COORDENADAS / César
Augusto Galvão de Moraes; orientador Benedito Di
Giacomo. São Carlos, 2015.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica e Área de Concentração em Projeto
Mecânico -- Escola de Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo, 2015.

1. Máquinas de Medir por Coordenadas. 2. Separação
de Erros. 3. Redundância de Dados. 4. Simulação . 5.
Medição de Distâncias. I. Título.

FOIHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **CÉSAR AUGUSTO GALVÃO DE MORAIS**.

Título da tese: "Sistemas redundantes de medição para separação de erros em máquinas de medir por coordenadas".

Data da defesa: 23/11/2015

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Titular **Benedito Di Giacomo**
(Orientador)
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Antonio Piratelli Filho**
(Universidade de Brasília/UnB)

Aprovado
Antônio

Prof. Dr. **Fabricio Tadeu Pazlani**
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADO

Prof. Dr. **Vagner Augusto de Souza**
(Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo/IFSP - Matão)

Aprovado
Vagner

Dr. **Alvaro José Abackerli**
(Empresa Brasileira de Pesquisa e Inovação Industrial/EMBRAPII - Brasília)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica:
Prof. Associado **Gherhardt Ribatski**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Associado **Paulo César Lima Segantine**

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Luiz e Suely
Aos meus irmãos Luiz Eduardo e Luciane
À Marília

Dedico.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Benedito Di Giacomo, pela orientação, pelos conhecimentos transmitidos que em muitas vezes foram além da elaboração deste trabalho e pela amizade.

Ao Engenheiro Luiz Carlos Neves, pela amizade, apoio, auxílio, pelas ricas discussões durante a realização deste trabalho e pela pronta disposição em resolver problemas.

Ao Professor Vagner Augusto de Souza, pela amizade, discussões, apoio e pelos bons momentos de convivência durante a realização deste trabalho.

Ao Engenheiro Ângelo Reami Filho pela amizade, apoio e discussões que possibilitaram enriquecer este trabalho.

Ao Engenheiro Cláudio sempre pronto e presente durante as etapas experimentais.

Ao Fernando Missina, pela convivência durante este período.

Aos técnicos José Carlos Botelho, Mauro Olivatto e José Carlos Risardi pelo companheirismo, pelos bons momentos de convivência e disposição em ajudar.

À Cidade de São Carlos pelo acolhimento que tive.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio Financeiro.

Aos meus pais Luiz e Suely, e aos meus irmãos Luciane e Luiz Eduardo companheiros em todos os momentos. Aos meus familiares em geral. Obrigado pelo apoio incondicional, incentivo, compreensão e amor de vocês.

À Marília, pelo carinho, apoio, companheirismo, pela alegria e força, todo o meu agradecimento ainda é pouco.

À Deus, por tudo.

À todos, muito obrigado.

RESUMO

MORAIS, C. A. G. **Sistemas redundantes de medição para separação de erros em máquinas de medir por coordenadas.** 194p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

Inspeções de conformidade têm um papel importante na cadeia produtiva das indústrias de fabricação, sobretudo as inspeções relacionadas a dimensões e geometrias de produtos manufaturados. A melhoria contínua no ambiente industrial está relacionada à redução de custos e aumento da qualidade de fabricação, e estes estão relacionados ao grau de desenvolvimento tecnológico empregado em sistemas de inspeções. As inspeções dimensionais e geométricas utilizando MMC (Máquinas de Medir por Coordenadas) são realizadas de forma rápida e com qualidade; porém, como em toda máquina há a presença de erros, os quais devem ser conhecidos, minimizados, e se possível removidos. Os erros em máquinas de medir por coordenadas podem ser conhecidos através de calibração, que geralmente são extensivas e de alto custo, ou também por aplicação de técnicas de separação de erros, porém, estas técnicas são realizadas com a necessidade da utilização de artefatos específicos para desacoplamento de erros. Neste contexto, este trabalho tem como objetivo aplicar métodos que permitam melhorar a confiabilidade dos resultados de medições com uma MMC, especificamente nas medições de distâncias, aplicando técnicas de separação, redundância e superposição de erros, de modo a desacoplar os erros envolvidos nos procedimentos de medição, sem a necessidade de utilizar artefatos próprios para separação, mas apenas a peça inspecionada. O trabalho foi elaborado sob a hipótese de que os resultados de distâncias medidos em uma MMC dependem da região de medição. Esta hipótese foi testada e avaliada por meio de ANOVA (Análise de Variância) e a partir disto a proposta de trabalho foi desenvolvida. Inicialmente, foi realizada a calibração das escalas dos eixos "x" e "y" da máquina, por meio de interferometria laser, pois são os eixos correspondentes ao plano de medição. Os sistemas redundantes de medição foram elaborados com as modelagens matemáticas das leituras dos pontos coletados em procedimentos de medição de distâncias, utilizando a sobreposição de leituras dos pontos. Os modelos matemáticos foram solucionados e permitiram encontrar o valor convencional da distância entre paredes em procedimentos de medição. Os métodos para obtenção dos valores convencionais de distâncias foram chamados SRM (Sistemas Redundantes de Medição). Estes métodos foram realizados de duas maneiras, o SRM_1, que considera no modelo matemático quatro regiões de medição, e o SRM_2, que considera no modelo matemático apenas um par de regiões de medição. A validação dos sistemas redundantes de medição foi realizada pela estabilidade dos resultados entre os procedimentos e pela comparação dos resultados de distâncias medidos pela SIP. O SRM_1 permitiu encontrar um valor de distância próximo a distância medida com a SIP, sendo a diferença de apenas 4 μ m. Já a aplicação do SRM_2 permitiu encontrar resultados de distâncias com apenas 1 μ m de diferença dos resultados obtidos com SIP. Devido à estabilidade entre os procedimentos de medição e proximidade dos resultados obtidos com os SRM, diante dos resultados obtidos com a SIP, é possível concluir que os métodos apresentados permitem o desacoplamento de erros em medições de distâncias.

Palavras chave: Máquinas de Medir por Coordenadas, Separação de Erros, Redundância de Dados, Simulação, Medição de Distâncias.

ABSTRACT

MORAIS, C. A. G. **Redundant measuring systems for error separation in coordinate measuring machines.** 194p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

Compliance inspections have an important role in the production chain of manufacturing industries, especially those inspections related to dimensions and geometry of manufactured products. Continuous improvement in the industrial environment is related to reduced costs and increased quality of manufacture, and these factors are related to the degree of technological development used in inspection systems. Dimensional and geometric inspections using CMM (Coordinate Measuring Machines) are performed quickly and with quality; however, as in every machine there is the presence of errors, which should be known, minimized and if possible removed. Errors in coordinate measuring machines can be known through calibration, which are usually extensive and costly, or even by applying error separation techniques, but these techniques are performed with the need to use specific devices for decoupling error. In this context, the study aims to apply methods for improving the reliability of measurement results with a MMC, specifically in measurements of distances, using separation techniques, redundancy and overlap errors, in order to decouple the errors involved in the procedures measurement without the need to use special devices of separation, but only the part inspected. The work was done under the hypothesis that the results of distances measured on a CMM depend on the measurement region. This hypothesis was tested and evaluated by ANOVA (Analysis of Variance) and from this the work proposal was developed. Firstly, it was done the calibration of the scales of the axes "x" and "y" from the machine, by laser interferometry, because they are the axes corresponding to the measurement plane. Redundant systems of measurement were developed with the mathematical modeling of the readings from collected points in distance measuring procedures using overlapping of the readings of points. Mathematical models were solved and allowed to find the conventional value of the distance between walls in measurement procedures. The methods for obtaining the conventional values of distance were called SRM (Redundant Measuring Systems). These methods were performed in two ways, the SRM_1, which considers four measurement regions on the mathematical model, and SRM_2, which considers on the mathematical model only one pair of measurement regions. The validation of redundant systems of measurement was performed by the stability of results between the procedures and by comparison of the results of distances measured by SIP. The SRM_1 made possible the obtaining a distance value near the measured distance with the SIP, with difference of only 4 μ m. The application of SRM_2 made possible the obtaining results of distances with only 1 μ m of difference of results obtained by SIP. Due to the stability between the measurement procedures and proximity among the results obtained by SRM in comparison with the results obtained by SIP, it is possible to conclude that the methods presented allow the decoupling of errors in distance measurements.

Keywords: Coordinate Measuring Machines, Error Separation, Data Redundancy, Simulation, Measuring Distance.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2. 1: Erro de Abbè durante o deslocamento de uma ótica de medição.	23
Figura 2. 2: Rotações e translações de um corpo rígido sobre uma guia linear.	26
Figura 2. 3: Exemplo hipotético de um curva de calibração de erros em máquinas.	29
Figura 2. 4: Reversão aplicada em medição de nível.	32
Figura 2. 5: Método de reversão para separação de erros em medições com eixos rotativos.	33
Figura 2. 6: Reversão aplicada em guias lineares para verificação de desvios de retilidade.	34
Figura 2. 7: Método da reversão para avaliação do erro de perpendicularismo.	35
Figura 2. 8: Reversão aplicada para separação de erros de movimentação axial e inclinação.	36
Figura 2. 9: Separação de erros de retilidade entre peça e máquina ferramenta.	38
Figura 2. 10: Método de separação de erros two-step-two-probe.	40
Figura 2. 11: Etapas de coletas de dados utilizando sobreposição de pontos.	41
Figura 3. 1: Diagrama representativo da estrutura da MMC.	44
Figura 3. 2: Distância entre Ponto e Reta	54
Figura 3. 3: Distribuição normal e percentuais dos valores observados	57
Figura 3. 4: Teste de normalidade sobre um grupo de dados	67
Figura 5. 1: Posicionamento de mancal e escala do eixo Y em uma vista frontal.	79
Figura 5. 2: Montagens M1, M2, M3 e M4.	83
Figura 5. 3: Princípio de interferometria para medição de deslocamento.	87
Figura 5. 4: Visão frontal (a) e traseira (b) da montagem utilizada para calibração da escala Y.	88
Figura 5. 5: Montagem utilizada para calibração da escala X.	88
Figura 5. 6: Sobreposição a esquerda (a) e sobreposição a direita (b)	90
Figura 5. 7: Definição de coordenadas para metodologia de separação de erros	91
Figura 5. 8: Desvio angular α_j e influência regressiva nos valores dos pontos coletados sobre a geratriz s	92
Figura 5. 9: Desvio paramétrico a direção i e de influência na direção j	93
Figura 5. 10: Desvios δC_i da parede posterior apresentado em vista superior da peça.	95

Figura 5. 11: Peça utilizada para separação de erros e os respectivos pontos coletados na medição	96
Figura 5. 12: Vista superior da peça utilizada para separação de erros com medidas nominais.....	97
Figura 5. 13: Sobreposição w_1 à esquerda.....	99
Figura 5. 14: Equivalência de erros paramétricos a direção i pela sobreposição w_1	99
Figura 5. 15: Desalinhamento devido a sobreposição de pontos.....	100
Figura 5. 16: Sobreposição w_2 à direita.....	102
Figura 5. 17: Equivalência de erros paramétricos a direção i pela sobreposição w_2 .	102
Figura 5. 18: Regiões de medição no plano de medição da máquina $M_{k,w0}$ e $M_{k+1,w0}$ (a).....	105
Figura 5. 19: Medição da distância entre paredes com a SIP em ambiente com temperatura e umidade controladas.	111
Figura 6. 1: Pontos coletados na parede frontal para as montagens M_1 (a), M_2 (b), M_3 (c) e M_4 (d).....	115
Figura 6. 2: Pontos coletados na parede posterior para as montagens M_1 (a), M_2 (b), M_3 (c) e M_4 (d).	116
Figura 6. 3: Igualdade estatística das distâncias em regiões diferentes de medição para o planejamento experimental 1.....	119
Figura 6. 4: Médias de distâncias em regiões diferentes de medição para o planejamento experimental 1.	119
Figura 6. 5: Igualdade estatística das distâncias em regiões diferentes de medição para o planejamento experimental 2.....	121
Figura 6. 6: Médias de distâncias em regiões diferentes de medição para o planejamento experimental 2.	121
Figura 6. 7: Igualdade estatística das distâncias em regiões diferentes de medição para o planejamento experimental 3.....	123
Figura 6. 8: Médias de distâncias em regiões diferentes de medição para o planejamento experimental 3.	123
Figura 6. 9: Igualdade estatística das distâncias em regiões diferentes de medição para o planejamento experimental 4.....	125
Figura 6. 10: Médias de distâncias em regiões diferentes de medição para o planejamento experimental 4.....	125

Figura 6. 11: Curva de calibração dos erros da escala do eixo y	126
Figura 6. 12: Curva de calibração dos erros da escala do eixo x	127
Figura 6. 13: Influência dos erros das escalas x e y , no sentido de avanço (a) e retorno (b) sobre o plano de medição da MMC.	128
Figura 6. 14. Representação gráfica da esparsividade da matriz dos coeficientes para o modelo com quatro montagens onde não é considerado o desalinhamento entre as sobreposições.....	129
Figura 6. 15: Resíduos da solução do modelo que utiliza quatro montagens e não considera o desalinhamento.....	130
Figura 6. 16: Convergência da solução do modelo que não considera o desalinhamento para sobreposição de pontos.	130
Figura 6. 17: Resultados de distância para o método que utiliza quatro montagens e não considera o desalinhamento.....	131
Figura 6. 18: Representação gráfica da esparsividade da matriz dos coeficientes do modelo proposto pelo método SRM_1.....	132
Figura 6. 19: Resíduos da solução do modelo para o método SRM_1 comparado aos resíduos obtidos pela solução do modelo que não contem variáveis de desalinhamento.	133
Figura 6. 20: Convergência da solução do modelo para os três procedimentos de SRM_1 comparados ao método sem desalinhamento.....	134
Figura 6. 21: Distâncias com separação de erros pelo método SRM_1 em função da quantidade de procedimentos aplicados.	135
Figura 6. 22: Valor convencional da distância entre paredes pelo método de separação SRM_1.....	135
Figura 6. 23: Representação gráfica da esparsividade da matriz dos coeficientes do modelo proposto pelo método SRM_2.....	136
Figura 6. 24: Resíduos das soluções dos modelos matemáticos com aplicação do método SRM_2 nos procedimentos 1, 2 e 3.....	137
Figura 6. 25: Resíduos da solução do modelo para o método SRM_2 nos procedimentos 4, 5 e 6.	137
Figura 6. 26: Convergência da solução modelo para o método SRM_2 nos procedimentos 1, 2 e 3.....	138

Figura 6. 27: Convergência da solução modelo para o método SRM_2 nos procedimentos 4, 5 e 6.....	138
Figura 6. 28: Distâncias com separação de erros pelo método SRM_2 em função dos procedimentos aplicados.....	139
Figura 6. 29: Distâncias obtidas com SRM_2 comparadas com as distâncias obtidas diretamente da MMC.....	142
Figura 6. 30: Valor convencional da distância entre paredes pelo método efetivo de separação de erros SRM_2.	142
Figura 6. 31: Comparação dos métodos utilizados no sistema redundante de medição.....	144
Figura 6. 32: Desvio dos resultados de distâncias em relação a SIP.	145
Figura 6. 33: Desvios dos valores convencionais para os métodos SRM_1 e SRM_2.....	146

LISTA DE TABELAS

Tabela 3 1: Considerações e simbologias adotadas para modelagem dos erros nas direções preferenciais da MMC pelo método das transformações homogêneas.	45
Tabela 3 2: Nomenclatura e simbologias adotadas para modelagem de erros por transformações homogêneas.....	45
Tabela 5. 1: Informações Técnicas da MMC Brown & Sharpe estudada.	79
Tabela 5. 2: Tratamentos utilizados para análise de variância	84
Tabela 5. 3: Procedimentos de medição e pares de montagens utilizados	108
Tabela 6. 1: Desvio padrão das coordenadas dos pontos na parede frontal para medições em regiões diferentes da MMC.	115
Tabela 6. 2: Desvio padrão das coordenadas dos pontos na parede posterior para medições em regiões diferentes da MMC.	116
Tabela 6. 3: Resultados de distâncias entre paredes externas medidos em diferentes regiões da MMC e posições para sobreposição de leituras dos pontos	117
Tabela 6. 4: Análise de Variância dos fatores $M1,w_0$; $M2,w_0$; $M3,w_0$ e $M4,w_0$, referentes ao primeiro planejamento experimental.	118
Tabela 6. 5: Comparação de médias pelo Teste de Tukey para os fatores $M1,w_0$; $M2,w_0$; $M3,w_0$ e $M4,w_0$, referentes ao primeiro planejamento experimental.	118
Tabela 6. 6: Análise de Variância dos fatores $M1,w_1$; $M2,w_1$; $M3,w_1$ e $M4,w_1$, referentes ao segundo planejamento experimental.....	120
Tabela 6. 7: Comparação de médias pelo Teste de Tukey para os fatores $M1,w_1$; $M2,w_1$; $M3,w_1$ e $M4,w_1$, referentes ao segundo planejamento experimental.....	120
Tabela 6. 8: Análise de Variância dos fatores $M1,w_2$; $M2,w_2$; $M3,w_2$ e $M4,w_2$, referentes ao terceiro planejamento experimental.	122
Tabela 6. 9: Comparação de médias pelo Teste de Tukey para os fatores $M1,w_2$; $M2,w_2$; $M3,w_2$ e $M4,w_2$, referentes ao terceiro planejamento experimental.....	122
Tabela 6. 10: Análise de Variância dos fatores do quarto planejamento experimental	124
Tabela 6. 11: Comparação de médias pelo Teste de Tukey para o quarto planejamento experimental.	124
Tabela 6. 12: Resultados de distância para o método que utiliza quatro montagens e não considera o desalinhamento.....	131
Tabela 6. 13: Resultados de distância em mm para separação de erros pelo método SRM_1.....	134

Tabela 6. 14: Média e dispersão dos resíduos das soluções numéricas entre os procedimentos.....	137
Tabela 6. 15: Resultados de Distâncias entre os procedimentos utilizados para o método SRM_2.....	140
Tabela 6. 16: Resultados de distâncias utilizando o método SRM_2 comparados com distâncias sem remoção de erros.	141
Tabela 6. 17: Valores de Distâncias em milímetros obtidos pela medição da peça na SIP.	143

LISTA DE SÍMBOLOS

$\delta u(u)$ - desvio linear na u devido ao movimento induzido na direção u

$\delta w(u)$ - desvio linear na w devido ao movimento induzido na direção u

$\delta \theta u(u)$ - desvio angular em torno da direção u devido ao movimento induzido na direção u

$\delta \theta w(u)$ - desvio angular em torno da direção w devido ao movimento induzido na direção u

$\delta \theta w_o$ - desvio de ortogonalidade entre os dois eixos preferenciais e perpendiculares à direção w

SRM - sistemas redundantes de medição

SRM_1 - sistema redundante de medição, método 1

SRM_2 - sistema redundante de medição, método 2

C - valor verdadeiro convencional da coordenada medida

E - erro de medição

R - valor da leitura ou indicação da medição

M_1 - Montagem 1

M_2 - Montagem 2

M_3 - Montagem 3

M_4 - Montagem 4

R_t - leitura do t -ésimo ponto coletado do procedimento de medição na direção j da distância requerida

C_t - valor verdadeiro convencional da coordenada j , medida no t -ésimo ponto

E_t - valor do erro envolvido na medida do t -ésimo ponto, incidente na direção j

$\delta C_t^{\alpha, j}$ - componente de erro com característica progressiva ou regressiva, incidente em j durante o deslocamento da sonda na direção i

δC_i - componente de erro com incidência em j e paramétrico ao braço deslocado em i

δC_i^{σ} - componente de erro com característica aleatória, relacionado à falta de repetibilidade na coleta do ponto e com incidência na direção j .

α_j - desvio angular correspondente a coleta de pontos na direção i , porém é um valor paramétrico e uma função de j

$R_{t,i}$ - valor da coordenada i do t -ésimo ponto coletado

$w_o, w1, w2$ – índices relacionados às posições de sobreposições.

f - índice que define a superfície frontal da peça

p - índice que define a superfície posterior da peça

e_{w1}, e_{w2} - componentes de erros lineares devido ao deslocamento para sobreposição

Ψ_{w1}, Ψ_{w2} – componentes de erros angulares devido ao deslocamento para sobreposição

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	15
INTRODUÇÃO	15
CAPÍTULO 2	21
FUNDAMENTOS TÉCNICOS E TEÓRICOS SOBRE MÁQUINAS DE MEDIR POR COORDENADAS E SEPARAÇÃO DE ERROS.....	21
2.1 ERROS SOBRE OS RESULTADOS DE MEDIÇÃO UTILIZANDO MÁQUINAS DE MEDIR POR COORDENADAS	22
2.1.1 Erros devido a transgressão do princípio de Abbè	22
2.1.2 Erros devido à temperatura	23
2.1.3 Erros devido à cinemática dos corpos rígidos.....	25
2.1.4 Erros dinâmicos.....	26
2.1.5 Erros devido à outras fontes.....	27
2.2 COMPORTAMENTO DOS ERROS	28
2.3 SEPARAÇÃO DE ERROS	30
2.3.1 Método da Reversão	31
2.3.2 Múltiplas sondas.....	37
2.3.3 Múltiplas Etapas.....	39
2.3.4 Separação de erros aplicados em equipamentos de medição por coordenadas	41
CAPÍTULO 3	43
FUNDAMENTOS SOBRE MODELAGEM DOS ERROS EM MMC, GEOMETRIA ANALÍTICA, ÁLGEBRA, FUNDAMENTOS ESTATÍSTICOS E TEORIA DE ERROS	43
3.1 MODELAGEM DOS ERROS GEOMÉTRICOS E INDIVIDUAIS DA MMC COM INFLUÊNCIA NAS DIREÇÕES PRINCIPAIS X, Y E Z	44
3.2 GEOMETRIA ANALÍTICA E GEOMETRIAS ASSOCIADAS	51
3.2.1 Cálculo de Distâncias	52
3.3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES	55
3.3.1 Soluções de sistemas de equações lineares.....	55
3.4 CONCEITOS ESTATÍSTICOS.....	57
3.4.1 Distribuição Normal Gaussiana	57
3.4.2 Teorema do Limite Central.....	58
3.4.3 Lei dos Grandes Números.....	60
3.4.4 Valor Médio	61
3.4.5 Medidas de dispersão	62
3.4.6 Teste de Hipóteses e p-valor	65
3.4.6.1 Teste de Normalidade.....	66
3.4.7 Regressão linear pelo método dos mínimos quadrados.....	67
3.5 Modelagem da incerteza sobre os pontos coordenados.....	69

CAPÍTULO 4	71
SISTEMAS REDUNDANTES DE MEDIÇÃO PARA SEPARAÇÃO DE ERROS EM MÁQUINAS DE MEDIR POR COORDENADAS	71
4.1 ETAPAS PARA APLICAÇÃO DE UM SISTEMA REDUNDANTE DE MEDIÇÃO (SRM)	73
4.2 CALIBRAÇÃO DAS ESCALAS.....	73
4.3 MEDIÇÃO DAS DISTÂNCIAS, VERIFICAÇÃO DA INFLUÊNCIA DA REGIÃO DE MEDIÇÃO SOBRE OS RESULTADOS E COMPARAÇÃO MÚLTIPLA DE MÉDIAS DE DISTÂNCIAS	74
4.4 MODELAGEM, SOLUÇÃO NUMÉRICA DOS MODELOS E AVALIAÇÃO DO MÉTODO UTILIZADO PARA SOLUÇÃO.....	75
4.5 OBTENÇÃO DAS DISTÂNCIAS PELOS MÉTODOS REDUNDANTES DE MEDIÇÃO (SRM_1 E SRM_2) E VALIDAÇÕES DOS MÉTODOS APLICADOS.	75
CAPÍTULO 5	77
MODELAGEM E DESENVOLVIMENTO DOS SISTEMAS REDUNDANTES DE MEDIÇÃO APLICADOS EM MÁQUINAS DE MEDIR POR COORDENADAS.	77
5.1 A MÁQUINA DE MEDIR POR COORDENADAS E CONDIÇÕES TÉCNICO-AMBIENTAIS DE ENSAIO EXPERIMENTAL.....	78
5.2 INFLUÊNCIA DA DEPENDÊNCIA DA REGIÃO DE MEDIÇÃO NOS RESULTADOS DE DISTÂNCIAS EM MEDIÇÕES POR COORDENADAS	80
5.3 CALIBRAÇÃO DAS ESCALAS	85
5.3.1 Calibração do erro de posicionamento da escala do eixo y	87
5.3.2 Calibração do erro de posicionamento da escala do eixo x	88
5.4 SISTEMA REDUNDANTE DE MEDIÇÃO UTILIZANDO TÉCNICAS DE SEPARAÇÃO DE ERROS.....	89
5.4.1 Modelagem do sistema a partir da leitura dos pontos utilizados para separação dos erros em medições de distâncias	89
5.4.2 Sistema redundante de medição utilizando quatro montagens sem considerar os desalinhamentos entre sobreposições	107
5.4.3 Sistema Redundante de Medição utilizando quatro montagens e variáveis de desalinhamento entre sobreposições - SRM_1	107
5.4.4 Sistema Redundante de Medição utilizando pares de montagens e variáveis de desalinhamento entre sobreposições - SRM_2	108
5.4.5 Solução numérica das modelagens	109
5.4.6 Determinação da distância a partir do sistema redundante de medição	110
5.5 VALIDAÇÃO DAS VARIAÇÕES DOS SISTEMAS REDUNDANTES DE MEDIÇÃO	110
CAPÍTULO 6	113
RESULTADOS E DISCUSSÕES SOBRE O DESENVOLVIMENTO DOS SISTEMAS REDUNDANTES DE MEDIÇÃO APLICADOS EM MÁQUINAS DE MEDIR POR COORDENADAS	113
6.1 RESULTADOS DE MEDIÇÕES DE DISTÂNCIA ENTRE PAREDES EM DIFERENTES POSIÇÕES DA MMC	114
6.1.1 Resultados dos pontos coletados em montagens efetuadas em posições diferentes da MMC.....	114
6.1.2 Análise estatística das distâncias entre paredes em montagens efetuadas em regiões diferentes da MMC.....	117

6.2	RESULTADOS DE CALIBRAÇÃO DAS ESCALAS.....	126
6.2.1	Resultados da calibração do erro de posicionamento da escala do eixo y	126
6.2.2	Resultados da calibração do erro de posicionamento da escala do eixo x	127
6.2.3	Influência dos erros das escalas x e y no plano da MMC.....	128
6.3	RESULTADOS DAS VARIAÇÕES DESENVOLVIDAS DOS SISTEMAS REDUNDANTES DE MEDIÇÃO.....	129
6.3.1	Resultados do método de separação de erros utilizando quatro montagens no modelo e sem considerar desalinhamento entre as sobreposições	129
6.3.2	Resultados da separação de erros para o método SRM_1	132
6.3.3	Resultados da separação de erros para o método SRM_2	136
6.4	RESULTADOS DA VALIDAÇÃO DO SISTEMA REDUNDANTE DE MEDIÇÃO PELA COMPARAÇÃO DE DISTÂNCIAS OBTIDAS COM SIP.....	143
	CAPÍTULO 7.....	147
	CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS	147
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	153
	APÊNDICE A	159
	APÊNDICE B	171
	APÊNDICE C	177

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

As medições são utilizadas em todos os aspectos da vida e são difundidas no cotidiano do ser humano, assim como em ambientes industriais, elas estão relacionadas diretamente ao desenvolvimento tecnológico, já que possuem o atributo de verificar a qualidade de peças fabricadas ou processos de fabricação de alta tecnologia. Procedimentos de medição podem assumir um papel de monitoramento, auxiliar no controle de produção e podem ser aplicadas na investigação de causas e efeitos de características de produtos, bem como de processos.

A natural exigência do ambiente industrial para redução de custos de fabricação e elevada qualidade de produção faz com que equipamentos de medições forneçam respostas de leituras de forma rápida e confiáveis, neste sentido, são introduzidas as máquinas de medição por coordenadas. As MMC's (máquinas de medir por coordenadas) são empregadas para medições dimensionais e de geometrias em artefatos são máquinas versáteis e podem atender estas necessidades de medição.

As máquinas de medir por coordenadas permitem medir geometrias complexas de forma rápida e com qualidade de medição, porém, erros sobre os valores informados que

requerem grande exatidão, além de custos relacionados à operação, ao equipamento e aos acessórios utilizados são empecilhos quanto ao seu emprego.

A utilização de máquinas de medir por coordenadas permite a realização de inspeções dimensionais e geométricas de peças manufaturadas compostas por diversos tipos de elementos geométricos, sem a necessidade de troca exaustiva de acessórios específicos para cada medição, o que torna a inspeção dimensional de um produto mais rápida. Desta forma, a rapidez de medição é um dos principais atributos da utilização de MMC, sobretudo se a máquina for equipada por sistemas de comando numérico. O emprego de Máquinas de medir por Coordenadas em ambientes de inspeção permitem ainda eliminar a necessidade de utilização de diversos instrumentos, como paquímetros, micrômetros, medidores de alturas, medidores de ângulos, raios entre outros.

A realização de inspeções dimensionais em peças de geometrias não definidas são difíceis por métodos convencionais e geralmente são realizadas por comparação com gabaritos que eventualmente podem apresentar desgastes ou imperfeições. As máquinas de medir por coordenadas podem realizar este tipo de medição, de forma direta, através da coleta de pontos coordenados num espaço tridimensional, pois, curvas e superfícies podem ser ajustadas sobre os pontos coletados e assim definir a geometria da peça. Medições por coordenadas tem grande aplicação no campo de engenharia reversa, já que com os pontos coordenados obtidos podem definir as estratégias de fabricação. Desta forma, a versatilidade e a facilidade de integração ao meio produtivo elegem as máquinas de medir por coordenadas como candidatas em potencial para inspeções dimensionais e geométricas de peças com geometrias simples e complexas.

As máquinas de medir por coordenadas são considerados sistemas complexos de medição, elas possuem características construtivas que permitem a diminuir a influência de erros durante a operação. Os sistemas de deslocamentos dos eixos das MMC's são construídos com mancais aeroestáticos, que permitem a eliminação do contato entre carro e guia e como consequência disto, o atrito entre estes componentes também é eliminado. O conhecimento dos comprimentos deslocados dos eixos são determinados por escalas opto-eletrônicas, que simulam os eixos ideais do sistema cartesiano e definem as coordenadas do posicionamento da ponta da sonda de medição no volume da MMC.

Como em todas máquinas, as MMC's também estão suscetíveis a presença de erros sobre a informação sobre os valores de posicionamento dos seus eixos, que podem ser decorrentes de montagens inadequadas, erros cinemáticos incidentes em suas partes móveis, erros devido a fontes externas, como por exemplo vibração, além de fatores humanos durante

a sua operação. Desta forma, é indispensável o conhecimento da influência dos erros nos resultados obtidos já que máquinas de medir por coordenadas são máquinas utilizadas à inspeções de peças.

Os erros em máquinas de medir por coordenadas podem ser entendidos como deslocamentos indesejáveis da sonda de medição durante o seu funcionamento, este deslocamento indesejável pode ser ocasionado pela imperfeições do sistema de deslocamento aplicado sobre as guias e por imperfeições das escalas lineares, que assim introduzem a erros de retilineidade, erros de posição e erros angulares. Os erros também podem ser ocasionados pela montagem inadequada da máquina, que causam uma falta de ortogonalidade entre os eixos.

Erros em medições por coordenadas são alvos de um grande número de pesquisas que geralmente estão relacionadas a incerteza, a modelagem matemática de erros, a métodos de calibração e compensação de erros.

Técnicas de separação de erros em máquinas de medir por coordenadas são pouco estudadas, já que a modelagem dos erros é complexa e exaustiva devido ao número de variáveis envolvidas, estas técnicas quando aplicadas em MMC's quase sempre fazem menção a um padrão ou artefato específico para calibração, diferentemente do que é proposto neste trabalho. A separação de erros permite o desacoplamento dos erros envolvidos durante a execução de medições, para isto, ferramentas matemáticas sob a forma de álgebra e métodos numéricos são aplicadas sobre os modelos matemáticos das leituras para a obtenção da informação requerida, que podem ser os erros de medição, informações sobre a peça ou ambos. Estes métodos são comumente aplicados em problemas mais simples, como a remoção de erros em eixos ou mesas rotativas e em guias lineares, e ainda possuem a vantagem de que uma instrumentação comum pode ser aplicada.

Diante disto, este trabalho foi elaborado com o objetivo de desenvolver e aplicar métodos que permitam melhorar a confiabilidade dos resultados de medições com uma MMC, especificamente nas medições de distâncias, aplicando técnicas de separação, redundância e superposição de erros, de modo a desacoplar os erros envolvidos nos procedimentos de medição, sem a necessidade de utilizar artefatos próprios para separação. Para alcançar o objetivo proposto, neste trabalho foram desenvolvidas técnicas para o desacoplamento de erros, que aqui serão chamadas de sistemas redundantes de medição, ou apenas SRM.

Medições de distância entre paredes em regiões distintas da mesa da MMC foram realizadas com intuito de verificar a dependência dos resultados obtidos com as regiões de medições, esta análise foi executada por métodos estatísticos. Foram também realizadas as

calibrações das escalas x e y , já que este trabalho parte do princípio básico de funcionamento de uma MMC, o funcionamento correto das escalas lineares. Com a comprovação das condições iniciais, as indicações dos pontos medidos foram modeladas matematicamente sob duas formas, definidas como sistema redundante de medição 1 (SRM_1) e sistema redundante de medição 2 (SRM_2), então, os modelos foram resolvidos permitindo obter os valores convencionais da distância medida. O desenvolvimento proposto deste trabalho estabelece a remoção dos desvios em medições de distância por meio de técnicas de separação de erros em uma MMC do tipo ponte móvel, porém, este trabalho pode ser aplicado em outras MMCs com diferentes tipos construtivos, que utilizem três eixos de deslocamentos. A seguir, está apresentada uma breve descrição dos capítulos que compõem o trabalho.

No capítulo dois é apresentada uma revisão bibliográfica sobre erros em máquinas de medir por coordenadas, abordando as características dos erros, as causas e as fontes dos erros influentes na medição. Neste capítulo também estão inclusas discussões sobre alguns métodos clássicos de separação, as modelagens aplicadas aos problemas e as soluções propostas.

No capítulo três, estão apresentados alguns fundamentos teóricos que auxiliam no entendimento do desenvolvimento do trabalho. Neste capítulo são apresentados fundamentos de álgebra linear para obtenção da distância entre paredes da peça medida, conceitos relacionados à solução dos modelos matemáticos apresentados no capítulo 5 e, conceitos estatísticos aplicados para análise dos resultados, sob a forma de ANOVA (Análise de variância), que é utilizada para verificação da dependência dos valores de distâncias com a região de medição de uma MMC. Uma modelagem da incerteza sobre as coordenadas dos pontos coletados também é aplicada neste capítulo.

A proposta do trabalho é apresentada no quarto capítulo, que é a aplicação de sistemas redundantes de medição para desacoplamento de erros nos resultados de medições de distâncias entre planos obtidos de uma peça. A aplicação do método é justificada pela confirmação da hipótese de que os resultados de medições de distâncias dependem da região de medição e a partir disto, os sistemas redundantes de medição foram desenvolvidos. Os sistemas redundantes de medição propostos são baseados em separações de erros por meio de redundância de dados e foram desenvolvidas duas versões, denominadas SRM_1 e SRM_2.

O quinto capítulo apresenta o desenvolvimento do trabalho e nele é apresentado detalhadamente a forma de obtenção do valor convencional da distância entre paredes. Neste capítulo são detalhados a forma de coleta de dados, os planejamentos experimentais utilizados para a análise variância, o método de calibração das escalas, as modelagens executadas, a

forma de obtenção de distâncias e a validação dos métodos apresentados para desacoplamento de erros.

Os resultados obtidos estão presentes no capítulo seis, neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados das medições de distâncias, os resultados das ferramentas estatísticas utilizadas, os resultados da calibração das escalas, os resultados da separação de erros pela solução numérica das modelagens matemáticas e os resultados referentes à validação dos métodos apresentados para desacoplamento dos erros em medições de distâncias.

O capítulo sete é constituído das conclusões obtidas com o desenvolvimento do trabalho e as sugestões para desenvolvimentos de trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS TÉCNICOS E TEÓRICOS SOBRE MÁQUINAS DE MEDIR POR COORDENADAS E SEPARAÇÃO DE ERROS

A busca por medições mais confiáveis com melhores resoluções é e sempre será um grande desafio para a ciência, pois o desenvolvimento de melhores equipamentos e melhores métodos para modelagem dos erros em instrumentos de medição é uma real necessidade para o avanço tecnológico. Muitos estudos estão voltados para determinação de erros e incertezas em procedimentos de medições, onde modelagens matemáticas e simulações computacionais são geralmente aplicadas para determinação destes parâmetros.

O surgimento das máquinas de medir por coordenadas proporcionou a medição de peças com geometrias complexas e com maior rapidez, segundo Kunzmann e Wäldele (1988) as MMC's são consideradas um dos mais importantes equipamentos de medição de peças, já que antes do surgimento das MMC's, por volta do ano de 1960, as medições eram exaustivas e exigiam o emprego de uma grande quantidade de instrumentos, além disto, as medições eram feitas separadamente para cada dimensão, característica de forma, superfície e posição de elementos geométricos. A utilização de MMC's permite medir todas estas propriedades sem utilização de outros instrumentos de medição.

Erros de medições também influenciam os resultados em medições por coordenadas, e, com o intuito de tornar o conhecimento dos valores dos erros uma forma mais simples e confiável, eles são constantemente o objeto de estudo na área de metrologia mecânica.

Neste capítulo são apresentados os fundamentos dos erros presentes em medições com máquinas de medir por coordenadas, contendo as possíveis fontes e o comportamento destes desvios em procedimentos de medições. Uma revisão de literatura sobre as técnicas de separação de erros também estão descritas neste capítulo.

2.1 Erros sobre os resultados de medição utilizando Máquinas de Medir por Coordenadas

Segundo Ni (1995) sistemas de medição por coordenadas são compostos por basicamente quatro elementos, sendo eles: a peça, o operador, o instrumento e o ambiente. Os fatores causadores de erros que influenciam a medição por coordenadas podem ser classificados em dois tipos, como os fatores dependentes e os independentes da máquina.

Cardoza (1995) relata que os fatores causadores de erros que dependem da máquina são: a transgressão do Princípio de Abbe, erros devido ao apalpador de medição, erros devido à forma das guias, imperfeição do desempenho de referência, erros devido ao peso próprio, além dos erros relativos à integridade dos programas computacionais. Já os fatores independentes da máquina que interferem em medições por coordenadas são relacionados ao acabamento superficial da peça, a estratégia de medição e habilidade do operador. Além disso, segundo o autor, existem fatores que podem ser dependentes ou independentes da máquina de acordo com as circunstâncias, que são erros dinâmicos e erros devido às variações de temperatura.

2.1.1 Erros devido a transgressão do princípio de Abbe

Segundo Bryan (1979) o princípio de Abbe é conhecido como o primeiro princípio de projetos de máquinas-ferramentas e metrologia dimensional. O nome Abbe foi empregado em homenagem ao físico alemão Ernest Abbe, que definiu o princípio em uma publicação no ano de 1890 no *Journal for Instrumental Information*, volume X. O princípio estabelece que em uma medição de deslocamento, o caminho efetivo do instrumento deve ser colinear ao

caminho funcional (BRYAN, 1979). A falta de colinearidade resulta no que é conhecido como erro de Abbe.

Em 1979, Bryan estudou e redefiniu o princípio ao adicionar duas outras considerações, desta forma, a nova definição do princípio de Abbe estabelece que o sistema de medição de deslocamento deve estar alinhado com o ponto funcional do instrumento, e, caso não seja possível, as guias de deslocamentos devem estar livres de deslocamentos angulares, ou então, os resultados angulares devem ser conhecidos e considerados para calcular os efeitos deste desvio (BRYAN, 1979).

Leach (2010) apresenta a influência do erro de Abbe em uma ótica interferométrica, segundo o autor, o erro de Abbe ocorre quando o ponto de medição está deslocado em relação à escala e assim, se houver presença de erros angulares no sistema de medição, o erro angular faz com que se obtenham valores maiores ou menores, em relação ao real, durante a medição. A distância entre a linha de referência ou linha de deslocamento e o eixo de medição é definida como *Abbe Offset* ou braço de Abbe. A figura 2.1 ilustra o erro de Abbe e o braço de Abbe formado em medições com óticas interferométricas.

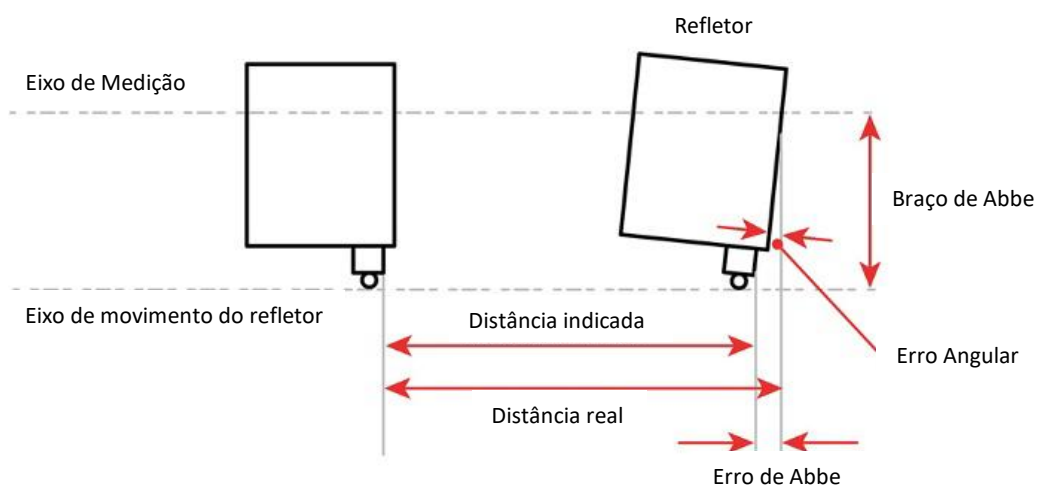


Figura 2. 1: Erro de Abbe durante o deslocamento de uma ótica de medição.
Fonte: Leach (2010).

2.1.2 Erros devido à temperatura

Um dos grandes impasses em medições onde se requer elevados índices de exatidão é a influência da temperatura, pois pode exercer dilatações ou contrações em componentes do sistema utilizado e também da peça, sendo indispensável o seu controle. Segundo

(VDI/VDE 2617, 1986), a temperatura é uma das principais fontes de erros que afetam o posicionamento da ponta do apalpador durante um procedimento de medição.

Trabalhos publicados com o objetivo de investigar efeitos térmicos em máquinas ferramentas e máquinas de medir por coordenadas geralmente fazem referência ao trabalho de BRYAN (1990), o qual fez um estudo para avaliar a influência da temperatura sobre máquinas ferramentas. Segundo Arencibia (2003), o local de trabalho e o projeto da máquina definem a quantidade das fontes de calor.

Kunzmann, Ni e Wäldele (1995) fazem menção a uma classificação dos erros sobre máquinas de medir por coordenadas, para os autores os erros em MMC's são classificados como dependentes ou independentes da temperatura. Os erros em máquinas de medir por coordenadas que podem ser classificados como erros independentes da temperatura são descritos como:

- Imperfeições das guias, devido à imprecisão na fabricação;
- Defeitos dos mancais responsáveis por permitir o movimento dos eixos da máquina;
- Graduação incorreta ou calibração incorreta dos transdutores lineares de deslocamentos;
- Ajustes e montagens incorretas de componentes da máquina;
- Deformação elástica dos componentes da máquina, como em mancais devido ao deslocamento de massa pelo movimento dos eixos.

As causas de erros que são dependentes da temperatura, segundo Kunzmann, Ni e Wäldele (1995) estão relacionadas a seguir:

- Variação uniforme da temperatura dos componentes da máquina, esta variação pode causar variações no comprimento das escalas;

- Variação não uniforme dos componentes da máquina causados por um gradiente térmico entre os componentes, este pode gerar deformações nas guias e desalinhamentos;
- Transferência de calor devido a correntes de ar, que pode estar relacionada ao controle inadequado de sopradores, ventiladores de motores e equipamentos de ar condicionado;
- Troca de calor por radiação com o ambiente, como por exemplo, trocas de calor entre a parede da câmara de medição com o ambiente externo, troca de calor com piso, com instrumentos e equipamentos vizinhos, troca de calor com a iluminação e com pessoas.
- Transmissão de calor das peças inspecionadas com componentes de fixação, bem como transmissão de calor com componentes eletrônicos e unidades de calor interno.

Os erros devido à temperatura tendem a se anularem se a peça medida e a escala da máquina forem de mesmo material, assim, uma expansão relativa entre eles podem ser negligenciada, porém, caso os materiais destes componentes sejam diferentes, há uma expansão diferencial. Outro caso onde deve ser considerada a expansão diferencial está relacionado quando um interferômetro laser é utilizado no lugar da escala linear. Algumas máquinas de medir por coordenadas já aplicam correções automáticas devido à variação de temperatura, porém, estão atrasadas há cerca de trinta anos, já que sistemas de medição com laser já possuem este tipo de correção desde o início de sua comercialização (BRYAN e DOIRON, 2011).

2.1.3 Erros devido à cinemática dos corpos rígidos

Os erros cinemáticos da Máquina de Medir por Coordenadas podem ser entendidos a partir da cinemática de um corpo rígido (PHILLIPS, 2011). A posição de um corpo rígido no espaço pode ser definida através de 6 graus de liberdade, assim, são associados seis erros

geométricos para cada eixo de translação da máquina. Erros geométricos presentes em uma translação de um corpo sobre uma guia estão exemplificados na figura 2.2.

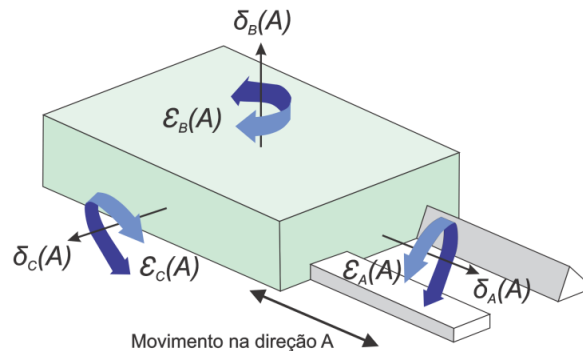


Figura 2. 2: Rotações e translações de um corpo rígido sobre uma guia linear.
Adaptado de: Zhang (2011)

Segundo Zhang (2011), Phillips (2011), Kunzmann, Ni e Wäldele (1995), Hocken (1995) e Di Giacomo (1986) os erros em cada eixo da MMC são compostos por três movimentos indesejados de translações, um de escala ou posição propriamente dito e dois de retitude, perpendiculares ao eixo de movimento e representados simbolicamente na figura 2.2 pela letra δ . Erros de rotações sobre cada eixo, denominados de “pitch”, “yaw” e “roll” são representados simbolicamente pela letra ε na figura 2.2. Em máquinas com múltiplos eixos, estão presentes ainda os erros de ortogonalidade entre os eixos, portanto, em uma máquina tridimensional de medição por coordenadas com três eixos de movimentação, estão associados 18 erros geométricos paramétricos e 3 não paramétricos, que totalizam-se em 21 erros geométricos.

2.1.4 Erros dinâmicos

Os erros dinâmicos são entendidos como os erros que ocorrem ou são amplificados devido a variações de velocidade e aceleração durante um procedimento de medição. Este tipo de erro contribui diretamente em medições por coordenadas já que são necessárias inúmeras movimentações da sonda de medição em diferentes direções da máquina, acarretando em processos de acelerações e desacelerações dos eixos da MMC.

A forma de coleta de pontos pode influenciar na magnitude destes erros, visto que uma medição no modo de varredura, para coleta de pontos, pode atingir velocidades de até

700 mm/s e acelerações de até 2000 mm/s². Segundo Dong et al. (2003) o diâmetro dos orifícios de saída de ar dos mancais aerostáticos influenciam diretamente na comportamento dinâmico da máquina já que ele está relacionado a rigidez do sistema. Os autores investigaram as consequências da variação do diâmetro da saída de ar dos mancais e perceberam que ao diminuir o diâmetro do orifício, os erros relacionados às rotações dos carros diminuiram em 80%, e desta forma perceberam uma melhora no comportamento dinâmico da MMC.

Segundo Castro e Burdekin (2003) a calibração estática de erros de posição em máquinas de medir por coordenadas, ou seja, para-se o eixo deslocado para quantificar o erro, não considera erros dinâmicos, pois o desempenho do controlador do sistema de medição depende do deslocamento e seus efeitos dinâmicos, que são intrínsecos durante a operação.

Para Phillips (2011), os fatores: velocidade de operação, direção de coleta de pontos, distância de aproximação da sonda, configurações de aceleração da máquina e comprimento de extensão dos eixos, determinam os erros dinâmicos de uma MMC. Os erros dinâmicos podem ser reduzidos em uma medição com a utilização de poucos pontos, já que o número de deslocamentos da sonda também é reduzido, porém, se o erro de forma da peça medida for maior que os erros dinâmicos, a coleta de dados por varredura, emprego de muitos pontos, é mais recomendada por apresentar maior exatidão nos resultados.

Máquinas de medição por coordenadas manuais possuem um nível de exatidão limitado segundo Phillips (2011), pois os efeitos dinâmicos podem ser alterados e ter difícil controle, já que as acelerações e velocidades aplicadas podem variar de acordo com o operador e até mesmo pela complexidade da peça medida. Desta forma, o autor afirma que os efeitos dinâmicos são as principais razões para a falta de exatidão de uma máquina medir por coordenadas manual quando comparada a uma máquina de medir por coordenadas automática.

2.1.5 Erros devido a outras fontes

O deslocamento de eixos de MMC's são características de cada configuração e tipo de máquina e, relacionado a isto estão presentes deformações pelos esforços devido ao peso próprio dos carros carregados.

A ação de forças externas podem induzir movimentos sobre a máquina a partir da fundação ou suporte de apoio, como por exemplo, no caso da ação de forças externas que se transmitem pelo solo (CARDOZA, 1995). Segundo a ANSI/ASME B89 4.1 (1997) estes

movimentos podem prejudicar a qualidade dos resultados das medidas, já que movimentos relativos entre componentes da máquina, sonda e entre a peça podem ocorrer. A máquina pode ainda ser danificada severamente caso vibrações com altas amplitudes sejam transmitidas para a fundação ou apoio.

A umidade relativa do ar, a energia elétrica e a linha de ar comprimido são fatores que também podem causar erros em medições por coordenadas, afetando o desempenho da medição. O suprimento de ar comprimido para os mancais aerostáticos deve ser contínuo, com pressão constante e acondicionado, para que apresente baixa umidade, baixa quantidade de óleo e de partículas sólidas. A temperatura do ar comprimido deve ser próxima à da câmara de medição, fato que possibilita reduzir desgastes prematuros dos mancais e diminuir gradientes térmicos na máquina (ANSI/ASME B89 4.1, 1997).

A obtenção e armazenamento dos dados de coordenadas dos pontos coletados são funções dos programas computacionais utilizados nas medições, estes programas podem calcular parâmetros de geometrias e apresentá-los digitalmente (PIRATELLI FILHO, 1997). Contudo, erros de arredondamento devido às limitações do algoritmo utilizado para cálculos dos parâmetros de geometrias também têm influência sobre os resultados de medições.

Diante dos erros apresentados, fica evidenciada a necessidade de ações que permitam diminuir a incidência dos erros em medições, através de calibrações, separação de erros e simulações, de forma que seja possível a obtenção de resultados com maior exatidão.

O aumento da exatidão volumétrica de medição com máquinas de medir por coordenadas permite diminuir os custos para novos processos produtivos ou processos reformulados, aplicados em máquinas ferramentas, uma vez que é possível garantir a que as peças produzidas estão dentro de controles dimensionais e geométricos especificados em projeto. A exatidão volumétrica de máquinas-ferramentas e de máquinas de medir por coordenadas devem ser assegurada por técnicas metrológicas bem fundamentadas e rastreáveis. O conhecimento da exatidão pode ainda ser utilizado para caracterizar uma máquina ou ainda para ajustagem de erros, por meio de compensação numérica (SCHWENKE, et al., 2008).

2.2 Comportamento dos erros

Os erros em máquinas podem ser classificados quanto ao seu comportamento, podendo ser aleatórios ou sistemáticos (SLOCUM, 1999) e (WECK, 1984).

Os erros aleatórios em geral diferem a cada leitura e pode-se ter apenas noção de seus limites uma vez que são resultantes de ações internas ou externas não controladas (DI GIACOMO, NAKAZATO e ARENCIBIA, 2005). Em muitos casos são assumidos que os erros aleatórios têm uma distribuição normal e mesmo que mantidas constantes todas variáveis envolvidas, eles sempre existirão, provando um comportamento aleatório sobre os resultados (PAZIANI, 2005).

Os erros sistemáticos ocorrem de maneira previsível por todo o volume de trabalho da máquina, seguem um comportamento definido e podem ser quantificados por procedimentos de calibração, permitindo efetuar a compensação. Os erros sistemáticos apresentam mesmo valor e sinal em uma determinada posição desde que mantidas as mesmas circunstâncias de medição (SLOCUM, 1999). De acordo com Di Giacomo, Nakazato e Arencibia (2005) os erros sistemáticos podem ainda ser subdivididos em três categorias, erros cíclicos, erros progressivos e erros de histerese.

A histerese pode ser observada para cada posição de medição, quando sentidos de movimentação contrários para um determinado eixo da máquina são analisados. Segundo Weck (1984) a histerese pode ser entendida como a diferença observada nos resultados obtidos em sentidos diferentes de deslocamento, como por exemplo, sentido de ida e sentido de volta. A figura 2.3 que representa uma curva de calibração permite uma melhor compreensão do comportamento dos erros em máquinas.

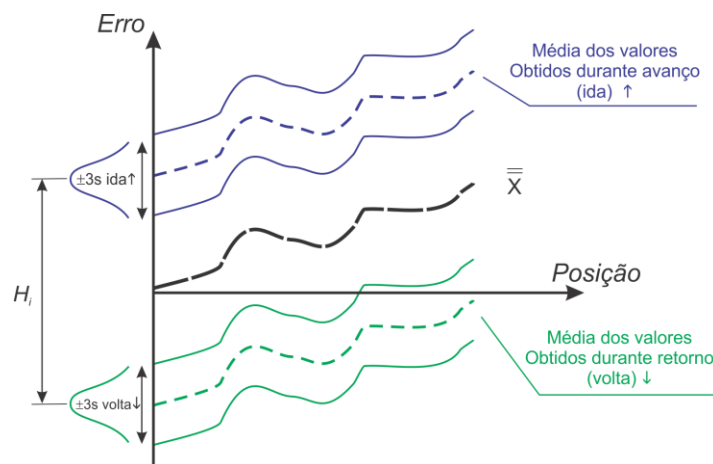


Figura 2. 3: Exemplo hipotético de um curva de calibração de erros em máquinas.
Adaptado de: Weck (1984)

Na figura 2.3 as médias representam os erros sistemáticos e a histerese é representada por H_i . O erro aleatório é representado pela curva de distribuição em torno dos valores médios de ida e de volta.

Segundo Weck (1984), $\overline{\overline{X}}$ representa a parcela sistemática de erros e caso os valores médios de ida e de volta tenham a mesma magnitude e sinais opostos, o erro sistemático é nulo, apesar de existir nos sentidos de ida e de volta.

A histerese (H_i), o erro sistemático (Es) e o erro aleatório (Ea), estão apresentados nas equações 2.1, 2.2 e 2.3, segundo a definição de Weck (1984).

$$H_i = \left| \overline{x_i \uparrow} - \overline{x_i \downarrow} \right| \quad 2.1$$

$$Es = \overline{x} = \frac{\overline{x_i \uparrow} + \overline{x_i \downarrow}}{2} \quad 2.2$$

$$Ea = 6\overline{s_i} \quad \text{onde} \quad \overline{s_i} = \frac{s_i \uparrow + s_i \downarrow}{2} \quad 2.3$$

O erro aleatório segundo Weck (1984) equivale a ± 3 vezes o desvio padrão médio de cada posição, $\overline{s_i}$, sendo que o desvio padrão médio corresponde a média entre os desvios padrões de ida e de volta, para cada posição. É assumido que eventualmente se a máquina calibrada estiver bem ajustada, o erro aleatório no sentido de ida equivale ao erro aleatório no sentido de volta.

2.3 Separação de Erros

Neste item 2.3 estão apresentados alguns métodos de separação de erros que permitem o desacoplamento dos erros com aplicação de procedimentos de medição e alguns métodos matemáticos.

As separações de erros são aplicadas com objetivo da remoção do erro sobre uma característica medida, sem auxílio de calibração. Informações de erros do sistema de medição e características da peça podem ser obtidas. Métodos matemáticos são aplicados para remoção do erro, para isto, são necessárias medições redundantes.

A maioria dos estudos relacionados à separação de erros faz menção às obras de Whitehouse (1976), Tanaka et al. (1981) e Evans, Hocken e Estler. (1996), podendo assim considerá-las precursoras e formadoras deste conceito.

Segundo Whitehouse (1976), Evans, Hocken e Estler (1996), Paziani, Di Giacomo e Tsunaki (2007), Marsh, Arneson e Martin (2010), Fung e Zhu (2012) e Chen et al. (2014) a aplicação dos métodos de separação de erros permite conhecer e remover da indicação do equipamento, a contribuição do erro de um artefato imperfeito em relação a geometria ideal requerida, além do erro envolvido ao dispositivo de medição.

A separação de erros está associada a sistemas que envolvem deslocamentos rotativos ou sobre guias lineares, sendo eles elementos pertencentes às máquinas de fabricação ou não. Esta separação torna possível extrair e identificar os erros dos elementos envolvidos, peça e máquina. Evans e Estler (2011) afirmam que as informações obtidas com a separação de erros estão relacionadas à peça, ao instrumento de medição ou ambos. Fundamentos algébricos e de simulações numéricas são necessários e demasiadamente aplicados, estes contribuem para o conhecimento do erro da peça medida como também para os erros do dispositivo de medição.

Técnicas de separação de erros são constantemente estudadas visando reduzir medições incorretas em inspeções dimensionais de peças fabricadas, além de poder ser aplicadas para verificação do desempenho metrológico de máquinas ferramentas.

Trabalhos publicados na última década envolvendo separação de erros são relacionados a sistemas rotativos e também a sistemas compostos por guias lineares. Autores como Marsh, Arneson e Martin (2010), Lee et al. (2012) e Chen et al. (2014) avaliaram sistemas rotativos aplicando múltiplas sondas, enquanto publicações de Hwang et al. (2007), Paziani, Di Giacomo e Tsunaki (2009), Fung e Zhu (2012) estão relacionados a sistemas com deslocamentos lineares.

Nas verificações de erros utilizando elementos rotativos como também elementos de deslocamentos lineares são aplicadas técnicas de separação de erros, através de diferentes métodos, que são conhecidos como “múltiplas sondas”, “reversão” e “múltiplas etapas”, traduzidos do inglês *multiprobe*, *reversal* e *multi-step*.

2.3.1 Método da Reversão

Este método exige a execução de ao menos duas medições em uma mesma região da peça, porém, revertendo-a. O erro da peça medida, devido sua geometria imperfeita, é separado do erro do dispositivo de medição, que está relacionado aos erros cinemáticos envolvidos no sistema de deslocamento do próprio dispositivo. Esta separação é possível pela inversão do sinal do erro de um dos componentes medidos, que ocorre ao medir a peça após sua reversão.

2.3.1.1 Reversão Aplicada ao Erro de Nível

A inclinação de uma superfície pode ser definida pela reversão de um nível, já que em uma medição de nivelamento deve se considerar o desnivelamento do próprio instrumento em relação aos apoios (EVANS, HOCKEN e ESTLER, 1996).

A figura 2.4 ilustra um procedimento típico de verificação de nivelamento utilizando reversão do instrumento de medição.

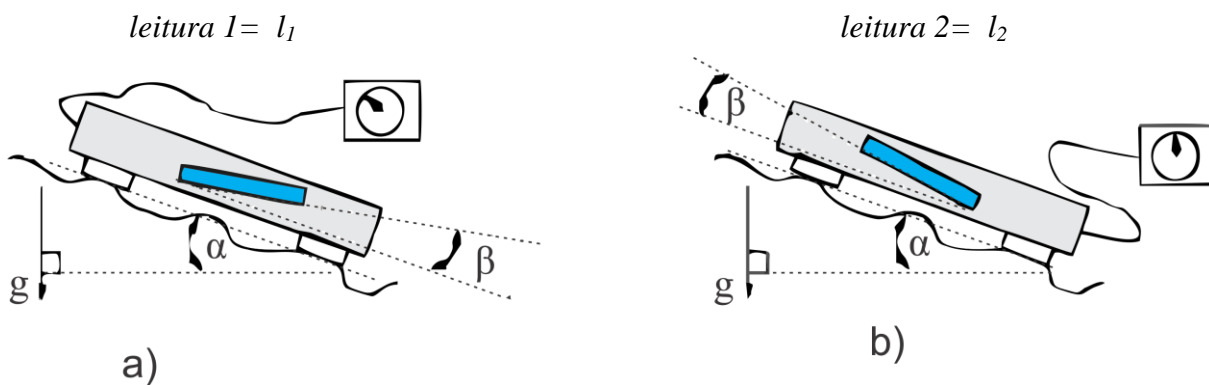


Figura 2. 4: Reversão aplicada em medição de nível.

Através da reversão, podem ser obtidas as leituras l_1 e l_2 , que são as leituras do instrumento com a reversão e sem a reversão respectivamente. As equações 2.4 e 2.5 definem as leituras, o ângulo α corresponde ao desalinhamento da superfície, enquanto o ângulo β corresponde ao ângulo necessário para "zerar" a inclinação do instrumento, que é o ângulo formado pelo pêndulo e a base de referência.

$$l_1 = \alpha - \beta \quad 2.4$$

$$l_2 = \alpha + \beta \quad 2.5$$

Reorganizando as equações 2.4 e 2.5 e isolando as variáveis, é possível obter as equações 2.6 e 2.7, que permitem conhecer os ângulos α e β , respectivamente.

$$\alpha = \frac{l_1 + l_2}{2} \quad 2.6$$

$$\beta = \frac{l_1 - l_2}{2} \quad 2.7$$

2.3.1.2 Reversão Aplicada a Eixos Rotativos

A reversão aplicada para separação de erros de uma peça medida em eixos rotativos é executada em duas etapas de medições. A peça medida e sensor são rotacionados em 180° na segunda medição em relação à primeira. O método é exemplificado nas montagens a) e b) da figura 2.5 (MARSH; ARNESON; MARTIN, 2010).

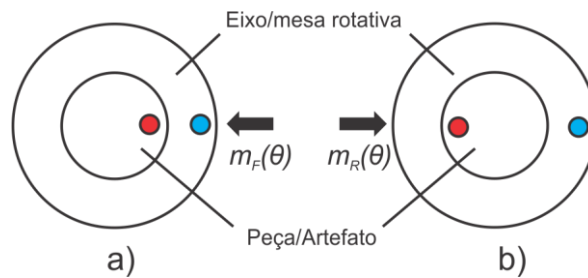


Figura 2. 5: Método de reversão para separação de erros em medições com eixos rotativos.
Adaptado de: Marsh, Arneson e Martin (2010)

A figura 2.5 exemplifica medições de desvio radial em peças com geometrias geradas por revolução. Ao empregar o método de reversão, é possível a obtenção de equações de separação de erros 2.8 e 2.9, onde $A(\theta)$ é o perfil de circularidade do artefato, $S(\theta)$ é o desvio erro radial do eixo rotativo, $m_F(\theta)$ é a leitura do sensor na montagem (a) e $m_R(\theta)$ é a leitura do sensor em (b).

$$m_F(\theta) = S(\theta) + A(\theta) \quad 2.8$$

$$m_R(\theta) = -S(\theta) + A(\theta) \quad 2.9$$

Então, os erros do artefato $A(\theta)$ e do eixo rotativo $S(\theta)$ podem ser obtidos com as equações 2.10 e 2.11:

$$S(\theta) = \frac{m_F(\theta) - m_R(\theta)}{2} \quad 2.10$$

$$A(\theta) = \frac{m_F(\theta) + m_R(\theta)}{2} \quad 2.11$$

2.3.1.3 Reversão aplicada em Guias Lineares

Segundo Evans, Hocken e Estler (1996), a separação de erros em medição de reticidade é realizada de forma semelhante ao aplicado em medições sobre eixos rotativos. Neste método, a peça medida e o sensor são revertidos após a primeira medição, no entanto, a segunda medição é feita na mesma face da primeira. A figura 2.6 ilustra um procedimento de medição de desvios de reticidade de uma peça utilizando guias lineares, em 2.6a) é ilustrado o procedimento de medição sem a reversão, e em 2.6b) está ilustrado o procedimento com aplicação da reversão da peça.

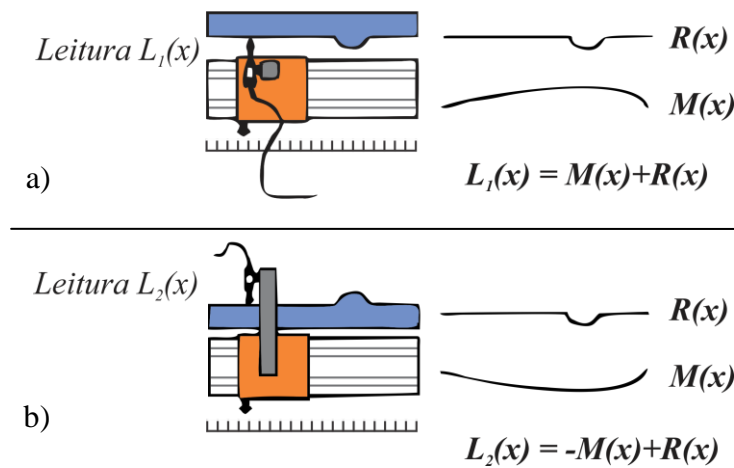


Figura 2. 6: Reversão aplicada em guias lineares para verificação de desvios de reticidade.

Pela reversão é possível equacionar os desvios de reticidade do carro da máquina $M(x)$ e da peça $R(x)$, as equações 2.12 e 2.13 apresentam os desvios.

$$M(x) = \frac{L_1(x) - L_2(x)}{2} \quad 2.12$$

$$R(x) = \frac{L_1(x) + L_2(x)}{2} \quad 2.13$$

Onde:

$M(x)$ é uma função discreta que representa o perfil de reticidade da máquina

$R(x)$ é uma função discreta que representa o perfil de reticidade da peça

$L_1(x)$ é uma função discreta das leituras do sensor na primeira medição

$L_2(x)$ é uma função discreta das leituras do sensor na segunda posição, posição revertida

Segundo Evans, Hocken e Estler (1996) a reversão apresenta uma parcela de incerteza que provém dos efeitos ambientais, porém, mesmo em ambientes controlados a incerteza deve ser considerada devido a presença de erros de posicionamento da peça e do sensor de medição, desta forma, na equação da leitura 2, que corresponde a leitura após a reversão, deve ser acrescida um erro de posicionamento Δx . A equação 2.14 apresenta a leitura 2.

$$L_2(x) = -M(x) + R(x + \Delta x) \quad 2.14$$

Assim, o perfil de reticidade do deslocamento do carro da máquina é representado pela equação 2.15.

$$M(x) - \delta x = \frac{L_1(x) - L_2(x)}{2} \quad 2.15$$

A incógnita δx é definida pelos valores do perfil de reticidade da peça, conforme equação 2.16.

$$\delta x = \frac{R(x) - R(x + \Delta x)}{2} = -\frac{1}{2} \Delta x \frac{\partial R(x)}{\partial x} \quad 2.16$$

2.3.1.4 Reversão Aplicada ao Erro de Perpendicularismo

O método de reversão aplicado na verificação de desvio devido à falta de perpendicularismo pode ser verificado na figura 2.7.

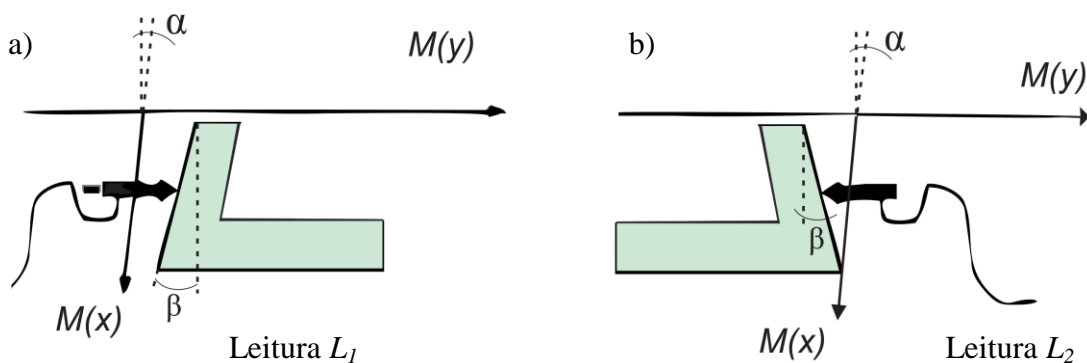


Figura 2. 7: Método da reversão para avaliação do erro de perpendicularismo.

Este tipo de reversão é uma versão simples dos métodos de separação de erros e resulta em equações idênticas as equações obtidas com a reversão aplicada em medições com nível (EVANS; HOCKEN e ESTLER, 1996). Os valores de inclinação, L_1 e L_2 são obtidos

com o ajuste de reta sobre os pontos coletados, que pode ser feito utilizando o método dos mínimos quadrados ou outro método equivalente. As leituras L_1 e L_2 são apresentadas nas equações 2.17 e 2.18 e os valores de α e β nas equações 2.19 e 2.20.

$$L_1 = \alpha - \beta \quad 2.17$$

$$L_2 = \alpha + \beta \quad 2.18$$

$$\alpha = \frac{L_1 + L_2}{2} \quad 2.19$$

$$\beta = \frac{L_2 - L_1}{2} \quad 2.20$$

2.3.1.5 Reversão de Estler aplicada à movimentação axial

Segundo Evans, Hocken e Estler (1996), este tipo de reversão permite separar três tipos de erros, que são: a movimentação axial do eixo árvore, o erro devido à inclinação do eixo árvore e o desvio de planicidade de um plano de referência, no caso, a face da peça. Para isto, dois sensores são colocados perpendicularmente sobre a face plana da peça, um dos sensores é alinhado ao eixo de rotação do eixo árvore e o outro distante do centro de giro. Em uma primeira etapa os sensores coletam as leituras L_{a1} e L_{b1} , sendo que as leituras L_{b1} são obtidas sobre o eixo de rotação do eixo árvore. Já em uma segunda etapa os sensores que fazem as leituras de L_{a1} e L_{b1} são rotacionados em 180° juntamente com a peça, possibilitando obter as leituras L_{a2} e L_{b2} . A figura 2.8 ilustra o método.

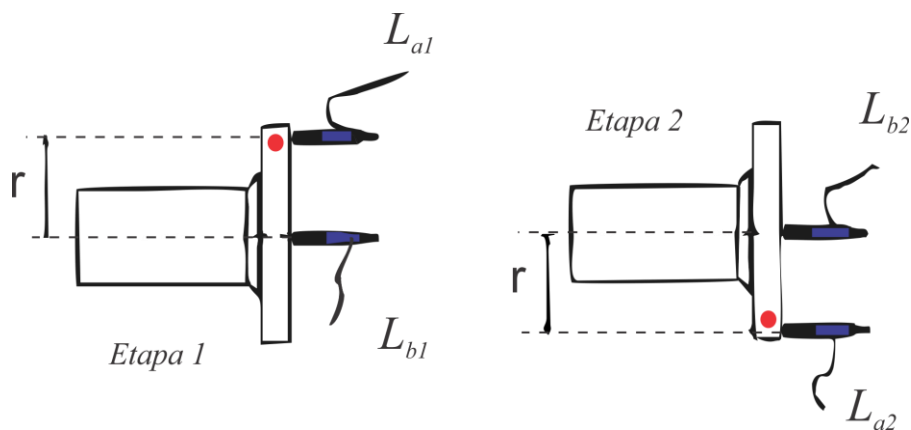


Figura 2. 8: Reversão aplicada para separação de erros de movimentação axial e inclinação.

Com a rotação do eixo árvore, nas leituras dos sensores antes da reversão, L_{a1} e L_{b1} , e nas leituras após a reversão, L_{a2} e L_{b2} , estão contidos os parâmetros de desvio de planicidade do plano de referência $P(\theta)$, a inclinação do eixo árvore $T(\theta)$ e a batida axial $A(\theta)$. Desta forma, é possível obter as equações 2.21, 2.22 e 2.23, que se referem às leituras dos sensores:

$$L_{b1} = L_{b2} = A(\theta) \quad 2.21$$

$$L_{a1} = P(\theta) + r.T(\theta) + A(\theta) \quad 2.22$$

$$L_{a2} = P(\theta) - r.T(\theta) + A(\theta) \quad 2.23$$

Segundo Evans, Hocken e Estler (1996), no procedimento de medição executado na segunda etapa, não é necessário a medição sobre o centro de rotação do eixo árvore, porém, para diminuir a incerteza do valor obtido é utilizada a média das leituras L_{b1} e L_{b2} para definir a batida axial, conforme a equação 2.24.

$$A(\theta) = \frac{L_{b1} + L_{b2}}{2} \quad 2.24$$

O desvio de planicidade e a inclinação do eixo árvore podem ser obtidos pelas equações 2.25 e 2.26.

$$P(\theta) = \frac{L_{a1} + L_{a2}}{2} - \frac{L_{b1} + L_{b2}}{2} \quad 2.25$$

$$T(\theta) = \frac{1}{r} \left(\frac{L_{a1} - L_{a2}}{2} - \frac{L_{b1} + L_{b2}}{2} \right) \quad 2.26$$

2.3.2 Múltiplas sondas

A separação de erros utilizando o método de múltiplas sondas consiste na solução algébrica do modelo de erros, que é elaborado a partir da observação dos valores de deslocamentos obtidos com as sondas de medição utilizadas.

Tanaka et al. (1981) propôs a separação de erros em uma máquina ferramenta utilizando múltiplas sondas. Com este método, o autor elaborou modelagens de erros, onde é possível separar os erros de retilidade do carro porta ferramenta e da superfície da peça objetivo usinada. Neste método, os autores utilizam duas sondas para medir o deslocamento linear relativo entre peça e carro porta ferramentas, a verificação desse deslocamento é feito em posições distintas, com sobreposição de leituras, o que evidencia a redundância de medição para separação de erros. A figura 2.9, exemplifica o sistema montado de medição.

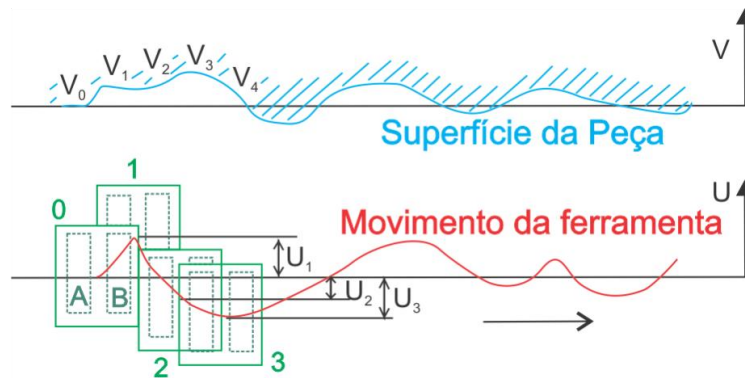


Figura 2. 9: Separação de erros de retilidade entre peça e máquina ferramenta.
Adaptado de: Tanaka et al. (1981).

Na figura 2.9, U representa o erro de retilidade da máquina ferramenta, enquanto V representa o erro de retilidade da peça. As sondas de medição são representadas por A e B , já as posições de medição pelos números 1, 2 e 3. Os autores separam os erros a partir dos valores de deslocamentos relativos, apontados pelas sondas A e B , entre as posições medidas. Os deslocamentos observados podem ser modelados de acordo com as equações 2.27 a 2.31.

$$D_{0,B} - D_{0,A} = V_1 \quad 2.27$$

$$D_{1,A} - D_{0,A} = V_1 - U_1 \quad 2.28$$

$$D_{1,B} - D_{0,B} = (V_2 - V_1) - U_1 \quad 2.29$$

$$D_{2,A} - D_{0,A} = V_2 - U_2 \quad 2.30$$

$$D_{2,B} - D_{0,B} = (V_3 - V_1) - U_2 \quad 2.31$$

Em uma forma geral, para qualquer posição medida além da referência, os erros de reticidade do carro porta ferramenta e da peça são modelados nas equações 2.32 e 2.33 respectivamente.

$$U_i = U_{i-1} + D_{(i-1),B} - D_{i,A} \quad 2.32$$

$$V_i = U_i + D_{1,A} - D_{0,A} \quad 2.33$$

A variável D corresponde à leitura da sonda, os subíndices i correspondem a i -ésima posição medida, enquanto os subíndices A e B se referem aos sensores A e B .

Paziani (2005), Paziani, Di Giacomo e Tsunaki. (2007) e Paziani, Di Giacomo e Tsunaki (2009) desenvolveram um sistema automatizado de medição com robô ABB. Os autores aplicaram o método com múltiplas sondas e separaram o erro de reticidade da peça medida e do sistema automatizado desenvolvido. Sensores de deslocamentos lineares, do tipo LVDT's, foram utilizados e acoplados ao robô para medição. Para separação, os autores elaboraram modelagens sobre os erros, as equações consideraram medições redundantes e as variáveis de leitura foram definidas como os valores obtidos pela leitura dos sensores. A solução numérica do sistema de equações elaborada com as modelagens permitiu a separação de erros.

2.3.3 Múltiplas Etapas

Segundo Marsh, Arneson e Martin (2010) o método de separação de erros em múltiplas etapas é aplicado para separação de erros em medições que utilizam eixos rotativos. A aplicação deste método exige redundantes medições, o sensor de medição de deslocamento é estacionário, enquanto o eixo ou base rotativa onde é fixada a peça é rotacionada. O sensor coleta a leitura de deslocamentos radiais na peça, em posições incrementais igualmente espaçadas, o movimento da base rotativa é indexado em um total de 360°.

Chen et al. (2014) aplicaram um método combinado de separação de erros em um medidor de perfil tridimensional. Os autores utilizaram duas sondas de medição para o deslocamento radial e utilizaram duas etapas de medição, o método foi denominado *two-step-two-probe*. No trabalho proposto por Chen et al. (2014) foi medido um hemisfério padrão em várias seções sobre uma mesa rotativa, o que possibilitou através da solução dos modelos

elaborados conhecer o desvio radial provocado pela mesa, conhecido como erro de batimento. O desvio provocado pela falta de perpendicularismo entre a sonda de medição e o eixo da base rotativa também foi obtido com este método. A figura 2.10 apresenta a montagem utilizada para posicionamento das sondas, a peça padrão medida e as etapas de medição.

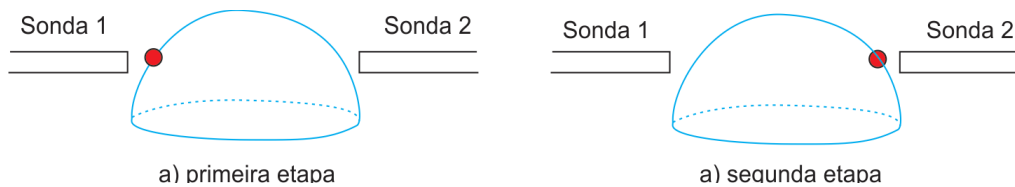


Figura 2. 10: Método de separação de erros two-step-two-probe.
Adaptado de: Chen et al. (2014)

As equações 2.34 e 2.35 apresentam as modelagens das leituras obtidas nas sondas 1 e 2 após rotação em 180° do hemisfério, enquanto as equações de separação de erros são apresentadas em 2.36 e 2.37.

$$V_1(\theta, z) = R(\theta, z) - T(\theta, z) + S(\theta, z) \quad 2.34$$

$$V_2(\theta, z) = R(\theta, z) - T(\theta, z) - S(\theta, z) \quad 2.35$$

Onde:

$R(\theta, z)$ é o erro de circularidade da peça, o hemisfério;

$T(\theta, z)$ é a falta de perpendicularismo entre a sonda de medição e eixo da base rotativa;

$S(\theta, z)$ é o desvio radial provocado pela mesa rotativa.

$$R(\theta, z) - T(\theta, z) = [V_1(\theta, z) + V_2(\theta, z)] / 2 \quad 2.36$$

$$S(\theta, z) = [V_1(\theta, z) - V_2(\theta, z)] / 2 \quad 2.37$$

2.3.4 Separação de erros aplicados em equipamentos de medição por coordenadas

Nafi, Mayer e Wozniak (2011, 2012) apresentaram métodos de separação de erros em pontos coordenados, coletados em medições por coordenadas utilizando MMC. Os autores utilizaram o método de múltiplas etapas para aplicar a separação de erros, a redundância de medição neste método também foi necessária ao medir diversas vezes uma esfera, alterando as direções de sondagem. Os métodos apresentados pelos autores envolvem métodos de separação de erros em MMC com o propósito de remover os erros de medições, porém, o método é executado com auxílio de uma peça específica.

Nafi, Mayer e Wozniak (2011) aplicaram a separação de erros com medições em múltiplas posições do volume da MMC, o que caracterizou a redundância de dados. Esta técnica possibilitou evidenciar a influência dos erros da máquina e da apalpação nos resultados de medição de circunferências de uma esfera. Uma configuração reduzida para separação de erros em MMC foi elaborada por Nafi, Mayer e Wozniak (2012), os autores propuseram um método com menor quantidade de apalpações para obtenção de circunferências de uma esfera padrão, o que permitiu aperfeiçoar o tempo de ensaio para a obtenção dos resultados. No método de Nafi, Mayer e Wozniak (2012) foram elaboradas modelagens de um sistema linear de equações e com a solução deste sistema, os autores alcançaram a separação de erros.

Yoo e Kim (2004) e Dang, Yoo e Kim (2006) aplicaram um método de separação de erros por redundância de dados a partir da sobreposição das leituras dos pontos coletados. A aplicação do método permite igualar os desvios das leituras dos pontos para diferentes pontos físicos da peça medida. Diante desta alternativa foi possível solucionar a modelagem proposta, representada por um sistema de equações, assim, foram obtidos os erros relacionados às medidas requeridas. A figura 2.11 exemplifica a sobreposição de pontos utilizada pelos autores.

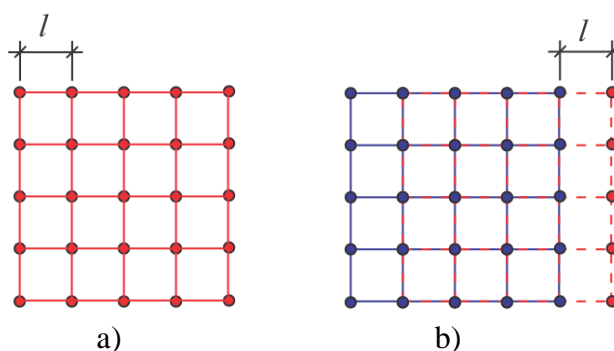


Figura 2. 11: Etapas de coletas de dados utilizando sobreposição de pontos.

A figura 2.11 representa os pontos coletados de uma superfície de uma peça, estes pontos estão organizados sobre uma malha. Em 2.11a é representada uma etapa inicial de coleta pontos, sendo 25 pontos no total, enquanto em 2.11b é uma segunda etapa de coleta de dados para os mesmos 25 pontos, porém, nesta etapa, as posições dos pontos físicos da peça estão defasadas a uma distância l da posição inicial, representada em 2.11a. A distância de deslocamento da peça é equivalente ao passo da disposição dos pontos coletados, desta forma, as leituras dos pontos são sobrepostas e permitem ter os mesmos erros para diferentes pontos físicos da peça. Segundo Yoo e Kim (2004) e Dang, Yoo e Kim (2006) problemas como o desalinhamento após a movimentação da peça e a falta de repetibilidade entre as coletas de pontos são fatores prejudiciais na solução. Os autores modelaram os desalinhamentos para realização da solução numérica.

CAPÍTULO 3

FUNDAMENTOS SOBRE MODELAGEM DOS ERROS EM MMC, GEOMETRIA ANALÍTICA, ÁLGEBRA, FUNDAMENTOS ESTATÍSTICOS E TEORIA DE ERROS

Conceitos matemáticos e de origem estatística são importantes para solução de problemas em diversas áreas da ciência, assim como em engenharia. Estes conceitos são aplicados, sobretudo, em modelagens matemáticas de um fenômeno, como também em interpretações de resultados. A utilização destes conceitos permite o desenvolvimento tecnológico, possibilitam modelar matematicamente problemas e embasar relatórios técnicos, laudos, certificações e publicações de caráter científico, oferecendo consistência e garantindo veracidade na apresentação de resultados. Assim, neste capítulo são apresentados a modelagem dos erros da máquina por transformações homogêneas, conceitos de geometria analítica, álgebra e fundamentos da área estatística, pois, todos estes são utilizados no transcorrer deste trabalho.

3.1 Modelagem dos erros geométricos e individuais da MMC com influência nas direções principais x, y e z

A modelagem dos erros nas direções principais da MMC requer uma análise vetorial dos erros e para isto, sistemas de coordenadas foram definidos em regiões específicas da MMC. A abordagem vetorial e os sistemas de coordenadas estão apresentados na figura 3.1, que é um diagrama que representa a estrutura da máquina de medir por coordenadas e os deslocamentos possíveis dos eixos nas direções principais, x, y e z.

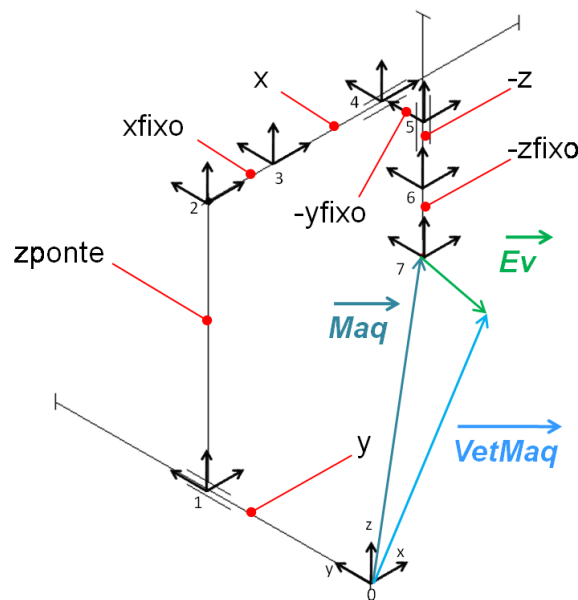


Figura 3. 1: Diagrama representativo da estrutura da MMC.

Pela figura 3.1, através da abordagem vetorial, é possível definir o erro volumétrico, \vec{E}_v , da MMC. Cada coordenada do vetor que representa o erro volumétrico é a soma dos erros geométricos e individuais da MMC, que são influentes na direção x, y e z. A soma dos erros individuais da MMC com influência nas direções x, y e z, são representados por E_x , E_y e E_z . As equações 3.1 e 3.2 apresentam respectivamente o vetor e o módulo do erro volumétrico.

$$\vec{E}_v = \vec{VetMaq} - \vec{Maq} = (E_x, E_y, E_z) \quad 3.1$$

$$|\vec{E}_v| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} \quad 3.2$$

Para determinação dos erros geométricos influentes nas direções preferenciais da MMC são definidas algumas considerações, nomenclaturas e simbologias, que são essenciais para o entendimento da modelagem dos erros por transformações homogêneas. As tabelas 3.1 e 3.2 apresentam as considerações, nomenclaturas e simbologias adotadas.

Tabela 3 1: Considerações e simbologias adotadas para modelagem dos erros nas direções preferenciais da MMC pelo método das transformações homogêneas.
Fonte: Adaptado de Di Giacomo (1986)

Simbologia dos Erros	Descrição do Erros
$\delta u(v)$	Erros de posição na direção u devido ao movimento na direção v
$\delta\theta u(v)$	Erros angulares em torno da direção u devido ao movimento na direção v
$\delta\theta_{wo}$	Erros angulares devido a falta de ortogonalidade entre os eixos perpendiculares à direção w
$\text{sen } \delta\theta = \delta\theta$ $\text{cos } \delta\theta = 1$	Aproximações devido deslocamentos angulares infinitesimais

Tabela 3 2: Nomenclatura e simbologias adotadas para modelagem de erros por transformações homogêneas.

Tipo de Erro	Simbologia Para os Erros			
	<i>Direções</i>	x	y	z
Posição		$\delta x(x)$	$\delta y(y)$	$\delta z(z)$
Retilidade		$\delta y(x)$	$\delta x(y)$	$\delta x(z)$
		$\delta z(x)$	$\delta z(y)$	$\delta y(z)$
Pitch		$\delta\theta y(x)$	$\delta\theta x(y)$	$\delta\theta x(z)$
Yaw		$\delta\theta z(x)$	$\delta\theta z(y)$	$\delta\theta y(z)$
Roll		$\delta\theta x(x)$	$\delta\theta y(y)$	$\delta\theta z(z)$
Ortogonalidade		$\delta\theta_{xo}$	$\delta\theta_{yo}$	$\delta\theta_{zo}$

Os vetores \overrightarrow{Maq} e \overrightarrow{VetMaq} são obtidos a partir da matriz $Maq1$ e $VetMaq1$. A matriz $Maq1$ é definida pela análise do trajeto com coordenadas puras, sem erro, que une o sistema de coordenadas inicial, o sistema de coordenadas 0, até o sistema coordenadas 7, que é o sistema de coordenadas final. A matriz $VetMaq1$ que representa os trajetos lineares com erros,

que unem o sistema de coordenadas 0 ao sistema de coordenadas 7, é definida pela multiplicação de todas as matrizes de cada intervalo entre os sistemas de coordenadas de 0 a 7, as matrizes destes intervalos, devem conter os erros incidentes do trajeto analisado. Para a montagem das matrizes $Maq1$ e $VetMaq1$ é aplicado a matriz geral de transformações homogêneas, denominada por M_{TH} e é representada pela equação 3.3.

$$M_{TH} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta_z(v) & \delta\theta_y(v) & \delta x(v) \\ \delta\theta_z(v) & 1 & -\delta\theta_x(v) & \delta y(v) \\ -\delta\theta_y(v) & \delta\theta_x(v) & 1 & \delta z(v) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3.3$$

Na análise do trajeto sem erro, que une o sistema de coordenadas 0 a 7 é definida a matriz $Maq1$ representada na equação 3.4.

$$Maq1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x + xfixo \\ 0 & 1 & 0 & y - yfixo \\ 0 & 0 & 1 & z_{ponte} - z - zfixo \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3.4$$

Ao multiplicar $Maq1$ pelo vetor coluna $(0,0,0,1)^T$ é obtido o vetor \overrightarrow{Maq} , que está apresentado na equação 3.5.

$$\overrightarrow{Maq} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x + xfixo \\ 0 & 1 & 0 & y - yfixo \\ 0 & 0 & 1 & z_{ponte} - z - zfixo \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + xfixo \\ y - yfixo \\ z_{ponte} - z - zfixo \\ 1 \end{pmatrix} \quad 3.5$$

Na equação 3.5, a quarta dimensão do vetor representa um fator de escala das coordenadas, assim \overrightarrow{Maq} pode ser tridimensionalmente representado pela equação 3.6.

$$\overrightarrow{Maq} = \begin{pmatrix} x + xfixo \\ y - yfixo \\ z_{ponte} - z - zfixo \end{pmatrix} \quad 3.6$$

A matriz $VetMaq1$ é definida pela transformação de coordenadas do sistema de coordenadas 7 em coordenadas do sistema de coordenadas 0 e é efetuada pela multiplicação das matrizes intermediárias, conforme a equação 3.7.

$$VetMaq1 = [{}^0T_7] = [{}^0T_1] \times [{}^1T_2] \times [{}^2T_3] \times [{}^3T_4] \times [{}^4T_5] \times [{}^5T_6] \times [{}^6T_7] \quad 3.7$$

As matrizes intermediárias são definidas com o preenchimento da matriz geral de transformações homogêneas, apresentada na equação 3.3, com os componentes de erros e de deslocamentos puros, sem erros, de cada trajeto entre os sistemas de coordenadas 0 a 7. As equações de 3.8 a 3.21 apresentam a modelagem de cada trajeto entre os sistemas de coordenadas de 0 a 7. Como o produto de matrizes não tem propriedade comutativa, a determinação dos fatores dos produtos das matrizes deve ser feito de forma própria, respeitando-se a ordem: primeiro a matriz de deslocamento puro e depois a matriz contendo erro do trajeto.

Definição [{}^0T_1]:

$$[{}^0T_1] = [Mov\ y_1^0] \times [Erro\ y_1^0] \quad 3.8$$

Onde:

$[Mov\ y_1^0]$ é a matriz que representa um trajeto com deslocamento puro entre os sistemas de coordenadas 0 e 1.

$[Erro\ y_1^0]$ é a matriz que representa os erros entre os sistemas de coordenadas 0 e 1.

Assim, realizando corretamente o preenchimento da matriz geral de transformações homogêneas, equação 3.3, é determinada a equação 3.9.

$$[{}^0T_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta_z(y) & \delta\theta_y(y) & \delta x(y) \\ \delta\theta_z(y) & 1 & -\delta\theta_x(y) & \delta y(y) \\ -\delta\theta_y(y) & \delta\theta_x(y) & 1 & \delta z(y) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3.9$$

Definição de 1T_2 :

Para o intervalo entre o sistema de coordenadas 1 e 2, a matriz é caracterizada pela equação 3.10, a obtenção da matriz deste intervalo é realizada de forma semelhante. Nota-se, porém, que não há presença de erros entre os sistemas de coordenadas 1 e 2, já que o trajeto é uma região fixa da máquina.

$${}^1T_2 = [Tr z_2^1] \quad 3.10$$

onde:

$[Tr z_2^1]$ é um trajeto com coordenada pura, sem erro.

$${}^1T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_{\text{ponte}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3.11$$

Definição de 2T_3 :

Para o trajeto entre os sistema de coordenadas 2 e 3 existe o erro devido a falta de ortogonalidade entre os eixos x e y , que deve ser representado antes da matriz de coordenada pura, já que este erro existe antes mesmo de qualquer deslocamento que pudesse ocorrer.

$${}^2T_3 = [Ort z] \times [Tr x_3^2] \quad 3.12$$

Onde:

$[Ort z]$ é a matriz que representa o erro de ortogonalidade entre os eixos x e y .

$${}^2T_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta_{zo} & 0 & 0 \\ \delta\theta_{zo} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{\text{fixo}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3.13$$

Definição de 3T_4 :

O trajeto entre os sistemas de coordenadas 3 e 4 é definido pelas matrizes representadas pelas equações 3.14 e 3.15.

$${}^3T_4 = [Mov x_4^3] \times [Erro x_4^3] \quad 3.14$$

$${}^3T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -\delta\theta_z(x) & \delta\theta_y(x) & \delta x(x) \\ \delta\theta_z(x) & 1 & -\delta\theta_x(x) & \delta y(x) \\ -\delta\theta_y(x) & \delta\theta_x(x) & 1 & \delta z(x) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3.15$$

Definição de 4T_5 :

O trajeto entre os sistemas de coordenadas 4 e 5 é definido pela matriz contendo apenas uma coordenada pura, definida na figura 3.1 como *-yfixo*.

$${}^4T_5 = [Tr y_5^4] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -y \text{ fixo} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3.16$$

Definição de 5T_6 :

A definição da matriz 5T_6 é peculiar, sendo que para sua montagem as matrizes de erros antecedem a matriz de movimento com coordenadas puras, pois neste caso, a régua é fixa na parte móvel da máquina, diferentemente dos mecanismos de funcionamento para os outros eixos da máquina, onde a régua é fixa nas guias e os carros é que se movimentam.

$${}^5T_6 = [Ort y/x] \times [Erro z_6^5] \times [Mov z_6^5] \quad 3.17$$

Na montagem da matriz 5T_6 se faz ainda necessário à adição de dois tipos de erros, o erro devido à falta de ortogonalidade entre os eixos x e z e entre os eixos y e z , $[Ort\ y/x]$, além dos erros durante o deslocamento do eixo, representada pela matriz $[Erro\ z_6^5]$.

$${}^5T_6 = [Ort\ y/x] \times [Erro\ z_6^5] \times [Mov\ z_6^5] \quad 3.18$$

$${}^5T_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \delta\theta_{yo} & 0 \\ 0 & 1 & -\delta\theta_{xo} & 0 \\ -\delta\theta_{yo} & \delta\theta_{xo} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta_x(z) & \delta\theta_y(z) & \delta x(z) \\ \delta\theta_x(z) & 1 & -\delta\theta_x(z) & \delta y(z) \\ -\delta\theta_y(z) & \delta\theta_x(z) & 1 & \delta z(z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3.19$$

Definição de 6T_7 :

A matriz que representa o trajeto entre os sistemas de coordenadas 6 e 7 é apresentada nas equações 3.20 e 3.21.

$${}^6T_7 = [Trz_7^6] \quad 3.20$$

$${}^6T_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z\ fixed \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3.21$$

Após a definição de todas as matrizes intermediárias é obtida a matriz $VetMaq1$, já a obtenção do vetor \overrightarrow{VetMaq} é conseguida pelo produto da matriz $VetMaq1$ por uma matriz coluna, $(0,0,0,1)^T$, o resultado é um vetor de quatro dimensões. A quarta dimensão do vetor

representa um fator de escala para as coordenadas do vetor \overrightarrow{VetMaq} e pode ser desconsiderada já que este fator possui valor 1. A equação 3.22 representa o vetor \overrightarrow{VetMaq} .

$$\overrightarrow{VetMaq} = VetMaq1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = [{}^0T_7] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 3.22$$

Conhecendo os valores dos vetores, \overrightarrow{VetMaq} e \overrightarrow{Maq} , e desconsiderando os erros de segunda ordem conforme Di Giacomo (1986) é então possível obter o vetor erro volumétrico \overrightarrow{Ev} a partir da equação 3.1. As coordenadas do vetor são as próprias equações que representam as somas dos erros individuais nas direções x , y e z , estas somas são representadas por Ex , Ey e Ez e estão apresentadas nas equações 3.23, 3.24 e 3.25.

$$\begin{aligned} Ex = & -\delta\theta(x) \times (z + zfixo) + \delta\theta(z) \times yfixo + \delta\theta(y) \times (z_{ponte} - z - zfixo) \\ & - \delta\theta(z) \times (z + zfixo) + \delta\theta(x) \times (yfixo) - \delta\theta_o \times (z + zfixo) + \delta\theta_o \times (yfixo) \\ & + \delta x(x) + \delta x(y) + \delta x(z) \end{aligned} \quad 3.23$$

$$\begin{aligned} Ey = & \delta\theta(x) \times (z + zfixo) - \delta\theta(x) \times (z_{ponte} - z - zfixo) \\ & + \delta\theta(y) \times (x + xfixo) + \delta\theta(z) \times (z + zfixo) + \delta\theta_o \times (x + xfixo) \\ & + \delta\theta_o \times (z + zfixo) + \delta y(x) + \delta y(y) + \delta y(z) \end{aligned} \quad 3.24$$

$$\begin{aligned} Ez = & -\delta\theta(x) \times yfixo - \delta\theta(x) \times yfixo - \delta\theta(y) \times (x + xfixo) \\ & + \delta z(x) + \delta z(y) + \delta z(z) \end{aligned} \quad 3.25$$

3.2 Geometria Analítica e Geometrias Associadas

Na medição por coordenadas, apesar de nem sempre explicito devido o emprego de softwares com interfaces facilitadas, são aplicados conhecimentos sobre geometria analítica.

Neste tipo de medição, são necessários: definições de planos, projeções de pontos coletados, cálculos de distâncias entre elementos geométricos como pontos, retas e planos, além de determinação de geometrias a partir de pontos medidos. Uma abordagem de geometria analítica sob a forma vetorial também é empregada em assuntos relativos à medição por coordenadas, que, além de aplicações sob a forma de cálculo de distâncias, pode ser também observada na modelagem matemática de erros de MMC's, como pode ser visto em Cardoza (1995), Weekers e Schellekens (1995), Orrego (1999), Zhang (2011), Morais (2012), Di Giacomo et. al (2013).

3.2.1 Cálculo de Distâncias

As medições por coordenadas estão relacionada a cálculos de distâncias. Peças inspecionadas em equipamentos de medição por coordenadas são medidas com a obtenção de distâncias de posições relativas de seus elementos, como no caso deste trabalho, a distâncias entre superfícies de uma peça.

Em busca de qualidade em inspeção dimensional, empresas investem no desenvolvimento de softwares com interfaces facilitadas, que permitem a escolha de métodos de obtenção de distância em medição por coordenadas de acordo com a necessidade do operador, assim, é necessário e justificado o desenvolvimento científico da área. Observando a demanda de mercado e carência científica, Marques (2003) desenvolveu uma interface computacional para medição por coordenadas aplicada em uma MMC.

O conhecimento das coordenadas de um elemento medido é necessário durante a inspeção dimensional de peças em MMC, já que as geometrias medidas são obtidas a partir de algoritmos específicos que utilizam informações das coordenadas de pontos coletado, por esta razão, se dá origem ao nome do tipo de medição, medição por coordenadas. Fundamentos de geometria analítica são aplicados na obtenção da posição em \mathfrak{R}^3 de elementos geométricos como pontos, retas e planos, como também em cálculos de distâncias efetuados através das rotinas elaboradas na programação do software operacional da máquina.

A distância entre elementos geométricos é calculada de maneira minimalista, ou seja, é definida como a menor distância entre eles, cálculos de distâncias entre elementos geométricos em um espaço \mathfrak{R}^3 podem ser simplificados à geometria plana. Considerando Ψ e

Ω como pontos, retas ou planos de \mathfrak{R}^3 , se há intersecção entre Ψ e Ω , $\Psi \cap \Omega \neq \emptyset$, então a distância entre eles é igual a zero, $d(\Psi, \Omega) = 0$ (CAMARGO E BOULOS, 2012).

Em geometria euclidiana, de acordo com Camargo e Boulos (2012), sempre existe essa distância mínima entre elementos geométricos e comumente está associada a um perpendicularismo.

3.2.1.1 Distância entre pontos

A Distância entre dois pontos em \mathfrak{R}^3 é calculada com a equação 3.26, onde x_1 , y_1 e z_1 são coordenadas do ponto A , e, x_2 , y_2 e z_2 do ponto B .

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad 3.26$$

Em medição por coordenadas a distância entre pontos pode ser aplicada à distância entre centros de circunferências, que na prática se traduz ao determinar distância entre elementos circulares, como eixos de seção circular e furos circulares.

3.2.1.2 Distância de ponto a reta

A distância entre ponto e reta pode ser aplicada em medição por coordenadas, ao medir, por exemplo, a distância entre superfícies ou paredes de uma peça, sendo a reta uma representação de uma parede e o ponto de outra. Essa distância é calculada com equação 3.27, onde \overrightarrow{AP} é um vetor que une o ponto A ao ponto P , sendo A um ponto contido na reta r , e o vetor \overrightarrow{AB} é um vetor diretor de r .

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} \quad 3.27$$

A figura 3.1, ilustra a abordagem vetorial para cálculo de distância entre ponto e reta.

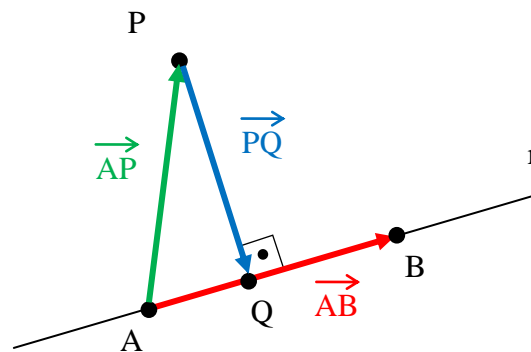


Figura 3. 2: Distância entre Ponto e Reta

Com a figura 3.2 é possível afirmar que a distância $d(P, r)$ é igual $d(P, Q)$ e é a menor entre o ponto P e qualquer outro ponto contido em r , essa distância pode ser interpretada como a distância de P à intersecção de uma reta perpendicular à r , determinada pelo ponto Q , que é projeção ortogonal de P sobre r .

Outra forma de cálculo de distância de ponto e reta é utilizando a equação da reta, esta forma de cálculo pode ser observada na equação 3.28.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad 3.28$$

Onde:

x_0 é a coordenada x do ponto em que se deseja saber a distância até a reta

y_0 é a coordenada y do ponto em que se deseja saber a distância até a reta

a é o coeficiente de x da reta, ou coeficiente angular

b é o coeficiente de y da reta

c é o termo independente

3.3 Sistemas de Equações Lineares

Durante muitos anos tem-se dedicado tempo e esforço à modelagem matemática de dos erros de MMC's, visando melhorar a qualidade de medições por coordenadas. A aplicação do método de separação de erros requer uma modelagem adequada e diferenciada dos erros da MMC, devendo-se considerar os erros influentes durante o seu funcionamento e também posições relativas no volume de trabalho da MMC.

A modelagem matemática dos erros aplicada neste trabalho permite obter equações que podem ser organizadas em sistemas de equações, possibilitando assim uma solução numérica.

Sistema de equações lineares podem ser classificados consistentes e inconsistentes, um sistema é conhecido como consistente se $rank(A,b) = rank(A)$. Sistemas lineares podem também ser classificados como sobredeterminados e subdeterminados, esta classificação está relacionada ao número de equações em relação ao número de incógnitas, o sistema sobredeterminado é constituído por um número maior de equações (linhas da matriz A) do que o número de incógnitas (colunas de A), uma situação contrária classifica o sistema de equações como subdeterminado.

O *rank* de uma matriz A , $rank(A)$, é o número de colunas ou linhas da matriz A que são linearmente independentes (LI). Se $A \in R^{m \times n}$, ou seja, se uma matriz A tem dimensão de m linhas e n colunas, então o *rank* da matriz A é menor ou igual o valor mínimo entre o número de colunas e número de linhas, $rank(A) \leq \min\{m, n\}$. Uma matriz A que possui *rank* completo de colunas significa que $rank(A) = n$, já, se a matriz A possui *rank* completo de linhas significa que $rank(A) = m$. Se a matriz A possui *rank* menor que o número de linhas ou número de colunas $rank(A) < \min\{m, n\}$, esta matriz possui *rank* deficiente (BJÖRK, 2009).

3.3.1 Soluções de sistemas de equações lineares

Para solução de sistemas lineares do tipo $Ax = b$, dois diferentes métodos podem ser aplicados, que são métodos diretos e métodos iterativos.

Os métodos diretos são característicos por utilizar a eliminação Gaussiana, a matriz A é transformada por uma sequência de transformações elementares num sistema de forma

simples, por exemplo, formas triangulares ou diagonais, este método pode ser resolvido de uma forma elementar. As soluções de sistemas lineares por meio de métodos diretos são exatas, desconsiderando erros de arredondamento, e alcançadas após um número finito de operações aritméticas. A aplicação de métodos diretos são geralmente inadequados para se obter a solução com sistemas lineares grandes que aparecem em muitas aplicações, inclusive em problemas de engenharia (BJÖRK, 2009).

Em métodos iterativos a matriz A nunca é transformada e na busca pela solução do sistema, apenas operações de matriz por vetores como Ax , são aplicadas. Geralmente, menos de 100 operações são necessárias para a obtenção de uma solução aproximada e suficientemente adequada, com pequena margem de erro. Nos métodos iterativos uma sequência de soluções aproximadas é calculada até uma convergência para a solução exata x , estes métodos são amplamente utilizados para solução de sistemas de equações com matrizes dos coeficientes esparsas (DAHLQUIST; BJÖRK, 2007), (BJÖRK, 2009).

Um dos desafios da computação científica é estimar um maior número de parâmetros a partir de um modelo matemático, as leituras dos dados do modelo estão sujeitas a erros e uma alternativa a isto é aumentar o número de leituras, porém, esta alternativa torna o sistema de equações $Ax = b$ inconsistente. Diante disto, o problema resultante é resolver o sistema e obter o vetor x , tal que os valores de Ax sejam o mais próximo possível dos valores de b . Esta forma de solução é conhecida como solução de mínima norma dos valores residuais e é muito aplicada em sistemas inconsistentes (BJÖRK, 2009).

A solução de sistemas de equações através da minimização da norma dos valores residuais é apresentada pela equação 3.29

$$\min_x \|b - Ax\|_2 \quad 3.29$$

Onde a norma representada por $\|\cdot\|_2$ é a norma euclidiana do vetor $(b - Ax)$, este tipo de abordagem também é conhecida como um problema linear de mínimos quadrados. A solução de sistemas lineares por métodos de minimização de normas é indicada para solução de sistemas sobredeterminados e subdeterminados e o método iterativo é indicado para a aplicação onde a matriz dos coeficientes é esparsa (GOLUB e VAN LOAN, 2013).

3.4 Conceitos Estatísticos

Uma análise de resultados adequada deve ser fundamentada em conceitos estatísticos que permitam uma interpretação que considera desvios e eventuais erros durante a coleta de dados, sendo estes caracterizados pelo equipamento, operador ou ambiente. A seguir, alguns conceitos estatísticos, de probabilidades e de teoria dos erros são abordados, de modo que, com aplicações destes são permitidas: a execução da metodologia proposta, a análise de resultados e as conclusões atribuídas.

3.4.1 Distribuição Normal Gaussiana

A curva de distribuição normal é uma das mais importantes na aplicação da estatística teórica e prática. Esta distribuição dos valores observados de uma variável é caracterizada por uma curva simétrica em forma de sino. A figura 3.3, ilustra uma distribuição normal, e nela estão apresentados os percentuais dos valores populacionais na distribuição.

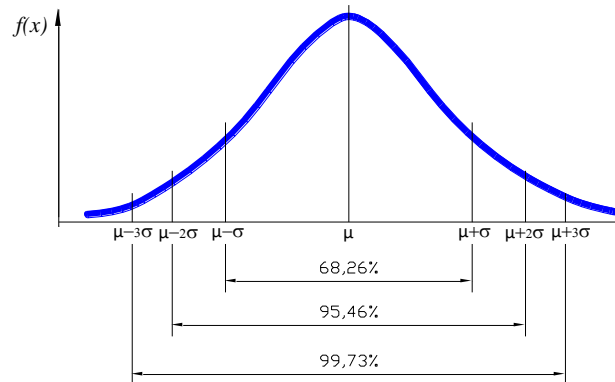


Figura 3. 3: Distribuição normal e percentuais dos valores observados

Em uma curva de distribuição normal, 68,26% dos dados estão compreendidos entre os limites definidos pela média mais ou menos um desvio padrão ($\mu \pm 1\sigma$), enquanto 95,46% correspondem à região limitada pela média mais ou menos dois desvios padrões ($\mu \pm 2\sigma$) e 99,73% dos valores estão compreendidos entre os limites média mais três desvios padrões e média menos três desvios padrões, ($\mu \pm 3\sigma$).

Esta distribuição tem uma nomenclatura especial, $x \approx N(\mu, \sigma^2)$, que significa indicar que a variável x é normalmente distribuída com média μ e variância σ^2 (MONTGOMERY, 2004). A curva de distribuição normal ou gaussiana é encontrada com muita frequência, é uma

curva idealizada que ocorreria se tivéssemos uma variável verdadeiramente aleatória (DIETRICH, 1991). A média representada na distribuição normal μ é um número qualquer onde $(-\infty < \mu < \infty)$ e a variância é um valor positivo, $\sigma^2 > 0$ (MONTGOMERY, 2004).

Segundo Dietrich (1991), distribuições de frequência são geralmente representados como curvas de probabilidades, a ordenada em qualquer ponto sobre estas curvas são chamadas de função densidade da curva. Sendo x uma variável aleatória, Vuolo (1992) define como a função densidade de distribuição gaussiana pela equação 3.30.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad 3.30$$

Onde:

$$-\infty < x < \infty$$

Dietrich (1991) afirma que a integral da função de densidade de menos infinito a x , é definida como função da distribuição de probabilidade, pois, a probabilidade da obtenção de resultados em uma medição é igual à área contida abaixo da curva de distribuição, a equação 3.31 apresenta a probabilidade de uma distribuição.

$$P(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \quad 3.31$$

Onde:

$$z = (x - \mu)/\sigma$$

3.4.2 Teorema do Limite Central

O teorema do limite central é um dos principais teoremas da área estatística. Este teorema segundo Vuolo (1992) explica a importância da distribuição normal na teoria de erros.

O teorema do limite central teve sua primeira versão provada por DeMoivre por volta de 1733 em seu âmbito de pesquisa, porém, foi o matemático francês e Marquês de Laplace Pierre Simon que a desenvolveu de forma generalizada. Laplace desenvolveu e provou o teorema enquanto observava que erros de medição tendiam ser normalmente distribuídos. No entanto, o teorema provado por Laplace não foi considerado completamente rigoroso, que veio obter esse status somente no período de 1901 e 1902 pela prova do teorema pelo matemático russo Liapounoff. Nos séculos 17 e 18 o teorema do limite central foi também chamado de lei da frequência de erros (ROSS, 2006).

Montgomery (2004) exemplifica o teorema, que é apresentado a seguir. Uma variável aleatória é frequentemente representada e modelada com uma distribuição normal, fato que pode ser justificado pelo teorema central do limite, ou também conhecido como teorema do limite central. Segundo o autor, distribuições da soma de n variáveis aleatórias são próximas às distribuições normais, independentemente do tipo de distribuição individual das variáveis envolvidas. Esta distribuição se aproxima ainda mais e melhor se ajusta a uma distribuição do tipo $N(0,1)$ (distribuição normal, média "zero" e desvio padrão "um") com o aumento de n .

A explicação algébrica do teorema do limite central por Vuolo (1992) e Montgomery (2004) é dada a seguir:

Sendo y_1, y_2, \dots, y_n variáveis aleatórias e independentes com distribuição de probabilidades comum com valor médio verdadeiro μ e variância σ^2 , a quantidade S^* é definida pelas equações 3.32 e 3.33.

$$S^* = \frac{S_i - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \quad 3.32$$

Onde:

$$S_i = y_1 + y_2 + \dots + y_N \quad 3.33$$

Com a variância $\sigma_i^2 = \sigma^2 N$, correspondente à soma S_i , o valor S^* é interpretado como número de desvios padrões $\sigma\sqrt{N}$ que S_i difere do valor médio verdadeiro $N\mu$. O teorema do limite central estabelece que a probabilidade de S^* ser menor ou igual a qualquer número finito a é igual ao valor que teria esta probabilidade se a distribuição de

probabilidades para S^* fosse uma distribuição normal padrão, que é uma distribuição gaussiana com valor médio igual a zero, $\mu=0$, e desvio padrão igual a um, $\sigma=1$. Analiticamente o teorema pode ser definido com a equação 3.34.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(S^* \leq a) = \int_{-\infty}^a \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}} dz \quad 3.34$$

3.4.3 Lei dos Grandes Números

A Lei dos Grandes Números assegura que o valor verdadeiro de uma série de observações de uma grandeza é o limite do valor médio de N resultados quando $N \rightarrow \infty$, ou seja, o valor médio de uma grandeza com número de observações tendendo ao infinito equivale ao valor verdadeiro de determinado resultado. Segundo Vuolo (1992) e Ross (2006), se y_1, y_2, \dots, y_n , são variáveis aleatórias e independentes, com número de observações N e tenham iguais distribuições de probabilidades com um valor médio verdadeiro finito μ , então, o valor médio das observações \bar{y} converge para μ em termos probabilísticos quando $N \rightarrow \infty$. Portanto, caso os resultados de uma grandeza y sejam y_1, y_2, \dots, y_n , um valor médio verdadeiro bem definido é garantido pela lei, desde que seja respeitada a condição de validade em que os resultados das N observações tenham a mesma distribuição, fato que pode ser estabelecido pela repetição da medida nas mesmas condições (VUOLO, 1992).

Analiticamente, esta lei pode se interpretada pelas equações 3.35 e 3.36, conforme (ROSS, 2006).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)}{n} = 0 \quad 3.35$$

ou de forma equivalente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} = \mu \quad 3.36$$

Ross (2006) considera a Lei dos Grandes Números como o resultado mais conhecido na teoria da probabilidade. O autor afirma que a lei estabelece a convergência da média de uma distribuição com um valor médio esperado. Uma variante da lei dos grandes números é a lei forte dos grandes números, esta lei, segundo Ross (2006) estabelece que a média da sequência de variáveis independentes e aleatórias com distribuições comuns, converge com a média da distribuição com uma probabilidade igual a um.

Segundo Dietrich (1991) a média μ correspondente a média de um número de observações próximo ao infinito, e, geralmente difere da média \bar{x} , que correspondente à média de um número finito de observações. As diferenças entre μ e os valores medidos são denominados de desvios e as diferenças entre \bar{x} e os valores medidos são chamados de resíduos. No cálculo do valor médio utilizando \bar{x} existem incertezas, já que o verdadeiro valor médio só pode ser obtido quando o número de observações tende ao infinito, ou seja, quando a população é grande e a média μ é utilizada. Deste modo, considerando variáveis aleatórias e independentes é possível atribuir a interpretação em que a medida que se aumenta n , a média \bar{x} se aproxima de μ e assim se estabelece a lei dos grandes números e também o teorema do limite central.

3.4.4 Valor Médio

A tendência central de uma distribuição de dados é obtida com a média, e sua forma mais usual é a média aritmética, representada pela equação 3.37, onde n representa o número de observações e x os valores observados.

Segundo Dietrich (1991) uma distribuição normal ou gaussiana de dados é simétrica. Isto evidencia que a máxima probabilidade de ocorrer um determinado valor em uma leitura, para este tipo de distribuição, este fato coincide com a posição da média dos valores do conjunto. Assim, esta é uma das razões em que o valor médio é geralmente empregado como melhor estimativa de uma variável avaliada. Portanto, segundo o autor, em uma distribuição normal é possível relacionar a média como o mais provável valor de uma variável.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$$

3. 37

Stark e Woods (1994) afirmam que a média também pode ser entendida como um número que é simultaneamente o mais perto de todos os números no conjunto dos dados, de forma que a soma das distâncias, partindo da média em direção a todos os pontos no conjunto, é a menor. Desta forma, segundo o autor, a média pode ser interpretada como o "centro de gravidade" ou "centro geométrico" de um conjunto de dados. A demonstração desta afirmação dos autores pode ser realizada ao encontrar um número z que minimiza o quadrado da soma da distância D . Segue a demonstração nas equações 3.38, 3.39 e 3.40.

$$D^2 = \sum_{i=1}^N (z - x_i)^2 \quad 3.38$$

Para minimizar o quadrado da distância devemos igualar a derivada em relação à z , à zero, conforme equação 3.39.

$$\frac{\partial D^2}{\partial z} = 2Nz - 2 \sum_{i=1}^N x_i = 0 \quad 3.39$$

Assim, verificamos que z é o valor que minimiza a distância D e é igual à média μ , conforme equação 3.40.

$$z = \mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad 3.40$$

3.4.5 Medidas de dispersão

Medidas de dispersão de uma distribuição de dados são importantes para avaliação de sua aleatoriedade, estão relacionadas à consistência e qualidade dos resultados. O desvio padrão e a variância são ferramentas capazes de avaliar estatisticamente esta característica em uma população.

O desvio padrão é um parâmetro que quantifica o desvio dos valores observados em relação à média. Segundo Dietrich (1991), este parâmetro pode ser calculado de maneira simples pela equação 3.41 quando n , o número de observações ou leituras for grande. Este

parâmetro também é conhecido como desvio padrão populacional e geralmente é representado por σ .

$$\sigma = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \right\}^{1/2} \quad 3.41$$

Para uma análise de dispersão utilizando o desvio padrão em uma distribuição com uma população n pequena, deve-se utilizar o desvio padrão amostral (DIETRICH, 1991).

O desvio padrão amostral é representado frequentemente por s e pode ser calculado com a equação 3.52, obtida através, dos resíduos e dos desvios. Partindo das equações 3.42 e 3.43 é obtido o desvio padrão amostral.

Dados os resíduos:

$$r_1 = \bar{x} - x_1, r_2 = \bar{x} - x_2, \dots, r_n = \bar{x} - x_n \quad 3.42$$

Dados os desvios:

$$\varepsilon_1 = \mu - x_1, \varepsilon_2 = \mu - x_2, \dots, \varepsilon_n = \mu - x_n \quad 3.43$$

Somando as equações dos desvios, representada em 3.43, são obtidas as equações 3.44 e 3.45.

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k = n\mu - \sum_{k=1}^n x_k = n\mu - n\bar{x} \quad 3.44$$

$$\bar{x} = \mu - \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{n} \quad 3.45$$

Substituindo a equação 3.45 em 3.42, em termos de \bar{x} e usando a equação 3.43:

$$r_1 = \mu - \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{n} - x_1 = \varepsilon_1 - \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{n} \quad 3.46$$

Ao reorganizar 3.46 é obtido 3.47:

$$r_1 = \frac{(n-1)}{n} \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_2}{n} - \frac{\varepsilon_3}{n} \dots - \frac{\varepsilon_n}{n} \quad 3.47$$

Equacionando 3.47 em termos de desvio padrão σ_e para os desvios, e, desvio padrão para os resíduos σ_r , é obtida a equação 3.48:

$$\sigma_r^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \sigma_e^2 + (n-1) \frac{\sigma_e^2}{n^2} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \sigma_e^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n}\right) \sigma_e^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right) \sigma_e^2 \quad 3.48$$

Como o desvio padrão dos resíduos σ_r pode ser definido como na equação 3.49, a partir de 3.41, e o desvio padrão σ_e definido como de 3.50, a partir de 3.48, então é possível obter a equação 3.51:

$$\sigma_r^2 = \sum_1^n \frac{r_r^2}{n} \quad 3.49$$

$$\sigma_e^2 = \frac{n}{(n-1)} \sigma_r^2 \quad 3.50$$

$$\sigma_e^2 = \frac{\sum r_r^2}{n-1} \quad 3.51$$

Ao desenvolver a equação 3.51 obtêm-se a equação 3.52 que representa o desvio padrão amostral e é de simples aplicação.

$$\sigma_e = s = \left\{ \sum_1^n \frac{(x - \bar{x})^2}{n-1} \right\}^{1/2} \quad 3.52$$

O quadrado dos desvios padrões, populacional e amostral, apresentados nas equações 3.41 e 3.52 são denominados de variância populacional e variância amostral, os valores destas dispersões podem ser obtidos com o emprego das equações 3.53 e 3.54.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_1^n (x - \bar{x})^2}{n} \quad 3.53$$

$$\sigma_e^2 = s_e^2 = \frac{\sum_1^n (x - \bar{x})^2}{n-1} \quad 3.54$$

3.4.6 Teste de Hipóteses e p-valor

Testes de hipóteses são aplicados para determinação de características estatísticas de uma população de dados, como a verificação de normalidade de dados, análise de variância para verificar a significância de um tratamento ou fator sobre as amostras. Um teste de hipótese é realizado a partir de uma hipótese inicial, conhecida como hipótese nula, e uma hipótese alternativa. O p-valor permite inferir sobre o resultado do teste.

O p-valor, do inglês *p-value*, é uma medida quantitativa que permite relatar o resultado de um teste de hipóteses. Como exemplo da aplicação de um testes de hipótese é possível citar um teste de verificação de normalidade de uma distribuição de dados, onde a hipótese nula é definida pela hipótese de que uma distribuição de dados assume um perfil gaussiano, ou seja, é normal, já a hipótese alternativa é a hipótese de que a distribuição dos dados não corresponde a uma distribuição normal. Segundo o NIST (2012), a obtenção de pequenos valores do p-valor é uma indicação de rejeição da hipótese nula e uma boa prática da utilização do p-valor é definir o quão pequeno ele deve ser para que se possa rejeitar esta hipótese.

3.4.6.1 Teste de Normalidade

Testes para verificar o tipo de distribuição em que os dados medidos estão inseridos são ferramentas estatísticas e segundo Dietrich (1991) estes testes podem ser feitos para verificar se uma hipotética distribuição $F(x)$ é bem ajustada a uma distribuição empiricamente obtida. A qualidade de ajuste define se a hipótese de que uma determinada distribuição é apropriada como modelo de um processo ou população (MONTGOMERY, 2004).

Neste contexto, estão inseridos os testes de normalidade que são importantes e não raras são suas aplicações em análise de resultados. Eles permitem verificar com grande probabilidade se a distribuição dos dados medidos ou dos resultados possui característica gaussiana, fato que, permite empregar a média em uma análise comparativa, possibilitando ter um parâmetro de referência facilmente conhecido em uma distribuição. Como já dito anteriormente, em uma distribuição normal, a média é o valor mais provável na obtenção dos resultados.

Os testes são geralmente feitos com análise dos resíduos e probabilidades e podem ser interpretados graficamente. Montgomery (2004), afirma que esta análise gráfica é utilizada para verificar se a distribuição hipoteticamente atribuída representa de forma adequada os dados amostrais, este procedimento pode ser aplicado para testar vários tipos de distribuições além da normal, como logonormal, Weibull, distribuições qui-quadrado e gama.

A construção de um gráfico de probabilidade para verificação do tipo de distribuição é elaborada ao plotar amostras classificadas em ordem crescente de grandeza versus a frequência acumulada, com a amostra x_n sendo a última e de maior valor. A interpretação gráfica deve ser feita de seguinte forma, se a distribuição hipotética descreve de forma adequada os dados, então, os pontos serão próximos a uma reta, porém, se os pontos estiverem dispersos da reta é concluído que a distribuição hipotética atribuída dos dados não é adequada.

Em testes de normalidade, uma vez que a análise gráfica da dispersão dos dados sobre uma reta é subjetiva, então, é atribuído o p-valor para relatar os resultados, que considera uma probabilidade da população ter ou não uma distribuição normal. A verificação da condição de distribuição normal define uma hipótese nula correspondente à normalidade e é validada com análise do p-valor, geralmente com a obtenção de valores acima de 0,05 ou 5%. A figura 3.4,

ilustra um gráfico de teste de normalidade, onde se obteve um resultado positivo para verificação da normalidade da distribuição dos dados.

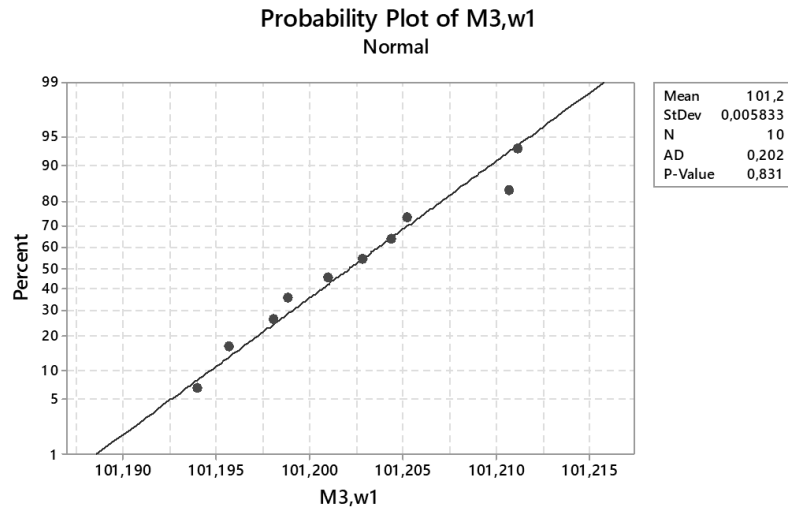


Figura 3. 4: Teste de normalidade sobre um grupo de dados

3.4.7 Regressão linear pelo método dos mínimos quadrados

Segundo Dietrich (1991), a apresentação de resultados onde são relacionadas duas variáveis é realizada muitas vezes por meio de gráficos, onde são plotados pontos que podem ser representados por retas com o intuito de indicar uma tendência linear da distribuição dos dados. As retas são obtidas através da minimização dos resíduos de ajuste entre a reta que se pretende ajustar e as leituras das medições. Uma equação de reta que representa dados medidos pode ser visualizada através da equação 3.55.

$$y_i = mx_i + b \quad 3.55$$

A equação 3.56 permite a minimização dos desvios ou resíduos entre uma reta e as leituras, o que permite a obtenção da equação da reta que melhor se ajusta às leituras dos pontos. A incógnita y'_i corresponde ao valor do mensurando, valor obtido através de medição, já a incógnita y_i corresponde ao valor de regressão linear, que está contido na reta que idealmente representa os pontos. O índice n corresponde ao número de leituras.

$$W = \sum_{i=1}^n (y'_i - y_i)^2 \quad 3.56$$

Ao substituir a equação 3.56 em 3.55 é obtida a equação 3.57:

$$W = \sum_{i=1}^n (y_i' - mx_i - b)^2 \quad 3.57$$

A minimização dos desvios é uma condição para aplicação dos mínimos quadrados, assim, a equação 3.57 é derivada parcialmente em relação a m e b com equivalência à zero.

$$\frac{\partial W}{\partial m} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial b} = 0 \quad 3.58$$

As equações 3.59 e 3.60 apresentam os resultados da aplicação das derivadas parciais.

$$\sum_{i=1}^n x_i (y_i' - mx_i - b) = 0 \quad 3.59$$

$$\sum_{i=0}^n (y_i' - mx_i - b) = 0 \quad 3.60$$

Reorganizando 3.59 e 3.60, são obtidas as equações 3.61 e 3.62.

$$m \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i' \quad 3.61$$

$$m \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i' \quad 3.62$$

Ao substituir a equação 3.61 em 3.62 em função de b é obtido o coeficiente angular m da reta de mínimos quadrados, apresentado da equação 3.63.

$$m = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i' - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i'}{n \sum_{i=1}^n x_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad 3.63$$

O termo independente b da equação da reta é obtido pela substituição da equação 3.61 em 3.62 em função de m e está representado na equação 3.64.

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y'_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y'_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad 3.64$$

3.5 Modelagem da incerteza sobre os pontos coordenados

Nas coordenadas dos pontos medidos e utilizados para cálculo de distância estão presentes incertezas de medição, que estão modeladas nas equações de 3.65 a 3.70.

A incerteza sobre a distância medida é determinada pela análise das incertezas das variáveis envolvidas, assim, as incertezas são avaliadas sobre as coordenadas idealizadas e desvios presentes em cada coordenada dos pontos. Os desvios considerados na análise de incerteza do modelo correspondem aos erros presentes na medição, como os erros cinemáticos da MMC, erros de dilatação térmica da escala e erros de dilatação térmica da peça medida. As equações de 3.65 a 3.67 apresentam a modelagem das leituras das coordenadas dos pontos para avaliação de incerteza, esta modelagem foi baseada no documento elaborada por GUM (2008), o guia para a expressão de incerteza de medição de 2008.

$$R_x = (C_x) + E_x(x, y, z)_C + L_{0,x} \alpha_1 \Delta T_{reg,C} + L_{0,x} \alpha_2 \Delta T_{peça,C} \quad 3.65$$

$$R_y = (C_y) + E_y(x, y, z)_C + L_{0,y} \alpha_1 \Delta T_{reg,C} + L_{0,y} \alpha_2 \Delta T_{peça,C} \quad 3.66$$

$$R_z = (C_z) + E_z(x, y, z)_C + L_{0,z} \alpha_1 \Delta T_{reg,C} + L_{0,z} \alpha_2 \Delta T_{peça,C} \quad 3.67$$

Onde:

C é o valor convencional da coordenada do ponto

$E(x, y, z)$ é o erro geométrico sobre a coordenada do ponto coletado

L_0 é o braço de medição utilizado para coleta dos pontos

α_1 é o coeficiente de dilatação térmica da escala

α_2 é o coeficiente de dilatação térmica da peça

ΔT é a variação de temperatura durante a medição

A partir dos modelos acima representados, as incertezas $u(R_x)$, $u(R_y)$ e $u(R_z)$ das leituras das coordenadas dos pontos utilizados na medição de distâncias entre paredes podem ser obtidas pelas equações 3.68, 3.69 e 3.70.

$$\begin{aligned}
 u^2(R_x) = & \left(\frac{\partial(R_x)}{\partial(C_x)} \right)^2 u^2(C_x) + \left(\frac{\partial(R_x)}{\partial E_x(x, y, z)_C} \right)^2 u^2 E_x(x, y, z)_C + \\
 & \left(\frac{\partial(R_x)}{\partial(L_{0,x} \alpha_1 \Delta T_{reg,C})} \right)^2 u^2(L_{0,x} \alpha_1 \Delta T_{reg,C}) + \\
 & \left(\frac{\partial(R_x)}{\partial(L_{0,x} \alpha_2 \Delta T_{peça,C})} \right)^2 u^2(L_{0,x} \alpha_2 \Delta T_{peça,C})
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
 u^2(R_y) = & \left(\frac{\partial(R_y)}{\partial(C_y)} \right)^2 u^2(C_y) + \left(\frac{\partial(R_y)}{\partial E_y(x, y, z)_C} \right)^2 u^2 E_y(x, y, z)_C + \\
 & \left(\frac{\partial(R_y)}{\partial(L_{0,y} \alpha_1 \Delta T_{reg,C})} \right)^2 u^2(L_{0,y} \alpha_1 \Delta T_{reg,C}) + \\
 & \left(\frac{\partial(R_y)}{\partial(L_{0,y} \alpha_2 \Delta T_{peça,C})} \right)^2 u^2(L_{0,y} \alpha_2 \Delta T_{peça,C})
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned}
 u^2(R_z) = & \left(\frac{\partial(R_z)}{\partial(C_z)} \right)^2 u^2(C_z) + \left(\frac{\partial(R_z)}{\partial E_z(x, y, z)_C} \right)^2 u^2 E_z(x, y, z)_C + \\
 & \left(\frac{\partial(R_z)}{\partial(L_{0,z} \alpha_1 \Delta T_{reg,C})} \right)^2 u^2(L_{0,z} \alpha_1 \Delta T_{reg,C}) + \\
 & \left(\frac{\partial(R_z)}{\partial(L_{0,z} \alpha_2 \Delta T_{peça,C})} \right)^2 u^2(L_{0,z} \alpha_2 \Delta T_{peça,C})
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

CAPÍTULO 4

SISTEMAS REDUNDANTES DE MEDIÇÃO PARA SEPARAÇÃO DE ERROS EM MÁQUINAS DE MEDIR POR COORDENADAS

O conhecimento de erros incidentes em uma inspeção dimensional através de métodos de calibração é imprescindível em compensação de erros para equipamentos de medição, porém, no caso de máquinas de medir por coordenadas a calibração é realizada de maneira extensiva, demanda tempo e conseqüentemente eleva custos. Face a isto, este trabalho foi elaborado com o objetivo de aplicar métodos que permitam melhorar a confiabilidade dos resultados de medições com uma MMC, especificamente nas medições de distâncias, aplicando técnicas de separação, redundância e superposição de erros, de modo a desacoplar os erros envolvidos nas medições. Para alcançar o objetivo proposto, neste trabalho foram desenvolvidas técnicas classificadas como sistemas redundantes de medição, ou apenas SRM. Os SRM foram desenvolvidos em duas versões, denominadas de SRM_1 (sistema redundante de medição 1) e SRM_2(sistema redundante de medição 2), sendo a diferença básica entre elas a quantidade de regiões analisadas em cada modelagem matemática. Para o SRM_1 são utilizadas 4 regiões de medição, enquanto para o método SRM_2 são necessárias a análise de somente um par de região medição na modelagem para separação de erros.

A separação de erros é baseada no conceito de remoção do erro do sistema de medição a partir do valor de uma característica medida. Conforme a revisão bibliográfica sobre os fundamentos teóricos, item 2, que se refere a fundamentação teórica, há evidências que a metodologia de separação de erros consiste em medir a peça e separar os erros a partir da própria peça inspecionada, este procedimento é permitido pela redundância de medições. A falta de igualdade dos valores obtidos na repetição entre as posições de medição é ainda uma exigência para aplicação do método, já que se busca um valor correto dentre um conjunto de valores de distância com a presença de erros.

Trabalhos publicados como Fung (2006), Hwang et. al. (2007), Paziani, Di Giacomo e Tsunaki (2009), Marsh, Arneson e Martin (2010), Nafi, Mayer e Wozniak (2011), Lee et al. (2012), Nafi, Mayer e Wozniak (2012) e Chen et al (2014) utilizaram técnicas de separação de erros, porém, as propostas e metodologias utilizadas são diferentes das adotadas neste trabalho, que é desacoplar os erros de medições de distâncias entre paredes externas de uma peça de trabalho. As metodologias de separação de erros apresentadas no item 2, estão em sua maioria relacionadas à separação de erros em medições de características de reticidade, circularidade e de superfície de algum artefato.

Desta forma, este trabalho propõe um método de separação de erros em medições por coordenadas utilizando uma MMC, em inspeção dimensional de distância entre paredes externas de uma peça, fazendo uso de redundância de dados e múltiplas etapas. É pretendido obter o valor convencional da distância entre paredes com a aplicação do método desenvolvido. A separação é realizada a partir da solução numérica do sistema de equações elaborado, que é estabelecido pela modelagem matemática das leituras dos pontos coletados.

Em uma inspeção dimensional de distâncias de uma peça qualquer com uma MMC, dever-se ia que os resultados obtidos com a medição em diversas posições do volume de trabalho fossem iguais, porém, não são. Esta característica da medição por coordenadas torna possível aplicar o método pretendido para separação de erros.

Estabelecidas às medições redundantes, métodos matemáticos são aplicados para obter o valor da característica medida, livre de erro, independente de qualquer que seja o erro envolvido na medição. A validação do método será realizada ao comparar o valor da distância obtida através da separação de erros com o valor da distância medida em um equipamento de melhor resolução, resolução mais fina e menor incerteza.

A seguir estão apresentadas as etapas que definem a separação de erros e aplicação dos métodos redundantes de medição.

4.1 Etapas para aplicação de um Sistema Redundante de Medição (SRM)

As etapas para implementação dos sistemas redundantes de medição estão apresentadas abaixo e seguem esta ordem cronológica de execução.

- Medir repetidas vezes a distância entre elementos da peça em diferentes posições do volume da MMC;
- Calibração das escalas "x" e "y" da MMC;
- Verificar se o fator região da MMC onde é realizada medição é significativo e influente sobre os resultados de distância, ou seja, se os valores de distâncias obtidos com a MMC dependem da região de medição;
- Realizar teste de comparações múltiplas de médias de distâncias obtidas entre as regiões de medição para classificar a equivalência dos resultados;
- Identificar os erros sobre os pontos coordenados coletados e elaborar modelagem das leituras dos pontos considerando os erros;
- Escolher método de solução e efetuar-la para os sistemas de equações obtidos pelas modelagens matemáticas;
- Avaliar a solução numérica do sistema de equações;
- Calcular a distância entre paredes externas do artefato inspecionado utilizando os pontos após a separação de erros;
- Validar o método de desacoplamento de erros em distâncias por meio da comparação dos resultados entre os procedimentos;
- Validar método de separação de erros através da comparação da dimensão obtida com a dimensão medida em equipamento de melhor resolução e menor incerteza.

4.2 Calibração das Escalas

Como princípio básico de funcionamento de uma MMC, os encoders das escalas lineares dos eixos da máquina devem estar realizando leituras corretas, com mínima presença de erros de posicionamento possível, já que se referem a medidas básicas da MMC e todas outras geometrias medidas derivam das leituras das escalas. Diante disso, neste trabalho as escalas foram calibradas. A calibração das escalas foi realizada com um sistema de

interferometria laser, utilizando óticas específicas para medição de erros de posição. Somente as escalas "x" e "y" foram calibradas já que a aplicação do sistema redundante de medição foi efetuada com a projeção dos pontos coletados no plano do desempenho de granito da MMC.

4.3 Medição das distâncias, verificação da influência da região de medição sobre os resultados e comparação múltipla de médias de distâncias

Como parte da execução do trabalho são medidas distâncias entre paredes externas do artefato, e aplicadas ferramentas estatísticas sobre estes resultados, como análise de variância e teste de comparação múltipla de médias.

A medição da distância entre paredes é realizada a partir da coleta dos pontos das paredes da peça medida, a coleta dos pontos deste trabalho foi efetuada de forma manual. Foram coletados cinco pontos na parede frontal da peça e dois na parede posterior. As medidas foram repetidas 10 vezes e buscou-se coletar o mesmo ponto físico da peça entre as repetições. A peça foi medida em diferentes regiões da MMC e em cada região medida foram feitas medições com a peça deslocada sob o mesmo passo dos pontos coletados. Esta definição de coleta é necessária para o desenvolvimento do trabalho e solução numérica do modelo proposto, é um método base dos métodos aqui propostos, os sistemas redundantes de medição.

A verificação da influência da região de medição de medição é feita sob a forma de ANOVA (Análise de Variância), onde por um teste de hipótese é possível verificar se o fator região de medição é significativo nos resultados de distâncias obtidos. Para isto foram definidos planejamentos experimentais e para cada planejamento foi realizada uma análise de variância. A hipótese nula, que é referente à hipótese inicial, estabelece que o fator região de medição não é significativo, enquanto que a hipótese alternativa define que o fator região de medição é significativo nas medições de distância. A avaliação da análise de variância aplicada sob a forma do teste de hipóteses é efetuada pelo julgamento do p-valor obtido. A obtenção de uma resposta do p-valor que aponte o fator região de medição como uma característica significativa, justifica a real necessidade da elaboração deste trabalho.

O teste Tukey foi utilizado para comparação múltipla das médias, desta forma é possível classificar a equivalência dos resultados de distâncias das medições em diferentes regiões da máquina de medir por coordenadas.

4.4 Modelagem, solução numérica dos modelos e avaliação do método utilizado para solução

A modelagem utilizada para obtenção dos erros foi elaborada a partir das leituras dos pontos coletados, considerando os erros que são proporcionais ao eixo de direção de coleta dos pontos e também os erros que não obedecem esta proporcionalidade. A partir da modelagem dos pontos coletados para medição das distâncias, um sistema de equações foi elaborado, e este, foi agrupado ao sistema de equações da modelagem dos pontos que se referem às medições em outras regiões da MMC. Uma sobreposição de leitura de pontos foi adotada para permitir a redução do número de variáveis em relação ao número de equações, para esta sobreposição, foram modelados também os mesmos pontos físicos da peça, porém, após o deslocamento da peça ao mesmo passo de distância entre os pontos coletados na parede frontal.

A solução numérica do sistema de equações foi realizada por um método iterativo, denominado *lsqr*, que é indicado para obter a solução numérica de sistemas de equações em que a matriz dos coeficientes é esparsa. A avaliação do método utilizado para a solução numérica foi realizada pelos resíduos gerados e pela convergência do resultado durante às iterações.

4.5 Obtenção das distâncias pelos métodos redundantes de medição (SRM_1 e SRM_2) e validações dos métodos aplicados.

Os valores convencionais das distâncias são obtidos pelas médias das distâncias em diferentes regiões de medição da MMC a partir da aplicação dos sistemas redundantes de medição. Na aplicação dos sistemas redundantes de medição, medições em quatro regiões da MMC foram efetuadas, além de medições em duas posições deslocadas da peça em cada região, uma a esquerda e outra a direita. O deslocamento foi efetuado para a obtenção da sobreposição das leituras dos pontos, tornando possível aumentar o número de equações e assim solucionar numericamente os sistemas de equações envolvidos em cada método do sistema redundante de medição aplicado. Com a solução numérica do sistema de equações, os erros são desacoplados dos pontos coletados e então as distâncias são obtidas através do cálculo de distância entre ponto e reta.

Para o método SRM_1 a distância foi obtida com a aplicação de separação de erros utilizando quatro montagens no mesmo modelo matemático, enquanto para SRM_2, somente duas montagens por modelagem matemática são necessárias.

A validação da aplicação dos sistemas redundantes de medição foi realizada em duas etapas. Primeiro, a validação foi realizada pela avaliação da estabilidade dos resultados de distâncias entre os procedimentos de medição, e em segundo, pela comparação dos resultados obtidos com os sistemas redundantes de medição com o resultado de distância entre paredes obtida com a máquina universal de medição, conhecida também como banco micrométrico, de marca SIP. A comparação dos resultados de distância obtidos pela máquina universal de medição com os resultados obtidos pelos métodos SRM_1 e SRM_2 é justificada pelo fato de que a máquina universal de medição é considerada um instrumento de referência, pois tem melhor resolução, menor incerteza e assim oferece resultados mais confiáveis.

CAPÍTULO 5

MODELAGEM E DESENVOLVIMENTO DOS SISTEMAS REDUNDANTES DE MEDIÇÃO APLICADOS EM MÁQUINAS DE MEDIR POR COORDENADAS.

Neste capítulo está apresentado de forma detalhada o desenvolvimento dos sistemas redundantes de medição aplicados em uma máquina de medir por coordenadas do tipo ponte móvel. Os métodos são apresentados para aplicação em inspeções dimensionais de distâncias entre superfícies de uma peça prismática, para isto, são adotadas técnicas de separação de erros. O método de separação utilizado é desenvolvido com a redundância dos dados, sobreposições de pontos medidos e superposição dos erros, para tanto, parte-se da condição de que ao menos as escalas da MMC estão calibradas.

Inicialmente neste capítulo é apresentado uma introdução sobre os aspectos técnicos da máquina de medir por coordenadas utilizada na etapa experimental. Após esta apresentação, este capítulo é dividido em quatro partes para que se obtenha um melhor entendimento da metodologia aplicada neste trabalho. Na primeira parte estão apresentados o método de cálculo de distância e os testes preliminares para identificação do problema, onde se busca comprovar a hipótese da influência da região de medição nos resultados de distâncias entre superfícies. A comprovação desta hipótese serve basicamente como justificativa para a necessidade da aplicação de um método de desacoplamento de erros em medições por coordenadas. Na segunda parte, está apresentado o método de calibração das escalas envolvidas no plano de medição, já que faz parte

da metodologia o correto funcionamento das escalas. Em seguida, na terceira parte, são apresentadas as modelagens das leituras das medidas dos pontos em função dos erros envolvidos nos procedimentos de medição, e o método de solução da modelagem proposta. A quarta parte trata da validação dos métodos de remoção de erros de distâncias.

5.1 A máquina de medir por coordenadas e condições técnico-ambientais de ensaio experimental

A máquina de medir por coordenadas estudada neste trabalho é do tipo ponte móvel de marca *Brown & Sharpe* e modelo *Micro Validator*. Ela possui um computador dedicado com um programa intuitivo e operacional, compatível com a plataforma Windows. O programa da máquina permite ao operador a escolha do tipo da geometria medida, podendo ser distâncias, diâmetros e pontos coordenados, esta máquina está instalada no laboratório de metrologia, no departamento de engenharia mecânica da USP, Escola de Engenharia de São Carlos.

O deslocamento dos eixos da máquina é realizado manualmente com auxílio de mancais aerotáticos alimentados por uma linha pneumática que contém uma unidade secadora do ar. Deslocamentos sutis dos eixos da MMC são possíveis devido ao emprego de mancais aerostáticos nas partes móveis da máquina, os mancais formam um colchão de ar entre os carros e guias, diminuindo o atrito entre as partes deslizantes. Os eixos da máquina possuem acionamento por válvulas independentes, o que permite o deslocamento e travamento individual de cada eixo. O eixo *y* carrega o eixo *x*, que por sua vez carrega o eixo *z*, totalizando assim as três direções preferenciais da máquina de medir por coordenadas.

O deslocamento do eixo da máquina é quantificado por *encoders*, e o funcionamento deles é baseado no princípio das Franjas Moiré. Os *encoders* são sistemas opto eletrônicos e são empregados em cada eixo, um *encoder* é composto por um dispositivo emissor de luz, uma escala óptica de vidro indexada, também conhecida como escala fixa, um retículo ou escala móvel, e um receptor. A escala fixa é construída com traços igualmente espaçados e está defasada em relação à escala móvel em um pequeno grau de inclinação. Com a defasagem entre as escalas e o movimento da escala móvel a luz incidente sobre elas provoca uma variação da intensidade de luz destinada ao receptor, este efeito é interpretado pelo sistema como deslocamento linear.

O princípio de funcionamento e leitura de deslocamento é similar entre os eixos da máquina, porém, o eixo *z* não possui um carro deslizante e é o próprio eixo que se movimenta. A escala fixa é presa no eixo *z*, e diferentemente dos eixos *x* e *y*, ela acompanha o movimento. Os

mancais aerostáticos, no eixo z são presos na estrutura da MMC, já nos eixos x e y , os mancais são presos na parte móvel, ou seja, nos carros da máquina. Sistemas de amortecimento de fim de curso estão presentes nos eixos x e y , com o intuito de evitar colisões entre carro e estrutura, enquanto o eixo z possui um sistema pneumático regulador de deslocamento, permitindo o deixar mais livre ou preso, o que funciona como segurança e pode evitar a colisão acidental do eixo contra a mesa de granito da MMC.

A mesa de granito da MMC possui buchas metálicas para fixação das peças em inspeção, o que possibilita o uso de grampos, parafusos e outros componentes de fixação. A estrutura da máquina é feita em alumínio fundido, material com alta condutividade térmica, o que diminui o gradiente térmico entre as partes da MMC. A figura 5.1 ilustra a máquina de medir por coordenadas bem como um detalhe do eixo y , que detalha o posicionamento da escala. Dimensões e faixas de operação da MMC estão apresentadas na tabela 5.1.

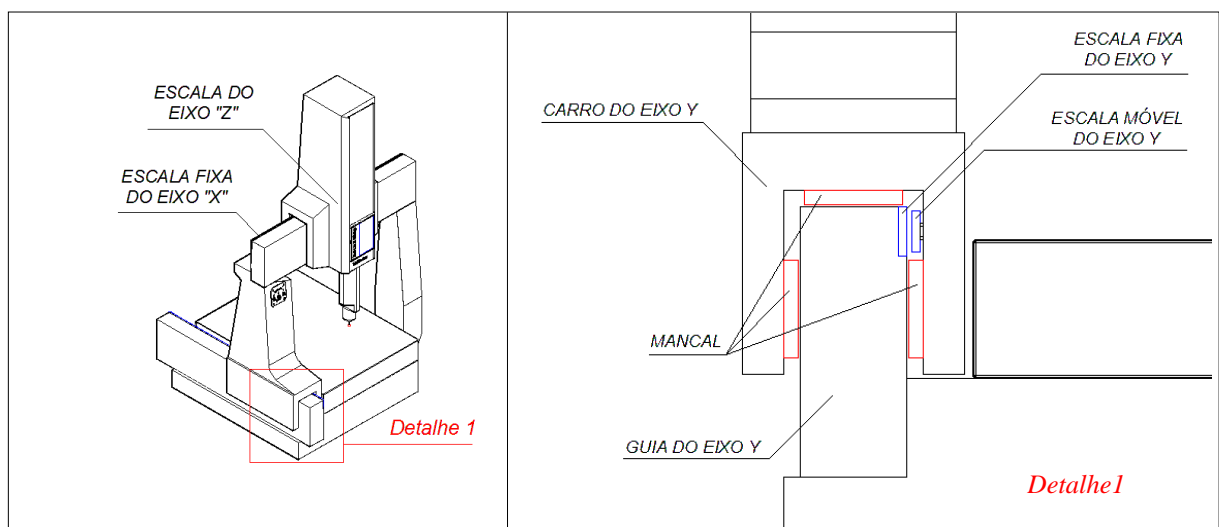


Figura 5. 1: Posicionamento de mancal e escala do eixo Y em uma vista frontal.

Tabela 5. 1: Informações Técnicas da MMC Brown & Sharpe estudada.
Fonte: Adaptado de Brown & Sharpe (1988).

<i>Dados técnicos</i>			
<i>Desempenho $20 \pm 1^{\circ}\text{C}$ ($68 \pm 2^{\circ}\text{F}$)</i>			
Resolução	0,002 mm		
<i>Dimensões</i>			
	X	Y	Z
Faixa de Operação	356 mm	406 mm	305 mm
Tamanho máximo de peça	457 mm	610 mm	381mm
Dimensões Totais da MM3C	743 mm	730 mm	1340 mm

5.2 Influência da dependência da região de medição nos resultados de distâncias em medições por coordenadas

A separação de erros na medição de distâncias entre superfícies é motivada pela hipótese de observação de diferenças sobre as coordenadas dos pontos coletados e resultados de distâncias, quando realizadas medições de uma mesma peça em regiões diferentes do volume de trabalho da MMC. Mesmo que o sistema de coordenadas de referência seja colocado na mesma posição da peça, os valores dos pontos que compõem a dimensão requerida divergem entre medições quando realizadas em regiões diferentes, assim, valores das distâncias também são divergentes. As diferenças observadas nos pontos coordenados influenciam e provocam desvios indesejáveis sobre o valor da distância requerida, e desta forma, se faz necessário a modelagem e desacoplamento de erros em pontos coordenados.

A distância entre paredes é obtida a partir do cálculo de distância entre ponto e reta, e deste modo, as diferenças podem ser notadas nas variações das coordenadas dos pontos coletados, que são utilizados para cálculo da reta que representa a primeira parede, além das variações dos pontos coletados na segunda parede. Com isso, utilizando os pontos coletados na medição, C_1 a C_n , são analisados os erros envolvidos na obtenção da distância entre superfícies.

A modelagem do erro de medição deste trabalho é elaborada a partir do modelo convencional utilizado para calibração de erros em instrumentos de medição linear, que é expresso pela equação 5.1. Por esta equação, a leitura livre de erro, ou valor verdadeiro convencional C somado ao erro de medição E equivale ao valor da leitura R , que é o valor obtido pelo instrumento.

$$R = C + E \quad 5.1$$

Os erros de posicionamento dos pontos utilizados no cálculo da reta são variáveis numéricas e deste modo devem ser considerados na modelagem. Estes erros são interpretados como os erros influentes nas coordenadas do vetor diretor da reta, caso a modelagem seja feita sob a forma vetorial, ou erros de posicionamento das coordenadas de pontos contidos na reta, caso a forma algébrica seja adotada. Neste trabalho, a forma algébrica para o cálculo de distância e reta foi adotado, embora os resultados sejam os mesmo para a ordem de grandeza da resolução trabalhada.

A reta ajustada sobre os pontos coletados na primeira superfície é obtida por mínimos quadrados e as equações 5.2 e 5.3 definem o coeficiente angular e o termo independente desta reta, $r: \lambda_0 x - y + q$. Considerando n pontos coletados durante a medição de distâncias, são obtidas as equações 5.4 e 5.5, que consideram as coordenadas x e y dos pontos medidos.

$$\lambda_0 = \frac{n \sum x_i y_i' - \sum x_i \sum y_i'}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad 5.2$$

$$q = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i' - \sum x_i \sum x_i y_i'}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad 5.3$$

$$\lambda_0 = \frac{n \sum {}^\varepsilon N_{i,x} {}^\varepsilon N_{i,y} - \sum {}^\varepsilon N_{i,x} \sum {}^\varepsilon N_{i,y}}{n \sum {}^\varepsilon N_{i,x}^2 - (\sum {}^\varepsilon N_{i,x})^2} \quad 5.4$$

$$q = \frac{\sum {}^\varepsilon N_{i,x}^2 \sum {}^\varepsilon N_{i,y} - \sum {}^\varepsilon N_{i,x} \sum {}^\varepsilon N_{i,x} {}^\varepsilon N_{i,y}}{n \sum {}^\varepsilon N_{i,x}^2 - (\sum {}^\varepsilon N_{i,x})^2} \quad 5.5$$

Ao medir cinco pontos ${}^\varepsilon N_1$, ${}^\varepsilon N_2$, ${}^\varepsilon N_3$, ${}^\varepsilon N_4$ e ${}^\varepsilon N_5$ na primeira superfície para determinar a reta são obtidas as equações 5.6 e 5.7.

$$\lambda_0 = \left\{ \frac{5({}^\varepsilon N_{1,x} {}^\varepsilon N_{1,y} + {}^\varepsilon N_{2,x} {}^\varepsilon N_{2,y} + {}^\varepsilon N_{3,x} {}^\varepsilon N_{3,y} + {}^\varepsilon N_{4,x} {}^\varepsilon N_{4,y} + {}^\varepsilon N_{5,x} {}^\varepsilon N_{5,y})}{5({}^\varepsilon N_{1,x}^2 + {}^\varepsilon N_{2,x}^2 + {}^\varepsilon N_{3,x}^2 + {}^\varepsilon N_{4,x}^2 + {}^\varepsilon N_{5,x}^2) - ({}^\varepsilon N_{1,x} + {}^\varepsilon N_{2,x} + {}^\varepsilon N_{3,x} + {}^\varepsilon N_{4,x} + {}^\varepsilon N_{5,x})^2} - \frac{({}^\varepsilon N_{1,x} + {}^\varepsilon N_{2,x} + {}^\varepsilon N_{3,x} + {}^\varepsilon N_{4,x} + {}^\varepsilon N_{5,x})({}^\varepsilon N_{1,y} + {}^\varepsilon N_{2,y} + {}^\varepsilon N_{3,y} + {}^\varepsilon N_{4,y} + {}^\varepsilon N_{5,y})}{5({}^\varepsilon N_{1,x}^2 + {}^\varepsilon N_{2,x}^2 + {}^\varepsilon N_{3,x}^2 + {}^\varepsilon N_{4,x}^2 + {}^\varepsilon N_{5,x}^2) - ({}^\varepsilon N_{1,x} + {}^\varepsilon N_{2,x} + {}^\varepsilon N_{3,x} + {}^\varepsilon N_{4,x} + {}^\varepsilon N_{5,x})^2} \right\} \quad 5.6$$

$$q = \left\{ \frac{({}^\varepsilon N_{1,x}^2 + {}^\varepsilon N_{2,x}^2 + {}^\varepsilon N_{3,x}^2 + {}^\varepsilon N_{4,x}^2 + {}^\varepsilon N_{5,x}^2)({}^\varepsilon N_{1,y} + {}^\varepsilon N_{2,y} + {}^\varepsilon N_{3,y} + {}^\varepsilon N_{4,y} + {}^\varepsilon N_{5,y})}{5({}^\varepsilon N_{1,x}^2 + {}^\varepsilon N_{2,x}^2 + {}^\varepsilon N_{3,x}^2 + {}^\varepsilon N_{4,x}^2 + {}^\varepsilon N_{5,x}^2) - ({}^\varepsilon N_{1,x} + {}^\varepsilon N_{2,x} + {}^\varepsilon N_{3,x} + {}^\varepsilon N_{4,x} + {}^\varepsilon N_{5,x})^2} - \frac{({}^\varepsilon N_{1,x} + {}^\varepsilon N_{2,x} + {}^\varepsilon N_{3,x} + {}^\varepsilon N_{4,x} + {}^\varepsilon N_{5,x})({}^\varepsilon N_{1,x} {}^\varepsilon N_{1,y} + {}^\varepsilon N_{2,x} {}^\varepsilon N_{2,y} + {}^\varepsilon N_{3,x} {}^\varepsilon N_{3,y} + {}^\varepsilon N_{4,x} {}^\varepsilon N_{4,y} + {}^\varepsilon N_{5,x} {}^\varepsilon N_{5,y})}{5({}^\varepsilon N_{1,x}^2 + {}^\varepsilon N_{2,x}^2 + {}^\varepsilon N_{3,x}^2 + {}^\varepsilon N_{4,x}^2 + {}^\varepsilon N_{5,x}^2) - ({}^\varepsilon N_{1,x} + {}^\varepsilon N_{2,x} + {}^\varepsilon N_{3,x} + {}^\varepsilon N_{4,x} + {}^\varepsilon N_{5,x})^2} \right\} \quad 5.7$$

O cálculo da distância é efetuado pela equação 5.8, onde λ_0 e q são determinados pela equação 5.6 e 5.7 e os valores de x e y são obtidos pelas coordenadas ${}^\varepsilon N_{6,x}$ e ${}^\varepsilon N_{6,y}$ do ponto coletado na segunda superfície, o ponto ${}^\varepsilon N_6$. A variável λ_1 corresponde ao coeficiente de y da reta ajustada.

$$D = \frac{|\lambda_0({}^\varepsilon N_{6,x}) + \lambda_1({}^\varepsilon N_{6,y}) + q|}{\sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2}} \pm S \quad 5.8$$

Nesta modelagem, a variável S corresponde ao diâmetro da ponta da sonda, e deve ter seu valor subtraído para a obtenção de distâncias entre superfícies externas e somado para a obtenção de distância entre superfícies internas. No caso deste trabalho, a distância requerida se refere à distância entre paredes externas.

Como pode ser observado na modelagem dos erros geométricos utilizando a teoria das transformações homogêneas, apresentada no capítulo 3, é visto que os erros cinemáticos em medições por coordenadas, utilizando MMC's, têm influência paramétrica na ponta da sonda de medição, ou seja, o valor do erro é estabelecido em função da posição da sonda ao longo de cada eixo. Esta característica também pode ser confirmada através da calibração, que geralmente é realizada para cada eixo da máquina, verificando-se o erro incidente na ponta da sonda individualmente e em cada direção. Apesar do conhecimento da dependência da posição para os erros individuais, não é trivial afirmar que a soma de todos os erros, cinemáticos ou não, em todas as direções, e ao mesmo tempo, causam uma dependência de posição de medição em uma inspeção dimensional de distância entre paredes, já que as componentes podem possuir intensidade e sentido diferentes, sendo possível até mesmo algumas delas se anularem. Diante disto, neste trabalho é verificada a dependência da posição de medição nos resultados de distância entre paredes, através da divergência dos valores obtidos em medições por coordenadas em diferentes regiões da MMC.

A figura 5.2 apresenta as regiões de medição da MMC utilizadas para inspeção de distâncias. Nas regiões definidas pelas montagens M_1 , M_2 , e M_4 o comprimento da peça esta orientado sobre a direção x , enquanto na região M_3 é orientado sobre o eixo y . A medição da peça foi repetida dez vezes para cada montagem, os pontos coletados foram projetados no plano de referência, estabelecido na superfície da peça.

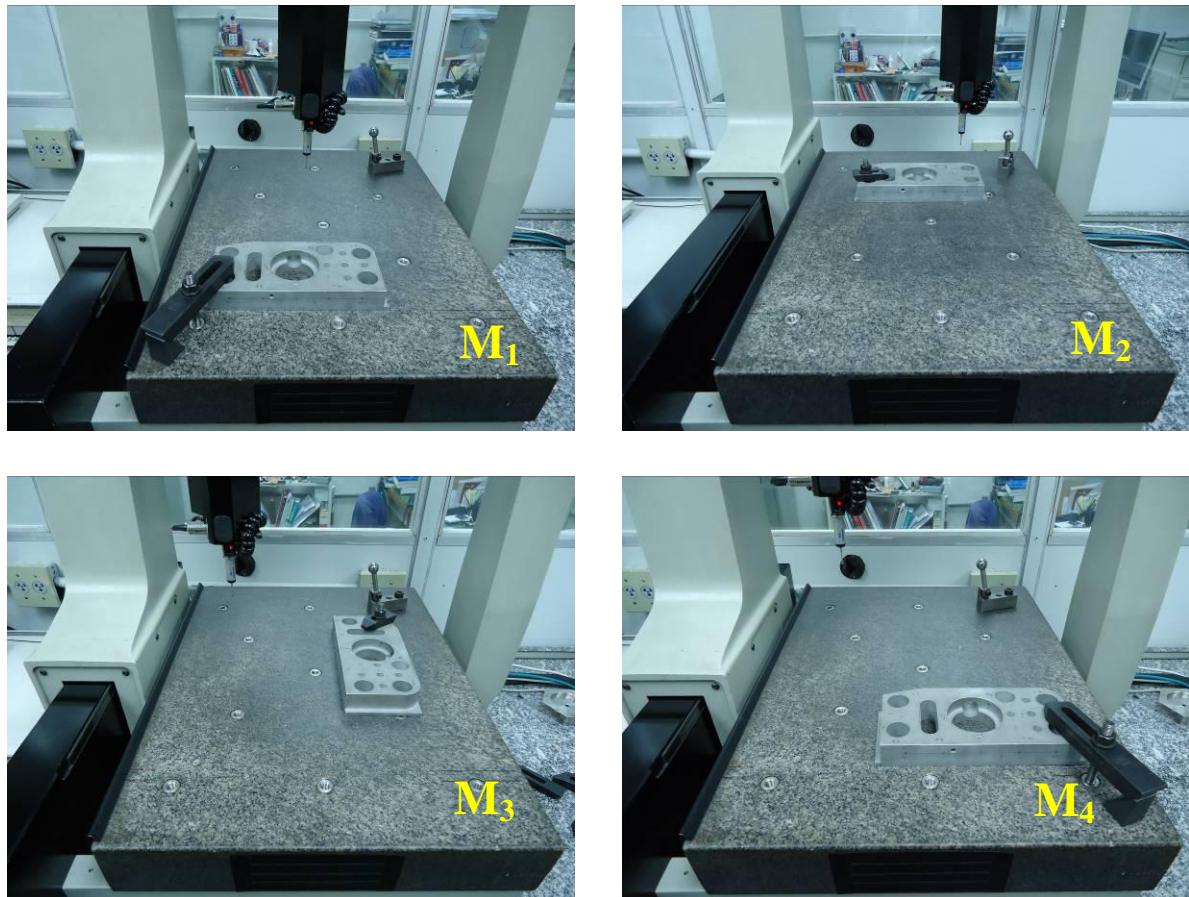


Figura 5. 2: Montagens M1, M2, M3 e M4

A verificação de que os valores obtidos em medições de distância entre paredes dependem da região de medição é realizada através de uma análise de variância e comparação múltiplas entre médias, ambas baseadas em testes de hipóteses. A dependência da posição de medição foi comprovada ao aplicar a ANOVA e também o teste de comparações múltiplas de médias, em diferentes regiões de medições, definidas pelas montagens (M_1 ; M_2 ; M_3 e M_4) em suas posições originais, definido pelo índice $w0$, sem deslocamento para sobreposição de pontos e em posições deslocadas definidas pelo índice $w1$ e $w2$, que estão detalhadas adiante nas figuras 5.6, 5.15 e 5.16, durante o desenvolvimento do método de separação de erros.

A ANOVA permite verificar se há diferença significativa entre as resultados de distâncias, obtidos em medições em diferentes regiões da MMC, enquanto a comparação múltipla de médias permite estabelecer e identificar uma igualdade estatística entre as médias obtidas dos diferentes tratamentos atribuídos. Para a ANOVA foi considerado um nível de 5% de significância (α), tendo como hipótese nula (H_0) correspondente a não a influência do fator região de medição sobre os resultados de distâncias entre os tratamentos (diferentes regiões e posições de sobreposição de leituras), já a influência do fator região de medição é

determinada como hipótese alternativa (H_1). Neste caso, a obtenção de um p-valor inferior ao nível de significância implica em rejeitar H_0 e aceitar H_1 , porém, na obtenção de um p-valor superior ao nível de significância, aceita-se H_0 e rejeita-se H_1 . Os tratamentos utilizados para a análise estatística estão expressos na tabela 5.2.

Tabela 5. 2: Tratamentos utilizados para análise de variância

Tratamento	Região de Montagem	Posição de sobreposição
1	M_1	w_0
2	M_1	w_1
3	M_1	w_2
4	M_2	w_0
5	M_2	w_1
6	M_2	w_2
7	M_3	w_0
8	M_3	w_1
9	M_3	w_2
10	M_4	w_0
11	M_4	w_1
12	M_4	w_2
13	M_1	w_0, w_1, w_2
14	M_2	w_0, w_1, w_2
15	M_3	w_0, w_1, w_2
16	M_4	w_0, w_1, w_2

Três condições são necessárias para a aplicação da análise de variância, que são a homogeneidade dos dados, a independência e a distribuição normal dos resíduos. A homogeneidade nos dados é verificada com uma comparação de variâncias. A segunda condição estabelece que os resultados devem ser independentes, ou seja, é pressuposto que o resultado de uma leitura não tenha influência sobre outra. A última condição é a de que a distribuição dos resultados de cada população deve ser normal.

As três condições necessárias para validação da ANOVA, foram avaliadas da seguinte forma:

- Normalidade nas distribuições dos resíduos por variável resposta pelo teste de Anderson-Darling;
- Homogeneidade de variância dos resíduos dos tratamentos pelos testes de Bartlett e de Levene;
- Independência dos resíduos pelo gráfico de resíduos versus ordem de observação.

O teste de Anderson-Darling teve a normalidade dos resíduos como hipótese nula (H_0) e a não normalidade como hipótese alternativa (H_1). Os testes de Bartlett e de Levene tiveram a equivalência das variâncias dos resíduos entre os tratamentos como hipótese nula (H_0) e a não equivalência como hipótese alternativa (H_1). A verificação da independência dos resíduos é efetuada pela análise do gráfico de resíduos versus ordem de observação.

As análises estatísticas foram realizadas com o programa Minitab 17 e após a validação da ANOVA pelos testes descritos, a comparação de médias é realizada pelo teste Tukey, que permite verificar que não há diferença estatística entre os resultados de distâncias obtidos em diferentes regiões de medição.

A análise de variância e comparação múltiplas de médias foram realizadas para os planejamentos experimentais a seguir:

1º planejamento experimental, tratamentos 1, 4, 7 e 10:

$$M_1, w_0 \times M_2, w_0 \times M_3, w_0 \times M_4, w_0$$

2º planejamento experimental, tratamentos 2, 5, 8 e 11:

$$M_1, w_1 \times M_2, w_1 \times M_3, w_1 \times M_4, w_1$$

3º planejamento experimental, tratamentos 3, 6, 9, 12:

$$M_1, w_2 \times M_2, w_2 \times M_3, w_2 \times M_4, w_2$$

4º planejamento experimental, tratamentos, 13, 14, 15 e 16:

$$M_1, w_k (M_1, w_0; M_1, w_1; M_1, w_2) \times M_2, w_k (M_2, w_0; M_2, w_1; M_2, w_2) \times M_3, w_k (M_3, w_0; M_3, w_1; M_3, w_2) \times M_4, w_k (M_4, w_0; M_4, w_1; M_4, w_2)$$

5.3 Calibração das escalas

Para a separação de erros é pressuposto que ao menos as escalas estejam calibradas e neste sentido, as escalas x e y são calibradas com interferometria laser.

A coleta dos valores de erros utilizando interferometria laser foi realizada com a utilização de uma placa de aquisição. A placa captura o sinal das leituras do deslocamento informadas pelo sistema interferométrico e também das leituras de deslocamentos informados pelo *encoder* linear da MMC, a diferença entre as leituras é interpretada como erro de posição em determinado *target*.

A equação 5.9 apresenta a equação para o erro de posição da escala, o valor positivo determina que o *encoder* da máquina informa uma posição à frente em relação a posição real informada pelo laser.

$$\delta u(u)_i = P'_i - P_i \quad 5.9$$

Onde:

$\delta u(u)_i$ é o erro de escala em cada leitura.

P'_i é o valor informado pelo encoder da máquina, valor nominal

P_i é o valor informado pelo laser, valor real

Os erros de posicionamento foram coletados no modo *on the fly* a uma distância de 20 mm entre os targets. Com o intuito de reduzir os erros cíclicos, cada *target* foi definido em uma faixa de coleta, que varia do valor do *target* mais um milímetro ao valor do *target* menos um milímetro. A faixa de coleta é denominada de *window target* e é subdividida em 0,25mm. O valor médio dos erros dentro de cada *window target* é considerado o valor do próprio *target*. A equação 5.10 apresenta a forma de se obter o valor do erro de posição das escalas a partir do metodologia de *window target*.

$$\delta u(u)_k = \frac{\sum \delta u(u)_i}{n} \quad 5.10$$

Onde:

$\delta u(u)_k$ é o erro de posição da escala na k^{th} posição entre os targets de 20 mm.

$\delta u(u)_i$ são valores dos erros de posição da escala coletado entre -1 mm a +1 mm da k^{th} posição.

n é o numero de pontos coletados em cada *window target*.

As medições dos erros de posição das escalas da MMC foram planejadas de modo que as montagens dos dispositivos necessários permitissem ter um menor erro de Abbe na coleta

dos dados. A figura 5.3 ilustra o princípio de medição de deslocamento com interferometria laser.

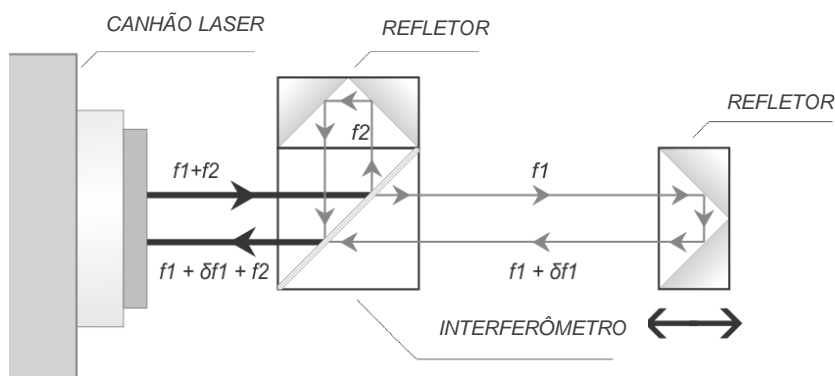


Figura 5. 3: Princípio de interferometria para medição de deslocamento.

Para a medição de erro de posição das escalas da MMC é realizada a comparação do deslocamento informado pela MMC e pelo laser. Considerando o resultado do laser como padrão, a diferença entre as respostas é interpretada como erro. O deslocamento informado pelo laser pode ser entendido pela figura 5.3, onde o canhão laser emite um feixe f_1+f_2 , que atinge o interferômetro e divide o feixe em f_1 e f_2 . O feixe f_2 é direcionado para refletor fixo e o feixe f_1 para o refletor móvel, no retorno, os feixes são recombinados e a diferença entre o sinal de entrada e de saída é interpretado como deslocamento. Os erros de posição foram quantificados para os eixos x e y , e, procurou-se fazer montagens das óticas de modo que se obtivesse o maior aproveitamento do curso dos eixos da MMC. A medição dos erros foi realizada no sentido de ida e de volta, em velocidades similares a de manuseio da MMC em uma inspeção dimensional. Os erros foram avaliados em cinco ciclos de medições e as óticas foram posicionadas próximo às escalas de modo que se reduzissem os erros de Abbe. Nos itens a seguir estão apresentadas descrições mais detalhadas da calibração dos eixos x e do eixo y .

5.3.1 Calibração do erro de posição da escala do eixo y

A figura 5.4 ilustra a montagem atribuída para calibração do erro de posição da escala y . Primeiramente, o feixe laser foi alinhado com as óticas utilizadas. O refletor móvel

ficou preso ao lugar da sonda de medição e então o eixo y foi deslocado na direção de análise para coleta de dados. Os erros de posição foram medidos em um curso de 380 mm.



Figura 5. 4: Visão frontal (a) e traseira (b) da montagem utilizada para calibração da escala Y.

5.3.2 Calibração do erro de posicionamento da escala do eixo x

O procedimento para calibração da escala x é semelhante ao procedimento utilizado para calibração de y . Um alinhamento prévio é necessário e o refletor foi colocado no lugar da sonda de medição. Um curso de 340 mm foi utilizado para calibração da escala x . A figura 5.5 ilustra a montagem utilizada para calibração dos erros de posição na direção x .



Figura 5. 5: Montagem utilizada para calibração da escala X.

5.4 Sistema redundante de medição utilizando técnicas de separação de erros

A separação de erros é realizada permite a remoção dos erros contidos nos pontos coordenados utilizados para obtenção de distância D . Os erros são obtidos por meio de simulação, através da solução numérica do sistema de equações elaborado com as leituras dos pontos. A montagem do sistema é realizada com as equações relacionadas à distância medida, estas equações são elaboradas a partir da modelagem da leitura dos pontos que são compostos por desvios.

5.4.1 Modelagem do sistema a partir da leitura dos pontos utilizados para separação dos erros em medições de distâncias

Para a separação de erros é necessária a redundância de medição, caracterizadas por medições de distância entre superfícies da peça em diferentes regiões do volume da MMC. A posição do sistema de coordenadas de referência da MMC deve estar sempre sobre a mesma posição na peça, mesmo que esta este em diferentes regiões de medição na MMC assim como entre os procedimentos de medição. Neste sentido, é necessário fixar o sistema de coordenadas sobre a peça medida, sempre ao mesmo local, nos procedimentos de medição com diferentes montagens utilizadas.

A modelagem proposta para a separação de erros em medições de distância entre paredes foi desenvolvida visando à sobreposição de pontos, assim, a coleta dos pontos da peça em cada montagem é feita em sua montagem original e também em posições deslocadas em mesma direção dos pontos coletados da primeira superfície, que define a reta. A sobreposição é realizada de forma incremental, e ocorre a partir de deslocamentos da peça sob a mesma distância do passo dos pontos coletados. Neste trabalho, para cada montagem original na posição k da MMC, $M_{k,w0}$, foram adotadas outras duas, $M_{k,w1}$ e $M_{k,w2}$. O índice k representa a região de inspeção da peça, enquanto os índices w_0 , w_1 e w_2 representam respectivamente a posição original, a posição da primeira sobreposição e a posição da segunda sobreposição. A figura 5.6 ilustra as sobreposições de pontos para a montagem $M_{k,w0}$.

Com a elaboração da modelagem, um sistema de equações lineares é obtido, a solução deste sistema permite encontrar os valores dos desvios incidentes da direção da distância

requerida. A distância é obtida neste trabalho a partir do cálculo de distância entre ponto e reta, utilizando pontos após a separação e compensação. A reta define a superfície frontal da peça e um ponto único define a superfície posterior. São coletados cinco pontos para obtenção da reta base e dois na superfície posterior. No processo de desacoplamento de erros de distância, a média dos dois pontos da superfície posterior define o ponto único para cálculo da distância entre ponto e reta.

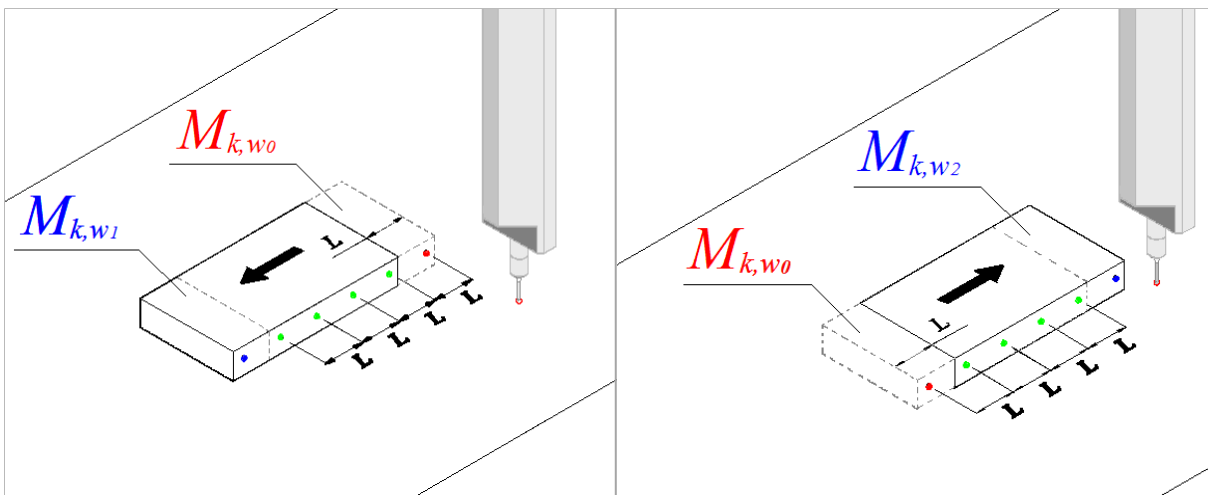


Figura 5. 6: Sobreposição a esquerda (a) e sobreposição a direita (b)

As leituras dos pontos coletados sobre as superfícies da peça, R_t , podem ser definidas com o modelo apresentado na equação 5.11, a partir da definição da equação 5.1.

$$R_t = C_t + E_t \quad 5.11$$

Onde:

R_t é a leitura do t -ésimo ponto coletado do procedimento de medição na direção da distância requerida j .

C_t é o valor verdadeiro convencional da coordenada j , medida no t -ésimo ponto.

E_t é o valor do erro envolvido na medida do t -ésimo ponto, incidente na direção j .

Como parte da metodologia para separação de erros sobre distâncias o sistema de coordenadas de referência é fixo na peça, sempre em mesma posição, que pode ser definida como a localização de um elemento geométrico como, por exemplo, o centro de um furo. Esta consideração permite a igualdade dos valores verdadeiros das coordenadas dos pontos

coletados em qualquer montagem, pois, a peça é a mesma nas medições em diferentes regiões, então a distância física de um ponto real da peça em relação ao referencial será sempre a mesma. O posicionamento do sistema de coordenadas de referência sobre a peça realiza uma transformação de coordenadas e por consequência disto, uma alteração das direções preferenciais. Desta forma são definidas as direções i e j , que são correspondentes as novas direções preferenciais estabelecidas em cada processo de medição da peça, após a transformação de coordenadas. A direção i corresponde à direção da disposição dos pontos na superfície frontal, enquanto a direção j é uma direção normal a i e equivalente a direção da distância entre paredes medida. As direções i e j estão apresentadas figura 5.7.

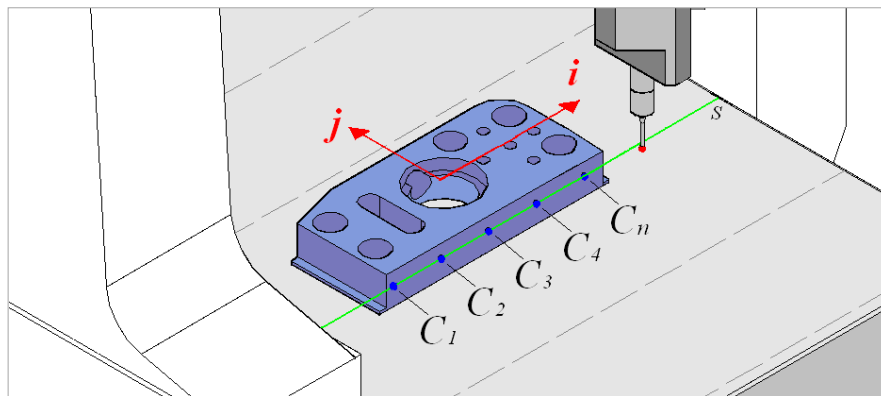


Figura 5. 7: Definição de coordenadas para metodologia de separação de erros

O erro E_t pode ainda ter suas componentes estratificadas. Este erro é composto por uma componente que representa um erro progressivo ou regressivo, $\delta C_t^{\alpha, j}$, que é incidente em j durante o deslocamento da sonda na direção i , somado a um erro δC_t de incidência em j e paramétrico ao braço deslocado em i . Há ainda um erro aleatório incidente em j , δC_t^σ que corresponde à falta de repetibilidade na coleta do ponto. Assim, o erro E_t para o t -ésimo ponto é modelado na equação 5.12 abaixo:

$$E_t = \delta C_t^{\alpha, j} + \delta C_t + \delta C_t^\sigma \quad 5.12$$

Nos itens a seguir estão apresentadas e melhor descritas as componentes $\delta C_t^{\alpha, j}$, δC_t e δC_t^σ que compõe a equação 5.12.

5.4.1.1 Desvio $\delta C_t^{\alpha, j}$, com influência progressiva ou regressiva na direção j e proporcional ao braço de medição formado na direção i

Em medições da peça sobre o desempenho da MMC, a componente $\delta C_t^{\alpha, j}$ difere de forma regressiva ou progressiva na direção j , em cada posição i dos pontos coletados e também em cada geratriz s localizada em j . Este desvio é proporcional ao deslocamento na direção i e ocorre devido à presença de uma componente angular durante a medição, que é característica em cada geratriz s .

O erro $\delta C_t^{\alpha, j}$ está apresentado em função de i na equação 5.13 e ilustrado na figura 5.8.

$$\delta C_t^{\alpha, j} = \alpha_j (R_{t,i}) \quad 5.13$$

Onde:

α_j é um desvio angular correspondente a coleta de pontos na direção i , porém é um valor paramétrico e uma função de j .

$R_{t,i}$ é o valor da coordenada i do t -ésimo ponto coletado.

O desvio angular α_j pode ser compreendido como uma superposição dos erros de *yaw* do eixo y , quando a distância entre superfícies requerida está disposta na direção do eixo y , além da falta de ortogonalidade entre os eixos x e y , e de outras fontes de erros nem sempre conhecidas que causam um deslocamento progressivo ou regressivo devido ao braço de medição na direção i . O desvio angular é ilustrado na figura 5.8.

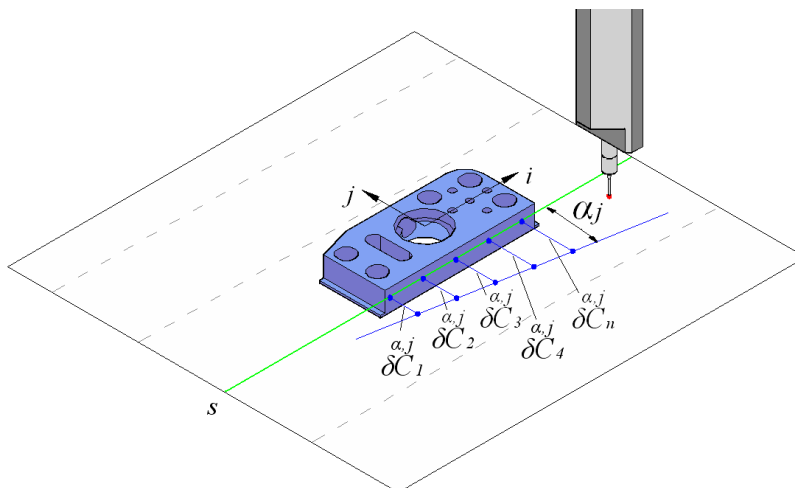


Figura 5. 8: Desvio angular α_j e influência regressiva nos valores dos pontos coletados sobre a geratriz S .

5.4.1.2 Desvio δC_t , com influência na direção j e paramétrico à direção i de coleta de pontos.

O erro δC_t é uma componente com incidência na direção j , que é paramétrica à direção i de coleta de pontos. Este erro é sistemático, porém, não possui caráter uniforme, nem progressivo e nem regressivo ao longo da direção i . Este erro tem seu valor dependente do braço de medição na direção i , em cada ponto. A figura 5.9 representa o erro δC_t .

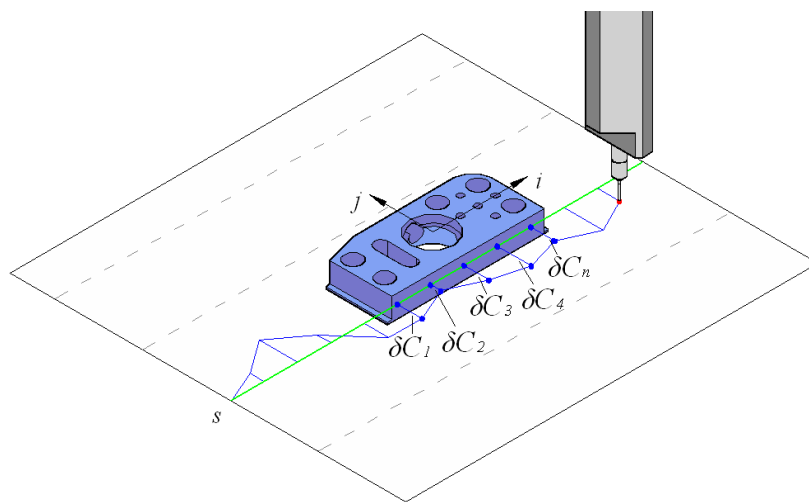


Figura 5. 9: Desvio paramétrico a direção i e de influência na direção j .

A componente de erro δC_t está associado aos erros de influência na direção j , que são paramétricos a direção i , como *yaw* e *roll* do carro deslocado em i . Há também o desvio de retilidade na direção j devido o deslocamento da sonda em i , além da superposição de outras fontes de erros que resultam em um comportamento paramétrico ao braço deslocado na direção das paredes da peça medida.

5.4.1.3 Desvio aleatório sobre os pontos coletados

A parcela de erro aleatório, δC_t^σ , contida no erro de medição E_t , é uma componente que não se mantêm entre as medições, mesmo que refeitas nas mesmas condições e posição. Este tipo de erro é caracterizado neste trabalho como erro devido à falta de repetibilidade da

coleta de pontos. Com o aumento de medições e coleta de dados do mesmo ponto a utilização da média torna-se mais confiável, assim, esta parcela de erro é diminuída e tende a zero de acordo com o teorema do limite central e lei dos grandes números, apresentados no capítulo 3.

5.4.1.4 Modelo das leituras dos pontos em diferentes montagens com sobreposições

Diante dos modelos dos desvios apresentados, o desvio angular $\delta C_t^{\alpha, j}$, o desvio paramétrico à direção i δC_t e o erro aleatório δC_t^σ , o modelo do t -ésimo ponto coletado é apresentado na equação 5.14.

$$R_t = C_t + \delta C_t^{\alpha, j} + \delta C_t + \delta C_t^\sigma \quad 5.14$$

Substituindo a componente de erro progressivo $\delta C_t^{\alpha, j}$ em termos do desvio angular, equação 5.13, e considerando desprezível os efeitos de δC_t^σ de acordo com teorema do limite central por utilizar a média dos pontos coletados, tem-se a equação 5.15.

$$R_t = C_t + \alpha_j (R_{t,i}) + \delta C_t \quad 5.15$$

O desvio δC_t é paramétrico somente sobre a direção i , assim, depende somente da posição da sonda nesta direção. Desta forma, é atribuída a igualdade destes desvios dos pontos da superfície frontal aos mesmos tipos de desvios da superfície posterior, quando estiverem em mesma posição i . A figura 5.10 apresenta os desvios δC_t para a superfície posterior, nela é exemplificado a coleta de cinco pontos na superfície frontal e cinco na superfície posterior. As incógnitas com índice f correspondem aos pontos coletados na superfície frontal da peça, enquanto as de índice p correspondem aos pontos coletados na superfície posterior.

Pela equivalência dos desvios δC_t entre as superfícies é possível montar o sistema de equações somente com os desvios δC_t da superfície frontal, sem a necessidade de distinção

da parede medida no modelo. O sistema de equações 5.16 apresenta a modelagem para a montagem $M1$, sem aplicar a sobreposição, sendo assim definida pelo índice $w0$.

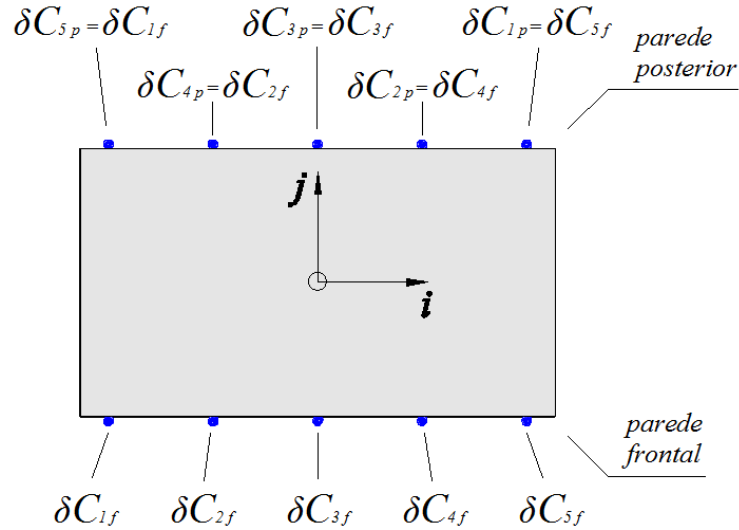


Figura 5. 10: Desvios δC_i da parede posterior apresentado em vista superior da peça.

$${}_{w0}^{M1}R_{1f} = C_{1f,j} + \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{1f,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_{1f}$$

$${}_{w0}^{M1}R_{2f} = C_{2f,j} + \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{2f,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_{2f}$$

$${}_{w0}^{M1}R_{3f} = C_{3f,j} + \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{3f,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_{3f}$$

⋮

$${}_{w0}^{M1}R_{nf} = C_{nf,j} + \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{nf,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_{nf}$$

$${}_{w0}^{M1}R_{1p} = C_{1p,j} + \alpha_{p,M1}({}_{w0}^{M1}R_{1p,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_{1p}$$

$${}_{w0}^{M1}R_{2p} = C_{2p,j} + \alpha_{p,M1}({}_{w0}^{M1}R_{2p,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_{2p}$$

$${}_{w0}^{M1}R_{3p} = C_{3p,j} + \alpha_{p,M1}({}_{w0}^{M1}R_{3p,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_{3p}$$

⋮

$${}_{w0}^{M1}R_{np} = C_{np,j} + \alpha_{p,M1}({}_{w0}^{M1}R_{np,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_{np}$$

5. 16

Pela equivalência dos desvios δC_i tem-se 5.17:

$${}_{w0}^{Mk} R_{1f} = C_{1f,j} + \alpha_{f,Mk} ({}_{w0}^{Mk} R_{1f,i}) + {}_{w0}^{Mk} \delta C_1$$

$${}_{w0}^{Mk} R_{2f} = C_{2f,j} + \alpha_{f,Mk} ({}_{w0}^{Mk} R_{2f,i}) + {}_{w0}^{Mk} \delta C_2$$

$${}_{w0}^{Mk} R_{3f} = C_{3f,j} + \alpha_{f,Mk} ({}_{w0}^{Mk} R_{3f,i}) + {}_{w0}^{Mk} \delta C_3$$

⋮

$${}_{w0}^{Mk} R_{nf} = C_{nf} + \alpha_{f,Mk} ({}_{w0}^{Mk} R_{nf,i}) + {}_{w0}^{Mk} \delta C_n$$

5. 17

$${}_{w0}^{Mk} R_{1p} = C_{1p,j} + \alpha_{p,Mk} ({}_{w0}^{Mk} R_{1p,i}) + {}_{w0}^{Mk} \delta C_n$$

$${}_{w0}^{Mk} R_{2p} = C_{2p,j} + \alpha_{p,Mk} ({}_{w0}^{Mk} R_{2p,i}) + {}_{w0}^{Mk} \delta C_{n-1}$$

$${}_{w0}^{Mk} R_{3p} = C_{3p,j} + \alpha_{p,Mk} ({}_{w0}^{Mk} R_{3p,i}) + {}_{w0}^{Mk} \delta C_{n-2}$$

⋮

$${}_{w0}^{Mk} R_{np} = C_{np,j} + \alpha_{p,Mk} ({}_{w0}^{Mk} R_{np,i}) + {}_{w0}^{Mk} \delta C_1$$

A peça adotada para inspeção dimensional da distância entre paredes é fabricada em alumínio, tem forma prismática e possui um furo central, onde foi estabelecido o sistema de coordenadas. As figuras 5.11 e 5.12 apresentam a vista superior da peça, em 5.11 é possível visualizar a disposição dos pontos coletados. Vale ressaltar que o método de separação de erros não exige conhecimento prévio da dimensão requerida, pois, este resultado é obtido a partir da obtenção dos desvios com a solução do modelo. Optou-se por coletar cinco pontos na parede frontal da peça e dois na posterior, desta forma, toda a modelagem que será apresentada é efetuada com base nestes pontos.

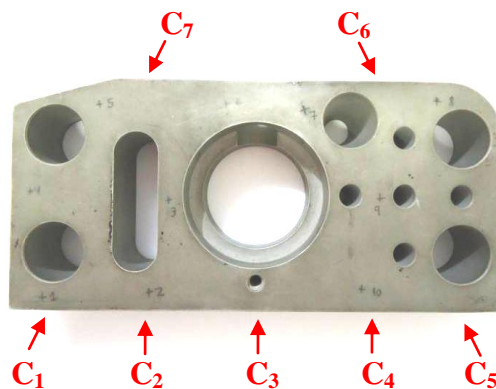


Figura 5. 11: Peça utilizada para separação de erros e os respectivos pontos coletados na medição

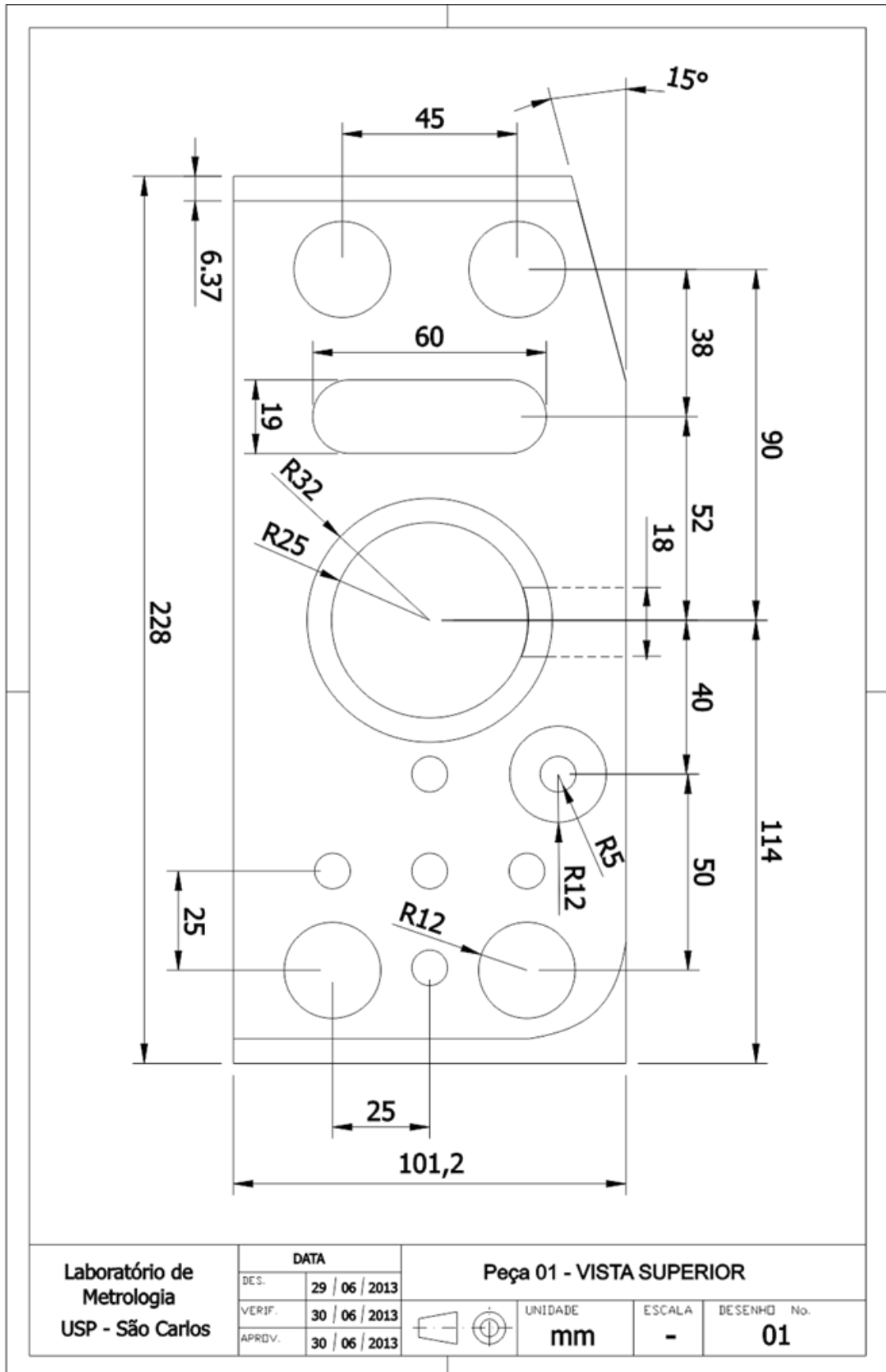


Figura 5. 12: Vista superior da peça utilizada para separação de erros com medidas nominais.

Com os pontos de coleta definidos, a modelagem das leituras de cada ponto em uma montagem na k -ésima região da MMC, $M_{k w_0}$, é apresentada no sistema de equações 5.18. Para os pontos coletados da figura 5.11 é aplicada a consideração observada na figura 5.10, que permite igualar os desvios paramétricos a i da superfície posterior com os mesmos desvios da superfície frontal, assim $\delta C_6 = \delta C_4$ e $\delta C_7 = \delta C_2$.

$${}^{Mk}_{w_0} R_1 = C_{1j} + \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}_{w_0} R_{1,i}) + {}^{Mk}_{w_0} \delta C_1$$

$${}^{Mk}_{w_0} R_2 = C_{2j} + \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}_{w_0} R_{2,i}) + {}^{Mk}_{w_0} \delta C_2$$

$${}^{Mk}_{w_0} R_3 = C_{3j} + \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}_{w_0} R_{3,i}) + {}^{Mk}_{w_0} \delta C_3$$

$${}^{Mk}_{w_0} R_4 = C_{4j} + \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}_{w_0} R_{4,i}) + {}^{Mk}_{w_0} \delta C_4$$

$${}^{Mk}_{w_0} R_5 = C_{5j} + \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}_{w_0} R_{5,i}) + {}^{Mk}_{w_0} \delta C_5$$

5. 18

$${}^{Mk}_{w_0} R_6 = C_{6j} + \alpha_{p,Mk} ({}^{Mk}_{w_0} R_{6,i}) + {}^{Mk}_{w_0} \delta C_4$$

$${}^{Mk}_{w_0} R_7 = C_{7j} + \alpha_{p,Mk} ({}^{Mk}_{w_0} R_{7,i}) + {}^{Mk}_{w_0} \delta C_2$$

Durante a aquisição dos pontos, o sistema de coordenadas de referência é estabelecido na peça, sempre na mesma posição. Este referencial define as direções i e j de coleta de pontos, independente da posição da peça sobre o granito da MMC. A partir disto é possível afirmar que os termos $C_{1f,j}$, $C_{2f,j}$, $C_{nf,j}$ e $C_{1p,j}$, $C_{2p,j}$, $C_{np,j}$, que representam o valor verdadeiro das coordenadas dos n pontos tocados, se repetem entre quaisquer montagens já que a peça é a mesma.

Para o desenvolvimento deste método de separação de erros são exigidas a redundância de dados e a sobreposição de pontos, o que torna possível obter a parcela do desvio angular, $\delta C_t^{\alpha,j}$, e a parcela paramétrica à direção i , δC_t , de todos os pontos presentes no modelo. Medidas redundantes são efetuadas em mesma geratriz j , possibilitando encontrar o desvio angular, enquanto para a parcela de erro que é paramétrica a direção i , é aplicada uma sobreposição de pontos. A sobreposição de pontos permite igualar o desvio δC_t , de um ponto da peça em relação a outro ponto. Na figura 5.13 estão apresentadas a sobreposição dos

pontos e redundância da leitura, o índice $w1$ representa o posicionamento da peça para uma sobreposição à esquerda.

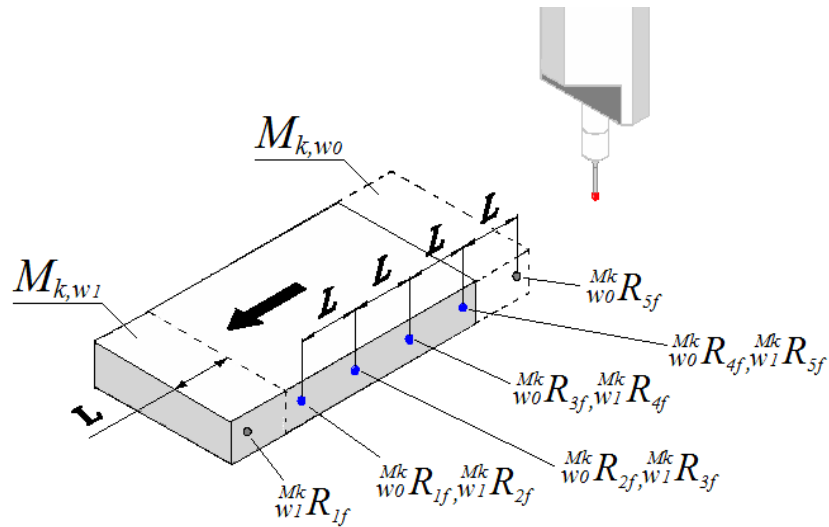


Figura 5. 13: Sobreposição $w1$ à esquerda.

Os pontos em destaque na figura 5.13 estão sobrepostos pela aplicação de um deslocamento da peça, que é definido por um passo igual à distância entre os pontos coletados da parede frontal. Na figura 5.14 está ilustrado a equivalência de desvios paramétricos a i com auxílio da sobreposição.

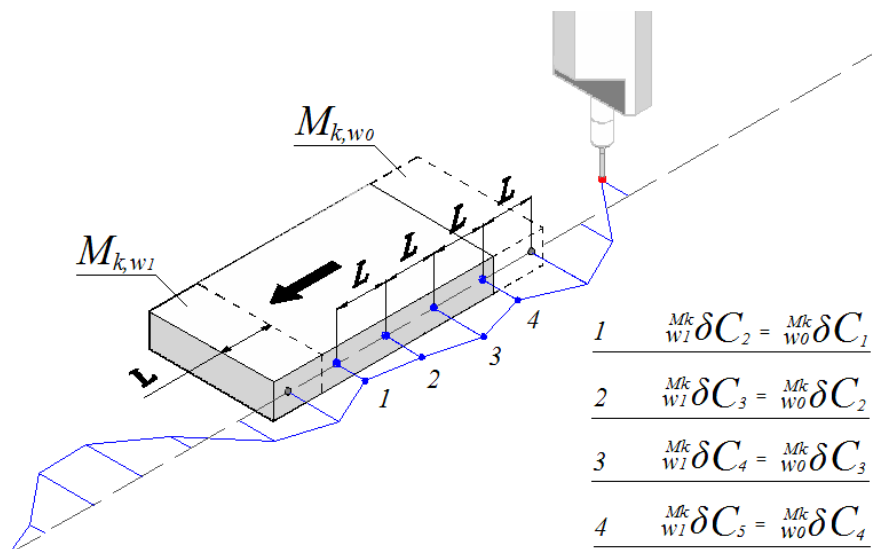


Figura 5. 14: Equivalência de erros paramétricos a direção i pela sobreposição $w1$.

A aplicação desta técnica para coleta dos pontos permite que se obtenham leituras diferentes para um único ponto, o que é desejável para redundância de dados e torna possível a separação de erros. Técnicas de redundância são necessárias para separação, conforme observado no capítulo 2

A sobreposição aplicada em uma medição com cinco pontos coletados em uma parede permite equiparar quatro incógnitas referentes ao desvio paramétrico i . Numericamente, isto implica em diminuir no modelo proposto o ganho de incógnitas em relação ao número de equações a partir da repetição de medidas, o que pode ser benéfico para estabilidade da solução do modelo.

O método aplicado para sobreposição da leitura dos pontos é realizado pelo deslocamento da peça e como consequência disto, ainda que indesejado, ocorre uma imprecisão do deslocamento sobre a geratriz medida em relação a montagem original, esta imprecisão sob a forma de desalinhamento deve ser considerada no modelo. Partindo do princípio que os erros sobre a medição por coordenadas dependem da posição de medição no volume da MMC, então a sobreposição deve ser adequada para se fazer uma equivalência correta dos erros. O desalinhamento impede uma sobreposição ideal dos pontos, o que dificulta a obtenção correta dos desvios uma vez que uma condição necessária para separação de erros é a própria sobreposição. A figura 5.15 apresenta as componentes de desalinhamento ψ_{w1} , que é uma componente angular, e, e_{w1} que se refere a um *offset*, ocasionados pelo deslocamento da peça para sobreposição à esquerda.

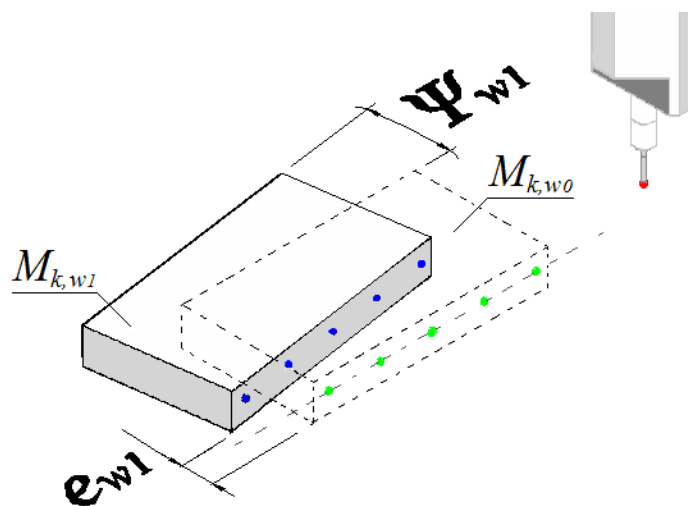


Figura 5. 15: Desalinhamento devido a sobreposição de pontos

A partir da sobreposição de pontos é possível obter o sistema de equações 5.19, que representa as leituras dos pontos coletados de maneira generalizada, para uma montagem qualquer. Neste sistema de equações, o termo $M_{k w1}$ corresponde a medições em uma região k da MMC com aplicação de uma sobreposição $w1$.

Considerando a coleta de cinco pontos na superfície frontal e dois na superfície posterior, as leituras dos pontos de $M_{k w1}$ são apresentadas a seguir na equação 5.19. Para tanto, é aplicada a equivalência dos desvios devido a sobreposição de pontos, conforme figura 5.14 e também são adicionadas as variáveis de desalinhamento da figura 5.15.

Modelagem para leituras dos pontos em $M_{k w1}$:

$${}^{Mk}_{w1}R_1 = C_{1j} + \alpha_{f,Mk}({}^{Mk}_{w1}R_{1,i}) + {}^{Mk}_{w1}\delta C_1 + \psi_{w1,Mk}({}^{Mk}_{w1}R_{1,i}) + e_{w1,Mk}$$

$${}^{Mk}_{w1}R_2 = C_{2j} + \alpha_{f,Mk}({}^{Mk}_{w1}R_{2,i}) + {}^{Mk}_{w0}\delta C_1 + \psi_{w1,Mk}({}^{Mk}_{w1}R_{2,i}) + e_{w1,Mk}$$

$${}^{Mk}_{w1}R_3 = C_{3j} + \alpha_{f,Mk}({}^{Mk}_{w1}R_{3,i}) + {}^{Mk}_{w0}\delta C_2 + \psi_{w1,Mk}({}^{Mk}_{w1}R_{3,i}) + e_{w1,Mk}$$

$${}^{Mk}_{w1}R_4 = C_{4j} + \alpha_{f,Mk}({}^{Mk}_{w1}R_{4,i}) + {}^{Mk}_{w0}\delta C_3 + \psi_{w1,Mk}({}^{Mk}_{w1}R_{4,i}) + e_{w1,Mk}$$

$${}^{Mk}_{w1}R_5 = C_{5j} + \alpha_{f,Mk}({}^{Mk}_{w1}R_{5,i}) + {}^{Mk}_{w0}\delta C_4 + \psi_{w1,Mk}({}^{Mk}_{w1}R_{5,i}) + e_{w1,Mk}$$

5. 19

$${}^{Mk}_{w1}R_6 = C_{6j} + \alpha_{p,Mk}({}^{Mk}_{w1}R_{6,i}) + {}^{Mk}_{w0}\delta C_3 + \psi_{w1,Mk}({}^{Mk}_{w1}R_{6,i}) + e_{w1,Mk}$$

$${}^{Mk}_{w1}R_7 = C_{7j} + \alpha_{p,Mk}({}^{Mk}_{w1}R_{7,i}) + {}^{Mk}_{w0}\delta C_1 + \psi_{w1,Mk}({}^{Mk}_{w1}R_{7,i}) + e_{w1,Mk}$$

Para uma maior redundância de dados, uma segunda sobreposição $w2$ é efetuada, sendo caracterizada por um deslocamento à direita de $M_{k w0}$. Este deslocamento, assim como para a primeira sobreposição $w1$, é realizado a um passo igual à distância entre os pontos coletados, no caso 40 mm.

As figuras 5.16 e 5.17 apresentam a sobreposição w_2 e a equivalência dos pontos devido à aplicação da sobreposição w_2 .

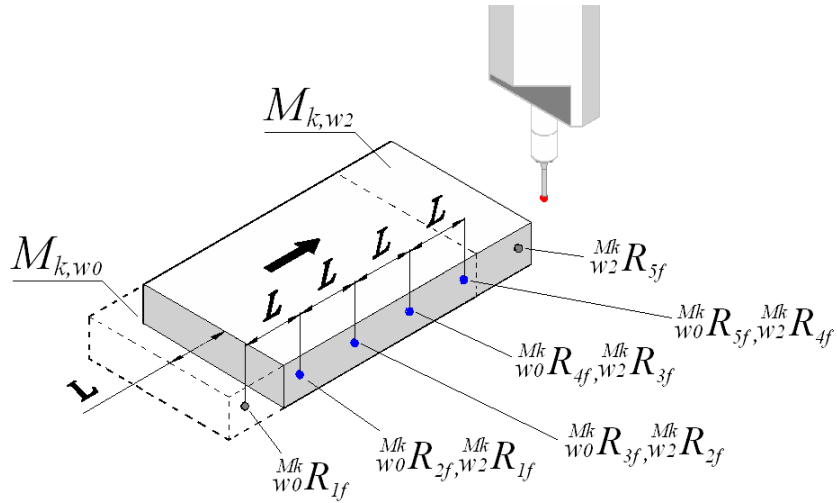


Figura 5. 16: Sobreposição w_2 à direita.

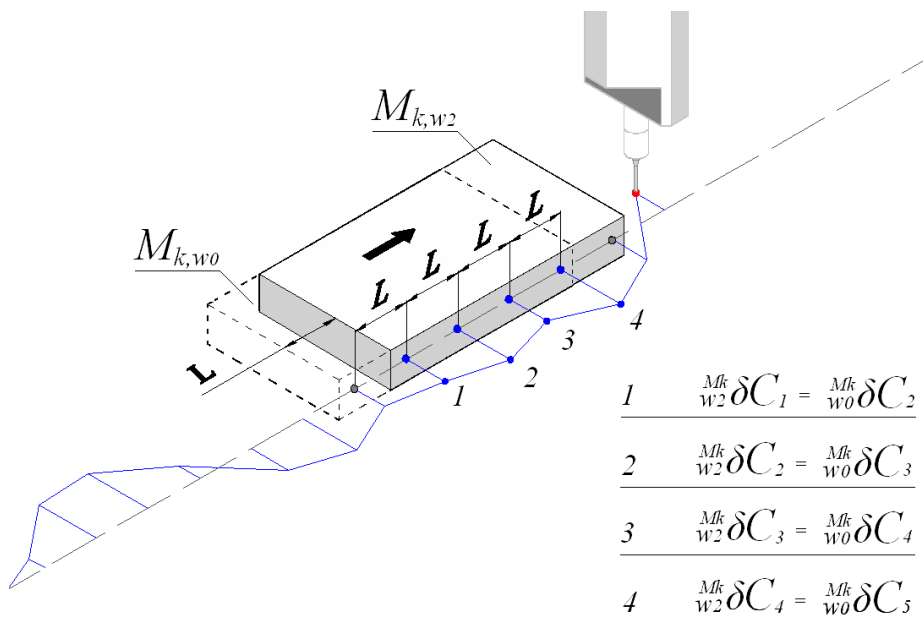


Figura 5. 17: Equivalência de erros paramétricos a direção i pela sobreposição w_2 .

A modelagem das leituras dos pontos para a segunda sobreposição w_2 é elaborada de forma semelhante à realizada para a sobreposição w_1 . Os desvios angulares são considerados de acordo com a geratriz medida, os desvios que são paramétricos a direção i , na parede frontal, devem ser escritos em termos da montagem original w_0 , a partir da equivalência obtida pela sobreposição w_2 . Os desvios paramétricos a i , porém, contidos na superfície posterior, devem ter a equivalência com os pontos da superfície frontal. São considerados também os desvios devido ao desalinhamento, que são ocasionados pela movimentação obrigatória da peça para a segunda sobreposição. Diante das considerações citadas, a modelagem das leituras dos pontos na k -ésima montagem, $M_{k w_2}$, estão apresentadas no sistema de equação 5.20.

$$\begin{aligned}
 {}^{Mk}_{w_2} R_1 &= C_{1j} + \alpha_{f, Mk} ({}^{Mk}_{w_2} R_{1,i}) + {}^{Mk}_{w_0} \delta C_2 + \psi_{w_2, Mk} ({}^{Mk}_{w_2} R_{1,i}) + e_{w_2, Mk} \\
 {}^{Mk}_{w_2} R_2 &= C_{2j} + \alpha_{f, Mk} ({}^{Mk}_{w_2} R_{2,i}) + {}^{Mk}_{w_0} \delta C_3 + \psi_{w_2, Mk} ({}^{Mk}_{w_2} R_{2,i}) + e_{w_2, Mk} \\
 {}^{Mk}_{w_2} R_3 &= C_{3j} + \alpha_{f, Mk} ({}^{Mk}_{w_2} R_{3,i}) + {}^{Mk}_{w_0} \delta C_4 + \psi_{w_2, Mk} ({}^{Mk}_{w_2} R_{3,i}) + e_{w_2, Mk} \\
 {}^{Mk}_{w_2} R_4 &= C_{4j} + \alpha_{f, Mk} ({}^{Mk}_{w_2} R_{4,i}) + {}^{Mk}_{w_0} \delta C_5 + \psi_{w_2, Mk} ({}^{Mk}_{w_2} R_{4,i}) + e_{w_2, Mk} \\
 {}^{Mk}_{w_2} R_5 &= C_{5j} + \alpha_{f, Mk} ({}^{Mk}_{w_2} R_{5,i}) + {}^{Mk}_{w_2} \delta C_5 + \psi_{w_2, Mk} ({}^{Mk}_{w_2} R_{5,i}) + e_{w_2, Mk} \\
 &----- \\
 {}^{Mk}_{w_2} R_6 &= C_{6j} + \alpha_{p, Mk} ({}^{Mk}_{w_2} R_{6,i}) + {}^{Mk}_{w_0} \delta C_5 + \psi_{w_2, Mk} ({}^{Mk}_{w_2} R_{6,i}) + e_{w_2, Mk} \\
 {}^{Mk}_{w_2} R_7 &= C_{7j} + \alpha_{p, Mk} ({}^{Mk}_{w_2} R_{7,i}) + {}^{Mk}_{w_0} \delta C_3 + \psi_{w_2, Mk} ({}^{Mk}_{w_2} R_{7,i}) + e_{w_2, Mk}
 \end{aligned}
 \tag{5.20}$$

O sistema de equações 5.21 é obtido ao agrupar os sistemas de equações 5.18, 5.19 e 5.20, que representam as leituras dos pontos nas respectivas montagens: original, w_0 , a montagem para primeira sobreposição, w_1 , e a montagem da segunda sobreposição, w_2 . Este sistema de equações representa a modelagem dos pontos coletados para uma montagem em uma posição qualquer da MMC utilizando uma sobreposição dupla. As linhas deste sistema se totalizam em vinte e uma, que correspondem as leituras, já ao lado direito da igualdade, o sistema é composto por 20 incógnitas.

$${}^{Mk}R_1 = C_{1j} + \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}R_{1,i}) + {}^{Mk}\delta C_1$$

$${}^{Mk}R_2 = C_{2j} + \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}R_{2,i}) + {}^{Mk}\delta C_2$$

$${}^{Mk}R_3 = C_{3j} + \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}R_{3,i}) + {}^{Mk}\delta C_3$$

$${}^{Mk}R_4 = C_{4j} + \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}R_{4,i}) + {}^{Mk}\delta C_4$$

$${}^{Mk}R_5 = C_{5j} + \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}R_{5,i}) + {}^{Mk}\delta C_5$$

$${}^{Mk}R_6 = C_{6j} + \alpha_{p,Mk} ({}^{Mk}R_{6,i}) + {}^{Mk}\delta C_4$$

$${}^{Mk}R_7 = C_{7j} + \alpha_{p,Mk} ({}^{Mk}R_{7,i}) + {}^{Mk}\delta C_2$$

$${}^{Mk}R_1 = C_{1j} + \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}R_{1,i}) + {}^{Mk}\delta C_1 + \psi_{w1,Mk} ({}^{Mk}R_{1,i}) + e_{w1,Mk}$$

$${}^{Mk}R_2 = C_{2j} + \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}R_{2,i}) + {}^{Mk}\delta C_1 + \psi_{w1,Mk} ({}^{Mk}R_{2,i}) + e_{w1,Mk}$$

$${}^{Mk}R_3 = C_{3j} + \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}R_{3,i}) + {}^{Mk}\delta C_2 + \psi_{w1,Mk} ({}^{Mk}R_{3,i}) + e_{w1,Mk}$$

$${}^{Mk}R_4 = C_{4j} + \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}R_{4,i}) + {}^{Mk}\delta C_3 + \psi_{w1,Mk} ({}^{Mk}R_{4,i}) + e_{w1,Mk}$$

5. 21

$${}^{Mk}R_5 = C_{5j} + \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}R_{5,i}) + {}^{Mk}\delta C_4 + \psi_{w1,Mk} ({}^{Mk}R_{5,i}) + e_{w1,Mk}$$

$${}^{Mk}R_6 = C_{6j} + \alpha_{p,Mk} ({}^{Mk}R_{6,i}) + {}^{Mk}\delta C_3 + \psi_{w1,Mk} ({}^{Mk}R_{6,i}) + e_{w1,Mk}$$

$${}^{Mk}R_7 = C_{7j} + \alpha_{p,Mk} ({}^{Mk}R_{7,i}) + {}^{Mk}\delta C_1 + \psi_{w1,Mk} ({}^{Mk}R_{7,i}) + e_{w1,Mk}$$

$${}^{Mk}R_1 = C_{1j} + \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}R_{1,i}) + {}^{Mk}\delta C_2 + \psi_{w2,Mk} ({}^{Mk}R_{1,i}) + e_{w2,Mk}$$

$${}^{Mk}R_2 = C_{2j} + \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}R_{2,i}) + {}^{Mk}\delta C_3 + \psi_{w2,Mk} ({}^{Mk}R_{2,i}) + e_{w2,Mk}$$

$${}^{Mk}R_3 = C_{3j} + \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}R_{3,i}) + {}^{Mk}\delta C_4 + \psi_{w2,Mk} ({}^{Mk}R_{3,i}) + e_{w2,Mk}$$

$${}^{Mk}R_4 = C_{4j} + \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}R_{4,i}) + {}^{Mk}\delta C_5 + \psi_{w2,Mk} ({}^{Mk}R_{4,i}) + e_{w2,Mk}$$

$${}^{Mk}R_5 = C_{5j} + \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}R_{5,i}) + {}^{Mk}\delta C_5 + \psi_{w2,Mk} ({}^{Mk}R_{5,i}) + e_{w2,Mk}$$

$${}^{Mk}R_6 = C_{6j} + \alpha_{p,Mk} ({}^{Mk}R_{6,i}) + {}^{Mk}\delta C_5 + \psi_{w2,Mk} ({}^{Mk}R_{6,i}) + e_{w2,Mk}$$

$${}^{Mk}R_7 = C_{7j} + \alpha_{p,Mk} ({}^{Mk}R_{7,i}) + {}^{Mk}\delta C_3 + \psi_{w2,Mk} ({}^{Mk}R_{7,i}) + e_{w2,Mk}$$

Na separação de erros em medições de distâncias entre superfícies é necessária a modelagem dos pontos em ao menos duas regiões distintas da MMC, pois, é o intuito do trabalho encontrar o valor convencional da distância dentre os valores obtidos em medições contaminadas por desvios, que ocorrem pela medição em diferentes regiões da MMC. Os desvios dos pontos coordenados são conhecidos por meio de simulação numérica, através da solução da modelagem proposta. Para que isto seja possível é necessário elaborar um modelo que considera a diferença entre as leituras dos pontos em montagens situadas em diferentes regiões, como por exemplo M_k e M_{k+1} . Considerando duas regiões de medição o modelo para separação de erros é apresentado no sistema de equações 5.22.

A figura 5.18 ilustra duas regiões utilizadas para medição de distância entre superfícies, definidas como M_k e M_{k+1} . Estas posições da peça estão contidas no plano formado pelo desempenho da máquina e também estão sujeitas aos deslocamentos para a sobreposição das leituras dos pontos, que são necessários conforme apresentado anteriormente. Desta forma, tem-se as seguintes montagens: $M_{k,w0}$, $M_{k,w1}$, $M_{k,w2}$, $M_{k+1,w0}$, $M_{k+1,w1}$ e $M_{k+1,w2}$.

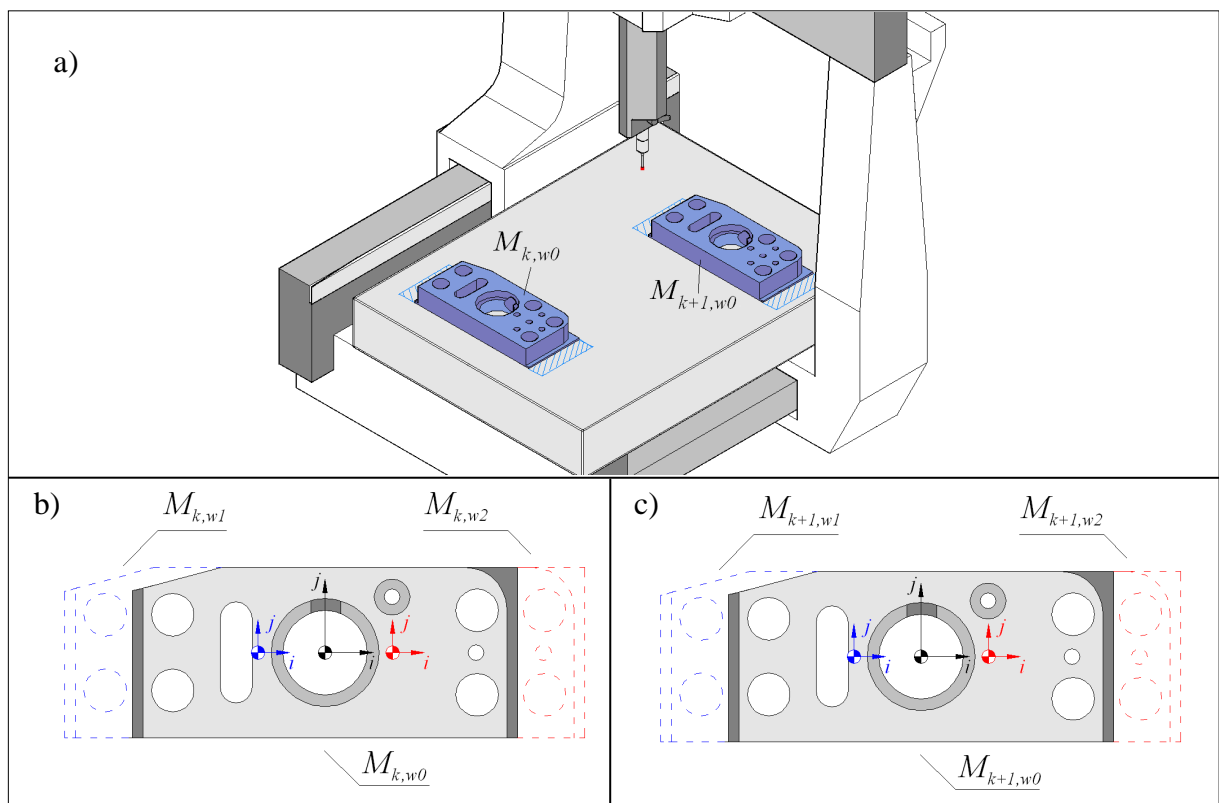


Figura 5. 18: Regiões de medição no plano de medição da máquina $M_{k,w0}$ e $M_{k+1,w0}$ (a). Posições deslocadas $M_{k,w1}$ e $M_{k,w2}$ (b). Posições deslocadas para $M_{k+1,w1}$ e $M_{k+1,w2}$ (c).

A partir do sistema de equações 5.21 deve ser efetuada a diferença entre duas montagens em diferentes regiões da MMC, então, $M_k - M_{k+1}$, e portanto, é obtido o modelo para a separação de erros que foi aplicado neste trabalho. Este modelo está apresentado na equação 5.22 em uma representação generalizada, com montagens em duas regiões quaisquer.

$$\begin{aligned}
{}^{Mk+1}_{Mk} \Delta R_{1,w0} &= \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}_{w0} R_{1,i}) - \alpha_{f,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w0} R_{1,i}) + {}^{Mk}_{w0} \delta C_1 - {}^{Mk+1}_{w0} \delta C_1 \\
{}^{Mk+1}_{Mk} \Delta R_{2,w0} &= \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}_{w0} R_{2,i}) - \alpha_{f,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w0} R_{2,i}) + {}^{Mk}_{w0} \delta C_2 - {}^{Mk+1}_{w0} \delta C_2 \\
{}^{Mk+1}_{Mk} \Delta R_{3,w0} &= \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}_{w0} R_{3,i}) - \alpha_{f,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w0} R_{3,i}) + {}^{Mk}_{w0} \delta C_3 - {}^{Mk+1}_{w0} \delta C_3 \\
{}^{Mk+1}_{Mk} \Delta R_{4,w0} &= \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}_{w0} R_{4,i}) - \alpha_{f,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w0} R_{4,i}) + {}^{Mk}_{w0} \delta C_4 - {}^{Mk+1}_{w0} \delta C_4 \\
{}^{Mk+1}_{Mk} \Delta R_{5,w0} &= \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}_{w0} R_{5,i}) - \alpha_{f,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w0} R_{5,i}) + {}^{Mk}_{w0} \delta C_5 - {}^{Mk+1}_{w0} \delta C_5 \\
{}^{Mk+1}_{Mk} \Delta R_{6,w0} &= \alpha_{p,Mk} ({}^{Mk}_{w0} R_{6,i}) - \alpha_{p,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w0} R_{6,i}) + {}^{Mk}_{w0} \delta C_4 - {}^{Mk+1}_{w0} \delta C_4 \\
{}^{Mk+1}_{Mk} \Delta R_{7,w0} &= \alpha_{p,Mk} ({}^{Mk}_{w0} R_{7,i}) - \alpha_{p,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w0} R_{7,i}) + {}^{Mk}_{w0} \delta C_2 - {}^{Mk+1}_{w0} \delta C_2
\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
{}^{Mk+1}_{Mk} \Delta R_{1,w1} &= \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}_{w1} R_{1,i}) - \alpha_{f,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w1} R_{1,i}) + {}^{Mk}_{w1} \delta C_1 - {}^{Mk+1}_{w1} \delta C_1 + \psi_{w1,Mk} ({}^{Mk}_{w1} R_{1,i}) - \psi_{w1,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w1} R_{1,i}) + e_{w1,Mk} - e_{w1,Mk+1} \\
{}^{Mk+1}_{Mk} \Delta R_{2,w1} &= \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}_{w1} R_{2,i}) - \alpha_{f,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w1} R_{2,i}) + {}^{Mk}_{w1} \delta C_1 - {}^{Mk+1}_{w1} \delta C_1 + \psi_{w1,Mk} ({}^{Mk}_{w1} R_{2,i}) - \psi_{w1,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w1} R_{2,i}) + e_{w1,Mk} - e_{w1,Mk+1} \\
{}^{Mk+1}_{Mk} \Delta R_{3,w1} &= \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}_{w1} R_{3,i}) - \alpha_{f,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w1} R_{3,i}) + {}^{Mk}_{w1} \delta C_2 - {}^{Mk+1}_{w1} \delta C_2 + \psi_{w1,Mk} ({}^{Mk}_{w1} R_{3,i}) - \psi_{w1,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w1} R_{3,i}) + e_{w1,Mk} - e_{w1,Mk+1} \\
{}^{Mk+1}_{Mk} \Delta R_{4,w1} &= \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}_{w1} R_{4,i}) - \alpha_{f,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w1} R_{4,i}) + {}^{Mk}_{w1} \delta C_3 - {}^{Mk+1}_{w1} \delta C_3 + \psi_{w1,Mk} ({}^{Mk}_{w1} R_{4,i}) - \psi_{w1,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w1} R_{4,i}) + e_{w1,Mk} - e_{w1,Mk+1} \\
{}^{Mk+1}_{Mk} \Delta R_{5,w1} &= \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}_{w1} R_{5,i}) - \alpha_{f,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w1} R_{5,i}) + {}^{Mk}_{w1} \delta C_4 - {}^{Mk+1}_{w1} \delta C_4 + \psi_{w1,Mk} ({}^{Mk}_{w1} R_{5,i}) - \psi_{w1,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w1} R_{5,i}) + e_{w1,Mk} - e_{w1,Mk+1} \\
{}^{Mk+1}_{Mk} \Delta R_{6,w1} &= \alpha_{p,Mk} ({}^{Mk}_{w1} R_{6,i}) - \alpha_{p,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w1} R_{6,i}) + {}^{Mk}_{w1} \delta C_3 - {}^{Mk+1}_{w1} \delta C_3 + \psi_{w1,Mk} ({}^{Mk}_{w1} R_{6,i}) - \psi_{w1,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w1} R_{6,i}) + e_{w1,Mk} - e_{w1,Mk+1} \\
{}^{Mk+1}_{Mk} \Delta R_{7,w1} &= \alpha_{p,Mk} ({}^{Mk}_{w1} R_{7,i}) - \alpha_{p,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w1} R_{7,i}) + {}^{Mk}_{w1} \delta C_1 - {}^{Mk+1}_{w1} \delta C_1 + \psi_{w1,Mk} ({}^{Mk}_{w1} R_{7,i}) - \psi_{w1,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w1} R_{7,i}) + e_{w1,Mk} - e_{w1,Mk+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^{Mk+1}_{Mk} \Delta R_{1,w2} &= \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}_{w2} R_{1,i}) - \alpha_{f,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w2} R_{1,i}) + {}^{Mk}_{w2} \delta C_2 - {}^{Mk+1}_{w2} \delta C_2 + \psi_{w2,Mk} ({}^{Mk}_{w2} R_{1,i}) - \psi_{w2,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w2} R_{1,i}) + e_{w2,Mk} - e_{w2,Mk+1} \\
{}^{Mk+1}_{Mk} \Delta R_{2,w2} &= \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}_{w2} R_{2,i}) - \alpha_{f,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w2} R_{2,i}) + {}^{Mk}_{w2} \delta C_3 - {}^{Mk+1}_{w2} \delta C_3 + \psi_{w2,Mk} ({}^{Mk}_{w2} R_{2,i}) - \psi_{w2,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w2} R_{2,i}) + e_{w2,Mk} - e_{w2,Mk+1} \\
{}^{Mk+1}_{Mk} \Delta R_{3,w2} &= \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}_{w2} R_{3,i}) - \alpha_{f,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w2} R_{3,i}) + {}^{Mk}_{w2} \delta C_4 - {}^{Mk+1}_{w2} \delta C_4 + \psi_{w2,Mk} ({}^{Mk}_{w2} R_{3,i}) - \psi_{w2,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w2} R_{3,i}) + e_{w2,Mk} - e_{w2,Mk+1} \\
{}^{Mk+1}_{Mk} \Delta R_{4,w2} &= \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}_{w2} R_{4,i}) - \alpha_{f,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w2} R_{4,i}) + {}^{Mk}_{w2} \delta C_5 - {}^{Mk+1}_{w2} \delta C_5 + \psi_{w2,Mk} ({}^{Mk}_{w2} R_{4,i}) - \psi_{w2,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w2} R_{4,i}) + e_{w2,Mk} - e_{w2,Mk+1} \\
{}^{Mk+1}_{Mk} \Delta R_{5,w2} &= \alpha_{f,Mk} ({}^{Mk}_{w2} R_{5,i}) - \alpha_{f,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w2} R_{5,i}) + {}^{Mk}_{w2} \delta C_5 - {}^{Mk+1}_{w2} \delta C_5 + \psi_{w2,Mk} ({}^{Mk}_{w2} R_{5,i}) - \psi_{w2,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w2} R_{5,i}) + e_{w2,Mk} - e_{w2,Mk+1} \\
{}^{Mk+1}_{Mk} \Delta R_{6,w2} &= \alpha_{p,Mk} ({}^{Mk}_{w2} R_{6,i}) - \alpha_{p,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w2} R_{6,i}) + {}^{Mk}_{w2} \delta C_5 - {}^{Mk+1}_{w2} \delta C_5 + \psi_{w2,Mk} ({}^{Mk}_{w2} R_{6,i}) - \psi_{w2,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w2} R_{6,i}) + e_{w2,Mk} - e_{w2,Mk+1} \\
{}^{Mk+1}_{Mk} \Delta R_{7,w2} &= \alpha_{p,Mk} ({}^{Mk}_{w2} R_{7,i}) - \alpha_{p,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w2} R_{7,i}) + {}^{Mk}_{w2} \delta C_3 - {}^{Mk+1}_{w2} \delta C_3 + \psi_{w2,Mk} ({}^{Mk}_{w2} R_{7,i}) - \psi_{w2,Mk+1} ({}^{Mk+1}_{w2} R_{7,i}) + e_{w2,Mk} - e_{w2,Mk+1}
\end{aligned}$$

Com base nesta modelagem para duas regiões de medição M_k e M_{k+1} a solução numérica do sistema é realizada e então é permitido o desacoplamento dos erros através das leituras na direção j dos pontos coletados.

Algumas variações para aplicação do método são propostas, entretanto, comum em todas, quatro montagens em diferentes regiões da MMC foram utilizadas e são as mesmas apresentadas anteriormente na figura 5.2. As montagens apresentadas na figura 5.2 devem ainda ter deslocamentos de posição para as devidas sobreposições dos pontos, as modelagens das leituras dos pontos seguem a mesma metodologia apresentada para todas as variações. A seguir são apresentadas as variações do método de separação erros e aplicação dos SRM em MMC.

5.4.2 Sistema Redundante de Medição utilizando quatro montagens sem considerar os desalinhamentos entre sobreposições

Neste método é utilizado quatro regiões de medição no mesmo modelo, porém, as variáveis correspondentes ao desalinhamento devido ao deslocamento da peça para sobreposição dos pontos não é considerado. O modelo matemático para o desacoplamento de erros deste método está apresentado no item A1 do apêndice A. O sistema de equações modelado é retangular $m \times n$, contém sessenta e três linhas e trinta e seis incógnitas, que são representadas pelo número de colunas da matriz dos coeficientes quando o sistema é escrito sob a forma matricial. O sistema de equações para este método é sobredeterminado.

5.4.3 Sistema Redundante de Medição utilizando quatro montagens e variáveis de desalinhamento entre sobreposições - SRM_1

Este método é semelhante ao método anterior, apresentado no item 5.4.2, ele considera quatro regiões de medição no mesmo modelo, no entanto, estão contidas no modelo as variáveis referentes ao desalinhamento devido ao deslocamento da peça para sobreposição dos pontos. Para melhor entendimento durante a leitura deste trabalho, este

método é denominado SRM_1, que significa sistema redundante de medição de versão um.

Para efetiva aplicação do SRM_1 foram utilizados três procedimentos, repetindo o processo de desacoplamento dos erros para as quatro montagens utilizadas e suas respectivas montagens de sobreposição de pontos. O modelo matemático de cada procedimento do SRM_1 está apresentado no item A2 do apêndice A. O sistema de equações deste método também é um sistema retangular e sobredeterminado, contém sessenta e três linhas e cinquenta e duas incógnitas.

5.4.4 Sistema Redundante de Medição utilizando pares de montagens e variáveis de desalinhamento entre sobreposições - SRM_2

No método SRM_2, ou Sistema Redundante de Medição versão dois, foram avaliadas quatro regiões da MMC para medição de distâncias, embora sejam utilizadas somente duas na modelagem matemática, já que o desacoplamento de erros é realizado em pares. Cada par correspondente a regiões de medição define um procedimento de medição com aplicação do SRM_2, o que totaliza em seis o número de procedimentos, já que são utilizadas quatro regiões diferentes da MMC. Os modelos matemáticos de cada procedimento de aplicação do SRM_2 estão apresentados no apêndice A, nos itens A3, A4, A5, A6, A7 e A8. Neste método também são considerados os desalinhamentos entre as montagens deslocadas para a sobreposição de pontos.

A tabela 5.3 apresenta os procedimentos de medição e os respectivos pares de montagens utilizados.

Tabela 5. 3: Procedimentos de medição e pares de montagens utilizados

Procedimento	Montagens
1	M_1 e M_2
2	M_1 e M_3
3	M_1 e M_4
4	M_2 e M_3
5	M_2 e M_4
6	M_3 e M_4

O sistema de equações modelado para este método também é um sistema retangular, porém, é subdeterminado. Este sistema modelado para cada par de regiões, possui vinte e uma linhas e vinte e seis incógnitas.

5.4.5 Solução numérica das modelagens

O sistema de equações obtidos com a diferença entre montagens, permite eliminar as variáveis relacionadas aos valores verdadeiros C_i , já que a peça é a mesma e o sistema de coordenadas sempre é estabelecido na mesma posição da peça. Uma abordagem matricial também pode ser adotada para representação dos sistemas que é apresentada na equação 5.23.

$$\{R\} = [G]\{D\} \quad 5.23$$

Onde:

$\{R\}$ é um vetor composto pelas leituras do sistema, ou seja, a diferença das leituras dos pontos entre as diferentes regiões de medição com mesma posição de sobreposição.

$\{D\}$ é também um vetor, mas é composto pelas incógnitas do sistema de equações.

$[G]$ é uma matriz que representa os coeficientes das incógnitas, o número de linhas equivale a dimensão do vetor $\{R\}$, enquanto o número de colunas de $[G]$ é igual a dimensão do vetor $\{D\}$.

Os sistemas obtidos em todas as variações dos SRM são mal - condicionados e esparsos o que requer métodos não elementares de álgebra linear para a solução. O SRM_2 fornece pela modelagem um sistema subdeterminado, enquanto o SRM_1 e também o método em que é utilizado todas as quatro montagens, porém não são considerados desalinhamentos devido à movimentação para a sobreposição, fornecem um sistema sobredeterminado. Para ambas as condições, um método de otimização é recomendado para obtenção da solução, além do mais, por se tratarem de matrizes com *rank* deficiente, esparsas e quase singular, métodos convencionais não permitem solução, e, sobretudo com estabilidade numérica.

Sistemas de equações com as características citadas possuem soluções prejudicadas por erros de arredondamento, assim, algoritmos mais poderosos são utilizados. Neste sentido, um método para solução de $[G]\{D\}=\{R\}$ com a minimização da norma $\|[G]\{D\}-\{R\}\|_2$ é

aplicado. Métodos baseados em decomposição QR , decomposição em valores singulares, SVD , e métodos iterativos são sugeridos para as características dos modelos matemáticos elaborados.

Os métodos iterativos foram os escolhidos para solução do sistema, porém, dentre os inúmeros existentes, foi selecionado um método que possibilite a solução de sistemas retangulares com resultados estáveis e que solucionem sistemas mal condicionados, esparsos e com *rank* deficiente, que são características dos sistemas elaborados pela modelagem matemática deste trabalho. O algoritmo *lsqr* atende as necessidades para a solução da modelagem utilizada para separação de erros, pois é recomendado para solução de sistemas esparsos e mal condicionados, além de convergir rapidamente para sistemas onde a matriz dos coeficientes não é quadrada.

O algoritmo do método *lsqr* oferece uma solução para $[G]\{D\}=\{R\}$ no sentido de obter a mínima norma, $\min\|[G]\{D\}-\{R\}\|_2$. O *lsqr* permite ainda estabelecer critérios de paradas para a busca da solução, sendo estes definidos pelo número de iterações e tolerância de resultados para convergência da solução numérica. Diante disto, o método *lsqr* foi escolhido para a solução numérica do sistema e ele foi aplicado a partir de uma rotina previamente programada no Matlab, que pertence a um pacote de análise numérica.

5.4.6 Determinação da distância a partir dos sistemas redundantes de medição

A distância entre superfícies da peça medida foi determinada a partir da aplicação dos sistemas redundantes de medição. Nestes métodos, as distâncias são obtidas com o cálculo da distância entre ponto e reta, a partir das coordenadas dos pontos, após a remoção dos erros encontrados pela solução numérica dos modelos matemáticos. O ponto definido na superfície posterior da peça é um ponto único, definido pela média entre dois pontos equidistantes em relação ao centro da peça, enquanto para a superfície frontal foi definida uma reta ajustada pelo método dos mínimos quadrados. O diâmetro da sonda de medição definido no processo de qualificação foi considerado no cálculo final da distância entre as superfícies.

5.5 Validação das variações dos Sistemas Redundantes de Medição

Após a execução dos SRM é necessária uma validação dos resultados obtidos, já que ela permite inferir sobre a qualidade do método elaborado. O desacoplamento de erros

em medições de distâncias foi efetuado por meio de simulação computacional, a partir de métodos não convencionais e avançados, então, a validação dos métodos aplicados é necessária.

Os resultados de distâncias com a aplicação dos métodos SRM_1 e SRM_2 são comparados entre os procedimentos efetuados, com isto, é avaliada a estabilidade da solução da modelagem proposta e dos próprios resultados de distâncias obtidos após o desacoplamento dos erros.

A validação dos métodos redundantes de medição também é efetuada pela comparação das distâncias obtidas com os resultados obtidos pela medição de distância em uma máquina de medição universal SIP. A SIP possui resolução de um décimo de micrometro e é um instrumento tradicionalmente aceito para obtenção de medidas de referência.

A medição da distância entre superfícies com a SIP foi realizada sobre as posições dos dois pontos utilizados da parede posterior, sendo dez medidas para cada ponto. Durante a medição da peça, acondicionou-se o ambiente de medição e a peça medida por cerca de oito horas, manteve-se a temperatura em $20 \pm 0,5^\circ\text{C}$ e a umidade relativa do ambiente em $40 \pm 1\%$. O acondicionamento garante o equilíbrio térmico entre peça e máquina de medição e diminui a influência de gradientes de temperatura sobre os resultados. A figura 5.19 ilustra a medição da peça com a SIP.



Figura 5. 19: Medição da distância entre paredes com a SIP em ambiente com temperatura e umidade controladas.

CAPÍTULO 6

RESULTADOS E DISCUSSÕES SOBRE O DESENVOLVIMENTO DOS SISTEMAS REDUNTANTES DE MEDIÇÃO APLICADOS EM MÁQUINAS DE MEDIR POR COORDENADAS

Após apresentar os aspectos teóricos e os sistemas redundantes de medição, cabe expor e discutir os resultados obtidos neste trabalho. Neste capítulo estão apresentados os resultados de simulação computacional para obtenção de distâncias entre paredes através da aplicação de técnicas de separação de erros. A maior parte das discussões converge para avaliações de desempenho do método de separação de erros e dos resultados de distâncias. O capítulo seis está dividido em quatro partes.

Na primeira parte é comprovada a justificativa da elaboração da tese, que é baseada na hipótese de que os resultados de medições de distâncias entre paredes, utilizando medições por coordenadas, estão sujeitas a erros geométricos ou superposições de erros que são dependentes da região de medição. Neste sentido, são apresentados os resultados de medições de distâncias em diferentes regiões da MMC, bem como os resultados dos pontos coletados sob a mesma condição.

Os resultados de calibração das escalas são apresentados na segunda parte, pois, é parte das considerações para elaboração do método de separação de erros que ao menos as escalas estejam calibradas e em perfeito funcionamento.

Na terceira parte estão apresentados os resultados relacionados para os sistemas redundantes de medição. A partir da modelagem dos desvios sobre pontos coletados um sistema de equações foi elaborado e partir de sua solução os desvios foram obtidos. Das leituras dos pontos, os desvios pela simulação numérica foram removidos e assim, os valores convencionais da distância entre paredes puderam ser obtidos. Resultados relacionados aos resíduos das simulações computacionais para os métodos redundantes de medições são apresentadas nesta parte, bem como a validação pela estabilidade dos resultados de distâncias obtidos entre os procedimentos.

Por último, na quarta parte, estão apresentadas as validações das variações do sistema redundante de medição pela comparação dos resultados de distâncias obtidos com os resultados de distâncias fornecidos pela máquina SIP.

6.1 Resultados de Medições de Distância entre paredes em diferentes posições da MMC

Neste item estão apresentados os resultados que evidenciam a dependência dos resultados de distâncias com a região de medição no volume da MMC. A seguir estão apresentados resultados dos pontos coletados e distâncias em função das regiões de medição, além dos resultados obtidos com as ferramentas estatísticas.

6.1.1 Resultados dos pontos coletados em montagens efetuadas em posições diferentes da MMC

Na figura 6.1 estão apresentadas os valores das coordenadas de direção j dos pontos coletados na parede frontal da peça para as montagens M_1 , M_2 , M_3 e M_4 , sem a aplicação do método de separação de erros. Por meio dos resultados obtidos pela medição dos pontos é possível observar divergências das coordenadas na direção j ao analisar a leitura de cada ponto, em diferentes montagens e diferentes posicionamentos da peça para sobreposição dos pontos. A peça medida é a mesma em cada procedimento de medição, assim, a divergência dos resultados pode ser justificada pela presença de desvios

característicos em cada posição de coleta de pontos, que influenciam diretamente no posicionamento da sonda, informada pelo sistema de medição.

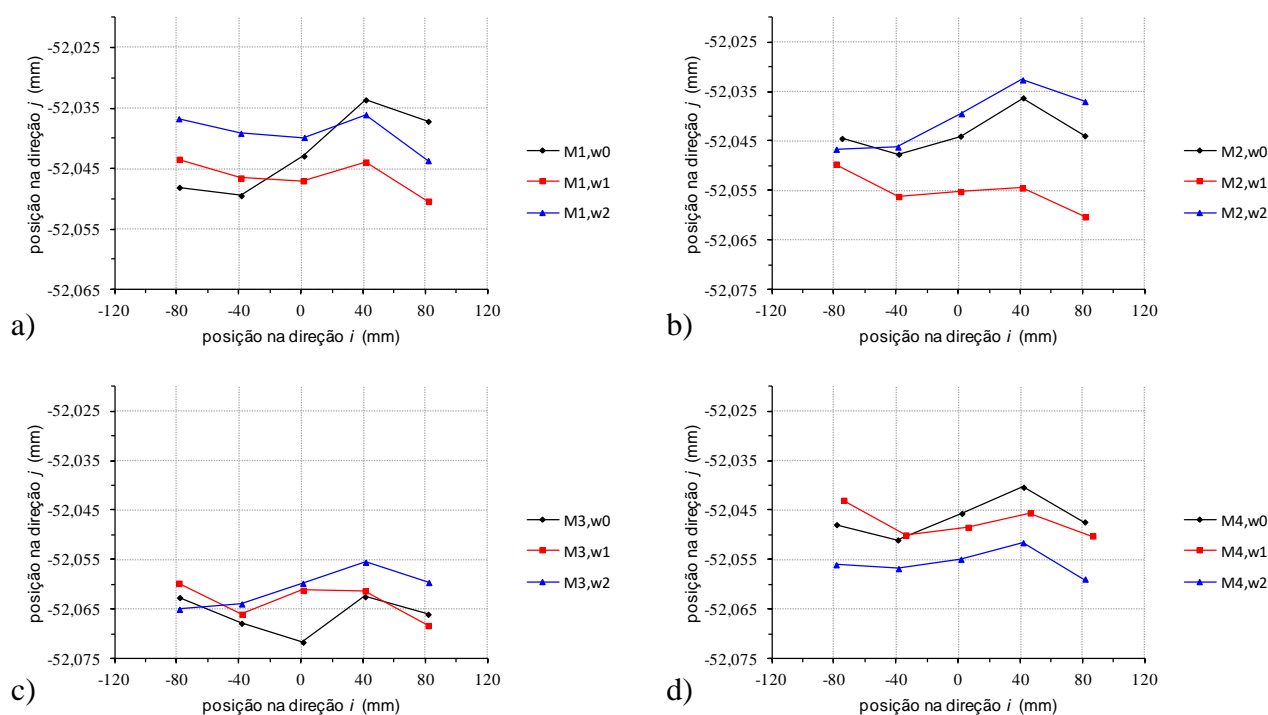


Figura 6. 1: Pontos coletados na parede frontal para as montagens M_1 (a), M_2 (b), M_3 (c) e M_4 (d).

A dependência da posição de medição na obtenção dos resultados, podem ser melhor visualizadas com análise de uma medida de dispersão dos resultados de cada ponto, ao alterar posições de medição para sobreposição e medir em diferentes regiões da MMC. A tabela 6.1 apresenta os desvios padrões para cada ponto R_i coletado na parede frontal.

Tabela 6. 1: Desvio padrão das coordenadas dos pontos na parede frontal para medições em regiões diferentes da MMC.

Identificação das leituras dos Pontos coletados	Desvio Padrão das Leituras (mm)
R_1	0,009
R_2	0,009
R_3	0,010
R_4	0,011
R_5	0,011

Os resultados das coordenadas de direção j , dos pontos coletados na parede posterior da peça, em diferentes posições de medições na MMC e que consideram as posições para

sobreposição de pontos, estão apresentados na figura 6.2, em função da região de medição, através dos gráficos 6.2a 6.2b 6.2c e 6.2d.

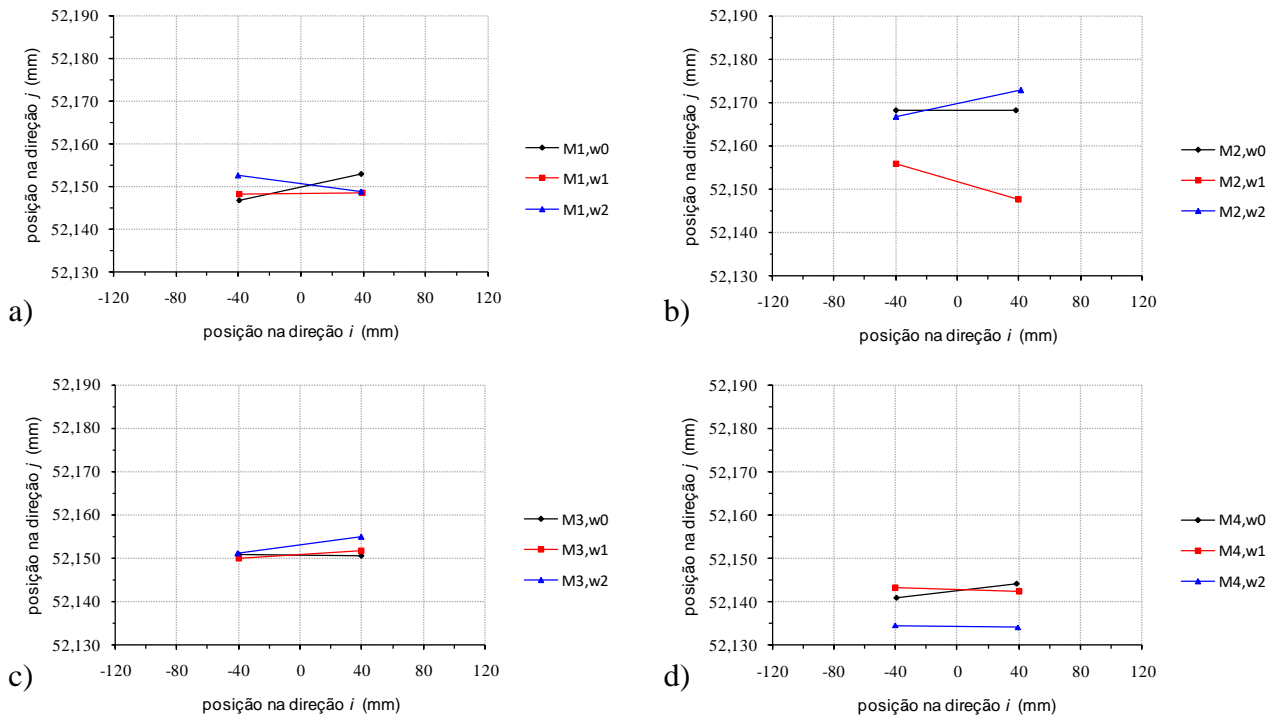


Figura 6. 2: Pontos coletados na parede posterior para as montagens M₁ (a), M₂ (b), M₃ (c) e M₄ (d).

A figura 6.2 permite perceber a divergência dos resultados entre as posições deslocadas da peça para a sobreposição de pontos, as posições w_0 , w_1 e w_2 . Divergências maiores podem ainda ser observadas pela variação das posições que representam diferentes regiões de medição, as posições M₁, M₂, M₃ e M₄, fato que traz indícios da dependência da posição de medição nos resultados obtidos em inspeções de distância entre paredes de uma peça.

A medida de dispersão dos pontos da parede posterior, verificada pelo desvio padrão entre as leituras dos pontos em cada posição, está apresentada na tabela 6.2, que indica valores de dispersão maiores que a resolução da máquina, que é de $2\mu\text{m}$. Desta forma, pode-se perceber que a confiabilidade dos resultados emitidos pela MMC está prejudicada.

Tabela 6. 2: Desvio padrão das coordenadas dos pontos na parede posterior para medições em regiões diferentes da MMC.

Pontos coletados na Peça	Desvio Padrão das Leituras (mm)
R ₆	0,009
R ₇	0,009

6.1.2 Análise estatística das distâncias entre paredes em montagens efetuadas em regiões diferentes da MMC

Na tabela 6.3 estão apresentados resultados de distâncias entre paredes medidos em regiões diferentes da MMC. A tabela está ordenada pelos tratamentos definidos no capítulo 5.

Tabela 6. 3: Resultados de distâncias entre paredes externas medidos em diferentes regiões da MMC e posições para sobreposição de leituras dos pontos

Tratamento	Média \bar{x} (mm)	Desvio padrão amostral σ (mm)
1 - M1,w ₀	101,180	0,006
2 - M1,w ₁	101,183	0,007
3 - M1,w ₂	101,177	0,006
4 - M2,w ₀	101,199	0,004
5 - M2,w ₁	101,195	0,005
6 - M2,w ₂	101,199	0,006
7 - M3,w ₀	101,205	0,004
8 - M3,w ₁	101,202	0,006
9 - M3,w ₂	101,202	0,005
10 - M4,w ₀	101,177	0,006
11 - M4,w ₁	101,179	0,003
12 - M4,w ₂	101,178	0,005
13- M ₁ (w ₀ ,w ₁ ,w ₂)	101,180	0,007
14- M ₂ (w ₀ ,w ₁ ,w ₂)	101,197	0,005
15- M ₃ (w ₀ ,w ₁ ,w ₂)	101,203	0,005
16 - M ₄ (w ₀ ,w ₁ ,w ₂)	101,178	0,005

Com análise da tabela 6.3 é possível perceber que os resultados de medições de distâncias nas regiões definidas pelas montagens M₁ e M₄, possuem resultados próximos, o que pode ser justificado pela proximidade da localização da peça entre estas montagens. As regiões definidas pelas montagens M₂ e M₃ também fornecem resultados de distâncias próximos, porém com uma diferença maior, com cerca de 6 µm, já a análise dos resultados das combinações entre pares de montagens M₁ e M₂, M₁ e M₃, M₂ e M₄ e o par M₃ e M₄ forneceram resultados bastante distintos, com um valor máximo de 25µm entre as montagens M₃ e M₄.

Resultados de distâncias entre as montagens apresentaram diferentes valores, embora alguns resultados entre montagens pareçam distintos, uma análise estatística de comparação de médias foi realizado para determinação da equivalência estatística dos resultados. Verificou-se ainda se o fator região de medição realmente é influente. Os resultados principais da análise estatística para os planejamentos experimentais (ANOVA e teste de comparação

múltiplas de médias, teste de Tukey) estão apresentados a seguir, enquanto que os resultados intermediários que permitem a análise estatística, estão apresentados no apêndice C.

6.1.2.1 Resultados sobre o 1º planejamento experimental - ANOVA e Teste de Tukey

Os resultados da análise estatística para o primeiro planejamento experimental estão apresentados nas tabelas 6.4 e 6.5 e figuras 6.3 e 6.4. A tabela 6.4 determina se a região de medição motiva uma diferença significativa dos resultados por ANOVA, enquanto a tabela 6.5 classifica a equivalência estatística das distâncias pelo teste Tukey, nos diferentes tratamentos e por consequência regiões de medição. Os métodos estatísticos consideram além da médias, a distribuição dos dados dos tratamentos..

Tabela 6. 4: Análise de Variância dos fatores M1,w₀; M2,w₀; M3,w₀ e M4,w₀, referentes ao primeiro planejamento experimental.

Source	DF	SS	MS	F-value	p-valor
Factor	3	0,005466	0,001822	69,03	0,000
Error	36	0,00095	0,000026		
Total	39	0,006417			

*GL = grau de liberdade; SS = soma dos quadrados; MS=quadrados médios.

Por meio da análise de variância (tabela 6.4) verificou-se **p-valor < 0,05**, ou seja, existe significância do fator região de medição, já que a hipótese nula, que é definida pela igualdade dos resultados entre as diferentes regiões de medições é rejeitada, pois **p-valor<0,05**.

A tabela 6.5 apresenta os resultados obtidos pelo Teste de Tukey, após verificação da significância pela análise de variância.

Tabela 6. 5: Comparação de médias pelo Teste de Tukey para os fatores M1,w₀; M2,w₀; M3,w₀ e M4,w₀, referentes ao primeiro planejamento experimental.

Fatores	Amostras		Teste de Tukey*
	Número de Amostras	Média	
M1,w ₀	10	101,180	b
M2,w ₀	10	101,199	a
M3,w ₀	10	101,205	a
M4,w ₀	10	101,177	b

*Médias seguidas de letras iguais determinam valores estatisticamente equivalentes entre si, com nível de confiança de 95%.

Por meio do teste de Tukey, mostrado na tabela 6.5 é possível observar que a variação da região de medição conduz a resultados de distâncias estatisticamente equivalentes entre os tratamentos $M1,w_0$ e $M4,w_0$, assim como para $M2,w_0$ e $M3,w_0$. As demais combinações dos pares de montagens forneceram resultados diferentes para os resultados de distâncias.

As figuras 6.3 e 6.4 apresentam graficamente os resultados obtidos pelo teste de Tukey. Na figura 6.3, os intervalos que não se posicionam na linha "zero" não apresentam equivalência estatística.

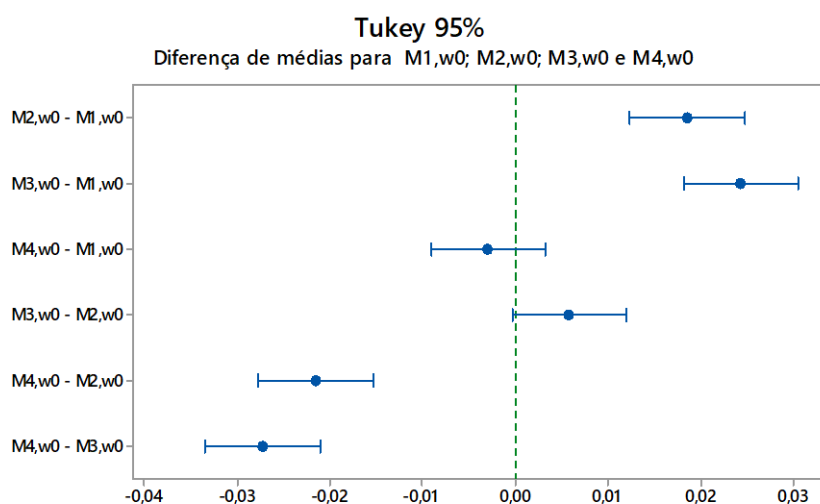


Figura 6. 3: Igualdade estatística das distâncias em regiões diferentes de medição para o planejamento experimental 1.

A figura 6.4 apresenta um gráfico contendo o valor das médias, onde é possível observar a proximidade do valor das médias de $M1,w_0$ e $M4,w_0$ e de $M2,w_0$ e $M3,w_0$, onde justamente foi comprovado a equivalência estatística das regiões de medição.

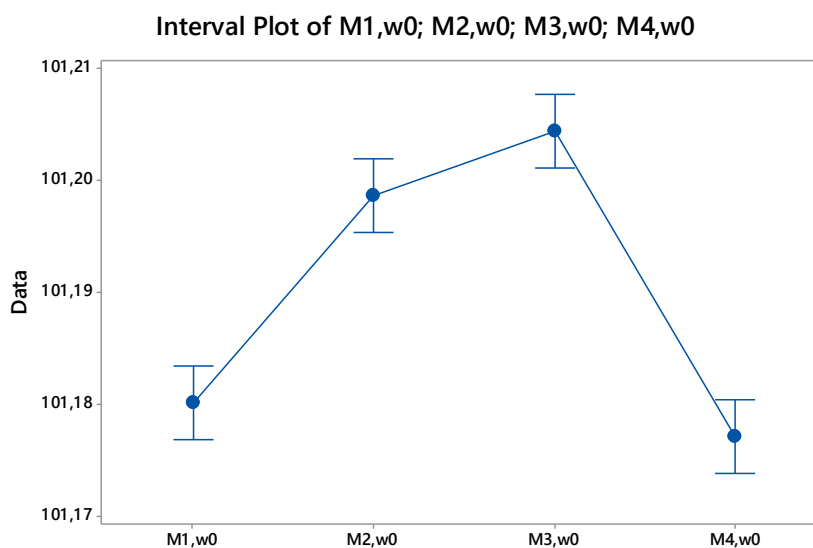


Figura 6. 4: Médias de distâncias em regiões diferentes de medição para o planejamento experimental 1.

6.1.2.2 Resultados sobre o 2º planejamento experimental - ANOVA e Teste de Tukey

Estão apresentados na tabela 6.6 e 6.7 e nas figuras 6.5 e 6.6 os resultados na análise estatística para o segundo planejamento experimental.

Tabela 6. 6: Análise de Variância dos fatores M1,w₁; M2,w₁; M3,w₁ e M4,w₁, referentes ao segundo planejamento experimental.

Source	DF	SS	MS	F-value	p-value
Factor	3	0,003445	0,001148	37,88	0,000
Error	36	0,001091	0,00003		
Total	39	0,004537			

*GL = grau de liberdade; SS = soma dos quadrados; MS=quadrados médios.

Por meio da análise de variância, resultados apresentados na tabela 6.6 verificou-se **p-valor < 0,05**, ou seja, existe significância do fator região de medição para este planejamento experimental, o que também evidencia a influência da região de medição para este planejamento experimental.

A tabela 6.7 apresenta os resultados obtidos pelo Teste de Tukey, após verificação da significância pela análise de variância.

Tabela 6. 7: Comparação de médias pelo Teste de Tukey para os fatores M1,w₁; M2,w₁; M3,w₁ e M4,w₁, referentes ao segundo planejamento experimental.

Fatores	Amostras		Teste de Tukey
	Número de Amostras	Média	
M1,w ₁	10	101,183	c
M2,w ₁	10	101,195	b
M3,w ₁	10	101,202	a
M4,w ₁	10	101,179	c

*Médias seguidas de letras iguais determinam valores estatisticamente equivalentes entre si, com nível de confiança de 95%.

O teste de Tukey (tabela 6.7) evidencia que neste planejamento experimental a equivalência dos resultados de distâncias obtidos foram estatisticamente equivalentes somente

nas regiões de medições expressas pelas montagens M_{1,w_1} e M_{4,w_1} . As demais combinações dos pares de montagens forneceram resultados diferentes para as distâncias medidas

As figuras 6.5 e 6.6 apresentam graficamente os resultados obtidos pelo teste de Tukey. Na figura 6.5, os intervalos que sobrepõem a linha que passa pelo valor zero, eixo das abscissas, possuem montagens que apresentam resultados de distâncias com equivalência estatística. A figura 6.6 apresenta a posição das médias de distâncias para o segundo planejamento experimental. Os resultados que permitem a aplicação da ANOVA e do teste de Tukey estão apresentados no apêndice C

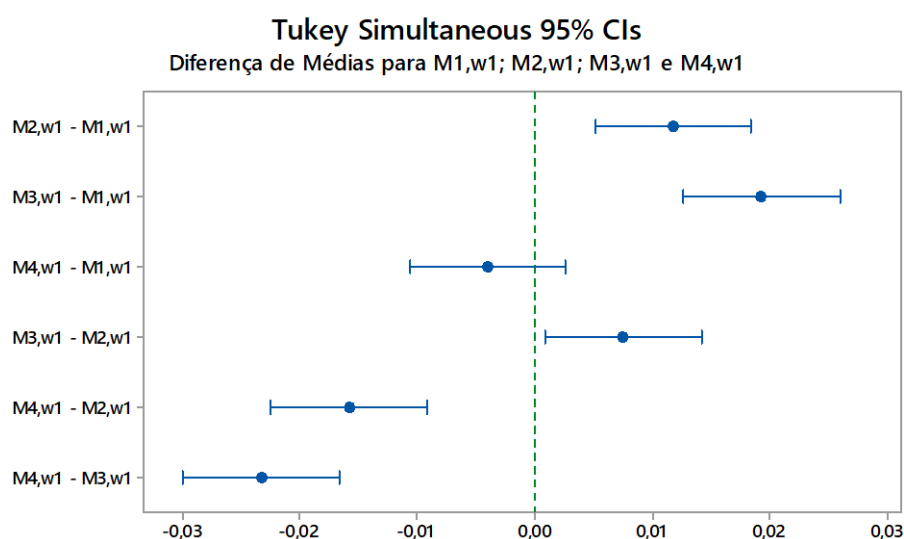


Figura 6. 5: Igualdade estatística das distâncias em regiões diferentes de medição para o planejamento experimental 2.

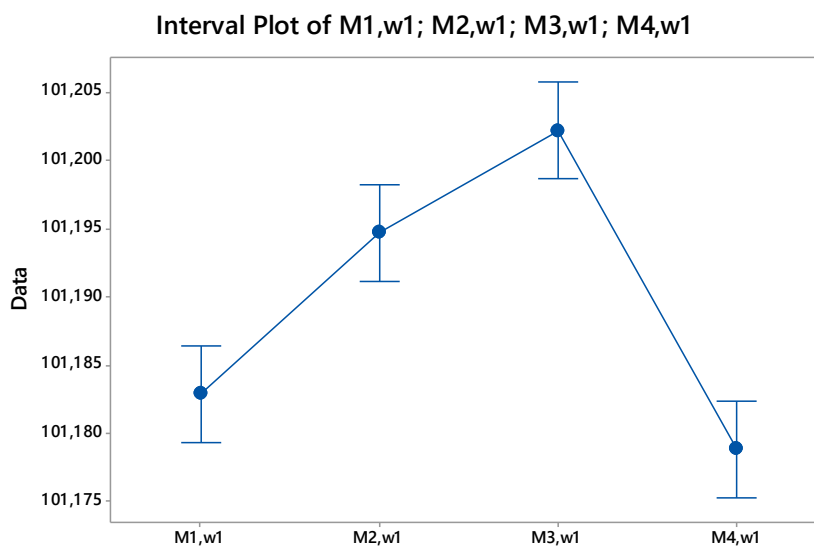


Figura 6. 6: Médias de distâncias em regiões diferentes de medição para o planejamento experimental 2.

6.1.2.3 Resultados sobre o 3º planejamento experimental - ANOVA e Teste de Tukey

Os resultados para a análise estatística para o terceiro planejamento experimental estão apresentados nas tabelas 6.8 e 6.9 e nas figuras 6.7 e 6.8.

Tabela 6. 8: Análise de Variância dos fatores M1,w₂; M2,w₂; M3,w₂ e M4,w₂, referentes ao terceiro planejamento experimental.

Source	DF	SS	MS	F-value	p-value
Factor	3	0,005307	0,001769	60,99	0,000
Error	36	0,001044	0,000029		
Total	39	0,006351			

*GL = grau de liberdade; SS = soma dos quadrados; MS=quadrados médios.

Por meio da análise de variância, tabela 6.8 verificou-se **p-valor < 0,05**, ou seja, existe significância do fator região de medição nas medições, o que também indica que a região de medição é influente sobre os resultados de distâncias para este planejamento experimental.

A tabela 6.9 apresenta os resultados obtidos pelo Teste de Tukey, após verificação da significância do fator região de medição pela análise de variância.

Tabela 6. 9: Comparação de médias pelo Teste de Tukey para os fatores M1,w₂; M2,w₂; M3,w₂ e M4,w₂, referentes ao terceiro planejamento experimental.

Fatores	Amostras		Teste de Tukey
	Número de Amostras	Média	
M1,w ₂	10	101,177	b
M2,w ₂	10	101,199	a
M3,w ₂	10	101,202	a
M4,w ₂	10	101,178	b

*Médias seguidas de letras iguais determinam valores estatisticamente equivalentes entre si, com nível de confiança de 95%.

Os resultados do teste de Tukey, tabela 6.9 possibilitaram verificar neste planejamento experimental que as montagens M_{1,w₂} e M_{4,w₂} forneceram resultados de distâncias estatisticamente equivalentes, assim como para as montagens M_{2,w₂} e M_{3,w₂}. As demais

combinações dos pares de montagens forneceram resultados estatisticamente diferentes para as distâncias medidas.

As figuras 6.7 e 6.8 apresentam graficamente os resultados obtidos pelo teste de Tukey para o planejamento experimental 3. A análise e julgamento dos gráficos são realizadas de mesma forma que nos planejamentos experimentais anteriores.

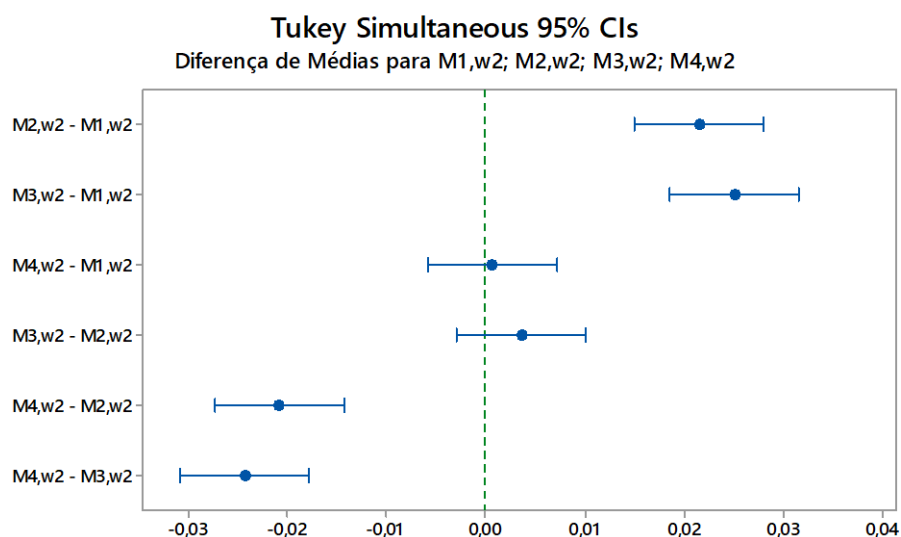


Figura 6. 7: Igualdade estatística das distâncias em regiões diferentes de medição para o planejamento experimental 3.

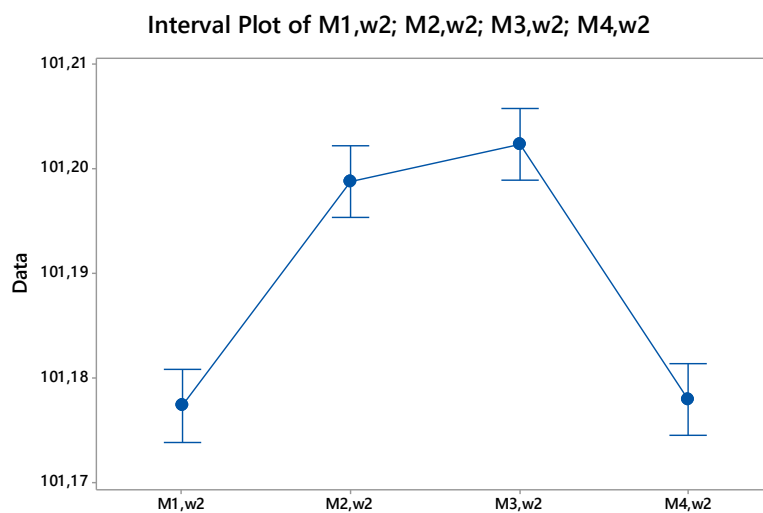


Figura 6. 8: Médias de distâncias em regiões diferentes de medição para o planejamento experimental 3.

6.1.2.4 Resultados sobre o 4º planejamento experimental ANOVA e Teste de Tukey

Os resultados da análise estatística para o quarto planejamento experimental estão apresentados nas tabelas 6.10 e 6.11 e nas figuras 6.9 e 6.10.

Tabela 6. 10: Análise de Variância dos fatores do quarto planejamento experimental

Fonte de variação	GL	SS	MS	F-value	P-value
Fator	3	0,013928	0,004643	158,58	0,000
Erro	116	0,003396	0,000029		
Total	119	0,017324			

*GL = grau de liberdade; SS = soma dos quadrados; MS=quadrados médios.

Por meio da análise de variância, tabela 6.10, verificou-se **p-value < 0,05**, o que indica que existe significância do fator região de medição, independentemente sobreposição dos pontos utilizadas. Para esta análise foi utilizada todas as posições de sobreposições de pontos, w_0 , w_1 e w_2 , em um mesmo tratamento, assim fez se a análise estatística para $M1(w_0, w_1, w_2)$, $M2(w_0, w_1, w_2)$, $M3(w_0, w_1, w_2)$ e $M4(w_0, w_1, w_2)$.

A tabela 6.11 apresenta os resultados obtidos pelo Teste de Tukey, após verificação da significância do fator região de medição sobre os resultados de distâncias.

Tabela 6. 11: Comparação de médias pelo Teste de Tukey para o quarto planejamento experimental.

Fatores	Amostras		Teste de Tukey
	Número de Amostras	Média	
$M1(w_0, w_1, w_2)$	30	101,180	c
$M2(w_0, w_1, w_2)$	30	101,197	b
$M3(w_0, w_1, w_2)$	30	101,203	a
$M4(w_0, w_1, w_2)$	30	101,178	c

*Médias seguidas de letras iguais determinam valores estatisticamente equivalentes entre si, com nível de confiança de 95%.

Por meio do teste de Tukey apresentado na tabela 6.11, observou-se que as montagens e suas respectivas posições de sobreposição de pontos, foram estatisticamente equivalentes somente entre os tratamentos $M1, (w_0, w_1, w_2)$ $M4, (w_0, w_1, w_2)$.

As figuras 6.9 e 6.10 apresentam graficamente os resultados obtidos pelo teste de Tukey, a análise e julgamento dos gráficos que apresentam os resultados obtidos no quarto planejamento experimental são realizadas de mesma forma que para os planejamentos experimentais 1, 2 e 3.

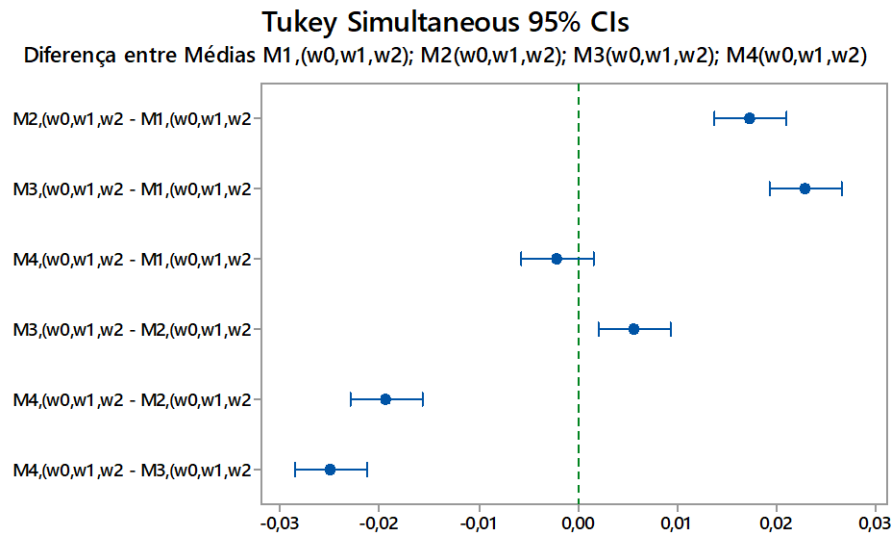


Figura 6. 9: Igualdade estatística das distâncias em regiões diferentes de medição para o planejamento experimental 4.

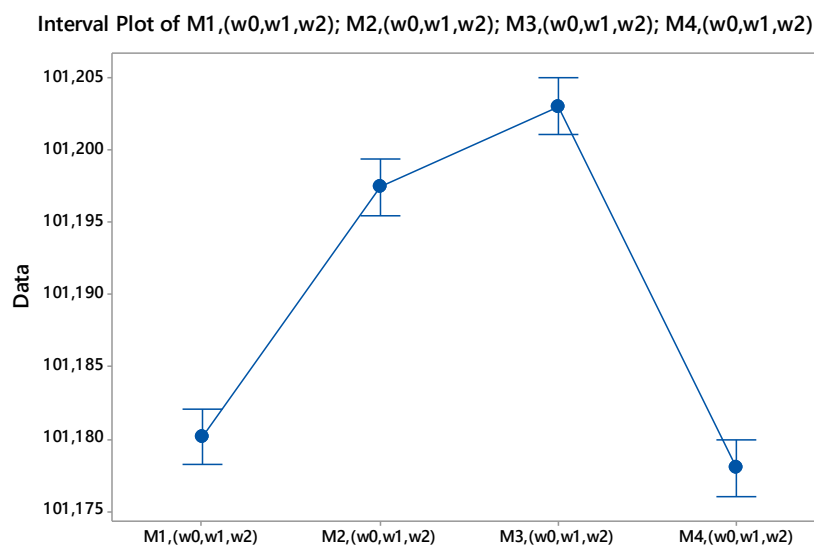


Figura 6. 10: Médias de distâncias em regiões diferentes de medição para o planejamento experimental 4.

6.2 Resultados de Calibração das escalas

Estão apresentados nas figuras 6.11 e 6.12 as curvas dos resultados de calibração das escalas y e x , estas curvas apresentam o comportamento dos erros em função do deslocamento do eixo na direção de análise. É possível observar que os gráficos apresentam quantidades diferentes de *targets* no qual se foi realizado a calibração, o que é justificado pela limitação do deslocamento máximo dos eixos da máquina, como pode ser observado na tabela 5.1 do capítulo 5, que indica a faixa de operação da MMC.

6.2.1 Resultados da calibração do erro de posicionamento da escala do eixo y

Na figura 6.11 pode ser visto que os erros de escala do eixo y permaneceram abaixo de $10\mu\text{m}$ com característica progressiva e a histerese quase constante em $6\mu\text{m}$ ao longo de todo eixo.

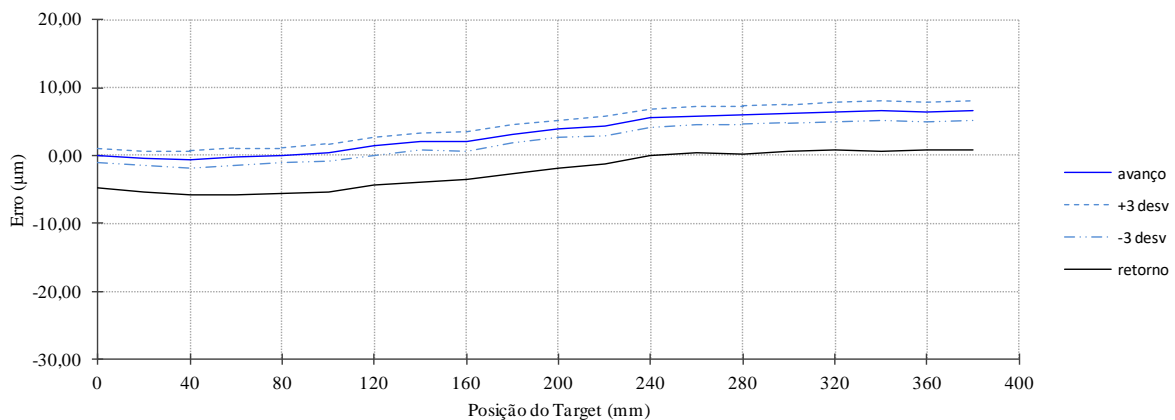


Figura 6. 11: Curva de calibração dos erros da escala do eixo y .

Para o movimento de avanço do carro y o erro mínimo foi de aproximadamente $-1\mu\text{m}$ na posição igual a 40mm , já o erro máximo foi de aproximadamente $7\mu\text{m}$ na posição igual a 340mm , a amplitude entre os erros do sentido de avanço foi de aproximadamente $7\mu\text{m}$. No avanço do carro, a partir da posição correspondente a 80mm o erro de escala teve um comportamento sempre positivo, o que é fisicamente interpretado como o posicionamento informado pelo encoder do eixo y à frente do real posicionamento do carro.

No retorno do carro y o erro mínimo da escala foi de aproximadamente $-6\mu\text{m}$ para a posição igual a 40mm , enquanto o erro máximo foi de $1\mu\text{m}$ na posição de 360mm . A partir da posição 240mm o erro da escala y no sentido de retorno deixou de ser negativo, significando que

a partir desta posição o encoder emite informações de um posicionamento à frente do posicionamento real do carro, diferente das posições inferiores a 240mm, no qual é informado que o carro está a uma posição inferior a posição real.

6.2.2 Resultados da calibração do erro de posicionamento da escala do eixo x

A calibração do eixo x foi realizada utilizando 96% da extensão total do eixo, sendo a extensão calibrada correspondente a 340mm frente aos 356mm possíveis, enquanto para a calibração do eixo y foi utilizada cerca de 94%, que corresponde a 380mm em vista de 406mm possíveis. A limitação da utilização do comprimento total dos eixos para medição dos erros de escala é justificada por se optar por evitar colisões do carro com a estrutura da MMC no fim de curso das leituras, para os sentidos de movimento de avanço e retorno dos carros dos eixos.

Os resultados dos erros de escala do eixo x , apresentados na figura 6.12, apontam uma histerese máxima de aproximadamente $37\mu\text{m}$ para a posição em 160mm e mínima de aproximadamente $17\mu\text{m}$ para a para a posição em 340mm.

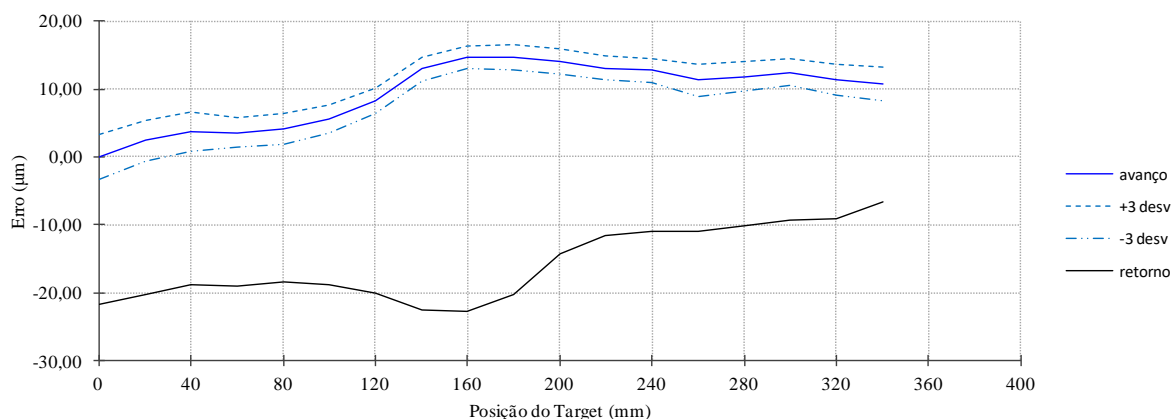


Figura 6. 12: Curva de calibração dos erros da escala do eixo x .

A calibração da escala x no sentido de avanço do carro apresentou erros sempre positivos, o que significa dizer que a posição informada pelo encoder do eixo x está à frente do que a posição real do carro, o valor máximo para o erro de escala do eixo x , neste sentido de movimento, é de aproximadamente $15\mu\text{m}$. No sentido de retorno, um valor mínimo de aproximadamente $-23\mu\text{m}$ foi encontrado, os resultados foram todos negativos, significando que o encoder indica uma distância menor do que a real posição do carro em relação ao ponto zero. Embora os resultados de erros de escala no sentido de retorno de coleta dos dados sejam todos

negativos, há uma tendência crescente destes resultados, permitindo interpretar como uma diminuição da diferença entre a posição real e a posição informada pelo encoder da escala x , neste sentido de deslocamento do eixo.

6.2.3 Influência dos erros das escalas x e y no plano da MMC

A figura 6.13 apresenta a influência dos erros das escalas x e y , no plano da máquina de medir por coordenadas, por meio de vetores resultantes em cada posição dos carros da MMC. Nos gráficos 6.3a e 6.3b, os eixos das abscissas equivalem a direção x do plano da MMC, enquanto o eixo das ordenadas equivalem a direção y . Em 6.13a estão contidos os erros de sentido de avanço dos carros x e y , enquanto em 6.13b estão contidos os erros de sentido de retorno.

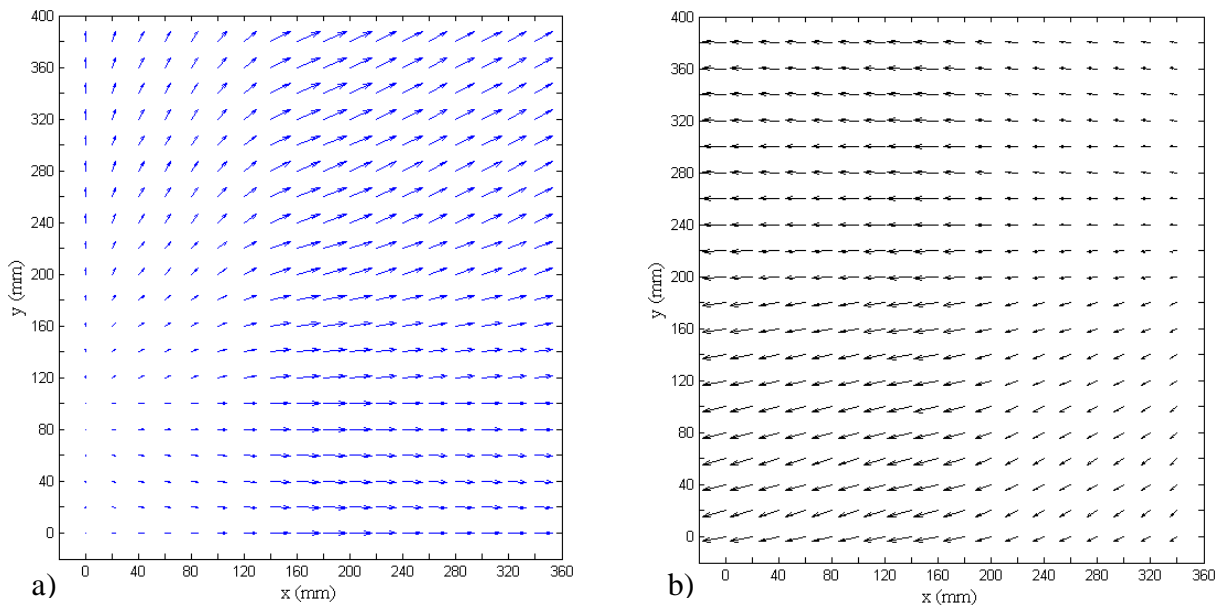


Figura 6. 13: Influência dos erros das escalas x e y , no sentido de avanço (a) e retorno (b) sobre o plano de medição da MMC.

Com análise dos gráficos 6.13a e 6.13b é possível perceber que os erros da escala x têm influência maior que os erros da escala y nos desvios presentes durante a medição, tanto para a movimentação do eixo no sentido de avanço como no sentido de retorno. Desta forma, uma investigação mais elaborada pode identificar as possíveis causas desta diferença dos erros de escalas entre os eixos x e y , já que as escalas são produzidas pelo mesmo fabricante e é razoável que a ordem de grandeza para os erros fossem próximas.

6.3 Resultados das variações desenvolvidas dos sistemas redundantes de medição

Após a apresentação dos resultados de medições de distâncias em diferentes posições da MMC e dos resultados da calibração das escalas, neste item, são apresentados os resultados das separações de erros. Estes resultados estão estratificados pelas variações do sistemas redundantes de medição e são discutidos a partir das regiões e procedimentos de medição utilizados.

6.3.1 Resultados do método de separação de erros utilizando quatro montagens no modelo e sem considerar desalinhamento entre as sobreposições

Os resultados apresentados pela aplicação do sistema redundante de medição, que utiliza quatro montagens, $M1$, $M2$, $M3$ e $M4$, e, não considera o desalinhamento ocasionado pela movimentação da peça para sobreposição de leituras, estão apresentadas nas figuras 6.14, 6.15, 6.16, 6.17 e tabela 6.12.

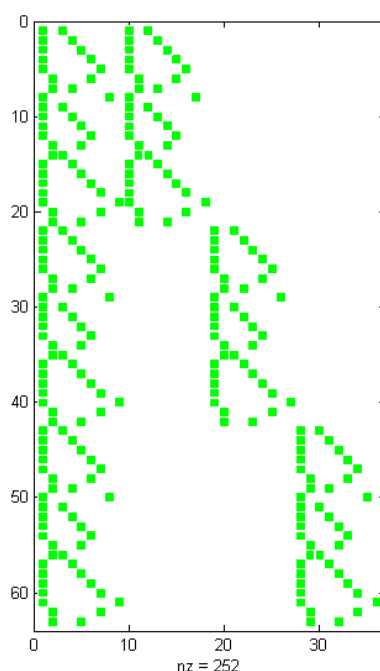


Figura 6. 14. Representação gráfica da esparsividade da matriz dos coeficientes para o modelo com quatro montagens onde não é considerado o desalinhamento entre as sobreposições.

A figura 6.14 apresenta o resultado sobre a modelagem matemática elaborada para aplicação do método, onde é possível observar o número de incógnitas não nulas do modelo, o que define esparsividade do sistema de equações. Com a modelagem, obteve-se um sistema

de equações esparsas com uma porcentagem de 11,11% de elementos não nulos. A matriz é composta por 252 elementos não nulos, distribuídos nas 63 linhas e 36 colunas.

As figuras 6.15 e 6.16 se referem a solução da modelagem proposta para o método redundante onde não é considerado a sobreposição dos pontos.

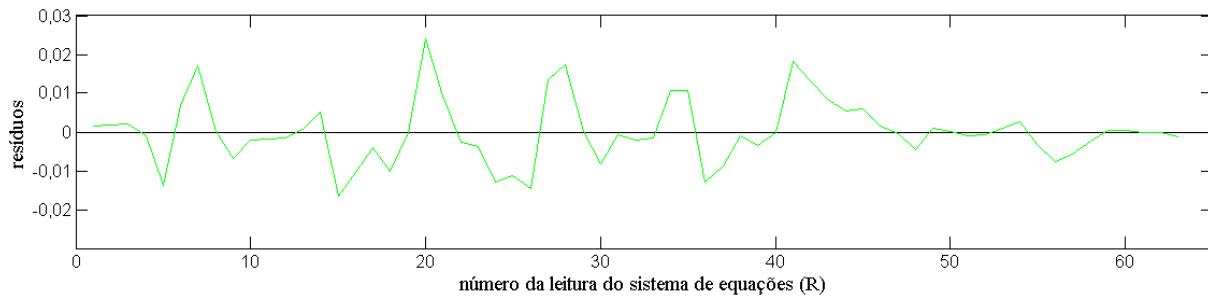


Figura 6. 15: Resíduos da solução do modelo que utiliza quatro montagens e não considera o desalinhamento.

A figura 6.15 apresenta os resíduos relativos da solução numérica do modelo em unidade de milímetro. Cada linha do sistema de equações possui uma k -ésima leitura, R_k , assim, os resíduos são expressos por $r = (C_k \cdot D_k - R_k)$ e têm um valor definido para cada linha do sistema de equações. A variável C_k é uma matriz que representa a matriz dos coeficientes das incógnitas e D_k é um vetor que representa as incógnitas do sistema de equações.

O resíduo da solução numérica apresentou um valor máximo de aproximadamente $24\mu\text{m}$ e mínimo de $-17\mu\text{m}$, valores que em módulo são considerados altos e são indicativos de uma solução inadequada do modelo, já que pela solução numérica os valores das leituras R_k deveriam ser iguais aos valores do produto $C_k \cdot D_k$. Os valores obtidos dos resíduos apresentaram um índice de dispersão de $0,008\text{mm}$, calculado pelo desvio padrão populacional.

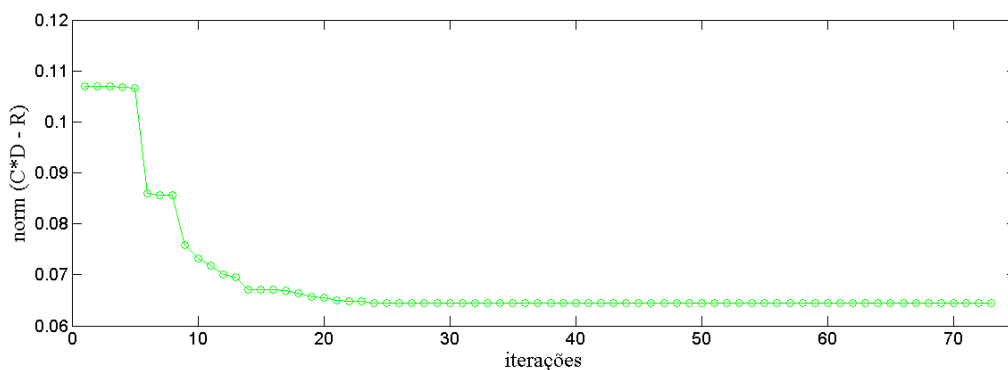


Figura 6. 16: Convergência da solução do modelo que não considera o desalinhamento para sobreposição de pontos.

A figura 6.16 representa o valor da norma do resíduo relativo, $\|C_k \cdot D_k - R_k\|$ em função das iterações utilizadas para solução do modelo. A solução convergiu com 72 iterações pelo algoritmo aplicado, o que indica um valor mínimo da norma do resíduo relativo nesta iteração, contudo, a partir de 25 iterações é possível verificar um valor quase constante e próxima de um valor mínimo do resíduo relativo para a solução numérica.

Os resultados de distância entre paredes da peça medida entre as medições em regiões diferentes da MMC estão apresentados na tabela 6.12 e figura 6.17.

Tabela 6. 12: Resultados de distância para o método que utiliza quatro montagens e não considera o desalinhamento

	Distâncias com Remoção de Erros (mm)	Distância sem Remoção de Erros (mm)
$M1, w_0$	101,178	101,180
$M2, w_0$	101,192	101,199
$M3, w_0$	101,203	101,205
$M4, w_0$	101,172	101,177
σ	0,014	0,014

É apresentado na tabela 6.12 os resultados de distâncias com a aplicação do método para desacoplamento de erros. É evidenciado uma instabilidade nos resultados obtidos pela solução numérica, o desvio padrão para os resultados com a aplicação do método tem mesmo valor que o desvio padrão para os resultados de distâncias sem separação de erros, com isto, torna-se necessário uma revisão e reelaboração do método para que sejam obtidos resultados consistentes.

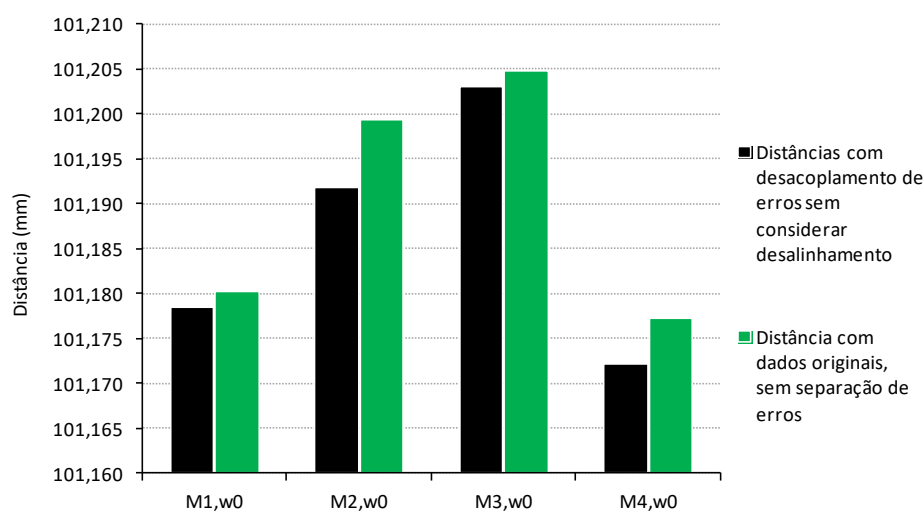


Figura 6. 17: Resultados de distância para o método que utiliza quatro montagens e não considera o desalinhamento

A figura 6.17 apresenta graficamente as distâncias, onde pode ser melhor visualizado que a tentativa de remoção dos erros para este método não apresentou resultados consistentes. Diante disso, outras modelagens foram realizadas e então foram considerados os desalinhamentos ocasionados com a movimentação da peça para a sobreposição de pontos. Nos itens a seguir estão apresentados os métodos adequados para separação de erros.

6.3.2 Resultados da separação de erros para o método SRM_1

Para o método SRM_1, a esparsividade da matriz dos coeficientes, a análise de resíduos, a convergência dos resultados da simulação numérica e resultados de distâncias estão apresentados a seguir nas figuras de 6.18 a 6.22. e na tabela 6.13.

A figura 6.18 apresenta a esparsividade da matriz dos coeficientes para o método SRM_1.

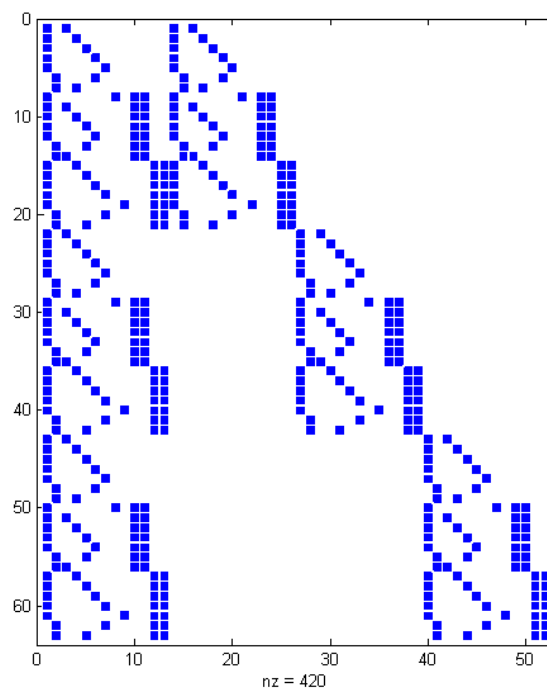


Figura 6. 18: Representação gráfica da esparsividade da matriz dos coeficientes do modelo proposto pelo método SRM_1.

O número de elementos diferentes de zero da matriz dos coeficientes para o método SRM_1 é de 420, frente aos 3276 existentes. O aumento do número de elementos em relação ao método anterior é ocasionado devido a nova modelagem do problema, que considera os desalinhamentos ocasionados pela movimentação da peça para a sobreposição dos pontos. Com esta modelagem, foram adicionadas variáveis de desalinhamento em cada equação, o

que implica em adição de colunas na matriz. O aumento de variáveis no novo modelo matemático permitiu obter uma porcentagem de 12,82% de elementos não nulos da matriz dos coeficientes. Esta matriz é retangular e possui 63 linhas e 52 colunas.

Os resultados da solução numérica do modelo matemático de SRM_1 estão apresentados nas figuras 6.19 e 6.20, que se referem respectivamente aos resíduos da solução e à convergência da solução pelo método iterativo.

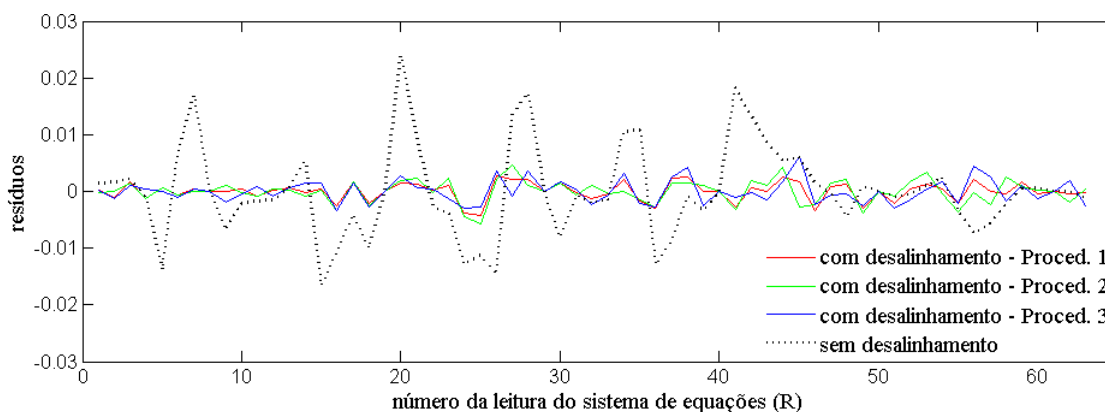


Figura 6. 19:Resíduos da solução do modelo para o método SRM_1 comparado aos resíduos obtidos pela solução do modelo que não contém variáveis de desalinhamento.

Com a análise de resíduos através da figura 6.19 é possível perceber, que o método SRM_1 apresentou melhor estabilidade dos resíduos obtidos com a solução numérica em relação aos resultados obtidos do método que não considera os desalinhamentos entre posições de sobreposições de leituras. A dispersão dos resíduos na aplicação dos procedimentos 1, 2 e 3 de SRM_1, foram menores que a dispersão dos resíduos do método que não considera o desalinhamento, o desvio padrão dos resíduos para os três procedimentos SRM_1 foram de aproximadamente $2\mu\text{m}$, frente aos $8\mu\text{m}$ do outro método.

Para o procedimento 1 de SRM_1 o valor máximo dos resíduos foi de aproximadamente $2\mu\text{m}$ e mínimo de $-4\mu\text{m}$, valores que em módulo estão próximos a resolução da máquina, que é de $2\mu\text{m}$. Nos procedimentos 2 e 3, os valores máximos aproximados encontrados foram de $4\mu\text{m}$ e $6\mu\text{m}$ e mínimos de $-5\mu\text{m}$ e $-3\mu\text{m}$ respectivamente. Os valores dos resíduos para o método SRM_1 se mantiveram bem abaixo dos valores obtidos pelo método que não considera os desalinhamentos.

As soluções dos modelos matemáticos para os procedimentos 1,2 e 3 de SRM_1 convergiram com respectivamente 286, 286 e 275 iterações, como pode ser observado na figura 6.20. Observa-se ainda que a norma do resíduo relativo no ponto de convergência para os três procedimentos foram de aproximadamente 3 vezes menores que a norma do resíduo

relativo da solução do modelo que não considera os desalinhamentos, método inicial e anterior ao SMR_1.

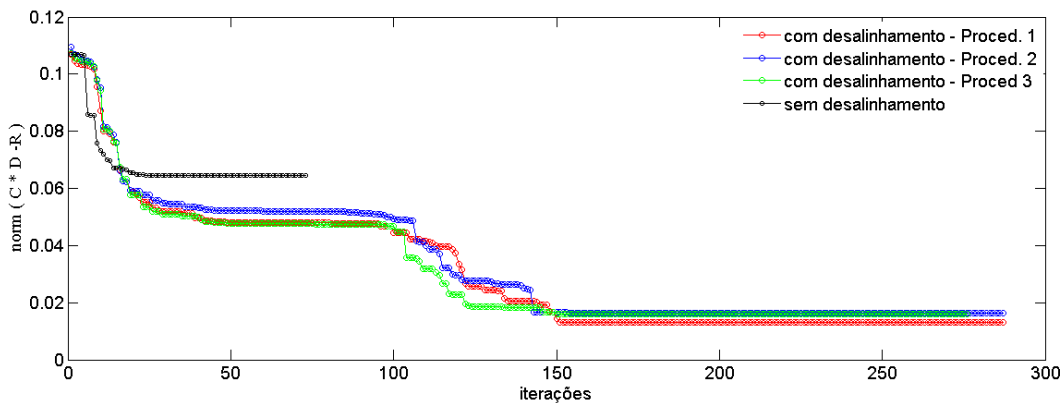


Figura 6. 20: Convergência da solução do modelo para os três procedimentos de SRM_1 comparados ao método sem desalinhamento.

A partir da figura 6.20 é possível perceber que embora o número de iterações necessário para convergência de solução seja muito menor para o método inicial, que não considera o desalinhamento, este apresentou um valor do resíduo relativo alto se comparado com os resultados dos procedimentos de SRM_1. Assim, fica evidenciado que para avaliação da modelagem matemática e solução numérica aplicada, quando utilizado métodos iterativos, é necessário analisar a norma dos resíduos e não somente o número de iterações para a convergência, uma vez que a solução de um modelo matemático pode convergir rapidamente, porém com uma solução com altos níveis de resíduos, o que implica na obtenção de resultados inadequados.

Os resultados de distância obtidos pela remoção de erros através de separação utilizando o SRM_1 estão apresentados na tabela 6.13 e nas figuras 6.21 e 6.22.

Tabela 6. 13: Resultados de distância em mm para separação de erros pelo método SRM_1.

Procedimento		$M_{1,w0}$	$M_{2,w0}$	$M_{3,w0}$	$M_{4,w0}$	Dispersão entre $M_{1,w0}$, $M_{2,w0}$, $M_{3,w0}$ e $M_{4,w0}(\sigma)$
Com separação de erros por SRM_1	P_1	101,191	101,193	101,194	101,191	0,002
	P_2	101,192	101,194	101,192	101,191	0,001
	P_3	101,190	101,191	101,194	101,189	0,002
	\bar{x}	101,191	101,193	101,193	101,190	0,002
	σ	0,001	0,002	0,001	0,001	-
Sem Separação de erros	P_1	101,180	101,199	101,205	101,177	0,014
	P_2	101,179	101,200	101,203	101,179	0,013
	P_3	101,182	101,199	101,206	101,176	0,014
	\bar{x}	101,180	101,199	101,205	101,177	0,014
	σ	0,002	0,001	0,002	0,002	-

Observa-se na tabela 6.13 que os resultados mantiveram uma baixa dispersão entre os tratamentos, $M_{1,w0}$, $M_{2,w0}$, $M_{3,w0}$ e $M_{4,w0}$, ao analisar os resultados de cada procedimento e a média dos procedimentos ao aplicar o método SRM_1. O desvio padrão amostral da média entre os procedimentos com aplicação de SRM_1, ao se comparar os tratamentos, foi de $0,002\mu\text{m}$, enquanto sem aplicação do método de desacoplamento de erros o desvio padrão amostral foi de $0,014\mu\text{m}$.

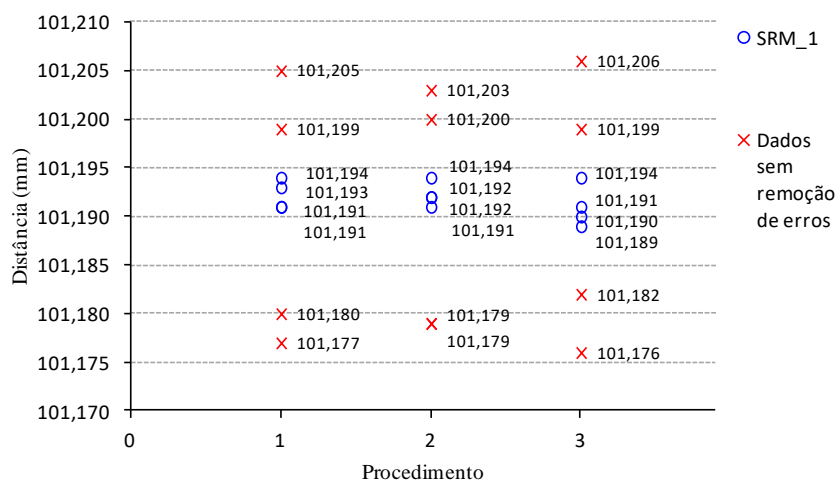


Figura 6. 21: Distâncias com separação de erros pelo método SRM_1 em função da quantidade de procedimentos aplicados.

A figura 6.21 evidência a posição das distâncias em função dos procedimentos 1,2 e 3. Com análise do gráfico é percebido que os resultados de distâncias ao aplicar o método SRM_1, em cada região de medição na MMC, se posicionam próximos de uma tendência central, evidenciando a menor dispersão com aplicação do método. E garantindo uma incerteza menor no resultado.

O valor convencional da distância entre paredes pelo método SRM_1 está apresentado na figura 6.22 e corresponde a 101,192mm.

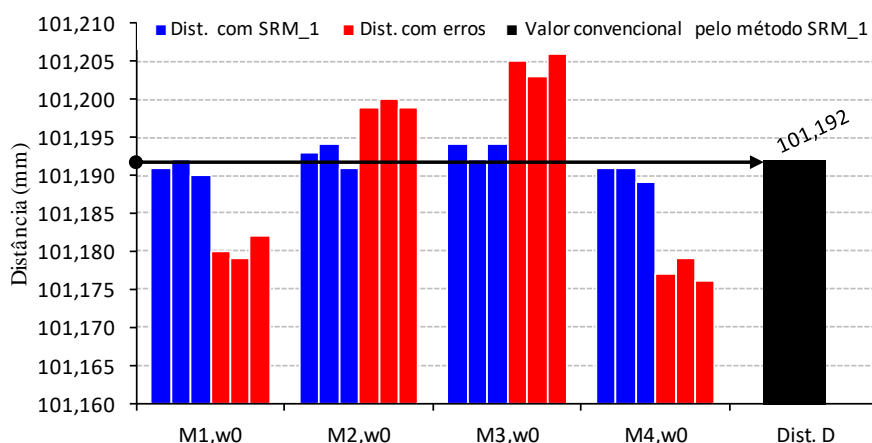


Figura 6. 22: Valor convencional da distância entre paredes pelo método de separação SRM_1.

A amplitude máxima dos resultados de distâncias foi de $5\mu\text{m}$ para o método em que é aplicado o SRM_1, enquanto que para os resultados sem a aplicação do método a amplitude foi de $30\mu\text{m}$, o que, juntamente com a medida de dispersão, permite verificar o desacoplamento de erros utilizando o SRM_1.

6.3.3 Resultados da separação de erros para o método SRM_2

Visando reduzir a quantidade de medições para o processo de desacoplamento de erros em medições de distâncias entre paredes utilizando sistemas redundantes de medição foi elaborado um método em que é necessário medições em apenas duas regiões da MMC, denominado de SRM_2. Os gráficos apresentados nas figuras de 6.23 a 6.30 e nas tabelas de 6.14 a 6.16, apresentam os resultados obtidos com aplicação do SRM_2.

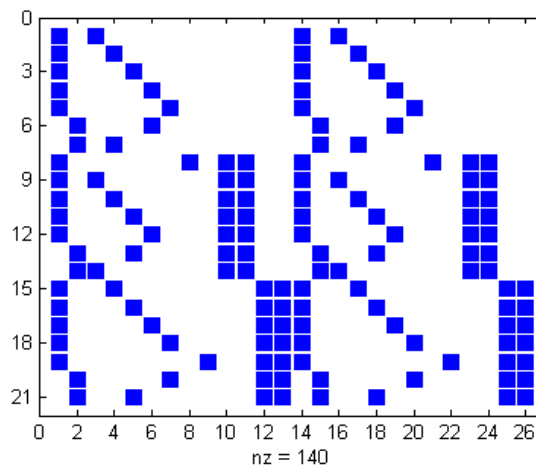


Figura 6. 23: Representação gráfica da esparsividade da matriz dos coeficientes do modelo proposto pelo método SRM_2.

A estrutura da matriz dos coeficientes para a aplicação de SRM_2 é semelhante para todos os procedimentos adotados, é uma matriz retangular com 21 linhas e 26 colunas, o que define o sistema de equações como um sistema subdeterminado, diferentemente do método chamado de SRM_1, que é sobredeterminado. A matriz dos coeficientes para SRM_2 é esparsa e 25,64% dos elementos são diferentes de zero, possui um total de 546 elementos, sendo 406 nulos.

Os resultados da solução numérica dos modelos matemáticos para os seis procedimentos estão apresentados nas figuras 6.24, 6.25, 6.26 e 6.27 e tabela 6.14.

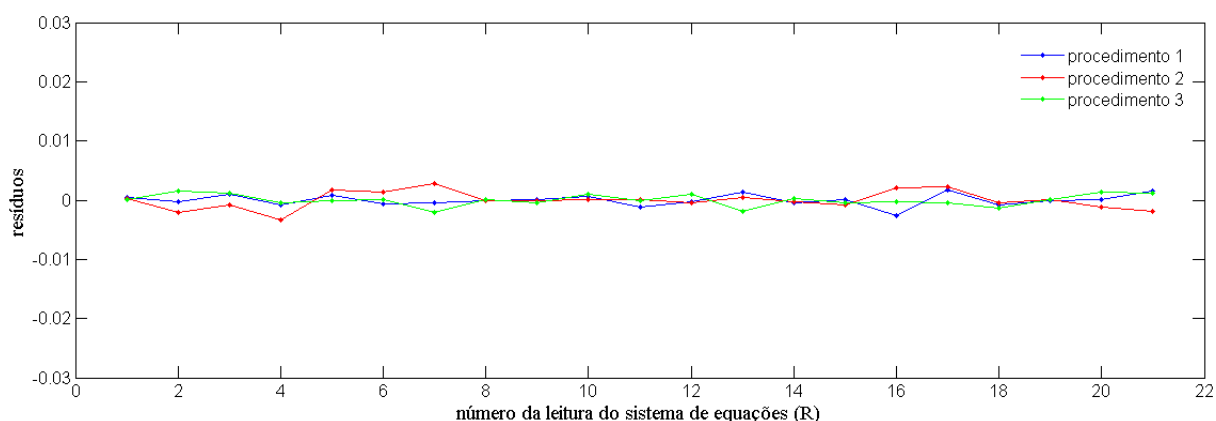


Figura 6. 24: Resíduos das soluções dos modelos matemáticos com aplicação do método SRM_2 nos procedimentos 1, 2 e 3.

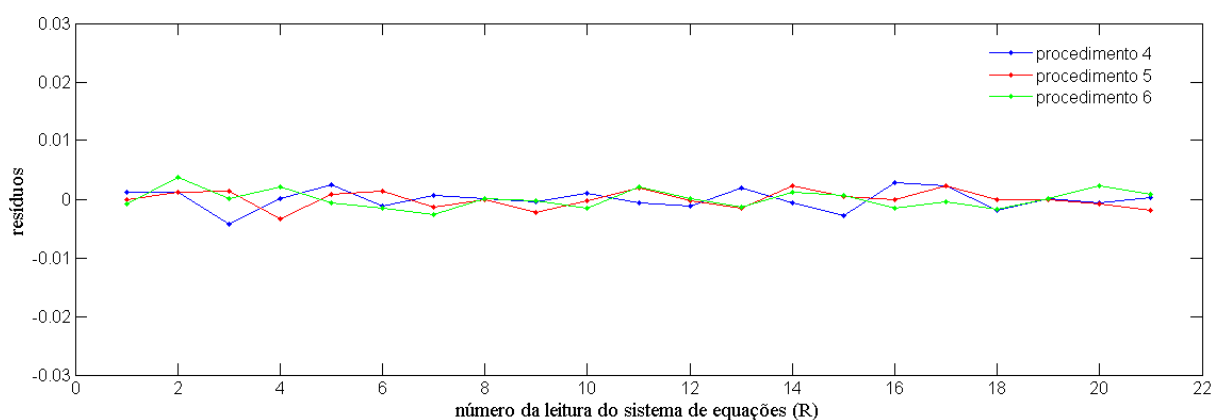


Figura 6. 25: Resíduos da solução do modelo para o método SRM_2 nos procedimentos 4, 5 e 6.

A tabela 6.14 apresenta o valor das dispersões dos resíduos, obtidas com o desvio padrão amostral.

Tabela 6. 14: Média e dispersão dos resíduos das soluções numéricas entre os procedimentos

Procedimento	Média dos resíduos (mm)	Desvio padrão dos resíduos (mm)
1	0,000	0,001
2	0,000	0,002
3	0,000	0,001
4	0,000	0,002
5	0,000	0,002
6	0,000	0,002

Com a análise dos gráficos ilustrados nas figuras 6.24 e 6.25 e da tabela 6.14 é possível perceber que em todos os procedimentos efetuados, os resíduos gerados pela solução numérica do método SRM_2 apresentaram pequenas flutuações, o desvio padrão não foi superior a $2\mu\text{m}$, o que conduz ao entendimento de que o método apresentou um bom resultado em relação a solução numérica.

A comparação dos resultados da solução numérica dos modelos matemáticos empregados em SRM_1 e SRM_2 com os resultados da solução numérica do método inicial, que não considera o desalinhamento entre as posições de sobreposição de pontos, permite verificar que os métodos SRM_1 e SRM_2 possibilitam obter menores resíduos da solução, o que leva a entender e comprovar a necessidade de considerar o desalinhamento da peça no modelo matemático, conforme os relatos dos trabalhos de Yoo e Kim (2004) e Dang, Yoo e Kim (2006).

As figuras 6.26 e 6.27 ilustram os valores das convergências das soluções dos modelos matemáticos em função da quantidade de iterações.

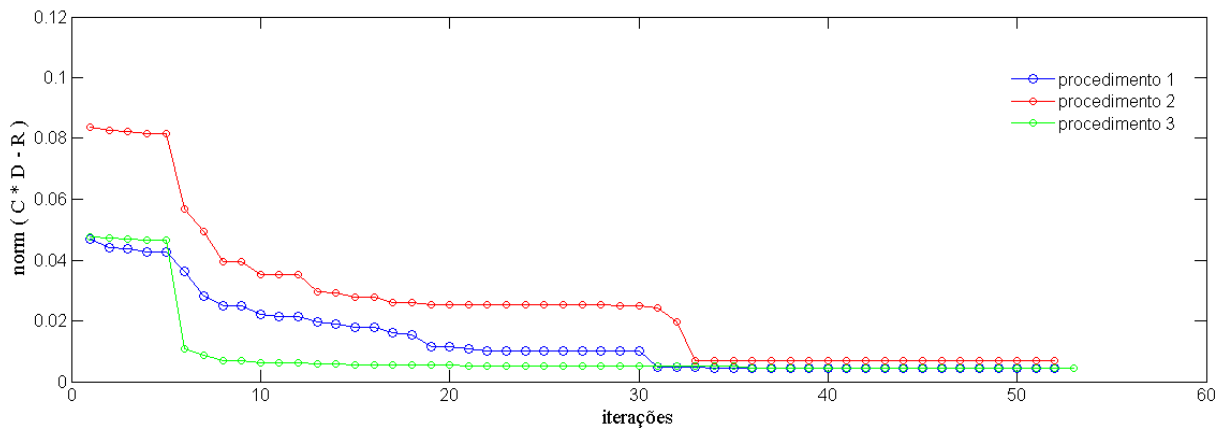


Figura 6. 26: Convergência da solução modelo para o método SRM_2 nos procedimentos 1, 2 e 3.

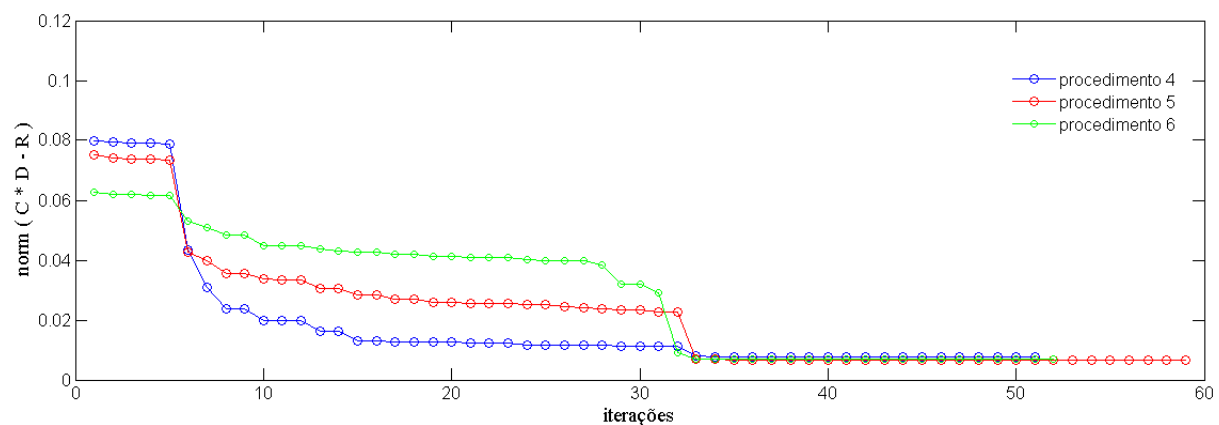


Figura 6. 27: Convergência da solução modelo para o método SRM_2 nos procedimentos 4, 5 e 6.

As convergências para os procedimentos 1,2 e 3, figura 6.26, e para os procedimentos 4, 5 e 6, figura 6.27, aplicados no método SRM_2, ocorreram em valores menores que para o método SRM_1, figura 6.20. Para o método SRM_2 as convergências das soluções dos algoritmos foram alcançadas em valores abaixo 0,008mm, enquanto para SRM_1 as convergências foram inferiores a 0,017mm, o número de iterações para SRM_2 também foi menor que para SRM_1. Estes resultados podem ser justificados pela menor quantidade de equações e incógnitas das modelagens utilizadas em SRM_2, o que permite a obtenção de convergências mais rápidas para a solução numérica.

Os resultados de distâncias entre paredes com aplicação do método SRM_2 estão apresentados nas figuras 6.28, 6.29 e 6.30 e nas tabelas 6.15 e 6.16.

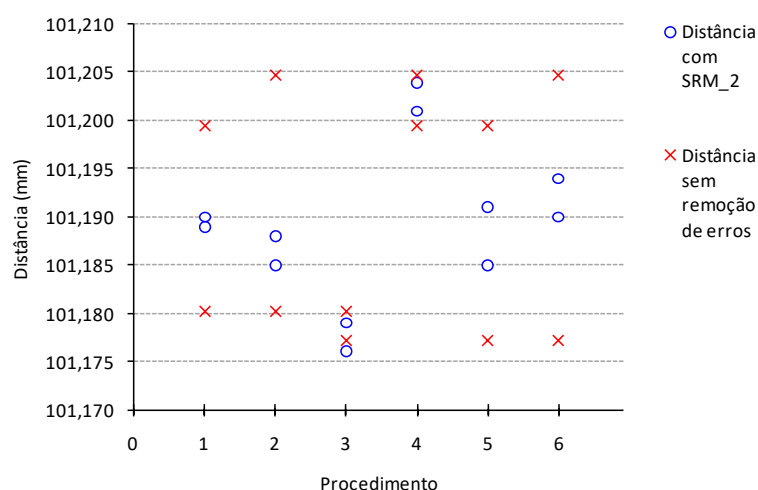


Figura 6. 28: Distâncias com separação de erros pelo método SRM_2 em função dos procedimentos aplicados.

A figura 6.28 ilustra as distâncias obtidas em função dos procedimentos aplicados. É possível perceber com análise do gráfico que os procedimentos 3 e 4 não apresentaram bons resultados para separação de erros, uma vez que estão mais dispersos que os demais procedimentos em relação a um valor central, fato que pode estar relacionado a proximidade e das regiões de medições utilizadas em cada procedimento. Para o procedimento 3, aplica-se as montagens M_1 e M_4 , que são próximas e inclusive há sobreposição da peça no local devido as limitações dimensionais da MMC, o mesmo ocorre com o procedimento 4, que utiliza as montagens M_2 e M_3 .

Os centros geométricos da peça entre as montagens M_1 e M_4 , montagens do procedimento 3, e também entre as montagens M_2 e M_3 , montagens do procedimento 4, estão próximos como pode ser visto na figura 5.2 do capítulo 5, e por consequência os erros sobre as distâncias medidas também possuem valores próximos, como pode ser observado pelo teste

estatístico por comparação de médias, onde a distância obtida na montagem M_1 não tem diferença significativa com a distância obtida em M_4 , o mesmo fato ocorre com as montagens M_2 e M_3 .

A realização deste trabalho permite observar indícios de que para um bom funcionamento do método SRM_2 as medições de distância da peça devem ser realizadas em regiões distintas da MMC, em cada procedimento, e é ideal que seja o mais distante possível uma da outra. Assim, é possível obter uma variação significativamente grande do centro geométrico da medição de modo que as diferenças entre os erros nos resultados, nas diferentes regiões, possam ser notadas. A partir disto, é possível reconhecer os valores dos erros com a solução numérica dos modelos matemáticos.

As tabelas 6.15 e 6.16 evidenciam a influencia dos procedimentos com medições em regiões próximas sobre o resultado de distância, pelo método SRM_2.

Tabela 6. 15: Resultados de Distâncias entre os procedimentos utilizados para o método SRM_2.

Procedimento	Montagens	Distâncias em mm das Montagens por procedimento	Distância média do procedimento em mm	Distância em mm das montagens sem P_3 e P_4	Distância média em mm sem P_3 e P_4
P_1	$M_{1,wo}$	101,189	101,190	101,189	101,190
	$M_{2,w0}$	101,190		101,190	
P_2	$M_{1,wo}$	101,188	101,187	101,188	101,187
	$M_{3,w0}$	101,185		101,185	
P_3	$M_{1,wo}$	101,179	101,178	-	-
	$M_{4,w0}$	101,176		-	
P_4	$M_{2,wo}$	101,201	101,203	-	-
	$M_{3,w0}$	101,204		-	
P_5	$M_{2,wo}$	101,191	101,188	101,191	101,188
	$M_{4,w0}$	101,185		101,185	
P_6	$M_{3,wo}$	101,194	101,192	101,194	101,192
	$M_{4,w0}$	101,190		101,190	
\bar{x}		101,189	101,189	101,189	101,189
σ		0,008	0,008	0,002	0,002

A tabela 6.15, permite fazer uma análise comparativa dos resultados de SRM_2 ao utilizar os procedimentos 3 e 4 com os resultados onde não são utilizados estes procedimentos, os resultados apresentados na tabela estão ordenados por procedimentos. A média total das distâncias entre as duas situações é equivalente, com um valor de 101,189mm,

porém, a dispersão dos resultados não se preserva entre as situações, sendo que o desvio padrão é maior com a utilização dos procedimentos 3 e 4, com o valor de 0,008 μ m frente a 0,002 μ m, quando não se utiliza procedimentos 3 e 4.

Analisando uma situação onde se busca uma diminuição de custos com a diminuição de medições a utilização de poucos procedimentos é requerida, reduzindo o número exaustivo de medidas. Neste ponto de vista, ao considerar a utilização de um procedimento para separação de erros é percebido que a utilização dos procedimentos 3 ou 4, prejudicariam os resultados, já que os resultados médios destes procedimentos são de 101,178mm e 101,203mm, e estão mais distantes do valor médio total, que é 101,189mm. Os resultados médios dos demais procedimentos, procedimentos 1, 2, 5 e 6, permaneceram próximos ao valor médio total, com valores de 101,190mm, 101,187mm, 101,188mm e 101,192mm respectivamente.

Diante do exposto acima, a partir deste ponto deste trabalho, o método efetivo e aqui consolidado para desacoplamento de erros utilizando um par de montagens, é denominado de SRM_2 e considera somente os resultados sem a aplicação dos procedimentos 3 e 4. Os resultados aplicando o sistema redundante de medição com a utilização dos procedimentos 3 e 4 é considerada uma versão inicial de SRM_2, versão *alpha*, e é representada por SRM_2a.

A tabela 6.16 e a figura 6.29 apresentam os resultados de distâncias ordenados pelas montagens e permite um comparativo de SRM_2a, SRM_2 (efetivo) e das distâncias sem aplicação dos métodos de separação de erros.

Tabela 6. 16: Resultados de distâncias utilizando o método SRM_2 comparados com distâncias sem remoção de erros.

Montagem	Distância média por SRM_2a	Distância média por SRM_2	Distâncias sem separação de erros
M _{1,wo}	101,185	101,189	101,180
M _{2,w0}	101,194	101,191	101,199
M _{3,wo}	101,194	101,190	101,205
M _{4,w0}	101,184	101,188	101,177
\bar{x}	101,189	101,189	101,190
σ	0,006	0,001	0,014

Através da comparação dos resultados médios obtidos no SRM_2a, SRM_2 e resultados de medições de distâncias sem aplicação de métodos de separação de erros, é possível visualizar na tabela 6.16 uma diminuição da dispersão nos resultados com aplicação

do sistema redundante de medição, o que acarreta numa diminuição da incerteza sobre os valores obtidos em medições de distâncias.

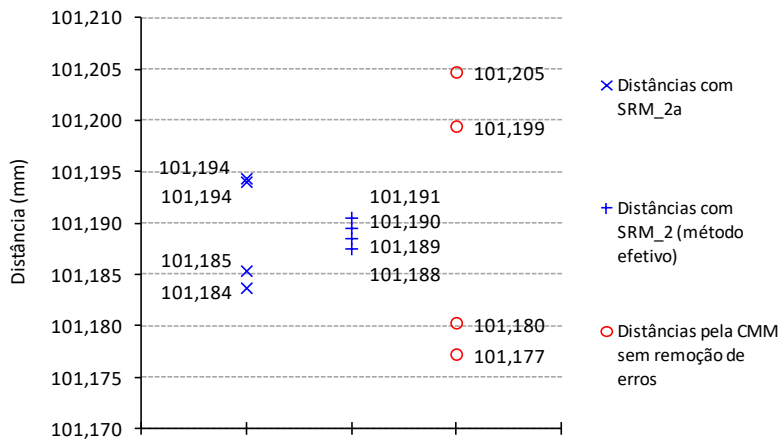


Figura 6. 29: Distâncias obtidas com SRM_2 comparadas com as distâncias obtidas diretamente da MMC

A figura 6.29 ilustra as dispersões dos resultados e permite verificar que nas medições em que não são aplicados métodos para separação de erros os resultados estão mais dispersos em relação a uma tendência central, sendo alcançado um desvio padrão $0,0014\mu\text{m}$ entre as distâncias médias para as montagens em diferentes regiões, M_1 , M_2 , M_3 e M_4 . A aplicação de SRM_2 permitiu obter um desvio padrão de $0,001\mu\text{m}$ e uma convergência dos valores de distâncias, já para o método SRM_2a, o desvio padrão obtido foi de $0,006\mu\text{m}$. Diferenças maiores entre resultados podem ser observadas ao avaliar as amplitudes, onde foi de $28\mu\text{m}$ para resultados sem separação de erros, $10\mu\text{m}$ para os resultados obtidos com SRM_2a e de $3\mu\text{m}$ para os resultados com aplicação de SRM_2.

O valor convencional da distância entre paredes obtido pelo método SRM_2 está apresentado na figura 6.30 e corresponde a $101,189\text{mm}$.

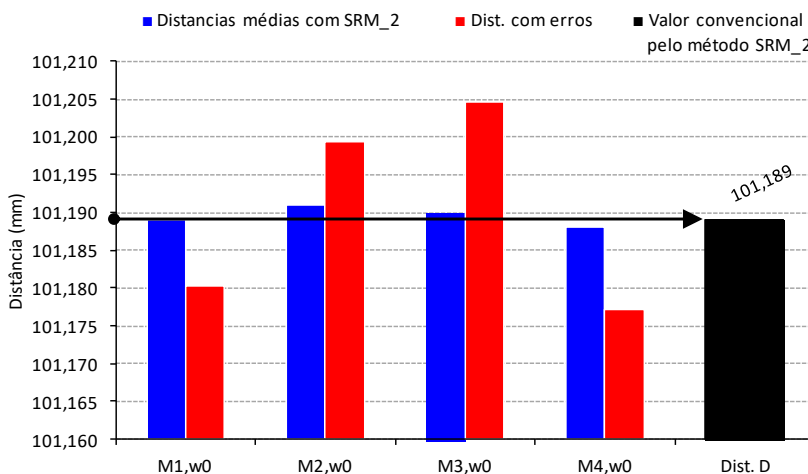


Figura 6. 30: Valor convencional da distância entre paredes pelo método efetivo de separação de erros SRM_2.

A estabilidade dos resultados entre as montagens e procedimentos utilizando SRM_2, evidenciada nas tabelas 6.15 e 6.16 e figuras 6.29 e 6.30, permite verificar o desacoplamentos de erros nas medições de distâncias.

6.4 Resultados da validação do sistema redundante de medição pela comparação de distâncias obtidas com SIP.

Os resultados da medição com máquina SIP estão apresentados na tabela 6.17, onde estão ordenados pelo número da medição. A figura 6.31 ilustra uma comparação dos resultados de distância pelos sistemas redundantes de medição com os resultados de distância da máquina SIP.

Tabela 6. 17: Valores de Distâncias em milímetros obtidos pela medição da peça na SIP.

Número da Medição	Distância pelo ponto C ₆ (mm)	Distância pelo ponto C ₇ (mm)	Distância entre Paredes (mm)
1	101,1850	101,1907	101,188
2	101,1847	101,1899	101,187
3	101,1847	101,1903	101,188
4	101,1845	101,1902	101,188
5	101,1847	101,1900	101,188
6	101,1847	101,1900	101,188
7	101,1847	101,1901	101,188
8	101,1850	101,1906	101,188
9	101,1847	101,1902	101,188
10	101,1847	101,1898	101,188
\bar{x}	101,1847	101,1902	101,188
σ	0,0002	0,0003	0,000

A medição da distância pela SIP mostra uma dispersão pequena dos resultados, os desvios padrões encontrados nas medições sobre os pontos C₆ e C₇ foram aproximadamente 10 vezes menores que a resolução da máquina de medir por coordenadas, que é de 2 μ m. O desvio padrão para a coleta do pontos C₆ foi de 0,2 μ m, enquanto o desvio padrão para a as medições feitas sobre o ponto C₇ foi de 0,3 μ m. Os resultados médios de distância coletados nos pontos C₆ e C₇ variaram em cerca de 5 μ m, o que sugere a falta de paralelismo entre paredes da peça medida e desvios de retilineidade nos respectivos pontos coletados.

O valor convencional obtido para a distância entre paredes através da medição com a SIP foi de 101,188mm, sendo este valor tomado como referência e utilizado como um dos métodos de validação dos sistemas redundantes de medição. É observado na tabela 6.17 a variação de 1µm entre os 10 resultados de distância entre paredes, medidos com a SIP, fato que é considerado desprezível ao se considerar a resolução da MMC e pelo motivo do desvio padrão obtido ser equivalente a zero.

Um resumo dos resultados de distância entre paredes da peça medida pode ser observado na figura 6.31, onde é apresentado os resultados de distâncias obtidos pelos sistemas redundantes de medição, SRM_1 e SRM_2, resultado de distância obtido com a SIP e também os resultados de distância sem aplicação de métodos de remoção de erros.

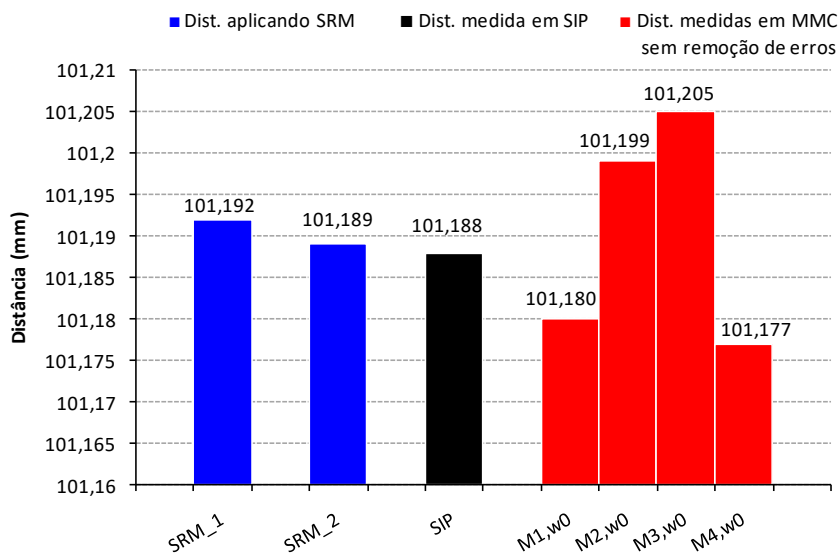


Figura 6. 31: Comparação dos métodos utilizados no sistema redundante de medição.

A distância entre paredes da peça utilizando o método SRM_1 foi de 101,192mm, enquanto com a aplicação do método SRM_2 foi de 101,189mm. O valor da distância entre paredes obtido com a medição utilizando a SIP foi de 101,188mm.

A figura 6.31 permite verificar uma diferença de 4µm da distância obtida pelo método SRM_1 para com a distância obtida utilizando a SIP. Esta diferença pode ser justificada pelo motivo de que no método SRM_1 são empregadas quatro montagens no mesmo modelo matemático, M_1 , M_2 , M_3 e M_4 , e as montagens M_1 e M_4 estão posicionadas próximas, assim como M_2 e M_3 . Esta proximidade também é identificada nos pontos coletados, fazendo com que os erros não sejam identificados na simulação computacional, o que prejudica a exatidão do método SRM_1. No entanto, a diferença de 4µm não determina a ineficiência do método,

já que ele se mostrou estável na solução numérica do modelo matemático, assim como nos resultados de distâncias entre os procedimentos e entre as montagens.

O método SRM_2 apresentou resultados de distâncias estáveis com uma tendência central próxima ao valor de distância obtida pela SIP, com uma variação de apenas $1\mu\text{m}$. Os resultados da solução numérica, e de distância entre os procedimentos e entre as montagens se apresentaram de forma estável. A escolha de pontos estratégicos para medições se mostrou inevitável separação de erros em medições de distâncias uma vez que medições em posições próximas prejudicam a exatidão dos resultados.

A figura 6.31 além de permitir a avaliação dos sistemas redundantes de medição, também permite inferir sobre as distâncias obtidas sem aplicação de métodos de separação de erros, onde é possível perceber que os erros incidentes sobre as distâncias possuem desvios entre as posições, que variam de $-11\mu\text{m}$ a $17\mu\text{m}$ em relação a medida de referência, que é a distância entre paredes da peça obtida pela SIP. Uma análise mais profunda é necessária para se buscar uma relação das posições e dos braços de medição com os erros incidentes nas medições de distâncias.

Os desvios sobre as distâncias obtidas em relação a SIP estão apresentados na figura 6.32.

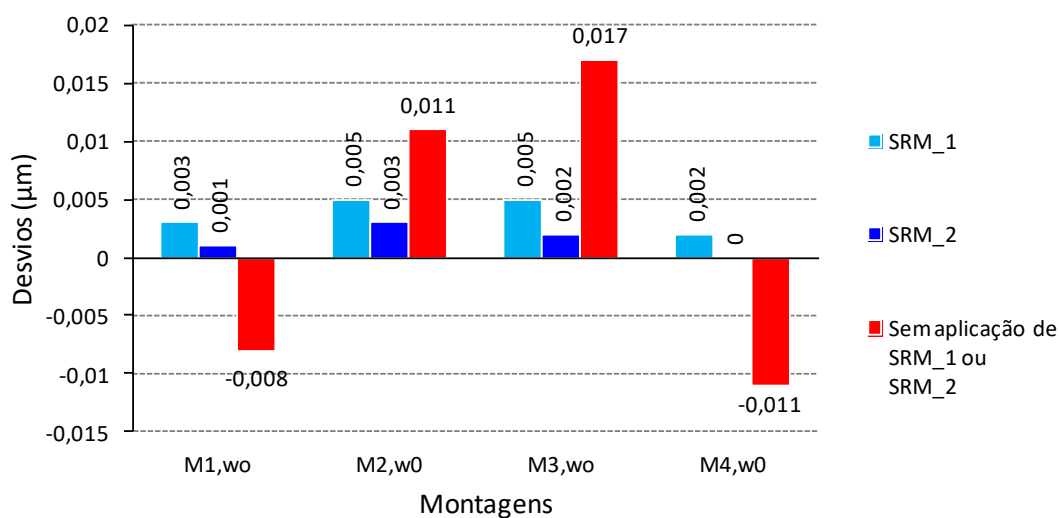


Figura 6. 32: Desvio dos resultados de distâncias em relação a SIP.

Com análise da figura 6.32 fica evidente que os resultados de distâncias aplicando os métodos SRM_1 e SRM_2, em qualquer uma das regiões de medição M_1 , M_2 , M_3 e M_4 , apresentaram menores desvios em relação a SIP, pois com aplicação destes métodos os desvios não superaram $5\mu\text{m}$.

A figura 6.33 apresenta os desvios das distâncias convencionais obtidas pelos métodos SRM_1 e SRM_2 em relação aos resultados de distâncias obtidos com a medição da peça pela máquina SIP.

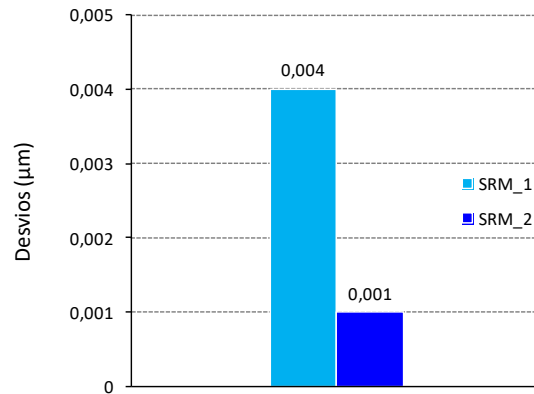


Figura 6. 33: Desvios dos valores convencionais para os métodos SRM_1 e SRM_2.

Apesar da máquina ser operada em modo manual devido às limitações técnicas do equipamento é possível afirmar que os resultados foram satisfatórios e atingiu-se o objetivo esperado, contudo, espera-se que em máquinas com deslocamentos controlados numericamente o desempenho dos sistemas redundantes de separação de erros sejam melhores.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho apresentou formas para desacoplar erros em uma máquina de medir coordenadas, o método foi aplicado em uma MMC do tipo ponte móvel durante o procedimento de medições de distâncias entre paredes, para peças manufaturadas. Os métodos desenvolvidos foram denominados de sistemas redundantes de medição e foram apresentadas sob duas formas, como SRM_1, sistema redundante de medição 1 e SRM_2, sistema redundante de medição 2. Inicialmente a presença de erros foi identificada a partir da verificação e comprovação de que os resultados de distâncias obtidos nas medições são influenciados pela medição de uma peça em diferentes regiões do volume de trabalho da MMC, esta análise foi realizada com ferramentas estatísticas como análise de variância, ANOVA, e um método de comparação múltipla de médias, o teste de Tukey.

Uma calibração das escalas foi realizada, já que uma condição básica de funcionamento de uma MMC é de que ao menos os encoders lineares que fornecem os posicionamentos da sonda de medição estejam em perfeito funcionamento, assim, este trabalho partiu deste princípio, realizando a calibração dos erros de posição dos encoders lineares dos eixos "x" e "y".

Os métodos desenvolvidos para desacoplamento de erros em medições de distâncias foram aplicados com auxílio da sobreposição de pontos, obtidos com medições deslocadas ao

mesmo passo de coleta dos pontos, as medições de distâncias com a sobreposição de pontos foram realizadas em regiões diferentes da MMC. Uma modelagem matemática das leituras dos pontos considerando erros de medição foi elaborada e a partir da solução numérica foi possível obter os valores convencionais das distâncias medidas pelas duas diferentes formas do sistema redundante de medição (SRM).

Os resultados de distâncias com aplicação do SRM foram comparados entre procedimentos e também, com os resultados de medição do mesmo artefato em uma máquina SIP, que possui resolução mais fina e melhor qualidade de medição.

A partir do desenvolvimento teórico e experimental é possível destacar algumas conclusões a respeito deste trabalho:

O desacoplamento de erros de distâncias é realizado a partir de um método de separação de erros, que para isto, são necessários respeitar alguns princípios básicos, definições e atributos:

- A separação ocorre pela identificação do erro incidente nos resultados de medição por medições redundantes.
- A redundância de medição é necessária para realização da separação de erros;
- Os valores obtidos em medições devem ser paramétricos;
- Uma posição de referência entre as medições redundantes deve ser adotada;
- Os erros devem variar significativamente entre posições para que possam ser identificados pela solução numérica.
- A resposta obtida com a separação de erros pode ser: valor do erro incidente a medição, valor da característica requerida, ou ambas.

A aplicação da ANOVA, para avaliação da influência do fator região de medição sobre os resultados e o teste Tukey, para comparação múltiplas de médias, permitiram concluir que há diferenças sobre as distâncias medidas em regiões diferentes, fato que permite e justifica a elaboração deste trabalho.

Diferentemente de outros métodos para separação de erros, este trabalho permite separar o erro de medição sobre distâncias entre paredes de uma peça de trabalho ao aplicar uma solução numérica sobre a modelagem matemática das leituras dos pontos coletados.

O desacoplamento de erros nos valores de distâncias exige a modelagem matemática dos desvios sobre os pontos, que são dependentes da região de medição e dos desvios que são proporcionais ao braço de medição, um modelo matemático sobre todos os pontos coletados deve ser elaborado. Para a solução desta modelagem, a sobreposição dos pontos deve ser efetuada, ao medir o artefato em posição deslocada ao mesmo passo da coleta de pontos.

A aplicação dos sistemas redundantes de medição tem como vantagem uma menor incerteza em relação a combinação calibração/compensação, pois, não há necessidade de calibrações frequentes e extensas para todos os 21 erros geométricos da MMC, que exigem o conhecimento da incerteza envolvida em todas as etapas e variáveis envolvidas na calibração, o que eleva o custo e a complexidade da execução para a obtenção do valor convencional da dimensão medida.

Para a realização efetiva do desacoplamento de erros é necessário considerar o desalinhamento entre as posições deslocadas para a sobreposição dos pontos, pois, como pode ser visto no método inicial proposto que utiliza quatro montagens e não considera o desalinhamento, os resultados obtidos por este método forneceram resultados inconsistentes, onde não ocorreu a separação, diferentemente dos resultados pelos métodos SRM_1 e SRM_2. Desta maneira é evidenciado que a adição das variáveis de desalinhamento na modelagem dos erros é fundamental.

Os métodos SRM_1 e SRM_2 podem ser considerados como métodos de reconhecimento de padrões e um tipo de mineração de dados, já que permitem encontrar o valor convencional da distância por meio de simulações computacionais, dentre todos os diferentes resultados com erros, sem aplicação dos métodos SRM_1 e SRM_2 e em regiões distintas da MMC.

O sistema de equações é esparso e mal condicionado e em virtude disso, a falta de paralelismo entre as paredes da peça, mesmo que mínima, pode ocasionar uma considerável imprecisão na solução do modelo, já que este relaciona erros das duas paredes. Para que ocorra uma separação efetiva de erros, o ponto de parede posterior deve ser um ponto médio entre os pontos coletados na parede, evitando desta forma imprecisões na solução numérica. Os pontos coletados da parede posterior devem ainda ser equidistantes na direção i , em relação ao sistema de coordenadas fixo a peça.

Para o método de desacoplamento de erros utilizando quatro montagens, o sistema redundante de medição 1(SRM_1), o conceito de procedimento de medição se difere do método de avaliação aos pares de montagens, SRM_2, pois, apenas a repetição das medidas realizadas nas diferentes posições permitem a obtenção de bons resultados, enquanto para a aplicação da separação de erros utilizando o método SRM_2 é necessário uma análise mais profunda sobre as posições medidas, já que o ideal é que as disposições da peça na MMC não sejam sobrepostas e de preferência o mais distante possível, para que os erros possam ser encontrados de forma correta na solução numérica do modelo matemático.

Na avaliação da solução numérica da modelagem matemática proposta é evidenciado que quando aplicados métodos iterativos para a solução é necessário analisar a norma dos resíduos e não somente o número de iterações para a convergência, uma vez que a solução de um modelo matemático pode convergir rapidamente, porém com uma solução com altos níveis de resíduos, o que implica na obtenção de resultados inadequados. Vale ressaltar que estes parâmetros devem ser tomados como análises auxiliares e não dispensam as avaliações da estabilidade dos resultados entre procedimentos realizados e da proximidade dos resultados obtidos com o resultado de distância obtido com uma máquina de resolução melhor, como a SIP.

Os sistemas redundantes de medição foram capazes de executar a remoção de erros, contudo, uma modelagem das leituras dos pontos deve ser realizada, considerando os erros que são proporcionais ao braço de medição e os erros que não obedecem esta proporcionalidade. A partir da modelagem matemática um método de solução numérica deve ser implementado, este método deve ser capaz de solucionar problemas mal condicionados e com matrizes dos coeficientes das incógnitas, esparsas. A solução do sistema de equações e as distâncias obtidas devem ser estáveis para que se obtenha uma correta separação de erro. A utilização de apenas a máquina de medir por coordenadas no procedimento de inspeção e separação de erros é um ponto favorável deste método, já que não é necessário uma instrumentação de alto custo para identificação dos erros influentes sobre as distâncias medidas.

O método SRM_1 aplicado para remoção dos erros sobre as distâncias medidas apresentou resultados satisfatórios, no sentido de que os resultados foram estáveis entre os procedimentos executados, além de se ter obtidos valores de distâncias próximas aos valores encontrados com a medição da peça na máquina SIP. A matriz dos coeficientes para o método SRM_1 é composta de cerca de 12,82% de elementos não nulos para a modelagem utilizada. Em relação aos resultados de distâncias, a diferença das distâncias obtidas com a medição

pela SIP e medição com a MMC aplicando o método SRM_1 foi de 4 μm , onde o valor convencional da distância obtida com SRM_1 foi de 101,192 mm, enquanto para a distância obtida com SIP foi de 101,188 mm. O desvio máximo das distâncias em relação ao valor obtido com a medição pela SIP, considerando todas as regiões de medição, foi de 5 μm , já dispersão dos resultados de distâncias pelo SRM_1 entre as regiões de medição, expressas pelo desvio padrão, foi de 2 μm , frente a 14 μm dos resultados de distâncias obtidos sem aplicação do sistema redundante de medição.

O método SRM_2 também apresentou resultados satisfatórios para a remoção de erros nos procedimentos de medição de distâncias, visto que os resultados obtidos tiveram estabilidade entre os procedimentos e os resultados de distâncias alcançados foram próximos do resultado de distância em medições com a SIP. Cerca de 25,64% de elementos não nulos compõe a matriz dos coeficientes para a modelagem empregada no SRM_2, o que é benéfico em relação a qualidade da solução do sistema de equações.

Embora o método SRM_2 seja melhor em relação ao SRM_1, devido ao menor número de medições, no método SRM_2 é necessário atribuir procedimentos de medições da peça inspecionada em regiões distantes uma da outra, já que os resultados de distâncias podem ser prejudicados caso esta condição não seja respeitada. A diferença entre a distância com SRM_2 e com a SIP foi de aproximadamente 1 μm . O valor convencional da distância por SRM_2 foi de 101,189 mm, já o desvio máximo dentre as regiões de medição em relação ao valor da distância obtida com SIP foi de 2 μm . A dispersão dos resultados, expressa pelo desvio padrão, entre as regiões de medição foi de 1 μm .

Diante dos argumentos apresentados, conclui-se neste trabalho que os métodos SRM_1 e SRM_2 podem ser aplicados para desacoplamento dos erros em resultados de medições de distâncias utilizando máquinas de medir por coordenadas, ao aplicar medições redundantes e técnicas de separação de erros.

O desenvolvimento deste trabalho possibilita a realização de novas propostas de investigações, as quais estão relacionadas abaixo e servem como oportunidades para realização de trabalhos futuros:

- Aplicar o método em máquinas de medir por coordenadas comandadas por CNC já que imprecisões durante a medição podem ocorrer pela operação manual da máquina;
- Realizar uma modelagem em que seja possível obter uma solução estável ao utilizar quaisquer pontos da parede posterior, sem ser necessário a utilização de um ponto

médio, e se possível, através desta solução conseguir analisar a falta de paralelismo entre as paredes da peça;

- Realizar uma modelagem matemática que permita verificar e relacionar diretamente os erros em medições de distâncias e os braços de medição formados pelos eixos "x", "y" e "z";
- Aplicação de outros métodos para solução numérica do modelo matemático apresentado;
- Estabelecer um método para determinar a incerteza de medição utilizando os sistemas redundantes de medição.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARENCIBIA, R. V. (2003). **Modelo de Sintetização de Erros Termicamente Induzidos em Máquinas de Medir a Três Coordenadas**. 191 p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS. (1997). **ANSI/ASME B89. 4.1: Methods for performance evaluation of coordinate measuring machines**. New York.

BJÖRK, A. (2009). **Numerical Methods in Scientific Computing**. v.II. Auckland: Siam.

BRYAN, J. (1979). The Abbé Principle Revisited: An Updated Interpretation. **Precision Engineering**. p. 129 -132.

_____. (1990). International Status of Thermal Error Research. **Annals of the CIRP**. v. 39, n.2, p. 645-656.

BRYAN, J. B.; DOIRON, T. (2011). Temperature Fundamentals. HOCKEN, R. J.; PEREIRA, P. H. **Coordinate Measuring Machines and Systems**. Boca Raton: CRC Press. p. 273-303.

CAMARGO, I.; BOULOS, P. (2012). **Geometria Analítica**. 3. ed. Pearson Prentice Hall.

CARDOZA, J. A. S. (1995). **Máquinas virtuais de medir a três coordenadas**. 209p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP. 1995.

CASTRO, H. F. F.; BURDEKIN, M. (2003). Dynamic calibration of the positioning accuracy of machine tools and coordinate measuring machines using a laser interferometer. **International Journal of Machine Tools & Manufacture**. v. 43, p.947-954.

CHEN, B. et al. (2014). Investigation of error separation for three dimensional profile rotary measuring system. **Measurement**. v.47, p.627-632.

DAHLQUIST, G.; BJÖRK, A. (2007). **Numerical Methods in Scientific Computing**. v.I. Auckland: Siam.

DANG, Q. C.; YOO, S.; KIM, D. -W. (2006). Complete 3-D Self-calibration of Coordinate Measuring Machines. **Annals of the CIRP**, v. 55, n.1, p 527-530.

DIETRICH, C. F. (1991). Uncertainty, Calibration and Probability: The Statistics of scientific and industrial measurement. **Adam Hilger**.

DI GIACOMO, B. (1986). **Computer aided calibration and hybrid compensation of geometric errors in coordinate measuring machines**. 418p. Tese (Doutorado) - Institute of Science and Technology, University of Manchester, Manchester, 1986.

DI GIACOMO, B.; NAKAZATO, M. K.; ARENCIBIA, R. V. (2005). Estudo inicial dos erros cíclicos nas Máquinas de Medir a Três Coordenadas. **Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica**. v.9, n.3, p.103-109.

DI GIACOMO et. al (2013). Theoretical Synthesizing Errors in Coordinates Measuring Machines. In **Proceedings of the 22nd International Congress of Mechanical Engineering - COBEM2013**. Ribeirão Preto, Brazil.

DONG, C. et al (2003). Reducing the Dynamic Errors of Coordinate Measuring Machines. **Journal of Mechanical Design**. v. 125, p. 831-839.

EVANS, C. J.; HOCKEN, R. J.; ESTLER, W. T. (1996). Self Calibration Reversal, Redundancy Error Separation anda absolute testing. **Annals of the CIRP**, v.45, n.2, p.617-634.

EVANS, C. J.; ESTLER, W. T. (2011). Self-Calibration: Reversal, Redundancy, Error Separation, and Absolute Testing. Course Notes. 11th European Society for Precision Engineering & Nanotechnology - EUSPEN2011. 80p.

FUNG, E. H. K. (2006). A New Method for Measuring Straightness and Yawing Motion Errors of a Linear Slide. **Journal of Manufacturing Science and Engineering**. v. 128. p. 503-512.

FUNG, E. H. K.; ZHU, M. (2012). An Improved Fourier Five-Sensor (IF5S) method for separating straightness and yawing errors of a linear slide based on multiple sensor parameter sets and least square regression technique. **Measurement**, v.45. p. 1323-1330.

GOLUB, G. H.; VAN LOAN, C. F. (2013). **Matrix computations**. 4. ed. The Johns Hopkins University Press.

GUM (2008). **Evaluation of measurement data: Guide to the expression of uncertainty in measurement**. Joint Committee for Guides in Metrology.

HOCKEN, R. J. (1995). **Principles active in the design of precision machines**. Course Notes. 27p. August.

HWANG, J. et. al. (2007). A three-probe system for measuring the parallelism and straightness of a pair of rails for ultra-precision guideways. **International Journal of Machine Tools & Manufacture**. v. 47, p. 1053-1058.

KUNZMANN, H; WÄLDELE, F. (1988). Performance of CMM. **Annals of CIRP**. v. 37, n.2, p.633-640.

KUNZMANN, H.; NI, J.; WÄLDELE, F. (1995). Accuracy Enhancement. Bosch, J. A. **Coordinate Measuring and Systems**. New York: Marcel Dekker, Inc.

LEACH, R. K. (2010). **Fundamental Principles of Engineering Nanometrology**: A volume in Micro and Nano Technologies. Elsevier.

LEE, J. et al. (2012). Spindle Error Motion Measurement of large Precision Roll Lathe. **International Journal of Precision Engineering and Manufacturing**. v. 13, n. 6, p. 861-867.

MARSH, E. R.; ARNESON, D. A.; MARTIN, D. L. (2010). A comparison of reversal and multiprobe error separation. **Precision Engineering**. v.34, p.85-91.

MARQUES, A. (2003). **Uma Interface Eletrônica e Computacional para Medições a três Coordenadas**. 150p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos – USP, São Carlos.

MONTGOMERY, D. C. (2004). **Introdução Ao Controle Estatístico De Qualidade**, 4. ed. LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S. A.

MORAIS, C. A. G. (2012). **Modelos de Sintetização Plena e Reduzida de Erros em Máquinas de Medir por Coordenadas**. 186p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos – USP, São Carlos.

NAFI, A.; MAYER, J. R. R.; WOZNIAK, A. (2011). Novel CMM-based implementation of the multi-step method for the separation of machine and probe errors. **Precision Engineering**. v.35, p.318-328.

NAFI, A.; MAYER, J. R. R.; WOZNIAK, A. (2012). Reduced configuration set for the multi-step method applied to machine and probe error separation on a CMM. **Measurement**. v.45, p.2321-2329.

NI, J. (1995). Accessory Elements. Bosch, J. A. **Coordinate Measuring Machines and Systems**. New York: Marcel Dekker, Inc.

NATIONAL INSTITUTE OF STANDARDS AND TECHNOLOGY - NIST. (2012). E-Handbook of Statistical Methods. Disponível em:<<http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/>>. Acesso em: 15 mai. 2015.

ORREGO R. M. M. (1999). **Método de calibração direta para máquinas de medir a três coordenadas**. 175p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

PAZIANI, F. T. (2005). **Desenvolvimento de um Sistema Automatizado e Dedicado de Medição**. 165p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Carlos, São Carlos, 2006.

PAZIANI, F. T.; DI GIACOMO, B.; TSUNAKI, R. H. (2007). Development of an Automated and Dedicated Measuring System for Straightness Evaluation. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science and Engineering**. v.29, p.290-298.

PAZIANI, F. T.; DI GIACOMO, B.; TSUNAKI, R. H. (2009). Robot Measuring Form Errors. **Robots and Computer - Integrated Manufacturing**. v.25, p.168-177.

PHILLIPS, S. D. (2011). Performance Evaluation. Hocken, R. J.; Pereira, P. H. **Coordinate Measuring Machines and Systems**. Boca Raton: CRC Press.

PIRATELLI FILHO, A. (1997). **Método para avaliação do desempenho de máquinas de medir a três coordenadas através do planejamento de experimentos**. 225 p. Tese (Doutorado) – Departamento de Engenharia Mecânica – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

ROSS, S. M. (2006). **A First Course in Probability**. 7. ed. Pearson Education, Inc.

SCHWENKE, et al. (2008). Geometric error measurement and compensation of machines - An update. **CIRP Annals - Manufacturing Technology**, v.57, p.660-675.

SLOCUM, A. (1999). Precision Machine Design. Kreith, F. **Mechanical Engineering Handbook**. Boca Raton: Crc Press, Cap. 11.

STARK, H; WOODS, J. W. (1994). **Probability, Random Process, and Estimation Theory for Engineers**. 2. ed. Prentice-Hall, Inc.

TANAKA, H.; et al. (1981). Application of a New Straightness Measurement Method to Large Machine Tool. **Annals of the CIRP**, v.30, n.1, p. 455-459.

(VDI/VDE 2617, 1986). “Accuracy of Coordinate Measuring Machines, Part 1: Characteristics and their checking”. Verein Deutscher Ingenieure/ Verband Deutscher Elektro - Techniker.

VUOLO, J. H. (1992). **Fundamentos da Teoria de Erros**. Edgar Blücher Ltda.

WECK, M. (1984). Handbook of machine tools – v.4. **Metrological analysis and performance tests**. London: John Wiley and Sons.

WEEKERS, W. G.; SCHELLEKENS, P. H. J. (1995). Assessment of Dynamic Errors of CMMs for Fast Probing. **Annals of the CIRP**, v.44, n.1, p.469-474.

WHITEHOUSE, D. J. (1976). Some theoretical aspects of error separation techniques in surface metrology. **Journal of Physics E: Scientific Instruments** , v.9, p.531-536.

YOO, S.; KIM, S. -W. (2004) Self-calibration algorithm for testing out-of-plane errors of two-dimensional profiling stages. **International Journal of Machine Tools & Manufacture**, v. 44, p. 767-774.

ZHANG, G. (2011). Error Compensation of Coordinate Machines. Hocken, R. J.; Pereira, P. H. **Coordinate Measuring Machines and Systems**. Boca Raton: CRC Press.

APÊNDICE A - Modelagens utilizadas para os sistemas redundantes de medição

A.1 - Modelagem para sistema redundante de medição com quatro montagens M_1 , M_2 , M_3 e M_4 e sem as variáveis de desalinhamento.

$$\frac{M_2}{M_1} \Delta R_{1,w_0} = \alpha_{f,M_1} ({}^{M_1}R_{1,i}) - \alpha_{f,M_2} ({}^{M_2}R_{1,i}) + \frac{M_1}{w_0} \delta C_1 - \frac{M_2}{w_0} \delta C_1$$

$$\frac{M_2}{M_1} \Delta R_{2,w_0} = \alpha_{f,M_1} ({}^{M_1}R_{2,i}) - \alpha_{f,M_2} ({}^{M_2}R_{2,i}) + \frac{M_1}{w_0} \delta C_2 - \frac{M_2}{w_0} \delta C_2$$

$$\frac{M_2}{M_1} \Delta R_{3,w_0} = \alpha_{f,M_1} ({}^{M_1}R_{3,i}) - \alpha_{f,M_2} ({}^{M_2}R_{3,i}) + \frac{M_1}{w_0} \delta C_3 - \frac{M_2}{w_0} \delta C_3$$

$$\frac{M_2}{M_1} \Delta R_{4,w_0} = \alpha_{f,M_1} ({}^{M_1}R_{4,i}) - \alpha_{f,M_2} ({}^{M_2}R_{4,i}) + \frac{M_1}{w_0} \delta C_4 - \frac{M_2}{w_0} \delta C_4$$

$$\frac{M_2}{M_1} \Delta R_{5,w_0} = \alpha_{f,M_1} ({}^{M_1}R_{5,i}) - \alpha_{f,M_2} ({}^{M_2}R_{5,i}) + \frac{M_1}{w_0} \delta C_5 - \frac{M_2}{w_0} \delta C_5$$

$$\frac{M_2}{M_1} \Delta R_{6,w_0} = \alpha_{p,M_1} ({}^{M_1}R_{6,i}) - \alpha_{p,M_2} ({}^{M_2}R_{6,i}) + \frac{M_1}{w_0} \delta C_4 - \frac{M_2}{w_0} \delta C_4$$

$$\frac{M_2}{M_1} \Delta R_{7,w_0} = \alpha_{p,M_1} ({}^{M_1}R_{7,i}) - \alpha_{p,M_2} ({}^{M_2}R_{7,i}) + \frac{M_1}{w_0} \delta C_2 - \frac{M_2}{w_0} \delta C_2$$

$$\frac{M_2}{M_1} \Delta R_{1,w_1} = \alpha_{f,M_1} ({}^{M_1}R_{1,i}) - \alpha_{f,M_2} ({}^{M_2}R_{1,i}) + \frac{M_1}{w_1} \delta C_1 - \frac{M_2}{w_1} \delta C_1$$

$$\frac{M_2}{M_1} \Delta R_{2,w_1} = \alpha_{f,M_1} ({}^{M_1}R_{2,i}) - \alpha_{f,M_2} ({}^{M_2}R_{2,i}) + \frac{M_1}{w_0} \delta C_1 - \frac{M_2}{w_0} \delta C_1$$

$$\frac{M_2}{M_1} \Delta R_{3,w_1} = \alpha_{f,M_1} ({}^{M_1}R_{3,i}) - \alpha_{f,M_2} ({}^{M_2}R_{3,i}) + \frac{M_1}{w_0} \delta C_2 - \frac{M_2}{w_0} \delta C_2$$

$$\frac{M_2}{M_1} \Delta R_{4,w_1} = \alpha_{f,M_1} ({}^{M_1}R_{4,i}) - \alpha_{f,M_2} ({}^{M_2}R_{4,i}) + \frac{M_1}{w_0} \delta C_3 - \frac{M_2}{w_0} \delta C_3$$

$$\frac{M_2}{M_1} \Delta R_{5,w_1} = \alpha_{f,M_1} ({}^{M_1}R_{5,i}) - \alpha_{f,M_2} ({}^{M_2}R_{5,i}) + \frac{M_1}{w_0} \delta C_4 - \frac{M_2}{w_0} \delta C_4$$

$$\frac{M_2}{M_1} \Delta R_{6,w_1} = \alpha_{p,M_1} ({}^{M_1}R_{6,i}) - \alpha_{p,M_2} ({}^{M_2}R_{6,i}) + \frac{M_1}{w_0} \delta C_3 - \frac{M_2}{w_0} \delta C_3$$

$$\frac{M_2}{M_1} \Delta R_{7,w_1} = \alpha_{p,M_1} ({}^{M_1}R_{7,i}) - \alpha_{p,M_2} ({}^{M_2}R_{7,i}) + \frac{M_1}{w_0} \delta C_1 - \frac{M_2}{w_0} \delta C_1$$

$$\frac{M_2}{M_1} \Delta R_{1,w_2} = \alpha_{f,M_1} ({}^{M_1}R_{1,i}) - \alpha_{f,M_2} ({}^{M_2}R_{1,i}) + \frac{M_1}{w_0} \delta C_2 - \frac{M_2}{w_0} \delta C_2$$

$$\frac{M_2}{M_1} \Delta R_{2,w_2} = \alpha_{f,M_1} ({}^{M_1}R_{2,i}) - \alpha_{f,M_2} ({}^{M_2}R_{2,i}) + \frac{M_1}{w_0} \delta C_3 - \frac{M_2}{w_0} \delta C_3$$

$$\frac{M_2}{M_1} \Delta R_{3,w_2} = \alpha_{f,M_1} ({}^{M_1}R_{3,i}) - \alpha_{f,M_2} ({}^{M_2}R_{3,i}) + \frac{M_1}{w_0} \delta C_4 - \frac{M_2}{w_0} \delta C_4$$

$$\frac{M_2}{M_1} \Delta R_{4,w_2} = \alpha_{f,M_1} ({}^{M_1}R_{4,i}) - \alpha_{f,M_2} ({}^{M_2}R_{4,i}) + \frac{M_1}{w_0} \delta C_5 - \frac{M_2}{w_0} \delta C_5$$

$$\frac{M_2}{M_1} \Delta R_{5,w_2} = \alpha_{f,M_1} ({}^{M_1}R_{5,i}) - \alpha_{f,M_2} ({}^{M_2}R_{5,i}) + \frac{M_1}{w_2} \delta C_5 - \frac{M_2}{w_2} \delta C_5$$

$$\frac{M_2}{M_1} \Delta R_{6,w_2} = \alpha_{p,M_1} ({}^{M_1}R_{6,i}) - \alpha_{p,M_2} ({}^{M_2}R_{6,i}) + \frac{M_1}{w_0} \delta C_5 - \frac{M_2}{w_0} \delta C_5$$

$$\frac{M_2}{M_1} \Delta R_{7,w_2} = \alpha_{p,M_1} ({}^{M_1}R_{7,i}) - \alpha_{p,M_2} ({}^{M_2}R_{7,i}) + \frac{M_1}{w_0} \delta C_3 - \frac{M_2}{w_0} \delta C_3$$

·
·
·

⋮

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{1,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{1,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w0}^{M3}R_{1,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_1 - {}_{w0}^{M3}\delta C_1$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{2,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{2,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w0}^{M3}R_{2,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_2 - {}_{w0}^{M3}\delta C_2$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{3,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{3,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w0}^{M3}R_{3,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_3 - {}_{w0}^{M3}\delta C_3$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{4,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{4,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w0}^{M3}R_{4,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_4 - {}_{w0}^{M3}\delta C_4$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{5,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{5,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w0}^{M3}R_{5,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_5 - {}_{w0}^{M3}\delta C_5$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{6,w0} = \alpha_{p,M1}({}_{w0}^{M1}R_{6,i}) - \alpha_{p,M3}({}_{w0}^{M3}R_{6,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_4 - {}_{w0}^{M3}\delta C_4$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{7,w0} = \alpha_{p,M1}({}_{w0}^{M1}R_{7,i}) - \alpha_{p,M3}({}_{w0}^{M3}R_{7,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_2 - {}_{w0}^{M3}\delta C_2$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{1,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{1,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w1}^{M3}R_{1,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_1 - {}_{w1}^{M3}\delta C_1$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{2,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{2,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w1}^{M3}R_{2,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_1 - {}_{w1}^{M3}\delta C_1$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{3,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{3,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w1}^{M3}R_{3,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_2 - {}_{w1}^{M3}\delta C_2$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{4,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{4,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w1}^{M3}R_{4,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_3 - {}_{w1}^{M3}\delta C_3$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{5,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{5,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w1}^{M3}R_{5,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_4 - {}_{w1}^{M3}\delta C_4$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{6,w1} = \alpha_{p,M1}({}_{w1}^{M1}R_{6,i}) - \alpha_{p,M3}({}_{w1}^{M3}R_{6,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_3 - {}_{w1}^{M3}\delta C_3$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{7,w1} = \alpha_{p,M1}({}_{w1}^{M1}R_{7,i}) - \alpha_{p,M3}({}_{w1}^{M3}R_{7,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_1 - {}_{w1}^{M3}\delta C_1$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{1,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{1,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w2}^{M3}R_{1,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_2 - {}_{w2}^{M3}\delta C_2$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{2,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{2,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w2}^{M3}R_{2,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_3 - {}_{w2}^{M3}\delta C_3$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{3,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{3,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w2}^{M3}R_{3,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_4 - {}_{w2}^{M3}\delta C_4$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{4,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{4,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w2}^{M3}R_{4,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_5 - {}_{w2}^{M3}\delta C_5$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{5,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{5,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w2}^{M3}R_{5,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_5 - {}_{w2}^{M3}\delta C_5$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{6,w2} = \alpha_{p,M1}({}_{w2}^{M1}R_{6,i}) - \alpha_{p,M3}({}_{w2}^{M3}R_{6,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_5 - {}_{w2}^{M3}\delta C_5$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{7,w2} = \alpha_{p,M1}({}_{w2}^{M1}R_{7,i}) - \alpha_{p,M3}({}_{w2}^{M3}R_{7,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_3 - {}_{w2}^{M3}\delta C_3$$

⋮

⋮

$${}_{M1}^{M4}\Delta R_{1,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{1,i}) - \alpha_{f,M4}({}_{w0}^{M4}R_{1,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_1 - {}_{w0}^{M4}\delta C_1$$

$${}_{M1}^{M4}\Delta R_{2,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{2,i}) - \alpha_{f,M4}({}_{w0}^{M4}R_{2,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_2 - {}_{w0}^{M4}\delta C_2$$

$${}_{M1}^{M4}\Delta R_{3,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{3,i}) - \alpha_{f,M4}({}_{w0}^{M4}R_{3,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_3 - {}_{w0}^{M4}\delta C_3$$

$${}_{M1}^{M4}\Delta R_{4,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{4,i}) - \alpha_{f,M4}({}_{w0}^{M4}R_{4,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_4 - {}_{w0}^{M4}\delta C_4$$

$${}_{M1}^{M4}\Delta R_{5,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{5,i}) - \alpha_{f,M4}({}_{w0}^{M4}R_{5,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_5 - {}_{w0}^{M4}\delta C_5$$

$${}_{M1}^{M4}\Delta R_{6,w0} = \alpha_{p,M1}({}_{w0}^{M1}R_{6,i}) - \alpha_{p,M4}({}_{w0}^{M4}R_{6,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_4 - {}_{w0}^{M4}\delta C_4$$

$${}_{M1}^{M4}\Delta R_{7,w0} = \alpha_{p,M1}({}_{w0}^{M1}R_{7,i}) - \alpha_{p,M4}({}_{w0}^{M4}R_{7,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_2 - {}_{w0}^{M4}\delta C_2$$

$${}_{M1}^{M4}\Delta R_{1,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{1,i}) - \alpha_{f,M4}({}_{w1}^{M4}R_{1,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_1 - {}_{w1}^{M4}\delta C_1$$

$${}_{M1}^{M4}\Delta R_{2,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{2,i}) - \alpha_{f,M4}({}_{w1}^{M4}R_{2,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_1 - {}_{w1}^{M4}\delta C_1$$

$${}_{M1}^{M4}\Delta R_{3,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{3,i}) - \alpha_{f,M4}({}_{w1}^{M4}R_{3,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_2 - {}_{w1}^{M4}\delta C_2$$

$${}_{M1}^{M4}\Delta R_{4,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{4,i}) - \alpha_{f,M4}({}_{w1}^{M4}R_{4,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_3 - {}_{w1}^{M4}\delta C_3$$

$${}_{M1}^{M4}\Delta R_{5,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{5,i}) - \alpha_{f,M4}({}_{w1}^{M4}R_{5,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_4 - {}_{w1}^{M4}\delta C_4$$

$${}_{M1}^{M4}\Delta R_{6,w1} = \alpha_{p,M1}({}_{w1}^{M1}R_{6,i}) - \alpha_{p,M4}({}_{w1}^{M4}R_{6,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_3 - {}_{w1}^{M4}\delta C_3$$

$${}_{M1}^{M4}\Delta R_{7,w1} = \alpha_{p,M1}({}_{w1}^{M1}R_{7,i}) - \alpha_{p,M4}({}_{w1}^{M4}R_{7,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_1 - {}_{w1}^{M4}\delta C_1$$

$${}_{M1}^{M4}\Delta R_{1,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{1,i}) - \alpha_{f,M4}({}_{w2}^{M4}R_{1,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_2 - {}_{w2}^{M4}\delta C_2$$

$${}_{M1}^{M4}\Delta R_{2,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{2,i}) - \alpha_{f,M4}({}_{w2}^{M4}R_{2,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_3 - {}_{w2}^{M4}\delta C_3$$

$${}_{M1}^{M4}\Delta R_{3,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{3,i}) - \alpha_{f,M4}({}_{w2}^{M4}R_{3,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_4 - {}_{w2}^{M4}\delta C_4$$

$${}_{M1}^{M4}\Delta R_{4,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{4,i}) - \alpha_{f,M4}({}_{w2}^{M4}R_{4,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_5 - {}_{w2}^{M4}\delta C_5$$

$${}_{M1}^{M4}\Delta R_{5,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{5,i}) - \alpha_{f,M4}({}_{w2}^{M4}R_{5,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_5 - {}_{w2}^{M4}\delta C_5$$

$${}_{M1}^{M4}\Delta R_{6,w2} = \alpha_{p,M1}({}_{w2}^{M1}R_{6,i}) - \alpha_{p,M4}({}_{w2}^{M4}R_{6,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_5 - {}_{w2}^{M4}\delta C_5$$

$${}_{M1}^{M4}\Delta R_{7,w2} = \alpha_{p,M1}({}_{w2}^{M1}R_{7,i}) - \alpha_{p,M4}({}_{w2}^{M4}R_{7,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_3 - {}_{w2}^{M4}\delta C_3$$

A.2 - Modelagem para o sistema redundante de medição 1 (SRM_1)

Nesta modelagem são utilizadas quatro montagens M_1 , M_2 , M_3 e M_4 e considera o desalinhamento (variáveis ψ e e) entre as posições de medição para sobreposições de pontos.

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{1,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{1,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w0}^{M2}R_{1,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_1 - {}_{w0}^{M2}\delta C_1$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{2,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{2,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w0}^{M2}R_{2,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_2 - {}_{w0}^{M2}\delta C_2$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{3,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{3,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w0}^{M2}R_{3,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_3 - {}_{w0}^{M2}\delta C_3$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{4,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{4,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w0}^{M2}R_{4,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_4 - {}_{w0}^{M2}\delta C_4$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{5,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{5,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w0}^{M2}R_{5,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_5 - {}_{w0}^{M2}\delta C_5$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{6,w0} = \alpha_{p,M1}({}_{w0}^{M1}R_{6,i}) - \alpha_{p,M2}({}_{w0}^{M2}R_{6,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_4 - {}_{w0}^{M2}\delta C_4$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{7,w0} = \alpha_{p,M1}({}_{w0}^{M1}R_{7,i}) - \alpha_{p,M2}({}_{w0}^{M2}R_{7,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_2 - {}_{w0}^{M2}\delta C_2$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{1,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{1,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w1}^{M2}R_{1,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_1 - {}_{w1}^{M2}\delta C_1 + \psi_{w1,M1}({}_{w1}^{M1}R_{1,i}) - \psi_{w1,M2}({}_{w1}^{M2}R_{1,i}) + e_{w1,M1} - e_{w1,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{2,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{2,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w1}^{M2}R_{2,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_1 - {}_{w1}^{M2}\delta C_1 + \psi_{w1,M1}({}_{w1}^{M1}R_{2,i}) - \psi_{w1,M2}({}_{w1}^{M2}R_{2,i}) + e_{w1,M1} - e_{w1,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{3,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{3,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w1}^{M2}R_{3,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_2 - {}_{w1}^{M2}\delta C_2 + \psi_{w1,M1}({}_{w1}^{M1}R_{3,i}) - \psi_{w1,M2}({}_{w1}^{M2}R_{3,i}) + e_{w1,M1} - e_{w1,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{4,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{4,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w1}^{M2}R_{4,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_3 - {}_{w1}^{M2}\delta C_3 + \psi_{w1,M1}({}_{w1}^{M1}R_{4,i}) - \psi_{w1,M2}({}_{w1}^{M2}R_{4,i}) + e_{w1,M1} - e_{w1,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{5,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{5,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w1}^{M2}R_{5,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_4 - {}_{w1}^{M2}\delta C_4 + \psi_{w1,M1}({}_{w1}^{M1}R_{5,i}) - \psi_{w1,M2}({}_{w1}^{M2}R_{5,i}) + e_{w1,M1} - e_{w1,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{6,w1} = \alpha_{p,M1}({}_{w1}^{M1}R_{6,i}) - \alpha_{p,M2}({}_{w1}^{M2}R_{6,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_3 - {}_{w1}^{M2}\delta C_3 + \psi_{w1,M1}({}_{w1}^{M1}R_{6,i}) - \psi_{w1,M2}({}_{w1}^{M2}R_{6,i}) + e_{w1,M1} - e_{w1,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{7,w1} = \alpha_{p,M1}({}_{w1}^{M1}R_{7,i}) - \alpha_{p,M2}({}_{w1}^{M2}R_{7,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_1 - {}_{w1}^{M2}\delta C_1 + \psi_{w1,M1}({}_{w1}^{M1}R_{7,i}) - \psi_{w1,M2}({}_{w1}^{M2}R_{7,i}) + e_{w1,M1} - e_{w1,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{1,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{1,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w2}^{M2}R_{1,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_2 - {}_{w2}^{M2}\delta C_2 + \psi_{w2,M1}({}_{w2}^{M1}R_{1,i}) - \psi_{w2,M2}({}_{w2}^{M2}R_{1,i}) + e_{w2,M1} - e_{w2,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{2,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{2,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w2}^{M2}R_{2,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_3 - {}_{w2}^{M2}\delta C_3 + \psi_{w2,M1}({}_{w2}^{M1}R_{2,i}) - \psi_{w2,M2}({}_{w2}^{M2}R_{2,i}) + e_{w2,M1} - e_{w2,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{3,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{3,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w2}^{M2}R_{3,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_4 - {}_{w2}^{M2}\delta C_4 + \psi_{w2,M1}({}_{w2}^{M1}R_{3,i}) - \psi_{w2,M2}({}_{w2}^{M2}R_{3,i}) + e_{w2,M1} - e_{w2,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{4,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{4,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w2}^{M2}R_{4,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_5 - {}_{w2}^{M2}\delta C_5 + \psi_{w2,M1}({}_{w2}^{M1}R_{4,i}) - \psi_{w2,M2}({}_{w2}^{M2}R_{4,i}) + e_{w2,M1} - e_{w2,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{5,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{5,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w2}^{M2}R_{5,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_5 - {}_{w2}^{M2}\delta C_5 + \psi_{w2,M1}({}_{w2}^{M1}R_{5,i}) - \psi_{w2,M2}({}_{w2}^{M2}R_{5,i}) + e_{w2,M1} - e_{w2,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{6,w2} = \alpha_{p,M1}({}_{w2}^{M1}R_{6,i}) - \alpha_{p,M2}({}_{w2}^{M2}R_{6,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_5 - {}_{w2}^{M2}\delta C_5 + \psi_{w2,M1}({}_{w2}^{M1}R_{6,i}) - \psi_{w2,M2}({}_{w2}^{M2}R_{6,i}) + e_{w2,M1} - e_{w2,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{7,w2} = \alpha_{p,M1}({}_{w2}^{M1}R_{7,i}) - \alpha_{p,M2}({}_{w2}^{M2}R_{7,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_3 - {}_{w2}^{M2}\delta C_3 + \psi_{w2,M1}({}_{w2}^{M1}R_{7,i}) - \psi_{w2,M2}({}_{w2}^{M2}R_{7,i}) + e_{w2,M1} - e_{w2,M2}$$

⋮
⋮
⋮

A.3 - Modelagem para o sistema redundante de medição 2 (SRM_2), utilizando o par M_1 e M_2

Nesta modelagem é realizada a diferença $M_1 - M_2$.

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{1,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{1,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w0}^{M2}R_{1,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_1 - {}_{w0}^{M2}\delta C_1$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{2,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{2,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w0}^{M2}R_{2,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_2 - {}_{w0}^{M2}\delta C_2$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{3,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{3,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w0}^{M2}R_{3,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_3 - {}_{w0}^{M2}\delta C_3$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{4,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{4,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w0}^{M2}R_{4,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_4 - {}_{w0}^{M2}\delta C_4$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{5,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{5,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w0}^{M2}R_{5,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_5 - {}_{w0}^{M2}\delta C_5$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{6,w0} = \alpha_{p,M1}({}_{w0}^{M1}R_{6,i}) - \alpha_{p,M2}({}_{w0}^{M2}R_{6,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_4 - {}_{w0}^{M2}\delta C_4$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{7,w0} = \alpha_{p,M1}({}_{w0}^{M1}R_{7,i}) - \alpha_{p,M2}({}_{w0}^{M2}R_{7,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_2 - {}_{w0}^{M2}\delta C_2$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{1,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{1,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w1}^{M2}R_{1,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_1 - {}_{w1}^{M2}\delta C_1 + \psi_{w1,M1}({}_{w1}^{M1}R_{1,i}) - \psi_{w1,M2}({}_{w1}^{M2}R_{1,i}) + e_{w1,M1} - e_{w1,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{2,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{2,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w1}^{M2}R_{2,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_1 - {}_{w1}^{M2}\delta C_1 + \psi_{w1,M1}({}_{w1}^{M1}R_{2,i}) - \psi_{w1,M2}({}_{w1}^{M2}R_{2,i}) + e_{w1,M1} - e_{w1,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{3,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{3,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w1}^{M2}R_{3,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_2 - {}_{w1}^{M2}\delta C_2 + \psi_{w1,M1}({}_{w1}^{M1}R_{3,i}) - \psi_{w1,M2}({}_{w1}^{M2}R_{3,i}) + e_{w1,M1} - e_{w1,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{4,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{4,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w1}^{M2}R_{4,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_3 - {}_{w1}^{M2}\delta C_3 + \psi_{w1,M1}({}_{w1}^{M1}R_{4,i}) - \psi_{w1,M2}({}_{w1}^{M2}R_{4,i}) + e_{w1,M1} - e_{w1,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{5,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{5,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w1}^{M2}R_{5,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_4 - {}_{w1}^{M2}\delta C_4 + \psi_{w1,M1}({}_{w1}^{M1}R_{5,i}) - \psi_{w1,M2}({}_{w1}^{M2}R_{5,i}) + e_{w1,M1} - e_{w1,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{6,w1} = \alpha_{p,M1}({}_{w1}^{M1}R_{6,i}) - \alpha_{p,M2}({}_{w1}^{M2}R_{6,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_3 - {}_{w1}^{M2}\delta C_3 + \psi_{w1,M1}({}_{w1}^{M1}R_{6,i}) - \psi_{w1,M2}({}_{w1}^{M2}R_{6,i}) + e_{w1,M1} - e_{w1,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{7,w1} = \alpha_{p,M1}({}_{w1}^{M1}R_{7,i}) - \alpha_{p,M2}({}_{w1}^{M2}R_{7,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_1 - {}_{w1}^{M2}\delta C_1 + \psi_{w1,M1}({}_{w1}^{M1}R_{7,i}) - \psi_{w1,M2}({}_{w1}^{M2}R_{7,i}) + e_{w1,M1} - e_{w1,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{1,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{1,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w2}^{M2}R_{1,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_2 - {}_{w2}^{M2}\delta C_2 + \psi_{w2,M1}({}_{w2}^{M1}R_{1,i}) - \psi_{w2,M2}({}_{w2}^{M2}R_{1,i}) + e_{w2,M1} - e_{w2,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{2,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{2,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w2}^{M2}R_{2,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_3 - {}_{w2}^{M2}\delta C_3 + \psi_{w2,M1}({}_{w2}^{M1}R_{2,i}) - \psi_{w2,M2}({}_{w2}^{M2}R_{2,i}) + e_{w2,M1} - e_{w2,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{3,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{3,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w2}^{M2}R_{3,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_4 - {}_{w2}^{M2}\delta C_4 + \psi_{w2,M1}({}_{w2}^{M1}R_{3,i}) - \psi_{w2,M2}({}_{w2}^{M2}R_{3,i}) + e_{w2,M1} - e_{w2,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{4,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{4,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w2}^{M2}R_{4,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_5 - {}_{w2}^{M2}\delta C_5 + \psi_{w2,M1}({}_{w2}^{M1}R_{4,i}) - \psi_{w2,M2}({}_{w2}^{M2}R_{4,i}) + e_{w2,M1} - e_{w2,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{5,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{5,i}) - \alpha_{f,M2}({}_{w2}^{M2}R_{5,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_5 - {}_{w2}^{M2}\delta C_5 + \psi_{w2,M1}({}_{w2}^{M1}R_{5,i}) - \psi_{w2,M2}({}_{w2}^{M2}R_{5,i}) + e_{w2,M1} - e_{w2,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{6,w2} = \alpha_{p,M1}({}_{w2}^{M1}R_{6,i}) - \alpha_{p,M2}({}_{w2}^{M2}R_{6,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_5 - {}_{w2}^{M2}\delta C_5 + \psi_{w2,M1}({}_{w2}^{M1}R_{6,i}) - \psi_{w2,M2}({}_{w2}^{M2}R_{6,i}) + e_{w2,M1} - e_{w2,M2}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{7,w2} = \alpha_{p,M1}({}_{w2}^{M1}R_{7,i}) - \alpha_{p,M2}({}_{w2}^{M2}R_{7,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_3 - {}_{w2}^{M2}\delta C_3 + \psi_{w2,M1}({}_{w2}^{M1}R_{7,i}) - \psi_{w2,M2}({}_{w2}^{M2}R_{7,i}) + e_{w2,M1} - e_{w2,M2}$$

A.4 - Modelagem para o sistema redundante de medição 2 (SRM_2), utilizando o par M_1 e M_3

Nesta modelagem é realizada a diferença $M_1 - M_3$.

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{1,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{1,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w0}^{M3}R_{1,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_1 - {}_{w0}^{M3}\delta C_1$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{2,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{2,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w0}^{M3}R_{2,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_2 - {}_{w0}^{M3}\delta C_2$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{3,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{3,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w0}^{M3}R_{3,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_3 - {}_{w0}^{M3}\delta C_3$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{4,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{4,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w0}^{M3}R_{4,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_4 - {}_{w0}^{M3}\delta C_4$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{5,w0} = \alpha_{f,M1}({}_{w0}^{M1}R_{5,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w0}^{M3}R_{5,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_5 - {}_{w0}^{M3}\delta C_5$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{6,w0} = \alpha_{p,M1}({}_{w0}^{M1}R_{6,i}) - \alpha_{p,M3}({}_{w0}^{M3}R_{6,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_4 - {}_{w0}^{M3}\delta C_4$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{7,w0} = \alpha_{p,M1}({}_{w0}^{M1}R_{7,i}) - \alpha_{p,M3}({}_{w0}^{M3}R_{7,i}) + {}_{w0}^{M1}\delta C_2 - {}_{w0}^{M3}\delta C_2$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{1,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{1,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w1}^{M3}R_{1,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_1 - {}_{w1}^{M3}\delta C_1 + \psi_{w1,M1}({}_{w1}^{M1}R_{1,i}) - \psi_{w1,M3}({}_{w1}^{M3}R_{1,i}) + e_{w1,M1} - e_{w1,M3}$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{2,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{2,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w1}^{M3}R_{2,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_1 - {}_{w1}^{M3}\delta C_1 + \psi_{w1,M1}({}_{w1}^{M1}R_{2,i}) - \psi_{w1,M3}({}_{w1}^{M3}R_{2,i}) + e_{w1,M1} - e_{w1,M3}$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{3,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{3,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w1}^{M3}R_{3,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_2 - {}_{w1}^{M3}\delta C_2 + \psi_{w1,M1}({}_{w1}^{M1}R_{3,i}) - \psi_{w1,M3}({}_{w1}^{M3}R_{3,i}) + e_{w1,M1} - e_{w1,M3}$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{4,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{4,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w1}^{M3}R_{4,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_3 - {}_{w1}^{M3}\delta C_3 + \psi_{w1,M1}({}_{w1}^{M1}R_{4,i}) - \psi_{w1,M3}({}_{w1}^{M3}R_{4,i}) + e_{w1,M1} - e_{w1,M3}$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{5,w1} = \alpha_{f,M1}({}_{w1}^{M1}R_{5,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w1}^{M3}R_{5,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_4 - {}_{w1}^{M3}\delta C_4 + \psi_{w1,M1}({}_{w1}^{M1}R_{5,i}) - \psi_{w1,M3}({}_{w1}^{M3}R_{5,i}) + e_{w1,M1} - e_{w1,M3}$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{6,w1} = \alpha_{p,M1}({}_{w1}^{M1}R_{6,i}) - \alpha_{p,M3}({}_{w1}^{M3}R_{6,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_3 - {}_{w1}^{M3}\delta C_3 + \psi_{w1,Mk}({}_{w1}^{M1}R_{6,i}) - \psi_{w1,M3}({}_{w1}^{M3}R_{6,i}) + e_{w1,M1} - e_{w1,M3}$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{7,w1} = \alpha_{p,M1}({}_{w1}^{M1}R_{7,i}) - \alpha_{p,M3}({}_{w1}^{M3}R_{7,i}) + {}_{w1}^{M1}\delta C_1 - {}_{w1}^{M3}\delta C_1 + \psi_{w1,M1}({}_{w1}^{M1}R_{7,i}) - \psi_{w1,M3}({}_{w1}^{M3}R_{7,i}) + e_{w1,M1} - e_{w1,M3}$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{1,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{1,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w2}^{M3}R_{1,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_2 - {}_{w2}^{M3}\delta C_2 + \psi_{w2,M1}({}_{w2}^{M1}R_{1,i}) - \psi_{w2,M3}({}_{w2}^{M3}R_{1,i}) + e_{w2,M1} - e_{w2,M3}$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{2,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{2,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w2}^{M3}R_{2,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_3 - {}_{w2}^{M3}\delta C_3 + \psi_{w2,M1}({}_{w2}^{M1}R_{2,i}) - \psi_{w2,M3}({}_{w2}^{M3}R_{2,i}) + e_{w2,M1} - e_{w2,M3}$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{3,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{3,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w2}^{M3}R_{3,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_4 - {}_{w2}^{M3}\delta C_4 + \psi_{w2,M1}({}_{w2}^{M1}R_{3,i}) - \psi_{w2,M3}({}_{w2}^{M3}R_{3,i}) + e_{w2,M1} - e_{w2,M3}$$

$${}_{M1}^{M2}\Delta R_{4,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{4,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w2}^{M3}R_{4,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_5 - {}_{w2}^{M3}\delta C_5 + \psi_{w2,M1}({}_{w2}^{M1}R_{4,i}) - \psi_{w2,M3}({}_{w2}^{M3}R_{4,i}) + e_{w2,M1} - e_{w2,M3}$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{5,w2} = \alpha_{f,M1}({}_{w2}^{M1}R_{5,i}) - \alpha_{f,M3}({}_{w2}^{M3}R_{5,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_5 - {}_{w2}^{M3}\delta C_5 + \psi_{w2,M1}({}_{w2}^{M1}R_{5,i}) - \psi_{w2,M3}({}_{w2}^{M3}R_{5,i}) + e_{w2,M1} - e_{w2,M3}$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{6,w2} = \alpha_{p,M1}({}_{w2}^{M1}R_{6,i}) - \alpha_{p,M3}({}_{w2}^{M3}R_{6,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_5 - {}_{w2}^{M3}\delta C_5 + \psi_{w2,M1}({}_{w2}^{M1}R_{6,i}) - \psi_{w2,M3}({}_{w2}^{M3}R_{6,i}) + e_{w2,M1} - e_{w2,M3}$$

$${}_{M1}^{M3}\Delta R_{7,w2} = \alpha_{p,M1}({}_{w2}^{M1}R_{7,i}) - \alpha_{p,M3}({}_{w2}^{M3}R_{7,i}) + {}_{w2}^{M1}\delta C_3 - {}_{w2}^{M3}\delta C_3 + \psi_{w2,M1}({}_{w2}^{M1}R_{7,i}) - \psi_{w2,M3}({}_{w2}^{M3}R_{7,i}) + e_{w2,M1} - e_{w2,M3}$$

A.5 - Modelagem para o sistema redundante de medição 2 (SRM_2), utilizando o par M_1 e M_4

Nesta modelagem é realizada a diferença $M_1 - M_4$.

$${}_{M_1}^{M_4}\Delta R_{1,w0} = \alpha_{f,M_1}({}_{w0}^{M_1}R_{1,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w0}^{M_4}R_{1,i}) + {}_{w0}^{M_1}\delta C_1 - {}_{w0}^{M_4}\delta C_1$$

$${}_{M_1}^{M_4}\Delta R_{2,w0} = \alpha_{f,M_1}({}_{w0}^{M_1}R_{2,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w0}^{M_4}R_{2,i}) + {}_{w0}^{M_1}\delta C_2 - {}_{w0}^{M_4}\delta C_2$$

$${}_{M_1}^{M_4}\Delta R_{3,w0} = \alpha_{f,M_1}({}_{w0}^{M_1}R_{3,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w0}^{M_4}R_{3,i}) + {}_{w0}^{M_1}\delta C_3 - {}_{w0}^{M_4}\delta C_3$$

$${}_{M_1}^{M_4}\Delta R_{4,w0} = \alpha_{f,M_1}({}_{w0}^{M_1}R_{4,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w0}^{M_4}R_{4,i}) + {}_{w0}^{M_1}\delta C_4 - {}_{w0}^{M_4}\delta C_4$$

$${}_{M_1}^{M_4}\Delta R_{5,w0} = \alpha_{f,M_1}({}_{w0}^{M_1}R_{5,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w0}^{M_4}R_{5,i}) + {}_{w0}^{M_1}\delta C_5 - {}_{w0}^{M_4}\delta C_5$$

$${}_{M_1}^{M_4}\Delta R_{6,w0} = \alpha_{p,M_1}({}_{w0}^{M_1}R_{6,i}) - \alpha_{p,M_4}({}_{w0}^{M_4}R_{6,i}) + {}_{w0}^{M_1}\delta C_4 - {}_{w0}^{M_4}\delta C_4$$

$${}_{M_1}^{M_4}\Delta R_{7,w0} = \alpha_{p,M_1}({}_{w0}^{M_1}R_{7,i}) - \alpha_{p,M_4}({}_{w0}^{M_4}R_{7,i}) + {}_{w0}^{M_1}\delta C_2 - {}_{w0}^{M_4}\delta C_2$$

$${}_{M_1}^{M_4}\Delta R_{1,w1} = \alpha_{f,M_1}({}_{w1}^{M_1}R_{1,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{1,i}) + {}_{w1}^{M_1}\delta C_1 - {}_{w1}^{M_4}\delta C_1 + \psi_{w1,M_1}({}_{w1}^{M_1}R_{1,i}) - \psi_{w1,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{1,i}) + e_{w1,M_1} - e_{w1,M_4}$$

$${}_{M_1}^{M_4}\Delta R_{2,w1} = \alpha_{f,M_1}({}_{w1}^{M_1}R_{2,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{2,i}) + {}_{w1}^{M_1}\delta C_1 - {}_{w1}^{M_4}\delta C_1 + \psi_{w1,M_1}({}_{w1}^{M_1}R_{2,i}) - \psi_{w1,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{2,i}) + e_{w1,M_1} - e_{w1,M_4}$$

$${}_{M_1}^{M_4}\Delta R_{3,w1} = \alpha_{f,M_1}({}_{w1}^{M_1}R_{3,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{3,i}) + {}_{w1}^{M_1}\delta C_2 - {}_{w1}^{M_4}\delta C_2 + \psi_{w1,M_1}({}_{w1}^{M_1}R_{3,i}) - \psi_{w1,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{3,i}) + e_{w1,M_1} - e_{w1,M_4}$$

$${}_{M_1}^{M_4}\Delta R_{4,w1} = \alpha_{f,M_1}({}_{w1}^{M_1}R_{4,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{4,i}) + {}_{w1}^{M_1}\delta C_3 - {}_{w1}^{M_4}\delta C_3 + \psi_{w1,M_1}({}_{w1}^{M_1}R_{4,i}) - \psi_{w1,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{4,i}) + e_{w1,M_1} - e_{w1,M_4}$$

$${}_{M_1}^{M_4}\Delta R_{5,w1} = \alpha_{f,M_1}({}_{w1}^{M_1}R_{5,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{5,i}) + {}_{w1}^{M_1}\delta C_4 - {}_{w1}^{M_4}\delta C_4 + \psi_{w1,M_1}({}_{w1}^{M_1}R_{5,i}) - \psi_{w1,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{5,i}) + e_{w1,M_1} - e_{w1,M_4}$$

$${}_{M_1}^{M_4}\Delta R_{6,w1} = \alpha_{p,M_1}({}_{w1}^{M_1}R_{6,i}) - \alpha_{p,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{6,i}) + {}_{w1}^{M_1}\delta C_3 - {}_{w1}^{M_4}\delta C_3 + \psi_{w1,M_1}({}_{w1}^{M_1}R_{6,i}) - \psi_{w1,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{6,i}) + e_{w1,M_1} - e_{w1,M_4}$$

$${}_{M_1}^{M_4}\Delta R_{7,w1} = \alpha_{p,M_1}({}_{w1}^{M_1}R_{7,i}) - \alpha_{p,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{7,i}) + {}_{w1}^{M_1}\delta C_1 - {}_{w1}^{M_4}\delta C_1 + \psi_{w1,M_1}({}_{w1}^{M_1}R_{7,i}) - \psi_{w1,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{7,i}) + e_{w1,M_1} - e_{w1,M_4}$$

$${}_{M_1}^{M_4}\Delta R_{1,w2} = \alpha_{f,M_1}({}_{w2}^{M_1}R_{1,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{1,i}) + {}_{w2}^{M_1}\delta C_2 - {}_{w2}^{M_4}\delta C_2 + \psi_{w2,M_1}({}_{w2}^{M_1}R_{1,i}) - \psi_{w2,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{1,i}) + e_{w2,M_1} - e_{w2,M_4}$$

$${}_{M_1}^{M_4}\Delta R_{2,w2} = \alpha_{f,M_1}({}_{w2}^{M_1}R_{2,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{2,i}) + {}_{w2}^{M_1}\delta C_3 - {}_{w2}^{M_4}\delta C_3 + \psi_{w2,M_1}({}_{w2}^{M_1}R_{2,i}) - \psi_{w2,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{2,i}) + e_{w2,M_1} - e_{w2,M_4}$$

$${}_{M_1}^{M_4}\Delta R_{3,w2} = \alpha_{f,M_1}({}_{w2}^{M_1}R_{3,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{3,i}) + {}_{w2}^{M_1}\delta C_4 - {}_{w2}^{M_4}\delta C_4 + \psi_{w2,M_1}({}_{w2}^{M_1}R_{3,i}) - \psi_{w2,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{3,i}) + e_{w2,M_1} - e_{w2,M_4}$$

$${}_{M_1}^{M_4}\Delta R_{4,w2} = \alpha_{f,M_1}({}_{w2}^{M_1}R_{4,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{4,i}) + {}_{w2}^{M_1}\delta C_5 - {}_{w2}^{M_4}\delta C_5 + \psi_{w2,M_1}({}_{w2}^{M_1}R_{4,i}) - \psi_{w2,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{4,i}) + e_{w2,M_1} - e_{w2,M_4}$$

$${}_{M_1}^{M_4}\Delta R_{5,w2} = \alpha_{f,M_1}({}_{w2}^{M_1}R_{5,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{5,i}) + {}_{w2}^{M_1}\delta C_5 - {}_{w2}^{M_4}\delta C_5 + \psi_{w2,M_1}({}_{w2}^{M_1}R_{5,i}) - \psi_{w2,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{5,i}) + e_{w2,M_1} - e_{w2,M_4}$$

$${}_{M_1}^{M_4}\Delta R_{6,w2} = \alpha_{p,M_1}({}_{w2}^{M_1}R_{6,i}) - \alpha_{p,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{6,i}) + {}_{w2}^{M_1}\delta C_5 - {}_{w2}^{M_4}\delta C_5 + \psi_{w2,M_1}({}_{w2}^{M_1}R_{6,i}) - \psi_{w2,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{6,i}) + e_{w2,M_1} - e_{w2,M_4}$$

$${}_{M_1}^{M_4}\Delta R_{7,w2} = \alpha_{p,M_1}({}_{w2}^{M_1}R_{7,i}) - \alpha_{p,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{7,i}) + {}_{w2}^{M_1}\delta C_3 - {}_{w2}^{M_4}\delta C_3 + \psi_{w2,M_1}({}_{w2}^{M_1}R_{7,i}) - \psi_{w2,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{7,i}) + e_{w2,M_1} - e_{w2,M_4}$$

A.6 - Modelagem para o sistema redundante de medição 2 (SRM_2), utilizando o par M_2 e M_3

Nesta modelagem é realizada a diferença $M_2 - M_3$.

$$\begin{aligned}
 {}_{M_2}^{M_3}\Delta R_{1,w0} &= \alpha_{f,M_2}({}_{w0}^{M_2}R_{1,i}) - \alpha_{f,M_3}({}_{w0}^{M_3}R_{1,i}) + {}_{w0}^{M_2}\delta C_1 - {}_{w0}^{M_3}\delta C_1 \\
 {}_{M_2}^{M_3}\Delta R_{2,w0} &= \alpha_{f,M_2}({}_{w0}^{M_2}R_{2,i}) - \alpha_{f,M_3}({}_{w0}^{M_3}R_{2,i}) + {}_{w0}^{M_2}\delta C_2 - {}_{w0}^{M_3}\delta C_2 \\
 {}_{M_2}^{M_3}\Delta R_{3,w0} &= \alpha_{f,M_2}({}_{w0}^{M_2}R_{3,i}) - \alpha_{f,M_3}({}_{w0}^{M_3}R_{3,i}) + {}_{w0}^{M_2}\delta C_3 - {}_{w0}^{M_3}\delta C_3 \\
 {}_{M_2}^{M_3}\Delta R_{4,w0} &= \alpha_{f,M_2}({}_{w0}^{M_2}R_{4,i}) - \alpha_{f,M_3}({}_{w0}^{M_3}R_{4,i}) + {}_{w0}^{M_2}\delta C_4 - {}_{w0}^{M_3}\delta C_4 \\
 {}_{M_2}^{M_3}\Delta R_{5,w0} &= \alpha_{f,M_2}({}_{w0}^{M_2}R_{5,i}) - \alpha_{f,M_3}({}_{w0}^{M_3}R_{5,i}) + {}_{w0}^{M_2}\delta C_5 - {}_{w0}^{M_3}\delta C_5 \\
 {}_{M_2}^{M_3}\Delta R_{6,w0} &= \alpha_{p,M_2}({}_{w0}^{M_2}R_{6,i}) - \alpha_{p,M_3}({}_{w0}^{M_3}R_{6,i}) + {}_{w0}^{M_2}\delta C_4 - {}_{w0}^{M_3}\delta C_4 \\
 {}_{M_2}^{M_3}\Delta R_{7,w0} &= \alpha_{p,M_2}({}_{w0}^{M_2}R_{7,i}) - \alpha_{p,M_3}({}_{w0}^{M_3}R_{7,i}) + {}_{w0}^{M_2}\delta C_2 - {}_{w0}^{M_3}\delta C_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_{M_2}^{M_3}\Delta R_{1,w1} &= \alpha_{f,M_2}({}_{w1}^{M_2}R_{1,i}) - \alpha_{f,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{1,i}) + {}_{w1}^{M_2}\delta C_1 - {}_{w1}^{M_3}\delta C_1 + \psi_{w1,M_2}({}_{w1}^{M_2}R_{1,i}) - \psi_{w1,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{1,i}) + e_{w1,M_2} - e_{w1,M_3} \\
 {}_{M_2}^{M_3}\Delta R_{2,w1} &= \alpha_{f,M_2}({}_{w1}^{M_2}R_{2,i}) - \alpha_{f,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{2,i}) + {}_{w1}^{M_2}\delta C_1 - {}_{w1}^{M_3}\delta C_1 + \psi_{w1,M_2}({}_{w1}^{M_2}R_{2,i}) - \psi_{w1,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{2,i}) + e_{w1,M_2} - e_{w1,M_3} \\
 {}_{M_2}^{M_3}\Delta R_{3,w1} &= \alpha_{f,M_2}({}_{w1}^{M_2}R_{3,i}) - \alpha_{f,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{3,i}) + {}_{w1}^{M_2}\delta C_2 - {}_{w1}^{M_3}\delta C_2 + \psi_{w1,M_2}({}_{w1}^{M_2}R_{3,i}) - \psi_{w1,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{3,i}) + e_{w1,M_2} - e_{w1,M_3} \\
 {}_{M_2}^{M_3}\Delta R_{4,w1} &= \alpha_{f,M_2}({}_{w1}^{M_2}R_{4,i}) - \alpha_{f,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{4,i}) + {}_{w1}^{M_2}\delta C_3 - {}_{w1}^{M_3}\delta C_3 + \psi_{w1,M_2}({}_{w1}^{M_2}R_{4,i}) - \psi_{w1,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{4,i}) + e_{w1,M_2} - e_{w1,M_3} \\
 {}_{M_2}^{M_3}\Delta R_{5,w1} &= \alpha_{f,M_2}({}_{w1}^{M_2}R_{5,i}) - \alpha_{f,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{5,i}) + {}_{w1}^{M_2}\delta C_4 - {}_{w1}^{M_3}\delta C_4 + \psi_{w1,M_2}({}_{w1}^{M_2}R_{5,i}) - \psi_{w1,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{5,i}) + e_{w1,M_2} - e_{w1,M_3} \\
 {}_{M_2}^{M_3}\Delta R_{6,w1} &= \alpha_{p,M_2}({}_{w1}^{M_2}R_{6,i}) - \alpha_{p,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{6,i}) + {}_{w1}^{M_2}\delta C_3 - {}_{w1}^{M_3}\delta C_3 + \psi_{w1,M_2}({}_{w1}^{M_2}R_{6,i}) - \psi_{w1,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{6,i}) + e_{w1,M_2} - e_{w1,M_3} \\
 {}_{M_2}^{M_3}\Delta R_{7,w1} &= \alpha_{p,M_2}({}_{w1}^{M_2}R_{7,i}) - \alpha_{p,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{7,i}) + {}_{w1}^{M_2}\delta C_1 - {}_{w1}^{M_3}\delta C_1 + \psi_{w1,M_2}({}_{w1}^{M_2}R_{7,i}) - \psi_{w1,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{7,i}) + e_{w1,M_2} - e_{w1,M_3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_{M_2}^{M_3}\Delta R_{1,w2} &= \alpha_{f,M_2}({}_{w2}^{M_2}R_{1,i}) - \alpha_{f,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{1,i}) + {}_{w2}^{M_2}\delta C_2 - {}_{w2}^{M_3}\delta C_2 + \psi_{w2,M_2}({}_{w2}^{M_2}R_{1,i}) - \psi_{w2,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{1,i}) + e_{w2,M_2} - e_{w2,M_3} \\
 {}_{M_2}^{M_3}\Delta R_{2,w2} &= \alpha_{f,M_2}({}_{w2}^{M_2}R_{2,i}) - \alpha_{f,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{2,i}) + {}_{w2}^{M_2}\delta C_3 - {}_{w2}^{M_3}\delta C_3 + \psi_{w2,M_2}({}_{w2}^{M_2}R_{2,i}) - \psi_{w2,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{2,i}) + e_{w2,M_2} - e_{w2,M_3} \\
 {}_{M_2}^{M_3}\Delta R_{3,w2} &= \alpha_{f,M_2}({}_{w2}^{M_2}R_{3,i}) - \alpha_{f,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{3,i}) + {}_{w2}^{M_2}\delta C_4 - {}_{w2}^{M_3}\delta C_4 + \psi_{w2,M_2}({}_{w2}^{M_2}R_{3,i}) - \psi_{w2,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{3,i}) + e_{w2,M_2} - e_{w2,M_3} \\
 {}_{M_2}^{M_3}\Delta R_{4,w2} &= \alpha_{f,M_2}({}_{w2}^{M_2}R_{4,i}) - \alpha_{f,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{4,i}) + {}_{w2}^{M_2}\delta C_5 - {}_{w2}^{M_3}\delta C_5 + \psi_{w2,M_2}({}_{w2}^{M_2}R_{4,i}) - \psi_{w2,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{4,i}) + e_{w2,M_2} - e_{w2,M_3} \\
 {}_{M_2}^{M_3}\Delta R_{5,w2} &= \alpha_{f,M_2}({}_{w2}^{M_2}R_{5,i}) - \alpha_{f,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{5,i}) + {}_{w2}^{M_2}\delta C_5 - {}_{w2}^{M_3}\delta C_5 + \psi_{w2,M_2}({}_{w2}^{M_2}R_{5,i}) - \psi_{w2,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{5,i}) + e_{w2,M_2} - e_{w2,M_3} \\
 {}_{M_2}^{M_3}\Delta R_{6,w2} &= \alpha_{p,M_2}({}_{w2}^{M_2}R_{6,i}) - \alpha_{p,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{6,i}) + {}_{w2}^{M_2}\delta C_5 - {}_{w2}^{M_3}\delta C_5 + \psi_{w2,M_2}({}_{w2}^{M_2}R_{6,i}) - \psi_{w2,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{6,i}) + e_{w2,M_2} - e_{w2,M_3} \\
 {}_{M_2}^{M_3}\Delta R_{7,w2} &= \alpha_{p,M_2}({}_{w2}^{M_2}R_{7,i}) - \alpha_{p,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{7,i}) + {}_{w2}^{M_2}\delta C_3 - {}_{w2}^{M_3}\delta C_3 + \psi_{w2,M_2}({}_{w2}^{M_2}R_{7,i}) - \psi_{w2,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{7,i}) + e_{w2,M_2} - e_{w2,M_3}
 \end{aligned}$$

A.7 - Modelagem para o sistema redundante de medição 2 (SRM_2), utilizando o par M_2 e M_4

Nesta modelagem é realizada a diferença $M_2 - M_4$.

$$\begin{aligned}
 \frac{M^4}{M^2} \Delta R_{1,w0} &= \alpha_{f,M^2} \binom{M^2}{w0} R_{1,i} - \alpha_{f,M^4} \binom{M^4}{w0} R_{1,i} + \frac{M^2}{w0} \delta C_1 - \frac{M^4}{w0} \delta C_1 \\
 \frac{M^4}{M^2} \Delta R_{2,w0} &= \alpha_{f,M^2} \binom{M^2}{w0} R_{2,i} - \alpha_{f,M^4} \binom{M^4}{w0} R_{2,i} + \frac{M^2}{w0} \delta C_2 - \frac{M^4}{w0} \delta C_2 \\
 \frac{M^4}{M^2} \Delta R_{3,w0} &= \alpha_{f,M^2} \binom{M^2}{w0} R_{3,i} - \alpha_{f,M^4} \binom{M^4}{w0} R_{3,i} + \frac{M^2}{w0} \delta C_3 - \frac{M^4}{w0} \delta C_3 \\
 \frac{M^4}{M^2} \Delta R_{4,w0} &= \alpha_{f,M^2} \binom{M^2}{w0} R_{4,i} - \alpha_{f,M^4} \binom{M^4}{w0} R_{4,i} + \frac{M^2}{w0} \delta C_4 - \frac{M^4}{w0} \delta C_4 \\
 \frac{M^4}{M^2} \Delta R_{5,w0} &= \alpha_{f,M^2} \binom{M^2}{w0} R_{5,i} - \alpha_{f,M^4} \binom{M^4}{w0} R_{5,i} + \frac{M^2}{w0} \delta C_5 - \frac{M^4}{w0} \delta C_5 \\
 \frac{M^4}{M^2} \Delta R_{6,w0} &= \alpha_{p,M^2} \binom{M^2}{w0} R_{6,i} - \alpha_{p,M^4} \binom{M^4}{w0} R_{6,i} + \frac{M^2}{w0} \delta C_4 - \frac{M^4}{w0} \delta C_4 \\
 \frac{M^4}{M^2} \Delta R_{7,w0} &= \alpha_{p,M^2} \binom{M^2}{w0} R_{7,i} - \alpha_{p,M^4} \binom{M^4}{w0} R_{7,i} + \frac{M^2}{w0} \delta C_2 - \frac{M^4}{w0} \delta C_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{M^4}{M^2} \Delta R_{1,w1} &= \alpha_{f,M^2} \binom{M^2}{w1} R_{1,i} - \alpha_{f,M^4} \binom{M^4}{w1} R_{1,i} + \frac{M^2}{w1} \delta C_1 - \frac{M^4}{w1} \delta C_1 + \psi_{w1,M^2} \binom{M^2}{w1} R_{1,i} - \psi_{w1,M^4} \binom{M^4}{w1} R_{1,i} + e_{w1,M^2} - e_{w1,M^4} \\
 \frac{M^4}{M^2} \Delta R_{2,w1} &= \alpha_{f,M^2} \binom{M^2}{w1} R_{2,i} - \alpha_{f,M^4} \binom{M^4}{w1} R_{2,i} + \frac{M^2}{w1} \delta C_1 - \frac{M^4}{w1} \delta C_1 + \psi_{w1,M^2} \binom{M^2}{w1} R_{2,i} - \psi_{w1,M^4} \binom{M^4}{w1} R_{2,i} + e_{w1,M^2} - e_{w1,M^4} \\
 \frac{M^4}{M^2} \Delta R_{3,w1} &= \alpha_{f,M^2} \binom{M^2}{w1} R_{3,i} - \alpha_{f,M^4} \binom{M^4}{w1} R_{3,i} + \frac{M^2}{w1} \delta C_2 - \frac{M^4}{w1} \delta C_2 + \psi_{w1,M^2} \binom{M^2}{w1} R_{3,i} - \psi_{w1,M^4} \binom{M^4}{w1} R_{3,i} + e_{w1,M^2} - e_{w1,M^4} \\
 \frac{M^4}{M^2} \Delta R_{4,w1} &= \alpha_{f,M^2} \binom{M^2}{w1} R_{4,i} - \alpha_{f,M^4} \binom{M^4}{w1} R_{4,i} + \frac{M^2}{w1} \delta C_3 - \frac{M^4}{w1} \delta C_3 + \psi_{w1,M^2} \binom{M^2}{w1} R_{4,i} - \psi_{w1,M^4} \binom{M^4}{w1} R_{4,i} + e_{w1,M^2} - e_{w1,M^4} \\
 \frac{M^4}{M^2} \Delta R_{5,w1} &= \alpha_{f,M^2} \binom{M^2}{w1} R_{5,i} - \alpha_{f,M^4} \binom{M^4}{w1} R_{5,i} + \frac{M^2}{w1} \delta C_4 - \frac{M^4}{w1} \delta C_4 + \psi_{w1,M^2} \binom{M^2}{w1} R_{5,i} - \psi_{w1,M^4} \binom{M^4}{w1} R_{5,i} + e_{w1,M^2} - e_{w1,M^4} \\
 \frac{M^4}{M^2} \Delta R_{6,w1} &= \alpha_{p,M^2} \binom{M^2}{w1} R_{6,i} - \alpha_{p,M^4} \binom{M^4}{w1} R_{6,i} + \frac{M^2}{w1} \delta C_3 - \frac{M^4}{w1} \delta C_3 + \psi_{w1,M^2} \binom{M^2}{w1} R_{6,i} - \psi_{w1,M^4} \binom{M^4}{w1} R_{6,i} + e_{w1,M^2} - e_{w1,M^4} \\
 \frac{M^4}{M^2} \Delta R_{7,w1} &= \alpha_{p,M^2} \binom{M^2}{w1} R_{7,i} - \alpha_{p,M^4} \binom{M^4}{w1} R_{7,i} + \frac{M^2}{w1} \delta C_1 - \frac{M^4}{w1} \delta C_1 + \psi_{w1,M^2} \binom{M^2}{w1} R_{7,i} - \psi_{w1,M^4} \binom{M^4}{w1} R_{7,i} + e_{w1,M^2} - e_{w1,M^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{M^4}{M^2} \Delta R_{1,w2} &= \alpha_{f,M^2} \binom{M^2}{w2} R_{1,i} - \alpha_{f,M^4} \binom{M^4}{w2} R_{1,i} + \frac{M^2}{w2} \delta C_2 - \frac{M^4}{w2} \delta C_2 + \psi_{w2,M^2} \binom{M^2}{w2} R_{1,i} - \psi_{w2,M^4} \binom{M^4}{w2} R_{1,i} + e_{w2,M^2} - e_{w2,M^4} \\
 \frac{M^4}{M^2} \Delta R_{2,w2} &= \alpha_{f,M^2} \binom{M^2}{w2} R_{2,i} - \alpha_{f,M^4} \binom{M^4}{w2} R_{2,i} + \frac{M^2}{w2} \delta C_3 - \frac{M^4}{w2} \delta C_3 + \psi_{w2,M^2} \binom{M^2}{w2} R_{2,i} - \psi_{w2,M^4} \binom{M^4}{w2} R_{2,i} + e_{w2,M^2} - e_{w2,M^4} \\
 \frac{M^4}{M^2} \Delta R_{3,w2} &= \alpha_{f,M^2} \binom{M^2}{w2} R_{3,i} - \alpha_{f,M^4} \binom{M^4}{w2} R_{3,i} + \frac{M^2}{w2} \delta C_4 - \frac{M^4}{w2} \delta C_4 + \psi_{w2,M^2} \binom{M^2}{w2} R_{3,i} - \psi_{w2,M^4} \binom{M^4}{w2} R_{3,i} + e_{w2,M^2} - e_{w2,M^4} \\
 \frac{M^4}{M^2} \Delta R_{4,w2} &= \alpha_{f,M^2} \binom{M^2}{w2} R_{4,i} - \alpha_{f,M^4} \binom{M^4}{w2} R_{4,i} + \frac{M^2}{w2} \delta C_5 - \frac{M^4}{w2} \delta C_5 + \psi_{w2,M^2} \binom{M^2}{w2} R_{4,i} - \psi_{w2,M^4} \binom{M^4}{w2} R_{4,i} + e_{w2,M^2} - e_{w2,M^4} \\
 \frac{M^4}{M^2} \Delta R_{5,w2} &= \alpha_{f,M^2} \binom{M^2}{w2} R_{5,i} - \alpha_{f,M^4} \binom{M^4}{w2} R_{5,i} + \frac{M^2}{w2} \delta C_5 - \frac{M^4}{w2} \delta C_5 + \psi_{w2,M^2} \binom{M^2}{w2} R_{5,i} - \psi_{w2,M^4} \binom{M^4}{w2} R_{5,i} + e_{w2,M^2} - e_{w2,M^4} \\
 \frac{M^4}{M^2} \Delta R_{6,w2} &= \alpha_{p,M^2} \binom{M^2}{w2} R_{6,i} - \alpha_{p,M^4} \binom{M^4}{w2} R_{6,i} + \frac{M^2}{w2} \delta C_5 - \frac{M^4}{w2} \delta C_5 + \psi_{w2,M^2} \binom{M^2}{w2} R_{6,i} - \psi_{w2,M^4} \binom{M^4}{w2} R_{6,i} + e_{w2,M^2} - e_{w2,M^4} \\
 \frac{M^4}{M^2} \Delta R_{7,w2} &= \alpha_{p,M^2} \binom{M^2}{w2} R_{7,i} - \alpha_{p,M^4} \binom{M^4}{w2} R_{7,i} + \frac{M^2}{w2} \delta C_3 - \frac{M^4}{w2} \delta C_3 + \psi_{w2,M^2} \binom{M^2}{w2} R_{7,i} - \psi_{w2,M^4} \binom{M^4}{w2} R_{7,i} + e_{w2,M^2} - e_{w2,M^4}
 \end{aligned}$$

A.8 - Modelagem para o sistema redundante de medição 2 (SRM_2), utilizando o par M_3 e M_4

Nesta modelagem é realizada a diferença $M_3 - M_4$.

$$\begin{aligned}
 {}_{M_3}^{M_4}\Delta R_{1,w0} &= \alpha_{f,M_3}({}_{w0}^{M_3}R_{1,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w0}^{M_4}R_{1,i}) + {}_{w0}^{M_3}\delta C_1 - {}_{w0}^{M_4}\delta C_1 \\
 {}_{M_3}^{M_4}\Delta R_{2,w0} &= \alpha_{f,M_3}({}_{w0}^{M_3}R_{2,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w0}^{M_4}R_{2,i}) + {}_{w0}^{M_3}\delta C_2 - {}_{w0}^{M_4}\delta C_2 \\
 {}_{M_3}^{M_4}\Delta R_{3,w0} &= \alpha_{f,M_3}({}_{w0}^{M_3}R_{3,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w0}^{M_4}R_{3,i}) + {}_{w0}^{M_3}\delta C_3 - {}_{w0}^{M_4}\delta C_3 \\
 {}_{M_3}^{M_4}\Delta R_{4,w0} &= \alpha_{f,M_3}({}_{w0}^{M_3}R_{4,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w0}^{M_4}R_{4,i}) + {}_{w0}^{M_3}\delta C_4 - {}_{w0}^{M_4}\delta C_4 \\
 {}_{M_3}^{M_4}\Delta R_{5,w0} &= \alpha_{f,M_3}({}_{w0}^{M_3}R_{5,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w0}^{M_4}R_{5,i}) + {}_{w0}^{M_3}\delta C_5 - {}_{w0}^{M_4}\delta C_5 \\
 {}_{M_3}^{M_4}\Delta R_{6,w0} &= \alpha_{p,M_3}({}_{w0}^{M_3}R_{6,i}) - \alpha_{p,M_4}({}_{w0}^{M_4}R_{6,i}) + {}_{w0}^{M_3}\delta C_4 - {}_{w0}^{M_4}\delta C_4 \\
 {}_{M_3}^{M_4}\Delta R_{7,w0} &= \alpha_{p,M_3}({}_{w0}^{M_3}R_{7,i}) - \alpha_{p,M_4}({}_{w0}^{M_4}R_{7,i}) + {}_{w0}^{M_3}\delta C_2 - {}_{w0}^{M_4}\delta C_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_{M_3}^{M_4}\Delta R_{1,w1} &= \alpha_{f,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{1,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{1,i}) + {}_{w1}^{M_3}\delta C_1 - {}_{w1}^{M_4}\delta C_1 + \psi_{w1,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{1,i}) - \psi_{w1,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{1,i}) + e_{w1,M_3} - e_{w1,M_4} \\
 {}_{M_3}^{M_4}\Delta R_{2,w1} &= \alpha_{f,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{2,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{2,i}) + {}_{w1}^{M_3}\delta C_1 - {}_{w1}^{M_4}\delta C_1 + \psi_{w1,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{2,i}) - \psi_{w1,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{2,i}) + e_{w1,M_3} - e_{w1,M_4} \\
 {}_{M_3}^{M_4}\Delta R_{3,w1} &= \alpha_{f,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{3,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{3,i}) + {}_{w1}^{M_3}\delta C_2 - {}_{w1}^{M_4}\delta C_2 + \psi_{w1,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{3,i}) - \psi_{w1,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{3,i}) + e_{w1,M_3} - e_{w1,M_4} \\
 {}_{M_3}^{M_4}\Delta R_{4,w1} &= \alpha_{f,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{4,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{4,i}) + {}_{w1}^{M_3}\delta C_3 - {}_{w1}^{M_4}\delta C_3 + \psi_{w1,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{4,i}) - \psi_{w1,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{4,i}) + e_{w1,M_3} - e_{w1,M_4} \\
 {}_{M_3}^{M_4}\Delta R_{5,w1} &= \alpha_{f,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{5,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{5,i}) + {}_{w1}^{M_3}\delta C_4 - {}_{w1}^{M_4}\delta C_4 + \psi_{w1,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{5,i}) - \psi_{w1,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{5,i}) + e_{w1,M_3} - e_{w1,M_4} \\
 {}_{M_3}^{M_4}\Delta R_{6,w1} &= \alpha_{p,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{6,i}) - \alpha_{p,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{6,i}) + {}_{w1}^{M_3}\delta C_3 - {}_{w1}^{M_4}\delta C_3 + \psi_{w1,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{6,i}) - \psi_{w1,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{6,i}) + e_{w1,M_3} - e_{w1,M_4} \\
 {}_{M_3}^{M_4}\Delta R_{7,w1} &= \alpha_{p,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{7,i}) - \alpha_{p,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{7,i}) + {}_{w1}^{M_3}\delta C_1 - {}_{w1}^{M_4}\delta C_1 + \psi_{w1,M_3}({}_{w1}^{M_3}R_{7,i}) - \psi_{w1,M_4}({}_{w1}^{M_4}R_{7,i}) + e_{w1,M_3} - e_{w1,M_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}_{M_3}^{M_4}\Delta R_{1,w2} &= \alpha_{f,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{1,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{1,i}) + {}_{w2}^{M_3}\delta C_2 - {}_{w2}^{M_4}\delta C_2 + \psi_{w2,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{1,i}) - \psi_{w2,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{1,i}) + e_{w2,M_3} - e_{w2,M_4} \\
 {}_{M_3}^{M_4}\Delta R_{2,w2} &= \alpha_{f,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{2,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{2,i}) + {}_{w2}^{M_3}\delta C_3 - {}_{w2}^{M_4}\delta C_3 + \psi_{w2,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{2,i}) - \psi_{w2,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{2,i}) + e_{w2,M_3} - e_{w2,M_4} \\
 {}_{M_3}^{M_4}\Delta R_{3,w2} &= \alpha_{f,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{3,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{3,i}) + {}_{w2}^{M_3}\delta C_4 - {}_{w2}^{M_4}\delta C_4 + \psi_{w2,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{3,i}) - \psi_{w2,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{3,i}) + e_{w2,M_3} - e_{w2,M_4} \\
 {}_{M_3}^{M_4}\Delta R_{4,w2} &= \alpha_{f,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{4,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{4,i}) + {}_{w2}^{M_3}\delta C_5 - {}_{w2}^{M_4}\delta C_5 + \psi_{w2,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{4,i}) - \psi_{w2,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{4,i}) + e_{w2,M_3} - e_{w2,M_4} \\
 {}_{M_3}^{M_4}\Delta R_{5,w2} &= \alpha_{f,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{5,i}) - \alpha_{f,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{5,i}) + {}_{w2}^{M_3}\delta C_5 - {}_{w2}^{M_4}\delta C_5 + \psi_{w2,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{5,i}) - \psi_{w2,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{5,i}) + e_{w2,M_3} - e_{w2,M_4} \\
 {}_{M_3}^{M_4}\Delta R_{6,w2} &= \alpha_{p,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{6,i}) - \alpha_{p,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{6,i}) + {}_{w2}^{M_3}\delta C_5 - {}_{w2}^{M_4}\delta C_5 + \psi_{w2,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{6,i}) - \psi_{w2,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{6,i}) + e_{w2,M_3} - e_{w2,M_4} \\
 {}_{M_3}^{M_4}\Delta R_{7,w2} &= \alpha_{p,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{7,i}) - \alpha_{p,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{7,i}) + {}_{w2}^{M_3}\delta C_3 - {}_{w2}^{M_4}\delta C_3 + \psi_{w2,M_3}({}_{w2}^{M_3}R_{7,i}) - \psi_{w2,M_4}({}_{w2}^{M_4}R_{7,i}) + e_{w2,M_3} - e_{w2,M_4}
 \end{aligned}$$

APÊNDICE B - Resultados das soluções numéricas das modelagens do SRM

A seguir estão apresentados os resultados da solução numérica dos sistemas de equações modelados para o sistema redundante de medição.

B.1 - Resultado da solução da modelagem com quatro incógnitas e sem desalinhamento

Montagem	Incógnita	Valor obtido
M ₁	α_f	0,001
	α_p	-0,007
	$w^0 \delta C_1$	0,004
	$w^0 \delta C_2$	0,005
	$w^0 \delta C_3$	0,007
	$w^0 \delta C_4$	0,007
	$w^0 \delta C_5$	0,005
	$w^1 \delta C_1$	0,005
	$w^2 \delta C_5$	0,007
M ₂	α_f	0,001
	α_p	-0,007
	$w^0 \delta C_1$	-0,005
	$w^0 \delta C_2$	-0,001
	$w^0 \delta C_3$	0,004
	$w^0 \delta C_4$	0,012
	$w^0 \delta C_5$	0,024
	$w^1 \delta C_1$	-0,013
	$w^2 \delta C_5$	0,026
M ₃	α_f	0,001
	α_p	-0,007
	$w^0 \delta C_1$	-0,006
	$w^0 \delta C_2$	-0,008
	$w^0 \delta C_3$	-0,009
	$w^0 \delta C_4$	-0,011
	$w^0 \delta C_5$	-0,012
	$w^1 \delta C_1$	-0,009
	$w^2 \delta C_5$	-0,012
M ₄	α_f	0,001
	α_p	-0,007
	$w^0 \delta C_1$	0,008
	$w^0 \delta C_2$	0,004
	$w^0 \delta C_3$	-0,003
	$w^0 \delta C_4$	-0,008
	$w^0 \delta C_5$	-0,017
	$w^1 \delta C_1$	0,017
	$w^2 \delta C_5$	-0,021

B.2 - Resultados das soluções numéricas para a modelagem do SRM_1

Montagem	Incógnita	Valor obtido no Procedimento 1	Valor obtido no Procedimento 2	Valor obtido no Procedimento 3
M ₁	α_f	0,005	0,002	0,006
	α_p	0,010	0,007	0,009
	${}^{w0}\delta C_1$	0,526	0,496	0,536
	${}^{w0}\delta C_2$	0,263	0,246	0,269
	${}^{w0}\delta C_3$	0,000	0,002	-0,001
	${}^{w0}\delta C_4$	-0,266	-0,250	-0,273
	${}^{w0}\delta C_5$	-0,530	-0,497	-0,542
	${}^{w1}\delta C_1$	0,789	0,742	0,805
	${}^{w2}\delta C_5$	-0,794	-0,744	-0,814
	e_{w1}	-0,264	-0,248	-0,269
	ψ_{w1}	-0,002	0,000	-0,001
	e_{w2}	0,267	0,249	0,274
	ψ_{w2}	0,001	0,001	0,003
M ₂	α_f	-0,006	-0,008	-0,005
	α_p	-0,001	-0,003	-0,002
	${}^{w0}\delta C_1$	-0,348	-0,306	-0,341
	${}^{w0}\delta C_2$	-0,167	-0,148	-0,162
	${}^{w0}\delta C_3$	0,012	0,008	0,014
	${}^{w0}\delta C_4$	0,194	0,166	0,193
	${}^{w0}\delta C_5$	0,369	0,319	0,367
	${}^{w1}\delta C_1$	-0,526	-0,464	-0,516
	${}^{w2}\delta C_5$	0,544	0,470	0,537
	e_{w1}	0,170	0,153	0,164
	ψ_{w1}	-0,002	0,000	-0,001
	e_{w2}	-0,176	-0,147	-0,177
	ψ_{w2}	0,002	0,002	0,003
M ₃	α_f	-0,010	-0,012	-0,009
	α_p	-0,005	-0,007	-0,006
	${}^{w0}\delta C_1$	-0,655	-0,643	-0,657
	${}^{w0}\delta C_2$	-0,331	-0,322	-0,334
	${}^{w0}\delta C_3$	-0,007	-0,007	-0,008
	${}^{w0}\delta C_4$	0,319	0,313	0,321
	${}^{w0}\delta C_5$	0,648	0,636	0,651
	${}^{w1}\delta C_1$	-0,982	-0,960	-0,988
	${}^{w2}\delta C_5$	0,980	0,961	0,985
	e_{w1}	0,332	0,325	0,334
	ψ_{w1}	-0,001	0,000	-0,001
	e_{w2}	-0,323	-0,319	-0,323
	ψ_{w2}	0,002	0,002	0,003
M ₄	α_f	0,005	0,001	0,005
	α_p	0,009	0,007	0,008
	${}^{w0}\delta C_1$	0,477	0,453	0,462
	${}^{w0}\delta C_2$	0,235	0,224	0,227

continua

Montagem	Incógnita	Valor obtido no Procedimento 1	Valor obtido no Procedimento 2	Valor obtido no Procedimento 3
M ₄	${}^{w0}\delta C_3$	-0,005	-0,002	-0,006
	${}^{w0}\delta C_4$	-0,246	-0,229	-0,241
	${}^{w0}\delta C_5$	-0,488	-0,459	-0,476
	${}^{w1}\delta C_1$	0,719	0,682	0,699
	${}^{w2}\delta C_5$	-0,731	-0,688	-0,708
	e_{w1}	-0,238	-0,230	-0,229
	ψ_{w1}	-0,002	0,000	-0,001
	e_{w2}	0,232	0,217	0,226
	ψ_{w2}	0,002	0,002	0,003

B.3 - Resultados das soluções numéricas para a modelagem do SRM_2

Montagem	Incógnita	Procedimento					
		1	2	3	4	5	6
M ₁	α_f	0,004	0,013	0,001	-	-	-
	α_p	0,007	0,008	-0,002	-	-	-
	$w^0\delta C_1$	0,412	0,538	-0,050	-	-	-
	$w^0\delta C_2$	0,202	0,270	-0,023	-	-	-
	$w^0\delta C_3$	-0,006	0,004	0,003	-	-	-
	$w^0\delta C_4$	-0,216	-0,266	0,030	-	-	-
	$w^0\delta C_5$	-0,423	-0,534	0,057	-	-	-
	$w^1\delta C_1$	0,619	0,804	-0,079	-	-	-
	$w^2\delta C_5$	-0,630	-0,804	0,085	-	-	-
	e_{w1}	-0,204	-0,270	0,026	-	-	-
	ψ_{w1}	0,000	-0,005	0,002	-	-	-
	e_{w2}	0,208	0,268	-0,021	-	-	-
	ψ_{w2}	0,005	-0,007	-0,003	-	-	-
M ₂	α_f	-0,006	-	-	-0,001	-0,008	-
	α_p	-0,003	-	-	0,002	-0,010	-
	$w^0\delta C_1$	-0,412	-	-	0,144	-0,365	-
	$w^0\delta C_2$	-0,202	-	-	0,077	-0,178	-
	$w^0\delta C_3$	0,006	-	-	0,010	0,007	-
	$w^0\delta C_4$	0,216	-	-	-0,057	0,193	-
	$w^0\delta C_5$	0,423	-	-	-0,128	0,379	-
	$w^1\delta C_1$	-0,619	-	-	0,212	-0,551	-
	$w^2\delta C_5$	0,630	-	-	-0,197	0,564	-
	e_{w1}	0,204	-	-	-0,075	0,181	-
	ψ_{w1}	0,000	-	-	0,002	0,003	-
	e_{w2}	-0,208	-	-	0,067	-0,179	-
	ψ_{w2}	0,006	-	-	0,001	0,012	-
M ₃	α_f	-	0,000	-	-0,004	-	-0,009
	α_p	-	-0,005	-	-0,001	-	-0,010
	$w^0\delta C_1$	-	-0,538	-	-0,144	-	-0,547
	$w^0\delta C_2$	-	-0,270	-	-0,077	-	-0,273
	$w^0\delta C_3$	-	-0,004	-	-0,010	-	0,001
	$w^0\delta C_4$	-	0,266	-	0,057	-	0,274
	$w^0\delta C_5$	-	0,534	-	0,128	-	0,549
	$w^1\delta C_1$	-	-0,804	-	-0,212	-	-0,821
	$w^2\delta C_5$	-	0,804	-	0,197	-	0,827
	e_{w1}	-	0,270	-	0,075	-	0,275
	ψ_{w1}	-	-0,005	-	0,002	-	0,007
	e_{w2}	-	-0,268	-	-0,067	-	-0,269
	ψ_{w2}	-	-0,007	-	0,001	-	0,002
M ₄	α_f	-	-	0,002	-	0,002	0,005
	α_p	-	-	-0,001	-	-0,001	0,003
	$w^0\delta C_1$	-	-	0,050	-	0,365	0,547
	$w^0\delta C_2$	-	-	0,023	-	0,178	0,273
	$w^0\delta C_3$	-	-	-0,003	-	-0,007	-0,001

continua

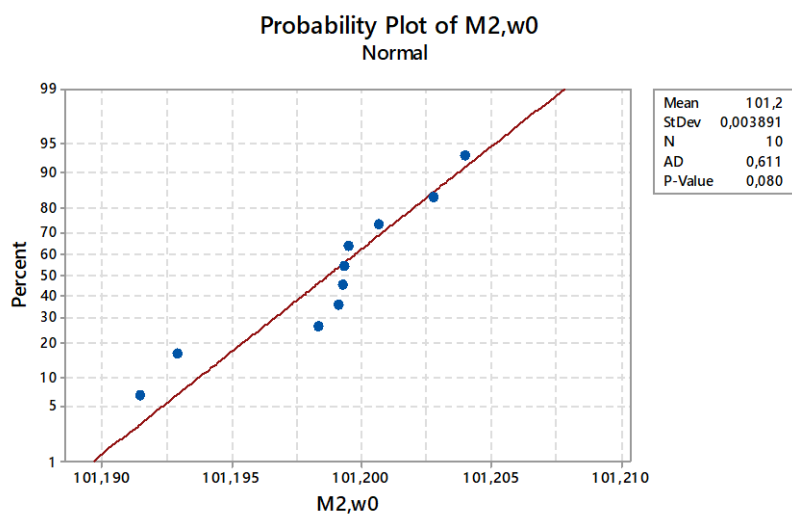
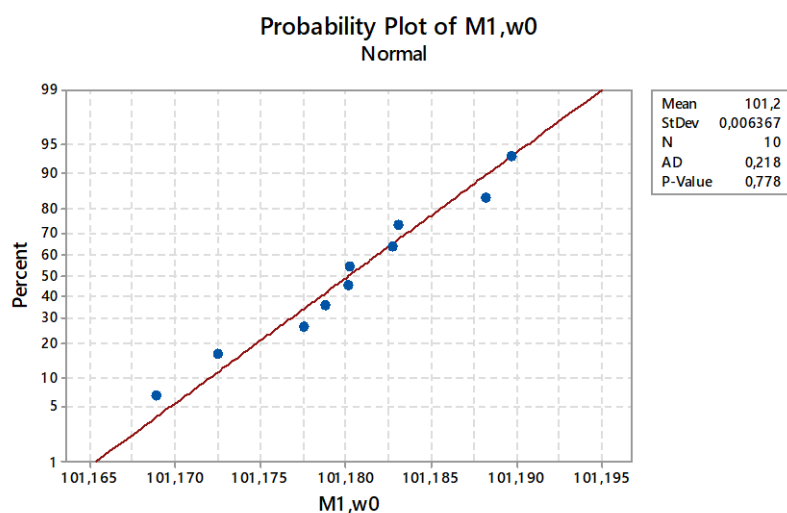
Montagem	Incógnita	1	2	3	4	5	6
M ₄	${}^{w0}\delta C_4$	-	-	-0,030	-	-0,193	-0,274
	${}^{w0}\delta C_5$	-	-	-0,057	-	-0,379	-0,549
	${}^{w1}\delta C_1$	-	-	0,079	-	0,551	0,821
	${}^{w2}\delta C_5$	-	-	-0,085	-	-0,564	-0,827
	e_{w1}	-	-	-0,026	-	-0,181	-0,275
	ψ_{w1}	-	-	0,002	-	0,003	0,007
	e_{w2}	-	-	0,021	-	0,179	0,269
	ψ_{w2}	-	-	-0,003	-	0,012	0,002

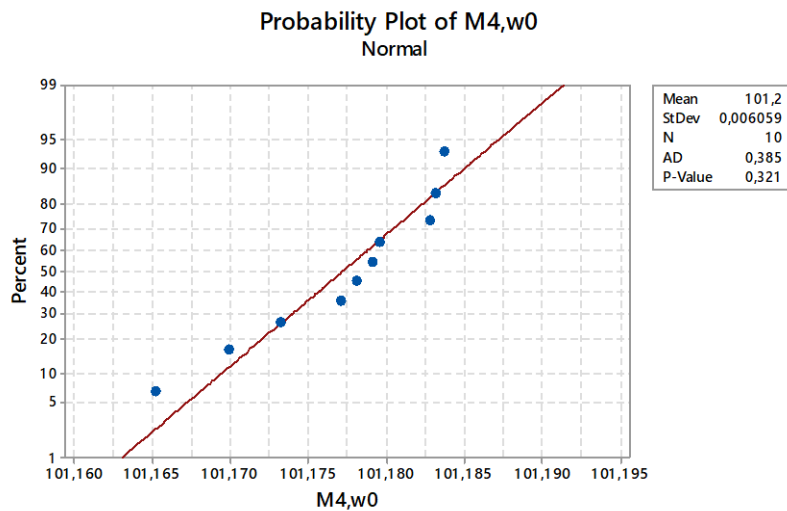
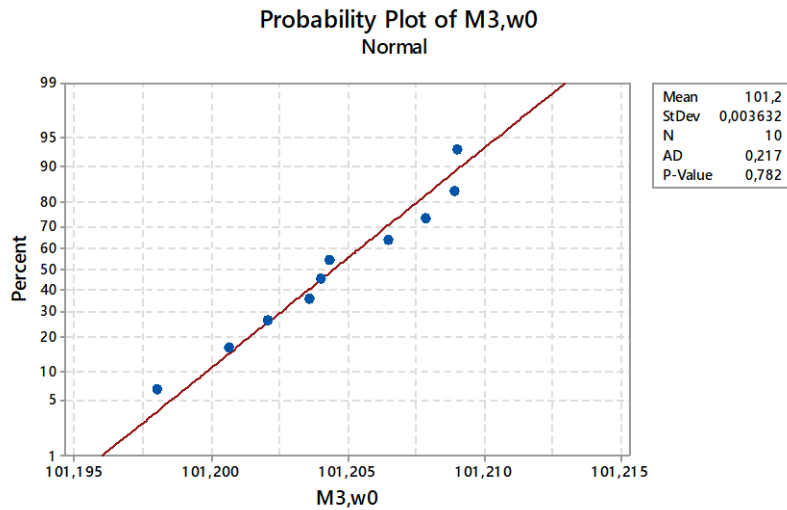
APÊNDICE C - Resultados das análises estatísticas sobre os valores de distâncias

1º Planejamento Experimental

$$M1,w0 \times M2,w0 \times M3,w0 \times M4,w0$$

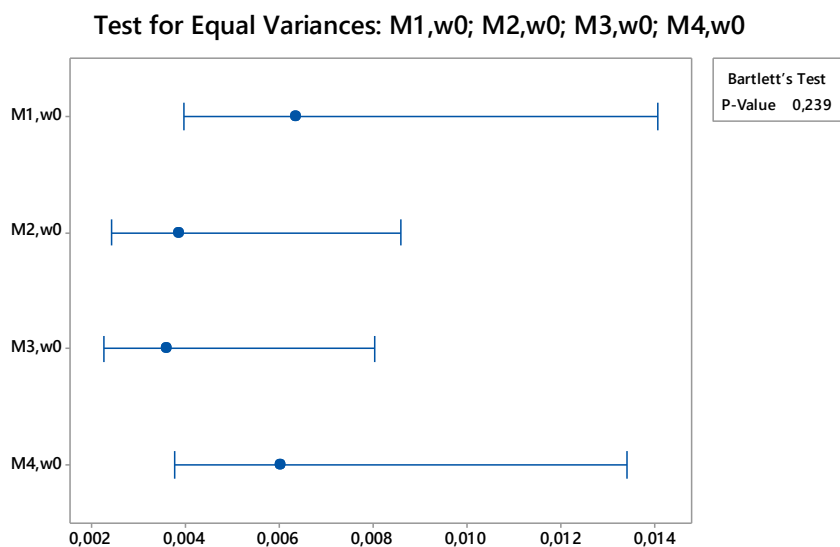
Teste de Anderson-Darling (AD) - normalidade nas distribuições dos resíduos por variável resposta.





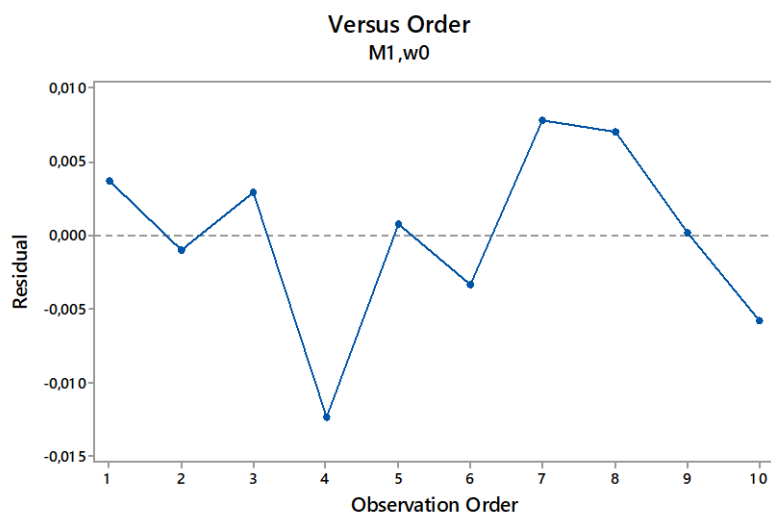
Os resultados do teste de Anderson-Darling permitem concluir que os erros do modelo possuem distribuição normal, pois o teste forneceu em todos os casos um nível descritivo superior ao definido ($P\text{-Value} > 0,05$).

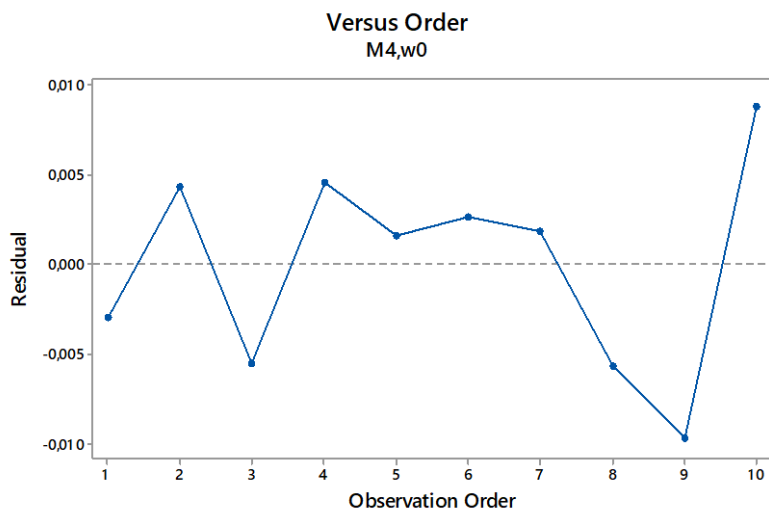
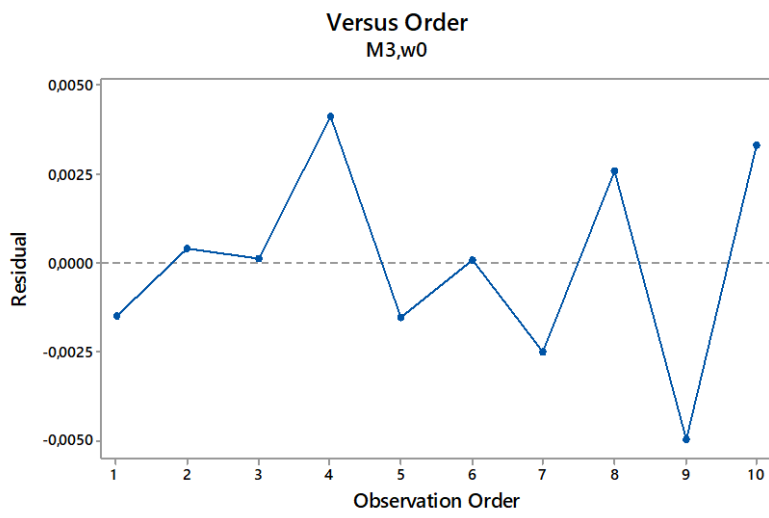
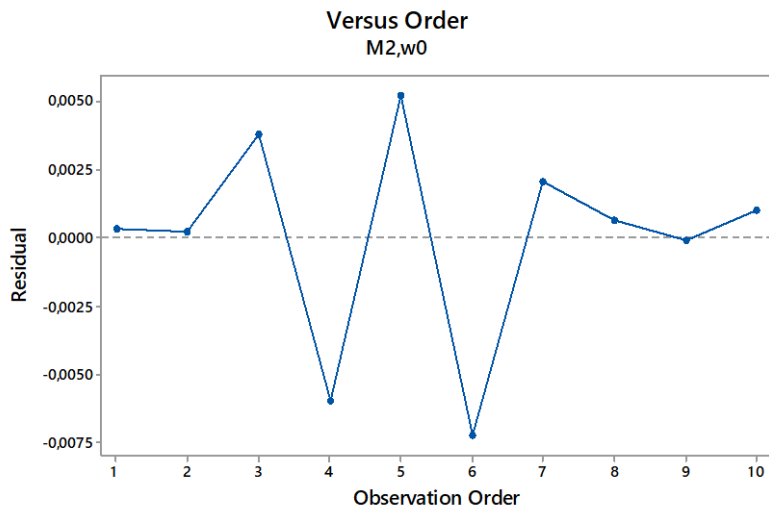
Análise da homogeneidade de variância dos resíduos dos tratamentos pelos testes de Bartlett's para o primeiro planejamento experimental.

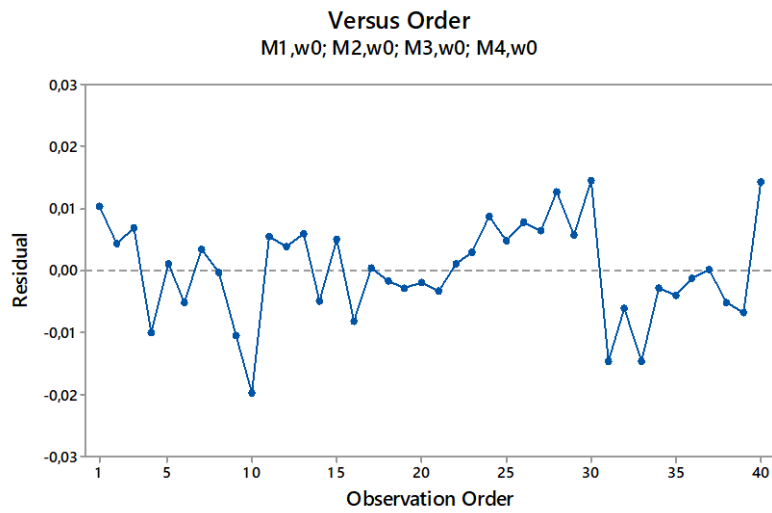


Por meio do p-valor encontrado para o teste de Bartlett de 0,239 ($>0,05$), pôde ser aceita a hipótese de homogeneidade das variâncias. Sendo assim, com a confirmação da independência dos resíduos é possível realizar a análise de variância aplicando a comparação entre médias pelo teste de Tukey.

Análise da Independência dos resíduos (gráfico de resíduos *versus* ordem de observação) para o primeiro planejamento experimental.



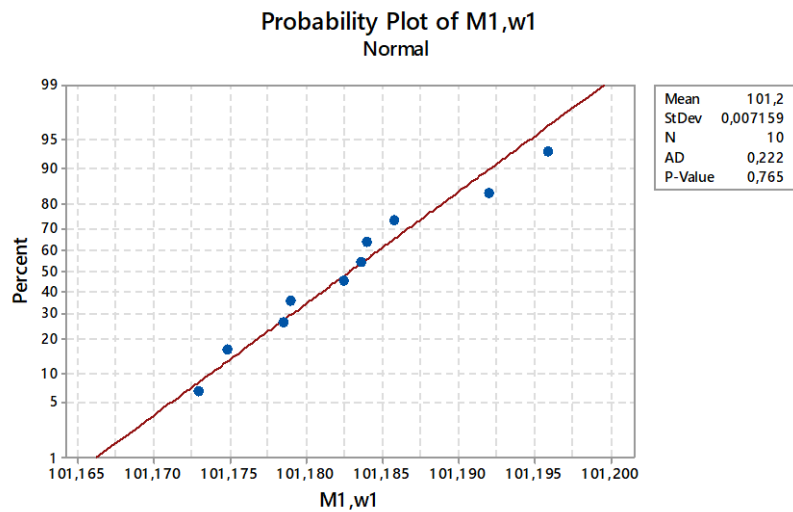


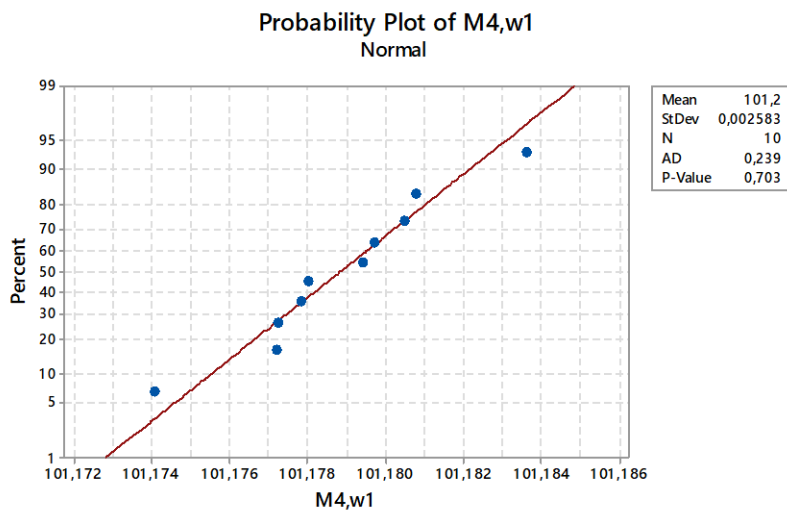
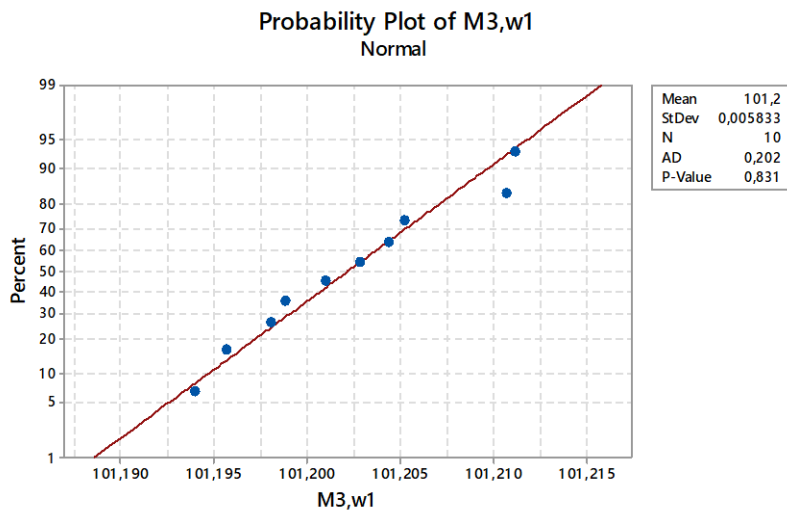
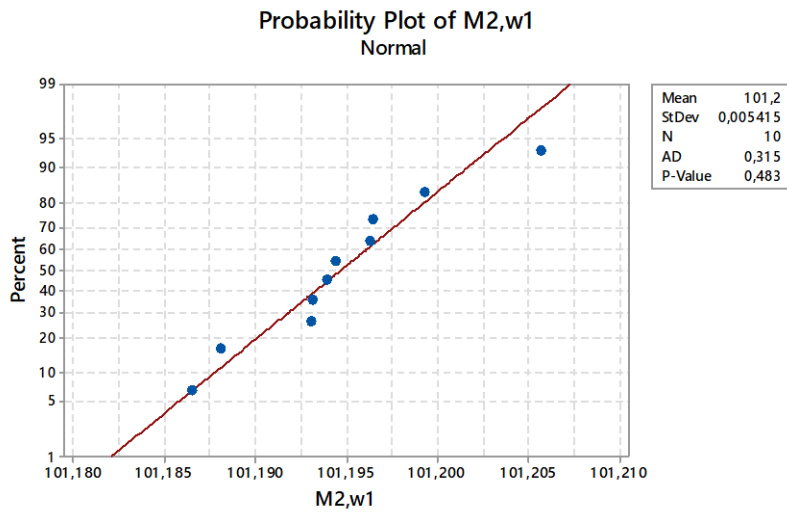


2º Planejamento Experimental

$$M1,w1 \times M2,w1 \times M3,w1 \times M4,w1$$

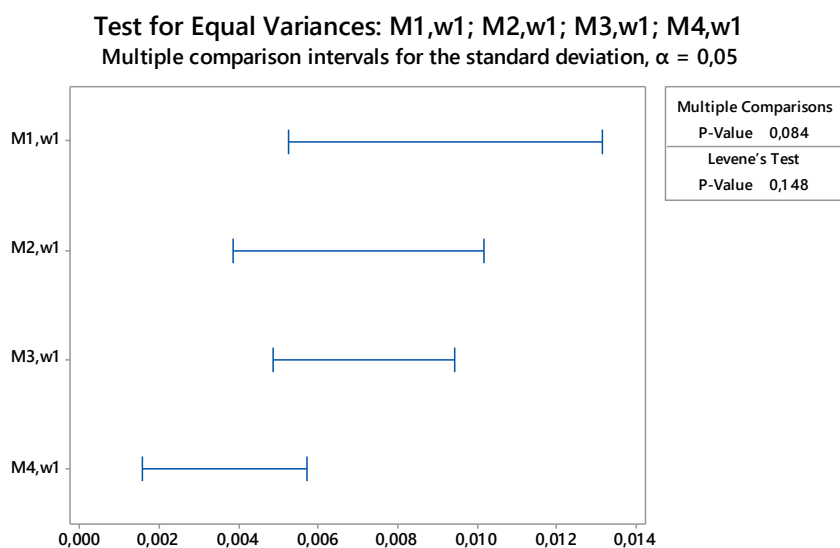
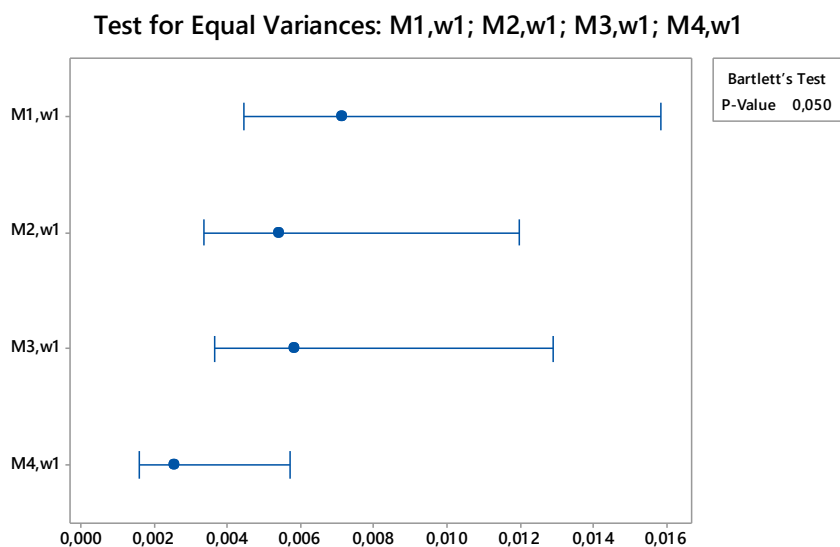
Teste de Anderson-Darling (AD) - normalidade nas distribuições dos resíduos por variável resposta.





Os resultados do teste de Anderson-Darling permitem concluir que os erros do modelo possuem distribuição normal, pois o teste forneceu em todos os casos um nível descritivo superior ao definido ($P\text{-Value} > 0,05$).

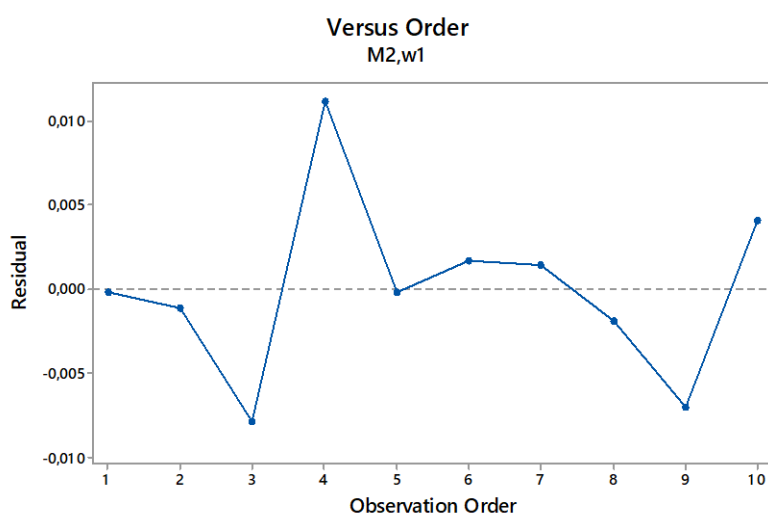
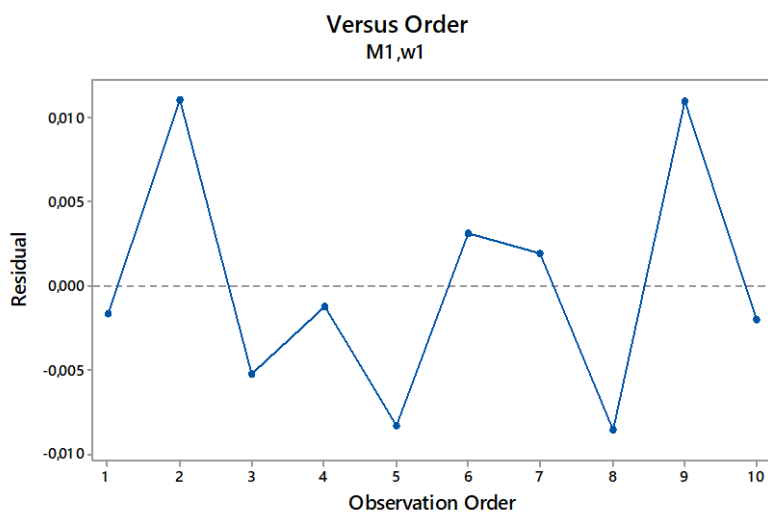
Análise da homogeneidade de variância dos resíduos dos tratamentos pelos testes de Bartlett e de Levene para o segundo planejamento experimental.

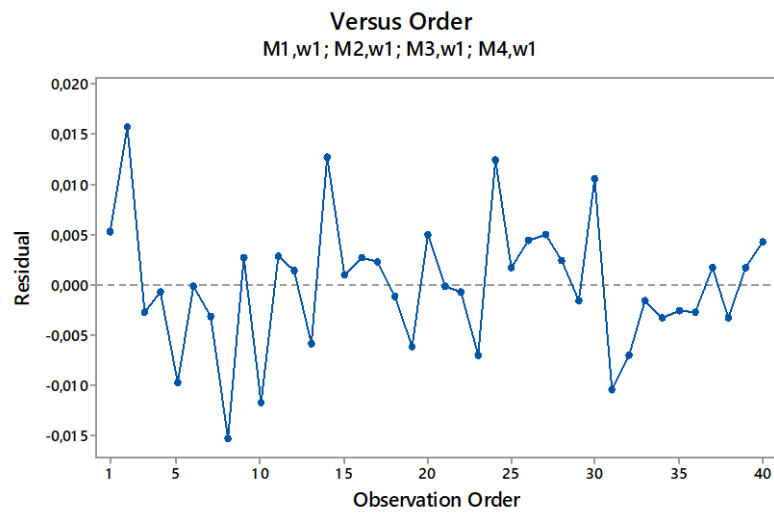
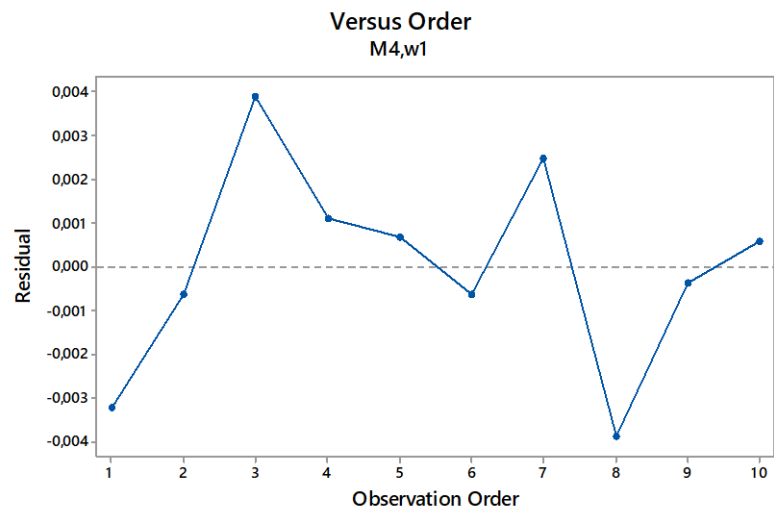
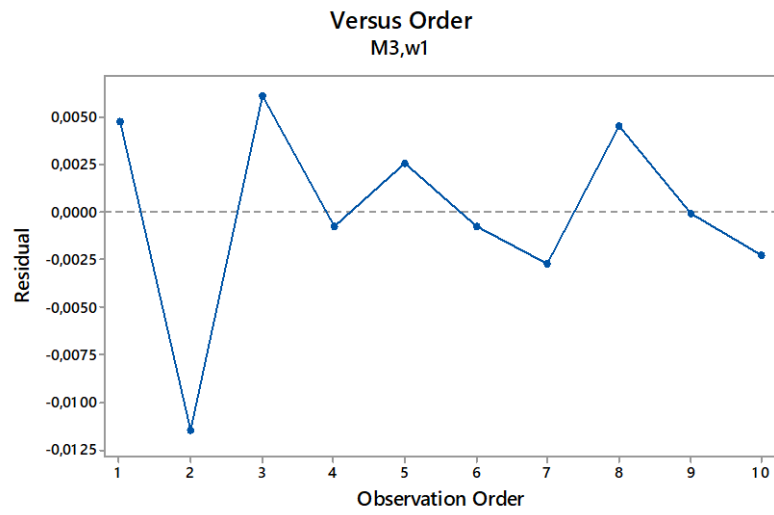


Por meio do p-valor de 0,050 encontrado pelo teste de Bartlett e em seguida pelo teste de Levene, com p-valor de 0,148 ($>0,05$) é possível aceitar a hipótese de homogeneidade das variâncias. Desta forma, com a confirmação da independência dos resíduos é possível realizar a análise de variância, aplicando a comparação entre médias pelo teste de Tukey.

Análise da Independência dos resíduos (gráfico de resíduos *versus* ordem de observação) para o segundo planejamento experimental.

A seguir apresenta-se o gráfico resíduos *versus* ordem de observação para análise da independência dos resíduos, condição necessária para realização da ANOVA para o segundo planejamento experimental.

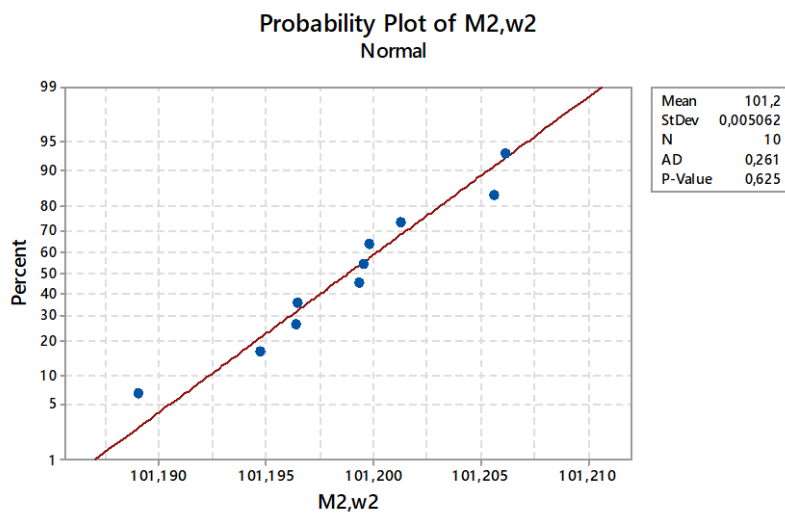
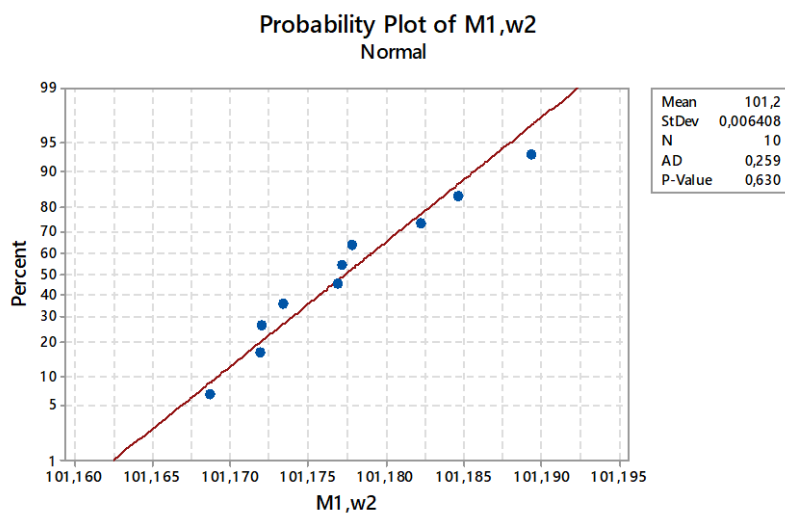


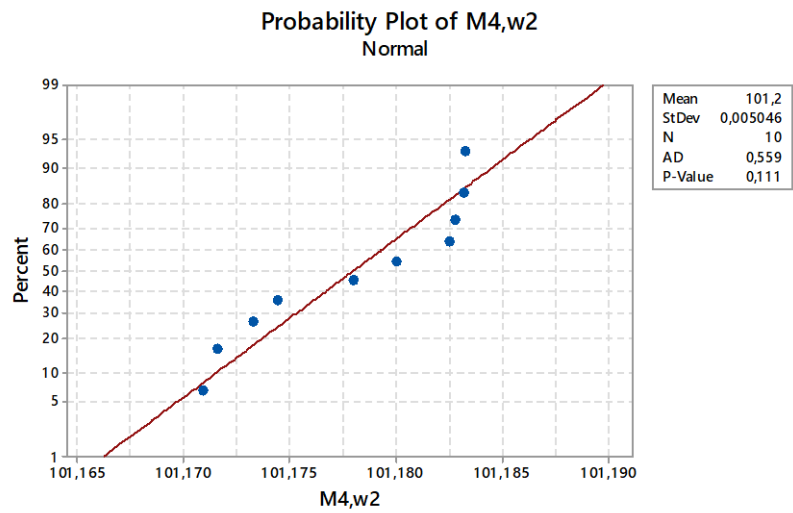
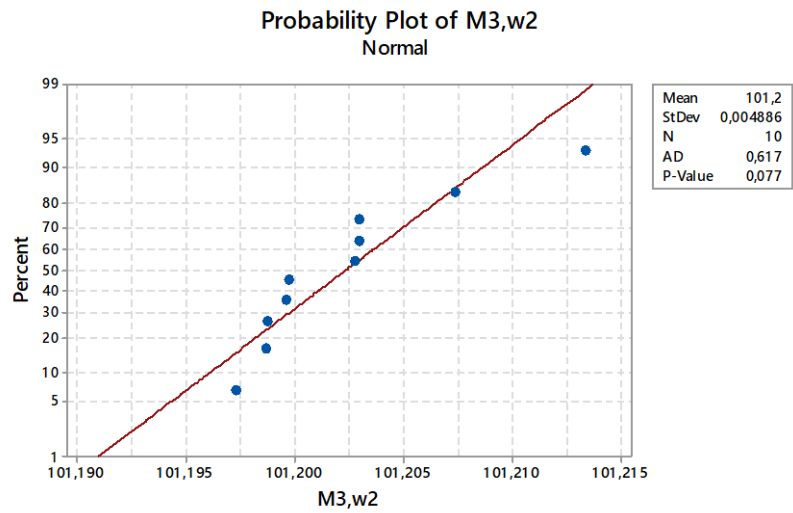


3º Planejamento Experimental

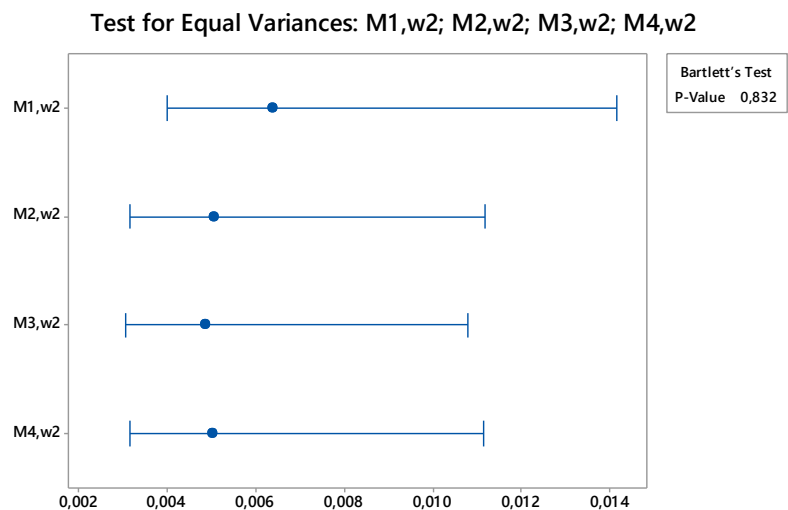
$M1,w2 \times M2,w2 \times M3,w2 \times M4,w2$

Teste de Anderson-Darling (AD) - normalidade nas distribuições dos resíduos por variável resposta.



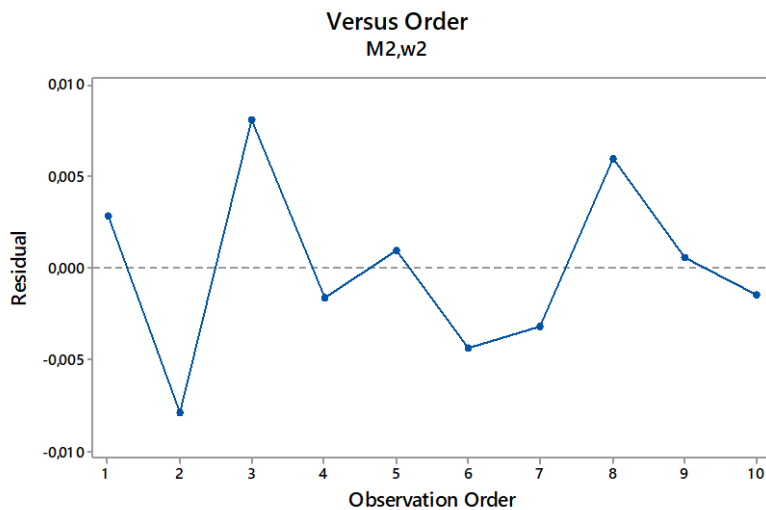
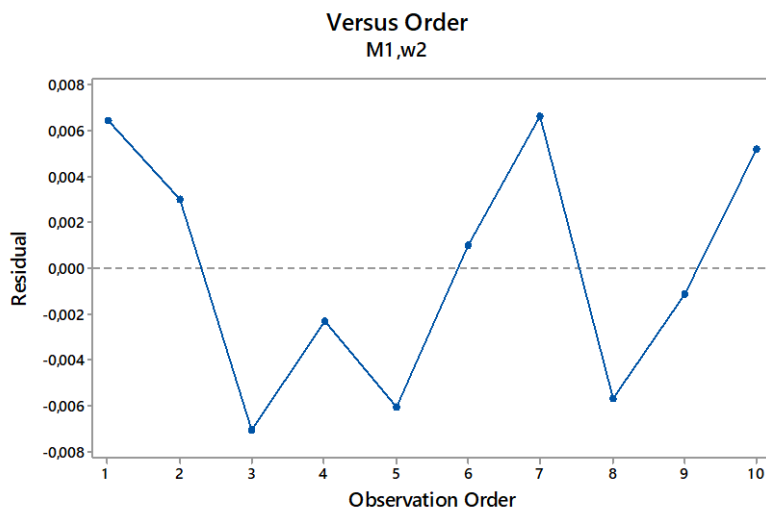


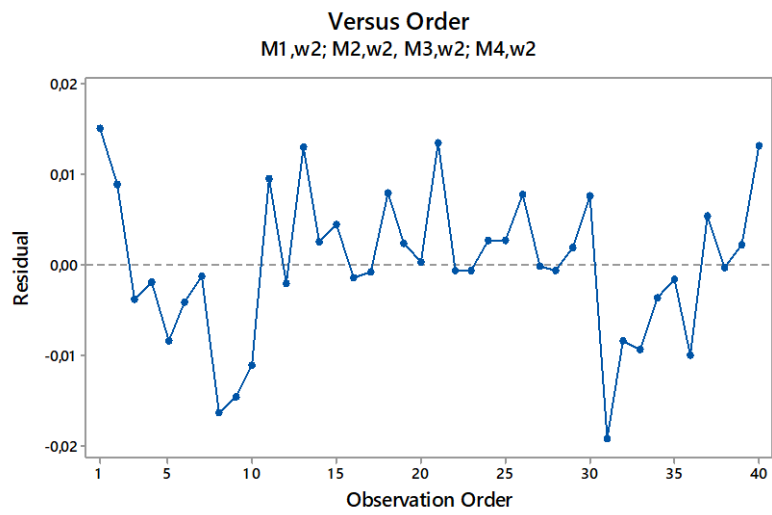
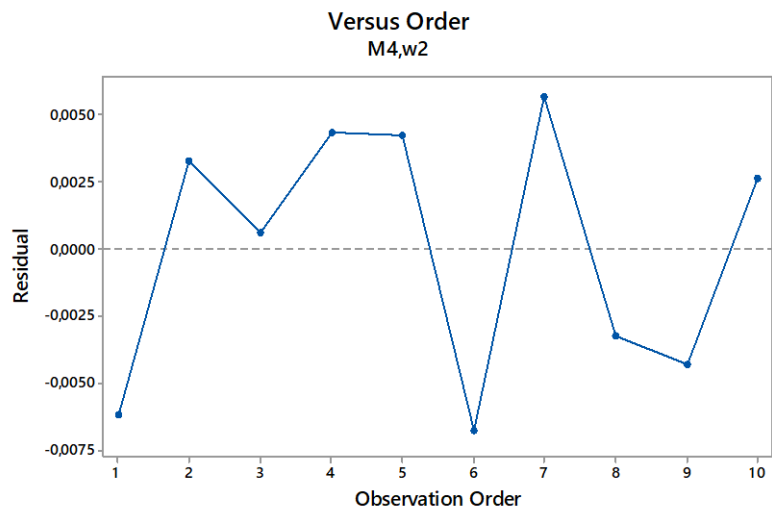
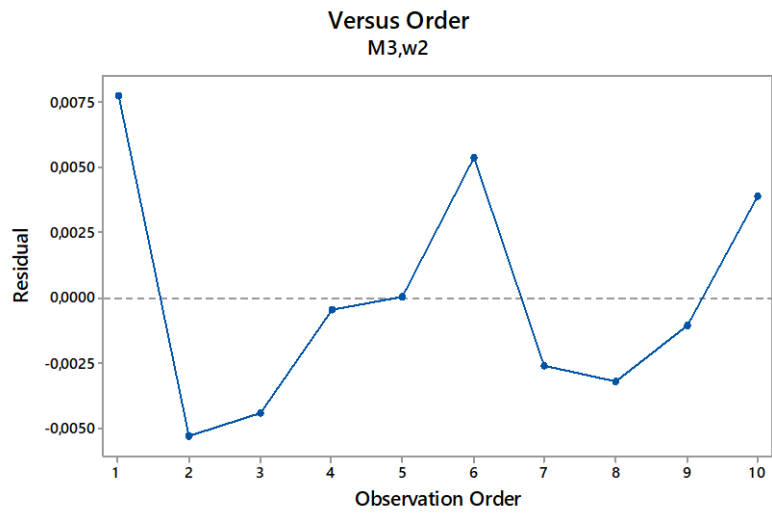
Análise da homogeneidade da variância dos resíduos dos tratamentos pelos testes de Bartlett para o terceiro planejamento experimental.



Com base no P-valor de 0,832 ($>0,05$) encontrado pelo teste de Bartlett é possível aceitar a hipótese de homogeneidade das variâncias do 3º Planejamento Experimental, referente às montagens com as sobreposições de pontos à direita, com nomenclatura estabelecida de “w₂”. Desta forma é possível realizar a análise de variância e aplicar a comparação entre médias pelo teste de Tukey para o planejamento experimental 3.

Análise da Independência dos resíduos (gráfico de resíduos *versus* ordem de observação) para o terceiro planejamento experimental.

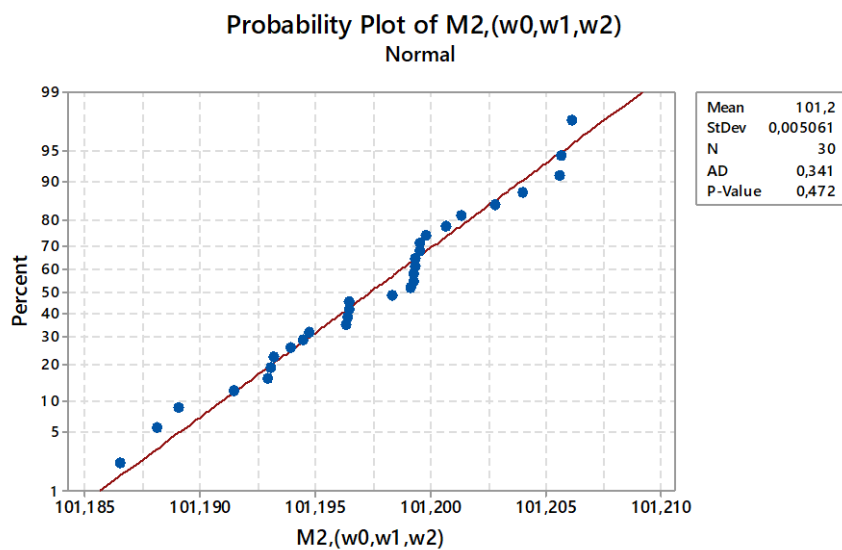
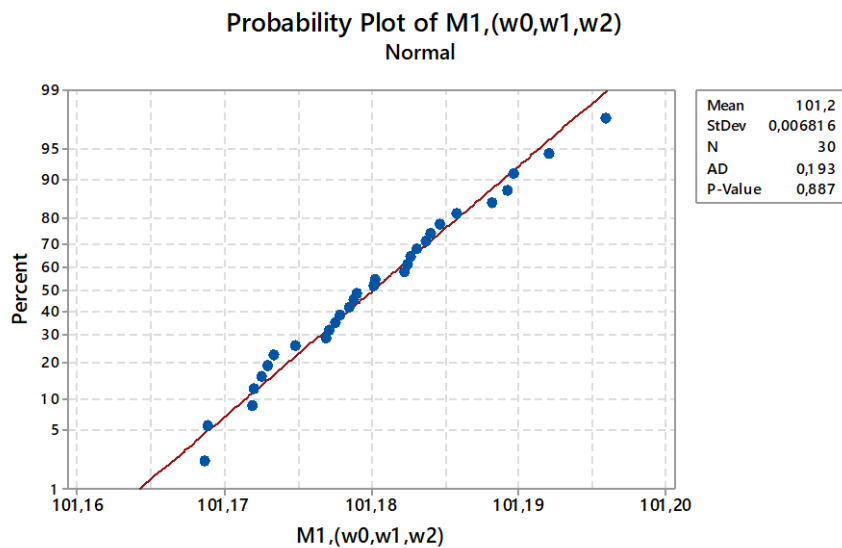


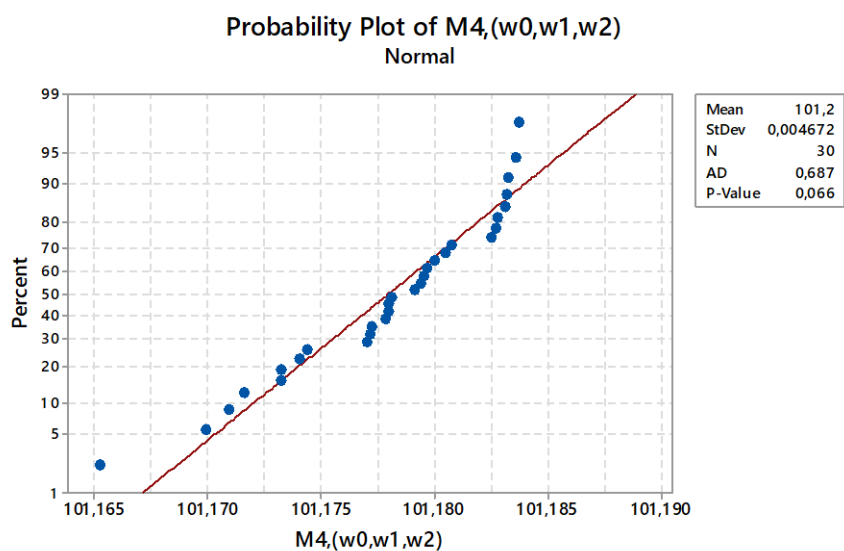
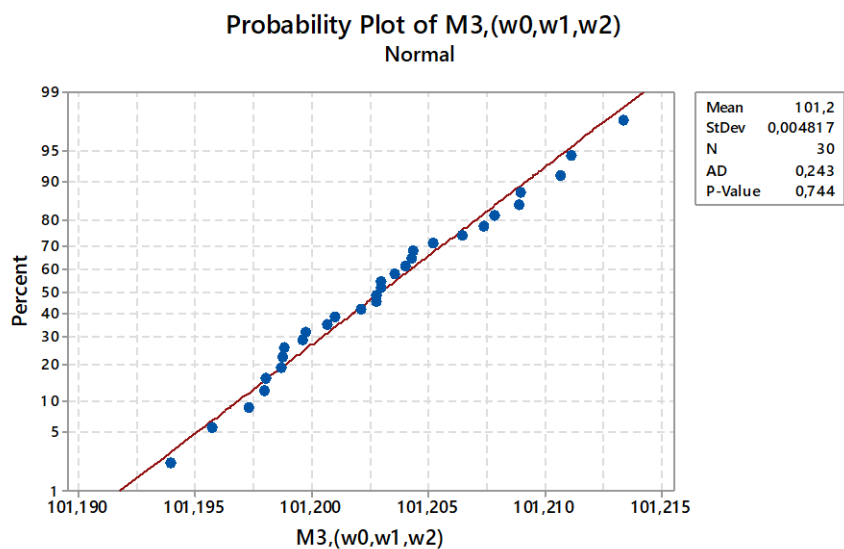


4º Planejamento Experimental

$$M1,(w0,w1,w2) \times M2,(w0,w1,w2) \times M3,(w0,w1,w2) \times M4,(w0,w1,w2)$$

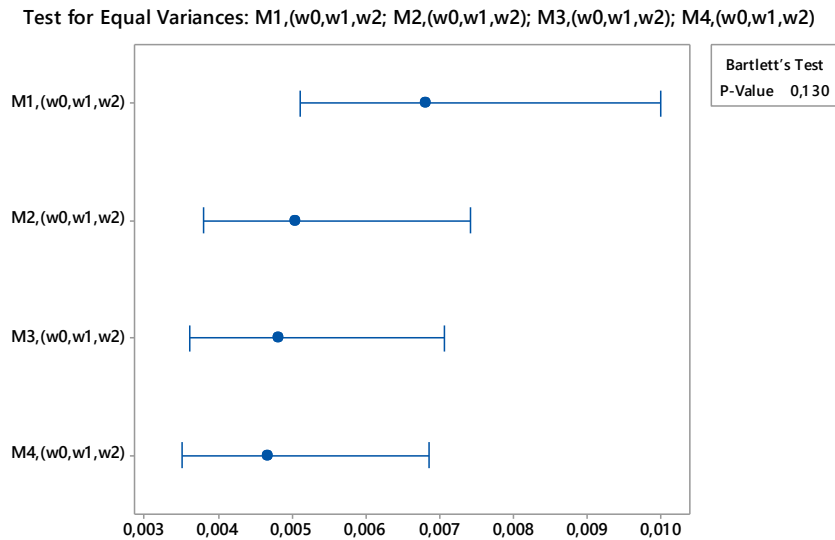
Teste de Anderson-Darling (AD) - normalidade nas distribuições dos resíduos por variável resposta.





Os resultados do teste de Anderson-Darling permitem verificar a distribuição normal dos resíduos, já que o p-valor encontrado para dos quatro tratamentos $M1,(w_0,w_1,w_2)$; $M2,(w_0,w_1,w_2)$; $M3,(w_0,w_1,w_2)$ e $M4,(w_0,w_1,w_2)$ foi superior a 0,05.

Análise da homogeneidade da variância dos resíduos dos tratamentos pelos testes de Bartlett para o quarto planejamento experimental.



Com base no p-valor encontrado para o teste de Bartlett de 0,130 ($>0,05$) é aceita a hipótese de homogeneidade das variâncias, hipótese nula. Desta maneira é possível realizar o teste de comparação múltiplas de médias pelo teste de Tukey.

Análise da Independência dos resíduos (gráfico de resíduos *versus* ordem de observação) para o quarto planejamento experimental.

