

APÊNDICE C – DETALHAMENTO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

A modelagem do fluxo de águas subterrâneas é realizada através da resolução numérica ou analítica de equações diferenciais parciais. A dedução deste equacionamento foi apresentada e descrita no apêndice B. Dessa forma, detalha-se, nesta seção, a aplicação do Método de Elementos Finitos (MEF) para resolver essas equações. Em princípio, aplica-se o MEF para o sistema em regime estacionário e, ao final, o regime transiente. O pacote computacional implementado para simular aquíferos em duas dimensões abrange os seguintes casos:

- Aquífero confinado em regime permanente;
- Aquífero confinado em regime transiente;
- Aquífero livre em regime permanente;
- Aquífero livre em regime transiente;

Segundo Chapra e Canale (2002), aplicações do MEF podem ser resumidas em seis passos:

- I. Discretização do sistema através de elementos triangulares. Neste caso específico foram utilizados elementos triangulares, compostos por três nós;
- II. Montagem das matrizes local para cada um desses triângulos. A construção de cada matriz local considera as propriedades hidráulicas do aquífero, condutividade hidráulica e o coeficiente de armazenamento, e as características geométricas dos triângulos;
- III. Construção da matriz representativa do sistema completo. Através das matrizes locais é montada a matriz global, que conterá informações sobre as propriedades hidráulicas do aquífero e geométricas do conjunto de triângulos. Ao final desta etapa, tem-se um sistema de equações lineares na seguinte forma: $[K] \cdot \{h\} = \{Q\}$, onde $[K]$ é a matriz global, $\{h\}$ os potenciais hidráulicos nos nós e $\{Q\}$ as vazões nos nós;
- IV. Inserção das condições de contorno no sistema de equações formado no item anterior. Três possíveis condições podem ser usadas: potenciais hidráulicos

conhecidos (condição de Dirichlet); regiões de fluxo conhecido (condição de Neumann); ou uma relação linear entre fluxo e potencial hidráulico (condição de Cauchy). A consideração de alguma dessas condições de contorno modificará o sistema de equações, em geral reduzindo o número de incógnitas;

- V. Resolução do sistema de equações, que resultará num vetor com os potenciais hidráulicos {h} nos nós dos elementos triangulares;
- VI. Por fim, são apresentados os resultados, sob forma de mapa com as equipotenciais, por exemplo. Também podem ser calculadas outras variáveis, por exemplo, o fluxo da água subterrânea.

Resolução numérica para o sistema confinado em regime permanente

A equação diferencial parcial na sua forma mais geral é dada pela equação C.1.

$$-K_x \cdot b \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - K_y \cdot b \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = W \quad (\text{Equação C.1})$$

Onde:

- K_x e K_y – representam as condutividades hidráulicas nas direções x e y, [L/T];
- h – é o potencial hidráulico do sistema a ser modelado numa região de domínio, [L];
- W – uma injeção ou extração d'água do sistema, [L/M³]

A aproximação das soluções procuradas, potenciais hidráulicos, nas diferentes regiões do aquífero, pode ser encontrada através de uma função aproximada ou de forma. Esta função de forma ou de interpolação é escrita como:

$$\bar{h}(x, y) = \sum_{i=1}^n h_L \cdot N_L(x, y) \quad (\text{Equação C.2})$$

Onde:

- $\bar{h}(x, y)$ – é o valor aproximado de h(x,y), [L];
- n – é o número de nós do sistema;
- h_L – o potencial no nó L, [L];

- N_L – é a função de interpolação ou função de forma.

Dessa forma, a equação C.1 passa a ser representada por:

$$K_x \cdot \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^2} + K_y \cdot \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial y^2} = R \quad (\text{Equação C.4})$$

Assim, a consideração de um valor aproximado (\bar{h}) na equação C.3 faz com que o valor desta equação não seja mais igual a zero e sim a um resíduo (R), resultante da substituição da função de forma ($\bar{h}(x, y)$) na equação de Laplace. Aplicando-se o método dos resíduos ponderados, que consiste em minimizar o resíduo (R) da equação C.4, tem-se:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} R \cdot W_L(x, y) \cdot dx \cdot dy &= 0 \\ \iint_{\Omega} (K_x \cdot \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^2} + K_y \cdot \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial y^2}) \cdot W_L(x, y) \cdot dx \cdot dy &= 0 \end{aligned} \quad (\text{Equação C.5})$$

Pelo método de Galerkin, tem-se que a função $W_L(x, y)$ é igual a função de forma ou de interpolação, ou seja:

$$W_L(x, y) = N_L(x, y)$$

Assim, tem-se:

$$\iint_{\Omega} (K_x \cdot \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^2} + K_y \cdot \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial y^2}) \cdot N_L(x, y) \cdot dx \cdot dy = 0 \quad (\text{Equação C.6})$$

Aplicando-se o método de Green nesta equação, tem-se:

$$\int_{\Omega} (K_x \cdot \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^2} + K_y \cdot \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial y^2}) \cdot N_L(x, y) \cdot dx \cdot dy = - \iint_{\Omega} (\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_L}{\partial x} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_L}{\partial y}) \cdot dx \cdot dy + \int_{\Gamma} (\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \cdot n_y) \cdot N_L \cdot ds$$

(Equação C.7)

Ainda se faz necessário definir a função de forma (interpolação) para a aplicação do MEF. Aqui se defini a função de forma para um triângulo. Partindo-se de um triângulo localizado num sistema de coordenadas (Figura C.1).

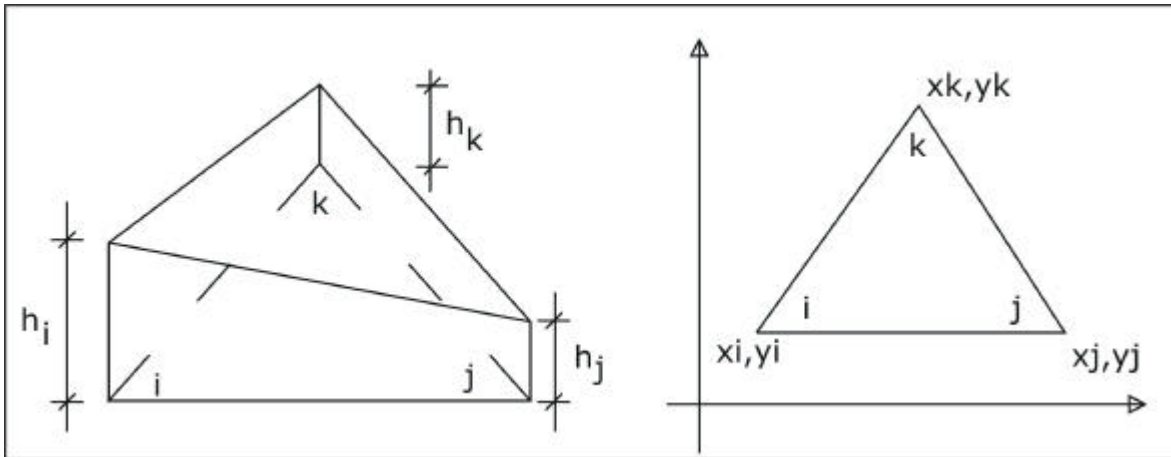


Figura C.1 – Elemento finito triangular.

Para este triângulo adotou-se a seguinte função de interpolação:

$$\bar{h}(x, y) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y \quad (\text{Equação C.8})$$

Aplicando-se a função $\bar{h}(x, y)$ ao triângulo esboçado na figura 3.4.1, tem-se:

$$h_i = a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot y_i$$

$$h_j = a_0 + a_1 \cdot x_j + a_2 \cdot y_j$$

$$h_k = a_0 + a_1 \cdot x_k + a_2 \cdot y_k$$

Resolvendo-se o sistema de equações anterior determina-se o valor dos coeficientes

a_0 , a_1 e a_2 . Ou seja:

$$\bar{h}(x, y) = N_i(x, y) \cdot h_i + N_j(x, y) \cdot h_j + N_k(x, y) \cdot h_k$$

Onde:

$$N_i(x, y) = a_i + b_i \cdot x + c_i \cdot y \quad (\text{Equação C.9})$$

E:

$$a_i = \frac{x_j \cdot y_k - x_k \cdot y_j}{2 \cdot A} \quad b_i = \frac{y_j - y_k}{2 \cdot A} \quad c_i = \frac{x_k - x_j}{2 \cdot A}$$

Substituindo-se os valores de a_i , b_i e c_i na equação C.9, tem-se:

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2 \cdot A} \cdot [(x_i \cdot y_k - x_k \cdot y_j) + (y_j - y_k) \cdot x + (x_k - x_j) \cdot y]$$

Similarmente, têm-se $N_j(x, y)$ e $N_k(x, y)$, ou seja:

$$N_j(x, y) = \frac{1}{2 \cdot A} \cdot [(x_k \cdot y_i - x_i \cdot y_k) + (y_i - y_k) \cdot x + (x_i - x_k) \cdot y]$$

Escrevendo a função de interpolação na forma matricial tem-se:

$$\bar{h}(x, y) = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_k \end{bmatrix}$$

Assim, tem-se:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_L}{\partial x} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_L}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} n_y \right) N_L ds \quad (\text{Equação C.10})$$

Tratando-se apenas do lado esquerdo da equação C.10, tem-se:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_L}{\partial x} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_L}{\partial y} \right) dx dy$$

O somatório desta equação para todos os elementos resulta em:

$$\sum_e \left\{ \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_L}{\partial x} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_L}{\partial y} \right) dx dy \right\} \quad (\text{Equação C.11})$$

Tem-se ainda que:

$$\bar{h}^e = N_i^e \cdot h_i + N_j^e \cdot h_j + N_k^e \cdot h_k$$

Derivando-se com relação à x e y, tem-se:

$$\frac{\partial \bar{h}^e}{\partial x} = \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \cdot h_i + \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \cdot h_j + \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \cdot h_k \quad (\text{Equação C.12})$$

$$\frac{\partial \bar{h}^e}{\partial y} = \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \cdot h_i + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \cdot h_j + \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \cdot h_k \quad (\text{Equação C.13})$$

Substituindo-se C.12 e C.13 na equação C.11, tem-se:

$$\sum_e \left\{ \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \cdot h_i + \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \cdot h_j + \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \cdot h_k \right) \frac{\partial N_L}{\partial x} + \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial y} \cdot h_i + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \cdot h_j + \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \cdot h_k \right) \frac{\partial N_L}{\partial y} \right] dx dy \right\}$$

Integrando-se, tem-se:

$$A^e \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_L}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_L}{\partial y} \right) h_i + A^e \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_L}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_L}{\partial y} \right) h_j + A^e \left(\frac{\partial N_k^e}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_L}{\partial x} + \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_L}{\partial y} \right) h_k$$

Onde A^e é a área do elemento.

Resumindo-se, tem-se:

$$G_{L,i} \cdot h_i + G_{L,j} \cdot h_j + G_{L,k} \cdot h_k \quad (\text{Equação C.14})$$

Onde L é o índice dos nós.

A equação C.14 pode ser escrita na forma de matriz, onde se tem:

$$G_{11}h_1 + G_{12}h_2 + G_{13}h_3 + \dots + G_{1L}h_L = f_1$$

$$G_{21}h_1 + G_{22}h_2 + G_{23}h_3 + \dots + G_{2L}h_L = f_2$$

...

$$G_{L1}h_1 + G_{L2}h_2 + G_{L3}h_3 + \dots + G_{LL}h_L = f_L$$

Ou:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & \dots & G_{1L} \\ G_{21} & & & & \\ G_{31} & & & & \\ \dots & & & & \dots \\ G_{L1} & \dots & \dots & \dots & G_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \dots \\ h_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ f_L \end{Bmatrix}$$

Ou ainda:

$$[G]x\{h\} = \{f\}$$

Voltando-se à equação original (C.10), tratar-se-á agora o lado direito, que diz respeito às condições de contorno do sistema.

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} . n_x + \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} . n_y \right) N_L . ds$$

Considerando-se o caso de condições de contorno de Neumann, que é um fluxo sobre um dos lados do triângulo, descrito graficamente na figura C.2, tem-se:

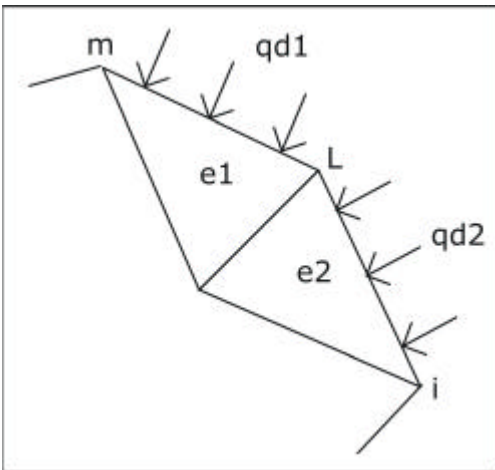


Figura C.2 - Representação das condições de contorno num lado do elemento triangular.

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} . n_x + \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} . n_y \right) N_L . ds = \int_i^L \frac{q_1}{K_f} . N_L . ds + \int_L^m \frac{q_2}{K_f} . N_L . ds$$

Assim, os fluxos nos nós L, i e m são dados por:

$$q_L = \frac{qd_1}{K_f} \cdot \frac{iL}{2} + \frac{qd_2}{K_f} \cdot \frac{Lm}{2}$$

$$q_i = \frac{qd_1}{K_f} \cdot \frac{\bar{i}L}{2}$$

$$q_m = \frac{qd_2}{K_f} \cdot \frac{\bar{L}m}{2}$$

Resolução numérica para o sistema em regime transiente

A partir de agora, o potencial hidráulico (h) da equação diferencial varia não só nas direções x e y , mas também com no tempo, ou seja, o sistema encontra-se é não permanente, que também é conhecido como não estacionário ou transiente. Assim, tem-se a seguinte equação representativa desta situação:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) + W - S \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (\text{Equação C.15})$$

Onde:

- S – é o coeficiente de armazenamento;

Apenas para lembrar tem-se que:

$$T = K \cdot b$$

Na forma matricial a equação C.15 também pode ser escrita como:

$$K \cdot h = Q$$

Desde que:

$$Q = -W + S \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

Utilizando-se o conceito de fluxo de energia num elemento triangular (Figura C.3), tem-se:

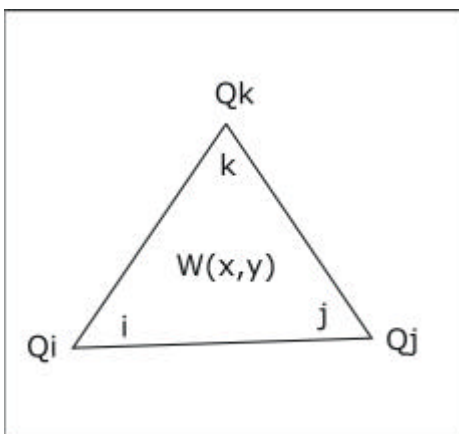


Figura C.3 – Elemento triangular.

$$Q_i . h_i + Q_j . h_j + Q_k . h_k = \int_{\Delta} h(x, y) . W(x, y) . dx . dy \quad (\text{Equação C.16})$$

Onde:

$$h = h(x, y, t)$$

Assim, tem-se:

$$h(x, y, t) = N_i . h_i(t) + N_j . h_j(t) + N_k . h_k(t) \quad (\text{Equação C.17})$$

Onde:

$$N_i(x, y) = a_i + b_i . x + c_i . y$$

$$N_j(x, y) = a_j + b_j . x + c_j . y$$

$$N_k(x, y) = a_k + b_k . x + c_k . y$$

Na forma matricial, pode-se escrever as equações C.16 e C.17 como:

$$\begin{bmatrix} Q_i & Q_j & Q_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_k \end{bmatrix} = \int_{\Delta} S . \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)^T . h . dx . dy$$

Para cada elemento existe uma relação linear entre a parte temporal do potencial e o fluxo em cada nó, ou seja:

$$\begin{bmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{ii} & C_{ij} & C_{ik} \\ C_{ji} & C_{jj} & C_{jk} \\ C_{ki} & C_{kj} & C_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_k \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \dot{h} = \frac{\partial h(t)}{\partial t}$$

Também é válido que:

$$h(x, y, t) = \begin{bmatrix} Q_i & Q_j & Q_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_k \end{bmatrix}$$

Assim, como:

$$\dot{h}(x, y, t) = \begin{bmatrix} Q_i & Q_j & Q_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_i \\ \dot{h}_j \\ \dot{h}_k \end{bmatrix}$$

Portanto, tem-se:

$$\begin{bmatrix} h_i & h_j & h_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{ii} & C_{ij} & C_{ik} \\ C_{ji} & C_{jj} & C_{jk} \\ C_{ki} & C_{kj} & C_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_i \\ \dot{h}_j \\ \dot{h}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_i & h_j & h_k \end{bmatrix} \int_{\Delta} S \begin{bmatrix} NiNi & NiNj & NiNk \\ NjNi & NjNj & NjNk \\ NkNi & NkNj & NkNk \end{bmatrix} dx dy \begin{bmatrix} \dot{h}_i \\ \dot{h}_j \\ \dot{h}_k \end{bmatrix}$$

Igualando-se os lados direito e esquerdo da última equação e integrando-se a matriz de armazenamento (C_{-e}), tem-se para um elemento triangular linear:

$$c = \frac{S \cdot A}{12} * \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Onde:

- S – é o coeficiente de armazenamento.
- A – a área do elemento triangular, [L^2];

S para o caso de um aquífero não-confinado é dado por:

$$S = S_o \cdot b$$

Onde:

- S_o – é o coeficiente de armazenamento específico;

Já para o caso confinado o coeficiente de armazenamento é igual a porosidade drenável;

A matriz de armazenamento tem um comportamento semelhante à matriz K , ou seja:

$$C_{N,N} = \sum_{i=1}^E C_{-e}$$

Onde:

- N – é o número de nós;
- E – é o número de elementos.

Desta forma, chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1N} \\ C_{N1} & & & \dots \\ \dots & & & \\ C_{N1} & \dots & C_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dots \\ \dot{h}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ K_{N1} & & & \dots \\ \dots & & & \\ K_{N1} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_N \end{bmatrix}$$

Ou

$$[C]\left[\dot{h}\right] + [K][h] = [Q] \quad (\text{Equação C.18})$$

Que deve ser integrado no tempo.

Discretização do tempo

A parte da equação relativa ao tempo pode ser discretizada através da regra do trapézio, ou seja, o método de *Crank-Nicholson*. A partir da figura C.4, tem-se as seguintes equações:

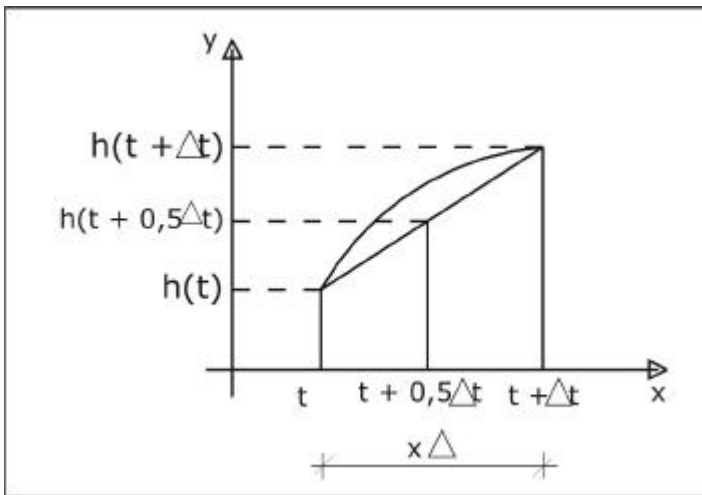


Figura C.4 - Método de Crank-Nicholson.

$$\dot{h}\left(t + \frac{1}{2}\Delta t\right) = \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}$$

Da mesma forma para o fluxo tem-se:

$$\dot{Q}\left(t + \frac{1}{2}\Delta t\right) = \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t}$$

Substituindo-se as duas equações anteriores na equação C.18, tem-se:

$$C \cdot \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} + K \cdot \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{2} = \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{2}$$

Ou ainda:

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \cdot C + \frac{1}{2} \cdot K\right) \cdot h(t + \Delta t) = \left(\frac{1}{\Delta t} \cdot C - \frac{1}{2} \cdot K\right) \cdot h(t) + \frac{1}{2} \cdot [Q(t + \Delta t) + Q(t)] \quad (\text{Equação C.19})$$

Em resumo, têm-se os seguintes termos da equação C.19:

- C - Matriz do sistema com as propriedades do coeficiente de armazenamento;
- K - Matriz do sistema com as propriedades do coeficiente de condutividade;

- $h(t + \Delta t)$ – Vetor com os potenciais hidráulicos no tempo $(t + \Delta t)$, incógnita do problema;
- $h(t)$ – Vetor com os potenciais hidráulicos no tempo t , que é um dado de entrada do problema, mais precisamente a condição inicial do sistema;
- Vetor com as vazões do sistema no tempo $t + \Delta t$, é o estado final do sistema, em termos de vazões;
- Vetor com as vazões do sistema no tempo t , este vetor também é condição inicial do sistema;

Assim, chega-se ao final da aplicação do MEF para resolução das equações diferenciais parciais utilizadas para representar o fluxo d'água subterrânea. Salienta-se que a aplicação foi desenvolvida para elementos triangulares, compostos por três nós, onde os potenciais hidráulicos e os fluxos são calculados.