

## APÊNDICE B – DETALHAMENTO DAS EQUAÇÕES DO FLUXO SUBTERRÂNEO

Neste apêndice, são deduzidas as equações diferenciais parciais que governam o fluxo nos meios porosos saturados.

### B1 – Equações Fundamentais do Fluxo Subterrâneo

Simular o fluxo de águas subterrâneas significa resolver analítica ou numericamente equações diferenciais parciais, no caso em questão de segunda ordem e nas direções X e Y. Para tanto, parti-se da aplicação de lei de Darcy (Equação B.1) aplicada na direção X. Nas direções Y e Z equações semelhantes são também obtidas. A equação mostra que, a vazão é proporcional a diferença de pressão, ou seja:

$$q_x = -K_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{Equação B.1})$$

Aplicando-se a equação da continuidade em um volume elementar (Figura B.1), tem-se:

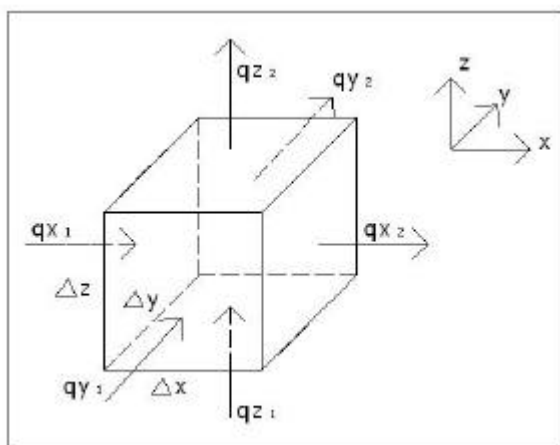


Figura B.1 – Volume elementar.

Onde:

$\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$  – são as dimensões na direção X, Y e Z, [L];

$qx_n$  – são os fluxos de entrada e saída nas três direções, [L/T];

O volume d'água que flui através das seções deste volume de controle na direção X é dado por:

$$qx_1 \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad \text{e} \quad qx_2 \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

Aplicando-se a equação da continuidade nesta direção, tem-se:

$$(qx_2 - qx_1) \cdot \Delta y \cdot \Delta z = 0$$

Já para todo o volume de controle a aplicação da equação da continuidade resultará em:

$$(qx_2 - qx_1) \cdot \Delta y \cdot \Delta z + (qy_2 - qy_1) \cdot \Delta x \cdot \Delta z + (qz_2 - qz_1) \cdot \Delta x \cdot \Delta y = 0$$

Dividindo-se esta equação pelo volume deste volume de controle, que é dado por  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ , tem-se:

$$\frac{qx_2 - qx_1}{\Delta x} + \frac{qy_2 - qy_1}{\Delta y} + \frac{qz_2 - qz_1}{\Delta z} = 0$$

Ou seja:

$$\frac{\Delta qx}{\Delta x} + \frac{\Delta qy}{\Delta y} + \frac{\Delta qz}{\Delta z} = 0 \quad \text{(Equação B.2)}$$

Caso este volume de controle tenha dimensões infinitesimais a equação B.2 transforma-se em, tem-se:

$$\frac{\partial qx}{\partial x} + \frac{\partial qy}{\partial y} + \frac{\partial qz}{\partial z} = 0 \quad \text{(Equação B.3)}$$

Substituindo-se os termos qx, qy e qz pela equação de Darcy (Eq. B.1) na equação anterior (Eq. B.3), tem-se então:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -K_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -K_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( -K_z \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{(Equação B.4)}$$

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad \text{(Equação B.5)}$$

Ou seja, uma equação diferencial parcial de segunda ordem em três dimensões (X, Y e Z). No caso de se ter um aquífero homogêneo, ou seja, a condutividade hidráulica igual em todas as direções ( $K_x = K_y = K_z$ ), tem-se:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{Equação B.6})$$

Esta equação é mais conhecida como a equação de Laplace. Neste caso, para condições estacionárias, com o potencial hidráulico variando em três direções para aquíferos confinados. Para o caso em estudo, a simulação do fluxo d'água será realizada para variações em duas direções (X e Y) e aquífero anisotrópico e não homogêneo. Assim, tem-se a seguinte equação:

$$K_x \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Equação B.7})$$

A seguir, tem-se uma situação onde há uma injeção no aquífero (infiltração) ou uma captação (exfiltração) no aquífero. Situação esta representada na figura B.2, já se direcionando para o caso específico de simulações em 2 dimensões (2D).

Figura B.2 – Caso 2D com in ou exfiltração.

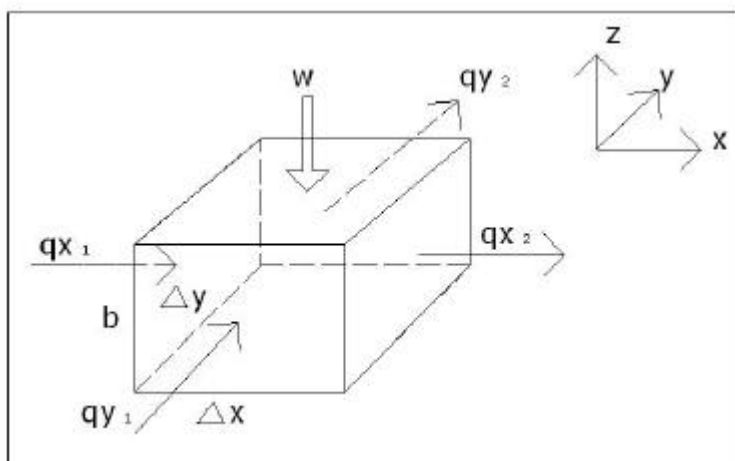


Figura B.2 – Volume elementar com contribuição de uma fonte externa.

Aplicando-se novamente a equação da continuidade ao segundo volume de controle, tem-se:

$$(qx_2 - qx_1).\Delta y.b + (qy_2 - qy_1).\Delta x.b = W.\Delta x.\Delta y \quad (\text{Equação B.8})$$

Onde  $b$  é a espessura do aquífero e  $W$  é uma in ou exfiltração.

Dividindo-se a equação B.11 pelas dimensões  $\Delta x.\Delta y$ , tem-se:

$$\frac{qx_2 - qx_1}{\Delta x}.b + \frac{qy_2 - qy_1}{\Delta y}.b = W \quad (\text{Equação B.9})$$

$$\frac{\Delta qx}{\Delta x}.b + \frac{\Delta qy}{\Delta y}.b = W \quad (\text{Equação B.10})$$

Para o caso de um volume infinitesimal tem-se:

$$\frac{\partial qx}{\partial x}.b + \frac{\partial qy}{\partial y}.b = W \quad (\text{Equação B.11})$$

Aplicando-se a equação de Darcy (Equação B.1) equação B.11, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -K_x.b.\frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -K_y.b.\frac{\partial h}{\partial y} \right) = W \quad (\text{Equação B.12})$$

$$-K_x.b.\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - K_y.b.\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = W \quad (\text{Equação B.16})$$

Para o caso homogêneo as condutividades hidráulicas nas direções X e Y são iguais

( $K_x = K_y$ ), tem-se:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -\frac{W}{K.b} \quad (\text{Equação B.17})$$

Sabendo-se ainda que a transmissividade (T) é dada por  $T = K.b$ , tem-se então:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{W(x,y)}{K.b} = 0 \quad (\text{Equação B.18})$$

Esta equação é utilizada para simulações de sistemas em que há afluxos (descarga do aquífero para os rios) ou influxos (recarga por infiltração).

Nota-se que, até este parágrafo, nas equações deduzidas não foram consideradas variações do potencial hidráulico (h) no tempo. Ou seja, as equações foram apresentadas para o caso estacionário. Necessita-se então, inserir ou considerar a componente não

estacionária no equacionamento até agora apresentado. Nesta situação, tem-se que o potencial hidráulico ( $h$ ) varia não só no espaço ( $x, y$ ), como considerado até o momento, mas também no tempo ( $t$ ). Assim, surge a necessidade de se considerar mais uma propriedade que depende das propriedades hidráulicas e geométricas do aquífero, o coeficiente de armazenamento ( $S$ ), ou seja:

$$S = S_0 \cdot b \quad (\text{Para aquíferos confinados})$$

$$S = n_s \quad (\text{Para aquíferos livres})$$

Onde:

$n_s$  – é a porosidade drenável;

Sabendo-se ainda que  $S_0$  é dado por:

$$S_0 = \frac{-1}{V} \left( \frac{\Delta V}{\Delta h} \right) \quad \rightarrow \quad S_0 = \frac{-1}{b \cdot \Delta x \cdot \Delta y} \left( \frac{\Delta V}{\Delta h} \right)$$

Assim:

$$S = \frac{-1}{b \cdot \Delta x \cdot \Delta y} \left( \frac{\Delta V}{\Delta h} \right) \cdot b$$

$$\Delta V = -S \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta h$$

Como neste caso o potencial hidráulico e o volume variam com o tempo, tem-se então:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = -S \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \frac{\Delta h}{\Delta t} \quad (\text{Equação B.19})$$

Considerando-se a variação do volume no tempo, ou seja, aplicando-se a equação B.19 na equação B.8, tem-se:

$$(qx_2 - qx_1) \cdot \Delta y \cdot b + (qy_2 - qy_1) \cdot \Delta x \cdot b = W \cdot \Delta x \cdot \Delta y - S \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \frac{\Delta h}{\Delta t} \quad (\text{Equação B.20})$$

Dividindo-se esta equação por  $\Delta x \cdot \Delta y$ , tem-se:

$$\frac{qx_2 - qx_1}{\Delta x} \cdot b + \frac{qy_2 - qy_1}{\Delta y} \cdot b = W - S \cdot \frac{\Delta h}{\Delta t} \quad (\text{Equação B.21})$$

$$\frac{\Delta qx}{\Delta x} \cdot b + \frac{\Delta qy}{\Delta y} \cdot b = W - S \cdot \frac{\Delta h}{\Delta t} \quad (\text{Equação B.22})$$

Para o caso de dimensões infinitesimais, tem-se:

$$\frac{\partial qx}{\partial x} \cdot b + \frac{\partial qy}{\partial y} \cdot b = W - S \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{Equação B.23})$$

Aplicando-se a equação de Darcy a este equação tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -K_x \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -K_y \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) = W - S \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{Equação B.24})$$

$$K_x \cdot b \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \cdot b \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = S \cdot \frac{\partial h}{\partial t} - W \quad (\text{Equação B.25})$$

Sabendo-se que  $T = K \cdot b$  e considerando-se o caso de um aquífero homogêneo, tem-se então:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S(x, y)}{T} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{W(x, y)}{T} \quad (\text{Equação B.26})$$

Esta é a equação diferencial parcial que será utilizada para modelar o fluxo das águas subterrâneas em aquífero confinados, para variações do potencial hidráulico em duas dimensões (2D) em regime transiente.

Também se faz necessário considerar o caso de superfícies livres, ou seja, aquífero não confinados. Nesta situação, necessita-se considerar dois fatores, a primeira consideração diz respeito à variação não-linear entre o potencial hidráulico e a espessura do aquífero ( $b = f(h)$ ); a segunda trata da terceira componente existente no fluxo. A figura B.3 apresenta uma esquematização do problema da simulação em aquíferos livres.

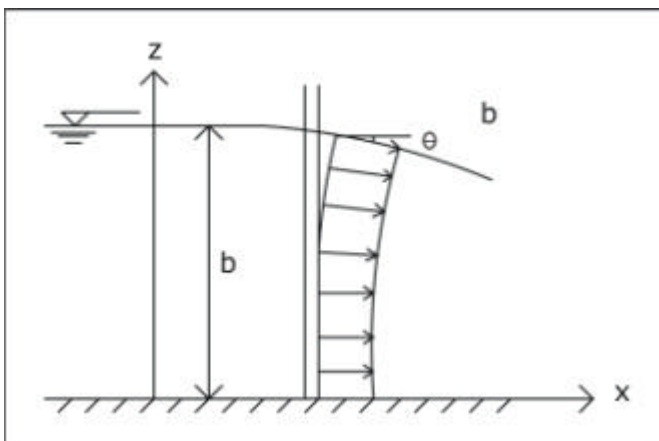


Figura B.3 – Fluxo subterrâneo em aquíferos livres.

Para resolução deste problema as condições de Dupuit (1863, apud WENDLAND & RÜBER, 1999) devem ser consideradas:

- O fluxo d'água é considerado horizontal e suas equipotenciais verticais;
- A declividade da linha de fluxo na superfície freática é considerada muito pequena e igual ao gradiente hidráulico;

Desta forma, a variação do potencial na direção do escoamento ( $dh/ds$ ) pode ser escrita como:

$$q_s = -K_s \cdot \frac{dh}{ds} \quad \rightarrow \quad q_s = -K_s \cdot \text{sen}(\mathbf{q}) \quad (\text{Equação B.27})$$

Para ângulos muito pequenos o seno do ângulo  $\theta$  se aproxima à tangente de  $\theta$ , desta forma tem-se:

$$\frac{dh}{ds} = \text{sen}(\mathbf{q}) \cong \text{tg}(\mathbf{q}) = \frac{dh}{dx} \quad (\text{Equação B.28})$$

Assim, tem-se que a equação B.27 pode ser escrita em função de suas componentes das direções x, y e z, ou seja:

$$q_x = -K_x \cdot \frac{dh}{dx}$$

$$q_y = -K_y \cdot \frac{dh}{dy}$$

$$q_z = 0$$

Pelo fato de Dupuit considerar o escoamento horizontal, estas considerações não são validas para os seguintes casos:

- Áreas próximas a regiões com infiltração ou extração d'água;
- Zonas próximas a poços;
- Áreas com mudança brusca da espessura do aquífero;

Já o primeiro problema da modelagem em aquíferos livres é representado matematicamente através das seguintes equações:

$$q_x = -K_x \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{(Equação B.29)}$$

$$q_y = -K_y \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{(Equação B.30)}$$

Onde b (espessura do aquífero) é dado por:

$$b(x,y) = h(x,y) - u(x,y) \quad \text{(Equação B.31)}$$

Ainda, tem-se que:

$h(x,y)$  – potencial hidráulico, [L];

$u(x,y)$  – cota da base do aquífero, [L];

Assim, na fase de simulações deve-se estimar, inicialmente, valores de b, com estes valores simula-se o sistema. Para cada nó obtêm-se valores de potenciais hidráulicos. Com estes valores e, conhecidos também os valores nos nós das cotas da base do aquífero, calcula-se o valor de b através da equação B.31. Estes valores não serão iguais ao valor do b inicialmente estimado. Procede-se então com iterações, onde o b será igual ao valor de  $h(x,y)$  médio calculado, até a convergência do valor dos potenciais hidráulicos para o valor de b.

Por fim, são abordadas as condições de contorno necessárias para resolução numérica de equações diferenciais, três tipos de condições de contorno são possíveis:



- I. Condição de Dirichlet – quando o potencial hidráulico é conhecido em alguma região do aquífero;
- II. Condição de Neumann – quando o fluxo, seja de entrada ou de saída, em alguma região do aquífero é conhecida;
- III. Condição de Cauchy – esta é uma combinação linear das duas últimas condições apresentadas.