

Carlos Eduardo Milhor

**PROPOSTA DE UM CONTROLADOR
DIFUSO TAKAGI-SUGENO COM
DESEMPENHO \mathcal{H}_∞ PARA REGULAGEM DA
MARCHA LENTA EM MOTORES DE
CICLO OTTO**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Luís Carlos Passarini

São Carlos

2008

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

M644p Milhor, Carlos Eduardo
Proposta de um controlador difuso Takagi-Sugeno com desempenho H_{∞} para regulagem da marcha lenta em motores de ciclo Otto/ Carlos Eduardo Milhor ; orientador Luís Carlos Passarini. -- São Carlos, 2008.

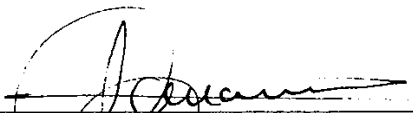
Tese (Doutorado-Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Área de Concentração Dinâmica das Máquinas e Sistemas) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2008.

1. Motores ciclo Otto. 2. Controle difuso. 3. Controle de motores. 4. Marcha lenta. I. Título.

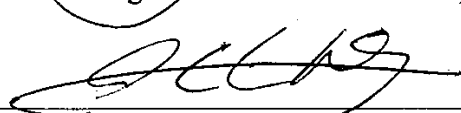
FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **CARLOS EDUARDO MILHOR**

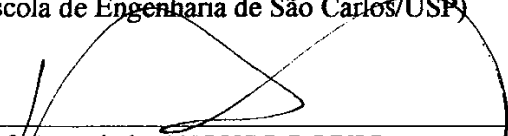
Tese defendida e julgada em 22/02/2008 perante a Comissão Julgadora:



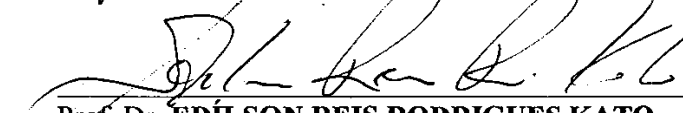
Prof. Dr. **LUIS CARLOS PASSARINI (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) APROVADO



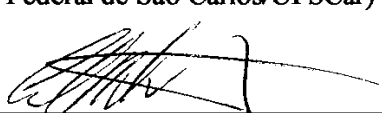
Prof. Dr. **ALVARO COSTA NETO**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) APROVADO



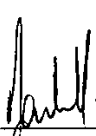
Prof/Associado **AFONSO LOPES**
(Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho"/UNESP-Campus de Jaboticabal) APROVADO



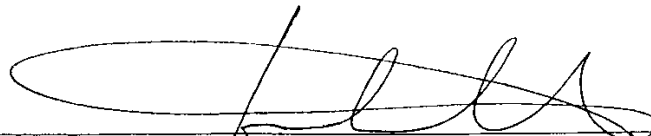
Prof. Dr. **EDILSON REIS RODRIGUES KATO**
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar) APROVADO



Dr. **CARLOS MAGNO DE OLIVEIRA VALENTE**
(Sensoft Indústria e Automação Ltda.) APROVADO



Prof. Associado **JONAS DE CARVALHO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica



Prof. Associado **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**
Presidente da Comissão da Pós-Graduação da EESC

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Luis Carlos Passarini pela orientação, aos colegas do Laboratório de Eletrônica Embarcada – LEE pelo companheirismo, troca de experiências e pela ajuda e ao Jaime Marini, técnico do LEE, pela amizade e suporte técnico oferecido.

Ao Prof. Dr. Antônio Moreira dos Santos, alunos e funcionários do NETeF - Núcleo de Engenharia Térmica e Fluidos da EESC, pelo apoio e amizade.

À Prof^a. Vilma Alves de Oliveira do Departamento de Engenharia Elétrica da EESC pela ajuda e esclarecimentos.

À FAPESP – Fundação de Amparo à pesquisa do Estado de São Paulo pela concessão da bolsa de doutorado e pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	<i>i</i>
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	<i>iii</i>
RESUMO	<i>v</i>
ABSTRACT	<i>vii</i>
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 OPERAÇÃO EM MARCHA LENTA	1
1.2 CONTROLE DA MARCHA LENTA EM MOTORES DE IGNIÇÃO POR CENTELHA	4
1.3 JUSTIFICATIVA E IMPORTÂNCIA DO TRABALHO	6
1.4 OBJETIVOS DO TRABALHO	13
1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	14
2 MODELAGEM E CONTROLE DIFUSO	15
2.1 CONJUNTOS DIFUSOS E LÓGICA DIFUSA	15
2.2 MODELOS DIFUSOS LINGÜÍSTICOS	19
2.3 CONTROLADOR DIFUSO MAMDANI	23
2.4 MODELAGEM E CONTROLE DIFUSO TAKAGI-SUGENO	25
3 CONTROLE DIFUSO TAKAGI-SUGENO COM DESEMPENHO \mathcal{H}_∞	36
3.1 TÉCNICA DE CONTROLE \mathcal{H}_∞	37
3.2 CONTROLE DIFUSO TAKAGI-SUGENO COM DESEMPENHO \mathcal{H}_∞	41
4 PROJETO DO CONTROLADOR DIFUSO TAKAGI-SUGENO COM DESEMPENHO \mathcal{H}_∞ PARA REGULAGEM DA MARCHA LENTA	45
4.1 MODELAGEM DO MOTOR	46

4.2	MODELAGEM E CONTROLE DIFUSO DO MOTOR EM REGIME DE MARCHA LENTA	49
5	CONCLUSÕES E PROPOSIÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	66
	LITERATURA REFERENCIADA	68
	LITERATURA CONSULTADA	75
	APÊNDICE A - NOÇÕES BÁSICAS SOBRE MOTORES DE COMBUSTÃO INTERNA CICLO OTTO	77
	APÊNDICE B – DEFINIÇÕES BÁSICAS	80
	APÊNDICE C - CÓDIGOS MATLAB UTILIZADOS	84
	ANEXO A – DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES	92

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA DOS CONJUNTOS DIFUSOS DAS TEMPERATURAS.	17
FIGURA 2 – ESTRUTURA BÁSICA DE UM SISTEMA DIFUSO.	21
FIGURA 3 – SISTEMA COM INFERÊNCIA <i>MAX-MIN</i> .	24
FIGURA 4 – PROJETO DE CONTROLADORES DIFUSOS BASEADOS EM MODELAGEM.	28
FIGURA 5 – REPRESENTAÇÃO PADRÃO 2-BLOCOS.	37
FIGURA 6 – FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA ADOTADAS.	53
FIGURA 7 – SISTEMA DE CONTROLE DIFUSO EM MALHA FECHADA.	54
FIGURA 8 – REPRESENTAÇÃO DOS MODELOS LINEARES LOCAIS COM FUNÇÕES DE PONDERAÇÃO.	55
FIGURA 9 – REPRESENTAÇÃO PADRÃO 2-BLOCOS.	55
FIGURA 10 – PRESSÃO NO COLETOR PARA O CONTROLADOR COM $\gamma = 1,25$.	58
FIGURA 11 – ROTAÇÃO DO MOTOR PARA O CONTROLADOR COM $\gamma = 1,25$.	59
FIGURA 12 – AÇÃO DE CONTROLE DA BORBOLETA PARA O CONTROLADOR COM $\gamma = 1,25$.	59
FIGURA 13 – AÇÃO DO AVANÇO DA CENTELHA PARA O CONTROLADOR COM $\gamma = 1,25$.	59
FIGURA 14 – PRESSÃO NO COLETOR PARA O CONTROLADOR COM $\gamma = 1,4$.	61
FIGURA 15 – ROTAÇÃO DO MOTOR PARA O CONTROLADOR COM $\gamma = 1,4$.	62
FIGURA 16 – AÇÃO DE CONTROLE DA BORBOLETA PARA O CONTROLADOR COM $\gamma = 1,4$.	62
FIGURA 17 – AÇÃO DO AVANÇO DA CENTELHA PARA O CONTROLADOR COM $\gamma = 1,4$.	62
FIGURA 18 – PRESSÃO NO COLETOR PARA O CONTROLADOR COM $\gamma = 1,4$ ATUANDO NO MODELO DO MOTOR NÃO LINEAR.	63
FIGURA 19 – ROTAÇÃO DO MOTOR PARA O CONTROLADOR COM $\gamma = 1,4$ ATUANDO NO MODELO DO MOTOR NÃO LINEAR.	63
FIGURA 20 – AÇÃO DA BORBOLETA DE ACELERAÇÃO PARA O CONTROLADOR COM $\gamma = 1,4$, ATUANDO NO MODELO DO MOTOR NÃO LINEAR.	64

FIGURA 21 - AÇÃO DO AVANÇO DA CENTELHA PARA O CONTROLADOR COM $\gamma = 1,4$, ATUANDO NO MODELO DO MOTOR NÃO LINEAR. 64

FIGURA 22 - CICLO DE TRABALHO DE UM MOTOR CICLO OTTO. [ROBERT BOSCH GMBH (1993), P. 7, FIG. 4] 78

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ARX – Modelo (linear) auto-regressivo com entrada externa (*autoregressive with exogenous input*);

LMI – Desigualdades matriciais lineares (*Linear Matrix Inequalities*);

MBT – Avanço da centelha para o máximo troque produzido (*minimum advance for best timing*);

NARMAX – Modelo não linear auto-regressivo, de média móvel com entrada externa (*Nonlinear autoregressive moving average with exogenous input model*);

NARX – Modelo não-linear auto-regressivo com entrada externa (*Nonlinear autoregressive with exogenous input model*);

PMS – Ponto Morto Superior;

SCML – Sistema de Controle da Marcha Lenta;

RESUMO

MILHOR, C. E. **Proposta de um controlador difuso Takagi-Sugeno com desempenho \mathcal{H}_∞ para regulagem da marcha lenta em motores de ciclo Otto.** 2007. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

Propõe-se um controlador difuso Takagi-Sugeno com índice de desempenho \mathcal{H}_∞ para regulagem da marcha lenta em motores de ciclo Otto. Obtém-se uma representação difusa do motor de ciclo Otto operando em marcha lenta. Esse modelo é utilizado para a síntese do controlador. O controlador difuso com desempenho \mathcal{H}_∞ é projetado para rejeitar o efeito de distúrbios de cargas externas sobre a rotação do motor em regime de marcha lenta. As ações de controle, posição da borboleta de aceleração e ponto de ignição, são limitadas a uma faixa de operação específica para a marcha lenta. O controlador projetado apresenta ação de controle por realimentação de estados. Os ganhos de realimentação para cada regra do controlador difuso são obtidos a partir de um problema de otimização formulado através de LMIs.

Palavras-chave: Motores ciclo Otto, controle difuso, controle de motores, marcha lenta.

ABSTRACT

MILHOR, C. E. **Otto cycle engine idle speed \mathcal{H}_∞ Takagi-Sugeno fuzzy control.** 2007. Thesis (Doctoral) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

It is proposed an Otto cycle engine idle speed \mathcal{H}_∞ Takagi-Sugeno fuzzy control. It is presented an Otto cycle engine idle speed fuzzy model. This model is then used to control design. The \mathcal{H}_∞ fuzzy control is designed to reject external load disturbance effect at idle speed engine rotation. A specific idle speed operation range is defined to both actions control, throttle plate position and spark advance. A state feedback control is designed. A LMI optimization problem is used to find the state feedback gains at each fuzzy control rule.

Keywords: Otto cycle engine, fuzzy control, engine control, idle speed.

1 Introdução

O problema de gerenciar o funcionamento dos motores de combustão interna para aplicações veiculares tem sido um importante objeto de estudo. Isso se deve à grande importância da questão da poluição ambiental e o impacto da utilização dos combustíveis fósseis no meio ambiente, além do possível esgotamento das fontes de petróleo. Nesse contexto, tem sido incessantemente abordado na literatura o desenvolvimento de estratégias de controle para aplicação nas diferentes condições de funcionamento do motor. Tais estratégias têm por objetivo manter o desempenho do motor em níveis satisfatórios e, ao mesmo tempo, cumprir os requisitos de emissões de gases poluentes e, em determinados países, obedecer a determinados limites de consumo de combustível de acordo com a legislação vigente em cada país.

O estudo de técnicas para controle de motores a combustão interna é segmentado. Os trabalhos são realizados no sentido de desenvolver controladores para funções específicas, em meio a todas as condições de funcionamento do motor. Neste projeto será considerado o caso do controle da marcha lenta nos motores de ciclo Otto. Esse é um dos modos, se não o mais crítico, do controle do motor. O controle da marcha lenta é encarado como uma malha de controle separada do resto do sistema de controle do motor. Isso se deve ao fato da marcha lenta, quando comparada às demais condições de operação, ter características bem distintas e especiais em termos de funcionamento e ações de controle.

Na próxima seção será feita uma análise das principais características de funcionamento de um motor a combustão interna de ciclo Otto, em operação no regime de marcha lenta.

1.1 Operação em marcha lenta

A marcha lenta corresponde à condição de funcionamento do motor na qual o pedal do acelerador não está sendo acionado, a borboleta de aceleração apresenta abertura mínima, o

regime de rotação do motor está na faixa de 800 a 1200 rpm (dependendo do motor e de sua temperatura) e o virabrequim não está transmitindo torque para o sistema de transmissão. O Apêndice A contém uma breve descrição do funcionamento dos motores de ciclo Otto. Mais detalhes a respeito dos motores de combustão interna podem ser encontradas em Lumley (1999). Informações a respeito dos sistemas de gerenciamento eletrônico dos motores de combustão interna podem ser encontradas em Robert Bosch GmbH (1993), Ribbens e Mansour (1998) e Milhor (2002).

No regime de marcha lenta, a velocidade de deslocamento dos pistões é baixa. Isso promove um escoamento do ar através do coletor de admissão pouco favorável à formação adequada de mistura ar-combustível para produzir uma boa queima dentro da câmara de combustão. Além disso, o cruzamento de válvulas¹ faz com que uma quantidade relativamente grande de gases resultantes da combustão do ciclo anterior esteja presente no interior da câmara de combustão, juntamente com a mistura ar-combustível recém formada. Esses dois fatores, velocidade média dos pistões baixa e cruzamento de válvulas afetam de maneira negativa a qualidade e estabilidade da combustão no regime de marcha lenta. Devido à grande não homogeneidade da mistura ar-combustível na marcha lenta, a variabilidade da combustão ciclo a ciclo é mais acentuada se comparada às condições em que a rotação do motor é maior. A combustão da mistura ar-combustível está diretamente relacionada com a produção de torque. Conseqüentemente, com uma baixa qualidade da combustão, a produção de torque será comprometida.

Uma parcela do torque produzido pelo motor compensar o torque de atrito entre os componentes móveis do motor. Além do torque de atrito existe uma outra parcela que contribui para o aumento do que será chamado de torque resistente. Essa parcela corresponde ao torque gerado pelo acionamento de acessórios do veículo, chamado aqui de torque das cargas externas. Portanto, o torque resistente é composto pelo torque de atrito e pelo torque das cargas externas.

¹ Recurso utilizado para melhorar o desempenho em altas rotações. Por um breve momento as válvulas de admissão e escape estão ambas abertas. Em regimes de altas rotações esse recurso proporciona um melhor enchimento dos cilindros. Em baixas rotações gases já queimados contaminam a carga de mistura ar-combustível admitida, prejudicando a combustão e conseqüentemente causando instabilidade no funcionamento do motor.

Os principais acessórios do veículo que contribuem para a geração do torque de cargas externas são²:

- Sistema condicionador de ar;
- Sistema de direção hidráulica;
- Sistemas elétricos do veículo.

Em cada um desses sistemas, há um ou mais componentes que são acionados pelo motor do veículo.

No sistema condicionador de ar, é o compressor do circuito de refrigeração. Quando o sistema condicionador de ar é acionado, o motor do veículo é quem fornece a energia necessária para o compressor atuar no circuito de refrigeração. Logo, uma parte do torque produzido pelo motor é consumida pelo compressor.

No sistema de direção hidráulica, é uma bomba hidráulica. Esta é responsável pela pressurização do circuito para o esterçamento das rodas do veículo. A bomba hidráulica pode ter acionamento mecânico ou elétrico. O acionamento mecânico é feito por um acoplamento com o eixo virabrequim. No caso do acionamento elétrico, é consumida energia gerada pelo alternador do veículo. O alternador por sua vez está acoplado ao virabrequim. O sistema de direção hidráulica, portanto, utiliza a energia do motor do veículo para auxiliar o motorista em manobras. A condição mais crítica do sistema de direção hidráulica ocorre quando o veículo está parado e as rodas são esterçadas. Nessa condição os pneus oferecem maior resistência ao esterçamento e essa carga é aplicada ao motor do veículo que se encontra em marcha lenta. A solicitação sobre o motor será máxima quando as rodas estiverem completamente esterçadas.

No sistema elétrico do veículo, toda a energia elétrica é gerada pelo alternador que fornece energia também para repor a carga da bateria. A bateria do veículo atua como fonte de energia elétrica durante a partida do motor (para suprir o motor de partida) ou quando o motor não está em funcionamento e algum circuito elétrico é ativado. O alternador é movido pelo virabrequim do motor. Quanto maior a carga elétrica absorvida, ou seja, quanto maior a corrente elétrica consumida pelo sistema, maior é o torque resistente aplicado ao motor do veículo.

² As parcelas de torque geradas pela bomba de água e bomba do óleo são consideradas no torque de atrito.

Na condição de marcha lenta, o motor apresenta a menor inércia se comparado às outras condições, pois o virabrequim não está acoplado ao sistema de transmissão do veículo. Isso faz com que a variação cíclica do torque afete significativamente a rotação do motor. A variação cíclica do torque é função da qualidade da combustão. Somado ao efeito provocado pela qualidade da combustão, o torque das cargas externas contribui para que as amplitudes de variação da rotação sejam ainda maiores. Além de passar ao motorista uma sensação desagradável, tais variações comprometem a dirigibilidade do veículo e, em casos extremos, podem fazer com que o motor pare de funcionar.

1.2 Controle da marcha lenta em motores de ignição por centelha

O objetivo principal do sistema de controle da marcha lenta (SCML) é fazer com que a rotação do motor permaneça no valor de referência mesmo na presença de distúrbios de torque gerados pelas cargas externas. Visto que a condição de operação do motor em marcha lenta está fora da região de melhor desempenho do motor, cabe ao sistema de controle atuar no sentido de fazer com que o motor gere o torque suficiente para compensar o torque resistente e opere obedecendo às imposições de consumo de combustível, níveis de emissões e dirigibilidade.

Uma simples e fácil solução seria aumentar o valor de rotação de regime na marcha lenta. A dinâmica dos gases e de formação da mistura ar-combustível melhorariam e o motor operaria em uma região com maior capacidade de gerar torque para suprir o torque resistente. Porém essa solução vai contra as exigências de menor consumo de combustível e menores índices de emissão de poluentes. O constante crescimento da frota veicular e do tráfego nos grandes centros urbanos tornam as condições em que o veículo permanece em marcha lenta uma questão de extrema importância. Segundo Jurgen (1995)³ apud Thornhill, Thompson e Sindano (2000), o consumo durante o tempo em que o veículo permanece funcionando em marcha lenta corresponde, em média, a 30% do consumo de combustível em um trajeto urbano.

Para regular a rotação do motor em marcha lenta, o sistema de controle da marcha lenta atua sobre a quantidade de ar admitido pelo motor e no ponto da ignição.

³ JURGEN, R. (1995). *Automotive electronics handbook*. New York, NY. McGraw-Hill.

Na condição de marcha lenta, a quantidade de ar admitida no motor ciclo Otto é determinada em função da restrição que é imposta ao fluxo de ar no coletor de admissão. Essa restrição pode ser obtida diretamente pela posição da borboleta de aceleração. Nesse caso, a borboleta de aceleração é acionada por um motor elétrico. Outra forma de se restringir o fluxo de ar se dá por um desvio (*by-pass*), onde há um obturador acionado por um motor elétrico. O obturador restringe ou alivia a passagem de ar para formar a mistura ar-combustível.

Perante a necessidade de produção de mais torque, o sistema de controle da marcha lenta atua no sentido de aumentar a massa de ar admitida pelo motor. Com isso aumenta-se a carga (massa de combustível e ar para a combustão) que por sua vez, aumenta o torque produzido pelo motor. As características dinâmicas do fluxo de ar no coletor de admissão mais o tempo transcorrido entre a formação da mistura durante as fases de admissão e compressão, fazem com que a ação sobre a quantidade de ar admitido não produza uma resposta rápida na produção de torque de modo a permitir uma compensação ciclo a ciclo. Esse atraso na resposta da ação da borboleta é um dos principais fatores de deterioração do desempenho do sistema de controle da marcha lenta.

O ponto da ignição corresponde à posição angular do virabrequim em relação ao ponto morto superior (PMS) em que se inicia o processo de centelhamento para combustão da mistura ar-combustível. Considerando rotação e razão ar-combustível constantes, o torque produzido pelo motor aumenta na medida em que se aumenta o avanço da ignição. Porém, a partir de um determinado ponto, aumentando-se o avanço o torque diminui. O avanço em que ocorre o máximo torque é conhecido na literatura como MBT (do inglês *minimum advance for best torque*). Esse ponto varia em função da rotação e da pressão no coletor de admissão (carga do motor). A faixa de variação do avanço está entre zero grau (no PMS) e o ponto MBT.

Durante a marcha lenta, para compensar os desvios da rotação, o controlador varia o ponto da ignição para alterar o torque produzido. Ao contrário do que ocorre na malha de controle da quantidade de ar admitido, a variação do ponto da ignição tem uma resposta rápida, que somada às características de *hardware* da unidade de controle torna possível fazer uma compensação ciclo a ciclo na produção de torque. Em contra partida, sua faixa de atuação é pequena. A produção de torque em função da ação sobre o ponto de ignição é limitada e de magnitude menor se comparada à produção de torque por meio da ação sobre a quantidade de ar admitido. Portanto, a ação sobre a quantidade de ar admitido tem mais autoridade para atuar perante desvios elevados da rotação. Já a ação sobre o ponto da ignição

promove ao controlador velocidade de resposta perante variações bruscas e de baixa amplitude na rotação.

Atuando nessas duas variáveis o sistema de controle da marcha lenta determina a quantidade de ar admitida e o avanço da ignição para que o motor produza o torque necessário para compensar variações na rotação devido ao torque das cargas externas.

Como realimentação, o sistema de controle da marcha lenta (SCML) pode utilizar a medida da rotação e, em alguns casos, da pressão no coletor de admissão. A medida da rotação é utilizada como realimentação em todos os sistemas para regulagem da marcha lenta, visto que essa é a principal variável controlada. Porém alguns SCML podem utilizar a medida da pressão no coletor de admissão para garantir que a rotação não sofra grandes oscilações durante a entrada no regime de marcha lenta.

Além dessas duas variáveis utilizadas para realimentação, alguns fabricantes utilizam sinais indicativos de acionamento de cargas como pré-alimentação (*feedforward*). Com isso pode-se antecipar a ação do controlador perante o acionamento de acessórios do veículo.

1.3 Justificativa e importância do trabalho

O motor de combustão interna, ao longo de sua vida útil, sofre alterações em seu funcionamento devido ao desgaste ou envelhecimento de componentes e acúmulo de resíduos em partes do motor. Além disso, variações nas condições ambientais como temperatura e umidade do ar e a própria variação de temperatura do motor também contribuem para alterar seu funcionamento.

Outro fator importante que deve ser levado em consideração quando se trata do projeto do SCML, é o fato do comportamento dinâmico do motor em marcha lenta não ser linear e este comportamento é exibido quando a condição de operação varia, principalmente em função da rotação e carga do motor.

Como explica Bhatti, Spurgeon e Dorey (2000), tradicionalmente na indústria automobilística o problema de controle da marcha lenta é solucionado a partir de compensações em função das cargas ou acessórios utilizados no veículo, através de pré-alimentação (*feedforward*) e do uso de tabelas de consultas (*look-up tables*). A formulação das tabelas de consulta exige tempo significativo de ensaio, que acarreta alto custo de desenvolvimento. Além disso, tais soluções não levam a uma boa resposta e a capacidade de

rejeição de perturbação do sistema pode ser comprometida caso o número de acessórios seja maior do que originalmente constava no veículo.

Todas as particularidades relacionadas ao controle da marcha lenta têm atraído a atenção de pesquisadores. Nesse contexto, uma ampla variedade de técnicas de projeto de controladores tem sido desenvolvida. Como mostra Hrovat e Sun (1997), são consideradas técnicas como o controlador PID, técnicas de projeto de controladores ótimo, técnicas de projeto de controladores robusto, controle preditivo e aplicação de lógica *fuzzy* e redes neurais.

Os próximos parágrafos mostram o resultado do levantamento bibliográfico realizado referentes à questão do controle de marcha lenta nos motores de ciclo Otto. São listados os trabalhos mais relevantes nesta área.

Em Howell e Best (2000), é proposto um controlador PID, com ajuste inicial dos ganhos pelo método de Ziegler-Nichols. Considerando somente a borboleta de aceleração como ação de controle. Os parâmetros do controlador PID são reajustados através de um algoritmo de aprendizado.

Glielmo, Santini e Serra (1999) apresentam uma técnica de projeto baseada em controladores lineares quadráticos. O controlador proposto leva em consideração o atraso existente entre a variação nas condições do escoamento no coletor de admissão e seu efeito na produção de torque. O objetivo ao se considerar o atraso é tornar o sistema em malha fechada mais robusto (GLIELMO; SANTINI; CASCELLA, 2000).

Em Williams et al. (1989) uma proposta de controlador linear é apresentada utilizando a técnica de controle \mathcal{H}_∞ . Essa mesma técnica é analisada no trabalho de Moschetti (1992). Em ambos os trabalhos, é implementado um controlador dinâmico linear por realimentação de saída. Essa técnica de controle é um dos procedimentos de projeto mais aplicados em sistemas de controle em que se deseja rejeição de distúrbios externos. O procedimento de projeto \mathcal{H}_∞ permite especificar o nível de rejeição de distúrbios externos, o que o torna adequado à aplicação para o controle de marcha lenta.

Jayasuriya e Franchek (1994) propõem uma técnica de projeto baseado na resposta em frequência do sistema de controle da marcha lenta. Nesse trabalho a malha de controle do avanço é tratada em separado da malha de controle da borboleta de aceleração. As especificações de projeto são impostas no domínio do tempo. Os autores propõem um procedimento para se converter as especificações no domínio do tempo para o domínio da

freqüência, obtendo assim funções de transferência objetivo. Com as especificações no domínio da freqüência, se recorre a técnicas de conformação de malhas, como atraso e avanço de fase, para se chegar ao desempenho desejado. A estabilidade é garantida limitando-se o ganho em malha fechada de forma a se assegurar margens de ganho e de fase mínimos. Limites na ação de controle da válvula que regula a massa de ar admitida (*by-pass*) e do avanço da centelha, bem como o desvio máximo permitido para a rotação do motor, são as especificações de projeto.

Técnicas de projeto que proporcionem robustez ao sistema em malha fechada têm despertado grande interesse dos pesquisadores. Os motores de combustão interna são altamente incertos. Sua operação é afetada por muitos fatores, tais como, perturbações no processo de combustão, variações em parâmetros importantes para a dinâmica do motor e perturbações externas de diferentes tipos. Diante da grande quantidade de fontes de incertezas, a estabilidade e o desempenho do sistema em malha fechada precisam ser garantidos para todas as possíveis condições de operação do motor em marcha lenta.

Abate et al. (1994) fazem um estudo a respeito da robustez de estabilidade para controladores lineares, considerando que o motor pode operar em diferentes condições de cargas externas. São caracterizadas as incertezas identificando-se os parâmetros do modelo do motor em três condições de carga. As variações resultantes nos parâmetros dos modelos são consideradas como incertezas. Variações nas condições de operação e o desgaste de componentes do motor contribuem para a perda de desempenho e, em alguns casos, para a instabilidade do sistema. A utilização de incertezas no modelo utilizado para projeto do controlador contribui para aumentar a robustez do sistema de controle a ser projeto.

Hamilton e Franchek (1997), com base nos resultados obtidos no trabalho de Jayasuriya e Franchek (1994) fazem uso da mesma técnica de projeto no domínio da freqüência. Porém, em Hamilton e Franchek (1997) além das imposições de projeto, a técnica apresentada leva em consideração incertezas paramétricas no modelo utilizado para o projeto do controlador. No entanto, nesse trabalho, desconsidera-se a ação de controle do avanço da centelha. Os autores propõem uma metodologia para a obtenção do modelo a ser utilizado no projeto a partir da resposta em freqüência do motor. Segundo os autores, a vantagem da modelagem no domínio da freqüência é que a estrutura do modelo (pólos e zeros) é obtida diretamente. Além disso, as não-linearidades do sistema podem ser inferidas pelas distorções na amplitude e fase da resposta do sistema. O objetivo desta metodologia é representar o comportamento não-linear como sendo um sistema linear com incertezas inseridas no modelo.

Seguindo a mesma metodologia de projeto de Hamilton e Franchek (1997), Glass e Franchek (1999) apresentam uma técnica de projeto em que o motor é inicialmente representado por um modelo discreto não-linear com estrutura NARMAX⁴. A partir da representação não-linear, um procedimento chamado pelos autores de pseudo-linearização é aplicado para se obter uma função descritiva do motor em torno do ponto de operação em marcha lenta. A função descritiva é então utilizada para o projeto do controlador robusto no domínio da frequência, através de técnicas de conformação de malhas, conforme apresentado por Jayasuriya e Franchek (1994). Incertezas paramétricas e o atraso do motor são incorporados ao modelo pseudo-linearizado.

Em Shah e Franchek (1999), é apresentada uma metodologia para o projeto de um controlador para a marcha lenta seguindo a mesma linha de projeto no domínio da frequência de Jayasuriya e Franchek (1994). Porém, nesse trabalho, o motor é caracterizado como um sistema não-linear representado por uma classe de modelo de Hammerstein⁵. A metodologia proposta aproxima as não-linearidades do sistema e incorpora especificações de desempenho no domínio do tempo. Não se faz nenhuma restrição com relação à ação de controle. Especifica-se apenas o desvio máximo permitido para a rotação perante o distúrbio de cargas externas.

A partir dos resultados obtidos em Shah e Franchek (1999) referentes à representação do motor utilizando uma classe de modelos de Hammerstein, Glass e Franchek (2002) propõem uma metodologia de projeto utilizando a técnica de controle \mathcal{H}_∞ . É apresentado um procedimento para determinação das funções de ponderação para a síntese do controlador \mathcal{H}_∞ , onde são incorporadas as especificações de desempenho do sistema de controle em malha fechada.

De Filippi e Scattolini (2006) propõem uma técnica de projeto de um controlador linear para aplicação em um veículo de competição. Nesse trabalho é utilizada a técnica de controle \mathcal{H}_2 . Para se avaliar a robustez do controlador proposto, um conjunto de modelos com estrutura NARX⁶ são obtidos a partir de dados de entrada e saída do motor. Para a síntese do

⁴ Do inglês: *nonlinear autoregressive moving average with external input*. Estrutura de modelo não linear auto regressiva, de média móvel com entrada externa (LJUNG, 1999).

⁵ Tipo de estrutura utilizada para descrever sistemas não lineares através de uma representação linear com adição de não-linearidades estáticas na entrada (LJUNG, 1999).

⁶ Do inglês: *Nonlinear autoregressive with external input*. Estrutura de modelo não linear auto-regressivo com entrada externa (LJUNG, 1999).

controlador, um entre os vários modelos é utilizado. Posteriormente a análise de robustez é realizada, no domínio da frequência, considerando os demais modelos obtidos. A utilização de modelos NARX se justifica pela falta de dados a respeito do motor e pela grande variação que os motores sofrem durante uma temporada, visto se tratar de um motor de competição.

Os trabalhos de Hamilton e Franchek (1997), Glass e Franchek (1999), Shah e Franchek (1999), Glass e Franchek (2002) e De Filippi e Scattolini (2006), mostram a importância da escolha do modelo para síntese do controlador. Um modelo pouco representativo das dinâmicas e não-linearidades do processo pode levar a um controlador com desempenho insatisfatório.

Essa idéia é reforçada pelos resultados apresentados por De Nicolao et al. (1999), onde se faz uma análise da influência do modelo adotado sobre a resposta de um SCML, projetado utilizando um controlador linear quadrático. Faz-se uso de dois modelos do motor: um obtido a partir da linearização de um modelo NARX e outro modelo linear identificado com o método dos mínimos quadrados. Ambos os modelos representam a dinâmica do motor em torno do mesmo ponto de operação. A resposta dos controladores foi comparada. Aquele obtido utilizando a representação linearizada do modelo NARX apresentou melhores resultados. O trabalho mostra a importância de projetar controladores a partir de modelos confiáveis, os quais devem ser simples o suficiente para fácil manipulação durante a síntese do controlador, bem como representativos da dinâmica complexa e não linear do motor de combustão interna.

Modelos pouco precisos e distúrbios externos não mensuráveis são considerados as principais fontes de incertezas relacionadas à dinâmica de um sistema. Tais incertezas podem levar à caracterização da dinâmica de um sistema de maneira inadequada para a síntese do controlador. Técnicas de projeto de controladores robusto têm sido amplamente utilizadas, como foi listado nos parágrafos anteriores. Tais técnicas são empregadas quando se deseja minimizar os efeitos de um modelo com deficiências na representação das dinâmicas do sistema. Nesse caso, a dinâmica do sistema em estudo é representada por um modelo linear com adição de incertezas, por exemplo, incertezas paramétricas. Por outro lado, o grau de incertezas do sistema se não tratado com critério, pode levar a um controlador com um elevado grau de conservadorismo. Isso implica em controladores com largura de banda elevada, o que pode gerar saturação e resposta imprópria dos atuadores e, em alguns casos, instabilidade.

Uma solução que tem sido considerada é a aplicação de técnicas de controle não linear. Nesse caso, o comportamento não linear que o sistema dinâmico apresenta, ao operar em regiões afastadas do ponto de equilíbrio, é considerado durante fase de projeto do controlador.

Thornhill, Thompson e Sindano (2000) comparam diferentes métodos para o controle da marcha lenta, como o tradicional PI, diferentes abordagens não lineares como controladores *fuzzy* (adaptativo e preditivo) e controle por matriz dinâmica. O trabalho mostra o melhor desempenho apresentado pelos controladores não lineares. Ressalta-se o compromisso que se deve estabelecer entre o desempenho desejado e a complexidade da estrutura do controlador, que pode exigir maior capacidade de processamento.

Em Stotsky, Egardt e Eriksson (2000), é apresentada uma técnica de projeto de controle da marcha lenta não-linear. Nesse trabalho, propõe-se a adoção de um estimador dos distúrbios externos não mensuráveis, aplicados no motor durante a operação em marcha lenta.

Um estimador dos distúrbios externos também é estudado no trabalho de Bhatti, Spurgeon e Dorey (2000). Porém, nesse trabalho emprega-se um controlador projetado a partir da técnica de controle chamada de Modos Deslizantes. Uma superfície de deslizamento é construída levando-se em conta o desvio da rotação com relação ao valor de referência em marcha lenta.

Controladores *fuzzy* Mamdani são estudados em Martinez e Jamshidi (1993), Vachtsevanos, Farinwata e Pirovolou (1993) e Klawonn, Gebhardt e Kruse (1995). Porém, como mostra Yurkovich e Simpson (1997), os controladores *fuzzy* Mamdani apresentam a desvantagem no que diz respeito ao reajuste do controlador, para satisfazer especificações de projeto, pois para esse tipo de controlador *fuzzy* não há um procedimento de projeto que contemple tais especificações.

Yurkovich e Simpson (1997) fazem um estudo comparativo entre técnicas de controle linear e não-linear para a regulação da marcha lenta. As técnicas de controle consideradas foram o regulador linear quadrático, controlador *fuzzy* Mamdani e Modos Deslizantes. O controlador obtido utilizando regulador linear quadrático não apresentou resultados satisfatórios na simulação com o modelo não-linear, porém a estrutura desse controlador é simples e o reajuste do controlador é intuitivo. Entre os controladores não lineares, o controlador *fuzzy* apresentou o melhor resultado em simulação. Porém sua estrutura é mais complexa e o reajuste mais trabalhoso se comparado ao controlador obtido pela técnica dos

Modos Deslizantes. Este por sua vez apresenta um procedimento de projeto relativamente simples e necessidade de poucos reajustes.

Considerando ainda controladores não-lineares, as Redes Neurais Artificiais foram analisadas em Puskorius, Feldkamp e Davis Jr. (1996), Salam e Gharbi (1996) e Monnerat Jr. (2000). As redes neurais artificiais podem ser utilizadas tanto para representar a dinâmica não linear exibida pelo motor, quanto aplicar sua estrutura para o controle.

Em Puskorius, Feldkamp e Davis Jr (1996), é analisada a aplicação de uma rede neural do tipo MLP (do inglês: *multi layer perceptron*). Em função dos requisitos de processamento, optou-se por um controlador com pesos sinápticos fixos ao invés de adaptativos. O treinamento da rede é realizado utilizando uma rede neural de identificação. Uma vez ajustados os pesos sinápticos, a estrutura final da rede é mantida constante para a operação de regulação da marcha lenta. São utilizadas entradas para indicar a solicitação de torque do motor.

No trabalho de Salam e Gharbi (1996) se faz uma análise comparativa entre a utilização de redes neurais sem recorrência e com recorrência. Em ambos os casos a estrutura da rede é mantida fixa, ou seja, sem adaptação dos pesos sinápticos, o que é feito somente durante a fase de treinamento. Resultados mostraram que o desempenho das duas redes foi equivalente, não sendo necessário, portanto a utilização de redes neurais recorrentes.

Em Monnerat Jr. (2000) desenvolve-se uma rede para controle da marcha lenta como a apresentada em Puskorius, Feldkamp e Davis Jr (1996). Porém a rede apresentada neste trabalho apresenta uma estrutura mais simples e não faz uso de entradas indicativas de solicitação de torque.

Os trabalhos citados nesta seção mostram que uma ampla variedade de técnicas de controle foi analisada ao longo dos últimos anos, para se resolver a questão de controle da marcha lenta em motores a combustão interna de ciclo Otto. Como listado, foram aplicadas desde técnicas tradicionais como o PID com ajuste dos ganhos por Ziegler-Nichols, passando por técnicas de controle ótimo e robusto, como regulador linear quadrático e \mathcal{H}_∞ , técnicas de controle não linear como Modos Deslizantes e técnicas de controle não linear utilizando lógica *fuzzy* e redes neurais.

A utilização da lógica difusa em aplicações de controle tornou-se um atrativo campo de pesquisa. Particularmente, a representação de equações dinâmicas não lineares através da modelagem difusa Takagi-Sugeno tem se destacado nas áreas de controle e automação de

sistemas e processos, que em geral são tratados em faixas restritas de sua operação. A modelagem difusa Takagi-Sugeno é muito intuitiva e pode ser facilmente compreendida e analisada utilizando conceitos básicos da teoria de controle linear, populares na área de sistemas de controle. Adicionalmente, esse tipo de modelagem também apresenta um embasamento matemático, possibilitando o desenvolvimento de critérios sistemáticos de projeto de controle e de análise de estabilidade. Estas características justificam a aceitabilidade da lógica difusa tanto na área de pesquisa quanto na área de desenvolvimento de sistemas de controle.

Considerando o crescente desenvolvimento relacionado à modelagem e controle difuso Takagi-Sugeno em sistemas não-lineares, este trabalho contribui tanto no campo de pesquisa dos sistemas difusos Takagi-Sugeno com um exemplo de aplicação, bem como no campo de pesquisa dos motores automotivos, através da proposição de uma nova abordagem para a questão de regulagem da rotação do motor no regime de marcha lenta, o que torna este trabalho inovador sobre o ponto de vista de uma nova metodologia para a solução de um problema prático.

1.4 Objetivos do Trabalho

Propõe-se uma abordagem difusa para o controle da marcha lenta em motores de combustão interna ciclo Otto. O projeto é desenvolvido seguindo a teoria de modelagem e controle difuso Takagi-Sugeno, com desempenho \mathcal{H}_∞ , visando considerar no projeto do controlador as não-linearidades apresentadas pelo motor operando na condição de marcha lenta. O objetivo da ação do controlador é atenuar os desvios da rotação do motor perante distúrbios externos, o que justifica a combinação do controle difuso com a técnica de controle \mathcal{H}_∞ . A técnica de projeto é formulada em termos de LMIs, o que viabiliza sua implementação através de ferramentas computacionais. O desempenho do controlador projetado é avaliado através de simulações utilizando a ferramenta matemática Matlab[®].

1.5 Organização do Trabalho

O restante do trabalho é dividido nos seguintes capítulos. No Capítulo 2 são apresentados a modelagem e o controle difuso. No Capítulo 3 são apresentadas as condições de estabilidade para o projeto do controlador difuso Takagi-Sugeno com desempenho \mathcal{H}_∞ . O Capítulo 4 são apresentados a modelagem difusa Takagi-Sugeno de um motor de combustão interna ciclo Otto operando em marcha lenta, o procedimento de projeto do controlador e simulações do controlador projetado. Finalmente, no Capítulo 5 são apresentadas as conclusões do trabalho e as proposições para trabalhos futuros.

2 Modelagem e Controle Difuso

A lógica difusa⁷ teve início com base na teoria de conjuntos difusos, postulada por Zadeh (1965)⁸ apud Yager e Filev (1994). Essa teoria foi apresentada como subsídio para se modelar fenômenos complexos, como é o caso de sistemas envolvendo agentes humanos. A idéia teve início na busca de uma alternativa ao conceito clássico de modelagem, considerando um certo grau de incerteza ou imprecisão na forma de idéias vagas, o que é característico da forma de raciocínio dos seres humanos (YAGER; FILEV, 1994). A teoria dos conjuntos difusos está fundamentada no fato de que muitos fenômenos que ocorrem na natureza não possuem limites ou fronteiras precisamente definidas. Neste capítulo serão apresentados os conceitos de modelagem e controle difusos. Antes, porém, será apresentada uma introdução à lógica difusa para uma melhor compreensão dos fundamentos da modelagem e controle difusos.

2.1 Conjuntos difusos e lógica difusa

Um conjunto difuso é a generalização do conjunto ordinário. Na teoria dos conjuntos ordinários, a participação de um certo elemento em um conjunto é definida pelo par binário $\{0,1\}$. Na teoria de conjunto difuso um elemento pode pertencer a um determinado conjunto em diferentes graus, ou seja, seu grau de participação não está definido apenas no par binário $\{0,1\}$, mas sim no intervalo $[0,1]$.

Um conjunto ordinário é definido com relação a um universo de discurso, ou seja, um conjunto ordinário é sempre um subconjunto de seu universo de discurso. O universo de discurso corresponde a um conjunto de valores finitos que define a faixa de operação de uma determinada variável, como por exemplo, a faixa em que a temperatura de uma caldeira pode variar. Considerando X o universo de discurso e S um subconjunto de X , a participação de um

⁷ O termo difuso vem do inglês *fuzzy*.

⁸ Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. **Information and Control**, v. 8, p. 338-353.

determinado elemento no conjunto S é definida a partir de uma função característica que descreve a participação deste elemento em S . A função característica associada com S , na teoria dos conjuntos ordinários, é um mapeamento

$$\mu_S : X \rightarrow \{0,1\}$$

tal que, para cada elemento x do universo de discurso, $\mu_S(x) = 1$ se x é membro de S e $\mu_S(x) = 0$ se x não é membro de S .

Assim como os conjuntos ordinários, os conjuntos difusos também são definidos com relação a um universo de discurso. Porém, a função característica na teoria de conjuntos difusos assume valores no intervalo $[0,1]$. A definição a seguir formaliza o conceito de conjunto difuso:

Definição 1 - Conjunto difuso: *Considere X uma coleção de objetos denotados genericamente de $\{u\}$, podendo ser discreto ou contínuo, tal que X é o universo de discurso e u representa um elemento qualquer de X . Um conjunto difuso M no universo de discurso X é caracterizado por uma função de pertinência, $\mu_M(u)$, a qual assume valores do intervalo $[0,1]$, ou seja, $\mu_M(u) : X \rightarrow [0,1]$ (KORBA, 1999).*

O conjunto difuso M pode ser expresso através do par ordenado formado pelo elemento genérico u do universo de discurso X e seu grau de pertinência: $M = \{(u, \mu_M(u)) : u \in X\}$.

Na teoria de conjuntos difusos, a função característica recebe o nome de função de pertinência. Essa terminologia reforça a idéia de que para cada elemento x , $\mu_M(x)$ indica o grau em que x é membro do conjunto M (YAGER; FILEV, 1994).

Uma função de pertinência compreende uma função numérica que atribui valores de pertinência para valores discretos de uma variável em seu universo de discurso. Conjuntos difusos são caracterizados por suas funções de pertinência. Todo o conhecimento de um sistema ou processo está relacionado às funções de pertinência. As funções de pertinência mais comuns em aplicações práticas são as triangulares e trapezoidais, por serem de fácil implementação. Nos casos em que se deseja funções de pertinência com transições mais suaves, as dos tipos gaussianas e sigmóides podem ser empregadas (SHAW; SIMÕES, 1999).

Os conjuntos difusos podem ser utilizados na construção de conjuntos de termos lingüísticos ou vocábulos. A noção de conjunto de termos representa uma abstração do valor da variável. A idéia de se converter dados numéricos em formas abstratas para facilitar o

processo de decisão é o ponto crucial em muitos sistemas de inteligência artificial (ROSS, 1995)⁹ apud (NAGAMINE, 2001). Assim, cada função de pertinência pode ser associada a uma variável lingüística como negativo, positivo, quente, frio, alto ou baixo. Com isso, os valores físicos ou exatos pertencentes a um universo de discurso, têm seus valores de pertinência determinados conforme o respectivo conjunto difuso definido pela função de pertinência adjetivada.

Um exemplo de descrição de conjuntos difuso através de termos lingüísticos ou vocábulos pode ser dado em termos de temperatura de um objeto. Considerando que a temperatura possa variar entre 0°C e 100°C, esse é o universo de discurso. Denomina-se “frio” o conjunto de temperaturas entre 0°C e 30°C, “morno” o conjunto de temperaturas entre 20°C e 70°C e “quente” o conjunto de temperaturas entre 60°C e 100°C. Os adjetivos “frio”, “morno” e “quente” (termos lingüísticos) são as variáveis lingüísticas dos conjuntos que relacionam as temperaturas do objeto (ARRIFANO, 2004). A Figura 1 apresenta exemplos de funções de pertinência do tipo trapezoidal utilizadas para definir os conjuntos difusos apresentados no exemplo.

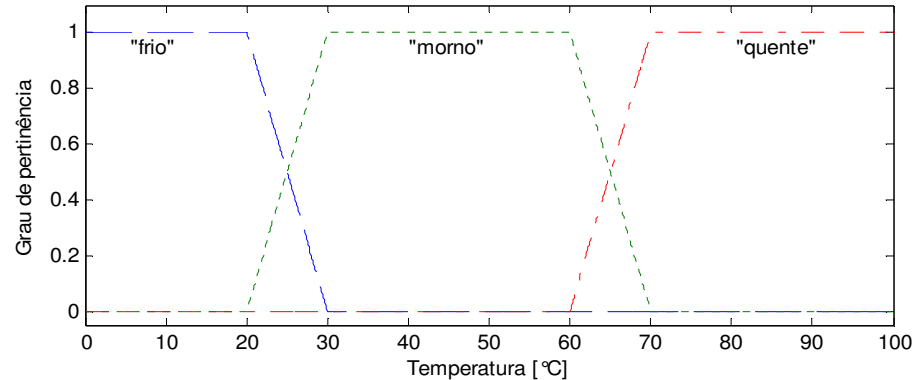


Figura 1 – Funções de pertinência dos conjuntos difusos das temperaturas.

A utilização de sistemas difusos requer a interação entre diferentes variáveis representadas por números e conjuntos. Tais interações tornam necessárias operações entre as variáveis do sistema difuso.

Na lógica clássica, as operações com conjuntos envolvem as operações booleanas padrão definidas a partir dos operadores E, OU e NÃO. Na lógica difusa, há diversos operadores para se realizar operações lógicas. Tais operadores são divididos em duas classes, ou normas: as

⁹ ROSS, T. J. (1995). Fuzzy logic with engineering applications. McGraw-Hill International edition, New York.

normas triangulares, chamadas normas- t e as normas duais, chamadas normas- s ou co-normas- t (SHAW; SIMÕES, 1999).

As normas- t e as normas- s são utilizadas para se definir operações de intersecção e união difusas gerais, respectivamente.

As normas- t para a operação de intersecção generalizada podem ser do tipo intersecção, produto algébrico, produto logarítmico, produto inverso, produto limitado e produto drástico. Alguns exemplos para $x, y \in [0,1]$ são:

$$\text{Intersecção:} \quad x \mathbf{t} y = \min(x, y)$$

$$\text{Produto algébrico:} \quad x \mathbf{t} y = x.y$$

$$\text{Produto drástico:} \quad x \mathbf{t} y = \begin{cases} x \text{ quando } y = 1 \\ x \text{ quando } x = 1 \\ 0 \text{ quando } x, y < 1 \end{cases}$$

As normas- s para a operação de união generalizada podem ser do tipo união, soma algébrica, soma limitada, soma logarítmica, soma disjunta e soma drástica. Alguns exemplos para $x, y \in [0,1]$ são:

$$\text{União:} \quad x \mathbf{s} y = \max(x, y)$$

$$\text{Soma algébrica:} \quad x \mathbf{s} y = x + y - x.y$$

A definição a seguir formaliza os conceitos de união e intersecção entre conjuntos difusos:

Definição 2 – União e intersecção entre conjuntos difusos: Considere M_1 e M_2 conjuntos difusos no universo de discurso X com funções de pertinência μ_{M_1} e μ_{M_2} , respectivamente. A união $M_1 \cup M_2$ de M_1 e M_2 é um conjunto difuso em X com função de pertinência definida para todo $u \in X$ por:

$$\mu_{M_1 \cup M_2}(u) = \Delta\{\mu_{M_1}(u), \mu_{M_2}(u)\},$$

em que Δ representa os operadores norma- s . A intersecção $M_1 \cap M_2$ de M_1 e M_2 é um conjunto difuso em X com função de pertinência definida para todo $u \in X$ por:

$$\mu_{M_1 \cap M_2}(u) = \Gamma\{\mu_{M_1}(u), \mu_{M_2}(u)\}, \quad (2.1)$$

em que Γ representa os operadores norma- t .

Observa-se que as operações definidas são para conjuntos difusos no mesmo universo de discurso. A idéia de produto cartesiano pode ser estendida para os conjuntos difusos de universos de discursos diferentes como mostra a definição a seguir.

Definição 3 – Produto cartesiano: Se M_1, M_2, \dots, M_n são conjuntos difusos nos universos de discurso X_1, X_2, \dots, X_n respectivamente, o produto cartesiano de M_1, M_2, \dots, M_n é um conjunto difuso no universo de discurso $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ com função de pertinência

$$\mu_{M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \Gamma\{\mu_{M_1}(u_1), \mu_{M_2}(u_2), \dots, \mu_{M_n}(u_n)\}$$

onde Γ representa os operadores norma-t.

Definição 4 – Relação difusa: Uma relação difusa é um conjunto difuso no espaço $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ e é expresso como

$$R_{X_1 \times \dots \times X_n} = \{((u_1, \dots, u_n), \mu_R(u_1, \dots, u_n)) \mid (u_1, \dots, u_n) \in X_1 \times \dots \times X_n\}.$$

Em linhas gerais, uma regra do tipo SE – ENTÃO é uma relação difusa, a qual pode ser expressa como uma implicação difusa. Como exemplo, considere a implicação $A \rightarrow B$ a qual é interpretada como uma regra SE – ENTÃO

SE δ é A ENTÃO y é B.

Na teoria de sistemas difusos, há métodos de se definir uma implicação difusa, que é descrita por uma função de implicação difusa. Uma função de implicação difusa reflete a maneira de se interpretar uma relação ou regra difusa e assim realizar o raciocínio difuso.

2.2 Modelos difusos lingüísticos

Os sistemas difusos são baseados no conceito de divisão difusa da informação. Em vez de números, os sistemas difusos operam através de conjuntos difusos. Isso permite a generalização da informação. A generalização da informação está relacionada à introdução de imprecisão. Essa imprecisão está vinculada à forma de raciocínio dos seres humanos. Segundo Yager e Filev (1994), o propósito do trabalho de Zadeh (1965) era modelar o mecanismo de pensamento dos seres humanos, com variáveis difusas, incertas e definidas através de termos lingüísticos, em vez de números. Surge assim uma nova classe de sistemas, os chamados sistemas difusos. Estendendo a definição clássica de modelo de um sistema para

o universo dos conjuntos difusos se obtém os modelos difusos, uma representação das características essenciais de um sistema a partir dos conceitos desenvolvidos pela teoria dos conjuntos difusos.

Os modelos difusos são divididos basicamente em duas categorias que diferem entre si fundamentalmente pela habilidade em representar diferentes tipos de informação. A primeira categoria inclui modelos lingüísticos que são baseados em uma coleção de regras do tipo SE – ENTÃO com termos linguísticos vagos e utilização de raciocínio difuso. Nesse tipo de modelo, quantidades difusas são associadas com rótulos lingüísticos e o modelo difuso é essencialmente uma expressão qualitativa do sistema. Modelos lingüísticos formam a base para a modelagem qualitativa, que descreve o comportamento do sistema utilizando linguagem natural. A segunda categoria de modelos difusos é baseada no método de raciocínio de Takagi-Sugeno-Kang (TSK), ou simplesmente Takagi-Sugeno (TS). Esses modelos são formados por regras lógicas tal que há uma combinação entre modelos difusos e modelos matemáticos (YAGER; FILEV, 1994).

Os modelos lingüísticos descrevem o sistema a partir de um conjunto de regras do tipo SE - ENTÃO com predicativos vagos, que formam as regras de inferência, como é mostrado a seguir:

SE premissa (*antecedente*) **ENTÃO** conclusão (*conseqüente*)

Essa forma expressa uma inferência tal que se é conhecido um fato (premissa, hipótese ou antecedente), então é possível inferir, ou deduzir, outro fato chamado conclusão (conseqüente). Essa forma de representação do conhecimento, caracterizada como conhecimento superficial, é bastante apropriada no contexto lingüístico, pois expressa o conhecimento humano empírico e heurístico em nossa própria linguagem de comunicação (NAGAMINE, 2001).

Em geral, um sistema difuso é composto por quatro componentes básicos: base de conhecimento difusa, lógica de tomada de decisão, interface de difusificação e interface de dedifusificação. A Figura 2 mostra a estrutura geral de um sistema lingüístico.

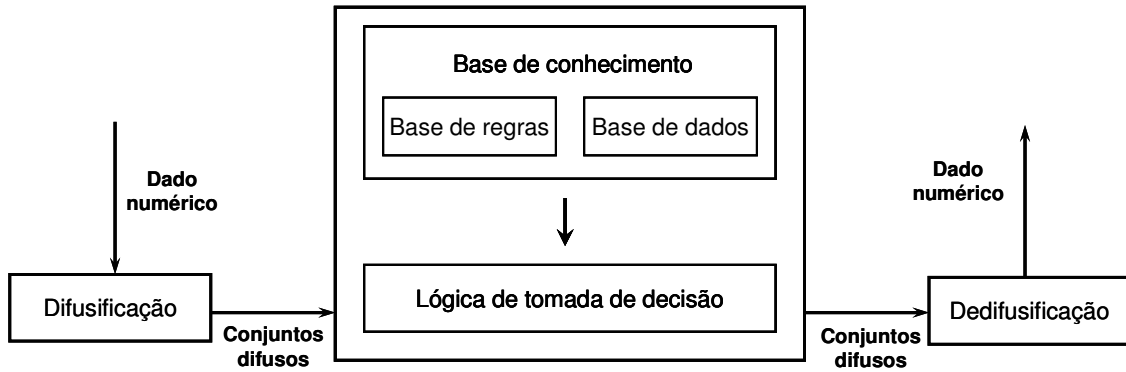


Figura 2 – Estrutura básica de um sistema difuso.

A base de conhecimento é formada por um conjunto de regras do tipo SE - ENTÃO tal como

$$R_i : SE \delta_1 \text{ é } M_{1i} < \text{conectivo}^t > \dots < \text{conectivo}^t > \delta_j \text{ é } M_{ji} \text{ ENTÃO } y \text{ é } B_i$$

em que $\boldsymbol{\delta} = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_j]^T \in \mathbb{R}^j$ e y são variáveis de entrada (ou variáveis premissas) e variáveis de saída, respectivamente. $M_{1i}, M_{2i}, \dots, M_{ji}$ e B_i são conjuntos difusos que relacionam as variáveis de entrada e de saída às variáveis lingüísticas, com $i = 1, 2, \dots, r$, onde r é o número de regras do sistema difuso. O $< \text{conectivo}^t >$ representa genericamente o operador de intersecção difusa. A base de dados contém informações a respeito das funções de pertinência usadas no conjunto de regras difuso. A base de regras contém a estrutura em si do conjunto de regras do tipo SE - ENTÃO. É através da base de regras que se caracteriza a resposta a ser gerada pelo sistema difuso. A lógica de tomada de decisão ou inferência difusa interpreta cada uma das regras da base de regras, gerando um mapeamento entre entrada e saída. A inferência difusa é o núcleo do sistema difuso e representa o processo de tomada de decisão dos seres humanos através dos atributos da lógica difusa.

Como mencionado anteriormente, uma regra do tipo SE - ENTÃO é uma relação expressa por uma função de implicação difusa tal como:

$$\mu_{M_{1i} \times M_{2i} \times \dots \times M_{ji} \rightarrow B_i}(\boldsymbol{\delta}, y) = \mu_{M_{1i} \times M_{2i} \times \dots \times M_{ji}}(\boldsymbol{\delta}) \times \mu_{B_i}(y)$$

com \times representando todos os operadores definidos anteriormente.

A composição dos vários conjuntos difusos de entrada dentro de uma mesma regra é definida como agregação. A composição das saídas difusas de cada regra é definida como combinação. Em geral as normas- t são utilizadas para as operações de agregação, enquanto que as normas- s são utilizadas para as operações de combinação.

Os valores de entrada e saída de um sistema difuso geralmente são valores numéricos. Os valores numéricos de entrada devem ser convertidos para o domínio difuso, atribuindo valores lingüísticos definidos pelas funções de pertinência. Esse processo é denominado de difusificação. O caminho inverso também é necessário, ou seja, obter um único valor numérico discreto que represente os valores difusos inferidos da variável lingüística de saída. Esse procedimento é chamado de dedifusificação. A dedifusificação é uma transformação da saída do domínio difuso para o domínio discreto. Existem diversos métodos de dedifusificação. Os mais citados na literatura são:

- **Centro da área:**

Freqüentemente chamado de método do centro de gravidade ou método centróide. Calcula o centróide da área composta que representa o termo de saída difuso (μ_{out}) formado pela combinação de todas as regras.

$$y^* = \frac{\int \mu_{out}(y)ydy}{\int \mu_{out}(y)dy}$$

- **Centro do máximo:**

Neste método os picos das funções de pertinência representados no universo de discurso da variável de saída são usados, enquanto ignora-se as áreas das funções de pertinência. Esse método também é chamado de método de dedifusificação pelas alturas.

- **Média do máximo:**

Neste método, são considerados os maiores valores de pertinência e se faz uma média entre todos os valores considerados. Esse método também é chamado de solução mais plausível por desconsiderar o formato das funções de pertinência.

Outros métodos e mais detalhes a respeito de dedifusificação podem ser encontrados em Driankov, Hellendoorn e Reinfrank (1996).

Como explica Nagamine (2001), para estabelecer uma relação difusa R entre duas variáveis A e B baseada nos comandos condicionais SE-ENTÃO existem várias técnicas que fazem uso do comando lógico implicação, ou seja, $R = A \rightarrow B$. Dentre esses métodos destacam-se (DRIANKOV; HELLENDORN; REINFRANK, 1996; KORBA, 1999):

- Implicação de Zadeh;

- Implicação de Kleene-Dienes;
- Implicação de Larsen;
- Implicação de Lukasiewics
- Implicação estocástica;
- Implicação de Goguen;
- Implicação de Gödel;
- Implicação de Mamdani;
- Implicação de Sharp;
- Implicação universal ou comum.

O método de implicação de Mamdani é um dos mais utilizados para aplicações de controle. Sistemas difusos criados a partir deste método e aplicados no controle de sistemas dinâmicos recebem o nome de controladores difusos Mamdani. A próxima seção apresenta mais detalhes sobre os controladores difusos Mamdani.

2.3 Controlador difuso Mamdani

Para aplicações de controle, o método de implicação mais utilizado é o Mamdani, descrito pela equação a seguir (DRIANKOV; HELLENDORRN, REINFRANK, 1996):

$$\mu_R(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

Considerando um sistema com duas entradas e uma saída, o conjunto de regras de um sistema difuso Mamdani apresenta a seguinte forma:

$$\begin{aligned} R_1 &: SE \delta_1 \text{ é } M_{11} \text{ e } \delta_2 \text{ é } M_{21} \text{ ENTÃO } y \text{ é } B_1 \\ R_2 &: SE \delta_1 \text{ é } M_{12} \text{ e } \delta_2 \text{ é } M_{22} \text{ ENTÃO } y \text{ é } B_2 \\ &\dots \\ R_r &: SE \delta_1 \text{ é } M_{1r} \text{ e } \delta_2 \text{ é } M_{2r} \text{ ENTÃO } y \text{ é } B_r \end{aligned}$$

Para os sistemas difusos Mamdani, a agregação é realizada pelo operador *min* e a combinação pelo operador *max*.

A Figura 3 ilustra os processos de agregação e combinação de um sistema com duas entradas, uma saída e duas regras, utilizando o método de implicação *max-min*.

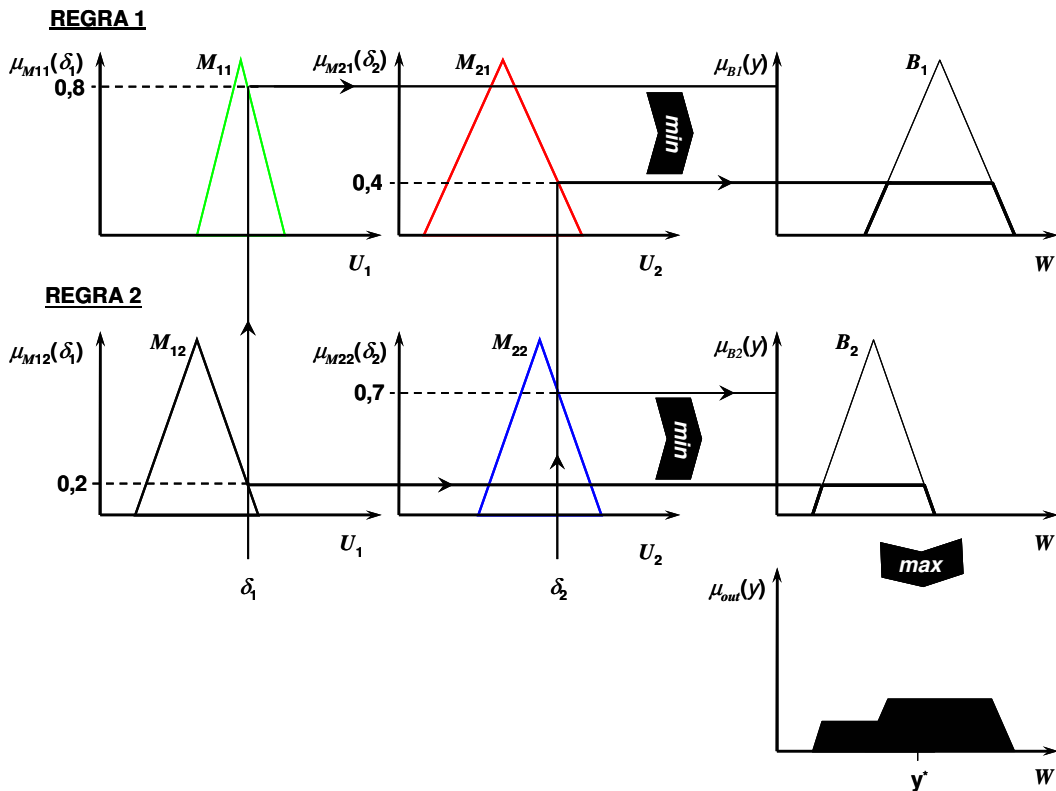


Figura 3 – Sistema com inferência *max-min*.

Nos controladores difusos Mamdani, a saída dedifusificada do sistema corresponde à ação de controle gerada. O controlador difuso Mamdani é um controlador empírico, cujo projeto segue um procedimento de ajuste heurístico baseado no conhecimento humano sobre a operação do sistema. A lógica de tomada de decisão incorporada na estrutura de inferência da base de regras utiliza implicações difusas para simular tomadas de decisão humanas. As ações de controle geradas são inferidas a partir das condições de entrada do sistema difuso que neste caso correspondem às variáveis de realimentação do sistema em malha fechada.

Como ressalta Arrifano (2004), na aplicação de controladores difusos Mamdani, a etapa de projeto não necessita de um modelo explícito do sistema, somente do conhecimento de como o sistema se comporta frente às ações de controle. Esse conhecimento é descrito em termos de regras difusas. Se por um lado a ausência de um modelo explícito permite a produção de controladores satisfatórios com o mínimo de esforço, tal ausência causa um certo ceticismo pois tanto a dinâmica do sistema quanto as tarefas de controle são descritas por regras. A estrutura baseada em regras gera uma certa desconfiança por parte do usuário e, além disso, a ausência de um modelo explícito, torna difícil a formulação de provas e demonstrações que garantam o desempenho e a estabilidade do sistema em malha fechada.

Para suprir a deficiência apresentada pelos controladores difusos Mamdani, Takagi e Sugeno (1985) propuseram uma nova estrutura difusa em que a parte conseqüente do conjunto de regras passou a ser uma função em vez de valores lingüísticos. Desta forma passa a ser possível a introdução de modelagem matemática para os sistemas difusos e conseqüentemente a formulação de condições que garantam a estabilidade e o desempenho dos controladores difusos. Essa categoria de sistema difuso é denominada de Takagi-Sugeno-Kang (TSK), ou simplesmente Takagi-Sugeno (TS). Mais detalhes a respeito da modelagem e controle difuso Takagi-Sugeno serão apresentados na próxima seção.

2.4 Modelagem e controle difuso Takagi-Sugeno

A proposta de se utilizar representações matemáticas incorporadas às regras de um sistema difuso foi apresentada por Takagi e Sugeno (1985). Nessa categoria de sistemas difusos, a parte conseqüente é formada por uma função matemática em vez de valores lingüísticos vagos, como é no caso do sistema difuso Mamdani. A implicação difusa apresentada por Takagi e Sugeno (1985) tem o seguinte formato:

$$\mathbf{R}_i : SE f_i(\delta_1(t) \in M_{1i}, \dots, \delta_j(t) \in M_{ji}) ENTÃO y_i = g_i(\delta_1(t), \dots, \delta_j(t)) \quad (2.2)$$

com y_i a variável da parte conseqüente cujo valor é inferido, $\delta_1(t), \delta_2(t), \dots, \delta_j(t)$ variáveis premissas (entradas do sistema difuso), que aparecem também na parte conseqüente, $M_{1i}, M_{2i}, \dots, M_{ji}$ conjuntos difusos representando um subespaço difuso onde a implicação \mathbf{R}_i será aplicada, f_i função lógica que defini os conectivos das proposições das premissas, g_i função de implicação para o valor de y_i quando $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_j$ satisfazem a condição na parte antecedente, para $i = 1, 2, \dots, r$, onde r é o número de regras do sistema difuso. Mais detalhes a respeito da forma de raciocínio e obtenção do valor de saída do sistema difuso na forma apresentada acima podem ser encontrados em Takagi e Sugeno (1985).

Para aplicações de controle a forma geral do modelo difuso apresentada em Takagi e Sugeno (1985), é substituída para a forma apresentada em (2.3) cuja parte conseqüente é formada por um modelo linear invariante no tempo. Cada regra passa a ter seu correspondente modelo local, linear e invariante no tempo, chamado também de subsistema, que é válido em uma determinada faixa de atuação. A faixa de atuação é especificada na parte antecedente da regra correspondente:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{R}_i : \\
& \text{SE } \delta_1(t) \text{ é } M_{1i} \mathbf{e}, \dots, \mathbf{e} \delta_j(t) \text{ é } M_{ji} \\
& \text{ENTÃO } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_i(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_i \mathbf{u}(t) \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

em que $i = 1, 2, \dots, r$, onde r é o número de regras do sistema difuso (número de modelos locais) \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i , \mathbf{C}_i e \mathbf{D}_i são matrizes que representam o i -ésimo modelo local na forma espaço de estados, $\mathbf{x}(t)$ é o vetor de estados, $\mathbf{u}(t)$ é o vetor de entradas, $\mathbf{y}(t)$ é o vetor de saída e $\boldsymbol{\delta}(t) = [\delta_1(t), \delta_2(t), \dots, \delta_j(t)]^T$ é o vetor das variáveis premissas (entradas do sistema difuso). Usualmente considera-se que as variáveis premissas não dependem do vetor de entradas $\mathbf{u}(t)$. Segundo Tanaka e Wang (2001) essa consideração tem por objetivo evitar um processo de dedifusão complicado para os controladores difusos.

Dado um par $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, a saída do sistema difuso ou o sistema resultante é inferido como a média ponderada de todos os subsistemas, resultando em:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\boldsymbol{\delta}(t)) \{ \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) \} \tag{2.4}$$

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\boldsymbol{\delta}(t)) \{ \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_i \mathbf{u}(t) \} \tag{2.5}$$

com

$$h_i(\boldsymbol{\delta}(t)) = \frac{\eta_i(\boldsymbol{\delta}(t))}{\sum_{i=1}^r \eta_i(\boldsymbol{\delta}(t))} \tag{2.6}$$

$$\eta_i(\boldsymbol{\delta}(t)) = \prod_{p=1}^j M_{ip}(\delta_p(t)) \tag{2.7}$$

onde o termo $h_i(\boldsymbol{\delta}(t))$ denota a função de pertinência normalizada, com $M_{ip}(\delta_p(t)) \in [0,1]$ o grau de pertinência de $\delta_p(t)$ no conjunto difuso M_{ip} . Considerando que:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r \eta_i(\boldsymbol{\delta}(t)) > 0, & i = 1, 2, \dots, r \\ \eta_i(\boldsymbol{\delta}(t)) \geq 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

conclui-se que:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r h_i(\boldsymbol{\delta}(t)) = 1, & i = 1, 2, \dots, r \\ h_i(\boldsymbol{\delta}(t)) \geq 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

para todo t .

2.4.1 Construção do modelo difuso Takagi-Sugeno

Como mostra Tanaka e Wang (2001), há duas abordagens para a construção de modelos difusos Takagi-Sugeno:

- Identificação utilizando dados de entrada e saída de um sistema não linear;
- Modelagem a partir das equações dinâmicas de um sistema não linear.

A primeira abordagem se aplica a sistemas em que é difícil se obter uma representação por modelos analíticos construídos a partir das equações das dinâmicas do processo em estudo. Nesses casos, o mais adequado é se coletar dados de entrada e saída da planta e aplicar um procedimento de identificação. O procedimento de identificação é caracterizado por duas partes: uma em que o objetivo é obter a estrutura do modelo difuso e outra que tem por objetivo obter os parâmetros da estrutura arbitrada na primeira parte. Essa técnica para obtenção de modelos difusos tem sido amplamente estudada, como mostra os trabalhos de Sugeno e Kang (1988), Cao e Rees (1995), Chen, Xi e Zhang (1998), Babuška, Roubos e Verbruggen (1998), Setnes, Babuška e Verbruggen (1998) e Vernieuwe, De Baets e Verhoest (2006).

A segunda abordagem parte das equações dinâmicas do sistema a ser modelado, e se aplica a sistemas em que tais equações são facilmente obtidas.

A Figura 4 ilustra o procedimento de projeto de um controlador difuso Takagi-Sugeno. O ponto de partida para o projeto do controlador é obter um modelo difuso Takagi-Sugeno do sistema não linear em questão. Portanto, a construção do modelo difuso é um importante passo para o projeto de um controlador difuso.

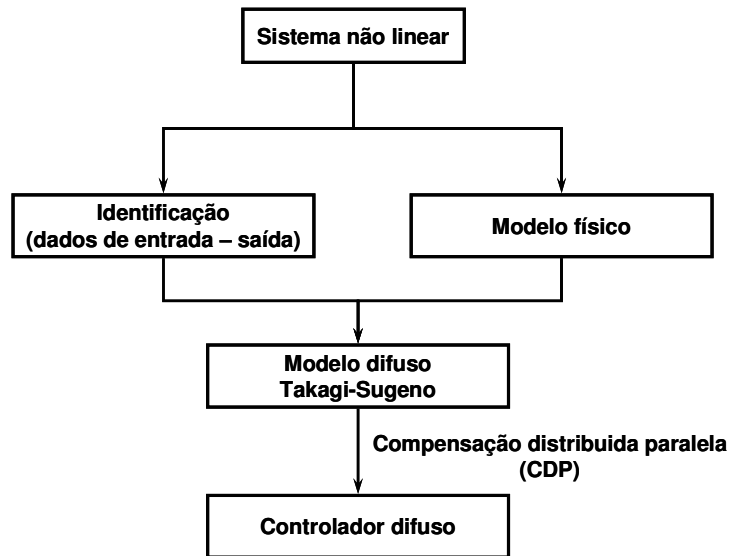


Figura 4 – Projeto de controladores difusos baseados em modelagem.

É possível aplicar a abordagem para construção do modelo difuso a partir das equações dinâmicas do sistema não linear através de duas técnicas diferentes: não-linearidade setorial e aproximação local (TANAKA; WANG, 2001).

Para aplicações práticas, a técnica de não-linearidade setorial utiliza a idéia de se obter uma região que delimite a função não linear, ou seja, considerando o sistema não linear $\dot{x}(t) = f(x(t))$ com $f(0) = 0$, o objetivo é encontrar um setor tal que $\dot{x}(t) = f(x(t)) \in [a_1 \ a_2]x(t)$, considerando o intervalo para as variáveis de estado $-d < x(t) < d$. As funções de pertinência e a estrutura da parte conseqüente são então extraídas considerando os limites dos termos não lineares de $\dot{x}(t) = f(x(t))$ para o intervalo $-d < x(t) < d$. Nesse intervalo, o sistema difuso representa exatamente o sistema não linear. A desvantagem desse método está relacionada ao número elevado de regras que podem ser geradas na base de regras do sistema difuso. O número de regras está diretamente relacionado à complexidade das equações dinâmicas do sistema não linear e ao número de termos não lineares em $\dot{x}(t) = f(x(t))$. Detalhes desta técnica podem ser encontrados em Tanaka e Wang (2001).

A técnica de aproximação local obtém representações lineares de $\dot{x}(t) = f(x(t))$ em pontos de operação do sistema, definidos a partir da divisão do espaço das variáveis premissas. Esta técnica leva à redução do número de regras do sistema difuso se comparado ao modelo obtido a partir do procedimento de não-linearidade setorial.

Para se obter os modelos lineares locais, ou os subsistemas do modelo difuso Takagi-Sugeno, deve-se aplicar um método de linearização diferente do método tradicional que faz uso da série de Taylor.

Os modelos lineares locais formam a principal característica do modelo difuso Takagi-Sugeno. Como mostra Teixeira e Žak (1999) a aplicação do procedimento de linearização utilizando série de Taylor, pode levar à modelos afins em vez de modelos lineares e assim, o modelo difuso resultante não será adequado para o projeto de controladores difusos. Para exemplificar, considere um sistema não linear da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{f}(x(t)) + \mathbf{G}(x(t))u(t) \quad (2.10)$$

com $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entradas, com $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$. Por simplicidade a seguinte notação será utilizada: $\mathbf{F}(x, u) = \mathbf{f}(x(t)) + \mathbf{G}(x(t))u(t)$. Desta forma o sistema não linear pode ser escrito como, com $x = x(t)$ e $u = u(t)$:

$$\dot{x} = \mathbf{F}(x, u).$$

Expandindo \mathbf{F} através da série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio (x_o, u_o) obtém:

$$\dot{x} = \mathbf{F}(x_o, u_o) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_o \\ u=u_o}} (x - x_o) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_o \\ u=u_o}} (u - u_o) + t.a.o.$$

com $\mathbf{F}(x_o, u_o) = \mathbf{f}(x_o) + \mathbf{G}(x_o)u_o$ e *t.a.o.* corresponde aos termos de alta ordem da série de Taylor. Reforçando que (x_o, u_o) é um ponto de equilíbrio e, portanto, $\mathbf{F}(x_o, u_o) = 0$ e considerando os estados deslocados, ou seja, $\delta x = x - x_o$ e $\delta u = u - u_o$, o modelo linearizado em torno do ponto de equilíbrio (x_o, u_o) , desprezando os termos de alta ordem da série de Taylor tem a forma:

$$\frac{d}{dt} \delta x = \mathbf{A} \delta x + \mathbf{B} \delta u \quad (2.11)$$

com

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_o \\ u=u_o}} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_o \\ u=u_o}}.$$

Suponha que se deseja linearizar o sistema $\dot{x} = F(x, u)$ em dois pontos de operação diferentes. Um destes é um ponto de equilíbrio tal que $(x_o, u_o) = (0, 0)$ e o outro, um outro ponto de equilíbrio qualquer (x_j, u_j) . A partir do resultado obtido em (2.11) e considerando os estados deslocados $\delta x = x - x_o$ e $\delta u = u - u_o$, o sistema para o ponto de operação (x_o, u_o) é dado por:

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

Considerando agora o segundo ponto de operação (x_j, u_j) , e como este também é um ponto de equilíbrio:

$$F(x_j, u_j) = 0.$$

Aplicando o mesmo procedimento de linearização, obtém:

$$\frac{d}{dt}(x - x_j) = F(x_j, u_j) + A_j(x - x_j) + B_j(u - u_j) \quad (2.12)$$

com

$$A_j = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_j \\ u=u_j}} \text{ e } B_j = \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_j \\ u=u_j}}.$$

O modelo (2.12) pode ser representado por:

$$\dot{x} = A_j x + B_j u - (A_j x_j + B_j u_j). \quad (2.13)$$

O termo $(A_j x_j + B_j u_j)$ é diferente de zero e, portanto, o modelo (2.13) é afim e não um modelo linear. Assim sendo, em geral, o método de linearização por série de Taylor não é adequado para o procedimento de construção de modelos difusos Takagi-Sugeno para fins de projeto de controladores (TEIXEIRA; ŽAK, 1999). O método de linearização por série de Taylor só deve ser aplicado quando o ponto de linearização desejado for um ponto de equilíbrio e coincidir com a origem do sistema.

Teixeira e Žak (1999) propõem um método de linearização de um sistema na forma de (2.10) para um ponto de operação x_o que não precisa ser um estado de equilíbrio do sistema não linear. É considerado o caso em que o sistema (2.10) apresenta não-linearidade apenas nos estados. O método proposto tem por objetivo encontrar as matrizes A e B , de dimensões apropriadas, tal que na vizinhança de x_o o sistema (2.10) possa ser descrito por

$$\mathbf{F}(x, u) \approx \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

e

$$\mathbf{F}(x_o, u) = \mathbf{A}x_o + \mathbf{B}u$$

para u qualquer. Como u é arbitrário, $\mathbf{G}(x_o) = \mathbf{B}$. Desta forma o procedimento se reduz a encontrar a matriz \mathbf{A} , tal que na vizinhança de x_o

$$\mathbf{f}(x) \approx \mathbf{A}x$$

e

$$\mathbf{f}(x_o) = \mathbf{A}x_o.$$

A matriz \mathbf{A} é encontrada através de um problema de otimização, onde cada coluna da matriz é definida aplicando a seguinte equação:

$$\mathbf{a}_i = \nabla \mathbf{f}_i(x_o) + \frac{\mathbf{f}_i(x_o) - x_o^T \nabla \mathbf{f}_i(x_o)}{\|x_o\|^2} x_o, \quad x_o \neq 0.$$

com \mathbf{a}_i^T a i -ésima coluna da matriz \mathbf{A} e $\nabla \mathbf{f}_i(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um vetor coluna que corresponde ao gradiente de \mathbf{f}_i , a i -ésima coluna de \mathbf{f} , calculado em relação a x . Esse método é conhecido na literatura como método de linearização de Teixeira & Žak.

Desta forma, para cada ponto de linearização, independente deste ser um ponto de equilíbrio ou não, serão encontrados modelos lineares e assim a construção do modelo difuso Takagi-Sugeno será adequada para o uso em projeto de controladores.

Vale ressaltar que o método de linearização de Teixeira & Žak, é aplicado a sistemas que apresentam não linearidade apenas em x . Porém, alguns sistemas não lineares além de apresentarem não-linearidades em x , o vetor de estados, podem apresentar não-linearidades na entrada, ou seja, em u . O método de linearização de Teixeira & Žak não se aplica a essa classe de sistemas. Para essa classe de sistemas, Canelon, Shieh e Karayiannis (2005) apresentam um método de linearização que é uma generalização do método de Teixeira & Žak.

O método de linearização apresentado por Canelon, Shieh e Karayiannis (2005) considera o mesmo problema de otimização apresentado em Teixeira e Žak (1999). A diferença básica entre os dois métodos está na classe de sistemas a ser linearizado. Assim, para um sistema não linear na forma

$$\dot{x}(t) = \mathbf{f}(x(t)) + \mathbf{G}(x(t))u(t)$$

apresentando não-linearidade tanto no vetor de estados, $x(t)$, quanto no vetor de entradas, $u(t)$, o objetivo é encontrar um sistema linear em um ponto de operação (x_o, u_o) , que não necessita ser um ponto de equilíbrio, tal que na vizinhança desse ponto

$$\mathbf{F}(x, u) \approx \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

e

$$\mathbf{F}(x_o, u_o) = \mathbf{A}x_o + \mathbf{B}u_o$$

onde $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $\mathbf{F}(x, u) = \mathbf{f}(x(t)) + \mathbf{G}(x(t))u(t)$. Desta forma, as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são encontradas aplicando as seguintes equações:

$$\mathbf{a}_i^T = \nabla_x \mathbf{f}_i(x_o, u_o) + \frac{\mathbf{f}_i(x_o, u_o) - \nabla_x \mathbf{f}_i(x_o, u_o)x_o - \nabla_u \mathbf{f}_i(x_o, u_o)u_o}{x_o^T x_o + u_o^T u_o} x_o \quad (2.14)$$

e

$$\mathbf{b}_i^T = \nabla_u \mathbf{f}_i(x_o, u_o) + \frac{\mathbf{f}_i(x_o, u_o) - \nabla_x \mathbf{f}_i(x_o, u_o)x_o - \nabla_u \mathbf{f}_i(x_o, u_o)u_o}{x_o^T x_o + u_o^T u_o} u_o \quad (2.15)$$

com $(x_o, u_o) \neq (0,0)$, sendo que \mathbf{a}_i^T e \mathbf{b}_i^T correspondem à i -ésima coluna das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} respectivamente, $\nabla_x \mathbf{f}_i(x, u)$ é o gradiente de \mathbf{f}_i , o i -ésimo componente da matriz \mathbf{F} , com relação ao vetor x , $\nabla_u \mathbf{f}_i(x, u)$ é o gradiente de \mathbf{f}_i com relação ao vetor u .

Através dos métodos apresentados, os modelos locais lineares do sistema difuso apresentam a dinâmica exata do sistema original nos pontos de operação de interesse, com mínimo erro de modelagem na vizinhança de cada um desses pontos.

2.4.2 Controle difuso Takagi-Sugeno

O projeto de controladores difusos Takagi-Sugeno está baseado no procedimento de projeto de compensação distribuída paralela (CDP) ou do inglês PDC – *parallel distributed compensation*. Esse procedimento foi inicialmente apresentado por Sugeno e Kang (1986). Em Tanaka e Sugeno (1992) foi introduzida a análise de estabilidade, melhorando assim o procedimento de projeto CDP.

Para a aplicação da CDP é necessário o levantamento do modelo difuso Takagi-Sugeno no sistema a ser controlado, como mostra a Figura 4 na página 28. O controlador projetado apresenta a mesma estrutura de regras do modelo difuso, ou seja, o controlador compartilha os mesmos conjuntos difusos na parte premissa do modelo. Cada regra do controlador é desenvolvida a partir da correspondente regra do modelo. O controlador difuso implementado a partir da CDP para o modelo difuso em (2.3) apresenta a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{R}_i : \\
 & \text{SE } \delta_1(t) \text{ é } M_{1i} \text{ e, ..., e } \delta_j(t) \text{ é } M_{ji} \\
 & \text{ENTÃO } \mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_i \mathbf{x}(t)
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Cada regra \mathbf{R}_i do controlador difuso, $i = 1, 2, \dots, r$, apresenta um controlador linear \mathbf{K}_i , que no caso exemplificado corresponde a um controlador com realimentação de estados. Porém, outros tipos de controladores como realimentação de saída, também podem ser projetados.

O controlador difuso resultante será:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\boldsymbol{\delta}(t)) \mathbf{K}_i \mathbf{x}(t), \tag{2.17}$$

com $h_i(\boldsymbol{\delta}(t))$ dado por (2.6).

Substituindo (2.17) em (2.4), o sistema difuso em malha fechada se torna:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=i}^r h_i(\boldsymbol{\delta}(t)) h_j(\boldsymbol{\delta}(t)) (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x}(t) \tag{2.18}$$

O projeto do controlador difuso via CDP compreende então determinar os ganhos de realimentação \mathbf{K}_i . Embora o controlador difuso seja construído utilizando uma estrutura de projeto local, representada pelos modelos lineares locais, os ganhos de realimentação devem ser obtidos considerando condições de projeto globais. As condições de projeto globais são necessárias para se garantir a estabilidade global e o desempenho do controlador difuso (TANAKA; WANG, 2001).

Geralmente, a obtenção dos ganhos de realimentação \mathbf{K}_i é realizada utilizando o conceito de estabilidade quadrática. A condição de estabilidade é formulada em termos de uma função de Lyapunov do tipo $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$, em que $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ e $\mathbf{P} > 0$. Em outras palavras, para se chegar aos ganhos de realimentação que garantam a estabilidade do sistema difuso, deve-se encontrar uma matriz comum \mathbf{P} que satisfaça a função de Lyapunov.

Como afirmam Tanaka e Wang (2001), uma ampla variedade de procedimentos para a sistematização da busca da matriz P tem sido avaliada. Uma das soluções mais eficientes para se obter a matriz P é aplicar técnicas de otimização convexa através de desigualdades matriciais lineares (LMI – do inglês *linear matrix inequalities*). A solução do problema de controle através de LMIs é obtida numericamente e isso contribui para que uma solução seja encontrada de maneira mais eficiente se comparada aos métodos analíticos. Os métodos analíticos por sua vez nem sempre garantem a obtenção de uma solução. O ANEXO A, apresenta uma breve explanação a respeito das desigualdades matriciais lineares.

Considerando então o contexto de LMI's, o projeto básico de um controlador difuso Takagi-Sugeno pode ser definido como (TANAKA; WANG, 2001):

Encontrar uma matriz $X = X^T$, $X > 0$ e matrizes Y_i , $i = 1, 2, \dots, r$ de dimensões apropriadas satisfazendo as seguintes LMI's

$$-XA_i^T - A_iX + Y_i^T B_i^T + B_i Y_i > 0; \forall i = 1, 2, \dots, r \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} & -XA_i^T - A_iX - XA_j^T - A_jX + \\ & + Y_j^T B_i^T + B_i Y_j + Y_i^T B_j^T + B_j Y_i \geq 0; \forall i < j, i, j = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (2.20)$$

em que $X = P^{-1}$ e $Y_i = K_i X$, r é o número de regras do sistema difuso, tal que o equilíbrio do sistema difuso Takagi-Sugeno (2.18) é globalmente assintoticamente estável.

Desta forma, $X > 0$ juntamente com (2.19) e (2.20) formam a LMI cujas soluções, as matrizes X e Y_i , devem ser encontradas para que os ganhos de realimentação dos estados sejam determinados. Através das soluções da LMI obtém-se:

$$P = X^{-1} \text{ e } K_i = Y_i X^{-1}; i = 1, 2, \dots, r.$$

Como destaca Arrifano (2004), o projeto de controle difuso Takagi-Sugeno apresentado pode não produzir um resultado factível para os sistemas difusos com um elevado número de regras. Nesse caso, pode-se flexibilizar, ou relaxar, o projeto do controlador difuso seja através das propriedades das funções de pertinência normalizadas ou através da definição de um outro tipo de função de Lyapunov tal como $V(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t))x(t)^T P_i x(t)$, com $P_i = P_i^T$, $P_i > 0$. Ainda segundo Arrifano (2004) outras abordagens para o projeto de controle difuso Takagi-Sugeno utilizando a teoria de controle robusto, vêm sendo aplicadas com

sucesso na estabilização de sistemas não lineares com incertezas na modelagem e distúrbios externos desconhecidos.

3 Controle difuso Takagi-Sugeno com desempenho \mathcal{H}_∞

É apresentada nesse capítulo uma técnica de projeto de controle difuso com desempenho \mathcal{H}_∞ que estabiliza o sistema não linear e elimina os efeitos de distúrbios externos desconhecidos, mas limitados, tal que o desempenho do sistema de controle seja garantido.

A técnica de controle \mathcal{H}_∞ trata da síntese de controladores que minimizam a norma \mathcal{H}_∞ de uma determinada matriz de transferência para sistemas lineares sujeitos a distúrbios desconhecidos e incertezas no modelo.

O problema de controle \mathcal{H}_∞ foi inicialmente formulado por George Zames no início da década de 80, no contexto da redução da sensibilidade em processos lineares. Zames o formulou como um problema de otimização matemática utilizando o operador norma \mathcal{H}_∞ . Inicialmente escrito no domínio da frequência, as principais ferramentas utilizadas no desenvolvimento do problema \mathcal{H}_∞ foram a fatoração espectral, a parametrização de Youla e a teoria de aproximação. O uso destas ferramentas resultava em um problema de síntese de controladores \mathcal{H}_∞ ótimos ou sub-ótimos complicados e de dimensão elevada. Trabalhos posteriores, em meados da década de 80, demonstraram, porém, que a caracterização do problema no domínio do tempo resultava na solução através de equações algébricas de Ricatti. Esse novo conhecimento proporcionou um grande desenvolvimento na teoria de controle \mathcal{H}_∞ , culminando com as soluções no espaço de estados que permitiram a formulação de problemas gerais, incluindo processos variantes no tempo (NEUMANN, 2006).

Com a consolidação da técnica de controle \mathcal{H}_∞ , uma extensão natural de sua aplicação original e que tem sido objeto de estudo na área de sistemas de controle, é a aplicação dessa técnica combinada com o controle difuso Takagi-Sugeno para estabilizar sistemas não lineares, minimizando o efeito de distúrbios externos e incertezas do modelo difuso, tal como inicialmente postulado para sistemas lineares. Exemplos de estudos de controladores difusos

Takagi-Sugeno combinado com a técnica de controle \mathcal{H}_∞ podem ser encontrados em Tanaka, Ikeda e Wang (1996), Hong e Langari (1998), Cao e Frank (2000), Yoneyama et al. (2001a), Yoneyama et al. (2001b), Park, Kim e Park (2001), Lee, Jeung e Park (2001), Nguang e Shi (2003), Lo e Lin (2004), Katayama e Ichikawa (2004) e Khiar et al. (2007). Vale ressaltar que o trabalho apresentado em Khiar et al. (2007), apresenta uma técnica de projeto na mesma linha da técnica proposta neste trabalho de doutorado, porém com objetivos bem distintos. Em Khiar et al. (2007) o objetivo é controlar a borboleta de aceleração de um motor de combustão interna durante os regimes transientes, especificamente na aceleração.

Este capítulo apresenta o procedimento de projeto do controlador difuso Takagi-Sugeno com desempenho \mathcal{H}_∞ a ser aplicado neste trabalho. Esse procedimento de projeto é baseado em Hong e Langari (1998) e Lee, Jeung e Park (2001). Antes, porém, será apresentada uma breve introdução à teoria de controle \mathcal{H}_∞ .

3.1 Técnica de controle \mathcal{H}_∞

Considere o sistema em malha fechada representado pela seguinte forma

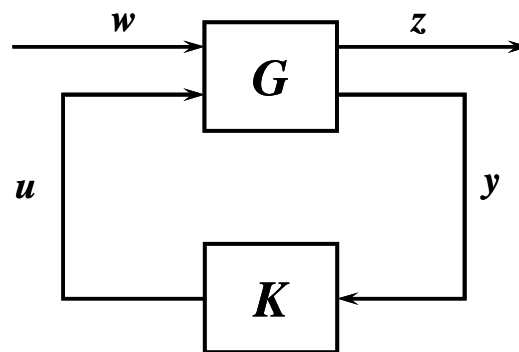


Figura 5 – Representação padrão 2-blocos.

descrito pelas seguintes equações na forma de espaço de estado:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A_f \mathbf{x}(t) + B_1 \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) = C_{1f} \mathbf{x}(t) + D_{11} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C_2 \mathbf{x}(t) + D_{21} \mathbf{w}(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

em que $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de ação de controle, $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^l$ o vetor de distúrbios externos, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ o vetor de variáveis medidas e $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^q$ o vetor de

saídas reguladas. O sub-índice f denota as matrizes do sistema em malha fechada para uma lei de controle $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{y}(t)$.

Seja $T_{zw}(s)$ a função transferência entre a saída regulada $\mathbf{z}(t)$ e a entrada externa $\mathbf{w}(t)$. Considerando que o sistema (3.1) é assintoticamente estável, $T_{zw}(s)$ é analítica e limitada para todo $s \in \mathbb{C}$ com parte real positiva. Em outras palavras, o valor singular máximo σ_{\max} de $T_{zw}(s)$ é finito para todo $s \in \mathbb{C}$ com $\text{Re}(s) > 0$ e $T_{zw}(s)$ pertencente ao espaço \mathcal{H}_{∞} . Assim, a norma \mathcal{H}_{∞} de $T_{zw}(s)$ é dada por

$$\|T_{zw}(s)\|_{\infty} \triangleq \sup_{\text{Re}(s) > 0} \sigma_{\max} [T_{zw}(s)] \quad (3.2)$$

e o problema de controle ótimo \mathcal{H}_{∞} é definido como:

Encontrar todos os controladores admissíveis $\mathbf{K}(s)$, tal que $\|T_{zw}(s)\|_{\infty}$ seja mínima (ZHOU; DOYLE, 1998).

A relação entre a norma \mathcal{H}_{∞} no domínio do tempo e no domínio da frequência será:

$$\|T_{zw}(s)\|_{\infty} = \sup_{\mathbf{w}(t) \in \mathcal{L}_2} \frac{\|\mathbf{z}(t)\|_2}{\|\mathbf{w}(t)\|_2} \leq \gamma, \quad (3.3)$$

considerando condições iniciais $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{w}(t) \in \mathcal{L}_2$ implica $\mathbf{z}(t) \in \mathcal{L}_2$ e para a condição $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, a equação (3.3) é verdadeira, em que o lado esquerdo desta equação é a chamada norma induzida \mathcal{L}_2 do sistema (3.1)¹⁰.

Esse fato resulta em uma relação simples e estreita entre a norma \mathcal{H}_{∞} do sistema e chamado *Bounded Real Lemma* (ANEXO B). Desta relação extrai-se que, se o sistema (3.1) é assintoticamente estável, então $\|T_{zw}(s)\|_{\infty} \leq \gamma$ se e somente se existir uma matriz $P = P^T > 0$ que satisfaz a desigualdade matricial (NEUMANN, 2006):

$$\begin{bmatrix} A_f^T P + P A_f + C_{1f}^T C_{1f} & P B_{1f} + C_1^T D_{11f} \\ B_1^T P + D_{11f}^T C_{1f} & D_{11f}^T D_{11f} - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (3.4)$$

¹⁰ O APÊNDICE B contém as definições de espaços e normas utilizadas neste capítulo.

Para aplicação na síntese de controladores \mathcal{H}_∞ a inequação (3.4) deve ser algebricamente modificada. Aplicando o complemento de Schur (ANEXO A) na inequação obtém-se:

$$\begin{aligned} & A_f^T P + P A_f + C_{1f}^T C_{1f} + \\ & + (P B_{1f} + C_{1f}^T D_{11f}) (\gamma^2 \mathbf{I} - D_{11f}^T D_{11f})^{-1} (B_{1f}^T P + D_{11f}^T C_{1f}) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Multiplicando ambos os lados de (3.5) por $X = P^{-1}$:

$$\begin{aligned} & A_f X + X A_f^T + X C_{1f}^T C_{1f} X + \\ & + (B_{1f} + X C_{1f}^T D_{11f}) (\gamma^2 \mathbf{I} - D_{11f}^T D_{11f})^{-1} (B_{1f}^T + D_{11f}^T C_{1f} X) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Aplicando o complemento de Schur em (3.6):

$$\begin{bmatrix} A_f X + X A_f^T + X C_{1f}^T C_{1f} X & B_{1f} + X C_{1f}^T D_{11f} \\ B_{1f}^T + D_{11f}^T C_{1f} X & D_{11f}^T D_{11f} - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.7)$$

o que equivale a

$$\begin{bmatrix} A_f X + X A_f^T & B_{1f} \\ B_{1f}^T & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X C_{1f}^T C_{1f} X & X C_{1f}^T D_{11f} \\ D_{11f}^T C_{1f} X & D_{11f}^T D_{11f} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (3.8)$$

Manipulando (3.8) obtém-se

$$\begin{bmatrix} A_f X + X A_f^T & B_{1f} \\ B_{1f}^T & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X C_{1f}^T \\ D_{11f}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1f} X & D_{11f} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (3.9)$$

Aplicando o complemento de Schur em (3.9):

$$\begin{bmatrix} A_f X + X A_f^T & B_{1f} & X C_{1f}^T \\ B_{1f}^T & -\gamma^2 \mathbf{I} & D_{11f}^T \\ C_{1f} X & D_{11f} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (3.10)$$

sendo essa desigualdade matricial mais adequada para a síntese de controladores \mathcal{H}_∞ . Desta forma, o problema de controla ótimo \mathcal{H}_∞ pode ser redefinido como (NEUMANN, 2006):

Encontrar um controlador K admissível, tal que exista uma matriz simétrica e definida positiva, $X = X^T$ e $X > 0$, que satisfaz a desigualdade matricial (3.10) e a norma $\|T_{zw}(s)\|_\infty$, dada por γ seja mínima.

Este problema pode ser escrito na forma de um problema de otimização tal como

$$\min_{\substack{K \in \mathcal{K} \\ X = X^T > 0}} \gamma$$

sujeito a (3.10), em que \mathcal{K} representa o conjunto de todos os controladores admissíveis K que estabilizam o sistema (3.1).

O problema de realimentação de estado, tal que a lei de controle é dada por $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ é apresentado a seguir.

Considerando o sistema da Figura 5 descrito pelas equações de estado

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}(t) \end{cases} \quad (3.11)$$

em que $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de ação de controle, $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^l$ o vetor de distúrbios externos, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ o vetor de variáveis medidas e $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^q$ o vetor de saídas reguladas. O sistema em malha fechada, com lei de controle por realimentação de estado $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, é descrito por

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_f\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_{1f}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}(t) \end{cases} \quad (3.12)$$

onde as matrizes em malha fechada \mathbf{A}_f e \mathbf{C}_{1f} são dadas por

$$\begin{cases} \mathbf{A}_f = \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K} \\ \mathbf{C}_{1f} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{K} \end{cases} \quad (3.13)$$

Considerando a desigualdade (3.10) para o sistema em malha fechada (3.12):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_f\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_f^T & \mathbf{B}_1 & \mathbf{X}\mathbf{C}_{1f}^T \\ \mathbf{B}_1^T & -\gamma^2\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_{1f}\mathbf{X} & \mathbf{D}_{11} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (3.14)$$

Substituindo (3.13) em (3.14) e aplicando a transformação $\mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{Y}$, chega-se à seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + B_2Y + Y^T B_2^T & B_1 & XC_1^T + YD_{12}^T \\ B_1^T & -\gamma^2 \mathbf{I} & D_{11}^T \\ C_1X + D_{12}Y & D_{11} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.15)$$

Desta forma, o problema de controle ótimo \mathcal{H}_∞ passa a ser descrito na forma de LMIs como:

$$\min_{\substack{\gamma \\ X > 0 \\ Y}} \gamma$$

sujeito a

$$X = X^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (3.16)$$

$$Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + B_2Y + Y^T B_2^T & B_1 & XC_1^T + YD_{12}^T \\ B_1^T & -r \mathbf{I} & D_{11}^T \\ C_1X + D_{12}Y & D_{11} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.17)$$

$$r = \gamma^2, \text{ com } r > 0 \quad (3.18)$$

As restrições (3.16), (3.17) e (3.18) formam as LMIs para a solução do problema de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estado. O controlador é dado por $\mathbf{K} = YX^{-1}$ em que $X^{-1} = P$.

3.2 Controle difuso Takagi-Sugeno com desempenho \mathcal{H}_∞

Nesta seção, o projeto de controle \mathcal{H}_∞ é estendido para a aplicação em sistemas não lineares utilizando controle difuso Takagi-Sugeno.

Considere o modelo difuso Takai-Sugeno descrito a seguir

R_i :

SE $x_1(t)$ é M_{1i} e, ..., e $x_n(t)$ é M_{ni}

ENTÃO

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A_i \mathbf{x}(t) + B_{1i} \mathbf{w}(t) + B_{2i} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) = C_{1i} \mathbf{x}(t) + D_{11i} \mathbf{w}(t) + D_{12i} \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

(3.19)

em que $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de ação de controle, $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^l$ o vetor de distúrbios externos e $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^q$ o vetor de saídas reguladas, R_i é a i -ésima regra do sistema difuso, com $i = 1, 2, \dots, r$ em que r é o número de regras. As matrizes $A_i, B_{1_i}, B_{2_i}, C_{1_i}, D_{11_i}$ e D_{12_i} são matrizes de dimensões apropriadas, tal como descritas em (3.11). Como pode ser observado, o modelo (3.19) corresponde ao modelo difuso Takagi-Sugeno descrito em (2.3), com a diferença de que em (3.19) as variáveis premissas correspondem aos estados do sistema dinâmico.

Dado um par $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, o sistema difuso resultante será:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) \{A_i \mathbf{x}(t) + B_{1_i} \mathbf{w}(t) + B_{2_i} \mathbf{u}(t)\} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) \{C_{1_i} \mathbf{x}(t) + D_{11_i} \mathbf{w}(t) + D_{12_i} \mathbf{u}(t)\} \quad (3.21)$$

em que

$$h_i(\mathbf{x}(t)) = \frac{\eta_i(\mathbf{x}(t))}{\sum_{i=1}^r \eta_i(\mathbf{x}(t))} \quad (3.22)$$

e

$$\eta_i(\mathbf{x}(t)) = \prod_{p=1}^n M_{ip}(\mathbf{x}(t)) , \quad (3.23)$$

sendo que o termo $h_i(\mathbf{x}(t))$ denota a função de pertinência normalizada, com $M_{ip}(\mathbf{x}(t)) \in [0, 1]$ o grau de pertinência de $\mathbf{x}(t)$ no conjunto difuso M_{ip} . As condições apresentadas em (2.8) e (2.9) também são válidas para o sistema formado por (3.20) e (3.21).

O controlador difuso para o sistema (3.19), considerando lei de controle por realimentação de estado, é descrito por:

$$\begin{aligned} &R_i : \\ &SE \ x_1(t) \text{ é } M_{1i} \text{ e, } \dots, \text{ e } x_n(t) \text{ é } M_{ni} \\ &ENTÃO \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_i \mathbf{x}(t)$$

em que \mathbf{K}_i é o controlador linear para compensar o subsistema da i -ésima regra.

A saída final deste controlador é:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) \mathbf{K}_i \mathbf{x}(t) \quad (3.25)$$

A partir de (3.20), (3.21) e (3.25), o sistema em malha fechada é dado por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) h_j(\mathbf{x}(t)) \{A_i + B_{2_i} \mathbf{K}_i\} \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) B_{1_i} \mathbf{w}(t) \quad (3.26)$$

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) h_j(\mathbf{x}(t)) \{C_{1_i} + D_{12_i} \mathbf{K}_i\} \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) D_{11_i} \mathbf{w}(t). \quad (3.27)$$

Considerando que o sistema de controle difuso em malha fechada, com lei de controle por realimentação de estados, tal como representado por (3.26) e (3.27), é quadraticamente estável com norma $\|T_{zw}(s)\|_{\infty} \leq \gamma$ então, existe uma função quadrática de Lyapunov $V(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^T(t) P \mathbf{x}(t)$, com $P > 0$ e $\gamma \geq 0$, tal que

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}, t) + \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t) - \gamma^2 \mathbf{w}^T(t) \mathbf{w}(t) \leq 0$$

em que P satisfaz a seguinte desigualdade matricial (*Bounded Real Lemma*):

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_f^T P + P \bar{A}_f + \bar{C}_{1f}^T \bar{C}_{1f} & P \bar{B}_{1f} + \bar{C}_{1f}^T \bar{D}_{11f} \\ \bar{B}_{1f}^T P + \bar{D}_{11f}^T \bar{C}_{1f} & \bar{D}_{11f}^T \bar{D}_{11f} - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (3.28)$$

sendo:

$$\bar{A}_f = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) h_j(\mathbf{x}(t)) \{A_i + B_{2_i} \mathbf{K}_i\},$$

$$\bar{B}_{1f} = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) B_{1_i},$$

$$\bar{C}_{1f} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) h_j(\mathbf{x}(t)) \{C_{1_i} + D_{12_i} \mathbf{K}_i\},$$

$$\bar{D}_{11f} = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{x}(t)) D_{11_i}.$$

Aplicando o mesmo procedimento apresentado na seção anterior, para transformação da desigualdade (3.28) de forma que se possa aplicá-la na síntese de controladores, obtém-se a seguinte formulação para o projeto de controladores difusos Takagi-Sugeno com lei de

controle por realimentação de estados, com desempenho \mathcal{H}_∞ (HONG; LANGARI, 1998, LEE; JEUNG; PARK, 2001):

Considere o sistema difuso representado por

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_i : \\ & \text{SE } x_1(t) \text{ é } M_{1i} \mathbf{e}, \dots, \mathbf{e} \text{ } x_n(t) \text{ é } M_{ni} \\ & \text{ENTÃO} \end{aligned} \quad , \quad (3.29)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A_i \mathbf{x}(t) + B_{1i} \mathbf{w}(t) + B_{2i} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) = C_{1i} \mathbf{x}(t) + D_{11i} \mathbf{w}(t) + D_{12i} \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

com $i = 1, 2, \dots, r$, então existe um controlador difuso

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_i : \\ & \text{SE } x_1(t) \text{ é } M_{1i} \mathbf{e}, \dots, \mathbf{e} \text{ } x_n(t) \text{ é } M_{ni} \\ & \text{ENTÃO} \end{aligned} \quad , \quad (3.30)$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_i \mathbf{x}(t)$$

tal que o sistema em malha fechada é quadraticamente estável com $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, se existe uma matriz comum $X > 0$ e matrizes Y_i , $i = 1, 2, \dots, r$, que satisfazem as seguintes LMIs:

$$\begin{bmatrix} G_{ii} & B_{1i} & W_{ii}^T \\ B_{1i}^T & -\gamma^2 \mathbf{I} & D_{11i}^T \\ W_{ii} & D_{11i} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (3.31)$$

$$\begin{bmatrix} G_{ij} + G_{ji} & B_{1i} + B_{1j} & W_{ij}^T + W_{ji}^T \\ B_{1i}^T + B_{1j}^T & -2\gamma^2 \mathbf{I} & D_{11i}^T + D_{11j}^T \\ W_{ij} + W_{ji} & D_{11i} + D_{11j} & -2\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad i < j \leq r \quad (3.32)$$

para todo $i, j = 1, 2, \dots, r$, em que $G_{ij} = A_i X + X A_i^T + B_{2i} Y_j + Y_j^T B_{2i}^T$ e $W_{ij} = C_{1i} X + D_{12i} Y_j$. Os ganhos de realimentação de estado são obtidos por $\mathbf{K}_i = Y_i X^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, r$, sendo que $X^{-1} = P$.

Desta forma, o procedimento de projeto se torna um problema de otimização em que se deseja encontrar um conjunto de matrizes Y_i e $X = X^T$, $X > 0$, de dimensões apropriadas, minimizando γ^2 sujeito a $X > 0$, (3.31) e (3.32).

4 Projeto do controlador difuso Takagi-Sugeno com desempenho \mathcal{H}_∞ para regulagem da marcha lenta

Como foi destacado no capítulo introdutório, o problema de controle da marcha lenta nos motores de ciclo Otto para aplicação veicular, é um problema de rejeição de distúrbios. Os distúrbios na forma de torque resistente afetam o funcionamento do motor provocando oscilação da rotação em marcha lenta, o que pode comprometer a dirigibilidade do veículo ou mesmo fazer com que o motor pare de funcionar, caso a ação de controle adequada não seja capaz de atenuar o efeito indesejado dos distúrbios. Outra característica levada em consideração para o projeto do controlador é a dinâmica não linear do motor. Mesmo operando em marcha lenta, espera-se que a rotação do motor sofra pequenos desvios com relação ao valor de referência desejado, a dinâmica não linear se não levada em consideração pode fazer com que o controlador não consiga obedecer aos requisitos de desempenho ou mesmo se torne instável.

Diante deste cenário, fica claro a escolha da técnica \mathcal{H}_∞ pois esta é uma das principais ferramentas de projeto de controladores onde se deseja rejeição de distúrbios externos. Visto que, originalmente, esta é uma técnica de controle linear, sua aplicação aliada ao controle difuso Takagi-Sugeno, tem por objetivo desenvolver um controlador não linear utilizando a teoria, bem desenvolvida e consolidada, de síntese de controladores lineares. Essa combinação tem apresentado considerável destaque no meio acadêmico como pode ser observado nos artigos citados no capítulo 3.

Neste capítulo, será detalhada a modelagem difusa Takagi-Sugeno de um motor de combustão interna ciclo Otto operando em marcha lenta, detalhado o procedimento de projeto do controlador e apresentadas as simulações do controlador projetado.

4.1 Modelagem do motor

Para representar a dinâmica do motor operando em regime de marcha lenta, será considerada a modelagem proposta por Crossley e Cook (1991). Esse modelo tem sido utilizado em uma série de trabalhos com em Vachtsevanos, Farinwata e Pirovolou (1993), Abate et al. (1994) e Puleston, Spurgeon e Monsees (2001).

O modelo é baseado nas relações funcionais dos principais elementos do motor. O corpo da borboleta de aceleração, a dinâmica do coletor de admissão e a geração de torque são incluídos como relações algébricas não-lineares baseadas em análise experimental em um motor instalado em uma bancada dinamométrica.

Embora no trabalho original tenha sido incluída a função de recirculação dos gases de exaustão; na descrição do modelo que segue, os termos relativos a tal função serão desconsiderados. Esta simplificação é adotada, pois na condição de marcha lenta, a recirculação dos gases de exaustão não é aplicada.

O primeiro elemento do modelo é o corpo da borboleta de aceleração. A entrada deste subsistema é a posição da borboleta de aceleração, θ . A taxa de fluxo de massa de ar que entra no coletor de admissão, é expressa pelo produto de duas funções:

$$\dot{m}_{ai} = f(\theta) \cdot g(P_{man}, P_a) \quad (4.1)$$

em que

$$f(\theta) = 2,821 - 0,05231\theta + 0,10299\theta^2 - 0,0063\theta^3, \quad (4.2)$$

$$g(P_{man}, P_a) = \begin{cases} 1, & \text{se } P_{man} \leq \frac{P_a}{2} \\ \frac{2}{P_a} \sqrt{P_{man}P_a - P_{man}^2}, & \text{se } P_{man} > \frac{P_a}{2} \end{cases}, \quad (4.3)$$

com

$\dot{m}_{ai} \triangleq$ vazão mássica de ar que entra no coletor de admissão [g/s];

$\theta \triangleq$ posição de abertura da borboleta de aceleração [°];

$P_{man} \triangleq$ pressão no coletor de admissão [bar];

$P_a \triangleq$ pressão atmosférica [bar]

tal que $f(\theta)$ é função da posição da borboleta de aceleração, levantada empiricamente e $g(P_{man}, P_a)$ função da pressão no coletor de admissão, P_{man} , e da pressão atmosférica, P_a . Na condição em que $P_{man} \leq P_a / 2$, a taxa de fluxo de massa de ar através do corpo da borboleta de aceleração é sônico e função apenas do ângulo de abertura da borboleta θ .

O segundo elemento, o coletor de admissão, é caracterizado por uma equação diferencial para a pressão. Com a diferença entre a taxa de fluxo de massa de ar que entra e que sai do coletor de admissão aplicada na equação dos gases ideais obtém

$$\dot{P}_{man} = \frac{RT}{V_m} (\dot{m}_{ai} - \dot{m}_{ao}) \quad (4.4)$$

com

$R \triangleq$ constante específica do ar seco [$287,05 \times 10^{-5}$ bar.m³/kg.K];

$T \triangleq$ temperatura do ar [K];

$V_m \triangleq$ volume do coletor de admissão [m³];

$\dot{m}_{ao} \triangleq$ vazão mássica de ar admitida por cada um dos cilindros [g/s].

A vazão mássica de ar que entra no cilindro é descrita por uma equação levantada empiricamente, que é função da pressão no coletor e da rotação do motor, como

$$\dot{m}_{ao} = -0,366 + 0,08979P_{man}N - 0,0377P_{man}^2N + 0,0001P_{man}N^2 \quad (4.5)$$

com

$N \triangleq$ rotação do motor [rad/s].

A equação que descreve a geração de torque, também obtida empiricamente depende da massa de combustível admitida, da razão ar-combustível, o ponto da ignição e da rotação do motor:

$$T_{motor} = -181,3 + 379,63m_a + 21,91\frac{A}{F} - 0,85\left(\frac{A}{F}\right)^2 + 0,26\sigma - 0,0028\sigma^2 + 0,027N - 0,000107N^2 + 0,00048N\sigma + 2,55\sigma m_a - 0,05 \times \sigma^2 m_a \quad (4.6)$$

com

$T_{motor} \triangleq$ torque produzido pelo motor [N.m];

$\sigma \triangleq$ ponto de ignição [° APMS];

$\frac{A}{F} \triangleq$ razão ar-combustível;

$m_a \triangleq$ massa de ar admitida pelo cilindro em um ciclo[g].

Desta forma, a caracterização da rotação é descrita por uma equação diferencial na forma:

$$\dot{N} = \frac{1}{J}(T_{motor} - T_L) \quad (4.7)$$

com

$\dot{N} \triangleq$ aceleração angular da árvore de manivelas [rad/s²];

$T_L \triangleq$ torque de cargas externas [N.m]

$J \triangleq$ momento de inércia rotacional [kg.m²].

Desta forma, a modelagem do motor considerada consiste basicamente nas duas equações diferenciais que segue:

$$\dot{P}_{man} = \frac{RT}{V_m}(\dot{m}_{ai} - \dot{m}_{ao}) \quad (4.8)$$

$$\dot{N} = \frac{1}{J}(T_{motor} - T_L) \quad (4.9)$$

Para a aplicação no desenvolvimento do controlador da marcha lenta, são consideradas como entradas de controle o ponto da centelha, σ , e a posição da borboleta de aceleração, θ . A pressão no coletor de admissão, P_{man} , e a rotação do motor, N , são adotadas como os estados do sistema. Desta forma:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \sigma(t) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{man}(t) \\ N(t) \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Assim, o modelo do motor considerando os vetores $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{x}(t)$ pode ser escrito na seguinte forma, onde é considerado $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}$ e $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{RT}{V_m} \left[\left(2,821 - 0,05231u_1 + 0,10299u_1^2 - 0,0063u_1^3 \right) g(x_1) - \right. \\ &\quad \left. - \left(-0,366 + 0,08979x_1x_2 - 0,0337x_1^2x_2 + 0,0001x_1x_2^2 \right) \right] \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J} \left[\left(-181,3 + 379,36ma + 21,91\frac{A}{F} - 0,85\left(\frac{A}{F}\right)^2 + 0,26u_2 - 0,0028u_2^2 + \right) - T_L \right. \\ &\quad \left. + 0,027x_2 - 0,000107x_2^2 - 0,00048x_2u_2 + 2,55u_2ma - 0,05u_2^2ma \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

Conforme comentado no capítulo 2, a construção do modelo difuso Takagi-Sugeno é um importante passo para o projeto do controlador difuso. Com o modelo não linear (4.12) será obtida a representação difusa Takagi-Sugeno do motor no regime de marcha lenta. Esta etapa será descrita na próxima seção.

4.2 Modelagem e controle difuso do motor em regime de marcha lenta

O modelo não linear obtido a partir das equações que descrevem o comportamento dinâmico dos principais elementos do motor (4.12) será utilizado para obter os modelos lineares locais a partir da técnica de aproximação local (2.4.1 Construção do modelo difuso Takagi-Sugeno).

4.2.1 Modelagem Difusa

O primeiro passo para se obter as representações lineares locais, é escrever o sistema (4.12) na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (4.13)$$

por simplicidade $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}$ e $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}$.

Desta forma, tem-se:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{RT}{V_m} \left(-0,366 + 0,08979x_1x_2 - 0,0337x_1^2x_2 + 0,0001x_1x_2^2 - 2,821g(x_1) \right) \\ \frac{1}{J} \left(-181,3 + 379,36ma + 21,91\frac{A}{F} - 0,85\left(\frac{A}{F}\right)^2 + 0,027x_2 - 0,000107x_2^2 \right) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{RT}{V_{man}} \left(-0,05231 + 0,10299u_1 - 0,00063u_1^2 \right) g(x_1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \left(0,26 - 0,0028u_2 + 0,00048x_2 + \right. \\ & \left. + 2,55ma - 0,05mau_2 \right) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Como pode ser observado em (4.15), a matriz de funções G depende do vetor de estados x e do vetor de entradas u , apresentando comportamento não linear em função desses dois vetores. Desta forma, o sistema (4.12) pertence à classe de sistemas

$$\dot{x} = f(x) + G(x, u)u \quad (4.16)$$

o que torna necessário a aplicação do método de linearização proposto em Canelon, Shieh e Karayiannis (2005) para se obter as representações locais lineares.

Para a linearização de (4.12) deve-se definir os pontos em torno dos quais o sistema será linearizado. A operação do motor em marcha lenta é caracterizada pela operação no ponto de equilíbrio $\xi \triangleq x - x_e$ do sistema não linear com as entradas de controle no valor de regime, ou seja, $\theta_e = 1,5^\circ$ para a posição da borboleta de aceleração e $\sigma_e = 5,0^\circ$ APMS para o ponto de ignição, ou seja

$$u_e = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 5,0 \end{bmatrix}.$$

Com esses valores para as entradas, o equilíbrio para os estados é obtido resolvendo o sistema não linear (4.12) para $\dot{P}_{man} = 0$ e $\dot{N} = 0$, obtendo assim $P_{mane} = 0,4295$ bar e $N_e = 91,4937$ rad/seg (873,7 rpm) para a pressão no coletor e para a rotação respectivamente, ou seja

$$x_e = \begin{bmatrix} 0,4295 \\ 91,4937 \end{bmatrix}.$$

A solução do sistema não linear (4.12) foi obtida com o auxílio do Matlab[®]. O Apêndice C contém o código utilizado para montagem e obtenção dos estados de equilíbrio para as entradas de controle u_o .

Como os pontos de equilíbrio não correspondem à origem do sistema, é necessário que se faça o deslocamento do equilíbrio do sistema para a origem antes de se fazer o projeto do controlador. Desta forma os estados e entradas de controle deslocados serão

$$\xi \triangleq x - x_e \quad (4.17)$$

$$v \triangleq u - u_e, \quad (4.18)$$

assim, o sistema (4.12) pode ser reescrito a partir de

$$\dot{\xi} = f(\xi + x_e) + G(\xi + x_e, v + u_e)(v + u_e) \quad (4.19)$$

A faixa de rotação para a operação geralmente é considerada entre 600 rpm e 1200 rpm (62,8 rad/seg e 125,6 rad/seg). Os pontos definidos para se obter as representações lineares locais serão definidos a partir de um desvio de 130 rpm (13,6136 rad/seg) para a rotação e 10% para a pressão no coletor, considerando as entradas de controle nos respectivos valores de equilíbrio, ou seja:

$$\bar{x}_1 = x_{e_1} \pm 10\%$$

$$\bar{x}_2 = x_{e_2} \pm 13,6 \text{ rad / seg}$$

Desta forma, os pontos de linearização para se obter os modelos lineares locais, os quais irão compor a parte conseqüente da base de regras do sistema difuso são:

$$\bar{x}_{regra=1} = [0,3866 \ 77,89]^T, \quad (4.20)$$

$$\bar{x}_{regra=2} = [0,4724 \ 77,89]^T, \quad (4.21)$$

$$\bar{x}_{regra=3} = [0,3866 \ 105,09]^T, \quad (4.22)$$

$$\bar{x}_{regra=4} = [0,4724 \ 105,09]^T. \quad (4.23)$$

Como pode ser observado, foram definidas quatro regras para o sistema difuso. Os pontos de equilíbrio não serão considerados, o que torna o número de regras menor, simplificando assim o sistema difuso.

A partir dos pontos (4.20) a (4.23), e adotando o valor de equilíbrio, u_e , para as entradas de controle, foi aplicado o método de linearização de Canelon, Shieh e Karayiannis (2005) obtendo as seguintes representações lineares locais:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2,3023 & -0,0162 \\ 660,7151 & 1,1789 \end{bmatrix} \quad B_{2_1} = \begin{bmatrix} 0,0885 & 0 \\ 0 & 3,1799 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2,1162 & -0,0162 \\ 605,9095 & 1,1788 \end{bmatrix} \quad B_{2_2} = \begin{bmatrix} 0,0885 & 0 \\ 0 & 3,4649 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -3,2245 & -0,0171 \\ 703,0296 & 1,0214 \end{bmatrix} \quad B_{2_3} = \begin{bmatrix} 0,0885 & 0 \\ 0 & 3,4106 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -2,9733 & -0,0171 \\ 648,2241 & 1,0215 \end{bmatrix} \quad B_{2_4} = \begin{bmatrix} 0,0885 & 0 \\ 0 & 3,7146 \end{bmatrix}$$

O algoritmo para linearização apresentado em Canelon, Shieh e Karayiannis (2005) foi implementado utilizando o Matlab[®]. O Apêndice C contém o código gerado para implementação do algoritmo de linearização.

Considerando o modelo difuso Takagi-Sugeno na forma

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_i : \\ & \text{SE } x_1 \text{ é } M_{1i} \text{ e } x_2 \text{ é } M_{2i} \\ & \text{ENTÃO} \\ & \dot{\mathbf{x}} = A_i \mathbf{x} + B_{2_i} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.24)$$

e adotando os estados e entradas deslocados (4.17) e (4.18), então o sistema difuso obtido para o motor em marcha lenta será

Regra 1:

$$\begin{aligned} & \text{SE } \xi_1 \text{ é } M_{11} \text{ e } \xi_2 \text{ é } M_{21} \\ & \text{ENTÃO} \\ & \dot{\xi} = A_1 \xi + B_{2_1} \mathbf{v} \end{aligned}$$

Regra 2:

$$\begin{aligned} & \text{SE } \xi_1 \text{ é } M_{12} \text{ e } \xi_2 \text{ é } M_{22} \\ & \text{ENTÃO} \\ & \dot{\xi} = A_2 \xi + B_{2_2} \mathbf{v} \end{aligned}$$

Regra 3:

$$\begin{aligned} & \text{SE } \xi_1 \text{ é } M_{13} \text{ e } \xi_2 \text{ é } M_{23} \\ & \text{ENTÃO} \\ & \dot{\xi} = A_3 \xi + B_{2_3} \mathbf{v} \end{aligned}$$

Regra 4:

$$\begin{aligned} & \text{SE } \xi_1 \text{ é } M_{14} \text{ e } \xi_2 \text{ é } M_{24} \\ & \text{ENTÃO} \\ & \dot{\xi} = A_4 \xi + B_{2_4} \mathbf{v} \end{aligned}$$

em que M_{ip} é o conjunto difuso referente à variável premissa i na regra p . As funções de pertinência do tipo sigmóides associadas aos conjuntos difusos M_{ip} estão ilustradas na Figura 6. Como pode ser observado, $M_{11} = M_{12}$, $M_{12} = M_{14}$, $M_{21} = M_{22}$, $M_{23} = M_{24}$. Neste caso, os estados correspondem aos estados deslocados.

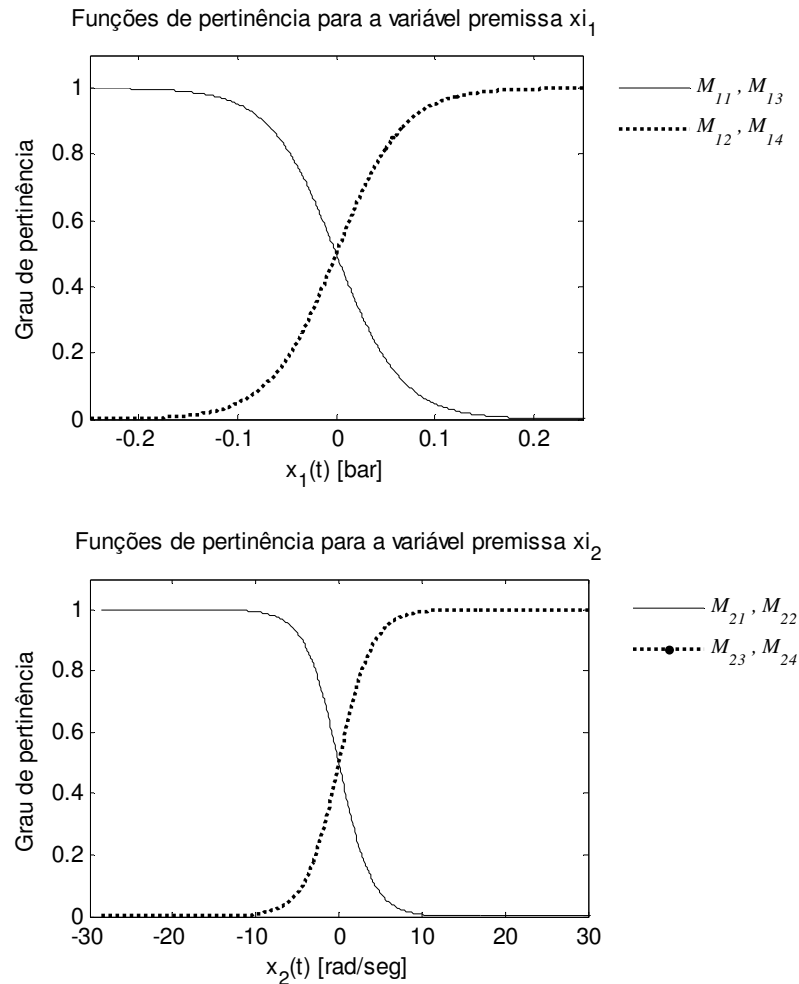


Figura 6 – Funções de pertinência adotadas.

Assim, o sistema difuso resultante será:

$$\dot{\xi} = \sum_{i=1}^r h_i(\xi) (A_i \xi + B_{2_i} v) \quad (4.25)$$

4.2.2 Projeto do controlador difuso

A lei de controle difusa compartilha a mesma estrutura do sistema difuso(4.25), ou seja

$$v = \sum_{i=1}^r h_i(\xi) K_i \xi \quad (4.26)$$

onde o conhecimento do sistema é repassado através das funções de pertinência das variáveis premissas ξ . O objetivo agora é determinar os ganhos de realimentação de estado K_i , $i = 1,2,3,4$ de forma a garantir as seguintes especificações:

- Garantir um desvio máximo da rotação de 100 rpm (10,47 rad/seg) para um torque máximo de cargas externas de 20 N.m.;
- Limitar a ação de controle da borboleta de aceleração em 15° (abertura máxima permitida);
- Limitar a ação de controle do ponto de ignição em 24° APMS (avanço máximo permitido).

Tais especificações de projeto foram definidas considerando valores adotados nas principais referencias.

Deve-se ressaltar que os valores limitantes para as ações de controle são referentes a \mathbf{u} , ou seja, à ação de controle deslocada. Portanto, para o valor efetivo da ação de controle da borboleta de aceleração e do ponto de ignição devem ser somados os valores referentes à ação de controle no equilíbrio do sistema, ou seja, $1,5^\circ$ e $5,0^\circ$ APMS para a borboleta de aceleração e avanço da ignição, respectivamente. O diagrama em blocos da Figura 7 representa o sistema de controle a ser projetado.

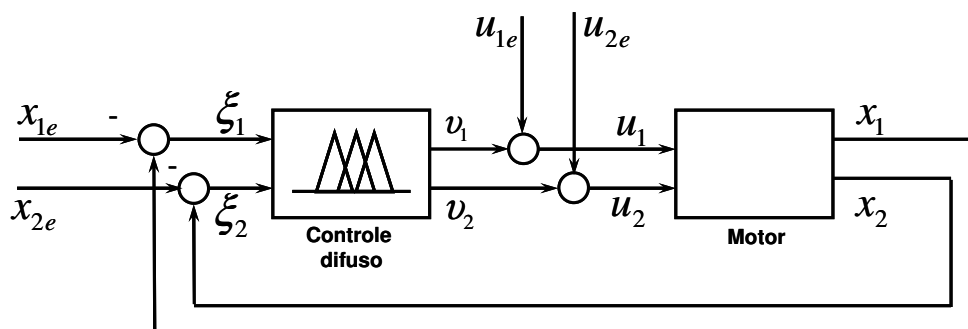


Figura 7 – Sistema de controle difuso em malha fechada.

A técnica de projeto \mathcal{H}_∞ permite inserir as especificações de projeto no procedimento de síntese do controlador através de ponderações que são inseridas nas representações lineares locais. A Figura 8 mostra as funções de ponderação inseridas, onde

- $W_e = 1/10,47$ é a função de ponderação para a especificação de desvio máximo permitido para a rotação do motor;

- $W_w = 20$ é a função de ponderação para a especificação do máximo distúrbio de cargas externas permitido;
- $W_{u_1} = 15$ é a função de ponderação para especificar a máxima ação de controle da borboleta de aceleração;
- $W_{u_2} = 24$ é a função de ponderação para especificar a máxima ação de controle do ponto de ignição.

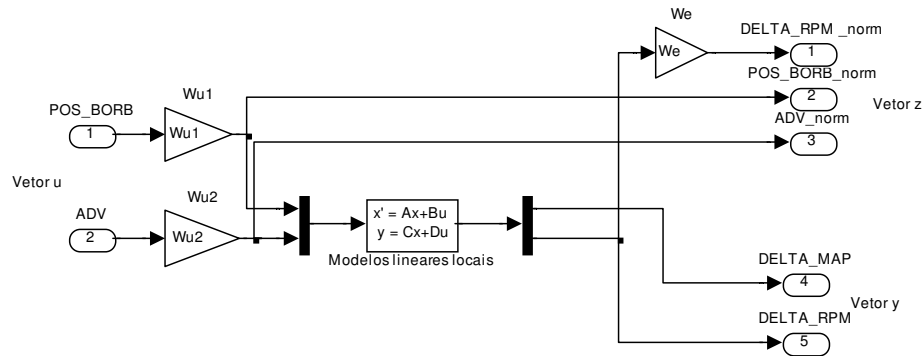


Figura 8 – Representação dos modelos lineares locais com funções de ponderação.

A função de ponderação W_w foi inserida manualmente pois o recurso do Matlab[®] utilizado para a construção da planta aumentada não permite que se insira tal ponderação de maneira direta.

Desta forma, as novas matrizes das representações lineares locais devem ser recalculadas de forma a considerar as especificações mostradas na Figura 8. Deve-se observar que o novo sistema, chamado sistema aumentado, corresponde à matriz G da Figura 9.

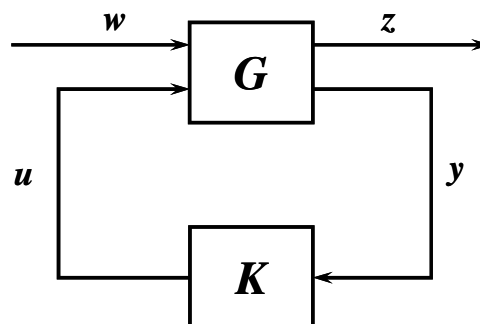


Figura 9 – Representação padrão 2-blocos.

e sua representação na forma de espaço de estados é:

$R_i :$

SE ξ_1 é M_{1i} e ξ_2 é M_{2i}

ENTÃO

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_i \xi + B_{1i} w + B_{2i} v \\ z = C_{1i} \xi + D_{11i} w + D_{12i} v \end{cases},$$

tal que as novas matrizes são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2,3023 & -0,0162 \\ 660,7151 & 1,1789 \end{bmatrix} \quad B_{2_1} = \begin{bmatrix} 1,3275 & 0 \\ 0 & 76,3175 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2,1162 & -0,0162 \\ 605,9095 & 1,1788 \end{bmatrix} \quad B_{2_2} = \begin{bmatrix} 1,3275 & 0 \\ 0 & 83,1574 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -3,2245 & -0,0171 \\ 703,0296 & 1,0214 \end{bmatrix} \quad B_{2_3} = \begin{bmatrix} 1,3275 & 0 \\ 0 & 81,8539 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -2,9733 & -0,0171 \\ 648,2241 & 1,0215 \end{bmatrix} \quad B_{2_4} = \begin{bmatrix} 1,3275 & 0 \\ 0 & 89,1508 \end{bmatrix},$$

e as demais matrizes são comuns a todas as regras, sendo

$$B_{1i} = \begin{bmatrix} 0 \\ -142,8571 \end{bmatrix}, \quad C_{1i} = \begin{bmatrix} 0 & 0,0955 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{11i} = [0 \ 0 \ 0]^T \quad \text{e} \quad D_{12i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o procedimento de projeto do controlador apresentado na seção 3.2, cuja formulação se baseia na solução de um problema de LMI, obtém-se as seguintes matrizes de realimentação de estados, para cada uma das regras do controlador difuso, matriz P e o valor de γ obtido. O controlador obtido é o controlador ótimo, ou seja, o valor de γ é mínimo. A Tabela 1 sumariza os valores encontrados.

Porém, como pode ser observado, o controlador ótimo obtido apresenta ganhos de realimentação elevados. Tais ganhos são impraticáveis, pois tornam as ações de controle inapropriadas para a operação em malha fechada. Como explica Zhou e Doyle (1998) é possível e normal que o controlador ótimo \mathcal{H}_∞ apresente ganhos elevados, muitas vezes impraticáveis.

O Apêndice C apresenta o código em Matlab[®] utilizado para a montagem das LMIs e os passos para obter a solução do problema de minimização do valor de γ seguindo as restrições descritas em 3.2.

Tabela 1 – Resultados do projeto do controlador ótimo.

Projeto 1	
Regra	Ganhos de realimentação
1	$\begin{bmatrix} -2,5242e+007 & -3,7949e+005 \\ -3,4701e+007 & -5,217e+005 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} -2,5242e+007 & -3,7949e+005 \\ -3,725e+007 & -5,6002e+005 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} -2,5242e+007 & -3,7949e+005 \\ -3,741e+007 & -5,6243e+005 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} -2,5242e+007 & -3,7949e+005 \\ -3,8528e+007 & -5,7924e+005 \end{bmatrix}$
Matriz P	
$P = \begin{bmatrix} 1,12676e+006 & 0,0191e+006 \\ 0,0191e+006 & 0,0003e+006 \end{bmatrix}$	
Ganho \mathcal{L}_2	
$\gamma = 1,2261$	

Seguindo o procedimento de projeto, foi definido um novo valor para γ a partir do valor mínimo obtido no projeto do controlador ótimo. O novo valor é menos conservador com relação à $\|T_{zw}\|_{\infty}$, porém deve-se garantir que as imposições de projeto listadas anteriormente devem ser obedecidas. A Tabela 2 mostra os resultados obtidos para um valor de $\gamma = 1,25$. Pode-se observar a diminuição dos valores dos ganhos. Simulações realizadas utilizando o modelo difuso obtido na seção anterior, mostram porém que o controlador obtido ainda apresenta ganhos elevados. Isso pode ser observado analisando os gráficos das ações de controle, onde está claro o efeito dos ganhos elevados, como pode ser observado na Figura 12 e na Figura 13. A oscilação apresentada na ação de controle da borboleta de aceleração torna inviável a aplicação dos ganhos, pois tal oscilação pode provocar o desgaste prematuro do atuador. A simulação foi realizada utilizando o pacote de simulação Simulink[®] do Matlab[®]. Um distúrbio na forma de torque externo equivalente a 20 N.m foi aplicado ao sistema no instante de 50 segundos. Os valores das variáveis de estado e das entradas de controle

apresentadas nos gráficos que seguem, são referentes ao equilíbrio do sistema difuso, ou seja, a origem do sistema.

O Apêndice C apresenta o código em Matlab[®] utilizado para a montagem das LMIs e os passos para obter a solução do problema para o valor de γ especificado, seguindo as restrições descritas em 3.2.

Tabela 2 – Resultados do projeto do controlador para $\gamma = 1,25$.

Projeto 2	
Regra	Ganhos de realimentação
1	$\begin{bmatrix} -2870.2 & -42.71 \\ -3992.4 & -61.362 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} -2868.2 & -42.68 \\ -4201.2 & -64.563 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} -2873.3 & -42.753 \\ -4196.8 & -64.492 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} -2870.8 & -42.717 \\ -4314.9 & -66.302 \end{bmatrix}$
Matriz P	
$P = \begin{bmatrix} 144,1925 & 2,1457 \\ 2,1457 & 0,0330 \end{bmatrix}$	
Ganho \mathcal{L}_2	
$\gamma = 1,25$	

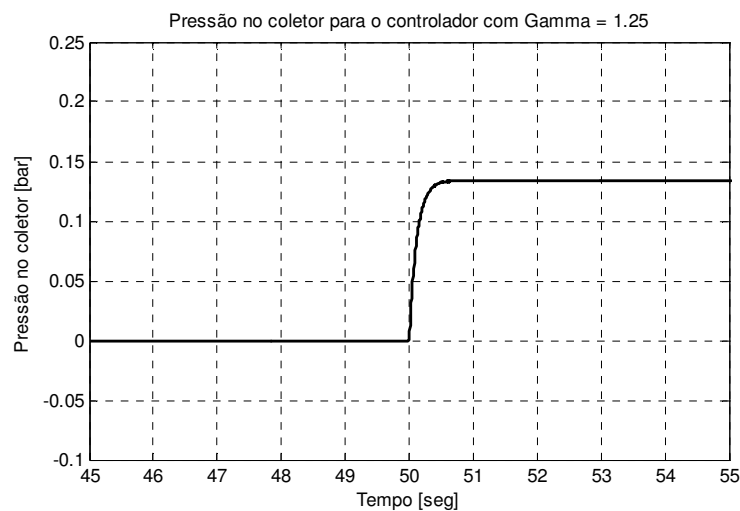


Figura 10 – Pressão no coletor para o controlador com $\gamma = 1,25$.

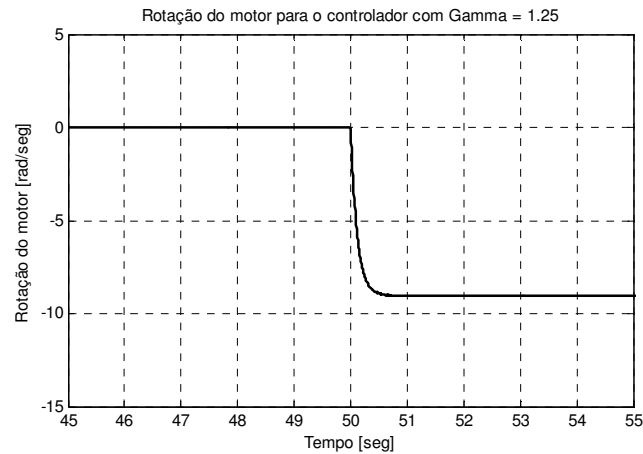


Figura 11 – Rotação do motor para o controlador com $\gamma = 1,25$.

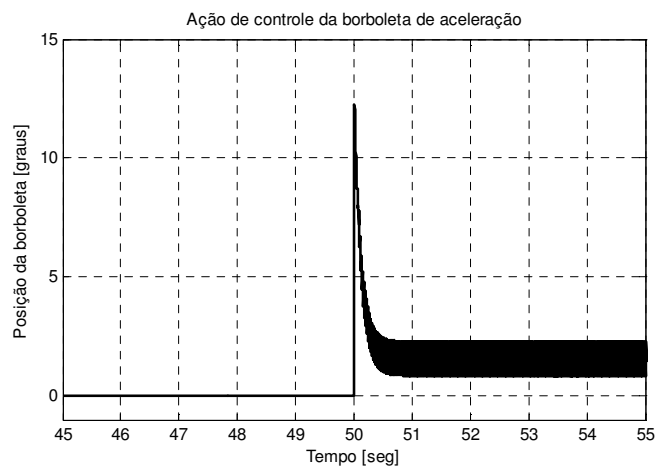


Figura 12 – Ação de controle da borboleta para o controlador com $\gamma = 1,25$.

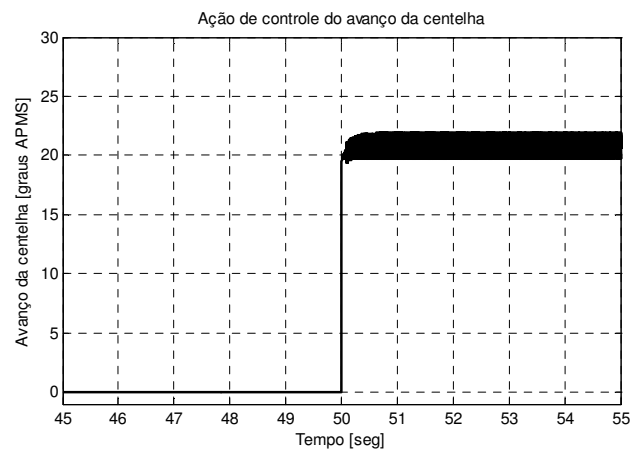


Figura 13 – Ação do avanço da centelha para o controlador com $\gamma = 1,25$.

Simulações realizadas para controladores obtidos para valores de γ igual a 1,30 e 1,35 apresentaram o mesmo comportamento apresentado pelo controlador com $\gamma = 1,25$. A Tabela 3 e a Tabela 4 sumarizam o resultado do projeto para $\gamma = 1,30$ e $\gamma = 1,35$, respectivamente.

Tabela 3 - Resultados do projeto do controlador para $\gamma = 1,30$.

Projeto 3	
Regra	Ganhos de realimentação
1	$\begin{bmatrix} -8828,7 & -130,56 \\ -12514 & -187,38 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} -8861,2 & -131,05 \\ -12911 & -193,33 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} -8844,8 & -130,8 \\ -12837 & -192,21 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} -8876,6 & -131,28 \\ -13178 & -197,32 \end{bmatrix}$
Matriz P	
$P = \begin{bmatrix} 442,6920 & 6,5472 \\ 6,5472 & 0,0980 \end{bmatrix}$	
Ganho \mathcal{L}_2	
$\gamma = 1,30$	

Tabela 4 - Resultados do projeto do controlador para $\gamma = 1,35$.

Projeto 4	
Regra	Ganhos de realimentação
1	$\begin{bmatrix} -3790,1 & -56,293 \\ -5429,4 & -83,097 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} -3784,8 & -56,212 \\ -5548,8 & -84,945 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} -3784,6 & -56,207 \\ -5513,5 & -84,361 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} -3781,1 & -56,155 \\ -5623 & -86,055 \end{bmatrix}$
Matriz P	
$P = \begin{bmatrix} 190,0333 & 2,8222 \\ 2,8222 & 0,0432 \end{bmatrix}$	
Ganho \mathcal{L}_2	
$\gamma = 1,35$	

Um controlador satisfatório foi obtido para $\gamma = 1,40$, de forma que as imposições de projeto foram satisfeitas e as ações de controle apresentaram uma resposta adequada, como pode ser visto na Figura 15, Figura 16 e Figura 17. A Tabela 5 sumariza o controlador obtido.

Tabela 5 - Resultados do projeto do controlador para $\gamma = 1,40$.

Projeto 5	
Regra	Ganhos de realimentação
1	$\begin{bmatrix} -762,91 & -10,734 \\ -1023,3 & -16,682 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} -767,24 & -10,803 \\ -1062,7 & -17,323 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} -765,64 & -10,773 \\ -1056,3 & -17,21 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} -769,67 & -10,836 \\ -1089,2 & -17,746 \end{bmatrix}$
Matriz P	
$P = \begin{bmatrix} 38,7577 & 0,5459 \\ 0,5459 & 0,0089 \end{bmatrix}$	
Ganho \mathcal{L}_2	
$\gamma = 1,40$	

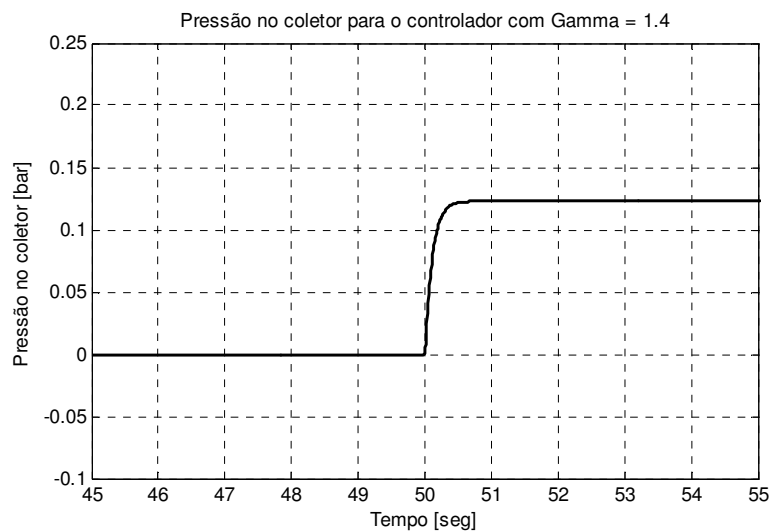


Figura 14 – Pressão no coletor para o controlador com $\gamma = 1,4$.

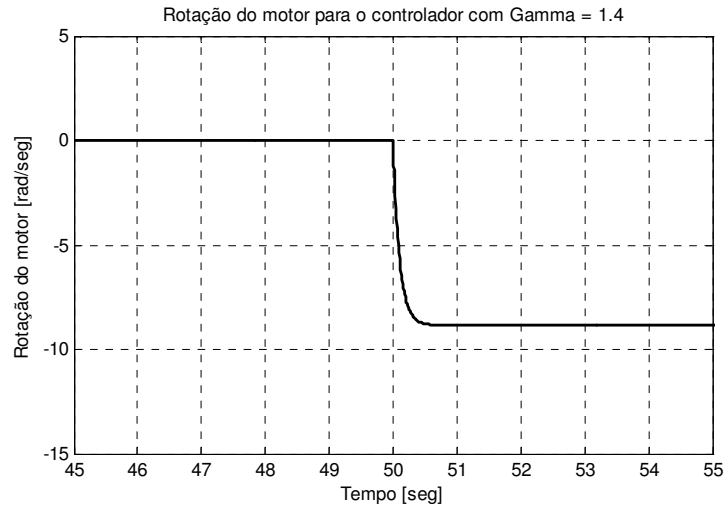


Figura 15 – Rotação do motor para o controlador com $\gamma = 1,4$.

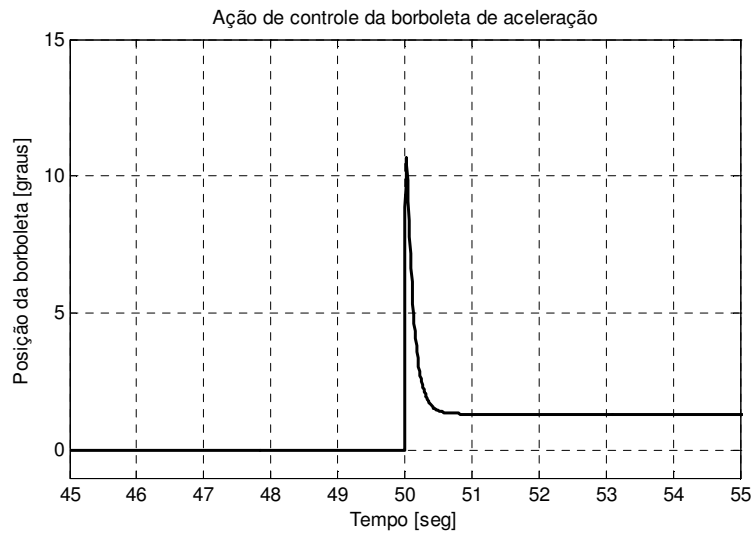


Figura 16 – Ação de controle da borboleta para o controlador com $\gamma = 1,4$.

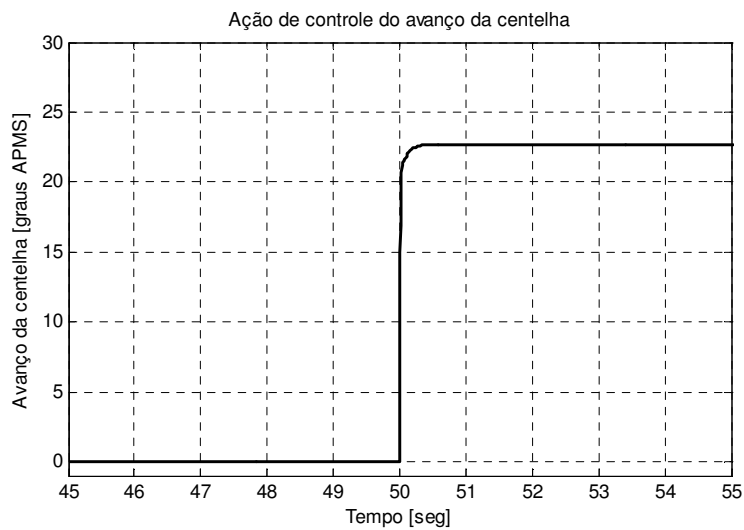


Figura 17 – Ação do avanço da centelha para o controlador com $\gamma = 1,4$.

Portanto o controlador para $\gamma = 1,4$ apresentou resultados satisfatórios, cumprindo as imposições de projeto, referentes ao máximo desvio de rotação e limites nas ações de controle, perante um distúrbio de 20 N.m aplicado ao motor.

Resta verificar o desempenho do controlador projetado no modelo não linear do sistema definido por (4.12). As mesmas condições foram consideradas para essa simulação, ou seja, aplicação de distúrbio de 20 N.m no instante de 50 segundos. As figuras mostram os resultados obtidos.

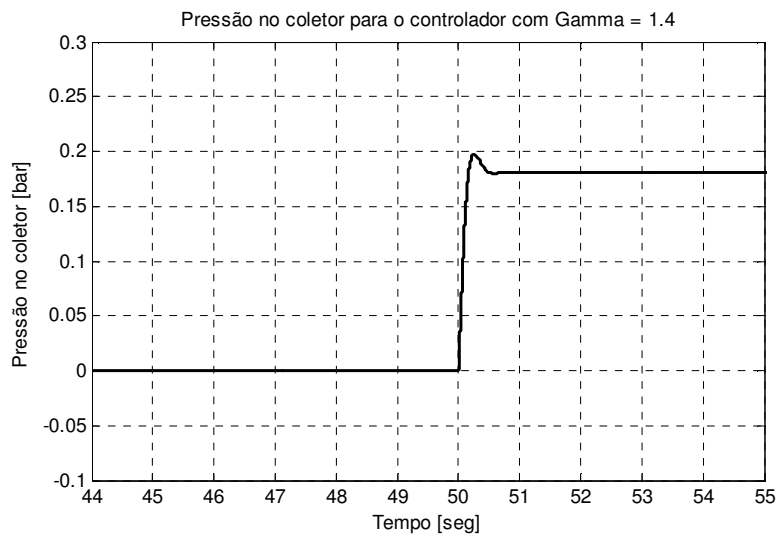


Figura 18 – Pressão no coletor para o controlador com $\gamma = 1,4$ atuando no modelo do motor não linear.

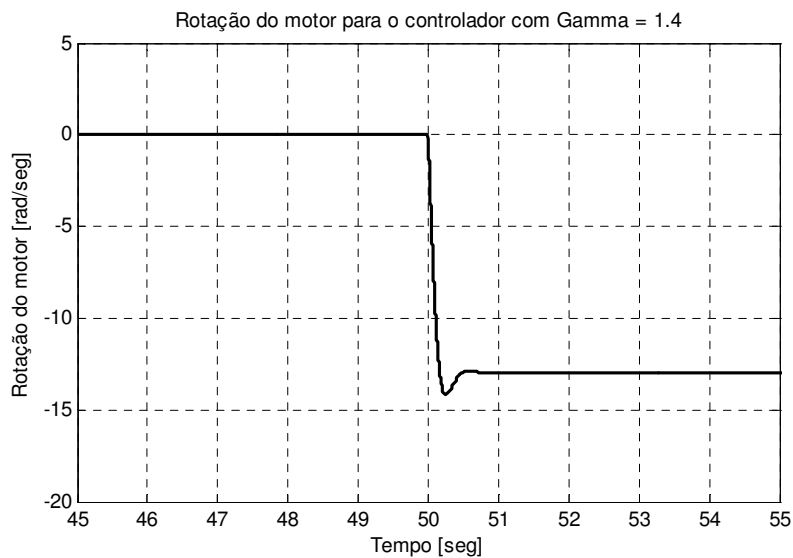


Figura 19 – Rotação do motor para o controlador com $\gamma = 1,4$ atuando no modelo do motor não linear.

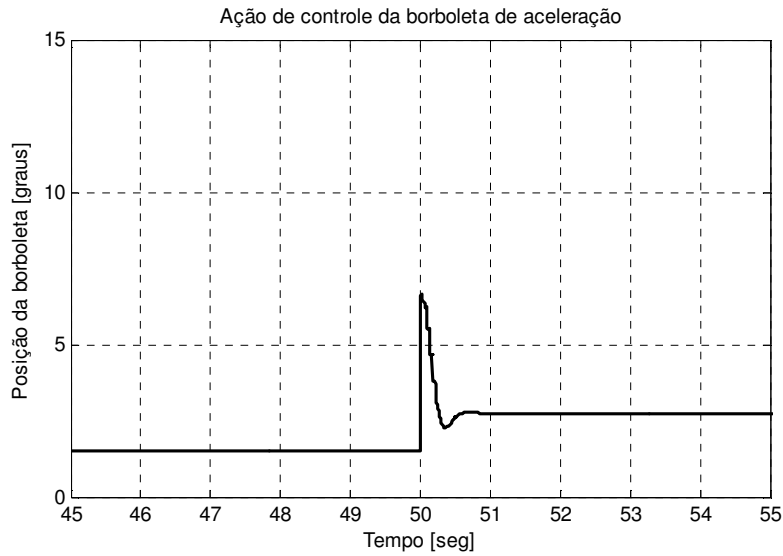


Figura 20 – Ação da borboleta de aceleração para o controlador com $\gamma = 1,4$, atuando no modelo do motor não linear.

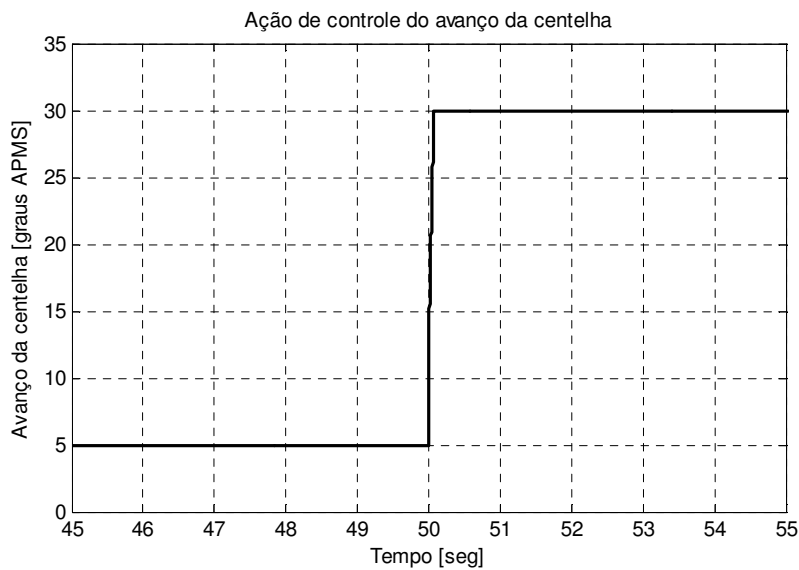


Figura 21 - Ação do avanço da centelha para o controlador com $\gamma = 1,4$, atuando no modelo do motor não linear.

Como pode ser observado na Figura 19, o controlador não conseguiu manter o desvio da rotação dentro do limite especificado para o projeto, que é de $\pm 10,47$ rad/seg (100 rpm). A ação de controle da borboleta de aceleração não apresentou resultado satisfatório, como pode ser visto na Figura 20. A amplitude da ação de controle da borboleta de aceleração ficou bem abaixo do limite especificado em projeto. Isso fez com que houvesse necessidade de maior atuação do avanço da centelha gerando assim a saturação da ação de controle, como pode ser visto na Figura 21, ficando acima do valor máximo especificado em projeto. Ressalta-se que os valores das variáveis apresentadas para a simulação com o modelo não linear do sistema

são os valores absolutos, diferentemente dos resultados obtidos para as simulações com o modelo difuso, onde os valores dos estados e entradas de controle apresentados, são referentes ao ponto de equilíbrio do sistema difuso.

Da mesma forma, simulações com os controladores obtidos para os valores de $\gamma = 1,25$, $1,30$ e $1,35$ mostram que tais controladores também não foram capazes de obedecer as imposições de projeto.

Como foi apresentado no capítulo introdutório, em geral para o controle da marcha lenta, deseja-se que a ação de controle da borboleta de aceleração seja aplicada para compensar os desvios de rotação de amplitudes elevadas, enquanto que a ação do avanço da centelha deve ser temporária, atuando somente no período transitório para que haja uma compensação rápida. Porém em regime, deseja-se que a ação de controle do avanço da centelha retorne para o valor de referência. As ações de controle devem se complementar, prevalecendo a ação do avanço da centelha durante os transitórios e a ação da borboleta durante o regime permanente.

Outra característica desejada para o controle de marcha lenta é que o desvio de rotação retorne para o valor de referência mesmo com a manutenção do distúrbio. O controlador projetado não apresentou esta característica. Isso está relacionado à técnica de controle \mathcal{H}_∞ , que não acrescenta integradores à malha de controle, pois foi considerada a ação de controle por realimentação de estados.

5 Conclusões e proposições para trabalhos futuros

Foi apresentada uma nova abordagem para a regulação da marcha lenta em motores de combustão interna ciclo Otto. A partir da modelagem difusa Takagi-Sugeno, obteve-se uma representação difusa do motor operando em regime de marcha lenta. Um controlador difuso com desempenho \mathcal{H}_∞ foi apresentado para rejeição de distúrbios aplicados ao motor no regime de marcha lenta.

A abordagem difusa proposta se apresenta como uma frente de pesquisa promissora sob o ponto de vista de estudo de novas estratégias de controle para aplicações em controle de motores a combustão interna.

Considerando o crescente desenvolvimento relacionado à modelagem e controle difuso Takagi-Sugeno em sistemas não-lineares, este trabalho contribui tanto no campo de pesquisa dos sistemas difusos Takagi-Sugeno com um exemplo de aplicação, bem como no campo de pesquisa dos motores automotivos, através da proposição de uma nova abordagem para a questão de regulação da rotação do motor no regime de marcha lenta, o que torna este trabalho inovador sobre o ponto de vista de uma nova metodologia para a solução de um problema prático.

Resultados condizentes com o esperado foram obtidos nas simulações realizadas com o controlador regulando o motor quando representado pelo modelo difuso. Os resultados obtidos com as simulações utilizando o modelo não linear do motor mostraram que algumas questões estão pendentes em se tratando de robustez do controlador. A abordagem difusa por si só não é capaz de promover robustez ao sistema em malha fechada. Isso explica os resultados insatisfatórios apresentados pelo controlador quando aplicado no sistema não linear.

Como foi destacado no capítulo anterior, deseja-se que a ação de controle da borboleta de aceleração seja aplicada para compensar os desvios de rotação de amplitudes elevadas,

enquanto que a ação do avanço da centelha deve ser temporária, atuando somente no período transitório para que haja uma compensação rápida. Porém em regime, deseja-se que a ação de controle do avanço da centelha retorne para o valor de referência. Além disso, o desvio de rotação deve retornar para o valor de referência mesmo com a manutenção do distúrbio. Estas características podem ser obtidas, adotando uma outra abordagem para o desempenho \mathcal{H}_∞ , através de adição de funções de ponderação dinâmicas. Esta abordagem, porém leva a um controlador dinâmico com estimador de estados, com uma complexidade maior se comparado ao controlador com realimentação de estado estático tal como foi apresentado no trabalho. Além disso, as condições de desempenho e estabilidade devem ser reformuladas para essa classe de controladores.

Diante dos resultados apresentados, com o intuito de gerar futuras contribuições, são apresentadas as seguintes propostas para trabalhos futuros:

- Adotar uma abordagem difusa robusta para o projeto do controlador, levando-se em conta incertezas relacionadas à modelagem difusa;
- Considerar o atraso existente entre a admissão do motor e a geração de torque, também com o objetivo de promover robustez ao sistema em malha fechada;
- Avaliar a aplicação de diferentes modelos do motor para se chegar à representação difusa, tal como aplicar técnicas de identificação para construção do modelo difuso;
- Desenvolvimento de um controlador dinâmico, considerando funções de ponderação dinâmicas no projeto de controle \mathcal{H}_∞ ;

Literatura Referenciada

ABATE, M. et al. (1994). Application of some new tools to robust stability analysis of spark ignition engines: a case Study. **IEEE Trans. Contr. Syst. Technol**, v. 2, n. 1, p. 22-30, mar.

ARRIFANO, N. S. D. (2004). **Uma abordagem fuzzy para a estabilização de uma classe de sistemas não-lineares com saltos markovianos**, 113 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

BABUŠKA, R.; ROUBOS, J. A.; VERBRUGGEN, H. B. (1998). Identification of MIMO Systems by Input-Output TS Fuzzy Models. In: IEEE International Conference on Fuzzy Systems. **Proceedings...** p. 657-662.

BHATTI, A. I. et al. (1999). Sliding mode configuration for automotive engine control. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**. v. 13, p. 49-69.

BHATTI, A. I.; SPURGEON, S. K.; DOREY, R. (2000). Idle speed control of an automotive engine using a robust nonlinear controller-observer pair. **European Journal of Control**, v. 6, p. 525-539.

BOYD, S. et al. (1994). **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: SIAM. 193 p.

CANELON, J. I.; SHIEH, L. S.; KARAYIANNIS, N. B. (2005). A new approach for neural control of nonlinear discrete dynamic systems. **Information Sciences**. v. 174, p. 177-196.

CAO, S. G.; REES, N. W. (1995). Identification of dynamic fuzzy models. **Fussy Sets and Systems**. v. 74, p. 307-320.

CAO, Y.; FRANK, P. M. (2000). Robust \mathcal{H}_∞ disturbance attenuation for a class of uncertain discrete-time fuzzy systems. **IEEE Transactions On Fuzzy Systems**. v. 8, n. 4, p. 406-415.

CROSSLEY, P. R.; COOK, J. A. (1991). A nonlinear engine model for drivetrain system development. In: International Conference on Control, Scotland. **Proceedings...**, p. 921-925.

CHEN, J.; XI, Y., ZHANG, Z. (1998). A clustering algorithm for fuzzy model identification. **Fuzzy Sets and Systems**. v. 98, p. 319-329.

DE FILIPPI, R.; SCATTOLINI, R. (2006). Idle speed control of a F1 racing engine. **Control Engineering Practice**. v. 14, p. 251-257.

DE NICOLAO, G.; ROSSI, C.; SCATTOLINI, R.; SUFFRITTI, M. (1999). Identification and idle speed control of internal combustion engines. **Control Engineering Practices**, n. 7, p. 1061-1069.

DRIANKOV, D.; HELLENDORF, H. REINFRANK, M. (1996). **An introduction to fuzzy control**. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 316 p.

GLASS, J. W.; FRANCIOSI, M. A. (1999). NARMAX modelling and robust control of internal combustion engines. **International Journal of Control**, v. 72, n. 4, p. 289-304.

GLASS, J. W.; FRANCIOSI, M. A. (2002). \mathcal{H}_∞ synthesis on nonlinear feedback systems in a Volterra representation. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, v. 124, n. 3, p. 382-389.

GLIELMO, L.; SANTINI, S.; CASCELLA, I. (2000). Idle speed control through output feedback stabilization for finite time delay systems. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, Chicago. **Proceedings...** IEEE, p. 45-49.

GLIELMO, L.; SANTINI, S.; SERRA, G. (1999). Optimal idle speed control with induction-to-power finite delay for SI engines. In: 7TH MEDITERRANEAN CONFERENCE ON CONTROL AND AUTOMATION (MED99), Haifa. **Proceedings...** IEEE, p. 200-209.

HAMILTON JR, G. K.; FRANCIOSI, M. A. (1997). Robust controller design and experimental verification of I.C. engine speed control. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 7, p. 609-627.

HERMAN, P.; FRANCHECK, A. (2000). Engine idle speed control using actuator saturation. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 8, p. 192-199.

HONG, S.; LANGARI, R. (1998). Synthesis of an LMI-based fuzzy control systems with guaranteed optimal H_∞ performance. In: IEEE World Congress on Computational Intelligence. **Proceedings...** IEEE, p. 422-427.

HOWELL, M. N.; BEST, M. C. (2000). On-line PID tuning for engine idle-speed control using continuous action reinforcement learning automata. **Control Engineering Practices**. v. 8, p. 147-154.

HROVAT, D.; SUN, J. (1997). Models and control methodologies for IC engine idle speed control design. **Control Engineering Practices**, v. 5, n. 8, p. 1093-1100.

JAYASURIYA, S.; FRANCKEK, M. A. (1994). A QFT-type methodology for a parallel plant structure and its application in idle speed control. **International Journal of Control**, v. 60, n. 5, p. 653-670.

KATAYAMA, H.; ICHIKAWA, A. (2004). \mathcal{H}_∞ control for sampled-data nonlinear systems described by Takagi-Sugeno fuzzy systems. **Fuzzy Sets and Systems**. v. 148, p. 431-452.

KHIAR, D. et al. (2007). Robust Takagi-Sugeno fuzzy control of a spark ignition engine. **Control Engineering Practice**. v. 15, n. 12, p. 1446-1456.

KLAWONN, F.; GEBHARDT, J.; KRUSE, R. (1995). Fuzzy control on the basis of Equality Relations with an example from idle speed control. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**. v. 3, n. 3, p. 336-350.

KORBA, P. (1999). **A gain scheduling approach to model based fuzzy control**. 144 p. Ph.D. dissertation. Gerhard Mercator Universität-GH-Duisburg, Duisburg, Germany.

LEE, K. R.; JEUNG, E. T.; PARK, H. B. (2001). Robust fuzzy \mathcal{H}_∞ control for uncertain nonlinear systems via state feedback: an LMI approach. **Fuzzy Sets and Systems**. v. 120, p. 123-134.

LO, J.; LIN, M. (2004). Robust \mathcal{H}_∞ nonlinear modeling and control via uncertain fuzzy systems. **Fuzzy Sets and Systems**. v. 143, p. 189-209.

LUMLEY, J. L. (1999). **Engines: an introduction**. Cambridge: Cambridge University Press, 248 p.

MARTINEZ, A. S.; JAMSHIDI, M. (1993). Design of fuzzy logic based engine idle-speed controllers. In: 36th MIDWEST SYMPOSIUM ON CIRCUITS AND SYSTEMS. **Proceedings... IEEE**, v. 2, p. 1544-1547.

MILHOR, C. E. (2002). **Sistema de desenvolvimento para controle eletrônico dos motores de combustão interna ciclo Otto**, 86 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MONNERAT JÚNIOR, P. H. (2000). **Controle neural para marcha lenta de veículos**. 95p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

MOSCHETTI, A. (1992). **Técnica \mathcal{H}_∞ applicata al controllo del mínimo del motore a combustione interna**, 124 p. Tesi di Laurea (Engenharia Elétrica) – Politécnico di Torino, Torino.

NAGAMINE, R. K. (2001). **Lógica difusa para controle não convencional de uma viga inteligente**, 117 p. Dissertação (Mestrado – Engenharia Mecânica) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

NAGAMINE, R. K. (2001). **Lógica difusa para controle não convencional de uma viga inteligente**, 117 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

NEUMANN, D. (2006). **Síntese de controladores robustos $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ \mathcal{D} - estável via algoritmos evolutivos: uma abordagem LMI**, 197 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba.

NGUANG, S. K.; SHI, P. (2003). \mathcal{H}_∞ fuzzy output feedback control design for nonlinear systems: an LMI approach. **IEEE Transactions on fuzzy systems**. v. 11, n. 3, p. 331-340.

PARK, J.; KIM, J.; PARK, D. (2001). LMI-based design of stabilizing fuzzy controllers for nonlinear systems described by Takagi-Sugeno fuzzy model. **Fuzzy Sets and Systems**. v. 122, p. 73-82.

PULESTON, P. F.; SPURGEON, S.; MONSEES, G. (2001). Automotive engine speed control: a robust nonlinear control framework. In: IEE control theory Applications. **Proceedings... IEE**, p. 81-87.

PUSKORIUS, G. V.; FELDKAMP, L. A.; DAVIS JR., L. I. (1996). Dynamic Neural Network methods applied to on-vehicle idle speed control. **Proceedings of the IEEE**. v. 84, n. 10, p. 1407-1420.

RIBBENS, W. B.; MANSOUR, N. P. (1998). **Understanding Automotive Electronics**. 4.ed. Indianapolis, Sams Publishing, 434 p.

ROBERT BOSCH GMBH (1993). **Automotive electric/electronic systems**. 3.ed. Stuttgart, Robert Bosch GmbH: VDI-Verlag, 582 p.

SALAM, F. M.; GHARBI, A. B. (1996). Temporal neuro-control of idle engine speed. In: IEEE International Symposium on Intelligent Control, Dearborn. **Proceedings... IEEE**, p. 15-18.

SETNES, M.; BABUŠKA, R.; VERBRUGGEN, H. B. (1998). Transparent fuzzy modeling. **Int. Journal of Human-Computer Studies**. v.49, p.159-179.

SHAH, M. A.; FRANCKEK, M. A. (1999). Frequency-based controller design for a class of nonlinear systems. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 9, p. 825-840.

SHAW, I. S.; SIMÕES, M. G. (1999). **Controle e modelagem fuzzy**, 1 ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda. e FAPESP, 165 p.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, S. (2005). **Multivariable feedback control: analysis and design**. 2. ed., Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc, 574 p.

STOTSKY, A.; EGARDT, B.; ERIKSSON, S. (2000). Variable structure control of engine idle speed with estimation of unmeasurable disturbances. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, v. 122, n. 4, p. 599-603.

SUGENO, M.; KANG, G. T. (1986). Fuzzy modeling and control of multilayer incinerator. **Fuzzy Sets and Systems**, n. 18, p. 329-346.

SUGENO, M.; KANG, G. T. (1988). Structure identification on fuzzy model. **Fuzzy Sets and Systems**. v. 13, p. 15-33.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. (1985). Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control. **IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics**, v.smc-15, n. 1, p. 116-132.

TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. (1996). Robust Stabilizations of a Class of Uncertain Nonlinear Systems via Fuzzy Control: Quadratic Stabilizability, H_∞ Control Theory, and Linear Matrix Inequalities. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**. v.4, n.1, p.1-13.

TANAKA, K.; SUGENO, M. (1992). Stability analysis and design of fuzzy control systems. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 45, n, 2, p. 134-156.

TANAKA, K.; WANG, H. O. (2001). **Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach**. New York: John Wiley & Sons, Inc. 305 p.

TEIXEIRA, M. C. M.; ŽAK, S. H. (1999). Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 7, n. 2, p. 133-142.

THORNHILL, M.; THOMPSON, S.; SINDANO, H. (2000). A comparison of idle speed control schemes. **Control Engineering Practice**, v. 8, n. 5, p. 519-30.

VACHTSEVANOS, G.; FARINWATA, S. S.; PIROVOLOU, D. K. (1993). Fuzzy logic control of an automotive engine. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 13, n. 3, p. 62-68.

VERNIEUWE, H.; DE BAETS, B.; VERBOEST, N. E. C. (2006). Comparison of clustering algorithms in the identification of Takagi-Sugeno models: a hydrological case study. **Fuzzy Sets and Systems**. v. 157, p. 2876-2896.

WILLIAMS, S. J. et al. (1989). Idle speed control design using an H-infinity approach. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, Pittsburgh. **Proceedings...** IEEE, p. 1950-1956.

YAGER, R. R.; FILEV, D. P. (1994). **Essentials of fuzzy modeling and control**, New York: John Wiley & Sons, Inc. 388 p.

YONEYAMA, J. et al. (2001a). H_∞ control for Takagi-Sugeno fuzzy systems. **International Journal of Systems Science**. v. 32, n. 7, p. 915-924.

YONEYAMA, J. et al. (2001b). Design of output feedback controllers for Takagi-Sugeno fuzzy systems. **Fuzzy Sets and Systems**. v. 32, n. 7, p. 915-924.

YURKOVICH, S.; SIMPSON, M. (1997). Comparative analysis for idle speed control: a crank-angle domain viewpoint. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, Albuquerque. **Proceedings...** IEEE, p. 278-283.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C. (1998). **Essential of robust control**. New Jersey: Prentice-Hall, 411 p.

Literatura Consultada

BALLUCHI, A. et al. (1999). Hybrid Control of the Air-fuel ratio in Force Transients for Multi-point Injection Engines. In: CONFERENCE ON DECISION & CONTROL, 38., Phoenix, 1999. **Proceedings...** Arizona, USA. v.1, p.316-21.

BARRON, M. B.; POWERS, W. F. (1996). The Role of Electronic Controls for Future Automotive Mechatronic Systems. **IEEE Trans. on Mechatronics**. v. 1, n. 1, p.80-88, Mar.

CAO, S. G.; REES, N. W.; FENG, G. (1996). H_∞ control of nonlinear continuous-time systems based on dynamical fuzzy models. **Int. Journal of Systems Science**. v. 127, n. 9, p. 821-830.

CHANG, C. et al. (1995). Air-Fuel Ratio Control in Spark-Ignition Engines Using Estimation Theory. **IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.**, v. 30, n. 1, p. 22-31.

GANGOPADHYAY, A.; MECKL, P. (2001). Multivariable PI tuning for disturbance rejection and application to engine idle speed control simulation. **Int. J. Control**. v. 74, n. 10, p.1033-1041.

JONES, V. K. et al. (1995). Identification and Air-Fuel Ratio Control of a Spark Ignition Engine. **IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.** v. 3, n. 1, p. 14-21.

KIRIAKIDIS, K. (1999). Non-linear control systems design via fuzzy modeling and LMIs. **Int. Journal of Control**. v. 71, n. 7/8, p. 676-685.

LI, J. *et al.* (1999). Parallel Distributed Compensation for Takagi-Sugeno Fuzzy Models: Multiobjective Controller Design. In: American Control Conference. **Proceedings...** San Diego, California, USA. p. 1832-1836.

OGATA, K. (2003). **Engenharia de Controle Moderno**. 4.ed. São Paulo: Prentice. 788 p.

POMARES, H.; ROJAS, I.; GONZÁLEZ, J.; PRIETO, A. (2002). Structure Identification in Complete Rule-Based Fuzzy Systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**. v.10, n.3, p349-359.

POWELL, J. D.; FEKETE, N. P. CHANG, C. (1998). Observer-Based Air-Fuel Ratio Control. **IEEE Control Systems**. v. 18, n. 5, p. 72-83, Oct.

POWERS, W. F.; NICASTRI, P. R. (2000). Automotive vehicle control challenges in the 21st century. **Control Engineering Practice**. v. 8, p.605-18.

WANG, H. O.; TANAK, K.; GRIFFIN, M. (1995). Parallel Distributed Compensation of Nonlinear Systems by Takagi-Sugeno Fuzzy Model. In: IEEE International Conference on Fuzzy Systems. **Proceedings...** v.2, p.531-538.

WANG, H. O.; TANAK, K.; GRIFFIN, M. (1996). An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues. **IEEE Trans. on Fuzzy Systems**. v. 4,n. 1,p. 14-23.

ZAK, S. H. (2003). **Systems and Control**. Oxford University Press, Inc.704 p.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. (1995). **Robust and Optimal Control**. New Jersey: Prentice-Hall, 596 p..

APÊNDICE A - Noções básicas sobre motores de combustão interna ciclo Otto

Os motores de combustão interna convertem a energia química dos combustíveis em calor, que por sua vez gera trabalho. A queima do combustível ocorre em um ambiente fechado denominado de câmara de combustão. O calor gerado com a queima do combustível no interior da câmara de combustão de um motor a pistão aumenta a pressão dos gases, fazendo com que o pistão se desloque no sentido do ponto morto superior (PMS) para o ponto morto inferior (PMI). Esta seqüência de eventos ocorre de maneira alternada entre todos os cilindros do motor. O pistão está acoplado mecanicamente ao eixo virabrequim através da biela. Portanto o movimento linear do pistão entre PMS e PMI é transformado em movimento rotativo do eixo virabrequim. Em uma das extremidades do virabrequim é acoplado o sistema de transmissão do veículo, responsável por transmitir o movimento rotativo do virabrequim para as rodas de tração do veículo.

Para que ocorra a combustão, a mistura ar-combustível deve preencher a câmara de combustão. O coletor de admissão é responsável por transportar o ar admitido pelo motor, distribuindo-o para cada um dos cilindros. Nos motores de ciclo Otto, a borboleta de aceleração é quem define a massa de ar que será admitida pelo motor em uma dada condição de carga e rotação. Nos motores atuais, com injeção indireta de combustível, a mistura ar-combustível é formada próximo à entrada dos cilindros, junto à válvula de admissão. O combustível é fornecido pelas válvulas injetoras, que por sua vez são controladas pelo sistema de gerenciamento do motor. As válvulas de admissão permitem a entrada da mistura no interior da câmara de combustão. Os gases resultantes da combustão são expelidos para fora da câmara através válvula de escape. O sincronismo de abertura das válvulas de admissão e escape é realizado pelo eixo comando de válvulas. Os gases da combustão seguem pelo coletor de escape, passam pelo catalisador e atingem o ambiente externo. O processo de combustão é iniciado pela centelha gerada na vela de ignição.

O ponto da ignição corresponde à posição angular do virabrequim em relação ao PMS em que se dá início ao processo de centelhamento para combustão da mistura ar-combustível.

Considerando rotação e razão ar-combustível constantes, o torque produzido pelo motor aumenta na medida em que se aumenta o avanço da ignição. Porém, a partir de um determinado ponto, aumentando-se o avanço o torque diminui. O avanço em que ocorre o máximo torque é conhecido na literatura como MBT (do inglês *minimum advance for best timing*). Este ponto varia em função da rotação e da pressão no coletor de admissão (carga do motor). A faixa de variação do avanço está entre zero grau (no PMS) e o ponto MBT.

A seqüência de eventos descrita anteriormente é dividida em quatro fases, ou tempos, que correspondem a duas revoluções do eixo virabrequim. A Figura 22 mostra as quatro fases, e que são detalhadas logo a seguir.

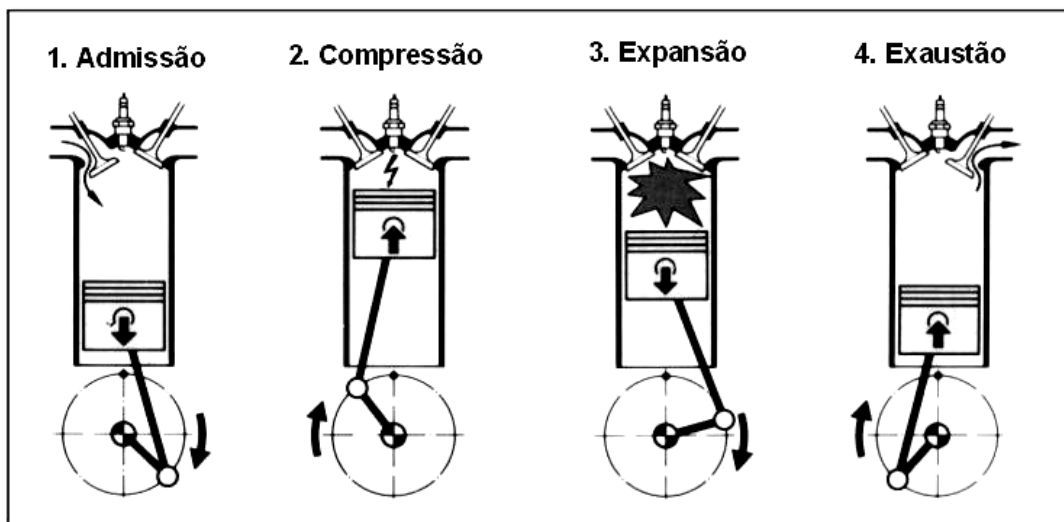


Figura 22 - Ciclo de trabalho de um motor ciclo Otto. [Robert Bosch GmbH (1993), p. 7, fig. 4]

Admissão:

A admissão se caracteriza pelo movimento do pistão do PMS para o PMI com a válvula de admissão aberta e a válvula de exaustão fechada. Com o movimento do pistão, a mistura ar-combustível flui para dentro do cilindro.

Compressão:

Durante a compressão, o pistão se desloca do PMI para o PMS, com as válvulas fechadas, comprimindo a mistura ar-combustível na câmara de combustão. Antes de o pistão atingir o PMS, o sistema de ignição produz uma centelha, através da vela de ignição do respectivo cilindro. A centelha provoca a queima da mistura, fazendo com que a pressão e a temperatura no cilindro se elevem.

Expansão:

A pressão alta no cilindro, causada pela queima da mistura, faz com que o pistão se desloque do PMS para o PMI, com as válvulas ainda fechadas. É durante a expansão que a energia contida no combustível é liberada, transformando-se em movimento.

Exaustão:

Na exaustão, o pistão se desloca do PMI para o PMS. A válvula de exaustão se abre fazendo com que o produto da queima da mistura ar-combustível seja expelido do cilindro para a atmosfera.

APENDICE B – Definições básicas

Este apêndice apresenta alguns conceitos estabelecidos na literatura utilizados no desenvolvimento da teoria de controle estudada neste trabalho. Os conceitos apresentados foram extraídos de Zhou e Doyle, (1998) e Neumann (2006).

Conjunto Convexo

Um conjunto S é dito convexo se um segmento de reta ligando dois pontos quaisquer de S também pertence a S , ou seja, considerando $x, y \in S$ então $\alpha x + (1 - \alpha)y \in S, \forall \alpha \in [0, 1], \forall x, y \in S$. O elemento $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ é a combinação convexa de x e y .

Função Analítica

Seja $S \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e seja a função $f(s)$ complexa definida em S tal que

$$f(s) : S \mapsto \mathbb{C},$$

então $f(s)$ é analítica em um ponto s_0 de S se é diferenciável em s_0 e em qualquer ponto na vizinhança de s_0 . A função $f(s)$ é dita analítica em S se é analítica em todos os pontos do conjunto S .

Espaço de Hilbert

O conceito de produto interno entre dois vetores no espaço euclidiano \mathbb{C}^n

$$\langle x, y \rangle \triangleq x^* y = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i, \forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n,$$

é utilizado para importantes noções de medidas e propriedades geométricas, tal como distância, ângulo e energia de um sistema.

Esse conceito pode ser estendido em termos de espaço vetorial. Considere V um espaço vetorial em \mathbb{C} . O produto interno em V é uma função complexa

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \mapsto \mathbb{C}$$

tal que para $x, y, z \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

1. $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3. $\langle x, x \rangle > 0$ se $x \neq 0$.

Um vetor V com um produto interno é chamado de espaço produto interno. O espaço de Hilbert é um espaço produto interno completo com norma induzida por seu produto interno.

Espaço \mathcal{L}_2

O espaço \mathcal{L}_2 é o espaço de Hilbert de todas as funções complexas $F(j\omega)$, $F : (-\infty < \omega < \infty) \mapsto \mathbb{C}^{n \times m}$, quadraticamente integrável, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[F(j\omega)^* F(j\omega)] d\omega < \infty$$

com produto interno definido por

$$\langle F, G \rangle \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[F(j\omega)^* G(j\omega)] d\omega,$$

para $F, G \in \mathcal{L}_2$. A norma induzida pelo produto interno em \mathcal{L}_2 é dada por

$$\|F\|_2 \triangleq \sqrt{\langle F, F \rangle}.$$

Espaço de Hardy \mathcal{H}_2

O espaço \mathcal{H}_2 é o subespaço fechado de \mathcal{L}_2 das funções $F(s)$, $F : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^{n \times m}$, analíticas e limitadas em $\text{Re}(s) > 0$ (semi-plano direito) que satisfazem a condição de integrabilidade quadrática uniforme

$$\|F\|_2^2 \triangleq \sup_{\sigma > 0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[F(\sigma + j\omega)^* F(\sigma + j\omega)] d\omega \right\} < \infty.$$

Para as funções racionais com coeficientes reais em \mathcal{H}_2 , a norma induzida \mathcal{H}_2 é definida por

$$\|F\|_2^2 \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[F(j\omega)^* F(j\omega)] d\omega.$$

Espaço \mathcal{L}_∞

O espaço \mathcal{L}_∞ é o espaço com norma limitada (espaço de Banach) das funções $F(j\omega), F: (-\infty < \omega < \infty) \mapsto \mathbb{C}^{n \times m}$, tal que $(\sigma \max[F(s)] < \infty, \forall \omega)$ cuja norma é dada por

$$\|F\|_\infty \triangleq \text{ess sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}[F(j\omega)].$$

Espaço Hardy \mathcal{H}_∞

O espaço \mathcal{H}_∞ é o subespaço fechado de \mathcal{L}_∞ das funções $F(s), F: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^{n \times m}$, analíticas e limitadas em $\text{Re}(s) > 0$ ($\sigma \max[F(s)] < \infty, \text{Re}(s) > 0$). A norma \mathcal{H}_∞ é definida como

$$\|F\|_\infty \triangleq \sup_{\text{Re}(s) > 0} \sigma_{\max}[F(s)]$$

e para as funções racionais com coeficientes reais em \mathcal{H}_∞ , a norma \mathcal{H}_∞ é dada por

$$\|F\|_\infty \triangleq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}[F(j\omega)].$$

Bounded Real Lemma

Seja um sistema S controlável com função de transferência dada por $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ e descrito pelas equações de estado

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \end{cases}$$

Seja a função quadrática $s(u, y) = \gamma^2 u^T(t)u(t) - y^T(t)y(t)$, com $\gamma \geq 0$. Então as seguintes proposições são equivalentes:

1. (S,s) é dissipativo;
2. o sistema de LMIs¹¹

$$\begin{aligned} X &= X^T \geq 0, \\ \begin{bmatrix} A^T X + XA + CC^T & XB + C^T D \\ B^T X + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} &\leq 0 \end{aligned}$$

é factível;

3. para todo $\omega \in \mathbb{R}$ com $\det(j\omega I - A) \neq 0$, $H(j\omega)^* H(j\omega) \leq \gamma^2 I$.

Além disso, $V(x(t)) = x^T(t)Xx(t)$ define uma função quadrática de Lyapunov, se e somente se, X satisfaz o sistema de LMIs no item 2. Considerando-se que $x(0) = 0$, A possui todos os autovalores no semi-plano esquerdo aberto e $u \in \mathcal{L}_2$, então, para X satisfazendo o sistema de LMIs

$$\sup_{u \in \mathcal{L}_2} \frac{\|y(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} \leq \gamma,$$

onde o lado esquerdo da inequação acima é o chamado ganho \mathcal{L}_2 ou norma induzida \mathcal{L}_2 do sistema, tal que, o ganho \mathcal{L}_2 é o menor $\gamma \geq 0$ tal que esta inequação seja satisfeita.

¹¹ O ANEXO A faz uma introdução às desigualdades matriciais lineares (LMIs).

APÊNDICE C - Códigos Matlab utilizados

Solução do sistema não linear para obter os estados de equilíbrio

```

ue = [1.5 5.0]'; %entradas de controle em regime

%variáveis do sistema
syms x1 x2; %estados originais
syms u1 u2; %entradas originais

syms A_F; %Razão ar-combustível desejada (14.6)
syms const %RT/Vman (0.41328)
syms J %Momento de inércia polar (J = 0.14)
syms Tcargas %Torque de cargas externas [N.m]
syms ma %massa de ar admitida por cada cilindro
syms g %função g(Pman, Pa) que defini d(mai)/dt

```

Erro! A origem da referência não foi encontrada.

```

constante = 0.41328; %RT/Vman
ar_comb = 14.6;
Jo = 0.14; %[kg*m^2]

disp(' ')
disp('Obtendo o ponto de equilíbrio do sistema...')

%equação da massa de ar admitida por cada cilindro
massa_ar = 0.281709*x1 + 0.000666942*x2 - 0.114399*x1^2 - 2.93651*10^-6*x2^2 +
0.000557226*x1*x2 - 0.0569675;

%d(Pman)/dt = f_1
%d(N)/dt = f_2

f_1 = const*((2.821 - 0.0523*(u1) + 0.10299*(u1)^2 - 0.0063*(u1)^3)*g - (-0.366 +
0.08979*(x1)*(x2) - 0.0337*(x1)^2*(x2) + 0.0001*(x1)*(x2)^2));

%Atribui valores às variáveis simbólicas
f_1e = subs(f_1, {const, g, u1}, [constante, 1, ue(1)]);

f_2 = (1/J)*(-181.3 + 379.36*massa_ar + 21.91*A_F - 0.85*A_F^2 + 0.26*(u2) -
0.0028*(u2)^2 + 0.027*(x2) - 0.000107*(x2)^2 + 0.00048*(x2)*(u2) +
2.55*(u2)*massa_ar - 0.05*(u2)^2*massa_ar);

%Atribui valores às variáveis simbólicas
f_2e = subs(f_2, {A_F, J, u2}, [ar_comb, Jo, ue(2)]);

```

```
%Resolve o sistema de equações
```

```
[x1,x2]=solve(f_1e, f_2e);
```

```
%Valores simbólicos
```

```
xe1 = x1(1);
```

```
xe2 = x2(1);
```

```
xe = double([xe1;xe2]);
```

Implementação do algoritmo de linearização de Canelon, Shieh e Karayiannis (2005)

```
%definição dos pontos de operação
```

```
xo = [ 0.3866 77.89;
```

```
0.4724 77.89;
```

```
0.3866 105.09;
```

```
0.4724 105.09];
```

```
uo=[1.5 5.0;
```

```
1.5 5.0;
```

```
1.5 5.0;
```

```
1.5 5.0];
```

```
massa_ar = 0.281709*(xi1+xe1) + 0.000666942*(xi2+xe2) - 0.114399*(xi1+xe1)^2 -  
2.93651*10^-6*(xi2+xe2)^2 + 0.000557226*(xi1+xe1)*(xi2+xe2) - 0.0569675;
```

```
f1 = const*((2.821 - 0.0523*(ui1 + ue1) + 0.10299*(ui1 + ue1)^2 - 0.0063*(ui1 +  
ue1)^3)*g - (-0.366 + 0.08979*(xi1 + xe1)*(xi2 + xe2) - 0.0337*(xi1 + xe1)^2*(xi2  
+xe2) + 0.0001*(xi1 + xe1)*(xi2 + xe2)^2));
```

```
f2 = (1/J)*(-181.3 + 379.36*massa_ar + 21.91*A_F - 0.85*(A_F)^2 + 0.26*(ui2 + ue2) -  
0.0028*(ui2 + ue2)^2 + 0.027*(xi2 + xe2) - 0.000107*(xi2 + xe2)^2 + 0.00048*(xi2 +  
xe2)*(ui2 + ue2) + 2.55*(ui2 + ue2)*massa_ar - 0.05*(ui2 + ue2)^2*massa_ar -  
Tcargas);
```

```
f = [f1; f2];
```

```
%Cálculo da matriz Jacobiana de f para determinação dos gradientes de f
```

```
gradf1_xi = jacobian(f1, xi);
```

```
gradf1_ui = jacobian(f1, ui);
```

```
gradf2_xi = jacobian(f2, xi);
```

```
gradf2_ui = jacobian(f2, ui);
```

```
syms x1 x2;
```

```
% definição dos pontos de operação para o sistema com quatro regras
```

```

pontos_operacao = [1,3,7,9];

for p = 1:4

    %calcula a massa de ar para o ponto de operação MAP_o e RPM_o
    ma_num = subs(massa_ar, {xi1, xi2}, [xo(p,1), xo(p,2)]);

    if xo(p,1) > Patm/2
        clear g;
        syms g;

        %g = (2/Patm)*((xi1+xe1)*Patm - (xi1+xe1)^2)^1/2;
        g_num = (2/Patm)*(xo(p,1)*Patm - (xo(p,1))^2)^1/2;
    else
        g_num = 1;
        clear g;
        syms g;
    end

    clear f1;
    f1 = const*((2.821 - 0.0523*(ui1 + ue1) + 0.10299*(ui1 + ue1)^2 - 0.0063*(ui1 + ue1)^3)*g - (-0.366 + 0.08979*(xi1 + xe1)*(xi2 + xe2) - 0.0337*(xi1 + xe1)^2*(xi2 + xe2) + 0.0001*(xi1 + xe1)*(xi2 + xe2)^2));

    gradf1_xi = jacobian(f1, xi);
    gradf1_ui = jacobian(f1, ui);

    %vetor de estados deslocados para o ponto de operação
    xi_o(p,:) = xo(p,:) - xe;

    %vetor de entradas deslocadas para o ponto de operação
    ui_o(p,:) = uo(p,:) - ue;

    if xi_o(p,1) == 0 && xi_o(p,2) == 0
        a1 = gradf1_xi;
        a2 = gradf2_xi;

        b1 = gradf1_ui;
        b2 = gradf2_ui;

        modelo_equilibrio = 1;
    else
        %formula de Canelon (Generalização de Teixeira & Zak)
        a1 = gradf1_xi + ((f1 - gradf1_xi*xi - gradf1_ui*ui)/(xi*xi + ui*ui))*xi';
        a2 = gradf2_xi + ((f2 - gradf2_xi*xi - gradf2_ui*ui)/(xi*xi + ui*ui))*xi';
        b1 = gradf1_ui + ((f1 - gradf1_xi*xi - gradf1_ui*ui)/(xi*xi + ui*ui))*ui';
    end
end

```

```

    b2 = gradf2_ui + ((f2 - gradf2_xi*xi - gradf2_ui*ui)/(xi'*xi + ui'*ui))*ui';
end

    a1_num = subs(a1, {const, g, ue1, ui1, ui2, xe1, xe2, xi1, xi2}, [constante, g_num,
ue(1), ui_o(p,1), ui_o(p,2), xe(1), xe(2), xi_o(p,1), xi_o(p,2)]);

    a2_num = subs(a2, {A_F, J, ma, ue2, ui1, ui2, xe2, xi1, xi2, Tcargas}, [ar_comb, Jo,
ma_num, ue(2), ui_o(p,1), ui_o(p,2), xe(2), xi_o(p,1), xi_o(p,2), Tl(p)]);

    b1_num = subs(b1, {const, g, ue1, ui1, ui2, xe1, xe2, xi1, xi2}, [constante, g_num,
ue(1), ui_o(p,1), ui_o(p,2), xe(1), xe(2), xi_o(p,1), xi_o(p,2)]);

    b2_num = subs(b2, {A_F, J, ma, ue2, ui1, ui2, xe2, xi1, xi2, Tcargas}, [ar_comb, Jo,
ma_num, ue(2), ui_o(p,1) ui_o(p,2), xe(2), xi_o(p,1), xi_o(p,2), Tl(p)]);

    %matrizes dos sistemas lineares locais
    A(:,:,p) = single([a1_num; a2_num]);
    B(:,:,p) = single([b1_num; b2_num]);

    if modelo_equilibrio == 1
        modelo_linear = ss(A(:,:,p), B(:,:,p), C, D);
        modelo_equilibrio = 0;
    end
end
end

```

Implementação e solução das LMIs para projeto do controlador ótimo

```

setlmis([]);

%definição das variáveis LMI
Q = lmivar(1, [size(Ag,1) 1]); %Matriz Q simétrica da ordem de Ag

for i = 1:numero_regras
    Y(:,:,i) = lmivar(2, [2 2]); %Matrizes Yi retangular de ordem 2x2
end

R = lmivar(1, [1 1]); %R = GAMA^2

for j = 1:numero_regras

    %definição das LMIs para j = 1,2,...,numero_regras

    HinfLMI(j) = newlmi; %LMI #1

    lmiterm([HinfLMI(j) 1 1 Q], A(:,:,j), 1, 's') % Aj*Q + Q*Aj' +

```

```

lmiterm([HinfLMI(j) 1 1 Y(:,j)],B_2(:,j),1,'s') % B2j*Yj + Yj'*B2j

lmiterm([HinfLMI(j) 2 1 0],B_1(:,j)) % B1j'

lmiterm([HinfLMI(j) 3 1 Q],C_1(:,j),1) % C1j*Q +
lmiterm([HinfLMI(j) 3 1 Y(:,j)],D_12(:,j),1) % D12j*Yj

lmiterm([HinfLMI(j) 2 2 R],-1,1) % -GAMA^2*I

lmiterm([HinfLMI(j) 3 2 0],D_11(:,j)) % D11j

lmiterm([HinfLMI(j) 3 3 0],-eye(3)) % -I (2x2)

Qpos(j) = newlmi; %LMI #2
lmiterm([Qpos(j) 1 1 Q],-1,1) % Q > 0

GAMApos(j) = newlmi; %LMI #3
lmiterm([GAMApos(j) 1 1 R],-1,1) % GAMA > 0

%definição das LMIs para i < j <= numero_regras

if j ~= 1
    for i = 1:j-1

        HinfLMI_2(j,i) = newlmi;
        lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 1 1 Q],A(:,i),1,'s') % Ai*Q + Q*Ai +
        lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 1 1 Y(:,j)],B_2(:,i),1,'s') % B2i*Yj + Yj'*B2i +
        lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 1 1 Q],A(:,j),1,'s') % Aj*Q + Q*Aj +
        lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 1 1 Y(:,i)],B_2(:,j),1,'s') % B2j*Yi + Yi'*B2j'

        lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 2 1 0],B_1(:,i)' + B_1(:,j)) % B1i' + B1j'

        lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 3 1 Q],C_1(:,i),1) % C1i*Q +
        lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 3 1 Y(:,j)],D_12(:,i),1) % D12i*Yj +
        lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 3 1 Q],C_1(:,j),1) % C1j*Q +
        lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 3 1 Y(:,i)],D_12(:,i),1) % D12j*Yi

        lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 2 2 R],-2,1) % -2*GAMA^2*I

        lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 3 2 0],D_11(:,i) + D_11(:,j)) % D11i + D11j

        lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 3 3 0],-2*eye(3)) % -I (2x2)

    end
end

end

LMIsys_opt = getlmis; %Obtem o sistema de LMIs

```


%Projeto do controlador para GAMA ótimo

```
c = [zeros(3 + numero_regras*4,1);1]; %Vetor c (GAMA^2 é a última variável definida)
opcoes = [1e-5, 0, 0, 0, 0]; %Precisão relativa da solução
[normhinf,xot]=mincx(LMIsys_opt,c,opcoes); %Solução do problema de
%minimização
```

```
disp(' ')
disp(' Minimização de gama obtida com sucesso!')
disp(' ')
disp(' Tecle <ENTER> para continuar')
pause
```

```
q = dec2mat(LMIsys_opt,xot,Q);
```

```
disp('--> Controlador obtido para gamma ótimo:');
disp(' ');
```

```
for i = 1:numero_regras
```

```
    y(:,i) = dec2mat(LMIsys_opt,xot,Y(:,i));
```

```
    % Determinação dos ganhos de realimentação para cada regra
```

```
    k_otimo_TH(:,i) = Wu1*(y(1,:,i)*inv(q));
```

```
    k_otimo_ADV(:,i) = Wu2*(y(2,:,i)*inv(q));
```

```
    %-----
    % Visualização dos resultados
    %-----
```

```
    b = sprintf(' >> Ganhos de realimentação para a regra: %0.5g',i);
```

```
    c = sprintf(' * Ganhos da malha da borboleta: %0.5g %0.5g', k_otimo_TH(:,i));
```

```
    d = sprintf(' * Ganhos da malha do avanço: %0.5g %0.5g', k_otimo_ADV(:,i));
```

```
    disp(b);disp(' ');disp(c);disp(d);disp(' ');disp(' ');
```

```
end
```

```
P = inv(q)
```

```
r = dec2mat(LMIsys_opt,xot,R);
```

```
gama_otimo = sqrt(r);
```

```
a = sprintf('--> Valor de gamma ótimo: %0.5g', gama_otimo);
```

```
disp(a);
```

Implementação e solução das LMIs para projeto do controlador subótimo

```
setlmis([]);
```

```
%definição dar variáveis LMI
```

```
Q = lmvivar(1, [size(Ag,1) 1]); %Matriz Q simétrica da ordem de Ag
```

```

for i = 1:numero_regras
    Y(:,i) = lmivar(2, [2 2]); %Matrizes Yi retangular de ordem 2x2
end

for j = 1:numero_regras

    %definição das LMIs para j = 1,2,...,numero_regras

    HinfLMI(j) = newlmi; %LMI #1

    lmiterm([HinfLMI(j) 1 1 Q],A(:,j),1,'s') %  $A_j^*Q + Q^*A_j +$ 
    lmiterm([HinfLMI(j) 1 1 Y(:,j)],B_2(:,j),1,'s') %  $B_{2j}^*Y_j + Y_j^*B_{2j}$ 

    lmiterm([HinfLMI(j) 2 1 0],B_1(:,j)) %  $B_{1j}'$ 

    lmiterm([HinfLMI(j) 3 1 Q],C_1(:,j),1) %  $C_{1j}^*Q +$ 
    lmiterm([HinfLMI(j) 3 1 Y(:,j)],D_12(:,j),1) %  $D_{12j}^*Y_j$ 

    lmiterm([HinfLMI(j) 2 2 0],-(gama_subotimo^2)) %  $-GAMA^2*I$ 

    lmiterm([HinfLMI(j) 3 2 0],D_11(:,j)) %  $D_{11j}$ 

    lmiterm([HinfLMI(j) 3 3 0],-eye(3)) %  $-I (2x2)$ 

    Qpos(j) = newlmi; %LMI #2
    lmiterm([Qpos(j) 1 1 Q],-1,1) %  $Q > 0$ 

    %definição das LMIs para i < j <= numero_regras

    if j ~= 1
        for i = 1:j-1

            HinfLMI_2(j,i) = newlmi;
            lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 1 1 Q],A(:,i),1,'s') %  $A_i^*Q + Q^*A_i +$ 
            lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 1 1 Y(:,j)],B_2(:,i),1,'s') %  $B_{2i}^*Y_j + Y_j^*B_{2i} +$ 
            lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 1 1 Q],A(:,j),1,'s') %  $A_j^*Q + Q^*A_j +$ 
            lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 1 1 Y(:,i)],B_2(:,j),1,'s') %  $B_{2j}^*Y_i + Y_i^*B_{2j}$ 

            lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 2 1 0],B_1(:,i)' + B_1(:,j)) %  $B_{1i}' + B_{1j}'$ 

            lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 3 1 Q],C_1(:,i),1) %  $C_{1i}^*Q +$ 
            lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 3 1 Y(:,j)],D_12(:,i),1) %  $D_{12i}^*Y_j +$ 
            lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 3 1 Q],C_1(:,j),1) %  $C_{1j}^*Q +$ 
            lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 3 1 Y(:,i)],D_12(:,i),1) %  $D_{12j}^*Y_i$ 

            lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 2 2 0],-2*(gama_subotimo^2)) %  $-2*GAMA^2*I$ 

            lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 3 2 0],D_11(:,i) + D_11(:,j)) %  $D_{11i} + D_{11j}$ 

```

```

        lmiterm([HinfLMI_2(j,i) 3 3 0],-2*eye(3))           % -I (2x2)

    end
end

end

LMIsys_sub = getlmis;           %Obtem o sistema de LMIs

%Projeto do controlador para GAMA subotimo
[tmin,xfeas] = feasp(LMIsys_sub);

q = dec2mat(LMIsys_sub,xfeas,Q);

a = sprintf('--> Controlador obtido para gamma subotimo: %0.5g', gama_subotimo);
disp(' '); disp(a);

for i = 1:numero_regras

    y(:,i) = dec2mat(LMIsys_sub,xfeas,Y(:,i));

    % Determinação dos ganhos de realimentação para cada regra
    k_sub_TH(:,i) = Wu1*(y(1,:,i)*inv(q));
    k_sub_ADV(:,i) = Wu2*(y(2,:,i)*inv(q));

    %-----
    %  Vizualização dos resultados
    %-----

    b = sprintf(' >> Ganhos de realimentação para a regra: %0.5g',i);
    c = sprintf(' * Ganhos da malha da borboleta: %0.5g %0.5g', k_sub_TH(:,i));
    d = sprintf(' * Ganhos da malha do avanço: %0.5g %0.5g', k_sub_ADV(:,i));
    disp(b);disp(' ');disp(c);disp(d);disp(' ');disp(' ');

end
P = inv(q)

```

ANEXO A – Desigualdades Matriciais Lineares

Uma desigualdade matricial linear (LMI, do inglês *Linear Matrix Inequality*) tem a forma:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0$$

tal que $x \in \mathbb{R}^m$ é a variável e $F_i = F_i^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m$ são matrizes conhecidas.

A LMI descrita é uma restrição convexa na variável x , ou seja, o conjunto $\{x \mid F(x) > 0\}$ é convexo.

Embora a LMI apresentada tenha uma forma específica, esta pode representar uma grande variedade de restrições convexas em x . Em particular, desigualdades lineares, desigualdades quadráticas (convexas), desigualdades de norma de matrizes e restrições relacionadas à teoria de controle, tal como Lyapunov.

Quando as matrizes F_i são diagonais, a LMI $F(x) > 0$ é um conjunto de desigualdades linear. Desigualdades não-lineares (convexas) são convertidas em LMI a partir do complemento de Schur. A idéia básica é:

Considere a LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0$$

sendo que $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ e $S(x)$ dependente de maneira afim de x , tal que a LMI descrita é equivalente a

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0,$$

ou seja, o conjunto de desigualdades não-linear pode ser representado como a LMI acima.

Ao se referir a um problema de LMI, em geral está se fazendo referência a um dos três problemas básicos relacionados às LMIs: problema de factibilidade (convexo), problema de

minimização de uma função objetivo linear (ou problema de autovalor) e problema de autovalor generalizado.

Problema de factibilidade convexo:

Esta classe de problemas de LMI compreende os problemas em que se deseja obter uma solução, ou seja, dada uma LMI $F(x) > 0$ encontrar x^{fac} , tal que $F(x^{fac}) > 0$, ou determinar que a LMI é infactível. Neste caso, não se está interessado em obter a solução ótima para a LMI, mas sim encontrar uma solução, a qual pode não ser única.

Problema de minimização de uma função objetivo linear:

Também denominado de problema de autovalor, esta classe de problemas envolve a minimização (ou maximização) de uma função escalar linear, $\alpha(\cdot)$, das variáveis matriciais, sujeito à seguinte restrição:

$$\min \alpha(x)$$

$$\text{tal que } F(x) > 0,$$

tal que, a solução do problema busca otimizar uma determinada função, enquanto satisfaz algumas restrições na forma de LMI.

Problemas de autovalor generalizado:

Os problemas da classe de autovalor generalizado são diferentes dos problemas de autovalor descritos anteriormente, no sentido de que o objetivo do problema de otimização não é convexo. Porém, os métodos utilizados para a solução de tais problemas são similares. Nesta classe de problemas, tem-se a seguinte formulação:

$$\min \lambda$$

$$\text{tal que } F_1(x) - \lambda F_2(x) < 0$$

$$F_2(x) < 0$$

$$F_3(x) < 0,$$

As primeiras duas linhas equivalem a minimizar os maiores valores singulares generalizados da matriz $F_1(x) - \lambda F_2(x)$. Em alguns casos, os problemas desta classe podem ser reduzidos a um problema de minimização de uma função objetivo, através de uma mudança de variável adequada.

Mais informações e exemplos de aplicação podem ser encontrados em Boyd et al. (1994) e Skogestad e Postlethwaite (2005).