

DEDALUS - Acervo - EESC



MODELAGEM MATEMÁTICA DO ESCOAMENTO LAMINAR EM TUBO PERMEÁVEL APLICADA A MICROFILTRAÇÃO DE SUSPENSÕES

Marcelo Evaristo Ferreira

Serviço de Pós-Graduação EESC/USP
EXEMPLAR REVISADO
Data de entrada no Serviço: 02/02/04
Ass.: Leandro Corradi

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes



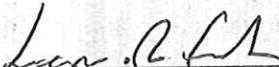
São Carlos

2003

FOLHA DE JULGAMENTO

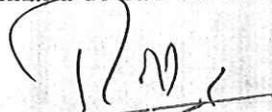
Candidato: Licenciado **MARCELO EVARISTO FERREIRA**

Dissertação defendida e julgada em 12-11-2003 perante a Comissão Julgadora:



Prof. Dr. **SÉRGIO RODRIGUES FONTES (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO



Prof. Assoc. **PAULO SELEGHIM JUNIOR**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Aprovado

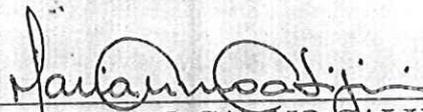


Prof. Dr. **LUIZ ANTONIO VIOTTO**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Aprovado



Prof. Associado **JONAS DE CARVALHO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Mecânica



Profa. Assoc. **MARIA DO CARMO CALIJURI**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

*Aos meus pais, Edson e Iracy,
e ao meu irmão Mário Sérgio.*

**MODELAGEM MATEMÁTICA DO ESCOAMENTO LAMINAR EM
TUBO PERMEÁVEL APLICADO A MICROFILTRAÇÃO DE
SUSPENSÕES**

Marcelo Evaristo Ferreira

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de
São Carlos, da Universidade de São Paulo, como
parte dos requisitos para a obtenção do título de
Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes

São Carlos

2003

Agradecimentos*

Agradeço aos meus amigos Antônio Luiz Venezuela, Carlos Eduardo Guerra, Carlos Roberto Regattieri, Julio Edgardo Lindo, Keyll Carlos Martins, Marcelo Y. Noguti e a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. De modo especial, registro minha gratidão ao Prof. Sérgio Rodrigues Fontes, pela paciência e incentivo sempre demonstrados em sua orientação.

*Este trabalho teve suporte financeiro do CNPq

AGRADECIMENTOS*

Agradeço aos meus amigos Antônio Luiz Venezuela, Carlos Eduardo Guerra, Carlos Roberto Regattieri, Julio Edgardo Lindo, Keyll Carlos Martins, Marcelo Y. Noguti e a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. De modo especial, registro minha gratidão ao Prof. Sérgio Rodrigues Fontes, pela paciência e incentivo sempre demonstrados em sua orientação.

*Este trabalho teve suporte financeiro do CNPq

Sumário

Lista de Figuras	iv
Lista de Símbolos	vi
Resumo	viii
Abstract	ix
1. Introdução e Objetivos	
1.1. Introdução.	1
1.2. Objetivos.	9
2. Revisão Bibliográfica	
2.1. Características do Processo e Citações da Literatura	10
2.2. Modelagem Matemática	20
3. Formulação Diferencial das Equações de Conservação	23
3.1. Formulação Integral	28
4. Metodologia e Modelagem Matemática	32
5. Resultados e Discussão	40
6. Conclusões	49
7. Sugestão	50
8. Apêndice I	51

9. Apêndice II	60
Referências Bibliográficas	64

Lista de Figuras

Figura 1	Escoamento típico da filtração tangencial em um tubo de superfície Permeável	1
Figura 2	Dispositivo de filtração “dead-end”.....	4
Figura 3	Dispositivo de filtração tangencial	5
Figura 4	Modo de operação e aplicabilidade dos processos de filtração	6
Figura 5	Perfil de concentração em condições de estado estacionário	7
Figura 6	Ilustração da camada polarizada na superfície de uma membrana ...	13
Figura 7	Forças inerciais e eletrostáticas que atuam em partículas esféricas ...	15
Figura 8	Modelo de resistência para camada gel-polarizada	17
Figura 9	Escoamento em tubo cilíndrico permeável	23
Figura 10	Perfil de velocidade pré-estabelecido para diferentes valores de $n(z)$..	33
Figura 11	Modos de variação do funcional $n(z)$	35
Figura 12	Gráfico da espessura da camada limite em função da posição longitudinal do tubo (z), decorrente do modelo deste trabalho	36
Figura 13	Perfil de concentração pré-estabelecida em função de $m(z)$	37
Figura 14	Gráfico de Sherwood local em função da posição adimensional z/R para Pe de 10^4 a $3 \cdot 10^4$; perfil exponencial.....	41
Figura 15	Gráfico de Sherwood local em função da posição adimensional z/R para Pe de 10^4 a $3 \cdot 10^4$; perfil polinomial.....	41
Figura 16	Gráfico de Sherwood local em função da posição adimensional z/R para Pe de 10^4 a $3 \cdot 10^4$; perfil linear.....	42
Figura 17	Gráfico de Sherwood local em função da posição adimensional z/R para Pe de 10^4 a $3 \cdot 10^4$; perfil linear.....	43
Figura 18	Gráfico de Sherwood médio (Sh_m) em função de Reynolds (Re) para Pe de 10^4 a $3 \cdot 10^4$	44

Figura 19 Gráfico de Sherwood médio (Sh_m) em função de Reynolds (Re) para Pe de 10^5 a 3.10^5	45
Figura 20 Gráfico de Sherwood médio (Sh_m) em função de Reynolds (Re) para Pe de 10^6 a 3.10^6	45
Figura 21 Gráfico de Sherwood médio médio em função de Reynolds	47

Lista de Símbolos

α	- Re_w/Re_D
ΔP	- Diferença de pressão.
ΔP_T	- Pressão transmembrana.
δ	- Espessura da camada limite de concentração.
ρ	- Densidade.
μ	- Viscosidade cinemática.
A	- Coeficiente de permeabilidade da membrana.
C	- Concentração de soluto na solução.
C_b	- Concentração de soluto no centro do escoamento.
C_g	- Concentração de soluto na parede permeável da membrana.
$C_i(r, z)$	- Concentração da espécie i no núcleo do escoamento.
C_{ib}	- Concentração de soluto na parede da membrana.
C_w	- Concentração de soluto na parede da membrana.
C_0	- Concentração de soluto na entrada do tubo.
C_p	- Concentração de permeado.
D	- Difusividade mássica.
d	- Diâmetro do tubo.
d_h	- Diâmetro hidráulico.
$\frac{dm}{dz}$	- Taxa de variação do parâmetro $m(z)$ com relação à coordenada z
$\frac{dn}{dz}$	- Taxa de variação do parâmetro $n(z)$ com relação à coordenada z

$D \frac{\partial C}{\partial r}$	- Transferência difusivo de soluto na direção radial.
J	- Vazão de permeado na parede da membrana.
k	- Coeficiente de difusividade.
L	- Comprimento do tubo: $L = 1\text{ m}$
L_R	- Distância ao longo do eixo axial do tubo a partir da jusante
$m(z)$	-Parâmetro funcional que determina o modo como a camada limite de concentração evolui ao longo do tubo.
$n(z)$	-Parâmetro funcional que determina o modo como a camada limite de velocidade evolui ao longo do tubo.
N_s	-Vazão de soluto na parede da membrana.
$N_{ir}(R, z)$	-Fluxo difusivo
P_T	-Pressão trans-membrana.
Q	-Vazão.
r	- Distância radial a partir do centro do tubo, varia de 0 à R
R_F	-Resistência associada à membrana devido ao fouling.
R_M	-Resistência intrínseca da membrana.
Re	-Adimensional de Reynolds: $Re = \rho u L / \mu$.
Re_D	- Número de Reynolds ao longo do diâmetro do tubo : $Re_D = \rho u d / \mu$.
Sc	-Adimensional de Schimdt: $Sc = \mu / \rho D$.
Sh	-Adimensional de Sherwood: $Sh = k \cdot d_h / D$.
u	-Velocidade axial (eixo z).
u_c	-Velocidade fora da camada limite.
u_i	-Velocidade no interior da camada limite.
u_o	- Velocidade na entrada do tubo
v_w	- Velocidade do permeado através da parede porosa do tubo
z	- Coordenada axial ou longitudinal do tubo

Resumo

Esta dissertação apresenta uma modelagem matemática do escoamento laminar em tubos de paredes permeáveis aplicada à micro-filtração de suspensões. A modelagem utilizou-se da formulação integral das equações de conservação e de funções pré-estabelecidas para o representar os campos de velocidade e de concentração ao longo do tubo permeável. As equações integrais da quantidade de movimento e da conservação das espécies químicas forneceram duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem para as variáveis funcionais “ $n(z)$ ” e “ $m(z)$ ” presentes nas funções pré-estabelecidas. Para a solução destas equações optou-se pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem devido a sua simplicidade e versatilidade conhecida da literatura. No entanto a equação para a conservação da quantidade de movimento apresentou grande instabilidade ao ser submetida à solução numérica, contornada a partir da imposição de diferentes formas de evolução para o campo de velocidade, através do funcional $n(z)$ cujas formas de variação foram impostas segundo uma dependência linear, exponencial e polinomial. Por outro lado, a solução da equação para conservação das espécies foi numericamente convergente. De posse das funções pré-estabelecidas e ajustadas a partir da equação da conservação das espécies na forma integral, obtém-se neste trabalho os valores correspondentes para o adimensional de Sherwood, quantificando o processo de transferência de massa. Com os valores de Sherwood, os resultados desta modelagem foram comparados com os da literatura, Grober et al. (Apud Zeman & Zydney, 1996) e outros, e apresentaram-se de acordo para estudos de casos particulares, no intervalo de Peclet de $10^4 - 10^6$.

Palavras-chave: Tubos porosos; Escoamento laminar; Modelagem matemática, Formulação integral; Microfiltração; Sherwood.

Abstract

Summary: This dissertation presents a mathematical modeling of the laminar flow in permeable tubes applied to the micro-filtration of suspensions. The modeling uses of integral formulation of the conservation equations and of functions pre-established for to represent the fields of velocity and concentration along the permeable tube. The integral equations of the momentum and of conservation of the chemical species its supplied two differential ordinary equations if first order for the variables functional “ $n(z)$ ” and “ $m(z)$ ” presents in the pre-established functions. For the solution of these equations was opted for the method of Runge-Kutta of fourth order due to its simplicity and well-known versatility of the literature. However the equation for the conservation of the momentum presented great instability to be submitted to the numeric solution, outlined starting from the imposition forms different from evolution for the field of velocity, through the functional “ $n(z)$ ” with lineal, exponential and polynomial dependence. However, the solution of the equation for conservation of the species was convergent numerical. Through of the pre-established functions and adjusted starting from the equation of the conservation of the species in the integral form, it was obtained in this work the corresponding values for the dimensionless of Sherwood, quantifying the process of mass transfer. With the values of Sherwood, the results of this modeling were compared with the one of the literature, Grober et al. (Apud Zeman & Zydney, 1996) and other, and they came of agreement for particular cases in the interval of Peclet of 10^4 the 10^6 .

Keywords: Permeable tube; Laminar flow; Micro-filtration; Mathematical modeling; Similarity method; Sherwood.

1. Introdução e Objetivos

1.1 Introdução

A microfiltração tangencial é um processo que envolve a separação de misturas gás-sólido particulado, sólido-líquido (colóides e suspensões) e líquido-líquido (emulsões). Nesse processo, mantém-se a mistura fluida circulando paralelamente a uma superfície permeável (membrana), sujeita a diferenças de pressões transmembrana entre 2 e 8 bar. A Figura 1 ilustra o escoamento típico do processo de microfiltração.

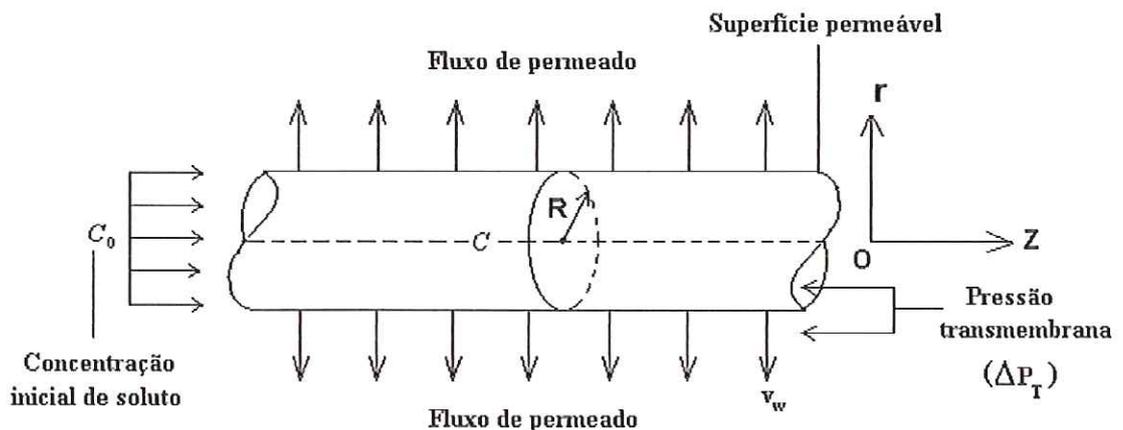


Figura 1: Escoamento típico da filtração tangencial (microfiltração) em um tubo permeável.

Esta técnica é classificada como microfiltração, ultrafiltração ou nanofiltração de acordo com tamanho das partículas na mistura a serem separadas. O espectro aproximado deste campo de filtração e suas aplicações estão ilustrados na Tabela 1.

Tabela 1: Espectro aproximado do campo de filtração tangencial.

Espécie química	Iônica	Molecular	Macro molecular	Micro particulado
Tamanho das partículas (μm)	0,001-0,0005	0,001-0,008	0,1-0,8	1-100
Massa molecular (Daltons)	100	200-100,000	500,000	
Algumas substâncias comuns	<p><i>Íons Metálicos</i></p> <p><i>Água Salgada</i></p> <p><i>Sacarose</i></p> <p><i>Corantes</i></p>	<p><i>Albumina</i></p> <p><i>Vírus</i></p>	<p><i>Amido</i></p> <p><u><i>Emulsões</i></u></p> <p><u><i>Bactérias</i></u></p> <p><u><i>Suspensões (Macromoléculas)</i></u></p>	
Processos de separação	ULTRAFILTRAÇÃO NANOFILTRAÇÃO		MICROFILTRAÇÃO	

A vazão de fluido pela superfície permeável é chamada de vazão transmembrana ou permeado. O permeado é objeto de análise, onde a partir de suas propriedades físicas e químicas, avalia-se a qualidade do processo e também da superfície seletiva na retenção de uma ou mais fases de uma mistura. A modelagem da fluidodinâmica do processo é muito complexa, pois envolve equações para leis de conservação do escoamento confinado em geometria de placas ou tubos porosos. Tais equações são não-lineares e conseqüentemente não possuem solução analítica.

Este processo é empregado em diversas áreas da Engenharia. Na Engenharia Mecânica, por exemplo, é aplicado no tratamento de resíduos no processo de usinagem de metais, e na desemulsificação de misturas em processos particulares da engenharia de petróleo (Benito et. al., 1999).

Outra aplicação importante da ultrafiltração é feita na indústria de pintura por eletrodeposição, cujo objetivo principal é o de recuperar a tinta jogada em efluentes. Hoje, no entanto, esta tinta é utilizada também com outros propósitos dentro de instalações de eletroforese. A indústria de bens de consumo que se utiliza gabinetes ou carrocerias metálicas está atualmente no Brasil, se desenvolvendo com o objetivo de reduzir os custos e melhorar a qualidade do produto. Dentro deste escopo situam-se claramente as pinturas por eletrodeposição. Tal processo se dá em um tanque, onde a peça permanece totalmente imersa na emulsão (tinta + água). A emulsão residual é tratada com o processo de ultrafiltração (Zeman & Zydney, 1996).

A filtração por membrana oferece simplicidade e baixo custo de operação em comparação a outras técnicas, como por exemplo, a separação por centrifugação, filtração a vácuo e secagem por vaporização (spray drying). Na produção de sucos e açúcares, por exemplo, no que diz respeito ao processo de concentração, utiliza-se a microfiltração, já que é mais vantajosa do ponto de vista econômico, com menor consumo de energia em relação ao equipamento tradicional de evaporação (Scott, 1995).

Deve-se ressaltar que outras formas de escoamento podem ser elaboradas para um processo de microfiltração. O filtro prensa "dead-end" é uma alternativa para o processo de microfiltração, e ao contrário da filtração tangencial, é um processo mais simples, porém de aplicações mais restritas. A Figura 2 ilustra o modo de operação do dispositivo "dead-end". Notamos que neste processo de filtração, a mistura é conduzida perpendicularmente à superfície permeável (membrana).

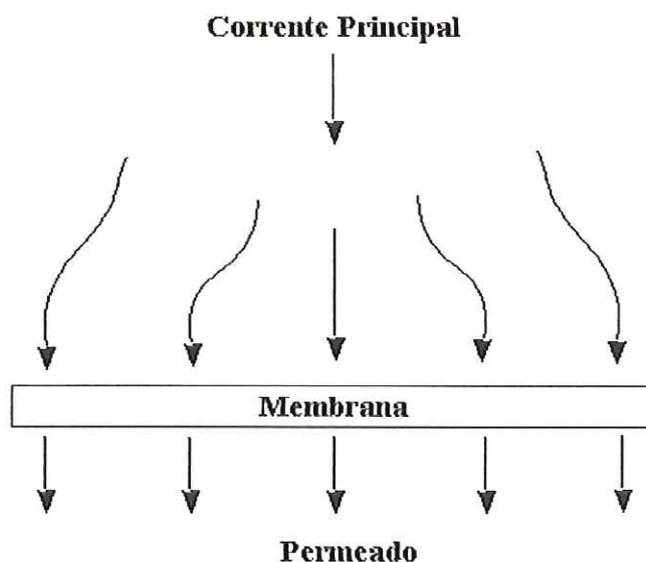


Figura 2: Dispositivo de filtração “dead-end”.

Um dos aspectos críticos na diminuição de fluxo transmembrana nos módulos para microfiltração são os fenômenos de transferência de massa que vem a ocorrer na superfície seletiva.

A seletividade da superfície permeável combinada com a vazão transmembrana (permeado), é adequada se a transferência de massa do soluto for suficientemente grande para evitar a intensificação de uma camada limite de concentração, capaz de reduzir a vazão pela superfície permeável. Este fenômeno geralmente denominado polarização, freqüentemente é um fator dominante no controle do desempenho do processo de microfiltração.

Para obter altas taxas de transferência de permeado através da superfície da membrana, é necessário termos altas velocidades tangenciais e/ou turbulência nas vizinhanças da membrana. Isto é mais facilmente atingido usando a filtração tangencial na qual a solução escoia paralela à membrana e o permeado escoia perpendicularmente como mostrado na Figura 3.

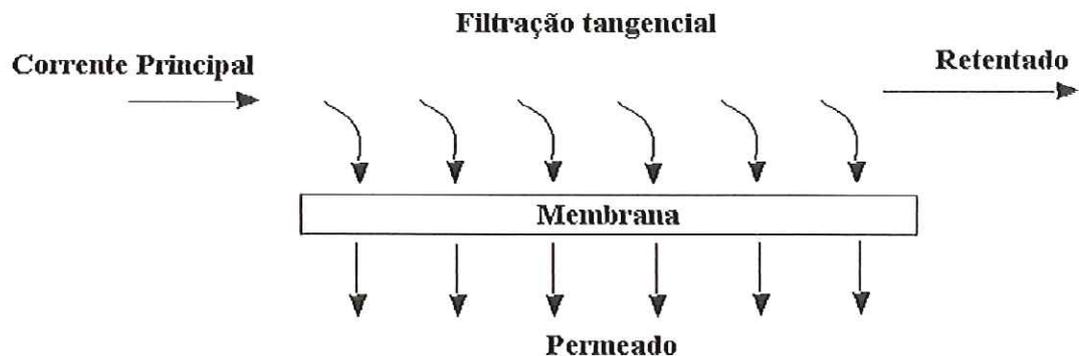


Figura 3: Dispositivo de filtração tangencial

A compreensão do motivo pelo qual a filtração tangencial é mais complexa que o dispositivo “dead-end”, requer a consideração de três particularidades do escoamento e do fluido: a concentração da solução, o permeado e o retentado.

No dispositivo “dead-end” é relevante apenas a concentração da solução e a vazão de permeado. Na indústria farmacêutica este processo é utilizado para a remoção de partículas, limpando os canais por onde passam as soluções biológicas e/ou químicas, por exemplo, em muitas aplicações na indústria eletrônica, em algumas aplicações biomédicas, e para outras em pequena escala em laboratórios (Zydney & Zeeman, 1996).

A Figura 4 nos fornece um espectro aproximado do campo de filtração dos dispositivos acima mencionados.

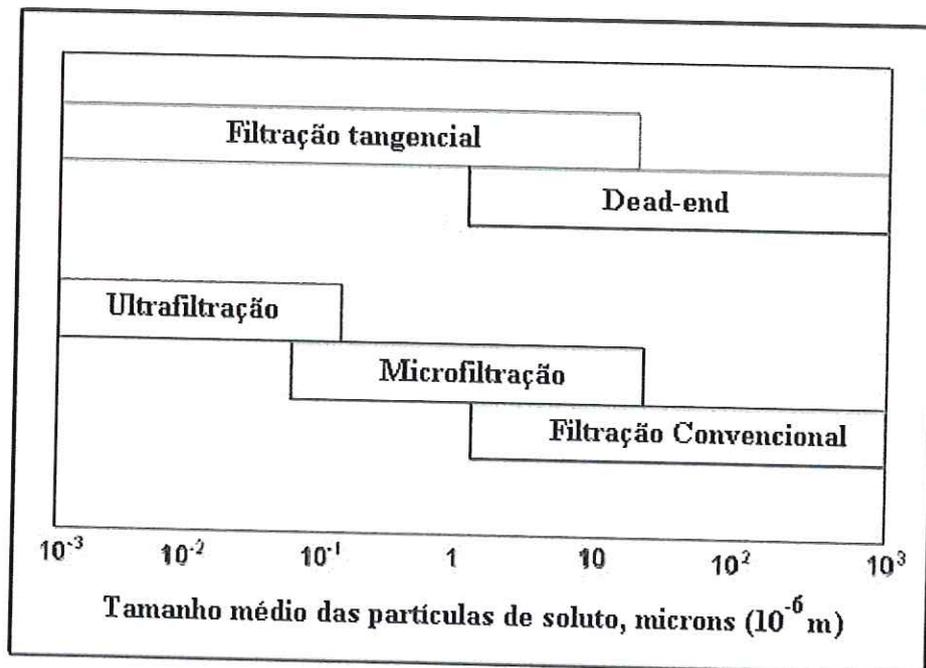


Figura 4: Modo de operação e aplicabilidade dos processos de filtração com membranas.

O acúmulo de soluto ou partículas na superfície da membrana produz o que é comumente chamado de camada de resistência ou polarização, citado na literatura em inglês como “cake layer” (Zydney, 1997 e Guell & Davis, 1986). A polarização é o principal fenômeno responsável pela redução da vazão transmembrana, quando comparado com a vazão de um fluido puro. O conhecimento deste fenômeno, próprio do processo, é muito importante, pois a estimativa da vazão trans-membrana é fundamental para efetivar sua instalação industrial.

O perfil da concentração de soluto varia da superfície permeável (membrana) de “ C_w ” para aqueles valores na corrente principal da solução “ C_b ” – valor referenciado como acima da espessura da camada limite de concentração. A Figura 6 ilustra a camada limite de concentração proveniente da corrente principal do escoamento de uma mistura fluida junta a uma superfície permeável. As grandezas J e N_s são respectivamente, os valores da vazão de filtrado e vazão de soluto. O termo $D \frac{\partial C}{\partial r}$ é a transferência difusiva de soluto na direção radial.

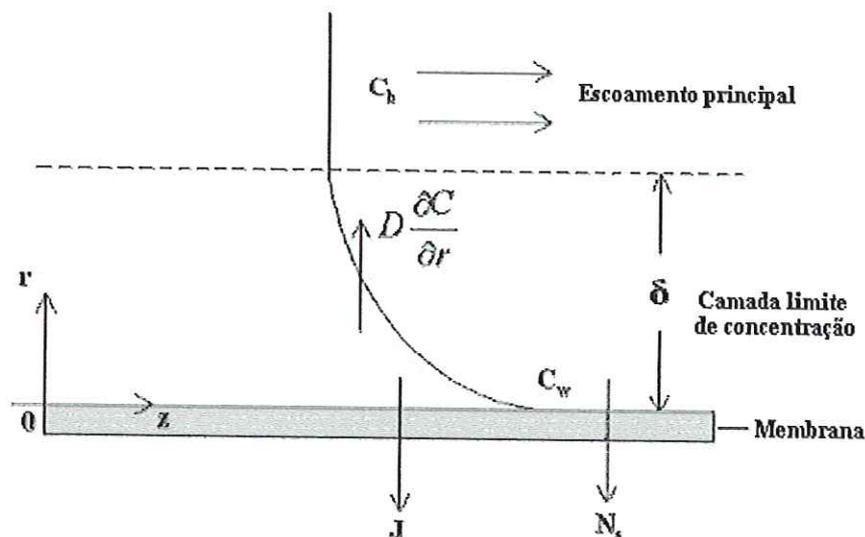


Figura 5: Perfil de concentração em condições de estado estacionário.

Durante a microfiltração de suspensões coloidais, partículas contidas na solução são convectivamente dirigidas para a superfície da membrana onde elas se acumulam e tendem a formar uma camada de resistência junto à superfície do canal. Esta película aderente formada junto à superfície da membrana, também conhecida como camada gel-polarizada, resulta num aumento da resistência hidráulica ao escoamento de permeado. Como resultado, a vazão de permeado decresce com o tempo, principalmente no início do processo. Os custos operacionais dos sistemas de membranas são diretamente dependentes da vazão de permeado. Conseqüentemente, essa vazão e os fatores que a afetam são considerações determinantes na viabilidade da membrana e custo do processo.

A maior vantagem da microfiltração no tratamento da água, por exemplo, é a eficiência em purificar e descontaminar este insumo em um único processo, sem o uso de produtos químicos e, portanto, sem produção de agentes agressivos ao meio ambiente. Esta tecnologia tem sido recebida com um crescente interesse, como um método integrado aos atuais processos e para a futura demanda de água potável de alta qualidade (Lee & Clark, 1997).

Fundamentalmente associado a esta tecnologia, temos o escoamento num tubo ou entre placas de superfície permeável. Um dos primeiros estudos citados na literatura a respeito do escoamento laminar newtoniano num tubo permeável é o de Berman (1953). O

autor utiliza as equações de Navier-Stokes para obter uma completa descrição do escoamento de um fluido através de um canal de secção retangular com ambas paredes igualmente permeáveis. Este estudo foi limitado ao escoamento bidimensional incompressível em regime permanente. A solução das equações do escoamento levaram a expressões detalhadas para a dependência da velocidade e pressão ao longo do canal.

Outro trabalho desta natureza é o de Altena e Belfort (1984), que aborda o movimento de partículas em um escoamento bidimensional de Poiseuille em placas e tubos com paredes permeáveis. As trajetórias das partículas foram calculadas para sucção e injeção através da superfície. Os resultados mostram que, contrariamente ao escoamento em tubo não poroso, as partículas sempre alcançam os poros da parede, a partir dos efeitos de sucção.

1.2. Objetivos

Esta dissertação tem os seguintes objetivos:

- i) A partir da formulação integral das equações de conservação da massa, quantidade de movimento e espécie química, estudar a modelagem com funções pré-estabelecidas para os campos de velocidade e concentração, o escoamento laminar permanente de fluidos newtonianos num tubo permeável com misturas de uma única espécie;
- ii) Avaliar o potencial desta modelagem com base na comparação e ajuste a resultados do adimensional de Sherwood encontrados na literatura.

2. Revisão Bibliográfica

2.1. Características Gerais do Processo e Citações da Literatura

Em microfiltração tangencial (MFT), a mistura fluida escoia paralelamente à superfície da membrana e o permeado atravessa perpendicularmente à membrana devido à diferença de pressão. A formação da camada gel-polarizada reduz a vazão de permeado, que após alguns minutos do início do processo, estabiliza-se. Desta forma, é possível obter e tratar o escoamento em regime quase-permanente por um longo período de tempo.

Segundo Ripperger & Altman (2002) a microfiltração é um processo que envolve diferença de pressão dirigida numa membrana (superfície permeável) como força motriz para a separação de pequenas partículas como microorganismos e emulsões. As membranas usadas tem estrutura micro-porosa a qual separa pequenas partículas com tamanho variando de 0,02 – 20 μm . Trata-se da mais antiga e pioneira tecnologia de membrana. Ela teve início no começo do século XX com a preparação de membranas micro-porosas de celulose. Pela primeira vez em 1907, encontrou-se com experimentação, que na filtração de suspensões coloidais o escoamento tangencial à superfície permeável, conduzia ao aumento de filtrado com o aumento da pressão. Este foi o princípio de invenção da microfiltração tangencial.

Atualmente as técnicas de operação com membranas são aplicadas, por exemplo, na fabricação de muitos fármacos, alimentos e sistemas de proteção ao meio ambiente. É uma técnica utilizada para produção de líquidos puros, concentrados de suspensões, na reconstituição de processos líquidos, e na separação de bactérias e emulsões. A vazão de permeado na filtração tangencial é influenciada por um grande número de parâmetros, como por exemplo, velocidade tangencial, pressão transmembrana, resistência hidráulica da membrana, resistência da camada gel-polarizada, distribuição das partículas em suspensão, forma das partículas, comportamento químico da aglutinação das partículas na superfície, dentre outros.

De acordo com Bowen & Willians (2000), a aplicação de membranas nos processos de separação é o mais recente e significativo desenvolvimento da engenharia aplicada aos processos químicos e biológicos. Tais processos são usados em uma ampla faixa de operações industriais para a separação de moléculas orgânicas, macromoléculas biológicas, colóides, íons e solventes. O projeto e a operação dos processos de membranas requerem métodos quantitativos para a estimativa do desempenho da separação.

Benito et. al. (1999) estudaram um processo integrado com ultrafiltração para remoção de óleos em efluentes da indústria siderúrgica. O óleo contido no permeado proveniente do estágio de ultrafiltração é 75% menor que os limites estabelecidos por todos os países da União Européia. Além disso, todas as partículas sólidas em suspensão foram removidas durante o estágio de ultrafiltração. A regeneração dos efeitos de entupimento da membrana foi realizada com recirculação de detergentes comerciais.

Os métodos comumente usados podem ser limitados e de baixa confiabilidade na avaliação de um processo aplicado com membrana. Geralmente é necessário fazer extensivos testes, os quais podem ser caros e demorados. Há em particular, uma necessidade de um método previsor que tome como ponto de partida as propriedades físico-químicas dos materiais a serem separados.

Existem métodos que possuem potencial para avaliar os fenômenos de superfície, são eles: variação da condutividade elétrica e técnicas a laser. O uso do laser a partir do princípio de triangulometria (Ripperger & Altman, 2002), mostrou mais flexibilidade neste caso.

As partículas que constituem um sistema ou mistura coloidal tem um diâmetro compreendido entre 100Å e 100 µm as quais encontram-se suspensas em um fluido como a água. São exemplos de suspensões coloidais: água com matéria orgânica, bactérias e proteínas. Colóides inorgânicos são misturas em água de resíduos como talco, óxidos metálicos, e outros materiais particulados.

De acordo com Schäfer et. al (1999), a microfiltração é um processo extremamente eficiente na remoção de material particulado de águas superficiais. Investigando o tratamento de água com parcela de soluto muito baixa, também foi observado um acentuado declínio na vazão de permeado. Isto foi devido a agregados orgânicos confinados na camada de resistência. Os autores examinaram a camada gel-polarizada por

espectroscopia eletrônica dispersiva e verificaram que os colóides que compõe o material inorgânico continham silício, alumínio e ferro.

Neste estudo, um modelo foi desenvolvido para uma melhor compreensão dos fatores que influenciam a formação da camada de resistência e seus efeitos na filtração da membrana. Partículas de óxido de ferro, hematita (Fe_2O_3), de diferentes tamanhos foram selecionadas como representantes de um colóide inorgânico.

O comportamento da microfiltração foi estudado em diferentes soluções químicas (variando o pH, força iônica, tipo e concentração dos orgânicos, concentração de cálcio, e outros) e para diferentes misturas de hematita com orgânicos e solução salina. As citações neste estudo são para um entendimento da interação colóide e misturas orgânicas e seus impactos na superfície de filtração.

Águas de correntes superficiais, tais como rios, corredeiras e lagos, contém matéria orgânica natural e moléculas orgânicas de baixa e alta massa molecular, microorganismos e colóides inorgânicos. Colóides inorgânicos contidos na água podem ser óxidos/hidróxidos de Mn, Fe, Al e Si, bem como carbonatos e argilas, com tamanho variando de poucos nanômetros a milímetros.

Drozd & Shwartzbrod (1997) utilizaram um sistema experimental de microfiltração com membrana cerâmica de porosidade $0,2 \mu\text{m}$ e área superficial de $0,135\text{m}^2$, na remoção de bactérias *Cryptosporidium*. Uma amostra de água de rio foi contaminada artificialmente e filtrada, sendo que a taxa de remoção do microorganismo foi extremamente satisfatória, maior que 99,9%.

Em microfiltração, os colóides (bactérias e suspensões macromoleculares) podem aderir à superfície da membrana ou aos poros, dependendo do tamanho e da forma do colóide. Partículas muito menores que os poros da membrana podem ser depositadas internamente, as quais eventualmente iniciam a obstrução dos poros. Partículas de tamanho similar ao dos poros podem bloqueá-los e partículas muito maiores serão depositadas na superfície da membrana formando uma camada de resistência conforme mostra a Figura 6.

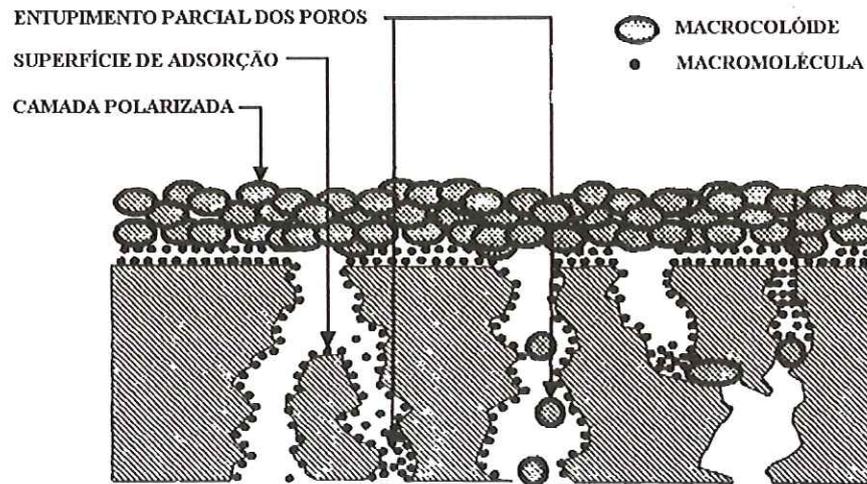


Figura 6: Figura ilustrativa da camada polarizada na superfície de uma membrana.

A retenção das partículas é devido ao fenômeno da camada polarizada, bem como as forças hidrodinâmicas (forças inerciais) de suspensão e difusão por tensão induzida as quais aumentam com o tamanho das partículas da mistura. Para pequenos colóides, capazes de passar através da membrana, a vazão de permeado poderá ser baixa devido à um irreversível entupimento interno conhecido na literatura em inglês como *fouling*. Este fenômeno manifesta-se tipicamente como um decaimento da vazão de permeado e alteração nas propriedades seletivas da membrana.

O *fouling* é um fenômeno de entupimento dos poros da membrana, que causa alterações irreversíveis devido a interações físicas e/ou químicas específicas entre a membrana e os vários componentes presentes na mistura.

Nos efeitos de entupimento *fouling*, a vazão de filtrado e soluto passam a ter variações semelhantes àquelas associadas com o fenômeno de polarização. No entanto, a polarização é um fenômeno reversível a nível de camada limite. Polarização pode ser controlada, por exemplo, com condições de operação de fluxo reverso. Esses efeitos podem ser reduzidos ou até eliminados pelo aumento da tensão de cisalhamento do fluido na superfície permeável.

Em contrapartida, o entupimento ocorre porque interações (atrativas) físicas e/ou químicas ocorrem entre os vários macrosolutos (partículas) e a membrana. A taxa e alcance do entupimento é tipicamente uma função do dispositivo fluido mecânico, mas não pode,

em geral ser eliminada simplesmente pelo acréscimo da taxa de transferência de massa do soluto.

O entupimento *fouling* permanece um fenômeno pouco entendido. Em princípio, todos os componentes presentes no processo de filtração podem obstruir a membrana. A natureza e o alcance do entupimento são determinados pelas características físico-químicas moleculares dos componentes individuais e da membrana. Em muitos sistemas, as espécies que causam os efeitos dominantes do entupimento estão presentes em pequenas quantidades, e suas concentrações podem ser independentes dos principais componentes envolvidos no processo de filtração.

Um dos maiores problemas relacionados ao entendimento do mecanismo de formação do *fouling* é distingui-lo entre os efeitos de polarização. Muitos pesquisadores têm atribuído o rápido declínio da vazão como o começo do processo de polarização. Qualquer redução sistemática da vazão transmembrana é então atribuída ao entupimento do tipo *fouling*. No entanto, este entupimento também pode desenvolver-se muito rapidamente. Por exemplo, o tempo característico para a adsorção de proteínas em superfícies sólidas pode geralmente ser de apenas alguns segundos. Mudanças físicas na estrutura da membrana podem ser causadas por compactação ou deformação. A degradação química também pode ser um problema em muitos sistemas, se o pH, temperatura, ou composição química da solução ou agentes de limpeza forem incompatíveis com composição química da membrana.

Existe uma enorme variedade de espécies inorgânicas que podem causar um significativo *fouling* em membranas durante a microfiltração. Muitos destes compostos inorgânicos estão presentes nos alimentos e nas águas de superfície. Eles incluem sulfato de cálcio, carbonato de cálcio, fosfato de cálcio, sílica, óxidos metálicos e hidróxidos (particularmente de ferro e de alumínio), colóides de enxofre, e outros particulados inorgânicos. O entupimento causado por compostos de metais e sais, geralmente ocorre por precipitação ou floculação dentro dos poros da membrana. Sais de cálcio são um dos mais relevantes agentes de indução ao entupimento *fouling* em muitos processos, como por exemplo, na indústria de processamento de queijo (Zydney & Zeeman, 1996).

Em modelos microscópicos leva-se em consideração os efeitos de forças entre partículas. A Figura 7 ilustra as forças que agem numa partícula esférica, que são: arrasto, atrito, empuxo e outras de natureza eletrostática.

As forças de polarização estão associadas às forças de London, Van der Waals ou interações do tipo dipolo induzido. Estas forças surgem a partir das flutuações na densidade de cargas das nuvens de elétrons dos átomos individuais. As flutuações na densidade eletrônica produzem constantemente mudanças instantâneas dipolares nos átomos/moléculas que então induzem dipolos semelhantes nas suas vizinhanças. As interações entre esses dipolos induzidos levam a uma força de atração de alcance relativamente grande entre os átomos no contato mistura e membrana.

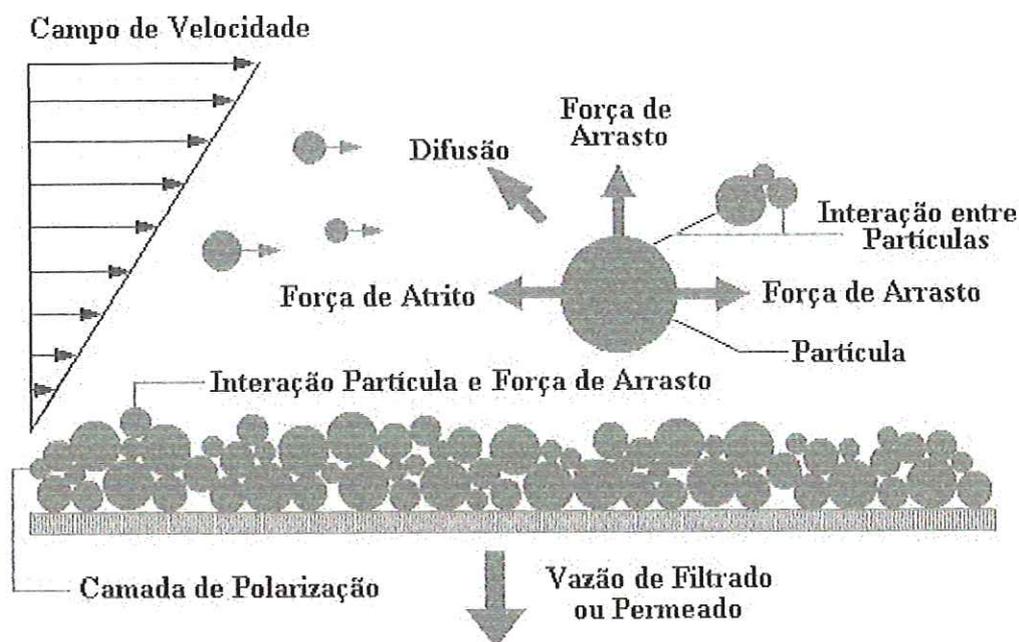


Figura 7: Forças inerciais e eletrostáticas que atuam em partículas esféricas.

A literatura (Zydney & Zeman, 1996) encontrada sobre estudos de adsorção de macrossolutos tem focalizado as proteínas, devido à importância crítica da adsorção protéica em muitos sistemas biológicos e que possuem uma imensa gama de interações eletrostáticas com a superfície permeável.

Pesquisadores têm medido a quantidade de proteína adsorvida na superfície da membrana. No entanto, quantificar as características de adsorção, é algo muito complexo, podendo levar a conclusões errôneas sobre o comportamento da adsorção. Medidas de redução na concentração de proteínas no volume da solução causado por adsorção podem

incluir a proteína acumulada contida na concentração da camada limite adjacente à membrana (Zydney & Zeman 1996).

Segundo Piron et al (1995), o aumento da camada de polarização envolve dois fluxos opostos: um difusivo que surge devido a pressão, que faz com que as partículas retornem à superfície da membrana; e outro convectivo devido a corrente principal com efeitos de tensão de cisalhamento. Dessa forma é necessário um coeficiente de difusão para avaliar este transporte difusivo. A difusão Browniana não é capaz de estimar o fluxo de permeado para microfiltração pois devido ao tamanho das partículas envolvidas, o valor do coeficiente de difusão também é muito baixo, o que leva à um valor subestimado da vazão de permeado, denominado “Paradoxo do Fluxo”. A principal teoria proposta para explicar o transporte difusivo é a difusão por tensão induzida.

A difusão por tensão induzida origina-se da interação entre as partículas do soluto. Tais interações provocam os movimentos laterais das partículas e são de dois tipos: cada partícula esférica gira e cria um campo de velocidades que exerce forças de arrasto nas esferas vizinhas; as colisões entre as esferas ocorrem devido às linhas de corrente possuírem diferentes velocidades. Em contraste, a difusão Browniana ocorre devido as colisões das moléculas do solvente com as partículas do soluto, o que faz com que estas últimas executem movimentos aleatórios (Probstein, 1976).

Zydney (1997) apresenta um desenvolvimento de um modelo matemático para o filme adjacente à camada limite de concentração devido ao fenômeno de polarização. A Figura 8 ilustra o perfil de concentração de soluto adjacente à superfície permeável. O valor da concentração na superfície é indicado por C_w , enquanto o valor de concentração no núcleo do escoamento (bulk solution) por C_b ; a espessura da camada limite é representada por δ . O acúmulo de soluto (partículas) junto à superfície provoca uma resistência hidráulica adicional ao escoamento, em série com a resistência hidráulica da membrana. Este efeito é mais intenso para misturas ou suspensões, com macromoléculas, formando uma camada densa, dando origem à chamada *camada gel polarizada*, reduzindo a vazão de permeado através da membrana, conforme ilustra a Figura 8.

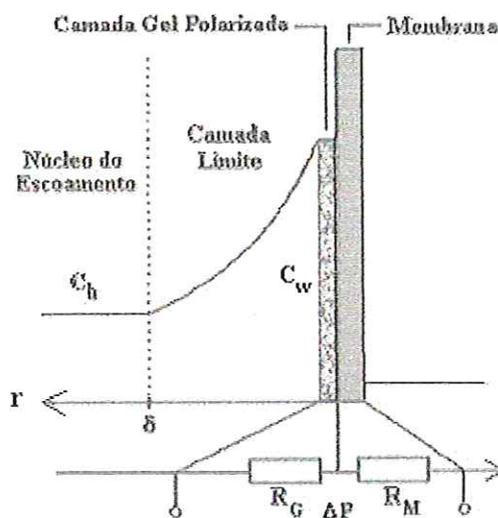


Figura 8: Modelo de resistência para camada gel-polarizada.

O número de Sherwood (Sh) (Cheryan, 1998) é definido como o valor da razão do coeficiente de transferência de massa por convecção pela transferência molecular de massa. Nenhuma das metodologias de modelagem discutidas na literatura descreve de maneira completa a relação entre a vazão e a pressão transmembrana em MF e UF. Uma forma de modelagem, bastante utilizada, é obtida com o uso da “*resistência em série*”, conceito que é comum em transferência de calor.

Para uma membrana ideal sujeita a uma solução concentrada, podemos estabelecer a relação:

$$J = A \frac{P_T}{\mu}$$

onde A é o coeficiente de permeabilidade da membrana, o qual inclui as propriedades características da própria membrana, μ é a viscosidade do permeado ou filtrado, e P_T é a pressão transmembrana aplicada. Para uma solução concentrada, numa dada temperatura, a viscosidade é geralmente incluída no valor de A e esta constante pode então ser escrita como $1/R_M$, onde R_M é a resistência intrínseca da membrana usando água pura como fluido:

$$J_{\text{água}} = \frac{P_T}{R_M}$$

Neste caso, o valor de R_M ou A são úteis não apenas para os propósitos da modelagem, mas também para avaliar a efetividade do procedimento de limpeza e para o mapeamento do longo período de estabilidade da membrana.

Por outro lado, se um significativo *fouling* ocorrer na membrana, a resistência intrínseca da membrana pode variar. Isto é levado em conta adicionando um outro termo de resistência devido ao *fouling* (R_F) ao modelo:

$$J = \frac{P_T}{R_M + R_F}$$

Desde que este tipo de *fouling* ocorre geralmente devido à interações físico-químicas, R_F é freqüentemente agregado com a resistência intrínseca da membrana, como R'_M , onde $R'_M = R_M + R_F$. Para a concentração de polarização e a camada limite, um termo de resistência adicional, R_G , pode ser somado à equação para a vazão na forma:

$$J = \frac{P_T}{R_M + R_F + R_G}$$

onde R_G é uma função de parâmetros operacionais e propriedades físicas tal que:

$$R_G = \phi P_T$$

Dessa forma o modelo de resistência fica:

$$J = \frac{P_T}{R'_M + \phi P_T}$$

Conceitualmente este modelo é adequado para dados típicos da relação entre vazão e pressão. Para baixas pressões transmembrana (P_T), o termo R_G poderá ser muito menor comparado à R'_M e o fluxo poderá ser uma função da pressão. Para altas pressões transmembrana, o termo R_G torna-se relativamente grande. O fluxo é menos dependente da pressão e aproxima-se do valor limite $1/\phi$, pois quando P_T se torna grande comparado a R'_M , temos que $(R'_M/P_T) \approx 0$, e portanto:

$$J = \frac{P_T}{P_T \left(\frac{R'_M}{P_T} + \phi \right)} = \frac{1}{\phi}$$

O termo ϕ será uma função de variáveis que influenciam a transferência de massa como a viscosidade, a razão tensão-velocidade e a temperatura. A pressão ótima para operação com sistemas é o produto onde as resistências R'_M e R_G se igualam:
 $(P_T)_{\text{ótima}} = R'_M / \phi$.

2.2. Modelagem Matemática

Bhattacharjee et. al. (1996) apresentam uma solução analítica para a queda de pressão em um escoamento de fluido em placas retangulares e tubos cilíndricos com paredes porosas para o caso de permeabilidade constante na parede. Demonstra-se que o modelo para o caso particular de velocidade constante na parede em placas retangulares com paredes permeáveis concorda muito bem com a solução de Berman (1953).

Sirshendu et. al. (1996) apresentam soluções de similaridade e integral generalizada para o perfil de concentração com a variação da pressão transmembrana no processo de filtração tangencial. As soluções para o perfil de concentração na transferência de massa na camada limite foram obtidas e as previsões do modelo são comparadas com experimentos realizados com Dextrana T-40 e T-20 e os resultados do modelo concordaram bem com os resultados experimentais.

Segundo Lee & Clark (1997) os mecanismos de transporte de massa durante a filtração tangencial são matematicamente expressos usando a equação de difusão convectiva bidimensional, onde o termo de difusão axial é desprezível devido ao número de Peclet ($Pe = Re \cdot Sc$) na direção axial ser muito maior que o número de Peclet na direção transversal. Um método numérico é apresentado para solucionar a equação de difusão convectiva em duas dimensões para o caso simples de vazão de permeado uniforme.

No entanto, neste processo de ultrafiltração, a vazão de permeado ao longo da direção axial é desconhecida e geralmente decresce com a distância axial. Além disso, um algoritmo iterativo é desenvolvido para predizer a vazão de permeado em regime permanente, baseado na hipótese de que a concentração na superfície da membrana não pode exceder um certo valor limite.

Usando um modelo numérico com um coeficiente de difusão efetivo, o qual é considerado como sendo a soma dos coeficientes de difusão molecular e da tensão hidrodinâmica induzida, foram utilizados para investigar os efeitos do tamanho das partículas, a concentração da solução e a velocidade axial da vazão de permeado em regime permanente.

De acordo com Huang & Morrissey (1998) a análise de elementos finitos é um poderoso método de análise de muitos problemas em engenharia. Neste estudo, a análise de

elementos finitos foi usada para simular o desenvolvimento da polarização em ultrafiltração de soluções protéicas. Um pequeno filtro de membrana foi desenvolvido para verificar a modelagem. Um disco de membrana de polissulfeto de 47 mm de diâmetro foi usado neste estudo. Solução de albumina de diferentes concentrações foi bombeada para escoar através do canal da membrana. A velocidade do escoamento tangencial da solução protéica foi cuidadosamente controlada para a região laminar. Com a velocidade do escoamento confinada no canal e estimada pela solução de perturbação, a concentração de proteínas na superfície da membrana e o coeficiente de transferência foram precisamente estimados pelo modelo.

De acordo com Huisman e Trägårdh (1998), a vazão limite na microfiltração de suspensões de partículas foi calculada numericamente a partir da solução da equação de

transporte difusivo-convectivo que governa o escoamento
$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} \right) = 0,$$

onde C é a concentração de soluto na solução.

Os resultados numéricos obtidos para o modelo de difusão Browniana e por difusão por tensão-induzida podem ser reunidos em uma equação aproximada, a qual mostra que a vazão transmembrana depende de parâmetros tais como tensão de cisalhamento, concentração da solução e comprimento da membrana. Os resultados numéricos concordam bem com os da vazão medidas no escoamento tangencial. Demonstrou-se que a difusão turbulenta contribui apenas superficialmente para o transporte de partículas na camada limite de concentração. A vazão de microfiltração para escoamentos em condições turbulentas foi por essa razão predita acuradamente por cálculos numéricos, apesar da difusão turbulenta ser desprezada.

Bowen et. al. (2000) investigaram a influência das condições físico-químicas na vazão de permeado em ultrafiltração de suspensões coloidais. Uma solução numérica das equações de Navier-Stokes, continuidade, e difusão convectiva acopladas foram usadas para modelar o perfil de concentração e, portanto, estimar a vazão de permeado na filtração tangencial. Uma solução bidimensional usando o método de diferenças finitas foi desenvolvida em termos do algoritmo de Thomas e implementada na linguagem Fortran. O modelo pode ser aplicado em módulos de placas planas (com uma ou duas paredes porosas) e pode ser adaptado para módulos tubulares. Neste trabalho, segundo Bowen et. al. (2000) o

modelo foi versátil e pode ser executado para propriedades constantes ou variáveis. Levou-se em conta os efeitos da variação de três propriedades principais: pressão osmótica, coeficiente de difusão e viscosidade através do módulo. A determinação destas três propriedades físicas foi possível mediante cálculos fundamentais de interações coloidais entre partículas as quais levam em conta as interações eletrostáticas.

Estas descrições de interações coloidais foram usadas para desenvolver um modelo a priori, com parâmetros não ajustáveis, que permitem uma predição quantitativa das propriedades da dispersão coloidal como uma função do pH, tamanho do colóide, força iônica e concentração do colóide. O resultado do modelo tem sido comparado com dados para proteínas animal e humana. Boa concordância entre predições teóricas e dados experimentais foi obtida.

Similarmente, Bowen & Willians (2000) apresentaram uma descrição numérica por diferenças finitas do processo de ultrafiltração, que também envolve a solução acoplada das equações de Navier-Stokes, continuidade e difusão convectiva, enquanto os parâmetros calculados da pressão osmótica, coeficiente do gradiente de difusão e viscosidade foram desenvolvidos e testados para biocolóides.

Os cálculos mostram que os efeitos da viscosidade e do coeficiente de difusão são ambos relevantes e comparáveis em magnitude. Esta é a descrição do processo de filtração tangencial em que interações de biocolóides controladas pela pressão osmótica, gradiente de difusão e viscosidade, são calculadas a partir do conhecimento da seqüência de aminoácidos. Quando as equações de conservação são acopladas para a descrição da hidrodinâmica laminar e do transporte de soluto no módulo de membrana, o resultado nos permite iniciar a estimativa da taxa de ultrafiltração de proteínas para todos os tipos de soluções.

A descrição numérica da filtração tangencial desenvolvida é totalmente genérica e permite a incorporação de muitas descrições teóricas ou dados experimentais para o coeficiente de difusão e viscosidade. Isto inclui futura incorporação de descrições mais sofisticadas de propriedades reológicas que podem mais adiante melhorar a concordância entre teoria e experimento.

3. Formulação Diferencial das Equações de Conservação

As equações fundamentais que governam o escoamento laminar newtoniano, em tubos circulares com superfícies permeáveis, serão escritas para coordenadas cilíndricas. Apresentamos abaixo tais equações, e em seguida as manipulações algébricas necessárias para deixá-las em suas respectivas formas adimensionais. Na Figura 9 consideramos uma representação do campo de velocidade do escoamento estudado neste trabalho.

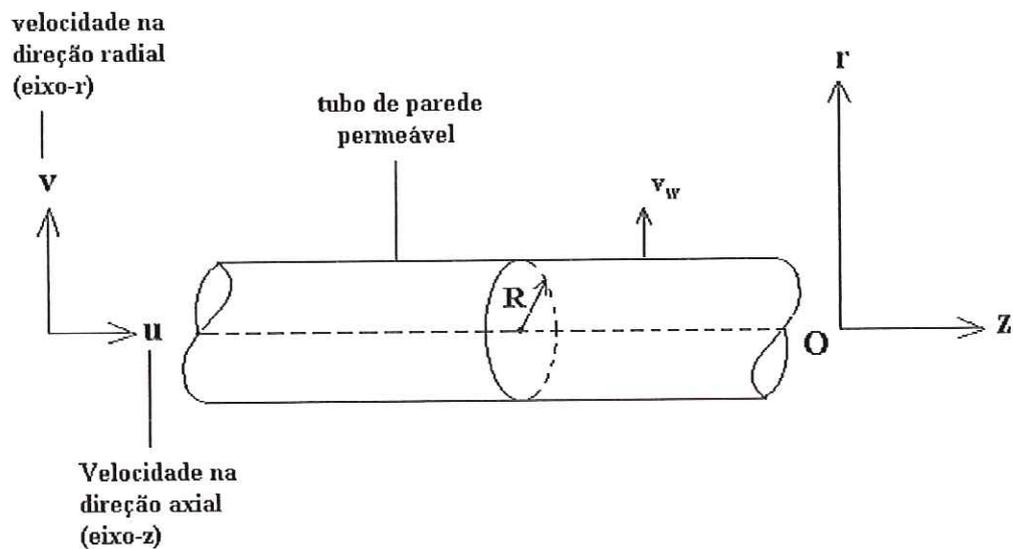


Figura 9: Escoamento em tubo cilíndrico poroso.

Em coordenadas cilíndricas a equação da continuidade é obtida pelo princípio de conservação da massa detalhado em Bird & Stewart (1960), sendo dada por:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

Neste trabalho, assumimos $v_r = "v"$ que corresponde à velocidade transmembrana ou velocidade radial (v_w); $v_\theta = 0$, ou seja, rotações no fluido são desprezadas; e $v_z = "u"$, que é a velocidade axial do escoamento, isto é, a velocidade ao longo do eixo z . Neste caso a equação (1) é simplificada e torna-se:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (vr) = 0 \quad (2)$$

Utilizando os seguintes adimensionais para o campo de velocidade e coordenadas geométricas:

$$u^* = \frac{u}{u_0}, \quad v^* = \frac{v}{v_w}, \quad z^* = \frac{z}{R} \quad \text{e} \quad r^* = \frac{r}{R} \quad ; \quad \text{onde } u_0, v_w \text{ e } R \text{ são respectivamente a}$$

velocidade na entrada do tubo, a velocidade radial de permeado na superfície do tubo e o raio do tubo.

Podemos reescrever a Equação (2) na forma adimensional para obter:

$$\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{Re_w}{Re_D} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v^*) = 0; \quad \text{onde } Re_w = \frac{\rho v_w d}{\mu} \quad ; \quad Re_D = \frac{\rho u d}{\mu}, \quad \text{e } d = 2R.$$

Fazendo $\alpha = \frac{Re_w}{Re_D}$, temos que:

$$\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \alpha \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v^*) = 0 \quad (3)$$

Assim a Equação (3) torna-se a forma adimensional da Equação (2).

Para a equação da conservação da quantidade de movimento consideraremos neste trabalho a equação para a descrição do escoamento na direção axial. De acordo com o princípio de conservação da quantidade de movimento detalhado em Bird & Stewart (1960), temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (4)$$

Na Equação (4) assumimos por hipótese que $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$, ou seja, não estamos considerando variações de u com θ ; o campo gravitacional não atua ao longo da direção axial “ z ”, ou seja $g_z = 0$; e ainda, considerando como desprezível o termo de transporte axial $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$, que em regime permanente pode ser simplificada como segue:

$$u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \quad (5)$$

Considerando os adimensionais:

$u^* = \frac{u}{u_0}$, $v^* = \frac{v}{v_w}$, $z^* = \frac{z}{R}$, $r^* = \frac{r}{R}$, $P^* = \frac{P}{\rho u_0^2}$, e substituindo esses adimensionais na equação (5) acima, e rearranjando a equação termo a termo, teremos:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \left(\frac{Re_w}{Re_D} \right) v^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{2}{Re_D} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) \right] \quad (6)$$

ou ainda:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \alpha v^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{2}{Re_D} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) \right] \quad (7)$$

A Equação (7) é a equação da conservação da quantidade de movimento em sua forma adimensional.

O princípio de conservação que modela a migração das espécies químicas num meio líquido é o da *conservação da massa* aplicado a uma espécie química. Para o escoamento de uma espécie “ i ” num meio bidimensional, obtemos como detalhado em Bejan (1984) a seguinte equação:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

Esta é a equação *bidimensional da concentração do soluto* ou das espécies em coordenadas cartesianas. Numa forma mais compacta, temos:

$$\frac{DC}{Dt} = D \nabla^2 C \quad (9)$$

Onde $\frac{DC}{Dt}$ é a derivada material da propriedade extensiva C (concentração de soluto) e o parâmetro D que aparece no lado direito da equação é a chamada difusividade do soluto. Deve-se ressaltar que esta equação foi modelada para o fluxo de massa difusivo de acordo com a equação constitutiva estabelecida por Adolph Fick (1829-1901) em 1855.

Escrevendo a Equação (8) em coordenadas cilíndricas, de acordo com o escoamento tubular deste trabalho, obtemos:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial z} + v \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} = D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \quad (10)$$

Vamos considerar por hipótese neste trabalho, que a concentração de soluto seja homogênea na direção θ , ou seja, $\frac{\partial C}{\partial \theta} = 0$; o termo difusivo axial $\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$ desprezível em relação à difusão radial; e o escoamento em regime permanente. Com estas hipóteses simplificadoras, a Equação (10) pode ser reescrita como:

$$u \frac{\partial C}{\partial z} + v \frac{\partial C}{\partial r} = D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) \right] \quad (11)$$

Cuja forma é a mais comumente utilizada na literatura (Zydney, 1997) para modelagem de processos de microfiltração. Considerando os seguintes adimensionais:

$$u^* = \frac{u}{u_0}, \quad v^* = \frac{v}{v_w}, \quad z^* = \frac{z}{R}, \quad r^* = \frac{r}{R}, \quad c^* = \frac{C}{C_0}; \text{ onde } C_0 \text{ e } R, \text{ são}$$

respectivamente a concentração na entrada do tubo e o raio do tubo.

Substituindo os adimensionais na Equação (11) obtemos:

$$u^* \frac{\partial c^*}{\partial z^*} + v^* \alpha \frac{\partial c^*}{\partial r^*} = \frac{1}{\text{Re}_D \text{Sc}} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial c^*}{\partial r^*} \right) \right] \quad (12)$$

Sabendo que $\text{Re}_D \text{Sc} = \text{Pe}$, onde Sc é o adimensional de Schimidt, dado por $\text{Sc} = \mu/\rho D$ e D é a difusividade mássica, a Equação (12) torna-se:

$$u^* \frac{\partial c^*}{\partial z^*} + v^* \alpha \frac{\partial c^*}{\partial r^*} = \frac{1}{\text{Pe}} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial c^*}{\partial r^*} \right) \right] \quad (13)$$

onde $\alpha = \frac{\text{Re}_w}{\text{Re}_D}$, $\text{Sc} = \frac{\mu}{\rho D}$ e $\text{Pe} = \frac{u_0 R}{D}$, é o número adimensional de Peclet.

A literatura específica do processo de microfiltração (Cheryan, 1984 e Zeman & Zydney, 1996) indica a relevância dos adimensionais citados acima, na modelagem do processo. Correções características são sugeridas na forma $\text{Sc} = f(\text{Re}, \text{Pe})$. A difusividade também é objeto de estudos particulares. Zeman & Zydney (1996) apresentam a seguinte correlação para o coeficiente de difusividade adequado para soluções de macromoléculas:

$$D = 8,34 \cdot 10^{-08} \left(\frac{T}{\mu M^{1/3}} \right) \text{ onde } \mu, M, T \text{ são respectivamente a viscosidade da solução, a}$$

massa molecular da macromolécula e a temperatura absoluta.

3.1. Formulação Integral

As equações diferenciais de conservação (Equações 7 e 13), serão reescritas na forma integral para atender a modelagem proposta neste trabalho. As equações pré-estabelecidas para os campos de velocidade e concentração, visam reproduzir o comportamento aproximado do escoamento, e serão ajustadas com o uso das equações de conservação integradas para toda seção tubular.

Para obtermos a equação integral da quantidade de movimento na sua forma adimensional, vamos proceder com a integração no elemento de área “dA”, próprio da geometria do escoamento, que é um anel circular de área $dA=2\pi r dr$.

A equação da conservação da quantidade de movimento em sua forma adimensional é dada pela Equação (7):

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \alpha v^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{2}{Re_D} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) \right] \quad (14)$$

Integrando a Equação (3) (Equação da continuidade) na variável r , obtemos:

$$\int_0^{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} r^* dr^* + \int_0^{r^*} \frac{\alpha}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v^*) r^* dr^* = 0$$
$$\int_0^{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} r^* dr^* + \alpha r^* v^* = 0 \quad (15)$$

Isolando da Equação (15) a componente radial da velocidade v , temos:

$$v^* = -\frac{1}{\alpha r^*} \int_0^{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} r^* dr^* \quad (16)$$

A partir deste ponto, retiramos o símbolo de asterisco das equações, o qual representa a adimensionalidade das mesmas, para maior comodidade na notação.

Substituindo (16) em (14) e integrando a última para toda seção transversal, obtemos:

$$\int_0^1 u \frac{\partial u}{\partial z} r dr + \alpha \int_0^1 \left(-\frac{1}{\alpha r} \int_0^r \frac{\partial u}{\partial z} r dr \right) \frac{\partial u}{\partial r} r dr = -\frac{\partial P}{\partial z} \int_0^1 r dr + \frac{2}{\text{Re}_D} \int_0^1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) r dr \Rightarrow$$

$$\int_0^1 u \frac{\partial u}{\partial z} r dr - \int_0^1 \frac{1}{r} \left(\int_0^r \frac{\partial u}{\partial z} r dr \right) \frac{\partial u}{\partial r} r dr = -\frac{\partial P}{\partial z} \frac{r^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{2}{\text{Re}_D} r \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_0^1 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 u \frac{\partial u}{\partial z} r dr - \int_0^1 \left\{ \frac{1}{r} \left(\int_0^r \frac{\partial u}{\partial z} r dr \right) \frac{\partial u}{\partial r} \right\} r dr = -\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{2}{\text{Re}_D} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} \Rightarrow$$

$$\int_0^1 u \frac{\partial u}{\partial r} r dr - \int_0^1 \left\{ \left(\int_0^r \frac{\partial u}{\partial z} r dr \right) \frac{\partial u}{\partial r} \right\} dr = -\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{2}{\text{Re}_D} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=1} \quad (17)$$

que é a forma integral da equação da conservação da quantidade de movimento na sua forma adimensional.

Na seqüência realizamos o mesmo procedimento de integração na equação de conservação das espécies, Equação (13) em relação a toda área da seção. Assim obtemos:

$$\int_0^1 u^* \frac{\partial c^*}{\partial z^*} r^* dr^* + \int_0^1 v^* \alpha \frac{\partial c^*}{\partial r^*} r^* dr^* = \frac{1}{\text{Pe}} \int_0^1 \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial c^*}{\partial r^*} \right) \right] r^* dr^*$$

Substituindo a Equação (16) na equação (17), e mais uma vez, retirando o símbolo para a adimensionalidade da equação, vem:

$$\int_0^1 u \frac{\partial c}{\partial z} r dr + \int_0^1 \alpha \left(-\frac{1}{\alpha r} \int_0^r \frac{\partial u}{\partial z} r dr \right) \frac{\partial c}{\partial r} r dr = \frac{1}{Pe} \int_0^1 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c}{\partial r} \right) \right] r dr \Rightarrow$$

$$\int_0^1 u \frac{\partial c}{\partial z} r dr - \int_0^1 \left(\int_0^r \frac{\partial u}{\partial z} r dr \right) \frac{\partial c}{\partial r} dr = \frac{1}{Pe} \int_0^1 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c}{\partial r} \right) \right] r dr \Rightarrow$$

$$\int_0^1 u \frac{\partial c}{\partial z} r dr - \int_0^1 \left(\int_0^r \frac{\partial u}{\partial z} r dr \right) \frac{\partial c}{\partial r} dr = \frac{1}{Pe} \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c}{\partial r} \right) \right] dr, \quad \text{ou seja:}$$

$$\int_0^1 u \frac{\partial c}{\partial z} r dr - \int_0^1 \left(\int_0^r \frac{\partial u}{\partial z} r dr \right) \frac{\partial c}{\partial r} dr = \frac{1}{Pe} \frac{\partial c}{\partial r} \Big|_{r=1}$$

Esta é a equação integral da concentração do soluto em sua forma sua forma adimensional.

Para estabelecer uma condição de contorno para o escoamento, verificamos a igualdade entre o transporte de massa por convecção, e o transporte de massa por difusão junto à superfície permeável. Considerando a concentração do soluto na solução confinada como $C_i(r, z)$. O transporte convectivo de soluto “i” junto à superfície do tubo é dado por:

$$N_{ir}(R, z) = h_{C_i}(z) [C_{ib}(z) - C_i(R, z)] \quad (19)$$

onde é assumido que o coeficiente convectivo de transferência de massa h_{C_i} , é uma função da posição axial “z”.

Como o segundo membro da Equação (19) representa o fluxo difusivo, podemos igualar com fluxo convectivo integrado para toda superfície permeável. Na forma dimensional teremos:

$$\int_0^R h_{C_i} [C_{ib}(z) - C_i(R, z)] dr = \int_0^R \frac{D_i}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C_i}{\partial r} \right) r dr \Rightarrow \quad (20)$$

$$h_{ci}[C_{ib}(z) - C_i(R, z)]R = D_i R \left. \frac{\partial C_i}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (21)$$

Adimensionalizando a Equação (21), temos:

$$\left. \frac{\partial C_i(1, z^*)}{\partial r^*} \right|_{r=1} = \frac{R h_{ci}}{D} (C_i(1, z^*) - C_{ib}(z^*))$$

Ou simplificadamente:

$$\left. \frac{\partial C_i(1, z)}{\partial r} \right|_{r=1} = \text{Sh} (C_i(1, z) - C_{ib}(z)) \quad (22)$$

A Equação (22) trata-se da condição de contorno adimensionalizada da concentração do soluto na superfície do tubo, onde temos que $C_{ib}(z) = \frac{\int_A C_i u dA}{\int_A u dA}$ e Sh é número adimensional de Sherwood.

4. Metodologia e Modelagem Matemática

Neste trabalho a metodologia para modelagem do escoamento em tubos permeáveis, visa à otimização de funções aproximadas para os campos de velocidade e concentração.

A formulação integral bem descrita na literatura geral (Ward & Smith, 1980) e específica (Sirshendu et al., 1997), é também conhecida como método de Kármán-Pohlhausen ou similaridade (Deen, 1999).

Para modelagem do campo de velocidades do escoamento, estabelecemos neste trabalho, a seguinte proposta na forma funcional:

$$u(r, z) = 2\left(\frac{1}{2} - \alpha z\right)(1 - r^n)\left(1 + \frac{2}{n}\right) \quad (23)$$

onde “n” é função da variável adimensional longitudinal “z” ou seja, $n(z)$. Nesta expressão, o termo entre parênteses $\frac{1}{2} - \alpha z$ refere-se a sucção de massa na parede do tubo ao longo da coordenada axial z. Assim, para $\alpha = 0$, temos um tubo impermeável, ao passo que para $\alpha < 0$ e $\alpha > 0$ temos respectivamente injeção ou sucção de massa junto à parede permeável (Gupta C. R., 1970).

A Equação (23) foi escrita após diversas tentativas, sempre com o objetivo de descrever aproximadamente o campo de velocidade do escoamento laminar num tubo permeável, com as condições pré-estabelecidas. A Figura 10 apresenta o gráfico dos perfis de velocidade, $u(r, z)$, dado pela Equação (23), em função da posição radial adimensional “r” para valores de $n(z)$ no intervalo (3,100). Observa-se na Figura 10 que para intervalos diferentes de n, desde $n = 3$, há ocorrências diferenciadas na evolução dos perfis de velocidade.

O perfil referente a $n=100$ representa a condição de velocidade do escoamento na entrada do tubo, e os outros perfis, o campo de velocidade em posições a jusante da entrada. Neste modelo, valores de “n” menores que 100 poderão representar perfis em desenvolvimento, ou desenvolvido caso ele seja mantido constante ao longo do tubo, dependendo das condições de injeção ou sucção de massa pela superfície permeável.

O valor $n = 100$ para a posição de entrada do tubo, foi escolhido por já representar um perfil constante. Esta condição é restrita para tubos com pequenos diâmetros e com razão de contração elevada, e será admitida nesta modelagem. Esta condição torna-se compatível com construções experimentais específicas na entrada do tubo.

Desta forma o campo de velocidades representado na Figura 10 indica um bom grau de liberdade de estabelecermos um perfil pistonado ou mais homogêneo, de acordo com variações do parâmetro n . Em regime laminar num tubo impermeável, o perfil de velocidade para $n=2$ apresenta o formato parabólico.

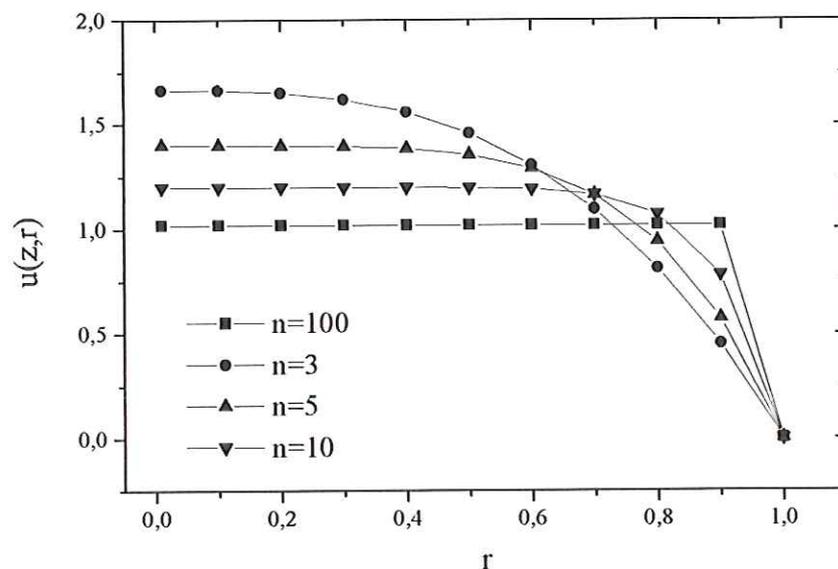


Figura 10: Perfil de velocidade pré-estabelecido para diferentes valores de $n(z)$.

Para tornar a Equação (23) representativa do escoamento investigado neste trabalho, o parâmetro " $n(z)$ " será especificado a partir da Equação (17). Assim a Equação (23) para $u(r, z)$, é substituída na equação (17). Realizando as integrações requeridas para toda a secção transversal do tubo, obtemos, após várias manipulações algébricas, a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dn}{dz} = - \frac{2\alpha(0,5 - \alpha z) \left(\frac{n+2}{n+1} \right) + \frac{\alpha}{n+1} - \frac{4}{\text{Re}_D} \left[2 \left(1 - \frac{v_w}{u_0} L_R \right) + (0,5 - \alpha z)(n+2) \right]}{(0,5 - \alpha z) \left[\frac{(0,5 - \alpha z)}{(n+1)^2} + \frac{1}{2(n+1)^2(n+2)} \right]} \quad (24)$$

onde utilizou-se para o termo de pressão a seguinte expressão da literatura (Deen 1999):

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{16}{\text{Re}_D} \left(1 - \frac{v_w}{u_0} L_R \right), \text{ onde "L}_R\text{" é a distância ao longo do eixo axial do tubo a partir da}$$

jusante.

A partir da elaboração em linguagem Pascal da rotina numérica de Runge-Kutta de quarta ordem (Rice & Duong, 1995), procedeu-se à busca da solução numérica para a equação diferencial ordinária, Equação (24).

Por causa da presença física dos termos do denominador desta equação serem numericamente muito inferiores que os termos do numerador, tornou-se inconsistente a convergência do método numérico devido a erros de flutuação do tipo "divisão por zero".

Trabalhos específicos sobre problemas associados à rotina de Runge-Kutta foram encontrados na literatura (Butcher & Wanner, 1996; Spijker, 1996; Veen et. al., 1995). Spiker (1996) estuda a problemática de propagação de erro no método. O trabalho apresenta uma revisão dos métodos clássicos e seu comportamento com a implementação do passo "h", e a respectiva propagação de erro durante os cálculos. Neste trabalho um novo teorema é apresentado para normalizar acúmulos de erro, o que demonstra que existem atualmente estudos de aprimoramento no método de Runge-Kutta.

Dessa forma, devido à impossibilidade de estabelecermos o parâmetro funcional $n(z)$ através da solução numérica da Equação (24) criou-se uma alternativa necessária de estabelecer previamente a forma funcional para $n(z)$, e com isto, impor a forma da evolução do perfil de velocidade, $u(r, z)$.

A implantação de diferentes funções $n(z)$ tem como objetivo estabelecer diferentes formas de variação na evolução dos perfis de velocidade ao longo do tubo poroso, conseqüentemente modelando a taxa de crescimento da camada limite. Nas propostas que serão apresentadas a seguir serão explicitados as funções $n(z)$ e seus respectivos intervalos de variação.



Adotamos neste trabalho para o parâmetro de modelagem do campo de velocidade, $n(z)$, as formas de variação polinomial, exponencial e linear, dadas respectivamente por:

a) $n(z) = 19.87 + 0.026.z - 0.000652.z^2 - 0.0000141.z^3$

Intervalo: $n(0) = 19,87 \approx 20$ a $n(100) \approx 2$.

b) $n(z) = 1,76 + 18,98 \exp(-z/19,97)$

Intervalo: $n(0)=20,74 \approx 20$ a $n(100) \approx 2$.

c) $n(z) = 100 - 0,98z$

Intervalo: $n(0) = 100$ a $n(100) = 2$.

Na Figura 11 apresentamos as diferentes imposições para o funcional $n(z)$ escritos acima, que rege o comportamento dos perfis de velocidade. Observamos que a forma polinomial de variação de $n(z)$ nos dá uma evolução para o perfil de velocidade praticamente constante na entrada do tubo e faz com que este perfil varie significativamente da metade do tubo até sua saída. A forma linear nos oferece, obviamente, uma variação constante para este perfil, enquanto que a forma exponencial faz o oposto da proposta polinomial, ou seja, no caso de $n(z)$ variar exponencialmente, o perfil de velocidades varia significativamente na entrada do tubo para permanecer praticamente constante da sua metade até sua saída.

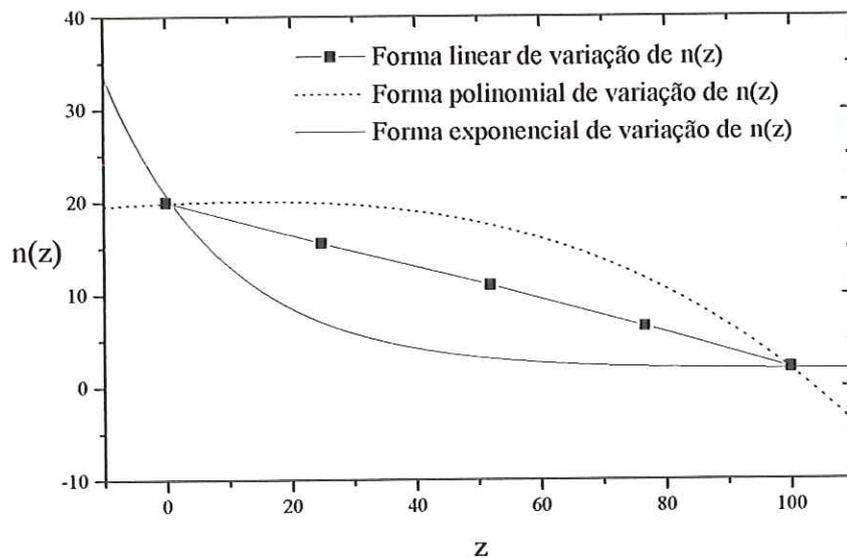


Figura 11: Modos de variação do funcional $n(z)$

Para esclarecer diferenças do modelo implantado em relação ao crescimento da camada limite de velocidade, considere o gráfico da Figura 12. Nesse gráfico apresentamos a espessura da camada limite em função da posição longitudinal “z”. A espessura δ foi calculada dividindo o valor da velocidade longitudinal (u) fora da camada limite (u_e) pela velocidade dentro da camada limite (u_i), com referência ao valor 0,999, ou seja a fronteira da camada limite. Os valores de “u” foram obtidos a partir do modelo apresentado na Equação (23) com $\alpha = 0$, e os valores de “z” para a taxa de variação linear: $n(z)=100-98*z$, onde para $z = 1$ temos o completo desenvolvimento da camada limite.

Desta forma, a curva da Figura 12 representa o modelo de crescimento da camada limite para $n(z)$ apresentado. Diferentes $n(z)$ resultam em diferentes taxas de crescimento da camada limite.

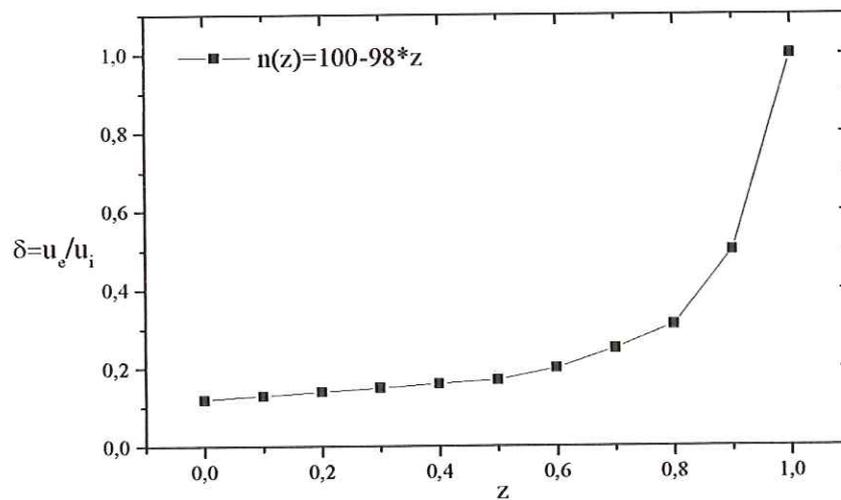


Figura 12: Gráfico da espessura da camada limite ($\delta = u_e/u_i$) em função da posição longitudinal no tubo (z), decorrente do modelo deste trabalho.

A equação proposta para modelagem do campo de concentração é estabelecida neste trabalho como: $c = \frac{(C - C_g)}{(C_g - C_0)} = 1 - r^{m(z)}$ na forma adimensional, onde “m” é função da posição longitudinal “z”, e o adimensional “c” possui em sua expressão matemática, C_0 que é a concentração de soluto ao longo do eixo de simetria (corrente principal), e de C_g , a

concentração na parede permeável. Mais uma vez, para maior comodidade na notação retiramos o asterisco que simboliza as variáveis adimensionalizadas. Assim temos:

$$c = 1 - r^{m(z)} \quad (25)$$

A Figura 13 apresenta o gráfico do perfil de concentração, $c(r, z)$, em função de r para valores de $m(z)$ entre (0,1). Observa-se que para intervalos diferentes desde $m = 1$, há ocorrências diferentes para a evolução da camada limite de concentração, também com grau de liberdade de estabelecermos um perfil pistonado ou mais homogêneo, de acordo com variações do parâmetro m .

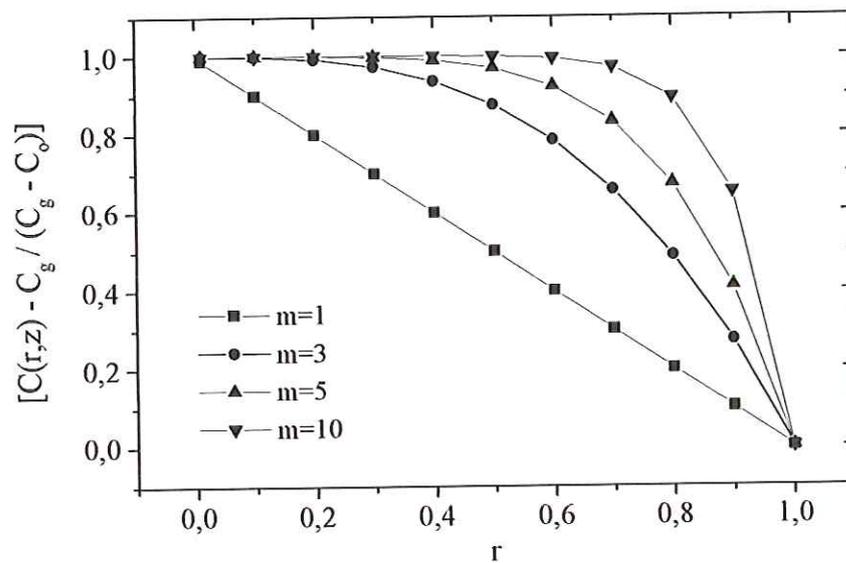


Figura 13: Perfil de concentração pré-estabelecida em função de $m(z)$.

Substituindo as expressões de $u(r, z)$: $u = 2\left(\frac{1}{2} - \alpha z\right)\left(1 - r^n\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)$; e $c = c(z, r)$:

$c = 1 - r^{m(z)}$, na Equação (18) e após inúmeras manipulações algébricas e adequação dos limites de integração, obtemos a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\begin{aligned}
& -2\left(\frac{1}{2}-\alpha z\right)(n+2)\frac{dm}{dz}\left(\frac{2}{m+n+2}+\frac{n}{(m+2)(m+n+2)}\right)+\dots \\
& \dots + \frac{1}{(m+n+2)^2}m(z)\frac{dn}{dz}-\frac{1}{Pe}m(z)=0
\end{aligned} \tag{26}$$

Onde $\frac{dn}{dz}$ é dada pela Equação (24), e/ou estabelecidas na forma linear, polinomial e exponencial para $n(z)$.

Reescrevendo a Equação (26), obtemos:

$$\frac{dm}{dz} = \frac{\frac{2m(0,5-\alpha z)}{n(m+2)(n+2)}\left(\frac{dn}{dz}\right) - \frac{m}{Pe}}{(0,5-\alpha z)\left[\frac{1}{(m+2)^2} - \frac{1}{(m+n+2)^2}\right]} \tag{27}$$

Uma vez que não foi possível obtermos a solução numérica para $\frac{dn}{dz}$ devido a instabilidades no método numérico empregado, esta taxa de variação de n com relação a z é obtida diferenciando-se os perfis pré-estabelecidos em (a), (b) e (c) (pág.34), e sua expressão posteriormente substituída na Equação (27) cuja solução numérica será realizada pelo método de Runge Kutta de 4ª ordem (Rice & Duong, 1995).

Substituindo cada uma das funções $n(z)$ e suas respectivas derivadas na equação anterior, podemos obter para cada caso, a função $m(z)$ a partir da solução numérica, o que permite na formulação integral, encontrar os perfis de concentração e avaliar a modelagem com a comparação e/ou ajuste a resultados experimentais da literatura.

Deve-se ressaltar que devido à complexidade do escoamento, a literatura Ripperger & Altman, (2002) enfatiza que modelos analíticos dificilmente concordam com resultados experimentais. Porém o objetivo deste trabalho é avaliar uma modelagem que deve produzir a princípio, resultados para uma ampla faixa de condições de escoamento.

Através da equação para $c(r, z)$, Equação (25), obtemos: $\left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r=1} = -mr^{m-1} \Big|_{r=1} = -m$

Substituindo na condição de contorno para a transferência de massa na camada limite:

$\left. \frac{\partial C_i(1, z)}{\partial r} \right|_{r=1} = \text{Sh}(C_i(1, z) - C_{ib}(z))$ e levando em consideração que $C_i(1, z) = 0$, temos que:

$$-m = \text{Sh}(0 - C_{ib}(z)) \Rightarrow \text{Sh} = \frac{m}{C_{ib}(z)}$$

Uma vez que a concentração no centro do escoamento (bulk flow) pode ser calculada

como: $C_{ib}(z) = \frac{\int_A C_i u \, dA}{\int_A u \, dA}$, calcula-se o valor desta integral a partir das expressões de

$u(r, z)$ e $c(r, z)$. Dessa forma, calculando c_{ib} e fazendo as manipulações algébricas necessárias, temos a seguinte forma para o cálculo de Sherwood:

$$\text{Sh} = \frac{(m+2)(m+n+2)m}{(m+2)(m+n+2) - 2(n+2)} \quad (28)$$

5. Resultados e Discussão

Para compararmos os resultados obtidos por este modelo com os da literatura, foram feitos dois grupos de gráficos, um para Sherwood local em função de $z^* = z/R$, que é o adimensional que nos dá a distância axial no tubo, e outro grupo para Sherwood médio em função de Reynolds. Nestes gráficos, os resultados deste trabalho para Sherwood, correspondem a valores de Peclet (Pe) no intervalo de 10^4 a 3.10^6 , respectivamente a valores de Schmidt entre 10 e 10^3 .

Na Figura 14 são apresentados os resultados de Sherwood local (Sh), considerando perfis de $n(z)$ na forma de variação exponencial, desde $n = 20$ até $n = 2$ com $Pe = 10^4$, 2.10^4 e 3.10^4 . Os resultados da modelagem são comparados com o trabalho de Grober et. al. (apud Zeman & Zydney, 1996), cuja correlação tem a forma: $Sh = 0,664.(Re)^{0,5} (Sc)^{0,33} (d/L)$. Após diversas tentativas de ajuste, sem flexibilidade a maiores aproximações, observa-se na Figura 14 que os resultados deste modelo são inferiores aos resultados da literatura. Neste caso foi impossível executar a rotina para o programa numérico, variando parâmetros de modelagem $n(z)$ e $m(z)$, de modo a gerar valores Sherwood local mais próximos aos de Grober et. al. (apud Zeman & Zydney, 1996).

Na Figura 15 apresentam-se os resultados de Sherwood local, considerando perfis de $n(z)$ na forma de variação polinomial, desde $n = 20$ até $n = 2$ com $Pe = 10^4$, 2.10^4 e 3.10^4 . Os resultados da modelagem são numericamente inferiores aos de Grober et. al. (apud Zeman & Zydney, 1996). A forma de variação polinomial para o parâmetro $n(z)$ também mostrou-se inflexível a maiores aproximações com os resultados da literatura.

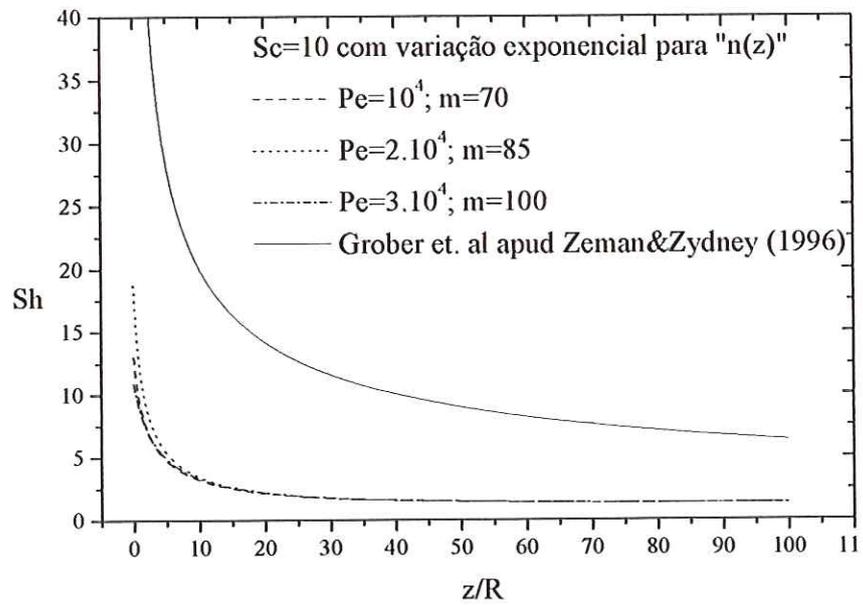


Figura 14: Gráfico de Sherwood local em função da posição adimensional z/R para Pe variando de 10^4 a $3 \cdot 10^4$.

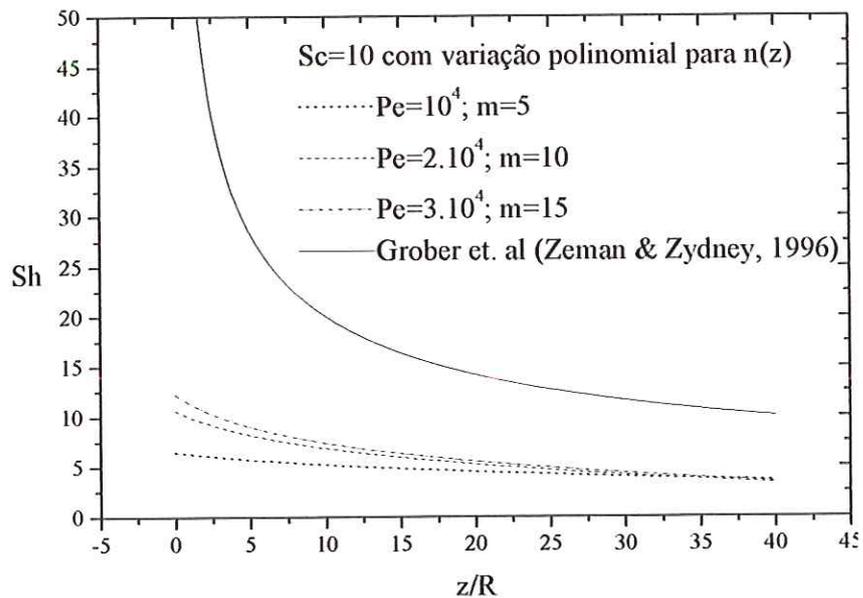


Figura 15: Gráfico de Sherwood local em função da posição adimensional z/R para Pe variando de 10^4 a $3 \cdot 10^4$.

Nas Figuras 16 e 17, apresentam-se os resultados de Sherwood local desta modelagem e sua comparação com os da correlação de Grober et. al. (apud Zeman & Zydney, 1996) e

Lipnizki & Field (2001), considerando os perfis de $n(z)$ na forma de variação linear. Os resultados deste trabalho foram calculados para $Pe = 10^4$, $2 \cdot 10^4$ e $3 \cdot 10^4$ e apresentados na Figura 16, e os resultados para $Pe = 10^6$ foram apresentados na Figura 17. Para representar os valores da correlação da literatura foram considerados para o diâmetro do tubo poroso o valor $d=3$ mm e para o comprimento L do tubo, o valor de 0,45 m.

Observa-se na Figura 16 que os resultados deste trabalho aproxima-se da literatura Grober et. al. (apud Zeman & Zydney, 1996), principalmente para $Pe = 3 \cdot 10^4$ e $z/R > 10$, ainda com tendência assintótica para o mesmo valor de Sherwood nos outros casos. De modo geral os resultados obtidos neste trabalho apresentam boa concordância com a literatura para os casos de $Sc=10$.

Na Figura 17 é apresentada a comparação com os resultados da literatura para $Pe = 10^6$, indicando também neste caso ($Sc = 1000$) que este modelo se aproxima à correlação de Grober et. al. (apud Zeman & Zydney, 1996) e Lipnizki & Field (2001), de acordo com valores implementados para $m(z)$ e $n(z)$. Observa-se ainda que as curvas geradas neste modelo colocam os valores da literatura numa faixa intermediária. Sendo assim, no intervalo de $Pe: 10^4$ a 10^6 , o modelo possui um grau de liberdade para encontrar numericamente diferentes “Sh”, de modo a representar escoamentos com valores diferentes Peclet.

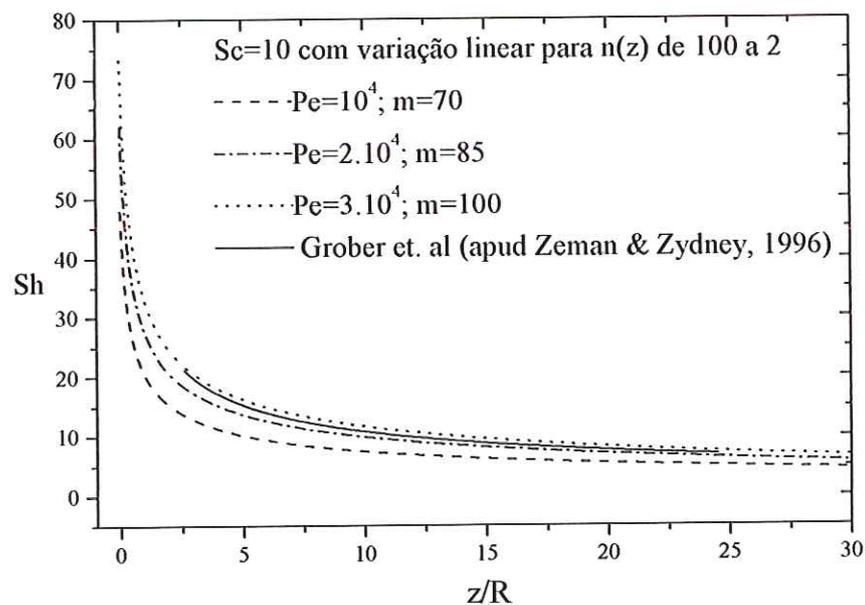


Figura 16: Gráfico de Sherwood local em função da posição adimensional z/R para Pe de 10^4 a $3 \cdot 10^4$.

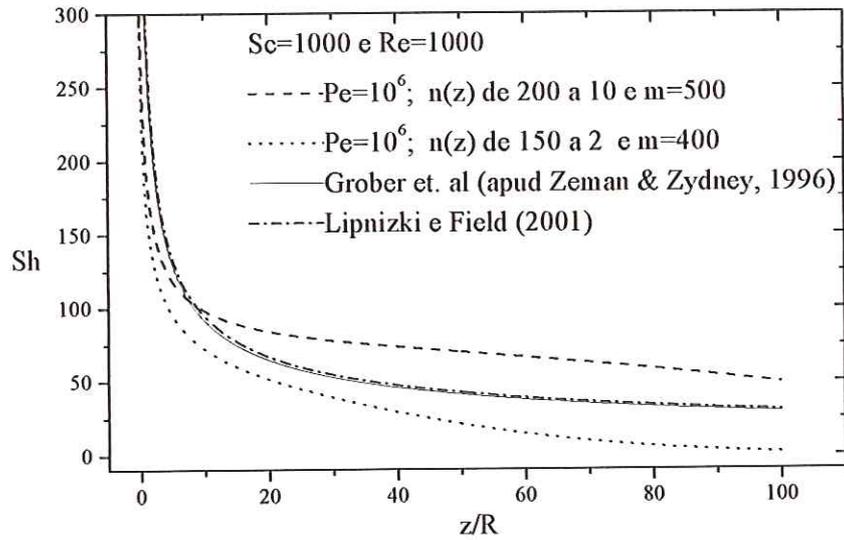


Figura 17: Gráfico de Sherwood local em função da posição adimensional z/R para Pe de 10^6 a $3 \cdot 10^6$.

A seguir, nas Figuras 18, 19 e 20, são apresentados resultados para o adimensional de Sherwood médio (Sh_m) em função de Reynolds (Re), para três valores do adimensional de Schmidt, $Sc=10, 100$ e 1000 . Neste caso o intervalo de Peclet fica entre 10^4 e $3 \cdot 10^6$.

Observa-se na Figura 18 uma boa concordância entre os resultados da modelagem deste trabalho com a correlação de Grober et. al. (apud Zeman & Zydney, 1996), principalmente para Re entre 2500 e 3000.

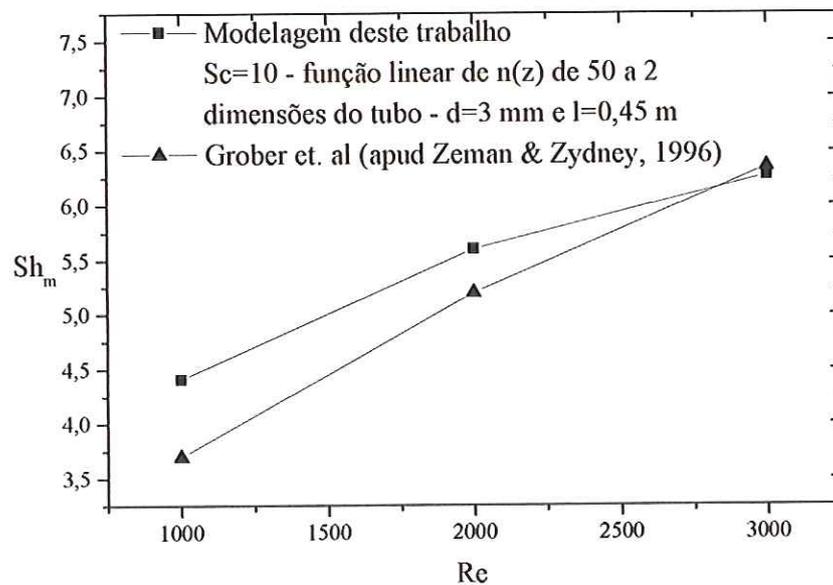


Figura 18. Gráfico de Sherwood médio (Sh_m) em função de Reynolds (Re) para Pe de 10^4 a 3.10^4 .

Na Figura 18, observa-se um afastamento dos valores deste trabalho com os de Grober et. al. (apud Zeman & Zydney, 1996) para valores de $Sc \leq 10$. Os resultados obtidos neste trabalho para Sherwood médio são maiores que os da literatura. É possível, no entanto, aproximar os valores reduzindo o valor do parâmetro $m(z)$ e tomando um coeficiente linear menor para o perfil de $n(z)$, mas ainda assim ocorrerá discordâncias entre modelo e literatura para $Re = 3.10^3$.

Para os casos onde $Sc = 10^2$ e $Sc = 10^3$, respectivamente apresentados nas Figuras 19 e 20, os resultados deste trabalho se aproximam dos obtidos pela correlação de Grober et. al. (apud Zeman & Zydney, 1996), para o intervalo de Reynolds de 1000 a 3000.

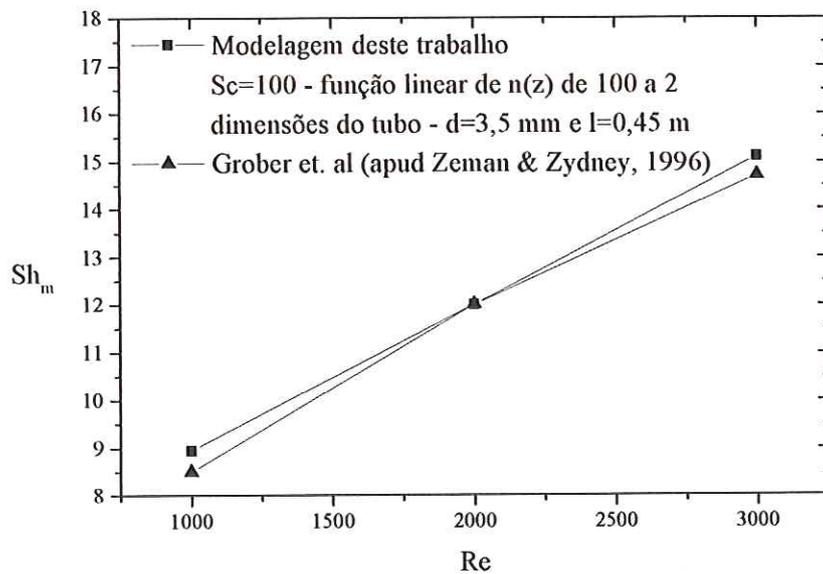


Figura 19: Gráfico de Sherwood médio (Sh_m) em função de Reynolds (Re) para Pe de 10^5 a 3.10^5 .

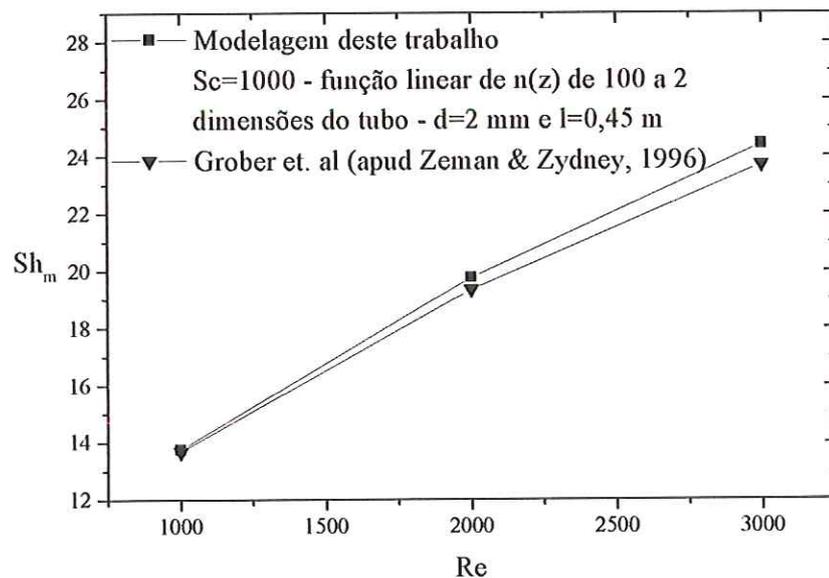


Figura 20: Gráfico de Sherwood médio (Sh_m) em função de Reynolds (Re) para Pe de 10^6 a 3.10^6 .

Como não foram encontradas outras correlações na literatura, as aproximações e ajustes ficaram limitados à referência citada. Por outro lado, deve-se ressaltar que a modelagem deste trabalho permite variar os valores numéricos de Sherwood, com a redução do parâmetro $m(z)$ e tomando outras variações lineares para o perfil de $n(z)$.

A análise desta modelagem indicou grande proximidade a alguns casos relatados na literatura. Isto foi possível ajustando o desenvolvimento dos perfis de velocidade e de concentração característicos da camada limite com variações para “m” e “n”.

Dos perfis de velocidade analisados, os que proporcionaram resultados compatíveis com os da literatura, foram aqueles onde estabelecemos uma variação linear para $n(z)$. Particularmente àqueles que representam perfis de velocidade em desenvolvimento, fortemente pistonados na entrada do tubo e desenvolvidos na saída do tubo.

Por outro lado, na equação de modelagem do campo de concentração, $c = 1 - r^{m(z)}$, a escolha de um valor inicial para o parâmetro $m(z)$ foi de fundamental importância nesta modelagem, pois modela a taxa de crescimento da camada limite de concentração em função do número de Reynolds. O aumento do parâmetro “m” deve representar uma camada limite menos espessa, de acordo com o aumento do número de Reynolds.

Os valores atribuídos ao parâmetro “m” foram em alguns casos elevados (maiores que 100), bem como os valores para “n” na forma de variação linear. Isto foi necessário para compatibilizar este modelo no que se refere ao adimensional de Sherwood com os resultados da literatura.

Para valores de Schmidt menores que 10 ou maiores que 10^3 , os resultados do modelo não se aproximaram da correlação de Grober et. al. (apud Zeman & Zydney, 1996). Na maioria dos ensaios para Schmidt menores que 10, foram registrados muitos problemas de instabilidade numérica na rotina de Runge-Kutta de quarta ordem, de modo a não permitir convergência nos cálculos.

Para Schmidt maior que 10^3 o modelo forneceu valores de Sherwood menores que os da literatura, embora seja possível trabalhar a adequação dos parâmetros “m” e “n”, e assim, ajustar os resultados deste trabalho com a literatura para Reynolds igual a 10^3 .

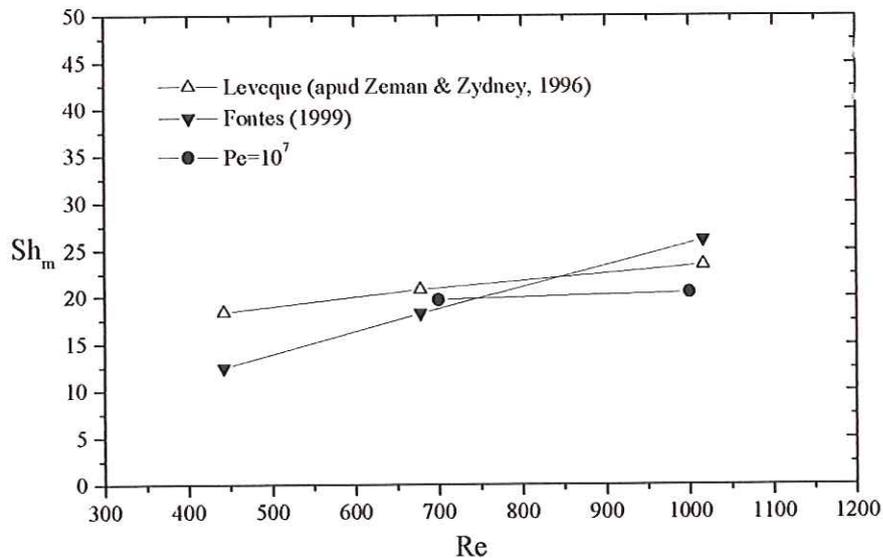


Figura 21: Gráfico de Sherwood médio (Sh_m) em função de Reynolds (Re). Comparação dos resultados deste trabalho com outros da literatura. (a) Goma Guar, escoamento laminar; (b) Solução de Levéque (Zeman & Zydney, 1996).

Na Figura 21 são apresentados outros resultados da literatura, dentre eles os do trabalho de Léveque (Zeman & Zydney, 1996) e outros obtidos experimentalmente para suspensões de goma guar por Fontes (1999). Os melhores valores desta modelagem são comparados com os da literatura, e representados na figura pelo símbolo círculo “cheio”.

Observamos na figura que os resultados desta modelagem se aproximam dos da literatura para $Re = 700$ e $Re = 1000$, correspondente a $Sc = 1000$. Nestes cálculos utilizou-se a dependência linear para $n(z)$ desde 100 até 2, e para $m(z)$ em torno de 20.

Outros ensaios foram realizados para $Re = 450$, na tentativa de produzir um valor correspondente para Sherwood médio. Neste caso observou-se o limite de estabilidade numérica desta modelagem, e não foi possível convergir a resultados fisicamente compatíveis, ou seja, prever a variação decrescente de Sherwood em função do crescimento das camadas limites de velocidade e concentração.

Desta forma para $Peclet < 7.10^5$ este trabalho não permite modelagens do escoamento estudado. Observamos também que, mantendo $Re = 430$ e aumentando o número de Peclet através do aumento do número de Schimidt, o método numérico ainda assim, não fornece resultados fisicamente compatíveis. Neste ensaio foi mantido Peclet,

calculado para $Re = 430$, da mesma ordem de magnitude que Peclet calculado para $Re = 730$. Verificou-se desse modo, que à medida que aumentamos o número de Reynolds, obtemos estabilidade na rotina numérica da equação integral da concentração, enquanto diminuindo, $Re < 700$ a modelagem não conduz a resultados satisfatórios para Sherwood.

De modo geral os casos estudados onde Reynolds varia entre 1000 e 3000, e Schmidt entre 10 e 1000, a modelagem produz resultados fisicamente compatíveis com a literatura específica. Por outro lado, as diversas magnitudes para o valor de Sherwood são devidas as influências diretas de variação do adimensional de Schmidt, Reynolds, a posição axial, o diâmetro de um tubo, dentre outros.

6. Conclusões

A partir da pesquisa desenvolvida nesta dissertação de mestrado concluímos que:

- i) A formulação integral foi insatisfatória ao tratamento numérico da equação diferencial ordinária para o princípio da conservação da quantidade de movimento. No denominador desta equação, a presença de termos de magnitude muito pequena em relação aos demais termos da mesma equação, foi responsável por grande instabilidade na rotina numérica do programa de Runge-Kutta de 4^a. ordem, de modo que foi frequente a ocorrência de erros de compilação, tais como “divisão por zero” e impossibilitou a execução desta rotina nesta equação;
- ii) A formulação integral foi satisfatória ao tratamento numérico da equação diferencial ordinária para o princípio da conservação das espécies. A rotina numérica do programa de Runge-Kutta de 4^a ordem foi convergente na maioria dos casos em busca do parâmetro $m(z)$;
- iii) A implantação de parâmetros funcionais para descrição do perfil de velocidades ao longo do tubo foi conveniente em substituição aos resultados esperados da equação da quantidade de movimento. Das funções testadas, exponencial, polinomial e linear, aquela que melhor se adequou aos resultados da literatura, foi a linear para o parâmetro $n(z)$;
- iv) Conforme os resultados apresentados para Sherwood local e médio (Figuras 13 a 19) e a devida comparação com a literatura, a modelagem foi satisfatória no intervalo de Peclet de 10^4 a 10^6 , o que pode incluir uma extensa gama de misturas. A modelagem ainda apresentou um potencial para o ajuste a outros resultados experimentais, de acordo com a implantação de variações numéricas para $n(z)$ e $m(z)$;

v) Os resultados desta modelagem indicam que para valores de Reynolds menores que 700, há ocorrências frequentes de instabilidade na rotina numérica da equação integral da concentração ou ainda gerando resultados fisicamente incompatíveis.

7. Sugestão

Sugerimos para futuros trabalhos a exploração da problemática de propagação de erro e a não convergência da rotina Runge Kutta no uso da equação integral da quantidade de movimento, bem como um estudo detalhado do crescimento da camada limite com diferentes taxas de injeção e sucção de massa pela parede permeável.

8. Apêndice I – Soluções de Integrais obtidas a partir do Software

Mathematica^R.

Integrais para o campo de velocidades e de concentração

$$\text{Cálculo da integral : } \int_0^1 \left\{ \left(\int_0^r \frac{\partial u}{\partial z} r dr \right) \frac{\partial u}{\partial r} \right\} dr$$

(*LIMPANDO AS VARIÁVEIS*)

```
Clear[r, z, u, α, β, f, z]
```

(*ENTRADA DE DADOS*)

```
(*β=.01;*) (*extremidade direita do intervalo de definição da integral*)
```

```
(*α=1;*) (*Constante*)
```

(*ATRIBUIÇÃO DE VARIÁVEIS*)

```
f = n[z];
```

(*DEFININDO VARIÁVEIS*)

```
u = 2 (1/2 - α z) (1 - rf) (f + 2 / f) (*velocidade*); Print["u= ", u]
```

```
Print[
```

```
"=====
```

(*CÁLCULO DAS DERIVADAS*)

```
der1 = ∂z u; Print["∂z u= ", der1]
```

```
Print[
```

```
"=====
```

```
der2 = ∂r u; Print["∂r u= ", der2]
```

```
Print[
```

```
"=====
```

(*CÁLCULO DA INTEGRAL INTERNA*)

```
int1 = ∫0β (r * der1) dr; Print["int1= ", int1]
```

```
Print[
```

```
"=====
```

(*CÁLCULO DA INTEGRAL EXTERNA*)

```
int2 = ∫0.00011 (int1 * der2) dβ; Print["int2= ", int2]
```

```
Print[
```

```
"=====
```

$$u = \frac{2(1 - r^{n[z]}) \left(\frac{1}{2} - z\alpha\right) (2 + n[z])}{n[z]}$$

$$\partial_z u = -\frac{2(1 - r^{n[z]}) \alpha (2 + n[z])}{n[z]} + \frac{2(1 - r^{n[z]}) \left(\frac{1}{2} - z\alpha\right) n'[z]}{n[z]^2} - \frac{2(1 - r^{n[z]}) \left(\frac{1}{2} - z\alpha\right) (2 + n[z]) n'[z]}{n[z]^2} - \frac{2r^{n[z]} \left(\frac{1}{2} - z\alpha\right) \text{Log}[r] (2 + n[z]) n'[z]}{n[z]^2}$$

$$\partial_r u = -2r^{-1+n[z]} \left(\frac{1}{2} - z\alpha\right) (2 + n[z])$$

$$\text{int1} = \text{If}[\beta > 0 \&\& \text{Re}[n[z]] > -2, \\ \frac{\beta^2 (\alpha n[z]^2 + (-1 + 2z\alpha) (-1 + \beta^{n[z]}) n'[z] + n[z] (-2\alpha (-1 + \beta^{n[z]}) - (-1 + 2z\alpha) \beta^{n[z]} \text{Log}[\beta] n'[z]))}{n[z]^2}, \\ \int_0^\beta r \left(-\frac{2(1 - r^{n[z]}) \alpha (2 + n[z])}{n[z]} + \frac{2(1 - r^{n[z]}) \left(\frac{1}{2} - z\alpha\right) n'[z]}{n[z]^2} - \frac{2(1 - r^{n[z]}) \left(\frac{1}{2} - z\alpha\right) (2 + n[z]) n'[z]}{n[z]^2} - \frac{2r^{n[z]} \left(\frac{1}{2} - z\alpha\right) \text{Log}[r] (2 + n[z]) n'[z]}{n[z]^2} \right) dr]$$

$$\text{int2} = -2r^{-1+n[z]} \left(\frac{1}{2} - z\alpha\right) \left(\int_{0.0001}^1 \text{If}[\beta > 0 \&\& \text{Re}[n[z]] > -2, \\ \frac{\beta^2 (\alpha n[z]^2 + (-1 + 2z\alpha) (-1 + \beta^{n[z]}) n'[z] + n[z] (-2\alpha (-1 + \beta^{n[z]}) - (-1 + 2z\alpha) \beta^{n[z]} \text{Log}[\beta] n'[z]))}{n[z]^2}, \\ \int_0^\beta r \left(-\frac{2(1 - r^{n[z]}) \alpha (2 + n[z])}{n[z]} + \frac{2(1 - r^{n[z]}) \left(\frac{1}{2} - z\alpha\right) n'[z]}{n[z]^2} - \frac{2(1 - r^{n[z]}) \left(\frac{1}{2} - z\alpha\right) (2 + n[z]) n'[z]}{n[z]^2} - \frac{2r^{n[z]} \left(\frac{1}{2} - z\alpha\right) \text{Log}[r] (2 + n[z]) n'[z]}{n[z]^2} \right) dr \right) d\beta (2 + n[z])$$

$$\text{result} = \text{Simplify}\left[\frac{1}{n[z]^2} * 2 \left(\frac{1}{2} - z\alpha\right) * \left(\frac{n[z]^2 (8\alpha + 12\alpha n[z] + 4\alpha n[z]^2 + (1 - 2z\alpha) n'[z])}{4(1 + n[z])^2 (2 + n[z])}\right)\right]$$

Cálculo da integral $\int_0^1 u \frac{\partial u}{\partial r} r dr$

(*LIMPANDO AS VARIÁVEIS*)

Clear[r, z, u, α , β , γ , z]

(*ENTRADA DE DADOS*)

$\beta = .01$; (*extremidade direita do intervalo de definição da integral*)

$\alpha = 1$; (*Constante*)

(*ATRIBUIÇÃO DE VARIÁVEIS*)

$\gamma = n[z]$;

(*DEFININDO VARIÁVEIS*)

$u = 2 \left(\frac{1}{2} - \alpha z \right) (1 - r^\gamma) \left(\frac{\gamma + 2}{\gamma} \right)$ (*velocidade*)

Print[

=====

=====]

(*CÁLCULO DAS DERIVADAS*)

der1 = $\partial_z u$; Print[" $\partial_z u =$ ", der1]

Print[

=====

=====]

der2 = $\partial_r u$; Print[" $\partial_r u =$ ", der2]

Print[

=====

=====]

(*CÁLCULO DA INTEGRAL INTERNA*)

int1 = $\int_0^\beta r \text{der1} dr$;

(*CÁLCULO DA INTEGRAL EXTERNA*)

int2 = $\int_{.001}^1 \text{int1} \text{der2} dz$

Print[

=====

=====]

$$\frac{2 (1 - r^{n[z]}) \left(\frac{1}{2} - z \right) (2 + n[z])}{n[z]}$$

=====

$$\partial_z u = -\frac{2(1-r^{n[z]})(2+n[z])}{n[z]} + \frac{2(1-r^{n[z]})\left(\frac{1}{2}-z\right)n'[z]}{n[z]} - \frac{2(1-r^{n[z]})\left(\frac{1}{2}-z\right)(2+n[z])n'[z]}{n[z]^2} - \frac{2r^{n[z]}\left(\frac{1}{2}-z\right)\text{Log}[r](2+n[z])n'[z]}{n[z]}$$

$$\partial_r u = -2r^{-1+n[z]}\left(\frac{1}{2}-z\right)(2+n[z])$$

$$-2\left(\frac{1}{2}-z\right)\text{If}\left[\text{Re}[n[z]] > -2, \frac{1}{n[z]^2(2+1\cdot n[z])^2}\right]$$

Integrais para o campo de concentração

Cálculo da integral: $\int_0^1 u \frac{\partial c}{\partial z} r dr$

`Clear[α, z, r, n, f]`

`f = n[z]`

`g = m[z]`

`n[z]`

`m[z]`

$$u = 2\left(\frac{1}{2}-\alpha z\right)(1-r^f)\left(\frac{f+2}{f}\right)$$

$$c = 1-r^g$$

$$\frac{2(1-r^{n[z]})\left(\frac{1}{2}-z\alpha\right)(2+n[z])}{n[z]}$$

$$1-r^{m[z]}$$

$$\text{equ1} = \partial_z c$$

$$-r^{m[z]}\text{Log}[r]m'[z]$$

$$\text{equ2} = u * \text{equ1} * r$$

$$-\frac{2 r^{1+m[z]} (1 - r^{n[z]}) \left(\frac{1}{2} - z \alpha\right) \text{Log}[r] (2 + n[z]) m'[z]}{n[z]}$$

$$\text{equ4} = \int_0^1 \text{equ2} \, dr$$

$$-\frac{1}{n[z]} \left(2 \left(\frac{1}{2} - z \alpha \right) \text{If}[\text{Re}[m[z]] > -2 \ \&\& \ \text{Re}[n[z]] > 0, \right. \\ \left. -\frac{1}{(2+m[z])^2} + \frac{1}{(2+m[z]+n[z])^2}, \int_0^1 r^{1+m[z]} (1 - r^{n[z]}) \text{Log}[r] \, dr \right] (2 + n[z]) m'[z] \Big)$$

$$\text{result} = -\frac{1}{n[z]} * 2 \left(\frac{1}{2} - z \alpha \right) * \left(-\frac{1}{(2+m[z])^2} + \frac{1}{(2+m[z]+n[z])^2} \right) * (2 + n[z]) m'[z]$$

$$-\frac{2 \left(\frac{1}{2} - z \alpha \right) (2 + n[z]) \left(-\frac{1}{(2+m[z])^2} + \frac{1}{(2+m[z]+n[z])^2} \right) m'[z]}{n[z]}$$

```

α = .5;
z = 2.;
n[z] = 1.;
m[z] = 2.;
m'[z] = 1.;
result
result2

```

```

-0.0675
-0.213333

```

```
Expand[result]
```

$$\frac{m'[z]}{(2+m[z])^2} - \frac{2 z \alpha m'[z]}{(2+m[z])^2} + \frac{2 m'[z]}{(2+m[z])^2 n[z]} - \frac{4 z \alpha m'[z]}{(2+m[z])^2 n[z]} - \\ \frac{m'[z]}{(2+m[z]+n[z])^2} + \frac{2 z \alpha m'[z]}{(2+m[z]+n[z])^2} - \frac{2 m'[z]}{n[z] (2+m[z]+n[z])^2} + \\ + \frac{4 z \alpha m'[z]}{n[z] (2+m[z]+n[z])^2}$$

```
Simplify[result]
```

$$-\frac{(-1 + 2 z \alpha) (2 + n[z]) (4 + 2 m[z] + n[z]) m'[z]}{(2 + m[z])^2 (2 + m[z] + n[z])^2}$$

$$\text{result2} = 2 * \left(\frac{1}{2} - \alpha * z \right) * \frac{n[z] + 2}{n[z] * (n[z] + 2)^2} * m'[z] - 2 * \left(\frac{1}{2} - \alpha * z \right) * \dots$$

$$* \frac{n[z] + 2}{n[z] * (n[z] + 2)^2} * m'[z] - 2 * \left(\frac{1}{2} - \alpha * z \right) * \frac{n[z] + 2}{n[z] * (n[z] + m[z] + 2)^2} * m'[z]$$

$$\frac{2 \left(\frac{1}{2} - z\alpha \right) m'[z]}{n[z] (2 + n[z])} - \frac{2 \left(\frac{1}{2} - z\alpha \right) (2 + n[z]) m'[z]}{n[z] (2 + m[z] + n[z])^2}$$

Cálculo da integral : $\int_0^1 \left(\int_0^r \frac{\partial u}{\partial z} r dr \right) \frac{\partial c}{\partial r} dr$

Clear[α, z, r, m, f]

f = m[z]

g = n[z]

m[z]

n[z]

c = 1 - r^f

u = 2 $\left(\frac{1}{2} - \alpha z \right) (1 - r^g) \left(\frac{f+2}{f} \right)$

$$\frac{1 - r^{m[z]}}{2 (1 - r^{n[z]})} \left(\frac{1}{2} - z\alpha \right) (2 + m[z])$$

equacao1 = ∂_z u

$$\frac{2 (1 - r^{n[z]}) \alpha (2 + m[z])}{m[z]} + \frac{2 (1 - r^{n[z]}) \left(\frac{1}{2} - z\alpha \right) m'[z]}{m[z]}$$

$$\frac{2 (1 - r^{n[z]}) \left(\frac{1}{2} - z\alpha \right) (2 + m[z]) m'[z]}{m[z]^2} - \frac{2 r^{n[z]} \left(\frac{1}{2} - z\alpha \right) \text{Log}[r] (2 + m[z]) n'[z]}{m[z]}$$

$$\int_0^\beta (\text{equacao1} * r) dr$$

If $[\beta > 0 \ \&\& \ \text{Re}[n[z]] > -2,$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{m[z]^2 (2+n[z])^2} (\beta^2 ((-1+2z\alpha) (-2+2\beta^{n[z]} - n[z]) (2+n[z]) m'[z] + m[z] (-8\alpha (-1+\beta^{n[z]}) + 2\alpha n[z]^2 - \\ & \quad 2(-1+2z\alpha) \beta^{n[z]} (-1+2\text{Log}[\beta]) n'[z] + n[z] (-4\alpha (-2+\beta^{n[z]}) - 2(-1+2z\alpha) \beta^{n[z]} \text{Log}[\beta] n'[z])) + \\ & \quad m[z]^2 (-4\alpha (-1+\beta^{n[z]}) + \alpha n[z]^2 - (-1+2z\alpha) \beta^{n[z]} (-1+2\text{Log}[\beta]) n'[z] + \\ & \quad n[z] (-2\alpha (-2+\beta^{n[z]}) - (-1+2z\alpha) \beta^{n[z]} \text{Log}[\beta] n'[z]))) , \\ & \int_0^\beta r \left(-\frac{2(1-r^{n[z]}) \alpha (2+m[z])}{m[z]} + \frac{2(1-r^{n[z]}) (\frac{1}{2}-z\alpha) n'[z]}{m[z]} - \frac{2(1-r^{n[z]}) (\frac{1}{2}-z\alpha) (2+m[z]) m'[z]}{m[z]^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{2r^{n[z]} (\frac{1}{2}-z\alpha) \text{Log}[r] (2+m[z]) n'[z]}{m[z]} \right) dr \end{aligned}$$

equacao2 =

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{m[z]^2 (2+n[z])^2} \\ & (\beta^2 ((-1+2z\alpha) (-2+2\beta^{n[z]} - n[z]) (2+n[z]) m'[z] + \\ & \quad m[z] (-8\alpha (-1+\beta^{n[z]}) + 2\alpha n[z]^2 - 2(-1+2z\alpha) \beta^{n[z]} (-1+2\text{Log}[\beta]) n'[z] + \\ & \quad n[z] (-4\alpha (-2+\beta^{n[z]}) - 2(-1+2z\alpha) \beta^{n[z]} \text{Log}[\beta] n'[z])) + \\ & \quad m[z]^2 (-4\alpha (-1+\beta^{n[z]}) + \alpha n[z]^2 - (-1+2z\alpha) \beta^{n[z]} (-1+2\text{Log}[\beta]) n'[z] + \\ & \quad n[z] (-2\alpha (-2+\beta^{n[z]}) - (-1+2z\alpha) \beta^{n[z]} \text{Log}[\beta] n'[z]))) \\ & -\frac{1}{m[z]^2 (2+n[z])^2} \\ & (\beta^2 ((-1+2z\alpha) (-2+2\beta^{n[z]} - n[z]) (2+n[z]) m'[z] + m[z] (-8\alpha (-1+\beta^{n[z]}) + 2\alpha n[z]^2 - 2(-1+2z\alpha) \\ & \quad \beta^{n[z]} (-1+2\text{Log}[\beta]) n'[z] + n[z] (-4\alpha (-2+\beta^{n[z]}) - 2(-1+2z\alpha) \beta^{n[z]} \text{Log}[\beta] n'[z])) + \\ & \quad m[z]^2 (-4\alpha (-1+\beta^{n[z]}) + \alpha n[z]^2 - (-1+2z\alpha) \beta^{n[z]} (-1+2\text{Log}[\beta]) n'[z] + \\ & \quad n[z] (-2\alpha (-2+\beta^{n[z]}) - (-1+2z\alpha) \beta^{n[z]} \text{Log}[\beta] n'[z]))) \end{aligned}$$

equacao3 = $\partial_r c$

$$-r^{-1+n[z]} m[z]$$

equacao4 = $-\beta^{-1+n[z]} m[z]$

$$-\beta^{-1+n[z]} m[z]$$

$$\text{equacao5} = \int_0^1 (\text{equacao2} + \text{equacao4}) d\beta$$

$$\frac{1}{m[z] (2 + n[z])^2}$$

$$\text{If} \left[\text{Re}[m[z]] > -2 \ \&\& \ \text{Re}[m[z] + n[z]] > -2, \frac{8 \alpha m[z]}{2 + m[z]} + \frac{4 \alpha m[z]^2}{2 + m[z]} + \frac{8 \alpha m[z] n[z]}{2 + m[z]} + \frac{4 \alpha m[z]^2 n[z]}{2 + m[z]} + \right. \\ \left. \frac{2 \alpha m[z] n[z]^2}{2 + m[z]} + \frac{\alpha m[z]^2 n[z]^2}{2 + m[z]} - \frac{8 \alpha m[z]}{2 + m[z] + n[z]} - \frac{4 \alpha m[z]^2}{2 + m[z] + n[z]} - \frac{4 \alpha m[z] n[z]}{2 + m[z] + n[z]} - \frac{2 \alpha m[z]^2 n[z]}{2 + m[z] + n[z]} + \right. \\ \left. \frac{4 m'[z]}{2 + m[z]} - \frac{8 z \alpha m'[z]}{2 + m[z]} + \frac{4 n[z] m'[z]}{2 + m[z]} - \frac{8 z \alpha n[z] m'[z]}{2 + m[z]} + \frac{n[z]^2 m'[z]}{2 + m[z]} - \frac{2 z \alpha n[z]^2 m'[z]}{2 + m[z]} - \frac{4 m'[z]}{2 + m[z] + n[z]} + \right. \\ \left. \frac{8 z \alpha m'[z]}{2 + m[z] + n[z]} - \frac{2 n[z] m'[z]}{2 + m[z] + n[z]} + \frac{4 z \alpha n[z] m'[z]}{2 + m[z] + n[z]} - \frac{4 m[z] n'[z]}{(2 + m[z] + n[z])^2} + \frac{8 z \alpha m[z] n'[z]}{(2 + m[z] + n[z])^2} - \right. \\ \left. \frac{2 m[z]^2 n'[z]}{(2 + m[z] + n[z])^2} + \frac{4 z \alpha m[z]^2 n'[z]}{(2 + m[z] + n[z])^2} - \frac{2 m[z] n[z] n'[z]}{(2 + m[z] + n[z])^2} + \frac{4 z \alpha m[z] n[z] n'[z]}{(2 + m[z] + n[z])^2} - \frac{m[z]^2 n[z] n'[z]}{(2 + m[z] + n[z])^2} + \right. \\ \left. \frac{2 z \alpha m[z]^2 n[z] n'[z]}{(2 + m[z] + n[z])^2} - \frac{2 m[z] n'[z]}{2 + m[z] + n[z]} + \frac{4 z \alpha m[z] n'[z]}{2 + m[z] + n[z]} - \frac{m[z]^2 n'[z]}{2 + m[z] + n[z]} + \frac{2 z \alpha m[z]^2 n'[z]}{2 + m[z] + n[z]}, \right. \\ \left. \int_0^1 \beta^{1+m[z]} ((-1 + 2 z \alpha) (-2 + 2 \beta^{n[z]} - n[z]) (2 + n[z]) m'[z] + \right. \\ \left. m[z] (-8 \alpha (-1 + \beta^{n[z]}) + 2 \alpha n[z]^2 - 2 (-1 + 2 z \alpha) \beta^{n[z]} (-1 + 2 \text{Log}[\beta]) n'[z] + \right. \\ \left. n[z] (-4 \alpha (-2 + \beta^{n[z]}) - 2 (-1 + 2 z \alpha) \beta^{n[z]} \text{Log}[\beta] n'[z])) + m[z]^2 (-4 \alpha (-1 + \beta^{n[z]}) + \alpha n[z]^2 - \right. \\ \left. (-1 + 2 z \alpha) \beta^{n[z]} (-1 + 2 \text{Log}[\beta]) n'[z] + n[z] (-2 \alpha (-2 + \beta^{n[z]}) - (-1 + 2 z \alpha) \beta^{n[z]} \text{Log}[\beta] n'[z])) \right) d\beta \Big]$$

result0 =

Simplify[

$$\frac{1}{m[z] (2 + n[z])^2} \left(\frac{8 \alpha m[z]}{2 + m[z]} + \frac{4 \alpha m[z]^2}{2 + m[z]} + \frac{8 \alpha m[z] n[z]}{2 + m[z]} + \frac{4 \alpha m[z]^2 n[z]}{2 + m[z]} + \frac{2 \alpha m[z] n[z]^2}{2 + m[z]} + \frac{\alpha m[z]^2 n[z]^2}{2 + m[z]} - \right. \\ \left. \frac{8 \alpha m[z]}{2 + m[z] + n[z]} - \frac{4 \alpha m[z]^2}{2 + m[z] + n[z]} - \frac{4 \alpha m[z] n[z]}{2 + m[z] + n[z]} - \frac{2 \alpha m[z]^2 n[z]}{2 + m[z] + n[z]} + \frac{4 m'[z]}{2 + m[z]} - \frac{8 z \alpha m'[z]}{2 + m[z]} + \right. \\ \left. \frac{4 n[z] m'[z]}{2 + m[z]} - \frac{8 z \alpha n[z] m'[z]}{2 + m[z]} + \frac{n[z]^2 m'[z]}{2 + m[z]} - \frac{2 z \alpha n[z]^2 m'[z]}{2 + m[z]} - \frac{4 m'[z]}{2 + m[z] + n[z]} + \right. \\ \left. \frac{8 z \alpha m'[z]}{2 + m[z] + n[z]} - \frac{2 n[z] m'[z]}{2 + m[z] + n[z]} + \frac{4 z \alpha n[z] m'[z]}{2 + m[z] + n[z]} - \frac{4 m[z] n'[z]}{(2 + m[z] + n[z])^2} + \frac{8 z \alpha m[z] n'[z]}{(2 + m[z] + n[z])^2} - \right. \\ \left. \frac{2 m[z]^2 n'[z]}{(2 + m[z] + n[z])^2} + \frac{4 z \alpha m[z]^2 n'[z]}{(2 + m[z] + n[z])^2} - \frac{2 m[z] n[z] n'[z]}{(2 + m[z] + n[z])^2} + \frac{4 z \alpha m[z] n[z] n'[z]}{(2 + m[z] + n[z])^2} - \right. \\ \left. \frac{m[z]^2 n[z] n'[z]}{(2 + m[z] + n[z])^2} + \frac{2 z \alpha m[z]^2 n[z] n'[z]}{(2 + m[z] + n[z])^2} - \frac{2 m[z] n'[z]}{2 + m[z] + n[z]} + \frac{4 z \alpha m[z] n'[z]}{2 + m[z] + n[z]} - \frac{m[z]^2 n'[z]}{2 + m[z] + n[z]} + \right. \\ \left. \frac{2 z \alpha m[z]^2 n'[z]}{2 + m[z] + n[z]} \right)$$

Simplify[result0]

$$(-(-1 + 2 z \alpha) n[z] (2 + n[z])^2 (4 + n[z]) m'[z] + \\ m[z]^4 (2 \alpha n[z] + \alpha n[z]^2 + (-1 + 2 z \alpha) n'[z]) + 2 m[z]^3 (4 + n[z]) (2 \alpha n[z] + \alpha n[z]^2 + (-1 + 2 z \alpha) n'[z]) + \\ 2 m[z] (2 + n[z]) (\alpha n[z]^3 + n[z] (8 \alpha + (3 - 6 z \alpha) m'[z]) + n[z]^2 (6 \alpha + (1 - 2 z \alpha) m'[z]) + 4 (-1 + 2 z \alpha) n'[z]) + \\ m[z]^2 (12 \alpha n[z]^3 + \alpha n[z]^4 + n[z]^2 (40 \alpha + (1 - 2 z \alpha) m'[z]) + 20 (-1 + 2 z \alpha) n'[z] + \\ 2 n[z] (20 \alpha + (1 - 2 z \alpha) m'[z] + (-4 + 8 z \alpha) n'[z]))) / (m[z] (2 + m[z]) (2 + n[z])^2 (2 + m[z] + n[z])^2)$$

Observamos que mesmo após simplificações o resultado da integral é ainda muito extenso, de modo que para contornarmos esse problema, calculamos a integral utilizando resultados parciais de cada elemento que figura no integrando, através do software **Mathematica^R**, após o que, tomamos todos esses resultados em conjunto para finalmente obtermos o resultado da integral. Assim, através dos resultados apresentados a seguir, foi possível obter a expressão para a integral dada pela Equação (18).

$$\int (r^f * \text{Log}[r]) \, dr$$

$$r^{n[z]} \left(\frac{r \text{Log}[r]}{1+n[z]} + \frac{r}{(-1-n[z])(1+n[z])} \right)$$

$$\int_0^1 (r^f * \text{Log}[r]) \, dr$$

$$\text{If}[\text{Re}[n[z]] > -1, -\frac{1}{(1+n[z])^2}, \int_0^1 r^{n[z]} \text{Log}[r] \, dr]$$

$$\text{integr1} = \int_0^1 \left(\frac{r^{m+1}}{2} - \frac{r^{m+n+1}}{n+2} \right) dr$$

$$\text{If}[\text{Re}[m] > -2 \ \&\& \ \text{Re}[n] > 0, \frac{n(4+m+n)}{2(2+m)(2+n)(2+m+n)}, \int_0^1 \left(\frac{r^{1+m}}{2} - \frac{r^{1+m+n}}{2+n} \right) dr]$$

$$\text{integr2} = \int_0^1 \left(\frac{r^{m+n+1}}{1} \right) dr$$

$$\text{If}[\text{Re}[m+n] > -2, \frac{1}{2+m+n}, \int_0^1 r^{1+m+n} \, dr]$$

De todas as integrais calculadas, uma integral merece destaque por aparecer constantemente nos cálculos de ambas as equações integrais (quantidade de movimento- Equação (17) e concentração das espécies- Equação (18)) a saber:

$$\int (r^f * \text{Log}[r]) \, dr$$

$$r^{n[z]} \left(\frac{r \text{Log}[r]}{1+n[z]} + \frac{r}{(-1-n[z])(1+n[z])} \right)$$

$$\int_0^1 (r^f * \text{Log}[r]) \, dr$$

$$\text{If}[\text{Re}[n[z]] > -1, -\frac{1}{(1+n[z])^2}, \int_0^1 r^{n[z]} \text{Log}[r] \, dr]$$

As restrições nas respostas das integrais são sempre satisfeitas, pois nesta modelagem, temos sempre $n \geq 2$ e também $m \geq 2$. Devemos acrescentar ainda, que foram feitas algumas simplificações nestes cálculos para que os resultados das equações integrais assumam a forma final dadas pelas Equações (24) e (27).

9. Apêndice II - Programa Pascal elaborado para Runge-Kutta de 4ª. Ordem.

```
PROGRAM TUBOPOROSO;

CONST
    RESULT = 'D:RESP.TXT';
TYPE
    ZVECTOR=ARRAY [1..2000] OF EXTENDED;
    NVECTOR=ARRAY [1..2000] OF EXTENDED;
VAR
    RESP:TEXT;
    ZV:ZVECTOR;
    NV:NVECTOR;
VAR
    D, DD, I, TEST:INTEGER;
    Z, N, H, K1, K2, K3, K4, MI, ZI, ZN, MM, ZF, REYW, REYD, ALFA,
    VW, U0, LR, A, B, M, PE: EXTENDED;

    {*****PROCEDURE RUNGE-KUTTA*****}

    PROCEDURE RUNGE;
    BEGIN

        Z:=ZI;
        M:=MI;
        A:=100-0.98*Z;
        B:=-0.98;
        { A:=50-0.48*Z;
          B:=-0.48; }
        { A:= 19.87+0.026*Z-0.000652*Z*Z-0.0000141*Z*Z*Z;
          B:=0.026-0.001304*Z-0.0000423*Z*Z; }
        { A:=20-0.18*Z;
          B:=-0.18; }
        { A:= 1.76 + 18.98*EXP(-Z/19.27);
          B:=-0.985*EXP(-Z/19.27); }
        K1:=( (ALFA*(M*(M+A+4)/((M+A+2)*(M+2)))+(2*M*(0.5-
        ALFA*Z)*B)/(A*(M+2)*(A+2)-(M/PE)))/
        ((2*(0.5-ALFA*Z)*((1/((M+2)*(M+2)))-(1/((M+A+2)*(M+A+2))))));
        {WRITELN(' K1 = ', K1:8:4);
        READLN; }

        Z:=ZI+H/2;

        M:=MI+K1/2;
```

```

        { A:=20-0.18*Z;
B:=-0.18;}

        A:=100-0.98*Z;
B:=-0.98;
        { A:=50-0.2*Z;
        B:=-0.2;}
        { A:=50-0.48*Z;

        B:=-0.48;}

{ A:= 19.87+0.026*Z-0.000652*Z*Z-0.0000141*Z*Z*Z;
B:=0.026-0.001304*Z-0.0000423*Z*Z;}
{ A:= 1.76 + 18.98*EXP(-Z/19.27);
B:=-0.985*EXP(-Z/19.27);
{ A:=100-0.2*Z;
B:=-0.2;}

        K2:=(ALFA*(M*(M+A+4)/((M+A+2)*(M+2)))+(2*M*(0.5-
ALFA*Z)*B)/(A*(M+2)*(A+2)-(M/PE)))/
        ((2*(0.5-ALFA*Z)*((1/((M+2)*(M+2)))-(1/((M+A+2)*(M+A+2))))));
{ K2:=(2*M*(0.5-ALFA*Z)*B/(A*(M+2)*(A+2)-(M/PE)))/
        (2*(0.5-ALFA*Z)*((1/((M+2)*(M+2)))-(1/((M+A+2)*(M+A+2)))));}
{ WRITELN(' K2 = ', K2:8:4);
  READLN;}

        Z:=ZI+H/2;
        M:=MI+K2/2;

        { A:=20-0.18*Z;
B:=-0.18;}

        A:=100-0.98*Z;
B:=-0.98;
        { A:=50-0.2*Z;
        B:=-0.2;}

        { A:=50-0.48*Z;
        B:=-0.48;}

{ A:= 19.87+0.026*Z-0.000652*Z*Z-0.0000141*Z*Z*Z;
B:=0.026-0.001304*Z-0.0000423*Z*Z;}
{ A:= 1.76 + 18.98*EXP(-Z/19.27);
B:=-0.985*EXP(-Z/19.27); }
{ A:=4-0.02*Z;
B:=-0.02;}
        K3:=(ALFA*(M*(M+A+4)/((M+A+2)*(M+2)))+(2*M*(0.5-
ALFA*Z)*B)/(A*(M+2)*(A+2)-(M/PE)))/
        ((2*(0.5-ALFA*Z)*((1/((M+2)*(M+2)))-(1/((M+A+2)*(M+A+2))))));
{ K3:=(2*M*(0.5-ALFA*Z)*B/(A*(M+2)*(A+2)-(M/PE)))/
        (2*(0.5-ALFA*Z)*((1/((M+2)*(M+2)))-(1/((M+A+2)*(M+A+2)))));}
{WRITELN(' K3 = ', K3:8:4);
  READLN;}

```

```

Z:=ZI+H;
M:=MI+K3;

{ A:=20-0.18*Z;
B:=-0.18;}

A:=100-0.98*Z;
B:=-0.98;
{ A:=50-0.2*Z;
B:=-0.2;}

{ A:=50-0.48*Z;
B:=-0.48;}
{ A:= 19.87+0.026*Z-0.000652*Z*Z-0.0000141*Z*Z*Z;
B:=0.026-0.001304*Z-0.0000423*Z*Z;}
{ A:= 1.76 + 18.98*EXP(-Z/19.27);
B:=-0.985*EXP(-Z/19.27); }
{ A:=4-0.02*Z;
B:=-0.02;}
K4:=(ALFA*(M*(M+A+4)/((M+A+2)*(M+2)))+(2*M*(0.5-
ALFA*Z)*B)/(A*(M+2)*(A+2)-(M/PE)))/
((2*(0.5-ALFA*Z)*((1/((M+2)*(M+2)))-(1/((M+A+2)*(M+A+2))))));
{ K4:=(2*M*(0.5-ALFA*Z)*B)/(A*(M+2)*(A+2)-(M/PE))/
(2*(0.5-ALFA*Z)*((1/((M+2)*(M+2)))-(1/((M+A+2)*(M+A+2)))));}
{ WRITELN(' K4 = ', K4:8:4);
READLN;}

END;

{*****PROCEDURE RESULTADOS*****}

PROCEDURE RESULTADOS;
BEGIN
FOR I:=1 TO DD DO
BEGIN
APPEND (RESP);

WRITELN (RESP{, '***', 'I = ', I:3, '***'});
{ WRITELN;}
{ WRITELN('ENTRE COM OS VALORES DE U0, VW, REYW E REYD');}
WRITE (RESP, { 'ZN = ',} ZV[I]:8:4 ,{' NN= ',} NV[I]:8:4);
WRITELN;

{ IF I MOD 12 = 0 THEN READLN;}

END;

```

```

        CLOSE (RESP);
END;

        {*****PROGRAMA PRINCIPAL*****}
BEGIN

        ASSIGN (RESP, RESULT);
        REWRITE (RESP);

        {CONDICAO

        INICIAL NA DIRECAO LONGITUDINAL}
        ZI:=0;

        {CONDICAO FINAL NA DIRECAO LONGITUDINAL}
        ZF:=100;

        {CONDICAO INICIAL DO PARAMETRO DE MODELAGEM}
        MI:=200;

        {DIVISAO DO INTERVALO}
        DD:=1000;

        {CONTADOR DO RK4}
        D:=1;

        {TAMANHO DO PASSO NA DISCRETIZACAO }
        H:=(ZF-ZI)/DD;

        ZN:=ZI;
        MM:=MI;
        REYW:=0.1;
        REYD:=2000;
        ALFA:=REYW/REYD;
        PE:=16000;
        APPEND (RESP);
        WRITELN (RESP, ' PE= ', PE:8:4 , ' REYD= ', REYD:8:4,
        'REYW=', REYW:8:4, 'MI=', MI:8:4, 'ZF=', ZF:8:4 );
        WRITELN;
        CLOSE (RESP);

        WHILE D<=DD DO

                BEGIN
                        RUNGE;

                        MM:= MI + (1/6)*(K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4);
                        WRITELN(' MM = ', MM: 8 :4);

                        APPEND (RESP);

                        WRITELN (RESP, ZI:8:4 , MM:8:4);
                        WRITELN;
                END
        END

```

```

        { CLOSE (RESP);
          READLN; }

        { WRITELN(' ESTA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO DO RUNGE KUTTA ESTA
CORRETA' ); }

        MI:=MM;
        ZI:= ZN + D*H;

        ZV[D]:=ZI;
        NV[D]:=MI;
        D:=D+1;

        END;

        RESULTADOS;
        READLN;
    END.

```

Referências Bibliográficas

- Afonso, M.D.; Pinho, M.N. 1998. Mass Transfer Modeling for Salt Transport in Amphoteric Nanofiltration Membranes. *Ind. Eng. Chem. Res.*, vol.37, p.4118-4127.
- Arnot, T.C.; Field, R.W.; Koltuniewicz, A.B. 2000. Crossflow and dead-end microfiltration of oily-water emulsions Part II. Mechanisms and modelling of flux decline. *Journal of Membrane Science*, vol.169, p.1-15.
- Bhattacharya K. P. et al. 1997. Generalized integral and similarity of the concentration profiles for osmotic pressure controlled ultrafiltration. *Journal of Membrane Science*, vol. 130, p. 99-121.
- Benito, J.M. et al. 1999. Integrated process for the removal of emulsified oils from effluents in the steel industry. *Separation Science and Technology*, vol.34, n.15, p.3031-3043.
- Bejan, A. 1984 *Convection Heat transfer*. John Wiley & Sons
- Berman S. A.; 1953. Laminar flow in channels Poured walls. *Journal of Applied Physics*, vol. 24, n.9, p. 1232-1235.
- Bird, R.B. & Stewart, W. E. *Transport Phenomena*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960.

- Bowen Richard W. et al. 1996. Prediction of the rate of cross-flow membrane ultrafiltration: a colloidal interaction approach. *Chemical engineering Science*, vol. 51, p.4321-4333.
- Bowen Richard W., Williamns M. P., 2000. Prediction of the rate of cross-flow ultrafiltration of colloids with concentration-dependent diffusion coefficient and viscosity – theory and experiment. *Chemical engineering Science* vol. 56, p. 3083-3099.
- Butcher J. C.; Wanner G. , 1996. Runge- Kutta methods: some historical notes. *Applied Numerical Mathematics*, Vol 22, p. 113-151.
- Cassano, A.; Molinari, R.; Romano, M.; Drioli, E., 2001. Treatment of aqueous effluents of the leather industry by membrane processes: A review. *Journal of Membrane Science*, vol. 181, n. 15, p. 111-126.
- Cheryan, M. 1998. *Ultrafiltration and Microfiltration - Handbook*. Technomic Publishing Company, Lancaster, Pennsylvania.
- Ciardelli, G.; Corsi, L.; Marcucci, M., 2001. Membrane separation for wastewater reuse in the textile industry. *Resources, Conservation and Recycling*, vol. 31, n. 2, p. 189-197.
- Cumming, I.W.; Holdich, R.G.; Smith, I.D., 2000. The rejection of oil by microfiltration of a stabilised kerosene/water emulsion. *Journal of Membrane Science*, vol. 169, n. 1, p. 147-155.
- Davis H. R., Sherwood D. J. 1990. A similarity solution for steady-state crossflow microfiltração. *Chemical Engineering Science*, vol.45, p.3203-3209.
- Deen, W. M. 1999. *Analisis of transport phenomena*. Oxford University Press, Oxford.
- Drozd C.; Shawartzbrod J., 1997. Removal of *Cryptosporidium* from river water by crossflow microfiltration: a pilot-scale study. *Wat. Sci. Tech.* Vol. 35 n.11-12, p. 391-395.
- Fontes S. R.. In: Steady state transmembrane flux of macromolecular solution with micro and ultra-filtration conditions. COBEM, 15, 1999, Águas de Lindóia. Anais em CD... Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1999.
- Geraldes, V.M.; Semião, V.A.; Pinho, M.N. 1998. Nanofiltration Mass Transfer at the Entrance Region of a Slit Laminar Flow. *Ind. Eng. Chem. Res.*, vol.37, p.4792-4800.

- Geraldes, V.M. et al.; 2001. Flow and mass transfer modelling of nanofiltration. *Journal of Membrane Science*, vol. 191, p. 109-128.
- Ghayeni, S.B.; Beatson, P.J.; Fane, A.J.; Schneider, R.P., 1999. Bacterial passage through microfiltration membranes in wastewater applications. *Journal of Membrane Science*, vol. 153, n. , p. 71-82.
- Gupta C. R., 1997. Laminar flow in the entrance of a tube. *Appl. Sci. Res.* n. 33
- Gupta C. R., 1970. Laminar flow in the inlet region of a porous tube. *Appl. Sci. Res.* n. 22
- Hicks E. R. 1970. Velocity profiles in porous-walled ducts. *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, vol 9, n. 3, p.502-505.
- Ho, C.; Zydney, A.L., 1999. Theoretical analysis of the effect of membrane morphology on fouling during microfiltration. *Separation Science and Technology*, vol. 34, n.13, p. 2461-2483.
- Hornbeck W. R., 1964. Laminar flow in the entrance region of a pipe. *Appl. Sci. Res.* seção A, vol. 13.
- Huang L., Morrissey T. M. 1999. finite element analysis as tool for crossflow membrane filter simulation. *Journal of Membrane Science*, v. 155, p. 19-30.
- Huisman, H. I.; Trägårdh, C. 1999. Particle transport in crossflow microfiltration – I. Effects of hydrodynamics and diffusion. *Chemical Engineering Science*,
- Jackson, N.M.; Jafferli, R.; Bell, D.J.; Davies, G.A., 1999. A study of the structure of micro and ultra filtration membranes: The Voronoi tessellation as a stochastic model to simulate the structure. *Journal of Membrane Science*, vol. 162, n.1-2, p. 23-43.
- Jiratananon, R.; Uttapap, D.; Sampranpiboon, P. 1998. Crossflow microfiltration of a colloidal suspension with the presence of macromolecules. *Journal of Membrane Science*, v. 140, n. 4, p. 57-66.
- Karode K.Sandeep, 2001. Laminar flow in channels with porous walls, revisited. *Journal of Membrane Science*, vol. 191, p. 237-241.
- Kida S.; Tatsumi T., 1973. Numerical calculation of the laminar flow. *Journal of the physical society of Japan*, vol. 34, n. 1, p.264-262.
- Lai, W.C.; Smith, K.J., 2001. Heavy oil microfiltration using ceramic monolith membranes. *Fuel*, vol. 80, n. 8, p. 1121-1130.

- Lee Y., Clark M. M., 1997. A numerical model of steady-state permeate flux during cross-flow ultrafiltration. *Desalination*, vol. 109, p. 241-251.
- Lipnizki, F. and Field, R.W., 2001. Mass transfer performance for hollow fibre modules with shell-side axial feed flow: using an engineering approach to develop a framework *Journal of Membrane Science*, vol. 193, n. 2, p. 195-208.
- Masciola, D.A.; Viadero, R. C.; Reed, B.E., 2001. Tubular ultrafiltration flux prediction for oil-in-water emulsions: analysis of series resistances. *Journal of Membrane Science*, vol. 184, n. 2, p. 197-208.
- Nassehi, V. 1998. Modelling of combined Navier-Stokes and Darcy flows in crossflow membrane filtration. *Chemical Engineering Science*, vol.53, n.6, p.1253-1265.
- Parvatiyar, M.G. 1998. Mass transfer in a membrane tube with turbulent flow of Newtonian and non-Newtonian fluids. *Journal of Membrane Science*, vol.148, p.45-57.
- Piron E., René F., Latrille E.(1995). *Journal of Membrane Science*, vol. 108, p.57-70.
- Probstein R. F. (1976). *Physicochemical Hydrodynamics*.
- Rice, R. G., Duong D. D. (1995) "Applied Mathematics and Modeling for chemical Engineering". John Wiley & Sons. New York.
- Rippeger, S., Altmann, J., 2002. Crossflow microfiltration – State of the art. *Separation and Purification Technology*. vol. 26, p. 19-31
- Scott, K. 1995. *Handbook of industrial membranes*. Elsevier Science Publishers, Oxford.
- Schäfer, A.I., et al.; 2000. Microfiltration of colloids and natural organic matter. *Journal of Membrane Science*, Vol.171, p. 151-172
- Silva, C. M.; Reeve, D. W.; Husain, H.; Rabie, H. R.; Woodhouse, K. A., 2000. Model for flux prediction in high-shear microfiltration systems. *Journal of Membrane Science*, vol. 173, n. 4, p. 87-98.
- Sirshendu, D.; Bhattacharjee, S.; Sharma, A.; Bhattacharya, P. K., 1997. Generalized integral and similarity solutions of the concentration profiles for osmotic pressure controlled ultrafiltration. *Journal of Membrane Science*, vol. 130, p. 99-121.
- Spijker M. N.; 1996. Error propagation in Runge-Kutta methods. *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 22, p.309-325.

- Ting, J.K.; Wu, J.C.S. 1999. Cross-flow ultrafiltration of oil/water emulsions using porous ceramic membranes. *Journal of the Chinese Institute of Chemical Engineers*, vol. 30, n.3, p. 207-214.
- Veen et. al , 1995. Converge aspects of step-parallel iteration of Ruge-Kutta methods. *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 22, p. 397-411.
- Zeman, L.J.; Zydney, A. L. 1996. *Microfiltration and Ultrafiltration - Principles and Applications*. Marcel Dekker, New York.
- Zydney L. A. 1997. Stagnant film model for concentration polarization in membrane systems. *Journal of Membrane Science*, vol.130, p.275-281.
- Ward, A., Smith, A., 1980. *Internal Fluid Flow*, Pergamon Press, New York.