

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

ENDI SAMBA LUAMBA

**FORMULAÇÃO MEC/MEF PARA A ANÁLISE DA INTERAÇÃO SOLO  
ESTRATIFICADO/ESTRUTURA E DA ESTABILIDADE DA ESTACA**

São Carlos

2022



ENDI SAMBA LUAMBA

**FORMULAÇÃO MEC/MEF PARA A ANÁLISE DA INTERAÇÃO SOLO  
ESTRATIFICADO/ESTRUTURA E DA ESTABILIDADE DA ESTACA**

VERSÃO CORRIGIDA

(A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos)

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)  
da Escola de Engenharia de São Carlos  
da Universidade de São Paulo para obtenção  
do título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. João Batista de Paiva

São Carlos

2022

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da  
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

L926f Luamba, Endi Samba  
Formulação MEC/MEF para a Análise da Interação  
Solo Estratificado/Estrutura e da Estabilidade da  
Estaca / Endi Samba Luamba; orientador João Batista de  
Paiva. São Carlos, 2022.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de  
Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de  
São Carlos da Universidade de São Paulo, 2022.

1. interação solo-estrutura. 2. elementos de  
contorno. 3. elementos finitos. 4. grupo de estacas. 5.  
solo não-homogêneo. 6. carga crítica de flambagem. 7.  
acoplamento MEC/MEF. I. Título.

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **ENDI SAMBA LUAMBA.**

Título da tese: "Formulação MEC/MEF para a análise da interação solo estratificado/estrutura e da estabilidade da estaca".

Data da defesa: 07/10/2022.

### **Comissão Julgadora**

### **Resultado**

Prof. Associado **João Batista de Paiva (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **Edson Denner Leonel**  
(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **Leandro Palermo Junior**  
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Aprovado

Prof. Dr. **Lutgardes de Oliveira Neto**  
(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"/UNESP-Bauru)

APROVADO

Prof. Dr. **Euclides de Mesquita Neto**  
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**



## **AGRADECIMENTOS**

A *Deus* pelos direcionamentos no presente plano.

À minha família pelo apoio incondicional de sempre.

Ao professor João Batista de Paiva pela valiosa orientação.

Aos colegas do departamento e do cotidiano pelo companheirismo.

Aos professores e funcionários do departamento e do campus pelos serviços prestados.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES - Código de Financiamento 001), e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq - Processo 132831/2016-3).

*“Talk is cheap. Show me the code.”* – Linus Torvalds



## RESUMO

LUAMBA, E.S. **Formulação MEC/MEF para a Análise da Interação Solo Estratificado/Estrutura e da Estabilidade da Estaca.** 2022. 160 p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

Desenvolve-se neste trabalho, uma formulação numérica baseada no acoplamento entre o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método dos Elementos Finitos (MEF), com a aplicação do modelo de Steinbrenner, para a análise de problemas de interação solo-estrutura, considerando o solo como um meio estratificado, e limitado ou não por uma base rígida ou camada de apoio indeslocável. O modelo de Steinbrenner, conforme relatado em alguns trabalhos, subestima o campo de deslocamentos e leva a resultados inconsistentes quando as camadas inferiores são mais compressíveis que as superiores. Já neste trabalho, demonstra-se a acurácia e a eficiência da formulação desenvolvida para solucionar esta situação crítica em que a rigidez do solo decresce com a profundidade. A formulação assim obtida é uma contribuição pertinente devido à sua praticidade na modelagem da estratificação do solo em comparação com outras formulações encontradas na literatura. Em seguida, realiza-se uma análise de flambagem linear de estacas inseridas no solo, com o objetivo de estimar a carga crítica de flambagem. A estaca sendo uma estrutura geralmente esbelta, a depender das condições do solo e de carregamento, pode ocorrer flambagem da mesma, prejudicando assim a sua função estrutural. Para esta análise, alguns autores utilizam métodos analíticos baseados na teoria da reação do subleito que geralmente subestima a carga crítica da estaca, e outros autores empregam o método das diferenças finitas ou recorrem a pacotes computacionais comerciais baseados no MEF. Logo, a formulação MEC/MEF é outra contribuição original deste trabalho, com a componente de instabilidade devidamente determinada considerando a distribuição real do esforço axial na estaca, aproximada linearmente em cada elemento finito. Os resultados obtidos através de códigos computacionais implementados são comparados com os resultados de outros autores para efeito de verificação e validação das formulações desenvolvidas.

Palavras-chave: interação solo-estrutura; elementos de contorno; elementos finitos; grupo de estacas; solo não-homogêneo; carga crítica de flambagem; acoplamento MEC/MEF.



## ABSTRACT

LUAMBA, E.S. **BEM/FEM Formulation for the Analysis of Stratified Soil/Structure Interaction and Pile Stability**. 2022. 160 p. Thesis (Doctorate) – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2022.

In this work, a numerical formulation is developed based on the coupling between the Boundary Element Method (BEM) and the Finite Element Method (FEM), with the application of the Steinbrenner model, for the analysis of soil-structure interaction problems, considering the soil as a stratified medium, and limited or not by a rigid base or an immovable support layer. The Steinbrenner model, as reported in some works, underestimates the displacement field and leads to inconsistent results when the lower layers are more compressible than the upper ones. This work demonstrates the accuracy and efficiency of the formulation developed to solve this critical solution in which soil stiffness decreases with depth. The formulation thus obtained is a relevant contribution due to its practicality in modeling soil stratification compared to other formulations found in the literature. Then, a linear buckling analysis of piles embedded in the soil is performed, with the objective of estimating the critical buckling load. The pile being generally a slender structure, depending on the soil and loading conditions, buckling can occur, thus impairing its structural function. For this analysis, some authors use analytical methods based on the theory of subgrade reaction, which generally underestimates the critical load of the pile, and other authors employ the finite difference method or resort to commercial software packages based on the FEM. Therefore, the BEM/FEM formulation is another original contribution of this work, with the instability component properly determined considering the real distribution of the axial force along the pile, approximated linearly in each finite element. The results obtained through implemented computational codes are compared with the results of other authors for the purpose of verification and validation of the developed formulations.

**Keywords:** soil-structure interaction; boundary elements; finite elements; pile group; nonhomogeneous soil; critical buckling load; BEM/FEM coupling.



## LISTA DE FIGURAS

3.1 – Deformação geométrica bidimensional. . . . .	38
3.2 – Componentes de tensão. . . . .	39
3.3 – Região infinita $\Omega^*$ contendo um corpo de domínio $\Omega$ . . . . .	42
3.4 – Função delta de Dirac aplicada em domínios. . . . .	44
3.5 – Problema fundamental de Mindlin. . . . .	45
4.1 – Cargas aplicadas no topo da estaca e parâmetros nodais. . . . .	49
4.2 – Elemento finito de viga tridimensional. . . . .	51
4.3 – Funções de forma e aproximação de deslocamento na barra. . . . .	53
4.4 – Elemento finito de placa DKT. . . . .	55
4.5 – Força de superfície e deslocamento transversal num elemento finito DKT. . . . .	58
5.1 – Forças de contato atuando na estaca e no solo. . . . .	61
5.2 – Estacas imersas num meio contínuo semi-infinito. . . . .	62
5.3 – Transformação das forças de superfície em cargas nodais equivalentes. . . . .	63
5.4 – Estaca submetida à força horizontal e ao momento fletor. . . . .	65
5.5 – Deslocamentos horizontais da estaca. . . . .	65
5.6 – Modelagem da interação estaca-solo via MEC/MEF e MEF/MEF. . . . .	66
5.7 – Elemento de contorno $ijk$ com aproximação linear das forças de superfície. . . . .	67
5.8 – Funções de forma num elemento de contorno . . . . .	67
5.9 – Carregamento aplicado na superfície do solo. . . . .	68
5.10 – Sistemas de coordenadas local e global. . . . .	70
5.11 – Forças de contato na interface placa-solo. . . . .	71
5.12 – Transformação das forças de superfície em cargas nodais no elemento DKT. . . . .	71
5.13 – Carga aplicada na superfície e malha da área carregada. . . . .	72
5.14 – Modelagem do solo pelo MEC. . . . .	74
5.15 – Tensões efetivas na interface placa-solo. . . . .	74
5.16 – Carga aplicada e discretização do solo. . . . .	76
5.17 – Camada de espessura $h$ com base rígida. . . . .	77
5.18 – Meio estratificado com base rígida. . . . .	79
5.19 – Estaca imersa num meio estratificado e a linha de carga correspondente. . . . .	80
5.20 – Fluxograma descrevendo o algoritmo de resolução do problema em análise. . . . .	83
6.1 – Tipos de estruturas na análise de flambagem. . . . .	86

6.2 – Coluna sob compressão e esforços internos. . . . .	87
6.3 – Diferentes condições de contorno e fator $n$ correspondente. . . . .	90
6.4 – Barra rígida sob força axial $P$ e apoiada por uma mola linear. . . . .	92
6.5 – Elemento finito de viga . . . . .	93
6.6 – Funções de forma de Hermite. . . . .	94
6.7 – Elemento submetido à carga axial. . . . .	96
6.8 – Coluna sob carga axial e esforço normal constante. . . . .	98
6.9 – Distribuição do esforço normal ao longo da estaca . . . . .	100
6.10 – Esforço normal num elemento finito de viga. . . . .	100
7.1 – Placa com 81 nós e 128 elementos, e estaca com 20 elementos e 21 nós. . . . .	104
7.2 – Camada finita sob carregamento uniforme. . . . .	106
7.3 – Placa apoiada em uma camada finita. . . . .	107
7.4 – Nós de interesse na malha da placa. . . . .	108
7.5 – Maciço finito com quatro camadas e base rígida. . . . .	109
7.6 – Estaca submetida à carga vertical e inserida em um meio estratificado. . . . .	111
7.7 – Deslocamento vertical no topo da estaca para diferentes discretizações. . . . .	112
7.8 – Deslocamentos verticais da estaca para as quatro configurações do solo. . . . .	113
7.9 – Estaca sob carga vertical e imersa em um meio estratificado. . . . .	114
7.10 – Grupo de nove estacas imerso em uma camada finita. . . . .	116
7.11 – Grupo de nove estacas imerso em um meio estratificado. . . . .	117
7.12 – Deslocamentos do grupo de estaca considerando três configurações do solo. . . . .	118
7.13 – Estaca conectada a uma placa e imersa em um meio homogêneo. . . . .	120
7.14 – Malha utilizada para a placa e a superfície do solo. . . . .	120
7.15 – Radier estaqueado em um meio com duas camadas. . . . .	122
7.16 – Radier estaqueado com estacas atravessando 4 camadas. . . . .	123
7.17 – Perfil do solo com 5 camadas e uma base rígida. . . . .	124
7.18 – Deslocamentos verticais ao longo do eixo central e da borda da placa. . . . .	125
7.19 – Estaca sujeita à força axial e vinculada nas duas extremidades . . . . .	126
7.20 – Carga crítica normalizada para estaca flexível e diferentes discretizações. . . . .	127
7.21 – Carga crítica normalizada para estaca rígida e diferentes discretizações. . . . .	127
7.22 – Efeito do fator de rigidez $K_R$ da estaca nas cargas críticas para o Caso 1. . . . .	128
7.23 – Efeito do fator de rigidez $K_R$ da estaca nas cargas críticas para o Caso 2. . . . .	129
7.24 – Comparação dos resultados da carga crítica de flambagem. . . . .	130

8.1 – Código para o cálculo de $[G_{SS}]$ . . . . .	133
8.2 – Código para o cálculo de $[G_{SE}]$ . . . . .	136
8.3 – Código para o cálculo de $[G_{EE}]$ . . . . .	138
8.4 – Código para o cálculo de $[G_{ES}]$ . . . . .	142
8.5 – Código para o cálculo da carga crítica de flambagem. . . . .	147





## LISTA DE TABELAS

5.1 – Deslocamentos verticais ( $10^{-2}$ m) em pontos da superfície. . . . .	72
6.1 – Resultados numéricos da carga crítica de flambagem. . . . .	98
7.1 – Deslocamento vertical (m) e diferença (%) no centro da área carregada. . . . .	106
7.2 – Deslocamento vertical (m) nos cantos da área carregada. . . . .	106
7.3 – Deslocamentos ( $10^{-3}$ m) em pontos da placa. . . . .	108
7.4 – Deslocamentos ( $10^{-2}$ m) em pontos da placa. . . . .	110
7.5 – Configurações e propriedades do maciço de solos. . . . .	112
7.6 – Deslocamentos ( $10^{-2}$ m) para diferentes perfis do solo. . . . .	113
7.7 – Configurações e propriedades do maciço de solos. . . . .	114
7.8 – Fator de influência $I_w$ . . . . .	115
7.9 – Diferenças relativas (%). . . . .	115
7.10 – Deslocamento vertical ( $10^{-4}$ m) no topo da estaca central. . . . .	116
7.11 – Deslocamento (cm) no topo da estaca em meio semi-infinito ( $h = \infty$ ). . . . .	119
7.12 – Deslocamento (cm) no topo da estaca em função da espessura do solo. . . . .	120
7.13 – Deslocamento (cm) no topo da estaca em meio finito com duas camadas. . . . .	121
7.14 – Deslocamentos verticais (mm) nos topos das estacas. . . . .	122
7.15 – Módulo de elasticidade e espessura das camadas. . . . .	123
7.16 – Deslocamentos verticais (mm) no centro e no canto do radier. . . . .	124
8.1 – Esquema de montagem da matriz $[G]$ . . . . .	133



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	23
1.1 OBJETIVOS E METODOLOGIA.....	24
1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	26
1.3 PUBLICAÇÕES.....	27
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	28
2.1 INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA EM MEIOS NÃO-HOMOGÊNEOS.....	28
2.2 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DA ESTACA.....	34
<b>3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO</b> .....	37
3.1 EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA ELASTOSTÁTICO.....	37
3.2 EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO.....	41
3.3 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE MINDLIN.....	45
<b>4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS</b> .....	48
4.1 MODELAGEM DA ESTACA.....	48
4.1.1 Elemento finito de viga tridimensional.....	48
4.1.2 Determinação da matriz de rigidez.....	49
4.2 MODELAGEM DA PLACA.....	54
4.2.1 Elemento finito de placa.....	54
4.2.2 Determinação da matriz de rigidez.....	55
4.2.3 Determinação do vetor de cargas nodais equivalentes.....	58
<b>5 ANÁLISE DA INTERAÇÃO ESTRUTURA-SOLO</b> .....	60
5.1 ANÁLISE DA INTERAÇÃO ESTACA-SOLO.....	60
5.1.1 Exemplo numérico.....	64
5.2 ANÁLISE DA INTERAÇÃO PLACA-SOLO.....	67
5.2.1 Exemplo numérico.....	72
5.3 ANÁLISE DA INTERAÇÃO PLACA-ESTACA-SOLO.....	73
5.3.1 Exemplo ilustrativo.....	75
5.4 SOLOS NÃO-HOMOGÊNEOS.....	77
5.4.1 Determinação de $[G_{SS}]$ .....	78
5.4.2 Determinação de $[G_{EE}]$ .....	80

5.5 ACOPLAMENTO MEC/MEF. ....	84
<b>6 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DA ESTACA. ....</b>	<b>86</b>
6.1 CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM. ....	86
<b>6.1.1 Formulação física da carga crítica de flambagem. ....</b>	<b>87</b>
<b>6.1.2 Cargas críticas para diversas condições de contorno. ....</b>	<b>89</b>
6.2 ANÁLISE DE FLAMBAGEM LINEAR. ....	91
<b>6.2.1 Formulação numérica do problema de flambagem. ....</b>	<b>91</b>
<b>6.2.2 Funções interpoladoras de Hermite. ....</b>	<b>93</b>
<b>6.2.3 Determinação da matriz de rigidez geométrica. ....</b>	<b>96</b>
6.3 FLAMBAGEM DA ESTACA INSERIDA NO SOLO. ....	99
<b>6.3.1 Matriz de instabilidade da estaca em interação com o solo. ....</b>	<b>99</b>
<b>6.3.2 Acoplamento MEC/MEF. ....</b>	<b>103</b>
<b>7 EXEMPLOS NUMÉRICOS. ....</b>	<b>104</b>
7.1 INTERAÇÃO PLACA-SOLO. ....	105
<b>7.1.1 Carga aplicada em uma camada finita. ....</b>	<b>105</b>
<b>7.1.2 Placa apoiada em uma camada finita. ....</b>	<b>107</b>
<b>7.1.3 Placa apoiada em um meio finito com múltiplas camadas. ....</b>	<b>109</b>
7.2 INTERAÇÃO ESTACA-SOLO. ....	110
<b>7.2.1 Estaca inserida em um meio finito com camadas de mesma espessura. ....</b>	<b>111</b>
<b>7.2.2 Estaca inserida em um meio finito com camadas de diferentes espessuras. ...</b>	<b>114</b>
<b>7.2.3 Grupo de estacas imerso em um meio finito. ....</b>	<b>116</b>
7.3 INTERAÇÃO PLACA-ESTACA-SOLO. ....	119
<b>7.3.1 Estaca conectada a uma placa. ....</b>	<b>119</b>
<b>7.3.2 Radier estaqueado com estacas contidas em uma camada. ....</b>	<b>121</b>
<b>7.3.3 Radier estaqueado com estacas atravessando camadas. ....</b>	<b>123</b>
7.4 FLAMBAGEM DA ESTACA. ....	125
<b>7.4.1 Estudo de convergência da carga crítica de flambagem. ....</b>	<b>125</b>
<b>7.4.2 Flambagem linear da estaca. ....</b>	<b>128</b>
<b>8 PROGRAMA COMPUTACIONAL. ....</b>	<b>131</b>
8.1 INTERAÇÃO SOLO ESTRATIFICADO/ESTRUTURA. ....	131
8.2 FLAMBAGEM DA ESTACA. ....	146

<b>9 CONCLUSÕES.....</b>	<b>149</b>
9.1 PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS.....	152
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>153</b>



# 1 INTRODUÇÃO

Atualmente muitos problemas práticos de engenharia podem ser modelados e simulados com uma precisão muito próxima da realidade com a utilização de métodos numéricos cada vez mais desenvolvidos, e graças ao poder computacional cada vez maior que torna estes métodos mais eficientes e econômicos. A modelagem e a simulação computacional, de fato, têm se tornado parte essencial na elaboração de projetos de engenharia, e são geralmente aceitas para substituir parcialmente experimentos em laboratório e em escala real.

Os métodos numéricos mais utilizados em engenharia estrutural e em engenharia geotécnica são o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método das Diferenças Finitas (MDF). O MEF é a ferramenta numérica comumente utilizada, é baseado na discretização do domínio físico de interesse em elementos finitos, e utiliza métodos variacionais para a obtenção de soluções aproximadas formuladas em cada elemento. Como vantagens, existem soluções consagradas para diversas aplicações em engenharia e outras disciplinas científicas, a integração de funções lineares e às vezes não-lineares são relativamente simples em comparação ao MEC, e as matrizes determinadas são simétricas e esparsas. Contudo o uso do MEF requer malhas para todo domínio que em muitos casos aumenta o custo computacional, e o método não é o mais adequado para problemas com domínios infinitos como o solo.

O MDF é um método numérico com pontos em comum com o MEF, e permite uma abordagem mais direta para a solução numérica de equações diferenciais parciais, e se baseia na aproximação de derivadas por diferenças finitas. Em comparação com o MEC e o MEF, é o mais fácil de implementar uma vez que não requer integração numérica, contudo, como no MEF requer malhas para todo o domínio que precisam apresentar geometria regular para garantir implementações mais eficientes. O método requer, portanto, atenção especial para problemas apresentando contornos curvos, e não é o mais adequado para o tratamento de domínios apresentando descontinuidades do material.

Por outro lado, o MEC é um método numérico muito eficiente na resolução de diversos problemas de engenharia utilizando técnicas de modelagem baseadas em equações integrais. Com o MEC a discretização é feita apenas no contorno do domínio, reduzindo o número de equações envolvidas e conseqüentemente o tempo de processamento. Além disso, com a ausência da malha de domínio, as grandezas internas são precisamente calculadas. Em problemas envolvendo domínios infinitos como o solo, as condições de contorno são

automaticamente satisfeitas, evitando assim a discretização de contornos remotos. Todavia, as matrizes obtidas são geralmente assimétricas, as equações integrais envolvidas e o tratamento de problemas com domínios não-homogêneos e não-lineares apresentam alto grau de complexidade.

Um problema de muito interesse na comunidade científica, com diversas aplicações práticas em problemas de engenharia estrutural e geotécnica, é a interação entre o solo e a estrutura. Este problema pode ser resolvido com a utilização individual dos métodos numéricos descritos ou com a utilização simultânea de dois métodos com o objetivo de tirar proveito dos pontos fortes de cada um. É neste contexto que se insere o tema deste trabalho que consiste na análise de deslocamentos de estruturas de fundação como estacas, placas e radier estaqueado em interação com solos não-homogêneos utilizando uma formulação baseada no acoplamento entre o MEC e o MEF, e realiza-se também uma análise de flambagem linear da estaca via introdução da componente de instabilidade na formulação utilizada para a análise de deslocamentos.

## 1.1 OBJETIVOS E METODOLOGIA

Neste trabalho, desenvolvem-se códigos computacionais para a análise numérica de problemas de interação solo-estrutura. Para a consideração da estratificação do solo em camadas, utiliza-se uma formulação baseada no acoplamento entre o MEC e o MEF com a introdução do modelo de Steinbrenner. Cada camada do solo é constituída por um material homogêneo, elástico linear e isotrópico; e o maciço de solos pode comportar ou não uma base rígida. Procura-se avaliar a precisão obtida com o uso do modelo de Steinbrenner em análises de maior aplicabilidade prática, ou seja, análises que consideram ao mesmo tempo o solo como um meio estratificado, as estacas atravessando as camadas, e a presença de uma placa apoiada na superfície do solo.

Inicialmente, é analisado o problema de interação placa-solo por ser o problema em que é comumente utilizado o modelo de Steinbrenner, uma vez que é suficiente computar e somar os deslocamentos observados em cada camada do solo devido ao carregamento aplicado na placa. A placa é modelada pelo MEF e discretizada por elementos finitos DKT, e é submetida a carregamentos verticais. O solo é modelado pelo MEC com o emprego da solução fundamental de Mindlin escrita nas superfícies do topo e da base de cada camada; e essas superfícies são discretizadas em elementos de contorno triangulares (ECT). Os elementos de



contorno na superfície do solo devem coincidir com os elementos finitos da placa, e admite-se variação linear das forças de contato em cada célula. No acoplamento entre o solo e a placa, na região de contato, as forças de superfície do solo são transformadas em cargas nodais equivalentes e aplicadas como reações na placa.

Numa segunda etapa, analisa-se a interação estaca-solo em que a estaca pode atravessar as camadas do solo. É modelada por elementos finitos de viga tridimensional e as forças de interação na interface estaca-solo têm uma distribuição linear em cada elemento finito da estaca. O solo é modelado pelo MEC utilizando elementos lineares de contorno na mesma localização das linhas de carga resultantes da interação com as estacas, e continua sendo utilizada a solução fundamental de Mindlin. Na integração dos elementos lineares da estaca, levam-se em consideração as propriedades físicas do solo nas posições dos pontos de colocação e dos pontos de integração. Considera-se um meio não-homogêneo e semi-infinito para a análise do caso crítico em que as camadas mais compressíveis se encontrem abaixo das camadas menos compressíveis.

Com os resultados obtidos nas duas etapas devidamente validados, desenvolve-se o código mais abrangente para a análise da interação placa-estaca-solo. Em cada uma das etapas, o sistema final de equações governantes é obtido através de uma formulação híbrida em que a matriz dos coeficientes de influência proveniente do MEC é acoplada à matriz de rigidez proveniente do MEF, resultando em uma matriz de rigidez equivalente. A resolução desse sistema de equações leva a obtenção de deslocamentos e rotações nos nós das estacas e da placa.

Neste trabalho, realiza-se também a análise da estabilidade da estaca. De fato, a estaca sendo um elemento estrutural esbelto está sujeita a sofrer flambagem devido a um carregamento vertical aplicado no seu topo. Para esta análise, estende-se a formulação desenvolvida para a análise estática da interação estaca-solo, introduzindo a matriz de instabilidade. Duas abordagens são apresentadas para o cálculo dessa matriz tendo em vista a distribuição do esforço axial ao longo da estaca inserida no solo. Uma considera um esforço constante em cada elemento finito, e a outra, mais realística, considera uma linearidade do esforço em cada elemento. Uma vez determinada a matriz de instabilidade, resolve-se por fim um problema de valores próprios a fim de determinar a carga crítica de flambagem equivalente ao menor valor próprio obtido na solução do problema.

A eficiência e a praticidade da formulação MEC/MEF desenvolvida com a incorporação do modelo de Steinbrenner, a acurácia dos resultados inclusive no caso de as camadas inferiores serem mais compressíveis que as superiores, e a utilização do MEC/MEF junto com uma matriz de instabilidade que leva em consideração a distribuição variável do esforço axial na estaca

constituem as principais contribuições desta tese. Os códigos computacionais desenvolvidos neste trabalho são escritos nas linguagens de programação Fortran<sup>®</sup>, Mathematica<sup>®</sup> e Python<sup>®</sup>. É utilizado o compilador Intel Visual Fortran<sup>®</sup>, em ambiente Windows<sup>®</sup> de 64 bits. Os resultados numéricos obtidos são comparados com os resultados encontrados na literatura e com os obtidos através de pacotes computacionais.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O texto do presente trabalho se desenvolve conforme a seguinte estrutura:

Capítulo 2: Revisão Bibliográfica – Um estudo da arte é feito sobre as pesquisas referentes aos temas abordados neste trabalho.

Capítulo 3: Método dos Elementos de Contorno – descreve-se o equacionamento do problema elastostático, mostram-se as vantagens do método, formula-se a equação integral de contorno e apresentam-se a solução fundamental de Mindlin.

Capítulo 4: Método dos Elementos Finitos – descrevem-se de maneira concisa os elementos finitos de viga tridimensional e de placa.

Capítulo 5: Análise da Interação Estrutura-Solo – apresentam-se as hipóteses, as formulações e os detalhes de implementação computacional para a análise da interação entre o solo e os elementos estruturais de fundação – estacas e placa, aplicando o modelo de Steinbrenner.

Capítulo 6: Flambagem da Estaca – analisa-se inicialmente a carga crítica de uma coluna sem o solo submetida a esforço axial e diversas condições de contorno a fim de verificar e validar a extensão da formulação considerando a matriz de instabilidade no caso de uma distribuição constante do esforço axial; em seguida considera-se o solo e duas abordagens para o cálculo da matriz de instabilidade considerando a distribuição do esforço axial na estaca.

Capítulo 7: Exemplos Numéricos – resolvem-se vários exemplos numéricos para demonstrar a praticidade, a eficiência e a acurácia das formulações desenvolvidas.

Capítulo 8: Programa computacional – apresenta-se a estrutura geral e destacam-se os aspectos mais importantes do programa computacional implementado.

Capítulo 9: Conclusões – fazem-se as devidas considerações finais e apresentam-se algumas sugestões para a continuidade da pesquisa.

### 1.3 PUBLICAÇÕES

As seguintes publicações podem ser úteis para o leitorado:

1. LUAMBA, E.S.; PAIVA, J.B. Static analysis of axially loaded piles in multilayered soils using a BEM/FEM formulation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 135, p. 63-72, 2022.
2. LUAMBA, E.S.; PAIVA, J.B. A 3D BEM/FEM formulation for the static analysis of piled rafts and capped pile groups subjected to vertical and horizontal loads. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 103, p. 66-79, 2019.
3. LUAMBA, E.S.; SILVA, R.C.S.; RAMOS, A.P.F.; PAIVA, J.B. An effective BEM/FEM formulation for the static interaction analysis of pile groups embedded in a semi-infinite continuum. In: *Proceedings of the XL CILAMCE – Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Natal, 2019.
4. LUAMBA, E.S.; PAIVA, J.B. BEM/FEM formulations for the analysis of piles submitted to horizontal loads. In: *HPSM/OPTI 2018*, v. 175. p. 225-235, Ashurst: WIT Press, 2018.
5. LUAMBA, E.S.; PAIVA, J.B. A BEM/FEM formulation for the analysis of piles submitted to horizontal loads. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 81, p. 12-20, 2017.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A análise de interação solo-estrutura é um vasto campo de atuação na comunidade científica, e existem diferentes formulações analíticas e numéricas para a análise de estacas inseridas em solos não-homogêneos, geralmente estratificados. As análises numéricas deste trabalho se baseiam em dois métodos: o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Portanto, faz-se necessário apresentar o Estado da Arte sobre os trabalhos existentes relacionados aos temas estudados neste trabalho – estratificação do solo e flambagem da estaca – e que utilizam o MEF e/ou o MEC, e outros métodos de análise. No final de cada seção deste capítulo, demonstra-se a pertinência das formulações desenvolvidas neste trabalho em comparação com as diferentes abordagens apresentadas.

### 2.1 INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA EM MEIOS NÃO-HOMOGENEOS

Em muitos trabalhos na literatura, o solo é geralmente modelado utilizando o modelo de Winkler ou o modelo do contínuo elástico, e existem soluções analíticas e numéricas para ambos os modelos. A idealização de Winkler (1867) representa o solo como um sistema composto de molas idênticas, discretas, pouco espaçadas, mutuamente independentes, e elástico-lineares. Com esse modelo, procura-se determinar a rigidez das molas. Porém esse modelo apresenta limitações como a restrição da deformação da fundação apenas às regiões carregadas, devido à falta de continuidade do meio discretizado por molas. Com o objetivo de aprimorar o modelo de Winkler, foram produzidos estudos como a fundação de Filonenko-Borodich (1940), a fundação de Hetenyi (1946), a fundação de Pasternak (1954), e outros. A idealização de Winkler é utilizada em diversos estudos sobre interação-solo estrutura como em Cheung e Zienkiewicz (1965), Mylonakis e Gazetas (1998), Allotey e El Nagggar (2008), Bao e Liu (2020), devido à sua simplicidade.

A modelagem do solo como um meio contínuo se deve inicialmente a Boussineq (1885) que analisa o problema de um sólido elástico-linear, semi-infinito, homogêneo, isotrópico, e submetido a uma força concentrada normal ao plano de contorno, usando a teoria da elasticidade. Neste caso, assume-se uma função contínua para representar o comportamento do sólido. Nessa idealização, o solo é geralmente considerado como um meio semi-infinito e isotrópico por questão de simplicidade. Essa abordagem fornece muito mais informações sobre

as tensões e deformações no interior do maciço de solos, quando comparado ao modelo de Winkler. Apresenta também a vantagem de facilitar a entrada dos parâmetros como módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson. Em algumas formulações, a idealização do meio contínuo apresenta limitações como inconsistências nas reações calculadas nos contornos da fundação, e nos deslocamentos longe das regiões carregadas, conforme apresentadas em Föppl (1909). Estudos como a fundação de Vlasov (1960) e a fundação de Reissner (1958), melhor detalhada em Rhines (1966), foram desenvolvidos com o intuito de melhorar a distribuição de tensões e deslocamentos observados no meio elástico.

Em se tratando da modelagem do solo como um meio estratificado, destacam-se os trabalhos de Burmister (1943, 1945), em que é apresentado um método baseado na teoria da elasticidade para o cálculo de tensões e deslocamentos num sistema de duas camadas. O método desenvolvido demonstra a influência predominante de dois fatores nas curvas carga-recalque do sistema em análise, a saber, a relação entre o raio da área de suporte e a espessura do reforço ou da camada do pavimento, e a relação entre os módulos de elasticidade do subleito e do pavimento. Para fins práticos de dimensionamento, um coeficiente de recalque é determinado e aplicado como um simples fator de multiplicação ou correção na já conhecida equação de Boussineq. Outros pesquisadores utilizaram e estenderam as formulações propostas por Burmister, entre eles, Poulos (1967), Chan et al. (1974), Gibson (1967, 1974), Davies e Banerjee (1978).

Outro método baseado na teoria da elasticidade é o Método das Camadas Finitas (MCF), amplamente utilizado para a modelagem do solo estratificado. O MCF requer como hipótese básica a elasticidade do meio para que este possa ser dividido em camadas horizontalmente homogêneas e infinitas. A formulação matemática do método depende da transformação das equações da teoria da elasticidade em um sistema de equações diferenciais ordinárias, o que é feito pela aplicação da transformada de Fourier. No estudo de Small e Booker (1984), é proposta uma matriz de flexibilidade para a camada finita que pode ser montada de maneira semelhante à matriz de rigidez, mas com a vantagem de não se tornar infinita com a consideração de um material incompressível. Outros trabalhos como de Zhang et al. (1982), Booker et al. (1989), Lee e Small (1991), Southcott e Small (1996), Ta e Small, Cheung et al. (1998), e Tian et al. (2016) empregaram ou estenderam as formulações do MCF no âmbito da modelagem do solo.

Com o intuito de sempre aprimorar a representação matemática do comportamento físico do solo, existem modelos não-linear, elastoplástico e viscoelástico, como nos trabalhos de Duncan e Chang (1970), Das (1983), Ter-Martirosyan (1992), Noorzaei et al. (1995) e Helwany (2007). O Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de

Contorno (MEC), métodos numéricos utilizados no presente trabalho, também são abordagens que procuram melhorar a modelagem do problema de interação solo-estrutura.

O MEF é um método muito utilizado devido à abrangência de problemas de engenharia que podem ser analisados. É possível modelar diversas condições complexas com um alto grau de realismo, incluindo não-linearidade física, geométrica e de contato. Contudo para a modelagem do solo, o MEF não é mais eficiente que o MEC já que requer um número muito maior de graus de liberdade e recorre ao truncamento da malha ou a elementos infinitos aproximados para modelar domínios infinitos ou semi-infinitos, como é o caso do solo. Alguns trabalhos que utilizaram o MEF para a análise de interação solo-estrutura são os de Ottaviani (1975), Chow e Teh (1991), Liao et al. (2007), e Torabi e Rayhani (2014).

Com a proposta de novas soluções fundamentais, o MEC foi se tornando cada vez tão abrangente quanto o MEF. No que diz respeito à modelagem do solo, com o MEC consegue-se uma satisfação automática das condições de contorno para domínios infinitos e semi-infinitos, evitando assim a aproximação numérica das regiões remotas do domínio. Além disso, com o MEC consegue-se uma redução da dimensionalidade do problema uma vez que apenas os contornos do problema precisam ser discretizados. Com isso, o número de incógnitas é drasticamente reduzido, resultando em menor custo computacional, sobretudo no caso de problemas tridimensionais. Com essa abordagem, alguns trabalhos são de Poulos (1967), Banerjee e Davies (1977), Maier e Novati (1987), Brebbia e Domingues (1992), Parreira e Varatojo (1993), Paiva (1993), Ai et al (2009, 2013). O MEC e o MEF também são utilizados conjuntamente para a análise de problemas de interação solo-estrutura. O solo é modelado pelo MEC e os elementos estruturais são modelados pelo MEF. Essa abordagem é geralmente muito eficiente, pois permite aproveitar as vantagens dos dois métodos, conforme demonstrado em Zienkiewicz et al. (1977). Formulações MEC/MEF são utilizadas em trabalhos como de Zhang et al. (1998), Almeida (2003), Ribeiro (2009) e Luamba (2018).

Após apresentar as principais abordagens para a modelagem da interação solo-estrutura junto com alguns trabalhos relacionados, são apresentados a seguir com mais detalhes alguns trabalhos que melhor posicionam as formulações propostas no presente trabalho. Os resultados desses trabalhos são utilizados, entre outros, na comparação com os resultados obtidos no presente trabalho.

A solução fundamental de Mindlin (1936) possibilita a determinação do campo de deslocamentos devido a pontos de cargas estáticas, verticais e horizontais localizados a uma profundidade arbitrária embaixo de um meio semi-infinito e elástico. Esta solução é particularmente adequada para problemas envolvendo sólidos tridimensionais semi-infinitos, já

que diferentemente da solução fundamental de Kelvin (Love, 1944), permite discretizar apenas a superfície carregada do sólido e/ou as linhas coincidentes com as linhas de carga, e não todo o sólido tridimensional. Com isso, elimina-se a necessidade da discretização da superfície livre do solo, reduzindo assim consideravelmente o número de incógnitas do problema, e consequentemente as dimensões das matrizes envolvidas.

Foi introduzida por Steinbrenner (1934) uma equação aproximada do deslocamento da superfície, sob uma área carregada retangular, de uma camada elástica apoiada em uma base rígida. Esta equação foi amplamente utilizada para estimar o deslocamento elástico de um sistema solo-rocha, devido a sua simplicidade e à falta de soluções mais complexas para a determinação do deslocamento da superfície desse sistema. Poulos (1967) utiliza, além da teoria de Burmister, o modelo aproximado de Steinbrenner junto com a solução fundamental de Mindlin para deslocamentos, a fim de determinar o campo de deslocamentos na superfície de uma camada de solo apoiada em uma base rígida, ou seja, de deslocamento nulo.

Em Ueshita e Meyerhof (1968), calcula-se por uma solução baseada na teoria da elasticidade o deslocamento da superfície de uma camada elástica apoiada em uma base rígida (sistema solo-rocha) submetida a áreas uniformemente carregadas de diversas configurações geométricas. Calcula-se também o deslocamento de um sistema elástico de duas camadas, em que a camada superior é mais compressível do que a inferior, e submetida a uma área circular uniformemente carregada. Os resultados obtidos são comparados com os obtidos pelo modelo de Steinbrenner. Os autores concluem que o uso da equação aproximada de Steinbrenner resulta, em geral, em deslocamentos menores, e propõem o uso de um fator de espessura equivalente no modelo de Steinbrenner quando o coeficiente de Poisson se encontra num determinado intervalo.

O trabalho de De Sanctis et al. (2002) é um dos poucos que utiliza o modelo de Steinbrenner para a análise do sistema radier estaqueado e solo estratificado. O sistema é modelado pelo MEC. Este trabalho segue o mesmo embasamento teórico dos trabalhos de Poulos (1967, 1979). Na análise de uma estaca isolada, os deslocamentos convertidos em fatores de influência são aceitáveis segundo os autores, com erro na ordem de 13% em relação aos resultados obtidos pelo MEF, quando as rigidezes das camadas são crescentes com a profundidade ou com pouca variação. Para uma rigidez decrescente do solo, os resultados apresentam um erro grosseiro na ordem de 35%; esse comportamento foi também observado em Poulos (1979). No caso da análise de um radier estaqueado, a precisão é de modo geral aceitável, desde que seja adotado um valor adequado da rigidez para uma estaca isolada.

Outro trabalho onde é utilizado o modelo de Steinbrenner é de Shaaban e Rashed (2013) que analisam através do MEC a interação entre uma placa grossa e o solo. A modelagem da placa é baseada na teoria de deformação de placa por cisalhamento ou teoria de Reissner. O solo é considerado como um meio semi-infinito modelado pelas soluções analíticas de Boussinesq-Mindlin. Como meio finito, ele pode ter múltiplas camadas com a presença de uma base rígida, e é modelado pela solução analítica de Steinbrenner. Os resultados obtidos são consistentes quando comparados com os obtidos por outros métodos analíticos e numéricos.

Uma solução empregando elementos finitos e infinitos para a determinação de campos de deslocamento vertical de placas apoiadas num sistema de múltiplas camadas foi proposta por Sadecka (2000). A placa grossa e a área de contato são modeladas pelo MEF. As condições cinemáticas para cada camada são semelhantes às propostas por Vlasov (1960). A formulação de Vlasov é aprimorada pela utilização de elementos infinitos para a modelagem do solo fora da área de contato com a placa e pela introdução de funções não-lineares para a aproximação das deflexões ao longo da espessura das camadas.

No departamento de Engenharia de Estruturas (SET/EESC/USP), diversos trabalhos foram desenvolvidos abordando o tema interação solo-estrutura e utilizando principalmente o MEC e o MEF. Em Almeida (2003), o MEC com o emprego da solução fundamental de Kelvin é utilizado para a modelagem do maciço de solos estratificado, e conforme o Método de Rigidez Sucessiva (MRS) proposto por Maier e Novati (1987). O MRS é estendido à análise tridimensional e com a inclusão de sub-regiões, também tridimensionais, que simulem os elementos de fundação como estacas que podem ultrapassar ou não as diferentes camadas. A superestrutura é simulada via MEF com elementos convencionais de lâmina. Na comparação dos resultados obtidos com a formulação proposta e com o método aproximado de Steinbrenner, o autor conclui que o modelo de Steinbrenner subestima os valores de deslocamentos, e à medida que o plano indeslocável se aproxima da superfície livre do solo, os valores são de 10% a 15% menores. Contudo essas conclusões, as mesmas observadas em Poulos (1967), foram tiradas apenas na análise do problema básico de um maciço de solos submetido a um carregamento uniformemente distribuído na superfície.

Em Ribeiro (2009), a formulação desenvolvida permite a consideração de várias camadas de solo com características físicas diferentes; e sobre o solo, que pode conter estacas, podem ser apoiados diversos tipos de estruturas tais como placas e um edifício. O MEF é utilizado para a modelagem de todos os elementos estruturais. O MEC, com o emprego da solução fundamental de Kelvin, é utilizado para a modelagem do solo, junto com uma malha de elementos de contorno infinitos (ECI) nas bordas da malha de elementos de contorno a fim



de modelar o comportamento das variáveis de campo em longas distâncias. Na formulação proposta, as estacas não cruzam as camadas, ou seja, estão integralmente contidas em uma única camada de solo, e todo o maciço é equacionado como um único sólido.

Em Luamba (2018), analisou-se a interação entre um radier estaqueado e o solo considerado como um meio semi-infinito, com o sistema radier estaqueado-solo submetido tanto a cargas verticais como a cargas horizontais. A estaca foi discretizada por elementos finitos de viga tridimensional, e o número desses elementos é uma variável dentro do código computacional desenvolvido possibilitando uma discretização que melhor simulasse a flexibilidade da estaca. A placa foi discretizada por elementos finitos de placa DKT (*Discrete Kirchhoff Theory*) e de chapa CST (*Constant Strain Triangle*). O acoplamento MEC/MEF utilizado junto com a solução fundamental de Mindlin resultou em um custo computacional muito eficiente. O solo sendo um meio geralmente não-homogêneo, a consideração da sua estratificação, e a presença ou não de uma base rígida a uma distância prescrita, são condições físicas que mais se aproximam da realidade.

Logo, no presente trabalho procura-se avaliar a precisão obtida com a formulação MEC/MEF e o emprego do modelo de Steinbrenner para a consideração da estratificação do solo. A formulação assim desenvolvida apresenta algumas vantagens como um melhor custo computacional e praticidade na modelagem do problema em comparação com outras formulações como o MEF tridimensional ou o MEC via solução fundamental de Kelvin e técnicas de sub-regiões. De fato, o modelo de Steinbrenner utiliza a solução fundamental de Mindlin e os deslocamentos são calculados por simples operações matemáticas entre os deslocamentos em um dado ponto do sólido e na cota da base rígida. As operações envolvidas sendo de adição e de subtração, a matriz do solo não muda de tamanho, logo o custo computacional é semelhante ao custo obtido na modelagem do solo como um meio semi-infinito. A formulação deste trabalho também propõe uma técnica que permite resolver as inconsistências inerentes ao modelo de Steinbrenner, conforme comentado nos trabalhos acima, no que diz respeito ao campo de deslocamentos calculado. Demonstra-se através de exemplos numéricos, a eficiência e a acurácia da técnica desenvolvida na análise da interação estaca-solo com uma rigidez do solo decrescente com a profundidade.

## 2.2 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DA ESTACA

A instabilidade por flambagem da estaca é um fenômeno crítico a ser considerado na elaboração de um projeto estrutural envolvendo estruturas de fundação por estacas. De fato, com estacas esbeltas, a flambagem pode ocorrer repentinamente antes da plastificação da estaca e levar ao colapso estrutural. Segundo Poulos (1980), nas primeiras investigações realizadas sobre o fenômeno, considerava-se que a flambagem de estacas, de dimensões normais ou pouco esbeltas, só ocorreria em solos muito moles. Contudo, com o uso de estacas cada vez mais esbeltas, e em certas situações em que as estacas se encontram parcialmente inseridas no solo, ou seja, com uma parte no solo e a outra exposta ao ar ou ao mar como em estruturas marinhas, a perda de estabilidade por flambagem se tornou um evento com maior probabilidade de ocorrência. Com isso diversos estudos, empregando métodos analíticos e numéricos, foram sendo desenvolvidos para a obtenção de estimativas mais precisas para a carga crítica de flambagem da estaca inserida no solo.

Um grande número de soluções analíticas na literatura utiliza a teoria da reação do subleito com a modelagem do solo pelo modelo de molas de Winkler. Uma das primeiras soluções analíticas em forma fechada para a determinação da carga crítica de flambagem é do Timoschenko (1936). Neste estudo, a estaca é apoiada na base, e considera-se um módulo de reação do subleito constante, ou seja, assume-se uma distribuição constante do esforço axial na estaca ao longo do solo. Uma equação diferencial governante do problema de uma viga apoiada em fundação, e também baseada no modelo de Winkler, foi proposta por Hetenyi (1946). Essa equação foi utilizada nas formulações de diversos autores para a determinação de diversos valores críticos da carga axial que ocasionam a perda de estabilidade da estaca. Davisson e Robinson (1963, 1965) utiliza essa equação governante, considera diversas condições de contorno para a estaca que pode ser completamente ou parcialmente inserida no solo, e módulos de reação do subleito constantes e lineares na modelagem do solo. Prakash (1987) também parte dessa equação governante, aplica o método variacional e equações senoidais para a deflexão da estaca, resultando em formulações analíticas fechadas.

Recentemente, algumas formulações, ainda baseadas no modelo de Winkler, foram propostas para estudos relativamente mais avançados sobre a flambagem de estacas. É o caso dos trabalhos de Lin e Chang (2002) e de Fenu et al. (2021) que apresentam um modelo numérico utilizando o método de Rayleigh-Ritz para a análise da flambagem de estacas, com diferentes condições de contorno, e completamente ou parcialmente inseridas num solo de múltiplas camadas. No estudo de Silveira et al. (2015), realiza-se uma análise de estabilidade

não-linear de estacas modeladas pelo MEF e dois modelos diferentes para o solo, considerando elementos de fundação discretas (Winkler) e contínuos (Winkler e Pasternak). Outro trabalho é de Lee et al. (2018) que apresenta um modelo analítico utilizando os métodos de Runge-Kutta e de Regula-Falsi para a estimativa da flambagem de estacas de seção variável e inseridas num solo não-homogêneo. Deve-se salientar que a modelagem do solo como um meio elástico e contínuo é muito mais realística que o modelo de Winkler, embora haja diversos trabalhos utilizando o modelo de Winkler com aplicações práticas, como em problemas de estacas submetidas a cargas tanto estáticas quanto dinâmicas. Uma das principais deficiências do modelo de Winkler é a presença de descontinuidades de deslocamento entre partes carregada e descarregada da superfície da fundação; algo que, na realidade, não acontece na superfície contínua do solo. É também possível obter muito mais informações sobre o estado de tensão e deformação do solo com o modelo elástico linear do que com o modelo de Winkler.

Uma compilação de teorias e métodos para a análise de flambagem linear e não-linear de elementos estruturais como vigas e colunas foi realizada por Chajes (1974). Formulações referentes à análise linear e elástica de estacas submetidas a cargas axiais e laterais foram estendidas por Madhav e Davis (1974) para analisar o fenômeno de flambagem da estaca modelada como uma viga inserida num meio elástico e contínuo. Essas formulações foram apresentadas por Poulos (1980) utilizando o MDF e as equações de Mindlin para deslocamentos. Os resultados obtidos foram comparados com os obtidos pela teoria da reação de subleito que utiliza o modelo de molas de Winkler, e foi observado que este último subestima a carga crítica de flambagem em se tratando de estacas flexíveis. Chen et al. (2017) desenvolveram uma solução analítica similar à solução de Prakash (1987) no que diz respeito ao uso de equações senoidais para a representação da curva de deflexão da estaca. Contudo, no lugar do modelo de Winkler, este estudo recorre à lei de Hooke para a modelagem das pressões laterais do solo.

No que diz respeito ao uso do MEF para análise da flambagem, foi observado que muitos autores geralmente recorrem a softwares comerciais como ABAQUS®, ANSYS®, COMSOL® e SAP2000®. É o caso dos trabalhos de Zhou et al. (2010), Nadeem et al. (2014), Shatri et al. (2014), Foriero e Bayati (2018), Moghaddam et al. (2018), Halimi e Kouloughli (2022). Devem provavelmente existir autores que também utilizam o MEC para análise da flambagem de estacas, contudo, nas pesquisas bibliográficas realizadas, não foram encontrados estudos empregando esse método numérico. Logo, a formulação MEC/MEF deste trabalho para a análise da flambagem é uma proposta original, e é outra justificativa da escolha do tema, além da praticidade e eficiência da formulação na análise de estacas inseridas em meios não-

homogêneos conforme discutido na seção anterior. De fato, com esta formulação, a implementação da matriz de instabilidade da estaca via MEF é realizada utilizando os resultados da distribuição do esforço axial obtido na análise MEC/MEF da estaca em interação com o solo e com uma carga unitária vertical aplicada no seu topo. A formulação proposta para a análise de flambagem linear da estaca inserida em solos homogêneos pode ser estendida para a consideração de solos de múltiplas camadas, e também para a análise de problemas de flambagem não-linear, como os que levam em consideração a excentricidade da carga e a presença de imperfeições geométricas.

### 3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Neste capítulo são apresentadas inicialmente as equações governantes de problemas elastostáticos, e em seguida apresenta-se a equação integral de contorno do MEC utilizada na análise estática de sólidos tridimensionais. Por fim, apresenta-se a solução fundamental de Mindlin muito adequada para a modelagem de sólidos semi-infinitos tridimensionais, homogêneos, isotrópicos e elástico-lineares. Utiliza-se neste trabalho a formulação direta, em que as funções desconhecidas são as variáveis reais e não fictícias do problema em análise, para a formulação da equação integral de contorno, conforme Aliabadi (2002).

#### 3.1 EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA ELASTOSTÁTICO

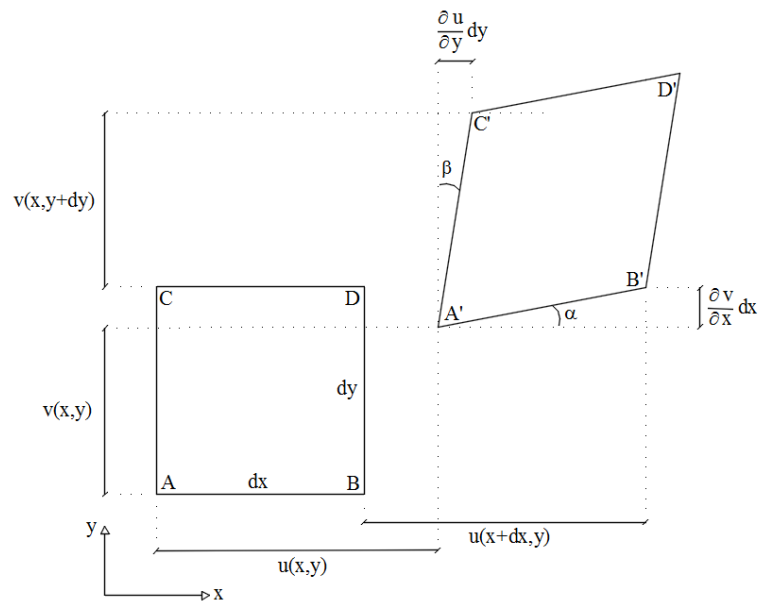
Apresentam-se nesta seção equações básicas da elasticidade necessárias para a formulação do MEC e suas aplicações na análise linear de tensões. Determinam-se assim, o estado de deformação e o estado de tensão de qualquer ponto pertencente a um sólido tridimensional, e as relações constitutivas, que juntos resultam em equações governantes para a resolução de um problema elastostático.

##### ▪ Estado tridimensional de deformação

Considera-se um elemento retangular infinitesimal com dimensões iniciais  $dx$  e  $dy$ , e passando por uma deformação bidimensional, conforme mostrado na Figura 3.1. As relações deformações-deslocamentos para o caso geral tridimensional são:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Figura 3.1 – Deformação geométrica bidimensional.



Fonte: Autor.

Um tensor de deformação  $\varepsilon_{ij}$  pode ser utilizado para representar as componentes de deformação normais ( $\varepsilon$ ) e tangenciais ( $\gamma$ ):

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Tem-se por exemplo:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_x \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$$

O tensor de deformação é simétrico, ou seja:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} \quad (3.4)$$

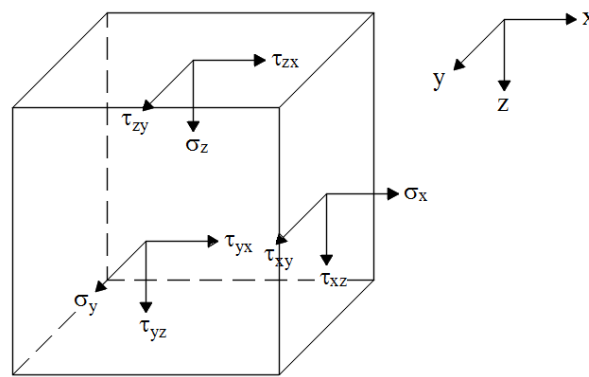
Tem-se em notação indicial:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.5)$$

### ▪ Estado tridimensional de tensão

Para representar o estado de tensão em um ponto de um corpo, utiliza-se convencionalmente um cubo com vetores tensão atuando nas facetas paralelas aos planos coordenados, conforme mostrado na Figura 3.2. Os símbolos  $\sigma$  e  $\tau$  representam respectivamente componentes normais e tangenciais. Cada componente é escrito com dois índices, o primeiro sendo a direção normal à faceta em que atua o vetor tensão, e o segundo a direção da componente.

Figura 3.2 – Componentes de tensão.



Fonte: Autor.

O tensor de tensão é:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

O tensor de tensão é simétrico, ou seja:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \quad (3.7)$$

Aplicando equações de equilíbrio de forças em um ponto no interior do corpo, são obtidas três equações de equilíbrio envolvendo componentes de tensões normais e tangenciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Tem-se em notação indicial:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (3.9)$$

Onde  $b_i$  é a força de volume na direção  $i$ .

Com as equações de equilíbrio aplicadas em um ponto na superfície do corpo, as três equações de equilíbrio são expressas por:

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= P_x \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z &= P_y \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z &= P_z \end{aligned} \quad (3.10)$$

Tem-se em notação indicial:

$$\sigma_{ij} n_j = P_i \quad (3.11)$$

Onde  $P_i$  é a força de superfície na direção  $i$ .

#### ▪ Relações tensão-deformação

Considerando um material homogêneo, isotrópico e elástico linear, as deformações em um elemento submetido a um carregamento geral são dadas através da lei de Hooke:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] & \varepsilon_{12} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{12} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] & \varepsilon_{23} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{23} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] & \varepsilon_{31} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{31} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Onde:

$E$  é o módulo de elasticidade longitudinal.

$\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Em termos de tensões, a lei de Hooke é escrita como:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda e + 2 G \varepsilon_{11} & \sigma_{12} &= 2 G \varepsilon_{12} \\ \sigma_{22} &= \lambda e + 2 G \varepsilon_{22} & \sigma_{23} &= 2 G \varepsilon_{23} \\ \sigma_{33} &= \lambda e + 2 G \varepsilon_{33} & \sigma_{13} &= 2 G \varepsilon_{13} \end{aligned} \quad (3.13)$$



Onde:

$$\lambda = \frac{2 \nu G}{(1 - 2 \nu)} \quad \text{é a constante de Lamé.}$$

$$e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad \text{é a deformação volumétrica.}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{é o módulo de elasticidade transversal.}$$

Finalmente, as relações tensão-deformação ou relações constitutivas em notação indicial são:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2 G \varepsilon_{ij} \quad (3.14)$$

No total, foram apresentadas 15 equações para a resolução de um problema elastostático, ou seja, 3 equações de equilíbrio no interior (Eq. 3.8) e na superfície (Eq. 3.10) do corpo, 6 equações da relação deformação-deslocamento (Eq. 3.1), e 6 equações da relação tensão-deformação (Eq. 3.12). Assim, as 15 incógnitas (3 de deslocamento, 6 de tensão e 6 de deformação) podem ser determinadas para cada ponto de um corpo ou sólido tridimensional.

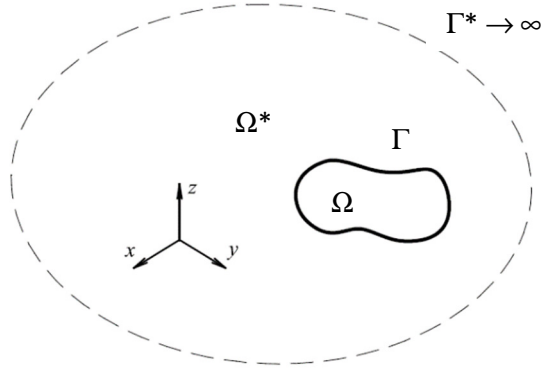
### 3.2 EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

Existem vários métodos para a formulação de uma equação integral de contorno. Com a formulação direta, deslocamentos e forças de superfícies são diretamente relacionados, sem a necessidade de recorrer a grandezas fictícias. Dados dois estados de equilíbrio  $(u_i, P_i, b_i)$  e  $(u_i^*, P_i^*, b_i^*)$  onde  $u_i$  e  $u_i^*$  representam deslocamentos,  $P_i$  e  $P_i^*$ , forças de superfície, e  $b_i$  e  $b_i^*$ , forças de volume, da Eq. (3.9), pode-se escrever, de acordo com o método dos resíduos ponderados, a seguinte relação:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u_i^* d\Omega = 0 \quad (3.15)$$

Onde:

$\Omega$  é o domínio de um corpo com contorno  $\Gamma$ , conforme ilustrado na Figura 3.3.

Figura 3.3 – Região infinita  $\Omega^*$  contendo um corpo de domínio  $\Omega$ .

Fonte: Autor.

As grandezas  $u$ ,  $P$  e  $b$  num dado corpo são funções de  $(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z) \\ P &= P(x, y, z) \\ b &= b(x, y, z) \end{aligned} \quad (3.16)$$

A parcela  $\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega$  da Eq. (3.15), sabendo que  $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* = \sigma_{ij} u_{i,j}^*$ , pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_i^*)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (3.17)$$

Da relação deformação-deslocamento dada pela Eq. (3.5), tem-se:

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} u_{i,j}^* + \sigma_{ij} u_{j,i}^*) = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} u_{i,j}^* + \sigma_{ji} u_{j,i}^*) = \sigma_{ij} u_{i,j}^* \quad (3.18)$$

Do teorema da divergência, tem-se:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_i^*)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j u_i^* d\Gamma \quad (3.19)$$

Com  $P_i = \sigma_{ij} n_j$ , a Eq. (3.17) se torna:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} P_i u_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (3.20)$$

A Eq. (3.20) substituída na Eq. (3.15) resulta em:

$$\int_{\Gamma} P_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (3.21)$$

Da relação tensão-deformação dada pela Eq. (3.14), a parcela  $\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega$  na Eq. (3.21) pode ser expressa como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\lambda \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{kk} + 2 G \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}^*) d\Omega \quad (3.22)$$

Sabe-se que:

$$\delta_{ij} \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{mm}^* \text{ e } \delta_{ij} \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{kk} \quad (3.23)$$

Assim a Eq. (3.22) se torna:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\lambda \delta_{ij} \varepsilon_{mm}^* + 2 G \varepsilon_{ij}^*) \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (3.24)$$

Logo, com as Eqs. (3.21) e (3.24), obtém-se a seguinte expressão:

$$\int_{\Gamma} P_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} P_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega \quad (3.25)$$

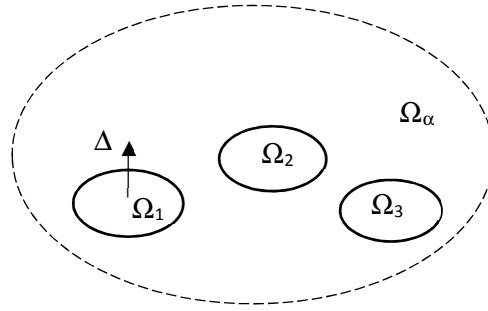
A relação (3.25) é conhecida como o Teorema de reciprocidade de Betti.

É necessária a existência de uma solução fundamental para resolver um problema de engenharia pelo MEC. Uma solução fundamental é a solução da equação diferencial governante do problema devido a uma força concentrada. A função delta de Dirac é uma representação matemática dessa força concentrada, ilustrada, por exemplo, na Figura 3.14. Para problemas elastostáticos, a equação integral de contorno pode ser obtida pelo teorema de reciprocidade de Betti.

Pode-se fazer a equivalência entre a força de volume  $b_i^*$  e a carga concentrada em um meio infinito representada pela função delta de Dirac  $\Delta(x - x_0)$ :

$$b_i^* = \Delta(x - x_0) \quad (3.26)$$

Figura 3.4 – Função delta de Dirac aplicada em domínios.



Fonte: Autor.

Baseando-se nas propriedades de delta de Dirac, a parcela  $\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega$  da Eq. (3.25) pode ser expressa como:

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega = \int_{\Omega} \Delta(x - x_0) u_i d\Omega = u_i(x_0) \quad (3.27)$$

Os campos de deslocamento e de força de superfície resultantes do problema fundamental com carga concentrada são:

$$\begin{aligned} u_i^* &= \mathbf{u}^*(s, f) \\ P_i^* &= \mathbf{P}^*(s, f) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Logo, pode-se reescrever a Eq. (3.25) como:

$$\mathbf{C}(s)u(s) + \int_{\Gamma} \mathbf{P}^*(s, f)u(f)d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^*(s, f)P(f)d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{u}^*(s, f)b(f)d\Omega \quad (3.29)$$

Onde:

$s$  é o ponto fonte ou ponto de aplicação de  $\Delta(s, f)$ .

$f$  é o ponto campo ou ponto onde se quer medir a influência de  $\Delta(s, f)$ .

$\mathbf{C}(s)$  é o termo livre.

$\mathbf{u}^*(s, f)$  é a solução fundamental dos deslocamentos.

$\mathbf{P}^*(s, f)$  é a solução fundamental das forças de superfície.

A Eq. (3.29) é conhecida como a Identidade Somigliana para deslocamentos que relaciona deslocamentos em um ponto interno  $f$  com deslocamentos e forças de superfície no contorno.

Vale observar que a grandeza  $\mathbf{C}(s)$  ou equivale à matriz identidade ou é nula a depender da presença ou não do ponto de aplicação de  $\Delta(s, f)$  no domínio  $\Omega$ .

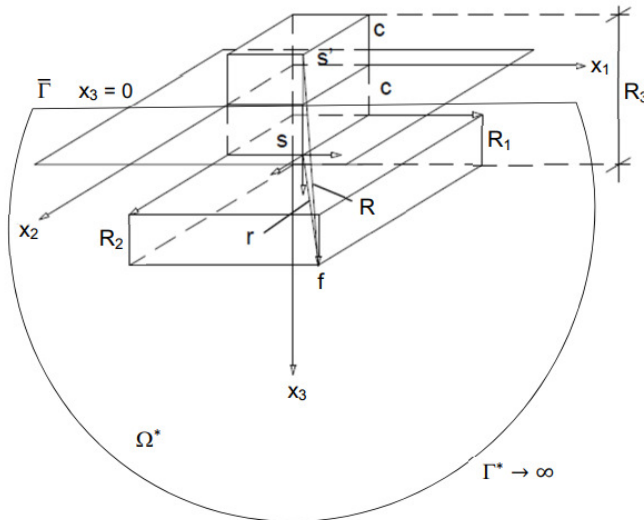
### 3.3 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE MINDLIN

No problema fundamental de Mindlin (Mindlin, 1936), o domínio  $\Omega^*$  é tido como um sólido semi-infinito, homogêneo, isotrópico e elástico, conforme ilustrado na Figura 3.5. As forças de superfície são consideradas nulas no plano  $x_3 = 0$  delimitado pelo contorno  $\bar{\Gamma}$ . A força concentrada representada pela função delta de Dirac, pode ser aplicada em qualquer ponto do domínio  $\Omega^*$ , inclusive no contorno  $\bar{\Gamma}$ .

A solução fundamental de Mindlin para deslocamentos pode ser representada pelo tensor  $\mathbf{u}^*$ :

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Figura 3.5 – Problema fundamental de Mindlin.



Fonte: Autor.

As componentes do tensor representando deslocamentos fundamentais são:

$$u_{11}^* = K \left\{ \frac{3 - 4\nu}{r} + \frac{1}{R} + \frac{r_1^2}{r^3} + \frac{(3 - 4\nu)r_1^2}{R^3} + \frac{2cz}{R^3} \left( 1 - \frac{3r_1^2}{R^2} \right) + \frac{4(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{R + R_3} \left[ 1 - \frac{r_1^2}{R(R + R_3)} \right] \right\} \quad (3.31)$$

$$u_{12}^* = Kr_1 r_2 \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{3-4\nu}{R^3} - \frac{6cz}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)^2} \right\} \quad (3.32)$$

$$u_{13}^* = Kr_1 \left\{ \frac{r_3}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_3}{R^3} - \frac{6czR_3}{R^5} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \right\} \quad (3.33)$$

$$u_{21}^* = u_{12}^* \quad (3.34)$$

$$u_{22}^* = K \left\{ \frac{3-4\nu}{r} + \frac{1}{R} + \frac{r_2^2}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_2^2}{R^3} + \frac{2cz}{R^3} \left( 1 - \frac{3r_2^2}{R^2} \right) + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R+R_3} \left[ 1 - \frac{r_2^2}{R(R+R_3)} \right] \right\} \quad (3.35)$$

$$u_{23}^* = \frac{r_2}{r_1} u_{13}^* \quad (3.36)$$

$$u_{31}^* = Kr_1 \left\{ \frac{r_3}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r_3}{R^3} + \frac{6czR_3}{R^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_3)} \right\} \quad (3.37)$$

$$u_{32}^* = \frac{r_2}{r_1} u_{31}^* \quad (3.38)$$

$$u_{33}^* = K \left\{ \frac{r_3^2}{r^3} + \frac{3-4\nu}{r} + \frac{6czR_3^2}{R^5} + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R} + \frac{(3-4\nu)R_3^2 - 2cz}{R^3} \right\} \quad (3.39)$$

Onde:

$E$  é o módulo de elasticidade do meio contínuo.

$$r = (r_i r_i)^{\frac{1}{2}}$$

$$r_i = x_i(f) - x_i(s)$$

$$R = (R_i R_i)^{\frac{1}{2}}$$

$$R_i = x_i(f) - x_i(s')$$

$$c = x_3(s) > 0$$

$$z = x_3(f) > 0$$

$$K = \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)} \quad (3.40)$$

A solução fundamental de Mindlin é particularmente adequada para o tipo de problemas analisados neste trabalho, ou seja, problemas envolvendo domínios semi-infinitos, uma vez que elimina a necessidade de se discretizar a superfície livre do solo, reduzindo assim o número de incógnitas do problema, e conseqüentemente as dimensões das matrizes envolvidas.

A equação integral de contorno pode ser expressa em forma matricial como:

$$[H]\{u\} = [G]\{P\} \quad (3.41)$$

Onde:

$[H]$  e  $[G]$  são as matrizes dos coeficientes de influência calculados fazendo o produto envolvendo as funções de forma dos elementos de contorno, o jacobiano, o peso dos pontos de integração e a solução fundamental  $\mathbf{P}^*$  no caso de  $[H]$  e  $\mathbf{u}^*$  no caso de  $[G]$ .

$\{u\}$  é o vetor dos deslocamentos no contorno.

$\{P\}$  é o vetor das forças de superfícies no contorno.

Neste capítulo, foram apresentadas de modo geral as formulações do MEC utilizadas neste trabalho. No capítulo 5, discute-se com mais detalhes a aplicação das Eqs. (3.29) e (3.41), com as aproximações adotadas, na análise numérica de problemas envolvendo estruturas de fundação e solos não-homogêneos.

## 4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Neste trabalho, o MEF é utilizado para a modelagem de estacas e de radiers, sendo a estaca modelada por elementos finitos de viga tridimensional, e o radier por elementos finitos de placa DKT. Logo, nos itens a seguir são apresentados sucintamente os procedimentos para a obtenção das matrizes de rigidez dos elementos finitos acima referidos. Ao modelar a estaca com vários elementos finitos de viga tridimensional, pode-se simular melhor a flexibilidade de estacas de diversos comprimentos. Por outro lado, o elemento finito de placa DKT é um dos mais eficientes para a análise de placas finas (Batoz et al., 1980), em termos de acurácia, custo e implementação computacional, e interpretação dos resultados.

### 4.1 MODELAGEM DA ESTACA

Apresenta-se nesta seção, o elemento finito de viga tridimensional utilizado para a modelagem da estaca, e métodos para a determinação da matriz de rigidez. Este elemento finito é escolhido porque a estaca sendo geralmente uma estrutura esbelta, a discretização da mesma utilizando vários elementos finitos de viga, com aproximação linear de deslocamentos em cada elemento, permite melhor simular a sua resposta mecânica.

#### 4.1.1 Elemento finito de viga tridimensional

Elementos finitos de viga tridimensional são utilizados na modelagem da estaca. Os nós são localizados nas extremidades dos elementos, e cada nó tem 5 parâmetros nodais, conforme mostrado na Figura 4.1.

A estaca pode estar submetida no seu topo por forças horizontais  $H_x$  e  $H_y$ , por força vertical  $V$ , e por momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$ . Tem-se um total de 10 parâmetros nodais por elemento finito, sendo deslocamentos horizontais  $u$  e  $v$ , deslocamento vertical  $w$ , e rotações  $u'$  e  $v'$  em torno de  $x$  e  $y$  respectivamente. Vetorialmente os deslocamentos nodais em um elemento finito da estaca podem ser representados por:

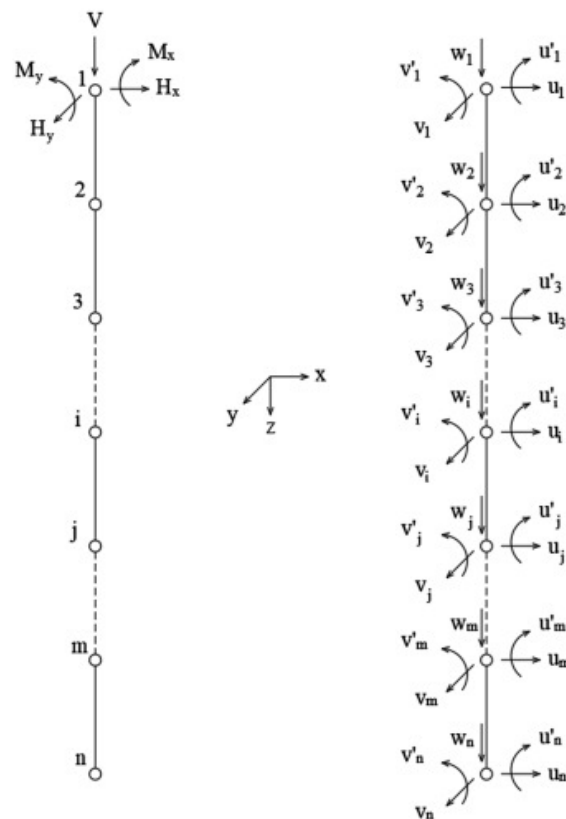
$$\{u\} = \{u_i \ v_i \ w_i \ u_i' \ v_i' \ u_j \ v_j \ w_j \ u_j' \ v_j'\} \quad (4.1)$$

Onde:

$\{u\}$  é o vetor dos deslocamentos nodais para o elemento finito delimitado pelos nós  $i$  e  $j$ .



Figura 4.1 – Cargas aplicadas no topo da estaca e parâmetros nodais.



Fonte: Autor.

#### 4.1.2 Determinação da matriz de rigidez

A determinação da matriz de rigidez de um elemento finito pode ser realizada via duas abordagens: o método direto e o método da energia. Segundo o método da energia, é possível associar uma quantidade escalar denominada energia potencial total  $\Pi$  a um sistema conservativo composto por um sólido deformável e forças aplicadas.

A energia potencial total é dada por:

$$\Pi = U + \Omega \quad (4.2)$$

Onde:

$U$  é a energia potencial elástica ou de deformação.

$\Omega$  é a energia potencial externa ou das forças aplicadas.

Para a estaca de comprimento  $L$ , e modelada conforme a Figura 5.1, tem-se:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L (u(z)'')^2 dz + \frac{EI}{2} \int_0^L (v(z)'')^2 dz + \frac{EA}{2} \int_0^L (w(z)')^2 dz \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \Omega = \int_0^L Q_x(z)u(z)dz - H_x\bar{u} - M_x\bar{u}' + \int_0^L Q_y(z)v(z)dz - H_y\bar{v} - M_y\bar{v}' \\ + \int_0^L Q_z(z)w(z)dz - V\bar{w} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Onde:

$E$  é o módulo de elasticidade longitudinal da estaca.

$I$  é o momento de inércia da estaca,  $I = I_x = I_y$ .

$A$  é a área da seção transversal da estaca.

$Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$  são as forças de superfície ao longo da estaca.

$\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  são os deslocamentos no nó do topo da estaca.

$\bar{u}'$  e  $\bar{v}'$  são os giros no nó do topo da estaca.

Ao minimizar a energia potencial total  $\Pi$  dada em (4.2), para obter a situação de equilíbrio, chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$[K_e]\{u\} = \{F\} + [T]\{Q\} \quad (4.5)$$

Onde:

$[K_e]$  é a matriz de rigidez da estaca.

$\{u\}$  é o vetor dos deslocamentos nodais da estaca

$$\{u\} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_1' \ v_1' \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ u_2' \ v_2' \ \dots \ u_n \ v_n \ w_n \ u_n' \ v_n'\}$$

$\{F\}$  é o vetor global das forças externas aplicadas no topo da estaca

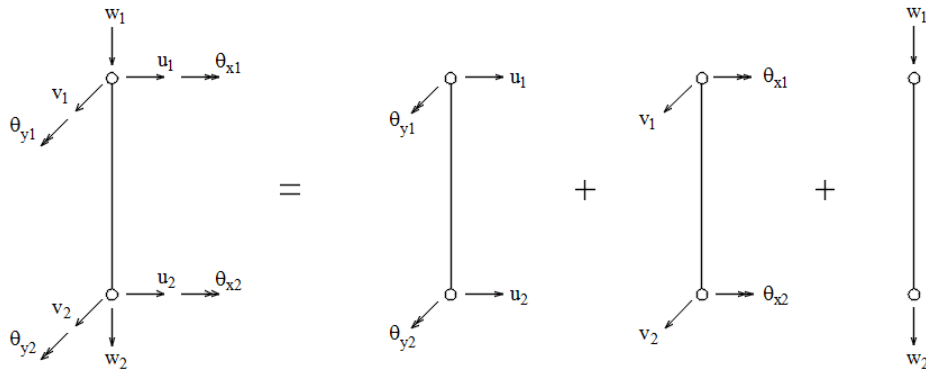
$$\{F\} = \{H_x \ H_y \ V \ M_x \ M_y \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}$$

$[T]$  é a matriz de transformação das forças de superfície em cargas nodais equivalentes.

$\{Q\}$  é o vetor das forças de superfície na interface estaca-solo.

Para a determinação da matriz de rigidez  $[K]$  de um único elemento finito de viga tridimensional, o mesmo pode ser considerado como a superposição de três elementos finitos, conforme mostrado na Figura 4.2, ou seja, um elemento finito de viga sujeito à flexão no plano  $xz$ , um elemento finito de viga sujeito à flexão no plano  $yz$ , e um elemento finito de barra sujeito ao esforço normal na direção  $z$ .

Figura 4.2 – Elemento finito de viga tridimensional.



Fonte: Autor.

Assim a matriz de rigidez do elemento finito de viga tridimensional pode ser obtida como:

$$[K] = [K]_{(xz)} + [K]_{(yz)} + [K]_{(z)} \quad (4.6)$$

A matriz de rigidez de qualquer elemento finito pode ser obtida aplicando um procedimento composto por cinco etapas:

1. Formulação da função de deslocamentos para o elemento finito, ou seja, escolha-se a função de interpolação ou funções de forma adequadas para o elemento.
2. Cálculo dos coeficientes desconhecidos da função de interpolação, relacionando os deslocamentos dentro do elemento finito com os deslocamentos nodais.
3. Cálculo das deformações internas a partir dos deslocamentos nodais.
4. Cálculo das forças internas no elemento, e consequentemente, cálculo das tensões a partir dos deslocamentos nodais.
5. Determinação da matriz de rigidez do elemento, relacionando as forças nodais com os deslocamentos nodais do elemento finito.

Ao aplicar o procedimento acima para a determinação das matrizes de rigidez, Eq. (4.8), dos elementos finitos de viga, pode-se escolher a função de interpolação  $u(z) = v(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3$ . Deve-se determinar na etapa (3) a matriz deslocamento-deformação  $[B]$  que é uma grandeza presente na formulação da matriz de rigidez de qualquer elemento finito, conforme mostrado na Eq. (4.7). A matriz deslocamento-deformação estabelece o comportamento físico do elemento representado por um modelo matemático para o cálculo das deformações no domínio do elemento. Encontra-se em Alves

Filho (2013) a aplicação do procedimento descrito acima para a obtenção das matrizes de rigidez de diversos elementos finitos.

$$[K] = \int_0^L [B]^T \cdot EI \cdot [B] \cdot dz \quad (4.7)$$

Onde:

$[K]$  é a matriz de rigidez do elemento finito.

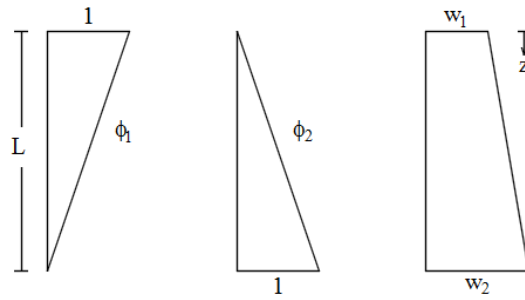
$$[K]_{(xz)} = [K]_{(yz)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Existem diversos métodos para a determinação da matriz de rigidez, em que se escolha uma equação de interpolação dos deslocamentos ou funções de forma para o elemento finito. Conforme mostrado no capítulo 6, o emprego de funções de forma permite maior flexibilidade no cálculo não somente das matrizes de rigidezes como também das matrizes de instabilidade.

A seguir, ilustra-se o procedimento apresentado acima, calculando a matriz de rigidez  $[K]_{(z)}$  do elemento finito de barra. Para a obtenção da matriz  $[B]$ , parte-se da expressão do deslocamento axial  $w$  de um ponto da barra. Conforme mostrado na Figura 4.3, a interpolação linear de  $w$  entre os valores nodais  $w_1$  e  $w_2$  resulta em:

$$w = \phi_1 w_1 + \phi_2 w_2 = \begin{bmatrix} \frac{L-z}{L} & \frac{z}{L} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Figura 4.3 – Funções de forma e aproximação de deslocamento na barra.



Fonte: Autor.

A Eq. (4.9) pode ser escrita como:

$$w = \phi d \quad (4.10)$$

Onde:

$\phi$  é a matriz das funções de forma.

$d$  é o vetor dos deslocamentos nodais.

Com  $w$  calcula-se a deformação axial  $\varepsilon_z$  como:

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = \left[ \frac{d\phi}{dz} \right] d = \left[ \frac{-1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] d = Bd \quad (4.11)$$

Logo, para o elemento finito de barra, a matriz de rigidez é dada por:

$$[K]_{(z)} = \int_0^L [B]^T \cdot EA \cdot [B] \cdot dz \quad (4.12)$$

Ou seja,

$$[K]_{(z)} = \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot EA \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot dz = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Finalmente, a matriz de rigidez do elemento finito de viga tridimensional, Eq. (4.14), sem a consideração da torção, é obtida combinando as matrizes de rigidez nas Eqs. (4.8) e (4.13) e seguindo a ordem dos parâmetros na Eq. (4.1).

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

## 4.2 MODELAGEM DA PLACA

Apresenta-se nesta seção o elemento finito de placa DKT que pode ser utilizado na modelagem de radiers e capeamentos rígidos. Faz-se um resumo da determinação da sua matriz de rigidez, uma vez que não é um dos objetos principais do presente trabalho. Maiores informações sobre formulações, eficiência do elemento finito DKT, e exemplos numéricos de verificação e validação podem ser encontrados em Batoz et al. (1980).

### 4.2.1 Elemento finito de placa

O elemento finito de placa DKT é um elemento triangular com três nós, e cada um com três parâmetros nodais, conforme mostrado na Figura 4.4.

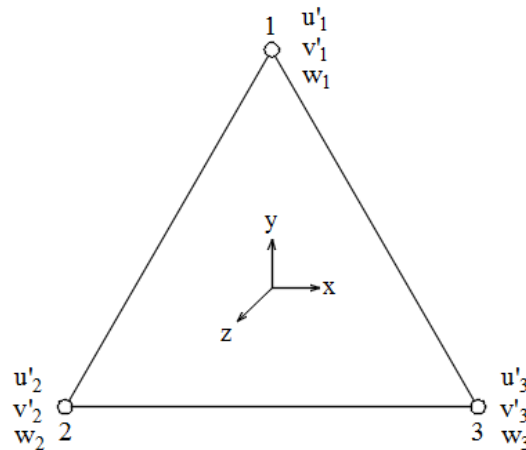
$$\{u\} = \{w_1 \ u_1' \ v_1' \ w_2 \ u_2' \ v_2' \ w_3 \ u_3' \ v_3'\} \quad (4.15)$$

Onde:

$\{u\}$  é o vetor de deslocamentos nodais.

$w$ ,  $u'$  e  $v'$  são, respectivamente, deslocamento na direção  $z$ , rotação em torno de  $x$ , e rotação em torno de  $y$ .

Figura 4.4 – Elemento finito de placa DKT.



Fonte: Autor.

A formulação do elemento finito DKT se baseia na teoria de Kirchhoff para placas finas. Adotam-se, portanto as seguintes hipóteses: a placa é plana, tem espessura constante, e é composta por material homogêneo, isotrópico e elástico linear; as deflexões são pequenas quando comparadas com a espessura da placa; as retas normais à superfície média da placa indeformada mantêm-se retas e normais à superfície média após a deformação. Ou seja, a placa não sofre deformação por cisalhamento, e o efeito do esforço cortante é negligível na presença da parcela devida à flexão.

#### 4.2.2 Determinação da matriz de rigidez

O deslocamento transversal  $w$ , na direção  $z$  normal ao plano  $xy$ , de uma placa fina com espessura constante  $t$ , e cujo plano médio coincide com o plano  $xy$ , é determinado pela seguinte equação de equilíbrio:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p(x, y) \quad (4.16)$$

Onde:

$D$  é a rigidez à flexão da placa.

$p(x, y)$  é um carregamento aplicado no sentido normal à placa.

A rigidez à flexão da placa é dada por:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.17)$$

Onde:

$t$  é a espessura da placa.

$E$  e  $\nu$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson.

A matriz de rigidez do elemento finito de placa DKT é dada por:

$$[K_{DKT}] = \int_A [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dA \quad (4.18)$$

Onde:

$[B]$  é a matriz deslocamento-deformação.

$[D]$  é a matriz com os parâmetros elásticos que caracterizam o material.

$A$  é a área do elemento finito.

A matriz  $[D]$  é dada por:

$$[D] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

A matriz de interpolação deslocamento-deformação  $[B]$  é dada por:

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} \left\{ \frac{\partial H_x}{\partial \xi} \right\} + y_{12} \left\{ \frac{\partial H_x}{\partial \eta} \right\} \\ -x_{31} \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial \xi} \right\} - x_{12} \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial \eta} \right\} \\ -x_{31} \left\{ \frac{\partial H_x}{\partial \xi} \right\} - x_{12} \left\{ \frac{\partial H_x}{\partial \eta} \right\} + y_{31} \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial \xi} \right\} + y_{12} \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial \eta} \right\} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$



Onde:

$$\left\{ \frac{\partial H_x}{\partial \xi} \right\} = \begin{pmatrix} P_6(1-2\xi) + \eta(P_5 - P_6) \\ q_6(1-2\xi) - \eta(q_5 + q_6) \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_6(1-2\xi) - \eta(r_5 + r_6) \\ -P_6(1-2\xi) + \eta(P_4 + P_6) \\ q_6(1-2\xi) + \eta(q_4 - q_6) \\ -2 + 6\xi + r_6(1-2\xi) + \eta(r_4 - r_6) \\ -\eta(P_4 + P_5) \\ \eta(q_4 - q_5) \\ \eta(r_4 - r_5) \end{pmatrix} \quad \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial \xi} \right\} = \begin{pmatrix} t_6(1-2\xi) + \eta(t_5 - t_6) \\ 1 + r_6(1-2\xi) - \eta(r_5 + r_6) \\ -q_6(1-2\xi) + \eta(q_5 + q_6) \\ -t_6(1-2\xi) + \eta(t_4 + t_6) \\ -1 + r_6(1-2\xi) + \eta(r_4 - r_6) \\ -q_6(1-2\xi) - \eta(q_4 - q_6) \\ -\eta(t_4 + t_5) \\ \eta(r_4 - r_5) \\ -\eta(q_4 - q_5) \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$\left\{ \frac{\partial H_x}{\partial \eta} \right\} = \begin{pmatrix} -P_5(1-2\eta) + \xi(P_5 - P_6) \\ q_5(1-2\eta) - \xi(q_5 + q_6) \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_5(1-2\eta) - \xi(r_5 + r_6) \\ \xi(P_4 + P_6) \\ \xi(q_4 - q_6) \\ \xi(r_4 - r_6) \\ P_5(1-2\eta) - \xi(P_4 + P_5) \\ q_5(1-2\eta) + \xi(q_4 - q_5) \\ -2 + 6\eta + r_5(1-2\eta) + \xi(r_4 - r_5) \end{pmatrix} \quad \left\{ \frac{\partial H_y}{\partial \eta} \right\} = \begin{pmatrix} -t_5(1-2\eta) + \xi(t_5 - t_6) \\ 1 + r_5(1-2\eta) - \xi(r_5 + r_6) \\ -q_5(1-2\eta) + \xi(q_5 + q_6) \\ \xi(t_4 + t_6) \\ \xi(r_4 - r_6) \\ -\xi(q_4 - q_6) \\ t_5(1-2\eta) - \xi(t_4 + t_5) \\ -1 + r_5(1-2\eta) + \xi(r_4 - r_5) \\ -q_5(1-2\eta) - \xi(q_4 - q_5) \end{pmatrix}$$

Os coeficientes  $P_k$ ,  $q_k$ ,  $r_k$  e  $t_k$  dependem da geometria do elemento, e são calculados como:

$$P_k = -\frac{6x_{ij}}{l_{ij}^2} \quad q_k = \frac{3x_{ij}y_{ij}}{l_{ij}^2} \quad r_k = \frac{3y_{ij}^2}{l_{ij}^2} \quad t_k = -\frac{6y_{ij}}{l_{ij}^2} \quad (4.22)$$

Onde:

$$l_{ij} = \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2} \quad x_{ij} = x_i - x_j \quad y_{ij} = y_i - y_j \quad (4.23)$$

Com  $k = 4, 5, 6$  para  $ij = 23, 31, 12$  respectivamente, conforme a numeração dos nós mostrada na Figura 4.4. Uma vez calculados os elementos da matriz  $[B]$ , determina-se a matriz de rigidez  $[K_{DKT}]^e$  do elemento finito de placa DKT com a Eq. (4.18) reescrita como:

$$[K_{DKT}] = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot d\xi d\eta \quad (4.24)$$

### 4.2.3 Determinação do vetor de cargas nodais equivalentes

O trabalho das cargas nodais externas, para um único elemento finito, pode ser expresso em coordenadas adimensionais como:

$$\Omega_e = \int_A Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w(\xi_1, \xi_2, \xi_3) dA \quad (4.25)$$

Onde:

$w(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  são as funções interpoladoras do deslocamento.

$Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  são as funções interpoladoras do carregamento externo distribuído.

$A$  é a área do elemento.

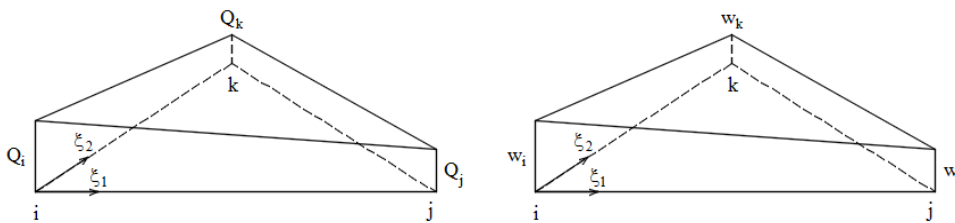
Para efeito de cálculo do vetor de cargas nodais equivalentes, a função interpoladora dos deslocamentos, assim como das forças de superfície, é admitida variando linearmente no domínio do elemento, conforme mostrado na Figura 4.5, e pode ser expressa por:

$$w = w_i \xi_1 + w_j \xi_2 + w_k \xi_3 \quad (4.26)$$

Analogamente, as forças de superfície podem ser expressas por:

$$Q = Q_i \xi_1 + Q_j \xi_2 + Q_k \xi_3 \quad (4.27)$$

Figura 4.5 – Força de superfície e deslocamento transversal num elemento finito DKT.



Fonte: Autor.

Substituindo as Eqs. (4.26) e (4.27) na Eq. (4.25), obtém-se:

$$\Omega_e = \int_A (Q_i \xi_1 + Q_j \xi_2 + Q_k \xi_3)(w_i \xi_1 + w_j \xi_2 + w_k \xi_3) dA \quad (4.28)$$

Ao minimizar a energia potencial devido às cargas externas, pode-se escrever:

$$\begin{pmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Omega_e}{\partial w_i} \\ \frac{\partial \Omega_e}{\partial w_j} \\ \frac{\partial \Omega_e}{\partial w_k} \end{pmatrix} = \int_A \begin{bmatrix} \xi_1^2 & \xi_1 \xi_2 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_3 & \xi_2 \xi_3 & \xi_3^2 \end{bmatrix} dA \begin{pmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_k \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

A integral do tipo  $\int_A f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) dA$  pode ser calculada como:

$$\int_A \xi_1^{\eta_1} \xi_2^{\eta_2} \xi_3^{\eta_3} dA = 2A \frac{\eta_1! \eta_2! \eta_3!}{(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + 2)!} \quad (4.30)$$

Assim, o vetor de cargas nodais equivalentes é dado por:

$$\begin{pmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{pmatrix} = [T_p] \begin{pmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_k \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Tem-se, por exemplo, para o elemento da primeira linha e primeira coluna da matriz  $[T_p]$ :

$$\int_A \xi_1^2 dA = 2A \frac{2!}{(2+2)!} = \frac{A}{6} \quad (4.32)$$

Calculando de modo análogo o restante dos elementos de  $[T_p]$ , chega-se a:

$$[T_p] = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Neste capítulo, foram apresentadas as matrizes de rigidez dos elementos estruturais analisados neste trabalho, a saber, estacas e radiers que interagem com o solo modelado pelo MEC e utilizando a solução fundamental de Mindlin conforme apresentado no capítulo 3. Neste trabalho, os solos são não-homogêneos e podem estar delimitados por uma base rígida ou indeslocável. Logo, no capítulo 5, desenvolve-se a formulação para a consideração de solos com múltiplas camadas, e mostra-se também o procedimento de acoplamento entre os elementos estruturais de fundação e o solo.

## 5 ANÁLISE DA INTERAÇÃO ESTRUTURA-SOLO

Neste capítulo, são apresentadas formulações numéricas para a análise da interação estaca-solo, placa-solo e placa-estaca-solo considerando inicialmente o solo como um meio semi-infinito e homogêneo. Em seguida, partindo dessas formulações consideram-se solos não-homogêneos ou de múltiplas camadas via introdução dos conceitos do modelo de Steinbrenner, e uma técnica decorrente deste modelo para analisar o caso crítico em que as camadas inferiores são mais compressíveis que as superiores. No final do capítulo, apresenta-se o acoplamento entre as formulações do MEC para o solo e do MEF para os elementos estruturais.

### 5.1 ANÁLISE DA INTERAÇÃO ESTACA-SOLO

A estaca é um elemento estrutural de fundação que resiste a cargas aplicadas no seu topo através da resistência de ponta, da resistência de fuste, ou pela combinação das duas resistências. Consideram-se as seguintes hipóteses para a análise numérica do problema de interação estaca-solo: o espaçamento entre estacas é tomado como a distância de eixo a eixo; o solo e a estaca são admitidos em regime elástico-linear; consideram-se estacas totalmente imersas em um meio semi-infinito, elástico, linear, homogêneo e isótropo; o solo e as estacas estão livres de tensões iniciais decorrentes da instalação das mesmas; as forças volumétricas são desprezadas; e existe compatibilidade de deslocamentos entre o solo e a estaca.

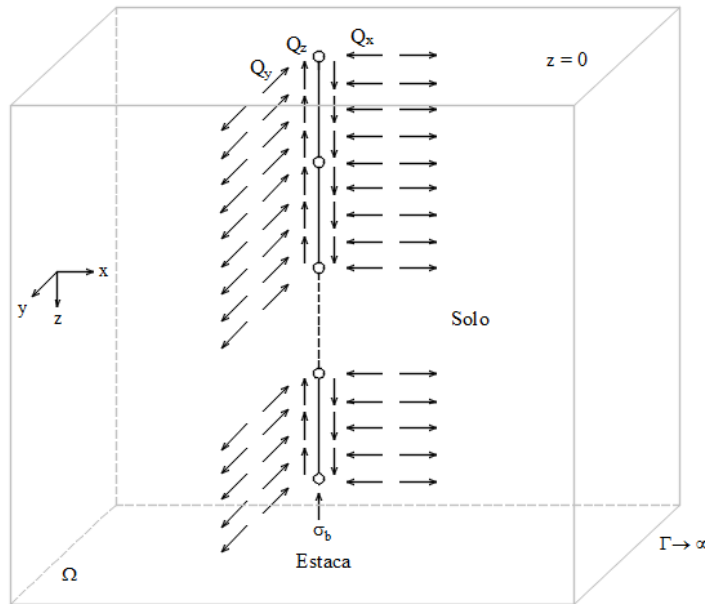
A Identidade Somigliana para deslocamentos, conforme deduzida na Eq. (3.29) é dada por:

$$\mathbf{C}(s)u(s) + \int_{\Gamma} \mathbf{P}^*(s, f)u(f)d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^*(s, f)P(f)d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{u}^*(s, f)b(f)d\Omega \quad (5.1)$$

A estaca sendo imersa em um meio contínuo semi-infinito, está submetida a forças de superfície  $Q$ , conforme mostrado na Figura 5.1. A Eq. (5.1), considerando a tensão  $\sigma_b$  uniformemente distribuída na base da estaca, e as forças  $Q$ , torna-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(s)u(s) + \int_{\Gamma} \mathbf{P}^*(s, f)u(f)d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^*(s, f)P(f)d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{u}^*(s, f)b(f)d\Omega + \\ \int_{\Gamma_q} \mathbf{u}^*(s, f)Q(f)d\Gamma_q + \int_{\Gamma_b} \mathbf{u}^*(s, f)\sigma_b(f)d\Gamma_b \end{aligned} \quad (5.2)$$

Figura 5.1 – Forças de contato atuando na estaca e no solo.



Fonte: Autor.

Com o emprego da solução fundamental de Mindlin para deslocamentos, e as forças volumétricas sendo desprezadas conforme as hipóteses adotadas, a Eq. (5.2) se torna:

$$\mathbf{C}(s)u(s) = \int_{\Gamma_q} \mathbf{u}^*(s, f)Q(f)d\Gamma_q + \int_{\Gamma_b} \mathbf{u}^*(s, f)\sigma_b(f)d\Gamma_b \quad (5.3)$$

Os pontos fonte estão localizados no contorno  $\Gamma_q$  da estaca, e  $\mathbf{C}(s)$  equivale à matriz Identidade:

$$\mathbf{C}(s) = [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Por outro lado, no meio contínuo semi-infinito, podem ser consideradas várias estacas representadas por linhas de carga, conforme ilustrado na Figura 5.2.

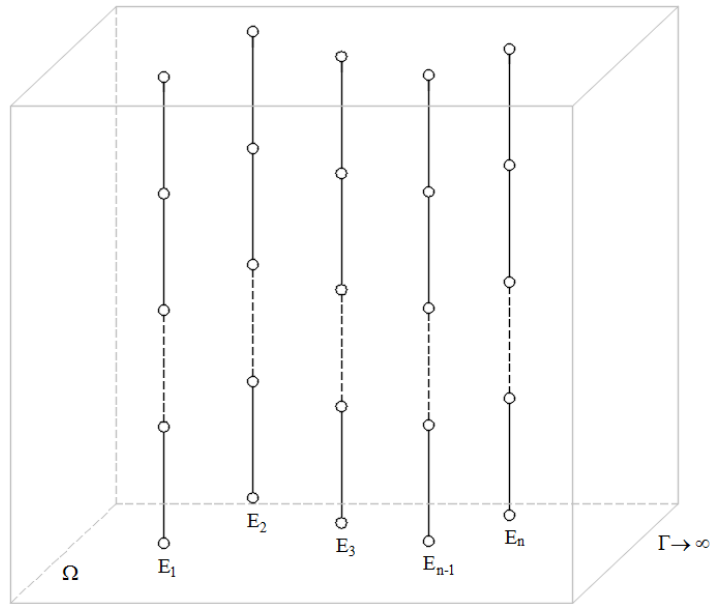
Assim, a Eq. (5.3) pode ser reescrita como:

$$u(s) = \sum_{i=1}^{N_e} \left[ \int_{\Gamma_{q_i}} \mathbf{u}^*(s, f)Q_i(f)d\Gamma_{q_i} + \int_{\Gamma_{b_i}} \mathbf{u}^*(s, f)\sigma_{b_i}(f)d\Gamma_{b_i} \right] \quad (5.5)$$

Onde:

$N_e$  : número de estacas ou linhas de carga inseridas no meio contínuo semi-infinito.

Figura 5.2 – Estacas imersas num meio contínuo semi-infinito.



Fonte: Autor.

A malha, coincidente com as linhas de carga, é composta por elementos de contorno isoparamétricos, ou seja, a geometria e as grandezas de interesse são aproximadas ao longo dos elementos pela mesma função de forma. A discretização é feita com elementos lineares, e as funções de forma são:

$$\Phi_1 = \frac{1 - \xi}{2} \quad \Phi_2 = \frac{1 + \xi}{2} \quad (5.6)$$

Onde  $\xi$  é a coordenada adimensional para um ponto de integração qualquer dentro do elemento. As coordenadas  $x_k$  de um ponto no interior do elemento podem ser obtidas a partir da interpolação das coordenadas nodais  $x_k^i$  pela expressão:

$$x_k(\xi) = \Phi_i(\xi)x_k^i \quad (5.7)$$

Considerando um sistema cartesiano  $(x, y)$ , o Jacobiano é calculado pela expressão:

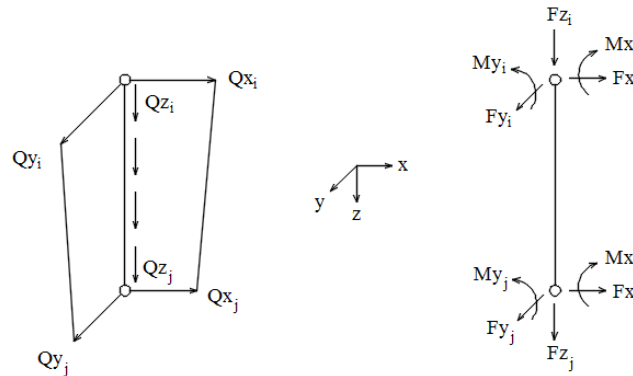
$$J = \sqrt{(\Phi_{i,\xi}(\xi)x_i)^2 + (\Phi_{i,\xi}(\xi)y_i)^2} \quad \text{com } i = 1 \text{ e } 2 \quad (5.8)$$

Com um elemento de comprimento  $L$ , o Jacobiano é  $J = \frac{L}{2}$ .

O sistema sendo composto por  $N_e$  linhas de cargas com um total de  $n$  pontos fonte, a matriz  $[G]$  tem inicialmente a ordem  $3n \times 3n$  que corresponde aos deslocamentos nas três

direções, e é em seguida expandida para a ordem  $5n \times 5n$  acrescentando duas colunas nulas uma vez que cada nó da estaca apresenta cinco parâmetros nodais. Antes de realizar o acoplamento MEC/MEF, no sistema de equações da estaca, o procedimento pelo MEF exige que as cargas distribuídas provenientes do MEC sejam transformadas em cargas nodais, conforme mostrado na Figura 5.3.

Figura 5.3 – Transformação das forças de superfície em cargas nodais equivalentes.



Fonte: Autor.

Assim, para um único elemento finito  $e$ , o vetor de cargas nodais equivalentes e a matriz de transformação  $[T_e]$  são dados pela Eq. (5.9).

$$\begin{pmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{zj} \\ M_{xj} \\ M_{yj} \end{pmatrix} = [T_e] \cdot \begin{pmatrix} Q_{xi} \\ Q_{yi} \\ Q_{zi} \\ 0 \\ 0 \\ Q_{xj} \\ Q_{yj} \\ Q_{zj} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad [T_e] = \begin{bmatrix} \frac{7L}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3L}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7L}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3L}{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{6} & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{30} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3L}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7L}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3L}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7L}{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{L^2}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L^2}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{20} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Na Eq. (5.5), as integrais referentes ao fuste e à superfície da base da estaca são analisadas de forma diferente. Quando o ponto fonte se encontra na linha de carga que está sendo integrada, a solução fundamental é calculada em pontos do fuste simétricos em relação

ao eixo da estaca passando pela linha de carga, e faz-se a média dos valores obtidos para encontrar as contribuições dos pontos de integração nas direções  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ . No que diz respeito à integração da superfície da base da estaca, não há singularidade quando o ponto fonte não pertence à base integrada, e a reação do solo na base é calculada como uma força concentrada.

A integração se torna singular quando o ponto fonte pertence à base da estaca integrada e quando se calcula a solução fundamental na direção  $x_3$ ; neste caso, procede-se a um tratamento analítico da singularidade, precisamente da componente  $u_{33}^*$ , Eq. (3.39), cuja implementação computacional é mostrada no capítulo 8. A contribuição da carga axial também é corrigida na matriz de transformação, Eq. (5.9), quando o ponto fonte se encontra na base da estaca, substituindo o coeficiente do nó correspondente pela área da base da estaca.

Para fins de implementação computacional, a Eq. (5.5) pode ser reescrita em forma matricial como:

$$\{u\} = [G]\{Q\} \quad (5.10)$$

Onde:

$\{u\}$  é o vetor dos deslocamentos dos pontos fonte.

$\{Q\}$  é o vetor das forças de superfície na interface estaca-solo.

$[G]$  é a matriz dos coeficientes de influência do solo.

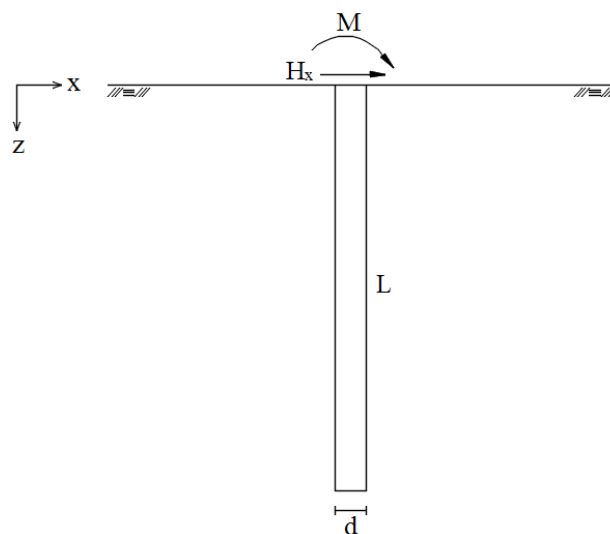
Com a Eq. (5.10), o objetivo é a determinação da matriz  $[G]$  cujos coeficientes de influência são obtidos calculando as integrais da Eq. (5.5) via utilização da quadratura de Gauss-Legendre. Uma vez determinada  $[G]$ , os deslocamentos dos nós da estaca são calculados depois de realizar o acoplamento MEC/MEF, conforme descrito na seção 5.5.

### 5.1.1 Exemplo numérico

Este exemplo, de uma estaca isolada e imersa num meio semi-infinito, é baseado no experimento realizado por Kérisel e Adam (1967). A estaca tem comprimento  $L = 4,65 \text{ m}$ , diâmetro  $d = 0,3573 \text{ m}$ , módulo de elasticidade  $E_e = 2,0 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ , e é submetida a cargas horizontais  $H_x = 60 \text{ kN}$  e  $M = 69 \text{ kNm}$ , conforme mostrado na Figura 5.4. O solo em que a estaca está inserida é argiloso com módulo de elasticidade  $E_s = 9233 \text{ kN/m}^2$ , obtida experimentalmente, e coeficiente de Poisson  $\nu_s = 0,3$ .

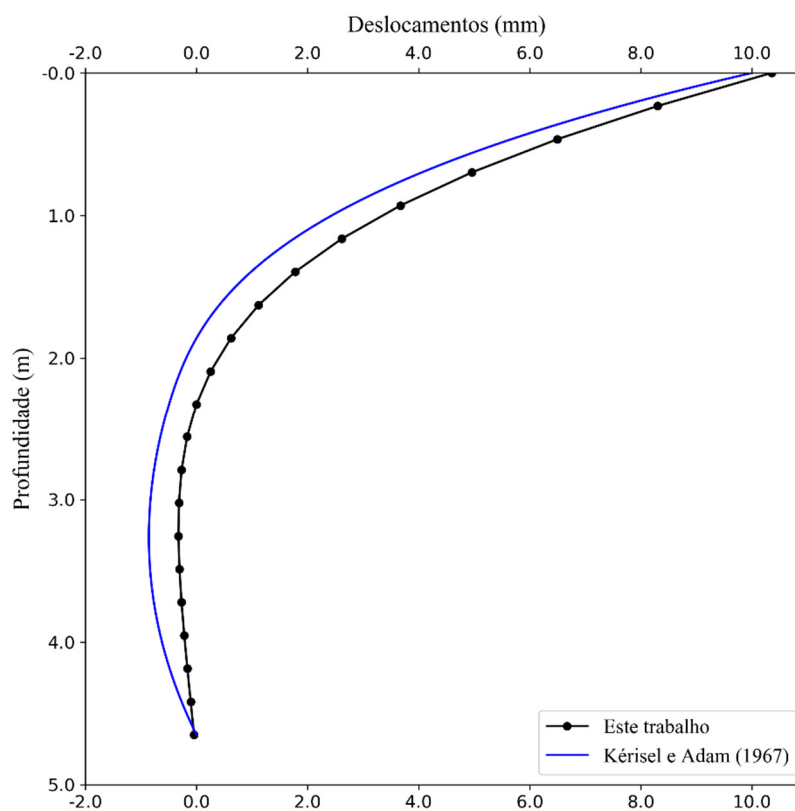


Figura 5.4 – Estaca submetida à força horizontal e ao momento fletor.



Fonte: Autor.

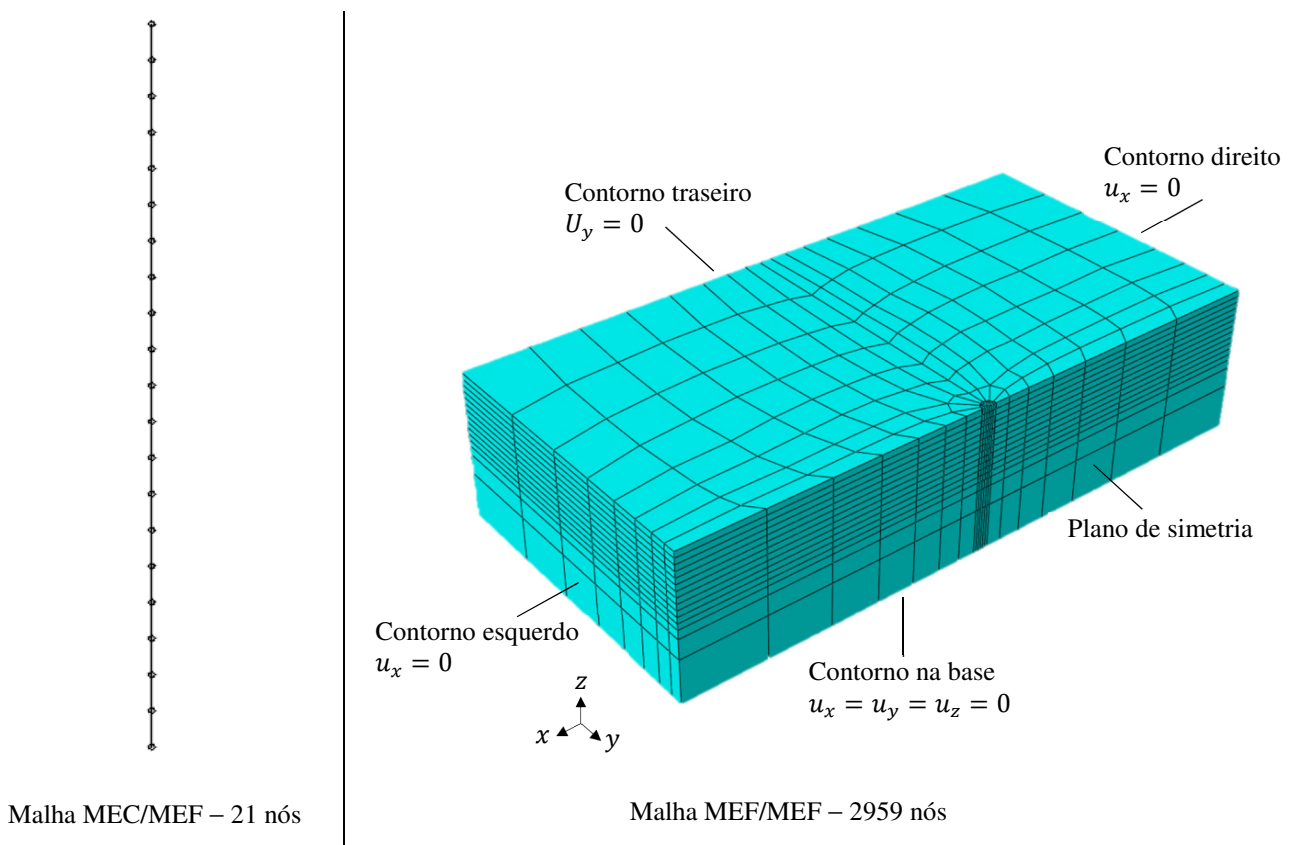
Figura 5.5 – Deslocamentos horizontais da estaca.



Fonte: Autor.

Pode-se observar, na Figura 5.5, que os deslocamentos horizontais calculados numericamente ao longo da estaca e os obtidos por Kérisel e Adam (1967) apresentam uma boa concordância. Por outro lado, ao analisar o problema com uma modelagem MEF/MEF, e mesmo aproveitando a simetria do problema, o número de nós é mais de 100 vezes maior que o número de nós utilizado na modelagem MEC/MEF, conforme mostrado na Figura 5.6. Além disso, com o MEC e a solução fundamental de Mindlin, as condições de contorno para regiões remotas do domínio são automaticamente satisfeitas, e a malha com apenas 21 nós, utilizada neste trabalho, independe do tipo de carregamento aplicado no topo da estaca.

Figura 5.6 – Modelagem da interação estaca-solo via MEC/MEF e MEF/MEF.

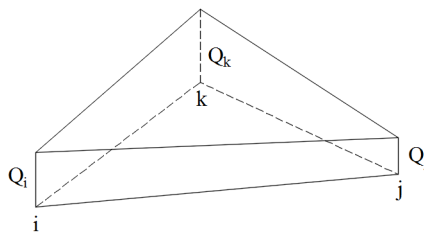


Fonte: Malha MEF/MEF adaptada de Helwany (2007).

## 5.2 ANÁLISE DA INTERAÇÃO PLACA-SOLO

Nesta análise, as malhas da placa e da superfície do solo devem coincidir, ou seja, deve haver conformidade entre os elementos finitos de placa DKT e os elementos de contorno triangulares ECT. Os dois tipos de elementos apresentam, portanto, três nós nas extremidades, e na superfície do solo, utiliza-se uma aproximação linear das forças de superfície, conforme mostrado na Figura 5.7.

Figura 5.7 – Elemento de contorno  $ijk$  com aproximação linear das forças de superfície.



Fonte: Autor.

O campo das forças de superfície é dado por:

$$Q = [\Phi_n]\{Q_n\} \quad (5.11)$$

Onde:

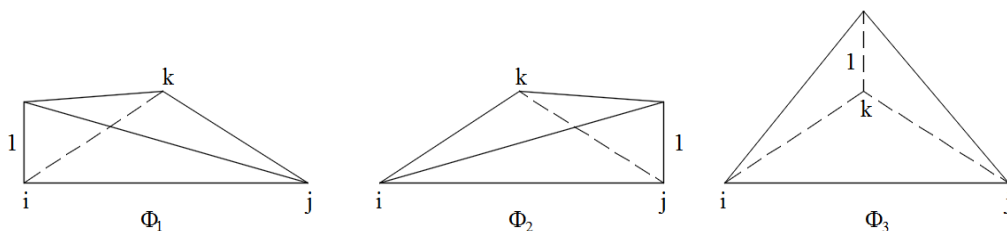
$[\Phi_n]$  é a matriz das funções de forma.

$\{Q_n\}$  é o vetor das forças de superfície.

Assim, para cada elemento de contorno, tem-se:

$$Q = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3] \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

Figura 5.8 – Funções de forma num elemento de contorno.



Fonte: Autor.

As funções de forma  $\Phi_n$ , conforme ilustrado na Figura 5.8, expressas em relação a um sistema de coordenadas  $(x, y)$  são:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{1}{D_t} [(y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y + (x_2y_3 - x_3y_2)] \\ \Phi_2 &= \frac{1}{D_t} [(y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y + (x_3y_1 - x_1y_3)] \\ \Phi_3 &= \frac{1}{D_t} [(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1)]\end{aligned}\quad (5.13)$$

Onde:

$$D_t = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \quad (5.14)$$

$(x_i, y_i)$  são as coordenadas do nó  $i$  do elemento de contorno, com  $i = 1, 2$  e  $3$ .

Com a aplicação de um carregamento vertical na superfície do solo, conforme mostrado na Figura 5.9, os pontos fonte estão colocados nos nós e os pontos de integração estão posicionados nos lados dos elementos de contorno. Assim, os deslocamentos dos pontos fonte são dados por:

$$u(s) = \sum_{i=1}^{N_e} \int_{\Omega_{q_i}} \mathbf{u}^*(s, f) Q_i(f) d\Omega_{q_i} \quad (5.15)$$

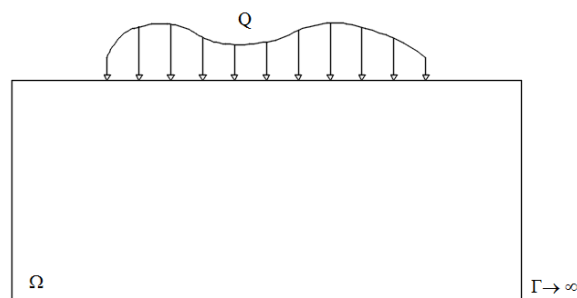
Onde:

$N_e$  é o número de elementos de contorno.

$\Omega_q$  é o domínio do elemento de contorno.

$Q$  é a força de superfície aplicada na superfície do solo.

Figura 5.9 – Carregamento aplicado na superfície do solo.



Fonte: Autor.

A solução fundamental de interesse em (5.15), é à referente aos deslocamentos verticais, conforme a Eq. (3.39), ou seja:

$$u_{33}^* = K \left\{ \frac{r_3^2}{r^3} + \frac{3 - 4\nu}{r} + \frac{6czR_3^2}{R^5} + \frac{8(1 - \nu)^2 - (3 - 4\nu)}{R} + \frac{(3 - 4\nu)R_3^2 - 2cz}{R^3} \right\} \quad (5.16)$$

Como os pontos fonte e os pontos de integração encontram-se na superfície do solo, a solução fundamental de Boussineq é obtida a partir da solução fundamental de Mindlin, substituindo em (5.16):  $x_3(s) = 0$  e  $x_3(f) = 0$ .

Com isso, obtém-se:

$$u_{33}^* = \frac{1 - \nu}{2\pi G} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (5.17)$$

Onde:

$G$  é o módulo de elasticidade transversal do solo.

$r = (r_i r_j)^{\frac{1}{2}}$  é a distância entre ponto fonte  $s$  e ponto de integração  $f$ .

As integrais em (5.15) sobre o domínio dos elementos de contorno podem ser transformadas em integrais sobre o contorno das mesmas. Assim, a integral em (5.15) para um elemento de contorno, é dada por:

$$c = \int_{\Omega_q} \mathbf{u}_{33}^*(s, f) (A_i x + B_i y + D_i) d\Omega_q \quad (5.18)$$

De acordo com o esquema da Figura 5.10:

$$d\Omega_q = r dr d\theta \quad (5.19)$$

$$d\theta = \frac{\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{r}}}{R} d\Gamma \quad (5.20)$$

Onde:

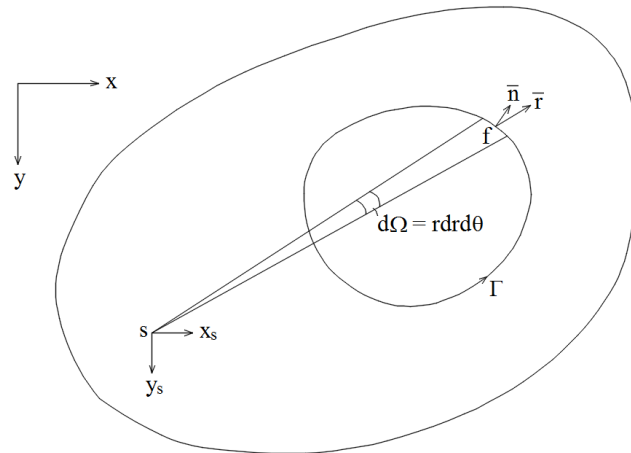
$\bar{\mathbf{n}}$  é o versor da normal de um lado do elemento de contorno.

$\bar{\mathbf{r}}$  é o versor do raio vetor  $r$ .

$R$  é a distância entre o ponto fonte e o ponto campo.

$\Gamma$  é o contorno do elemento.

Figura 5.10 – Sistemas de coordenadas local e global.



Fonte: Autor.

Ao substituir as Eqs. (5.17) e (5.19) na Eq. (5.18), e fazendo  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , a integral (5.18) se torna:

$$c = \frac{1 - \nu}{2\pi G} \int_{\theta} \int_0^R \left(\frac{1}{r}\right) (A_i r \cos \theta + B_i r \sin \theta + D_i) r dr d\theta \quad (5.21)$$

Inserindo a Eq. (5.20) na Eq. (5.21), obtém-se:

$$c = \frac{1 - \nu}{4\pi G} \int_{\Gamma} (A_i R \cos \theta + B_i R \sin \theta + 2D_i) \cdot \bar{n} \cdot \bar{r} \cdot d\Gamma \quad (5.22)$$

Onde:

$D_i = A_i x_s + B_i y_s + C_i$  é a função de forma calculada no ponto fonte de coordenadas  $(x_s, y_s)$ .

Vale observar que a integral da Eq. (5.22) não apresenta singularidade na análise de interação placa-solo. A Eq. (5.15) pode ser escrita em forma matricial para fins de implementação computacional como:

$$\{u\} = [G]\{Q\} \quad (5.23)$$

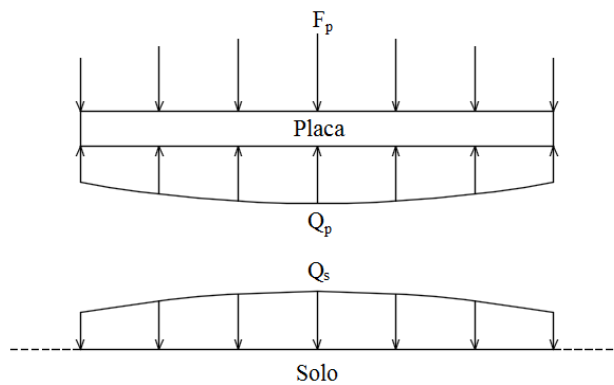
A determinação da matriz  $[G]$  é feita calculando seus coeficientes de influência pela Eq. (5.22), e o vetor das forças de superfície  $\{Q\}$  é um dado do problema. Logo, com  $[G]$  determinada, pode-se obter o vetor dos deslocamentos  $\{u\}$  dos pontos fonte ou pontos de colocação na área carregada da superfície do solo.

Os deslocamentos na placa são obtidos ao realizar o acoplamento entre a placa e o solo, conforme descrito na seção 5.5. Para isso, deve-se observar que na região de contato entre a placa e o solo há forças de interação  $Q$  devido à carga  $F_p$  aplicada na placa e transmitida ao solo, conforme mostrado na Figura 5.11. A força de interação na placa  $Q_p$  é tratada como carregamento transversal externo, e para o solo, essa mesma força de interação  $Q_s$  é tratada como força de superfície.

Tem-se:

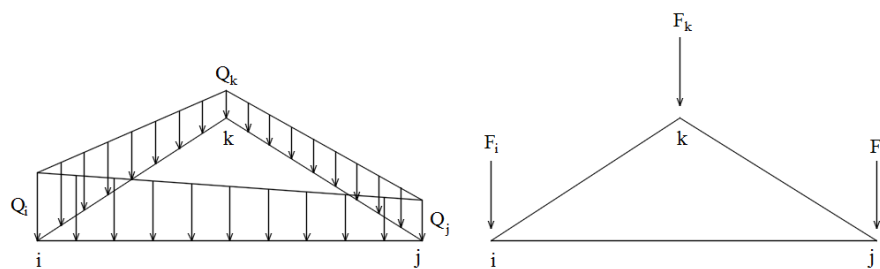
$$Q = Q_p = Q_s \quad (5.24)$$

Figura 5.11 – Forças de contato na interface placa-solo.



Fonte: Autor.

Figura 5.12 – Transformação das forças de superfície em cargas nodais no elemento DKT.



Fonte: Autor.

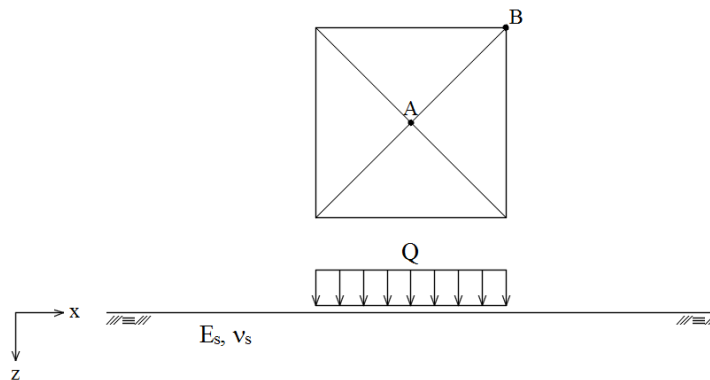
Com o MEF, as cargas distribuídas atuando na placa devem ser transformadas em cargas nodais, conforme ilustrado na Figura 5.12. Para um elemento finito de placa  $e$ , o vetor de cargas nodais equivalentes e a matriz de transformação  $[T_p]$  são dados na Eq. (5.25) conforme determinados na seção 4.2.3.

$$\begin{pmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{pmatrix} = [T_p] \begin{pmatrix} Q_i \\ Q_j \\ Q_k \end{pmatrix} \quad \text{com } [T_p] = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

### 5.2.1 Exemplo numérico

Aplica-se uma carga uniforme  $Q = 100 \text{ kN/m}^2$  numa área quadrada de  $2 \text{ m} \times 2 \text{ m}$  na superfície de um meio semi-infinito, conforme mostrado na Figura 5.13. O meio homogêneo tem módulo de elasticidade  $E_s = 10000 \text{ kN/m}^2$ , e coeficiente de Poisson  $\nu_s = 0$ . Os deslocamentos verticais são calculados nos pontos  $A$  e  $B$  da área carregada.

Figura 5.13 – Carga aplicada na superfície e malha da área carregada.



Fonte: Autor.

Este problema é analisado, neste trabalho, utilizando uma malha contendo apenas 4 elementos de contorno e 5 nós conforme ilustrado na Figura 5.13. De fato, como o objetivo é determinar os deslocamentos no centro e em um dos vértices da área carregada, a malha gerada é suficiente para obter a solução exata para o problema utilizando a Eq. (5.23).

Tabela 5.1 – Deslocamentos verticais ( $10^{-2} \text{ m}$ ) em pontos da superfície.

	Ponto A	Erro (%)	Ponto B	Erro (%)
Timoshenko (1970)	2,2444	–	1,1222	–
Moser et al. (2004)	2,2520	0,7	1,1298	0,4
Ribeiro (2009)	2,2114	1,5	1,1159	0,6
Este trabalho	2,2444	0,0	1,1222	0,0

Fonte: Autor.



Os resultados são listados na Tabela 5.1 onde a solução analítica, extraída de Timoshenko (1970), é utilizado como referência para a estimativa do erro. Pode-se observar que no caso de um meio semi-infinito, os resultados deste trabalho são iguais aos resultados obtidos analiticamente e considerados exatos.

### 5.3. ANÁLISE DA INTERAÇÃO PLACA-ESTACA-SOLO

A matriz  $[G]$  do sistema placa-estaca-solo é obtida modelando pelo MEC a superfície do solo e as linhas nas posições das linhas de carga. A determinação de  $[G]$  é realizada calculando as submatrizes conforme mostrado na Eq. (5.26).

$$[G] = \begin{bmatrix} [G_{SS}] & [G_{SE}] \\ [G_{ES}] & [G_{EE}] \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Onde:

$[G_{SS}]$  é a matriz calculada com os pontos fonte e os pontos de integração na superfície do solo.

$[G_{SE}]$  é a matriz calculada com os pontos fonte na superfície do solo e os pontos de integração nas linhas de carga.

$[G_{ES}]$  é a matriz calculada com os pontos fonte nas linhas de carga abaixo da superfície e os pontos de integração na superfície do solo.

$[G_{EE}]$  é a matriz calculada com os pontos fonte e os pontos de integração nas linhas de carga abaixo da superfície.

Os nós de topo das estacas devem coincidir com os nós da superfície do solo, conforme mostrado na Figura 5.14. A determinação das matrizes  $[G_{SS}]$  e  $[G_{SE}]$  é feita utilizando as formulações descritas na seção 5.2, e a matriz  $[G_{EE}]$  com as formulações da seção 5.1. Deve-se observar que os coeficientes de influência são nulos nos nós de interseção entre as linhas de carga e a superfície do solo uma vez que nesses nós de ligação da placa com a estaca não há solo em contato com a placa. A reação do solo é portanto nula, existindo apenas uma tensão normal  $\sigma_N$  transmitida pela placa à estaca, conforme mostrado na Figura 5.15.



No caso da matriz  $[G_{ES}]$ , a determinação é feita seguindo o procedimento descrito na seção 5.2, onde a Eq. (5.22) para o presente caso é dada pela Eq. (5.27) utilizada inicialmente em Paiva (1993), e cujos detalhes de obtenção podem ser encontrados nos anexos em Luamba (2018).

$$c = \alpha \int_{\Gamma} \left\{ \frac{(A_i R \cos \theta + B_i R \sin \theta)}{R} \left[ F_1(R) + \frac{\beta}{\alpha} x_3^2(s) F_2(R) \right] + D_i \left[ F_3(R) + \frac{\beta}{\alpha} x_3^2(s) F_4(R) \right] \right\} \cdot \frac{\bar{n} \cdot \bar{r}}{R} \cdot d\Gamma \quad (5.27)$$

Onde:

$$R_1 = \sqrt{R^2 + x_3^2(s)}$$

$$F_0(R) = \ln \left( \frac{R + R_1}{x_3(s)} \right)$$

$$F_1(R) = \frac{1}{2} [R R_1 - x_3^2(s) F_0(R)]$$

$$F_2(R) = -\frac{R}{R_1} + F_0(R)$$

$$F_3(R) = R_1 - x_3(s)$$

$$F_4(R) = -\frac{1}{R_1} + \frac{1}{x_3(s)}$$

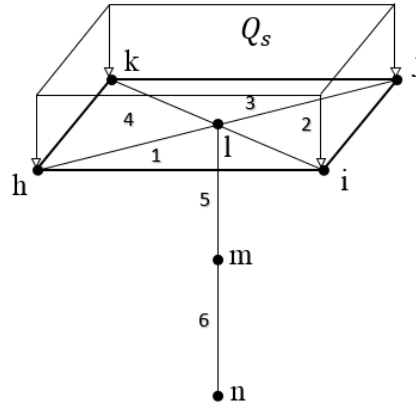
$$\alpha = \frac{2(1 - \nu)}{4\pi G}$$

$$\beta = \frac{1}{4\pi G}$$

### 5.3.1 Exemplo ilustrativo

Este exemplo tem por objetivo ilustrar a montagem da matriz  $[G]$  dos coeficientes de influência do solo. Para isso, considera-se uma superfície do solo submetida a forças de superfície  $Q_s$ , discretizada com 4 elementos de contorno triangulares, e uma linha discretizada com 2 elementos de contorno lineares, conforme mostrado na Figura 5.16.

Figura 5.16 – Carga aplicada e discretização do solo.



Fonte: Autor.

Levando em consideração apenas a componente de deslocamento vertical, para os propósitos deste exemplo, as matrizes que compõem a matriz final  $[G]$  são dadas conforme a seguir:

$$[G_{SS}] = \begin{bmatrix} a_{hh}^{1+4} & a_{hi}^{1+2} & a_{hj}^{2+3} & a_{hk}^{3+4} & a_{hl}^{1+2+3+4} \\ a_{ih}^{1+4} & a_{ii}^{1+2} & a_{ij}^{2+3} & a_{ik}^{3+4} & a_{il}^{1+2+3+4} \\ a_{jh}^{1+4} & a_{ji}^{1+2} & a_{jj}^{2+3} & a_{jk}^{3+4} & a_{jl}^{1+2+3+4} \\ a_{kh}^{1+4} & a_{ki}^{1+2} & a_{kj}^{2+3} & a_{kk}^{3+4} & a_{kl}^{1+2+3+4} \\ a_{lh}^{1+4} & a_{li}^{1+2} & a_{lj}^{2+3} & a_{lk}^{3+4} & a_{ll}^{1+2+3+4} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

$$[G_{SE}] = \begin{bmatrix} b_{hl}^5 & b_{hm}^{5+6} & b_{hn}^6 \\ b_{il}^5 & b_{im}^{5+6} & b_{in}^6 \\ b_{jl}^5 & b_{jm}^{5+6} & b_{jn}^6 \\ b_{kl}^5 & b_{km}^{5+6} & b_{kn}^6 \\ b_{ll}^5 & b_{lm}^{5+6} & b_{ln}^6 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

$$[G_{ES}] = \begin{bmatrix} c_{mh}^{1+4} & c_{mi}^{1+2} & c_{mj}^{2+3} & c_{mk}^{3+4} & c_{ml}^{1+2+3+4} \\ c_{nh}^{1+4} & c_{ni}^{1+2} & c_{nj}^{2+3} & c_{nk}^{3+4} & c_{nl}^{1+2+3+4} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$[G_{EE}] = \begin{bmatrix} d_{ml}^5 & d_{mm}^{5+6} & d_{mn}^6 \\ d_{nl}^5 & d_{nm}^{5+6} & d_{nn}^6 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Onde:

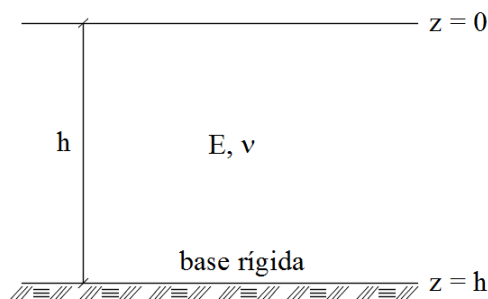
$x_{ij}^{a+b}$  é a soma dos coeficientes de influência no nó  $j$  comum aos elementos  $a$  e  $b$ , com o ponto fonte no nó  $i$ .

Deve-se observar que no caso da interação estaca-solo, utiliza-se a Eq. (5.31) incluindo o ponto fonte  $l$  para matriz  $[G]$  do solo, e no caso da interação placa-solo, utiliza-se a Eq. (5.28). Por fim, no caso da interação placa-estaca-solo, a matriz final  $[G]$  é obtida por superposição das quatro matrizes acima conforme a Eq. (5.26), e são zeradas colunas contendo os coeficientes de influência nos nós comuns entre a placa e as estacas, ou seja, no nó  $l$  para o presente exemplo.

#### 5.4 SOLOS NÃO-HOMOGÊNEOS

A matriz  $[G]$  conforme determinada na seção 5.3 se aplica apenas para o caso de um meio semi-infinito e homogêneo. No caso de um meio não-homogêneo, ou seja, estratificado com camadas de espessura finita, os coeficientes de influência da matriz  $[G]$  são calculados utilizando conceitos provenientes do modelo de Steinbrenner. A proposta do presente trabalho é avaliar a acurácia e eficiência de uma formulação obtida introduzindo esses conceitos numa formulação MEC/MEF. Vale salientar que a presente formulação é desenvolvida para cargas verticais, e para ilustrar o procedimento de cálculo, considera-se um meio finito conforme mostrado na Figura 5.17.

Figura 5.17 – Camada de espessura  $h$  com base rígida.



Fonte: Autor.

O deslocamento de um ponto na superfície com cota  $z = 0$  é dado por:

$$\delta_{\text{Steinbrenner}}^{z=0} = \delta_{\text{Mindlin}}^{z=0} - \delta_{\text{Mindlin}}^{z=h} \quad (5.32)$$

Onde:

$\delta_{\text{Mindlin}}^{z=0}$  é o deslocamento na cota  $z = 0$

$\delta_{\text{Mindlin}}^{z=h}$  é o deslocamento na cota  $z = h$

Ou seja, na Eq. (5.32) os dois deslocamentos são calculados utilizando a solução fundamental de Mindlin para deslocamentos que, por sua vez, assume o meio como sendo semi-infinito e homogêneo. Generalizando a Eq. (5.32) para qualquer ponto do meio finito e aplicando conceitos de coeficiente de influência do MEC, a equação aproximada de Steinbrenner pode ser escrita como:

$$c_{\text{Steinbrenner}}^{ij} = c_{\text{Mindlin}}^{ij} - c_{\text{Mindlin}}^{hj} \quad (5.33)$$

Onde:

$c_{\text{Mindlin}}^{ij}$  é o coeficiente de influência no ponto de integração  $j$  com o ponto fonte em  $i$ .

$c_{\text{Mindlin}}^{hj}$  é o coeficiente de influência no ponto de integração  $j$  com o ponto fonte na profundidade  $h$  e na vertical passando por  $i$ .

Logo, para um meio não-homogêneo, as matrizes  $[G_{SS}]$ ,  $[G_{SE}]$ ,  $[G_{ES}]$  e  $[G_{EE}]$ , conforme mostrado nas Eqs. (5.28) a (5.31) devem ser calculadas aplicando o conceito descrito pela Eq. (5.33) a fim de se chegar à matriz final  $[G]$ . A seguir, mostra-se a determinação das matrizes  $[G_{SS}]$  e  $[G_{EE}]$ , e a determinação de  $[G_{SE}]$  e  $[G_{ES}]$  segue um procedimento semelhante, a diferença residindo na localização dos pontos fonte e dos pontos de integração.

#### 5.4.1 Determinação de $[G_{SS}]$

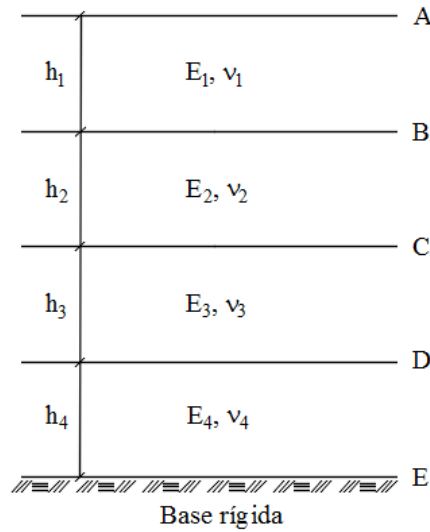
Seja um meio estratificado formado por quatro camadas sobre uma base rígida, conforme mostrado na Figura 5.18. O procedimento ilustrado a seguir pode ser estendido para um número qualquer de camadas com ou sem uma base rígida.

O campo de deslocamentos na superfície do solo é dado por:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \quad (5.34)$$

Onde  $\delta_i$  é o deslocamento no topo de cada uma das camadas do meio estratificado calculado utilizando a Eq. (5.32), e representa o deslocamento por compressão da camada.

Figura 5.18 – Meio estratificado com base rígida.



Fonte: Autor.

Assim, a Eq. (5.34) se torna:

$$\delta = (\delta_A - \delta_{B\uparrow}) + (\delta_{B\downarrow} - \delta_{C\uparrow}) + (\delta_{C\downarrow} - \delta_{D\uparrow}) + (\delta_{D\downarrow} - \delta_E) \quad (5.35)$$

Onde a seta para cima e a seta para baixo significam, respectivamente, utilizar as propriedades físicas ( $E$  e  $\nu$ ) da camada logo acima e logo abaixo da interface. Assim,  $\delta_A$  e  $\delta_E$  são os deslocamentos calculados pela solução fundamental de Mindlin utilizando as propriedades físicas das camadas 1 e 4, respectivamente.  $\delta_{B\uparrow}$  é calculado com as propriedades físicas da camada logo acima da interface  $B$ , ou seja, a camada 1, e  $\delta_{C\downarrow}$  é o deslocamento calculado com as propriedades físicas da camada 3.

O cálculo numérico do campo de deslocamentos dado pela Eq. (5.34) é feito pela Eq. (5.23) que, por sua vez, depende do cálculo da matriz  $[G_{SS}]$  dos coeficientes de influência. Esses coeficientes são calculados pela Eq. (5.22) caso os pontos fonte estiverem localizados na superfície do solo, ou pela Eq. (5.27) quando eles estiverem abaixo da superfície. Assim, para obter os deslocamentos indicados na Eq. (5.35), as suas respectivas matrizes de influência precisam ser calculadas, conforme a seguinte expressão:

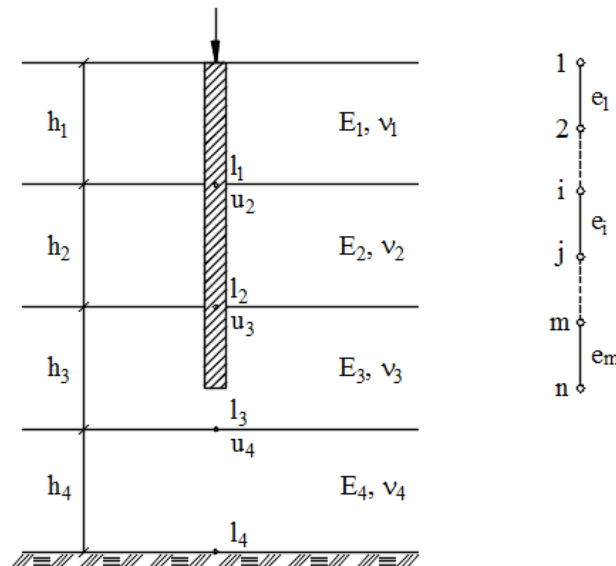
$$\begin{aligned} [G_{SS}] = & ([G_{SS}]_A - [G_{SS}]_{B\uparrow}) + ([G_{SS}]_{B\downarrow} - [G_{SS}]_{C\uparrow}) + ([G_{SS}]_{C\downarrow} - [G_{SS}]_{D\uparrow}) \\ & + ([G_{SS}]_{D\downarrow} - [G_{SS}]_E) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Observa-se que para analisar um meio estratificado sem uma base rígida, basta desconsiderar a matriz  $[G_{SS}]_E$  da expressão.

#### 5.4.2 Determinação de $[G_{EE}]$

Considera-se o mesmo meio estratificado da Figura 5.18, desta vez com uma estaca imersa, conforme ilustrado na Figura 5.19. Deve-se observar que a estaca atravessa as camadas do meio estratificado. Assim, deve-se tratar a estaca como uma linha de carga com pontos fonte e pontos de integração contidos em diferentes camadas.

Figura 5.19 – Estaca imersa num meio estratificado e a linha de carga correspondente.



Fonte: Autor.

A matriz  $[G_{EE}]$  é inicialmente calculada conforme descrito na seção 5.1, ou seja, o meio estratificado é calculado como um meio semi-infinito, e considera-se uma das duas abordagens descritas abaixo durante todo o processo de integração dos elementos lineares sobre a linha de carga.

#### Abordagem 1

Para cada ponto fonte  $i$  sobre a linha de carga, o coeficiente  $K$  dado pela Eq. (3.40) se torna:

$$K_{\eta i} = \frac{1 + \nu_{\eta i}}{8\pi E_{\eta i}(1 - \nu_{\eta i})} \quad (5.37)$$

Onde  $E_{\eta i}$  e  $\nu_{\eta i}$  são respectivamente módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson da camada  $\eta$  contendo o ponto fonte  $i$ .



## Abordagem 2

Considera-se nesta abordagem um coeficiente  $K_{cij}$  tal que:

$$K_{cij} = \frac{1 + 0,5(v_{\eta i} + v_{\eta j})}{8\pi[0,5(E_{\eta i} + E_{\eta j})][1 - 0,5(v_{\eta i} + v_{\eta j})]} \quad (5.38)$$

Onde  $E_{\eta j}$  e  $v_{\eta j}$  são respectivamente módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson da camada  $\eta$  contendo o ponto de integração  $j$ , e  $E_{\eta i}$  e  $v_{\eta i}$  são conforme as definições na Abordagem 1.

Seja a matriz  $[G_{EE}]$  obtida nesta etapa inicial, conforme a Eq. (5.39).

$$[G_{EE}] = \begin{bmatrix} c_{11}^{e_1} & c_{12}^{e_1+e_2} & c_{13}^{e_2+e_3} & \dots & c_{1i}^{e_{i-1}+e_i} & c_{1j}^{e_i+e_{i+1}} & \dots & c_{1m}^{e_{m-1}+e_m} & c_{1n}^{e_m} \\ c_{21}^{e_1} & c_{22}^{e_1+e_2} & c_{23}^{e_2+e_3} & \dots & c_{2i}^{e_{i-1}+e_i} & c_{2j}^{e_i+e_{i+1}} & \dots & c_{2m}^{e_{m-1}+e_m} & c_{2n}^{e_m} \\ c_{31}^{e_1} & c_{32}^{e_1+e_2} & c_{33}^{e_2+e_3} & \dots & c_{3i}^{e_{i-1}+e_i} & c_{3j}^{e_i+e_{i+1}} & \dots & c_{3m}^{e_{m-1}+e_m} & c_{3n}^{e_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1}^{e_1} & c_{i2}^{e_1+e_2} & c_{i3}^{e_2+e_3} & \dots & c_{ii}^{e_{i-1}+e_i} & c_{ij}^{e_i+e_{i+1}} & \dots & c_{im}^{e_{m-1}+e_m} & c_{in}^{e_m} \\ c_{j1}^{e_1} & c_{j2}^{e_1+e_2} & c_{j3}^{e_2+e_3} & \dots & c_{ji}^{e_{i-1}+e_i} & c_{jj}^{e_i+e_{i+1}} & \dots & c_{jm}^{e_{m-1}+e_m} & c_{jn}^{e_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1}^{e_1} & c_{m2}^{e_1+e_2} & c_{m3}^{e_2+e_3} & \dots & c_{mi}^{e_{i-1}+e_i} & c_{mj}^{e_i+e_{i+1}} & \dots & c_{mm}^{e_{m-1}+e_m} & c_{mn}^{e_m} \\ c_{n1}^{e_1} & c_{n2}^{e_1+e_2} & c_{n3}^{e_2+e_3} & \dots & c_{ni}^{e_{i-1}+e_i} & c_{nj}^{e_i+e_{i+1}} & \dots & c_{nm}^{e_{m-1}+e_m} & c_{nn}^{e_m} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Onde  $c_{ij}^{e_k+e_l}$  é a soma dos coeficientes de influência no nó  $j$  comum aos elementos  $e_k$  e  $e_l$ , com o ponto fonte no nó  $i$ . Observa-se que o coeficiente  $K_{ni}$ , na Abordagem 1, se aplica para todos os coeficientes da linha da matriz  $[G_{EE}]$  que corresponde ao ponto fonte  $i$ , já o coeficiente  $K_{cij}$  entra no cálculo individual de cada coeficiente de influência  $c_{ij}$  da matriz.

Concluída essa etapa inicial, um procedimento similar ao da Eq. (5.36) é aplicado conforme ilustrado no fluxograma da Figura 5.20, que já leva em consideração o número de camadas e o número de estacas imersas no solo. Pode-se observar nesse fluxograma que o algoritmo é composto por três etapas identificadas pelos números 1, 2 e 3. Na primeira etapa, a matriz  $[G_{EE}]$  é determinada conforme o procedimento discutido acima. Os vetores-linhas são determinados colocando os pontos fonte nas interfaces, conforme mostrado na Figura 5.19, onde  $l$  e  $u$  significam respectivamente abaixo e acima. Ou seja, o ponto fonte é colocado na interface inferior ou superior de uma dada camada. Por exemplo, o vetor-linha  $\{G_{l1}\}$  é calculado integrando a linha coincidente com a linha de carga com o ponto fonte colocado na interface inferior da camada 1, na cota  $h_1$ .

Vale salientar que se deve utilizar a mesma abordagem, Eq. (5.37) ou (5.38), para o cálculo da matriz  $[G_{EE}]$  e dos vetores-linha. Na segunda etapa, seguindo um procedimento iterativo, consideram-se todos os pontos fonte  $s$  sobre a linha de carga da estaca, ou seja, para cada linha  $\{G_s\}$  da matriz  $[G_{EE}]$  como na Eq. (5.40), aplica-se a Eq. (5.33) levando em consideração a posição do ponto fonte no interior do solo. Por exemplo, para os pontos fonte sobre a linha de carga numa profundidade menor que  $h_1$ , os coeficientes de influencia calculados pela Eq. (5.41) nas interfaces localizadas nas profundidades maior ou igual a  $h_1$  devem ser subtraídos dos coeficientes dados na Eq. (5.40), e o mesmo raciocínio se aplica para os pontos fonte posicionados nas outras profundidades sobre a linha de carga.

$$\{G_s\} = \left[ c_{s1}^{e_1} \quad c_{s2}^{e_1+e_2} \quad c_{s3}^{e_2+e_3} \quad \dots \quad c_{si}^{e_{i-1}+e_i} \quad c_{sj}^{e_i+e_{i+1}} \quad \dots \quad c_{sm}^{e_{m-1}+e_m} \quad c_{sn}^{e_m} \right] \quad (5.40)$$

Onde  $s$  é o ponto fonte sobre a linha de carga, com  $1 \leq s \leq n$ .

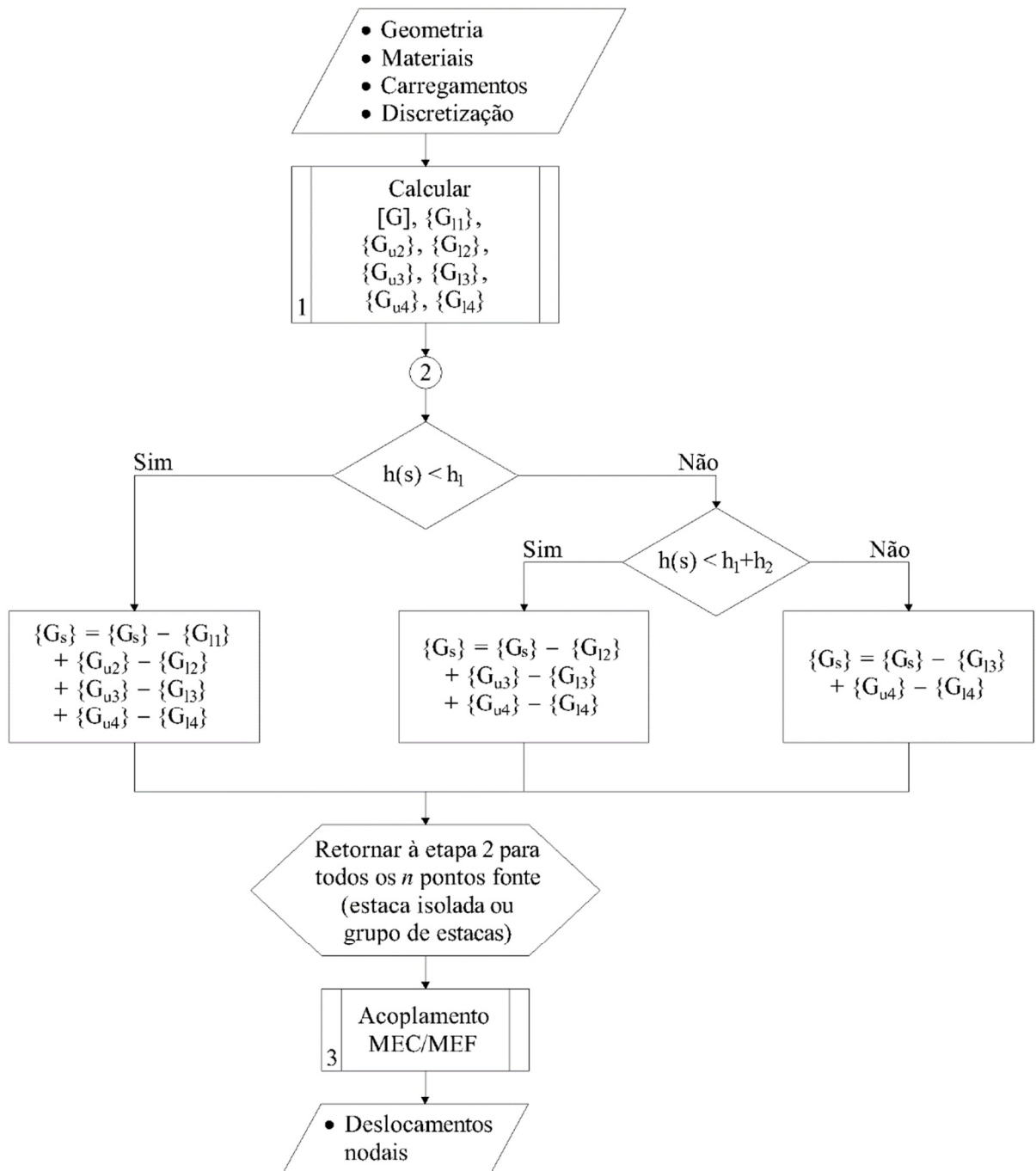
$$\{G_{\alpha\beta}\} = \left[ c_{\alpha\beta 1}^{e_1} \quad c_{\alpha\beta 2}^{e_1+e_2} \quad c_{\alpha\beta 3}^{e_2+e_3} \quad \dots \quad c_{\alpha\beta i}^{e_{i-1}+e_i} \quad c_{\alpha\beta j}^{e_i+e_{i+1}} \quad \dots \quad c_{\alpha\beta m}^{e_{m-1}+e_m} \quad c_{\alpha\beta n}^{e_m} \right] \quad (5.41)$$

Onde  $\alpha$  é o ponto fonte na interface superior ou inferior da camada  $\beta$ , com  $1 \leq \beta \leq \eta$ .

Deve-se observar também que quando o ponto fonte na estaca se encontra na interface entre duas camadas, por exemplo quando  $h(s) = h_1$ , considera-se esse ponto fonte como pertencente à camada logo embaixo conforme descrito na Figura 5.20.

O caso em que a rigidez do solo diminui com a profundidade é um caso especial, principalmente quando são utilizadas soluções analíticas e aproximadas para a consideração de solos com múltiplas camadas. Nos trabalhos de Poulos (1979), De Sanctis et al. (2002), e Seo e Prezzi (2007), diferentes formulações foram propostas e resultaram em resultados menos precisos para aquele caso em particular. Neste trabalho, foi possível obter resultados mais precisos ao computar a matriz  $[G_{EE}]$  na etapa 1, e ao aplica-la na etapa 3 referente ao acoplamento MEC/MEF. Este procedimento é mais eficiente do que o procedimento geral para outros casos que requerem os cálculos realizados na etapa 2.

Figura 5.20 – Fluxograma descrevendo o algoritmo de resolução do problema em análise.



Fonte: Autor.

### 5.5 ACOPLAMENTO MEC/MEF

Apresenta-se a seguir o procedimento para o acoplamento entre as formulações provenientes do MEC e do MEF. O acoplamento aqui é realizado para o problema de interação placa-estaca-solo. O procedimento é semelhante para os problemas de interação estaca-solo e placa-solo.

A matriz de rigidez do conjunto placa-estaca é dada por:

$$[K_{pe}] = \begin{bmatrix} [K_p] & 0 \\ 0 & [K_e] \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Onde  $[K_e]$  é a matriz de rigidez da(s) estaca(s) obtida com elementos finitos de viga tridimensional, e  $[K_p]$  é a matriz de rigidez da placa obtida com elementos finitos DKT, ambas apresentadas no capítulo 4.

A matriz de transformação do conjunto placa-estaca, semelhantemente à matriz de rigidez, é dada por:

$$[T_{pe}] = \begin{bmatrix} [T_p] & 0 \\ 0 & [T_e] \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Onde  $[T_e]$  e  $[T_p]$  são as matrizes de transformação finais obtidas a partir das matrizes nas Eqs. (5.9) e (5.25), respectivamente.

Define-se uma matriz  $[M]$  como:

$$[M] = [T_{pe}][G]^{-1} \quad (5.44)$$

Onde  $[G]$  é a matriz dos coeficientes de influência considerando a estratificação do solo.

Levando em consideração as condições de equilíbrio de forças e de compatibilidade de deslocamentos, tem-se:

$$[[K_{pe}] + [M]]\{\bar{u}\} = \{F_p\} \quad (5.45)$$

Logo, chega-se à formulação do acoplamento MEC/MEF:

$$[\bar{K}]\{\bar{u}\} = \{F_p\} \quad (5.46)$$

Onde  $[\bar{K}]$  é a matriz de rigidez equivalente do sistema placa-estaca-solo,  $\{\bar{u}\}$  é o vetor dos deslocamentos nodais da região de contato placa-solo e da(s) estaca(s), e  $\{F_p\}$  é o vetor das cargas externas aplicadas na placa.

Deve-se observar também que no caso da interação entre a estaca e o solo não-homogêneo, a matriz final  $[G_{EE}]$ , obtida no final da etapa 2 do algoritmo na Figura 5.20, tem a mesma dimensão que aquela que seria obtida considerando um solo homogêneo, pois a consideração de camadas é feita somando e subtraindo os coeficientes de influência calculados nas interfaces. Esta observação continua válida para as matrizes  $[G_{SS}]$ ,  $[G_{SE}]$  e  $[G_{ES}]$ . Portanto, a formulação do presente trabalho é computacionalmente eficiente e apresenta muita praticidade em termos de modelagem do problema de interação solo-estrutura.

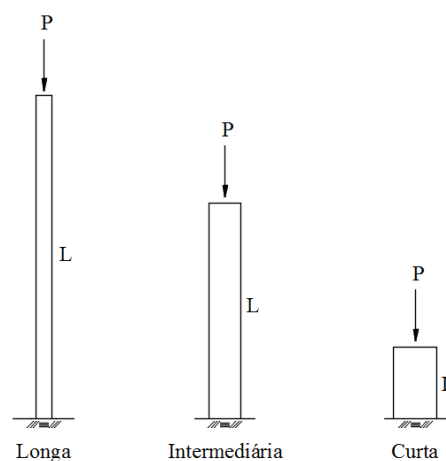
## 6 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DA ESTACA

Neste capítulo, aborda-se uma análise de flambagem linear de estacas, também conhecida como *eigenvalue buckling analysis* (Dassault Systèmes, 2011) que é uma análise geralmente utilizada para a estimativa da carga crítica de flambagem de estruturas. Apresentam-se inicialmente conceitos teóricos sobre flambagem com foco na teoria de flambagem de Euler. Em seguida, apresenta-se uma formulação MEC/MEF, que é uma abordagem original, para a determinação da carga crítica de flambagem de uma estaca em interação com o solo. Deve-se salientar que o objetivo deste capítulo é introduzir uma nova formulação que pode ser estendida em futuros estudos para analisar diversos outros aspectos da flambagem de estacas como estacas parcialmente inseridas no solo, com deformação lateral inicial, com imperfeições geométricas, com excentricidade da carga aplicada, entre outros.

### 6.1 CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM

A flambagem é um fenômeno de instabilidade que ocorre quando a estrutura deixa de resistir aos níveis de carga de compressão aplicados (Abbey, 2015). Na análise da estabilidade, existem três tipos de estrutura, conforme mostrado na Figura 6.1, que apresentam respostas mecânicas diferentes. A classificação de componentes estruturais como curtos, intermediários e esbeltos se dá pelo valor do índice de esbeltez que é a relação entre o comprimento de flambagem e o raio de giração.

Figura 6.1 –Tipos de estruturas na análise de flambagem.



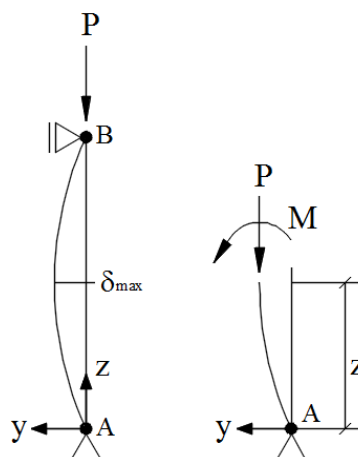
Fonte: Autor.

Os componentes curtos são rígidos o suficiente para não falhar por perda de estabilidade e sim por escoamento local quando os níveis de carga atingem valores extremos. Com os componentes intermediários, o cálculo da flambagem pela teoria de Euler não é preciso e pode levar a valores superestimados da carga crítica de flambagem. De fato, nesta categoria, à medida que se aumenta a carga, pode haver alterações da configuração deformada e do comportamento plástico da estrutura. A ocorrência da instabilidade devido a uma carga limite pode resultar na ruptura da estrutura, ou a estrutura pode apresentar um novo modo de flambagem capaz de suportar cargas ainda maiores. Por fim, para a classe de componentes longos, na qual se encontra a maioria de estacas utilizadas em projetos de engenharia, a falha geralmente ocorre a níveis de carga muito abaixo do limite de resistência à compressão. Assim, a carga crítica de flambagem pode ser determinada com alta precisão via análise linear e com base nas formulações de Euler.

### 6.1.1 Formulação física da carga crítica de flambagem

Determina-se a carga crítica de flambagem via uma abordagem física, que resulta na mesma formulação obtida utilizando a teoria clássica de Euler, por melhor representar os mecanismos físicos governantes do fenômeno de flambagem. Considera-se uma coluna de comprimento  $L$ , conforme mostrado na Figura 6.2, inicialmente indeformada e sujeita à força axial  $P$  de compressão provocando uma deformação lateral, com o maior deslocamento  $\delta_{max}$  ocorrendo no meio da coluna. Quando a força axial cresce até atingir um valor  $P_{cr}$ , carga crítica, no ponto de bifurcação, os deslocamentos tendem ao infinito e a coluna falha por flambagem.

Figura 6.2 – Coluna sob compressão e esforços internos.



Fonte: Autor.

A principal característica desta abordagem reside na comparação do momento fletor interno decorrente da distribuição interna das tensões com o momento fletor externo decorrente da carga aplicada na coluna. No estado deformado mostrado na Figura 6.2, os deslocamentos são nulos,  $y = 0$ , no topo e na base da coluna, e observa-se que o deslocamento lateral da coluna pode ser modelado com a seguinte função senoidal:

$$y(z) = \delta_{max} \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad (6.1)$$

O argumento  $\frac{\pi z}{L}$  possibilita que o deslocamento  $y$  seja nulo em  $z = 0$  e  $z = L$ .

Da teoria de flexão de vigas, pode-se relacionar o momento fletor  $M_{int}$  com o deslocamento da coluna  $y$  através da equação:

$$M_{int} = EI y'' \quad (6.2)$$

Substitui-se na Eq. (6.2) a segunda derivada da Eq. (6.1), e obtém-se:

$$M_{int} = EI \frac{d^2}{dz^2} \left[ \delta_{max} \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \right] = -\frac{\pi^2 EI}{L^2} y(z) \quad (6.3)$$

$M_{int}$  representa o momento fletor interno na coluna devido à distribuição interna de tensões ocasionada por sua vez pela deformação lateral da coluna.  $M_{int}$  pode ser de fato considerado como a resistência interna da coluna à flexão. Assim, para obter a condição de equilíbrio, deve-se igualar o momento fletor interno  $M_{int}$  com o momento fletor externo  $M_{ext}$  devido à carga  $P$  aplicada:

$$M_{ext} = -Py(z) \quad (6.4)$$

Tem-se, portanto:

$$-Py(z) = -\frac{\pi^2 EI}{L^2} y(z) \quad (6.5)$$

Duas importantes considerações físicas, não evidentes pela abordagem matemática da teoria de Euler, podem ser deduzidas da Eq. (6.5). Ao igualar os momentos fletores interno e externo, torna-se claro que a flambagem ocorre quando a carga  $P$  cresce ao ponto de satisfazer a Eq. (6.5), e o fato do termo  $y(z)$  aparecer nos dois membros da equação indica que a flambagem ocorre simultaneamente ao longo de todo o comprimento da coluna.



Finalmente, cancelando  $y(z)$ , obtém-se a carga crítica de flambagem:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (6.6)$$

Deve-se salientar que a Eq. (6.6) é válida para colunas com dois apoios simples nas extremidades. As cargas críticas para outras condições de contorno são apresentadas na seção 6.1.2. Deve-se observar também que a análise clássica de flambagem independe da resistência ao escoamento do material, conforme pode ser observado na determinação da carga crítica. Contudo, considerações sobre escoamento não devem ser totalmente ignoradas, ou seja, uma vez determinada a carga crítica  $P_{cr}$ , a mesma deve ser dividida pela área  $A$  da seção transversal da coluna, a fim de obter a tensão  $\sigma_z$  dada por:

$$\sigma_z = \frac{P_{cr}}{A} \quad (6.7)$$

A tensão  $\sigma_z$  precisa ser comparada com a resistência de escoamento do material com o objetivo de determinar a ocorrência ou não do escoamento antes da flambagem. Este procedimento é muito crítico para colunas curtas, uma vez que elas apresentam grandes cargas críticas de flambagem que muitas vezes não são atingidas, e a falha ocorre por outros mecanismos.

A carga crítica de flambagem conforme expressa na Eq. (6.6) é válida apenas nas seguintes condições: a coluna é esbelta, e completamente reta no início do carregamento; a carga é axial e aplicada no topo da coluna com seção transversal constante ao longo do comprimento; o material da coluna é homogêneo e isotrópico, e as tensões na coluna atuam no regime elástico; o peso próprio da coluna e o encurtamento por compressão axial são desconsiderados; não há atrito nas extremidades da coluna, e a falha ocorre unicamente por flambagem. Com isso, a teoria de Euler não leva em consideração tensões axiais e imperfeições sobre a coluna e a carga aplicada, e em alguns casos a carga crítica de flambagem calculada pode exceder a real carga crítica da coluna.

### 6.1.2 Cargas críticas para diversas condições de contorno

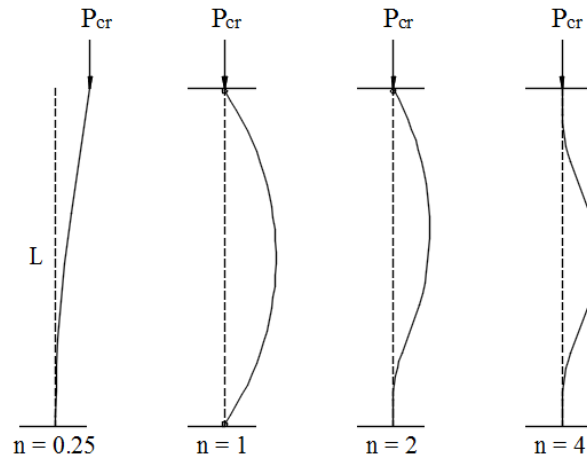
Podem existir diversas restrições nas extremidades da coluna, ou seja, em uma ou nas duas extremidades, pode haver apoios simples, engastes, entre outros tipos de apoios.

Uma generalização da fórmula de Euler é expressa pela seguinte equação:

$$P_{cr} = n \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (6.8)$$

Onde  $n$  é o fator que depende das condições de contorno na coluna.

Figura 6.3 – Diferentes condições de contorno e fator  $n$  correspondente.



Fonte: Autor.

O comprimento de flambagem  $L_e$  é outro conceito importante na análise de flambagem, e pode ser utilizado no lugar do fator  $n$  para a consideração de diferentes tipos de condições de contorno. Com isso, a Eq. (6.8) pode ser reescrita como:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad (6.9)$$

A relação entre o comprimento da coluna  $L$  e o comprimento de flambagem  $L_e$  é dada por:

$$L_e = \frac{L}{\sqrt{n}} \quad (6.10)$$

Assim, para uma coluna com topo livre e base engastada, por exemplo, o comprimento de flambagem equivale a  $L_e = 2L$ . Este resultado é muito utilizado nas soluções analíticas para a determinação da carga crítica de flambagem em que as condições de contorno de uma coluna podem ser transformadas contanto que se leve em consideração o adequado comprimento de flambagem. Deve-se observar, na Eq. (6.9), que a carga crítica é inversamente proporcional ao comprimento da coluna. Além disso, dada uma coluna, a situação em que há engastes nas duas extremidades é a que suporta a maior carga axial antes da coluna falhar por flambagem.

## 6.2 ANÁLISE DE FLAMBAGEM LINEAR

As formulações apresentadas na seção anterior são soluções analíticas geralmente aplicáveis a problemas com geometria, carregamento e condições de contorno simples, e são utilizadas nesta seção para validar inicialmente os resultados das cargas críticas de flambagem obtidas numericamente pelo MEF. Para isso, apresenta-se a formulação numérica do problema de flambagem da coluna baseada no problema de autovalores. Além da matriz de rigidez da coluna, deve-se determinar também a sua matriz de instabilidade ou matriz de rigidez geométrica que representa o efeito da força axial sobre a rigidez à flexão.

### 6.2.1 Formulação numérica do problema de flambagem

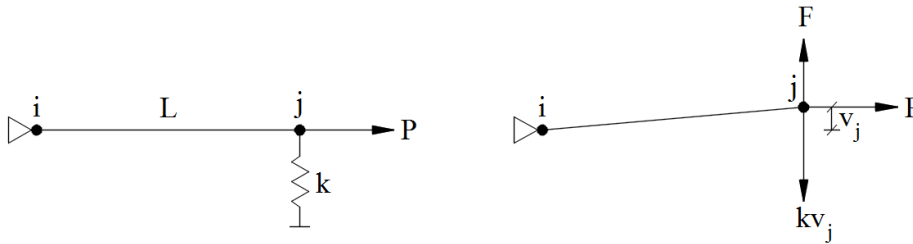
Problemas de autovalores também conhecidos como problemas de valores característicos ocorrem na análise de equações diferenciais homogêneas. Existem em engenharia dois principais estudos que podem ser analisados como problemas de autovalores, a saber, o estudo de vibrações em sistemas contínuos e a determinação de cargas críticas de flambagem para colunas, placas elásticas e cascas. A análise de flambagem linear da coluna consiste em determinar a carga máxima que ela consegue suportar antes da falha. Conforme foi visto na seção anterior, para colunas longas, a flambagem independe da tensão de ruptura, e sim da rigidez tanto do material quanto da geometria da coluna. Essas rigidezes podem ser formuladas através de um sistema de equações para a determinação de autovalores. Os autovalores assim determinados correspondem a coeficientes que multiplicados pela carga aplicada na estrutura no início da análise resultam em cargas críticas de flambagem. Além disso, para cada autovalor corresponde um autovetor que representa o modo de flambagem da estrutura.

A rigidez geométrica é uma grandeza que pode ser considerada tanto em problemas lineares quanto em problemas não-lineares, e o seu efeito é preponderante na análise de flambagem linear. O conceito de rigidez geométrica pode ser entendido através de uma representação analítica simples da barra rígida, conforme ilustrado na Figura 6.4, em que a força lateral  $F$  produz um deslocamento lateral  $v_j$ . Se  $v_j$  é muito menor em relação a  $L$ , a soma dos momentos calculados no ponto  $i$  resulta em:

$$(k + k_g)v_j = F \quad (6.11)$$

Onde:  $k_g = \frac{P}{L}$

Figura 6.4 – Barra rígida sob força axial  $P$  e apoiada por uma mola linear.



Fonte: Autor.

Com isso, pode-se observar que  $k_g$  tem por efeito aumentar a rigidez total ( $k + k_g$ ) quando a carga aplicada  $P$  é de tração, e reduzi-la quando  $P$  é de compressão. Assim, a deflexão  $v_j$ , produzida pela força  $F$ , diminui quando  $P$  é positivo, e aumenta quando  $P$  é negativo. A rigidez total ( $k + k_g$ ) se torna nula quando  $P = -kL$ , que corresponde à carga de flambagem independente de  $v_j$ .

Em se tratando de uma estrutura analisada pelo MEF, a Eq. (6.11) se torna:

$$([K] + [K_g])\{v\} = \{F\} \quad (6.12)$$

Onde  $[K]$  é a matriz de rigidez da estrutura,  $[K_g]$  é a matriz de rigidez geométrica ou matriz de instabilidade,  $\{v\}$  é o vetor dos deslocamentos nodais, e  $\{F\}$  é o vetor das cargas aplicadas. A matriz  $[K_g]$  é também conhecida como matriz de rigidez tensional, matriz de rigidez das tensões iniciais, matriz de rigidez diferencial, ou ainda matriz dos coeficientes de estabilidade. Como a matriz  $[K_g]$  depende das tensões desenvolvidas na direção axial ao carregamento, ela pode aumentar ou reduzir a resistência da estrutura submetida a cargas  $\{F\}$ .

No caso da análise de flambagem linear, a solução do problema consiste em resolver o seguinte problema de autovalores:

$$([K] + \lambda[K_g])\{dv\} = 0 \quad (6.13)$$

No caso da flambagem de uma coluna, considera-se apenas o primeiro modo de flambagem. Assim,  $\lambda$  é o autovalor calculado e representa o fator que multiplicado pela carga aplicada resulta na carga crítica de flambagem.  $\{dv\}$  é o autovetor correspondente e representa o modo de flambagem da estrutura. Os modos de flambagem são vetores normalizados e não representam os valores reais de deformação na carga crítica calculada, e são geralmente

utilizados para gerar perturbações na geometria para uma posterior análise de colapso estrutural. Deve-se observar também que na análise de flambagem linear as matrizes  $[K]$  e  $[K_g]$  são calculadas a partir do estado inicial e indeformado da estrutura. Além disso, o método é válido apenas quando a resposta mecânica da estrutura é elástico-linear antes do ponto de bifurcação.

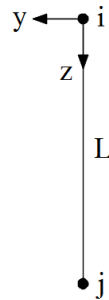
### 6.2.2 Funções interpoladoras de Hermite

A determinação das matrizes de rigidez e de instabilidade de um elemento finito de viga, conforme mostrado na Figura 6.5, pode ser feita utilizando uma função cúbica aplicada na equação diferencial governante do problema. A função cúbica de deslocamentos pode ser assumida como:

$$v(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 \quad (6.14)$$

Os coeficientes  $a_i$  são calculados de modo a satisfazer as condições de contorno impostas. Utiliza-se assim, neste capítulo, a interpolação de Hermite para representar as funções de forma cúbicas das deflexões transversais do elemento finito de viga.

Figura 6.5 – Elemento finito de viga.



Fonte: Autor.

A fórmula de interpolação de Hermite permite modelar o comportamento de diferentes condições de contorno no que diz respeito a deflexões  $v_i$  e rotações  $\frac{dv_i}{dz}$  nas extremidades do elemento finito de viga, e pode ser expressa como:

$$\phi_i = \sum_{i=0}^n U_i(z)v_i + \sum_{i=0}^n W_i(z) \frac{dv_i}{dz} \quad (6.15)$$

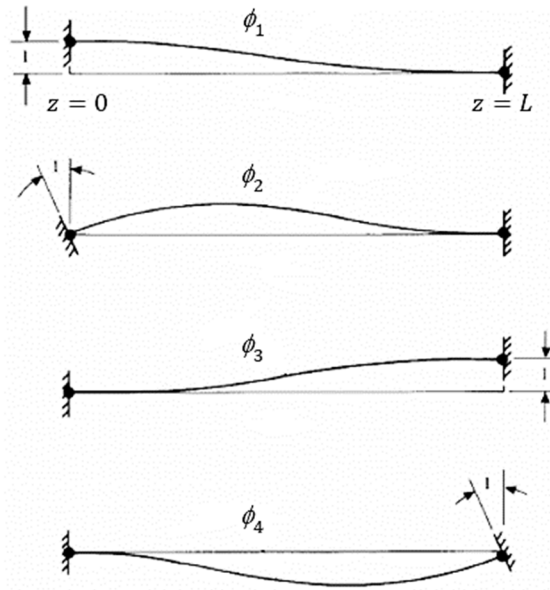
Onde  $U_i(z)$  e  $W_i(z)$  são polinômios dados por:

$$U_i(z) = \left[ 1 - 2 \frac{dL_i(z)}{dz} (z - z_i) \right] [L_i(z)]^2 \quad (6.16)$$

$$W_i(z) = (z - z_i) [L_i(z)]^2 \quad (6.17)$$

Para funções de forma cúbicas,  $n = 1$ , e as funções de forma  $\phi_i$  são mostradas na Figura 6.6.

Figura 6.6 – Funções de forma de Hermite.



Fonte: Adaptada de Weaver et al. (1991).

A função de forma  $\phi_1$  tem as seguintes condições de contorno:  $v(0) = 1$  e  $v(L) = v'(0) = v'(L) = 0$ , e as funções  $L_i$  nas Eqs. (6.16) e (6.17) são calculadas como:

$$L_0(z) = \frac{z - z_L}{z_0 - z_L} \quad L_L(z) = \frac{z - z_0}{z_L - z_0} \quad (6.18)$$

Substituindo  $z_0 = 0$  e  $z_L = L$  na Eq. (6.18), obtém-se:

$$L_0(z) = \frac{z - L}{-L} \quad L_L(z) = \frac{z}{L} \quad \frac{dL_0(z)}{dz} = -\frac{1}{L} \quad \frac{dL_L(z)}{dz} = \frac{1}{L} \quad (6.19)$$

A única condição de contorno não nula é  $v(0) = 1$ , assim calcula-se apenas o termo  $U_i(z) = U_0(z)$  da Eq. (6.15) como:

$$U_0(z) = \left[ 1 - 2\left(-\frac{1}{L}\right)z \right] \left[ \frac{(z-L)^2}{L^2} \right] \quad (6.20)$$

Substituindo a Eq. (6.20) na Eq. (6.15) com  $v(0) = 1$ , obtém-se finalmente:

$$\phi_1 = 1 - \frac{3z^2}{L^2} + \frac{2z^3}{L^3} \quad (6.21)$$

Seguindo um procedimento semelhante ao para o cálculo de  $\phi_1$ , as funções de forma  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  e  $\phi_4$  são dadas por:

$$\phi_2 = z \left( 1 - \frac{2z}{L} + \frac{z^2}{L^2} \right) \quad (6.22)$$

$$\phi_3 = \frac{3z^2}{L^2} - \frac{2z^3}{L^3} \quad (6.23)$$

$$\phi_4 = z \left( -\frac{z}{L} + \frac{z^2}{L^2} \right) \quad (6.24)$$

Logo, a deflexão em qualquer ponto do elemento finito de viga é dada por:

$$v(z) = \phi_1 v_i + \phi_2 v'_i + \phi_3 v_j + \phi_4 v'_j \quad (6.25)$$

Ou ainda:

$$v(z) = [\phi] \{v\} \quad (6.26)$$

Onde:

$$[\phi] = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4] \quad (6.27)$$

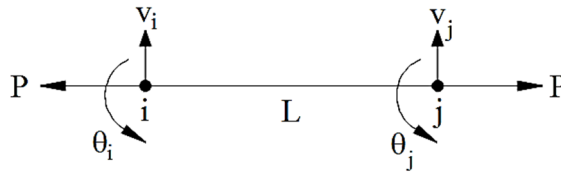
$$\{v\} = [v_i \quad v'_i \quad v_j \quad v'_j]^T \quad (6.28)$$

### 6.2.3 Determinação da matriz de rigidez geométrica

Considera-se um elemento finito de viga submetido à carga axial, conforme mostrado na Figura 6.7. A equação diferencial governante do problema de flambagem de uma coluna longa é dada por:

$$EI(v''(z))^2 + P(v'(z))^2 = 0 \quad (6.29)$$

Figura 6.7 – Elemento submetido à carga axial.



Fonte: Autor.

Substituindo a Eq. (6.26) na Eq. (6.29) e integrando ao longo do comprimento  $L$  resulta em:

$$\int_0^L \left( EI \frac{d^2[\phi]^T}{dz^2} \frac{d^2[\phi]}{dz^2} \{v\} + P \frac{d[\phi]^T}{dz} \frac{d[\phi]}{dz} \{v\} \right) dz = 0 \quad (6.30)$$

Deve-se observar que o primeiro termo da Eq. (6.30) corresponde à matriz de rigidez da coluna, conforme determinado no capítulo 4, e o segundo termo corresponde à matriz de instabilidade a ser determinado, e pode ser isolado conforme a seguinte expressão:

$$P \int_0^L \left( \frac{d[\phi]^T}{dz} \frac{d[\phi]}{dz} \right) dz \quad (6.31)$$

Assim, utilizando as derivadas das funções de forma dadas pelas Eqs. (6.21) a (6.24), e multiplicando as duas matrizes obtidas, tem-se:

$$\frac{P}{L^3} \begin{bmatrix} 6z^2 - 6zL \\ 3z^2L - 4zL^2 + L^3 \\ -6z^2 + 6zL \\ 3z^2L - 2zL^2 \end{bmatrix} \frac{1}{L^3} [6z^2 - 6zL \quad 3z^2L - 4zL^2 + L^3 \quad -6z^2 + 6zL \quad 3z^2L - 2zL^2] \quad (6.32)$$



Após realizar a integração deste resultado e substituir os limites de integração, chega-se à matriz de instabilidade  $[K_g]$  dada por:

$$[K_g] = \frac{P}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & -4L^2 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

A seguir, resolve-se um exemplo numérico através do código computacional desenvolvido com o objetivo de validar os resultados obtidos. Para isso, considera-se uma coluna de comprimento  $L = 25 \text{ m}$ , diâmetro  $d = 1 \text{ m}$ ,  $EA = 2,5 \times 10^5 \text{ kN}$ , e  $EI = 1,5625 \times 10^4 \text{ kNm}^2$ . A distribuição do esforço normal é constante ao longo da coluna, conforme mostrado na Figura 6.8. Consideram-se três condições de contorno: coluna engastada na base, coluna biengastada e coluna biapoiada. A coluna é discretizada por elementos finitos de viga tridimensional. Assim, a matriz de instabilidade da Eq. (6.33) é implementada no código computacional conforme a Eq. (6.34).

$$[K_g] = N \begin{bmatrix} \frac{6}{5L} & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{6}{5L} & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & 0 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{2L}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & -\frac{L}{30} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{2L}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & -\frac{L}{30} \\ -\frac{6}{5L} & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5L} & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5L} & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5L} & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 & -\frac{L}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{2L}{15} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & -\frac{L}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{2L}{15} \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

Onde  $N$  é o esforço normal constante no elemento finito obtido aplicando uma carga vertical no topo da coluna. Os resultados da carga crítica de flambagem são mostrados na Tabela 6.1, e são comparados com os resultados analíticos calculados pela Eq. (6.8).

Para a coluna engastada na base:

$$P_{cr} = \frac{1 \pi^2 EI}{4 L^2} = 61,69 \text{ kN}$$

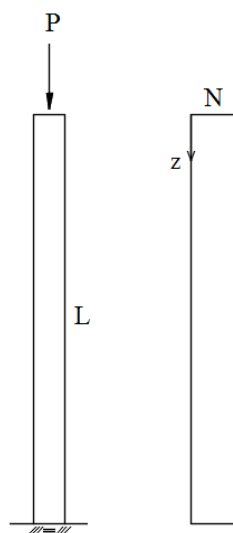
Para a coluna biapoada:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = 246,74 \text{ kN}$$

Para a coluna biengastada:

$$P_{cr} = 4 \frac{\pi^2 EI}{L^2} = 986,96 \text{ kN}$$

Figura 6.8 – Coluna sob carga axial e esforço normal constante.



Fonte: Autor.

Tabela 6.1 – Resultados numéricos da carga crítica de flambagem.

Elementos finitos	$P_{cr}$ (kN)		
	Coluna engastada	Coluna biapoada	Coluna biengastada
1	62,15	250,00	-
2	61,72	248,60	1000,00
10	61,69	246,74	987,17
20	61,69	246,74	986,97
50	61,69	246,74	986,96

Fonte: Autor.

Pode-se observar na Tabela 6.1 que os resultados convergem, e a partir de 10 elementos finitos, os resultados numéricos se tornam praticamente iguais aos resultados analíticos. Com 1 elemento finito não é obtido um valor para uma coluna biengastada uma vez que ao aplicar as condições de contorno as matrizes envolvidas se tornam vazias. No caso de colunas com comprimento menor que 10 m, recomenda-se uma malha de até 10 elementos finitos. Contudo, conforme discutido no exemplo numérico 7.4.1 do capítulo 7, com a estaca inserida no solo, os resultados são mais precisos utilizando 20 elementos finitos.

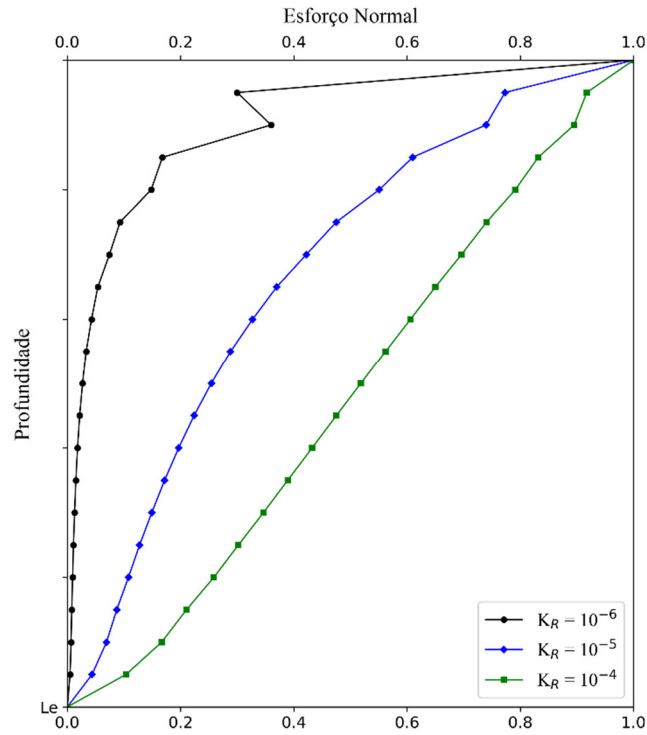
### 6.3 FLAMBAGEM DA ESTACA INSERIDA NO SOLO

A flambagem é um fenômeno a ser considerado no estudo de estacas esbeltas com carregamento axial ou lateral, e também no estudo de estacas que se estendem de maneira considerável acima da superfície do solo. Neste trabalho, utiliza-se uma abordagem MEC/MEF para analisar o fenômeno de flambagem em estacas. Para isso, a formulação numérica, apresentada na seção anterior, para análise de flambagem linear da coluna é estendida com o MEC para a análise de flambagem linear da estaca inserida no solo. Em muitos estudos na literatura, considera-se uma distribuição constante do esforço normal na estaca. Na realidade, esta distribuição é variável com a profundidade devido à presença do solo. Assim, determina-se nesta seção uma matriz de instabilidade com o esforço normal linearmente aproximado em cada elemento finito da estaca.

#### 6.3.1 Matriz de instabilidade da estaca em interação com o solo

Para estacas curtas e estacas rígidas de ponta, pode-se assumir uma distribuição constante do esforço normal na estaca, ou seja, desconsidera-se a mobilização da resistência lateral. Contudo, para estacas flutuantes e estacas compressíveis de ponta, ocorre uma considerável transferência de carga resistida lateralmente. Deve-se considerar, portanto, uma distribuição variável do esforço normal ao longo da estaca, conforme mostrado, por exemplo, na Figura 6.9 – diagramas do esforço normal numa estaca flutuante submetida a uma carga vertical unitária no topo, para diferentes valores de  $K_R = E_e I / E_s L^4$  representando a rigidez da estaca em relação ao solo.

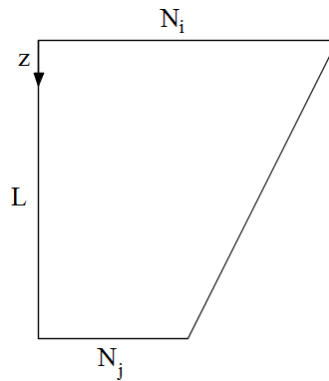
Figura 6.9 – Distribuição do esforço normal ao longo da estaca.



Fonte: Autor.

Considerando a estaca submetida a uma carga axial, assume-se uma variação linear do esforço normal em cada elemento finito conforme mostrado na Figura 6.10.

Figura 6.10. Esforço normal num elemento finito de viga.



Fonte: Autor.

O esforço normal  $N(z)$  pode ser expresso como:

$$N(z) = N_i + \frac{1}{L}(N_j - N_i)z \tag{6.35}$$

A matriz de instabilidade é calculada utilizando a Eq. (6.31) e é dada por:

$$N(z) \int_0^L \left( \frac{d[\phi]^T}{dz} \frac{d[\phi]}{dz} \right) dz \quad (6.36)$$

Ou ainda:

$$N_i \int_0^L \left( \frac{d[\phi]^T}{dz} \frac{d[\phi]}{dz} \right) dz + (N_j - N_i) \frac{z}{L} \int_0^L \left( \frac{d[\phi]^T}{dz} \frac{d[\phi]}{dz} \right) dz \quad (6.37)$$

O primeiro termo já foi calculado e apresentado na Eq. (6.34), ou seja:

$$[K_s]_i = N_i \begin{bmatrix} \frac{6}{5L} & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{6}{5L} & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & 0 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{2L}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & -\frac{L}{30} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{2L}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & -\frac{L}{30} \\ -\frac{6}{5L} & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5L} & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5L} & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5L} & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 & -\frac{L}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{2L}{15} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & -\frac{L}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{2L}{15} \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

As derivadas das funções de forma  $\phi_i$  são:

$$\phi_1' = -\frac{6z}{L^2} + \frac{6z^2}{L^3} \quad (6.39)$$

$$\phi_2' = 1 - \frac{4z}{L} + \frac{3z^2}{L^2} \quad (6.40)$$

$$\phi_3' = \frac{6z}{L^2} - \frac{6z^2}{L^3} \quad (6.41)$$

$$\phi_4' = -\frac{2z}{L} + \frac{3z^2}{L^2} \quad (6.42)$$

Assim, os coeficientes da matriz resultante do segundo termo da Eq. (6.37) são calculados como:

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \int_0^L \frac{z}{L} \phi_1' \phi_1' dz = \frac{3}{5L} & c_{12} &= \int_0^L \frac{z}{L} \phi_1' \phi_2' dz = \frac{1}{10} \\
 c_{13} &= \int_0^L \frac{z}{L} \phi_1' \phi_3' dz = -\frac{3}{5L} & c_{14} &= \int_0^L \frac{z}{L} \phi_1' \phi_4' dz = 0 \\
 c_{22} &= \int_0^L \frac{z}{L} \phi_2' \phi_2' dz = \frac{L}{30} & c_{23} &= \int_0^L \frac{z}{L} \phi_2' \phi_3' dz = -\frac{1}{10} \\
 c_{24} &= \int_0^L \frac{z}{L} \phi_2' \phi_4' dz = -\frac{L}{60} & c_{33} &= \int_0^L \frac{z}{L} \phi_3' \phi_3' dz = \frac{3}{5L} \\
 c_{34} &= \int_0^L \frac{z}{L} \phi_3' \phi_4' dz = 0 & c_{44} &= \int_0^L \frac{z}{L} \phi_4' \phi_4' dz = \frac{L}{10} \\
 c_{21} &= c_{12} & c_{31} &= c_{13} \\
 c_{32} &= c_{23} & c_{41} &= c_{14} \\
 c_{42} &= c_{24} & c_{43} &= c_{34}
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

Assim, para um elemento finito de viga tridimensional, monta-se a seguinte matriz:

$$[K_g]_{II} = (N_j - N_i) \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{5L} & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{3}{5L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5L} & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{3}{5L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{L}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & -\frac{L}{60} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{L}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & -\frac{L}{60} \\ -\frac{3}{5L} & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{5L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5L} & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{5L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{60} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{60} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} \end{bmatrix} \tag{6.44}$$

Finalmente, a matriz de instabilidade considerando uma distribuição do esforço normal linearmente aproximada em cada elemento finito é dada por:

$$[K_g] = [K_g]_I + [K_g]_{II} \tag{6.45}$$

### 6.3.2 Acoplamento MEC/MEF

Considerando a interação estaca-solo, os deslocamentos são obtidos pelo sistema:

$$([K_e] + [M])\{u\} = \{F\} \quad (6.46)$$

A análise de flambagem linear é realizada de modo semelhante à Eq. (6.13) através da resolução do seguinte problema de autovalores:

$$([K_e] + [M] + \lambda_F [K_g])\{du\} = 0 \quad (6.47)$$

Onde:

$[K_e]$  é a matriz de rigidez da estaca

$[M] = [T_p][G]^{-1}$  com  $[G]$  sendo a matriz dos coeficientes de influência do solo.

$[K_g]$  é a matriz de rigidez geométrica da estaca conforme a Eq. (6.34) ou a Eq. (6.45).

$\lambda_F$  é o autovalor interpretado como fator de multiplicação da carga  $\{F\}$  para que se atinja a flambagem.

Uma vez resolvida o problema de autovalores, considera-se o primeiro modo de flambagem que corresponde ao menor valor dos autovalores para a determinação da carga crítica de flambagem da estaca  $\{P_{cr}\}$  dada por:

$$\{P_{cr}\} = \lambda_F \{F\} \quad (6.48)$$

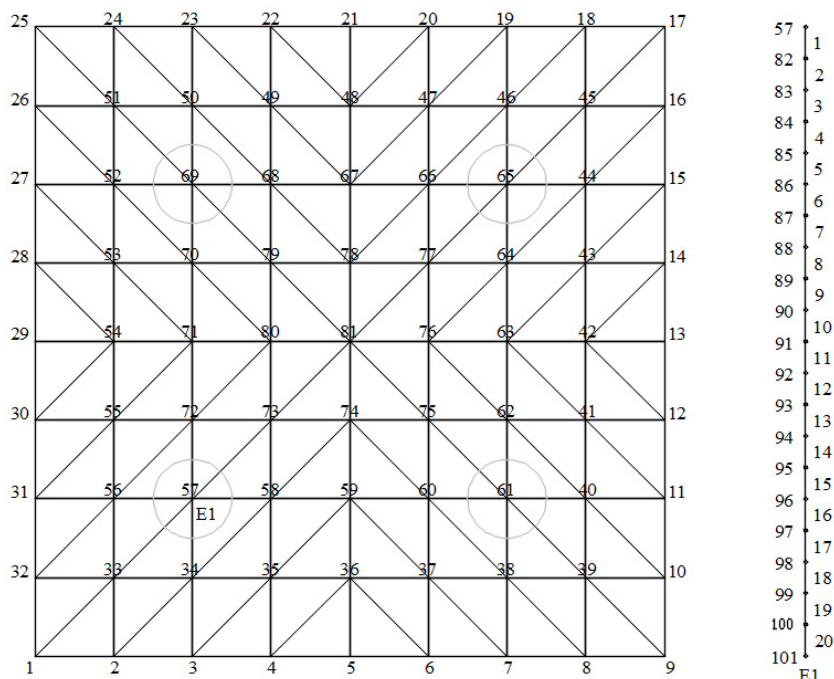
Neste trabalho, considera-se uma carga vertical unitária aplicada no topo da estaca, e a matriz de rigidez geométrica é calculada utilizando o esforço normal resultante.

## 7 EXEMPLOS NUMÉRICOS

As formulações numéricas desenvolvidas neste trabalho são avaliadas neste capítulo mediante a simulação de diversos exemplos numéricos. São resolvidos problemas de interação solo-estrutura e problemas de flambagem da estaca com as formulações apresentadas nos capítulos anteriores. Os elementos estruturais, a saber, estacas e placas, são modelados pelo MEF e o solo é modelado pelo MEC. A estaca é discretizada com 20 elementos finitos de viga tridimensional e a placa é discretizada com elementos finitos DKT. A malha da estaca é gerada automaticamente no código computacional desenvolvido, bastando informar o número de elementos finitos requerido, e o eixo da estaca é perpendicular à malha da superfície do solo.

Para o solo, as malhas nas posições das linhas de carga e da superfície do solo em contato com a placa apresentam o mesmo número de elementos das malhas das estacas e da placa, respectivamente. Além disso, as malhas de elementos finitos e de elementos de contorno devem coincidir. Assim, procede-se adequadamente ao acoplamento MEC-MEF aplicando condições de equilíbrio de forças e de compatibilidade de deslocamentos. Cada camada de solo é considerada homogênea, isotrópica e elástico-linear. A malha da placa, caso não indicada explicitamente no exemplo, é conforme a malha mostrada na Figura 7.1.

Figura 7.1 – Placa com 81 nós e 128 elementos, e estaca com 20 elementos e 21 nós.



Fonte: Autor.



Deve-se salientar que os exemplos apresentados aqui representam apenas uma amostra do que pode ser analisado com as formulações desenvolvidas e os códigos computacionais implementados. Problemas com geometria e carregamento mais complexos também podem ser analisados. Os exemplos deste capítulo foram escolhidos com o objetivo de verificar, validar e demonstrar a eficiência e a acurácia das formulações desenvolvidas em comparação com os trabalhos de outros autores.

## 7.1 INTERAÇÃO PLACA-SOLO

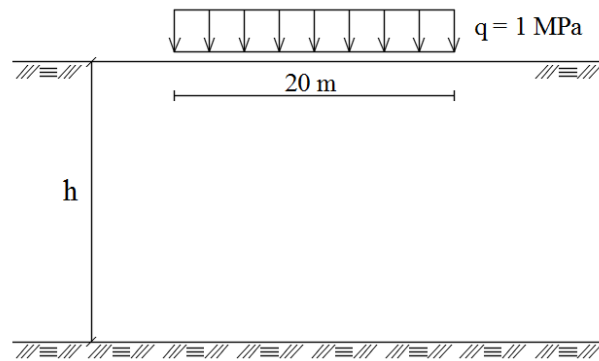
São resolvidos nesta seção problemas de interação entre a placa e solo. Analisa-se inicialmente a situação em que a carga é diretamente aplicada na superfície de uma camada de solo limitada por uma base rígida, com o objetivo de avaliar as limitações da formulação nesse caso em particular. Nos exemplos seguintes, a carga é aplicada numa placa apoiada na superfície do solo composto por uma ou várias camadas.

### 7.1.1 Carga aplicada em uma camada finita

Neste exemplo, são calculados os deslocamentos obtidos com o carregamento aplicado diretamente na superfície do solo, ou seja, sem a presença da placa. Assim, uma carga unitária  $q = 1 \text{ MPa}$  é aplicada uniformemente sobre uma área retangular da superfície do solo, o qual é limitado por uma base de deslocamento nulo, conforme mostrado na Figura 7.2. A área carregada é de  $20 \text{ m} \times 20 \text{ m}$ , e a malha é formada por 4 elementos e 5 nós, conforme mostrado na Figura 5.13. O módulo de elasticidade do meio é  $E_S = 100 \text{ MPa}$  e o coeficiente de Poisson é  $\nu_S = 0,3$ .

Os resultados obtidos são listados na Tabela 7.1 para diferentes valores de profundidade  $h$  calculados em função de  $\eta = h/20$ . Ou seja, para  $\eta = 1$ , por exemplo,  $h = 20 \text{ m}$ . Os deslocamentos nos cantos da área carregada são fornecidos na Tabela 7.2. Os deslocamentos considerando um meio semi-infinito, o que corresponde a  $\eta = \infty$ , também são listados nas tabelas, para melhor ilustrar o efeito da presença ou ausência de uma base rígida no maciço de solos.

Figura 7.2 – Camada finita sob carregamento uniforme.



Fonte: Autor.

Tabela 7.1 – Deslocamento vertical (m) e diferença (%) no centro da área carregada.

$\eta$	Burmister (1945)	Almeida e Paiva (2004)	Este trabalho
1	0,1290	0,1299 (0,7)	0,1171 (9,2)
2	0,1639	0,1650 (0,7)	0,1564 (4,6)
5	0,1876	0,1883 (0,4)	0,1845 (1,7)
50	0,2026	0,2037 (0,5)	0,2022 (0,2)
$\infty$	-	-	0.2042

Fonte: Autor.

Tabela 7.2 – Deslocamento vertical (m) nos cantos da área carregada.

$\eta$	Este trabalho
1	0,0345
2	0,0586
5	0,0827
50	0,1001
$\infty$	0,1021

Fonte: Autor.

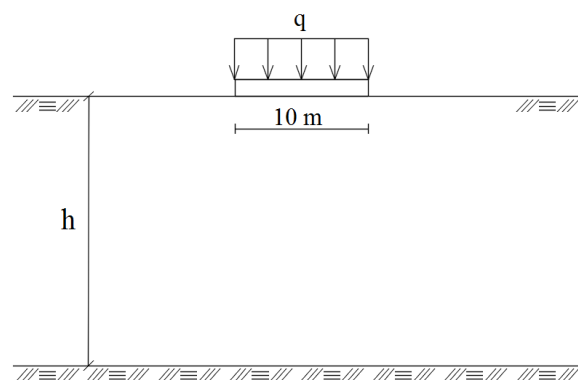
As diferenças relativas são calculadas tomando como referência os resultados obtidos por Burmister (1945). Deve-se salientar que neste exemplo em que a carga é aplicada na superfície do solo, a malha não influencia os resultados com a formulação desenvolvida, ou seja, os resultados seriam idênticos utilizando a malha da Figura 7.1. Para meios semi-infinitos e homogêneos, conforme discutido no exemplo numérico da seção 5.2, os resultados obtidos

são iguais aos da solução exata, e utilizando apenas a malha mínima da Figura 5.13. Observa-se também que com a formulação desenvolvida utilizando conceitos do modelo de Steinbrenner, a diferença relativa é da ordem de 10% para  $\eta = 1$ , e diminui para maiores valores de  $\eta$ . Conforme mostrado nos próximos exemplos, no caso de uma placa apoiada na superfície, que já é um problema de maior interesse, a diferença relativa observada é bastante reduzida.

### 7.1.2 Placa apoiada em uma camada finita

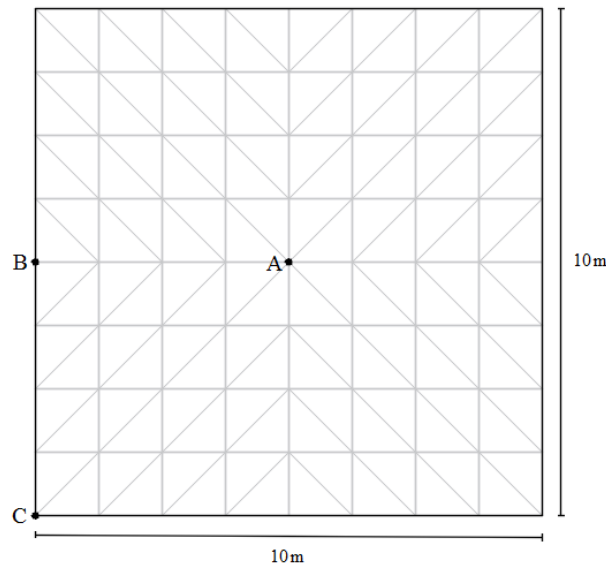
Deslocamentos em uma placa uniformemente carregada e apoiada em um meio finito são calculados neste exemplo, e os resultados são comparados com os de outros autores, com o objetivo de analisar a diferença relativa entre os resultados de diferentes formulações. A placa é quadrada e submetida a uma carga uniforme  $q = 0,01 \text{ MPa}$ , tem espessura  $t = 0,26 \text{ m}$ , e comprimento  $L = 10 \text{ m}$ , conforme mostrado na Figura 7.3. O seu módulo de elasticidade é  $E_p = 2,10 \times 10^4 \text{ MPa}$  e o coeficiente de Poisson é  $\nu_p = 0,15$ . A placa está apoiada numa camada finita de solo com módulo de elasticidade  $E_s = 9,10 \text{ MPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu_s = 0,3$ . A camada rígida se encontra na profundidade  $h = 10 \text{ m}$ . Os deslocamentos na placa são calculados no centro  $A$ , no ponto médio  $B$  dos lados, e nos cantos  $C$ , conforme ilustrado na Figura 7.4.

Figura 7.3 – Placa apoiada em uma camada finita.



Fonte: Autor.

Figura 7.4 – Nós de interesse na malha da placa.



Fonte: Autor.

Tabela 7.3 – Deslocamentos ( $10^{-3}$  m) em pontos da placa.

Ponto	Fraser e Wardle (1976)	Kolar e Nemec (1983)	Sadecka (2000)	Almeida (2003)	Ribeiro (2009)	Este trabalho
A	7,30	5,36	6,18	6,47	6,50	6,10
B	4,50	4,73	3,97	4,62	4,56	4,09
C	2,80	3,76	2,25	2,95	2,72	2,34

Fonte: Autor.

Os resultados de deslocamentos em diferentes pontos da placa são listados na Tabela 7.3. Pode-se observar que os resultados obtidos neste trabalho estão, de modo geral, de acordo com os obtidos por outros autores. Tomando como referência os resultados deste trabalho, as diferenças relativas para deslocamentos no centro da placa são de 19,6% em comparação com Fraser e Wardle (1976), 12,1% com Kolar e Nemec (1983), 1,3% com Sadecka (2000), 6,1% com Almeida (2003), e 6,6% com Ribeiro (2009).

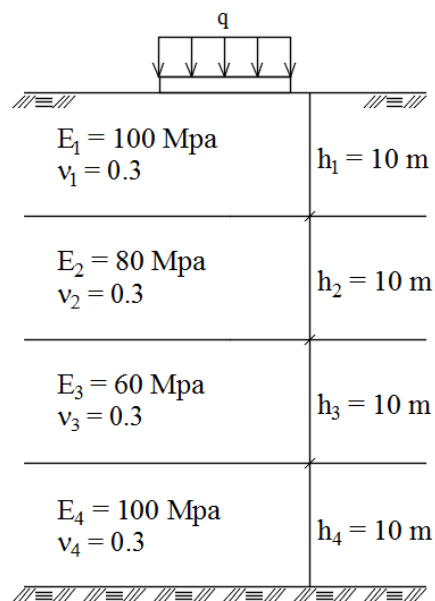
Deve-se observar que nos três trabalhos com menores diferenças relativas, a placa foi modelada com o MEF, e o solo foi modelado com o MEC em Almeida (2003) e em Ribeiro (2009). Em Sadecka (2000), cujos resultados apresentam a menor discrepância com os do presente trabalho, foram utilizados elementos infinitos para levar em consideração a reação do solo fora da área de contato placa-solo, e funções de peso não-lineares para aproximação de

deslocamentos ao longo da espessura das camadas. Em Almeida (2003) e em Ribeiro (2009) é também utilizada uma malha adicional fora da área de contato placa-solo. A formulação MEC/MEF deste trabalho fornece resultados consistentes em comparação com os de outras formulações, e apresenta maior praticidade na modelagem do problema, com o uso da malha composta por elementos DKT apenas na região de contato placa-solo.

### 7.1.3 Placa apoiada em um meio finito com múltiplas camadas

A placa quadrada deste exemplo é submetida a uma carga uniforme  $q = 0,1 \text{ MPa}$ , tem espessura  $t = 0,5 \text{ m}$ , lado de comprimento  $L = 10 \text{ m}$ , módulo de elasticidade  $E_p = 1,5 \times 10^4 \text{ MPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu_p = 0,3$ . Considera-se a placa apoiada em um meio finito com quatro camadas de mesma espessura  $h_i = 10 \text{ m}$ , conforme mostrado na Figura 7.5. A base rígida se encontra na profundidade  $h = 40 \text{ m}$ . Os deslocamentos são calculados nos pontos  $A$  e  $B$  da placa, conforme indicado na Figura 7.4, e os resultados são listados na Tabela 7.4.

Figura 7.5 – Maciço finito com quatro camadas e base rígida.



Fonte: Autor.

Tabela 7.4 – Deslocamentos ( $10^{-2}$  m) em pontos da placa.

	Wardle e Fraser (1974)	Fraser e Wardle (1976)	Wang et al. (2003)	Ribeiro (2009)	Shaaban e Rashed (2013)	Este trabalho
A	1,14	1,07	1,20	0,97	0,97	0,98
B	0,87	0,78	0,89	0,74	0,77	0,71

Fonte: Autor.

Os resultados deste trabalho estão de acordo com os obtidos por outros autores, com menores diferenças relativas em comparação com os resultados de Ribeiro (2009), e de Shaaban e Rashed (2013). Estes últimos utilizam o MEC para a modelagem do problema, com a consideração da teoria de Reissner para placas grossas. Pode-se observar que a formulação MEC/MEF deste trabalho resulta em resultados consistentes quando se trata de problemas de interação placa-solo. As limitações do modelo de Steinbrenner, no sentido em que subestima os deslocamentos, se devem principalmente a casos em que a carga é diretamente aplicada na superfície de uma camada finita fina. Conforme mostrado nos exemplos a seguir, a técnica desenvolvida neste trabalho, com estacas imersas no solo, permite resolver adequadamente outra limitação do modelo de Steinbrenner quando a rigidez do solo é decrescente com a profundidade.

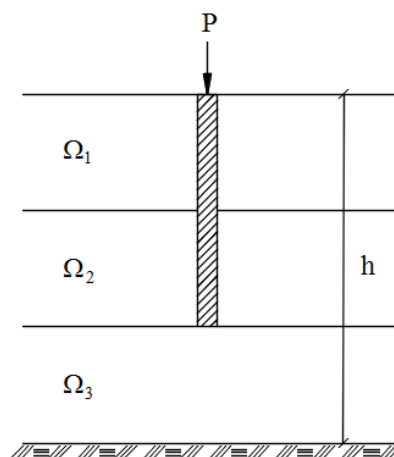
## 7.2 INTERAÇÃO ESTACA-SOLO

Problemas de interação entre uma estaca isolada ou um grupo de estacas e o solo são analisados nesta seção, em que a estaca pode atravessar mais de uma camada de solo. São avaliadas as duas abordagens apresentadas na seção 5.4.2, que dizem respeito às propriedades físicas do solo a serem consideradas na integração dos elementos lineares de contorno. Demonstra-se também a eficiência e a acurácia da técnica proposta para o caso especial em que a rigidez do solo é decrescente com a profundidade.

### 7.2.1 Estaca inserida em um meio finito com camadas de mesma espessura

Este exemplo tem por objetivo analisar a interação da estaca com o solo composto por camadas de diferentes propriedades físicas, e validar a formulação proposta para o caso de uma rigidez do solo decrescente com a profundidade. Considera-se uma estaca cilíndrica de diâmetro  $d = 1\text{ m}$ , comprimento  $L = 40\text{ m}$ , módulo de elasticidade  $E_e = 2,0 \times 10^5\text{ kN/m}^2$ , coeficiente de Poisson  $\nu_e = 0,25$ , imersa no solo, conforme mostrado na Figura 7.6. Para o solo, são consideradas quatro configurações conforme mostrado na Tabela 7.5. Seja  $h$ , a altura do maciço de solos apoiado numa base rígida, e  $h/L = 1,5$ , ou seja, cada camada tem espessura  $h_i = 20\text{ m}$ . Uma carga vertical  $P = 100\text{ kN}$  é aplicada no topo da estaca. O módulo de elasticidade do solo é  $E_s = 200\text{ kN/m}^2$  e o coeficiente de Poisson é  $\nu_s = 0,45$ .

Figura 7.6 – Estaca submetida à carga vertical e inserida em um meio estratificado.



Fonte: Autor.

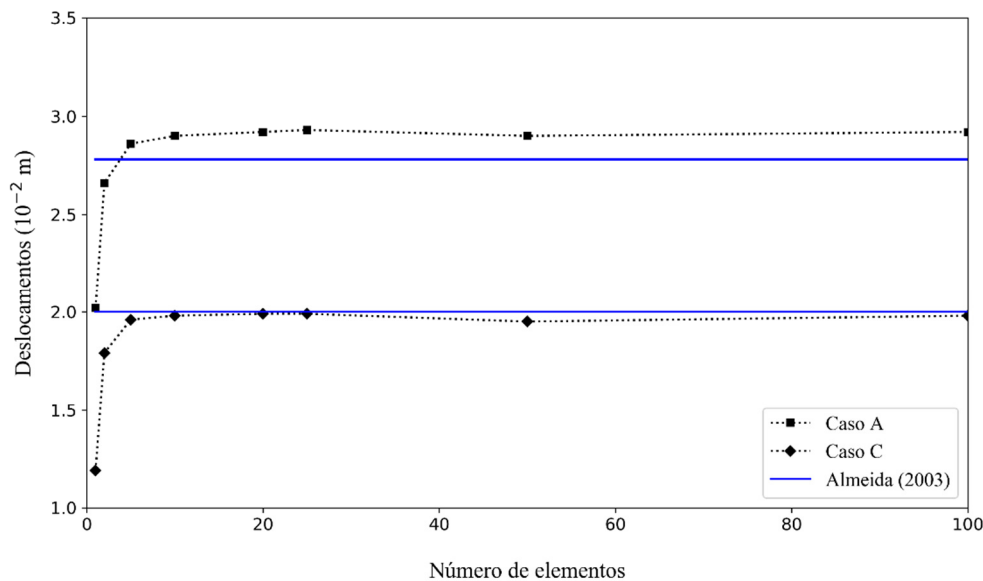
Antes de apresentar os deslocamentos verticais calculados ao longo da estaca, realiza-se um estudo de convergência com o objetivo de validar a escolha do número de elementos finitos utilizados na discretização da estaca. Para isso, consideram-se as configurações de solo dos Casos A e C. Os resultados da análise de convergência são apresentados na Figura 7.7, e são utilizados 1, 2, 5, 10, 20, 25, 50 e 100 elementos finitos. Observa-se que a solução já converge com 10 elementos, contudo, optou-se por utilizar 20 elementos para manter uma discretização consistente em todos os exemplos. Outro motivo da escolha é que 20 é o número de elementos adequado nos casos de grupos de estacas, e da análise de flambagem conforme demonstrado no exemplo 7.4.1.

Tabela 7.5 – Configurações e propriedades do maciço de solos.

	Caso A	Caso B	Caso C	Caso D
$\Omega_1$	$E_s$	$E_s$	$E_s$	$E_s$
$\Omega_2$	$E_s$	$0,5E_s$	$2E_s$	$5E_s$
$\Omega_3$	$E_s$	$0,25E_s$	$3E_s$	$25E_s$

Fonte: Autor.

Figura 7.7 – Deslocamento vertical no topo da estaca para diferentes discretizações.



Fonte: Autor.

Os deslocamentos no topo da estaca para cada configuração são listados na Tabela 7.6 e os deslocamentos em toda a estaca são plotados na Figura 7.8. Pode-se observar que os resultados apresentam uma boa concordância com os obtidos por Almeida (2003) em que se utiliza também uma abordagem MEC/MEF com técnicas de sub-regiões, e definição de uma largura horizontal do maciço de solos devido ao emprego da solução fundamental de Kelvin. No presente estudo, com a solução fundamental de Mindlin, não é preciso delimitar os contornos do solo.

O caso A independe da abordagem utilizada já que o módulo de elasticidade das camadas é o mesmo, ou seja, o meio é homogêneo. A Abordagem 2 é a que resulta em menores diferenças relativas. Com esta abordagem, são levadas em consideração as propriedades físicas nas posições dos pontos fonte e dos pontos de integração no cálculo da matriz de influência do solo.

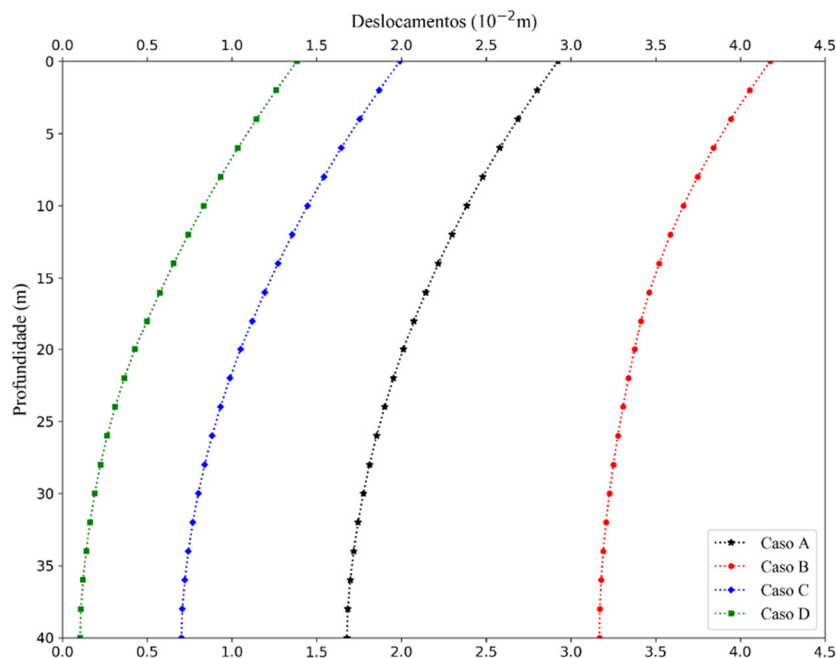


Tabela 7.6 – Deslocamentos ( $10^{-2}$  m) para diferentes perfis do solo.

	Este trabalho		Almeida (2003)
	Abordagem 1	Abordagem 2	
Caso A	2,92	2,92	2,78
Caso B	4,38	4,18	4,05
Caso C	1,71	1,99	2,00
Caso D	1,15	1,38	1,45

Fonte: Autor.

Figura 7.8 – Deslocamentos verticais da estaca para as quatro configurações do solo.



Fonte: Autor.

Deve-se observar também que no Caso B, foi utilizada a técnica discutida na seção 5.4.2, que é uma das contribuições pertinentes deste trabalho, para o cálculo de deslocamentos quando a rigidez do solo é decrescente com a profundidade. Nesta técnica, calcula-se a matriz de influência do solo, considerando as propriedades físicas das camadas, e não se aplica o procedimento geral baseado no modelo de Steinbrenner, ou seja, não há subtração e adição, na matriz calculada, dos coeficientes de influência calculados nas interfaces das camadas. O procedimento proposto além de resultar em deslocamentos precisos para o Caso B, algo que não é atingível com a aplicação do modelo de Steinbrenner, conforme mostrado no exemplo 7.2.2, requer também menos processamento que o procedimento geral aplicado para os outros casos.

### 7.2.2 Estaca inserida em um meio finito com camadas de diferentes espessuras

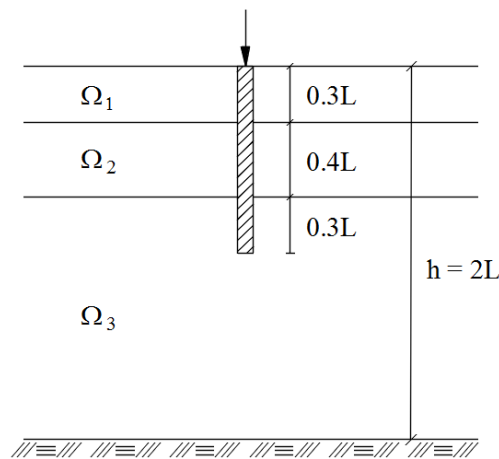
Neste exemplo analisa-se, como no exemplo anterior, a interação da estaca imersa em um meio com três camadas, conforme ilustrado na Figura 7.9. Procura-se confirmar a acurácia dos resultados obtidos com o procedimento geral e o procedimento da técnica proposta para o caso de uma rigidez do maciço de solos decrescente com a profundidade. Consideram-se cinco configurações, conforme listado na Tabela 7.7. A estaca atravessa as três camadas, e a relação entre o comprimento e o diâmetro é  $\frac{L}{d} = 25$ . O módulo de elasticidade da estaca  $E_e$  e módulo de elasticidade do solo  $E_s$  tem a relação  $\frac{E_e}{E_s} = 1000$ , e o coeficiente de Poisson em todas as camadas é  $\nu_s = 0,3$ .

Tabela 7.7 – Configurações e propriedades do maciço de solos.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
$\Omega_1$	$E_s$	$2E_s$	$4E_s$	$4E_s$	$E_s$
$\Omega_2$	$2E_s$	$E_s$	$E_s$	$2E_s$	$E_s$
$\Omega_3$	$4E_s$	$4E_s$	$2E_s$	$E_s$	$E_s$

Fonte: Autor.

Figura 7.9 – Estaca sob carga vertical e imersa em um meio estratificado.



Fonte: Autor.

Os resultados listados na Tabela 7.8 são expressos em termo do fator de influência  $I_w$  dado por  $I_w = \frac{E_s L}{P} w$ , onde  $w$  é o deslocamento no topo da estaca,  $L$  é o comprimento da estaca,  $E$  é o módulo de elasticidade do solo, e  $P$  é a carga vertical aplicada no topo da estaca.

Tabela 7.8 – Fator de influência  $I_w$ .

		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
Este trabalho	Abordagem 1	0,702	0,716	1,027	1,016	1,766
	Abordagem 2	0,837	0,826	0,960	0,931	1,766
De Sanctis et al. (2002)	MEC	0,761	0,777	1,071	1,579	1,780
	MEF (ABAQUS®)	0,862	0,876	0,929	1,027	1,731

Fonte: Autor.

Tabela 7.9 – Diferenças relativas (%).

		Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
Este trabalho	Abordagem 1	18,6	18,3	10,6	1,07	2,0
	Abordagem 2	2,9	5,7	3,3	9,35	2,0

Fonte: Autor.

Os resultados obtidos, aplicando o procedimento geral nos casos 1, 2, 3, 5 e o procedimento especial no caso 4, apresentam uma boa concordância com os obtidos pelo MEF utilizados como referência para o cálculo das diferenças relativas listadas na Tabela 7.9. Os resultados obtidos por De Sanctis et al. (2002) via MEC e aplicação do modelo de Steinbrenner são bastante próximos com os resultados da Abordagem 1 deste trabalho, exceto para o Caso 4 em que o resultado apresenta uma grande discrepância em comparação com o resultado do MEF. Isso mostra a limitação do modelo de Steinbrenner quando o maciço de solos apresenta rigidez decrescente com a profundidade, e a técnica proposta neste trabalho resolve adequadamente o problema de interação estaca-solo nessa situação especial.

Outros autores também analisaram o problema apresentado neste exemplo utilizando soluções analíticas e também aproximadas. Para o Caso 4, os resultados que eles obtiveram quando comparados com os resultados do MEF listados na Tabela 7.8 foram de 9,4% em Lee (1991), 19,7% em Poulos (1979) e 24,8% em Seo e Prezzi (2007). No presente trabalho, ambas as abordagens apresentam pequenas diferenças relativas para esse caso, todavia, sugere-se a utilização da Abordagem 1 para os casos de rigidez decrescente com a profundidade.

### 7.2.3 Grupo de estacas imerso em um meio finito

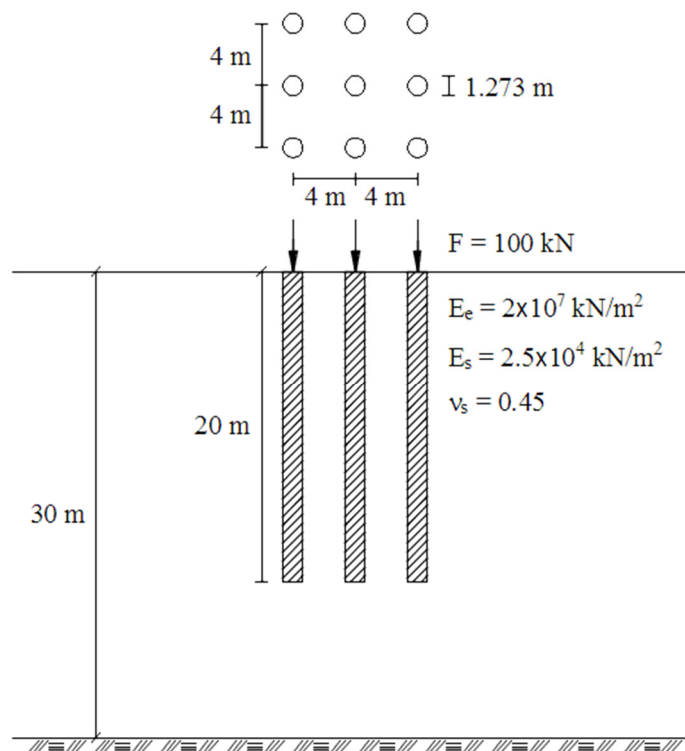
Analisa-se inicialmente neste exemplo um grupo de estacas imerso numa camada com base rígida, conforme mostrado na Figura 7.10. Todos os dados do problema são mostrados na mesma figura. Os resultados obtidos, e listados na Tabela 7.10, estão de acordo com os encontrados por outros autores, com uma maior concordância entre o resultado deste trabalho e o obtido por Almeida (2003). Deve-se notar que em Ottaviani (1975) e em Almeida (2003), foram utilizadas estacas de seção quadrada com 1 m de lado. Em Ribeiro (2009) e neste trabalho, essa seção foi transformada em seção circular mantendo a mesma área total do fuste.

Tabela 7.10 – Deslocamento vertical ( $10^{-4}$  m) no topo da estaca central.

Ottaviani (1975)	Almeida (2003)	Ribeiro (2009)	Este trabalho
6,95	7,85	8,70	7,91

Fonte: Autor.

Figura 7.10 – Grupo de nove estacas imerso em uma camada finita.

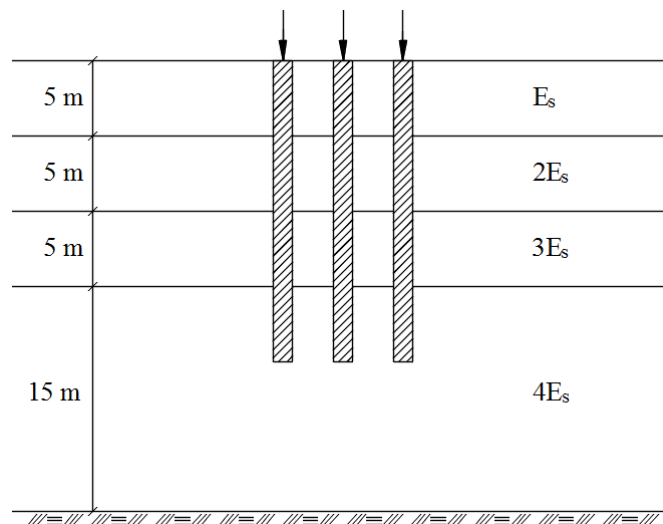


Fonte: Autor.

As diferenças nos resultados se devem principalmente às formulações e hipóteses assumidas. Ottaviani (1975) emprega uma malha de elementos finitos que é finita nas direções radiais, se estendendo até uma distância de 13 m das estacas de extremidade, logo o menor deslocamento observado. Almeida (2003) já emprega elementos de contorno permitindo que a malha se estenda até uma distância maior. Ribeiro (2009) emprega elementos infinitos e discretiza a estaca com um elemento finito de quatro nós. Deve-se ressaltar que neste trabalho tanto o solo quanto as estacas compartilham a mesma discretização composta por elementos lineares, tornando muito mais prática a modelagem do problema.

Para ilustrar a influência de um solo estratificado, o mesmo problema agora é resolvido para um solo com quatro camadas, conforme ilustrado na Figura 7.11. Deve-se mencionar a eficiência da presente formulação, pois o tempo de processamento não aumentou com a delimitação de camadas no domínio do solo. Os resultados plotados na Figura 7.12 revelam dois comportamentos mecânicos: um relacionado ao grupo de estacas e o outro ao solo. Em grupos de estacas, os menores deslocamentos ocorrem em estacas mais afastadas do centro de massa, e os maiores ocorrem próximo ao centro. Além disso, essa diferença torna-se menor à medida que a rigidez do solo aumenta.

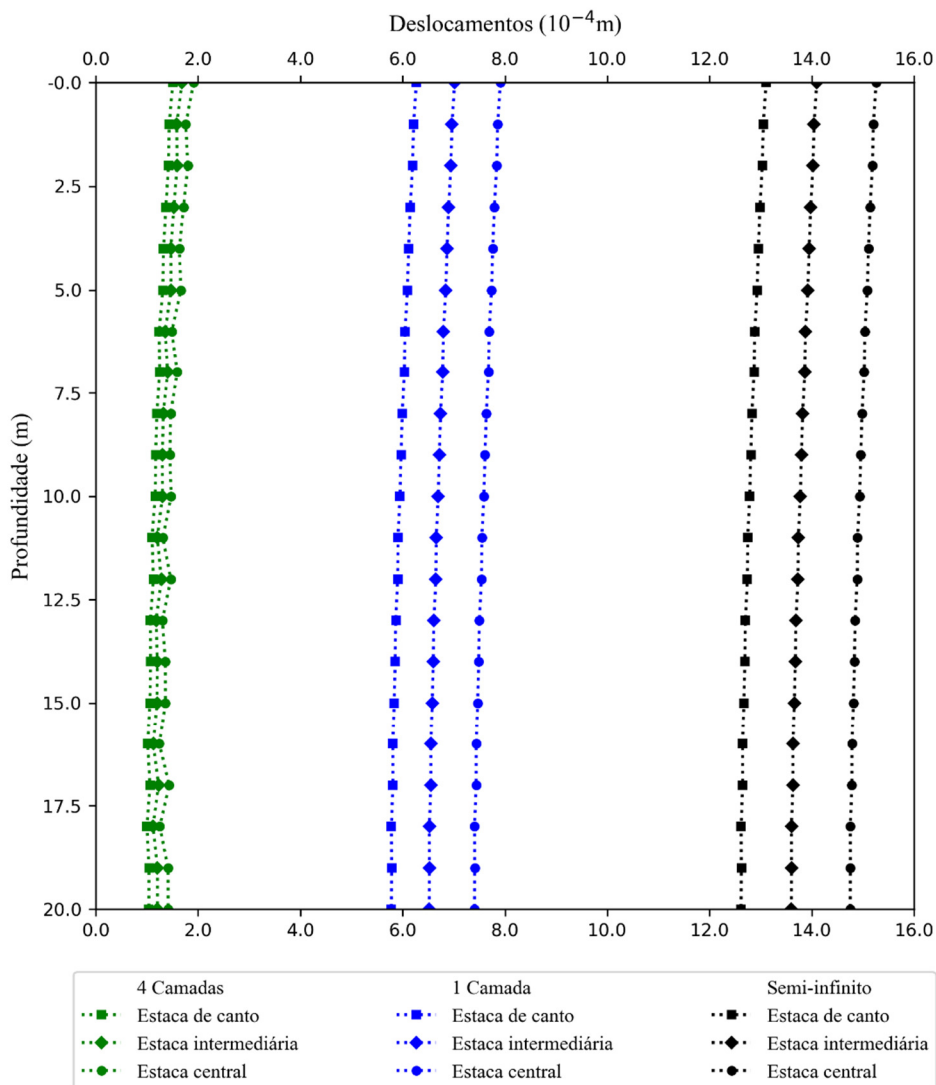
Figura 7.11 – Grupo de nove estacas imerso em um meio estratificado.



Fonte: Autor.

Considerando três configurações para o solo – um meio semi-infinito com módulo de elasticidade  $E_s$ , as configurações das Figuras 7.10 e 7.11 – observa-se conforme esperado, que quanto mais rígida se torna o solo menor são os deslocamentos. Consta-se também que ao simplesmente considerar uma camada finita, os deslocamentos são reduzidos pela metade em comparação com a configuração do meio semi-infinito. Isso denota a importância de se considerar um modelo mais realístico para a análise de estacas inseridas em meios não-homogêneos.

Figura 7.12 – Deslocamentos do grupo de estacas considerando três configurações do solo.



Fonte: Autor.

### 7.3 INTERAÇÃO PLACA-ESTACA-SOLO

Problemas envolvendo o conjunto placa-estaca-solo são indubitavelmente de grande interesse uma vez que fazem parte de muitos projetos de fundação para superestruturas complexas. Analisa-se inicialmente um problema relativamente simples de uma estaca conectada a uma placa, com o objetivo de avaliar a influência da presença de uma base indeslocável no solo. Em seguida, analisa-se o problema de interação entre um radier estaqueado e o solo, com duas configurações diferentes – estacas inteiramente contidas numa única camada e estacas atravessando várias camadas.

#### 7.3.1 Estaca conectada a uma placa

O objetivo deste exemplo é avaliar a influência da espessura  $h$  da camada de um solo homogêneo, analisando os deslocamentos no topo de uma estaca conectada a uma placa e inserida no solo, conforme ilustrado na Figura 7.13. Um carregamento vertical e uniformemente distribuído  $p = 200 \text{ kN/m}^2$  é aplicado sobre toda a área da placa quadrada com  $2 \text{ m}$  de lado e  $0,5 \text{ m}$  de espessura. A estaca tem  $8 \text{ m}$  de comprimento e  $0,8 \text{ m}$  de diâmetro. A estaca e a placa são consideradas rígidas em relação ao solo, e adota-se  $E_p = E_e = 10^6 E_s$ . O módulo de elasticidade do solo é  $E_s = 3000 \text{ kN/m}^2$ , e os coeficientes de Poisson do solo, da placa e da estaca são respectivamente  $\nu_s = 0,5$ ,  $\nu_p = \nu_e = 0,2$ . A malha da placa com 25 nós é mostrada na Figura 7.14.

Os resultados obtidos considerando o solo como um meio semi-infinito são listados na Tabela 7.11, e são muito próximos entre eles. Na Tabela 7.12, a formulação fornece o comportamento esperado dos deslocamentos, ou seja, considerando uma camada finita com base rígida, os deslocamentos crescem com o aumento da espessura da camada e tende ao valor limite de  $4,20 \text{ m}$  com a espessura tendendo ao infinito.

Tabela 7.11 – Deslocamento (cm) no topo da estaca em meio semi-infinito ( $h = \infty$ ).

Paiva e Trondi (1999)	Ribeiro (2009)	Este trabalho
MEC/MEC	MEC-ECI/MEF	MEC/MEF
4,13	4,17	4,20

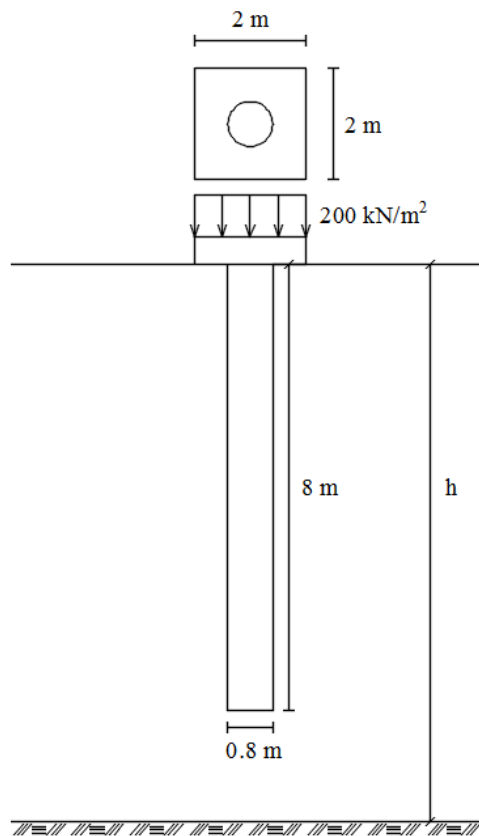
Fonte: Autor.

Tabela 7.12 – Deslocamento (cm) no topo da estaca em função da espessura do solo.

$h$	$u_z$
10	2,39
50	3,94
100	4,07
1000	4,18
$\infty$	4,20

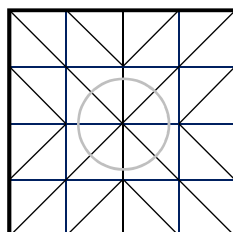
Fonte: Autor.

Figura 7.13 – Estaca conectada a uma placa e imersa em um meio homogêneo.



Fonte: Autor.

Figura 7.14 – Malha utilizada para a placa e a superfície do solo.



Fonte: Autor.



Numa segunda análise, considera-se o solo formado por duas camadas de propriedades  $E_1$  e  $E_2$ , e limitado por uma base rígida. A camada superior tem espessura  $h_1 = 4 \text{ m}$ . A espessura total das duas camadas é  $h = 50 \text{ m}$ . Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 7.13, com  $E_s = 3000 \text{ kN/m}^2$ .

Tabela 7.13 – Deslocamento (cm) no topo da estaca em meio finito com duas camadas.

$u_z$	
$E_2 = E_s = 2E_1$	$E_1 = E_s = 2E_2$
4,14	6,74

Fonte: Autor.

Os deslocamentos na Tabela 7.13 são calculados utilizando a Abordagem 1 descrita na seção 5.4.2. Conforme esperado, o deslocamento é maior quando o módulo de elasticidade da camada inferior é menor que o da camada superior. Observa-se também que o deslocamento é ligeiramente maior no caso  $E_2 = 2E_1$  quando comparado com o deslocamento  $u_z = 3,94 \text{ cm}$  do caso  $E_2 = E_1$  mostrado na Tabela 7.12, uma vez que o módulo da camada superior é agora metade do valor  $E_s$ .

### 7.3.2 Radier estaqueado com estacas contidas em uma camada

Neste exemplo o radier estaqueado é formado por uma placa quadrada e nove estacas. Todos os dados do problema encontram-se na Figura 7.15. Devido à simetria do problema, consideram-se os grupos de estacas 1, 2 e 3. Numa primeira análise, uma carga distribuída  $p = 0,04 \text{ MPa}$  é aplicada sobre a placa, e numa segunda análise, uma força concentrada  $F = 4000 \text{ kN}$  é aplicada no topo das estacas do grupo 1. A malha da placa é a mesma da Figura 7.1.

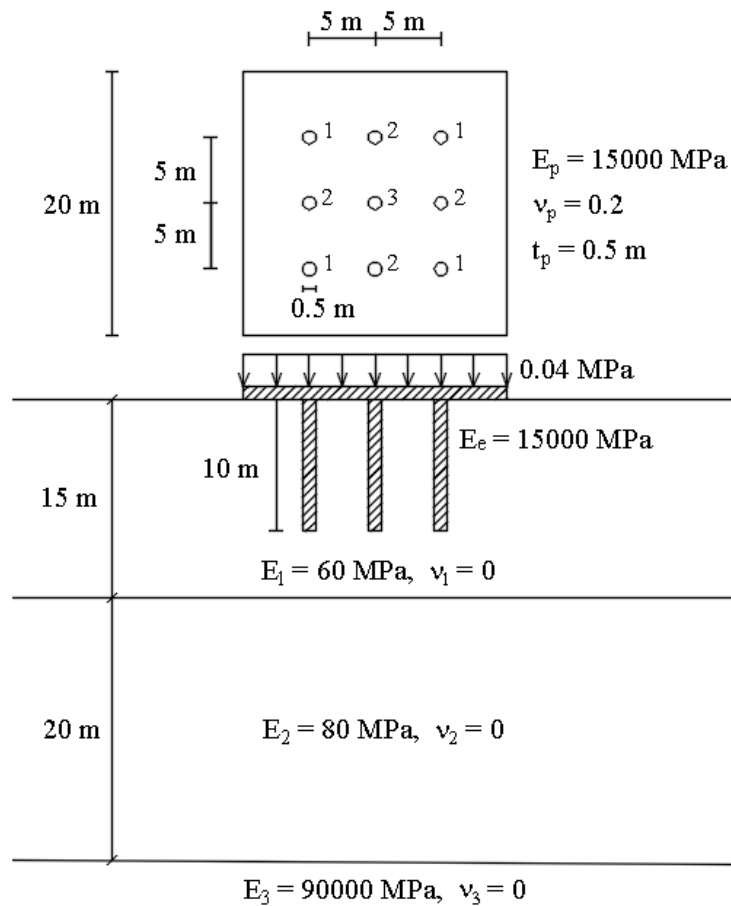
Os resultados obtidos neste trabalho, conforme listado na Tabela 7.14, estão de acordo com os obtidos por Ribeiro (2009). No caso da carga distribuída, o maior deslocamento ocorre no topo da estaca central, e no caso de forças concentradas, o maior deslocamento é observado nos topos das estacas do grupo 1, uma vez que as forças são exatamente aplicadas nas estacas desse grupo. Deve-se notar também que pelo fato das estacas estarem inteiramente contidas em uma única camada, tanto a Abordagem 1 quanto a Abordagem 2 da presente formulação resultam nos mesmos resultados.

Tabela 7.14 – Deslocamentos verticais (mm) nos topos das estacas.

		Ribeiro (2009)	Este trabalho
	Estaca		
$p = 0,04 \text{ MPa}$	1	6,8	6,8
	2	7,2	7,2
	3	8,4	7,8
$F = 4000 \text{ kN}$	1	12,4	11,5
	2	7,4	6,7
	3	7,0	6,3

Fonte: Autor.

Figura 7.15 – Radier estaqueado em um meio com duas camadas.

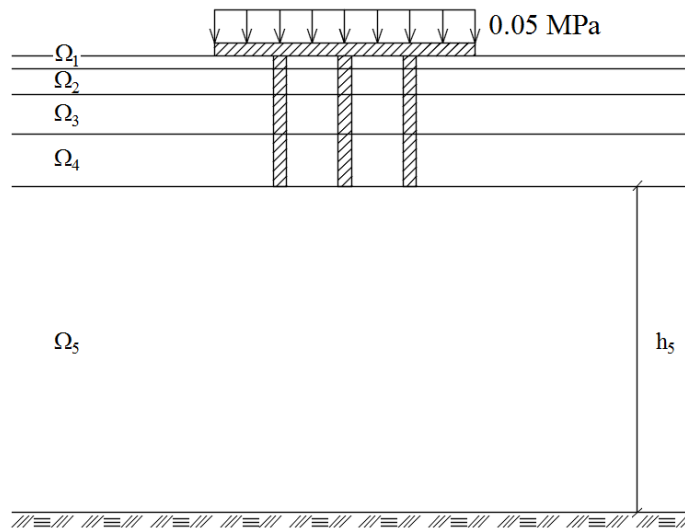


Fonte: Autor.

### 7.3.3 Radier estaqueado com estacas atravessando camadas

No exemplo 7.3.2, pode-se observar que o grupo de estacas está inteiramente contido em uma única camada do solo. Como a formulação deste trabalho também possibilita a análise de grupos de estacas atravessando mais de uma camada, considera-se o mesmo radier estaqueado do exemplo anterior, desta vez, com uma carga distribuída  $p = 0,05 \text{ MPa}$  aplicada sobre a placa, e estacas atravessando 4 camadas, conforme ilustrado na Figura 7.16. Assume-se também um coeficiente de Poisson nulo para todas as cinco camadas apoiadas em uma base rígida.

Figura 7.16 – Radier estaqueado com estacas atravessando 4 camadas.



Fonte: Autor.

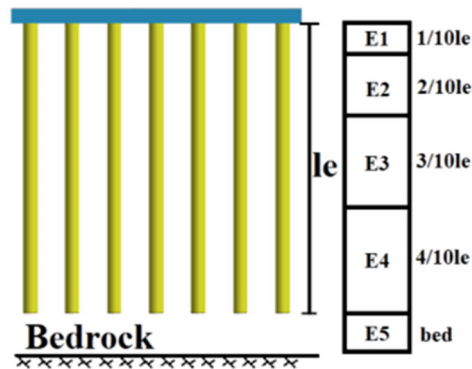
Tabela 7.15 – Módulo de elasticidade e espessura das camadas.

Camada	$E \text{ (MPa)}$	$h \text{ (m)}$
$\Omega_1$	60	1
$\Omega_2$	70	2
$\Omega_3$	80	3
$\Omega_4$	90	4
$\Omega_5$	100	25

Fonte: Autor.

As características do perfil do solo da Figura 7.16 são listadas na Tabela 7.15, e seguem as restrições do perfil de solo, conforme mostrado na Figura 7.17, impostas no software desenvolvido por Geo3dTech (2018), baseada no estudo de Hamderi (2018), com o objetivo de comparar os resultados.

Figura 7.17 – Perfil do solo com 5 camadas e uma base rígida.



Fonte: Geo3dTech (2018).

Os deslocamentos no centro e no canto do radier são listados na Tabela 7.16, e os deslocamentos ao longo do eixo central e da borda da placa estão plotados na Figura 7.18. Deve-se observar que no software, é preciso informar os valores das resistências últimas do fuste  $f_r$  (entre 150 e 500  $kN/m$ ) e da ponta  $t_r$  (entre 50 e 10000  $kN$ ) da estaca. Os resultados são calculados para os valores mínimos e máximos dessas resistências, e com isso obtém-se um intervalo de deslocamentos para o problema em análise.

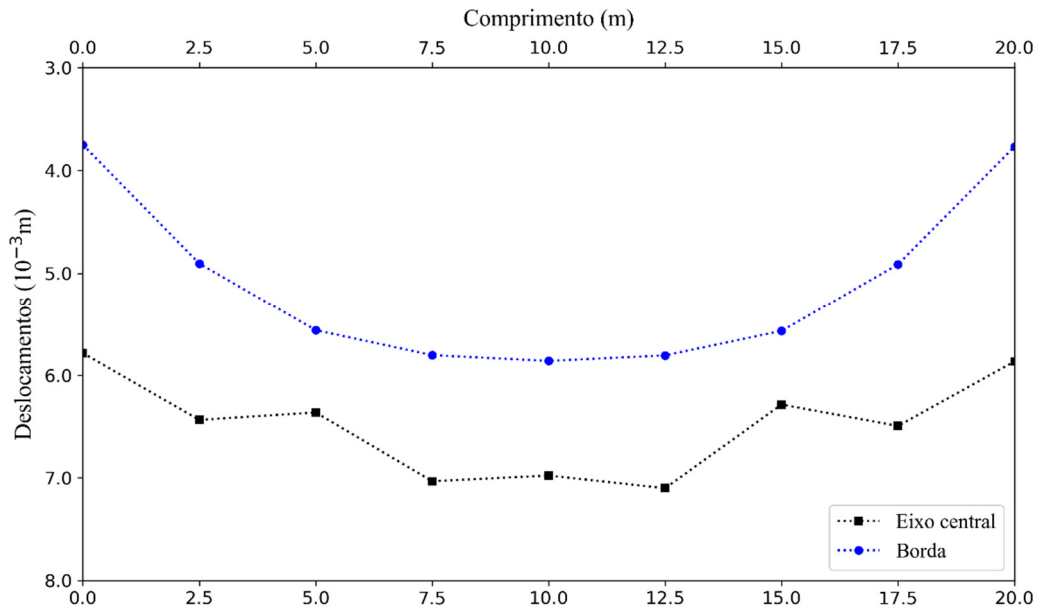
Tabela 7.16 – Deslocamentos verticais (mm) no centro e no canto do radier.

	Geo3dTech (2018)		Este trabalho
	$f_{r,max}$ e $t_{r,max}$	$f_{r,min}$ e $t_{r,min}$	
Centro	5,00	7,00	6,98
Canto	3,00	4,00	3,76

Fonte: Autor.

Os resultados obtidos, conforme listado na Tabela 7.16, estão de acordo com os resultados fornecidos com o software baseado na formulação de Hamderi (2018). Na Figura 7.18, pode-se observar, conforme esperado, que no eixo central, os deslocamentos nos nós coincidentes com os topos das estacas são menores que os deslocamentos nos nós adjacentes.

Figura 7.18 – Deslocamentos verticais ao longo do eixo central e da borda da placa.



Fonte: Autor.

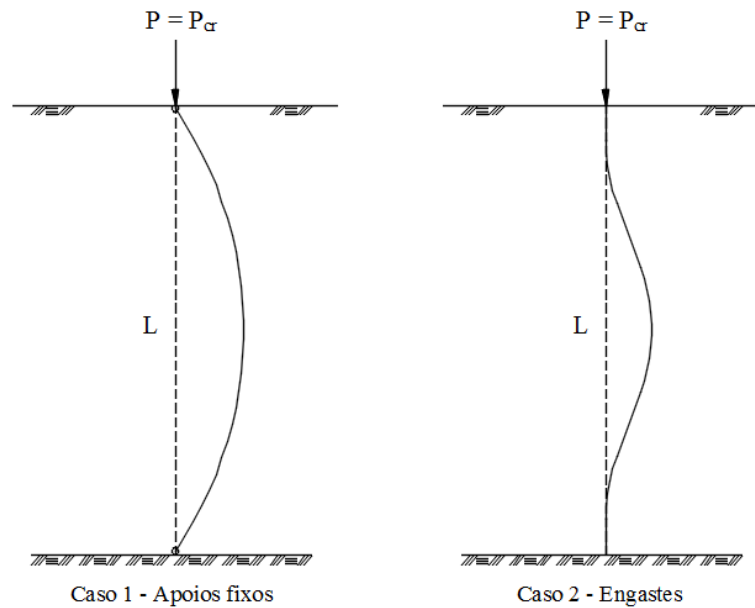
## 7.4 FLAMBAGEM DA ESTACA

Em se tratando de estacas esbeltas, a falha por flambagem é um fenômeno a ser levado em consideração no projeto estrutural. Nesta seção, realiza-se inicialmente o estudo de convergência da carga crítica de flambagem obtida com a formulação MEC/MEF desenvolvida, e em seguida, comparam-se os resultados deste trabalho com os obtidos por outros autores.

### 7.4.1 Estudo de convergência da carga crítica de flambagem

Estuda-se neste exemplo a convergência da solução numérica do exemplo analisado na seção 6.2.3, desta vez com a presença do solo. A rigidez da estaca em relação ao solo é calculada pelo fator de rigidez  $K_R = E_e I / E_s L^4$ , onde  $E_e$ ,  $I$  e  $L$  são respectivamente o módulo de elasticidade, o momento de inércia da seção transversal e o comprimento da estaca, e  $E_s$  é o módulo de elasticidade do solo. Considera-se um esforço normal constante na estaca, dois fatores de rigidez  $K_R = 10^{-6}$  e  $K_R = 10$ , e dois tipos de vinculação conforme mostrado na Figura 7.19.

Figura 7.19 – Estaca sujeita à força axial e vinculada nas duas extremidades.



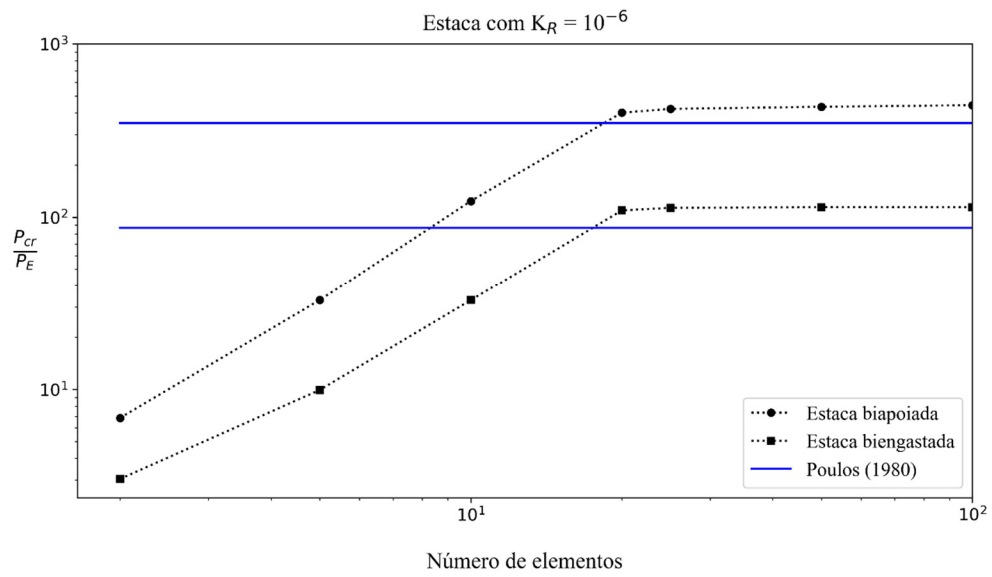
Fonte: Autor.

A carga crítica de flambagem da estaca, nas Figuras 7.20 e 7.21, é representada de maneira adimensional através da relação  $P_{cr}/P_E$ , denominada de carga crítica normalizada, em que  $P_E$  é a carga de Euler de uma coluna (biapoioada ou biengastada) sem a presença do solo. Para o estudo de convergência, são utilizados 2, 5, 10, 20, 25, 50 e 100 elementos finitos, e os resultados são comparados com os obtidos por Poulos (1980).

No caso da estaca rígida, a convergência é atingida com poucos elementos finitos, e  $P_{cr}/P_E = 1$ , ou seja, a estaca é tão rígida em relação ao solo que este último praticamente não influencia no valor da carga crítica de flambagem. Para a estaca flexível, a solução converge a partir de 20 elementos finitos, número adotado para a análise de flambagem da estaca do próximo exemplo.

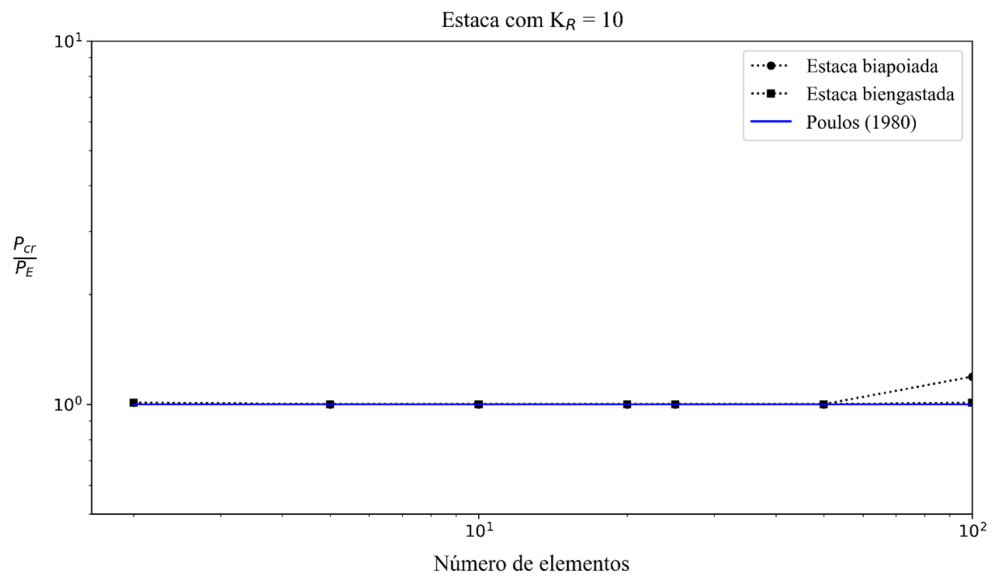
Deve-se observar também que com a presença do solo, diferentemente dos resultados obtidos na seção 6.2.3, faz-se necessário empregar um número suficiente de elementos finitos a fim de garantir a precisão dos resultados, sobretudo em se tratando de estacas flexíveis. Nota-se também que neste exemplo, foram utilizados valores extremos de  $K_R$  com o objetivo de mostrar a velocidade de convergência para cada caso, que independe do tipo de vinculação da estaca. Não há também necessidade de se utilizar um número muito elevado de elementos finitos pois erros numéricos podem começar a influenciar os resultados.

Figura 7.20 – Carga crítica normalizada para estaca flexível e diferentes discretizações.



Fonte: Autor.

Figura 7.21 – Carga crítica normalizada para estaca rígida e diferentes discretizações.

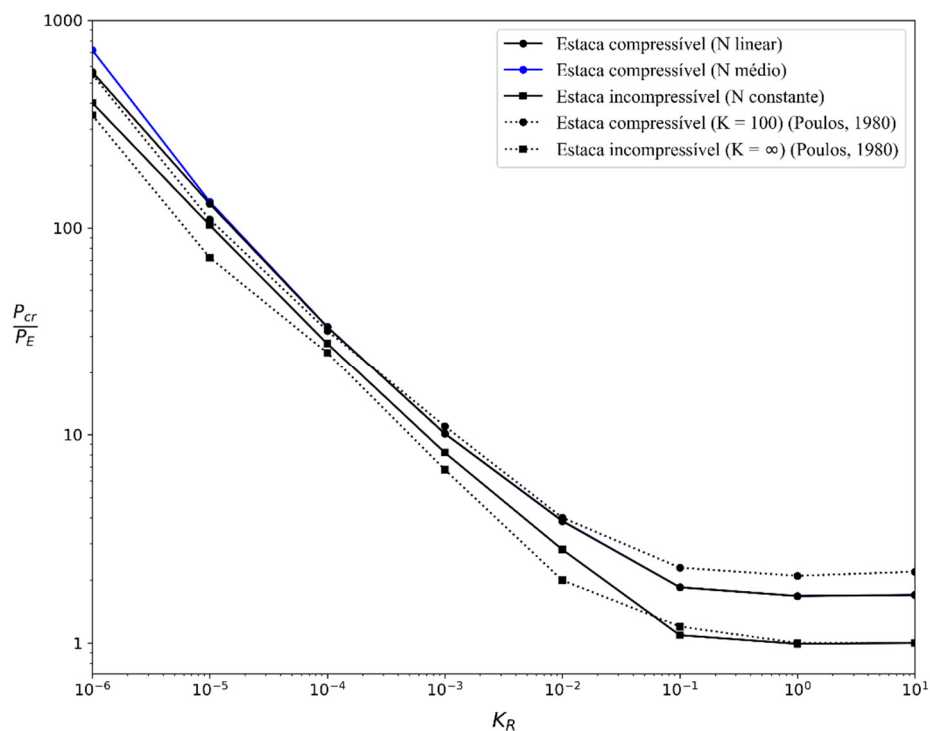


Fonte: Autor.

### 7.4.2 Flambagem linear da estaca

Neste exemplo, analisa-se a flambagem linear de uma estaca longa com a ponta apoiada na base rígida de um solo homogêneo, isotrópico e elástico. Dois tipos de vinculação, conforme mostrado na Figura 7.19, são considerados: apoios fixos (Caso 1) e engastes (Caso 2) nas duas extremidades da estaca. Nos dois casos, a estaca é discretizada com 20 elementos finitos. Considera-se uma relação comprimento e diâmetro  $L/d = 25$ , e para cada caso, analisam-se situações em que o esforço normal ao longo da estaca é constante e variável com a profundidade. Os resultados das cargas críticas de flambagem são obtidos para diferentes fatores de rigidez  $K_R$ , conforme definido no exemplo anterior, e deve-se observar que quanto maior é o valor de  $K_R$ , maior é a rigidez da estaca em relação ao solo.

Figura 7.22 – Efeito do fator de rigidez  $K_R$  da estaca nas cargas críticas para o Caso 1.



Fonte: Autor.

Para o Caso 1 da estaca biapoiada, pode-se observar, na Figura 7.22, que  $P_{cr}/P_E$  aumenta a medida que aumenta a flexibilidade da estaca, ou seja, para menores valores de  $K_R$ . No que diz respeito ao esforço normal atuando na estaca ao longo da profundidade, pode-se observar que os maiores valores de  $P_{cr}/P_E$  ocorrem quando se considera uma distribuição linear do esforço normal em cada elemento finito. Deve-se mencionar que em Poulos (1980), são consideradas diversas distribuições do esforço normal através de um fator  $K = E_e R_A / E_s$ .

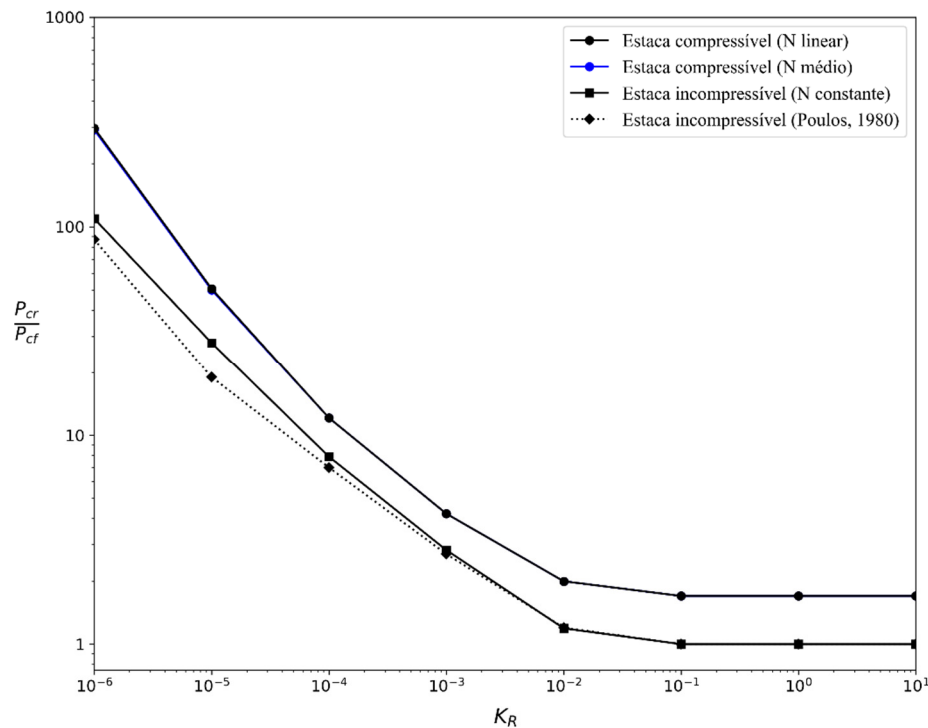


A situação em que  $K = \infty$  corresponde ao estado de incompressibilidade da estaca com esforço normal constante, e pode se observar nas Figuras 7.22 e 7.23 que os resultados deste trabalho apresentam uma boa concordância com os resultados de Poulos (1980).

Para o Caso 2 da estaca engastada nas duas extremidades, a carga crítica de flambagem, conforme mostrado na Figura 7.23, é também representada de maneira adimensional através da relação  $P_{cr}/P_{cf}$ , em que  $P_{cf}$  é a carga crítica de flambagem de uma coluna biengastada sem o solo. Neste caso, o efeito do solo em aumentar a carga crítica de flambagem é reduzido em comparação com o Caso 1.

Os resultados no caso da estaca compressível são calculados para a matriz de rigidez geométrica determinada considerando uma distribuição linear, Eq. (6.45), e uma distribuição constante, Eq. (6.34), do esforço normal no elemento finito. Neste último caso, considera-se o valor médio dos esforços nos dois nós para cada elemento finito. Como a estaca é discretizada com 20 elementos finitos, pode-se observar, nas Figuras 7.22 e 7.23, que os resultados obtidos são praticamente iguais. A única diferença notável ocorre quando a estaca é muito flexível no Caso 1.

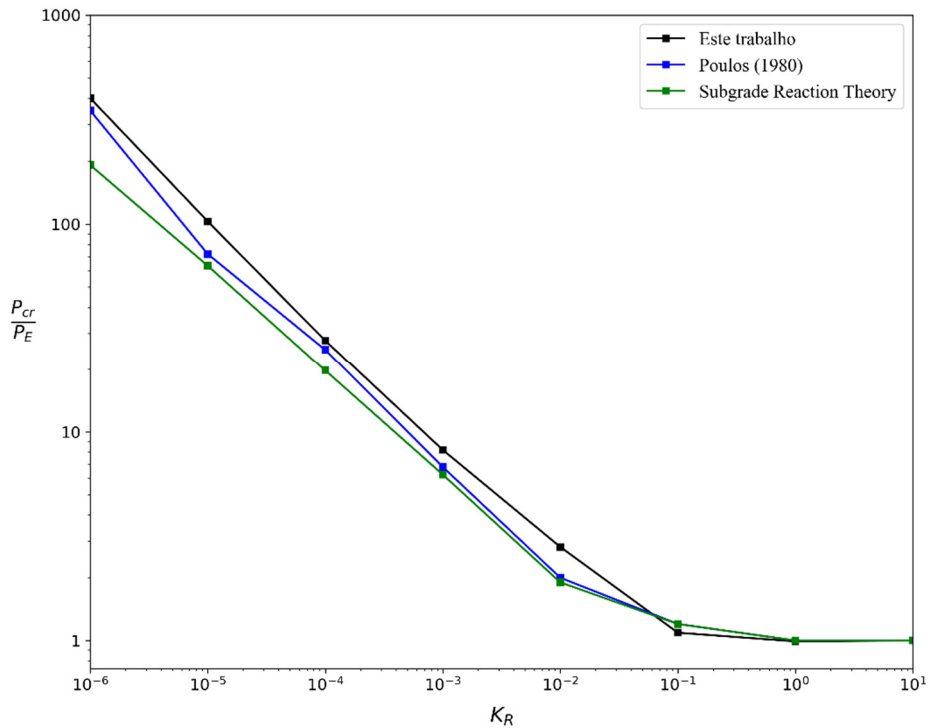
Figura 7.23 – Efeito do fator de rigidez  $K_R$  da estaca nas cargas críticas para o Caso 2.



Fonte: Autor.

Na Figura 7.24, faz-se uma comparação entre os resultados obtidos neste trabalho via formulação MEC/MEF, os resultados do Poulos (1980) utilizando o MDF e os resultados baseados na teoria da reação do subleito (*subgrade reaction theory*). Pode-se observar que a teoria da reação do subleito fornece no geral resultados conservadores da carga crítica de flambagem, e que os resultados das diferentes formulações são praticamente iguais para estacas muito rígidas.

Figura 7.24 – Comparação dos resultados da carga crítica de flambagem.



Fonte: Autor.

## 8 PROGRAMA COMPUTACIONAL

O código computacional para problemas de interação solo-estrutura é escrito em Fortran<sup>®</sup>, em ambiente Windows<sup>®</sup> de 64 bits, em uma CPU Intel<sup>®</sup> 3.10 GHZ com 8 GB de RAM. Para problemas de flambagem da estaca, além do código em Fortran<sup>®</sup> para o cálculo das matrizes de rigidez equivalente e de rigidez geométrica, foi também escrito um código em Python<sup>®</sup> para a resolução do problema de autovalores, determinando assim as cargas críticas de flambagem. Outras ferramentas computacionais, como Mathematica<sup>®</sup>, também foram utilizadas para a computação de algumas equações das formulações desenvolvidas e também para a verificação e validação de alguns resultados obtidos.

### 8.1 INTERAÇÃO SOLO ESTRATIFICADO/ESTRUTURA

Conforme visto no capítulo anterior, foram analisados os seguintes tipos de interação, por ordem de complexidade: interação placa-solo, interação estaca-solo e interação placa-estaca-solo. Para cada uma dessas interações, foi escrito um código computacional com o objetivo de agilizar a implementação do mesmo e a execução de testes unitários e de integração. Esta abordagem segue um dos princípios na ciência da computação denominado de *Separation of Concerns*, que favorece um melhor entendimento do código, uma fácil manutenção, e uma maior flexibilidade para modificações.

Nesta seção, apresentam-se as principais características do código sobre a interação placa-estaca-solo, que é o código de maior complexidade, composto por dezenas de sub-rotinas e funções, agrupadas em módulos. O código implementado é executado seguindo a seguinte sequência: entrada de dados (placa, estaca e solo), montagem das matrizes (matriz de rigidez e matriz de transformação) da placa e das estacas, montagem da matriz do solo, acoplamento MEC/MEF, e por fim, resolução do sistema final de equação para a obtenção dos deslocamentos nodais na placa e nas estacas.

São utilizados dois arquivos de entrada, um para os dados da placa e outro para os dados do solo e das estacas. As malhas da placa e da superfície do solo são idênticas, e são informados o número de nós, o número de elementos (elementos finitos DKT e elementos de contorno triangulares), as coordenadas dos nós e a conectividade dos elementos. Para a placa, são

também informados o carregamento aplicado nos nós e/ou nos elementos, a espessura e as propriedades físicas (módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson) de cada elemento. Para as estacas, são informados o número de elementos finitos por estaca, as propriedades físicas e geométricas (coordenadas no plano horizontal, comprimento e raio), e também os nós de contato com a placa. Conforme mostrado nas listagens de código abaixo, o solo sendo não-homogêneo, as características para cada camada dependem do problema em análise. Optou-se, portanto, por informar os dados de cada camada nas sub-rotinas responsáveis pela montagem da matriz do solo, uma vez que é preciso, além dos dados, implementar a lógica para a atribuição das propriedades físicas aos pontos fonte e aos pontos de integração durante o processo de integração dos elementos de contorno do solo.

Sobre as matrizes do MEF, a abordagem consiste em implementar as matrizes para um único elemento finito (placa e estaca), e com base no número de elementos finitos informado, obtém-se as matrizes globais respeitando-se as conectividades dos elementos. No caso da matriz do solo obtida pelo MEC, implementa-se diretamente a matriz global, e adotou-se uma abordagem que consiste em calcular separadamente as submatrizes constituintes da matriz global do solo, facilitando assim a conferência dos coeficientes de influência calculados e a correta montagem da matriz global. Vale mencionar também que para a integração dos elementos de contorno, é informado, na entrada de dados, o número de pontos de Gauss para o cálculo de suas coordenadas e pesos. Uma vez calculadas todas as matrizes, procede-se ao acoplamento MEC/MEF conforme descrito no capítulo 5, e resolve-se, por fim, o sistema de equações lineares resultante pela técnica de eliminação de Gauss.

O código desenvolvido conforme já mencionado comporta dezenas de sub-rotinas cada uma com dezenas de linhas de código. Com isso, apresenta-se a seguir apenas as sub-rotinas responsáveis pelo cálculo da matriz do solo  $[G]$ , com objetivo de mostrar a implementação computacional das formulações apresentadas no capítulo 5 para a consideração da estratificação do solo. O esquema de montagem da matriz  $[G]$  é conforme mostrado na Tabela 8.1. Considera-se a título ilustrativo a obtenção de  $[G]$  para o exemplo 7.3.3 do capítulo 7. Nas listagens de código mostrados nas Figuras 8.1 a 8.4, os dados do exemplo 7.3.3 são destacados em negrito, e foram omitidas declarações, inicializações e reinicializações das variáveis para focar apenas na implementação de interesse.

Tabela 8.1 – Esquema de montagem da matriz  $[G]$ .

Etapa 0	Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4
$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$[G] = \begin{bmatrix} [G_{SS}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$[G] = \begin{bmatrix} [G_{SS}] & [G_{SE}] \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$[G] = \begin{bmatrix} [G_{SS}] & [G_{SE}] \\ 0 & [G_{EE}] \end{bmatrix}$	$[G] = \begin{bmatrix} [G_{SS}] & [G_{SE}] \\ [G_{ES}] & [G_{EE}] \end{bmatrix}$

Fonte: Autor.

### ▪ Submatriz $[G_{SS}]$

O módulo SOLO\_SOLO contém três sub-rotinas. Na sub-rotina MATG\_SS\_TOP, os pontos fonte estão na superfície do solo, logo é utilizada a Eq. (5.22) para o cálculo dos coeficientes de influência. Na sub-rotina MATG\_SS\_OTHERS, os pontos fonte encontram-se abaixo da superfície do solo, nas interfaces das camadas, e utiliza-se a Eq. (5.27). Nessas sub-rotinas, os pontos de integração estão sempre na superfície. A sub-rotina COMBIN\_SS combina os resultados obtidos utilizando as duas sub-rotinas anteriores e calcula a matriz final  $[G_{SS}]$  aplicando a lógica da Eq. (5.36).

Figura 8.1 – Código para o cálculo de  $[G_{SS}]$ .

```

MODULE SOLO_SOLO
CONTAINS
SUBROUTINE MATG_SS_TOP(SOLOCN, ZIN, POI_SN, E_SOLON)
  GSOLON=E_SOLON/(2.0d0*(1.0d0+POI_SN))
  KSOLON=(1-POI_SN)/(4.0d0*PI*GSOLON)
  CALL QUADGAUSS(NG,QSI,WT)
  DO II=1, NNO1
    DO KK=1, NELEM1
      DO LL=1, 3
        DO NN=1, 3
          DO MM=1, NG
            CXT=CX(II); CYT=CY(II)
            CPIXT=CPIX(KK,NN,MM)
            CPIYT=CPIY(KK,NN,MM)
            NPIXT=NPIX(KK,NN,MM)
            NPIYT=NPIY(KK,NN,MM)
            JACPIT=JACPI(KK,NN,MM)
            RX=CPIXT-CXT; RY=CPIYT-CYT
            RR=DSQRT(RX*RX+RY*RY)
            RXR=RX/RR; RYR=RY/RR
            DG(II, KK, LL) = DG(II, KK, LL) + (AI(KK, LL)*RX + BI(KK, LL)*RY + 2.0d0*(AI(KK, LL)*CXT +
              BI(KK, LL)*CYT + CI(KK, LL))) * (RXR*NPIXT + RYR*NPIYT) * JACPIT*WT(MM)
          
```

```

        END DO
    END DO
END DO
END DO
END DO
II=1,NNO1
DO II=1,NNO1
    DO JJ=1,NNO1
        DO KK=1,NELEM1
            DO LL=1,3
                EE=NOD(KK,LL)
                IF(EE==JJ) THEN
                    SOLOCN(II,JJ)=SOLOCN(II,JJ)+DG(II,KK,LL)
                END IF
            END DO
        END DO
    END DO
END DO
END DO
SOLOCN=KSOLON*SOLOCN
END SUBROUTINE MATG_SS_TOP
!***!
SUBROUTINE MATG_SS_OTHERS(SOLOCN, ZIN, POI_SN, E_SOLON)
    ALPHA=(1.-POI_SN*POI_SN)/(PI*E_SOLON)
    BETA=(1.+POI_SN)/(2.*PI*E_SOLON)
    KS=BETA/ALPHA
    CALL QUADGAUSS(NG,QSI,WT)
    DO II=1,NNO1
        DO KK=1,NELEM1
            DO LL=1,3
                DO NN=1,3
                    DO MM=1,NG
                        CXT=CX(II); CYT=CY(II)
                        CPIXT=CPIX(KK,NN,MM)
                        CPIYT=CPIY(KK,NN,MM)
                        NPIXT=NPIX(KK,NN,MM)
                        NPIYT=NPIY(KK,NN,MM)
                        JACPIT=JACPI(KK,NN,MM)
                        RX=CPIXT-CXT; RY=CPIYT-CYT
                        RR=DSQRT(RX*RX+RY*RY)
                        RXR=RX/RR; RYR=RY/RR
                        R1=DSQRT(RR*RR+ZIN*ZIN)
                        F3=DLOG((RR+R1)/ZIN)
                        F1=0.5*RR*R1-0.5*ZIN*ZIN*F3
                        F2=-RR/R1+F3
                        F31=R1-ZIN
                    END DO
                END DO
            END DO
        END DO
    END DO

```

```

      F4=-1./R1+1./ZIN
      AUX_1=((AI(KK,LL)*RX + BI(KK,LL)*RY)/(RR*RR))*(F1 + KS*ZIN*ZIN*F2)
      AUX_2=((AI(KK,LL)*CXT + BI(KK,LL)*CYT + CI(KK,LL))/RR)*(F31 + KS*ZIN*ZIN*F4)
      DG(II,KK,LL) = DG(II,KK,LL) + ALPHA*(AUX_1+AUX_2) * (RXR*NPIXT + RYR*NPIYT) *
          JACPIT*WT(MM)

      END DO
    END DO
  END DO
END DO
II=1, NNO1
DO II=1, NNO1
  DO JJ=1, NNO1
    DO KK=1, NELEM1
      DO LL=1, 3
        EE=NOD(KK,LL)
        IF(EE==JJ) THEN
          SOLOCN(II,JJ)=SOLOCN(II,JJ)+DG(II,KK,LL)
        END IF
      END DO
    END DO
  END DO
END DO
END SUBROUTINE MATG_SS_OTHERS
!***!
SUBROUTINE COMBIN_SS
  CALL MATG_SS_TOP(SOLOC1U, 0.0D0, 0.0D0, 60000.0D0)
  CALL MATG_SS_OTHERS(SOLOC1D, 1.0D0, 0.0D0, 60000.0D0)
  CALL MATG_SS_OTHERS(SOLOC2U, 1.0D0, 0.0D0, 70000.0D0)
  CALL MATG_SS_OTHERS(SOLOC2D, 3.0D0, 0.0D0, 70000.0D0)
  CALL MATG_SS_OTHERS(SOLOC3U, 3.0D0, 0.0D0, 80000.0D0)
  CALL MATG_SS_OTHERS(SOLOC3D, 6.0D0, 0.0D0, 80000.0D0)
  CALL MATG_SS_OTHERS(SOLOC4U, 6.0D0, 0.0D0, 90000.0D0)
  CALL MATG_SS_OTHERS(SOLOC4D, 10.0D0, 0.0D0, 90000.0D0)
  CALL MATG_SS_OTHERS(SOLOC5U, 10.0D0, 0.0D0, 100000.0D0)
  CALL MATG_SS_OTHERS(SOLOC5D, 35.0D0, 0.0D0, 100000.0D0)
  GFINAL = SOLOC1U - SOLOC1D + SOLOC2U - SOLOC2D + SOLOC3U - SOLOC3D + SOLOC4U -
  SOLOC4D + SOLOC5U - SOLOC5D
END SUBROUTINE COMBIN_SS
END MODULE SOLO_SOLO

```

Fonte: Autor.

▪ **Submatriz  $[G_{SE}]$**

O módulo SOLO\_ESTACA contém duas sub-rotinas e duas funções. Na sub-rotina MATG\_SE, os pontos fonte se encontram na superfície do solo e nas interfaces das camadas, os pontos de integração estão nas estacas, e os coeficientes de influência do solo são calculados utilizando a Eq. (5.16) implementada na função U\_33. Na integração da estaca, faz-se o tratamento da singularidade quando o ponto fonte estiver na base da estaca, e neste caso o coeficiente de influência é calculado pela função U\_33\_BASE. A sub-rotina COMBIN\_SS combina os resultados obtidos neste módulo e soma com o resultado de  $[G_{SS}]$  calculado no módulo SOLO\_SOLO.

Figura 8.2 – Código para o cálculo de  $[G_{SE}]$ .

```

MODULE SOLO_ESTACA
CONTAINS
SUBROUTINE MATG_SE(SOLOCN, ZIN, POI_SN, E_SOLON)
  CALL QUADGAUSS(NG,QSI,WT)
  DO II=1,NNO1
    DO JJ=1,NPILE
      DO KK=1,NEF_PILE
        DO LL=1,NG
          XI=CX(II)
          YI=CY(II)
          R0=RAIO_PILE(JJ)
          XINT=XORD_P(JJ)
          YINT=YORD_P(JJ)
          ZNC=ZNC_P(JJ,KK)
          RX=(XI-XINT)
          RY=(YI-YINT)
          R=RX*RX+RY*RY
          IF(R<0.00000000001) R=R0*R0
          RL=COMP_PILE(JJ)/NEF_PILE
          ZINT=RL*QSI(LL)/2.0d0+ZNC
          R1=DSQRT(R+(ZINT-ZIN)*(ZINT-ZIN))
          R2=DSQRT(R+(ZINT+ZIN)*(ZINT+ZIN))
          U33= U_33(ZIN,ZINT,R1,R2,R0,VSOLO)
          P_I=(1.0d0-QSI(LL))/2.0d0
          P_J=(1.0d0+QSI(LL))/2.0d0
          BN5=BN5+U33*P_I*WT(LL)*RL*RKDN/2.0d0
          BN6=BN6+U33*P_J*WT(LL)*RL*RKDN/2.0d0
          NN=(JJ-1)*(NEF_PILE)+(NNO1+KK)
          NO_P=NO_PILE(JJ)
          IF(KK==1) THEN

```



```

SOLOCN(II,NO_P)=SOLOCN(II,NO_P)+BN5
SOLOCN(II,NN)=SOLOCN(II,NN)+BN6
ELSE
SOLOCN(II,NN-1)=SOLOCN(II,NN-1)+BN5
SOLOCN(II,NN)=SOLOCN(II,NN)+BN6
END IF
IF (ZORD_P(JJ,KK+1) .EQ. COMP_PILE(JJ)) THEN
IF(R==R0*R0) THEN
SOLOCN(II,NN)=U_33_BASE(ZIN,COMP_PILE(JJ),R0,POI_SN,RKDN)
ELSE IF(R/=R0*R0 .AND. ANY(NO_PILE==II)) THEN
R1=DSQRT(R+(ZORD_P(JJ,KK+1)-ZIN)*(ZORD_P(JJ,KK+1)-ZIN))
R2=DSQRT(R+(ZORD_P(JJ,KK+1)+ZIN)*(ZORD_P(JJ,KK+1)+ZIN))
SOLOCN(II,NN)=U_33(ZIN,ZORD_P(JJ,KK+1),R1,R2,R0,POI_SN)*RKDN*PI*R0**2
END IF
END IF
END DO
END DO
END DO
END DO
END SUBROUTINE MATG_SE
!***!
SUBROUTINE COMBIN_SE
CALL MATG_SE(SOLOC1U, 0.0D0, 0.0D0, 60000.0D0)
CALL MATG_SE(SOLOC1D, 1.0D0, 0.0D0, 60000.0D0)
CALL MATG_SE(SOLOC2U, 1.0D0, 0.0D0, 70000.0D0)
CALL MATG_SE(SOLOC2D, 3.0D0, 0.0D0, 70000.0D0)
CALL MATG_SE(SOLOC3U, 3.0D0, 0.0D0, 80000.0D0)
CALL MATG_SE(SOLOC3D, 6.0D0, 0.0D0, 80000.0D0)
CALL MATG_SE(SOLOC4U, 6.0D0, 0.0D0, 90000.0D0)
CALL MATG_SE(SOLOC4D, 10.0D0, 0.0D0, 90000.0D0)
CALL MATG_SE(SOLOC5U, 10.0D0, 0.0D0, 100000.0D0)
CALL MATG_SE(SOLOC5D, 35.0D0, 0.0D0, 100000.0D0)
GFINAL = GFINAL + SOLOC1U - SOLOC1D + SOLOC2U - SOLOC2D + SOLOC3U - SOLOC3D + SOLOC4U
- SOLOC4D + SOLOC5U - SOLOC5D
END SUBROUTINE COMBIN_SE
!***!
REAL FUNCTION U_33_BASE(ZI,Z_INT,R0,POI_S,RKD)
CT=DSQRT(R0**2+(Z_INT-ZI)**2)
CT1=DSQRT(R0**2+(Z_INT+ZI)**2)
U_33_BASE=2.*PI*((3.-4.*POI_S)*(CT-DSQRT((ZI-Z_INT)**2))+8.*(1.-POI_S)**2- &
(3.-4.*POI_S))*(CT1-(Z_INT+ZI))-(ZI-Z_INT)**2/CT+ &
DSQRT((ZI-Z_INT)**2)+((3.0-4*POI_S)*(Z_INT+ZI)**2- &
2.*ZI*Z_INT)*(-1/CT1+1/(ZI+Z_INT))+6.*Z_INT*ZI*(Z_INT+ZI)**2*(- &
1.0/(3.0*CT1**3)+1/(3.*(Z_INT+ZI)**3)))*RKD
END FUNCTION U_33_BASE

```

```

!***!
REAL FUNCTION U_33(ZI,Z_INT,R1,R2,R0,POI_S)
  U_33=((3.-4.*POI_S)/R1+(8.*(1.-POI_S)**2-(3.-4.*POI_S))/R2 &
    +(ZI-Z_INT)**2/R1**3+((3.-4.*POI_S)*(ZI+Z_INT)**2- &
    2.*ZI*Z_INT)/R2**3+6.*ZI*Z_INT*(ZI+Z_INT)**2/R2**5)
END FUNCTION U_33
END MODULE SOLO_ESTACA

```

Fonte: Autor.

### ▪ Submatriz [ $G_{EE}$ ]

O módulo ESTACA\_ESTACA contém três sub-rotinas e duas funções (as mesmas da Figura 8.2 e não mostradas na Figura 8.3). Na sub-rotina MATG\_EE\_SOLO, os pontos fonte se encontram na estaca, e na sub-rotina MATG\_EE\_SOLOC, o ponto fonte se encontra na interseção entre o eixo da estaca e a interface das camadas. O tratamento de singularidade é realizado conforme comentado no módulo SOLO\_ESTACA anterior. Pode-se observar em negrito na sub-rotina MATG\_EE\_SOLO, o cálculo das propriedades físicas de acordo com a localização dos pontos fonte nas camadas de solo. Outra observação é sobre a instrução ELSE (em negrito nas sub-rotinas MATG\_EE\_SOLO e COMBIN\_EE) deixado no código a título de ilustração, e que seria executada somente caso a estaca tiver um comprimento maior que 10 m. O cálculo de [ $G_{EE}$ ] na sub-rotina COMBIN\_EE é realizado conforme o esquema da Figura 5.20. Nesta altura, completa-se a etapa 3 mostrada na Tabela 8.1.

Figura 8.3 – Código para o cálculo de [ $G_{EE}$ ].

```

MODULE ESTACA_ESTACA
CONTAINS
SUBROUTINE MATG_EE_SOLO(SOLOCN)
  CALL QUADGAUSS(NG,QSI,WT)
  MM=1; WW=1
  DO II=NNO1+1,NNOS
    IF(II>MM*NEF_PILE+NNO1) THEN
      MM=MM+1; WW=1
    END IF
    IF(II<=MM*NEF_PILE+NNO1) THEN
      WW=WW+1
    END IF
    XI=CX(NO_PILE(MM))
    YI=CY(NO_PILE(MM))
    ZI=ZORD_P(MM,WW)

```

```

IF(ZI<1.0D0) THEN
    RKDI=(1.D0+0.D0)/(8.D0*PI*60000.0D0*(1.D00-0.D0))
ELSEIF (ZI<3.0D0) THEN
    RKDI=(1.D0+0.D0)/(8.D0*PI*70000.0D0*(1.D00-0.D0))
ELSEIF (ZI<6.0D0) THEN
    RKDI=(1.D0+0.D0)/(8.D0*PI*80000.0D0*(1.D00-0.D0))
ELSEIF (ZI<10.0D0) THEN
    RKDI=(1.D0+0.D0)/(8.D0*PI*90000.0D0*(1.D00-0.D0))
ELSE
    RKDI=(1.D0+0.D0)/(8.D0*PI*100000.0D0*(1.D00-0.D0))
END IF
DO JJ=1,NPILE
    DO KK=1,NEF_PILE
        DO LL=1,NG
            R0=RAIO_PILE(JJ)
            XINT=XORD_P(JJ)
            YINT=YORD_P(JJ)
            ZNC=ZNC_P(JJ,KK)
            RX=(XI-XINT)
            RY=(YI-YINT)
            R=RX*RX+RY*RY
            IF(R<0.00000000001) R=R0*R0
            RL=COMP_PILE(JJ)/NEF_PILE
            ZINT=RL*QSI(LL)/2.0d0+ZNC
            RKD=RKDI
            R1=DSQRT(R+(ZINT-ZI)*(ZINT-ZI))
            R2=DSQRT(R+(ZINT+ZI)*(ZINT+ZI))
            U33= U_33(ZI,ZINT,R1,R2,R0,VSOLO)
            P_I=(1.0d0-QSI(LL))/2.0d0
            P_J=(1.0d0+QSI(LL))/2.0d0
            BN1=BN1+U33*P_I*WT(LL)*RL*RKD/2.0d0
            BN2=BN2+U33*P_J*WT(LL)*RL*RKD/2.0d0
            NN=(JJ-1)*(NEF_PILE)+(NNO1+KK)
            NO_P=NO_PILE(JJ)
            IF(KK==1) THEN
                SOLOCN(II,NO_P)=SOLOCN(II,NO_P)+BN1
                SOLOCN(II,NN)=SOLOCN(II,NN)+BN2
            ELSE
                SOLOCN(II,NN-1)=SOLOCN(II,NN-1)+BN1
                SOLOCN(II,NN)=SOLOCN(II,NN)+BN2
            END IF
            IF (ZORD_P(JJ,KK+1) .EQ. COMP_PILE(JJ)) THEN
                IF(R==R0*R0) THEN
                    SOLOCN(II,NN)=U_33_BASE(ZI,COMP_PILE(JJ),R0,VSOLO,RKD)
                ELSE

```

```

      R1=DSQRT(R+(ZORD_P(JJ,KK+1)-ZI)*(ZORD_P(JJ,KK+1)-ZI))
      R2=DSQRT(R+(ZORD_P(JJ,KK+1)+ZI)*(ZORD_P(JJ,KK+1)+ZI))
      SOLOCN(II,NN)=U_33(ZI,ZORD_P(JJ,KK+1),R1,R2,R0,VSOLO)*RKD*PI*R0**2
    END IF
  END IF
END DO
END DO
END DO
END DO
END SUBROUTINE MATG_EE_SOLO
!***!
SUBROUTINE MATG_EE_SOLOC(SOLOCN, ZIN, POI_SN, E_SOLON)
  RKD=(1.D00+POI_SN)/(8.D00*PI*E_SOLON*(1.D00-POI_SN))
  CALL QUADGAUSS(NG,QSI,WT)
  DO II=1,NPILE
    XI=XORD_P(II)
    YI=YORD_P(II)
    DO JJ=1,NPILE
      DO KK=1,NEF_PILE
        DO LL=1,NG
          R0=RAIO_PILE(JJ)
          XINT=XORD_P(JJ)
          YINT=YORD_P(JJ)
          ZNC=ZNC_P(JJ,KK)
          RX=(XI-XINT)
          RY=(YI-YINT)
          R=RX*RX+RY*RY
          IF(R<0.00000000001) R=R0*R0
          RL=COMP_PILE(JJ)/NEF_PILE
          ZINT=RL*QSI(LL)/2.0d0+ZNC
          R1=DSQRT(R+(ZINT-ZIN)*(ZINT-ZIN))
          R2=DSQRT(R+(ZINT+ZIN)*(ZINT+ZIN))
          U33= U_33(ZIN,ZINT,R1,R2,R0,VSOLO)
          P_I=(1.0d0-QSI(LL))/2.0d0
          P_J=(1.0d0+QSI(LL))/2.0d0
          BN1=BN1+U33*P_I*WT(LL)*RL*RKD/2.0d0
          BN2=BN2+U33*P_J*WT(LL)*RL*RKD/2.0d0
          NN=(JJ-1)*(NEF_PILE)+(NNO1+KK)
          NO_P=NO_PILE(JJ)
          IF(KK==1) THEN
            SOLOCN(NNO1+II,NO_P)=SOLOCN(NNO1+II,NO_P)+BN1
            SOLOCN(NNO1+II,NN)=SOLOCN(NNO1+II,NN)+BN2
          ELSE
            SOLOCN(NNO1+II,NN-1)=SOLOCN(NNO1+II,NN-1)+BN1
            SOLOCN(NNO1+II,NN)=SOLOCN(NNO1+II,NN)+BN2
          END IF
        END DO
      END DO
    END DO
  END DO

```

```

END IF
IF (ZORD_P(JJ, KK+1) .EQ. COMP_PILE(JJ)) THEN
  IF(R==R0*R0) THEN
    SOLOCN(NNO1+II, NN)=U_33_BASE(ZIN, COMP_PILE(JJ), R0, VSOLO, RKD)
  ELSE
    R1=DSQRT(R+(ZORD_P(JJ, KK+1)-ZIN)*(ZORD_P(JJ, KK+1)-ZIN))
    R2=DSQRT(R+(ZORD_P(JJ, KK+1)+ZIN)*(ZORD_P(JJ, KK+1)+ZIN))
    SOLOCN(NNO1+II, NN)=U_33(ZIN, ZORD_P(JJ, KK+1), R1, R2, R0, VSOLO)*RKD*PI*R0**2
  END IF
END IF
END DO
END DO
END DO
END DO
END SUBROUTINE MATG_EE_SOLOC
!***!
SUBROUTINE COMBIN_EE
  CALL MATG_EE_SOLOC(SOLOC1U)
  CALL MATG_EE_SOLOC(SOLOC1D, 1.0D0, 0.0D0, 60000.0D0)
  CALL MATG_EE_SOLOC(SOLOC2U, 1.0D0, 0.0D0, 70000.0D0)
  CALL MATG_EE_SOLOC(SOLOC2D, 3.0D0, 0.0D0, 70000.0D0)
  CALL MATG_EE_SOLOC(SOLOC3U, 3.0D0, 0.0D0, 80000.0D0)
  CALL MATG_EE_SOLOC(SOLOC3D, 6.0D0, 0.0D0, 80000.0D0)
  CALL MATG_EE_SOLOC(SOLOC4U, 6.0D0, 0.0D0, 90000.0D0)
  CALL MATG_EE_SOLOC(SOLOC4D, 10.0D0, 0.0D0, 90000.0D0)
  CALL MATG_EE_SOLOC(SOLOC5U, 10.0D0, 0.0D0, 100000.0D0)
  CALL MATG_EE_SOLOC(SOLOC5D, 35.0D0, 0.0D0, 100000.0D0)
  J=NNO1+1
  L=1; M=2
  DO I = NNO1+1, NNOS
    IF (I == NNO1 + L*(NEF_PILE+1)) THEN
      J=J+1; L=L+1; M=2
    END IF
    ZI=ZORD_PILE2(M)
    M=M+1
    IF(ZI<1.0D0) THEN
      SOLOC1U(I,:) = SOLOC1U(I,:) - SOLOC1D(J,:) + SOLOC2U(J,:) - SOLOC2D(J,:) + SOLOC3U(J,:)
        - SOLOC3D(J,:) + SOLOC4U(J,:) - SOLOC4D(J,:) + SOLOC5U(J,:) - SOLOC5D(J,:)
    ELSEIF (ZI<3.0D0) THEN
      SOLOC1U(I,:) = SOLOC1U(I,:) - SOLOC2D(J,:) + SOLOC3U(J,:) - SOLOC3D(J,:) + SOLOC4U(J,:)
        - SOLOC4D(J,:) + SOLOC5U(J,:) - SOLOC5D(J,:)
    ELSEIF (ZI<6.0D0) THEN
      SOLOC1U(I,:) = SOLOC1U(I,:) - SOLOC3D(J,:) + SOLOC4U(J,:) - SOLOC4D(J,:) + SOLOC5U(J,:)
        - SOLOC5D(J,:)
    ELSEIF (ZI<10.0D0) THEN

```

```

SOLOC1U(I,:) = SOLOC1U(I,:) - SOLOC4D(J,:) + SOLOC5U(J,:) - SOLOC5D(J,:)
ELSE
SOLOC1U(I,:) = SOLOC1U(I,:) - SOLOC5D(J,:)
END IF
END DO
GFINAL = GFINAL + SOLOC1U
END SUBROUTINE COMBIN_EE
END MODULE ESTACA_ESTACA

```

Fonte: Autor.

#### ▪ Submatriz $[G_{ES}]$

A implementação do módulo ESTACA\_SOLO é parecida com a implementação do módulo SOLO\_SOLO no que diz respeito ao cálculo dos coeficientes de influência uma vez que os pontos de integração se encontram na superfície do solo, e os pontos fonte estão no eixo da estaca abaixo da superfície. O cálculo de  $[G_{ES}]$  é realizado de modo similar ao cálculo de  $[G_{EE}]$  no módulo ESTACA\_ESTACA, conforme mostrado na sub-rotina COMBIN\_ES, onde se obtém também a matriz final do solo  $[G]$  (etapa 4 da Tabela 8.1) a ser utilizada no acoplamento MEC/MEF junto com as matrizes de rigidez da estaca e da placa. Deve-se mencionar também que, conforme comentado na seção 5.3, no final da sub-rotina COMBIN\_ES, são zeradas todas as colunas correspondentes aos nós de contato entre a placa e a estaca.

Figura 8.4 – Código para o cálculo de  $[G_{ES}]$ .

```

MODULE ESTACA_SOLO
CONTAINS
SUBROUTINE MATG_ES_SOLO(SOLOCN)
CALL QUADGAUSS(NG,QSI,WT)
VV=1 WW=1
DO II=NNO1+1,NNOS
IF(II>VV*NEF_PILE+NNO1) THEN
VV=VV+1; WW=1
END IF
IF(II<=VV*NEF_PILE+NNO1) THEN
WW=WW+1
END IF
DO KK=1,NELEM1
DO LL=1,3
DO NN=1,3
DO MM=1,NG
XI=CX(NO_PILE(VV))

```

```

YI=CY(NO_PILE(VV))
ZI=ZORD_P(VV,WW)
IF(ZI<1.0D0) THEN
    ALPHA=(1.D0-0.D0*0.D0)/(PI*60000.0D0)
    BETA=(1.D0+0.D0)/(2.D0*PI*60000.0D0)
    KS=BETA/ALPHA
ELSEIF(ZI<3.0D0) THEN
    ALPHA=(1.D0-0.D0*0.D0)/(PI*70000.0D0)
    BETA=(1.D0+0.D0)/(2.D0*PI*70000.0D0)
    KS=BETA/ALPHA
ELSEIF(ZI<6.0D0) THEN
    ALPHA=(1.D0-0.D0*0.D0)/(PI*80000.0D0)
    BETA=(1.D0+0.D0)/(2.D0*PI*80000.0D0)
    KS=BETA/ALPHA
ELSEIF(ZI<10.0D0) THEN
    ALPHA=(1.D0-0.D0*0.D0)/(PI*90000.0D0)
    BETA=(1.D0+0.D0)/(2.D0*PI*90000.0D0)
    KS=BETA/ALPHA
ELSE
    ALPHA=(1.D0-0.D0*0.D0)/(PI*100000.0D0)
    BETA=(1.D0+0.D0)/(2.D0*PI*100000.0D0)
    KS=BETA/ALPHA
END IF
CPIXT=CPIX(KK,NN,MM)
CPIYT=CPIY(KK,NN,MM)
NPIXT=NPIX(KK,NN,MM)
NPIYT=NPIY(KK,NN,MM)
JACPIT=JACPI(KK,NN,MM)
RX=CPIXT-XI; RY=CPIYT-YI
RR=DSQRT(RX*RX+RY*RY)
RXR=RX/RR; RYR=RY/RR
R1=DSQRT(RR*RR+ZI*ZI)
F3=DLOG((RR+R1)/ZI)
F1=0.5*RR*R1-0.5*ZI*ZI*F3
F2=-RR/R1+F3
F31=R1-ZI
F4=-1./R1+1./ZI
AUX1=((AI(KK,LL)*RX + BI(KK,LL)*RY)/(RR*RR))*(F1 + KS*ZI*ZI*F2)
AUX2=((AI(KK,LL)*XI + BI(KK,LL)*YI + CI(KK,LL))/RR)*(F31 + KS*ZI*ZI*F4)
DG(II,KK,LL) = DG(II,KK,LL) + ALPHA*(AUX1+AUX2) * (RXR*NPIXT + RYR*NPIYT) *
    JACPIT*WT(MM)

    END DO
END DO
END DO
END DO

```

```

END DO
DO II=NNO1+1,NNOS
  DO JJ=1,NNO1
    DO KK=1,NELEM1
      DO LL=1,3
        EE=NOD(KK,LL)
        IF(EE==JJ) THEN
          SOLOCN(II,JJ)=SOLOCN(II,JJ)+DG(II,KK,LL)
        END IF
      END DO
    END DO
  END DO
END DO
END DO
END SUBROUTINE MATG_ES_SOLO
!***!
SUBROUTINE MATG_ES_SOLOC(SOLOCN, ZIN, POI_SN, E_SOLON)
  ALPHA=(1.-POI_SN*POI_SN)/(PI*E_SOLON)
  BETA=(1.+POI_SN)/(2.*PI*E_SOLON)
  KS=BETA/ALPHA
  CALL QUADGAUSS(NG,QSI,WT)
  DO II=1,NPILE
    XI=XORD_P(II)
    YI=YORD_P(II)
    CALL QUADGAUSS(NG,QSI,WT)
    DO KK=1,NELEM1
      DO LL=1,3
        DO NN=1,3
          DO MM=1,NG
            CPIXT=CPIX(KK,NN,MM)
            CPIYT=CPIY(KK,NN,MM)
            NPIXT=NPIX(KK,NN,MM)
            NPIYT=NPIY(KK,NN,MM)
            JACPIT=JACPI(KK,NN,MM)
            RX=CPIXT-XI; RY=CPIYT-YI
            RR=DSQRT(RX*RX+RY*RY)
            RXR=RX/RR; RYR=RY/RR
            R1=DSQRT(RR*RR+ZIN*ZIN)
            F3=DLOG((RR+R1)/ZIN)
            F1=0.5*RR*R1-0.5*ZIN*ZIN*F3
            F2=-RR/R1+F3
            F31=R1-ZIN
            F4=-1./R1+1./ZIN
            AUX1=((AI(KK,LL)*RX + BI(KK,LL)*RY)/(RR*RR))*(F1 + KS*ZIN*ZIN*F2)
            AUX2=((AI(KK,LL)*XI + BI(KK,LL)*YI + CI(KK,LL))/RR)*(F31 + KS*ZIN*ZIN*F4)
            DG(II,KK,LL) = DG(II,KK,LL) + ALPHA*(AUX1+AUX2) * (RXR*NPIXT + RYR*NPIYT) *

```



```

                                JACPIT*WT(MM)

        END DO
    END DO
END DO
END DO
END DO
DO II=1,NPILE
    DO JJ=1,NNO1
        DO KK=1,NELEM1
            DO LL=1,3
                EE=NOD(KK,LL)
                IF(EE==JJ) THEN
                    SOLOCN(NNO1+II,JJ)=SOLOCN(NNO1+II,JJ)+DG(II,KK,LL)
                END IF
            END DO
        END DO
    END DO
END DO
END DO
END SUBROUTINE MATG_ES_SOLOC
!***!
SUBROUTINE COMBIN_ES
    CALL MATG_ES_SOLO(SOLOC1U)
    CALL MATG_ES_SOLOC(SOLOC1D, 1.0D0, 0.0D0, 60000.0D0)
    CALL MATG_ES_SOLOC(SOLOC2U, 1.0D0, 0.0D0, 70000.0D0)
    CALL MATG_ES_SOLOC(SOLOC2D, 3.0D0, 0.0D0, 70000.0D0)
    CALL MATG_ES_SOLOC(SOLOC3U, 3.0D0, 0.0D0, 80000.0D0)
    CALL MATG_ES_SOLOC(SOLOC3D, 6.0D0, 0.0D0, 80000.0D0)
    CALL MATG_ES_SOLOC(SOLOC4U, 6.0D0, 0.0D0, 90000.0D0)
    CALL MATG_ES_SOLOC(SOLOC4D, 10.0D0, 0.0D0, 90000.0D0)
    CALL MATG_ES_SOLOC(SOLOC5U, 10.0D0, 0.0D0, 100000.0D0)
    CALL MATG_ES_SOLOC(SOLOC5D, 35.0D0, 0.0D0, 100000.0D0)
    J=NNO1+1
    L=1; M=2
    DO I = NNO1+1,NNOS
        IF (I == NNO1 + L*(NEF_PILE+1)) THEN
            J=J+1; L=L+1; M=2
        END IF
        ZI=ZORD_PILE2(M)
        M=M+1
        IF(ZI<1.0D0) THEN
            SOLOC1U(I,:) = SOLOC1U(I,:) - SOLOC1D(J,:) + SOLOC2U(J,:) - SOLOC2D(J,:) + SOLOC3U(J,:) -
                SOLOC3D(J,:) + SOLOC4U(J,:) - SOLOC4D(J,:) + SOLOC5U(J,:) - SOLOC5D(J,:)
        ELSEIF (ZI<3.0D0) THEN
            SOLOC1U(I,:) = SOLOC1U(I,:) - SOLOC2D(J,:) + SOLOC3U(J,:) - SOLOC3D(J,:) + SOLOC4U(J,:) -
                SOLOC4D(J,:) + SOLOC5U(J,:) - SOLOC5D(J,:)
        END IF
    END DO
END SUBROUTINE COMBIN_ES

```

```

ELSEIF (ZI<6.0D0) THEN
    SOLOC1U(I,:) = SOLOC1U(I,:) - SOLOC3D(J,:) + SOLOC4U(J,:) - SOLOC4D(J,:) + SOLOC5U(J,:) -
        SOLOC5D(J,:)
ELSEIF (ZI<10.0D0) THEN
    SOLOC1U(I,:) = SOLOC1U(I,:) - SOLOC4D(J,:) + SOLOC5U(J,:) - SOLOC5D(J,:)
ELSE
    SOLOC1U(I,:) = SOLOC1U(I,:) - SOLOC5D(J,:)
END IF
END DO
GFINAL = GFINAL + SOLOC1U
!***!
DO II=1,NPILE
    NO_P=NO_PILE(II)
    GFINAL(:,NO_P)=0.0d0
END DO
!***!
END SUBROUTINE COMBIN_ES
END MODULE ESTACA_SOLO

```

Fonte: Autor.

## 8.2 FLAMBAGEM DA ESTACA

Para a análise da estabilidade da estaca, foi utilizado o Python<sup>®</sup> junto com Fortran<sup>®</sup>, após avaliar os recursos das bibliotecas para a computação científica do Python<sup>®</sup>, e testar a acurácia e a eficiência das mesmas para a solução do problema de autovalores. O cálculo das cargas críticas de flambagem se deu em duas etapas. A primeira etapa foi realizada com Fortran<sup>®</sup> para o cálculo das matrizes de rigidez equivalente (acoplamento da matriz do solo e da matriz da estaca), e da matriz de instabilidade conforme apresentado na seção 6.3, e a segunda etapa com Python<sup>®</sup>, conforme o código mostrado na Figura 8.5. Deve-se mencionar que a análise de estabilidade da estaca inserida no solo requer o uso de todas as componentes da solução fundamental de Mindlin para deslocamentos.

Figura 8.5 – Código para o cálculo da carga crítica de flambagem.

```
# bibliotecas para computação científica
import numpy as np
from scipy import linalg

# leitura dos elementos das matrizes calculadas com Fortran
def yield_values(filename):
    with open(filename) as f_input:
        for line in f_input:
            for val in line.split():
                yield float(val)

# matriz de rigidez equivalente
arr_r = np.array(list(yield_values('examples/ex1/mrig.txt')))
dimr = int(np.sqrt(arr_r.size))
arr_r = arr_r.reshape((dimr, dimr))

# matriz de rigidez geométrica
arr_g = np.array(list(yield_values('examples/ex1/mgeom.txt')))
dimg = int(np.sqrt(arr_g.size))
arr_g = arr_g.reshape((dimg, dimg))

# verificação das dimensões das matrizes e atribuição de um valor único
dim = dimr if dimr == dimg else 0

# engaste na base
def remove_rows_and_columns_basefixed(arr):
    result = np.delete(np.delete(arr, [dim-1, dim-2, dim-3, dim-4, dim-5], 0),
                       [dim-1, dim-2, dim-3, dim-4, dim-5], 1)
    return result

# apoios fixos no topo e na base | pinned-pinned | pode-se considerar também apoio móvel no topo
# giro liberado em apenas uma direção
def remove_rows_and_columns_pinned(arr):
    result = np.delete(np.delete(arr, [0, 1, 2, 3, dim-1, dim-2, dim-3, dim-4], 0),
                       [0, 1, 2, 3, dim-1, dim-2, dim-3, dim-4], 1)
    return result
```

```
# engastes no topo e na base | fixed-fixed | pode-se considerar também engaste móvel no topo
def remove_rows_and_columns_fixed(arr):
    result = np.delete(np.delete(arr, [0, 1, 2, 3, 4, dim-1, dim-2, dim-3, dim-4, dim-5], 0),
                      [0, 1, 2, 3, 4, dim-1, dim-2, dim-3, dim-4, dim-5], 1)
    return result

# aplicação de apoios fixos nas duas extremidades da estaca
arr_rok = remove_rows_and_columns_pinned(arr_r)
arr_gok = remove_rows_and_columns_pinned(arr_g)

# resolução do problema de autovalores
w, vl, vr = linalg.eig(arr_rok, arr_gok, left=True, right=True)

# obtenção da carga crítica de flambagem
w.min()
```

Fonte: Autor.

## 9 CONCLUSÕES

Existe na literatura uma série de trabalhos que abordam o tema interação solo-estrutura, e mais especificamente a interação entre a estaca ou grupo de estacas e o solo, podendo ter ou não uma placa sobre as estacas. Conforme visto na revisão bibliográfica deste trabalho, os métodos numéricos são geralmente utilizados uma vez que os problemas de interação solo-estrutura são complexos, e métodos como o MEF para a modelagem da estrutura e o MEC para a modelagem do solo fornecem resultados com direta aplicabilidade em projetos de engenharia de estruturas. Foi observado que na análise de interação solo-estrutura, alguns trabalhos propuseram soluções analíticas e aproximadas para a consideração de solos não-homogêneos. Os resultados obtidos por essas soluções quando comparados com soluções numéricas apresentam, de modo geral, uma boa concordância, porém, observa-se uma discrepância notável quando as camadas inferiores do solo forem mais compressíveis que as superiores. Na análise de flambagem da estaca, foi observado que a maioria dos trabalhos analisam o problema baseando-se no modelo de Winkler, no MDF como em Poulos (1980), e no MEF via programas computacionais comerciais.

É nesse contexto que se inseriu o tema deste trabalho tendo por primeiro objetivo avaliar as diferenças relativas, em comparação com outros trabalhos, observadas na introdução de uma solução aproximada para a consideração de solos não-homogêneos numa formulação robusta MEC/MEF para a análise da interação solo-estrutura, e com isso confirmar ou não a viabilidade da formulação final desenvolvida. Outro objetivo foi propor uma formulação original baseada no acoplamento MEC/MEF para a análise da estabilidade da estaca mediante cálculo de cargas críticas de flambagem. Para isso, os elementos estruturais de fundação, ou seja, as estacas e a placa (radier ou capeamento rígido) foram modelados pelo MEF, com a estaca discretizada com elementos finitos de viga tridimensional e a placa discretizada com elementos finitos de placa DKT. O solo foi modelado pelo MEC via utilização da solução fundamental de Mindlin e conceitos baseados no modelo de Steinbrenner. Foram também desenvolvidos códigos computacionais para solucionar numericamente os problemas propostos.

Para melhor explorar o tema deste trabalho, o mesmo foi dividido em quatro subtemas – análises da interação placa-solo, estaca-solo, placa-estaca-solo e análise da estabilidade da estaca. Na análise da interação placa-solo, as malhas da placa e da superfície do solo coincidem na região de contato. É nesta análise que se aplicou de maneira mais direta o modelo de Steinbrenner através de operações de adição e subtração das matrizes dos coeficientes de

influência. O cálculo dos coeficientes de influência, com os pontos fonte nas interfaces das camadas, é realizado informando apenas a cota da interface e utilizando as coordenadas da malha da superfície do solo. Os resultados obtidos nesta etapa apresentaram uma boa concordância com os de outros autores.

Na análise da interação estaca-solo, o solo foi modelado com elementos lineares de contorno, na mesma localização das linhas de carga, e coincidentes com a malha da estaca. Para a consideração do solo composto por várias camadas, foram propostas duas abordagens para o cálculo da matriz de influência do solo. Essas abordagens são baseadas na localização dos pontos fonte e dos pontos de integração nos elementos lineares de contorno e nas interfaces entre as camadas. Observou-se que a abordagem que considera a média das propriedades físicas das camadas contendo os pontos fontes e os pontos de integração forneceu resultados mais precisos. Para o caso especial do maciço de solos com camadas inferiores mais compressíveis que as superiores, foi proposta uma técnica original que consiste em analisar o solo como um meio semi-infinito, em computar a matriz de influência do solo, adotando uma das abordagens, e em considerar apenas os pontos fontes sobre os elementos lineares de contorno. Esta técnica por não considerar os pontos fontes nas interfaces das camadas é muito mais eficiente que o procedimento geral utilizado para outras configurações de solo, e forneceu resultados altamente consistentes com os obtidos por outros autores.

Uma vez desenvolvidas as formulações e os códigos computacionais para as análises de interação placa-solo e estaca-solo, tornou-se possível abordar eficientemente a análise de interação placa-estaca-solo com seus diversos desafios em termos de implementação computacional. Um dos desafios diz respeito à conexão entre as estacas e a placa em que os nós dos topos da estaca precisam coincidir com os nós da placa, e a numeração desses nós não é previsível como no caso de um grupo de estacas interagindo com o solo. Outro desafio foi sobre a determinação da matriz de influência do solo uma vez que os pontos fonte e de integração encontram-se tanto na placa como nas estacas, e a estratificação do solo também precisa ser considerada em cada uma das etapas da determinação da matriz final dos coeficientes de influência. Outra característica importante da formulação desenvolvida é que não é realizada a combinação de todas as camadas em uma única com módulo de elasticidade equivalente como em algumas formulações encontradas na literatura. Cada camada do maciço de solos é, portanto, considerada com o seu módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, tornando a análise mais realística. Os resultados desta análise ficaram de acordo com os obtidos por outros autores considerando tanto estacas inteiramente contidas numa única camada como estacas cruzando várias camadas.

Sobre a análise de estabilidade da estaca, partiu-se da análise da interação estaca-solo avaliando inicialmente a distribuição do esforço normal na estaca. Em seguida, o código computacional foi estendido para calcular a matriz de rigidez geométrica ou matriz de instabilidade, e foi desenvolvido outro código para a aplicação das condições de contorno e a determinação da carga crítica de flambagem. Deve-se notar que no caso de uma estaca inserida no solo, é preciso discretizar a mesma com um número suficiente de elementos finitos para a obtenção de resultados precisos, algo que pode ser atingido com poucos elementos finitos no caso da análise de uma coluna sem a presença do solo. Além disso, com uma distribuição variável do esforço normal, foram analisados os resultados utilizando uma matriz de instabilidade que considera um esforço normal constante no elemento – matriz comumente encontrada na literatura para a análise de colunas sem a presença do solo – e outra matriz, desenvolvida neste trabalho, que considera um esforço linear em cada elemento finito da estaca. Uma vez que a formulação deste trabalho permite discretizar a estaca com vários elementos finitos, os resultados utilizando uma ou outra matriz de instabilidade foram praticamente iguais, com uma ligeira discrepância quando a estaca é muito flexível em relação ao solo.

Deve-se notar também que com a utilização da solução fundamental de Mindlin, não há necessidade de delimitar o domínio do solo, nem de considerar uma malha adicional para considerar os efeitos do carregamento aplicado fora da região de contato entre a placa e o solo. Isso facilita a modelagem do problema e torna mais eficiente a execução de códigos implementados. O tratamento da singularidade é realizado somente quando o ponto fonte é localizado na base da estaca na qual se escreve a equação integral de contorno, admitindo para isso uma reação uniformemente distribuída, e calcula-se uma carga concentrada na base quando o ponto fonte é diferente da ponta da estaca. Foram também realizadas as devidas correções para haver coerência entre todas as reações calculadas. A acurácia dos resultados obtidos nas diferentes etapas deste trabalho comprova a validade das hipóteses adotadas e das técnicas utilizadas nas formulações desenvolvidas.

Em suma, o presente trabalho apresentou formulações numéricas para a análise da interação entre elementos de fundação e maciços de solos estratificados, e para a análise da estabilidade da estaca inserida num solo homogêneo e apoiada numa base rígida. Além das vantagens do acoplamento entre o MEC e o MEF, a eficiência e a precisão dos resultados decorrentes da técnica utilizada no caso de as camadas inferiores serem mais compressíveis que as superiores, e uma formulação MEC/MEF para a análise da estabilidade da estaca, constituem contribuições originais do presente trabalho. As formulações desenvolvidas são, portanto, uma excelente alternativa para a análise de problemas abordados neste trabalho e podem ser

naturalmente estendidas para a análise de outros problemas relacionados ao tema interação solo-estrutura.

### 9.1 PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para posterior desenvolvimento deste trabalho, pode-se abordar os seguintes tópicos:

1. Consideração de cargas horizontais na estaca e no radier estaqueado em interação com um maciço de solos estratificado, e isso, mantendo, se possível, a maior parte das vantagens proporcionadas pelo uso da solução fundamenta de Mindlin. Uma sugestão de leitura é o trabalho de Ai et al. (2013).
2. Introdução na formulação da não-linearidade física para o solo, com o objetivo de realizar outras análises como a de escorregamento conforme comentado abaixo. Uma sugestão de leitura é o trabalho de Justo et al. (2017).
3. Realização da análise de flambagem não-linear da estaca com a consideração da excentricidade da carga e a presença de imperfeições geométricas. As formulações propostas neste trabalho e os trabalhos de Nadeem et al. (2014) e de Silveira et al. (2015) podem ser proveitosos.
4. Consideração do escorregamento da estaca em relação ao solo. Para isso, sugere-se como primeira etapa avaliar a viabilidade do uso da solução fundamental de Mindlin ao determinar as forças de contato e comparar com os resultados apresentados em Almeida (2003) e os obtidos com softwares baseados no MEF. Além disso, conforme mencionado em Poulos e Davis (1968), faz-se necessário, para a obtenção de resultados mais precisos, considerar o surgimento de regiões plastificadas no solo a medida que a carga aplicada na estaca se aproxima da carga última de falha. Uma sugestão de leitura é o trabalho de Landenberger (1998).
5. Implementação de técnicas de processamento paralelo principalmente no código sobre a interação placa-estaca-solo. Com os exemplos resolvidos no presente trabalho, não houve necessidade de tais técnicas, uma vez que o menor e maior tempo de processamento utilizando apenas 8GB de RAM foram, respectivamente, 1 segundo e 5 minutos. Para avaliar a eficiência do código, sugere-se processar o exemplo do radier estaqueado com 49 estacas apresentado no trabalho de De Sanctis et al. (2002).



## REFERÊNCIAS

- ABBEY, T. Linear and nonlinear buckling in FEA. **Digital Engineering**, 2015.
- AI, Z.Y.; HAN, J. Boundary element analysis of axially loaded piles embedded in a multi-layered soil. **Computers and Geotechnics**, v. 36, p. 427-434, 2009.
- AI, Z.Y.; FENG, D.L.; CHENG, Y.C. BEM analysis of laterally loaded piles in multi-layered transversely isotropic soils. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 37, p. 1095-1106, 2013.
- ALIABADI, M.H. **The boundary element method**: applications in solids and structures. v. 2. New York: Wiley, 2002.
- ALLOTEY, N.; EL NAGGAR, M.H. Generalized dynamic Winkler model for nonlinear soil-structure interaction analysis. **Canadian Geotechnical Journal**, v. 45, n. 4, p. 560-573, 2008.
- ALMEIDA, V.S. **Análise da interação solo não-homogêneo/estrutura via acoplamento MEC/MEF**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2003.
- ALMEIDA, V.S.; PAIVA, J.B. A mixed BEM-FEM formulation for layered soil-superstructure interaction. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 28, p. 1111-1121, 2004.
- ALVES FILHO, A. **Elementos finitos**: a base da tecnologia CAE. 6. ed. São Paulo: Érica, 2013.
- ANSYS, Inc. ANSYS® **Mechanical APDL structural analysis guide**. 7.5 Procedure for eigenvalue buckling analysis. USA, Canonsburg, 2013.
- ANSYS, Inc. ANSYS® **Mechanical APDL verification manual**. VM 127. USA, Canonsburg, 2013.
- ASSAN, A.E. **Método dos elementos finitos**: primeiros passos. 2. ed. Campinas: Editora Unicamp, 2003.
- BANERJEE, P.K.; DAVIES, T.G. Analysis of pile groups embedded in Gibson soil. **Proceedings of the 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering**, v. 1, p. 381-386, 1977.
- BANERJEE, P.K.; DAVIES, T.G. The behaviour of axially and laterally loaded single piles embedded in nonhomogeneous soils. **Géotechnique**, v. 28, n. 3, p. 309-326, 1978.
- BAO, T.; LIU, Z.L. Evaluation of Winkler model and Pasternak model for dynamic soil-structure interaction analysis of structures partially embedded in soils. **International Journal of Geomechanics**, v. 20, n. 2, 2020.

BATOZ, J.L.; BATHE, K.J.; HO, L.W. A study of a three-node triangular plate bending elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 15, p. 1771-1812, 1980.

BEER, G.; SMITH, I.; DUENSEN, C. **The boundary element method with programming: for engineers and scientists**. Germany: SpringerWienNewYork, 2008.

BHOTHIKHUN, P.; DECHAUMPHAI, P. Adaptive DKT finite element for plate bending analysis of built-up structures. **International Journal of Mechanical & Mechatronics Engineering**, v. 14, n. 1, 2014.

BOOKER, J.R.; CARTER, J.P.; SMALL, J.C.; BROWN, P.T.; POULOS, H.G. Some recent applications of numerical methods to geotechnical analysis. **Computers & Structures**, v. 31, n. 1, p. 81-92, 1989.

BOUSSINESQ, H. **Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques**. Gauthier-Villars, Paris, 1885.

BUCHANAN, G.R. **Schaum's outline of theory and problems of finite element analysis**. USA: McGraw-Hill Companies, 1995.

BURMISTER, D.M. The theory of stresses and displacements in layered systems and applications to the design of airport runways. **Proceedings of the 23rd annual meeting of the Highway Research Board**, v. 23, p. 126-148, 1943.

BURMISTER, D.M. The general theory of stresses and displacements in layered systems I. **Journal of Applied Physics**, v. 16, p. 89-96, 1945.

BUTTERFIELD, R.; BANERJEE, P.K. The problem of pile group – pile cap interaction. **Géotechnique**, v. 21, n. 2, 1971.

CHAJES, A. **Principles of structural stability theory**. New Jersey: Prentice-Hall, 1974.

CHAN, K.S.; KARASUDHI, P.; LEE, S.L. Force at a point in the interior of a layered elastic half space. **International Journal of Solids and Structures**, v. 10, n. 11, p. 1179-1199, 1974.

CHEN, L.; CHEN, Y.; SHI, J.; CHEN, G. Buckling analysis of an axially loaded slender pile considering the promotion effect of soil pressure. **Soil Mechanics and Foundation Engineering**, v. 54, n. 3, p. 161-168, 2017.

CHEUNG, Y.K.; ZIENKIEWICS, O.C. Plates and tanks on elastic foundations – an application of finite element method. **International Journal of Solids and Structures**, v. 1, n. 4, p. 451-461, 1965.

CHEUNG, Y.K.; THAM, L.G.; GUO, D.J. Analysis of pile group by infinite layer method. **Géotechnique**, v. 38, n. 3, p. 415-431, 1988.

CHOW, Y.K.; TEH, C.I. Pile-cap-pile-group interaction in nonhomogeneous soil. **Journal of Geotechnical Engineering**, v. 117, n. 11, p. 1655-1668, 1991.

- COOK, R.D. **Finite element modeling for stress analysis**. USA: John Wiley & Sons, 1995.
- DAS, B.M. **Advanced soil mechanics**. Civil Engineering Series, McGraw-Hill International Editions, 1983.
- DASSAULT SYSTÈMES. ABAQUS® **Analysis user's manual**. 6.2.3 Eigenvalue buckling prediction. USA, Providence, 2011.
- DAVIES, T.G.; BANERJEE, P.K. Displacement field due to a point load at the interface of a two layer elastic half-space. **Géotechnique**, v. 28, n. 1, p. 43-56, 1978.
- DAVIS, E.H.; POULOS, H.G. The analysis of pile-raft systems. **Australian Geomechanics Journal**. v. G2, n. 1, p. 21-27, 1972.
- DAVISSON, M.T. Estimating buckling loads for piles. **Proceedings of the 2nd Pan American Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering**, v. 1, p. 351-369, 1963.
- DAVISSON, M.T; ROBINSON, K.E. Bending and buckling of partially embedded piles. **Proceeding of the 6th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering**, v. 2, p. 243-246, 1965.
- DE SANCTIS, L.; RUSSO, G.; VIGGIANI, C. Piled raft on layered soils. **Proceedings of the 9th International Conference on Piling and Deep Foundations**, p. 279-285, 2002.
- DUNCAN, J.M.; CHANG, C.Y. Nonlinear analysis of stress and strain in soils. **Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division**, v. 96, n. 5, p. 1629-1653, 1970.
- DUTTA, S.C.; ROY, R. A critical review on idealization and modeling for interaction among soil–foundation–structure system. **Computers & Structures**, v. 80, n. 20-21, p. 1579-1594, 2002.
- FENU, L.; CONGIU, E.; DELIGIA, M.; GIACCU, G.F; HOSSEINI, A.; SERRA, M. Buckling analysis of piles in Multi-layered soils. **Applied Sciences**, v. 11, n. 22 (10624), 2021.
- FILONENKO-BORODICH, M.M. Some approximate theories of elastic foundation. **Uchenyie Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta Mekhanika**. 46:3–18, 1940.
- FÖPPL, A. **Vorlesungen über technische Mechanik**. 4th ed., v. 3, Germany, 1909.
- FORIERO, A.; BAYATI, Z. Three dimensional FEM buckling analyses of piles embedded in various soil types. **Structural Integrity and Life**, v.18, n. 3, p. 171-179, 2018.
- FRASER, R.A.; WARDLE, L.J. Numerical analysis of rectangular rafts on layered foundations. **Géotechnique**, v. 26, n. 4, p. 613-630, 1976.
- GEO3DTECH. **Pile group settlement calculator**. Software, v 1.4, released in 2018. Available on Google Play Store.
- GIBSON, R.E. Some results concerning displacements and stresses in a nonhomogeneous elastic half-space. **Géotechnique**, v. 17, n. 1, p. 58-67, 1967.

- GIBSON, R.E. The analytical method in soil mechanics. **Géotechnique**, v. 24, n. 2, p. 115-140, 1974.
- HALIMI, A.; KOULOUGHLI, S. Buckling loads of fully embedded pile in clayey soil based on the finite element method. **Modelling in Civil Environmental Engineering**, v. 16, n. 3, p. 26-39, 2022.
- HAMDERI, M. Comprehensive group pile settlement formula based on 3D finite element analyses. **Computers and Geotechnics**, v. 58, n. 1, p. 1-15, 2018.
- HELWANY, S. **Applied soil mechanics: with ABAQUS applications**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2007.
- HEMSLEY, J.A. Elastic solutions for large matrix problems in foundation interaction analysis. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, v. 89, n. 4, p. 471-494, 1990.
- HETENYI, M. **Beams on elastic foundations**. Ann Arbor, Michigan: University of Michigan Press, 1946.
- JUSTO, E.; VÁSQUEZ-BOZA, M.; JUSTO, J.L.; ARCOS, J.L. An elastoplastic model for the analysis of a driven pile extended with a micropile. **Computers and Geotechnics**, v. 87, p. 10-19, 2017.
- KAUSSEL, E. Early history of soil-structure interaction. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, v. 30, p. 822-832, 2009.
- KÉRISEL, J.; ADAM, M. Calcul des forces horizontales applicables aux fondations profondes dans les argiles et limons. **Les Annales de l'ITBTP**, Paris, France, n. 239. p. 1653-1694, 1997.
- KOLÁR, V.; NEMEC, I. Complex automatization of calculations of technical structure interaction problems. **Conference of SVTS Kosice**, 1983.
- KUROWSKI, P.M. Buckling analysis with FEA. **Machine Design**, 2011.
- LANDENBERGER, A. **The coupling of the FEM and the BEM for the solution of elastoplasticity and contact problems**. Thesis (Doctorate). Cranfield University, School of Mechanical Engineering, 1998.
- LEE, C.Y. Discrete layer analysis of axially loaded piles and pile groups. **Computers and Geotechnics**, v. 11, n. 4, p. 295-313, 1991.
- LEE, C.Y.; SMALL, J.C. Finite layer analysis of laterally loaded piles in cross-anisotropic soils. **International Journal for Numerical Methods in Geomechanics**, v. 15, n. 11, p. 785-808, 1991.
- LEE, J.K.; JEONG, S.; KIM, Y. Buckling of tapered friction piles in inhomogeneous soil. **Computers and Geotechnics**, v. 97, p. 1-6, 2018.

- LIAO, H.J.; LIU, J.; ZHAO, Y.G.; XIAO, Z.H. Analysis of soil-structure interaction with finite element method. **Key Engineering Materials**, v. 340-341, p. 1279-1284, 2007.
- LIN, S.; CHANG, W. Buckling of piles in a layered elastic medium. **Journal of the Chinese Institute of Engineers**, v. 25, n. 2, p. 157-169, 2002.
- LOVE, A.E.H. **A treatise on the mathematical theory of elasticity**. 4th ed. New York: Dover Publications, 1944.
- LUAMBA, E.S.; PAIVA, J.B. A BEM/FEM formulation for the analysis of piles submitted to horizontal loads. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 81, p. 12-20, 2017.
- LUAMBA, E.S. **Análise da interação casca plana-estaca-solo via acoplamento MEC-MEF tridimensional e suas aplicações**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2018.
- LUAMBA, E.S.; SILVA, R.C.S.; RAMOS, A.P.F.; PAIVA, J.B. An effective BEM/FEM formulation for the static interaction analysis of pile groups embedded in a semi-infinite continuum. **Proceedings of the XL CILAMCE**, Natal, 2019.
- LUAMBA, E.S.; PAIVA, J.B. A 3D BEM/FEM formulation for the static analysis of piled rafts and capped pile groups subjected to vertical and horizontal loads. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 103, p. 66-79, 2019.
- LUAMBA, E.S.; PAIVA, J.B. Static analysis of axially loaded piles in multilayered soils using a BEM/FEM formulation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 135, p. 63-72, 2022.
- MADHAV, M.R.; DAVIS, E.H. Buckling of finite beams in elastic continuum. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 100, n. 6, p. 1227-1236, 1974.
- MAIER, G.; NOVATI, G. Boundary element elastic analysis by a successive stiffness method. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 11, n. 5, p. 435-447, 1987.
- MINDLIN, R.D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. **Physics**, v. 7, p. 195-202, 1936.
- MOGHADDAM, A.; NAYERI, A.; MIRHOSSEINI, S.M. Evaluation of pile's buckling under axial load by b-spline method and comparison with finite element method and exact solution. **Journal of Applied Engineering Sciences**, v. 8, n. 21, p. 29-34, 2018.
- MOSER, W.; DUENSER, C.; BEER, G. Mapped infinite elements for three-dimensional multi-region boundary element analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 61, p. 317-328, 2004.
- MYLONAKIS, G.; GAZETAS, G. Settlement and additional internal forces of grouped piles in layered soil. **Géotechnique**, v. 48, n. 1, p. 55-72, 1998.

NADEEM, M.; CHAKRABORTY, T.; MATSAGAR, V. Nonlinear buckling analysis of slender piles with geometric imperfections. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, v. 141, n. 1, 2014.

NEHRP Consultants Joint Venture. **Soil Structure Interaction for Building Structures**. NIST GCR 12-917-21, 2012.

NOORZAEI, J.; VILADKAR, M.N.; GODBOLE, P.N. Elasto-plastic analysis for soil-structure interaction in framed structures. **Computers & Structures**, v. 55, n. 5, p. 797-807, 1995.

OTTAVIANI, M. Three-dimensional finite element analysis of vertically loaded pile groups. **Géotechnique**, v. 25, n. 2, p. 159-174, 1975.

PAIVA, J.B. **Formulação do método dos elementos de contorno para análise de interação solo-estrutura**. São Carlos. Tese (Livre docência). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1993.

PAIVA, J.B. **Introdução ao método dos elementos finitos**. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2012.

PAIVA, J.B.; TRONDI, R.R. Boundary element analysis of capped and uncapped pile groups. **Advances in Engineering Software**, v. 30, n. 9, p. 715-724, 1999.

PARREIRA, P.; VARATOJO, P. 3D boundary element discretizations for linear elastic analysis of flexible and rigid piles. **Transactions on Modelling and Simulation**, v.3, WIT Press, 1993.

PASTERNAK, P.L. **On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants**. Moscow: Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu I Arkhitekture, 1954.

POULOS, H.G. Stresses and displacements in an elastic layer underlain by a rough rigid base. **Géotechnique**, v. 17, n. 4, p. 378-410, 1967.

POULOS, H.G. Settlement of single piles in nonhomogeneous soil. **Journal of Geotechnical Engineering Division**, v. 105, n. 5, p. 627-641, 1979.

POULOS, H.G.; DAVIS E.H. The settlement behavior of singly axially loaded incompressible piles and piers. **Géotechnique**, v. 18, n. 4, p. 351-371, 1968.

POULOS, H.G.; DAVIS, E.H. **Pile foundation analysis and design**. New York: John Wiley & Sons, 1980.

PRAKASH, S. Buckling loads of fully embedded vertical piles. **Computers and Geotechnics**, v. 4, p. 61-83, 1987.

RASHED, Y.F. **Tutorial 1: an introduction to boundary elements**. **Boundary Element Communications**, v. 12, n. 1, p. 49-54, 2001.

- REISSNER, M. A note on deflections on plate on a viscoelastic foundation. **Journal of Applied Mechanics**, v. 25, n. 1, p 144-145, 1958.
- RHINES, W.J. A study of the Reissner Foundation model. **Proceedings of the 5th US National Conference of Applied Mechanics**, p. 319, 1966.
- RIBEIRO, D.B. **Estudo e aplicação de um elemento de contorno infinito na análise da interação solo-estrutura via combinação MEC/MEF**. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2009.
- RODRIGUES, R.M. **Estudo do trincamento de pavimentos**. Tese (Doutorado). Universidade Federal de Rio de Janeiro, 1991.
- SADD, M.H. **Elasticity: theory, applications and numerics**. 2nd ed. Elsevier: Academic Press, 2009.
- SADECKA, L. A finite/infinite element analysis of thick plate on a layered foundation. **Computers & Structures**, v. 76, p. 603-610, 2000.
- SHAABAN, A.M.; RASHED, Y.F. A coupled BEM-stiffness matrix approach for analysis of shear deformable plates on elastic half space. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 37, p. 699-707, 2013.
- SHATRI, V.; BOZO, L.; SHEFKIU, B.; SHATRI, B. Analysis of buckling of piles fully embedded in ground according to finite element method. **International Journal of Current Engineering and Technology**, v.4, n. 1, 2014.
- SILVEIRA, R.A.M.; MACIEL, F.V.; SILVA, A.R.D.; MACHADO, F.C.S.; NOGUEIRA, C.L. Nonlinear equilibrium and stability analysis of axially loaded piles under bilateral contact constraints. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 12, n. 2, 2015.
- SMALL, J.C.; BOOKER, J.R. Finite layer analysis of layered elastic materials using a flexibility approach. part 1 - strip loadings. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 20, n. 6, p. 1025-1037, 1984.
- SOUTHCOTT, P.H.; SMALL, J.C. Finite layer analysis of vertically loaded piles and pile groups. **Computer and Geotechnics**, v. 18, n. 1, p. 47-63, 1996.
- STEINBRENNER, W. Tafeln zur Setzungsberechnung. **Die Stresse**, v. 1, p. 121-124, 1934.
- TA, L.D.; SMALL, J.C. Analysis and performance of piled raft foundations on layered soils-case studies. **Soils and Foundations**, v.38, n. 4, p. 145-150, 1998.
- TEODORU, I.B. Beams on elastic foundation: the simplified continuum approach. **Bulletin of the Polytechnic Institute of Iasi**, v. LV (LIX), fasc. 4, 2009.
- TER-MARTIROSYAN, Z.G. **Rheological parameters of soils and design of foundations**. Oxford and IBH Publishing Company Limited, 1992.

- THOMSON, W. (Lord Kelvin). Note on the integration of the equations of equilibrium of an elastic solid. **Cambridge-Dublin Mathematical Journal**, v.3, p. 87–89. Cambridge: At the University Press, 1882.
- TIAN, G.F.; TANG, L.S.; MA, H.W.; WU, Q.X. The composite ground finite layer method and its application to pile foundation analysis. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 13, n. 13, p. 2393-2413, 2016.
- TIMOSHENKO, S.P; GOODIER, J.N. **Theory of elasticity**. New York: McGraw-Hill, 1970.
- TORABI, H.; RAYHANI, M. Three dimensional finite element modeling of seismic soil–structure interaction in soft soil. **Computers & Structures**, v. 60, p. 9-19, 2014.
- UESHITA, K.; MEYERHOF, G.G. Surface displacement of an elastic layer under uniformly distributed loads. **Highway Research Record**, n. 228, p. 1-10, 1968.
- VLASOV, V.Z.; LEONT'EV, N.N. **Beams, plates and shells on elastic foundations**. Moskva: Fizmatgiz, 1960.
- WANG, YH.; THAM, L.G.; TSUI, Y.; YUE, Z.Q. Plate on layered foundation analyzed by a semi-analytical and semi-numerical method. **Computers and Geotechnics**, v. 30, p. 409-418, 2003.
- WARDLE, L.J.; FRASER, R.A. Finite element analysis of a plate on a layered cross-anisotropic foundation. **Proceedings of the 1st International Conference of Finite Element Methods in Engineering**. Australia: University of New South Wales, p. 565-578, 1974.
- WEAVER, Jr. W.; TIMOSHENKO, S.P.; YOUNG, D.H. **Vibration problems in engineering**. 5th ed., Wiley, 1991.
- WINKLER, E. **Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit**. Prague: Dominicius, 1867.
- ZHANG, C.; WANG, G.; CHEN, X. A coupling model of FE-BE-IE-IBE for nonlinear layered soil-structure interactions. **Developments in Geotechnical Engineering**, v. 83, p. 293-312, 1998.
- ZHANG, H.H.; SMALL, J.C. Analysis of capped pile groups subjected to horizontal and vertical loads. **Computers and Geotechnics**, v. 26, p. 1-21, 2000.
- ZHANG, W.Q.; ZHAO, X.H.; ZAI, J.M. Finite layer analysis for layered and elastic half-space under arbitrary systems. **Proceedings of the International Conference on FEM**, v. 1, p. 460-464, 1982.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; KELLY, D.W.; BETTESS, P. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 11, n. 2, p. 355-376, 1977.
- ZOU, X.J.; YIN, B.S.; ZHAO, M.H.; YANG, X.L. Nonlinear buckling analysis of piles with high-rise pile cap. **GeoShanghai 2010 International Conference**, 2010.