

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

RENATO TAKEO KISHINO

Uso da decomposição multiplicativa de Flory na análise de sólidos
viscoelastoplásticos e fluidos altamente viscosos

São Carlos

2022

RENATO TAKEO KISHINO

Uso da decomposição multiplicativa de Flory na análise de sólidos
viscoelastoplásticos e fluidos altamente viscosos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Humberto Breves Coda

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

São Carlos

2022

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

K46u Kishino, Renato Takeo
 Uso da decomposição multiplicativa de Flory na
 análise de sólidos viscoelastoplásticos e fluidos
 altamente viscosos / Renato Takeo Kishino; orientador
 Humberto Breves Coda. São Carlos, 2022.

 Dissertação (Mestrado) - Programa de
 Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de
 Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas --
 Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de
 São Paulo, 2022.

 1. Método dos Elementos Finitos Posicional. 2.
 grandes deslocamentos e deformações. 3.
 viscoplasticidade. 4. fluido. 5. contato. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **RENATO TAKEO KISHINO**.

Título da dissertação: "Uso da decomposição multiplicativa de Flory na análise de sólidos viscoelastoplásticos e fluidos altamente viscosos".

Data da defesa: 25/03/2022.

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

(Orientador)

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **Ricardo Afonso Angélico**

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **José Benaque Rubert**

(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

DEDICATÓRIA

*À minha mãe pelo constante amor,
apoio e carinho.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente à minha família, em especial à minha mãe e ao meu irmão. À minha mãe, Emiko, por sempre me apoiar, dar forças e fazer todo o esforço possível para que eu pudesse ter sucesso em todos os desafios da minha vida; ao meu irmão, Vitor, por sempre me fazer companhia e apoiar em todas as dificuldades que enfrentamos ao longo de todos estes anos estudando juntos. E também ao meu pai, Antonio, e aos meus avós, que, sem o legado deixado por eles, eu não teria conseguido chegar aonde estou hoje.

Ao meu orientador, professor Dr. Humberto Breves Coda, pela excelente orientação, amplo conhecimento transmitido, sempre prontidão para a retirada de quaisquer dúvidas surgidas ao longo do desenvolvimento da pesquisa e pelo carisma e companheirismo demonstrados durante todas as nossas reuniões.

A todos os professores e servidores do Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade de São Paulo por todo o conhecimento transmitido e apoio dado aos alunos. Agradecimentos especiais ao Dorival Piedade Neto pela disponibilização do módulo *SparseSET* para a montagem de matrizes esparsas e por todo o suporte técnico fornecido durante a pandemia.

Aos meus colegas de departamento, principalmente aos sempre atenciosos e amigáveis veteranos, pela calorosa recepção na chegada dos calouros a São Carlos, pelas conversas amistosas, atmosfera sempre amigável e companheirismo demonstrado através da vontade constante em ajudar em quaisquer dificuldades enfrentadas pelos colegas ao longo da pós-graduação. Agradecimentos especiais ao Matheus Rocha, Caio César La-Cava Gonçalves Bernardo e Henrique Barbosa Soares pela grande ajuda na retirada de dúvidas surgidas ao longo da realização das disciplinas e durante a elaboração do programa.

E, por último, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa 131609/2020-3 concedida para a realização do mestrado.

EPÍGRAFE

“A dúvida é o princípio da sabedoria”

Aristóteles

RESUMO

KISHINO, R. T. Uso da decomposição multiplicativa de Flory na análise de sólidos viscoelastoplásticos e fluidos altamente viscosos. 2022. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

Materiais que apresentam comportamento viscoso são comumente utilizados em diversas áreas, com aplicações não somente na engenharia civil, mas também nas indústrias siderúrgica, aeronáutica, aeroespacial, petroquímica, alimentícia e de cosméticos. O conhecimento de seu comportamento mecânico é de grande importância especialmente nas fases de ruína e manufatura, nas quais é comum a presença de grandes deformações. Tendo em vista isto, o presente trabalho teve como objetivo propor uma formulação alternativa baseada na decomposição multiplicativa de Flory capaz de modelar tanto sólidos viscoplásticos quanto fluidos altamente viscosos no regime de grandes deslocamentos e deformações. A formulação foi implementada em um código computacional de análise tridimensional que emprega o Método dos Elementos Finitos Posicional e elementos finitos prismáticos de base triangular. O algoritmo contempla: modelo constitutivo hiperelástico baseado na decomposição multiplicativa de Flory com parcelas isocóricas do modelo de Rivlin-Saunders e parcela volumétrica do modelo de Hartmann-Neff; modelos de plasticidade e viscosidade também derivados da decomposição multiplicativa do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green; e algoritmo de contato por penalização com detecção realizada por estratégia nó-a-superfície com superfícies alvo consideradas rígidas. O programa foi validado com exemplos retirados da literatura e aplicado em problemas da área da engenharia civil, como rompimentos de barragens, propagação de onda em fluidos, preenchimento de fôrmas para conformação de elementos estruturais e ensaios de caracterização de pastas cimentícias. Foram obtidos bons resultados tanto nos testes de validação quanto nos exemplos de aplicação propostos, sendo a formulação considerada eficaz para a modelagem de sólidos e fluidos de forma simples e unificada.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos Posicional; grandes deslocamentos e deformações; viscoplasticidade; fluido; contato.

ABSTRACT

KISHINO, R. T. Use of the Flory's multiplicative decomposition in the analysis of viscoelastoplastic solids and highly viscous fluids. 2022. Thesis (Master's degree) – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, 2022.

Materials that exhibit viscous behavior are commonly used in several fields, such as civil engineering, steel manufacturing, aeronautical, aerospace, petrochemical, food and cosmetics industries. Understanding their mechanical behavior is important especially in the failure and manufacture phases, in which the presence of large deformations is common. With this in mind, the present work aimed to propose an alternative formulation based on the Flory's multiplicative decomposition capable of modeling both viscoplastic solids and highly viscous fluids under large displacement, large strain regime. The formulation was implemented in a three-dimensional analysis program that employs the Positional Finite Element Method and triangular based prismatic finite elements. The algorithm includes: a hyperelastic constitutive model based on the Flory's multiplicative decomposition with isochoric parts from the Rivlin-Saunders' model and volumetric part from the Hartmann-Neff's model; plasticity and viscosity models also derived from the multiplicative decomposition of the right Cauchy-Green deformation tensor; and contact algorithm employing the penalty method and node-to-surface strategy with rigid master surfaces for contact detection. The program was validated with examples taken from the literature and applied in civil engineering problems, such as dam failures, wave propagation in fluids, casting of structural elements and cement paste characterization tests. Good results were obtained in both validation and application tests. Therefore, the formulation was considered efficient for modeling solids and fluids in a simple and unified way.

Keywords: Positional Finite Element Method; large displacements and strains; viscoplasticity; fluid; contact.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Justificativa	20
1.2	Objetivo.....	21
1.3	Especificações do programa.....	21
1.4	Revisão bibliográfica	21
1.4.1	Formulações em Método dos Elementos Finitos para grandes deslocamentos	22
1.4.2	Método dos Elementos Finitos Posicional	24
1.4.3	Modelos hiperelásticos	25
1.4.4	Modelos elastoplásticos.....	26
1.4.5	Modelos viscoelásticos.....	29
1.4.6	Modelos viscoplásticos	30
1.4.7	Modelos numéricos de contato.....	31
1.4.8	Pastas cimentícias.....	34
2	CONCEITOS BÁSICOS DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS	36
2.1	Cinemática	36
2.1.1	Mudança de configuração e seu gradiente	36
2.1.2	Mudança de volume	37
2.1.3	Alongamento de Cauchy-Green e deformação de Green-Lagrange	40
2.1.4	Decomposição polar do gradiente da função mudança de configuração	41
2.1.5	Mudança de área (fórmula de Nanson)	44
2.1.6	Equação da conservação de massa	45
2.2	Tensão de Cauchy	46
2.3	Equações de equilíbrio	49
2.3.1	Equilíbrio euleriano local	50
2.3.2	Equilíbrio euleriano global.....	51
2.3.3	Equilíbrio lagrangeano global	51
2.3.4	Equilíbrio lagrangeano local	52
2.4	Equilíbrio e energia	52
2.4.1	Euleriano	53
2.4.2	Lagrangeano	54
3	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL.....	57
3.1	Aproximação multidimensional.....	57

3.2	Elemento finito prismático de base triangular	59
3.3	Formulação estática elástica.....	61
3.4	Formulação dinâmica elástica.....	66
3.5	Cálculo de tensões de Cauchy.....	70
4	MODELOS CONSTITUTIVOS HIPERELÁSTICOS.....	72
4.1	Decomposição de Flory	73
4.2	Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff	74
4.3	Modelo hiperelástico adotado para grandes deformações	75
4.3.1	Parcelas isocóricas do modelo de Rivlin-Saunders.....	75
4.3.2	Parcela volumétrica do modelo de Hartmann-Neff.....	76
4.3.3	Expressão geral e tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie	77
4.3.4	Tensor constitutivo elástico tangente	80
5	PLASTICIDADE.....	83
5.1	Conceitos fundamentais da plasticidade clássica.....	83
5.1.1	Curva tensão x deformação	83
5.1.2	Condição de carregamento e descarregamento	86
5.1.3	Incompressibilidade	87
5.1.4	Critério de plastificação de von Mises	90
5.1.4.1	Sistema de coordenadas principais.....	91
5.1.4.2	Estado plano de tensão	93
5.1.4.3	Tensão e taxa de deformação equivalentes	94
5.1.5	Encruamento isótropo e cinemático	95
5.1.6	Lei de evolução plástica	98
5.2	Modelo elastoplástico alternativo para grandes deformações.....	100
5.2.1	Limite elástico	101
5.2.2	Definições.....	103
5.2.2.1	Evolução plástica.....	103
5.2.2.2	Encruamento cinemático	104
5.2.2.3	Encruamento isótropo.....	104
5.2.3	Função objetiva	105
5.2.4	Cálculo da deformação plástica.....	106
5.2.5	Tensor constitutivo elastoplástico isocórico tangente	107
5.2.6	Modelo auxiliar de pequenas deformações	108
5.2.7	Transição entre modelos.....	111

6	VISCOSIDADE.....	112
6.1	Modelos viscosos para pequenas deformações.....	112
6.1.1	Modelos viscoelásticos.....	113
6.1.2	Modelos viscoplásticos	116
6.1.3	Modelos viscoelástico-viscoplásticos	118
6.2	Modelo viscoelástico adaptado para grandes deformações	119
6.3	Modelo rígido-viscoplástico para a análise de fluidos viscoplásticos (pastas).....	122
7	CONTATO	123
7.1	Discretização do tipo nó-a-superfície	123
7.2	Método da penalização.....	124
7.3	Algoritmo de contato	126
8	EXEMPLOS NUMÉRICOS E DISCUSSÕES	134
8.1	Viga engastada e livre transversalmente carregada sujeita a grandes deslocamentos ...	134
8.2	Cubo comprimido sujeito a grandes deformações	138
8.3	Viga engastada e livre submetida à força transversal transiente.....	143
8.4	Teste axial cíclico em cubo elastoplástico	147
8.5	Viga biapoiada elastoplástica com surgimento de rótula plástica.....	151
8.6	Teste de fluência	155
8.7	Teste indireto de relaxação	159
8.8	Rompimento de barragem.....	163
8.9	Propagação de onda solitária.....	167
8.10	Acomodação de pasta cimentícia em fôrmas rígidas	172
8.11	Ensaio de mini abatimento.....	176
9	CONCLUSÕES	187
	REFERÊNCIAS	189
	APÊNDICE A – Desenvolvimento da expressão do 2º invariante isocórico.....	201

1 INTRODUÇÃO

Na literatura, é comum a utilização de idealizações para a descrição da deformação de corpos sob a influência de tensões. Entre tais idealizações, podem-se mencionar o modelo de sólido ideal, no qual os corpos se deformam de forma totalmente elástica e a energia necessária para a deformação é completamente recuperada com a retirada do carregamento; e o modelo de fluido ideal, no qual líquidos e gases se deformam de forma irreversível (escoam) e a energia necessária para a deformação não é totalmente recuperada, uma vez que parte da energia é dissipada em forma de calor. Embora existam líquidos que apresentem comportamento próximo ao de fluidos ideais, uma quantidade bastante significativa de materiais possui comportamento reológico que se encontra em uma região intermediária entre os dois modelos (SCHRAMM, 2000).

Tais materiais apresentam comportamento viscoso e são comumente empregados na área da engenharia. O conhecimento de seu comportamento mecânico é de grande importância nas fases de utilização, ruína e manufatura, em especial nas duas últimas, uma vez que nestas fases passa a ser comum a presença de grandes deformações. Entre as aplicações de tais materiais, podem ser citados: conformação de metais a quente na siderurgia (PARVIZIAN et al., 2010); construção de fuselagens de aeronaves e veículos aeroespaciais nas indústrias aeronáutica e aeroespacial (BOUHAFS; WOZNICA; KLOSOWSKI, 2003); utilização de fluidos de perfuração e óleos pesados na indústria petroquímica; e produção de cremes e pastas nas indústrias alimentícia e de cosméticos. Além disso, materiais com comportamento viscoso são também muito comuns em processos geofísicos como fluxos de detritos, escoamentos de lama e derramamentos de lava (FREYDIER; CHAMBON; NAAIM, 2017).

Tendo em vista a vasta gama de aplicações deste tipo de materiais, muitos trabalhos experimentais e numéricos vêm sendo desenvolvidos para o estudo do comportamento e modelagem de materiais viscoplásticos. Na engenharia civil, destacam-se pesquisas relativas à liquefação do solo e seu escoamento em barragens de contenção (BALMFORTH et al., 2007; COCHARD; ANCEY, 2009) e a ensaios de caracterização de pastas cimentícias (BOUVET; GHORBEL; BENNACER, 2010; GAO; FOURIE, 2015; CHOI et al., 2016), estas últimas com foco na modelagem do *mini slump test* para a obtenção de propriedades reológicas de pastas de cimento.

No entanto, observa-se que a maior parte das pesquisas tem se preocupado menos com o desenvolvimento de formulações e mais com a simulação de problemas através de *softwares*

comerciais para a obtenção de parâmetros de materiais. Além disso, constata-se também que ainda é pequeno o número de estudos referentes a aplicações na engenharia civil, revelando a necessidade da intensificação do desenvolvimento de formulações e programas para a modelagem de sólidos viscoplásticos e fluidos altamente viscosos nesta área.

1.1 Justificativa

Tendo em vista a quantidade reduzida de pesquisas relativas a aplicações na engenharia civil, em especial na área de engenharia de estruturas, mostra-se importante o desenvolvimento de uma ferramenta numérica com formulação capaz de modelar os diversos materiais empregados nesta área, principalmente sólidos viscoelastoplásticos e fluidos altamente viscosos.

Embora existam estudos relativos à modelagem de tais materiais com o desenvolvimento de grandes deformações, poucos utilizam formulação lagrangeana total com elementos finitos de alta ordem, alternativa esta que é empregada no presente trabalho. A formulação proposta vem sendo desenvolvida no Grupo de Mecânica Computacional do Departamento de Engenharia de Estruturas da USP (GMEC/SET/EESC/USP), onde abordagens alternativas para a resolução de problemas envolvendo plasticidade e viscosidade no regime de grandes deslocamentos e deformações vêm sendo enfatizadas. Dessa forma, o desenvolvimento deste trabalho é peça chave para a ampliação e diversificação do campo de aplicações do Método dos Elementos Finitos Posicional e o estudo pode servir como ponto de partida para novas pesquisas a serem desenvolvidas para o aperfeiçoamento do método.

Como a formulação possibilita a modelagem de forma unificada tanto de sólidos quanto de fluidos, o programa resultante desta pesquisa pode ser aplicado em diversos problemas de engenharia, possibilitando o melhor entendimento do comportamento destes materiais nos problemas em estudo. Em especial, destacam-se aplicações em problemas da área de engenharia civil, como a simulação de rompimento de barragem e o estudo numérico de caracterização de pastas cimentícias e seu comportamento na fase de confecção de elementos estruturais.

Por fim, ressalta-se a importância do treinamento do pesquisador em conhecimentos associados ao tema, o que é de grande interesse para o meio científico e para o mercado de trabalho da área de engenharia civil e estruturas.

1.2 Objetivo

O objetivo do presente trabalho é propor uma formulação alternativa baseada na decomposição multiplicativa de Flory e implementar um código computacional utilizando o Método dos Elementos Finitos Posicional para a modelagem de sólidos viscoelastoplásticos e fluidos altamente viscosos. O programa foi desenvolvido com o intuito de ser utilizado em aplicações da área da engenharia civil, como a simulação simplificada de rompimentos de barragens, análise da propagação de onda em fluidos e a modelagem de pastas cimentícias em ensaios de caracterização e conformação de elementos estruturais (deposição de pasta cimentícia em fôrmas com presença de vergalhões).

1.3 Especificações do programa

O programa foi desenvolvido em linguagem de programação *Fortran 90* e compilado com o *Intel Fortran Compiler*. O pré-processamento foi realizado utilizando-se o programa *Gmsh* (GEUZAINÉ; REMACLE, 2009) para a geração das malhas e um programa próprio criado em linguagem *Python* para a extrusão e criação dos elementos finitos prismáticos de base triangular. Já para o pós-processamento foi utilizada a versão 3.0 do programa livre *AcadView* (PACCOLA; CODA, 2005).

Para a otimização do código computacional, foram empregadas matrizes esparsas para o armazenamento das matrizes hessiana, de massa e de amortecimento, com o intuito de se obter economia de memória e aumento da velocidade de processamento. Para tal, foram utilizados o módulo *sparseSET* (PIEDADE NETO; PACCOLA, 2020) para a criação das matrizes esparsas e o solver *superLU* (DEMMEL et al., 1999; LI et al., 1999) para a resolução do sistema de equações lineares. Já para a inversão de matrizes cheias pequenas, foi utilizada a biblioteca *LAPACK* (ANDERSON et al., 1999). Visando também a redução do tempo de processamento, foi feita a paralelização do programa utilizando-se a interface de programação de aplicativo *OpenMP* (DAGUM; MENON, 1998).

1.4 Revisão bibliográfica

A seguir, é feita uma revisão bibliográfica de temas pertinentes ao trabalho, sendo abordadas pesquisas relativas a formulações em Método dos Elementos Finitos para grandes

deformações, Método dos Elementos Finitos Posicional, modelos constitutivos hiperelásticos, elastoplásticos, viscoelásticos e viscoplásticos, Mecânica do Contato e pastas cimentícias.

1.4.1 Formulações em Método dos Elementos Finitos para grandes deslocamentos

Para a construção de programas computacionais de análise de estruturas, é necessário primeiramente avaliar a categoria de análise na qual recai o problema a ser resolvido. A escolha da formulação a ser empregada na análise faz parte do processo de desenvolvimento do modelo e, uma vez definida, um determinado modelo físico passa a ser considerado para a resolução do problema. Embora uma formulação mais geral seja apropriada para uma maior gama de casos, a escolha de uma formulação mais restritiva pode possibilitar um maior ganho computacional e uma melhor percepção da resposta esperada da estrutura ou do objeto modelado. Assim, considerando-se separadamente as não linearidades cinemáticas e as provenientes dos materiais, as análises não lineares podem ser divididas da seguinte forma (BATHE, 2014):

- a) não linearidade proveniente do material;
- b) problemas com grandes deslocamentos, grandes rotações e pequenas deformações;
- c) problemas com grandes deslocamentos, rotações e deformações;
- d) problemas em que as condições de contorno se alteram com o movimento do corpo em análise (problemas de contato).

Desconsiderando-se os problemas de contato, a análise mais geral em problemas geometricamente não lineares são aquelas com grandes deslocamentos, rotações e deformações, cuja relação entre tensão e deformação costuma também ser não linear.

Para a análise de problemas estruturais, podem ser adotadas abordagens lagrangeanas (descrição material) ou eulerianas (descrição espacial), as quais possuem como referencial, respectivamente, a configuração inicial e final da estrutura. As formulações lagrangeanas possuem uma abordagem mais natural e costumam apresentar análises mais efetivas do que formulações eulerianas em problemas com sólidos. Por outro lado, formulações eulerianas costumam ser mais empregadas para a resolução de problemas da Mecânica dos Fluidos (BONET; WOOD, 2008; BATHE, 2014).

Focando-se na análise de sólidos, as formulações lagrangeanas podem ser de duas formas: lagrangeana total ou lagrangeana atualizada. Na primeira, todas as variáveis estáticas e cinemáticas têm como referencial a configuração inicial da estrutura, enquanto que na segunda a última configuração calculada é assumida como referencial inicial para um próximo passo de

análise. Apesar da diferença de referencial, ambas as formulações incluem a não linearidade cinemática decorrente de grandes deslocamentos, rotações e deformações, sendo o comportamento sob grandes deformações dependente do modelo constitutivo adotado. Assim, a escolha da abordagem a ser adotada depende da eficiência numérica de cada formulação para o problema em análise (BATHE, 2014).

Tentando comparar o desempenho de ambas as abordagens, Bathe, Ramm e Wilson (1975) avaliaram o desempenho de formulações lagrangeanas totais e atualizadas na análise estática e dinâmica de materiais elásticos, hiperelásticos e hipoeelástico-elastoplásticos no regime de grandes deslocamentos, rotações e deformações. No trabalho, constatou-se que formulações lagrangeanas atualizadas demandaram um menor tempo de cálculo, enquanto que formulações lagrangeanas totais apresentaram maior facilidade de implementação de leis constitutivas não lineares de materiais. Como conclusão do estudo, ambos os tipos de formulações se mostraram eficientes para a análise de problemas não lineares, sendo o desempenho de cada um dependente da arquitetura do programa e da disponibilidade ou não das constantes dos materiais.

Dentro do escopo de formulações lagrangeanas atualizadas, uma importante abordagem é a corrotacional, na qual um sistema de coordenadas é atribuído localmente e rotaciona com o elemento. A formulação, de maneira geral, costuma ser mais adequada para problemas com grandes deslocamentos e rotações e pequenas deformações. A abordagem teve início com os estudos de Wempner (1969), Belytschko e Hsieh (1973) e Belytschko e Glaum (1979) e com a chamada “aproximação natural” desenvolvida por Argyris et al. (1979), a qual apresenta fortes semelhanças com a formulação corrotacional (DE BORST et al., 2012).

A formulação, inicialmente aplicada apenas a vigas e cascas, foi expandida para a análise de grandes deformações a partir dos estudos de Crisfield e Moita (1996) e Moita e Crisfield (1996), os quais elaboraram formulações para a análise, respectivamente, de elementos contínuos bidimensionais e tridimensionais. Além da expansão da aplicabilidade de formulações corrotacionais, os estudos também permitiram a melhora de performance dos elementos com o uso da chamada Técnica de Modos Incompatíveis (DE BORST et al., 2012).

Muitas formulações lagrangeanas atualizadas poderiam ainda ser citadas, porém, uma característica indesejável deste tipo de formulação é a variação da matriz de massa com a atualização do sistema de referências, levando à necessidade de utilização de algoritmos de integração temporal especiais, denominados *energy-conserving algorithms*. No entanto, nas formulações lagrangeanas totais, em especial naquelas que utilizam o Método dos Elementos Finitos Posicional, esta dificuldade não está presente (CODA; PACCOLA, 2009).

1.4.2 Método dos Elementos Finitos Posicional

Conforme comentado, formulações do tipo lagrangeano total têm como referência a configuração inicial do corpo e apresentam algumas facilidades de implementação quando comparadas com formulações do tipo lagrangeana atualizada ou corrotacional. A principal facilidade está na definição de medidas de deformação e tensão, que dispensam o uso de taxas de rotação finitas para a determinação de níveis atuais de tensão e/ou atualização de rotação finita aplicadas em elementos de casca e barra geral. Devido à existência de um mapeamento da configuração inicial de elementos isoparamétricos, na escrita dos mapeamentos em elementos finitos (lagrangeano atualizado ou lagrangeano total) é necessária a utilização da regra da cadeia, que em muitos casos dificulta o desenvolvimento de elementos finitos inicialmente curvos (BONET; WOOD, 2008). Uma vantagem adicional e já comentada é o fato de a matriz de massa ser constante, o que simplifica as implementações dinâmicas.

Neste sentido, foi desenvolvido o Método dos Elementos Finitos Posicional, cuja formulação é baseada na ideia de Bonet et al. (2000) e que foi adaptada por Coda (2003). Nesta versão do Método dos Elementos Finitos, a regra da cadeia é realizada de forma numérica, resultando em uma formulação simples para o tratamento de grandes deslocamentos e rotações que permite a modelagem de elementos de sólido inicialmente curvos, de casca e de barra geral sem a utilização da descrição de giros finitos.

O Método dos Elementos Finitos Posicional possui tal denominação por utilizar posições ao invés de deslocamentos na descrição cinemática dos corpos. A formulação utiliza uma descrição lagrangeana total, ou seja, utiliza a posição não deformada e não deslocada da estrutura como referência em todas as etapas de análise. Por apresentar uma abordagem naturalmente não-linear geométrica, sua utilização mostra-se apropriada para a resolução de problemas com grandes deslocamentos, rotações e deformações. Mais detalhes da formulação podem ser encontrados em Coda (2018).

O método vem sendo utilizado em diversas pesquisas desenvolvidas no Grupo de Mecânica Computacional (GMEC/SET/EESC/USP). A formulação tem-se mostrado eficaz na análise de diversos tipos de estruturas, entre elas: estruturas reticuladas (GRECO, 2004; GRECO et al., 2006; CODA, 2009), chapas (MARQUES, 2006; RODRÍGUEZ, 2017; CARVALHO, P. R. P., 2019), cascas (CODA; PACCOLA, 2008; CODA; PACCOLA, 2009), sólidos (PASCON, 2012; PASCON; CODA, 2013; PASCON; CODA, 2017), materiais laminados (CODA; SAMPAIO; PACCOLA, 2015; CARRAZEDO; CODA, 2017), fluidos simplificados (CARVALHO, B. L., 2019) e músculos esqueléticos (RAMIREZ, 2018).

1.4.3 Modelos hiperelásticos

Desde o século passado, diversos estudos vêm sendo realizados para o desenvolvimento de modelos constitutivos hiperelásticos. Dentre os mais conhecidos, podem ser citados os modelos clássicos de Mooney, Mooney-Rivlin, Neo-Hookeano, Rivlin-Saunders, Ogden, Yeoh, Arruda-Boyce e Hartmann-Neff.

Um dos primeiros e principais modelos foi o elaborado por Mooney (1940), o qual, a partir de estudos sobre borrachas e materiais com propriedades similares, deduziu uma expressão geral para a energia específica de deformação em função dos alongamentos principais. O modelo foi elaborado para materiais homogêneos, livres de histerese¹ e superelásticos², sendo muito utilizado para a modelagem de borrachas submetidas a deformações moderadas. A partir da função proposta por Mooney (1940), Rivlin (1948a, 1948b) estendeu sua aplicação ao desenvolver a expressão em uma série polinomial, dando origem ao modelo de Mooney-Rivlin. O modelo, que costuma ter a série truncada nos termos de segunda ou terceira ordem, é um dos mais utilizados na literatura, sendo comumente empregado em problemas com grandes deformações (TOBAJAS; IBARTZ; GRACIA, 2016; MARCKMANN; VERRON, 2006).

Uma particularização do modelo de Mooney-Rivlin é o modelo Neo-Hookeano proposto por Treloar (1943), o qual obteve sua expressão a partir de considerações estatísticas de cadeias moleculares. Este é considerado o modelo físico mais simples para a modelagem de borrachas, sendo a função da energia específica de deformação dada em função somente do primeiro invariante de deformação (MARCKMANN; VERRON, 2006).

Também baseada na expressão obtida por Mooney (1940), Rivlin e Saunders (1951) generalizaram a aplicação do modelo ao verificarem que os resultados obtidos em ensaios com borrachas vulcanizadas eram condizentes com a expressão escrita em função dos invariantes de deformação. A expressão é dependente de uma função, a qual deve ser determinada experimentalmente.

Um modelo também muito utilizado, provavelmente o mais empregado depois do modelo de Mooney-Rivlin, é o proposto por Ogden (1972), cuja expressão é baseada nos três

¹ Histerese é a dependência do estado de um sistema com sua história, sendo caracterizada pelo atraso na resposta de um corpo quando ocorrem mudanças nas forças atuantes sobre o mesmo.

² Materiais ditos superelásticos são definidos como aqueles que apresentam as seguintes propriedades: são isotrópicos, apresentam deformações isométricas (deformações ocorrem sem mudança de volume) e a tensão de cisalhamento sob cisalhamento simples é proporcional à força cortante em qualquer plano isotrópico (MOONEY, 1940).

alongamentos principais e em constantes dos materiais (TOBAJAS; IBARTZ; GRACIA, 2016). O mesmo costuma ser muito utilizado na modelagem de borrachas devido à sua formulação polinomial modular, o que o torna apropriado para análises matemáticas (STEINMANN; HOSSAIN; POSSART, 2012). O autor, a partir de dados experimentais, propôs um modelo de 6 parâmetros com ótima concordância com os resultados de ensaios de tração simples, cortante puro e tensão equibiaxial em materiais elastoméricos, sendo este um dos modelos mais utilizados para problemas com grandes deformações (MARCKMANN; VERRON, 2006).

Outro modelo muito conhecido na literatura é o desenvolvido por Yeoh (1990), o qual desenvolveu uma expressão dependente do primeiro invariante de deformação. Um caso particular deste modelo foi proposto por Arruda e Boyce (1993), também conhecido como modelo de oito cadeias, que recebe tal denominação por considerar cadeias distribuídas em oito direções correspondentes aos vértices de um cubo inscrito em uma esfera. O modelo é governado pelo alongamento da diagonal do cubo e é muito similar ao modelo de três cadeias, tendo como vantagem apresentar uma melhor concordância com resultados experimentais em extensões equibiaxiais (MARCKMANN; VERRON, 2006).

Uma abordagem muito interessante foi sugerida por Flory (1961), o qual propôs a decomposição multiplicativa do gradiente da função mudança de configuração em parcelas volumétrica e isocórica. A partir desta ideia, Hartmann e Neff (2003) propuseram diversas funções de energia de deformação dependentes dos invariantes das parcelas decompostas para materiais isotrópicos com comportamento quase incompressível. No estudo, foram fornecidas expressões tanto para as parcelas volumétricas quanto para as parcelas isocóricas.

1.4.4 Modelos elastoplásticos

As pesquisas relativas à plasticidade tiveram início com os estudos realizados por Tresca entre 1864 e 1872. Nestes trabalhos, foi proposto o primeiro critério de plastificação, o qual sugeria que os metais sofrem escoamento quando a tensão máxima de cisalhamento atinge um certo valor crítico. No entanto, a formulação teórica utilizada nos dias atuais foi introduzida somente em 1870 por Saint-Venant com a formulação de relações constitutivas básicas para materiais perfeitamente plásticos sob o estado plano de tensões. No mesmo ano, Levy estendeu as formulações através da obtenção de equações gerais para três dimensões, cujas expressões foram confirmadas por von Mises em 1913. Posteriormente, von Mises generalizou ainda mais suas formulações ao incluir uma função geral de plastificação para sólidos rígidos perfeitamente

plásticos. A partir da década de 1940, as pesquisas, que até então tinham dado maior enfoque no estudo da plasticidade perfeita, passaram a dar uma atenção maior às relações constitutivas incrementais de materiais com encruamento. Como exemplo, podem ser citados os estudos desenvolvidos por Melan, que em 1938 generalizou os conceitos de plasticidade perfeita e formulou teoremas para problemas elastoplásticos incrementais com materiais perfeitamente plásticos e materiais com encruamento (CHEN; HAN, 1988).

Atualmente, a teoria da plasticidade representa um importante campo de estudo na mecânica, sendo as pesquisas divididas em duas grandes áreas: desenvolvimento de teorias matemáticas e físicas da plasticidade. A primeira preocupa-se com a formulação de teorias matemáticas a partir de hipóteses e suposições para a representação de observações experimentais. Como não se faz necessário o conhecimento físico do fenômeno (conhecimento do arranjo estrutural e da geometria da rede cristalina), as mesmas são também chamadas de teorias fenomenológicas, onde os processos físicos que ocorrem na microescala são considerados por meio do uso de medidas macroscópicas equivalentes inseridas nos modelos constitutivos matemáticos. Já as pesquisas da segunda área focam no estudo físico do fenômeno, onde as deformações plásticas são quantificadas em níveis microscópicos e são elaboradas teorias para se tentar explicar as causas e o processo físico da plastificação (KHAN; HUANG, 1995; PROENÇA, 2018).

Dentro do campo de desenvolvimento de teorias matemáticas, diversos modelos elastoplásticos foram propostos, sendo a maior parte deles baseada na suposição de que o tensor de deformação pode ser decomposto em uma parcela elástica e outra plástica. Uma decomposição muito conhecida na literatura é a de Green-Naghdi, também conhecida como decomposição aditiva. Tal decomposição foi proposta no trabalho de Green e Naghdi (1965), no qual os autores elaboraram uma teoria elastoplástica geral do contínuo a partir de equações termodinâmicas. Nesta teoria, o tensor de deformação é decomposto em uma parcela elástica e outra plástica, sendo a teoria válida para deformações não isotérmicas acompanhadas por restrições explícitas derivadas da termodinâmica (GREEN; NAGHDI, 1965). Uma decomposição semelhante pode ser encontrada nos trabalhos de Perzyna e Wojno (1966, 1968). Entre os trabalhos que empregam a decomposição de Green-Naghdi, podem ser citados os de Ulz (2009) e Denis et al. (2018). Já dentro do âmbito do GMEC, podem ser mencionados os trabalhos de Pascon (2012), Pascon e Coda (2013) e Coda, Sampaio e Paccola (2015).

Apesar de a decomposição de Green-Naghdi ser empregada em inúmeros estudos, a hipótese de decomposição aditiva do tensor de deformação faz com que a resposta incremental elástica dependa das deformações plásticas anteriores em problemas com grandes deformações

inelásticas, fato este que deve ser levado em consideração no desenvolvimento de formulações cinemáticas e constitutivas de materiais sob tal regime (ETEROVIC; BATHE, 1991). No entanto, segundo Casey (1985), a decomposição aditiva é uma aproximação válida nos casos em que:

- a) deformações plásticas pequenas são acompanhadas por deformações elásticas moderadas;
- b) deformações elásticas pequenas são acompanhadas por deformações plásticas moderadas;
- c) deformações pequenas são acompanhadas por rotações moderadas.

Outra decomposição muito importante na literatura é a decomposição multiplicativa de Kröner-Lee, a qual recebe tal denominação por ser fruto dos estudos de Kröner (KRÖNER, 1959) e Lee (LEE, 1968; LEE, 1969). A formulação permitiu a inclusão de deformações elastoplásticas com componentes finitas (grandes deformações) na teoria clássica da plasticidade. A decomposição considera apenas estados homogêneos de tensão e deformação na formulação de leis constitutivas, sendo o gradiente da função mudança de configuração decomposto de forma multiplicativa em parcelas elástica e plástica. A relação não linear representada pelo produto matricial é normalmente não comutativa e representa a dependência da deformação plástica com a história do fluxo plástico, o que faz com que as componentes de deformação fiquem acopladas de forma mais consistente que a decomposição aditiva (LEE, 1968). Entre os trabalhos que empregam a decomposição de Kröner-Lee, podem ser citados os de Gurtin e Anand (2005), Kamrin (2010) e Zhang e Montáns (2019). Já no contexto do GMEC, podem ser mencionados os trabalhos de Pascon (2012), Pascon e Coda (2013) e Carvalho, P. R. P. (2019).

Um comparativo das teorias de Green-Naghdi e Kröner-Lee pode ser encontrado no trabalho de Chiou, Lee e Erdman (1986), no qual são comparados os gráficos da tensão de Cauchy pela deformação de engenharia e da tensão de Piola-Kirchhoff pela tensão de Green-Lagrange obtidos utilizando-se ambas as decomposições. Foi mostrado que ambas apresentam curvas praticamente idênticas no regime de pequenas deformações elásticas e plásticas, sendo diferenças identificadas apenas no regime de grandes deformações. Outra conclusão do estudo foi que a decomposição multiplicativa de Kröner-Lee se mostrou mais adequada para a construção de superfícies de plastificação no espaço de tensões de Cauchy.

Uma revisão de várias abordagens a respeito da decomposição multiplicativa do gradiente da função mudança de configuração em componentes elásticas e inelásticas

(plásticas) pode ser consultada em Golovanov (2010), onde também é feita uma breve descrição da cinemática de deformações finitas e de fluxos plásticos arbitrários. Para mais detalhes sobre a teoria da plasticidade, podem ser consultados os textos de Johnson e Mellor (1973), Chen e Han (1988), Lemaitre e Chaboche, (1990), Khan e Huang (1995), Simo e Hughes (1998), Dill (2007), Negahban (2012) e Dixit e Dixit (2015).

1.4.5 Modelos viscoelásticos

Muitos modelos constitutivos permitem a análise de materiais com comportamento viscoelástico, os quais partem dos modelos ideais de Hooke, que representa materiais puramente elásticos, e o de Newton, que representa fluidos ideais (DILL, 2007; CHEN; YANG; LAI, 2012). Embora tais idealizações (puramente elástica ou puramente viscosa) sejam capazes de descrever o comportamento de um grande número de materiais especialmente no regime de pequenas deformações e pequenas taxas de deformação, uma quantidade bastante significativa de materiais não costuma se enquadrar em nenhuma destas idealizações e apresenta uma resposta viscoelástica, ou seja, comportamento intermediário entre ambos os modelos (SCHRAMM, 2000; TIBBITT, 2019).

Por este motivo, diversos modelos viscoelásticos vêm sendo desenvolvidos ao longo dos anos, sendo os mais utilizados para a modelagem de materiais com comportamento viscoelástico linear os modelos de Maxwell, de Kelvin-Voigt e o modelo sólido linear padrão (BANKS; HU; KENZ, 2011).

O modelo de Maxwell foi proposto em 1873 e tem como análogo mecânico um sistema composto por uma mola puramente elástica conectada em série com um amortecedor puramente viscoso (CHEN; YANG; LAI, 2012). O modelo é apropriado para a análise de diversos materiais, especialmente polímeros, porém apresenta como desvantagem a incapacidade de reproduzir com precisão o efeito da fluência. Com arranjo oposto ao de Maxwell, o modelo de Kelvin-Voigt possui como análogo mecânico um sistema composto por uma mola puramente elástica conectada em paralelo com um amortecedor puramente viscoso. O modelo é capaz de reproduzir de forma muito precisa a fluência em diversos materiais, porém mostra-se pouco preciso na descrição de relaxação de tensão em vários materiais viscoelásticos (BANKS; HU; KENZ, 2011).

Tendo em vista as limitações dos modelos de Maxwell e Kelvin-Voigt, outros modelos foram desenvolvidos. Dentre eles, um dos mais conhecidos é o modelo sólido linear padrão introduzido por Zener (1948), também conhecido como modelo de três elementos ou modelo

de Zener. O modelo apresenta duas representações, a de Maxwell e a da Kelvin-Voigt, que consistem, respectivamente, no arranjo em paralelo de uma mola com o modelo de Maxwell e no arranjo em série de uma mola com o modelo de Kelvin-Voigt (MAINARDI; SPADA, 2011).

A viscosidade também pode ser tratada por meio de leis de evolução em forma diferencial. Tais formulações são baseadas no conceito de variáveis internas, abordagem introduzida pela primeira vez no trabalho de Green e Tobolsky (1946), o qual é fundamentado na teoria cinética da elasticidade de borrachas e hipóteses de relaxação. A partir da ideia da decomposição multiplicativa de Kröner-Lee, outros modelos viscoelásticos foram propostos utilizando-se o conceito de variável interna através da decomposição da deformação em parcelas elástica e viscosa (LUBLINER, 1985; CARVALHO, P. R. P., 2019). Tal artifício foi utilizado em diversos trabalhos, entre os quais podem ser citados os de Lubliner (1985), Huber e Tsakmakis (2000) e Pascon e Coda (2017).

Para uma revisão de modelos viscoelásticos, podem ser consultados os trabalhos de Banks, Hu e Kenz (2011) e Chen, Yang e Lai (2012). Já para mais detalhes sobre as formulações de tais modelos, pode ser consultado o texto de Simo e Hughes (1998) e Dill (2007).

1.4.6 Modelos viscoplásticos

O desenvolvimento de modelos matemáticos viscoplásticos teve início a partir de três importantes marcos: a formulação da Lei de Andrade em 1910, utilizada para a representação de fluência primária; o desenvolvimento da Lei de Norton em 1929, que relaciona a taxa de fluência secundária com a tensão; e a generalização de Odqvist, que em 1934 generalizou a Lei de Norton para o caso multiaxial. Em 1960, a partir do primeiro simpósio do IUTAM (*International Union of Theoretical and Applied Mechanics*), deu-se início ao desenvolvimento de um grande número de trabalhos na área da viscoplasticidade. Entre os principais trabalhos, destacam-se os de Hoff, Rabotnov, Perzyna, Hult e Lemaitre sobre leis de encruamento isótropo e os trabalhos de Malinin e Khadjinsky, Ponter e Leckie, Kratochvil e Chaboche sobre leis de encruamento cinemático (LEMAITRE; CHABOCHE, 1990).

No trabalho de Perzyna (1966), foi proposto o primeiro modelo viscoplástico, conhecido como modelo de Perzyna, cuja formulação serve de base para a maioria das implementações numéricas viscoplásticas. O modelo é caracterizado por permitir o descumprimento do critério de plastificação, tendo como premissa a decomposição da taxa de deformação total em uma taxa de deformação elástica (instantânea) e uma taxa de deformação viscoplástica, com a parcela elástica dada pela Lei de Hooke. Aplicações do modelo de Perzyna em problemas com

grandes deformações podem ser encontrados nos trabalhos de Wang e Sluys (2000), Ponthot (2002) e Garino et al. (2013).

Outro modelo viscoplástico clássico foi o proposto no trabalho de Duvaut e Lions (1976). O modelo possui uma abordagem alternativa ao modelo de Perzyna ao apresentar a taxa de deformação viscoplástica dependente do tempo de relaxação. Apesar de ser menos utilizado, o modelo apresenta maior facilidade de implementação numérica, especialmente em modelos constitutivos elasto-viscoplásticos já existentes (SCHWER, 1994). Outra vantagem notável é que o modelo pode ser utilizado em superfícies de plastificação nas quais há descontinuidade do gradiente em alguns pontos (SIMO; KENNEDY; GOVINDJEE, 1988). Dentre os trabalhos que empregam o modelo de Duvaut-Lions, podem ser citados os de Suzuki (2016) e Bai et al. (2020).

Uma generalização dos modelos clássicos de Perzyna e de Duvaut-Lions foi proposta por Ibrahimbegović e Chorfi (2000) para o regime de deformações finitas. A generalização foi obtida através da decomposição multiplicativa do gradiente da função mudança de configuração, definição de um domínio plástico e regularização viscoplástica com base no princípio da máxima dissipação plástica. O modelo viscoplástico proposto também foi estendido de forma a incluir encruamento isotrópico e cinemático do tipo Prager-Ziegler.

Outra generalização do modelo de Perzyna foi proposta por Sumelka (2014), cuja formulação emprega cálculo fracionário como ferramenta para a introdução de heterogeneidades do material e efeitos multiescala no modelo constitutivo. Tal modelo foi denominado “viscosidade fracionária” e é utilizado na descrição de deformação permanente, especialmente em condições dinâmicas extremas.

Uma ampla revisão de modelos constitutivos plásticos e viscoplásticos pode ser encontrada em Chaboche (2008). Para mais detalhes a respeito das formulações de modelos viscoplásticos, podem ser consultados os textos de De Borst et al. (2012), Lemaitre e Chaboche (1990) e Simo e Hughes (1998).

1.4.7 Modelos numéricos de contato

Os primeiros trabalhos relativos à Mecânica do Contato clássica são atribuídos a Hertz (1881) e Boussinesq (1885), os quais investigaram a força distribuída decorrente do contato entre corpos com superfícies curvilíneas (POPOV; HEß; WILLERT, 2019). Nos anos seguintes, foi observado o desenvolvimento de um grande número de estudos sobre o tema,

devido principalmente à impossibilidade de resolução analítica de muitos problemas industriais (WRIGGERS, 2002).

Com o advento dos computadores, surgiram os primeiros trabalhos relativos à resolução de problemas de contato via Método dos Elementos Finitos, os quais são atribuídos a Wilson e Parsons (1970) e Chan e Tuba (1971a, 1971b), que abordaram o contato através da teoria linear geométrica. Na mesma época, houve o surgimento dos primeiros programas computacionais para a resolução deste tipo de problema, sendo o primeiro atribuído a Wilkins (1964), que desenvolveu o código explícito *HEMP-hydrocode* para a análise de grandes deformações com um modelo simples de contato. Posteriormente, foram desenvolvidos os códigos explícitos *DYNA2D* (HALLQUIST, 1982a) e *DYNA3D* (HALLQUIST, 1982b) e os códigos implícitos *NIKE2D* (HALLQUIST, 1979) e *NIKE3D* (HALLQUIST, 1984), os quais são considerados os primeiros programas capazes de resolver de forma efetiva problemas de contato sob deformações finitas (WRIGGERS, 2002).

Com o trabalho de Francavilla e Zienkiewicz (1985), foi proposta a discretização do tipo nó-a-nó, a qual é considerada a formulação mais simples de discretização da interface de contato. A discretização utiliza equações de restrição e equações constitutivas de interface com base puramente nos nós, sendo muito empregada principalmente devido à sua simplicidade e precisão (WRIGGERS, 2002). Dentre os estudos que empregam este tipo de discretização, podem ser citados os trabalhos de Jin et al. (2015), Xing, Song e Tin-Loi (2018) e Nagaraj et al. (2020). No entanto, o esquema nó-a-nó possui como desvantagem a necessidade de coincidência das malhas para que haja a identificação do contato entre os nós, sendo sua aplicação limitada a problemas linearmente geométricos, uma vez que não é permitido um grande movimento tangencial relativo dos nós na área de contato (WRIGGERS, 2002; XING; SONG; TIN-LOI, 2018).

Dessa forma, para a resolução de problemas no regime de grandes deslocamentos, onde não é possível se garantir a coincidência dos nós, foi proposto o esquema do tipo nó-a-segmento. Nesta técnica, as interfaces de contato são distinguidas através da discretização de uma das superfícies em elementos nodais (denominados nós projéteis) e a outra em segmentos (denominados segmentos alvos). A condição de impenetrabilidade é assegurada através do impedimento da penetração dos nós projéteis nos segmentos alvos. O algoritmo de nó-a-segmento foi proposto primeiramente por Hughes et al. (1976) para a aplicação de condições de não penetração puramente geométricas entre corpos em contato, sendo a técnica estendida para casos mais gerais nos trabalhos de Bathe e Chaudhary (1985), Simo, Wriggers e Taylor (1985), Hallquist, Goudreau e Benson (1985), Wriggers e Simo (1985), Wriggers, Van e Stein

(1990) e Papadopoulos e Taylor (1992) (ZAVARISE; DE LORENZIS, 2009). Aplicações da técnica podem ser encontradas nos trabalhos de Lee (2014) e Khoei e Mousavi (2010).

Outro método muito utilizado para a modelagem de contato é o método *mortar*. A abordagem foi primeiramente proposta por Bernardi, Debit e Maday (1990) e posteriormente reformulada com os termos “*mortars*” em Bernardi, Maday e Patera (1994), assumindo sua forma final nos trabalhos de Belgacem (1993) e Belgacem e Maday (1994) (BELGACEM; HILD; LABORDE, 1998). O método é uma técnica especial para a imposição de restrições de contato no sistema discretizado com malhas não coincidentes. Sua formulação é baseada na técnica dos multiplicadores de Lagrange, onde são utilizadas funções de interpolação especiais para a discretização do multiplicador de Lagrange na interface de contato (WRIGGERS, 2002). Um comparativo do método *mortar* com o método de nó-a-segmento pode ser encontrado em Hesch e Betsch (2006).

Com relação à aplicação de modelos de contato em análises dinâmicas, os problemas tornam-se muito complexos devido à mudança abrupta de aceleração, velocidade e tensão em corpos elásticos e à elevada não-linearidade do campo de deslocamentos nas superfícies de contato (HU, 1997). O primeiro trabalho a abordar tal assunto é atribuído a Hughes et al. (1976). No trabalho de Chaudhary e Bathe (1986), foi apresentado um método de solução para a análise de contato entre corpos tridimensionais, o qual utiliza o Método dos Multiplicadores de Lagrange juntamente com o algoritmo de integração temporal de Newmark (NEWMARK, 1959). Seguindo a mesma linha, Hu (1997), também utilizando o Método dos Multiplicadores de Lagrange com o algoritmo de integração temporal de Newmark, propôs um método eficiente para a análise dinâmica de problemas de contato entre corpos elásticos sob força transiente. O algoritmo adotou parâmetros livres de Newmark $\beta = 1,0$ e $\gamma = 1,5$ sugeridos por Chung e Hulbert (1993), mostrando-se simples e com resultados estáveis para passos de tempo pequenos. A eficiência da adoção dos valores dos parâmetros de Newmark utilizados por Hu (1997) foi verificada em estudos realizados no GMEC, dos quais podem ser citados os trabalhos de Greco (2004) e Marques (2006).

Mais detalhes sobre a Mecânica do Contato podem ser encontrados nos textos de Wriggers (2002), Popov (2010) e Popov, Heß e Willert (2019). Para o estudo de temas mais específicos, podem ser consultados os trabalhos de Ghaednia et al. (2017) para uma revisão de problemas de contato em materiais elastoplásticos, Carbone e Bottiglione (2011) para uma breve descrição das teorias de contato entre superfícies aleatoriamente rugosas e Shull (2002) e Ciavarella et al. (2019) para problemas envolvendo adesão.

1.4.8 Pastas cimentícias

Para que o concreto seja capaz de ser moldado em determinado elemento estrutural, é necessário que o mesmo apresente fluidez suficiente para que seja possível o adequado preenchimento da fôrma. As características do concreto dependem de suas propriedades reológicas, as quais são governadas pela fluidez e densidade de empacotamento da pasta de cimento e pela distribuição granulométrica dos agregados. Muitos autores consideram a matriz como sendo composta pela associação de agregados graúdos e argamassa, sendo esta última assumida como uma fase contínua. No entanto, apesar de sua importância nas propriedades do concreto, os agregados podem ser considerados como pouco importantes no escoamento do concreto, tendo em vista que as dimensões das fôrmas e a distância entre vergalhões devem ser tais que permitam a passagem livre dos agregados. Dessa forma, a partir das características do escoamento das pastas cimentícias, pode-se ter um melhor entendimento do comportamento do concreto no estado fresco, uma vez que seu escoamento costuma ser assumido como sendo dependente principalmente das mudanças da reologia da pasta de cimento (BOUVET; GHORBEL; BENNACER, 2010).

Por sua vez, as argamassas costumam ser consideradas como fluidos com escoamento descrito pela teoria clássica de escoamento de fluidos, podendo ser assumidas com comportamento newtoniano ou não newtoniano. No último caso, as argamassas podem ser classificadas em três categorias, como materiais que apresentam comportamento pseudoplástico, dilatante ou viscoplástico/fluido de Bingham (SOUSA; LARA, 2005).

Dentre os vários modelos reológicos encontrados na literatura, o mais utilizado para a caracterização do comportamento reológico de pastas cimentícias é o modelo de Bingham (BINGHAM, 1922), no qual os fluidos têm comportamento dependente não apenas da viscosidade, mas também da tensão de escoamento (SOUSA; LARA, 2005). No entanto, o modelo linear de Bingham pode não ser adequado para a modelagem de alguns tipos de pastas, como no caso de concretos de ultra alto desempenho, sendo nestes casos normalmente empregados os modelos não lineares de Bingham modificado e de Herschel-Bulkley (KHAYAT et al., 2019).

As pesquisas relativas à modelagem numérica de pastas cimentícias têm dado foco em ensaios de caracterização, principalmente no *mini-slump test* (BOUVET; GHORBEL; BENNACER, 2010; GAO; FOURIE, 2015; CHOI et al., 2016). O ensaio é o mais utilizado para a caracterização de pastas cimentícias e grautes e costuma ser utilizado para a verificação de medidas qualitativas como trabalhabilidade e consistência. Devido à sua grande utilização,

diversos estudos vêm sendo desenvolvidos para a extração de medidas reológicas do ensaio, nas quais são elaborados modelos analíticos relacionando a tensão de escoamento e a viscosidade com o diâmetro final do corpo de prova (BOUVET; GHORBEL; BENNACER, 2010).

2 CONCEITOS BÁSICOS DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS

Neste capítulo, é feita uma revisão de conceitos básicos da Mecânica dos Sólidos. Ressalta-se que, apesar de as equações apresentadas serem a princípio voltadas para a descrição de sólidos, alguns conceitos também podem ser utilizados para a resolução de problemas de fluidos, conforme abordado posteriormente no trabalho.

2.1 Cinemática

Neste item, são apresentados conceitos para a descrição cinemática de corpos deformáveis, os quais são especialmente importantes para a análise de estruturas no regime de grandes deslocamentos, rotações e deformações.

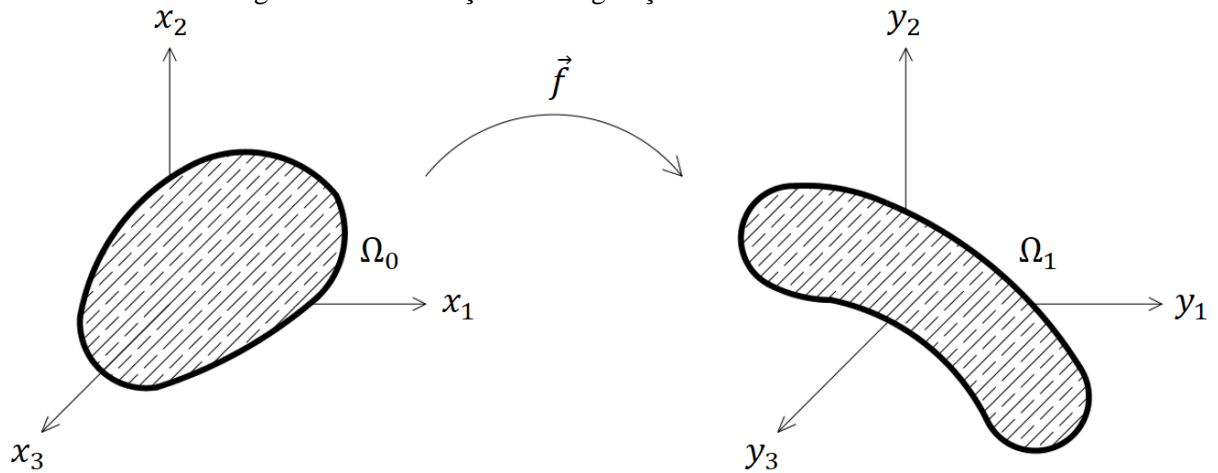
2.1.1 Mudança de configuração e seu gradiente

Sólidos deformáveis, quando submetidos a ações externas, sofrem mudança de forma, seja sob equilíbrio estático ou sob movimento. A mudança de forma pode ser expressa matematicamente por meio da função mudança de configuração \vec{f} , a qual descreve a mudança dos pontos \vec{x} do corpo na configuração inicial Ω_0 (tempo zero) para os pontos \vec{y} na configuração atual Ω_1 (tempo t), conforme apresentado na Figura 2.1. A função mudança de configuração é dada por:

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}, t) \quad (1)$$

que, para um valor fixo de t , representa a mudança da configuração indeformada para a configuração deformada do corpo.

Figura 2.1 – Mudança de configuração de um sólido deformável



Fonte: o próprio autor.

No regime de deformações finitas, faz-se importante o cálculo do gradiente da função mudança de configuração, o qual permite a descrição da posição relativa atual de duas partículas vizinhas em função da posição inicial. O gradiente da função mudança de configuração \mathbf{A} é dado por:

$$\mathbf{A} = \nabla \vec{f} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} \quad (2)$$

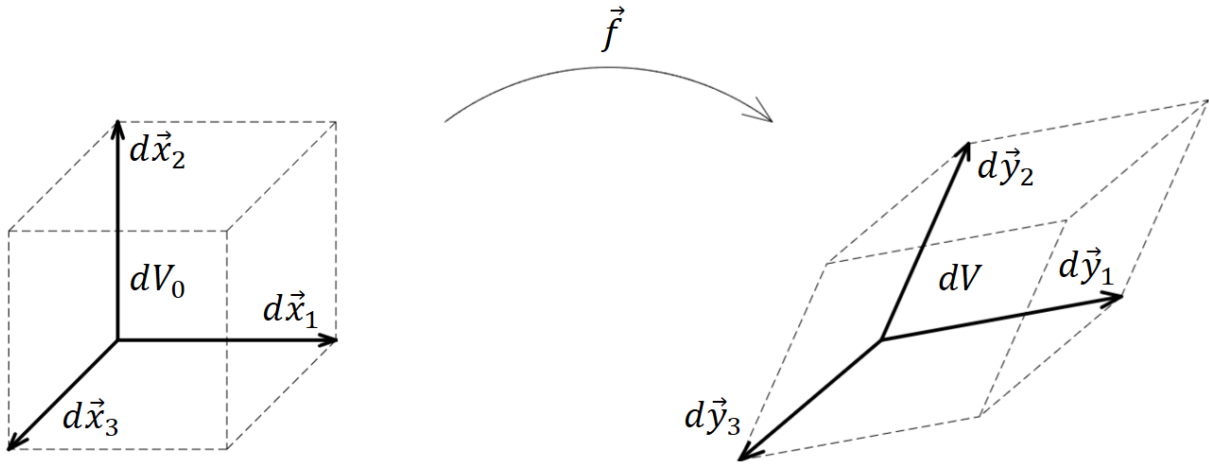
onde \mathbf{A} é um tensor de segunda ordem que transforma vetores infinitesimais na configuração inicial em vetores infinitesimais na configuração atual, ou seja:

$$d\vec{y} = \mathbf{A} \cdot d\vec{x} \quad (3)$$

2.1.2 Mudança de volume

Para a avaliação da mudança de volume decorrente da deformação de um corpo, analisa-se um elemento infinitesimal antes e após a mudança de configuração, conforme apresentado na Figura 2.2:

Figura 2.2 – Mudança de volume decorrente da mudança de configuração



Fonte: o próprio autor.

Primeiramente, determina-se o volume inicial dV_0 do elemento infinitesimal, o qual é dado pelo produto misto dos vetores $d\vec{x}_1$, $d\vec{x}_2$ e $d\vec{x}_3$ que definem as arestas do elemento na configuração inicial, ou seja, pelo determinante da matriz formada pelos três vetores:

$$dV_0 = d\vec{x}_1 \cdot (d\vec{x}_2 \times d\vec{x}_3) = \det(d\vec{x}_1, d\vec{x}_2, d\vec{x}_3) \quad (4)$$

Após a mudança de configuração, as arestas do elemento passam a ser definidas pelos vetores $d\vec{y}_1$, $d\vec{y}_2$ e $d\vec{y}_3$, que são dados, conforme a Equação (3), por:

$$d\vec{y}_i = \mathbf{A} \cdot d\vec{x}_i \quad (5)$$

De forma análoga ao volume inicial, o volume final dV pode ser obtido através do produto misto dos vetores que definem as arestas do elemento na configuração atual, isto é, pelo determinante da matriz formada pelos três vetores:

$$dV = d\vec{y}_1 \cdot (d\vec{y}_2 \times d\vec{y}_3) = \det(d\vec{y}_1, d\vec{y}_2, d\vec{y}_3) \quad (6)$$

Substituindo-se a Equação (5) na Equação (6), obtém-se:

$$dV = \det(\mathbf{A}) \det(d\vec{x}_1, d\vec{x}_2, d\vec{x}_3) = J dV_0 \quad (7)$$

sendo J o jacobiano, que é dado por:

$$J = \det(\mathbf{A}) = \frac{dV}{dV_0} \quad (8)$$

Como o material não pode apresentar inversão ou desaparecer, tem-se como condição necessária que

$$J > 0 \quad (9)$$

a qual deve ser fisicamente assegurada pela relação constitutiva do material.

Com isso, a deformação volumétrica ε_v do elemento pode ser escrita como:

$$\varepsilon_v = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = J - 1 \quad (10)$$

Agora, define-se o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green \mathbf{C} , que é dado por:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (11)$$

o qual, diferentemente do tensor \mathbf{A} , é simétrico.

Os termos da diagonal do tensor \mathbf{C} correspondem ao quadrado do alongamento λ , o qual é definido como a razão entre o comprimento deformado L e o comprimento indeformado L_0 de determinada fibra do material:

$$\lambda = \frac{L}{L_0} \quad (12)$$

Agora, define-se a deformação de engenharia, que é dada como a razão entre o deslocamento u e o comprimento indeformado L_0 :

$$\varepsilon = \frac{u}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0} \quad (13)$$

Substituindo-se a Equação (12) na Equação (13), tem-se que a deformação de engenharia e o alongamento apresentam a seguinte relação:

$$\varepsilon = \frac{L}{L_0} - \frac{L_0}{L_0} = \lambda - 1 \quad (14)$$

A partir da expressão do jacobiano fornecida na Equação (8) e da definição de \mathbf{C} dada na Equação (11), tem-se que J pode ser obtido por:

$$J = \det(\mathbf{A}) = \sqrt{\det(\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A})} = \sqrt{\det(\mathbf{C})} \quad (15)$$

Por sua vez, $\det(\mathbf{C})$ é um invariante e é dado nas direções principais por:

$$\det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (16)$$

sendo λ_1 , λ_2 e λ_3 os alongamentos principais.

A partir da relação entre λ e ε apresentada na Equação (14), a Equação (16) pode ser reescrita como:

$$\det(\mathbf{C}) = (1 + \varepsilon_1)^2 (1 + \varepsilon_2)^2 (1 + \varepsilon_3)^2 \quad (17)$$

sendo ε_1 , ε_2 e ε_3 as deformações principais.

Dessa forma, substituindo-se a Equação (17) na Equação (15), tem-se que o jacobiano pode ser obtido por:

$$\begin{aligned}
 J &= (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) \\
 &= 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3
 \end{aligned} \tag{18}$$

Substituindo-se a Equação (18) na Equação (10), a deformação volumétrica pode ser dada pela seguinte expressão:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \tag{19}$$

que, no regime de pequenas deformações, pode ser simplificada para:

$$\varepsilon_v \cong \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii} = Tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{20}$$

No caso especial em que um corpo isotrópico está sujeito a uma pressão uniforme p , a deformação volumétrica apresenta a seguinte relação com a pressão aplicada:

$$p = K\varepsilon_v \tag{21}$$

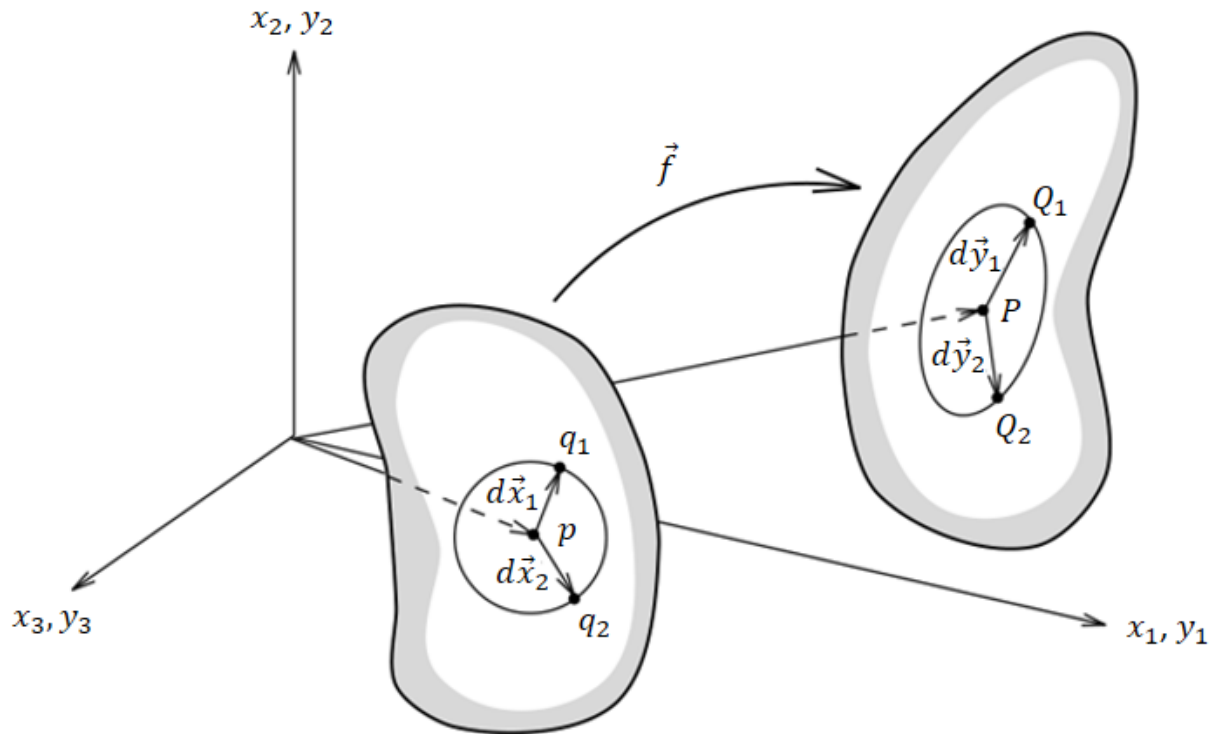
sendo a constante de proporcionalidade K denominada *bulk modulus* ou módulo volumétrico. Este coeficiente representa uma propriedade elástica de sólidos e fluidos, medindo a resistência à compressão de um material quando submetido a uma compressão uniforme em todas as direções (tensão hidrostática). Ressalta-se que, das constantes elásticas, somente o *bulk modulus* é significativo para fluidos.

2.1.3 Alongamento de Cauchy-Green e deformação de Green-Lagrange

Para uma melhor análise da deformação de um corpo, avalia-se a mudança ocorrida entre os produtos escalares dos vetores $d\vec{x}_1$ e $d\vec{x}_2$ na configuração inicial e dos vetores $d\vec{y}_1$ e $d\vec{y}_2$ na configuração atual (Figura 2.3), uma vez que a mudança de configuração envolve a alteração tanto do alongamento quanto do ângulo entre os vetores. Partindo-se da relação entre os vetores $d\vec{y}$ e $d\vec{x}$ descrita na Equação (3) e da definição do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green expressa na Equação (11), escreve-se:

$$d\vec{y}_1 \cdot d\vec{y}_2 = \mathbf{A} \cdot d\vec{x}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot d\vec{x}_2 = d\vec{x}_1 \cdot \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} \cdot d\vec{x}_2 = d\vec{x}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot d\vec{x}_2 \tag{22}$$

Figura 2.3 – Alteração na vizinhança de uma partícula com a mudança de configuração



Fonte: adaptado de Bonet e Wood (2008).

Avaliando-se a diferença entre os produtos escalares e utilizando-se a relação descrita na Equação (22), chega-se à expressão:

$$\frac{1}{2}(d\vec{y}_1 \cdot d\vec{y}_2 - d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2) = \frac{1}{2}(d\vec{x}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot d\vec{x}_2 - d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2) = d\vec{x}_1 \cdot \mathbb{E} \cdot d\vec{x}_2 \quad (23)$$

onde \mathbb{E} é o tensor de deformação de Green-Lagrange (ou apenas deformação de Green), que é dado por:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (24)$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade.

2.1.4 Decomposição polar do gradiente da função mudança de configuração

O movimento total de um corpo pode ser entendido como sendo composto por três parcelas: deformação pura, translação e rotação de corpo rígido. Primeiramente, analisa-se o efeito da translação de corpo rígido na deformação do material. Para isto, escreve-se a função de mudança de configuração que descreve a translação:

$$\vec{y} = \vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \vec{x} + \vec{d} \quad (25)$$

onde \vec{d} é o vetor de deslocamento, que é constante.

Substituindo-se \vec{f} na Equação (2), obtém-se o gradiente da função mudança de configuração:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial(\vec{x} + \vec{d})}{\partial \vec{x}} = \mathbf{I} \quad (26)$$

Em seguida, substitui-se \mathbf{A} na expressão do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green dado na Equação (11), obtendo-se:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}^t \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \quad (27)$$

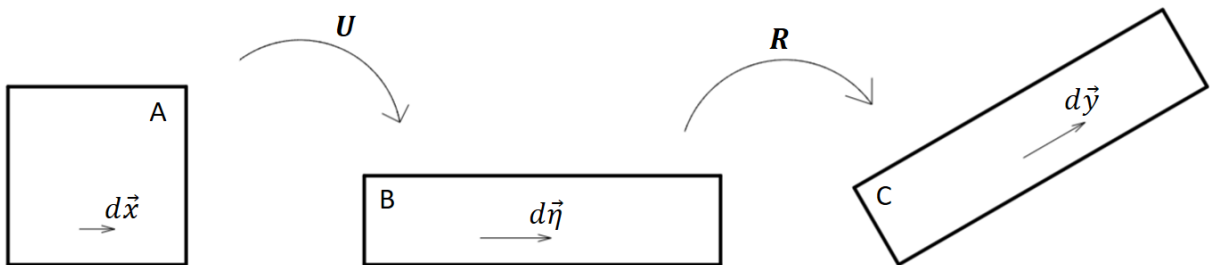
Por fim, substituindo-se \mathbf{C} na expressão da deformação de Green dada na Equação (24), encontra-se a deformação de Green oriunda da translação:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{I}) = 0 \quad (28)$$

ou seja, a translação de corpo rígido não gera deformação no corpo.

Assim, passa-se a considerar apenas a deformação pura e a rotação de corpo rígido no movimento total do corpo, o qual pode ser decomposto conforme o esquema apresentado na Figura 2.4. Na figura, o corpo sofre uma deformação pura da configuração inicial A para a configuração intermediária B (representada pelo tensor \mathbf{U}), seguida por uma rotação de corpo livre da configuração B para a configuração C (representada pelo tensor \mathbf{R}).

Figura 2.4 – Interpretação gráfica da decomposição polar



Fonte: adaptado de De Borst et al. (2012).

Analisando-se os vetores $d\vec{x}$, $d\vec{\eta}$ e $d\vec{y}$ que conectam dois pontos materiais nas configurações A, B e C, respectivamente, é possível estabelecer uma relação entre os vetores por meio do esquema apresentado na Figura 2.4. A relação entre os vetores $d\vec{\eta}$ e $d\vec{x}$ é dada por:

$$d\vec{\eta} = \mathbf{U} \cdot d\vec{x} \quad (29)$$

De forma análoga, pode-se relacionar os vetores $d\vec{y}$ e $d\vec{\eta}$ por meio da expressão:

$$d\vec{y} = \mathbf{R} \cdot d\vec{\eta} \quad (30)$$

Combinando-se a Equação (29) com a Equação (30), chega-se à relação:

$$d\vec{y} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot d\vec{x} \quad (31)$$

Comparando-se a Equação (31) com a Equação (3), conclui-se que o gradiente da função mudança de configuração pode ser decomposto de forma multiplicativa em rotação de corpo rígido e deformação pura, ou seja:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \quad (32)$$

cuja expressão é conhecida como a decomposição polar do gradiente da função mudança de configuração.

A partir da Equação (32) e da definição do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green dada na Equação (11), o tensor \mathbf{C} pode ser escrito como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{U}^t \cdot \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \quad (33)$$

Como o tensor de deformação pura \mathbf{U} é simétrico e o tensor de rotação de corpo livre \mathbf{R} é ortogonal ($\mathbf{R}^t \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$), a Equação (33) pode ser reduzida para:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 \quad (34)$$

ou seja, o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green consegue definir completamente o estado de deformação de um corpo.

De forma análoga à análise feita com a translação, analisa-se agora o efeito da rotação de corpo rígido na deformação do corpo. Neste caso, a Equação (32) reduz-se para:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \quad (35)$$

Substituindo-se a Equação (35) na expressão do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green dada na Equação (11) e sabendo-se que o tensor \mathbf{R} é ortogonal, obtém-se:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (36)$$

Por fim, substituindo-se o tensor \mathbf{C} na expressão da deformação de Green dada na Equação (24), tem-se que:

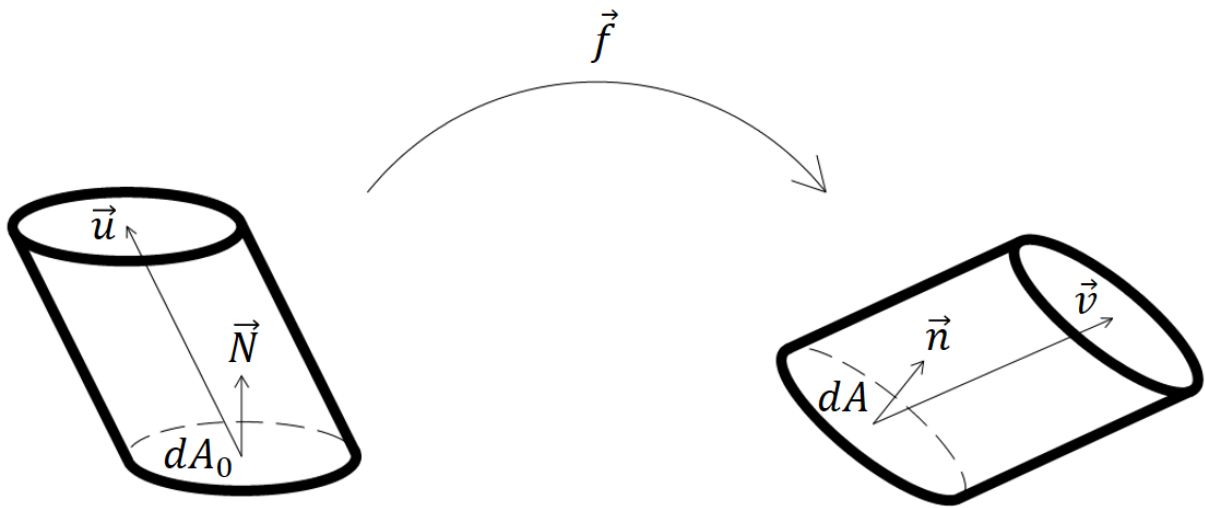
$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{I}) = 0 \quad (37)$$

de onde se conclui que a deformação de Green é apropriada para o regime de grandes deslocamentos e rotações por se tratar de uma medida de deformação objetiva (resulta nula) para ambos os movimentos de corpo rígido (translação e rotação).

2.1.5 Mudança de área (fórmula de Nanson)

Para se obter uma relação entre a tensão definida na configuração inicial com a tensão real na configuração atual (tensão de Cauchy), é importante o estabelecimento de uma relação entre as áreas em ambas as configurações. Para isto, analisa-se o elemento infinitesimal apresentado na Figura 2.5, na qual são ilustradas as configurações antes e após a mudança de configuração:

Figura 2.5 – Configurações inicial e atual de elemento gerado por área infinitesimal



Fonte: o próprio autor.

Primeiramente, são definidos os vetores de área das configurações inicial $d\vec{A}_0$ e atual $d\vec{A}$, os quais são dados, respectivamente, por:

$$d\vec{A}_0 = \vec{N}dA_0 \quad (38)$$

$$d\vec{A} = \vec{n}dA \quad (39)$$

onde \vec{N} e \vec{n} são versores ortogonais às áreas das configurações inicial e atual, respectivamente.

Através do produto escalar entre os vetores de área e os respectivos vetores geradores dos elementos infinitesimais, é possível calcular os volumes dos elementos nas respectivas configurações. Para a configuração inicial, o volume inicial dV_0 é obtido por:

$$dV_0 = \vec{u}^t \cdot d\vec{A}_0 = \vec{u}^t \cdot \vec{N}dA_0 \quad (40)$$

Analogamente, para a configuração atual, o volume atual dV é calculado por:

$$dV = \vec{v}^t \cdot d\vec{A} = \vec{v}^t \cdot \vec{n}dA \quad (41)$$

A partir da relação entre os volumes inicial e atual descrito na Equação (8), reescreve-se a Equação (41) como:

$$JV_0 = \vec{v}^t \cdot \vec{n}dA \quad (42)$$

Tendo-se em vista a propriedade do gradiente da função mudança de configuração de transformar vetores infinitesimais na configuração inicial para a atual descrita na Equação (3), pode-se relacionar os vetores \vec{u} e \vec{v} através da expressão:

$$\vec{v} = \mathbf{A} \cdot \vec{u} \quad (43)$$

Com a relação dada na Equação (43), a Equação (42) pode ser reescrita como:

$$JV_0 = \vec{u}^t \cdot \mathbf{A}^t \cdot \vec{n}dA \quad (44)$$

Substituindo-se a Equação (40) na Equação (44), obtém-se:

$$J\vec{u}^t \cdot \vec{N}dA_0 = \vec{u}^t \cdot \mathbf{A}^t \cdot \vec{n}dA \quad (45)$$

Como o vetor gerador da área inicial \vec{u} é arbitrário, escreve-se:

$$\mathbf{A}^t \cdot \vec{n}dA = J\vec{N}dA_0 \quad (46)$$

Por fim, pré-multiplicando a Equação (46) por \mathbf{A}^{-t} , chega-se à expressão:

$$\vec{n}dA = J\mathbf{A}^{-t} \cdot \vec{N}dA_0 \quad (47)$$

A Equação (47) é conhecida como Fórmula de Nanson e é muito importante para a conversão de medidas de tensão.

2.1.6 Equação da conservação de massa

Para a conversão de grandezas eulerianas em lagrangeanas, faz-se uso do Princípio da Conservação de Massa (também conhecido como Lei de Lavoisier), que afirma que em qualquer sistema fechado a massa permanece constante ao longo do tempo.

Assim, como a massa nas configurações inicial e atual são iguais, escreve-se:

$$M = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 = \int_{V(t)} \rho(t) dV \quad (48)$$

onde M é a massa do sistema, ρ_0 é a massa específica na configuração inicial e $\rho(t)$ é a massa específica na configuração atual.

Substituindo-se a relação entre os volumes inicial e atual dada na Equação (8) na Equação (48), obtém-se:

$$M = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 = \int_{V_0} \rho(t) J(t) dV_0 \quad (49)$$

Como o volume adotado para a integração é arbitrário e fazendo-se uso novamente da Equação (8), conclui-se que:

$$\rho_0 = \rho(t)J(t) = \rho(t) \frac{dV}{dV_0} \quad (50)$$

A partir do Princípio da Conservação de Massa, pode-se obter um corolário importante para as análises numéricas não lineares. Considerando-se uma integral no volume atual de um núcleo que contenha o produto de uma função diferenciável $f(t)$ com a densidade atual $\rho(t)$ e aplicando-se o Princípio da Conservação de Massa expresso na Equação (50), escreve-se:

$$\int_{V(t)} \rho(t)f(t)dV = \int_{V_0} \rho_0 f(t)dV_0 \quad (51)$$

Derivando-se a Equação (51) em relação ao tempo, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(t)f(t)dV = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho_0 f(t)dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \frac{df(t)}{dt} dV_0 \quad (52)$$

Utilizando-se novamente a Equação (50) para a mudança de variável da última integral, a Equação (52) pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(t)f(t)dV = \int_{V(t)} \rho(t) \frac{df(t)}{dt} dV \quad (53)$$

Assim, tem-se como corolário do Princípio da Conservação de Massa que a derivada em relação ao tempo de uma integral de volume cujo volume depende do tempo com núcleo também dependente do tempo composto pelo produto de uma função pela massa específica é calculada derivando-se somente a função principal do núcleo em relação ao tempo.

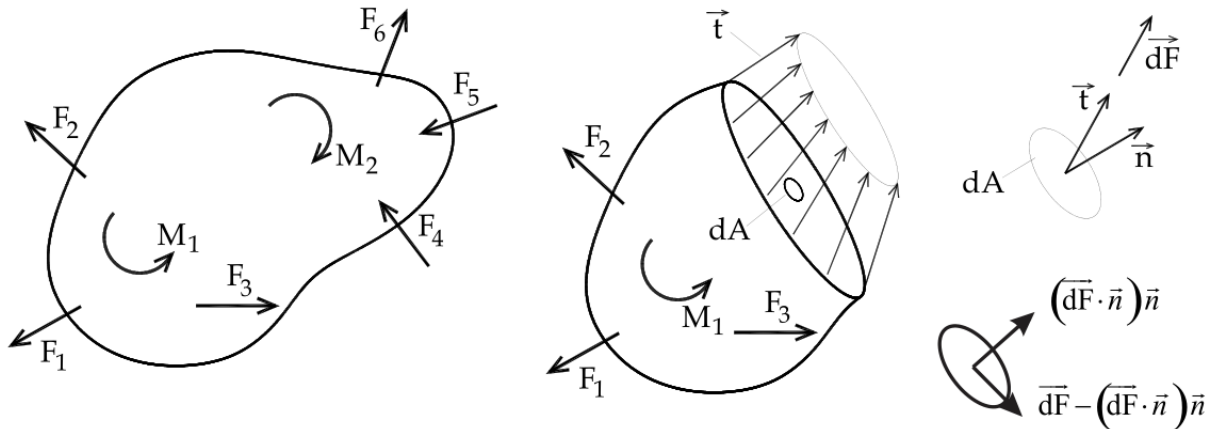
2.2 Tensão de Cauchy

O ente tensão quantifica de forma contínua a interação entre as partículas de um corpo sujeito a ações externas, podendo ser de dois tipos: tensão normal ou tensão de cisalhamento/tangencial. A resistência à aproximação ou ao afastamento entre planos paralelos é quantificada pela componente de tensão normal, enquanto que a resistência ao deslizamento relativo entre planos paralelos é quantificada pela componente de tensão tangencial.

Entre as várias medidas de tensão, a tensão de Cauchy (também chamada de tensão real) é a responsável por efetivamente equilibrar as forças atuantes na configuração deformada. A tensão de Cauchy tem como referencial a configuração atual (medida euleriana) e, diferentemente de outras medidas de tensão, possui significado físico, constituindo muitos modelos de falha/ruptura.

Para a análise das tensões, estuda-se primeiramente um corpo em equilíbrio sujeito a ações externas, cuja representação é apresentada na Figura 2.6:

Figura 2.6 – Corpo em equilíbrio, corte genérico e infinitésimo de área



Fonte: Coda (2018).

Realizando-se um corte imaginário no corpo, pelo princípio da ação e reação surgem na superfície do corte forças por unidade de área \vec{t} . Extraindo-se um infinitésimo de área dA da superfície do corte, pode-se obter o infinitésimo de força $d\vec{F}$ resultante aplicado na área elementar por meio da expressão:

$$d\vec{F} = \vec{t}dA \quad (54)$$

Através do vetor \vec{n} normal à área infinitesimal, a tensão normal $\vec{\sigma}$ atuante na área elementar é obtida por:

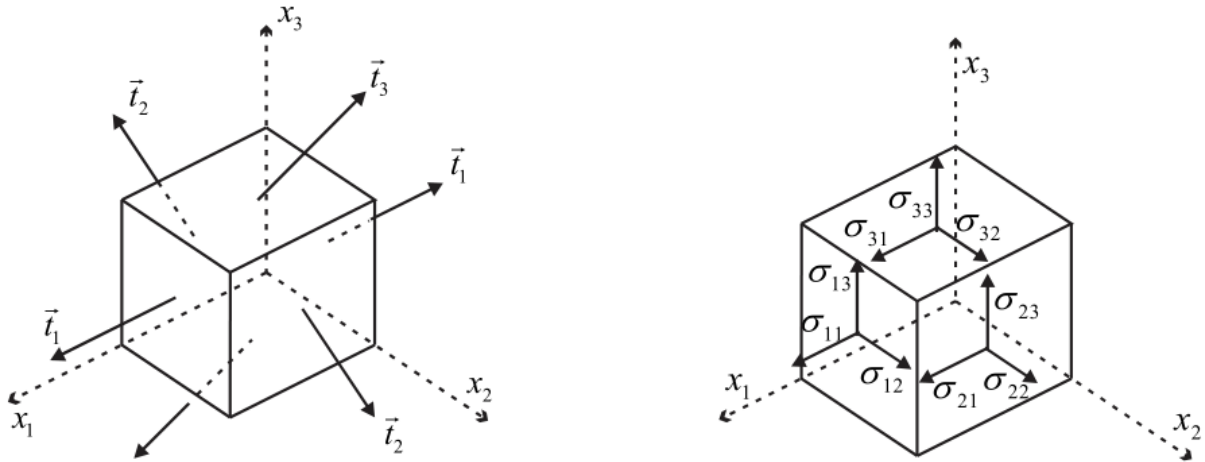
$$\vec{\sigma} = (\vec{t} \cdot \vec{n})\vec{n} \quad (55)$$

A partir da tensão normal, é possível obter a componente tangencial $\vec{\tau}$ pela diferença dos vetores \vec{t} e $\vec{\sigma}$, ou seja:

$$\vec{\tau} = \vec{t} - \vec{\sigma} = \vec{t} - (\vec{t} \cdot \vec{n})\vec{n} \quad (56)$$

Para uma melhor análise das tensões, retira-se do corpo um elemento infinitesimal cúbico obtido através de seis cortes paralelos realizados dois a dois com distâncias infinitesimais entre si e ortogonais aos eixos coordenados. Sob cada face do elemento atua uma tensão \vec{t}_i , podendo cada uma ser decomposta em componentes cartesianas, resultando nas componentes de tensão (Figura 2.7). As componentes ortogonais às faces correspondem às tensões normais, enquanto que as componentes contidas no plano da face correspondem às tensões tangenciais. Cada componente é composta por dois índices, onde o primeiro é referente ao plano e o segundo é referente à direção de atuação da componente de tensão.

Figura 2.7 – Tensões atuantes em planos ortogonais e componentes de tensão



Fonte: Coda (2018).

Organizando-se de forma tensorial, as tensões de Cauchy σ podem ser escritas como:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \sigma_{ij} \quad (57)$$

onde i é a direção ortogonal à face e j é a direção de atuação da componente de tensão.

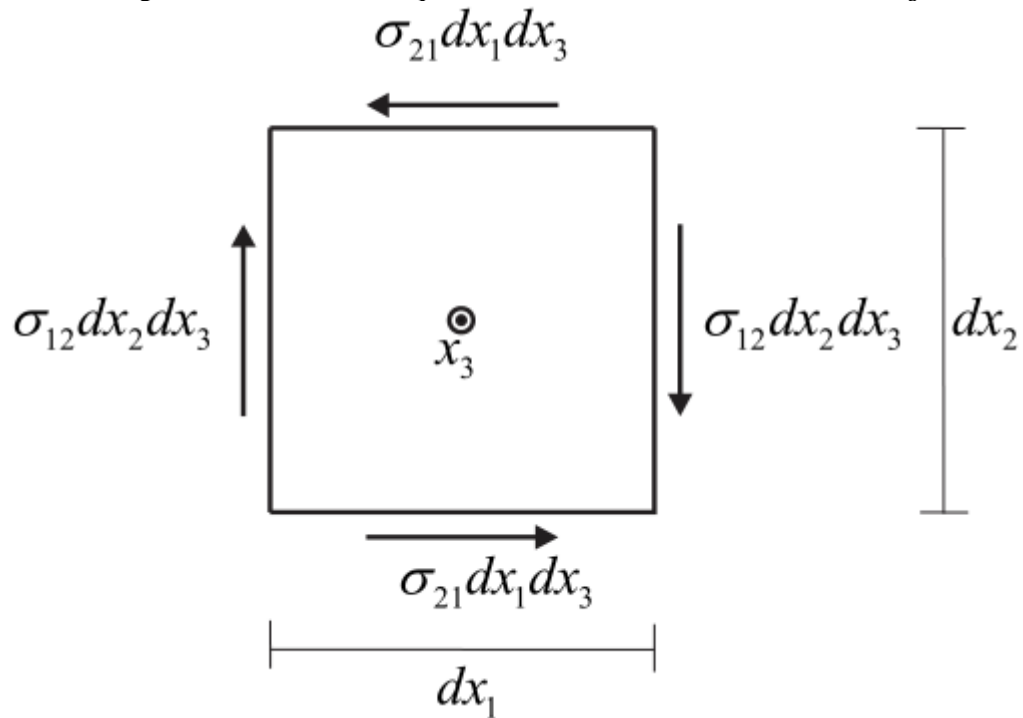
Considerando que o elemento infinitesimal cúbico se encontra em equilíbrio, analisa-se o equilíbrio de momentos em relação à direção x_3 (Figura 2.8):

$$(\sigma_{12} dx_2 dx_3) dx_1 = (\sigma_{21} dx_1 dx_3) dx_2 \quad (58)$$

resultando em

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (59)$$

Figura 2.8 – Análise do equilíbrio de momentos em torno do eixo x_3



Fonte: Coda (2018).

Repetindo-se o procedimento para os outros eixos, chega-se ao Teorema de Cauchy, que é dado por:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (60)$$

Pelo teorema, o tensor de tensões de Cauchy é simétrico, ou seja:

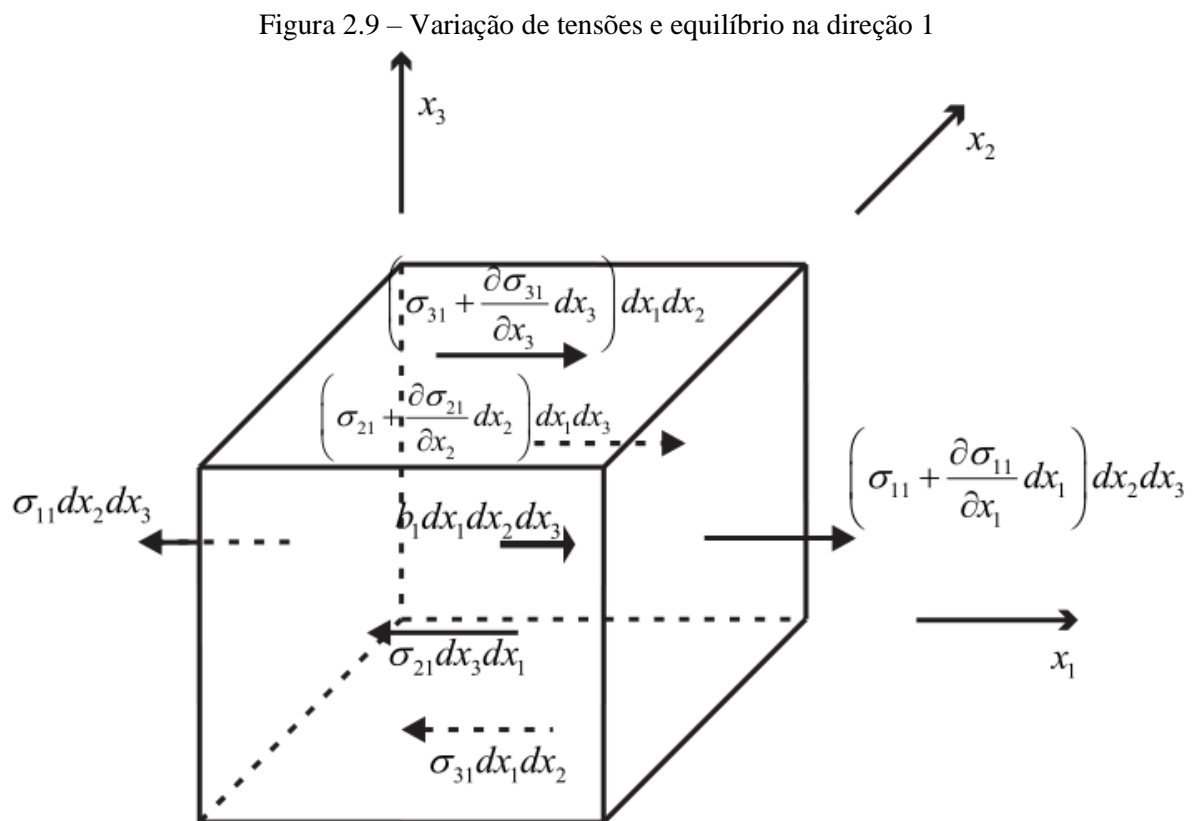
$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^t = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (61)$$

2.3 Equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio da Mecânica do Contínuo são válidas tanto para sólidos quanto para fluidos, sendo que a diferença dos modelos físicos para estes dois tipos de contínuo reside nas leis constitutivas adotadas. O equilíbrio pode ser descrito tomando-se como referência tanto a configuração inicial (lagrangeana) quanto atual (euleriana), podendo cada uma delas ser expressa do ponto de vista local ou global. As equações de equilíbrio para cada um destes casos são descritas a seguir.

2.3.1 Equilíbrio euleriano local

Diferentemente da análise realizada para a dedução do teorema de Cauchy, o contínuo é agora analisado considerando-se uma distribuição variável de tensões. Assim, para cada componente σ_{ij} atuante em uma face do elemento infinitesimal, existe uma tensão $\sigma_{ij} + \sigma_{ij,i}dx_i$ correspondente na face oposta, conforme apresentado na Figura 2.9:



Fonte: Coda (2018).

Aplicando-se a Segunda Lei de Newton nas três direções cartesianas, chega-se às equações diferenciais de equilíbrio/movimento locais eulerianas:

$$\sigma_{j,i,j} + b_i = \rho \ddot{y}_i \quad (62)$$

sendo b_i as forças de volume na configuração atual.

Através da análise do equilíbrio de momentos, deduz-se novamente o Teorema de Cauchy, sendo demonstrado que o teorema é válido também para problemas dinâmicos com rotação. Com isso, conclui-se que a simetria do tensor de tensões já traz implicitamente o equilíbrio de momentos.

2.3.2 Equilíbrio euleriano global

Para a obtenção do equilíbrio euleriano global, realiza-se a integração das equações diferenciais de equilíbrio/movimento locais representadas na Equação (62) no volume atual:

$$\int_V \sigma_{ji,j} dV + \int_V b_i dV = \int_V \rho \ddot{y}_i dV \quad (63)$$

Aplicando-se o Teorema da Divergência (Teorema de Gauss) no primeiro termo, escreve-se:

$$\int_A \sigma_{ji} n_j dA + \int_V b_i dV = \int_V \rho \ddot{y}_i dV \quad (64)$$

onde A é a área do contorno e n_j é o versor normal à área no ponto analisado.

Pela Fórmula de Cauchy, o termo $\sigma_{ji} n_j$ pode ser entendido como a força de superfície aplicada sob o contorno na configuração atual (p_i), ou seja:

$$p_i = \sigma_{ji} n_j \quad (65)$$

Substituindo-se a Fórmula de Cauchy na Equação (64), obtêm-se as equações de equilíbrio global eulerianas:

$$\int_A p_i dA + \int_V b_i dV = \int_V \rho \ddot{y}_i dV \quad (66)$$

2.3.3 Equilíbrio lagrangeano global

A partir das equações de equilíbrio global eulerianas, é possível obter equações de equilíbrio global que tenham como referência a configuração inicial do corpo (descrição lagrangeana). Primeiramente, aplicando-se a Equação (8) referente à variação de volume e a Equação (47) referente à variação de área (Fórmula de Nanson) nas equações de equilíbrio global eulerianas expressas na Equação (64), obtém-se:

$$\int_{A_0} J \sigma_{ji} (A_{kj})^{-t} N_k dA_0 + \int_{V_0} J b_i dV_0 = \int_{V_0} J \rho \ddot{y}_i dV_0 \quad (67)$$

Supondo que as forças de volume são conservativas e utilizando-se raciocínio análogo ao empregado para a obtenção da Equação (50), a força de volume na configuração inicial b_i^0 pode ser dada por:

$$b_i^0 = J b_i \quad (68)$$

Substituindo-se a Equação (68) na Equação (67) e aplicando-se o Princípio da Conservação de Massa por meio da Equação (50), obtém-se:

$$\int_{A_0} J\sigma_{ji}(A_{kj})^{-t} N_k dA_0 + \int_{V_0} b_i^0 dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i dV_0 \quad (69)$$

A seguir, define-se a tensão de Piola-Kirchhoff de primeira espécie P_{ki} , que é dada por:

$$P_{ki} = J\sigma_{ji}(A_{kj})^{-t} \quad (70)$$

o qual é um tensor não simétrico.

Substituindo-se a Equação (70) na Equação (69), são obtidas as equações de equilíbrio global lagrangeanas:

$$\int_{A_0} P_{ji} N_j dA_0 + \int_{V_0} b_i^0 dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i dV_0 \quad (71)$$

onde o índice mudo k foi substituído por j .

2.3.4 Equilíbrio lagrangeano local

Aplicando-se o Teorema da Divergência (Teorema de Gauss) na Equação (71) e considerando-se a arbitrariedade do volume inicial, são obtidas as equações de equilíbrio local lagrangeanas, que são dadas por:

$$P_{ji,j} + b_i^0 = \rho_0 \ddot{y}_i \quad (72)$$

2.4 Equilíbrio e energia

A análise numérica do equilíbrio de um sistema pode ser construída de diversas formas, sendo uma das mais difundidas a abordagem energética, a qual dá origem ao Método dos Elementos Finitos. Neste tipo de abordagem, é analisada a energia mecânica total do sistema (Π), a qual é composta pela energia potencial das forças externas (\mathbb{P}), energia de deformação (\mathbb{U}) e energia cinética (\mathbb{K}), conforme a expressão:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{K} \quad (73)$$

O equilíbrio do sólido (ou fluido) é obtido aqui através do Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica, o qual afirma que o equilíbrio é obtido quando a variação da energia mecânica total é nula, ou seja:

$$\delta\Pi = \delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{U} + \delta\mathbb{K} = 0 \quad (74)$$

O princípio pode ser descrito tanto de uma forma lagrangeana quanto euleriana, sendo as equações para ambas as descrições deduzidas a seguir.

2.4.1 Euleriano

Uma das formas de se escrever detalhadamente as parcelas da Equação (74) é a partir das equações de equilíbrio local eulerianas representadas na Equação (62) na forma:

$$g_i = \rho \ddot{y}_i - \sigma_{ji,j} - b_i = 0_i \quad (75)$$

sendo g_i um vetor nulo que representa força por unidade de volume.

A partir do vetor g_i , calcula-se a variação de trabalho $\delta\pi$ gerada pela força em uma mudança infinitesimal de posição δy_i :

$$\delta\pi = g_i \delta y_i = (\rho \ddot{y}_i - \sigma_{ji,j} - b_i) \delta y_i = 0 \quad (76)$$

Integrando-se a Equação (76) no volume atual, obtém-se:

$$\delta\Pi = \int_V \delta\pi dV = \int_V (\rho \ddot{y}_i - \sigma_{ji,j} - b_i) \delta y_i dV = 0 \quad (77)$$

Apesar de a Equação (77) indicar o equilíbrio quando $\delta\Pi = 0$, deve-se primeiramente verificar se $\delta\Pi$ representa a soma das variações da energia potencial das forças externas, energia de deformação e energia cinética apresentada na Equação (74). Para isto, separam-se os termos da última integral da Equação (77):

$$\int_V \rho \ddot{y}_i \delta y_i dV - \int_V b_i \delta y_i dV - \int_V \sigma_{ji,j} \delta y_i dV = 0 \quad (78)$$

Tendo em vista que o segundo termo da Equação (78) já corresponde à variação da energia potencial das forças externas decorrente das forças de volume, procede-se à análise dos dois demais termos. Para tal, parte-se da definição da energia cinética:

$$\mathbb{K} = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{y}_i \dot{y}_i dV \quad (79)$$

Calculando-se a variação da energia cinética e utilizando-se o corolário do Princípio de Conservação de Massa apresentado na Equação (53), escreve-se:

$$\delta\mathbb{K} = \frac{d\mathbb{K}}{dt} dt = \frac{1}{2} \int_V \rho \frac{d(\dot{y}_i \dot{y}_i)}{dt} dt dV = \int_V \rho \ddot{y}_i (\dot{y}_i dt) dV = \int_V \rho \ddot{y}_i \delta y_i dV \quad (80)$$

que é o primeiro termo da Equação (78).

Para a análise do último termo da Equação (78), aplica-se o divergente sobre o produto da tensão com a variação de posição:

$$(\sigma_{ji}\delta y_i)_{,j} = \sigma_{ji,j}\delta y_i + \sigma_{ji}\delta y_{i,j} \quad (81)$$

Rearranjando-se os termos, a Equação (81) fica:

$$\sigma_{ji,j}\delta y_i = (\sigma_{ji}\delta y_i)_{,j} - \sigma_{ji}\delta y_{i,j} \quad (82)$$

Dessa forma, o núcleo da terceira integral da Equação (78) pode ser substituído pelos termos da direita da igualdade da Equação (82), podendo a integral ser escrita como:

$$-\int_V \sigma_{ji,j}\delta y_i dV = \int_V \sigma_{ji}\delta y_{i,j} dV - \int_V (\sigma_{ji}\delta y_i)_{,j} dV \quad (83)$$

Aplicando-se o Teorema da Divergência (Teorema de Gauss) e a Fórmula de Cauchy apresentada na Equação (65) no último termo da Equação (83), tem-se que tal parcela pode ser escrita como:

$$-\int_V (\sigma_{ji}\delta y_i)_{,j} dV = -\int_A \sigma_{ji}\delta y_i n_j dA = -\int_A p_i \delta y_i dA \quad (84)$$

que se refere à parcela de forças externas de superfície do potencial de forças externas.

Por fim, avaliando-se o penúltimo termo da Equação (83), através da simetria do tensor de tensões de Cauchy, pode-se escrever:

$$\int_V \sigma_{ji}\delta y_{i,j} dV = \int_V \sigma_{ji} \frac{(\delta y_{i,j} + \delta y_{j,i})}{2} dV \quad (85)$$

Tendo-se em vista que a variação da deformação real ε_{ij} é dada por:

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{(\delta y_{i,j} + \delta y_{j,i})}{2} \quad (86)$$

então o termo dado na Equação (85) representa a variação da energia deformação, ou seja:

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (87)$$

de onde se conclui que a deformação real é conjugado energético da tensão de Cauchy.

Portanto, a Equação (74) representa o Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica e pode ser escrita como:

$$\int_V \rho \dot{y}_i \delta y_i dV - \int_V b_i \delta y_i dV - \int_A p_i \delta y_i dA + \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = 0 \quad (88)$$

2.4.2 Lagrangeano

Para a análise do equilíbrio utilizando-se uma descrição lagrangeana, escrevem-se as equações de equilíbrio local lagrangeanas apresentadas na Equação (72) na forma:

$$g_i = \rho_0 \ddot{y}_i - P_{ji,j} - b_i^0 = 0_i \quad (89)$$

sendo g_i um vetor nulo que representa força por unidade de volume.

A partir do vetor g_i , calcula-se a variação de trabalho $\delta\pi$ gerada pela força em uma mudança infinitesimal de posição δy_i :

$$\delta\pi = g_i \delta y_i = (\rho_0 \ddot{y}_i - P_{ji,j} - b_i^0) \delta y_i = 0 \quad (90)$$

Integrando-se a Equação (90) no volume inicial, obtém-se:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \delta\pi dV_0 = \int_{V_0} (\rho_0 \ddot{y}_i - P_{ji,j} - b_i^0) \delta y_i dV_0 = 0 \quad (91)$$

Repetindo-se as mesmas passagens apresentadas no item anterior, porém com as derivadas sendo realizadas em relação à configuração inicial, a Equação (91) pode ser escrita como:

$$\int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{A_0} P_{ji} N_j \delta y_i dA_0 + \int_{V_0} P_{ji} \delta y_{i,j} dV_0 = 0 \quad (92)$$

Analisando-se a terceira integral da Equação (92), admite-se que a força de superfície na configuração inicial p_i^0 possa ser dada pelo produto escalar da tensão de Piola-Kirchhoff de primeira espécie P_{ji} pelo versor normal à superfície na configuração inicial N_j , ou seja:

$$p_i^0 = P_{ji} N_j \quad (93)$$

Analisando-se a última integral da Equação (92), tem-se que:

$$\delta y_{i,j} = \delta A_{ji} \quad (94)$$

ou seja, A_{ji} é conjugado energético de P_{ji} .

Substituindo-se as Equações (93) e (94) na Equação (92), chega-se à expressão:

$$\int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \delta y_i dA_0 + \int_{V_0} P_{ji} \delta A_{ij} dV_0 = 0 \quad (95)$$

a qual representa o Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica na versão lagrangeana.

Devido à inconveniência decorrente da não simetria da tensão de Piola-Kirchhoff de primeira espécie, define-se a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie \mathbf{S} através da expressão:

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{A}^t \quad (96)$$

Substituindo-se a Equação (96) na definição da tensão de Piola-Kirchhoff de primeira espécie apresentada na Equação (70) e isolando-se \mathbf{S}^t , obtém-se:

$$\mathbf{S}^t = \mathbf{J} \mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}^{-t} \quad (97)$$

Tendo em vista a simetria de $\boldsymbol{\sigma}$, tem-se que:

$$\mathbf{S} = J(\mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}^{-t})^t = J\mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{A}^{-t} = J\mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}^{-t} = \mathbf{S}^t \quad (98)$$

de onde se conclui que \mathbf{S} é simétrico.

Dessa forma, a partir da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, pode-se obter a tensão de Cauchy isolando-se $\boldsymbol{\sigma}$ na Equação (98):

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^t \quad (99)$$

Com a Equação (96), a última parcela da Equação (95) pode ser escrita como:

$$\int_{V_0} \mathbf{P}^t : \delta \mathbf{A} dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} : \delta \mathbf{A} dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A} : \mathbf{S} dV_0 \quad (100)$$

Devido à simetria de \mathbf{S} , pode-se escrever:

$$\mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A} : \mathbf{S} = (\mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A}) : \mathbf{S} = (\mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A})^t : \mathbf{S} = (\delta \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}) : \mathbf{S} = \delta \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} : \mathbf{S} \quad (101)$$

Como o primeiro e último termos da Equação (101) são iguais, tem-se que:

$$\mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A} : \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A} : \mathbf{S} + \delta \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} : \mathbf{S}) = \frac{1}{2} (\mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A} + \delta \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}) : \mathbf{S} \quad (102)$$

A partir da definição da deformação de Green fornecida na Equação (24) e da definição do tensor \mathbf{C} expressa na Equação (11), a variação da deformação de Green pode ser obtida por:

$$\delta \mathbb{E} = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A}) \quad (103)$$

Substituindo-se a Equação (103) na Equação (102), obtém-se:

$$\mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A} : \mathbf{S} = \delta \mathbb{E} : \mathbf{S} = \mathbf{S} : \delta \mathbb{E} \quad (104)$$

de onde se conclui que a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é conjugado energético da deformação de Green.

Com isso, a última parcela da Equação (95) pode ser escrita como:

$$\int_{V_0} \mathbf{P}^t : \delta \mathbf{A} dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbb{E} dV_0 \quad (105)$$

Finalmente, substituindo-se a Equação (105) na Equação (95), obtém-se a expressão:

$$\int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \delta y_i dA_0 + \int_{V_0} S_{ji} \delta E_{ij} dV_0 = 0 \quad (106)$$

a qual representa o Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica na versão lagrangeana escrita em função da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e da deformação de Green.

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL

Neste capítulo, é apresentada a formulação do Método dos Elementos Finitos Posicional. Como o próprio nome sugere, o método é uma variação do Método dos Elementos Finitos, na qual são utilizadas posições ao invés de deslocamentos na descrição cinemática dos corpos. A formulação utiliza uma descrição lagrangeana total em todas as etapas de análise e apresenta uma abordagem naturalmente não-linear geométrica, sendo apropriada para a resolução de problemas no regime de grandes deslocamentos, rotações e deformações, os quais são objeto de estudo da pesquisa. Ressalta-se que a formulação apresentada é relativa à análise de elementos de sólido, cuja descrição foi feita com base no texto de Coda (2018).

3.1 Aproximação multidimensional

No Método dos Elementos Finitos, o meio contínuo é discretizado em um número finito de subdomínios, os quais são denominados elementos finitos. Dessa forma, um problema mecânico contínuo com infinitas incógnitas passa a ser discreto com um número finito de incógnitas.

A determinação dos valores das variáveis no domínio é feita aqui por interpolação através de polinômios de Lagrange, também denominados funções de forma. As constantes dos polinômios são determinadas a partir dos valores das funções nos pontos base de aproximação. Os polinômios de Lagrange unidimensionais φ_i são dados pela seguinte fórmula geral:

$$\varphi_i = \prod_{j=1(j \neq i)}^{p+1} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)} \quad (107)$$

onde ξ são coordenadas adimensionais.

As funções de forma possuem como propriedade importante a partição da unidade (a soma de todos os polinômios de mesma ordem resulta na unidade), o que os torna capazes de representar trechos de função constante. Uma vez conhecidos os valores das funções nos pontos base, com os polinômios aproximadores é possível determinar os valores das variáveis em todo o domínio.

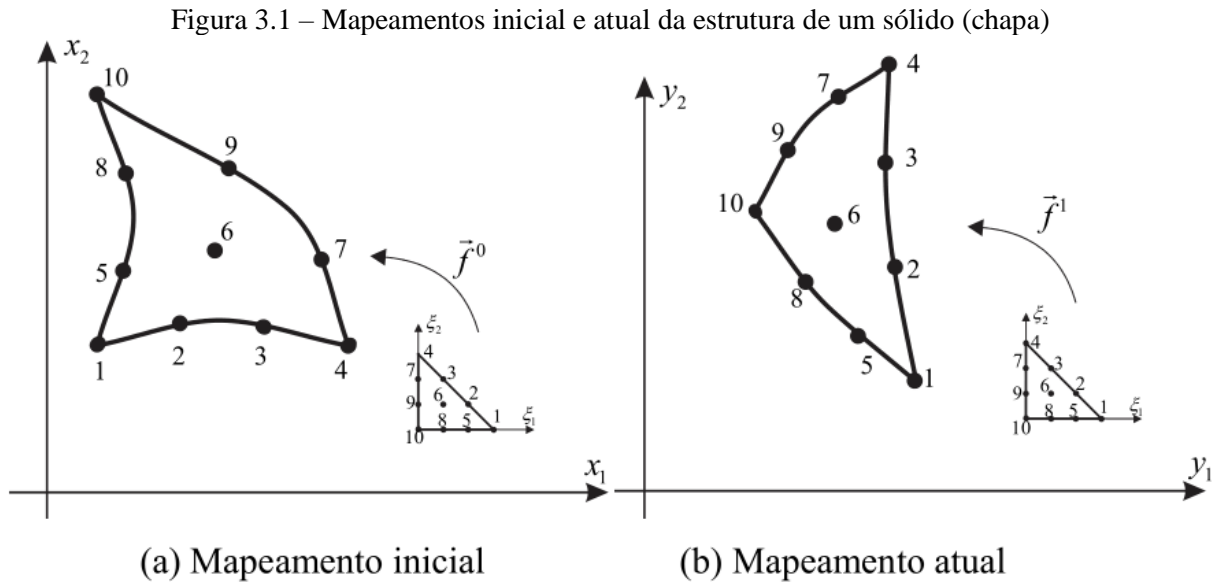
As posições inicial e atual de um sólido (ou fluido) são obtidos respectivamente através das seguintes expressões:

$$x_i(\vec{\xi}) = \varphi_i(\vec{\xi})X_i^l \quad (108)$$

$$y_i(\vec{\xi}) = \varphi_i(\vec{\xi})Y_i^l \quad (109)$$

onde X_i^l e Y_i^l são, respectivamente, as posições nodais nas configurações inicial e atual.

A partir das coordenadas adimensionais ξ , podem ser obtidas as funções de mapeamento inicial e atual, as quais transformam, respectivamente, o domínio adimensional nas configurações inicial \vec{f}^0 e atual \vec{f}^1 do sólido (ou fluido), conforme apresentado na Figura 3.1:



Fonte: Coda (2018).

Com isso, podem ser obtidos os gradientes dos mapeamentos inicial A_{ij}^0 e atual A_{ij}^1 , os quais são dados, respectivamente, pelas expressões:

$$A_{ij}^0 = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j} X_i^l \quad (110)$$

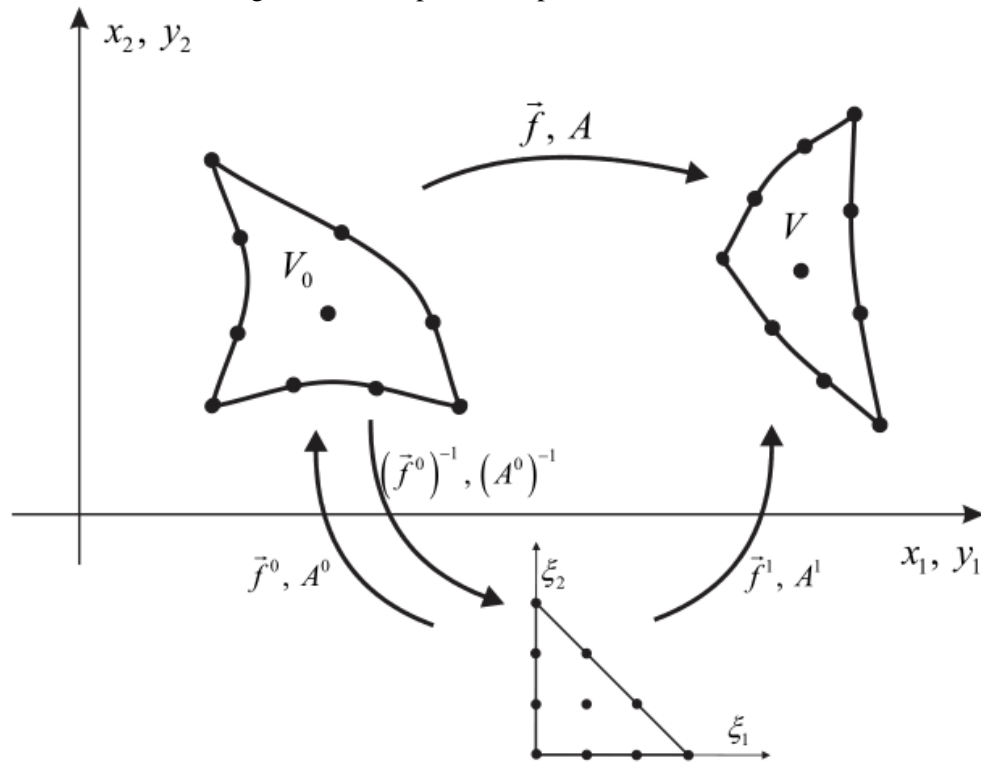
$$A_{ij}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j} Y_i^l \quad (111)$$

Assim, pode-se calcular o determinante do mapeamento inicial J_0 , que é dado por:

$$J_0 = \text{Det}(\mathbf{A}_0) \quad (112)$$

Uma vez conhecidos os mapeamentos inicial e atual, passa a ser possível a determinação da função mudança de configuração (função que transforma os pontos do sólido na configuração inicial nos pontos da configuração atual), conforme apresentado na Figura 3.2:

Figura 3.2 – Mapeamento posicional do sólido



Fonte: Coda (2018).

Nota-se, no entanto, que não é necessária a obtenção da função mudança de configuração, mas sim de seu gradiente, que pode ser obtido a partir dos gradientes dos mapeamentos inicial e atual:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \quad (113)$$

onde se destaca que a inversa do gradiente do mapeamento do espaço adimensional para a configuração inicial possibilita a aplicação numérica da regra da cadeia.

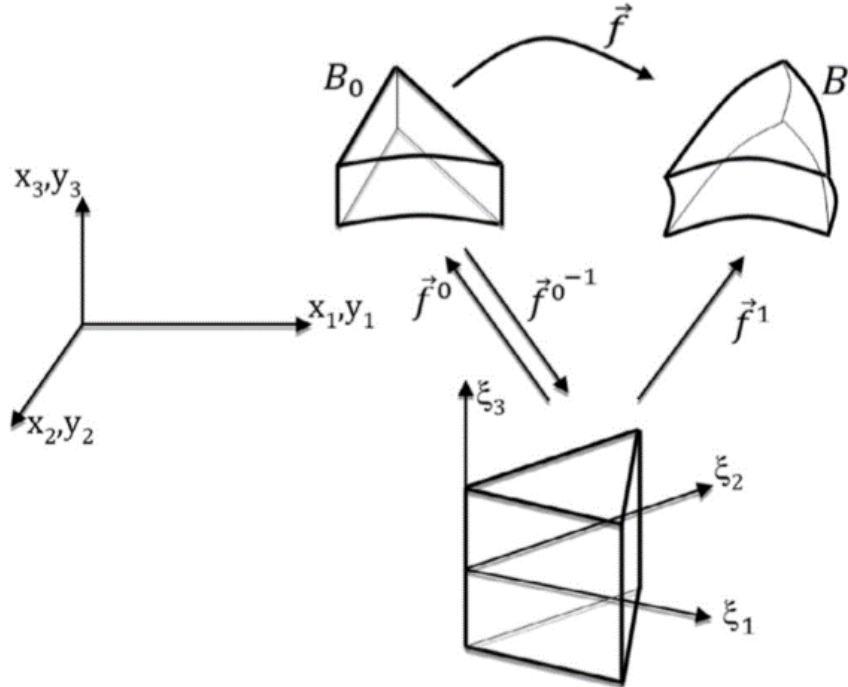
3.2 Elemento finito prismático de base triangular

A discretização de um sólido (ou mesmo de um fluido) pode ser feita utilizando-se diversos tipos de elementos finitos. No presente trabalho, foi empregado elemento finito prismático de base triangular com descrição lagrangeana total, o qual foi utilizado por Carrazedo e Coda (2017) na análise de placas e cascas laminadas finas a espessas.

Apenas para enfatizar o entendimento de uma perspectiva tridimensional, a função de mapeamento \vec{f}^0 transforma o domínio adimensional (ξ_1, ξ_2, ξ_3) na configuração inicial indeformada B_0 , enquanto que a função de mapeamento \vec{f}^1 transforma o espaço adimensional

(ξ_1, ξ_2, ξ_3) na configuração atual B . As variáveis dimensionais ξ_1 e ξ_2 são definidas para um intervalo de $[0,1]$ e representam a base do prisma nas duas transformações, enquanto que a variável ξ_3 é definida para um intervalo de $[-1,1]$ e representa a altura do prisma. As funções de mapeamento são apresentadas na Figura 3.3:

Figura 3.3 – Mapeamento das configurações inicial e atual



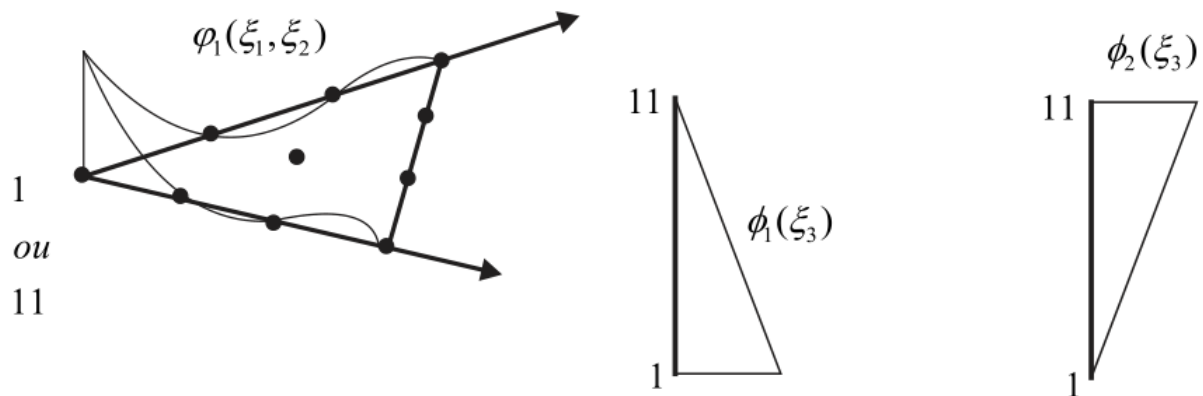
Fonte: Carrazedo e Coda (2017).

O elemento prismático é criado através da extrusão de um elemento finito triangular em sua espessura (direção ξ_3) e tem como vantagem a não necessidade de a espessura apresentar o mesmo grau de aproximação da base. As funções de forma do elemento prismático (ψ_{ij}) são obtidas através da multiplicação das funções de forma da base (φ_i) pelas funções de forma da espessura (ϕ_j):

$$\psi_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \varphi_i(\xi_1, \xi_2)\phi_j(\xi_3) \quad (114)$$

onde a regra $k = (j - 1)i + i$ é utilizada para a utilização de um índice único nas implementações. Um esquema ilustrativo demonstrando a obtenção das funções de forma do elemento prismático é apresentado na Figura 3.4:

Figura 3.4 – Construção de funções de forma do elemento prismático de base triangular



$$\psi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \varphi_1(\xi_1, \xi_2)\phi_1(\xi_3)$$

$$\psi_{11}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \varphi_1(\xi_1, \xi_2)\phi_2(\xi_3)$$

Fonte: o próprio autor.

No caso, foi adotada aproximação cúbica na base e deixou-se a opção de aproximação linear ou cúbica na espessura, de modo que a linear pudesse ser empregada principalmente na resolução de problemas planos e a cúbica pudesse ser utilizada em problemas tridimensionais.

3.3 Formulação estática elástica

A formulação do Método dos Elementos Finitos Posicional parte da energia mecânica total do sistema, a qual é composta pela energia potencial das forças externas, energia de deformação e energia cinética, conforme apresentado na Equação (73). No entanto, a parcela referente à energia cinética é desconsiderada em análises estáticas (comenta-se que, como a descrição de fluidos é intrinsecamente dinâmica, o tema não é abordado neste item). Dessa forma, a energia mecânica é calculada como:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} \quad (115)$$

Tendo-se em vista que as forças internas são função da energia específica de deformação e que o potencial das forças externas é composto pelas parcelas referentes às forças concentradas (F_j^n), forças de superfície ($Q_j^{\alpha 0}$) e forças de volume ($B_j^{\alpha 0}$), a expressão da energia mecânica pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \Pi = & -F_j^\eta Y_j^\eta - B_j^{\alpha 0} \int_{V_0^{el}} \varphi_\alpha \varphi_\eta dV_0^{el} Y_j^\eta - Q_j^{\alpha 0} \int_{A_0^{el}} \varphi_\alpha \varphi_\eta dA_0^{el} Y_j^\eta \\ & + \int_{V_0^{el}} \Psi(Y_k^m) dV_0^{el} \end{aligned} \quad (116)$$

onde os mesmos conceitos de aproximação utilizados para posições no item anterior foram aplicados para a aproximação das forças de volume e de superfície através de seus valores nodais. Observa-se ainda que também foram incluídas as forças nodais concentradas.

Aplicando-se o Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica apresentado na Equação (74) no funcional de energia dado pela Equação (116), obtém-se:

$$\delta \Pi = -F_i^l \delta Y_i^l - \int_{V_0^{el}} b_i^0 \delta y_i dV_0^{el} - \int_{A_0^{el}} p_i^0 \delta y_i dA_0^{el} + \int_{V_0^{el}} S_{kj} \delta \mathbb{E}_{kj} dV_0^{el} = 0 \quad (117)$$

Utilizando-se as funções de forma para a aproximação das variáveis e considerando que a variação das posições nodais δY_i^l é arbitrária, escreve-se:

$$\begin{aligned} -F_i^l - \int_{V_0^{el}} \varphi_m(\vec{\xi}) \varphi_l(\vec{\xi}) dV_0^{el} B_i^m - \int_{A_0^{el}} \varphi_m(\vec{\xi}) \varphi_l(\vec{\xi}) dA_0^{el} Q_i^m \\ + \int_{V_0^{el}} S_{kj} \frac{\partial \mathbb{E}_{kj}}{\partial Y_i^l} dV_0^{el} = 0_i^l \end{aligned} \quad (118)$$

onde as integrais são realizadas numericamente pelo produto da quadratura de Hammer (HAMMER; MARLOWE; STRAUD, 1956) segundo as coordenadas que constituem a base triangular com a quadratura de Gauss-Legendre segundo a terceira coordenada adimensional. Na terceira coordenada adimensional (altura do elemento), as integrações numéricas são realizadas com 2 pontos de Gauss no caso de aproximação linear e 4 pontos de Gauss no caso de aproximação cúbica. Já segundo as coordenadas da base, o programa foi implementado de forma que as integrações numéricas pudessem ser realizadas com 7 ou 12 pontos de Hammer, de modo a oferecer ao usuário a possibilidade de obtenção de resultados mais precisos com 12 pontos ou resultados com tempo de processamento menor com 7 pontos.

De forma simplificada, o conjunto de equações não lineares apresentado na Equação (118) pode ser entendido como:

$$F_j^{int} - F_j^{ext} = 0_j \quad (119)$$

onde F_j^{int} são as forças internas e F_j^{ext} são as forças externas.

Como são empregados elementos finitos prismáticos de base triangular para a discretização do meio modelado, as forças internas são calculadas para cada elemento através da expressão:

$$\begin{aligned}
(F_i^l)^{int}_{el} &= \int_{V_0^{el}} \frac{\partial \Psi(Y_k^m)}{\partial Y_i^l} dV_0 = \int_{V_0^{el}} f_i^l dV_0 \\
&= \sum_{ig=1}^{ng} \sum_{ih=1}^{nh} f_i^l(\vec{\xi}(ih, ig)) J_0(\vec{\xi}(ih, ig)) w_{ih} w_{ig}
\end{aligned} \tag{120}$$

onde ig é o índice do ponto de Gauss, ng é o número de pontos de Gauss, ih é o índice do ponto de Hammer, nh é o número de pontos de Hammer, w_{ih} é o peso de Hammer e w_{ig} é o peso de Gauss.

A contribuição da força interna de cada elemento finito f_α^β é calculada por:

$$f_\alpha^\beta = \frac{\partial \Psi}{\partial Y_\alpha^\beta} = S_{ij} \frac{\partial \mathbb{E}_{ij}}{\partial Y_\alpha^\beta} \tag{121}$$

Já as forças externas são compostas pelas parcelas referentes às forças concentradas, forças de superfície e forças de volume, sendo dadas por:

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_i^l} = -(F_i^l)^{ext} = -F_i^l - \int_{V_0^{el}} \varphi_l \varphi_a dV_0^{el} B_i^{a0} - \int_{A_0^{el}} \varphi_l \varphi_a dA_0^{el} Q_i^{a0} \tag{122}$$

As parcelas referentes às forças concentradas são somadas diretamente às forças externas. As forças de volume $(F_i^l)^{vol}$, por sua vez, são calculadas para cada elemento por integração numérica:

$$(F_i^l)^{vol} = \int_{V_0^{el}} \varphi_l \varphi_a dV_0 B_i^{a0} = \left(\sum_{ig=1}^{ng} \sum_{ih=1}^{nh} \varphi_l(ih) \varphi_a(ih) J_0 w_{ih} w_{ig} \right) B_i^{a0} \tag{123}$$

onde o tensor resultante do termo em parênteses é constante para cada elemento finito.

As forças distribuídas de superfície $(F_i^l)^{sup}$ são calculadas de forma diferente dependendo de onde são aplicadas. Com a discretização adotada, o carregamento pode ser aplicado tanto em superfícies com elementos triangulares quanto em superfícies com elementos retangulares. No caso de elementos triangulares, as forças de superfície são calculadas por:

$$(F_i^l)^{sup} = \int_{A_0^{el}} \varphi_l \varphi_a dA_0 Q_i^{a0} = \left(\sum_{ih=1}^{nh} \varphi_l(ih) \varphi_a(ih) J_0 w_{ih} \right) Q_i^{a0} \tag{124}$$

e, no caso de aplicação em elementos retangulares, pela expressão:

$$\begin{aligned}
(F_i^l)^{sup} &= \int_{A_0^{el}} \varphi_l \varphi_a dA_0 Q_i^{a0} \\
&= \left(\sum_{ig1=1}^{ng1} \sum_{ig2=1}^{ng2} \varphi_l(ig1, ig2) \varphi_a(ig1, ig2) J_0 w_{ig1} w_{ig2} \right) Q_i^{a0}
\end{aligned} \tag{125}$$

A resolução do sistema de equações não lineares expresso na Equação (118) é realizada por processo iterativo de Newton-Raphson. Para isso, reescreve-se o conjunto de equações não lineares dado pela Equação (119) na forma de g_j , denominado de vetor resíduo:

$$g_j = F_j^{int} - F_j^{ext} = 0_j \tag{126}$$

Na técnica de solução, as posições atuais são as incógnitas do problema e são conhecidas na forma de tentativa. Quando a estrutura se encontra fora da posição de equilíbrio, o vetor g_j apresenta valor não nulo e passa a ser chamado de vetor de desbalanceamento mecânico de Newton-Raphson.

Expandindo-se o vetor de desbalanceamento mecânico em série de Taylor na vizinhança da posição tentativa \vec{Y}^0 , tem-se:

$$g_j(Y_k) = g_j(Y_k^0) + \left. \frac{\partial g_j}{\partial Y_k} \right|_{Y_k^0} \Delta Y_k + O_j^2 = 0 \tag{127}$$

Desprezando-se os termos de ordem superior (O_j^2), obtém-se o conjunto de equações lineares a ser resolvido:

$$\Delta Y_k = - \left(\left. \frac{\partial g_j}{\partial Y_k} \right|_{Y_k^0} \right)^{-1} g_j(Y_k^0) = - \left(\left. \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y_k \partial Y_j} \right|_{Y_k^0} \right)^{-1} g_j(Y_k^0) = -(H_{kj})^{-1} g_j(Y_k^0) \tag{128}$$

onde ΔY_k é a correção das posições e H_{kj} é a matriz hessiana.

No programa, a correção das posições é obtida através da resolução do sistema de equações lineares na forma:

$$H_{kj} \Delta Y_k = -g_j \tag{129}$$

Por sua vez, a matriz hessiana é dada por:

$$H_{kj} = \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y_k \partial Y_j} \tag{130}$$

a qual, assim como as forças internas, é calculada para cada elemento por meio de integração numérica pela expressão:

$$H_{\alpha\beta\gamma z}^{el} = \int_{V_0^{el}} h_{\alpha\beta\gamma z} dV_0 = \sum_{ig=1}^{ng} \sum_{ih=1}^{nh} h_{\alpha\beta\gamma z}(\vec{\xi}(ih, ig)) J_0(\vec{\xi}(ih, ig)) w_{ih} w_{ig} \tag{131}$$

onde a contribuição da matriz hessiana de cada elemento finito $h_{\alpha\beta\gamma z}$ é dada por:

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \mathcal{C} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + \mathcal{S} : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} \quad (132)$$

Após a montagem da matriz hessiana e do vetor resíduo, as condições de contorno são impostas na estrutura zerando-se as linhas e colunas e atribuindo-se 1 na diagonal principal da matriz hessiana e zerando-se o vetor de desbalanceamento mecânico nas posições correspondentes aos graus de liberdade restritos. Dessa forma, a matriz hessiana fica invertível e as correções nos graus de liberdade restritos resultam valor nulo.

Por fim, depois de obtida a correção das posições, as posições são atualizadas para uma nova tentativa:

$$Y_k^0 \leftarrow Y_k^0 + \Delta Y_k \quad (133)$$

O processo é repetido até que a correção das posições atinja valores muito pequenos e menores que uma tolerância pré-estabelecida (tol), ou seja:

$$\frac{\|\Delta \vec{Y}\|}{\|\vec{X}\|} \leq tol \quad (134)$$

Encontrada a posição de equilíbrio estático para o passo de carga e/ou deslocamento, o nível de carga/deslocamento é aumentado de forma incremental e o processo é repetido.

O pseudocódigo da análise estática é apresentado na Figura 3.5. Ressalta-se que as equações para o cálculo da matriz pseudo-inversa (utilizada para a obtenção das tensões de Cauchy) são apresentadas posteriormente no item 3.5.

Figura 3.5 – Pseudocódigo da análise estática

1	Leitura do arquivo de entrada
2	Cálculo da matriz pseudo-inversa \mathcal{M} [Equações (156) e (157)]
3	Posições iniciais assumidas como primeira tentativa ($\vec{Y} = \vec{X}$)
4	Loop fases de carregamento/deslocamento
5	Acúmulo das forças de volume equivalentes \vec{F}^{vol} no vetor de carga imposta $d\vec{f}$ ($d\vec{f} \leftarrow d\vec{f} + \vec{F}^{vol}$) [Equação (123)]
6	Acúmulo das forças de superfície equivalentes \vec{F}^{sup} no vetor de carga imposta $d\vec{f}$ ($d\vec{f} \leftarrow d\vec{f} + \vec{F}^{sup}$) [Equações (124) e (125)]
7	Determinação do incremento de carga $d\vec{f}$ ($d\vec{f} \leftarrow d\vec{f}/n^o$ passos)
8	Determinação do incremento de deslocamento $d\vec{Y}$ ($d\vec{Y} \leftarrow d\vec{Y}/n^o$ passos)
9	Forças externas inicialmente nulas ($\vec{F}^{ext} = \vec{0}$)
10	Loop passos de carga/deslocamento
11	Incremento das forças externas ($\vec{F}^{ext} \leftarrow \vec{F}^{ext} + d\vec{f}$)
12	Incremento das posições ($\vec{Y} \leftarrow \vec{Y} + d\vec{Y}$)
13	Enquanto ($\frac{\ \Delta\vec{Y}\ }{\ \vec{X}\ } \geq tol$)
14	Cálculo das forças internas \vec{F}^{int} [Equações (120) e (121)]
15	Cálculo da matriz hessiana \mathbf{H} [Equações (131) e (132)]
16	Cálculo do vetor de desbalanceamento mecânico \vec{g} [Equação (126)]
17	Imposição das condições de contorno em \mathbf{H} e \vec{g}
18	Cálculo da correção das posições $\Delta\vec{Y}$ [Equação (129)]
19	Atualização das posições [Equação (133)]
20	Fim loop
21	Cálculo das tensões de Cauchy [Equação (99)]
22	Escrita do arquivo de saída
23	Fim loop
24	Fim loop

Fonte: o próprio autor.

3.4 Formulação dinâmica elástica

Antes do início da descrição da formulação dinâmica elástica, comenta-se que neste item a limitação ao estudo de problemas de sólidos (no caso elástico) está situada apenas na utilização de modelo constitutivo hiperelástico. Posteriormente, em seções oportunas (itens 6.2 e 6.3), é definida uma relação constitutiva viscosa que permite a utilização da formulação dinâmica aqui descrita para a análise de problemas de fluidos viscosos e compressíveis.

Na formulação dinâmica, a parcela da energia cinética da energia mecânica total desconsiderada na formulação estática passa a ser incluída no funcional de energia. Assim,

aplicando-se o Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica e considerando que a variação das posições nodais é arbitrária, obtém-se:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_i^\alpha} + \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y_i^\alpha} + \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial Y_i^\alpha} = 0_i^\alpha \quad (135)$$

Dessa forma, passa a ser necessário o cálculo da derivada da energia cinética em relação às posições. Pelo Princípio de D'Alambert, tal parcela pode ser entendida como forças inerciais (\vec{F}^{inerc}) do sistema, as quais são dadas por:

$$\vec{F}^{inerc} = \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \vec{Y}} = \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} \quad (136)$$

sendo \mathbf{M} a matriz de massa (constante no tempo), que é calculada para cada elemento por:

$$\mathbf{M}^{el} = \int_{V_0} \rho_0 \vec{\varphi} \otimes \vec{\varphi} dV_0 \quad (137)$$

Com isso, o sistema de equações não lineares de equilíbrio/movimento passa a ser dado pela seguinte expressão:

$$\vec{F}^{int}(\vec{Y}) - \vec{F}^{ext}(t) + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} = \vec{0} \quad (138)$$

Aproveitando resultados da análise dinâmica de sólidos no regime de pequenos deslocamentos, pode-se considerar que o amortecimento do sistema é proporcional à velocidade. Assim, o vetor resíduo é dado por:

$$\vec{g} = \vec{F}^{int}(\vec{Y}) + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\vec{Y}} - \vec{F}^{ext}(t) = \vec{0} \quad (139)$$

onde \mathbf{C} é a matriz de amortecimento.

Em problemas dinâmicos usuais de análise estrutural, a matriz de amortecimento pode ser assumida como sendo uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez, podendo ser dada na forma (WARBURTON, 1976):

$$\mathbf{C} = \lambda_m \mathbf{M} + \lambda_k \mathbf{K} \quad (140)$$

onde λ_m e λ_k são constantes e \mathbf{K} é a matriz de rigidez (matriz hessiana inicial).

Para o processo de solução, a técnica de Newton-Raphson é combinada com o algoritmo de integração numérica temporal de Newmark (NEWMARK, 1959). O algoritmo é utilizado devido à sua simplicidade, eficiência e pelo fato de a matriz de massa ser constante na maioria das aplicações do Método dos Elementos Finitos Posicional, fazendo com que o mesmo apresente bom desempenho em análises não lineares (CODA, 2018).

Com o integrador temporal, o tempo contínuo passa a ser discreto, ou seja:

$$t_{s+1} = t_s + \Delta t \quad (141)$$

onde o subscrito $s + 1$ é referente ao passo atual, o subscrito s é referente ao passo anterior, t é o tempo e Δt é o incremento de tempo.

No algoritmo de Newmark, são utilizadas as seguintes aproximações:

$$\vec{Y}_{s+1} = \vec{Y}_s + \vec{Y}_s \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \vec{Y}_s + \beta \vec{Y}_{s+1} \right] \Delta t^2 \quad (142)$$

$$\vec{Y}_{s+1} = \vec{Y}_s + (1 - \gamma) \Delta t \vec{Y}_s + \gamma \Delta t \vec{Y}_{s+1} \quad (143)$$

onde β e γ são parâmetros livres. Em estruturas convencionais, costumam ser utilizados os valores $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$, os quais, substituídos nas Equações (142) e (143), recaem nas equações de movimento retilíneo uniformemente acelerado (aceleração constante em um passo de tempo).

Com as aproximações de Newmark, o vetor resíduo passa a apresentar a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{Y}_{s+1}) &= \frac{\partial U}{\partial \vec{Y}} \Big|_{s+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \cdot \vec{Y}_{s+1} - \mathbf{M} \cdot \vec{Q}_s + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \cdot \vec{Y}_{s+1} + \mathbf{C} \cdot \vec{R}_s - \gamma \Delta t \mathbf{C} \cdot \vec{Q}_s \\ &\quad - \vec{F}_{s+1}^{ext}(t) = \vec{0} \end{aligned} \quad (144)$$

onde \vec{Q}_s e \vec{R}_s são vetores auxiliares constantes no passo de tempo, que são dados respectivamente por:

$$\vec{Q}_s = \frac{\vec{Y}_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\vec{Y}_s}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \vec{Y}_s \quad (145)$$

$$\vec{R}_s = \vec{Y}_s + \Delta t (1 - \gamma) \vec{Y}_s \quad (146)$$

Expandindo-se o vetor resíduo em série de Taylor e truncando-se em primeira ordem, chega-se à expressão da correção das posições:

$$\Delta \vec{Y} = -[\mathbf{H}(\vec{Y}_{s+1}^0)]^{-1} \cdot \vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) \quad (147)$$

No programa, a correção das posições é obtida através da resolução do sistema de equações lineares na forma:

$$\mathbf{H}(\vec{Y}_{s+1}^0) \cdot \Delta \vec{Y} = \vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) \quad (148)$$

Na formulação dinâmica, a matriz hessiana passa a ser composta por duas parcelas, uma estática (\mathbf{H}^{est}) e outra dinâmica, sendo a primeira calculada de forma idêntica à mencionada na formulação estática. A expressão completa da matriz hessiana é dada por:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{est} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \quad (149)$$

Para o primeiro passo de tempo, a aceleração é dada pela expressão:

$$\vec{Y}_0 = \mathbf{M}^{-1} \cdot \left(\vec{F}_0^{ext} - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \vec{Y}} \Big|_0 - \mathbf{C} \cdot \vec{Y}_0 \right) \quad (150)$$

No programa, a aceleração inicial é obtida através da resolução do sistema de equações lineares na forma:

$$\mathbf{M} \cdot \vec{Y}_0 = \vec{F}_0^{ext} - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \vec{Y}} \Big|_0 - \mathbf{C} \cdot \vec{Y}_0 \quad (151)$$

devendo as imposições de contorno serem impostas na matriz de massa e no vetor resultante do lado direito da equação.

O processo de solução é realizado de forma iterativa, onde para cada passo de tempo são calculadas a aceleração e a velocidade através das expressões:

$$\vec{Y}_{S+1} = \frac{\vec{Y}_{S+1}}{\beta \Delta t^2} - \vec{Q}_S \quad (152)$$

$$\vec{Y}_{S+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \vec{Y}_{S+1} + \vec{R}_S - \gamma \Delta t \vec{Q}_S \quad (153)$$

onde os valores atuais das posições nodais são corrigidos pelos valores de $\Delta \vec{Y}$ obtidos na Equação (148) na forma:

$$\vec{Y}_{S+1} \leftarrow \vec{Y}_S + \Delta \vec{Y} \quad (154)$$

O processo é repetido até que se atenda o critério de parada dado na Equação (134). Determinada a posição de equilíbrio da estrutura, prossegue-se para o próximo passo de tempo, onde o procedimento é refeito.

A seguir, é apresentado o pseudocódigo da análise dinâmica:

Figura 3.6 – Pseudocódigo da análise dinâmica

1	Leitura do arquivo de entrada
2	Cálculo da matriz pseudo-inversa \mathcal{M} [Equações (156) e (157)]
3	Posições iniciais assumidas como primeira tentativa ($\vec{Y} = \vec{X}$)
4	Cálculo da matriz de massa \mathbf{M} [Equação (137)]
5	Acúmulo das forças de volume equivalentes \vec{F}^{vol} no vetor de forças externas \vec{F}^{ext} ($\vec{F}^{ext} \leftarrow \vec{F}^{ext} + \vec{F}^{vol}$) [Equação (123)]
6	Acúmulo das forças de superfície equivalentes \vec{F}^{sup} no vetor de forças externas \vec{F}^{ext} ($\vec{F}^{ext} \leftarrow \vec{F}^{ext} + \vec{F}^{sup}$) [Equações (124) e (125)]
7	Cálculo da matriz de amortecimento \mathbf{C} [Equação (140)]
8	Imposição das condições de contorno em \mathbf{M} e no vetor resultante do lado direito da Equação (151)
9	Cálculo da aceleração inicial [Equação (151)]
10	Loop passos de tempo
11	Incremento do tempo ($t = passo\ tempo * \Delta t$)
12	Cálculo da força externa transiente $\vec{F}^{ext}(t)$
13	Cálculo de \vec{Q}_s [Equação (145)]
14	Cálculo de \vec{R}_s [Equação (146)]
15	Enquanto ($\frac{\ \Delta\vec{Y}\ }{\ \vec{X}\ } \geq tol$)
16	Cálculo das forças internas \vec{F}^{int} [Equações (120) e (121)]
17	Cálculo da parcela estática da matriz hessiana \mathbf{H}^{est} [Equações (131) e (132)]
18	Soma da parcela dinâmica na matriz hessiana [Equação (149)]
19	Cálculo do vetor de desbalanceamento mecânico \vec{g} [Equação (144)]
20	Imposição das condições de contorno em \mathbf{H} e \vec{g}
21	Cálculo da correção das posições $\Delta\vec{Y}$ [Equação (148)]
22	Atualização das posições [Equação (154)]
23	Fim loop
24	Atualização da aceleração [Equação (152)]
25	Atualização da velocidade [Equação (153)]
26	Cálculo das tensões de Cauchy [Equação (99)]
27	Escrita do arquivo de saída
28	Fim loop

Fonte: o próprio autor.

3.5 Cálculo de tensões de Cauchy

Devido a seu significado físico e ao fato de constituírem muitos modelos de falha/ruptura, mostram-se importantes o cálculo das tensões de Cauchy e seu pós-processamento. As tensões de Cauchy são obtidas através da conversão das tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie por meio da expressão apresentada na Equação (99).

Como as tensões são calculadas nos pontos de integração, para fins de pós-processamento, é necessário que sejam obtidos os valores das tensões nos nós. A transferência pode ser feita a partir de uma matriz \mathbf{L} , a qual relaciona os valores das variáveis nos nós (\vec{Z}) com os valores nos pontos de integração (\vec{z}):

$$\vec{z} = \mathbf{L} \cdot \vec{Z} \quad (155)$$

A matriz \mathbf{L} é composta por funções de forma e é dada por:

$$L_{il} = \varphi_l(\xi_i) \quad (156)$$

Quando o número de pontos de integração é igual ao número de nós do elemento, a inversa da matriz \mathbf{L} pode ser calculada diretamente. Caso contrário, desde que o número de nós seja menor que o número de pontos de integração, a inversa é obtida através da técnica de Mínimos Quadrados por meio da matriz \mathcal{M} , denominada matriz pseudo-inversa:

$$\vec{Z} = [(\mathbf{L}^t \cdot \mathbf{L})^{-1} \cdot \mathbf{L}^t] \cdot \vec{z} = \mathcal{M} \cdot \vec{z} \quad (157)$$

Caso haja um número menor de pontos de integração do que de nós, a matriz \mathbf{L} é obtida com funções de forma de grau inferior. Uma vez obtidos os valores nos nós, os valores nodais do elemento original são recuperados utilizando-se também funções de forma de grau inferior.

Por último, calcula-se a média das tensões concorrentes no mesmo nó, a fim de se obter uma representação contínua de tensões no pós-processamento.

4 MODELOS CONSTITUTIVOS HIPERELÁSTICOS

No desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos Posicional em suas versões estática e dinâmica, a lei constitutiva hiperelástica aparece de forma genérica na energia específica de deformação contida na Equação (115) e em sua variação, por exemplo, na Equação (116). Neste item, define-se a expressão da energia específica de deformação da qual resulta o modelo constitutivo hiperelástico adotado.

Modelos constitutivos hiperelásticos são definidos como aqueles que apresentam uma expressão fechada para a energia específica de deformação. Os potenciais de tais modelos, para que sejam considerados como geradores de leis constitutivas consistentes, devem ser convexos. Veja, por exemplo, Ogden (1980).

Para materiais homogêneos e isotrópicos, a energia específica de deformação pode ser escrita de forma lagrangeana como:

$$\Psi(\mathbf{A}) = \Psi(\mathbf{C}) = \Psi(\mathbb{E}) = \Psi(I_1, I_2, I_3) = \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (158)$$

onde Ψ é a energia específica de deformação; I_1 , I_2 e I_3 são os invariantes do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green; e λ_1 , λ_2 e λ_3 são as alongamentos principais. Nota-se que as duas últimas formas da Equação (158) impõem a isotropia, uma vez que tanto os invariantes do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green quanto os alongamentos principais independem da orientação do eixo de referência.

Em problemas que envolvem grandes deformações, modelos constitutivos hiperelásticos devem garantir que a condição $J > 0$ seja atendida, conforme apresentado na Equação (9). Caso o modelo não consiga satisfazer tal condição, é necessário que o algoritmo apresente testes de parada e avisos quando a estrutura passe a apresentar deformações moderadas.

No caso de modelos constitutivos completos, devem também ser atendidas as condições de normalização e de crescimento, que são dadas, respectivamente, por:

$$\Psi(\mathbf{C} = \mathbf{I}) = \Psi(\mathbb{E} = 0) = 0 \quad (159)$$

$$\begin{cases} \Psi \rightarrow +\infty; J \rightarrow 0^+ \\ \Psi \rightarrow +\infty; J \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (160)$$

onde a condição de crescimento garante que $J > 0$.

4.1 Decomposição de Flory

Para que o modelo constitutivo respeite a condição de crescimento, é necessário que ao menos uma parcela da energia específica de deformação seja função do jacobiano. Tal exigência costuma ser atendida por meio da decomposição multiplicativa do gradiente da função mudança de configuração, também conhecida na literatura como decomposição de Flory (FLORY, 1961), na qual o gradiente da função mudança de configuração é escrita como:

$$\mathbf{A} = \widehat{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{A}} \quad (161)$$

com

$$\widehat{\mathbf{A}} = J^{1/3} \mathbf{I} \quad (162)$$

$$\bar{\mathbf{A}} = J^{-1/3} \mathbf{A} \quad (163)$$

A decomposição multiplicativa pode também ser escrita diretamente em relação ao tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green na forma:

$$\mathbf{C} = \widehat{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{C}} \quad (164)$$

com

$$\mathbf{C} = J^{2/3} \bar{\mathbf{C}} \quad (165)$$

$$\widehat{\mathbf{C}} = J^{2/3} \mathbf{I} \quad (166)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3} \mathbf{C} \quad (167)$$

Dessa forma, a energia específica de deformação pode ser decomposta em uma parcela dependente da variação de volume (ψ^{vol}) e duas parcelas isocóricas (ψ^{isoc1} e ψ^{isoc2}):

$$\psi = \psi^{vol}(J) + \psi^{isoc}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = \psi^{vol}(J) + \psi^{isoc1}(\bar{I}_1) + \psi^{isoc2}(\bar{I}_2) \quad (168)$$

sendo \bar{I}_1 e \bar{I}_2 os invariantes de $\bar{\mathbf{C}}$, os quais são definidos pelas seguintes expressões:

$$\bar{I}_1 = Tr(\bar{\mathbf{C}}) \quad (169)$$

$$\bar{I}_2 = Tr(\bar{\mathbf{C}}^{-1}) \quad (170)$$

Derivando-se a Equação (168) em relação à deformação de Green, conclui-se que a componente elástica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (\mathbf{S}^{elast}) também pode ser escrita em função de uma parcela dependente da variação de volume e de duas parcelas isocóricas, ou seja:

$$\mathbf{S}^{elast} = \frac{\partial \psi^{vol}}{\partial E} + \frac{\partial \psi^{isoc1}}{\partial E} + \frac{\partial \psi^{isoc2}}{\partial E} = \mathbf{S}^{vol} + \mathbf{S}^{isoc1} + \mathbf{S}^{isoc2} \quad (171)$$

onde \mathbf{S}^{vol} é a parcela volumétrica, \mathbf{S}^{isoc1} é a parcela isocórica 1 e \mathbf{S}^{isoc2} é a parcela isocórica 2 da componente elástica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie.

Seguindo procedimento análogo, deriva-se a Equação (171) em relação à deformação de Green, obtendo-se a expressão do tensor constitutivo elástico tangente ($\mathfrak{C}_{ijkl}^{elast}$):

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{elast} = \frac{\partial^2 \Psi^{vol}}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} + \frac{\partial^2 \Psi^{isoc1}}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} + \frac{\partial^2 \Psi^{isoc2}}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} = \mathfrak{C}_{ijkl}^{vol} + \mathfrak{C}_{ijkl}^{isoc1} + \mathfrak{C}_{ijkl}^{isoc2} \quad (172)$$

onde $\mathfrak{C}_{ijkl}^{vol}$ é a parcela dependente do volume e $\mathfrak{C}_{ijkl}^{isoc1}$ e $\mathfrak{C}_{ijkl}^{isoc2}$ são as parcelas isocóricas do tensor constitutivo elástico tangente. As parcelas são obtidas, respectivamente, pelas seguintes expressões:

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{vol} = \frac{\partial^2 \Psi^{vol}}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi^{vol}}{\partial J^2} \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}_{kl}} + \frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial J} \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} \quad (173)$$

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{isoc1} = \frac{\partial^2 \Psi^{isoc1}}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} = \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi^{isoc1}}{\partial \bar{I}_1^2} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}_{kl}} + \frac{\partial \Psi^{isoc1}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} \quad (174)$$

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{isoc2} = \frac{\partial^2 \Psi^{isoc2}}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} = \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi^{isoc2}}{\partial \bar{I}_2^2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}_{kl}} + \frac{\partial \Psi^{isoc2}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} \quad (175)$$

4.2 Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff

O modelo constitutivo mais simples é o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff, o qual apresenta, da mesma forma que a Lei de Hooke, uma relação linear entre tensão e deformação. A expressão generalizada do modelo é dada por:

$$\Psi(\mathbb{E}) = \frac{1}{2} \mathbb{E}_{kl} \mathfrak{C}_{klij} \mathbb{E}_{ij} \quad (176)$$

Desenvolvendo-se a equação anterior, a energia específica de deformação pode ser obtida pela seguinte expressão:

$$\Psi = \frac{G}{(1-2\nu)} [(1-\nu)(\mathbb{E}_{11}^2 + \mathbb{E}_{22}^2 + \mathbb{E}_{33}^2) + 2\nu(\mathbb{E}_{11}\mathbb{E}_{22} + \mathbb{E}_{11}\mathbb{E}_{33} + \mathbb{E}_{22}\mathbb{E}_{33}) + (1-2\nu)(\mathbb{E}_{12}^2 + \mathbb{E}_{21}^2 + \mathbb{E}_{13}^2 + \mathbb{E}_{31}^2 + \mathbb{E}_{23}^2 + \mathbb{E}_{32}^2)] \quad (177)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal e ν é o coeficiente de Poisson.

Derivando-se a energia específica de deformação em relação à deformação de Green, obtém-se a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, cuja forma generalizada é expressa por:

$$S_{ij} = \mathfrak{C}_{ijkl} \mathbb{E}_{kl} \quad (178)$$

Desenvolvendo-se a equação anterior, obtêm-se as componentes da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie para o caso tridimensional:

$$S_{11} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{11}} = \frac{2G}{(1-2\nu)} [(1-\nu)\mathbb{E}_{11} + \nu(\mathbb{E}_{22} + \mathbb{E}_{33})] \quad (179)$$

$$S_{22} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{22}} = \frac{2G}{(1-2\nu)} [(1-\nu)\mathbb{E}_{22} + \nu(\mathbb{E}_{11} + \mathbb{E}_{33})] \quad (180)$$

$$S_{33} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{33}} = \frac{2G}{(1-2\nu)} [(1-\nu)\mathbb{E}_{33} + \nu(\mathbb{E}_{11} + \mathbb{E}_{22})] \quad (181)$$

$$S_{12} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{12}} = 2G\mathbb{E}_{12} \quad (182)$$

$$S_{13} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{13}} = 2G\mathbb{E}_{13} \quad (183)$$

$$S_{23} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{23}} = 2G\mathbb{E}_{23} \quad (184)$$

O modelo de Saint-Venant-Kirchhoff é um modelo de fácil implementação computacional, porém, por não respeitar a condição de crescimento, permite a inversão do material para níveis finitos de tensão, o que o torna inapropriado para problemas com grandes deformações.

4.3 Modelo hiperelástico adotado para grandes deformações

Tendo-se em vista as limitações do modelo de Saint-Venant-Kirchhoff (o qual havia sido inicialmente implementado no código computacional), foi adotado um modelo hiperelástico alternativo para a resolução de problemas sob grandes deformações, aqui denominado modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff. A formulação é baseada na decomposição de Flory, na qual a energia específica de deformação apresentada na Equação (168) é composta por parcelas isocóricas advindas do modelo de Rivlin-Saunders e parcela volumétrica proveniente do modelo de Hartmann-Neff. Mais detalhes da formulação elástica implementada são apresentados a seguir.

4.3.1 Parcelas isocóricas do modelo de Rivlin-Saunders

No modelo de Rivlin-Saunders, a energia específica de deformação é função dos invariantes de deformação, sendo dada pela expressão:

$$\Psi(I_1, I_2) = C(I_1 - 3) + f(I_2 - 3) \quad (185)$$

onde C é uma constante e f é uma função que deve ser determinada experimentalmente.

A partir da equação anterior, através da decomposição multiplicativa do gradiente da função mudança de configuração, é possível obter as expressões das parcelas da energia específica de deformação independentes da variação de volume. As parcelas são função dos invariantes isocóricos e são dadas por:

$$\psi^{isoc1} + \psi^{isoc2} = \frac{G}{4} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{G}{4} (\bar{I}_2 - 3) \quad (186)$$

sendo \bar{I}_1 e \bar{I}_2 , respectivamente, o 1º e 2º invariantes isocóricos, cujas expressões são dadas nas Equações (169) e (170).

4.3.2 Parcela volumétrica do modelo de Hartmann-Neff

Hartmann e Neff (2003) investigaram diversos modelos constitutivos de materiais quase incompressíveis da literatura e propuseram funções de energia de deformação de materiais isotrópicos com comportamento quase incompressível dependentes dos invariantes principais. Várias funções convexas foram propostas, sendo uma delas a apresentada a seguir:

$$f^{vol} = (J^{2n} + J^{-2n} - 2)^m; \quad n \geq 1/2, m \geq 1 \quad (187)$$

onde n e m são constantes.

A partir desta função convexa dependente da variação de volume (f^{vol}), obtém-se a parcela volumétrica da energia específica de deformação através da expressão:

$$\psi^{vol} = k^{vol} f^{vol} = k^{vol} (J^{2n} + J^{-2n} - 2)^m \quad (188)$$

sendo k^{vol} uma constante.

Apesar de a constante k^{vol} ser normalmente obtida por meio de ensaios laboratoriais, como o modelo deve reproduzir o comportamento linear do material em pequenas deformações, é possível determinar o valor da constante a partir das propriedades elásticas do modelo linear de Saint-Venant-Kirchhoff (ou mesmo de Hooke, uma vez que a comparação é feita no espaço de pequenas deformações). Assim, chega-se ao seguinte valor de k^{vol} :

$$k^{vol} = \frac{K}{8n^2} \quad (189)$$

sendo K o *bulk modulus*.

Substituindo-se a Equação (189) na Equação (188) e tendo-se em vista que o parâmetro m costuma ser adotado com valor unitário, obtém-se a expressão da parcela volumétrica da energia específica de deformação:

$$\psi^{vol} = \frac{K}{8n^2} (J^{2n} + J^{-2n} - 2) \quad (190)$$

4.3.3 Expressão geral e tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie

Substituindo-se na Equação (168) as expressões das parcelas isocóricas do modelo de Rivlin-Saunders e da parcela volumétrica do modelo de Hartmann-Neff dadas, respectivamente, nas Equações (186) e (190), obtém-se a expressão geral da energia específica de deformação do modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff:

$$\Psi = \frac{K}{8n^2} (J^{2n} + J^{-2n} - 2) + \frac{G}{4} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{G}{4} (\bar{I}_2 - 3) \quad (191)$$

As parcelas volumétrica e isocóricas são obtidas derivando-se a Equação (191) em relação à deformação de Green, de onde se obtêm as expressões:

$$\mathbf{S}^{vol} = \frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial \mathbb{E}} = \frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}} = \frac{K}{4n} [J^{2n-1} - J^{-(2n+1)}] \mathfrak{E}^{vol} \quad (192)$$

$$\mathbf{S}^{isoc1} = \frac{\partial \Psi^{isoc1}}{\partial \mathbb{E}} = \frac{\partial \Psi^{isoc1}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}} = \frac{G}{4} \mathfrak{E}^{isoc1} \quad (193)$$

$$\mathbf{S}^{isoc2} = \frac{\partial \Psi^{isoc2}}{\partial \mathbb{E}} = \frac{\partial \Psi^{isoc2}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}} = \frac{G}{4} \mathfrak{E}^{isoc2} \quad (194)$$

Os tensores \mathfrak{E}^{vol} , \mathfrak{E}^{isoc1} e \mathfrak{E}^{isoc2} são, respectivamente, as direções volumétrica, isocórica 1 e isocórica 2, as quais são dadas pelas seguintes expressões:

$$\mathfrak{E}^{vol} = \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}} = J\mathbf{C}^{-1} \quad (195)$$

$$\mathfrak{E}^{isoc1} = \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}} = -\frac{2}{3} J^{-2/3} I_1 \mathbf{C}^{-1} + 2J^{-2/3} \mathbf{I} \quad (196)$$

$$\mathfrak{E}^{isoc2} = \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}} = 2J^{-4/3} \left(-\frac{2}{3} \mathbf{C}^{-1} I_2 + I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}^t \right) \quad (197)$$

sendo I_1 e I_2 , respectivamente, o 1º e 2º invariantes do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, que são definidos como:

$$I_1 = Tr(\mathbf{C}) \quad (198)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \{ [Tr(\mathbf{C})]^2 - Tr(\mathbf{C}^2) \} = \begin{vmatrix} C_{22} & C_{23} \\ C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{31} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} \quad (199)$$

Para concluir o entendimento de que a energia específica de deformação adotada é completa, demonstra-se a seguir que as parcelas volumétrica e isocóricas da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie correspondem, respectivamente, às componentes hidrostática e

desviadora da tensão de Cauchy. Para isso, substitui-se a Equação (171) na Equação (99), obtendo-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^{vol} \cdot \mathbf{A}^t + \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^{isoc1} \cdot \mathbf{A}^t + \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^{isoc2} \cdot \mathbf{A}^t \quad (200)$$

Analisando-se primeiramente a parcela volumétrica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, tem-se que a mesma pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{S}^{vol} = \frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}} = \alpha \boldsymbol{\mathfrak{E}}^{vol} = \alpha J \mathbf{C}^{-1} \quad (201)$$

sendo α um escalar, o qual multiplica $\boldsymbol{\mathfrak{E}}^{vol}$ na Equação (192).

Substituindo-se a Equação (201) no primeiro termo da Equação (200), tem-se que a parcela volumétrica da tensão de Cauchy ($\boldsymbol{\sigma}^{vol}$) pode ser expressa como:

$$\boldsymbol{\sigma}^{vol} = \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^{vol} \cdot \mathbf{A}^t = \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \alpha J \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{A}^t = \alpha \mathbf{I} = \boldsymbol{\sigma}^{hid} \quad (202)$$

ou seja, $\boldsymbol{\sigma}^{vol}$ é a tensão hidrostática ($\boldsymbol{\sigma}^{hid}$), $\boldsymbol{\mathfrak{E}}^{vol}$ é a direção hidrostática lagrangeana correspondente à direção hidrostática no espaço de Cauchy e \mathbf{S}^{vol} é a tensão hidrostática no espaço lagrangeano.

Analisando-se agora a primeira componente isocórica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, tem-se que a mesma pode ser escrita como:

$$\mathbf{S}^{isoc1} = \frac{\partial \Psi^{isoc1}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}} = \beta \boldsymbol{\mathfrak{E}}^{isoc1} = \beta \left[-\frac{2}{3} J^{-2/3} Tr(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} + 2J^{-2/3} \mathbf{I} \right] \quad (203)$$

sendo β um escalar, o qual multiplica $\boldsymbol{\mathfrak{E}}^{isoc1}$ na Equação (193).

Fazendo-se a conversão para a tensão de Cauchy através da substituição da Equação (203) no segundo termo da Equação (200), obtém-se:

$$\boldsymbol{\sigma}^{isoc1} = \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^{isoc1} \cdot \mathbf{A}^t = \beta \left\{ 2J^{-5/3} \left[\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t - \frac{Tr(\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A})}{3} \mathbf{I} \right] \right\} \quad (204)$$

sendo $\boldsymbol{\sigma}^{isoc1}$ a primeira componente isocórica da tensão de Cauchy.

Como

$$Tr(\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} : \mathbf{A}^t = \mathbf{A}^t : \mathbf{A} = Tr(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t) \quad (205)$$

a expressão de $\boldsymbol{\sigma}^{isoc1}$ pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{\sigma}^{isoc1} = \beta \left\{ 2J^{-5/3} \left[\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t - \frac{Tr(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t)}{3} \mathbf{I} \right] \right\} = \boldsymbol{\sigma}^{dev} \quad (206)$$

ou seja, $\boldsymbol{\sigma}^{isoc1}$ é uma tensão desviadora ($\boldsymbol{\sigma}^{dev}$), \mathfrak{C}^{isoc1} é a primeira direção isocórica lagrangeana correspondente à primeira direção isocórica no espaço de Cauchy e \mathbf{S}^{isoc1} é a primeira tensão isocórica no espaço lagrangeano.

Por fim, analisando-se a segunda componente isocórica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, tem-se que a mesma pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{S}^{isoc2} = \frac{\partial \Psi^{isoc2}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbf{E}} = \gamma \mathfrak{C}^{isoc2} = \gamma \left[2J^{-4/3} \left(-\frac{2}{3} \mathbf{C}^{-1} I_2 + Tr(\mathbf{C}) \mathbf{I} - \mathbf{C}^t \right) \right] \quad (207)$$

sendo γ um escalar, o qual multiplica \mathfrak{C}^{isoc2} na Equação (194).

Fazendo-se a conversão para a tensão de Cauchy através da substituição da Equação (207) no terceiro termo da Equação (200), obtém-se:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{isoc2} &= \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^{isoc2} \cdot \mathbf{A}^t \\ &= \gamma 2J^{-7/3} \left\{ [Tr(\mathbf{C})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t)] - \frac{2}{3} I_2 \mathbf{I} \right\} \end{aligned} \quad (208)$$

A partir da relação dada na Equação (205), tem-se que:

$$Tr(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t) Tr(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t) - Tr[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t)] = 2I_2 \quad (209)$$

Dessa forma, calculando-se $Tr(\boldsymbol{\sigma}^{isoc2})$, obtém-se:

$$Tr(\boldsymbol{\sigma}^{isoc2}) = 2\gamma J^{-7/3} (2I_2 - 2I_2) = 0 \quad (210)$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\sigma}^{isoc2} = \boldsymbol{\sigma}^{dev} \quad (211)$$

demonstrando que $\boldsymbol{\sigma}^{isoc2}$ é uma tensão desviadora, \mathfrak{C}^{isoc2} é a segunda direção isocórica lagrangeana correspondente à segunda direção isocórica no espaço de Cauchy e \mathbf{S}^{isoc2} é a segunda tensão isocórica no espaço lagrangeano.

A partir da constatação da existência de duas componentes de deformação lagrangeanas isocóricas, surgem duas consequências interessantes, que são a definição de direções de fluxo plástico na formulação elastoplástica e a proposta de tensões viscosas que respeitem estas direções de fluxo. Estes tópicos são apresentados, respectivamente, nos itens 5.2 e 6.2.

No programa, a componente elástica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é calculada conforme o pseudocódigo apresentado na Figura 4.1. Ressalta-se que as equações para o cálculo de $\partial \Psi^{vol} / \partial J$, $\partial \Psi^{isoc1} / \partial \bar{I}_1$ e $\partial \Psi^{isoc2} / \partial \bar{I}_2$ são apresentadas no próximo item.

Figura 4.1 – Pseudocódigo do algoritmo de cálculo da parcela elástica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie pelo modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff

1	Cálculo de I_1 [Equação (198)]
2	Cálculo de I_2 [Equação (199)]
3	Cálculo de $\partial\Psi^{vol}/\partial J$ [Equação (212)]
4	Cálculo de $\partial J/\partial\mathbb{E}$ [Equação (195)]
5	Cálculo de \mathcal{S}^{vol} [Equação (192)]
6	Cálculo de $\partial\Psi^{isoc1}/\partial\bar{I}_1$ [Equação (215)]
7	Cálculo de $\partial\Psi^{isoc2}/\partial\bar{I}_2$ [Equação (215)]
8	Cálculo de $\partial\bar{I}_1/\partial\mathbb{E}$ [Equação (196)]
9	Cálculo de $\partial\bar{I}_2/\partial\mathbb{E}$ [Equação (197)]
10	Cálculo de \mathcal{S}^{isoc1} [Equação (193)]
11	Cálculo de \mathcal{S}^{isoc2} [Equação (194)]
12	Cálculo de \mathcal{S}^{elast} [Equação (171)]

Fonte: o próprio autor.

4.3.4 Tensor constitutivo elástico tangente

Para a obtenção do tensor constitutivo elástico tangente, como já são conhecidas as expressões de $\mathfrak{C}^{vol} = \partial J/\partial\mathbb{E}$, $\mathfrak{C}^{isoc1} = \partial\bar{I}_1/\partial\mathbb{E}$ e $\mathfrak{C}^{isoc2} = \partial\bar{I}_2/\partial\mathbb{E}$ através, respectivamente, das Equações (195), (196) e (197), bastam-se calcular os termos restantes das Equações (173), (174) e (175).

Analisando-se primeiramente a parcela volumétrica, deriva-se o potencial volumétrico de Hartmann-Neff dado na Equação (190) em relação ao jacobiano, resultando:

$$\frac{\partial\Psi^{vol}}{\partial J} = \frac{K}{4n} [J^{2n-1} - J^{-(2n+1)}] \quad (212)$$

Derivando-se novamente em relação a J , obtém-se:

$$\frac{\partial^2\Psi^{vol}}{\partial J^2} = \frac{K}{4n} [(2n-1)J^{2n-2} + (2n+1)J^{-(2n+2)}] \quad (213)$$

Para a obtenção do último termo da Equação (173) para o cálculo de componente volumétrica, deriva-se a Equação (195) em relação à deformação de Green:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial\mathbb{E}_{ij}\partial\mathbb{E}_{kl}} = \frac{\partial\mathfrak{C}_{ij}^{vol}}{\partial\mathbb{E}_{kl}} = J(D_{ij}D_{kl} - 2D_{ik}D_{jl}) \quad (214)$$

sendo $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}$.

Analisando-se agora as parcelas isocóricas, deriva-se o potencial isocórico de Rivlin-Saunders dado na Equação (186) em relação aos invariantes isocóricos, resultando:

$$\frac{\partial \Psi^{isoc1}}{\partial \bar{I}_1} = \frac{\partial \Psi^{isoc2}}{\partial \bar{I}_2} = \frac{G}{4} \quad (215)$$

Derivando-se novamente em relação a \bar{I}_1 e \bar{I}_2 , obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \Psi^{isoc1}}{\partial \bar{I}_1^2} = \frac{\partial^2 \Psi^{isoc2}}{\partial \bar{I}_2^2} = 0 \quad (216)$$

Por fim, derivam-se as Equações (196) e (197) em relação à deformação de Green, obtendo-se, respectivamente:

$$\frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} = \frac{\partial \mathfrak{G}_{ij}^{isoc1}}{\partial \mathbb{E}_{kl}} = \frac{4}{3} J^{-2/3} \left[\frac{1}{3} (D_{ij} D_{kl} + 3 D_{ik} D_{ij}) I_1 - D_{ij} \delta_{kl} - D_{kl} \delta_{ij} \right] \quad (217)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} &= \frac{\partial \mathfrak{G}_{ij}^{isoc2}}{\partial \mathbb{E}_{kl}} \\ &= \frac{8}{3} J^{-4/3} \left[\left(\frac{2}{3} D_{ij} D_{kl} + D_{ik} D_{ij} \right) I_2 - C_{zz} (D_{ij} \delta_{kl} + D_{kl} \delta_{ij}) \right. \\ &\quad \left. + D_{ij} C_{kl} + D_{kl} C_{ij} + \frac{3}{2} (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{jk} \delta_{il}) \right] \end{aligned} \quad (218)$$

Substituindo-se os termos anteriores nas Equações (173), (174) e (175), obtém-se a parcela elástica do tensor constitutivo tangente.

No programa, o tensor constitutivo elástico tangente é calculado conforme o pseudocódigo apresentado na Figura 4.2:

Figura 4.2 – Pseudocódigo do algoritmo de cálculo do tensor constitutivo elástico tangente

```

1  Loop dimensão i
2      Loop dimensão j
3          Loop dimensão k
4              Loop dimensão l
5                  Cálculo de  $\partial^2 J / \partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}$  [Equação (214)]
6                  Cálculo de  $\frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}_{ij}} \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}_{kl}}$ 
7                  Cálculo de  $\partial^2 \bar{I}_1 / \partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}$  [Equação (217)]
8                  Cálculo de  $\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}_{ij}} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}_{kl}}$ 
9                  Cálculo de  $\partial^2 \bar{I}_2 / \partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}$  [Equação (218)]
10                 Cálculo de  $\frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}_{ij}} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}_{kl}}$ 
11             Fim loop
12         Fim loop
13     Fim loop
14 Fim loop
15 Cálculo de  $\partial^2 \Psi^{vol} / \partial J^2$  [Equação (213)]
16 Cálculo de  $\mathbb{C}_{ijkl}^{vol}$  [Equação (173)]
17 Cálculo de  $\partial \Psi^{isoc1} / \partial \bar{I}_1$  [Equação (215)]
18 Cálculo de  $\mathbb{C}_{ijkl}^{isoc1}$  [Equação (174)]
19 Cálculo de  $\partial \Psi^{isoc2} / \partial \bar{I}_2$  [Equação (215)]
20 Cálculo de  $\mathbb{C}_{ijkl}^{isoc2}$  [Equação (175)]
21 Cálculo de  $\mathbb{C}_{ijkl}^{elast}$  [Equação (172)]

```

Fonte: o próprio autor.

5 PLASTICIDADE

Dentro do espectro de interesse deste trabalho, excluindo-se materiais frágeis, existem três tipos de respostas mecânicas básicas: elástica, plástica e viscosa. Estes comportamentos, por sua vez, não necessariamente se manifestam isoladamente, podendo o material apresentar uma combinação destes comportamentos quando sujeito a diferentes níveis de deformação. Os metais, por exemplo, costumam manifestar comportamento elástico quando sujeitos a pequenas deformações e elastoplástico quando sujeitos a grandes deformações (DIXIT; DIXIT, 2015).

No regime elástico, a deformação é reversível, ou seja, o corpo retorna ao seu estado inicial com a retirada do carregamento. Caso haja uma deformação permanente ou irreversível, é dito que o corpo sofre uma deformação plástica. Tal fenômeno, do ponto de vista da microestrutura de metais, ocorre devido à movimentação irreversível de discordâncias (imperfeições nas sequências das ligações atômicas) sem que haja perda de coesão ou rupturas internas. Este comportamento pode também ser observado em materiais não metálicos, como o concreto, no qual uma plastificação aparente pode decorrer de processos físicos distintos dos metais, como a microfissuração (PROENÇA, 2018).

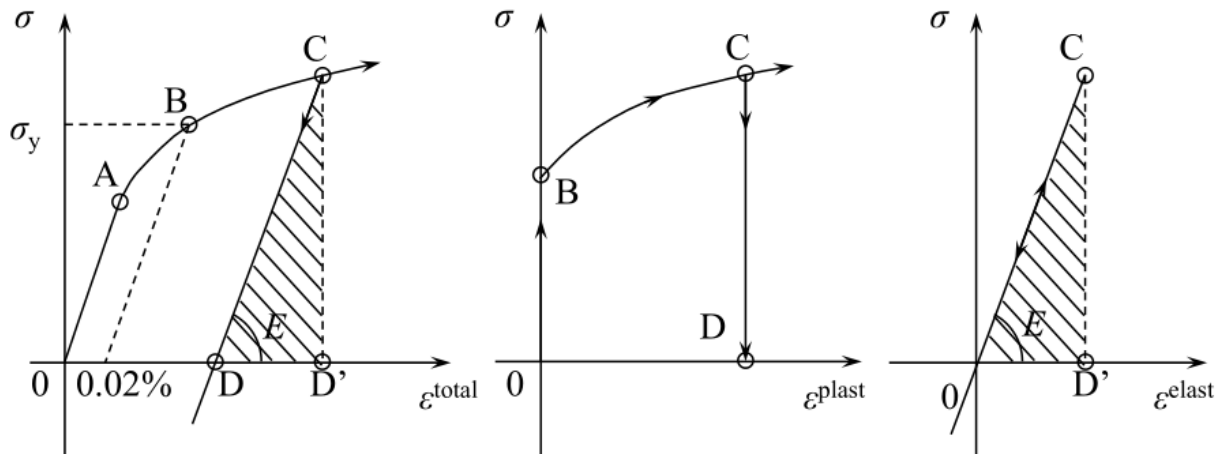
5.1 Conceitos fundamentais da plasticidade clássica

Em análises numéricas, a plasticidade pode ser considerada basicamente para dois diferentes casos: pequenas ou grandes deformações. Embora a formulação adotada neste trabalho seja dedicada à resolução de problemas com o desenvolvimento de grandes deformações, o modelo numérico parte de considerações importantes do modelo de pequenas deformações. Por isso, neste item é apresentada a teoria da plasticidade em pequenas deformações juntamente com conceitos fundamentais da plasticidade clássica, sendo a apresentação feita com base no texto de Wierzbicki (2013).

5.1.1 Curva tensão x deformação

Realizando-se um ensaio de tração uniaxial, na maioria dos materiais é obtida uma curva tensão x deformação semelhante à apresentada na Figura 5.1:

Figura 5.1 – Curva tensão x deformação (a) elastoplástica, (b) rígido-plástica e (c) elástica



Fonte: adaptado de Wierzbicki (2013).

Para materiais elastoplásticos, no trecho inicial a tensão cresce linearmente com a deformação, sendo a inclinação da curva dada pelo módulo de elasticidade longitudinal do material (E). A curva continua com inclinação constante até o ponto A, denominado limite de proporcionalidade. A partir deste ponto, a curva passa a apresentar uma pequena redução de sua inclinação até atingir o ponto B, conhecido como limite de escoamento. Por consenso internacional, o limite de escoamento é obtido através da intersecção da curva tensão x deformação com uma reta com a mesma inclinação da curva no regime elástico que passa pelo ponto ($\sigma = 0$; $\varepsilon^{total} = 0,02\%$). Após o limite de escoamento, a curva passa a apresentar uma redução de sua inclinação devido ao encruamento do material.

Na descarga, a curva apresenta uma trajetória definida pelo segmento de reta CD, o qual apresenta a mesma inclinação da resposta elástica inicial, sendo por isso denominada de descarga elástica. No ponto D, a tensão é nula, porém o material apresenta uma deformação plástica residual de magnitude OD.

Conforme apresentado na Figura 5.1, a resposta elastoplástica pode ser dada como a soma das respostas elástica e plástica do material. Tal suposição costuma ser adotada no regime de pequenas deformações, no qual é aceitável a hipótese de que a deformação total pode ser decomposta de forma aditiva (decomposição de Green-Naghdi) na forma:

$$\varepsilon^{total} = \varepsilon^{elast} + \varepsilon^{plast} \quad (219)$$

onde ε^{total} é a deformação total, ε^{elast} é a deformação elástica e ε^{plast} é a deformação plástica.

Lembrando que a descrição apresentada é uniaxial e em pequenas deformações, na fase elástica o comportamento do material é regido pela Lei de Hooke, sendo a deformação elástica dada por:

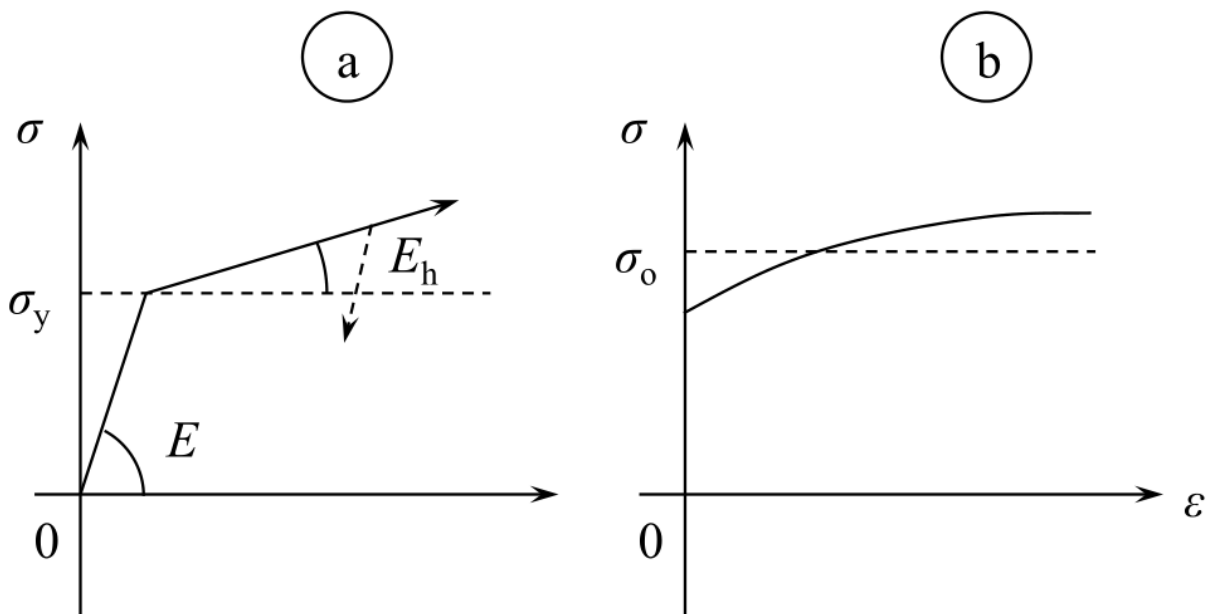
$$\varepsilon^{elast} = \frac{\sigma}{E} \quad (220)$$

sendo E o módulo de elasticidade longitudinal do material.

Já a deformação plástica depende do nível de deformação sofrido pelo material, havendo uma diferença entre a deformação medida (total) e a deformação elástica conhecida. Por esta razão, sua obtenção a partir do nível de tensão é mais difícil, sendo usualmente feita por meio de fórmulas empíricas (WIERZBICKI, 2013).

Na literatura, foram propostos muitos modelos para a aproximação da curva real de tensão x deformação, sendo os mais comumente utilizados os modelos com encruamento linear (Figura 5.2a) e com encruamento rígido-plástico (Figura 5.2b):

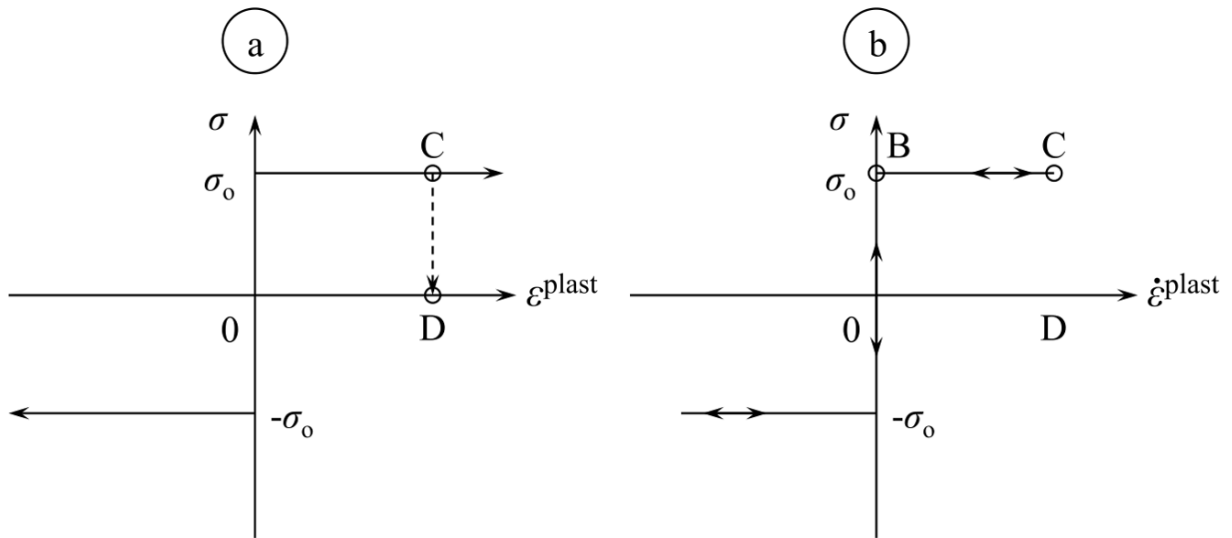
Figura 5.2 – Modelos com (a) encruamento linear e (b) encruamento rígido-plástico



Fonte: Wierzbicki (2013).

Um modelo ainda mais simplificado é obtido a partir da hipótese de que a plastificação do material é regida pela tensão média σ_0 apresentada na Figura 5.2b. Deste conceito, surge o modelo rígido-plástico perfeito, que é apresentado na Figura 5.3:

Figura 5.3 – Modelo rígido-plástico perfeito



Fonte: adaptado de Wierzbicki (2013).

O modelo assume que a tensão σ_0 possui mesmo módulo tanto na tração quanto na compressão e é comumente utilizado para a análise do estado limite de estruturas (WIERZBICKI, 2013).

5.1.2 Condição de carregamento e descarregamento

Analisando-se o modelo rígido-plástico perfeito apresentado na Figura 5.3, no caso unidimensional a evolução plástica segue a seguinte lei³:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}^{plast} > 0; \sigma = \sigma_0 \\ \dot{\varepsilon}^{plast} < 0; \sigma = -\sigma_0 \\ \dot{\varepsilon}^{plast} = 0; -\sigma_0 < \sigma < \sigma_0 \end{array} \right. \quad (221)$$

No descarregamento, a curva percorre o caminho CD no gráfico $\sigma \times \varepsilon^{plast}$ (Figura 5.3a), enquanto que no gráfico $\sigma \times \dot{\varepsilon}^{plast}$ (Figura 5.3b) a curva percorre o mesmo caminho CBO percorrido durante o carregamento.

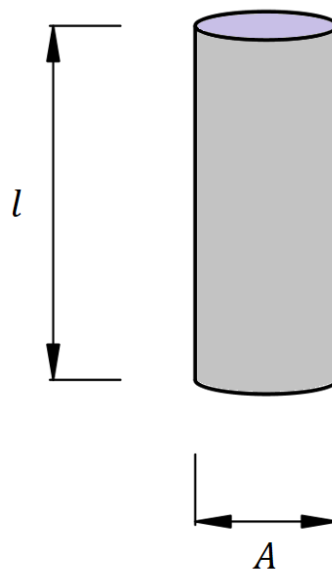
³ Destaca-se aqui que $\dot{\varepsilon}$ se refere na verdade ao incremento de deformação $\Delta\varepsilon$. No entanto, como grande parte da literatura relativa à plasticidade costuma adotar ε para representar o incremento de deformação, optou-se por também utilizar esta representação na presente dissertação.

5.1.3 Incompressibilidade

Através de diversos estudos, evidenciou-se que materiais como metais, borrachas e polímeros são praticamente incompressíveis durante a plastificação, fato do qual podem ser retiradas algumas observações importantes.

Analisando-se primeiramente o caso unidimensional, estuda-se o comportamento de um elemento de barra, cuja representação é apresentada na Figura 5.4:

Figura 5.4 – Elemento de barra



Fonte: o próprio autor.

O elemento possui área de seção transversal A e comprimento l . Portanto, seu volume V é calculado por:

$$V = Al \quad (222)$$

Seguindo as observações empíricas, assume-se que o material é incompressível. Dessa forma, a variação do volume deve ser nula, ou seja:

$$dV = d(Al) = dAl + Adl = 0 \quad (223)$$

Dessa forma, conclui-se que o incremento de deformação $d\varepsilon$ pode ser obtido tanto pela variação do comprimento quanto pela variação da área da seção transversal:

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l} = -\frac{dA}{A} \quad (224)$$

Integrando-se o termo referente ao comprimento da Equação (224), obtém-se:

$$\varepsilon = \ln(l) + C \quad (225)$$

sendo C uma constante de integração.

Impondo-se que a deformação é nula quando o comprimento l é igual ao comprimento inicial l_0 , obtém-se o valor da constante C :

$$0 = \ln(l_0) + C \rightarrow C = -\ln(l_0) \quad (226)$$

Assim, a Equação (225) pode ser reescrita como:

$$\varepsilon = \ln(l) - \ln(l_0) = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \quad (227)$$

que é a definição logarítmica da deformação escrita em função do comprimento.

Integrando agora o termo referente à área da Equação (224), obtém-se:

$$\varepsilon = -\ln(A) + C \quad (228)$$

Com procedimento análogo ao anterior, impõe-se que a deformação é nula quando a área da seção transversal A é igual à área inicial A_0 , obtendo-se o valor da constante de integração C :

$$0 = -\ln(A_0) + C \rightarrow C = \ln(A_0) \quad (229)$$

Com isso, a Equação (228) pode ser reescrita como:

$$\varepsilon = -\ln(A) + \ln(A_0) = \ln\left(\frac{A_0}{A}\right) \quad (230)$$

que é a definição logarítmica da deformação escrita em função da área.

Observa-se que, na tração, como $l > l_0$ e $A < A_0$, as Equações (227) e (230) retornam deformações com sinal positivo; já na compressão, como $l < l_0$ e $A > A_0$, obtêm-se valores negativos de deformação.

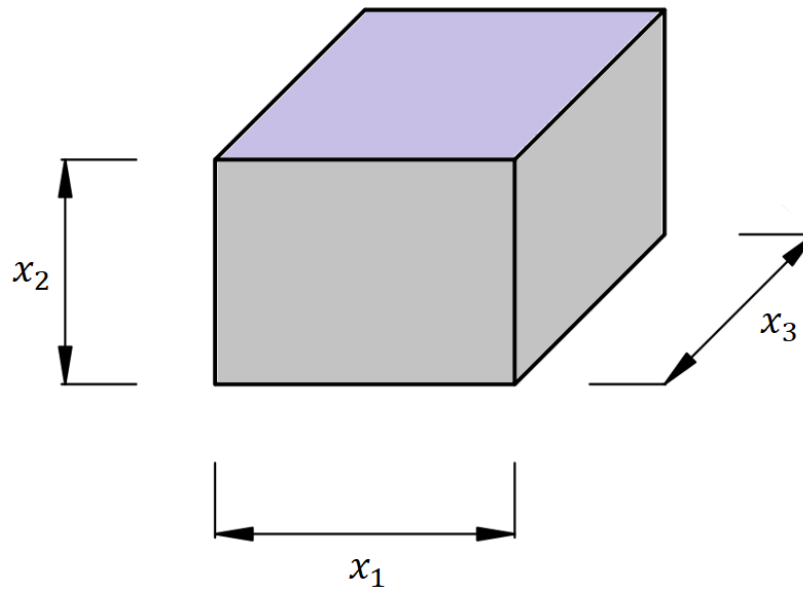
Finalmente, escrevendo-se as Equações (227) e (230) na forma de taxa, obtêm-se, respectivamente, as seguintes expressões:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \left[\ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \right]}{\partial t} = \frac{\partial [\ln(l) - \ln(l_0)]}{\partial t} = \frac{\partial [\ln(l)]}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial t} = \frac{1}{l} \dot{l} = \frac{\dot{l}}{l} \\ \dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \left[\ln\left(\frac{A_0}{A}\right) \right]}{\partial t} = \frac{\partial [-\ln(A) + \ln(A_0)]}{\partial t} = \frac{\partial [-\ln(A)]}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{A} \dot{A} = -\frac{\dot{A}}{A} \end{array} \right. \quad (231)$$

as quais são utilizadas para a obtenção da taxa de deformação $\dot{\varepsilon}$ para o caso unidimensional.

Analisando-se agora o caso tridimensional, estuda-se o comportamento de um elemento hexaédrico, cuja representação é apresentada na Figura 5.5:

Figura 5.5 – Elemento hexaédrico



Fonte: o próprio autor.

O corpo possui arestas com dimensões x_1 , x_2 e x_3 . Assim, seu volume V é obtido por:

$$V = x_1 x_2 x_3 \quad (232)$$

De forma semelhante ao caso unidimensional, impõe-se a condição de incompressibilidade do material, ou seja:

$$dV = d(x_1 x_2 x_3) = dx_1 x_2 x_3 + x_1 dx_2 x_3 + x_1 x_2 dx_3 = 0 \quad (233)$$

Dividindo-se todos os termos a Equação (233) pelo volume, obtém-se:

$$\frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} + \frac{dx_3}{x_3} = 0 \quad (234)$$

ou, alternativamente:

$$d\varepsilon_{11} + d\varepsilon_{22} + d\varepsilon_{33} = d\varepsilon_{kk} = 0 \quad (235)$$

Como

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} dt = \dot{\varepsilon}_{ij} dt \quad (236)$$

a condição de incompressibilidade pode ser escrita na forma:

$$\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33} = \dot{\varepsilon}_{kk} = 0 \quad (237)$$

ou seja, a incompressibilidade é assegurada quando o traço do tensor da taxa de deformação é nulo.

Segundo a lei de evolução (apresentada mais adiante na seção 5.1.6), tem-se que, no caso de tração uniaxial na direção 1, $\dot{\varepsilon}_{22} = \dot{\varepsilon}_{33}$, resultando:

$$\dot{\varepsilon}_{11} + 2\dot{\varepsilon}_{22} = 0 \quad (238)$$

ou

$$\dot{\epsilon}_{11} + 2\dot{\epsilon}_{33} = 0 \quad (239)$$

Isolando-se $\dot{\epsilon}_{22}$ e $\dot{\epsilon}_{33}$, obtém-se:

$$\dot{\epsilon}_{22} = \dot{\epsilon}_{33} = -0,5\dot{\epsilon}_{11} \quad (240)$$

Analisando-se a Equação (240), constata-se que o termo 0,5 corresponde ao coeficiente de Poisson, onde:

$$\nu = -\frac{\dot{\epsilon}_{22}}{\dot{\epsilon}_{11}} = -\frac{\dot{\epsilon}_{33}}{\dot{\epsilon}_{11}} = 0,5 \quad (241)$$

Portanto, conclui-se que o coeficiente de Poisson na fase plástica deve ser igual a 0,5 para que a incompressibilidade do material seja assegurada durante a plastificação. Ressalta-se também que tal valor é diferente do coeficiente de Poisson na fase elástica, o qual costuma apresentar valores próximos de 0,3 para metais (WIERZBICKI, 2013).

5.1.4 Critério de plastificação de von Mises

Conforme apresentado anteriormente, a plastificação ocorre para o caso uniaxial quando:

$$\sigma_{i(i)} = \pm\sigma_y \quad (242)$$

No entanto, no caso tridimensional, todas as componentes de tensão contribuem para a plastificação. As expressões que relacionam as componentes de tensão e suas respectivas contribuições na plastificação do material são denominadas critérios de plastificação. Um dos critérios de plastificação mais conhecidos da literatura e utilizados na análise de materiais dúcteis é o critério de von Mises, o qual possui a seguinte expressão:

$$\frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)] = \sigma_y^2 \quad (243)$$

A partir da Equação (243), define-se a tensão de von Mises $\bar{\sigma}$, também conhecida como tensão equivalente:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)]} \quad (244)$$

O critério de plastificação de von Mises pode também ser expresso em termos de uma função dependente da tensão:

$$F(\sigma_{ij}) = \bar{\sigma} - \sigma_y = 0 \quad (245)$$

sendo F denominada função de plastificação.

5.1.4.1 Sistema de coordenadas principais

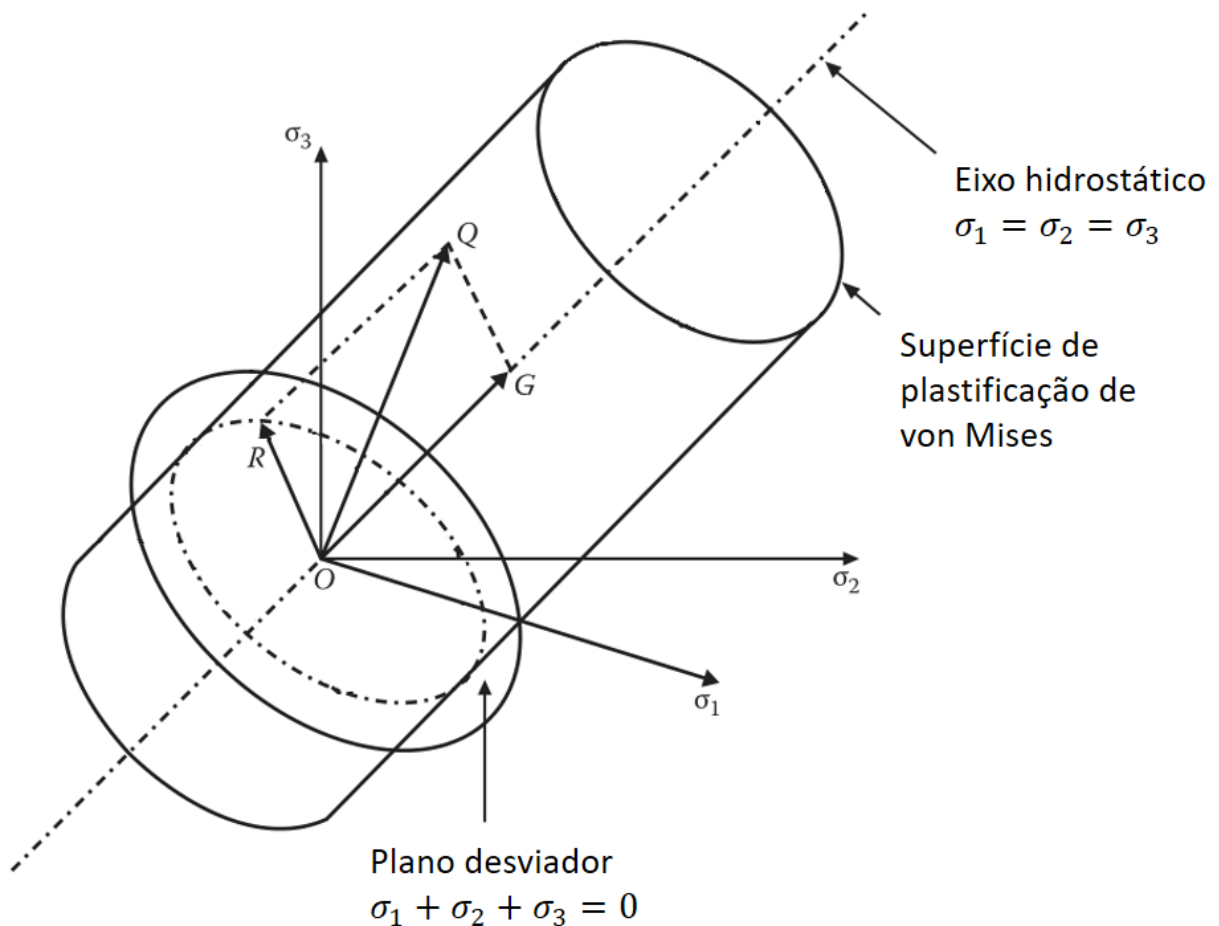
Analisando-se a expressão do critério de plastificação de von Mises no sistema de coordenadas principais, tem-se que $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$. Assim, a Equação (243) pode ser reduzida para:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_y^2 \quad (246)$$

sendo σ_1 , σ_2 e σ_3 as tensões principais.

A Equação (246) define a superfície de plastificação de von Mises no sistema de coordenadas principais, cuja representação geométrica é apresentada na Figura 5.6:

Figura 5.6 – Representação geométrica do critério de plastificação de von Mises no sistema de coordenadas principais



Fonte: adaptado de Johnson e Mellor (1973).

O critério de plastificação de von Mises representa geometricamente um cilindro aberto de raio $2\sigma_y/3$. Qualquer ponto localizado no interior do cilindro encontra-se no regime elástico, enquanto que qualquer ponto localizado sobre a superfície se encontra em escoamento.

Ressalta-se que, em análises simples onde a superfície de von Mises é entendida apenas como um critério de ruptura, pontos exteriores à superfície são considerados não seguros. O eixo do cilindro corresponde ao eixo hidrostático, reta na qual σ_1 , σ_2 e σ_3 possuem mesma intensidade, ou seja:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \quad (247)$$

Como todos os pontos pertencentes ao eixo hidrostático apresentam componentes σ_1 , σ_2 e σ_3 com mesma intensidade e módulo igual à tensão média σ_m , a reta pode ser definida pela equação:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_m \quad (248)$$

Por sua vez, o eixo do cone é normal ao plano octaédrico, cuja equação é dada por:

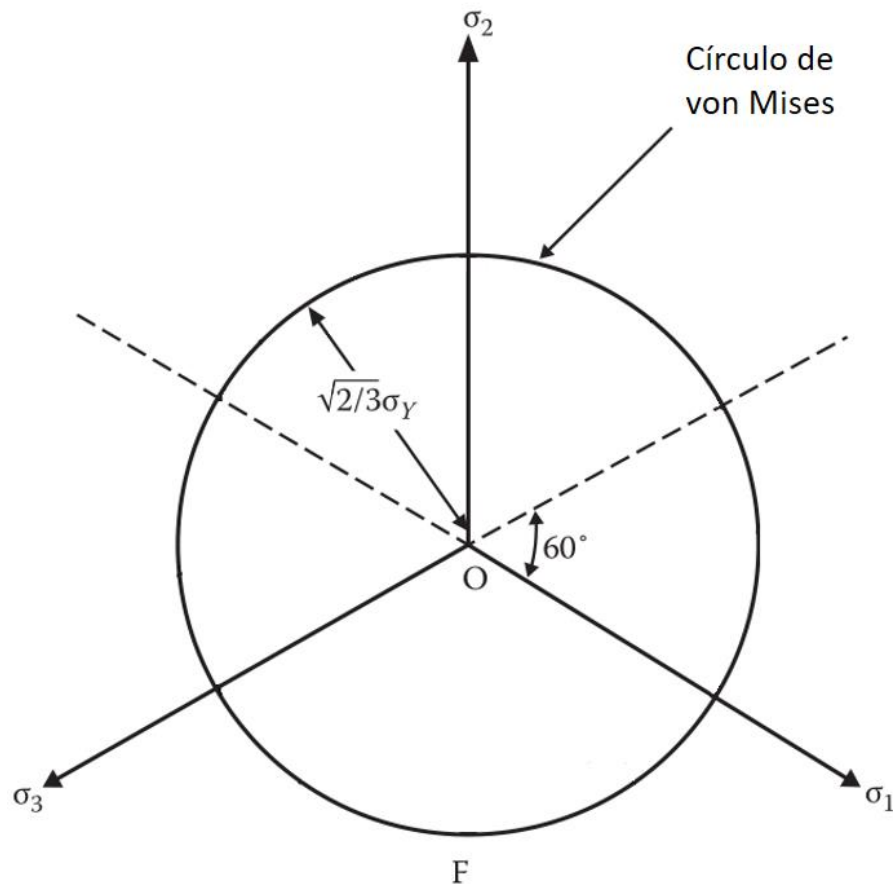
$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (249)$$

ou seja, como $Tr(\boldsymbol{\sigma}) = 0$, todos os pontos pertencentes ao plano apresentam estado de tensão puramente desviador, sendo por isso o plano também denominado plano desviador.

Dessa forma, a Figura 5.6 pode ser utilizada para representar geometricamente o estado de tensão de um ponto e verificar se o mesmo encontra-se no regime elástico ou em escoamento. Para tal, expressa-se o estado de tensão em função das tensões principais. Denominando Q o ponto com coordenadas $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, o estado de tensão do ponto é representado pelo vetor \overrightarrow{OQ} . Por sua vez, \overrightarrow{OQ} pode ser decomposto nas componentes hidrostática \overrightarrow{OG} e desviadora \overrightarrow{OR} contidas, respectivamente, no eixo hidrostático e no plano desviador. Como a superfície do cilindro é aberta, a distância entre o ponto Q e a superfície de plastificação independe do valor da componente hidrostática, ou seja, somente a componente desviadora exerce influência na plastificação do material.

No caso particular em que a tensão não possui componente hidrostática, a representação geométrica do critério de plastificação reduz-se à curva gerada pela intersecção da superfície de plastificação com o plano desviador, que no caso do critério de von Mises corresponde a um círculo de raio $2\sigma_y/3$, conforme apresentado na Figura 5.7:

Figura 5.7 – Vista do plano octaédrico do círculo gerado a partir da intersecção do cilindro de von Mises com o plano desviador



Fonte: adaptado de Dixit e Dixit (2015).

5.1.4.2 Estado plano de tensão

Analisando-se agora o critério de plastificação de von Mises no estado plano de tensão, tem-se que $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$. Assim, a Equação (243) pode ser reduzida para:

$$\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2 = \sigma_y^2 \quad (250)$$

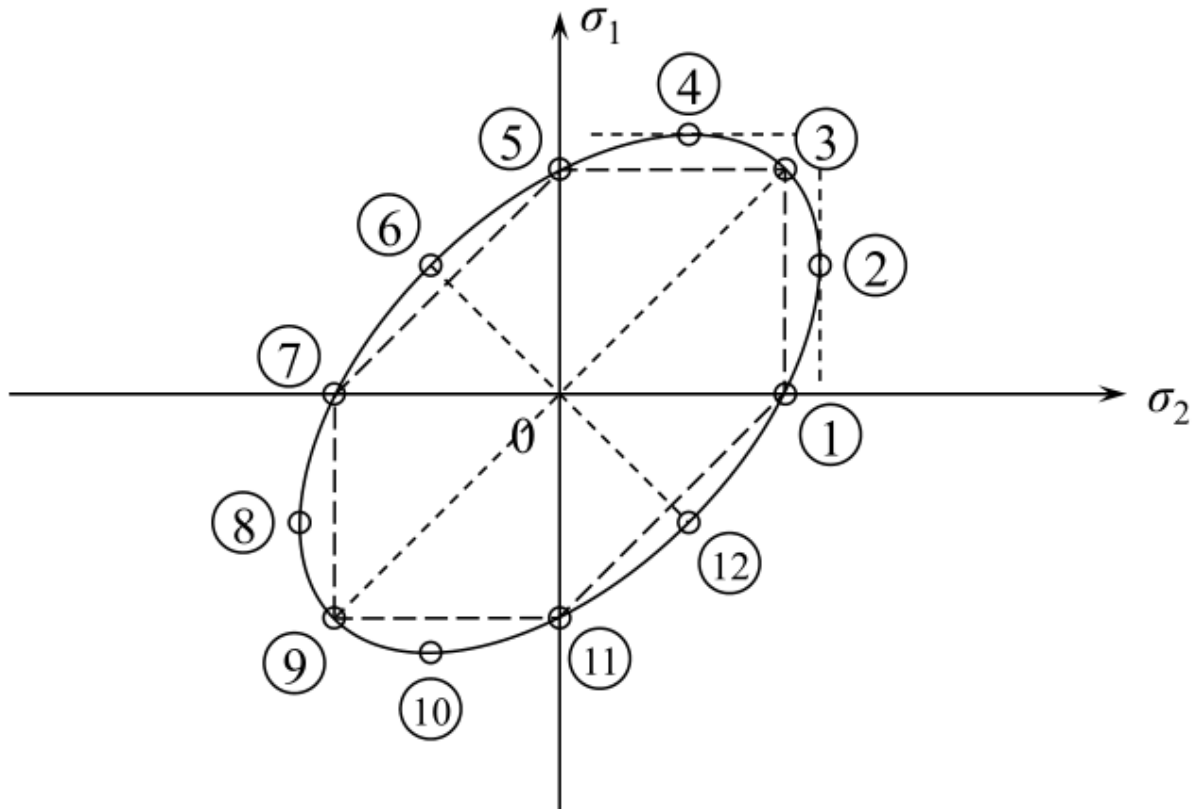
No cisalhamento puro, tem-se que $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$, resultando em $\sigma_{12} = \sigma_y/\sqrt{3}$. Portanto, neste caso mais particular, σ_{12} é igual a uma constante, que é denominada tensão de escoamento no cisalhamento.

Analisando-se a Equação (250) no sistema de coordenadas principais, tem-se que $\sigma_{12} = 0$, resultando:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_y^2 \quad (251)$$

Geometricamente, a Equação (251) representa uma elipse, denominada elipse de von Mises, cuja representação é apresentada na Figura 5.8:

Figura 5.8 – Elipse de von Mises no sistema de coordenadas principais



Fonte: Wierzbicki (2013).

Na elipse de von Mises, podem ser identificados os seguintes pontos especiais:

- pontos 1 e 5: tração uniaxial ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_y$);
- pontos 7 e 11: compressão uniaxial ($\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_y$);
- ponto 3: tração biaxial ($\sigma_1 = \sigma_2$);
- ponto 9: compressão biaxial ($-\sigma_1 = -\sigma_2$);
- pontos 2, 4, 8 e 10: estado plano de deformação ($\sigma_1 = 2\sigma_y/\sqrt{3}$);
- pontos 6 e 12: cisalhamento puro ($\sigma_1 = -\sigma_2$).

5.1.4.3 Tensão e taxa de deformação equivalentes

No sistema de coordenadas principais, a expressão da tensão de von Mises dada na Equação (244) reduz-se para:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (252)$$

Uma vez obtido $\bar{\sigma}$, pode-se determinar a taxa de deformação equivalente $\dot{\bar{\epsilon}}$ através da relação:

$$\bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (253)$$

Desenvolvendo-se a Equação (253), obtém-se a expressão da taxa de deformação equivalente $\dot{\bar{\epsilon}}$:

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{9} [(\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22})^2 + (\dot{\epsilon}_{22} - \dot{\epsilon}_{33})^2 + (\dot{\epsilon}_{33} - \dot{\epsilon}_{11})^2]} \quad (254)$$

Por fim, a deformação equivalente $\bar{\epsilon}$ é obtida integrando-se a taxa de deformação equivalente na forma:

$$\bar{\epsilon} = \int \dot{\bar{\epsilon}} dt \quad (255)$$

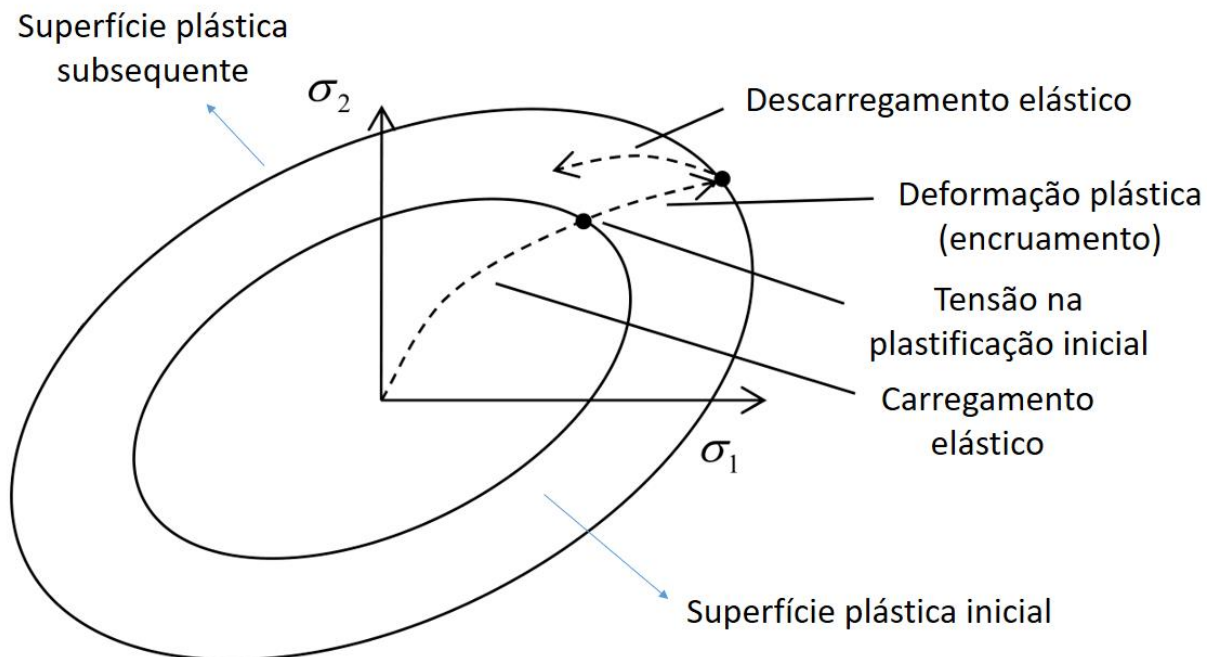
Para verificação, considera-se o caso de tração uniaxial na direção 1. Como $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, obtém-se da Equação (252) que $\bar{\sigma} = \sigma_1$. Ainda, como $\dot{\epsilon}_{22} = -0,5\dot{\epsilon}_{11}$ e $\dot{\epsilon}_{33} = -0,5\dot{\epsilon}_{11}$, obtém-se da Equação (254) que $\dot{\bar{\epsilon}} = \dot{\epsilon}_{11}$. Por fim, através da Equação (255), verifica-se que $\bar{\epsilon} = \epsilon_{11}$.

5.1.5 Encruamento isótropo e cinemático

Um fenômeno muito importante a ser considerado na plasticidade é o encruamento, que é caracterizado pelo aumento de resistência do material com o aumento da deformação. Este aumento de resistência ocorre devido à concentração de tensões no material, que pode ser ocasionada tanto pelo acúmulo de discordâncias devido à presença de uma barreira física no meio (inclusão ou vazio) quanto por incompatibilidades na acomodação de deformações dos grãos da rede cristalina (PROENÇA, 2018). Em termos gerais, o encruamento é um fenômeno no qual o critério de plastificação inicial muda com a deformação plástica em uma plastificação subsequente (DIXIT; DIXIT, 2015), podendo ser de dois tipos: isótropo ou cinemático.

O encruamento isótropo é caracterizado pela expansão da superfície de plastificação em todas as direções com o aumento da deformação plástica, ou seja, há um aumento da superfície de plastificação sem alteração de sua forma. Com o critério de plastificação de Von Mises, o fenômeno pode ser representado geometricamente conforme a Figura 5.9:

Figura 5.9 – Representação geométrica do encruamento isótropo com o critério de plastificação de von Mises



Fonte: adaptado de Kelly (2013).

O encruamento isótropo parte da suposição de que o tamanho do critério de plastificação instantâneo (representado pelo raio do cilindro apresentado na Figura 5.6) é função da intensidade da deformação plástica definida pela deformação equivalente $\bar{\epsilon}$, ou seja:

$$\bar{\sigma} = \sigma_y(\bar{\epsilon}) \quad (256)$$

sendo $\sigma_y(\bar{\epsilon})$ a função de encruamento.

Por sua vez, a função de encruamento pode ser facilmente determinada através de um ensaio de tração uniaxial. Em um ensaio de tração uniaxial na direção 1, obtém-se:

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 = \sigma_y(\bar{\epsilon}) = \sigma_y(\epsilon_1) \quad (257)$$

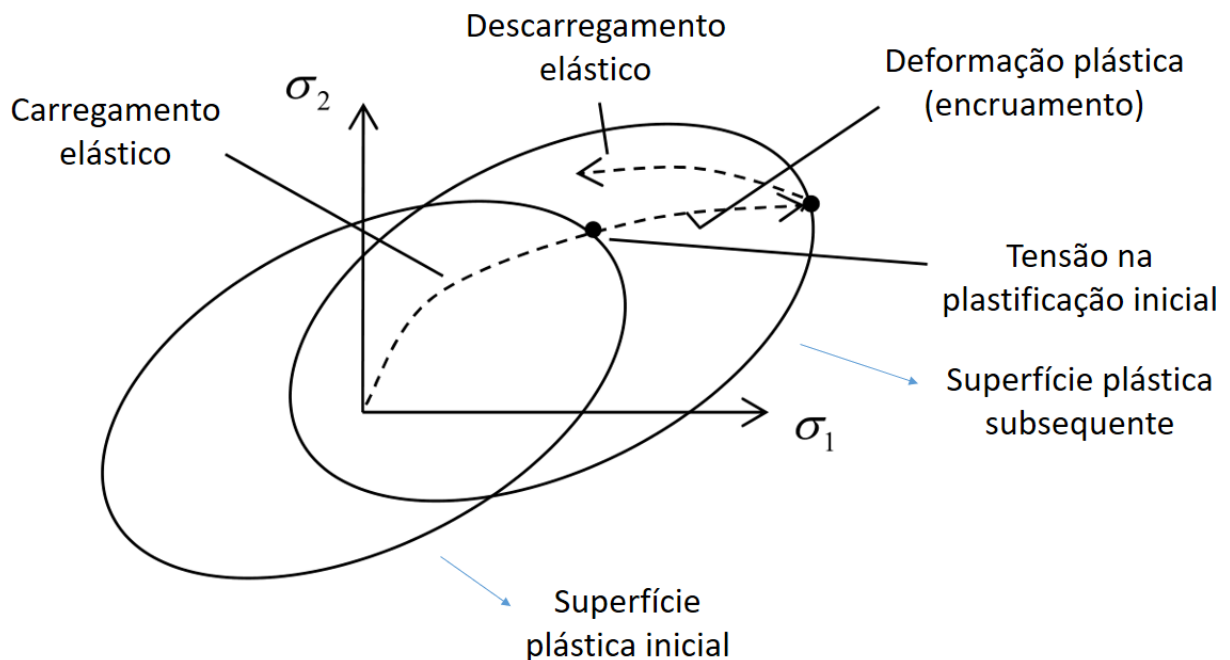
ou seja, a função de encruamento é a função que gera a curva tensão x deformação obtida no ensaio de tração uniaxial na direção 1.

Em casos de carregamentos cíclicos, nos quais é necessário modelar o efeito de Bauschinger⁴ e outros fenômenos similares, é também importante a consideração do encruamento cinemático do material. Diferentemente do encruamento isótropo, no encruamento cinemático o tamanho da superfície de plastificação permanece constante,

⁴ Efeito de Bauschinger é um fenômeno no qual a deformação plástica aumenta a tensão de escoamento na direção do fluxo plástico e diminui a tensão de escoamento na direção oposta, ou seja, a tensão de escoamento apresenta uma dependência com a trajetória e a direção do carregamento.

havendo apenas a alteração das coordenadas do centro da elipse de von Mises, as quais são denominadas *back stress*. Dessa forma, a superfície de plastificação tem sua forma e tamanho preservados e sofre apenas translação no espaço das tensões, conforme representado na Figura 5.10:

Figura 5.10 – Representação geométrica do encruamento cinemático com o critério de plastificação de von Mises



Fonte: adaptado de Kelly (2013).

Uma forma geral de se considerar o encruamento na função de plastificação F é escrevê-la em função de σ_{ij} e de parâmetros de encruamento K_i :

$$F(\sigma_{ij}, K_i) = 0 \quad (258)$$

No caso de encruamento isótropo puro, o formato da função de plastificação é definida pela função de plastificação inicial $F_0(\sigma_{ij})$, a qual tem seu tamanho alterado em função do parâmetro de encruamento isótropo κ . Dessa forma, a função de plastificação é dada pela seguinte expressão:

$$F(\sigma_{ij}, \kappa) = F_0(\sigma_{ij}) - \kappa = 0 \quad (259)$$

No critério de plastificação de von Mises, a superfície de plastificação inicial é dada pela função de plastificação apresentada na Equação (245), ou seja:

$$F_0(\sigma_{ij}) = \bar{\sigma} - \sigma_y = 0 \quad (260)$$

Conforme demonstrado no Apêndice A, a tensão de von Mises pode ser dada por:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}^{dev} \sigma_{ij}^{dev}} \quad (261)$$

Assim, substituindo-se as Equações (260) e (261) na Equação (259), a função de plastificação assume a forma:

$$F(\sigma_{ij}, \kappa) = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}^{dev} \sigma_{ij}^{dev}} - \sigma_y - \kappa = 0 \quad (262)$$

Já no caso de encruamento cinemático puro, a função de plastificação é dada pela expressão:

$$F(\sigma_{ij}, \chi_{ij}) = F_0(\sigma_{ij} - \chi_{ij}) = 0 \quad (263)$$

sendo χ_{ij} o *back stress*.

Com o critério de plastificação de von Mises, a função de plastificação assume a forma:

$$F(\sigma_{ij}, \chi_{ij}) = \sqrt{\frac{3}{2} (\sigma_{ij}^{dev} - \chi_{ij}^{dev})(\sigma_{ij}^{dev} - \chi_{ij}^{dev})} - \sigma_y = 0 \quad (264)$$

sendo χ_{ij}^{dev} a componente desviadora do *back stress*.

No caso mais geral, no qual há encruamento tanto isotrópico quanto cinemático, a função de plastificação assume a forma geral:

$$F(\sigma_{ij}, \kappa, \chi_{ij}) = F_0(\sigma_{ij} - \chi_{ij}) - \kappa = 0 \quad (265)$$

que, com o critério de plastificação de von Mises, passa a ser dada pela expressão:

$$F(\sigma_{ij}, \kappa, \chi_{ij}) = \sqrt{\frac{3}{2} (\sigma_{ij}^{dev} - \chi_{ij}^{dev})(\sigma_{ij}^{dev} - \chi_{ij}^{dev})} - \sigma_y - \kappa = 0 \quad (266)$$

5.1.6 Lei de evolução plástica

Para a determinação da deformação plástica, assume-se que a plastificação respeite uma lei de evolução. Considerando materiais com comportamento rígido-plástico perfeito, a lei de evolução plástica costuma ser dada em forma de taxa pela expressão:

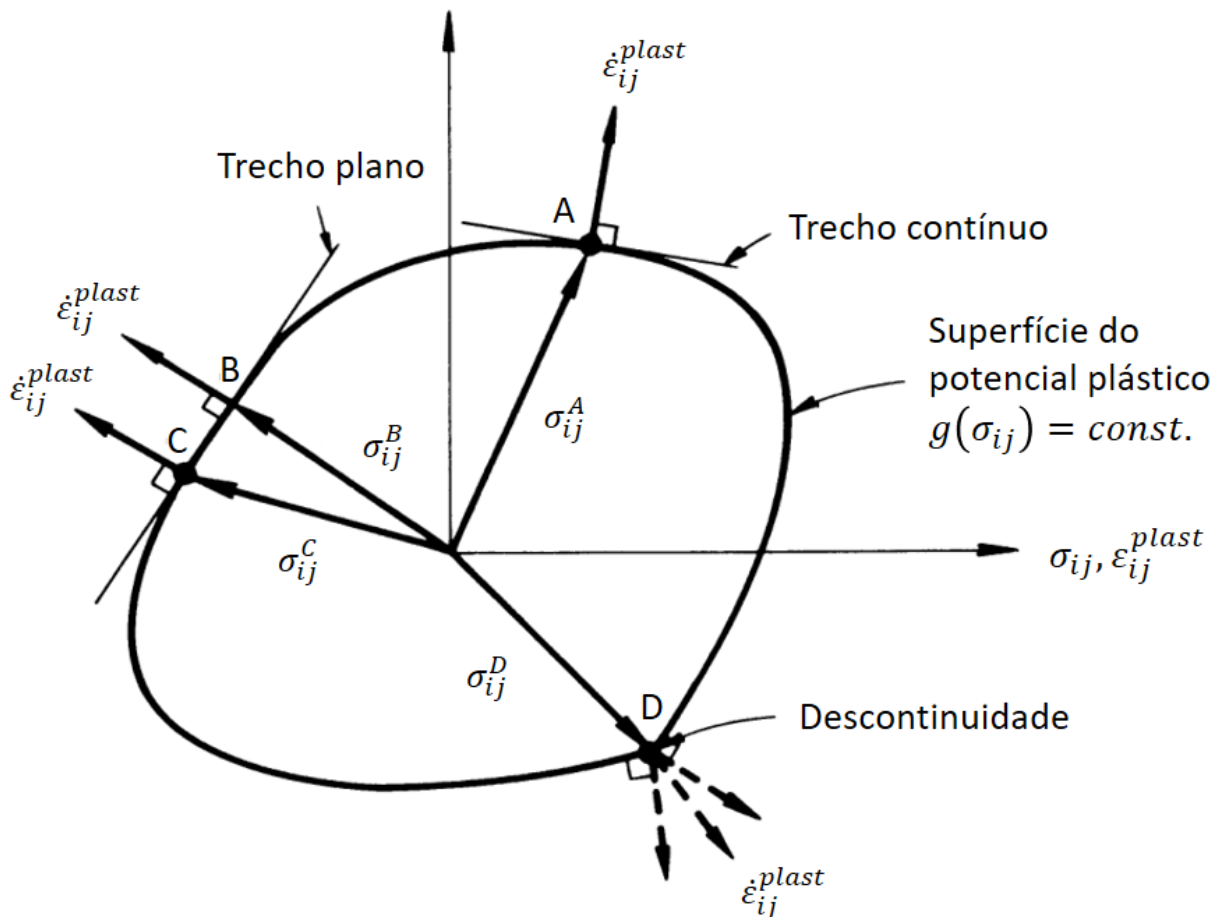
$$\varepsilon_{ij}^{plast} = \lambda \frac{\partial g(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (267)$$

onde λ é um fator de proporcionalidade escalar e g é o potencial plástico.

O fator $\dot{\lambda}$ fornece a magnitude da deformação plástica e possui sempre valor não negativo, sendo $\dot{\lambda} = 0$ no regime elástico e $\dot{\lambda} > 0$ durante a plastificação. Já o potencial plástico g é uma função escalar que, quando derivada em relação à tensão, fornece a direção da deformação plástica. Em certos materiais, como metais, o potencial plástico costuma ser igual à função de plastificação. Neste caso, a lei de evolução é dita associativa, uma vez que a lei está associada a um critério de plastificação específico. Caso contrário, quando o potencial plástico é diferente da função de plastificação, a lei de evolução é dita não associativa.

Quando $g(\sigma_{ij}) = \text{constante}$, a função g passa a definir uma superfície de potencial plástico, conforme apresentado na Figura 5.11. Como o gradiente $\partial g / \partial \sigma_{ij}$ fornece a direção do fluxo plástico e sabendo-se que o gradiente corresponde a um vetor normal à curva de nível em trechos contínuos, então $\dot{\epsilon}_{ij}^{plast}$ é sempre normal à superfície de potencial plástico. Tal propriedade é conhecida como princípio da normalidade.

Figura 5.11 – Representação geométrica do potencial plástico



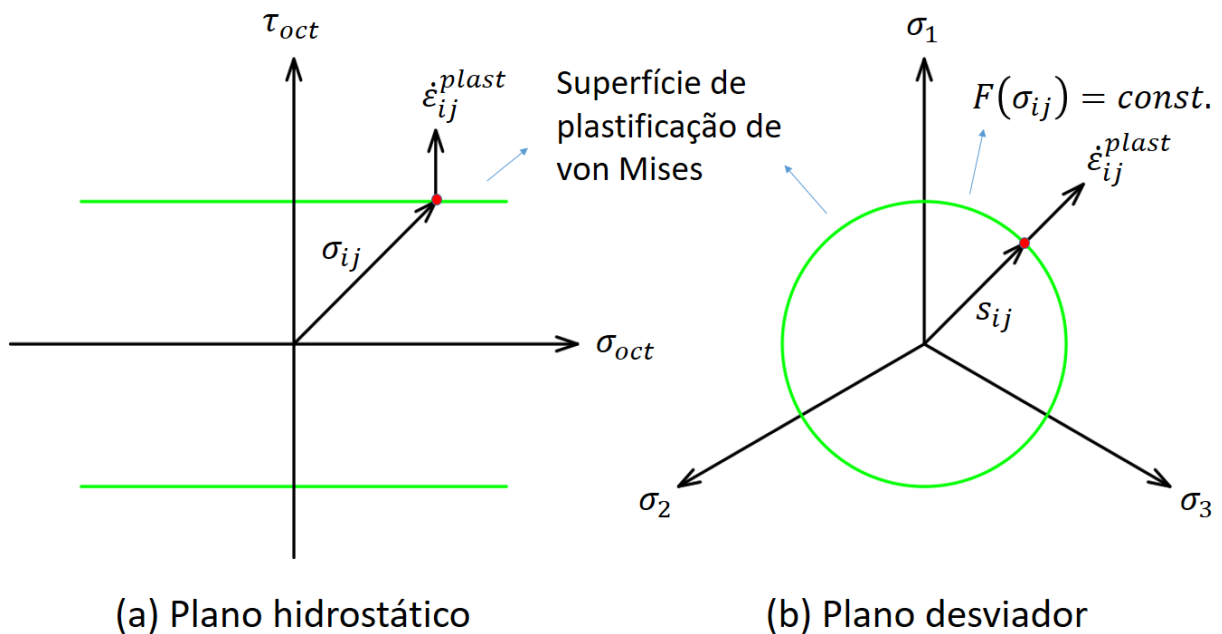
Fonte: adaptado de Chen e Han (1988).

Considerando uma lei de evolução associativa (potencial plástico g igual à função de plastificação F), a Equação (267) pode ser reescrita como:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{plast} = \lambda \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (268)$$

Caso o potencial plástico seja igual à função de plastificação de von Mises definida na Equação (245), a superfície do potencial plástico passa a corresponder à superfície de plastificação de von Mises apresentada na Figura 5.6. Dessa forma, a lei de fluxo plástico associada ao critério de plastificação de von Mises pode ser representada geometricamente conforme a Figura 5.12, onde são apresentados cortes transversais do plano hidrostático (Figura 5.12a) e do plano desviador (Figura 5.12b). No plano desviador, σ_{ij} é visto como sendo o raio do cilindro, cujo valor corresponde à componente desviadora da tensão s_{ij} . Em ambos os cortes, é possível notar que $\dot{\varepsilon}_{ij}^{plast}$ é sempre normal à superfície do cilindro.

Figura 5.12 – Representação geométrica da lei de fluxo plástico associada ao critério de plastificação de von Mises



Fonte: o próprio autor.

5.2 Modelo elastoplástico alternativo para grandes deformações

Neste item, é apresentada uma formulação elastoplástica alternativa para a simulação de materiais isotrópicos com encruamento isótropo e/ou cinemático proposta por Coda (2021, 2022), a qual foi empregada no presente trabalho. Destaca-se que os conceitos estabelecidos

nos itens anteriores sobre plasticidade em pequenas deformações são adaptados para a inclusão de grandes deformações a partir da decomposição de Flory e de parte da formulação elástica de grandes deformações apresentada anteriormente. As parcelas isocóricas da deformação estabelecidas nas Equações (196) e (197) são utilizadas para a definição das “direções” do fluxo plástico (ou evolução plástica), permitindo que a plasticidade seja modelada de forma mais simples que a decomposição multiplicativa de Kröner-Lee. A formulação parte de três suposições:

- a) as mudanças volumétricas são exclusivamente elásticas;
- b) o tensor de deformação plástica é sempre desviador;
- c) a decomposição multiplicativa do gradiente da função mudança de configuração em parcelas volumétrica e isocóricas garante evoluções independentes das tensões hidrostática e desviadoras quando ocorre fluxo plástico.

Mais detalhes da formulação são apresentados a seguir, sendo a descrição do modelo feita com base no artigo de Coda (2021, 2022).

5.2.1 Limite elástico

Partindo-se do critério de plastificação de von Mises e realizando-se algumas operações algébricas (as quais são desenvolvidas no Apêndice A), tem-se que o comportamento elástico de um material dúctil e isotrópico é regido pela seguinte expressão:

$$J_2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^{dev} : \boldsymbol{\sigma}^{dev} < \frac{\sigma_y^2}{3} \quad (269)$$

onde J_2 é o 2º invariante da componente desviadora da tensão e σ_y é a tensão de escoamento normal. Veja, por exemplo, as expressões apresentadas nas Equações (260) e (261), onde a superfície de plastificação (na forma de critério de resistência, isto é, igualdade) foi apresentada.

Trabalhando-se com a tensão de escoamento cisalhante, que é dada pela relação:

$$\sigma_y = 2\bar{\tau} \quad (270)$$

a Equação (269) pode ser reescrita como:

$$\sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^{dev} : \boldsymbol{\sigma}^{dev}} - 2\bar{\tau} < 0 \quad (271)$$

Conforme demonstrado anteriormente, as tensões desviadoras no regime elástico são dadas de forma lagrangeana pelas componentes \mathbf{S}^{isoc1} e \mathbf{S}^{isoc2} , as quais são obtidas, respectivamente, pelas Equações (193) e (194). Como existem duas direções isocóricas a serem analisadas, o critério de plastificação de von Mises deve ser dividido de forma a considerar cada uma das componentes de tensão isocóricas lagrangeanas. Disto, resultam duas condições:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}^{isoc1} : \mathbf{S}^{isoc1} - \bar{\tau}_1} < 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}^{isoc2} : \mathbf{S}^{isoc2} - \bar{\tau}_2} < 0 \end{array} \right. \quad (272)$$

Assumindo-se que

$$\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_2 = \bar{\tau} \quad (273)$$

as condições anteriores podem ser reescritas como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} \mathbf{S}^{isoc1} : \mathbf{S}^{isoc1} - \bar{\tau}^2 < 0 \\ \frac{3}{2} \mathbf{S}^{isoc2} : \mathbf{S}^{isoc2} - \bar{\tau}^2 < 0 \end{array} \right. \quad (274)$$

Substituindo-se na Equação (274) as expressões das tensões isocóricas dadas nas Equações (193) e (194), os critérios de plastificação passam a ser função das componentes isocóricas de deformação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3G^2}{32} \mathfrak{E}^{isoc1} : \mathfrak{E}^{isoc1} - \bar{\tau}^2 < 0 \\ \frac{3G^2}{32} \mathfrak{E}^{isoc2} : \mathfrak{E}^{isoc2} - \bar{\tau}^2 < 0 \end{array} \right. \quad (275)$$

que, de forma condensada, podem ser escritas como:

$$\frac{3G^2}{32} \mathfrak{E} : \mathfrak{E} - \bar{\tau}^2 < 0 \quad (276)$$

onde \mathfrak{E} representa ambas as direções isocóricas \mathfrak{E}^{isoc1} e \mathfrak{E}^{isoc2} .

As superfícies de plastificação iniciais são definidas impondo-se a igualdade nas Equações (275) ou (276). Neste ponto, destaca-se que na presente formulação existem duas superfícies de plastificação e não somente uma como na formulação clássica.

5.2.2 Definições

De forma a deixar claro os aspectos operacionais da formulação, a notação em taxas de deformação utilizada na descrição do modelo de plasticidade em pequenas deformações é alterada aqui para uma notação em evolução (ou variação).

5.2.2.1 Evolução plástica

Para a consideração de fluxo plástico prévio e a possibilidade de evolução plástica, são definidas algumas variáveis da formulação clássica adaptadas para a formulação implementada. Primeiramente, define-se a evolução da deformação plástica ($\Delta \mathfrak{E}^{plast}$), que é dada pela expressão:

$$\Delta \mathfrak{E}^{plast} = \Delta \lambda \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (277)$$

onde $\Delta \lambda$ é a variação do multiplicador plástico e $\mathfrak{E}/\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}$ representa a direção isocórica unitária de $\Delta \mathfrak{E}^{plast}$.

A partir da Equação (277) e das expressões das tensões isocóricas dadas nas Equações (193) e (194), define-se a variação da tensão plástica ($\Delta \mathfrak{S}^{plast}$), que é dada pela expressão:

$$\Delta \mathfrak{S}^{plast} = \frac{G}{4} \Delta \lambda \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (278)$$

Como no regime de grandes deformações um valor anterior de $\Delta \mathfrak{S}^{plast}$ pode não ser mais isocórico no tempo presente (possui apenas validade local), $\Delta \mathfrak{S}^{plast}$ não pode ser utilizado para o acúmulo da tensão plástica na forma $\mathfrak{S}^{plast} = \mathfrak{S}^{plast} + \Delta \mathfrak{S}^{plast}$. Por isso, realiza-se o cálculo da tensão plástica (\mathfrak{S}^{plast}) através da expressão:

$$\mathfrak{S}^{plast} = \frac{G}{4} \lambda^\zeta \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (279)$$

A evolução plástica é imposta na deformação plástica escalar λ^ζ , que é dada por:

$$\lambda^\zeta = (\lambda^\zeta)^{ac} + \zeta \Delta \lambda \quad (280)$$

onde o sobrescrito *ac* indica variável acumulada e ζ é o sinal da evolução plástica.

Como a tensão plástica é proporcional às direções isocóricas, então a 2ª e 3ª hipóteses da formulação são atendidas. Ressalta-se também que, diferentemente de outras formulações clássicas, a direção do fluxo plástico não depende de uma superfície de plastificação, mas sim

das direções isocóricas. Por sua vez, a deformação elástica é regida na fase plástica pela parcela volumétrica do modelo de Hartmann-Neff e, portanto, evita-se naturalmente a auto-intersecção do material, uma vez que a condição $J > 0$ é assegurada com a utilização do modelo hiperelástico.

5.2.2.2 Encruamento cinemático

Na formulação, o encruamento cinemático (H^c) é considerado constante nas iterações da solução numérica e depende de cada nível de carregamento, ou seja, é dependente de λ^ζ . Para uso em expressões futuras, define-se β , dado como a razão entre o encruamento cinemático e o módulo de elasticidade transversal:

$$\beta(\lambda^\zeta) = \frac{H^c(\lambda^\zeta)}{G} \quad (281)$$

Define-se também a variável interna do encruamento cinemático q , que é dada por:

$$q = q^{ac} + \beta(\lambda^\zeta)\zeta\Delta\lambda \quad (282)$$

onde o sinal da evolução plástica é calculado da seguinte forma:

$$\zeta = \text{Sign}(\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}} - \lambda^\zeta - q) \quad (283)$$

Com q , pode-se obter o *back stress* (χ) através da expressão:

$$\chi = \frac{G}{4} q \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (284)$$

5.2.2.3 Encruamento isótropo

O encruamento isótropo (H^i) é também considerado constante nas iterações da solução numérica e depende do multiplicador plástico acumulado. Para uso em expressões futuras, define-se η , dado como a razão entre o encruamento isótropo e o módulo de elasticidade transversal:

$$\eta(\lambda) = \frac{H^i(\lambda)}{G} \quad (285)$$

Define-se também a variável interna do encruamento isótropo κ , que é dada por:

$$\kappa = \kappa^{ac} + \eta(\lambda)\Delta\lambda \quad (286)$$

onde o multiplicador plástico λ é acumulado na forma:

$$\lambda = \lambda^{ac} + \Delta\lambda \quad (287)$$

5.2.3 Função objetiva

Para a inclusão de ambos os encruamentos isótropo e cinemático na função de plastificação, primeiramente se define a tensão \mathbf{S} utilizada na função objetiva:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{isoc} - \mathbf{S}^{plast} - \chi \quad (288)$$

onde \mathbf{S}^{isoc} representa ambas as tensões isocóricas \mathbf{S}^{isoc1} e \mathbf{S}^{isoc2} .

Substituindo-se na Equação (288) as expressões de \mathbf{S}^{isoc1} , \mathbf{S}^{isoc2} , \mathbf{S}^{plast} e χ dadas, respectivamente, nas Equações (193), (194), (279) e (284), obtém-se:

$$\mathbf{S} = \frac{G}{4} \mathfrak{E} - \frac{G}{4} \lambda^\zeta \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} - \frac{G}{4} q \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} = \frac{G}{4} \left(1 - \frac{\lambda^\zeta}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} - \frac{q}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \right) \mathfrak{E} \quad (289)$$

da qual se pode calcular:

$$\mathbf{S} : \mathbf{S} = \frac{G^2}{16} \left(1 - \frac{\lambda^\zeta}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} - \frac{q}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \right)^2 \mathfrak{E} : \mathfrak{E} \quad (290)$$

Por sua vez, a tensão elastoplástica (\mathbf{S}^{ep}) é dada pela expressão:

$$\mathbf{S}^{ep} = \mathbf{S}^{isoc} - \mathbf{S}^{plast} = \frac{G}{4} (1 - \lambda^\zeta) \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (291)$$

onde \mathbf{S}^{ep} representa as parcelas elastoplásticas desviadoras, as quais, somadas à tensão elástica volumétrica, resultam na tensão total a ser aplicada na solução do problema mecânico.

Incluindo na Equação (276) os encruamentos cinemático e isótropo através, respectivamente, das variáveis internas q e κ , a função objetiva passa a apresentar a seguinte forma:

$$f = \frac{3G^2}{32} \left(1 - \frac{\lambda^\zeta}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} - \frac{q}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \right)^2 \mathfrak{E} : \mathfrak{E} - \left(\sqrt{\frac{3G}{24}} \kappa + \bar{\tau} \right)^2 < 0 \quad (292)$$

onde o regime é elástico quando $f < 0$. Quando uma tentativa elástica resulta em $f > 0$, deve-se proceder com a fase de correção, de forma que a igualdade $f = 0$ seja respeitada e se permita a ocorrência da evolução plástica.

5.2.4 Cálculo da deformação plástica

Analisando-se a Equação (292), observa-se que a plastificação ocorre quando uma função objetiva tentativa viola o critério de plastificação, ou seja:

$$f^{tr} = \frac{3G^2}{32} \left[1 - \frac{(\lambda^\zeta)^{ac}}{\sqrt{\mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr}}} - \frac{q^{ac}}{\sqrt{\mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr}}} \right]^2 \mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr} - \left(\sqrt{\frac{3G}{24}} \kappa^{ac} + \bar{\tau} \right)^2 \quad (293)$$

$$\geq 0$$

onde o sobrescrito *tr* indica tentativa elástica sem evolução plástica.

Caso a função objetiva tentativa seja maior ou igual a zero, permite-se a ocorrência de evolução plástica impondo-se a igualdade na Equação (293), resultando:

$$\frac{3G^2}{32} \left\{ 1 - \frac{[(\lambda^\zeta)^{ac} + q^{ac}]}{\sqrt{\mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr}}} - (1 + \beta)\zeta \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{\mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr}}} \right\}^2 \mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr}$$

$$= \left[\sqrt{\frac{3G}{24}} (\kappa^{ac} + \eta\Delta\lambda) + \bar{\tau} \right]^2 \quad (294)$$

Como os encruamentos isótropo e cinemático são considerados constantes durante as iterações, basta-se obter $\Delta\lambda$ através da resolução da equação de 2º grau apresentada na Equação (294) pela fórmula de Bhaskara, cujas raízes são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\lambda_1 = \frac{\sqrt{\mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr}} - [(\lambda^\zeta)^{ac} + q^{ac}] - \kappa^{ac} - \frac{\bar{\tau}}{\sqrt{\frac{3G}{24}}}}{\zeta(1 + \beta) + \eta} \\ \Delta\lambda_2 = \frac{\sqrt{\mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr}} - [(\lambda^\zeta)^{ac} + q^{ac}] + \kappa^{ac} + \frac{\bar{\tau}}{\sqrt{\frac{3G}{24}}}}{\zeta(1 + \beta) - \eta} \end{array} \right. \quad (295)$$

das quais é adotada a raiz com o menor valor positivo.

As equações deduzidas até aqui são aplicadas conforme o pseudocódigo apresentado na Figura 5.13. O algoritmo é ativado caso o ponto de integração esteja sob plastificação no regime de grandes deformações, sendo utilizado após o cálculo da parcela elástica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, cujo pseudocódigo é apresentado na Figura 4.1.

Figura 5.13 – Pseudocódigo do algoritmo de plasticidade sob grandes deformações

1	Cálculo de f^{tr} [raiz quadrada da Equação (293)]
2	Se $f^{tr} > 0$
3	Determinação de ζ [Equação (283)]
4	Cálculo de η [Equação (285)]
5	Cálculo de β [Equação (281)]
6	Cálculo das raízes $\Delta\lambda_1$ e $\Delta\lambda_2$ [Equação (295)]
7	Atribuição da menor raiz a $\Delta\lambda$ ($\Delta\lambda = \Delta\lambda_1$ ou $\Delta\lambda = \Delta\lambda_2$)
8	Incremento de λ^s [Equação (280)]
9	Incremento de q [Equação (282)]
10	Cálculo de \mathbf{S}^{plast} [Equação (279)]
11	Incremento de κ [Equação (286)]
12	Incremento de λ [Equação (287)]
13	Cálculo de χ [Equação (284)]
14	Senão
15	Variação do multiplicador plástico nula ($\Delta\lambda = 0$)
16	Fim condição

Fonte: o próprio autor.

5.2.5 Tensor constitutivo elastoplástico isocórico tangente

Para a obtenção da parcela elastoplástica isocórica do tensor constitutivo tangente, escreve-se a tensão elastoplástica \mathbf{S}^{ep} em um instante, onde (sem se utilizar o conceito de evolução) se aplica a variação da tensão plástica $\Delta\mathbf{S}^{plast}$:

$$\mathbf{S}^{ep} = \mathbf{S}^{isoc} - (\mathbf{S}^{plast})^{ac} - \Delta\mathbf{S}^{plast} \quad (296)$$

Sabendo-se que $(\mathbf{S}^{plast})^{ac}$ é constante e utilizando-se as expressões de \mathbf{S}^{isoc1} , \mathbf{S}^{isoc2} e $\Delta\mathbf{S}^{plast}$ dadas, respectivamente, nas Equações (193), (194) e (278), tem-se que a variação da tensão elastoplástica ($\delta\mathbf{S}^{ep}$) pode ser dada por:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{S}^{ep} &= \frac{\partial\mathbf{S}^{isoc}}{\partial\mathbb{E}} : \delta\mathbb{E} - \frac{\partial\Delta\mathbf{S}^{plast}}{\partial\mathbb{E}} : \delta\mathbb{E} = \frac{G}{4} \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\mathbb{E}} : \delta\mathbb{E} - \frac{G}{4} \Delta\lambda \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\mathbb{E}} : \delta\mathbb{E} \\ &= \frac{G}{4} (1 - \Delta\lambda) \frac{\partial^2\bar{I}}{\partial\mathbb{E} \otimes \partial\mathbb{E}} : \delta\mathbb{E} \end{aligned} \quad (297)$$

Dessa forma, o tensor constitutivo elastoplástico tangente isocórico ($\mathfrak{C}^{ep,isoc}$) é obtido através da expressão:

$$\mathfrak{C}^{ep,isoc} = \mathfrak{C}^{isoc} - \mathfrak{C}^{plast} = \frac{G}{4} (1 - \Delta\lambda) \frac{\partial^2\bar{I}}{\partial\mathbb{E} \otimes \partial\mathbb{E}} \quad (298)$$

onde o termo $\partial^2 \bar{I} / \partial \mathbb{E} \otimes \partial \mathbb{E}$ é obtido através das Equações (217) e (218), \mathfrak{C}^{isoc} é a parcela isocórica do tensor constitutivo elástico tangente obtida através das Equações (174) e (175) e \mathfrak{C}^{plast} é o tensor constitutivo plástico tangente.

Dessa forma, o tensor constitutivo plástico tangente é dado pela expressão:

$$\mathfrak{C}^{plast} = \frac{G}{4} \Delta \lambda \frac{\partial^2 \bar{I}}{\partial \mathbb{E} \otimes \partial \mathbb{E}} \quad (299)$$

o qual é calculado após a obtenção de \mathfrak{C}^{elast} no pseudocódigo da Figura 4.2.

Assim, caso o ponto de integração esteja sob plastificação, o tensor constitutivo tangente total (\mathfrak{C}^{total}) é obtido subtraindo-se a componente plástica (\mathfrak{C}^{plast}) do tensor constitutivo elástico tangente (\mathfrak{C}^{elast}), ou seja:

$$\mathfrak{C}^{total} = \mathfrak{C}^{elast} - \mathfrak{C}^{plast} \quad (300)$$

que é incluído no processo de solução através de sua utilização na Equação (132) para o cálculo da matriz hessiana.

5.2.6 Modelo auxiliar de pequenas deformações

Em carregamentos cíclicos, quando \mathbf{S}^{plast} possui valor não nulo e $\sqrt{\mathfrak{C} : \mathfrak{C}}$ é pequeno, a Equação (279) torna-se mal-condicionada e passa a não conseguir mais representar a tensão plástica. Dessa forma, passa a ser necessária a utilização de uma outra abordagem no regime de pequenas deformações com \mathbf{S}^{plast} não nulo.

Da mesma forma que no modelo de grandes deformações, a tensão a ser utilizada na função objetiva é a mesma dada na Equação (288). Como as tensões elástica isocórica e plástica acumulada são previamente obtidas no modelo de grandes deformações, ambas as tensões são isocóricas e podem ser utilizadas na obtenção da direção plástica (\mathbf{v}) através da expressão:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{S}^{isoc} - \mathbf{S}^{plast}}{\sqrt{(\mathbf{S}^{isoc} - \mathbf{S}^{plast}) : (\mathbf{S}^{isoc} - \mathbf{S}^{plast})}} = \frac{\mathbf{S}^{isoc} - \mathbf{S}^{plast}}{\|\mathbf{S}^{isoc} - \mathbf{S}^{plast}\|} \quad (301)$$

Uma vez obtida a direção plástica, podem ser calculadas a variação (ou, neste caso, evolução) da tensão plástica ($\Delta \mathbf{S}^{plast}$) e a variação do *back stress* ($\Delta \boldsymbol{\chi}$) através, respectivamente, das expressões:

$$\Delta \mathbf{S}^{plast} = \frac{G}{4} \Delta \lambda \mathbf{v} \quad (302)$$

$$\Delta \boldsymbol{\chi} = \beta \frac{G}{4} \Delta \lambda \mathbf{v} \quad (303)$$

Com isso, a função objetiva assume a forma:

$$f^{tr} = \left[\sqrt{\frac{3}{2}} (\mathbf{S}^{tr} : \mathbf{S}^{tr}) \right]^2 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{G}{4} \kappa^{ac} + \bar{\tau} \right)^2 \leq 0 \quad (304)$$

Quando uma função objetiva tentativa viola o critério de plastificação ($f^{tr} > 0$), impõe-se a igualdade a Equação (304), obtendo-se:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} [(\mathbf{S}^{elast} - \mathbf{S}^{plast} - \boldsymbol{\chi} - \mathbf{v} \Delta \lambda^* - \beta \mathbf{v} \Delta \lambda^*) \\ & \quad : (\mathbf{S}^{elast} - \mathbf{S}^{plast} - \boldsymbol{\chi} - \mathbf{v} \Delta \lambda^* - \beta \mathbf{v} \Delta \lambda^*)] \\ & = \left(\frac{G}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \kappa^{ac} + \bar{\tau} + \sqrt{\frac{3}{2}} \eta \Delta \lambda^* \right)^2 \end{aligned} \quad (305)$$

onde

$$\Delta \lambda^* = \frac{G}{4} \Delta \lambda \quad (306)$$

Após algumas manipulações algébricas, a Equação (305) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} f^{tr} + \left[\frac{3}{2} \varpi^2 - \frac{3}{2} \eta^2 \right] (\Delta \lambda^*)^2 - 2 \left[\frac{3}{2} \varpi (\mathbf{S}^{isoc} : \mathbf{v}) + \left(\frac{G}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \kappa^{ac} + \bar{\tau} \right) \sqrt{\frac{3}{2}} \eta \right] \Delta \lambda^* \\ = 0 \end{aligned} \quad (307)$$

onde

$$\varpi = 1 + \beta \quad (308)$$

Como os encruamentos isótropo e cinemático são considerados constantes durante as iterações, basta resolver a equação de 2º grau apresentada na Equação (307) pela fórmula de Bhaskara, sendo as raízes dadas por:

$$\Delta \lambda^* = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4af^{tr}}}{2a} \quad (309)$$

ou, alternativamente:

$$\Delta \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4af^{tr}}}{2a} \frac{4}{G} \quad (310)$$

onde os coeficientes a e b são obtidos pelas expressões:

$$a = \frac{3}{2} [\bar{\omega}^2 - \eta^2] \quad (311)$$

$$b = -2 \left[\frac{3}{2} \bar{\omega} (\mathbf{S}^{isoc} : \mathbf{v}) + \left(\sqrt{\frac{3}{2} \kappa^{ac} + \bar{\tau}} \right) \sqrt{\frac{3}{2} \eta} \right] \quad (312)$$

Por fim, as variáveis plásticas são atualizadas por meio das seguintes expressões de evolução:

$$\begin{cases} \kappa = \kappa^{ac} + \eta \Delta \lambda \\ \lambda = \lambda^{ac} + \Delta \lambda \\ \chi = \chi + \Delta \chi \\ \mathbf{S}^{plast} = \mathbf{S}^{plast} + \Delta \mathbf{S}^{plast} \end{cases} \quad (313)$$

Dessa forma, caso o ponto de integração esteja sob plastificação no regime de pequenas deformações, ativa-se o algoritmo apresentado no pseudocódigo da Figura 5.14. O algoritmo é acionado após o cálculo da parcela elástica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie obtida no pseudocódigo da Figura 4.1. Ressalta-se que as equações para o cálculo de λ^ζ e q utilizadas para a transição entre os modelos são apresentadas no item a seguir.

Figura 5.14 – Pseudocódigo do algoritmo de plasticidade sob pequenas deformações

-
- 1 Zera-se $\Delta \lambda$ ($\Delta \lambda = 0$)
 - 2 Cálculo de f^{tr} [Equação (304)]
 - 3 **Se $f^{tr} > 0$**
 - 4 Cálculo de η [Equação (285)]
 - 5 Cálculo de β [Equação (281)]
 - 6 Cálculo de \mathbf{v} [Equação (301)]
 - 7 Cálculo das raízes $\Delta \lambda_1$ e $\Delta \lambda_2$ [Equação (310)]
 - 8 Atribuição da menor raiz positiva a $\Delta \lambda$ ($\Delta \lambda = \Delta \lambda_1$ ou $\Delta \lambda = \Delta \lambda_2$)
 - 9 Incremento de κ [Equação (313)]
 - 10 Incremento de λ [Equação (313)]
 - 11 Incremento de χ [Equações (303) e (313)]
 - 12 Incremento de \mathbf{S}^{plast} [Equações (302) e (313)]
 - 13 Cálculo de λ^ζ [Equação (316)]
 - 14 Cálculo de q [Equação (317)]
 - 15 **Fim condição**
-

Fonte: o próprio autor.

5.2.7 Transição entre modelos

Os modelos de pequenas e grandes deformações, apesar de em teoria serem os mesmos, apresentam algumas diferenças. Enquanto que no modelo de grandes deformações são armazenadas as variáveis λ^ζ e q , no modelo de pequenas deformações \mathcal{S}^{plast} e χ são as variáveis a serem armazenadas. Além disso, embora \mathcal{S}^{plast} e χ sejam conhecidos no modelo de grandes deformações através, respectivamente, das Equações (279) e (284), no modelo de pequenas deformações os tensores devem ser multiplicados por \mathfrak{E} para o cálculo das variáveis escalares de interesse, ou seja:

$$\mathfrak{E} : \mathcal{S}^{plast} = \frac{G}{4} \lambda^\zeta \frac{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (314)$$

$$\mathfrak{E} : \chi = \frac{G}{4} q \frac{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (315)$$

Isolando-se λ^ζ e q nas equações anteriores, obtêm-se as expressões:

$$\lambda^\zeta = \frac{4}{G} \frac{\mathcal{S}^{plast} : \mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (316)$$

$$q = \frac{4}{G} \frac{\chi : \mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (317)$$

as quais possibilitam a transição dos modelos.

Após o cálculo de \mathcal{S}^{plast} (seja pelo algoritmo de grandes ou de pequenas deformações), a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie total (\mathcal{S}^{total}) é obtida através da expressão:

$$\mathcal{S}^{total} = \mathcal{S}^{elast} - \mathcal{S}^{plast} \quad (318)$$

sendo a plasticidade incluída no processo de solução através da utilização de \mathcal{S}^{total} na Equação (118).

Assim, a análise é sempre iniciada com o modelo de grandes deformações, tendo em vista que $\mathcal{S}^{plast} = 0$ no início do processo. No caso de carregamento cíclico, a transição entre o modelo de grandes para pequenas deformações ocorre quando $\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}} < tol$, enquanto que do modelo de pequenas para grandes deformações a transição acontece quando $\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}} > tol$, sendo tol um valor pequeno calibrado em um ensaio numérico de tração simples.

6 VISCOSIDADE

Nas teorias clássicas de plasticidade, a dependência temporal não é considerada, sendo as equações apresentadas em forma de taxas ou evolução, de modo que o tempo não afeta a resposta do material no espaço tensão-deformação. No entanto, existem materiais (sólidos) que apresentam uma resposta dependente do tempo, ou seja, comportamento viscoso, podendo este ocorrer antes e/ou após o patamar de escoamento. Dessa forma, dependendo do regime onde ocorre a resposta viscosa, os sólidos podem apresentar quatro tipos de comportamentos principais (NEGAHBAN, 2012):

- a) elastoplástico;
- b) viscoelasto-plástico;
- c) elasto-viscoplástico;
- d) viscoelástico-viscoplástico.

As teorias apresentadas até agora neste trabalho foram construídas do ponto de vista da Mecânica dos Sólidos. Entretanto, conforme comentado no item 2.3, as equações de equilíbrio em tensões são equivalentes para problemas de sólidos e fluidos. A diferença básica dos modelos adiabáticos (sem troca térmica) reside na lei constitutiva adotada. Para sólidos, a elasticidade e a plasticidade são independentes do tempo, enquanto que a viscosidade apresenta dependência temporal. Para fluidos, desde que a cinemática das deformações esteja corretamente definida, pode-se adotar em uma representação lagrangeana um comportamento elástico volumétrico. No entanto, o comportamento cisalhante é necessariamente viscoso (dependente do tempo), resultando nas definições de fluidos newtonianos (relação linear) e não newtonianos (relação não linear). Seguindo esta linha de raciocínio, neste capítulo é apresentada uma descrição alternativa lagrangeana total de viscosidade aplicada a sólidos desenvolvendo grandes deformações, sendo, no final, estabelecidas as condições constitutivas onde a modelagem de fluido (viscoso e compressível) é definida.

6.1 Modelos viscosos para pequenas deformações

Embora o modelo alternativo viscoso proposto seja voltado para a resolução de problemas com o desenvolvimento de grandes deformações, a formulação parte de conceitos de modelos viscosos clássicos. Por isso, neste item é feita uma breve descrição de modelos

viscoelásticos, viscoplásticos e viscoelásticos-viscoplásticos conhecidos da literatura empregados na resolução de problemas no regime de pequenas deformações.

6.1.1 Modelos viscoelásticos

No regime de pequenas deformações, o comportamento de sólidos perfeitamente elásticos é descrito pela teoria da elasticidade, a qual dispõe que a tensão é diretamente proporcional à deformação e independente da taxa de deformação, conforme descrito pela Lei de Hooke. Já o comportamento de fluidos viscosos é descrito pela teoria clássica da hidrodinâmica, onde se supõe que a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à taxa de deformação e independente da deformação, conforme postulado pela Lei de Newton da Viscosidade. Embora estas duas idealizações sejam capazes de descrever uma vasta gama de materiais, alguns sólidos apresentam comportamento intermediário entre os dois modelos. Tais materiais apresentam um comportamento viscoelástico, ou seja, respondem de forma tanto elástica quanto viscosa quando submetidos à deformação (TIBBITT, 2019). Entre os materiais que apresentam tal comportamento, podem ser citados alimentos, polímeros sintéticos, madeira, solo, tecidos biológicos e metais submetidos a elevadas temperaturas (BANKS; HU; KENZ, 2011).

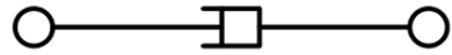
No regime de pequenas deformações, o comportamento viscoelástico costuma ser descrito por modelos viscoelásticos lineares, nos quais a tensão é diretamente proporcional à história de deformação⁵ (BANKS; HU; KENZ, 2011). Nestes modelos, as relações constitutivas costumam ser representadas por meio de análogos mecânicos, sistemas semelhantes a circuitos elétricos. Esta representação é adotada pelo fato de a dependência temporal da resposta viscoelástica ser análoga à de circuitos elétricos reativos, uma vez que ambos os comportamentos são descritos pelas mesmas equações diferenciais ordinárias no tempo. Por este motivo, torna-se conveniente a descrição do movimento molecular de materiais por modelos do tipo mola-amortecedor (ROYLANCE, 2001), nos quais o comportamento viscoelástico é descrito pela combinação linear de molas hookeanas (Figura 6.1a) com amortecedores newtonianos (Figura 6.1b).

⁵ É importante ressaltar que a relação linear entre a tensão e a história de deformação não se refere ao formato de nenhuma curva de resposta do material.

Figura 6.1 – Representação esquemática de (a) mola hookeana e (b) amortecedor newtoniano



(a) Mola hookeana



(b) Amortecedor newtoniano

Fonte: o próprio autor.

A mola hookeana (mola puramente elástica) representa a componente elástica e modela a deformação instantânea sofrida pelo material e a quantidade de energia mecânica armazenada na forma de energia de deformação. Seu comportamento é descrito pela Lei de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (319)$$

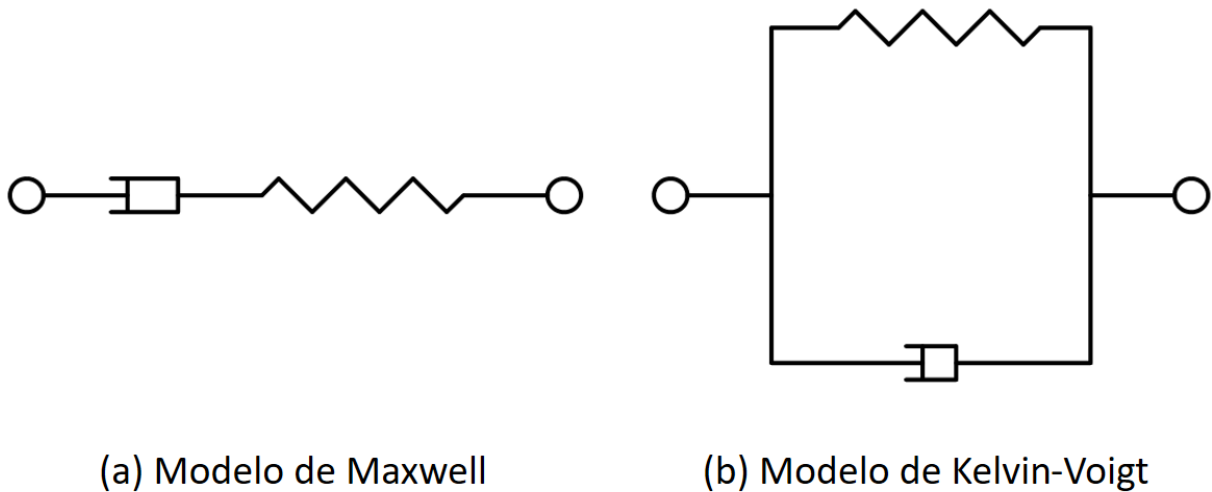
Já o amortecedor newtoniano (amortecedor puramente viscoso) representa a componente viscosa e modela o comportamento dependente do tempo, no qual a tensão gera, ao invés de uma deformação, uma taxa de deformação. Tal relação ocorre em fluidos newtonianos e é descrita pela Lei de Newton da Viscosidade:

$$\sigma = \eta\dot{\varepsilon} \quad (320)$$

sendo η a viscosidade do material.

A partir dos dois elementos apresentados anteriormente, podem ser construídos diversos modelos viscoelásticos. Os dois mais simples são os modelos de Maxwell e o de Kelvin-Voigt, os quais são apresentados na Figura 6.2:

Figura 6.2 – Modelos viscoelásticos de (a) Maxwell e (b) Kelvin-Voigt

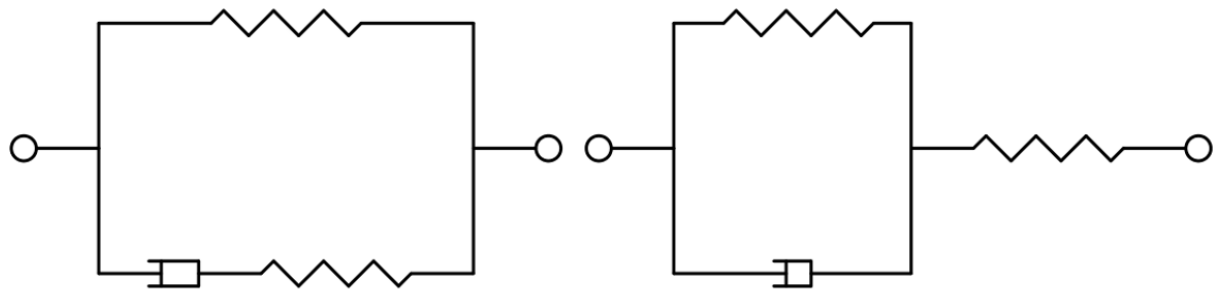


Fonte: o próprio autor.

O modelo de Maxwell consiste em um sistema composto por uma mola hookeana conectada em série com um amortecedor newtoniano. No regime de pequenas deformações, os elementos são sujeitos à mesma tensão e a deformação total é dada pela soma das contribuições elástica e viscosa. O modelo considera que a tensão reduz exponencialmente com o tempo para uma deformação constante imposta, o que o torna apropriado para a análise de diversos materiais, especialmente polímeros. No entanto, o modelo possui como limitação a incapacidade de reproduzir com precisão o efeito da fluência. De maneira oposta, o modelo de Kelvin-Voigt consiste em um sistema composto por uma mola hookeana conectada em paralelo com um amortecedor newtoniano. No sistema, os elementos são sujeitos à mesma deformação e a tensão total é dada pela soma das componentes elástica e viscosa. O modelo costuma ser bastante empregado no estudo do comportamento viscoelástico de solos e tem como vantagem a capacidade de reproduzir com precisão a fluência em diversos materiais. No entanto, o modelo tem como desvantagem ser pouco preciso na descrição da relaxação de tensão em muitos materiais viscoelásticos (BANKS; HU; KENZ, 2011).

Outro modelo muito conhecido na literatura é o modelo sólido linear padrão, também conhecido como modelo de três elementos ou modelo de Zener. O modelo apresenta duas representações, a de Maxwell (Figura 6.3a) e a da Kelvin-Voigt (Figura 6.3b). Na primeira, o sistema é composto por uma mola conectada em paralelo com o modelo de Maxwell, enquanto que na segunda o sistema consiste em uma mola conectada em série com o modelo de Kelvin-Voigt.

Figura 6.3 – Modelo sólido linear padrão com representação de (a) Maxwell e (b) Kelvin-Voigt



(a) Representação de Maxwell

(b) Representação de Kelvin-Voigt

Fonte: o próprio autor.

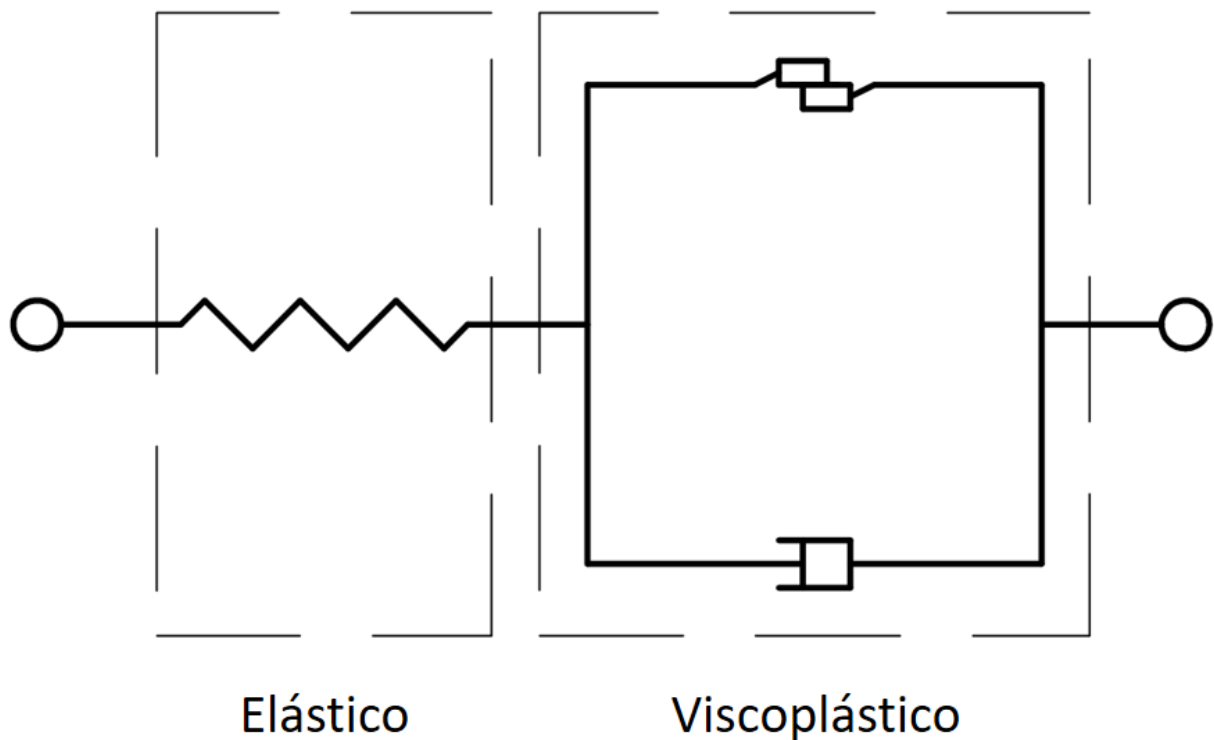
De forma análoga, outros modelos podem ser utilizados para a representação de materiais com comportamentos mais complexos através do emprego de sistemas com um maior número de elementos e arranjos mais elaborados.

6.1.2 Modelos viscoplásticos

Em alguns materiais, observa-se que, após a plastificação inicial, a tensão necessária para uma plastificação subsequente aumenta com a taxa de deformação devido à resistência viscosa do material a uma nova plastificação. Tal fenômeno é denominado viscoplasticidade (DIXIT; DIXIT, 2015). De forma semelhante à plasticidade clássica, existe uma superfície de plastificação e, caso o estado de tensão situe-se no interior da superfície, há o desenvolvimento de deformações independentes do tempo (DE BORST et al., 2012).

O modelo reológico mais simples para a representação do comportamento de materiais viscoplásticos é o modelo viscoplástico de Maxwell, cujo análogo mecânico é apresentado na Figura 6.4:

Figura 6.4 – Modelo viscoplástico de Maxwell



Fonte: o próprio autor.

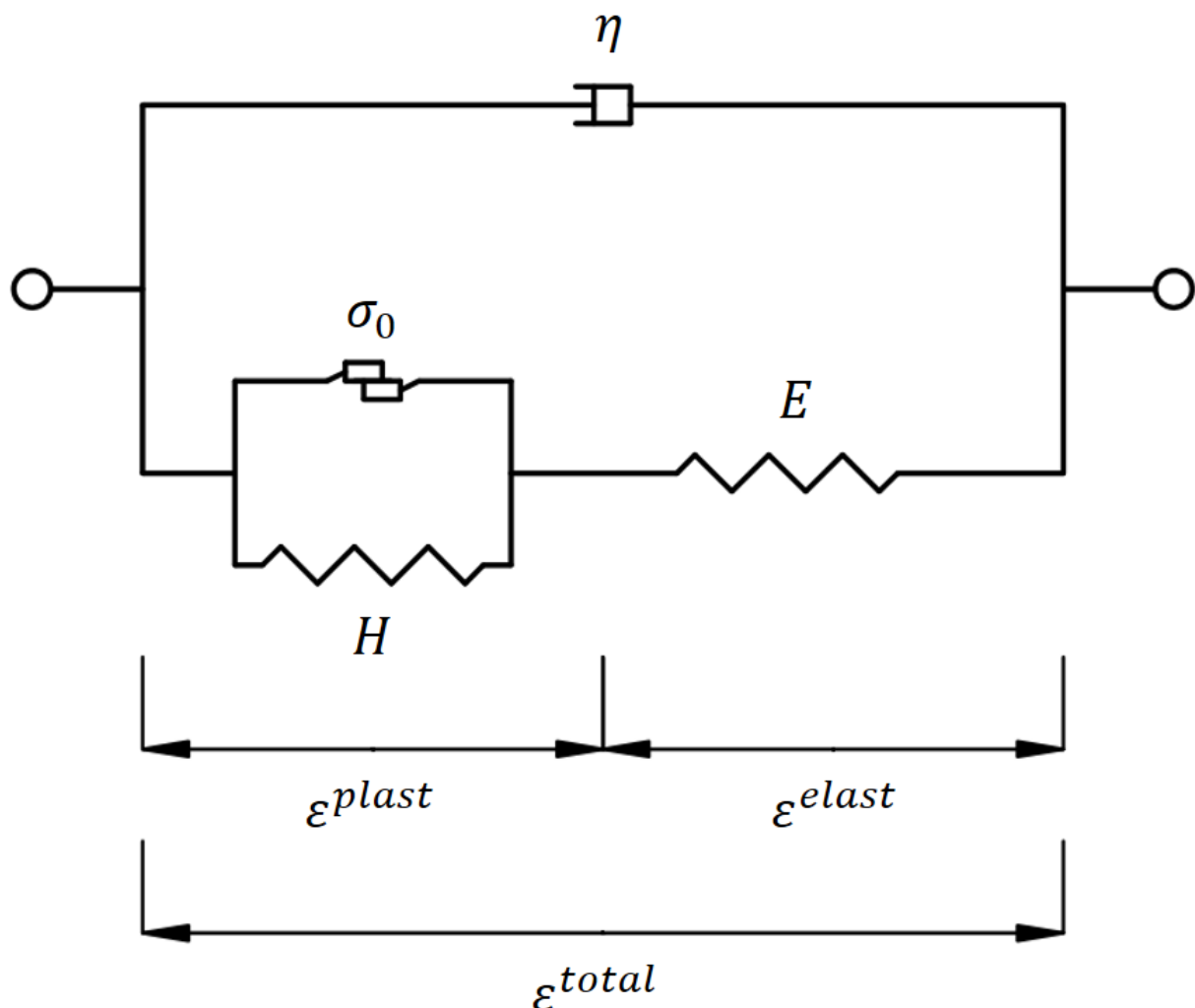
O sistema possui duas componentes, uma elástica e outra viscoplástica, as quais são conectadas em série. A componente elástica consiste em uma mola hookeana, enquanto que a componente viscoplástica é descrita pelo arranjo composto por um amortecedor newtoniano conectado em paralelo com um elemento deslizante com atrito de Coulomb. O elemento deslizante funciona como um limitador de tensão, sendo responsável por evitar que a tensão apresente valores superiores à tensão de escoamento e impedir que o elemento viscoplástico se deforme até que a tensão de escoamento seja atingida (SCHWER, 1994).

Este e outros modelos viscoplásticos podem ser associados, por exemplo, com as formulações de taxa de deformação viscoplástica de Perzyna ou Duvaut-Lions, considerados modelos viscoplásticos clássicos da literatura. No modelo de Perzyna, o critério de plastificação é relaxado e a taxa de deformação total é decomposta em uma taxa de deformação elástica (instantânea) e uma taxa de deformação viscoplástica. Este é o modelo mais amplamente difundido e serve de base para a maioria das implementações numéricas viscoplásticas. Já no modelo de Duvaut-Lions, a taxa de deformação viscoplástica é dada como função do tempo de relaxação. Apesar de ser menos utilizado, o modelo possui maior facilidade de implementação que o modelo de Perzyna (SCHWER, 1994).

6.1.3 Modelos viscoelástico-viscoplásticos

Conforme apresentado no início do capítulo, o modelo viscoplástico de Maxwell apresentado na Figura 6.4 pode ser classificado como um modelo elasto-viscoplástico (NEGAHBAN, 2012). A partir deste modelo, pode ser construído por associação de trechos o viscoelástico-viscoplástico de Kelvin-Voigt, cujo análogo mecânico é apresentado na Figura 6.5:

Figura 6.5 – Modelo viscoelástico-viscoplástico de Kelvin-Voigt



Fonte: o próprio autor.

O modelo possui comportamento viscoso tanto para deformações elásticas quanto para deformações plásticas, o qual é representado pela conexão em paralelo do amortecedor newtoniano com o restante do sistema. Sua adaptação para grandes deformações é objeto do

próximo item. Observa-se que sua utilização para fluidos se faz nas componentes isocóricas eliminando-se da representação da Figura 6.5 os elementos referentes a E (considerado como módulo de elasticidade transversal), H (encruamento) e σ_0 (limite de plastificação). No caso de pastas cimentícias, σ_0 é mantido.

6.2 Modelo viscoelástico adaptado para grandes deformações

A seguir, é apresentada uma adaptação do modelo viscoelástico linear de Kelvin-Voigt (Figura 6.2b) para grandes deformações. Esta adaptação é baseada na decomposição de Flory, a qual já foi utilizada anteriormente para a descrição de materiais hiperelásticos no item 4.3 e de materiais elastoplásticos no item 5.2. A composição deste com o modelo elastoplástico alternativo para grandes deformações constitui a base da formulação viscoelástica-viscoplástica implementada no programa, a qual pode ser utilizada na modelagem tanto de sólidos quanto de fluidos (newtonianos e não newtonianos). Mais detalhes da formulação e suas aplicações podem ser encontrados em Kishino et al. (2021).

A formulação parte da substituição do conceito de energia específica de deformação pelo de energia livre de Helmholtz, o qual pode ser expresso como a soma de uma parcela elástica (Ψ_{elast}) e outra viscosa (Ψ_{visc}). Por sua vez, cada uma das parcelas pode ser decomposta através da decomposição de Flory em uma componente dependente da variação de volume e outras duas isocóricas, conforme apresentado na Equação (168). Dessa forma, a energia livre de Helmholtz pode ser dada na forma:

$$\Psi = \Psi_{elast} + \Psi_{visc} = (\Psi_{elast}^{vol} + \Psi_{elast}^{isoc1} + \Psi_{elast}^{isoc2}) + (\Psi_{visc}^{vol} + \Psi_{visc}^{isoc1} + \Psi_{visc}^{isoc2}) \quad (321)$$

Derivando-se a energia livre em relação à deformação de Green, obtém-se a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = \left(\frac{\partial \Psi_{elast}^{vol}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \Psi_{elast}^{isoc1}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \Psi_{elast}^{isoc2}}{\partial \mathbf{E}} \right) + \left(\frac{\partial \Psi_{visc}^{vol}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \Psi_{visc}^{isoc1}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \Psi_{visc}^{isoc2}}{\partial \mathbf{E}} \right) \quad (322)$$

Para que a tensão viscosa representada pelo segundo termo em parênteses da Equação (322) seja incorporada na estratégia de solução, uma primeira ideia é seguir o modelo constitutivo viscoelástico de Kelvin-Voigt (Figura 6.2b), no qual a tensão assumiria a seguinte forma:

$$\mathbf{S}^{visc} = \frac{\bar{K}}{4} \mathfrak{C}^{vol} + \frac{\bar{G}}{4} \mathfrak{C}^{isoc1} + \frac{\bar{G}}{4} \mathfrak{C}^{isoc2} \quad (323)$$

onde \mathbf{S}^{visc} é a parcela viscosa da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, \bar{K} é a viscosidade volumétrica e \bar{G} é a viscosidade cisalhante isocórica.

No entanto, como as derivadas em relação ao tempo das direções volumétrica e isocóricas não necessariamente preservam as direções originais, a expressão anterior serve apenas como uma inspiração para os passos seguintes. Assim, com base na Equação (323), calcula-se a variação do trabalho virtual viscoso:

$$\begin{aligned} \delta\Psi &= \frac{\bar{K}}{4} \frac{dJ^\alpha}{dt} \delta J + \frac{\bar{G}_i}{4} \frac{d\bar{I}_i^\gamma}{dt} \delta\bar{I}_i \\ &= \left(\frac{\bar{K}}{4} \alpha J^{\alpha-1} j \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}} + \frac{\bar{G}_1}{4} \gamma_1 \bar{I}_1^{\gamma_1-1} \dot{\bar{I}}_1 \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}} + \frac{\bar{G}_2}{4} \gamma_2 \bar{I}_2^{\gamma_2-1} \dot{\bar{I}}_2 \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}} \right) : \delta\mathbb{E} \end{aligned} \quad (324)$$

sendo α e γ_i parâmetros viscosos adimensionais. Para $\alpha = 1$ e $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/2$, reproduz-se o comportamento de fluidos newtonianos pelo aqui chamado modelo visco-hiperelástico de Kelvin-Voigt, podendo outros comportamentos viscosos serem reproduzidos variando-se os valores dos parâmetros.

A partir da Equação (324) e do conceito de conjugado energético, tem-se que a parcela viscosa da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie pode ser obtida por:

$$\mathbf{S}^{visc} = \frac{\bar{K}}{4} \alpha J^{\alpha-1} j \mathfrak{C}^{vol} + \frac{\bar{G}_1}{4} \gamma_1 \bar{I}_1^{\gamma_1-1} \dot{\bar{I}}_1 \mathfrak{C}^{isoc1} + \frac{\bar{G}_2}{4} \gamma_2 \bar{I}_2^{\gamma_2-1} \dot{\bar{I}}_2 \mathfrak{C}^{isoc2} \quad (325)$$

Para que a formulação seja capaz de resolver problemas tanto de fluidos quanto de sólidos, as taxas dos invariantes de deformação são aproximadas por meio de diferenças finitas de 1ª ordem⁶. Assim, \mathbf{S}^{visc} é obtida pela expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{visc} &= \frac{\bar{K}}{4} \alpha J_{s+1}^{\alpha-1} \left(\frac{J_{s+1} - J_s}{\Delta t} \right) \mathfrak{C}^{vol} + \frac{\bar{G}_1}{4} \gamma_1 \bar{I}_{1(s+1)}^{\gamma_1-1} \left(\frac{(\bar{I}_1)_{s+1} - (\bar{I}_1)_s}{\Delta t} \right) \mathfrak{C}^{isoc1} \\ &\quad + \frac{\bar{G}_2}{4} \gamma_2 \bar{I}_{2(s+1)}^{\gamma_2-1} \left(\frac{(\bar{I}_2)_{s+1} - (\bar{I}_2)_s}{\Delta t} \right) \mathfrak{C}^{isoc2} \end{aligned} \quad (326)$$

onde o índice $s + 1$ indica os termos atuais e o índice s indica os termos referentes ao passo anterior.

Operacionalmente, a tensão viscosa deve ser somada à tensão elástica e à tensão plástica (caso exista) no processo de solução da Equação (118) caso o modelo viscoelástico-viscoplástico seja considerado. Isto é escrito de forma direta fazendo-se com que a tensão total da Equação (118), a qual está expressa simplesmente por $\mathbf{S}^{total} = \partial\Psi/\partial\mathbb{E}$, seja dada por:

$$\mathbf{S}^{total} = \mathbf{S}_{elast}^{vol} + \mathbf{S}^{ep} + \mathbf{S}^{visc} \quad (327)$$

onde \mathbf{S}^{total} é a tensão total, \mathbf{S}_{elast}^{vol} é a tensão elástica volumétrica obtida através da Equação (192) e \mathbf{S}^{ep} é a tensão elastoplástica obtida através da Equação (291).

⁶ Normalmente, esta aproximação é feita por integração regressiva de Euler na Mecânica dos Sólidos.

Alternativamente, a Equação (327) pode ser escrita como:

$$\mathbf{S}^{total} = \mathbf{S}^{elast} - \mathbf{S}^{plast} + \mathbf{S}^{visc} \quad (328)$$

onde \mathbf{S}^{elast} é a tensão elástica calculada na Equação (171) e \mathbf{S}^{plast} é a tensão plástica obtida no modelo elastoplástico.

Diferenciando-se a Equação (326) em relação à deformação de Green atual, obtém-se a parcela viscosa do tensor constitutivo tangente atual (\mathfrak{C}^{visc}):

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}^{visc} = \frac{\partial \mathbf{S}^{visc}}{\partial \mathbb{E}} = & \frac{\bar{K}}{4\Delta t} \left(\alpha^2 J^{\alpha-1} \mathfrak{C}^{vol} \otimes \mathfrak{C}^{vol} + \alpha J^\alpha \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbb{E} \otimes \partial \mathbb{E}} \right) \\ & + \frac{\bar{G}_1}{4\Delta t} \left(\gamma_1^2 \bar{I}_1^{\gamma_1-1} \mathfrak{C}^{isoc1} \otimes \mathfrak{C}^{isoc1} + \gamma_1 \bar{I}_1^{\gamma_1} \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E} \otimes \partial \mathbb{E}} \right) \\ & + \frac{\bar{G}_2}{4\Delta t} \left(\gamma_2^2 \bar{I}_2^{\gamma_2-1} \mathfrak{C}^{isoc2} \otimes \mathfrak{C}^{isoc2} + \gamma_2 \bar{I}_2^{\gamma_2} \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E} \otimes \partial \mathbb{E}} \right) \end{aligned} \quad (329)$$

Substituindo-se na Equação (329) as expressões das direções volumétrica, isocórica 1 e isocórica 2 dadas, respectivamente, nas Equações (195), (196) e (197), chega-se à expressão final da parcela viscosa do tensor constitutivo tangente atual:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{ijkl}^{visc} = \frac{1}{4\Delta t} \left[\bar{K} \left(\alpha^2 J^{\alpha-1} \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}_{ij}} \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}_{kl}} + \alpha J^\alpha \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} \right) \right. \\ \left. + \bar{G}_1 \left(\gamma_1^2 \bar{I}_1^{\gamma_1-1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}_{ij}} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}_{kl}} + \gamma_1 \bar{I}_1^{\gamma_1} \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} \right) \right. \\ \left. + \bar{G}_2 \left(\gamma_2^2 \bar{I}_2^{\gamma_2-1} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}_{ij}} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}_{kl}} + \gamma_2 \bar{I}_2^{\gamma_2} \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} \right) \right] \end{aligned} \quad (330)$$

Assim, uma vez calculadas as parcelas elástica (\mathfrak{C}^{elast}) e, caso exista, plástica (\mathfrak{C}^{plast}) através, respectivamente, das Equações (172) e (299), o tensor constitutivo tangente completo (\mathfrak{C}^{total}) é obtido pela expressão:

$$\mathfrak{C}^{total} = \mathfrak{C}^{elast} - \mathfrak{C}^{plast} + \mathfrak{C}^{visc} \quad (331)$$

que é incluído no processo de solução através de sua utilização na Equação (132) para o cálculo da matriz hessiana.

Por fim, ressalta-se que a Equação (327) é chave para o entendimento dos tipos básicos de problema que podem ser resolvidos pela formulação. O *bulk modulus* nunca é nulo, uma vez que nenhuma aplicação (sólido ou fluido) possui grande variação de volume. Assim, a elasticidade volumétrica está sempre presente. Para a modelagem de sólidos elásticos, basta que as constantes viscosas sejam nulas e a tensão de escoamento seja muito elevada ou acima dos níveis de tensão desenvolvidos. Já para a modelagem de sólidos elastoplásticos, basta que as

constantes viscosas sejam nulas e os níveis de tensão elastoplástica (\mathbf{S}^{ep}) ultrapassem a tensão de plastificação. Assim, problemas viscoelastoplásticos são modelados como sólidos elastoplásticos com constantes viscosas não nulas, sendo representados sólidos viscoelásticos caso \mathbf{S}^{ep} não ultrapasse o nível de deformação plástica. Para relações mais simples do que as estabelecidas aqui, pode ser consultado o trabalho de Carvalho, B. L. (2019).

6.3 Modelo rígido-viscoplástico para a análise de fluidos viscoplásticos (pastas)

Conforme descrito acima, a modelagem de fluidos newtonianos e não newtonianos pela formulação lagrangeana proposta pode ser realizada adotando-se módulo de elasticidade transversal nulo e *bulk modulus* não nulo, onde apenas tensões viscosas estão presentes na análise. Por isso, para a análise de pastas cimentícias se pretendia, em uma primeira avaliação, considerá-las como materiais viscoelásticos-viscoplásticos com tensão de cisalhamento limite. Entretanto, foram presenciadas instabilidades numéricas nas análises, as quais foram decorrentes do baixo valor da tensão de escoamento em relação ao módulo de elasticidade transversal a ser aplicado antes da evolução plástica.

Dessa forma, para contornar tal problema, foi desenvolvido um modelo rígido-viscoplástico para a análise de pastas cimentícias. No modelo, supõe-se que desde o início do processo a pasta escoe e apresente tensão “elastoplástica” (\mathbf{S}^{ep}) com valor constante, reproduzindo um comportamento rígido-plástico perfeito. Assim, dispensa-se o uso dos algoritmos de plasticidade em grandes e pequenas deformações para a análise de pastas cimentícias, sendo a tensão elastoplástica (\mathbf{S}^{ep}) calculada para cada uma das direções isocóricas diretamente em função da tensão de escoamento cisalhante ($\bar{\tau}$) do material através da expressão:

$$\mathbf{S}^{ep} = \bar{\tau} \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{\mathbf{E} : \mathbf{E}}} \quad (332)$$

a qual deve ser somada a \mathbf{S}_{elast}^{vol} e \mathbf{S}^{visc} na Equação (327).

Assim, o modelo assegura que todos os pontos de integração apresentem tensão elastoplástica constante (sobre o patamar de escoamento) com módulo igual à tensão de escoamento cisalhante do material. Dessa forma, evita-se também a necessidade de calibração do parâmetro de encruamento, tarefa que pode ser árdua no caso de problemas envolvendo pastas.

7 CONTATO

Problemas de contato podem ser definidos como aqueles que envolvem dois ou mais corpos, dos quais surgem novas condições de contorno decorrentes da interação entre os mesmos. Como dois corpos não podem fisicamente ocupar o mesmo espaço ao mesmo tempo, o modelo físico deve contemplar uma condição de contorno denominada condição de impenetrabilidade, que de forma matemática pode ser expressa como:

$$\Omega_A \cap \Omega_B = \emptyset \quad (333)$$

onde Ω_A é o domínio do corpo A e Ω_B é o domínio do corpo B.

A alteração das condições de contorno, por sua vez, só pode ser verificada durante o processo de solução, caracterizando a não-linearidade do problema. Dessa forma, para o processo de resolução, é necessária a imposição de restrições sobre as variáveis envolvidas no contato entre os corpos (PIEDADE NETO, 2009). Entre os métodos mais difundidos para a imposição das restrições no sistema, estão o método da penalização e a técnica dos multiplicadores de Lagrange. Já para a detecção do contato em problemas de grandes deslocamentos, uma das estratégias mais empregadas é a do tipo nó-a-segmento (ou nó-a-superfície, no caso 3D).

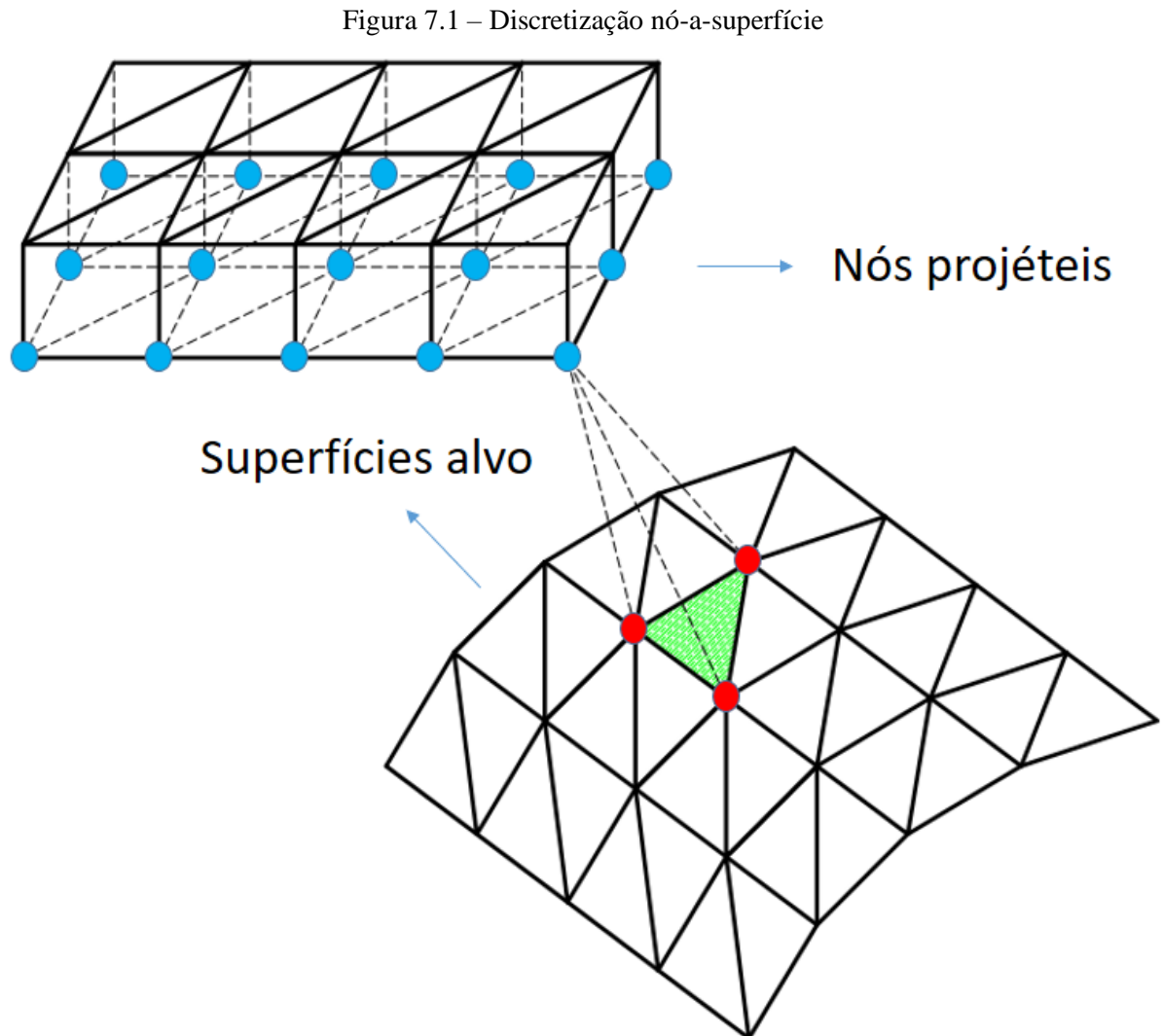
7.1 Discretização do tipo nó-a-superfície

A discretização do tipo nó-a-segmento costuma ser amplamente utilizada em programas de elementos finitos de análise não linear para a solução de problemas de contato, principalmente em problemas que envolvem grandes deslocamentos, onde não é possível se garantir a coincidência das malhas. No caso tridimensional, como os segmentos passam a ser superfícies, a discretização recebe o nome de nó-a-superfície.

A técnica faz uso de elementos de contato, os quais não apresentam geometria, sendo apenas restrições impostas no sistema. Os elementos são prescritos em regiões consideradas passíveis de contato e, em cada etapa do processo de solução, os elementos podem ser ativados ou desativados conforme a identificação ou não do contato entre os corpos (PIEDADE NETO, 2009).

Nesta estratégia, é feita a distinção das interfaces de contato, sendo uma discretizada em elementos nodais (denominados nós projéteis), nas quais são atrelados os elementos de contato,

e a outra em superfícies (denominadas superfícies alvo). Um desenho esquemático da discretização nó-a-superfície é apresentado na Figura 7.1:



Fonte: o próprio autor.

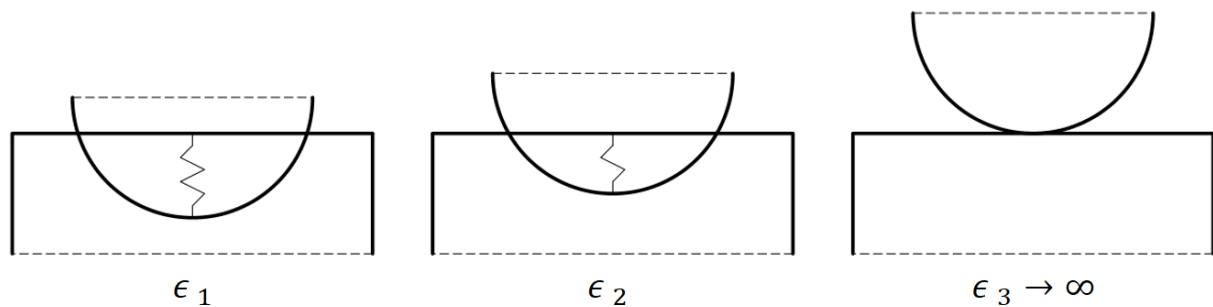
Durante cada etapa do processo de solução, verifica-se se o nó projétil penetrou ou não na superfície alvo. Em caso positivo, o elemento é ativado e impõe-se a restrição de impenetrabilidade na etapa seguinte; em caso contrário, o elemento é desativado.

7.2 Método da penalização

No método da penalização, tenta-se atender a condição de impenetrabilidade por meio da introdução de um parâmetro de penalização ϵ . Como o parâmetro pode impor uma maior ou menor limitação na distância entre as superfícies, este pode ser entendido como a rigidez de

uma mola de dimensões infinitesimais posicionada entre os pontos de contato (Figura 7.2), de modo que, quando o valor tende a infinito, garante-se que os pontos de contato apresentem a mesma posição no espaço (PIEIDADE NETO, 2009). No entanto, valores elevados do parâmetro de penalização, apesar de proporcionarem uma menor violação da condição de impenetrabilidade, podem gerar instabilidade numérica decorrente de matriz de rigidez (hessiana) mal condicionada. Dessa forma, na prática o valor costuma ser obtido a partir de um valor inicial baseado na rigidez, tamanho e altura normal à interface de contato do corpo menos rígido, sendo em seguida calibrado até que uma penetração adequada seja obtida (KIM, 2015).

Figura 7.2 – Interpretação física do parâmetro de penalização



$$0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3 \rightarrow \infty$$

Fonte: o próprio autor.

O método, apesar de conseguir satisfazer de forma aproximada as condições de contato, possui como desvantagem a sua grande dependência com o parâmetro de penalização, o qual não possui regras claras para sua escolha e depende do problema particular a ser resolvido (BATHE; CHAUDHARY, 1985). No entanto, diferentemente do método dos multiplicadores de Lagrange, o método da penalização não adiciona variáveis novas ao sistema, o que torna sua formulação simples e, por isso, um dos métodos de contato mais comumente empregados na análise de estruturas em programas de Método dos Elementos Finitos (BEDNAREK; KOWALCZYK, 2011).

O primeiro passo da análise consiste na obtenção da distância entre o contorno dos corpos para cada instante. No caso da estratégia nó-a-superfície, é calculada a distância ortogonal entre o nó projétil e a superfície alvo, a qual é obtida por:

$$g = (Y_i^N - Y_i^S)n_i \quad (334)$$

onde g é a distância ortogonal entre o nó projétil e a superfície alvo, Y_i^N é a posição do nó projétil, Y_i^S é a posição de um nó da superfície alvo e n_i é o versor normal à superfície alvo. O

versor normal n_i é obtido facilmente a partir de um vetor N_i normal à superfície alvo através da expressão:

$$n_i = \frac{N_i}{\|N_i\|} \quad (335)$$

Uma vez obtida a distância g , pode-se calcular a energia decorrente do contato (Π^{cont}), cuja expressão é a idêntica à energia potencial de uma mola:

$$\Pi^{cont} = \frac{1}{2} \epsilon g^2 \quad (336)$$

Derivando-se a Equação (336) em relação à posição dos nós projéteis, encontram-se as forças de contato F_i^{cont} :

$$F_i^{cont} = \frac{\partial \Pi^{cont}}{\partial Y_i^N} = \epsilon g \frac{\partial g}{\partial Y_i^N} = \epsilon g \frac{\partial (Y_k^N - Y_k^S) n_k}{\partial Y_i^N} = \epsilon g \delta_{ki} n_k = \epsilon g n_i \quad (337)$$

Derivando-se a Equação (337) novamente em relação à posição dos nós projéteis, encontra-se a parcela da hessiana decorrente do contato (H_{ij}^{cont}):

$$H_{ij}^{cont} = \frac{\partial F_i^{cont}}{\partial Y_j^N} = \frac{\partial \epsilon g n_i}{\partial Y_j^N} = \epsilon n_i \frac{\partial (Y_k^N - Y_k^S) n_k}{\partial Y_j^N} = \epsilon n_i \delta_{kj} n_k = \epsilon n_i n_j \quad (338)$$

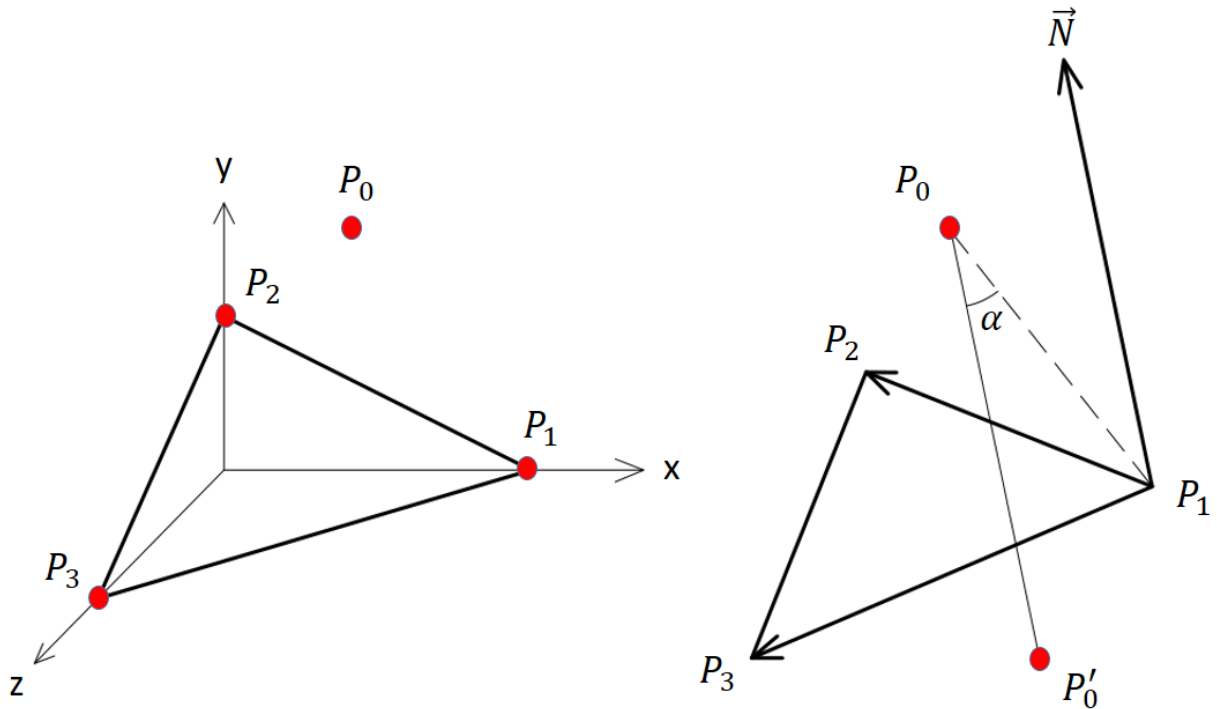
Por fim, o contato é incorporado no processo de solução adicionando-se \vec{F}^{cont} e \mathbf{H}^{cont} , respectivamente, no vetor de forças internas e na matriz hessiana.

7.3 Algoritmo de contato

No programa, o algoritmo de contato foi implementado utilizando-se o método da penalização sem a consideração de atrito e adesão, sendo a detecção do contato feita por meio de estratégia do tipo nó-a-superfície com superfícies alvo consideradas rígidas e discretizadas em elementos triangulares planos.

O algoritmo inicia com a verificação do contato, a qual é feita através do cálculo da distância ortogonal entre os nós projéteis e as superfícies alvo. Como as superfícies alvo são elementos triangulares, o problema pode ser analisado conforme o esquema apresentado na Figura 7.3, onde se procura obter a distância ortogonal entre um ponto e o plano de um triângulo. Na figura, o ponto P_0 é o nó projétil, o triângulo $\Delta(P_1, P_2, P_3)$ é a superfície alvo e o ponto P'_0 é a projeção do ponto P_0 no plano do triângulo $\Delta(P_1, P_2, P_3)$.

Figura 7.3 – Esquema par o cálculo da distância de um ponto ao plano de um triângulo



Fonte: o próprio autor.

Inicialmente, a partir das coordenadas do nó projétil e dos vértices do elemento triangular, são obtidos os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ e $\overrightarrow{P_1P_0}$. Em seguida, calcula-se o vetor normal \vec{N} perpendicular ao triângulo $\Delta(P_1, P_2, P_3)$ através do produto vetorial:

$$\vec{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \quad (339)$$

onde os nós das superfícies alvo são arranjados no pré-processamento de modo que o vetor \vec{N} tenha sempre sentido da superfície alvo para o nó projétil.

Em posse dos vetores $\overrightarrow{P_1P_0}$ e \vec{N} , calcula-se o cosseno do ângulo α entre os vetores através da expressão:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{P_1P_0} \wedge \vec{N}}{\|\overrightarrow{P_1P_0}\| \|\vec{N}\|} \quad (340)$$

A partir do vetor $\overrightarrow{P_1P_0}$ e da Equação (340), calcula-se a distância ortogonal do nó projétil ao plano da superfície alvo ($\|\overrightarrow{P_0P'_0}\|$) por:

$$\|\overrightarrow{P_0P'_0}\| = \|\overrightarrow{P_1P_0}\| \cos\alpha = \|\overrightarrow{P_1P_0}\| \frac{\overrightarrow{P_1P_0} \wedge \vec{N}}{\|\overrightarrow{P_1P_0}\| \|\vec{N}\|} = \frac{\overrightarrow{P_1P_0} \wedge \vec{N}}{\|\vec{N}\|} \quad (341)$$

Caso $\|\overrightarrow{P_0P'_0}\| > 0$, o nó projétil não se encontra em contato com a superfície alvo; caso contrário, quando $\|\overrightarrow{P_0P'_0}\| \leq 0$, o nó projétil está em contato com a superfície alvo e prossegue-se com a identificação do par nó projétil-superfície alvo no qual está ocorrendo o contato.

Para a identificação do local do contato, empregou-se no programa uma estratégia baseada no cálculo de coordenadas baricêntricas, as quais são definidas como um sistema de coordenadas no qual um ponto é expresso como a combinação linear de outros pontos pertencentes ao mesmo espaço vetorial. Como o próprio nome sugere, as coordenadas baricêntricas podem ser entendidas como massas normalizadas que devem ser posicionadas nos vértices de um simplexo⁷ para a descrição do centro de gravidade (baricentro), no caso, do ponto a ser determinado (HOU; HOU; HUANG, 2013).

Dado um simplexo com n vértices inserido em um espaço vetorial S , um ponto \vec{P} também pertencente a S pode ser descrito através da combinação baricêntrica das coordenadas \vec{P}_i dos vértices do simplexo como:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n b_i \vec{P}_i \quad (342)$$

sendo b_i as coordenadas baricêntricas.

A combinação baricêntrica é uma combinação linear especial, também denominada na matemática como combinação afim, na qual as coordenadas baricêntricas são normalizadas. Neste caso, as coordenadas baricêntricas possuem como propriedade importante a partição da unidade, ou seja:

$$\sum_{i=1}^n b_i = 1 \quad (343)$$

Um caso especial de interesse é a combinação baricêntrica convexa, a qual permite que todos os pontos de um conjunto possam ser expressos pela combinação de seus pontos extremos (SCHÜRMAN; EL-GUINDY; ALTHOFF, 2016). Para que a combinação baricêntrica seja convexa, as coordenadas baricêntricas devem atender a seguinte condição:

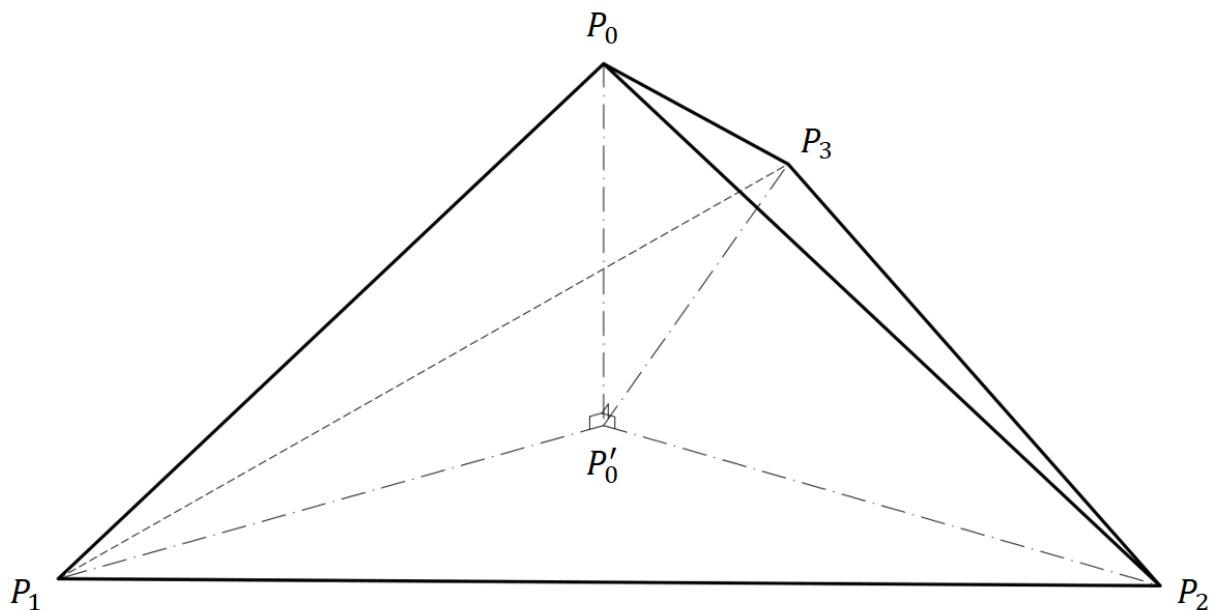
$$b_i \geq 0 \quad (344)$$

⁷ Simplexo ou simplex, em topologia, é um ente geométrico que representa a generalização do conceito de triângulo para qualquer dimensão (triângulo no caso 2D, tetraedro no caso 3D, e assim por diante). Recebe tal denominação por ser o polítopo (generalização do conceito de poliedro para qualquer número de dimensões) mais simples possível para qualquer espaço estudado.

Como no problema é analisado um conjunto convexo⁸, então é possível verificar a partir das condições dadas nas Equações (343) e (344) se a projeção do nó projétil encontra-se ou não dentro da superfície alvo.

Para a obtenção das coordenadas, foi empregado o algoritmo proposto por Heidrich (2011), o qual se mostra o mais eficiente para o cálculo de coordenadas baricêntricas da projeção de um ponto sobre o plano de um triângulo. O algoritmo é uma particularização das relações entre coordenadas baricêntricas de um poliedro convexo e as coordenadas baricêntricas de suas faces provadas por Warren (1996). No caso, o poliedro é um tetraedro formado pelos pontos P_0 , P_1 , P_2 e P_3 , conforme apresentado na Figura 7.4:

Figura 7.4 – Projeção de um ponto sob o plano de um triângulo



Fonte: o próprio autor.

A partir do vetor normal \vec{N} calculado anteriormente na Equação (339) e sabendo-se que o módulo do produto vetorial entre dois vetores corresponde à área do paralelogramo formado pelos mesmos, é possível relacionar \vec{N} e a área A do triângulo $\Delta(P_1, P_2, P_3)$ pela seguinte expressão:

$$\|\vec{N}\| = 2A \quad (345)$$

⁸ Um conjunto é dito convexo quando, para qualquer par de pontos pertencentes ao conjunto, qualquer combinação convexa destes dois pontos também pertence ao conjunto.

ou seja, a área do triângulo é igual à metade da norma euclidiana do vetor normal correspondente.

Da Equação (345), pode-se escrever:

$$\vec{N} \wedge \vec{N} = 4A^2 \quad (346)$$

Analisando-se agora o triângulo $\Delta(P_0, P_1, P_2)$, calcula-se o vetor \vec{N}_3 normal ao plano do triângulo através da expressão:

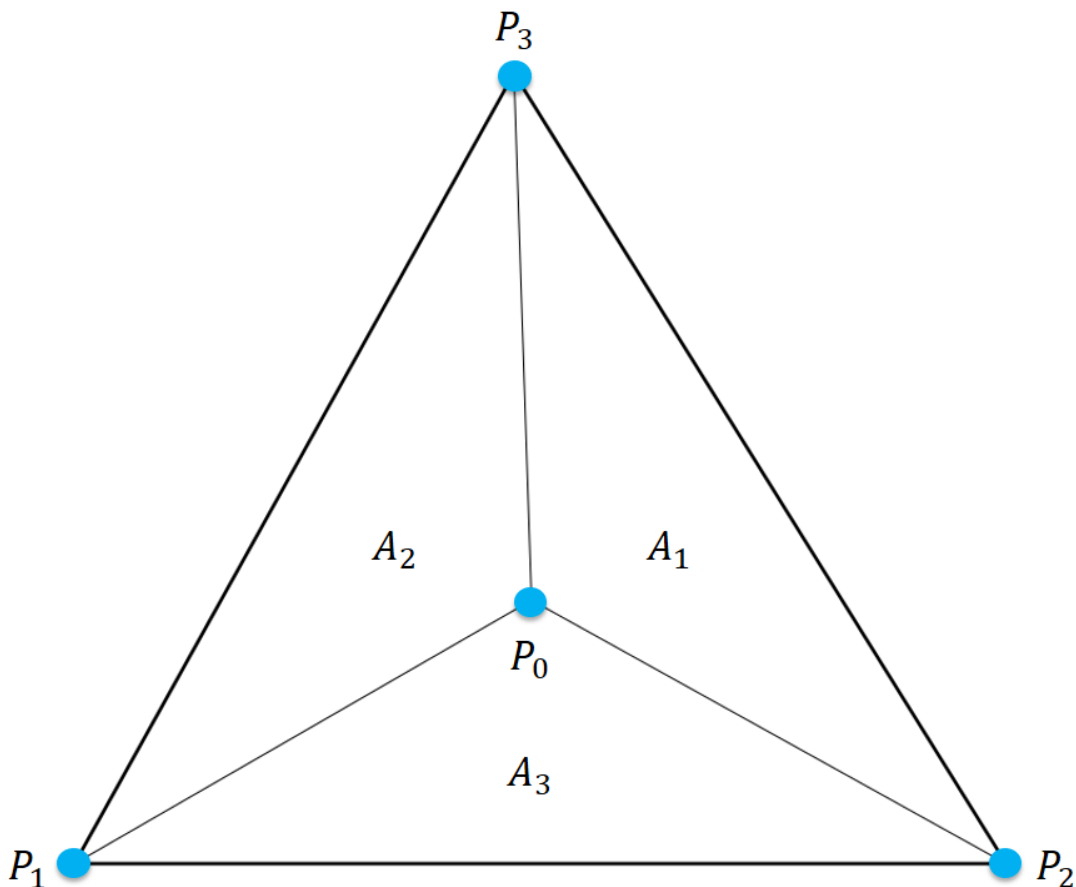
$$\vec{N}_3 = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_0} \quad (347)$$

De forma semelhante à relação dada na Equação (345), consegue-se relacionar o vetor \vec{N}_3 com a área A_3 do triângulo $\Delta(P_0, P_1, P_2)$ através da expressão:

$$\|\vec{N}_3\| = 2A_3 \quad (348)$$

Para o cálculo das coordenadas baricêntricas, considera-se primeiramente que o ponto P_0 se encontra no plano do triângulo $\Delta(P_1, P_2, P_3)$, ou seja, $P_0 = P'_0$. Assim, neste caso, o problema tridimensional representado pelo tetraedro da Figura 7.4 reduz-se a um problema bidimensional, no qual deve ser analisado o triângulo apresentado na Figura 7.5:

Figura 7.5 – Esquema para a determinação das coordenadas baricêntricas de um triângulo



Fonte: o próprio autor.

Como nesta análise inicial os triângulos $\Delta(P_0, P_1, P_2)$ e $\Delta(P_1, P_2, P_3)$ encontram-se no mesmo plano, os vetores \vec{N} e \vec{N}_3 apresentam a mesma direção e sentido, de modo que o cosseno do ângulo entre os vetores é 1. Dessa forma, a Equação (348) pode ser escrita como:

$$2A_3 = \frac{\|\vec{N}_3\| \|\vec{N}\|}{\|\vec{N}\|} = \frac{\vec{N}_3 \wedge \vec{N}}{\|\vec{N}\|} \quad (349)$$

Substituindo-se a Equação (345) na Equação (349), chega-se à expressão:

$$2A_3 = \frac{\vec{N}_3 \wedge \vec{N}}{2A} \quad (350)$$

Considerando que as coordenadas baricêntricas de um simplexo são expressas como a relação entre os volumes de seus subsimplexos e o volume total (WARREN, 1996) e que, no caso, o simplexo é um triângulo, então as coordenadas baricêntricas são obtidas pela relação entre as áreas dos triângulos menores e a área total. Assim, a coordenada baricêntrica b_3 é obtida por:

$$b_3 = \frac{A_3}{A} \quad (351)$$

Utilizando-se a Equação (350), a Equação (351) pode ser escrita como:

$$b_3 = \frac{A_3}{A} = \frac{2A_3}{2A} = \frac{\vec{N}_3 \wedge \vec{N}}{4A^2} \quad (352)$$

Substituindo-se a Equação (346) na Equação (352), a coordenada baricêntrica b_3 pode ser obtida no caso plano através da seguinte expressão:

$$b_3 = \frac{\vec{N}_3 \wedge \vec{N}}{\vec{N} \wedge \vec{N}} \quad (353)$$

Considerando-se agora o caso mais geral, no qual o ponto P_0 se encontra fora do plano do triângulo $\Delta(P_1, P_2, P_3)$, ou seja, $P_0 \neq P'_0$, a coordenada baricêntrica b_3 é obtida da seguinte forma:

$$b_3 = \frac{A_3}{A} = \frac{\text{área}(\Delta(P'_0, P_1, P_2))}{A} \quad (354)$$

Por sua vez, as áreas dos triângulos $\Delta(P'_0, P_1, P_2)$ e $\Delta(P_0, P_1, P_2)$ apresentam a seguinte relação:

$$\text{área}(\Delta(P'_0, P_1, P_2)) = \text{área}(\Delta(P_0, P_1, P_2)) \cos(\vec{N}_3, \vec{N}) \quad (355)$$

com o cosseno dado por:

$$\cos(\vec{N}_3, \vec{N}) = \frac{\vec{N}_3 \wedge \vec{N}}{\|\vec{N}_3\| \|\vec{N}\|} \quad (356)$$

Substituindo-se as Equações (355) e (356) na Equação (354), obtém-se:

$$b_3 = \frac{\text{área}(\Delta(P_0, P_1, P_2))}{A} \frac{\vec{N}_3 \wedge \vec{N}}{\|\vec{N}_3\| \|\vec{N}\|} \quad (357)$$

Tendo-se em vista a propriedade apresentada na Equação (345) na qual a área de cada triângulo é igual à metade da norma de seu vetor normal correspondente, a Equação (357) pode ser reescrita como:

$$b_3 = \frac{\frac{1}{2} \|\vec{N}_3\|}{\frac{1}{2} \|\vec{N}\|} \frac{\vec{N}_3 \wedge \vec{N}}{\|\vec{N}_3\| \|\vec{N}\|} = \frac{\vec{N}_3 \wedge \vec{N}}{\vec{N} \wedge \vec{N}} \quad (358)$$

Como a Equação (353) é idêntica à Equação (358), conclui-se que a primeira é válida independentemente se o ponto P_0 situa-se ou não no plano do triângulo $\Delta(P_1, P_2, P_3)$. Dessa forma, utilizando-se procedimento análogo para as demais faces, as coordenadas baricêntricas b_1 e b_2 podem ser obtidas, respectivamente, pelas expressões:

$$b_1 = \frac{\vec{N}_1 \wedge \vec{N}}{\vec{N} \wedge \vec{N}} \quad (359)$$

$$b_2 = \frac{\vec{N}_2 \wedge \vec{N}}{\vec{N} \wedge \vec{N}} \quad (360)$$

Devido à propriedade de partição da unidade, bastam-se calcular duas coordenadas baricêntricas pelo procedimento apresentado anteriormente e obter a coordenada restante pela Equação (343). Dessa forma, caso sejam calculadas, por exemplo, as coordenadas b_1 e b_2 através, respectivamente, das Equações (359) e (360), a coordenada b_3 pode ser obtida simplesmente através da expressão:

$$b_3 = 1 - b_1 - b_2 \quad (361)$$

A partir das coordenadas baricêntricas obtidas e das condições necessárias para que uma combinação linear seja baricêntrica convexa expressas nas Equações (343) e (344), pode-se facilmente verificar se a projeção do nó projétil encontra-se dentro da superfície alvo através das seguintes condições:

$$0 \leq b_1 \leq 1 \quad (362)$$

$$0 \leq b_2 \leq 1 \quad (363)$$

$$0 \leq b_3 \leq 1 \quad (364)$$

Caso todas as condições anteriores sejam atendidas, a projeção do nó projétil encontra-se dentro da superfície alvo, devendo ser calculadas as forças \vec{F}^{cont} e a parcela da hessiana \mathbf{H}^{cont} decorrentes do contato através, respectivamente, das Equações (337) e (338), as quais são por fim somadas ao vetor de forças internas e à matriz hessiana; caso contrário, o nó projétil

não está em contato com a superfície alvo analisada e procede-se à análise da próxima superfície.

O pseudocódigo do algoritmo de contato é apresentado na Figura 7.6:

Figura 7.6 – Pseudocódigo do algoritmo de contato

```

1  Loop grupos de contato
2      Loop nós projéteis
3          Obtenção das coordenadas do nó projétil  $P_0$ 
4          Loop superfícies alvo
5              Obtenção das coordenadas dos nós da superfície alvo  $P_1, P_2$ 
6              e  $P_3$ 
7              Cálculo dos vetores  $\overrightarrow{P_1P_0}, \overrightarrow{P_1P_2}$  e  $\overrightarrow{P_1P_3}$ 
8              Cálculo do vetor normal  $\vec{N}$  [Equação (339)]
9              Cálculo de  $\|\overrightarrow{P_0P'_0}\|$  [Equação (341)]
10             Se  $\|\overrightarrow{P_0P'_0}\| < 0$ 
11                 Cálculo das coordenadas baricêntricas  $b_1, b_2$  e  $b_3$ 
12                 [Equações (359), (360) e (361)]
13                 Se  $(0 \leq b_1 \leq 1 \text{ e } 0 \leq b_2 \leq 1 \text{ e } 0 \leq b_3 \leq 1)$ 
14                     Cálculo do versor normal  $\vec{n}$  [Equação (335)]
15                     Soma das forças de contato no vetor de forças
16                     internas ( $\vec{F}^{int} \leftarrow \vec{F}^{int} + \vec{F}^{cont}$ ) [Equação (337)]
17                     Soma da parcela de contato na matriz hessiana
18                     ( $H \leftarrow H + H^{cont}$ ) [Equação (338)]
19                     Fim condição
20                 Fim condição
21             Fim loop
22         Fim loop
23     Fim loop

```

Fonte: o próprio autor.

O algoritmo de contato é inserido imediatamente depois da linha 15 do pseudocódigo da análise estática (Figura 3.5) e da linha 18 do pseudocódigo da análise dinâmica (Figura 3.6). Nota-se que, logo após a linha 1 de ambos os algoritmos, é feita a leitura de um arquivo de entrada com os dados relativos ao contato, onde estão contidas a incidência dos nós projéteis e as coordenadas e a incidência das superfícies alvo. Ressalta-se também que o *loop* mais externo “*Loop grupos de contato*” foi implementado a fim de que fosse possível no programa a análise de contatos independentes em diferentes partes da estrutura. Assim, para cada conjunto de superfícies alvo, foi atribuído um conjunto de nós projéteis passíveis de contato, sendo cada par conjunto de nós projéteis-conjunto de superfícies alvo considerado um “grupo de contato”. Os grupos de contato eram também informados no arquivo de entrada.

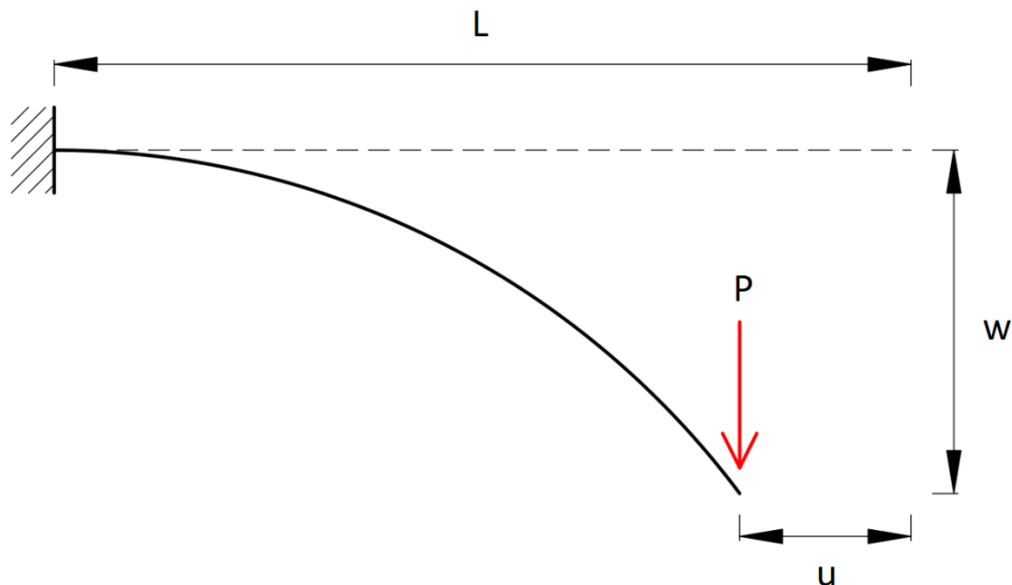
8 EXEMPLOS NUMÉRICOS E DISCUSSÕES

A seguir, são apresentadas as análises das simulações numéricas realizadas com o programa. Foram utilizados tanto exemplos retirados da literatura para validação do algoritmo quanto exemplos elaborados pelo próprio autor para demonstrar as características e a aplicabilidade da formulação em problemas da área da engenharia civil. Nos exemplos de aplicação, foi dada preferência a problemas que incluíssem a análise de materiais plásticos/viscoelásticos/rígido-viscoplásticos, como a dobra de barra metálica com aparecimento do efeito de *springback*, rompimento de barragem, propagação de onda solitária em fluido viscoso compressível, análise qualitativa da conformação de pasta de cimento em fôrmas rígidas e ensaio de caracterização de pasta cimentícia.

8.1 Viga engastada e livre transversalmente carregada sujeita a grandes deslocamentos

No primeiro exemplo, foi analisada uma viga engastada e livre sujeita a grandes deslocamentos para a validação do trecho referente à análise estática elástica do programa. A viga é submetida a uma carga transversal em sua extremidade livre, cujo módulo aumenta gradualmente até um valor de 160 kN. O exemplo foi retirado de Mattiasson (1981), o qual resolveu o problema por meio de integrais elípticas. Um desenho do problema analisado é apresentado na Figura 8.1:

Figura 8.1 – Viga engastada e livre submetida à carga transversal na extremidade livre



Fonte: o próprio autor.

Para o exemplo, foram adotados os valores apresentados na Figura 8.2:

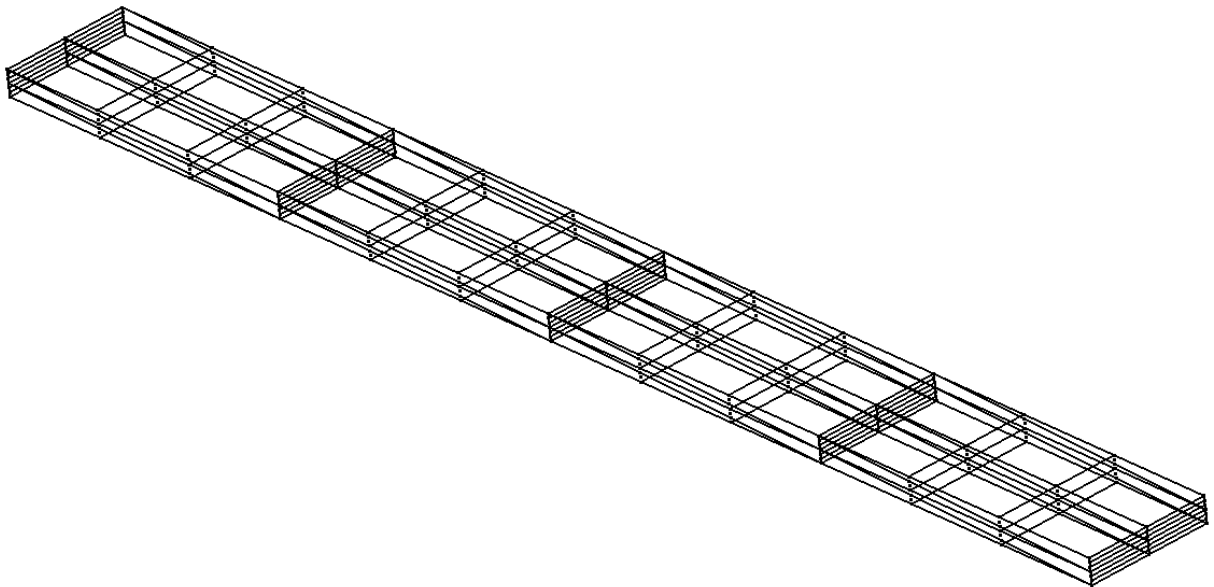
Figura 8.2 – Valores adotados no exemplo 8.1

E	$2,4 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$
ν	0
Comprimento (L)	10 m
Largura	1 m
Altura	0,2 m
Força (P)	160 kN
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura	Linear
Nº nós	273
Nº elementos finitos	32
Tolerância (Newton-Raphson)	10^{-6}

Fonte: o próprio autor.

A estrutura foi discretizada com 32 elementos finitos, conforme mostrado na Figura 8.3:

Figura 8.3 – Discretização adotada no exemplo 8.1



Fonte: o próprio autor.

Analisaram-se os deslocamentos adimensionais horizontal e vertical da extremidade livre da viga, os quais foram comparados com os de Mattiasson (1981). Os resultados obtidos

com os modelos de Saint-Venant-Kirchhoff e Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff são apresentados, respectivamente, na Tabela 8.1 e Tabela 8.2:

Tabela 8.1 – Deslocamentos adimensionais e diferenças percentuais em relação aos resultados de Mattiasson (1981) obtidos com o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff

PL ² /EI	Autor		Mattiasson (1981)		Diferença percentual	
	u/L	w/L	u/L	w/L	u/L	w/L
0	0	0	0	0	-	-
1,0	0,056322	0,301298	0,05643	0,30172	-0,19%	-0,14%
2,0	0,15992	0,491836	0,16064	0,49346	-0,45%	-0,33%
2,5	0,208866	0,553478	0,20996	0,55566	-0,52%	-0,39%
3,0	0,252969	0,600571	0,25442	0,60325	-0,57%	-0,44%
3,5	0,292152	0,637255	0,29394	0,64039	-0,61%	-0,49%
4,0	0,326841	0,666411	0,32894	0,66996	-0,64%	-0,53%
4,5	0,357594	0,690024	0,35999	0,69397	-0,67%	-0,57%
5,0	0,38496	0,70948	0,38763	0,71379	-0,69%	-0,60%
5,5	0,409426	0,72576	0,41236	0,73042	-0,71%	-0,64%
6,0	0,43141	0,739571	0,43459	0,74457	-0,73%	-0,67%
6,5	0,451263	0,751431	0,45468	0,75676	-0,75%	-0,70%
7,0	0,469279	0,761729	0,47293	0,76737	-0,77%	-0,74%
7,5	0,485703	0,770756	0,48957	0,7767	-0,79%	-0,77%
8,0	0,50074	0,77874	0,50483	0,78498	-0,81%	-0,79%
8,5	0,514562	0,785856	0,51886	0,79239	-0,83%	-0,82%
9,0	0,527315	0,792243	0,53182	0,79906	-0,85%	-0,85%
9,5	0,539123	0,798012	0,54383	0,8051	-0,87%	-0,88%
10	0,550091	0,803253	0,555	0,81061	-0,88%	-0,91%

Fonte: o próprio autor.

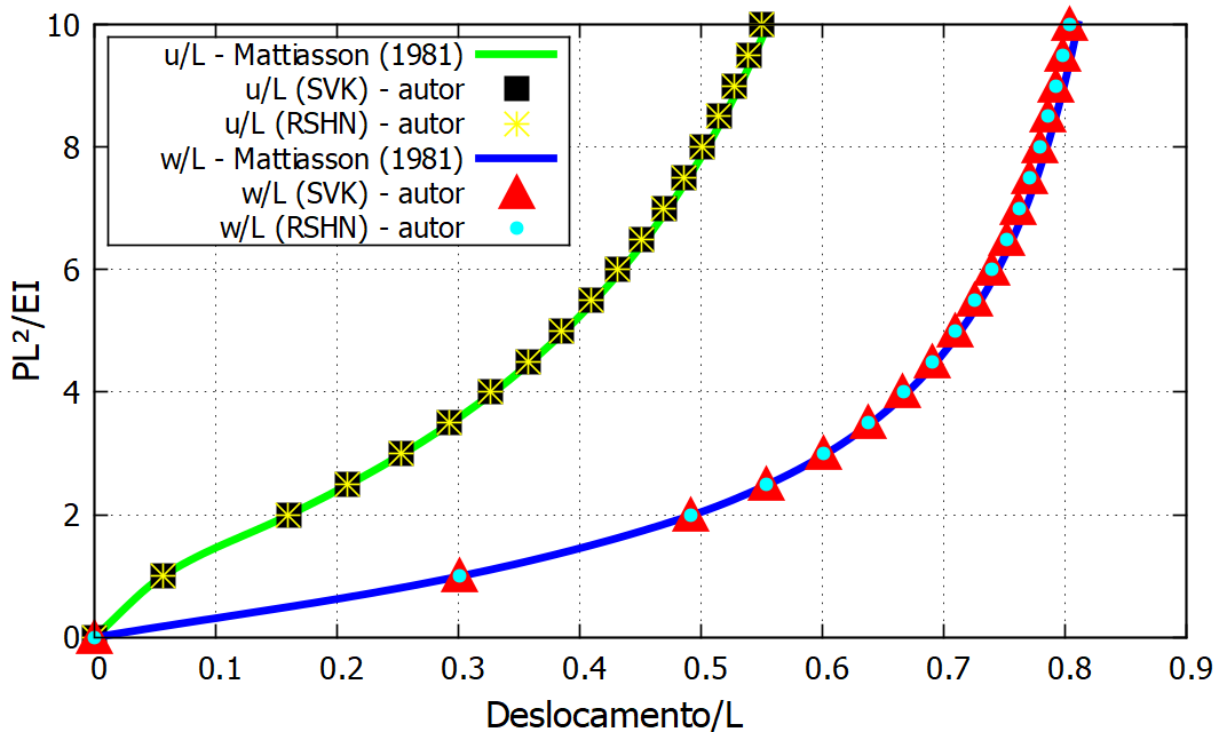
Tabela 8.2 – Deslocamentos adimensionais e diferenças percentuais em relação aos resultados de Mattiasson (1981) obtidos com o modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff

PL ² /EI	Autor		Mattiasson (1981)		Diferença percentual	
	u/L	w/L	u/L	w/L	u/L	w/L
0	0	0	0	0	-	-
1,0	0,056295	0,301303	0,05643	0,30172	-0,24%	-0,14%
2,0	0,159846	0,491861	0,16064	0,49346	-0,49%	-0,32%
2,5	0,208773	0,553515	0,20996	0,55566	-0,57%	-0,39%
3,0	0,25286	0,60062	0,25442	0,60325	-0,61%	-0,44%
3,5	0,292029	0,637317	0,29394	0,64039	-0,65%	-0,48%
4,0	0,326706	0,666483	0,32894	0,66996	-0,68%	-0,52%
4,5	0,35745	0,690105	0,35999	0,69397	-0,71%	-0,56%
5,0	0,384808	0,709571	0,38763	0,71379	-0,73%	-0,59%
5,5	0,409267	0,725859	0,41236	0,73042	-0,75%	-0,62%
6,0	0,431245	0,739678	0,43459	0,74457	-0,77%	-0,66%
6,5	0,451093	0,751545	0,45468	0,75676	-0,79%	-0,69%
7,0	0,469104	0,76185	0,47293	0,76737	-0,81%	-0,72%
7,5	0,485524	0,770884	0,48957	0,7767	-0,83%	-0,75%
8,0	0,500557	0,778873	0,50483	0,78498	-0,85%	-0,78%
8,5	0,514375	0,785995	0,51886	0,79239	-0,86%	-0,81%
9,0	0,527125	0,792388	0,53182	0,79906	-0,88%	-0,83%
9,5	0,53893	0,798163	0,54383	0,8051	-0,90%	-0,86%
10,0	0,549895	0,803409	0,555	0,81061	-0,92%	-0,89%

Fonte: o próprio autor.

Para a melhor visualização dos resultados, foi plotado um gráfico da força aplicada adimensional em função dos deslocamentos adimensionais, o qual é apresentado na Figura 8.4:

Figura 8.4 – Gráfico da força aplicada adimensional em função do deslocamento adimensional



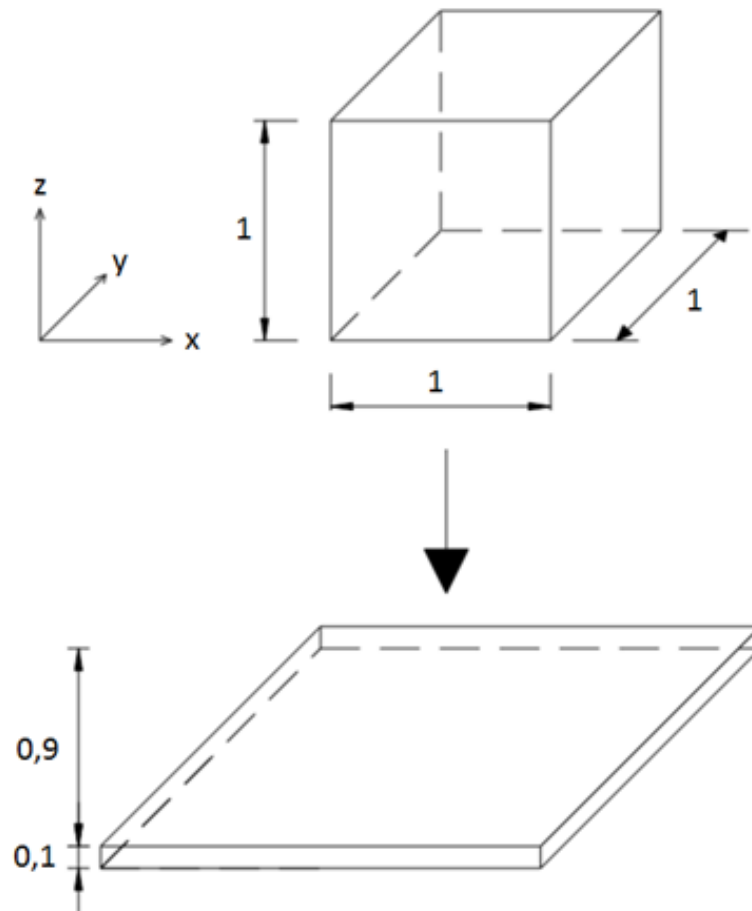
Fonte: o próprio autor.

Analisando-se os resultados, pôde-se observar que foram obtidos deslocamentos muito próximos aos de Mattiasson (1981), com diferenças percentuais inferiores a 1% tanto para o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff quanto para o modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff. Dessa forma, validou-se o trecho referente à análise estática elástica não linear geométrica implementado no programa. Vale-se ressaltar que, apesar de a estrutura estar sujeita a grandes deslocamentos, o problema está inserido no regime de pequenas deformações, o que justifica a semelhança dos resultados obtidos com ambos os modelos constitutivos.

8.2 Cubo comprimido sujeito a grandes deformações

No segundo exemplo, foi analisado um cubo comprimido sujeito a grandes deformações. O presente teste foi criado com o intuito de se confirmar que o modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff implementado no programa respeita as condições de crescimento. O exemplo consiste em um cubo de dimensões unitárias, no qual as faces $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ são impedidas de se deslocar, respectivamente, nas direções x , y e z e livres nas demais direções, enquanto a face $z = 1$ é deslocada por meio de controle de posições até que o cubo apresente 10% de sua altura original. Um esquema do teste realizado é apresentado na Figura 8.5:

Figura 8.5 – Teste de compressão de cubo com dimensões unitárias



Fonte: o próprio autor.

Para o exemplo, foram adotados os valores apresentados na Figura 8.6:

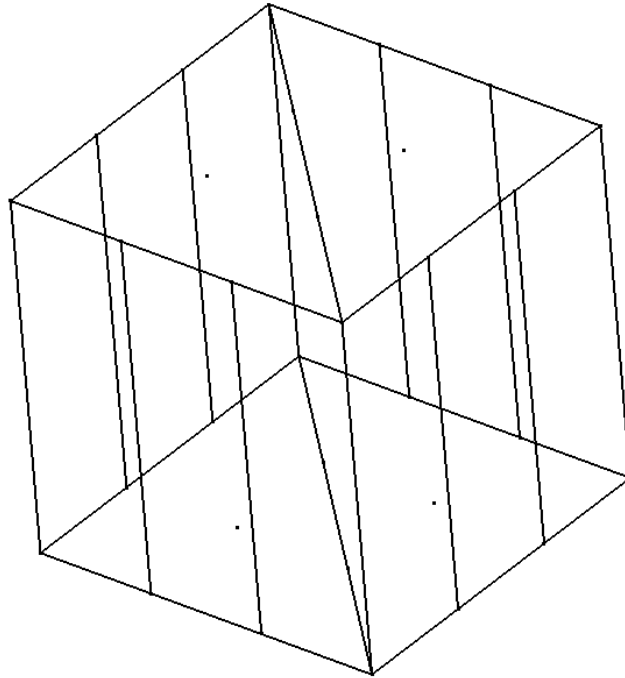
Figura 8.6 – Valores adotados no exemplo 8.2

E	10
ν	0,45
Comprimento	1
Largura	1
Altura	1
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura	Linear
Nº nós	32
Nº elementos finitos	2
Tolerância (Newton-Raphson)	10^{-6}

Fonte: o próprio autor.

Foram utilizados apenas 2 elementos finitos para a discretização do cubo, conforme mostrado na Figura 8.7:

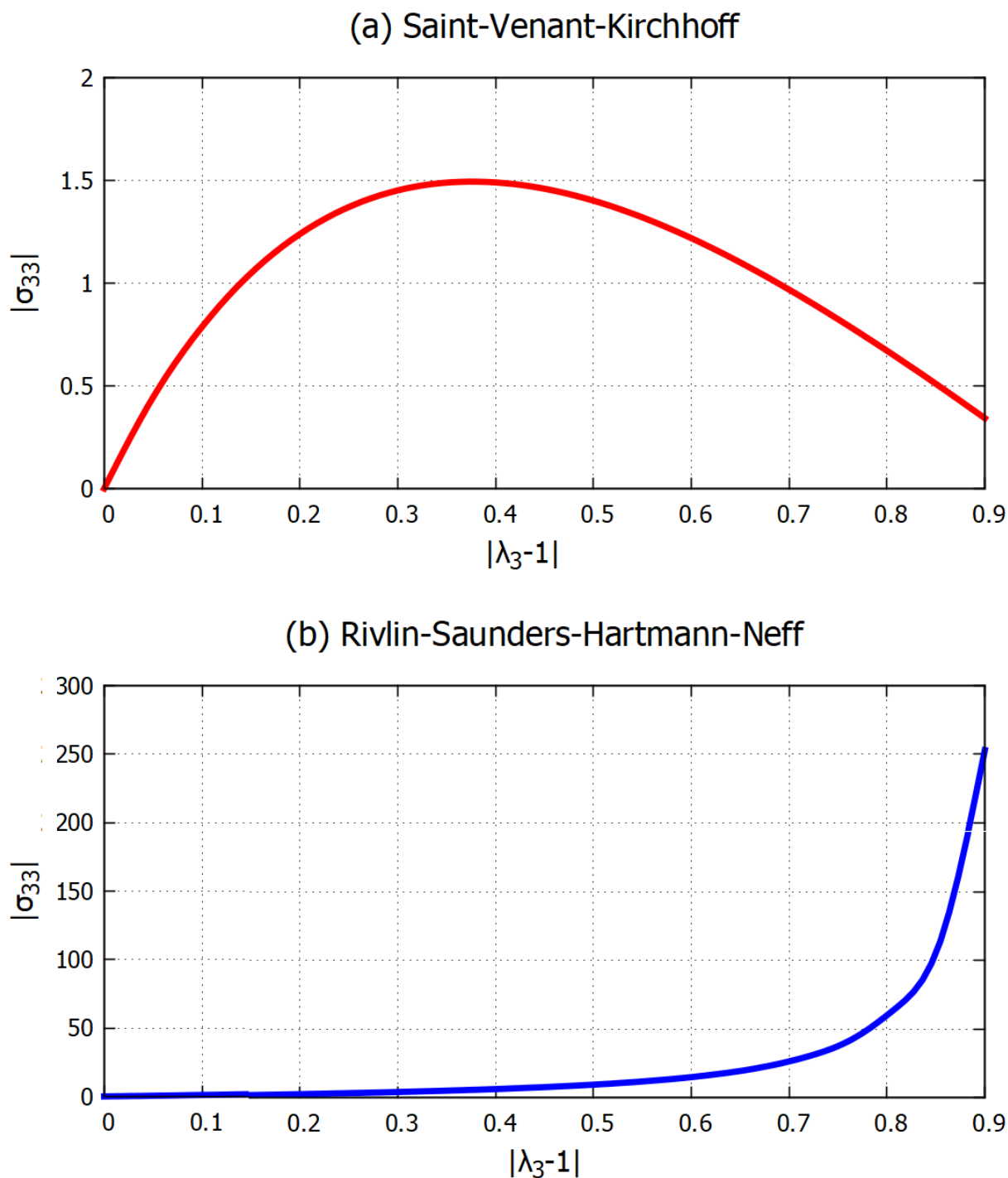
Figura 8.7 – Discretização adotada no exemplo 8.2



Fonte: o próprio autor.

A partir dos resultados obtidos com o programa, foram plotados gráficos do módulo da tensão de Cauchy em relação ao módulo da deformação de engenharia na direção 3 para ambos os modelos constitutivos, os quais são apresentados na Figura 8.8. Ressalta-se que a deformação de engenharia foi deixada na notação $\lambda_3 - 1$ a fim de se reforçar o caráter não linear da análise.

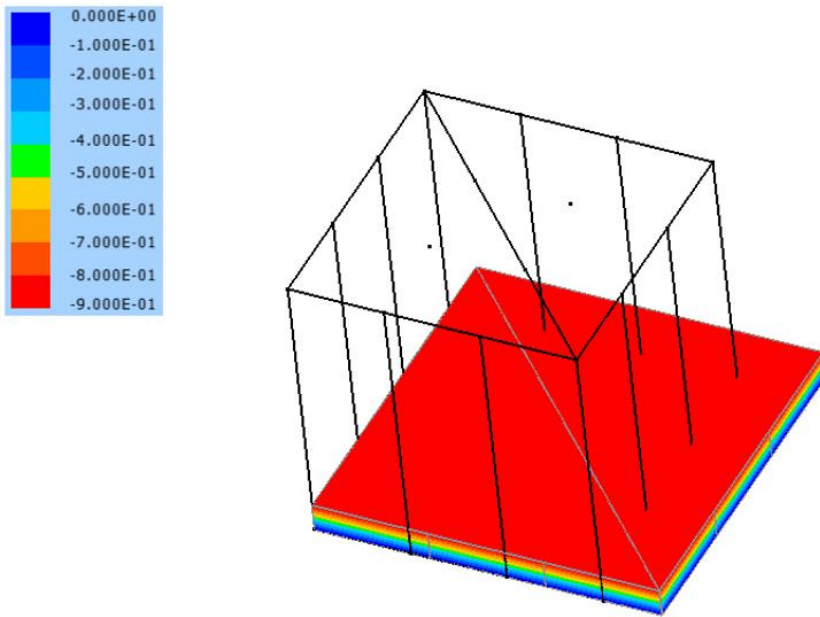
Figura 8.8 – Gráficos de $|\sigma_{33}|$ em relação a $|\lambda_3 - 1|$ obtidos com os modelos constitutivos de (a) Saint-Venant-Kirchhoff e (b) Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff



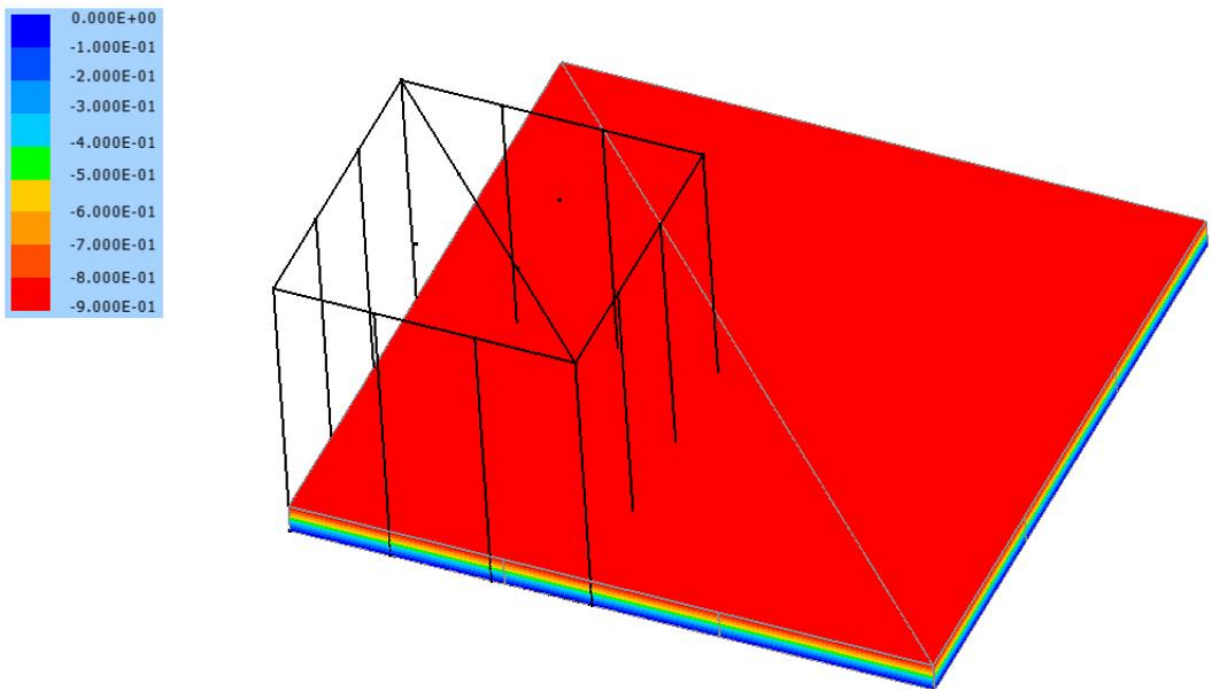
Fonte: o próprio autor.

As configurações finais do cubo após a compressão para ambos os modelos constitutivos são apresentadas na Figura 8.9, na qual a escala de cor representa a deformação sofrida na direção 3:

Figura 8.9 – Configurações finais do cubo após a compressão com distribuição de deformações na direção 3



(a) Saint-Venant-Kirchhoff



(b) Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff

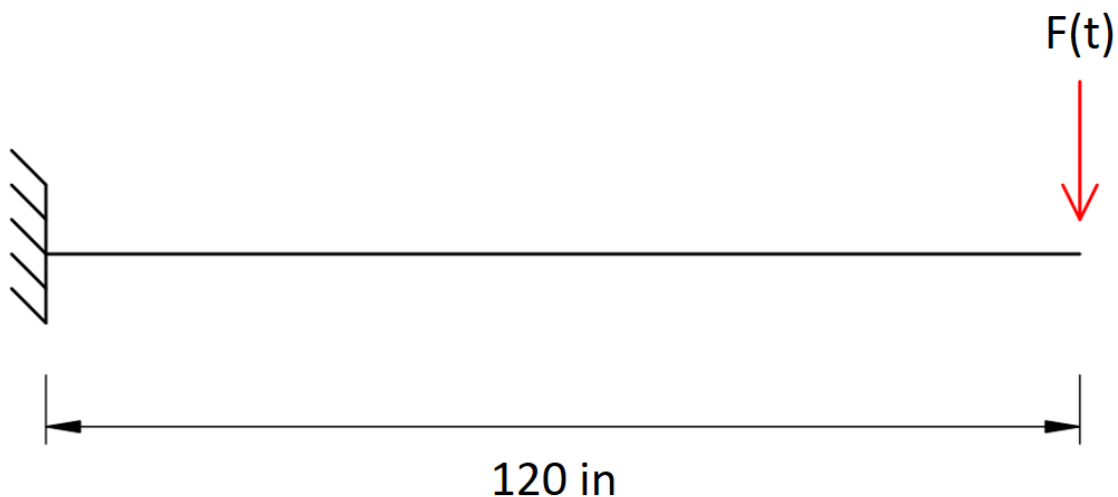
Fonte: o próprio autor.

A partir dos gráficos, foi possível constatar que com o modelo hiperelástico de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff a tensão (e , conseqüentemente, a energia específica de deformação) tende a infinito quando o jacobiano tende a zero, fato que não ocorre com o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff. Dessa forma, confirma-se que o modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff respeita as condições de crescimento e , portanto, é apropriado para a análise de estruturas sujeitas a grandes deformações. Ressalta-se, no entanto, que os modelos se confundem no regime de pequenas deformações.

8.3 Viga engastada e livre submetida à força transversal transiente

No presente exemplo, foi estudado o comportamento dinâmico de uma viga engastada e livre sujeita a grandes deslocamentos para a validação das implementações dinâmicas. O exemplo foi retirado de Rodríguez (2017), o qual utilizou elementos de chapa para a análise. Um esquema da viga analisada é apresentado na Figura 8.10:

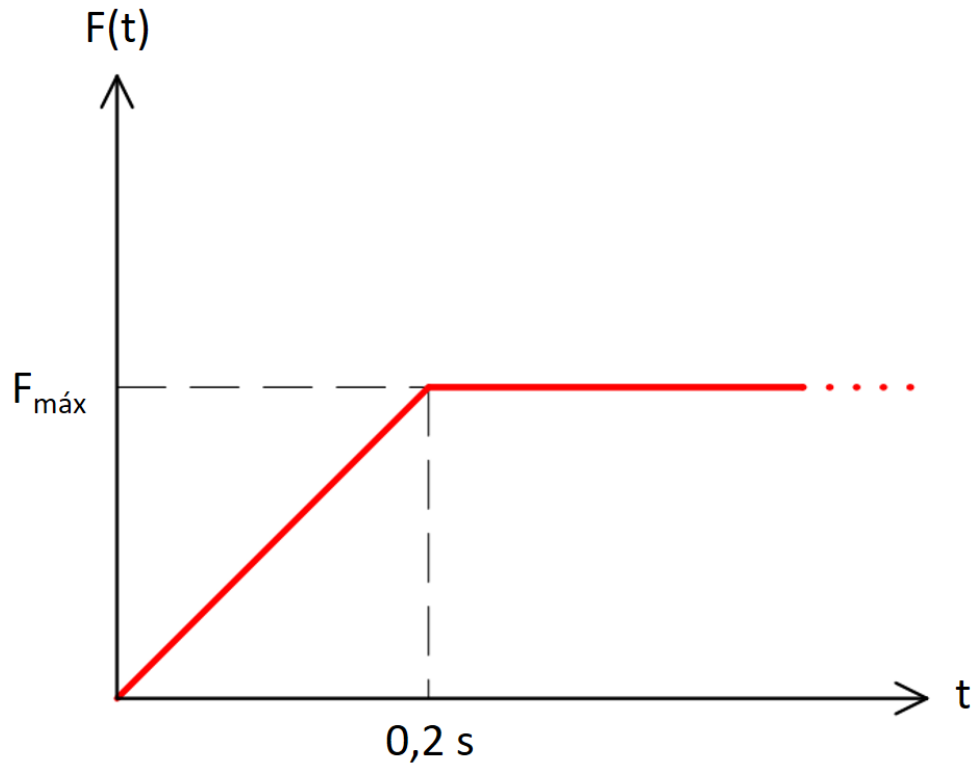
Figura 8.10 – Viga engastada e livre submetida à força transversal transiente na extremidade livre



Fonte: o próprio autor.

Na extremidade livre da viga, é aplicada na direção transversal uma força transiente, cujo módulo cresce até um valor máximo no tempo de 0,2 s e depois permanece constante, conforme mostrado na Figura 8.11. A resposta dinâmica da estrutura foi analisada sem a consideração de amortecimento para dois valores de força máxima: $1 \cdot 10^5$ lb e $5 \cdot 10^5$ lb.

Figura 8.11 – Gráfico da variação da força transiente em relação ao tempo



Fonte: o próprio autor.

Para o exemplo, foram adotados os valores constantes na Figura 8.12:

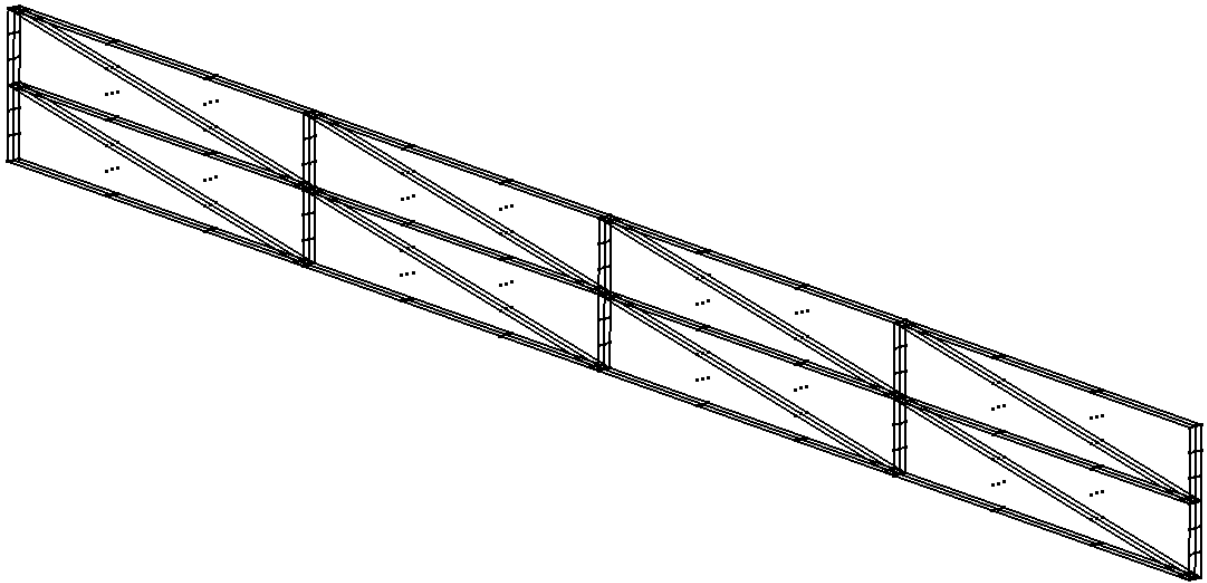
Figura 8.12 – Valores adotados no exemplo 8.3

E	3.107 psi
ν	0
ρ	0,0094116 lb.s ² /in ⁴
Comprimento	120 in
Largura	1 in
Altura	10,627 in
Δt	0,01 s
Tempo total de análise	1 s
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura	Linear
Nº nós	273
Nº elementos finitos	32
Tolerância (Newton-Raphson)	10 ⁻⁶

Fonte: o próprio autor.

A viga foi discretizada com 32 elementos finitos, conforme mostrado na Figura 8.13. Por tratar-se de uma viga esbelta sujeita a grandes deslocamentos, os nós das faces laterais foram restringidos na direção z a fim de se evitar instabilidade lateral.

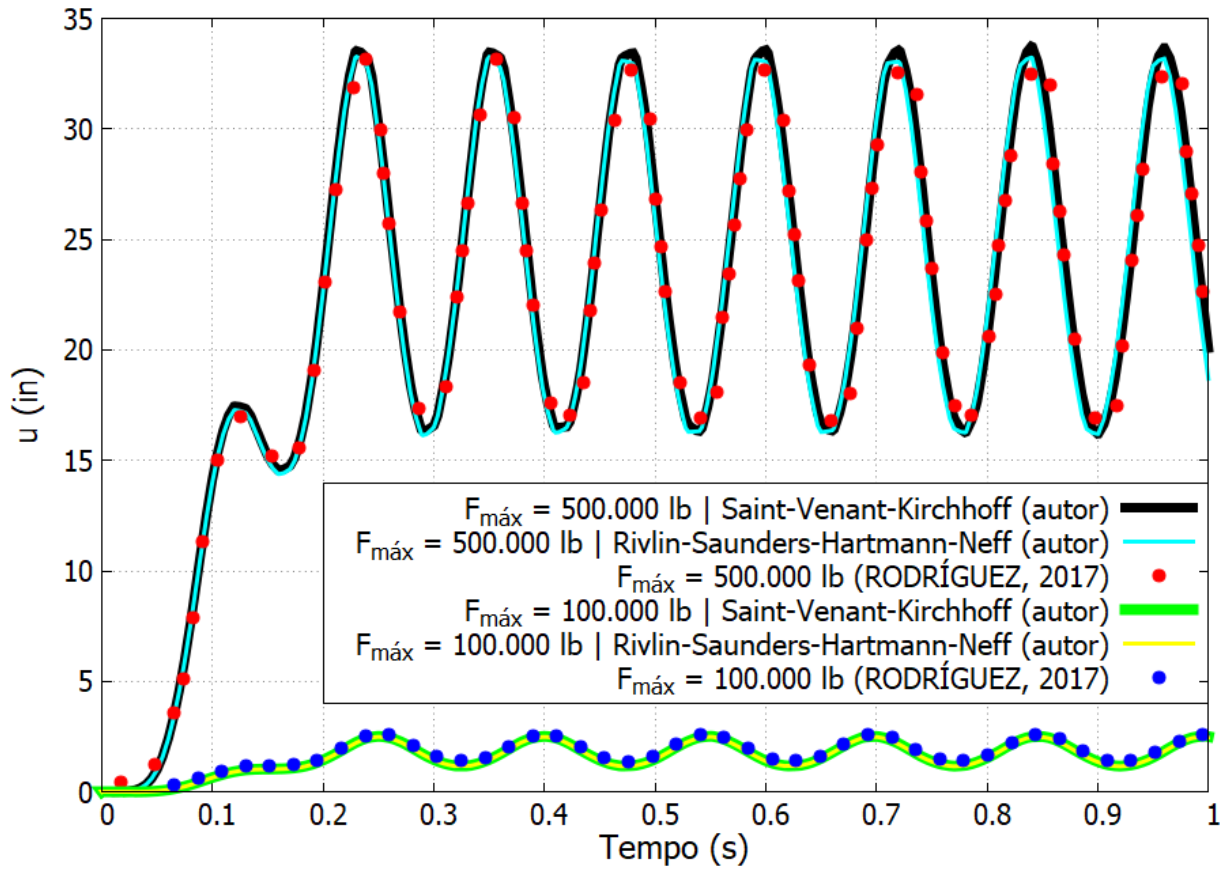
Figura 8.13 – Discretização adotada no exemplo 8.3



Fonte: o próprio autor.

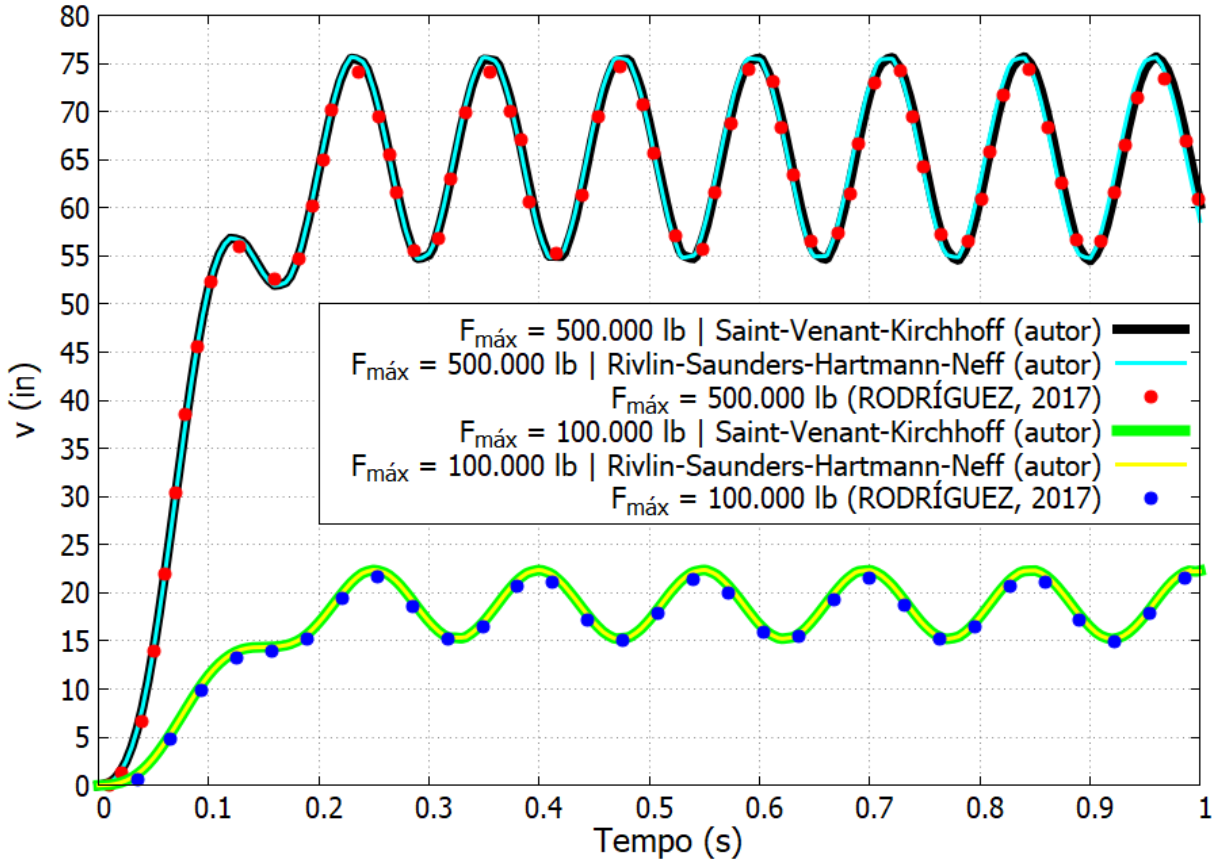
Foram analisados tanto o deslocamento horizontal quanto o deslocamento vertical da extremidade livre da viga ao longo do tempo para cada um dos valores de força máxima. Os gráficos dos deslocamentos horizontal e vertical obtidos com o programa são apresentados, respectivamente, na Figura 8.14 e Figura 8.15, nas quais foram também plotados os resultados obtidos por Rodríguez (2017):

Figura 8.14 – Gráfico do deslocamento horizontal da extremidade livre da viga em relação ao tempo



Fonte: o próprio autor.

Figura 8.15 – Gráfico do deslocamento vertical da extremidade livre da viga em relação ao tempo



Fonte: o próprio autor.

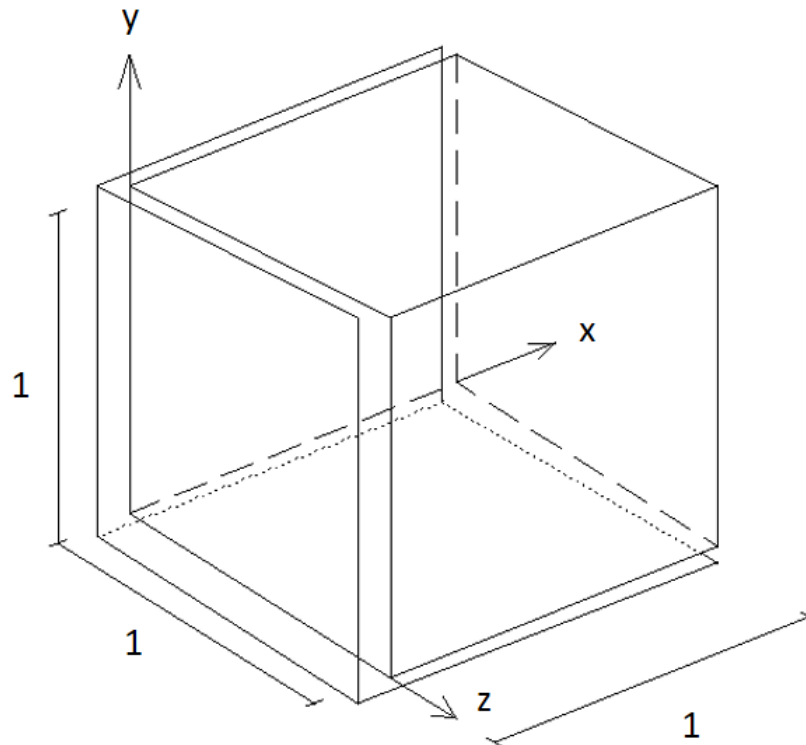
A partir dos gráficos, foi possível constatar que foram obtidos resultados muito próximos aos de Rodríguez (2017) para ambos os modelos constitutivos, sendo, portanto, validado o trecho referente à análise dinâmica elástica do algoritmo. Ressalta-se que, apesar de a estrutura estar sujeita a grandes deslocamentos, o problema está inserido no regime de pequenas deformações, o que justifica a obtenção de curvas praticamente idênticas para ambos os modelos constitutivos.

8.4 Teste axial cíclico em cubo elastoplástico

Para a validação do algoritmo de plasticidade, foi reproduzido um teste axial cíclico analisado por Coda (2021), o qual utilizou a mesma formulação de plasticidade aqui implementada. O exemplo consiste na análise de um cubo composto por material elastoplástico de dimensões unitárias, cujas faces $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ estão restritas, respectivamente, nas direções x , y e z e livres nas demais direções (Figura 8.16). A face $z = 1$ é deslocada por controle de posições na direção z , sendo o cubo primeiramente tracionado, em seguida

comprimido e por fim novamente tracionado até apresentar um alongamento $\lambda > 0$. O cubo foi discretizado com apenas 2 elementos finitos, sendo adotada a mesma discretização utilizada no exemplo 8.2 (Figura 8.7).

Figura 8.16 – Cubo elastoplástico submetido a teste axial cíclico



Fonte: o próprio autor.

Para o exemplo, foram adotados os dados constantes na Figura 8.17:

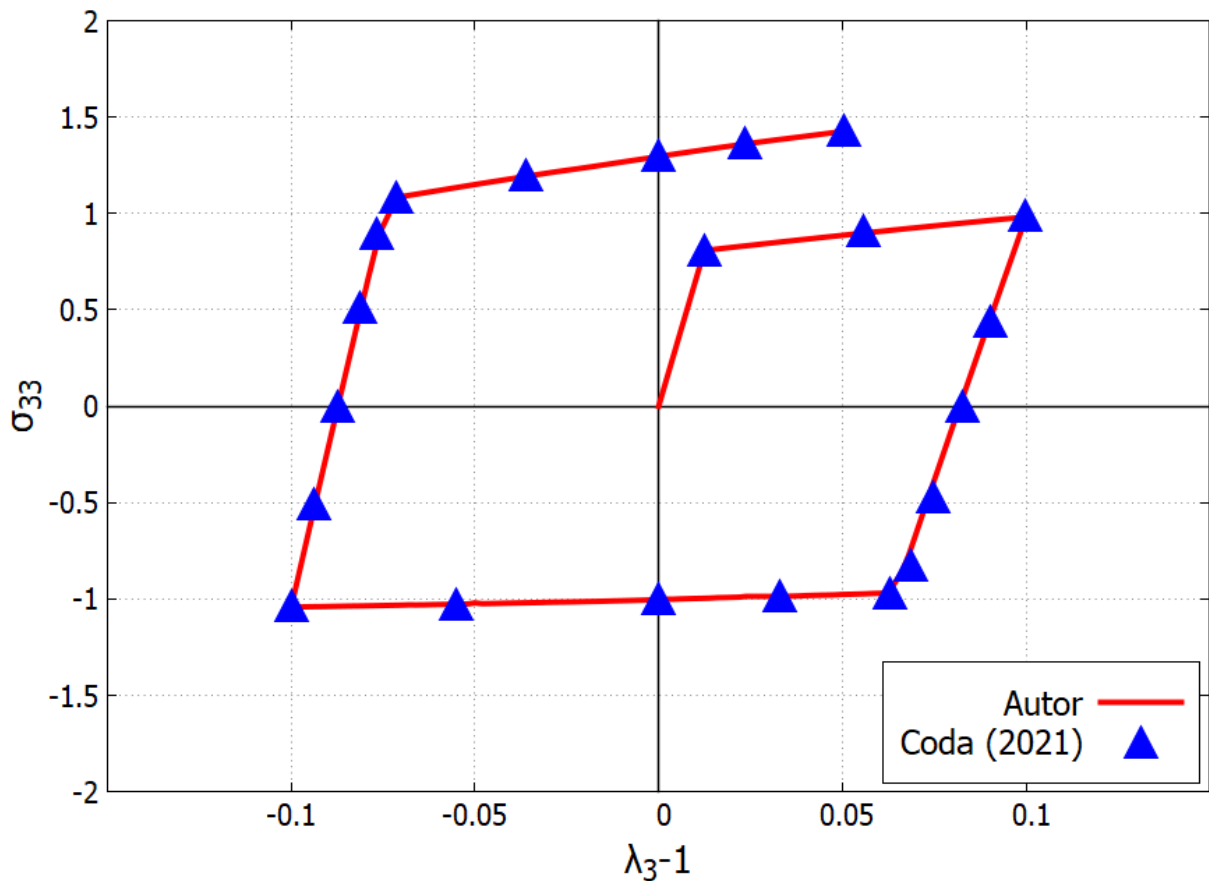
Figura 8.17 - Valores adotados no exemplo 8.4

K	80
G	24
$\bar{\tau}$	0,4
Comprimento	1
Largura	1
Altura	1
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura	Linear
Nº nós	32
Nº elementos finitos	2
Tolerância (Newton-Raphson)	10^{-6}

Fonte: o próprio autor.

Para a estrutura descrita anteriormente, foram realizados três testes. No primeiro, avaliou-se o comportamento do corpo considerando encruamento isótropo constante com $H^i = 0,5$ nas duas direções isocóricas, sendo analisada a tensão de Cauchy σ_{33} em relação à deformação de engenharia ($\lambda_3 - 1$) para um intervalo de alongamento moderado de $0,9 \leq \lambda_3 \leq 1,1$. O gráfico obtido com o programa é apresentado na Figura 8.18, na qual foram também plotados os resultados obtidos por Coda (2021). Analisando-se o gráfico, verificou-se que foram obtidos resultados idênticos aos da referência.

Figura 8.18 – Gráfico de $\sigma_{33} \times (\lambda_3 - 1)$ para $H^i = 0,5$ e $0,9 \leq \lambda_3 \leq 1,1$

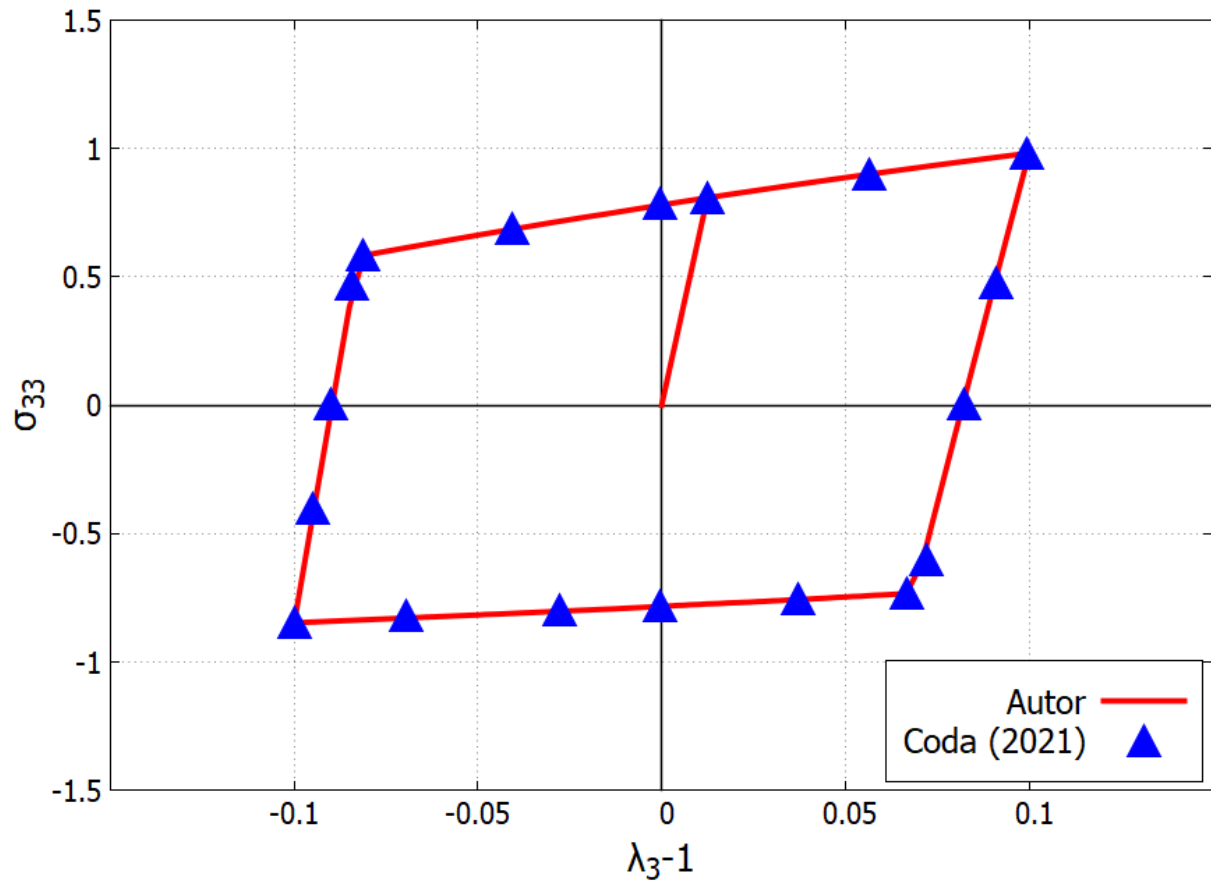


Fonte: o próprio autor.

No segundo teste, avaliou-se o comportamento da estrutura considerando encruamento cinemático constante com $H^c = 0,5$ nas duas direções isocóricas, sendo também analisada a tensão de Cauchy σ_{33} em relação à deformação de engenharia ($\lambda_3 - 1$) para um intervalo de alongamento moderado de $0,9 \leq \lambda_3 \leq 1,1$. O gráfico obtido com o programa é apresentado na Figura 8.19, na qual foram também plotados os resultados obtidos por Coda (2021).

Analisando-se o gráfico, verificou-se que foram novamente obtidos resultados idênticos aos da referência.

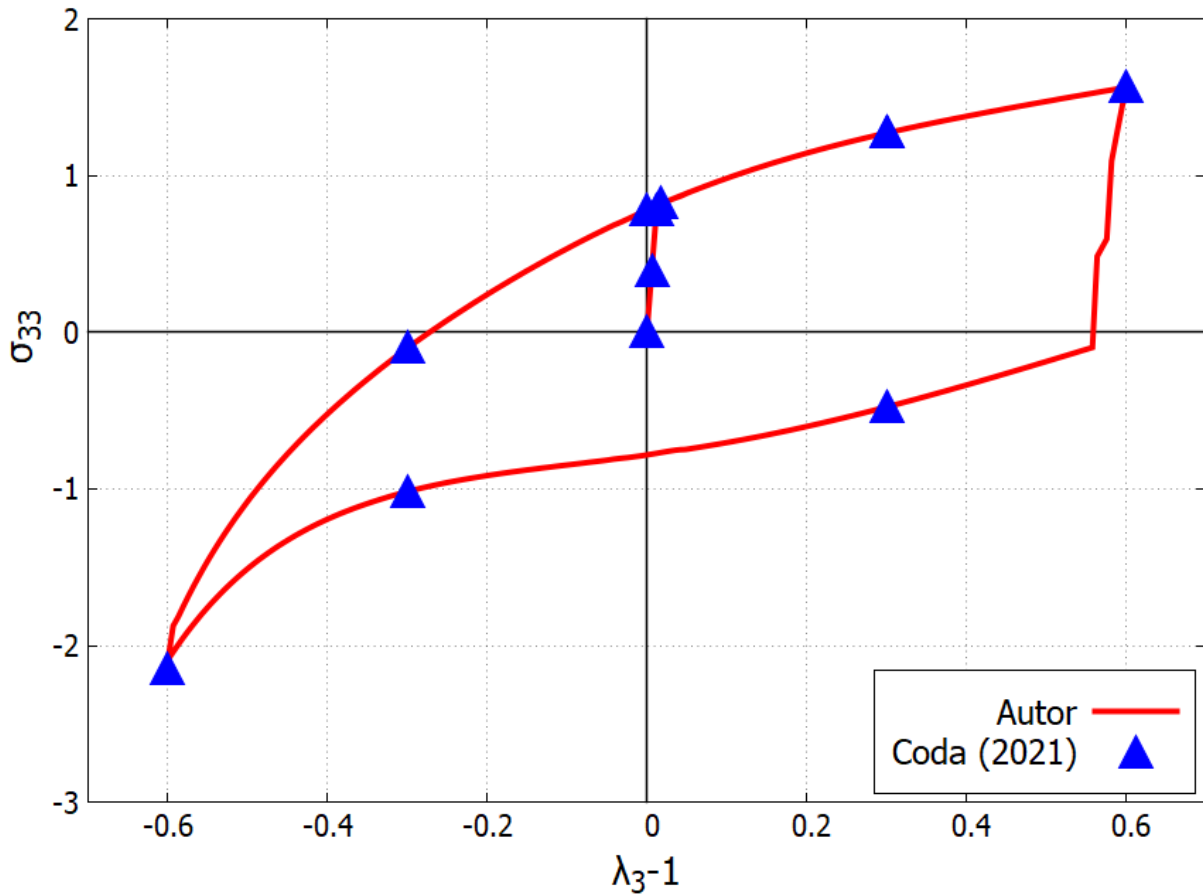
Figura 8.19 – Gráfico de $\sigma_{33} \times (\lambda_3 - 1)$ para $H^c = 0,5$ e $0,9 \leq \lambda_3 \leq 1,1$



Fonte: o próprio autor.

Por fim, no terceiro teste foi novamente analisada a tensão σ_{33} em relação à deformação de engenharia $(\lambda_3 - 1)$ considerando encruamento cinemático constante com $H^c = 0,5$ nas duas direções isocóricas, porém agora com um intervalo maior de alongamento de $0,4 \leq \lambda_3 \leq 1,6$. O gráfico obtido com o programa é apresentado na Figura 8.20, na qual foram também plotados os resultados obtidos por Coda (2021). No gráfico, foi possível observar um bom ajuste dos pontos com a curva obtida.

Figura 8.20 – Gráfico de $\sigma_{33} \times (\lambda_3 - 1)$ para $H^c = 0,5$ e $0,4 \leq \lambda_3 \leq 1,6$



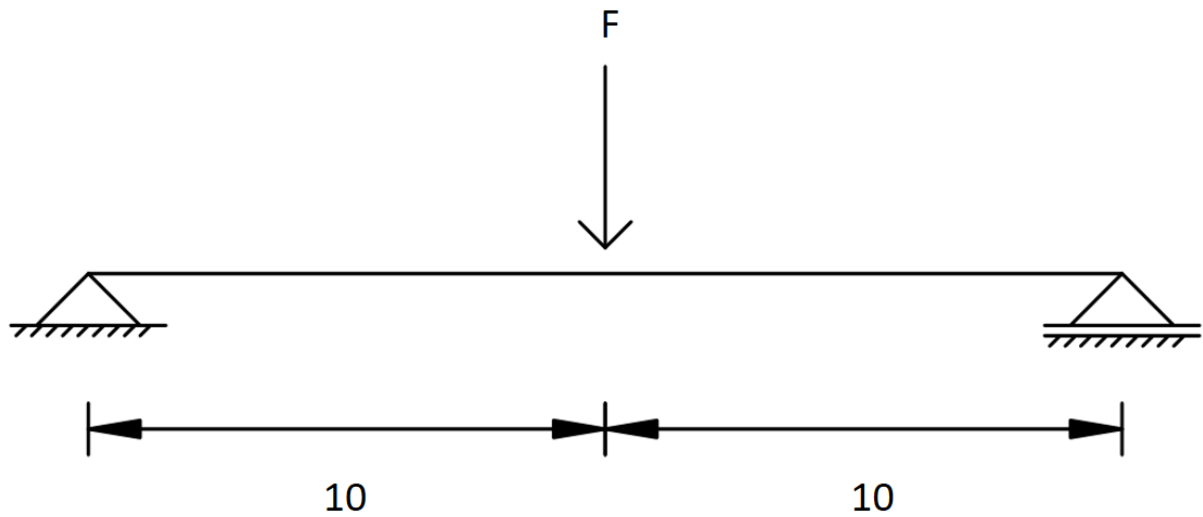
Fonte: o próprio autor.

A partir dos resultados, foi possível concluir que o algoritmo de plasticidade foi corretamente implementado no programa.

8.5 Viga biapoiada elastoplástica com surgimento de rótula plástica

Neste segundo exemplo de plasticidade, é analisada uma viga biapoiada carregada até atingir a plastificação com o intuito de se observar de forma qualitativa o fenômeno de *springback* com a formulação de plasticidade implementada. A viga biapoiada estudada é apresentada na Figura 8.21:

Figura 8.21 – Viga biapoiada carregada até o surgimento de rótula plástica



Fonte: o próprio autor.

Por se tratar apenas de um exemplo qualitativo, foram adotados para as propriedades do material da viga os mesmos valores adimensionais utilizados no teste de validação 8.4. Os dados adotados no exemplo são apresentados na Figura 8.22:

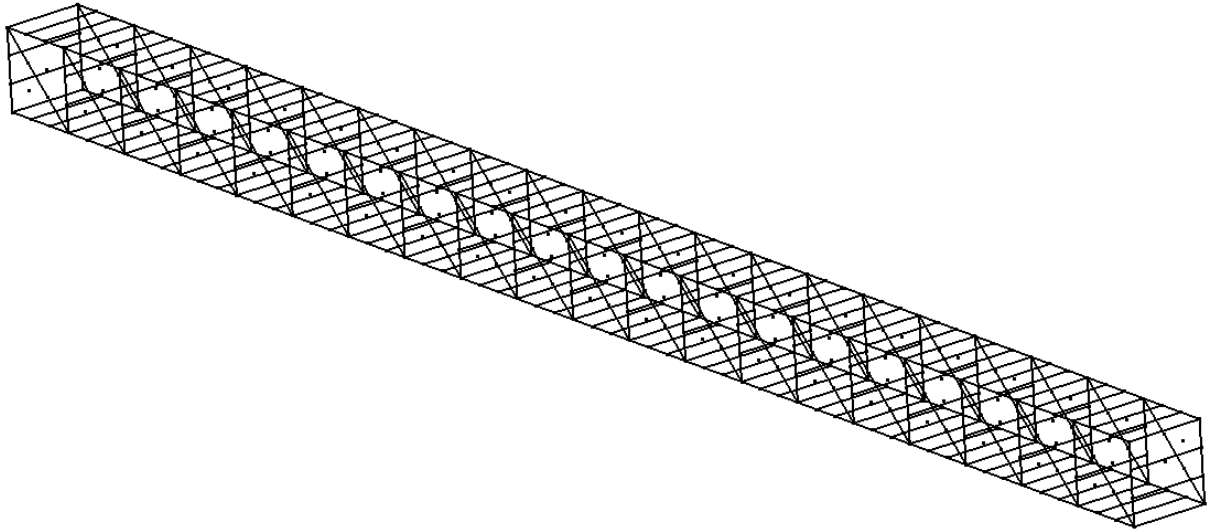
Figura 8.22 – Valores adotados no exemplo 8.5

K	80
G	24
$\bar{\tau}$	0,4
Comprimento	20
Largura	1
Altura	1
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura	Linear
Nº nós	488
Nº elementos finitos	40
Tolerância (Newton-Raphson)	10^{-6}

Fonte: o próprio autor.

A viga foi discretizada com 40 elementos finitos, conforme mostrado na Figura 8.23:

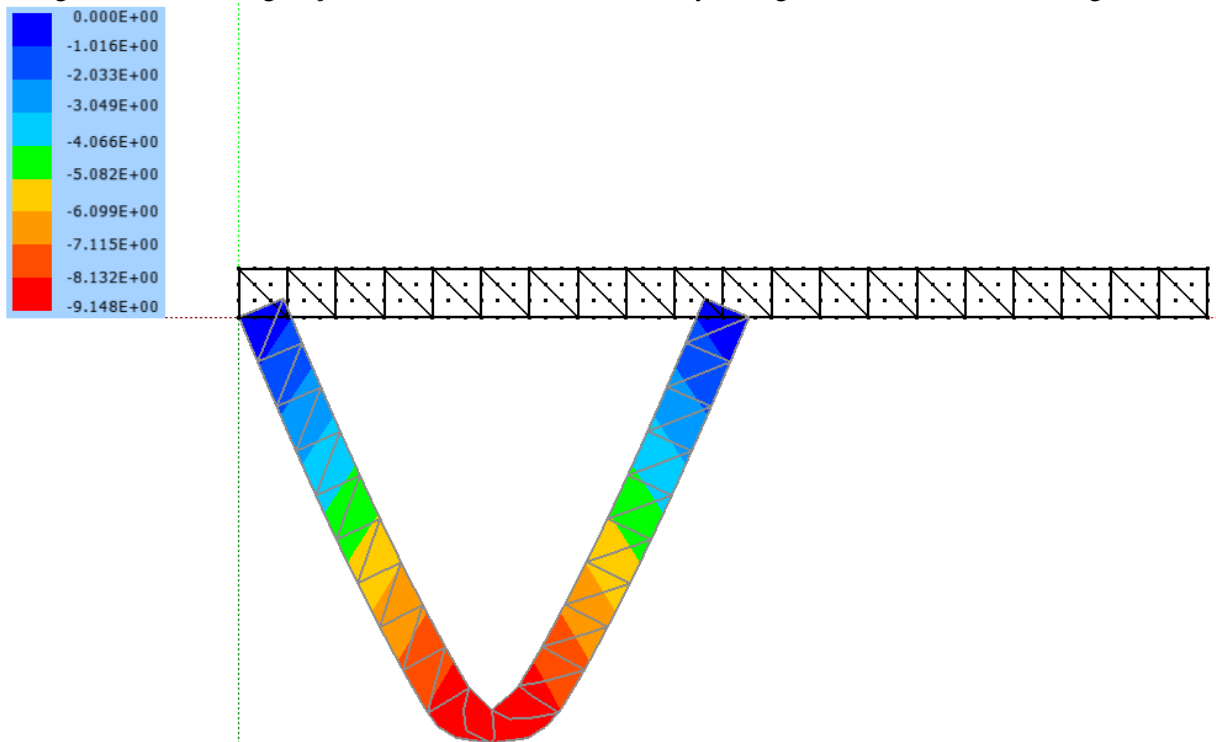
Figura 8.23 – Discretização adotada no exemplo 8.5



Fonte: o próprio autor.

Primeiramente, a viga foi submetida a duas cargas concentradas verticais no centro do vão, as quais foram aplicadas na face superior da viga, cada uma em um lado de sua espessura de forma a manter a simetria do problema. Ambas as forças foram aplicadas com módulo suficiente para que, ao final da etapa de carregamento, a viga apresentasse no ponto de aplicação das cargas um ângulo aproximado de 60° e, conseqüentemente, o surgimento de uma rótula plástica. Cada uma das forças foi aplicada com módulo de 0,041 em 250 passos, resultando em um deslocamento y final de -9,14 e um ângulo final de $60,21^\circ$. A configuração deformada com os deslocamentos y da estrutura no final da fase de carregamento é apresentada na Figura 8.24:

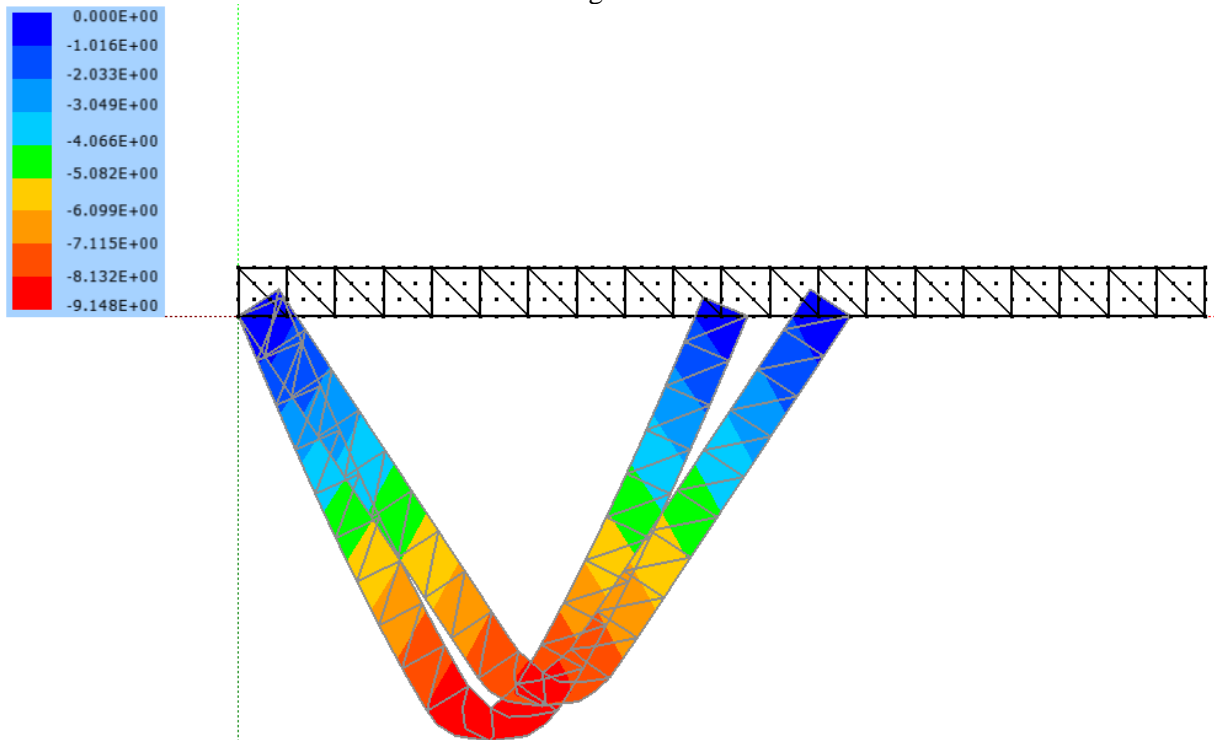
Figura 8.24 – Configuração deformada e deslocamentos y da viga ao final da fase de carregamento



Fonte: o próprio autor.

Em seguida, o carregamento foi retirado, provocando o *springback* da estrutura. O fenômeno pode ser evidenciado na Figura 8.25, onde são apresentadas as configurações deformadas antes e após a retirada do carregamento:

Figura 8.25 – Configurações deformadas e deslocamentos y da viga antes e após a retirada do carregamento



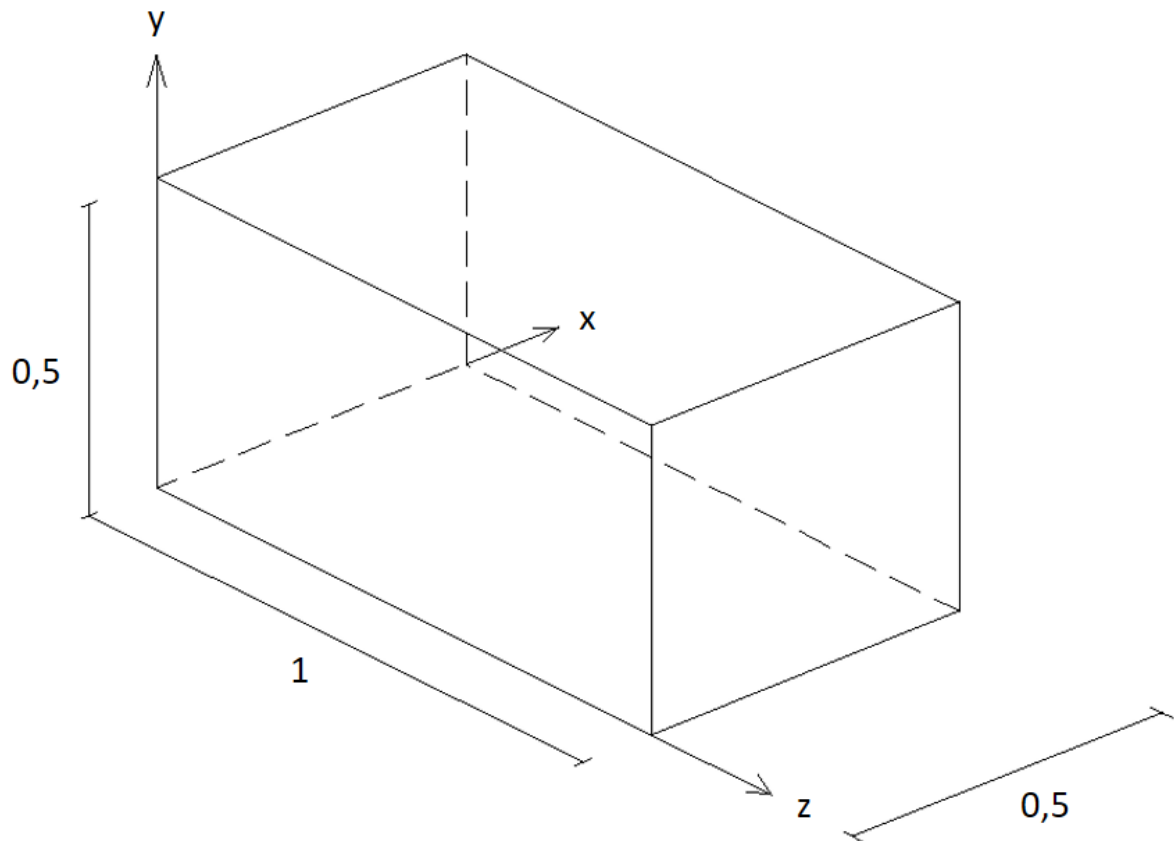
Fonte: o próprio autor.

Ao final do descarregamento, foi obtido na face superior do centro do vão um deslocamento y de $-8,40$ e um ângulo de $53,14^\circ$, resultando em um deslocamento y de $0,74$ e uma abertura de $7,07^\circ$ após o *springback*.

8.6 Teste de fluência

Com o intuito de se avaliar a capacidade do programa de representar o efeito da fluência, no presente exemplo foi realizado um teste de fluência em um bloco com material viscoelástico, cuja geometria é apresentada na Figura 8.26. O bloco apresenta os nós das faces $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ restritos, respectivamente, nas direções x , y e z e livres nas demais direções, estando sujeito a uma força de superfície constante de tração na face $z = 1 \text{ m}$.

Figura 8.26 – Bloco viscoelástico



Fonte: o próprio autor.

Para o exemplo, foram adotados os dados constantes na Figura 8.27:

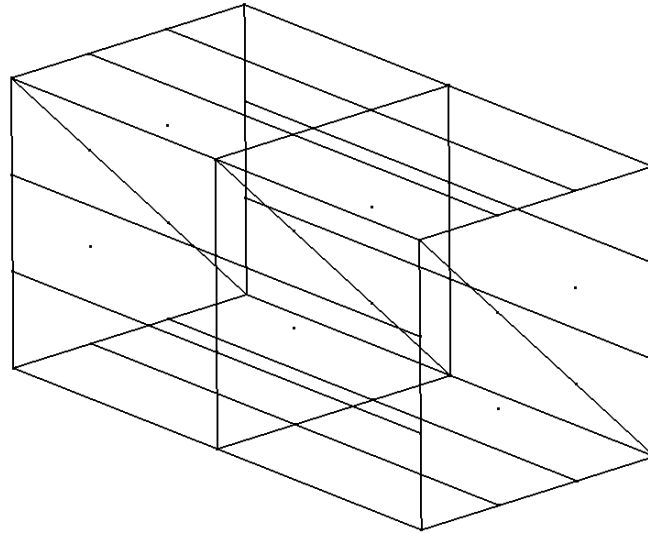
Figura 8.27 – Valores adotados no exemplo 8.6

K	1,5 MPa
G	9 kPa
ρ	0
γ_1	0,5
γ_2	0,5
\bar{K}	0
Comprimento	1 m
Largura	0,5 m
Altura	0,5 m
Força de superfície	40 kPa
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura	Linear
Nº nós	48
Nº elementos finitos	4
Tolerância (Newton-Raphson)	10^{-7}

Fonte: o próprio autor.

O bloco foi discretizado com apenas 4 elementos finitos, conforme mostrado na Figura 8.28:

Figura 8.28 – Discretização adotada no exemplo 8.6

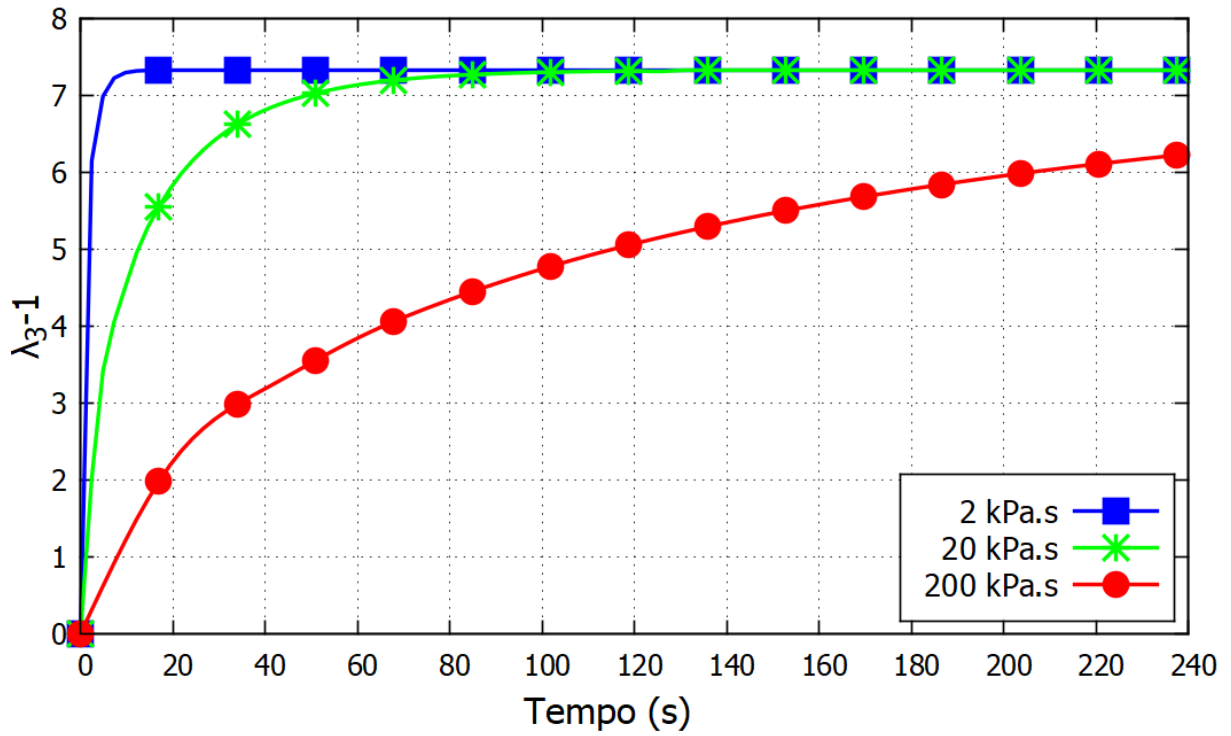


Fonte: o próprio autor.

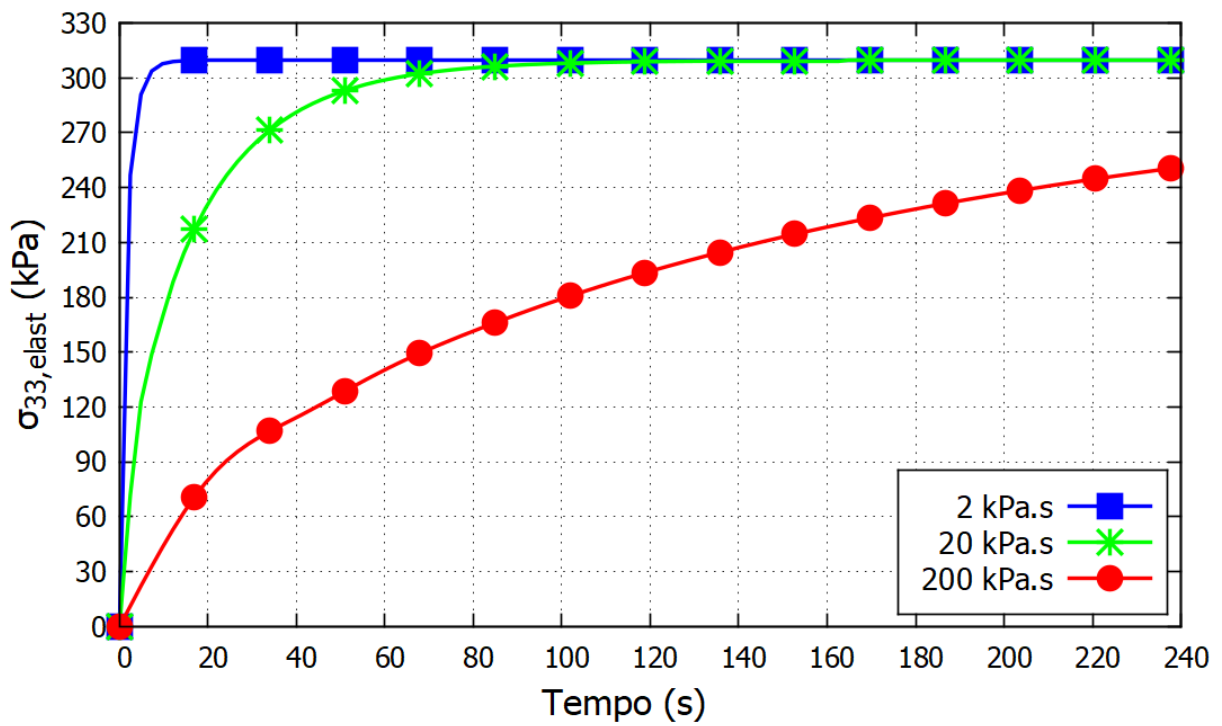
O comportamento do corpo foi estudado para diferentes valores de viscosidade cisalhante e incremento de tempo, sendo analisados os seguintes casos:

- a) $\bar{G} = 200 \text{ kPa}\cdot\text{s}$ e $\Delta t = 20 \text{ s}$;
- b) $\bar{G} = 20 \text{ kPa}\cdot\text{s}$ e $\Delta t = 4 \text{ s}$;
- c) $\bar{G} = 2 \text{ kPa}\cdot\text{s}$ e $\Delta t = 0,2 \text{ s}$.

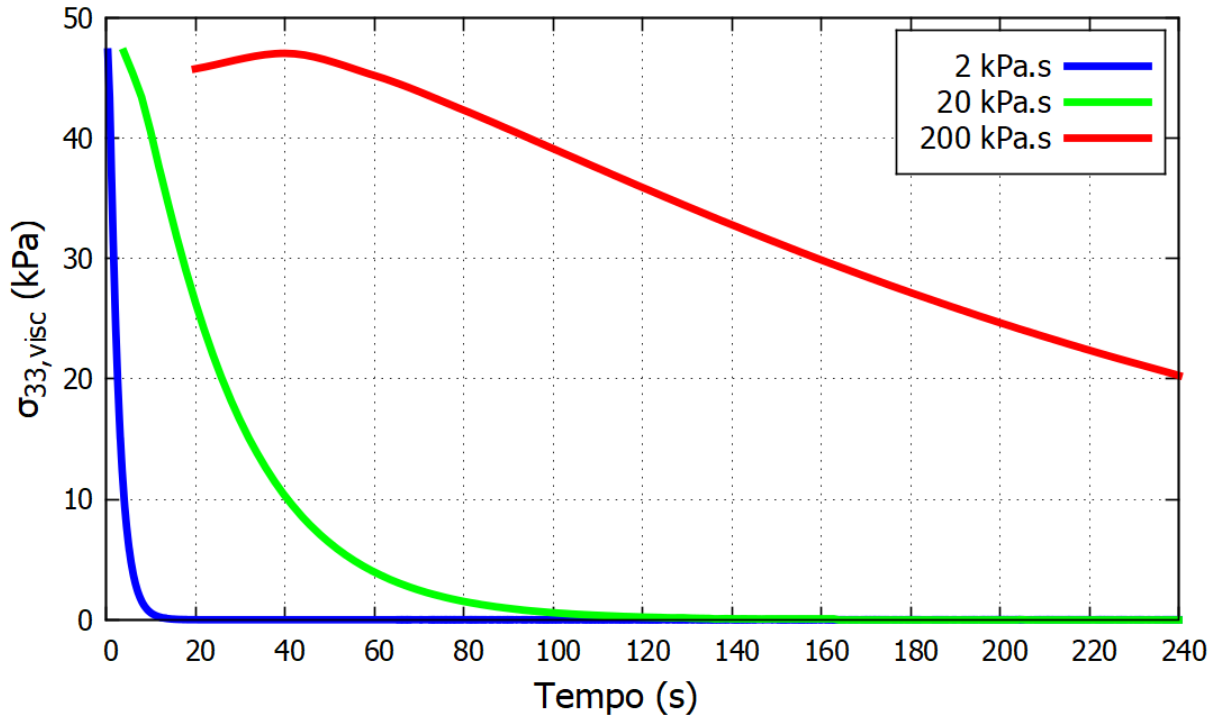
Para cada caso, foram avaliadas a deformação de engenharia ($\lambda_3 - 1$) e as componentes da tensão de Cauchy elástica ($\sigma_{33,elast}$) e viscosa ($\sigma_{33,visc}$). Os gráficos da deformação de engenharia, componente elástica e componente viscosa da tensão de Cauchy em relação ao tempo obtidos com o programa são apresentados, respectivamente, na Figura 8.29, Figura 8.30 e Figura 8.31. Ressalta-se que, como as tensões viscosas no gráfico da Figura 8.31 não podem ser nulas no início da análise, as curvas têm início a partir dos valores obtidos no primeiro passo de tempo.

Figura 8.29 – Gráfico de $(\lambda_3 - 1)$ em relação ao tempo

Fonte: o próprio autor.

Figura 8.30 – Gráfico de $\sigma_{33,elast}$ em relação ao tempo

Fonte: o próprio autor.

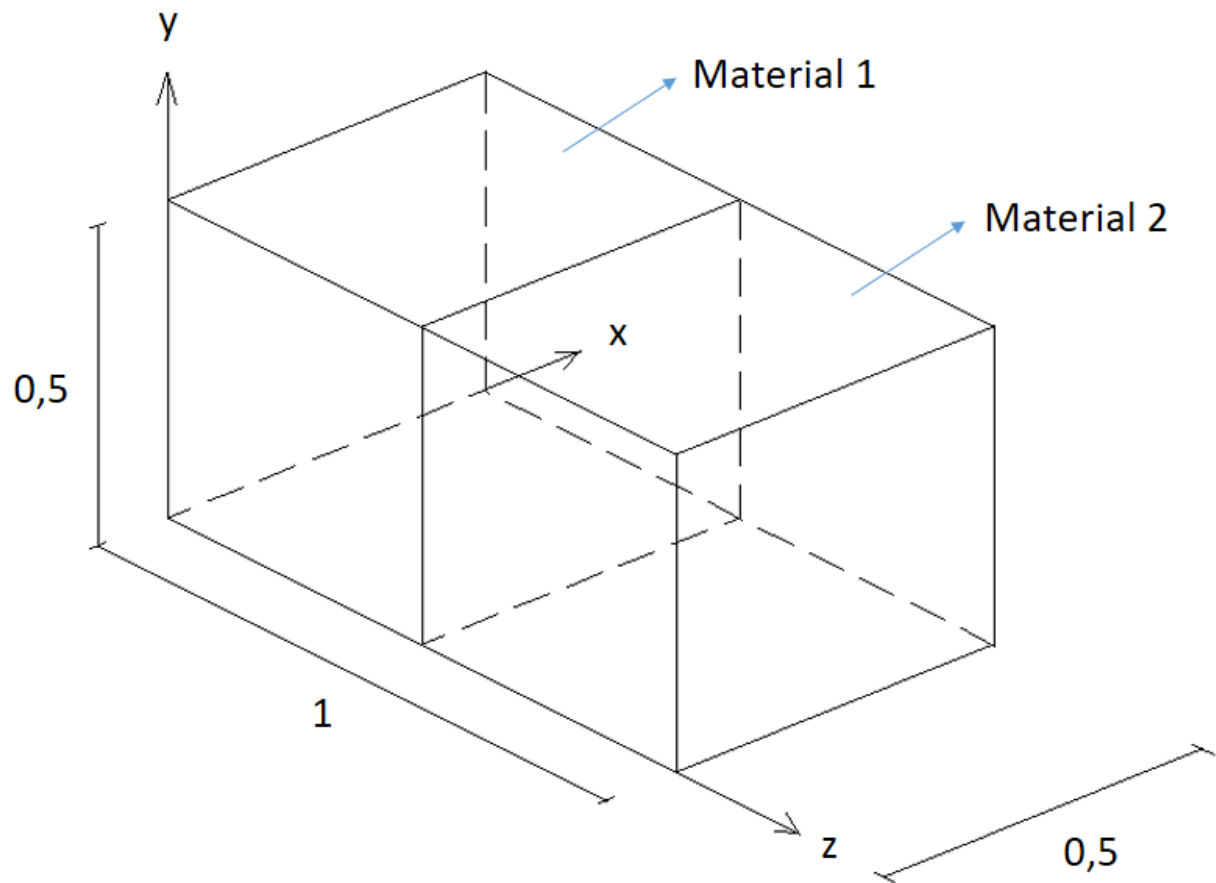
Figura 8.31 – Gráfico de $\sigma_{33,visc}$ em relação ao tempo

Fonte: o próprio autor.

8.7 Teste indireto de relaxação

Utilizando-se a mesma geometria do problema anterior, neste exemplo foi realizado um teste indireto de relaxação. Apesar de as dimensões serem as mesmas, neste exemplo o corpo apresenta aproximação cúbica na espessura e é composto por dois materiais, sendo a região entre as faces $z = 0$ e $z = 0,5 m$ composta por material viscoelástico (material 1) e a região entre as faces $z = 0,5 m$ e $z = 1 m$ composta por material elástico (material 2), conforme apresentado na Figura 8.32:

Figura 8.32 – Bloco composto por material elástico e viscoelástico



Fonte: o próprio autor.

Para o exemplo, foram adotados os dados constantes na Figura 8.33:

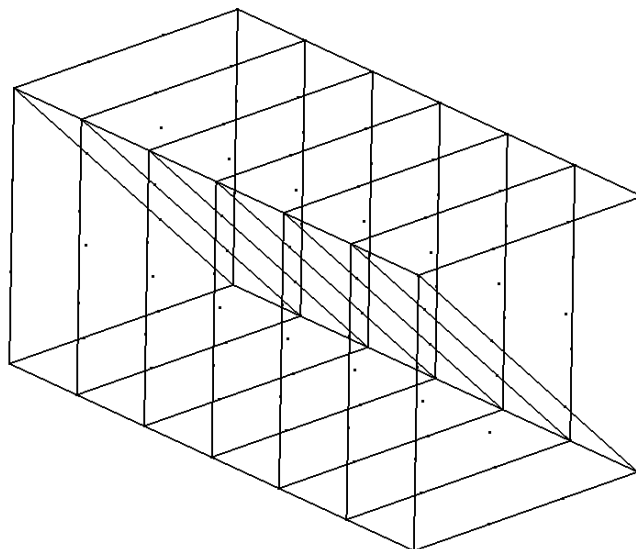
Figura 8.33 – Valores adotados no exemplo 8.7

Material 1 (viscoelástico)	K	1,5 MPa
	G	9 kPa
	ρ	0
	γ_1	0,5
	γ_2	0,5
	\bar{K}	0
	\bar{G}	200 KPa.s
Material 2 (elástico)	K	0,15 MPa
	G	9 kPa
	ρ	0
Geral	Comprimento	1 m
	Largura	0,5 m
	Altura	0,5 m
	Δt	0,4 s
	Tempo total de análise	200 s
	Nº pontos de Hammer	12
	Grau de aproximação na espessura	Cúbico
	Nº nós	112
	Nº elementos finitos	4
	Tolerância (Newton-Raphson)	10^{-7}

Fonte: o próprio autor.

O bloco foi discretizado com apenas 4 elementos finitos com aproximação cúbica na espessura, sendo 2 elementos para cada material. A discretização adotada é apresentada na Figura 8.34:

Figura 8.34 – Discretização adotada no exemplo 8.7

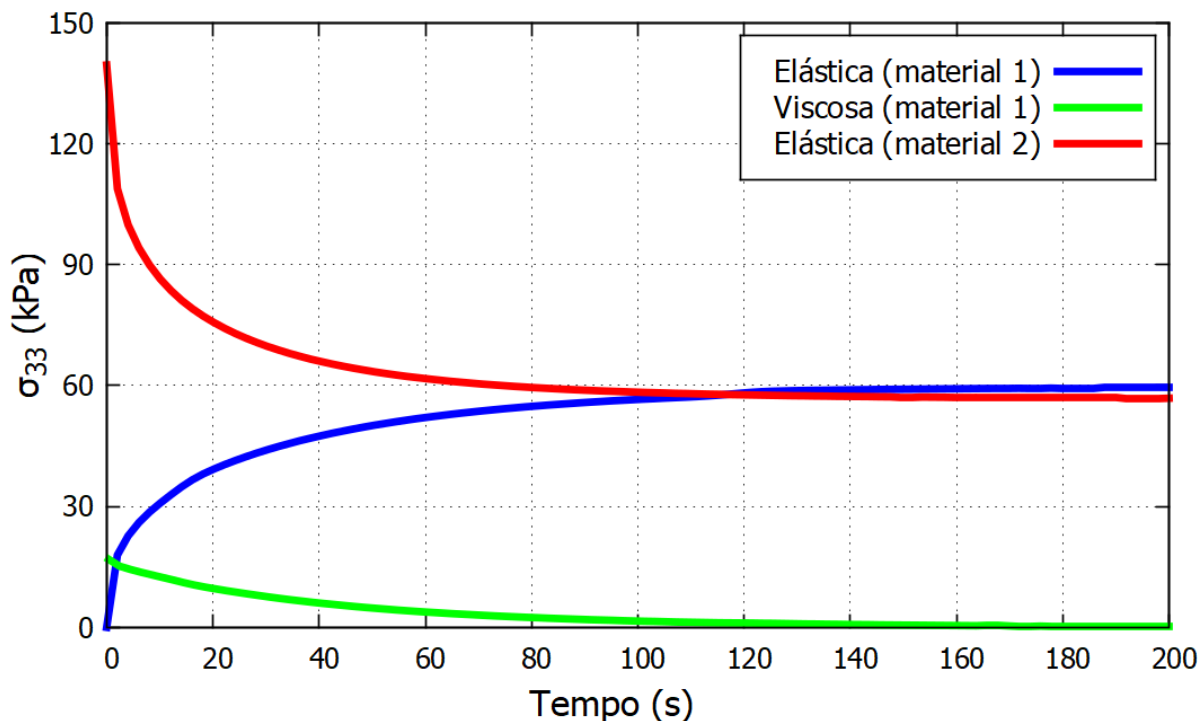


Fonte: o próprio autor.

A análise foi realizada em duas fases. Na fase 1, a região com material 1 foi mantida com todos os nós restritos enquanto a face $z = 1\text{ m}$ era movida por controle de posições até a posição $z = 3,4\text{ m}$. Em seguida, na fase 2 foram impostas as mesmas condições de contorno do teste de fluência (nós das faces $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ restritos, respectivamente, nas direções x , y e z e livres nas demais direções), de modo que fosse possível analisar a variação de tensão no corpo sob uma deformação média constante (relaxação indireta).

Foram analisadas na direção 3 as variações tanto da componente elástica quanto viscosa da tensão de Cauchy em relação ao tempo no ponto $(0,167; 0,167; 0,167)$ – pertencente à região com material 1 – e da tensão elástica (ou total) no ponto $(0,167; 0,167; 0,833)$ – pertencente à região com material 2. O gráfico da variação das tensões σ_{33} em relação ao tempo é apresentado na Figura 8.35:

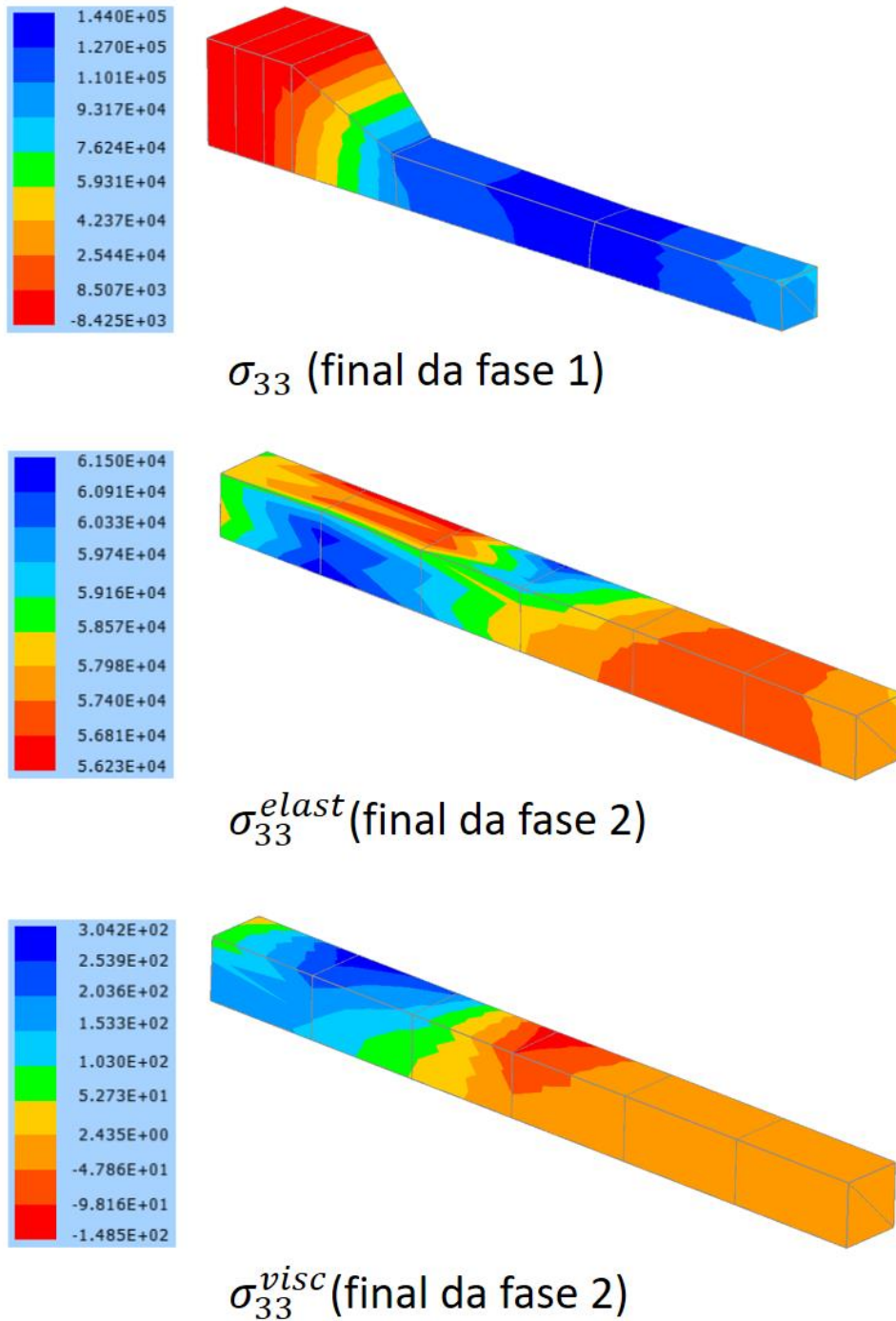
Figura 8.35 – Gráfico de σ_{33} em relação ao tempo



Fonte: o próprio autor.

Snapshots das deformadas do bloco ao final das fases 1 e 2 são apresentados na Figura 8.36, com a escala de cor representando a tensão σ_{33} :

Figura 8.36 – *Snapshots* das deformadas do bloco com a distribuição de tensões σ_{33}



Fonte: o próprio autor.

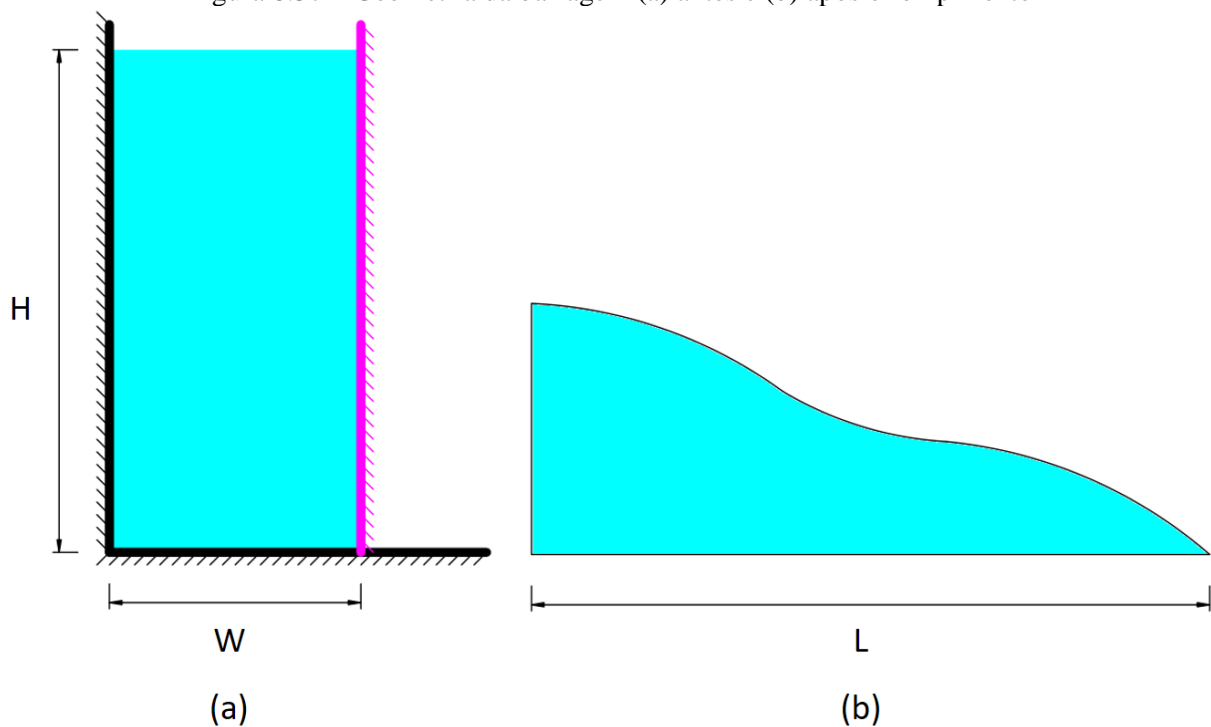
8.8 Rompimento de barragem

Para a validação do algoritmo de viscosidade, foi analisado um exemplo de rompimento de barragem, o qual é comumente utilizado para a validação de programas de análise de fluidos compressíveis com superfície livre (móvel). O exemplo foi retirado de Nithiarasu (2005), o qual

analisou numericamente o problema utilizando um programa com formulação lagrangeana-euleriana para a análise de fluidos com escoamento de superfície livre.

O exemplo consiste em um reservatório de água inicialmente em repouso limitado por duas paredes verticais e uma superfície horizontal (Figura 8.37a). As paredes verticais permitem o deslocamento da água na direção y , enquanto que a superfície horizontal permite o deslocamento na direção x . A barragem sofre uma ruptura súbita (Figura 8.37b), onde a parede vertical da direita (destacada em magenta) é retirada, dando início ao escoamento do fluido.

Figura 8.37 – Geometria da barragem (a) antes e (b) após o rompimento



Fonte: o próprio autor.

Para o exemplo, foram adotados os mesmos valores adimensionais utilizados por Nithiarasu (2005). Como no artigo de referência o fluido foi considerado como incompressível, foi empregado um valor elevado de *bulk modulus*. Todos os dados utilizados na análise são apresentados na Figura 8.38:

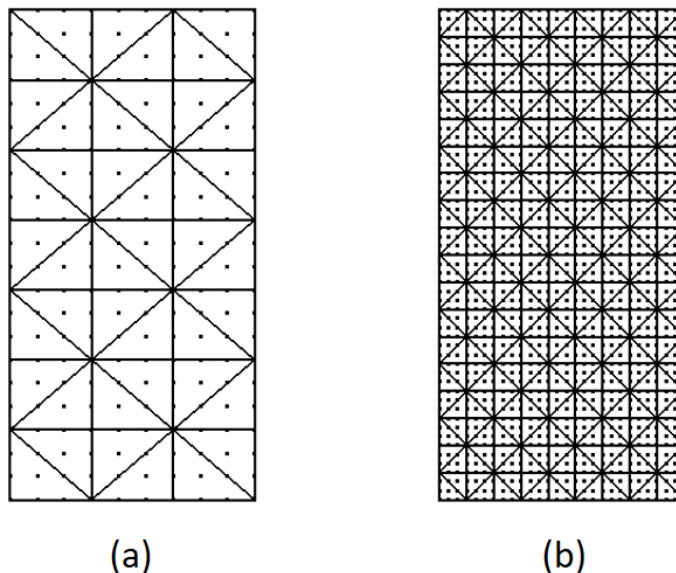
Figura 8.38 – Valores adotados no exemplo 8.8

K	$2,15 \cdot 10^9$
G	1 (fase 1) e 0 (fase 2)
ρ	1
γ_1	0,5
γ_2	0,5
\bar{K}	0
\bar{G}	0,001
Comprimento (W)	0,35
Largura	1,00
Altura (H)	0,70
g	1
Δt	$2,5 \cdot 10^{-4}$
Tempo total de análise	1,675
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura	Linear
Nº nós	440/3080
Nº elementos finitos	42/324
Tolerância (Newton-Raphson)	10^{-7}

Fonte: o próprio autor.

Foram utilizadas duas discretizações para a análise, uma com 42 (Figura 8.39a) e outra com 324 elementos finitos (Figura 8.39b). Como o exemplo se trata de um problema bidimensional, foi adotada aproximação linear na espessura e as faces triangulares dos elementos foram impedidas de transladar na direção da altura do prisma.

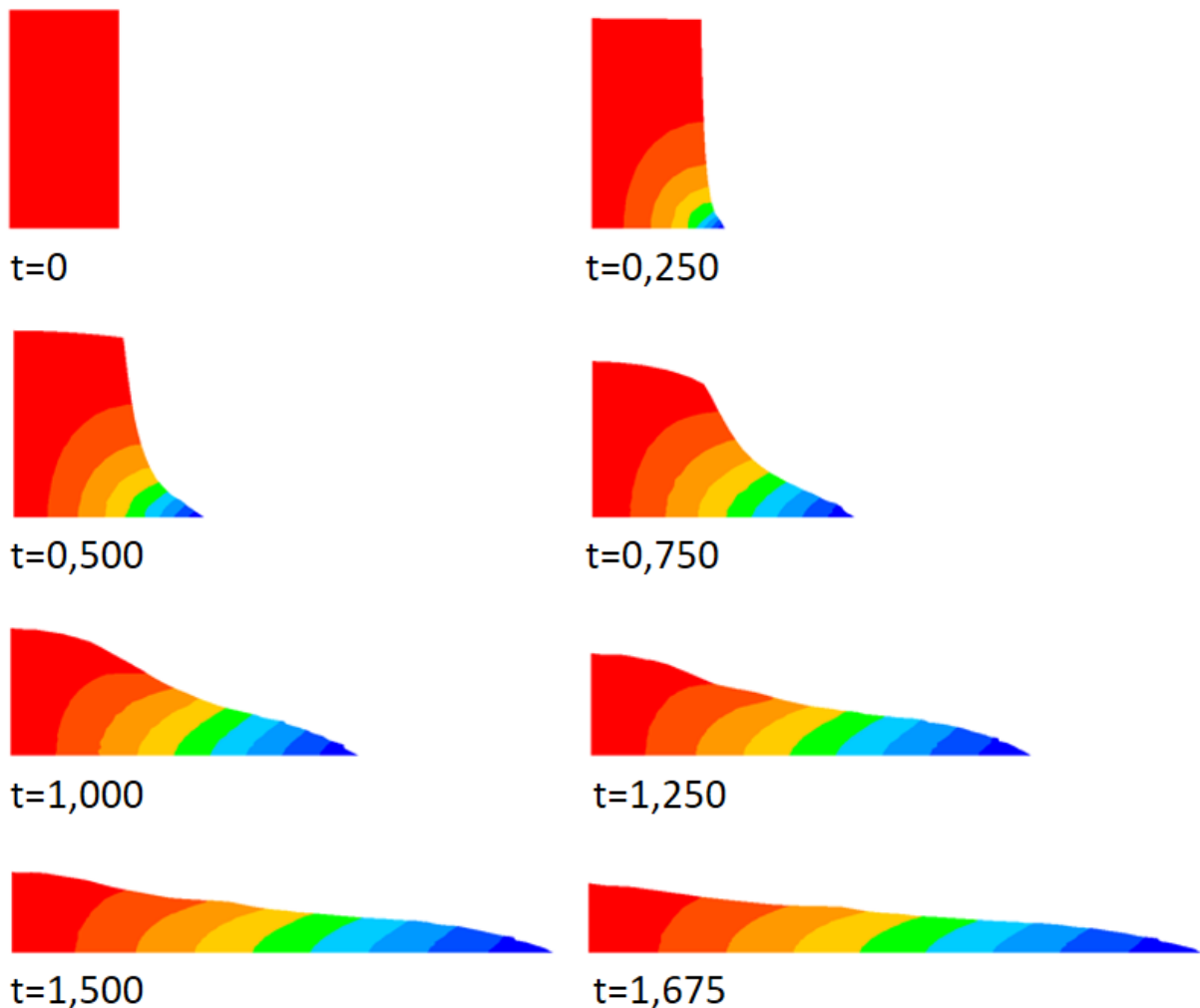
Figura 8.39 – Discretizações adotadas no exemplo 8.8: (a) 42 e (b) 324 elementos finitos



Fonte: o próprio autor.

Inicialmente, com a barragem ainda intacta, foi realizada uma análise estática com um valor pequeno de G , de modo a permitir a acomodação do fluido e se obter a distribuição inicial de tensão hidrostática. Em seguida, atribuiu-se valor nulo a G e o anteparo vertical da direita foi retirado, sendo em seguida realizada a análise dinâmica do escoamento do fluido. *Snapshots* do escoamento com a discretização mais refinada são apresentados na Figura 8.40, com a escala de cor representando o deslocamento x :

Figura 8.40 – *Snapshots* do escoamento da coluna d'água com o deslocamento x do fluido obtidos com a discretização com 324 elementos finitos

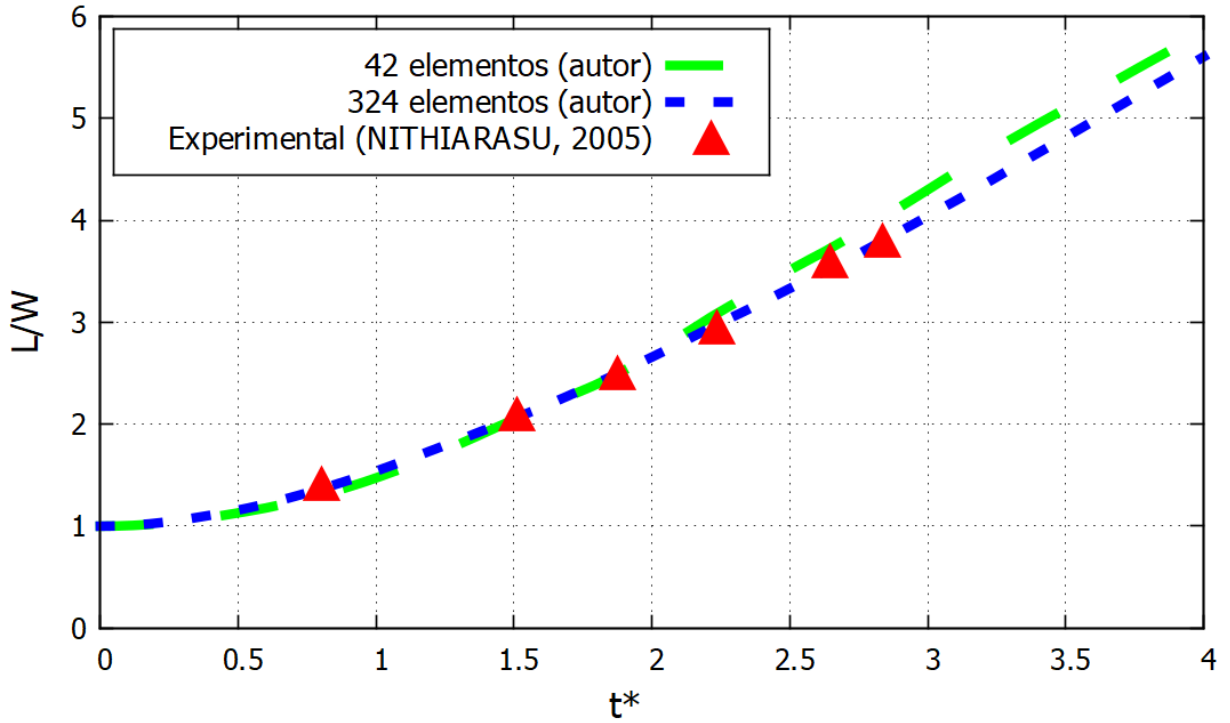


Fonte: o próprio autor.

Com os resultados obtidos com o programa, foi plotado um gráfico do alargamento relativo da base do fluido (L/W) em relação ao tempo adimensional (t^*). O gráfico é apresentado na Figura 8.41, onde foram também plotados os dados experimentais fornecidos por Nithiarasu (2005). O tempo adimensional t^* utilizado no eixo das abscissas foi obtido convertendo-se o tempo t através da expressão:

$$t^* = t\sqrt{2g/W} \quad (365)$$

Figura 8.41 – Gráfico do alargamento relativo da base (L/W) em relação ao tempo adimensional (t^*)



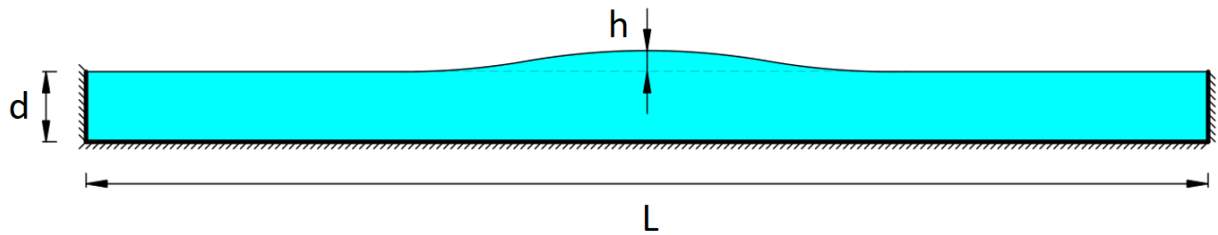
Fonte: o próprio autor.

Analisando-se o gráfico, foi possível observar um bom ajuste das curvas com os dados fornecidos pela referência, especialmente com a curva obtida com a malha mais refinada, a qual ficou praticamente sobreposta com os pontos experimentais. Tendo em vista os bons resultados obtidos, foi validado o algoritmo de viscosidade.

8.9 Propagação de onda solitária

Neste exemplo, foi analisada a propagação de uma onda solitária. O problema foi também retirado de Nithiarasu (2005) e consiste na propagação de uma onda sob a superfície livre de um volume de água contido em um reservatório. O reservatório é composto por três paredes, duas verticais e uma horizontal. As paredes verticais permitem o deslocamento da água na direção y , enquanto que a superfície horizontal permite o deslocamento na direção x . A geometria inicial do problema é apresentada na Figura 8.42:

Figura 8.42 – Geometria inicial do exemplo 8.9



Fonte: o próprio autor.

Para o exemplo, foram adotados os dados constantes na Figura 8.43. Nota-se que, assim como no exemplo anterior, foi adotado um valor elevado de *bulk modulus*, uma vez que no artigo de referência a água foi considerada como sendo um fluido incompressível.

Figura 8.43 – Valores adotados no exemplo 8.9

K	2,15 GPa
G	0
ρ	1000 kg/m ³
γ_1	0,5
γ_2	0,5
\bar{K}	0
\bar{G}	0,001 Pa.s
Comprimento do reservatório (L)	16,0 m
Largura do reservatório	1,0 m
Altura do nível d'água (d)	1,0 m
Altura inicial da onda (h)	0,3 m
g	9,8 m/s ²
Δt	0,005 s
Tempo total de análise	15,000 s
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura	Linear
Nº nós	686/1460
Nº elementos finitos	64/144
Tolerância (Newton-Raphson)	10 ⁻⁷

Fonte: o próprio autor.

As condições iniciais do problema foram calculadas através das expressões analíticas fornecidas por Laitone (1960):

$$H = d + h \left[\operatorname{sech} \left(\sqrt{\frac{3h}{4d^3}} x \right) \right]^2 \quad (366)$$

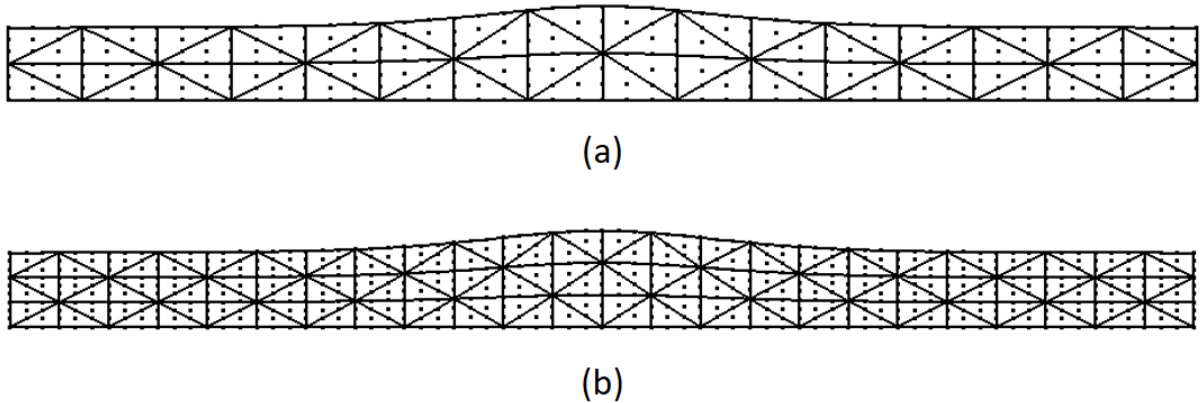
$$v_x = \sqrt{gd} \frac{h}{d} \left[\operatorname{sech} \left(\sqrt{\frac{3h}{4d^3}} x \right) \right]^2 \quad (367)$$

$$v_y = \sqrt{3gd} \left(\frac{h}{d} \right)^{3/2} \frac{y}{d} \left[\operatorname{sech} \left(\sqrt{\frac{3h}{4d^3}} x \right) \right]^2 \tanh \left(\sqrt{\frac{3h}{4d^3}} x \right) \quad (368)$$

onde H é a coordenada vertical da superfície livre da água em relação à superfície horizontal, v_x é a componente horizontal da velocidade inicial e v_y é a componente vertical da velocidade inicial.

Para a análise, foram utilizadas duas discretizações, uma com 64 (Figura 8.44a) e outra com 144 elementos finitos (Figura 8.44b). Como este exemplo também se trata de um problema bidimensional, foi adotada aproximação linear na espessura e as faces triangulares dos elementos foram impedidas de transladar na direção da altura do prisma.

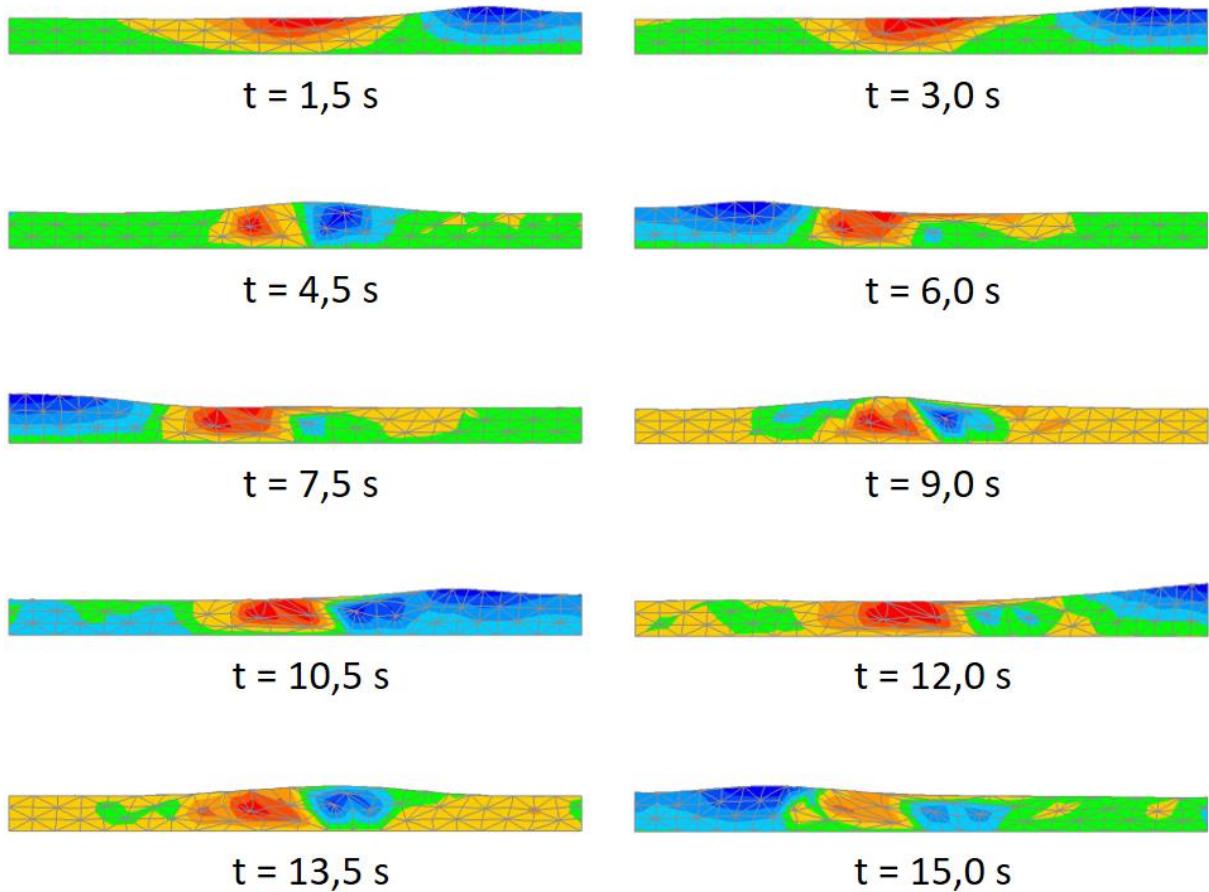
Figura 8.44 – Discretizações adotadas no exemplo 8.9: (a) 64 e (b) 144 elementos finitos



Fonte: o próprio autor.

Snapshots da propagação da onda no fluido obtidos com a discretização mais refinada são apresentados na Figura 8.45, na qual a escala de cor representa o deslocamento y :

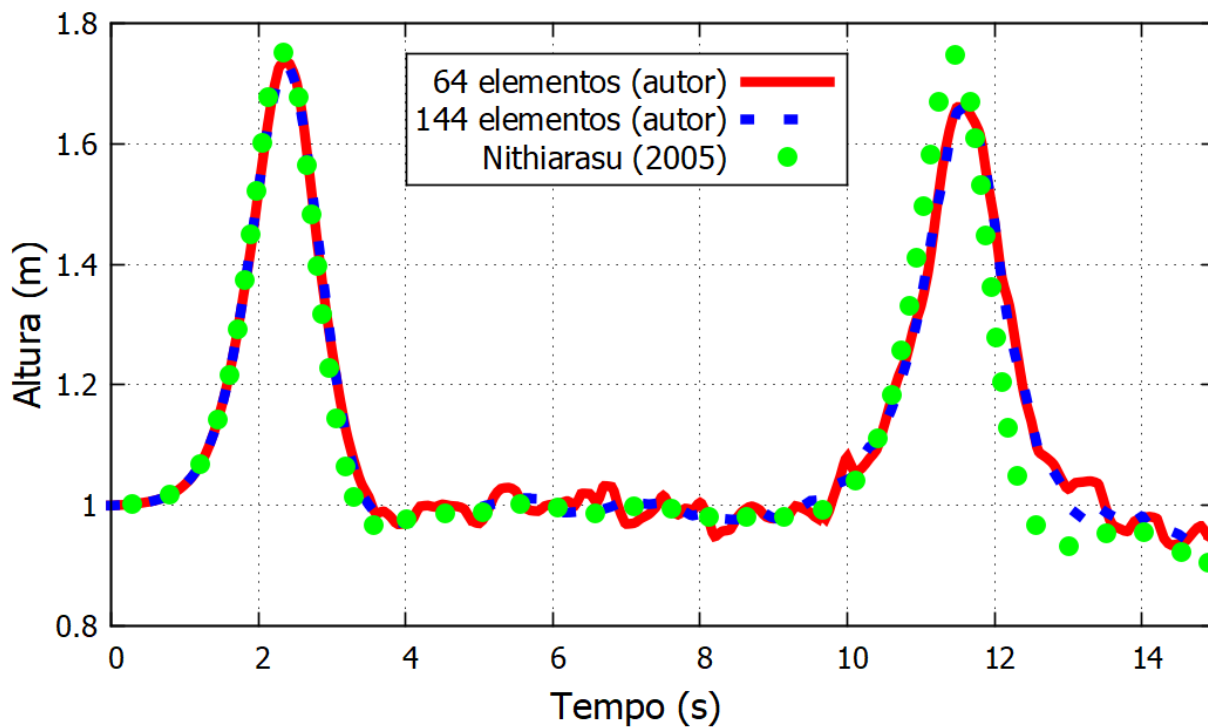
Figura 8.45 – *Snapshots* da propagação da onda com o deslocamento y do fluido obtidos com a discretização com 144 elementos finitos



Fonte: o próprio autor.

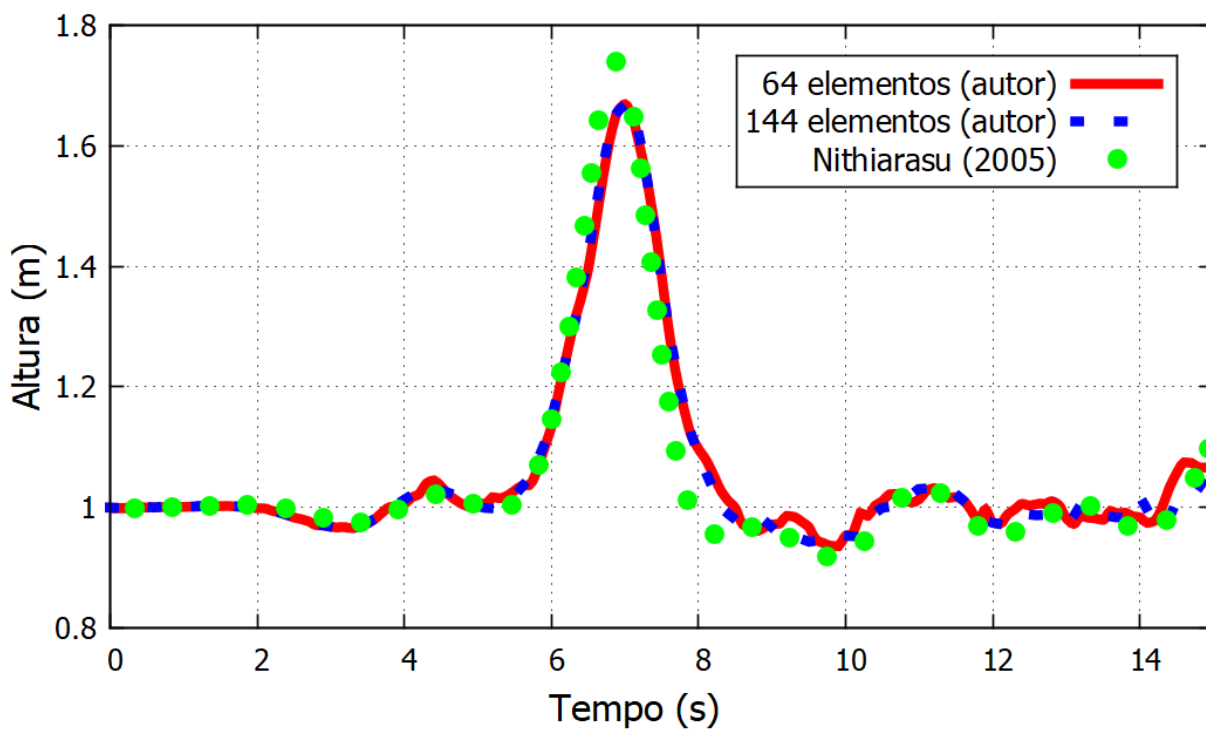
Foi analisada a variação do nível d'água em relação ao tempo nos pontos localizados nas extremidades direita e esquerda superiores do reservatório. Os gráficos obtidos com o programa são apresentados, respectivamente, na Figura 8.46 e Figura 8.47, nas quais foram também plotados os resultados obtidos numericamente por Nithiarasu (2005):

Figura 8.46 – Gráfico da variação do nível d'água em relação ao tempo no ponto superior direito do reservatório



Fonte: o próprio autor.

Figura 8.47 – Gráfico da variação do nível d'água em relação ao tempo no ponto superior esquerdo do reservatório



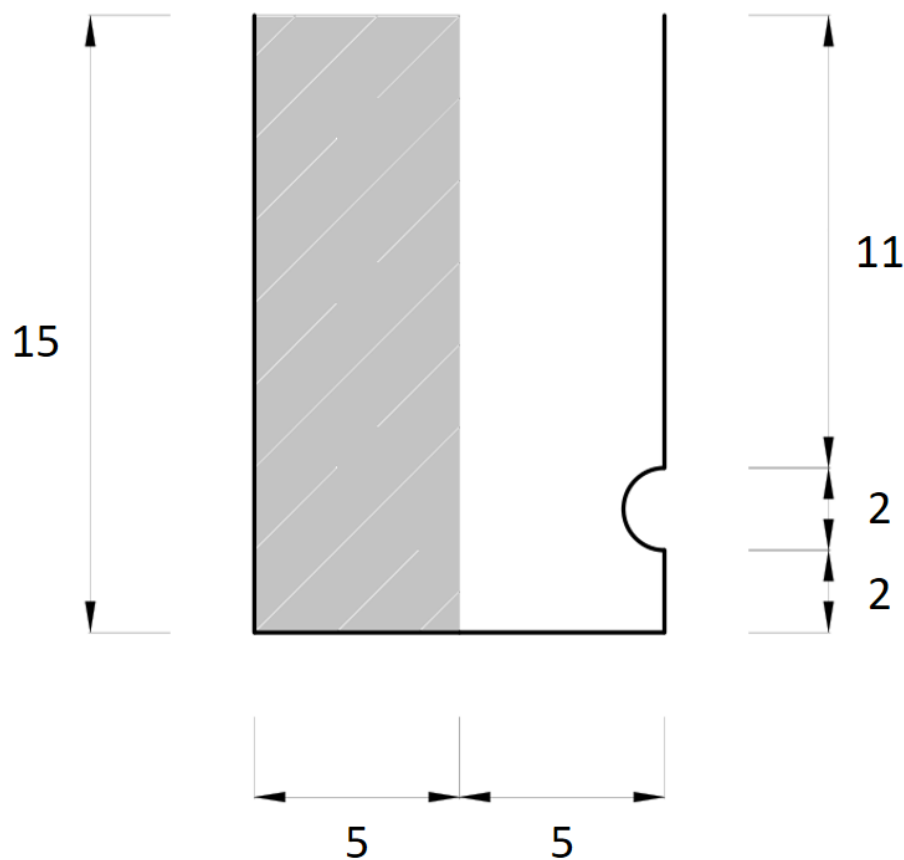
Fonte: o próprio autor.

Analisando-se o gráfico, foi possível observar que para ambas as discretizações foram obtidos resultados próximos aos da referência, reforçando a validação do algoritmo de viscosidade.

8.10 Acomodação de pasta cimentícia em fôrmas rígidas

No presente exemplo, foi feita a análise da acomodação de pasta cimentícia em fôrmas consideradas rígidas. O problema consiste em uma coluna de pasta de cimento inicialmente em repouso, cujas faces esquerda e inferior estão em contato com a fôrma. À direita, encontra-se o plano de simetria da fôrma, no qual há um vergalhão com diâmetro de 20 mm ($\varnothing 3/4''$) e cobertura de 20 mm ainda não em contato com a pasta. Para a análise, fez-se uso da simetria através da discretização de apenas metade do problema, sendo o vergalhão disposto no centro da fôrma e discretizado com metade de sua circunferência. A geometria inicial do teste é apresentada na Figura 8.48, na qual as dimensões são dadas em centímetros:

Figura 8.48 – Geometria inicial do exemplo 8.10



Fonte: o próprio autor.

Para o exemplo, foram adotados os dados constantes na Figura 8.49:

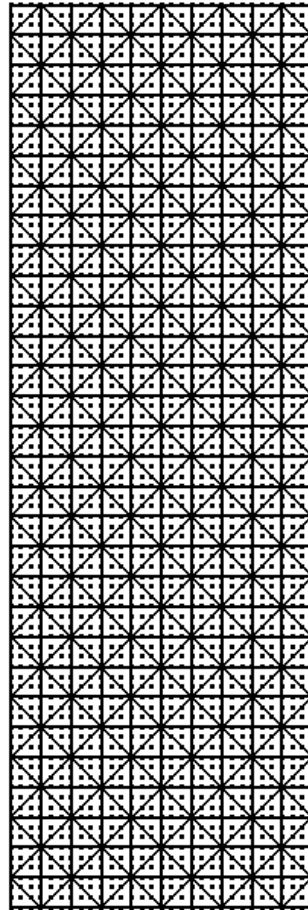
Figura 8.49 – Valores adotados no exemplo 8.10

K	2,15 GPa
G	0
ρ	2400 kg/m ³
γ_1	0,5
γ_2	0,5
\bar{K}	0
\bar{G}	145 Pa.s (fase 1) / 25 Pa.s (fase 2)
Base inicial da coluna de pasta de cimento	5 cm
Altura inicial da coluna de pasta de cimento	15 cm
Profundidade da coluna de pasta de cimento	100 cm
Base da fôrma	10 cm
Altura da fôrma	15 cm
Profundidade da fôrma	100 cm
Diâmetro do vergalhão de aço	20 mm (\emptyset 3/4")
g	9,8 m/s ²
Δt	0,0005 s
Constante de penalização	1,0.10 ⁶
Tempo total de análise	0,3 s
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura	Linear
Nº nós	5642
Nº elementos finitos	600
Tolerância (Newton-Raphson)	10 ⁻⁶

Fonte: o próprio autor.

Como o teste se trata apenas de uma demonstração qualitativa de aplicação da formulação numérica, o exemplo foi analisado sem plasticidade, sendo utilizada apenas uma discretização com 5642 nós e 600 elementos (Figura 8.50). Por se tratar de um problema bidimensional, foi adotada aproximação linear na espessura e as faces triangulares dos elementos foram impedidas de transladar na direção da altura do prisma. Além disso, foram impostas condições de apoio nas faces inferior e da esquerda da coluna de pasta cimentícia (deslocamento em x e y livres, respectivamente), enquanto que o contato no plano de simetria e no vergalhão foi imposto por penalização.

Figura 8.50 – Discretização adotada no exemplo 8.10

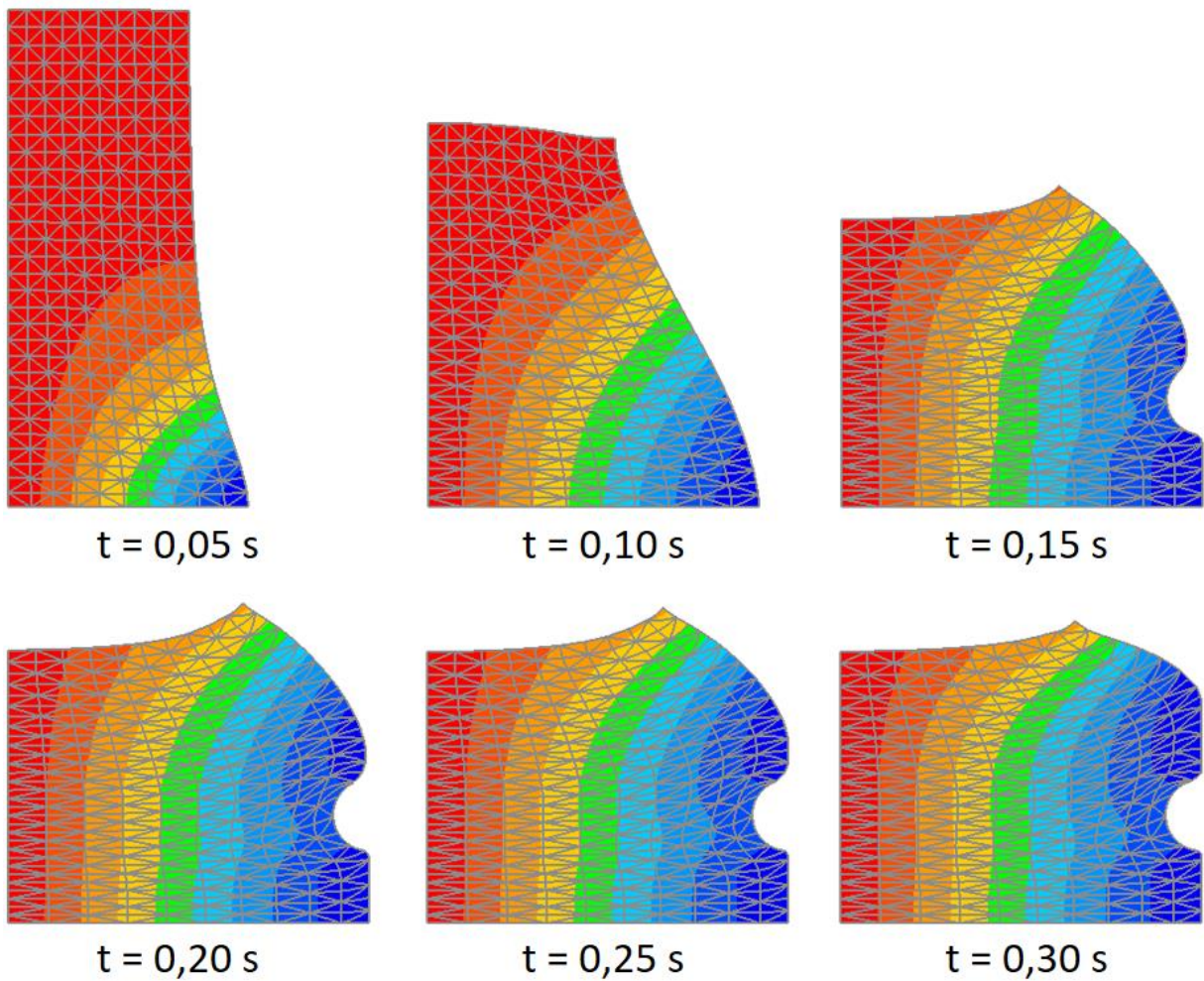


Fonte: o próprio autor.

O acomodamento da pasta cimentícia na fôrma foi analisado com a pasta sujeita apenas a seu peso próprio. A análise foi realizada em 2 fases: na fase 1 (0 a 0,25 s), foi adotada uma viscosidade cisalhante elevada de 145 Pa.s até que houvesse a estabilização do escoamento; em seguida, na fase 2 (0,25 s a 0,30 s), foi simulada de forma simplificada a vibração da pasta cimentícia através da redução da viscosidade cisalhante para um valor de 25 Pa.s, a fim de que houvesse o melhor preenchimento da pasta na fôrma. Vale mencionar aqui que existe uma maior dificuldade na calibração da constante de penalização em problemas de fluidos quando a viscosidade é muito baixa, uma vez que não há rigidez associada ao fluido, sendo por isso adotados valores elevados de viscosidade cisalhante no exemplo.

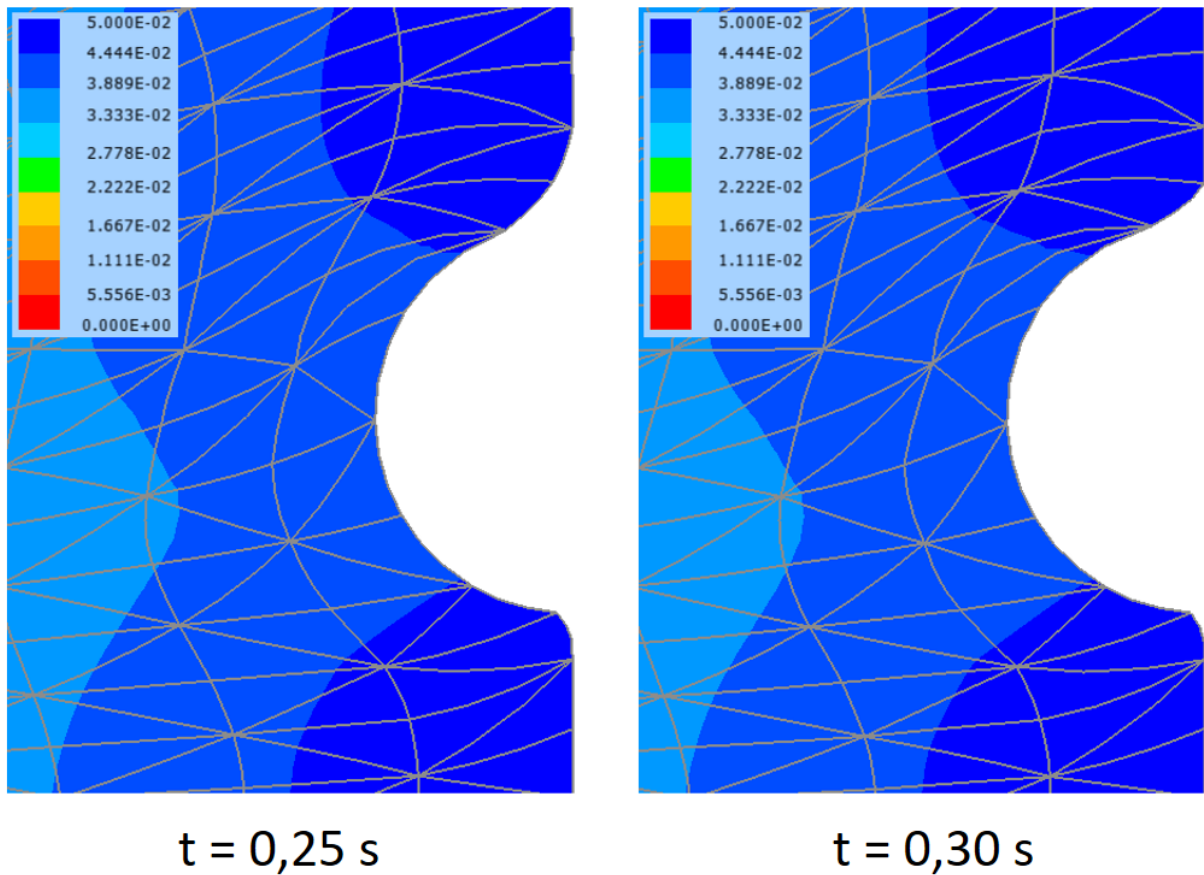
A seguir, na Figura 8.51, são apresentados *snapshots* do preenchimento da fôrma com a pasta de cimento, com a escala de cor representando o deslocamento x :

Figura 8.51 – *Snapshots* da acomodação da pasta cimentícia na fôrma com o deslocamento x da pasta



Fonte: o próprio autor.

Na Figura 8.52, são apresentados *snapshots* mostrando o detalhe do envolvimento do vergalhão pela pasta cimentícia nos tempos 0,25 s (fim da fase 1) e 0,30 s (fim da fase 2), com a escala de cor representando o deslocamento x . A partir dos *snapshots*, foi possível observar que, conforme esperado, a redução da viscosidade cisalhante promoveu um maior envolvimento do vergalhão pela pasta de cimento. Acredita-se que o envolvimento seria ainda melhor caso fosse utilizada uma malha mais refinada para a discretização da pasta.

Figura 8.52 – *Snapshots* do envolvimento do vergalhão pela pasta cimentícia

Fonte: o próprio autor.

A partir dos resultados, foi possível concluir que o programa foi capaz de simular o preenchimento de fôrmas com pasta cimentícia, demonstrando sua aplicabilidade em problemas de contato com fluidos altamente viscosos.

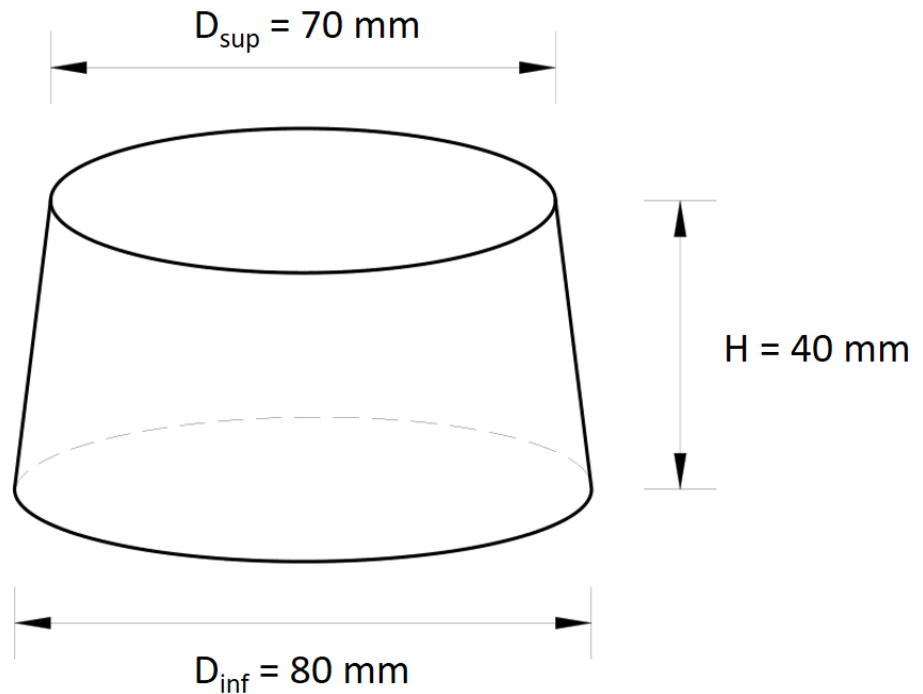
8.11 Ensaio de mini abatimento

Neste último exemplo, foi feita a simulação de um ensaio de mini abatimento (*mini slump*), o qual costuma ser bastante utilizado para a avaliação da fluidez de pastas cimentícias. O teste teve como objetivo demonstrar a capacidade da formulação na resolução de problemas tridimensionais de fluidos.

O ensaio de mini abatimento segue o seguinte procedimento: primeiramente, um molde tronco-cônico é preenchido com pasta de cimento, a qual é conformada na geometria apresentada na Figura 8.53; em seguida, o molde é removido, provocando o espalhamento da

pasta; por fim, após a estabilização do escoamento, é feita a medição de dois diâmetros perpendiculares entre si, cujo valor médio representa o espalhamento da pasta.

Figura 8.53 – Geometria e dimensões iniciais da pasta de cimento no ensaio de mini abatimento



Fonte: o próprio autor.

O exemplo é inspirado no artigo de Bouvet, Ghorbel e Bennacer (2010), os quais investigaram através de testes numéricos e experimentais a influência de parâmetros reológicos de pastas cimentícias (viscosidade e tensão de escoamento) no diâmetro final obtido no ensaio de *mini slump*. Apesar de os autores terem revelado ser difícil a reprodução com precisão dos resultados, alguns dados foram tomados do artigo a fim de que fossem empregadas grandezas reais nas simulações numéricas. Os dados adotados no exemplo são apresentados na Figura 8.54:

Figura 8.54 – Valores adotados no exemplo 8.11

Caso	$\bar{G} = 1,4 \text{ Pa.s}$	$\bar{G} = 2,8 \text{ Pa.s}$
K	$2,15 \cdot 10^5 \text{ Pa}$	$2,15 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
G	0	0
ρ	2500 kg/m^3	2500 kg/m^3
γ_1	0,5	0,5
γ_2	0,5	0,5
\bar{K}	0	0
Diâmetro superior (D_{sup})	70 mm	70 mm
Diâmetro inferior (D_{inf})	80 mm	80 mm
Altura (H)	40 mm	40 mm
g	10 m/s^2	10 m/s^2
Δt	0,0001 s	0,0002 s
Tempo total de análise	0,4 s	0,8 s
Nº pontos de Hammer	12	12
Grau de aproximação na espessura	Cúbico	Cúbico
Nº nós	1183/2275/3367	2275
Nº elementos finitos	64/128/192	128
Tolerância (Newton-Raphson)	10^{-4}	10^{-4}

Fonte: o próprio autor.

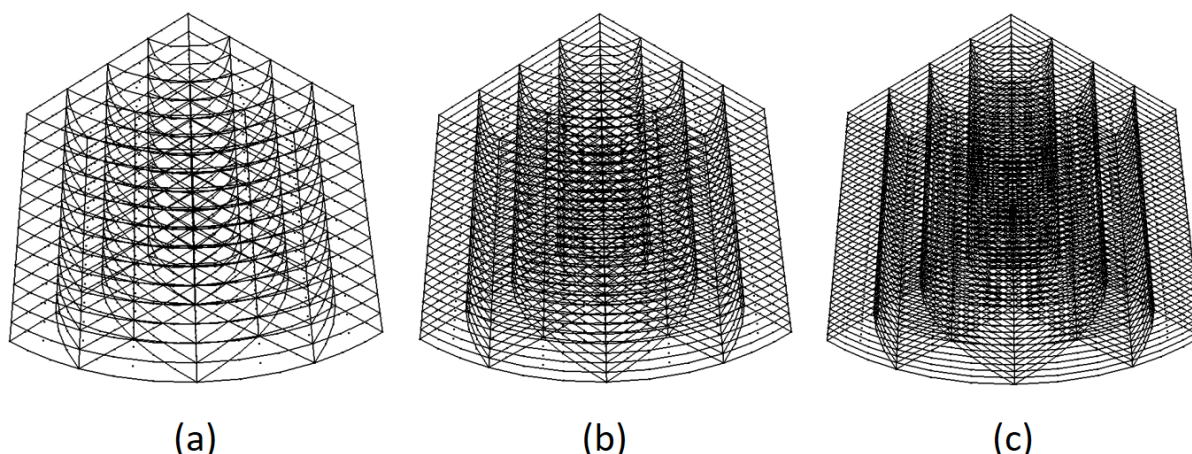
Como não foi mencionado no artigo o valor do *bulk modulus* utilizado nas análises, foram realizados testes para avaliar sua influência no escoamento da pasta. Através dos testes, foi possível constatar que, apesar de o valor do *bulk modulus* não exercer grande influência no problema, a pasta cimentícia perde sua simetria com a evolução do escoamento para valores superiores a $2,15 \cdot 10^5 \text{ Pa.s}$, sendo por isso utilizado este valor nas simulações numéricas.

Tomando-se proveito da simetria do problema, foi feita a discretização de apenas 1/4 do tronco de cone, sendo empregados elementos curvos com aproximação cúbica na base e na altura. A análise de convergência foi feita utilizando-se 3 discretizações:

- a) 64 elementos finitos - 4 divisões no raio e 4 na altura;
- b) 128 elementos finitos - 4 divisões no raio e 8 na altura;
- c) 192 elementos finitos - 4 divisões no raio e 12 na altura.

As discretizações utilizadas nas análises são apresentadas na Figura 8.55:

Figura 8.55 – Discretizações adotadas no exemplo 8.11: (a) 64, (b) 128 e (c) 192 elementos finitos



Fonte: o próprio autor.

Para as três discretizações, foram analisados o deslocamento vertical do ponto superior central do tronco de cone e o diâmetro médio da base (dobro da média dos raios de todos os nós localizados na circunferência da base do tronco de cone) ao longo do tempo. O escoamento foi estudado para os seguintes regimes:

- a) Regime de fluido viscoso;
- b) Regime rígido-viscoplástico com $\bar{\tau} = 20 Pa$ (valor do artigo de referência) e $\bar{\tau} = 150 Pa$.

Nos testes com plasticidade, devido ao fato de a tensão de escoamento ser baixa e, conseqüentemente, o fluido atingir rapidamente o regime plástico, foi utilizado o modelo de fluido rígido-viscoplástico nas análises, o qual considera a tensão elastoplástica como sendo constante e igual à tensão de escoamento durante todo o tempo de análise. Dessa forma, foi possível garantir um comportamento elastoplástico perfeito do fluido e evitar a calibração das constantes de encruamento para diferentes intervalos de deformação, a qual seria difícil devido ao elevado nível de deformações.

Devido aos problemas evidenciados com a utilização de contato por penalização com fluidos pouco viscosos e ao baixo valor de viscosidade da pasta cimentícia do exemplo, evitou-se utilizar o algoritmo de contato nos testes, sendo as restrições da pasta cimentícia impostas com o emprego de apoios deslizantes nas faces laterais. Na base, o escoamento foi analisado para duas condições de contorno distintas. A primeira foi com base deslizante, na qual se permitiu o deslizamento do tronco de cone no plano da base, sendo esta condição de contorno

utilizada para avaliar a influência de $\bar{\tau}$ e \bar{G} no problema. A segunda foi com base fixa, na qual todos os nós da base foram mantidos fixos e os nós das camadas superiores eram restringidos em todas as direções à medida que entravam em contato com o plano da base. Esta última condição de contorno foi uma tentativa de se simular de forma mais realista o contato entre a pasta cimentícia e a superfície de escoamento.

Todos os casos analisados são apresentados na Tabela 8.3:

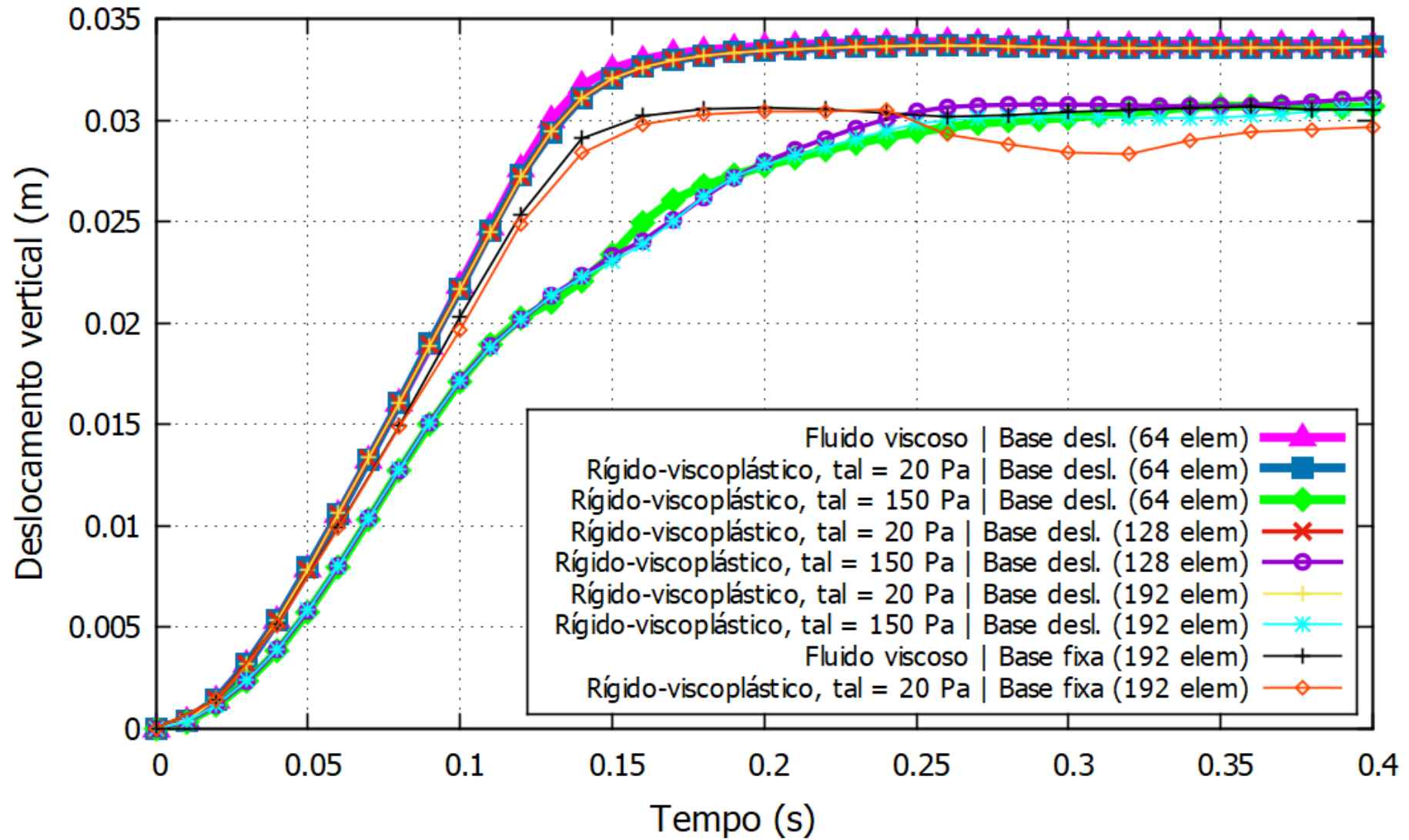
Tabela 8.3 – Casos analisados no exemplo 8.11

Caso	Regime	\bar{G} (Pa.s)	$\bar{\tau}$ (Pa)	Nº elementos	Condição de contorno
1	Fluido viscoso	1,4	–	64	Base deslizante
2	Rígido-viscoplástico	1,4	20	64	Base deslizante
3	Rígido-viscoplástico	1,4	150	64	Base deslizante
4	Rígido-viscoplástico	1,4	20	128	Base deslizante
5	Rígido-viscoplástico	1,4	150	128	Base deslizante
6	Rígido-viscoplástico	1,4	20	192	Base deslizante
7	Rígido-viscoplástico	1,4	150	192	Base deslizante
8	Fluido viscoso	1,4	–	192	Base fixa
9	Rígido-viscoplástico	1,4	20	192	Base fixa
10	Rígido-viscoplástico	2,8	20	128	Base deslizante
11	Rígido-viscoplástico	2,8	150	128	Base deslizante

Fonte: o próprio autor.

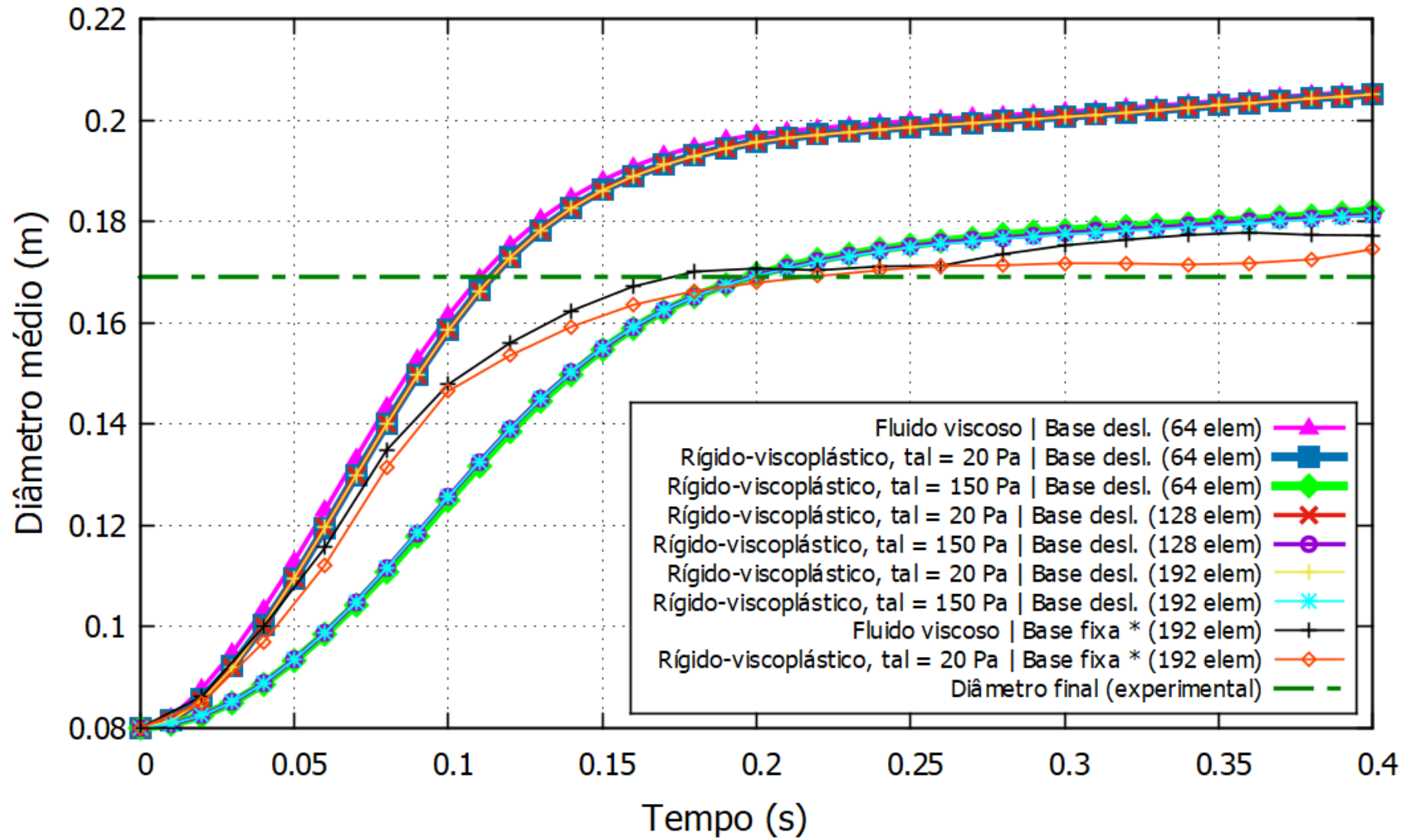
Os gráficos do deslocamento vertical e do diâmetro médio em relação ao tempo para $\bar{G} = 1,4 \text{ Pa.s}$ são apresentados, respectivamente, na Figura 8.56 e Figura 8.57. Salienta-se que, devido à dificuldade na identificação dos nós da periferia para a obtenção do diâmetro médio da base com a condição de contorno de base fixa, foi utilizado o diâmetro na direção x para a confecção das curvas com esta condição de contorno, as quais estão identificadas com “*” na legenda da Figura 8.57. No mesmo gráfico, para fins de comparação, foi também plotada uma linha constante representando o diâmetro final obtido experimentalmente por Bouvet, Ghorbel e Bennacer (2010).

Figura 8.56 – Gráfico do deslocamento vertical do ponto superior central da pasta cimentícia em relação ao tempo para $\bar{G} = 1,4 Pa \cdot s$



Fonte: o próprio autor.

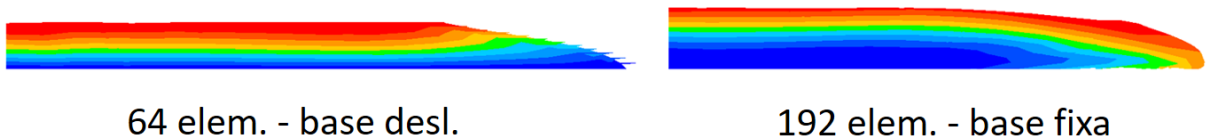
Figura 8.57 – Gráfico do diâmetro médio da base da pasta cimentícia em relação ao tempo para $\bar{G} = 1,4 Pa.s$



Fonte: o próprio autor.

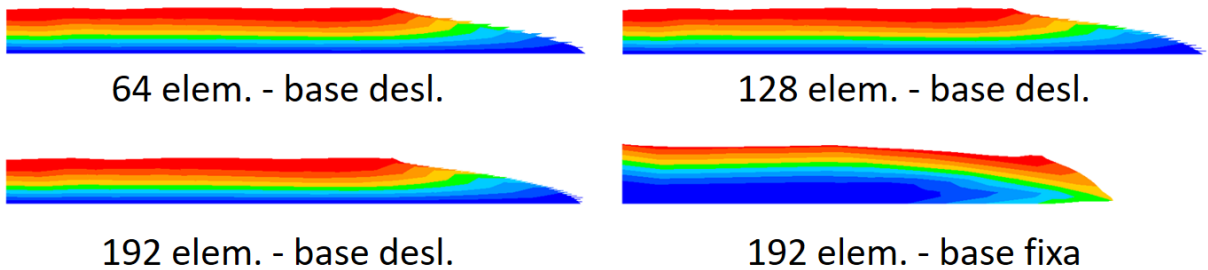
Vistas de perfil da configuração final da pasta cimentícia dos casos de fluido viscoso, rígido-viscoplástico com $\bar{\tau} = 20 Pa$ e rígido-viscoplástico com $\bar{\tau} = 150 Pa$, todos com $\bar{G} = 1,4 Pa.s$, são apresentadas respectivamente na Figura 8.58, Figura 8.59 e Figura 8.60, nas quais a escala de cor representa o deslocamento vertical:

Figura 8.58 – Vistas de perfil da configuração final da pasta cimentícia com o deslocamento vertical para o caso de fluido viscoso com $\bar{G} = 1,4 Pa.s$



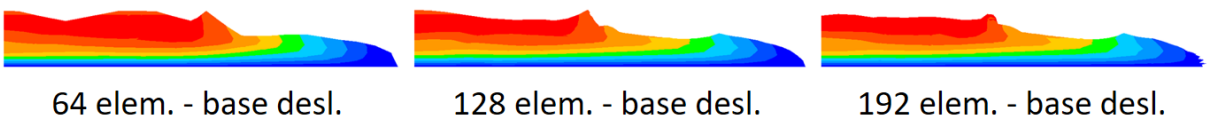
Fonte: o próprio autor.

Figura 8.59 – Vistas de perfil da configuração final da pasta cimentícia com o deslocamento vertical para o caso rígido-viscoplástico com $\bar{\tau} = 20 Pa$ e $\bar{G} = 1,4 Pa.s$



Fonte: o próprio autor.

Figura 8.60 – Vistas de perfil da configuração final da pasta cimentícia com o deslocamento vertical para o caso rígido-viscoplástico com $\bar{\tau} = 150 Pa$ e $\bar{G} = 1,4 Pa.s$



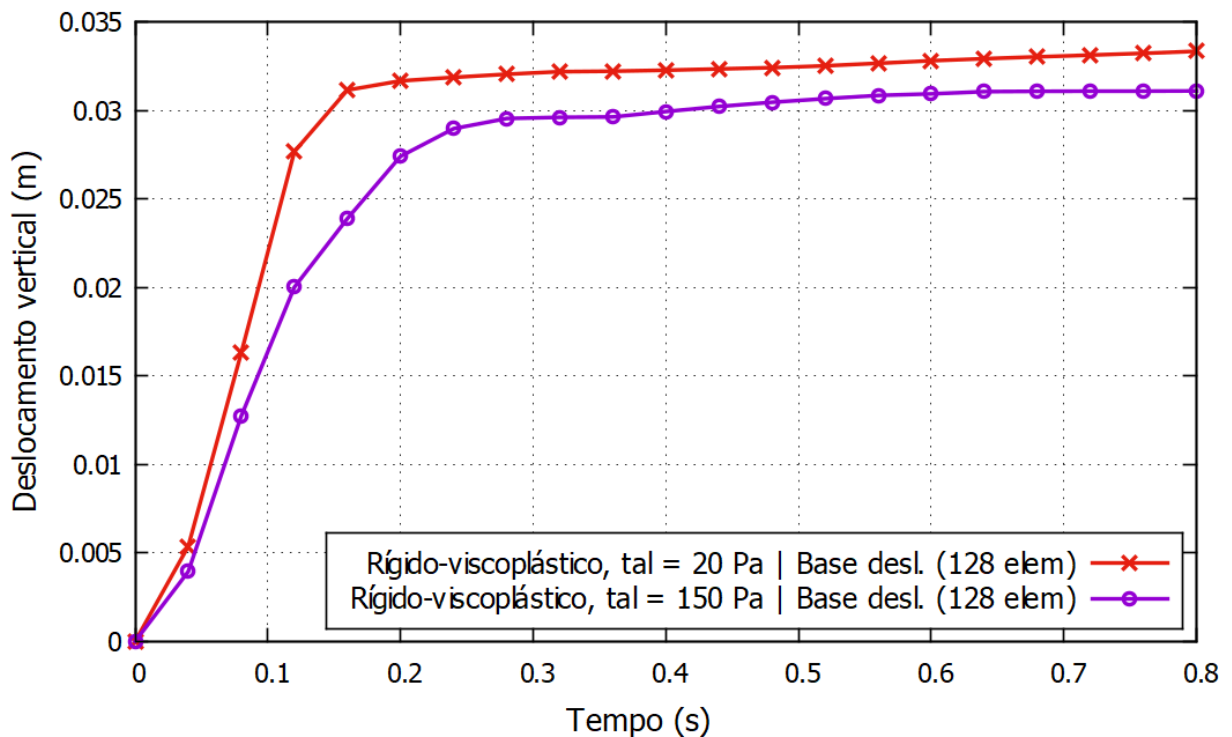
Fonte: o próprio autor.

A partir dos resultados obtidos com o programa, foi possível observar que não houve grandes diferenças entre as discretizações com 128 e 192 elementos finitos, o que indica que a primeira já é suficiente para representar o contínuo. Com relação às condições de contorno, durante o tempo de análise adotado não foram observadas grandes diferenças nos deslocamentos verticais e diâmetros finais e, conforme esperado, o contato entre a pasta cimentícia e a superfície de escoamento ocorreu de forma mais próxima do real com a condição

de contorno com base fixa. No entanto, espera-se que, com o aumento do tempo de análise, a estabilização dos deslocamentos com o modelo de fluido viscoso ocorra com valores maiores do que com o modelo rígido-viscoplástico. Além disso, vale-se mencionar também a influência significativa observada da tensão de escoamento no escoamento da pasta cimentícia. Esta influência ficou evidente principalmente nas análises feitas com $\bar{\tau} = 150 \text{ Pa}$, onde a tensão de escoamento reduziu consideravelmente o volume de fluido deslocado.

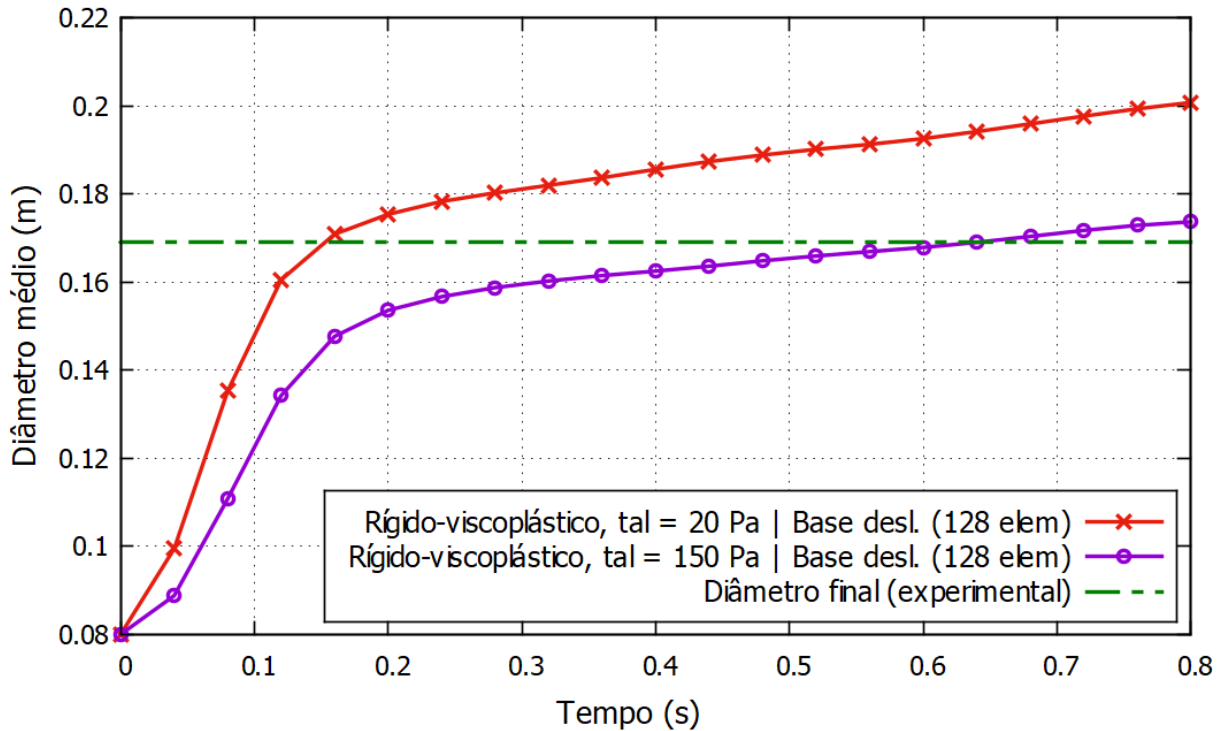
Conforme apresentado na Figura 8.54 e Tabela 8.3, foram também realizados testes para $\bar{G} = 2,8 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ (dobro do valor de $\bar{G} = 1,4 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ retirado do artigo de referência) com a discretização com 128 elementos finitos, com o intuito de se demonstrar a sensibilidade da formulação em relação ao parâmetro viscoso. Neste caso, foram adotados o dobro do incremento de tempo ($\Delta t = 0,0002 \text{ s}$) e o dobro do tempo de análise (0,8 s). Os gráficos do deslocamento vertical e do diâmetro médio em relação ao tempo obtidos com $\bar{G} = 2,8 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ são apresentados, respectivamente, na Figura 8.61 e Figura 8.62. Para fins de comparação, no último gráfico foi também plotada uma linha constante representando o diâmetro final obtido experimentalmente por Bouvet, Ghorbel e Bennacer (2010).

Figura 8.61 – Gráfico do deslocamento vertical do ponto superior central da pasta cimentícia em relação ao tempo para $\bar{G} = 2,8 \text{ Pa}\cdot\text{s}$



Fonte: o próprio autor.

Figura 8.62 – Gráfico do diâmetro médio da base da pasta cimentícia em relação ao tempo para $\bar{G} = 2,8 Pa.s$



Fonte: o próprio autor.

Vistas de perfil da configuração final da pasta cimentícia obtidas com $\bar{G} = 2,8 Pa.s$ são apresentadas na Figura 8.63, com a escala de cor representando o deslocamento vertical:

Figura 8.63 – Vistas de perfil da configuração final da pasta cimentícia com o deslocamento vertical para o caso rígido-viscoplástico com 128 elementos finitos e $\bar{G} = 2,8 Pa.s$



Fonte: o próprio autor.

Analisando-se os resultados obtidos com $\bar{G} = 2,8 Pa.s$, foi possível observar que tanto o deslocamento vertical final quanto o diâmetro final no tempo de 0,8 s foram próximos aos obtidos com $\bar{G} = 1,4 Pa.s$ no tempo de 0,4 s. Dessa forma, pôde-se concluir que, conforme esperado, na formulação implementada a viscosidade não exerce influência no diâmetro final, mas sim no tempo para o fluido atingir tal configuração. Além disso, a quase proporcionalidade dos resultados indicou que a pasta se comportou de forma quase newtoniana.

Por fim, salienta-se que, apesar de os diâmetros finais dos testes terem ficado de uma maneira geral próximos do diâmetro obtido experimentalmente pela referência, não foi objetivo do exemplo confirmar o experimento, uma vez que o contato na base deve ser melhorado. Porém, em geral, foram observados bons resultados com as implementações realizadas no programa, sendo, portanto, a formulação considerada eficaz para a resolução deste tipo de problema. Além disso, acredita-se que, com a melhoria da discretização da pasta e com o aprimoramento da técnica de contato sem deslizamento, podem ser obtidos resultados ainda melhores com a formulação proposta, os quais são deixados como sugestões para trabalhos futuros.

9 CONCLUSÕES

No presente trabalho, foi proposta uma formulação alternativa baseada na decomposição multiplicativa de Flory capaz de simular de forma simples e unificada materiais viscoelásticos, viscoplásticos, fluidos compressíveis viscosos e materiais rígido-viscoplásticos no regime de grandes deslocamentos e deformações. A formulação proposta foi implementada em um código computacional empregando o Método dos Elementos Finitos Posicional com elementos finitos prismáticos de base triangular com aproximação cúbica na base e linear ou cúbica na espessura. O programa também contempla algoritmo de contato por penalização com detecção feita através de estratégia nó-a-superfície com superfícies alvo consideradas rígidas.

Nos exemplos de validação, foram obtidos resultados próximos aos da literatura, mostrando-se a formulação capaz de resolver com sucesso exemplos dos mais variados tipos, como problemas estáticos e dinâmicos sob grandes deformações com ou sem contato nos regimes elástico, plástico, viscoelástico e viscoplástico. Ainda, com os exemplos de aplicação propostos, foi demonstrada a aplicabilidade do algoritmo na resolução de uma grande gama de problemas práticos da área da engenharia civil, como rompimentos de barragens, propagação de onda em fluidos, preenchimento de fôrmas e ensaios de caracterização de pastas cimentícias. Ressalta-se ainda que o programa também possui potencial para utilização em outras aplicações, como a conformação de perfis metálicos e o estudo do comportamento de solos liquefeitos em barragens de resíduos de mineração.

Dessa forma, a pesquisa permitiu ampliar ainda mais o campo de aplicações do Método dos Elementos Finitos Posicional. Além disso, pelo fato de a formulação implementada ser nova, nota-se que o trabalho pode servir como ponto de partida para novas pesquisas a serem desenvolvidas para o aperfeiçoamento da formulação. Portanto, foi possível concluir que a formulação proposta e sua implementação computacional se mostraram eficazes para a simulação de forma unificada de sólidos e fluidos, sendo os objetivos do trabalho alcançados com sucesso.

A partir dos desenvolvimentos realizados, algumas sugestões de trabalhos futuros podem ser feitas:

- a) substituição do algoritmo de contato por penalização por algoritmo baseado em multiplicadores de Lagrange ou outras técnicas utilizadas na Mecânica dos Fluidos, principalmente aquelas empregadas no Método das Partículas;

- b) implementação de algoritmo de integração temporal mais moderno onde calibrações associadas a problemas de impacto sejam realizadas de forma mais simples;
- c) implementação de elementos finitos tetraédricos para a análise de estruturas tridimensionais mais complexas;
- d) aprimoramento da paralelização do código a fim de se possibilitar a análise de problemas com maior custo computacional.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, E. et al. **LAPACK users' guide**. 3. ed. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
- ARGYRIS, J. H. et al. Finite element method - the natural approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 17-18, p. 1-106, jan. 1979.
- ARRUDA, E. M.; BOYCE, M. C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 41, n. 2, p. 389-412, fev. 1993.
- BAI, Z. et al. A constitutive model for concrete subjected to extreme dynamic loadings. **International Journal of Impact Engineering**, v. 138, 103483, abr. 2020.
- BALMFORTH, N. J. et al. Viscoplastic flow over an inclined surface. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 142, n. 1-3, p. 219-243, mar. 2007.
- BANKS, H. T.; HU, S.; KENZ, Z. R. A brief review of elasticity and viscoelasticity for solids. **Advances in Applied Mathematics and Mechanics**, v. 3, n. 1, p. 1-51, abr. 2011.
- BATHE, K. J. **Finite element procedures**. 2. ed. Watertown: Klaus-Jürgen Bathe, 2014. 1043 p.
- BATHE, K. J.; RAMM, E.; WILSON, E. L. Finite element formulations for large deformation dynamic analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 9, n. 2, p. 353-386, 1975.
- BATHE, K. J.; CHAUDHARY, A. B. A solution method for planar and axisymmetric contact problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 21, p. 65-88, 1985.
- BEDNAREK, T.; KOWALCZYK, P. Improvement of penalty approach in contact modeling. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER METHODS IN MECHANICS, 19., 2011, Warsaw. **Anais...** Warsaw: CMM, 2011.
- BELGACEM, F. B. **Discretisations 3D non conformes par la méthode de décomposition de domaine des éléments avec joints**: analyse mathématique et mise en oeuvre pour le problème de Poisson. 1993. Tese (Doutorado) - Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1993.
- BELGACEM, F. B.; MADAY, Y. Nonconforming spectral element methodology tuned to parallel implementation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 116, p. 59-67, 1994.
- BELGACEM, F. B.; HILD, P.; LABORDE, P. The mortar finite element method for contact problems. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 28, n. 4-8, p. 263-271, ago.-out. 1998.

BELYTSCHKO, T.; HSIEH, B. J. Non-linear transient finite element analysis with convected co-ordinates. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 7, n. 3, p. 255-271, 1973.

BELYTSCHKO, T.; GLAUM, L. W. Applications of higher order corotational stretch theories to nonlinear finite element analysis. **Computers & Structures**, v. 10, n. 1-2, p. 175-182, abr. 1979.

BERNARDI, C.; DEBIT, N.; MADAY, Y. Coupling finite element and spectral methods: first results. **Mathematical of Computation**, v. 54, n. 189, p. 21-39, jan. 1990.

BERNARDI, C.; MADAY, Y.; PATERA, A. T. A new nonconforming approach to domain decomposition: The mortar element method. In: BREZIS, H.; LIONS, J. L. **Nonlinear partial differential equations and their applications**: Collège de France Seminar, volume XI. Paris: Longman Scientific & Technical, 1994. p. 13-51.

BINGHAM, E. C. **Fluidity and Plasticity**. New York: McGraw-Hill, 1922. 440 p.

BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 318 p.

BONET, J. et al. Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5-7, p. 579-595, nov. 2000.

BOUHAFS, B.; WOZNICA, K.; KLOSOWSKI, P. The large rotations theory of elasto-viscoplastic shells subjected to the dynamic and thermal loads. **Engineering Computations**, v. 20, n. 4, p. 366-389, jun. 2003.

BOUSSINESQ, M. J. **Application des potentiels**: a l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Paris: Gauthier-Villars, 1885.

BOUVET, A.; GHORBEL, E.; BENNACER, R. The mini-conical slump flow test: analysis and numerical study. **Cement and Concrete Research**, v. 40, n. 10, p. 1517-1523, out. 2010.

CARBONE, G.; BOTTIGLIONE, F. Contact mechanics of rough surfaces: a comparison between theories. **Meccanica**, v. 46, p. 557-565, 2011.

CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Triangular based prismatic finite element for the analysis of orthotropic laminated beams, plates and shells. **Composite Structures**, v. 168, p. 234-246, 2017.

CARVALHO, B. L. **Desenvolvimento de formulação alternativa em deformações finitas para sólidos viscoelásticos e fluidos viscosos pelo MEF Posicional**. 2019. 148 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

CARVALHO, P. R. P. **Análise numérica bidimensional de sólidos com comportamento visco-elasto-plástico em grandes deformações e situações de contato**. 2019. 177 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

- CASEY, J. Approximate kinematical relations in plasticity. **International Journal of Solids and Structures**, v. 21, n. 7, p. 671-682, 1985.
- CHABOCHE, J. L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. **International Journal of Plasticity**, v. 24, n. 10, p. 1642-1693, out. 2008.
- CHAN, S. K.; TUBA, I. S. A finite element method for contact problems of solid bodies - Part I. Theory and validation. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 13, n. 7, p. 615-625, jul. 1971a.
- CHAN, S. K.; TUBA, I. S. A finite element method for contact problems of solid bodies - Part II. Application to turbine blade fastenings. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 13, n. 7, p. 627-636, jul. 1971b.
- CHAUDHARY, A. B.; BATHE, K. J. A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction. **Computers & Structures**, v. 24, n. 6, p. 855-873, 1986.
- CHEN, W. F; HAN, D. J. **Plasticity for structural engineers**. New York: Springer-Verlag, 1988. 606 p.
- CHEN, D. L.; YANG, P. F.; LAI, Y. S. A review of three-dimensional viscoelastic models with an application to viscoelasticity characterization using nanoindentation. **Microelectronics Reliability**, v. 52, n. 3, p. 541-558, mar. 2012.
- CHIOU, J. H.; LEE, J. D.; ERDMAN, A. G. Comparison between two theories of plasticity. **Computers & Structures**, v. 24, n. 1, p. 23-37, 1986.
- CHOI, M. S. et al. Estimation of rheological properties of UHPC using mini slump test. **Construction and Building Materials**, v. 106, p. 632-639, mar. 2016.
- CHUNG, J.; HULBERT, G. M. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- α method. **Journal of Applied Mechanics**, v. 60, n. 2, p. 371-375, jun. 1993.
- CIAVARELLA, M. et al. The role of adhesion in contact mechanics. **Journal of the Royal Society Interface**, v. 16, n. 151, 20180738, fev. 2019.
- COCHARD, S.; ANCEY, C. Experimental investigation of the spreading of viscoplastic fluids on inclined planes. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 158, n. 1-3, p. 73-84, maio 2009.
- CODA, H. B. An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 17., 2003, São Paulo. **Anais...** São Paulo: ABCM, 2003.
- CODA, H. B. A solid-like FEM for geometrically non-linear 3D frames. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 47-48, p. 3712-3722, out. 2009.

CODA, H. B. **O método dos elementos finitos posicional: sólidos e estruturas - não linearidade geométrica e dinâmica.** São Carlos: EESC/USP, 2018. 284 p.

CODA; H. B. An alternative finite strain elastoplastic model applied to soft core sandwich panels simulation. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 18, n. 6, e392, set. 2021.

CODA, H. B. A finite strain elastoplastic model based on Flory's decomposition and 3D FEM applications. **Computational Mechanics**, v. 69, p. 245-266, jan. 2022.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A positional FEM formulation for geometrical non-linear analysis of shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 5, n. 3, p. 205-223, set. 2008.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Unconstrained finite element for geometrical nonlinear dynamics of shells. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2009, p. 1-32, jun. 2009.

CODA, H. B.; SAMPAIO, M. S. M.; PACCOLA, R. R. A FEM continuous transverse stress distribution for the analysis of geometrically nonlinear elastoplastic laminated plates and shells. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 101, p. 15-33, set. 2015.

CRISFIELD, M. A.; MOITA, G. F. A co-rotational formulation for 2-D continua including incompatible modes. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 39, n. 15, p. 2619-2633, ago. 1996.

DAGUM, L.; MENON, R. OpenMP: an industry standard API for shared-memory programming. **IEEE Computational Science and Engineering**, v. 5, n. 1, p. 46-55, 1998.

DE BORST, R. et al. **Non-linear finite element analysis of solids and structures.** 2. ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2012. 516 p.

DEMME, J. W. et al. A supernodal approach to sparse partial pivoting. **SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications**, v. 20, n. 3, p. 720-755, 1999.

DENIS, Y. et al. A dissipative constitutive model for woven composite fabric under large strain. **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing**, v. 105, p. 165-179, fev. 2018.

DILL, E. H. **Continuum mechanics: elasticity, plasticity, viscoelasticity.** Boca Raton: CRC Press, 2007. 352 p.

DIXIT, P. M.; DIXIT, U. S. **Plasticity: fundamentals and applications.** Boca Raton: CRC Press, 2015. 555 p.

DUVAUT, G.; LIONS, J. L. **Inequalities in mechanics and physics.** Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1976. 400 p.

ETEROVIC, A. L.; BATHE, K. J. A note on the use of the additive decomposition of the strain tensor in finite deformation inelasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 93, n. 1, p. 31-38, dez. 1991.

FLORY, P. J. Thermodynamic relations for high elastic materials. **Transactions of the Faraday Society**, v. 57, p. 829-838, 1961.

FRANCAVILLA, A.; ZIENKIEWICZ, O. C. A note on numerical computation of elastic contact problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 9, n. 4, p. 913-924, 1985.

FREYDIER, P.; CHAMBON, G.; NAAIM, M. Experimental characterization of velocity fields within the front of viscoplastic surges down an incline. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 240, p. 56-69, fev. 2017.

GAO, J.; FOURIE, A. Spread is better: an investigation of the mini-slump test. **Minerals Engineering**, v. 71, p. 120-132, fev. 2015.

GARINO, C. G. et al. Numerical simulation of finite strain viscoplastic problems. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 246, p. 174-184, jul. 2013.

GEUZAIN, C.; REMACLE, J. F. Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 79, n. 11, p. 1309-1331, set. 2009.

GHAEDNIA, H. et al. A review of elastic-plastic contact mechanics. **Applied Mechanics Reviews**, v. 69, n. 6, 060804, nov. 2017.

GOLOVANOV, A. I. Kinematics of finite elastoplastic deformations. **Russian Mathematics**, v. 54, n. 7, p. 12-25, 2010.

GRECO, M. **Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos**. 2004. 153 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

GRECO, M. et al. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 42, n. 12, p. 1079-1086, ago. 2006.

GREEN, A. E.; NAGHDI, P. M. A general theory of an elastic-plastic continuum. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 18, p. 251-281, 1965.

GREEN, M. S.; TOBOLSKY, A. V. A new approach to the theory of relaxing polymeric media. **The Journal of Chemical Physics**, v. 14, n. 2, p. 80-92, 1946.

GURTIN, M. E.; ANAND, L. A theory of strain-gradient plasticity for isotropic, plastically irrotational materials. Part II: Finite deformations. **International Journal of Plasticity**, v. 21, n. 12, p. 2297-2318, dez. 2005.

HALLQUIST, J. O. **NIKE2D**: an implicit, finite-deformation, finite-element code for analyzing the static and dynamic response of two-dimensional solids. Livermore: Lawrence Livermore Laboratory, 1979.

HALLQUIST, J. O. **User's manual for DYNA2D**: an explicit two-dimensional hydrodynamic finite-element code with interactive rezoning. Livermore: Lawrence Livermore Laboratory, 1982a.

HALLQUIST, J. O. **Theoretical manual for DYNA3D**. Livermore: Lawrence Livermore Laboratory, 1982b.

HALLQUIST, J. O. **NIKE3D**: an implicit, finite-deformation, finite-element code for analyzing the static and dynamic response of three-dimensional solids. Livermore: Lawrence Livermore Laboratory, 1984.

HALLQUIST, J. O.; GOUDREAU, G. L.; BENSON, D. J. Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 51, n. 1-3, p. 107-137, set. 1985.

HAMMER, P. C.; MARLOWE, O. J.; STRAUD, A. H. Numerical integration over simplexes and cones. **Mathematical Tables and Other Aids to Computation**, v. 10, n. 55, p. 130-137, jul. 1956.

HARTMANN, S.; NEFF, P. Polyconvexity of generalized polynomial-type hyperelastic strain energy functions for near-incompressibility. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, n. 11, p. 2767-2791, jun. 2003.

HEIDRICH, W. Computing the barycentric coordinates of a projected point. **Journal of Graphics Tools**, v. 10, n. 3, p. 9-12, jan. 2011.

HERTZ, H. Über die berührung fester elastischer körper. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 92, p. 156-171, 1881.

HESCH, C.; BETSCH, P. A comparison of computational methods for large deformation contact problems of flexible bodies. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, v. 86, n. 10, p. 818-827, out. 2006.

HOU, C.; HOU, Y.; HUANG, Z. A framework based on barycentric coordinates for localization in wireless sensor networks. **Computer Networks**, v. 57, n. 17, p. 3701-3712, dez. 2013.

HU, N. A solution method for dynamic contact problems. **Computers & Structures**, v. 63, n. 6, p. 1053-1063, jun. 1997.

HUBER, N.; TSAKMAKIS, C. Finite deformation viscoelasticity laws. **Mechanics of Materials**, v. 32, n. 1, p. 1-18, jan. 2000.

HUGHES, T. J. R. et al. A finite element method for a class of contact-impact problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 8, n. 3, p. 249-276, jul.-ago. 1976.

IBRAHIMBEGOVIĆ, A.; CHORFI, L. Viscoplasticity model at finite deformations with combined isotropic and kinematic hardening. **Computers & Structures**, v. 77, n. 5, p. 509-525, jul. 2000.

- JIN, S. et al. A node-to-node scheme with the aid of variable-node elements for elasto-plastic contact analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 102, n. 12, p. 1761-1783, jun. 2015.
- JOHNSON, W.; MELLOR, P. B. **Engineering Plasticity**. London: Van Nostrand Reinhold, 1973. 646 p.
- KAMRIN, K. Nonlinear elasto-plastic model for dense granular flow. **International Journal of Plasticity**, v. 26, n. 2, p. 167-188, fev. 2010.
- KELLY, P. Plasticity. In: KELLY, P. **Solid Mechanics Lecture Notes Part II**. Auckland: The University of Auckland, 2013.
- KHAN, A. S.; HUANG, S. **Continuum theory of plasticity**. New York: John Wiley & Sons, 1995. 421 p.
- KHAYAT, K. H. et al. Rheological properties of ultra-high-performance concrete - an overview. **Cement and Concrete Research**, v. 124, 105828, out. 2019.
- KHOEI, A. R.; MOUSAVI, S. M. T. Modeling of large deformation - Large sliding contact via the penalty X-FEM technique. **Computational Materials Science**, v. 48, n. 3, p. 471-480, maio 2010.
- KIM, N. H. **Introduction to nonlinear finite element analysis**. New York: Springer, 2015. 430 p.
- KISHINO, R. T. et al. A simple formulation applied to finite strain viscoelastic solids and compressive flows. In: IBERO-LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 42., PAN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL MECHANICS, 3., 2021, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: ABMEC-IACM, 2021.
- KRÖNER, E. Allgemeine kontinuumstheorie der versetzungen und eigenspannungen. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 4, p. 273-334, 1959.
- LAITONE, E. V. The second approximation to cnoidal and solitary waves. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 9, n. 3, p. 430- 444, nov. 1960.
- LEE, E. H. **Elastic-plastic deformation at finite strains**. Stanford, nov. 1968. (Stanford University, Division of Engineering Mechanics, technical report n. 183, contract report n. 10).
- LEE, E. H. Elastic-plastic deformation at finite strains. **Journal of Applied Mechanics**, v. 36, n. 1, p. 1-6, mar. 1969.
- LEE, K. Dynamic contact analysis technique for rapidly sliding elastic bodies with node-to-segment contact and differentiated constraints. **Computational Mechanics**, v. 53, n. 4, p. 789-806, abr. 2014.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. **Mechanics of solid materials**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 556 p.

LI, X. S. et al. **SuperLU users' guide**. Berkeley: Lawrence Berkeley National Laboratory, 1999. 78 p.

LUBLINER, J. A model of rubber viscoelasticity. **Mechanics Research Communications**, v. 12, n. 2, p. 93-99, mar.-abr. 1985.

MAINARDI, F.; SPADA, G. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology. **The European Physical Journal**, v. 193, p. 133-160, 2011.

MARCKMANN, G.; VERRON, E. Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. **Rubber Chemistry and Technology**, v. 79, n. 5, p. 835-858, nov. 2006.

MARQUES, G. C. S. C. **Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais**. 2006. 93 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

MATTIASSON, K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, n. 1, p. 145-153, jan. 1981.

MOITA, G. F.; CRISFIELD, M. A. A finite element formulation for 3-D continua using the co-rotational technique. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 39, n. 22, p. 3775-3792, nov. 1996.

MOONEY, M. A theory of large elastic deformation. **Journal of Applied Physics**, v. 11, n. 9, p. 582-592, 1940.

NAGARAJ, M. H. et al. Nonlinear analysis of compact and thin-walled metallic structures including localized plasticity under contact conditions. **Engineering Structures**, v. 203, 109819, jan. 2020.

NEGAHBAN, M. **The mechanical and thermodynamical theory of plasticity**. Boca Raton: CRC Press, 2012. 749 p.

NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 85, n. 3, p. 67-94, jul. 1959.

NITHIARASU, P. An arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) formulation for free surface flows using the characteristic-based split (CBS) scheme. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 48, n. 12, p. 1415-1428, ago. 2005.

OGDEN, R. W. Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids. **Proceedings of the Royal Society of London**, v. 328, n. 1575, p. 567-583, jun. 1972.

OGDEN, R. W. **Non-linear elastic deformations**. Chichester: Ellis Horwood, 1984. 544 p.

PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. AcadView. Versão 3. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2005.

PAPADOPOULOS, P.; TAYLOR, R. L. A mixed formulation for the finite element solution of contact problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 94, n. 3, p. 373-389, fev. 1992.

PARVIZIAN, F. et al. Thermo-mechanically coupled modeling and simulation of hot metal-forming processes using adaptive remeshing method. **Surveys for Applied Mathematics and Mechanics**, v. 33, n. 1, p. 95-115, abr. 2010.

PASCON, J. P. **Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações**: implementação numérica em formulação não linear geométrica. 2012. 479 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

PASCON, J.; CODA, H. B. Large deformation analysis of elastoplastic homogeneous materials via high order tetrahedral finite elements. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 76, p. 21-38, nov. 2013.

PASCON, J. P.; CODA, H. B. Finite deformation analysis of visco-hyperelastic materials via solid tetrahedral finite elements. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 133, p. 25-41, out. 2017.

PERZYNA, P. Fundamental problems in viscoplasticity. **Advances in Applied Mechanics**, v. 9, p. 243-377, 1966.

PERZYNA, P.; WOJNO, W. On the constitutive equations for elastic/viscoplastic materials at finite strain. **Archwm. Mech. Stosow.**, v. 18, p. 85-100, 1966.

PERZYNA, P.; WOJNO, W. Thermodynamics of a rate sensitive plastic material. **Archwm. Mech. Stosow.**, v. 20, p. 499-510, 1968.

PIEIDADE NETO, D. **Sobre estratégias de resolução numérica de problemas de contato**. 2009. 149 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

PIEIDADE NETO, D.; PACCOLA, R. R. sparseSET. Versão 1.0.0. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, nov. 2020.

PONTHOT, J. P. Unified stress update algorithms for the numerical simulation of large deformation elasto-plastic and elasto-viscoplastic processes. **International Journal of Plasticity**, v. 18, n. 1, p. 91-126, jan. 2002.

POPOV, V. L. **Contact mechanics and friction**: physical principles and applications. Heidelberg: Springer, 2010. 362 p.

POPOV, V. L.; HEß, M.; WILLERT, E. **Handbook of contact mechanics**: exact solutions of axisymmetric contact problems. Berlin: Springer, 2019. 347 p.

PROENÇA, S. P. B. **Análise não-linear de estruturas**: notas de aulas. São Carlos: EESC/USP, 2018.

RAMIREZ, C. Q. **Análise não linear geométrica de músculos esqueléticos via Método dos Elementos Finitos Posicional**. 2018. 248 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

RODRÍGUEZ, E. A. M. **Desenvolvimento de um modelo de ligação deslizante para a simulação de dispositivos de controle de vibração na análise não linear geométrica de estruturas**. 2017. 128 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

RIVLIN, R. S. Large elastic deformations of isotropic materials. I. Fundamental concepts. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 240, n. 822, p. 459-490, jan. 1948a.

RIVLIN, R. S. Large elastic deformations of isotropic materials. IV. Further developments of the general theory. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 241, n. 835, p. 379-397, out. 1948b.

RIVLIN, R. S.; SAUNDERS, D. W. Large elastic deformations of isotropic materials. VII. Experiments on the deformation of rubber. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 243, n. 865, p. 251-288, abr. 1951.

ROYLANCE, D. Engineering viscoelasticity. In: ROYLANCE, D. **Mechanics of materials**. Cambridge: MIT, 2001.

SCHRAMM, G. **A practical approach to rheology and rheometry**. 2. ed. Karlsruhe: Gebrueder HAAKE GmbH, 2000. 291 p.

SCHÜRMAN, B.; EL-GUINDY, A.; ALTHOFF, M. Closed-form expressions of convex combinations. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2016, Boston. **Anais...** Boston: IEEE, 2016.

SCHWER, L. E. Viscoplastic augmentation of the smooth cap model. **Nuclear Engineering and Design**, v. 150, n. 2-3, p. 215-223, set. 1994.

SHULL, K. R. Contact mechanics and the adhesion of soft solids. **Materials Science and Engineering: R: Reports**, v. 36, n. 1, p. 1-45, jan. 2002.

SIMO, J. C.; WRIGGERS, P.; TAYLOR, R. L. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 50, n. 2, p. 163-180, ago. 1985.

SIMO, J. C.; KENNEDY, J. G.; GOVINDJEE, S. Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. Loading/unloading conditions and numerical algorithms. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 26, n. 10, p. 2161-2185, out. 1988.

SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. R. **Computational inelasticity**. New York: Springer, 1998. 392 p.

SOUSA, J. G. G.; LARA, P. L. O. Reologia e trabalhabilidade das argamassas. In: BAUER, E. **Revestimentos de argamassa: características e peculiaridades**. Brasília: LEM-UnB, 2005. p. 23-29.

STEINMANN, P.; HOSSAIN, M.; POSSART, G. Hyperelastic models for rubber-like materials: consistent tangent operators and suitability for Treloar's data. **Archive of Applied Mechanics**, v. 82, p. 1183-1217, 2012.

SUMELKA, W. Fractional viscoplasticity. **Mechanics Research Communications**, v. 56, p. 31-36, mar. 2014.

SUZUKI, J. L. et al. Fractional-order uniaxial visco-elasto-plastic models for structural analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 308, p. 443-467, ago. 2016.

TIBBITT, M. W. Linear viscoelasticity. In: TIBBITT, M. W. **Macromolecular Engineering: Networks and Gels**. Zurich: ETH Zurich, 2019.

TOBAJAS, R.; IBARTZ, E.; GRACIA, L. A comparative study of hyperelastic constitutive models to characterize the behavior of a polymer used in automotive engines. In: INTERNATIONAL ELECTRONIC CONFERENCE ON MATERIALS, 2., 2016, *online*. **Anais... online**: MDPI, 2016.

TRELOAR, L. R. G. The elasticity of a network of long-chain molecules. I. **Transactions of the Faraday Society**, v. 39, p. 36-41, 1943.

ULZ, M. H. A Green-Naghdi approach to finite anisotropic rate-independent and rate-dependent thermo-plasticity in logarithmic Lagrangean strain-entropy space. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 41-44, p. 3262-3277, set. 2009.

WANG, W. M.; SLUYS, L. J. Formulation of an implicit algorithm for finite deformation viscoplasticity. **International Journal of Solids and Structures**, v. 37, n. 48-50, p. 7329-7348, nov. 2000.

WARBURTON, G. B. **The dynamical behaviour of structures**. 2. ed. Oxford: Pergamon Press, 1976. 354 p.

WARREN, J. Barycentric coordinates for convex polytopes. **Advances in Computational Mathematics**, v. 6, p. 97-108, dez. 1996.

WEMPNER, G. Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells. **International Journal of Solids and Structures**, v. 5, n. 2, p. 117-153, fev. 1969.

WIERZBICKI, T. Fundamental concepts in structural plasticity. In: WIERZBICKI, T. **Structural mechanics**. Cambridge: MIT, 2013.

WILKINS, M. L. Calculation of elasto-plastic flow. In: ALDER, B.; FERNBACH, S.; ROTENBERG, M. **Methods of computational physics**. New York: Academic Press, 1964. v. 2.

WILSON, E. A.; PARSONS, B. Finite element analysis of elastic contact problems using differential displacements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 2, n. 3, p. 387-395, jul.-set. 1970.

WRIGGERS, P. **Computational contact mechanics**. Chichester: John Wiley & Sons, 2002. 441 p.

WRIGGERS, P.; SIMO, J. C. A note on tangent stiffness for fully nonlinear contact problems. **International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering**, v. 1, n. 5, p. 199-203, set. 1985.

WRIGGERS, P.; VAN, T. V.; STEIN, E. Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. **Computers & Structures**, v. 37, n. 3, p. 319-331, 1990.

XING, W.; SONG, C.; TIN-LOI, F. A scaled boundary finite element based node-to-node scheme for 2D frictional contact problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 333, p. 114-146, maio 2018.

YEOH, O. H. Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates. **Rubber Chemistry and Technology**, v. 63, n. 5, p. 792-805, 1990.

ZAVARISE, G.; DE LORENZIS, L. The node-to-segment algorithm for 2D frictionless contact: Classical formulation and special cases. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 41-44, p. 3428-3451, set. 2009.

ZENER, C. **Elasticity and anelasticity of metals**. Chicago: University of Chicago Press, 1948. 170 p.

ZHANG, M.; MONTÁNS, F. J. A simple formulation for large-strain cyclic hyperelasto-plasticity using elastic correctors. Theory and algorithmic implementation. **International Journal of Plasticity**, v. 113, p. 185-217, fev. 2019.

APÊNDICE A – Desenvolvimento da expressão do 2º invariante isocórico

No presente apêndice, demonstra-se a relação entre o 2º invariante isocórico e o critério de plastificação de von Mises, de modo a se chegar à expressão apresentada na Equação (269).

Primeiramente, define-se a tensão desviadora s_{ij} , a qual é dada pela diferença entre o tensor de tensões σ_{ij} e o tensor de tensões hidrostático σ_{ij}^{hid} , ou seja:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{hid} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (A1)$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{bmatrix}$$

sendo σ_m a tensão média.

O 2º invariante da componente desviadora da tensão (J_2) é dado pela seguinte expressão:

$$J_2 = - \left(\begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{11} & s_{13} \\ s_{31} & s_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} \right) \quad (A2)$$

Expandindo-se a Equação (A2), tem-se:

$$J_2 = -[(s_{22}s_{33} - s_{23}s_{32}) + (s_{11}s_{33} - s_{13}s_{31}) + (s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21})] \quad (A3)$$

$$= -(s_{11}s_{22} + s_{11}s_{33} + s_{22}s_{33}) + s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2$$

A partir das componentes s_{ij} apresentadas na Equação (A1), os três primeiros termos da Equação (A3) podem ser desenvolvidos da seguinte forma:

$$-(s_{11}s_{22} + s_{11}s_{33} + s_{22}s_{33})$$

$$= -[(\sigma_{11} - \sigma_m)(\sigma_{22} - \sigma_m) + (\sigma_{11} - \sigma_m)(\sigma_{33} - \sigma_m) + (\sigma_{22} - \sigma_m)(\sigma_{33} - \sigma_m)]$$

$$= -\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_m + \sigma_{22}\sigma_m - \sigma_m^2 - \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_m + \sigma_{33}\sigma_m - \sigma_m^2 - \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_m + \sigma_{33}\sigma_m - \sigma_m^2 \quad (A4)$$

$$= -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_m(2\sigma_{11} + 2\sigma_{22} + 2\sigma_{33} - 3\sigma_m)$$

Considerando que a tensão média σ_m é dada por:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} \quad (A5)$$

continua-se o desenvolvimento da Equação (A4):

$$\begin{aligned}
& -(s_{11}s_{22} + s_{11}s_{33} + s_{22}s_{33}) \\
& = -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} \\
& + \left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}\right) \left[2\sigma_{11} + 2\sigma_{22} + 2\sigma_{33} \right. \\
& \left. - 3\left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}\right)\right] \\
& = -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} \\
& + \left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}\right) (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\
& = -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} + \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 \quad (A6) \\
& = -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} \\
& + \frac{1}{3}[\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{11}\sigma_{33} + 2\sigma_{22}\sigma_{33}] \\
& = \frac{1}{3}[\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33}] \\
& = \frac{1}{6}[2\sigma_{11}^2 + 2\sigma_{22}^2 + 2\sigma_{33}^2 - 2\sigma_{11}\sigma_{22} - 2\sigma_{11}\sigma_{33} - 2\sigma_{22}\sigma_{33}] \\
& = \frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2]
\end{aligned}$$

Analisando-se agora os três últimos termos da Equação (A3), a partir das componentes de tensão fora da diagonal principal apresentadas na Equação (A1), retira-se a seguinte relação:

$$s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2 = \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 \quad (A7)$$

Dessa forma, substituindo as Equações (A6) e (A7) na Equação (A3), tem-se que J_2 pode ser dado pela expressão:

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 \quad (A8)$$

Aqui, reescreve-se a expressão do critério de von Mises dado na Equação (243) na forma:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) = 2\sigma_y^2 \quad (A9)$$

Comparando-se as expressões dadas nas Equações (A8) e (A9), observa-se que o 2º invariante da componente desviadora da tensão e a tensão de escoamento apresentam a seguinte relação:

$$J_2 = \frac{\sigma_y^2}{3} \quad (A10)$$

Agora resta demonstrar a relação entre J_2 e σ_{ij} . Para isso, calcula-se o 1º invariante da componente desviadora da tensão (J_1), que é dado pelo traço do tensor da tensão desviadora apresentada na Equação (A1):

$$\begin{aligned} J_1 = Tr(s_{ij}) &= s_{11} + s_{22} + s_{33} = \sigma_{11} - \sigma_m + \sigma_{22} - \sigma_m + \sigma_{33} - \sigma_m \\ &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} - 3\left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}\right) = 0 \end{aligned} \quad (A11)$$

ou seja, o traço do tensor da tensão desviadora é sempre nulo, o que demonstra o estado de cisalhamento puro decorrente da tensão desviadora.

Elevando a Equação (A11) ao quadrado e desenvolvendo-se algebricamente os termos, obtém-se:

$$(s_{11} + s_{22} + s_{33})^2 = 0 \quad (A12)$$

$$s_{11}^2 + s_{11}s_{22} + s_{11}s_{33} + s_{11}s_{22} + s_{22}^2 + s_{22}s_{33} + s_{11}s_{33} + s_{22}s_{33} + s_{33}^2 = 0 \quad (A13)$$

$$s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2(s_{11}s_{22} + s_{11}s_{33} + s_{22}s_{33}) = 0 \quad (A14)$$

$$-(s_{11}s_{22} + s_{11}s_{33} + s_{22}s_{33}) = \frac{s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2}{2} \quad (A15)$$

Substituindo a Equação (A15) na Equação (A3), chega-se à expressão:

$$J_2 = \frac{s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2}{2} + s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2 \quad (A16)$$

Como

$$\begin{aligned} s_{ij}s_{ij} &= s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + s_{12}^2 + s_{21}^2 + s_{13}^2 + s_{31}^2 + s_{23}^2 + s_{32}^2 \\ &= s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2(s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2) \end{aligned} \quad (A17)$$

conclui-se que J_2 pode ser escrito em função de $s_{ij}s_{ij}$ como:

$$J_2 = \frac{s_{ij}s_{ij}}{2} \quad (A18)$$

onde $J_2 > 0$ para qualquer estado de tensão.

Por fim, agrupando-se as Equações (A10) e (A18), o critério de plastificação de von Mises pode ser escrito da seguinte forma:

$$J_2 = \frac{s_{ij}s_{ij}}{2} < \frac{\sigma_y^2}{3} \quad (A19)$$

a qual corresponde à expressão que rege o comportamento elástico de materiais dúcteis e isotrópicos apresentada na Equação (269).