

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

VITOR HIROSHI KISHINO

Estabilidade de elementos estruturais de parede fina após conformação a frio:
uma estratégia elasto-plástica baseada na decomposição de Flory

São Carlos

2022

VITOR HIROSHI KISHINO

Estabilidade de elementos estruturais de parede fina após conformação a frio:
uma estratégia elasto-plástica baseada na decomposição de Flory

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Humberto Breves Coda

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

São Carlos

2022

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTA TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

K46e Kishino, Vitor Hiroshi
Estabilidade de elementos estruturais de parede
fina após conformação a frio: uma estratégia elasto-
plástica baseada na decomposição de Flory / Vitor
Hiroshi Kishino; orientador Humberto Breves Coda. São
Carlos, 2022.

Dissertação (Mestrado) - Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de
Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas --
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de
São Paulo, 2022.

1. perfis metálicos formados a frio. 2. Método
dos Elementos Finitos Posicional. 3. grandes
deslocamentos e deformações. 4. plasticidade. 5.
contato. 6. estabilidade. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **VITOR HIROSHI KISHINO**.

Título da dissertação: " Estabilidade de elementos estruturais de parede fina após conformação a frio: uma estratégia elasto-plástica baseada na decomposição de Flory".

Data da defesa: 25/03/2022.

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

(Orientador)

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **Cimar Donizeti Baságlio**

(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Aprovado

Prof. Dr. **Alex Sander Clemente de Souza**

(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

DEDICATÓRIA

À minha mãe, Emiko, por todo o apoio e carinho durante todos esses anos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em especial à minha mãe, Emiko, que me deu todo o suporte possível para que eu me dedicasse ao máximo aos estudos.

Ao meu irmão, Renato, pela companhia durante todos esses anos e pelo apoio indispensável durante todo o curso de mestrado.

Ao meu orientador, professor doutor Humberto Breves Coda, pela excelente orientação ao longo de toda a pesquisa.

Aos funcionários do SET, por terem sido tão prestativos. Agradeço em especial ao Dorival Piedade Neto, por ter tirado minhas dúvidas de informática, ter me auxiliado com o acesso remoto ao nó do *cluster* e por ter criado a biblioteca *sparseSET*, que foi indispensável para a realização deste trabalho.

Aos veteranos do SET, por terem sido tão receptivos e por sempre estarem dispostos a ajudar os calouros. Agradeço em especial aos veteranos Matheus Rocha, Henrique Barbosa Soares e Caio César La-Cava Gonçalves Bernardo, por terem dedicado seu tempo tirando minhas dúvidas ao longo do mestrado.

Por fim, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela concessão da bolsa de mestrado 131611/2020-8.

EPÍGRAFE

“Todas as vitórias ocultam uma abdicação”

Simone de Beauvoir (1958)

RESUMO

KISHINO, V. H. Estabilidade de elementos estruturais de parede fina após conformação a frio: uma estratégia elasto-plástica baseada na decomposição de Flory. 2022. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

Uma crescente utilização de perfis metálicos formados a frio vem sendo observada ao longo dos anos. Uma das principais características deste tipo de perfil é que o processo de fabricação a partir da conformação a frio produz intrinsecamente tensões residuais e defeitos geométricos nos elementos estruturais, fato que influencia o comportamento estrutural dos mesmos. Desta forma, a existência de ferramentas computacionais que possibilitem a correta caracterização do estado inicial dos perfis mostra-se de grande interesse para o entendimento do efeito das imperfeições físicas e geométricas no comportamento estrutural de tais elementos. Tendo isso em mente, o objetivo da presente pesquisa foi desenvolver um programa computacional capaz de modelar a conformação a frio por dobragem de perfis metálicos com posterior verificação de seu comportamento estrutural por meio de análise de flambagem considerando a influência das tensões residuais. O programa foi implementado utilizando o Método dos Elementos Finitos Posicional com elementos finitos de sólido prismático de base triangular. Foi implementado um modelo constitutivo hiperelástico que consiste na combinação dos modelos de Rivlin-Saunders e de Hartmann-Neff, o qual é apropriado para a análise de problemas no regime de grandes deformações. A plasticidade foi considerada através da implementação de um modelo elasto-plástico alternativo para grandes deformações baseada na decomposição de Flory; já a restrição de contato foi considerada através do método de penalização e discretização nó-a-superfície. O programa desenvolvido foi validado mediante comparações com exemplos presentes na literatura. Foi verificado que o programa conseguiu determinar de forma condizente a magnitude e a distribuição das tensões residuais advindas do trabalho a frio ao longo da seção transversal dos perfis, bem como avaliar a influência das imperfeições geométricas e das tensões residuais na estabilidade dos mesmos.

Palavras-chave: perfis metálicos formados a frio; Método dos Elementos Finitos Posicional; grandes deslocamentos e deformações; plasticidade; contato; estabilidade.

ABSTRACT

KISHINO, V. H. **Stability of thin-walled structural elements after cold forming: an elasto-plastic strategy based on the Flory's decomposition.** 2022. Thesis (Master's degree) – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2022.

An increasing use of cold formed metal profiles has been observed over the years. One of the main characteristics of this type of profile is that the cold forming manufacturing process intrinsically produces residual stresses and geometric defects in the structural elements, which influences their structural behavior. Thus, the existence of computational tools that allow the correct characterization of the profiles initial state is of great interest for understanding the effect of physical and geometric imperfections on the structural behavior of such elements. With this in mind, the objective of the present research was to develop a computational program capable of modeling the cold forming (bending) of metal profiles with subsequent verification of their structural behavior through buckling analysis considering the influence of residual stresses. The program was implemented using the Positional Finite Element Method with triangular based prismatic solid finite elements. A hyperelastic constitutive model consisting of a combination of the Rivlin-Saunders and the Hartmann-Neff models was implemented, which is appropriate for the analysis of problems in the large strain regime. The plasticity was considered through the implementation of an alternative elasto-plastic model for large strains based on the Flory's decomposition; while the contact constraint was considered through the penalty method and the node-to-surface discretization. The developed program was validated through comparisons with examples from the literature. It was verified that the program was able to determine the magnitude and the distribution of the residual stresses arising from the cold work along the profiles cross section, as well as to evaluate the influence of the geometric imperfections and the residual stresses on their stability.

Keywords: cold formed metal profiles; Positional Finite Element Method; large displacements and strains; plasticity; contact; stability.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Justificativa	20
1.2	Objetivos	21
1.3	Características do programa.....	21
1.4	Revisão bibliográfica	22
1.4.1	Perfis formados a frio.....	22
1.4.1.1	Processo de fabricação	22
1.4.1.2	Imperfeições geométricas.....	25
1.4.1.3	Imperfeições físicas.....	26
1.4.1.4	Instabilidade de perfis formados a frio.....	30
1.4.2	Análise não linear pelo Método dos Elementos Finitos	35
1.4.3	Método dos Elementos Finitos Posicional	38
1.4.4	Modelos constitutivos hiperelásticos	39
1.4.5	Modelos constitutivos elasto-plásticos.....	41
1.4.6	Mecânica do Contato.....	43
2	CONCEITOS BÁSICOS DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS	46
2.1	Cinemática	46
2.1.1	Mudança de configuração e seu gradiente	46
2.1.2	Mudança de volume	47
2.1.3	Alongamento de Cauchy-Green e deformação de Green-Lagrange	50
2.1.4	Decomposição polar.....	52
2.1.5	Mudança de área.....	54
2.1.6	Princípio da Conservação de Massa.....	56
2.2	Tensão de Cauchy	57
2.3	Equações de equilíbrio Euleriano local e global	60
2.4	Equações de equilíbrio Lagrangeano local e global.....	61
2.5	Equilíbrio e energia.....	62
2.5.1	Euleriano	62
2.5.2	Lagrangeano	64
3	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL.....	67
3.1	Aproximação multidimensional.....	67
3.2	Formulação estática elástica.....	70

3.3	Formulação dinâmica elástica	76
3.4	Cálculo das tensões de Cauchy	80
3.5	Instabilidade de estruturas pelo Método dos Elementos Finitos Posicional	82
4	MODELOS CONSTITUTIVOS HIPERELÁSTICOS.....	84
4.1	Decomposição de Flory	85
4.2	Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff	87
4.3	Modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff.....	88
5	PLASTICIDADE.....	94
5.1	Fundamentos da plasticidade clássica.....	94
5.1.1	Conceitos fundamentais	94
5.1.2	Plasticidade unidimensional em pequenas deformações.....	95
5.1.3	Incompressibilidade	99
5.1.4	Crítério de plastificação de von Mises	102
5.1.5	Encruamento isótropo e cinemático	105
5.1.6	Leis de evolução.....	108
5.2	Modelo elasto-plástico alternativo para grandes deformações	109
5.2.1	Limite de plastificação	110
5.2.2	Evolução plástica.....	111
5.2.3	Encruamento cinemático	112
5.2.4	Encruamento isótropo	112
5.2.5	Função objetiva	113
5.2.6	Cálculo do multiplicador plástico	113
5.2.7	Tensor constitutivo elasto-plástico tangente	115
5.2.8	Evolução plástica no regime de pequenas deformações	116
5.2.9	Transição entre os modelos	118
6	CONTATO	120
6.1	Discretização nó-a-superfície.....	122
6.2	Imposição das restrições de contato pelo método de penalização	123
6.3	Algoritmo de contato	125
7	EXEMPLOS NUMÉRICOS E DISCUSSÕES	134
7.1	Viga engastada e livre sujeita a carregamento transversal.....	134
7.2	Viga engastada e livre sujeita a carregamento transversal transiente.....	137
7.3	Distribuição de tensões em viga engastada e livre submetida a carregamento distribuído uniforme.....	142

7.4	Cubo comprimido sujeito a grandes deformações	147
7.5	Cubo elasto-plástico sujeito a controle de posição cíclico.....	151
7.6	Flambagem de pilar engastado e livre.....	154
7.7	<i>Springback</i> em conformação a frio por dobragem de perfil cantoneira.....	156
7.8	Distribuição de tensões residuais em dobra de perfil cantoneira de parede espessa.....	161
7.9	Flambagem de perfil U	168
7.10	Análise da influência do processo de dobra na flambagem de perfil U.....	180
8	CONCLUSÕES	189
	REFERÊNCIAS	191
	APÊNDICE A – Dedução do critério de plastificação de von Mises	202
	APÊNDICE B – Procedimento de rotação das tensões residuais.....	210

1 INTRODUÇÃO

Os perfis metálicos formados a frio apresentam uma vasta gama de aplicações, sendo empregados por exemplo em carrocerias de automóveis, torres de transmissão, vagões ferroviários, estantes de armazenamento, dispositivos de drenagem e, de forma generalizada, na construção civil.

Os perfis formados a frio começaram a ser utilizados na construção civil por volta dos anos 1850 nos Estados Unidos e na Grã-Bretanha. No entanto, foi somente a partir de 1940 que este tipo de elemento começou a ser amplamente empregado na construção de edifícios (YU; LABOUBE, 2010).

Atualmente, os perfis formados a frio são amplamente utilizados na construção civil. Eles podem ser utilizados de forma eficiente em diversos tipos de edificações e estruturas, tais como galpões de pequeno e médio porte, coberturas, mezaninos e edifícios construídos através do sistema *light steel framing* (SILVA; SILVA, 2008).

Sua aplicação na construção civil vem se tornando cada vez mais viável diante das crescentes exigências de economia e rapidez demandadas pelo mercado. A adoção de construção pré-fabricada com perfis formados a frio traz diversas vantagens, das quais podem ser citadas a leveza dos elementos estruturais, o reduzido tempo de execução e as facilidades de fabricação, manuseio e transporte (SILVA; PIERIN; SILVA, 2014). Além disso, os perfis formados a frio são muito versáteis, pois podem ser projetados para aplicações específicas com dimensões apropriadas para as necessidades do projeto em questão (SILVA; SILVA, 2008).

Uma das principais características deste tipo de perfil é a reduzida espessura, o que traz leveza aos elementos estruturais e possibilita a produção de seções transversais com geometrias mais complexas se comparadas às seções de perfis formados a quente. No entanto, a utilização de elementos tão finos também acaba trazendo problemas que devem ser considerados no projeto estrutural. A reduzida espessura acaba reduzindo a relação carga/tensão de flambagem, o que aumenta a probabilidade de ocorrência de problemas de instabilidade.

Outra peculiaridade dos perfis formados a frio é o surgimento de imperfeições geométricas e físicas durante o processo de fabricação. As imperfeições geométricas correspondem aos desvios em relação à geometria considerada “perfeita” (SCHAFER; PEKÖZ, 1998); já as alterações físicas referem-se ao aumento da tensão de escoamento e da resistência última do material, bem como ao surgimento de tensões residuais. A consideração de tais

imperfeições é de grande importância, pois estas influenciam o comportamento estrutural dos perfis, em particular, a sua carga crítica de flambagem.

Embora existam métodos para a medição em laboratório das tensões residuais provenientes do trabalho a frio, tais procedimentos são demorados, difíceis e apresentam precisão limitada, além de não permitirem estabelecer uma relação clara entre as tensões residuais e as diversas etapas do processo de fabricação (QUACH; TENG; CHUNG, 2006). Por este motivo, é cada vez mais comum nos dias atuais a modelagem computacional dos perfis formados a frio a fim de contornar essas dificuldades. A precisão dos modelos computacionais depende significativamente da correta caracterização do estado inicial do perfil, no entanto, verifica-se uma ampla escassez de informação relativa à caracterização das imperfeições geométricas e físicas, além de uma falta de consenso com relação à magnitude e à distribuição das imperfeições a serem adotadas nas modelagens (SCHAFER; PEKÖZ, 1998). Com isso, fica evidente a necessidade de estudos aprofundados acerca do tema a fim de possibilitar análises avançadas e estudos paramétricos confiáveis de perfis metálicos formados a frio.

1.1 Justificativa

O processo de fabricação de perfis metálicos a partir da conformação a frio produz intrinsecamente tensões residuais e defeitos geométricos nos elementos estruturais, fato que influencia consideravelmente o comportamento estrutural dos mesmos. Desta forma, a correta caracterização do estado inicial dos perfis mostra-se de grande interesse para o entendimento do efeito das imperfeições físicas e geométricas no comportamento estrutural de tais elementos. Para tal fim, torna-se necessária a melhoria da precisão das modelagens computacionais. Tendo isso em mente, o desenvolvimento do programa computacional proposto no presente trabalho permite o estudo da influência das imperfeições físicas e geométricas advindas do processo de fabricação no comportamento mecânico de perfis metálicos formados a frio. Com a utilização do código resultante é possível realizar análises paramétricas avaliando a magnitude dessas influências, buscando contribuir para o aprimoramento dos projetos estruturais de estruturas metálicas. Além disso, o treinamento do pesquisador em conhecimentos associados a este estudo mostra-se de grande importância para o mercado de trabalho e para o meio científico da área de engenharia de estruturas.

1.2 Objetivos

O objetivo do presente trabalho é desenvolver um programa computacional capaz de modelar a conformação a frio por dobragem de perfis metálicos e verificar o comportamento dos elementos estruturais resultantes por meio de análise de flambagem. Para tanto, o trabalho busca desenvolver uma ferramenta capaz de analisar com precisão a magnitude e a distribuição das tensões residuais ao longo da seção transversal dos perfis, bem como realizar análises de estabilidade para a investigação dos efeitos das imperfeições geométricas e físicas no comportamento estrutural dos perfis.

1.3 Características do programa

O programa foi implementado na linguagem de programação *Fortran 90*, sendo utilizado o compilador *Intel® Fortran*. Objetivando a economia de memória e o aumento da velocidade de processamento, o programa foi desenvolvido fazendo uso de matrizes esparsas. Para isto, foram utilizadas as bibliotecas *sparseSET* (PIEDADE NETO; PACCOLA, 2020) e *superLU* (DEMMEL et al., 1999; LI et al., 1999) para a montagem de matrizes esparsas e para a resolução de sistemas de equações envolvendo matrizes esparsas, respectivamente. Também com o intuito de otimizar a velocidade de processamento, alguns trechos do código foram paralelizados utilizando a interface de programação de aplicativos para programação paralela *OpenMP* (DAGUM; MENON, 1998).

Além disso, foi utilizada a biblioteca *LAPACK* (ANDERSON et al., 1999) para a resolução de alguns problemas de álgebra linear, como inversão de matrizes. Para o cálculo das cargas e dos modos de flambagem, foi utilizado o *FEAST solver* (POLLIZI, 2009), o qual é pertencente ao *Math Kernel Library* da *Intel®* e foi desenvolvido para a resolução de problemas de autovalor-autovetor generalizado envolvendo matrizes esparsas.

Com relação ao pré-processamento, foi utilizado o programa *open source Gmsh* (GEUZAIN; REMACLE, 2009) para a geração das malhas das superfícies alvo e das bases dos elementos finitos de sólido prismático. A extrusão da malha dos sólidos na espessura e a reordenação da numeração dos nós locais foram realizadas por meio de programas em *Python* desenvolvidos pelo autor. Por fim, o pós-processamento dos resultados foi realizado no programa *AcadView* (PACCOLA; CODA, 2005).

1.4 Revisão bibliográfica

Neste item é apresentada a revisão bibliográfica dos assuntos pertinentes à presente pesquisa. A seguir são cobertos os seguintes tópicos: perfis formados a frio, análise não linear pelo Método dos Elementos Finitos, o Método dos Elementos Finitos Posicional, modelos constitutivos hiperelásticos, modelos constitutivos elasto-plásticos e a Mecânica do Contato.

1.4.1 Perfis formados a frio

Os perfis formados a frio são assim denominados pois são obtidos a partir da conformação a frio de chapas metálicas, ou seja, sua conformação é realizada na temperatura ambiente. Este tipo de elemento estrutural apresenta diversas particularidades, as quais são descritas em maior detalhe nos próximos itens.

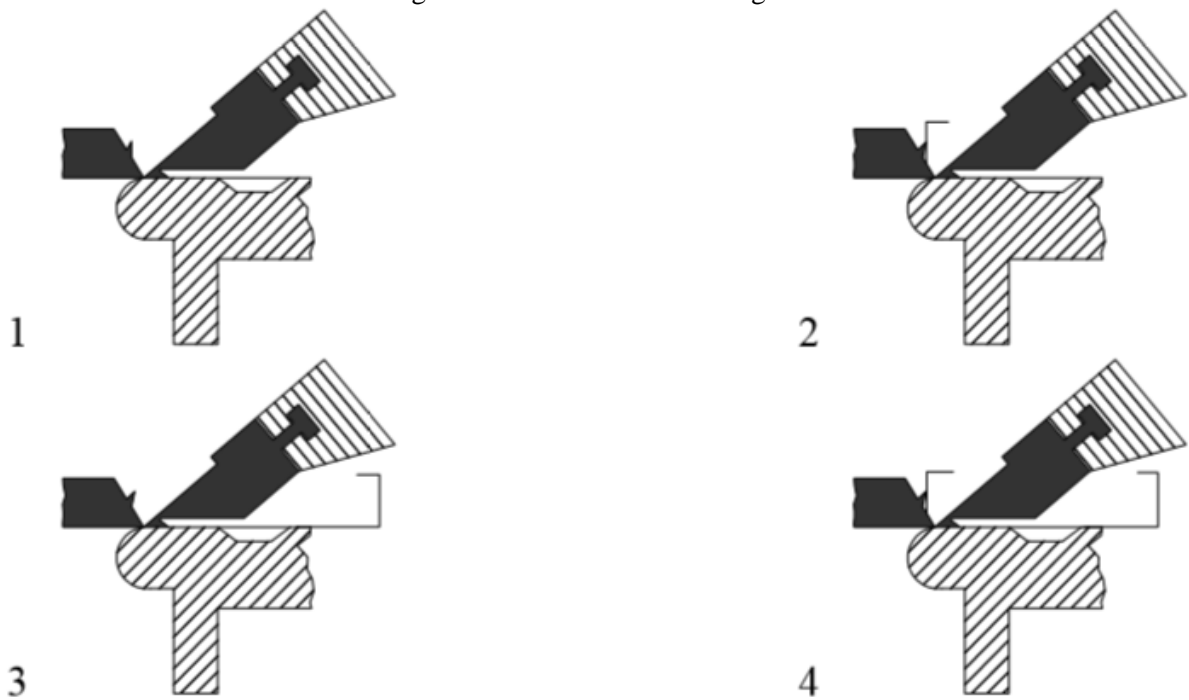
1.4.1.1 Processo de fabricação

Existem várias maneiras de se realizar a conformação a frio de perfis metálicos, porém, para o caso específico de perfis estruturais, existem três processos principais (RHODES; SHANMUGAM, 2003):

- a) dobragem;
- b) conformação com prensas dobradeiras;
- c) laminação a frio.

A dobragem é o processo mais simples, a qual consiste na execução de dobras na chapa para a conformação da seção do perfil, conforme ilustrado na Figura 1.1. Como os perfis produzidos por este método possuem comprimento reduzido e geometria simples, sua aplicação é muito limitada (RHODES; SHANMUGAM, 2003).

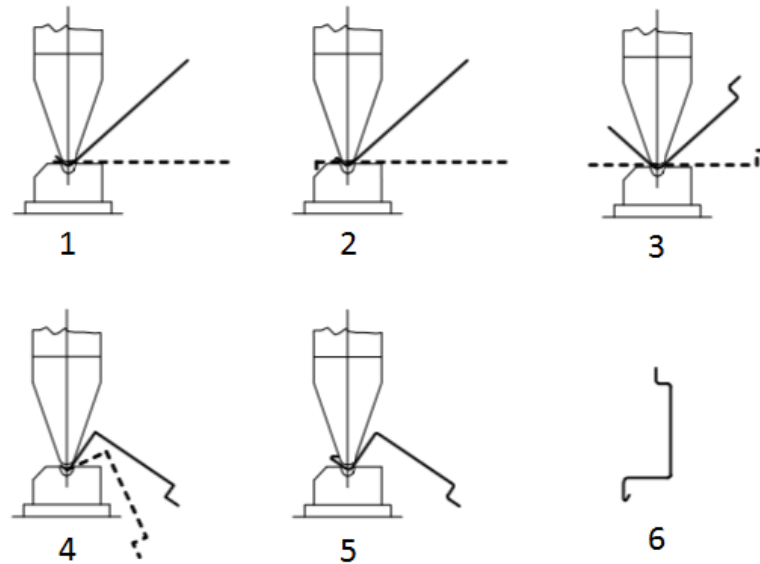
Figura 1.1 – Processo de dobragem



Fonte: Dubina, Ungureanu e Landolfo (2012).

A conformação com prensas dobradeiras, por sua vez, é mais amplamente empregada e possibilita a fabricação de seções com geometrias mais complexas. O processo consiste na prensagem da chapa metálica contra a matriz de uma prensa para a conformação do perfil na geometria desejada, conforme ilustrado na Figura 1.2. Contudo, este processo de fabricação também apresenta limitações com relação às geometrias das seções transversais e ao comprimento dos perfis (RHODES; SHANMUGAM, 2003). As prensas possuem gabaritos de forma a limitar os raios internos das dobras a valores mínimos com o intuito de impedir a fissuração do aço durante o processo (PFEIL; PFEIL, 2009). Na Figura 1.3 é apresentada uma foto de uma prensa dobradeira industrial.

Figura 1.2 – Processo de conformação com prensas dobradeiras



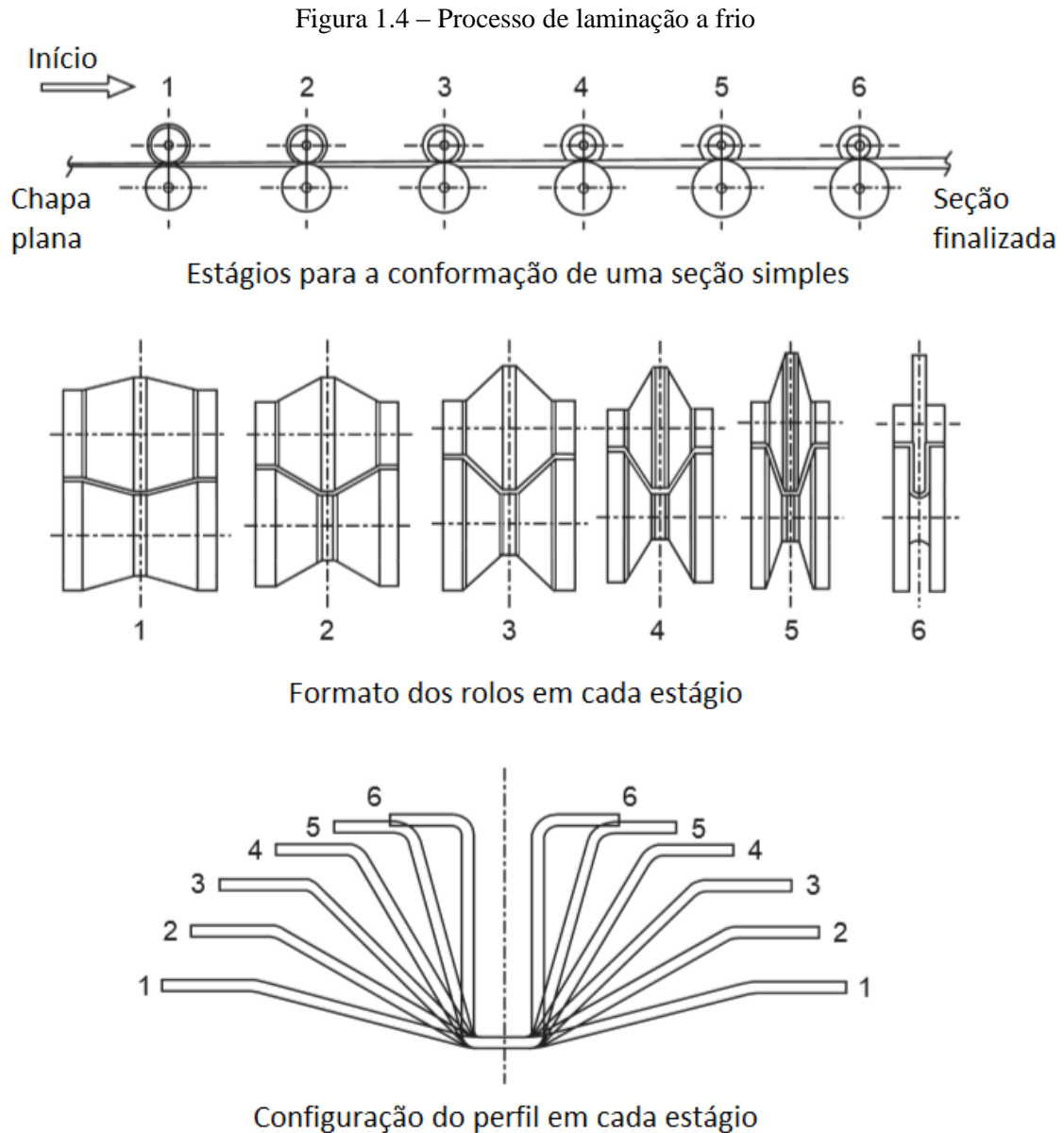
Fonte: adaptado de Dubina, Ungureanu e Landolfo (2012).

Figura 1.3 – Prensa dobradeira industrial



Fonte: Dubina, Ungureanu e Landolfo (2012).

Finalmente, a laminação a frio é o processo que apresenta a maior capacidade de produção. Neste processo, as chapas metálicas são deslocadas longitudinalmente sobre pares de rolos, os quais conformam as chapas de forma gradativa até que se atinja a forma final desejada para o perfil, conforme ilustrado na Figura 1.4. A quantidade de pares de rolos (também denominados de estágios) necessários para a conformação é dependente da espessura da chapa e da complexidade da geometria da seção transversal desejada (RHODES; SHANMUGAM, 2003).



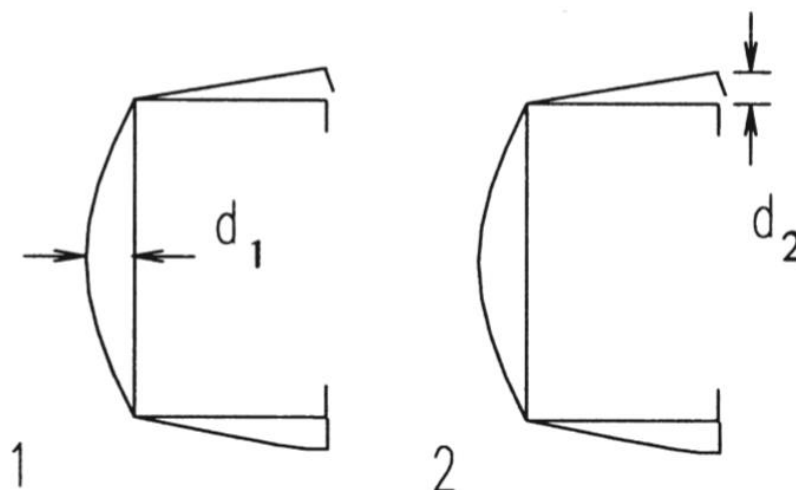
Fonte: adaptado de Rhodes e Shanmugam (2003).

1.4.1.2 Imperfeições geométricas

Nos perfis metálicos formados a frio são observadas imperfeições geométricas e físicas tanto ao longo da seção transversal quanto ao longo do comprimento (CHODRAUI, 2006), imperfeições estas que são intrínsecas ao próprio processo de fabricação. As imperfeições geométricas correspondem aos desvios em relação à geometria considerada “perfeita”, as quais incluem arqueamento, empenamento, torção e desvios locais (amassados e ondulações regulares nas chapas) (SCHAFER; PEKÖZ, 1998).

Segundo Schafer e Peköz (1998), as imperfeições geométricas podem ser classificadas em tipo 1 ou tipo 2, conforme mostrado na Figura 1.5.

Figura 1.5 – Definição das imperfeições geométricas em perfis formados a frio



Fonte: Schafer e Peköz (1998).

Schafer e Peköz (1998) fazem considerações para o caso de perfis com relação largura/espessura menor do que 200 para imperfeições do tipo 1 e menor do que 100 para imperfeições do tipo 2, sendo que a espessura deve ser menor do que 3 mm. A imperfeição do tipo 1 (d_1) pode ser estimada em função da largura da chapa (w) pela seguinte expressão obtida a partir de regressão linear simples:

$$d_1 \cong 0,006w \quad (1)$$

Uma outra possibilidade de estimativa da imperfeição do tipo 1 é através da seguinte relação baseada em uma curva exponencial:

$$d_1 \cong 6te^{-2t} \quad (2)$$

sendo d_1 e a espessura do perfil t dados em mm.

Já para o caso da imperfeição do tipo 2 (d_2), o máximo desvio de retilinearidade pode ser considerado como sendo aproximadamente igual à espessura do perfil:

$$d_2 \cong t \quad (3)$$

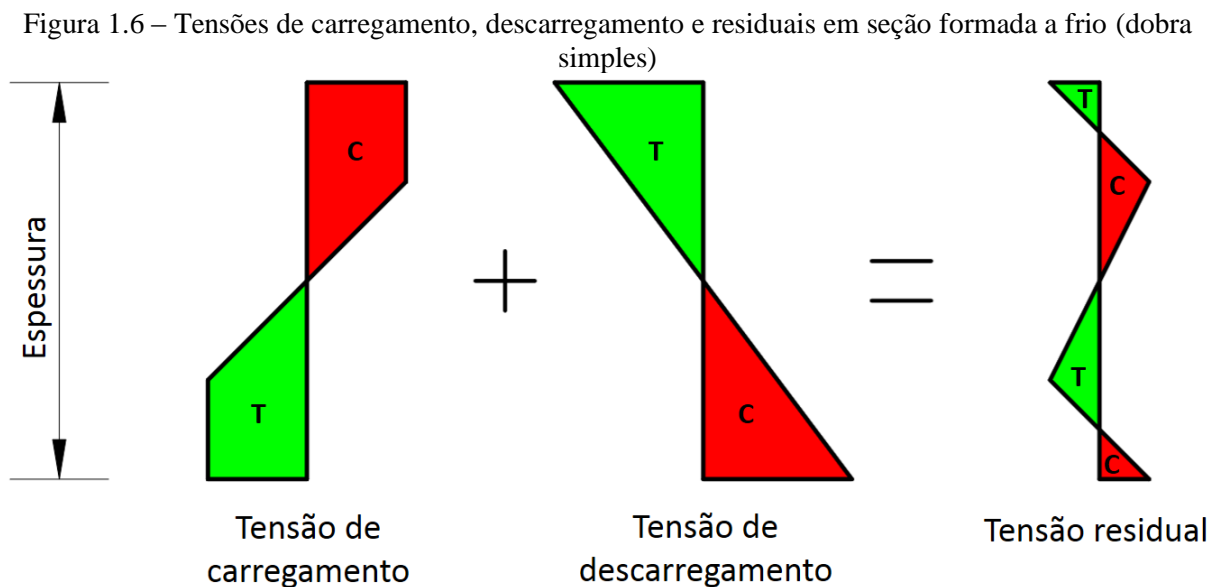
1.4.1.3 Imperfeições físicas

Com relação às propriedades físicas, o processo de dobra das chapas, independentemente do processo adotado, provoca o aumento da tensão de escoamento e da resistência última, levando conseqüentemente à redução da ductilidade do aço (capacidade de o material sofrer deformações plásticas sem se romper). Em outras palavras, o trabalho a frio acaba provocando o aumento das resistências limites do material concomitantemente com o estreitamento do patamar de escoamento (SILVA; SILVA, 2008). O aumento da tensão de

escoamento é provocado pelo encruamento do aço; já o aumento da resistência última é causado pelo fenômeno de envelhecimento (DUBINA; UNGUREANU; LANDOLFO, 2012).

Quando é empregado o processo de fabricação de conformação com prensas dobradeiras, o aumento da resistência é concentrado nas regiões curvas, uma vez que somente essas regiões estão sujeitas ao carregamento de conformação; já no caso de perfis fabricados por laminação a frio, o aumento da resistência ocorre também em outras regiões do elemento, tendo em vista que toda a região do perfil entre os roletes fica sujeita a tensões (SILVA; SILVA, 2008).

Além do aumento da resistência e da redução da ductilidade, o trabalho a frio também causa o aparecimento de tensões residuais. Tensões residuais são definidas como as tensões presentes nos elementos que são resultado dos processos de manufatura e fabricação (YU; LABOUBE, 2010). A conformação a frio consiste no carregamento da chapa metálica até o regime plástico seguida do descarregamento. Após a retirada das forças de conformação, ocorre o fenômeno denominado *springback*, que corresponde à alteração da geometria da chapa ocasionada pela recuperação elástica (WENG; WHITE, 1990a). O retorno elástico ocorre até que a peça atinja um equilíbrio interno, resultando no aparecimento de tensões residuais, as quais são autoequilibradas. As tensões inelásticas de carregamento, elásticas de descarregamento e residuais típicas de uma seção formada a frio (dobra simples) são ilustradas na Figura 1.6.



A presença de tensões residuais faz com que a transição entre o regime elástico e o patamar de escoamento ocorra de forma gradual, também ocasionando a redução do limite de proporcionalidade (tensão acima do qual o diagrama tensão x deformação deixa de ser linear) (PFEIL; PFEIL, 2009). Caso não houvesse a presença de tensões residuais, o comportamento mecânico do material tenderia ao elasto-plástico perfeito (CHODRAUI, 2006).

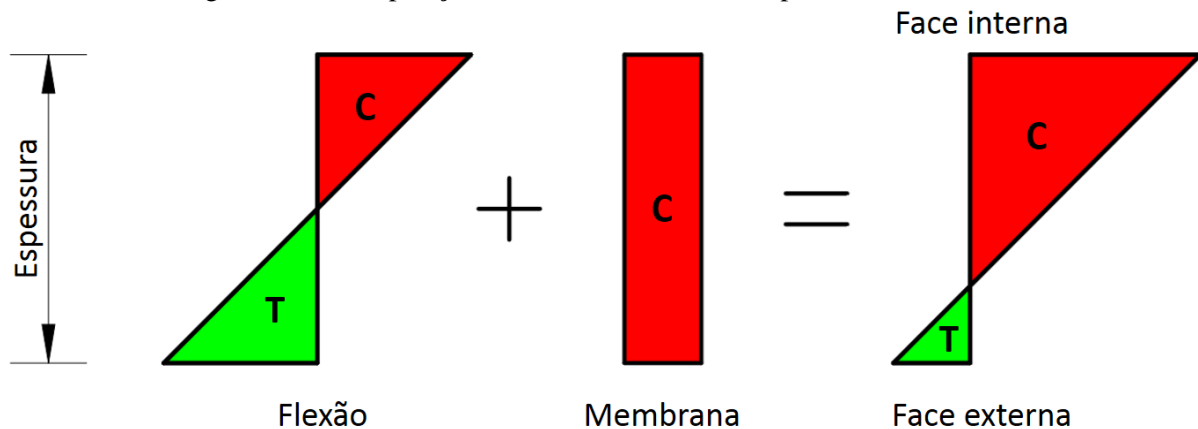
A consideração das tensões residuais em modelagens computacionais mostra-se complicada, uma vez que há dificuldade na determinação da magnitude das mesmas devido à escassez de dados. Por este motivo, as tensões residuais ou são desconsideradas totalmente nas análises ou a relação tensão-deformação do material é alterada de forma a aproximar os efeitos causados pelas tensões residuais (SCHAFER; PEKÖZ, 1998).

No caso de perfis soldados e laminados a quente, as tensões residuais são resultantes do processo de resfriamento desigual, de onde surgem tensões residuais longitudinais devido ao impedimento à deformação de origem térmica (PFEIL; PFEIL, 2009). Essas tensões são geralmente consideradas uniformes ao longo da espessura do elemento (YU; LABOUBE, 2010).

Já no caso de perfis formados a frio, as tensões residuais são de origem mecânica, provenientes da conformação a frio. Segundo Schafer e Peköz (1998), estendendo um pouco mais o conceito ilustrado na Figura 1.6 para dobras mais complexas, as tensões residuais em perfis formados a frio podem ser consideradas como sendo compostas por duas parcelas: flexão e membrana. Essa convenção é adotada tendo em vista que em análises laboratoriais extensômetros são posicionados nas faces externa e interna das paredes dos perfis, fornecendo duas leituras, sendo que essas leituras indicam a existência de tensão residual de compressão na face interna e tensão de tração de menor intensidade na face externa (CHODRAUI, 2006).

Essa idealização de composição por parcelas de flexão e de membrana tem como base a hipótese de que a distribuição das tensões residuais observada experimentalmente é resultante da superposição de uma parcela de tensão de compressão constante ao longo da espessura (membrana); e de uma parcela com variação linear ao longo da espessura (flexão), apresentando tração na face externa e compressão na face interna (CHODRAUI, 2006), conforme ilustrado na Figura 1.7.

Figura 1.7 – Composição das tensões residuais em perfis formados a frio



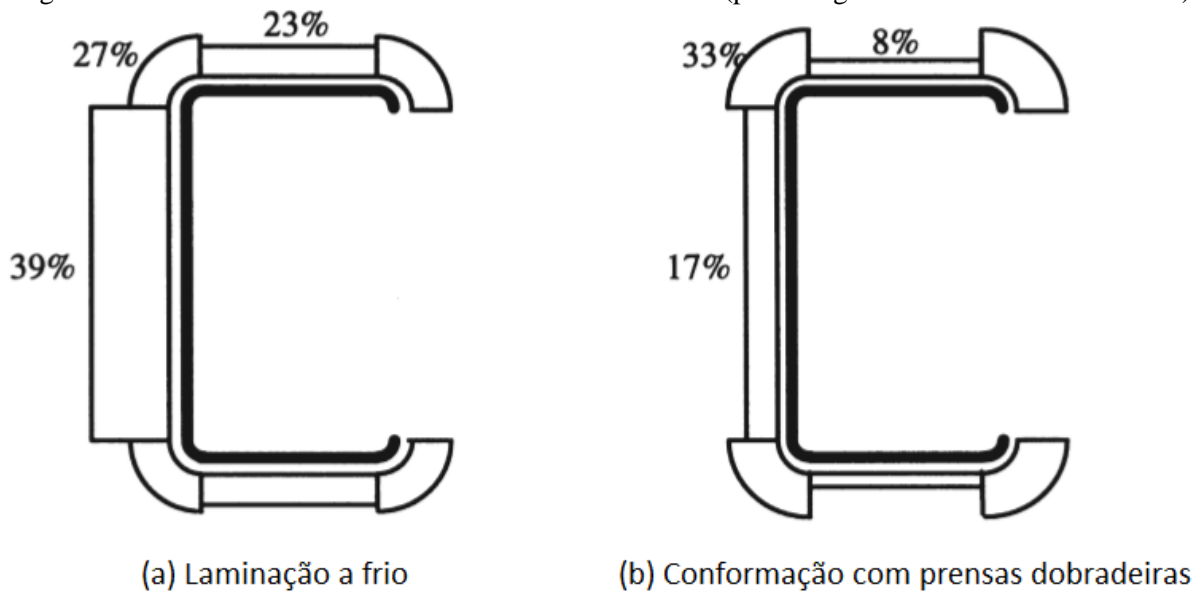
Fonte: autor.

As tensões residuais de membrana apresentam valores mais elevados em perfis laminados e soldados, sendo geralmente baixos em perfis formados a frio (CHODRAUI, 2006). Estas são tensões compressivas, as quais causam perda direta na resistência à compressão. Este tipo de tensão apresenta uma maior concentração nas regiões dos cantos, sendo mais proeminente em perfis fabricados por laminação a frio do que em perfis fabricados por conformação com prensas dobradeiras (SCHAFER; PEKÖZ, 1998).

Considerando que na região dos cantos também ocorre o aumento da tensão de escoamento, Schafer e Peköz (1998) salientam a importância de coerência durante as modelagens computacionais: caso tensões residuais de membrana de elevada magnitude sejam consideradas em regiões com elevado trabalho a frio (como nos cantos), o aumento da tensão de escoamento também deve ser considerado nessas regiões; caso as tensões residuais de membrana sejam desconsideradas, o aumento da tensão de escoamento também deve ser desconsiderado.

Já no caso das tensões residuais de flexão, estas geralmente apresentam valores mais elevados do que as tensões de membrana em perfis formados a frio (CHODRAUI, 2006). Estas apresentam alto grau de variação e normalmente elevada magnitude, não sendo incomum encontrar tensões residuais equivalentes a 50% da tensão de escoamento (SCHAFER; PEKÖZ, 1998). Assim como no caso das tensões residuais de membrana, este tipo de tensão também é mais proeminente em perfis fabricados por laminação a frio do que por conformação com prensas dobradeiras. A magnitude das tensões residuais de flexão pode ser obtida através de valores médios (Figura 1.8) ou estatisticamente por meio de funções de distribuição acumulada.

Figura 1.8 – Valores médios das tensões residuais de flexão (porcentagem da tensão de escoamento)



Fonte: adaptado de Schafer e Peköz (1998).

1.4.1.4 Instabilidade de perfis formados a frio

A reduzida espessura dos perfis formados a frio acaba acarretando a redução da relação carga/tensão de flambagem, o que aumenta a probabilidade de ocorrência de problemas de instabilidade. Com isso, os estados limites últimos de barras de seção transversal aberta compostas por chapas finas normalmente estão relacionados à instabilidade global, distorcional ou local (SILVA; PIERIN; SILVA, 2014). A instabilidade global engloba três tipos de flambagem: por flexão (flambagem de Euler), por torção lateral e por flexo-torção (DUBINA; UNGUREANU; LANDOLFO, 2012).

Tendo em vista que a rigidez à torção é proporcional ao cubo da espessura da seção e que os perfis formados a frio normalmente apresentam espessuras muito reduzidas, a rigidez à torção dos perfis acaba sendo muito baixa. Levando em consideração ainda que em muitos casos o centro de gravidade das seções transversais não coincide com o centro de cisalhamento, a flambagem por flexo-torção representa uma situação crítica para perfis comprimidos (YU; LABOUBE, 2010). Com isso, em perfis de parede fina faz-se necessária a imposição de restrições à torção distribuídas a certos intervalos ou distribuídas de forma contínua ao longo do comprimento de forma a evitar a ocorrência de deformações por torção (DUBINA; UNGUREANU; LANDOLFO, 2012).

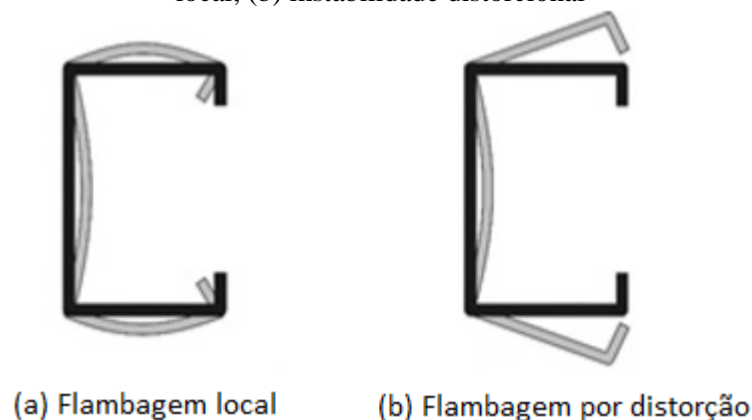
A esbelteza é o parâmetro que influencia o tipo de instabilidade crítica do elemento. Em elementos esbeltos, a tensão crítica deixa de ser a tensão de escoamento do aço, passando a ser

a tensão crítica de flambagem global elástica (SILVA; PIERIN; SILVA, 2014). Em barras muito esbeltas, a tensão de flambagem global é inferior à tensão de flambagem local, portanto a instabilidade global governa o dimensionamento do elemento; em peças curtas, a tensão de flambagem global apresenta valor elevado, conseqüentemente a instabilidade local e a resistência do material passam a determinar o dimensionamento; já em elementos que apresentam esbelteza intermediária, pode ocorrer instabilidade distorcional, a qual é desacoplada das flambagens local e global (SILVA; SILVA, 2008).

Outro fator que influencia o tipo de instabilidade crítica do elemento é a presença ou não de enrijecedores. A utilização de enrijecedores intermediários e de borda aumenta significativamente a capacidade resistente dos elementos comprimidos (YU; LABOUBE, 2010). Em perfis sem enrijecedores, os modos de flambagem consistem basicamente nos global e local; já em perfis com enrijecedores, há também a possibilidade de ocorrência de flambagem distorcional (SILVA; PIERIN; SILVA, 2014).

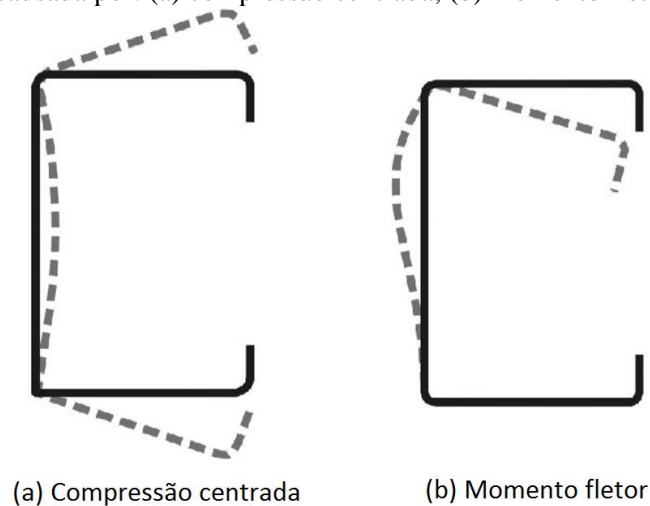
Um aspecto que distingue a instabilidade local da instabilidade distorcional é a deformação pós-crítica: na distorcional, a seção transversal perde a sua forma inicial através da rotação dos elementos comprimidos, fato que não ocorre na instabilidade local (SILVA; PIERIN; SILVA, 2014), assim como ilustrado na Figura 1.9. Na Figura 1.10 é mostrada uma comparação da configuração da seção transversal após a ocorrência de instabilidade distorcional causada por compressão centrada (Figura 1.10a) e momento fletor (Figura 1.10b).

Figura 1.9 – Comparação da configuração da seção transversal após a ocorrência de: (a) instabilidade local; (b) instabilidade distorcional



Fonte: adaptado de Silva, Pierin e Silva (2014).

Figura 1.10 – Configuração da seção transversal após a ocorrência de instabilidade distorcional causada por: (a) compressão centrada; (b) momento fletor



Fonte: adaptado de Silva e Silva (2008).

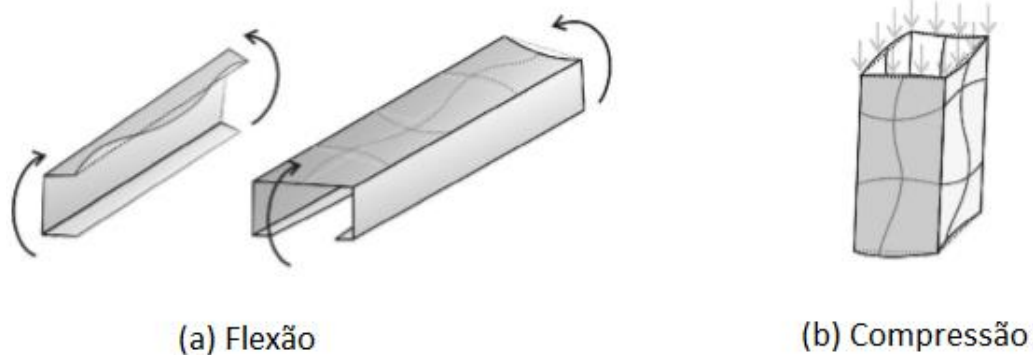
Segundo Silva e Silva (2008), o fenômeno de instabilidade distorcional é mais comumente observado nos seguintes casos:

- a) perfis com aços de alta resistência;
- b) perfis com enrijecedores de borda com largura reduzida;
- c) perfis com relação largura da mesa/largura da alma elevada;
- d) elementos pouco esbeltos (baixa relação largura/espessura).

A ocorrência de flambagem por distorção está relacionada à geometria da seção transversal do perfil e ao comprimento longitudinal da barra comprimida ou fletida, os quais influenciam o valor do comprimento crítico de flambagem distorcional. Quando este comprimento crítico apresenta um valor elevado, a flambagem global ocorre antes da flambagem distorcional (SILVA; SILVA, 2008).

A instabilidade local, por sua vez, caracteriza-se pela ocorrência de flambagens locais dos elementos planos que constituem a seção transversal do perfil quando este é solicitado à compressão axial, flexo-compressão ou cisalhamento (SILVA; SILVA, 2008), conforme ilustrado na Figura 1.11. A instabilidade local é assim denominada pelo fato de os deslocamentos causados pela flambagem terem a mesma ordem de grandeza das dimensões da seção transversal, diferentemente do que ocorre nos outros tipos de instabilidade, situações em que a ordem de grandeza dos deslocamentos fica próxima do comprimento do elemento (RHODES; SHANMUGAM, 2003).

Figura 1.11 – Instabilidade local causada por: (a) flexão; (b) compressão



Fonte: adaptado de Silva e Silva (2008).

Diferentemente do que ocorre na flambagem global, na flambagem local não ocorre a ruína do perfil, é verificada apenas uma redução da rigidez global à deformação. Desta forma, as chapas de aço ainda apresentam considerável capacidade resistente mesmo após a ocorrência de flambagem local (SILVA; PIERIN; SILVA, 2014). A ruptura só ocorre quando as fibras comprimidas atingem o valor da tensão de escoamento do aço, o que evidencia que o correto dimensionamento desses elementos requer a realização de análises não lineares (SILVA; SILVA, 2008).

Dentre os métodos numéricos usualmente empregados para a análise de estabilidade de perfis de parede fina, destacam-se a Teoria Generalizada de Vigas (DAVIES; LEACH, 1994; DAVIES; LEACH; HEINZ, 1994; ABAMBRES; CAMOTIM; SILVESTRE, 2013; BEBIANO; CAMOTIM; SILVESTRE, 2013; ABAMBRES et al., 2014), o Método das Faixas Finitas (LI; SCHAFER, 2010; LI; SCHAFER, 2013; LI et al., 2014; DJELIL et al., 2018) e o Método dos Elementos Finitos (NGUYEN et al., 2013; YAO; QUACH; YOUNG, 2019; MUTAFI et al., 2019).

Na Teoria Generalizada de Vigas, o campo de deslocamentos é expresso como uma combinação linear dos modos de deformação da seção transversal, cujas amplitudes variam continuamente ao longo do comprimento do elemento. A Teoria Generalizada de Vigas é considerada uma abordagem eficiente e versátil para a análise de perfis de parede fina, no entanto, seu campo de aplicação é limitado (elementos de parede fina prismáticos, retos e não perfurados) (ABAMBRES et al., 2014).

O Método das Faixas Finitas, por sua vez, é o método mais empregado para a previsão de ocorrência de flambagem elástica em perfis formados a frio. Este pode ser considerado uma variante do Método dos Elementos Finitos tradicional, sendo o perfil discretizado em uma série de faixas longitudinais (LI; SCHAFER, 2010).

Análises numéricas de perfis formados a frio também vêm sendo objeto de interesse de pesquisa no SET, os quais podem ser citados os trabalhos de Chodraui (2006), Soares, Paccola e Coda (2019, 2021) e Carvalho, Coda e Sanches (2020).

Chodraui (2006) realizou análises experimentais em perfis de aço formados a frio usualmente empregados no Brasil (perfis U, U enrijecidos e cantoneiras simples e duplas). O autor também utilizou uma estratégia de análise numérica não linear considerando os efeitos das imperfeições geométricas globais e localizadas, bem como das tensões residuais, com o objetivo de obter teoricamente um valor confiável para a força normal de compressão resistente das barras. Os resultados obtidos através do estudo permitiram constatar a viabilidade do emprego das atuais curvas de resistência à compressão de perfis formados a frio adotadas pela norma brasileira.

Já Soares, Paccola e Coda (2019) propuseram uma formulação baseada no Método dos Elementos Finitos Posicional e vetores generalizados para a análise de estabilidade de perfis de parede fina (perfis sujeitos a carregamento centrado com ou sem imperfeições). Os perfis foram modelados com elementos finitos de casca e os problemas advindos das conexões entre as parcelas não coplanares dos perfis foram resolvidos através de uma estratégia de penalização considerando a rigidez do material da conexão. O estudo adotou a técnica de decomposição da matriz hessiana para a determinação das cargas de flambagem (autovalores) e dos modos de instabilidade (autovetores). As análises foram realizadas em problemas envolvendo tanto pequenos deslocamentos sem imperfeições (flambagem de Euler) e com imperfeições (flambagem de Koiter), quanto grandes deslocamentos em problemas de pontos limites (também denominados pontos de bifurcação). Foi observado que a partir do método proposto foi possível prever de forma precisa a perda de estabilidade de elementos estruturais de geometria simples ou complexa.

Continuando a linha de pesquisa, Soares, Paccola e Coda (2021) desenvolveram uma formulação pelo Método dos Elementos Finitos Posicional utilizando elementos finitos de casca para a análise de estabilidade de perfis de parede fina. A formulação proposta foi implementada juntamente com o Método do Comprimento de Arco para a análise das trajetórias de equilíbrio passando por pontos de bifurcação, sendo consideradas também nas análises forças não conservativas.

Outro trabalho do SET relativo ao assunto foi o de Carvalho, Coda e Sanches (2020). No trabalho, o Método dos Elementos Finitos Posicional foi empregado na análise bidimensional do processo de conformação a frio de perfis metálicos. Foram utilizados elementos finitos de chapa, formulação de plasticidade para grandes deformações baseada na

decomposição de Kröner-Lee e consideração de contato através de multiplicadores de Lagrange e discretização nó-a-segmento.

Valem ser destacadas também as pesquisas de Weng e White (1990a, 1990b), Quach, Teng e Chung (2006), Rossi, Habraken e Pascon (2007) e Howlader, Marik e Jandera (2016) a respeito de tensões residuais. Weng e White (1990a, 1990b) realizaram investigações experimentais da conformação a frio de perfis cantoneira de parede espessa para várias configurações: raios internos de dobra de 1,5, 2,5, 3,5 e 5,5 in; ângulos entre as abas de 90°, 120° e 150°; aços HY-80 e HY-100; e chapas com espessuras de 1 e 1,5 in. Nesses experimentos foi realizada a medição das tensões residuais tanto ao longo da superfície quanto ao longo da espessura das chapas, sendo os resultados experimentais comparados com os valores esperados por equações presentes na literatura. Quach, Teng e Chung (2006) utilizaram os resultados experimentais de Weng e White (1990a, 1990b) para a validação da formulação proposta em seu trabalho, a qual é baseada no Método dos Elementos Finitos e considera analiticamente as tensões residuais provenientes do enrolamento e desenrolamento das chapas. Posteriormente, Rossi, Habraken e Pascon (2007) propuseram alterações nas equações propostas por Quach, Teng e Chung (2006) para a consideração de encruamento não linear. Por fim, Howlader, Marik e Jandera (2016) propuseram uma formulação para a determinação de forma analítica das tensões residuais e das deformações plásticas decorrentes do processo de conformação a frio.

1.4.2 Análise não linear pelo Método dos Elementos Finitos

Em análises de estruturas pelo Método dos Elementos Finitos, sempre que os deslocamentos não corresponderem a uma função linear das forças aplicadas, está se realizando uma análise não linear. As não linearidades em estruturas são divididas basicamente em três tipos:

- a) não linearidade física, que corresponde ao comportamento não linear das leis constitutivas dos materiais envolvidos;
- b) não linearidade geométrica, associada à busca do equilíbrio na configuração deslocada da estrutura (equilíbrio exato);
- c) não linearidade de contato.

Em análises de problemas não lineares pelo Método dos Elementos Finitos, podem ser empregadas duas abordagens em função do sistema de referência adotado:

- a) Lagrangeana: as variáveis estáticas e cinemáticas são referenciadas segundo a configuração inicial;
- b) Euleriana: as variáveis estáticas e cinemáticas são referenciadas segundo a configuração atual.

A descrição Lagrangeana (também denominada de descrição material) normalmente se mostra mais natural e eficaz do que a Euleriana na análise de sólidos e estruturas; por sua vez, a descrição Euleriana (também denominada de descrição espacial) é muito utilizada na análise de problemas da mecânica dos fluidos, onde a atenção se concentra no movimento do material por meio de um volume de controle estacionário (BATHE, 2014; BONET; WOOD, 2008).

A abordagem Lagrangeana, por sua vez, pode ser subdividida em:

- a) Lagrangeana total: todas as variáveis estáticas e cinemáticas são referenciadas segundo a configuração inicial (indeformada);
- b) Lagrangeana atualizada: as variáveis estáticas e cinemáticas são referenciadas segundo a última configuração calculada.

Segundo De Borst et al. (2012), na maioria das aplicações não são observadas muitas diferenças entre os resultados obtidos com as formulações Lagrangeanas total e atualizada: quando apenas não linearidades geométricas são consideradas, as diferenças são da ordem de poucos por cento; quando não linearidades físicas são também consideradas, as diferenças aumentam, normalmente não superando 5%. As diferenças são maiores em problemas que envolvem plasticidade e dano, casos onde há uma dependência do histórico de aplicação das forças. Quando há presença de não linearidades físicas, a atualização de todas as variáveis para a configuração atual deixa de ser uma desvantagem na formulação Lagrangeana atualizada, pois nesse caso o histórico das tensões deve ser conhecido mesmo na formulação Lagrangeana total.

Um estudo comparativo entre as duas abordagens pode ser encontrado no trabalho de Bathe, Ramm e Wilson (1975). Neste estudo, foram desenvolvidas formulações incrementais para análises estáticas e dinâmicas e estas foram implementadas em um programa de análise estrutural pelo Método dos Elementos Finitos. As formulações foram deduzidas considerando grandes deslocamentos, grandes deformações e não linearidades físicas. O trabalho comparou as formulações Lagrangeana total e Lagrangeana atualizada em função da eficiência numérica, sendo observados os seguintes resultados:

- a) as diferenças entre os resultados são pequenas em problemas com grandes deslocamentos mas pequenas deformações;

- b) o cálculo das variáveis dos elementos finitos (locais) é mais rápido na formulação Lagrangeana atualizada;
- c) pelo fato de as variáveis serem referenciadas na configuração inicial na formulação Lagrangeana total, algumas variáveis podem ser calculadas apenas uma única vez e terem seus valores armazenados;
- d) a implementação de modelos constitutivos não lineares é mais fácil em programas que utilizam a formulação Lagrangeana total.

Apesar de ser um trabalho antigo, a conclusão final do estudo comparativo continua atual e indica que ambas as formulações se mostram eficientes em programas gerais de análise não linear pelo Método dos Elementos Finitos, sendo que a formulação mais eficaz é dependente do *design* do programa e das constantes dos materiais (BATHE; RAMM; WILSON, 1975).

Uma outra forma de descrição Lagrangeana atualizada é a corrotacional, a qual consiste em se atribuir um sistema de coordenadas local a cada elemento finito, de forma que este referencial rotaciona com o elemento. A origem desta formulação remonta aos trabalhos de Belytschko e Glaum (1979), Belytschko e Hsieh (1973) e Wempner (1969). Outro trabalho que pode ser considerado pioneiro é o de Argyris et al. (1979), uma vez que o “método natural” descrito no estudo possui muitas semelhanças com a abordagem corrotacional. Apesar de esta formulação ser mais adequada para problemas que apresentam grandes deslocamentos e rotações e pequenas deformações, esta foi estendida para elementos contínuos bidimensionais em problemas com grandes deformações por Crisfield e Moita (1996), sendo posteriormente estendida para elementos contínuos tridimensionais por Moita e Crisfield (1996) (DE BORST et al., 2012).

Além das não linearidades geométrica e física, pode existir também a não linearidade decorrente da mudança das condições de contorno durante o movimento do corpo analisado (problemas de contato). Este tipo de não linearidade será descrito com mais detalhes no capítulo 6.

Bathe (2014) ressalta a importância da identificação do tipo de análise não linear correspondente ao problema analisado, norteador consequentemente a formulação a ser adotada para a descrição física do problema. O autor ainda afirma que, embora seja possível utilizar sempre uma formulação mais geral (formulação para grandes deslocamentos e grandes deformações), a adoção de uma formulação menos geral pode ser computacionalmente mais eficiente.

1.4.3 Método dos Elementos Finitos Posicional

Neste trabalho as análises do processo de conformação a frio (por dobragem) e de flambagem de perfis metálicos foram realizadas utilizando o Método dos Elementos Finitos Posicional. Esta variação do Método dos Elementos Finitos tem como origem o trabalho de Bonet et al. (2000), onde a formulação proposta foi utilizada para a análise de estruturas de membrana infláveis sujeitas a carregamento externo (estruturas pneumáticas). Posteriormente, a formulação foi adaptada por Coda (2003) para a resolução primeiramente de problemas não lineares de estruturas planas. A formulação diferencia-se do Método dos Elementos Finitos tradicional por meio da adoção das posições nodais ao invés dos deslocamentos para a definição da cinemática dos corpos.

A formulação segue uma descrição Lagrangeana total, ou seja, as variáveis são referenciadas segundo um sistema de coordenadas fixo durante toda a análise, no caso a configuração não deformada e não deslocada do corpo. A principal vantagem da descrição Lagrangeana total em relação às descrições Lagrangeana atualizada e corrotacional está na definição das medidas de deformação e tensão, pois não é necessário o emprego de taxas de rotação finitas para a determinação dos níveis atuais de tensão e para a atualização das rotações finitas aplicadas em elementos finitos de casca e barra geral.

Na escrita dos mapeamentos em elementos finitos que utilizam deslocamentos como graus de liberdade, utiliza-se a regra da cadeia a partir da configuração inicial de elementos isoparamétricos, o que muitas vezes acaba dificultando o desenvolvimento de elementos finitos inicialmente curvos (BONET; WOOD, 2008). Como no Método dos Elementos Finitos Posicional a regra da cadeia é realizada numericamente (através dos mapeamentos inicial e atual), isto torna a formulação simples para a análise de problemas que apresentam grandes deslocamentos e rotações. Além disso, isto também possibilita a modelagem de elementos finitos de sólido inicialmente curvos, bem como a modelagem de elementos de casca e de barra geral sem a necessidade de descrição de giros finitos, pois a aplicação de vetores generalizados resulta naturalmente. A formulação detalhada do método para diversas aplicações básicas pode ser encontrada em Coda (2018).

O Método dos Elementos Finitos Posicional vem sendo utilizado no GMEC (Grupo de Mecânica Computacional do SET) desde 2003, tendo sido aprimorado e estudado em diversas aplicações desde então. Dentre algumas das aplicações e aprimoramentos estudados ao longo dos anos, podem ser citados: impacto entre estruturas reticuladas (GRECO, 2004); problemas dinâmicos utilizando elementos finitos de chapa (MARQUES, 2006); problemas não lineares

geométricos utilizando elementos finitos de pórtico plano e sólido (MACIEL, 2008); impacto de estruturas considerando efeitos térmicos (CARRAZEDO, 2009); modelagem de ligação deslizante entre elementos finitos de chapa (RODRÍGUEZ, 2017); modelagem de músculos esqueléticos (RAMIREZ, 2018); e análise de problemas com não linearidades geométrica, física e de contato utilizando elementos finitos de chapa (CARVALHO, 2019).

1.4.4 Modelos constitutivos hiperelásticos

Muitas pesquisas relativas a modelos constitutivos hiperelásticos dedicaram-se ao estudo de materiais com características semelhantes a borrachas. Atentando-se ao fato de que este tipo de material normalmente apresenta respostas diferentes para deformações volumétricas e deformações desviadoras, Flory (1961) propôs a decomposição multiplicativa do gradiente da função mudança de configuração. Isto possibilita a decomposição aditiva da função da energia específica de deformação (escalar) em parcelas volumétrica (preservação da forma) e isocórica (preservação do volume, porém com alteração da forma) (STEINMANN; HOSSAIN; POSSART, 2012). Esta decomposição é amplamente utilizada na construção de relações constitutivas hiperelásticas, pois permite estender os modelos formulados para o caso de incompressibilidade para o caso de quase incompressibilidade (HARTMANN; NEFF, 2003).

Dentre os principais modelos hiperelásticos da literatura, podem ser citados os modelos de Mooney, Neo-Hookeano, Mooney-Rivlin, Rivlin-Saunders, Ogden, Yeoh, Arruda-Boyce e Hartmann-Neff (RAMIREZ, 2018).

Mooney (1940) desenvolveu seu modelo através de estudos de borrachas sujeitas a grandes deformações elásticas. Em seu trabalho, o autor deduziu uma expressão geral para a energia específica de deformação escrita em função dos alongamentos principais para a descrição do comportamento de materiais superelásticos¹ homogêneos e livres de histerese². O modelo é amplamente empregado para a modelagem de borrachas sujeitas a deformações moderadas (MARCKMANN; VERRON, 2006).

Posteriormente, Rivlin (1948a, 1948b) estendeu a formulação de Mooney (1940) ao escrever a expressão da energia específica de deformação como uma série polinomial, modelo

¹ Mooney (1940) define materiais superelásticos como sendo aqueles que possuem as seguintes propriedades: são isotrópicos; suas deformações são isométricas, ou seja, ocorrem sem alteração de volume; a tensão de cisalhamento em cisalhamento simples em qualquer plano isotrópico é proporcional à força cortante.

² Histerese refere-se ao atraso da resposta de um sistema quando submetido a alguma solicitação externa.

que ficou conhecido como modelo de Mooney-Rivlin. Alguns anos antes, Treloar (1943) havia proposto uma expressão para a energia específica de deformação em função do primeiro invariante de deformação, modelo conhecido como Neo-Hookeano, modelo que é na realidade um caso particular do modelo de Mooney-Rivlin.

Dando prosseguimento aos estudos de borrachas, Rivlin e Saunders (1951) propuseram uma formulação baseada na expressão deduzida por Mooney (1940), porém com a energia específica de deformação escrita em função dos invariantes da parcela isocórica do tensor de deformação para a descrição do comportamento mecânico de borrachas vulcanizadas.

Ogden (1972), por sua vez, propôs um modelo baseado nos alongamentos principais e constantes dependentes do material analisado. Segundo Steinmann, Hossain e Possart (2012), devido à sua formulação polinomial modular baseada nos alongamentos principais, o modelo de Ogden mostra-se um dos mais proeminentes modelos fenomenológicos para a modelagem de materiais com comportamento semelhante a borrachas. Ogden (1972) também propôs em seu trabalho um caso particular de sua formulação composto por 6 parâmetros, sendo este um dos modelos mais utilizados na análise de problemas envolvendo grandes deformações, embora existam dificuldades para a determinação das constantes do material (MARCKMANN; VERRON, 2006).

Outro modelo constitutivo hiperelástico muito utilizado é o modelo proposto por Yeoh (1990), formulação em que a energia específica de deformação é escrita em função do primeiro invariante do tensor de deformação. Também muito difundido é o modelo micromecânico proposto por Arruda e Boyce (1993), o qual é um caso particular do modelo de Yeoh (TOBAJAS; IBARTZ; GRACIA, 2016). O modelo de Arruda-Boyce, também conhecido como modelo constitutivo de 8 cadeias, propõe uma distribuição de cadeias sobre 8 direções, as quais são correspondentes aos vértices de um cubo inscrito em uma esfera (MARCKMANN; VERRON, 2006).

Diversos estudos comparativos de modelos constitutivos hiperelásticos foram realizados ao longo dos anos, dentre os quais podem ser citados os trabalhos de Hartmann e Neff (2003), Marckmann e Verron (2006), Steinmann, Hossain e Possart (2012) e Tobajas, Ibartz e Gracia (2016). Além de realizar um estudo comparativo, Hartmann e Neff (2003) também propuseram em seu trabalho novas relações hiperelásticas baseadas nos invariantes principais para a descrição do comportamento de materiais isotrópicos quase incompressíveis.

1.4.5 Modelos constitutivos elasto-plásticos

Segundo Hosford (2013), a teoria da plasticidade possui três tipos de abordagens: a baseada na teoria do contínuo; a formulada a partir dos mecanismos cristalográficos de deslizamento e geminação³ para o entendimento do comportamento do contínuo; e a preocupada em explicar como ocorrem os fenômenos de deslizamento e geminação. A abordagem mais amplamente empregada é a fundamentada na teoria do contínuo, a qual é baseada nos critérios de plastificação.

As primeiras pesquisas relativas a essa abordagem remontam aos estudos de Tresca (1864, 1867), onde foi verificado a partir de investigações experimentais de materiais dúcteis que o escoamento ocorria quando a tensão máxima de cisalhamento atingia uma tensão crítica. Posteriormente, Mises (1913) propôs seu critério de plastificação, o qual é amplamente utilizado até mesmo nos dias atuais e ficou conhecido como critério de von Mises. Vale ressaltar, no entanto, que o mesmo critério havia sido publicado previamente por Huber (1904) em polonês e que as condições gerais do critério haviam sido escritas anteriormente por Maxwell em uma carta não publicada. Nadai (1937) verificou posteriormente que no critério de von Mises o material passa a escoar quando é atingida uma tensão de cisalhamento crítica nos planos octaédricos. O primeiro critério de plastificação anisótropo foi proposto por Hill (1948), surgindo após algumas décadas os critérios de plastificação não quadráticos propostos nos trabalhos de Hosford (1972) e Hill (1979). Na mesma época, Hosford (1979) também propôs uma modificação não quadrática do critério proposto por Hill (1948) (HOSFORD, 2013).

Levando em consideração as diferenças físicas entre as deformações elásticas e plásticas (as elásticas são causadas por deformações das próprias partículas do material, enquanto as plásticas são causadas por deslizamentos mútuos entre as partículas), a elasto-plasticidade é baseada na decomposição da deformação total em suas parcelas elástica e plástica (HASHIGUCHI, 2019). Uma das formas de decomposição mais difundidas na literatura é a decomposição aditiva da deformação, a qual considera que a deformação total é dada pela soma das parcelas elástica e plástica. Este tipo de decomposição foi proposto por Green e Naghdi (1965), os quais formularam em seu trabalho uma teoria geral deduzida a partir das equações da termodinâmica para a resolução de problemas elasto-plásticos em meios contínuos. Dentre os inúmeros estudos que utilizaram a decomposição aditiva da deformação, podem ser citados

³ Em mineralogia, geminação refere-se ao agrupamento de cristais da mesma espécie mineral que não se desenvolveram paralelamente.

os trabalhos de Ulz (2009) e Soyarslan e Tekkaya (2010). No âmbito do GMEC, esta decomposição também foi empregada nos trabalhos de Pascon e Coda (2013) e Coda e Paccola (2014).

No entanto, Eterovic e Bathe (1991) demonstraram que a adoção da decomposição aditiva da deformação na formulação de equações constitutivas para análises plásticas com deformações finitas (grandes deformações) pode trazer algumas consequências indesejadas. Foi verificado no estudo que a adoção da decomposição aditiva gera na maioria dos casos uma dependência entre a resposta incremental elástica e as deformações plásticas anteriores. No trabalho também foram deduzidas expressões explícitas para quantificar este efeito. Como este efeito não é muito acentuado quando as deformações não apresentam valores muito elevados, a decomposição aditiva da deformação é comumente limitada a análises de problemas no regime de pequenas deformações.

Uma decomposição alternativa foi proposta por Kröner (1959). Neste trabalho, foi proposta a decomposição multiplicativa do gradiente da função mudança de configuração, de forma que este seja dado pelo produto matricial das parcelas elástica e plástica. Lee (1968) também utilizou este tipo de decomposição. Em seu trabalho, o autor propôs alterações na cinemática da teoria clássica de plasticidade, possibilitando a análise de problemas que apresentam deformações elásticas e plásticas finitas. Devido à contribuição de ambos os autores, a decomposição multiplicativa do gradiente da função mudança de configuração é comumente denominada de decomposição de Kröner-Lee na literatura. Hashiguchi (2019) ressalta que a mudança de configuração e sua taxa podem ser descritas de forma exata pelo gradiente da função mudança de configuração, com isso, leis constitutivas elasto-plásticas exatas devem ser deduzidas a partir da decomposição multiplicativa do mesmo em parcelas elástica e plástica. Dentre os vários trabalhos que utilizaram este tipo de decomposição, podem ser citados os estudos de Gurtin e Anand (2005) e Areias (2021). Esta decomposição também foi utilizada em conjunto com o Método dos Elementos Finitos Posicional em alguns trabalhos, os quais podem ser citados os estudos de Pascon e Coda (2015), Pascon (2018), Carvalho (2019) e Carvalho, Coda e Sanches (2020). Uma revisão abrangente de leis constitutivas plásticas baseadas na decomposição multiplicativa do gradiente da função mudança de configuração (Kröner-Lee, Lee-Liu, Mandel e Kratochvil), bem como suas formulações exatas para a descrição de deformações e rotações finitas, pode ser encontrada em Hashiguchi (2019).

Além das decomposições descritas anteriormente, também podem ser realizadas outras formas de decomposição. Como exemplo pode ser citada a decomposição aditiva no espaço

logarítmico de deformação proposta por Miehe, Göktepe e Méndez Diez (2009), a qual foi empregada na análise de polímeros vítreos amorfos.

Um outro modelo elasto-plástico alternativo para grandes deformações foi proposto recentemente por Coda (2021, 2022). O modelo (o qual foi adotado neste trabalho) não segue formulações usuais de plasticidade, a formulação é baseada na decomposição de Flory (1961) e foi empregada com sucesso para a modelagem de núcleos macios de painéis sanduiche.

1.4.6 Mecânica do Contato

As primeiras pesquisas relativas à Mecânica do Contato clássica remontam aos trabalhos de Hertz (1881) e Boussinesq (1885) (POPOV; HEß; WILLERT, 2019). Devido à dificuldade de resolução analítica de problemas de contato, com o advento dos computadores este tipo de problema passou a ser resolvido cada vez mais computacionalmente, principalmente através do Método dos Elementos Finitos. Com isso, as pesquisas relativas à Mecânica do Contato passaram a dar um enfoque cada vez maior ao desenvolvimento de novos algoritmos para a consideração do contato. Um dos códigos pioneiros para a resolução de problemas de contato no regime de grandes deformações foi o *HEMP-hydrocode* desenvolvido por Wilkins (1964), sendo seguido pelos programas *NIKE2D* (HALLQUIST, 1979), *DYNA2D* (HALLQUIST, 1982a), *DYNA3D* (HALLQUIST, 1982b) e *NIKE3D* (HALLQUIST, 1984), os quais foram desenvolvidos no *Lawrence Livermore National Laboratory* (WRIGGERS, 2002).

A resolução numérica de problemas de contato requer a identificação da interface de contato entre os corpos envolvidos no problema analisado. Para realizar tal tarefa, é necessária a discretização da interface de contato por meio de elementos de contato. Dentre as principais formas de discretização, podem ser citadas as discretizações nó-a-nó, nó-a-segmeneto e *mortar*.

A discretização mais simples é a nó-a-nó, abordagem que utiliza equações de restrição e equações constitutivas da interface de contato com base exclusivamente nodal (WRIGGERS, 2002). Uma das vantagens desta abordagem é que pressões de contato constantes são transferidas de maneira exata ao longo da interface de contato (JIN; SOHN; IM, 2016). Por outro lado, ela é limitada a problemas que apresentam pequenos deslizamentos, onde os nós de contato só podem deslizar em torno de suas posições originais (XING et al., 2019). Além disso, ela também é limitada a problemas geometricamente lineares e a casos em que há conformidade entre as malhas ao longo das superfícies de contato (ZAVARISE; DE LORENZIS, 2009). Esta forma de discretização foi proposta primeiramente por Francavilla e Zienkiewicz (1985) e foi

adotada em diversos trabalhos, dentre os quais podem ser citados os estudos de Jin, Sohn e Im (2016), Xing et al. (2019) e Feulvarch, Houx e Geuffrard (2019).

A discretização nó-a-segmento/nó-a-superfície (nó-a-segmento no caso bidimensional e nó-a-superfície no caso tridimensional), por sua vez, é a abordagem mais empregada em problemas de contato entre superfícies com malhas não coincidentes e sujeitas a grandes deslocamentos. Por ser simples, flexível e possuir claro significado físico, esta discretização é frequentemente implementada em programas de análise pelo Método dos Elementos Finitos (ZAVARISE; DE LORENZIS, 2009). Nesta abordagem, uma das superfícies de contato é discretizada em nós, denominados nós projéteis, e a outra superfície em segmentos/superfícies, denominados segmentos/superfícies alvo. Esta abordagem foi primeiramente proposta por Hughes et al. (1976), sendo posteriormente estendida para casos mais gerais nos trabalhos de Bathe e Chaudhary (1985), Simo, Wriggers e Taylor (1985), Hallquist, Goudreau e Benson (1985), Wriggers e Simo (1985), Wriggers, Van e Stein (1990) e Papadopoulos e Taylor (1992) (ZAVARISE; DE LORENZIS, 2009). A discretização nó-a-segmento/nó-a-superfície foi utilizada em vários trabalhos, podendo ser citados como exemplos os estudos de Stupkiewicz (2001) e Paggi e Wriggers (2016). Uma revisão detalhada da formulação clássica do algoritmo de nó-a-segmento para problemas bidimensionais sem atrito pode ser encontrada em Zavarise e De Lorenzis (2009).

Uma outra forma de discretização mais recente e que vem sendo amplamente empregada é a *mortar*. Tal como no caso da estratégia de nó-a-segmento/nó-a-superfície, esta abordagem consiste na imposição de restrições de contato em problemas onde as malhas não são coincidentes. A discretização é empregada em conjunto com o método de multiplicadores de Lagrange através da utilização de funções de forma especiais para a discretização do multiplicador de Lagrange na interface de contato (WRIGGERS, 2002). A discretização *mortar* foi proposta primeiramente por Bernardi, Debit e Maday (1990), sendo posteriormente reformulada com os termos “*mortars*” no trabalho de Bernardi, Maday e Patera (1994) e tomando sua forma final nos trabalhos de Belgacem (1993) e Belgacem e Maday (1994) (BELGACEM; HILD; LABORDE, 1998). Um estudo comparativo entre as discretizações nó-a-segmento e *mortar* aplicadas na análise de problemas estáticos e dinâmicos de contato envolvendo grandes deformações pode ser encontrado em Hesch e Betsch (2006).

Uma atenção especial deve ser dada a problemas de contato em análises dinâmicas. Esses problemas apresentam uma elevada complexidade devido a mudanças bruscas da aceleração, velocidade e tensões, além da elevada não linearidade dos deslocamentos nas superfícies de contato (HU, 1997). O primeiro trabalho acerca do assunto é atribuído a Hughes

et al. (1976). Posteriormente, Chaudhary e Bathe (1986) propuseram um método para a resolução de problemas de contato entre dois ou mais corpos tridimensionais. Os problemas dinâmicos foram resolvidos através de uma combinação do método de multiplicadores de Lagrange com o integrador temporal de Newmark (NEWMARK, 1959), porém, foram adotados valores diferentes dos tradicionais para os coeficientes livres de Newmark ($\beta = 0,5$ e $\gamma = 0,5$). As análises dos problemas dinâmicos obtiveram bons resultados para passos de tempo pequenos. Hu (1997) apresentou um método semelhante ao proposto por Chaudhary e Bathe (1986), no entanto, a modificação do algoritmo de integração temporal de Newmark foi realizada através da adoção dos valores $\beta = 1,0$ e $\gamma = 1,5$. O método mostrou-se eficiente na análise de problemas de contato dinâmico entre corpos elásticos, apresentando as vantagens de ser extremamente simples e fornecer resultados estáveis quando o passo de tempo é pequeno.

Muitas revisões de técnicas de resolução de problemas de contato podem ser encontradas na literatura, dentre as quais podem ser citadas: revisão da Mecânica do Contato considerando elasto-plasticidade (GHAEDNIA et al., 2017); breve revisão das teorias mais importantes para a resolução de problemas de contato entre superfícies aleatoriamente rugosas (CARBONE; BOTTIGLIONE, 2011); e revisão das vantagens e limitações de vários métodos de resolução de problemas de contato envolvendo adesão (CIAVARELLA et al., 2019). Uma visão mais abrangente da Mecânica do Contato pode ser encontrada em Wriggers (2002), Piedade Neto (2009), Popov (2010) e Popov, Heß e Willert (2019).

2 CONCEITOS BÁSICOS DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS

Neste capítulo é feita uma breve revisão dos conceitos básicos da Mecânica dos Sólidos pertinentes às formulações adotadas no presente trabalho.

2.1 Cinemática

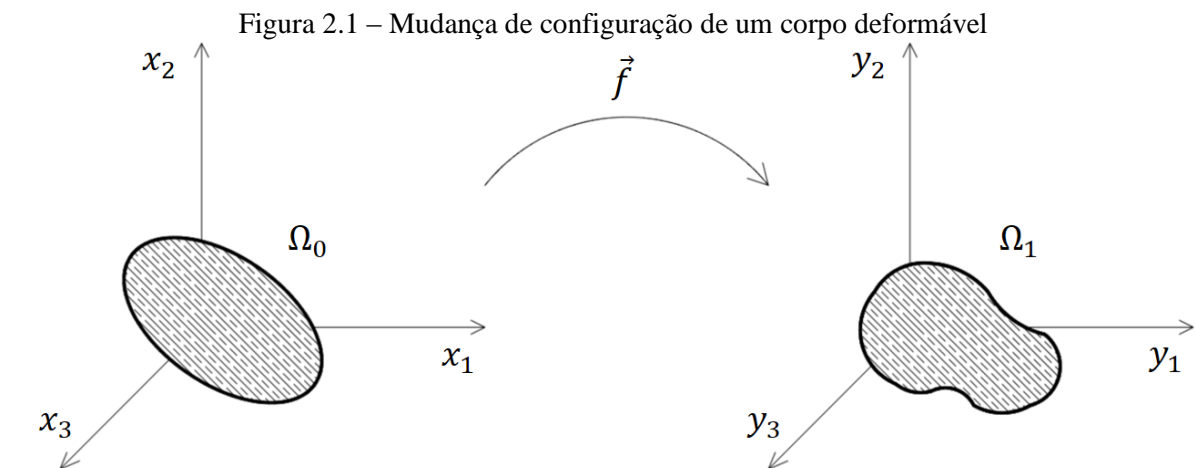
A Cinemática é o subcampo da Mecânica que estuda o movimento dos corpos sem se preocupar com sua causa. O estudo da cinemática dos corpos deformáveis (contínuos) é essencial para a análise de problemas que não estão restritos ao regime linear geométrico (pequenos deslocamentos, rotações e deformações).

2.1.1 Mudança de configuração e seu gradiente

Seja um corpo sujeito a uma alteração de sua configuração inicial (indeformada) para sua configuração atual, conforme mostrado na Figura 2.1. O corpo é considerado contínuo, sendo as posições iniciais e atuais das partículas que o compõem denotadas respectivamente pelos vetores \vec{x} e \vec{y} . O movimento do corpo pode ser expresso matematicamente pela função mudança de configuração (\vec{f}), a qual mapeia as posições atuais das partículas a partir das posições iniciais:

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}, t) \quad (4)$$

Para um valor fixo de tempo (t), \vec{f} representa o mapeamento entre as configuração indeformada e deformada do corpo.



Uma grandeza importante para a análise de problemas não restritos ao regime linear geométrico é o gradiente da função mudança de configuração (\mathbf{A}), uma vez que esta grandeza permite a descrição da posição relativa entre partículas vizinhas na configuração deformada em função da posição relativa na configuração indeformada. Esta grandeza é dada por:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} = \nabla \vec{f} \quad (5)$$

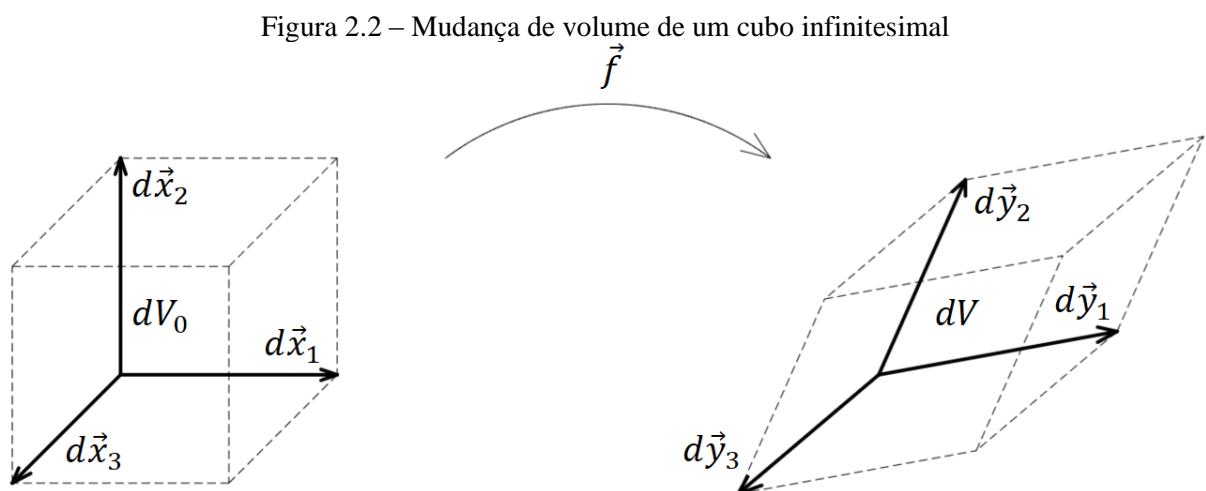
O gradiente da função mudança de configuração possui a propriedade de transformar vetores infinitesimais na configuração inicial em vetores infinitesimais na configuração atual:

$$d\vec{y} = \mathbf{A} \cdot d\vec{x} \quad (6)$$

2.1.2 Mudança de volume

A mudança de volume a que corpos estão sujeitos ao se deformar pode ser estudada a partir da mudança de configuração de um cubo infinitesimal, conforme mostrado na Figura 2.2. Na configuração inicial, sem perda da generalidade, o cubo possui arestas dadas pelos vetores $d\vec{x}_1$, $d\vec{x}_2$ e $d\vec{x}_3$ paralelos aos eixos cartesianos; já na configuração atual, as arestas são dadas pelos vetores $d\vec{y}_1$, $d\vec{y}_2$ e $d\vec{y}_3$. Lembrando-se do significado geométrico do produto misto, o volume inicial do cubo (dV_0) pode ser calculado como:

$$dV_0 = d\vec{x}_1 \cdot (d\vec{x}_2 \times d\vec{x}_3) = \det(d\vec{x}_1, d\vec{x}_2, d\vec{x}_3) \quad (7)$$



Fonte: autor.

Através do gradiente da função mudança de configuração, é possível calcular (conforme mostra a Equação (6)) os vetores $d\vec{y}_1$, $d\vec{y}_2$ e $d\vec{y}_3$ em função dos vetores $d\vec{x}_1$, $d\vec{x}_2$ e $d\vec{x}_3$ como:

$$\begin{cases} d\vec{y}_1 = \mathbf{A} \cdot d\vec{x}_1 \\ d\vec{y}_2 = \mathbf{A} \cdot d\vec{x}_2 \\ d\vec{y}_3 = \mathbf{A} \cdot d\vec{x}_3 \end{cases} \quad (8)$$

Com isso, o volume na configuração atual (dV) pode ser escrito como:

$$dV = \det(d\vec{y}_1, d\vec{y}_2, d\vec{y}_3) = \det(\mathbf{A}) \det(d\vec{x}_1, d\vec{x}_2, d\vec{x}_3) = J dV_0 \quad (9)$$

sendo J o jacobiano da transformação de coordenadas (ou simplesmente jacobiano), o qual corresponde à relação entre o volume atual e o volume inicial do corpo:

$$J = \det(\mathbf{A}) = \frac{dV}{dV_0} \quad (10)$$

Visto que o material não pode sofrer inversão ou desaparecer, existe a seguinte condição necessária para o valor do jacobiano:

$$J > 0 \quad (11)$$

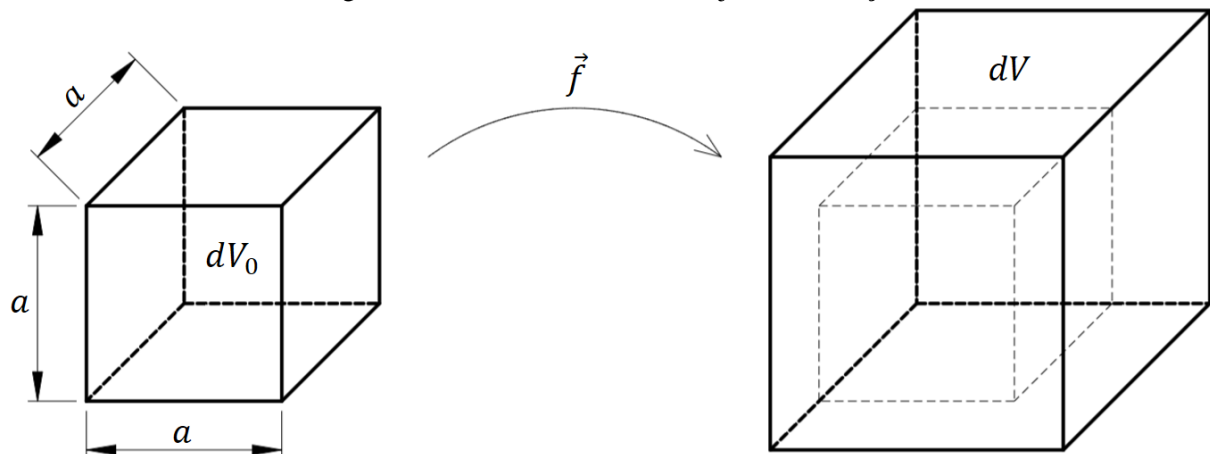
a qual deve ser sempre satisfeita pelos modelos constitutivos.

Com isso, a deformação volumétrica (ε_V) pode ser expressa como:

$$\varepsilon_V = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = J - 1 \quad (12)$$

A deformação volumétrica também pode ser expressa em função das componentes do tensor de deformação. Tendo em vista que não há variação de volume em caso de cisalhamento puro, a dedução pode ser feita através da análise da dilatação de um cubo infinitesimal de arestas a , assim como mostrado na Figura 2.3. Neste caso, as distorções são nulas e, como não há rotação, é admitido trabalhar-se com a medida linear de deformação nas direções principais (ε_{ij}^p).

Figura 2.3 – Cubo infinitesimal sujeito à dilatação



Fonte: autor.

O volume inicial do cubo é dado por:

$$dV_0 = a^3 \quad (13)$$

Já o volume final do cubo pode ser calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} dV &= [(1 + \varepsilon_{11}^p)a][(1 + \varepsilon_{22}^p)a][(1 + \varepsilon_{33}^p)a] \\ &= (1 + \varepsilon_{11}^p)(1 + \varepsilon_{22}^p)(1 + \varepsilon_{33}^p)a^3 \end{aligned} \quad (14)$$

Com isso, a deformação volumétrica pode ser expressa em termos das componentes do tensor de deformação como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_V &= \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{(1 + \varepsilon_{11}^p)(1 + \varepsilon_{22}^p)(1 + \varepsilon_{33}^p)a^3 - a^3}{a^3} \\ &= (1 + \varepsilon_{11}^p)(1 + \varepsilon_{22}^p)(1 + \varepsilon_{33}^p) - 1 \\ &= \varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{33}^p + \varepsilon_{11}^p\varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{11}^p\varepsilon_{33}^p + \varepsilon_{22}^p\varepsilon_{33}^p + \varepsilon_{11}^p\varepsilon_{22}^p\varepsilon_{33}^p \end{aligned} \quad (15)$$

Caso se esteja no regime de pequenas deformações, a expressão anterior fica simplificada como:

$$\varepsilon_V \cong \varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{33}^p = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = Tr(\varepsilon_{ij}) \quad (16)$$

ou seja, no regime de pequenas deformações, a deformação volumétrica é dada pelo traço do tensor de deformação (ε_{ij}), o qual corresponde ao 1º invariante do tensor de deformação.

Lembrando que na Lei de Hooke tridimensional as deformações normais no regime de pequenas deformações podem ser calculadas em função das componentes do tensor de tensões de Cauchy (σ_{ij}) e do módulo de elasticidade longitudinal (E) como:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{33}) \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \end{cases} \quad (17)$$

a Equação (16) pode ser desenvolvida como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_V &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33}) + \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{33}) \\ &\quad + \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \\ &= \frac{1}{E}[\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} - 2\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})] = \\ &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})(1 - 2\nu) = \frac{3}{E} \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})}{3} (1 - 2\nu) \end{aligned} \quad (18)$$

Considerando que a tensão média σ_m é dada por:

$$\sigma_m = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})}{3} \quad (19)$$

a Equação (18) assume a forma:

$$\varepsilon_V = \frac{3(1 - 2\nu)}{E} \sigma_m \quad (20)$$

ou isolando σ_m :

$$\sigma_m = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \varepsilon_V = K \varepsilon_V \quad (21)$$

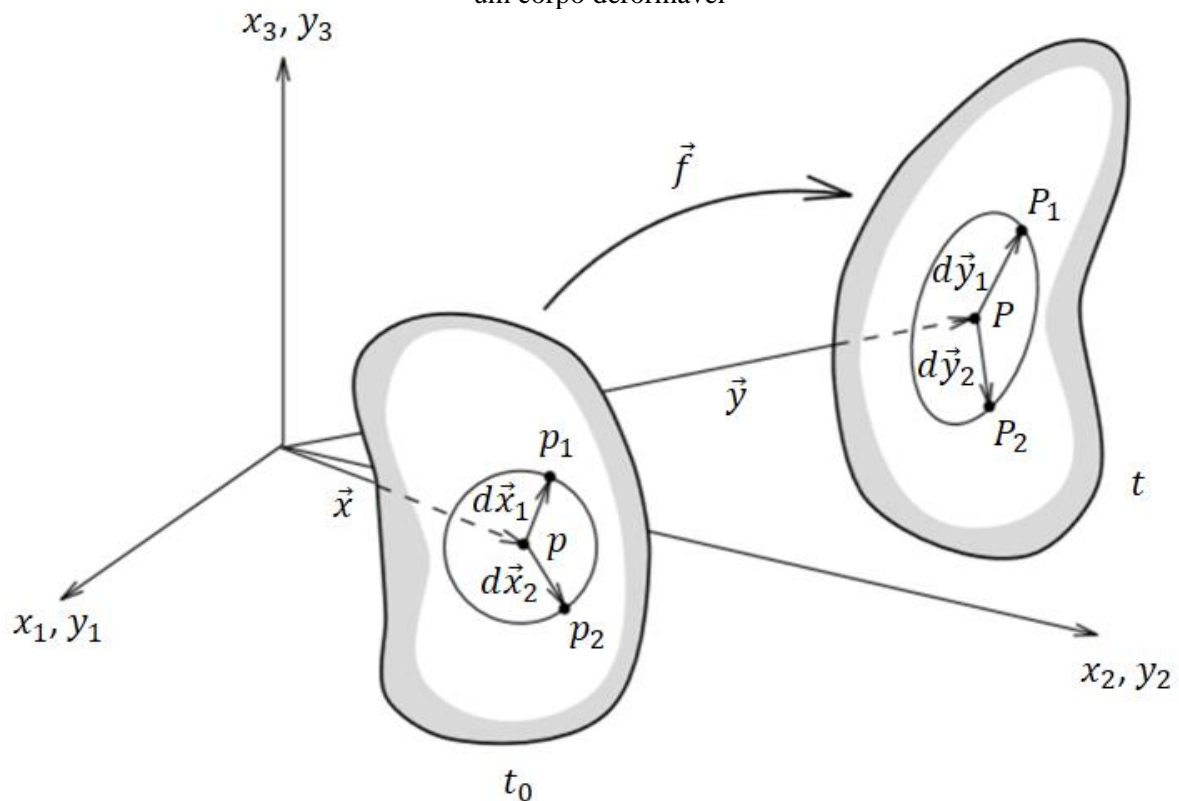
sendo K o chamado *Bulk modulus*, também denominado de módulo volumétrico. O *Bulk modulus* é uma constante elástica do material que exprime sua capacidade de resistir a mudanças de volume quando carregado uniformemente em todas as direções, ou seja, quando carregado hidrostáticamente. Quanto maior o valor do *Bulk modulus*, menos compressível o material.

Apesar de a cinemática dos corpos deformáveis ter sido descrita sem uma necessária relação com a ação que causa as mudanças de configuração e deformações, aproveitou-se para se definir o *Bulk modulus* em pequenas deformações, pois este será utilizado em sua forma geral na definição das leis constitutivas hiperelásticas de materiais desenvolvendo grandes deformações.

2.1.3 Alongamento de Cauchy-Green e deformação de Green-Lagrange

Sejam os vetores $d\vec{x}_1$ e $d\vec{x}_2$, os quais representam a distância entre uma partícula do corpo e dois pontos arbitrários na sua vizinhança no estado indeformado; e os vetores $d\vec{y}_1$ e $d\vec{y}_2$, os quais correspondem aos vetores $d\vec{x}_1$ e $d\vec{x}_2$ após a mudança de configuração, conforme mostrado na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Movimento geral na vizinhança de uma partícula durante a mudança de configuração de um corpo deformável



Fonte: adaptado de Bonet e Wood (2008).

Uma forma geral de medição de deformação consiste no cálculo da diferença entre os produtos escalares $d\vec{y}_1 \cdot d\vec{y}_2$ e $d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2$, visto que qualquer diferença entre os produtos escalares envolve tanto alterações dos alongamentos dos vetores quanto do ângulo formado entre eles. Tendo em vista que é possível relacionar os vetores no estado atual com os vetores no estado inicial através da Equação (6), obtém-se a seguinte relação entre os produtos escalares:

$$d\vec{y}_1 \cdot d\vec{y}_2 = (\mathbf{A} \cdot d\vec{x}_1) \cdot (\mathbf{A} \cdot d\vec{x}_2) = d\vec{x}_1 \cdot \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} \cdot d\vec{x}_2 = d\vec{x}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot d\vec{x}_2 \quad (22)$$

sendo \mathbf{C} o chamado tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, o qual é dado em função do gradiente da função mudança de configuração através da relação:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} \quad (23)$$

Considerando a propriedade matemática de que uma matriz multiplicada pela sua transposta resulta em uma matriz simétrica, conclui-se que o tensor \mathbf{C} é simétrico.

Com isso, a diferença entre os produtos escalares pode ser estimada através do seguinte desenvolvimento:

$$\frac{1}{2}(d\vec{y}_1 \cdot d\vec{y}_2 - d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2) = \frac{1}{2}(d\vec{x}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot d\vec{x}_2 - d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2) = d\vec{x}_1 \cdot \mathbb{E} \cdot d\vec{x}_2 \quad (24)$$

sendo \mathbb{E} a chamada deformação de Green, também conhecida como deformação de Green-Lagrange por se tratar de uma medida de deformação Lagrangeana. Ela é dada em função do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green através da seguinte expressão:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (25)$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade.

A deformação de Green é dita como sendo uma medida de deformação objetiva, pois resulta nula quando o corpo sofre movimentos de corpo rígido (translação e rotação). Este fato será mostrado no próximo item.

2.1.4 Decomposição polar

O movimento total de um corpo pode ser entendido como sendo composto por três parcelas: translação de corpo rígido, rotação de corpo rígido e deformação pura. Primeiramente analisa-se a influência da parcela de translação na deformação do corpo.

A função mudança de configuração que representa uma translação de corpo rígido possui a seguinte forma:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y} = \vec{x} + \vec{d} \quad (26)$$

sendo \vec{d} um vetor deslocamento constante.

O gradiente da função mudança de configuração nesta situação é dada por:

$$\mathbf{A} = \nabla \vec{f} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial(\vec{x} + \vec{d})}{\partial \vec{x}} = \mathbf{I} \quad (27)$$

Com isso, o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green é dado por:

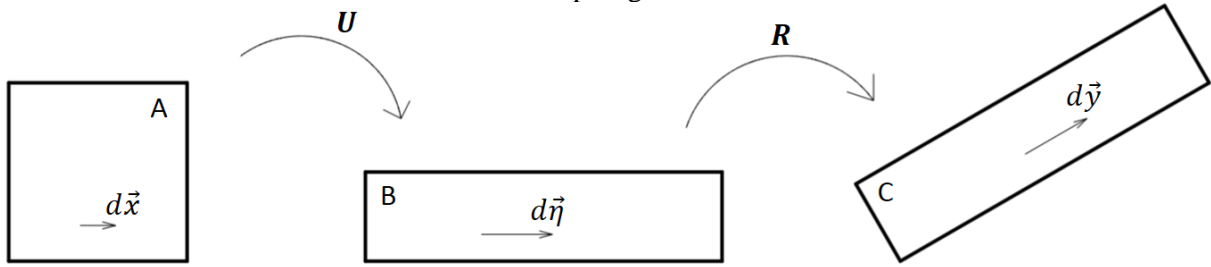
$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}^t \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \quad (28)$$

Finalmente, substituindo o valor encontrado na Equação (25), conclui-se que:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{I}) = 0 \quad (29)$$

Portanto, foi demonstrado que a deformação de Green resulta nula quando o corpo é submetido a translação de corpo rígido, restando agora a análise da influência das parcelas referentes à rotação de corpo rígido e deformação pura. A Figura 2.5 ilustra a decomposição do movimento de um quadrado elementar em deformação pura (representada pelo tensor de alongamento \mathbf{U} , o qual altera o corpo da configuração A para a B) e em rotação de corpo rígido (representada pelo tensor de rotação \mathbf{R} , o qual altera o corpo da configuração B para a C).

Figura 2.5 – Interpretação gráfica da decomposição polar: deformação pura seguida de rotação de corpo rígido



Fonte: autor.

Um elemento de linha infinitesimal $d\vec{x}$ que conecta dois pontos materiais na configuração A transforma-se em um elemento $d\vec{\eta}$ na configuração B e posteriormente em um elemento $d\vec{y}$ na configuração C. Desta forma, $d\vec{\eta}$ é dado em função de $d\vec{x}$ pela relação:

$$d\vec{\eta} = \mathbf{U} \cdot d\vec{x} \quad (30)$$

De forma semelhante, $d\vec{y}$ é dado em função de $d\vec{\eta}$ por:

$$d\vec{y} = \mathbf{R} \cdot d\vec{\eta} \quad (31)$$

Através da combinação das Equações (30) e (31), obtém-se:

$$d\vec{y} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot d\vec{x} \quad (32)$$

Comparando as Equações (6) e (32), conclui-se que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \quad (33)$$

A Equação (33) é conhecida como decomposição polar do gradiente da função mudança de configuração, a qual demonstra que o gradiente da função mudança de configuração pode ser decomposto multiplicativamente em parcelas de rotação pura (representada pelo tensor de rotação \mathbf{R}) e deformação pura (representada pelo chamado tensor de alongamento à direita \mathbf{U}).

O tensor de alongamento à direita \mathbf{U} , no entanto, não se mostra uma medida de deformação conveniente, uma vez que sua determinação envolve operações computacionais custosas (cálculo de raiz quadrada). O alongamento à direita de Cauchy-Green, por sua vez, é uma medida cuja determinação apresenta menor custo computacional (DE BORST et al., 2012). Considerando que o tensor \mathbf{U} é simétrico e que o tensor de rotação \mathbf{R} é ortogonal (sua inversa coincide com a transposta), conclui-se que o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green pode ser determinado por meio da expressão:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{U}^t \cdot \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^t \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \quad (34)$$

Portanto, como o tensor de alongamento à direita \mathbf{U} representa uma medida de deformação pura, conclui-se que o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green define

completamente o estado de deformação, não sofrendo influência de rotações de corpo rígido (DE BORST et al., 2012).

A influência da rotação de corpo rígido na deformação pode ser analisada considerando que na situação de rotação pura a Equação (33) fica simplificada como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \quad (35)$$

o que resulta:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (36)$$

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{I}) = 0 \quad (37)$$

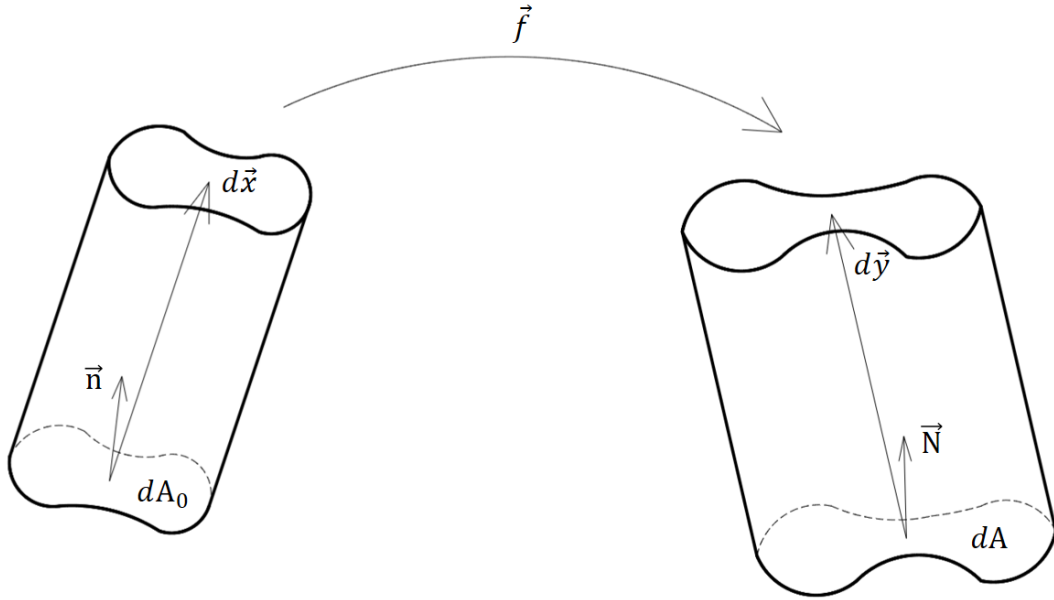
Com isso, foi demonstrado que a deformação de Green é uma medida de deformação válida no regime de grandes deslocamentos e rotações, ou seja, é objetiva, pois resulta nula quando o corpo é submetido a movimentos de corpo rígido.

2.1.5 Mudança de área

A relação entre as áreas na configuração inicial e na configuração atual é necessária para a obtenção da relação entre a tensão real na configuração atual (tensão de Cauchy) e medidas de tensão matemáticas definidas na configuração inicial (como as tensões de Piola-Kirchhoff de primeira e segunda espécie).

A fórmula relacionando a área na configuração inicial com a área na configuração atual pode ser deduzida através da consideração de um elemento prismático infinitesimal sofrendo uma mudança de configuração, conforme mostrado na Figura 2.6.

Figura 2.6 – Mudança de área na mudança de configuração



Fonte: autor.

O elemento prismático possui uma área (da base) inicial dA_0 e uma área (da base) atual dA , sendo \vec{n} e \vec{N} os versores ortogonais às áreas nas respectivas configurações. Com isso, definem-se o vetor área inicial como:

$$d\vec{A}_0 = \vec{n}dA_0 \quad (38)$$

e o vetor área atual como:

$$d\vec{A} = \vec{N}dA \quad (39)$$

Com os vetores $d\vec{x}$ e $d\vec{y}$, são determinados os volumes inicial e atual do elemento, respectivamente, através das expressões:

$$dV_0 = d\vec{x}^t \cdot d\vec{A}_0 = d\vec{x}^t \cdot \vec{n}dA_0 \quad (40)$$

$$dV = d\vec{y}^t \cdot d\vec{A} = d\vec{y}^t \cdot \vec{N}dA \quad (41)$$

Através da Equação (6), sabe-se que:

$$d\vec{y} = \mathbf{A} \cdot d\vec{x} \quad (42)$$

Desta forma, através da Equação (9), determina-se a relação entre as áreas a partir da relação entre os volumes:

$$dV = d\vec{y}^t \cdot \vec{N}dA = d\vec{x}^t \cdot \mathbf{A}^t \cdot \vec{N}dA = JdV_0 = Jd\vec{x}^t \cdot \vec{n}dA_0 \quad (43)$$

Tendo em vista que a expressão é válida para qualquer vetor $d\vec{x}$, obtém-se a expressão conhecida como Fórmula de Nanson, a qual relaciona a área na configuração inicial com a área na configuração atual:

$$\vec{N}dA = J\mathbf{A}^{-t} \cdot \vec{n}dA_0 \quad (44)$$

2.1.6 Princípio da Conservação de Massa

Nas transformações mecânicas estudadas neste trabalho, foi considerado o Princípio da Conservação de Massa, o qual afirma que para qualquer sistema fechado a massa do sistema permanece constante ao longo do tempo, pois massa não é adicionada nem retirada do sistema. Deste modo, a massa do corpo (M) pode ser calculada tanto na configuração inicial quanto em qualquer instante de tempo ao longo do processo de análise:

$$M = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 = \int_{V(t)} \rho(t) dV \quad (45)$$

sendo ρ_0 a massa específica inicial e ρ a massa específica atual do corpo.

Substituindo a Equação (9) na última forma da Equação (45), obtém-se:

$$M = \int_{V_0} \rho(t) J(t) dV_0 \quad (46)$$

Com isso, comparando as Equações (45) e (46), conclui-se que:

$$\rho_0 = \rho(t) J(t) = \rho(t) \frac{dV(t)}{dV_0} \quad (47)$$

As Equações (45), (46) e (47) expressam o Princípio da Conservação de Massa nos pontos do contínuo.

A partir do Princípio da Conservação de Massa é possível deduzir um corolário importante para a conversão da descrição Euleriana para a Lagrangeana. Considerando uma função diferenciável no tempo qualquer $f(t)$, a dedução do corolário começa a partir da consideração da seguinte integração:

$$\int_{V(t)} \rho(t) f(t) dV = \int_{V_0} \rho_0 f(t) dV_0 \quad (48)$$

Derivando a Equação (48) em relação ao tempo e lembrando que ρ_0 é uma constante, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(t) f(t) dV &= \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho_0 f(t) dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \frac{df(t)}{dt} dV_0 \\ &= \int_{V(t)} \rho(t) \frac{df(t)}{dt} dV \end{aligned} \quad (49)$$

Com isso, conclui-se que:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(t) f(t) dV = \int_V \rho(t) \dot{f}(t) dV \quad (50)$$

2.2 Tensão de Cauchy

Tensão é a grandeza que quantifica de forma contínua a interação entre as partículas que compõem um sólido submetido a ações externas. A componente de tensão normal mensura a resistência ao afastamento ou à aproximação de planos paralelos, já a componente de tensão tangencial mensura a resistência ao deslizamento relativo entre planos paralelos.

Considerando-se um corpo em equilíbrio sujeito a ações externas (Figura 2.7a), ao se realizar um corte imaginário no corpo, separando-o em duas partes (Figura 2.7b), pelo Princípio da Ação e Reação surge uma distribuição de forças por unidade de superfície denominada tensão ou vetor tensão (\vec{t}). A diferença entre tensão e força de superfície está no fato de que tensão é uma grandeza interna ao corpo (atua sobre planos fictícios), enquanto força de superfície é aplicada sobre a superfície do corpo, ou seja, sobre uma superfície real.

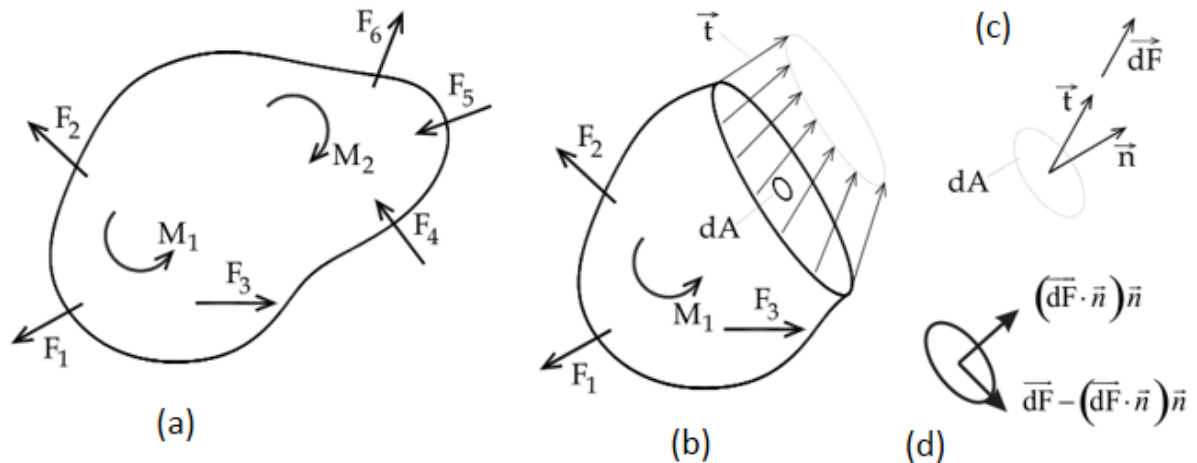
Extraindo um infinitésimo de área da superfície do corte (Figura 2.7c), é possível observar que um infinitésimo de força ($d\vec{F}$) pode ser calculado como:

$$d\vec{F} = \vec{t}dA \quad (51)$$

Nota-se que genericamente o vetor tensão não é normal nem tangencial à superfície de corte, além disso, a intensidade e a direção tanto da tensão quanto da força na superfície de corte dependem do corte realizado.

A componente de força ortogonal à área infinitesimal pode ser determinada através do produto escalar entre o infinitésimo de força $d\vec{F}$ e o versor normal à área infinitesimal \vec{n} ; por sua vez, a componente tangencial da força pode ser calculada como a diferença entre $d\vec{F}$ e $d\vec{F} \cdot \vec{n}$, conforme ilustrado na Figura 2.7d.

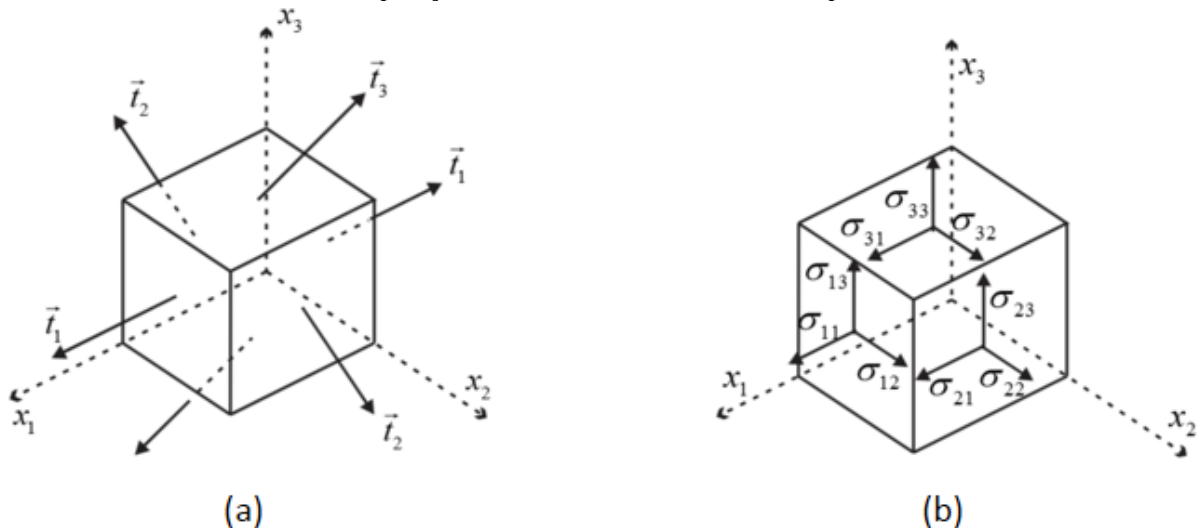
Figura 2.7 – Definição de tensão: (a) corpo em equilíbrio; (b) corte genérico; (c) tensão e força em infinitésimo de área; (d) decomposição do infinitésimo de força



Fonte: adaptado de Coda (2018).

Imagina-se agora que ao invés de se realizar apenas um corte no corpo sejam realizados seis cortes paralelos dois a dois com distâncias infinitesimais entre si e ortogonais aos eixos coordenados. Este procedimento resulta na retirada de um cubo elementar em equilíbrio do corpo. Sobre as faces do cubo atuam vetores de tensão (Figura 2.8a), os quais podem ser decompostos em componentes cartesianas (Figura 2.8b), resultando nas componentes de tensão. As componentes de tensão ortogonais aos planos são denominadas tensões normais, já as componentes tangenciais aos planos são denominadas tensões de cisalhamento.

Figura 2.8 – Obtenção das componentes de tensão: (a) vetores de tensão atuantes nas faces do cubo elementar; (b) decomposição dos vetores de tensão em componentes cartesianas



Fonte: adaptado de Coda (2018).

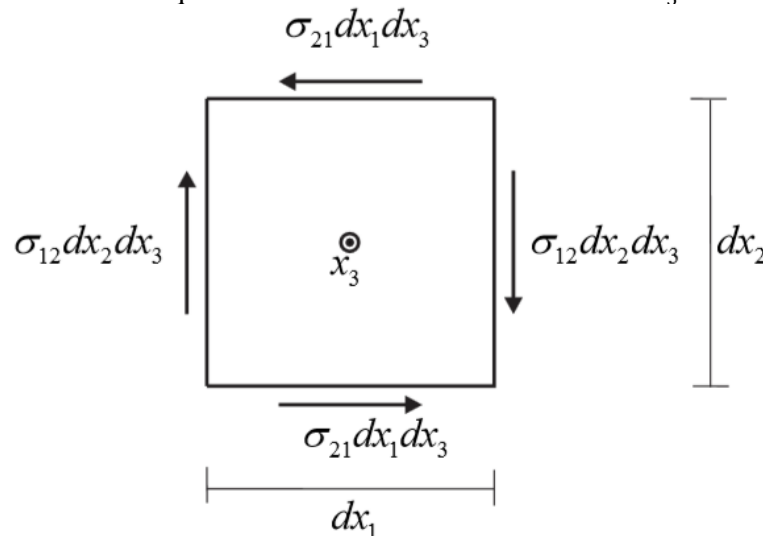
Comumente a tensão de Cauchy (σ_{ij}) é escrita na forma tensorial na seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (52)$$

sendo i o eixo ortogonal ao plano de atuação e j a direção da componente de tensão.

Pelo Princípio da Ação e Reação, sabe-se que as tensões em um plano de entrada possuem a mesma intensidade das tensões em um plano de saída, porém com sentido contrário. Com isso, o equilíbrio de forças já está satisfeito, sendo necessário apenas a verificação do equilíbrio de momentos. Para tal, pode-se efetuar o cálculo do equilíbrio de momentos em torno do eixo x_3 , por exemplo, conforme mostrado na Figura 2.9, onde é mostrado o plano x_3 juntamente com os infinitésimos de força que geram momento em torno do eixo x_3 .

Figura 2.9 – Análise do equilíbrio de momentos em torno do eixo x_3 no cubo elementar



Fonte: Coda (2018).

Pelo equilíbrio de momentos, chega-se à seguinte relação:

$$(\sigma_{12} dx_2 dx_3) dx_1 = (\sigma_{21} dx_1 dx_3) dx_2 \quad (53)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (54)$$

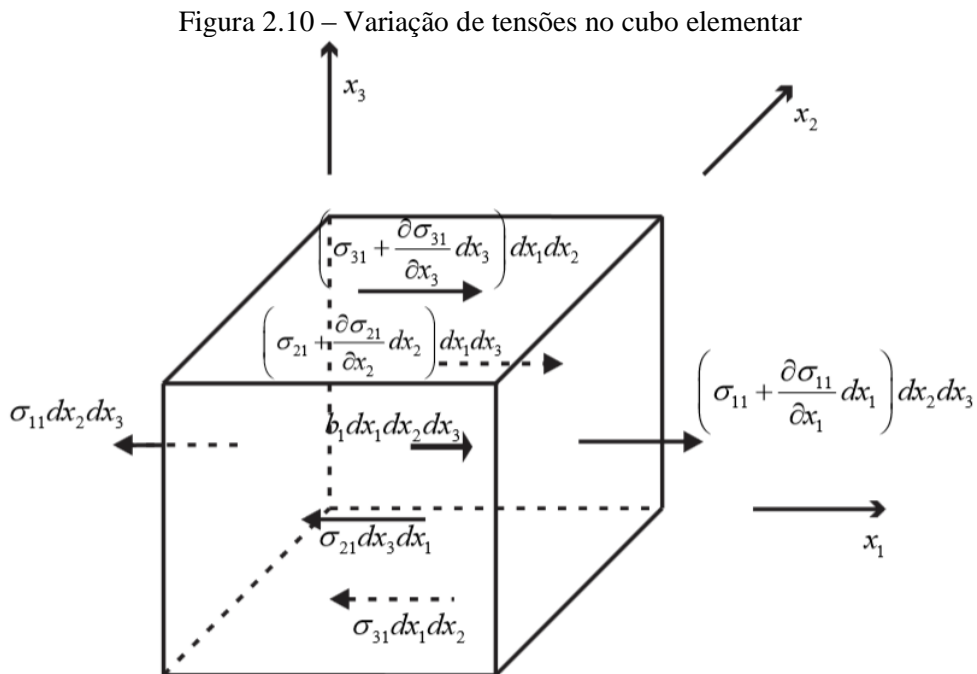
Realizando a mesma análise nas outras faces, chega-se à expressão do Teorema de Cauchy, o qual afirma que o tensor de tensão é simétrico:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (55)$$

Portanto, o tensor de tensão de Cauchy possui seis componentes de tensão independentes. Salienta-se ainda que a tensão de Cauchy é definida na configuração atual do corpo, sendo, então, uma grandeza Euleriana. Devido ao seu significado físico, a tensão de Cauchy é também denominada tensão real, sendo utilizada em muitos modelos de ruptura.

2.3 Equações de equilíbrio Euleriano local e global

O cubo elementar da Figura 2.8, que representava um único ponto do corpo, pode ser analisado também como uma porção do contínuo apresentando variação de tensões em seu domínio. Desta forma, uma componente de tensão σ_{ji} atuante em uma das faces possui valor $\sigma_{ji} + \sigma_{ji,j}dx_i$ na face oposta correspondente, conforme ilustrado na Figura 2.10.



Fonte: Coda (2018).

Considerando a existência de forças de volume b_i , aplica-se a Segunda Lei de Newton segundo os três eixos coordenados para a obtenção das três equações de movimento de translação:

$$(\sigma_{ji} + \sigma_{ji,j}dx_i)dA_i - \sigma_{ji}dA_i + b_i dV = \rho \ddot{y}_i dV \quad (56)$$

sendo dA_i a área da face ortogonal ao eixo i , b_i as forças de volume segundo cada eixo coordenado, ρ a massa específica atual, \ddot{y}_i o vetor da aceleração do corpo segundo cada eixo coordenado e dV o volume atual do cubo elementar,.

Simplificando a Equação (56), é obtida a expressão que representa o equilíbrio Euleriano local:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = \rho \ddot{y}_i \quad (57)$$

Com relação aos movimentos de rotação, o Teorema de Cauchy (simetria do tensor de tensões) já representa o equilíbrio de momentos.

Através da integração da Equação (57) no volume atual do corpo, obtém-se:

$$\int_V \sigma_{ji,j} dV + \int_V b_i dV = \int_V \rho \ddot{y}_i dV \quad (58)$$

Aplicando o Teorema da Divergência no primeiro termo, a expressão pode ser reescrita como:

$$\int_A \sigma_{ji} N_j dA + \int_V b_i dV = \int_V \rho \ddot{y}_i dV \quad (59)$$

sendo N_j o versor normal à superfície e A a área do contorno do corpo.

Recorda-se da Fórmula de Cauchy, a qual relaciona a força de superfície (p_i) com o estado de tensão no ponto:

$$p_i = \sigma_{ji} N_j \quad (60)$$

Substituindo a Fórmula de Cauchy na Equação (59), é obtida a expressão que representa o equilíbrio Euleriano global:

$$\int_A p_i dA + \int_V b_i dV = \int_V \rho \ddot{y}_i dV \quad (61)$$

2.4 Equações de equilíbrio Lagrangeano local e global

Partindo-se da expressão do equilíbrio Euleriano global, é possível obter a expressão que representa o equilíbrio Lagrangeano global. Isto é feito substituindo na Equação (59) as Equações (9) (referente à mudança de volume) e (44) (referente à mudança de área), obtendo-se:

$$\int_{A_0} J \sigma_{ji} (A_{kj})^{-t} n_k dA_0 + \int_{V_0} J b_i dV_0 = \int_{V_0} J \rho \ddot{y}_i dV_0 \quad (62)$$

Em seguida, supõe-se a existência de forças de volume na configuração inicial (b_i^0) tais que:

$$b_i^0 = J b_i \quad (63)$$

Substituindo a Equação (47) (Princípio da Conservação de Massa) e a Equação (63) na Equação (62), obtém-se:

$$\int_{A_0} J \sigma_{ji} (A_{kj})^{-t} n_k dA_0 + \int_{V_0} b_i^0 dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i dV_0 \quad (64)$$

A seguir, define-se o tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de primeira espécie (P_{ki}) como:

$$P_{ki} = J\sigma_{ji}(A_{kj})^{-t} = J(A_{kj})^{-1}\sigma_{ji} \quad (65)$$

Como o gradiente da função mudança de configuração não é simétrico, conclui-se que o tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de primeira espécie também não é simétrico.

Substituindo a Equação (65) na Equação (64) e trocando o índice k por j , chega-se à expressão de equilíbrio Lagrangeano global:

$$\int_{A_0} P_{ji}n_j dA_0 + \int_{V_0} b_i^0 dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i dV_0 \quad (66)$$

Através da aplicação do Teorema da Divergência no primeiro termo e considerando a arbitrariedade do volume V_0 na Equação (66), é obtida a expressão de equilíbrio Lagrangeano local:

$$P_{ji,j} + b_i^0 = \rho_0 \ddot{y}_i \quad (67)$$

2.5 Equilíbrio e energia

O equilíbrio de uma estrutura pode ser também analisado através de uma abordagem energética. A seguir são deduzidas as expressões de equilíbrio obtidas pela abordagem energética tanto com referência Euleriana como Lagrangeana.

2.5.1 Euleriano

A energia mecânica total do sistema (Π) é dada pela soma das parcelas do potencial das forças externas (\mathbb{P}), da energia de deformação (\mathbb{U}) e da energia cinética (\mathbb{K}):

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{K} \quad (68)$$

Pelo Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica, a estrutura está em equilíbrio quando a primeira variação do funcional de energia é nula:

$$\delta\Pi = \delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{U} + \delta\mathbb{K} = 0 \quad (69)$$

A expressão da variação da energia mecânica pode ser obtida partindo-se da expressão do equilíbrio Euleriano local dado pela Equação (57), a qual pode ser rearranjada da seguinte forma:

$$\rho \ddot{y}_i - \sigma_{ji,j} - b_i = 0_i = g_i \quad (70)$$

sendo g_i um vetor nulo de força por unidade de volume.

Uma variação de trabalho por unidade de volume $\delta\pi$ realizado pela força g_i para uma dada variação de posição δy_i é dada por:

$$\delta\pi = g_i \delta y_i = 0 \quad (71)$$

que representa o Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica ponto a ponto.

Integrando a Equação (71) no volume atual, obtém-se a expressão da variação da energia mecânica:

$$\delta\Pi = \int_V \delta\pi dV = \int_V (\rho\dot{y}_i - \sigma_{ji,j} - b_i) \delta y_i dV = 0 \quad (72)$$

Separando os termos da expressão anterior, a variação da energia mecânica fica dada pelas seguintes parcelas:

$$\delta\Pi = \int_V \rho\dot{y}_i \delta y_i dV - \int_V \sigma_{ji,j} \delta y_i dV - \int_V b_i \delta y_i dV = 0 \quad (73)$$

Ainda é necessário, no entanto, provar que a Equação (73) corresponde à soma das variações do potencial das forças externas, da energia de deformação e da energia cinética, conforme expresso na Equação (69).

Inicia-se essa verificação através da consideração da energia cinética, a qual é dada pela expressão:

$$\mathbb{K} = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{y}_i \dot{y}_i dV \quad (74)$$

Utilizando o corolário do Princípio da Conservação de Massa expresso pela Equação (50), a variação da energia cinética é calculada como:

$$\begin{aligned} \delta\mathbb{K} &= \frac{d\mathbb{K}}{dt} dt = \frac{1}{2} \int_V \rho \frac{d(\dot{y}_i \dot{y}_i)}{dt} dt dV = \frac{1}{2} \int_V \rho (2\dot{y}_i \ddot{y}_i) dt dV \\ &= \int_V \rho \dot{y}_i (\dot{y}_i dt) dV = \int_V \rho \dot{y}_i \delta y_i dV \end{aligned} \quad (75)$$

Desta forma, provou-se que o primeiro termo da Equação (73) corresponde à variação da energia cinética.

Continuando a verificação, considerando que

$$(\sigma_{ji} \delta y_i)_{,j} = \sigma_{ji,j} \delta y_i + \sigma_{ji} \delta y_{i,j} \quad (76)$$

$$\sigma_{ji,j} \delta y_i = (\sigma_{ji} \delta y_i)_{,j} - \sigma_{ji} \delta y_{i,j} \quad (77)$$

a segunda integral da Equação (73) pode ser reescrita como:

$$- \int_V \sigma_{ji,j} \delta y_i dV = \int_V \sigma_{ji} \delta y_{i,j} dV - \int_V (\sigma_{ji} \delta y_i)_{,j} dV \quad (78)$$

O último termo da Equação (78) pode ser desenvolvido através da aplicação do Teorema da Divergência e da Fórmula de Cauchy (Equação (60)):

$$-\int_V (\sigma_{ji}\delta y_i)_{,j}dV = -\int_A \sigma_{ji}N_j\delta y_i dA = -\int_A p_i\delta y_i dA \quad (79)$$

Este termo juntamente com o último termo da Equação (73) correspondem à variação do potencial das forças externas (de superfície e de volume).

Por sua vez, considerando a simetria do tensor de tensões, o termo restante da Equação (78) pode ser reescrito como:

$$\int_V \sigma_{ji}\delta y_{i,j}dV = \int_V \sigma_{ji} \frac{(\delta y_{i,j} + \delta y_{j,i})}{2} dV \quad (80)$$

Considerando que a variação da deformação real ε_{ij} é dada por:

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{(\delta y_{i,j} + \delta y_{j,i})}{2} \quad (81)$$

a Equação (80) pode ser reescrita como:

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV \quad (82)$$

que corresponde à variação da energia de deformação, encerrando, assim, a verificação.

Por fim, a Equação (73) pode ser reescrita como:

$$\delta\Pi = \int_V \rho\ddot{y}_i\delta y_i dV + \int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV - \int_A p_i\delta y_i dA - \int_V b_i\delta y_i dV = 0 \quad (83)$$

que expressa o Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica com referência Euleriana.

2.5.2 Lagrangeano

O Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica pode também ser expresso na versão Lagrangeana. A dedução da expressão é realizada com o mesmo raciocínio empregado no item anterior. Parte-se da expressão do equilíbrio Lagrangeano local dado pela Equação (67), a qual pode ser rearranjada da seguinte forma:

$$\rho_0\ddot{y}_i - P_{j,i,j} - b_i^0 = 0_i = g_i \quad (84)$$

sendo g_i um vetor nulo de força por unidade de volume.

Uma variação de trabalho por unidade de volume $\delta\pi$ realizado pela força g_i para uma dada variação de posição δy_i é dada por:

$$\delta\pi = g_i\delta y_i = 0 \quad (85)$$

que representa o Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica ponto a ponto.

Integrando a Equação (85) no volume inicial, é obtida a expressão da variação da energia mecânica:

$$\delta\Pi = \int_V \delta\pi dV = \int_V (\rho_0 \dot{y}_i - P_{ji,j} - b_i^0) \delta y_i dV = 0 \quad (86)$$

Separando os termos da expressão anterior, a variação da energia mecânica fica dada pelas seguintes parcelas:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \dot{y}_i \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} P_{ji,j} \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 = 0 \quad (87)$$

Realizando o mesmo desenvolvimento feito com a segunda integral da Equação (73) na segunda integral da Equação (87), a expressão anterior pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \int_{V_0} \rho_0 \dot{y}_i \delta y_i dV_0 + \int_{V_0} P_{ji} \delta y_{i,j} dV_0 - \int_{A_0} P_{ji} n_j \delta y_i dA_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (88)$$

O termo $P_{ji} n_j$ na terceira integral da Equação (88) pode ser simplificado através da aplicação da Fórmula de Cauchy (Equação (60)) considerando uma força de superfície p_i^0 descrita na configuração inicial do corpo. Com relação à segunda integral da Equação (88), considerando que

$$\delta y_{i,j} = \delta A_{ij} \quad (89)$$

conclui-se que o conjugado energético do gradiente da função mudança de configuração é a tensão de Piola-Kirchhoff de primeira espécie:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial A_{ij}} = P_{ji} \quad (90)$$

sendo Ψ a energia específica de deformação.

Desta forma, a expressão do Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica com referência Lagrangeana é dada por:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \dot{y}_i \delta y_i dV_0 + \int_{V_0} P_{ji} \delta A_{ij} dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \delta y_i dA_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 = 0 \quad (91)$$

No entanto, o tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de primeira espécie apresenta duas desvantagens (BONET; WOOD, 2008):

- a) não é simétrico;
- b) em uma avaliação fenomenológica, resulta da aplicação de uma força na configuração atual em uma superfície inicial.

Para se entender a segunda desvantagem deve-se observar a passagem da Equação (61) para a Equação (62) com a posterior definição dada pela Equação (65). Essas desvantagens

podem ser contornadas substituindo o tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de primeira espécie pelo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (\mathbf{S}). Para isso, considera-se que os mesmos estão relacionados através da expressão:

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{A}^t \quad (92)$$

Substituindo a Equação (92) na Equação (65), obtém-se:

$$\mathbf{S}^t \cdot \mathbf{A}^t = J\mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (93)$$

$$\mathbf{S}^t = J\mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}^{-t} \quad (94)$$

Como $\boldsymbol{\sigma}$ é simétrico,

$$\mathbf{S} = J(\mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}^{-t})^t = J\mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{A}^{-t} = J\mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}^{-t} = \mathbf{S}^t \quad (95)$$

Desta forma, conclui-se que \mathbf{S} também é simétrico. Substituindo a Equação (92) no segundo termo da Equação (91), obtém-se:

$$\int_{V_0} \mathbf{P}^t : \delta \mathbf{A} dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} : \delta \mathbf{A} dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A} : \mathbf{S} dV_0 \quad (96)$$

Como \mathbf{S} é simétrico, o núcleo da integral pode ser reescrito como:

$$\mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A} : \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A} : \mathbf{S} + \delta \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} : \mathbf{S}) = \frac{1}{2} (\mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A} + \delta \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}) : \mathbf{S} \quad (97)$$

Como a variação da deformação de Green é dada por:

$$\delta \mathbb{E} = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A}) \quad (98)$$

substituindo a Equação (98) na (97), obtém-se:

$$\mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A} : \mathbf{S} = \delta \mathbb{E} : \mathbf{S} = \mathbf{S} : \delta \mathbb{E} \quad (99)$$

Portanto, conclui-se que a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é conjugada energética da deformação de Green.

Uma observação importante é que, ao isolar $\boldsymbol{\sigma}$ na Equação (94), é obtida a expressão da tensão de Cauchy em função da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^t \quad (100)$$

Por fim, a expressão do Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica com referência Lagrangeana em função da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e da deformação de Green é escrita como:

$$\delta \Pi = \int_{V_0} \rho_0 \dot{y}_i \delta y_i dV_0 + \int_{V_0} S_{ij} \delta \mathbb{E}_{ij} dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \delta y_i dA_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 = 0 \quad (101)$$

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL

Neste capítulo é apresentada a formulação do Método dos Elementos Finitos Posicional aplicada a sólidos, onde foi seguida a descrição dada por Coda (2018).

3.1 Aproximação multidimensional

O princípio fundamental do Método dos Elementos Finitos consiste na transformação do meio contínuo, o qual apresenta infinitas incógnitas, em um meio discreto com um número finito de incógnitas. Isto é feito através da divisão do meio em elementos finitos, sendo que nestes subdomínios é feita uma aproximação das variáveis de interesse, como por exemplo as configurações inicial e atual. No presente trabalho, decidiu-se pela utilização dos polinômios de Lagrange, também denominados funções de forma, para a aproximação das variáveis de interesse. Os polinômios de Lagrange possuem a propriedade da partição da unidade, ou seja, a soma de todos os polinômios de mesma ordem resulta na unidade. Além disso, os polinômios são escritos em função de coordenadas adimensionais ξ_i , as quais são definidas para um certo intervalo.

Para o caso de elementos unidimensionais, a coordenada adimensional ξ é definida no intervalo $[-1, 1]$. A expressão geral dos polinômios de Lagrange de ordem p (ϕ_i) para elementos unidimensionais é dada pela seguinte expressão:

$$\phi_i = \prod_{j=1(j \neq i)}^{p+1} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)} \quad (102)$$

Através da multiplicação das funções de forma unidimensionais, é possível obter as funções de forma para elementos de base retangular ou hexaédrica (φ_k). As coordenadas adimensionais ξ_i , assim como no caso unidimensional, são definidas no intervalo $[-1, 1]$. A expressão geral das funções de forma para elementos de base retangular é dada, portanto, por:

$$\varphi_k(\xi_1, \xi_2) = \phi_i(\xi_1)\phi_j(\xi_2) \quad (103)$$

sendo $k = j(i - 1) + j$.

Já no caso de elementos de base triangular, as coordenadas adimensionais ξ_i são definidas no intervalo $[0, 1]$. Tendo em vista que as funções de forma devem apresentar valor unitário em seu nó correspondente e valor nulo nos demais, é possível determinar os coeficientes das funções de forma a partir de um sistema de equações. Considerando \mathbf{A} como a matriz dos coeficientes das funções de forma (incógnitas) e \mathbf{P} como a matriz dos valores que

multiplicam os coeficientes calculados com as coordenadas do respectivo nó, a determinação das funções de forma é dada de forma genérica através da expressão:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{I} \quad (104)$$

No presente trabalho, foi adotado o elemento finito de sólido utilizado e descrito por Carrazedo e Coda (2017). No caso, foram utilizados elementos finitos prismáticos de base triangular com aproximação cúbica na base e aproximação linear/cúbica na espessura. Decidiu-se pela utilização deste elemento finito visto que os problemas analisados neste trabalho (chapas finas dobradas) são muito bem representados por este tipo de elemento.

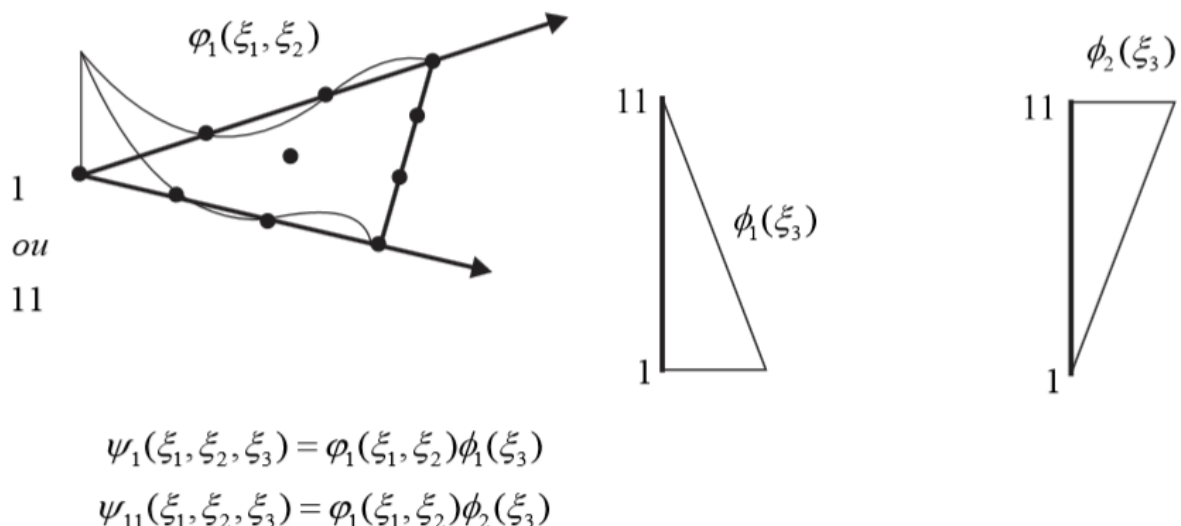
Por se tratar de um elemento tridimensional, adota-se um sistema de coordenadas ortogonal que gera o espaço adimensional (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . As variáveis adimensionais ξ_1 e ξ_2 são definidas no intervalo $[0, 1]$, enquanto a variável ξ_3 é definida no intervalo $[-1, 1]$.

A maneira mais simples de obtenção de elementos prismáticos de base triangular é através da extrusão de elementos triangulares na sua espessura. Esta abordagem apresenta a vantagem de que a direção extrudada não precisa necessariamente ter o mesmo grau de aproximação da base triangular. A extrusão é feita multiplicando as funções de forma da base (φ_i) pelas funções de forma da espessura (ϕ_j), assim como ilustrado na Figura 3.1, obtendo-se assim as funções de forma do elemento prismático (ψ_{ij}):

$$\psi_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \varphi_i(\xi_1, \xi_2)\phi_j(\xi_3) \quad (105)$$

sendo adotada a regra $k = (j - 1)i + i$ para possibilitar a utilização de um único índice na implementação.

Figura 3.1 – Exemplo de construção das funções de forma para o elemento prismático de base triangular com aproximação cúbica na base e linear na espessura



Fonte: autor.

Conhecidas as funções de forma, é possível obter uma aproximação do valor de qualquer variável de interesse em função de seus valores nos nós do elemento. Neste trabalho, são de interesse as aproximações da geometria do elemento, cujas expressões para a geometria inicial e final são dadas respectivamente por:

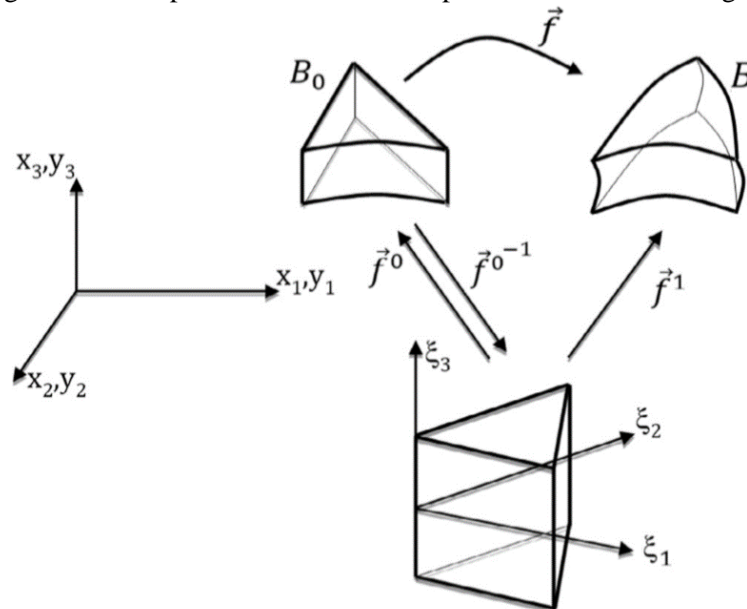
$$x_i(\vec{\xi}) = \varphi_i(\vec{\xi})X_i^l \quad (106)$$

$$y_i(\vec{\xi}) = \varphi_i(\vec{\xi})Y_i^l \quad (107)$$

sendo X_i^l as posições nodais iniciais e Y_i^l as posições nodais atuais.

Define-se mapeamento da configuração inicial como a função que relaciona o espaço adimensional às coordenadas iniciais. Da mesma forma, o mapeamento da configuração atual é a função que relaciona o espaço adimensional às coordenadas atuais do elemento. O mapeamento da configuração inicial é realizado através da função \vec{f}^0 e o mapeamento da configuração atual é realizado através da função \vec{f}^1 , conforme ilustrado na Figura 3.2.

Figura 3.2 – Mapeamento do elemento prismático de base triangular



Fonte: Carrazedo e Coda (2017).

Com isso, é possível determinar os gradientes dos mapeamentos das configurações inicial (A_{ij}^0) e final (A_{ij}^1), respectivamente, através das seguintes expressões:

$$A_{ij}^0 = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j} X_i^l \quad (108)$$

$$A_{ij}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j} Y_i^l \quad (109)$$

Considerando que a função mudança de configuração está relacionada com os mapeamentos inicial e final (conforme pode ser observado na Figura 3.2), é possível calcular o gradiente da função mudança de configuração através de:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \quad (110)$$

Uma importante observação a ser destacada é o fato de que a inversa do gradiente do mapeamento da configuração inicial possibilita a aplicação numérica da regra da cadeia.

Uma grandeza indispensável para o cálculo numérico das integrais envolvidas na análise de sólidos pela descrição Lagrangeana é o determinante do gradiente do mapeamento da configuração inicial (J_0):

$$J_0 = Det(\mathbf{A}_0) \quad (111)$$

No presente trabalho, a medida de deformação escolhida foi a deformação de Green (ver Equação (25)), sendo ela, portanto, utilizada nos desenvolvimentos matemáticos.

Vale ressaltar que, ao se utilizar o Método dos Elementos Finitos, é importante a realização de análises de convergência. Uma análise de convergência consiste em se avaliar os resultados obtidos para diferentes graus de refinamento da malha, ou seja, aumenta-se a discretização até que não haja alteração significativa dos resultados de uma discretização mais pobre para a próxima discretização mais rica. Quando se atinge a convergência dos resultados, isso significa que o número de graus de liberdade adotados (número finito) é suficiente para representar o problema contínuo (o qual possui infinitos graus de liberdade).

3.2 Formulação estática elástica

Atentando-se ao fato de que na análise estática a parcela referente à energia cinética é nula, a energia mecânica total do sistema pode ser escrita como a soma das parcelas referentes à energia potencial das forças externas e à energia de deformação:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} \quad (112)$$

Pelo Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica, o equilíbrio da estrutura é atingido quando a variação da energia mecânica do sistema é nula. Desta forma, tomando-se as posições atuais dos nós (incógnitas) como o parâmetro para o desenvolvimento das expressões matemáticas, obtém-se:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial Y_i} \delta Y_i = \delta\mathbb{U} + \delta\mathbb{P} = 0 \quad (113)$$

A Equação (113) é dada na forma Lagrangeana expandida pela expressão (conforme mostrado anteriormente na Equação (101)):

$$\delta\Pi = -F_i^l \delta Y_i^l - \int_{V_0^{el}} b_i^0 \delta y_i dV_0^{el} - \int_{A_0^{el}} p_i^0 \delta y_i dA_0^{el} + \int_{V_0^{el}} S_{kj} \delta \mathbb{E}_{kj} dV_0^{el} = 0 \quad (114)$$

sendo que o primeiro termo refere-se ao potencial das forças externas concentradas (F_i^l).

No programa, todas as integrais foram resolvidas numericamente através da quadratura de Hammer (HAMMER; MARLOWE; STRAUD, 1956), de Gauss–Legendre ou através de uma combinação de ambas. Com relação à integração na espessura do elemento prismático, foram utilizados 2 pontos de Gauss no caso de aproximação linear e 4 pontos no caso de aproximação cúbica; já com relação à integração na base triangular, foi dada a possibilidade no programa de utilização de 7 ou 12 pontos de Hammer. A possibilidade de escolha do número de pontos de Hammer teve como intuito dar liberdade ao usuário para a escolha entre: maior precisão (12 pontos); ou maior velocidade de processamento com uma precisão menor, porém ainda satisfatória (7 pontos).

Fazendo uso das aproximações das variáveis pelas funções de forma e considerando que as variações das posições nodais δY_i^l são arbitrárias, obtém-se a expressão que representa o conjunto de equações não lineares a ser resolvido:

$$\begin{aligned} -F_i^l - \int_{V_0^{el}} \varphi_m(\vec{\xi}) \varphi_l(\vec{\xi}) dV_0^{el} B_i^m - \int_{A_0^{el}} \varphi_m(\vec{\xi}) \varphi_l(\vec{\xi}) dA_0^{el} Q_i^m \\ + \int_{V_0^{el}} S_{kj} \frac{\partial \mathbb{E}_{kj}}{\partial Y_i^l} dV_0^{el} = 0_i^l \end{aligned} \quad (115)$$

sendo B_i^m e Q_i^m respectivamente forças de volume nodais e forças de superfície nodais aplicadas na configuração inicial.

Tendo em vista que a Equação (115) foi obtida derivando-se a expressão da energia mecânica em relação às posições atuais, é possível recuperar a expressão da energia mecânica total do sistema, a qual é dada por:

$$\begin{aligned} \Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} = -F_j^\eta Y_j^\eta - B_j^{\alpha 0} \int_{V_0^{el}} \varphi_\alpha \varphi_\eta dV_0^{el} Y_j^\eta - Q_j^{\alpha 0} \int_{A_0^{el}} \varphi_\alpha \varphi_\eta dA_0^{el} Y_j^\eta \\ + \int_{V_0^{el}} \Psi(Y_k^m) dV_0^{el} \end{aligned} \quad (116)$$

Através de uma análise dos termos da Equação (115), conclui-se que a mesma pode ser escrita de forma resumida por:

$$F_j^{int} - F_j^{ext} = 0_j \quad (117)$$

sendo F_j^{int} as forças internas e F_j^{ext} as forças externas.

A parcela referente às forças internas para um elemento finito (força interna local) $((F_i^l)_{el}^{int})$ é calculada através da expressão:

$$\begin{aligned} (F_i^l)_{el}^{int} &= \int_{V_0^{el}} \frac{\partial \Psi(Y_k^m)}{\partial Y_i^l} dV_0 = \int_{V_0^{el}} f_i^l dV_0 \\ &= \sum_{ig=1}^{ng} \sum_{ih=1}^{nh} f_i^l(\vec{\xi}(ih, ig)) J_0(\vec{\xi}(ih, ig)) w_{ih} w_{ig} \end{aligned} \quad (118)$$

sendo a contribuição das forças internas f_i^l calculada por:

$$f_\alpha^B = \frac{\partial \Psi}{\partial Y_\alpha^B} = S_{ij} \frac{\partial \mathbb{E}_{ij}}{\partial Y_\alpha^B} \quad (119)$$

Por sua vez, a parcela referente às forças externas é calculada pela expressão:

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_i^l} = -(F_i^l)^{ext} = -F_i^l - \int_{V_0^{el}} \varphi_l \varphi_\alpha dV_0 B_i^{\alpha 0} - \int_{A_0^{el}} \varphi_l \varphi_\alpha dA_0^{el} Q_i^{\alpha 0} \quad (120)$$

A Equação (120) é composta respectivamente pelas parcelas relativas às forças concentradas, forças de volume e forças de superfície. O cálculo das forças nodais equivalentes das forças de volume $((F_i^l)^{vol})$ é realizado numericamente através da expressão:

$$(F_i^l)^{vol} = \int_{V_0^{el}} \varphi_l \varphi_\alpha dV_0 B_i^{\alpha 0} = \left(\sum_{ig=1}^{ng} \sum_{ih=1}^{nh} \varphi_l(ih) \varphi_\alpha(ih) J_0 w_{ih} w_{ig} \right) B_i^{\alpha 0} \quad (121)$$

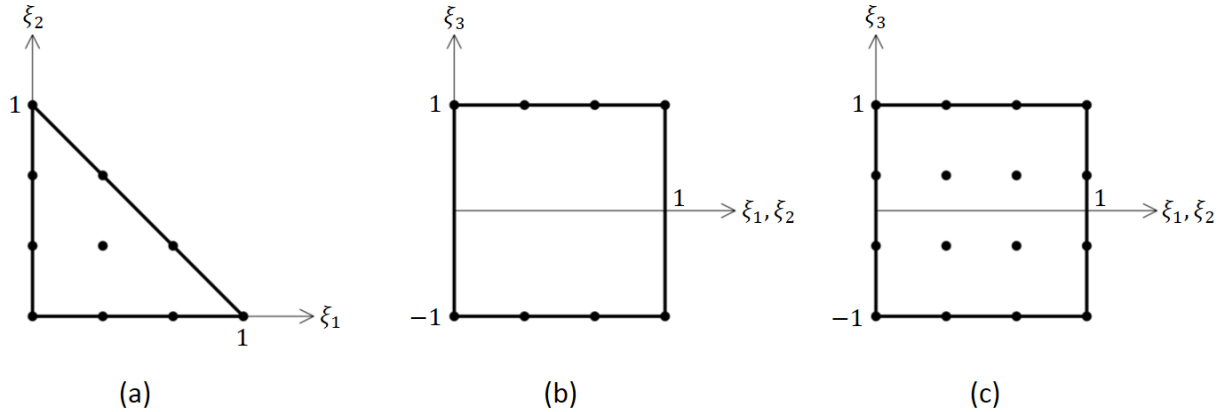
sendo ig o índice do ponto de Gauss, ng o número de pontos de Gauss, ih o índice do ponto de Hammer, nh o número de pontos de Hammer, w_{ih} o peso do ponto de Hammer e w_{ig} o peso do ponto de Gauss.

Para o elemento finito adotado no trabalho, existe a possibilidade de adoção de três tipos de elementos auxiliares para a integração das forças de superfície:

- elementos triangulares auxiliares com aproximação cúbica;
- elementos retangulares auxiliares com aproximação cúbica em um dos lados e linear no outro;
- elementos retangulares auxiliares com aproximação cúbica em ambos os lados.

Tais elementos auxiliares para a aplicação das forças de superfície no elemento prismático de base triangular são mostrados na Figura 3.3.

Figura 3.3 – Elementos auxiliares para aplicação de forças de superfície no elemento prismático de base triangular: (a) elemento triangular com aproximação cúbica; (b) elemento retangular com aproximação cúbica em um dos lados e linear no outro; (c) elemento retangular com aproximação cúbica em ambos os lados



Fonte: autor.

No caso de aplicação sobre elementos triangulares, a integral para a determinação das forças nodais equivalentes das forças de superfície $((F_i^l)^{superf})$ é resolvida numericamente através da quadratura de Hammer:

$$(F_i^l)^{superf} = \int_{A_0^{el}} \varphi_l \varphi_a dA_0 Q_i^{a0} = \left(\sum_{ih=1}^{nh} \varphi_l(ih) \varphi_a(ih) J_0 w_{ih} \right) Q_i^{a0} \quad (122)$$

Já caso de aplicação sobre elementos retangulares, a integral é resolvida numericamente através da quadratura de Gauss–Legendre:

$$\begin{aligned} (F_i^l)^{superf} &= \int_{A_0^{el}} \varphi_l \varphi_a dA_0 Q_i^{a0} \\ &= \left(\sum_{ig1=1}^{ng1} \sum_{ig2=1}^{ng2} \varphi_l(ig1, ig2) \varphi_a(ig1, ig2) J_0 w_{ig1} w_{ig2} \right) Q_i^{a0} \end{aligned} \quad (123)$$

O processo adotado para a resolução do sistema de equações não lineares expresso pela Equação (115) é o método iterativo de Newton-Raphson. O método consiste em primeiramente se definir o vetor resíduo mecânico (g_j) como:

$$g_j = F_j^{int} - F_j^{ext} = 0_j \quad (124)$$

O vetor resíduo mecânico possui valor nulo caso as posições nodais estejam na posição de equilíbrio e valor não nulo caso contrário. Como se procura determinar as posições de equilíbrio dos nós, embora elas não sejam conhecidas no início do processo, o vetor resíduo mecânico é calculado em função de uma posição tentativa. Portanto, a posição atual dos nós é

conhecida durante todo o processo de resolução na forma de tentativa, sendo a primeira tentativa correspondente à posição inicial dos nós.

Realizando uma expansão em série de Taylor do vetor resíduo mecânico na vizinhança da posição tentativa e truncando a expressão em 1ª ordem, é obtida a expressão para o cálculo da correção da posição (ΔY_k):

$$\Delta Y_k = -(H_{kj})^{-1} g_j(Y_k^0) \quad (125)$$

sendo H_{kj} a matriz hessiana e Y_k^0 a posição tentativa.

Na prática, a correção da posição é determinada computacionalmente através da resolução do sistema de equações lineares dado pela expressão:

$$H_{jk}\Delta Y_k = -g_j(Y_k^0) \quad (126)$$

Calculada a correção da posição, a posição tentativa é aprimorada através de:

$$Y_k^0 \leftarrow Y_k^0 + \Delta Y_k \quad (127)$$

Este processo é repetido até que a correção da posição apresente um valor suficientemente pequeno, caracterizando que a estrutura atingiu a posição de equilíbrio. O critério de parada adotado é dado pela seguinte expressão:

$$\frac{\|\Delta \vec{Y}\|}{\|\vec{X}\|} \leq tol \quad (128)$$

sendo tol uma tolerância adotada.

O nível de carga e/ou posição prescrita é aumentado de forma incremental com o intuito de se determinar o caminho de equilíbrio da estrutura.

Conforme pode ser observado nas Equações (125) e (126), para a determinação da correção da posição é necessário o cálculo da matriz hessiana. Para forças conservativas, a matriz hessiana é dada por:

$$H_{kj} = \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y_k \partial Y_j} \quad (129)$$

A matriz hessiana para um elemento finito (matriz hessiana local) é calculada numericamente como:

$$H_{\alpha\beta\gamma z}^{el} = \int_{V_0^{el}} h_{\alpha\beta\gamma z} dV_0 = \sum_{ig=1}^{ng} \sum_{ih=1}^{nh} h_{\alpha\beta\gamma z}(\vec{\xi}(ih, ig)) J_0(\vec{\xi}(ih, ig)) w_{ih} w_{ig} \quad (130)$$

sendo a contribuição da matriz hessiana $h_{\alpha\beta\gamma z}$ calculada por:

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \mathfrak{C} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + \mathfrak{S} : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} \quad (131)$$

Para que o sistema de equações lineares dado pela Equação (126) seja resolvível, é preciso realizar a imposição das condições de contorno em posições/deslocamentos. Tendo em vista que um corpo tridimensional possui 6 movimentos de corpo rígido, é necessária a aplicação de no mínimo 6 restrições independentes em posições/deslocamentos para que a matriz hessiana deixe de ser singular. Isto é feito operacionalmente através da técnica de zeros e um, a qual consiste no seguinte procedimento:

- a) zeram-se a linha e a coluna da matriz hessiana correspondentes ao grau de liberdade restrito e coloca-se 1 na diagonal;
- b) zera-se o vetor resíduo mecânico na posição correspondente ao grau de liberdade restrito.

Com este procedimento, a correção da posição calculada pela Equação (126) retorna nula para os graus de liberdade restritos ou com posição prescrita. O cálculo das reações de apoio é bastante simples, basta observar a Equação (124), de onde resulta que as reações de apoio (forças externas) são iguais às forças internas nos nós restritos.

Na Figura 3.4 é apresentado o pseudocódigo da análise estática resumindo o algoritmo implementado no programa (algumas equações referentes ao cálculo das tensões de Cauchy serão apresentadas no item 3.4).

Figura 3.4 – Pseudocódigo da análise estática

1	Leitura do arquivo de entrada
2	Cálculo da matriz pseudo-inversa [Equações (153) e (152)]
3	Assume-se a primeira tentativa de posição como a posição inicial ($\vec{Y} = \vec{X}$)
4	Para cada fase de carregamento/deslocamento
5	Acumulação das forças equivalentes de volume no vetor de carga imposta ($d\vec{F} \leftarrow d\vec{F} + \vec{F}^{vol}$) [Equação (121)]
6	Acumulação das forças equivalentes de superfície no vetor de carga imposta ($d\vec{F} \leftarrow d\vec{F} + \vec{F}^{superf}$) [Equações (122) e (123)]
7	Determinação do incremento de posição prescrita para a fase de carregamento/deslocamento ($d\vec{Y} \leftarrow d\vec{Y}/n^{\circ} \text{ passos}$)
8	Determinação do incremento de força para a fase de carregamento/deslocamento ($d\vec{F} \leftarrow d\vec{F}/n^{\circ} \text{ passos}$)
9	Vetor de forças externas inicialmente nulo ($\vec{F}^{ext} \leftarrow \vec{0}$)
10	Para cada passo de carga/posição
11	Incremento da posição prescrita ($\vec{Y} \leftarrow \vec{Y} + d\vec{Y}$)
12	Incremento das forças externas ($\vec{F}^{ext} \leftarrow \vec{F}^{ext} + d\vec{F}$)
13	Enquanto $\frac{\ \Delta\vec{Y}\ }{\ \vec{x}\ } \geq \textit{tolerância}$
14	Cálculo das forças internas [Equações (118) e (119)]
15	Cálculo da matriz hessiana [Equações (130) e (131)]
16	Cálculo do vetor resíduo mecânico [Equação (124)]
17	Imposição das condições de contorno na matriz hessiana e no vetor resíduo mecânico
18	Cálculo da correção da posição [Equação (126)]
19	Atualização da posição [Equação (127)]
20	Cálculo da norma da correção da posição ($\ \Delta\vec{Y}\ $)
21	Fim loop
22	Cálculo das tensões de Cauchy [Equação (150)]
23	Exportação dos dados para o pós-processamento
24	Fim loop
25	Fim loop

Fonte: autor.

3.3 Formulação dinâmica elástica

Tendo em vista que na análise dinâmica a parcela referente à energia cinética deve ser considerada, a energia mecânica total do sistema passa a ser dada pela expressão:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{K} \quad (132)$$

Através da aplicação do Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica e da adoção das posições atuais dos nós como o parâmetro para o desenvolvimento das expressões matemáticas, obtém-se:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_i^\alpha} + \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y_i^\alpha} + \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial Y_i^\alpha} = 0_i^\alpha \quad (133)$$

A única diferença em relação à análise estática está no termo da derivada da energia cinética em relação às posições atuais. Esse termo corresponde ao vetor de forças inerciais (\vec{F}^{inerc}), o qual é calculado como:

$$\vec{F}^{inerc} = \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \vec{Y}} = \mathbf{M} \cdot \vec{Y} \quad (134)$$

sendo \mathbf{M} a matriz de massa (constante), a qual é calculada localmente (para cada elemento finito) através da expressão:

$$\mathbf{M}^{el} = \int_{V_0^{el}} \rho_0 \vec{\varphi} \otimes \vec{\varphi} dV_0 \quad (135)$$

Nota-se que o cálculo da matriz de massa é semelhante ao cálculo das forças nodais equivalentes das forças de volume (Equação (121)).

Com isso, as equações não lineares de movimento podem ser expressas como:

$$\vec{F}^{int}(\vec{Y}) - \vec{F}^{ext}(t) + \vec{F}^{inerc} = \vec{0} \quad (136)$$

O processo de resolução na análise dinâmica consiste na combinação do integrador temporal de Newmark (NEWMARK, 1959) com o método iterativo de Newton-Raphson. Para isso, define-se o vetor resíduo mecânico em função da equação de movimento e inclui-se – de forma semelhante às análises lineares – um termo referente ao amortecimento:

$$\vec{g} = \vec{F}^{int}(\vec{Y}) + \mathbf{M} \cdot \vec{Y} + \mathbf{C} \cdot \dot{\vec{Y}} - \vec{F}^{ext}(t) = \vec{0} \quad (137)$$

sendo \mathbf{C} a matriz de amortecimento.

A matriz de amortecimento pode ser calculada como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez inicial (matriz hessiana na configuração inicial) em problemas dinâmicos usuais de estruturas (WARBURTON, 1976):

$$\mathbf{C} = \lambda_m \mathbf{M} + \lambda_k \mathbf{K} \quad (138)$$

sendo λ_m e λ_k constantes.

Como o Método dos Elementos Finitos é um método numérico, é necessário transformar o tempo – que é uma variável contínua – em uma variável discreta. Desta forma, o tempo do passo atual é calculado em função do tempo do passo anterior através de:

$$t_{s+1} = t_s + \Delta t \quad (139)$$

sendo Δt o passo de tempo, o subscrito $s + 1$ referente ao passo de tempo atual e o subscrito s referente ao passo de tempo anterior.

A discretização do tempo é considerada também através do emprego do algoritmo de integração temporal de Newmark, também conhecido como método Newmark β (NEWMARK,

1959). O método Newmark β corresponde a um integrador temporal de passo único muito empregado na análise dinâmica de estruturas devido à sua simplicidade, eficiência e estabilidade numérica. As aproximações de Newmark são dadas pelas duas equações a seguir:

$$\vec{Y}_{S+1} = \vec{Y}_S + \vec{Y}_S \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \vec{Y}_S + \beta \vec{Y}_{S+1} \right] \Delta t^2 \quad (140)$$

$$\vec{Y}_{S+1} = \vec{Y}_S + (1 - \gamma) \Delta t \vec{Y}_S + \gamma \Delta t \vec{Y}_{S+1} \quad (141)$$

Para o emprego do algoritmo, é necessária a adoção de valores para os parâmetros livres β e γ . Os valores comumente adotados para os parâmetros livres são $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$, valores estes correspondentes aos do movimento retilíneo uniformemente acelerado para o passo de tempo.

Desta forma, calculam-se a aceleração e a velocidade atuais respectivamente por:

$$\vec{Y}_{S+1} = \frac{\vec{Y}_{S+1}}{\beta \Delta t^2} - \vec{Q}_S \quad (142)$$

$$\vec{Y}_{S+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \vec{Y}_{S+1} + \vec{R}_S - \gamma \Delta t \vec{Q}_S \quad (143)$$

sendo os vetores auxiliares \vec{Q}_S e \vec{R}_S calculados, respectivamente, através das expressões:

$$\vec{Q}_S = \frac{\vec{Y}_S}{\beta \Delta t^2} + \frac{\vec{Y}_S}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \vec{Y}_S \quad (144)$$

$$\vec{R}_S = \vec{Y}_S + \Delta t (1 - \gamma) \vec{Y}_S \quad (145)$$

Através da substituição das Equações (142) e (143) na Equação (137), o vetor resíduo mecânico passa a ser escrito como:

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{Y}_{S+1}) &= \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \vec{Y}} \Big|_{S+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \cdot \vec{Y}_{S+1} - \mathbf{M} \cdot \vec{Q}_S + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \cdot \vec{Y}_{S+1} + \mathbf{C} \cdot \vec{R}_S - \gamma \Delta t \mathbf{C} \cdot \vec{Q}_S \\ &\quad - \vec{F}_{S+1}^{ext}(t) = \vec{0} \end{aligned} \quad (146)$$

Através de uma expansão em série de Taylor do vetor resíduo mecânico na vizinhança da posição tentativa e desprezando-se os termos de ordem superior, chega-se à expressão para o cálculo da correção da posição, a qual é a mesma da análise estática, dada pela Equação (125) ou pela Equação (126). A diferença está na matriz hessiana, a qual passa a ser dada pela soma entre a matriz hessiana estática (\mathbf{H}^{estat}) e parcelas dependentes da matriz de massa e da matriz de amortecimento:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{estat} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \quad (147)$$

No primeiro passo de tempo, a aceleração é calculada através da seguinte fórmula:

$$\vec{Y}_0 = \mathbf{M}^{-1} \cdot \left(\vec{F}_0^{ext} - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \vec{Y}} \Big|_0 - \mathbf{C} \cdot \vec{Y}_0 \right) \quad (148)$$

Porém, na prática, a aceleração no primeiro passo de tempo é determinada computacionalmente através da resolução do sistema de equações lineares dado pela expressão:

$$\mathbf{M} \cdot \vec{Y}_0 = \vec{F}_0^{ext} - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \vec{Y}} \Big|_0 - \mathbf{C} \cdot \vec{Y}_0 \quad (149)$$

Ressalta-se que a resolução do sistema de equações lineares dado pela Equação (149) requer a imposição das condições de contorno na matriz de massa e no vetor de força resultante (lado direito da equação) da mesma forma como é feito com a matriz hessiana e com o vetor resíduo mecânico no cálculo da correção da posição (Equação (126)).

Ao final do passo de tempo, atualizam-se os valores da aceleração e da velocidade através das Equações (142) e (143), respectivamente. O processo iterativo, com exceção das expressões adicionais descritas neste item, é realizado da mesma forma que na análise estática.

Na Figura 3.5 é apresentado o pseudocódigo da análise dinâmica resumindo o algoritmo implementado no programa (algumas equações referentes ao cálculo das tensões de Cauchy serão apresentadas no item 3.4).

Figura 3.5 – Pseudocódigo da análise dinâmica

1	Leitura do arquivo de entrada
2	Cálculo da matriz pseudo-inversa [Equações (153) e (152)]
3	Assume-se a primeira tentativa de posição como a posição inicial ($\vec{Y} = \vec{X}$)
4	Acumulação das forças equivalentes de volume no vetor de forças externas ($\vec{F}^{ext} \leftarrow \vec{F}^{ext} + \vec{F}^{vol}$) [Equação (121)]
5	Acumulação das forças equivalentes de superfície no vetor de forças externas ($\vec{F}^{ext} \leftarrow \vec{F}^{ext} + \vec{F}^{superf}$) [Equações (122) e (123)]
6	Cálculo da matriz de massa [Equação (135)(149)]
7	Cálculo da matriz de amortecimento [Equação (138)]
8	Imposição das condições de contorno na matriz de massa e no vetor de força resultante (lado direito da Equação (149))
9	Cálculo da aceleração no primeiro passo de tempo [Equação (149)]
10	Para cada passo de tempo
11	Incremento do tempo ($t \leftarrow t + \Delta t$)
12	Cálculo da força externa transiente ($\vec{F}^{ext}(t)$)
13	Cálculo do vetor auxiliar \vec{Q}_S [Equação (144)]
14	Cálculo do vetor auxiliar \vec{R}_S [Equação (145)]
15	Enquanto $\frac{\ \Delta\vec{Y}\ }{\ \vec{X}\ } \geq \text{tolerância}$
16	Cálculo das forças internas [Equações (118) e (119)]
17	Cálculo da parcela estática da matriz hessiana [Equações (130) e (131)]
18	Soma da parcela dinâmica à matriz hessiana [Equação (147)]
19	Cálculo do vetor resíduo mecânico [Equação (146)]
20	Imposição das condições de contorno na matriz hessiana e no vetor resíduo mecânico
21	Cálculo da correção da posição [Equação (126)]
22	Atualização da posição [Equação (127)]
23	Cálculo da norma da correção da posição ($\ \Delta\vec{Y}\ $)
24	Fim loop
25	Atualização da aceleração [Equação (142)]
26	Atualização da velocidade [Equação (143)]
27	Cálculo das tensões de Cauchy [Equação (150)]
28	Exportação dos dados para o pós-processamento
29	Fim loop

Fonte: autor.

3.4 Cálculo das tensões de Cauchy

Considerando a importância das tensões de Cauchy devido ao seu significado físico, foi implementado o cálculo das mesmas no programa. As tensões de Cauchy podem ser determinadas a partir das tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie através da seguinte expressão, a qual foi mostrada anteriormente na Equação (100):

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^t \quad (150)$$

Uma situação a ser contornada é o fato de que as tensões de Cauchy são calculadas nos pontos de integração, porém a maior parte dos pós-processadores demandam que os valores das variáveis sejam informados nos nós da estrutura. Na realidade, esta situação não ocorre somente com as tensões, mas com todas as variáveis calculadas nos pontos de integração, como as deformações, por exemplo.

Um método difundido na literatura para o cálculo dos valores nodais das variáveis a partir dos seus valores nos pontos de integração é a técnica de mínimos quadrados. Os valores das variáveis nos pontos de integração (vetor \vec{a}) são dados segundo as funções de forma (matriz \mathbf{L}) e os valores nodais (vetor \vec{A}) através da relação:

$$\vec{a} = \mathbf{L} \cdot \vec{A} \quad (151)$$

sendo a matriz \mathbf{L} calculada através da expressão:

$$L_{il} = \varphi_l(\xi_i) \quad (152)$$

Caso o número de pontos de integração seja igual ao número de nós do elemento, a inversa da matriz \mathbf{L} pode ser calculada diretamente; já caso o número de pontos de integração seja diferente do número de nós, procede-se à técnica de mínimos quadrados, uma vez que a matriz \mathbf{L} não é quadrada nessa situação. Na técnica de mínimos quadrados, os valores nodais são determinados fazendo-se (aqui o número de pontos de integração é maior que o número de nós do elemento):

$$\vec{A} = (\mathbf{L}^t \cdot \mathbf{L})^{-1} \cdot \mathbf{L}^t \cdot \vec{a} \quad (153)$$

Nota-se que o termo $(\mathbf{L}^t \cdot \mathbf{L})^{-1} \cdot \mathbf{L}^t$ corresponde à chamada matriz pseudo-inversa. Nos casos em que o número de pontos de integração é menor que o número de nós do elemento, ou seja, o número de incógnitas é maior que o número de equações disponível, faz-se necessária a redução do grau de aproximação do elemento auxiliar de pós-processamento de modo que o número de pontos de integração seja maior ou igual ao número de nós do elemento. Desta forma, procede-se primeiramente à determinação dos valores nodais através da técnica de mínimos quadrados para o elemento auxiliar de aproximação inferior, sendo posteriormente calculados os valores nos nós do elemento original através das funções de forma de grau inferior.

Por fim, com o intuito de garantir a continuidade das tensões no pós-processamento, calcula-se a média das tensões concorrentes no mesmo nó.

3.5 Instabilidade de estruturas pelo Método dos Elementos Finitos Posicional

O procedimento de cálculo de cargas críticas pelo Método dos Elementos Finitos Posicional já é bem estabelecido (SOARES; PACCOLA; CODA, 2019; SOARES; PACCOLA; CODA, 2021) e é descrito na sequência. As cargas e os modos de flambagem podem ser determinados genericamente através da resolução de um problema de autovalor-autovetor. Para isso, é necessária a realização da decomposição da matriz hessiana. Substituindo a Equação (131) na Equação (130) e colocando as variáveis em termos dos graus de liberdades locais, observa-se que a matriz hessiana (para cada elemento) pode ser decomposta nas seguintes parcelas:

$$H_{\alpha\gamma}^{el} = \int_{V_0^{el}} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_\gamma} : \mathfrak{C} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_\alpha} dV_0 + \int_{V_0^{el}} \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial Y_\gamma \partial Y_\alpha} dV_0 \quad (154)$$

É possível observar que a primeira parcela da Equação (154) não é dependente do nível de carga, enquanto a segunda parcela é.

Para a determinação das cargas de flambagem na situação de pequenos deslocamentos, aplica-se uma força de pequena magnitude \vec{F}^0 na estrutura de modo que o seu comportamento possa ser considerado linear, produzindo uma distribuição de tensão \mathbf{S}^0 . A tensão \mathbf{S} da Equação (154) pode então ser substituída pela tensão \mathbf{S}^0 multiplicada por um fator λ , fator este que é igual para todos os elementos finitos. Desta forma, a Equação (154) pode ser reescrita como:

$$H_{\alpha\gamma}^{el} = \int_{V_0^{el}} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_\gamma} : \mathfrak{C} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_\alpha} dV_0 + \lambda \int_{V_0^{el}} \mathbf{S}^0 : \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial Y_\gamma \partial Y_\alpha} dV_0 \quad (155)$$

Após a realização da integração numérica e da montagem global, a hessiana global pode ser escrita como:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{mat} + \lambda \mathbf{H}^{tensão} \quad (156)$$

sendo \mathbf{H}^{mat} a parcela da matriz hessiana dependente do material e $\mathbf{H}^{tensão}$ a parcela da matriz hessiana dependente do nível de tensão.

Substituindo a Equação (156) na Equação (126), obtém-se:

$$(\mathbf{H}^{mat} + \lambda \mathbf{H}^{tensão}) \cdot \Delta \vec{Y} = -\vec{g} \quad (157)$$

Na situação de flambagem, o sistema linear expresso pela Equação (157) perde a objetividade, ou seja, para valores nulos de \vec{g} surgem valores elevados de $\Delta \vec{Y}$. Nessa situação, a Equação (157) assume a forma:

$$\mathbf{H}^{mat} \cdot \Delta \vec{Y} = -\lambda \mathbf{H}^{tensão} \cdot \Delta \vec{Y} \quad (158)$$

É possível observar que a Equação (158) corresponde a um problema de autovalor-autovetor generalizado. Os autovalores λ_i estão associados às cargas de flambagem P_i^{cr} através da relação:

$$P_i^{cr} = \lambda_i F^0 \quad (159)$$

Os autovetores, por sua vez, correspondem aos modos de flambagem associados a cada carga crítica P_i^{cr} .

Tendo em vista que um dos objetivos do presente trabalho é a análise da influência das tensões residuais no comportamento estrutural de perfis formados a frio, é importante ressaltar que, caso o problema analisado envolva tensões residuais, as equações mostradas anteriormente devem ser modificadas.

O autovalor λ pode ser entendido como um escalar a ser multiplicado à carga de compressão de modo que se atinja a carga crítica de flambagem. Com isso, as tensões residuais não são dependentes de λ , assim, a matriz hessiana passa a ser decomposta nas seguintes parcelas:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{mat} + \mathbf{H}^{tensões\ residuais} + \lambda \mathbf{H}^{tensão} \quad (160)$$

sendo $\mathbf{H}^{tensões\ residuais}$ a parcela da matriz hessiana dependente das tensões residuais (obtidas, no presente trabalho, na etapa de dobra do perfil metálico) e $\mathbf{H}^{tensão}$ a parcela da matriz hessiana dependente das tensões geradas pela carga de compressão.

Realizando o mesmo desenvolvimento descrito anteriormente, conclui-se que o problema de autovalor-autovetor generalizado no caso considerando as tensões residuais assume a seguinte forma:

$$(\mathbf{H}^{mat} + \mathbf{H}^{tensões\ residuais}) \cdot \Delta \vec{Y} = -\lambda \mathbf{H}^{tensão} \cdot \Delta \vec{Y} \quad (161)$$

Para a resolução do problema de autovalor-autovetor generalizado dado acima, tendo em vista que no programa foi feito uso de matrizes esparsas, foi utilizado o *FEAST solver* (POLLIZI, 2009), o qual é pertencente ao *Math Kernel Library* da Intel®.

4 MODELOS CONSTITUTIVOS HIPERELÁSTICOS

Neste capítulo é primeiramente feita uma breve explanação sobre modelos constitutivos hiperelásticos, seguida da descrição da decomposição de Flory (FLORY, 1961) e dos modelos constitutivos adotados no presente trabalho.

Um material é dito hiperelástico caso ele possua explicitamente uma expressão para a sua energia específica de deformação. A energia específica de deformação corresponde ao trabalho por unidade de volume realizado pela tensão ao gerar deformação no contínuo. Ressalta-se que os potenciais admitidos como geradores de leis constitutivas consistentes devem ser convexos (OGDEN, 1984).

Para materiais homogêneos e isotrópicos, a energia específica de deformação pode ser escrita nas seguintes formas Lagrangeanas:

$$\Psi(\mathbf{A}) = \Psi(\mathbf{C}) = \Psi(\mathbb{E}) = \Psi(I_1, I_2, I_3) = \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (162)$$

sendo I_1 , I_2 e I_3 respectivamente os 1º, 2º e 3º invariantes do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green e λ_1 , λ_2 e λ_3 respectivamente os 1º, 2º e 3º alongamentos principais.

No entanto, apenas as duas últimas formas da Equação (162) necessariamente impõem a isotropia, pois os invariantes independem da orientação dos eixos adotados na análise.

Um modelo constitutivo hiperelástico completo deve atender a duas condições, a Condição de Normalização e a Condição de Crescimento, as quais são dadas respectivamente pelas seguintes expressões:

$$\Psi(\mathbf{C} = \mathbf{I}) = \Psi(\mathbb{E} = 0) = 0 \quad (163)$$

$$\begin{cases} \Psi \rightarrow +\infty \text{ quando } J \rightarrow 0^+ \\ \Psi \rightarrow +\infty \text{ quando } J \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (164)$$

Quando o problema analisado envolver grandes deformações, os modelos constitutivos devem impor a restrição $J > 0$ – conforme havia sido comentado na Equação (11) – condição esta que corresponde ao cumprimento da Condição de Crescimento. Caso o modelo não consiga impor tal restrição, o código computacional deve limitar as deformações a valores moderados, o que pode ser realizado através da implementação de avisos ou critérios de parada.

Para que o modelo constitutivo hiperelástico respeite a Condição de Crescimento, é necessário que pelo menos um termo da expressão da energia específica de deformação seja dado em função do jacobiano. Ao se escrever uma parcela da energia específica de deformação em função do jacobiano e as demais parcelas em função dos outros invariantes, estas serão responsáveis pelas parcelas desviadoras da tensão de Cauchy e aquela pela parcela hidrostática, conforme será demonstrado nos próximos itens.

4.1 Decomposição de Flory

É possível realizar a separação entre as parcelas da energia específica de deformação que produzem energia com a variação de volume e as que não produzem energia com a variação de volume. Isto é feito através da decomposição multiplicativa do gradiente da função mudança de configuração em parcelas volumétrica e isocórica, também conhecida como decomposição de Flory (FLORY, 1961). Essa decomposição é feita escrevendo-se o gradiente da função mudança de configuração como sendo composto por duas parcelas:

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{A}} \quad (165)$$

sendo

$$\hat{\mathbf{A}} = J^{1/3} \mathbf{I} \quad (166)$$

$$\bar{\mathbf{A}} = J^{-1/3} \mathbf{A} \quad (167)$$

Realizando o seguinte desenvolvimento no tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}^t \cdot \hat{\mathbf{A}}^t \cdot \hat{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{A}} = J^{2/3} \bar{\mathbf{A}}^t \cdot \bar{\mathbf{A}} = J^{2/3} \bar{\mathbf{C}} \quad (168)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3} \mathbf{C} \quad (169)$$

e definindo-se

$$\hat{\mathbf{C}} = J^{2/3} \mathbf{I} \quad (170)$$

é possível realizar a decomposição multiplicativa do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green da seguinte forma:

$$\mathbf{C} = \hat{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{C}} \quad (171)$$

Atentando-se ao fato de que

$$Det(\hat{\mathbf{C}}) = Det(\mathbf{C}) = J^2 \quad (172)$$

$$Det(\bar{\mathbf{C}}) = 1 \quad (173)$$

e ao significado físico do jacobiano expresso pela Equação (10), conclui-se que $\hat{\mathbf{C}}$ corresponde à parcela volumétrica e $\bar{\mathbf{C}}$ à parcela isocórica do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green.

Com isso, é possível decompor a energia específica de deformação em parcelas volumétrica (Ψ^{vol}) e isocórica (Ψ^{isoc}) da seguinte forma:

$$\Psi = \Psi^{vol} (Det(\hat{\mathbf{C}})) + \Psi^{isoc}(\bar{\mathbf{C}}) = \Psi^{vol}(J) + \Psi^{isoc}(\bar{\mathbf{C}}) \quad (174)$$

No caso de materiais isotropos, a parcela da energia dependente de $\bar{\mathbf{C}}$ é geralmente escrita em função de seus 1º e 2º invariantes \bar{I}_1 e \bar{I}_2 , resultando em:

$$\Psi = \Psi^{vol}(J) + \Psi^{isoc}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = \Psi^{vol}(J) + \Psi^{isoc1}(\bar{I}_1) + \Psi^{isoc2}(\bar{I}_2) \quad (175)$$

sendo

$$\bar{I}_1 = Tr(\bar{\mathbf{C}}) \quad (176)$$

$$\bar{I}_2 = Tr(\bar{\mathbf{C}}^{-1}) \quad (177)$$

Visto que $\bar{I}_3 = Det(\bar{\mathbf{C}}) = 1$, vale ressaltar que o 3º invariante isocórico é omitido da Equação (175) por ser constante.

A partir da decomposição da energia específica de deformação, determinam-se as parcelas volumétrica (\mathbf{S}^{vol}) e isocóricas (\mathbf{S}^{isoc1} e \mathbf{S}^{isoc2}) da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie através do conceito de conjugado energético:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{vol} + \mathbf{S}^{isoc1} + \mathbf{S}^{isoc2} = \frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \Psi^{isoc1}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \Psi^{isoc2}}{\partial \mathbf{E}} \quad (178)$$

sendo cada parcela calculada genericamente através das expressões:

$$\mathbf{S}^{vol} = \frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{E}} \quad (179)$$

$$\mathbf{S}^{isoc1} = \frac{\partial \Psi^{isoc1}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \Psi^{isoc1}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{E}} \quad (180)$$

$$\mathbf{S}^{isoc2} = \frac{\partial \Psi^{isoc2}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \Psi^{isoc2}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbf{E}} \quad (181)$$

O tensor constitutivo elástico tangente ($\mathfrak{C}_{ijkl}^{elast}$) é determinado derivando novamente a expressão da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie em relação à deformação de Green:

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{elast} = \mathfrak{C}_{ijkl}^{vol} + \mathfrak{C}_{ijkl}^{isoc1} + \mathfrak{C}_{ijkl}^{isoc2} = \frac{\partial^2 \Psi^{vol}}{\partial \mathbf{E}_{ij} \partial \mathbf{E}_{kl}} + \frac{\partial^2 \Psi^{isoc1}}{\partial \mathbf{E}_{ij} \partial \mathbf{E}_{kl}} + \frac{\partial^2 \Psi^{isoc2}}{\partial \mathbf{E}_{ij} \partial \mathbf{E}_{kl}} \quad (182)$$

sendo $\mathfrak{C}_{ijkl}^{vol}$ a parcela volumétrica do tensor constitutivo elástico tangente e $\mathfrak{C}_{ijkl}^{isoc1}$ e $\mathfrak{C}_{ijkl}^{isoc2}$ as parcelas isocóricas.

Cada parcela da Equação (182) é calculada genericamente por:

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{vol} = \frac{\partial^2 \Psi^{vol}}{\partial \mathbf{E}_{ij} \partial \mathbf{E}_{kl}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{E}_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi^{vol}}{\partial J^2} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{E}_{kl}} + \frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial J} \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{E}_{ij} \partial \mathbf{E}_{kl}} \quad (183)$$

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{isoc1} = \frac{\partial^2 \Psi^{isoc1}}{\partial \mathbf{E}_{ij} \partial \mathbf{E}_{kl}} = \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{E}_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi^{isoc1}}{\partial \bar{I}_1^2} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbf{E}_{kl}} + \frac{\partial \Psi^{isoc1}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \mathbf{E}_{ij} \partial \mathbf{E}_{kl}} \quad (184)$$

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{isoc2} = \frac{\partial^2 \Psi^{isoc2}}{\partial \mathbf{E}_{ij} \partial \mathbf{E}_{kl}} = \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbf{E}_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi^{isoc2}}{\partial \bar{I}_2^2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbf{E}_{kl}} + \frac{\partial \Psi^{isoc2}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial \mathbf{E}_{ij} \partial \mathbf{E}_{kl}} \quad (185)$$

Nos próximos itens será feita uma breve descrição dos modelos constitutivos hiperelásticos adotados no trabalho: os modelos de Saint-Venant-Kirchhoff e de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff.

4.2 Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff

O modelo constitutivo mais simples tendo como base a deformação de Green é a Lei de Saint-Venant-Kirchhoff. Este modelo possui uma expressão idêntica à da Lei de Hooke Generalizada, apenas trocando-se a deformação de engenharia pela deformação de Green. Sua expressão é dada na forma tensorial por:

$$\Psi(\mathbb{E}) = \frac{1}{2} \mathbb{E}_{kl} \mathfrak{C}_{kl ij} \mathbb{E}_{ij} \quad (186)$$

ou na forma explícita por:

$$\begin{aligned} \Psi = \frac{G}{(1-2\nu)} & [(1-\nu)(\mathbb{E}_{11}^2 + \mathbb{E}_{22}^2 + \mathbb{E}_{33}^2) + 2\nu(\mathbb{E}_{11}\mathbb{E}_{22} + \mathbb{E}_{11}\mathbb{E}_{33} + \mathbb{E}_{22}\mathbb{E}_{33}) \\ & + (1-2\nu)(\mathbb{E}_{12}^2 + \mathbb{E}_{21}^2 + \mathbb{E}_{13}^2 + \mathbb{E}_{31}^2 + \mathbb{E}_{23}^2 + \mathbb{E}_{32}^2)] \end{aligned} \quad (187)$$

sendo G o módulo de elasticidade transversal e ν o coeficiente de Poisson.

Tendo em vista que a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie corresponde ao conjugado energético da deformação de Green, sua expressão no modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff é dada por:

$$S_{ij} = \mathfrak{C}_{ijkl} \mathbb{E}_{kl} \quad (188)$$

A Equação (188) evidencia que no modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff a relação entre a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e a deformação de Green é linear. As expressões das componentes da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie são obtidas derivando a Equação (187) em relação às componentes da deformação de Green:

$$\left\{ \begin{aligned} S_{11} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{11}} = \frac{2G}{(1-2\nu)} [(1-\nu)\mathbb{E}_{11} + \nu(\mathbb{E}_{22} + \mathbb{E}_{33})] \\ S_{22} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{22}} = \frac{2G}{(1-2\nu)} [(1-\nu)\mathbb{E}_{22} + \nu(\mathbb{E}_{11} + \mathbb{E}_{33})] \\ S_{33} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{33}} = \frac{2G}{(1-2\nu)} [(1-\nu)\mathbb{E}_{33} + \nu(\mathbb{E}_{11} + \mathbb{E}_{22})] \\ S_{12} &= S_{21} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{12}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{21}} = 2G\mathbb{E}_{12} = 2G\mathbb{E}_{21} \\ S_{13} &= S_{31} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{13}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{31}} = 2G\mathbb{E}_{13} = 2G\mathbb{E}_{31} \\ S_{23} &= S_{32} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{23}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{32}} = 2G\mathbb{E}_{23} = 2G\mathbb{E}_{32} \end{aligned} \right. \quad (189)$$

Uma observação importante relativa ao modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff é que ele não atende à Condição de Crescimento (Equação (164)), portanto o seu uso fica limitado a problemas que não apresentam grandes deformações.

4.3 Modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff

Devido às limitações do modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff, no programa foi também implementado um outro modelo constitutivo hiperelástico para a análise de problemas no regime de grandes deformações, aqui denominado como modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff. Este modelo é obtido através da decomposição de Flory (FLORY, 1961), sendo que a parcela isocórica da energia específica de deformação é dada pelo modelo de Rivlin-Saunders e a parcela volumétrica pelo modelo de Hartmann-Neff.

Rivlin e Saunders (1951) propuseram seu modelo baseados em estudos de borrachas vulcanizadas. Com o intuito de descrever o comportamento mecânico desse tipo de material em termos de uma forma única para a energia específica de deformação, os autores propuseram uma formulação baseada na expressão deduzida anteriormente por Mooney (1940), porém os mesmos escreveram a energia específica de deformação em função dos invariantes de deformação ao invés dos alongamentos principais. A partir de deduções teóricas e de análises laboratoriais, os pesquisadores chegaram à expressão:

$$\Psi(I_1, I_2) = C(I_1 - 3) + f(I_2 - 3) \quad (190)$$

sendo C uma constante e f uma função determinada por meio de dados experimentais.

Tendo em mente que as leis constitutivas não lineares reproduzem a Lei linear de Saint-Venant-Kirchhoff para pequenas deformações, é possível determinar as constantes dos modelos não lineares através de uma análise comparativa. Realizando essa análise comparativa e escrevendo a energia específica de deformação em função dos invariantes da parcela isocórica do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, a Equação (190) assume a forma:

$$\Psi^{isoc1}(\bar{I}_1) + \Psi^{isoc2}(\bar{I}_2) = \frac{G}{4}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{G}{4}(\bar{I}_2 - 3) \quad (191)$$

Por sua vez, Hartmann e Neff (2003) propuseram expressões para a energia específica de deformação baseados nos invariantes principais para a descrição do comportamento mecânico de materiais isotrópicos quase incompressíveis. Uma das expressões propostas no estudo é dada por:

$$\Psi^{vol} = k^{vol}(J^{2n} + J^{-2n} - 2)^l; n \geq 1/2, l \geq 1 \quad (192)$$

sendo k^{vol} , n e l constantes.

Considerando que as leis constitutivas não lineares reproduzem a Lei linear de Saint-Venant-Kirchhoff para pequenas deformações, é possível determinar o valor da constante k^{vol} através de uma análise comparativa. Desta forma, adotando-se $l = 1$ e determinando-se o valor de k^{vol} através dessa análise comparativa, a Equação (192) assume a forma:

$$\Psi^{vol}(J) = \frac{K}{8n^2} (J^{2n} + J^{-2n} - 2) \quad (193)$$

sendo $n > 0$ uma constante que ajuda a regular a rigidez volumétrica. No trabalho, foi adotado $n = 1$.

Portanto, a expressão da energia específica de deformação do modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff é obtido através da combinação das Equações (191) e (193):

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi^{vol} + \Psi^{isoc1} + \Psi^{isoc2} \\ &= \frac{K}{8n^2} (J^{2n} + J^{-2n} - 2) + \frac{G}{4} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{G}{4} (\bar{I}_2 - 3) \end{aligned} \quad (194)$$

A expressão da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie elástica (\mathbf{S}^{elast}) é obtida derivando a Equação (194) em relação à deformação de Green:

$$\mathbf{S}^{elast} = \frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial \mathbb{E}} + \frac{\partial \Psi^{isoc1}}{\partial \mathbb{E}} + \frac{\partial \Psi^{isoc2}}{\partial \mathbb{E}} = \mathbf{S}^{vol} + \mathbf{S}^{isoc1} + \mathbf{S}^{isoc2} \quad (195)$$

Cada parcela de tensão é dada por:

$$\mathbf{S}^{vol} = \frac{K}{4n} [J^{2n-1} - J^{-(2n+1)}] \mathfrak{E}^{vol} \quad (196)$$

$$\mathbf{S}^{isoc1} = \frac{G}{4} \mathfrak{E}^{isoc1} \quad (197)$$

$$\mathbf{S}^{isoc2} = \frac{G}{4} \mathfrak{E}^{isoc2} \quad (198)$$

sendo \mathfrak{E}^{vol} , \mathfrak{E}^{isoc1} e \mathfrak{E}^{isoc2} as direções das tensões dadas respectivamente por:

$$\mathfrak{E}^{vol} = \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}} = J \mathbf{C}^{-1} \quad (199)$$

$$\mathfrak{E}^{isoc1} = \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}} = -\frac{2}{3} J^{-2/3} I_1 \mathbf{C}^{-1} + 2J^{-2/3} \mathbf{I} \quad (200)$$

$$\mathfrak{E}^{isoc2} = \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}} = 2J^{-4/3} \left[-\frac{2}{3} \mathbf{C}^{-1} I_2 + I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}^t \right] \quad (201)$$

É importante ressaltar que as direções expressas acima não são unitárias, mas no desenvolvimento das expressões de plasticidade sua normalização será necessária. Nas expressões das direções das tensões, o 1º e o 2º invariantes do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green I_1 e I_2 são dados respectivamente por:

$$I_1 = Tr(\mathbf{C}) \quad (202)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} C_{22} & C_{23} \\ C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{31} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} \quad (203)$$

A seguir será demonstrado que as componentes volumétrica e isocóricas da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (\mathbf{S}^{vol} , \mathbf{S}^{isoc1} e \mathbf{S}^{isoc2}) correspondem respectivamente às componentes hidrostática e desviadoras da tensão de Cauchy ($\boldsymbol{\sigma}^{vol}$, $\boldsymbol{\sigma}^{isoc1}$ e $\boldsymbol{\sigma}^{isoc2}$). Esta

demonstração é essencial no modelo elasto-plástico alternativo para grandes deformações adotado no trabalho, o qual será apresentado em detalhes no item 5.2. O primeiro passo da dedução consiste na aplicação da Equação (195) na Equação (100):

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^{vol} \cdot \mathbf{A}^t + \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^{isoc1} \cdot \mathbf{A}^t + \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^{isoc2} \cdot \mathbf{A}^t \quad (204)$$

A seguir, a demonstração é feita para cada componente separadamente. A componente volumétrica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{S}^{vol} = \frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}} = \alpha \boldsymbol{\mathfrak{E}}^{vol} = \alpha J \mathbf{C}^{-1} \quad (205)$$

sendo α um escalar. Desta forma, substituindo a Equação (205) na Equação (204), obtém-se:

$$\boldsymbol{\sigma}^{vol} = \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^{vol} \cdot \mathbf{A}^t = \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \alpha J \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{A}^t = \alpha \mathbf{I} = \boldsymbol{\sigma}^{hid} \quad (206)$$

o que mostra que \mathbf{S}^{vol} corresponde à componente hidrostática da tensão de Cauchy e que $\boldsymbol{\mathfrak{E}}^{vol}$ corresponde à direção hidrostática Lagrangeana da deformação.

A seguir, escreve-se a primeira componente isocórica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie como:

$$\mathbf{S}^{isoc1} = \frac{\partial \Psi^{isoc1}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}} = \beta \boldsymbol{\mathfrak{E}}^{isoc1} = \beta \left[-\frac{2}{3} J^{-2/3} Tr(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} + 2J^{-2/3} \mathbf{I} \right] \quad (207)$$

sendo β um escalar. Através da aplicação da Equação (207) na Equação (204), é obtido:

$$\boldsymbol{\sigma}^{isoc1} = \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^{isoc1} \cdot \mathbf{A}^t = \beta \left\{ 2J^{-5/3} \left[\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t - \frac{Tr(\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A})}{3} \mathbf{I} \right] \right\} \quad (208)$$

Como

$$Tr(\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} : \mathbf{A}^t = \mathbf{A}^t : \mathbf{A} = Tr(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t) \quad (209)$$

conclui-se que:

$$\boldsymbol{\sigma}^{isoc1} = \beta \left\{ 2J^{-5/3} \left[\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t - \frac{Tr(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t)}{3} \mathbf{I} \right] \right\} = \boldsymbol{\sigma}^{dev} \quad (210)$$

Desta forma, \mathbf{S}^{isoc1} corresponde à componente desviadora da tensão de Cauchy e $\boldsymbol{\mathfrak{E}}^{isoc1}$ corresponde à primeira direção isocórica Lagrangeana da deformação.

Por fim, escreve-se a segunda componente isocórica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie como:

$$\mathbf{S}^{isoc2} = \frac{\partial \Psi^{isoc2}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}} = \gamma \boldsymbol{\mathfrak{E}}^{isoc2} = \gamma \left[2J^{-4/3} \left(-\frac{2}{3} \mathbf{C}^{-1} I_2 + Tr(\mathbf{C}) \mathbf{I} - \mathbf{C}^t \right) \right] \quad (211)$$

sendo γ um escalar. Substituindo a Equação (211) na Equação (204), é obtido:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^{isoc2} &= \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^{isoc2} \cdot \mathbf{A}^t \\ &= \gamma 2J^{-7/3} \left\{ [Tr(\mathbf{C})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t)] - \frac{2}{3} I_2 \mathbf{I} \right\}\end{aligned}\quad (212)$$

Através da Equação (209), chega-se à seguinte relação:

$$Tr(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t) Tr(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t) - Tr[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t)] = 2I_2 \quad (213)$$

Com isso, calcula-se o traço de $\boldsymbol{\sigma}^{isoc2}$ como:

$$Tr(\boldsymbol{\sigma}^{isoc2}) = 2\gamma J^{-7/3} (2I_2 - 2I_2) = 0 \quad (214)$$

Portanto,

$$\boldsymbol{\sigma}^{isoc2} = \boldsymbol{\sigma}^{dev} \quad (215)$$

o que demonstra que \mathbf{S}^{isoc2} corresponde à componente desviadora da tensão de Cauchy e que $\boldsymbol{\mathfrak{E}}^{isoc2}$ corresponde à segunda direção isocórica Lagrangeana da deformação.

Terminada a demonstração, mostram-se agora as expressões do tensor constitutivo elástico tangente. Para isso, são necessárias as expressões das derivadas parciais presentes nas Equações (183), (184) e (185), além das já dadas pelas Equações (199), (200) e (201). As derivadas faltantes são dadas pelas seguintes expressões:

$$\frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial J} = \frac{K}{4n} [J^{2n-1} - J^{-(2n+1)}] \quad (216)$$

$$\frac{\partial \Psi^{isoc1}}{\partial \bar{I}_1} = \frac{\partial \Psi^{isoc2}}{\partial \bar{I}_2} = \frac{G}{4} \quad (217)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi^{vol}}{\partial J^2} = \frac{K}{4n} [(2n-1)J^{2n-2} + (2n+1)J^{-(2n+2)}] \quad (218)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} = \frac{\partial \boldsymbol{\mathfrak{E}}_{ij}^{vol}}{\partial \mathbb{E}_{kl}} = J(D_{ij}D_{kl} - 2D_{ik}D_{lj}) \quad (219)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi^{isoc1}}{\partial \bar{I}_1^2} = \frac{\partial^2 \Psi^{isoc2}}{\partial \bar{I}_2^2} = 0 \quad (220)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} = \frac{\partial \boldsymbol{\mathfrak{E}}_{ij}^{isoc1}}{\partial \mathbb{E}_{kl}} = \frac{4}{3} J^{-2/3} \left[\frac{1}{3} (D_{ij}D_{kl} + 3D_{ik}D_{lj}) I_1 - D_{ij}\delta_{kl} - D_{kl}\delta_{ij} \right] \quad (221)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} &= \frac{\partial \boldsymbol{\mathfrak{E}}_{ij}^{isoc2}}{\partial \mathbb{E}_{kl}} \\ &= \frac{8}{3} J^{-4/3} \left[\left(\frac{2}{3} D_{ij}D_{kl} + D_{ik}D_{lj} \right) I_2 - C_{zz} (D_{ij}\delta_{kl} + D_{kl}\delta_{ij}) \right. \\ &\quad \left. + D_{ij}C_{kl} + D_{kl}C_{ij} + \frac{3}{2} (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{jk}\delta_{il}) \right]\end{aligned}\quad (222)$$

sendo $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}$.

Por fim, são apresentados respectivamente na Figura 4.1 e na Figura 4.2 os pseudocódigos resumindo os algoritmos implementados no programa do cálculo da componente elástica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e do cálculo do tensor constitutivo elástico tangente pelo modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff.

Figura 4.1 – Pseudocódigo do cálculo da componente elástica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie pelo modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff

1	Cálculo de I_1 [Equação (202)]
2	Cálculo de I_2 [Equação (203)]
3	Cálculo de $\partial\Psi^{vol}/\partial J$ [Equação (216)]
4	Cálculo de \mathfrak{C}^{vol} [Equação (199)]
5	Cálculo de \mathfrak{S}^{vol} [Equação (196)]
6	Cálculo de $\partial\Psi^{isoc1}/\partial\bar{I}_1$ [Equação (217)]
7	Cálculo de $\partial\Psi^{isoc2}/\partial\bar{I}_2$ [Equação (217)]
8	Cálculo de \mathfrak{C}^{isoc1} [Equação (200)]
9	Cálculo de \mathfrak{C}^{isoc2} [Equação (201)]
10	Cálculo de \mathfrak{S}^{isoc1} [Equação (197)]
11	Cálculo de \mathfrak{S}^{isoc2} [Equação (198)]
12	Cálculo de \mathfrak{S}^{elast} [Equação (195)]

Fonte: autor.

Figura 4.2 – Pseudocódigo do cálculo do tensor constitutivo elástico tangente pelo modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff

```

1  Para cada dimensão i
2    Para cada dimensão j
3      Para cada dimensão k
4        Para cada dimensão l
5          Cálculo de  $\partial^2 J / \partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}$  [Equação (219)]
6          Cálculo de  $\frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}_{ij}} \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}_{kl}}$ 
7          Cálculo de  $\partial^2 \bar{I}_1 / \partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}$  [Equação (221)]
8          Cálculo de  $\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}_{ij}} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}_{kl}}$ 
9          Cálculo de  $\partial^2 \bar{I}_2 / \partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}$  [Equação (222)]
10         Cálculo de  $\frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}_{ij}} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}_{kl}}$ 
11        Fim loop
12      Fim loop
13    Fim loop
14  Fim loop
15  Cálculo de  $\partial^2 \Psi^{vol} / \partial J^2$  [Equação (218)]
16  Cálculo de  $\mathfrak{C}_{ijkl}^{vol}$  [Equação (183)]
17  Cálculo de  $\partial \Psi^{isoc1} / \partial \bar{I}_1$  [Equação (217)]
18  Cálculo de  $\mathfrak{C}_{ijkl}^{isoc1}$  [Equação (184)]
19  Cálculo de  $\partial \Psi^{isoc2} / \partial \bar{I}_2$  [Equação (217)]
20  Cálculo de  $\mathfrak{C}_{ijkl}^{isoc2}$  [Equação (185)]
21  Cálculo de  $\mathfrak{C}_{ijkl}^{elast}$  [Equação (182)]

```

Fonte: autor.

5 PLASTICIDADE

Neste capítulo é feita primeiramente uma breve apresentação dos fundamentos da plasticidade clássica e de formulações de plasticidade para pequenas deformações (item 5.1); em seguida, é apresentada em detalhes a formulação do modelo elasto-plástico alternativo para grandes deformações adotado no trabalho (item 5.2), o qual foi proposto recentemente por Coda (2021, 2022).

5.1 Fundamentos da plasticidade clássica

Embora no presente trabalho tenha sido adotada uma formulação de plasticidade no regime de grandes deformações, neste item são apresentados brevemente conceitos importantes da teoria de plasticidade no regime de pequenas deformações, conceitos estes que são importantes para o modelo elasto-plástico alternativo para grandes deformações adotado no trabalho.

5.1.1 Conceitos fundamentais

A plasticidade é um fenômeno que consiste no aparecimento de deformações residuais quando o material está sujeito a um nível de tensão superior ao regime elástico. A irreversibilidade das deformações plásticas pode ser explicada através de uma análise energética do processo de desenvolvimento das deformações: a fração da energia relativa às deformações plásticas não fica acumulada no meio, ela é dissipada no ambiente na forma de calor, tornando-se, portanto, irreversível (PROENÇA, 2018).

No caso específico de metais, investigações de sua microestrutura apontam que o fenômeno de plastificação é causado pela movimentação irreversível das imperfeições nas sequências das ligações atômicas sem a ocorrência de perda de coesão ou de rupturas internas (PROENÇA, 2018).

Segundo Khan e Huang (1995), as teorias de plasticidade podem ser classificadas em duas categorias: teorias matemáticas e teorias físicas. As teorias matemáticas, muitas vezes também denominadas teorias fenomenológicas, são formulações matemáticas gerais elaboradas com o objetivo de representar o comportamento observado em investigações experimentais, com isso, não há necessidade de um conhecimento profundo sobre os fenômenos físicos

envolvidos no desenvolvimento das deformações plásticas. Por outro lado, as teorias físicas são elaboradas levando em consideração os movimentos dos átomos do material e as deformações plásticas dos grãos e dos cristais, ou seja, a análise é feita em nível microscópico. Neste capítulo será dado enfoque apenas nas teorias matemáticas.

As deformações a que um material pode estar sujeito podem ser classificadas em quatro tipos:

- a) elásticas: são reversíveis (ausência de deformações residuais quando as forças são removidas) e independentes do tempo;
- b) plásticas: são irreversíveis e independentes do tempo;
- c) viscoelásticas: são reversíveis e dependentes do tempo, ou seja, apresentam dependência em relação ao tempo no regime elástico;
- d) viscoplásticas: são irreversíveis e dependentes do tempo, ou seja, apresentam dependência em relação ao tempo no regime plástico.

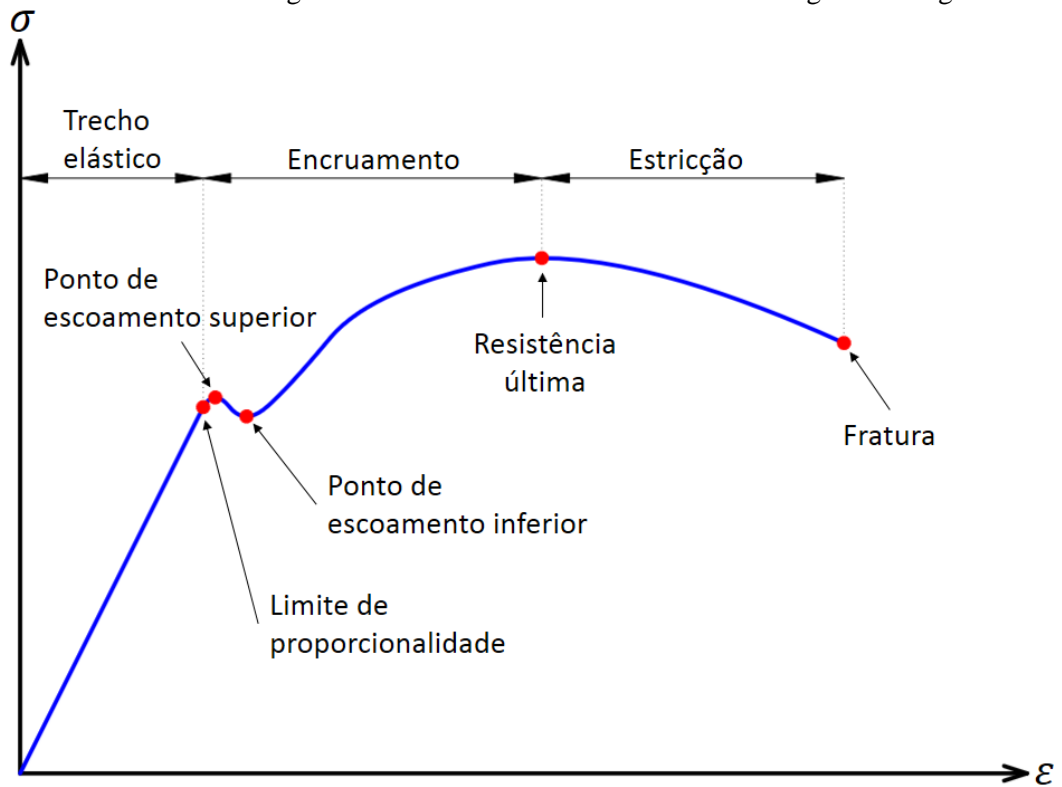
Ainda, dependendo do trecho da curva tensão x deformação que apresenta comportamento viscoso (dependência em relação ao tempo), o material pode apresentar quatro tipos de resposta (NEGAHBAN, 2012):

- a) elasto-plástico: sem dependência em relação ao tempo;
- b) viscoelasto-plástico: dependência em relação ao tempo no regime elástico;
- c) elasto-viscoplástico: dependência em relação ao tempo no regime plástico;
- d) viscoelástico-viscoplástico: dependência em relação ao tempo tanto no regime elástico quanto no regime plástico.

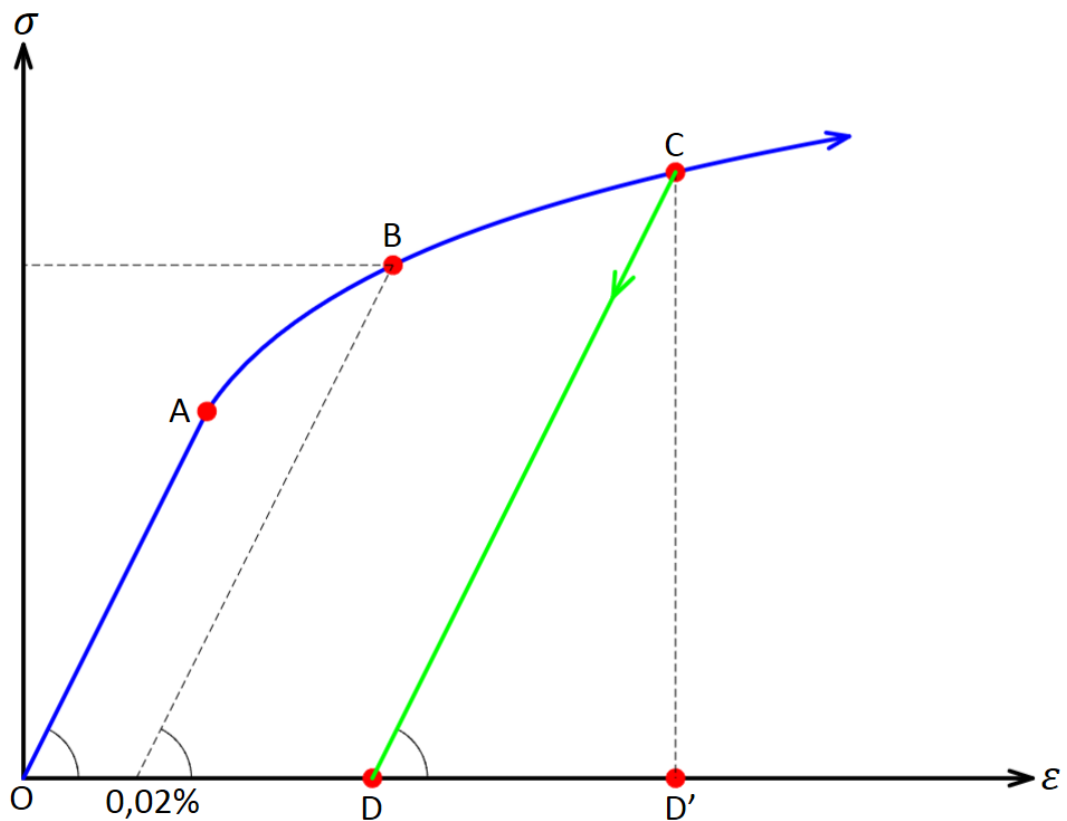
5.1.2 Plasticidade unidimensional em pequenas deformações

Um material metálico, ao ser submetido a um teste de tração uniaxial, apresenta um gráfico $\sigma \times \varepsilon$ (tensão nominal x deformação linear) cujo formato se assemelha ao mostrado na Figura 5.1a. Na Figura 5.1b, é mostrada a curva $\sigma \times \varepsilon$ com o material carregado até o trecho de encruamento e descarregado em seguida.

Figura 5.1 – Gráfico $\sigma \times \varepsilon$ típico de materiais metálicos: (a) curva completa; (b) curva mostrando o material sendo carregado até o trecho de encruamento e descarregado em seguida



(a)



(b)

Na Figura 5.1b, quatro pontos podem ser identificados:

- a) ponto A: limite de proporcionalidade;
- b) ponto B: limite de escoamento;
- c) ponto C: ponto arbitrário no trecho de encruamento;
- d) ponto D: corpo totalmente descarregado.

Na maioria dos materiais o trecho inicial da curva $\sigma \times \varepsilon$ é elástico e obedece à Lei de Hooke, ou seja, a curva pode ser admitida reta até o limite de proporcionalidade, o qual é representado pelo ponto A na Figura 5.1b. A partir deste ponto, o gráfico passa a ser curvo, no entanto, não é possível distinguir um ponto com uma mudança brusca da inclinação onde possa ser identificado claramente o limite de escoamento (ponto a partir do qual o material passa a escoar). Por esse motivo, normas internacionais identificam o limite de escoamento como sendo o ponto da curva interseccionado pela inclinação elástica com uma deformação de 0,02%, representado pelo ponto B na Figura 5.1b.

Ao se aumentar o carregamento, o material atinge o trecho de encruamento, onde a tensão aumenta com a inclinação da curva cada vez menor. Caso se aumente ainda mais o carregamento, chega-se à região de estricção, onde ocorre uma redução progressiva da seção transversal da barra até a ruptura do material. Conforme pode ser observado na Figura 5.1a, nesta região ocorre uma redução da tensão com o aumento da deformação, fenômeno que é conhecido como *strain softening*, situação em que o tensor constitutivo tangente deixa de ser positivo definido. Este fenômeno corresponde a um processo de dano distribuído progressivo, tal como microfissuramento, formação de vazios ou perda de contato entre as partículas do material. Vale ressaltar ainda que o fenômeno de *strain softening* pode ocorrer não apenas na situação de tração, mas também nas situações de compressão e cisalhamento (BAŽANT; BELYTSCHKO; CHANG, 1984).

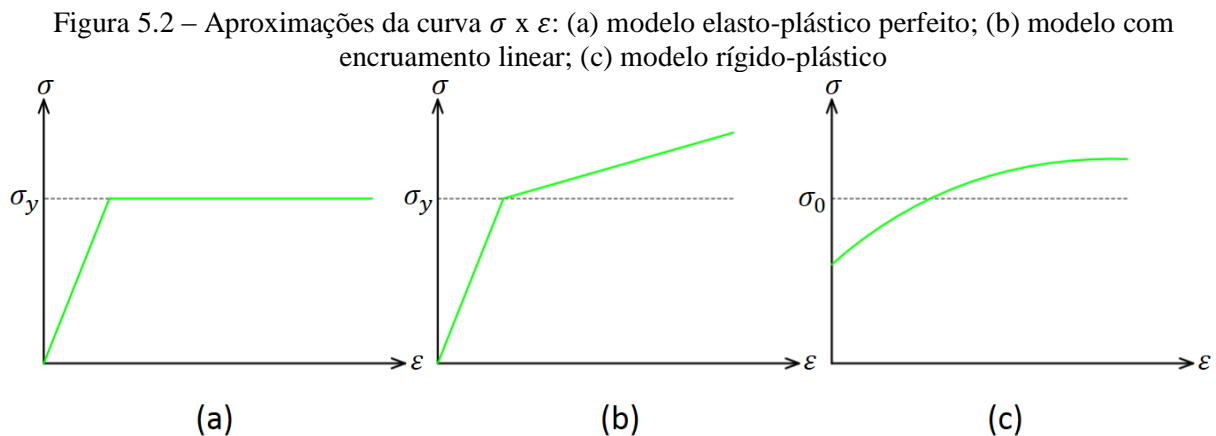
Ao se retirar o carregamento, ocorre o descarregamento elástico. A inclinação durante o descarregamento é igual à inclinação do trecho elástico, a qual é dada pelo módulo de elasticidade longitudinal. No ponto D da Figura 5.1b, a tensão é zero, porém, há deformação plástica residual, cuja magnitude é \overline{OD} . Como a deformação elástica é dada por $\overline{DD'}$, a partir do gráfico é possível observar que a deformação total ε^{total} pode ser expressa como a soma da deformação elástica ε^{elast} com a deformação plástica ε^{plast} :

$$\varepsilon^{total} = \varepsilon^{elast} + \varepsilon^{plast} \quad (223)$$

lembrando que a deformação elástica é dada pela Lei de Hooke por:

$$\varepsilon^{elast} = \frac{\sigma}{E} \quad (224)$$

Vários modelos podem ser adotados para a aproximação da curva $\sigma \times \varepsilon$. Alguns modelos comumente adotados são mostrados na Figura 5.2: o modelo elasto-plástico perfeito (Figura 5.2a), o modelo com encruamento linear (Figura 5.2b) e o modelo rígido-plástico (Figura 5.2c). No modelo elasto-plástico perfeito, a tensão de escoamento é considerada constante, desta forma, quando a tensão é mantida no valor dessa tensão limite, o material escoou indefinidamente. Por sua vez, no modelo elasto-plástico com encruamento, o limite do regime elástico varia, sendo dependente da história prévia da deformação plástica. Outro modelo comumente adotado é o rígido-plástico, onde é considerado que o material não apresenta deformação elástica.



Fonte: autor.

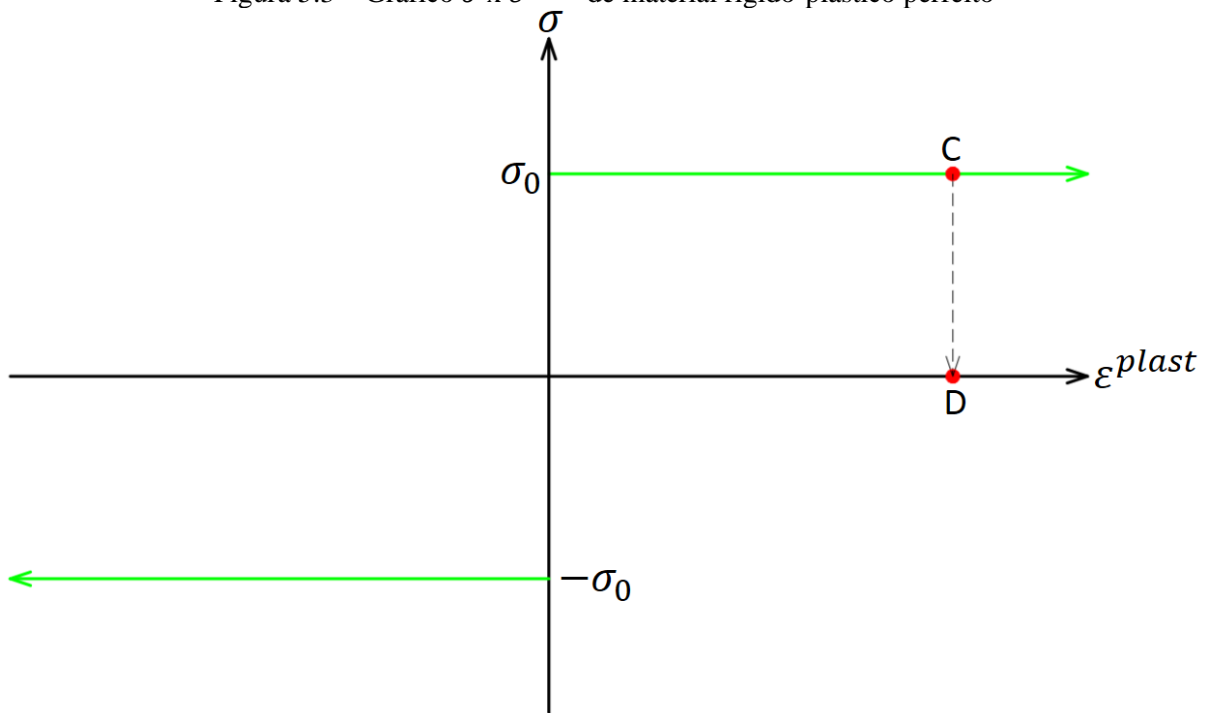
Diferentemente dos modelos elásticos, onde para cada nível de deformação existe um único nível correspondente de tensão e vice-versa (relação tensão-deformação biunívoca), nos modelos elasto-plásticos há a necessidade de conhecimento da história prévia da deformação plástica para a determinação da tensão correspondente. Este comportamento não linear também impossibilita a determinação da deformação plástica apenas pela configuração atual (PROENÇA, 2018).

Em modelos rígido-plásticos, uma simplificação que pode ser adotada é a consideração da tensão média σ_0 da curva $\sigma \times \varepsilon$, assim como mostrado na Figura 5.2c. Essa simplificação origina o conceito de material rígido-plástico perfeito, cujo gráfico $\sigma \times \varepsilon^{plast}$ é mostrado na Figura 5.3. No modelo rígido-plástico perfeito, a tensão de escoamento $|\sigma_0|$ é considerada constante e igual tanto na tração quanto na compressão. Além disso, neste modelo o fluxo plástico segue as seguintes condições:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^{plast} > 0; \sigma = \sigma_0 \\ \dot{\varepsilon}^{plast} < 0; \sigma = -\sigma_0 \\ \dot{\varepsilon}^{plast} = 0; -\sigma_0 < \sigma < \sigma_0 \end{cases} \quad (225)$$

Em caso de descarregamento, a tensão percorre o caminho vertical \overline{CD} mostrado na Figura 5.3, uma vez que neste modelo é considerado que o material não apresenta deformação elástica.

Figura 5.3 – Gráfico $\sigma \times \varepsilon^{plast}$ de material rígido-plástico perfeito



Fonte: autor.

5.1.3 Incompressibilidade

Uma observação física importante relativa a materiais metálicos constatada empiricamente é que metais são praticamente incompressíveis durante a plastificação (WIERZBICKI, 2013). Analisando primeiramente o efeito da incompressibilidade no caso unidimensional, considera-se uma barra prismática com comprimento l e seção transversal de área A . O volume da barra V é dado conseqüentemente por:

$$V = Al \quad (226)$$

Considerando a condição de incompressibilidade, a variação de volume dV deve ser nula:

$$dV = d(Al) = dAl + Adl = 0 \quad (227)$$

Através da Equação (227), é possível concluir que o incremento de deformação $d\varepsilon$ pode ser calculado tanto através do comprimento quanto através da área da seção transversal da barra:

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l} = -\frac{dA}{A} \quad (228)$$

Integrando a primeira forma da Equação (228), obtém-se:

$$\varepsilon = \int \frac{1}{l} dl = \ln(l) + C \quad (229)$$

A constante de integração C é determinada através da imposição de que a deformação é nula quando o comprimento l corresponde ao comprimento inicial l_0 :

$$C = 0 - \ln(l_0) = -\ln(l_0) \quad (230)$$

Com isso, substituindo a Equação (230) na Equação (229), conclui-se que a deformação pode ser calculada em função do comprimento da barra através de:

$$\varepsilon = \ln(l) - \ln(l_0) = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \quad (231)$$

que corresponde à definição logarítmica da deformação.

O mesmo procedimento pode ser feito levando em consideração a área da seção transversal ao invés do comprimento da barra. Integrando a segunda forma da Equação (228), obtém-se:

$$\varepsilon = \int -\frac{1}{A} dA = -\ln(A) + C \quad (232)$$

Impondo que a deformação é nula quando a área A corresponde à área inicial A_0 , é verificado que a constante de integração C é dada por:

$$C = 0 + \ln(A_0) = \ln(A_0) \quad (233)$$

Substituindo a Equação (233) na Equação (232), conclui-se que a deformação pode ser calculada em função da área da seção transversal da barra através da expressão:

$$\varepsilon = -\ln(A) + \ln(A_0) = \ln\left(\frac{A_0}{A}\right) \quad (234)$$

Escrevendo as Equações (231) e (234) em forma de taxa, são obtidas as expressões do fluxo plástico no caso unidimensional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \left[\ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \right]}{\partial t} = \frac{\partial [\ln(l) - \ln(l_0)]}{\partial t} = \frac{\partial [\ln(l)]}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial t} = \frac{1}{l} \dot{l} = \frac{\dot{l}}{l} \\ \dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \left[\ln\left(\frac{A_0}{A}\right) \right]}{\partial t} = \frac{\partial [-\ln(A) + \ln(A_0)]}{\partial t} = \frac{\partial [-\ln(A)]}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{A} \dot{A} = -\frac{\dot{A}}{A} \end{array} \right. \quad (235)$$

A condição de incompressibilidade pode ser estudada agora no caso tridimensional. Considerando um cubo infinitesimal de arestas x_1 , x_2 e x_3 , seu volume V é dado por:

$$V = x_1 x_2 x_3 \quad (236)$$

A condição de incompressibilidade requer que a variação de volume dV seja nula:

$$dV = d(x_1 x_2 x_3) = dx_1 x_2 x_3 + x_1 dx_2 x_3 + x_1 x_2 dx_3 = 0 \quad (237)$$

Dividindo todos os termos pelo volume do cubo, obtém-se:

$$\frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} + \frac{dx_3}{x_3} = 0 \quad (238)$$

Com isso, conclui-se que a condição de incompressibilidade no caso tridimensional requer a seguinte relação:

$$d\varepsilon_{11} + d\varepsilon_{22} + d\varepsilon_{33} = d\varepsilon_{kk} = 0 \quad (239)$$

Tendo em vista que

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} dt = \dot{\varepsilon}_{ij} dt \quad (240)$$

a condição de incompressibilidade também pode ser expressa na forma de taxa através da relação:

$$\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33} = \dot{\varepsilon}_{kk} = 0 \quad (241)$$

No caso uniaxial na direção x_1 e considerando materiais isotrópicos, sabe-se que $\dot{\varepsilon}_{22} = \dot{\varepsilon}_{33}$. Portanto, utilizando essa relação na Equação (241), verifica-se que:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{11} + 2\dot{\varepsilon}_{22} = 0 \\ \dot{\varepsilon}_{11} + 2\dot{\varepsilon}_{33} = 0 \end{cases} \quad (242)$$

Com isso,

$$\dot{\varepsilon}_{22} = \dot{\varepsilon}_{33} = -0,5\dot{\varepsilon}_{11} \quad (243)$$

O coeficiente 0,5 pode ser entendido como o coeficiente de Poisson na fase plástica:

$$\nu = -\frac{\dot{\varepsilon}_{22}}{\dot{\varepsilon}_{11}} = -\frac{\dot{\varepsilon}_{33}}{\dot{\varepsilon}_{11}} = 0,5 \quad (244)$$

Portanto, conclui-se que o coeficiente de Poisson na fase plástica deve ser 0,5 para que o material seja incompressível durante o fluxo plástico, o que faz com que o valor do *Bulk modulus* na fase plástica tenda ao infinito (conforme pode ser observado através da Equação (21)). Vale notar que esse valor difere do coeficiente de Poisson no regime elástico, o qual é aproximadamente 0,3 para metais. Alguns outros materiais, tais como borrachas, polímeros e a água, também apresentam um comportamento incompressível ou quase incompressível (WIERZBICKI, 2013).

5.1.4 Critério de plastificação de von Mises

No caso unidimensional, a plastificação ocorre quando a tensão normal atinge a tensão de escoamento:

$$\sigma_{11} = \pm\sigma_y \quad (245)$$

Já no caso tridimensional, todas as componentes de tensão contribuem para a plastificação do material. Considerando que um dado estado de tensão corresponde a um ponto no espaço das tensões, todos os estados de tensão que causam o escoamento do material formam uma superfície contínua, a qual é denominada superfície de plastificação. A superfície de plastificação, portanto, divide o espaço das tensões nos domínios elástico e plástico.

Com isso, no caso geral é necessária a adoção de um critério de plastificação, a qual é expressa através de uma função, denominada função de plastificação. A função de plastificação pode ser escrita matematicamente de forma genérica como (KHAN; HUANG, 1995):

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \quad (246)$$

A função de plastificação define matematicamente a separação do espaço das tensões nos domínios elástico e plástico (sendo esse último inadmissível). Caso $F(\sigma_{ij}) < 0$, o estado de tensão está no domínio elástico; caso $F(\sigma_{ij}) \geq 0$, o estado de tensão está no domínio plástico e uma correção deve ser aplicada para que o estado de tensão permaneça sobre a superfície de plastificação. A superfície de plastificação, por sua vez, pode não variar (plasticidade perfeita) ou evoluir (ocorrência de encruamento ou amolecimento do material).

Um dos critérios de plastificação mais difundidos é o critério de von Mises (MISES, 1913), o qual é aplicado a materiais dúcteis. Em ensaios laboratoriais foi observado que a componente hidrostática da tensão não influencia a plastificação desses materiais, apenas a componente desviadora. O critério afirma que o material passa a escoar a partir do momento em que a seguinte condição é atingida:

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) &= 2\sigma_y^2 \\ &= 6J_2 = 3\sigma_{ij}^{dev}\sigma_{ij}^{dev} = 9\tau_{oct}^2 \end{aligned} \quad (247)$$

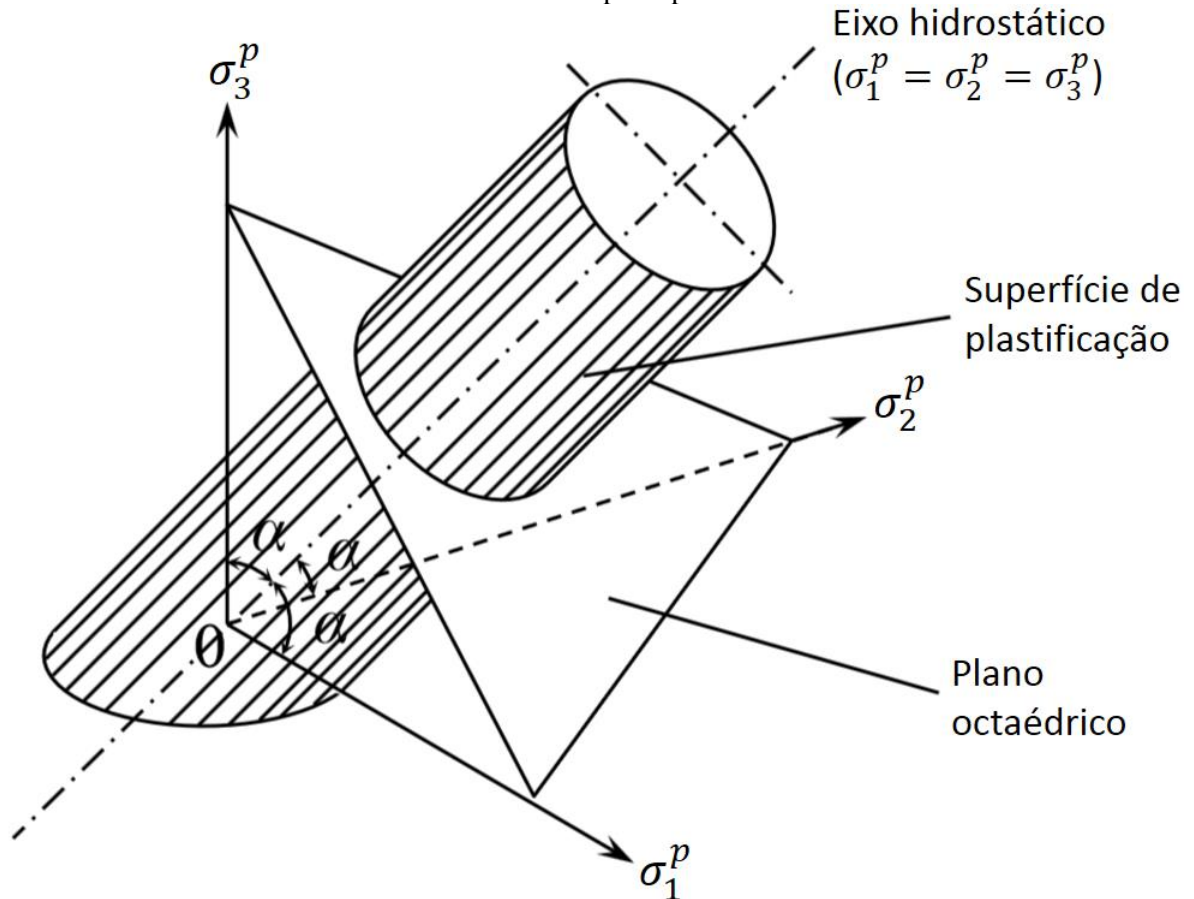
sendo J_2 o 2º invariante da componente desviadora da tensão (sua definição é dada pela Equação (A28)) e τ_{oct} a tensão de cisalhamento octaédrica. A dedução da expressão do critério de plastificação de von Mises é apresentada detalhadamente no Apêndice A.

Quando é utilizado o sistema de coordenadas principais, os termos fora da diagonal do tensor σ_{ij} são nulos ($\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$), existindo apenas as tensões principais σ_1^p , σ_2^p e σ_3^p . Nessa situação, a Equação (247) simplifica-se para:

$$(\sigma_1^p - \sigma_2^p)^2 + (\sigma_2^p - \sigma_3^p)^2 + (\sigma_3^p - \sigma_1^p)^2 = 2\sigma_y^2 = 6J_2 = 3\sigma_{ij}^{dev}\sigma_{ij}^{dev} = 9\tau_{oct}^2 \quad (248)$$

A Equação (248) representa graficamente um cilindro de extremidades abertas no espaço das tensões principais normal ao plano octaédrico com geratriz paralela ao eixo hidrostático, assim como mostrado na Figura 5.4.

Figura 5.4 – Representação gráfica tridimensional do critério de plastificação de von Mises no espaço das tensões principais



Fonte: adaptado de Wierzbicki (2013).

No caso do estado plano de tensões, $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$. Portanto, a Equação (247) fica simplificada como:

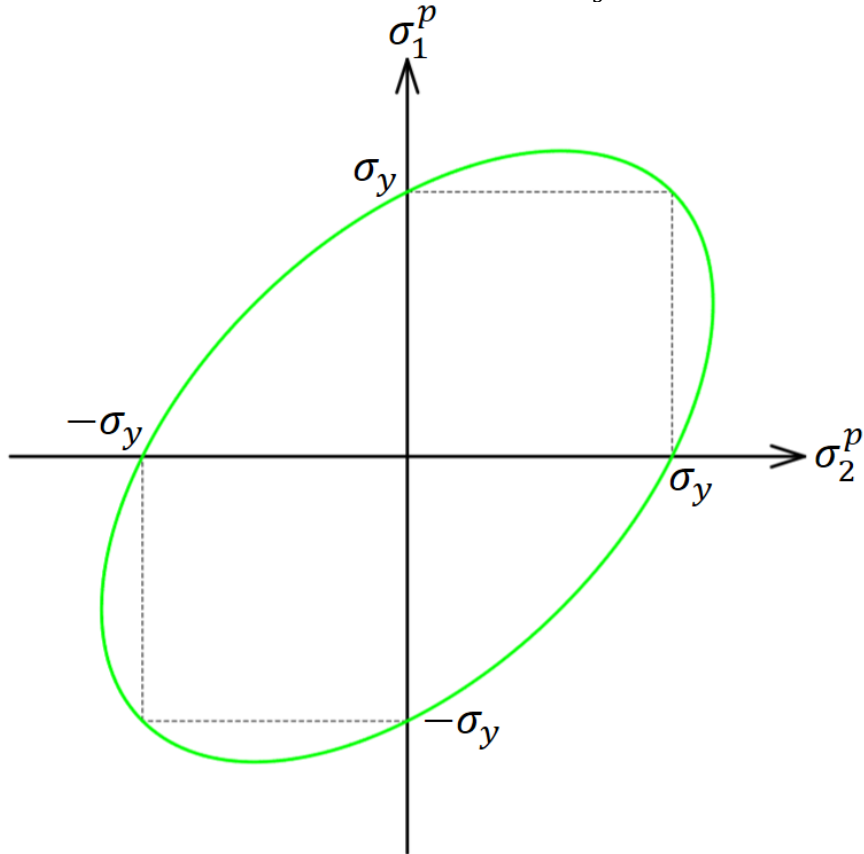
$$\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2 = \sigma_y^2 \quad (249)$$

Ainda, no sistema de coordenadas principais, $\sigma_{12} = 0$, o que simplifica ainda mais a expressão para:

$$(\sigma_1^p)^2 - \sigma_1^p\sigma_2^p + (\sigma_2^p)^2 = \sigma_y^2 \quad (250)$$

A expressão dada pela Equação (250) corresponde graficamente a uma elipse no plano $\sigma_3^p = 0$ no sistema de coordenadas principais, assim como mostrado na Figura 5.5.

Figura 5.5 – Representação gráfica bidimensional do critério de plastificação de von Mises no espaço das tensões principais no plano $\sigma_3^p = 0$



Fonte: autor.

Uma medida comumente empregada é a tensão de von Mises σ_{VM} (também denominada de tensão equivalente). A tensão de von Mises é um escalar utilizado na predição do escoamento do material sob condições de carregamento multiaxial. Quando o estado de tensões está sobre a superfície de plastificação, a tensão de von Mises σ_{VM} é considerada igual a σ_y na Equação (247), com isso, σ_{VM} é dada por:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)]} \quad (251)$$

ou, caso se utilize o sistema de coordenadas principais, a expressão anterior simplifica-se para:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1^p - \sigma_2^p)^2 + (\sigma_2^p - \sigma_3^p)^2 + (\sigma_3^p - \sigma_1^p)^2]} \quad (252)$$

O fluxo da deformação equivalente ($\dot{\epsilon}_{VM}$), ou seja, o fluxo da deformação conjugada energética da tensão de von Mises, pode ser determinado através de uma equivalência de energia:

$$\sigma_{VM} \dot{\varepsilon}_{VM} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (253)$$

Desenvolvendo a Equação (253), conclui-se que o fluxo da deformação equivalente é dado pela expressão:

$$\dot{\varepsilon}_{VM} = \sqrt{\frac{2}{9} [(\dot{\varepsilon}_{11} - \dot{\varepsilon}_{22})^2 + (\dot{\varepsilon}_{22} - \dot{\varepsilon}_{33})^2 + (\dot{\varepsilon}_{33} - \dot{\varepsilon}_{11})^2]} \quad (254)$$

Finalmente, a deformação equivalente ε_{VM} é obtida integrando o fluxo $\dot{\varepsilon}_{VM}$ em relação ao tempo:

$$\varepsilon_{VM} = \int \dot{\varepsilon}_{VM} dt \quad (255)$$

5.1.5 Encruamento isótopo e cinemático

Encruamento é um fenômeno caracterizado pelo ganho de resistência do material com o aumento da deformação. Segundo Proença (2018), o encruamento pode ter duas causas físicas:

- acúmulo de discordâncias causado pela existência de uma barreira física, como uma inclusão ou um vazio, o que ocasiona uma concentração de tensões;
- desconformidade na acomodação das deformações dos grãos da rede cristalina, o que também ocasiona uma concentração de tensões, especialmente em regiões angulares.

No modelo elasto-plástico perfeito, o encruamento é desconsiderado e, conseqüentemente, a superfície de plastificação não se altera com o desenvolvimento de deformações no material. A função da superfície inicial de plastificação F_0 pode ser expressa de forma genérica como:

$$F_0(\sigma_{ij}) = 0 \quad (256)$$

No caso de adoção do critério de von Mises, através da Equação (247) é possível observar que a função da superfície inicial de plastificação é dada por:

$$F_0(\sigma_{ij}) = \sigma_{VM} - \sigma_y = \sqrt{3J_2} - \sigma_y = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}^{dev} \sigma_{ij}^{dev}} - \sigma_y = \frac{9}{2} \tau_{oct} - \sigma_y = 0 \quad (257)$$

No caso mais geral, no entanto, a superfície de plastificação pode ter seu tamanho, formato e posição alterados, sendo expressa genericamente através da função:

$$F(\sigma_{ij}, K_i) = 0 \quad (258)$$

sendo que K_i representa um ou mais parâmetros de encruamento, os quais podem ser escalares ou tensores. No início do escoamento, os parâmetros de encruamento são nulos, portanto constata-se que:

$$F(\sigma_{ij}, 0) = F_0(\sigma_{ij}) \quad (259)$$

A chamada lei de encruamento é a responsável por descrever a alteração da superfície de plastificação com o desenvolvimento de deformações plásticas no material. Existem duas formas para a consideração do encruamento: através do encruamento isótropo, o qual corresponde fisicamente ao processo de acúmulo de discordâncias; ou através do encruamento cinemático, o qual corresponde fisicamente ao encruamento causado por incompatibilidades de deformações entre os contornos dos cristais (PROENÇA, 2018).

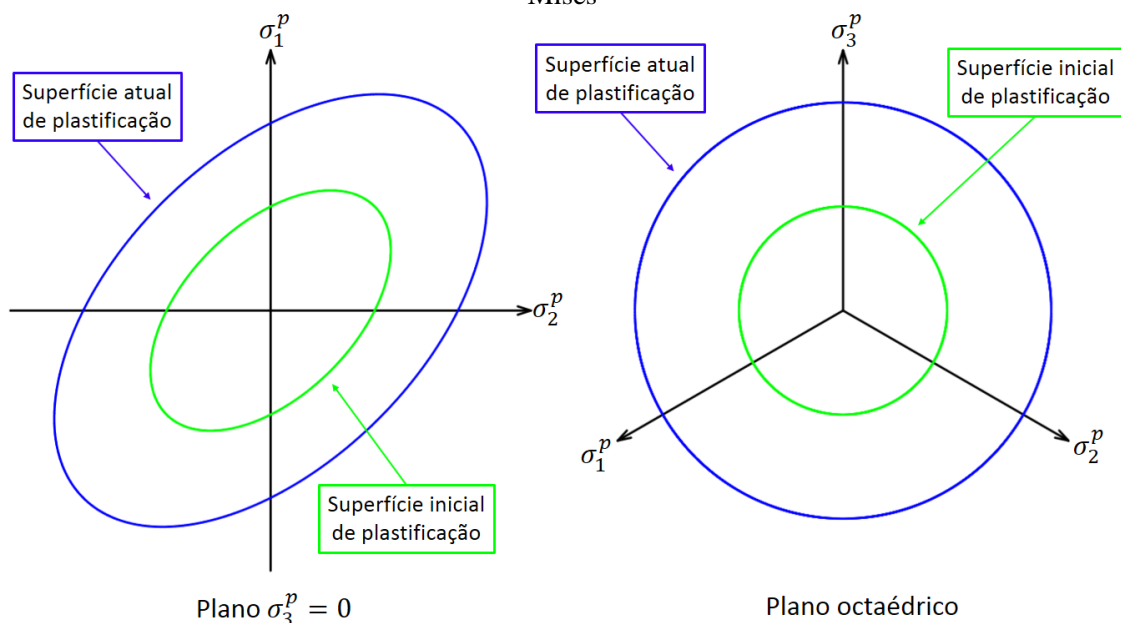
O encruamento isótropo considera que o tamanho da superfície de plastificação é uma função da deformação plástica. A função de plastificação com encruamento isótropo pode ser escrita genericamente como:

$$F(\sigma_{ij}, \kappa) = F_0(\sigma_{ij}) - \kappa = 0 \quad (260)$$

Através da Equação (260) é possível observar que o formato da superfície de plastificação é expresso em função da superfície inicial de plastificação e da alteração de seu tamanho, a qual por sua vez é descrita pelo parâmetro de encruamento κ .

A representação gráfica do encruamento isótropo consiste em um aumento uniforme da superfície inicial de plastificação em torno de seu centro, assim como ilustrado na Figura 5.6.

Figura 5.6 – Representação gráfica do encruamento isótropo com o critério de plastificação de von Mises



Fonte: autor.

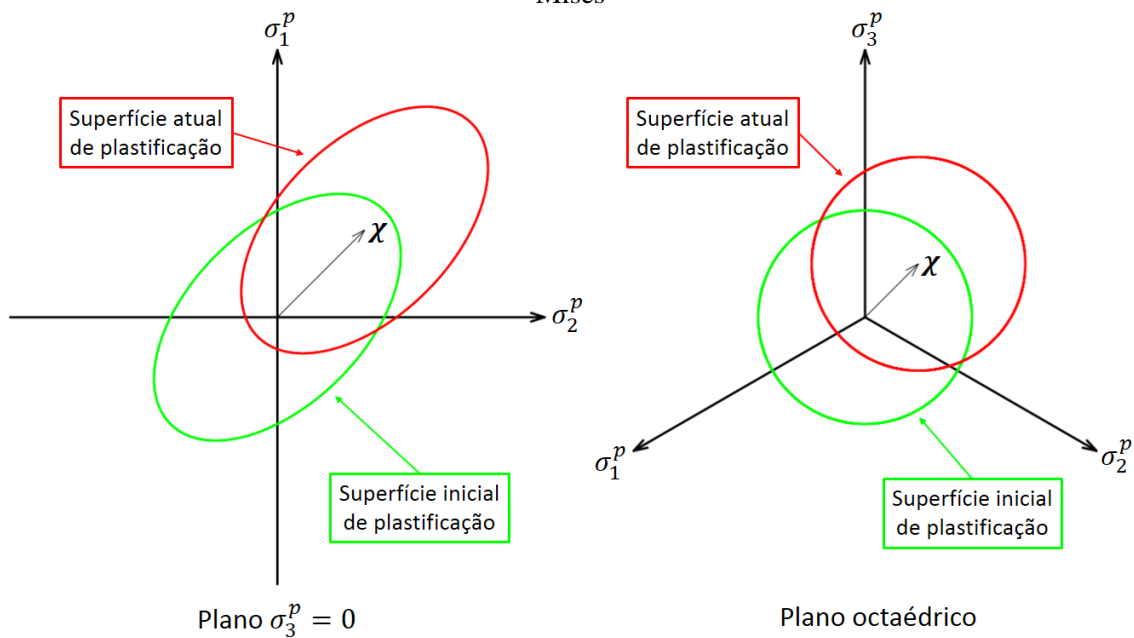
No caso de adoção do critério de von Mises com encruamento isótropo, a função de plastificação fica dada por:

$$F(\sigma_{ij}, \kappa) = \sigma_{VM} - \sigma_y - \kappa = \sqrt{3J_2} - \sigma_y - \kappa = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma_{ij}^{dev}\sigma_{ij}^{dev}} - \sigma_y - \kappa \quad (261)$$

$$= \frac{9}{2}\tau_{oct} - \sigma_y - \kappa = 0$$

O encruamento cinemático, por sua vez, considera que o tamanho da superfície de plastificação permanece constante, ocorrendo apenas a translação de seu centro, assim como ilustrado na Figura 5.7. As coordenadas do centro da superfície de plastificação são denominadas *back stress* (χ).

Figura 5.7 – Representação gráfica do encruamento cinemático com o critério de plastificação de von Mises



Fonte: autor.

A função de plastificação com encruamento cinemático pode ser escrita genericamente como:

$$F(\sigma_{ij}, \chi_{ij}) = F_0(\sigma_{ij} - \chi_{ij}) = 0 \quad (262)$$

No caso de adoção do critério de von Mises com encruamento cinemático, a função de plastificação fica dada por:

$$F(\sigma_{ij}, \chi_{ij}) = \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma_{ij}^{dev} - \chi_{ij}^{dev})(\sigma_{ij}^{dev} - \chi_{ij}^{dev})} - \sigma_y = 0 \quad (263)$$

sendo χ_{ij}^{dev} a componente desviadora de χ_{ij} .

Os modelos de encruamento isótropo e cinemático podem também ser combinados, resultando em um modelo misto. Neste caso, a função de plastificação pode ser expressa de forma genérica como:

$$F(\sigma_{ij}, \kappa, \chi_{ij}) = F_0(\sigma_{ij} - \chi_{ij}) - \kappa = 0 \quad (264)$$

5.1.6 Leis de evolução

As leis de evolução correspondem às relações gerais entre as deformações plásticas e os estados de tensão (HOSFORD, 2013). As leis de evolução podem ser expressas como:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{plast} = \dot{\lambda} \frac{\partial g(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (265)$$

sendo $\dot{\lambda}$ um escalar de proporcionalidade não negativo, apresentando valor maior que zero apenas quando ocorrem deformações plásticas; e g a chamada função do potencial plástico. O potencial plástico é uma função escalar das tensões na forma:

$$g(\sigma_{ij}) = \text{constante} \quad (266)$$

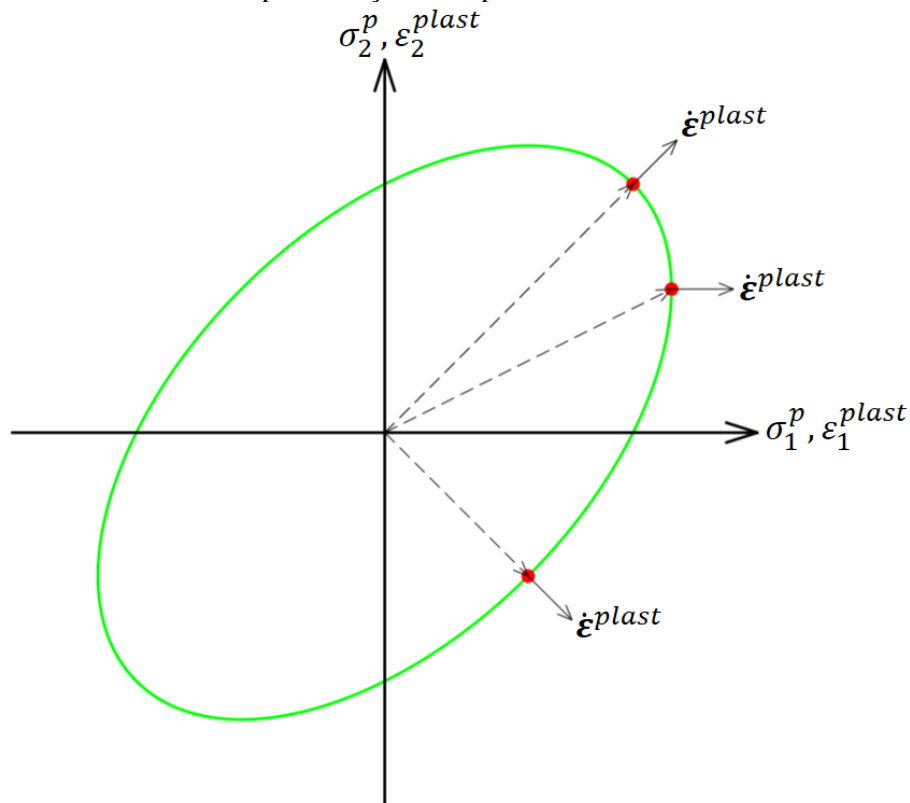
No caso mais simples possível, a função do potencial plástico e a função do critério de plastificação coincidem, ou seja, $g(\sigma_{ij}) = F(\sigma_{ij})$. Neste caso, a Equação (265) passa a ser dada por:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{plast} = \dot{\lambda} \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (267)$$

A Equação (267) é denominada lei de evolução associativa, devido ao fato de o fluxo plástico estar associado ao critério de plastificação; por outro lado, caso $g(\sigma_{ij}) \neq F(\sigma_{ij})$, a Equação (265) é denominada lei de evolução não associativa (CHEN; HAN, 1988).

A partir da Equação (267) é possível observar que $\dot{\varepsilon}_{ij}^{plast}$ é proporcional ao gradiente da função $F(\sigma_{ij})$, com isso, conclui-se que o fluxo plástico se desenvolve ao longo da direção normal à superfície de plastificação, assim como ilustrado na Figura 5.8.

Figura 5.8 – Representação da perpendicularidade entre o vetor da taxa de deformação e a superfície de plastificação na elipse de von Mises



Fonte: autor.

5.2 Modelo elasto-plástico alternativo para grandes deformações

A plasticidade foi considerada no trabalho através da implementação do modelo elasto-plástico alternativo para grandes deformações proposto recentemente por Coda (2021, 2022). O modelo é baseado na decomposição do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green em parcelas volumétrica e isocóricas, de forma a permitir que a energia específica de deformação seja dividida em uma parcela volumétrica e duas isocóricas, assim como foi mostrado no item 4.1. A formulação considera três hipóteses:

- a) as mudanças de volume são exclusivamente elásticas;
- b) a parcela plástica da deformação é desviadora em qualquer instante;
- c) a decomposição multiplicativa do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green em parcelas volumétrica e isocóricas garante evoluções independentes das tensões de Cauchy hidrostáticas e desviadoras mesmo com a ocorrência de fluxo plástico.

Nos próximos itens é apresentada a formulação do modelo elasto-plástico alternativo, onde foi seguida a descrição dada por Coda (2021, 2022).

5.2.1 Limite de plastificação

O modelo elasto-plástico alternativo considera o critério de plastificação de von Mises, o qual pode ser escrito, conforme mostrado na Equação (247), como:

$$J_2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^{dev} : \boldsymbol{\sigma}^{dev} < \frac{\sigma_y^2}{3} \quad (268)$$

No caso, escolhe-se a utilização da tensão cisalhante de escoamento $\bar{\tau}$ ao invés da tensão normal σ_y , as quais estão relacionadas por:

$$\bar{\tau} = \frac{\sigma_y}{2} \quad (269)$$

Assim, o critério de von Mises passa a ser dado por:

$$\sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^{dev} : \boldsymbol{\sigma}^{dev}} - 2\bar{\tau} < 0 \quad (270)$$

Conforme foi demonstrado no item 4.3, as componentes isocóricas da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie \mathbf{S}^{isoc1} e \mathbf{S}^{isoc2} correspondem respectivamente às componentes desviadoras da tensão de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}^{isoc1}$ e $\boldsymbol{\sigma}^{isoc2}$. Como há duas direções desviadoras, o critério de von Mises é dividido para cada uma das direções:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}^{isoc1} : \mathbf{S}^{isoc1}} - \bar{\tau}_1 < 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}^{isoc2} : \mathbf{S}^{isoc2}} - \bar{\tau}_2 < 0 \end{array} \right. \quad (271)$$

Levando em consideração as Equações (197) e (198), assume-se que $\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_2 = \bar{\tau}$. Desta forma, (271) pode ser reescrita como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} \mathbf{S}^{isoc1} : \mathbf{S}^{isoc1} - \bar{\tau}^2 < 0 \\ \frac{3}{2} \mathbf{S}^{isoc2} : \mathbf{S}^{isoc2} - \bar{\tau}^2 < 0 \end{array} \right. \quad (272)$$

Substituindo as Equações (197) e (198) em (272), as relações passam a ser dadas em função das direções isocóricas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3G^2}{32} \mathfrak{E}^{isoc1} : \mathfrak{E}^{isoc1} - \bar{\tau}^2 < 0 \\ \frac{3G^2}{32} \mathfrak{E}^{isoc2} : \mathfrak{E}^{isoc2} - \bar{\tau}^2 < 0 \end{array} \right. \quad (273)$$

A partir deste ponto as notações \mathfrak{E}^{isoc1} e \mathfrak{E}^{isoc2} são unificadas como \mathfrak{E} visando a evitar redundância nas etapas operacionais descritas na sequência. Com isso, (273) é reescrita de forma unificada como:

$$\frac{3G^2}{32} \mathfrak{E} : \mathfrak{E} - \bar{\tau}^2 < 0 \quad (274)$$

As superfícies iniciais de plastificação são obtidas através da imposição de igualdade em (274). É importante ressaltar que neste ponto já aparece uma diferença da presente formulação com relação às formulações clássicas: nesta formulação há duas superfícies de plastificação, ao contrário do que ocorre comumente nas outras formulações, onde há apenas uma superfície de plastificação.

5.2.2 Evolução plástica

A condição dada por (274) ainda precisa ser modificada a fim de possibilitar a consideração do fluxo plástico prévio e da evolução plástica. Para isso, definem-se a evolução da deformação plástica $\Delta\mathfrak{E}^{plast}$ e a mudança da tensão plástica $\Delta\mathfrak{S}^{plast}$ respectivamente como:

$$\Delta\mathfrak{E}^{plast} = \Delta\lambda \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (275)$$

$$\Delta\mathfrak{S}^{plast} = \frac{G}{4} \Delta\lambda \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (276)$$

sendo $\Delta\lambda$ a variação/evolução do multiplicador plástico e o termo $\mathfrak{E}/\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}$ correspondente às direções unitárias isocóricas da evolução da deformação plástica. É interessante comentar que a evolução das variáveis pode ser diretamente relacionada ao que foi definido por fluxo ou taxa nos itens anteriores.

É importante ressaltar que uma acumulação do tipo $\mathfrak{S}^{plast} = \mathfrak{S}^{plast} + \Delta\mathfrak{S}^{plast}$ não pode ser realizada visto que no regime de grandes deformações um valor passado de $\Delta\mathfrak{S}^{plast}$ pode deixar de ser isocórico. Devido à essa impossibilidade, a tensão plástica \mathfrak{S}^{plast} é escrita como:

$$\mathfrak{S}^{plast} = \frac{G}{4} \lambda^\zeta \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (277)$$

e a evolução é imposta na deformação plástica escalar λ^ζ :

$$\lambda^\zeta = (\lambda^\zeta)^{ac} + \zeta\Delta\lambda \quad (278)$$

sendo que o sobrescrito *ac* significa acumulado e ζ corresponde ao sinal da evolução plástica, o qual será definido posteriormente.

Vale notar que, como \mathbf{S}^{plast} é proporcional a \mathfrak{E} , as 2ª e 3ª hipóteses da formulação são cumpridas. Outro ponto a ser observado é que aqui fica evidente uma outra diferença entre a presente formulação e as formulações clássicas: a direção do fluxo plástico não depende de um potencial plástico. Ainda, a autointersecção do material é naturalmente evitada, uma vez que a condição $J > 0$ é garantida pelo potencial hiperelástico volumétrico, no caso o modelo constitutivo de Hartmann-Neff.

5.2.3 Encruamento cinemático

O encruamento cinemático (H^c) é considerado constante ao longo das iterações da solução numérica, no entanto ele é dependente da deformação plástica escalar λ^ζ . Definindo-se a variável β como:

$$\beta(\lambda^\zeta) = \frac{H^c(\lambda^\zeta)}{G} \quad (279)$$

a variável interna do encruamento cinemático q pode ser escrita como:

$$q = q^{ac} + \beta(\lambda^\zeta)\zeta\Delta\lambda \quad (280)$$

sendo que o sinal da evolução da deformação plástica escalar é dado por:

$$\zeta = \text{Sign}(\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}} - \lambda^\zeta - q) \quad (281)$$

Com isso, o *back stress* pode ser determinado através da seguinte expressão:

$$\mathcal{X} = q \frac{G}{4} \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (282)$$

5.2.4 Encruamento isótropo

O encruamento isótropo (H^i) também é considerado constante ao longo das iterações do processo numérico, no entanto este é dependente do multiplicador plástico acumulado λ . Semelhantemente ao feito no encruamento cinemático, define-se a variável η como:

$$\eta(\lambda) = \frac{H^i(\lambda)}{G} \quad (283)$$

O multiplicador plástico λ é acumulado através de:

$$\lambda = \lambda^{ac} + \Delta\lambda \quad (284)$$

e a evolução da variável interna associada ao encruamento isótropo κ é dada por:

$$\kappa = \kappa^{ac} + \eta(\lambda)\Delta\lambda \quad (285)$$

5.2.5 Função objetiva

Considerando a notação unificada \mathbf{S}^{isoc} para \mathbf{S}^{isoc1} e \mathbf{S}^{isoc2} , a tensão a ser considerada na função objetiva é dada por:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{isoc} - \mathbf{S}^{plast} - \chi \quad (286)$$

Desenvolvendo a Equação (286), obtém-se:

$$\mathbf{S} = \frac{G}{4} \mathfrak{E} - \frac{G}{4} \lambda^\zeta \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} - \frac{G}{4} q \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} = \frac{G}{4} \left(1 - \frac{\lambda^\zeta}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} - \frac{q}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \right) \mathfrak{E} \quad (287)$$

Com isso, é possível constatar que:

$$\mathbf{S} : \mathbf{S} = \frac{G^2}{16} \left(1 - \frac{\lambda^\zeta}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} - \frac{q}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \right)^2 \mathfrak{E} : \mathfrak{E} \quad (288)$$

É importante observar que a tensão completa \mathbf{S}^c é dada por:

$$\mathbf{S}^c = (\mathbf{S}^{vol})^{elast} + (\mathbf{S}^{isoc1})^{ep} + (\mathbf{S}^{isoc2})^{ep} \quad (289)$$

sendo $(\mathbf{S}^{vol})^{elast}$ a parcela da tensão elástica volumétrica dada pela Equação (196). Utilizando a notação unificada \mathbf{S}^{ep} para se referir a ambas as tensões elasto-plásticas isocóricas $(\mathbf{S}^{isoc1})^{ep}$ e $(\mathbf{S}^{isoc2})^{ep}$, a parcela elasto-plástica isocórica da tensão fica expressa como:

$$\mathbf{S}^{ep} = \mathbf{S}^{isoc} - \mathbf{S}^{plast} = \frac{G}{4} (1 - \lambda^\zeta) \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (290)$$

Levando em consideração a mudança de tamanho (encruamento isótropo) e a translação (encruamento cinemático) das superfícies de plastificação, a função objetiva dada pela Equação (274) pode ser modificada como:

$$f = \frac{3G^2}{32} \left(1 - \frac{\lambda^\zeta}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} - \frac{q}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \right)^2 \mathfrak{E} : \mathfrak{E} - \left(\sqrt{\frac{3G}{24}} \kappa + \bar{\tau} \right)^2 < 0 \quad (291)$$

5.2.6 Cálculo do multiplicador plástico

A evolução plástica ocorre quando uma função objetiva tentativa viola o critério de plastificação dado por (291):

$$f^{tr} = \frac{3G^2}{32} \left[1 - \frac{(\lambda^\zeta)^{ac}}{\sqrt{\mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr}}} - \frac{q^{ac}}{\sqrt{\mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr}}} \right]^2 \mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr} - \left(\sqrt{\frac{3G}{24}} \kappa^{ac} + \bar{\tau} \right)^2 \geq 0 \quad (292)$$

onde o sobrescrito *tr* significa tentativa elástica sem evolução plástica.

A condição de que o nível de tensão deve permanecer na superfície de plastificação é satisfeita através da imposição de equidade em (292) e da inclusão da evolução das variáveis internas expressas em função de $\Delta\lambda$, obtendo-se:

$$\begin{aligned} \frac{3G^2}{32} \left\{ 1 - \frac{[(\lambda^\zeta)^{ac} + q^{ac}]}{\sqrt{\mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr}}} - (1 + \beta)\zeta \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{\mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr}}} \right\}^2 \mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr} \\ = \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{G}{4} (\kappa^{ac} + \eta\Delta\lambda) + \bar{\tau} \right]^2 \end{aligned} \quad (293)$$

Como os encruamentos são considerados constantes ao longo das iterações, o multiplicador plástico pode ser calculado através da Fórmula de Bhaskara, sendo o menor valor positivo dentre:

$$\begin{cases} \Delta\lambda_1 = \frac{\sqrt{\mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr}} - [(\lambda^\zeta)^{ac} + q^{ac}] - \kappa^{ac} - \frac{\bar{\tau}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{G}{4}}}{\zeta(1 + \beta) + \eta} \\ \Delta\lambda_2 = \frac{\sqrt{\mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr}} - [(\lambda^\zeta)^{ac} + q^{ac}] + \kappa^{ac} + \frac{\bar{\tau}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{G}{4}}}{\zeta(1 + \beta) - \eta} \end{cases} \quad (294)$$

No caso específico de carregamentos cíclicos, ocorre a situação em que $\mathfrak{S}^{plast} \neq 0$ e $\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}$ é pequeno, o que pode fazer com que a Equação (277) fique mal condicionada. Nessa situação é preciso utilizar uma função objetiva alternativa, a qual será apresentada no item 5.2.8.

A seguir é apresentado na Figura 5.9 o pseudocódigo do algoritmo de plasticidade no regime de grandes deformações implementado no programa. Essa subrotina é realizada após a subrotina do cálculo da componente elástica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (Figura 4.1) caso o ponto de integração esteja plastificando no regime de grandes deformações.

Figura 5.9 – Pseudocódigo do algoritmo de plasticidade no regime de grandes deformações

-
- 1 Cálculo de f^{tr} [raiz quadrada da Equação (292)]
 - 2 **Se** $f^{tr} > 0$
 - 3 Determinação de ζ [Equação (281)]
 - 4 Cálculo de η [Equação (283)]
 - 5 Cálculo de β [Equação (279)]
 - 6 Cálculo das raízes $\Delta\lambda_1$ e $\Delta\lambda_2$ [Equação (294)]
 - 7 Atribuição da menor raiz a $\Delta\lambda$ ($\Delta\lambda \leftarrow \Delta\lambda_1$ ou $\Delta\lambda \leftarrow \Delta\lambda_2$)
 - 8 Incremento de λ^ζ [Equação (278)]
 - 9 Incremento de q [Equação (280)]
 - 10 Cálculo de \mathbf{S}^{plast} [Equação (277)]
 - 11 Incremento de κ [Equação (285)]
 - 12 Incremento de λ [Equação (284)]
 - 13 Cálculo de χ [Equação (282)]
 - 14 **Senão**
 - 15 Variação do multiplicador plástico nula ($\Delta\lambda \leftarrow 0$)
 - 16 **Fim condição**
-

Fonte: autor.

Obtidas as tensões plásticas (\mathbf{S}^{plast}), a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie total (\mathbf{S}^{total}) é obtida subtraindo a parcela plástica da parcela elástica (\mathbf{S}^{elast}):

$$\mathbf{S}^{total} = \mathbf{S}^{elast} - \mathbf{S}^{plast} = \mathbf{S}^{vol} + \mathbf{S}^{isoc1} + \mathbf{S}^{isoc2} - \mathbf{S}^{plast1} - \mathbf{S}^{plast2} \quad (295)$$

5.2.7 Tensor constitutivo elasto-plástico tangente

Como a Equação (276) é válida em um dado instante, a Equação (290) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{S}^{ep} = \mathbf{S}^{isoc} - (\mathbf{S}^{plast})^{ac} - \Delta\mathbf{S}^{plast} \quad (296)$$

Tendo em vista que $(\mathbf{S}^{plast})^{ac}$ não varia e que $\Delta\mathbf{S}^{plast}$ é um valor finito, a variação da tensão elasto-plástica fica:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{S}^{ep} &= \frac{\partial\mathbf{S}^{isoc}}{\partial\mathbb{E}} : \delta\mathbb{E} - \frac{\partial\Delta\mathbf{S}^{plast}}{\partial\mathbb{E}} : \delta\mathbb{E} = \frac{G}{4} \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\mathbb{E}} : \delta\mathbb{E} - \frac{G}{4} \Delta\lambda \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\mathbb{E}} : \delta\mathbb{E} \\ &= \frac{G}{4} (1 - \Delta\lambda) \frac{\partial^2\bar{I}}{\partial\mathbb{E} \otimes \partial\mathbb{E}} : \delta\mathbb{E} \end{aligned} \quad (297)$$

Portanto, a expressão do tensor constitutivo elasto-plástico tangente isocórico ($\mathfrak{C}^{ep,isoc}$) fica dado por:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}^{ep,isoc} &= \frac{G}{4} (1 - \Delta\lambda) \frac{\partial^2\bar{I}}{\partial\mathbb{E} \otimes \partial\mathbb{E}} = \frac{G}{4} \frac{\partial^2\bar{I}}{\partial\mathbb{E} \otimes \partial\mathbb{E}} - \frac{G}{4} \Delta\lambda \frac{\partial^2\bar{I}}{\partial\mathbb{E} \otimes \partial\mathbb{E}} \\ &= \mathfrak{C}^{isoc} - \mathfrak{C}^{plast} \end{aligned} \quad (298)$$

sendo o termo $\partial^2 \bar{I} / \partial \mathbb{E} \otimes \partial \mathbb{E}$ dado pelas Equações (221) e (222), \mathfrak{C}^{isoc} dado pelas Equações (184) e (185) e \mathfrak{C}^{plast} a parcela plástica do tensor constitutivo tangente. Vale ressaltar que a parcela volumétrica do tensor constitutivo tangente é elástica.

Com isso, caso o ponto de integração esteja no regime plástico, o tensor constitutivo tangente total (\mathfrak{C}^{total}) é obtido subtraindo a parcela \mathfrak{C}^{plast} da parcela elástica (\mathfrak{C}^{elast}) calculada através da Equação (182), ou seja:

$$\mathfrak{C}^{total} = \mathfrak{C}^{elast} - \mathfrak{C}^{plast} \quad (299)$$

Este procedimento é realizado após a subrotina do cálculo do tensor constitutivo elástico tangente (Figura 4.2) caso o ponto de integração esteja plastificando.

5.2.8 Evolução plástica no regime de pequenas deformações

Como mencionado anteriormente, em carregamentos cíclicos ocorre a situação em que $\mathbf{S}^{plast} \neq 0$ e $\sqrt{\mathfrak{C} : \mathfrak{C}}$ é pequeno, o que pode fazer com que a Equação (277) fique mal condicionada. Com isso, é necessária a adoção de um procedimento para pequenas deformações a fim de contornar esse problema.

A partir das tensões \mathbf{S}^{isoc} e \mathbf{S}^{plast} , é possível determinar a direção plástica \mathbf{v} como:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{S}^{isoc} - \mathbf{S}^{plast}}{\sqrt{(\mathbf{S}^{isoc} - \mathbf{S}^{plast}) : (\mathbf{S}^{isoc} - \mathbf{S}^{plast})}} = \frac{\mathbf{S}^{isoc} - \mathbf{S}^{plast}}{\|\mathbf{S}^{isoc} - \mathbf{S}^{plast}\|} \quad (300)$$

Com isso, \mathbf{v} passa a ser utilizado no lugar de $\mathfrak{C} / \sqrt{\mathfrak{C} : \mathfrak{C}}$. Desta forma, $\Delta \mathbf{S}^p$ e $\Delta \chi$ ficam escritos respectivamente como:

$$\Delta \mathbf{S}^{plast} = \frac{G}{4} \Delta \lambda \mathbf{v} \quad (301)$$

$$\Delta \chi = \beta \frac{G}{4} \Delta \lambda \mathbf{v} \quad (302)$$

Portanto, a função objetiva passa a ser dada por:

$$f^{tr} = \left[\sqrt{\frac{3}{2} (\mathbf{S}^{tr} : \mathbf{S}^{tr})} \right]^2 - \left(\sqrt{\frac{3}{2} \frac{G}{4} \kappa^{ac} + \bar{\tau}} \right)^2 \leq 0 \quad (303)$$

No processo para pequenas deformações, as evoluções são dadas por:

$$\begin{cases} \kappa = \kappa^{ac} + \eta \Delta \lambda \\ \lambda = \lambda^{ac} + \Delta \lambda \\ \chi = \chi + \Delta \chi \\ \mathbf{S}^{plast} = \mathbf{S}^{plast} + \Delta \mathbf{S}^{plast} \end{cases} \quad (304)$$

Quando ocorre a plastificação, é imposta igualdade em (303), resultando em:

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2} [(\mathbf{S}^{elast} - \mathbf{S}^{plast} - \boldsymbol{\chi} - \mathbf{v}\Delta\lambda^* - \beta\mathbf{v}\Delta\lambda^*) \\
& \quad : (\mathbf{S}^{elast} - \mathbf{S}^{plast} - \boldsymbol{\chi} - \mathbf{v}\Delta\lambda^* - \beta\mathbf{v}\Delta\lambda^*)] \\
& = \left(\frac{G}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \kappa^{ac} + \bar{\tau} + \sqrt{\frac{3}{2}} \eta \Delta\lambda^* \right)^2
\end{aligned} \tag{305}$$

sendo

$$\Delta\lambda^* = \frac{G}{4} \Delta\lambda \tag{306}$$

Após alguns desenvolvimentos algébricos, a Equação (305) assume a forma:

$$\begin{aligned}
f^{tr} + \left[\frac{3}{2} \bar{\omega}^2 - \frac{3}{2} \eta^2 \right] (\Delta\lambda^*)^2 - 2 \left[\frac{3}{2} \bar{\omega} (\mathbf{S}^{isoc} : \mathbf{v}) + \left(\frac{G}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \kappa^{ac} + \bar{\tau} \right) \sqrt{\frac{3}{2}} \eta \right] \Delta\lambda^* \\
= 0
\end{aligned} \tag{307}$$

sendo

$$\bar{\omega} = 1 + \beta \tag{308}$$

Como os encruamentos são considerados constantes ao longo das iterações, o multiplicador plástico pode ser calculado através da Fórmula de Bhaskara, sendo o menor valor positivo dentre:

$$\Delta\lambda^* = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4af^{tr}}}{2a} \tag{309}$$

ou através da seguinte forma:

$$\Delta\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4af^{tr}}}{2a} \frac{4}{G} \tag{310}$$

sendo

$$a = \frac{3}{2} [\bar{\omega}^2 - \eta^2] \tag{311}$$

$$b = -2 \left[\frac{3}{2} \bar{\omega} (\mathbf{S}^{isoc} : \mathbf{v}) + \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \kappa^{ac} + \bar{\tau} \right) \sqrt{\frac{3}{2}} \eta \right] \tag{312}$$

Com relação ao tensor constitutivo tangente, no regime de pequenas deformações é adotado o mesmo tensor constitutivo do regime de grandes deformações, o qual é dado pela Equação (298).

5.2.9 Transição entre os modelos

Durante o processo numérico, as variáveis dos regimes de grandes e pequenas deformações são as mesmas. No entanto, no regime de pequenas deformações é necessário o armazenamento dos tensores \mathbf{S}^{plast} e $\boldsymbol{\chi}$; já no regime de grandes deformações, os seus correspondentes valores escalares λ^ζ e q são armazenados. No regime de grandes deformações, os tensores \mathbf{S}^{plast} e $\boldsymbol{\chi}$ são determinados diretamente através das Equações (277) e (282), respectivamente; no regime de pequenas deformações, por outro lado, para a determinação dos escalares λ^ζ e q , é necessário realizar a contração dupla de \mathfrak{E} com \mathbf{S}^{plast} e $\boldsymbol{\chi}$ nas Equações (277) e (282), respectivamente:

$$\mathfrak{E} : \mathbf{S}^{plast} = \frac{G}{4} \lambda^\zeta \frac{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (313)$$

$$\mathfrak{E} : \boldsymbol{\chi} = \frac{G}{4} q \frac{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (314)$$

Isolando os escalares, conclui-se que λ^ζ e q são determinados no regime de pequenas deformações respectivamente através das expressões:

$$\lambda^\zeta = \frac{4}{G} \frac{\mathbf{S}^{plast} : \mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (315)$$

$$q = \frac{4}{G} \frac{\boldsymbol{\chi} : \mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (316)$$

No algoritmo, o processo numérico é sempre iniciado no regime de grandes deformações, visto que no início da análise $\mathbf{S}^{plast} = 0$. É necessária a adoção de uma tolerância para a transição entre os modelos. A transição do regime de grandes deformações para o de pequenas deformações ocorre quando $\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}} < tol$; já a transição do regime de pequenas deformações para o de grandes deformações ocorre quando $\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}} > tol$. Essa tolerância deve ser calibrada em um teste axial cíclico, assim como será mostrado no item 7.5.

A seguir é apresentado na Figura 5.10 o pseudocódigo do algoritmo de plasticidade no regime de pequenas deformações implementado no programa. Essa subrotina é realizada após a subrotina do cálculo da componente elástica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (Figura 4.1) caso o ponto de integração esteja plastificando no regime de pequenas deformações.

Figura 5.10 – Pseudocódigo do algoritmo de plasticidade no regime de pequenas deformações

```

1  Zera-se  $\Delta\lambda$  ( $\Delta\lambda \leftarrow 0$ )
2  Cálculo de  $f^{tr}$  [Equação (303)]
3  Se  $f^{tr} > 0$ 
4    Cálculo de  $\eta$  [Equação (283)]
5    Cálculo de  $\beta$  [Equação (279)]
6    Cálculo de  $\mathbf{v}$  [Equação (300)]
7    Cálculo das raízes  $\Delta\lambda_1$  e  $\Delta\lambda_2$  [Equação (310)]
8    Atribuição da menor raiz positiva a  $\Delta\lambda$  ( $\Delta\lambda \leftarrow \Delta\lambda_1$  ou  $\Delta\lambda \leftarrow \Delta\lambda_2$ )
9    Incremento de  $\kappa$  [Equação (304)]
10   Incremento de  $\lambda$  [Equação (304)]
11   Incremento de  $\chi$  [Equações (304) e (302)]
12   Incremento de  $\mathbf{S}^{plast}$  [Equações (304) e (301)]
13   Cálculo de  $\lambda^\zeta$  [Equação (315)]
14   Cálculo de  $q$  [Equação (316)]
15  Fim condição

```

Fonte: autor.

Obtidas as tensões plásticas (\mathbf{S}^{plast}), a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie total (\mathbf{S}^{total}) é obtida através da Equação (295), assim como feito no regime de grandes deformações.

6 CONTATO

A Mecânica do Contato possui uma grande importância para a resolução de inúmeros problemas na área das engenharias. Na área da engenharia civil, algumas aplicações práticas que podem ser citadas são análises de fundações e de impactos de veículos contra a estrutura de edifícios; já no campo da engenharia mecânica, algumas aplicações relevantes são análises de conformação metálica, de rolamento de pneus e de colisões de automóveis (WRIGGERS, 2002).

Com o crescente desenvolvimento da computação nos últimos anos, os problemas não lineares de contato vêm cada vez mais sendo resolvidos numericamente por meio de ferramentas da Mecânica Computacional, sendo a análise desses problemas frequentemente realizada através do Método dos Elementos Finitos.

A restrição de contato é decorrente do princípio físico de que dois corpos não podem ocupar o mesmo espaço no mesmo instante de tempo. Problemas de contato podem ser entendidos como problemas de valor de contorno em que dois corpos interagem de acordo com os princípios da Mecânica do Contínuo (HUGHES et al., 1976), correspondendo a um tipo de análise não linear em que as condições de contorno se alteram durante o movimento dos corpos analisados (BATHE, 2014).

Considerando dois corpos em contato A e B e seus respectivos domínios Ω_A e Ω_B , o axioma cinemático primordial de problemas de contato consiste no princípio de que os dois corpos não se penetram, princípio conhecido como Condição de Impenetrabilidade, a qual é expressa por:

$$\Omega_A \cap \Omega_B = \emptyset \quad (317)$$

Nos problemas de contato, considera-se que os pontos materiais nas superfícies dos corpos A e B podem se aderir durante o movimento dos mesmos. Desta forma, sendo Γ_A e Γ_B respectivamente as superfícies dos corpos A e B, pode-se afirmar que os dois corpos estão em contato quando:

$$\Gamma_A \cap \Gamma_B \neq \emptyset \quad (318)$$

Ainda, é possível definir a superfície de contato Γ_{cont} entre os dois corpos como sendo:

$$\Gamma_{cont} = \Gamma_A \cap \Gamma_B \quad (319)$$

Caso os dois corpos nunca entrem em contato, $\Gamma_{cont} = \emptyset$, e o problema de valor de contorno pode ser reduzido a um caso em que os dois corpos podem ser analisados

separadamente. Portanto, um problema de contato requer necessariamente que $\Gamma_{cont} \neq \emptyset$ pelo menos em um instante durante o movimento dos corpos (HUGHES et al., 1976).

A restrição devido ao contato pode ser considerada através de duas abordagens: por meio de multiplicadores de Lagrange ou por penalização. O método de multiplicadores de Lagrange consiste na introdução de novas variáveis ao sistema: os próprios multiplicadores de Lagrange. Esta abordagem apresenta como vantagens a imposição de maneira exata da Condição de Impenetrabilidade e a inexistência de um parâmetro algorítmico (como no caso da penalização) (HU, 1997). No entanto, esta estratégia acaba aumentando o tamanho do sistema de equações a ser resolvido devido à introdução de novas variáveis. O multiplicador de Lagrange possui um significado físico: ele corresponde à força de contato entre os corpos analisados.

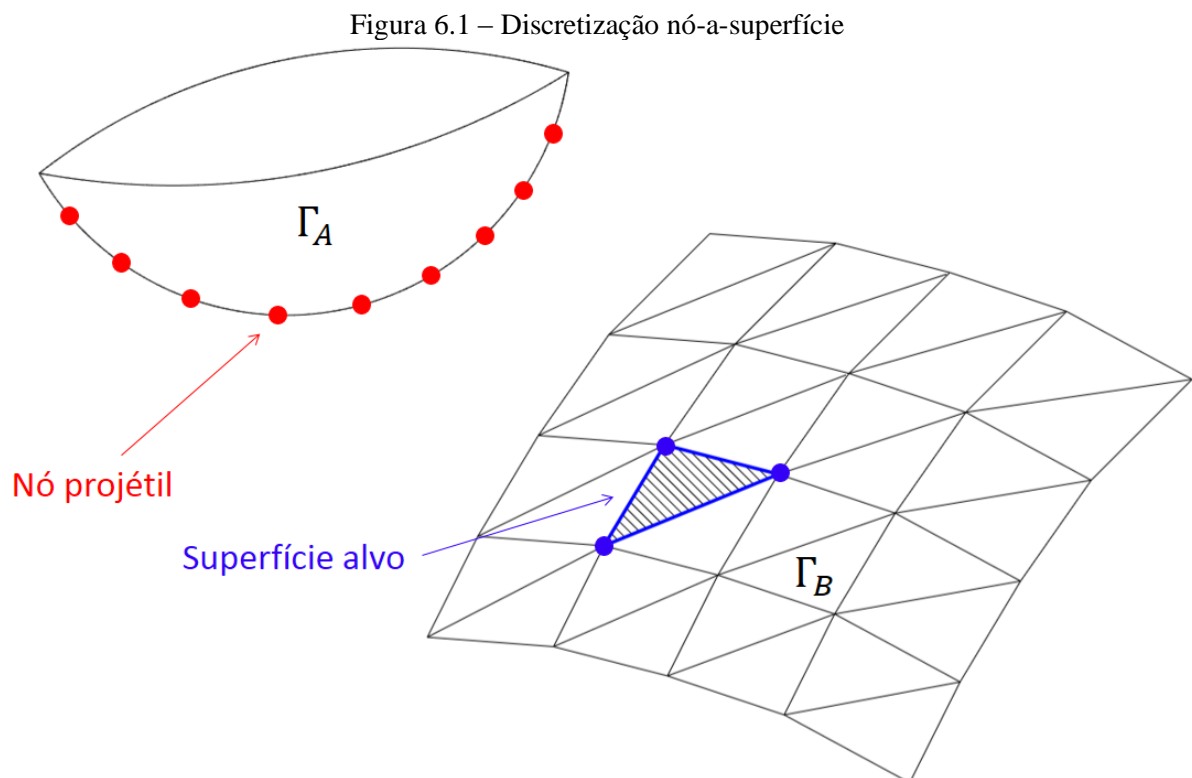
Por outro lado, o método de penalização é o método mais amplamente empregado para a resolução de problemas de contato (WRIGGERS, 2002). A abordagem por penalização caracteriza-se pela introdução de um parâmetro de penalização para a imposição da Condição de Impenetrabilidade, sendo o valor do mesmo adotado de forma prévia (PIEDE NETO, 2009). As restrições de contato são satisfeitas de forma aproximada, sendo a solução altamente dependente do valor adotado para o parâmetro de penalização. A grande vantagem deste método reside no fato de que não ocorre a introdução de novas variáveis ao problema; em contrapartida, a grande inconveniência está na inexistência de regras claras para a escolha do valor do parâmetro de penalização, sua escolha depende do problema particular analisado (HU, 1997).

O presente trabalho está preocupado em especial com a análise do contato que ocorre durante o processo de conformação a frio por dobragem de perfis estruturais metálicos, ou seja, busca-se analisar o contato entre as ferramentas de dobra e a chapa metálica. Para isso, foi considerado o caso de contato entre sólido e anteparo rígido sem atrito e sem adesão. Foi adotada a discretização nó-a-superfície como estratégia para a detecção da interface de contato, sendo o sólido discretizado em nós projéteis e os anteparo rígidos em superfícies alvo por meio de elementos triangulares planos. Para a consideração das restrições de contato, foi adotado o método de penalização devido à sua simplicidade de implementação computacional e sua ampla utilização na literatura. Nos próximos itens é apresentada com maior detalhe a implementação do contato no programa desenvolvido.

6.1 Discretização nó-a-superfície

No caso geral de problemas de contato, é necessária a adoção de estratégias para a detecção da interface de contato durante o processo de solução do problema. A maioria dos algoritmos para a detecção da interface de contato consistem na discretização do contorno dos corpos em nós e elementos, sendo realizada uma extensa verificação da ocorrência de interpenetração (WRIGGERS, 2002). Caso o algoritmo verifique a ocorrência de contato, ativa-se a Condição de Impenetrabilidade; caso o algoritmo verifique que o contato deixa de existir, tal restrição deve ser desativada.

Para realizar tal tarefa, definem-se elementos de contato nas regiões do contorno dos corpos passíveis de contato. A discretização mais comumente adotada é a discretização denominada nó-a-superfície (nó-a-segmento no caso bidimensional). Nesta abordagem, uma das superfícies de contato é discretizada em nós, denominados nós projéteis, e a outra em superfícies, denominadas superfícies alvo, conforme ilustrado na Figura 6.1. Quando se identifica que um nó projétil encostou ou penetrou em uma superfície alvo, procede-se à imposição da Condição de Impenetrabilidade no sistema resolvente.



Fonte: autor.

6.2 Imposição das restrições de contato pelo método de penalização

Em problemas de contato, é necessário realizar o cálculo da distância normal g entre as superfícies dos corpos analisados (grandeza também comumente denominada intervalo na literatura). No caso de adoção de discretização nó-a-superfície, g pode ser calculada pela expressão:

$$g = (Y_i^N - Y_i^S)n_i \quad (320)$$

sendo Y_i^N o vetor da posição atual do nó projétil, Y_i^S o vetor da posição atual de um do ponto da superfície alvo e n_i o versor normal à superfície alvo.

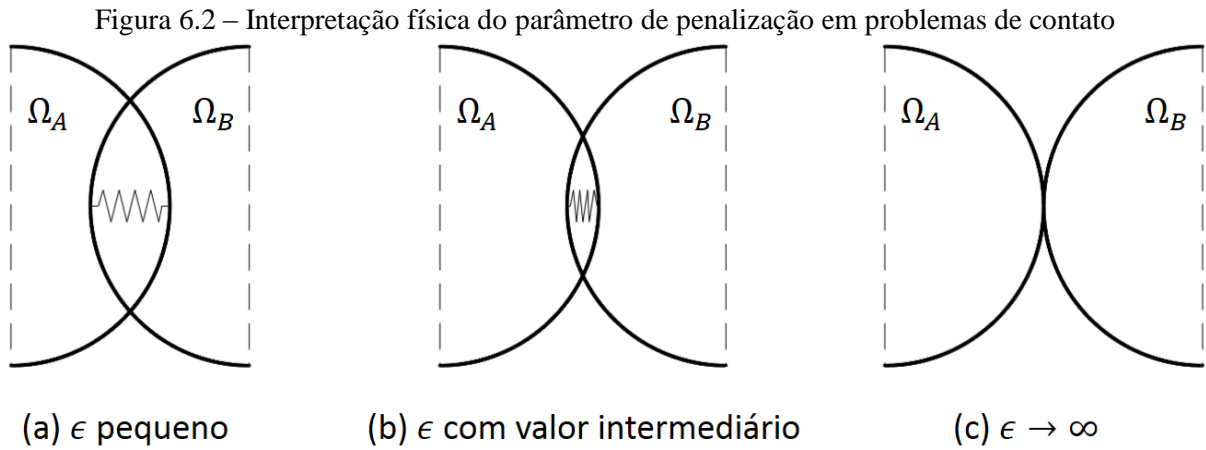
A consideração do contato pela técnica de penalização é feita através da introdução de um potencial de restrição adicional Π^{cont} na expressão da energia mecânica total do sistema, a qual é dada pela Equação (112) no caso estático ou pela Equação (132) no caso dinâmico. Essa nova parcela é dada pela seguinte expressão (ZAVARISE; DE LORENZIS, 2009):

$$\Pi^{cont} = \alpha \epsilon g^\beta \quad (321)$$

sendo ϵ o parâmetro de penalização e α e β constantes. Normalmente as constantes α e β são adotadas com valores $\frac{1}{2}$ e 2 (ZAVARISE; DE LORENZIS, 2009), respectivamente, de forma que o potencial de restrição fica dado por:

$$\Pi^{cont} = \frac{1}{2} \epsilon g^2 \quad (322)$$

É possível notar que a contribuição de energia relativa ao contato pela técnica de penalização possui a mesma forma da contribuição de energia fornecida por uma mola simples, $\frac{1}{2}ku^2$, sendo k a constante da mola e u seu deslocamento em relação à sua configuração indeformada. Desta forma, o parâmetro de penalização pode ser interpretado como sendo equivalente ao valor da rigidez de uma mola infinitesimal posicionada entre os pontos de contato entre os corpos: quando o valor do parâmetro é pequeno, a rigidez da mola é pequena e, conseqüentemente, permite-se uma penetração elevada; já caso o valor do mesmo seja elevado, a mola é mais rígida e, assim, há uma restrição maior à penetração (PIE DADE NETO, 2009). Essa interpretação física do parâmetro de penalização em problemas de contato é ilustrada na Figura 6.2.



Fonte: autor.

Embora se busque um valor elevado para o parâmetro de penalização para a redução da penetração, a adoção de um valor muito elevado pode tornar a matriz de rigidez mal condicionada e, conseqüentemente, causar problemas de instabilidade numérica. Segundo Kim (2015), o valor do parâmetro de penalização (também denominado de rigidez de contato) é escolhido tendo como base a rigidez do material, o tamanho do elemento e a altura do elemento normal à superfície de contato. Ainda segundo o autor, caso os corpos em contato possuam rigidezes diferentes, o parâmetro de penalização deve ser baseado na menor rigidez. Muitos programas de análise estrutural comumente sugerem um valor para a rigidez de contato com base no módulo de elasticidade dos corpos analisados. Esse valor sugerido é multiplicado por um fator de escala 1, sendo permitido aos usuários alterar o valor desse fator de escala. O processo usual consiste em se iniciar a análise com um valor pequeno para o fator de escala e aumentá-lo gradualmente até que uma penetração aceitável seja alcançada (KIM, 2015).

Pelo Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica, é possível obter as forças de contato F_i^{cont} derivando Π^{cont} em relação às posições atuais dos nós projéteis. Para cada nó projétil, a força de contato é dada por:

$$F_i^{cont} = \frac{\partial \Pi^{cont}}{\partial Y_i^N} = \epsilon g \frac{\partial g}{\partial Y_i^N} = \epsilon g \frac{\partial (Y_k^N - Y_k^S) n_k}{\partial Y_i^N} = \epsilon g \delta_{ki} n_k = \epsilon g n_i \quad (323)$$

Quando houver o contato, as forças de contato são adicionadas à Equação (117) no caso estático ou à Equação (136) no caso dinâmico.

Derivando as forças de contato novamente em relação às posições atuais dos nós projéteis, é obtida a parcela da matriz hessiana associada ao contato H_{ij}^{cont} . Para cada nó projétil, a parcela da matriz hessiana associada ao contato é calculada como:

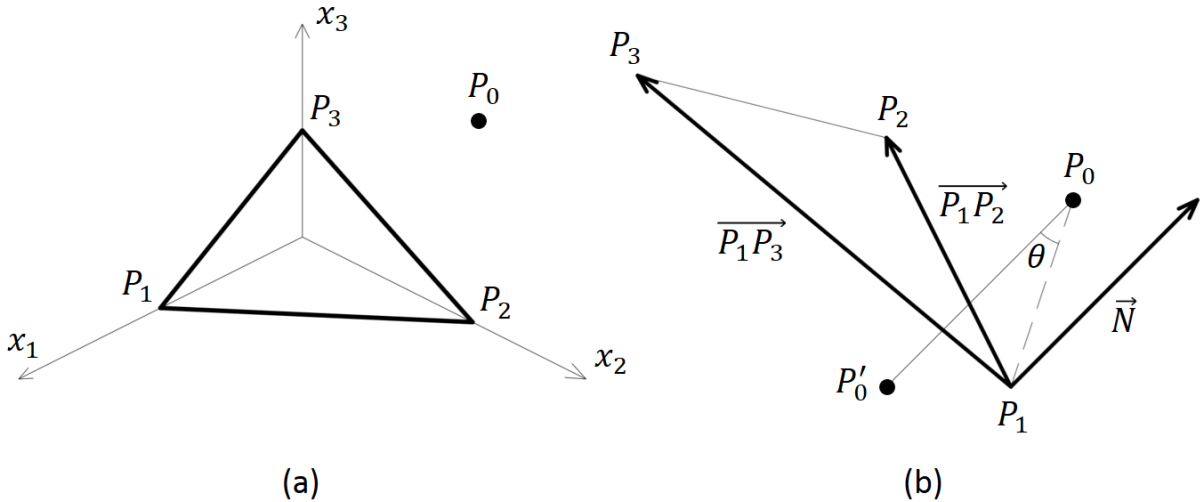
$$H_{ij}^{cont} = \frac{\partial F_i^{cont}}{\partial Y_j^N} = \frac{\partial \epsilon g n_i}{\partial Y_j^N} = \epsilon n_i \frac{\partial (Y_k^N - Y_k^S) n_k}{\partial Y_j^N} = \epsilon n_i \delta_{kj} n_k = \epsilon n_i n_j \quad (324)$$

Através da correspondência entre os nós projéteis e os graus de liberdade globais da estrutura, adiciona-se a parcela H_{ij}^{cont} à matriz hessiana global.

6.3 Algoritmo de contato

Para a determinação da necessidade de ativação/desativação das restrições de contato, é preciso realizar o cálculo da distância entre os nós projéteis e as superfícies alvo. Para isso, considera-se o nó projétil representado pelo ponto P_0 e a superfície alvo pelo triângulo com vértices nos pontos P_1, P_2 e P_3 no espaço tridimensional, conforme mostrado na Figura 6.3a.

Figura 6.3 – Processo de cálculo da distância entre os nós projéteis e os segmentos alvo: (a) ponto e triângulo no espaço tridimensional; (b) determinação da distância entre o ponto e o plano do triângulo



Fonte: autor.

A determinação da distância é feita através da projeção do ponto P_0 no plano do triângulo $\Delta(P_1, P_2, P_3)$, gerando o ponto P'_0 , conforme ilustrado na Figura 6.3b. Primeiramente são calculados os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ respectivamente através de:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1} \quad (325)$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{P_3} - \overrightarrow{P_1} \quad (326)$$

Realizando o produto vetorial entre os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$, obtém-se o vetor \vec{N} normal ao plano do triângulo:

$$\vec{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \quad (327)$$

Durante o pré-processamento, os nós locais dos segmentos alvo são ordenados de modo que o vetor normal \vec{N} sempre aponte para os nós projéteis. A seguir, calcula-se o vetor distância entre os pontos P_1 e P_0 :

$$\overrightarrow{P_1P_0} = \vec{P}_0 - \vec{P}_1 \quad (328)$$

O ângulo θ entre os vetores $\overrightarrow{P_1P_0}$ e \vec{N} pode ser calculado lembrando-se da definição de produto escalar:

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{N}}{\|\overrightarrow{P_1P_0}\| \|\vec{N}\|} \quad (329)$$

Desta forma, a incógnita do problema – o valor da distância entre os pontos P_0 e P'_0 – pode ser determinada como:

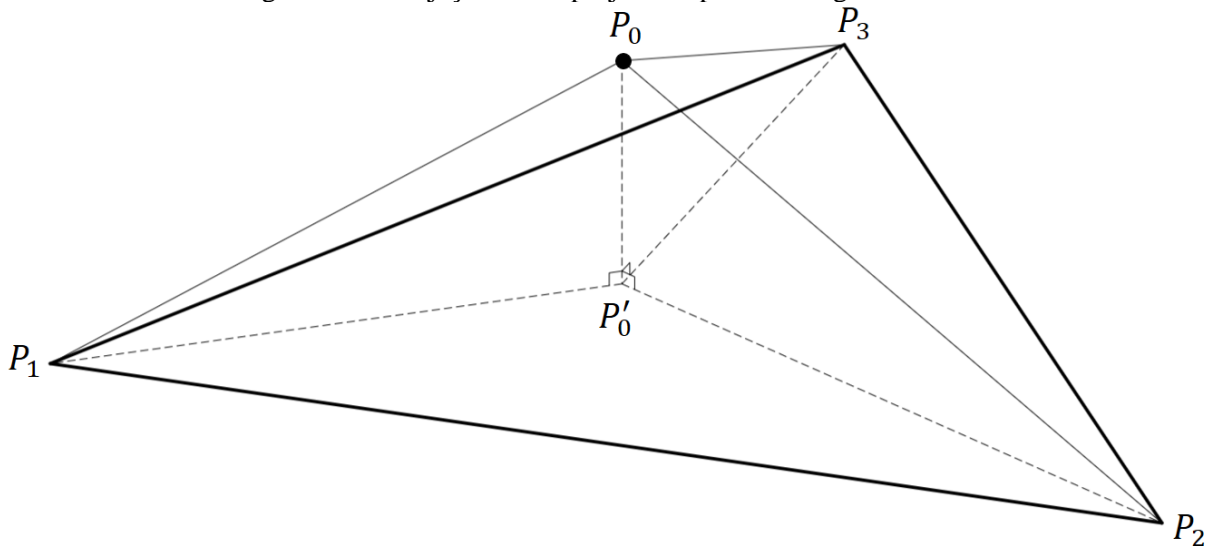
$$\|\overrightarrow{P_0P'_0}\| = \|\overrightarrow{P_1P_0}\| \cos \theta = \|\overrightarrow{P_1P_0}\| \frac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{N}}{\|\overrightarrow{P_1P_0}\| \|\vec{N}\|} = \frac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{N}}{\|\vec{N}\|} \quad (330)$$

O valor de $\|\overrightarrow{P_0P'_0}\|$ corresponde à variável g da Equação (320). Caso $\|\overrightarrow{P_0P'_0}\| = g \leq 0$, isto indica que o nó projétil entrou em contato com o segmento alvo.

No entanto, é ainda necessário verificar se a projeção do nó projétil no plano do segmento alvo está dentro ou fora do mesmo. Visando à eficiência computacional, para realizar tal verificação foi adotado no trabalho o algoritmo sugerido por Heidrich (2011).

A dedução do algoritmo considera a geometria ilustrada na Figura 6.4. O ponto P'_0 corresponde à projeção do ponto P_0 no plano do triângulo $\Delta(P_1, P_2, P_3)$.

Figura 6.4 – Projeção do nó projétil no plano do segmento alvo



Fonte: autor.

O objetivo do algoritmo é determinar as coordenadas baricêntricas da projeção do ponto no plano do triângulo. O sistema de coordenadas baricêntricas consiste em um sistema de coordenadas comumente empregado para representar um ponto localizado dentro de um polígono como uma combinação baricêntrica dos vértices do polígono (ANISIMOV; DENG; HORMANN, 2016).

Combinações baricêntricas⁴ são definidas como somas ponderadas de pontos cuja soma dos pesos resulta na unidade (FARIN, 2002). Desta forma, o vetor posição de um ponto P pode ser calculado como uma combinação baricêntrica de n vetores posição de pontos P_i :

$$\vec{P} = \sum_{i=0}^n b_i \vec{P}_i \quad (331)$$

sendo que a soma dos coeficientes b_i resulta na unidade:

$$\sum_{i=0}^n b_i = 1 \quad (332)$$

Os coeficientes b_i correspondem às coordenadas baricêntricas de P com relação aos pontos P_i .

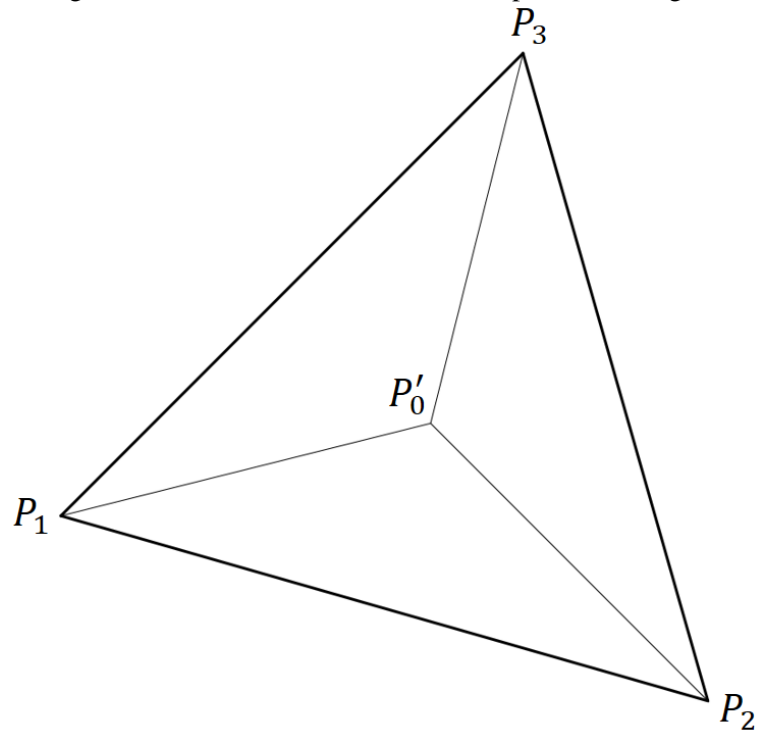
A formulação de combinação baricêntrica tem como origem o campo da física, sendo utilizada principalmente, como sugere o nome, na determinação do baricentro (centro de gravidade). Se os vetores \vec{P}_i representam as respectivas posições dos centros de gravidade de massas m_i , então o centro de gravidade \vec{P} do conjunto de massas pode ser determinado por $\vec{P} = \frac{\sum_{i=0}^n m_i \vec{P}_i}{\sum_{i=0}^n m_i}$. A massa total do conjunto é dado por $\sum_{i=0}^n m_i$, sendo que as massas podem ser normalizadas de modo que $\sum_{i=0}^n m_i = 1$ (FARIN, 2002).

Um caso especial de combinações baricêntricas são as chamadas combinações convexas, as quais correspondem a combinações baricêntricas em que os coeficientes b_i , além de satisfazerem a condição de partição da unidade, expressa pela Equação (332), também apresentam valores não negativos. Elas apresentam uma propriedade importante: uma combinação convexa de pontos sempre está dentro da região delimitada por esses pontos (FARIN, 2002).

O caso específico de interesse é a determinação das coordenadas baricêntricas do ponto P'_0 relativas ao triângulo $\Delta(P_1, P_2, P_3)$, conforme ilustrado na Figura 6.5.

⁴ Combinações baricêntricas são também denominadas combinações afins.

Figura 6.5 – Coordenadas baricêntricas para um triângulo



Fonte: autor.

O vetor posição do ponto P'_0 pode ser expresso como uma combinação baricêntrica dos vetores posição dos vértices P_1 , P_2 e P_3 :

$$\vec{P}'_0 = b_1 \vec{P}_1 + b_2 \vec{P}_2 + b_3 \vec{P}_3 \quad (333)$$

Os escalares b_1 , b_2 e b_3 correspondem às coordenadas baricêntricas do ponto P'_0 relativas aos pontos P_1 , P_2 e P_3 , respectivamente. Elas atendem à condição:

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1 \quad (334)$$

Sempre que forem conhecidas as coordenadas dos pontos P'_0 , P_1 , P_2 e P_3 , é possível determinar as coordenadas baricêntricas b_1 , b_2 e b_3 , tendo em vista que as Equações (333) e (334) correspondem a um sistema linear com 3 equações e 3 incógnitas⁵ (FARIN, 2002). Desta forma, o sistema de equações pode ser resolvido através da aplicação da Regra de Cramer, obtendo-se:

$$b_1 = \frac{A_1}{A} \quad (335)$$

$$b_2 = \frac{A_2}{A} \quad (336)$$

$$b_3 = \frac{A_3}{A} \quad (337)$$

⁵ A Equação (333) representa duas equações, visto que os vetores estão no espaço bidimensional.

sendo A a área do triângulo $\Delta(P_1, P_2, P_3)$ e A_1 , A_2 e A_3 as áreas (com sinal) respectivamente dos triângulos $\Delta(P'_0, P_2, P_3)$, $\Delta(P'_0, P_1, P_3)$ e $\Delta(P'_0, P_1, P_2)$. No caso mais geral, as coordenadas baricêntricas de um simplex⁶ podem ser obtidas através das proporções dos volumes de subsimplexes (WARREN, 1996).

Como o vetor \vec{N} é determinado através do produto vetorial entre os vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ (conforme mostrado na Equação (327)), e lembrando que a magnitude do produto vetorial corresponde à área do paralelogramo definido pelos dois vetores envolvidos na operação, a área A (metade da área do paralelogramo) pode ser calculada da seguinte forma:

$$2A = \|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = \|\vec{N}\| \quad (338)$$

ou seja, a área do triângulo corresponde à metade do comprimento do vetor normal a ele.

Relembrando-se da seguinte propriedade do produto escalar entre um vetor genérico \vec{v} e ele mesmo:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|\|\vec{v}\| \cos(0) = \|\vec{v}\|\|\vec{v}\| \quad (339)$$

realiza-se o seguinte desenvolvimento na Equação (338):

$$4A^2 = \|\vec{N}\|^2 = \|\vec{N}\|\|\vec{N}\| = \vec{N} \cdot \vec{N} \quad (340)$$

Para o cálculo das coordenadas baricêntricas, assume-se primeiramente que o ponto P_0 se encontra no plano do triângulo, ou seja, $P_0 = P'_0$. O vetor \vec{N}_3 normal ao triângulo $\Delta(P_0, P_1, P_2)$ pode ser calculado como:

$$\vec{N}_3 = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_0} \quad (341)$$

Similarmente ao procedimento feito na Equação (338), a área A_3 pode ser calculada, para o caso em que $P_0 = P'_0$, como:

$$2A_3 = \|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_0}\| = \|\vec{N}_3\| \quad (342)$$

A área A_3 possui valor positivo caso \vec{N}_3 aponte para o mesmo sentido de \vec{N} (indicando que o ponto P_0 se encontra dentro do triângulo com relação à aresta $\overline{P_1P_2}$); ou valor negativo caso \vec{N}_3 aponte para o sentido contrário de \vec{N} (indicando que o ponto P_0 se encontra fora do triângulo com relação à aresta $\overline{P_1P_2}$).

Desenvolvendo a Equação (342), obtém-se:

$$2A_3 = \frac{\|\vec{N}_3\|\|\vec{N}\|}{\|\vec{N}\|} \quad (343)$$

⁶ Em topologia, simplex corresponde ao polígono mais simples para uma dada dimensão.

Como foi assumido primeiramente que $P_0 = P'_0$, ou seja, o ângulo θ entre os vetores \vec{N}_3 e \vec{N} é zero, observa-se que a seguinte relação é verdadeira:

$$\vec{N}_3 \cdot \vec{N} = \|\vec{N}_3\| \|\vec{N}\| \cos \theta = \|\vec{N}_3\| \|\vec{N}\| \cos(0) = \|\vec{N}_3\| \|\vec{N}\| \quad (344)$$

Desta forma, substituindo as Equações (338) e (344) na Equação (343), chega-se à seguinte relação:

$$2A_3 = \frac{\vec{N}_3 \cdot \vec{N}}{2A} \quad (345)$$

Relembrando-se da definição de b_3 (Equação (337)) e utilizando as Equações (345) e (340), é possível realizar o seguinte desenvolvimento:

$$b_3 = \frac{A_3}{A} = \frac{2A_3}{2A} = \frac{\frac{\vec{N}_3 \cdot \vec{N}}{2A}}{2A} = \frac{\vec{N}_3 \cdot \vec{N}}{4A^2} = \frac{\vec{N}_3 \cdot \vec{N}}{\vec{N} \cdot \vec{N}} \quad (346)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, é possível obter a expressão da coordenada baricêntrica b_2 como:

$$b_2 = \frac{\vec{N}_2 \cdot \vec{N}}{\vec{N} \cdot \vec{N}} \quad (347)$$

sendo

$$\vec{N}_2 = \overrightarrow{P_1P_0} \times \overrightarrow{P_1P_3} \quad (348)$$

Como

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \quad (349)$$

a coordenada baricêntrica b_1 pode ser calculada simplesmente como:

$$b_1 = 1 - b_2 - b_3 \quad (350)$$

Agora é possível analisar o caso mais geral em que $P_0 \neq P'_0$. Isto pode ser feito através da observação de que a área A_3 corresponde à projeção da área do triângulo $\Delta(P_0, P_1, P_2)$ no plano do triângulo $\Delta(P_1, P_2, P_3)$. Esta relação é expressa pela seguinte equação:

$$A_3 = \text{área}(\Delta(P'_0, P_1, P_2)) = \text{área}(\Delta(P_0, P_1, P_2)) \cos \theta \quad (351)$$

sendo θ o ângulo formado entre os vetores \vec{N}_3 e \vec{N} . Assim, a coordenada baricêntrica b_3 passa a ser expressa por:

$$b_3 = \frac{A_3}{A} = \frac{\text{área}(\Delta(P_0, P_1, P_2))}{A} \cos \theta \quad (352)$$

Relembrando a propriedade expressa pela Equação (338) – a área de um triângulo corresponde à metade do comprimento do vetor normal a ele – e utilizando a Equação (340) e ainda considerando que

$$\cos \theta = \frac{\vec{N}_3 \cdot \vec{N}}{\|\vec{N}_3\| \|\vec{N}\|} \quad (353)$$

chega-se à expressão de b_3 para o caso mais geral:

$$b_3 = \frac{\frac{1}{2} \|\vec{N}_3\|}{\frac{1}{2} \|\vec{N}\|} \frac{\vec{N}_3 \cdot \vec{N}}{\|\vec{N}_3\| \|\vec{N}\|} = \frac{\vec{N}_3 \cdot \vec{N}}{\|\vec{N}\| \|\vec{N}\|} = \frac{\vec{N}_3 \cdot \vec{N}}{\vec{N} \cdot \vec{N}} \quad (354)$$

que é idêntica à Equação (346), o que mostra que as Equações (346), (347) e (350) já são válidas para o caso geral em que $P_0 \neq P'_0$.

A eficiência computacional do algoritmo proposto por Heidrich (2011) reside no fato de que são realizadas apenas operações de soma e multiplicação, além de uma única operação de divisão, para a determinação das coordenadas baricêntricas da projeção de um ponto no plano de um triângulo. Vale ressaltar que o algoritmo proposto por Heidrich (2011) é uma aplicação dos teoremas deduzidos por Warren (1996), os quais relacionam as coordenadas baricêntricas em poliedros convexos às coordenadas baricêntricas \vec{N} em suas faces. No caso, Heidrich (2011) analisou o caso particular em que o poliedro é um tetraedro definido por 4 pontos (P_0, P_1, P_2 e P_3).

Por fim, através das definições de b_1, b_2 e b_3 dadas respectivamente pelas Equações (335), (336) e (337), é possível concluir que a projeção do ponto no plano do triângulo está dentro do triângulo caso as 3 seguintes inequações sejam atendidas simultaneamente:

$$0 \leq b_1 \leq 1 \quad (355)$$

$$0 \leq b_2 \leq 1 \quad (356)$$

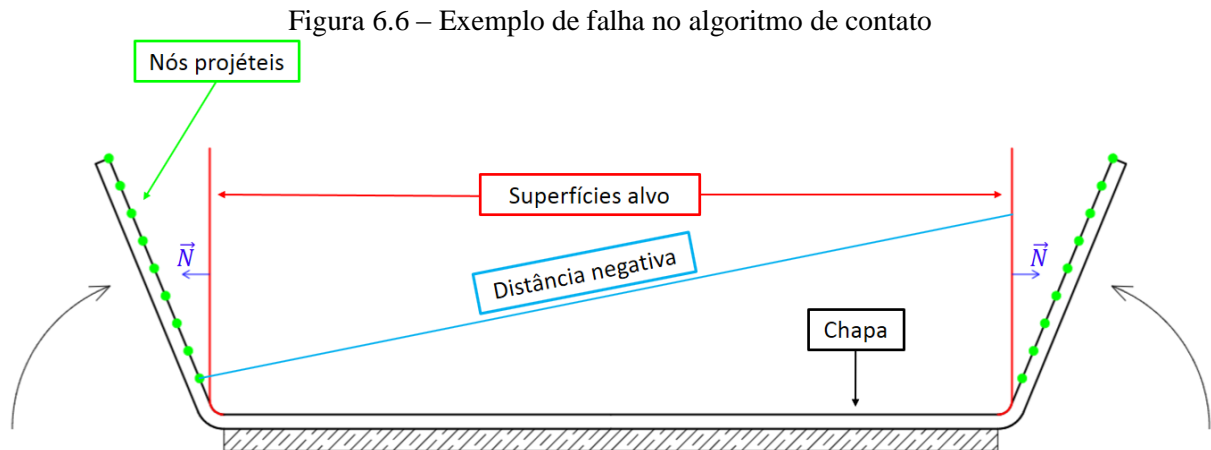
$$0 \leq b_3 \leq 1 \quad (357)$$

Portanto, caso $g \leq 0$ e as inequações expressas por (355), (356) e (357) sejam verdadeiras para o dado par nó projétil-superfície alvo, é realizada a imposição das restrições de contato através do cálculo das forças de contato pela Equação (323) e da parcela da matriz Hessiana associada ao contato pela Equação (324).

Com relação ao algoritmo, uma ideia natural é a implementação da verificação da penetração de todos os nós projéteis em todas as superfícies alvo do problema. No entanto, embora essa estratégia funcione em boa parte dos problemas, é importante ressaltar que essa lógica pode fazer com que o algoritmo falhe em alguns casos específicos.

Um exemplo que pode ser citado é o exemplo numérico que será apresentado no item 7.10, onde foi analisada a conformação a frio por dobragem de um perfil U. Neste exemplo, a verificação da penetração de todos os nós projéteis em todas as superfícies alvo gera uma falha no algoritmo devido ao fato de que existem superfícies alvo paralelas cujas normais apontam

para sentidos opostos. Isso faz com que, conforme a chapa é conformada, a projeção dos nós projéteis de um lado da chapa entrem no plano das superfícies alvo do lado oposto. Conseqüentemente, a distância calculada pelo programa resulta com sinal negativo e aplica-se a condição de contato em uma situação onde não se deveria, causando problemas numéricos. Tal problema é ilustrado na Figura 6.6.



Fonte: autor.

A forma encontrada para contornar esse tipo de problema foi a definição no arquivo de entrada de grupos, os quais serão aqui denominados de grupos de contato. Em cada grupo de contato, informa-se um conjunto de nós projéteis a serem verificados para um conjunto de superfícies alvo. Desta forma, tomando-se novamente o exemplo da Figura 6.6 como ilustração, os nós projéteis e as superfícies alvo do lado direito da chapa estariam no mesmo grupo de contato, evitando assim que haja a verificação da penetração dos nós projéteis do lado direito da chapa nas superfícies alvo do lado esquerdo.

Tendo em vista tudo o que foi discutido neste capítulo, na Figura 6.7 é apresentado o pseudocódigo do algoritmo de contato implementado no programa. Essa subrotina é inserida após a linha 15 do pseudocódigo da análise estática (Figura 3.4) e após a linha 18 do pseudocódigo da análise dinâmica (Figura 3.5) nos casos em que se deseja considerar o contato.

Figura 6.7 – Pseudocódigo do algoritmo de contato

```

1 Para cada grupo de contato
2   Para cada nó projétil
3     Obtenção da posição atual do nó projétil ( $\vec{P}_0$ )
4     Para cada superfície alvo
5       Obtenção da posição atual dos vértices da superfície alvo ( $\vec{P}_1, \vec{P}_2$  e  $\vec{P}_3$ )
6       Cálculo de  $\vec{P}_1\vec{P}_0$  [Equação (328)]
7       Cálculo de  $\vec{P}_1\vec{P}_2$  [Equação (325)]
8       Cálculo de  $\vec{P}_1\vec{P}_3$  [Equação (326)]
9       Cálculo de  $\vec{N}$  [Equação (327)]
10      Cálculo de  $\|\vec{P}_0\vec{P}_0'\|$  [Equação (330)]
11      Se  $\|\vec{P}_0\vec{P}_0'\| = g < 0$ 
12        Cálculo de  $1/4A^2$  [inverso da Equação (340)]
13        Cálculo de  $\vec{N}_3$  [Equação (341)]
14        Cálculo da coordenada baricêntrica  $b_3$  [Equação (346)]
15        Cálculo de  $\vec{N}_2$  [Equação (348)]
16        Cálculo da coordenada baricêntrica  $b_2$  [Equação (347)]
17        Cálculo da coordenada baricêntrica  $b_1$  [Equação (350)]
18        Se  $0 \leq b_1 \leq 1$  e  $0 \leq b_2 \leq 1$  e  $0 \leq b_3 \leq 1$ 
19          Soma das forças de contato às forças internas ( $\vec{F}^{int} \leftarrow \vec{F}^{int} + \vec{F}^{cont}$ )
20          [Equação (323)]
21          Soma da parcela da matriz hessiana associada ao contato à matriz hessiana
22          ( $\mathbf{H} \leftarrow \mathbf{H} + \mathbf{H}^{cont}$ ) [Equação (324)]
23          Fim condição
24        Fim condição
25      Fim loop
26    Fim loop
27  Fim loop

```

Fonte: autor.

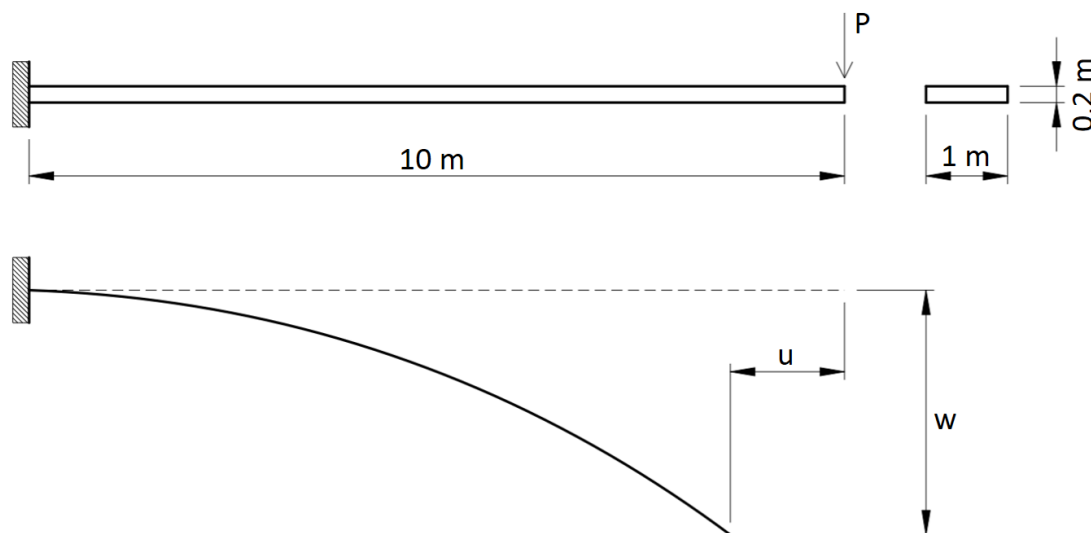
7 EXEMPLOS NUMÉRICOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo serão apresentados os exemplos numéricos analisados ao longo da pesquisa. Do total de 10 exemplos, os 6 primeiros são testes de validação, os quais tiveram como objetivo validar a correta implementação computacional da formulação⁷; já os 4 últimos exemplos são exemplos de aplicação, onde o programa implementado foi utilizado para a análise do objeto de estudo do trabalho, no caso, perfis metálicos formados a frio.

7.1 Viga engastada e livre sujeita a carregamento transversal

Este teste de validação teve como objetivo verificar a correta implementação computacional da análise estática elástica. O exemplo numérico consistiu em uma viga engastada e livre submetida a uma força concentrada transversal aplicada na extremidade livre, conforme mostrado na Figura 7.1. Este problema foi retirado de Mattiasson (1981), o qual analisou o problema por meio de integrais elípticas. Este exemplo apresenta grandes deslocamentos, porém ainda se insere no regime de pequenas deformações. Os dados adotados no teste de validação são apresentados na Figura 7.2 e a discretização adotada na análise é mostrada na Figura 7.3.

Figura 7.1 – Viga engastada e livre submetida a uma força concentrada transversal aplicada na extremidade livre



Fonte: autor.

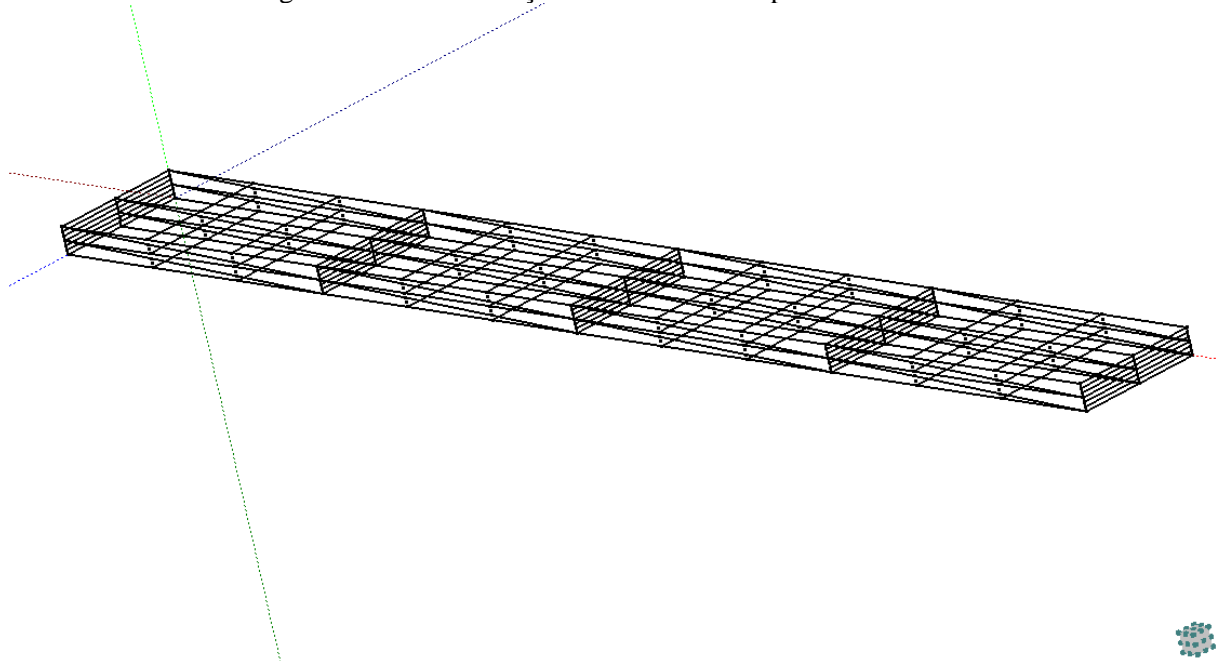
⁷ Nos exemplos numéricos onde as referências não disponibilizaram os resultados das análises de forma tabular, foi necessário extrair os resultados a partir dos gráficos apresentados nos trabalhos. Esse procedimento foi realizado utilizando o programa *open source WebPlotDigitizer* (ROHATGI, 2021).

Figura 7.2 – Dados adotados no exemplo numérico 7.1

E	$2,4 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$
ν	0
Comprimento	10 m
Largura	1 m
Altura	0,2 m
P	160 kN
Nº pontos de Hammer	12
Nº nós	273
Nº elementos finitos	32
Grau de aproximação na espessura	Linear
Tolerância (Newton-Raphson)	10^{-6}

Fonte: autor.

Figura 7.3 – Discretização adotada no exemplo numérico 7.1



Fonte: autor.

Os deslocamentos horizontal e vertical adimensionalizados da extremidade livre da viga foram calculados com os modelos de Saint-Venant-Kirchhoff e Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff e os mesmos foram comparados com os valores obtidos por Mattiasson (1981). Os resultados obtidos com o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff são apresentados na Tabela 7.1 e os obtidos com o modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff na Tabela 7.2.

Tabela 7.1 – Resultados obtidos no exemplo numérico 7.1 com o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff

PL ² /EI	Autor		Mattiasson (1981)		Diferença percentual	
	u/L	w/L	u/L	w/L	u/L	w/L
0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	-	-
1,0	0,05632	0,30130	0,05643	0,30172	-0,19%	-0,14%
2,0	0,15992	0,49184	0,16064	0,49346	-0,45%	-0,33%
2,5	0,20887	0,55348	0,20996	0,55566	-0,52%	-0,39%
3,0	0,25297	0,60057	0,25442	0,60325	-0,57%	-0,44%
3,5	0,29215	0,63726	0,29394	0,64039	-0,61%	-0,49%
4,0	0,32684	0,66641	0,32894	0,66996	-0,64%	-0,53%
4,5	0,35759	0,69002	0,35999	0,69397	-0,67%	-0,57%
5,0	0,38496	0,70948	0,38763	0,71379	-0,69%	-0,60%
5,5	0,40943	0,72576	0,41236	0,73042	-0,71%	-0,64%
6,0	0,43141	0,73957	0,43459	0,74457	-0,73%	-0,67%
6,5	0,45126	0,75143	0,45468	0,75676	-0,75%	-0,70%
7,0	0,46928	0,76173	0,47293	0,76737	-0,77%	-0,74%
7,5	0,48570	0,77076	0,48957	0,77670	-0,79%	-0,77%
8,0	0,50074	0,77874	0,50483	0,78498	-0,81%	-0,79%
8,5	0,51456	0,78586	0,51886	0,79239	-0,83%	-0,82%
9,0	0,52732	0,79224	0,53182	0,79906	-0,85%	-0,85%
9,5	0,53912	0,79801	0,54383	0,80510	-0,87%	-0,88%
10,0	0,55009	0,80325	0,55500	0,81061	-0,88%	-0,91%

Fonte: autor.

Tabela 7.2 – Resultados obtidos no exemplo numérico 7.1 com o modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff

PL ² /EI	Autor		Mattiasson (1981)		Diferença percentual	
	u/L	w/L	u/L	w/L	u/L	w/L
0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	-	-
1,0	0,05629	0,30130	0,05643	0,30172	-0,24%	-0,14%
2,0	0,15985	0,49186	0,16064	0,49346	-0,49%	-0,32%
2,5	0,20877	0,55352	0,20996	0,55566	-0,57%	-0,39%
3,0	0,25286	0,60062	0,25442	0,60325	-0,61%	-0,44%
3,5	0,29203	0,63732	0,29394	0,64039	-0,65%	-0,48%
4,0	0,32671	0,66648	0,32894	0,66996	-0,68%	-0,52%
4,5	0,35745	0,69011	0,35999	0,69397	-0,71%	-0,56%
5,0	0,38481	0,70957	0,38763	0,71379	-0,73%	-0,59%
5,5	0,40927	0,72586	0,41236	0,73042	-0,75%	-0,62%
6,0	0,43125	0,73968	0,43459	0,74457	-0,77%	-0,66%
6,5	0,45109	0,75155	0,45468	0,75676	-0,79%	-0,69%
7,0	0,46910	0,76185	0,47293	0,76737	-0,81%	-0,72%
7,5	0,48552	0,77088	0,48957	0,77670	-0,83%	-0,75%
8,0	0,50056	0,77887	0,50483	0,78498	-0,85%	-0,78%
8,5	0,51438	0,78600	0,51886	0,79239	-0,86%	-0,81%
9,0	0,52713	0,79239	0,53182	0,79906	-0,88%	-0,83%
9,5	0,53893	0,79816	0,54383	0,80510	-0,90%	-0,86%
10,0	0,54990	0,80341	0,55500	0,81061	-0,92%	-0,89%

Fonte: autor.

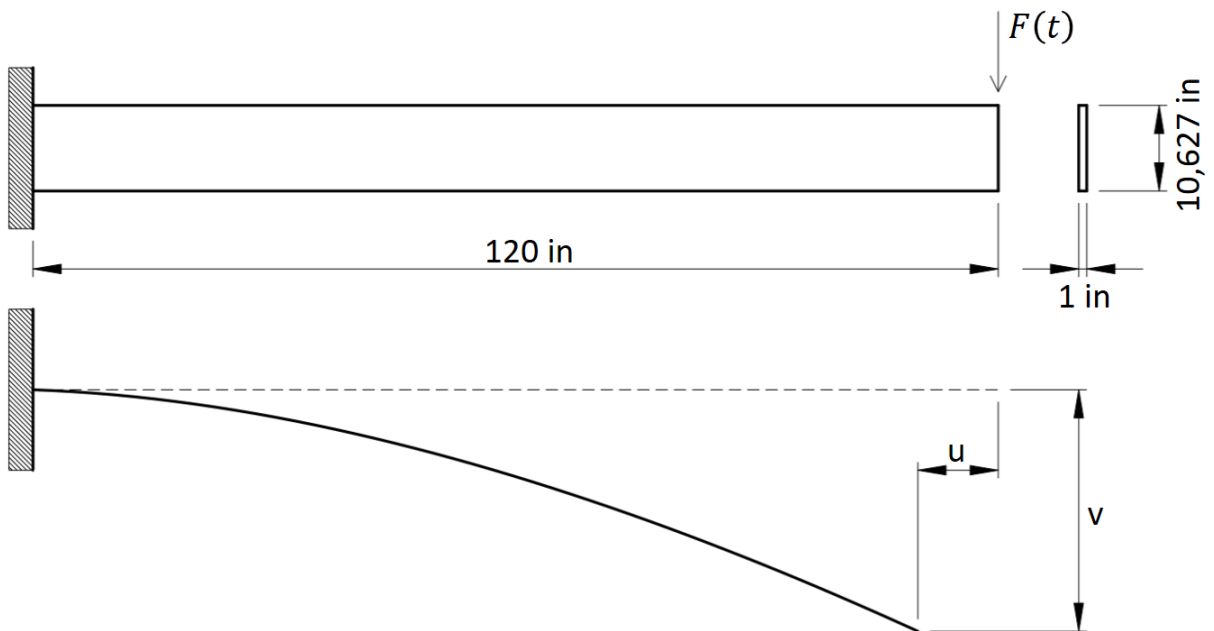
Foi possível observar que os resultados obtidos tanto com o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff quanto com o modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff foram muito próximos dos obtidos por Mattiasson (1981), confirmando, assim, a correta implementação computacional da análise estática elástica. Além disso, ficou evidenciado que os modelos constitutivos implementados apresentam resultados praticamente idênticos no regime de pequenas deformações.

7.2 Viga engastada e livre sujeita a carregamento transversal transiente

Este teste de validação teve como objetivo verificar a correta implementação computacional da análise dinâmica elástica. O exemplo numérico consistiu em uma viga engastada e livre submetida a uma força concentrada transversal transiente aplicada na extremidade livre, conforme mostrado na Figura 7.4. Este problema foi analisado anteriormente por Greco (2004) e Rodríguez (2017) por meio de elementos finitos planos de barra e elementos

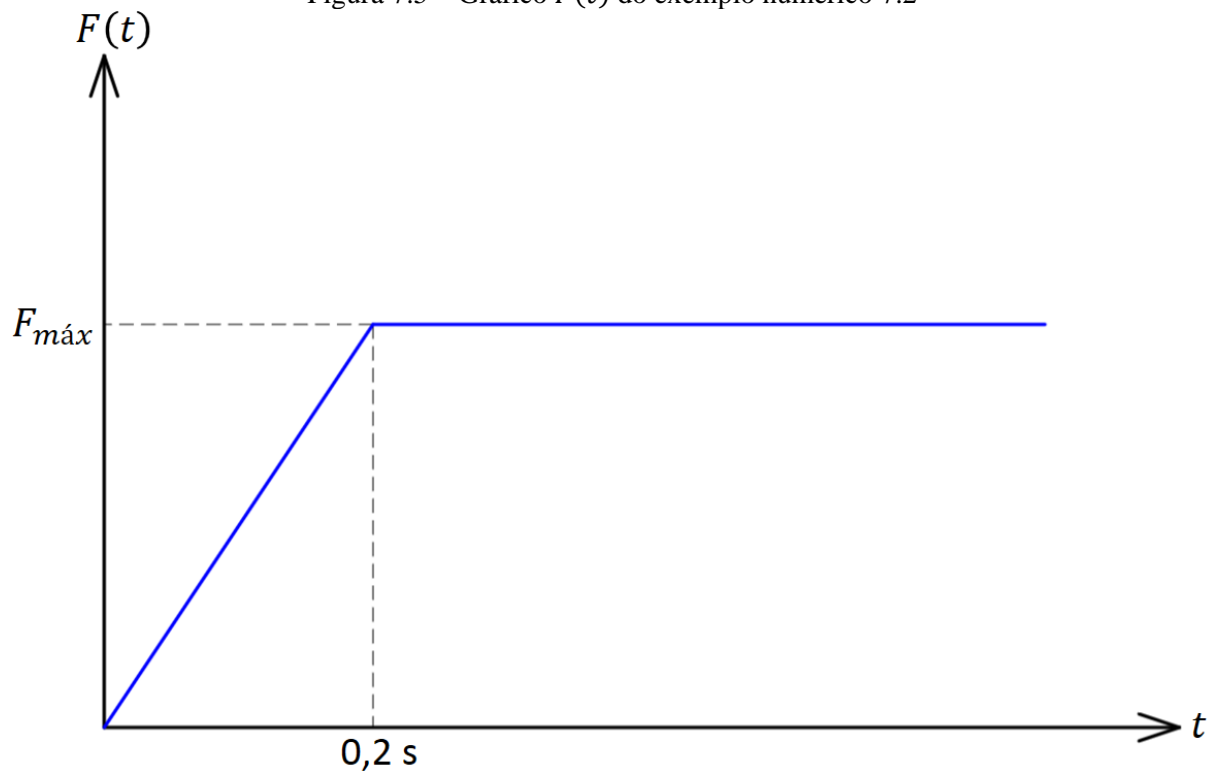
finitos de chapa, respectivamente. Assim como o exemplo anterior, este problema apresenta grandes deslocamentos, porém ainda se insere no regime de pequenas deformações. Por se tratar de uma viga esbelta, foi necessário restringir os nós das faces laterais na direção z (direção da espessura da viga) a fim de evitar a ocorrência de instabilidade lateral.

Figura 7.4 – Viga engastada e livre submetida a uma força concentrada transversal transiente aplicada na extremidade livre



Fonte: autor.

A força aplicada varia em função do tempo conforme o gráfico mostrado na Figura 7.5. O problema foi analisado sem amortecimento para dois casos: $F_{m\acute{a}x} = 1 \cdot 10^5 \text{ lb}$ e $F_{m\acute{a}x} = 5 \cdot 10^5 \text{ lb}$. Os dados adotados no teste de validação são apresentados na Figura 7.6 e a discretização adotada na análise é mostrada na Figura 7.7.

Figura 7.5 – Gráfico $F(t)$ do exemplo numérico 7.2

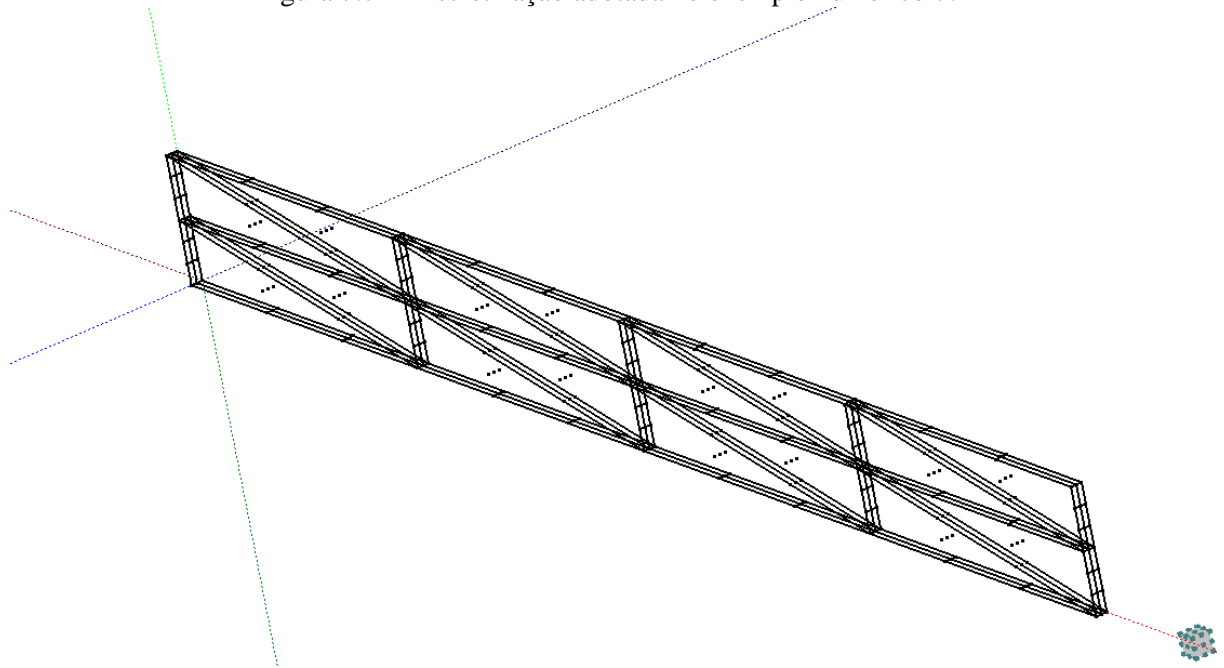
Fonte: autor.

Figura 7.6 – Dados adotados no exemplo numérico 7.2

E	$3 \cdot 10^7$ psi
ν	0
ρ	$0,0094116 \text{ lb.s}^2/\text{in}^4$
Comprimento	120 in
Largura	1 in
Altura	10,627 in
Δt	0,01 s
Tempo total de análise	1 s
Nº pontos de Hammer	12
Nº nós	273
Nº elementos finitos	32
Grau de aproximação na espessura	Linear
Tolerância (Newton-Raphson)	10^{-6}

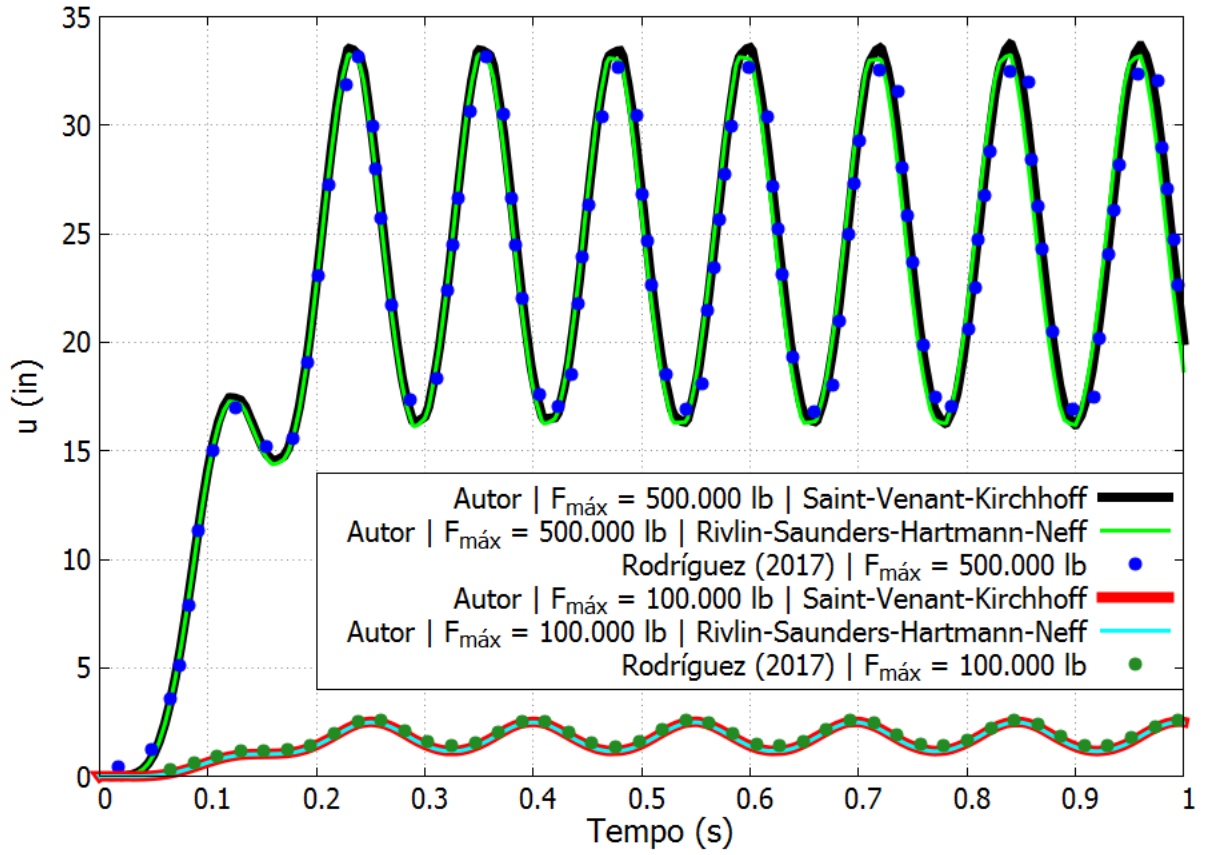
Fonte: autor.

Figura 7.7 – Discretização adotada no exemplo numérico 7.2

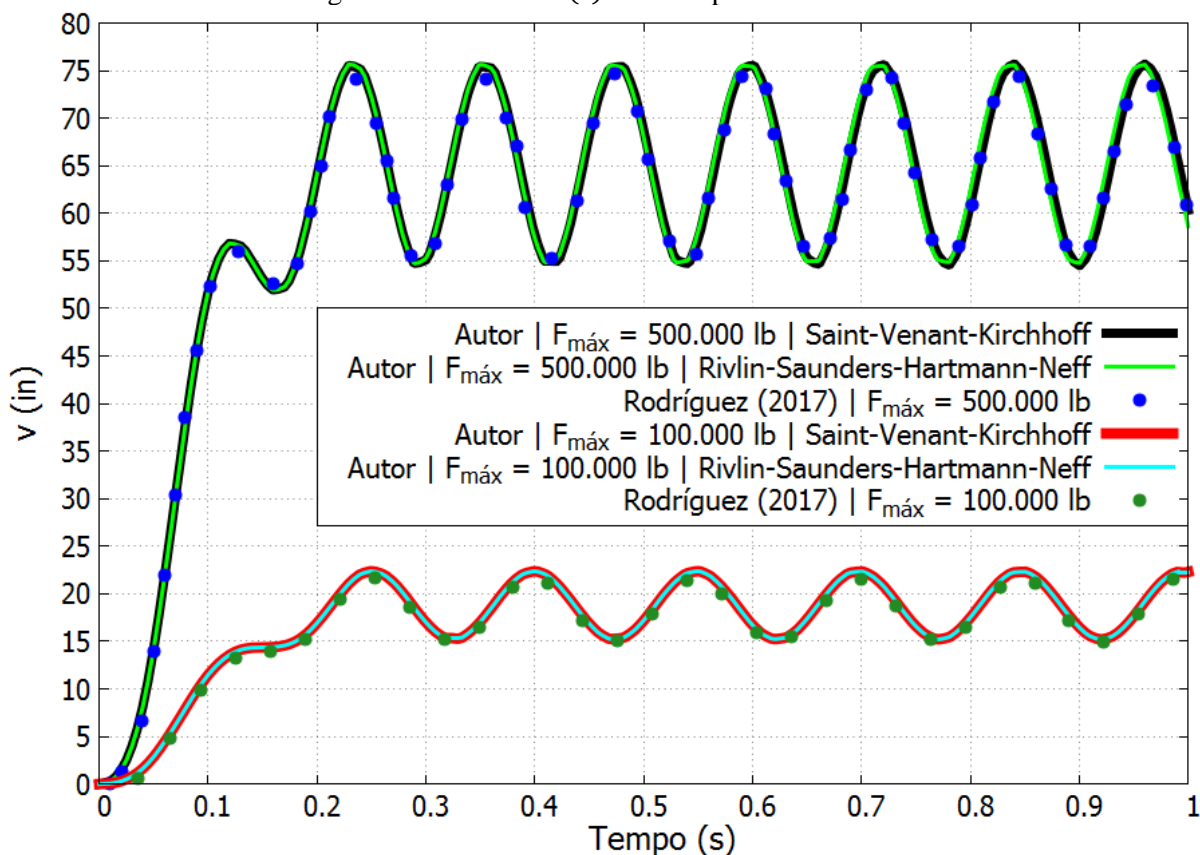


Fonte: autor.

Na análise foram avaliados tanto o deslocamento horizontal $u(t)$ quanto o vertical $v(t)$ do ponto de aplicação da carga. A seguir são apresentados os gráficos $u(t)$ e $v(t)$ obtidos com os modelos constitutivos de Saint-Venant-Kirchhoff e Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff respectivamente na Figura 7.8 e na Figura 7.9 comparados com os resultados obtidos por Rodríguez (2017).

Figura 7.8 – Gráfico $u(t)$ do exemplo numérico 7.2

Fonte: autor.

Figura 7.9 – Gráfico $v(t)$ do exemplo numérico 7.2

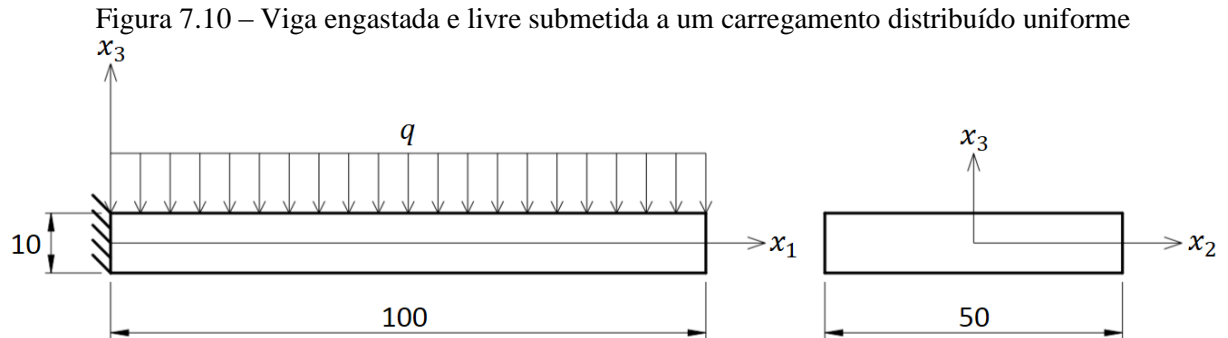
Fonte: autor.

Foi possível observar a partir dos gráficos que os resultados obtidos tanto com o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff quanto com o modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff foram condizentes com os resultados obtidos por Rodríguez (2017), confirmando, assim, a correta implementação computacional da análise dinâmica elástica.

7.3 Distribuição de tensões em viga engastada e livre submetida a carregamento distribuído uniforme

Este teste de validação teve como objetivo validar a correta implementação computacional do cálculo das tensões de Cauchy, tanto com o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff quanto com o modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff. O exemplo numérico consistiu na análise da distribuição das tensões de Cauchy em vários pontos de uma viga engastada e livre submetida a um carregamento distribuído uniforme, conforme mostrado na Figura 7.10. Este exemplo foi retirado de Carrazedo e Coda (2017), os quais também

utilizaram este problema para validar a distribuição de tensões em elementos finitos prismáticos de base triangular.



Fonte: autor.

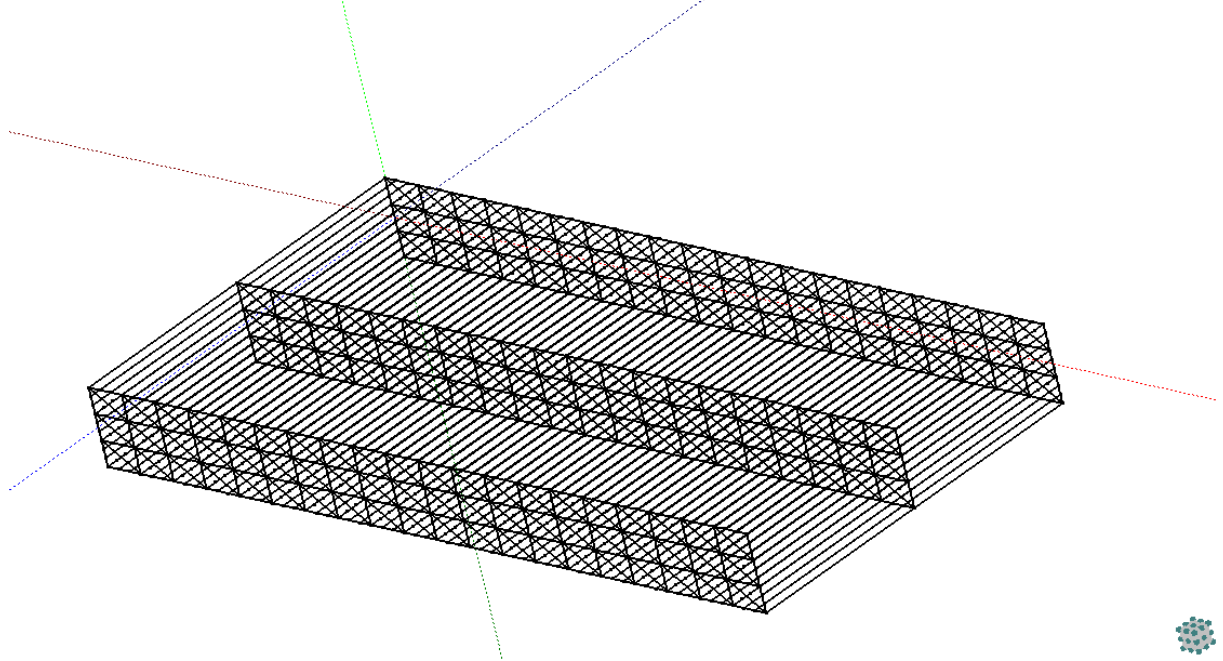
As tensões σ_{11} e σ_{13} foram avaliadas ao longo da altura da viga nas linhas $(10/3; 0; -5 \leq x_3 \leq 5)$, $(5; 0; -5 \leq x_3 \leq 5)$, $(20; 0; -5 \leq x_3 \leq 5)$ e $(50; 0; -5 \leq x_3 \leq 5)$. A Figura 7.11 mostra os dados adotados no teste de validação e a Figura 7.12 mostra a discretização adotada na análise.

Figura 7.11 – Dados adotados no exemplo numérico 7.3

E	1
ν	0
Comprimento	100
Largura	50
Altura	10
q	$0,5 \cdot 10^{-4}$
Nº pontos de Hammer	12
Nº nós	1830
Nº elementos finitos	240
Grau de aproximação na espessura	Linear
Tolerância (Newton-Raphson)	10^{-6}

Fonte: autor.

Figura 7.12 – Discretização adotada no exemplo numérico 7.3



Fonte: autor.

Como este problema está no regime de pequenos deslocamentos, as distribuições das tensões σ_{11} e σ_{13} foram comparadas com as soluções analíticas da Resistência dos Materiais, as quais são dadas respectivamente por:

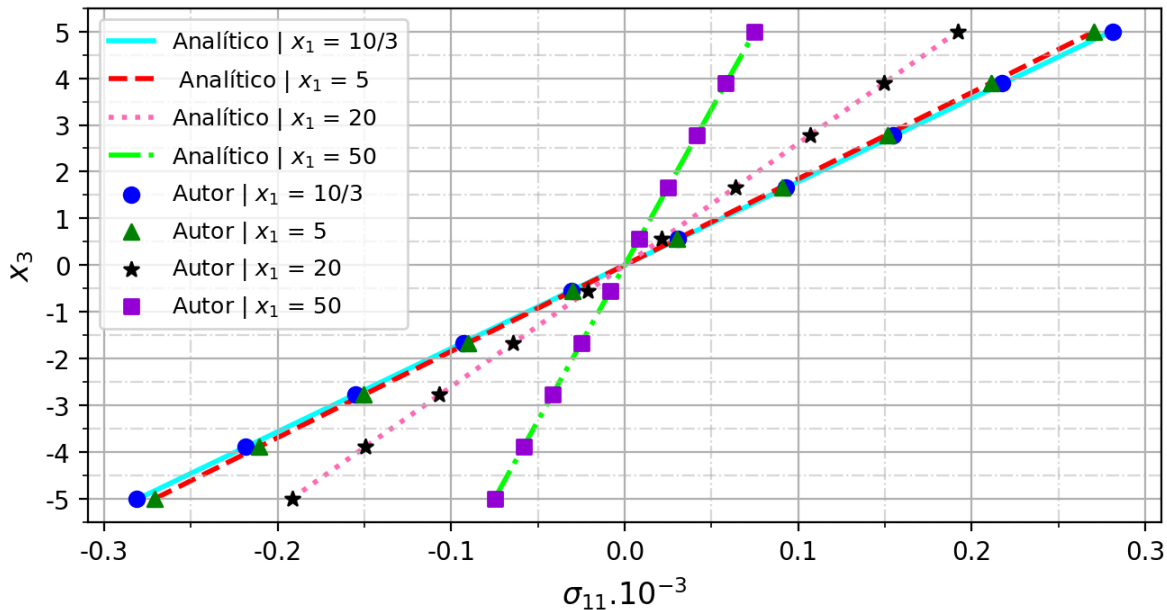
$$\sigma_{11} = \left(-\frac{ql^2}{2} + qlx_1 - \frac{qx_1^2}{2} \right) \frac{x_3}{I_z} \quad (358)$$

$$\sigma_{13} = \frac{3}{2A} (-qx_1 + ql) \left(1 - \frac{4x_3^2}{h^2} \right) \quad (359)$$

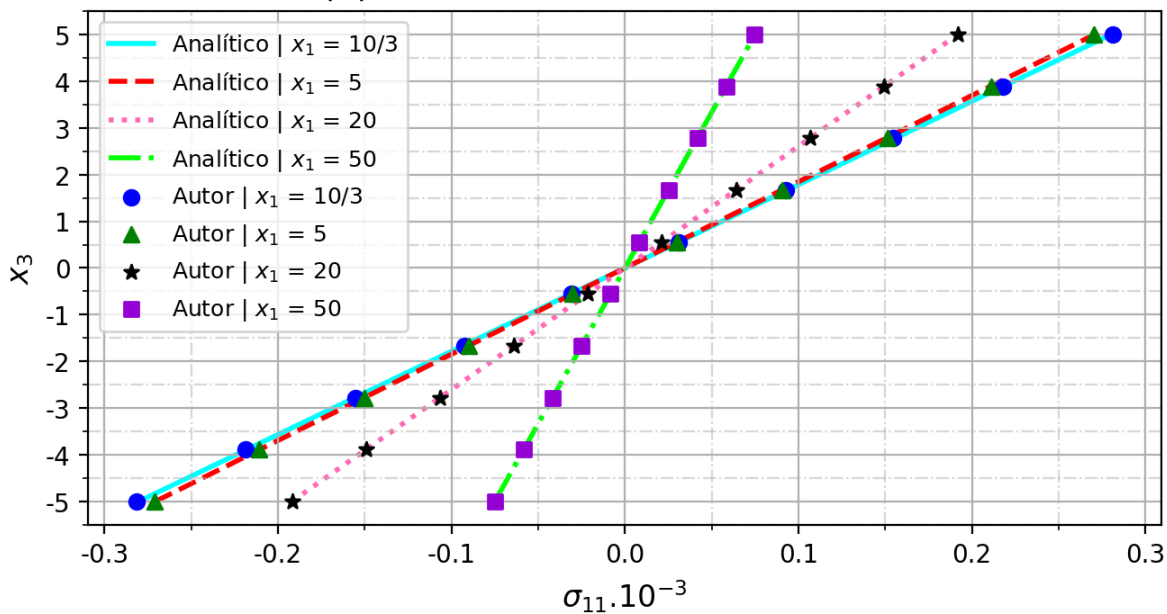
As distribuições das tensões σ_{11} e σ_{13} obtidas pelo programa comparadas com as soluções analíticas são apresentadas respectivamente na Figura 7.13 e na Figura 7.14.

Figura 7.13 – Distribuições das tensões σ_{11} no exemplo numérico 7.3

(a) Saint-Venant-Kirchhoff

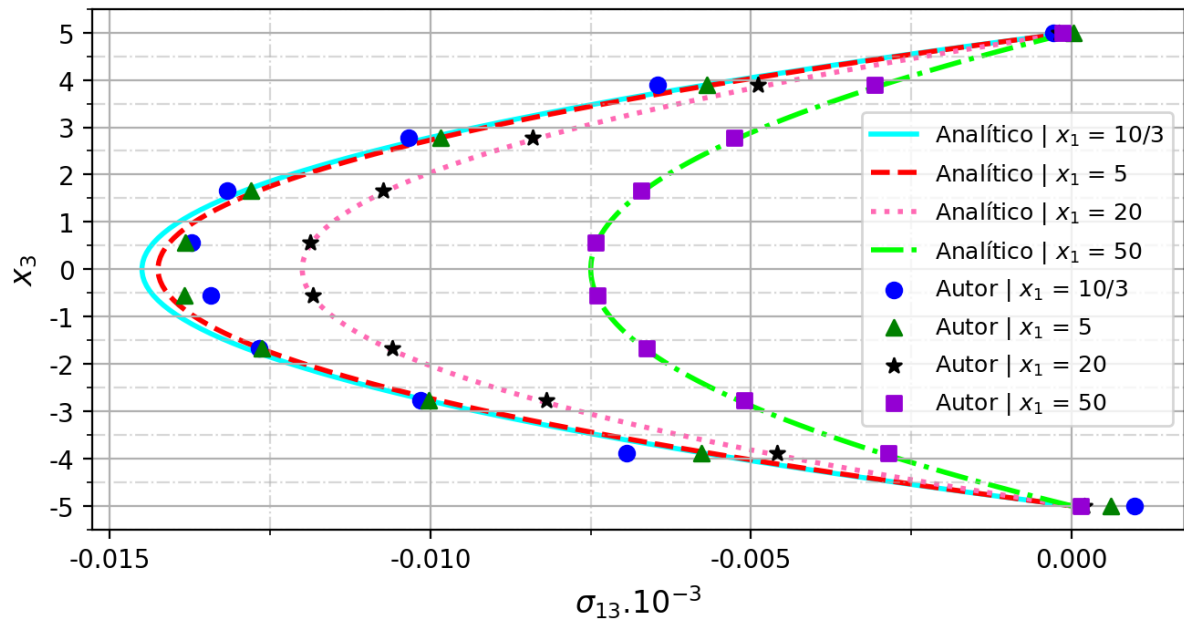


(b) Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff

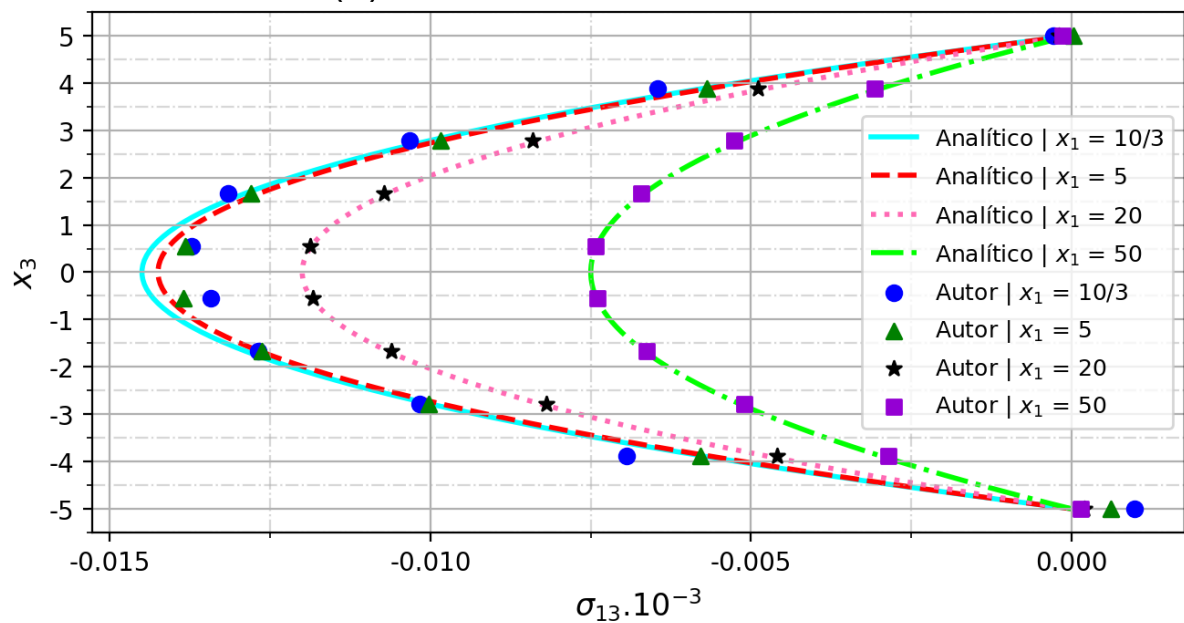


Fonte: autor.

Figura 7.14 – Distribuições das tensões σ_{13} no exemplo numérico 7.3
(a) Saint-Venant-Kirchhoff



(b) Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff



Fonte: autor.

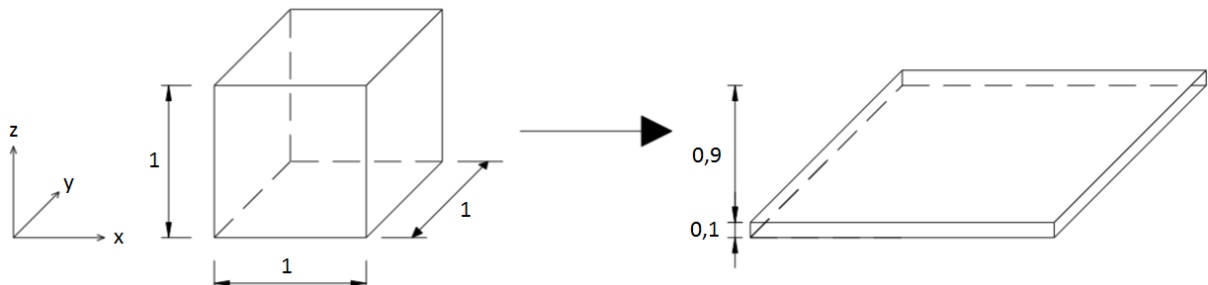
Através dos gráficos foi possível observar que as tensões normais apresentaram valores praticamente idênticos aos esperados analiticamente. O mesmo ocorreu com as tensões de cisalhamento, porém com uma pequena diferença quando $x_1 = 10/3$. Isto pode ser explicado pelo fato de esta ser a coordenada mais próxima do engaste e por a solução analítica adotar uma

hipótese cinemática simplificada. Com isso, foi possível validar a correta implementação computacional do cálculo das tensões de Cauchy.

7.4 Cubo comprimido sujeito a grandes deformações

Este exemplo numérico teve como objetivo confirmar o melhor comportamento do modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff em relação ao modelo de Saint-Venant-Kirchhoff no regime de grandes deformações. O problema analisado consistiu em um cubo de dimensões unitárias com os nós da face $z = 1$ sujeitos a um controle de posição $\Delta z = -0,9$, conforme mostrado na Figura 7.15. Os nós das faces $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ foram restritos respectivamente nas direções x , y e z . Os dados adotados no exemplo são apresentados na Figura 7.16. Foram adotados apenas 2 elementos finitos prismáticos para a análise do problema, assim como pode ser visto na Figura 7.17.

Figura 7.15 – Cubo comprimido sujeito a grandes deformações



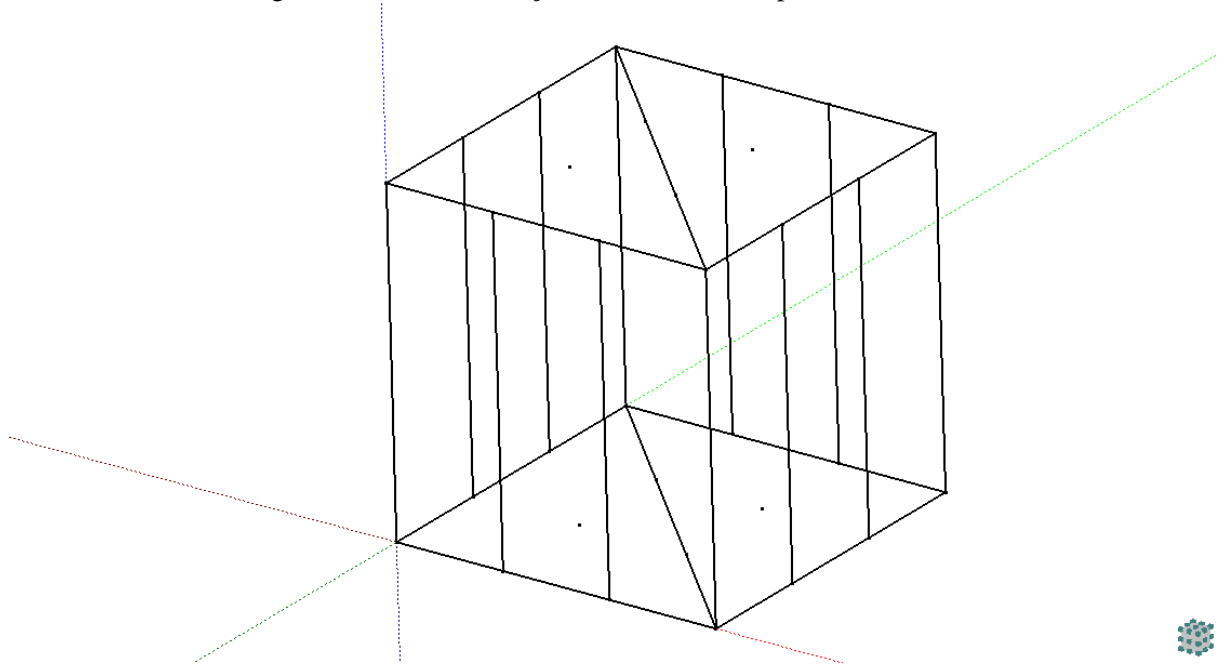
Fonte: autor.

Figura 7.16 – Dados adotados no exemplo numérico 7.4

E	1
ν	0,4
Comprimento	1
Largura	1
Altura	1
Nº pontos de Hammer	12
Nº nós	32
Nº elementos finitos	2
Grau de aproximação na espessura	Linear
Tolerância (Newton-Raphson)	10^{-6}

Fonte: autor.

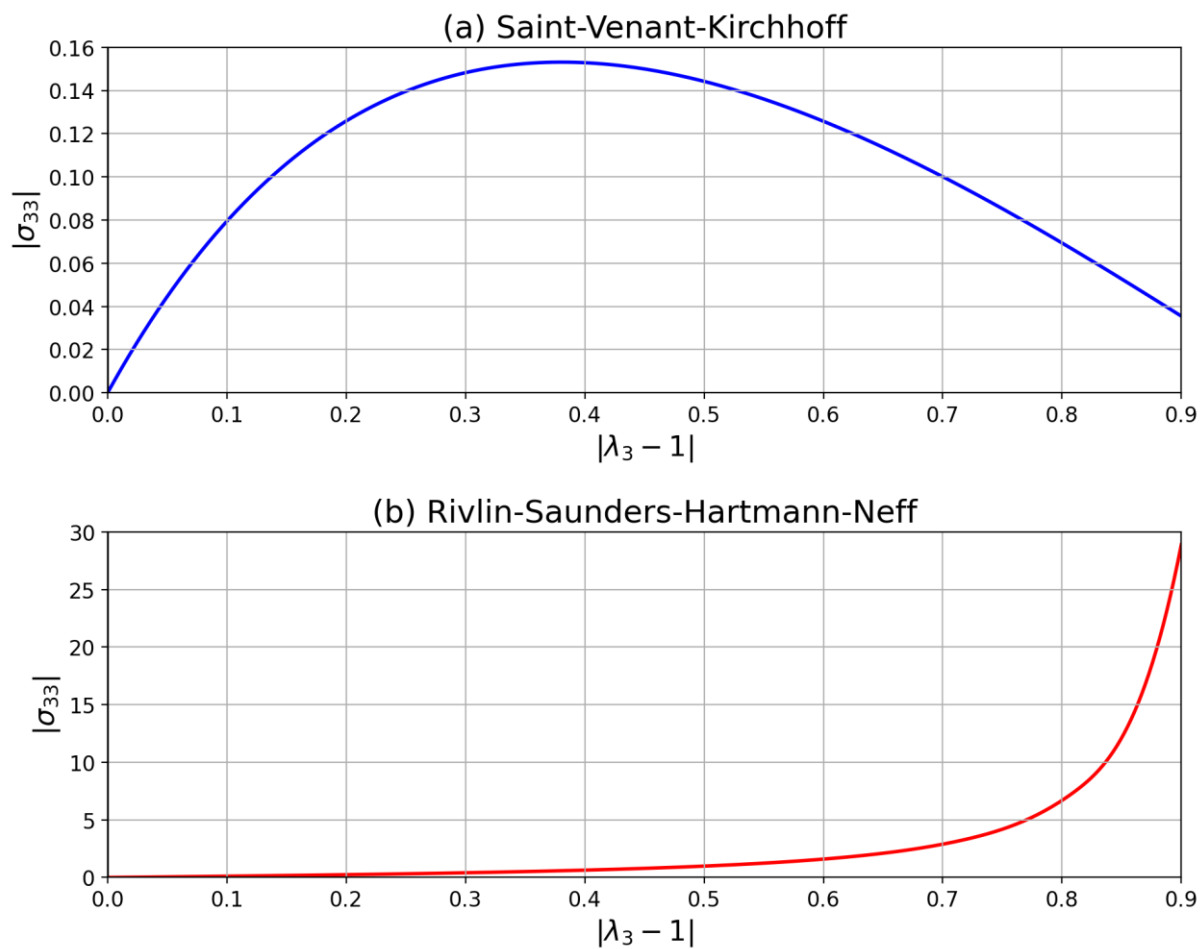
Figura 7.17 – Discretização adotada no exemplo numérico 7.4



Fonte: autor.

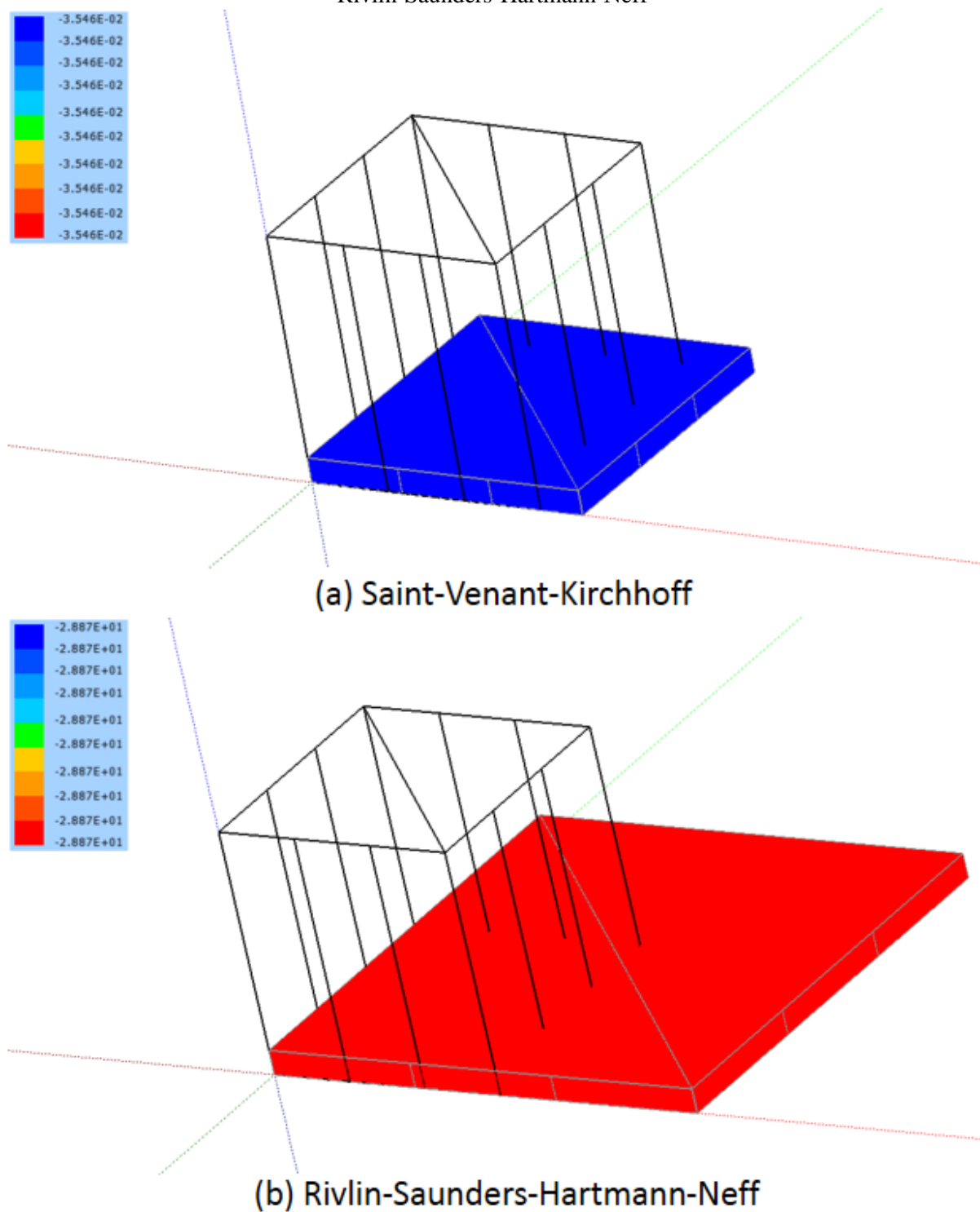
Para a análise dos resultados, foram plotados os gráficos $|\sigma_{33}| \times |\lambda_3 - 1|$ (tensão de Cauchy x deformação longitudinal linear) obtidos com os dois modelos constitutivos implementados, os quais são apresentados na Figura 7.18. Na Figura 7.19 é mostrada uma comparação das configurações finais do cubo mostrando os valores de σ_{33} obtidos com cada um dos modelos constitutivos.

Figura 7.18 – Gráficos $|\sigma_{33}| \times |\lambda_3 - 1|$ do exemplo numérico 7.4 obtidos com os modelos constitutivos de: (a) Saint-Venant-Kirchhoff; (b) Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff



Fonte: autor.

Figura 7.19 – Comparação das configurações finais do cubo comprimido do exemplo numérico 7.4 mostrando os valores de σ_{33} obtidos com os modelos constitutivos de: (a) Saint-Venant-Kirchhoff; (b) Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff



Fonte: autor.

Através da comparação dos gráficos foi possível observar claramente que o modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff satisfaz a Condição de Crescimento (Equação (164)), fato que não ocorreu quando se utilizou o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff. Desta forma, verificou-se

que o modelo constitutivo hiperelástico de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff de fato se mostra mais adequado no regime de grandes deformações. Portanto, em todos os demais exemplos numéricos foi empregado somente o modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff.

7.5 Cubo elasto-plástico sujeito a controle de posição cíclico

Este teste de validação teve como objetivo validar a correta implementação computacional da formulação alternativa de plasticidade. O problema analisado consistiu em um cubo de dimensões unitárias com os nós da face $z = 1$ sujeitos a um controle de posição, assim como feito no exemplo numérico 7.4. Os nós das faces $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ foram restritos respectivamente nas direções x , y e z e foi adotada a mesma discretização do exemplo anterior. Este problema foi analisado anteriormente por Coda (2021) para a verificação da formulação alternativa de plasticidade. Os dados adotados no teste de validação são apresentados na Figura 7.20.

Figura 7.20 – Dados adotados no exemplo numérico 7.5

K	80
G	24
$\bar{\tau}_1$	0,4
$\bar{\tau}_2$	0,4
Comprimento	1
Largura	1
Altura	1
Nº pontos de Hammer	12
Nº nós	32
Nº elementos finitos	2
Grau de aproximação na espessura	Linear
Tolerância (Newton-Raphson)	10^{-6}

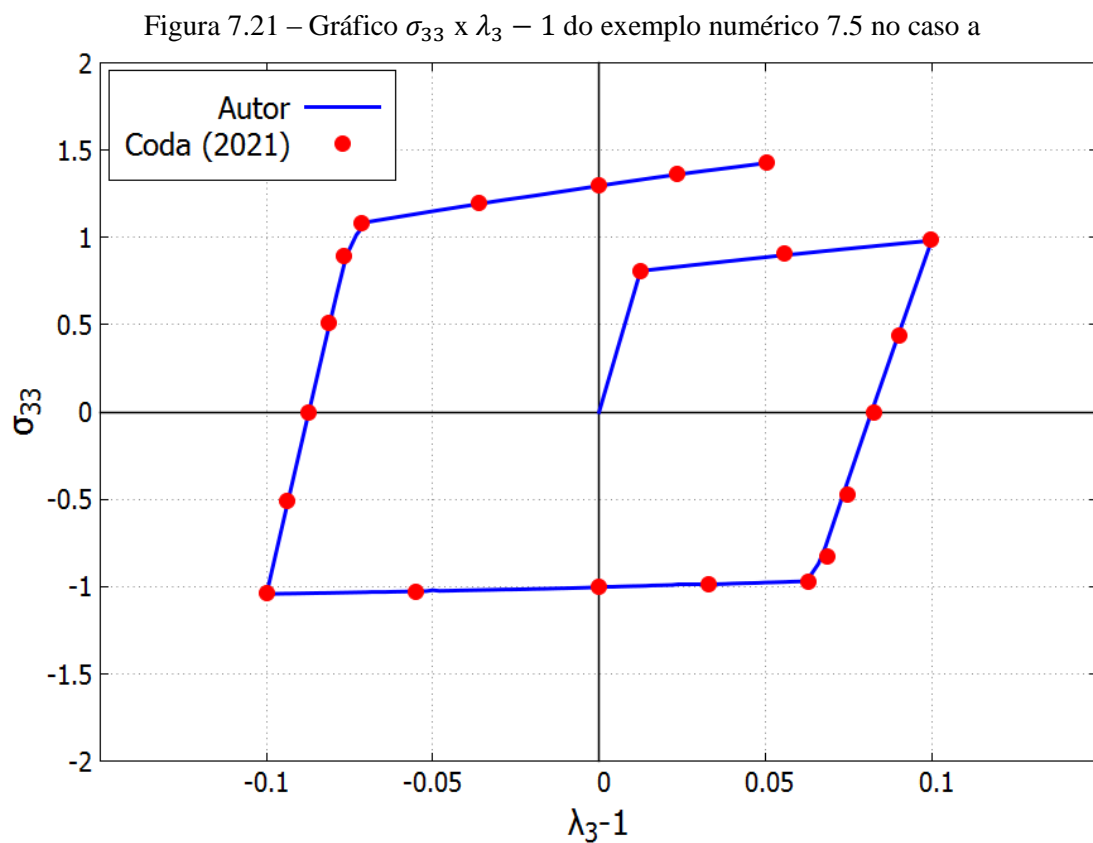
Fonte: autor.

O cubo foi tracionado e comprimido na direção z de forma cíclica, sendo feita a análise da tensão σ_{33} em três casos:

- cubo com coeficientes de encruamento $H^i = 0,5$ e $H^c = 0$ sujeito a alongamento $0,9 \leq \lambda \leq 1,1$ dividido em 200 passos;
- cubo com coeficientes de encruamento $H^i = 0$ e $H^c = 0,5$ sujeito a alongamento $0,9 \leq \lambda \leq 1,1$ dividido em 200 passos;

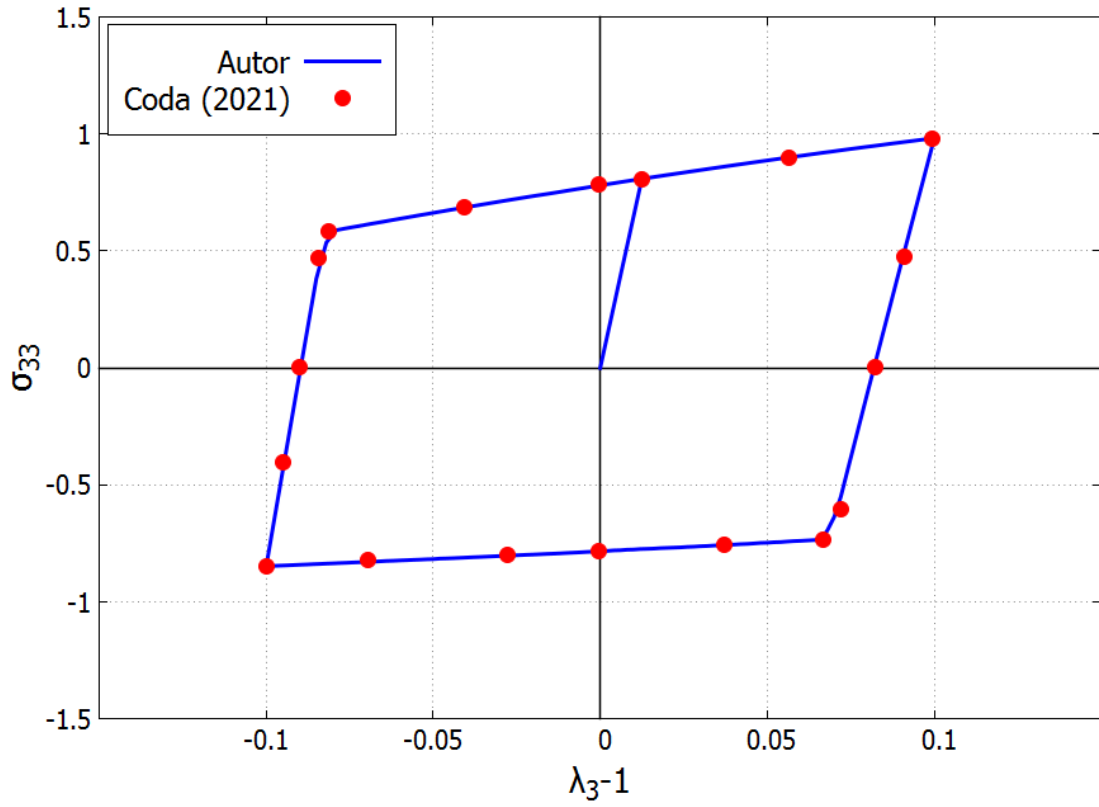
- c) cubo com coeficientes de encruamento $H^i = 0$ e $H^c = 0,5$ sujeito a alongamento $0,4 \leq \lambda \leq 1,6$ dividido em 400 passos.

São apresentados respectivamente na Figura 7.21, Figura 7.22 e Figura 7.23 os gráficos $\sigma_{33} \times \lambda_3 - 1$ obtidos pelo programa nos caso a, b e c comparados com alguns pontos dos gráficos da referência. Em todos os casos foi possível constatar que os resultados obtidos foram condizentes com os da referência, confirmando, portanto, a correta implementação computacional da formulação alternativa de plasticidade.



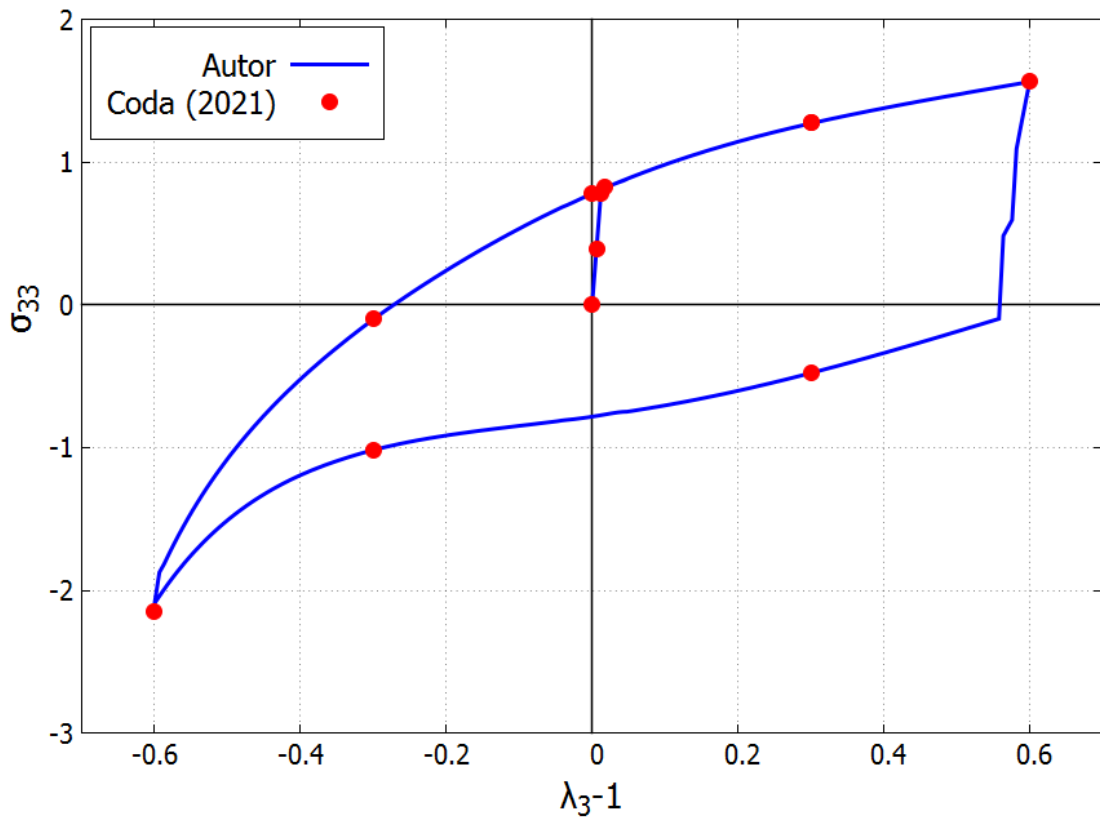
Fonte: autor.

Figura 7.22 – Gráfico $\sigma_{33} \times \lambda_3 - 1$ do exemplo numérico 7.5 no caso b



Fonte: autor.

Figura 7.23 – Gráfico $\sigma_{33} \times \lambda_3 - 1$ do exemplo numérico 7.5 no caso c



Fonte: autor.

7.6 Flambagem de pilar engastado e livre

Este teste de validação teve como objetivo validar a correta implementação computacional do processo de cálculo das cargas e dos modos de flambagem. O problema analisado consistiu em um pilar engastado e livre com seção transversal quadrada de 1 m de lado e 40 m de comprimento sujeito a um carregamento de compressão de 1 Pa no topo, assim como ilustrado na Figura 7.24a. Os nós da base foram engastados e todos os nós da estrutura foram restritos na direção z, a fim de forçar a flambagem em torno do eixo z (deslocamentos na direção x). Foi adotada uma discretização com 5 subdivisões ao longo da altura do pilar, assim como mostrado na Figura 7.24b, totalizando 10 elementos finitos. Os dados adotados no teste de validação são apresentados na Figura 7.25.

Figura 7.24 – Pilar engastado e livre comprimido: (a) ilustração do problema analisado; (b) discretização adotada (plano xy)

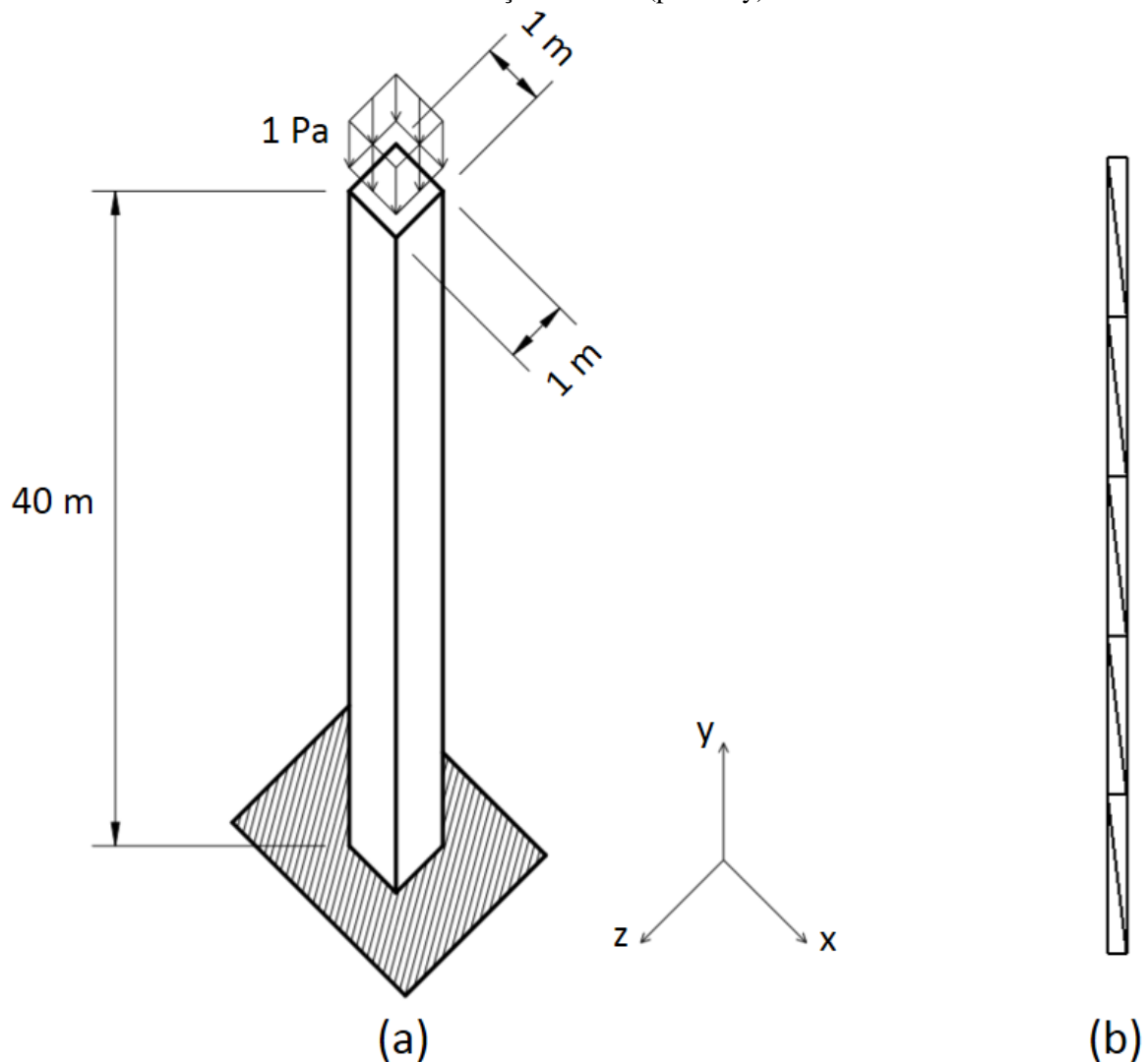


Figura 7.25 – Dados adotados no exemplo numérico 7.6

E	3.10^{10} Pa
ν	0
Comprimento	40 m
Largura	1 m
Altura	1 m
Nº pontos de Hammer	12
Nº nós	256
Nº elementos finitos	10
Grau de aproximação na espessura	Cúbico
Tolerância (Newton-Raphson)	10^{-6}

Fonte: autor.

Na Tabela 7.3 são apresentadas as cargas de flambagem dos quatro primeiros modos obtidas pelo programa comparadas com as cargas de flambagem esperadas teoricamente. Foi possível observar que os resultados obtidos foram praticamente idênticos aos esperados teoricamente, confirmando então que a implementação computacional do processo de cálculo dos autovalores foi feita corretamente.

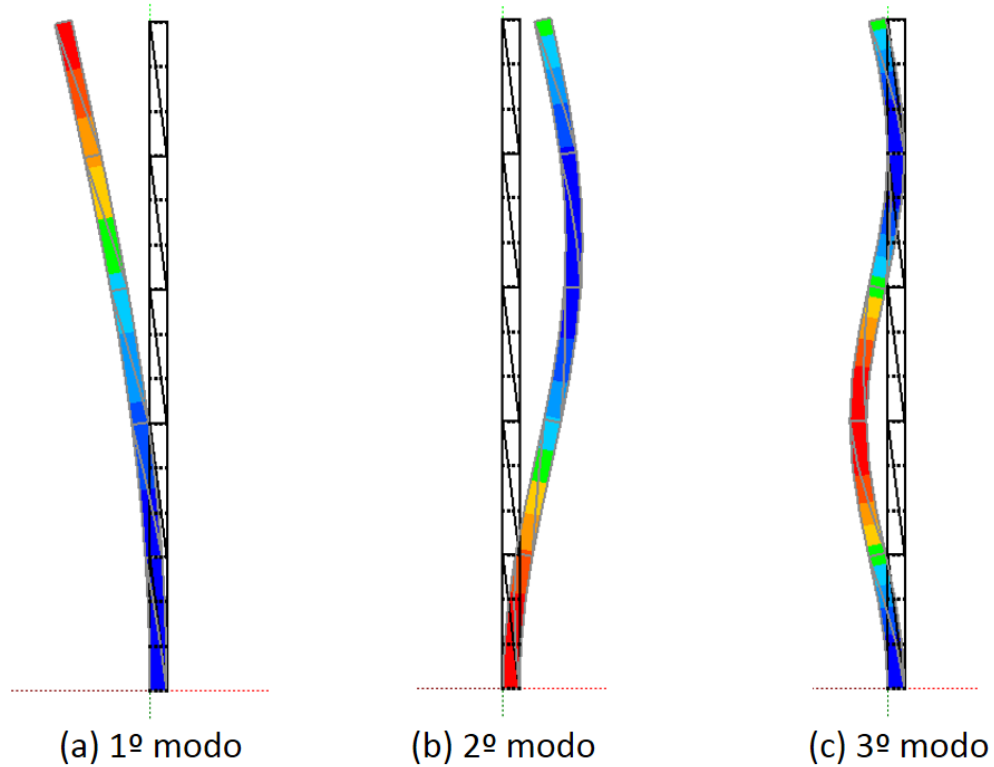
Tabela 7.3 – Comparativo entre as cargas de flambagem dos quatro primeiros modos teóricas e as obtidas pelo programa no exemplo numérico 7.6

Modo	P_{cr} (N)		Diferença percentual
	Teórico	Autor	
1	$3,855.10^6$	$3,854.10^6$	-0,04%
2	$3,470.10^7$	$3,459.10^7$	-0,30%
3	$9,638.10^7$	$9,597.10^7$	-0,43%
4	$1,889.10^8$	$1,892.10^8$	0,14%

Fonte: autor.

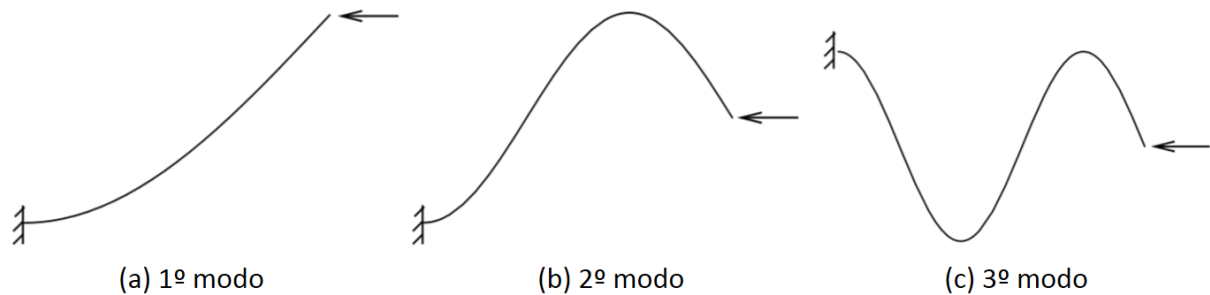
Já com relação aos autovetores, a Figura 7.26 mostra os três primeiros modos de flambagem obtidos pelo programa. Comparando a Figura 7.26 com a Figura 7.27, a qual ilustra os três primeiros modos de flambagem de uma barra engastada e livre, foi possível observar que os autovetores obtidos foram condizentes com os esperados. Desta forma, ficou também confirmada a correta implementação computacional do processo de cálculo dos autovetores.

Figura 7.26 – Três primeiros modos de flambagem obtidos no exemplo numérico 7.6



Fonte: autor.

Figura 7.27 – Três primeiros modos de flambagem de uma barra engastada e livre



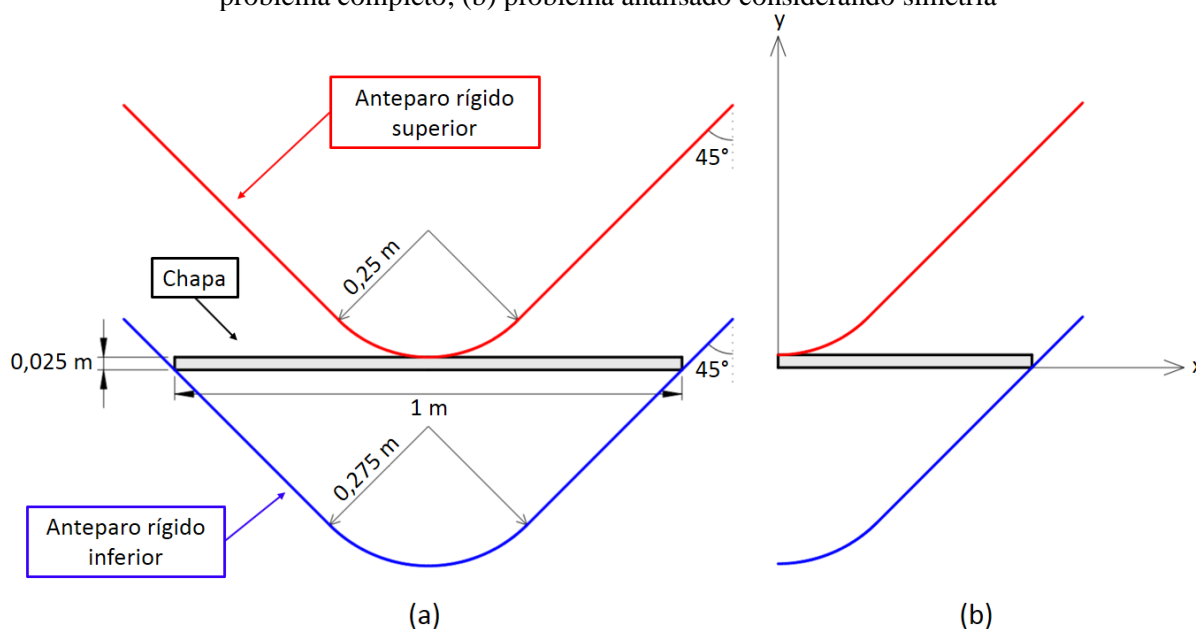
Fonte: adaptado de Radovitzky (2013).

7.7 *Springback* em conformação a frio por dobragem de perfil cantoneira

Neste exemplo numérico, o programa foi utilizado para simular a conformação a frio por dobragem de um perfil cantoneira. Este problema foi analisado anteriormente por Carvalho, Coda e Sanches (2020) por meio de elementos finitos de chapa e formulação de plasticidade baseada na decomposição de Kröner-Lee. O problema consistiu na dobragem de uma chapa de aço CK 15 com 1 m de largura, 0,025 m de espessura e 1 m de profundidade através da prensagem da mesma entre dois anteparos rígidos, conforme ilustrado na Figura 7.28a.

Considerando a simetria do problema, apenas metade do problema foi analisado, conforme ilustrado na Figura 7.28b. Todos os nós da chapa metálica foram restritos na direção z (estado plano de deformações), sendo também imposta a condição de simetria (nós no plano $x = 0$ restritos na direção x).

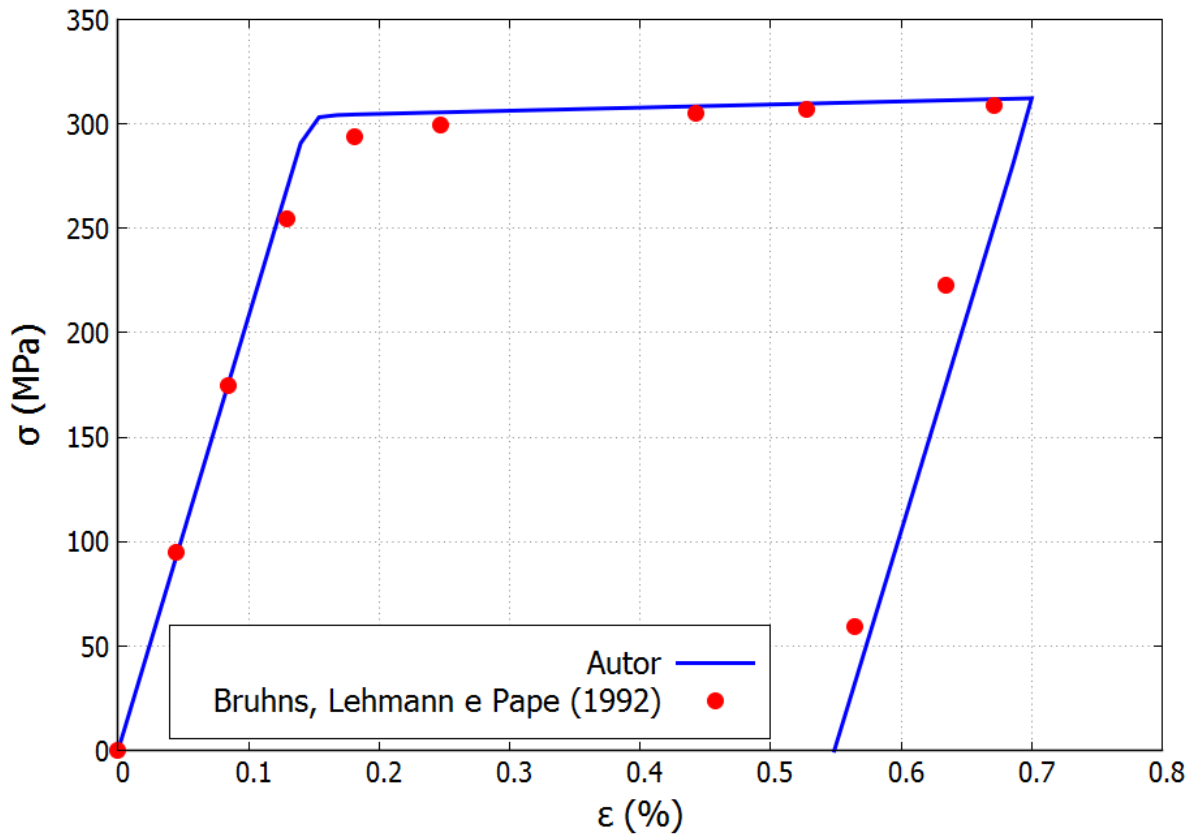
Figura 7.28 – Conformação a frio por dobragem de perfil cantoneira do exemplo numérico 7.7: (a) problema completo; (b) problema analisado considerando simetria



Fonte: autor.

Na 1ª fase de carregamento, foi imposto um deslocamento na direção y de $-0,38609$ m no anteparo rígido superior dividido em 3000 passos; já na 2ª fase de carregamento, foi imposto um deslocamento na direção y de $0,38609$ m no anteparo superior em apenas 1 passo a fim de se permitir a ocorrência de *springback* na chapa metálica.

Como a formulação de plasticidade adotada pela referência é diferente da formulação de plasticidade utilizada no presente trabalho, foi necessário determinar o encruamento do material. Isto foi feito através da comparação do gráfico $\sigma \times \varepsilon$ obtido por meio de um teste de tração uniaxial (assim como feito no exemplo numérico 7.5) com os dados experimentais do aço CK 15 obtidos por Bruhns, Lehmann e Pape (1992). O gráfico $\sigma \times \varepsilon$ do ensaio de tração uniaxial do aço CK 15 obtido pelo programa com $H^c = 400$ MPa comparado com os valores experimentais obtidos por Bruhns, Lehmann e Pape (1992) é apresentado na Figura 7.29, onde é possível observar que o gráfico obtido foi condizente com os dados empíricos.

Figura 7.29 – Gráfico $\sigma \times \epsilon$ do ensaio de tração uniaxial do aço CK 15 obtido com $H^c = 400 \text{ MPa}$ 

Fonte: autor.

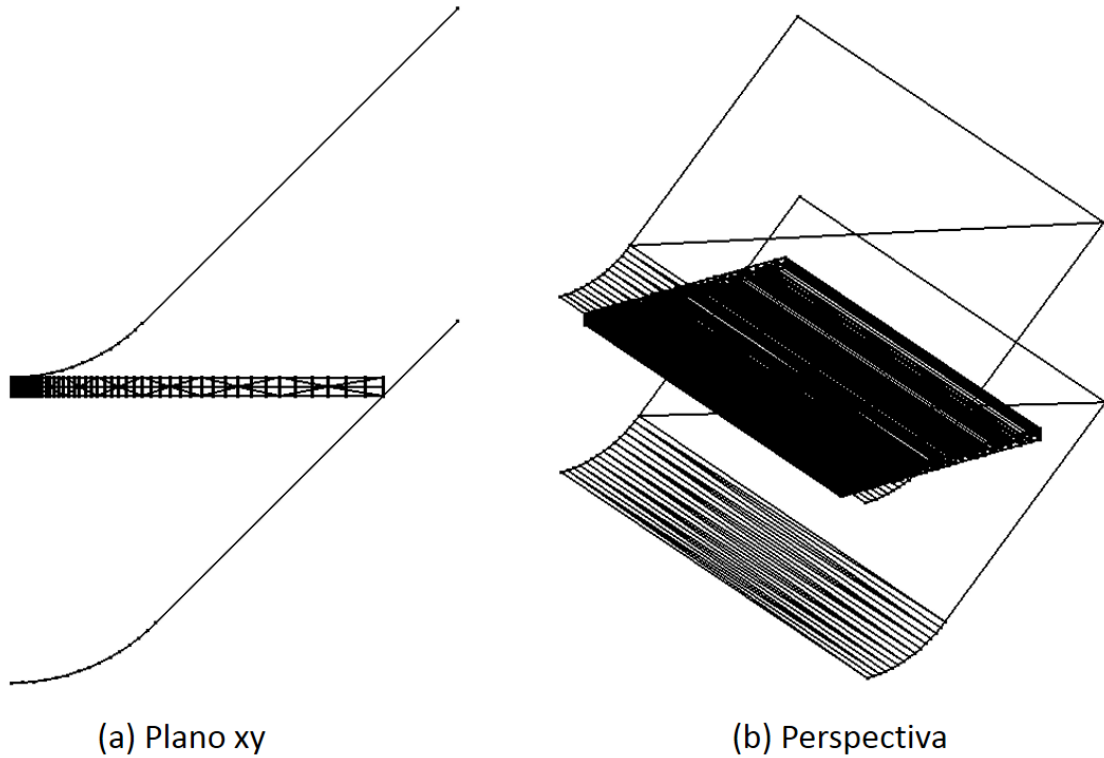
Os dados adotados no exemplo numérico são apresentados na Figura 7.30. A discretização adotada na análise, incluindo a discretização dos anteparos rígidos em superfícies alvo, é mostrada na Figura 7.31.

Figura 7.30 – Dados adotados no exemplo numérico 7.7

K	173333.10^6 Pa
G	80000.10^6 Pa
$\bar{\tau}_1$	150.10^6 Pa
$\bar{\tau}_2$	150.10^6 Pa
H^c	400.10^6 Pa
ϵ	2.10^9 N/m
Profundidade	1 m
Largura	0,5 m
Espessura	0,025 m
Nº pontos de Hammer	12
Nº nós	644
Nº elementos finitos	60
Grau de aproximação na espessura	Linear
Tolerância (Newton-Raphson)	10^{-5}

Fonte: autor.

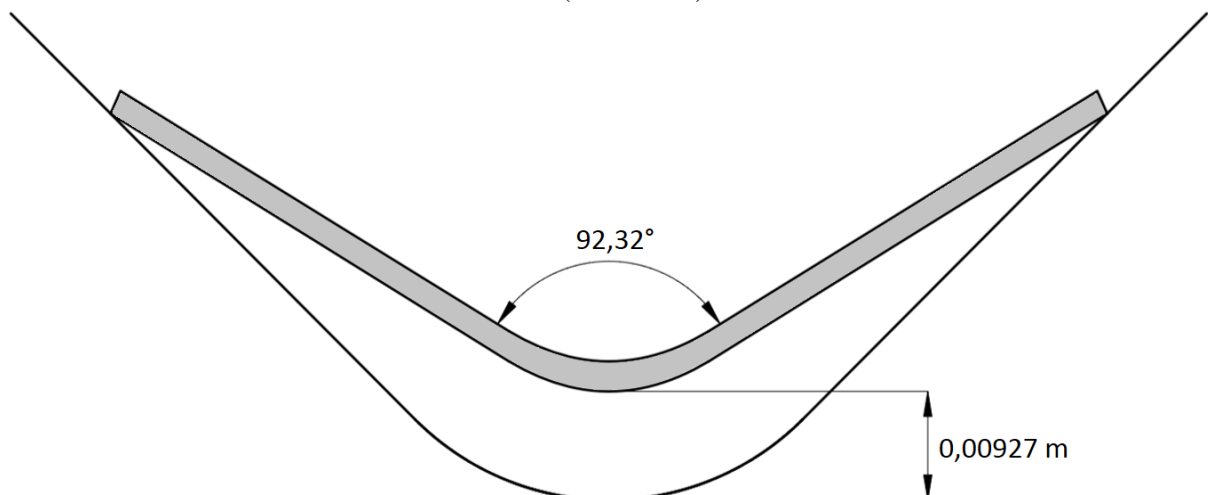
Figura 7.31 – Discretização adotada no exemplo numérico 7.7



Fonte: autor.

Após a elevação do anteparo rígido superior na 2ª fase de carregamento, foi observado que a chapa metálica sofreu um *springback* de 0,00927 m e que a dobra do perfil cantoneira ficou com um ângulo final de $92,32^\circ$, conforme ilustrado na Figura 7.32. Os valores foram condizentes com os resultados obtidos pela referência, onde foram obtidos um *springback* de 0,01051 m e um ângulo final de $92,12^\circ$.

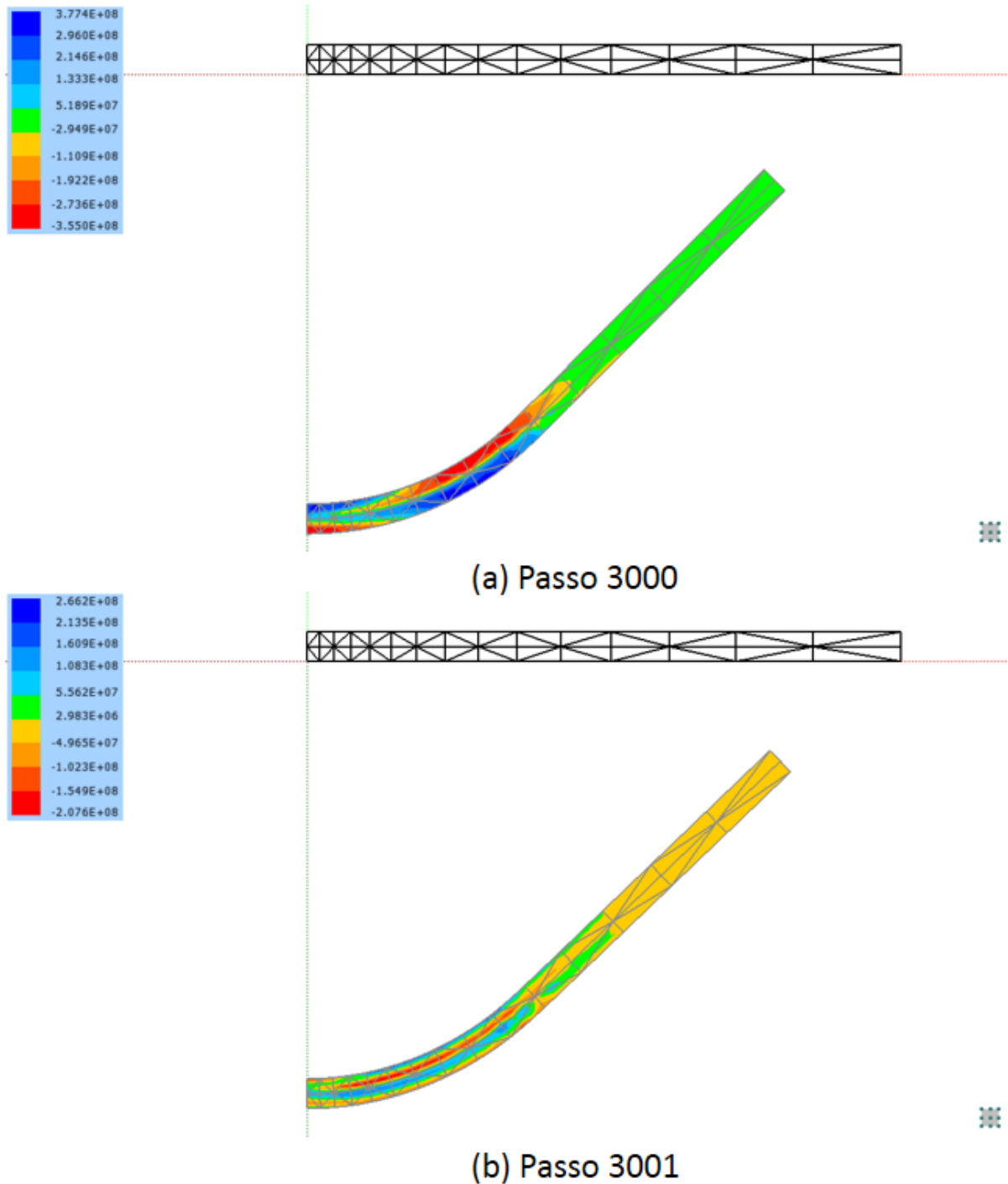
Figura 7.32 – Esquema representativo da configuração final do perfil cantoneira no exemplo numérico 7.7 (sem escala)



Fonte: autor.

Com o intuito de mostrar a variação das tensões após a ocorrência do *springback*, na Figura 7.33 é apresentada a distribuição da tensão σ_x na chapa nos passos 3000 (último passo antes do *springback*) e 3001 (passo após a ocorrência do *springback*).

Figura 7.33 – Distribuição da tensão σ_x na chapa do exemplo numérico 7.7 nos passos: (a) 3000; (b) 3001



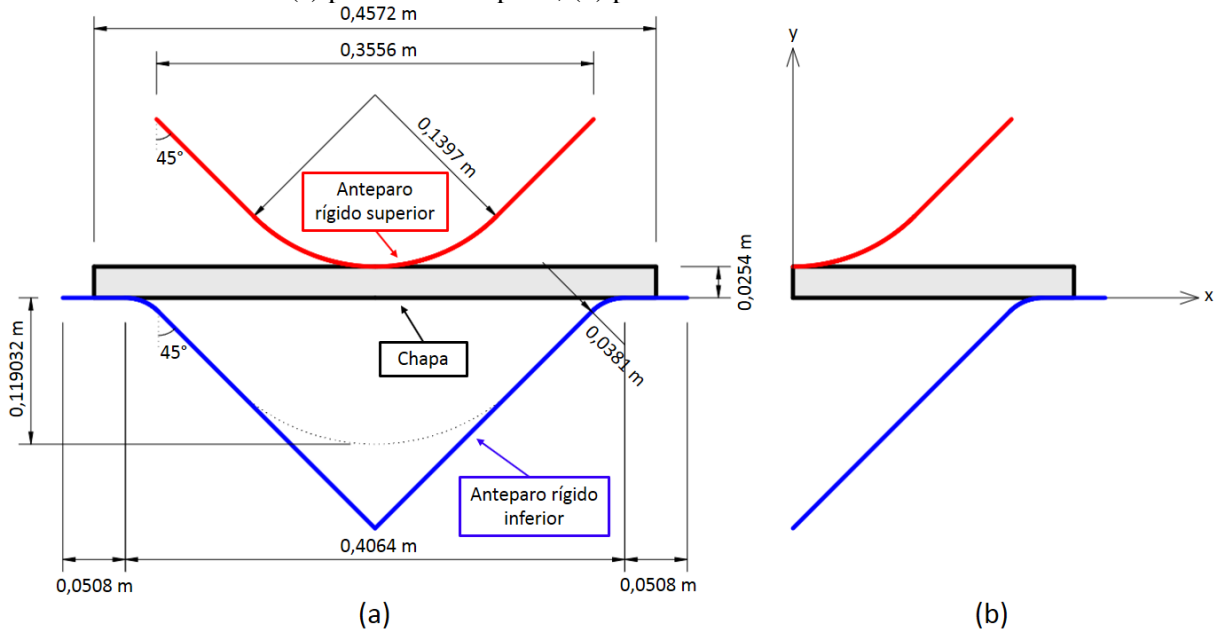
Fonte: autor.

7.8 Distribuição de tensões residuais em dobra de perfil cantoneira de parede espessa

O presente exemplo numérico é bem semelhante ao exemplo anterior, onde também foi analisada a conformação a frio por dobragem de um perfil cantoneira. No entanto, neste exemplo a chapa metálica é espessa e foi analisada a distribuição das tensões residuais ao longo da espessura da chapa.

O problema consistiu na dobragem de uma chapa de aço HY-80 com 0,2286 m (9 in) de largura, 0,0254 m (1 in) de espessura e 0,4564 m (17 31/32 in) de profundidade através da prensagem da mesma entre dois anteparos rígidos, conforme ilustrado na Figura 7.34a. Considerando a simetria do problema, apenas metade do problema foi analisado, conforme ilustrado na Figura 7.34b. Todos os nós da chapa metálica foram restritos na direção z (estado plano de deformações), sendo também imposta a condição de simetria (nós no plano $x = 0$ restritos na direção x).

Figura 7.34 – Conformação a frio por dobragem de perfil cantoneira de parede espessa do exemplo numérico 7.8: (a) problema completo; (b) problema analisado considerando simetria



Fonte: autor.

Este problema foi um dos vários casos analisados experimentalmente por Weng e White (1990a, 1990b), os quais realizaram medições das tensões residuais em perfis cantoneira de parede espessa. As tensões residuais nas superfícies das chapas foram medidas tanto pelo método destrutivo de seccionamento (*sectioning method*) quanto pelo método semi-destrutivo

de perfuração (*hole-drilling method*); já as tensões residuais ao longo da espessura foram medidas apenas pelo método de seccionamento.

Este problema também foi analisado posteriormente de forma analítica/numérica pelos trabalhos de Quach, Teng e Chung (2006), Rossi, Habraken e Pascon (2007)⁸ e Howlader, Marik e Jandera (2016) para a validação das formulações propostas em seus trabalhos.

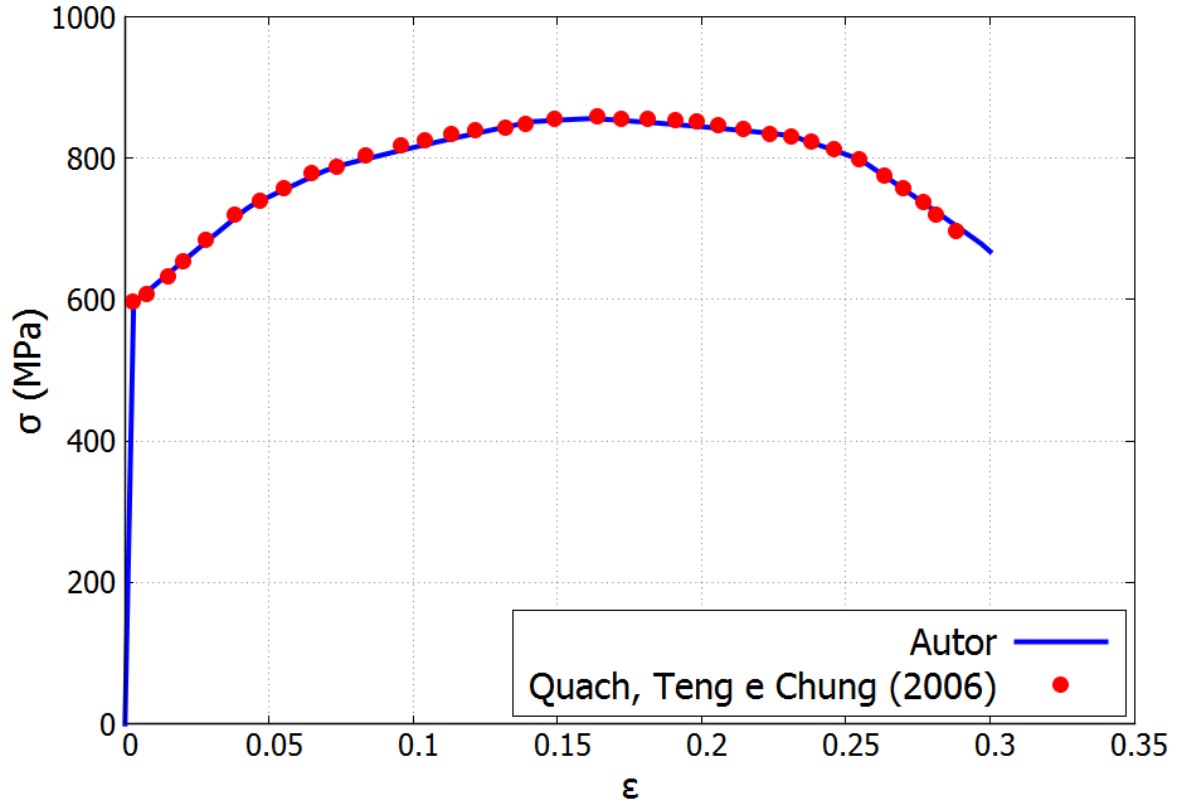
Na 1ª fase de carregamento, foi imposto um deslocamento na direção y de $-0,119032$ m no anteparo rígido superior dividido em 400 passos; já na 2ª fase de carregamento, foi imposto um deslocamento na direção y de $0,119032$ m no anteparo superior em apenas 1 passo a fim de se permitir a ocorrência de *springback* na chapa metálica.

Foi necessário realizar uma calibração do encruamento a fim de que o material tivesse um comportamento mecânico semelhante ao do aço HY-80. Isto foi feito através da calibração do encruamento em um teste de tração uniaxial (assim como feito no exemplo numérico 7.5). A Figura 7.35 mostra o gráfico $\sigma \times \varepsilon$ do ensaio de tração uniaxial do aço HY-80 adotado no exemplo comparado com alguns pontos da curva adotada por Quach, Teng e Chung (2006). O gráfico foi obtido através imposição:

- a) $H^i = 1.10^9 Pa$ no intervalo $0 \leq \lambda < 0,18$;
- b) $H^i = 5.10^8 Pa$ no intervalo $0,18 \leq \lambda < 0,3$;
- c) $H^i = 2.10^8 Pa$ no intervalo $0,3 \leq \lambda < 0,6$;
- d) $H^i = -2.10^8 Pa$ no intervalo $0,6 \leq \lambda < 1,0$;
- e) $H^i = -8.10^8 Pa$ no intervalo $1,0 \leq \lambda < 1,1$;
- f) $H^i = -1,6.10^9 Pa$ no intervalo $1,1 \leq \lambda < 2,0$.

⁸ No trabalho de Rossi, Habraken e Pascon (2007), as análises foram realizadas para dois casos: material sem encruamento; e material com encruamento seguindo a Lei de Swift.

Figura 7.35 – Gráfico $\sigma \times \varepsilon$ do ensaio de tração uniaxial do aço HY-80 do exemplo numérico 7.8



Fonte: autor.

Os dados adotados no exemplo numérico são apresentados na Figura 7.36.

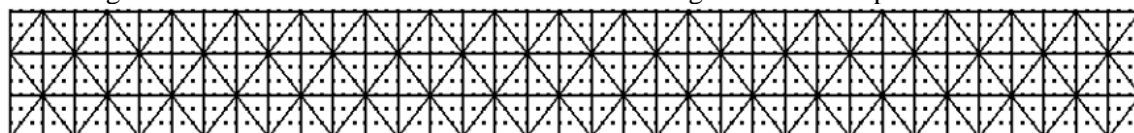
Figura 7.36 – Dados adotados no exemplo numérico 7.8

E	$203,944 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
ν	0,28
$\bar{\tau}_1$	$296,6145 \cdot 10^6 \text{ Pa}$
$\bar{\tau}_2$	$296,6145 \cdot 10^6 \text{ Pa}$
H^i	$H^i = 1 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ no intervalo $0 \leq \lambda < 0,18$; $H^i = 5 \cdot 10^8 \text{ Pa}$ no intervalo $0,18 \leq \lambda < 0,3$; $H^i = 2 \cdot 10^8 \text{ Pa}$ no intervalo $0,3 \leq \lambda < 0,6$; $H^i = -2 \cdot 10^8 \text{ Pa}$ no intervalo $0,6 \leq \lambda < 1,0$; $H^i = -8 \cdot 10^8 \text{ Pa}$ no intervalo $1,0 \leq \lambda < 1,1$; $H^i = -1,6 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ no intervalo $1,1 \leq \lambda < 2,0$
H^c	0
ϵ	$1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}$
Profundidade	0,4564 m
Largura	0,2286 m
Espessura	0,0254 m
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura	Linear
Tolerância (Newton-Raphson)	10^{-5}

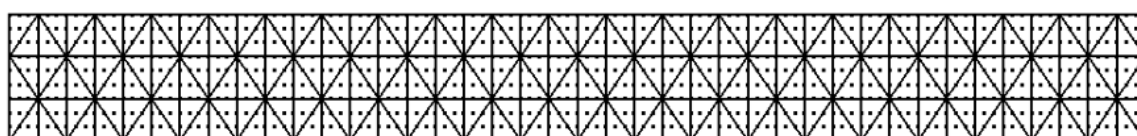
Fonte: autor.

Foi realizada uma análise de convergência tomando-se como referência os valores das tensões σ_x e σ_z na superfície externa da seção central da dobra (ponto (0; 0; 0)). Foram adotados 3 elementos finitos ao longo da espessura da chapa e foi avaliado o aumento da discretização ao longo da largura. A Figura 7.37 mostra as discretizações estudadas e a Tabela 7.4 apresenta os resultados obtidos na análise de convergência.

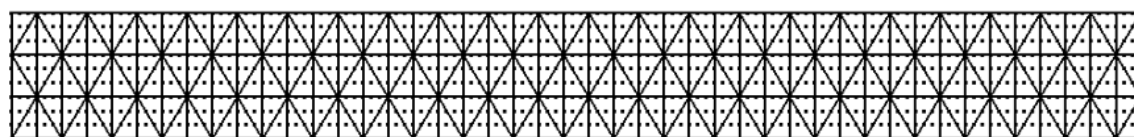
Figura 7.37 – Malhas adotadas na análise de convergência do exemplo numérico 7.8



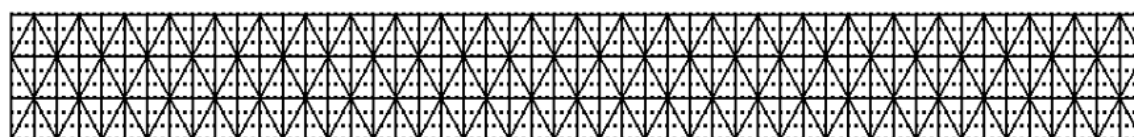
(a) Discretização 1



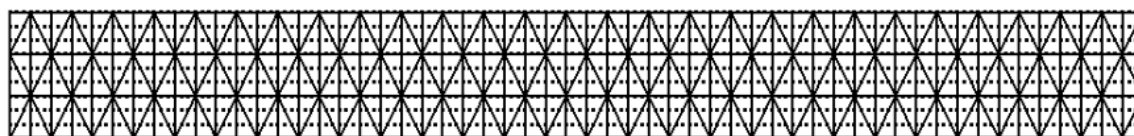
(b) Discretização 2



(c) Discretização 3



(d) Discretização 4



(e) Discretização 5

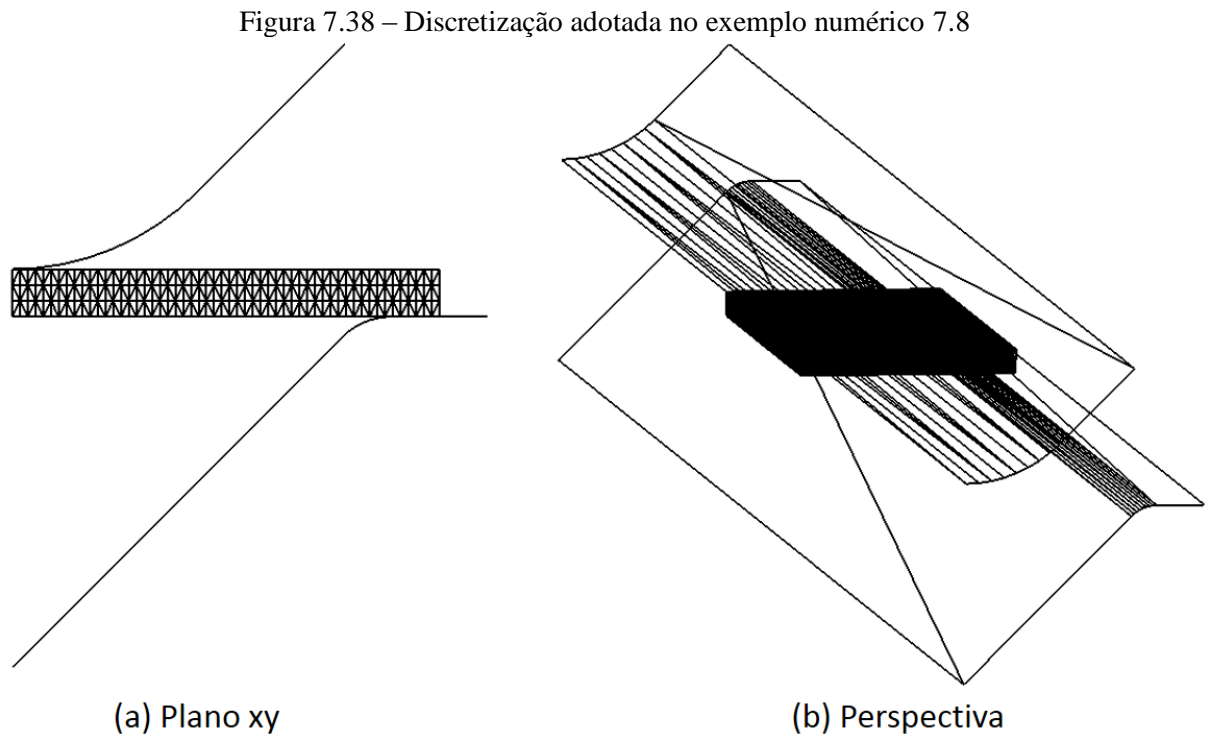
Fonte: autor.

Tabela 7.4 – Resultados da análise de convergência do exemplo numérico 7.8

Discretização	Nº subdivisões largura	Nº subdivisões espessura	Nº nós	Nº elementos finitos	Ponto (0;0;0)	
					σ_x (MPa)	σ_z (MPa)
1	35	3	2120	210	-217,77	62,73
2	40	3	2420	240	-218,07	55,26
3	45	3	2720	270	-230,31	51,42
4	50	3	3020	300	-227,07	54,03
5	55	3	3320	330	-228,14	54,96

Fonte: autor.

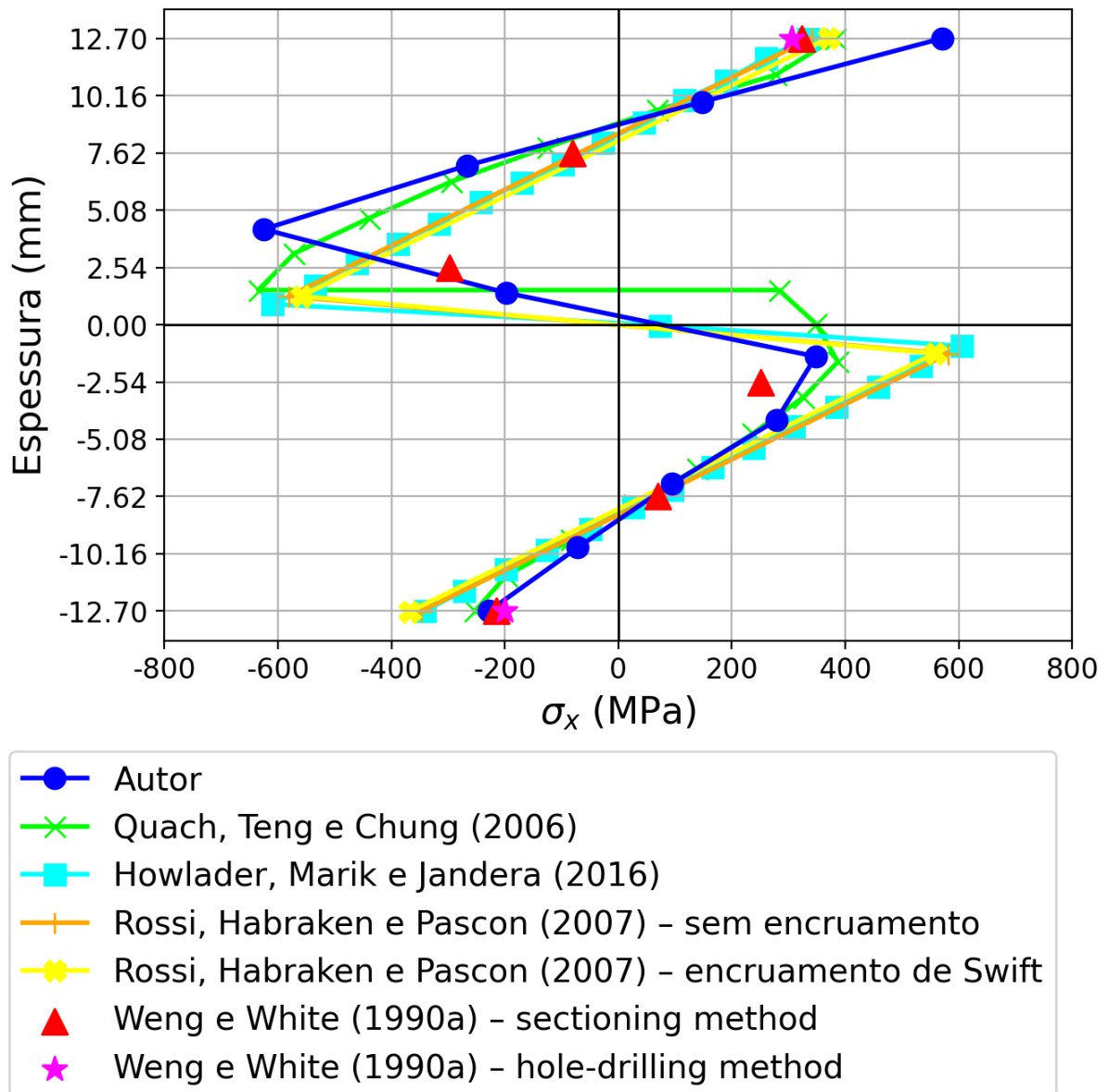
Considerando os resultados obtidos na análise de convergência, decidiu-se pela adoção da discretização 5 para a comparação dos resultados com as referências. A discretização adotada na análise, incluindo a discretização dos anteparos rígidos em superfícies alvo, é mostrada na Figura 7.38.



Fonte: autor.

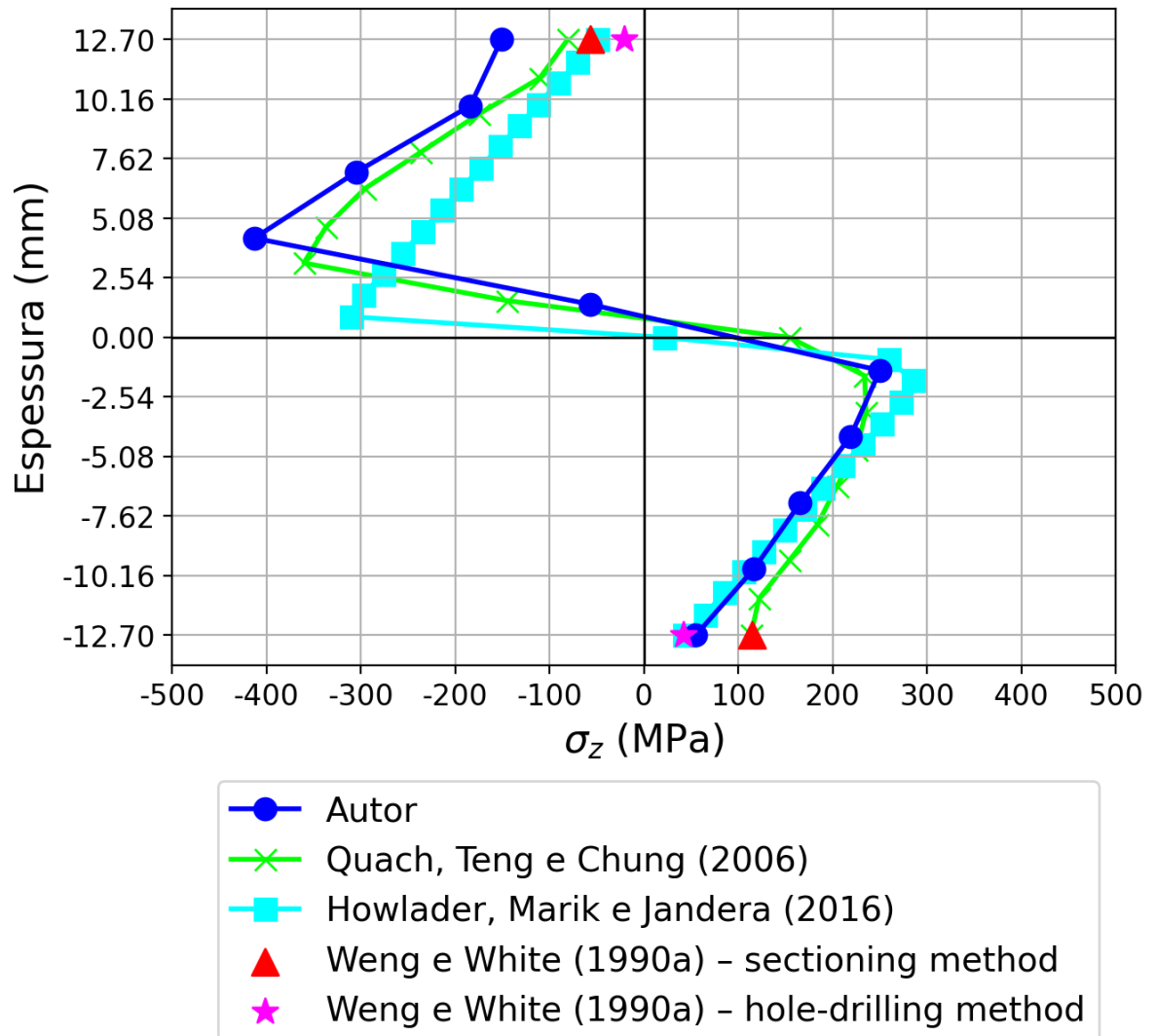
A Figura 7.39 e a Figura 7.40 mostram respectivamente as distribuições das tensões residuais σ_x e σ_z ao longo da espessura da chapa metálica na seção central da dobra – linha $(0; 0 \leq y \leq 0,0254 \text{ m}; 0)$ – obtidas pelo programa com a discretização 5 comparadas com as distribuições obtidas pelas referências. Através da comparação dos gráficos foi possível observar uma boa coerência dos resultados obtidos com os resultados das referências, o que mostra que a formulação adotada é capaz de estimar a distribuição das tensões residuais advindas da conformação a frio.

Figura 7.39 – Distribuição da tensão residual σ_x ao longo da espessura na seção central da dobra do perfil cantoneira do exemplo numérico 7.8



Fonte: autor.

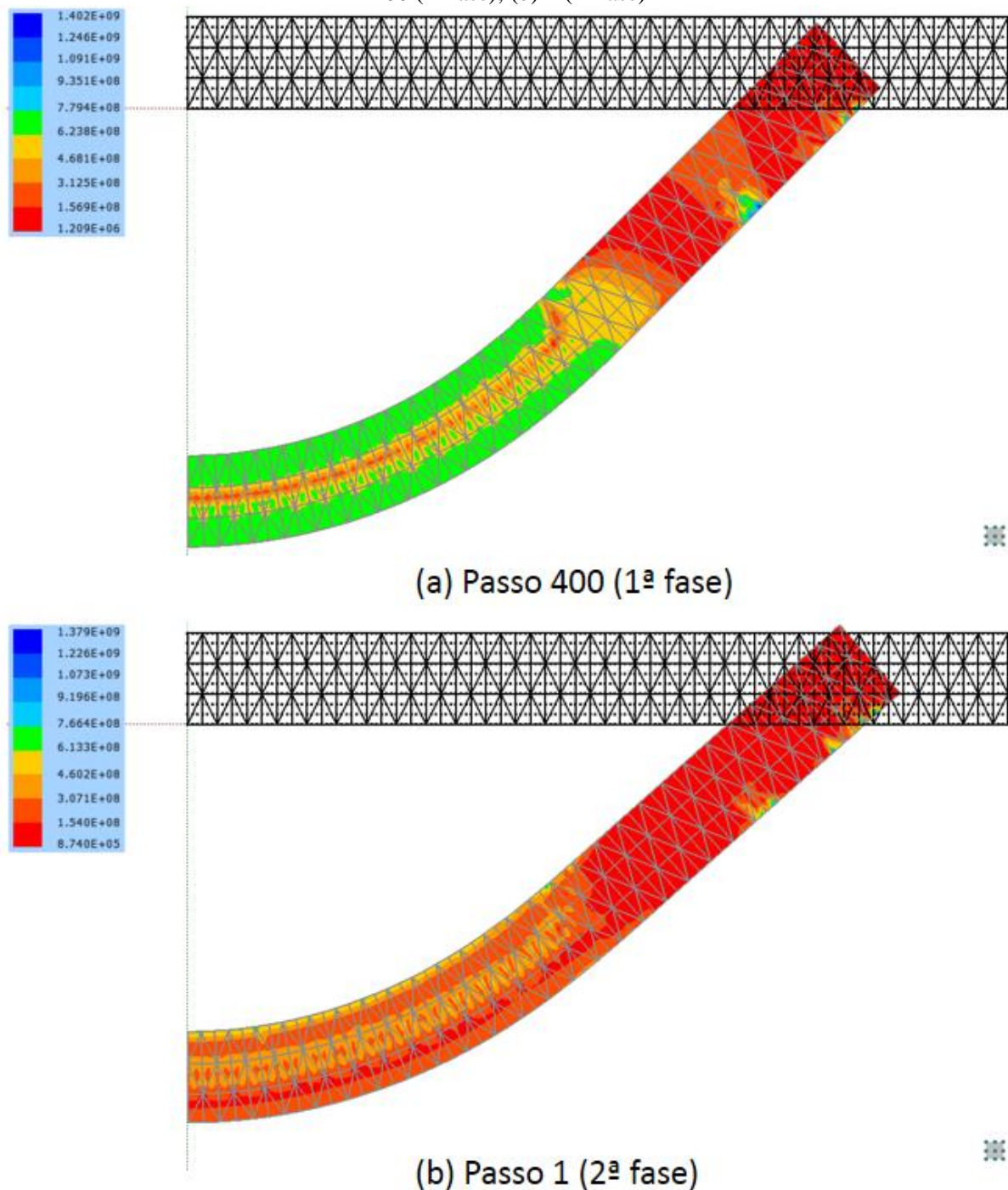
Figura 7.40 – Distribuição da tensão residual σ_z ao longo da espessura na seção central da dobra do perfil cantoneira do exemplo numérico 7.8



Fonte: autor.

Com o intuito de mostrar a variação das tensões após a ocorrência do *springback*, na Figura 7.41 é apresentada a distribuição da tensão de von Mises na chapa no 300° passo da 1ª fase (último passo antes do *springback*) e no 1º passo da 2ª fase (passo após a ocorrência do *springback*).

Figura 7.41 – Distribuição da tensão de von Mises na chapa do exemplo numérico 7.8 nos passos: (a) 400 (1ª fase); (b) 1 (2ª fase)



Fonte: autor.

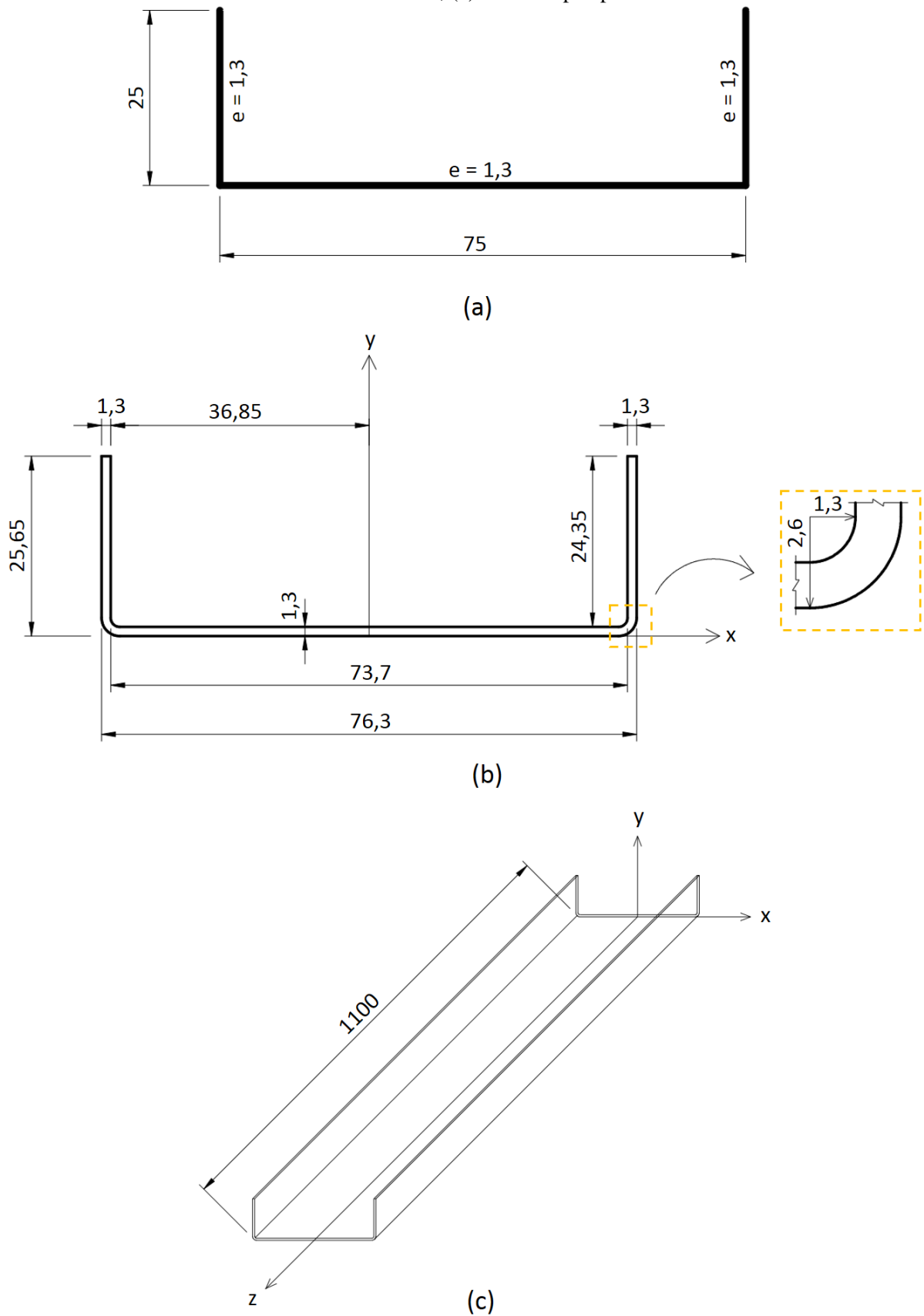
7.9 Flambagem de perfil U

Neste exemplo numérico o programa foi utilizado para a obtenção das cargas e dos modos de flambagem de um perfil U sujeito a imperfeições iniciais, sendo desconsiderada na análise a influência de tensões residuais. O objetivo foi demonstrar que o programa é capaz de

detectar tanto modos de instabilidade globais quanto locais em perfis de parede fina. Este problema foi analisado primeiramente por Garcea (2001) por meio de 3 formulações de elementos finitos baseadas em deslocamentos: uma formulação desenvolvida pelos autores denominada *mixed*; uma outra formulação também desenvolvida pelos autores denominada *frozen*; e com o *software* comercial *MSC Nastran*®. Este problema também foi analisado por Soares, Paccola e Coda (2019), os quais também utilizaram o Método dos Elementos Finitos Posicional, porém com elementos finitos de casca ao invés de elementos finitos de sólido.

As referências analisaram o problema considerando a linha média do perfil, assim como mostrado na Figura 7.42a (ambas as referências não utilizaram unidades). Como o presente trabalho utiliza elementos finitos de sólidos prismáticos, foi preciso modelar a geometria real do perfil. Através da consulta da NBR 6355 (2012), a qual trata da padronização de perfis estruturais de aço formados a frio, e de alguns catálogos técnicos, foi verificado que os perfis U simples geralmente possuem um raio interno de dobra igual ao valor da espessura da chapa. Desta forma, o perfil U foi modelado com a geometria ilustrada na Figura 7.42b e na Figura 7.42c.

Figura 7.42 – Geometria do perfil U do exemplo numérico 7.9: (a) seção transversal adotada por Garcea (2001) e Soares, Paccola e Coda (2019) considerando a linha média do perfil; (b) seção transversal adotada; (c) vista em perspectiva



Os dados adotados no exemplo numérico são apresentados na Figura 7.43

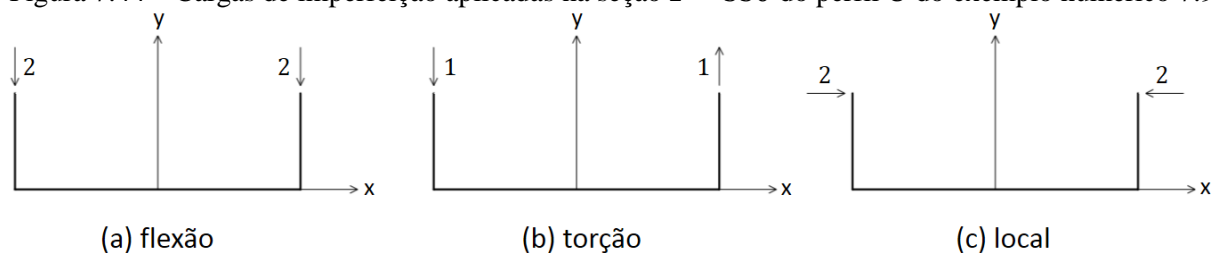
Figura 7.43 – Dados adotados no exemplo numérico 7.9

E	$2,1 \cdot 10^6$
ν	0,3
Comprimento	1100
Largura	76,3
Altura	25,65
Espessura	1,3
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura	Cúbico
Tolerância (Newton-Raphson)	10^{-6}

Fonte: autor.

Foram aplicadas forças distribuídas de superfície compressivas nas extremidades do perfil ($z = 0$ e $z = 1100$) de modo que produzissem uma resultante de 125 em cada extremidade. Dividindo a resultante desejada pela área da seção transversal do perfil, chegou-se a uma carga distribuída de superfície com módulo 0,779671470431647. Além das forças compressivas, também foram aplicadas forças concentradas no centro do vão ($z = 550$) a fim de se simular imperfeição de flexão, torção ou local, conforme ilustrado na Figura 7.44.

Figura 7.44 – Cargas de imperfeição aplicadas na seção $z = 550$ do perfil U do exemplo numérico 7.9



Fonte: autor.

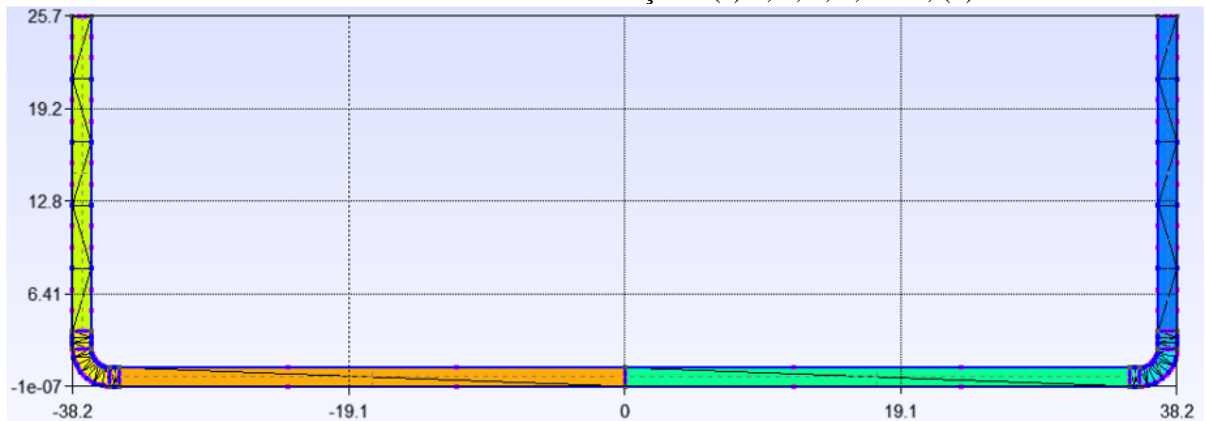
As condições de contorno aplicadas foram as seguintes:

- x restrito nos pontos $(-34,9; 0; 0)$ e $(-34,9; 0; 1100)$;
- y restrito nas linhas $(-34,9 \leq x \leq 34,9; 0; 0)$ e $(-34,9 \leq x \leq 34,9; 0; 1100)$;
- z restrito no ponto $(-34,9; 0; 550)$.

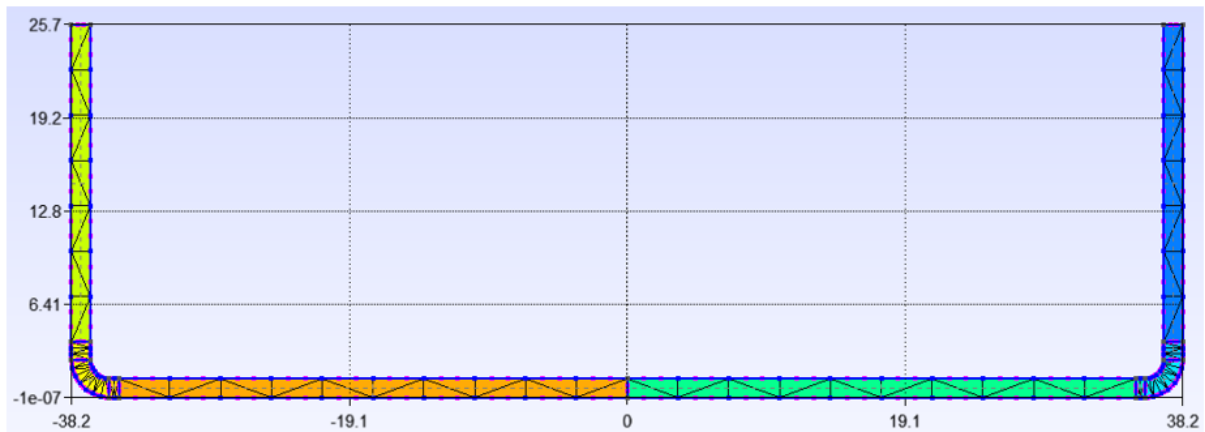
Foi realizada uma análise de convergência avaliando os quatro primeiros autovalores no caso de cargas de imperfeição de flexão. Foram analisadas discretizações com apenas um elemento ao longo da espessura do perfil. Com exceção da discretização 3, onde foi aumentada

a discretização ao longo da seção transversal, nos demais casos a discretização da seção transversal foi mantida constante e foi feito o refinamento da malha apenas ao longo do comprimento, assim como mostrado na Figura 7.45. Os resultados da análise de convergência são apresentados na Tabela 7.5.

Figura 7.45 – Malhas da seção transversal do perfil U da análise de convergência do exemplo numérico 7.9 adotadas nas discretizações: (a) 1, 2, 4, 5, 6 e 7; (b) 3



(a)



(b)

Fonte: autor.

Tabela 7.5 – Resultados da análise de convergência do exemplo numérico 7.9

Discretização	Nº nós	Nº elementos finitos	Nº subdivisões comprimento	1º autovalor	2º autovalor	3º autovalor	4º autovalor
1	3052	144	2	1165,8	1291,7	4451,0	5610,8
2	5668	288	4	1165,7	1284,1	2991,6	3441,0
3	9100	464	4	1165,3	1284,1	2988,3	3434,6
4	10900	576	8	1163,5	1283,6	2214,7	2284,9
5	21364	1152	16	1161,0	1283,3	1981,4	2107,9
6	31828	1728	24	1160,1	1283,2	1955,5	2023,7
7	39676	2160	30	1159,9	1283,1	1955,4	2008,1

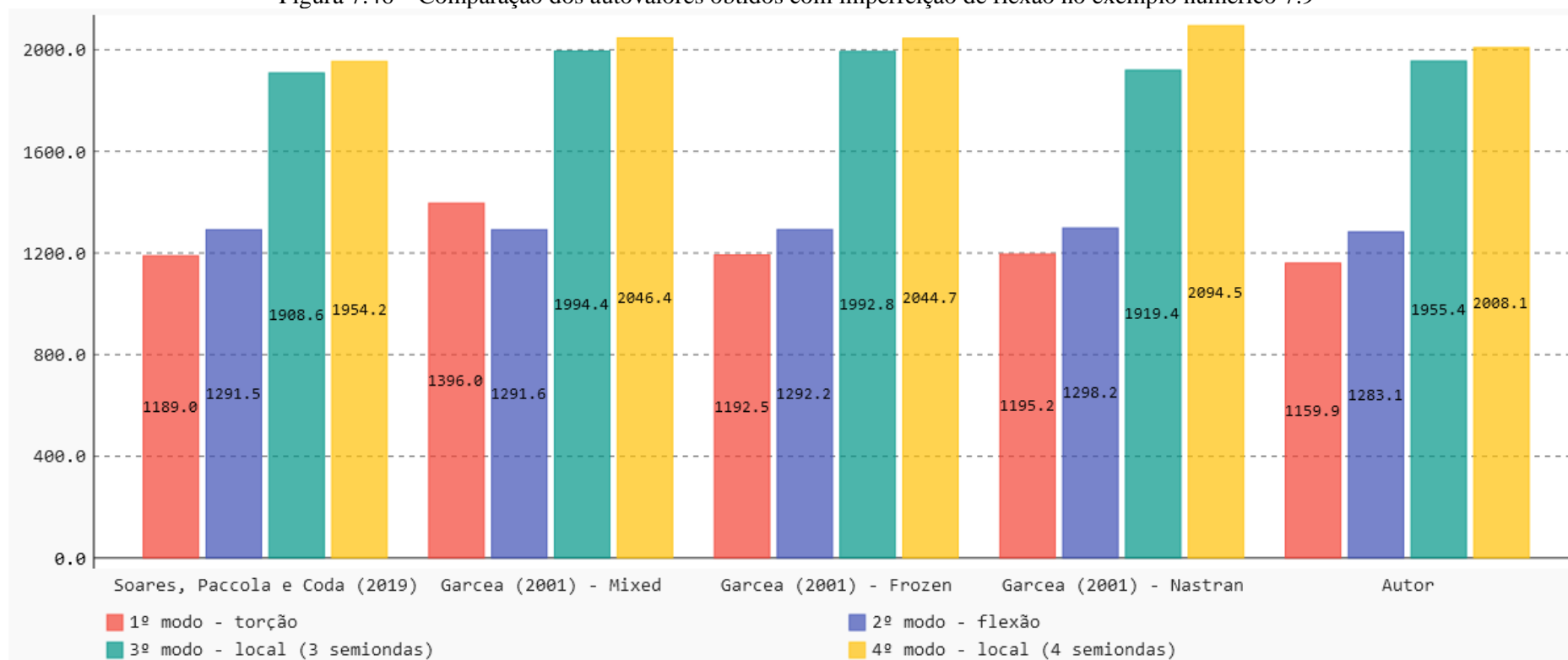
Fonte: autor.

A partir dos resultados da análise de convergência foi possível observar que 30 subdivisões ao longo do comprimento são suficientes para a convergência dos quatro primeiros autovalores. Ainda, comparando os resultados das discretizações 2 e 3, foi possível observar que uma malha mais refinada ao longo da seção transversal praticamente não teve influência nos autovalores. Por fim, foi possível observar que, caso se desejasse analisar apenas os dois primeiros autovalores, apenas 2 subdivisões ao longo do comprimento já seriam suficientes, visto que os 1º e 2º autovalores das discretizações 1 e 7 apresentaram uma diferença percentual de apenas 0,51% e 0,67%, respectivamente.

Com isso, a análise de flambagem foi realizada com as outras imperfeições (torção e local) utilizando a discretização 7. Destaca-se que nesta discretização foram utilizados 119028 graus de liberdade e 2160 elementos finitos; em comparação, a discretização adotada por Soares, Paccola e Coda (2019) possuía 42622 graus de liberdade e 1260 elementos finitos de casca.

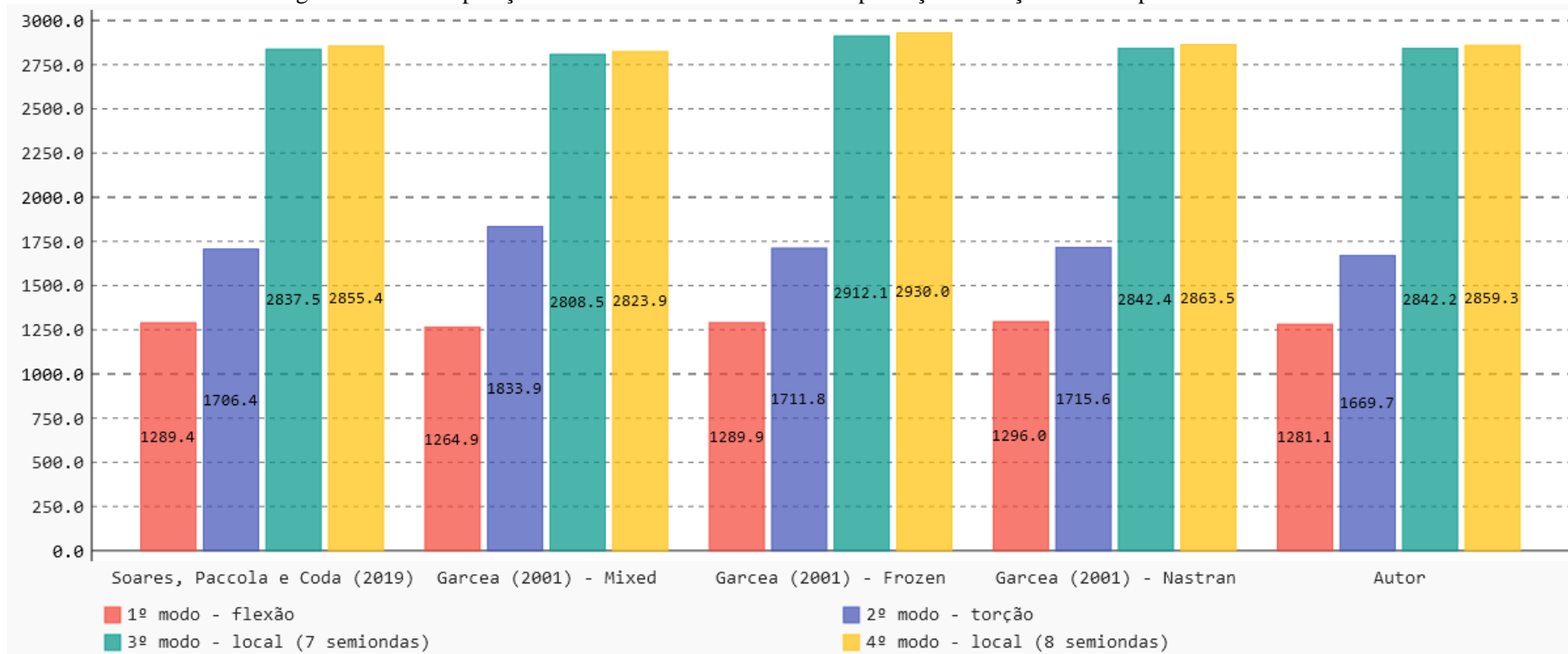
Os autovalores obtidos com as cargas de imperfeição de flexão, torção e local comparados com os resultados das referências são apresentados respectivamente na Figura 7.46, Figura 7.47 e Figura 7.48. Por sua vez, os modos de flambagem obtidos com as cargas de imperfeição de flexão, torção e local são comparados qualitativamente com os modos de flambagem obtidos pelas referências na Figura 7.49, Figura 7.50 e Figura 7.51, respectivamente.

Figura 7.46 – Comparação dos autovalores obtidos com imperfeição de flexão no exemplo numérico 7.9



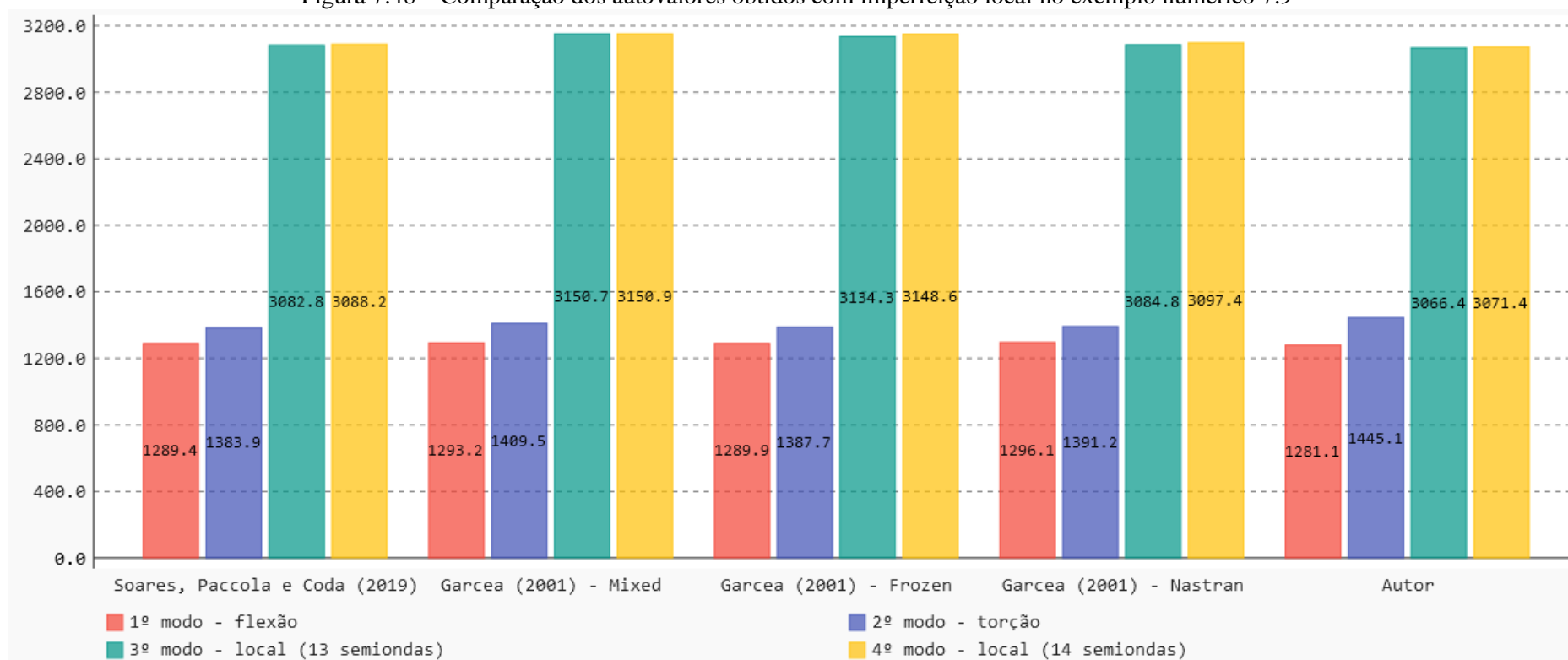
Fonte: autor.

Figura 7.47 – Comparação dos autovalores obtidos com imperfeição de torção no exemplo numérico 7.9



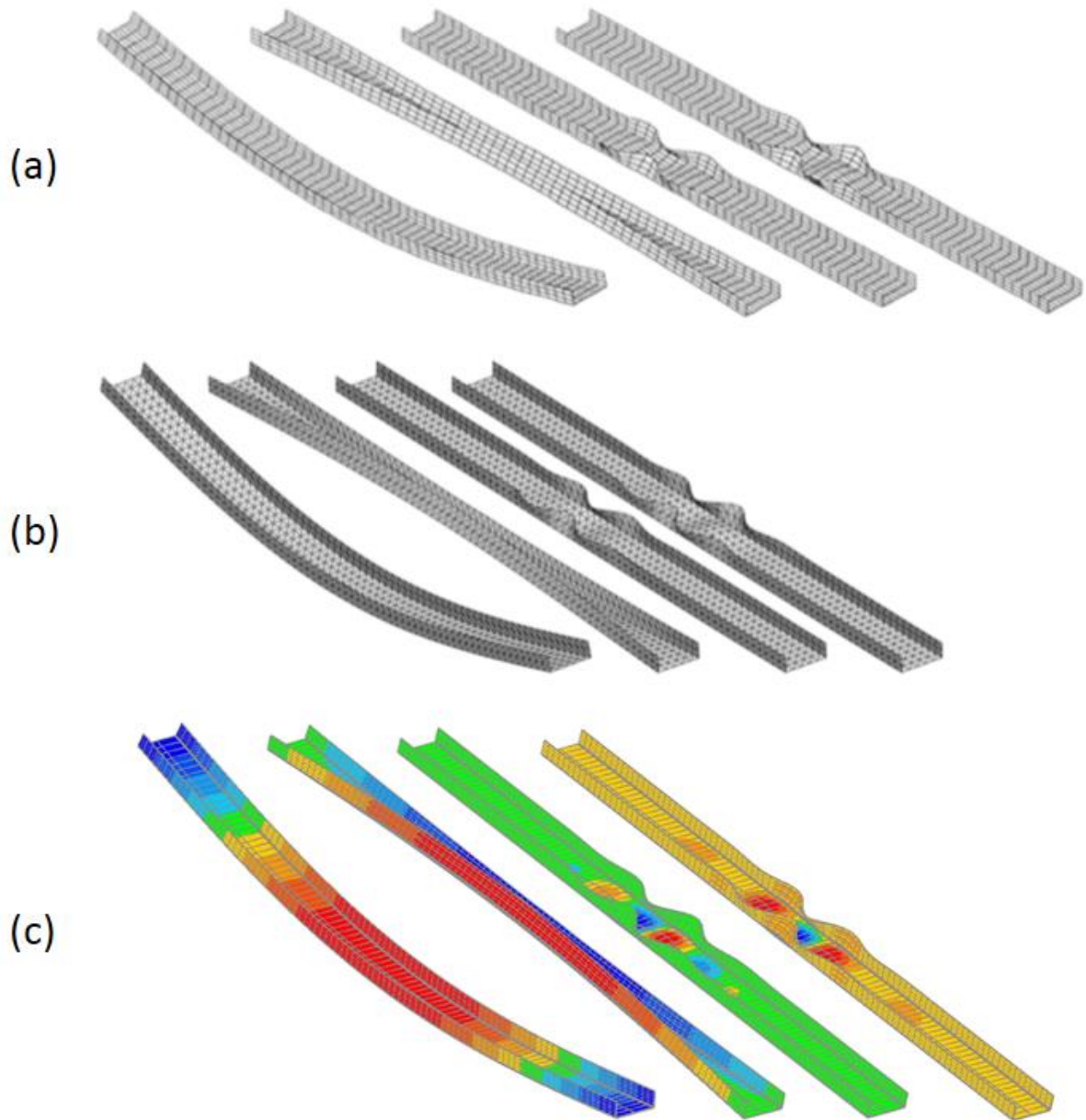
Fonte: autor.

Figura 7.48 – Comparação dos autovalores obtidos com imperfeição local no exemplo numérico 7.9



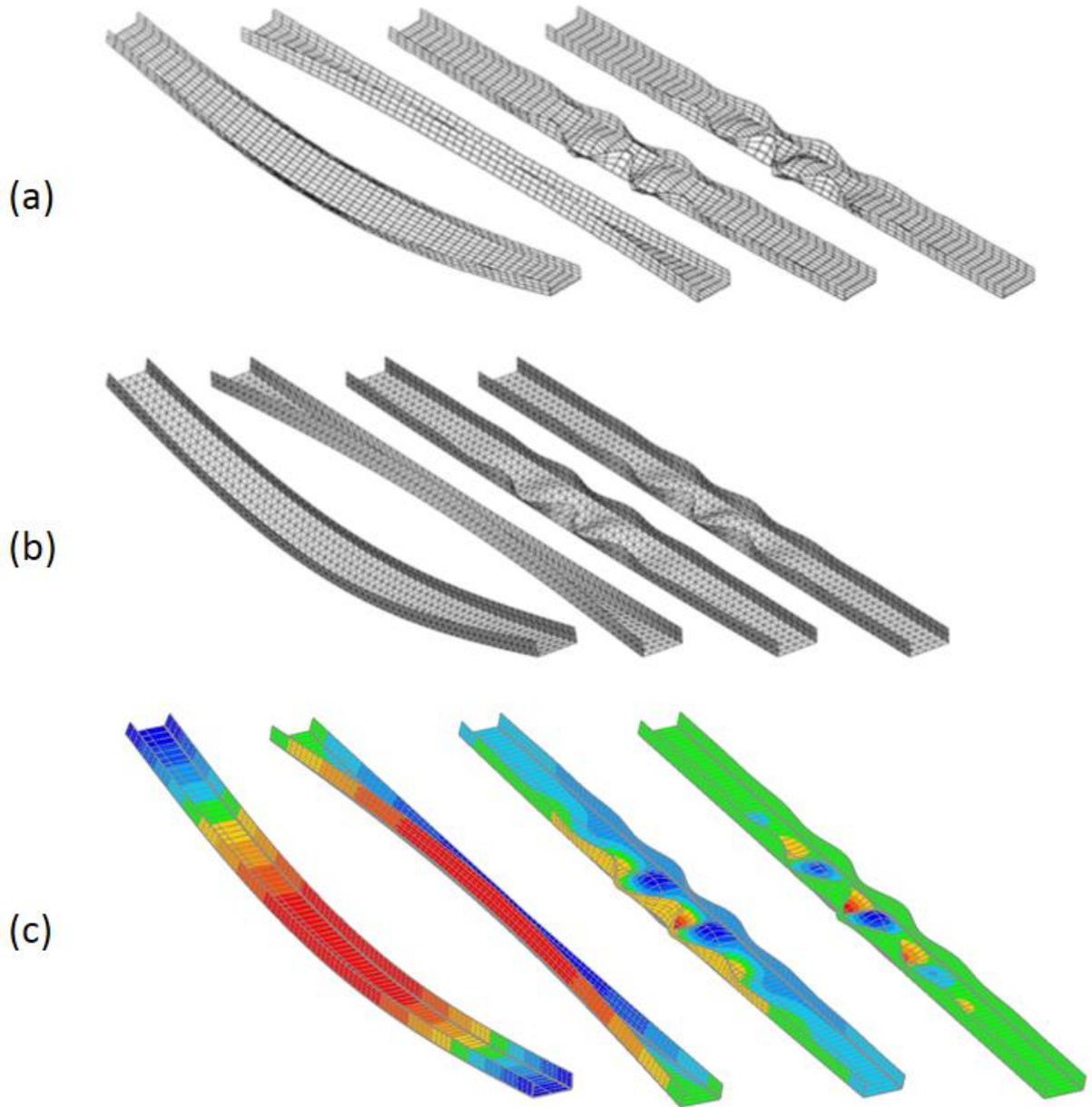
Fonte: autor.

Figura 7.49 – Modos de flambagem obtidos no exemplo numérico 7.9 com imperfeição de flexão por:
(a) Garcea (2001); (b) Soares, Paccola e Coda (2019); (c) autor



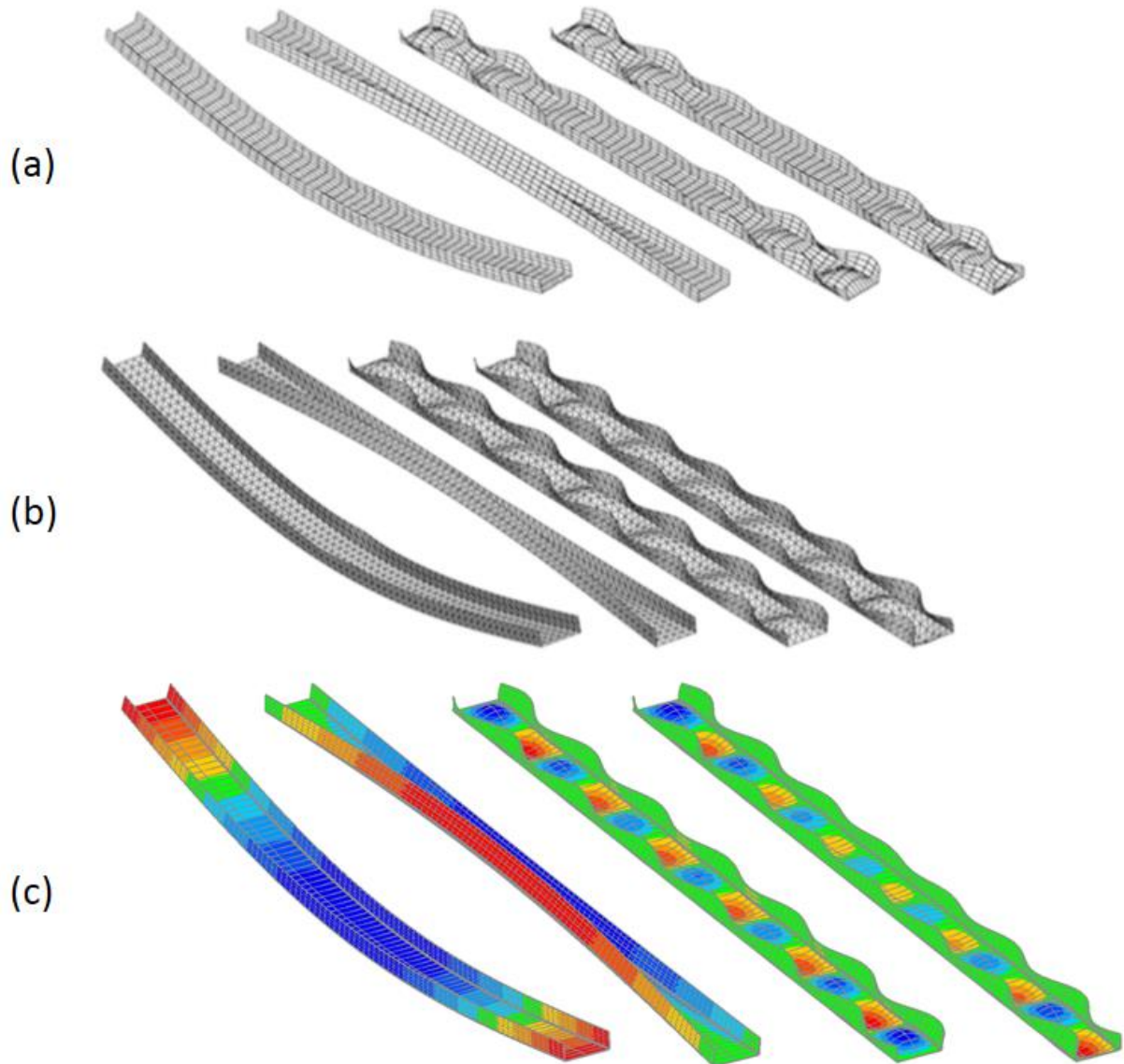
Fonte: Garcea (2001); Soares, Paccola e Coda (2019); autor.

Figura 7.50 – Modos de flambagem obtidos no exemplo numérico 7.9 com imperfeição de torção por:
(a) Garcea (2001); (b) Soares, Paccola e Coda (2019); (c) autor



Fonte: Garcea (2001); Soares, Paccola e Coda (2019); autor.

Figura 7.51 – Modos de flambagem obtidos no exemplo numérico 7.9 com imperfeição local por: (a) Garcea (2001); (b) Soares, Paccola e Coda (2019); (c) autor



Fonte: Garcea (2001); Soares, Paccola e Coda (2019); autor.

Foi possível observar que os autovalores e os autovetores obtidos pelo programa foram condizentes com os resultados das referências. Desta forma, foi mostrado que é possível calcular com precisão as cargas críticas e os modos de instabilidade globais e locais em perfis de parede fina utilizando elementos finitos prismáticos com aproximação cúbica na espessura, os quais são mais adequados para o tratamento de tensões residuais a ser realizado no próximo exemplo.

7.10 Análise da influência do processo de dobra na flambagem de perfil U

Este último exemplo numérico consistiu basicamente em uma complementação do exemplo anterior, onde o programa foi utilizado para modelar a conformação a frio por dobragem do perfil U com posterior análise de flambagem. Com esse exemplo numérico mostra-se que a formulação desenvolvida envolvendo grandes deslocamentos, contato, plasticidade em grandes deformações e análise de autovalores e autovetores é uma importante ferramenta para a análise da influência das tensões residuais e dos defeitos geométricos advindos da conformação a frio no comportamento estrutural de perfis de parede fina.

Com o intuito de avaliar a sensibilidade do comportamento estrutural do perfil U com relação às tensões residuais e às imperfeições geométricas resultantes do processo de conformação a frio, foram analisados 3 casos:

- a) dobra da chapa com posterior flambagem do perfil U considerando as tensões residuais (problema de autovalor-autovetor generalizado dado pela Equação (161));
- b) dobra da chapa com posterior flambagem do perfil U desconsiderando as tensões residuais (problema de autovalor-autovetor generalizado dado pela Equação (158));
- c) flambagem do perfil U com a geometria “perfeita” (seção transversal mostrada na Figura 7.42b) e desconsiderando as tensões residuais (problema de autovalor-autovetor generalizado dado pela Equação (158)).

Através da comparação dos casos a e b, foi possível analisar a influência das tensões residuais nas cargas e nos modos de flambagem; através da comparação dos casos b e c, foi possível verificar a influência das imperfeições geométricas; e, por fim, através da comparação dos casos a e c, foi possível investigar a influência combinada das tensões residuais e das imperfeições geométricas advindas do processo de dobra na flambagem do perfil.

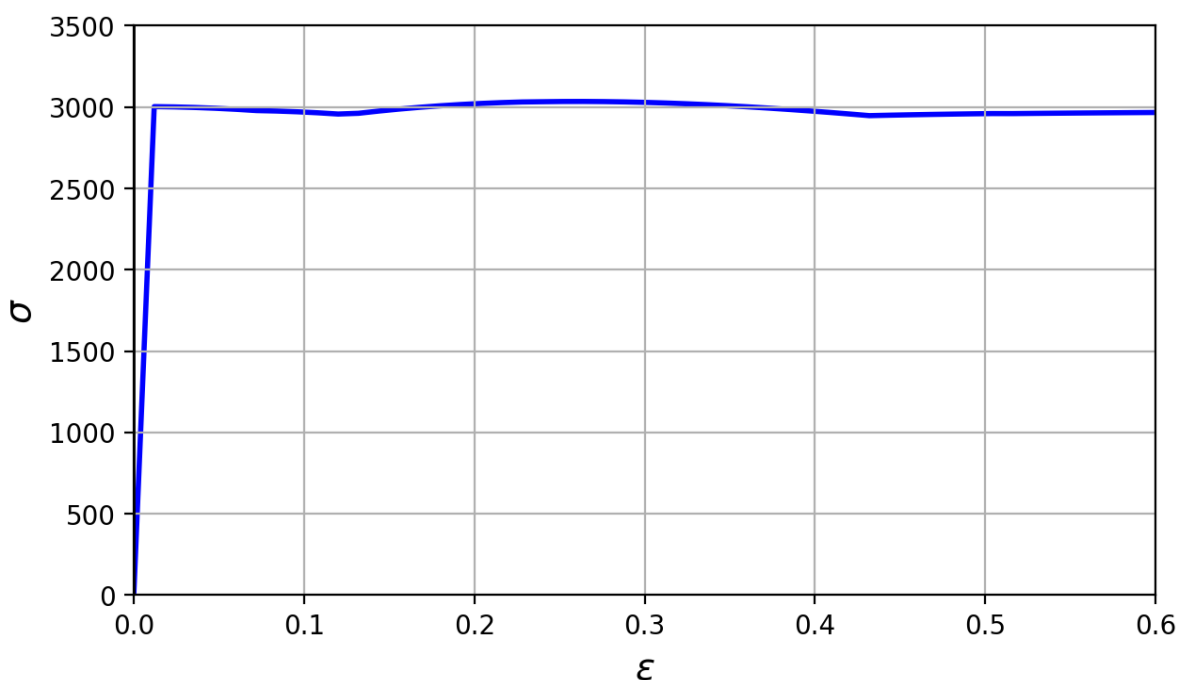
É importante ressaltar que houve dificuldade na determinação das variáveis plásticas, uma vez que as referências – Garcea (2001) e Soares, Paccola e Coda (2019) – realizaram análises elásticas, e, além disso, não especificaram o tipo de material empregado. Com isso, decidiu-se adotar uma tensão de escoamento baseada no módulo de elasticidade longitudinal. Foi adotado $\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_2 = 1500$, tensão que é obtida através de uma relação $E/\bar{\tau}$ aproximadamente equivalente à do exemplo numérico 7.7.

Além disso, optou-se por adotar um material com um comportamento elasto-plástico perfeito. Isto foi feito através da calibração do encruamento em um teste de tração uniaxial

(assim como feito no exemplo numérico 7.5). O gráfico $\sigma \times \varepsilon$ do teste de tração uniaxial mostrado na Figura 7.52 foi obtido através imposição:

- $H^i = -1000$ no intervalo $0 \leq \lambda < 0,28$;
- $H^i = -800$ no intervalo $0,28 \leq \lambda < 0,5$;
- $H^i = 0$ no intervalo $0,5 \leq \lambda < 2,0$;
- $H^i = 600$ no intervalo $2,0 \leq \lambda < 3,0$.

Figura 7.52 – Gráfico $\sigma \times \varepsilon$ do ensaio de tração uniaxial do material adotado no exemplo numérico 7.10



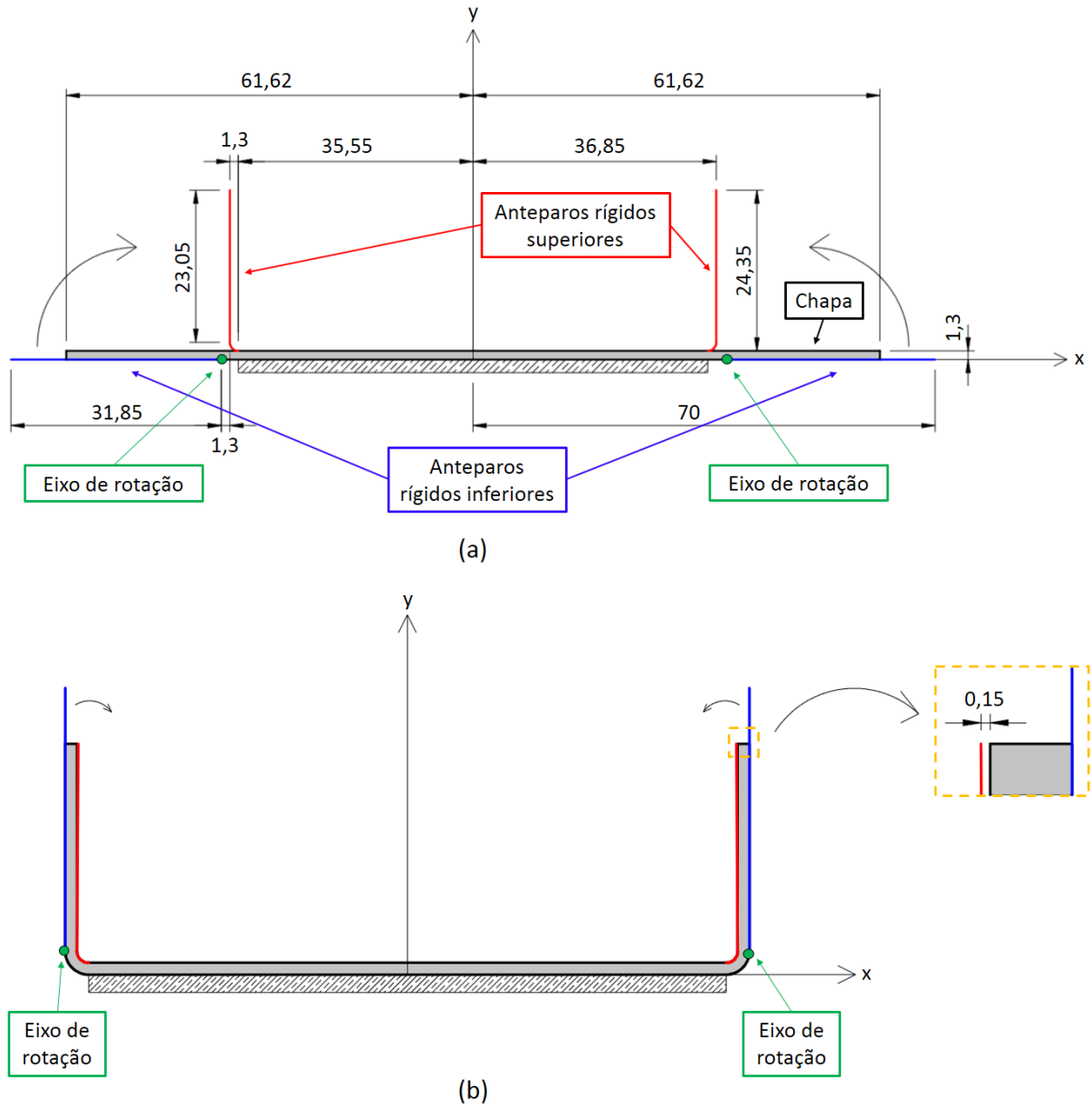
Fonte: autor.

O problema foi dividido em 2 fases: na 1ª fase foi realizada a dobra da chapa em 93 passos; em seguida, na 2ª fase foram aplicadas as cargas compressivas e de imperfeição idênticas às do exemplo 7.9 em apenas 1 passo. A 1ª fase foi subdividida nas seguintes etapas, conforme ilustrado na Figura 7.53:

- até o passo 90, as superfícies alvo inferiores foram rotacionadas até formarem um ângulo de 90° com a horizontal (Figura 7.53a);
- após o passo 90, os eixos de rotação das superfícies alvo inferiores foram elevados até $y = 2,6$ e as extremidades superiores das superfícies alvo superiores foram deslocadas horizontalmente 0,15 para dentro (Figura 7.53b);
- nos passos 91 e 92, continuou-se a rotação das superfícies alvo inferiores;

- d) no passo 93, desativou-se o contato a fim de se permitir a ocorrência de *springback* na chapa.

Figura 7.53 – Processo de dobra do perfil U no exemplo numérico 7.10: (a) até o passo 90 (1ª fase); (b) a partir do passo 91 (1ª fase)



Fonte: autor.

As condições de contorno impostas durante o processo de dobra da chapa (1ª fase) foram as seguintes:

- x restrito no plano $x = 0$;
- y restrito no plano $(-34,9 \leq x \leq 34,9; y = 0)$;
- z restrito no plano $z = 550$.

Já as condições de contorno impostas durante a análise de flambagem (2ª fase) foram as mesmas do exemplo numérico 7.9.

Os dados adotados no exemplo numérico são apresentados na Figura 7.54.

Figura 7.54 – Dados adotados no exemplo numérico 7.10

E	2,1.10 ⁶
ν	0,3
$\bar{\tau}_1$	1500
$\bar{\tau}_2$	1500
H^i	$H^i = -1000$ no intervalo $0 \leq \lambda < 0,28$; $H^i = -800$ no intervalo $0,28 \leq \lambda < 0,5$; $H^i = 0$ no intervalo $0,5 \leq \lambda < 2,0$; $H^i = 600$ no intervalo $2,0 \leq \lambda < 3,0$
H^c	0
ϵ	1.10 ⁸
Comprimento	1100
Largura	123,24
Espessura	1,3
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura	Cúbico
Tolerância (Newton-Raphson)	10 ⁻⁵ (1ª fase) 10 ⁻⁶ (2ª fase)

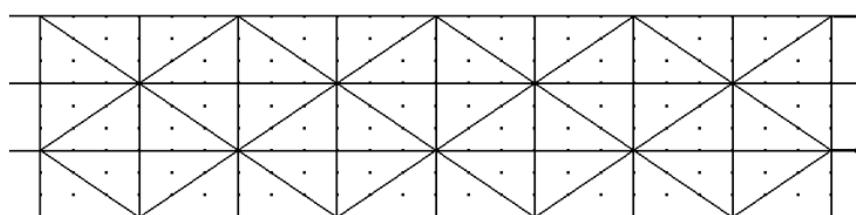
Fonte: autor.

Como neste exemplo foi feita a análise de flambagem considerando ou não as tensões residuais, por conveniência o processamento foi dividido em duas etapas: primeiramente foi realizada a análise da dobra da chapa (1ª fase) e posteriormente foi feita a análise de flambagem (2ª fase). Na 1ª fase foi processada a etapa de dobra da chapa conforme ilustrado na Figura 7.53 e ao final da análise as posições dos nós e as tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie nos pontos de integração foram escritas em um arquivo de saída. Em seguida, na 2ª fase zeraram-se as variáveis plásticas, foram aplicadas as cargas compressivas nas extremidades e as cargas de imperfeição, e foi imposta a condição $x_i = y_i$ através da leitura no arquivo de saída da 1ª fase da posição dos nós ao final do processo de dobra (ou seja, foi imposto que a posição inicial dos nós na 2ª fase corresponde à posição dos nós ao final da 1ª fase). Dependendo se a análise considerou ou não as tensões residuais, foram lidas no arquivo de saída da 1ª fase as tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie nos pontos de integração (no caso b, onde as tensões residuais não foram consideradas, essa leitura não foi realizada, sendo as tensões mantidas iguais a zero). Vale ressaltar que, como as tensões Piola-Kirchhoff de segunda espécie

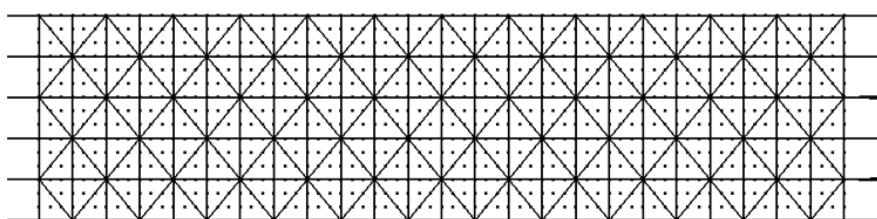
correspondem a uma medida Lagrangeana, ao se impor a condição $x_i = y_i$, foi necessário converter as tensões residuais em tensões de Cauchy através da Equação (150) e realizar a rotação das mesmas para que elas correspondessem à configuração atual do corpo (configuração inicial da 2ª fase). O procedimento de rotação das tensões residuais é apresentado em detalhes no Apêndice B.

Como a modelagem do processo de dobra com uma malha suficientemente refinada para a análise dos 3º e 4º modos de flambagem seria inviável computacionalmente para esta etapa da pesquisa, neste exemplo optou-se pela análise apenas dos 1º e 2º modos. Levando em consideração a conclusão da análise de convergência do exemplo 7.9 de que apenas 2 subdivisões ao longo do comprimento são suficientes para a análise dos modos de flambagem globais, foi realizada uma análise de convergência mantendo-se apenas 2 subdivisões ao longo do comprimento e aumentando-se a discretização na região das dobras visando a uma melhor distribuição das tensões residuais. Em todas as discretizações, as mesas e a alma do perfil tiveram 2 subdivisões ao longo da direção do esqueleto, sendo alterado apenas o refinamento da malha na região das dobras, conforme mostrado na Figura 7.55.

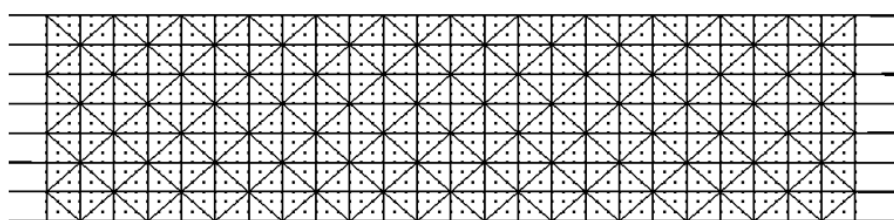
Figura 7.55 – Malhas da região das dobras adotadas na análise de convergência do exemplo numérico 7.10



(a) Discretização 1



(b) Discretização 2



(c) Discretização 3

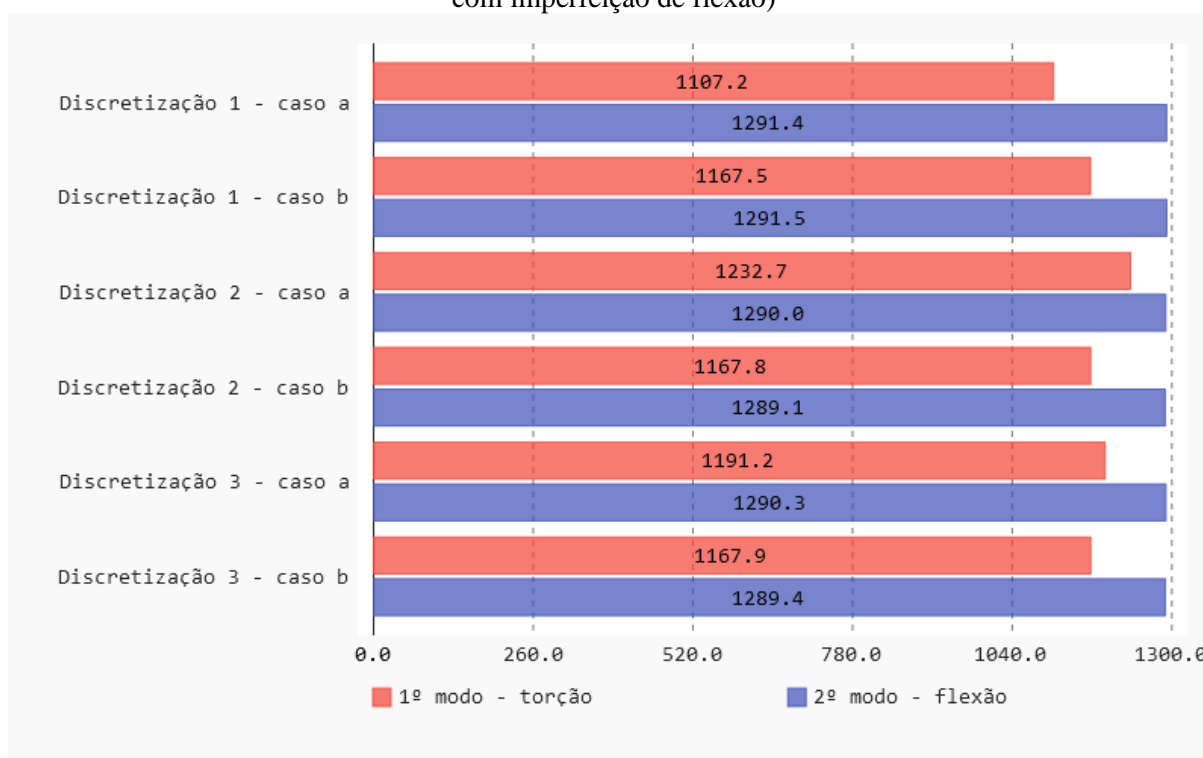
A Tabela 7.6 apresenta os dados das discretizações adotadas na análise de convergência e a Figura 7.56 apresenta os resultados da análise de convergência, onde foram avaliados os dois primeiros autovalores obtidos nos casos a e b com cargas de imperfeição de flexão.

Tabela 7.6 – Dados das discretizações adotadas na análise de convergência do exemplo numérico 7.10

Discretização	Nº nós	Nº elementos finitos
1	4690	264
2	18256	1080
3	25102	1512

Fonte: autor.

Figura 7.56 – Resultados da análise de convergência do exemplo numérico 7.10 (autovalores obtidos com imperfeição de flexão)



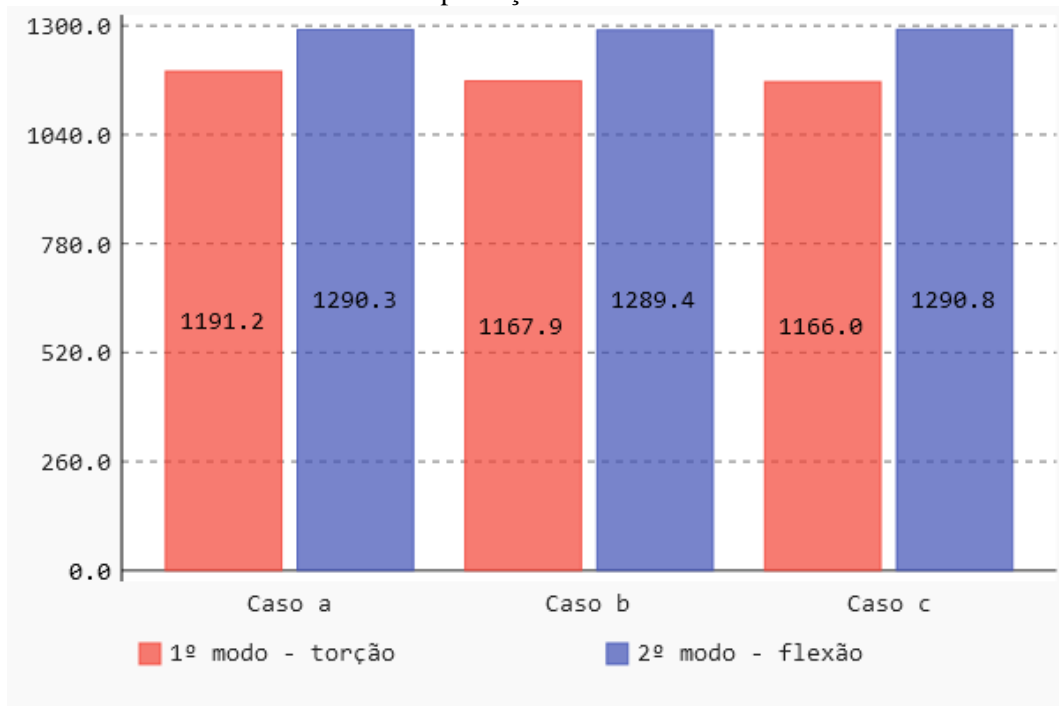
Fonte: autor.

A partir dos resultados da análise de convergência foi possível observar que os autovalores praticamente não se alteraram com o aumento do refinamento da malha na região das dobras no caso a; e o mesmo foi observado no 2º autovalor (flexão) no caso b. Uma alteração maior foi observada apenas no 1º autovalor (torção) no caso a.

Com isso, a análise das cargas de flambagem foi realizada utilizando a discretização 3 para os 3 casos (a, b e c) e com os 3 tipos de imperfeição (flexão, torção e local). Os autovalores

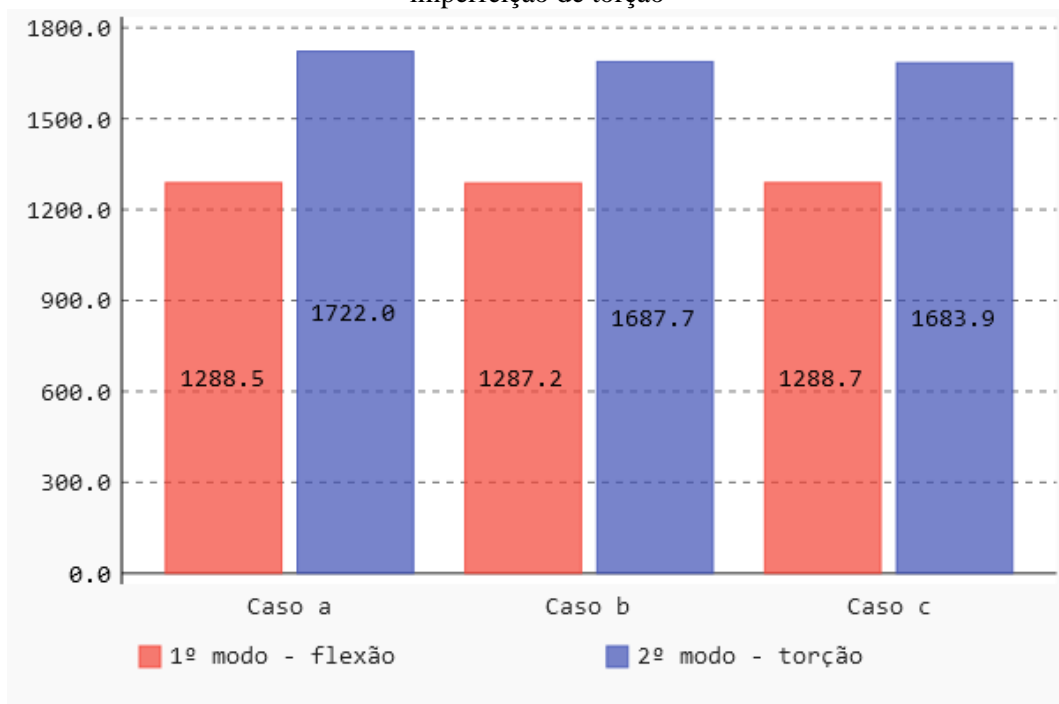
obtidos com as cargas de imperfeição de flexão, torção e local são apresentados respectivamente na Figura 7.57, Figura 7.58 e Figura 7.59.

Figura 7.57 – Comparação dos autovalores obtidos no exemplo numérico 7.10 com cargas de imperfeição de flexão



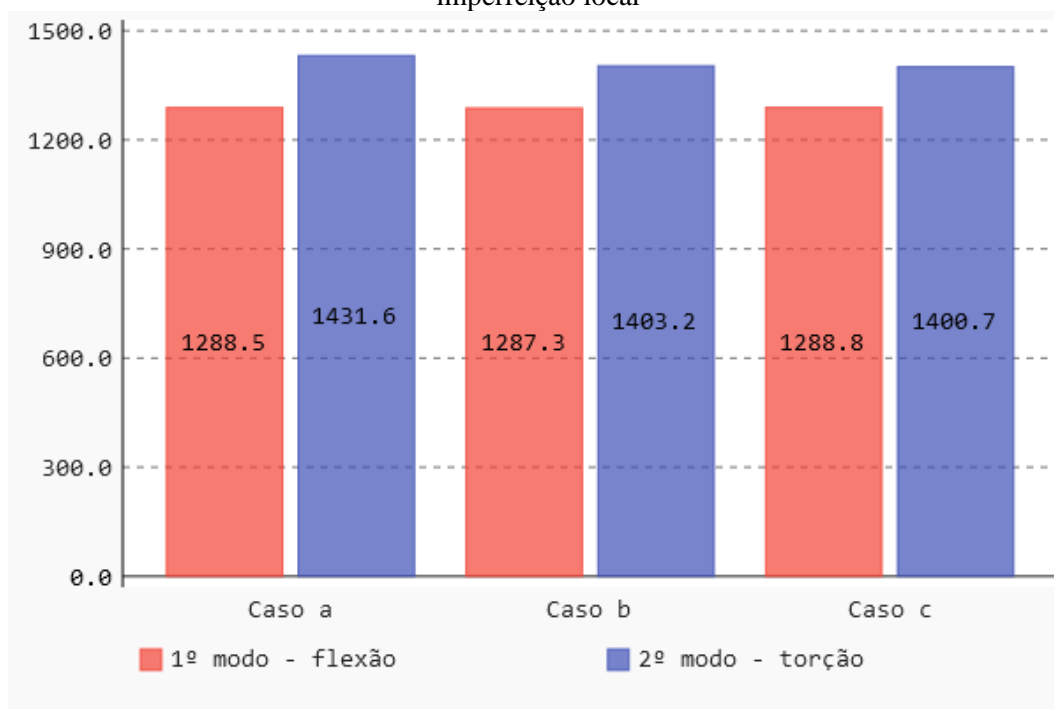
Fonte: autor.

Figura 7.58 – Comparação dos autovalores obtidos no exemplo numérico 7.10 com cargas de imperfeição de torção



Fonte: autor.

Figura 7.59 – Comparação dos autovalores obtidos no exemplo numérico 7.10 com cargas de imperfeição local



Fonte: autor.

A fim de facilitar a análise dos resultados, a seguir são apresentadas as diferenças percentuais dos autovalores obtidos com cargas de imperfeição de flexão, torção e local respectivamente na Tabela 7.7, Tabela 7.8 e Tabela 7.9. Para o cálculo das diferenças percentuais, foram tomados como referência os autovalores obtidos no caso c.

Tabela 7.7 – Comparação das diferenças percentuais dos autovalores obtidos no exemplo numérico 7.10 com cargas de imperfeição de flexão

	Caso a	Caso b
1º autovalor - torção	2,16%	0,16%
2º autovalor - flexão	-0,04%	-0,11%

Fonte: autor.

Tabela 7.8 – Comparação das diferenças percentuais dos autovalores obtidos no exemplo numérico 7.10 com cargas de imperfeição de torção

	Caso a	Caso b
1º autovalor - flexão	-0,02%	-0,12%
2º autovalor - torção	2,26%	0,23%

Fonte: autor.

Tabela 7.9 – Comparação das diferenças percentuais dos autovalores obtidos no exemplo numérico 7.10 com cargas de imperfeição local

	Caso a	Caso b
1º autovalor - flexão	-0,02%	-0,11%
2º autovalor - torção	2,20%	0,18%

Fonte: autor.

A partir dos resultados obtidos, foi possível observar que a influência das imperfeições geométricas nos autovalores foi muito pequena. Com isso, foi possível concluir que o processo de dobra adotado na modelagem conseguiu gerar uma geometria muito próxima da geometria esperada. Destaca-se ainda que não se espera um aumento das imperfeições ao longo da direção longitudinal da barra com o aumento da discretização, tendo em vista que o processo de dobra se mostrou “bem comportado” nessa direção.

Com relação às tensões residuais, foi possível verificar em todos os casos de imperfeição estudados que a influência das mesmas nos autovalores do modo global de flexão foi praticamente insignificante; por outro lado, tiveram uma influência não desprezível (da ordem de 2%), porém ainda pequena, nos autovalores do modo global de torção. Surpreendentemente essa alteração foi no sentido de aumentar a carga crítica de torção. Esse comportamento pode ser explicado no que segue: na Equação (161) nota-se que a parcela da matriz hessiana dependente das tensões residuais interfere diretamente na parcela dependente das propriedades do material, desta forma, a depender da coincidência ou divergência do sentido de evolução das tensões residuais no processo de dobra em relação ao sentido das tensões originadas no cálculo da flambagem, sua influência pode resultar na diminuição ou no aumento do autovalor.

8 CONCLUSÕES

No presente trabalho foi proposta uma estratégia combinando formulações em grandes deslocamentos, plasticidade em grandes deformações, contato e análise de autovalores e autovetores, resultando no desenvolvimento de um programa computacional capaz de modelar a conformação a frio por dobragem de perfis metálicos com posterior verificação de seu comportamento estrutural por meio de análise de flambagem. O programa foi implementado utilizando o Método dos Elementos Finitos Posicional com elementos finitos de sólido prismático de base triangular. Foi implementado um modelo constitutivo hiperelástico que consiste na combinação dos modelos de Rivlin-Saunders e de Hartmann-Neff, o qual é apropriado para a análise de problemas no regime de grandes deformações. A plasticidade foi considerada através da implementação do modelo elasto-plástico alternativo para grandes deformações proposto recentemente por Coda (2021, 2022), a qual é baseada na decomposição de Flory. Já a restrição de contato foi considerada através do método de penalização e discretização nó-a-superfície. O cálculo das cargas e dos modos de flambagem foi realizado utilizando o *FEAST solver* (POLLIZI, 2009), o qual é pertencente ao *Math Kernel Library* da Intel®.

O programa desenvolvido foi corretamente validado mediante várias comparações com exemplos da literatura. Através dos exemplos numéricos foi também possível verificar que o programa conseguiu determinar de forma condizente a magnitude e a distribuição das tensões residuais advindas do trabalho a frio ao longo da seção transversal dos perfis.

O último exemplo numérico demonstrou que os objetivos da pesquisa foram alcançados, onde foi mostrado que a formulação proposta e sua implementação computacional são úteis na análise da influência das imperfeições geométricas e das tensões residuais no comportamento estrutural de perfis metálicos formados a frio. Em particular, no perfil U analisado, foi verificado que a influência das imperfeições geométricas e das tensões residuais nas cargas de flambagem não foi significativa. No entanto, ressalta-se que neste trabalho foi realizada apenas análise de flambagem (linear) dos modos globais, portanto para se chegar a uma conclusão mais definitiva seria necessária também a análise dos modos locais e de estabilidade não linear do perfil.

Como conclusão, o programa desenvolvido mostrou-se uma ferramenta útil para a análise de perfis metálicos formados a frio, ampliando o campo de aplicação do Método dos

Elementos Finitos Posicional. Tendo em vista o que foi exposto, conclui-se, portanto, que os objetivos almejados neste trabalho foram integralmente atingidos.

Futuros desenvolvimentos devem se concentrar na otimização computacional do código a fim de possibilitar o estudo de elementos estruturais com geometrias mais complexas e com discretizações ainda mais representativas. No que diz respeito aos modelos físicos, a introdução de viscoplasticidade seria interessante para a realização de análise dinâmica do processo de dobra e a implementação de atrito no contato incluiria maior variabilidade aos processos de conformação a frio. Por fim, sugere-se também uma investigação mais profunda da influência das imperfeições geométricas e das tensões residuais no comportamento estrutural de perfis de parede fina por meio de análise de flambagem dos modos locais e de estabilidade não linear.

REFERÊNCIAS

- ABAMBRES, M.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. Physically non-linear GBT analysis of thin-walled members. **Computers & Structures**, v. 129, p. 148-165, dez. 2013.
- ABAMBRES, M. et al. GBT-based structural analysis of elastic-plastic thin-walled members. **Computers & Structures**, v. 136, p. 1-23, maio 2014.
- ANDERSON, E. et al. **LAPACK users' guide**. 3. ed. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
- ANISIMOV, D.; DENG, C.; HORMANN, K. Subdividing barycentric coordinates. **Computer Aided Geometric Design**, v. 43, p. 172-185, mar. 2016.
- AREIAS, P. One-step semi-implicit integration of general finite-strain plasticity models. **International Journal of Mechanics and Materials in Design**, v. 17, p. 73-87, 2021.
- ARGYRIS, J. H. et al. Finite element method - the natural approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 17-18, p. 1-106, jan. 1979.
- ARRUDA, E. M.; BOYCE, M. C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 41, n. 2, p. 389-412, fev. 1993.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6355**: Perfil estruturais de aço formados a frio – Padronização. Rio de Janeiro, nov. 2012.
- BATHE, K. J.; RAMM, E.; WILSON, E. L. Finite element formulations for large deformation dynamic analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 9, n. 2, p. 353-386, 1975.
- BATHE, K. J.; CHAUDHARY, A. B. A solution method for planar and axisymmetric contact problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 21, p. 65-88, 1985.
- BAŽANT, Z. P.; BELYTSCHKO, T. B.; CHANG, T. P. Continuum theory for strain-softening. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 110, n. 12, p. 1666-1692, dez. 1984.
- BEBIANO, R.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. Dynamic analysis of thin-walled members using Generalised Beam Theory (GBT). **Thin-Walled Structures**, v. 72, p. 188-205, nov. 2013.
- BELGACEM, F. B. **Discrétisations 3D non conformes par la méthode de décomposition de domaine des éléments avec joints**: analyse mathématique et mise en oeuvre pour le problème de Poisson. 1993. Tese (Doutorado) - Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1993.
- BELGACEM, F. B.; MADAY, Y. Nonconforming spectral element methodology tuned to parallel implementation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 116, p. 59-67, 1994.

- BELGACEM, F. B.; HILD, P.; LABORDE, P. The mortar finite element method for contact problems. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 28, n. 4-8, p. 263-271, ago.-out. 1998.
- BELYTSCHKO, T.; HSIEH, B. J. Non-linear transient finite element analysis with convected co-ordinates. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 7, n. 3, p. 255-271, 1973.
- BELYTSCHKO, T.; GLAUM, L. W. Applications of higher order corotational stretch theories to nonlinear finite element analysis. **Computers & Structures**, v. 10, n. 1-2, p. 175-182, abr. 1979.
- BERNARDI, C.; DEBIT, N.; MADAY, Y. Coupling finite element and spectral methods: first results. **Mathematical of Computation**, v. 54, n. 189, p. 21-39, jan. 1990.
- BERNARDI, C.; MADAY, Y.; PATERA, A. T. A new nonconforming approach to domain decomposition: The mortar element method. In: BREZIS, H.; LIONS, J. L. **Nonlinear partial differential equations and their applications**: Collège de France Seminar, volume XI. Paris: Longman Scientific & Technical, 1994. p. 13-51.
- BONET, J. et al. Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5-7, p. 579-595, nov. 2000.
- BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 318 p.
- BOUSSINESQ, M. J. **Application des potentiels**: a l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Paris: Gauthier-Villars, 1885.
- BRUHNS, O. T.; LEHMANN, T.; PAPE, A. On the description of transient cyclic hardening behaviour of mild steel CK 15. **International Journal of Plasticity**, v. 8, n. 4, p. 331-359, 1992.
- CARBONE, G.; BOTTIGLIONE, F. Contact mechanics of rough surfaces: a comparison between theories. **Meccanica**, v. 46, p. 557-565, 2011.
- CARRAZEDO, R. **Estudo e desenvolvimento de código computacional para análise de impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos**. 2009. 128 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Triangular based prismatic finite element for the analysis of orthotropic laminated beams, plates and shells. **Composite Structures**, v. 168, p. 234-246, maio 2017.
- CARVALHO, P. R. P. **Análise numérica bidimensional de sólidos com comportamento visco-elasto-plástico em grandes deformações e situações de contato**. 2019. 177 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

CARVALHO, P. R. P.; CODA, H. B.; SANCHES; R. A. K. Positional finite element formulation for two-dimensional analysis of elasto-plastic solids with contact applied to cold forming processes simulation. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 42, 245, 2020.

CHAUDHARY, A. B.; BATHE, K. J. A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction. **Computers & Structures**, v. 24, n. 6, p. 855-873, 1986.

CHEN, W. F; HAN, D. J. **Plasticity for structural engineers**. New York: Springer-Verlag, 1988. 606 p.

CHODRAUI, G. M. B. **Análise teórica e experimental de perfis de aço formados a frio submetidos à compressão**. 2006. 294 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

CIAVARELLA, M. et al. The role of adhesion in contact mechanics. **Journal of the Royal Society Interface**, v. 16, n. 151, 20180738, fev. 2019.

CODA, H. B. An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 17., 2003, São Paulo. **Anais...** São Paulo: ABCM, 2003.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A total-Lagrangian position-based FEM applied to physical and geometrical nonlinear dynamics of plane frames including semi-rigid connections and progressive collapse. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 91, p. 1-15, nov. 2014.

CODA, H. B. **O método dos elementos finitos posicional: sólidos e estruturas - não linearidade geométrica e dinâmica**. São Carlos: EESC/USP, 2018. 284 p.

CODA; H. B. An alternative finite strain elastoplastic model applied to soft core sandwich panels simulation. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 18, n. 6, e392, set. 2021.

CODA, H. B. A finite strain elastoplastic model based on Flory's decomposition and 3D FEM applications. **Computational Mechanics**, v. 69, p. 245-266, jan. 2022.

DAGUM, L.; MENON, R. OpenMP: an industry standard API for shared-memory programming. **IEEE Computational Science and Engineering**, v. 5, n. 1, p. 46-55, 1998.

DAVIES, J. M.; LEACH, P. First-order generalised beam theory. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 31, n. 2-3, p. 187-220, 1994.

DAVIES, J. M.; LEACH, P; HEINZ, D. Second-order generalised beam theory. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 31, n. 2-3, p. 221-241, 1994.

DE BORST, R. et al. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. 2. ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2012. 516 p.

- DEMMELE, J. W. et al. A supernodal approach to sparse partial pivoting. **SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications**, v. 20, n. 3, p. 720-755, 1999.
- DJELIL, M. et al. Constrained spline Finite Strip Method for thin-walled members with open and closed cross-sections. **Thin-Walled Structures**, v. 132, p. 302-315, nov. 2018.
- DUBINA, D.; UNGUREANU, V.; LANDOLFO, R. **Design of cold-formed steel structures**. Berlin: ECCS, 2012. 654 p.
- ETEROVIC, A. L.; BATHE, K. J. A note on the use of the additive decomposition of the strain tensor in finite deformation inelasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 93, n. 1, p. 31-38, dez. 1991.
- FARIN, G. **Curves and surfaces for CAGD: a practical guide**. 5. ed. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2002. 499 p.
- FEULVARCH, E.; HOUX, J. C.; GEUFFRARD, M. Symmetrical node-to-node formulation for thermal contact problems between non-conforming or non-matching meshes. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 162, p. 13-18, set. 2019.
- FLORY, P. J. Thermodynamic relations for high elastic materials. **Transactions of the Faraday Society**, v. 57, p. 829-838, 1961.
- FRANCAVILLA, A.; ZIENKIEWICZ, O. C. A note on numerical computation of elastic contact problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 9, n. 4, p. 913-924, 1985.
- GARCEA, G. Mixed formulation in Koiter analysis of thin-walled beams. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 26-27, p. 3369-3399, mar. 2001.
- GEUZAIN, C.; REMACLE, J. F. Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 79, n. 11, p. 1309-1331, set. 2009.
- GHAEDNIA, H. et al. A review of elastic-plastic contact mechanics. **Applied Mechanics Reviews**, v. 69, n. 6, 060804, nov. 2017.
- GRECO, M. **Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos**. 2004. 153 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.
- GREEN, A. E.; NAGHDI, P. M. A general theory of an elastic-plastic continuum. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 18, p. 251-281, 1965.
- GURTIN, M. E.; ANAND, L. The decomposition $F = F^e F^p$, material symmetry, and plastic irrotationality for solids that are isotropic-viscoplastic or amorphous. **International Journal of Plasticity**, v. 21, n. 9, p. 1686-1719, set. 2005.

HALLQUIST, J. O. **NIKE2D**: an implicit, finite-deformation, finite-element code for analyzing the static and dynamic response of two-dimensional solids. Livermore: Lawrence Livermore Laboratory, 1979.

HALLQUIST, J. O. **User's manual for DYNA2D**: an explicit two-dimensional hydrodynamic finite-element code with interactive rezoning. Livermore: Lawrence Livermore Laboratory, 1982a.

HALLQUIST, J. O. **Theoretical manual for DYNA3D**. Livermore: Lawrence Livermore Laboratory, 1982b.

HALLQUIST, J. O. **NIKE3D**: an implicit, finite-deformation, finite-element code for analyzing the static and dynamic response of three-dimensional solids. Livermore: Lawrence Livermore Laboratory, 1984.

HALLQUIST, J. O.; GOUDREAU, G. L.; BENSON, D. J. Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 51, n. 1-3, p. 107-137, set. 1985.

HAMMER, P. C.; MARLOWE, O. J.; STRAUD, A. H. Numerical integration over simplexes and cones. **Mathematical Tables and Other Aids to Computation**, v. 10, n. 55, p. 130-137, jul. 1956.

HARTMANN, S.; NEFF, P. Polyconvexity of generalized polynomial-type hyperelastic strain energy functions for near-incompressibility. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, n. 11, p. 2767-2791, jun. 2003.

HASHIGUCHI, K. Multiplicative hyperelastic-based plasticity for finite elastoplastic deformation/sliding: a comprehensive review. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 26, n. 3, p. 597-637, jul. 2019.

HEIDRICH, W. Computing the barycentric coordinates of a projected point. **Journal of Graphics Tools**, v. 10, n. 3, p. 9-12, jan. 2011.

HERTZ, H. Über die berührung fester elastischer körper. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 92, p. 156-171, 1881.

HESCH, C.; BETSCH, P. A comparison of computational methods for large deformation contact problems of flexible bodies. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, v. 86, n. 10, p. 818-827, out. 2006.

HILL, R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. **Proceedings of the Royal Society of London**, v. 193, n. 1033, p. 281-297, maio 1948.

HILL, R. Theoretical plasticity of textured aggregates. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 85, n. 1, p. 179-191, jan. 1979.

HOSFORD, W. F. A generalized isotropic yield criterion. **Journal of Applied Mechanics**, v. 39, n. 2, p. 607-609, jun. 1972.

HOSFORD, W. F. On yield loci of anisotropic cubic metals. In: NORTH AMERICAN METAL WORKING CONFERENCE SME, 7., 1979, Dearborn. **Anais...** Dearborn: SME, 1979. p. 191-197.

HOSFORD, W. F. **Fundamentals of engineering plasticity**. New York: Cambridge University Press, 2013. 267 p.

HOWLADER, M. K.; MARIK, J.; JANDERA, M. Cold-forming effect on stainless steel sections. **International Journal of Steel Structures**, v. 16, p. 317-332, jun. 2016.

HU, N. A solution method for dynamic contact problems. **Computers & Structures**, v. 63, n. 6, p. 1053-1063, jun. 1997.

HUBER, M. T. Właściwa praca odkształcenia jako miara wyężenia materiału. **Towarzystwo Politechniczne**, 1904.

HUGHES, T. J. R. et al. A finite element method for a class of contact-impact problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 8, n. 3, p. 249-276, jul.-ago. 1976.

JIN, S.; SOHN, D.; IM, S. Node-to-node scheme for three-dimensional contact mechanics using polyhedral type variable-node elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 304, p. 217-242, jun. 2016.

KHAN, A. S.; HUANG, S. **Continuum theory of plasticity**. New York: John Wiley & Sons, 1995. 421 p.

KIM, N. H. **Introduction to nonlinear finite element analysis**. New York: Springer, 2015. 430 p.

KRÖNER, E. Allgemeine kontinuumstheorie der versetzungen und eigenspannungen. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 4, p. 273-334, 1959.

LEE, E. H. **Elastic-plastic deformation at finite strains**. Stanford, nov. 1968. (Stanford University, Division of Engineering Mechanics, technical report n. 183, contract report n. 10).

LI, X. S. et al. **SuperLU users' guide**. Berkeley: Lawrence Berkeley National Laboratory, 1999. 78 p.

LI, Z.; SCHAFER, B. W. Application of the finite strip method in cold-formed steel member design. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 66, n. 8-9, p. 971-980, ago.-set. 2010.

LI, Z.; SCHAFER, B. W. Constrained Finite Strip Method for thin-walled members with general end boundary conditions. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 139, n. 11, p. 1566-1576, nov. 2013.

LI, Z. et al. Review: Constrained finite strip method developments and applications in cold-formed steel design. **Thin-Walled Structures**, v. 81, p. 2-18, ago. 2014.

MACIEL, D. N. **Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional**. 2008. 162 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

MARCKMANN, G.; VERRON, E. Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. **Rubber Chemistry and Technology**, v. 79, n. 5, p. 835-858, nov. 2006.

MARQUES, G. C. S. C. **Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais**. 2006. 93 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

MATTIASSON, K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, n. 1, p. 145-153, jan. 1981.

MIEHE, C; GÖKTEPE, S.; MÉNDEZ DIEZ, J. Finite viscoplasticity of amorphous glassy polymers in the logarithmic strain space. **International Journal of Solids and Structures**, v. 46, n. 1, p. 181-202, jan. 2009.

MISES, R. v. Mechanik der festen körper im plastisch-deformablen zustand. **Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse**, v. 1, p. 582-592, 1913.

MOONEY, M. A theory of large elastic deformation. **Journal of Applied Physics**, v. 11, n. 9, p. 582-592, 1940.

MUTAFI, A. et al. Investigation into the distribution of residual stresses in pressed-braked thin-walled steel lipped channel sections using the 3D-FEM technique. **Thin-Walled Structures**, v. 135, p. 437-445, fev. 2019.

NADAI, A. Plastic behavior of metals in the strain-hardening range. Part I. **Journal of Applied Physics**, v. 8, n. 3, p. 205-213, 1937.

NEGAHBAN, M. **The mechanical and thermodynamical theory of plasticity**. Boca Raton: CRC Press, 2012. 749 p.

NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 85, n. 3, p. 67-94, jul. 1959.

NGUYEN, V. B. et al. Finite element simulation on mechanical and structural properties of cold-formed dimpled steel. **Thin-Walled Structures**, v. 64, p. 13-22, mar. 2013.

OGDEN, R. W. Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids. **Proceedings of the Royal Society of London**, v. 328, n. 1575, p. 567-583, jun. 1972.

OGDEN, R. W. **Non-linear elastic deformations**. Chichester: Ellis Horwood, 1984. 544 p.

PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. AcadView. Versão 3. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2005.

PAGGI, M.; WRIGGERS, P. Node-to-segment and node-to-surface interface finite elements for fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 300, p. 540-560, mar. 2016.

PAPADOPOULOS, P.; TAYLOR, R. L. A mixed formulation for the finite element solution of contact problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 94, n. 3, p. 373-389, fev. 1992.

PASCON, J.; CODA, H. B. Large deformation analysis of elastoplastic homogeneous materials via high order tetrahedral finite elements. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 76, p. 21-38, nov. 2013.

PASCON, J. P.; CODA, H. B. Large deformation analysis of functionally graded elastoplastic materials via solid tetrahedral finite elements. **Computers & Structures**, v. 146, p. 59-75, jan. 2015.

PASCON, J. High-order triangular finite elements applied to visco-hyperelastic materials under plane stress. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 40, 535, out. 2018.

PFEIL, W.; PFEIL, M. **Estruturas de aço: dimensionamento prático**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. 357 p.

PIEIDADE NETO, D. **Sobre estratégias de resolução numérica de problemas de contato**. 2009. 149 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

PIEIDADE NETO, D.; PACCOLA, R. R. sparseSET. Versão 1.0.0. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, nov. 2020.

POLLIZI, E. Density-matrix-based algorithm for solving eigenvalue problems. **Physical Review B**, v. 79, n. 11, 115112, mar. 2009.

POPOV, V. L. **Contact mechanics and friction: physical principles and applications**. Heidelberg: Springer, 2010. 362 p.

POPOV, V. L.; HEß, M.; WILLERT, E. **Handbook of contact mechanics: exact solutions of axisymmetric contact problems**. Berlin: Springer, 2019. 347 p.

PROENÇA, S. P. B. **Análise não linear de estruturas: notas de aulas**. São Carlos: EESC/USP, 2018.

QUACH, W. M.; TENG, J. G.; CHUNG, K. F. Finite element predictions of residual stresses in press-braked thin-walled steel sections. **Engineering Structures**, v. 28, n. 11, p. 1609-1619, set. 2006.

RADOVITZKY, R. Stability and buckling. In: RADOVITZKY, R. **Techniques of structural analysis and design**. Cambridge: MIT, 2013. p. 209-232.

RAMIREZ, C. Q. **Análise não linear geométrica de músculos esqueléticos via Método dos Elementos Finitos Posicional**. 2018. 248 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

RHODES, J.; SHANMUGAM, N. E. Cold formed steel structures. In: CHEN, W. F.; LIEW, J. Y. R. **The civil engineering handbook**. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2003.

RIVLIN, R. S. Large elastic deformations of isotropic materials. I. Fundamental concepts. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 240, n. 822, p. 459-490, jan. 1948a.

RIVLIN, R. S. Large elastic deformations of isotropic materials. IV. Further developments of the general theory. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 241, n. 835, p. 379-397, out. 1948b.

RIVLIN, R. S.; SAUNDERS, D. W. Large elastic deformations of isotropic materials. VII. Experiments on the deformation of rubber. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 243, n. 865, p. 251-288, abr. 1951.

RODRÍGUEZ, E. A. M. **Desenvolvimento de um modelo de ligação deslizante para a simulação de dispositivos de controle de vibração na análise não linear geométrica de estruturas**. 2017. 128 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

ROHATGI, A. WebPlotDigitizer. Versão 4.5. Pacífica, ago. 2021. Disponível em: <<https://automeris.io/WebPlotDigitizer/>>. Acesso em: 8 fev. 2022.

ROSSI, B.; HABRAKEN, A. M.; PASCON, F. On the evaluation of the through thickness residual stresses distribution of cold formed profiles. In: AIP CONFERENCE, 907., 2007, Zaragoza. **Anais...** Zaragoza: AIP, 2007. p. 570-577.

SCHAFER, B. W.; PEKÖZ, T. Computational modeling of cold-formed steel: characterizing geometric imperfections and residual stresses. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 47, n. 3, p. 193-210, set. 1998.

SILVA, E. L.; SILVA, V. P. **Dimensionamento de perfis formados a frio conforme NBR 14762 e NBR 6355**. Rio de Janeiro: IBS/CBCA, 2008. 119 p.

SILVA, E. L.; PIERIN, I.; SILVA, V. P. **Estruturas compostas por perfis formados a frio: dimensionamento pelo método das larguras efetivas e aplicação conforme ABNT NBR 14762:2010 e ABNT NBR 6355:2012**. Rio de Janeiro: IBS/CBCA, 2014. 192 p.

SIMO, J. C.; WRIGGERS, P.; TAYLOR, R. L. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 50, n. 2, p. 163-180, ago. 1985.

SOARES, H. B.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Unconstrained vector positional shell FEM formulation applied to thin-walled members instability analysis. **Thin-Walled Structures**, v. 136, p. 246-257, mar. 2019.

SOARES, H. B.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A conjugate modal force strategy for instability analysis of thin-walled structures: an unconstrained vector positional finite element approach. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 18, n. 2, e344, mar. 2021.

SOYARSLAN, C.; TEKKAYA, A. E. A damage coupled orthotropic finite plasticity model for sheet metal forming: CDM approach. **Computational Materials Science**, v. 48, n. 1, p. 150-165, mar. 2010.

STEINMANN, P.; HOSSAIN, M.; POSSART, G. Hyperelastic models for rubber-like materials: consistent tangent operators and suitability for Treloar's data. **Archive of Applied Mechanics**, v. 82, p. 1183-1217, 2012.

STUPKIEWICZ, S. Extension of the node- to- segment contact element for surface-expansion- dependent contact laws. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 50, n. 3, p. 739-759, jan. 2001.

TOBAJAS, R.; IBARTZ, E.; GRACIA, L. A comparative study of hyperelastic constitutive models to characterize the behavior of a polymer used in automotive engines. In: INTERNATIONAL ELECTRONIC CONFERENCE ON MATERIALS, 2., 2016, *online*. **Anais... online**: MDPI, 2016.

TRELOAR, L. R. G. The elasticity of a network of long-chain molecules. I. **Transactions of the Faraday Society**, v. 39, p. 36-41, 1943.

TRESCA, H. E. Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions. **Comptes rendus de l'Académie des Sciences**, v. 59, p. 754-758, 1864.

TRESCA, H. E. Sur l'écoulement des corps solides soumis a de fortes pressions. **Comptes rendus de l'Académie des Sciences**, v. 64, p. 809-812, 1867.

ULZ, M. H. A formulation of additive finite anisotropic thermos-plasticity in logarithmic Lagrangean strain- entropy space. In: ANNUAL MEETING OF THE INTERNATIONAL ASSOCIATION OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS, 80., 2009, Gdansk. **Anais... Gdansk**: GAMM, 2009. p. 307-308.

WARBURTON, G. B. **The dynamical behaviour of structures**. 2. ed. Oxford: Pergamon Press, 1976. 354 p.

WARREN, J. Barycentric coordinates for convex polytopes. **Advances in Computational Mathematics**, v. 6, p. 97-108, dez. 1996.

WEMPNER, G. Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells. **International Journal of Solids and Structures**, v. 5, n. 2, p. 117-153, fev. 1969.

WENG, C. C.; WHITE, R. N. Residual stresses in cold-bent thick steel plates. **Journal of Structural Engineering**, v. 116, n. 1, p. 24-39, jan. 1990a.

WENG, C. C.; WHITE, R. N. Cold-bending of thick high-strength steel plates. **Journal of Structural Engineering**, v. 116, n. 1, p. 40-54, jan. 1990b.

WIERZBICKI, T. Fundamental concepts in structural plasticity. In: WIERZBICKI, T. **Structural mechanics**. Cambridge: MIT, 2013.

WILKINS, M. L. Calculation of elasto-plastic flow. In: ALDER, B.; FERNBACH, S.; ROTENBERG, M. **Methods of computational physics**. New York: Academic Press, 1964. v. 2.

WRIGGERS, P.; SIMO, J. C. A note on tangent stiffness for fully nonlinear contact problems. **International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering**, v. 1, n. 5, p. 199-203, set. 1985.

WRIGGERS, P.; VAN, T. V.; STEIN, E. Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. **Computers & Structures**, v. 37, n. 3, p. 319-331, 1990.

WRIGGERS, P. **Computational contact mechanics**. Chichester: John Wiley & Sons, 2002. 441 p.

XING, W. et al. A node-to-node scheme for three-dimensional contact problems using the scaled boundary finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 347, p. 928-956, abr. 2019.

YAO, Y.; QUACH, W. M.; YOUNG, B. Finite element-based method for residual stresses and plastic strains in cold-formed steel hollow sections. **Engineering Structures**, v. 188, p. 24-42, jun. 2019.

YEOH, O. H. Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates. **Rubber Chemistry and Technology**, v. 63, n. 5, p. 792-805, 1990.

YU, W. W.; LABOUBE, R. A. **Cold-formed steel design**. 4. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2010. 491 p.

ZAVARISE, G.; DE LORENZIS, L. The node-to-segment algorithm for 2D frictionless contact: Classical formulation and special cases. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 41-44, p. 3428-3451, set. 2009.

APÊNDICE A – Dedução do critério de plastificação de von Mises

Neste apêndice é apresentada a dedução do critério de plastificação de von Mises, cuja expressão é dada pela Equação (247). Inicia-se a dedução relembrando que a energia específica de deformação é calculada através de:

$$\Psi = \oint \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (A1)$$

Considerando que o material está no regime elástico, a energia específica de deformação não depende do caminho da integral de linha da Equação (A1), apenas do estado final. Considera-se ainda que o material é isótropo e segue a Lei de Hooke. A Lei de Hooke Generalizada é dada pela expressão:

$$\sigma_{ij} = \mathfrak{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (A2)$$

sendo \mathfrak{C}_{ijkl} o tensor constitutivo elástico tangente.

Substituindo a Equação (A2) na (A1), é verificado que a energia específica de deformação pode ser calculada no regime elástico como:

$$\Psi = \oint \mathfrak{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\varepsilon_{ij} = \mathfrak{C}_{ijkl} \oint \varepsilon_{kl} d\varepsilon_{ij} = \mathfrak{C}_{ijkl} \frac{\varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}}{2} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (A3)$$

A seguir, é demonstrado que a energia pode ser decomposta em uma parcela hidrostática e em uma parcela desviadora. Para isso, relembra-se que o tensor da componente desviadora da tensão (s_{ij}) corresponde ao tensor de tensão (σ_{ij}) subtraído do tensor da componente hidrostática da tensão (σ_{ij}^h):

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^h \quad (A4)$$

A tensão hidrostática é definida como:

$$\sigma_{ij}^h = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (A5)$$

onde a tensão média σ_m , dada por:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1^p + \sigma_2^p + \sigma_3^p}{3} \quad (A6)$$

corresponde à tensão normal nos planos octaédricos. Relembrando que o 1º invariante da tensão (I_1) é dado por:

$$I_1 = Tr(\sigma_{ij}) \quad (A7)$$

nota-se que a tensão hidrostática também pode ser escrita como:

$$\sigma_{ij}^h = \begin{bmatrix} I_1/3 & 0 & 0 \\ 0 & I_1/3 & 0 \\ 0 & 0 & I_1/3 \end{bmatrix} \quad (\text{A8})$$

portanto, é observado que a tensão hidrostática também é invariante em relação à rotação.

Com isso, tanto a tensão como a deformação podem ser escritas como sendo compostas por uma parcela desviadora e uma parcela hidrostática, conforme mostrado nas seguintes expressões:

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{A9})$$

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{A10})$$

sendo e_{ij} a parcela desviadora da deformação.

Substituindo as Equações (A9) e (A10) na (A3), observa-se que:

$$2\Psi = s_{ij}e_{ij} + s_{ij}\frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}e_{ij} + \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}\frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (\text{A11})$$

Como s_{ij} e e_{ij} são componentes desviadoras, $s_{ij}\delta_{ij} = s_{ii} = 0$ e $e_{ij}\delta_{ij} = e_{ii} = 0$. Ainda, como $\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii} = 3$, a Equação (A11) fica:

$$\Psi = \frac{1}{2}s_{ij}e_{ij} + \frac{1}{6}\sigma_{kk}\varepsilon_{ll} = \Psi^{dev} + \Psi^h \quad (\text{A12})$$

sendo Ψ^{dev} e Ψ^h respectivamente as parcelas desviadora e hidrostática da energia específica de deformação.

A partir deste ponto é analisada apenas a parcela desviadora da energia. Segundo a Lei de Hooke, a semidistorção e_{ij} (metade da distorção γ_{ij}) é calculada como:

$$e_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2} = \frac{1}{2} \frac{s_{ij}}{G} = \frac{1}{2} \frac{s_{ij}}{\frac{E}{2(1+\nu)}} = \frac{s_{ij}(1+\nu)}{E} \quad (\text{A13})$$

Com isso, é possível reescrever Ψ^{dist} na seguinte forma:

$$\Psi^{dev} = \frac{1}{2}s_{ij}e_{ij} = \frac{1}{2}s_{ij}\frac{s_{ij}(1+\nu)}{E} = \frac{1+\nu}{2E}s_{ij}s_{ij} \quad (\text{A14})$$

Através da Equação (A9), é verificado que a contração dupla $s_{ij}s_{ij}$ pode ser desenvolvida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
s_{ij}s_{ij} &= \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right)\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right) \\
&= \sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\sigma_{ij}\delta_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\sigma_{ij}\delta_{ij} + \frac{1}{9}\sigma_{kk}\sigma_{kk}\delta_{ij}\delta_{ij} \\
&= \sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{2}{3}\sigma_{kk}\sigma_{kk} + \frac{1}{3}\sigma_{kk}\sigma_{kk} = \sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\sigma_{kk}
\end{aligned} \tag{A15}$$

o que resulta em:

$$\psi^{dev} = \frac{1+\nu}{2E}\left(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\sigma_{kk}\right) \tag{A16}$$

Huber (1904) havia proposto que a plastificação do material passa a ocorrer quando a parcela desviadora da energia específica de deformação atinge um valor crítico, ou seja:

$$\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\sigma_{kk} = C \tag{A17}$$

sendo C uma constante do material. Por este motivo, o critério de plastificação de von Mises também é chamado de critério da máxima energia de distorção. A constante C pode ser determinada através de um teste de tração uniaxial, situação em que o tensor de tensão é:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A18}$$

Substituindo o tensor de tensão do caso de tração uniaxial na Equação (A17), obtém-se:

$$C = \sigma_{11}\sigma_{11} - \frac{1}{3}\sigma_{11}\sigma_{11} = \frac{2}{3}\sigma_{11}\sigma_{11} \tag{A19}$$

Como o escoamento ocorre quando $\sigma_{11} = \sigma_y$, conclui-se que a constante C possui valor:

$$C = \frac{2}{3}\sigma_y^2 \tag{A20}$$

Substituindo o valor de C e o tensor completo de tensão na Equação (A17), realiza-se o seguinte desenvolvimento a fim de se obter a expressão do critério de plastificação de von Mises para o caso geral:

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 = \frac{2}{3}\sigma_y^2 \tag{A21}$$

Como

$$\begin{aligned}
&(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 \\
&= \sigma_{11}^2 + \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} \\
&+ \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}^2 \\
&= \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33})
\end{aligned} \tag{A22}$$

continua-se o desenvolvimento da Equação (A21) como:

$$\begin{aligned} & \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \\ & - \frac{1}{3} [\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33})] = \frac{2}{3} \sigma_y^2 \end{aligned} \quad (A23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - \frac{2}{3}(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}) + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \\ & = \frac{2}{3} \sigma_y^2 \end{aligned} \quad (A24)$$

$$\begin{aligned} & 2(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - 2(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}) + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \\ & = 2\sigma_y^2 \end{aligned} \quad (A25)$$

Nota-se que:

$$\begin{aligned} & (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \\ & = \sigma_{11}^2 - 2\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + \sigma_{22}^2 - 2\sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}^2 + \sigma_{33}^2 \\ & - 2\sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{11}^2 \\ & = 2(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - 2(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}) \end{aligned} \quad (A26)$$

Portanto, substituindo a Equação (A26) na (A25), chega-se finalmente à expressão:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) = 2\sigma_y^2 \quad (A27)$$

a qual corresponde à expressão do critério de plastificação de von Mises.

Deduzida a expressão do critério de plastificação de von Mises, a partir daqui é feita a dedução de algumas variações da expressão. Na literatura, é comum se escrever o critério de plastificação de von Mises em termos do 2º invariante da componente desviadora da tensão (J_2), o qual é dado por:

$$J_2 = - \left(\begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{11} & s_{13} \\ s_{31} & s_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} \right) \quad (A28)$$

A tensão desviadora s_{ij} é dada de forma explícita como:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A29)$$

Desenvolvendo a Equação (A28) e considerando a simetria do tensor de tensão, obtém-se:

$$\begin{aligned} J_2 &= -[(s_{22}s_{33} - s_{23}s_{32}) + (s_{11}s_{33} - s_{13}s_{31}) + (s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21})] \\ &= -s_{11}s_{22} - s_{11}s_{33} - s_{22}s_{33} + s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2 \end{aligned} \quad (A30)$$

A seguir, considerando as componentes do tensor da componente desviadora da tensão apresentadas na Equação (A29), realiza-se o seguinte desenvolvimento nos três primeiros termos da Equação (A30):

$$\begin{aligned}
& -s_{11}s_{22} - s_{11}s_{33} - s_{22}s_{33} \\
& = -(\sigma_{11} - \sigma_m)(\sigma_{22} - \sigma_m) - (\sigma_{11} - \sigma_m)(\sigma_{33} - \sigma_m) \\
& \quad - (\sigma_{22} - \sigma_m)(\sigma_{33} - \sigma_m) \\
& = -\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_m + \sigma_{22}\sigma_m - \sigma_m^2 - \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_m \\
& \quad + \sigma_{33}\sigma_m - \sigma_m^2 - \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_m + \sigma_{33}\sigma_m - \sigma_m^2 \\
& = -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} \\
& \quad + \sigma_m(2\sigma_{11} + 2\sigma_{22} + 2\sigma_{33} - 3\sigma_m) \\
& = -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} \\
& \quad + \left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}\right) \left[2\sigma_{11} + 2\sigma_{22} + 2\sigma_{33} \right. \\
& \quad \left. - 3\left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}\right)\right] \\
& = -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} \\
& \quad + \left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}\right) (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\
& = -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} + \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 \\
& = -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} \\
& \quad + \frac{1}{3}[\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\sigma_{11}\sigma_{22} + 2\sigma_{11}\sigma_{33} + 2\sigma_{22}\sigma_{33}] \\
& = \frac{1}{3}[\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33}] \\
& = \frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2]
\end{aligned} \tag{A31}$$

Também considerando as componentes do tensor da componente desviadora da tensão apresentadas na Equação (A29), é verificado que os três últimos termos da Equação (A30) são dados por:

$$s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2 = \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 \tag{A32}$$

Portanto, substituindo as Equações (A31) e (A32) na Equação (A30) e multiplicando todos os termos por 6, chega-se à expressão do critério de plastificação de von Mises escrita em função do 2º invariante da componente desviadora da tensão:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) = 6J_2 \tag{A33}$$

Uma característica da componente desviadora da tensão é que ela representa um estado de cisalhamento puro, desta forma, seu 1º invariante (J_1) é nulo:

$$J_1 = Tr(s_{ij}) = s_{11} + s_{22} + s_{33} = 0 \quad (A34)$$

Elevando ambos os lados da Equação (A34) ao quadrado, obtém-se:

$$(s_{11} + s_{22} + s_{33})^2 = 0 \quad (A35)$$

$$s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2s_{11}s_{22} + 2s_{11}s_{33} + 2s_{22}s_{33} = 0 \quad (A36)$$

$$-s_{11}s_{22} - s_{11}s_{33} - s_{22}s_{33} = \frac{s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2}{2} \quad (A37)$$

Com isso, substituindo a Equação (A37) na Equação (A30), obtém-se:

$$J_2 = \frac{s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2}{2} + s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2 \quad (A38)$$

Como a contração dupla $s_{ij}s_{ij}$ é dada por:

$$s_{ij}s_{ij} = s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2(s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2) \quad (A39)$$

conclui-se que J_2 pode ser escrito em função de $s_{ij}s_{ij}$ através de:

$$J_2 = \frac{s_{ij}s_{ij}}{2} \quad (A40)$$

o que mostra que $J_2 \geq 0$ para qualquer estado de tensão.

O critério de von Mises também pode ser expresso em função da tensão de cisalhamento octaédrica (τ_{oct}). Utilizando como referência o sistema de coordenadas principais, o versor do plano octaédrico (n_j) é dado por:

$$n_j = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (A41)$$

Já o tensor de tensão no sistema de coordenadas principais é dado por:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1^p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^p \end{bmatrix} \quad (A42)$$

A seguir considera-se a Fórmula de Cauchy, a qual relaciona um estado de tensão σ_{ij} a um vetor de tensão t_i atuante em um plano cujo versor normal é n_j :

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \quad (A43)$$

Com isso, substituindo as Equações (A41) e (A42) na Equação (A43), determina-se o vetor de tensões t_i atuante no plano octaédrico:

$$t_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sigma_1^p \\ \sigma_2^p \\ \sigma_3^p \end{pmatrix} \quad (A44)$$

Aplicando novamente a Fórmula de Cauchy, determina-se a tensão normal no plano octaédrico (σ_{oct}):

$$\sigma_{oct} = t_i n_i = \frac{1}{3}(\sigma_1^p + \sigma_2^p + \sigma_3^p) = \frac{I_1}{3} = \sigma_m \quad (A45)$$

ou seja, a tensão normal atuante no plano octaédrico corresponde à tensão média.

O vetor de tensões t_i possui magnitude T :

$$T = \|t_i\| = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1^p}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2^p}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3^p}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{[(\sigma_1^p)^2 + (\sigma_2^p)^2 + (\sigma_3^p)^2]} \quad (A46)$$

T pode ser considerado como sendo composto pelas tensões normal e tangencial (τ_{oct}) ao plano octaédrico. Pelo Teorema de Pitágoras, tal relação é dada por:

$$T^2 = \sigma_{oct}^2 + \tau_{oct}^2 \quad (A47)$$

Assim, τ_{oct} é determinada como:

$$\begin{aligned} \tau_{oct}^2 &= T^2 - \sigma_{oct}^2 = \frac{1}{3}[(\sigma_1^p)^2 + (\sigma_2^p)^2 + (\sigma_3^p)^2] - \frac{1}{9}(\sigma_1^p + \sigma_2^p + \sigma_3^p)^2 \\ &= \frac{1}{3}[(\sigma_1^p)^2 + (\sigma_2^p)^2 + (\sigma_3^p)^2] \\ &\quad - \frac{1}{9}[(\sigma_1^p)^2 + (\sigma_2^p)^2 + (\sigma_3^p)^2 + 2\sigma_1^p\sigma_2^p + 2\sigma_1^p\sigma_3^p + 2\sigma_2^p\sigma_3^p] \\ &= \frac{1}{9}[2(\sigma_1^p)^2 + 2(\sigma_2^p)^2 + 2(\sigma_3^p)^2 - 2\sigma_1^p\sigma_2^p - 2\sigma_1^p\sigma_3^p \\ &\quad - 2\sigma_2^p\sigma_3^p] \\ &= \frac{2}{9}[(\sigma_1^p)^2 + (\sigma_2^p)^2 + (\sigma_3^p)^2 - \sigma_1^p\sigma_2^p - \sigma_1^p\sigma_3^p - \sigma_2^p\sigma_3^p] \end{aligned} \quad (A48)$$

Analisando a Equação (A30), observa-se que no sistema de coordenadas principais J_2 é dado por:

$$J_2 = -s_{11}s_{22} - s_{11}s_{33} - s_{22}s_{33} \quad (A49)$$

Substituindo a penúltima forma da Equação (A31) na Equação (A49), verifica-se que:

$$J_2 = \frac{1}{3}[\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33}] \quad (A50)$$

Portanto, comparando as Equações (A48) e (A50), conclui-se que J_2 e τ_{oct} estão relacionados através da expressão:

$$\tau_{oct}^2 = \frac{2}{3}J_2 \quad (A51)$$

Por este motivo, o critério de plastificação de von Mises também é denominado de critério da máxima tensão octaédrica.

Por fim, mostra-se a expressão conjunta das diversas variações do critério de plastificação de von Mises deduzidas ao longo do apêndice:

$$\begin{aligned}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) &= 2\sigma_y^2 \\ &= 6J_2 = 3s_{ij}s_{ij} = 9\tau_{oct}^2\end{aligned}\tag{A52}$$

a qual corresponde à Equação (247).

APÊNDICE B – Procedimento de rotação das tensões residuais

Neste apêndice é apresentado o procedimento realizado no exemplo numérico 7.10 para a rotação das tensões residuais. A rotação das tensões residuais foi realizada através da transformação do versor \vec{i} , paralelo ao eixo x, para a configuração atual do corpo, versor este que é dado por:

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B1})$$

Utilizando o gradiente da função mudança de configuração através da aplicação da Equação (6) no versor \vec{i} , obtém-se o vetor \vec{N} :

$$\vec{N} = \mathbf{A} \cdot \vec{i} \quad (\text{B2})$$

o qual corresponde ao versor \vec{i} transformado para a configuração atual.

O vetor \vec{N} é posteriormente normalizado, obtendo-se o versor \vec{n} :

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} \quad (\text{B3})$$

Tendo em vista que a rotação ocorreu no plano xy (em torno do eixo z), a matriz de rotação (\mathbf{R}) possui a seguinte forma:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B4})$$

sendo θ o ângulo de rotação.

Como o versor \vec{n} é dado por:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B5})$$

é possível determinar \mathbf{R} apenas com as componentes do versor \vec{n} :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} n_1 & -n_2 & 0 \\ n_2 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B6})$$

A etapa final consiste na aplicação da fórmula de giro no tensor de tensões ($\boldsymbol{\sigma}$) para a obtenção do tensor de tensões rotacionado ($\bar{\boldsymbol{\sigma}}$):

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^t \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R} \quad (\text{B7})$$