

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Escola de Engenharia de São Carlos

## **Análise numérica da probabilidade de falha de uma estrutura composta por elementos de pórtico sob efeito de corrosão por carbonatação**

**Chiara Pinheiro Teodoro**

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

Chiara Pinheiro Teodoro

**Análise numérica da probabilidade de falha de uma estrutura  
composta por elementos de pórtico sob efeito de corrosão por  
carbonatação**

SÃO CARLOS

2023



Chiara Pinheiro Teodoro

**Análise numérica da probabilidade de falha de uma estrutura  
composta por elementos de pórtico sob efeito de corrosão por  
carbonatação**

**VERSÃO CORRIGIDA**

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rogério Carrazedo

SÃO CARLOS

2023

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

P314 Pinheiro Teodoro, Chiara  
Análise numérica da probabilidade de falha de uma estrutura composta por elementos de pórtico sob efeito de corrosão por carbonatação / Chiara Pinheiro Teodoro; orientador Rogério Carrazedo. São Carlos, 2023.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2023.

1. concreto armado. 2. corrosão. 3. carbonatação. 4. vida útil. 5. método dos elementos finitos posicional. 6. elemento de pórtico. 7. simulação de Monte Carlo. I. Título.

Eduardo Graziosi Silva - CRB - 8/8907

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Engenheira **CHIARA PINHEIRO TEODORO**.

Título da dissertação: "Análise numérica da probabilidade de falha de uma estrutura composta por elementos de pórtico sob efeito de corrosão por carbonatação".

Data da defesa: 20/04/2023.

### **Comissão Julgadora**

### **Resultado**

Prof. Associado **Rogério Carrazedo**

Aprovado

**(Orientador)**

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Dr. **Caio Gorla Nogueira**

Aprovado

(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"/UNESP-Bauru)

Prof. Dr. **Gustavo Henrique Siqueira**

Aprovado

(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Carlos De Marqui Junior**



## **AGRADECIMENTOS**

Acima de tudo, ao meu Senhor, Pai, melhor Amigo e Conselheiro, porque desde o início da jornada foi Ele que me sustentou, guiou e me levantou. Ele é razão de todo o trabalho, porque dEle provêm toda ciência e por Ele são feitas todas as coisas.

Aos meus pais, Fernando e Sheila, e ao meu irmão, Gabriel, pelo cuidado e presença regada de amor. Sem minha família eu não teria chegado até aqui e minha conquista sempre será partilhada com eles.

A minha família, em especial aos meus avós pelo incentivo e exemplo que segue de geração em geração e aos meus padrinhos pelo cuidado e amor.

As minhas amigas irmãs, Thalita, Larissa, Marília, Jessica, Amanda, Morgana, e ao meu pastor, Martinho, por intercederem por mim e me impulsionarem.

Aos meus amigos de infância, em especial Deborah, André e Camila, que sempre estiveram presente em todo momento dando apoio e dividindo a vida.

Aos meus colegas do SET/EESC pela parceria e ajuda oferecida nas matérias. Em especial agradeço aos meus amigos da sala ME02: Luis Gustavo, Nicolle Guerra e André Stabile.

Ao meu orientador, Rogério Carrazedo, pela paciência, cuidado e todo conhecimento compartilhado.

Ao Departamento de Estruturas pela oportunidade de realizar o mestrado, em especial agradeço a Dorival Piedade pela ajuda em todos os problemas relacionados à computação.





*Que nunca caiam no esquecimento as razões para todo trabalho:  
amar pessoas e fazer o nome dEle conhecido, porque...  
“Tudo o que não é eterno, é eternamente inútil.” C. S Lewis.*



## RESUMO

TEODORO, C. P. **Análise numérica da probabilidade de falha de uma estrutura composta por elementos de pórtico sob efeito de corrosão por carbonatação.** 2023. 139p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

As estruturas de concreto armado são usadas mundialmente e são projetadas para serem duráveis, estáveis e resistentes. Porém, com a ação de intempéries e com o passar do tempo a estrutura sofre degradação, e uma das principais manifestações patológicas que ela pode apresentar é a corrosão, que pode ser causada por cloretos ou por carbonatação. Como consequência dos produtos de corrosão, a estrutura sofre, no estágio da iniciação, a despassivação da armadura. Posteriormente, na propagação, a estrutura sofre perda da área de aço, destacamento do concreto, fissuração, manchas, perda da capacidade resistente e, por fim, o colapso. Para o cálculo da vida útil da estrutura podem ser utilizadas análises determinísticas, experimentais e probabilísticas. Devido ao vasto número de incertezas intrínsecas ao problema, um estudo probabilístico, através da teoria da confiabilidade, se mostra coerente. No presente trabalho foi calculada a probabilidade de despassivação, de fissuração e de falha de uma estrutura de concreto armado submetida à corrosão por carbonatação ao longo dos anos, através de simulações de Monte Carlo. Para a probabilidade de falha no estado limite de serviço foi utilizado o estado limite de deformação excessiva. O modelo de corrosão adotado e a análise probabilística foram acoplados a um programa de método dos elementos finitos posicional (MEFP) para elemento de pórtico laminado desenvolvido em linguagem FORTRAN. A formulação implementada é Lagrangiana total, e utiliza como graus de liberdade as posições nodais e vetores generalizados que refletem o giro e a variação da altura da seção transversal. Considera-se a não linearidade geométrica, permitindo o cálculo de estruturas com grandes deslocamentos e rotações, utilizando a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff. Para o compósito laminado foi utilizada a teoria FSDT (teoria de primeira ordem em relação ao cisalhamento) acrescido do efeito zigue-zague. Os resultados da análise numérica realizados nos exemplos de validação demonstraram a eficácia da formulação para estruturas bidimensionais sob a aplicação de diferentes tipos de carregamento externo, uma vez que os deslocamentos e rotações obtidos apresentaram concordância com os resultados apresentados na literatura. A danificação do concreto aplicada através do modelo de dano de Mazars junto com os modelos de corrosão escolhidos implementados no modelo numérico de MEFP teve resultado satisfatório quando comparado com a literatura para representar uma viga de concreto

armado submetido a forças externas e corrosão por carbonatação. A probabilidade de despassivação e início da fissuração da estrutura em 50 anos foi de 57,38% e 25,72%, respectivamente, para o melhor cenário, e estes resultados tiveram grande influência do cobrimento e teor de CO<sub>2</sub>. A probabilidade de falha teve grande influência do diâmetro da armadura e da taxa de corrosão, e em 75 anos após a despassivação, a probabilidade de falha para viga de concreto armado estudada foi de 37,31% e 13,13% para o melhor e pior cenário, respectivamente.

**Palavras-Chave:** concreto armado; corrosão; carbonatação; vida útil; método dos elementos finitos posicional; elemento de pórtico; simulação de Monte Carlo.

## ABSTRACT

TEODORO, C. P. **Numerical analysis of the failure probability of a structure composed by frame elements under the effects of corrosion due to carbonation.** 2023. 139p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

Reinforced concrete structures are used worldwide and are designed to be durable, stable, and resistant. However, with the effects caused by the weather throughout its lifetime, the structures suffer degradation, and one of the most common pathological manifestations that may appear is corrosion, which can be caused by chloride ingress and carbonation. The corrosion products cause, in the initiation stage, the depassivation of the rebar. Subsequently, in the propagation stage, the structure suffers a loss of rebar area, concrete delamination and spalling, cracks, stains, strength loss and, at the end, collapse. The structural lifetime can be assessed using deterministic, experimental or probabilistic analysis methods. Due to the massive number of intrinsic uncertainties, it's more coherent to employ a probabilistic analysis, using the reliability theory. The probability of depassivation, initial cracks and failure of a reinforced concrete beam under carbonation was calculated by Monte Carlo Simulation (MCS). The failure probability was calculated considering the serviceability limit states of excessive deflection. The adopted corrosion model and the probabilistic analysis were coupled to a laminated frame positional finite element program developed in FORTRAN language. The total Lagrangian formulation was implemented, and the degrees of freedom are given by nodal positions and generalized vectors that represent the variation of the section height and rotation. The geometric nonlinearity is considered, allowing for high displacements and rotations, using Saint-Venant-Kirchhoff's constitutive law. For the laminated composite the FSDT theory was adopted considering the zig-zag effect. The results obtained in the numerical analyses from the validation examples demonstrated the efficacy of the formulation for bidimensional structures under different types of external forces applied, since the results of deflection and rotation were coherent with the ones found in the literature. The concrete damage applied by using the Mazars damage model combined with the chosen corrosion model implemented in the numerical program of MEFP showed satisfactory results for a reinforced concrete beam under carbonation compared to an experimental test in the literature. The depassivation and the initial cracking probability in 50 years were 57.38% and 25.72%, respectively, for the best scenario, and were significantly influenced by the % of CO<sub>2</sub> and the cover depth. The failure probability was most affected by the diameter of the rebar and the corrosion current density and in 75 years, after

depassivation, the failure probability for the reinforced concrete beam studied in this work was 37.31% for the worst and 13.13% for best scenario.

**Keywords:** reinforced concrete; corrosion; carbonation; structural service life; positional finite element method; frame element; Monte Carlo simulation.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Corrosão atuando em um pilar causando destacamento do revestimento e exposição da armadura.....	25
Figura 2 - Vida útil da estrutura em relação ao processo de corrosão.....	25
Figura 3 - Comparativo dos custos diretos entre os problemas enfrentados nos Estados Unidos com relação a corrosão. ....	28
Figura 4 - Desabamento de uma varanda devido à corrosão.....	29
Figura 5 - Desabamento de uma ponte com uma das causas sendo a corrosão.....	29
Figura 6 - Crescimento do número de publicações relacionadas à corrosão.....	30
Figura 7 - Organização da Dissertação.....	32
Figura 8 - Função de mapeamento e gradiente de mudança de configuração.....	36
Figura 9 - Função de mapeamento e gradiente de mudança de configuração para elemento de pórtico homogêneo .....	43
Figura 10 - Algoritmo baseado em MEFP para modelagem de elemento de pórtico aplicado na linguagem FORTRAN.....	51
Figura 11 - Viga engastada com pequenos deslocamentos .....	52
Figura 12 - Resultado do deslocamento vertical (em m) gerado pelo programa em MEFP ....	52
Figura 13 - Resultados do processamento da viga com pequenos deslocamentos quanto à rotação (rad) no a) <i>Ftool</i> e no c) código em MEFP e deslocamento vertical (mm) no b) <i>Ftool</i> e no d) código em MEFP.....	53
Figura 14 - Viga engastada com grandes deslocamentos .....	54
Figura 15 - Trajetória de equilíbrio para a viga com força concentrada quanto ao: a) deslocamento vertical e b) deslocamento horizontal da extremidade .....	55
Figura 16 - Trajetória de equilíbrio para a viga com momento aplicado quanto ao: a) deslocamento vertical e b) deslocamento horizontal da extremidade .....	55



Figura 17 - Deslocamento a) vertical e b) horizontal (em m) calculados através do MEFP da viga com força concentrada aplicada na extremidade .....	56
Figura 18 - Deslocamento a) vertical e b) horizontal (em m) calculados através do MEFP da viga com momento aplicado na extremidade .....	56
Figura 19 - Perfis da deformação de acordo com a teoria de laminado .....	62
Figura 20 - Medidas de um elemento indeformado de n lâminas. ....	63
Figura 21 - Campo de deslocamento na direção transversal composta pelo FSDT com enriquecimento zigue-zague .....	65
Figura 22 - Exemplo de viga engastada com elemento de pórtico laminado .....	68
Figura 23 - Malha e deslocamento referente ao caso 1B.....	69
Figura 24 - Malha e deslocamento referente ao caso 2B.....	69
Figura 25 - Perfis de zigue-zague ao longo da altura da seção.....	70
Figura 26 - Exemplo de viga biapoiada de acordo com Nogueira (2015).....	71
Figura 27 - Comparação do resultado obtido por a) Nogueira (2015) e b) ABAQUS® .....	72
Figura 28 - Aplicação das condições de contorno, cargas na estrutura e malha adotada neste trabalho .....	72
Figura 29 - Configuração deformada da viga de 50 cm de altura para o resultado obtido no a) ABAQUS© e b) MEFP .....	74
Figura 30 - Caracterização do exemplo da viga biapoiada com disposição similar ao concreto .....	74
Figura 31 - Resultado de deslocamento do programa em FORTRAN.....	75
Figura 32 - Resultado do deslocamento gerado pelo ABAQUS© .....	75
Figura 33 - Representação da seção danificada.....	77
Figura 34 - Processo de cálculo do modelo de dano de Mazars.....	80
Figura 35 - Viga biapoiada do ensaio de Álvares (1993).....	81

Figura 36 - Comparação do deslocamento no meio do vão com o trabalho de Álvares (1993) .....	81
Figura 37 - Comparação do comportamento da viga de Álvares (1993) em outros trabalhos ..	82
Figura 38 - Ensaio de Bachega (2013) .....	83
Figura 39 - Comparação dos deslocamentos obtidos com o trabalho de Bachega (2013) .....	83
Figura 40 - Avanço da frente de carbonatação .....	85
Figura 41 - Morfologia da corrosão em função do tipo de agente agressivo .....	85
Figura 42 - Probabilidade do tempo de despassivação segundo Coelho (2017) para diferentes casos .....	89
Figura 43 - Consequências da propagação .....	91
Figura 44 - Processo de fissuração do concreto .....	94
Figura 45 - Tempo de fissuração em relação ao diâmetro da armadura.....	95
Figura 46 - Comparação do deslocamento da viga de Graeff (2007) no meio do vão com os resultados obtidos neste trabalho a partir da redução da espessura.....	98
Figura 47 - Deslocamento no meio do vão ao longo dos anos para estruturas em processo corrosivo para configurações a) 1A, b) 2A, c) 1B, d) 2B.....	99
Figura 48 - Relação entre corrosão e vida útil.....	101
Figura 49 - Cálculo da probabilidade de falha utilizando um modelo de elementos finitos ..	103
Figura 50 - Probabilidade de despassivação para três valores de cobrimentos distintos .....	111
Figura 51 - Gráfico de convergência da $pf$ com I.C de 95%.....	111
Figura 52 - Mapeamento do número de falhas quanto à despassivação a cada cem amostras em 50 anos para cobertura médio de a) 2,5, b) 3,0 e c) 4 cm.....	112
Figura 53 - Projeção da concentração de CO <sub>2</sub> para diversos cenários globais.....	113
Figura 54 - Concentração de CO <sub>2</sub> dependente do tempo através da regressão polinomial conforme Equações 6.11 e 6.12.....	114

Figura 55 - Probabilidade de despassivação ao longo dos anos considerando diversos cenários de concentrações de dióxido de carbono .....	114
Figura 56 - Fluxograma do cálculo da probabilidade de despassivação .....	115
Figura 57 - Probabilidade de fissuração utilizando três diâmetros e média de cobertura de a) 2,5, b) 3,0 e c) 4,0 cm .....	117
Figura 58 - Número de falhas quanto à fissuração ao longo do tempo para diâmetro de a) 5, b) 10 e c) 20 mm .....	118
Figura 59 - Probabilidade de fissuração ao longo dos anos para cenários distintos.....	119
Figura 60 - Parametrização do modelo de Álvares (1993) quanto a) malha, b) passo de carga e c) tolerância .....	122
Figura 61 - Fluxograma geral do cálculo da probabilidade de falha englobando MEFP, corrosão, dano de Mazars e confiabilidade .....	124
Figura 62 - Probabilidade de falha ao longo dos anos para viga de Álvares (1993).....	125
Figura 63 - Gráfico de convergência da $pf$ com intervalo de confiança de 95% para SMC simples para 15 anos utilizando a) 12 barras de 5mm e b) 3 barras de 10 mm.....	126
Figura 64 - Mapeamento do número de falhas a cada cem amostras em 75 anos para diâmetro de a)5 mm e b) 10 mm.....	126
Figura 65 - Probabilidade de falha no tempo de iniciação e propagação ao longo dos próximos 50 anos.....	128

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Custo comparativo entre novas construções e manutenção e reparo para alguns países. ....	28
Tabela 2 - Comparativo dos resultados gerados pelo Ftool e pelo programa em MEFP .....	53
Tabela 3 - Propriedades do exemplo de validação .....	68
Tabela 4 - Comparação entre os resultados de deslocamento em cm para o exemplo de viga engastada .....	68
Tabela 5 - Configuração do exemplo de Nogueira (2015) .....	71
Tabela 6 - Comparação dos deslocamentos verticais para os três casos para a viga de 2,5 m de altura. ....	73
Tabela 7 - Comparação dos deslocamentos verticais para os três casos .....	73
Tabela 8 - Fatores que contribuem para a carbonatação .....	86
Tabela 9 - Valores médios dos parâmetros conforme a relação a/c. ....	90
Tabela 10 - Redução das propriedades da estrutura como consequência da corrosão .....	97
Tabela 11 - Configuração do exemplo de corrosão para diâmetros e taxas de corrosão distintas .....	99
Tabela 12 - Variáveis utilizadas na literatura em conjunto com as distribuições das variáveis mais recorrentes quanto à carbonatação .....	106
Tabela 13 - Variáveis aleatórias adotadas para o estágio de iniciação.....	110
Tabela 14 - Probabilidade de desp passivação ao longo dos anos para três médias de cobrimento .....	115
Tabela 15 – Período em anos em que a estrutura alcança probabilidade de falha maior que 50% para diferentes cenários .....	116
Tabela 16 - Probabilidade de fissuração em 50 anos para cenários distintos.....	117

Tabela 17 - Probabilidade de fissuração ao longo dos próximos 50 anos para diferentes cenários quanto ao teor de CO <sub>2</sub> .....	119
Tabela 18 - Variáveis aleatórias para o estudo de propagação.....	121
Tabela 19 - Probabilidade de falha da estrutura para dois valores de diâmetro ao longo dos anos .....	125

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>24</b>
1.1	JUSTIFICATIVA .....	27
1.2	OBJETIVOS .....	31
1.2.1	Objetivo geral .....	31
1.2.2	Objetivos específicos.....	31
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO .....	32
1.4	METODOLOGIA .....	32
<b>2</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL.....</b>	<b>34</b>
2.1	FUNÇÃO MUDANÇA DE CONFIGURAÇÃO.....	35
2.2	MEDIDA DE DEFORMAÇÃO E LEI CONSTITUTIVA.....	37
2.3	ENERGIA MECÂNICA TOTAL .....	38
2.4	PROCESSO DE SOLUÇÃO.....	40
2.5	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA .....	41
<b>3</b>	<b>ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO HOMOGÊNEO .....</b>	<b>43</b>
3.1	FUNÇÃO MUDANÇA DE CONFIGURAÇÃO.....	43
3.2	MEDIDA DE DEFORMAÇÃO E LEI CONSTITUTIVA.....	46
3.3	ENERGIA MECÂNICA TOTAL .....	47
3.3.1	Energia potencial das forças externas .....	47
3.3.2	Energia de deformação da estrutura .....	48
3.4	PARTICULARIDADES DO ELEMENTO DE PÓRTICO NA ENERGIA POTENCIAL TOTAL E EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO.....	49
3.5	PROCESSO DE SOLUÇÃO .....	50
3.6	EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO PARA ELEMENTO DE PÓRTICO HOMOGÊNEO .....	52
3.6.1	Viga engastada com carga concentrada e pequenos deslocamentos .....	52
3.6.2	Viga engastada com carga e momento concentrados e grandes deslocamentos .....	53
<b>4</b>	<b>ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO LAMINADO .....</b>	<b>58</b>
4.1	COMPÓSITO LAMINADO .....	59
4.1.1	Teoria dos Laminados .....	60
4.2	ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO LAMINADO UTILIZANDO VETORES GENERALIZADOS.....	62
4.2.1	Função de mudança de configuração .....	63

4.2.2	Enriquecimento em formato de zigue-zague.....	65
4.2.3	Particularidades do elemento laminado.....	67
4.3	EXEMPLO PARA VALIDAÇÃO DO ELEMENTO DE PÓRTICO LAMINADO .....	67
4.3.1	Viga engastada .....	67
4.3.2	Viga esbelta biapoiada.....	70
4.3.3	Viga com disposição similar de concreto armado.....	74
<b>5</b>	<b>DANIFICAÇÃO ASSOCIADA À CORROSÃO POR CARBONATAÇÃO.....</b>	<b>76</b>
5.1	MECÂNICA DO DANO .....	76
5.1.1	Modelo de Dano de Mazars .....	76
5.1.2	Validação do modelo numérico aplicando Dano de Mazars.....	80
5.2	CORROSÃO.....	84
5.2.1	Corrosão por carbonatação .....	87
5.2.2	Exemplos de validação .....	97
<b>6</b>	<b>PROBABILIDADE DE FALHA DEVIDO À CORROSÃO.....</b>	<b>101</b>
6.1	PROBABILIDADE DE FALHA .....	102
6.2	SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO .....	104
6.3	AMOSTRAGEM .....	105
6.4	CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE FALHA.....	109
6.4.1	Despassivação - Período de iniciação .....	109
6.4.2	Fissuração - Período de propagação .....	116
6.4.3	Falha quanto à deformação excessiva - Período de propagação .....	120
6.5	DISCUSSÃO .....	127
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>130</b>
7.1	SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS .....	132
<b>8</b>	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>133</b>





# 1 INTRODUÇÃO

As estruturas são pensadas e projetadas para serem duráveis, resistentes, estáveis e terem o menor custo. Dentre os métodos construtivos, o concreto armado é comumente utilizado mundialmente por possuir diversas qualidades, como: resistência mecânica satisfatória, maleabilidade para construir em diversas formas geométricas e uma boa durabilidade. No entanto, é um material suscetível a manifestações patológicas, sendo que uma de suas principais causas de deterioração é a corrosão, de acordo com Rodrigues *et al.* (2021) e Apostolopoulos e Papadakis (2008).

Helene (1993) aponta a corrosão como uma das manifestações patológicas mais incidentes junto com a fissuração e deformações excessivas, e ela recebe destaque devido à sua gravidade e implicações na segurança estrutural quando comparada com outros agentes causadores de manifestações patológicas como sobrecarga, gradiente térmico e detalhes construtivos.

Tendo em vista a importância deste assunto para a sociedade, várias linhas de pesquisa são desenvolvidas no meio acadêmico; por exemplo, estudos numéricos e experimentais para analisar: variáveis que influenciam na corrosão (AL-HARTHY, STEWART e MULLARD., 2011; BEZUIDENHOUT e VAN ZIJL, 2019; PARROTT, 1990), reabilitação de estruturas afetadas (ELGHAZY, 2018; PANTAZOPOULOU *et al.*, 2001), produtos que impedem este processo (LIU *et al.* 2020; THOMAS, GUPTA e PANICKER, 2016), análise do comportamento de estruturas em processo de corrosão (GRAEFF, 2007; OHTSU e YOSIMURA, 1997; TUUTTI, 1982), entre outros.

A corrosão é um tipo de deterioração proveniente de reações químicas ou eletroquímicas em materiais metálicos. No concreto armado, segundo Parrott (1990), o ambiente alcalino do concreto e a camada protetora de óxidos na superfície do aço quimicamente estável funcionam como uma barreira contra a corrosão. Esta barreira, no entanto, pode ser quebrada através da carbonatação ou pela ação de cloretos, desencadeando o processo de deterioração. A corrosão se manifesta, de acordo com Helene (1993) e conforme apresenta a Figura 1, a partir da formação de fissuras, destacamento do concreto de cobertura, redução da área de aço das armaduras, surgimento de manchas decorrentes dos produtos da corrosão, perda de aderência das armaduras e conseqüentemente comprometimento da segurança estrutural.

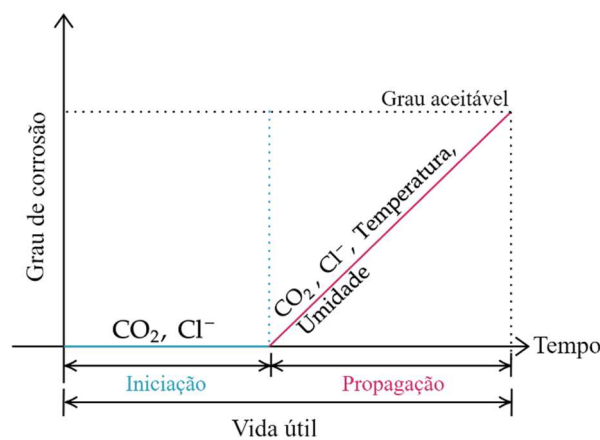
Figura 1 - Corrosão atuando em um pilar causando destacamento do cobrimento e exposição da armadura.



Fonte: Autora

Segundo Tuutti (1982), o processo de corrosão pode ser dividido em duas etapas: iniciação e propagação, conforme Figura 2, que relaciona a vida útil da estrutura com o processo de corrosão. No presente trabalho, serão estudados ambos os períodos, com foco na propagação.

Figura 2 - Vida útil da estrutura em relação ao processo de corrosão



Fonte: Adaptado de Tuutti (1982)

A vida útil, mencionada na Figura 2, pode ser definida como sendo o “período de tempo durante o qual se mantêm as características das estruturas de concreto, sem intervenções significativas, desde que atendidos os requisitos de uso e manutenção prescritos pelo projetista e pelo construtor, bem como de execução dos reparos necessários decorrentes de danos acidentais”, conforme ABNT NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014). A vida útil total pode ser modelada abrangendo o estado limite último, que é relacionado ao colapso ou esgotamento da capacidade resistente da estrutura (fim do estágio

de propagação); e estado limite de serviço, que descreve as condições normais de uso e exigências de funcionalidade (ainda dentro da etapa de propagação) (GOMES, 2010).

O período de iniciação ocorre desde a concepção da estrutura até a despassivação. Após esse processo entra-se na propagação, formando-se os produtos de corrosão que se acumulam no entorno das barras de armadura. Com a formação desses produtos há a alteração da interface entre o aço e o concreto, redução da área da seção do aço e geração de tensões de tração no concreto maiores do que a resistência do material, levando ao surgimento de fissuras. Essas fissuras aumentam a penetração de agentes agressivos da superfície do concreto para a armadura, acelerando o processo de corrosão e causando destacamento do concreto de cobertura. O concreto e o aço são danificados nesse processo, diminuindo a durabilidade de forma acelerada. Para reduzir os custos relacionados à reabilitação e manutenção, é necessário um entendimento adequado sobre a vida útil dessa estrutura corroída e como é o seu comportamento (GRAEFF, 2007; HELENE, 1993; OHTSU e YOSIMURA, 1997).

Ambas as etapas de corrosão são dependentes de parâmetros difíceis de serem determinados e sujeitos a uma série de incertezas, como temperatura, umidade e concentração de dióxido de carbono ou de cloretos, e é de suma importância entender estes fenômenos para evitar problemas estruturais graves como a ruína. O tempo de corrosão pode ser estimado através da teoria da confiabilidade, por meio de uma análise probabilística onde os parâmetros relevantes são considerados como variáveis aleatórias, processos estocásticos ou campos estocásticos. Desta forma, obtém-se a confiabilidade – ou seja, a probabilidade que o sistema não falhe em um espaço de tempo determinado, dentro das condições de operação e projeto para o qual foi projetado – por exemplo por meio de simulações de Monte Carlo (SMC) (BECK, 1999; BECK, 2019; COELHO, 2017).

Os danos gerados na estrutura pela corrosão, associados à necessidade atual de aproveitamento de espaço, que motiva a utilização de estruturas cada vez mais flexíveis e esbeltas, fazem com que o problema esteja fortemente relacionado a um comportamento não linear das estruturas. Em uma estrutura quase-estática, os comportamentos não lineares predominantes são provenientes da não linearidade geométrica, relacionada ao equilíbrio na posição deformada da estrutura; e da não linearidade física, representada pelas relações constitutivas não lineares dos materiais (BECHO, 2020).

A não linearidade geométrica é considerada naturalmente por meio do emprego da formulação numérica do Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP), que utiliza como

variáveis as posições dos nós em vez dos deslocamentos nodais, como é usualmente considerado em problemas de corpos deformáveis. Este método é baseado no princípio da mínima energia mecânica total. Neste trabalho, será utilizada a formulação Lagrangiana total, que possui um referencial fixo como a posição inicial do corpo. (CODA e GRECO, 2004; LIBERATI, 2014; MACIEL, 2008).

A formulação numérica deve contemplar também a heterogeneidade transversal do concreto armado para aproximar-se da realidade no problema, o que pode ser feito através da implementação da formulação de compósito laminado (BERNARDO, 2021; NOGUEIRA, 2015).

A não linearidade física do concreto será contemplada através da mecânica do dano, que segundo Álvares (1993), consegue formular modelos realísticos para o caso do concreto. Nesse procedimento a estrutura ainda é avaliada no contínuo, porém é possível analisar o comportamento mecânico do material e sua degradação produzida pela evolução de cavidades e microfissuras. Nesse trabalho será utilizado o modelo de dano de Mazars, que pode ser encontrado na literatura como um dos mais simples, porém com bons resultados como mostram os trabalhos de Álvares (1993), Li (2003), Liberati (2014) e Ramos (2020).

Desta forma, este trabalho tem por objetivo modelar o comportamento de uma estrutura composta por elementos de pórtico laminado, em processo de corrosão uniforme causado por carbonatação, fazendo uso do modelo de dano de Mazars para representar a degradação do concreto. Empregando a teoria de probabilidade por meio da confiabilidade estrutural, a vida útil da estrutura será determinada por meio de simulações de Monte Carlo, com base nos estados limites de deformação excessiva da NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014).

## 1.1 Justificativa

A corrosão é uma das manifestações patológicas mais comuns de ser encontrada nas estruturas de concreto armado e traz implicações financeiras e sociais. O impacto financeiro da corrosão é demonstrado na Tabela 1, que descreve como os gastos com reparo e manutenção em estruturas são altos, por vezes chegando a serem até maiores do que o custo de novas construções em alguns países; e na Figura 3, que relaciona os gastos da corrosão a outros problemas enfrentados pelos Estados Unidos. De acordo com a *World Corrosion Organization*,

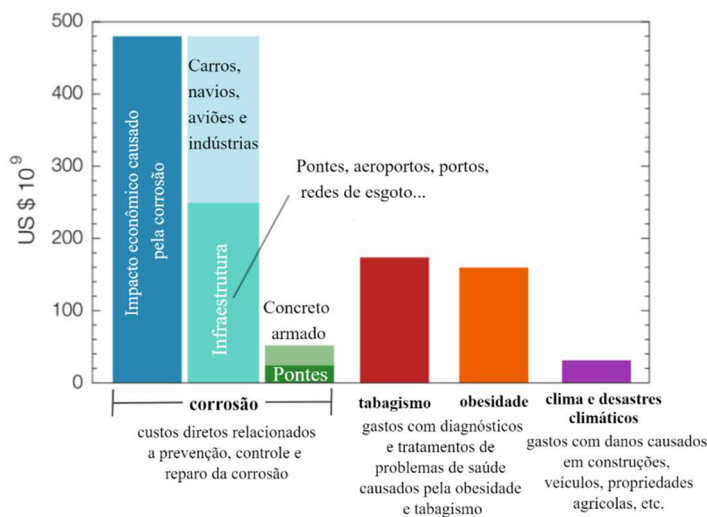
a corrosão proporciona um gasto anual de aproximadamente 2,2 trilhões de dólares mundialmente.

Tabela 1 - Custo comparativo entre novas construções e manutenção e reparo para alguns países.

País	Custo de novas estruturas	Custo com reparo e manutenção	Custo Total
Japão	52,5 Trilhões Iene (83%)	10,7 Trilhões Iene (17%)	63,2 Trilhões Iene (100%)
Coreia do Sul	116,8 trilhões Won (85%)	21,1 trilhões Won (15%)	137,9 trilhões Won (100%)
França	85,6 bilhões Euro (52%)	79,6 bilhões Euro (48%)	165,2 bilhões Euro (100%)
Alemanha	99,7 bilhões Euro (50%)	99,0 bilhões Euro (50%)	198,7 bilhões Euro (100%)
Itália	58,6 bilhões Euro (43%)	76,8 bilhões Euro (57%)	135,4 bilhões Euro (100%)
Inglaterra	60,7 bilhões Libra Esterlina (50%)	61,2 bilhões Libra Esterlina (50%)	121,9 bilhões Libra Esterlina (100%)

Fonte: Adaptado de Ueda e Takewaka (2007)

Figura 3 - Comparativo dos custos diretos entre os problemas enfrentados nos Estados Unidos com relação a corrosão.



Fonte: Adaptado de Angst (2018)

A corrosão impacta não apenas economicamente, mas também socialmente. No Brasil, pode-se listar alguns fatores que contribuem para o impacto na vida dos usuários da estrutura, como demonstram os itens a) e b) e as figuras Figura 4 e Figura 5 abaixo:

- a) O dano gerado pela corrosão aumenta com o tempo. Porém, como no Brasil cada estado e cidade possuem diferentes frequências de realização de inspeção e

fiscalização de edificações em concreto armado, é improvável que a corrosão seja identificada em seu estado inicial, o que faz com que os eventuais gastos com reparos sejam maiores e produz insalubridade e riscos para os usuários da estrutura;

- b) Segundo a agência câmara de notícias (informação do Tribunal de Contas da União), nos dados de 2018 existem 14.408 obras públicas paradas, muitas das quais provavelmente estão em processo de corrosão e com outras patologias que podem afetar a população no entorno.

Figura 4 - Desabamento de uma varanda devido à corrosão.

### Oxidação causou desabamento de varanda de prédio, segundo laudo

Desabamento de laje do edifício ocorreu no último dia 2 de março. Estrutura de sustentação estava oxidada e sem manutenção, diz conselho.



Fonte: G1 Ceará (2015)

Figura 5 - Desabamento de uma ponte com uma das causas sendo a corrosão.

### Projetista da ponte que desabou na Itália alertou sobre risco de corrosão em 1979

Relatório datado de 12 anos depois da construção da ponte pedia 'manutenção constante' contra a ferrugem causada por poluição e maresia.

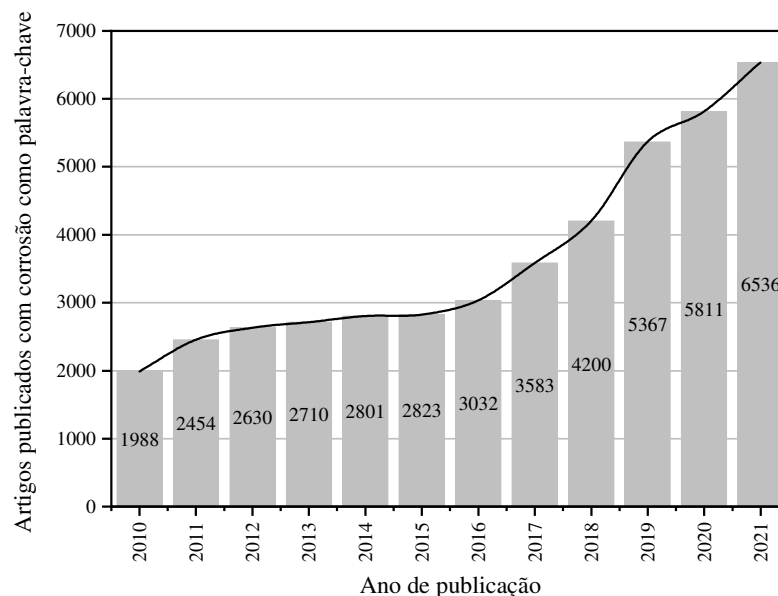


Fonte: G1 Mundo (2018)

Diante da importância do assunto, os estudos relacionados à corrosão têm se tornado cada vez mais relevantes e comuns, conforme exibido na Figura 6, que mostra os artigos elaborados entre 2010 e 2021 dentro das áreas de pesquisa de engenharia, física, química ou ciência de materiais e que possuem a corrosão como uma das palavras-chave do autor, nos idiomas inglês e português<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Estudo realizado através da plataforma Web of Science. Acesso em: novembro de 2022

Figura 6 - Crescimento do número de publicações relacionadas à corrosão



Fonte: Elaborado pela autora baseado na plataforma Web of Science<sup>2</sup>.

Um dos fatores relacionados ao aumento do interesse por pesquisas nesta área no Brasil foi a inserção da pauta da durabilidade de estruturas, inicialmente introduzida na NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2003) e posteriormente reforçada na norma de desempenho, NBR 15575 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2013), enfatizando na sua vida útil, e na atual NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014), que trata do desempenho em serviço, qualidade, durabilidade e capacidade resistente de estruturas de concreto.

Alguns fatores podem contribuir para esse aumento nas pesquisas e preocupações nas normas:

- a) Aumento da concentração de dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ), que é um dos fatores externos que contribui para corrosão. Um estudo realizado por Stewart, Wang e Nguyen (2011) projetou que para o ano de 2100, com a alteração das condições climáticas e concentração de ( $\text{CO}_2$ ), poderá acontecer aumento em regiões na Austrália de até 400% em riscos gerados pela carbonatação;
- b) Bastidas-Arteaga *et al.* (2013) estudaram a influência do aquecimento global nas estruturas sujeitas a corrosão, e concluíram que os seus efeitos podem reduzir

<sup>2</sup> Estudo realizado através da plataforma Web of Science. Acesso em: novembro de 2022

- em 31% o tempo de falha ou diminuir em 15 anos a vida útil para níveis moderados de corrosão;
- c) A busca por estruturas cada vez mais flexíveis devido a necessidade de aproveitamento de espaço e a exigência de executar a obra em um tempo reduzido, gerando falhas nos processos construtivos como no cobrimento;
  - d) A existência de uma extensa faixa litorânea no Brasil que sofre com ataques de cloretos que podem causar corrosão;
  - e) Stefanoni, Angst e Elsener (2018) apontam que futuramente a redução na utilização de clínquer nos cimentos, devido a necessidade de utilizar materiais que deixam menos marcas ambientais (*environmental footprint*), resultará na diminuição do pH do concreto que atua na inibição da corrosão, tornando as estruturas de concreto armado mais suscetível a corrosão.

## 1.2 Objetivos

Nos subtópicos a seguir são apresentados os objetivos gerais e específicos deste trabalho.

### 1.2.1 Objetivo geral

O presente trabalho tem como objetivo geral aliar uma análise probabilística pautada pela teoria da confiabilidade estrutural ao desenvolvimento de um código fundamentado no método dos elementos finitos posicional (MEFP) para determinar a probabilidade de falha de uma estrutura sob corrosão uniforme causada por carbonatação.

### 1.2.2 Objetivos específicos

- ❖ Desenvolver um código em linguagem FORTRAN baseado no MEFP, empregando elementos finitos do tipo pórtico plano composto por vetores generalizados e por posições nodais;
- ❖ Expandir essa formulação para consideração de elementos de pórtico laminado, para a consideração do material compósito;
- ❖ Aplicar na formulação o modelo de dano de Mazars para considerar a não linearidade física do concreto;
- ❖ Agregar e implementar no código anterior um modelo representativo, na fase de propagação, do processo de corrosão uniforme de armaduras;

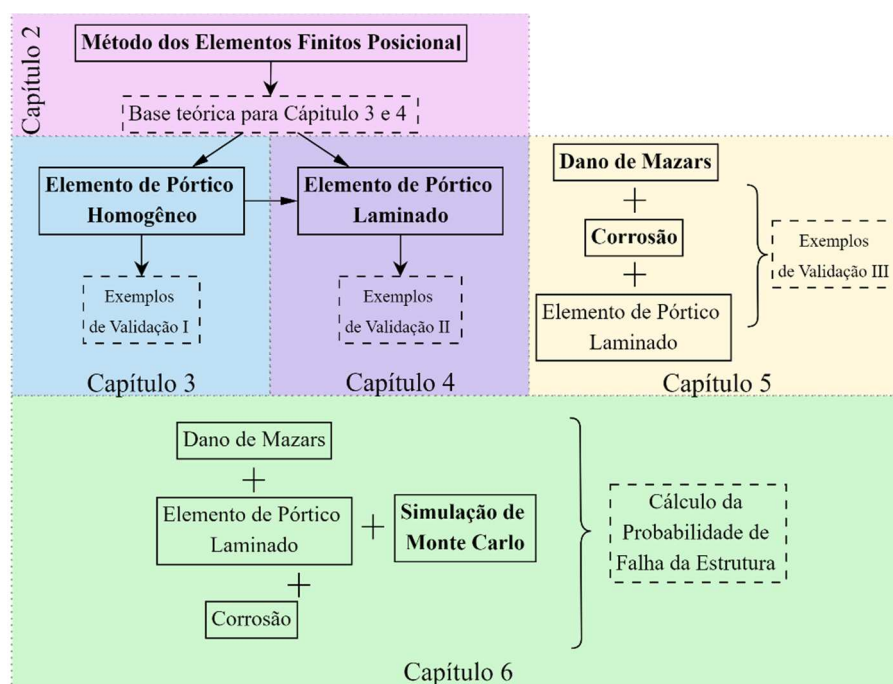


- ❖ Realizar uma análise da probabilidade de falha durante o período de iniciação e propagação da corrosão, por meio de simulações de Monte Carlo.

### 1.3 Organização do texto

O trabalho foi organizado conforme mostra a Figura 7. Cada capítulo foi pensado como uma etapa pré-definida para alcançar o objetivo de calcular a probabilidade de falha da estrutura corroída. Para isso, cada capítulo contém a teoria necessária para o desenvolvimento e validação do código referente ao tema proposto no mesmo. À medida que o trabalho se desenvolve os assuntos se agrupam para o cálculo final da probabilidade de falha que possui o modelo numérico laminado, dano de Mazars aplicado ao concreto, corrosão e o estudo de confiabilidade. Dessa maneira será possível mostrar cada etapa separadamente validada e justificada pela literatura, e é viabilizada a replicação dos resultados

Figura 7 - Organização da Dissertação



Fonte: Elaborado pela autora

### 1.4 Metodologia

O trabalho iniciou-se com um embasamento teórico nos tópicos: mecânica não linear do contínuo, métodos numéricos e análise não linear de estruturas, com o objetivo de obter maior compreensão sobre os códigos computacionais e conseguir avaliar os resultados obtidos.

Grande parte do conhecimento foi obtido através de disciplinas cursadas no Departamento de Engenharia de Estruturas (SET), na Escola de Engenharia de São Carlos (USP).

A fim de desenvolver uma probabilidade de falha, através de corrosão por carbonatação, com uso de um código computacional baseado no MEFP na linguagem FORTRAN, o projeto foi desenvolvido em algumas etapas:

- i) A **revisão bibliográfica** foi feita com dois objetivos: fundamentação teórica sobre os temas de corrosão por carbonatação, MEF posicional, confiabilidade e mecânica do dano, e estudo de formulações disponíveis para a realização deste estudo;
- ii) Após a conclusão das disciplinas teóricas e com a revisão bibliográfica em andamento, foi possível ter base para primeiramente implementar computacionalmente um programa baseado em **MEF posicional para elementos tipo pórtico homogêneo** composto por vetores generalizados, na linguagem de FORTRAN. O código então foi validado para problemas de vigas com diversos tipos de carregamento. A base do método foi desenvolvida na disciplina de Introdução à Dinâmica Não Linear de Estruturas Reticuladas Bidimensionais - Uma abordagem Energética Baseada no Método dos Elementos Finitos, ministrada pelo professor titular Humberto Breves Coda e oferecida pelo departamento de Engenharia de Estruturas (SET/EESC). Posteriormente foi implementado o **elemento de pórtico laminado com teoria Zigue-Zague** e validado com um problema de viga;
- iii) Inseriu-se na formulação o **modelo de dano de Mazars**, que introduz um parâmetro de dano (D) para representar a degradação do concreto causado pela micro fissuração e cavidades do material. Esse passo também foi validado com problemas de viga;
- iv) Como a degradação da corrosão acontece em toda a estrutura, além da não-linearidade física, foi necessário implementar um **modelo representativo de corrosão uniforme**, manifestada como uma perda da área de aço;
- v) Após ter validado todas as etapas numéricas foram realizadas as **simulações de Monte Carlo** para obter a probabilidade de falha da estrutura.

## 2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL

O Método dos Elementos Finitos (MEF) foi desenvolvido inicialmente por Courant (1943), porém a expressão “elementos finitos” só foi utilizada em Clough (1960) e, desde então, seu uso tem crescido mundialmente. Esse método utiliza da divisão do domínio de integração, contínuo, em um número determinado e limitado de elementos finitos (subdomínios) e é uma alternativa para resolver equações diferenciais relacionadas a problemas físicos que envolvem geometrias complexas (ABE, 2019; ASSAN, 2020; BERNARDO, 2021).

O método dos elementos finitos posicional provém do MEF e foi iniciado por Bonet *et al.* (2000) e Coda e Greco (2004). Seu desenvolvimento tem mostrado precisão e fácil entendimento e está sendo utilizado e evoluído no Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos. Pode ser encontrado, por exemplo, em trabalhos para elementos bidimensionais: elemento de barra (GRECO *et al.* 2006; CARRAZEDO e CODA, 2010), elemento tipo chapa (FELIX, 2018; TAVARES, 2020), elemento de pórtico (CODA e GRECO, 2004; CODA e PACCOLA, 2014), entre outros. Além da sua utilização em vários tipos de elementos, este método também está sendo aplicado em diversos domínios da engenharia como: formulação de fluidos incompressíveis newtonianos (AVANCINI e SANCHES, 2020, interação fluido estrutura (MOREIRA, 2021); corrosão em estruturas de concreto armado (RAMOS e CARRAZEDO; 2020), biomecânica através da análise de músculos esqueléticos (RAMIREZ, 2018), análise de colapso estrutural (SOARES, 2021), entre outros.

Na análise estrutural é normal e preferível adotar soluções mais simples e de menor custo computacional, por isso é usual adotar um comportamento linear geométrico e físico, ou seja, utilizar as hipóteses de pequenos deslocamentos e comportamento linear de tensão-deformação. Dessa forma, a estrutura pode ser solucionada através de equações lineares de equilíbrio. Porém nem sempre essas hipóteses podem ser empregadas, devido ao objetivo do estudo e aos erros que podem ser tolerados. A não linearidade se torna necessária, por exemplo, em estudos de estruturas que sofreram algum dano ou falha, ou que estão sendo analisadas em seu estado limite último, ou no estudo de estabilidade, ou simulação do real comportamento do material (NOGUEIRA, 2015; REDDY, 2014).

Nos problemas não lineares geométricos não existem limitações para mudanças na geometria, ou seja, é necessário que a análise estrutural seja feita com relação a configuração

deformada. Para representar o referencial adotado, existem duas representações possíveis de serem utilizadas: a Euleriana e a Lagrangiana. Esta última é dividida em Lagrangiana total, atualizada e parcialmente atualizada. As formulações baseadas na descrição Euleriana tem como referencial a configuração atual do corpo, sendo bastante empregadas na mecânica dos fluidos. Na formulação Lagrangiana total, é considerado um referencial fixo que é a posição inicial do corpo; enquanto na Lagrangiana atualizada a posição do corpo atual passa a ser o referencial, independentemente da aplicação de uma carga - em um processo iterativo, para cada iteração atualiza-se a referência; e na parcialmente atualizada o referencial é modificado quando há incrementos de carga (CODA, 2018; MACIEL, 2008).

Há diversas formulações baseadas no MEF para análise de problemas de não linearidade geométrica. Uma destas é o Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP), mencionado anteriormente, com referencial Lagrangiano total. Este método parte da determinação de uma função de mudança de configuração que descreve a transição de uma configuração inicial fixa para uma configuração de equilíbrio atual. O diferencial desta formulação em comparação com o MEF clássico é a utilização das posições como incógnitas ao invés dos deslocamentos. As posições nodais são determinadas a partir do princípio da estacionariedade da energia potencial total; deste processo surgem equações não lineares, que são geradas na imposição da nulidade da primeira variação do funcional da energia total, e podem ser solucionadas aplicando o processo iterativo de Newton-Raphson. Nesse método, a não linearidade geométrica é trabalhada naturalmente, pois é utilizada a deformação de Green, que é uma medida de deformação objetiva que pode ser utilizada para grandes deslocamentos (CODA, 2018; NOGUEIRA, 2015)

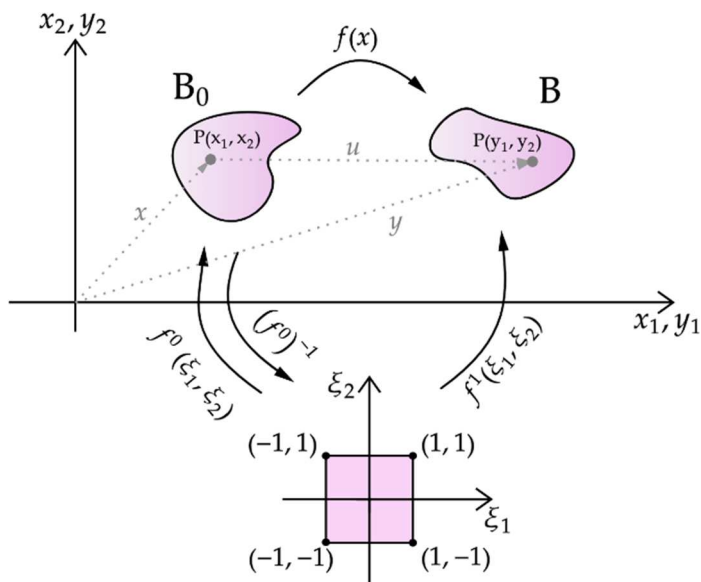
Nesse capítulo será apresentado o conceito brevemente de forma geral e posteriormente, nos próximos dois capítulos, será dado mais um aprofundamento nos temas necessários. O embasamento desse processo de solução utilizando MEF Posicional provém dos seguintes trabalhos: Becho (2020), Bernardo (2021), Coda (2018), Coda e Greco (2004), Coda e Paccola (2010), Félix (2018), Maciel (2008), Nogueira (2015).

## 2.1 Função mudança de configuração

A função de mudança de configuração ( $f(x)$ ) retrata a relação das coordenadas de um sólido deformável qualquer em seu estado atual ( $B$ ) com as suas correspondentes coordenadas no estado inicial ( $B_0$ ), conforme Figura 8. Adotando o referencial inicial, essa função mapeia

as mudanças das posições dos pontos, possibilitando a obtenção da configuração deformada do corpo com base nas posições de referência que são as do sólido indeformado.

Figura 8 - Função de mapeamento e gradiente de mudança de configuração



Fonte: Adaptado de Coda (2018)

A  $f(x)$  pode ser obtida por meio de uma composição de funções entre o mapeamento da configuração atual ( $f^1(\xi_1, \xi_2)$ ) e a inversa do mapeamento da configuração inicial ( $f^0(\xi_1, \xi_2)$ ). Estes mapeamentos são definidos a partir de um sistema de coordenadas paramétrico adimensional  $(\xi_1, \xi_2)$ , em que  $f^0(\xi_1, \xi_2) = \{x_1(\xi_1, \xi_2), x_2(\xi_1, \xi_2)\}$ ,  $f^1(\xi_1, \xi_2) = \{y_1(\xi_1, \xi_2), y_2(\xi_1, \xi_2)\}$  e  $x$  e  $y$  são as posições iniciais e atuais do corpo, respectivamente. Estas funções de mapeamento serão apresentadas nos capítulos subsequentes para elemento de pórtico e para elemento de pórtico laminado.

A função mudança de configuração e seu gradiente ( $\text{Grad}(\vec{f}) = A$ ) são fundamentais para determinação das deformações e, conseqüentemente, para a construção dos modelos constitutivos que serão abordados no próximo subtópico.

O  $\text{Grad}(\vec{f})$  pode ser calculado por meio do gradiente atual  $A^1(\xi_1, \xi_2)$  e da inversa do gradiente inicial  $A^0(\xi_1, \xi_2)$ . O gradiente inicial  $A^0$  e final  $A^1$  são calculados a partir das expressões do mapeamento posicional escolhido na definição do elemento finito:

$$A_{ij}^0 = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} = x_{i,j} \quad ; \quad A_{ij}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} = y_{i,j} \quad (2.1)$$

## 2.2 Medida de deformação e lei constitutiva

No âmbito da mecânica das estruturas, existem diversos modelos distintos de tensões e deformações, podendo ser menos ou mais adequados a depender das características da análise que se deseja realizar. A deformação linear de engenharia, por exemplo, é empregada quando se tem pequenos deslocamentos e deformações, pois é uma medida não objetiva, ou seja, quando a estrutura apresenta apenas movimento de corpo rígido seus valores não são nulos. Diferentemente da deformação de engenharia, a deformação de Green-Lagrange é objetiva, e, portanto, é uma alternativa adequada para problemas com grandes deslocamentos e rotações.

A medida de deformação utilizada nas formulações desenvolvidas neste trabalho é a de Green-Lagrange ( $\mathbb{E}$ ), que é derivada diretamente do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green ( $C$ ), que por sua vez depende do gradiente da função mudança de configuração.

Para entender essa deformação parte-se do conceito base  $d\vec{y}$  e  $d\vec{x}$ . Ao consideramos o corpo em sua configuração inicial e dois pontos vizinhos,  $(x_1, x_2)$  e  $(x_1^0, x_2^0)$ , separados infinitesimalmente. A posição relativa destes dois pontos é conhecida por  $d\vec{x}$  em sua posição inicial e  $d\vec{y}$  em sua posição final. A relação entre  $d\vec{y}$  e  $d\vec{x}$  pode ser estabelecida através do gradiente da função mudança de configuração:

$$d\vec{y} = A \cdot d\vec{x} \quad (2.2)$$

Utilizando conceitos de cálculo vetorial aplicados à Equação 2.2 em conjunto com a Equação 2.3, é possível descrever o tensor da deformação de Green na Equação 2.4.

$$C = A^t \cdot A = (A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} \quad (2.3)$$

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}(C - I) \quad (2.4)$$

O tensor de deformação de Green ( $\mathbb{E}$ ) tem como conjugado energético o tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie ( $\mathbb{S}$ ) e  $I$  é o tensor identidade de ordem dois. Essa relação é definida pela lei constitutiva do material. Neste trabalho é adotado o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff (SVK), que se caracteriza por ser um modelo simples, uma relação linear entre  $\mathbb{S}$  e  $\mathbb{E}$ , que pode ser expresso generalizadamente por:

$$\mathbb{S} = \mathbb{C} : \mathbb{E} \quad (2.5)$$

$\mathfrak{C}$  é o tensor constitutivo elástico de quarta ordem, que possui 21 termos independentes para materiais anisotrópicos gerais, conforme Equação 2.6.

$$\mathfrak{C} = \frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathbb{E} \otimes \partial \mathbb{E}} \quad (2.6)$$

Finalmente, a expressão generalizada da energia específica de deformação ( $u_e$ ) por SVK é conhecida por:

$$u_e(\mathbb{E}) = \frac{1}{2} \mathbb{E} : \mathfrak{C} : \mathbb{E} \quad (2.7)$$

Para estado plano de deformações (EPD) em que  $\mathbb{E}_{13} = \mathbb{E}_{31} = \mathbb{E}_{23} = \mathbb{E}_{32} = \mathbb{E}_{33} = 0$ , a solução de  $u_e$  é definida na Equação 2.8. No estado plano de tensões (EPT) em que  $\mathbb{S}_{13} = \mathbb{S}_{31} = \mathbb{S}_{23} = \mathbb{S}_{32} = \mathbb{S}_{33} = 0$   $u_e$  é calculado conforme Equação 2.9.

$$u_e = \frac{G}{1-2\nu} \{(1-\nu)(\mathbb{E}_{11}^2 + \mathbb{E}_{22}^2) + 2\nu\mathbb{E}_{11}\mathbb{E}_{22} + (1-2\nu)(\mathbb{E}_{12}^2 + \mathbb{E}_{21}^2)\} \quad (2.8)$$

$$u_e = \frac{G}{1-\nu} \{\mathbb{E}_{11}^2 + \mathbb{E}_{22}^2 + 2\nu\mathbb{E}_{11}\mathbb{E}_{22} + (1-\nu)(\mathbb{E}_{12}^2 + \mathbb{E}_{21}^2)\} \quad (2.9)$$

em que  $G$  é o módulo de elasticidade transversal e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Vale-se dizer que, apesar de  $\mathbb{S}$  ser usualmente empregado na mecânica computacional, esta tensão não tem um sentido físico em termos de força de superfície. No entanto a Equação 2.10 apresenta uma relação matemática entre  $\mathbb{S}$  e o tensor de tensões de Cauchy ( $\sigma$ ), que tem interpretação física do estado do sólido deformado.

$$\mathbb{S} = J(A^{-1} \cdot \sigma \cdot A^{-t})^t = J \quad (2.10)$$

### 2.3 Energia mecânica total

A fim de encontrar as incógnitas do problema do MEF posicional é necessário aplicar as equações de equilíbrio que, nesse trabalho, são expressas a partir do princípio da estacionariedade da energia total. Este princípio afirma que o equilíbrio mecânico de uma estrutura ou sólido acontece quando a variação do potencial de energia mecânica é nula.

A energia mecânica total ( $\Pi$ ) é composta por três parcelas: o potencial das forças externas ( $\mathbb{P}$ ), a energia de deformação ( $\mathbb{U}$ ) e energia cinética ( $\mathbb{K}$ ), e pode ser expressa de acordo com a Equação 2.11.

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{K} \quad (2.11)$$

No presente trabalho, as estruturas serão analisadas em caráter estritamente estático, ou seja, será desconsiderada a parcela referente a energia cinética.

A variação da energia mecânica no ponto de equilíbrio é nula, conforme a Equação 2.12.

$$\delta\Pi = \delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{U} = 0 \quad (2.12)$$

A energia mecânica pode ser calculada em função de várias variáveis expressas, por exemplo, pelo vetor  $\vec{Y}$ . No caso de barra geral a variável é apenas a posição final. Logo a variação da energia mecânica no equilíbrio, ou seja, o princípio da estacionariedade é calculado conforme:

$$\delta\Pi = \frac{\delta\Pi}{\delta\vec{Y}} \delta\vec{Y} = 0 \quad (2.13)$$

ou

$$\frac{\delta\Pi}{\delta\vec{Y}} = \frac{\delta\mathbb{P}}{\delta\vec{Y}} + \frac{\delta\mathbb{U}}{\delta\vec{Y}} = 0 \quad (2.14)$$

Vale ressaltar que a segunda derivada da energia mecânica em relação a  $\vec{Y}$  é igual a matriz Hessiana ( $\mathbb{H}$ ), ou matriz de rigidez tangente. Quando há equilíbrio essa matriz é positiva e definida.

A energia potencial das deformações é obtida a partir da energia específica de deformação no volume inicial do corpo ( $V_0$ ), conforme Equação 2.15.

$$\mathbb{U} = \int_{V_0} u_e dV_0 \quad (2.15)$$

No cálculo da energia potencial das forças externas admite-se que forças são conservativas, ou seja, independem da posição ocupada no espaço ou da trajetória de equilíbrio estudada. Essas forças podem ser concentradas ( $\vec{F}$ ), e distribuídas em parte da superfície ( $\vec{q}_0$ ) e do volume ( $\vec{b}_0$ ). O cálculo de  $\mathbb{P}$  é apresentado na Equação 2.16, em que  $S_0$  é a superfície inicial.



$$\mathbb{P} = -\vec{F} \cdot \vec{Y} - \int_{S_0} \vec{q}_0 \cdot \vec{Y} dS_0 - \int_{V_0} \vec{b}_0 \cdot \vec{Y} dV_0 \quad (2.16)$$

Como as incógnitas no MEFP são as posições, a derivada da energia de deformação em relação as posições é a força interna ( $\vec{F}^{int}$ ). Define-se o conjugado energético força/posição como:

$$\vec{F}^{int} = \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \vec{Y}} \quad (2.17)$$

A Equação 2.14 pode ser reescrita em função da igualdade entre a força interna e a externa ( $\vec{F}^{ext}$ ) atuando no corpo.

$$\frac{\delta \mathbb{P}}{\delta \vec{Y}} + \frac{\delta \mathbb{U}}{\delta \vec{Y}} = \vec{F}^{int} - \vec{F}^{ext} = 0 \quad (2.18)$$

Cada parcela da equação de energia mecânica total para problemas estáticos será abordada nos próximos capítulos para os elementos de pórtico homogêneo e laminado.

## 2.4 Processo de Solução

Através do princípio da energia potencial total estacionária é obtido um sistema de equações não lineares para encontrar as incógnitas. Esse sistema é resolvido, nesse trabalho, por meio do processo de Newton-Raphson. Esse método consiste em um processo incremental-iterativo com variação controlada de incrementos de força ou deslocamentos prescritos e uma solução iterativa do sistema de equações não lineares para cada incremento.

A partir da condição de equilíbrio necessária, apresentada na Equação 2.12, estabelece-se um vetor de desbalanceamento mecânico ( $g_i$ ) que é nulo se for satisfeito o equilíbrio na Equação 2.19.

$$g_i = \frac{\delta \Pi}{\delta Y_i} = \frac{\delta \mathbb{P}}{\delta Y_i} + \frac{\delta \mathbb{U}(Y_k)}{\delta Y_i} = -F_i^{ext} + F_i^{int}(Y_k) = 0_i \quad (2.19)$$

Para ser satisfeito o equilíbrio, determinam-se as raízes para o sistema de equações não lineares, caracterizadas pelo vetor  $g_i$ . Esse vetor é calculado a partir do processo de Newton-Raphson. Neste método escolhe-se primeiro uma solução arbitrária  $\vec{x}_0$  para um sistema  $\vec{g}(\vec{x})$  que seja próximo da resposta real. Na sequência, esse valor pode ser aprimorado através da equação de recorrência:

$$\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k = \Delta \vec{x}_k = \left( \frac{\partial \vec{g}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \Big|_{\vec{x}_k} \right)^{-1} \cdot \vec{g}(\vec{x}_k) \quad (2.20)$$

Dessa forma, a resposta se torna mais próxima da realidade possível, dependendo apenas de um critério de parada pré-estabelecido.

Expandindo-se  $g_i$  na vizinhança da posição tentativa  $Y_k^t$  através da série de Taylor e desprezando os termos de ordem superior ( $O_i^2$ ), resulta-se na Equação 2.21:

$$g_i(Y_k^{t+1}) = g_i(Y_k^t) + \frac{\partial g_i}{\partial Y_j} \Big|_{Y_k^t} \Delta Y_j + O_i^2 = - \frac{\partial g_i}{\partial Y_j} \Big|_{Y_k^t} \Delta Y_j = - \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y_i \partial Y_j} \Big|_{Y_k^t} \Delta Y_j = \mathbb{H}_{ij} \Delta Y_j \quad (2.21)$$

em que  $\Delta Y_j$  é a correção da posição,  $\mathbb{H}$  é a hessiana ou matriz de rigidez tangente (como já foi mencionado anteriormente). A solução tentativa é melhorada através de  $\Delta Y_j$  conforme Equação 2.22.

$$Y_j^{t+1} = Y_j^t + \Delta Y_j \quad (2.22)$$

Este processo de cálculo da Hessiana e da correção da posição é realizado até alcançar o critério de parada pré-estabelecido.

## 2.5 Integração numérica

A estacionariedade da energia potencial total, Equação 2.13, é escrita na forma de diversas integrais de domínio e superfície, em sua versão lagrangiana expandida. Essas integrais provenientes da energia de deformação e potencial das forças externas são resolvidas por meio de integração numérica, como a quadratura de Gauss. Este método de integração numérica utiliza de pontos de domínio ponderados por pesos para aproximar a operação de uma integral genérica de uma função qualquer  $F(\vec{x})$  sob volume inicial  $V_0$  através de um somatório, conforme Equação 2.23:

$$\begin{aligned} \int_{V_0} F(\vec{x}) dV_0 &= \int_{\xi_1}^{\xi_1} \int_{\xi_2}^{\xi_2} F(\vec{x}(\xi_1, \xi_2)) TJ_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \sum_{ig=1}^{ng_{\xi_1}} \sum_{jg=1}^{ng_{\xi_2}} F(\vec{x}(\xi_1, \xi_2)) TJ_0(\xi_1, \xi_2) w_{ig} w_{jg} \end{aligned} \quad (2.23)$$

em que  $\vec{\xi}_i$  é o vetor de coordenadas adimensionais no ponto de integração  $i$ ,  $w_{ig}$  e  $w_{jg}$  são os pesos correspondentes a cada ponto de integração,  $T$  é a espessura e  $J_0$  é o jacobiano e  $ng_{\xi_1}$  e  $ng_{\xi_2}$  são o número de pontos de Gauss na direção  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , respectivamente.

### 3 ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO HOMOGÊNEO

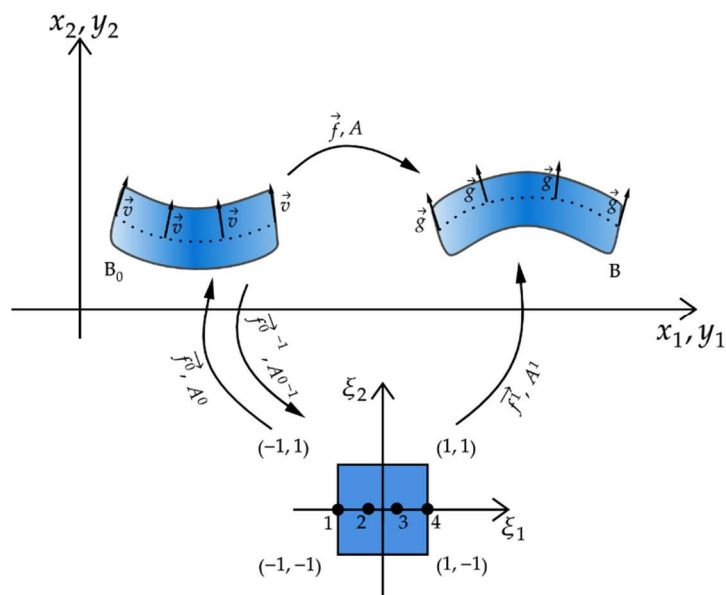
Os próximos tópicos deste capítulo abordam detalhadamente o processo de solução de estruturas bidimensionais, focando no elemento de pórtico homogêneo utilizando vetor generalizado como grau de liberdade, através da análise não linear empregando o MEFP, com base nos conceitos discutidos no Capítulo 2.

O embasamento desse processo de solução provém dos seguintes trabalhos: Becho (2020), Bernardo (2021), Coda (2018), Coda e Paccola (2010), Maciel (2008), Nogueira (2015).

#### 3.1 Função mudança de configuração

Para o elemento finito de pórtico, utilizando vetor generalizado como grau de liberdade (apresentado na Figura 9 como  $\vec{v}$  na configuração inicial e  $\vec{g}$  na atual), o mapeamento é feito a partir da interpolação das posições e dos vetores generalizados posicionados em uma linha de referência. Estes vetores generalizados definem o giro e a variação da altura na seção transversal e são unitários e normais à linha de referência na configuração inicial, e são calculados inicialmente através do vetor tangente.

Figura 9 - Função de mapeamento e gradiente de mudança de configuração para elemento de pórtico homogêneo



Fonte: Adaptado de Coda, Paccola e Carrazedo (2017)

A representação das posições iniciais ( $x_i^m$ ) e atuais ( $y_i^m$ ) interpoladas é feita por curvas aproximadas por polinômios de ordem cúbica:

$$x_i^m = \phi_\ell(\xi_1)X_i^{\ell m} \quad (3.1)$$

$$y_i^m = \phi_\ell(\xi_1)Y_i^{\ell m} \quad (3.2)$$

em que  $X$  e  $Y$  são as posições iniciais e finais, respectivamente, para cada nó  $\ell$ ;  $i$  representa a direção (1 ou 2) da coordenada;  $m$  denota que estas coordenadas se referem aos pontos na linha média do elemento; e  $\phi$  é a função de forma do nó  $\ell$  em função da variável adimensional  $\xi_1$ , que varia entre -1 e 1.

As funções de forma ( $\phi$ ) são artifícios matemáticos para simplificar a interpolação de valores. As  $\phi_\ell$ , para ordem cúbica, são definidas nas Equações 3.3 a 3.6, e foram utilizadas as coordenadas  $\xi_1 = \{-1, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, 1\}$ .

$$\phi_1 = -\frac{1}{16} + \frac{\xi_1}{16} + \frac{9\xi_1^2}{16} - \frac{9\xi_1^3}{16} \quad (3.3)$$

$$\phi_2 = \frac{9}{16} - \frac{27\xi_1}{16} - \frac{9\xi_1^2}{16} + \frac{27\xi_1^3}{16} \quad (3.4)$$

$$\phi_3 = \frac{9}{16} + \frac{27\xi_1}{16} - \frac{9\xi_1^2}{16} - \frac{27\xi_1^3}{16} \quad (3.5)$$

$$\phi_4 = -\frac{1}{16} - \frac{\xi_1}{16} + \frac{9\xi_1^2}{16} + \frac{9\xi_1^3}{16} \quad (3.6)$$

Com o auxílio das curvas de referência e dos vetores generalizados, é possível descrever o mapeamento inicial em função das coordenadas adimensionais ( $f_i^0(\xi_1, \xi_2)$ ),

$$f_i^0(\xi_1, \xi_2) = x_i = \phi_\ell(\xi_1)X_i^\ell + \frac{h_0}{2}\xi_2\phi_\ell(\xi_1)v_i^\ell \quad (3.7)$$

em que  $h_0$  é a altura da seção transversal; e  $v_i^\ell$  é o versor normal que define a direção e o sentido da face para o nó  $\ell$ , definido a partir dos vetores nodais tangentes à linha de referência ( $t_i^\ell$ ) determinados a partir da Equação 3.8 a seguir:

$$t_i^\ell = \left. \frac{d\phi_\ell(\xi_1)}{d\xi_1} \right|_{\xi_\ell} x_e^i \quad (3.8)$$

sendo  $\xi_\ell$  a coordenada  $\xi_1$  para o nó  $\ell$ ; e  $x_e^i$  a posição inicial na direção  $i$  no nó  $e$  (que varia de 1 a 4). Devido à nulidade do produto escalar, as componentes do versor normal ( $v_i^\ell$ ) são calculadas conforme Equação 3.9, tal que  $J(\xi_{(\ell)})$  é o módulo do vetor tangente nodal com  $\xi_1 = \xi_{(\ell)}$  e é determinado de acordo com a Equação 3.10:

$$v_1^\ell = \frac{-t_l^2}{J(\xi_1)} \quad v_2^\ell = \frac{-t_l^1}{J(\xi_1)} \quad (3.9)$$

$$J(\xi_1) = \sqrt{(t^1(\xi_1))^2 + (t^2(\xi_1))^2} \quad (3.10)$$

No mapeamento da configuração atual, as posições e os vetores generalizados relacionados aos nós são as incógnitas que passam a ser conhecidas na forma de tentativa no problema não linear. A função do mapeamento da configuração atual é definida na Equação 3.11, diferindo da Equação 3.7 quanto à posição atual ( $Y_i^\ell$ ) e ao vetor generalizado ( $g_i^\ell$ ), indicado na Figura 9.

$$f_i^1(\xi_1, \xi_2) = y_i = \phi_\ell(\xi_1)Y_i^\ell + \frac{h_0}{2}\xi_2\phi_\ell(\xi_1)g_i^\ell \quad (3.11)$$

Semelhantemente ao mapeamento da configuração inicial definido na Equação 3.7, a primeira e a segunda parcela da Equação 3.11 definem as posições na linha de referência e a posição na seção transversal, respectivamente, na configuração atual.

O vetor  $g$  não possui nem restrições quanto a sua ortogonalidade com relação à linha de referência nem quanto ao módulo, definindo uma cinemática mais geral que a de Reissner-Timoshenko. Além de considerar os efeitos de cisalhamento na análise do elemento, o vetor permite a alteração da altura da seção transversal para cada nó. Essa nova altura é definida na Equação 3.12:

$$h = h_0 \|g_\ell\| \quad (3.12)$$

Para a conexão entre os dois domínios, inicial e atual, é necessário calcular os gradientes das funções mudança de configuração inicial ( $A_{ij}^0$ ) e atual ( $A_{ij}^1$ ), que, no caso bidimensional, são duas matrizes 2x2 definidas pelas Equações 3.13 e 3.14.

$$A_{ij}^0 = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} \quad (3.13)$$

$$A_{ij}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} \quad (3.14)$$

Para o elemento de pórtico, o gradiente da função de mapeamento inicial e atual é determinado por meio das seguintes equações para cada ponto de integração:

$$A^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{\ell,1} X_1^\ell + \frac{h_0}{2} \xi_2 \phi_{\ell,1} v_1^\ell & \frac{h_0}{2} \phi_{\ell} v_1^\ell \\ \phi_{\ell,1} X_2^\ell + \frac{h_0}{2} \xi_2 \phi_{\ell,1} v_2^\ell & \frac{h_0}{2} \phi_{\ell} v_2^\ell \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$A^1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{\ell,1} Y_1^\ell + \frac{h_0}{2} \xi_2 \phi_{\ell,1} g_1^\ell & \frac{h_0}{2} \phi_{\ell} g_1^\ell \\ \phi_{\ell,1} Y_2^\ell + \frac{h_0}{2} \xi_2 \phi_{\ell,1} g_2^\ell & \frac{h_0}{2} \phi_{\ell} g_2^\ell \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

### 3.2 Medida de deformação e lei constitutiva

A energia específica de Saint-Venant-Kirchhoff para o estado plano de deformações (EPD) e para o estado plano de tensões (EPT) é descrita nas Equações 3.17 e 3.18, respectivamente (já mostradas no capítulo anterior).

$$u_e = \frac{E}{2} [(\mathbb{E}_{11}^2 + \mathbb{E}_{22}^2) + (\mathbb{E}_{12}^2 + \mathbb{E}_{21}^2)] \quad (3.17)$$

$$u_e = \frac{G}{(1-\nu)} [\mathbb{E}_{11}^2 + \mathbb{E}_{22}^2 + 2\nu \mathbb{E}_{11} \mathbb{E}_{22} + (1-\nu)(\mathbb{E}_{12}^2 + \mathbb{E}_{21}^2)] \quad (3.18)$$

em que  $\mathbb{E}_{ij}$  é a deformação de Green;  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal;  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $G$  é o módulo de elasticidade transversal, dado pela Equação 3.19:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.19)$$

A primeira derivada da energia específica de deformação em relação às deformações de Green (Equação 3.20) é a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie ( $\mathbb{S}$ ), conforme Equações 3.21 para EPD e 3.22 para EPT.

$$\mathbb{S} = \frac{\partial u_e}{\partial \mathbb{E}} \quad (3.20)$$

$$\mathbb{S}_{EPD} = E \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{11} & \mathbb{E}_{12} \\ \mathbb{E}_{21} & \mathbb{E}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbb{S}_{EPT} = \begin{bmatrix} \frac{2G}{(1-\nu)} (\mathbb{E}_{11} + \nu \mathbb{E}_{22}) & 2G \mathbb{E}_{12} \\ 2G \mathbb{E}_{21} & \frac{2G}{(1-\nu)} (\mathbb{E}_{22} + \nu \mathbb{E}_{11}) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

### 3.3 Energia mecânica total

Como a energia cinética não será considerada nesse trabalho, os tópicos a seguir tratam sobre o potencial das forças externas ( $\mathbb{P}$ ) e a energia de deformação ( $\mathbb{U}$ ) para o elemento de pórtico homogêneo.

#### 3.3.1 Energia potencial das forças externas

Parte-se do pressuposto que as forças são conservativas, ou seja, que o seu sentido e intensidade não dependem da configuração da estrutura. O cálculo da energia potencial das forças externas leva em consideração as cargas concentradas e distribuídas em um elemento de pórtico plano como:

$$\mathbb{P} = -F_i^\ell Y_i^\ell - \int_{-1}^1 q_i(\xi_1) y_i^m(\xi_1) J_0^{(m)}(\xi_1) d\xi_1 \quad (3.23)$$

em que a primeira parcela refere-se a  $F_i^\ell$ , que é a força concentrada na direção  $i$  do nó  $\ell$ ; e a segunda parcela está associada ao valor de carga  $q_i(\xi_1)$  distribuída pelo elemento em função da variável  $\xi_1$ , a qual, pode ser descrita através da interpolação dos seus valores nodais como  $\phi_\ell(\xi_1) Q_i^\ell$ .  $Q_i^\ell$  são os valores conhecidos nos nós  $\ell$  do carregamento aplicado;  $y_i^m(\xi_1)$  representa a linha de referência do elemento na configuração atual; e  $J_0^{(m)}$  é o jacobiano da transformação da coordenada adimensional  $\xi$  para a linha média:

$$J_0^m = \sqrt{x_{1,\xi_1}^2 + x_{2,\xi_1}^2} \quad (3.24)$$

Em relação às posições nodais:

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_i^\ell} = -F_i^\ell - \int_{-1}^1 (\phi_\ell(\xi_1) Q_i^\ell) \phi_\ell J_0^m(\xi_1) d\xi_1 \quad (3.25)$$

Além da aplicação das forças externas através de cargas concentradas e distribuídas, também é possível considerar a imposição de momentos concentrados. Quando há aplicação de momentos externos  $M$  nos nós  $\ell$  de um elemento, adicionam-se os seguintes termos:



$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial g_1^\ell} = -M^\ell g_2^{(\ell)} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial g_2^\ell} = M^\ell g_1^{(\ell)} \quad (3.27)$$

Uma observação é que o momento é considerado conservativo, ou seja, mantém valor e sentido conforme mudança de configuração.

### 3.3.2 Energia de deformação da estrutura

Em uma estrutura sujeita a ações externas, e considerando que não há dissipação, ocorre o armazenamento de energia durante sua mudança de configuração. Essa energia de deformação total da estrutura  $\mathbb{U}$  pode ser definida como a soma das energias de deformação  $U_e$  armazenada em cada elemento, a qual é definida pela integral da energia de deformação específica  $u_e$  em um volume inicial de referência  $V_0$  do elemento:

$$U_e = \int_{V_0} u_e dV_0 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_e(\xi_1, \xi_2) J_0(\xi_1, \xi_2) T d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.28)$$

onde  $u_e$  é a energia de deformação específica em cada elemento e  $T$  é a espessura do elemento. Valendo-se da integração numérica de Gauss, de acordo com Equação 2.23, segue que:

$$U_e = \sum_{ig=1}^{ng_{\xi_1}} \sum_{jg=1}^{ng_{\xi_2}} u_e(\xi_{1ig}, \xi_{2jg}) w_{ig} w_{jg} T J_0(\xi_{1ig}, \xi_{2jg}) \quad (3.29)$$

em que  $w$  e  $\xi$  são os pesos e coordenadas de Gauss, respectivamente. Para aproximação cúbica, o número de pontos de Gauss é  $ng_{\xi_1} = 4$  na direção longitudinal e para a integração da direção transversal foi considerado  $ng_{\xi_2} = 3$ ; o jacobiano  $J_0$  é dado pelo determinante de  $A^0$ .

A derivada da energia de deformação em relação aos parâmetros nodais pode ser calculada conforme Equação 3.30:

$$\frac{\partial U_e}{\partial \vec{Y}} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial \mathbb{E}} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \vec{Y}} dV_0 = \int_{V_0} \mathbb{S} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \vec{Y}} dV_0 \quad (3.30)$$

Na expressão acima a derivada da energia específica de deformação com respeito à deformação de Green ( $\mathbb{E}$ ) resulta na tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie ( $\mathbb{S}$ ), conforme indicado na Equação 3.20; e a operação  $\partial \mathbb{E} / \partial \vec{Y}$  pode ser expressa por:

$$\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \left\{ (A^0)^{-t} \cdot \left( \frac{\partial A^1}{\partial Y_{\alpha\beta}} \right)^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot \frac{\partial A^1}{\partial Y_{\alpha\beta}} \cdot (A^0)^{-1} \right\} \quad (3.31)$$

Em tempo,  $Y_{\alpha\beta}$  é a posição atual do elemento para nó  $\alpha$  e grau de liberdade  $\beta$ .

### 3.4 Particularidades do elemento de pórtico na energia potencial total e equações de equilíbrio

Em um modelo discreto, é necessário somar as contribuições de cada elemento para modelar uma estrutura. Para facilitar a contribuição de cada um dos elementos finitos na energia potencial total, Equação 2.11, será feita uma relação entre a posição e o vetor generalizado com o vetor  $y$  em cada nó conforme:

$$\begin{cases} y_{i=1}^{\ell} \text{ (grau de liberdade 1 do nó } \ell) \\ y_{i=2}^{\ell} \text{ (grau de liberdade 2 do nó } \ell) \\ y_{i=3}^{\ell} \text{ (grau de liberdade 3 do nó } \ell) \rightarrow g_1^{\ell} \\ y_{i=4}^{\ell} \text{ (grau de liberdade 4 do nó } \ell) \rightarrow g_2^{\ell} \end{cases} \quad (3.32)$$

onde  $\ell$  identifica o nó (de 1 a 4) e  $i$  representa os graus de liberdade, tal que, 1 e 2 são referentes as posições; e 3 e 4 representam as componentes  $g_1$  e  $g_2$  do vetor generalizado.

Fazendo uso dessa notação, o vetor posição local  $y_i^{\ell}$  do elemento finito passa a apresentar dezesseis graus de liberdade. A regra para a localização do grau de liberdade é determinada conforme:

$$y_i^{\ell} = 4(\ell - 1) + i \quad (3.33)$$

Uma expressão similar à Equação 3.33 será utilizada, também, para definir os vetores de forças internas  $F_{int\ell}^i$  e externas  $F_{ext\ell}^i$  do elemento em que  $i$  assume o valor de 1 ou 2 para representar as forças nodais atuantes nas direções globais 1 e 2, e o valor de 3 e 4 para os conjugados energéticos das componentes do vetor generalizado.

Partindo da visão local para a global, onde mais de um elemento pode contribuir em um mesmo nó, é necessário montar vetores globais de posição e de forças. Nos vetores globais o nó  $\ell$  que antes era referido ao nó local de 1 a 4 passa a ser definido pelo nó global inserido na definição da malha da estrutura de 1 ao número de nós da discretização.

Como a força interna é conjugada energética da posição ou do deslocamento ( $u$ ), tem-se:

$$F^{int} = \frac{dU}{dY} = \frac{dU}{du} \quad (3.34)$$

Utilizando a quadratura de Gauss conforme Equação 2.23, define-se o vetor de forças internas como:

$$F_i^\ell = \frac{\partial U_e}{\partial Y_i^\ell} = \sum_{ig=1}^{ng_{\xi_1}} \sum_{jg=1}^{ng_{\xi_2}} \frac{\partial u_e}{\partial Y_i^\ell} (\xi_{1ig} \xi_{2jg}) w_{ig} w_{jg} T J_0 (\xi_{1ig}, \xi_{2jg}) \quad (3.35)$$

em que a derivada da energia específica de deformação ( $u_e$ ) em relação a posição atual ( $Y_i^\ell$ ) já foi definida nas Equações 3.30 e 3.31.

### 3.5 Processo de solução

A equação de equilíbrio, Equação 2.13, pode ser reescrita considerando todos os valores nodais incógnitos no vetor  $Y$ :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Y}} \partial \vec{Y} = \left( \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \vec{Y}} \right) \partial \vec{Y} = 0 \quad (3.36)$$

A equação acima passa a ser escrita utilizando o método de Newton-Raphson, conforme discutido no Tópico 2.4:

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \vec{Y}} = \vec{g}(\vec{Y}) = \vec{0} \quad (3.37)$$

$$g = F^{int} - F^{ext} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \vec{g}(\vec{Y})}{\partial \vec{Y}} = \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y}} + \mathbb{O} = \mathbb{H} \quad (3.39)$$

sendo  $\mathbb{O}$  uma matriz nula proveniente de  $\mathbb{P}$  onde as cargas são conservativas; e  $\mathbb{H}$  é denominada matriz Hessiana global, ou de rigidez tangente, que decorre da contribuição de cada elemento.

$$\mathbb{H}^{elem} = \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} \left( \int_{V_0} S: \frac{\partial E}{\partial \vec{Y}} dV_0 \right) = \int_{V_0} \left( \frac{\partial S}{\partial \vec{Y}}: \frac{\partial E}{\partial \vec{Y}} + S: \frac{\partial^2 E}{\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y}} \right) dV_0 \quad (3.40)$$

$$\mathbb{H}_{\alpha\beta\gamma\omega}^{elem} = \int_{V_0} \left( \frac{\partial S}{\partial Y_\gamma^\omega}: \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + S: \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^\omega \partial Y_\alpha^\beta} \right) dV_0 \quad (3.41)$$

em que  $\alpha$  e  $\gamma$  correspondem ao nó de 1 a 4, e  $\beta$  e  $\omega$  ao grau de liberdade de 1 a 4.

O processo iterativo consiste em obter uma correção da posição  $\Delta\vec{Y}$ , calculada através da Hessiana e vetor de desbalanceamento mecânico  $\vec{g}(\vec{Y})$  por:

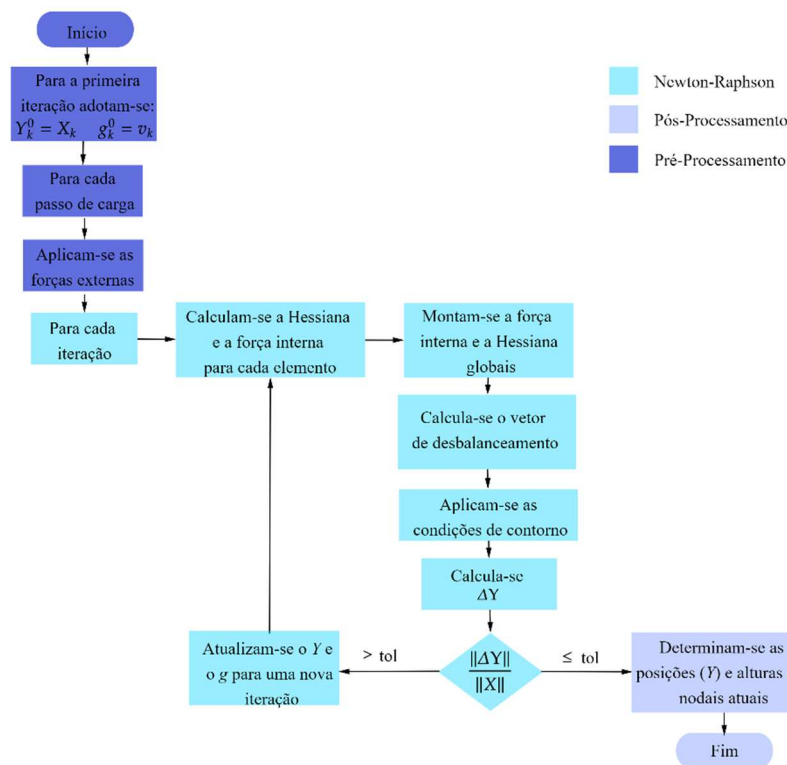
$$\Delta\vec{Y} = -\mathbb{H}^{-1} \vec{g}(\vec{Y}) \quad (3.42)$$

Na primeira tentativa, utiliza-se a posição atual  $Y$  igual à inicial  $X$  e o vetor generalizado  $g$  equivalente ao versor normal inicial  $v$ . O critério de parada do processo iterativo, definido a partir de uma tolerância (tol) arbitrária, é estabelecido em função da problemática, considerando como critério apenas a convergência das posições.

$$\frac{\|\Delta\vec{Y}\|}{\|\vec{X}\|} < \text{tol} \quad (3.43)$$

A Figura 10 apresenta um fluxograma que descreve o código para análise estrutural utilizando elementos de pórtico através do MEFP, desenvolvido na linguagem FORTRAN.

Figura 10 - Algoritmo baseado em MEFP para modelagem de elemento de pórtico aplicado na linguagem FORTRAN



Fonte: Elaborado pela autora

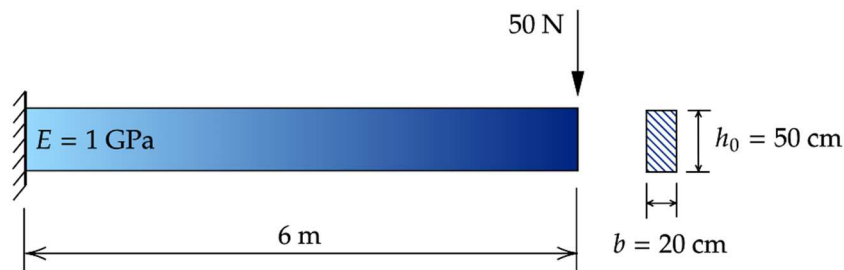
### 3.6 Exemplos de validação para elemento de pórtico homogêneo

Nos subtópicos a seguir são apresentados exemplos de validação do MEF posicional utilizando elemento de pórtico homogêneo para estruturas de viga sob diversos tipos de carregamento.

#### 3.6.1 Viga engastada com carga concentrada e pequenos deslocamentos

O primeiro exemplo foi realizado para pequenos deslocamentos em uma viga engastada com extremidade livre, conforme Figura 11, discretizada em 2 elementos de pórtico iguais com 3 m de comprimento cada. Ademais, a carga de 50 N foi aplicada em 10 passos de 5 N, e considerou-se uma tolerância de  $10^{-6}$ . O coeficiente de Poisson é assumido  $\nu = 0$ .

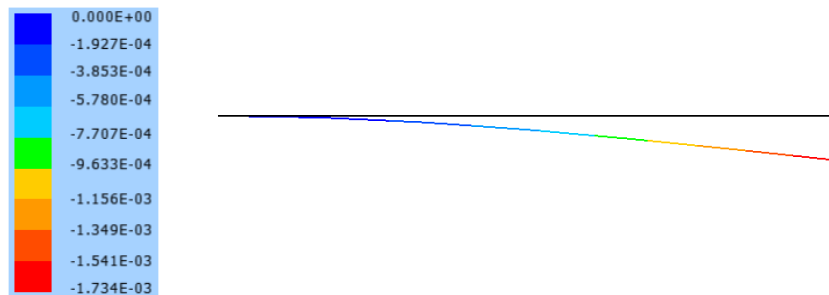
Figura 11 - Viga engastada com pequenos deslocamentos



Fonte: Elaborado pela autora.

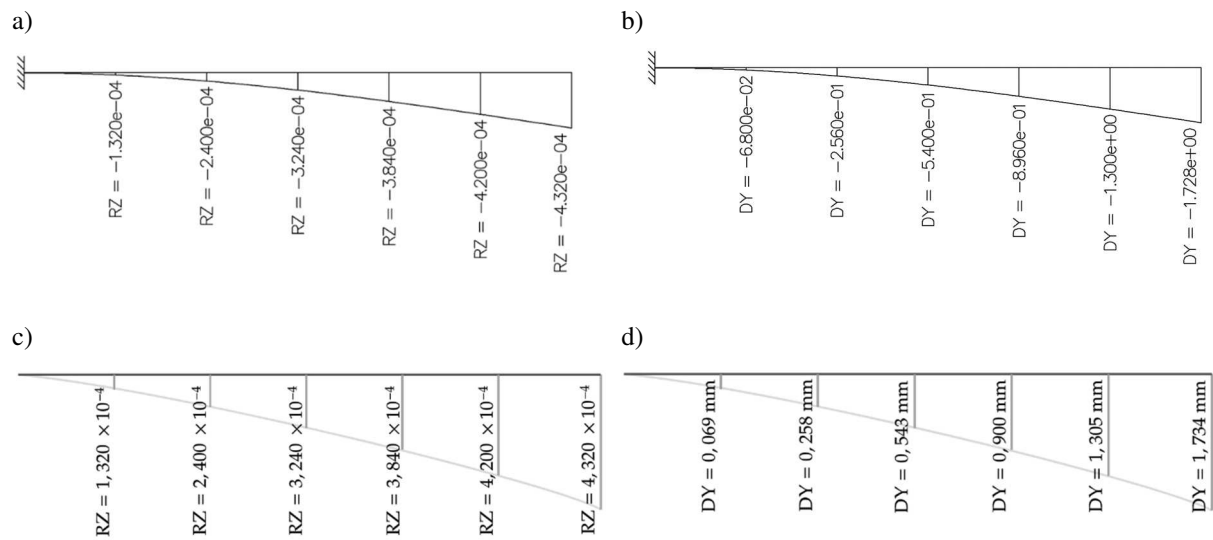
Posteriormente os resultados de deslocamento (Figura 12) e rotação foram comparados com o resultado gerado pelo programa *FTool*, conforme Figura 13 e Tabela 2.

Figura 12 - Resultado do deslocamento vertical (em m) gerado pelo programa em MEFP



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 13 - Resultados do processamento da viga com pequenos deslocamentos quanto à rotação (rad) no a) *Ftool* e no c) código em MEFP e deslocamento vertical (mm) no b) *Ftool* e no d) código em MEFP



Fonte: Elaborado pela autora.

Tabela 2 - Comparativo dos resultados gerados pelo *Ftool* e pelo programa em MEFP

	MEFP	<i>Ftool</i>
Deslocamento na extremidade livre	1,734 mm	1,728 mm
Rotação na extremidade livre	$4,32 \cdot 10^{-4}$ rad	$4,32 \cdot 10^{-4}$ rad

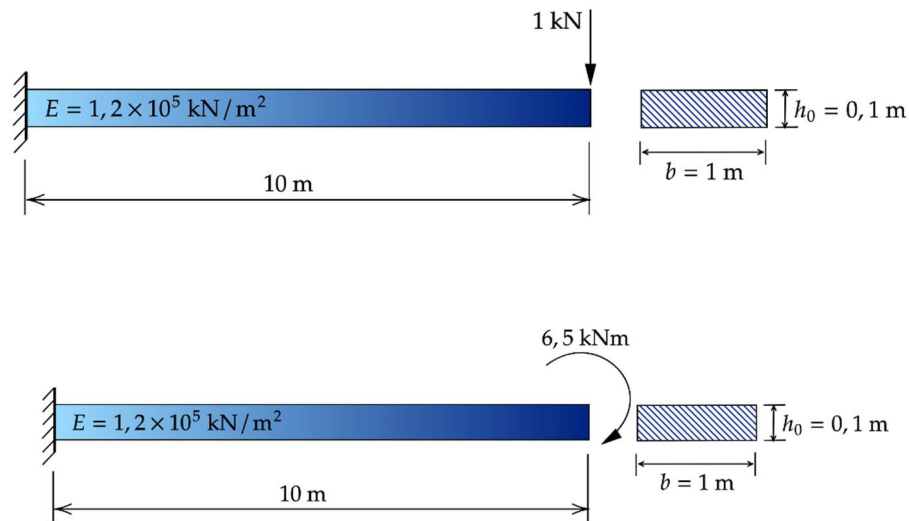
Fonte: Elaborado pela autora.

Através da comparação feita acima é possível concluir que, para análise linear, o programa desenvolvido em MEFP consegue reproduzir o comportamento da estrutura ao longo de todo seu comprimento.

### 3.6.2 Viga engastada com carga e momento concentrados e grandes deslocamentos

Neste segundo exemplo, foi modelada uma viga fina engastada solicitada por uma força concentrada e um momento aplicado na sua extremidade livre, conforme mostrado na Figura 14. O carregamento foi aplicado em 10 incrementos iguais, e adotou-se um coeficiente de Poisson igual a zero. Considerou-se uma tolerância de  $10^{-9}$ , e a estrutura foi discretizada em 1, 4 e 16 elementos finitos.

Figura 14 - Viga engastada com grandes deslocamentos

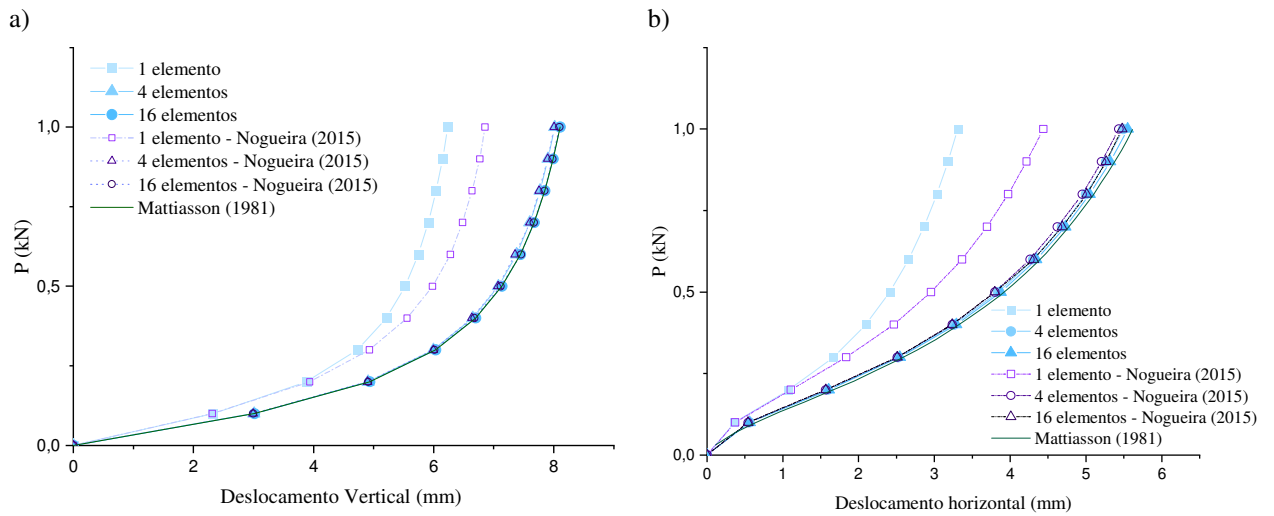


Fonte: Elaborado pela autora.

Em seguida os resultados de deslocamento obtidos na extremidade livre foram comparados com a solução obtida por Hsiao (1987), Mattiasson (1981) e Nogueira (2015). Devido à esbeltez da viga, é esperado que a estrutura sofra grandes deslocamentos e rotações, de modo que a análise linear geométrica realizada no *Ftool* não é mais adequada

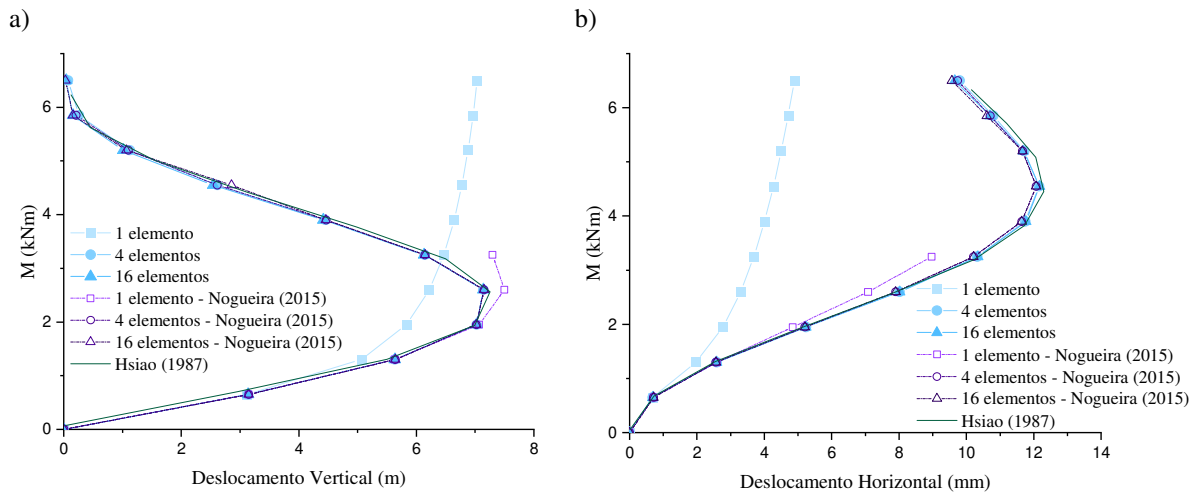
A Figura 15 e Figura 16 apresentam a trajetória de equilíbrio quanto à força e ao momento, respectivamente, as quais são plotadas em conjunto com os resultados dos trabalhos de referência na literatura para cada passo de carga a fim de validar os resultados.

Figura 15 - Trajetória de equilíbrio para a viga com força concentrada quanto ao: a) deslocamento vertical e b) deslocamento horizontal da extremidade



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 16 - Trajetória de equilíbrio para a viga com momento aplicado quanto ao: a) deslocamento vertical e b) deslocamento horizontal da extremidade



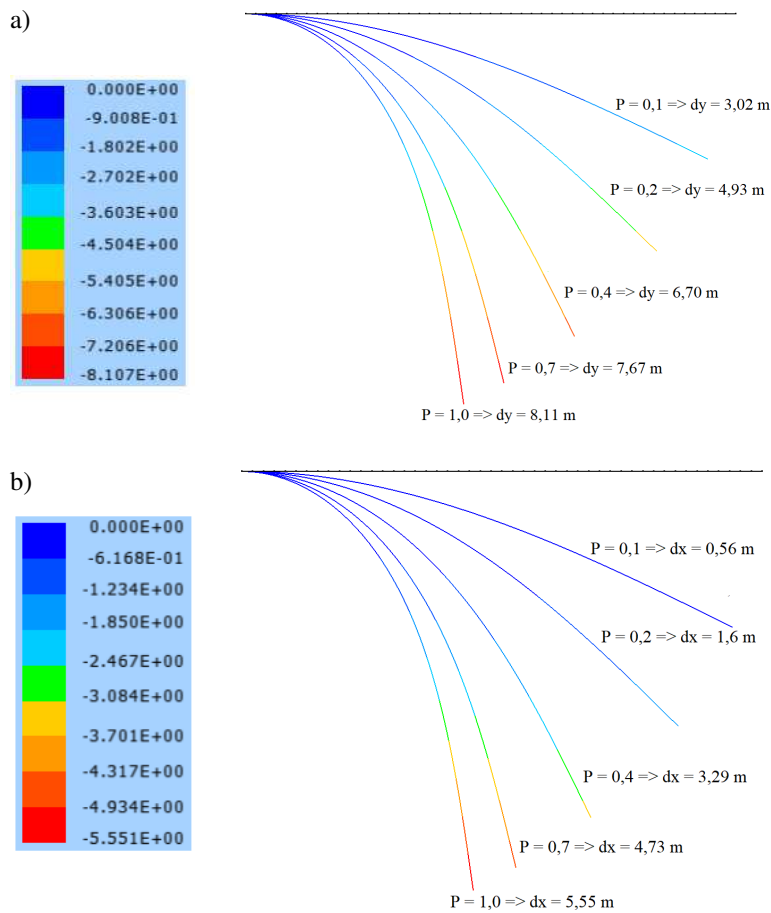
Fonte: Elaborado pela autora.

Obteve-se uma concordância com os resultados quando comparados com os trabalhos de referência, exceto para a discretização com um único elemento. Isto se deve ao fato de um elemento não conseguir, neste caso, representar o comportamento da estrutura. Conclui-se assim que o programa em MEFP está adequado para análise não linear geométrica com aplicação de forças concentradas e momentos.



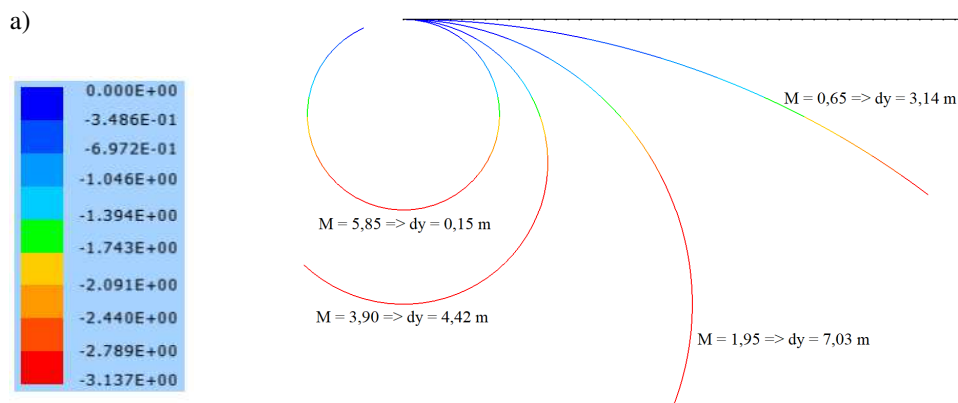
As configurações deformadas da viga com aplicação de carga concentrada e momento na extremidade são apresentadas na Figura 17 e na Figura 18, respectivamente, para alguns passos de carga. As imagens foram geradas no *software* de pós-processamento AcadView.

Figura 17 - Deslocamento a) vertical e b) horizontal (em m) calculados através do MEFP da viga com força concentrada aplicada na extremidade

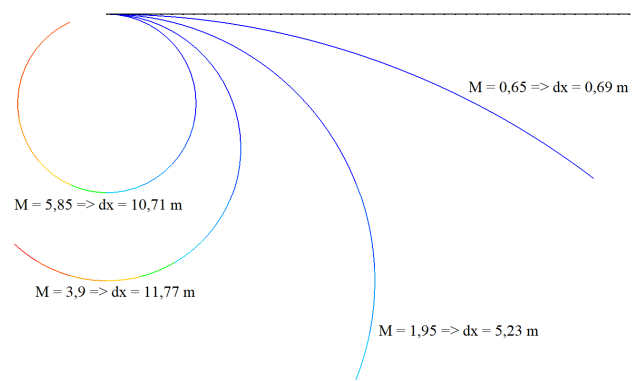
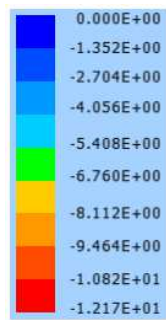


Fonte: Elaborado pela autora

Figura 18 - Deslocamento a) vertical e b) horizontal (em m) calculados através do MEFP da viga com momento aplicado na extremidade



b)



Fonte: Elaborado pela autora

## 4 ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO LAMINADO

O material compósito, segundo Reddy (2004), é definido como a união de dois ou mais materiais que juntos produzem propriedades almeçadas que não podem ser alcançadas por nenhum desses materiais caso utilizados sozinhos. Essa característica trouxe um impulsionamento na sua aplicação na engenharia, instrumentos médicos e equipamentos esportivos. Com a combinação de materiais é possível obter, por exemplo, maior resistência à flexão, rigidez, resistência à corrosão, isolamento acústico e térmico, que outro material puro não poderia ter, além de possuir alta versatilidade e adaptabilidade. Apesar do material compósito estar sendo desenvolvido em indústrias, ele é encontrado facilmente em materiais biológicos e naturais como dente, osso e madeira (JONES, 1999; CLYNE e HULL, 2019; KHANDAN *et al.* 2012).

Os materiais compósitos podem ser classificados, segundo Jones (1999), em:

❖ **Fibrosos:**

A fibra é caracterizada geometricamente tanto pela alta razão entre comprimento e diâmetro, como pela medida do diâmetro próximo de um tamanho de um cristal. A inserção de fibras de várias formas torna o material mais resistente e robusto que o mesmo material em sua forma inicial.

❖ **Laminados:**

Este material é formado por no mínimo duas lâminas ligadas de materiais diferentes. Este tipo de solução é adotado para combinar os melhores aspectos de cada camada e será mais discutido posteriormente.

❖ **Particulados:**

Consiste em partículas de um ou mais materiais suspensos em uma matriz de outro material.

❖ **Híbridos:**

São formados por mais de uma das características das classes acima.

Porém, essa não é a única forma de categorizar os materiais compósitos. Para Reddy (2004), por exemplo, existem apenas três categorias, excluindo a forma híbrida.

A escolha da classificação do material é imperfeita e arbitrária. Por exemplo, um dos materiais compósitos mais utilizados dentro da construção civil, o concreto armado, pode ser identificado dentro das categorias: particulado devido aos agregados na matriz, fibroso por causa do aço, híbrido através do compósito laminado com fibra ou laminado por meio das lâminas de compósito com lâminas metálicas (BERNARDO, 2021; JONES, 1999; NOGUEIRA, 2015).

Nos próximos tópicos será abordado mais sobre o compósito laminado, juntamente com a sua implementação no código de elemento de pórtico posicional.

#### 4.1 Compósito laminado

Elementos estruturais reforçados com fibra são usualmente adaptados em forma de pequenas camadas ou lâminas. Seu uso é comum em veículos automotivos, aeroespaciais e aquáticos. Sua forma mais usual é o painel sanduíche, formado por 3 lâminas, sendo duas mais rígidas externas e uma interna menos rígida. Uma das vantagens do compósito laminado é conseguir determinar as características estruturais e mecânicas da estrutura antes de sua fabricação, gerando a vantagem de entregar as propriedades ideais do material para cada aplicação específica (CARRERA, 2002; KHANDAN *et al.*, 2012; REDDY, 2004).

Para a análise estrutural de elementos laminados, é preciso compreender que esse meio envolve quatro blocos teóricos básicos, segundo Reddy (2004):

- ❖ Equações de elasticidade anisotrópica:

Equações de cinemática, termodinâmica, relação constitutiva e cinética (conservação do momento);

- ❖ Classificação da teoria estrutural:

Khandan *et al.* (2012), Kreja (2011) e Zhang e Yang (2009) separam nas seguintes categorias: modelos baseados na teoria de camada única equivalente (*Equivalent Single Layer – ESL*) e modelos baseados em teorias tridimensionais ou teorias discretas (*Discrete Layer – DL*). Reddy (2004) considera as duas categorias e acrescenta o método de modelos múltiplos a essa classificação. Dentro do grupo ESL estão os modelos: teoria clássica (*Classical Laminated*

*Theory* – CLT), teoria de primeira ordem em relação à deformação de cisalhamento (*First order Shear Deformation Theory* – FSDT) e teoria de alta ordem em relação à deformação de cisalhamento (*High order Shear Deformation Theory* – HSDT). O segundo grupo de teorias tridimensionais contempla os modelos da teoria *Layerwise* e teoria da elasticidade tridimensional;

- ❖ Métodos analíticos ou computacionais para determinar as soluções das equações que governam o problema;
- ❖ Modos de prever falha e o carregamento que determina a falha do material.

Para tensões normais ao plano da placa, a falha pode promover quebra de fibras ou escoamento; para tensões de cisalhamento no plano da placa, pode ocorrer deslizamento entre as lâminas; para tensão transversal, pode descolar / afastar as lâminas. Dessa forma é importante compreender, dentro da teoria estrutural, como calcular o cisalhamento transversal e a tensão normal com precisão, que será abordado no próximo subtópico em maiores detalhes (KHANDAN *et al.*, 2012).

#### 4.1.1 Teoria dos Laminados

A teoria de camada única equivalente (ESL) é autoexplicativa, porque ela assume que as lâminas heterogêneas, independentemente de sua espessura, sejam consideradas como uma única camada homogênea equivalente com comportamento global estaticamente, também, equivalente. Esta teoria teve origem no modelo elástico tridimensional, porém adotando simplificações em relação a tensão e deslocamentos na direção da espessura do material, transformando-o em um problema bidimensional ou unidimensional. Essas simplificações tornam o número de variáveis independentes da quantidade de lâminas, considerando-se uma única expressão ao longo de sua espessura para representar os deslocamentos trazendo limitações para o modelo (BERNARDO, 2021; KHANDAN *et al.*, 2012; REDDY, 2004; WU e LIU, 2016).

Dentro do conjunto do modelo ESL existem duas teorias mais utilizadas: CLT e teorias de deformação por cisalhamento de primeira ou alta ordem. A CLT é a teoria mais simples, definida como uma extensão das hipóteses da teoria de placas de Kirchhoff, de Euler-Bernoulli para barras e Cauchy-Poisson-Kirchhoff-Love para cascas. Ela negligencia os efeitos das deformações de cisalhamento transversais e deformações normais ao plano do laminado (KHANDAN *et al.*, 2012, NOGUEIRA, 2015).

A desconsideração da deformação conduz a erros que podem ser significativos em placas mais espessas, nas quais a razão entre os módulos elásticos de cisalhamento longitudinal e transversal é relativamente grande em comparação com materiais isotrópicos. Essa teoria pode ser bem aplicada para modelos laminados que são simétricos e balanceados, submetidos a flexão ou tensão pura. (CARRERA, 2002; KHANDAN *et al*, 2012)

Em contraponto com a CLT, a teoria FSDT leva em consideração uma deformação por cisalhamento constante por toda a seção transversal, por ser uma extensão das hipóteses de Reissner-Timoshenko para barras e de Reissner-Mindlin para placas. Porém, as deformações normais continuam sendo desprezadas. Essa teoria não permite a descrição dos efeitos zigue-zague e continuidade interlaminar para tensões de cisalhamento transversais, o que leva a resultados insatisfatórios para estruturas espessas. (CARRERA, 2002; NOGUEIRA, 2015)

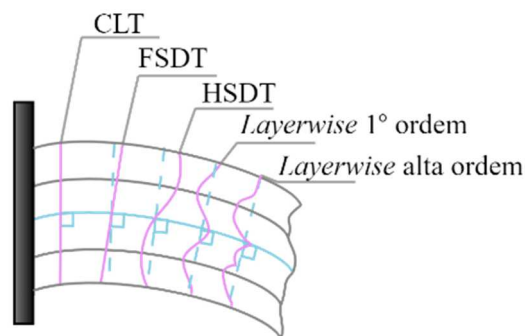
Os efeitos zigue-zague ocorrem, segundo Carrera (2002), devido às propriedades mecânicas e físicas descontínuas transversalmente. Essa heterogeneidade causa campos de deslocamento com mudanças rápidas de inclinações na direção da espessura.

Segundo Khandan *et al.* (2012) e Nogueira (2015), as teorias de alta ordem HSDT trabalham para superar os limites da CLT e FSDT quanto às deformações de cisalhamento, conseguindo representar campo de deslocamento transversais, pois os deslocamentos ao longo da espessura do laminado são calculados a partir da utilização de polinômios de alta ordem. Porém, por homogeneizar as propriedades, pode incutir erros significativos.

Ultrapassando os limites vistos na teoria ESL, a teoria *Layerwise*, dentro dos modelos baseados em teorias tridimensionais, trata cada lâmina de forma independente (NOGUEIRA, 2015). Em suma, aplica-se as teorias ESL em cada lâmina, conseguindo representar o efeito zigue-zague da cinemática, assim como determinar com precisão a distribuição de tensão e deformação no nível de cada lâmina individualmente.

A Figura 19 traz um melhor entendimento sobre a deformação de cisalhamento para cada teoria de laminado.

Figura 19 - Perfis da deformação de acordo com a teoria de laminado



Fonte: Adaptado de Kreja (2011)

Apesar da teoria *Layerwise* obter melhores resultados, ela incorre em um custo computacional alto devido à dependência do número de incógnitas ao número de lâminas.

Nesse trabalho será considerado uma cinemática próxima à da teoria FSDT ou de Reissner-Mindlin, pois o custo computacional é pequeno, visto que o número de incógnitas não depende no número de lâminas, e atende aos objetivos do trabalho, reconhecendo sua limitação que será mostrada posteriormente.

Essa cinemática é alcançada devido à utilização do método dos elementos finitos posicional para elemento de pórtico utilizando vetores generalizados, a qual libera a deformação de cisalhamento e permite a alteração da espessura e distorção de seções transversais. Foi incluído, também, um grau de liberdade ( $Z$ ) para conseguir representar o perfil zigue-zague das deformações. Esses detalhes serão abordados nos próximos tópicos, em conjunto com a formulação do pórtico laminado.

#### 4.2 Elemento finito de pórtico laminado utilizando vetores generalizados

Os conceitos de método dos elementos finitos posicional foram discutidos no Capítulo 2 e implementados para elemento de pórtico homogêneo utilizando vetores generalizados no Capítulo 3. Nos próximos tópicos, serão tratadas as particularidades do elemento laminado que foram mencionadas nos trabalhos: Sampaio, Paccola e Coda (2015), Coda, Paccola e Carrazedo (2017) e Bernardo (2021).

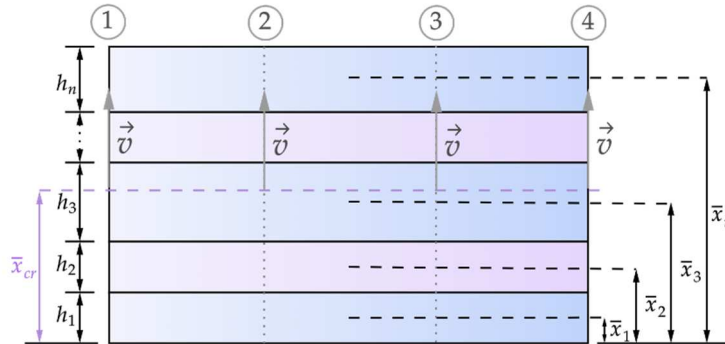
#### 4.2.1 Função de mudança de configuração

A função de mapeamento da posição inicial apresentada na Equação 3.7 é transformada na Equação 4.1 para pórticos laminados. Este equacionamento depende da camada  $k$  e da curva de referência  $m$ , para as posições iniciais ( $X$ ) e atuais ( $Y$ ), que se localizam no centro de rigidez da seção transversal e é obtida através da interpolação das posições dos nós (foram considerados 4 nós nesse caso), os quais possuem as coordenadas adimensionais iguais a  $-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$  e  $1$ .

$$f_i^{0k}(\xi_1, \xi_2^{(k)}) = x_i^k = \phi_\ell(\xi_1)X_i^{\ell m} + \left(\frac{h_k}{2}\xi_2^{(k)} + \bar{x}_k - \bar{x}_{cr}\right)\phi_\ell(\xi_1)v_i^\ell \quad (4.1)$$

em que  $i$  representa a direção da coordenada,  $m$  indica que se trata da curva de referência do elemento,  $x_i^k$  é a  $i$ -ésima componente da posição inicial do ponto que se encontra na  $k$ -ésima lâmina,  $h_k$  é a altura da lâmina  $k$ ,  $\xi_2^{(k)}$  corresponde à variável adimensional correspondente à direção da espessura da lâmina, definida no intervalo de -1 a 1 para cada lâmina,  $v_i^\ell$  é o versor normal referente ao nó  $\ell$  na direção  $i$ ,  $x_{cr}$  e  $\bar{x}_k$  estão representados na Figura 20,  $x_{cr}$  é obtido conforme Equação 4.2.

Figura 20 - Medidas de um elemento indeformado de  $n$  lâminas.



Fonte: Elaborado pela autora com base em Bernardo (2021)

$$\bar{x}_{cr} = \frac{\sum_{n=1}^n (E_{\xi_1}^k \bar{x}_k h_k)}{\sum_{n=1}^n (E_{\xi_1}^k h_k)}; 1 \leq k \leq n \quad (4.2)$$

sendo  $E_{\xi_1}^k$  o módulo de elasticidade da  $k$ -ésima lâmina na direção longitudinal do elemento e  $n$  o número de lâminas do compósito.

Da mesma maneira, a função de mapeamento atual também sofre mudança da Equação 3.11 para 4.3:



$$f_i^{1k}(\xi_1, \xi_2^{(k)}) = y_i^k = \phi_\ell(\xi_1) Y_i^{\ell m} + \left( \frac{h_k}{2} \xi_2^{(k)} + \bar{x}_k - \bar{x}_{cr} \right) \phi_\ell(\xi_1) g_i^\ell + \phi_\ell Z^\ell (a_k \xi_2^{(k)} + b_k) (-1)^{i+1} \phi_j g_{3-(i)}^j \quad (4.3)$$

em que  $y_i^k$  é a  $i$ -ésima componente da posição atual do ponto que se encontra na  $k$ -ésima lâmina,  $g_i^\ell$  é o vetor generalizado na direção  $i$  e nó  $\ell$ ,  $(-1)^{i+1} \phi_j g_{3-(i)}^j$  é o vetor generalizado  $\phi_\ell(\xi_1) g_i^\ell$  rotacionado  $90^\circ$  no sentido horário,  $a_k$  e  $b_k$  são o coeficiente angular e linear da lâmina  $k$  do perfil de enriquecimento de zigue-zague transformado para variável local  $\xi_2^k$ . Esse perfil tem um novo parâmetro nodal,  $Z$ , que regula sua intensidade na soma.

Desta forma, o problema ganha mais um grau de liberdade  $Z$  e os gradientes da função de mapeamento inicial e final são calculados segundo Equação 4.4 e para cada ponto de integração utiliza-se as Equações 4.5 e 4.6.

$$A_{ij}^0 = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j}; \quad A_{ij}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} \quad (4.4)$$

$$A^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{\ell,1} X_1^\ell + \left( \frac{h_k^0}{2} + \bar{x}_k - x_{cr}^0 \right) \xi_2 \phi_{\ell,1} v_1^\ell & \frac{h_k^0}{2} \phi_\ell v_1^\ell \\ \phi_{\ell,1} X_2^\ell + \left( \frac{h_k^0}{2} + \bar{x}_k - x_{cr}^0 \right) \xi_2 \phi_{\ell,1} v_2^\ell & \frac{h_k^0}{2} \phi_\ell v_2^\ell \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$A^1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{\ell,1} Y_1^\ell + \left( \frac{h_k^0}{2} + \bar{x}_k - x_{cr}^0 \right) \xi_2 \phi_{\ell,1} g_1^\ell + NE_1 & \frac{h_k^0}{2} \phi_\ell g_1^\ell + NE_2 \\ \phi_{\ell,1} Y_2^\ell + \left( \frac{h_k^0}{2} + \bar{x}_k - x_{cr}^0 \right) \xi_2 \phi_{\ell,1} g_2^\ell + NE_3 & \frac{h_k^0}{2} \phi_\ell g_2^\ell + NE_4 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} NE_1 = \phi_{\ell,1} Z^\ell (a_k \xi_2^{(k)} + b_k) \phi_j g_2^j + \phi_\ell Z^\ell (a_k \xi_2^{(k)} + b_k) \phi_{j,1} g_2^j \\ NE_2 = \phi_\ell Z^\ell a_k \phi_j g_2^j \\ NE_3 = -\phi_{\ell,1} Z^\ell (a_k \xi_2^{(k)} + b_k) \phi_j g_1^j - \phi_\ell Z^\ell (a_k \xi_2^{(k)} + b_k) \phi_{j,1} g_1^j \\ NE_4 = -\phi_\ell Z^\ell a_k \phi_j g_1^j \end{cases}$$

Na formulação deste trabalho, foi adotado que a altura da lâmina permanece constante, adotando coeficiente de Poisson igual a 0, ou seja, sem o acréscimo de deformação linear na direção do vetor generalizado. Essa configuração foi adotada como forma de reduzir o custo

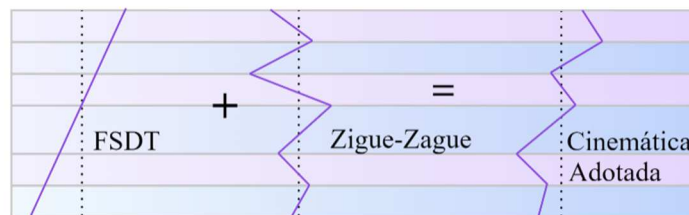
computacional, visto que na sequência foram implementadas simulações de Monte Carlo, que demandam que o modelo de elementos finitos seja avaliado diversas vezes.

Caso seja necessário trabalhar com deformações lineares na direção do vetor generalizado, recomenda-se a leitura dos trabalhos de Bernardo (2021) e Coda, Paccola e Carrazedo (2017), que implementaram um parâmetro nodal para evitar problemas de travamento volumétrico.

#### 4.2.2 Enriquecimento em formato de zigue-zague

A cinemática utilizada é similar ao modelo FSDT, porém com enriquecimento da cinemática em formato de zigue-zague conforme Figura 21, baseado nos trabalhos de Bernardo (2021) e Coda, Paccola e Carrazedo (2017).

Figura 21 - Campo de deslocamento na direção transversal composta pelo FSDT com enriquecimento zigue-zague



Fonte: Adaptado de Bernardo (2021)

Esse perfil de enriquecimento, descrito na Equação 4.7, é proveniente de funções lineares definidas em cada lâmina ao longo da direção transversal, que apresentam continuidade de deformação entre as interfaces interlaminares e ao mesmo tempo permitem descontinuidade da derivada em relação à direção transversal nesses pontos.

$$u_k = a_k \bar{x} + b_k \quad ; \quad \bar{x}_k - \frac{h_k}{2} \leq \bar{x} \leq \bar{x}_k + \frac{h_k}{2} \quad (4.7)$$

em que  $\bar{x}$  é uma variável que representa a distância da superfície inferior até um ponto na seção transversal, e  $a_k$  e  $b_k$  são os coeficientes angular e linear, respectivamente, da reta de cada camada  $k$ . Logo, são geradas duas incógnitas para cada lâmina do problema.

A solução foi proposta por Coda, Paccola e Carrazedo (2017), onde utiliza-se  $n - 1$  equações de continuidade segundo Equação 4.8:

$$a_k \left( \bar{x}_k + \frac{h_k}{2} \right) + b_k = a_{k+1} \left( \bar{x}_k - \frac{h_k}{2} \right) + b_{k+1}; 1 \leq k \leq n - 1 \quad (4.8)$$

Posteriormente foi determinado pelos autores que:

- ❖ O enriquecimento não deve interferir nos esforços resultantes da seção transversal, estabelecendo duas equações de equilíbrio provenientes da imposição da resultante do esforço normal e do momento fletor iguais a zero;
- ❖ As deformações longitudinais oriundas do modo de enriquecimento precisam ser proporcionais a ele.

Devido a estes fatores, foi possível utilizar as equações de equilíbrio da Equação 4.9 e 4.10:

$$\sum_{k=1}^n \int_{h_k} (a_k \bar{x} + b_k) E_{\xi_1}^k d\bar{x} = 0 \quad (4.9)$$

$$\sum_{k=1}^n \int_{h_k} \bar{x} (a_k \bar{x} + b_k) E_{\xi_1}^k d\bar{x} = 0 \quad (4.10)$$

Visto que até agora foram obtidas  $n + 1$  equações, restam ainda  $n - 1$  equações para que seja possível determinar as  $2n$  incógnitas correspondentes aos coeficientes  $a_k$  e  $b_k$  de cada lâmina. Coda, Paccola e Carrazedo (2017) obtiveram as equações restantes relacionando a diferença de inclinação com a diferença de rigidez relativa entre lâminas adjacentes.

$$a_k - a_{k+1} = \frac{E_{\xi_1}^k h_{(k)}^3 - E_{\xi_1}^{k+1} h_{(k+1)}^3}{\left( \bar{x}_k + \frac{h_{(k)}}{2} - \bar{x}_{cr} \right) (E_{\xi_1}^k h_k + E_{\xi_1}^{k+1} h_{(k+1)}^3)}; 1 \leq k \leq n - 1 \quad (4.11)$$

A relação da Equação 4.11 expressa que a diferença de inclinação é maior quando a diferença de rigidez relativa cresce, e é mais significativa perto do centro de rigidez. Com as Equações de 4.8 a 4.11 é possível determinar  $a_k$  e  $b_k$ . Porém, segundo Bernardo (2021), como é utilizada a variável  $\xi_2^k$ , correspondente à direção da espessura da lâmina, é necessário transformar a Equação 4.7 em  $a_k \xi_2^k + b_k$  através das transformações:

$$a_k = \frac{a_k h_{(k)}}{2}; b_k = a_k \bar{x}_{(k)} + b_k \quad (4.12)$$

### 4.2.3 Particularidades do elemento laminado

A energia mecânica total do elemento laminado possui a mesma formulação discutida anteriormente nos capítulos 2 e 3 e a energia de deformação, por ser uma grandeza escalar, pode ser extraída a partir do somatório das energias de cada lâmina. Porém as forças e momentos externos são aplicados na curva de referência.

Neste sistema atual tem-se cinco incógnitas para cada elemento, compostas conforme a Equação 4.13, que são conhecidas em forma de tentativas. A posição inicial ( $\vec{X}$ ) e o vetores generalizados iniciais ( $\vec{v}$ ) são usados como primeira tentativa da posição ( $\vec{Y}$ ) e dos vetores generalizados atuais ( $\vec{g}$ ). O parâmetro de intensidade de empenamento em zigue-zague ( $Z$ ), no entanto, inicia-se como zero porque não há deformação transversal no primeiro momento.

$$\begin{cases} y_1^\ell \text{ (grau de liberdade 1 do nó } \ell) \\ y_2^\ell \text{ (grau de liberdade 2 do nó } \ell) \\ y_3^\ell \text{ (grau de liberdade 3 do nó } \ell) \rightarrow g_1^\ell \\ y_4^\ell \text{ (grau de liberdade 4 do nó } \ell) \rightarrow g_2^\ell \\ y_5^\ell \text{ (grau de liberdade 5 do nó } \ell) \rightarrow Z^\ell \end{cases} \quad (4.13)$$

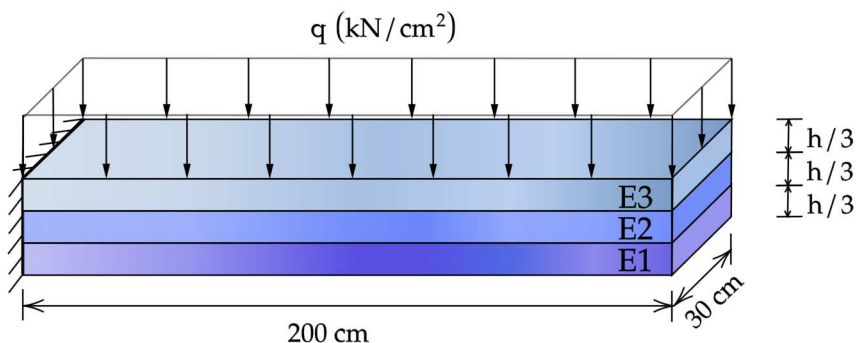
## 4.3 Exemplo para validação do elemento de pórtico laminado

Nos subtópicos a seguir serão apresentados exemplos de validação do MEF posicional utilizando elemento de pórtico laminado para estruturas lineares. São apresentadas as limitações da cinemática utilizada, assim como a validação para o tipo de estrutura que este trabalho se propõe a estudar.

### 4.3.1 Viga engastada

O exemplo da viga engastada da Figura 22 foi retirado do trabalho do Coda, Paccola e Carrazedo (2017), onde o módulo de elasticidade das três camadas, a carga aplicada e a altura da lâmina alternam conforme a Tabela 3. Adotou-se como parâmetros de entrada: três elementos, 10 passos de carga e uma tolerância de  $10^{-7}$ .

Figura 22 - Exemplo de viga engastada com elemento de pórtico laminado



Fonte: Elaborado pela autora

Tabela 3 - Propriedades do exemplo de validação

Situação 1		A	E1 ( $kN/cm^2$ )	100
$q$ ( $kN/cm^2$ )	$10^{-3}$		E2 ( $kN/cm^2$ )	5
$h$ (cm)	60		E3 ( $kN/cm^2$ )	100
Situação 2		B	E1 ( $kN/cm^2$ )	5
$q$ ( $kN/cm^2$ )	$10^{-6}$		E2 ( $kN/cm^2$ )	100
$h$ (cm)	6		E3 ( $kN/cm^2$ )	5
		C	E1 ( $kN/cm^2$ )	5
			E2 ( $kN/cm^2$ )	100
			E3 ( $kN/cm^2$ )	100

Fonte: Elaborado pela autora

Posteriormente os deslocamentos na extremidade livre da viga foram comparados com duas fontes:

- ❖ Com os resultados de Coda, Paccola e Carrazedo (2017) atribuindo o parâmetro de empenamento igual a zero;
- ❖ Com respostas geradas pelo *software* de elementos finitos ABAQUS®.

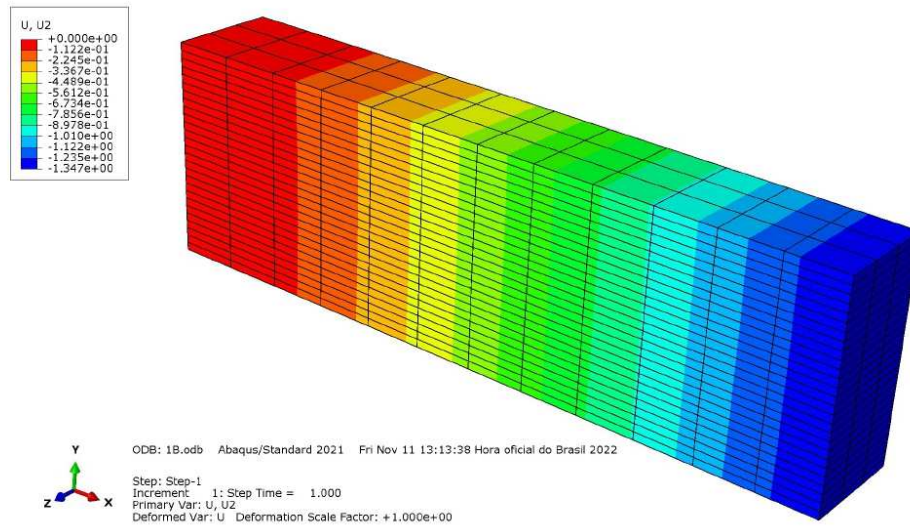
Tabela 4 - Comparação entre os resultados de deslocamento em cm para o exemplo de viga engastada

Caso	Referência	Autora	ABAQUS
1A	0,1249	0,1249	0,1879
1B	1,3225	1,3225	1,3470
1C	0,3301	0,3303	0,3348
2A	0,1153	0,1153	0,1161
2B	1,3045	1,3045	1,3120
2C	0,3204	0,3204	0,3213

Fonte: Elaborado pela autora

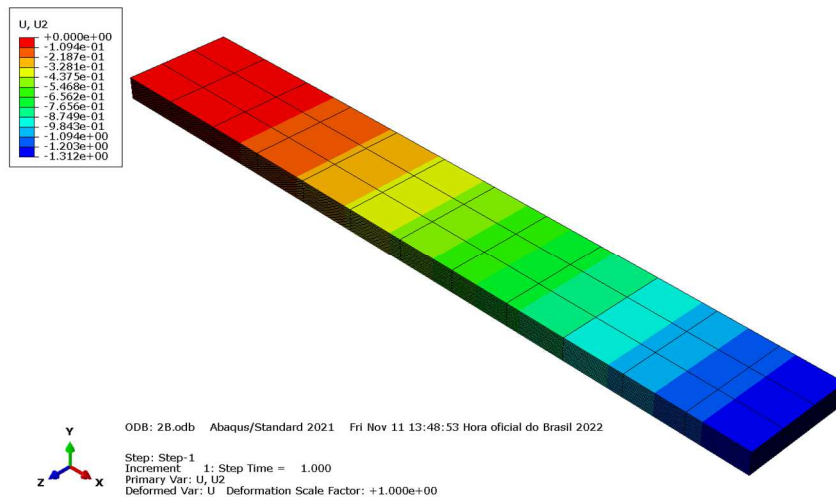
A malha utilizada no *software* ABAQUS® foi dividida em 12, 3 e 27 elementos no eixo x, z e y respectivamente, conforme Figura 23 e Figura 24. Essa escolha se baseou no número de elementos necessários na altura da lâmina para que fosse obtido um resultado sem grande oscilação numérica entre um maior número de nós e o adotado.

Figura 23 - Malha e deslocamento referente ao caso 1B



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 24 - Malha e deslocamento referente ao caso 2B



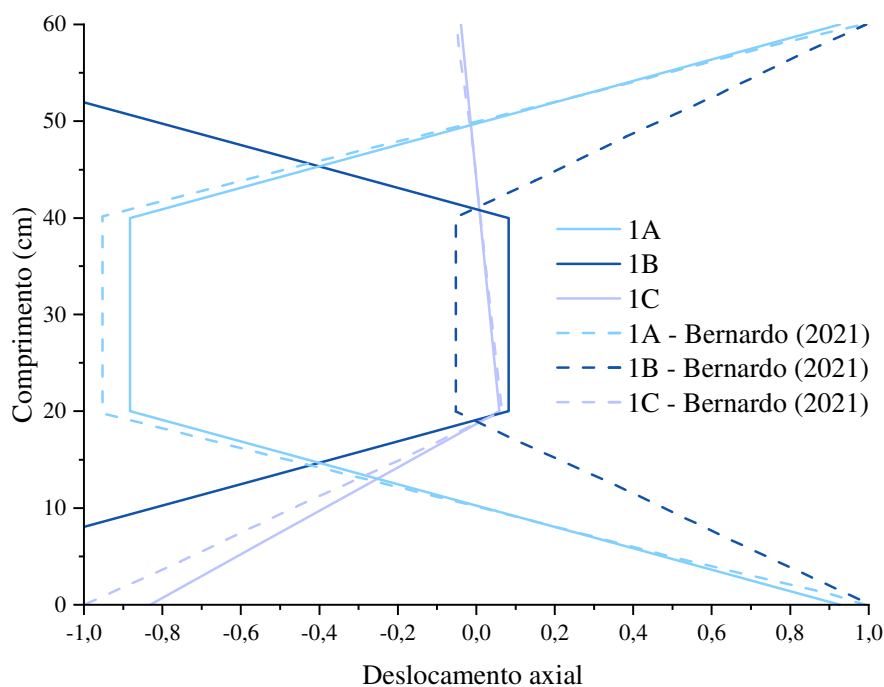
Fonte: Elaborado pela autora

Nessa comparação foi possível observar:

- ❖ O resultado comparado com Coda, Paccola e Carrazedo (2017) traz a validação para o programa de pórtico laminado com o parâmetro Z igual a 0;
- ❖ A comparação feita com o ABAQUS mostrou que o resultado para estrutura de maior altura (relação altura/vão) pode levar a inconsistências, comprovando a limitação da escolha de teoria de laminado que foi discutida anteriormente no Tópico 4.1.

Para validar o parâmetro referente ao zigue-zague, os resultados foram comparados com o trabalho de Bernardo (2021) para o mesmo problema da Figura 22. Percebe-se na Figura 25 que, para os casos 1A e 1C o deslocamento axial na extremidade livre é bem próximo, porém para o caso 1B isso não acontece. Esta diferença de resultado é devido ao enriquecimento cinemático para regularizar as tensões transversais descontínuas que foi feito por Bernardo (2021). Esta disparidade se acentua quando há diferença entre rigidez relativa das camadas e proximidade entre a interface das lâminas e o centro de rigidez da seção transversal (BERNARDO, 2021).

Figura 25 - Perfis de zigue-zague ao longo da altura da seção

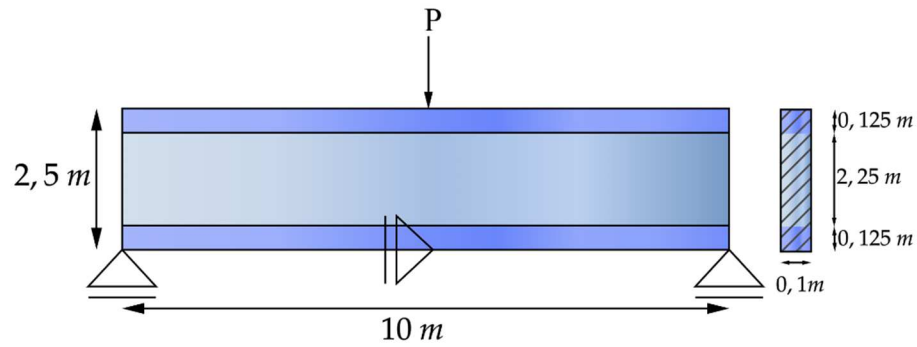


Fonte: Elaborado pela autora

#### 4.3.2 Viga esbelta biapoiada

O segundo exemplo de validação foi obtido do trabalho de Nogueira (2015), conforme Figura 26. Os resultados foram gerados para três casos distintos de acordo com a Tabela 5.

Figura 26 - Exemplo de viga biapoiada de acordo com Nogueira (2015)



Fonte: Elaborado pela autora

Tabela 5 - Configuração do exemplo de Nogueira (2015)

Caso	AAA	ABA	ACA
	↓ 10 kN	↓ 1 kN	↓ 0,02 kN
Configuração	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> <math>E_A = 120000 \text{ kN/m}^2</math>  <math>E_A = 120000 \text{ kN/m}^2</math>  <math>E_A = 120000 \text{ kN/m}^2</math> </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> <math>E_A = 120000 \text{ kN/m}^2</math>  <math>E_B = 1200 \text{ kN/m}^2</math>  <math>E_A = 120000 \text{ kN/m}^2</math> </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> <math>E_A = 120000 \text{ kN/m}^2</math>  <math>E_C = 12 \text{ kN/m}^2</math>  <math>E_A = 120000 \text{ kN/m}^2</math> </div>

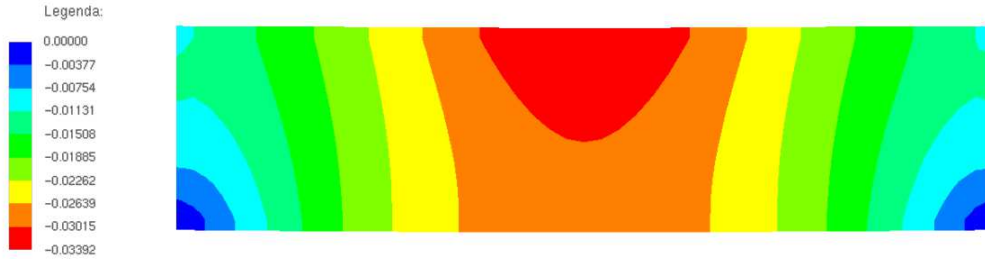
Fonte: Elaborado pela autora

Nogueira (2015) realizou este experimento através do *software* de elementos finitos ANSYS e por meio do MEFP com elemento de pórtico laminado implementando a teoria *Layerwise*. Para este trabalho, foi primeiramente calibrado o modelo no ABAQUS<sup>®</sup> fazendo a comparação dos deslocamentos verticais obtidos pelo modelo bidimensional no ANSYS e tridimensional no ABAQUS<sup>®</sup> para o caso ACA, mostrado na Figura 27.

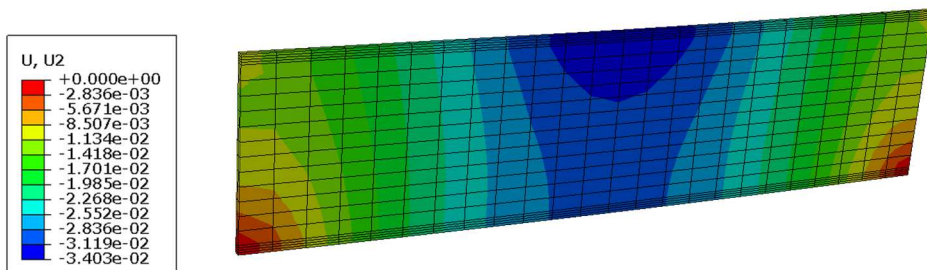


Figura 27 - Comparação do resultado obtido por a) Nogueira (2015) e b) ABAQUS®

a)



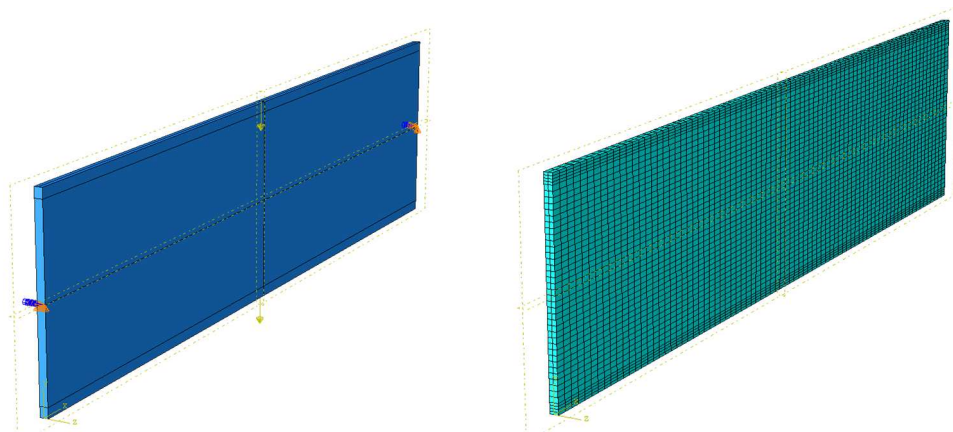
b)



Fonte: a) Nogueira (2015) b) Elaborado pela autora

Como o modelo numérico abordado neste trabalho tem suas funções de mudança de configuração e demais cálculos com base na linha média, foram necessários fazer algumas adaptações no modelo numérico. O apoio e as forças, que no modelo de Nogueira (2015) foram aplicados nas extremidades inferiores e no ponto central superior da estrutura, respectivamente, passaram a ser posicionados de acordo com a Figura 28.

Figura 28 - Aplicação das condições de contorno, cargas na estrutura e malha adotada neste trabalho



Fonte: Elaborado pela autora

Para o modelo do ABAQUS<sup>®</sup> utilizaram-se 2, 80 e 54 elementos sólidos na direção z, x e y, respectivamente. Esta malha precisou ser mais refinada que a da Figura 27 para convergência dos resultados. O modelo de MEFP teve como dados de entrada: 54 elementos, tolerância de  $10^{-9}$  e 10 passos de carga. A comparação dos resultados obtidos pelo ABAQUS<sup>®</sup> e pelo MEFP com elemento de pórtico laminado está apresentado na Tabela 6

Tabela 6 - Comparação dos deslocamentos verticais para os três casos para a viga de 2,5 m de altura.

Caso	Deslocamento Vertical (m)	
	ABAQUS <sup>®</sup>	MEFP
AAA	0,026	0,015
ACA	0,050	0,00013
ABA	0,036	0,0063

Fonte: Elaborado pela autora

Nota-se que as simplificações da teoria de laminados utilizada geraram resultados insatisfatórios principalmente para o caso ACA, que utiliza um módulo de elasticidade muito maior que o outro, causando uma descontinuidade de tensões de cisalhamento transversais em estruturas espessas. Esta descontinuidade de tensões não é considerada no modelo proposto.

Para certificar que as estruturas espessas são uma limitação para o programa realizado neste trabalho, reduziu-se a altura da viga para 50 cm, mas manteve-se o comprimento, largura e 5% da altura da viga para as faces com módulo de elasticidade  $E_A$  da Figura 26. Posteriormente realizou-se novamente uma comparação com o ABAQUS<sup>®</sup>, conforme Tabela 7, porém, para esta etapa, utilizou-se força concentrada de 1 kN, 0,1 kN e 0,002 kN para o caso AAA, ABA e ACA, respectivamente.

Tabela 7 - Comparação dos deslocamentos verticais para os três casos

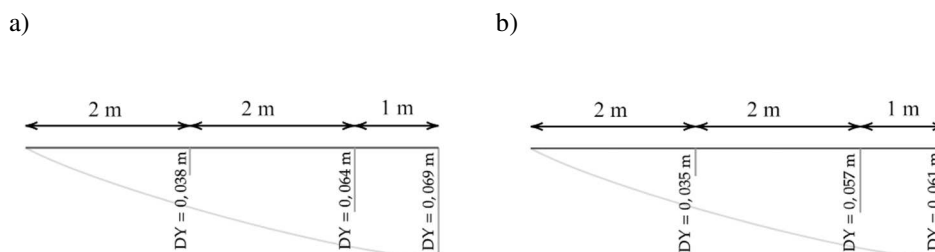
Caso	Deslocamento Vertical (m)	
	ABAQUS <sup>®</sup>	MEFP
AAA	0,168	0,164
ACA	0,0168	0,0012
ABA	0,069	0,061

Fonte: Elaborado pela autora

O resultado continua sendo insatisfatório para o caso ACA, que pode ser melhorado utilizando fazendo enriquecimento cinemático quanto as tensões, como foi feito por Bernardo (2021), ou alterando-se a teoria de laminados segundo Nogueira (2015). Porém, para o caso de estruturas de concreto armado, onde a corrosão atua, a relação entre os módulos de elasticidade

fica entre o caso AAA e ABA que obtiveram bons resultados. A configuração da viga quanto ao deslocamento vertical é mostrada na Figura 29 para caso ABA.

Figura 29 - Configuração deformada da viga de 50 cm de altura para o resultado obtido no a) ABAQUS© e b) MEFP

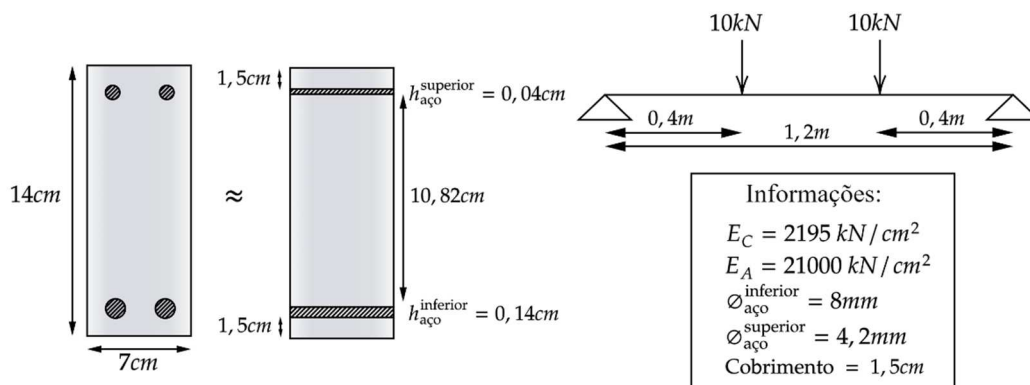


Fonte: Elaborado pela autora

#### 4.3.3 Viga com disposição similar de concreto armado

O exemplo da Figura 30, baseado no trabalho de Graeff (2007), foi programado com 16 elementos, 5 lâminas, tolerância de  $10^{-9}$  e 20 passos de carga. A armadura foi transformada em lâmina mantendo a área de aço e cobrimento, como mostrado na Figura 30.

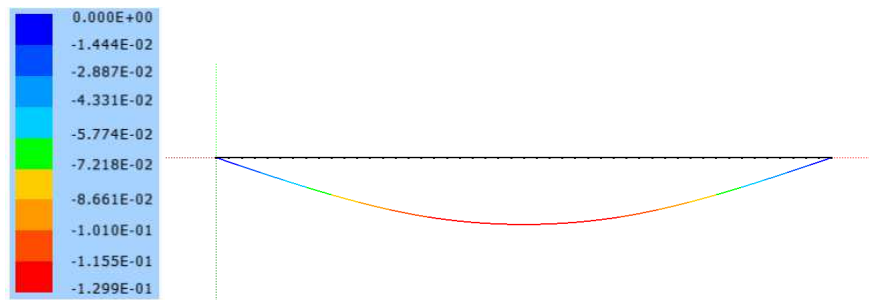
Figura 30 - Caracterização do exemplo da viga biapoiada com disposição similar ao concreto



Fonte: Elaborado pela autora

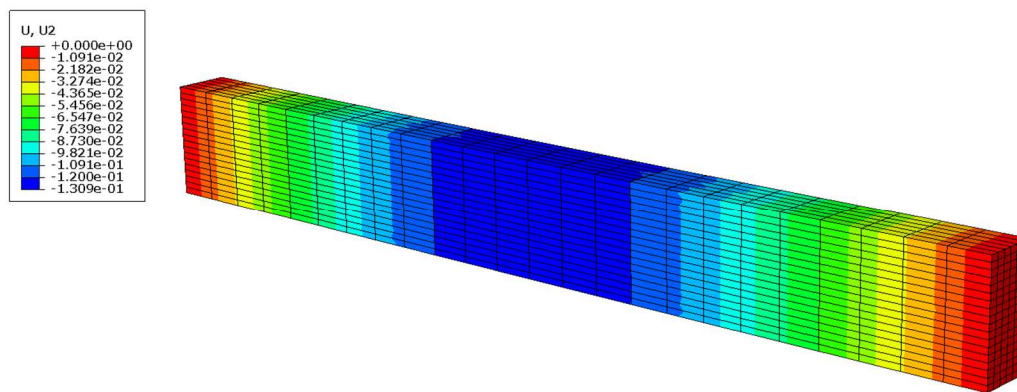
O resultado obtido para o deslocamento do meio do vão foi de 0,1299 cm e foi comparado com um modelo realizado no ABAQUS© que teve como resposta 0,1309 cm, como mostram a Figura 31 e Figura 32.

Figura 31 - Resultado de deslocamento do programa em FORTRAN



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 32 - Resultado do deslocamento gerado pelo ABAQUS©



Fonte: Elaborado pela autora

Foram utilizados elementos do tipo sólido homogêneo para o concreto no ABAQUS®, discretizando-se a viga em 24, 6 e 18 elementos ao longo dos eixos x, z e y, respectivamente. A armadura foi discretizada em 60 elementos lineares, utilizando elementos do tipo viga 2D, e foi inserida na matriz do concreto por meio da ligação *embedded region*. Foram adotadas as propriedades dos materiais conforme as características presentes na Figura 30.

Esse exemplo serve de validação para as próximas etapas de inserção de dano e corrosão da armadura, aplicadas em vigas de concreto armado.

## 5 DANIFICAÇÃO ASSOCIADA À CORROSÃO POR CARBONATAÇÃO

Neste capítulo serão abordados os temas associados com a danificação de estruturas de concreto considerados neste trabalho: mecânica do dano, com enfoque no modelo de Dano de Mazars, decorrente de ações mecânicas; e corrosão em sua generalidade, com foco na corrosão por carbonatação e modelos representativos da corrosão.

### 5.1 Mecânica do dano

Ao se trabalhar com concreto armado submetido a diversos esforços, é necessário considerar um modelo de falha para o concreto. Para representar o processo de falha mecânica de um material, existem três grandes teorias: teoria da plasticidade, mecânica do dano e mecânica da fratura. A teoria da plasticidade e a mecânica do dano adotam a hipótese de continuidade do material, sendo a primeira mais utilizada para materiais dúcteis e com boa reprodução de deformações plásticas nos trechos de encruamento (*hardening*), mas falha ao representar fielmente a etapa final do processo de falha (*softening*). A mecânica do dano, por sua vez, incorpora os efeitos da perda de rigidez e *softening* através de parâmetros de dano, tornando análise mais consistente. Por outro lado, a mecânica da fratura não assume mais o meio como contínuo (LEONEL, 2021; ABE, 2019).

O Modelo de Dano de Mazars (1984) é um dos mais simples dentre os modelos de mecânica do dano. Apesar da sua simplicidade, apresenta bons resultados como podem ser vistos nos trabalhos de Álvares (1993), Dekoster *et al.* (2003), Liberati (2014), e Abe (2019), que aplicaram esse modelo ao concreto.

Os subtópicos apresentados a seguir seguem a abordagem e formulação descrita por Leonel (2021), Abe (2019) e Álvares (1993) para apresentar o modelo de Dano de Mazars aplicado ao concreto.

#### 5.1.1 Modelo de Dano de Mazars

O modelo de dano de Mazars parte das seguintes hipóteses:

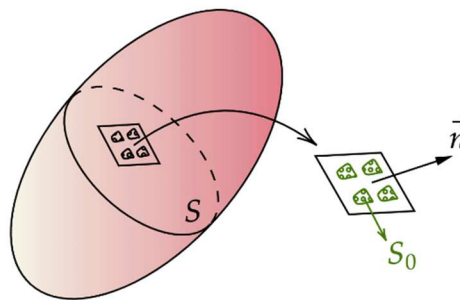
- ❖ Durante a evolução do dano o material possui comportamento mecânico elástico;

- ❖ O dano é apenas causado por alongamentos;
- ❖ Considera-se o dano isótropo;
- ❖ O dano é representado localmente através de uma variável  $D$ , sendo  $0 \leq D < 1$ .

A variável escalar  $D$  é a razão entre a área danificada e a área sã, então quanto mais próximo de zero menos danificado está o material e quanto mais próximo de 1 mais perto está de um colapso mecânico-material.

A Figura 33 representa uma seção  $S$  de um corpo em que parte da seção é perdida devido à danificação. Logo, admitindo-se que existe uma força  $F$  atuando segundo a normal  $\vec{n}$ , define-se uma tensão efetiva  $\tilde{\sigma}$  atuando sobre uma área útil ( $\tilde{S}$ ), que é a área total ( $S$ ) menos a danificada ( $S_0$ ), conforme Equação 5.1

Figura 33 - Representação da seção danificada



Fonte: Adaptado de Kachanov (1986)

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} = \frac{\sigma S}{\tilde{S}} = \frac{\sigma}{(1 - D)} \quad ; \quad \tilde{S} = S - S_0 \quad (5.1)$$

Considerando a Lei de Hooke, atualiza-se o módulo de elasticidade longitudinal do material com dano ( $\tilde{E}$ ):

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{E}} = \frac{\sigma}{(1 - D)E} \quad (5.2)$$

$$\tilde{E} = (1 - D)E \quad (5.3)$$

em que  $\varepsilon$  é a deformação elástica unidimensional,  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material íntegro. Ressalta-se que  $\tilde{E}$  é sempre positivo, porque  $D$  nunca é maior ou igual a 1.

Uma das hipóteses básicas é que o dano no material seja causado por alongamentos, ou seja, é imprescindível definir uma deformação equivalente para representar o estado do alongamento em um determinado ponto material:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{(\varepsilon_1)_+^2 + (\varepsilon_2)_+^2 + (\varepsilon_3)_+^2} \quad (5.4)$$

As variáveis  $(\varepsilon_i)_+$  são as componentes de alongamento do tensor de deformações principais, conforme Equação 5.5, consistindo em  $\varepsilon_i = \varepsilon_i$  se  $\varepsilon_i > 0$  e  $\varepsilon_i = 0$  se  $\varepsilon_i \leq 0$ .

$$(\varepsilon_i)_+ = \frac{1}{2}[\varepsilon_i + |\varepsilon_i|] \quad (5.5)$$

O início do dano ocorre quando  $\tilde{\varepsilon}$  atinge um valor convencionalizado como  $\varepsilon_{d0}$ , que corresponde ao esforço máximo em um ensaio de tração uniaxial. Esse parâmetro pode ser calculado através da razão entre uma resistência característica à tração do concreto ( $f_{ctk,inf}$ ) e módulo de elasticidade inicial ( $E_{ci}$ ), sendo  $f_{ctk,inf}$  dependente da resistência média à tração ( $f_{ct,m}$ ) e conseqüentemente da resistência característica à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ):

$$\varepsilon_{d0} = \frac{f_{ctk,inf}}{E_{ci}} ; f_{ctk,inf} = 0,7f_{ct,m} ; f_{ct,m} = 0,3f_{ck}^{2/3} \quad (5.6)$$

Partindo do pressuposto que o comportamento do concreto para deformações inferiores a  $\varepsilon_{d0}$  é elástico-linear, é possível definir a função de falha que descreve o estado de danificação do material:

$$f(\tilde{\varepsilon}, D) = \tilde{\varepsilon} - \tilde{S}(D) \leq 0 \quad (5.7)$$

em que a danificação terá início quando  $f = 0$  e inicialmente a deformação equivalente em função do dano ( $\tilde{S}(D)$ ) é igual a  $\varepsilon_{d0}$ .

A definição realística da variável  $D$  em um ponto do contínuo que apresente a combinação de tração e compressão é complexa, pois o comportamento do concreto à tração e à compressão não é simétrico. Neste caso, Mazars (1984) representa o parâmetro de dano  $D$  através de duas variáveis independentes de dano quanto à tração ( $D_T$ ) e à compressão ( $D_C$ ), conforme Equação 5.8:

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \quad (5.8)$$

sendo  $\alpha_T$  e  $\alpha_C$  coeficientes de combinação que assumem valores de 0 a 1. Na tração pura  $\alpha_T = 1$ ,  $\alpha_C = 0$  e  $D = D_T$ . Na compressão pura  $\alpha_C = 1$ ,  $\alpha_T = 0$  e  $D = D_C$ . As variáveis de dano  $D_T$  e  $D_C$  são definidas de acordo com as Equações 5.9 e 5.10:

$$D_T = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_T)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_T}{e^{[B_T(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]}} \quad (5.9)$$

$$D_C = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_C)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_C}{e^{[B_C(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]}} \quad (5.10)$$

sendo  $A_C, B_C, A_T, B_T$  e  $\varepsilon_{d0}$  valores característicos do material que são conhecidos por meio de ensaios experimentais, porém Mazars (1984) propõe os valores limites de cada uma destas variáveis:

$$\begin{cases} 0,7 \leq A_T \leq 1,0 \\ 1,0 \leq A_C \leq 1,5 \\ 10^4 \leq B_T \leq 10^5 \\ 10^3 \leq B_C \leq 2 \times 10^3 \\ 10^{-5} \leq \varepsilon_{d0} \leq 10^{-4} \end{cases} \quad (5.11)$$

O cálculo dos coeficientes de combinação pode ser feito através da Equação 5.12:

$$\alpha_T = \frac{\sum_i (\varepsilon_{Ti})_+}{\varepsilon_V^+} \quad ; \quad \alpha_C = \frac{\sum_i (\varepsilon_{Ci})_+}{\varepsilon_V^+} \quad (5.12)$$

em que  $(\varepsilon_{Ti})_+$  e  $(\varepsilon_{Ci})_+$  são as parcelas positivas dos tensores de deformação  $\varepsilon_T$  e  $\varepsilon_C$  conhecidos através das expressões:

$$\varepsilon_T = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_+ - \frac{\nu}{E} \sum_I (\sigma_i)_+ I \quad ; \quad \varepsilon_C = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_- - \frac{\nu}{E} \sum_I (\sigma_i)_- I \quad (5.13)$$

sendo  $I$  o tensor de identidade de quarta ordem,  $E$  o modulo de elasticidade longitudinal do material,  $\nu$  o coeficiente de Poisson e  $\sigma_+$  e  $\sigma_-$  são as parcelas positivas e negativas do tensor de tensões de um estado de tensões principais fictício que é obtido através do estado de deformação atual.

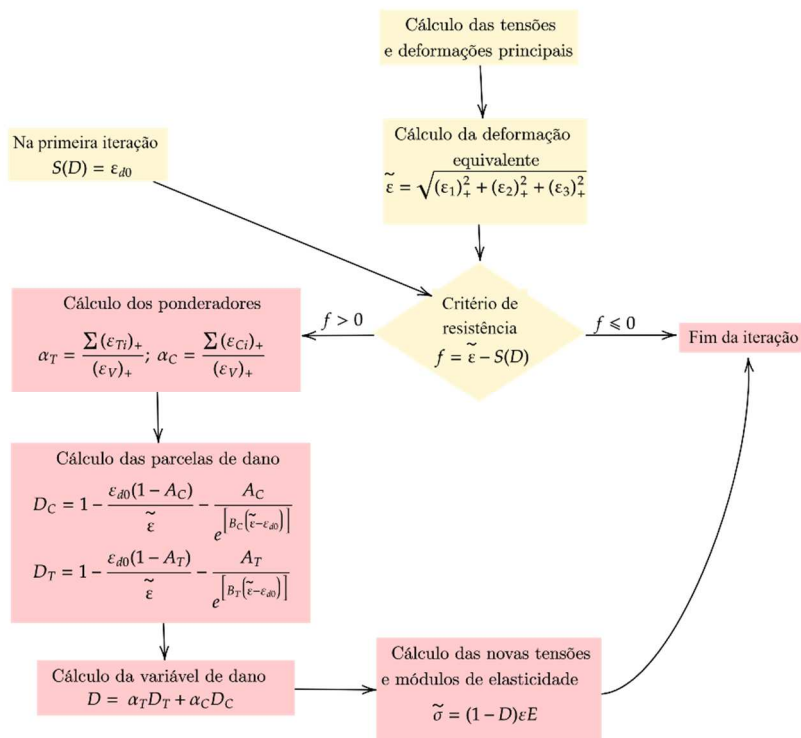
A variável  $\varepsilon_V^+$  indica o estado local de alongamento e é calculado conforme:

$$\varepsilon_V^+ = \sum_i (\varepsilon_{Ti})_+ + \sum_i (\varepsilon_{Ci})_+ \quad (5.14)$$

O processo incremental de cálculo do dano de Mazars é feito conforme a Figura 34.



Figura 34 - Processo de cálculo do modelo de dano de Mazars



Fonte: Elaborado pela autora

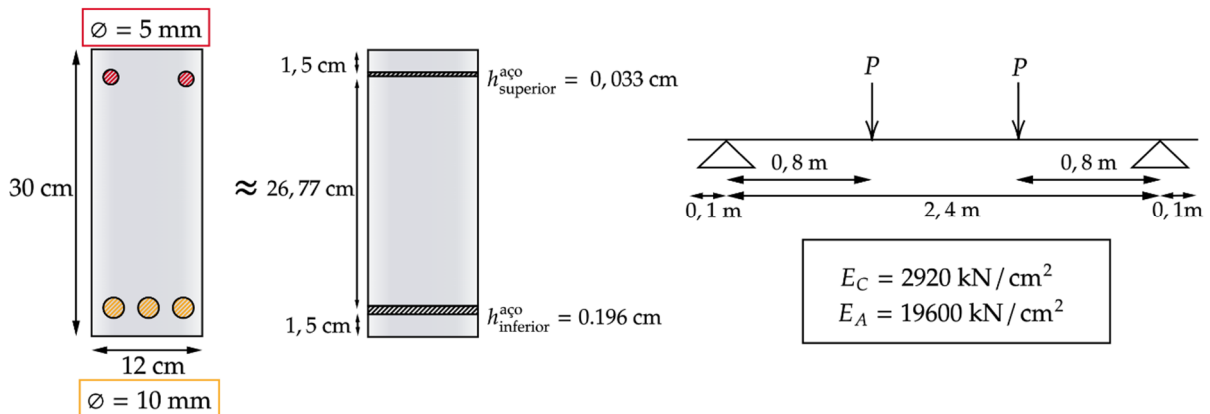
### 5.1.2 Validação do modelo numérico aplicando Dano de Mazars

O modelo de Dano de Mazars inserido no programa de MEFP com elemento de pórtico laminado foi validado através de dois exemplos de viga de concreto armado.

#### 5.1.2.1 Viga de concreto armado de Álvares (1993)

Álvares (1993) ensaiou a viga da Figura 35, em que  $E_C$  e  $E_A$  são o módulo de elasticidade do concreto e do aço, respectivamente. Através dos experimentos com o material e análises paramétricas foram determinados os parâmetros  $A_C = 0,85$ ,  $B_C = 1620$  e  $\epsilon_{d0} = 0,00007$  e foram adotados os valores por  $A_T = 0,995$ ,  $B_T = 8000$ .

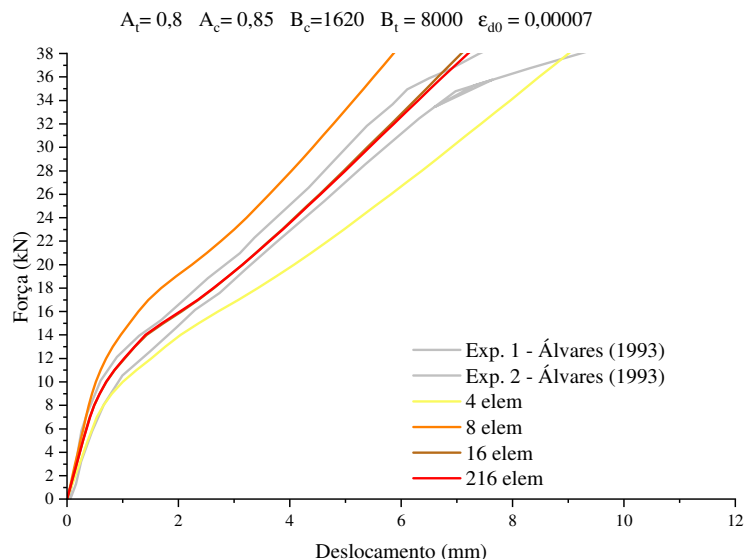
Figura 35 - Viga biapoiada do ensaio de Álvares (1993)



Fonte: Elaborado pela autora

Neste trabalho foram utilizados os mesmos valores para  $A_C$ ,  $B_C$ ,  $B_T$  e  $\varepsilon_{d0}$ , mas utilizou-se  $A_T = 0,8$  por ajustar-se melhor a curva e por obter resultados menos instáveis. A viga foi discretizada em 4, 8, 16 e 216 elementos, com tolerância de  $10^{-9}$  e 40 passos de carga. A distribuição das lâminas foi feita conforme Figura 35 e o resultado deste trabalho em relação à flecha no meio do vão foi comparado com Álvares (1993) na Figura 36.

Figura 36 - Comparação do deslocamento no meio do vão com o trabalho de Álvares (1993)



Fonte: Elaborado pela autora

Nota-se que as discretizações com 4 e 8 elementos não foram suficientes para atingir a convergência. Com 16 e 216 elementos o resultado ficou próximo dos experimentos realizados por Álvares (1993), conseguindo representar o comportamento da estrutura. Foi utilizado 216

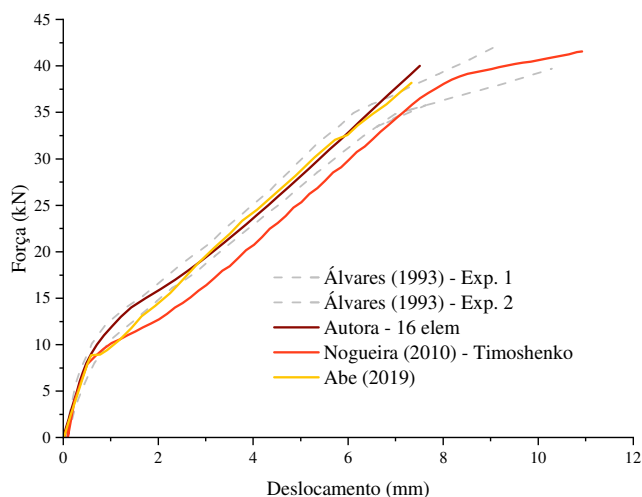
elementos apenas para informar que o resultado com 16 elementos se assemelha ao de uma malha muito refinada.

Outros trabalhos na literatura também utilizaram a viga de Álvares (1993) para validarem seus exemplos numéricos, como:

- ❖ Nogueira (2010) que utilizou o MEF para obter uma análise numérica não-linear da viga, empregando o modelo de Timoshenko com 6 elementos de pórtico plano, coeficiente de Poisson igual a 0,2, módulo de elasticidade do aço e do concreto de 196000MPa e 29100MPa, respectivamente. Os parâmetros de Mazars utilizados foram de  $A_C = 0,9781$ ,  $B_C = 1276,4$ ,  $B_T = 10398,7$ ,  $A_T = 0,9097$  e  $\varepsilon_{d0} = 0,000065$ .
- ❖ Abe (2019) usou o *software* de elementos finitos ANSYS com elementos triangulares de ordem cúbica, propriedades do aço e concreto de acordo com Figura 35, 100 passos de carga, coeficiente de Poisson igual a 0,2 e parâmetros de Mazars:  $A_C = 1,0$ ,  $B_C = 1620$ ,  $B_T = 10000$ ,  $A_T = 0,995$  e  $\varepsilon_{d0} = 0,00007$ .

Utilizando os mesmos parâmetros de Mazars da Figura 36, 16 elementos, tolerância de  $10^{-9}$  e 40 passos de carga foi realizado uma comparação da flecha no meio do vão com os autores Abe (2019) e Nogueira (2010) conforme é apresentado na Figura 37.

Figura 37 - Comparação do comportamento da viga de Álvares (1993) em outros trabalhos



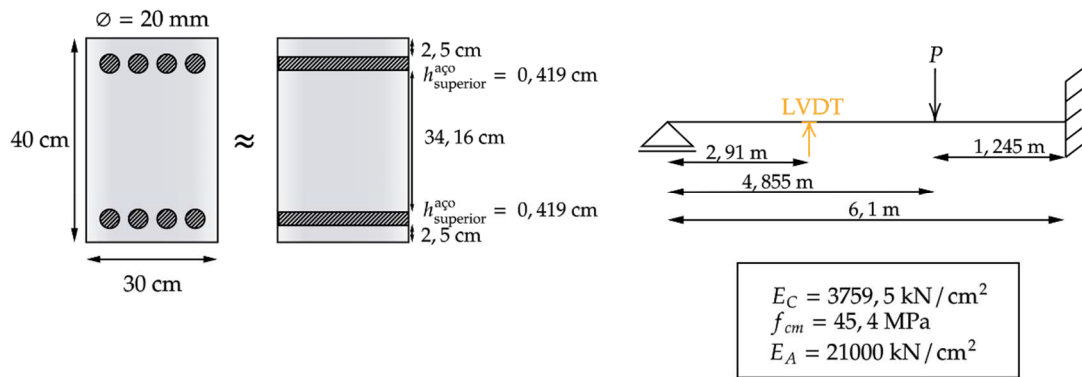
Fonte: Elaborado pela autora

A Figura 37 demonstra uma similaridade no comportamento da viga deste trabalho em comparação com os outros, principalmente com o de Abe (2019). Estas diferenças de resultado podem surgir através da utilização de modelos numéricos e parâmetros de Mazars distintos.

5.1.2.2 Viga pré-moldada de Bachega (2013)

Bachega (2013) realizou um ensaio experimental conforme Figura 38, e um dos pontos onde foi medido os deslocamentos está apontado na Figura 38 com o LVDT. Foi utilizado para o concreto: módulo de elasticidade médio ( $E_C$ ) de 3759,5 kN/cm<sup>2</sup> e uma resistência a compressão média ( $f_{cm}$ ) de 45,4 MPa. Adotou-se um módulo de elasticidade para o aço de 21000 kN/cm<sup>2</sup>.

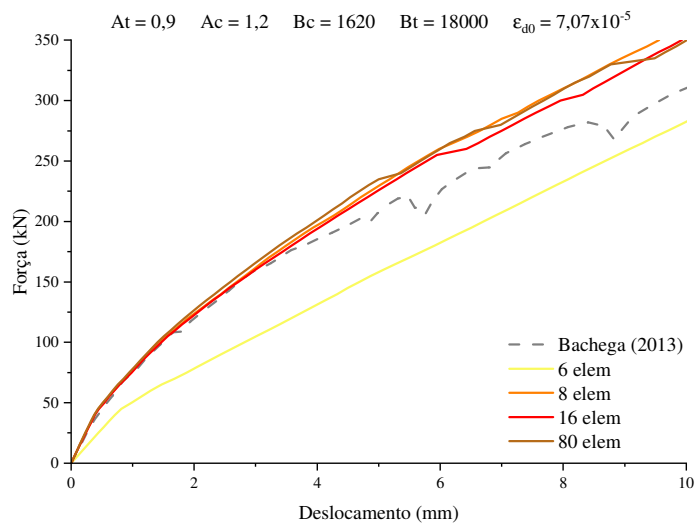
Figura 38 - Ensaio de Bachega (2013)



Fonte: Elaborado pela autora

Os resultados obtidos neste trabalho foram comparados com à referência na Figura 39. A viga foi discretizada em 6, 8, 16 e 80 elementos, com tolerância de 10<sup>-8</sup> e 70 passos de carga. O  $\epsilon_{d0}$  foi calculado a partir da Equação 5.6 e os parâmetros de Mazars utilizados estão na Figura 39.

Figura 39 - Comparação dos deslocamentos obtidos com o trabalho de Bachega (2013)



Fonte: Elaborado pela autora

Em uma análise de convergência, verificou-se a necessidade de ao menos 8 elementos para se obter devida representatividade e dar bons resultados em comparação com o experimental.

Conclui-se que o programa de MEF posicional com elemento de pórtico laminado utilizando não linearidade física através do dano de Mazars foi validado.

## 5.2 Corrosão

De acordo com Helene (1993), a corrosão pode ser descrita como resultado de reações destrutivas de origem química ou eletroquímica proveniente do contato de um material com o meio ambiente, em conjunto ou não com ações físicas ou mecânicas de degradação.

No concreto armado, a armadura está protegida pela alta alcalinidade e pela barreira física do concreto. Estas características do meio proporcionam condições favoráveis para a camada passivadora ao redor do aço, que é uma fina camada de óxidos e hidróxidos que atua como proteção, permanecer estável. Nessas condições a corrosão é praticamente nula, pois ocorre de forma muito lenta e imperceptível, porém, por meio de agentes agressivos como cloretos e pela carbonatação do concreto, a armadura pode ser despассивada e então intensificar o processo de corrosão (CARMONA, 2005; COELHO, 2017; GRAEFF, 2007).

A entrada dos elementos agressivos no concreto ocorre através dos seguintes mecanismos de transporte: absorção capilar de líquidos, difusão de gases e líquidos por gradiente de concentração, permeabilidade a líquidos e gases através de gradiente de pressão e migração de íons. O mecanismo mais intenso e mais comum é a absorção capilar, que está relacionada não apenas com a porosidade do concreto, mas também com a umidade no concreto, seguida pela difusão, que é o principal mecanismo de entrada do dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ). A difusão é dependente diretamente da matriz porosa do concreto, temperatura e teor de umidade (BASHEER *et al.*, 2001, HELENE, 1993; POSSAN, 2010).

A corrosão por ataque de íons cloreto, uma das causadoras da despассивação local, ocorre pela migração e acúmulo dos íons cloreto ( $\text{Cl}^-$ ), os quais podem ser provenientes do meio em que a estrutura está inserida ou do próprio sistema construtivo. Esse tipo de manifestação patológica é comum no Brasil devido à sua vasta faixa litorânea, e pode causar ruptura do aço sem aviso prévio (FELIX, 2018; GRAEFF, 2007).

A corrosão por carbonatação ocorre devido ao dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ), que penetra no concreto principalmente por meio da absorção capilar e difusão, e reage com os produtos de

hidratação de cimento no concreto como o hidróxido de cálcio (Ca(OH)<sub>2</sub>) resultando em carbonato de cálcio (CaCO<sub>3</sub>) e água (H<sub>2</sub>O), conforme a Equação 5.15. Este tipo de corrosão ocorre, geralmente, em áreas urbanas onde existe um grande nível de CO<sub>2</sub> emitido por veículos e indústrias. A carbonatação por si só não é prejudicial ao concreto simples, porém a problemática surge com a diminuição da alcalinidade que existe nos poros ao redor da armadura, ocasionado pelo CaCO<sub>3</sub> formado, que em uma certa faixa de temperatura reduz a estabilidade química da camada passivadora do aço, ocasionando a despassivação da armadura, conforme mostrado na Figura 40 (HELENE, 1993; RODRIGUES *et al.*, 2021).

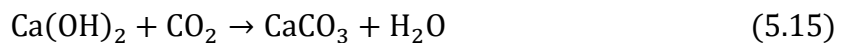
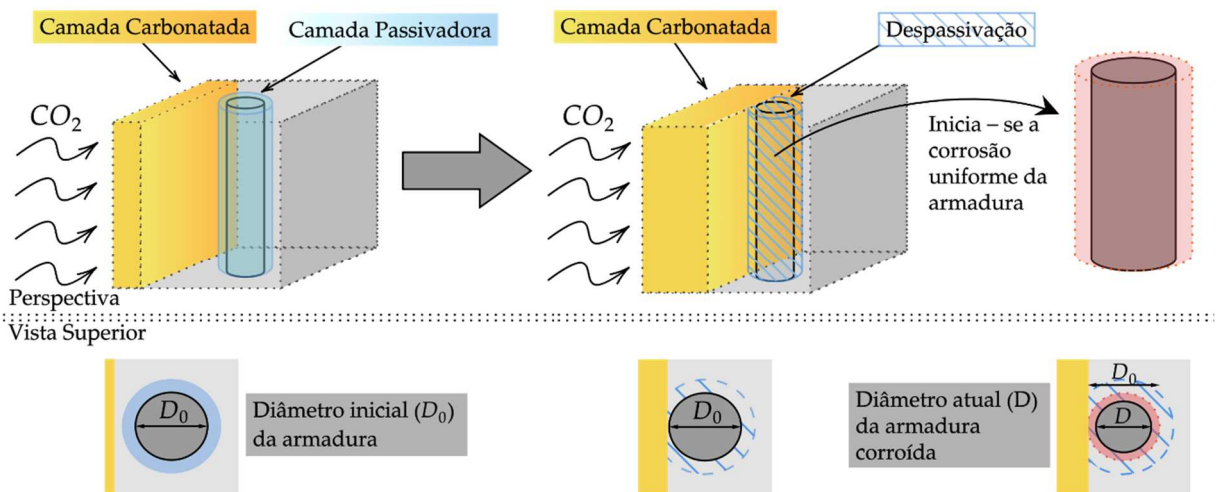


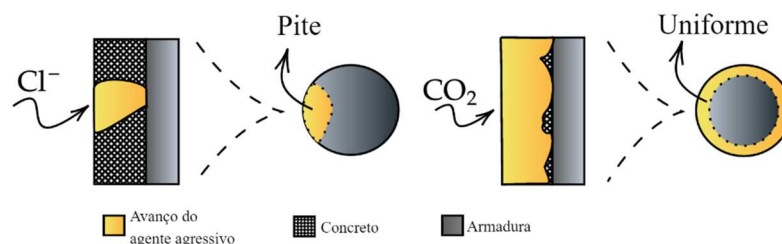
Figura 40 - Avanço da frente de carbonatação



Fonte: Elaborado pela autora com base em Carmona (2005) e Rodrigues *et al.* (2021)

A corrosão por carbonatação e por íons cloreto diferem entre si quanto à morfologia, conforme exibido na Figura 41. A carbonatação causa uma frente de corrosão relativamente uniforme, porque se desenvolve em toda a extensão da armadura, diferentemente da corrosão causada por íons cloreto, que é localizada, formando pites (FELIX, 2018; GRAEFF, 2007).

Figura 41 - Morfologia da corrosão em função do tipo de agente agressivo



Fonte: Elaborado pela autora com base em Felix (2018) e Rodriguez *et al.* (2021)

Segundo Zhang, Castel e François (2010), através de um estudo experimental comparativo entre duas vigas de 14 e 23 anos, foi constatado que, durante a fase inicial de fissuração e na primeira parte da propagação de fissuras, a corrosão por cloretos é predominante e a corrosão por pites é o principal fator que influencia o modelo da fissura. Porém, com o crescimento da fissuração, a corrosão uniforme aumenta rapidamente e gradualmente toma o lugar de predominância na segunda fase de propagação de fissuras.

Dentro do processo de corrosão, é possível identificar duas etapas definidas inicialmente por Tuutti (1982): a iniciação e a propagação. A primeira é descrita pelo espaço de tempo entre a execução da obra até o ponto que o agente agressivo alcança a armadura. De maneira resumida, neste estágio ocorre (para o caso da corrosão por carbonatação) a penetração do CO<sub>2</sub>, descalcificação do concreto, redução do pH nos poros próximos à armadura e despassivação da armadura (PELLIZZER, 2019; RODRIGUES *et al.*, 2021).

O estágio de propagação começa com a despassivação e permanece por toda a vida útil da estrutura. Nesse processo, ocorrem efeitos deletérios no concreto e no aço como: a geração de produtos de corrosão, de maior volume do que o que foi corroído, originados pelas reações químicas que criam tensões de tração no concreto causando fissuras, redução da área de aço, manchas na superfície, alteração dos mecanismos de aderência entre aço/concreto e redução da tensão de escoamento do aço. A estrutura perde rigidez e se deforma até o colapso se não houver manutenção. (PELLIZZER, 2019; POSSAN, 2010; RODRIGUES *et al.*, 2021).

Na Tabela 8 destacam-se alguns dos principais fatores externos e intrínsecos da estrutura que contribuem para o transporte dos agentes externos ao interior do corpo e para a carbonatação, segundo Helene (1993), Possan (2010), Pellizzer (2015), Felix (2018).

Tabela 8 - Fatores que contribuem para a carbonatação

Fator	Descrição	Relevância quanto à corrosão
Umidade e Incidência de chuvas	A carbonatação sofre influência do nível de saturação dos poros. Poros saturados tem baixa velocidade de penetração, mas baixa umidade impossibilita a reação de carbonatação. Uma alta velocidade de penetração ocorre quando os poros estão preenchidos parcialmente.	Alta
Concentração de CO <sub>2</sub>	Quanto maior a exposição ao dióxido de carbono maior o progresso da carbonatação com o tempo.	Baixa para teores menores 0,1% e alta para maiores

Temperatura	Na fase de propagação ela influencia na taxa de corrosão.	Baixa
Relação água/cimento (a/c) e resistência à compressão	A utilização de uma alta relação a/c e, consequentemente, baixa resistência, leva a uma taxa de carbonatação mais acentuada devido à maior porosidade do concreto, uma vez que a porosidade está diretamente relacionada com o fator a/c e resistência.	Alta
Espessura do cobrimento	A camada de cobrimento age como uma proteção física do aço. A redução da sua espessura ou erros executivos podem facilitar o início do processo corrosivo ou acelerá-lo.	Alta

Fonte: Elaborado pela autora com base em Helene (1993), Possan (2010), Pellizzer (2015), Felix (2018).

### 5.2.1 Corrosão por carbonatação

A carbonatação como mencionada anteriormente é definida em duas etapas, iniciação e propagação. A iniciação pode ser relacionada com a existência de condições necessárias para que ocorra corrosão (agressividade do ambiente que a estrutura está inserida e a qualidade do concreto), ou seja, com a termodinâmica do processo. Por outro lado, a propagação está associada com as condições que podem acelerar as reações alterando a taxa de corrosão ou a velocidade do processo no tempo, ou seja, com a cinética da reação (HELENE, 1993).

#### 5.2.1.1 Iniciação

A etapa de iniciação está intrinsecamente atrelada à profundidade de carbonatação, isto é, a medida física que os agentes agressivos percorrem ao longo do concreto. Quando essa profundidade alcança a armadura o tempo de iniciação termina, ou seja, já ocorreu: ingresso do CO<sub>2</sub> presente na atmosfera, descalcificação do concreto, redução do pH da região porosa e despassivação (RODRIGUES *et al.*, 2021).

Félix, Carrazedo e Possan (2017) desenvolveram um modelo numérico utilizando Redes Neurais Artificiais com o objetivo principal de analisar parametricamente a influência dos principais fatores que contribuem para o avanço da carbonatação. Foram avaliadas as variáveis: resistência à compressão, umidade, exposição à chuva, concentração de CO<sub>2</sub>, tipo e composição do cimento. Os resultados do trabalho concordaram com a literatura e reforçaram a teoria que:

- ❖ concretos de alta resistência, por serem menos porosos, sofrem menos com o teor de CO<sub>2</sub>. Para concretos com resistência superior a 40 MPa, o tipo de cimento e quantidade de aditivo não têm grande influência;



- ❖ a maior profundidade de carbonatação acontece para umidade próxima a 60%, concordando com a literatura que afirma que a umidade crítica fica em torno de 50 a 80%;
- ❖ a influência da quantidade de CO<sub>2</sub> é alta, visto que, para um aumento de 0,1% na concentração de CO<sub>2</sub> houve um aumento de 2,15% na profundidade de carbonatação, para uma consideração de variação de concentração de CO<sub>2</sub> de 0,01-3,00%.

Segundo Saetta e Vitaliani (2004), a umidade e a difusividade do CO<sub>2</sub> são parâmetros fundamentais para essa etapa. Existe, porém, uma dificuldade em se calcular a difusividade do CO<sub>2</sub> devido à sua dependência de diversos fatores como relação água/cimento e agregado/cimento, parâmetros externos como umidade, temperatura, concentração de CO<sub>2</sub>, produtos de hidratação do concreto, etc (PAPADAKIS *et al.*, 1989; POSSAN, 2010; YOON, ÇOPUROĞLU e PARK, 2007).

Como o cálculo do avanço da carbonatação e, conseqüentemente, do tempo em que a profundidade de carbonatação alcança a armadura é envolto de incertezas do material e do ambiente, existem diversos modelos de cálculos na literatura, sendo alguns apresentados em seguida.

Estudos iniciais sobre a relação entre profundidade de carbonatação e tempo apontaram a Equação 5.16, que é uma simplificação da primeira lei de Fick (PAPADAKIS, VAYENAS e FARDIS, 1989).

$$x_c = A\sqrt{t} \quad (5.16)$$

em que  $A$  é uma constante, que, segundo Tuutti (1982), é dependente da difusividade do CO<sub>2</sub>, do gradiente de concentração do CO<sub>2</sub> e da quantidade retida de CO<sub>2</sub> em mm/ano.

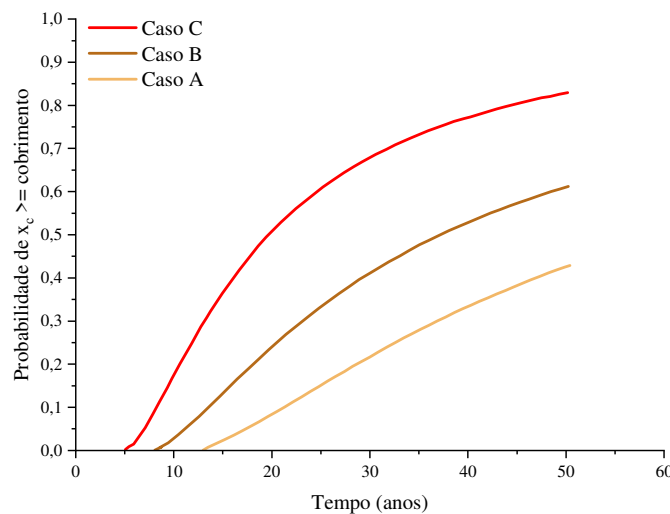
Inúmeros autores como Carmona (2005), Possan (2010) e Sun *et al.* (2020) reuniram diversas formulações para calcular a profundidade de carbonatação relacionada ou não com o tempo, que são originadas da lei de Fick. Carmona (2005) realizou uma comparação quanto à profundidade carbonatada no tempo através de diferentes modelos e o de CEB (1997) e o Papadakis, Vayenas e Fardis (1989 e 1991) apresentaram resultados próximos com a realidade, estando o primeiro modelo apontando uma profundidade menor e o segundo modelo maior que o experimental. Sendo o modelo de CEB (1997) mais dependente de condições climáticas, com variáveis mais genéricas e de fácil aplicação. Estes modelos são encontrados em sua forma

original ou adaptados e simplificados nos trabalhos de Sudret (2007, 2008), Peng e Stewart (2008), Na *et al.* (2012) e Coelho (2017).

Coelho (2017) utilizou a Equação 5.17, baseada em Papadakis, Vayenas e Fardis (1992), em um estudo probabilístico utilizando confiabilidade para determinar a probabilidade da profundidade de carbonatação ser maior que o cobrimento, para 3 casos distintos de cobrimento, resistência a compressão e relação a/c, conforme Figura 42. Para o caso A foram usados os valores médios de: cobrimento de 5 cm, resistência à compressão de 45 MPa e fator a/c de 0,45; para o caso B: cobrimento de 4,5 cm, resistência à compressão de 40 MPa e fator a/c de 0,5; para o caso C: cobrimento de 4,0 cm, resistência à compressão de 35 MPa e fator a/c de 0,6.

$$x_c = 0,35\rho_c \frac{\frac{a}{c}}{1 + \frac{\rho_c \frac{a}{c}}{1000}} + RH \sqrt{\left(1 + \frac{\rho_c \frac{a}{c}}{1000} + \frac{\rho_c \frac{ag}{c}}{\rho_{ag}}\right) C_{CO_2} \frac{22,4}{44} 10^6 t} \quad (5.17)$$

Figura 42 - Probabilidade do tempo de despassivação segundo Coelho (2017) para diferentes casos



Fonte: Adaptado de Coelho (2017)

em que  $\rho_c$  é a densidade do cimento,  $a/c$  é o fator água/cimento,  $ag/c$  é o fator agregados/cimento,  $\rho_{ag}$  é a densidade do agregado,  $C_{CO_2}$  é a concentração percentual de  $CO_2$  no ambiente.

Utilizando a equação de Papadakis, Vayenas e Fardis (1992), vê-se através da Figura 42 que, quanto maior o cobrimento, menor o fator a/c e maior a resistência à compressão do concreto, maior é a resistência da estrutura ao longo dos anos à corrosão.

Nesse trabalho será adotado o modelo do CEB (1997) adaptado por Sudret (2007, 2008):

$$x_c = \sqrt{\frac{2C_0 D_{CO_2} t}{a}} \quad (5.18)$$

sendo  $t$  o tempo em s,  $C_0$  a concentração de  $CO_2$  no ambiente ( $kg/m^3$ ),  $D_{CO_2}$  é a difusividade do  $CO_2$  no concreto ( $m^2/s$ ) e  $a$  é a quantidade de  $CO_2$  para a completa carbonatação ( $kg/m^3$ ). Estes dois últimos podem ser calculados conforme Peng e Stewart (2008) e Yoon, Çopuroğlu e Park (2007):

$$D_{CO_2}(t) = D_1 t^{-n_d} \quad (5.19)$$

$$a = 0,75 C_e C_a O \alpha_H \frac{M_{CO_2}}{M_{CaO}} \quad (5.20)$$

Os parâmetros  $D_1$ ,  $n_d$ ,  $C_e$  e  $\alpha_H$  variam conforme a relação de  $a/c$  e estão apresentados na Tabela 9.  $C_a O$  é o teor de óxido de cálcio (CaO) que é adotado como 0,6 por Peng e Stewart (2008),  $M_{CaO}$  e  $M_{CO_2}$  é a massa molar de CaO e  $CO_2$ , iguais a 56g/mol e 44g/mol, respectivamente.

Tabela 9 - Valores médios dos parâmetros conforme a relação  $a/c$ .

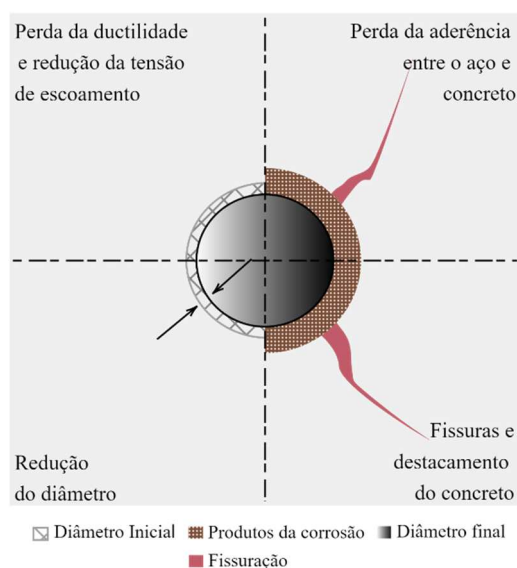
$a/c$	Coefficiente de difusividade após um ano ( $D_1$ )	Fator idade para o coeficiente de difusividade ( $n_d$ )	Teor de cimento em $kg/m^3$ ( $C_e$ )	Grau de hidratação ( $\alpha_H$ )
0,45	0,65	0,218	390	0,71
0,5	1,24	0,235	350	0,72
0,55	2,33	0,240	320	0,73

Fonte: Elaborado pela autora com base em Peng e Stewart (2008) e Yoon, Çopuroğlu e Park (2007).

### 5.2.1.2 Propagação

Nessa etapa os danos à estrutura são notáveis e severos, sendo as principais consequências: perda da área de aço, redução da aderência entre o aço e concreto, fissuração no concreto e redução da tensão de escoamento, conforme Figura 43. Estas consequências reduzem a rigidez da estrutura, aumentando as deformações, e podem gerar um colapso estrutural.

Figura 43 - Consequências da propagação



Fonte: Adaptado de Andrade e Alonso (2004).

Este trabalho é focado no início da fissuração e perda de seção do aço, consequências abordadas no Capítulo 6.

#### ❖ Perda da área de aço

Ao ocorrer a despassivação, a corrosão gera degradação química e mecânica das armaduras, causando perda da área da seção do aço. A velocidade desta redução é dependente da taxa de corrosão ( $i_{\text{corr}}$ ), que tem sido calculada predominantemente por modelos empíricos que podem considerar essa taxa como constante durante toda a vida de serviço da estrutura ou dependentes do tempo. Os trabalhos de Otieno, Beushausen e Alexander (2012) e Sun *et al.* (2020) fizeram uma revisão sobre diversos modelos presentes na literatura, mas grande parte dos estudos desse parâmetro são relacionados com a corrosão por cloretos.

Segundo Stefanoni, Angst e Elsener (2018), dentro da perspectiva global, foram disponibilizados valores de  $i_{\text{corr}}$  na literatura entre 0,002 e 20  $\mu\text{A}/\text{cm}^2$ , porém o valor médio mínimo é de 0,08  $\mu\text{A}/\text{cm}^2$  e máximo de 2  $\mu\text{A}/\text{cm}^2$ . Otieno, Beushausen e Alexander (2012) classificaram o processo da corrosão de acordo com a taxa  $i_{\text{corr}}$ :

- i. Desprezível:  $i_{\text{corr}} < 0,1 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ ;
- ii. Baixa:  $0,1 < i_{\text{corr}} < 0,5 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ ;
- iii. Moderada:  $0,5 < i_{\text{corr}} < 1,0 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ ;

iv. Alta:  $i_{\text{corr}} > 1,0 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ .

De acordo com Andrade e Alonso (2004) e Val e Melchers (1997), a correlação entre  $\mu\text{A}/\text{cm}^2$  e perda de seção do metal em mm/ano, segundo a lei de Faraday e a densidade do material, é de:

$$V_{\text{corr}} \left( \frac{\text{mm}}{\text{ano}} \right) = 0,0116 i_{\text{corr}} \left( \frac{\mu\text{A}}{\text{cm}^2} \right). \quad (5.21)$$

Partindo desses dados de corrosão, diversos autores como Andrade, Alonso e Molina (1993), Val e Melchers (1997), Val, Stewart e Melchers (1998) e Coelho (2017) utilizam a Equação 5.22 para encontrar a perda do diâmetro da área corroída.

$$\phi(T) = \phi_0 - 0,0232 \int_{T_i}^T i_{\text{corr}}(t) dt \quad (5.22)$$

em que  $\phi$  é o diâmetro após a corrosão em um determinado tempo e  $\phi_0$  é o diâmetro inicial, ambos em mm.

Kiani e Shodja (2011) calcularam o raio residual de aço  $R_{cb}$  e o raio da frente de avanço dos produtos da corrosão  $R_r$  a partir das Equações 5.23 e 5.24, que dependem do volume gerado dos produtos de corrosão  $V_r(t)$  e da perda em volume de aço das armaduras  $V_s(t)$ :

$$R_{cb} = \sqrt{R_{st}^2 - \frac{V_s}{\pi}} \quad (5.23)$$

$$R_r = \sqrt{R_{cb}^2 - \frac{V_r}{\pi}} \quad (5.24)$$

$$V_r(t) = \frac{\alpha}{\rho_{st}} \sqrt{\int_0^{t^*} 6,78 \cdot 10^{-10} \cdot \pi D_{st} i_{\text{corr}} dt} \quad (5.25)$$

$$V_s(t) = \frac{r_m}{\rho_{st}} \sqrt{\int_0^{t^*} 6,78 \cdot 10^{-10} \cdot \pi D_{st} i_{\text{corr}} dt} \quad (5.26)$$

em que  $D_{st}$  é o diâmetro inicial da armadura em m;  $\alpha$  é a razão entre a densidade do aço e dos produtos de corrosão;  $r_m$  é a relação de massa de ferro para a massa molecular dos produtos de corrosão;  $\rho_{st}$  é a densidade do aço em  $\text{kg}/\text{m}^3$ ; e  $t$  é o tempo de propagação em análise, ou seja, o tempo após a despassivação da armadura.

Biondini e Vergani (2015) empregaram um modelo matemático para o cálculo da redução de área do aço pela corrosão uniforme e localizada, sendo a uniforme definida por:

$$\delta = \frac{p}{\phi_0} \quad \delta \in [0,1] \quad (5.27)$$

$$A_s(\delta) = [1 - \delta_s(\delta)]A_{s0} \quad (5.28)$$

$$\delta_s = \delta(2 - \delta) \quad (5.29)$$

em que  $\delta$  é um índice adimensional de penetração de corrosão, 0 referente à estrutura íntegra e 1 à penetração completa da corrosão;  $A_{s0}$  é área de aço inicial, ou seja, sem corrosão; e  $A_s$  é a área do aço corroído; e  $p$  é a profundidade de penetração da corrosão.

El Hassan *et al.* (2010) concluíram que a probabilidade de falha de uma viga de ponte de concreto armado quanto a seu estado último de flexão é maior para estruturas que utilizam mais barras de menor diâmetro do que menos barras de maior diâmetro. Esta probabilidade chegou a ser três vezes maior quando foi comparado a utilização de 9 barras de 20 mm com 6 barras de 25 mm.

A fim de representar as consequências da corrosão em um modelo de elementos finitos, Félix (2018) utilizou os cálculos de área e produtos de corrosão das Equações 5.23 a 5.26 e acoplou a um modelo numérico construído em MEFP através da expansão do elemento de partícula, uma vez que foi considerado a técnica do embutimento onde a armadura está perfeitamente aderida à matriz do concreto. Com a perda da área de aço e de rigidez da estrutura devido à corrosão, foi realizado a alteração do módulo de elasticidade da partícula conforme Equação 5.30, calculando-se a expansão da armadura na Equação 5.31, para em seguida calcular uma decomposição aditiva do tensor de deformação de Green na Equação 5.32.

$$E_p(t) = E_p(0) \left( \frac{R_{cb}}{R_{st}} \right) + E_r \left( \frac{R_r - R_{cb}}{R_{st}} \right) \quad (5.30)$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2} \frac{R_r^2 - R_{st}^2}{R_{st}^2} = \frac{1}{2} \frac{((R_{cb} + C_r)^2 - R_{st}^2)}{R_{st}^2} \quad (5.31)$$

$$\mathbb{E}_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - \delta_{ij}) - \varepsilon_r \delta_{ij} \quad (5.32)$$

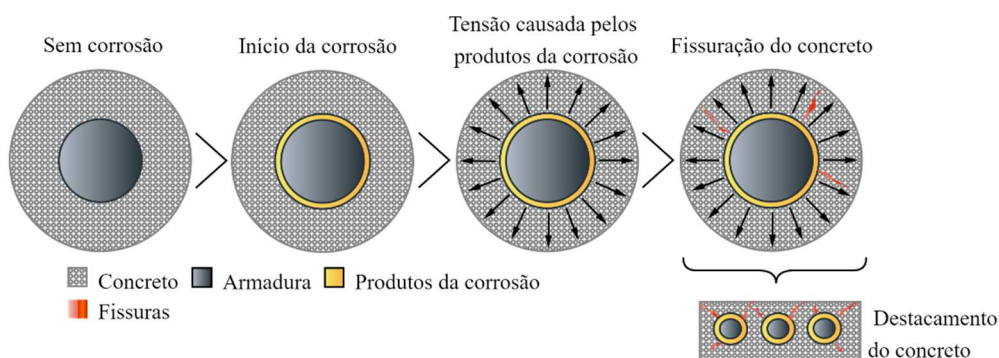
em que  $C_r$  é a espessura da camada de produtos de corrosão formada entre o aço e o concreto (mm);  $E_p(0)$  e  $E_p(t)$  são os módulos de elasticidade referentes ao período inicial e no instante

de análise, respectivamente;  $E_r$  é o módulo de elasticidade dos produtos da corrosão;  $\varepsilon_r$  é a expansão da partícula;  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker;  $\mathbb{E}_{ij}$  refere-se a parcela elástica da deformação de Green; e  $C_{ij}$  é o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green.

#### ❖ Fissuração e destacamento do concreto

De acordo com Andrade, Alonso e Molina (1993), a redução da área de aço ocorre concomitantemente com a geração de produtos de corrosão, que possuem volume superior ao íntegro. Esse crescimento de volume é suficiente para induzir a formação de fissuras devido à tensão causada no concreto. A fissuração ocorre primeiramente na interface entre o aço e o concreto, e posteriormente propaga-se radialmente até chegar à superfície do concreto, como mostra a Figura 44. O aparecimento de fissuras, segundo Al-Harthy, Stewart e Mullard (2011), pode acelerar o processo de corrosão e reduzir a capacidade estrutural.

Figura 44 - Processo de fissuração do concreto



Fonte: Elaborado pela autora com base em Lu, Jin e Liu (2011), Jamali *et al.* (2013)

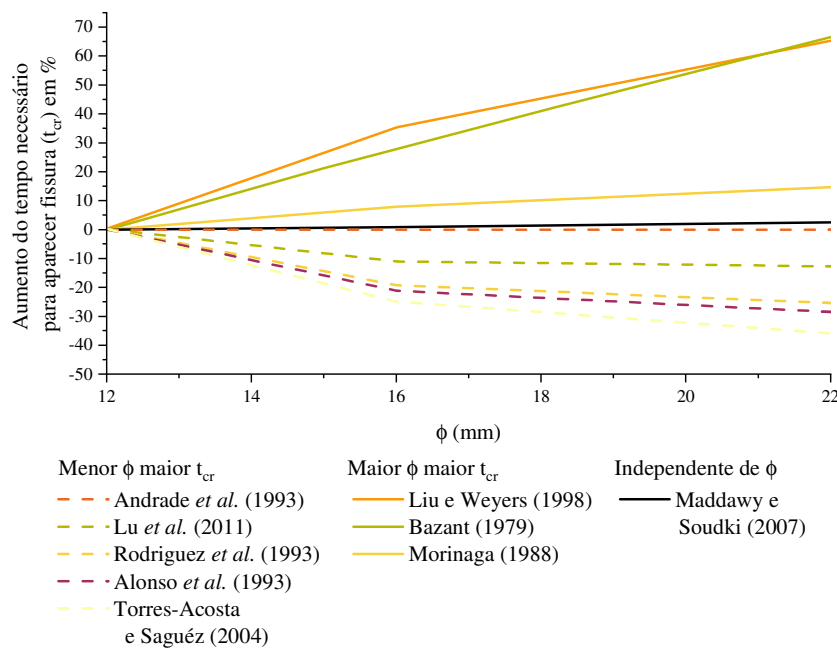
Segundo a revisão bibliográfica de Al-Harthy, Stewart e Mullard (2011), o modelo de cálculo da fissuração inicial ou de propagação podem ter influência de diversas variáveis como: taxa de corrosão, diâmetro da armadura, cobrimento, espaçamento das barras, propriedades do concreto etc. Através de ensaios experimentais, os autores observaram que o tempo da fissuração inicial e o tempo da fissuração de propagação aumentavam com o aumento do cobrimento e com a redução da resistência à compressão do concreto e redução do diâmetro.

Outros autores também relataram que o tempo de fissuração aumentavam com uso de maior cobrimento como: Jamali *et al.* (2013), El Maaddawy e Soudki (2007) e Cui e Alipour (2018). Segundo Cui e Alipour (2018), o aumento do tempo de fissuração com a redução da resistência a compressão é devido a maior porosidade do concreto, que permite a entrada dos produtos de

corrosão causando uma menor tensão ao concreto. Porém este tipo de concreto também reduz o tempo de iniciação, que é mais significativo.

A relação da fissuração com o diâmetro da armadura é controversa, porque alguns autores afirmam que o tempo de surgimento da fissuração cresce com o aumento do diâmetro como: Liu e Weyers (1998) apud Al-Harthy, Stewart e Mullard (2011), Morinaga (1988) apud Cui e Alipour (2018); e outros apontam que decresce com o aumento do diâmetro como: Alonso *et al.* (1998), Al-Harthy, Mullard e Stewart (2011) e Lu, Jin e Liu (2011). Apesar da divergência de opiniões sobre a relação diâmetro e tempo de fissuração, os estudos de Al-Harthy, Stewart e Mullard (2011) e Cui e Alipour (2018) apontam que há mais testes experimentais que mostram a relação de maior diâmetro, menor tempo de fissuração. A comparação entre os diversos trabalhos na literatura quanto ao diâmetro e o tempo de fissuração foi feito por Jamali *et al.* (2013) e está apresentada na Figura 45.

Figura 45 - Tempo de fissuração em relação ao diâmetro da armadura



Fonte: Adaptado de Jamali *et al.* (2013)

Alguns estudos como Cui e Alipour (2011) e Alonso *et al.* (1998) analisaram a influência razão cobertura/diâmetro na fissuração. Cui e Alipour (2011), através de estudos paramétricos, concluíram que o cobertura e o diâmetro afetam no tempo de iniciação da fissuração - o tempo aumenta quando a razão cobertura/diâmetro aumenta. Dentre as variáveis estudadas pelos autores, as que geraram mais impacto no tempo de iniciação da fissuração foram a taxa de corrosão, espessura da zona de transição no concreto armado e o tipo de produto



de corrosão gerado. O trabalho de Chen, Baji e Li (2018) também encontraram as mesmas variáveis mais influentes através de uma análise probabilística.

Segundo os trabalhos apresentados, pode-se calcular o tempo de fissuração do concreto após a despassivação por meio das equações abaixo:

❖ Alonso *et al.* (1998):

Através de testes experimentais obteve a Equação 5.33 para tempo de fissuração, em que, para um maior diâmetro, menor o tempo de fissuração:

$$t_{cr} = \frac{7,53 + \frac{9,32c}{\emptyset}}{0,0116i_{corr} \times 10^3} \quad (5.33)$$

❖ Morinaga (1988) apud El Maaddawy e Soudki (2007):

Desenvolveu um modelo empírico para calcular o volume necessário de produtos de corrosão para gerar fissuração do concreto. O cálculo para o tempo de fissuração é apresentado na Equação 5.34:

$$t_{cr} = \frac{0,602\emptyset \left(1 + \frac{2c}{\emptyset}\right)^{0,85}}{i_{corr}} \quad (5.34)$$

❖ Vidal, Castel e François (2004):

Através de testes experimentais em vigas de 14 e 27 anos obteve a redução de área de diâmetro necessária ( $\Delta A_{s0}$ ) para gerar o início da fissuração, conforme Equação 5.35.

$$\Delta A_{s0} = A_s \left[ 1 - \left[ 1 - \frac{\alpha}{\emptyset} \left( 7,53 + \frac{9,32c}{\emptyset} \right) 10^{-3} \right]^2 \right] \quad (5.35)$$

Na Equação 5.33, 5.34 e 5.35,  $c$  é o cobrimento,  $\emptyset$  o diâmetro da armadura,  $t_{cr}$  é o tempo para gerar fissuração após a despassivação,  $A_s$  é a área de armadura íntegra e  $\alpha$  é o fator de concentração de pites.

A Equação 5.34 será utilizada posteriormente no trabalho, no Tópico 6.4.2, para calcular o tempo necessário para que a estrutura apresente uma fissuração de 0,05 mm. Este valor de abertura de fissura, apesar de não comprometer estruturalmente, pode aumentar a suscetibilidade da estrutura à agentes externos.

### 5.2.2 Exemplos de validação

Neste tópico serão apresentados dois exemplos de validação referentes à corrosão da estrutura por carbonatação. Neste trabalho optou-se por utilizar a Equação 5.22 para o cálculo da perda da área de aço ao longo do tempo. Para implementar esta consequência da corrosão no modelo de elementos finitos, foram utilizadas duas abordagens: alteração do módulo de elasticidade da estrutura e redução da largura da lâmina referente à armadura.

#### 5.2.2.1 Viga biapoiada de Graeff (2007)

O experimento realizado por Graeff (2017) já foi validado neste trabalho para elemento de pórtico laminado sem corrosão e sem danificação no Tópico 4.3.3 e Figura 30. Neste ensaio, a viga sofreu até 20 % de corrosão da estrutura e foi observado ao longo do ensaio: a redução da área de aço, perda da tensão de escoamento e redução da resistência à tração conforme Tabela 10.

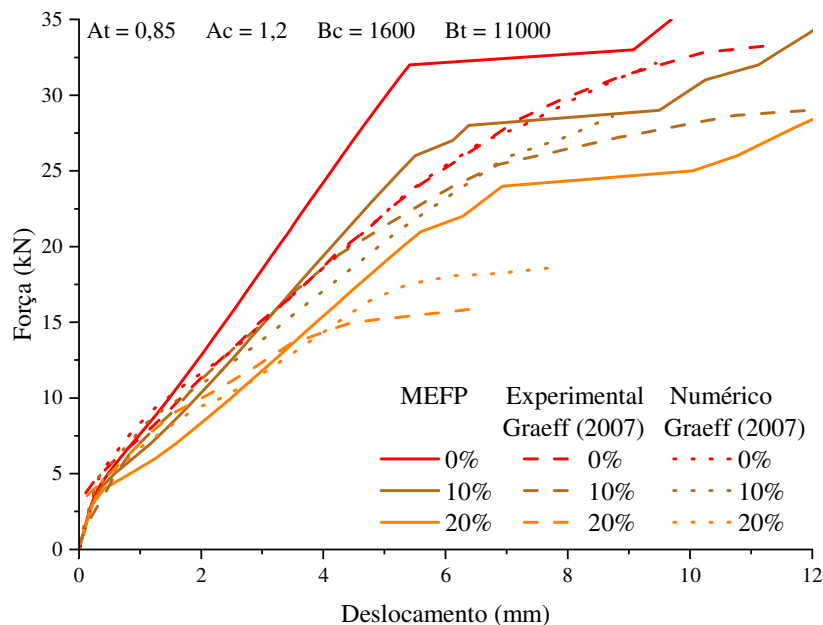
Tabela 10 - Redução das propriedades da estrutura como consequência da corrosão

<b>Grau de Corrosão (%)</b>	<b>Redução da resistência de aderência (%)</b>	<b>Redução da seção transversal (%)</b>	<b>Redução da resistência à tração (%)</b>
10	11,0	13,73	0,0
20	43,0	25,71	45,0

Fonte: Graeff (2007).

Para representar a corrosão uniforme neste trabalho foi utilizado a perda da área de aço através da redução da largura da lâmina referente a armadura. Para este exemplo utilizou-se a perda da largura da lâmina referente ao aço da Tabela 10 e os resultados estão apresentados na Figura 46. Neste exemplo foi utilizado tolerância de  $10^{-7}$ , 35 passos de carga e 54 elementos.

Figura 46 - Comparação do deslocamento da viga de Graeff (2007) no meio do vão com os resultados obtidos neste trabalho a partir da redução da espessura



Fonte: Elaborado pela autora.

Através da Figura 46 é possível afirmar que, por meio da redução da largura obtém-se um comportamento mais aproximado com os resultados experimentais e numéricos de Graeff (2007).

O resultado exibido na Figura 46 também apresenta uma diferença esperada entre o comportamento da estrutura no ensaio experimental e pelo MEFP. Ao inserir a não-linearidade física do concreto e não a do aço e com a imposição crescente de forças externas, o concreto se danifica, porém o aço não plastifica. Como nesse modelo existe aço na seção de compressão e tração, o concreto pode estar completamente danificado, porém o aço continua tendo a mesma resistência. Diante disso, a Figura 46 mostra os problemas de convergência e diferença na curvatura força x deslocamento quando chega próximo a carga última. Apesar da imprecisão do programa utilizando MEFP para representar o comportamento da estrutura próximo a carga última, a implementação continua sendo válida para ser utilizada antes da estrutura chegar a carga de colapso e será utilizada neste trabalho.

#### 5.2.2.2 Viga biapoiada de Álvares (1993)

Foi utilizado a viga do trabalho de Álvares (1993), presente no Tópico 5.1.2.1, como base para este exemplo de corrosão para demonstrar a consequência da perda da área de aço ao longo dos anos no deslocamento no meio do vão de uma viga.

Analisou-se a viga com 0, 15, 30, 45, 60 e 75 anos. O tempo considerado neste exemplo refere-se ao tempo de propagação, após a estrutura ter sofrido despassivação. A estrutura foi discretizada em 16 elementos, tolerância de  $10^{-6}$ , 10 passos de carga, e foram utilizadas configurações distintas de diâmetro ( $\varnothing$ ) da armadura inferior e taxa de corrosão, mas manteve-se a área de aço, conforme Tabela 11.

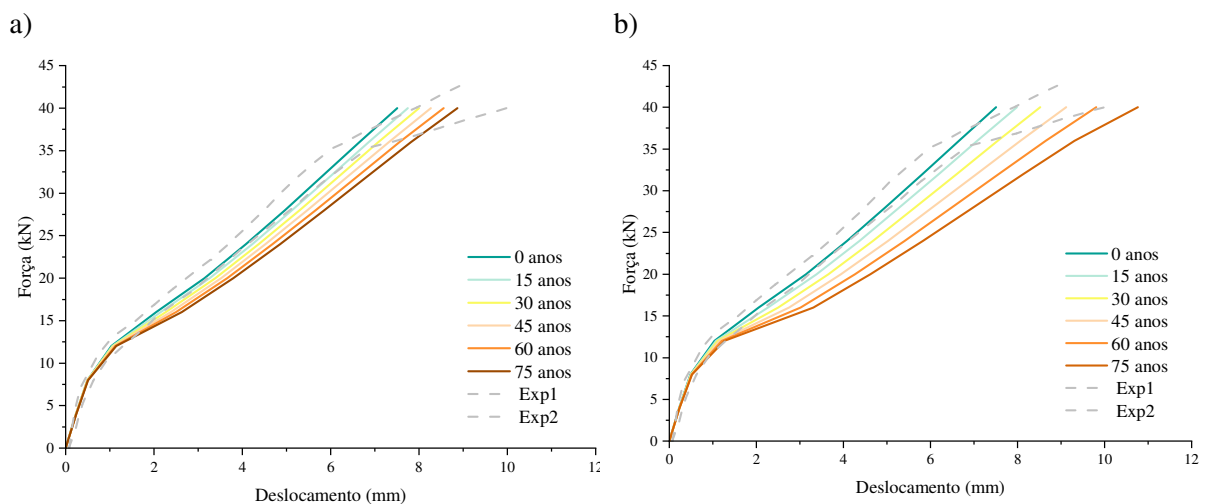
Tabela 11 - Configuração do exemplo de corrosão para diâmetros e taxas de corrosão distintas

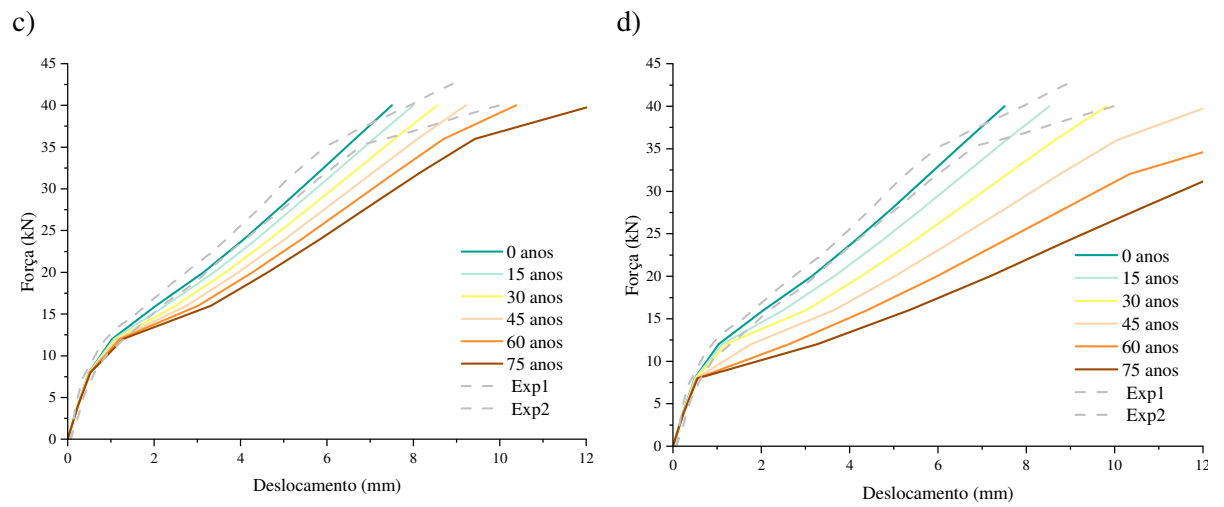
$i_{corr} = 0,5 \mu A/cm^2$ (A)		$i_{corr} = 1,0 \mu A/cm^2$ (B)	
$\varnothing = 10$ mm	$\varnothing = 5$ mm	$\varnothing = 10$ mm	$\varnothing = 5$ mm
(Configuração 1A)	(Configuração 2A)	(Configuração 1B)	(Configuração 2B)

Fonte: Elaborado pela autora.

Os resultados deste exemplo estão exibidos na Figura 47 e percebe-se que, tanto a taxa de corrosão como a escolha do diâmetro impactam no deslocamento da viga em um processo corrosivo ao longo dos anos. Isto ocorre em razão da Equação 5.22, que indica que a perda da área de aço é diretamente proporcional à taxa de corrosão. Esta perda de área (diâmetro final menos diâmetro inicial) independe da bitola da armadura, e isto faz com que a armadura de menor diâmetro seja proporcionalmente mais danificada.

Figura 47 - Deslocamento no meio do vão ao longo dos anos para estruturas em processo corrosivo para configurações a) 1A, b) 2A, c) 1B, d) 2B



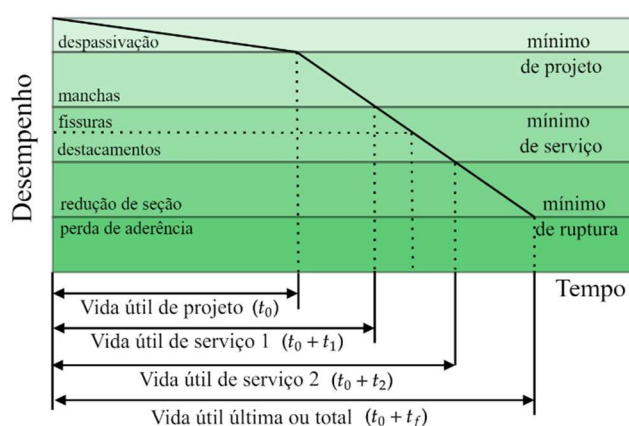


Fonte: Elaborado pela autora.

## 6 PROBABILIDADE DE FALHA DEVIDO À CORROSÃO

Os estágios de iniciação e propagação da corrosão estão completamente ligados à vida útil da estrutura, que é definida como o tempo que a estrutura cumpre sua função sem custos importantes de manutenção. A Figura 48 demonstra esta relação, destringindo a vida útil em: vida útil de projeto, de serviço, total (CARMONA, 2005; NBR 6118, 2014).

Figura 48 - Relação entre corrosão e vida útil



Fonte: Adaptado de Helene (1993).

De acordo com Helene (1993), Carmona (2005) e com a NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014) e em concordância com a Figura 48, as vidas úteis de projeto e de serviço podem ser definidas como:

- ❖ Vida útil de projeto: Período ( $t_0$ ) em que as estruturas de concreto mantêm suas características sem a necessidade de intervenções significativas. O  $t_0$  é calculado com base nos parâmetros de agressividade do meio ambiente e características do concreto que influenciam para o transporte dos agentes agressivos ao aço;
- ❖ Vida útil de serviço ( $t_0 + t_1 + t_2$ ): Período até o surgimento de manifestações patológicas inadmissíveis;
- ❖ Vida útil última ( $t_0 + t_f$ ): Tempo de ruína ou colapso da estrutura.

Essa vida útil da estrutura pode ser determinada, segundo Carmona (2005), por métodos empíricos, com base em ensaios acelerados, modelos numéricos, determinísticos ou

probabilísticos. Segundo Nogueira, Leonel e Coda (2012) e Duprat e Sellier (2006), muitos estudos na literatura tratam da corrosão em concreto armado através da abordagem determinística. No entanto, devido ao vasto número de incertezas intrínsecas ao problema, os autores apontaram que a análise por meio de métodos probabilísticos se mostra mais coerente. Vale ressaltar alguns trabalhos realizados utilizando esta formulação: Enright e Frangopol (1998), Teigen *et al.* (1991), Vu e Stewart (2000), Zhang *et al.* (2019).

Com isso, a teoria da confiabilidade estrutural surge como uma ferramenta apropriada para o estudo do problema da corrosão em estruturas de concreto armado. A confiabilidade pode ser definida como o complemento da probabilidade de falha, isto é, a probabilidade de que um sistema não falhe dentro de uma vida de projeto determinada e obedecendo as condições de projeto e operação (BECK, 2019). Porém, cabe esclarecer que a falha não implica, obrigatoriamente, na ruína do sistema, mas apenas em um comportamento não desejado da estrutura. Na confiabilidade estrutural, o problema principal é incorporar as incertezas dentro de um modelo representativo da realidade. Os parâmetros de importância para o modelo deixam de ser considerados de forma determinística e passam a ser representados como variáveis aleatórias, uma vez que as incertezas são incorporadas através de dados estatísticos (COELHO, 2017; LIBERATI, 2014).

### 6.1 Probabilidade de falha

Segundo Sudret (2008), os modelos determinísticos utilizados para degradação causada pela corrosão são geralmente baseados em equações semiempíricas que geram uma medida de dano  $D$  dependente de um conjunto de parâmetros  $\boldsymbol{x}$  e do tempo  $t$ :

$$D(t) = \mathcal{M}(\boldsymbol{x}, t) \quad (6.1)$$

Esta medida de dano  $D$  pode ser expressa como uma perda de área de armadura ou redução da tensão de escoamento, por exemplo. No presente trabalho, a medida de dano considerada foi a deformação. Os parâmetros  $\boldsymbol{x}$  são incertos e podem ser modelados como variáveis aleatórias, com isso a própria medida de dano passa a ser aleatória, incorrendo em um problema de confiabilidade.

O critério de falha é matematicamente representado por uma função de estado limite  $g(\boldsymbol{x}, t)$  conforme a Equação 6.2, onde  $\bar{D}$  é um valor limite admissível para a medida de dano considerada e  $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  é o conjunto de variáveis aleatórias relevantes para o modelo:

$$g(\mathbf{x}, t) = \bar{D} - D(t) = \bar{D} - \mathcal{M}(\mathbf{x}, t) \tag{6.2}$$

Desta forma, os domínios de sobrevivência e de falha da estrutura ficam caracterizados como:

$$\begin{cases} g(\mathbf{x}, t) > 0 \rightarrow \mathbf{x} \in \Omega_s \text{ (domínio de sobrevivência)} \\ g(\mathbf{x}, t) \leq 0 \rightarrow \mathbf{x} \in \Omega_f \text{ (domínio de falha)} \end{cases} \tag{6.3}$$

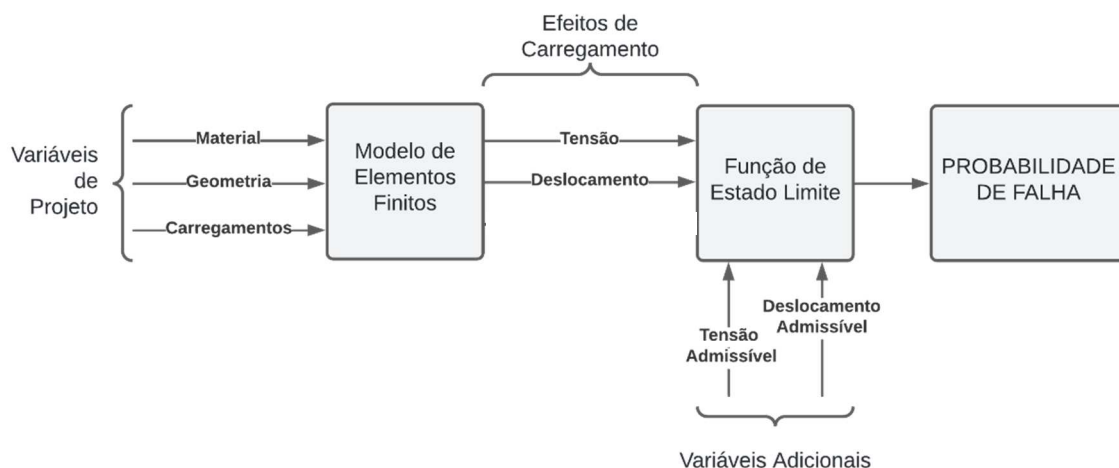
A probabilidade de falha é uma medida da propensão à violação das equações de estado limite, podendo ser calculada com base na função conjunta de densidade de probabilidades  $f_X(\mathbf{x})$ , por meio da integral (BECK, 2019):

$$p_f = \int_{\Omega_f} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{6.4}$$

Porém, na maior parte dos casos, essa integral não pode ser resolvida analiticamente, podendo utilizar-se de métodos aproximados de transformação como o FORM (*First Order Reliability Method*) ou o SORM (*Second Order Reliability Method*), ou método de simulação de Monte Carlo (SMC). Foi escolhido trabalhar com a SMC devido à quantidade de variáveis aleatórias adotadas no trabalho e ao fato das equações de estado limite utilizadas não serem lineares.

Outro ponto a ser observado é a junção do conceito de probabilidade de falha com um modelo de elementos finitos. Assim, como uma das metas do trabalho em questão, é possível determinar probabilidades associadas a certos modos de falha, caracterizados por equações de estado limite, conforme esquematizado de forma genérica na Figura 49.

Figura 49 - Cálculo da probabilidade de falha utilizando um modelo de elementos finitos





Fonte: Adaptado de Beck (1999)

## 6.2 Simulação de Monte Carlo

A simulação é um modo de experimentação numérica que, em relação à análise de estruturas, pode ser vista como uma maneira de conduzir numericamente um experimento que não é realizável na prática. No método de simulação de Monte Carlo (SMC) é realizado um modelo hipoteticamente construído que é testado por um número de vezes preestabelecido. Essas repetições propiciam um conjunto de soluções que trazem a resposta simulada do modelo mecânico, como se fosse a realização de experimentos em laboratório (BECK, 1999; LIBERATI, 2014).

Segundo Beck (2019) e Pellizzer (2019), na simulação de Monte Carlo os experimentos são feitos através de simulações numéricas e podem ser esquematizados de acordo com as etapas: geração de amostras aleatórias, avaliação da ocorrência da falha, e estimativa de falha e sua variância.

“Técnica de amostragem” é o nome dado para as várias formas de gerar amostras aleatórias necessárias para as simulações. Segundo Leonel (2009), Liberati (2014) e Pellizzer (2019), a técnica mais simples para gerar uma amostra  $x_i$  de uma variável aleatória  $X$  pode ser dividida em duas etapas:

1. Geração de um número aleatório  $u_i$  com distribuição uniforme de probabilidades entre 0 e 1;
2. Realização de uma transformação pela inversa da função de probabilidade acumulada:

$$x_i = F_x^{-1}(u_i) \quad (6.5)$$

Para calcular a probabilidade de falha empregando-se a simulação de Monte Carlo, é utilizada a seguinte equação:

$$p_f = \int_{\Omega_f} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} I(\mathbf{x}) f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = E[I(\mathbf{x})] \quad (6.6)$$

em que a função indicadora  $I(\mathbf{x})$  é determinada de acordo com a Equação 6.7, e a média empírica dos valores de  $I(\mathbf{x})$  para um dado número de simulações ( $n_s$ ) é um estimador não-tendencioso da probabilidade de falha, Equação 6.8.

$$I(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_f \\ 0, & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_s \end{cases} \quad (6.7)$$

$$p_f \approx \hat{p}_f = \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} I(\mathbf{x}_i) \quad (6.8)$$

A variância da probabilidade de falha, ou o erro estatístico proveniente do resultado da probabilidade de falha da SMC, é dada por:

$$Var[p_f] = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (I[x_j] - \hat{p}_f)^2 \quad (6.9)$$

A determinação do número de amostras necessárias para cada situação depende da ordem de grandeza da probabilidade de falha. A precisão da probabilidade de falha de  $10^{-n}$  sugere a utilização de um total de simulações na ordem de  $10^{n+2}$  ou  $10^{n+3}$ . Em estruturas civis, em que a  $p_f$  está na ordem de  $10^{-3}$  a  $10^{-6}$ , seriam necessárias de  $10^5$  a  $10^9$  amostras. Um dos pontos críticos na escolha da amostragem é o tempo computacional, pois quanto mais complexo o modelo mecânico envolvido mais demorada é cada simulação (BECK, 2019; LIBERATI, LEONEL e NOGUEIRA, 2014).

### 6.3 Amostragem

Diversos são os estudos e as amostragens existentes para estruturas sob processo corrosivo por carbonatação. A Tabela 12 traz um resumo sobre as variáveis abordadas em alguns estudos, sendo as variáveis presentes em células verdes as mais utilizadas dentre os trabalhos observados e nelas foram informadas as distribuições utilizadas.



Espessura da região porosa entre aço e concreto				
Módulo de elasticidade do concreto				
Parâmetros relacionados aos produtos de corrosão				
Profundidade carbonatada				
Tempo para fissuração				
Resistência a tração do concreto				
LEGENDA:			Variáveis utilizadas nos trabalhos	Variáveis mais utilizadas dentre os trabalhos citados

Fonte: Elaborado pela autora

As variáveis presentes na Tabela 12 foram utilizadas tanto para análises do tempo de propagação como de iniciação da corrosão. Dentre estes trabalhos, pode-se citar:

1. Val e Melchers (1997) e Val, Stewart e Melchers (1998):

Utilizaram do método FORM (*First Order Reliability Method*) para prever a corrosão uniforme e localizada de uma ponte de concreto armado, em seu estágio de iniciação. Foram utilizadas as seguintes variáveis aleatórias para o estado limite último: tensão de escoamento do aço, peso próprio, peso de um caminhão, taxa de corrosão  $i_{\text{corr}}$ , resistência à compressão do concreto e altura útil da seção transversal. Já para calcular a probabilidade de falha no estado limite de serviço, Val, Stewart e Melchers (1998) consideraram o módulo de elasticidade do aço ao invés da tensão de escoamento, além de mais alguns parâmetros do concreto relacionados à resistência à tração, módulo de elasticidade e ao trecho descendente do diagrama tensão-deformação na tração. Para calcular a perda de área do aço para corrosão uniforme foi utilizada a Equação 5.22;

2. Carmona (2005):

Realizou testes experimentais, calculou a espessura de carbonatação através de cinco modelos matemáticos, e determinou a probabilidade de despassivação a partir de uma tabela de probabilidades de distribuição normal. Dentro deste contexto, construiu um programa computacional que emprega cálculos determinísticos e métodos probabilísticos para previsão do período de iniciação, utilizando as variáveis: resistência do concreto, tipo do cimento, espessura de cobrimento e porcentagem de CO<sub>2</sub>, para calcular o tempo de despassivação;

3. Duprat e Sellier (2006):

Estudaram a probabilidade da estrutura despassivar com o tempo, utilizando uma superfície de resposta quadrática construída a partir de um conjunto de pontos de suporte arranjados segundo um plano de experimentos (DOE, *Design of Experiments*) original. Os autores utilizaram como variáveis a resistência do concreto, espessura de cobrimento, força aplicada, tortuosidade e difusividade do CO<sub>2</sub>, sendo este último parâmetro calculado a partir de modelos matemáticos;

4. Biondini e Frangopol (2017):

Estudaram a probabilidade de falha em duas estruturas sujeitas à corrosão para estado limite de fissuração do concreto e/ou escoamento da armadura utilizando simulações de Monte

Carlo. As variáveis utilizadas foram: resistência à compressão do concreto e tensão de escoamento do aço, coordenadas e diâmetro da armadura, coeficiente de difusividade, e taxas de dano no concreto e no aço. O cálculo da perda de área de aço foi feito através das Equações 5.27 a 5.29;

#### 5. Coelho (2017):

Coelho (2017) avaliou a degradação mecânica em estruturas de concreto armado sujeitas à corrosão através de formulações mecânico-probabilísticas acopladas a modelos numéricos. Para a análise probabilística foram utilizadas simulações de Monte Carlo com as seguintes variáveis aleatórias: cobertura, resistência à compressão do concreto, fator a/c, tensão de escoamento do aço, carregamento permanente e variável, umidade relativa, temperatura,  $i_{corr}$ , concentração de  $CO_2$ . Este conjunto de variáveis descreve as propriedades ambientais, mecânicas e geométricas de cada estrutura. Para o cálculo de redução da área de aço, foi utilizada a Equação 5.22.

### 6.4 Cálculo da probabilidade de falha

Nestes próximos subtópicos foi calculada a probabilidade de falha quanto ao período de iniciação e propagação.

#### 6.4.1 Despassivação - Período de iniciação

Como apresentado anteriormente, a despassivação acontece com a chegada da profundidade de carbonatação à superfície da armadura. O cálculo para profundidade de carbonatação foi feito pela Equação 5.18. A equação de estado limite para despassivação é definida conforme:

$$g_1(x) = \text{cobrimento} - \sqrt{\frac{2C_0 D_{CO_2} t}{a}} \quad (6.10)$$

sendo  $a$  a quantidade de  $CO_2$  para a completa carbonatação ( $kg/m^3$ ),  $t$  é o tempo (s),  $C_0$  é a concentração de  $CO_2$  no ar ( $kg/m^3$ ) e  $D_{CO_2}$  é o coeficiente de difusão do  $CO_2$  no concreto carbonatado ( $m^2/s$ ).

Foram adotadas as variáveis aleatórias conforme Tabela 13. O cálculo foi realizado considerando três cobrimentos diferentes, relacionados com as três classes de agressividade do ambiente definidas na NBR 6118 (2014).

Tabela 13 - Variáveis aleatórias adotadas para o estágio de iniciação

Variáveis	Unidade	Trabalho base	Média	CV	Distribuição
Teor de CO <sub>2</sub>	kg/m <sup>3</sup>	Félix e Carrazedo (2021)	0,000762	0,1049	Normal
$D_{CO_2}$	m <sup>2</sup> /s	Sudret (2008)	$5 \times 10^{-8}$	0,3000	Log-Normal
$a$	kg/m <sup>3</sup>	Sudret (2008)	80,0	0,3000	Log-Normal
Cobrimento	cm	Embasado na NBR 6118 (2014)	2,5 (Caso A)	0,1000	Normal
			3,0 (Caso B)	0,1000	Normal
			4,0 (Caso C)	0,1000	Normal

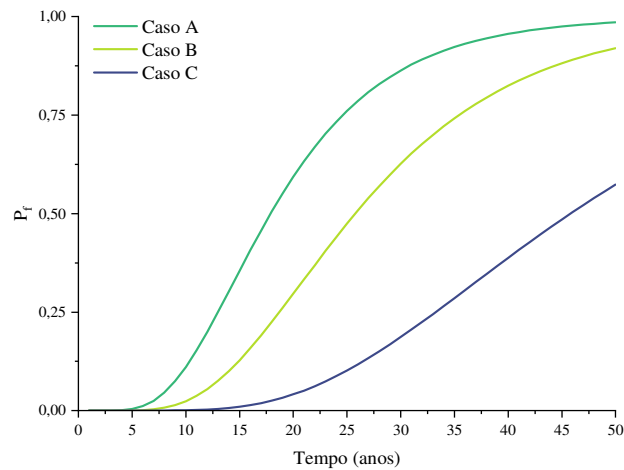
Fonte: Elaborado pela autora

O valor da Tabela 13 para teor de CO<sub>2</sub> foi retirado de Félix e Carrazedo (2021) referente ao meio urbano brasileiro; difusividade foi baseado em Sudret (2008) em concordância com estudos de Sanjuan e Del Olmo (2001), que relatam que, para um concreto de qualidade média, a difusividade de CO<sub>2</sub> varia de  $5 \times 10^{-8}$  a  $5 \times 10^{-7}$  m<sup>2</sup>/s; para o parâmetro  $a$  foi tido como base o trabalho de Sudret (2008), que está em conformidade com os valores da Equação 5.20; e para cobrimento, a base foi a NBR 6118 (2014) para as classes de agressividade e o coeficiente de variação com base em Coelho (2017).

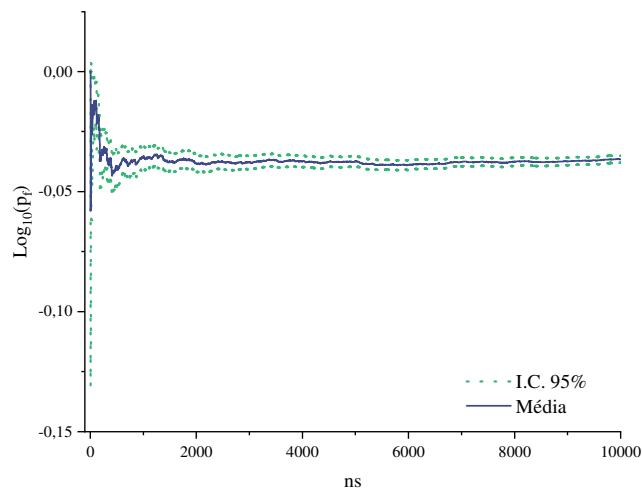
A geração de amostras utilizada nesse trabalho seguiu o passo a passo descrito no tópico 6.2, ou seja, para cada variável e simulação foi gerado um número aleatório  $u_i$  com distribuição uniforme de probabilidades entre 0 e 1 e logo em seguida foi determinado a inversa da função de distribuição cumulativa de probabilidades. Como as probabilidades calculadas não eram tão pequenas para que fosse preciso um número de amostras proibitivamente alto, não foi necessário utilizar técnicas de amostragem inteligente como amostragem por hiper-cubo latino. (BECK, 2019)

O resultado da probabilidade de falha para uma estrutura com os parâmetros conforme Tabela 13 e utilizando  $10^7$  amostras é apresentado na Figura 50. A Figura 51 mostra o gráfico de convergência da  $p_f$  em 50 anos para o caso de cobrimento médio de 3cm adotando intervalo de confiança de 95%. Este gráfico confirma a escolha do número de amostras ( $n_s$ ), pois com  $10^4$  amostras é possível observar uma convergência da média com intervalo de confiança (I.C.) aceitável. A discussão sobre os resultados será realizada ao dispor sobre o cenário seguinte.

Figura 50 - Probabilidade de despassivação para três valores de cobrimentos distintos



Fonte: Elaborado pela autora

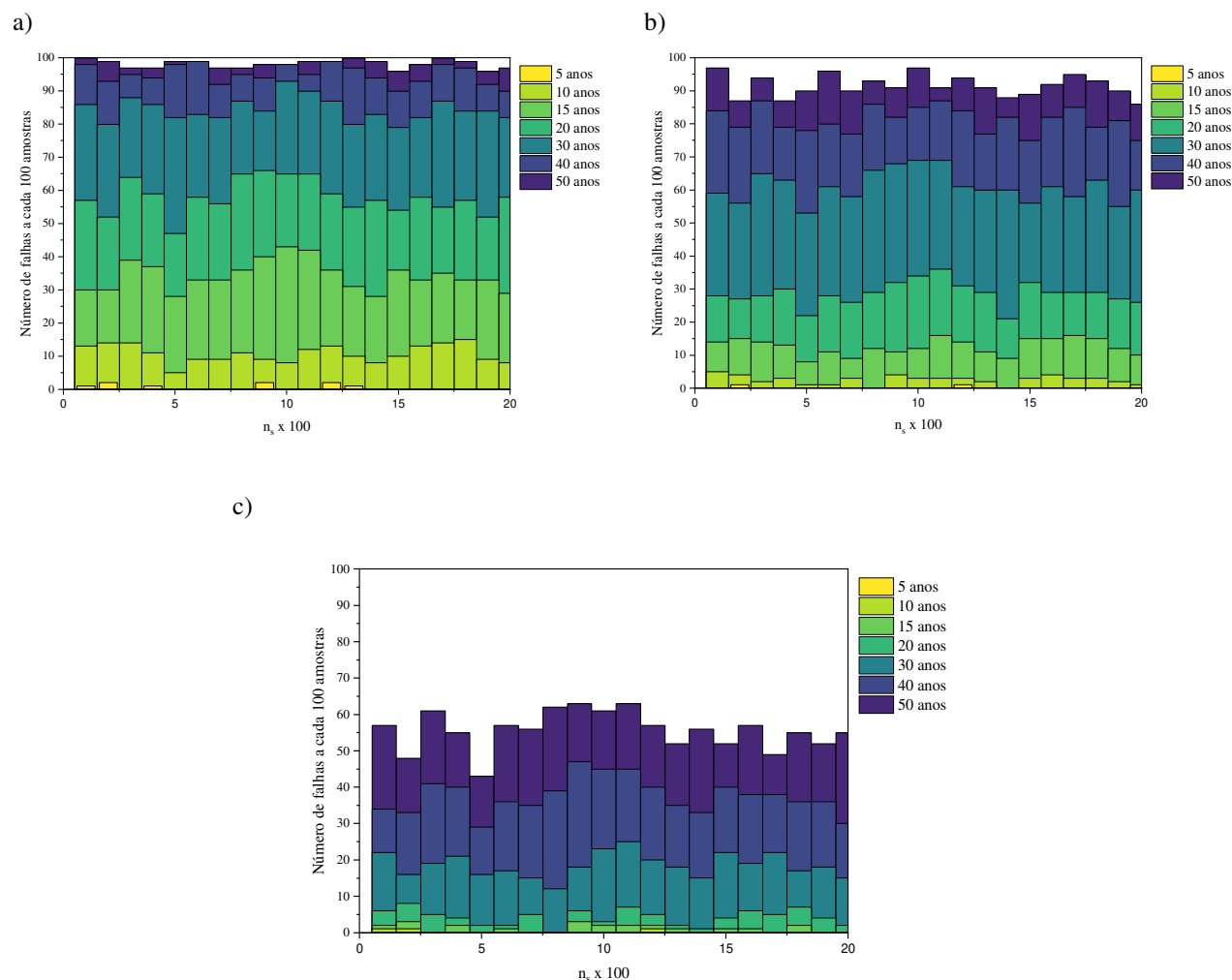
Figura 51 - Gráfico de convergência da  $p_f$  com I.C. de 95%

Fonte: Elaborado pela autora

Para um melhor entendimento da contagem de falhas, ou seja, do comportamento da função indicadora ao longo da SMC, apresenta-se na Figura 52 o número de falhas no decorrer do tempo para grupos de cem amostras para os três casos de cobrimento adotados.



Figura 52 - Mapeamento do número de falhas quanto à despassivação a cada cem amostras em 50 anos para cobertura médio de a) 2,5, b) 3,0 e c) 4 cm

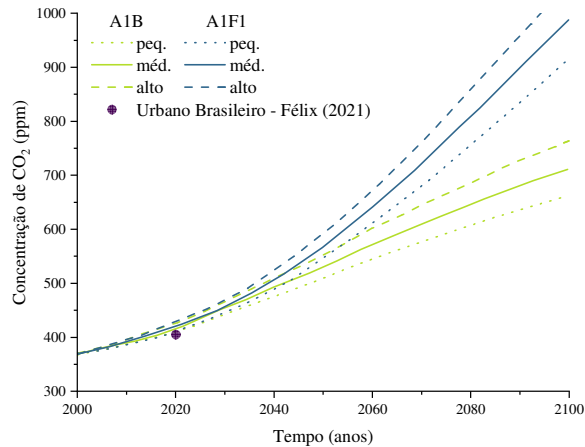


Fonte: Elaborado pela autora

O resultado da Figura 50 e Figura 52 é válido se mantido a média da concentração de dióxido de carbono ao longo dos anos, porém o tempo de iniciação da corrosão pode ser alterado com o passar do tempo devido à industrialização, aumento da população e produção de energia, que causam aumento da temperatura e da porcentagem de CO<sub>2</sub> presente no ar.

Bastidas-Arteaga (2013), através do *Model for Assessment of Greenhouse-gas Induced Climate Change* (1996), realizou uma projeção para concentração de CO<sub>2</sub> para diversos cenários globais. A Figura 53 retrata a projeção feita como a concentração média urbana brasileira relatada em Félix e Carrazedo (2021), sabendo que 1 ppm equivale a  $0,00188 \times 10^{-3}$  kg/m<sup>3</sup>. Esta comparação com os dados no Brasil em 2021 mostra que a projeção não é destoante da realidade.

Figura 53 - Projeção da concentração de CO<sub>2</sub> para diversos cenários globais



Fonte: Elaborado pela autora com base em Bastidas-Arteaga (2013)

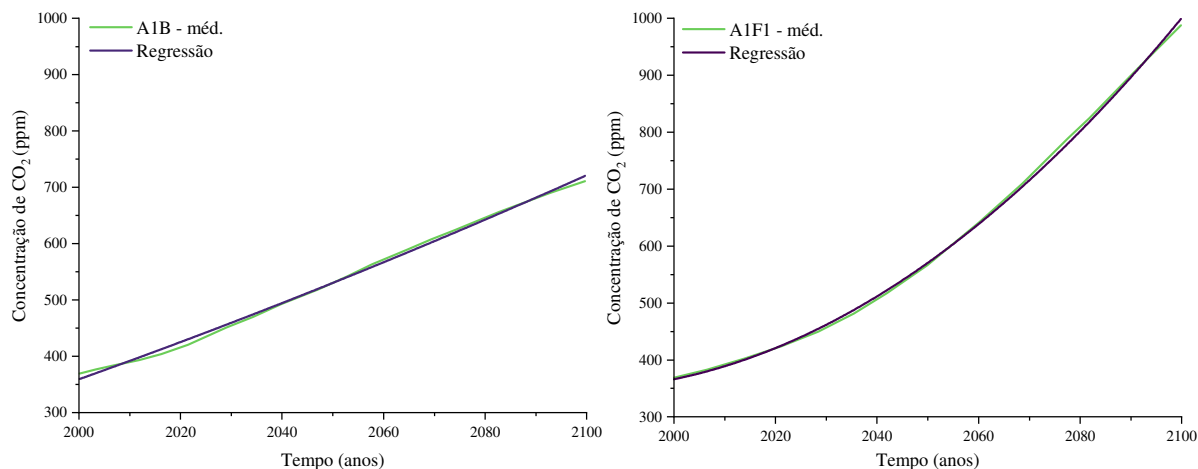
Os cenários mostrados na Figura 53 são: A1F1, que assume um crescimento econômico acelerado, estabilização do crescimento populacional no meio do século, uma introdução de tecnologias limpas e sustentáveis e uma incorporação de fontes fósseis de energia; e A1B, que possui as mesmas premissas, porém adotando um balanço entre o consumo de fontes fósseis e não fósseis de energia; as projeções de concentração de CO<sub>2</sub> pequeno, médio e alto englobam os erros de modelo.

A partir dos dados da Figura 53 foi feito uma regressão polinomial com o *software* Origin, conforme Figura 54, para estimar a concentração de CO<sub>2</sub> ao longo dos anos (*t*) para o caso médio de A1B (Equação 6.11) e A1F1 (Equação 6.12)

$$CO_2^{A1B}(ppm) = 10039,976 - 12,902t + 0,00403t^2 ; R^2 = 0,99748 \quad (6.11)$$

$$CO_2^{A1F1}(ppm) = 177096,122 - 178,566t + 0,0451t^2 ; R^2 = 0,99927 \quad (6.12)$$

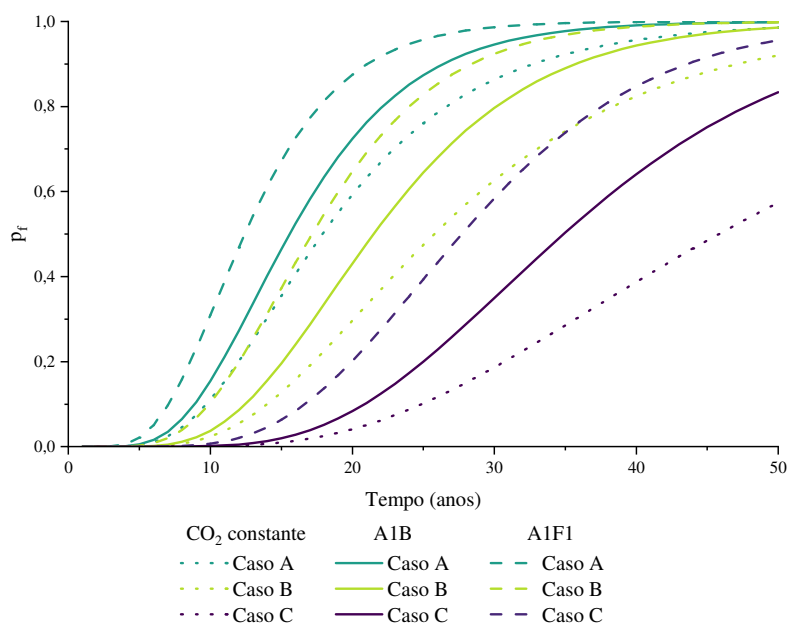
Figura 54 - Concentração de CO<sub>2</sub> dependente do tempo através da regressão polinomial conforme Equações 6.11 e 6.12



Fonte: Elaborado pela autora

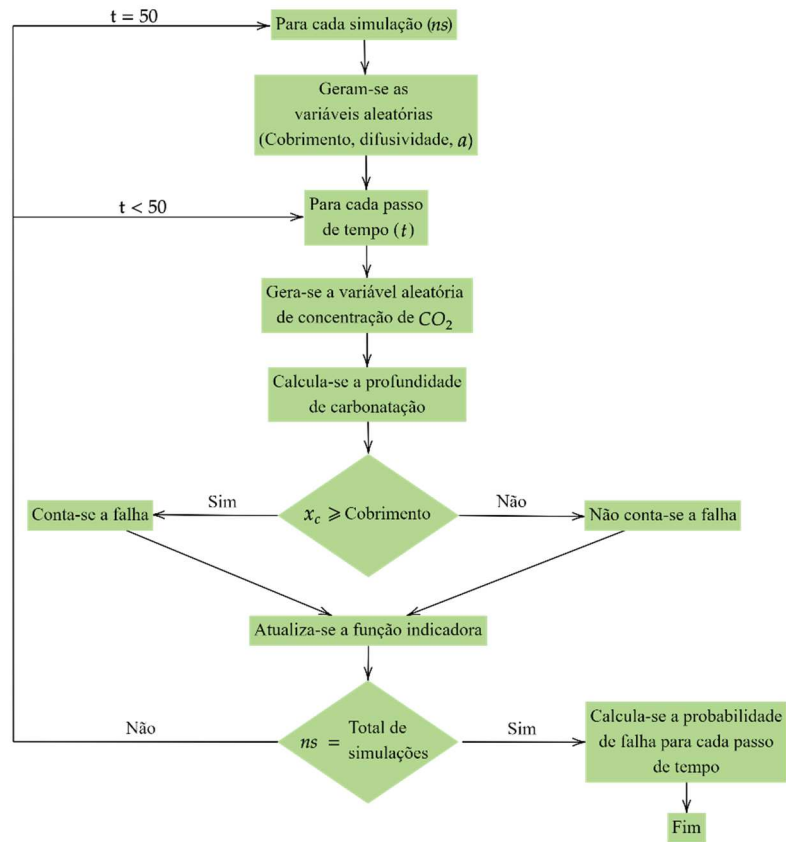
Para o novo cálculo da probabilidade de despassivação ao longo dos anos foi calculada uma nova média para a concentração de CO<sub>2</sub> a cada passo de tempo conforme as Equações 6.11 e 6.12, mantendo-se o coeficiente de variação da Tabela 13. O cálculo foi feito conforme fluxograma da Figura 56. As outras variáveis aleatórias adotadas na Tabela 13 permaneceram com valores de média e desvio iguais. Os valores de probabilidade de despassivação ao longo de 50 anos são apresentados na Figura 55 para os cenários A1B, A1F1 e para o valor de CO<sub>2</sub> constante de acordo com Tabela 13, onde o ano 0 representa o ano de 2023.

Figura 55 - Probabilidade de despassivação ao longo dos anos considerando diversos cenários de concentrações de dióxido de carbono



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 56 - Fluxograma do cálculo da probabilidade de despassivação



Fonte: Elaborado pela autora

A partir da Figura 50, Figura 52 e Figura 55 é possível afirmar que:

1. O cobrimento tem um papel fundamental na despassivação. No cenário do teor de CO<sub>2</sub> constante ao longo dos anos, a probabilidade de despassivar decresce em grande escala com o aumento do cobrimento, conforme Tabela 14.

Tabela 14 - Probabilidade de despassivação ao longo dos anos para três médias de cobrimento

Cobrimento	Tempo (anos)				
	10	20	30	40	50
<b>Caso A (2,5cm)</b>	11,081%	59,342%	86,337%	95,626%	98,555%
<b>Caso B (3,0cm)</b>	2,372%	29,678%	62,657%	82,435%	92,031%
<b>Caso C (4,0cm)</b>	0,076%	4,111%	18,672%	38,754%	57,378%

Fonte: Elaborado pela autora

2. O aumento da concentração de CO<sub>2</sub> pode causar uma despassivação precoce na estrutura, fazendo com que ela atinja sua vida útil de projeto com muito menos de 50 anos (a relação entre a despassivação e a vida útil de projeto está presente

na Figura 48), e se torne mais suscetível a maiores danos. Isto é reforçado na Tabela 15, que apresenta o período em anos necessário para que a estrutura tenha a probabilidade de despassivação maior que 50%.

Tabela 15 – Período em anos em que a estrutura alcança probabilidade de falha maior que 50% para diferentes cenários

Cobrimento	A1B	A1F1	CO <sub>2</sub> constante
Caso A (2,5cm)	16	13	18
Caso B (3,0cm)	22	18	26
Caso C (4,0cm)	35	28	46

Fonte: Elaborado pela autora

#### 6.4.2 Fissuração - Período de propagação

O início da fissuração causa uma suscetibilidade maior à estrutura quanto aos agentes agressivos. O tempo necessário para iniciação da fissuração pode ser calculado de diversas formas como, apresentado no Tópico 5.2.1.2.

Para equação de estado limite, a Equação 5.33 pode ser escrita na forma da Equação 6.13, utilizando a Equação 5.22 para redução do diâmetro, e admitindo  $i_{corr}$  independente do tempo:

$$\Delta\phi(T) = 0.0232i_{corr}T \Rightarrow \frac{\Delta\phi(T)}{2} 10^3 = 7,53 + \frac{9,32c}{\phi} \quad (6.13)$$

Partindo da equação 6.13, define-se a equação de estado limite para o cálculo da iniciação da fissuração:

$$g_2(x) = -\frac{\Delta\phi(T) \cdot 10^3}{2} + \left(7,53 + \frac{9,32c}{\phi_0}\right) \quad (6.14)$$

em que  $\Delta\phi(T) = \phi(T) - \phi_0$  e  $10^3$  é um ajuste de unidade (de mm em micrometro, utilizados em cada parcela da equação). Como o cálculo do diâmetro da barra corroída e do tempo de iniciação foi realizado a partir de variáveis aleatórias, eles se tornam variáveis aleatórias. Os valores de  $c$ ,  $i_{corr}$ , difusividade e  $a$  para o cálculo do tempo de iniciação e  $\phi(T)$  são os mesmos da Tabela 13.

Foi primeiramente utilizado o teor de CO<sub>2</sub> constante ao longo do tempo para o cálculo da probabilidade de fissuração. Para observar a influência do diâmetro e do cobrimento, foram

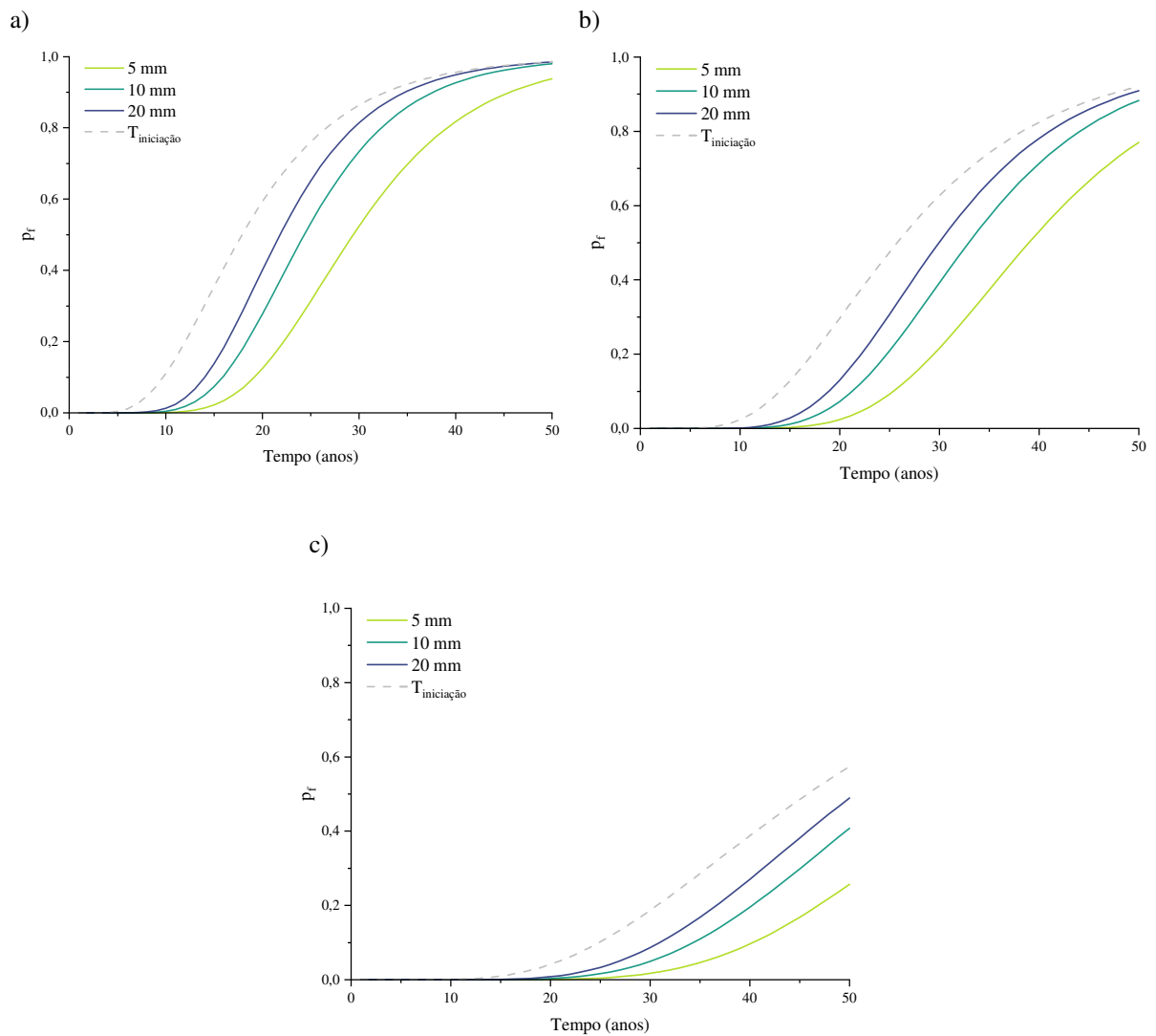
adotados três valores de cobrimento, conforme Tabela 13, e três diâmetro (5, 10 e 20 mm). O resultado obtido para a probabilidade de falha nos distintos cenários é apresentado na Figura 57 e Tabela 16. Foram utilizadas  $10^6$  amostras.

Tabela 16 - Probabilidade de fissuração em 50 anos para cenários distintos

Cobrimento	$\varnothing = 5 \text{ mm}$	$\varnothing = 10 \text{ mm}$	$\varnothing = 20 \text{ mm}$
<b>Caso A (2,5cm)</b>	93,77%	97,97%	98,48%
<b>Caso B (3,0cm)</b>	77,01%	88,30%	90,91%
<b>Caso C (4,0cm)</b>	25,72%	40,79%	48,95%

Fonte: Elaborado pela autora

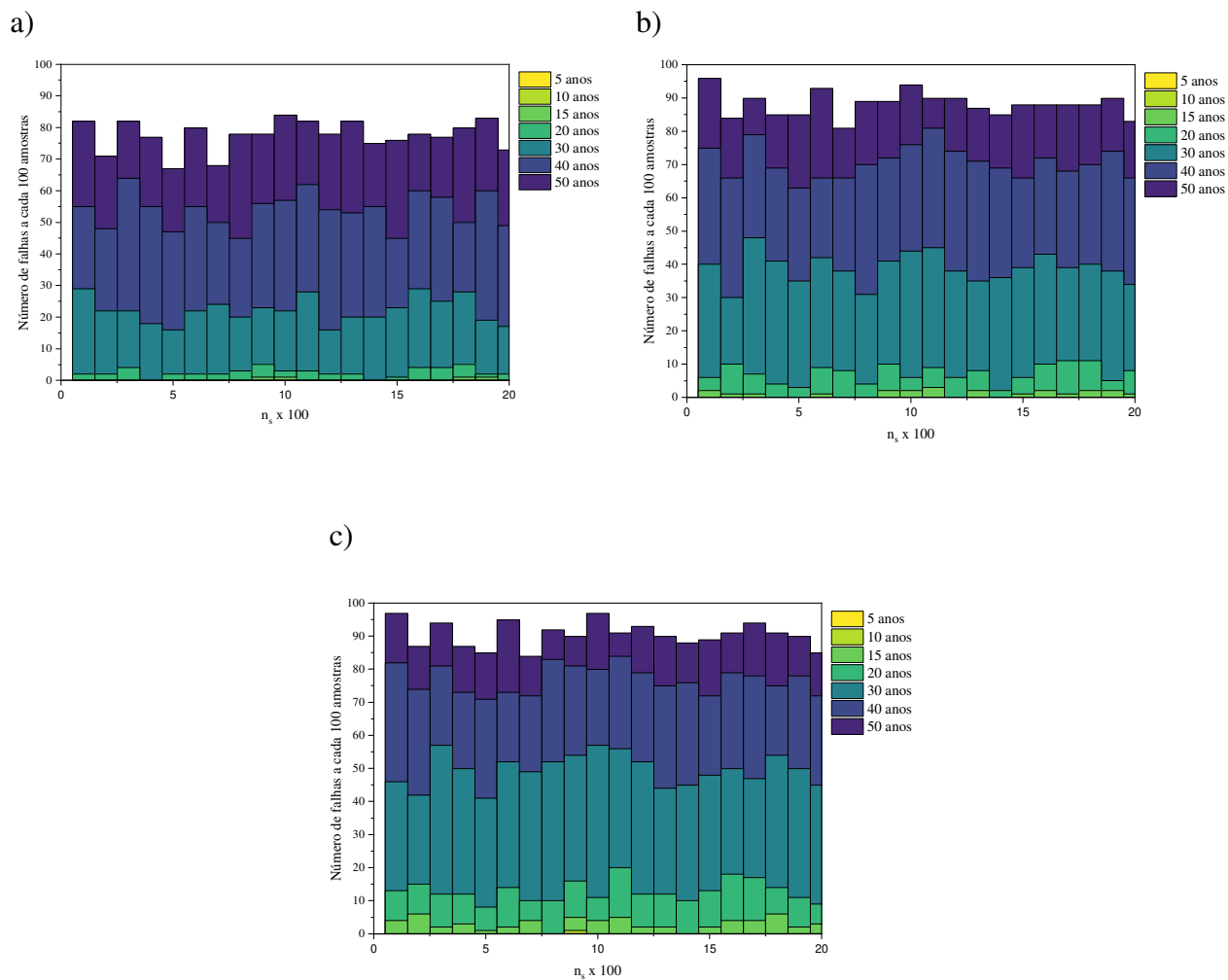
Figura 57 – Probabilidade de fissuração utilizando três diâmetros e média de cobrimento de a) 2,5, b) 3,0 e c) 4,0 cm



Fonte: Elaborado pela autora

O comportamento da função indicadora no decorrer dos anos para grupos de cem amostras para cobertura médio de 3,0 cm e teor de CO<sub>2</sub> constante é mostrado na Figura 58, para os três tipos de diâmetros distintos de 5, 10 e 20 mm.

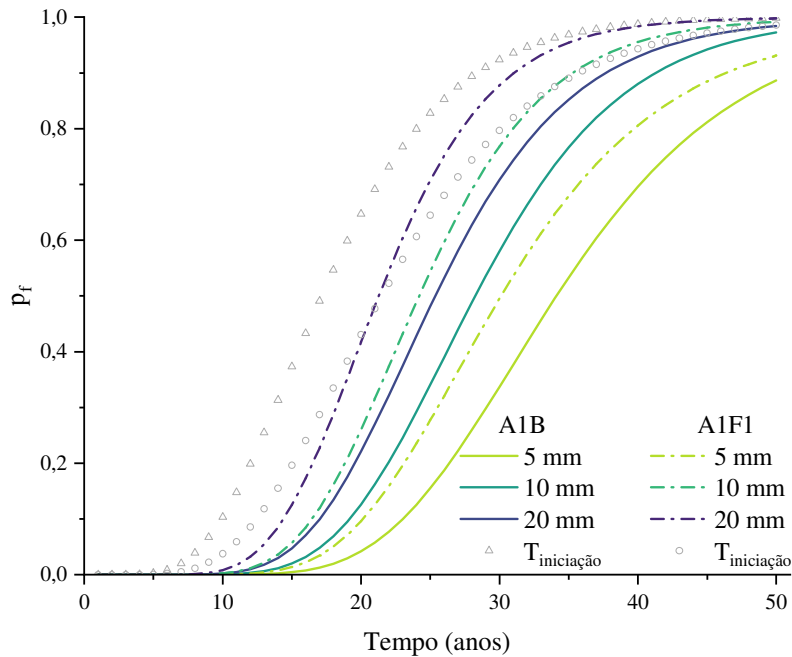
Figura 58 – Número de falhas quanto à fissuração ao longo do tempo para diâmetro de a) 5, b) 10 e c) 20 mm



Fonte: Elaborado pela autora

O mesmo teste foi realizado também para teor de CO<sub>2</sub> evoluindo com o tempo conforme as previsões A1F1 e A1B, para cobertura médio de 3,0 cm. A probabilidade de fissuração ao longo dos próximos 50 anos é apresentada na Figura 59, sendo que T<sub>iniciação</sub> representa a probabilidade de despassivação e o ano 0 representa o ano de 2023.

Figura 59 - Probabilidade de fissuração ao longo dos anos para cenários distintos



Fonte: Elaborado pela autora

Tabela 17 - Probabilidade de fissuração ao longo dos próximos 50 anos para diferentes cenários quanto ao teor de CO<sub>2</sub>

Tipo de cenário quanto ao teor de CO <sub>2</sub>	Ø = 5 mm	Ø = 10 mm	Ø = 20 mm
CO <sub>2</sub> constante conforme Tabela 13	77,01%	88,30%	90,91%
<b>A1B</b>	88,66%	97,25%	98,44%
<b>A1F1</b>	93,11%	99,18%	99,79%

Fonte: Elaborado pela autora

Através dos resultados obtidos nestes diversos cenários presentes na Tabela 16, Tabela 17, Figura 59 e Figura 57 para a fissuração ao longo dos anos, pode-se dizer que a vida útil da estrutura pode ser abreviada em uma estrutura sob as condições apresentadas, pois em 50 anos observa-se que já terá despassivado e apresentará fissuras maiores que 0,05 mm, tornando a estrutura mais vulnerável aos agentes agressivos. Estes resultados apontam novamente para a importância do revestimento, podendo estender a vida útil da estrutura se escolhido e executado corretamente.

A escolha do diâmetro de aço utilizado na estrutura também possui influência significativa na fissuração. Olhando apenas para os dados de fissuração e considerando que uma



viga de concreto armado pode ter os três tipos de diâmetro: 5 mm nos estribos, 20 mm na armadura à tração e 10 mm à compressão, a fissuração pode ocorrer primeiramente pela armadura tracionada.

#### 6.4.3 Falha quanto à deformação excessiva - Período de propagação

Neste tópico será abordado o estudo probabilístico para o estágio de propagação abordando: equação de estado limite de serviço de deformação, variáveis aleatórias consideradas, e cálculo da probabilidade de falha de uma viga de concreto armado sob ação da corrosão por carbonatação ao longo dos anos.

##### 1. Equação de estado limite de serviço

De acordo com a NBR 6118 (2014), uma estrutura de concreto deve ser verificada quanto aos estados-limites de serviço de deformação, formação de fissuras, abertura de fissuras, vibração, compressão e descompressão. Estes limites são relacionados à durabilidade da estrutura, conforto do usuário, aparência e boa utilização das estruturas.

Neste trabalho será avaliado o estado limite de serviço quanto à deformação na aceitabilidade sensorial, ou seja, o valor limite para a flecha na estrutura é de  $\ell/250$ , sendo  $\ell$  o comprimento do vão. Existem outros limites de deformação excessiva na norma como para vibrações excessivas, porém decidiu-se adotar  $\ell/250$  por ser um limite geral para aceitabilidade sensorial. Compreende-se que, ao chegar neste limite, pode implicar ou não que a estrutura tenha alcançado outros estados limites de serviço, porém considerou-se apenas a deformação excessiva.

A equação de estado limite para falha na etapa de propagação é definida conforme:

$$g_3(x) = y(t, \text{flecha}) - \ell/250 \quad (6.10)$$

sendo  $y(t, \text{flecha})$  a posição final do nó correspondente ao meio do vão no passo de tempo  $t$ .

##### 2. Variáveis consideradas

A escolha das variáveis depende do caso que se quer estudar. Neste trabalho foi calculada a probabilidade de falha da viga de Álvares (1993), já trabalhada nos tópicos 5.1.2.1 e 5.2.2.2 e Figura 35, adotando as variáveis de acordo com a Tabela 18.

Tabela 18 - Variáveis aleatórias para o estudo de propagação

Variáveis	Unidade	Trabalho base	Média	CV	Distribuição
$i_{corr}$	$\frac{\mu A}{cm^2}$	Peng e Stewart (2008)	0,5	1,00	Log-Normal
Força Externa - P	kN	Coelho (2017)	36,0	0,10	Gumbel para máx.
Cobrimento	cm	Félix e Carrazedo (2021)	3,0	0,12	Normal

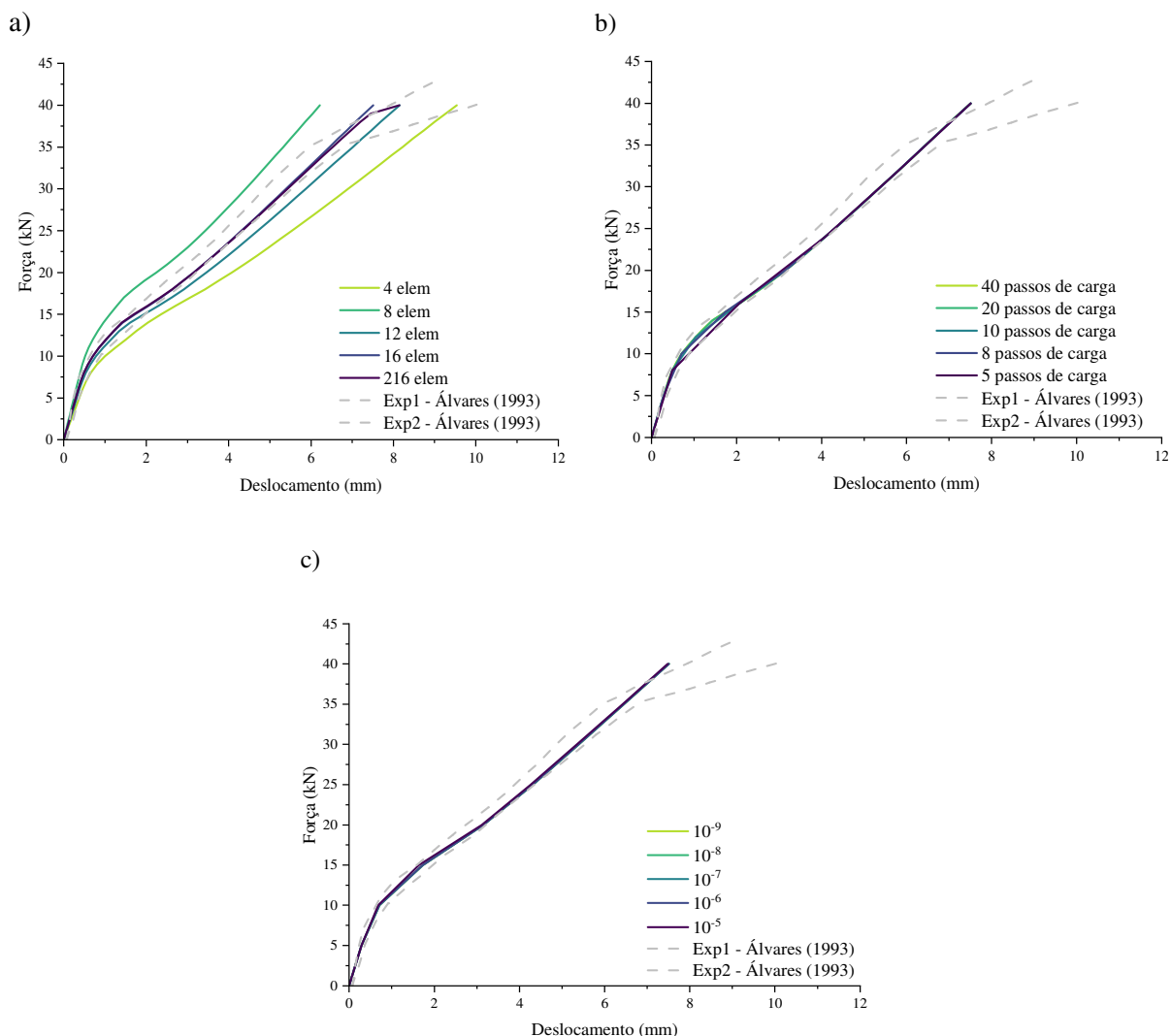
Fonte: Elaborada pela autora

O valor de cobrimento médio e CV foi escolhido de forma a abranger os valores exigidos na NBR 6118 (2014). A força externa utilizada por Coelho (2017) para o mesmo problema tinha como média 50 kN em estado limite último da estrutura, logo utilizou-se a média de 36kN para captar o ponto antes da estrutura entrar no regime de ruptura e avaliar em serviço. A taxa de corrosão utilizada com base em Peng e Stewart (2008) foi adotada para contemplar principalmente os valores moderados de  $i_{corr}$  segundo Otieno, Beushausen e Alexander (2012).

### 3. Estudo de convergência da viga de concreto armado de Álvares (1993)

O problema que surge com a simulação de Monte Carlo quando se considera um modelo mecânico complexo é o tempo computacional. Para reduzir o tempo de processamento foi feito um estudo de convergência da malha, passo de carga e tolerância necessária para que os resultados gerados fossem aceitáveis, mas com o menor custo computacional possível, conforme a Figura 60. O teste de malha foi feito com tolerância de  $10^{-8}$  e 40 passos de carga, o teste de passos de carga foi realizado com 16 elementos e tolerância de  $10^{-8}$ , e o teste da tolerância teve como entrada 16 elementos e 10 passos de carga.

Figura 60 - Parametrização do modelo de Álvares (1993) quanto a) malha, b) passo de carga e c) tolerância



Fonte: Elaborada pela autora

Após o estudo de convergência decidiu-se utilizar 16 elementos, tolerância de  $10^{-6}$  e 10 passos de carga:

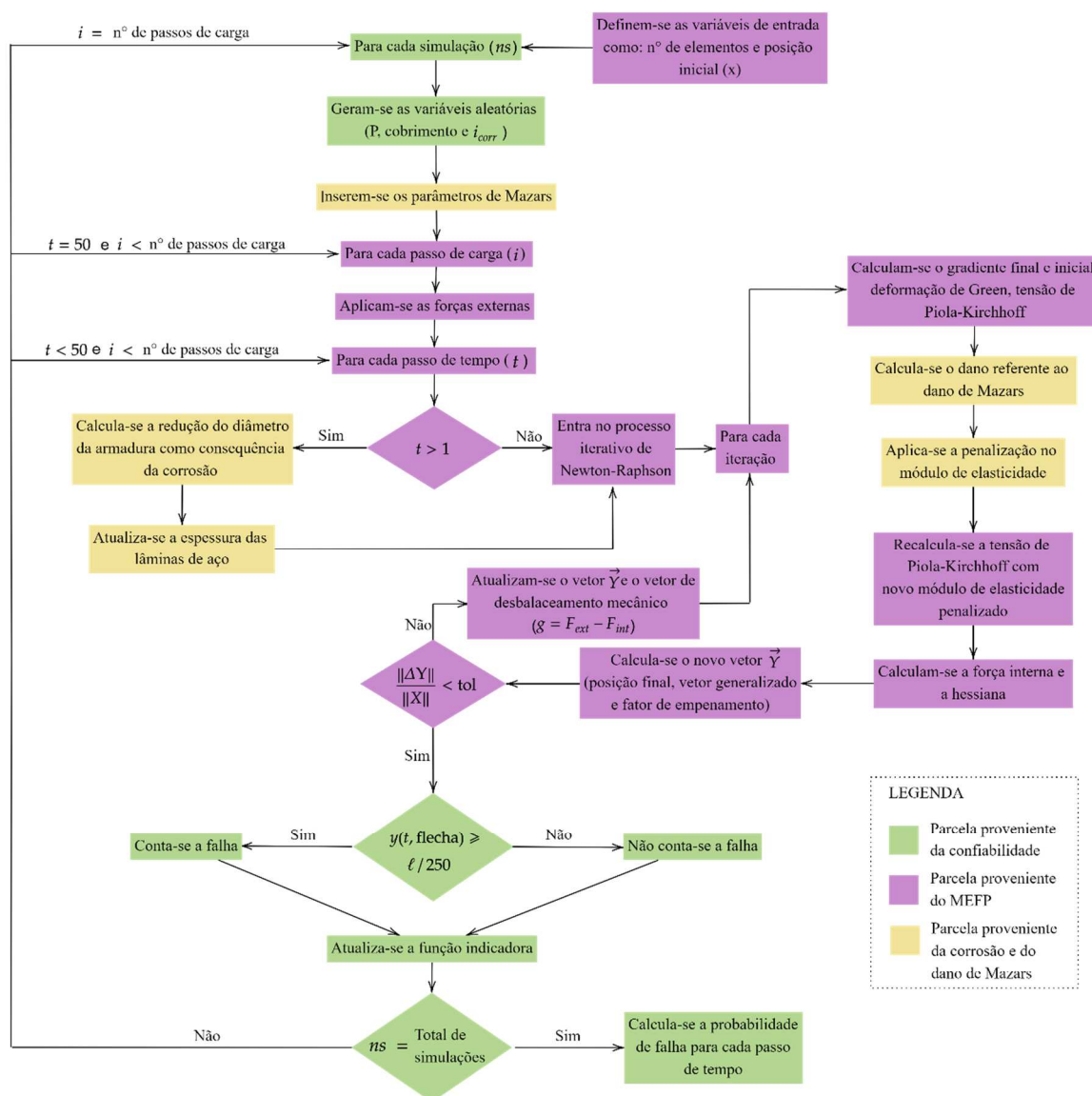
- ❖ Nota-se que as discretizações com 4, 8 e 12 elementos não foram suficientes para atingir a convergência, sendo necessário utilizar uma malha mais refinada.
- ❖ Com a alta danificação do modelo ao longo dos anos devido à corrosão, há uma pequena variação na flecha inicial do modelo (com força entre 5 e 15kN) quando comparados os resultados correspondentes a 10 e 40 passos de carga. Porém, como decidiu-se analisar a flecha acima de 30 kN, esta variação não gera influência significativa no resultado.

- ❖ A tolerância de  $10^{-5}$  levou a resultados instáveis e falhos no início da danificação, sendo necessário utilizar uma tolerância menor.
- 4. Cálculo da probabilidade de falha de Álvares (1993) quanto à corrosão por carbonatação

O cálculo da probabilidade de falha foi realizado como apresentado na Figura 61. Este fluxograma representa as etapas de cálculo envolvendo método dos elementos finitos posicional, dano de Mazars, corrosão, e por fim confiabilidade através da utilização da SMC.

A geração de amostras aleatórias foi realizada através de um programa em Python que também chamava a rotina do Fortran que calculava as incógnitas do MEFP e contava o número de falhas para calcular a probabilidade de falhas da estrutura. Esta forma de programar fez com que o paralelismo ocorresse de forma mais fácil pois as simulações não são dependentes entre si e podem rodar em núcleos ou computadores diferentes. Cada simulação demorava em média 25 segundos para seis passos de tempo o que não é ideal, porém o número de iterações de Newton-Raphson aumentava com a danificação da estrutura o que tornava a análise custosa computacionalmente.

Figura 61 - Fluxograma geral do cálculo da probabilidade de falha englobando MEFP, corrosão, dano de Mazars e confiabilidade



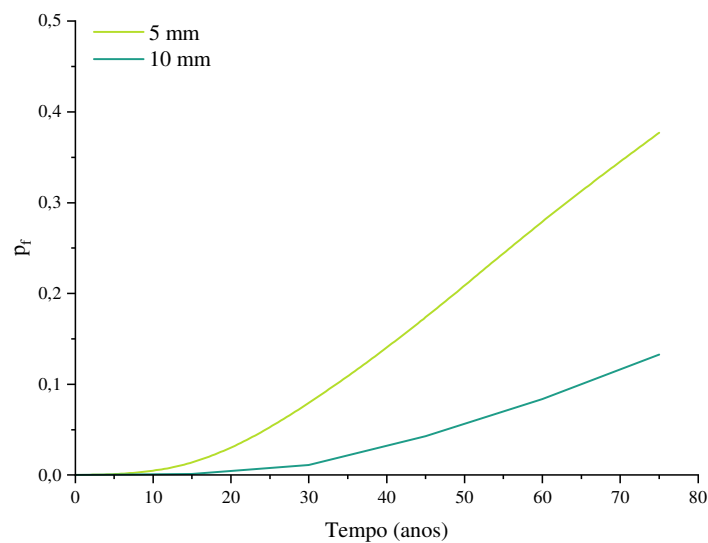
Fonte: Elaborada pela autora

O cálculo da probabilidade de falha para o exemplo de Álvares (1993) foi realizado com os parâmetros discutidos no estudo paramétrico e com as variáveis presentes na Tabela 18. Foram utilizados 6 passos de tempo: 0, 15, 30, 45, 60 e 75 anos. Este tempo é apenas o de propagação, ou seja, assume-se que já ocorreu a despassivação. Optou-se por utilizar um tempo maior que 50 anos, porque o tempo que a estrutura leva para falhar deve ser maior.

Uma das características da corrosão uniforme que foi mostrada no tópico 5.2.2.2 foi que o maior dano é gerado pela utilização de armaduras de menor diâmetro, mas mantendo a área de aço. Partindo deste resultado, foi calculada a probabilidade de falha do experimento original,

que é composto por 3 barras de 10 mm, e alternativamente 12 barras com diâmetro de 5 mm. O resultado da  $p_f$  no tempo está apresentado na Figura 62. Foram utilizadas  $10^4$  amostras para a viga com barras de 5 mm e  $4 \times 10^4$  amostras para a viga com barras de 10 mm. Estes valores se mostraram suficientes para a ordem de grandeza das probabilidades de falha esperadas no problema, como ilustrado na Figura 63, que mostra a probabilidade de falha estimada e o intervalo de confiança de 95% para o tempo de 15 anos.

Figura 62 - Probabilidade de falha ao longo dos anos para viga de Álvares (1993)



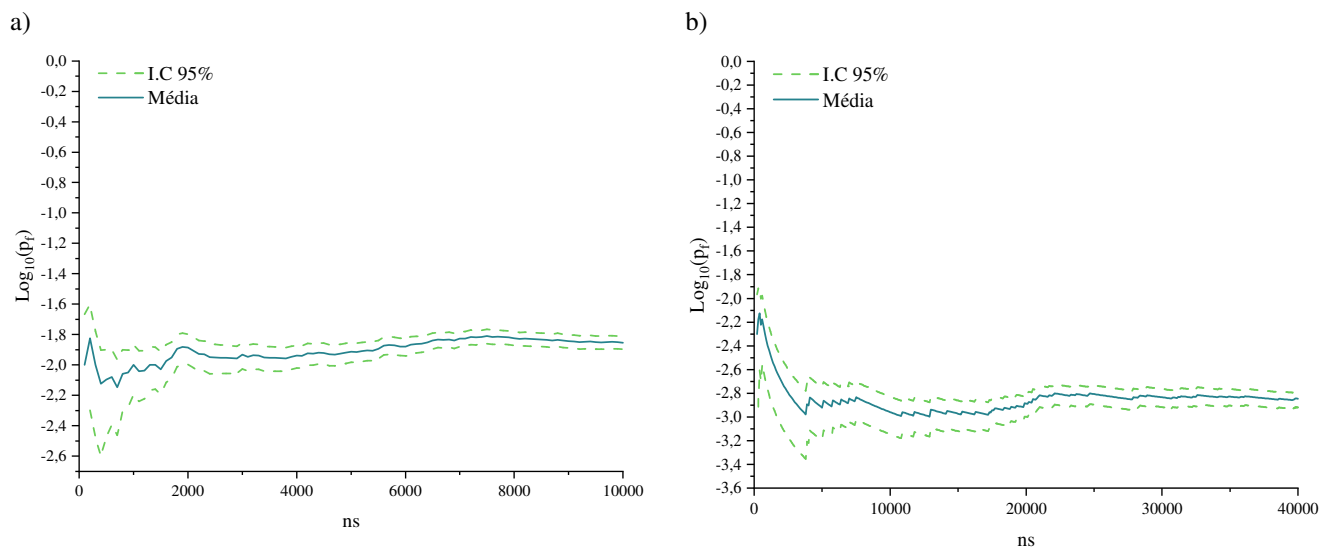
Fonte: Elaborada pela autora

Tabela 19 - Probabilidade de falha da estrutura para dois valores de diâmetro ao longo dos anos

<b>Diâmetro</b>	<b>0 anos</b>	<b>15 anos</b>	<b>30 anos</b>	<b>45 anos</b>	<b>60 anos</b>	<b>75 anos</b>
<b>5 mm</b>	0,00%	1,40%	7,96%	17,38%	27,91%	37,71%
<b>10 mm</b>	0,00%	0,14%	1,13%	4,23%	8,18%	13,13%

Fonte: Elaborada pela autora

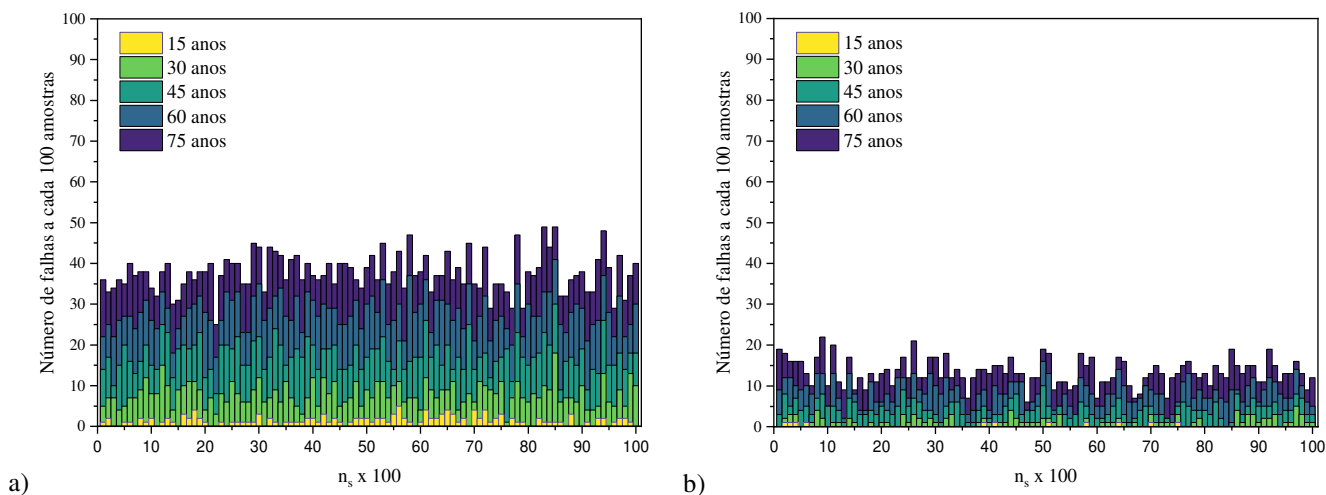
Figura 63 - Gráfico de convergência da  $p_f$  com intervalo de confiança de 95% para SMC simples para 15 anos utilizando a) 12 barras de 5mm e b) 3 barras de 10 mm



Fonte: Elaborada pela autora

A Figura 64 apresenta o número de falhas ao longo do tempo para grupos de cem amostras. Este gráfico permite compreender de melhor forma como ocorre a contagem das falhas, ou seja, o comportamento da função indicadora ao longo da SMC.

Figura 64 - Mapeamento do número de falhas a cada cem amostras em 75 anos para diâmetro de a) 5 mm e b) 10 mm



Fonte: Elaborada pela autora

Os resultados apresentados de probabilidade de falha na flexão trazem algumas conclusões:

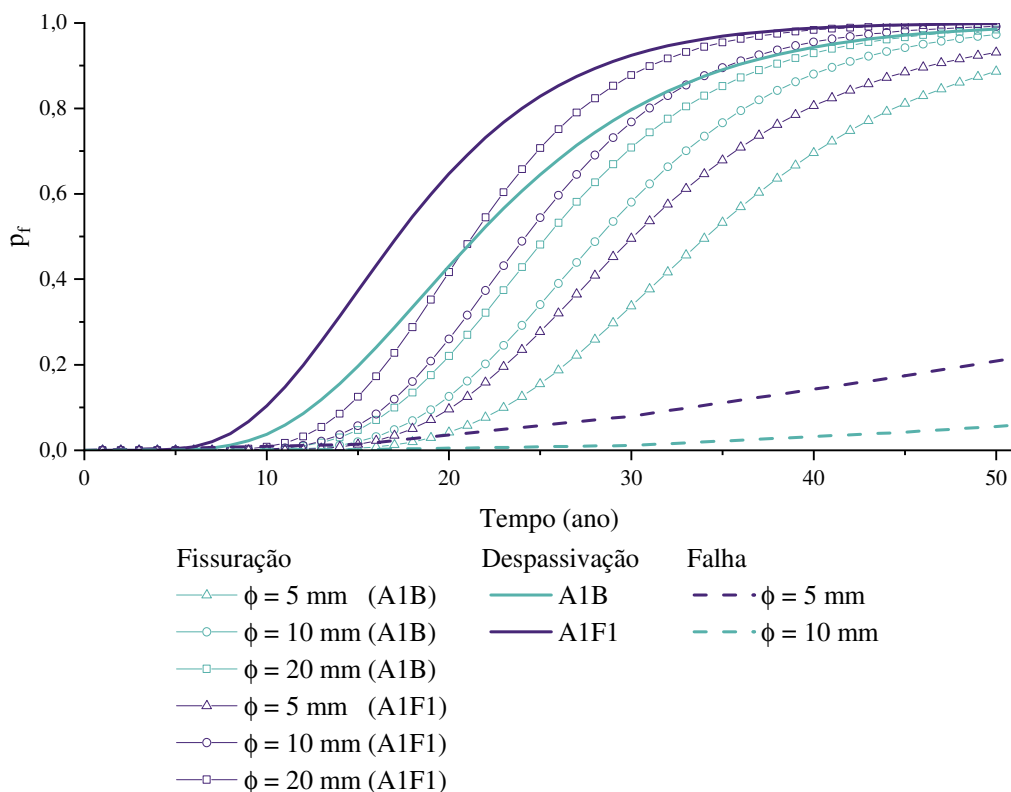
- ❖ A escolha do diâmetro da armadura é algo importante a se considerar no projeto, especialmente quando se trata de áreas com alto grau de agressividade como meio industrial, onde o teor de  $\text{CO}_2$  é alto;
- ❖ O resultado apresentado na Figura 62 e Tabela 19 concordam com o trabalho realizado por El Hassan *et al.* (2010), que concluíram que a probabilidade de falha de uma viga de ponte de concreto armado quanto a seu estado último de flexão é maior para estruturas que utilizam mais barras de menor diâmetro do que menos barras de maior diâmetro. Esta probabilidade chegou a ser três vezes maior quando foi comparado a utilização de 9 barras de 20 mm com 6 barras de 25 mm.
- ❖ Em 50 anos, a estrutura pode despassivar e falhar na flexão. Ou seja, com 50 anos a estrutura não obedeceria aos limites da sua vida útil de projeto e de serviço. Com cobertura médio de 3 cm, a estrutura pode despassivar com 20 anos ( $p_f \cong 43\%$  no cenário A1B) e falhar à flexão com 5mm ( $p_f \cong 7\%$ ) ou com 10 mm ( $p_f \cong 1\%$ ) com 30 anos, por exemplo;
- ❖ Como a barra de menor diâmetro tem maior degradação com a corrosão, é possível que o modo de falha da estrutura mude. Com a propagação, os estribos e a armadura à compressão podem perder sua função estrutural enquanto a armadura de flexão, que geralmente possui maior diâmetro, pode continuar funcionando em um nível aceitável.

## 6.5 Discussão

Os resultados obtidos no Tópico 6.4 para probabilidade de despassivação, iniciação da fissuração e falha analisados em diversos cenários, são resumidos na Figura 65, que apresenta a probabilidade de despassivação e fissuração da estrutura nos cenários A1B e A1F1, como também a probabilidade de falha para caso a despassivação já tenha ocorrido para dois valores de diâmetros, considerando o ano zero na Figura 65 como o ano de 2023. Alguns pontos de discussão foram gerados:



Figura 65 - Probabilidade de falha no tempo de iniciação e propagação ao longo dos próximos 50 anos



Fonte: Elaborada pela autora

- ❖ A escolha do cobrimento para estrutura pode retardar ou acelerar a despassivação e início da fissuração. No entanto, no Brasil, o cobrimento muitas vezes não é respeitado nas obras, resultando em prejuízos ao usuário da estrutura que pode sofrer com destacamentos do concreto precocemente;
- ❖ As estruturas de concreto armado provavelmente fissurarão devido à corrosão com menos de 50 anos (Tabela 17), que é a vida útil de projeto da estrutura, utilizando dado de teor de  $\text{CO}_2$  atual constante ao longo do tempo. O aumento do teor de  $\text{CO}_2$  ao longo dos anos traz preocupação, porque a estrutura despassiva e fissa mais rápido, e por consequência a falha ocorre em um período menor. Em regiões de grande teor de  $\text{CO}_2$  ou com temperatura e umidade que aceleram a corrosão, como áreas industriais, urbanas e garagens, por exemplo, é necessário ter maior cautela quanto ao cobrimento, diâmetro da armadura utilizado, resistência do concreto, etc., para que ao longo dos anos a estrutura continue tendo um bom comportamento sem apresentar danos que precisem de manutenção;

- ❖ O diâmetro da armadura possui resultado controverso, porque, por um lado, um menor diâmetro aumenta o tempo de fissuração, mas por outro lado diminui o tempo de falha. O tempo de falha é mais preocupante porque tem uma maior proximidade do colapso estrutural, porém a fissuração no concreto diminui sua resistência e aumenta a taxa de penetração de agentes agressivos e isto não foi considerado neste trabalho;
- ❖ Uma viga possui armaduras longitudinais e transversais, sendo que a primeira geralmente possui um maior diâmetro que a segunda. O modo de ruína usualmente associado à viga é a ruína à flexão, porém se a perda de aço é mais agravante nas barras de menor diâmetro, a viga pode sofrer ruptura da armadura transversal, e levar a uma ruína por cisalhamento. O modo de falha da estrutura pode ser influenciado pelo diâmetro utilizado. A falha quanto ao cisalhamento não foi considerada neste trabalho, porém sugere-se ser investigado em trabalhos futuros;
- ❖ No tempo de 50 anos, a estrutura pode despassivar, fissurar e falhar, sendo a falha menos provável de ocorrer quando se utiliza maior diâmetro;
- ❖ Muitas variáveis não foram consideradas neste estudo como: a perda da aderência entre aço e concreto, a perda da resistência do concreto devido à fissuração, redução da tensão de escoamento do aço em conjunto com a não linearidade do aço, entre outros. Estes fatores, quando utilizados, podem gerar melhores resultados, sugere-se que sejam implementados em trabalhos futuros.

## 7 CONCLUSÕES

O estudo sobre corrosão nas estruturas de concreto armado não é atual, porém vem se intensificando ao longo dos anos devido ao seu impacto social e financeiro. Ao passar dos anos, a preocupação com a corrosão por carbonatação pode crescer devido a industrialização, aquecimento global e aumento da população, que tem como consequência o aumento do teor de CO<sub>2</sub> no ar e da temperatura, fatores agravantes para este tipo de corrosão.

Trabalhos envolvendo modelos numéricos associados a corrosão podem ser vistos utilizando MEF com diversos tipos de elementos como barra, plano ou sólido. De forma complementar, o presente trabalho decidiu utilizar o método dos elementos finitos posicional com elemento de pórtico laminado atrelado a mecânica do dano, através do modelo de dano de Mazars, e um modelo de corrosão referente a perda de área de aço para reproduzir o comportamento da estrutura de concreto armado sob efeito de esforços externos e corrosão por carbonatação.

O primeiro elemento feito foi o de pórtico plano homogêneo com quatro graus de liberdade compostos por posições e vetores generalizados que retratam o giro e a altura da seção transversal. Este primeiro elemento foi validado com êxito por meio de exemplos da literatura com carregamentos, condições de contorno e geometria distintos, além de apresentar um baixo custo computacional. Pode-se concluir que este elemento pode ser utilizado para testes que contenham não-linearidade geométrica em estruturas homogêneas.

Posteriormente o modelo evoluiu para elemento de pórtico laminado para analisar materiais compósitos como concreto armado. Existem diversas teorias de laminados que podem ser adotadas para representar a cinemática da estrutura. Adotou-se a teoria FSDT dentro da teoria de camada única equivalente com acréscimo do efeito Zigue-Zague. Verificou-se através da literatura que para exemplos de viga de concreto armado usuais o modelo é satisfatório. Porém quando a relação altura/vão é grande o modelo se torna falho para representar o comportamento da estrutura, visto que ele não considera a continuidade interlaminar para tensões de cisalhamento transversais. Para casos de viga parede ou estruturas com maior relação altura/vão é necessário utilizar a teoria *Layerwise* ou fazer um enriquecimento cinemático.

No entanto, o elemento de pórtico laminado empregado tem custo computacional reduzido em relação ao Layerwise, devendo apenas ser utilizado em estruturas compatíveis com a cinemática adotada.

O dano de Mazars foi acoplado ao modelo de MEFP para reproduzir a danificação do concreto, ou seja, a não linearidade física do material. Em seguida o resultado do código com não linearidade física e geométrica foi comparado com a literatura. Apesar de não considerar a não linearidade física do aço obteve-se bons resultados. No entanto, a reprodução do comportamento da estrutura em seu modo de ruptura é falho devido as limitações do modelo adotado, pois como não foi considerado a não linearidade do aço, a estrutura de concreto armado apresenta uma resistência maior do que a realidade em seu estado último e não apresenta um gráfico tensão/deformação com caimento necessário quando a estrutura entra em seu estado de ruptura.

Para representar a corrosão por carbonatação no modelo numérico, alguns trabalhos inserem a redução da área de aço, perda da aderência entre aço e concreto, fissuração do concreto e/ou redução da tensão de escoamento. Optou-se por utilizar a perda da área de aço ocasionada pela taxa de corrosão que foi acoplada ao modelo numérico por meio da redução da largura da lâmina de aço. Observou-se nos resultados a concordância com dados experimentais, assim como a influência do diâmetro da barra de aço e da taxa de corrosão na deflexão ao longo da propagação da corrosão. Utilizando a mesma área de aço, estruturas com armaduras de menor diâmetro são mais danificadas e apresentam maiores flechas com o passar dos anos do que as estruturas que utilizam armaduras com maiores diâmetros.

Por fim decidiu-se utilizar a simulação de Monte Carlo para calcular a probabilidade de despassivação, de surgimento de fissuras e de falha quanto a deformação excessiva da estrutura. A probabilidade quanto a despassivação e fissuração foi calculada em diversos cenários de cobertura, diâmetro de barra e teor de CO<sub>2</sub>. A probabilidade de deformação excessiva foi realizada para dois tipos de diâmetro mantendo a área de aço.

Utilizando quatro variáveis aleatórias para o tempo de despassivação e fissuração, e três para a propagação, obteve-se o resultado de que em 50 anos a estrutura pode ter passado do limite da vida útil de projeto e de serviço segundo NBR 6118 (2014). Foi visto um aumento significativo da probabilidade de despassivação e fissuração com a utilização de um menor cobertura e maior teor de CO<sub>2</sub>, assim como, um aumento da probabilidade de fissuração e redução da probabilidade de falha no estado limite de serviço empregando um maior diâmetro.

Com as mudanças climáticas as estruturas terão uma maior probabilidade de despassivar, fissurar e falhar quando comparado com o cenário de teor de CO<sub>2</sub> atual. A escolha do diâmetro também se mostrou importante, pois pode influenciar no modo de falha de uma estrutura sob efeito da corrosão. Em suma, para manter a estrutura em bom funcionamento, deve-se atentar para o cobrimento e o diâmetro da armadura utilizado em projeto, especialmente em áreas industriais e urbanas com grandes concentrações de CO<sub>2</sub>.

### **7.1 Sugestão para trabalhos futuros**

Dentro dos temas de método numérico, compósito laminado, mecânica do dano, corrosão e confiabilidade há um amplo leque de assuntos que podem ser abordados em trabalhos futuros. Existem muitos pontos que podem ser aprimorados nesta pesquisa, propõe-se:

- ❖ Implementar o código em estruturas mais complexas como pórticos;
- ❖ Acoplar ao modelo numérico a não-linearidade física do aço, considerando seu comportamento como elastoplástico;
- ❖ Representar outras consequências da corrosão como redução da tensão de escoamento e perda da aderência entre o aço e o concreto;
- ❖ Análise de probabilidade de falha para outros modos de falha associados à armadura longitudinal que não foram considerados;
- ❖ Analisar a probabilidade de falha da viga para outros modos de falha que podem ser causados pela corrosão dos estribos;
- ❖ Trabalhar com modelos de mecânica do dano que sejam menos custosos computacionalmente como dano concentrado;
- ❖ Expansão para modelos tridimensionais de pórtico e casca;
- ❖ Reduzir o custo computacional do modelo para calcular a probabilidade de falha da estrutura em mais espaços de tempo e podendo considerar o tempo de iniciação no cálculo de propagação.

## 8 REFERÊNCIAS

ABE, I. P. *Simulação numérica de reforço e reabilitação de vigas de concreto armado*. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

AGÊNCIA CÂMARA DE NOTÍCIAS. *Livro aponta 14 mil obras públicas paradas; custo até agora é de R\$ 70 bi*. 2019. Disponível em: <<https://www.camara.leg.br/noticias/599773-livro-aponta-14-mil-obras-publicas-paradas-custo-ate-agora-e-de-r-70-bi>>. Acesso em: 10 de fevereiro de 2022

AL-HARTHY, A. S.; STEWART, M. G.; MULLARD, J. Concrete cover cracking caused by steel reinforcement corrosion. *Magazine of Concrete Research*, v. 63, n. 9, p. 655-667, 2011.

ÁLVARES, M. S. *Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com emprego do método dos elementos finitos*. 1993. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.

ALONSO, C.; ANDRADE, C.; RODRIGUEZ, J.; DIEZ, J. M. Factors controlling cracking of concrete affected by reinforcement corrosion. *Materials and structures*, v. 31, p. 435-441, 1998.

ANDRADE, C.; ALONSO, C.; MOLINA, F. J. Cover cracking as a function of bar corrosion: Part I- Experimental test. *Materials and structures*, v. 26, n. 8, p. 453-464, 1993.

ANDRADE, C.; ALONSO, C. Test methods for on-site corrosion rate measurement of steel reinforcement in concrete by means of the polarization resistance method. *Materials and Structures*, v. 37, n. 9, p. 623-643, 2004.

ANGST, U. M. Challenges and opportunities in corrosion of steel in concrete. *Materials and Structures*, v. 51, n. 1, p. 1-20, 2018., v. 63, n. 9, p. 655-667, 2011.

APOSTOLOPOULOS, C. A.; PAPADAKIS, V. G. Consequences of steel corrosion on the ductility properties of reinforcement bar. *Construction and Building Materials*, v. 22, n. 12, p. 2316-2324, 2008.

ASSAN, A. E. *Método dos elementos finitos: primeiros passos*. São Paulo: Ed. Da UNICAMP, 2020.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). *NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*. Rio de Janeiro, 2003. 221 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). *NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*. Rio de Janeiro, 2014. 238 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). *NBR 15575: Desempenho de edificações habitacionais*. Rio de Janeiro, 2013.

AVANCINI, G.; SANCHES, R. A. K. A total Lagrangian position-based finite element formulation for free-surface incompressible flows. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 169, p. 103348, 2020.

BACHEGA, L. A. *Estudo teórico-experimental de ligação viga-pilar com consolo metálico embutido em estruturas pré-moldadas de concreto*. 2013. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013.

BASHEER, L.; KROPP, J.; CLELAND, D. J. Assessment of the durability of concrete from its permeation properties: a review. *Construction and building materials*, v. 15, n. 2-3, p. 93-103, 2001.

BASTIDAS-ARTEAGA, E.; SCHOEFS, F. STEWART, M. G.; WANG, X. Influence of global warming on durability of corroding RC structures: A probabilistic approach. *Engineering Structures*, v. 51, p. 259-266, 2013.

BECHO, J. dos S. *Método dos Elementos Finitos Posicional em análise viscoelástica: Elementos de pórtico com cinemática de Reissner*. 2020. Tese (Doutor em Engenharia de Estruturas) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2020.

BECK, A. T. *Um método para análise de confiabilidade para elementos finitos*. 1999. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1999.

BECK, A. T. *Confiabilidade e Segurança das Estruturas*. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2019. ISBN 978-85-352-8688-5.

BERNARDO, C. C. L. C. G. *Enriquecimento da Cinemática em Elementos Finitos de Pórticos Planos Laminados para a Regularização das Tensões Cisalhantes em Análise Geometricamente Não Linear*. 2021. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

BEZUIDENHOUT, S. R.; VAN ZIJL, G. P. Corrosion propagation in cracked reinforced concrete, toward determining residual service life. *Structural Concrete*, v. 20, n. 6, p. 2183-2193, 2019.

BIONDINI, F.; VERGANI, M. Deteriorating beam finite element for nonlinear analysis of concrete structures under corrosion. *Structure and Infrastructure Engineering*, v. 11, n. 4, p. 519-532, 2015.

BIONDINI, F.; FRANGOPOL, D. Time-variant redundancy and failure times of deteriorating concrete structures considering multiple limit states. *Structure and Infrastructure Engineering*, v. 13, n. 1, p. 94-106, 2017.

BONET, J.; WOOD, R. D.; MAHANEY, J.; HEYWOOD, P. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 5, p. 579–595, 2000.

CARMONA, T. G. *Modelos de previsão da despassivação das armaduras em estruturas de concreto sujeitas à carbonatação*. 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Alternative positional FEM applied to thermomechanical impact of truss structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 46, n. 11, p. 1008-1016, 2010.

CARRERA, E. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. *Archives of computational methods in engineering*, v. 9, p. 87-140, 2002.

CLOUGH, R. W. The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. *Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation*, Pittsburgh Pa., Sept. 8 and 9, 1960

CLYNE, T.W.; HULL, D. *An introduction to composite materials*. 3. ed. Cambridge University Press, 2019.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 193, n. 33-35, p. 3541-3557, 2004.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Improved finite element for 3D laminate frame analysis including warping for any cross-section. *Applied Mathematical Modelling*, v. 34, n. 4, p. 1107-1137, 2010.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A total-Lagrangian position-based FEM applied to physical and geometrical nonlinear dynamics of plane frames including semi-rigid connections and progressive collapse. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 91, p. 1-15, 2014.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R.; CARRAZEDO, R. Zig-Zag effect without degrees of freedom in linear and non linear analysis of laminated plates and shells. *Composite Structures*, v. 161, p. 32-50, 2017.

CODA, H. B. *O Método dos Elementos Finitos Posicional: Sólidos e Estruturas – Não Linearidade Geométrica e Dinâmica*. 1. ed. São Carlos: EESC/USP, 2018. ISBN: 978-85- 8023-068-0.

COELHO, K. O. *Modelos numéricos aplicados à modelagem probabilística da degradação mecânica do concreto e corrosão de armaduras*. 2017. Dissertação (Mestrado em Ciências - Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.



COURANT, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 49, n. 1, p. 1–24, 1943.

CUI, Z.; ALIPOUR, A.I. Concrete cover cracking and service life prediction of reinforced concrete structures in corrosive environments. *Construction and Building Materials*, v. 159, p. 652-671, 2018

DEKOSTER, M.; BUYLE-BODIN, F.; MAUREL, O.; DELMAS, Y. Modelling of the flexural behaviour of RC beams subjected to localised and uniform corrosion. *Engineering Structures*, v. 25, n. 10, p. 1333-1341, 2003.

DUPRAT, F.; SELIER, A. Probabilistic approach to corrosion risk due to carbonation via an adaptive response surface method. *Probabilistic Engineering Mechanics*, v. 21, n. 3, p. 207-216, 2006.

ELGHAZY, M.; EL REFAI, A.; EBEAD, U.; NANNI, A. Post-repair flexural performance of corrosion-damaged beams rehabilitated with fabric-reinforced cementitious matrix (FRCM). *Construction and Building Materials*, v. 166, p. 732-744, 2018.

EL HASSAN, J.; BRESSOLETTE, P.; CHATEAUNEUF, A.; EL TAWIL, K. Reliability-based assessment of the effect of climatic conditions on the corrosion of RC structures subject to chloride ingress. *Engineering Structures*, v. 32, n. 10, p. 3279-3287, 2010.

EL MAADDAWY, T.; SOUDKI, K. A model for prediction of time from corrosion initiation to corrosion cracking. *Cement and concrete composites*, v. 29, n. 3, p. 168-175, 2007.

ENRIGHT, M. P.; FRANGOPOL, D. M. Probabilistic analysis of resistance degradation of reinforced concrete bridge beams under corrosion. *Engineering structures*, v. 20, n. 11, p. 960-971, 1998.

FELIX, E. F. *Modelagem da Deformação do Concreto Armado Devido à Formação dos Produtos de Corrosão*. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

FELIX, E. F.; CARRAZEDO, R.; POSSAN, E. Parametric analysis of carbonation process in reinforced concrete structures through Artificial Neural Networks. *Revista ALCONPAT*, v. 7, n. 3, p. 302-316, 2017.

FELIX, E. F.; CARRAZEDO, R.; POSSAN, E. Carbonation model for fly ash concrete based on artificial neural network: Development and parametric analysis. *Construction and Building Materials*, v. 266, p. 121050, 2021.

G1 CEARÁ. *Oxidação causou desabamento de varanda de prédio, segundo laudo*. 2015. Disponível em: < <http://g1.globo.com/ceara/noticia/2015/03/oxidacao-causou-desabamento-de-varanda-de-predio-segundo-laudo.html> > Acesso em: 01 de setembro de 2021.

- G1 MUNDO. *Projetista da ponte que desabou na Itália alertou sobre risco de corrosão em 1979*. 2018. Disponível em: < <https://g1.globo.com/mundo/noticia/2018/08/19/projetista-da-ponte-que-desabou-na-italia-alertou-sobre-risco-de-corrosao-em-1979.ghtml> > Acesso em: 29 de setembro de 2021
- GRAEFF, Â. G. *Avaliação experimental e modelagem dos efeitos estruturais da propagação da corrosão em elementos de concreto armado*. 2007. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.
- GRECO, M.; GESUALDO, F. A. R.; VENTURINI, W. S.; CODA, H; C. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. *Finite elements in analysis and design*, v. 42, n. 12, p. 1079-1086, 2006.
- GOMES, W. J. de S. *Estudo do Efeito de Incertezas na Otimização Estrutura*. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.
- HELENE, P. R. do L. *Contribuição ao estudo da corrosão em armaduras de concreto armado*. 1993. Tese (Livre docência em estruturas) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1993.
- HELENE, P. R. do L. Vida útil das Estruturas de Concreto. In: *IV Congresso Iberoamericano De Patologia Das Construções*. Anais... Porto Alegre, RS, 1997.
- HSIAO, K. M. Nonlinear analysis of general shell structures by flat triangular shell element. *Computers & Structures*, v. 25, p. 665-675, 1987.
- JAMALI, A.; ANGST, U.; ADEY, B.; ELSENER, B. Modeling of corrosion-induced concrete cover cracking: A critical analysis. *Construction and Building Materials*, v. 42, p. 225-237, 2013.
- JONES, R. M. *Mechanics of composite materials*. 2 ed. CRC Press, 1999.
- KACHANOV, L. M. *Introduction to Continuum Damage Mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers, 1986.
- KHANDAN, R.; NOROOZI, S.; SEWELL, P.; VINNEY, J. The development of laminated composite plate theories: a review. *Journal of Materials Science*, v. 47, p. 5901-5910, 2012.
- KIANI, K.; SHODJA, H. M. Prediction of the penetrated rust into the microcracks of concrete caused by reinforcement corrosion. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 35, n. 5, p. 2529-2543, 2011.
- KREJA, I. A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels. *Open Engineering*, v. 1, n. 1, p. 59-80, 2011.

LEONEL, E. D. *Modelos não lineares do método dos elementos de contorno para análise de problemas de fratura e aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas à fadiga*. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

LEONEL, E.D. *Notas de aula para a disciplina introdução à mecânica da fratura*. Notas de Aula. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

LIBERATI, E. A. P. *Modelos de confiabilidade aplicados à análise de estruturas de concreto armado submetidas à penetração de cloretos*. 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

LIBERATI, E. A. P.; LEONEL, E. D.; NOGUEIRA, C. G. Influence of the reinforcement corrosion on the bending moment capacity of reinforced concrete beams: a structural reliability approach. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, v. 7, p. 379-413, 2014.

LIU, Q. *et al.* A novel green reinforcement corrosion inhibitor extracted from waste Platanus acerifolia leaves. *Construction and Building Materials*, v. 260, 2020.

LU, C.; JIN, W.; LIU, R. Reinforcement corrosion-induced cover cracking and its time prediction for reinforced concrete structures. *Corrosion Science*, v. 53, n. 4, p. 1337-1347, 2011.

MACIEL, D. N. *Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional*. 2008. Tese (Doutor em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

MATTIASSON, K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 17, p. 145-153, 1981.

MOREIRA, D. H.F.R. *Análise numérica bidimensional de interação fluido-estrutura com contato estrutural*. 2021. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

MULLARD, J.A.; STEWART, M. G. Corrosion-Induced Cover Cracking: New Test Data and Predictive Models. *ACI Structural Journal*, v. 108, n. 1, 2011.

NOGUEIRA, C. G. *Desenvolvimento de modelos mecânicos, de confiabilidade e de otimização para aplicação em estruturas de concreto armado*. 2010. Tese (Doutor em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

- NOGUEIRA, C. G.; LEONEL, E. D.; CODA, H. B. Probabilistic failure modelling of reinforced concrete structures subjected to chloride penetration. *International Journal of Advanced Structural Engineering*, v. 4, n. 1, p. 1-14, 2012.
- NOGUEIRA, G. V. *Formulação de elemento finito posicional para modelagem numérica de pórticos planos constituídos por compósitos laminados: uma abordagem não linear geométrica baseada na teoria Layerwise*. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.
- OHTSU, M.; YOSIMURA, S. Analysis of crack propagation and crack initiation due to corrosion of reinforcement. *Construction and Building Materials*, v. 11, n. 7-8, p. 437-442, 1997.
- OTIENO, M.; BEUSHAUSEN, H.; ALEXANDER, M. Prediction of corrosion rate in reinforced concrete structures—a critical review and preliminary results. *Materials and Corrosion*, v. 63, n. 9, p. 777-790, 2012.
- PANTAZOPOULOU, S. J.; BONACCI, J. F.; SHEIKH, S.; THOMAS, M. D.A.; HEARN, N. Repair of corrosion-damaged columns with FRP wraps. *Journal of composites for construction*, v. 5, n. 1, p. 3-11, 2001.
- PAPADAKIS, V.G.; VAYENAS, C. G.; FARDIS, M. N. A reaction engineering approach to the problem of concrete carbonation. *AIChE Journal*, v. 35, n. 10, p. 1639-1650, 1989.
- PAPADAKIS, V. G.; VAYENAS, C. G.; FARDIS, M. N. Fundamental modeling and experimental investigation of concrete carbonation. *ACI Materials Journal*, n. 88, p.363-373, 1991.
- PAPADAKIS, V. G.; FARDIS, M. N.; VAYENAS, C. G. Effect of composition, environmental factors and cement-lime mortar coating on concrete carbonation. *Materials and Structures*, v. 25, n. 5, p. 293-304, 1992.
- PARROTT, L. J. Damage caused by carbonation of reinforced concrete. *Materials and structures*, v. 23, n. 3, p. 230-234, 1990.
- PELLIZZER, G. P. *Análise mecânica e probabilística da corrosão de armaduras de estruturas de concreto armado submetidas à penetração de cloretos*. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.
- PELLIZZER, G. P. *Sobre a modelagem numérica da difusão de cloretos no concreto: uma abordagem pelo método dos elementos de contorno com aplicação de modelos de confiabilidade e otimização*. 2019. Tese (Doutor em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

PENG, J.; STEWART M.G. *Carbonation-induced corrosion damage and structural safety for concrete structures under enhanced greenhouse conditions*. Centre for Infrastructure Performance and Reliability Research Report No. 270.11.2008; 2008. [ISBN No.9780 9805 0355 9785]

POSSAN, E. *Modelagem da carbonatação e previsão de vida útil de estruturas de concreto em ambiente urbano*. 2010. Tese (Doutor em Engenharia) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

RAMIREZ, C. Q. *Análise não linear geométrica de músculos esqueléticos via método dos elementos finitos posicional*. 2018. Tese (Doutor em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

RAMOS, E. S. *Modelagem numérica da propagação da corrosão por cloretos em estruturas de concreto armado*. 2020. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

RAMOS, E. S.; CARRAZEDO, R. Cross-section modeling of the non-uniform corrosion due to chloride ingress using the positional finite element method. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 42, n. 10, p. 548, 2020.

REDDY, J. N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. 2. ed. CRC Press, 2004.

REDDY, J. N. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics*. 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 2014.

RODRIGUES, R.; GABOREAU, S.; GANCE, J.; IGNATIADIS, I.; BETELU, S. Reinforced concrete structures: A review of corrosion mechanisms and advances in electrical methods for corrosion monitoring. *Construction and Building Materials*, v. 269, p. 121240, 2021.

RODRIGUEZ, J.; ANDRADE, C. Load-bearing capacity loss in corroding structures. In: *Proceedings of ACI convention*, Toronto, 1990. v. 1, p. 359–363.

SAETTA, A. V.; VITALIANI, R. V. Experimental investigation and numerical modeling of carbonation process in reinforced concrete structures: Part I: Theoretical formulation. *Cement and concrete research*, v. 34, n. 4, p. 571-579, 2004.

SAMPAIO, M. do S. M.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A geometrically nonlinear FEM formulation for the analysis of fiber reinforced laminated plates and shells. *Composite Structures*, v. 119, p. 799-814, 2015.

- SANJUÁN, M. A.I.; DEL OLMO, C. Carbonation resistance of one industrial mortar used as a concrete coating. *Building and Environment*, v. 36, n. 8, p. 949-953, 2001.
- SOARES, H. B. *Desenvolvimento de ferramenta computacional para análise de colapso estrutural pelo Método dos Elementos Finitos Posicional*. 2021. Tese (Doutor em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.
- STEFANONI, M.; ANGST, U.; ELSENER, B. Corrosion rate of carbon steel in carbonated concrete—A critical review. *Cement and Concrete Research*, v. 103, p. 35-48, 2018.
- STEWART, M. G.; WANG, X.; NGUYEN, M. N. Climate change impact and risks of concrete infrastructure deterioration. *Engineering Structures*, v. 33, n. 4, p. 1326-1337, 2011.
- SUDRET, B.; DEFAUX, G.; PENDOLA, M. Stochastic evaluation of the damage length in RC beams submitted to corrosion of reinforcing steel. *Civil Engineering and Environmental Systems*, v. 24, n. 2, p. 165-178, 2007.
- SUDRET, B. Probabilistic models for the extent of damage in degrading reinforced concrete structures. *Reliability Engineering & System Safety*, v. 93, n. 3, p. 410-422, 2008.
- SUN, B.; XIAO, R.; RUAN, W.; WANG, P. Corrosion-induced cracking fragility of RC bridge with improved concrete carbonation and steel reinforcement corrosion models. *Engineering Structures*, v. 208, p. 110313, 2020
- TAVARES, M. G. *Simulação da perda de protensão aderente em elementos de concreto*. 2020. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.
- TEIGEN, J. G.; FRANGOPOL, D. M.; STURE, S.; FELIPPA, C. A. Probabilistic FEM for nonlinear concrete structures. II: Applications. *Journal of Structural Engineering*, v. 117, n. 9, p. 2690-2707, 1991.
- THE WORLD CORROSION ORGANIZATION. Corrosion Resources. 2023. Disponível em: <<https://corrosion.org/Corrosion+Resources/Publications.html>>. Acesso em: 14 de março de 2023.
- THOMAS, B. S.; GUPTA, R.C.; PANICKER, V. J. Recycling of waste tire rubber as aggregate in concrete: durability-related performance. *Journal of Cleaner Production*, v. 112, p. 504-513, 2016.
- TUUTTI, K. Corrosion of steel in concrete. *Swedish Cement and Concrete Research*. Institute Stockholm, Stockholm, 1982.

- UEDA, T.; TAKEWAKA, K. Performance-based standard specifications for maintenance and repair of concrete structures in Japan. *Structural Engineering International*, v. 17, n. 4, p. 359-366, 2007.
- VAL, D. V.; MELCHERS, R. E. Reliability of deteriorating RC slab bridges. *Journal of structural engineering*, v. 123, n. 12, p. 1638-1644, 1997.
- VAL, D. V.; STEWART, M. G.; MELCHERS, R. E. Effect of reinforcement corrosion on reliability of highway bridges. *Engineering structures*, v. 20, n. 11, p. 1010-1019, 1998.
- VIDAL, T.; CASTEL, A.; FRANÇOIS, R. Analyzing crack width to predict corrosion in reinforced concrete. *Cement and concrete research*, v. 34, n. 1, p. 165-174, 2004.
- VU, K. A. T.; STEWART, M. G. Structural reliability of concrete bridges including improved chloride-induced corrosion models. *Structural Safety*, v.22, n.4, p.313-333, 2000.
- VU, K.; STEWART, M. G.; MULLARD, J. Corrosion-induced cracking: experimental data and predictive models. *ACI structural journal*, v. 102, n. 5, p. 719, 2005.
- WANG, X.; STEWART, M. G.; NGUYEN, M. Impact of climate change on corrosion and damage to concrete infrastructure in Australia. *Climatic Change*, v. 110, n. 3-4, p. 941-957, 2012.
- WU, C.; LIU, Y. A review of semi-analytical numerical methods for laminated composite and multilayered functionally graded elastic/piezoelectric plates and shells. *Composite Structures*, v. 147, p. 1-15, 2016.
- YOON, I.; ÇOPUROĞLU, O.; PARK, K. Effect of global climatic change on carbonation progress of concrete. *Atmospheric environment*, v. 41, n. 34, p. 7274-7285, 2007.
- ZHANG, R.; CASTEL, A.; FRANÇOIS, R. Concrete cover cracking with reinforcement corrosion of RC beam during chloride-induced corrosion process. *Cement and Concrete Research*, v. 40, n. 3, p. 415-425, 2010.
- ZHANG, M.; SONG, H.; LIM, S.; AKIWAMA, M.; FRANGOPOL, D. M. Reliability estimation of corroded RC structures based on spatial variability using experimental evidence, probabilistic analysis and finite element method. *Engineering Structures*, v. 192, p. 30-52, 2019.
- ZHANG, Y. X.; YANG, C. H. Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates. *Composite structures*, v. 88, n. 1, p. 147-157, 2009

