

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Escola de Engenharia de São Carlos

## **Modelagem numérica não-linear do concreto armado considerando a perda de aderência da armadura**

**Adrielle Nascimento Marques**

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo

**Adrielle Nascimento Marques**

**Modelagem numérica não-linear do concreto armado  
considerando a perda de aderência da armadura**

VERSÃO CORRIGIDA

(A versão original se encontra na Escola de Engenharia de São Carlos)

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rogério Carrazedo

**São Carlos**

**2023**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

M357m	Marques, Adrielle Nascimento Modelagem numérica não-linear do concreto armado considerando a perda de aderência da armadura / Adrielle Nascimento Marques; orientador Rogério Carrazedo. São Carlos, 2023.  Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2023.  1. Concreto Armado. 2. Perda da aderência. 3. Escorregamento da armadura. 4. Multiplicadores de Lagrange. 5. Elementos de interface. 6. MEF Posicional. I. Título.
-------	---

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Engenheira **ADRIELLE NASCIMENTO MARQUES**.

Título da dissertação: "Modelagem numérica não-linear do concreto armado considerando a perda de aderência da armadura".

Data da defesa: 30/03/2023.

### **Comissão Julgadora**

### **Resultado**

Prof. Associado **Rogério Carrazedo**

Aprovada

**(Orientador)**

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Dr. **Luiz Alkimin de Lacerda**

Aprovada

(Universidade Federal do Paraná/UFPR)

Prof. Dr. **Marcos Arndt**

Aprovada

(Universidade Federal do Paraná/UFPR)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Carlos De Marqui Junior**

*Este trabalho é dedicado a Analuiza, José Carlos, Jardel, Paola e Eduardo.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço imensamente àqueles que me incentivaram, instigaram e contribuíram de alguma forma para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço primeiramente a Deus por ser meu guia, amparo, proteção e por estar comigo em todos os momentos.

Agradeço ao meu orientador prof. Dr. Rogério Carrazedo pelas valiosas instruções, apoio constante, incentivo, compreensão, confiança, paciência e disposição ao longo deste trabalho.

Agradeço aos professores Dr. Edson Leonel e Dr. Rodolfo Sanches pelas contribuições relevantes fornecidas na fase de qualificação e aos professores Dr. Luiz Alkimin e Dr. Marcos Arndt, na etapa da defesa.

Agradeço aos meus pais, José Carlos e Analuiza, pelo suporte, amor, reconhecimento e pela renúncia de tantas outras coisas em prol da minha formação. Aos meus irmãos pela amizade, cuidado, torcida e carinho.

Agradeço ao meu noivo e melhor amigo, Jardel Costa, pelo apoio, amor, cuidado, incentivo e por ser meu companheiro em todos os momentos, principalmente durante a pandemia.

Agradeço aos meus amigos pela irmandade, altruísmo, presença, pelos momentos alegres e dificuldades enfrentadas juntos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 e do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – Brasil.

*“O desenvolvimento do homem, dizia, opera-se em duas linhas: "saber" e "ser". Para que a evolução se faça corretamente, as duas linhas devem avançar juntas, paralelamente, sustentando-se uma à outra. Se a linha do saber ultrapassar demais a linha do ser ou a linha do ser ultrapassar demais a do saber, o desenvolvimento do homem não se poderá fazer regularmente; cedo ou tarde deverá deter-se.”*

*P. D. Ouspensky*

## RESUMO

MARQUES, A. N. **Modelagem numérica não-linear do concreto armado considerando a perda de aderência da armadura**. 2023. 115p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

O trabalho conjunto do aço e do concreto se faz por transmissão de esforços internos de um material para o outro, na interface aço/concreto. A depender da magnitude das transferências desses esforços, podem se desenvolver deslocamentos relativos entre os materiais, caracterizados pela perda da aderência. Dessa forma, para se obter um modelo numérico representativo, os efeitos da interação entre o aço e o concreto devem ser introduzidos por uma relação constitutiva não-linear para a aderência. Neste trabalho são apresentados os aspectos dessa interação, incluindo os efeitos da perda de aderência que ocorrem na interface, e a descrição de um modelo numérico que permite simular a perda da ligação entre a armadura e o concreto. Esse modelo é baseado no Método dos Elementos Finitos Posicional, no qual as não-linearidades geométricas são consideradas e o equilíbrio estático é obtido através do Princípio da Energia Mecânica Estacionária, considerando a descrição Lagrangiana total. Para resolver o sistema não-linear, é utilizado o procedimento incremental-iterativo de Newton-Raphson. A imersão da fibra (armadura) na matriz (concreto) é realizada por meio de relações cinemáticas nodais, permitindo a independência das malhas. A não linearidade física do concreto é considerada pelo modelo de dano de Mazars, e para a armadura é considerada uma relação constitutiva elastoplástica. A ruptura da ligação é simulada por meio dos multiplicadores de Lagrange e um elemento de ligação adimensional é utilizado para representar o deslocamento relativo da matriz e da fibra (escorregamento) após a ruptura. Os resultados são comparados com ensaios experimentais e analíticos presentes na literatura, mostrando que o método proposto é representativo e preciso na análise do comportamento de elementos estruturais de concreto armado.

**Palavras-chave:** concreto armado; perda da aderência; escorregamento da armadura; multiplicadores de Lagrange; elementos de interface; MEF posicional.



## ABSTRACT

MARQUES, A. N. **Non-linear numerical modeling of reinforced concrete structures considering bond slip**. 2023. 115p. Dissertation (Master) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

The joint work of steel and concrete is done by transmission of internal forces from one material to the other, at the steel/concrete interface. Depending on the magnitude of these force transmissions, relative displacements between materials can occur, which is characterized by loss of adhesion. Therefore, in order to obtain a reliable numerical model, the influence of the interaction between steel and concrete should be introduced by a nonlinear bond constitutive relationship. This work discusses aspects of this interaction, including the effects of bond loss that occur at the interface, and the description of a numerical model that allows simulating the loss of bond between reinforcement and concrete. This model is based on the Positional Finite Element Method, in which geometric nonlinearities are considered and the static equilibrium is obtained through the Stationary Mechanical Energy Principle, considering the full Lagrangian description. To solve the nonlinear system, the Newton-Raphson incremental-iterative procedure is used. The immersion of the fiber (reinforcement) into the matrix (concrete) is realized by means of nodal kinematic relations, that allow independence of the mesh. The physical nonlinearity of concrete is taken into account by the Mazars damage model and an elastoplastic constitutive relation is taken into account for the reinforcement. Bond rupture is simulated by means of Lagrange multipliers and a dimensionless bond element is used to represent the relative displacement of matrix and fiber (slip) after failure. The results are compared with experimental and analytical tests in the literature, demonstrating that the proposed method is reliable and accurate in analyzing the behavior of reinforced concrete structural elements.

**Keywords:** reinforced concrete; adhesion loss; bond slipping; Lagrange multipliers; interface elements; positional FEM.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Classificação dos materiais compósitos . . . . .	14
Figura 2 – Ensaio de arrancamento padrão ( <i>pull-out test</i> ) . . . . .	18
Figura 3 – Ensaio de flexão de viga ( <i>Beam test</i> ) . . . . .	18
Figura 4 – Diferentes escalas de análise da aderência . . . . .	20
Figura 5 – Curva tensão de aderência x deslizamento . . . . .	27
Figura 6 – Modelo analítico proposto por Eligehausen, Popov e Bertero (1982) . . . . .	27
Figura 7 – Relação local da tensão de aderência x deslizamento . . . . .	29
Figura 8 – Aderência por adesão . . . . .	33
Figura 9 – Aderência por atrito . . . . .	33
Figura 10 – Aderência mecânica . . . . .	34
Figura 11 – Microfissuração do concreto no entorno das barras devido à mobilização da aderência . . . . .	35
Figura 12 – Fendilhamento longitudinal do concreto . . . . .	35
Figura 13 – Distribuição de tensão normal na fibra e de cisalhamento na interface fibra/matriz . . . . .	36
Figura 14 – Variação da tensão ao longo do comprimento de ancoragem da barra . . . . .	37
Figura 15 – Tensão de aderência local <i>versus</i> Escorregamento local para concretos com $f_{ck} = 30$ MPa . . . . .	40
Figura 16 – Tensão de aderência <i>versus</i> Escorregamento para concreto armado . . . . .	40
Figura 17 – Modelos de inserção da fibra na matriz . . . . .	43
Figura 18 – Mudança de configuração de um corpo . . . . .	46
Figura 19 – Mudança de configuração do volume de um corpo . . . . .	47
Figura 20 – Mudança de configuração do volume de um corpo gerado pela área infinitesimal . . . . .	48
Figura 21 – Componentes de tensão e converção de sinais de um cubo infinitesimal . . . . .	49
Figura 22 – Mapeamento das posições nodais do elemento finito bidimensional . . . . .	59
Figura 23 – Configurações do elemento finito de barra simples . . . . .	62
Figura 24 – Arranjo das fibras na matriz . . . . .	67
Figura 25 – Fluxograma da implementação numérica para a simulação da perda da aderência . . . . .	75
Figura 26 – Modelo de Dano para tração e compressão uniaxial . . . . .	80
Figura 27 – Fluxograma da implementação numérica para a simulação de compósitos reforçados com fibras . . . . .	84
Figura 28 – Propriedades geométricas da viga reforçada . . . . .	85
Figura 29 – Deslocamentos verticais em função do carregamento aplicado . . . . .	86
Figura 30 – Configuração deformada e deslocamento vertical na extremidade da viga . . . . .	87

Figura 31 – Propriedades geométricas da <i>Foure's column</i> . . . . .	89
Figura 32 – Curva de Força vs Deslocamento da <i>Foure's column</i> . . . . .	90
Figura 33 – Geometria da malha e processo de danificação do pilar . . . . .	91
Figura 34 – Barra reforçada submetida a deslocamentos prescritos nas extremidades	92
Figura 35 – Discretização da malha com maior grau de refinamento na extremidade da fibra . . . . .	92
Figura 36 – Resultados considerando a perfeita aderência entre os materiais . . . .	93
Figura 37 – Resultados considerando a perda da aderência entre os materiais . . . .	93
Figura 38 – Geometria e carregamento da barra reforçada submetida ao arranca- mento da fibra . . . . .	94
Figura 39 – Discretização e configuração deformada da fibra para $F = 849,51$ kN .	94
Figura 40 – Distribuição da tensão de aderência ao longo do comprimento da fibra .	95
Figura 41 – Distribuição da tensão normal da fibra ao longo do seu comprimento .	96
Figura 42 – Conformação geométrica da viga (medidas em cm) . . . . .	97
Figura 43 – Conformação geométrica do corpo de prova utilizado para calibração dos parâmetros de dano . . . . .	97
Figura 44 – Curva tensão-deformação do concreto comprimido e tracionado consi- derando o modelo do Eurocódigo e a aproximação para o modelo de Dano . . . . .	98
Figura 45 – Discretização da malha da viga . . . . .	98
Figura 46 – Curva deslocamento vertical em função da força . . . . .	99
Figura 47 – Curva deslocamento vertical em função da força comparando as duas abordagens . . . . .	100

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
<b>1.1</b>	<b>Justificativa</b>	<b>21</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos</b>	<b>22</b>
1.2.1	Objetivo Geral	22
1.2.2	Objetivos Específicos	22
<b>1.3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>23</b>
<b>2</b>	<b>MECANISMOS E SIMULAÇÃO DA ADERÊNCIA</b>	<b>25</b>
<b>2.1</b>	<b>Estudos sobre aderência</b>	<b>25</b>
2.1.1	Estudos experimentais	25
2.1.2	Estudos numéricos	29
<b>2.2</b>	<b>Mecanismos de resistência da aderência</b>	<b>32</b>
2.2.1	Aderência por adesão	32
2.2.2	Aderência por atrito	33
2.2.3	Aderência mecânica	33
<b>2.3</b>	<b>Modos de Ruptura por perda de aderência</b>	<b>34</b>
<b>2.4</b>	<b>Distribuição das tensões de aderência</b>	<b>36</b>
<b>2.5</b>	<b>Representação do comportamento da aderência segundo o FIB Model Code</b>	<b>39</b>
<b>2.6</b>	<b>Modelos de inserção da armadura na matriz</b>	<b>42</b>
<b>3</b>	<b>MECÂNICA DOS SÓLIDOS</b>	<b>45</b>
<b>3.1</b>	<b>Cinemática dos corpos deformáveis</b>	<b>45</b>
3.1.1	Função mudança de configuração	45
3.1.2	Mudança de volume e de área	47
<b>3.2</b>	<b>Equilíbrio e Energia</b>	<b>48</b>
3.2.1	Equilíbrio Euleriano	48
3.2.2	Equilíbrio Lagrangiano	50
3.2.3	Equilíbrio Lagrangiano por abordagem energética	51
<b>3.3</b>	<b>Lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff</b>	<b>53</b>
<b>4</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL</b>	<b>56</b>
<b>4.1</b>	<b>Apresentação do método</b>	<b>56</b>
<b>4.2</b>	<b>Solução do sistema de equações de equilíbrio</b>	<b>56</b>
<b>4.3</b>	<b>Elemento finito bidimensional</b>	<b>58</b>
4.3.1	Forças Internas	60

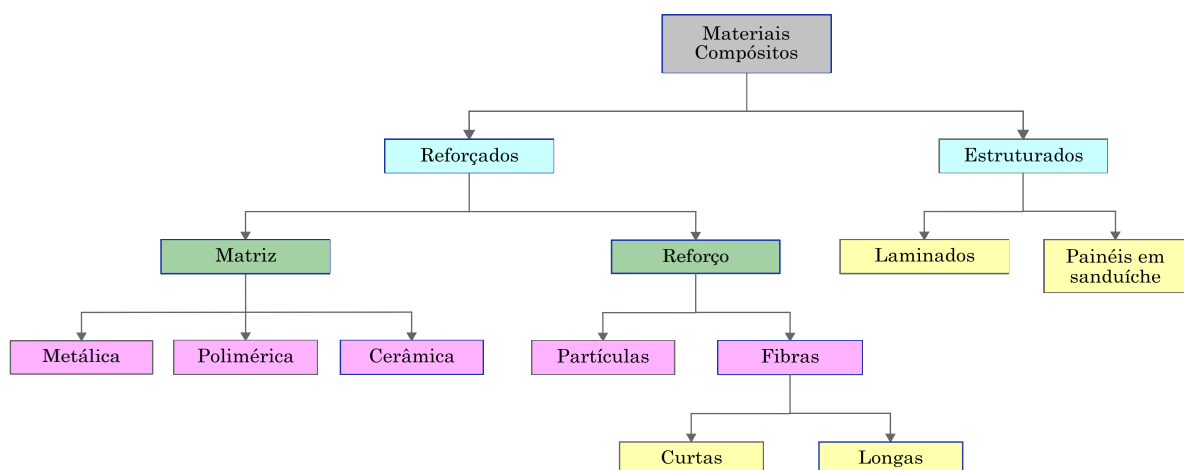
4.3.2	Matriz Hessiana . . . . .	61
4.4	<b>Elemento finito linear</b> . . . . .	<b>62</b>
<b>5</b>	<b>ACOPLAMENTO FIBRA/MATRIZ</b> . . . . .	<b>65</b>
5.1	<b>Fibras perfeitamente aderidas</b> . . . . .	<b>65</b>
5.1.1	Conectividade do nó do elemento de fibra ao elemento da matriz . . . . .	67
5.2	<b>Simulação da interface com os Multiplicadores de Lagrange</b> . . . . .	<b>69</b>
5.3	<b>Simulação da interface com os Elementos de Mola</b> . . . . .	<b>71</b>
5.4	<b>Tensão normal na fibra e tensão de cisalhamento na interface</b> . . . . .	<b>74</b>
<b>6</b>	<b>MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO E O AÇO</b> . . . . .	<b>76</b>
6.1	<b>Modelo Constitutivo para representação do comportamento do concreto</b> . . . . .	<b>76</b>
6.2	<b>Modelo Constitutivo para representação do comportamento do aço</b> . . . . .	<b>80</b>
<b>7</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS</b> . . . . .	<b>85</b>
7.1	<b>Exemplo 1 – Viga reforçada com fibras submetida a grandes deslocamentos</b> . . . . .	<b>85</b>
7.2	<b>Exemplo 2 – Pilar com carga excêntrica e imperfeição geométrica</b> . . . . .	<b>88</b>
7.3	<b>Exemplo 3 – Barra com quatro enrijecedores</b> . . . . .	<b>91</b>
7.4	<b>Exemplo 4 – Pull-out</b> . . . . .	<b>93</b>
7.5	<b>Exemplo 5 – Viga biapoiada submetida a carga centrada</b> . . . . .	<b>96</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>102</b>
8.1	<b>Sugestões para futuros desenvolvimentos</b> . . . . .	<b>103</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>104</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A versatilidade e relevância dos materiais compósitos provêm da combinação das características de dois ou mais materiais diferentes, de modo a aproveitar as melhores propriedades físicas e mecânicas de cada um, levando em conta também o aspecto econômico.

Os compósitos podem ser classificados em compósitos estruturados e compósitos reforçados, de acordo com a distribuição das suas fases e sua geometria. Nos compósitos reforçados, a matriz contribui ativamente na resistência aos esforços, transferindo para o reforço aqueles aos quais não é capaz de resistir por limitação de suas propriedades. Nesses compósitos, o reforço é caracterizado pela inserção de partículas ou fibras, e a matriz pode ser metálica, polimérica ou cerâmica (Figura 1).

Figura 1 – Classificação dos materiais compósitos



Fonte: Adaptado de Callister (2000)

Os compósitos de matriz cerâmica reforçados com fibras são desenvolvidos para evitar a fragilidade e baixa confiabilidade das cerâmicas monolíticas. Nesse sentido, as fibras proporcionam uma maior ductilidade e resistência ao dano, permitindo a aplicação desses compósitos em situações que requerem resistência à corrosão, a altas temperaturas e carregamentos significativos.

O compósito de matriz cerâmica reforçado com fibras mais utilizado no mundo para construção civil é o concreto armado, cuja alta resistência à compressão e o baixo custo do concreto são aliados com a alta resistência à tração e a ductilidade do aço. Além disso, a utilização das barras de aço no concreto é apropriada porque os coeficientes de dilatação térmica desses materiais são bastante próximos e o concreto atua na proteção física e química do aço. A proteção física advém do cobrimento que isola a barra do ambiente

---

externo e a proteção química é concedida por uma camada ou película quimicamente inibidora de caráter passivo que surge em torno da armadura em ambiente alcalino, formado durante a pega do concreto.

No entanto, a incorporação de fibras em matrizes pode não necessariamente melhorar as propriedades mecânicas dos compósitos. Nesses materiais, existem três fatores que governam a durabilidade e o desempenho mecânico: a força e estabilidade química da matriz; a resistência e a rigidez das fibras; e a natureza da ligação entre as fibras e a matriz (TEKLAL *et al.*, 2018).

De fato, a força da adesão interfacial altera a eficiência da transferência de carga entre a matriz e o reforço, influenciando no desempenho mecânico e no modo de ruptura do compósito.

Dado um carregamento aplicado na matriz, se a interface é considerada forte, ou seja, tem alta capacidade de absorção de esforços, a tensão máxima que pode ser transferida para a fibra é igual à resistência ao cisalhamento da matriz. Esse tipo de interface induz a propagação das trincas e a ruptura é, em geral, repentina. Além disso, a resistência da interface pode ser capaz de dissipar a energia liberada pelo dano e distribuir as tensões em uma região suficientemente grande para que a trinca seja interrompida localmente, graças ao mecanismo de tenacificação, como deflexão da trinca (*crack deflection*) (HABLITZEL; GARCIA; HOTZA, 2011; TEKLAL *et al.*, 2018).

Por outro lado, quando a interface é fraca, a eficiência da transferência de tensão é reduzida. A tensão máxima transmitida da matriz para a fibra na interface será igual à resistência da adesão. Isso provoca fissuras interfaciais que favorecem a integridade das fibras. A separação interfacial nesse caso pode ser tão extensa que ocorre o escorregamento ou arrancamento (*pull-out*) da fibra. O escorregamento – deslocamento relativo entre fibra e matriz – se inicia na interface e, quando a carga aplicada é alta o suficiente, ela se propaga ao longo da zona de contato (TEKLAL *et al.*, 2018).

No concreto armado, a adesão da fibra na matriz se dá principalmente por meio da ligação mecânica entre os dois materiais. As cargas são transferidas entre o aço e o concreto por meio das tensões cisalhantes paralelas à barra de aço na interface (tensões de aderência). Esse mecanismo permite que os materiais se deformem em conjunto, transferindo as tensões de um para o outro a fim de manter o equilíbrio do elemento (XIAOYU; XIANGAN, 1999; LACROIX; LEGUILLON; MARTIN, 2002).

A determinação da força da interface do concreto armado e do modo de ruptura por aderência dependem de diversos fatores relacionados com as características e propriedades dos materiais constituintes e pelo meio em que a estrutura está inserida. Dentre esses fatores, vale citar a resistência do concreto à tração, a geometria das nervuras, o diâmetro das barras de aço, o espaçamento entre as barras de aço, o cobrimento do concreto, o

---

tratamento superficial do aço e o tipo de carregamento aplicado (MARINS NETO, 2007).

Além das diversas variáveis envolvidas, a compreensão da natureza física do fenômeno e a grande variabilidade dos resultados experimentais tornam o mecanismo da perda de aderência complexo. Apesar disso, do ponto de vista das formulações matemáticas para previsão do comportamento mecânico, é interessante propor leis constitutivas que estabelecem uma relação não-linear entre a tensão de aderência e o escorregamento, para que a degradação da interface seja considerada (LEONEL, 2009).

Para isso, é necessário estudar a influência do comportamento individual do concreto e da armadura, bem como a interação entre eles. O aço pode ser considerado um material homogêneo com propriedades bem definidas, porém o concreto é um material heterogêneo constituído por diversos materiais de propriedades diferentes. Dessa forma, a estrutura de concreto armado pode apresentar comportamento não-linear a depender das solicitações a que está submetida. Esse comportamento pode ser devido à não-linearidade física do material e/ou à não-linearidade geométrica da estrutura (MARINS NETO, 2007).

O comportamento não-linear físico do concreto armado é devido, principalmente, aos efeitos de fissuração, retração e fluência do concreto, os quais modificam a resposta do material a depender do seu atual estado de deformação. Para reproduzir o comportamento tensão-deformação do material num modelo matemático, formula-se uma lei constitutiva na qual não existe proporcionalidade direta linear entre tensões e deformações a depender do carregamento aplicado.

Leis constitutivas têm sido formuladas com base na teoria da plasticidade, na elasticidade e na mecânica do dano, cada uma das quais pode apresentar boas respostas desde que a situação em estudo forneça um comportamento consistente com a teoria proposta. Os modelos constitutivos baseados na teoria da mecânica do dano são usados como ferramentas importantes para analisar a perda de rigidez do elemento e prever a degradação do material. Essa teoria considera que o material é danificado pela presença de microdefeitos, como microfissuras e microvazios, responsável pela redução da rigidez (LEMAITRE, 2012). Essa redução ocorre após o regime elástico da curva tensão-deformação, representando o comportamento não-linear físico. Esses modelos são geralmente utilizados para simular o comportamento de materiais quase frágeis, como o concreto.

Os modelos constitutivos elastoplásticos assumem que, após o material atingir a tensão de escoamento, qualquer tensão aplicada causa uma deformação irreversível que modifica a estrutura do material permanentemente, de modo que a deformação total é dada pela soma dessa parcela irreversível (deformação plástica) com a parcela recuperável (deformação elástica) (CHEN; HAN, 2007). Para o cálculo das deformações plásticas, é necessário descrever o estado de tensão no início do fluxo plástico; relacionar os incrementos de deformação plástica com as tensões correntes e os incrementos de tensão; e especificar como a função de escoamento é modificada durante o fluxo plástico (BATHE, 2006).



Normalmente, os aços utilizados no concreto armado apresentam um comportamento elástico linear até atingir uma tensão limite, apresentando deformações plásticas a partir dessa tensão.

A não-linearidade geométrica de uma estrutura deve ser considerada nos problemas em que a hipótese de pequenos deslocamentos não é válida. Nessa condição, o campo de deslocamentos desenvolvido para atingir a configuração de equilíbrio não depende apenas da geometria inicial, das propriedades do material e das forças externas, depende também dos próprios deslocamentos que podem gerar esforços adicionais, ocasionando uma nova configuração de equilíbrio.

As não-linearidades em estruturas de concreto armado são frequentemente empregadas para analisar problemas de fissuração, esmagamento, flambagem, rigidez residual em regiões danificadas, instabilidade estrutural, aderência, entre outros.

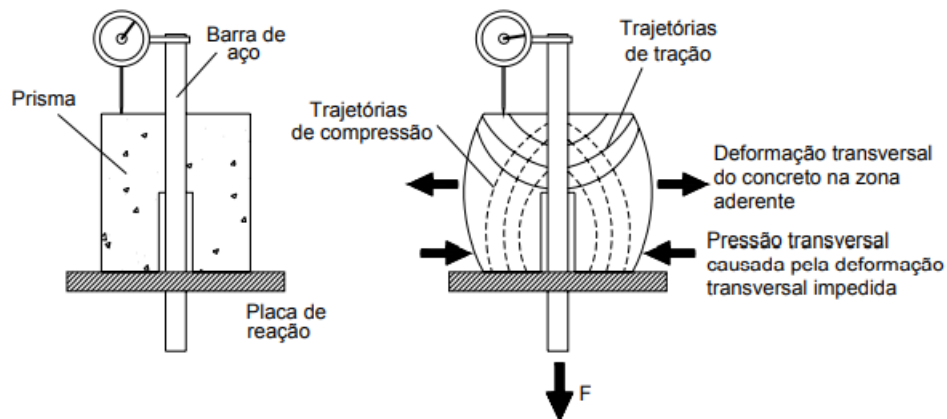
Via de regra, os estudos relacionados ao fenômeno de escorregamento das fibras são realizados por dois segmentos: experimentais e numéricos. As abordagens experimentais são frequentemente testes que determinam os valores da tensão de aderência, como: arrancamento direto ‘*pull-out*’ (RILEM, 1983); arrancamento excêntrico ‘*cantilever bond test*’ (KEMP; BREZNY; UNTERSPAN, 1968); indentação ‘*push-out*’; ensaios de flexão ‘*Beam Test*’ (RILEM, 1982); e comportamento de emendas ‘*splice specimen test*’.

Os ensaios de arrancamento direto e de flexão são os mais utilizados e estão apresentados na Figura 2 e na Figura 3, respectivamente. O ensaio de arrancamento tem como principal objetivo determinar a resistência da aderência aço-concreto e é formado por um cubo de concreto com uma barra de aço posicionada no centro. As duas extremidades da barra de aço situam-se fora do bloco de concreto, onde aplica-se a carga num extremo e o escorregamento é medido no outro extremo. O ensaio de flexão, por sua vez, busca determinar a tensão de aderência aço-concreto. O corpo-de-prova é constituído por dois paralelepípedos de concreto ligados por uma armadura na parte inferior e uma dobradiça na parte superior, que simboliza uma rótula, cujo carregamento é aplicado ao seu redor. Para medição dos deslizamentos, são instalados transdutores de deslocamento nas extremidades da barra de aço.

Na análise numérica, uma das técnicas mais utilizadas é o Método dos Elementos Finitos (MEF). Esse método permite resolver um problema complexo subdividindo-o em um número finito de elementos com comportamento bem definido para solucionar as equações diferenciais que regem o comportamento físico do problema. Em consequência das subdivisões da geometria, essas equações são resolvidas de maneira aproximada e a precisão do método depende da quantidade de nós e elementos criados, ou seja, do refinamento do modelo.

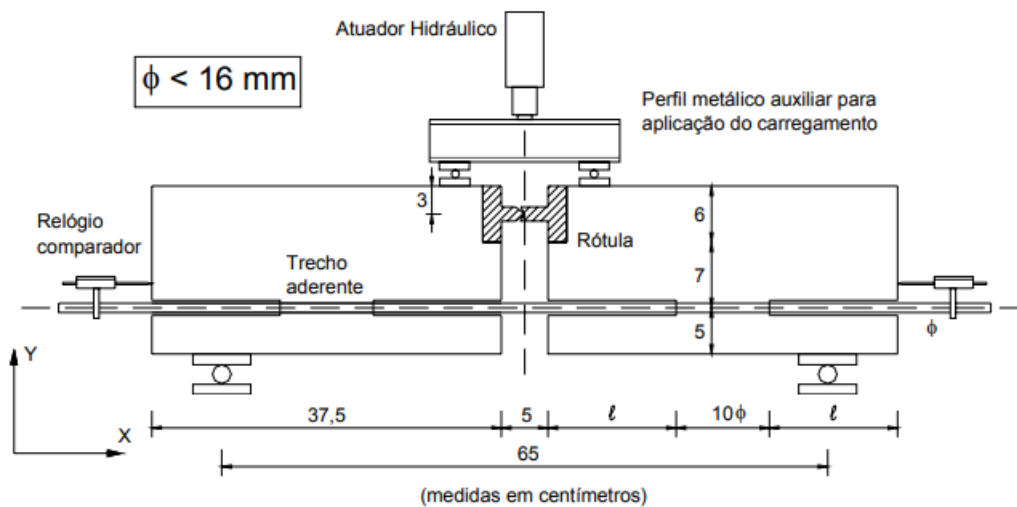
Os modelos de aderência do concreto armado via método dos elementos finitos são

Figura 2 – Ensaio de arrancamento padrão (*pull-out test*)



Fonte: Leonhardt e Monnig (1977)

Figura 3 – Ensaio de flexão de viga (*Beam test*)



Fonte: Rilem (1982)

desenvolvidos de acordo com o objetivo da análise, e podem ser classificados em três escalas distintas: microescala (escala das nervuras), mesoescala (escala da barra) e macroescala (escala do membro estrutural) (BRISOTTO, 2011).

A microescala corresponde a uma escala microscópica de fibras e matrizes independentes e sua influência nos outros níveis (Figura 4a). Nesse tipo de análise, a resposta depende das propriedades da pasta de cimento e agregados, da rugosidade da armadura, e outros fatores. Além disso, a análise requer um sistema de solução mais sofisticado com alto grau de refinamento na qual as nervuras das barras são explicitamente discretizadas, não sendo apropriada para a modelagem a nível global pelo alto custo computacional. Os

---

trabalhos de Ingraffea *et al.* (1984), Rots (1988), Ozbolt e Eligehausen (1992) e Brown, Darwin e McCabe (1993) são exemplos da aplicação deste tipo de modelo.

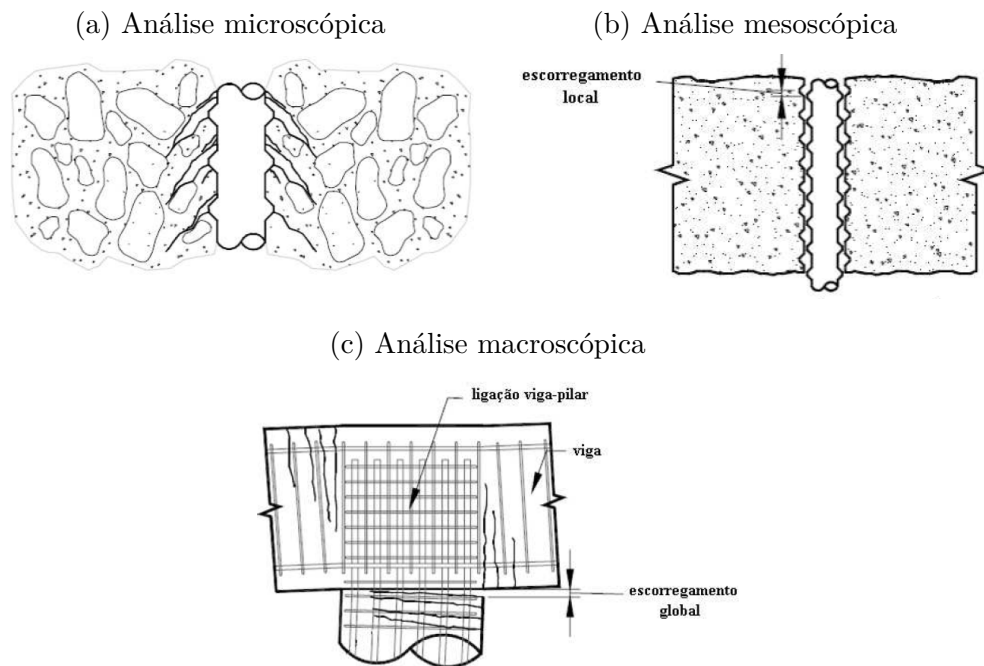
No outro extremo está o modelo denominado macroescala, que corresponde ao comportamento geral dos componentes estruturais (Figura 4c), no qual a armadura é modelada como um elemento unidimensional e a aderência é representada por uma relação simples global entre a tensão tangencial e o escorregamento. Nessa escala, a descrição da degradação mecânica na interface armadura/concreto e seus efeitos são efetuados em macroescala. Esses modelos podem ser aplicados para problemas de estruturas reais e foram adotados nos trabalhos de Malvar (1994), Rossetti, Galeota e Giammatteo (1995), Realfonzo (1995), Cosenza, Manfredi e Realfonzo (1997) e d'Avila (2003).

No nível intermediário está o modelo em mesoescala que diz respeito ao comportamento interdependente da fibra e da matriz (Figura 4b). Tanto o concreto quanto as barras de aço são considerados como contínuos e a interação mecânica entre os materiais é considerada por meio da homogeneização da interface. Nesse modelo insere-se elementos de interface na região de contato, onde se aplicam as leis de aderência de modo local. A implementação de modelos nesta escala via elementos finitos é simples e computacionalmente viável para a análise global. Dessa forma, considerando que o objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo que consiga representar os mecanismos de aderência na análise de membros estruturais, são adotados os modelos de mesoescala. Alguns autores que utilizaram essa escala podem ser citados: Bresler e Bertero (1968), Mehlhorn e Keuser (1986), Groot, Kusters e Monnier (1981), Morita e Fujii (1985), Åkesson (1993), Cox (1994), Lundgren (1999), Lowes, Moehle e Govindjee (2004) e Brisotto (2011).

Uma abordagem para simulação numérica de compósitos em diferentes escalas via Método dos Elementos Finitos é o Método dos Elementos Finitos Posicional. Essa formulação é diferente da abordagem tradicional, pois utiliza as posições nodais como variável principal ao invés dos deslocamentos. Além disso, a forma variacional das equações governantes é derivada pela aplicação do princípio de energia mecânica total estacionária, escrito em termos de posições atuais. Essa abordagem é bastante eficiente para problemas não-lineares geométricos, pois a equação de equilíbrio é uma função não-linear que depende das posições incógnitas. No entanto, essas posições são "conhecidas" em forma de tentativa e são corrigidas com a aplicação de um processo iterativo. Este método é baseado nos trabalhos de Bonet *et al.* (2000), Coda (2003) e Coda (2018) e foi adotado neste trabalho.

Para compósitos reforçados, incluindo o concreto armado, o aprofundamento dos estudos em MEF Posicional se deu através da adoção de uma técnica de embutimento, introduzida ao MEF Posicional por Vanalli (2004), cuja principal característica é não limitar as posições nodais do reforço e não aumentar o número de graus de liberdade do sistema. Isso permite, por exemplo, a distribuição aleatória de fibras no domínio sem qualquer reordenação da malha. Entretanto, essa técnica considera a perfeita aderência

Figura 4 – Diferentes escalas de análise da aderência



Fonte: Brisotto (2011)

da fibra na matriz, como pode ser visto nos trabalhos de Vanalli, Paccola e Coda (2008), Sampaio, Paccola e Coda (2013) e Paccola e Coda (2016).

Conforme mencionado, quando o Método dos Elementos Finitos é empregado para modelar o comportamento do concreto armado, surge uma dificuldade adicional para simular o escorregamento da armadura no concreto, uma vez que a ligação da fibra e da matriz são feitas por meio de uma condição de compatibilidade impostas aos nós comuns. Isso implica em materiais perfeitamente aderentes, ou seja, que nenhum deslocamento relativo pode ocorrer. Para considerar o deslizamento, são introduzidos elementos de ligação que representam a interface e são capazes de transmitir esforços. Esses elementos de ligação são regidos por uma lei constitutiva que estabelece a relação não-linear entre a tensão de adesão e o deslizamento, baseada em ensaios experimentais capazes de descrever o fenômeno.

Nesse contexto, esse trabalho propõe uma alternativa para a modelagem de estruturas de concreto armado em mesoescala, considerando as não-linearidades física e geométrica, e a incorporação da armadura no concreto com o método do embutimento, mas permitindo o escorregamento da armadura. A não-linearidade geométrica é atendida naturalmente com a formulação do MEF Posicional sob descrição Lagrangiana total. A não-linearidade física é considerada na matriz com o emprego do modelo escalar de dano de Mazars, e na fibra, por meio de um modelo constitutivo elastoplástico. A técnica de embutimento é utilizada para imergir a armadura no concreto em malhas independentes, por meio de relações cinemáticas nodais. Quando a tensão de aderência atinge um valor

limite, a ruptura da ligação é simulada por dois mecanismos distintos: os multiplicadores de Lagrange e um elemento de ligação adimensional, ambos estabelecem uma relação constitutiva não-linear na interface. Alguns exemplos são incluídos para validar a proposta.

A adequação deste projeto com o Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP se dá pela continuidade da aplicação do Método dos Elementos Finitos baseado em posições, introduzida com as publicações de Bonet *et al.* (2000) e Coda (2003). Desde então, o Grupo de Mecânica Computacional (GMEC) do SET — Departamento de Engenharia de Estruturas — desenvolve a ampliação e aplicação da formulação para solução de diversos problemas de engenharia. Dentre os quais cabem citar as modelagens numéricas do concreto armado levando em conta diversos fenômenos, como: a reação álcali-agregado (POSTERLLI, 2017); a influência do campo higrométrico sobre essa reação (SALOMÃO, 2017), os efeitos de retração e fluência (BALABUCH, 2018); a deformação devida à formação dos produtos de corrosão (FELIX, 2018; RAMOS, 2020); a perda de protensão aderente (TAVARES, 2020); o confinamento com o encamisamento de pilares (SILVA, 2021); e a fadiga devida às cargas cíclicas (FÉLIX, 2022). Todos esses trabalhos citados foram orientados pelo professor Rogério Carrazedo e consideram a perfeita aderência entre a armadura e o concreto.

## 1.1 Justificativa

O trabalho solidário entre o aço e o concreto em estruturas de concreto armado tem como premissa básica a existência da aderência, a qual permite a transferência de esforços e impede o escorregamento da armadura nos segmentos entre fissuras, limitando suas aberturas. Embora as modelagens dessas estruturas considerem as não-linearidades física e geométrica, de um modo geral, elas assumem a perfeita união desses materiais, nas quais as deformações da armadura e do concreto são totalmente compatíveis, desprezando-se a influência da interface.

Tal simplificação pode ser representativa para simular o comportamento global da estrutura e adequada para garantir sua segurança durante a vida útil, desde que sejam considerados pequenos deslocamentos e rotações. Mas para a análise de situações em que a transferência de esforços na interface é significativa e deslocamentos relativos entre os dois materiais podem existir, a perda de aderência deve ser considerada. Como exemplo, citam-se a simulação dos mecanismos de falha e de deterioração, a representação dos efeitos locais e alguns fenômenos como fissuração, esmagamento e instabilidade estrutural.

A omissão do mecanismo da perda de aderência pode levar a falhas na simulação dos fenômenos citados, desconsiderando nas análises um possível escorregamento das barras no concreto. Um grande inconveniente dessa situação é pela possibilidade da ruptura por perda de aderência ser frágil, devido a uma das seguintes situações ou pela combinação delas: esmagamento do concreto nas áreas ao redor das nervuras das barras, cisalhamento

do concreto no entorno da barra ou, mais frequentemente, o fendilhamento longitudinal do cobrimento do concreto ao longo da barra (BARBOSA; SÁNCHEZ FILHO, 2016).

Dessa forma, a fim de se obter uma análise mais realista do comportamento das estruturas de concreto armado, é essencial a introdução dos efeitos da interação entre o aço e o concreto, considerando com maior rigor o mecanismo de transferência de tensões entre esses materiais. Para tanto, é conveniente simular de forma precisa os possíveis modos de ruptura, incluindo na interface, verificando todos os estados limites da estrutura de concreto.

Além disso, a consideração da perda de aderência na análise não-linear de estruturas de concreto armado fundamenta-se na ampliação da capacidade de análise do Grupo de Mecânica Computacional do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, colaborando com a expansão das possibilidades de aplicação do MEF-Posicional.

## **1.2 Objetivos**

Diante do exposto anteriormente, definem-se o objetivo geral deste trabalho no item 1.2.1 e os objetivos específicos no item 1.2.2.

### 1.2.1 Objetivo Geral

O principal objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo, baseado no método dos elementos finitos posicional (MEFP), na mecânica do dano e na plasticidade, para analisar o comportamento de estruturas de concreto armado, considerando a perda de aderência na interface e as não-linearidades física e geométrica da estrutura.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- a) Desenvolver um modelo numérico em MEFP para análise não-linear geométrica de sólidos elásticos bidimensionais (matriz);
- b) Implementar elementos finitos de treliça (fibras) e realizar o acoplamento fibra-matriz para representar o compósito reforçado;
- c) Considerar a não-linearidade física da matriz, acoplando o modelo de dano de Mazars no código, através da penalização da rigidez com a evolução das deformações de alongamento;
- d) Considerar a não-linearidade física da fibra, por meio de um modelo elastoplástico com encruamento linear isótropo;
- e) Implementar no modelo os mecanismos que possibilitam simular a ruptura da ligação fibra/matriz quando a tensão de aderência atinge um valor crítico, empregando os multiplicadores de Lagrange e/ou os elementos de ligação adimensionais;

- f) Validar o código desenvolvido através de exemplos da literatura e comparar os resultados obtidos com ensaios experimentais.

### 1.3 Metodologia

Nesta seção, apresenta-se uma visão geral da metodologia empregada para cumprir os objetivos propostos.

Todos os códigos computacionais do modelo numérico para representação do concreto armado são implementados em linguagem FORTRAN. Para geração da malha dos elementos finitos do sólido bidimensional foi utilizado o software livre de pré-processamento Gmsh e o software AcadMesh2D, desenvolvido pelo Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, e para o pós-processamento dos resultados fez-se uso do software livre de pós-processamento AcadView, elaborado pelo mesmo departamento (PACCOLA; CODA, 2005). O modelo é fundamentado no MEFP, o qual utiliza as posições como parâmetros nodais, diferentemente da abordagem clássica que utiliza os deslocamentos. Esse modelo tem como vantagem a consideração da não-linearidade geométrica da estrutura mais facilmente. O equilíbrio estático do sistema é obtido pelo Princípio da Energia Mecânica Estacionária, em que as cargas externas são consideradas conservativas e aplicadas de forma incremental. Esse equilíbrio é estabelecido na posição atual, considerando a descrição Lagrangiana total, em que o referencial adotado corresponde à configuração indeformada durante todo o processo incremental. Para resolver as equações de equilíbrio não-lineares resultantes, foi utilizado o clássico método incremental-iterativo de Newton-Raphson. Para descrição da lei constitutiva do material com a lei de Saint-Venant-Kirchhoff, faz-se uso da medida de deformação de Green-Lagrange e do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, seu conjugado energético.

A matriz é discretizada como elementos finitos bidimensionais de chapa e a armadura como elementos finitos de treliça, em que a imersão do reforço na matriz é realizada por meio de relações cinemáticas nodais, denominada técnica de embutimento. Esse método garante a adesão da fibra/matriz sem incorporar novos graus de liberdade no modelo e permite espalhar as fibras de forma determinística ou aleatória, sem necessidade de coincidir as discretizações dos elementos de fibra e de matriz. No entanto, o método do embutimento em MEFP introduzido por Vanalli (2004) não permite avaliar o deslizamento da fibra, que é considerada perfeitamente aderente. Para prescrever a perda de aderência do reforço, introduz-se um elemento de ligação que incorpora novos graus de liberdade apenas na interface deslizante entre a fibra e a matriz, correspondentes aos graus de liberdade do reforço.

A não-linearidade física do concreto é inserida de acordo com o modelo de dano proposto por Mazars (1984), já consagrado na literatura. O modelo é acoplado ao método iterativo de Newton-Raphson, penalizando o módulo de elasticidade com a evolução do

processo de danificação do material. Dessa forma, os efeitos dos processos de deterioração no comportamento mecânico macroscópico do concreto são considerados.

Para a armadura, é considerado o modelo matemático unidimensional da teoria da plasticidade, de simples formulação, mas com boa capacidade para simular os efeitos da não-linearidade física do aço.

A perda da aderência é introduzida adotando-se duas abordagens matemáticas distintas: multiplicadores de Lagrange e elementos de mola (ou elementos de ligação adimensionais). Os multiplicadores de Lagrange são utilizados para inserir restrições cinemáticas ao sistema estrutural, sendo amplamente utilizados em problemas de contato para evitar a penetração dos materiais. Neste trabalho, esse mecanismo é empregado para restringir a variação de posição relativa do nó da matriz e do nó da fibra, conectando os domínios. Quando a tensão de aderência atinge um valor crítico, esses multiplicadores podem ser desabilitados, simulando um estado limite para a aderência.

Como mencionado, a segunda abordagem é utilizar molas para representar a interface. Os elementos de mola têm a vantagem de não incorporar novos graus de liberdade no sistema e de poderem se comportar de modo não-linear. Dessa forma, a mola é capaz de representar a rigidez da interface, permitindo simular o escorregamento da fibra na matriz.

Todos os códigos implementados são comparados com exemplos da literatura ou ensaios experimentais, a fim de validar e analisar a sua precisão.



## 2 MECANISMOS E SIMULAÇÃO DA ADERÊNCIA

Neste capítulo, faz-se uma breve revisão do estado da arte do fenômeno da aderência em estruturas de concreto armado. Abordam-se os mecanismos da interação entre o aço e o concreto, desde a distribuição de tensões até a ruptura na região da interface, dando ênfase na representação numérica do comportamento da aderência. Trata-se também da análise numérica empregada, indicando as distintas formas de se inserir a armadura na modelagem do concreto armado, dos elementos, hipóteses e parâmetros utilizados nas referências.

### 2.1 Estudos sobre aderência

O estudo do mecanismo da aderência entre barras de aço e concreto foi iniciado por volta do final do século XIX e início do século XX. A complexidade do fenômeno despertou interesse em muitos pesquisadores que propuseram modelos teóricos de simulação da perda de aderência a partir de ensaios ou a partir do conhecimento do fenômeno já adquirido. Alguns desses trabalhos são apresentados a seguir com base nos levantamentos elaborados por Marins Neto (2007), França (2010), Tavares (2012) e Macedo (2018).

#### 2.1.1 Estudos experimentais

Abrams (1913 apud TAVARES, 2012) estudou sobre o incremento da aderência com barras nervuradas e realizou considerações importantes sobre a área relativa das nervuras, descrevendo suas experiências em um boletim informativo sobre ensaios de arrancamento simples e ensaios com vigas.

Watstein (1941) propôs o primeiro ensaio de arrancamento a fim de analisar a distribuição da tensão de aderência por meio de corpos-de-prova cilíndricos de concreto envolvendo barras de aço (*pull-out test*). Com o auxílio de extensômetros mecânicos, o autor mediu o alongamento e a tensão na barra envolvida pelo concreto.

Clark (1949) fez um estudo comparativo entre dois tipos de ensaio: o ensaio de arrancamento das barras de aço no concreto e o ensaio de flexão de vigas. Com o intuito de entender melhor a eficácia da aderência do aço e concreto, ele investigou como a força de aderência é desenvolvida e afetada por diversos fatores, como a resistência do concreto, o espaçamento entre as barras e o diâmetro e a rugosidade da superfície das barras.

Mains (1951) observou os efeitos das fissuras sobre a intensidade e distribuição da tensão de aderência no aço através de ensaios de arrancamento direto e ensaios de vigas biapoiadas. Ele mediu a distribuição da tensão de aderência ao longo da barra e a deformação específica do aço e do concreto por meio de extensômetros elétricos.

Ferguson, Turpin e Thompson (1954) elaboraram critérios importantes referentes à aderência por meio de ensaios de arrancamento excêntricos, como o espaçamento mínimo entre as barras de aço e o cobrimento mínimo do concreto para garantir uma transmissão suficiente de tensões cisalhantes na interface. Os autores concluíram que os valores mínimos desses fatores têm relação direta com o tamanho do agregado utilizado no concreto e com a tensão de escoamento do aço.

Perry e Thompson (1966) verificaram a distribuição da aderência considerando três modelos distintos de ensaios: ensaio de viga bi-apoiada submetida a carregamentos concentrados com uma fissura no meio do vão; ensaio de viga bi-apoiada submetida a carregamentos concentrados com as barras de aço principais aderidas ao concreto somente nas extremidades; e ensaio de arrancamento (*pull-out test*). Com os resultados dos ensaios, os autores analisaram a influência do diagrama de momento fletor na relação entre a tensão de aderência e o deslizamento ao longo da barra de aço.

Rehm (1968) estudou o comportamento de diferentes tipos de nervuras e as tensões ao seu redor, analisou a influência do comprimento de ancoragem e foi o primeiro a definir uma lei de aderência local. Ele também estudou as diferentes posições das barras de aço na forma e observou que a direção da concretagem influencia na condição de aderência obtida, graças à formação de espaços vazios com a segregação e acúmulo de água.

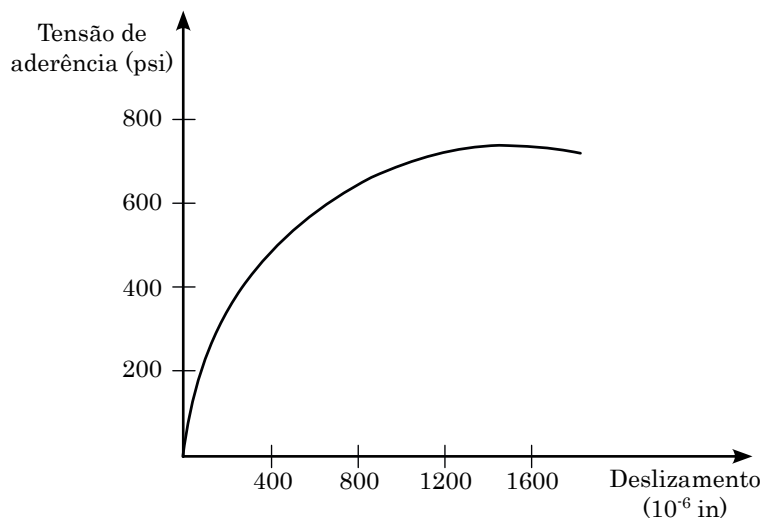
Goto (1971) elaborou um dos trabalhos mais importantes sobre a fissuração de aderência. Ele estudou a formação de fissuras ao redor de barras nervuradas tracionadas, com foco na fissuração radial. Uma de suas principais conclusões é de que a formação de fissuras longitudinais é influenciada pela forma e pelo tipo de nervura. O autor constatou que as barras lisas rompem basicamente por arrancamento e as nervuradas são induzidas a romperem por fendilhamento, graças à aderência mecânica.

Orangun, Jirsa e Breen (1977) produziram um dos trabalhos mais citados na literatura técnica sobre a ancoragem de barras no concreto armado. Os autores apresentaram uma equação baseada em análise por regressão não-linear de ensaios em vigas para a tensão de aderência e para os comprimentos de ancoragem e transpasse de barras nervuradas. A partir disso, eles propuseram o cálculo do comprimento de ancoragem básico e transpasse que tem sido usado como referência até os dias atuais e serve de base para normas técnicas como a ACI (2003).

Mirza e Houde (1979) analisaram o comportamento entre a tensão de aderência e o deslizamento entre o aço e o concreto através de ensaios em corpos-de-prova prismáticos submetidos a esforços de tração nas extremidades da barra de aço inserida no concreto. Eles obtiveram uma relação empírica entre a tensão de aderência e o deslizamento que pode ser utilizada na modelagem de um elemento finito (Figura 5).

Eligehausen, Popov e Bertero (1982) estudaram a aderência de barras sob carrega-

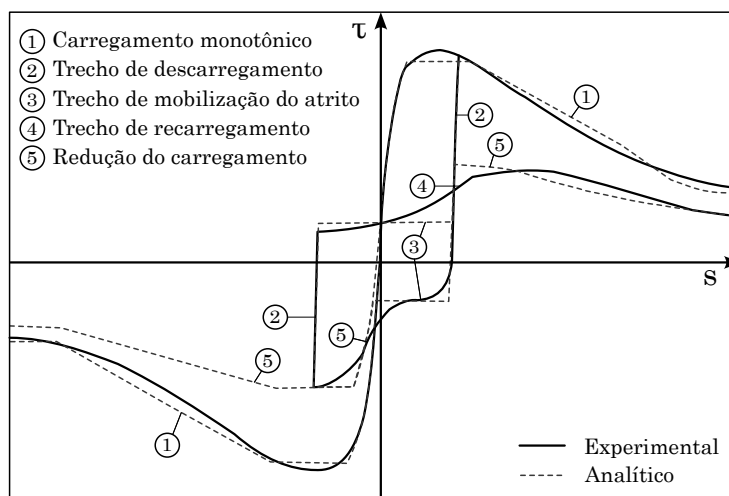
Figura 5 – Curva tensão de aderência x deslizamento



Fonte: Adaptado de Mirza e Houde (1979)

mentos monotônicos e cíclicos com abordagens experimental e analítica. Com base nos resultados obtidos, os autores elaboraram um modelo analítico capaz de prever satisfatoriamente o comportamento da relação tensão de aderência local e escorregamento local. Esse modelo, ilustrado na Figura 6, tem sido a base para o desenvolvimento de modelos mais específicos, como o proposto por Harajli (2009) e pelo FIB Model Code (2010). Esse último apresenta o cálculo das tensões de aderência por meio dos deslizamentos relativos paralelos ao eixo da barra, no qual o carregamento induz rupturas por arrancamento ou fendilhamento. Maiores discussões acerca do modelo são providas na seção 2.5.

Figura 6 – Modelo analítico proposto por Eligehausen, Popov e Bertero (1982)



Fonte: Adaptado de Eligehausen, Popov e Bertero (1982)

Lundgren (1999) desenvolveu um modelo teórico para análises tridimensionais cujas

tensões de aderência dependiam do deslizamento e da deformação radial entre a barra de aço e o concreto. Foram realizados ensaios de arrancamento com barras de aço de diferentes geometrias com cargas monotônicas e cíclicas. Os resultados validaram o modelo para uma variedade de modos de falha, como deslizamento, fendilhamento e escoamento do aço. Mais tarde, Lundgren, Gustavson e Magnusson (2002) aprimoraram o modelo com base na mecânica da fratura não-linear, simulando a perda da aderência devido à presença de fissuras no concreto e ao escoamento do aço.

Barbosa (2001) estudou o comportamento da aderência para concretos de diferentes classes de resistência à compressão e diferentes diâmetros e formatos de barras de aço, através de ensaio de tirantes e ensaio de arrancamento direto. A autora concluiu que: com o aumento da resistência do concreto e do diâmetro da barra, a tensão de aderência também aumenta; a presença de sílica no traço do concreto aumenta a resistência de aderência; e os modelos teóricos propostos ao estudo da aderência aço-concreto, de maneira geral, não são adequados aos materiais brasileiros.

Fang *et al.* (2006) analisaram a influência da corrosão da armadura sobre o comportamento aderência vs deslizamento relativo entre a barra e o concreto, através de ensaios de arrancamento para amostras prismáticas de concreto armado e modelagem por elementos finitos considerando a ferrugem como um material granular. Eles identificaram que ocorre uma redução substancial na ligação aço/concreto para um nível de corrosão a partir de 6%, pois os produtos de corrosão passam a ocupar o espaço que deveria ser preenchido pela pasta de cimento, a qual é responsável por uma parcela da aderência.

Caetano (2008) observou, por meio de ensaios de arrancamento e de flexão, que exposições do concreto armado a alta temperatura e a corrosão afetam significativamente a aderência. Ele concluiu que a redução do desempenho mecânico do concreto armado submetido a altas temperaturas era maior em elevadas resistências à compressão do concreto. Além disso, constatou que a corrosão causa um pequeno acréscimo da tensão de aderência em teores menores que 1,5% e a partir disso seu avanço compromete a aderência. Esse acréscimo de tensão que favorece a aderência ocorre pela deposição de óxidos no entorno da barra, que envolve mecanismos como aumento da rugosidade e densificação do concreto.

Alharbi *et al.* (2020) fizeram um estudo analítico e experimental da ligação entre o concreto e a armadura na flexão. Os autores consideraram diversos parâmetros na modelagem com base nos ensaios realizados, como resistência à compressão do concreto, diâmetro da barra de aço, comprimento de aderência, espessura do cobrimento do concreto e estribos. Com os resultados dos ensaios, um modelo analítico foi apresentado para descrever as relações tensão-deslizamento da ligação.

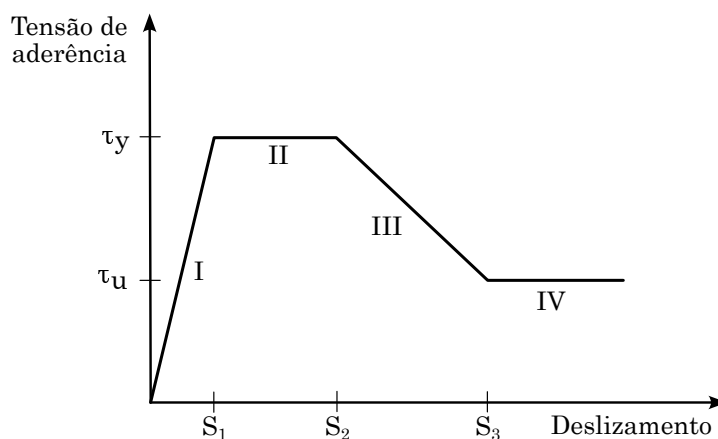
### 2.1.2 Estudos numéricos

Com o avanço da tecnologia e a evolução dos computadores, as teorias e formulações obtidas por meio de ensaios e análises teóricas puderam ser aperfeiçoadas e novas teorias surgiram. Os modelos numéricos que simulam o comportamento das estruturas passaram a ser adaptados e implementados no computador e, com isso, a análise estrutural do concreto armado alcançou resultados mais próximos da realidade.

Ngo e Scordelis (1967) foram uns dos pioneiros na construção de um modelo numérico utilizando o método dos elementos finitos para analisar o comportamento de vigas de concreto armado considerando os efeitos da aderência. Os autores inseriram um elemento finito de ligação adimensional entre os elementos finitos representativos do concreto e das barras de aço para representar a rigidez da aderência na interface por meio de molas.

Yankelevsky (1985) propôs um elemento finito infinitesimal na conexão dos elementos finitos de aço e concreto para consideração da tensão de aderência e o deslizamento na interface. Ele fundamentou seus estudos em equações de equilíbrio das forças atuantes na interface entre a barra de aço e o concreto, para um elemento infinitesimal, e na relação local entre a tensão de aderência e o deslizamento (Figura 7). O autor dividiu o comportamento do fenômeno de aderência pela relação tensão de aderência vs deslizamento em quatro fases: I – tem-se um correspondente aumento da tensão de aderência até o limite  $\tau_y$  no deslizamento entre o aço e o concreto; II – ocorre o início da quebra da aderência onde há o deslizamento relativo entre os dois materiais sem acréscimo da tensão de aderência; III – representa uma redução da tensão de aderência até chegar a uma tensão última  $\tau_u$  onde a transferência de tensão, provocada pelo deslizamento entre os dois materiais, passa a ocorrer por atrito entre eles (fase IV).

Figura 7 – Relação local da tensão de aderência x deslizamento



Fonte: Adaptado de Yankelevsky (1985)

Rosa (1994) elaborou uma comparação de várias curvas de aderência vs deslizamento entre o aço e o concreto aplicando o método dos elementos finitos, na qual se avaliou o desempenho quanto ao tempo de processamento, número de interações necessárias, facilidade de utilização e precisão dos resultados analíticos obtidos comparando-os com os resultados de ensaio de arrancamento e tração simétrica elaborados pelo autor.

Yankelevsky (1997) desenvolveu um elemento finito bidimensional para representar o comportamento da interface entre o aço e o concreto em estruturas submetidas a ensaio de tração. A rigidez dos elementos incorpora parâmetros do aço, do concreto e da relação entre a tensão de aderência vs deslizamento.

Désir (1998) fez uma simulação numérica utilizando leis constitutivas baseadas nos conceitos da termodinâmica clássica para avaliar o comportamento do fenômeno da aderência entre o aço e o concreto, onde considerou a interface como uma superfície de descontinuidade. Este modelo foi incorporado na formulação de um elemento finito, onde o aço e o concreto têm um comportamento próprio definido por uma lei constitutiva separada.

Salari e Spacone (2001) apresentaram formulações gerais, derivadas da compatibilidade de equações diferenciais baseadas no equilíbrio de deslocamento e no equilíbrio de forças, para elementos unidimensionais, considerando os efeitos da aderência e do deslizamento na interface entre o aço e o concreto.

Simão (2003) discutiu diferentes modelos de inserção da armadura e consideração da perda de aderência na implementação de elementos finitos para análise do modelo constitutivo não-linear do concreto, do aço e da interface de estruturas de concreto armado.

Kwak e Kim (2006) apresentaram uma modelagem não-linear usando o método dos elementos finitos com vigas de concreto armado engastadas submetidas ao carregamento cíclico, onde se considerou o comportamento da aderência vs deslizamento relativo entre a barra e o concreto.

Marins Neto (2007) estudou os aspectos das propriedades do concreto, das propriedades do aço e das interações entre eles, e desenvolveu uma modelagem numérica no método dos elementos finitos, com um procedimento incremental-iterativo de carregamento, considerando a deterioração da aderência que ocorre na interface aço-concreto e a não-linearidade física dos materiais. Ele usou diferentes curvas representativas das tensões de aderência vs deslizamento.

Luke (2015) desenvolveu uma análise numérica não-linear de elementos de concreto armado e protendido considerando a aderência que permite a comparação entre o Modelo da Aderência Perfeita e o Modelo da Aderência Variável para dimensionar vigas submetidas a esforços de flexo-compressão reta.

Paccola, Piedade Neto e Coda (2015) propuseram uma formulação geral para

considerar fibras embutidas em domínios bidimensionais que permite espalhar as fibras dentro da matriz de forma determinística ou aleatória sem a necessidade de coincidir as discretizações da fibra e da matriz. Para analisar o escorregamento das fibras, os autores desenvolveram uma formulação precisa para a região de contato com modelo elastoplástico considerando plasticidade e endurecimento perfeitos. Na ocorrência de amolecimento, eles propuseram um procedimento alternativo elastoplástico com corte parcial.

Bitencourt Júnior (2015) propôs uma estratégia numérica usando o MEF para simular a falha de compósitos cimentícios reforçados com fibras de aço, na qual uma técnica para acoplamento de malhas não conformes foi proposta baseada no uso de elementos finitos de acoplamento, considerando a aderência perfeita e a perda de aderência entre o reforço e o concreto. A perda de aderência é representada através de um acoplamento não rígido que permite o deslocamento relativo e introduz forças de interação entre os dois componentes. A aplicabilidade da técnica é apresentada para malhas 2D e 3D e serviu como base de diversos trabalhos, como Bitencourt Júnior *et al.* (2015), Tosati, Manzoli e Rodrigues (2017), Tosati (2019) e Bitencourt Júnior *et al.* (2019).

Turgut, Jason e Davenne (2020) elaboraram um modelo numérico que considera o efeito do confinamento do concreto na interface aço/concreto, propondo uma equação geral e uma nova lei de aderência empírica. A interface é considerada através da inserção de um elemento de espessura zero, adaptada a simulações em larga escala e ao uso de elementos unidimensionais para barras de aço. O modelo é capaz de reproduzir a evolução da tensão de aderência em função da tensão de confinamento para diferentes propriedades do concreto e diâmetro do aço.

Jin *et al.* (2020) desenvolveram uma modelagem de mesoescala tridimensional para investigar a perda de aderência entre o concreto e a barra de aço nervurada. Eles concluíram que a relação tensão de aderência vs deslizamento depende do estado limite e das condições iniciais de todo o sistema, como taxa e diâmetro da armadura, resistência do concreto, espessura do cobrimento e estribos. Os efeitos da resistência do concreto, razão da espessura do cobrimento em relação ao diâmetro da barra e o confinamento do estribo foram estudados na simulação e obtiveram uma influência significativa no modo de ruptura da interface e na forma da curva tensão de aderência vs deslizamento.

De acordo com o que foi exposto, diversos métodos numéricos baseados em MEF foram utilizados. No entanto, a caracterização da zona interfacial é um problema desafiador. A adesão da interface e o modo de falha nessa região dependem da natureza química/morfológica e da compatibilidade física/termodinâmica entre os dois materiais. Por isso, simplificações são geralmente assumidas, como considerar os materiais do compósito como homogêneos, elásticos e lineares, em que as tensões impostas pela fibra sob aplicação de um carregamento são totalmente acomodadas dentro da interface e a matriz circundante não é perturbada, além de se considerar estado plano de deformação quando

as fibras são suficientemente longas e desconsiderar a dependência radial de tensões axiais.

Além disso, a zona de interface é frequentemente tratada como um elemento adicional do compósito, com propriedades e características específicas e de difícil determinação. Nesses casos, elementos de mola ou elementos contínuos de contato são introduzidos entre o concreto e a armadura para considerar o efeito da aderência, condicionando a matriz na geometria das fibras, demandando um maior número de elementos finitos e consequentemente exigindo maior esforço computacional.

Em vista disso, esse trabalho busca inserir a não-linearidade física na fibra e na matriz, através da penalização da rigidez com a evolução do dano do material, e introduzir a ligação dos materiais sem dependência da malha da fibra na malha da matriz. Dessa forma, não há necessidade de coincidir as discretizações dos elementos de fibra e de matriz. Para considerar a perda da aderência, novos graus de liberdade são incorporados apenas na interface entre a fibra e a matriz, nos nós correspondentes ao reforço, utilizando o mecanismo numérico dos multiplicadores de Lagrange ou elementos de mola para permitir o deslocamento relativo entre os materiais.

## 2.2 Mecanismos de resistência da aderência

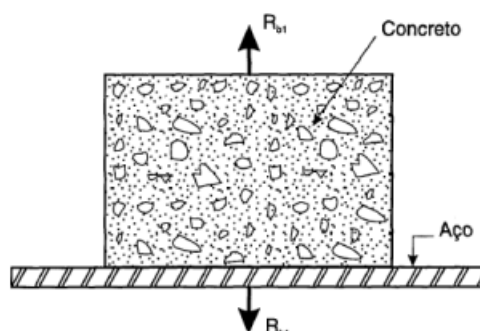
Lutz e Gergely (1967) foram uns dos primeiros autores a discutirem a mecânica do deslizamento de barras nervuradas. Eles concluíram que a aderência é formada por três componentes: adesão química, aderência por atrito ou fricção e a aderência mecânica entre o aço e o concreto. No entanto, esta divisão é simplesmente didática, não sendo possível ser obtido o valor de cada componente isoladamente devido à complexidade dos fenômenos implicados (FERNANDES, 2000).

### 2.2.1 Aderência por adesão

A ligação por adesão, de natureza físico-química, é representada pelas forças na interface entre o aço e o concreto provocadas pelo efeito de aderência que a nata de cimento gera na superfície do aço durante o endurecimento do concreto (Figura 8). São forças capilares que dependem das irregularidades e limpeza da superfície da barra de aço. No entanto, pequenos deslocamentos podem romper essa ligação (FUSCO, 1995; BARBOSA, 2001; MARINS NETO, 2007).



Figura 8 – Aderência por adesão

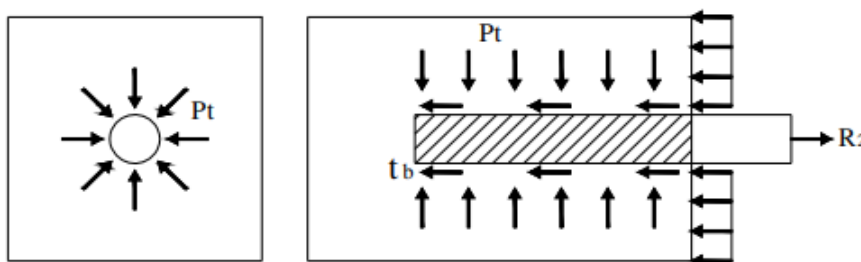


Fonte: Fusco (1995)

### 2.2.2 Aderência por atrito

Esse tipo de aderência é caracterizada por uma força de contato entre os materiais que ocorre após a ruptura da adesão. Também é função do coeficiente de atrito entre o aço e o concreto (de valor aproximado 0,3) que depende da rugosidade da superfície da barra. Essa força é estimulada quando há tendência ao deslocamento relativo entre a barra de aço e o concreto (Figura 9). O efeito da aderência por atrito se dá por meio de pressões transversais às armaduras, que são manifestadas por tensões de compressão ou pela retração e expansão do concreto (LEONHARDT; MONNIG, 1977; FUSCO, 1995).

Figura 9 – Aderência por atrito



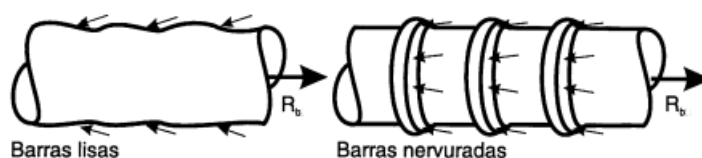
Fonte: Fusco (1995)

### 2.2.3 Aderência mecânica

A aderência por interação mecânica é a parcela mais resistente ao escorregamento de barras nervuradas. Essa aderência é provida pelo engrenamento mecânico, função da irregularidade da superfície da barra decorrente de moedas, entalhes, cavidades e reentrâncias, e pelas nervuras das barras. Após a ruptura da adesão, ocorre o intertravamento das saliências da armadura no concreto. Essas saliências resistem ao cisalhamento e mobilizam as tensões de compressão no concreto, impedindo o deslizamento da armadura. Nas barras

lisas, as imperfeições geradas do processo de laminação ocasionam a aderência mecânica, mas a magnitude dessa força de aderência para barras lisas é pequena comparada às demais parcelas. A Figura 10 ilustra a força de aderência mecânica para barras lisas e nervuradas que resistem ao deslizamento da armadura (DUMÊT, 2003; FUSCO, 1995).

Figura 10 – Aderência mecânica



Fonte: Fusco (1995)

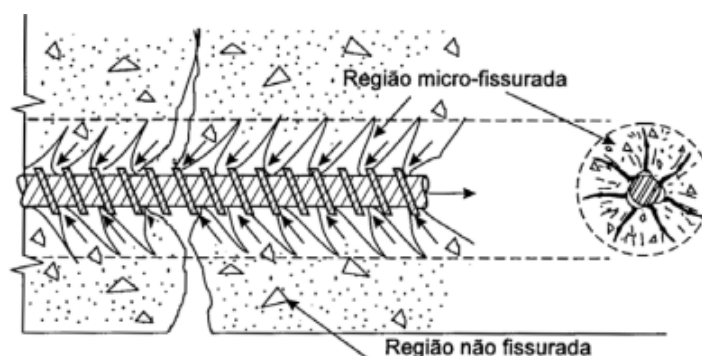
### 2.3 Modos de Ruptura por perda de aderência

Segundo Brisotto (2011), a ruptura por perda de aderência é um processo que está intimamente relacionado a um estado de deformação e fissuração. Os modos de ruptura são considerados de acordo com as características da interação entre a armadura e o concreto, dentre os quais os modos de ruptura que mais se destacam na literatura são ruptura por arrancamento direto da barra e ruptura por fendilhamento do concreto no cobrimento.

O arrancamento da barra de aço e, conseqüentemente, o esmagamento e cisalhamento do concreto ocorrem quando há confinamento suficiente do concreto na barra tracionada. O concreto imediatamente ao redor da barra falha devido ao cisalhamento do concreto entre as microfissuras. Esse modo de ruptura está essencialmente relacionado à resistência do concreto e ao tipo e geometria das nervuras. O confinamento do concreto devido às barras de aço diminui a propagação e abertura das fissuras, proporcionando o arrancamento da barra (FERNANDES, 2000).

Relacionado a isso, Fusco (1995) expõe que a falha da aderência não se dá por simples deslizamento da barra de aço no concreto, uma vez que os esforços mobilizados pela aderência criam no concreto uma região microfissurada no entorno das barras (Figura 11). Portanto, o arrancamento da barra por simples processo progressivo ocorreria apenas se houvesse a pulverização de todo o concreto entre as nervuras. Esse processo é facilitado nas barras lisas pelas pequenas irregularidades na superfície. Nas barras nervuradas só ocorre o arrancamento quando o confinamento do concreto é tal que o fendilhamento longitudinal é impedido e as tensões circunferenciais de tração são contidas.

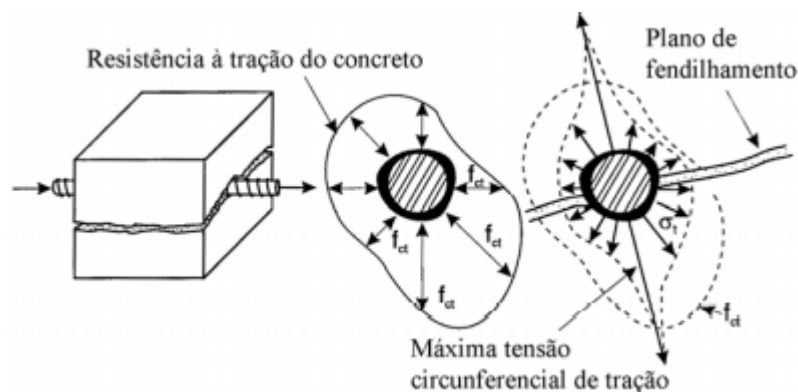
Figura 11 – Microfissuração do concreto no entorno das barras devido à mobilização da aderência



Fonte: Fusco (1995)

A ruptura por fendilhamento longitudinal do cobrimento do concreto ao longo da barra ocorre quando o confinamento é insuficiente para garantir o arrancamento completo da barra. As nervuras ou irregularidades da armadura impedem o deslocamento relativo da barra, agindo como pontos de apoio de bielas comprimidas. Em compensação, aparecem tensões de tração perpendiculares às forças compressivas da biela, formando um anel de tensão ao redor da armadura (efeitos radiais) (DUMÊT, 2003). Os esforços de tração tendem a se propagar em direção às bordas e quando a fissuração radial atinge a superfície externa, o elemento perde a capacidade de aderência e rompe o cobrimento do concreto (Figura 12). A ruptura por fendilhamento ocorre de forma brusca, sem aviso prévio. O número de barras e suas configurações dentro do elemento são os principais fatores que influenciam na orientação das fissuras que definem o plano de fendilhamento (CASTRO, 2002).

Figura 12 – Fendilhamento longitudinal do concreto



Fonte: Fusco (1995)

Dessa forma, entende-se que o modo de ruptura por aderência é fortemente influen-

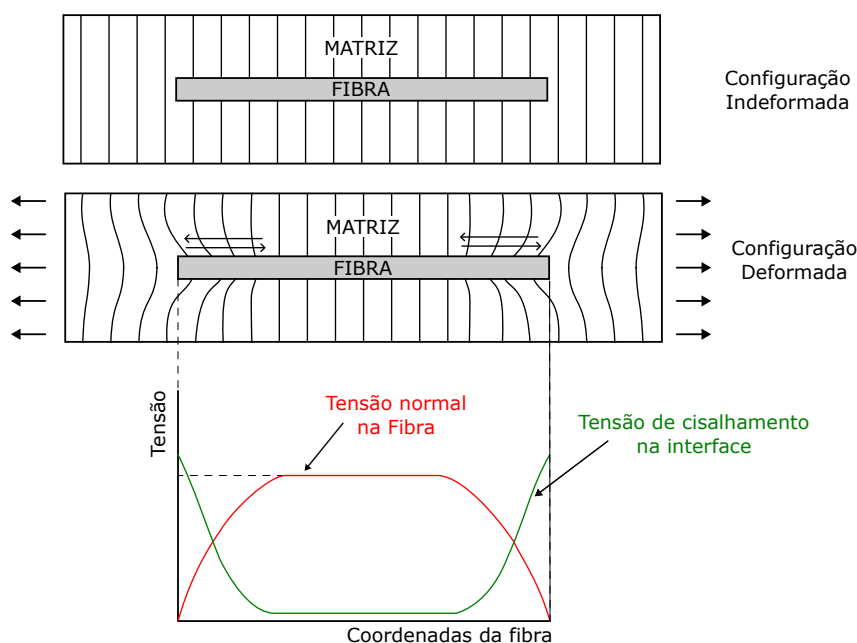
ciado pelas tensões de tração e pela resistência do concreto à tração. Por essa razão, a fim de evitar a ruptura por fendilhamento, barras transversais podem ser adotadas para combaterem essas tensões, bem como criar um estado de compressão transversal ao eixo da barra favorecendo a ancoragem, como um cintamento helicoidal (FUSCO, 1995). Correia (2012) fez experimentos que analisaram a influência da adição de fibras de aço e armadura transversal no comportamento da ancoragem e avaliou que a resistência ao fendilhamento do concreto alterou significativamente.

## 2.4 Distribuição das tensões de aderência

Em geral, os deslocamentos absolutos do aço e do concreto entre duas fissuras ou ao longo do comprimento onde ocorre a transferência de esforços (comprimento de transmissão) são diferentes. Devido a essa diferença, tensões de aderência são geradas entre esses materiais para manter o equilíbrio do elemento e não haver o escorregamento.

Sob condições de deformações elásticas e contato perfeito entre o aço e o concreto, a distribuição de tensões ao longo de uma fibra alinhada paralelamente à direção da carga aplicada na matriz pode ser representada como mostra a Figura 13. Conforme apresenta a figura, a tensão normal é zero nas extremidades da fibra e máxima no centro, e a tensão de cisalhamento (tensão de aderência) é máxima nas extremidades e quase nula no centro da fibra (MATTHEWS; RAWLINGS, 1994 apud SAMPAIO, 2014).

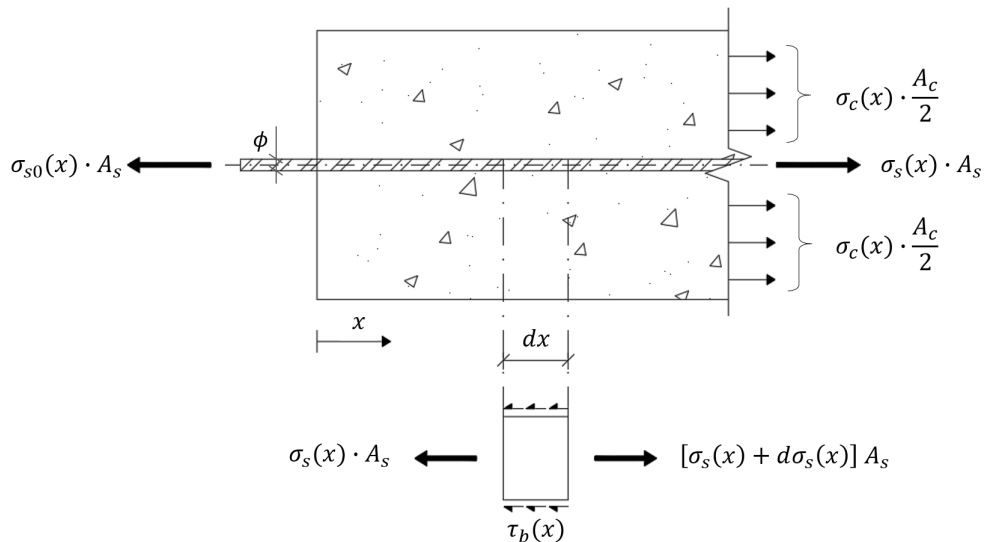
Figura 13 – Distribuição de tensão normal na fibra e de cisalhamento na interface fibra/matriz



Fonte: Adaptado de Matthews e Rawlings (1994 apud SAMPAIO, 2014)

Apesar da variação da tensão ao longo da peça, tanto para o concreto quanto para a armadura, o valor de cálculo dessas tensões é um valor médio (DUMÊT, 2003). Seja o tirante armado da Figura 14 sujeito à ação de uma carga monotônica e crescente, o equilíbrio infinitesimal na armadura é dado por:

Figura 14 – Variação da tensão ao longo do comprimento de ancoragem da barra



Fonte: Adaptado de CEB (1982)

$$\sigma_s(x) \cdot A_s + \tau_b(x) \cdot \pi \phi \cdot dx = [\sigma_s(x) + d\sigma_s(x)] \cdot A_s \quad (2.1)$$

$$\tau_b(x) \cdot \pi \phi \cdot dx = d\sigma_s(x) \cdot A_s \quad (2.2)$$

$$\frac{d\sigma_s(x)}{dx} = \frac{4}{\phi} \cdot \tau_b(x) \quad (2.3)$$

em que  $\sigma_{s0}$  é a tensão normal na extremidade carregada da barra;  $\sigma_s(x)$ , a tensão normal na armadura ao longo do comprimento de ancoragem;  $\sigma_c(x)$ , a tensão normal no concreto ao longo do comprimento de ancoragem;  $\tau_b(x)$ , a tensão de aderência ao longo do comprimento de ancoragem;  $A_s$  corresponde à área da seção transversal da armadura;  $A_c$ , à área da seção transversal do concreto; e  $\phi$  é o diâmetro da barra.

Portanto, se a armadura estiver sob tensão constante ( $\Delta\sigma_s(x) = 0$ ), para que a peça esteja em equilíbrio, a tensão de aderência não precisa atuar. No entanto, sempre que houver variação de tensão ( $\Delta\sigma_s(x) \neq 0$ ), a força de aderência é necessária para manter o equilíbrio e evitar o escorregamento, bem como ser feita a transferência de esforços.

Da mesma forma, tem-se o equilíbrio do elemento no concreto:

$$\sigma_c(x) \cdot A_c - \tau_b(x) \cdot \pi \phi \cdot dx = [\sigma_c(x) + d\sigma_c(x)] \cdot A_c \quad (2.4)$$

$$\frac{d\sigma_c(x)}{dx} = -\frac{\pi\phi}{A_c} \cdot \tau_b(x) \quad (2.5)$$

Quando as deformações nos dois materiais são iguais, a força aplicada na armadura é transmitida ao concreto por aderência:

$$\frac{dF_s}{dx} = -\frac{dF_c}{dx} \quad (2.6)$$

$$\frac{d\sigma_s(x)}{dx} \cdot A_s = -\frac{d\sigma_c(x)}{dx} \cdot A_c = \pi\phi \cdot \tau_b(x) \quad (2.7)$$

Dado  $\rho = A_s/A_c$ , tem-se:

$$\frac{d\sigma_s(x)}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma_c(x)}{dx} = \frac{4}{\phi} \cdot \tau_b(x) \quad (2.8)$$

Com as leis constitutivas dos materiais, as derivadas das tensões podem ser escritas em função das deformações do aço e do concreto. Definem-se  $\mathbb{E}_s$  e  $\mathbb{E}_c$  como o módulo de elasticidade do aço e do concreto, respectivamente, o que implica em:

$$\mathbb{E}_s \frac{d\varepsilon_s(x)}{dx} = -\frac{\mathbb{E}_c}{\rho} \frac{d\varepsilon_c(x)}{dx} = \frac{4}{\phi} \cdot \tau_b(x) \quad (2.9)$$

O deslizamento entre os dois materiais ( $s$ ) numa determinada seção é dado pelo deslocamento relativo:

$$s(x) = u_s(x) - u_c(x) \quad (2.10)$$

Dessa forma, a variação do deslizamento ao longo do comprimento  $dx$  é:

$$\frac{ds(x)}{dx} = \frac{du_s(x)}{dx} - \frac{du_c(x)}{dx} = \varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x) \quad (2.11)$$

Assim, a equação diferencial que une o deslizamento e a tensão de aderência é encontrada derivando a Equação 2.11 e substituindo nela a Equação 2.9, a qual resulta em:

$$\frac{d^2s(x)}{dx^2} = \frac{4}{\phi} \frac{\tau_b(x)}{\mathbb{E}_s} (1 + \alpha_s \rho) \quad (2.12)$$

em que  $\alpha_s = \mathbb{E}_s/\mathbb{E}_c$ .

Diante disso, nota-se que a equação diferencial que relaciona a tensão de aderência e o escorregamento depende das condições de contorno de cada problema e da lei constitutiva  $\tau_b(s)$ , descrita em função de um número considerável de fatores. Portanto, a solução desta equação requer um estudo aprofundado do comportamento da aderência, o qual será mostrado no próximo item para a fase elástica da armadura.

## 2.5 Representação do comportamento da aderência segundo o FIB Model Code

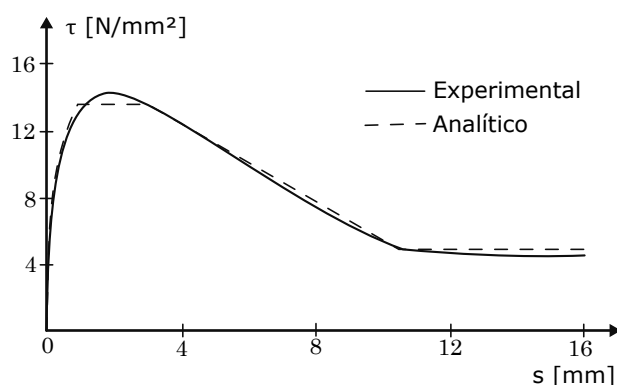
O comportamento da aderência é geralmente representado por meio da definição de uma lei de aderência, caracterizada pela relação entre a tensão de aderência e o escorregamento. Essa tensão é idealizada por uma tensão de cisalhamento na interface fibra/matriz e o escorregamento é função do deslocamento relativo entre a barra de aço e o concreto, o qual é provocado pela diferença entre as deformações específicas de cada material, como visto anteriormente (DUCATTI, 1993).

A magnitude das tensões de aderência depende de diversos fatores, dentre os quais predominam a superfície da armadura, o deslocamento relativo, a resistência do concreto, o cobrimento do concreto, a posição e orientação da armadura, o estado de tensão e as condições de contorno. Diante disso, as curvas tensão-deslizamento existentes foram elaboradas a partir de estudos experimentais, como a curva típica apresentada por Eligehausen, Popov e Bertero (1982). Estas curvas são associadas, por simplificação, à sua deformação média e aplicáveis como uma formulação aproximada para uma ampla gama de casos (FIB MODEL CODE, 2010).

Entre as fissuras ou ao longo do comprimento de transmissão, uma parte da força de tração da armadura, atuando na fissura, é transferida para o concreto por aderência (efeito de *tension stiffening*). Esse fenômeno ocorre apenas nas barras nervuradas e deve ser considerado na determinação das deformações dos elementos estruturais (BUCHAIM, 2001).

Em condições bem definidas, para pequenos comprimentos de ancoragem, é estatisticamente aceitável considerar que existe uma relação média ‘Tensão de aderência local’ versus ‘Deslizamento local’. O modelo de Eligehausen, Popov e Bertero (1982) descreve essa relação representativa para o concreto armado de  $f_{ck} = 30$  MPa a partir de ensaios com deformação controlada. O gráfico da Figura 15 apresenta as curvas do comportamento da aderência para barras ancoradas em concreto confinado e sujeitas a carregamentos monotônicos e cíclicos, comparando os resultados experimentais com o modelo analítico proposto pelos autores.

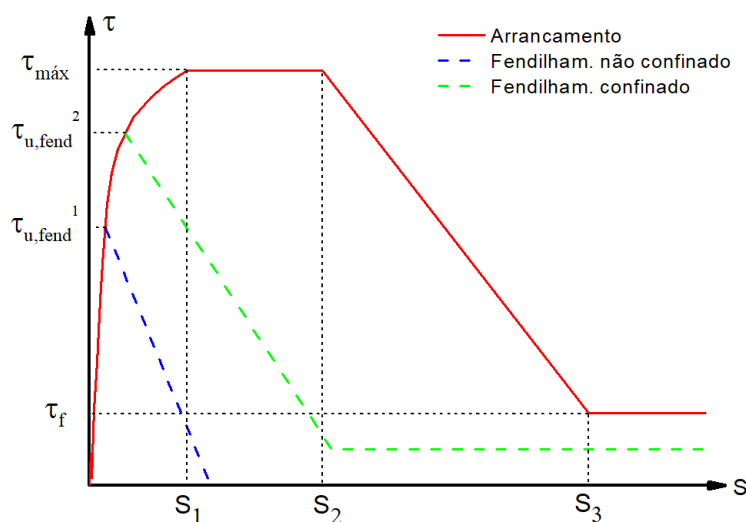
Figura 15 – Tensão de aderência local *versus* Escorregamento local para concretos com  $f_{ck} = 30$  MPa



Fonte: Eligehausen, Popov e Bertero (1982)

O modelo de aderência sugerido pelo Comitê Europeu do Beton FIB Model Code (2010) foi baseado nos estudos de Eligehausen, Popov e Bertero (1982) e é voltado para aplicações em concreto armado, sendo um dos modelos analíticos mais usado e mais citado na literatura técnica (Figura 16).

Figura 16 – Tensão de aderência *versus* Escorregamento para concreto armado



Fonte: Adaptado de FIB Model Code (2010)

O primeiro trecho da curva, do início até  $s_1$ , representa a fase de fissuração inicial da matriz onde ocorre esmagamento local do concreto pelas nervuras. O segundo trecho, entre os pontos  $s_1$  e  $s_2$ , representa um estágio mais avançado do esmagamento e do



cisalhamento do concreto entre as nervuras. Este nível só ocorre para o concreto confinado e representa uma capacidade residual de aderência que é mantida em virtude de um grande cobrimento do concreto ou de uma armadura transversal mínima, preservada predominantemente íntegra. O terceiro trecho, reta descendente entre  $s_2$  e  $s_3$ , diz respeito à redução da aderência devida ao fendilhamento ao longo da barra. Por fim, o trecho representado pelo ramo horizontal após  $s_3$ , mostra a capacidade resistente residual da aderência, onde a resistência ao escorregamento é mantida principalmente pelo atrito na interface. Na hipótese de ruptura por fendilhamento, a curva apresenta uma tensão limite menor do que a máxima tensão de aderência para o arrancamento, devido às altas tensões radiais de tração que provocam a pulverização do concreto ao redor da barra. Após esse instante, a estrutura sofre fendilhamento e a aderência é perdida gradualmente. Quando o concreto não está devidamente confinado, ocorre uma queda repentina da resistência de aderência antes que o nível horizontal, representado pela capacidade resistente residual da aderência após  $s_3$ , seja alcançado (FIB MODEL CODE, 2010).

Para um carregamento monotônico, as tensões de aderência entre o concreto e a armadura podem ser calculadas como uma função do deslocamento relativo  $s$ , de acordo com as Equações 2.13 a 2.16. Para isso, o modelo da FIB Model Code (2010) aplica algumas considerações, como: a armadura e o concreto têm a mesma deformação nas regiões da estrutura em que o aço está comprimido e nas partes não fissuradas da estrutura sob tração; e em seções transversais fissuradas, as forças de tensão na fissura são transferidas pela armadura.

$$\tau_b = \tau_{m\acute{a}x} \left( \frac{s}{s_1} \right)^\alpha \quad \text{para} \quad 0 \leq s \leq s_1 \quad (2.13)$$

$$\tau_b = \tau_{m\acute{a}x} \quad \text{para} \quad s_1 \leq s \leq s_2 \quad (2.14)$$

$$\tau_b = \tau_{m\acute{a}x} (\tau_{m\acute{a}x} - \tau_f) \left( \frac{s - s_2}{s_3 - s_2} \right) \quad \text{para} \quad s_2 \leq s \leq s_3 \quad (2.15)$$

$$\tau_b = \tau_f \quad \text{para} \quad s_3 < s \quad (2.16)$$

Os parâmetros destas equações estão resumidos na Tabela 1, os quais variam a depender do modo de ruptura (arrancamento ou fendilhamento), do nível de confinamento e da região de boa ou má aderência. Esses parâmetros são valores médios que pressupõem barras nervuradas e expoente  $\alpha$  constante. O valor do coeficiente  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) pode modelar todas as formas usuais de uma relação tensão de aderência-escorregamento, partindo de uma tensão constante ( $\alpha = 0$ ) até uma relação com aumento linear da tensão de aderência ( $\alpha = 1$ ).

Os valores da Tabela 1 para o modo de ruptura por arrancamento da armadura são válidos para concretos suficientemente confinados, ou seja, cobrimento  $\geq 5\phi$  e espaçamento

Tabela 1 – Parâmetros para a definição da lei tensão de aderência-deslizamento

Parâmetro	Arrancamento		Fendilhamento			
	Zona de boa aderência	Demais zonas	Zona de boa aderência		Demais zonas	
			Concreto não confinado	Concreto confinado	Concreto não confinado	Concreto confinado
$\tau_{m\acute{a}x}$	$2,5\sqrt{f_{ck}}$	$1,25\sqrt{f_{ck}}$	$7\left(\frac{f_{ck}}{20}\right)^{0,25}$	$8\left(\frac{f_{ck}}{20}\right)^{0,25}$	$5\left(\frac{f_{ck}}{20}\right)^{0,25}$	$5,5\left(\frac{f_{ck}}{20}\right)^{0,25}$
$s_1$	1,0mm	1,8mm	$s(\tau_{m\acute{a}x})$	$s(\tau_{m\acute{a}x})$	$s(\tau_{m\acute{a}x})$	$s(\tau_{m\acute{a}x})$
$s_2$	2,0mm	3,6mm	$s_1$	$s_1$	$s_1$	$s_1$
$s_3$	$d_{livre}$	$d_{livre}$	$1,2s_1$	$0,5d_{livre}$	$1,2s_1$	$0,5d_{livre}$
$\alpha$	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
$\tau_f$	$0,4\tau_{m\acute{a}x}$	$0,4\tau_{m\acute{a}x}$	0	$0,4\tau_{m\acute{a}x}$	0	$0,4\tau_{m\acute{a}x}$

em que  $d_{livre}$  é a distância livre entre nervuras e  $f_{ck}$  é a resistência à compressão do concreto em MPa

Fonte: FIB Model Code (2010)

entre barras  $\geq 10\phi$ . Já para o modo de ruptura por fendilhamento, os parâmetros são válidos para diâmetro da barra  $\phi \leq 20mm$ , relação cobrimento máximo da seção transversal pelo cobrimento mínimo  $c_{max}/c_{min} = 2,0$ , com  $c_{min} = \phi$  e  $K_{tr} = 2\%$ , sendo o  $K_{tr}$  um termo que mede a contribuição da armadura transversal no confinamento do concreto, calculado por meio da Equação 2.17 (FIB MODEL CODE, 2010).

$$K_{tr} = \frac{n_1 A_{sv}}{n_b \phi s_v} \quad (2.17)$$

em que:

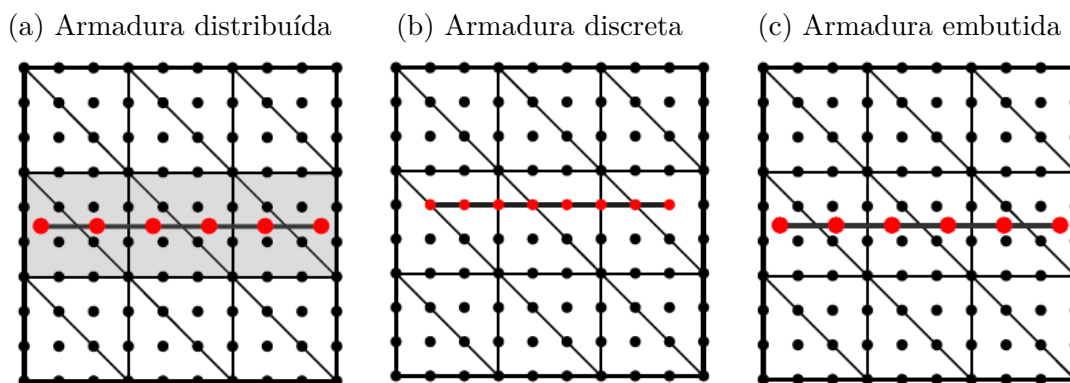
- $n_1$  → Número de ramos de armadura transversal em uma seção;
- $A_{sv}$  → Área da seção transversal de um ramo da armadura transversal;
- $s_v$  → Espaçamento longitudinal máximo da armadura transversal;
- $n_b$  → Número de armaduras ancoradas ou pares de barras sobrepostas;
- $\phi$  → Diâmetro da barra ou da menor de um par de barras.

## 2.6 Modelos de inserção da armadura na matriz

Uma modelagem adequada do concreto armado em elementos finitos deve levar em conta a inserção da armadura na matriz. Nesse sentido, as abordagens mais difundidas na literatura para representar a armadura são: i) modelos de armadura distribuída; ii) modelos de armadura discreta e; iii) modelos de armadura embutida. A descrição a seguir

desses modelos de armadura foi baseada nos trabalhos de Simão (2003) e Wolenski *et al.* (2014).

Figura 17 – Modelos de inserção da fibra na matriz



Fonte: Ramos (2020)

No modelo de armadura distribuída, a fibra está distribuída uniformemente segundo um ângulo de orientação qualquer. As propriedades dos elementos de matriz que contêm os nós dos elementos da fibra são homogeneizadas para um material só e considera-se a aderência perfeita entre os componentes (Figura 17a). Dessa forma, não é possível alterar a geometria da armadura ao longo da espessura do elemento e a relação tensão-deformação é utilizada para o material composto aço-concreto. Esse método é pouco utilizado, pois os outros modelos apresentam resultados mais robustos e próximos da realidade, como a inclusão da perda de aderência.

Os modelos de armadura discreta consideram elementos unidimensionais necessariamente conectados aos nós dos elementos de matriz, podendo ser conectadas às arestas dos elementos de concreto também (Figura 17b). Dessa forma, a rigidez do conjunto é obtida com a sobreposição da rigidez da armadura discreta com a rigidez do elemento de concreto, nos graus de liberdade correspondentes. A principal limitação desse modelo é o condicionamento da posição do reforço à geometria da malha, de modo que a cada nova configuração da armadura, um novo modelo de malha precisa ser gerado para que os nós se coincidam. Isso dificulta que estruturas de distribuição complexas da armadura sejam analisadas de maneira eficiente e esse problema é ainda mais crítico em casos tridimensionais. Entretanto, esse modelo é frequentemente utilizado para incluir os efeitos de aderência com a introdução de elementos de mola ou elementos contínuos de contato entre o concreto e a armadura, visto que essa representação permite analisar os deslocamentos relativos entre a armadura e o concreto envolvente.

Nos modelos de armadura embutida, a fibra é considerada um elemento unidimensional incorporado na matriz, permitindo a inserção da armadura no concreto de forma independente (Figura 17c). Por ser um elemento incorporado, os deslocamentos entre os dois materiais são compartilhados e devem ser consistentes ao serem combinados,

dificultando assim a ocorrência de deslocamentos relativos. Por esse motivo, os primeiros modelos de armadura embutida consideravam a aderência perfeita entre a fibra e matriz. No entanto, essas limitações foram contornadas com o surgimento de novos trabalhos que introduziam nós extras com características prescritas ao longo do elemento de barra, como Balakrishna e Murray (1987), Elwi e Hrudehy (1989), Allwood e Bajarwan (1989) e Philips e Wu (1990). Para esses modelos, os efeitos da perda de aderência resultaram no aumento do número de graus de liberdade. Alguns autores também utilizam os elementos de reforço embutidos arbitrariamente na malha, mas tornam esses elementos discretos, uma vez que possuem nós próprios e os subdividem em função dos elementos da malha, e, por esse motivo, classificam o modelo como semi-embutido, como em Farfan (2008), Rosero (2018) e Durand e Farias (2014).

Castro (2013) implementou os modelos de armadura discreta e embutida em elementos de mola e de contato e concluiu que ambos apresentaram bons resultados. Contudo o modelo de armadura discreta possui a inconveniência de condicionamento da malha à geometria da armadura, dificultando a realização de possíveis ajustes na malha, bem como demandando maior número de elementos finitos. Além disso, para modelos com molas, a rigidez depende da região de influência da mola, o que pode causar um trabalho dispendioso em malhas irregulares ou mais refinadas. No caso dos elementos de contato, o cálculo da rigidez não requer a informação da região de influência do elemento. Nos modelos de armadura embutida, o autor destacou a facilidade de pós processamento de informações como escorregamento de fibras, tensão de aderência e tensão atuante.

No presente trabalho, o modelo utilizado para representar a inserção da armadura no concreto é o embutimento, baseando a formulação da geometria da fibra em relação ao sistema de coordenadas do elemento que a contém, sem adicionar novos graus de liberdade quando o sistema é considerado perfeitamente aderente. Para descrever o comportamento da perda da aderência, os novos graus de liberdade introduzidos são referentes aos nós da fibra, sem necessidade de subdividir a malha da armadura em consequência da geometria da malha da matriz. Uma vez que o reforço e a matriz são considerados independentes, esse método permite aplicar condições de contorno diretamente nos elementos de barra, o que o torna eficaz para análise de ensaios de arrancamento de fibra.

### 3 MECÂNICA DOS SÓLIDOS

O principal objetivo deste capítulo consiste no desenvolvimento dos conceitos fundamentais da mecânica dos sólidos a serem empregados nas formulações que viabilizam as modelagens numéricas de análises de sólidos e estruturas, particularmente para o emprego do Método dos Elementos Finitos Posicional, elaborado por Bonet *et al.* (2000) e Coda (2003). A bibliografia base desse capítulo é encontrada em Coda (2018). Para maiores detalhes sobre o tema, recomenda-se também a leitura dos trabalhos de Crisfield (1991), Ogden (1997), Bonet e Wood (1997) e Holzapfel (2000).

Para a descrever a mudança de configuração ou movimentação de um corpo, é necessário definir uma representação para essa mudança. Segundo Holzapfel (2000), duas abordagens matemáticas amplamente utilizadas na mecânica do contínuo são as descrições Lagrangiana e Euleriana. Essas abordagens diferem entre si pelo referencial utilizado na configuração do corpo. Na primeira, a referência é a configuração inicial ou indeformada e na segunda utiliza-se a configuração final ou deformada. Neste trabalho, a descrição adotada é a Lagrangiana total.

#### 3.1 Cinemática dos corpos deformáveis

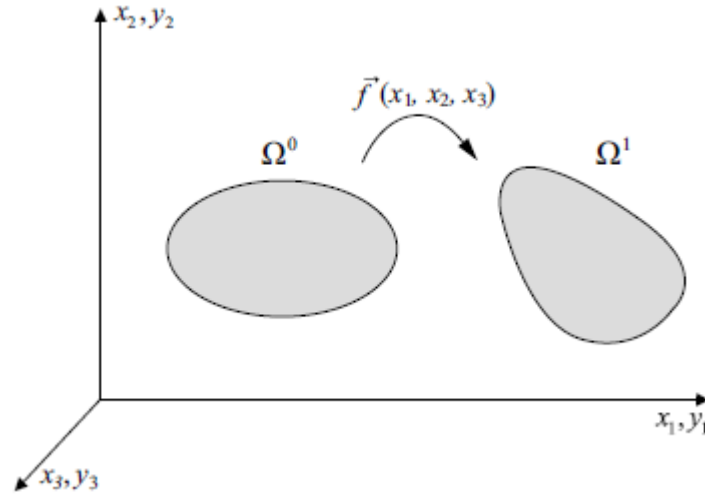
Na cinemática dos corpos deformáveis, os sólidos possuem um comportamento análogo ao de um meio contínuo, homogêneo e de uma só fase, no qual o corpo é visto como uma distribuição contínua de matéria no espaço e tempo. Dessa maneira, as grandezas de posição, velocidade, aceleração, massa e volume são expressas mediante funções contínuas.

É de interesse da cinemática dos sólidos deformáveis obter o equilíbrio de forças na posição atual do corpo, e para isso é necessário descrever as mudanças de configuração às quais o corpo foi submetido, decorrentes do movimento de corpo rígido ou da deformação imposta pelos esforços atuantes.

##### 3.1.1 Função mudança de configuração

O mapeamento da configuração atual do sólido é determinado pela função mudança de configuração. Essa função, considerada contínua e continuamente diferenciável, é definida como sendo uma aplicação vetorial capaz de descrever o comportamento cinemático do corpo, dadas as condições de contorno impostas, mapeando as posições atuais ( $y$ ) a partir das posições iniciais ( $x$ ). Na Figura 18, o corpo  $\Omega^0$  representa a configuração inicial indeformada e o corpo  $\Omega^1$  simboliza a configuração atual deformada após aplicação da função mudança de configuração  $\vec{f}$ .

Figura 18 – Mudança de configuração de um corpo



Fonte: Ramos (2020)

A função mudança de configuração é escrita a partir das posições ou deslocamentos desenvolvidos, conforme a Equação 3.1.

$$\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \vec{y}(x_1, x_2, x_3) = \vec{x}(x_1, x_2, x_3) + \vec{u}(x_1, x_2, x_3) \quad (3.1)$$

em que  $\vec{y}$  representa o vetor de posição atual do corpo,  $\vec{x}$  o vetor de posição inicial e  $\vec{u}$  o vetor deslocamento do corpo.

O gradiente da função mudança de configuração (A) indica a mudança de direção e comprimento de um vetor infinitesimal no interior do corpo para uma nova posição na configuração genérica, sendo calculado pela Equação 3.2.

$$A = \nabla \vec{f} = \nabla \vec{y} = \nabla \vec{u} + \mathbf{I} \quad (3.2)$$

no qual  $\mathbf{I}$  é um tensor identidade de segunda ordem.

O tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green (calculado pela Equação 3.3) é uma grandeza positiva definida e significativa na descrição Lagrangiana da elasticidade não-linear. Essa grandeza é uma medida de deformação objetiva (independente de movimentos de corpo rígido) que permite determinar pontualmente a mudança de forma da configuração inicial para a atual. Esse tensor é simétrico e compreende as deformações longitudinais e as distorções do corpo, sendo importante para a obtenção de medidas de deformação não-lineares. Cabe ressaltar que movimentos de corpo rígido sem provocar deformações resultam em  $C = \mathbf{I}$ .

$$C = A^T A \quad (3.3)$$

em que o índice  $T$  representa o transposto dos tensores de 2<sup>a</sup> ordem.

A deformação de Green-Lagrange ( $E$ ) também é uma medida de deformação objetiva fundamental pelo fato de ser a medida mais simples e não-linear calculada em termos do tensor de Cauchy-Green ( $C$ ) (Equação 3.4). Quando o corpo é submetido a apenas movimentos de corpo rígido,  $E$  resulta no tensor nulo. Destaca-se que a medida de Green-Lagrange é representativa para solução de problemas de grandes deslocamentos com limitação a deformações moderadas, uma vez que a medida permite a inversão do material em caso de grandes deformações e o significado físico da análise é perdido.

$$E = \frac{1}{2}(C - \mathbf{I}) \quad (3.4)$$

### 3.1.2 Mudança de volume e de área

Dado um cubo infinitesimal extraído de um corpo indeformado cujas dimensões são definidas pelos vetores  $\vec{dx}_1$ ,  $\vec{dx}_2$  e  $\vec{dx}_3$  (Figura 19), o volume do cubo é calculado pela Equação 3.5. Supondo que esse cubo sofra uma mudança de configuração de forma, com os vetores definidos por  $\vec{dy}_1 = A\vec{dx}_1$ ,  $\vec{dy}_2 = A\vec{dx}_2$  e  $\vec{dy}_3 = A\vec{dx}_3$ , o volume do cubo deformado é dado pela Equação 3.6.

$$dV^0 = \det(\vec{dx}_1, \vec{dx}_2, \vec{dx}_3) \quad (3.5)$$

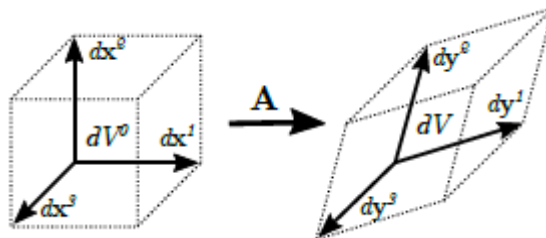
$$dV = \det(\vec{dy}_1, \vec{dy}_2, \vec{dy}_3) = \det(A)\det(\vec{dx}_1, \vec{dx}_2, \vec{dx}_3) = JdV^0 \quad (3.6)$$

já que

$$J = \det(A) = \frac{dV}{dV^0} \quad (3.7)$$

em que  $J$  é o jacobiano ou a deformação volumétrica e deve atender à condição de impenetrabilidade  $J > 0$ , uma vez que o material não apresenta auto intersecção, ou seja, não pode inverter ou desaparecer.

Figura 19 – Mudança de configuração do volume de um corpo



Fonte: Carvalho (2019)

Para descrever a mudança de configuração da área de um corpo, supõe-se o volume infinitesimal  $dV^0$  na configuração inicial no qual se projeta uma área infinitesimal  $dS^0$

através de um vetor  $\vec{dx}$  e define-se  $\vec{n}^0$  como um versor ortogonal à face  $dS^0$  (Figura 20). Dessa forma, o volume inicial é dado pela Equação 3.8.

$$dV^0 = \vec{dx} \cdot \vec{n}^0 dS^0 \quad (3.8)$$

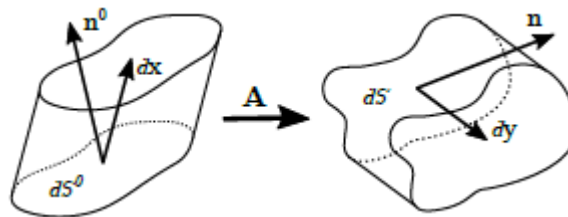
Após sofrer uma mudança de configuração, a nova área infinitesimal é definida como  $dS$ , projetada através de um vetor  $\vec{dy}$  e ortogonal a um versor  $\vec{n}$ . Assim, o volume do cubo deformado é dado pela Equação 3.9.

$$dV = \vec{dy} \cdot \vec{n} dS = A \vec{dx} \cdot \vec{n}^0 dS^0 \quad (3.9)$$

Sabendo que  $dV = JdV^0$  (Equação 3.7) e que  $\vec{dx}$  é um valor arbitrário, pode-se escrever a Equação 3.10, conhecida como fórmula de Nanson. Essa equação é usada para relacionar as áreas da configuração deformada para indeformada e é muito importante na relação entre as diferentes medidas de tensão.

$$\vec{n} dS = JA^{-1} \vec{n}^0 dS^0 \quad (3.10)$$

Figura 20 – Mudança de configuração do volume de um corpo gerado pela área infinitesimal



Fonte: Carvalho (2019)

## 3.2 Equilíbrio e Energia

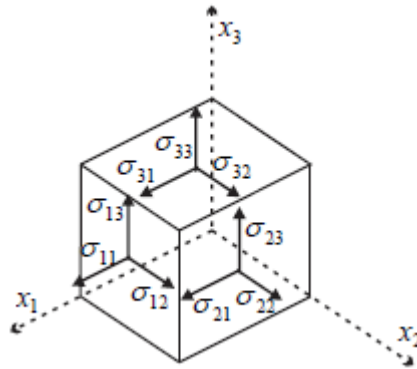
Embora a formulação adotada neste trabalho empregue uma descrição Lagrangiana total, o estado de equilíbrio de um corpo está intimamente ligado à sua configuração atual (CARVALHO, 2019). Sendo assim, abordam-se inicialmente as equações de equilíbrio na descrição Euleriana e, a partir delas, a forma Lagrangiana é obtida, utilizando as relações de mudança da configuração deformada para a indeformada apresentadas anteriormente.

### 3.2.1 Equilíbrio Euleriano

Considera-se um cubo infinitesimal, formado por cortes ortogonais aos eixos coordenados, com distâncias infinitesimais entre si, retirado de um corpo  $\Omega^1$  sujeito a forças externas. Dessa forma, para manter o equilíbrio, cada face do cubo está sujeita a um



Figura 21 – Componentes de tensão e convenção de sinais de um cubo infinitesimal



Fonte: Coda (2018)

estado de tensões em três componentes, simbolizadas por  $\sigma_{ij}$ , em que  $i$  refere-se ao eixo ortogonal a essa face e  $j$  representa a direção da componente de tensão (Figura 21).

Uma maneira de organizar esse estado de tensão na forma tensorial é por meio do tensor de tensões de Cauchy, conhecido como tensão real (Equação 3.11). Efetuando o equilíbrio de momentos no cubo, resulta no teorema de Cauchy (Equação 3.12), o qual pressupõe que o tensor de tensões é simétrico.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\sigma = \sigma^T \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (3.12)$$

O equilíbrio local Euleriano é obtido por meio da segunda lei de Newton, no qual considera-se que o cubo infinitesimal está sujeito a uma força de volume  $\vec{b}$ , provocando uma variação infinitesimal de tensão ao longo do cubo ( $\nabla \cdot \sigma^T \vec{dx}$ ). Dessa forma, tem-se a Equação 3.13.

$$\sigma dS + \vec{b} dV = (\sigma + \nabla \cdot \sigma^T \vec{dx}) dS + \rho \vec{y} dV \quad (3.13)$$

em que  $dS$  corresponde a área da face perpendicular ao eixo onde ocorre a variação de tensão,  $dV$  é o volume do cubo,  $\rho$  é a massa específica e  $\vec{y}$  é a aceleração na direção calculada. Após o desenvolvimento algébrico, pode-se escrever simplesmente a Equação 3.14, que representa matematicamente o equilíbrio local Euleriano.

$$\nabla \cdot \sigma^T + \vec{b} = \rho \vec{y} \quad (3.14)$$

Integrando essa equação no domínio  $\Omega^1$ , obtém-se o equilíbrio global (Equação 3.15).

$$\int_{\Omega^1} \nabla \cdot \sigma^T dV + \int_{\Omega^1} \vec{b} dV = \int_{\Omega^1} \rho \vec{y} dV \quad (3.15)$$

Utilizando o teorema de Gauss na primeira parcela, é possível escrever a integral em função da superfície  $\Gamma^1$  que contorna  $\Omega^1$ , dado um versor normal  $\vec{n}$  a essa superfície no ponto de análise, conforme Equação 3.16.

$$\int_{\Gamma^1} \sigma \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega^1} \vec{b} dV = \int_{\Omega^1} \rho \vec{y} dV \quad (3.16)$$

Como  $\sigma \cdot \vec{n} = \vec{p}$ , sendo  $\vec{p}$  uma força de superfície, o equilíbrio global Euleriano é finalmente dado pela Equação 3.17.

$$\int_{\Gamma^1} \vec{p} dS + \int_{\Omega^1} \vec{b} dV = \int_{\Omega^1} \rho \vec{y} dV \quad (3.17)$$

### 3.2.2 Equilíbrio Lagrangiano

Para escrever o equilíbrio Lagrangiano em função do equilíbrio Euleriano, aplica-se a fórmula de Nanson (Equação 3.10) e a fórmula de mudança de volume (Equação 3.6) na Equação 3.16, resultando na Equação 3.18. Dessa vez o domínio de referência é  $\Omega^0$ , delimitado pela superfície  $\Gamma^0$ .

$$\int_{\Gamma^0} (J\sigma A^{-1}) \cdot \vec{n}^0 dS^0 + \int_{\Omega^0} J \vec{b} dV^0 = \int_{\Omega^0} J\rho \vec{y} dV^0 \quad (3.18)$$

O tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie ( $P$ ) é definido pela Equação 3.19.

$$P = J A^{-T} \sigma \quad (3.19)$$

Além disso, o princípio de conservação da massa determina uma relação entre as massas específicas inicial ( $\rho^0$ ) e final do sólido ( $\rho$ ), após passar por uma mudança de configuração, mediante a expressão  $\rho^0 = J\rho$ . Utilizando um argumento semelhante a esse princípio, considerando que as forças de volume são conservativas, pode-se escrever  $\vec{b}^0 = J\vec{b}$ , onde  $\vec{b}^0$  é uma força de volume Lagrangiana. Assim, o equilíbrio global Lagrangiano escrito em termos do tensor de Piola-Kirchhoff de primeira espécie é definido pela Equação 3.20.

$$\int_{\Gamma^0} P^T \cdot \vec{n}^0 dS^0 + \int_{\Omega^0} \vec{b}^0 dV^0 = \int_{\Omega^0} \rho^0 \vec{y} dV^0 \quad (3.20)$$

Para formular o equilíbrio local Lagrangiano, Equação 3.21, aplica-se o teorema de Gauss e a arbitrariedade de volume. É importante ressaltar que o tensor  $P$  não é simétrico como o tensor de Cauchy  $\sigma$ .

$$\nabla \cdot P^T + \vec{b}^0 = \rho^0 \vec{y} \quad \text{ou} \quad P_{ij,i} + b_j^0 = \rho^0 \ddot{y}_j \quad \text{em notação indicial} \quad (3.21)$$

### 3.2.3 Equilíbrio Lagrangiano por abordagem energética

O método estudado neste trabalho é baseado na abordagem energética Lagrangiana para obtenção do equilíbrio. Em razão disso, torna-se conveniente verificar se as equações de equilíbrio representam a soma das variações de energia, bem como se atendem as condições de variação do funcional. Dado que o funcional da energia mecânica total do sistema é escrito pela Equação 3.22. É importante destacar que os problemas abordados neste trabalho são considerados quase-estáticos, por isso a parcela da energia cinética será omitida posteriormente. No entanto, nesta ocasião, considera-se apropriada a apresentação de todas as parcelas da energia mecânica.

$$\Pi = \mathbb{U} + \mathbb{P} + \mathbb{K} \quad (3.22)$$

em que  $\mathbb{U}$  é a energia de deformação,  $\mathbb{P}$  a energia potencial das forças externas e  $\mathbb{K}$  a energia cinética. O princípio da energia mecânica estacionária total denota que o equilíbrio é obtido anulando-se a primeira variação do funcional, conforme a Equação 3.23.

$$\delta\Pi = \delta\mathbb{U} + \delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{K} = 0 \quad (3.23)$$

Dessa forma, a Equação 3.20 deve atender a essa condição tornando a sua variação nula (Equação 3.24).

$$\delta\Pi = \int_{\Omega^0} \rho^0 \vec{y} \delta\vec{y} dV^0 - \int_{\Omega^0} \vec{b}^0 \delta\vec{y} dV^0 - \int_{\Gamma^0} P^T \cdot \vec{n}^0 \delta\vec{y} dS^0 + \int_{\Omega^0} P^T \nabla \cdot (\delta\vec{y}) dV^0 = 0 \quad (3.24)$$

Na última integral da Equação 3.24, tem-se que  $P^T$  é o conjugado energético de  $A$ , visto que  $P$  não é simétrico e o  $\nabla \cdot (\delta\vec{y})$  é a variação do gradiente função mudança de configuração ( $\delta A$ ). Dessa forma, assumindo  $\vec{p}^0$  uma força de superfície Lagrangiana conservativa, escreve-se a Equação 3.25.

$$\int_{\Omega^0} \rho^0 \vec{y} \delta\vec{y} dV^0 - \int_{\Omega^0} \vec{b}^0 \delta\vec{y} dV^0 - \int_{\Gamma^0} \vec{p}^0 \delta\vec{y} dS^0 + \int_{\Omega^0} P^T : \delta A dV^0 = 0 \quad (3.25)$$

O fato do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff não ser simétrico apresenta algumas desvantagens enquanto medida de tensão para o método empregado. Sendo assim, um segundo tensor de tensões é definido, conforme a Equação 3.26. Diferentemente do tensor de tensões de Cauchy, o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie não possui uma interpretação física no que se refere às forças de superfície, mas é muito empregado na formulação de leis constitutivas de corpos deformáveis e na mecânica computacional (CODA, 2003).

$$S = A^{-1} P^T \quad (3.26)$$

Substituindo  $S$  pela Equação 3.19 e lembrando que  $\sigma$  é simétrico, tem-se que:

$$S = J(A^{-1} \cdot \sigma \cdot A^{-T})^T = JA^{-1} \cdot \sigma^T \cdot A^{-T} = JA^{-1} \cdot \sigma \cdot A^{-T} = S^T \quad (3.27)$$

Dessa forma, o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é simétrico. E  $P^T : \delta A$  pode ser escrito pela Equação 3.28.

$$P^T : \delta A = (A \ S) : \delta A = S : (A^T \delta A) = S : \text{sim}(A^T \delta A) = S : \frac{1}{2}(A^T \delta A + A \delta A^T) \quad (3.28)$$

Pelas Equações 3.3 e 3.4, tem-se que:

$$\delta E = \frac{1}{2}(A^T \delta A + A \delta A^T) \quad (3.29)$$

Portanto, a Equação 3.28 pode ser escrita conforme a Equação 3.30, levando a conclusão que o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff ( $S$ ) é conjugado energético da deformação de Green ( $E$ ).

$$P^T : \delta A = S : \delta E \quad (3.30)$$

A tensão de Cauchy pode ser calculada a partir do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff segundo a Equação 3.31.

$$\sigma = \frac{1}{J} A \cdot S \cdot A^T \quad (3.31)$$

Por fim, a estacionariedade da energia mecânica potencial total (Equação 3.25) pode ser escrita em termos do par conjugado energético ( $E, S$ ), de acordo à Equação 3.32.

$$\delta \Pi = \int_{\Omega^0} \rho^0 \vec{y} \delta \vec{y} dV^0 - \int_{\Omega^0} \vec{b}^0 \delta \vec{y} dV^0 - \int_{\Gamma^0} \vec{p}^0 \delta \vec{y} dS^0 + \int_{\Omega^0} S : \delta E dV^0 = 0 \quad (3.32)$$

Essa expressão corresponde às parcelas de variação da energia cinética, da energia potencial das forças externas e da energia de deformação, representadas respectivamente nas Equações 3.33, 3.34 e 3.35.

$$\delta \mathbb{K} = \int_{\Omega^0} \rho^0 \vec{y} \delta \vec{y} dV^0 \quad (3.33)$$

$$\delta \mathbb{P} = - \int_{\Omega^0} \vec{b}^0 \delta \vec{y} dV^0 - \int_{\Gamma^0} \vec{p}^0 \delta \vec{y} dS^0 \quad (3.34)$$

$$\delta \mathbb{U} = \int_{\Omega^0} S : \delta E dV^0 \quad (3.35)$$

Nesse momento, é de interesse escrever as expressões de cada energia ( $\mathbb{U}, \mathbb{P}$  e  $\mathbb{K}$ ) que deram origem a essas variações com o propósito de validá-las. Sendo assim, a energia cinética é escrita pela Equação 3.36 e verifica-se que a variação da energia cinética, desenvolvida usando o tempo como parâmetro ( $\frac{d\mathbb{K}}{dt} dt$ ), retorna a Equação 3.33.

$$\mathbb{K} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^0} \rho^0 \vec{y} \cdot \vec{y} dV^0 \quad (3.36)$$

A energia potencial das forças externas é apresentada pela Equação 3.37. E, da mesma forma, a Equação 3.34 é válida pelo fato de  $\frac{d\mathbb{P}}{dy} dy = \delta\mathbb{P}$ .

$$\mathbb{P} = - \int_{\Omega^0} \vec{b}^0 \vec{y} dV^0 - \int_{\Gamma^0} \vec{p}^0 \vec{y} dS^0 \quad (3.37)$$

A energia de deformação é escrita em função da energia específica de deformação ou energia livre de Helmholtz ( $\Psi$ ) para problemas isotérmicos, segundo a Equação 3.38 (CARVALHO, 2019). Essa energia determina a relação constitutiva do material e para que a equação de equilíbrio global Lagrangiana seja verificada na abordagem energética,  $\delta\Psi$  deve corresponder à Equação 3.39.

$$\mathbb{U} = \int_{\Omega^0} \Psi dV^0 \quad (3.38)$$

$$\delta\Psi = P^T : \delta A = S : \delta E = \frac{1}{2} S : \delta C \quad (3.39)$$

Conseqüentemente, os tensores de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira e segunda espécie  $P$  e  $S$  podem ser escritos pelas Equações 3.40 e 3.41, respectivamente.

$$P = \frac{\partial \Psi}{\partial A^T} \quad (3.40)$$

$$S = \frac{\partial \Psi}{\partial E} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial C} \quad (3.41)$$

Isto posto, torna-se possível definir a energia mecânica total do sistema com base nas leis constitutivas do material, nas condições de contorno e nas deformações. Além disso, no método dos elementos finitos posicional, as deformações são dadas em função apenas das posições nodais, as quais passam a ser as incógnitas do problema. No entanto, essas posições são sempre aproximadas na forma de tentativas. O método de resolução consiste em assumir uma posição tentativa e corrigi-la por meio de um processo iterativo até que a solução satisfaça o equilíbrio, convergindo para a posição exata da estrutura.

### 3.3 Lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff

As leis constitutivas descrevem o comportamento de tensão-deformação do material, representando as propriedades inerentes de um corpo. O modelo constitutivo empregado neste trabalho é o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff (SVK), o qual é hiperelástico, ou seja, a tensão resultante da deformação pode ser derivada de uma função da energia potencial de deformação.

No modelo de Saint-Venant-Kirchhoff, a relação entre força e deslocamento é não-linear, porém elástica. As deformações causadas por solicitações mecânicas impostas são reversíveis quando cessadas as ações externas e sua expressão é definida apenas mediante o estado de deformação atual, desassociada a fatores como histórico e taxa de deformação. Carrazedo (2009) faz uma comparação entre o modelo SVK e um modelo elástico linear,

por meio da análise de uma viga engastada submetida à tração e demonstra que a solução analítica força/deslocamento do modelo SVK é cúbica.

Para a lei ser considerada um modelo constitutivo hiperelástico completo, deve-se respeitar as condições de normalização e crescimento em casos de grandes deformações. A condição de normalização (Equação 3.42) determina que a energia de deformação deve ser nula quando a deformação é nula e a condição de crescimento (Equação 3.43) aponta que quando a energia de deformação tende a infinito, o jacobiano não pode se tornar negativo. Embora a lei constitutiva SVK atenda à condição de normalização, ela não responde à condição de crescimento, abrindo possibilidade de inversão de material. Por esse motivo, ela é aplicada apenas em problemas com deformações moderadas.

$$E = 0 \rightarrow \Psi = 0 \quad (3.42)$$

$$\Psi \rightarrow +\infty \text{ quando } J \rightarrow 0^+ \text{ ou } J \rightarrow +\infty \quad (3.43)$$

A lei constitutiva SVK é definida pela energia livre de Helmholtz ( $\Psi$ ), conforme a Equação 3.44, o que resulta na relação entre tensão e deformação apresentada na (Equação 3.45).

$$\Psi = \frac{1}{2} E : \mathbb{C} : E \quad (3.44)$$

$$S = \mathbb{C} : E \quad (3.45)$$

em que  $\mathbb{C}$  é um tensor constitutivo elástico de quarta ordem e depende dos parâmetros do material. Para sólidos tridimensionais isótropos,  $\mathbb{C}$  pode ser escrito conforme a Equação 3.46.

$$\mathbb{C} = 2\mu\mathbb{I} + \lambda\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (3.46)$$

no qual  $\mathbb{I}$  é o tensor identidade de quarta ordem,  $\lambda$  é a constante de Lamé e  $\mu$  é a segunda constante de Lamé (igual ao módulo de elasticidade transversal  $G$ ), em que esses últimos podem ser calculados a partir do módulo de elasticidade longitudinal  $\mathbb{E}$  e coeficiente de Poisson  $\nu$ , conforme as Equações 3.47 e 3.48.

$$\lambda = \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \quad (3.47)$$

$$G = \frac{\mathbb{E}}{2(1+\nu)} \quad (3.48)$$

Aplicando a Equação 3.46 na relação linear da lei hiperelástica (Equação 3.45), é possível escrever a relação entre a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e a deformação de Green-Lagrange de acordo com a Equação 3.49.

$$S = 2GE + \lambda \text{tr}(E)\mathbf{I} \quad (3.49)$$

Essa relação constitutiva para sólidos bidimensionais sob estado plano de deformações pode ser reproduzida pela Equação 3.50 e sob estado plano de tensões pela Equação 3.51.

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G + \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & 0 \\ \bar{\lambda} & 2G + \bar{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

em que

$$\bar{\lambda} = \frac{\nu \mathbb{E}}{1 - \nu^2} \quad (3.52)$$

## 4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL

Este capítulo abrange o desenvolvimento dos conceitos matemáticos do método dos elementos finitos posicional (MEFP) para análise mecânica de compósitos reforçados com fibras, particularmente o concreto armado. O MEFP aqui apresentado é aplicado aos elementos lineares e bidimensionais, empregados para simular a armadura e a matriz de concreto, respectivamente. Da mesma forma que o capítulo anterior, a bibliografia base corresponde ao livro de Coda (2018).

No capítulo anterior, os conceitos gerais da mecânica dos sólidos foram introduzidos usando a notação dyádica (ou compacta) por simplicidade. Em grande parte neste capítulo, a notação indicial (ou de Einstein) é utilizada porque apresenta os conceitos para o desenvolvimento do código de forma mais clara e completa, enfatizando principalmente os nós e direções associados ao elemento finito.

### 4.1 Apresentação do método

O método dos elementos finitos consiste em discretizar o contínuo em um conjunto de subdomínios, nomeados elementos finitos. Dessa forma, um problema mecânico contínuo, com infinitas incógnitas, é convertido em um problema discreto com finitas incógnitas e possível de resolver (CODA, 2018). As variáveis envolvidas no problema são aproximadas mediante uma combinação linear de funções discretas que dependem do grau de refinamento da malha de elementos adotada para precisão da resposta (CARVALHO, 2019).

Os elementos finitos são conectados entre si por meio dos nós, os quais podem ser internos ou externos. Esses nós são definidos em função das suas coordenadas e dispõem de parâmetros nodais, ou graus de liberdade da função aproximadora, que descrevem a grandeza desejada, como força, deslocamento, velocidade e aceleração (FELIX, 2018).

Nas análises mecânicas em MEF, têm-se como variáveis nodais os deslocamentos. No entanto, a formulação é definida como posicional quando as variáveis nodais são as posições dos nós em relação a um sistema de referência. A formulação desse método, considerando uma descrição Lagrangiana total, consiste em definir a posição atual de um sólido, as tensões e as deformações, cujo equilíbrio é obtido por meio do princípio da estacionariedade da energia mecânica total.

### 4.2 Solução do sistema de equações de equilíbrio

A determinação da configuração de equilíbrio estático final do corpo na análise não-linear geométrica, requer o uso de estratégias numéricas iterativas para solucionar o sistema não-linear de equações. O procedimento iterativo empregado neste trabalho é o



método de Newton-Raphson, no qual a configuração de equilíbrio é alcançada a partir de uma posição tentativa. Para tanto, o processo de solução consiste em subdividir a carga aplicada ou o deslocamento prescrito em passos que, por sua vez, são incrementados gradualmente ao final de cada ciclo. Dessa forma, o valor da posição tentativa ( $Y$ ) para o primeiro passo é a posição inicial ( $X$ ) e nos demais, é dada como a posição de equilíbrio do passo anterior ( $Y^0$ ).

Portanto, para satisfazer a condição de equilíbrio, recorre-se à minimização da energia mecânica total do sistema, ou seja, a variação dessa energia em relação às posições nodais deve ser nula, conforme a Equação 4.1. Vale lembrar que, como se refere ao equilíbrio estático, a parcela da energia cinética foi desconsiderada.

$$\frac{\delta\Pi}{Y_j} = \frac{\partial\Psi(Y_k)}{\partial Y_j} + \frac{\partial\mathbb{P}(Y_k)}{\partial Y_j} = F_j^{int}(Y_k) - F_j^{ext} \cong 0_j = g_j \quad (4.1)$$

em que  $F_j^{int}$  é o vetor de força interna calculado como derivada da energia de deformação de um elemento finito  $j$ ,  $F_j^{ext}$  é o vetor de força externa calculado como derivada da energia potencial das forças externas (consideradas conservativas, ou seja, independente de mudanças de posições) e  $g_j$  é o vetor de desbalanceamento mecânico do método de Newton-Raphson que retorna um valor não nulo para  $g(Y_k^0)$  quando a posição tentativa não é a solução exata para o equilíbrio.

Expandindo-se o vetor de desbalanceamento em série de Taylor na vizinhança da posição tentativa  $Y_k^0$ , encontra-se a Equação 4.2.

$$g_j(Y_k) = g_j(Y_k^0) + \left. \frac{\partial g_j}{\partial Y_i} \right|_{Y_k^0} \Delta Y_i + O_j^2 \cong 0_j \quad (4.2)$$

em que  $Y_k$  é a solução procurada do problema,  $\Delta Y_i$  é o vetor correção da posição e  $O_j^2$  representa os termos de ordem superior oriundo da série de Taylor e pode ser desprezado, ocasionando na Equação 4.3.

$$\Delta Y_i = - \left( \left. \frac{\partial g_j}{\partial Y_i} \right|_{Y_k^0} \right)^{-1} g_j(Y_k^0) = - \left( \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y_i \partial Y_j} \right|_{Y_k^0} \right)^{-1} g_j(Y_k^0) = -(H_{ij})^{-1} g_j(Y_k^0) \quad (4.3)$$

na qual  $H_{ij}$  é a matriz Hessiana ou rigidez tangente do problema para a posição tentativa. Considerando as forças externas como conservativas, a matriz Hessiana é dada pela segunda derivada da energia de deformação em relação às posições nodais, de acordo com a Equação 4.4.

$$H_{ij} = \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y_i \partial Y_j} \right|_{Y_k^0} \quad (4.4)$$

Dessa forma, a solução tentativa pode ser melhorada fazendo-se a correção, conforme a Equação 4.5. O novo valor tentativa é então posicionado na Equação 4.2 onde resulta um

novo desbalanceamento e uma nova correção, repetindo o processo até  $\Delta Y_i$  ou  $g_i$  assumir valores suficientemente pequenos, de acordo com uma tolerância previamente estabelecida (Equação 4.6).

$$Y_i = Y_i^0 + \Delta Y_i \quad (4.5)$$

$$Erro = \frac{|\Delta Y_i|}{|X_i|} \leq Tolerância \quad (4.6)$$

em que  $|\Delta Y_i|$  é o módulo do vetor de correção da posição e  $|X_i|$  o módulo do vetor da posição inicial.

Ao atingir a tolerância, o vetor obtido na Equação 4.5 corresponde ao vetor resultante das posições nodais do equilíbrio estático para o atual passo de carga ou deslocamento prescrito. Com isso, a cada nível de carga, uma solução para as posições nodais é calculada até que todo o carregamento seja aplicado, identificando assim todas as configurações de equilíbrio da estrutura analisada.

### 4.3 Elemento finito bidimensional

Para escrever as equações de equilíbrio, deve-se calcular a energia específica de deformação, a qual é função da deformação de Green-Lagrange (Equação 3.39), que, por sua vez, depende do gradiente da função mudança de configuração (Equação 3.29). Para isso, é necessário fazer um levantamento das configurações inicial e atual de um elemento.

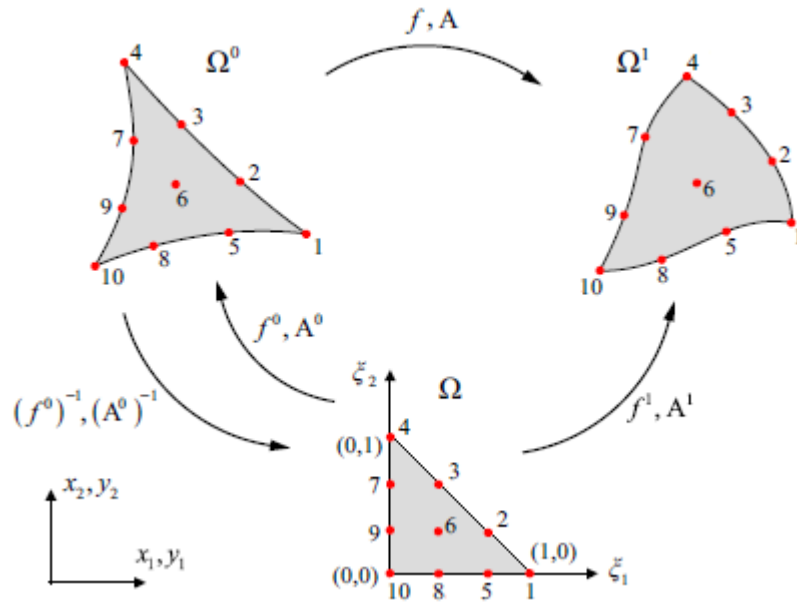
Um elemento finito bidimensional, com dois graus de liberdade associados a cada nó, tem sua configuração inicial  $\Omega_0$  e configuração atual  $\Omega_1$  representadas por posições nodais,  $x_i$  e  $y_i$ , respectivamente. Na mudança de configuração, uma função  $f$ , proveniente da atuação de solicitações mecânicas, é aplicada. Dessa forma, para descrever a função mudança de configuração  $f$  e a configuração atual  $\Omega_1$  do elemento finito, idealiza-se um domínio paramétrico adimensional auxiliar  $\Omega$ , com coordenadas  $\xi_i$ , capaz de mapear as configurações iniciais e atuais por meio de funções aproximadoras, denominadas funções de forma ( $\phi_l(\xi_1, \xi_2)$ ), a partir das quais as posições nodais são escritas pelas coordenadas adimensionais da configuração auxiliar (Equações 4.7 e 4.8). A Figura 22 ilustra o mapeamento das posições nodais de um elemento finito de chapa de aproximação cúbica com 10 nós por elemento.

$$x_i = f_i^0 = \phi_l(\xi_1, \xi_2) X_i^l \quad (4.7)$$

$$y_i = f_i^1 = \phi_l(\xi_1, \xi_2) Y_i^l \quad (4.8)$$

em que  $f_i^0$  e  $f_i^1$  correspondem à função de mapeamento do espaço adimensional para a configuração inicial e atual, respectivamente;  $\xi_1, \xi_2$  são as coordenadas adimensionais;  $\phi_l$  significa as funções de forma aplicadas nas coordenadas  $(\xi_1, \xi_2)$ ; e  $X_i^l$  e  $Y_i^l$  são as

Figura 22 – Mapeamento das posições nodais do elemento finito bidimensional



Fonte: Adaptado de Ramos (2020)

coordenadas nodais da configuração inicial e atual, nesta ordem, onde os termos  $l$  e  $i$  representam respectivamente o nó do elemento finito e as direções a ele associadas.

Como mencionado anteriormente, o gradiente da função mudança de configuração é de grande relevância para o cálculo do Jacobiano (Equação 3.7) e da deformação de Green-Lagrange (Equação 3.39), a qual permite elaborar o modelo constitutivo e calcular o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff (Equação 3.45). Esse gradiente é calculado em função dos gradientes dos mapeamentos das configurações inicial e final (Equações 4.7 e 4.8), conforme as Equações 4.9 e 4.10, onde os tensores de segunda ordem  $A^0$  e  $A^1$  possuem a dimensão do espaço (2x2 para 2D e 3x3 para 3D).

$$A_{ij}^0 = x_{i,j} = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \phi_l}{\partial \xi_j} X_i^l \quad (4.9)$$

$$A_{ij}^1 = x_{i,j} = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \phi_l}{\partial \xi_j} Y_i^l \quad (4.10)$$

cujos gradientes da função mudança de configuração é dado pela Equação 4.11.

$$A_{ij} = A_{ik}^1 D_{kj}^0 \quad \text{ou} \quad A = A^1 (A^0)^{-1} \quad \text{em notação dyadica} \quad (4.11)$$

em que  $D_{kj}^0$  é a inversa da matriz  $A_{kj}^0$ .

As funções de forma, ou polinômios interpoladores de Lagrange, podem ser escritas explicitamente segundo a Equação 4.12 para um elemento finito de aproximação cúbica

com 10 nós, no qual  $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$ . Segundo Coda (2018), essa é a aproximação mais adequada para sólidos 2D.

$$\begin{aligned}
\phi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{2}\xi_1(3\xi_1 - 1)(3\xi_1 - 2) \\
\phi_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{9}{2}\xi_1\xi_2(3\xi_1 - 1) \\
\phi_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{9}{2}\xi_1\xi_2(3\xi_2 - 1) \\
\phi_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{2}\xi_2(3\xi_2 - 1)(3\xi_2 - 2) \\
\phi_5(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{9}{2}\xi_1\xi_3(3\xi_1 - 1) \\
\phi_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= 27\xi_1\xi_2\xi_3 \\
\phi_7(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{9}{2}\xi_2\xi_3(3\xi_2 - 1) \\
\phi_8(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{9}{2}\xi_1\xi_3(3\xi_3 - 1) \\
\phi_9(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{9}{2}\xi_2\xi_3(3\xi_3 - 1) \\
\phi_{10}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{2}\xi_3(3\xi_3 - 1)(3\xi_3 - 2)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

De posse dessas equações, para escrever as equações de equilíbrio e implementar o processo iterativo de Newton-Raphson, resta agora determinar as forças internas e matriz Hessiana.

#### 4.3.1 Forças Internas

De acordo com as Equações 3.35 e 4.1, pode-se escrever o valor nodal equivalente da força interna do nó  $l$  pela Equação 4.13.

$$(f^l)^{int} = \int_{\Omega^0} S : \frac{\partial E}{\partial y^l} dV^0 \tag{4.13}$$

e, com base nas Equações 3.29 e 4.11 pode-se chegar à Equação 4.14.

$$\frac{\partial E}{\partial y^l} = \frac{1}{2} \left( (A^0)^{-T} \cdot \frac{\partial (A^1)^T}{\partial y^l} \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-T} \cdot (A^1)^T \cdot \frac{\partial A^1}{\partial y^l} \cdot (A^0)^{-1} \right) \tag{4.14}$$

na qual, partindo-se da Equação 4.10, calcula-se a derivada parcial de  $A^1$  (tensor de quarta ordem) conforme a Equação 4.15.

$$\frac{\partial A_{jk}^1}{\partial y_i^l} = \frac{\partial \phi_l}{\partial \xi_k} \delta_{ji} \tag{4.15}$$

em que  $\delta$  é a função delta de Kronecker (de valor 1 para  $i = j$  e 0, se  $i \neq j$ ). É válido comentar que a integral da Equação 4.13 é conhecida numericamente, pois as posições

atuais dos nós são conhecidas como tentativa e a integração numérica é calculada no formato de quadratura, elaborada por Hammer, Marlowe e Stroud (1956). A quadratura de Hammer pode ser escrita na forma da Equação 4.16.

$$\int_{V_0} \mathfrak{F}(x) dV_0 = \sum_{i=1}^{nph} \mathfrak{F}(x(\xi_i)) J_0(\xi_i) w_i \quad (4.16)$$

em que  $\mathfrak{F}(x)$  representa uma função qualquer;  $\xi_i$  é o vetor de coordenadas adimensionais no ponto de integração  $i$ ;  $J_0$  é o Jacobiano da transformação do mapeamento da configuração inicial, calculado pela Equação 4.17; e  $w_i$  é o peso associado aos pontos de Hammer. Neste trabalho foram utilizados 12 pontos de integração para elementos triangulares 2D de aproximação cúbica, garantindo precisão suficiente nas integrais desejadas (CODA, 2018).

$$J_0(\xi_1, \xi_2) = Det(A^0) \quad (4.17)$$

#### 4.3.2 Matriz Hessiana

A matriz Hessiana ou rigidez tangente do problema é calculada por meio da Equação 4.4, considerando as forças externas conservativas, resultando, dessa forma, na Equação 4.18.

$$H_{ij} = \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial \Psi}{\partial y_j} = \frac{\partial f_j^{int}}{\partial y_i} \quad (4.18)$$

em que, da Equação 4.13, resulta a Equação 4.19.

$$\frac{\partial f_j^{int}}{\partial y_i} = \int_{\Omega^0} \left( \frac{\partial S}{\partial y_i} : \frac{\partial E}{\partial y_j} + S : \frac{\partial^2 E}{\partial y_j \partial y_i} \right) dV^0 \quad (4.19)$$

e, pela Equação 4.14, pode-se chegar à Equação 4.20.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y_i^j \partial y_k^l} = \frac{1}{2} \left( (A^0)^{-T} \cdot \frac{\partial (A^1)^T}{\partial y_i^j} \cdot \frac{\partial A^1}{\partial y_k^l} \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-T} \cdot \frac{\partial (A^1)^T}{\partial y_k^l} \cdot \frac{\partial A^1}{\partial y_i^j} \cdot (A^0)^{-1} \right) \quad (4.20)$$

em que  $\partial A^1 / \partial y$  é calculada pela Equação 4.15 e  $\partial E / \partial y$  é dada pela Equação 4.14, restando apenas definir o termo  $\partial S / \partial y$  (Equação 4.21).

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial E} : \frac{\partial E}{\partial y} \quad (4.21)$$

na qual  $\partial S / \partial E$  é o operador tangente consistente da lei constitutiva  $\mathbb{C}$ , calculado por meio da Equação 3.46.

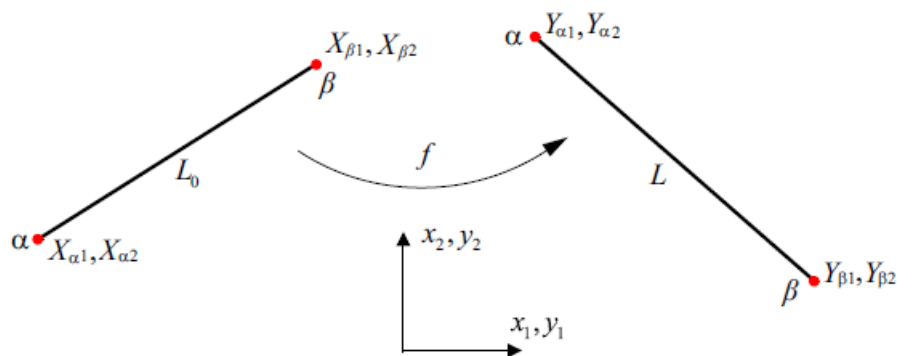
A integral da Equação 4.19 é solucionada para cada elemento finito, no formato de somatório das contribuições calculadas para cada ponto de Hammer, assim como realizado para as forças internas.

#### 4.4 Elemento finito linear

Os elementos finitos bidimensionais foram formulados para simular a matriz de concreto. Os elementos finitos lineares, por sua vez, são utilizados para representar as armaduras, em forma de fibras longas ou curtas inseridas no domínio bidimensional. Esses elementos lineares são formulados como barras simples, se confundindo com o elemento estrutural linear de treliça que contém dois nós por elemento. Com isso, algumas simplificações são admitidas, como a deformação longitudinal constante, a inexistência da rigidez transversal e a dispensa do cálculo das forças internas e da matriz Hessiana por meio da integração numérica. Dessa forma, em formulações estáticas, não se pode aplicar forças transversais sobre o elemento finito de barras simples, apenas nos nós. Além disso, a aderência entre a fibra e matriz ocorre através dos nós da fibra. Por isso, o uso de barras simples, reta e com aproximação linear na simulação da armadura é viável desde que os elementos de fibra sejam bem discretizados, não comprometendo a condição de aderência entre os contínuos.

A Figura 23 apresenta um elemento finito de treliça, com dois graus de liberdade associados a cada nó, sujeito a uma função mudança de configuração, onde os comprimentos iniciais ( $L_0$ ) e atuais ( $L$ ) são obtidos em função das posições nodais do elemento finito, conforme as Equações 4.22 e 4.23.

Figura 23 – Configurações do elemento finito de barra simples



Fonte: Adaptado de Ramos (2020)

$$L_0 = \sqrt{(X_{\beta 1} - X_{\alpha 1})^2 + (X_{\beta 2} - X_{\alpha 2})^2} \quad (4.22)$$

$$L = \sqrt{(Y_{\beta 1} - Y_{\alpha 1})^2 + (Y_{\beta 2} - Y_{\alpha 2})^2} \quad (4.23)$$

em que  $\alpha$  e  $\beta$  correspondem aos nós do elemento finito e os índices numéricos referem-se às direções associadas ao nó.

A deformação de Green-Lagrange, medida de deformação Lagrangiana, para o caso uniaxial é dada pela Equação 4.24.

$$E = \frac{1}{2} \frac{L^2 - L_0^2}{L_0^2} \quad (4.24)$$

Com base na Equação 3.38, a energia de deformação para um elemento finito de treliça é simplesmente a Equação 4.25, devido ao volume ser constante ao longo do elemento.

$$\mathbb{U}(Y) = \int_{V_0} \Psi(E(Y)) dV_0 = \Psi(E(Y)) A_0 L_0 \quad (4.25)$$

Dessa forma, as forças internas do elemento são calculadas por meio da Equação 4.26.

$$f_{ij}^{int} = \frac{\partial \Psi}{\partial Y_{ij}} = A_0 L_0 \frac{\partial \Psi}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial Y_{ij}} \quad (4.26)$$

e, pela Equação 3.41, pode-se chegar a Equação 4.27.

$$f_{ij}^{int} = A_0 L_0 S \frac{\partial E}{\partial Y_{ij}} \quad (4.27)$$

em que  $S$  é a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e  $\partial E / \partial Y_{ij}$  é obtida derivando-se a Equação 4.24 em relação às posições nodais, o que resulta na Equação 4.28.

$$\frac{\partial E}{\partial Y_{ij}} = \frac{(-1)^i}{L_0^2} (Y_{2j} - Y_{1j}) \quad (4.28)$$

Portanto, a expressão para as forças internas para elementos de barras simples é finalmente descrita na Equação 4.29, onde  $i$  é o nó local e  $j$  a direção associada a esse nó.

$$f_{ij}^{int} = A_0 S \frac{(-1)^i}{L_0} (Y_{2j} - Y_{1j}) \quad (4.29)$$

Como se sabe, a matriz Hessiana é definida como a segunda derivada da energia de deformação em relação aos parâmetros nodais (Equação 4.18). Para o elemento finito de barras simples, a Hessiana corresponde à Equação 4.30.

$$H_{ijkl} = A_0 L_0 \frac{\partial}{\partial Y_{kl}} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial Y_{ij}} \right) = A_0 L_0 \left( \frac{\partial^2 \Psi(E)}{\partial E^2} \frac{\partial E}{\partial Y_{ij}} \frac{\partial E}{\partial Y_{kl}} + S \frac{\partial^2 E}{\partial Y_{ij} \partial Y_{kl}} \right) \quad (4.30)$$

em que a segunda derivada da energia específica de deformação em relação à deformação de Green é o módulo de elasticidade tangente do modelo constitutivo adotado (que equivale ao módulo de elasticidade  $\mathbb{E}$  para o modelo SVK) e a segunda derivada da deformação de Green em relação às posições nodais é calculada derivando-se a Equação 4.28, resultando na Equação 4.31.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Y_{ij} \partial Y_{kl}} = \frac{\partial}{\partial Y_{kl}} \frac{\partial E}{\partial Y_{ij}} = \frac{(-1)^i (-1)^k}{L_0^2} \delta_{jl} \quad (4.31)$$

Finalmente, a matriz Hessiana do elemento pode ser escrita segundo a Equação 4.32.

$$H_{ijkl} = (-1)^i (-1)^k \frac{A_0}{L_0} \left( \mathbb{E} \frac{(Y_{2j} - Y_{1j})(Y_{2l} - Y_{1l})}{L_0} + S\delta_{jl} \right) \quad (4.32)$$



## 5 ACOPLAMENTO FIBRA/MATRIZ

Até o momento, os vetores de forças internas e a matriz Hessiana foram estabelecidos de forma independente para os elementos bidimensionais e lineares. No entanto, para que esses elementos trabalhem em conjunto, seja considerando a perfeita aderência ou não, é necessário apresentar a formulação do acoplamento fibra/matriz, na qual a estratégia empregada é a técnica de embutimento.

Neste capítulo serão descritas três diferentes abordagens para se considerar a inserção do reforço na matriz: o método do embutimento proposto por Vanalli (2004) que não acrescenta graus de liberdade no modelo; a inserção de uma restrição de deslocamento relativo com a técnica dos multiplicadores de Lagrange para descrever a perda da aderência; e a inserção de um elemento adimensional com a técnica da penalização que considera o escorregamento do reforço. Cabe destacar que essas duas últimas abordagens são propostas deste trabalho.

### 5.1 Fibras perfeitamente aderidas

Quando o reforço e a matriz são considerados perfeitamente aderidos, a estratégia da técnica do embutimento garante total liberdade na geração das malhas e não acrescenta graus de liberdade ao sistema. Diversos autores utilizaram a técnica de embutimento para descrever o acoplamento, como Vanalli (2004), Vanalli, Paccola e Coda (2008), Sampaio, Coda e Paccola (2011), Sampaio, Paccola e Coda (2013), Sampaio, Paccola e Coda (2015), Paccola e Coda (2016), Posterli (2017), Felix (2018), Tavares (2020) e Ramos (2020).

A aderência entre os elementos finitos de diferentes dimensões dá-se apenas nos nós. Em vista disso, caso sejam adotados elementos de barra lineares, seu número deve ser elevado o suficiente para garantir uma aproximação satisfatória na discretização, já que o elemento bidimensional possui aproximação cúbica.

A técnica de embutimento fundamenta-se em escrever os parâmetros nodais da fibra em função dos parâmetros nodais da matriz onde as fibras estão imersas, por meio dos polinômios interpoladores de Lagrange utilizados na aproximação. As Equações 5.1 e 5.2 descrevem as posições nodais do elemento de fibra na configuração inicial e atual, respectivamente, as quais garantem a aderência entre os domínios.

$$\bar{X}_i^p = \tilde{\phi}_j(\xi_1^p, \xi_2^p) \tilde{X}_i^j \quad (5.1)$$

$$\bar{Y}_i^p = \tilde{\phi}_j(\xi_1^p, \xi_2^p) \tilde{Y}_i^j \quad (5.2)$$

em que o símbolo com uma barra curva sobrescrita ( $\bar{\bullet}$ ) foi utilizado para representar os

parâmetros associados à matriz e o símbolo de uma barra reta sobrescrita ( $\bar{\bullet}$ ) para os parâmetros associados à fibra. Portanto,  $\tilde{\phi}_j$  refere-se às funções de forma do elemento finito bidimensional calculadas para as coordenadas adimensionais  $\xi_1^p$  e  $\xi_2^p$  do nó  $p$  do elemento linear; e  $X$  e  $Y$  correspondem respectivamente às coordenadas nodais de um elemento na configuração inicial e atual.

Para calcular o vetor de forças internas e a matriz Hessiana do conjunto, é importante descrever a formulação da energia de deformação armazenada no sistema, a qual é formada pela soma da energia de deformação da fibra e da matriz, de acordo com a Equação 5.3.

$$\mathbb{U} = \bar{\mathbb{U}}(\bar{Y}(\tilde{Y})) + \tilde{\mathbb{U}}(\tilde{Y}) \quad (5.3)$$

Dessa forma, o vetor de forças internas é obtido derivando-se a energia de deformação em relação às coordenadas nodais dos elementos da matriz, segundo a Equação 5.4, onde  $j$  é o nó do elemento da matriz e  $i$  é a direção desse nó.

$$f_{ij}^{int} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{Y}_{ij}} = \int_{\tilde{V}_0} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{Y}_{ij}} d\tilde{V}_0 + \int_{\tilde{V}_0} \frac{\partial \bar{\Psi}(\bar{Y}_{mn}(\tilde{Y}_{kl}))}{\partial \tilde{Y}_{ij}} d\tilde{V}_0 \quad (5.4)$$

em que a primeira integral refere-se às forças internas do elemento finito da matriz, calculadas segundo a Equação 4.13. A segunda integral da Equação 5.4 é determinada utilizando a regra da cadeia, conforme a Equação 5.5.

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \tilde{Y}_{ij}} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}_{kl}} \frac{\partial \bar{Y}_{kl}}{\partial \tilde{Y}_{ij}} \quad (5.5)$$

em que o termo  $\partial \bar{\Psi} / \partial \bar{Y}_{kl}$  corresponde às forças internas do elemento finito da fibra, calculadas na Equação 4.29; e o termo  $\partial \bar{Y}_{kl} / \partial \tilde{Y}_{ij}$  é a derivada das posições nodais do elemento de fibra em relação às posições nodais do elemento de matriz, calculada conforme a Equação 5.6.

$$\frac{\partial \bar{Y}_{kl}}{\partial \tilde{Y}_{ij}} = \tilde{\phi}_i(\xi_1^k, \xi_2^k) \quad \text{se } j = l \quad (5.6)$$

a qual resulta em valor nulo quando se tem  $j \neq l$ .

O tensor Hessiano global da estrutura é obtido por meio da segunda derivada da energia de deformação em relação às coordenadas nodais, como mencionado nos itens anteriores. A Equação 5.7 apresenta a formulação da Hessiana para um elemento finito do compósito (matriz + fibra).

$$H_{ijkl} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tilde{Y}_{ij} \partial \tilde{Y}_{kl}} = \int_{\tilde{V}_0} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{Y}_{ij} \partial \tilde{Y}_{kl}} d\tilde{V}_0 + \int_{\tilde{V}_0} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\bar{Y}_{mn}(\tilde{Y}_{op}))}{\partial \tilde{Y}_{ij} \partial \tilde{Y}_{kl}} d\tilde{V}_0 \quad (5.7)$$

em que a primeira integral refere-se à Hessiana do elemento finito da matriz, descrita na Equação 4.19, já a segunda integral diz respeito ao espalhamento da matriz de rigidez

promovido pelas fibras, a qual é determinada derivando a Equação 5.5 em relação aos parâmetros nodais da matriz, conforme a Equação 5.8.

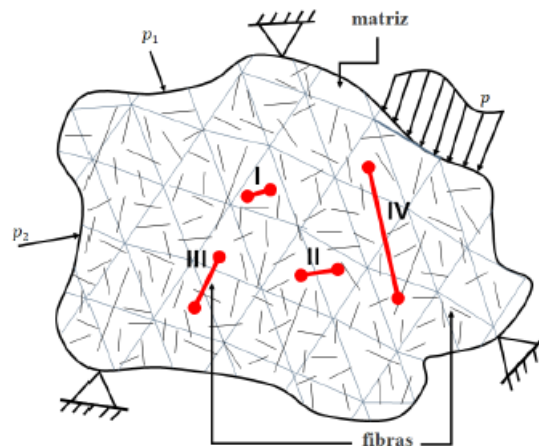
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}_{ij} \partial \bar{Y}_{kl}} = & \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}_{mn} \partial \bar{Y}_{mn}} \frac{\partial \bar{Y}_{mn}}{\partial \bar{Y}_{ij}} \frac{\partial \bar{Y}_{mn}}{\partial \bar{Y}_{kl}} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}_{mn} \partial \bar{Y}_{op}} \frac{\partial \bar{Y}_{mn}}{\partial \bar{Y}_{ij}} \frac{\partial \bar{Y}_{op}}{\partial \bar{Y}_{kl}} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}_{op} \partial \bar{Y}_{mn}} \frac{\partial \bar{Y}_{op}}{\partial \bar{Y}_{ij}} \frac{\partial \bar{Y}_{mn}}{\partial \bar{Y}_{kl}} + \\ & + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}_{op} \partial \bar{Y}_{op}} \frac{\partial \bar{Y}_{op}}{\partial \bar{Y}_{ij}} \frac{\partial \bar{Y}_{op}}{\partial \bar{Y}_{kl}} \end{aligned} \quad (5.8)$$

em que os termos  $\partial^2 \bar{\Psi} / \partial \bar{Y} \partial \bar{Y}$  representam as matrizes Hessianas dos elementos finitos de fibra e os termos  $\partial \bar{Y} / \partial \bar{Y}$  dependem da posição na qual a fibra está inserida na matriz, conforme Equação 5.6.

### 5.1.1 Conectividade do nó do elemento de fibra ao elemento da matriz

Na técnica de embutimento, o nó do elemento da fibra não precisa necessariamente corresponder ao nó do elemento da matriz, o que torna a geração da malha independente das coordenadas dos nós da fibra. Por esse motivo, os elementos do domínio podem se posicionar de diferentes formas, como mostra a Figura 24.

Figura 24 – Arranjo das fibras na matriz



Fonte: Felix (2018)

Nesse sentido, segundo Felix (2018), o arranjo das fibras no domínio bidimensional de aproximação cúbica pode ocorrer de quatro formas distintas:

- I. Ambos os nós da fibra incidem no mesmo elemento da matriz;
- II. Os nós da fibra estão localizados em elementos adjacentes, os quais possuem quatro nós em comum;
- III. Os nós da fibra estão localizados em elementos adjacentes, os quais possuem apenas um nó em comum;

IV. Os nós da fibra estão localizados em elementos distantes, sem possuírem nós em comum.

É importante ressaltar que os elementos da matriz que são atravessados pela fibra, mas não contém um dos nós do elemento de fibra, não recebem contribuição advinda da fibra no vetor de forças internas e na matriz Hessiana do elemento da matriz. Por isso, para se obter uma resposta satisfatória do modelo, os elementos finitos de barras simples de aproximação linear devem ser bem discretizados de modo que evite a ocorrência das formas III e IV da Figura 24.

Tanto a Equação 5.4 quanto a Equação 5.8 podem ser escritas em formas matriciais, onde o vetor de forças internas local da fibra  $[\bar{F}^{int}]_4$  é expandido para o vetor de forças internas global de dimensão  $4\tilde{N}$  (Equação 5.9), em que  $\tilde{N}$  é o número de nós do elemento da matriz. Da mesma forma, a matriz Hessiana local da fibra  $[\bar{H}]_{4 \times 4}$  é expandida para uma matriz global de dimensão  $4\tilde{N} \times 4\tilde{N}$  (Equação 5.10).

$$[\bar{F}^{int}]_{4\tilde{N}}^{exp} = [\bar{\phi}_\beta]_{4\tilde{N} \times 4}^T \cdot [\bar{F}^{int}]_4 \quad (5.9)$$

$$[\bar{H}]_{4\tilde{N} \times 4\tilde{N}}^{exp} = [\bar{\phi}_\beta]_{4\tilde{N} \times 4}^T \cdot [\bar{H}]_{4 \times 4} \cdot [\bar{\phi}_\beta]_{4 \times 4\tilde{N}} \quad (5.10)$$

em que os termos  $[\bar{\phi}_\beta]$  correspondem aos termos  $\partial\bar{Y}/\partial\bar{Y}$ , os quais são as funções de forma dos elementos finitos que compõe a matriz do sistema aplicadas nas posições nodais adimensionais correspondentes aos nós da fibra. Portanto, para um elemento de matriz com aproximação cúbica e um elemento de fibra com dois nós, tem-se a Equação 5.11.

$$[\phi_\beta]_{4 \times 4\tilde{N}} = \begin{bmatrix} \phi_1^1 & 0 & \phi_2^1 & \dots & \phi_{10}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1^1 & 0 & \dots & 0 & \phi_{10}^1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \phi_1^2 & 0 & \phi_2^2 & \dots & \phi_{10}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \phi_1^2 & 0 & \dots & 0 & \phi_{10}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\phi_i^1] & [0] \\ [0] & [\phi_i^2] \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

As Equações 5.9 e 5.10 possibilitam expandir respectivamente o vetor de forças internas e a matriz Hessiana para cada elemento de fibra inserida na matriz. Esses parâmetros expandidos devem ser somados aos parâmetros globais do problema, obedecendo a incidência dos elementos de matriz. Com essas equações, o problema encontra-se definido, restando apenas determinar a configuração de equilíbrio estático do sólido para se obter as posições nodais atuais exatas, por meio da Equação 4.1.

Vale mencionar que, para o caso com aderência perfeita, as posições dos nós da fibra serão sempre dadas pelas coordenadas adimensionais da matriz que correspondem aos nós da fibra. Isso vale tanto para a configuração inicial quanto para a final. Dessa forma, não há aumento de graus de liberdade no sistema devido à inserção de fibras, bem como não há necessidade de coincidência dos nós na discretização das fibras e da matriz.

Definidas as posições dos nós da fibra a partir das posições nodais da matriz, é possível obter as deformações, tensões e forças internas dos elementos de fibra de forma isolada.

## 5.2 Simulação da interface com os Multiplicadores de Lagrange

O método do embutimento apresentado na seção 5.1 considera a perfeita aderência entre os materiais. De modo a considerar a dissociação do conjunto, utiliza-se um elemento de conexão dos nós da fibra na matriz com duas abordagens: a técnica dos multiplicadores de Lagrange e a técnica de penalização.

No método dos Multiplicadores de Lagrange, a fibra possui nós próprios no sistema e sua contribuição não é descrita em função das coordenadas nodais da matriz, como no método do embutimento proposto por Vanalli (2004). No entanto, a vantagem da independência entre a malha da matriz e a malha da fibra continua válida, uma vez que não há necessidade de coincidência entre os nós, como no modelo discreto. Isso porque a incidência dos parâmetros nodais da fibra continua registrada nos parâmetros nodais da matriz por meio das funções de forma, determinando o que será chamado de nós fictícios. Os nós fictícios não acrescentam graus de liberdade ao sistema e têm a função de representar a posição do elemento de fibra em relação ao elemento da matriz. O elemento de ligação usando a técnica dos multiplicadores de Lagrange irá conectar o nó da fibra com o nó fictício, e é a partir deles que as tensões de aderência e os deslocamentos relativos são calculados.

Para conectar os dois domínios, restringindo o deslocamento relativo, pode-se impor que a distância entre os nós da fibra e os nós fictícios seja nula. Dessa forma, a equação de restrição a ser imposta é dada pela Equação 5.12.

$$\bar{Y}_i^p - \hat{Y}_i^p = 0 \quad (5.12)$$

em que  $\bar{Y}$  são as coordenadas nodais da fibra e  $\hat{Y}$  são as coordenadas nodais fictícias da matriz.

A expressão da energia total do sistema com o multiplicador de Lagrange ( $\Pi_L$ ) inclui um novo potencial ( $\mathbb{L}$ ) e é definida pela Equação 5.13.

$$\Pi_L = \mathbb{U} + \mathbb{P} + \mathbb{L} \quad (5.13)$$

Como o novo potencial não deve modificar a energia total do sistema, as equações de restrição desse potencial devem apresentar valores nulos. Dessa forma, a parcela do multiplicador de Lagrange a ser adicionada ao funcional de energia pode ser escrita como:

$$\mathbb{L} = \lambda_i^p (\bar{Y}_i^p - \hat{Y}_i^p) \quad (5.14)$$

na qual  $\lambda_i$  são os multiplicadores de Lagrange em cada direção  $i$  do nó  $p$  do elemento linear.

Apesar de ser uma ideia natural para a consideração cinemática da ligação, a imposição de restrições por meio dos multiplicadores de Lagrange adiciona graus de liberdade no modelo, pois aumenta o número de equações algébricas relativas à nova variável  $\lambda$ .

A contribuição das forças internas locais das equações de restrição é dada pela primeira derivada do potencial  $\mathbb{L}$  em relação aos parâmetros nodais do problema, que resulta nas Equações 5.15, 5.16 e 5.17.

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \bar{Y}_i^p} = \lambda_i^p \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \hat{Y}_i^p} = -\lambda_i^p \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \lambda_i^p} = \bar{Y}_i^p - \hat{Y}_i^p \quad (5.17)$$

A contribuição da matriz Hessiana local das equações de restrição é dada pela segunda derivada do potencial  $\mathbb{L}$ .

$$\frac{\partial^2 \mathbb{L}}{\partial \bar{Y}_i^p \partial \bar{Y}_l^k} = \frac{\partial^2 \mathbb{L}}{\partial \hat{Y}_i^p \partial \hat{Y}_l^k} = \frac{\partial^2 \mathbb{L}}{\partial \bar{Y}_i^p \partial \hat{Y}_l^k} = \frac{\partial^2 \mathbb{L}}{\partial \hat{Y}_i^p \partial \bar{Y}_l^k} = 0 \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbb{L}}{\partial \bar{Y}_i^p \partial \lambda_l^k} = \frac{\partial^2 \mathbb{L}}{\partial \lambda_i^p \partial \bar{Y}_l^k} = 1 \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbb{L}}{\partial \hat{Y}_i^p \partial \lambda_l^k} = \frac{\partial^2 \mathbb{L}}{\partial \lambda_i^p \partial \hat{Y}_l^k} = -1 \quad (5.20)$$

Para considerar a conectividade dos domínios, os vetores de forças internas locais da fibra e do elemento de conexão são expandidos para o vetor de forças internas global. A contribuição da fibra é realizada em seus próprios graus de liberdade. Já a contribuição das forças internas do elemento de Lagrange tem incidência nos nós da fibra e nos nós fictícios, os quais são escritos em função das coordenadas nodais da matriz (Equação 5.21).

$$\hat{Y}_i^p = \tilde{\phi}_j(\xi_1^p, \xi_2^p) \tilde{Y}_i^j \quad (5.21)$$

cujo  $\tilde{Y}$  representa as coordenadas nodais da matriz na configuração deformada do corpo.

Para considerar a correta incidência do vetor de forças internas local no vetor de forças internas global, nos graus de liberdade correspondentes da fibra e da matriz, utiliza-se a matriz de função de forma  $[\phi_{lag}]$ , conforme a Equação 5.22.

$$[F_{lag}^{int}]_{2\tilde{N}+4}^{exp} = [\phi_{lag}]_{(2\tilde{N}+4) \times 6}^T \cdot [F_{lag}^{int}]_6 \quad (5.22)$$

em que  $F_{lag}^{int}$  representa o vetor de forças internas para o elemento de Lagrange e  $\tilde{N}$  é o número de nós do elemento da matriz. Da mesma forma, a matriz Hessiana local relativa

ao elemento do Lagrange  $[H_{lag}]_{6 \times 6}$  é expandida para uma matriz global de dimensão  $(2\tilde{N} + 4) \times (2\tilde{N} + 4)$  (Equação 5.23).

$$[H_{lag}]_{(2\tilde{N}+4) \times (2\tilde{N}+4)}^{exp} = [\phi_{lag}]_{(2\tilde{N}+4) \times 6}^T \cdot [H_{lag}]_{6 \times 6} \cdot [\phi_{lag}]_{6 \times (2\tilde{N}+4)} \quad (5.23)$$

em que os termos  $[\phi_{lag}]$  correspondem aos termos das funções de forma dos elementos finitos que compõe a matriz do sistema aplicadas nas posições nodais adimensionais correspondentes aos nós da fibra (os nós fictícios), e correspondem também às posições nodais da própria fibra e do termo referente à variável  $\lambda$ . Portanto, para um elemento de matriz com aproximação cúbica e um elemento de fibra com dois nós, tem-se a Equação 5.24.

$$[\phi_{lag}]_{6 \times (2\tilde{N}+4)} = \begin{bmatrix} \phi_1^1 & 0 & \phi_2^1 & \dots & \phi_{10}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1^1 & 0 & \dots & 0 & \phi_{10}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\phi_i^1] & [0] & [0] \\ [0] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [1] \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Em suma, as Equações 5.22 e 5.23 possibilitam expandir respectivamente o vetor de forças internas e a matriz Hessiana para cada elemento de conexão inserido em cada nó da fibra. Esses parâmetros expandidos devem ser somados aos parâmetros globais do problema, obedecendo a incidência dos nós fictícios. Com essas equações, o problema da conexão dos elementos de fibra e da matriz por meio da técnica dos multiplicadores de Lagrange encontra-se definido.

Vale ressaltar que o multiplicador de Lagrange possui uma interpretação física de grande interesse no estudo da aderência. O seu valor na situação de equilíbrio da estrutura é a força de contato auto equilibrada necessária para manter os elementos conectados no nó, a partir da qual pode-se calcular facilmente a tensão de aderência. A partir do momento em que a tensão de aderência atinge um limite ( $\tau_{max}$ , de acordo com FIB Model Code (2010)) em algum elemento de ligação, o nó da fibra perde a conexão com o nó fictício e os domínios se comportam de maneira independente, estabelecendo uma relação não-linear entre a tensão de aderência e o deslocamento relativo.

### 5.3 Simulação da interface com os Elementos de Mola

A conexão por meio de molas tem a vantagem de não introduzir novas variáveis ao sistema de equações devido ao próprio método, como ocorre com os multiplicadores de Lagrange. Dessa forma, comparada à técnica do embutimento proposta por Vanalli (2004), a consideração da perda da aderência adiciona apenas os graus de liberdade relativos às próprias fibras. A incidência dos parâmetros nodais da fibra continua sendo

registrada nos parâmetros nodais da matriz (empregando nós fictícios) para a verificação dos deslocamentos relativos, sem a necessidade de coincidir os nós da fibra e da matriz.

Outro aspecto importante na análise da aderência das fibras usando a técnica da penalização (elementos de mola) é a possibilidade de se adequar a rigidez da ligação em função dos parâmetros dos materiais, em contrapartida à ligação rígida que os multiplicadores de Lagrange introduz. Com isso, a inserção da mola permite um escorregamento progressivo da fibra à medida em que se aumenta a tensão na interface.

Para conectar os dois domínios, a equação de restrição imposta pelo elemento adimensional de ligação pode ser dada pelo seguinte potencial:

$$\mathbb{M} = \frac{k}{2} (\bar{Y}_i^p - \hat{Y}_i^p)^2 \quad (5.25)$$

em que  $k$  representa a rigidez da ligação.

A expressão da energia total do sistema ( $\Pi_M$ ) com o novo potencial  $\mathbb{M}$  é definido pela Equação 5.26.

$$\Pi_M = \mathbb{U} + \mathbb{P} + \mathbb{M} \quad (5.26)$$

A contribuição das forças internas locais das equações de restrição é dada pela primeira derivada do potencial  $\mathbb{M}$  em relação aos parâmetros nodais do problema, que resulta nas Equações 5.27 e 5.28. Esse vetor de forças internas representam as forças de contato na ligação da fibra na matriz. Dessa forma, a força de aderência também é uma resposta natural do método.

$$\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial \bar{Y}_i^p} = k \cdot (\bar{Y}_i^p - \hat{Y}_i^p) \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial \hat{Y}_i^p} = -k \cdot (\bar{Y}_i^p - \hat{Y}_i^p) \quad (5.28)$$

A contribuição da matriz Hessiana local das equações de restrição é dada pela segunda derivada do potencial  $\mathbb{M}$  em relação aos parâmetros nodais da fibra e da mola, de acordo com as Equações 5.29 e 5.30.

$$\frac{\partial^2 \mathbb{M}}{\partial \bar{Y}_i^p \partial \bar{Y}_l^k} = \frac{\partial^2 \mathbb{M}}{\partial \hat{Y}_i^p \partial \hat{Y}_l^k} = k \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbb{M}}{\partial \bar{Y}_i^p \partial \hat{Y}_l^k} = \frac{\partial^2 \mathbb{M}}{\partial \hat{Y}_i^p \partial \bar{Y}_l^k} = -k \quad (5.30)$$

Com os vetores de forças internas locais e as matrizes Hessianas locais do elemento bidimensional, do elemento linear de treliça e do elemento adimensional de ligação já definidos, resta agora calcular o vetor de forças internas global e a matriz Hessiana global.

Os elementos do reforço e da matriz têm as suas contribuições aplicadas diretamente nos seus próprios graus de liberdades. Os elementos adimensionais, por sua vez, devem



obedecer a incidência nos nós fictícios e nos nós da fibra. No entanto, como os nós fictícios são escritos em função das coordenadas nodais da matriz (Equação 5.21), a expansão do vetor de forças internas local do elemento de mola deve incidir nos graus de liberdade correspondentes da fibra e da matriz, utilizando a matriz de função de forma  $[\phi_{mola}]$  conforme a Equação 5.31.

$$[F_{mola}^{int}]_{2\tilde{N}+2}^{exp} = [\phi_{mola}]_{(2\tilde{N}+2) \times 4}^T \cdot [F_{mola}^{int}]_4 \quad (5.31)$$

em que  $F_{mola}^{int}$  representa o vetor de forças internas para o elemento de mola e  $\tilde{N}$  é o número de nós do elemento da matriz. Da mesma forma, a matriz Hessiana local relativa ao elemento de mola  $[H_{mola}]_{4 \times 4}$  é expandida para uma matriz global de dimensão  $(2\tilde{N} + 2) \times (2\tilde{N} + 2)$  (Equação 5.32).

$$[H_{mola}]_{(2\tilde{N}+2) \times (2\tilde{N}+2)}^{exp} = [\phi_{mola}]_{(2\tilde{N}+2) \times 4}^T \cdot [H_{mola}]_{4 \times 4} \cdot [\phi_{mola}]_{4 \times (2\tilde{N}+2)} \quad (5.32)$$

em que os termos  $[\phi_{mola}]$  correspondem aos termos das funções de forma dos elementos finitos que compõe a matriz do sistema aplicadas nas posições nodais adimensionais correspondentes aos nós da fibra (os nós fictícios) e correspondem também às posições nodais da própria fibra. Portanto, para um elemento de matriz com aproximação cúbica e um elemento de fibra com dois nós, tem-se a Equação 5.33.

$$[\phi_{mola}]_{4 \times (2\tilde{N}+2)} = \begin{bmatrix} \phi_1^1 & 0 & \phi_2^1 & \dots & \phi_{10}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1^1 & 0 & \dots & 0 & \phi_{10}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\phi_i^1] & [0] \\ [0] & [1] \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Em resumo, as Equações 5.31 e 5.32 possibilitam expandir respectivamente o vetor de forças internas e a matriz Hessiana para cada elemento de mola inserido em cada nó da fibra. Esses parâmetros expandidos devem ser somados aos parâmetros globais do problema, obedecendo a incidência dos nós fictícios. Com essas equações, o problema da conexão dos elementos de fibra e da matriz por meio da técnica de penalização encontra-se definido.

Na técnica de penalização, a força de contato é equivalente à própria força interna do elemento de mola, quando atingida a situação de equilíbrio. Ao longo do processo incremental, no momento em que a força de contato atinge um valor limite para a aderência, faz-se uma imposição de que a força interna do elemento é igual à essa força limite. Dessa forma, tem-se uma relação tensão de aderência vs deslocamento relativo não-linear que permite o deslizamento entre as fases. A força limite para a aderência mencionada anteriormente pode ser calculada a partir do produto da tensão de cisalhamento máxima ( $\tau_{máx}$ ) e da área de superfície ao longo da fibra.

#### 5.4 Tensão normal na fibra e tensão de cisalhamento na interface

Nas duas abordagens da simulação da interface considerando a perda da aderência, as forças de contato são obtidas nos nós da fibra. Essas forças de contato foram calculadas para as direções associadas aos elementos finitos na definição de suas coordenadas. No entanto, na análise da aderência, é importante conhecer a força de contato na direção da fibra, para o cálculo do cisalhamento na interface, e perpendicular à fibra, para o cálculo da tensão normal na fibra.

Para a determinação dessas tensões, as forças de contato ( $F_c$ ) resultantes dos modelos que simulam a interface são rotacionadas segundo as direções tangencial e normal aos elementos da fibra, conforme a Equação 5.34.

$$\begin{Bmatrix} Q \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_{c1} \\ F_{c2} \end{Bmatrix} \quad (5.34)$$

sendo  $\alpha$  o ângulo de orientação do elemento de fibra, e  $Q$  e  $P$  as componentes das forças de contato na direção tangencial e normal, respectivamente. Nos nós comuns a dois elementos, o valor resultante das forças de contato no nó é dado pelo valor médio calculado em cada elemento.

As forças tangencial e normal são então divididas pela área de influência ( $A_{inf}$ ) em que atuam, resultando em tensões médias de cisalhamento ( $\tau_{med}$ ) e normal ( $\sigma_{med}$ ) ao longo da interface, conforme as Equações 5.35 e 5.36, respectivamente.

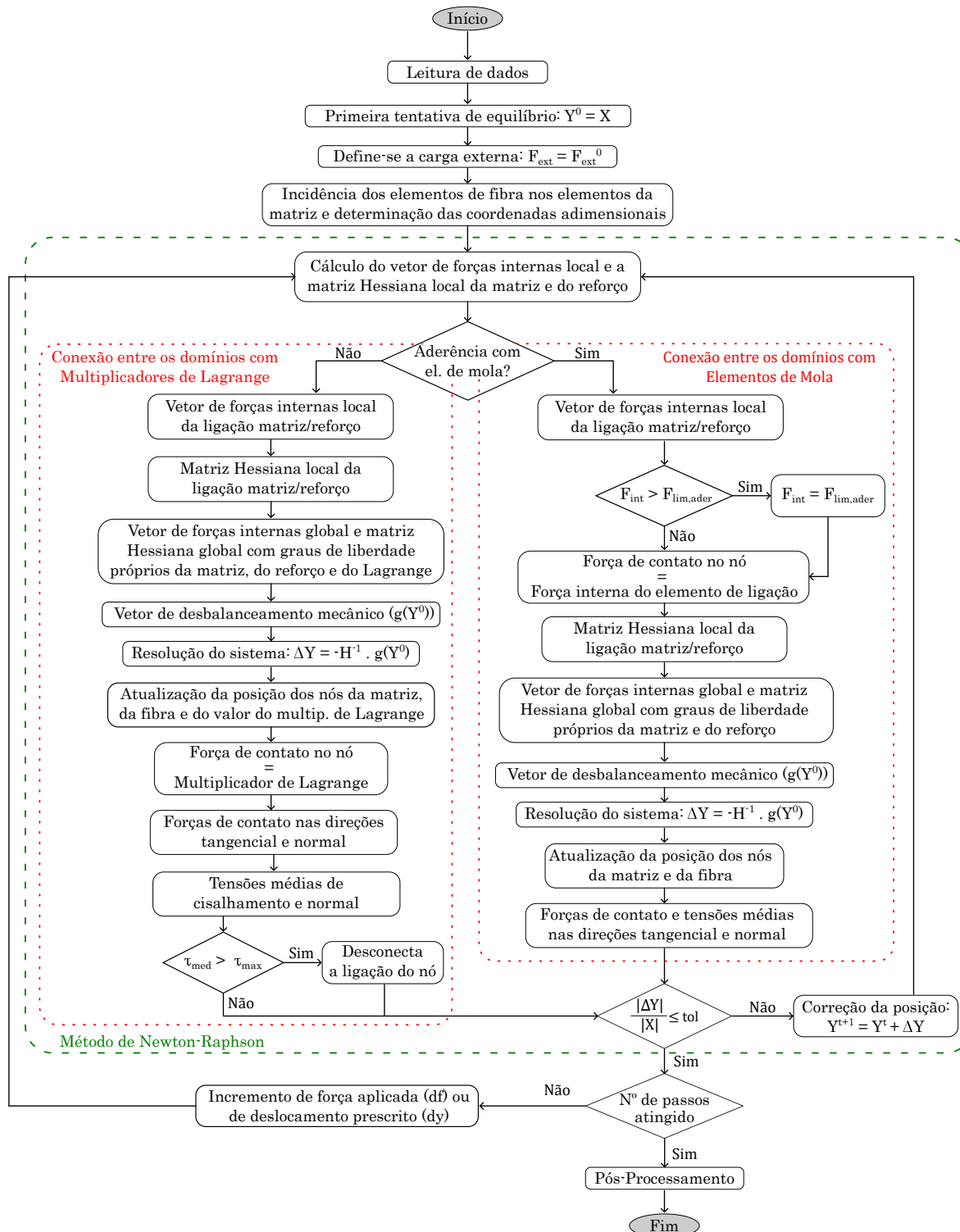
$$\tau_{med} = \frac{Q}{A_{inf}} = \frac{Q}{p \cdot c_{inf}} \quad (5.35)$$

$$\sigma_{med} = \frac{P}{A_{inf}} = \frac{P}{p \cdot c_{inf}} \quad (5.36)$$

em que  $p$  é o perímetro da fibra e  $c_{inf}$  o comprimento de influência do nó.

O fluxograma da Figura 25 apresenta uma visão geral dos principais passos na solução do problema não-linear para a aderência utilizando as técnicas dos multiplicadores de Lagrange e da penalização.

Figura 25 – Fluxograma da implementação numérica para a simulação da perda da aderência



Fonte: Própria autora

## 6 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO E O AÇO

Para a análise computacional do concreto armado, deve-se utilizar um modelo matemático capaz de descrever adequadamente o comportamento de tensão-deformação do material. Para tanto, as propriedades dos materiais constituintes precisam ser conhecidas. O comportamento do aço, por sua vez, possui propriedades físicas relativamente simples, no entanto, a complexidade envolvida no estudo do concreto e do funcionamento do conjunto aço concreto é um dos grandes desafios para uma completa descrição dos problemas de aderência, em virtude de diversos fatores como: a não-linearidade física do concreto já para baixos níveis de tensão; a diferença de resistências à tração e compressão do concreto; a fluência e retração do concreto; à fissuração do concreto e a transmissão de esforços pelas fissuras; e a perda de aderência entre o aço e concreto (BONO, 2008).

### 6.1 Modelo Constitutivo para representação do comportamento do concreto

Como mencionado, o concreto é o grande responsável pela complexidade de se formular um modelo matemático para o conjunto. Diversos estudos foram desenvolvidos para modelar o comportamento desse material, como os trabalhos de Cedolin, Poli e Crutzen (1977), Chen e Han (2007), Bazant e Kim (1979) e Mazars (1984). Esses estudos têm sido baseados na teoria da plasticidade, na elasticidade ou na mecânica da fratura e do dano. A definição do modelo a ser utilizado depende do tipo de problema em análise.

Os modelos com base na teoria do dano assumem que a perda progressiva de rigidez e resistência do material ocorrem graças ao processo de microfissuração. Essa teoria descreve a evolução local dos fenômenos que se desenvolvem a partir de um estado inicial (material íntegro) até um estado final, caracterizado pela formação de uma fissura macroscópica. De fato, a microfissuração inicial e sua propagação durante o processo de carregamento é um fenômeno dominante no comportamento não-linear do concreto e por esse motivo, a mecânica do dano é capaz de formular modelos realísticos para esse material (PITUBA, 1998).

Dentre os modelos baseados na teoria do dano, o proposto por Mazars (1984) é um dos mais difundidos pela literatura científica e apesar de ser um modelo isotrópico, representa satisfatoriamente os ensaios experimentais do concreto para o estado plano. Ainda que o modelo considere o surgimento de microfissuras, a hipótese de continuidade do material é assumida e a evolução da fissuração do concreto ocorre mediante variáveis de dano que são aplicadas diretamente sobre os tensores de tensão. Cabe ressaltar que, segundo Proença (1992), o dano não é uma grandeza física mensurável diretamente, mas no âmbito de uma modelagem matemática é possível quantificá-lo com a redução progressiva de uma propriedade mecânica global, como, por exemplo, o módulo de elasticidade.

O modelo de dano proposto por Mazars (1984) apesar de ser simples, representa satisfatoriamente ensaios experimentais do concreto, principalmente em casos de carregamentos monotônicos. Basicamente esse modelo reproduz o estado de danificação num ponto, a partir de uma variável de dano escalar ( $D$ ), penalizando as propriedades de rigidez do concreto igualmente em todas as direções quando um certo valor de referência é superado. Nesse modelo, a variável de dano escalar é obtida por uma combinação linear entre uma parcela de tração e outra de compressão, de forma que  $D = 1$  representa um estado de degradação total no ponto, enquanto que  $D = 0$  significa que o material está totalmente íntegro (SANTOS, 2015; NOGUEIRA; HARAKI, 2016).

São adotadas, como hipóteses do modelo, as seguintes considerações: o dano é provocado por alongamentos, ou seja, é causado pela presença de deformações ao longo de pelo menos uma das direções principais e que uma das componentes do tensor de deformações seja de tração; o comportamento do concreto é elástico ao longo do processo evolutivo de dano e o carregamento é monotônico crescente, ou seja, não se considera deformação residual permanente evidenciada numa situação de descarregamento; e o dano é isotrópico. Apesar dessas limitações, o modelo é indicado para descrever estruturas de concreto com domínios planos. Segundo Guello (2002), os modelos anisotrópicos apresentam uma gama de aplicação maior, mas a identificação dos parâmetros do modelo é muito mais complexa. Já os modelos isotrópicos têm um número reduzido de parâmetros a identificar e são conceitualmente simples.

O modelo determina uma variável de deformação permanente que representa o estado de alongamento do material em um determinado ponto, caracterizado pela deformação equivalente  $E_{eq}$ , definida pela Equação 6.1. Essa deformação equivalente é classificada como uma medida de deformação Euleriana, par do tensor de tensões de Cauchy, visto que representa a configuração de referência final. No entanto, para pequenas deformações, a configuração final do corpo se assemelha à configuração inicial e, dessa forma, as deformações euleriana e de Green se confundem.

$$E_{eq} = \sqrt{(E_{1+})^2 + (E_{2+})^2 + (E_{3+})^2} \quad (6.1)$$

em que as variáveis  $E_{i+}$  são as componentes positivas do vetor de deformações principais, nulas quando  $E_i < 0$ . Para calcular as deformações principais, o tensor de deformação de Green-Lagrange é utilizado.

Por convenção, quando o valor da deformação equivalente  $E_{eq}$  atinge um valor igual à deformação  $E_{d0}$ , correspondente ao esforço máximo de tensão em um ensaio de tração monoaxial, dá-se o início do processo de danificação. Essa grandeza pode ser calculada por meio da deformação específica ou deformação linear de engenharia  $\varepsilon_{d0}$  (fornecida em ensaios experimentais). Ressalta-se que a deformação linear de engenharia pode ser confundida com a deformação de Green na presença de pequenas deformações. A Equação 6.2 fornece

uma formulação matematicamente consistente para a conversão dessas distintas medidas de deformação.

$$E_{d0} = 0,5\varepsilon_{d0}^2 + \varepsilon_{d0} \quad (6.2)$$

Dessa forma, o critério da evolução da danificação é expresso pelo critério de resistência apresentado na Equação 6.3 para um estado geral de dano D.

$$f(E_{eq}, D) = E_{eq} - E_{lim}(D) > 0 \quad (6.3)$$

em que  $E_{lim}$  representa uma variável que armazena a máxima deformação atingida ao longo do histórico de deformações, com  $E_{lim}(0) = E_{d0}$ . Portanto, o início do processo de danificação do material é considerado quando a deformação equivalente é superior a uma deformação de referência.

De outro modo, a lei de evolução da variável D (Equações 6.4 e 6.5) é dada em função de taxas de variação no tempo, representadas por passos finitos de carga ou deslocamento.

$$dD = 0 \quad se \quad f \leq 0 \quad e \quad df < 0 \quad (6.4)$$

$$dD = F(E_{eq}, dE_{eq+}) \quad se \quad f = 0 \quad e \quad df = 0 \quad (6.5)$$

na qual  $f(E_{eq}, dE_{eq+})$  é uma função contínua e positiva da deformação equivalente  $E_{eq}$ , onde  $dD \geq 0 \quad \forall \quad E_{eq}$ . Com base nisso, têm-se as relações de complementaridade e de consistência expressas pelas Equações 6.6 e 6.7, respectivamente.

$$dD \cdot f = 0 \quad (6.6)$$

$$dD \cdot df = 0 \quad (6.7)$$

Nos casos particulares de tração e compressão uniaxial, a Equação 6.5 pode ser escrita, respectivamente, pelas Equações 6.8 e 6.9.

$$dD_T = F_T(E_{eq}, dE_{eq+}) \quad (6.8)$$

$$dD_C = F_C(E_{eq}, dE_{eq+}) \quad (6.9)$$

Para solicitações monotônicas e crescentes, as Equações 6.8 e 6.9 são integráveis, sendo possível escrevê-las explicitamente como:

$$dD_T = 1 - \frac{E_{d0}(1 - A_T)}{E_{eq}} - \frac{A_T}{e^{B_T(E_{eq} - E_{d0})}} \quad (6.10)$$

$$dD_T = 1 - \frac{E_{d0}(1 - A_C)}{E_{eq}} - \frac{A_C}{e^{B_C(E_{eq} - E_{d0})}} \quad (6.11)$$

em que  $A_T$ ,  $B_T$ ,  $A_C$  e  $B_C$  são parâmetros do material identificados em resultados de ensaios uniaxiais de tração e compressão, cujos intervalos sugeridos por Mazars (1984) são:  $0,7 \leq A_T \leq 1,0$ ,  $10^4 \leq B_T \leq 10^5$ ,  $1,0 \leq A_C \leq 1,5$  e  $10^3 \leq B_C \leq 2 \cdot 10^3$ .

É possível descrever a variável de dano para carregamentos multiaxiais combinando linearmente as variáveis  $D_T$  e  $D_C$  com os coeficientes  $\alpha_T$  e  $\alpha_C$ , conforme a Equação 6.12. Esses coeficientes são definidos por meio das Equações 6.13 e 6.14, propostas por Perego (1989-1990 apud RAMOS, 2020).

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \quad (6.12)$$

$$\alpha_T = \frac{\sum_i (E_{Ti})_+}{E_v^+} \quad (6.13)$$

$$\alpha_C = \frac{\sum_i (E_{Ci})_-}{E_v^+} \quad (6.14)$$

em que  $E_{Ti}$  e  $E_{Ci}$  fazem menção ao vetor de deformações principais das parcelas de tração e compressão do vetor de tensões principais, nessa ordem, e podem ser calculados segundo as Equações 6.15 e 6.16; e  $E_v^+$  corresponde à deformação volumétrica de alongamento dada pela Equação 6.17.

$$(E_{Ti})_+ = \frac{1 + \nu}{\mathbb{E}} (S_{Ti})_+ - \frac{\nu}{\mathbb{E}} \sum_{j=1}^3 (S_{Tj})_+ \quad (6.15)$$

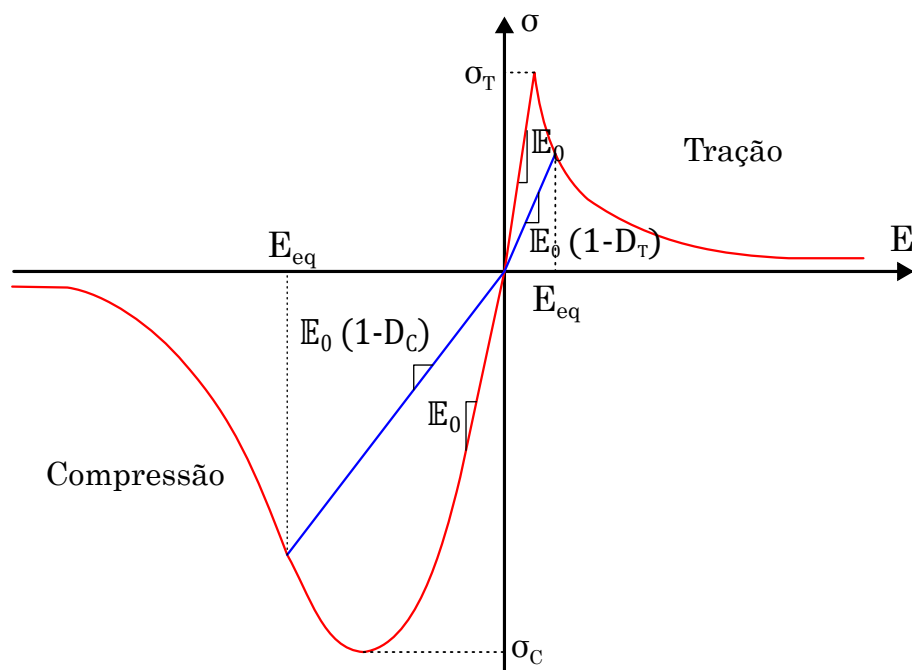
$$(E_{Ci})_- = \frac{1 + \nu}{\mathbb{E}} (S_{Ci})_- - \frac{\nu}{\mathbb{E}} \sum_{j=1}^3 (S_{Cj})_- \quad (6.16)$$

nas quais  $(S_{Ti})_+$  e  $(S_{Ci})_-$  retornam o valor nulo quando  $(S_{Ti}) < 0$  e  $(S_{Ci}) > 0$ , respectivamente.

$$E_v^+ = \sum_i (E_{Ti})_+ + \sum_i (E_{Ci})_- \quad (6.17)$$

A Figura 26 apresenta a resposta dada pelo modelo para as situações de tração e compressão uniaxial.

Figura 26 – Modelo de Dano para tração e compressão uniaxial



Fonte: própria autora

## 6.2 Modelo Constitutivo para representação do comportamento do aço

O comportamento de elementos estruturais de concreto armado é influenciado também pelo escoamento da armadura, mas o comportamento do aço possui propriedades físicas relativamente simples. A versão unidimensional do modelo matemático da teoria da plasticidade possui formulação mais simples, mas apresenta boa capacidade para simular os efeitos da não-linearidade física do material.

Foi adotado o modelo elastoplástico com encruamento linear isotrópico. Nesse modelo, as relações tensão-deformação são caracterizadas por um trecho inicial elástico seguido de um patamar de escoamento que pode ser inclinado na presença do encruamento, cuja função é registrar a história da deformação plástica no ciclo. Nessa etapa ocorre uma intensa redução da rigidez do material. O módulo de elasticidade longitudinal, a tensão de escoamento e o módulo plástico de encruamento isotrópico são os parâmetros necessários para a caracterização do material.

Considerando um regime de deformações plásticas pequenas, a deformação total ( $E$ ) é uma composição da soma entre duas parcelas de deformação: elástica e plástica, como apresenta a Equação 6.18.

$$E = E^e + E^p \quad e \quad dE = dE^e + dE^p \quad (6.18)$$

em que  $E$  é a deformação de Green-Lagrange,  $E^e$  é a parcela elástica e  $E^p$  a parcela



plástica.

Aplicando-se a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff, tem-se a Equação 6.19. Ressalta-se que a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie ( $S$ ) é função apenas da parcela elástica da deformação e do módulo de elasticidade do material ( $\mathbb{E}$ ).

$$S = \mathbb{E} E^e = \mathbb{E}(E - E^p) \quad (6.19)$$

O modelo elastoplástico se desenvolve com a evolução incremental do modelo constitutivo não-linear em termos de taxas temporais. Considerando que a tensão e as deformações são contínuas no tempo (representado pelos passos finitos de carga ou deslocamento), as igualdades das Equações 6.18 e 6.19 podem ser escritas segundo a Equação 6.20.

$$dS = \mathbb{E} dE^e = \mathbb{E}(dE - dE^p) \quad (6.20)$$

Na elastoplasticidade perfeita, após o escoamento do material, todo acréscimo de deformação resulta num acréscimo direto da parcela plástica, portanto  $dE^e = 0$  e, conseqüentemente,  $dS = 0$ . Por isso, o critério de plastificação limita a tensão atuante pela tensão de escoamento do material ( $S_y$ ), de acordo com a Equação 6.21.

$$f(S) = |S| - S_y \leq 0 \quad (6.21)$$

na qual  $|S|$  é o módulo da tensão aplicada e  $S_y$  é a tensão de plastificação do material que pode ser determinada a partir de ensaios uniaxiais de tração ou compressão. A tensão de plastificação obtida a partir de resultados experimentais é uma medida de tensão real (tensão de Cauchy). Dessa forma, é necessário converter a tensão de Cauchy ( $\sigma_y$ ) para a tensão de Piola-Kirchhoff, usando a Equação 6.22.

$$S_y = \frac{\sigma_y \mathbb{E}}{\sigma_y + \mathbb{E}} \quad (6.22)$$

Para problemas elastoplásticos que envolvem encruamento isótropo linear positivo, o critério de plastificação passa a ser definido pela Equação 6.23, governado pela evolução da deformação plástica acumulada.

$$f(S, \alpha) = |S| - (S_y + \kappa\alpha) \leq 0 \quad (6.23)$$

em que o parâmetro  $\kappa$  é uma propriedade do material, chamado de módulo plástico de encruamento isótropo e  $\alpha$  corresponde a uma medida de deformação plástica acumulada que registra a história de carregamento de um ciclo, calculada conforme a Equação 6.24.

$$\alpha = \int_0^t |dE^p| dt \quad (6.24)$$

A evolução da superfície de plastificação para um passo finito ocorre quando  $|S| = (S_y + \kappa\alpha)$  e resulta em  $dE^p \neq 0$ . Assim, é possível escrever a taxa de deformação

plástica segundo uma lei de plastificação, de acordo com a Equação 6.25, dado que  $sign(S)$  corresponde ao sinal da tensão  $S$  e  $d\lambda$  é o módulo da taxa de deformação plástica.

$$dE^p = d\lambda \, sign(S) \quad (6.25)$$

Considerando a validade da Equação 6.25, tem-se que  $d\lambda = |dE^p|$  e derivando a Equação 6.24 em relação ao tempo, obtém-se:  $d\alpha = |dE^p|$ . Portanto, tem-se também que  $d\lambda = d\alpha$ .

O critério de plastificação adotado considera as condições de complementariedade e consistência (condições de Kuhn-Tucker), apresentadas na Equação 6.26.

$$\begin{aligned} f \, d\lambda &= 0, & \text{condição de complementariedade} \\ d\lambda \, df &= 0, & \text{condição de consistência} \end{aligned} \quad (6.26)$$

A fim de se determinar o módulo da taxa de deformação plástica, aplica-se a condição de consistência, impondo  $df = 0$ , que resulta em  $d\lambda > 0$ . Dessa forma, admitindo-se que a função do critério de plastificação é linear,  $df$  pode ser calculado de acordo com a Equação 6.27.

$$df = \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = 0 \quad (6.27)$$

Aplicando as respectivas derivadas, têm-se as Equações 6.28 e 6.29.

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{\partial [|S| - (S_y + \kappa\alpha)]}{\partial S} = sign(S) \quad (6.28)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial [|S| - (S_y + \kappa\alpha)]}{\partial \alpha} = -\kappa \quad (6.29)$$

Reunindo as Equações 6.20, 6.28 e 6.29 na Equação 6.27, obtém-se a Equação 6.30.

$$df = sign(S) \, \mathbb{E}(dE - dE^p) - \kappa \, d\alpha = 0 \quad (6.30)$$

Substituindo a Equação 6.25 e a relação  $d\lambda = d\alpha$  na Equação 6.30, resulta na Equação 6.31. Essa equação pode ser apresentada de maneira simplificada na Equação 6.32, já que  $sign^2(S)$  resulta sempre em um valor positivo e pode ser retirado da equação.

$$df = sign(S) \, \mathbb{E}dE - sign^2(S) \, \mathbb{E}d\lambda - \kappa \, d\lambda = 0 \quad (6.31)$$

$$df = sign(S) \, \mathbb{E} \, dE - d\lambda(\mathbb{E} + \kappa) = 0 \quad (6.32)$$

Finalmente, tem-se então que o módulo da taxa de deformação plástica pode ser dado pela Equação 6.33.

$$d\lambda = \frac{sign(S) \, \mathbb{E} \, dE}{(\mathbb{E} + \kappa)} \quad (6.33)$$

Multiplicando-se os termos por  $sign(S)$  e considerando a Equação 6.25, é possível encontrar uma expressão para a taxa de deformação plástica (Equação 6.35).

$$d\lambda \, sign(S) = \frac{sign^2(S) \, \mathbb{E} \, dE}{(\mathbb{E} + \kappa)} \quad (6.34)$$

$$dE^p = \frac{\mathbb{E} \, dE}{(\mathbb{E} + \kappa)} \quad (6.35)$$

Definida a taxa de deformação plástica, a Equação 6.20 pode ser finalmente escrita conforme a Equação 6.36.

$$dS = \mathbb{E} \left[ dE - \frac{\mathbb{E} \, dE}{(\mathbb{E} + \kappa)} \right] = \frac{\mathbb{E} \, \kappa}{(\mathbb{E} + \kappa)} dE \quad (6.36)$$

em que o termo  $(\mathbb{E} \, \kappa)/(\mathbb{E} + \kappa)$  representa o módulo elastoplástico tangente, referente ao trecho do encruamento, e relaciona matematicamente a variação da tensão com a variação da deformação total do sistema.

Maiores informações a respeito do modelo elastoplástico apresentado podem ser vistas no trabalho de Fernandes (2016).

É válido notar que o modelo numérico proposto que leva em conta a perda da aderência considera dois mecanismos de falha para a armadura: o escorregamento e a plastificação. Dessa forma, a depender do primeiro valor atingido entre as tensões admissíveis de aderência e a tensão normal da fibra, pode-se determinar qual o mecanismo governante resultará na falha da fibra e o valor do esforço associado. As Equações 6.37 e 6.38 representam os critérios de falha na fibra para o escorregamento e a plastificação, respectivamente.

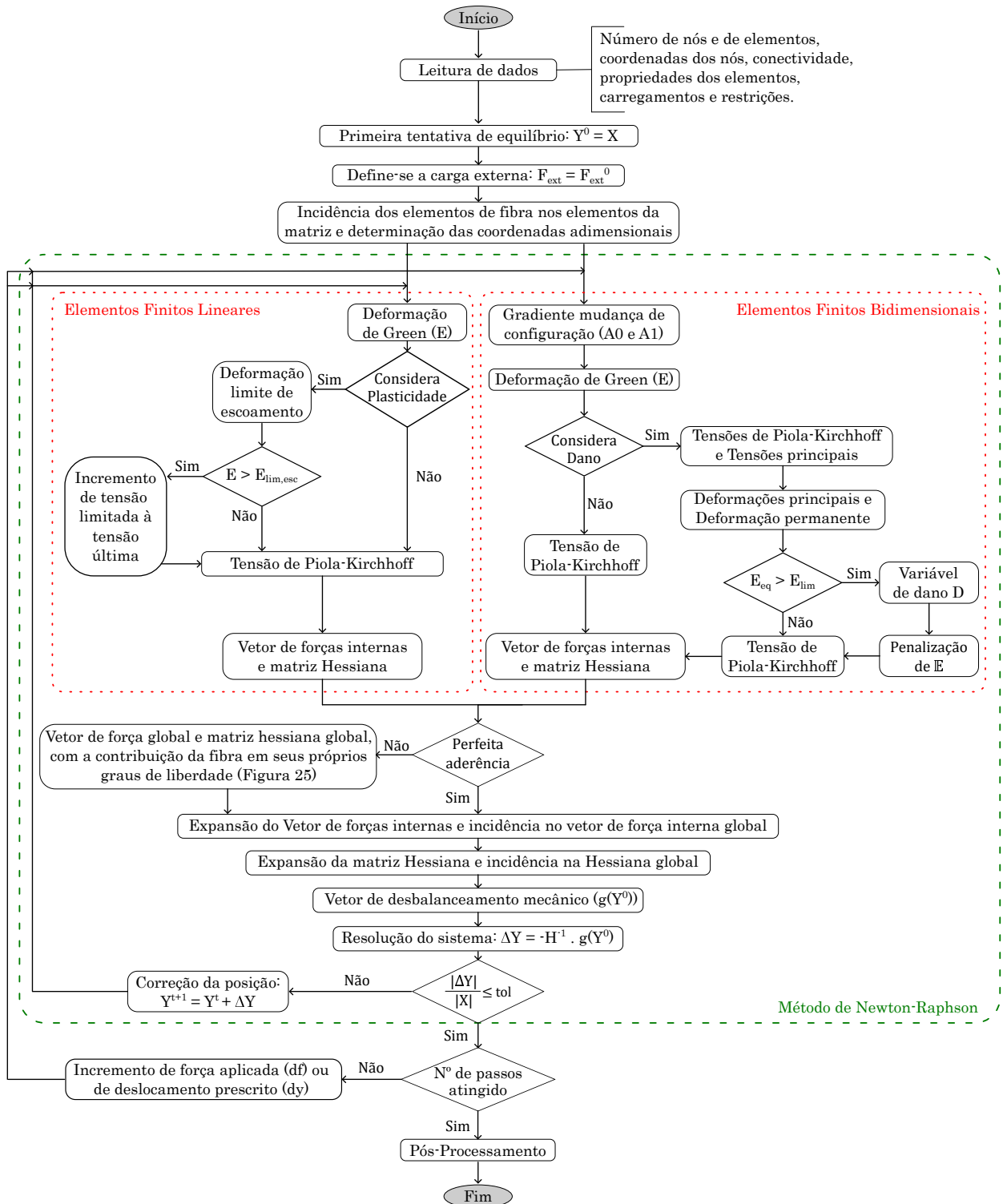
$$\tau_{med} \leq \tau_{máx} \quad \text{ou} \quad F_{mola}^{int} \leq \tau_{máx} \cdot A_{inf} \quad (6.37)$$

$$\sigma_s \leq \sigma_y \quad (6.38)$$

em que a primeira parte da Equação 6.37 faz referência à utilização da técnica dos multiplicadores de Lagrange e a segunda parte, à técnica dos elementos de mola. Além disso,  $\tau_{med}$  é a tensão média de cisalhamento;  $\tau_{máx}$  é a máxima tensão de aderência;  $F_{mola}^{int}$  é a força interna do elemento de mola;  $A_{inf}$  é a área de influência do elemento de mola;  $\sigma_s$  é a tensão de Cauchy atuante na fibra; e  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento do aço.

A Figura 27 apresenta um fluxograma que resume os processos necessários para a implementação do código de simulação de compósitos reforçados com fibras, via MEF, considerando a não-linearidade física dos materiais e a perda da aderência fibra/matriz.

Figura 27 – Fluxograma da implementação numérica para a simulação de compósitos reforçados com fibras



Fonte: Própria autora

## 7 EXEMPLOS NUMÉRICOS

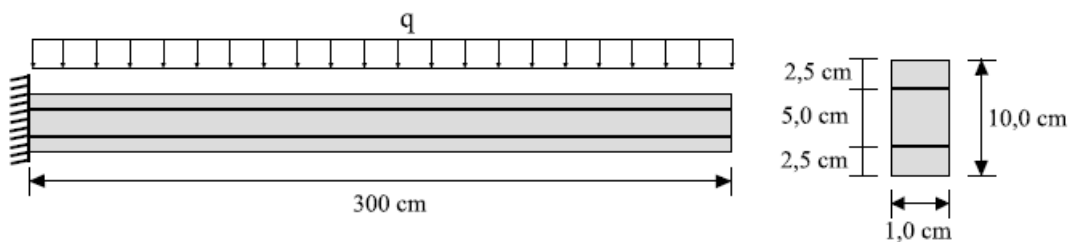
Foram selecionados cinco exemplos numéricos para a verificação das formulações apresentadas, com o objetivo de confirmar a sua precisão, praticidade e eficiência. O erro em cada passo dos exemplos numéricos é calculado conforme a Equação 4.6 e considera uma tolerância de  $10^{-6}$ . Resultados experimentais e numéricos de diversos autores foram usados nos exemplos de validação.

### 7.1 Exemplo 1 – Viga reforçada com fibras submetida a grandes deslocamentos

Este exemplo foi apresentado por Sampaio (2014) e tem o intuito de validar o acoplamento fibra-matriz com uso do método do embutimento em análises mecânicas de estruturas sob pequenos e grandes deslocamentos. Trata-se de uma viga reforçada com fibras, engastada e sujeita à aplicação de um carregamento uniformemente distribuído. O problema considera os domínios elásticos, isotrópicos e perfeitamente aderentes. Além disso, os regimes são linear e não-linear geométricos, para a viga com e sem reforço, resultando em quatro análises distintas.

As propriedades geométricas são apresentadas na Figura 28, em que tem-se: comprimento  $L = 300\text{cm}$ ; altura  $h = 10\text{cm}$ ; espessura  $b = 1\text{cm}$ ; distância das fibras às respectivas faces externas  $d = 2,5\text{cm}$ ; e distância entre os eixos das fibras  $h' = 5\text{cm}$ . O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson da matriz são, respectivamente,  $\mathbb{E}_m = 21\text{ GPa}$  e  $\nu_m = 0,0$ . Para as fibras, o módulo de elasticidade e a área da seção transversal são dados, respectivamente, por  $\mathbb{E}_f = 210\text{ GPa}$  e  $A_f = 0,1\text{ cm}^2$ . Como a deformação transversal é desprezada para o elemento de barra simples, o coeficiente de Poisson é sempre nulo para a fibra. Para o caso linear, o carregamento aplicado é  $q = 0,5\text{ N/cm}$  e para o caso não-linear,  $q = 50\text{ N/cm}$ .

Figura 28 – Propriedades geométricas da viga reforçada



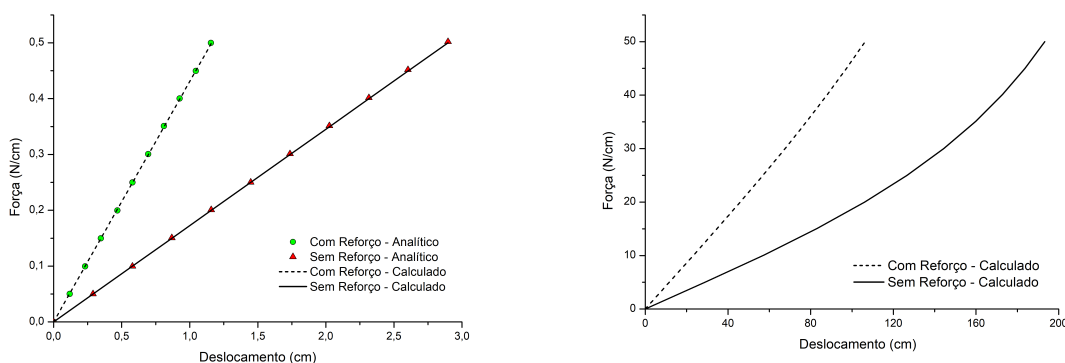
Fonte: Adaptado de Sampaio (2014)

A matriz foi discretizada com 300 elementos finitos bidimensionais triangulares de

aproximação cúbica, dispostos de maneira uniforme, totalizando 1456 nós e 2912 graus de liberdade. Para as fibras adotaram-se 240 elementos lineares, equivalente a 242 nós e 484 graus de liberdade. As análises foram realizadas aplicando-se o carregamento em 10 passos e os deslocamentos foram medidos na extremidade livre da viga. Os gráficos da Figura 29 apresentam os resultados obtidos dos deslocamentos verticais em função do carregamento aplicado para a análise linear e não-linear. Para a análise linear, os valores foram comparados com as equações da Resistência dos Materiais, em que são consideradas as seguintes hipóteses: materiais homogêneos, isotrópicos, contínuos, coesos e lineares.

Figura 29 – Deslocamentos verticais em função do carregamento aplicado

- (a) Força aplicada pelo deslocamento vertical na extremidade da viga ( $q_{máx} = 0,5 \text{ N/cm}$ )
- (b) Força aplicada pelo deslocamento vertical na extremidade da viga ( $q_{máx} = 50 \text{ N/cm}$ )

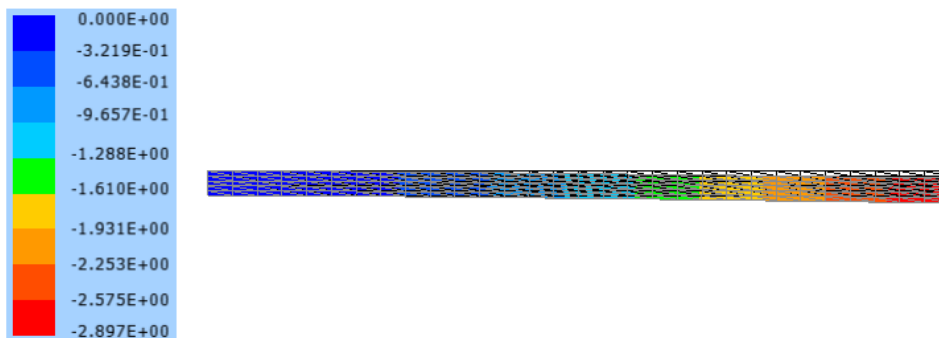
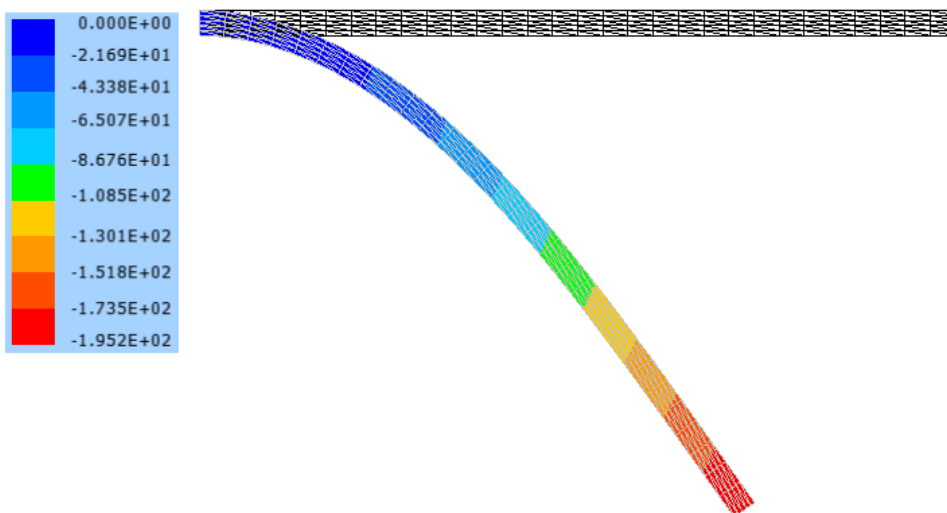
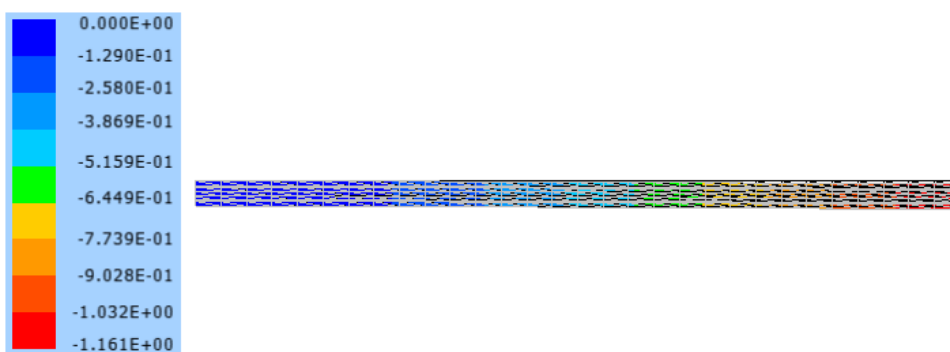
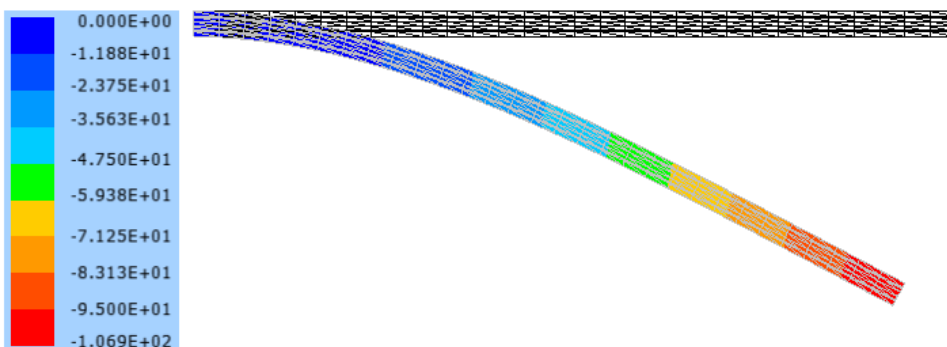


Fonte: Própria autora

A configuração deformada da viga com e sem reforço, na análise linear e na não-linear, é apresentada na Figura 30. Na análise linear sem fibras, o deslocamento vertical máximo na extremidade livre da viga alcançado foi de  $\delta \approx 2,897\text{cm}$ , conforme mostra a Figura 30a. O resultado obtido em Sampaio (2014) foi de  $\delta \approx 2,896\text{cm}$  e o analítico pela Resistência dos Materiais foi de  $\delta \approx 2,892\text{cm}$ . Para a análise linear com fibras, o deslocamento vertical máximo no eixo da extremidade livre da viga obtido foi de  $\delta \approx 1,160\text{cm}$ , conforme mostra a Figura 30c. Sampaio (2014) encontrou  $\delta \approx 1,161\text{cm}$  e o obtido da Resistência dos Materiais considerando a seção homogeneizada foi de  $\delta \approx 1,157\text{cm}$ .

Em relação à análise não-linear, os deslocamentos verticais foram comparados apenas com o trabalho de Sampaio (2014). Para a viga sem reforço, o deslocamento vertical máximo no eixo da extremidade livre da viga alcançado foi de  $\delta \approx 193,25\text{cm}$  (Figura 30b) e Sampaio (2014) obteve  $\delta \approx 193,05\text{cm}$ . Já para a viga reforçada com fibras, o deslocamento vertical máximo obtido na mesma região da análise não-linear foi  $\delta \approx 106,34\text{cm}$  (Figura 30d), em que Sampaio (2014) encontrou  $\delta \approx 106,39\text{cm}$ .

Figura 30 – Configuração deformada e deslocamento vertical na extremidade da viga

(a) Viga sem reforço no regime linear ( $q_{m\acute{a}x} = 0,5 \text{ N/cm}$ )(b) Viga sem reforço no regime não-linear ( $q_{m\acute{a}x} = 50 \text{ N/cm}$ )(c) Viga reforçada com fibras no regime linear ( $q_{m\acute{a}x} = 0,5 \text{ N/cm}$ )(d) Viga reforçada com fibras no regime não-linear ( $q_{m\acute{a}x} = 50 \text{ N/cm}$ )

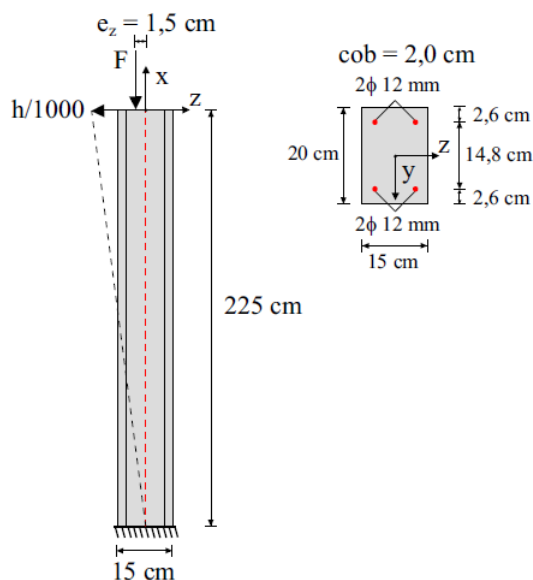
Os resultados apresentados, obtidos com o acoplamento fibra-matriz por meio do método do embutimento, apresentam boa concordância quando comparados com as soluções analíticas e as encontradas em Sampaio (2014). Com isso, pode-se concluir que o código desenvolvido é válido para análise de domínios bidimensionais reforçados com fibras, submetidos a pequenos e grandes deslocamentos.

## 7.2 Exemplo 2 – Pilar com carga excêntrica e imperfeição geométrica

Este segundo exemplo objetiva validar o modelo matemático para a análise do comportamento não-linear físico e geométrico de um pilar de concreto armado submetido a uma carga excêntrica, considerando o aço e o concreto perfeitamente aderentes, com a utilização da técnica do embutimento apresentada. De acordo com Bratina, Saje e Planinc (2004), trata-se de um exemplo bastante difundido na literatura para validação de modelos numéricos de concreto armado, denominado *Fouré's column*. Os resultados obtidos são confrontados com o ensaio experimental documentado por Espion (1993) e demais autores que elaboraram modelos computacionais e os validaram com este pilar, como Liu, Liu e Chan (2012), Parente Jr *et al.* (2014) e Ramos (2020).

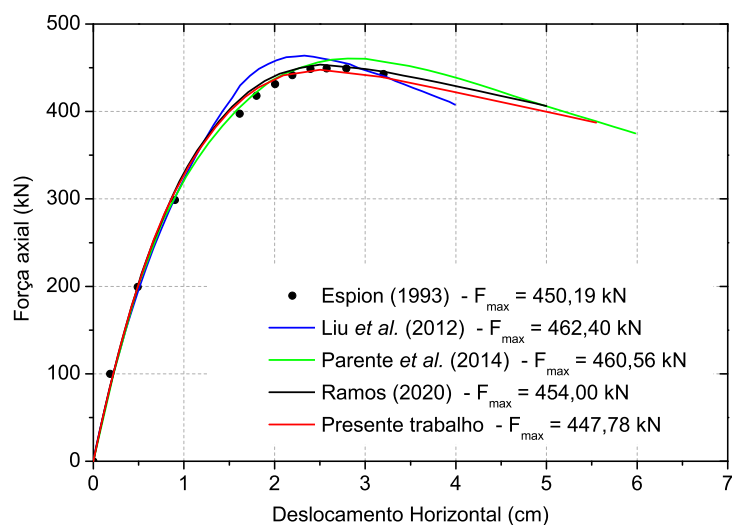
As propriedades geométricas, esquema estático e condições de carregamento utilizadas no exemplo são apresentadas na Figura 31, em que se adota também uma imperfeição inicial (desaprumo) de 0,1% do comprimento do elemento ( $h$ ). As propriedades dos materiais aço e concreto são, respectivamente: módulo de elasticidade,  $\mathbb{E}_c = 3.360 \text{ kN/cm}^2$  e  $\mathbb{E}_s = 21.000 \text{ kN/cm}^2$ ; coeficiente de Poisson,  $\nu_c = 0,20$  e  $\nu_s = 0,00$ ; e tensão de escoamento do aço, considerando o comportamento elastoplástico perfeito,  $f_y = 46,5 \text{ kN/cm}^2$ .



Figura 31 – Propriedades geométricas da *Foure's column*

Fonte: Adaptado de Ramos (2020)

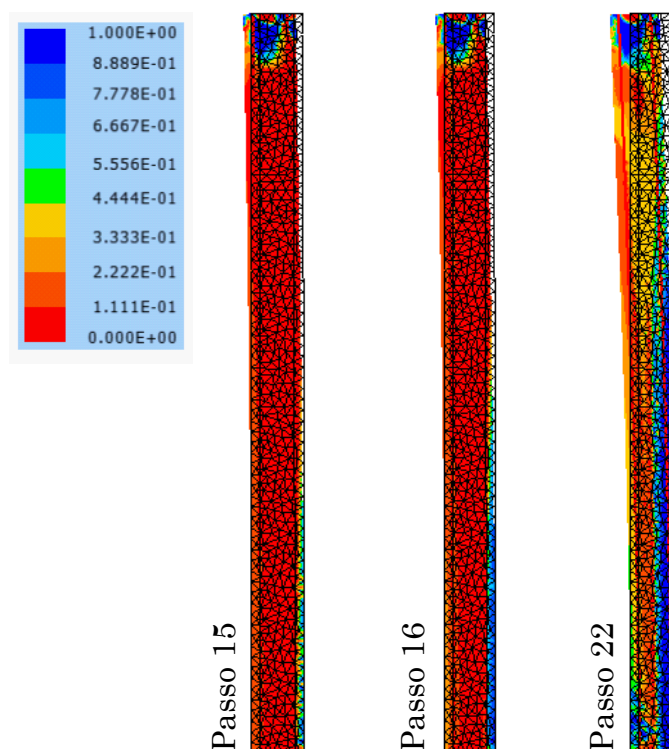
Os parâmetros adotados para o modelo de Dano de Mazars foram:  $\varepsilon_{d0} = 0,0000865$ ,  $A_t = 0,50$ ,  $B_t = 9.000$ ,  $A_c = 1,20$  e  $B_c = 1.500$ . Esses parâmetros foram calibrados por Ramos (2020) a partir de curvas de tensão-deformação do concreto recomendadas pelo Européen (2004). O pilar foi discretizado com 960 elementos triangulares de ordem cúbica e a armadura com 900 elementos lineares, resultando em 10.890 graus de liberdade. A configuração deformada foi obtida por meio do controle de deslocamentos, com aplicação de um deslocamento vertical de 0,6 cm na posição da força  $F$ , dividido em 50 passos de 0,012 cm. Como resultado, determina-se a respectiva força vertical  $F$  em cada passo de deslocamento imposto, conforme mostrado no gráfico da Figura 32.

Figura 32 – Curva de Força vs Deslocamento da *Foure's column*

Fonte: Própria autora

O concreto na base do pilar esteve íntegro até o passo 15, momento em que a variável de dano apresentou valores diferentes de 1 nessa região, conforme apresenta a Figura 33. Nesse passo, o deslocamento vertical imposto foi de 0,18cm e a carga medida foi  $F = 441,30$  kN. No passo seguinte, o processo de danificação se intensificou e o pilar atingiu a carga máxima suportada,  $F_{max} = 447,78$  kN, que representa um desvio de 0,54% em relação à carga máxima experimental. Uma vez que a carga máxima foi atingida, a curva força-deslocamento começou a diminuir, alcançando uma carga de  $F = 352,61$  kN, quando o deslocamento horizontal medido foi igual a 6cm, encerrando o processamento. A plastificação da armadura deu início no passo 22, quando o deslocamento vertical imposto foi de 0,264cm, ocorrendo no mesmo instante em que o concreto perdeu a integridade na região comprimida, indicando esmagamento do concreto. A essa altura o concreto já estava bastante danificado na região tracionada.

Figura 33 – Geometria da malha e processo de danificação do pilar



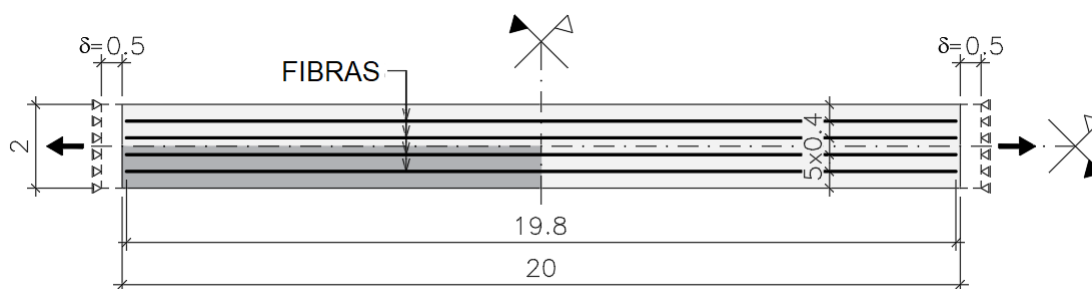
Fonte: Própria autora

A precisão do resultado da força axial vs deslocamento em relação às referências e o processo de danificação no pilar indicam que o modelo pode ser utilizado para analisar o comportamento não-linear de pilares de concreto armado submetidos à flexocompressão.

### 7.3 Exemplo 3 – Barra com quatro enrijecedores

Neste exemplo analisa-se a tensão de aderência de quatro enrijecedores em uma barra retangular submetida a deslocamentos controlados nas extremidades, conforme apresenta a Figura 34. Os resultados obtidos são comparados com os apresentados em Sampaio (2014). Dessa vez, a análise é linear e objetiva validar a aplicação dos multiplicadores de Lagrange na ligação entre o domínio e os enrijecedores.

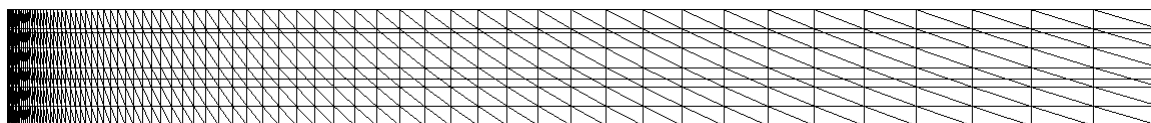
Figura 34 – Barra reforçada submetida a deslocamentos prescritos nas extremidades



Fonte: Adaptado de Sampaio (2014)

A barra possui 20 cm de comprimento, 2 cm de altura e 1 cm de largura. As fibras possuem comprimento de 19,8 cm. As propriedades dos materiais fibra e matriz são, respectivamente: módulo de elasticidade,  $\mathbb{E}_f = 100.000 \text{ kN/cm}^2$  e  $\mathbb{E}_m = 2.000 \text{ kN/cm}^2$ ; coeficiente de Poisson,  $\nu_f = \nu_m = 0,0$ ; espessura,  $e_m = e_f = 1 \text{ cm}$ ; e a área da seção transversal da fibra é  $A_f = 0,01 \text{ cm}^2$ . O deslocamento imposto na extremidade da barra é  $\delta = 0,5 \text{ cm}$ , no entanto, para se obter uma análise linear, esse deslocamento foi dividido por  $10^4$  e os resultados alcançados foram multiplicados pelo mesmo fator. Devido à dupla simetria, apenas um quarto do problema foi modelado e foram utilizados 864 elementos triangulares de aproximação cúbica para representar a malha e 240 elementos lineares para discretizar as fibras, resultando em 8.730 graus de liberdade. O refinamento da malha é apresentado na Figura 35.

Figura 35 – Discretização da malha com maior grau de refinamento na extremidade da fibra

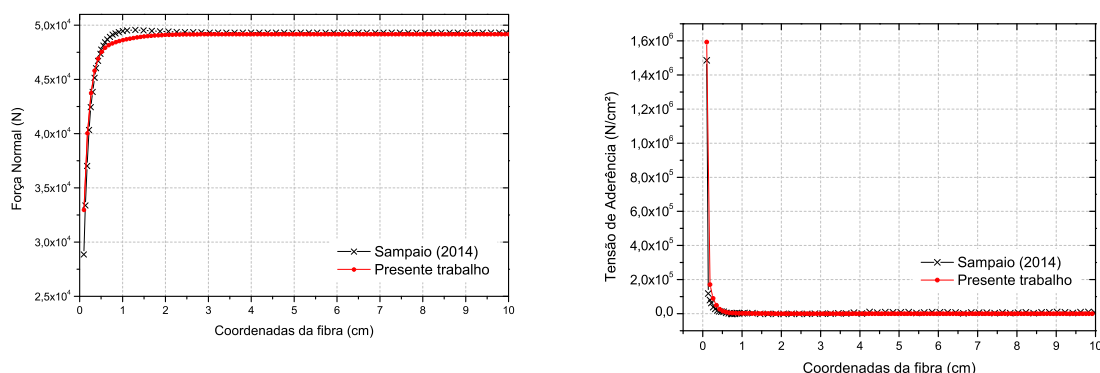


Fonte: Própria autora

Sampaio (2014) calculou as tensões de interface decompondo a força interna da fibra em força normal e tangencial. No modelo numérico apresentado neste trabalho, como foram utilizados multiplicadores de Lagrange para conectar os domínios, as forças de contato são prontamente obtidas. Os resultados desse estudo e do trabalho de Sampaio (2014) estão apresentados na Figura 36. Embora Sampaio (2014) tenha utilizado elementos cúbicos para discretizar as fibras, os resultados são bastante próximos.

Figura 36 – Resultados considerando a perfeita aderência entre os materiais

(a) Força normal da fibra ao longo da barra      (b) Tensão de aderência ao longo da barra

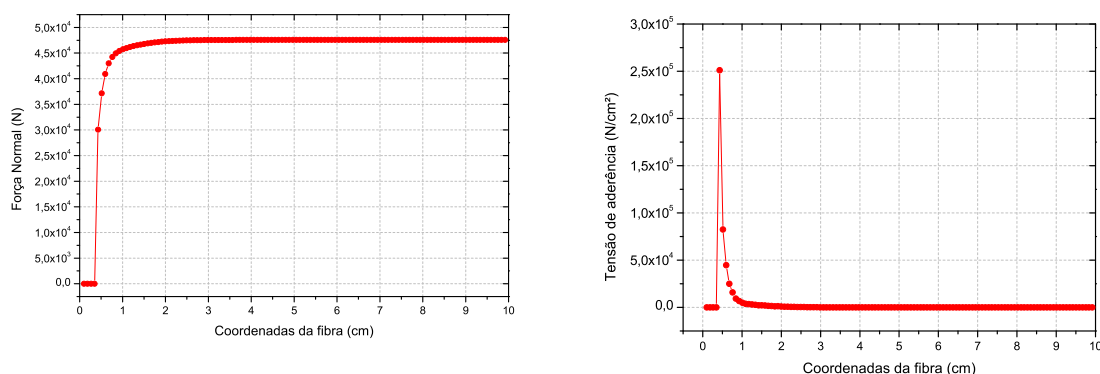


Fonte: Própria autora

Uma segunda análise foi elaborada, na qual se impôs um valor limite de  $15.000 \text{ N}/\text{cm}^2$  para a tensão de contato, desconectando os nós que alcançaram este valor. Ocorre então um deslizamento livre para esses nós e a força de contato é transferida para os elementos adjacentes. Esse comportamento pode ser visto na Figura 37, em que a tensão de aderência desenvolve uma curva mais suave, apresentando menores valores absolutos de tensão. Isso porque os nós que romperam a ligação pelo critério de tensão limite de aderência não contribuem com a rigidez da fibra no sistema, enquanto que na análise da perfeita aderência essas tensões continuam concentradas nos nós da extremidade da fibra.

Figura 37 – Resultados considerando a perda da aderência entre os materiais

(a) Força normal da fibra ao longo da barra      (b) Tensão de aderência ao longo da barra



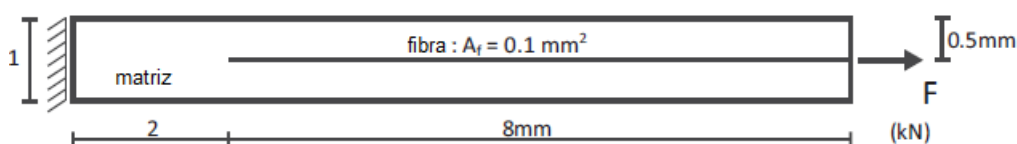
Fonte: Própria autora

## 7.4 Exemplo 4 – Pull-out

Este exemplo visa avaliar a formulação para o estado limite da aderência, no qual uma força de tração na fibra provoca o seu arrancamento. Para simular o escorregamento

da fibra, foram inseridos elementos de mola na ligação entre a fibra e a matriz, em que as rigidezes desses elementos representam a rigidez da interface e permitem deslocamentos relativos entre os domínios. Paccola, Piedade Neto e Coda (2015) elaboraram esse exemplo, apresentado na Figura 38, considerando a matriz e a fibra elásticas, com:  $E_f = 200.000$  kN/mm<sup>2</sup> e  $E_m = 20.000$  kN/mm<sup>2</sup>;  $\nu_m = 0,2$ ;  $\nu_f = 0,0$ ;  $e_m = e_f = 1$  mm; e  $A_f = 0,1$  mm<sup>2</sup>. O comportamento da aderência é perfeitamente elastoplástico, com  $k = 1000$  kN/mm<sup>2</sup> e  $\tau_y = 51,6$  kN/mm<sup>2</sup>. Dessa vez, o problema foi resolvido por controle de forças, sendo 849,51 kN a força total aplicada na extremidade da barra, equivalente à força que atinge a tensão limite de aderência em todos os nós da fibra.

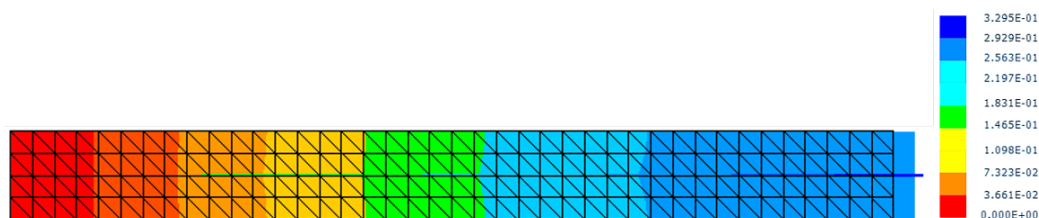
Figura 38 – Geometria e carregamento da barra reforçada submetida ao arrancamento da fibra



Fonte: Adaptado de Paccola, Piedade Neto e Coda (2015)

Uma malha uniforme de 320 elementos triangulares com aproximação cúbica e 160 elementos uniformes com aproximação linear foi usada para discretizar o problema, resultando em 3.468 graus de liberdade. A Figura 39 mostra a malha utilizada e a configuração deformada da barra quando  $F$  atinge 849,51 kN, correspondente à força de arrancamento da fibra, esse valor desvia 1,96% da força máxima encontrada em Paccola, Piedade Neto e Coda (2015).

Figura 39 – Discretização e configuração deformada da fibra para  $F = 849,51$  kN



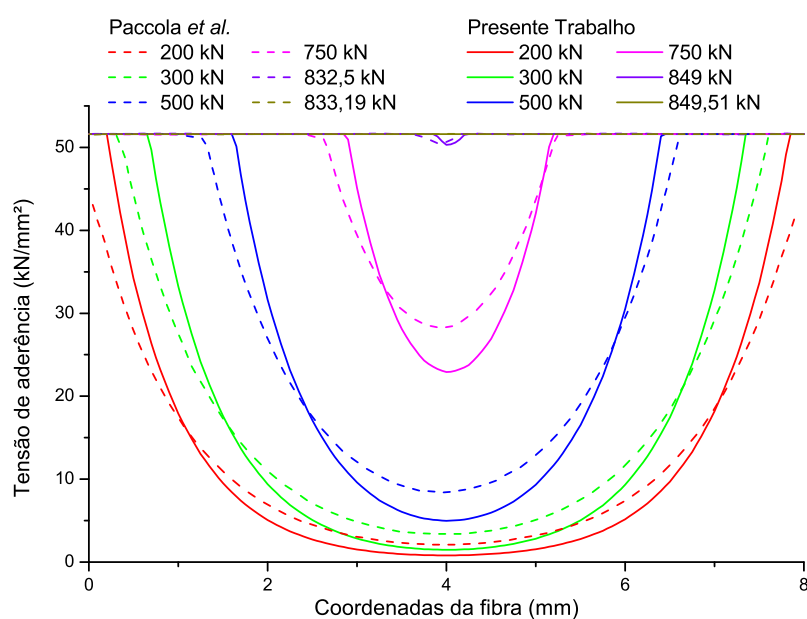
Fonte: Própria autora

Conforme mencionado na seção 2.4, o comportamento esperado para a tensão de cisalhamento é ser máxima nas extremidades e mínima no centro. À medida que a fibra é

puxada e as tensões de aderência limite são atingidas nas extremidades da fibra, a tensão de cisalhamento nos nós centrais aumentam até o arrancamento completo da armadura.

A Figura 40 representa a tensão de aderência ao longo da fibra para diferentes níveis de carga. Nota-se que o nível da tensão de cisalhamento é alto nas extremidades da barra, onde há concentração de tensão no início do processo. Com o aumento da força aplicada, o escorregamento se desenvolve em direção ao centro da fibra, até que todos os nós da barra alcancem a tensão limite de aderência, conforme esperado.

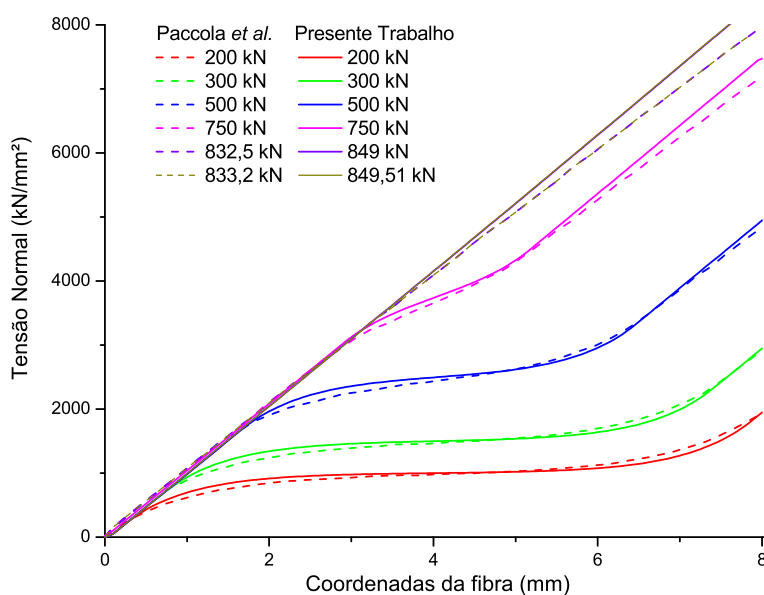
Figura 40 – Distribuição da tensão de aderência ao longo do comprimento da fibra



Fonte: Própria autora

O gráfico da Figura 41 mostra que as tensões normais são máximas na extremidade em que a fibra é puxada, e, conforme o escorregamento da fibra se desenvolve, elas tendem a aumentar e se tornam linearmente distribuídas. Os resultados são comparados com os de Paccola, Piedade Neto e Coda (2015), mostrando concordância, indicando que a técnica proposta foi capaz de representar o comportamento não-linear da aderência.

Figura 41 – Distribuição da tensão normal da fibra ao longo do seu comprimento



Fonte: Própria autora

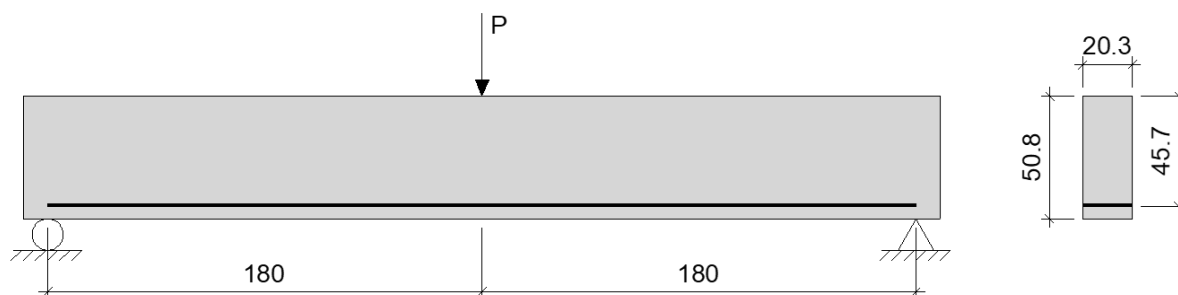
## 7.5 Exemplo 5 – Viga biapoiada submetida a carga centrada

Esse exemplo objetiva reunir todas as funções do modelo numérico proposto para avaliar o comportamento de uma viga de concreto armado. Os resultados alcançados são comparados aos resultados numéricos e experimentais, obtidos em Kwak e Filippou (1990), Kwak e Kim (2002) e Burns (1962).

As propriedades geométricas e condições de contorno são apresentadas na Figura 42. As propriedades dos materiais são: módulo de elasticidade, resistência à compressão e coeficiente de Poisson do concreto, respectivamente,  $E_c = 2,67 \cdot 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $f_c = 340 \text{ kgf/cm}^2$  e  $\nu_c = 0,167$ ; módulo de elasticidade, tensão de escoamento e área do aço, respectivamente,  $E_s = 2,07 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $f_y = 3157 \text{ kgf/cm}^2$  e  $A_s = 9,20 \text{ cm}^2$ . A carga máxima aplicada foi  $P = 17,5 \text{ tf}$ , dividida em 14 passos iguais, em que os resultados de deslocamento foram obtidos para cada passo.



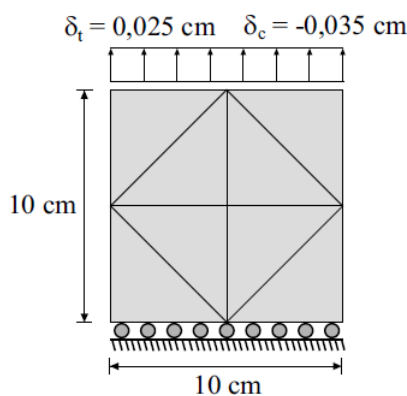
Figura 42 – Conformação geométrica da viga (medidas em cm)



Fonte: Própria autora

Assim como no Exemplo 2 da seção 7.2, foram consideradas as não-linearidades físicas do aço (modelo elastoplástico) e do concreto (modelo de dano de Mazars). No entanto, para definir os valores representativos dos parâmetros  $A_c$ ,  $B_c$ ,  $A_t$  e  $B_t$  do modelo de Mazars, recorreu-se às curvas de tensão-deformação do concreto, cuja formulação é apresentada em Parente Jr *et al.* (2014) e é baseada na recomendação do Eurocódigo (2004). Para determinar o comportamento uniaxial do concreto à compressão e à tração e calibrar os parâmetros de dano, foi realizada uma análise numérica de um corpo-de-prova quadrado com 10cm de lado e espessura unitária. A Figura 43 apresenta a geometria do corpo-de-prova, cuja malha foi discretizada com 8 elementos finitos triangulares, totalizando 49 nós. Os deslocamentos impostos de 0,025cm para tração e 0,035cm para compressão foram divididos em 100 passos.

Figura 43 – Conformação geométrica do corpo de prova utilizado para calibração dos parâmetros de dano

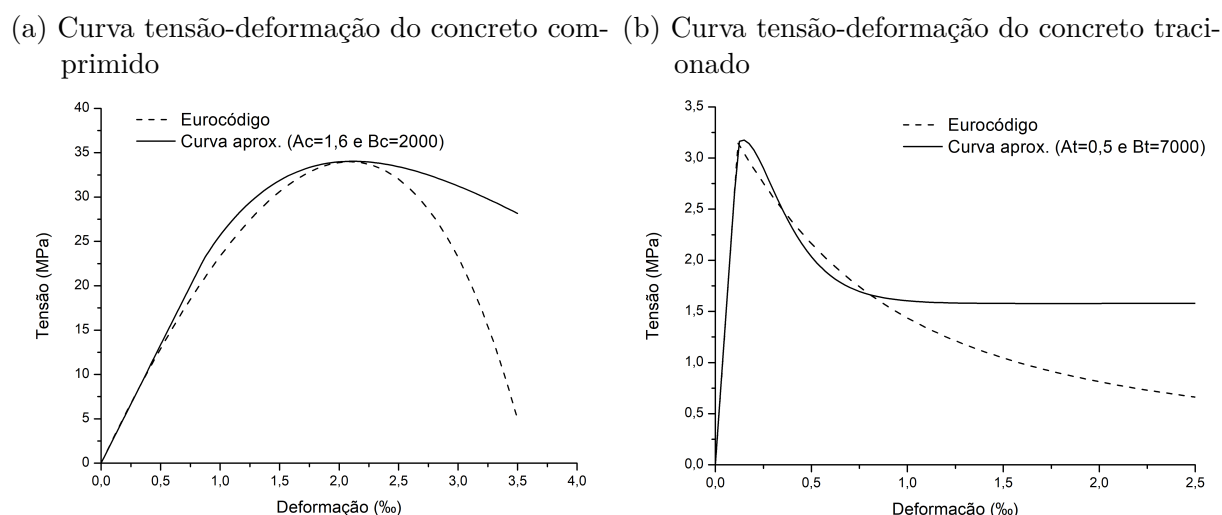


Fonte: Ramos (2020)

Baseadas na recomendação do Eurocódigo, as curvas de tensão-deformação do

concreto comprimido e tracionado foram elaboradas, e a partir delas, os parâmetros do dano da Mazars foram calibrados. As curvas teóricas e as curvas resultantes da calibração são apresentadas na Figura 44. Como consequência dessa análise, os parâmetros determinados foram:  $A_c = 1,6$ ;  $B_c = 2000$ ;  $A_t = 0,5$ ;  $B_t = 7000$ ; e  $\varepsilon_{d0} = 0,000117922$ .

Figura 44 – Curva tensão-deformação do concreto comprimido e tracionado considerando o modelo do Eurocódigo e a aproximação para o modelo de Dano



Fonte: Própria autora

De posse dos parâmetros do modelo de dano, a análise numérica para o elemento em questão foi finalmente realizada. A Figura 45 apresenta a discretização da malha utilizada. A viga foi analisada com 144 elementos triangulares de ordem cúbica e a armadura com 90 elementos lineares, resultando em 1.588 graus de liberdade.

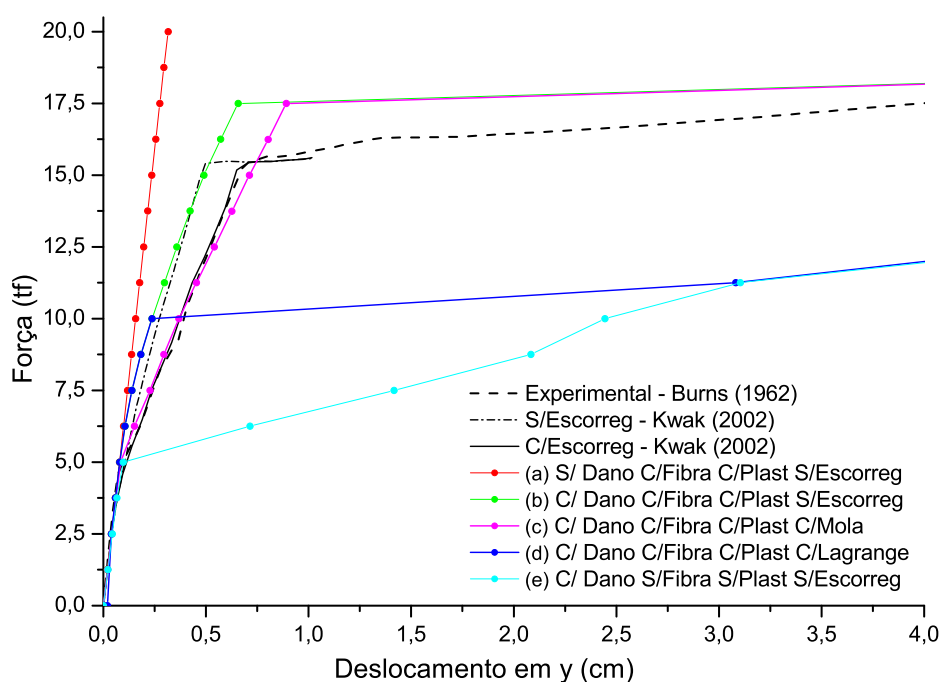
Figura 45 – Discretização da malha da viga



Fonte: Própria autora

A Figura 46 retrata os resultados obtidos da curva de deslocamento vertical no meio do vão em função da carga aplicada em diversas etapas da análise.

Figura 46 – Curva deslocamento vertical em função da força



Fonte: Própria autora

Primeiramente, a viga foi modelada considerando a existência da armadura no concreto de modo perfeitamente aderente, obtendo-se a curva (a) da Figura 46. Embora o aço não tenha atingido a tensão de escoamento para a carga máxima aplicada de 20 tf, o modelo elastopástico da armadura foi considerado. Na sequência, o dano de Mazars foi aplicado no concreto e a análise foi refeita, resultando na curva (b) e, desta vez, o patamar apresentado no gráfico aponta que o concreto não íntegro na região tracionada proporcionou o escoamento da armadura. Esse resultado se aproxima do encontrado em Kwak e Kim (2002) para a armadura perfeitamente aderente. A diferença de amplitude entre os patamares de escoamento encontrados pode ser explicada pela capacidade residual do concreto tracionado no modelo de dano considerado. O dano máximo no concreto foi limitado a 99% para garantir a convergência da solução e essa capacidade residual é exibida na Figura 44b.

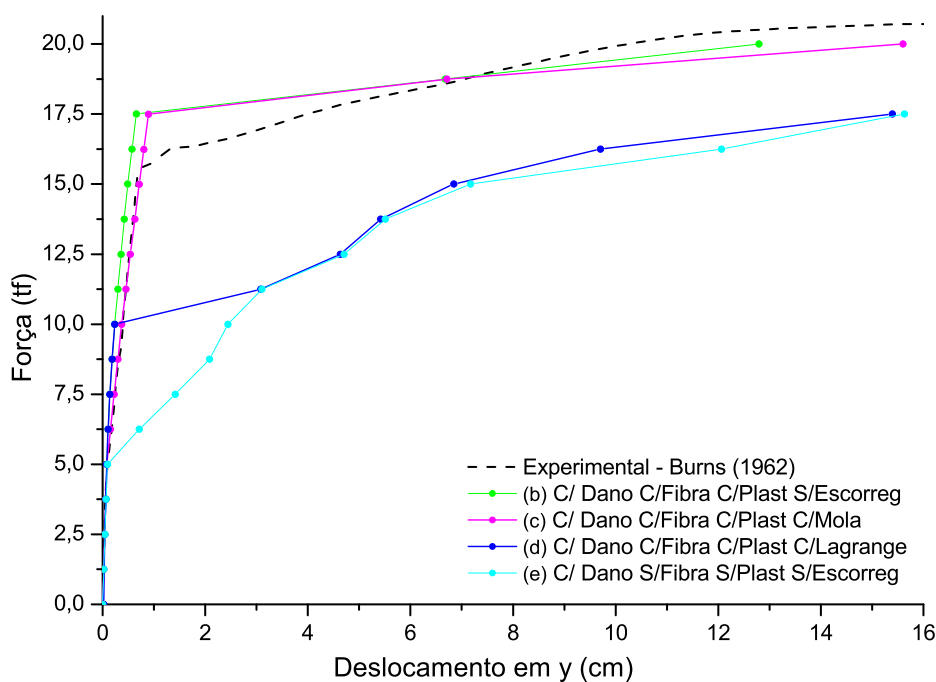
Duas outras análises foram realizadas levando em conta a perda da aderência com as abordagens dos elementos de mola ou dos multiplicadores de Lagrange. A curva (c) apresenta o resultado encontrado para a interface representada por elementos de mola, cuja rigidez foi adotada como  $k = 10.000 \text{ kgf/cm}^2$ . Como esperado, a consideração da perda da aderência tornou o comportamento do elemento mais flexível, aproximando-se da curva encontrada em Kwak e Kim (2002), que considera o escorregamento, e da curva de Burns (1962), realizada por ensaio experimental. Nota-se também um ganho de resistência da

curva (c), em relação às referências, devido à capacidade residual do concreto tracionado.

A curva (d) representa a resposta da viga considerando a perda da aderência com uso dos multiplicadores de Lagrange. Para essa análise, a tensão limite de aderência utilizada foi obtida com base nas recomendações FIB Model Code (2010) (Tabela 1), adotando o modo de ruptura por arrancamento e a armadura na zona de boa aderência. Dessa forma, o encontrou-se  $\tau_{m\acute{a}x} = 145,77 \text{ kgf/cm}^2$ . As tensões médias de cisalhamento calculadas em cada nó da fibra e em cada passo de carregamento são comparadas à tensão limite de aderência e, quando superada, o nó da fibra perde a aderência com a malha localmente. Ao romper a ligação, os elementos de fibra deixam de contribuir para a rigidez do sistema, dessa forma, o sistema deve apresentar um comportamento igual à situação da matriz sem reforço a partir desse ponto. Na Figura 46, nota-se que, para valores de  $P < 10 \text{ tf}$ , a curva (d) se assemelha à curva (b) e, com o acréscimo de carga, a curva (d) passa a ser equivalente à curva (e), em que essa última representa o comportamento da viga sem armadura.

A Figura 47 mostra as curvas experimental, (b), (c), (d) e (e) de modo mais amplo para melhor descrever uma análise comparativa entre o emprego de molas e dos multiplicadores de Lagrange como elementos representativos da interface.

Figura 47 – Curva deslocamento vertical em função da força comparando as duas abordagens



Fonte: Própria autora

Comparando os dois métodos usados para representar a interface neste exemplo, conclui-se que o uso de elementos de mola se aproxima mais da resposta real da estrutura. Isso porque a mola consegue reproduzir a degradação da interface através do controle da sua rigidez, permitindo assim que os materiais deslizem entre si. A utilização dos multiplicadores de Lagrange também é capaz de caracterizar a perda da aderência, porém essa abordagem tem se mostrado mais adequada para interfaces rígidas, ou seja, para análise das transferências de tensões na interface em elementos submetidos a carregamentos usuais a uma distância segura dos limites dos materiais, onde não se observa deslocamentos relativos expressivos entre o concreto e a armadura.

## 8 CONCLUSÃO

O modelo numérico desenvolvido e apresentado neste trabalho inclui duas abordagens distintas para a análise de estruturas de concreto armado no método dos elementos finitos considerando a perda da aderência, uma utilizando os multiplicadores de Lagrange e outra os elementos de mola. Essas abordagens consistem em inserir um artifício matemático ou um elemento adimensional para representar a interface e conectar os domínios. Além disso, para levar em consideração algumas das diversas variáveis envolvidas na simulação da ruptura da ligação fibra/matriz, as não-linearidades geométrica e física foram implementadas.

Para permitir que o reforço seja inserido na matriz de forma independente e sem necessidade de discretização da fibra ou da malha, foi utilizado o método do embutimento, cujo emprego se mostrou eficaz para os elementos de mola e os multiplicadores de Lagrange. Diante dos diversos estudos consultados, não foi encontrado algum que tenha utilizado essas abordagens para representar a perda da aderência por meio de relações cinemáticas nodais que permitem a independência das malhas.

Devido à elevada rigidez da ligação com o emprego dos multiplicadores de Lagrange, essa abordagem é mais indicada para baixas tensões de cisalhamento na interface, em que o escorregamento da fibra não é muito expressivo, como no cálculo do comprimento de aderência de elementos de concreto armado. Para elevadas tensões de cisalhamento na interface, como em ensaios de arrancamento de fibras, devem ser empregados os elementos de molas, por representarem a degradação da interface através da diminuição da rigidez da mola, permitindo o escorregamento da fibra. Além disso, a abordagem que utiliza os elementos de mola têm a vantagem de não aumentar os graus de liberdade devido ao próprio método e por isso, comparada aos multiplicadores de Lagrange, é mais econômica computacionalmente.

Os exemplos experimentais e numéricos de diversos autores possibilitaram confirmar a eficiência e robustez do modelo para representar o comportamento de estruturas de concreto armado sujeitas a grandes deslocamentos, flexocompressão, arrancamento da armadura e escoamento do aço com deslocamento relativo do aço e concreto. No exemplo final, o emprego simultâneo do modelo elastoplástico para o aço, do modelo de dano de Mazars para o concreto e do elemento adimensional representativo da interface demonstrou ser capaz de reproduzir, no ambiente bidimensional, o comportamento aproximado do elemento de concreto armado ensaiado experimentalmente.

Dessa forma, admite-se que o modelo numérico proposto contribui para estudos relacionados à análise do comportamento de estruturas de concreto armado, considerando

as não-linearidades físicas, geométricas e de contato inerentes ao sistema.

### 8.1 Sugestões para futuros desenvolvimentos

A formulação numérica apresentada neste trabalho é bidimensional, sendo assim, pode-se generalizar para o caso tridimensional, aumentando as possibilidades de aplicação do modelo, como a consideração de um modelo de dano anisotrópico e a influência das tensões radiais ao redor da armadura nas tensões axiais de aderência. Dessa forma, é possível analisar o efeito do confinamento do concreto na aderência.

Este trabalho utiliza um elemento finito unidimensional de aproximação linear para representar a armadura. Uma sugestão de melhoria é aumentar a ordem de aproximação do elemento unidimensional, de modo a assumir uma configuração deformada mais próxima da configuração deformada da malha com menor número de graus de liberdade.

De modo a considerar o comportamento da aderência entre dois materiais desde baixas tensões a altas tensões cisalhantes na interface, é interessante desenvolver uma formulação que integre as duas abordagens de conexão fibra/matriz descritas neste trabalho (os multiplicadores de Lagrange e os elementos de mola). Assim, sugere-se elaborar uma lei constitutiva para a aderência que contempla uma ligação rígida entre a fibra e a matriz no início do carregamento até perder a ligação por adesão, com posterior diminuição da rigidez da ligação, representando a degradação da interface.

Um outro caminho sugerido para seguir é representar o comportamento da aderência de acordo com o modelo do FIB Model Code (2010), apresentado na seção 2.5, empregando os elementos de mola, já que estes são capazes de simular o escorregamento da fibra na matriz.

É de grande interesse também o desenvolvimento de uma formulação dinâmica não-linear geométrica para analisar a influência da vibração de estruturas no escorregamento da fibra.

## REFERÊNCIAS

- ABRAMS, D. A. **Tests of bond between concrete and steel**. [S.l.], 1913.
- ACI. Bond and development of straight reinforcing bars in tension (aci 408r-03). **Farmington Hills, MI: American Concrete Institute Committee**, 2003.
- ÅKESSON, M. **Fracture mechanics analysis of the transmission zone in prestressed hollow core slabs**. 1993. Tese (Doutorado) — Chalmers University of Technology, Division of Concrete Structures, Göteborg, 1993.
- ALHARBI, Y. R.; GALAL, M.; ABADEL, A. A.; KOHAIL, M. Bond behavior between concrete and steel rebars for stressed elements. **Ain Shams Engineering Journal**, Elsevier, 2020.
- ALLWOOD, R. J.; BAJARWAN, A. A. A new method for modelling reinforcement and bond in finite element analyses of reinforced concrete. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 28, n. 4, p. 833–844, 1989. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620280408>.
- BALABUCH, T. J. R. **Análise numérica das deformações do concreto sujeito à reação álcali-agregado considerando os efeitos de retração e fluência**. 2018. 114 p. Dissertação ((Mestrado em Estruturas) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.
- BALAKRISHNA, S.; MURRAY, D. W. Prediction of response of concrete beams and panels by nonlinear finite element analysis. **IABSE reports**, v. 54, p. 393–404, 1987.
- BARBOSA, M. T. .; SÁNCHEZ FILHO, E. S. The bond stress x slipping relationship. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, SciELO Brasil, v. 9, n. 5, p. 745–753, 2016.
- BARBOSA, M. T. G. **Avaliação do comportamento da aderência em concretos com diferentes classes de resistência**. 2001. 215 p. Tese (Doutorado) — Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.
- BATHE, K.-J. **Finite element procedures**. [S.l.: s.n.]: Klaus-Jurgen Bathe, 2006.
- BAZANT, Z. P.; KIM, S. S. Plastic-fracturing theory for concrete. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, American Society of Civil Engineers, v. 105, n. 3, p. 407–428, 1979.
- BITENCOURT JÚNIOR, L. A. G. **Numerical modeling of failure processes in steel fiber reinforced cementitious materials**. 2015. 184 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) — Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.
- BITENCOURT JÚNIOR, L. A. G.; M., O. L.; BITTENCOURT, T. N.; VECCHIO, J. F. Numerical modeling of steel fiber reinforced concrete with a discrete and explicit representation of steel fibers. **International Journal of Solids and Structures**, v. 159, p. 171–190, 2019. ISSN 0020-7683.



BITENCOURT JÚNIOR, L. A. G.; M., O. L.; PRAZERES, G. C. P.; RODRIGUES, A. E.; BITTENCOURT, T. N. A coupling technique for non-matching finite element meshes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 290, p. 19–44, 2015. ISSN 0045-7825.

BONET, J.; WOOD, R.; MAHANEY, J.; HEYWOOD, P. Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 190, n. 5-7, p. 579–595, 2000.

BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. [S.l.: s.n.]: Cambridge University Press, 1997. 248 p.

BONO, G. F. F. **Modelos constitutivos para análise tridimensional de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos**. 2008. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) — Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

BRATINA, S.; SAJE, M.; PLANINC, I. On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 41, n. 24-25, p. 7181–7207, 2004.

BRESLER, B.; BERTERO, V. Behavior of reinforced concrete under repeated load. **Journal of the Structural Division**, American Society of Civil Engineers, v. 94, n. 6, p. 1567–1590, 1968.

BRISOTTO, D. D. S. **Um modelo elasto-plástico para a análise da aderência em peças de concreto armado**. 2011. 116 f. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

BROWN, C. J.; DARWIN, D.; MCCABE, S. L. **Finite element fracture analysis of steel-concrete bond**. [S.l.], 1993.

BUCHAIM, R. **A influência da não-linearidade física do concreto armado na rigidez à flexão e na capacidade de rotação plástica**. 2001. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.

BURNS, N. H. **Load-Deformation Characteristics of Beam-Column Connections of Reinforced Concrete**. [S.l.: s.n.]: University of Illinois at Urbana-Champaign, 1962.

CAETANO, L. **Estudo do comportamento da aderência de elementos de concreto armado em condições extremas**. 2008. 178f. 2008. 178 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

CALLISTER, W. **Ciência E Engenharia de Materiais: Uma Introdução** . [S.l.: s.n.]: Grupo Gen-LTC, 2000. 620 p.

CARRAZEDO, R. **Estudo e desenvolvimento de código computacional para análise de impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos**. 2009. 152 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

CARVALHO, P. R. P. **Análise numérica bidimensional de sólidos com comportamento visco-elasto-plástico em grandes deformações e situações de contato**. 2019. 177 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

CASTRO, C. M. de. **Concreto de alto desempenho: estudo da aderência com a armadura sob ações repetidas**. 2002. 194 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

CASTRO, S. S. de. **Framework Teórico e Computacional para Estruturas de Concreto Armado: Implementação de Modelos de Armadura e Aderência**. 2013. Tese (Mestrado em Estruturas) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.

CEB. **Bond Action and Bond Behaviour of Reinforcement: State-of-the-art Report**. Munich: Comité Euro-International du Béton, 1982. (Volume 151 de Bulletin d'information: Euro-International Committee for Concrete).

CEDOLIN, L.; POLI, S. D.; CRUTZEN, Y. R. J. Triaxial stress-strain relationship for concrete. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, American Society of Civil Engineers, v. 103, n. 3, p. 423–439, 1977.

CHEN, W.; HAN, D. **Plasticity for Structural Engineers**. [S.l.: s.n.]: J. Ross Pub., 2007. (J. Ross Publishing Classics).

CLARK, A. P. Bond of concrete to reinforcing bars. *In*: **Journal Proceedings**. [S.l.: s.n.], 1949. v. 46, n. 11, p. 161–184.

CODA, H. B. An exact fem geometric non-linear analysis of frames based on position description. *In*: **17th International Congress of Mechanical Engineering. ABCM**. São Paulo: [S.l.: s.n.], 2003.

CODA, H. B. O método dos elementos finitos posicional: Sólidos e estruturas—não linearidade geométrica e dinâmica. **São Carlos: EESC-USP**, p. 284, 2018.

CORREIA, V. C. **Estudo da influência do uso de fibras de aço e de estribos no comportamento da ancoragem de barras**. 2012. 166 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

COSENZA, E.; MANFREDI, G.; REALFONZO, R. Behavior and modeling of bond of frp rebars to concrete. **Journal of composites for construction**, American Society of Civil Engineers, v. 1, n. 2, p. 40–51, 1997.

COX, J. V. **Development of a plasticity bond model for reinforced concrete: theory and validation for monotonic applications**. [S.l.: s.n.]: Naval Facilities Engineering Service Center, Port Hueneme, USA, 1994.

CRISFIELD, M. **Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. [S.l.: s.n.]: Wiley, 1991. (Wiley Series in Computational Mechanics).

- D'AVILA, V. M. R. **Estudo sobre modelos de fissuração de peças de concreto armado via método dos elementos finitos**. 2003. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) — Programa de PósGraduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2003.
- DÉSIR, J. M. **Interface Aço-concreto: reformulando os modelos constitutivos e numéricos**. 1998. Tese (Doutorado) — COPPE/UFRJ-PEC, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, Rio de Janeiro, 1998.
- DUCATTI, V. A. **Concreto de elevado desempenho: estudo da aderência com a armadura**. 1993. 259f. 1993. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 1993.
- DUMÊT, T. B. **Aderência de cordoalhas em concretos de alta resistência com e sem fibras de aço**. 2003. 480 p. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.
- DURAND, R.; FARIAS, M. M. Nonlinear joint element for the analysis of reinforcement bars using finite elements. **Blucher Mechanical Engineering Proceedings**, v. 1, n. 1, p. 3253 – 3268, 2014. ISSN 2358-0828.
- ELIGEHAUSEN, R.; POPOV, E. P.; BERTERO, V. V. Local bond stress-slip relationships of deformed bars under generalized excitations. **Earthquake Engineering Research Centre, University of California, Berkeley**, 1982.
- ELWI, A. E.; HRUDEY, T. M. Finite element model for curved embedded reinforcement. **Journal of Engineering Mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 115, n. 4, p. 740–754, 1989.
- ESPION, B. Benchmark examples for creep and shrinkage analysis programmes:(invited lecture). *In*: E & FN SPON. **Creep and Shrinkage of Concrete:(Proceedings of the 5th RILEM International Symposium)**. [*S.l.*: *s.n.*], 1993. p. 877–888.
- EUROPÉEN, C. **Eurocode 2: Design of concrete structures—Part 1-1: General rules and rules for buildings**. [*S.l.*], 2004.
- FANG, C.; LUNDGREN, K.; PLOS, M.; GYLLTOFT, K. Bond behaviour of corroded reinforcing steel bars in concrete. **Cement and concrete research**, Elsevier, v. 36, n. 10, p. 1931–1938, 2006.
- FARFAN, R. D. D. **Análise tridimensional de estruturas geotécnicas submetidas a reforço e drenagem**. 2008. 153 p. Tese (Doutorado) — Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2008.
- FELIX, E. F. **Modelagem da deformação do concreto armado devido à formação dos produtos de corrosão**. 2018. 162 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.
- FÉLIX, E. F. **Estudo numérico-experimental da fadiga em concretos submetidos a compressão cíclica: proposição de um modelo de dano acumulado**. 2022. 309 p. Tese (Doutorado em Estruturas) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

- FERGUSON, P. M.; TURPIN, R. D.; THOMPSON, J. N. Minimum bar spacing as a function of bond and shear strength. *In: Journal Proceedings*. [S.l.: s.n.], 1954. v. 50, n. 6, p. 869–887.
- FERNANDES, R. M. **A influência das ações repetidas na aderência aço-concreto**. 2000. 155 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.
- FERNANDES, V. A. **Análise elastoplástica bidimensional de meios reforçados com fibras**. 2016. 113 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.
- FIB MODEL CODE. **Model Code 2010: First complete draft: Volume 1**. [S.l.: s.n.]: International Federation for Structural Concrete (FIB), 2010. (Bulletin (fib Fédération internationale du béton)).
- FRANÇA, M. B. B. **Estudo experimental da aderência aço-concreto para barras finas de aço CA-50**. 2010. 95 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Belo Horizonte, 2010.
- FUSCO, P. B. **Técnica de armar as estruturas de concreto**. São Paulo: Pini, 1995.
- GOTO, Y. Cracks formed in concrete around deformed tension bars. *In: Journal Proceedings*. [S.l.: s.n.], 1971. v. 68, n. 4, p. 244–251.
- GROOT, A. K. D.; KUSTERS, G. M. A.; MONNIER, T. Numerical modelling of bond slip behavior. **Heron**, I.B.B.C. Institute TNO, Delft, Netherlands, v. 26, p. 25418, 1981.
- GUELLO, G. A. **Simulação Computacional De Estruturas De Concreto Por Meio Da Mecânica Do Dano**. 2002. 130 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) — Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.
- HABLITZEL, M. P.; GARCIA, D. E.; HOTZA, D. Interfaces fracas em compósitos de matriz cerâmica de alumina/alumina. **Matéria (Rio de Janeiro)**, SciELO Brasil, v. 16, n. 3, p. 788–794, 2011.
- HAMMER, P. C.; MARLOWE, O. J.; STROUD, A. H. Numerical integration over simplexes and cones. **Mathematical Tables and Other Aids to Computation**, JSTOR, v. 10, n. 55, p. 130–137, 1956.
- HARAJLI, M. H. Bond stress-slip model for steel bars in unconfined or steel, frc, or frp confined concrete under cyclic loading. **Journal of Structural Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 135, n. 5, p. 509–518, 2009.
- HOLZAPFEL, G. A. **Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering**. [S.l.: s.n.]: John Wiley & Sons, 2000. 470 p.
- INGRAFFEA, A. R.; GERSTK, W. H.; GERGELY, P.; SAOUMA, V. Fracture mechanics of bond in reinforced concrete. **Journal of Structural Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 110, n. 4, p. 871–890, 1984.

- JIN, L.; LIU, M.; ZHANG, R.; DU, X. 3d meso-scale modelling of the interface behavior between ribbed steel bar and concrete. **Engineering Fracture Mechanics**, Elsevier, v. 239, 2020.
- KEMP, E. L.; BREZNY, F. S.; UNTERSSPAN, J. A. Effect of rust and scale on the bond characteristics of deformed reinforcing bars. *In: Journal Proceedings*. [S.l.: s.n.], 1968. v. 65, n. 9, p. 743–756.
- KWAK, H. G.; FILIPPOU, F. C. **Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads**. [S.l.: s.n.]: Citeseer, 1990.
- KWAK, H. G.; KIM, J. K. Implementation of bond-slip effect in analyses of rc frames under cyclic loads using layered section method. **Engineering structures**, Elsevier, v. 28, n. 12, p. 1715–1727, 2006.
- KWAK, H. G.; KIM, S. P. Nonlinear analysis of rc beams based on moment–curvature relation. **Computers & structures**, Elsevier, v. 80, n. 7-8, p. 615–628, 2002.
- LACROIX, C.; LEGUILLON, D.; MARTIN, E. The influence of an interphase on the deflection of a matrix crack in a ceramic-matrix composite. **Composites science and technology**, Elsevier, v. 62, n. 4, p. 519–523, 2002.
- LEMAITRE, J. **A course on damage mechanics**. [S.l.: s.n.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- LEONEL, E. D. Modelos não lineares do método dos elementos de contorno para análise de problemas de fratura e aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas à fadiga. São Carlos, p 406, 2009.
- LEONHARDT, F.; MONNIG, E. **Construções de concreto**. [S.l.: s.n.]: Interciência, 1977.
- LIU, S.-W.; LIU, Y.-P.; CHAN, S.-L. Advanced analysis of hybrid steel and concrete frames: Part 2: Refined plastic hinge and advanced analysis. **Journal of Constructional Steel Research**, Elsevier, v. 70, p. 337–349, 2012.
- LOWES, L. N.; MOEHLE, J. P.; GOVINDJEE, S. Concrete-steel bond model for use in finite element modeling of reinforced concrete structures. **ACI Structural Journal**, v. 101, n. 4, p. 501–511, 2004.
- LUKE, W. G. D. M. **Análise numérica não-linear de elementos de concreto estrutural considerando a variação de aderência**. 2015. 148 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) — Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, 2015.
- LUNDGREN, K. Modelling of bond: Theoretical model and analyses', report 99: 5. **Göteborg: Division of Concrete Structures, Chalmers University of Technology**, 1999.
- LUNDGREN, K.; GUSTAVSON, R.; MAGNUSSON, J. Finite element modelling as a tool to understand the bond mechanisms. **Bond in Concrete - from research to standarts, Proceedings... Budapest**, 2002.

- LUTZ, L. A.; GERGELY, P. Mechanics of bond and slip of deformed bars in concrete. *In: Journal Proceedings*. [S.l.: s.n.], 1967. v. 64, n. 11, p. 711–721.
- MACEDO, B. N. T. **Determinação do coeficiente de conformação superficial de barras para o uso em concreto armado**. 2018. 128 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.
- MAINS, R. M. Measurement of the distribution of tensile and bond stresses along reinforcing bars. *In: Journal proceedings*. [S.l.: s.n.], 1951. v. 48, n. 11, p. 225–252.
- MALVAR, L. J. **Bond stress-slip characteristics of FRP rebars**. [S.l.], 1994.
- MARINS NETO, J. **Análise numérica não-linear de estruturas de concreto armado considerando o fenômeno da aderência entre o aço e o concreto**. 2007. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) — Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.
- MATTHEWS, F. L.; RAWLINGS, R. D. **Composite materials: engineering and science**. [S.l.: s.n.]: Woodhead Publishing, 1994.
- MAZARS, J. **Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure**. 1984. Tese (Docteur es Sciences) — Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, France, 1984.
- MEHLHORN, G.; KEUSER, M. Isoparametric contact elements for analysis of reinforced concrete. *In: ASCE. Finite element analysis of reinforced concrete structures*. [S.l.: s.n.], 1986. p. 329–347.
- MIRZA, S. M.; HOUDE, J. Study of bond stress-slip relationships in reinforced concrete. *In: Journal proceedings*. [S.l.: s.n.], 1979. v. 76, n. 1, p. 19–46.
- MORITA, S.; FUJII, S. Bond-slip models in finite element analysis. *In: ASCE. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures*. [S.l.: s.n.], 1985. p. 348–363.
- NGO, D.; SCORDELIS, A. C. Finite element analysis of reinforced concrete beams. *In: Journal Proceedings*. [S.l.: s.n.], 1967. v. 64, n. 3, p. 152–163.
- NOGUEIRA, C. G.; HARAKI, J. V. D. L. Aplicação do modelo de dano de mazars na análise numérica de vigas em concreto armado: Um estudo sobre a influência dos parâmetros internos do modelo de dano combinados a modelos de resistência ao cisalhamento. *In: I Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia*. Curitiba: [S.l.: s.n.], 2016.
- OGDEN, R. W. **Non-linear elastic deformations**. New York: Dover Publications, 1997. (Dover Civil and Mechanical Engineering).
- ORANGUN, C. O.; JIRSA, J. O.; BREEN, J. E. A reevaluation of test data on development length and splices. *In: Journal Proceedings*. [S.l.: s.n.], 1977. v. 74, n. 3, p. 114–122.
- OZBOLT, J.; ELIGEHAUSEN, R. Numerical simulation of cycling bond-slip behavior. **Bond in Concrete**, Proc. Int Conf., CEB, p. 1227–1233, 1992.

PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Acadview: Software para pós-processamento em elementos finitos 2d e 3d. **Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos**, 2005.

PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A direct fem approach for particulate reinforced elastic solids. **Composite Structures**, Elsevier, v. 141, p. 282–291, 2016.

PACCOLA, R. R.; PIEDADE NETO, D.; CODA, H. B. Geometrical non-linear analysis of fiber reinforced elastic solids considering debonding. **Composite Structures**, Elsevier, v. 133, p. 343–357, 2015.

PARENTE JR, E.; NOGUEIRA, G. V.; NETO, M. M.; MOREIRA, L. S. Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frames. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, SciELO Brasil, v. 7, p. 879–904, 2014.

PEREGO, M. **Danneggiamento dei material lapidei: leggi costitutive, analisis per elementi finiti ed applicazioni**. 1989–1990. Tese (Doutorado) — Politecnico de Milano, Milan, 1989–1990.

PERRY, E. S.; THOMPSON, J. N. Bond stress distribution on reinforcing steel in beams and pullout specimens. *In: Journal Proceedings*. [S.l.: s.n.], 1966. v. 63, n. 8, p. 865–876.

PHILIPS, D. V.; WU, Z. P. An oriented bar formulation with bond-slip. *In: Proceeding of the international conference on numerical method in engineering: Theory and application*. [S.l.: s.n.], 1990. p. 320–328.

PITUBA, J. J. C. **Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo**. 1998. Dissertação (Mestrado em Estruturas) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

POSTERLLI, M. C. **Modelagem da expansão devido à reação álcali-agregado de concreto armado e reforçado com fibras**. 2017. 157 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

PROENÇA, S. P. B. Simulação numérica do comportamento de elementos estruturais em concreto e argamasa armada pelo emprego de um modelo de dano. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, v. 8, n. 4, p. 351–360, 1992.

RAMOS, É. S. **Modelagem numérica da propagação da corrosão por cloretos em estruturas de concreto armado**. 2020. 245 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

REALFONZO, R. Analytical modelling of bond between frp reinforcing bars and concrete. *In: CRC PRESS. Non-Metallic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures: Proceedings of the Second International RILEM Symposium*. [S.l.: s.n.], 1995. v. 29, p. 164.

REHM, G. **The basic principles of the bond between steel and concrete**. [S.l.: s.n.]: Cement and Concrete Association, 1968.

- RILEM, T. C. Rc 5: Bond test for reinforcement steel. 1. beam test. **Materials and Structures**, v. 6, n. 32, p. 213–217, 1982.
- RILEM, T. C. Rc 6: Bond test reinforcing steel, 2. pull-out test. **London (UK): E & FN SPON**, 1983.
- ROSA, W. A. **Modelagem do deslizamento entre o aço e o concreto com tensão de aderência não-linear**. 1994. 121 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1994.
- ROSETO, B. G. P. **Análise dinâmica de estruturas de concreto armado via elementos finitos**. 2018. 167 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) — Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2018.
- ROSSETTI, V. A.; GALEOTA, D.; GIAMMATTEO, M. M. Local bond stress-slip relationships of glass fibre reinforced plastic bars embedded in concrete. **Materials and Structures**, Springer, v. 28, n. 6, p. 340–344, 1995.
- ROTS, J. G. **Computational modeling of concrete fracture**. 1988. Tese (Doutorado) — Delft University of Technology, Delft, Netherlands, 1988.
- SALARI, M. R.; SPACONE, E. Finite element formulations of one-dimensional elements with bond-slip. **Engineering structures**, Elsevier, v. 23, n. 7, p. 815–826, 2001.
- SALOMÃO, R. C. **Análise da Influência do Campo Higrométrico sobre a Reação Álcali-Agregado**. 2017. 98 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.
- SAMPAIO, M. S.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Fully adherent fiber–matrix fem formulation for geometrically nonlinear 2d solid analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 66, p. 12–25, 2013.
- SAMPAIO, M. S. M. **Análise não linear geométrica de cascas laminadas reforçadas com fibras**. 2014. 190 p. Tese (Doutorado em Estruturas) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.
- SAMPAIO, M. S. M.; CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Análise não linear geométrica de sólidos elásticos bidimensionais reforçados com fibras via mef. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, v. 13, n. 59, p. 59–62, 2011.
- SAMPAIO, M. S. M.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A geometrically nonlinear fem formulation for the analysis of fiber reinforced laminated plates and shells. **Composite Structures**, Elsevier, v. 119, p. 799–814, 2015.
- SANTOS, N. O. **Modelos de dano para concreto**. 2015. 122 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.
- SILVA, A. D. da. **Simulação Numérica de Reforço de Pilares por Encamisamento**. 2021. 78 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.



- SIMÃO, W. I. D. S. **Modelos de armadura e aderência para análise não-linear de estruturas de concreto armado**. 2003. 126 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) — Escola de Engenharia, Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2003.
- TAVARES, A. J. **Aderência aço-concreto: análise numérica dos ensaios pull-out e APULOT**. 2012. 141 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2012.
- TAVARES, M. D. G. **Simulação da perda de protensão aderente em elementos de concreto**. 2020. 133 p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.
- TEKLAL, F.; DJEBBAR, A.; ALLAOUI, S.; HIVET, G.; JOLIFF, Y.; KACIMI, B. A review of analytical models to describe pull-out behavior-fiber/matrix adhesion. **Composite Structures**, Elsevier, v. 201, p. 791–815, 2018.
- TOSATI, M. **Estudo sobre a aplicabilidade de um novo método de acoplamento para malhas não conformes de elementos finitos em projetos mecânicos**. 2019. 84 p. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2019.
- TOSATI, M.; MANZOLI, O. L.; RODRIGUES, E. A. Uma nova técnica para acoplamento de malhas de elementos finitos não conformes: aplicação a problemas de contato. **Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia**, v. 2, n. 34, p. 56–70, 2017.
- TURGUT, C.; JASON, L.; DAVENNE, L. Structural-scale modeling of the active confinement effect in the steel-concrete bond for reinforced concrete structures. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 172, p. 103386, 2020.
- VANALLI, L. **O MEC e o MEF aplicados à análise de problemas viscoplásticos em meios anisotrópicos e compostos**. 2004. 194 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.
- VANALLI, L.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A simple way to introduce fibers into fem models. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 24, n. 7, p. 585–603, 2008.
- WATSTEIN, D. Bond stress in concrete pullout specimens. *In: Journal Proceedings*. [S.l.: s.n.], 1941. v. 38, p. 37–52.
- WOLENSKI, A. R. V.; CASTRO, S.; MONTEIRO, A.; PENNA, S.; PITANGUEIRA, R. Modelos constitutivos de microplanos e perda de aderência na análise de estruturas de concreto armado. *In: 56º Congresso Brasileiro do Concreto, IBRACON, Natal, RN*. [S.l.: s.n.], 2014.
- XIAOYU, J.; XIANGAN, K. Micro-mechanical characteristics of fibre/matrix interfaces in composite materials. **Composites science and technology**, Elsevier, v. 59, n. 5, p. 635–642, 1999.

---

YANKELEVSKY, D. Z. New finite element for bond-slip analysis. **Journal of Structural engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 111, n. 7, p. 1533–1542, 1985.

YANKELEVSKY, D. Z. A two-phase one dimensional model for steel-concrete interaction. **Computers & structures**, Elsevier, v. 65, n. 6, p. 781–794, 1997.

