

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Escola de Engenharia de São Carlos

**ANÁLISE TRIDIMENSIONAL MULTIFÍSICA DA DIFUSÃO DE  
CLORETOS EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO: UMA  
ABORDAGEM PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

**Ray Calazans dos Santos Silva**

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

RAY CALAZANS DOS SANTOS SILVA

**ANÁLISE TRIDIMENSIONAL MULTIFÍSICA DA DIFUSÃO DE  
CLORETOS EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO: UMA  
ABORDAGEM PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

**Versão Corrigida**

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Edson Denner Leonel

SÃO CARLOS

2023

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

S586a Silva, Ray Calazans dos Santos  
Análise tridimensional multifísica da difusão de cloretos em estruturas de concreto armado: uma abordagem pelo método dos elementos finitos / Ray Calazans dos Santos Silva; orientador Edson Denner Leonel. São Carlos, 2023.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2023.

1. análise multifísica. 2. difusão de cloretos no concreto armado. 3. mecânica do dano. 4. método dos elementos finitos. I. Título.

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Bacharel **RAY CALAZANS DOS SANTOS SILVA**.

Título da tese: "Análise tridimensional multifísica da difusão de cloretos em estruturas de concreto armado: uma abordagem pelo método dos elementos finitos".

Data da defesa: 20/01/2023.

### **Comissão Julgadora**

### **Resultado**

Prof. Associado **Edson Denner Leonel (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

APROVADO

Prof. Dr. **Caio Gorla Nogueira**  
(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"/UNESP-Bauru)

APROVADO

Prof. Dr. **Elyson Andrew Pozo Liberati**  
(Universidade Estadual de Maringá/UEM)

APROVADO

Prof. Dr. **Marcelo Greco**  
(Universidade Federal de Minas Gerais/UFMG)

APROVADO

Prof. Dr. **Roberto Dalledone Machado**  
(Universidade Federal do Paraná/UFPR)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**



## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus por tudo.

Aos meus pais, Belmiro e Ilmara, por todo apoio incondicional dado ao longo da minha vida. Essa vitória é de vocês.

Aos professores e mestres que passaram por minha vida, os quais trouxeram muitos ensinamentos e serviram de inspiração, em especial gostaria de agradecer aos meus antigos orientadores Marcílio F. G. Silva e João B. Paiva.

Ao professor Edson Denner Leonel pela orientação, disponibilidade, compreensão, conversas e conselhos durante esse período de doutorado, sua ajuda foi fundamental para a conclusão desta pesquisa.

Aos meus familiares, em especial meus irmãos Bruno e Igor.

A minha namorada Adrielle, por todo o companheirismo, amor e compreensão ao longo desta caminhada.

Aos meus amigos de longa data, Hélder, Guilherme e Rosângela, pelas conversas, conselhos e momentos de descontração.

Aos meus amigos da pós-graduação do SET, Anchieta, Danilo, Luan, Camila, Tainá, Thomas, Herbert, Rodrigo, Luís, Matheus, Delfino, Lucas, Welington, e aos demais, por todo o companheirismo durante meu período em São Carlos, foram de suma importância para tornar essa jornada longe de casa mais leve e proveitosa.

Aos professores Caio G. Nogueira e Elyson Liberati pelas contribuições no exame de qualificação.

Agradeço a todos do Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos- USP.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.



## RESUMO

SILVA, R. C. S. **Análise tridimensional multifísica da difusão de cloretos em estruturas de concreto armado: Uma abordagem pelo método dos elementos finitos.** 2023. 164p. Tese (Doutorado em Ciências – Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas))- Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

A corrosão das armaduras é um dos principais agentes desencadeadores de patologias em estruturas de concreto armado, afetando severamente a durabilidade estrutural. Por este motivo, a vida útil nesses tipos de estrutura é comumente definida como o tempo entre a construção e a despassivação das armaduras. Tal período é conhecido como iniciação do processo corrosivo, em que os íons cloreto são os principais agentes causadores da corrosão de armaduras, os quais penetram nos poros do concreto preponderantemente por difusão. Apesar do amplo uso de soluções analíticas para a previsão do tempo de início da corrosão, este problema pode ser melhor solucionado por meio dos métodos numéricos. Assim, neste trabalho, propõe-se um modelo multifísico tridimensional baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF) para a modelagem da penetração de cloretos no concreto. Esse modelo é baseado numa relação entre deformações equivalentes e o coeficiente de difusividade. O fenômeno difusivo é tratado por meio da abordagem transiente. Além disso, representam-se os campos mecânicos por meio do modelo de dano de Mazars em uma descrição posicional do MEF. São apresentados exemplos que demonstram a efetividade e potencialidade de modelagem fornecida pela formulação proposta.

**Palavras-chave:** método dos elementos finitos; mecânica do dano; difusão de cloretos no concreto armado; vida útil do concreto armado; análise multifísica.





## ABSTRACT

SILVA, R. C. S. **Multiphysics three-dimensional analysis of chloride diffusion in reinforced concrete structures: A finite element approach.** 2023. 164p. Thesis (PhD. in Civil Engineering (Structural Engineering)) - School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2023.

Corrosion of reinforcement is one of the main triggering agents of pathologies in reinforced concrete structures, severely affecting the structural durability. For this reason, the service life in these types of structures is commonly defined as the time between construction and depassivation of reinforcement. This period is known as the initiation of the corrosive process, in which chloride ions are the main agents causing the corrosion of reinforcement, which penetrate the pores of the concrete mainly by diffusion. Despite the widespread use of analytical solutions for predicting the time of onset of corrosion, this problem can be better solved using numerical methods. Thus, in this work, a three-dimensional multiphysics model based on the Finite Element Method (FEM) is proposed for modeling chloride penetration in concrete. This model is based on a relationship between equivalent strains and the diffusivity coefficient. The diffusion phenomenon is treated through the transient approach. In addition, the mechanical fields are represented through the Mazars damage model in a positional description of the FEM. Examples are presented that demonstrate the effectiveness and potential of modeling provided by the proposed formulation.

**Key-words:** finite element method; damage mechanics; diffusion of chlorides in reinforced concrete; service life of reinforced concrete; multiphysics analysis.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1-1- Corrosão em armadura de uma viga de concreto armado .....	19
Figura 1-2- Varanda do edifício Versailles após o acidente que matou 2 pessoas.....	23
Figura 2-1- Modelo de vida útil de Tuutti (1982) .....	33
Figura 3-1- Mudança de configuração de um sólido.....	41
Figura 3-2- Mapeamento do elemento finito tetraédrico nas configurações inicial e final. ....	47
Figura 3-3- Mapeamento de elemento finito de fibra de ordem qualquer nas configurações inicial e final .....	51
Figura 3-4- Esquema estrutural da viga.....	60
Figura 3-5- Malha em elementos finitos.....	60
Figura 3-6- Resultados do MEF para deslocamentos.....	61
Figura 3-7- Deslocamentos relativos .....	62
Figura 3-8- Esquema estrutural da viga em balanço .....	62
Figura 3-9- Malha em MEF para a matriz.....	64
Figura 3-10- Deslocamentos verticais .....	64
Figura 3-11- Deslocamento vertical para análise tridimensional (m) .....	65
Figura 3-12- Deslocamento na extremidade livre .....	66
Figura 3-13- Tensão na fibra ao longo do comprimento .....	67
Figura 4-1- Princípio da deformação equivalente .....	71
Figura 4-2- Diagramas tensão-deformação para o concreto utilizando a mecânica do dano ...	73
Figura 4-3- Processo de formação de fissuras .....	76
Figura 4-4- Não objetividade da resposta com o refinamento da malha.....	76
Figura 4-5- Leis coesivas.....	78
Figura 4-6- Obtenção da relação tensão-deformação à tração segundo o Model Code 2010 ..	79
Figura 4-7- Modelos analíticos para compressão .....	80

Figura 4-8- Calibração dos parâmetros em relação ao modelo de Kent & Park (1976).....	82
Figura 4-9- Calibração dos parâmetros em relação ao modelo de tração do Model Code (2010) .....	82
Figura 4-10- Lei de evolução do dano bilinear .....	83
Figura 4-11- Tensão-deformação para o modelo elastoplástico unidimensional .....	86
Figura 4-12- Parâmetros do encruamento linear isótropo .....	89
Figura 4-13- Geometria e configurações de reforço.....	90
Figura 4-14- Discretização empregada no problema.....	91
Figura 4-15- Resultado da viga subarmada para três malhas distintas.....	92
Figura 4-16- Resultados com a regularização para a viga subarmada .....	93
Figura 4-17- Resultados com a regularização para a viga normalmente armada.....	94
Figura 4-18- Resultados com a regularização para a viga superarmada .....	94
Figura 4-19- Teste de convergência para viga superarmada .....	95
Figura 4-20- Resultados da viga superarmada para diferentes modelos de compressão.....	95
Figura 4-21- Comparativo entre os tipos de função da lei de dano a tração para a viga superarmada.....	96
Figura 4-22- Resultados para os diferentes regimes da armadura.....	97
Figura 4-23- Tensão normal nas armaduras da viga superarmada no último passo.....	97
Figura 4-24- Tensão máxima na fibra mais solicitada .....	98
Figura 4-25- Processo de danificação da viga superarmada .....	98
Figura 5-1- Volume de controle diferencial para problema de potencial.....	101
Figura 5-2- Subdivisão do contorno do corpo .....	104
Figura 5-3- Variação de concentração num intervalo de tempo.....	109
Figura 5-4- Geometria e malha do sólido circular vazado .....	112
Figura 5-5- Resultados da análise do problema circular vazado .....	113
Figura 5-6- Componentes do Fluxo.....	114
Figura 5-7- Resultados ao longo da direção radial .....	114

Figura 5-8- Problema de fluxo unidimensional em cubo .....	115
Figura 5-9- Concentrações de cloreto.....	116
Figura 5-10- Fluxo na direção x .....	116
Figura 5-11- Concentração em função da posição x .....	116
Figura 5-12- Problema de fluxo bidimensional em cubo .....	118
Figura 5-13- Resultados para T=20 anos.....	118
Figura 5-14- Concentração x profundidade.....	119
Figura 5-15- Problema de fluxo tridimensional em cubo.....	120
Figura 5-16- Resultados em t= 2 anos para T=40 anos .....	121
Figura 5-17- Concentração no ponto A ao longo do tempo .....	122
Figura 5-18- Concentração de cloretos ao longo da profundidade.....	123
Figura 6-1- Estágios da relação $k_{ef} - w$ .....	126
Figura 6-2- Relação $k_{ef} - E_{eq}$ .....	128
Figura 6-3- Esquema estrutural da viga engastada.....	129
Figura 6-4- Condições de contorno do problema de difusão.....	130
Figura 6-5- Malha do problema.....	131
Figura 6-6- Força x deslocamento .....	131
Figura 6-7- Variável de dano ao longo do domínio da viga para diferentes valores de F:.....	132
Figura 6-8- Concentração de cloreto para o concreto íntegro após 50 anos.....	133
Figura 6-9- Concentração de cloreto para F=50% $F_{ult}$ após 50 anos .....	133
Figura 6-10- Concentração de cloreto para F= $F_{ult}$ após 50 anos .....	133
Figura 6-11- Concentração de cloreto ao longo do comprimento da armadura após 50 anos	134
Figura 6-12- Concentração de cloreto num ponto da armadura ao longo do tempo .....	135
Figura 6-13- Viga biengastada submetida à uma força concentrada.....	136
Figura 6-14- Condições de contorno problema de difusão.....	136
Figura 6-15- Funções ao longo do tempo.....	137

Figura 6-16- Malha em MEF adotada no problema .....	137
Figura 6-17- Estado de danificação .....	138
Figura 6-18- Concentração de cloreto após 50 anos para o concreto íntegro.....	139
Figura 6-19- Concentração de cloreto após 50 anos para o Carregamento 1 .....	139
Figura 6-20- Concentração de cloreto após 50 anos para o Carregamento 2 .....	139
Figura 6-21- Concentração de cloreto ao longo do comprimento da armadura para t=50anos .....	140
Figura 6-22- Concentração de cloreto num ponto da armadura ao longo do tempo .....	141

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3-1- Propriedades do material e geometria da estrutura .....	60
Tabela 3-2- Comparação entre os resultados analítico e numérico .....	61
Tabela 3-3- Propriedades e dados do problema.....	63
Tabela 3-4- Resultados das análises para o deslocamento $w$ na extremidade livre .....	65
Tabela 4-1- Energia de Fratura de acordo com as referências .....	78
Tabela 4-2- Propriedades do concreto .....	90
Tabela 4-3- Propriedades do aço .....	91
Tabela 5-1 – Diferentes esquemas transientes.....	111
Tabela 6-1 – Relações $k_{ef} - w$ disponíveis na literatura .....	125
Tabela 6-2 – Limites inferiores e superiores de abertura de fissura .....	127
Tabela 6-3- Propriedades dos materiais e modelos .....	130
Tabela 6-4- Resultados para as armaduras superior e inferior .....	142





## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>19</b>
1.1	Objetivos .....	22
1.2	Justificativa .....	23
1.3	Metodologia .....	24
1.4	Organização do texto .....	25
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>27</b>
2.1	Método dos elementos finitos posicional .....	27
2.2	Mecânica do dano.....	29
2.3	Corrosão em armaduras de concreto armado.....	32
2.4	Modelos de difusão de íons cloreto no concreto armado .....	35
<b>3</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL .....</b>	<b>41</b>
3.1	Mudança de configuração .....	41
3.2	Equilíbrio lagrangiano.....	42
3.3	Lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhof.....	44
3.4	Solução geometricamente exata: Método de Newton-Raphson.....	45
3.5	Elemento finito de sólido tridimensional.....	46
3.5.1	Vetor de forças internas .....	48
3.5.2	Hessiana .....	49
3.6	Elemento finito de fibra de ordem qualquer .....	50
3.6.1	Vetor de forças internas .....	53
3.6.2	Hessiana .....	54
3.7	Acoplamento entre fibra e sólido .....	55
3.7.1	Contribuição de fibras no vetor de forças internas e na Hessiana global.....	57
3.7.2	Estratégia numérica para o acoplamento.....	58
3.8	Exemplos de validação.....	59

3.8.1 Exemplo 1: Viga homogênea submetida a grandes deslocamentos.....	59
3.8.2 Exemplo 2: Viga reforçada com fibra.....	62
<b>4 NÃO LINEARIDADE FÍSICA.....</b>	<b>69</b>
<b>4.1 Mecânica do dano.....</b>	<b>69</b>
4.1.1 Modelo de Dano de Mazars (1984).....	70
4.1.2 Fenômeno de localização e regularização por energia de fratura .....	75
4.1.3 Calibração dos parâmetros de Mazars.....	80
4.1.4 Lei de evolução do dano bilinear .....	83
<b>4.2 Teoria da plasticidade.....</b>	<b>84</b>
4.2.1 Formulação elastoplástica unidimensional com encruamento.....	86
<b>4.3 Exemplos de validação.....</b>	<b>89</b>
4.3.1 Exemplo 1- Viga de concreto armado de Álvares (1993) sem regularização.....	89
4.3.2 Exemplo 2- Viga de concreto armado de Álvares (1993) com regularização .....	92
<b>5 PROBLEMA DE DIFUSÃO .....</b>	<b>100</b>
<b>5.1 Equação diferencial do problema de potencial .....</b>	<b>100</b>
<b>5.2 Condições de contorno.....</b>	<b>104</b>
<b>5.3 O MEF aplicado no problema de difusão .....</b>	<b>105</b>
5.3.1 Método dos Resíduos Ponderados .....	106
5.3.2 Equação da Difusão via MEF .....	107
<b>5.4 Difusão em regime estacionário – considerações.....</b>	<b>109</b>
<b>5.5 Difusão em regime transiente.....</b>	<b>109</b>
<b>5.6 Exemplos de aplicação .....</b>	<b>111</b>
5.6.1 Exemplo 1- Regime estacionário: domínio circular.....	112
5.6.2 Exemplo 2 – Regime Transiente: cubo com fluxo unidimensional .....	115
5.6.3 Exemplo 3 - Regime transiente: cubo com fluxo bidimensional .....	117
5.6.4 Exemplo 4- Regime transiente: Cubo com fluxo tridimensional.....	119
<b>6 PROBLEMA MULTIFÍSICO .....</b>	<b>124</b>
<b>6.1 Relação coeficiente de difusividade-abertura de fissura .....</b>	<b>124</b>
<b>6.2 Relação coeficiente de difusividade-deformação equivalente .....</b>	<b>127</b>

<b>6.3 Exemplos de aplicação .....</b>	<b>129</b>
6.3.1 Exemplo 1 – Viga engastada e livre com fluxo tridimensional .....	129
6.3.2 Exemplo 2: Viga biengastada com carregamento variável no tempo .....	135
<b>7 CONCLUSÃO .....</b>	<b>143</b>
<b>7.1 Sugestões para trabalhos futuros.....</b>	<b>145</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>146</b>



# 1 INTRODUÇÃO

---

O concreto armado é o método construtivo mais empregado em obras civis ao redor do mundo. Isto se deve a sua fácil e difundida execução, larga disponibilidade de matéria-prima, baixo custo de execução e manutenção, elevada resistência mecânica do conjunto, resistência ao fogo e adequada durabilidade (PORTO; FERNANDES, 2015).

Durante a vida útil definida em projeto, é esperado que a estrutura de concreto armado desempenhe suas funções quanto a estabilidade, segurança e funcionalidade sob as condições ambientais as quais está inserida e previstas em projeto. Entretanto, seja por erro de projeto, erro de execução, falta de manutenção ou mudanças nos cenários de agressividade ambiental, é comum o surgimento de algumas patologias que levam a uma diminuição da vida útil da estrutura (RIBEIRO *et al.*, 2014).

Dentre as principais patologias apresentadas no concreto armado, muitas são causadas pela corrosão das armaduras. A corrosão pode ser entendida como a interação destrutiva entre o material e o meio ambiente, resultado de reações químicas ou eletroquímicas. No concreto armado as principais manifestações patológicas são: destacamento do cobrimento de concreto das armaduras, manchas superficiais oriundas do produto de corrosão, redução da seção e perda de aderência das armaduras. Por conseguinte, tem-se uma situação de risco a segurança estrutural (HELENE, 1986). A Figura 1-1 exibe algumas dessas manifestações.

Figura 1-1- Corrosão em armadura de um pilar de concreto armado.



Fonte: Pellizzer (2019).

O principal mecanismo degenerativo da corrosão de armadura é a difusão de íons cloreto, onde o processo corrosivo é acelerado devido ao aumento de condutividade elétrica do

eletrólito gerado pelos cloretos. Destaca-se como os principais fatores que alteram a taxa de penetração dos íons cloreto: tipo e consumo de cimento, consistência, fator água/cimento, localização geográfica da estrutura e fissuração do concreto de cobrimento (CASCUDO, 1997; CAVALCANTI e CAVALCANTI, 2010; MARSAVINA *et al.*, 2009; MEDEIROS e HELENE, 2003).

A danificação do cobrimento pode ser causada por ação mecânica (tensões de tração muito altas), efeitos não mecânicos (temperatura, retração etc.) ou pela própria corrosão da armadura na etapa de propagação (OZBOLT *et al.*, 2010). Gowripalan *et al.* (2000) demonstram que a relação largura de fissura/cobrimento é um parâmetro adequado para estimar a durabilidade de uma estrutura de concreto armado.

A prevenção e reabilitação são duas linhas de ação para solucionar o problema de corrosão de armaduras. Nas ações de prevenção estão as medidas que visam evitar o início da corrosão durante a vida útil da estrutura, seja por meio de boas práticas de projeto ou manutenção preventiva. Na reabilitação, as intervenções são realizadas após o surgimento das manifestações, e por isso, têm custos mais elevados e maiores transtornos que a prevenção, tendo em vista que pode ser necessário a interrupção do uso da estrutura. Portanto, sempre que possível, métodos preventivos são preferíveis para o combate da corrosão em armaduras (FORSYTH e LOURENÇO, 1997).

Tuutti (1982) propôs um modelo simplificado para explicar o conceito de vida útil de estruturas de concreto armado sob o ponto de vista da corrosão. Esse modelo é composto por duas fases: iniciação e propagação. A etapa de iniciação é o tempo transcorrido desde a inserção da estrutura no ambiente até o momento de despassivação da armadura; enquanto a etapa de propagação é definida como o período de tempo após a despassivação até uma condição inaceitável de deterioração. Como esta última etapa possui um menor período que a primeira, é prudente e vantajoso estudar o período de iniciação.

Em vista disso, foram propostos diversos modelos matemáticos que buscam estimar a vida útil de estruturas de concreto armado sujeitas a corrosão, seja para a etapa de iniciação ou propagação. Para tanto, é de suma importância o conhecimento dos mecanismos degenerativos governantes do problema, visto que a reparação de estruturas de concreto que apresentam corrosão tem um custo direto e indireto relativamente alto. Logo, é relevante dispor de uma ferramenta para a previsão da durabilidade de estruturas de concreto armado para modelar de forma realista os processos de corrosão e seu risco a segurança estrutural (OZBOLT *et al.*, 2010; SOUZA, 2021).

O fenômeno de difusão de íons cloreto é comumente modelado com a Primeira e Segunda Leis de Fick. Na primeira, tem-se um regime independente do tempo (estacionária), enquanto na segunda, o tempo é uma das variáveis (transiente). No entanto, algumas hipóteses simplificadoras são necessárias para a obtenção de uma solução analítica, tais como: material homogêneo, isotrópico, inerte, condição de fluxo unidimensional, domínio semi-infinito, condições de contorno constantes ao longo do tempo, entre outras. Com isso, essas soluções analíticas, assim como outras disponíveis na literatura, têm aplicação limitada devido as restrições e considerações do modelo (OTIENO *et al.*, 2010; PELLIZZER, 2019).

Os métodos numéricos surgiram para proporcionar soluções aproximadas em problemas com complexas geometrias e condições de contorno. Suas aplicações nas mais diversas linhas de pesquisas científicas estão em constante crescimento e apesar das soluções não serem matematicamente exatas, possuem um caráter mais generalista e elevada precisão nos resultados. Destacam-se no âmbito da Engenharia de Estruturas, dentre outros métodos, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método dos Elementos Finitos (MEF); o MEF é prático e eficiente e, por isso, é visto como a melhor opção para problemas de domínio, sendo o método numérico mais difundido pelo meio técnico (SILVA, 2020).

Considerando que o fenômeno de penetração de cloretos no concreto fissurado é um processo tridimensional e notoriamente dependente do tempo, uma análise que busque estimar a vida útil da estrutura é melhor representada por um modelo tridimensional e em regime transiente (SOUZA, 2021). Um exemplo de modelo que contempla essas especificações é o Problema de Potencial Transiente resolvido por meio do Método dos Elementos Finitos em três dimensões.

Nos casos em que se deseja levar em conta o efeito da fissuração do concreto no problema de difusão de íons cloreto, é necessário dispor de um adequado modelo mecânico para o concreto e o aço. Para isso, as análises que extrapolam o regime elástico linear mostram-se mais realísticas, considerando que as fissuras no concreto surgem no regime não linear (PELLIZZER, 2015).

A mecânica do dano contínuo é empregada para representar a não linearidade física do concreto. Nessa teoria, as descontinuidades infinitesimais oriundas do avanço da degradação mecânica são consideradas homogêneas em um ponto material e a continuidade do material é mantida; assim, a rigidez do material é penalizada por uma variável de dano, a qual pode ser um escalar (dano isotrópico) ou um tensor (dano anisotrópico). Dentre os modelos de dano



presentes na literatura destaca-se o modelo de dano isotrópico de Mazars (1984), dada a sua simplicidade e acurácia reconhecida (RAMOS, 2020).

As armaduras são metais com comportamento dúctil e quando superam o regime elástico apresentam um comportamento plástico, ou seja, desenvolvem deformações irreversíveis. Além disso, é observado um patamar de encruamento no regime plástico caracterizado pelo ganho de resistência com o crescimento das deformações, porém em proporção (rigidez) menor que a do regime elástico. A teoria da plasticidade em conjunto com modelos constitutivos elastoplásticos com encruamento representam esse comportamento (PROENÇA, 2018).

Em conjunto com as teorias não lineares do material citadas anteriormente, pode-se lançar mão da formulação do Método dos Elementos Finitos baseada em posições (MEFP) para a resolução do problema mecânico, essa formulação é classificada como Lagrangiana total com cinemática exata e apresenta elevada precisão e eficiência. Com isso, é possível considerar a não linearidade geométrica da estrutura de maneira intrínseca e geometricamente “exata”, dispensando-se as aproximações envolvidas em análises lineares (CODA, 2018; MARQUES, 2006).

## 1.1 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo geral realizar uma análise multifísica do problema de difusão de íons cloreto no concreto armado considerando a danificação mecânica do concreto de maneira a estimar a vida útil de estruturas sujeitas a corrosão em armaduras.

Para a realização do objetivo geral foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver um código computacional para análises mecânicas de sólidos elásticos tridimensionais baseado no Método dos Elementos Finitos Posicional;
- Implementar no código de análises mecânicas o elemento de treliça (fibra) com modelo constitutivo elastoplástico com encruamento isótropo linear;
- Implementar no código computacional a técnica de embutimento para a simulação de sólidos compósitos (concreto armado);
- Implementar o modelo de dano de Mazars (1984) em conjunto com a técnica de regularização baseada na energia de fratura;

- Desenvolver um código computacional do problema de potencial tridimensional baseado no MEF para análise de difusão de íons cloreto no concreto em regime estacionário e transiente;
- Acoplar o código computacional do problema mecânico baseado no MEF ao código computacional do problema de potencial baseado no MEF.

## 1.2 Justificativa

De acordo com o levantamento realizado por Oliveira, Greco e Bittencourt (2019), no Sistema de Gestão de Obras-de-arte do Departamento Nacional de Infraestrutura em Transportes (DNIT), cerca de 44,2% das patologias encontradas nas pontes federais do Brasil estão associadas à corrosão em armaduras.

Não obstante, o custo financeiro com a prevenção e reparação das estruturas afetadas por essas patologias é alto. Gentil (2011) estima que o gasto de países com um elevado grau de desenvolvimento tecnológico é de aproximadamente 3,5% do Produto Interno Bruto (PIB), correspondendo a cerca de 20 bilhões de dólares gastos anualmente somente no Brasil.

Além da problemática econômica tem-se a questão social, visto que diversos acidentes com perdas de vidas humanas ocorreram nos últimos anos provenientes de efeitos corrosivos no concreto armado, sendo desde desabamentos de sacadas, como no caso do edifício Versailles no município de Fortaleza–CE/Brasil no ano de 2015, a grandes obras de infraestrutura, como o caso do colapso do viaduto *Petrulla* na Itália em 2014 exibida na Figura 1-2.

Figura 1-2- Viaduto Petrulla após o colapso.



Fonte: Anania *et al.* (2018).

Ainda, cabe salientar que nos próximos anos diversas obras de infraestrutura do Brasil possuirão mais de 50 anos desde sua construção e inauguração, idade na qual geralmente

ocorrem os efeitos deletérios da corrosão nas armaduras (RAMOS, 2020); além disso, os grandes centros urbanos do país estão localizados em faixas litorâneas, ambientes de elevada concentração de cloretos (SOUZA, 2021).

### 1.3 Metodologia

A fim de cumprir os objetivos propostos, o desenvolvimento desse trabalho foi organizado em quatro etapas que são complementares e contínuas.

Na primeira etapa foi realizada uma revisão bibliográfica sobre as temáticas: método dos elementos finitos posicional, técnica de embutimento fibra-matriz, mecânica do dano, plasticidade unidimensional, problema de potencial (teoria e resolução pelo MEF), corrosão em armaduras de concreto armado, modelagem da difusão de íons cloretos e análise multifísica mecânica-difusiva; a partir disto, foi projetado um acervo de problemas da literatura para a subsequente validação da formulação proposta.

Na etapa seguinte foi desenvolvido o código computacional em linguagem Fortran 90 para a análise numérica do problema mecânico. A formulação do MEF foi empregada para representar tanto a matriz (concreto) quanto a fibra (armadura), a técnica de embutimento foi utilizada para acoplar fibra e matriz, sem necessariamente haver coincidência dos nós.

Em seguida, as não linearidades dos materiais foram implementadas; a fibra teve seu comportamento representando por um modelo constitutivo elastoplástico com encruamento isotrópico da teoria da plasticidade. Por seu turno, a não linearidade da matriz precisou ser modelada pela mecânica do dano contínuo, especificamente pelo modelo de dano de Mazars (1984) adaptado com a técnica de regularização do fenômeno de localização de deformação baseada na Energia de Fratura, visto que o modelo de dano Mazars apresentou algumas limitações: localização de deformações e dificuldade na calibração dos parâmetros de tração após a regularização. Durante o desenvolvimento dessa etapa, exemplos foram resolvidos e confrontados com os resultados da literatura para a consequente validação.

A terceira etapa consistiu no desenvolvimento do código computacional do problema de potencial tridimensional estacionário e transiente por meio do MEF. O problema de difusão de íons cloretos no concreto é um problema de potencial, sendo possível estimar a vida útil de problemas de corrosão analisados a partir do cálculo do tempo necessário para as armaduras atingirem a concentração de cloretos limite. Com o programa desenvolvido foi possível considerar condições de contorno variáveis no tempo e condições de contorno naturais (fluxo

prescrito). Logo, foi proposta uma estratégia de acoplamento multifísico entre o problema mecânico e o difusivo, sendo possível avaliar a influência da fissuração no processo corrosivo.

Por fim, o autor redigiu a tese de doutorado, no qual foi apresentada a revisão bibliográfica, as metodologias empregadas, as formulações, os resultados, discussões e conclusões obtidas, e em seguida, será realizada a divulgação da pesquisa desenvolvida à comunidade científica por meio de artigos em periódicos e congressos científicos.

#### **1.4 Organização do texto**

No presente capítulo (Capítulo 1) é realizada a introdução ao tema e contextualização da pesquisa a ser realizada neste trabalho, os demais capítulos são apresentados e descritos a seguir:

Capítulo 2: É apresentada uma breve revisão bibliográfica sobre o método dos elementos finitos posicional, mecânica do dano, corrosão em armaduras e modelagem da difusão de íons cloreto no concreto armado.

Capítulo 3: Descreve a formulação do método dos elementos finitos posicional, bem como sua origem, elementos adotados, características do método e exemplos de validação.

Capítulo 4: Aborda as teorias da mecânica do dano e da plasticidade unidimensional, assim como a discussão de exemplos que atestam a formulação e a implementação computacional.

Capítulo 5: Apresenta o problema de difusão estacionário e transiente, formulação por meio do método dos elementos finitos, exemplos de validação no contexto da difusão de íons cloreto e análise de exemplos propostos.

Capítulo 6: É proposta uma estratégia de acoplamento mecânico-difusivo, onde são estudados os efeitos da fissuração (nível de dano) na difusividade do concreto e, conseqüentemente, na vida útil da estrutura.

Capítulo 7: Traz as conclusões do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.



## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

---

No presente capítulo é apresentado uma síntese dos trabalhos desenvolvidos na temática de interesse deste estudo: método dos elementos finitos posicional, mecânica do dano, corrosão de armaduras em concreto armado e modelos de difusão de íons cloreto no concreto armado.

### 2.1 Método dos elementos finitos posicional

O método dos elementos finitos tem se tornado a ferramenta numérica mais utilizada na mecânica dos sólidos e estruturas. De acordo com Assan (2003), o seu desenvolvimento iniciou-se na Inglaterra na década de 1930, quando engenheiros aeronáuticos precisaram analisar as tensões em chapas de asa de avião. Posteriormente, Turner *et al.* (1956) e Clough (1960) propuseram a formulação baseada no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) e a atual denominação de “Método dos Elementos Finitos”. Este termo foi rapidamente difundido no meio técnico, ganhando generalidade e aplicabilidade em diferentes áreas, tais como: eletromagnetismo, transmissão de calor, mecânica dos fluidos, difusão entre outras. (ZIENKIEWICZ *et al.*, 2013).

Outra vertente do MEF foi proposta em trabalhos como: Shabana (1997), Bonet *et al.* (2000) e Coda (2003), em que os parâmetros nodais são as posições e não mais os deslocamentos. A descrição Lagrangiana total é adotada, ou seja, a configuração de referência é sempre fixa e tomada como a configuração inicial. Com isso, as operações matemáticas, implementações computacionais e consideração de não linearidade física são facilitadas, além de ser um método intrinsecamente não linear geométrico (CARVALHO, 2019).

Problemas com grandes deslocamentos e rotações são adequadamente solucionados, mas com moderadas deformações e condições de contorno constantes (NOGUEIRA, 2015). Uma abordagem mais completa sobre mecânica do contínuo não linear para o MEF pode ser consultada em Bonet e Wood (2008). Sobre o Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP) e sua implementação, destaca-se o trabalho de Coda (2018).

Um dos primeiros estudos relatados na literatura em relação ao MEFP é o de Coda e Greco (2004), em que os autores realizaram uma análise estática de pórticos bidimensionais em grandes deslocamentos. Em seguida, os autores estenderam a formulação para treliças espaciais e com um modelo constitutivo elastoplástico em Greco *et al.* (2006). A utilização de sólidos bidimensionais e tridimensionais foi primeiramente explorada por Marques (2006) e Maciel

(2008), respectivamente. Os elementos de cascas foram empregados em estudos de Coda e Paccola (2007), Kzan (2016), Pascon (2008), Sampaio (2014) e Soares (2019). No âmbito das análises dinâmicas, Greco e Coda (2006), Ferreira (2009), Sanchez (2013), Silva (2020), Siqueira (2016), Siqueira (2019) e Fernandes (2022) desenvolveram trabalhos relevantes.

Além dos trabalhos em mecânica dos sólidos, o MEFP é utilizado em outras aplicações de engenharia, como em interação fluido-estrutura, nos quais destacam-se os estudos de Avancini (2018), Fernandes (2016), Fernandes (2020), Moreira (2021), Sanches (2006) e Sanches (2011).

No campo da termomecânica destacam-se os trabalhos de Carrazedo (2009), Rigobello (2011) e Salomão (2021). Um outro tipo de aplicação do MEFP é em simulações da reação álcali-agregado no concreto, como as realizadas nos trabalhos de Posterlli (2017), Salomão (2017) e Balabuch (2018).

O MEFP já foi empregado para análises de corrosão em armaduras, entretanto nestes trabalhos foi considerado somente o período de propagação da corrosão. Em Felix (2018) foi desenvolvido um modelo numérico para a simulação em nível mesoscópico da expansão do concreto armado devido à formação de produtos de corrosão, estes produtos tiveram seu comportamento descritos por modelos analíticos existentes na literatura.

Em Ramos (2020) o MEFP é utilizado para analisar a propagação da corrosão por cloretos em estruturas de concreto armado, e para isso, são implementados elementos finitos bidimensionais reforçados por fibras ou partículas, sendo o acoplamento entre esses domínios realizado por meio da técnica de embutimento (SAMPAIO *et al.*, 2011; VANALLI, 2004; VANALLI; PACCOLA; CODA, 2008;). Tal técnica consiste na imersão dos elementos de reforço na matriz do sólido bidimensional ou tridimensional, sem necessariamente haver coincidência dos nós e, com isso, não se limita as posições nodais do reforço e não ocorre o aumento do número de graus de liberdade do sistema. Por fim, é investigada a influência das pressões interna geradas pela formação dos produtos de corrosão na degradação mecânica do concreto de cobertura por meio do modelo de dano de Mazars (1984).

Assim, o presente trabalho é o primeiro a utilizar o MEFP para estudar o fenômeno de corrosão em armaduras durante o período de iniciação, precisamente no acoplamento da difusão (problema de potencial) com o problema mecânico.

## 2.2 Mecânica do dano

A representação do comportamento não linear físico do concreto é tarefa árdua e complexa, pois os diversos parâmetros que regem este fenômeno são de difícil obtenção e de importância na concepção de um modelo confiável. Em vista disso, diversos modelos discretos e contínuos foram propostos nas últimas décadas com o intuito de representar o comportamento do concreto após o regime elástico linear. Dentre estes modelos, destaca-se no meio técnico a mecânica do dano contínuo (ÁLVARES, 1999; PENNA, 2011).

A mecânica do dano contínuo, como o próprio nome sugere, se baseia na mecânica do contínuo, tendo a deterioração do material assumida como exclusiva do processo de microfissuração distribuída, cuja evolução decorre do aumento dos níveis de sollicitação mecânica. Matematicamente, o processo de evolução da microfissuração é feito via lei constitutiva local, válida ponto a ponto (DRIEMEIER, 1999).

A danificação é reproduzida nas propriedades do material inicialmente elástico alterando o seu tensor constitutivo. Por meio da variável de dano, a qual pode ser um tensor ou um escalar a depender do modelo adotado, as componentes de rigidez do material são reduzidas, levando o material danificado a comportar-se de maneira isotrópica ou anisotrópica (PITUBA, 2003).

Esse tipo de abordagem apresenta grande aplicabilidade prática, já que modelos baseados na mecânica da fratura discreta necessitam da discretização individual de cada fissura, inviabilizando seu uso em estruturas de grande escala. Consequentemente, quando comparado com a mecânica da fratura, a mecânica do dano tem um menor custo computacional.

Em suas primeiras aplicações, a mecânica do dano era empregada para a análise de ruptura de metais sob carregamentos monotônicos ou cíclicos, em que durante o regime de ruptura desses materiais surgiam microfissuras após o desenvolvimento de uma plastificação (DRIEMEIER, 1995). Segundo Lemaitre e Chaboche (1990), o primeiro trabalho em mecânica do dano foi desenvolvido por Kachanov (1958). Neste estudo, o conceito de dano foi proposto como modelo para descrever o efeito da fissuração distribuída na ruptura frágil em metais.

Em Rabotnov (1969) foi incluído o conceito de perda de rigidez do material em função da fissuração por meio da variável de dano. No entanto, foi somente em Lemaitre e Chaboche (1985) que a mecânica do dano contínuo foi formalmente fundamentada com base na termodinâmica dos processos irreversíveis.



Mazars (1984) propôs um modelo de dano simples e eficiente que é comumente empregado no concreto. O dano é medido por uma variável escalar (dano isotrópico), sendo função de uma deformação equivalente obtida com base nas deformações principais positivas. Além disso, o material é considerado elástico, não apresentando, portanto, deformações permanentes. Com esse modelo, é possível representar o comportamento bimodular do concreto de forma satisfatória, para isto os parâmetros do modelo são obtidos através de ensaios experimentais. Destaca-se a utilização do modelo de dano de Mazars os estudos de Álvares (1993), Coelho (2017), Freitas (2019), Pituba (1998) e Santos (2015).

Além do modelo de Mazars (1984), diversos modelos de dano isotrópico foram propostos na literatura, como os de De Vree *et al.* (1995), Ju (1989), Lemaitre e Chaboche (1990) e Simo e Ju (1987). No âmbito dos modelos anisotrópicos, cabe ressaltar os estudos de Carol *et al.* (2001), Cauvin e Testa (1999), Choi e Pan (2009), Leukart e Ramm (2006) e Ozbolt *et al.* (2001)).

Modelos mecânicos mais robustos costumam considerar as não linearidades físicas e geométricas em conjunto. O método dos Elementos Finitos Posicional consegue fazer isso de forma prática, pois contempla a solução de problemas não lineares em sua formulação. Estudos de Abe (2019), Felix (2022), Nascimento Filho (2022), Ramos (2020) e Rodrigues (2019) foram desenvolvidos nessa linha.

Entretanto, em formulações numéricas da mecânica do dano contínuo surge o problema da localização de deformações. Conforme a malha em elementos finitos é refinada, mais distante a resposta fica, não se obtendo a convergência esperada e desencadeando no problema de não objetividade. Driemeier (1999) atribui tal comportamento à busca de uma solução numérica que represente uma fratura discreta, ou seja, conforme a malha é refinada a largura da zona de localização tende a zero. Matematicamente, tem-se um problema de valor de contorno mal posicionado, ocorrendo a perda de elipticidade do campo de equações, no qual segundo Peerligts *et al.* (2002) é um problema que também ocorre na teoria da plasticidade.

Em Sluys (1992) são apresentadas técnicas de regularização para enfrentar esse problema, como o contínuo micropolar (DE BORST; MUHLHAUS, 1991; IORDACHE; WILLIAM, 1998; STEINMANN; STEIN, 1994), modelos com gradientes (COMI, 1999; DE BORST *et al.*, 1995; FRÉMOND; NEDJAR, 1996), integral não-local (PIJAUDIER-CABOT; BAZANT, 1987) e energia de fratura (OLIVER, 1989; ROTS, 1988). Cabe mencionar que os métodos citados anteriormente possuem como característica do material um “comprimento interno” onde se localizam as deformações.

Na técnica da energia de fratura são utilizados conceitos da Mecânica da Fratura como a resistência à tração do concreto e energia da fratura. É assumido que para a formação de uma microfissura é preciso uma quantidade de energia (energia de fratura) por unidade de área na zona fraturada, considerada concentrada em um comprimento característico (ou largura de banda) do elemento finito. A definição desse comprimento característico foi alvo de estudos (BAZANT; OH, 1983; OLIVER, 1989; ROTS, 1988; VONK, 1993), no qual foi garantido a energia de fratura constante e a não dependência da malha (DRIEMEIER, 1999; MOTA, 2012).

A técnica da energia de fratura é empregada em modelos de dano contínuo, como é o caso do modelo de fissuração distribuída (*Smearred Crack Model*). Esse modelo ganhou notoriedade no meio acadêmico em 1970 após o estudo de Rashid (1968). Neste estudo é assumido que as fissuras são distribuídas em uma área de análise, comumente a área do elemento finito (GAMINO, 2007). Partindo disso, é possível propor relações tensão-deformação para representar o processo de fissuração, e assim, um material inicialmente considerado isotrópico pode ter seu comportamento alterado em razão do surgimento de fissuras, sendo os eixos de ortotropia do material fissurado definidos em função da direção das fissuras (PENNA, 2011), podendo ser fixo e rotacional.

O modelo segundo a orientação das fissuras em fixo considera a direção da fissura fixa durante todo o processo de propagação, enquanto que na variável (rotacional) a orientação é definida como a direção das deformações principais variando ao longo do processo de propagação.

Segundo Rots (1988) o método é interessante, pois preserva a topologia da malha em elementos finitos original e não impõe restrições quanto à orientação dos planos de fissura. De Borst (2002) demonstrou que o *Smeread Crack Model* pode ser deduzido pela mecânica do dano contínuo como um caso especial de um modelo de dano anisotrópico. Dada a robustez do método, é possível encontrá-lo implementado em *softwares* comerciais como o DIANA<sup>®</sup>. Inúmeros trabalhos de análise não linear física de estruturas de concreto armado foram desenvolvidos com base em tal modelo, como os estudos de Bruoujerdian (2010), Menin *et al.* (2009), Mota (2012) e Silva (2019).

O presente estudo apresenta inovações no Método dos Elementos Finitos Posicional a partir da inserção da modelagem de dano Mazars (1984) adaptado ao emprego da técnica de energia de fratura para regularização do problema de localização no MEF. A presente abordagem visa proporcionar uma representação mais robusta do comportamento mecânico de

estruturas de concreto armado e subsequente estudo da influência da fissuração no problema de difusão de cloretos no concreto armado.

### 2.3 Corrosão em armaduras de concreto armado

Nas últimas décadas foi dada uma maior atenção à durabilidade de estruturas de concreto armado, e desde então, a resistência média à compressão deixou de ser a única característica controlada e que caracterizasse sinônimo de segurança em projetos (POSSAN, 2010). O conceito de segurança ultrapassa este entendimento. As estruturas e seus materiais constituintes quando submetidos a situações do seu ambiente de serviço apresentam algum tipo de deterioração ao longo do tempo, chegando ao nível em que seu uso é considerado inseguro (ANDRADE, 1997; MEHTA; MONTEIRO, 2014).

Portanto, torna-se necessário introduzir o conceito de vida útil de projeto, o qual é definido pela NBR 6118 (ABNT, 2014) como o período de tempo em que a estrutura mantém as suas características, desde que atendidos os requisitos de uso, manutenções previstas em projeto e eventuais reparos oriundos de danos acidentais. Assim, segundo a mesma norma, uma estrutura é dita durável se possuir capacidade de resistir às influências ambientais previstas e definidas no projeto.

Segundo a norma de desempenho NBR 15575 (ABNT, 2013), a vida útil de projeto (VUP) de uma estrutura em concreto armado é de no mínimo cinquenta anos. Quando se trata de estrutura de infraestrutura comumente eleva-se a VUP mínima para 100 anos, conforme recomendações normativas internacionais (POSSAN; DEMOLINER, 2013). Entretanto, diversas estruturas localizadas em ambientes agressivos têm a diminuição de sua vida útil devido a processos degenerativos no concreto e/ou aço da armadura (SEGURA *et al.*, 2015).

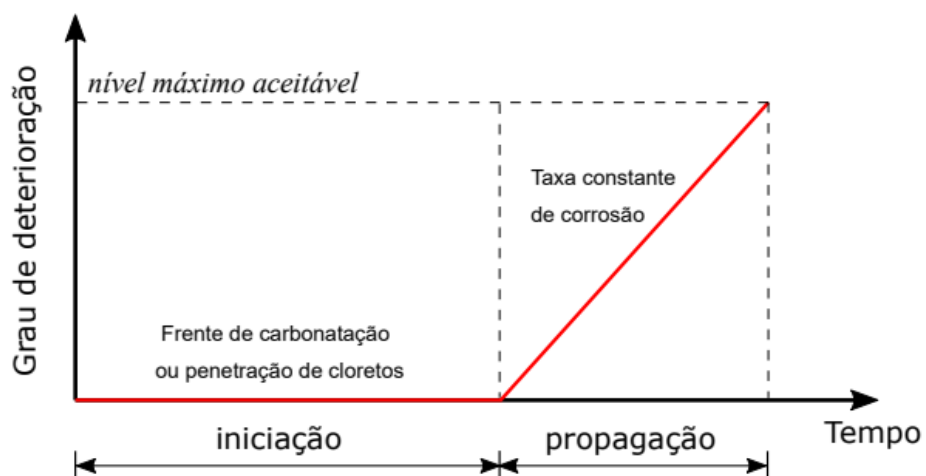
Dentre os principais mecanismos de deterioração ressalta-se a reação álcali-agregado, expansão por sulfatos, lixiviação e despassivação das armaduras por carbonatação ou ação de íons cloretos (ABNT NBR 6118, 2014; NGALA; PAGE, 1997). Estudos mostram que a despassivação das armaduras por ação de íons cloretos e sua decorrente corrosão é o principal mecanismo de deterioração de estruturas de concreto armado (CASCUDO, 1997; MARTTÍN-PÉREZ *et al.*, 2000; MEHTA; MONTEIRO, 2014; RIBEIRO *et al.*, 2014).

Segundo Pellizer (2019) a corrosão é definida como a deterioração do material por ação química ou eletroquímica do meio ambiente associada, ou não, a esforços mecânicos. O processo de corrosão ocorre quando a camada de óxidos que envolve a armadura é rompida,

dando início a despassivação da armadura. O concreto de cobrimento oferece uma proteção física para a armadura contra agentes agressivos externos e uma proteção química que concede uma alta alcalinidade da solução dos poros (MOREIRA, 2018).

A fim de compreender o processo de corrosão em armaduras durante a vida útil de estruturas de concreto armado, Tuutti (1982) propôs um modelo simples que se tornou amplamente utilizado no meio técnico. Nesse modelo, a vida útil da estrutura submetida à corrosão é dividida em dois períodos, iniciação e propagação (Figura 2-1).

Figura 2-1- Modelo de vida útil de Tuutti (1982).



Fonte: Souza (2021).

O período de iniciação corresponde ao tempo transcorrido até os agentes agressivos, que penetram na microestrutura do concreto e chegam até a armadura, atinjam uma concentração suficientemente capaz de despassivar a armadura. Alguns fatores acabam diminuindo esse período significativamente, como a baixa espessura do cobrimento, adensamento e cura inadequados, baixa qualidade do concreto e fissuração decorrente das solicitações mecânicas. Após a despassivação das armaduras inicia-se o período de propagação; durante esse período ocorre a degradação do aço, havendo perda de seção transversal e consequente diminuição da capacidade resistente.

Em razão das reações químicas que ocorrem são gerados produtos de corrosão com volume superior aos componentes originais, tais produtos causam desde pequenas fissuras no concreto em estágios iniciais até o seu lascamento (*spalling*) em estágios mais avançados. A propagação finaliza quando se atinge uma situação limite definida como o fim da vida útil.

Por se tratar de um modelo simplificado, inevitavelmente o modelo de Tuutti (1982) possui algumas limitações, sendo ressaltadas a taxa de corrosão assumida como nula durante o

período de iniciação, visto possui valores baixos; e taxa de corrosão constante ao longo do período de propagação, sendo a taxa que varia em função da localização do ponto da estrutura analisada.

O concreto é assumido homogêneo, sem fissuração e sem reparos, e por isso, surgiram na literatura outros modelos de vida útil no contexto da corrosão em armaduras de concreto armado, podendo ser mencionados os modelos de Bamforth (2004), Helene (1993) e Meira (2017). Deve-se ressaltar que até o presente momento, a divisão de períodos proposta por Tuutti (1982) é amplamente utilizada no meio técnico e inúmeros trabalhos foram desenvolvidos para cada um desses períodos (iniciação e propagação) de forma isolada.

Os estudos experimentais e numéricos sobre a fase de propagação buscam analisar os fenômenos relacionados ao processo de fissuração do concreto de cobrimento gerado pelo produto de corrosão (BALAFAS; BURGOYNE, 2011; BAZANT, 1979; CHENG *et al.*, 2018; MORINAGA, 1989; PANTAZOPOULOU; PAPOULIA, 2001; RAMOS, 2020), à diminuição da capacidade resistente da estrutura em decorrência da perda de seção do aço (ANDRADE; ALONSO, 1996; COELHO, 2017; VAL; MELCHERS, 1997; VAL *et al.*, 1998; YUAN; JI, 2009), à mudança das propriedades mecânicas do aço (DU *et al.*, 2005), entre outros.

A partir desses estudos foi constatado que a segurança estrutural se torna limitada em um curto intervalo de tempo, principalmente quando comparado ao período de iniciação, e por isso, diversos autores consideram, de maneira conservadora, o período de iniciação como a vida útil da estrutura (EL HASSAN *et al.*, 2010; ENRIGHT; FRANGOPOL, 1998; PELLIZZER *et al.*, 2018).

Desse modo, torna-se de grande relevância uma representação adequada do período de iniciação, o qual tem como fenômeno degenerativo a penetração de íons cloreto no concreto. Esse fenômeno é altamente complexo, dependendo de diversos mecanismos de transporte como a permeação, absorção capilar e a difusão iônica (CASCUDO, 1997; NEVILLE, 2011). Segundo Stanish *et al.* (2000) a permeação, mecanismo de transporte decorrente do gradiente de pressão, é dificilmente encontrada e possui baixa influência na penetração de íons cloreto em estruturas de concreto. No caso da absorção capilar, sua influência se restringe a camadas que distam entre 10 e 20 mm da superfície exposta. Logo, o principal mecanismo é a difusão iônica (TUUTTI, 1996).

## 2.4 Modelos de difusão de íons cloreto no concreto armado

Por se tratar do principal mecanismo de transporte de íons cloreto no concreto armado, a difusão iônica é corriqueiramente empregada para modelagem do período de iniciação da corrosão. A difusão ocorre quando há o movimento de um átomo ou molécula de uma localização de alta concentração para uma de baixa concentração, ocasionado por meio de um gradiente químico (geralmente concentração). Este processo busca igualar as concentrações das substâncias, possuindo um caráter aleatório e espontâneo (MARTINS, 2016; OLLIVIER; TORRENTI, 2014).

Os primeiros estudos científicos referentes à difusão foram realizados pelo químico Thomas Graham (1805-1869). Após observações experimentais, Graham propôs uma lei, que mais tarde ganharia seu nome, onde definia a taxa de difusão de um gás como inversamente proporcional à raiz quadrada de sua densidade. Em seus trabalhos subsequentes o químico escocês estudou acerca da difusibilidade de diversos solutos e solventes, como a difusão de sais na água (SOUZA, 2021).

Inspirado nos estudos de Graham, o médico Adolph Fick (1829-1901) foi o responsável por desenvolver a formulação matemática para o fenômeno de difusão. Em seus estudos, Fick baseou-se na lei de Fourier de condução de calor para propor, de forma análoga, uma lei de difusão. A primeira lei de Fick afirma que o fluxo de uma substância em uma direção é proporcional ao gradiente da concentração. Em seguida, buscando representar o comportamento transiente do fenômeno, Fick postulou sua segunda lei, onde afirma que a variação da concentração no tempo é igual a variação do fluxo por unidade de comprimento (SHEWMON, 2016).

Teorias modernas foram desenvolvidas ao longo do século XIX e século XX, como a teoria do movimento browniano de Einstein (1879-1955) que relaciona o coeficiente de difusão e viscosidade, além de uma dedução probabilística da equação de difusão. Outros cientistas deram valorosas contribuições aos estudos teóricos e experimentais sobre difusão, destacando-se Smoluchowski (1872-1917), Perrin (1870-1942), Boltzmann (1844-1906), Frenkel (1894-1952), Matano (1905-1947), entre outros.

No âmbito da difusão de íons cloreto no concreto, Collepardi *et al.* (1970) foram os pioneiros na temática. No modelo proposto pelos autores, foi utilizada a solução da segunda lei de Fick assumindo-se um fluxo unidimensional, concentração superficial de cloretos e coeficiente de difusão constantes ao longo do tempo. No entanto, na década seguinte foi

verificado a partir de estudos que a penetração de cloretos ocorria de forma distinta da considerada por Collepardi *et al.* (1970) (BROWE, 1982; DAUVERGNE, 1982).

Diversos fatores influenciavam na variação da concentração superficial de cloretos e do coeficiente de difusão, como o espaço, tempo, composição do concreto, estrutura dos poros do concreto, taxa de ligação de cloretos à matriz de cimento, nível de fissuração do concreto de cobrimento etc.

Quando a influência da taxa de ligação de cloretos à matriz é considerada, tem-se uma redução do coeficiente de difusão, isso ocorre, em partes, devido a menor porosidade do produto gerado da reação química dos cloretos ligados com produtos de hidratação, restando em menor quantidade apenas os cloretos livres para causar a corrosão. Com isso, modelos que assumem esse fator têm um período de iniciação maior (ANDRADE, 2016; TUUTTI, 1982; XI; BAZANT, 1999), adotando as chamadas “isotermas de cloretos”, as quais são expressões matemáticas que relacionam a concentração de cloretos totais com a concentração de cloretos ligados.

As isotermas são naturalmente não lineares (NILSSON *et al.*, 1994; SERGI *et al.*, 1992). Entretanto, por questão de simplicidade da resolução da equação diferencial da difusão, comumente são adotadas como linear (MARTÍN-PEREZ *et al.*, 2000). Dentre os estudos que se propõem a analisar este fator evidenciam-se os de Al-Kutti (2011), Collepardi (1995), Elsener e Angst (2007), Glass e Buenfeld (2000), Mcgrath (1996), e Sun *et al.* (2012).

Estudos relacionados a influência da estrutura dos poros do concreto no processo difusivo permitiram constatar grande dependência do coeficiente de difusão em relação ao grau de hidratação, tipo de cimento, relação água/cimento, temperatura, tempo de cura, adensamento, umidade e outros (KHAN, 2013). Nessa linha, ressalta-se os estudos de Ababneh *et al.* (2003), Boddy *et al.* (1999), Guimarães *et al.* (2011), Li *et al.* (2009), Saetta *et al.* (1993) e Song *et al.* (2008).

Além do comportamento não linear do coeficiente de difusão, diversos estudos mostram uma dependência temporal (MAAGE *et al.*, 1995; NILSON *et al.*, 1994; NOKKEN *et al.*, 2006; PACK *et al.*, 2010; SUN *et al.*, 2012), demonstrando que a concentração de cloretos na superfície também é dependente do tempo (ANDRADE *et al.*, 2011; SAETTA *et al.*, 1993).

Em Kassir e Ghson (2002) foram realizadas medidas de concentração de cloretos na superfície de quinze tabuleiros de pontes nos EUA a cada dois anos em um período de quinze anos. Neste estudo constatou-se por meio de uma formulação proposta que a consideração da

concentração de cloretos constante ao longo do tempo poderia superestimar em até 100% o tempo de iniciação. Assim como este, outros estudos consideraram essa variação da concentração no tempo por meio da solução analítica da equação diferencial de difusão unidimensional (ANN *et al.*, 2009; MAHESWARAN; SANJAYAN, 2004).

Em Zhang *et al.* (2011) foi estudado experimentalmente o ingresso de cloreto no concreto com cinzas volantes em uma, duas e três direções. Como resultados, verificou-se que o coeficiente de difusão bidimensional é 101% maior que o unidimensional e o coeficiente de difusão tridimensional é 127% maior que o unidimensional. Estes resultados evidenciam que análises realizadas por modelos de difusão unidimensional como a lei de Fick e outras soluções analíticas unidimensionais subestimam os resultados onde há o ingresso de cloretos por duas ou três direções.

Verificando a complexidade de obtenção de soluções analíticas para a equação diferencial de difusão 2D ou 3D, surgiu como alternativa o emprego de métodos numéricos, como o Método das Diferenças Finitas (ABABNEH *et al.*, 2003; XI; BAZANT, 1999), Método dos Elementos de Contorno (AL-JAWARY *et al.*, 2012; PELLIZZER, 2019) e, sobretudo, o Método dos Elementos Finitos (AL-KUTTI, 2011; OZBOLT *et al.*, 2010).

Em Zeng (2007) o Método dos Elementos Finitos é utilizado para analisar a influência da heterogeneidade do concreto no problema de difusão de cloretos. O concreto é considerado em duas fases, pasta e agregado, e cada fase possui suas propriedades. Os resultados deste estudo permitiram verificar uma distribuição não tão suave do perfil de concentração de cloretos em relação ao modelo homogêneo. Nesse mesmo contexto, destaca-se o estudo de Wang *et al.* (2008), em que foi realizada uma análise em meso escala considerando três fases para o concreto: partículas de agregados, argamassa e zona interfacial de transição.

O campo de análises multifísicas é outra aplicação relevante do MEF. Como exemplo de aplicação tem-se a modelagem da difusão em estruturas de concreto sob estados de tensão e/ou fissuração. Estudos mostram que a difusividade de cloretos aumenta à medida que a fissuração do concreto se propaga, chegando a um acréscimo na ordem de duas até dez vezes. O negligenciamento do estado de fissuração do concreto no problema de difusão de íons cloreto pode superestimar o período de iniciação (BENTZ *et al.*, 2013; DANCKWERTS, 1950; GÉRARD; MARCHAND, 2000; ZHANG *et al.*, 2017).

Em Gowripalan *et al.* (2000) foi analisado o efeito que o estado de tensão gerava na difusividade de cloreto. Observou-se que em estados de tensão de tração o coeficiente de



difusão era superior ao coeficiente de difusão obtido em estados de tensão de compressão, a mesma conclusão foi obtida em Guoping *et al.* (2011), Sahmaran (2007) e Wang *et al.* (2011).

Outros estudos aplicaram conceitos da mecânica do dano para representar a fissuração do concreto no problema de difusão de cloretos. Em Al-Kutti (2011) o MEF bidimensional foi utilizado para analisar o problema considerando a danificação e a ligação dos cloretos. Neste estudo o coeficiente de difusão foi obtido por meio de uma função do nível de dano e da ligação dos cloretos calibrada experimentalmente. Os resultados da formulação numérica apresentaram boa concordância com os ensaios experimentais para diferentes níveis de tensão. Em seguida, Mukhttar e Al-Gadhib (2011) estenderam a formulação considerando uma relação linear entre a variável de dano e valor da tensão atuante, apresentando resultados favoráveis quando comparados aos experimentais, mesmo com essa relação simplista.

Ainda, outros estudos buscaram analisar somente o efeito da danificação em zonas comprimidas, como em Lim *et al.* (2004) e Rahman *et al.* (2012). Estes autores concluíram que o efeito da danificação em zonas comprimidas é significativo apenas em casos próximos a capacidade da resistência última do concreto.

Em Kurumatani *et al.* (2017) foi apresentado um método que considera a fissuração interna do concreto armado e sua interferência na difusão de íons cloreto. A propagação da fissura e a difusão foram consideradas tridimensionais, o acoplamento mecânico-difusivo foi realizado por meio do coeficiente de difusão escrito em função da variável dano e o modelo de dano empregado foi baseado na mecânica da fratura. Os resultados obtidos apresentaram uma elevada precisão quando comparados com os resultados experimentais.

Modelos mais sofisticados foram propostos, como em Ozbolt *et al.* (2010). Neste estudo foi proposto um modelo numérico quimo-hidro-termo-mecânico tridimensional para analisar o processo de transportes no concreto considerando a danificação. Foi demonstrado que o dano do concreto influencia significativamente o tempo de despassivação do reforço. Segundo os autores, a formulação parece ser realista, uma vez que a interação prevista entre o tempo de fissuração e despassivação concorda bem com o experimental, no entanto, a quantidade de parâmetros provenientes dos diversos mecanismos de transporte dificulta uma aplicação prática (PELLIZZER, 2019).

À vista do contexto apresentado, o presente estudo propõe analisar o período de iniciação da corrosão em estruturas de concreto armado por meio de uma abordagem tridimensional e transiente como forma de prever a vida útil de estruturas de concreto armado.

Além disso, o modelo mecânico não linear é acoplado ao modelo difusivo com o objetivo de considerar a influência da fissuração do concreto no período de iniciação da corrosão.



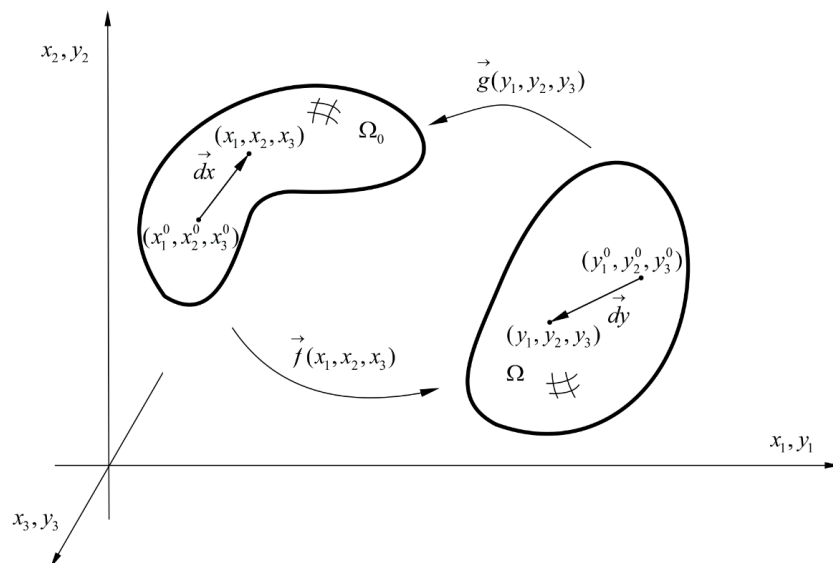
### 3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL

A abordagem Posicional do Método dos Elementos Finitos é uma versão naturalmente não linear geométrica do método na qual as incógnitas do problema são as posições nodais dos elementos ao invés dos deslocamentos usados classicamente. Os primeiros trabalhos de destaque nesta área são Bonet *et al.* (2000) e Coda (2003). Atualmente o método está bem estabelecido e continua ganhando novas aplicações em diferentes tipos de problemas através do desenvolvimento de formulações para a modelagem de problemas termomecânicos (SALOMÃO, 2021), de colapso estrutural (SOARES, 2021), de fadiga em concreto (FELIX, 2022), plasticidade em regime de grandes deformações (CODA, 2022), entre outras.

#### 3.1 Mudança de configuração

Um sólido deformável sujeito a ações externas pode mudar de posição e forma. A mudança de configuração que leva um corpo qualquer da configuração inicial  $\Omega_0$  para a configuração atual  $\Omega$  é descrita por uma função vetorial  $\vec{f}$ , como ilustra a Figura 3-1. A função mudança de configuração tem como inversa a função  $\vec{g}$ , que é considerada contínua e continuamente diferenciável até a segunda derivada. Os vetores  $\vec{dx}$  e  $\vec{dy}$  descrevem as distâncias infinitesimais entre dois pontos do elemento na configuração inicial e atual, respectivamente.

Figura 3-1- Mudança de configuração de um sólido.



Fonte: O autor (2023).

O valor da função mudança de configuração em um ponto  $(x_1, x_2, x_3)$  na vizinhança de  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  é calculado como:

$$\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \vec{f}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \nabla \vec{f} \cdot \vec{dx} \quad (3.1)$$

Portanto, por meio da expressão (3.1) é possível equacionar:

$$\vec{dy} = \vec{df} = \nabla \vec{f} \cdot \vec{dx} = A \cdot \vec{dx} \quad (3.2)$$

onde a matriz  $A$  é o gradiente da mudança de configuração.

Partindo do gradiente da função mudança de configuração, apresenta-se o alongamento à direita de Cauchy-Green, dado pelo tensor simétrico  $C$  como:

$$C = C^t = A^t \cdot A \quad (3.3)$$

No contexto da cinemática dos corpos deformáveis é necessário definir medidas de deformação. A deformação de Green-Lagrange  $E$  é uma medida objetiva de deformação Lagrangiana definida por:

$$E = \frac{1}{2}(A^t \cdot A - I) = \frac{1}{2}(C - I) \quad (3.4)$$

onde  $I$  é a matriz identidade.

### 3.2 Equilíbrio lagrangiano

Como a abordagem posicional do método dos elementos finitos é uma versão Lagrangiana total, é necessário definir a equação de equilíbrio na configuração inicial (ou de referência) do corpo. A equação de equilíbrio Lagrangiana local é dada por:

$$\text{div}(\vec{P}^t) + \vec{b}_0 = \rho_0 \vec{\ddot{y}} \quad (3.5)$$

Ou, em notação indicial:

$$P_{ji,j} + b_{0i} = \rho_0 \ddot{y}_i \quad (3.6)$$

onde  $\text{div}$  é o operador divergente com relação ao sistema de coordenadas de referência,  $P$  é o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie,  $b_0$  é a força de volume na

configuração inicial,  $\rho_0$  é a massa específica do material na configuração inicial e  $\ddot{y}$  é a aceleração.

Em concordância com o princípio da energia mecânica estacionária, o equilíbrio mecânico de um sólido ocorre quando a variação do seu potencial de energia mecânica for nula (Lanczos, 1986). O funcional de energia é dado por:

$$\Pi = P + U + K = 0 \quad (3.7)$$

onde  $U$  é a energia de deformação interna do corpo,  $P$  é o trabalho das forças externas aplicadas e  $K$  é a energia cinética.

Para uma variação posicional  $\delta Y_i$  arbitrária, o equilíbrio é obtido como se segue:

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} \delta Y_i = \frac{\partial P}{\partial Y_i} + \frac{\partial U}{\partial Y_i} + \frac{\partial K}{\partial Y_i} = 0 \quad (3.8)$$

Soares (2021), destaca que quando há forças não-conservativas no sistema, o princípio de conservação da energia mecânica não é mais aplicável, porém no presente estudo as forças externas são consideradas conservativas. Portanto, nesse contexto, a expressão (3.8) é válida.

A primeira variação do funcional de energia para o corpo como um todo pode ser obtida integrando-se a expressão (3.6) no volume inicial  $V_0$  conforme a expressão (3.9).

$$\delta \Pi = \int_{V_0} (\rho_0 \ddot{y} - P_{ji,j} - b_i^0) \delta y_i dV_0 = 0 \quad (3.9)$$

Coda (2018), descreve operações matemáticas que permitem manipular o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie juntamente com a variação posicional na expressão (3.9). Após aplicação do operador divergente na integração do termo  $P_{ji,j} \delta y_i$ , é possível relacionar o resultado com o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie  $S$  e a variação do tensor de deformação de Green-Lagrange  $\delta E$ . Com isso, a variação de energia pode ser reescrita como:

$$\int_{V_0} \rho_0 \ddot{y} \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \delta y_i dA_0 + \int_{V_0} S_{kj} \delta E_{kj} dV_0 = 0 \quad (3.10)$$

onde  $A_0$  é a superfície inicial do sólido onde se encontram os carregamentos distribuídos e  $p_i^0$  são as forças externas aplicadas sobre a superfície inicial.

Relacionando a expressão (3.8) com a expressão (3.10), obtêm-se:

$$\frac{\partial P}{\partial Y_i} = - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \delta y_i dA_0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y_i} = \int_{V_0} S_{kj} \delta E_{kj} dV_0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial K}{\partial Y_i} = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y} \delta y_i dV_0 \quad (3.13)$$

No presente estudo são tratados apenas problemas quase-estáticos e estáticos, portanto, desconsidera-se a contribuição da parcela dinâmica na variação da energia, ou seja, a parcela referente a expressão (3.13) é assumida como nula.

### 3.3 Lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff

A lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff (SVK) constitui uma relação linear entre o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e o tensor de deformações de Green. Essa lei é expressa em termos de energia específica de deformação  $u_e(E)$  na expressão (3.14)

$$u_e(E) = \frac{1}{2} E : \mathbb{C} : E \quad (3.14)$$

onde  $\mathbb{C}$  é o tensor constitutivo elástico de quarta ordem.

O modelo de SVK é análogo à lei de Hooke, no regime de pequenos deslocamentos e deformações, porém, é adequado para descrever o comportamento de materiais que apresentam grandes deslocamentos e deformações moderadas (HOLZAPFEL, 2000).

A tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é o conjugado energético da deformação de Green-Lagrange (CODA, 2018). Logo, é possível relacioná-la com a energia específica de deformação por meio da seguinte expressão:

$$S = \frac{\partial u_e(E)}{\partial E} \quad (3.15)$$

O tensor constitutivo elástico é definido conforme a expressão (3.16).

$$\mathbb{C} = \frac{\partial^2 u_e(E)}{\partial E \otimes \partial E} \quad (3.16)$$

Para casos tridimensionais e material isotrópico, a energia específica da lei de SVK é dada por:

$$u_e(E) = \frac{G}{1-2\nu} \left[ \begin{aligned} &(1-\nu)(E_{11}^2 + E_{22}^2 + E_{33}^2) + 2\nu(E_{11}E_{22} + E_{11}E_{33} + E_{22}E_{33}) + \\ &+ (1-2\nu)(E_{12}^2 + E_{21}^2 + E_{13}^2 + E_{31}^2 + E_{23}^2 + E_{32}^2) \end{aligned} \right] \quad (3.17)$$

onde  $G$  é o módulo de elasticidade transversal e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

### 3.4 Solução geometricamente exata: Método de Newton-Raphson

Na abordagem posicional do método elementos finitos o problema de equilíbrio é não-linear. Sendo assim, a posição atual é conhecida por tentativa e existe um desequilíbrio entre os vetores de forças internas  $F_i^{int}$  e forças externas  $F_i^{ext}$ . Tal desequilíbrio é representado pelo vetor de desbalanceamento  $g_i$  e pode ser obtido com auxílio da expressão (3.8) conforme a expressão (3.18).

$$g_i = \frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} = \frac{\partial U}{\partial Y_i} + \frac{\partial P}{\partial Y_i} = F_i^{int} - F_i^{ext} \neq 0_i \quad (3.18)$$

O método de Newton-Raphson é usado para buscar de forma iterativa a configuração da estrutura em que o vetor de desbalanceamento seja o mais próximo possível de zero. Inicialmente, admite-se que as componentes de  $g_i$  são funções contínuas nas vizinhanças da solução. Com isso, adotando-se uma solução tentativa ( $Y_i^0$ ) na vizinhança da solução exata, o vetor de desbalanceamento pode ser escrito através do desenvolvimento em série de Taylor como se segue:

$$g_i(Y) = g_i(Y_0) + \left. \frac{\partial g_i}{\partial Y_j} \right|_{Y_0} \Delta Y_j + O_i^2 \approx 0 \quad (3.19)$$

onde  $\Delta Y_j$  representa a correção do vetor de posições atuais e  $O_i^2$  são os termos de ordem superior da série de Taylor.

Desprezando-se os termos de ordem superior da expressão (3.19) e impondo  $g_i$  nulo, obtém-se:



$$\Delta Y_j = - \left( \frac{\partial g_i}{\partial Y_j} \Big|_{Y_0} \right)^{-1} g_i(Y_0) \quad (3.20)$$

No presente estudo as forças externas são conservativas, portanto, a diferenciação de  $g_i$  se confunde com a diferenciação da força interna. Assim, a expressão (3.20) pode ser reescrita como:

$$\Delta Y_j = - \left( \frac{\partial^2 U}{\partial Y_i \partial Y_j} \Big|_{Y_0} \right)^{-1} g_i(Y_0) = - (H_{ij})^{-1} g_i(Y_0) \quad (3.21)$$

onde  $H_{ij}$  é chamado de matriz Hessiana ou rigidez tangente para a posição tentativa  $Y_i^0$ .

O valor da correção de posições calculado na expressão (3.21) é então utilizado para atualizar a posição:

$$Y_j = Y_j^0 + \Delta Y_j \quad (3.22)$$

Os valores atualizados da posição atual devem ser usados para calcular uma nova correção de posição usando a expressão (3.21). Esse processo deve se repetir até que a correção se torne suficientemente pequena, ou seja, menor que a tolerância adotada. Neste trabalho a tolerância ( $tol$ ) é adotada conforme a expressão (3.23).

$$\frac{\sqrt{\Delta Y_j \Delta Y_j}}{\sqrt{X_i X_i}} < tol \quad (3.23)$$

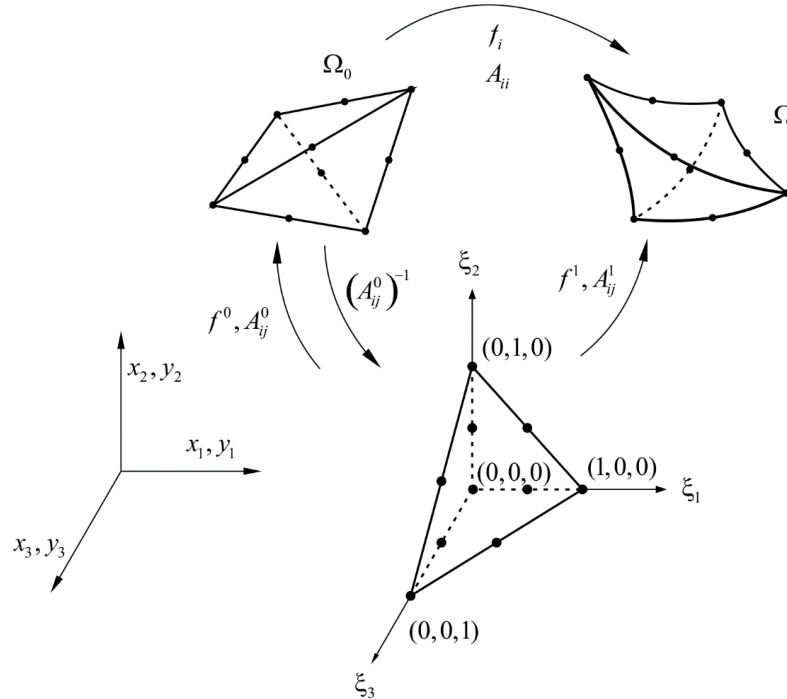
O procedimento de solução pelo método de Newton-Raphson apresentado é geral e válido para qualquer tipo de elemento finito. As únicas alterações são na forma de calcular forças externas, valores de tentativa para forças internas e matriz Hessiana. A seguir são apresentados os elementos usados neste trabalho.

### 3.5 Elemento finito de sólido tridimensional

Neste estudo os sólidos são modelados usando-se elementos finitos isoparamétricos tetraédricos (3D) com funções de aproximação polinomiais quadrática. A Figura 3-2 ilustra o mapeamento do elemento finito utilizado nas configurações inicial e final. Nota-se que nesta mudança de configuração é utilizado o espaço adimensional de coordenadas  $\xi_j$  no qual se define a quadratura usada para integração numérica das grandezas de interesse. No presente trabalho

é utilizada a quadratura Gaussiana, maiores detalhes podem ser encontrados no trabalho de Pascon (2012).

Figura 3-2- Mapeamento do elemento finito tetraédrico nas configurações inicial e final.



Fonte: O autor (2023).

Com auxílio da Figura 3-2 e empregando as funções de forma  $\phi_l$  (definidas em cada nó  $l$ ), os mapeamentos da configuração inicial e final, partindo-se do espaço adimensional, são definidos pelas expressões (3.24) e (3.25), respectivamente.

$$f_i^0(\xi) = x_i(\xi) = \phi_l(\xi) X_i^l \quad (3.24)$$

$$f_i^1(\xi) = y_i(\xi) = \phi_l(\xi) Y_i^l \quad (3.25)$$

onde  $x_i(\xi)$  e  $y_i(\xi)$  são coordenadas quaisquer dentro do elemento na configuração inicial e final, respectivamente;  $X_i^l$  e  $Y_i^l$  são as coordenadas de cada nó  $l$  do elemento na direção  $i$ .

A função mudança de configuração é escrita pela composição da expressão (3.25) com a inversa da expressão (3.24), ou seja:

$$f_i = f_i^1((f_i^0)^{-1}) \quad (3.26)$$

O gradiente da função mudança de configuração entre o espaço adimensional e a configuração inicial é dado pela expressão (3.27), enquanto a configuração final é obtida por meio da expressão (3.28).

$$A_{ij}^0 = f_{i,j}^0 = x_{i,j} = \phi_{l,j} X_i^l \quad (3.27)$$

$$A_{ij}^1 = f_{i,j}^1 = y_{i,j} = \phi_{l,j} Y_i^l \quad (3.28)$$

O gradiente da função mudança de configuração é obtido através da expressão (3.29).

$$A = A^1 \cdot (A^0)^{-1} \quad (3.29)$$

Substituindo a expressão (3.29) na expressão (3.4), a deformação de Green pode ser reescrita como segue:

$$E = \frac{1}{2} \left( (A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} - I \right) \quad (3.30)$$

Para resolução do problema usando a abordagem posicional do método dos elementos finitos, a expressão (3.10) da variação de energia precisa ser escrita em função das coordenadas nodais dos elementos finitos. Admitindo-se que o problema é estático, após algumas manipulações detalhadas em Coda (2018) para a eliminação da variação  $\delta y_i$ , a expressão (3.10) resulta em:

$$-\int_{V_0} \phi_m B_i^m \phi_l dV_0 - \int_{A_0} \phi_m Q_i^m \phi_l dA_0 + \int_{V_0} S_{kj} \frac{\partial E_{kj}}{\partial Y_i^l} dV_0 = 0 \quad (3.31)$$

onde  $Q_i^m$  e  $B_i^m$  são as forças de área e volume nodais, respectivamente.

Cabe destacar que as duas primeiras integrais da expressão (3.31) representam as forças externas aplicadas e são conhecidas desde o início da análise.

### 3.5.1 Vetor de forças internas

O valor da força interna, em cada direção  $\alpha$  de cada nó  $\beta$  é obtido por:

$$\left( F_\alpha^\beta \right)_{\text{int}} = \frac{\partial U}{\partial Y_\alpha^\beta} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e(E)}{\partial E_{ij}} \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_\alpha^\beta} dV_0 = \int_{V_0} S_{ij} \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_\alpha^\beta} dV_0 \quad (3.32)$$

A tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é conhecida da expressão (3.15), enquanto o termo relativo à diferenciação da deformação de Green em relação ao vetor de posições atuais pode ser obtido com auxílio da expressão (3.30), como segue:

$$\frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{\partial}{\partial Y_\alpha^\beta} \left[ \frac{1}{2} \left( (A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} - I \right) \right] \quad (3.33)$$

Os termos  $A^1$  e  $(A^1)^t$  são definidos em função da posição atual. Coda (2018) destaca que é válida a seguinte relação:

$$\left( \frac{\partial A^1}{\partial Y_\alpha^\beta} \right)^t = \frac{\partial (A^1)^t}{\partial Y_\alpha^\beta} \quad (3.34)$$

Considerando a expressão (3.28), realiza-se a diferenciação do termo  $A^1$ , resultando no termo  $DA_{\alpha\beta}^1$ :

$$DA_{\alpha\beta}^1 = \frac{\partial A_{ij}^1}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{\partial Y_i^l}{\partial Y_\alpha^\beta} \phi_{l,j} = \phi_{l,j} \delta_{\alpha i} \delta_{\beta l} = \phi_{\beta,j} \delta_{\alpha i} \quad (3.35)$$

Aplicando a regra da cadeia na expressão (3.33) e utilizando a expressão (3.35), obtém-se:

$$\frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{1}{2} \left( (A^0)^{-t} \cdot (DA_{\alpha\beta}^1)^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot DA_{\alpha\beta}^1 \cdot (A^0)^{-1} \right) \quad (3.36)$$

Logo, é possível calcular a expressão (3.32) numericamente por meio da expressão (3.37).

$$(F_\alpha^\beta)_{int} = \sum_{piti=1}^{npti} \left( \left( \frac{\partial E(\xi_k^{pti})}{\partial Y_\alpha^\beta} \right)_{ij} S_{ij}(\xi_k^{pti}) \right) J_0(\xi_k^{pti}) w_{pti} \quad (3.37)$$

onde  $npti$  é a quantidade de pontos de integração,  $J_0$  é o jacobiano da mudança de configuração  $f^0$  (determinante da matriz  $A^0$ ) e  $w_{pti}$  é o peso de cada ponto de integração.

Os vetores de forças internas obtidos para cada elemento devem ser somados para a montagem do vetor global usando a incidência global de cada nó e direção como descrito em Coda (2018).

### 3.5.2 Hessiana

O presente contexto considera a Hessiana escrita para cada elemento como um tensor de quarta ordem com índices  $\beta$  e  $z$  que representam cada nó e índices  $\alpha$  e  $\gamma$  que representam direções. Utilizando a expressão (3.21), considerando a energia específica do SVK (3.17) e aplicando a regra da cadeia uma vez na derivação, a Hessiana resulta na seguinte expressão:

$$H_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e(Y_k^m)}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} dV_0 = \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial Y_\gamma^z} \left( \frac{\partial u_e(E_k^m)}{\partial E_{km}} \frac{\partial E_{km}}{\partial Y_\alpha^\beta} \right) \quad (3.38)$$

A expressão pode ser reescrita após desenvolvimentos matemáticos da seguinte maneira:

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial}{\partial Y_\gamma^z} \left( \frac{\partial u_e(E_k^m)}{\partial E_{km}} \frac{\partial E_{km}}{\partial Y_\alpha^\beta} \right) = \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \frac{\partial^2 u_e(E)}{\partial E \otimes \partial E} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + \frac{\partial u_e(E)}{\partial E} : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} \quad (3.39)$$

Considerando a definição do tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie apresentada na expressão (3.15) e a definição do tensor constitutivo elástico apresentada na expressão (3.16), a expressão (3.39) pode ser reescrita como:

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \mathbb{C} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + S : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta}. \quad (3.40)$$

O último termo da expressão (3.40) pode ser obtido derivando-se a expressão (3.36), como apresentado na expressão.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} = \frac{\partial}{\partial Y_\gamma^z} \left( \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} \right) = \frac{1}{2} \left( (A^0)^{-t} \cdot (DA_{\alpha\beta}^1)^t \cdot (DA_{\gamma z}) \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot (DA_{(\gamma)(z)})^t \cdot DA_{\alpha\beta}^1 \cdot (A^0)^{-1} \right) \quad (3.41)$$

Logo, é possível calcular a expressão (3.41) numericamente por meio da expressão (3.42).

$$H_{\alpha\beta\gamma z} = \sum_{pti=1}^{npti} \left( h_{\alpha\beta\gamma z}(\xi_k^{pti}) \right) J_0(\xi_k^{pti}) w_{pti} \quad (3.42)$$

A Hessiana de cada elemento pode ser convertida em uma matriz transformando seus índices, como descrito em Coda (2018). As matrizes obtidas para cada elemento devem ser somadas para a montagem da matriz global usando a incidência global de cada nó e direção.

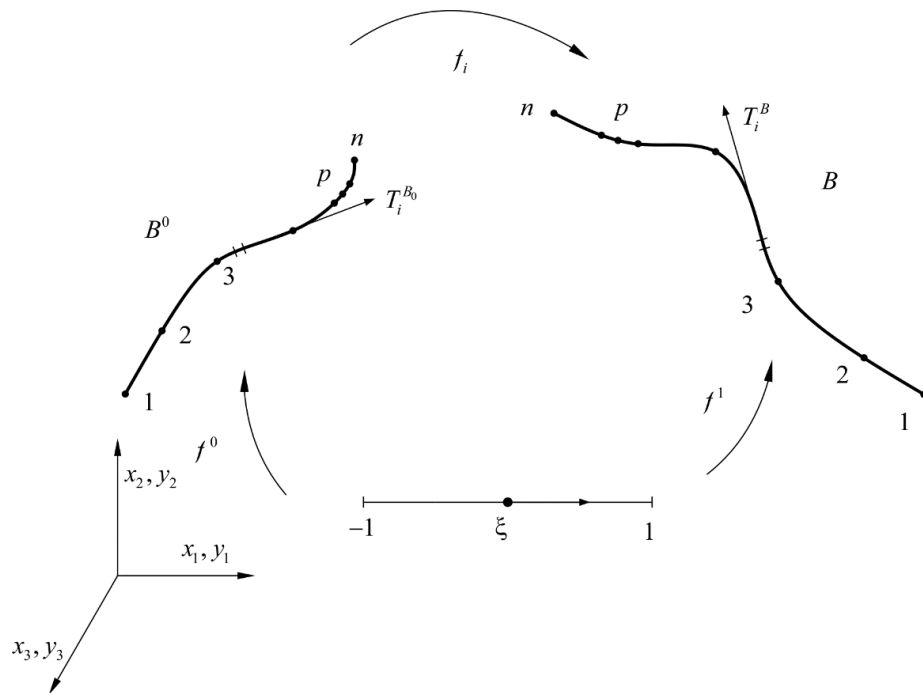
### 3.6 Elemento finito de fibra de ordem qualquer

Neste trabalho são empregados elementos unidimensionais de aproximação quadrática para representação de fibras, como a armadura do concreto. A formulação e a estratégia utilizada no presente estudo para analisar esse tipo de elemento através da abordagem posicional do método dos elementos finitos é uma versão tridimensional do que foi apresentado em Sampaio, Paccola e Coda (2013).

Os elementos finitos de fibra de aproximação quadrática foram aplicados, visto que Sampaio, Paccola e Coda (2013) mostraram numericamente que a aderência entre fibra e matriz ocorre mais efetivamente quando os elementos de ambos apresentam a mesma ordem de aproximação. Como os elementos sólidos deste trabalho são de aproximação quadrática, então a escolha por essa ordem de aproximação das fibras foi feita buscando-se uma maior precisão nas respostas.

A determinação das grandezas necessárias para resolução do problema estrutural pela expressão (3.21) para elementos unidimensionais de aproximação quadrática segue a mesma estrutura do que foi verificado para os elementos sólidos. Inicialmente, considera-se a Figura 3-3, que exhibe o mapeamento do elemento na configuração inicial e final juntamente à relação de cada posição com o espaço adimensional ( $\xi$ ).

Figura 3-3- Mapeamento de elemento finito de fibra de ordem qualquer nas configurações inicial e final.



Fonte: O autor (2023).

De maneira análoga ao que se fez para os sólidos, as posições iniciais e atuais são determinadas, respectivamente, com o auxílio do espaço adimensional:

$$f_i^0(\xi) = x_i(\xi) = \phi_i(\xi)X_i^I \quad (3.43)$$

$$f_i^1(\xi) = y_i(\xi) = \phi_i(\xi)Y_i^I \quad (3.44)$$

As funções de forma para elementos unidimensionais de um grau  $n$  qualquer são determinadas por meio dos polinômios de Lagrange, que podem ser calculadas a partir do seguinte produto:

$$\phi_l(\xi) = \prod_{\substack{l \neq j \\ j=1}}^n \left( \frac{\xi - \xi_j}{\xi_l - \xi_j} \right) \quad (3.45)$$

As derivadas das funções de forma em relação a  $\xi$  são obtidas pela seguinte expressão:

$$\frac{d\phi_l}{d\xi} = \sum_{\substack{l \neq j \\ j=1}}^n \left[ \frac{1}{\xi_l - \xi_j} \prod_{\substack{k \neq j \\ k=1}}^n \left( \frac{\xi - \xi_j}{\xi_l - \xi_j} \right) \right] \quad (3.46)$$

Para a realização dos desenvolvimentos de interesse é necessário definir os vetores tangentes das configurações inicial ( $T_i^{B_0}$ ) e atual ( $T_i^B$ ). O cálculo é feito usando-se as coordenadas de cada direção  $i$  de cada nó  $p$ . Os vetores tangentes nas configurações inicial e atual são obtidos por meio das expressões x e y, respectivamente.

$$T_i^{B_0} = \frac{d\phi_p(\xi)}{d\xi} X_i^p \quad (3.47)$$

$$T_i^B = \frac{d\phi_p(\xi)}{d\xi} Y_i^p \quad (3.48)$$

Os módulos desses vetores tangentes são:

$$|\vec{T}^{B_0}|^2 = \left( \frac{d\phi_p(\xi)}{d\xi} X_1^p \right)^2 + \left( \frac{d\phi_p(\xi)}{d\xi} X_2^p \right)^2 + \left( \frac{d\phi_p(\xi)}{d\xi} X_3^p \right)^2 = \left( \frac{d\phi_p(\xi)}{d\xi} X_i^p \right)^2 \quad (3.49)$$

$$|\vec{T}^B|^2 = \left( \frac{d\phi_l(\xi)}{d\xi} Y_1^p \right)^2 + \left( \frac{d\phi_l(\xi)}{d\xi} Y_2^p \right)^2 + \left( \frac{d\phi_l(\xi)}{d\xi} Y_3^p \right)^2 = \left( \frac{d\phi_l(\xi)}{d\xi} Y_i^p \right)^2 \quad (3.50)$$

A deformação de Green-Lagrange correspondente a um ponto qualquer do elemento finito unidimensional, pode ser expressa como:

$$E = \frac{1}{2} \left( \frac{|\vec{T}^B|^2 - |\vec{T}^{B_0}|^2}{|\vec{T}^{B_0}|^2} \right) \quad (3.51)$$

Substituindo as expressões (3.49) e (3.50) na expressão (3.51), obtém-se:

$$E = \frac{1}{2} \frac{\left[ \left( \frac{d\phi_p(\xi)}{d\xi} Y_i^p \right)^2 \right] - \left[ \left( \frac{d\phi_p(\xi)}{d\xi} X_i^p \right)^2 \right]}{\left[ \left( \frac{d\phi_p(\xi)}{d\xi} X_i^p \right)^2 \right]} \quad (3.52)$$

Uma vez obtida a expressão da medida de deformação, torna-se possível equacionar a energia específica de deformação, a qual é definida para problemas unidimensionais como segue:

$$u_e = \frac{1}{2} \mathbb{E} E^2 \quad (3.53)$$

onde  $\mathbb{E}$  é o módulo de elasticidade da fibra.

Destaca-se que a energia de deformação da fibra é expressa como:

$$U_f = \int_{V_0} u_e dV_0 \quad (3.54)$$

### 3.6.1 Vetor de forças internas

Considerando a notação de nós e direções, onde  $j$  refere-se aos nós e  $k$  corresponde às direções, o vetor de forças internas é definido como:

$$(F_k^j)^f = \frac{\partial U_f}{\partial Y_k^j} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e(E)}{\partial E_{im}} \frac{\partial E_{im}}{\partial Y_k^j} dV_0 \quad (3.55)$$

Substituindo a expressão (3.52) em (3.55) e derivando-a, obtém-se

$$(F_k^j)^f = \int_{V_0} \mathbb{E} E \frac{\left[ \left( \frac{d\phi_l(\xi)}{d\xi} Y_k^l \right) \right] \left( \frac{d\phi_j(\xi)}{d\xi} \right)}{|T^0|^2} dV_0 \quad (3.56)$$

A variação do volume do elemento  $dV_0$  pode ser reescrita como  $Ad s_0$ , em que  $A$  é a área inicial do elemento e  $ds_0$  corresponde a um infinitésimo do comprimento inicial  $L_0$ . Com isso, a expressão (3.56) resulta em uma integração no comprimento inicial da fibra, expressa como:

$$(F_k^j)^f = \int_0^{L_0} \mathbb{E} E \frac{\left[ \left( \frac{d\phi_l(\xi)}{d\xi} Y_k^l \right) \right] \left[ \frac{d\phi_j(\xi)}{d\xi} \right]}{|T^0|^2} Ad s_0 \quad (3.57)$$



Reescrevendo-se a expressão (3.57) no espaço adimensional, tem-se:

$$(F_k^j)^f = \int_{-1}^1 \mathbb{E}E \frac{\left[ \left( \frac{d\phi_l(\xi)}{d\xi} Y_k^l \right) \right] \left[ \frac{d\phi_j(\xi)}{d\xi} \right]}{|T^0|^2} J_0(\xi) A d\xi \quad (3.58)$$

onde  $J_0$  é o jacobiano da mudança de configuração do espaço adimensional para a configuração inicial e pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$J_0(\xi) = |\bar{T}^0| = \sqrt{\left( \frac{dx_1}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dx_2}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dx_3}{d\xi} \right)^2} \quad (3.59)$$

Com isso, pode-se calcular a expressão (3.58) numericamente, como segue:

$$(F_k^j)^f = \sum_{p=1}^{npi} \left[ \mathbb{E}E \frac{\left( \frac{d\tilde{\phi}_l(\xi_p)}{d\xi} Y_k^l \right) \frac{d\tilde{\phi}_j(\xi_p)}{d\xi}}{|T^0|^2} \right] J_0(\xi_p) w_p A \quad (3.60)$$

onde  $w$  é o peso e  $npi$  a quantidade de pontos de integração.

### 3.6.2 Hessiana

A matriz Hessiana pode ser calculada para cada elemento finito realizando-se a segunda derivada sobre a energia específica de deformação da expressão (3.53). Considerando a expressão (3.52), a Hessiana pode ser calculada conforme a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} H_{kj\alpha\beta}^f &= \frac{\partial^2 U}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} = \int_{V_0} \left( \frac{\mathbb{E}E}{|T^0|^4} \left( \frac{d\phi_l(\xi)}{d\xi} Y_\alpha^l \right) \frac{d\phi_\beta(\xi)}{d\xi} \left( \frac{d\phi_l(\xi)}{d\xi} Y_k^l \right) \frac{d\phi_j(\xi)}{d\xi} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mathbb{E}E}{|T^0|^2} \frac{d\phi_\beta(\xi)}{d\xi} \frac{d\phi_j(\xi)}{d\xi} \delta_{k\alpha} \right) dV_0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde  $j$  e  $\beta$  são nós do elemento e  $k$  e  $\alpha$  são direções.

Substituindo a variação do volume do elemento  $dV_0$  por  $Ad s_0$  e alterando a integração para o espaço adimensional, a expressão (3.61) é reescrita como:

$$\begin{aligned}
H_{kj\alpha\beta}^f = \int_{-1}^1 & \left( \frac{\mathbb{E}E}{|T^0|^4} \left( \frac{d\phi_l(\xi)}{d\xi} Y_\alpha^l \right) \frac{d\phi_\beta(\xi)}{d\xi} \left( \frac{d\phi_l(\xi)}{d\xi} Y_k^l \right) \frac{d\phi_j(\xi)}{d\xi} + \right. \\
& \left. + \frac{\mathbb{E}E}{|T^0|^2} \frac{d\phi_\beta(\xi)}{d\xi} \frac{d\phi_j(\xi)}{d\xi} \delta_{k\alpha} \right) A J_0(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Por fim, a integração numérica da matriz Hessiana corresponde a:

$$\begin{aligned}
H_{kj\alpha\beta}^f = \sum_{p=1}^{npi} & \left[ \frac{\mathbb{E}E}{|T^0|^4} \left( \frac{d\phi_l(\xi_p)}{d\xi} Y_\alpha^l \right) \frac{d\phi_\beta(\xi_p)}{d\xi} \left( \frac{d\phi_l(\xi_p)}{d\xi} Y_k^l \right) \frac{d\phi_j(\xi_p)}{d\xi} + \right. \\
& \left. + \frac{\mathbb{E}E}{|T^0|^2} \frac{d\phi_\beta(\xi_p)}{d\xi} \frac{d\phi_j(\xi_p)}{d\xi} \delta_{k\alpha} \right] J_0(\xi_p) w_p A
\end{aligned} \tag{3.63}$$

### 3.7 Acoplamento entre fibra e sólido

Neste trabalho o acoplamento entre elementos finitos de fibra e sólidos ocorre por meio da técnica de embutimento utilizada por Vanalli, Paccola e Coda (2008) e Sampaio, Paccola e Coda (2013). A técnica consiste em escrever os parâmetros nodais das fibras em função dos parâmetros nodais dos elementos sólidos (matriz).

Sampaio, Paccola e Coda (2013) expressam como vantagens da técnica a não coincidência dos nós das fibras com os da matriz e por não ocorrer o acréscimo de graus de liberdade ao problema. A técnica tem sido usada no contexto do método dos elementos finitos baseados em posições para acoplar fibras e partículas em matrizes sólidas, como vistos em Felix (2022) e Salomão (2021).

Como as posições nodais dos elementos dos reforços precisam ser escritas em função dos graus de liberdade do elemento sólido, a estratégia é utilizar as funções de forma que aproximem os elementos da matriz para, então, obter a seguinte relação:

$$X_{Pi} = \phi_l(\xi_1^P, \xi_2^P, \xi_3^P) X_{li} \tag{3.64}$$

onde:  $(\xi_1^P, \xi_2^P, \xi_3^P)$  são as coordenadas adimensionais do nó  $P$  qualquer do elemento de fibra definidas no domínio do elemento sólido em que tal nó está inserido;  $\phi_l$  são as funções de forma do elemento sólido; e  $X_{li}$  as coordenadas dos nós do mesmo elemento sólido. Os índices  $i$  e  $l$  denotam respectivamente direção e nó do elemento sólido.

As coordenadas adimensionais presentes na expressão (3.64) a priori não são conhecidas, portanto precisam ser determinadas. Além disso, para elementos finitos sólidos com ordem de aproximação quadrática ou superior a expressão resulta em um sistema não linear nestas coordenadas adimensionais (RAMOS, 2020).

O método de solução iterativo de Newton-Raphson é usado para determinação dessas coordenadas como detalhado e aplicado em Sampaio, Paccola e Coda (2013). O sistema não linear é obtido realizando-se uma expansão em série de Taylor de primeira ordem na expressão (3.64), o qual é representado de forma compacta na expressão (3.65).

$$H_{ij}\Delta\xi_j = \bar{X}_i^p - \bar{X}_i^{pt} \quad (3.65)$$

O sistema da expressão (3.65) deve ser resolvido para encontrar a correção das coordenadas adimensionais  $\Delta\xi_j$  do nó da fibra de coordenadas iniciais  $\bar{X}_i^p$ . As coordenadas  $\bar{X}_i^{pt}$  são obtidas por meio da expressão (3.64) usando as coordenadas adimensionais tentativa  $\xi_k^{pt}$ . A matriz  $H_{ij}$  é definida por:

$$H_{ij} = \frac{\partial\phi_i(\xi_k^{pt})}{\partial\xi_j} \quad (3.66)$$

Ao final, as coordenadas adimensionais são corrigidas da seguinte maneira:

$$\xi_j = \xi_j^{pt} + \Delta\xi_j \quad (3.67)$$

Assim, o sistema da expressão (3.65) deve ser resolvido repetidas vezes até que ocorra convergência. A convergência ocorre quando o módulo do vetor de incremento  $\Delta\xi_j$  for suficientemente pequeno. Quando ocorre a convergência deve-se verificar se o valor encontrado para  $\xi_j$  pertence ao domínio adimensional do elemento finito tetraédrico considerado. As coordenadas adimensionais encontradas estarão no domínio do elemento da matriz considerada se atenderem simultaneamente as condições de  $0 \leq \xi_1^p \leq 1$ ,  $0 \leq \xi_2^p \leq 1$ ,  $0 \leq \xi_3^p \leq 1$  e  $0 \leq 1 - \xi_1^p - \xi_2^p - \xi_3^p \leq 1$ .

Caso contrário, o elemento sólido considerado não contém o nó do elemento de fibra estudado. Nesta situação as coordenadas adimensionais estão incorretas e deve-se calculá-las usando outro elemento sólido como possível base. Portanto, todos os elementos sólidos próximos ao nó da fibra devem ser testados até que um deles satisfaça todas as condições descritas.

Após identificar em quais elementos finitos sólidos todos os nós das fibras estão contidos, e quais os respectivos valores das coordenadas adimensionais, as posições atuais de cada nó das fibras podem ser determinadas em funções dos nós da matriz, como segue:

$$Y_{Pi} = \phi_l \left( \xi_1^P, \xi_2^P, \xi_3^P \right) Y_{li} \quad (3.68)$$

É adequado para os desenvolvimentos que seguem realizar a derivada das coordenadas atuais dos nós das fibras em relação as coordenadas atuais dos nós da matriz. Assim, deriva-se a expressão (3.68) em relação as posições atuais dos nós da matriz, resultando:

$$\frac{\partial Y_{Pi}}{\partial Y_{\beta\alpha}} = \frac{\partial Y_{li}}{\partial Y_{\beta\alpha}} \phi_l \left( \xi_1^P, \xi_2^P, \xi_3^P \right) = \delta_{\alpha i} \delta_{\beta l} \phi_l \left( \xi_1^P, \xi_2^P, \xi_3^P \right) = \delta_{\alpha i} \phi_\beta \left( \xi_1^P, \xi_2^P, \xi_3^P \right) \quad (3.69)$$

### 3.7.1 Contribuição de fibras no vetor de forças internas e na Hessiana global

Para determinar o vetor de forças internas e a Hessiana global do sólido com fibra, escreve-se inicialmente a energia de deformação  $U$ , como a soma de uma parcela relativa à matriz  $U_{mat}$  e outra relativa à fibra  $U_f$ , ou seja:

$$U = U_{mat} + U_f \quad (3.70)$$

Usando a expressão (3.69), a força interna global da estrutura é dada para cada nó  $\beta$  e direção  $\alpha$  dos elementos da matriz como:

$$F_{\beta\alpha}^{int} = \frac{\partial (U_{mat} + U_f)}{\partial Y_{\beta\alpha}} = \frac{\partial U_{mat}}{\partial Y_{\beta\alpha}} + \frac{\partial U_f}{\partial Y_{(P)i}} \frac{\partial Y_{(P)i}}{\partial Y_{\beta\alpha}} = F_{\beta\alpha}^{mat} + \phi_\beta \left( \xi_1^P, \xi_2^P \right) F_{(P)\alpha}^f \quad (3.71)$$

A Hessiana global da estrutura é determinada conforme expressão (3.72):

$$H = \frac{\partial^2 (U_{mat} + U_f)}{\partial Y_{\beta\alpha} \partial Y_{\xi\gamma}} = \int_{V_{0mat}} \frac{\partial^2 u_{mat}}{\partial Y_{\beta\alpha} \partial Y_{\xi\gamma}} dV_{0mat} + \int_{V_{0f}} \frac{\partial^2 u_f}{\partial Y_{\beta\alpha} \partial Y_{\xi\gamma}} dV_{0f} \quad (3.72)$$

Aplicando-se a regra da cadeia na segunda parcela à direita da igualdade da expressão (3.72), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_f}{\partial Y_{\beta\alpha} \partial Y_{\xi\gamma}} &= \frac{\partial^2 u_f}{\partial Y_{\rho\omega} \partial Y_{\rho\omega}} \frac{\partial Y_{\rho\omega}^f}{\partial Y_{\beta\alpha}} \frac{\partial Y_{\rho\omega}^f}{\partial Y_{\xi\gamma}} + \frac{\partial^2 u_f}{\partial Y_{\rho\omega} \partial Y_{\eta\pi}} \frac{\partial Y_{\rho\omega}^f}{\partial Y_{\beta\alpha}} \frac{\partial Y_{\eta\pi}^f}{\partial Y_{\xi\gamma}} + \\ &+ \frac{\partial^2 u_f}{\partial Y_{\eta\pi} \partial Y_{\rho\omega}} \frac{\partial Y_{\eta\pi}^f}{\partial Y_{\beta\alpha}} \frac{\partial Y_{\rho\omega}^f}{\partial Y_{\xi\gamma}} + \frac{\partial^2 u_f}{\partial Y_{\eta\pi} \partial Y_{\eta\pi}} \frac{\partial Y_{\eta\pi}^f}{\partial Y_{\beta\alpha}} \frac{\partial Y_{\eta\pi}^f}{\partial Y_{\xi\gamma}}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

A expressão (3.73) pode ser resolvida com auxílio da expressão (3.69). Dessa maneira, estão disponíveis todas as informações necessárias para o cálculo dos valores numéricos das expressões (3.71) e (3.72), e com isso, é possível resolver a estrutura formada pela combinação de elementos sólidos e fibras unidimensionais (inclusive curvas).

### 3.7.2 Estratégia numérica para o acoplamento

Uma estratégia numérica de transferência das contribuições do vetor de forças internas e da matriz Hessiana de cada elemento de fibra para os nós dos elementos sólidos que contêm os nós das fibras é descrita a seguir.

Inicialmente, admite-se a hipótese de que cada nó do elemento de fibra ocupa um elemento sólido diferente. Partindo dessa hipótese, a última parcela da expressão (3.71) e da expressão (3.72) é facilmente calculada como operações entre matrizes e vetores usando a matriz  $[\varphi]$  (válida para elementos sólidos tridimensionais) definida como:

$$[\varphi]_{[3f \times 3mf]} = \begin{bmatrix} [T^1] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [T^2] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T^f] \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

onde:

$$T^k_{[3 \times 3m]} = \begin{bmatrix} \phi_1^k & 0 & 0 & \phi_2^k & 0 & 0 & \dots & \phi_m^k & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1^k & 0 & 0 & \phi_2^k & 0 & \dots & 0 & \phi_m^k & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1^k & 0 & 0 & \phi_2^k & \dots & 0 & 0 & \phi_m^k \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

A matriz  $T^k$  apresenta as  $m$  funções de forma do elemento da matriz aplicadas na coordenada adimensional do nó  $k$  da fibra que está inserida neste elemento. O índice  $f$  na matriz  $[\varphi]$  é o número de nós de um elemento de fibra.

O vetor de forças internas de cada elemento de fibra calculado pela expressão (3.60) pode ser espalhado no vetor de forças internas da estrutura com auxílio das expressões (3.71) e (3.74), conforme expressão (3.76).

$$\left[ F_{\text{int}}^{f \rightarrow \text{global}} \right]_{3fm \times 1} = [\varphi]_{3fm \times 2r}^T \cdot \left[ F_{\text{int}}^f \right]_{3f \times 1} \quad (3.76)$$

A matriz Hessiana de cada elemento de fibra obtida pela expressão (3.62) pode ser espalhada na Hessiana global da estrutura. Para isso, utiliza-se a relação encontrada na expressão (3.73) em conjunto com a matriz  $[\varphi]$  da expressão (3.74). A relação entre Hessiana da fibra e Hessiana global é dada por:

$$\left[ H^{f \rightarrow global} \right]_{[3fm \times 3fm]} = [\varphi]_{[3fm \times 3f]}^T \cdot \left[ H^f \right]_{[3f \times 3f]} \cdot [\varphi]_{[3f \times 3fm]} \quad (3.77)$$

Ressalta-se que caso não se respeite a hipótese de que cada nó do elemento de fibra ocupa um elemento sólido diferente, as expressões (3.76) e (3.77) continuam válidas. A modificação ocorrida está relacionada ao vetor  $\left[ F_{int}^{f \rightarrow global} \right]_{[3fm \times 1]}$  e à matriz  $\left[ H^{f \rightarrow global} \right]_{[3fm \times 3fm]}$  que possuirão valores de posições diferentes contribuindo em mesmas posições do vetor de forças internas e matriz Hessiana globais da estrutura.

As expressões (3.76) e (3.77) devem ser aplicadas a todos os elementos de fibras. Sendo efetuada estas operações, todas as informações necessárias estão disponíveis para a realização da análise estrutural de estruturas de comportamento constitutivo elástico.

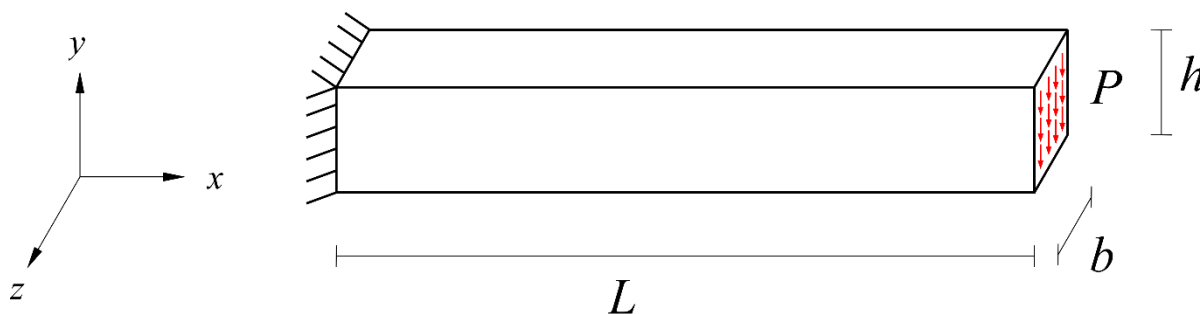
### 3.8 Exemplos de validação

Nesta seção são apresentados os exemplos de validação da formulação implementada. Para isso, exemplos selecionados são resolvidos pela formulação aqui apresentada e comparados com os resultados disponíveis na literatura a fim de atestar a robustez do modelo.

#### 3.8.1 Exemplo 1: Viga homogênea submetida a grandes deslocamentos

O primeiro exemplo (Exemplo 1) exibe uma viga engastada numa extremidade e livre na outra, submetida a uma força resultante  $P$  de 10kN em sua extremidade livre. O esquema estrutural é ilustrado na Figura 3-4. Este tipo de problema foi estudado em Mattiasson (1981), em que o autor analisou pórticos e vigas no plano e obteve soluções analíticas da elasticidade não linear.

Figura 3-4- Esquema estrutural da viga.



Fonte: O autor (2023).

Os dados do problema do Exemplo 1 são apresentados na Tabela 3-1.

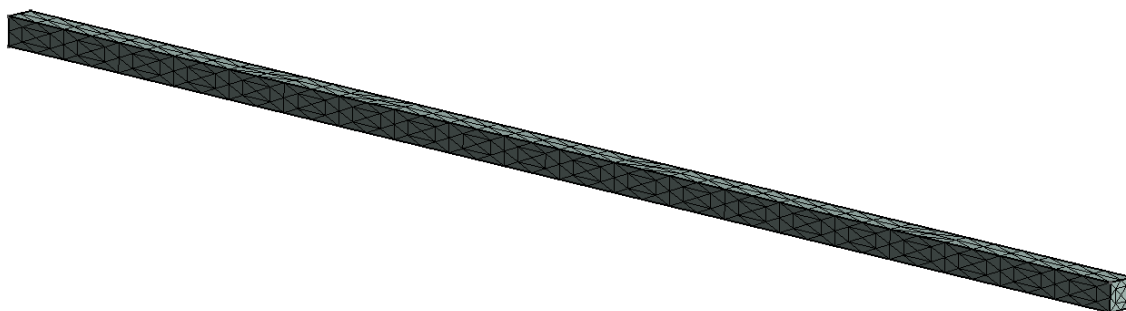
Tabela 3-1- Propriedades do material e geometria da estrutura do Exemplo 1

$E$ (MPa)	$\nu$	$L$ (m)	$b$ (m)	$h$ (m)
750	0,0	10	0,2	0,2

Fonte: O autor (2023).

Uma malha com dois mil e oito (2008) elementos tetraédricos de aproximação quadrática e três mil setecentos e cinquenta e nove (3759) nós foi empregada, resultando em onze mil duzentos e vinte e sete (11277) graus de liberdade no problema. A discretização adotada é exibida na Figura 3-5.

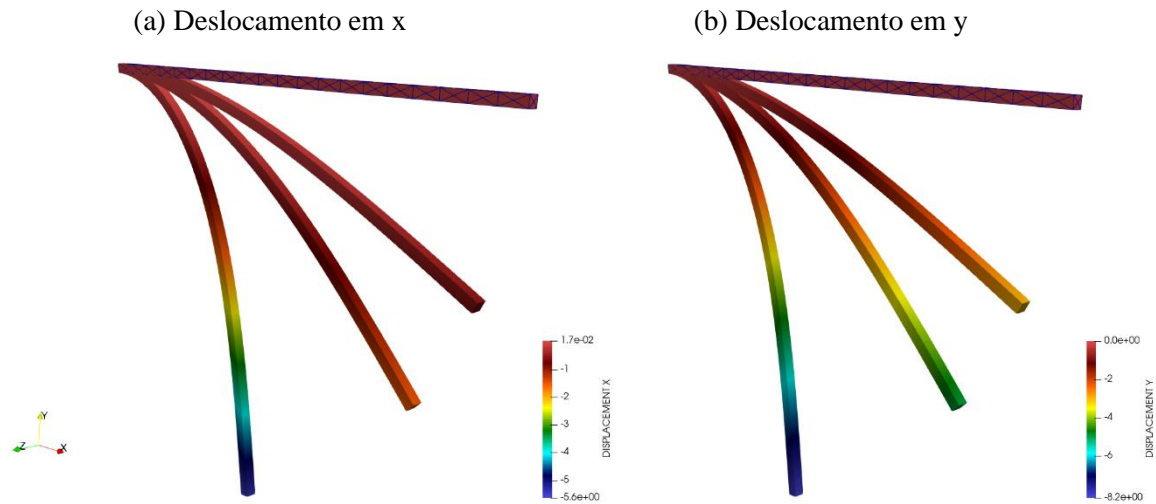
Figura 3-5- Malha em elementos finitos do Exemplo 1.



Fonte: O autor (2023).

A Figura 3-6 apresenta a deformada da viga para alguns instantes de carregamento e os deslocamentos nos eixos  $x$  e  $y$  com os respectivos valores no mapa de cores. Por meio desses resultados, sem escala, nota-se a magnitude dos deslocamentos, configurando uma situação de grandes deslocamentos. Devido à natureza bidimensional do problema, os resultados dos deslocamentos na direção  $z$  são nulos e por isso são aqui omitidos.

Figura 3-6- Resultados do MEFP para deslocamentos do Exemplo 1.



Na Tabela 3-2 são apresentados os resultados do MEFP para os deslocamentos relativos do centro de gravidade da extremidade livre, sendo o deslocamento  $u$  na direção  $x$  e o deslocamento  $w$  na direção  $y$ . Com a finalidade de validar a formulação implementada, os resultados obtidos por Mattiasson (1981) também são apresentados.

Tabela 3-2- Comparação entre os resultados analítico e numérico do Exemplo 1

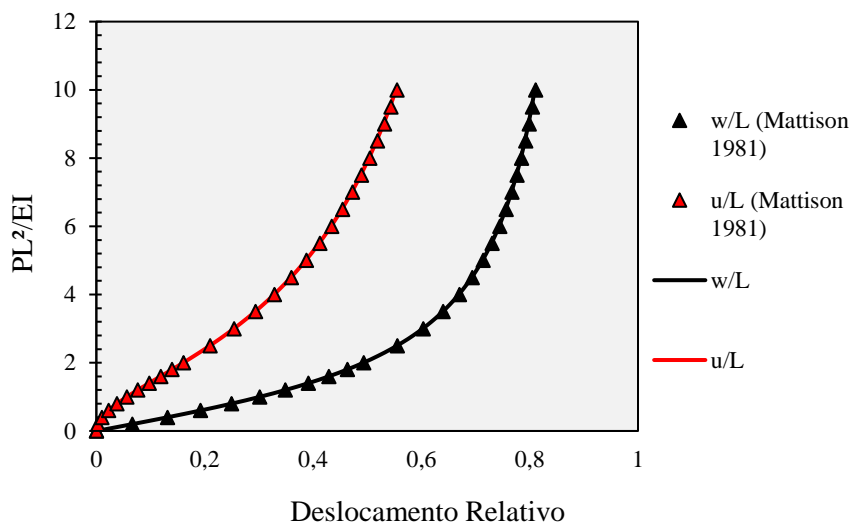
$\frac{PL^2}{EI}$	Mattiasson (1981)		MEFP 3D		Diferença (%)	
	$u/L$	$w/L$	$u/L$	$w/L$	$u/L$	$w/L$
1	0,05643	0,30172	0,056427	0,301692	0,005	0,009
2	0,16064	0,49346	0,160591	0,493367	0,03	0,018
3	0,25442	0,60325	0,254306	0,603121	0,044	0,021
4	0,32894	0,66996	0,328769	0,669812	0,022	0,022
5	0,38763	0,71379	0,387407	0,713632	0,0575	0,022
6	0,43459	0,74457	0,434326	0,744413	0,060	0,021
7	0,47293	0,76737	0,47263	0,767217	0,063	0,019
8	0,50483	0,78498	0,504499	0,784839	0,065	0,018
9	0,53182	0,79906	0,531465	0,798923	0,066	0,0171
10	0,555	0,81061	0,554615	0,810488	0,069	0,015

Fonte: O autor (2023).



Os resultados da Tabela 3-2 podem ser analisados graficamente na Figura 3-7, em que observa-se o comportamento não linear.

Figura 3-7- Deslocamentos relativos do Exemplo 1.



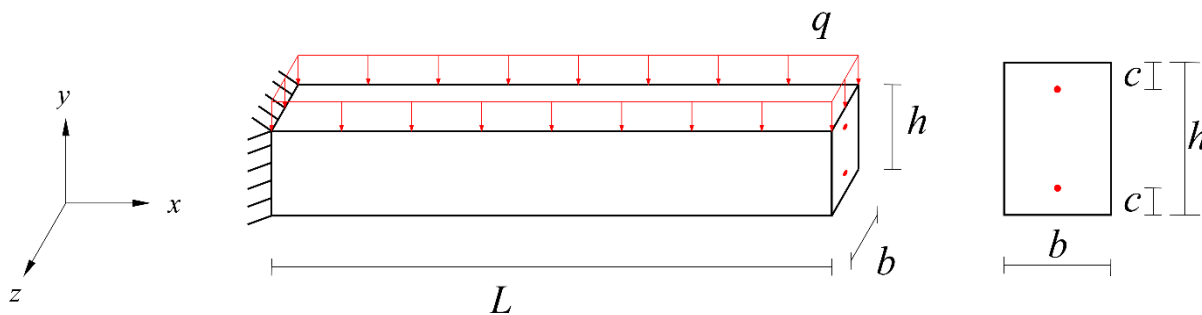
Fonte: O autor (2023).

Com base nos resultados apresentados na Tabela 3-2 e na Figura 3-7 conclui-se que a formulação do MEFP foi corretamente implementada e apresenta eficácia em análises de grandes deslocamentos devido a sua formulação não linear geométrica e geometricamente “exata”.

### 3.8.2 Exemplo 2: Viga reforçada com fibra

O segundo exemplo foi proposto por Sampaio (2014) para avaliar a técnica de embutimento da fibra na matriz. O exemplo consiste numa viga em balanço sujeita a um carregamento distribuído em sua face superior, como pode ser visto na Figura 3-8.

Figura 3-8- Esquema estrutural da viga em balanço.



Fonte: O autor (2023).

As propriedades dos materiais e dados da geométrica do exemplo 2 são apresentados na Tabela 3-3.

Tabela 3-3- Propriedades e dados do Exemplo 2

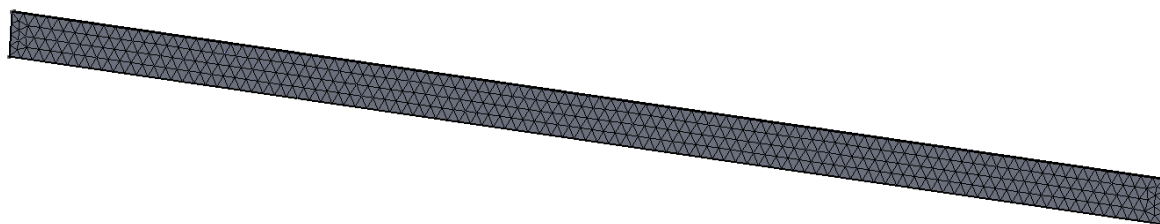
	L (m)	3
<b>Dados</b>	b (m)	0,01
	h(m)	0,1
<b>Geométricos</b>	c(m)	0,025
	$\mathbb{E}$ (MPa)	21000
<b>Matriz</b>	$\nu$	0,0
	$\mathbb{E}_f$ (MPa)	210000
<b>Fibra</b>	$A_f$ (m <sup>2</sup> )	10 <sup>-4</sup>

Fonte: O autor (2023).

Além da validação do embutimento, neste exemplo também foi analisado o regime de pequenos e grandes deslocamentos, e os elementos estruturais reforçados com fibras ou não. Para analisar o regime de pequenos deslocamentos foi considerado um carregamento  $q = 5kN / m^2$ , enquanto para o regime de grandes deslocamentos foi adotado um carregamento  $q = 500kN / m^2$ . Para todas as análises foram considerados dez (10) passos de carga.

A Figura 3-9 exibe a discretização adotada para a matriz, são dois mil e quinhentos (2500) elementos tetraédricos quadráticos, resultando em dezesseis mil setecentos e sessenta e sete (16767) graus de liberdade. Para a fibra são empregados duzentos (200) elementos de aproximação quadrática e mil duzentos e seis (1206) graus de liberdade. O tamanho adotado para cada elemento finito de fibra é próximo do tamanho das faces dos elementos tetraédricos. Esta estratégia buscou seguir as recomendações de Sampaio (2014) para um adequado acoplamento.

Figura 3-9- Malha em MEF para a matriz do Exemplo 2.



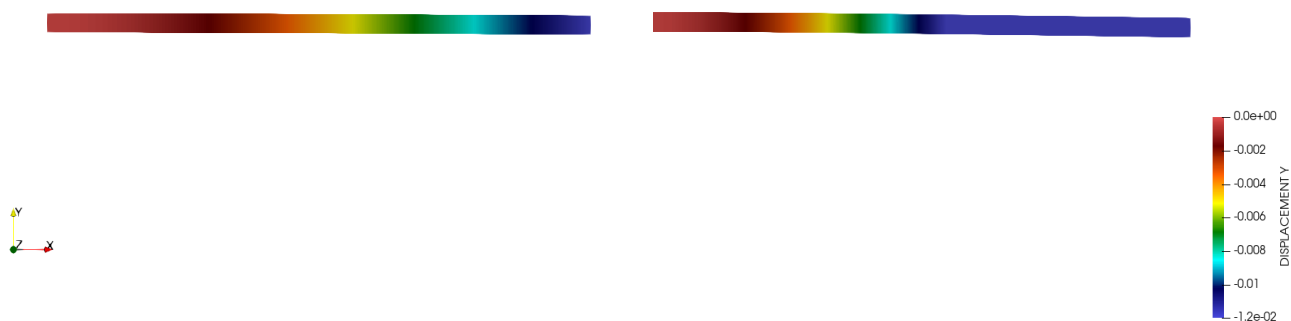
Fonte: O autor (2023).

Na Figura 3-10 são exibidos os deslocamentos verticais  $w$  desenvolvidos na matriz com reforço e sem reforço, nos regimes linear e não linear.

Figura 3-10- Deslocamentos verticais  $w$  (m) do exemplo 2.

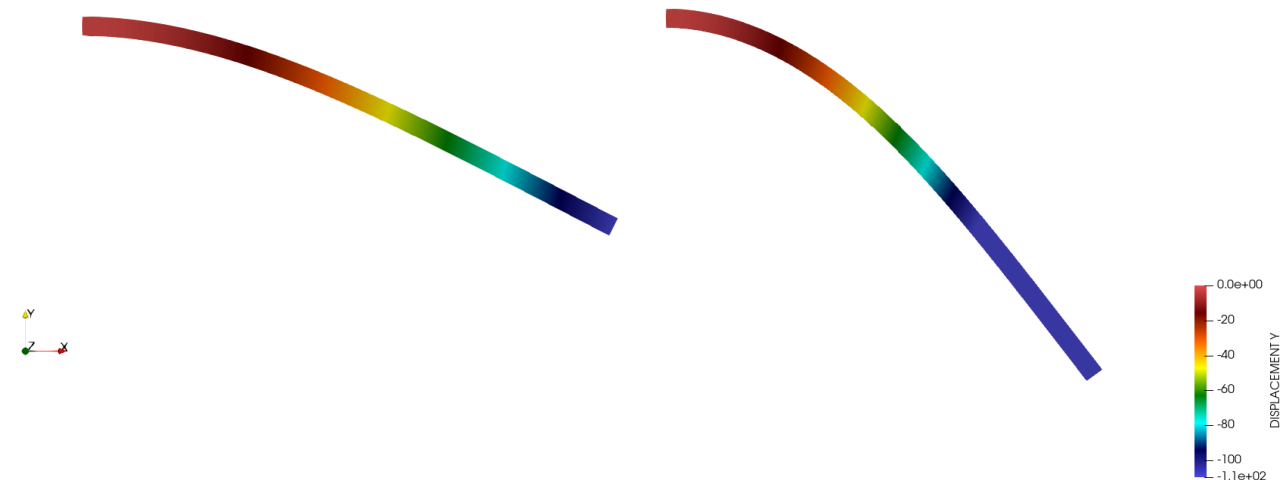
(a) Matriz reforçada no regime linear

(b) Matriz sem reforço no regime linear



(c) Matriz reforçada no regime não linear

(d) Matriz sem reforço no regime não linear



Fonte: O autor (2023).

Nas análises de regime não linear ocorreram perda de estabilidade no eixo  $z$  (fora do plano), tanto para matriz reforçada, quanto para não reforçada, pois a viga do presente exemplo

é esbelta. Assim, foi necessário restringir os deslocamentos nesse eixo para evitar perda de estabilidade, com o intuito de poder comparar os resultados com a referência.

Portanto, os resultados apresentados anteriormente nas Figura 3-10-(c) e (d) correspondem ao problema plano do Exemplo 2. Na Figura 3-11 é exibida a configuração deslocada da viga reforçada numa análise tridimensional não linear.

Figura 3-11- Deslocamento vertical (m) para análise tridimensional do Exemplo 2.



Fonte: O autor (2023).

Os resultados são satisfatórios se avaliados em termos quantitativos, comparando os deslocamentos verticais do centro de gravidade da extremidade livre com as referências analíticas (quando disponível) e numéricas. A Tabela 3-4 apresenta os resultados do Exemplo 2.

Tabela 3-4- Resultados das análises para o deslocamento  $w$  na extremidade livre do Exemplo 2

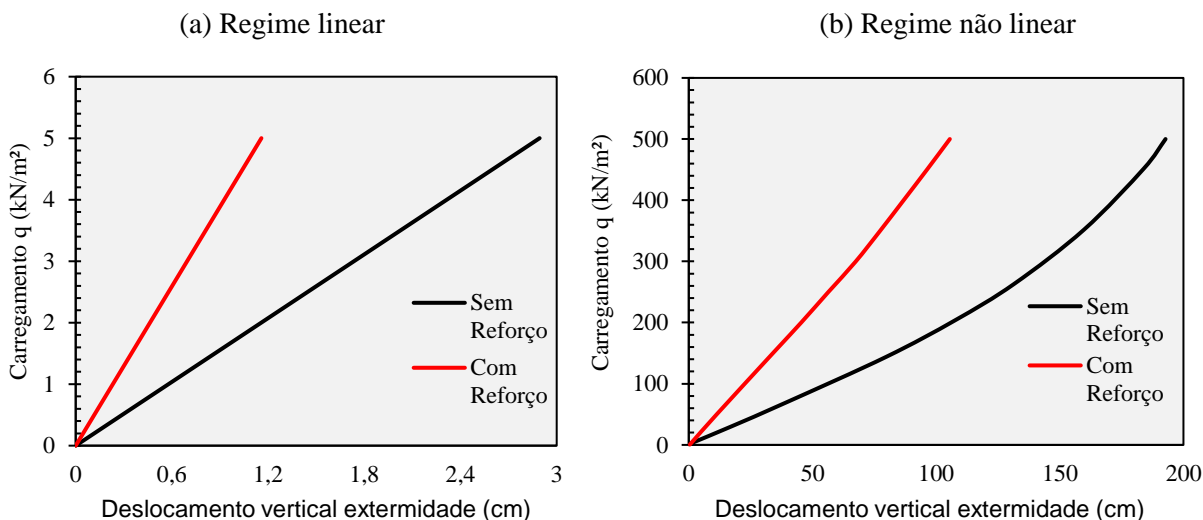
Regime	Reforço	Presente	Sampaio (2014)		Analítico	
		trabalho	$w$	Diferença (%)	$w$	Diferença (%)
Linear	Não	2,8935	2,896	-0,09	2,892	0,05
	Sim	1,1583	1,1606	-0,20	1,1571	0,1
Não Linear	Não	192,75	193,053	-0,16	-	-
	Sim	105,54	106,393	-0,81	-	-

Fonte: O autor (2023).

De forma complementar, são exibidas na Figura 3-12-(a) as curvas para a matriz reforçada e não reforçada do deslocamento vertical  $w$  no centro de gravidade da extremidade

livre em função do carregamento aplicado no regime linear. Na Figura 3-12-(b) são mostradas as curvas do regime não linear.

Figura 3-12- Deslocamento na extremidade livre do Exemplo 2.



Fonte: O autor (2023).

Ao comparar os resultados da presente formulação com os resultados da literatura (Tabela 3-4), observa-se uma boa concordância para todas as análises realizadas. Desta maneira, conclui-se que a implementação do embutimento apresentou resultados satisfatórios.

Analisando a Figura 3-12, depreende-se que as fibras embutidas na matriz reduziram os deslocamentos, o que já era esperado, porém atesta-se novamente a correta consideração dos elementos de reforço no exemplo. Ainda, no regime de pequenos deslocamentos, o comportamento das curvas foi linear para ambos os casos de reforço. Para o regime de grandes deslocamentos o comportamento das curvas foi não linear, sendo verificado que condiz ao comportamento esperado.

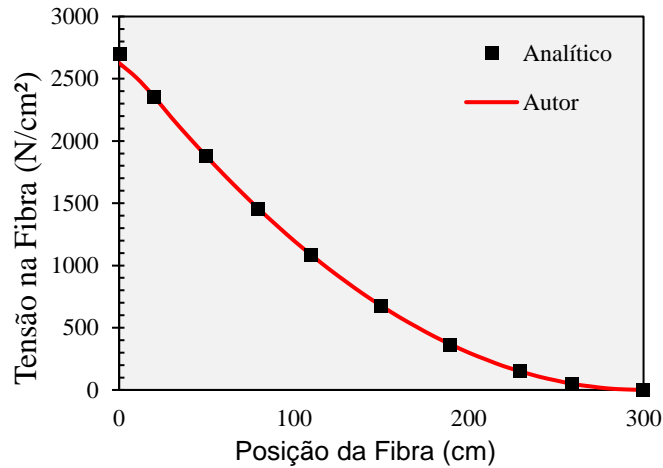
Ainda, foi comparada a tensão normal desenvolvida na fibra superior (tracionada) do modelo numérico com uma solução analítica válida para pequenos deslocamentos ( $q = 5 \text{ kN} / \text{m}^2$ ), baseada na mecânica dos sólidos. De acordo com Ramos (2020) o modelo pode ser expresso como:

$$\sigma_f = \frac{3qh'\mathbb{E}_f}{\mathbb{E}bh^3 + 6\mathbb{E}_fA_fh'^2}(x-L)^2 \quad (3.78)$$

onde  $h'$  é a distância entre os centros de gravidade das armaduras.

Na Figura 3-13 são apresentados os resultados numéricos para o regime linear (pequenos deslocamentos) e os resultados analíticos da expressão (3.78) para a tensão desenvolvida na fibra ao longo do comprimento.

Figura 3-13- Tensão na fibra ao longo do comprimento (Exemplo 2).



Fonte: O autor (2023).

Os resultados obtidos sugerem precisão e o correto desenvolvimento do código computacional para análise de estruturas compósitas, como o de concreto armado, principal objeto de estudo do presente estudo.



## 4 NÃO LINEARIDADE FÍSICA

---

Neste capítulo serão abordados os procedimentos matemáticos adotados para a simulação do comportamento não linear físico dos materiais constituintes do concreto armado. Primeiramente, são apresentados os conceitos da não linearidade física do concreto por meio da mecânica do dano. Em seguida, são abordados os conceitos e formulações da teoria da plasticidade e o modelo elastoplástico unidimensional, os quais são empregados para a modelagem não linear do aço. Por fim, são solucionados exemplos da literatura com o objetivo de validar a formulação implementada.

### 4.1 Mecânica do dano

O processo de fissuração e consequente redução das propriedades mecânicas do concreto é um tema que sempre despertou o interesse dos pesquisadores da Engenharia Civil. Os primeiros fundamentos teóricos surgiram no século XX, onde os estudos eram voltados à problemas de forma empírica e com teorias simplistas (PENNA, 2011). Entretanto, devido a ação combinada de diferentes fenômenos neste processo, tornou-se impraticável o uso de soluções analíticas.

O emprego dos métodos numéricos como o MEF tornou-se um recurso viável por seu caráter mais generalista, possibilitando a incorporação de modelos cada vez mais robustos. Sendo assim, surgiram duas abordagens de representação desse processo de fissuração: discreta e continuamente espalhada. Na fissuração discreta as trincas são inseridas na malha de forma discreta, ou seja, são modeladas considerando-se a separação das arestas dos elementos e conforme a fissura é propagada é exigido um remalhamento, o que proporciona um alto custo computacional, principalmente em estruturas de concreto armado por apresentar múltiplas fissuras.

Na fissuração continuamente espalhada, a descontinuidade do campo de deslocamentos é considerada dispersa ao longo do elemento e matematicamente tem-se uma alteração da equação constitutiva. Por mais que não represente fidedignamente a realidade, os resultados obtidos apresentam boa acurácia e essa alternativa tem sido largamente empregada no meio técnico, principalmente devido a simplicidade de implementação e custo computacional mais vantajoso quando comparado ao modelo discreto (GAMINO, 2007).



Neste contexto surgiu a mecânica do dano contínuo, que tem como objetivo representar o processo de “danificação” do material (perda de rigidez e resistência) por meio de uma variável de dano que penaliza o tensor constitutivo. Tal variável pode ser um escalar em casos mais simples (isotrópico) ou um tensor em casos mais complexos (ortotrópico e anisotrópico). Assim, as microfissuras aleatórias e heterogêneas que aparecem no concreto são consideradas de forma homogênea em um Elemento Representativo de Volume (ERV), mantendo-se a hipótese de continuidade do material. Ademais, são definidos critérios de dano que governam a evolução do processo de degradação do material.

Diversos modelos de dano contínuo foram desenvolvidos, destacando-se o modelo de Mazars (1984), o qual tem sido bastante difundido no meio científico para simular o concreto devido a sua simplicidade de implementação e adequada precisão. A formulação do modelo de dano de Mazars (1984) é apresentado no item seguinte.

#### 4.1.1 Modelo de Dano de Mazars (1984)

O modelo de dano de Mazars (1984) é isotrópico, ou seja, a variável de dano penaliza igualmente a rigidez do material em todas as direções. Por isto, tal variável pode ser considerada como um escalar  $D$ . Seguindo as premissas da mecânica do dano, a variável de dano  $D$  pode ser obtida pela razão entre as áreas danificadas ( $\tilde{S}$ ) e áreas sãs ( $S_0$ ) de um ERV, conforme expressão (4.1).

$$D = \frac{\tilde{S}}{S_0} \quad , \quad 0 \leq D \leq 1 \quad (4.1)$$

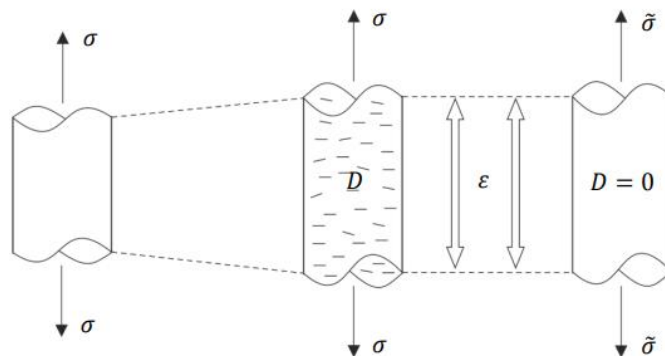
A tensão ( $\tilde{\sigma}$ ) que efetivamente atua em uma área útil ( $S_0 - \tilde{S}$ ) do ERV é expressa por:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S_0 - \tilde{S}} \quad \text{ou} \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - D)} \quad (4.2)$$

onde  $F$  é a força normal e  $\sigma$  é a tensão atuante no material sã.

Segundo Lemaitre e Chaboche (1985) e Murakami (2012), pode-se lançar mão do princípio da deformação equivalente para determinar a deformação que ocorre no material danificado. Este princípio diz que a deformação do material danificado submetido a uma tensão usual  $\sigma$  deve ser igual a deformação causada pela tensão efetiva  $\tilde{\sigma}$  no material considerado sã de forma fictícia, como pode ser observado na Figura 4-1.

Figura 4-1- Princípio da deformação equivalente.



Fonte: Santos (2015).

Com isso, é possível utilizar a lei de Hooke na expressão (4.2), resultando na seguinte expressão para a deformação:

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{\mathbb{E}} = \frac{\sigma}{(1-D)\mathbb{E}} \quad (4.3)$$

Sabe-se que o tensor constitutivo elástico de materiais isotrópicos é obtido em função do módulo de elasticidade longitudinal e visando o desenvolvimento numérico é considerada a variável de dano aplicada diretamente neste parâmetro elástico, como segue na expressão (4.4)

$$\tilde{\mathbb{E}} = (1-D)\mathbb{E} \quad (4.4)$$

onde  $\tilde{\mathbb{E}}$  é o módulo longitudinal degradado ou efetivo.

O modelo de dano de Mazars (1984) assume algumas hipóteses básicas, quais sejam:

- O carregamento aplicado deve ser monotonicamente crescente;
- Desprezam-se deformações permanentes, ou seja, o material tem comportamento elástico;
- Somente as deformações de alongamento causam o dano, por isso, ao menos uma das componentes do tensor de deformações principais precisa ser positiva;
- Sabe-se que durante o processo de degradação mecânica os materiais apresentam um comportamento anisotrópico. Entretanto, por simplicidade a variável de dano é considerada isotrópica e, portanto, representada por um escalar D;
- O começo da danificação ocorre quando um valor pré-determinado de deformação é superado. O estado de danificação passa a ser medido pela variável

de dano escalar  $D$ , que tem como intervalo fechado  $[0,1]$ . Quando  $D=0$  o material encontra-se em estado íntegro, enquanto  $D=1$  representa a completa degradação do material.

As deformações de alongamento que causam o dano são analisadas por meio da deformação equivalente, definida a seguir.

$$E_{eq} = \sqrt{(E_1)_+^2 + (E_2)_+^2 + (E_3)_+^2} \quad (4.5)$$

onde as variáveis  $(E_i)_+$  são as componentes positivas do tensor de deformações principais.

A partir da expressão (4.5) é possível definir o início da danificação do material quando a deformação equivalente  $E_{eq}$  atingir o valor da deformação correspondente à tensão de pico do ensaio de tração uniaxial, definida como  $E_{d0}$ . Ressalta-se que essa medida de deformação normalmente é dada pela deformação linear de engenharia  $\varepsilon_{d0}$ , portanto, é válida a seguinte relação de interesse:

$$E_{d0}(\varepsilon_{d0}) = \frac{\varepsilon_{d0}^2}{2} + \varepsilon_{d0} \quad (4.6)$$

Diante da não disponibilidade dos resultados experimentais para  $\varepsilon_{d0}$ , é possível estimá-lo por meio de normas técnicas, como a NBR 6118 (ABNT, 2014). Em Nogueira (2010) é possível verificar este procedimento.

O critério que determina a evolução da danificação é dado pela função de resistência a seguir.

$$f(E_{eq}, D) = E_{eq} - E_{lim}(D) \leq 0 \quad (4.7)$$

onde  $E_{lim}$  representa a deformação equivalente limite em função do dano. Essa deformação assume o valor da máxima deformação atingida durante o histórico de deformações, sendo no início da análise assumido como  $E_{d0}$ .

Assim, a danificação é iniciada quando  $f(E_{eq}, D) = 0$ . A lei de evolução do dano é definida em termos de taxas de variação no tempo e segundo o princípio da irreversibilidade do processo de danificação (segunda lei da termodinâmica). Logo, a variável  $D$  é governada pelas expressões (4.8) e (4.9).

$$\dot{D} = 0 \quad \text{se } f < 0 \quad \text{ou } f = 0 \text{ e } \dot{f} < 0 \quad (4.8)$$

$$\dot{D} = F\left(E_{eq}, (\dot{E}_{eq})_+\right) \quad \text{se } f = 0 \text{ e } \dot{f} = 0 \quad (4.9)$$

onde:  $\dot{D} = \frac{dD}{dt}$ ,  $\dot{f} = \frac{df}{dt}$ ,  $(\dot{E}_{eq})_+ = \frac{d(E_{eq})_+}{dt}$ ,  $t$  indica o tempo e  $F(E_{eq}, (\dot{E}_{eq})_+)$  é uma função contínua e positiva da deformação equivalente. Tal função é dependente de parâmetros numéricos intrínsecos do modelo. A obtenção desses parâmetros é comentada mais adiante neste texto.

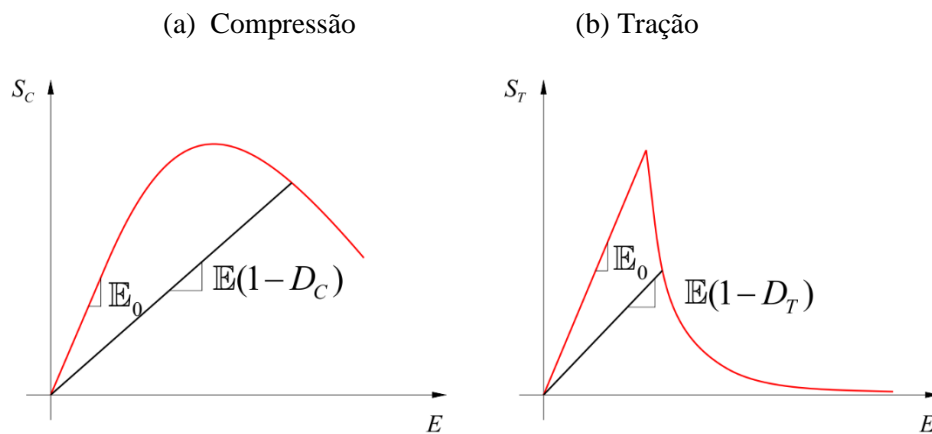
As condições das expressões (4.8) e (4.9) são denominadas de condições de complementaridade e consistência, respectivamente, análogas a da teoria da plasticidade. Assim, podem ser reescritas conforme as expressões (4.10) e (4.11).

$$\dot{D} \cdot f = 0 \quad (\text{Condição de complementariedade}) \quad (4.10)$$

$$\dot{D} \cdot \dot{f} = 0 \quad (\text{Condição de consistência}) \quad (4.11)$$

Tendo em vista o comportamento uniaxial não linear distinto para a tração e compressão do concreto, no modelo de Mazars são definidas duas variáveis independentes de dano para as respectivas solicitações, sendo elas  $D_T$  e  $D_C$ . Na Figura 4-2 são apresentados os diagramas característicos de tensão-deformação para ambas as solicitações e variáveis de dano.

Figura 4-2- Diagramas tensão-deformação para o concreto utilizando a mecânica do dano.



Fonte: O autor (2023).

As leis de evolução das variáveis independentes de dano são fornecidas pelas expressões (4.12) e (4.13).

$$\dot{D}_T = F_T\left(E_{eq}, (\dot{E}_{eq})_+\right) \quad (4.12)$$

$$\dot{D}_C = F_C \left( E_{eq}, (\dot{E}_{eq})_+ \right) \quad (4.13)$$

Integrando-se as expressões (4.12) e (4.13), obtêm-se:

$$D_T = 1 - \frac{E_{d0}(1-A_T)}{E_{eq}} - \frac{A_T}{e^{B_T(E_{eq}-E_{d0})}} \quad (4.14)$$

$$D_C = 1 - \frac{E_{d0}(1-A_C)}{E_{eq}} - \frac{A_C}{e^{B_C(E_{eq}-E_{d0})}} \quad (4.15)$$

onde os parâmetros  $A_T, B_T, A_C, B_C$  e  $E_{d0}$  são internos ao modelo de dano de Mazars e podem ser obtidos experimentalmente ou por aproximações de funções analíticas.

As expressões (4.14) e (4.15) são definidas para estados uniaxiais, e portanto, é preciso definir uma relação entre essas variáveis para casos de sollicitações multiaxiais. Perego (1990) propõe a relação a seguir.

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \quad (4.16)$$

Os coeficientes  $\alpha_T$  e  $\alpha_C$  são obtidos da seguinte maneira:

$$\alpha_T = \frac{\sum_i (E_{Ti})_+}{E_V^+} \quad (4.17)$$

$$\alpha_C = \frac{\sum_i (E_{Ci})_+}{E_V^+} \quad (4.18)$$

onde a variável cinemática de alongamento total  $E_V^+$  é dada por:

$$E_V^+ = \sum_i (E_{Ti})_+ + \sum_i (E_{Ci})_+ \quad (4.19)$$

Em que,  $(E_{Ti})_+$  e  $(E_{Ci})_+$  são as parcelas positivas dos tensores de deformações principais de tração e compressão, respectivamente, o que ratifica a hipótese do modelo que a danificação ocorre apenas por alongamentos ( $E > 0$ ).

Segundo Mazars (1984), as respectivas parcelas positivas dos tensores de deformação são obtidas por meio das expressões (4.20) e (4.21).

$$(E_{Ti})_+ = \frac{1+\nu}{\mathbb{E}} (S_i)_+ - \frac{\nu}{\mathbb{E}} \sum_{j=1}^3 (S_j)_+ \quad (4.20)$$

$$(E_{Ci})_+ = \frac{1+\nu}{\mathbb{E}}(S_i)_- - \frac{\nu}{\mathbb{E}} \sum_{j=1}^3 (S_j)_- \quad (4.21)$$

onde  $(S_i)_+$  e  $(S_i)_-$  são, respectivamente, as parcelas positivas e negativas do tensor de tensões principais fictício obtido por meio da relação elástica isotrópica aplicada no tensor de deformações principais no instante de análise. Matematicamente, tem-se:

$$(S_i)_+ = \frac{1}{2}(S_i + |S_i|) \quad (4.22)$$

$$(S_i)_- = \frac{1}{2}(S_i - |S_i|) \quad (4.23)$$

Por fim, de posse do valor da variável de dano da expressão (4.16) é possível atualizar o valor do módulo longitudinal degradado da expressão 1.4 em cada passo de carga. Assim, as grandezas de interesse podem ser finalmente calculadas com a nova matriz constitutiva do material.

A verificação da existência de dano na implementação numérica do modelo de dano é feita em cada ponto de integração do elemento, fazendo com que as tensões sejam atualizadas em cada iteração do processo incremental de Newton-Raphson utilizado no contexto não linear geométrico. Além disso, recomenda-se a criação de dois laços iterativos antes do passo incremental seguinte. No primeiro é feita a convergência no regime elástica e no segundo é realizada a convergência do dano. Dessa forma, as respostas conseguem a convergência independentemente do número de passos adotados, principalmente em análises com controle de deslocamentos.

Um problema que surge na modelagem numérica de modelos de dano por meio do Método dos Elementos Finitos é quando há o refinamento da malha e não acontece a convergência da solução, ou seja, a resposta é dita não objetiva. Esse fenômeno é conhecido na literatura como fenômeno de localização de deformações, discutido no item a seguir.

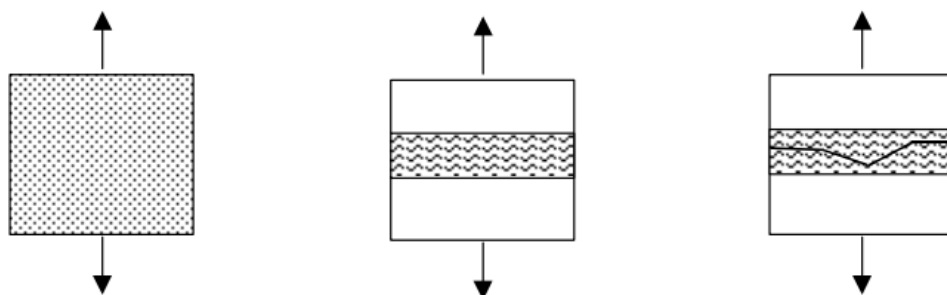
#### **4.1.2 Fenômeno de localização e regularização por energia de fratura**

O trecho de *softening* presente no comportamento não linear do concreto submetido a tração (Figura 4-2-b, item anterior) é proveniente do surgimento de pronunciados gradientes de deslocamento em algumas zonas do corpo, denominadas de zonas de localização de deformação. Esse fenômeno não é exclusivo da mecânica do dano, pois acontece na teoria da

plasticidade, e tampouco é específico do MEF, visto que outros métodos numéricos apresentaram o mesmo comportamento (PEERLINGS *et al.*, 2002; BOTTA, 2003).

A formação das zonas de localização no concreto é oriunda da microfissuração, as quais tendem a evoluir em função do aumento das solicitações mecânicas até reunirem-se em uma zona de localização de largura quase nula. Nesse momento, as macrofissuras são formadas (DRIEMEIER, 1999). O referido processo é exibido na Figura 4-3.

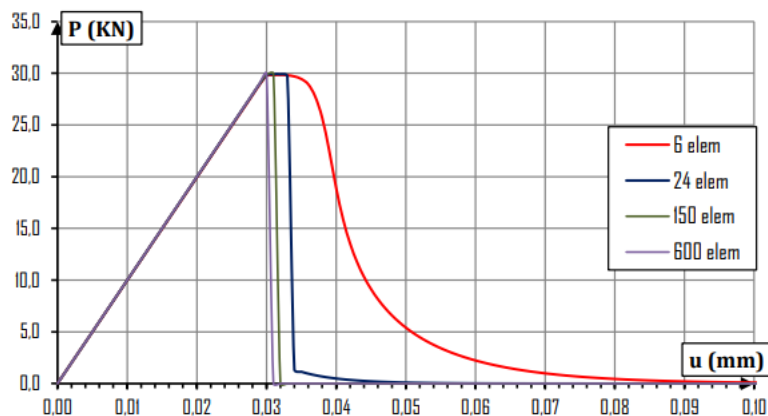
Figura 4-3- Processo de formação de fissuras.



Fonte: Driemeier (1999).

Durante a simulação numérica do problema, o Método dos Elementos Finitos visa capturar o fenômeno de localização, no momento que a zona de localização é muito pequena o método busca encontrar uma condição equivalente a uma fissura discreta. Conforme a malha é refinada, menor é a zona de localização (tende a uma linha) e maior é o gradiente de deslocamentos. Com isso, a solução converge para uma resposta de energia dissipada nula, perdendo-se a objetividade do problema, como por ser visto na Figura 4-4. Neste caso, a solução não representa a realidade física do problema.

Figura 4-4- Não objetividade da resposta com o refinamento da malha.



Fonte: Santos (2015).

Para contornar esse problema é necessário empregar uma técnica de regularização, sendo as mais empregadas: contínuo micropolar (DE BORST; MUHLHAUS, 1991), integral não-local (PIJAUDIER-CABOT; BAZANT, 1987), modelos com gradientes (DE BORST *et al.*, 1995) e energia de fratura (OLIVER, 1989). No presente estudo é empregado a técnica baseada na energia de fratura devido a sua simplicidade e comprovada precisão, sendo uma técnica bastante difundida e aceita no meio científico.

Nesta técnica é assumida que a energia de fratura  $G_f$  dissipada do concreto à tração é concentrada numa dada largura de banda  $h$  (ou comprimento característico). Essa largura é pré-definida em relação ao tamanho do elemento finito, fazendo com que a energia de fratura  $G_f$  do corpo seja sempre a mesma, independente da malha, ou seja, é válida a seguinte relação:

$$g_f = \frac{G_f}{h} \quad (4.24)$$

onde  $g_f$  é a energia dissipada na largura de banda e pode ser obtido pela expressão (4.25).

$$g_f = \int_0^{E_{ult}} SdE \quad (4.25)$$

Portanto, a estratégia da técnica se resume em desenvolver uma lei de evolução de dano na tração por meio de um modelo constitutivo que leve em conta a energia de fratura como uma propriedade do material e a largura de banda de forma implícita, com o objetivo de eliminar a dependência da malha e a conseqüente falta de objetividade da resposta.

A largura de banda é definida em função do tipo de elemento, aproximação adotada, quantidade de pontos de integração, entre outros fatores. Neste trabalho é empregada a largura de banda sugerida por Vonk (1993, apud Henze, 2019) e definida na expressão (4.26).

$$h = \sqrt[3]{\frac{V_e}{n_{int}}} \quad (4.26)$$

onde  $V_e$  é o volume do elemento e  $n_{int}$  é o número de pontos de integração.

O valor da energia de fratura  $G_f$  pode ser adotado de acordo com referências normativas ou experimentais, como o Model Code 1990 (CEB-FIP, 1993), Model Code 2010 (FIB, 2012) e Wittmann (2002). Geralmente a resistência à compressão média do concreto  $f_{cm}$



e o diâmetro máximo do agregado  $d_{máx}$  são os parâmetros considerados na determinação de  $G_f$ . Na Tabela 4-1 são exibidas as diferentes formulações para a sua determinação.

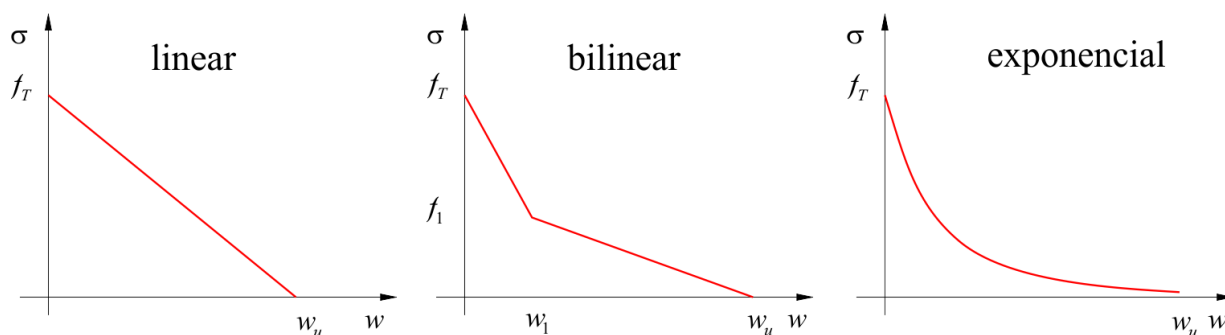
Tabela 4-1- Energia de Fratura de acordo com as referências

Referência	Energia de Fratura $G_f$ (N/mm)
Model Code 1990	$G_f = \begin{cases} G_{f0} \cdot \left(\frac{f_{cm}}{10}\right)^{0,7} & \text{se } f_{cm} \leq 80MPa \\ 4,3 \cdot G_{f0} & \text{se } f_{cm} > 80MPa \end{cases}$ $G_{f0} = \begin{cases} 0,025 & \text{se } d_{máx} = 8mm \\ 0,030 & \text{se } d_{máx} = 16mm \\ 0,058 & \text{se } d_{máx} = 32mm \end{cases}$
Model Code 2010	$G_f = 73 \cdot \left(\frac{f_{cm}}{1000}\right)^{0,18}$
Wittmann (2002)	$G_f = 0,028 \cdot f_{cm}^{0,28} \cdot d_{máx}^{0,32}$

Fonte: O autor (2023).

Utilizando os conceitos da mecânica da fratura, a tensão  $\sigma$  na zona de processo de fratura pode ser obtida em função da abertura de fissura fictícia  $w$ , tal relação é denominada lei coesiva. Existem diversas leis coesivas, nas quais comumente assumem o formato linear, bilinear, exponencial, observados na Figura 4-5.

Figura 4-5- Leis coesivas.



Fonte: O autor (2023).

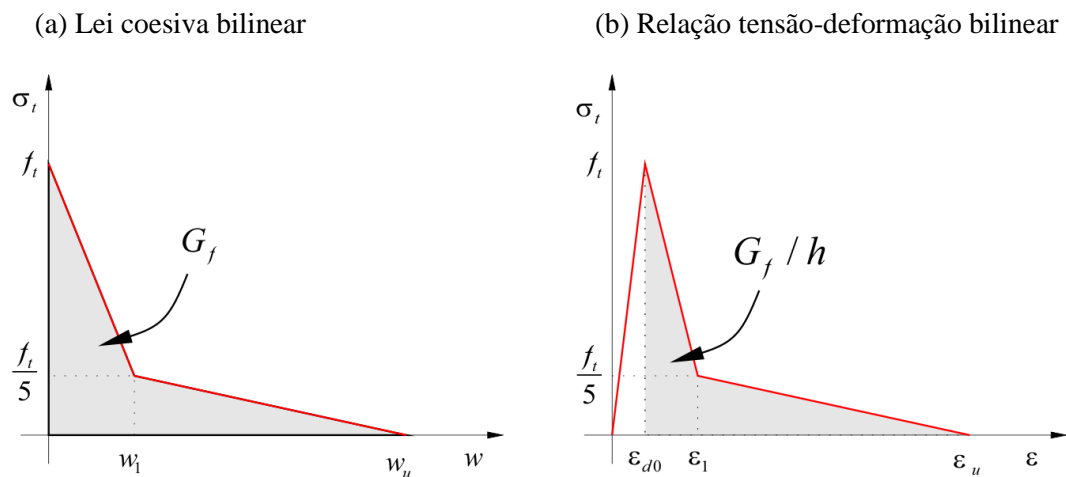
onde  $w_1$  e  $w_u$  são as aberturas de fissura obtidos conforme a formulação adotada, mas que dependem de  $G_f$  e da resistência à tração do concreto  $f_t$ , sendo esta última obtida via ensaio experimental ou por expressão analítica sugerida por alguma norma técnica.

A deformação na zona de processo de fratura  $\varepsilon_w$  é considerada conforme expressão (4.27).

$$\varepsilon_w = \frac{w}{h} \quad (4.27)$$

Portanto, a relação tensão-deformação para tração uniaxial do concreto é composta pelo trecho elástico linear e pelo trecho do *softening*, sendo este último dependente da lei coesiva e dos parâmetros  $G_f$ ,  $f_t$ ,  $w$  e  $h$ . Na Figura 4-6, por exemplo, é exibida a lei coesiva e a relação tensão-deformação recomendadas pelo Model Code 2010 (FIB, 2012).

Figura 4-6- Obtenção da relação tensão-deformação à tração segundo o Model Code 2010.



Fonte: Adaptado de Genikomsu e Polak (2015).

onde:

$$w_1 = G_f / f_t \quad (4.28)$$

$$w_u = 5 G_f / f_t \quad (4.29)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{d0} + w_1 / h \quad (4.30)$$

$$\varepsilon_u = \varepsilon_{d0} + w_u / h \quad (4.31)$$

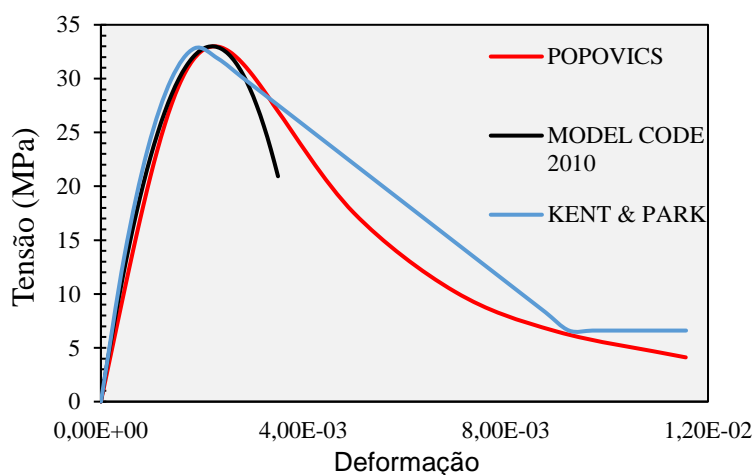
Além da regularização baseada no Model Code 2010 (FIB, 2012), foram implementadas neste trabalho regularizações baseadas na Lei Bilinear de Genikomsu e Polak (2015), na Lei Linear de Hillerborg *et al.* (1976) e na Lei Exponencial de Hordijk (1991).

#### 4.1.3 Calibração dos parâmetros de Mazars

De posse da relação tensão-deformação para tração uniaxial do concreto após a regularização por meio da técnica da energia de fratura, torna-se possível representar o comportamento não linear do concreto simples de forma adequada por meio do modelo de dano de Mazars. Para isso, basta calibrar os parâmetros de Mazars  $A_t$ ,  $B_t$ ,  $A_c$  e  $B_c$ .

Como nem sempre resultados experimentais estão disponíveis na literatura, são utilizados modelos analíticos como referência para calibragem desses parâmetros. Para o concreto sujeito a compressão uniaxial são utilizados os seguintes modelos de referência: Kent e Park (1971), Model Code (2010) e Popovics (1973). Na Figura 4-7 são plotadas as curvas de cada um destes modelos para um concreto de  $f_{ck} = 25MPa$ .

Figura 4-7- Modelos analíticos para compressão.



Fonte: O autor (2023).

Os modelos de Popovics (1973) e Kent & Park (1976) se destacam por representar o comportamento do concreto para altos níveis de deformação. Nesse último modelo, há ainda a consideração do confinamento do concreto.

Os modelos regularizados apresentados no item anterior são utilizados como referência na calibragem para o concreto à tração.

A calibração dos parâmetros é feita utilizando o método dos mínimos quadrados como sugerido em Nogueira e Rodrigues (2017). Nesta técnica de otimização matemática é realizada a minimização da função erro adotada, sendo neste caso o quadrado da diferença entre a resposta conhecida e desconhecida, tal como é definido na expressão (4.32).

$$F(X, U) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f_i(X, U)^2] \quad (4.32)$$

onde:  $X$  é o parâmetro que será calibrado;  $U$  é o parâmetro de referência;  $n$  é o número de respostas conhecidas;  $f_i$  é a função erro local dada pela diferença entre a resposta de referência (conhecida) e a resposta em calibração (não conhecida).

Como o ajuste é feito de forma independente para a tração e compressão uniaxial, têm-se as seguintes funções erros locais:

$$f_T(X_T, U) = \sigma_{T,REF} - [1 - D_T(X_T, U)] \mathbb{E} \varepsilon_T \quad (4.33)$$

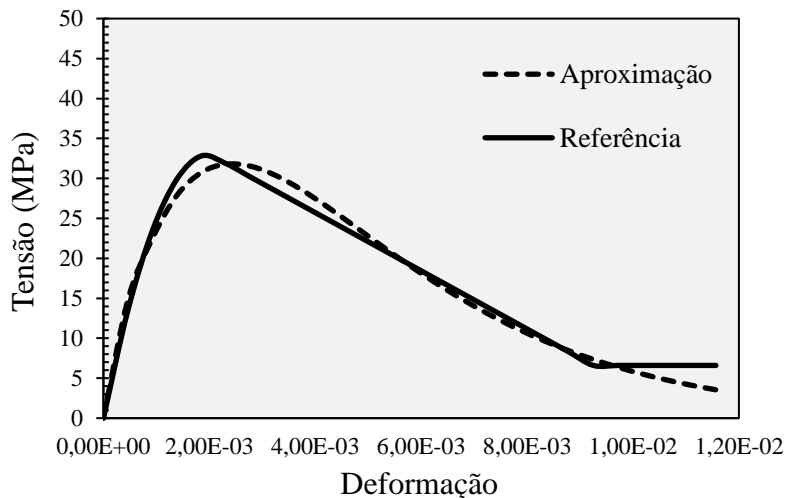
$$f_C(X_C, U) = \sigma_{C,REF} - [1 - D_C(X_C, U)] \mathbb{E} \varepsilon_C \quad (4.34)$$

onde:  $\varepsilon_T$  e  $\varepsilon_C$  são, respectivamente, a deformação para tração e compressão uniaxial;  $\sigma_{T,REF}$  e  $\sigma_{C,REF}$  são a tensão de referência a tração e compressão, respectivamente, as quais são adotadas conforme os modelos discutidos anteriormente.

Os parâmetros a serem calibrados são obtidos por meio de um processo iterativo, onde a solução ótima é atingida quando a norma do gradiente é menor que uma tolerância pré-estabelecida.

As calibrações obtidas para os diferentes modelos de referência adotados no presente estudo para representar o comportamento uniaxial à compressão do concreto foram satisfatórias. A Figura 4-8 exibe a aproximação realizada para o Modelo de Kent e Park (1976).

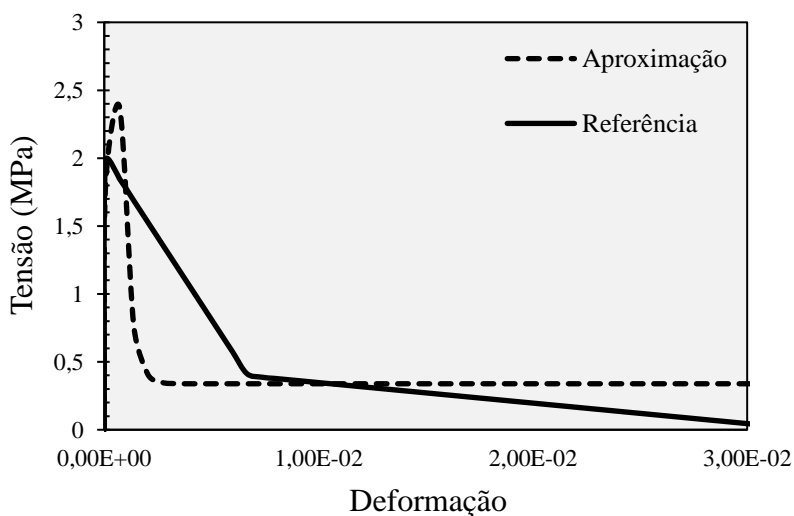
Figura 4-8- Calibração dos parâmetros em relação ao modelo de Kent e Park (1976).



Fonte: O autor (2023).

Entretanto, quando se trata do comportamento à tração regularizada por meio da técnica da Energia de Fratura, as aproximações obtidas pela técnica de mínimos quadrados não são satisfatórias. A Figura 4-9 exibe graficamente a aproximação obtida por meio da calibração dos parâmetros de Mazars e a função de referência do Model Code (2010). Por meio desta, é possível inferir que há uma compensação na distribuição do erro, gerando um pico na tensão de tração aproximada bem maior que a da referência e uma perda súbita de rigidez após o pico que tende a se estabilizar numa assíntota horizontal característica do parâmetro  $A_1$ . O emprego dessa curva tensão-deformação aproximada em análises estruturais com o MEF não apresenta resultados precisos.

Figura 4-9- Calibração dos parâmetros em relação ao modelo de tração do Model Code (2010).



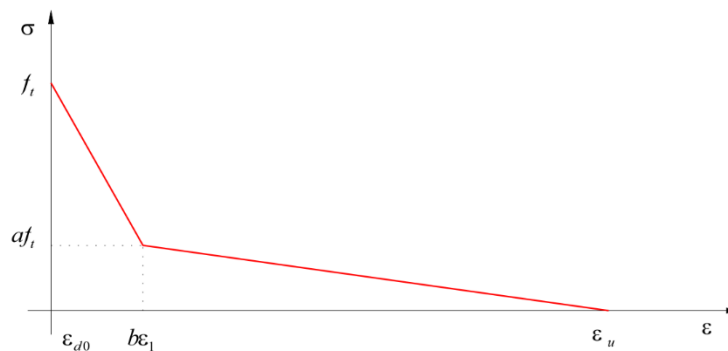
Fonte: O autor (2023).

Com isso, constata-se que a lei de dano exponencial empregada no Modelo de Mazars (1984) não consegue captar de forma adequada o comportamento a tração do concreto quando são consideradas deformações elevadas, as quais são justificadas pela técnica de regularização empregada. Por isso, torna-se necessário utilizar uma lei de dano à tração que consiga representar de forma apropriada esse novo comportamento devido à regularização. Neste trabalho foram utilizadas leis linear, bilinear e exponencial em concordância com as leis coesivas adotadas.

#### 4.1.4 Lei de evolução do dano bilinear

Neste item é demonstrado como uma lei de evolução do dano pode ser obtida. Para exemplificar, é deduzida uma lei de evolução do dano com *softening* bilinear que considere a energia de fratura como uma propriedade do material. O raciocínio apresentado pode ser estendido para leis lineares, exponenciais, etc. O comportamento pós pico é apresentado na Figura 4-10.

Figura 4-10- Lei de evolução do dano bilinear.



Fonte: O autor (2023).

Assim, a tensão que atua em cada trecho é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma &= f_T \left[ 1 - (1-a) \frac{(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{d0})} \right] && \text{para } (\varepsilon_{d0} \leq \tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon_1) \\ \sigma &= a \cdot f_T \left[ 1 - \frac{(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_u - \varepsilon_1)} \right] && \text{para } (\varepsilon_1 \leq \tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon_u) \end{aligned} \quad (4.35)$$

A tensão no softening pode ser obtida com base na mecânica do dano conforme a expressão (4.36).

$$\sigma(\varepsilon) = (1 - D) \mathbb{E} \varepsilon \quad (4.36)$$

Rearranjando a expressão (4.36), pode-se obter a lei de evolução do dano para qualquer trecho:

$$D = 1 - \frac{\sigma(\varepsilon)}{\mathbb{E}\varepsilon} \quad (4.37)$$

Particularizando a expressão (4.37) para o caso bilinear e empregando a expressão (4.35), obtém-se a lei de evolução do dano bilinear a seguir.

$$D = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}}{\tilde{\varepsilon}} \left[ 1 - (1-a) \frac{(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{d0})} \right] \quad \text{para } (\varepsilon_{d0} \leq \tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon_1) \quad (4.38)$$

$$D = 1 - a \cdot \frac{\varepsilon_{d0}}{\tilde{\varepsilon}} \left[ 1 - \frac{(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_u - \varepsilon_1)} \right] \quad \text{para } (\varepsilon_1 \leq \tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon_u)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes que dependem da lei coesiva bilinear empregada; as deformações  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_u$  são obtidas, respectivamente, pelas expressões (4.39) e (4.40).

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{d0} + \frac{b \cdot G_f}{h \cdot f_t} \quad (4.39)$$

$$\varepsilon_u = \varepsilon_{d0} + \frac{c \cdot G_f}{h \cdot f_t} \quad (4.40)$$

Por fim, com base nas relações e técnicas expostas nos últimos itens, torna-se exequível uma análise mecânica considerando a não linearidade física do concreto de maneira precisa e consistente.

## 4.2 Teoria da plasticidade

A adequada representação mecânica do concreto armado parte do pressuposto que ambos os materiais tenham seu comportamento constitutivo bem modelados. O comportamento não linear físico do concreto foi discutido anteriormente, podendo ser definido um modelo constitutivo para o aço além do regime elástico. Os materiais metálicos apresentam os fenômenos da plasticidade e encruamento após o regime elástico, tais fenômenos são abordados pela Teoria da Plasticidade.

A plasticidade é observada na macroescala quando surgem deformações irreversíveis (permanentes). Isto representa afirmar que em um ciclo de carregamento e descarregamento as deformações não se recuperam como no regime elástico. Em uma escala microscópica este

fenômeno é explicado pelo surgimento de movimentação irreversível de “discordâncias” (defeitos nas sequências das ligações atômicas) sem a existência de rupturas internas ou perda de coesão (PROENÇA, 2018). No contexto macroscópico (meio contínuo), interesse do presente estudo, a plastificação é considerada via modelos constitutivos.

Em um estudo pioneiro referente à teoria da plasticidade, Tresca (1864) propôs um critério de plastificação baseado em tensão de cisalhamento. Em seguida, Saint-Venant (1870) propôs uma regra de fluxo para materiais rígido-plástico que relacionava a evolução da deformação com as direções das tensões principais. Entretanto, esses estudos se concentravam no comportamento rígido ou elastoplástico perfeito, sendo somente em Melan (1938) que o fenômeno do encruamento positivo (*hardening*) foi discutido.

O encruamento é definido como o ganho de resistência devido ao aumento da deformação após o regime elástico, também é conhecido como *hardening* (encruamento positivo). Esse fenômeno pode ser atribuído aos microdefeitos na estrutura cristalina dos metais, os quais são realinhados quando a tensão de escoamento é atingida. Assim, essa nova configuração da estrutura cristalina permite suportar níveis de tensões maiores. Cabe ressaltar que no encruamento positivo o módulo tangente (rigidez) é diferente do módulo de elasticidade, sendo geralmente menor.

Modelos constitutivos que levem em conta tanto o regime elástico quanto o regime plástico são denominados de modelos elastoplásticos. Esse tipo de modelo foi desenvolvido inicialmente por Prandtl (1924), no qual a deformação total é composta pelas parcelas elástica e plástica. No regime elastoplástico a relação tensão-deformação não é biunívoca. Nesse caso precisa-se conhecer a história de carregamento, a qual pode ser determinada pelo nível de deformação plástica acumulada.

Geralmente, modelos elastoplásticos são utilizados para representar o comportamento de materiais metálicos. Entretanto, o uso pode ser estendido a materiais não metálicos, desde que apresente comportamento fenomenológico característico desse modelo constitutivo, sendo o caso do concreto na compressão. Chen e Han (2007), Proença (2018), Simo e Hughes (1998) e Souza Neto *et al.* (2008) são estudos que se destacam acerca da teoria da plasticidade e formulações elastoplásticas.

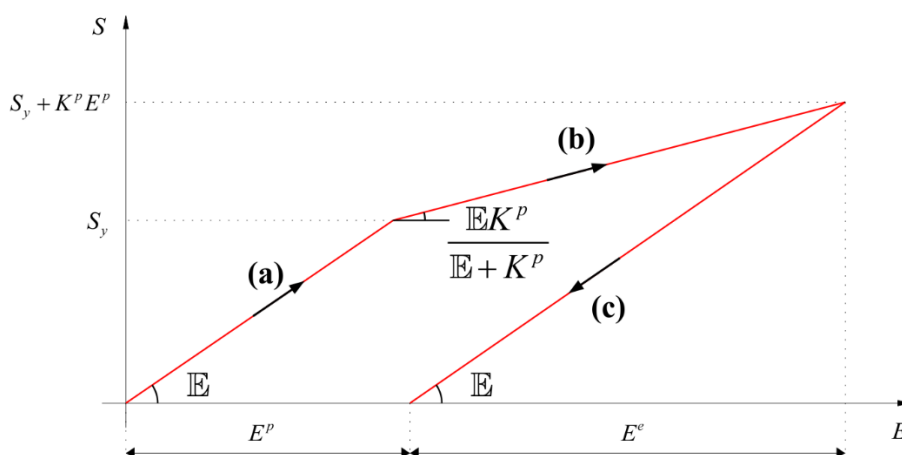
A formulação matemática do modelo elastoplástico é composta pela determinação de um critério de resistência, uma regra de fluxo e uma lei de encruamento (RAMOS, 2020). Esses detalhes serão discutidos no próximo item para o caso unidimensional.



### 4.2.1 Formulação elastoplástica unidimensional com encruamento

A formulação unidimensional para a modelagem mecânica do comportamento elastoplástico com encruamento positivo e isotrópico é apresentada neste item. O comportamento para esse modelo é apresentado na Figura 4-11. No primeiro trecho (a) tem-se a fase de carregamento elástico; o trecho (b) é referente ao encruamento positivo e o último trecho (c) corresponde ao descarregamento.

Figura 4-11- Tensão-deformação para o modelo elastoplástico unidimensional.



Fonte: Adaptado Ramos (2020).

Inicialmente, assume-se uma decomposição aditiva da deformação total ( $E$ ), como segue.

$$E = E^e + E^p \quad (4.41)$$

onde  $E^e$  refere-se à deformação elástica e  $E^p$  à deformação plástica.

Portanto, a tensão atuante em determinado ponto do elemento é obtida substituindo-se a deformação elástica da expressão (4.41) na Lei Constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff conforme expressão (4.42).

$$S = \mathbb{E}E^e = \mathbb{E}(E - E^p) \quad (4.42)$$

Assumindo-se que a tensão e as deformações, tanto elástica quanto plástica, sejam funções contínuas no tempo, a expressão (4.42) pode ser reescrita em termos de taxas como se segue:

$$\dot{S} = \mathbb{E}(\dot{E} - \dot{E}^p) \quad (4.43)$$

onde:  $\dot{S} = \frac{dS}{dt}$ ,  $\dot{E} = \frac{dE}{dt}$ ,  $\dot{E}^p = \frac{dE^p}{dt}$  e  $t$  indica o tempo.

Com o avanço das deformações plásticas em modelos com encruamento, o intervalo elástico inicial é alterado em tamanho e/ou posição em relação à origem. No encruamento isótropo, adotado no presente trabalho, o intervalo inicial cresce simetricamente em relação à origem sem alteração da posição. Com isso, presume-se que o encruamento seja governado pela deformação plástica acumulada e seja diretamente proporcional ao módulo da deformação plástica (relação linear). O critério de plastificação para o encruamento isótropo linear é fornecido pela expressão (4.44).

$$f(S, \alpha) = |S| - (S_y + K^p \alpha) \leq 0 \quad (4.44)$$

onde:  $\alpha$  é a medida da deformação plástica acumulada definida pela expressão (4.45);  $S_y$  é a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie de escoamento obtida pela expressão (4.46);  $K^p$  é o módulo plástico de encruamento isótropo obtido experimentalmente e interpretado conforme a Figura 4-12-b.

$$\alpha = \int_0^t |\dot{E}^p| dt \quad (4.45)$$

$$S_y = \frac{\sigma_y \mathbb{E}}{(\sigma_y + \mathbb{E})} \quad (4.46)$$

onde  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento obtida diretamente de ensaios experimentais.

A evolução da plastificação resulta em  $\dot{E}^p \neq 0$ , ocorrendo apenas quando  $f(S, \alpha) = 0$ , ou seja, se  $|S| = (S_y + K^p \alpha)$ . Se  $f(S, \alpha) < 0$ , o material estará sujeito exclusivamente à deformações elásticas, ou seja,  $\dot{E}^p = 0$  e  $\dot{E} = \dot{E}^e$ .

Seja  $\dot{\lambda}$  o módulo da taxa de deformação plástica, podem ser escritas as seguintes relações:

$$\dot{E}^p = \dot{\lambda}, \text{ se } S = S_y + K^p \alpha \quad (4.47)$$

$$\dot{E}^p = -\dot{\lambda}, \text{ se } S = -(S_y + K^p \alpha) \quad (4.48)$$

Ainda, pode-se reescrever as expressões (4.47) e (4.48) de forma compacta em uma única expressão dada por:

$$\dot{E}^p = \dot{\lambda} \text{sign}(S) \quad (4.49)$$

onde  $\text{sign}(S)$  é a função sinal aplicada em  $S$ .

Da expressão (4.49) percebe-se que  $\dot{\lambda} = |\dot{E}^p|$ , e ao relacionar com a derivada em relação ao tempo da expressão (4.45), obtém-se:

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \quad (4.50)$$

Observa-se que  $\dot{\lambda}$  e  $f(S, \alpha) = 0$  possuem condições complementares em termos de sinal, pois se  $f(S, \alpha) = 0$  então  $\dot{\lambda} \geq 0$  e se  $f(S, \alpha) < 0$  então  $\dot{\lambda} = 0$ . Logo, essas relações podem ser reunidas numa única relação  $\dot{\lambda} f(S, \alpha) = 0$  chamada de condição de complementaridade. Além disso, cabe analisar a variação de  $f(S, \alpha)$  no tempo, pois se  $f(S, \alpha) = 0$  e  $\frac{df(S, \alpha)}{dt} = \dot{f} = 0$  pode haver evolução das deformações plásticas ( $\dot{\lambda} > 0$ ). Caso  $f(S, \alpha) = 0$  e  $\dot{f} < 0$  então tem-se uma situação de descarregamento ( $\dot{\lambda} = 0$ ). Portanto, pode-se estabelecer uma condição de consistência conforme a expressão (4.51).

$$\dot{f} \dot{\lambda} = 0 \quad (4.51)$$

A partir da expressão (4.51) é possível obter uma expressão para  $\dot{\lambda}$  ao assumir  $\dot{f} = 0$ . Basta lembrar que  $f$  é função de  $S$  e  $\alpha$ , assim  $\dot{f}$  pode ser calculada por:

$$\dot{f} = \frac{df}{dS} \dot{S} + \frac{df}{d\alpha} \dot{\alpha} \quad (4.52)$$

Realizando-se as respectivas derivadas da expressão (4.44) e utilizando as expressões (4.43), (4.49), e (4.50), é possível obter a expressão (4.53).

$$\dot{f} = \text{sign}(S) \mathbb{E} (\dot{E} - \dot{\lambda} \text{sign}(S)) - K^p \dot{\lambda} \quad (4.53)$$

Ao igualar a expressão (4.53) a zero e isolando-se  $\dot{\lambda}$ , é possível obter:

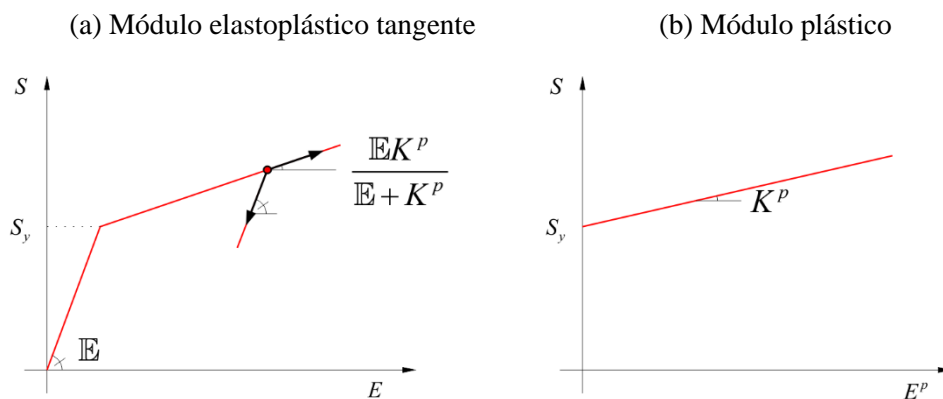
$$\dot{\lambda} = \frac{\text{sign}(S) \mathbb{E}}{(\mathbb{E} + K^p)} \dot{E} \quad (4.54)$$

Por fim, substituindo as expressões (4.49) e (4.54) em (4.43), obtém-se:

$$\dot{S} = \frac{\mathbb{E}K^p}{(\mathbb{E} + K^p)} \dot{E} \quad (4.55)$$

onde  $\frac{\mathbb{E}K^p}{(\mathbb{E} + K^p)}$  é denominado como módulo elastoplástico tangente no encruamento, conforme exibido na Figura 4-12-a.

Figura 4-12- Parâmetros do encruamento linear isotrópico.



Fonte: O autor (2023).

### 4.3 Exemplos de validação

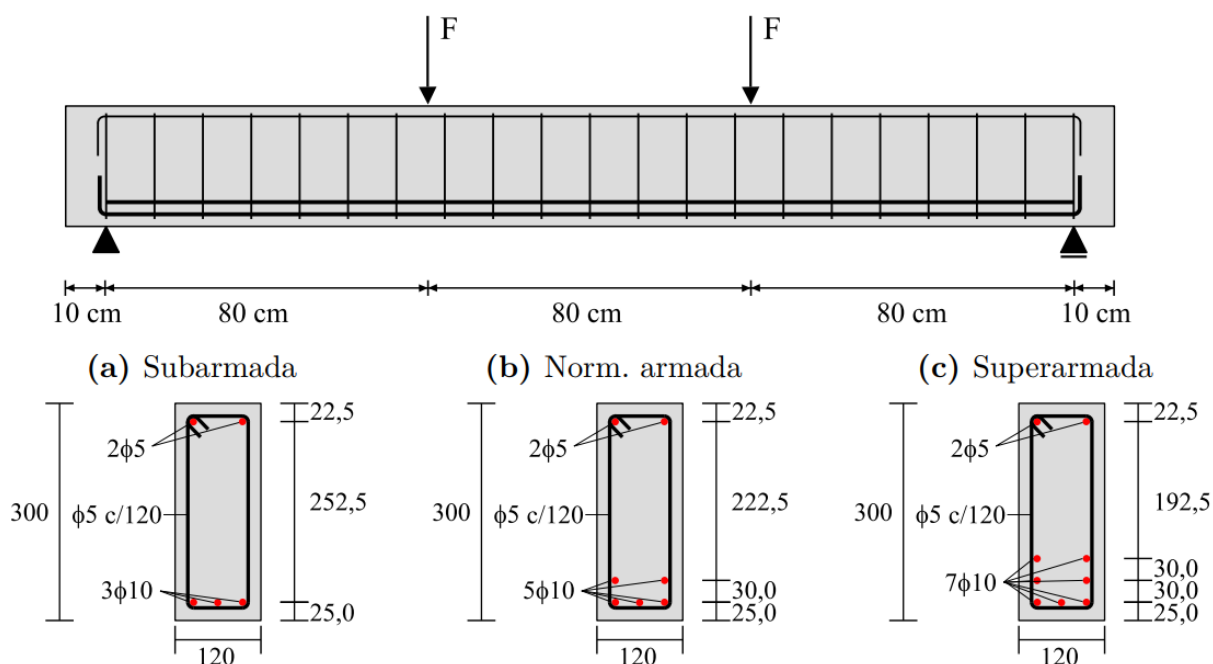
Neste item são apresentados exemplos que buscam validar a implementação do modelo de dano, a técnica de regularização de energia de fratura e o modelo elastoplástico. Para isso, no primeiro exemplo é considerado somente o modelo de dano sem a regularização e o modelo elastoplástico, onde os resultados são discutidos. Em seguida, no segundo exemplo é utilizada a mesma estrutura do primeiro exemplo, no entanto, é feita a regularização. Os resultados são comparados com os do primeiro exemplo e os obtidos experimentalmente.

#### 4.3.1 Exemplo 1- Viga de concreto armado de Álvares (1993) sem regularização

Álvares (1993) realizou ensaios experimentais de vigas biapoiadas de concreto armado sob flexão a quatro pontos, onde foram considerados três configurações de reforço, a saber: subarmada, normalmente armada e superarmada. Neste exemplo é considerada somente a situação subarmada e é empregado o modelo de dano de Mazars (1984) sem técnica de regularização para simular o comportamento não linear do concreto. Os dados sobre a geometria das vigas podem ser consultados na Figura 4-13.

Salienta-se que Álvares (1993) também realizou uma análise numérica do problema via MEF considerando a não linearidade física do concreto por meio do modelo de dano de Mazars (1984). Além disso, o autor buscou obter os parâmetros de dano via ensaios de compressão uniaxial e diametral, porém não foi possível obter os parâmetros referentes a tração ( $A_T$  e  $B_T$ ), tais parâmetros foram determinados indiretamente de acordo com referências bibliográficas.

Figura 4-13- Geometria e configurações de reforço do Exemplo 1.



Fonte: Adaptado Ramos (2020).

As propriedades do concreto e os parâmetros de Mazars empregados por Álvares (1993) estão na Tabela 4-2. As propriedades do aço foram adotadas seguindo as recomendações da norma europeia Eurocode 2 (CEN, 2005) para o aço CA-50 e podem ser consultadas na Tabela 4-3.

Tabela 4-2- Propriedades do concreto (Exemplo 1)

$E$ (MPa)	$\nu$	$\epsilon_{d0}$	$A_C$	$B_C$	$A_T$	$B_T$
29200	0,2	$7.10^{-5}$	0,85	1620	0,995	8000

Fonte: O autor (2023).

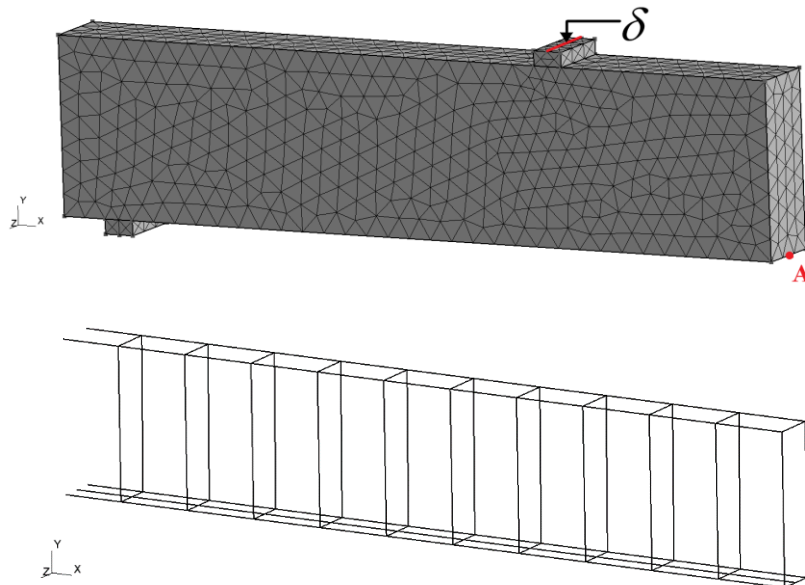
Tabela 4-3- Propriedades do aço (Exemplo 1)

$E_s$ (MPa)	$f_{yk}$ (MPa)	$K^P$ (MPa)	$\varepsilon_{uk}$ (%)
200000	500	842	5

Fonte: O autor (2023).

A modelagem é feita considerando a simetria do problema, como pode ser visto na Figura 4-14. Nesta análise é feito o controle de deslocamentos numa linha da placa de aplicação das condições de contorno. O apoio restringe somente o deslocamento em y e é considerado como um material deformável (aço), assim como a placa de aplicação das condições de contorno. Inicialmente, a discretização adotada é de quatro mil novecentos e trinta (4930) elementos tetraédricos para a matriz e de trezentos e sessenta e três (363) elementos de treliça quadrática para o reforço. Procurou-se utilizar o comprimento dos elementos de treliça iguais as medidas dos lados do tetraedro.

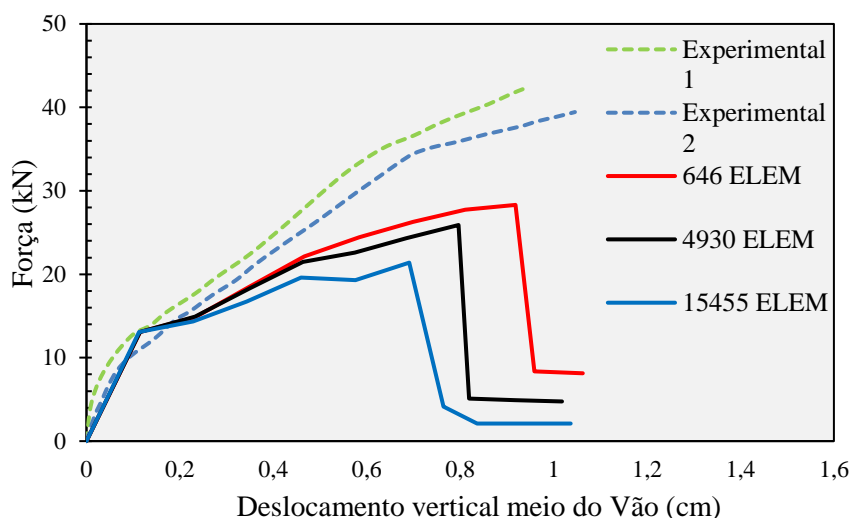
Figura 4-14- Discretização empregada no Exemplo 1.



Fonte: O autor (2023).

Os resultados de força *versus* deslocamento no meio do vão da análise não linear são apresentados na Figura 4-15 para três malhas distintas: uma malha “grosseira” com seiscentos e quarenta e seis (646) elementos, uma malha de refinamento médio com quatro mil novecentos e trinta (4930) elementos e uma malha “refinada” com quinze mil quatrocentos e cinquenta e cinco (15455) elementos. Foi assumido o comportamento elastoplástico da armadura e a análise incremental-iterativa foi realizada com 50 passos de deslocamento e uma tolerância de  $10^{-6}$ .

Figura 4-15- Resultado da viga subarmada para três malhas distintas.



Fonte: O autor (2023).

Com base nos resultados apresentados na Figura 4-15, nota-se um comportamento não objetivo da solução, ou seja, conforme a malha é refinada, mais rapidamente há uma perda de rigidez e da capacidade resistente. Quanto mais refinada é a discretização adotada, mais distante é a resposta da referência, porém, nem mesmo para a malha mais grosseira as respostas são satisfatórias. Esse fenômeno observado é chamado de localização de deformações e foi discutido anteriormente.

Esse fenômeno não acontece somente para os casos de vigas subarmadas, nas outras configurações de armadura também foi constatado o mesmo problema. As armaduras presentes na modelagem do concreto armado tendem a amenizar os efeitos da localização quando comparado com problemas de estruturas homogêneas como o concreto simples, e ainda assim, não são suficientes para uma modelagem satisfatória como pôde ser observado no exemplo deste item.

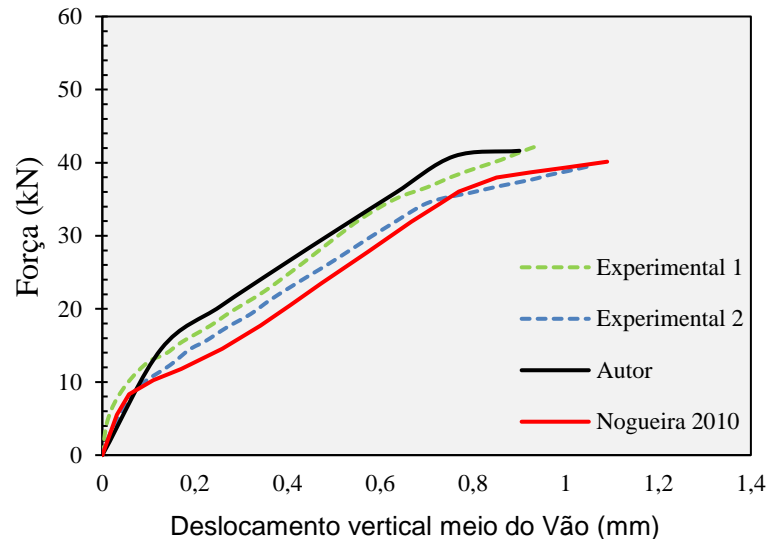
#### 4.3.2 Exemplo 2- Viga de concreto armado de Álvares (1993) com regularização

Devido ao fenômeno de localização das deformações apresentado no exemplo anterior, neste segundo exemplo é empregada a técnica de regularização baseada na energia de fratura com o objetivo de recuperar a objetividade da solução. O presente exemplo possui a mesma geometria e propriedades dos materiais do exemplo anterior, exceto nos parâmetros de Mazars de tração utilizados na lei de evolução do dano a tração.

Para a lei de evolução do dano a tração é utilizada uma lei bilinear baseada no Model Code 2010 para um concreto de  $f_{ck} = 20,5MPa$ . A largura de banda é calculada seguindo a recomendação de Vonk (1993, apud Henze, 2019), conforme expressão (4.26). A discretização realizada é a mesma do exemplo anterior com quatro mil novecentos e trinta (4930) elementos para a matriz e trezentos e sessenta e três (363) para o reforço.

Os resultados obtidos para a viga subarmada são comparados com os resultados experimentais de Álvares (1993) e os resultados numérico de Nogueira (2010) no gráfico de força *versus* deslocamento no centro do vão (Figura 4-16).

Figura 4-16- Resultados com a regularização para a viga subarmada.



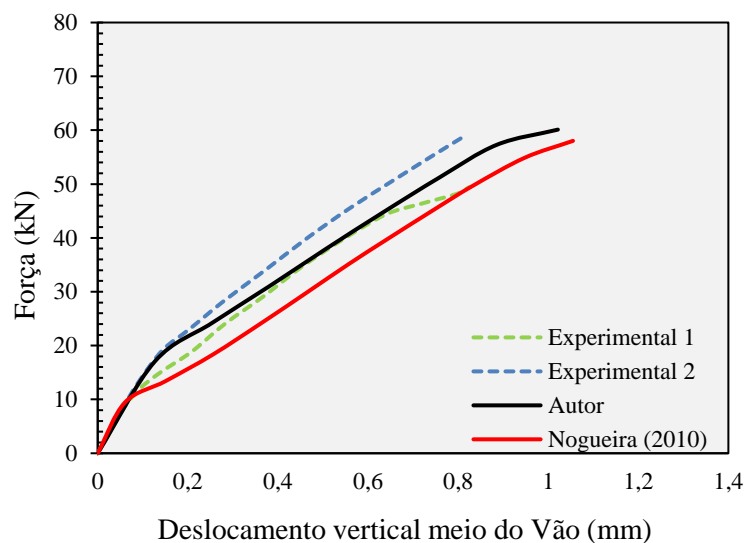
Fonte: O autor (2023).

A resposta obtida foi bastante precisa em termos de carga e deslocamento último quando comparado com os resultados experimentais e numérico das referências. Além disso, as curvas da Figura 4-16 estão bastante próximas, evidenciando a eficiência da técnica de regularização. Destaca-se o comportamento próximo a ruptura, caracterizado pela perda de capacidade resistente do concreto e o escoamento do aço até sua ruptura, quando a solução em MEF perde a estabilidade.

O resultado para o caso subarmado é considerado satisfatório, nas Figura 4-17 e Figura 4-18 são expostos os resultados para os casos normalmente armado e superarmado, respectivamente. As malhas para as matrizes permaneceram as mesmas (4930 elementos), alterando-se somente a quantidade de elementos do reforço, sendo quatrocentos e vinte e dois (422) elementos na viga normalmente armado e quatrocentos e oitenta e seis (486) elementos na viga superarmada.

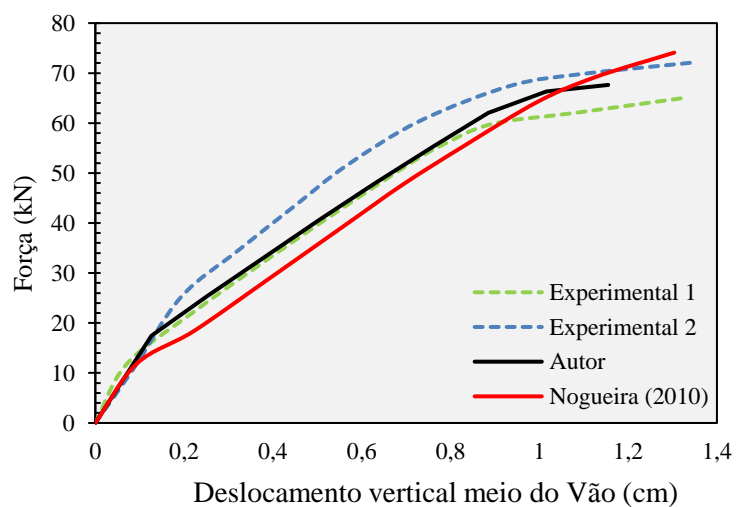


Figura 4-17- Resultados com a regularização para a viga normalmente armada.



Fonte: O autor (2023).

Figura 4-18- Resultados com a regularização para a viga superarmada.

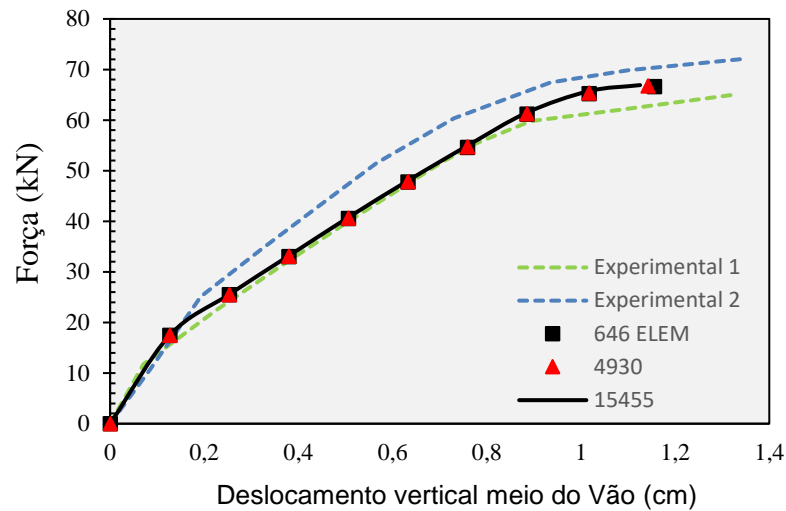


Fonte: O autor (2023).

Nota-se uma boa concordância entre os resultados, independente da taxa de armadura presente no concreto armado. Todos os resultados com a técnica da energia de fratura tiveram um excelente resultado na previsão da carga última que a estrutura pode suportar.

Quanto ao problema da não objetividade da solução quando há o refinamento da malha, realiza-se uma análise de convergência com três malhas diferentes para a configuração superarmada, como feito no exemplo 1. Os resultados são plotados na Figura 4-19.

Figura 4-19- Teste de convergência para viga superarmada.

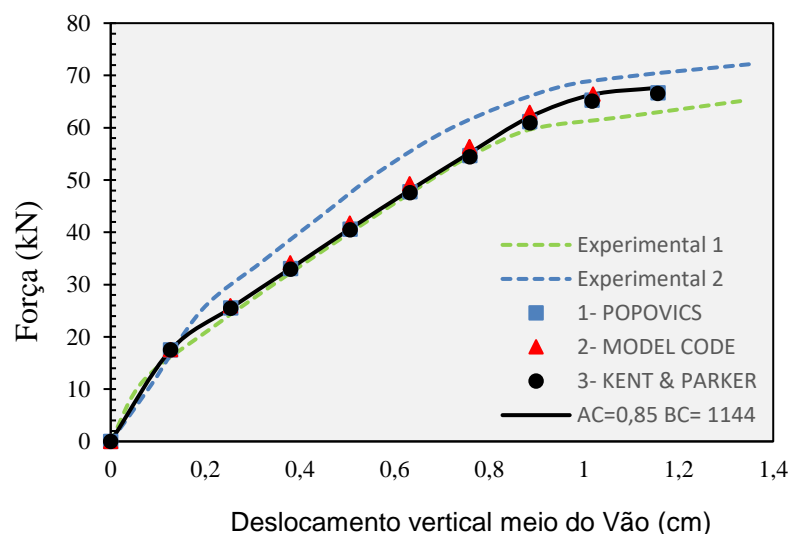


Fonte: O autor (2023).

Por meio da Figura 4-19 constata-se que a técnica de regularização empregada resolve de forma aceitável o problema da não objetividade. As respostas apresentam bons resultados desde as malhas mais grosseiras.

Com o objetivo de analisar a influência do diagrama tensão-deformação na compressão desempenha nas respostas globais da estrutura, é realizada uma análise na viga superarmada com diferentes modelos analíticos usados na calibração dos parâmetros de Mazars da compressão ( $A_c$  e  $B_c$ ). A lei bilinear de dano a tração baseada no Model Code 2010 continua sendo empregada. Os resultados são expostos na Figura 4-20.

Figura 4-20- Resultados da viga superarmada para diferentes modelos de compressão.

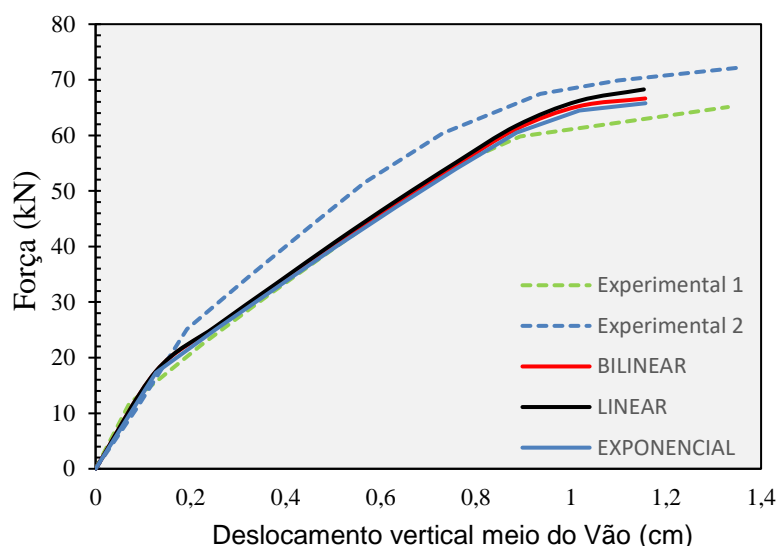


Fonte: O autor (2023).

O modelo analítico do Model Code 2010 apresenta uma menor carga última, isto se deve ao fato de sua função ser limitada a uma deformação última muito próxima da tensão máxima de compressão do concreto, diferente dos outros modelos que possuem uma curva mais alongada e, conseqüentemente, uma deformação última maior. Os modelos de Popovics (1973) e Kent e Park (1976) apresentaram resultados próximos entre si e em relação aos ensaios experimentais. Os parâmetros de dano a compressão de Mazars obtidos experimentalmente por Álvares (1993) foram mantidos na análise e suas respostas globais apresentaram uma boa concordância com os resultados experimentais.

Por seu turno, o tipo de função utilizada na lei de evolução do dano a tração é avaliado no gráfico da Figura 4-21 para as leis linear, bilinear e exponencial empregadas neste trabalho. Os parâmetros de Mazars para a compressão seguem sendo os obtidos por Álvares (1993).

Figura 4-21- Comparativo entre os tipos de função da lei de dano a tração para a viga superarmada.

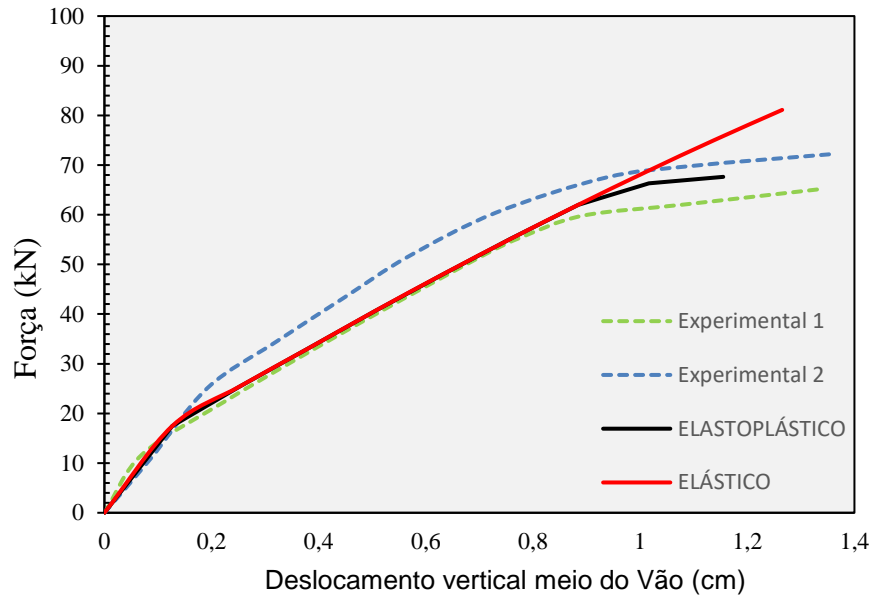


Fonte: O autor (2023).

Conforme é verificado no gráfico anterior, o tipo de função empregada na lei de evolução do dano a tração pouco influencia nos resultados, pois os resultados obtidos estão próximos à coincidência.

Por fim são analisados os regimes considerados na modelagem da armadura, podendo ser o regime elástico ou regime elastoplástico. Os resultados para a viga superarmada são mostrados na Figura 4-22.

Figura 4-22- Resultados para os diferentes regimes da armadura.

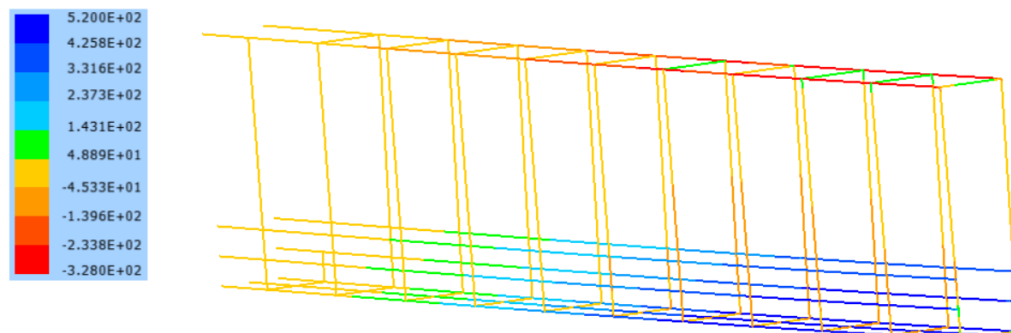


Fonte: O autor (2023).

Percebe-se que o comportamento elastoplástico da armadura permite uma modelagem mais realística do problema, tendo em vista que os resultados apresentados ficaram mais próximos dos experimentais e também devido ao formato da curva bastante similar às curvas experimentais, especialmente no trecho próximo da ruptura quando tende a uma assíntota horizontal.

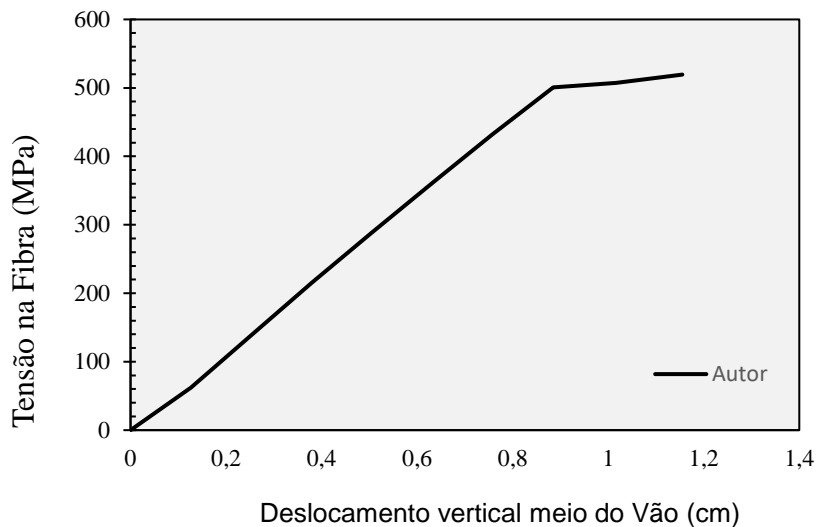
A plastificação da armadura é principalmente percebida na iminência da ruptura da viga de concreto armado, como pode ser observado na Figura 4-24, onde é apresentada a tensão máxima na fibra mais solicitada *versus* deslocamento no meio do vão para o caso da viga superarmada. Na Figura 4-23 é possível observar as tensões normais atuantes em todas as armaduras no último passo de deslocamento.

Figura 4-23- Tensão normal nas armaduras da viga superarmada no último passo.



Fonte: O autor (2023).

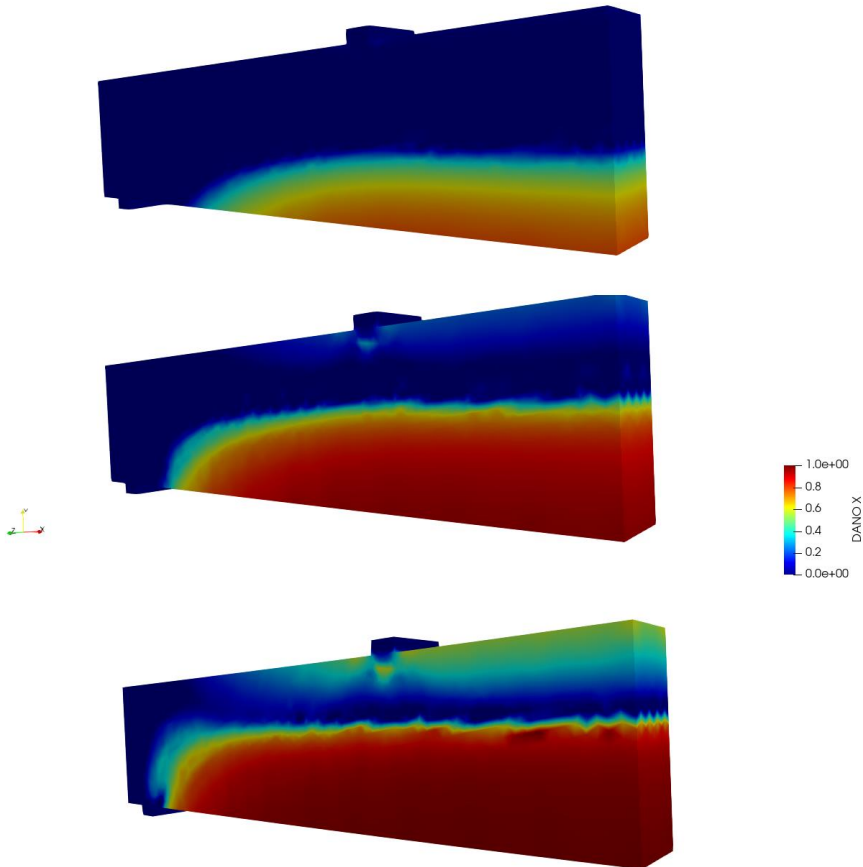
Figura 4-24- Tensão máxima na fibra mais solicitada.



Fonte: O autor (2023).

Na Figura 4-25 é exibido o processo de danificação da viga superarmada para os passos referentes a 25%, 50% e 100% da carga última da estrutura.

Figura 4-25- Processo de danificação da viga superarmada.



Fonte: O autor (2023).

Com base nos resultados apresentados neste capítulo, conclui-se que o modelo de dano de Mazars em conjunto com a técnica de regularização da energia de fratura é uma poderosa ferramenta para análises mecânicas de estruturas de concreto armado via MEFP. Ademais, os resultados obtidos permitem atestar que as não linearidades físicas da matriz e da fibra foram corretamente implementadas no código, permitindo uma análise mais realística do processo de fissuração do concreto no contexto de fissuração distribuída, que é objeto de interesse deste trabalho.

## **5 PROBLEMA DE DIFUSÃO**

---

A determinação da distribuição de concentração de alguma substância em um meio (sólido, líquido, gás ou combinação de fases) é o principal objetivo de uma análise de difusão. Ou seja, conhecer a concentração no meio em função do espaço em estado estacionário e em função do tempo durante o estado transiente. Uma vez que esta distribuição de concentração é conhecida, o fluxo difusivo em qualquer ponto dentro do meio, ou em sua superfície, pode ser calculado a partir da Lei de Fick. A distribuição de concentração em um sólido pode determinar o período de iniciação da corrosão em armaduras de concreto, permitindo avaliar a integridade estrutural.

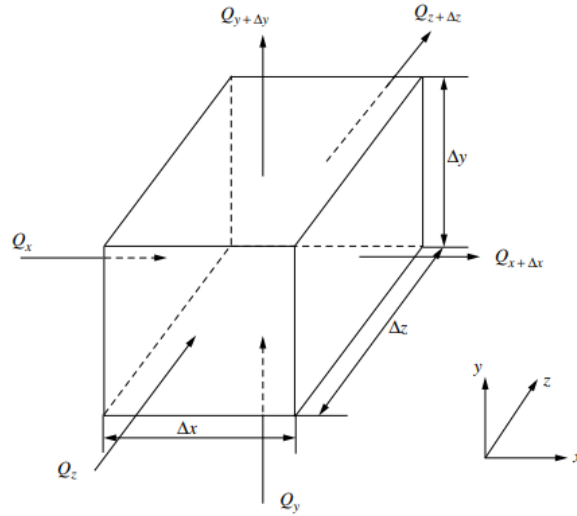
Diversos fenômenos de engenharia e física podem ser agrupados em uma categoria especial de problemas, comumente classificada como problema de campo ou problema de potencial. Esses fenômenos possuem em comum o mesmo tipo de equação diferencial governante, ressaltando-se a condução de calor, a condução elétrica, os campos eletrostáticos, a torção de barras prismáticas e a difusão. Portanto, a partir do presente capítulo, a formulação será tratada como problema de potencial, e ao final será particularizada para o fenômeno de interesse, no caso, o problema de difusão de íons cloreto.

O método dos elementos finitos é utilizado como abordagem numérica para a solução da equação diferencial resultante juntamente com as condições de contorno do problema.

### **5.1 Equação diferencial do problema de potencial**

Para a obtenção da distribuição do potencial no meio precisa-se de uma solução da equação diferencial que rege o problema. A equação diferencial pode ser deduzida a partir da lei de conservação de energia para um volume de controle diferencial (Figura 5-1).

Figura 5-1- Volume de controle diferencial para problema de potencial.



Fonte: Lewis *et al.* (2004).

Na Figura 5-1 nota-se que as variáveis  $Q_i$  são as energias introduzidas através das “faces de entrada” em cada uma das direções  $i$  do sistema de coordenadas cartesiano. As energias conduzidas para fora do volume de controle nas “faces de saída” são representadas pela variável  $Q_{i+\Delta i}$  e são obtidas realizando-se uma expansão em série de Taylor desprezando-se os termos de ordem superior conforme a expressão (5.1).

$$\begin{aligned} Q_{x+\Delta x} &= Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x \\ Q_{y+\Delta y} &= Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \Delta y \\ Q_{z+\Delta z} &= Q_z + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \Delta z \end{aligned} \quad (5.1)$$

A Energia Interna Gerada (EIG) pelo termo de domínio G no volume de controle é dada pela expressão (5.2). A Taxa de Variação da Energia Interna Armazenada (TVEIA) é fornecida pela expressão (5.3).

$$EIG = G \Delta x \Delta y \Delta z \quad (5.2)$$

$$TVEIA = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.3)$$

onde  $\rho$  é a constante do material no tempo,  $u$  é o potencial e  $t$  é o tempo.



Com auxílio da Figura 5-1 para determinar as Energias de Entrada em cada uma das faces de entrada (EE), junto à expressão (5.1) para definir as Energias de Saída em cada uma das faces de saída (ES) e as expressões (5.2) e (5.3), é possível realizar o balanço energético como segue.

$$EE + EIG = TVEIA + ES \quad (5.4)$$

Ou seja,

$$G\Delta x\Delta y\Delta z + Q_x + Q_y + Q_z = \rho\Delta x\Delta y\Delta z \frac{\partial u}{\partial t} + Q_{x+dx} + Q_{y+dy} + Q_{z+dz} \quad (5.5)$$

Substituindo a expressão (5.1) em (5.5), obtém-se:

$$-\frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial Q_y}{\partial y} \Delta y - \frac{\partial Q_z}{\partial z} \Delta z + G\Delta x\Delta y\Delta z = \rho\Delta x\Delta y\Delta z \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.6)$$

As energias de entrada  $Q_i$  podem ser expressas em cada uma das direções como o produto do fluxo  $q_i$  pela área da face de atuação, como segue.

$$\begin{aligned} Q_x &= q_x \Delta y \Delta z \\ Q_y &= q_y \Delta x \Delta z \\ Q_z &= q_z \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde o fluxo  $q_i$  pode ser obtido por uma lei constitutiva, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} q_x &= -k_x \frac{\partial u}{\partial x} \\ q_y &= -k_y \frac{\partial u}{\partial y} \\ q_z &= -k_z \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde  $k_i$  é a constante do material no espaço para a direção  $i$ .

Substituindo as expressões (5.7) e (5.8) na expressão (5.6) e dividindo-a pelo volume ( $\Delta x \Delta y \Delta z$ ), obteve-se a expressão (5.9).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ k_z \frac{\partial u}{\partial z} \right] + G = \rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.9)$$

Ou de maneira compacta como expresso em (5.10).

$$\nabla^T K \nabla u + G = \rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.10)$$

onde:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

$$K = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

A expressão (5.9) e/ou (5.10) é a equação diferencial do potencial transiente para a situação em que as direções cartesianas coincidem com as direções principais do material. No caso geral (anisotrópico) tem-se uma alteração na matriz  $K$ , a qual passa a ser constituída como em (5.13).

$$K = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Em muitas situações as propriedades do material podem ser consideradas como não-direcional, ou seja, um meio isotrópico. Neste caso, tem-se:

$$K = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Por fim, particulariza-se o problema de potencial transiente para o problema de difusão transiente de íons cloreto, onde o potencial  $u$  se torna a concentração de íons cloreto representada por  $C$ , a constante  $k$  o coeficiente de difusão de cloretos e a lei constitutiva é denominada Lei de Fick. Para isso, considera-se neste estudo que o meio é isotrópico, a constante do material depende do tempo,  $\rho$  é unitária e o termo de domínio  $G$  é nulo, ou seja, não há fonte interna de íons cloreto. Assim, a expressão (5.10) pode ser reescrita para o problema de difusão transiente de íons cloreto da seguinte maneira:

$$\nabla^2 C - \frac{1}{k} \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \quad (5.15)$$

onde  $\nabla^2$  é o operador Laplaciano.

Quando a análise é restrita ao regime estacionário, ou seja, não depende do tempo, a expressão (5.15) se reduz a conhecida Equação de Laplace:

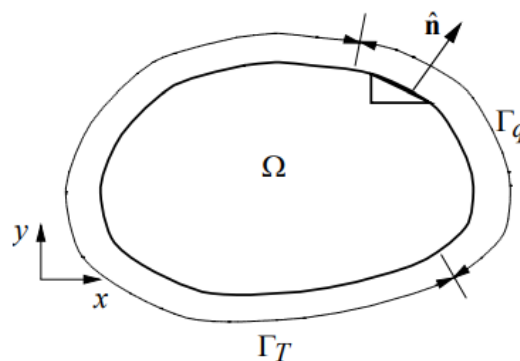
$$\nabla^2 C = 0 \quad (5.16)$$

## 5.2 Condições de contorno

A solução da equação diferencial de difusão (transiente ou estacionária) discutidas no item anterior somente é possível se as condições iniciais e de contorno forem apropriadamente estabelecidas. Em geral, as condições de contorno podem ser de três tipos: imposição de concentração (Condição de Dirichlet); imposição de fluxo (Condição de Neumann); imposição da relação entre concentração e fluxo. Por simplicidade, as condições de contorno neste estudo serão as imposições de concentração e de fluxo.

Considera-se que o contorno  $\Gamma$  é dividido em duas sub-regiões:  $\Gamma_T$  e  $\Gamma_q$ , conforme Figura 5-2.

Figura 5-2- Subdivisão do contorno do corpo.



Fonte: Souza (2003).

São necessárias duas condições de contorno porque a equação diferencial de difusão tem termos de segunda ordem. O tempo é utilizado como termo de primeira ordem, devendo ser especificado um valor inicial para que em um determinado instante de tempo todas as concentrações de íons cloreto possam ser conhecidas. Para as condições iniciais define-se o campo de concentração ao longo de todo o domínio no início da análise ( $t = t_0$ ) conforme expressão (5.17).

$$C = C_0(x, y, x, t_0) \text{ em } \Omega, \text{ para } t = t_0 \quad (5.17)$$

Em relação as condições de contorno, tem-se:

- a) Condições de contorno essenciais ou de Dirichlet: Concentrações de íons cloreto prescritas no contorno, conforme expressão (5.18).

$$C = C_0(x, y, z, t) \text{ em } \Gamma_T \quad (5.18)$$

- b) Condições de contorno naturais ou de Neumann: fluxo prescrito no contorno, conforme expressão (5.19).

$$q = \bar{q}(x, y, z, t) \text{ em } \Gamma_q \quad (5.19)$$

A implementação computacional das condições de contorno de Dirichlet é geralmente uma tarefa simples, visto que a concentração de íons cloreto é um escalar. No entanto, a implementação computacional das condições de contorno de Neumann é mais complexa quando comparada à implementação citada anteriormente, pois o fluxo é uma grandeza vetorial. O fluxo precisa ser normal à superfície, por isso, precisa-se reescrever a equação do fluxo prescrita no contorno com auxílio dos cossenos diretores do vetor normal à superfície externa. Para isso, basta-se realizar o equilíbrio dos fluxos no contorno, obtendo-se:

$$\bar{q} = -q_x \hat{n}_x - q_y \hat{n}_y - q_z \hat{n}_z = -q \hat{n} \text{ em } \Gamma_q \quad (5.20)$$

onde  $\hat{n}$  é o vetor normal unitário a superfície do contorno.

Com o auxílio das condições de contorno apresentadas, a solução da equação diferencial de difusão pode ser obtida de forma aproximada por meio do Método dos Elementos Finitos, conforme é apresentado no próximo tópico.

### 5.3 O MEF aplicado no problema de difusão

O método dos Elementos Finitos é um método numérico que considera a região de solução como muitas sub-regiões (ou elementos) pequenas e interconectadas oferecendo uma aproximação por partes das equações governantes. Com isso, a equação diferencial do problema é reduzida a várias equações simultâneas lineares ou não lineares. A discretização do domínio de análise em elementos finitos permite a redução de um problema contínuo, que tem um número infinito de incógnitas, para um problema discreto com um número finito de incógnitas em pontos especificados (nós).

Além do procedimento descrito anteriormente, é preciso propor soluções aproximadas para as equações governantes do problema. Dentre os métodos para obtenção de soluções aproximadas destacam-se o Método Variacional e o Método dos Resíduos Ponderados. No presente trabalho é empregado o Método dos Resíduos Ponderados por ser um método simples e de alta aplicabilidade.

### 5.3.1 Método dos Resíduos Ponderados

No Método dos Resíduos Ponderados é assumido que as equações governantes do problema (5.15) podem ser representadas por uma função  $L$  em um dado domínio  $\Omega$  pela expressão (5.21).

$$L(C) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (5.21)$$

Sabe-se que  $C$  pode ser aproximado por  $\bar{C}$  conforme a expressão (5.22).

$$C \approx \bar{C} = \sum_{j=1}^n a_j N_j \quad (5.22)$$

onde  $a_j$  são parâmetros a serem determinados e  $N_j$  são as funções de forma (funções de interpolação).

Substituindo a expressão (5.22) na expressão (5.21), obtém-se:

$$L(\bar{C}) = R \neq 0 \quad (5.23)$$

onde  $R$  é o resíduo da aplicação de  $\bar{C}$  na função  $L$  devido ao caráter aproximado.

O Método dos Resíduos Ponderados requer que os parâmetros  $a_j$  sejam determinados satisfazendo a expressão (5.24).

$$\int_{\Omega} w_j R d\Omega = 0 \quad (5.24)$$

onde as funções  $w_j$  são as  $n$  funções ponderadoras arbitrárias.

Existem infinitas escolhas para as funções  $w_j$ . No entanto, em geral são empregadas quatro funções em particular. São elas:

- Colocação:  $w_j = \delta(x - x_j)$
- Subdomínio:  $w_j = 1$

- Mínimos quadrados:  $w_j = \partial R / \partial w_j$
- Galerkin:  $w_j = N_j$

As funções ponderadoras de Galerkin serão empregadas na obtenção da solução aproximada via Resíduos Ponderados na formulação do Método dos Elementos Finitos apresentada no presente estudo.

### 5.3.2 Equação da Difusão via MEF

No MEF as variáveis de interesse podem ser aproximadas no elemento, sendo o caso da concentração de íons cloreto:

$$\sum_{k=1}^n N_k C_k \quad (5.25)$$

onde  $N_k$  são as funções interpoladoras (funções de forma do elemento),  $C_k$  são as concentrações nos nós  $k$  do elemento e  $n$  é o número de nós do elemento.

Recuperando a equação diferencial governante do problema (5.15) e aplicando-a na expressão do Método dos Resíduos Ponderados da expressão (5.24) juntamente com a função ponderadora de Galerkin (igual a função de forma do elemento), obtém-se:

$$\int_{\Omega} N_j \left( \nabla^2 C - \frac{1}{k} \frac{\partial C}{\partial t} \right) d\Omega = 0 \quad (5.26)$$

Reescrevendo a expressão (5.26) de forma mais conveniente, tem-se:

$$\int_{\Omega} N_j k \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial C}{\partial z} \right) - \frac{1}{k} \frac{\partial C}{\partial t} \right) d\Omega = 0 \quad (5.27)$$

Aplicando o Teorema de Green nos três primeiros termos da expressão (5.27), obtém-se:

$$-\int_{\Omega} k \left[ \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial C}{\partial z} + N_j \frac{1}{k} \frac{\partial C}{\partial t} \right] d\Omega + \int_{\Gamma_q} N_j k \left[ \frac{\partial C}{\partial x} \hat{n}_x + \frac{\partial C}{\partial y} \hat{n}_y + \frac{\partial C}{\partial z} \hat{n}_z \right] d\Gamma_q = 0 \quad (5.28)$$

O segundo termo da expressão (5.28) pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\int_{\Gamma_q} N_j k \left[ \frac{\partial C}{\partial x} \hat{n}_x + \frac{\partial C}{\partial y} \hat{n}_y + \frac{\partial C}{\partial z} \hat{n}_z \right] d\Gamma_q = \int_{\Gamma_q} N_j \left[ q_x \hat{n}_x + q_y \hat{n}_y + q_z \hat{n}_z \right] d\Gamma_q \quad (5.29)$$

Substituindo a expressão (5.20) em (5.29), tem-se:

$$\int_{\Gamma_q} N_j [q_x \hat{n}_x + q_y \hat{n}_y + q_z \hat{n}_z] d\Gamma_q = - \int_{\Gamma_q} N_j \bar{q} d\Gamma_q \quad (5.30)$$

Com auxílio da expressão (5.30) pode-se reescrever a expressão (5.28) como se segue:

$$- \int_{\Omega} k \left[ \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial C}{\partial z} + N_j \frac{1}{k} \frac{\partial C}{\partial t} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_q} N_j \bar{q} d\Gamma_q = 0 \quad (5.31)$$

Assim, substituindo a aproximação espacial do elemento finito da expressão (5.25) na expressão (5.31), obtém-se:

$$- \int_{\Omega} k \left[ \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_k}{\partial x} C_k + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_k}{\partial y} C_k + \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_k}{\partial z} C_k + \frac{1}{k} N_j \frac{\partial N_k}{\partial t} C_k \right] d\Omega - \int_{\Gamma_q} N_j \bar{q} d\Gamma_q = 0 \quad (5.32)$$

onde  $j$  e  $k$  representam os nós.

A expressão (5.32) pode ser reescrita no formato matricial comum ao MEF, como se segue:

$$[V] \left\{ \frac{\partial C}{\partial t} \right\} + [K] \{C\} = \{f\} \quad (5.33)$$

onde:

$$[V] = \int_{\Omega} [N]^T [N] d\Omega \quad (5.34)$$

$$[K] = \int_{\Omega} k [B]^T [B] d\Omega \quad (5.35)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

$$\{f\} = \int_{\Gamma_q} \bar{q} [N]^T d\Gamma_q \quad (5.37)$$

## 5.4 Difusão em regime estacionário – considerações

No regime estacionário de difusão, a concentração de cloretos, difusividade do material e as condições de contorno do problema não variam no tempo. Portanto, o termo  $\partial C / \partial t$  da expressão (5.33) é nulo e o sistema de equações do MEF para o problema é dado por:

$$[K]\{C\} = \{f\} \quad (5.38)$$

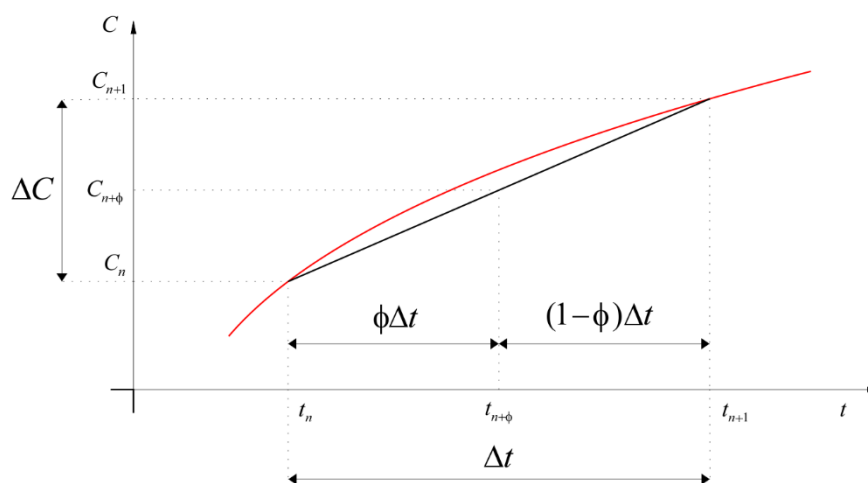
Em situações de estruturas de concreto armado sujeitas à ação de íons cloreto, o campo de concentrações não é constante no tempo. Dessa forma, é mais adequado tratar o problema de difusão de íons cloretos em regime transiente, como é apresentado no próximo item. No entanto, em algumas situações a expressão (5.38) se torna bastante útil para validações, como em problemas que tenham uma longa duração e as condições de contorno permaneçam constantes ao longo do tempo (PELLIZZER, 2019).

## 5.5 Difusão em regime transiente

Para resolver a expressão (5.33) apresentada no item anterior (item 5.3.2) é necessário discretizar o operador diferencial envolvendo o termo dependente do tempo ( $\partial C / \partial t$ ). Assim, neste item é apresentado uma aproximação numérica dos termos transientes usando o Método das Diferenças Finitas.

A variação típica da concentração de íons cloretos no domínio do tempo no intervalo entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$  é mostrada na Figura 5-3.

Figura 5-3- Variação de concentração num intervalo de tempo.



Fonte: O autor (2023).



Uma dada concentração dentro desse intervalo de tempo, por exemplo, em  $n + \phi$  pode ser estimada usando a Série de Taylor, conforme a expressão (5.39).

$$C_{n+\phi} = C_n + \phi \Delta t \frac{\partial C_{n+\phi}}{\partial t} + \phi \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 C_{n+\phi}}{\partial t^2} + \dots \quad (5.39)$$

Desconsiderando os termos de segunda e alta ordem da expressão (5.39), pode-se escrever uma aproximação de interesse dada por:

$$\frac{\partial C_{n+\phi}}{\partial t} \approx \frac{C_{n+1} - C_n}{\Delta t} \quad (5.40)$$

Substituindo a expressão (5.40) em (5.39), obtém-se:

$$C_{n+\phi} = \phi C_{n+1} + (1 - \phi) C_n \quad (5.41)$$

Com isso, em um dado instante  $n + \phi$ , a expressão da difusão transiente (5.33) é reescrita da seguinte maneira:

$$[V] \left\{ \frac{\partial C}{\partial t} \right\}_{n+\phi} + [K] \{C\}_{n+\phi} = \{f\}_{n+\phi} \quad (5.42)$$

Rearranjando-se a expressão (5.42) com auxílio das expressões (5.40) e (5.41), tem-se:

$$\left( \frac{[V]}{\Delta t} + \phi [K] \right) \{C\}_{n+1} = \left( \frac{[V]}{\Delta t} - (1 - \phi) [K] \right) \{C\}_n + \phi \{f\}_{n+1} + (1 - \phi) \{f\}_n \quad (5.43)$$

Ou de maneira compacta:

$$[\bar{K}] \{C\}_{n+1} = \{\bar{F}\} \quad (5.44)$$

onde:

$$[\bar{K}] = \frac{[V]}{\Delta t} + \phi [K] \quad (5.45)$$

$$\{\bar{F}\} = \left( \frac{[V]}{\Delta t} - (1 - \phi) [K] \right) \{C\}_n + \phi \{f\}_{n+1} + (1 - \phi) \{f\}_n \quad (5.46)$$

A expressão (5.44) fornece os valores nodais para as concentrações de íons cloreto no instante de tempo  $n + 1$ . Esses valores de concentração são calculados usando os valores do instante de tempo  $n$ . Por isso, os valores do vetor  $\{f\}$  em ambos os instantes de tempo precisam ser conhecidos.

A depender do valor assumido para  $\phi$  nas expressões (5.44) e (5.45), diferentes esquemas transientes (integração no tempo) podem ser construídos. Na Tabela 5-1 são exibidos os diferentes esquemas em relação ao valor de  $\phi$  adotado.

Tabela 5-1 – Diferentes esquemas transientes

$\phi$	Nome do esquema	Tipo
0.0	Euler forward	Explícito
0.5	Crank- Nicolson	Semi-implícito
2/3	Galerkin	Semi-implícito
1.0	Euler backward	Implícito

Fonte: O autor (2023).

Segundo Cook *et al.* (1989, apud Rigobello, 2011), para valores de  $\phi \geq 0.5$  a solução de problemas lineares ou não lineares são incondicionalmente estáveis numericamente. A adoção de  $\phi = 0.5$  pode acarretar perturbações na solução, dentre as alternativas para solucionar essas oscilações estão: reduzir o passo de tempo ou empregar um amortecimento numérico com  $\phi > 0.5$ . Para os casos não lineares o único esquema incondicionalmente estável é o de  $\phi = 1.0$ , apesar disso, não é necessariamente o mais preciso. O esquema de Galerkin é empregado no presente trabalho. Após alguns testes, tal esquema se mostrou bastante preciso e estável.

Em alguns casos a expressão (5.43) tem as matrizes K e C dependentes do tempo ou de alguma outra variável do problema e, por isso, tratar-se-ia de um problema não linear que precisaria de um método específico para a solução, como o de método incremental iterativo de Newton-Raphson. No tocante a este estudo, tais matrizes são consideradas constantes ao longo da análise e trata-se de um problema linear com uma marcha no tempo.

## 5.6 Exemplos de aplicação

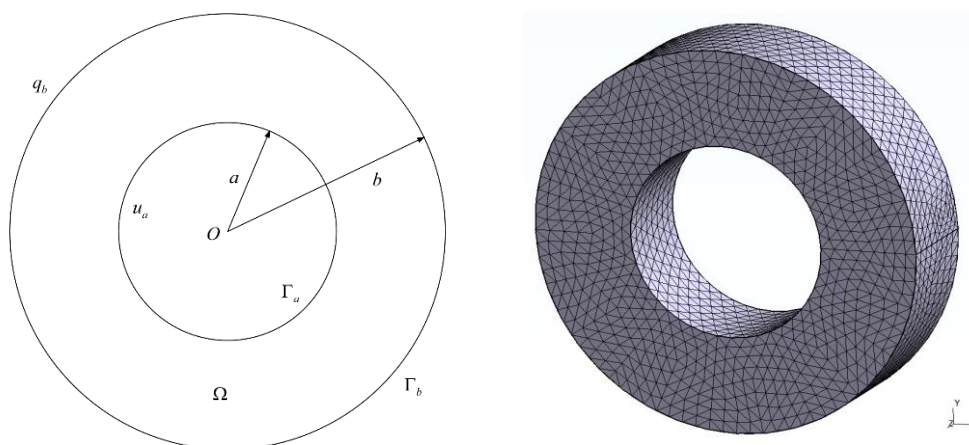
Neste tópico são apresentados exemplos com a formulação do Método dos Elementos Finitos aplicado ao problema de difusão de íons cloreto. São analisados problemas no regime estacionário e o regime transiente. Os exemplos têm como objetivo validar o código computacional desenvolvido neste estudo.

### 5.6.1 Exemplo 1- Regime estacionário: domínio circular

No primeiro exemplo é analisado no regime estacionário um sólido de domínio circular vazado submetido a um potencial (ou concentração de cloreto)  $u_a$  no perímetro interno de raio  $a$  e a um fluxo prescrito  $q_b$  no seu perímetro externo de raio  $b$ , conforme a Figura 5-4. Considera-se que o fluxo prescrito seja na direção radial, ou seja, sempre normal à superfície externa. São assumidos os seguintes valores para o problema:  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $u_a=100$  e  $q_b=200$ .

Figura 5-4- Geometria e malha do sólido circular vazado.

(a) Geometria e condições de contorno (b) Malha empregada



Fonte: O autor (2023).

Este exemplo possui solução analítica para o problema no plano (LIU; NISHIMURA, 2006). Entretanto, a formulação utilizada no presente trabalho é tridimensional. Salienta-se que o problema apresenta uma situação de fluxo bidimensional, o que pode ser capturado sem problemas pela formulação 3D. Para tanto, será empregada uma espessura  $e=1$  e as faces frontal e traseira são consideradas isoladas (sem fluxo).

Segundo Liu e Nishimura (2006), as soluções analíticas para o problema são:

$$u(r) = u_a + q_b b \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad (5.47)$$

$$q(r) = -q_b \frac{b}{r} \quad (5.48)$$

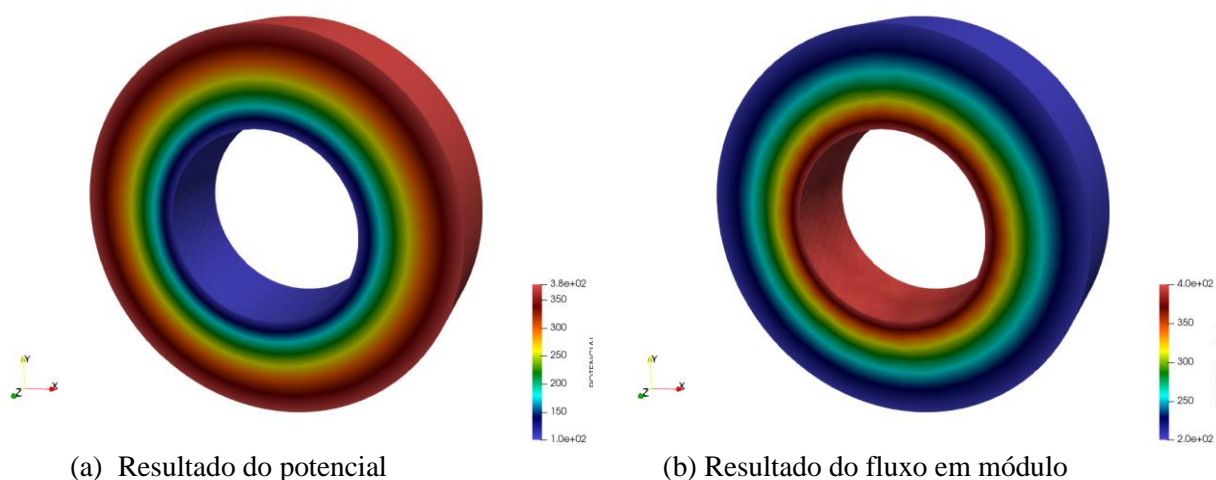
Foi empregada uma malha com vinte três mil cento e quatro (23104) elementos tetraédricos com aproximação quadrática, resultando em trinta e cinco mil seiscentos e vinte e

quatro (35624) nós. A discretização do domínio é exibida na Figura 5-4. Cabe destacar, que devido ao grau de aproximação utilizado, a aproximação da geometria circular foi satisfatória.

Os resultados obtidos tanto para o potencial quanto para o fluxo em todo o domínio de análise estão apresentados nas Figura 5-5-(a) e (b). Na Figura 5-5-(a) percebe-se uma distribuição radial do potencial, ou seja, no perímetro interno tem-se um baixo valor de potencial, e conforme o raio de análise vai aumentando, o potencial vai crescendo até o seu valor máximo no perímetro externo.

Na Figura 5-5-(b), o resultado exibido é referente ao módulo do fluxo. O intuito é representar o fluxo na direção radial adequadamente, por isso, não é feito o julgamento de sentido (sinal). O sentido é melhor analisado no gráfico da Figura 5-7- (b). Conforme Figura 5-5-(b), o comportamento do fluxo permanece radial, como no potencial. Entretanto, há uma inversão de sentido, agora o perímetro externo apresenta a menor magnitude e o perímetro interno apresenta a maior magnitude de fluxo.

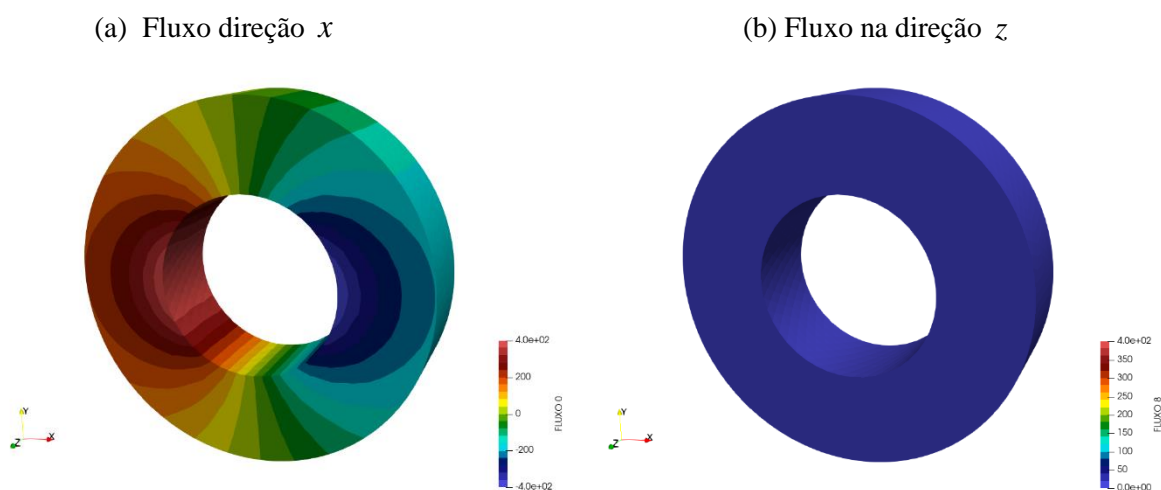
Figura 5-5- Resultados da análise do problema circular vazado.



Fonte: O autor (2023).

Nas Figura 5-6 (a) e (b) são exibidos os resultados para o fluxo nas direções  $x$  e  $z$ . Omite-se o fluxo na direção  $y$  por apresentar distribuição análoga do fluxo em  $x$ , mudando apenas a direção para o eixo  $y$ . Nota-se que o fluxo em  $x$  é simétrico como esperado e que o fluxo em  $z$  ao longo de todo o domínio é nulo, confirmando as premissas adotadas.

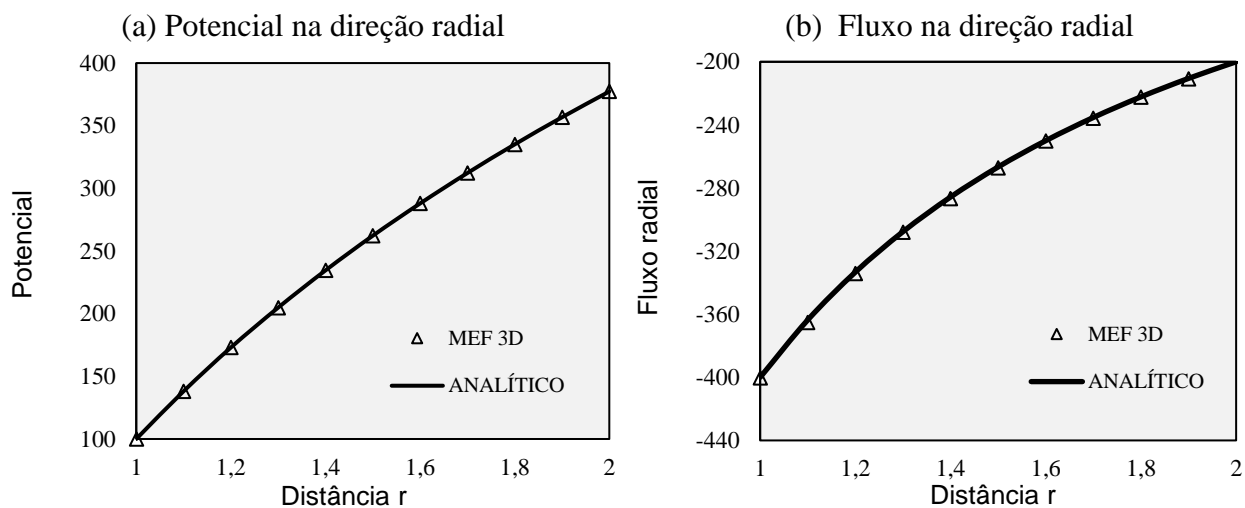
Figura 5-6- Componentes do Fluxo.



Fonte: O autor (2023).

Nas Figura 5-7-(a) e (b) são apresentados os resultados do potencial e do fluxo ao longo da direção radial em conjunto com as soluções analíticas apresentadas nas expressões (5.47) e (5.48).

Figura 5-7- Resultados ao longo da direção radial.



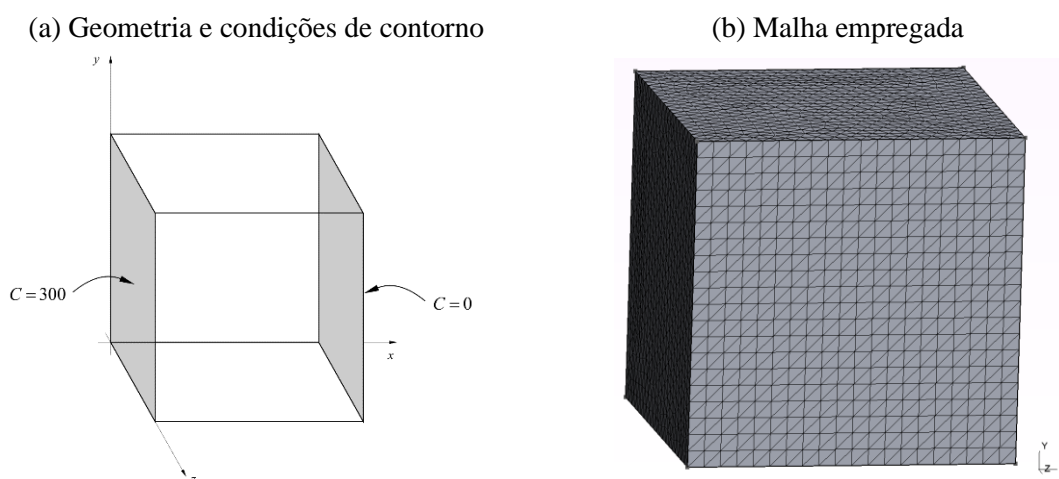
Fonte: O autor (2023).

Ao comparar ambos os resultados com a solução analítica, percebe-se que o valores obtidos numericamente apresentaram proximidade com as soluções analíticas. Com isso, fica evidente a precisão do método numérico empregado neste trabalho e seu grande potencial de aplicabilidade. Dentre as vantagens, pode-se citar a praticidade de visualização das respostas em todo o domínio graças aos softwares de pós processamento e a aplicabilidade em diferentes geometrias, inclusive aquelas sem soluções analíticas.

### 5.6.2 Exemplo 2 – Regime Transiente: cubo com fluxo unidimensional

No segundo exemplo, parte-se para a análise em regime transiente. O problema proposto consiste em um cubo com lados de 6m sujeito à uma concentração de íons cloreto na face esquerda de  $C = 300$  e uma concentração nula imposta na face direita, como pode ser visto na Figura 5-8–(a). As demais faces do cubo são consideradas isoladas (fluxo nulo). Com isso, tem-se uma situação de fluxo unidimensional (direção  $x$ ) propositalmente imposta ao problema, pois deseja-se comparar a formulação implementada com a solução analítica apresentada em Boyce e Diprima (1979) para esse tipo de problema.

Figura 5-8- Problema de fluxo unidimensional em cubo.

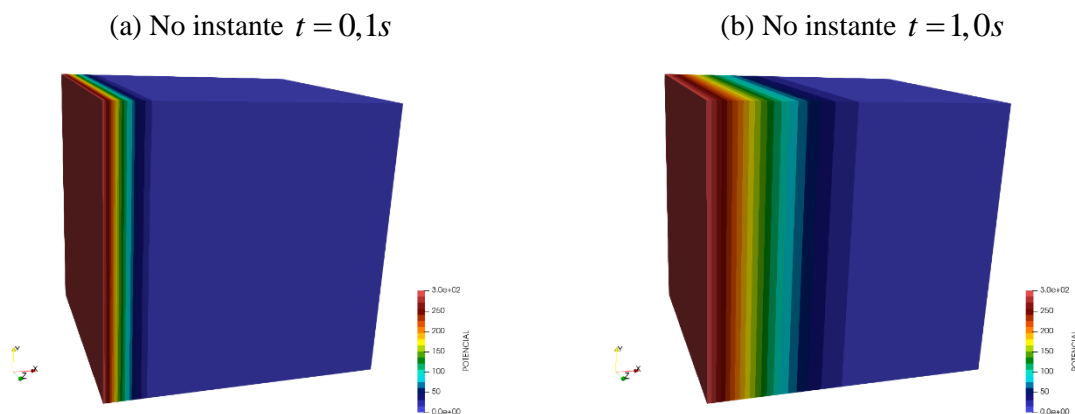


Fonte: O autor (2023).

Como trata-se de uma análise transiente, é preciso definir as condições iniciais do problema. Assume-se  $C(t_0 = 0) = 0$  e o coeficiente de difusão  $k = 1$ . A discretização adotada é apresentada na Figura 5-8-(b). São utilizados vinte nove mil oitocentos e oitenta (29880) elementos tetraédricos quadráticos e, conseqüentemente, quarenta e cinco mil quatrocentos e quarenta e um (45441) graus de liberdade. A discretização temporal empregada é de 100 passos de tempo de igual duração.

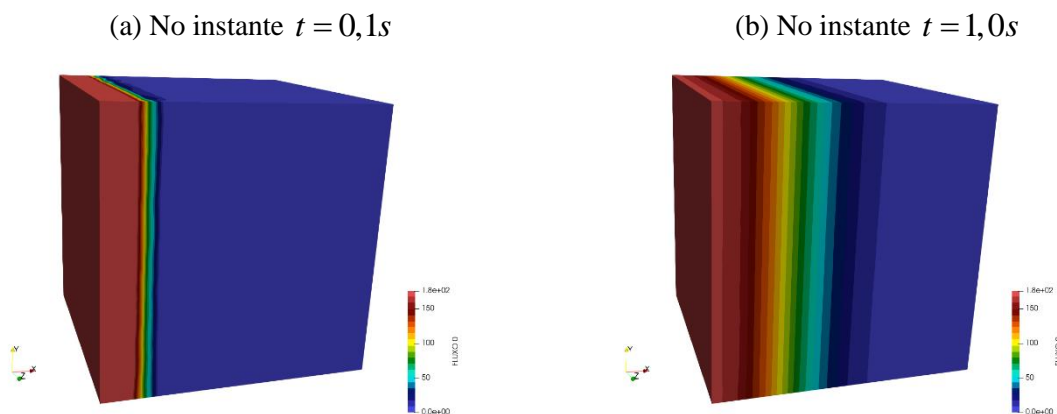
Os resultados das concentrações de cloretos para dois instantes de tempo são exibidos na Figura 5-9, o tempo total considerado foi de  $t = 1s$ . Além disso, os resultados do fluxo na direção  $x$  para os mesmos instantes de tempo são mostrados na Figura 5-10. Cabe mencionar que os resultados dos fluxos nas outras direções são nulos. Com esses resultados é possível notar a evolução da concentração de cloretos e do fluxo na direção  $x$  em função do tempo.

Figura 5-9- Concentrações de cloreto.



Fonte: O autor (2023).

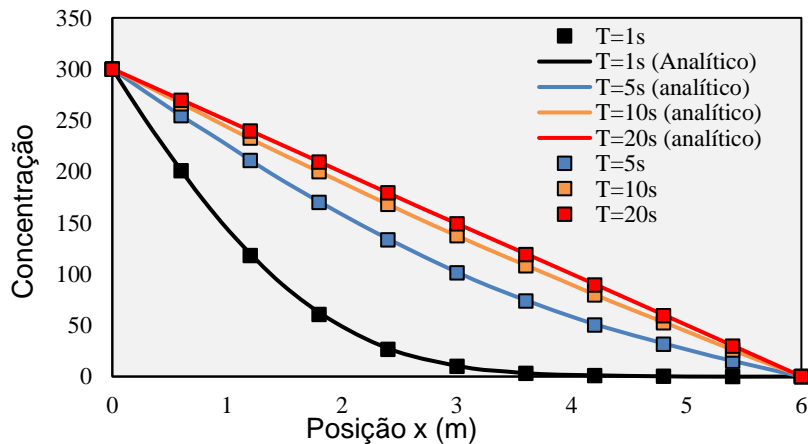
Figura 5-10- Fluxo na direção x.



Fonte: O autor (2023).

Com o intuito de verificar a eficiência numérica do modelo foram realizadas quatro análises transientes com diferentes durações. Os resultados obtidos são comparados com as respostas analíticas na Figura 5-11.

Figura 5-11- Concentração em função da posição x.



Fonte: O autor (2023).

Portanto, verifica-se a partir deste exemplo que o modelo apresenta grande robustez, independente da duração da análise. Os resultados do MEF foram similares ao da solução analítica. Além disso, outra constatação importante refere-se à tendência das respostas das análises de maiores durações se aproximarem da resposta do regime estacionário (linear, neste caso). Segundo Pellizzer (2019), isso acontece em todo problema de potencial transiente onde as condições de contorno permanecem constantes ao longo do tempo.

### 5.6.3 Exemplo 3 - Regime transiente: cubo com fluxo bidimensional

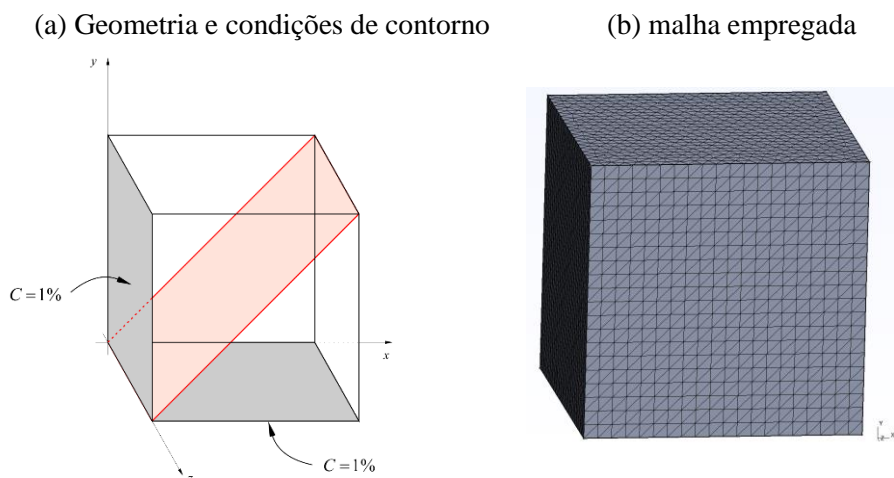
O terceiro exemplo aborda um problema de difusão de íons cloreto em regime transiente com fluxo bidimensional. O cubo de concreto possui lados com dimensões de 150mm e está sujeito a uma concentração de cloretos de 1,0% em relação à massa de cimento em duas de suas faces, conforme a Figura 5-12-(a). As demais faces são seladas com uma resina de epóxi, fazendo com que não haja entrada de cloretos, ou seja, o fluxo é nulo nessas faces. O coeficiente de difusão do concreto é adotado como  $k = 31,536 \text{mm}^2 / \text{ano}$ . A concentração de cloretos inicial no domínio é assumida nula, ou  $C(t_0 = 0) = 0$ .

Quanto a discretização do MEF empregada, foram utilizados vinte e oito mil e noventa (28090) elementos tetraédricos quadráticos e conseqüentemente quarenta e cinco mil quatrocentos e quarenta e um (45441) nós (graus de liberdade) que podem ser visualizados na Figura 5-12-(b). A discretização temporal empregada é de 100 passos de tempo de igual duração.

O presente exemplo se propõe a realizar uma análise do perfil de distribuição de cloretos ao longo da profundidade  $\chi$  para três tempos de exposição: 5, 10 e 20 anos. Tal profundidade é medida ao longo do plano que corta o cubo na diagonal conforme a Figura 5-12-(a). A origem da profundidade  $\chi$  é definida na intersecção das duas faces que estão expostas às concentrações de cloretos.



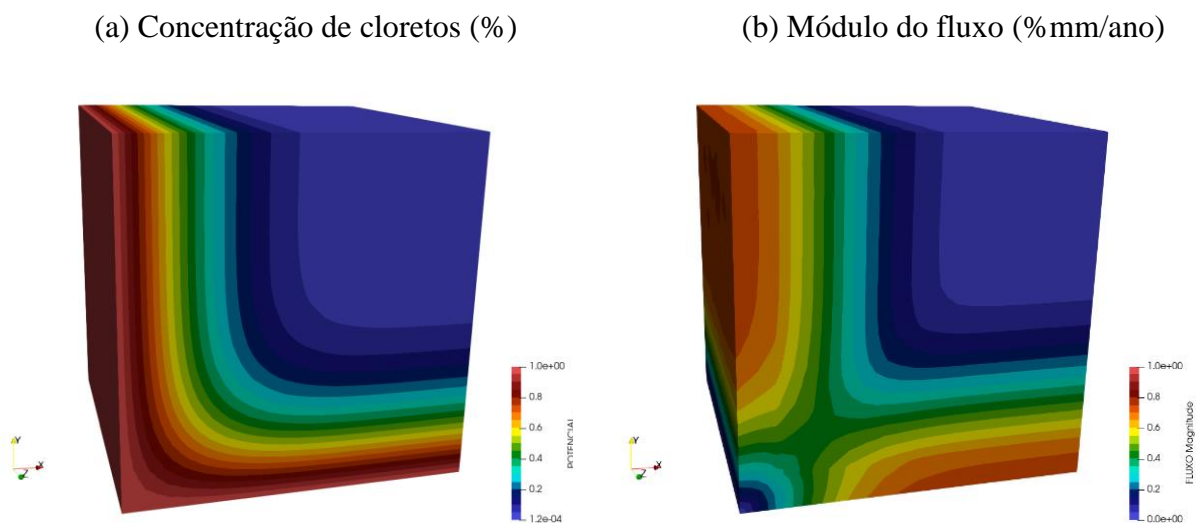
Figura 5-12- Problema de fluxo bidimensional em cubo.



Fonte: O autor (2023).

Nas Figura 5-13-(a) e (b) estão expostos os resultados ao final de um tempo de exposição de 20 anos para o perfil de concentração de cloretos e o módulo do fluxo, respectivamente. Nos outros períodos de exposição a distribuição das duas grandezas é a mesma, alterando-se somente os valores. Percebe-se um comportamento distinto do exemplo anterior (fluxo unidimensional), e a concentração, por exemplo, tem seu comportamento acentuado no plano diagonal (profundidade adotada). A magnitude do fluxo tem um comportamento complexo e nitidamente bidimensional. Portanto, adotar uma simplificação dimensional deste tipo de problema pode gerar previsões não tão precisas.

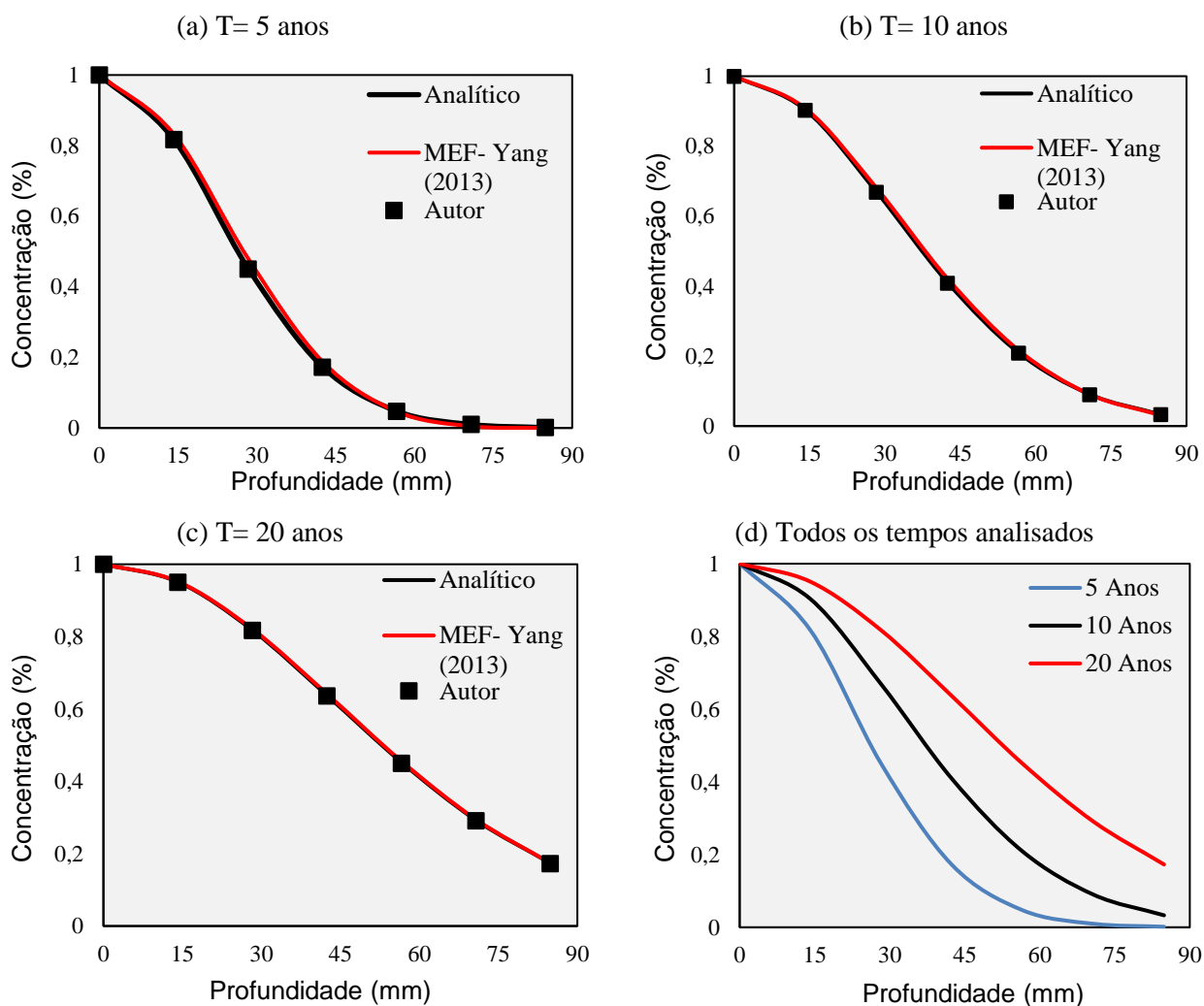
Figura 5-13- Resultados para T=20 anos.



Fonte: O autor (2023).

Os resultados ao final do tempo de análise são plotados nos gráficos da Figura 5-14 para os diferentes tempos de exposição (T). Como forma de validar a implementação da formulação, os resultados são comparados com os obtidos numericamente (MEF) e analiticamente por Yang *et al.* (2013).

Figura 5-14- Concentração x profundidade.



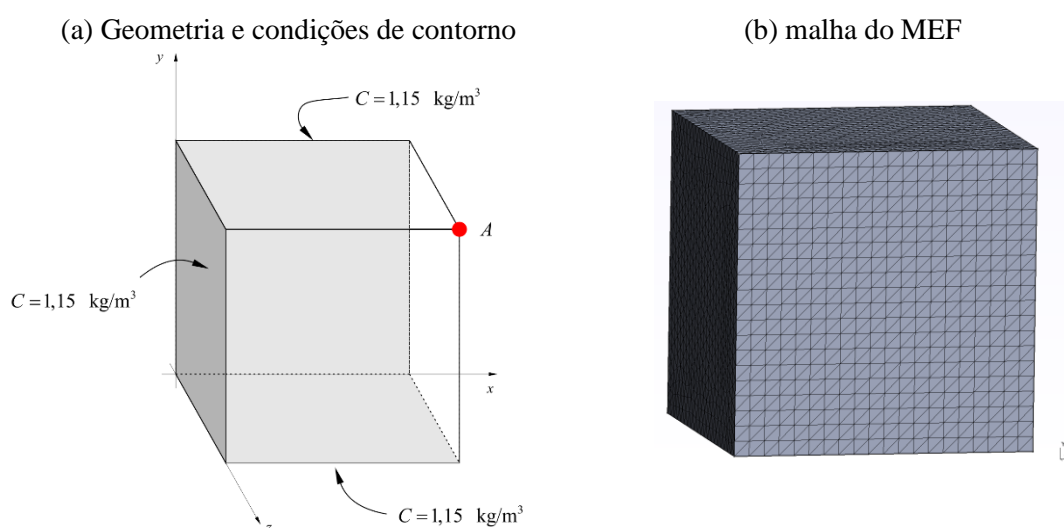
Fonte: O autor (2023).

O modelo utilizando o MEF 3D apresentou grande concordância com os resultados analíticos e numéricos de Yang *et al.* (2013). Em conformidade com o segundo exemplo presente neste item, quanto maior o tempo de exposição, maior é a concentração de cloretos ao longo da profundidade analisada, e no limite chega-se à solução do regime estacionário, desde que as condições de contorno sejam constantes no tempo.

#### 5.6.4 Exemplo 4- Regime transiente: Cubo com fluxo tridimensional

No quarto exemplo, tem-se um cubo de concreto com dimensões 40 mm x 40 mm x 40 mm e que tem três de suas faces expostas a um ambiente com cloretos, como observado na Figura 5-15-(a). Este cubo de concreto busca representar uma situação de cobrimento de concreto em uma quina de um elemento estrutural. O ponto A mostrado na Figura 5-15-(a) representa um ponto da superfície do aço embutido no concreto. Portanto, dada as condições de contorno em três direções distintas, o problema apresenta um fluxo tridimensional.

Figura 5-15- Problema de fluxo tridimensional em cubo.



Fonte: O autor (2023).

O objetivo deste exemplo é validar a formulação do MEF 3D e analisar as consequências da simplificação da dimensionalidade do problema, ou seja, avaliar as diferenças das respostas de modelos 1D, 2D e 3D para o presente problema. Para isso, as soluções do MEF 3D implementadas no presente trabalho são comparadas com as obtidas pelo software Ansys© e em seguida são confrontadas com um modelo analítico 1D (2ª Lei de Fick) e o próprio MEF considerando a situação 2D.

A solução da 2ª Lei de Fick é obtida para o caso particular de domínio semi-infinito e com uma concentração de cloretos uniforme no contorno e constante ao longo do tempo. Tal solução é dada pela expressão (5.49).

$$C(x,t) = C_0 \operatorname{erfc} \left[ \frac{x}{2\sqrt{kt}} \right] \quad (5.49)$$

onde:  $C_0$  é a concentração de íons cloreto no contorno do domínio (não varia no tempo);  $x$  é a localização no domínio;  $t$  é o tempo;  $k$  é o coeficiente de difusão e  $\operatorname{erfc}$  é a função matemática de valor complementar da função erro de Gauss que pode ser obtida por:

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad (5.50)$$

O coeficiente de difusão é adotado segundo a equação de Bentz *et al.* (1996):

$$k = 10^{-10+4,66(a/c)} \text{ cm}^2 / \text{ s} \quad (5.51)$$

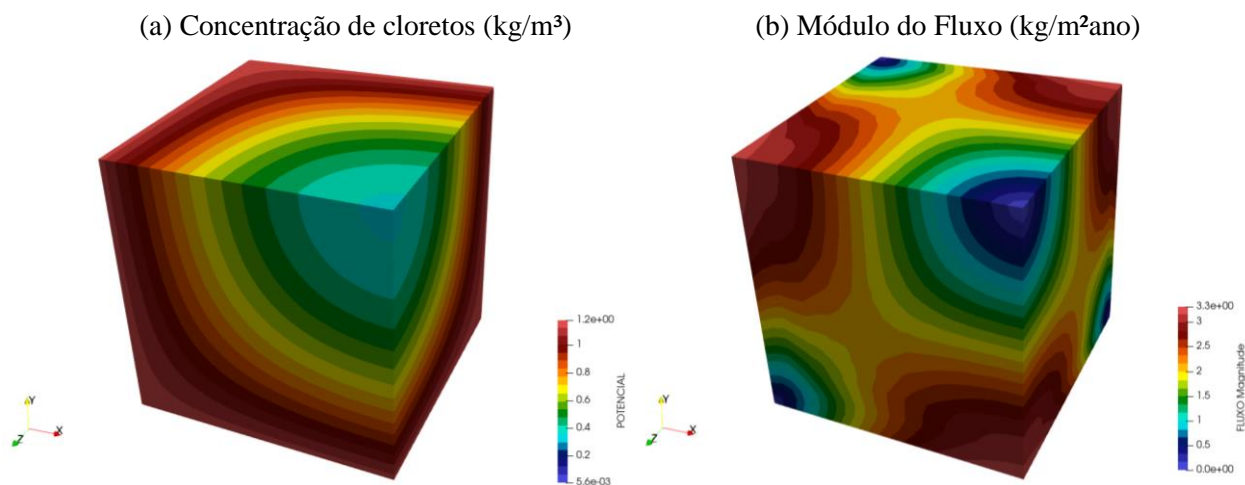
O fator água cimento ( $a/c$ ) considerado é 0,5, portanto, a expressão (5.51) resulta em um coeficiente de difusão  $k = 67,4228 \text{ mm}^2 / \text{ ano}$ .

A concentração superficial de cloretos foi definida segundo McGee (1999) para um nível de agressividade moderado de uma estrutura situada entre 0,1 e 2,84km distante da costa e sem contato direto com a água do mar, o que resulta em  $C = 1,15 \text{ kg} / \text{ m}^3$ .

Em relação a discretização do MEF empregada, foram utilizados trinta mil e quarenta (30040) elementos tetraédricos quadráticos e, conseqüentemente, quarenta e cinco mil seiscentos e dezenove (45619) nós (Figura 5-15-(b)). A discretização temporal empregada é de 100 passos de tempo de igual duração e no instante  $t = 0$  a concentração é nula em todo o domínio.

Os resultados da análise em MEF para concentração de cloretos e fluxo são exibidos na Figura 5-16. O tempo de exposição considerado foi de 40 anos e as respostas apresentadas são para o instante  $t = 2$  anos. Por meio desses resultados constatou-se o caráter tridimensional das distribuições das grandezas de interesse no domínio.

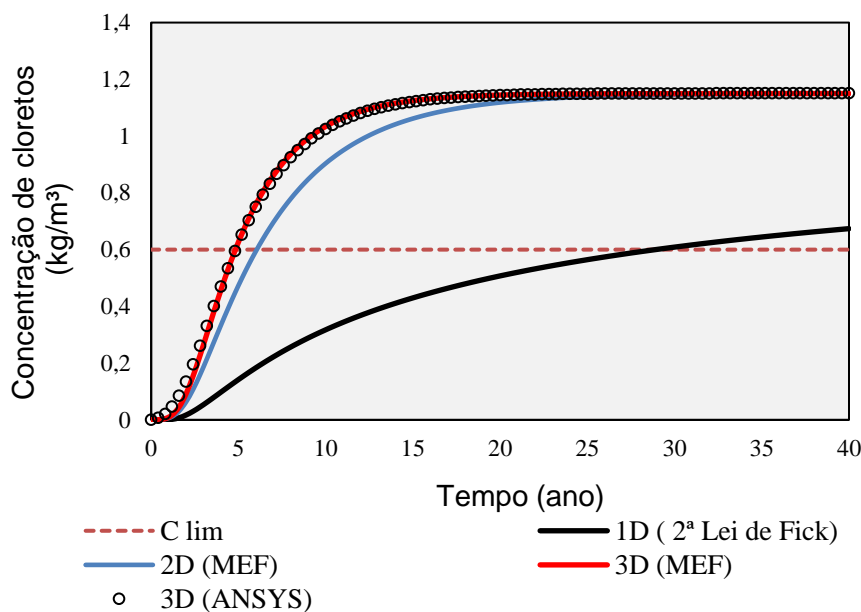
Figura 5-16- Resultados em  $t = 2$  anos para  $T = 40$  anos.



Fonte: O autor (2023).

De maneira a estimar o tempo de despassivação da armadura do concreto, aqui representada pelo ponto A, o valor da concentração de cloretos no ponto A ao longo do tempo foi calculado por diversos modelos e exibidos na Figura 5-17. Além disso, é definida a concentração limite de cloretos como sendo  $C_{lim} = 0,6 kg / m^3$ , em concordância com as recomendações de Mehta e Monteiro (2014).

Figura 5-17- Concentração no ponto A ao longo do tempo.



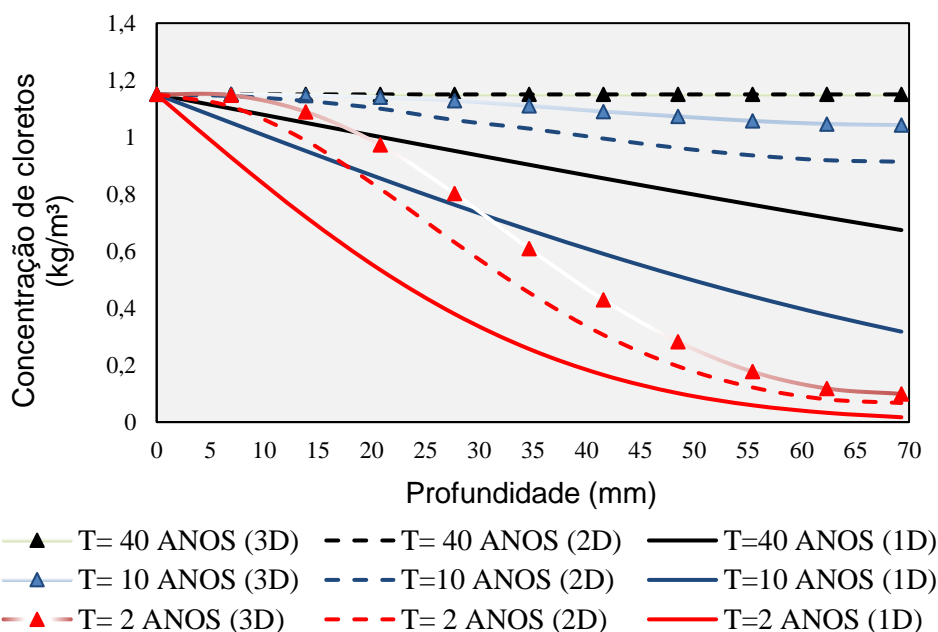
Fonte: O autor (2023).

A partir dos resultados verificados e exibidos na Figura 5-17 é possível atestar a precisão e validade da formulação do MEF 3D implementada neste estudo, já que os resultados foram similares aos obtidos com o software Ansys®. Ademais, os tempos de despassivação do modelo tridimensional (MEF), bidimensional (MEF) e unidimensional (2ª Lei de Fick) foram de 4,8 anos, 6 anos e 29,2 anos, respectivamente. Assim, o modelo bidimensional chega a estimar um tempo de despassivação 25% maior que o modelo tridimensional e o modelo unidimensional chega a estimar um tempo nove vezes maior que o modelo mais preciso e adequado para o problema (3D).

Conforme observado na Figura 5-17, as curvas dos modelos tridimensional e bidimensional apresentam comportamento similar, ou seja, um rápido crescimento em idades iniciais e depois uma estabilização assintótica. Tal comportamento é justificado pelo alto gradiente de concentração nas idades iniciais que vem diminuindo com o avanço do processo difusivo. Em relação ao comportamento do modelo unidimensional é notado um crescimento mais uniforme ao longo do tempo, porém não linear.

Os perfis de concentração de cloretos contemplando as soluções da 2ª Lei de Fick (1D), do MEF bidimensional e tridimensional foram analisados ao longo da “profundidade” para três tempos de exposição. Essa medida foi realizada a partir de uma linha que conectou a origem do sistema de coordenadas até o ponto A. Os resultados são exibidos na Figura 5-18.

Figura 5-18- Concentração de cloretos ao longo da profundidade.



Fonte: O autor (2023).

Na Figura 5-18 nota-se que os perfis de concentrações são maiores para tempos de exposição mais longos, principalmente para o modelo 3D. A diferença observada entre os modelos 2D e 3D diminui conforme o tempo de exposição aumenta, porém ainda é significativa. O modelo unidimensional é o que apresenta maiores discordâncias em relação aos demais, subestimando a concentração de cloretos de maneira grave para períodos longos de exposição.

Por fim, cabe ressaltar as limitações da segunda Lei de Fick para problemas práticos que apresentem um fluxo tridimensional. Esta solução é válida apenas para fluxos unidimensionais e, portanto, apresenta uma aplicabilidade limitada. Além disso, destaca-se a formulação tridimensional do MEF implementada, a qual apresentou elevada robustez e alta aplicabilidade devido ao seu caráter numérico.

## 6 PROBLEMA MULTIFÍSICO

---

Neste capítulo é apresentada a formulação empregada para acoplar os problemas mecânico e de difusão, permitindo uma análise multifísica do problema de difusão de cloretos em estruturas de concreto armado fissuradas.

O processo de fissuração no concreto oferece acessos novos e preferenciais para agentes agressivos, como os ataques de íons cloreto. A penetração desses agentes até uma determinada concentração pode causar a despassivação da armadura e uma consequente diminuição da vida útil da estrutura de concreto armado (GÉRARD e MARCHAND, 2000). Por isso, se os efeitos da fissuração não forem considerados de maneira razoável em modelos de difusão de cloretos no concreto, a vida útil da estrutura pode ser superestimada. Portanto, é de suma importância considerar as alterações das propriedades difusivas do concreto decorrentes deste fenômeno mecânico.

Nos últimos anos alguns trabalhos experimentais foram realizados a fim de mensurar quantitativamente a influência da fissuração no processo difusivo de íons cloreto no concreto, como, por exemplo, os trabalhos de Djerbi *et al.* (2008), Marsavina (2009), Jang *et al.* (2011), Li *et al.* (2016). Os resultados obtidos mostram que a fissuração altera significativamente a difusão de íons de cloreto no concreto, já que quanto maior a abertura de fissura, maior a capacidade de difusão. Um dos pontos analisados nesses estudos é a determinação de um coeficiente de difusividade efetivo nas fissuras.

Dado o custo financeiro e limitações dos trabalhos experimentais, alguns estudos envolvendo a simulação numérica do problema têm sido realizados. A abordagem pode ser feita tanto na mesoescala (Du *et al.*, 2014), quanto na macroescala (Zhang *et al.*, 2017).

Neste trabalho é adotada uma abordagem em macroescala e com as fissuras consideradas espalhadas, ou seja, o meio é considerado contínuo tal como apresentado no item mecânica do dano contínuo desta tese. Para tanto, é proposta uma formulação que relaciona a deformação equivalente com o coeficiente de difusividade do material que é descrita no próximo item.

### 6.1 Relação coeficiente de difusividade-abertura de fissura

Uma maneira simples de estimar o efeito da fissuração nas propriedades difusivas do material é relacionando a abertura de fissura  $w$  com o coeficiente de difusividade efetivo do

concreto fissurado  $k_{ef}$ . Para isso, são feitas algumas simplificações no formato da fissura, que na realidade são tortuosas, mas nesta formulação são consideradas retas de forma análoga as leis coesivas da mecânica da fratura.

Essa relação já foi estudada em diversos trabalhos e diferentes expressões foram propostas, algumas delas são apresentadas na Tabela 6-1.

Tabela 6-1 – Relações  $k_{ef} - w$  disponíveis na literatura

<b>Autor</b>	<b>Expressão</b>
Kato e Uomoto (2005)	$\log(k_{ef}) = -2,227[1 + 1,311\exp(-20,6w)] \text{ cm}^2 / \text{s}$
Djerbi <i>et al.</i> (2008)	$k_{ef} (\text{m}^2 / \text{s}) = 2 \cdot 10^{-11} w - 4 \cdot 10^{-11} ; 30 \leq w \leq 80 \mu\text{m}$ $k_{ef} (\text{m}^2 / \text{s}) = 1,4 \cdot 10^{-9} ; w \geq 80 \mu\text{m}$
Jin <i>et al.</i> (2010)	$k_{ef} (\text{m}^2 / \text{s}) = \frac{[16,9 - 27,4\exp(-0,0176w)]}{10^{10}} ; 30 \leq w \leq 100 \mu\text{m}$

Fonte: O autor (2023).

Como pode ser observado na Tabela 6-1 e em outras referências na literatura, existe uma grande variedade de equações para a relação  $k_{ef} - w$ . À vista disso, Zhang *et al.* (2017) fez um levantamento dessas equações e de resultados experimentais, com isso, propôs sua própria expressão:

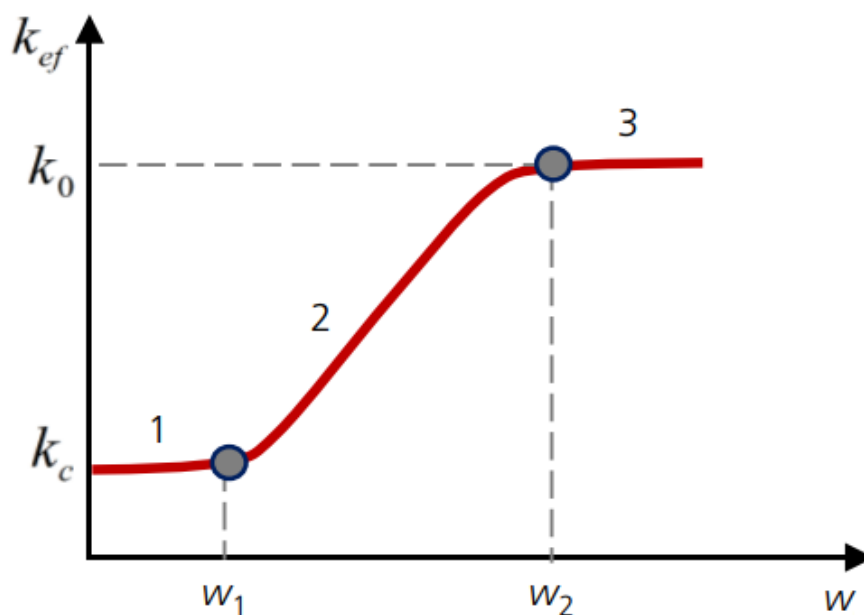
$$\begin{aligned}
 k_{ef} &= k_c && ; w \leq w_1 \\
 k_{ef} &= \frac{k_c + k_0}{2} + \frac{k_0 - k_c}{2} \sin \left[ \frac{\pi}{w_2 - w_1} \left( w - \frac{w_2 + w_1}{2} \right) \right] && ; w_1 \leq w \leq w_2 \\
 k_{ef} &= k_0 && ; w \geq w_2
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde:  $w_1$  e  $w_2$  são valores de abertura de fissura que definem subdomínios da expressão;  $k_c$  é o coeficiente de difusividade do concreto íntegro;  $k_0$  é o coeficiente de difusividade em solução livre, o qual pode ser estimado em temperatura normal como  $k_0 = 2,03 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 / \text{s}$  (JANG *et al.*, 2011; KATO *et al.*, 2005).

Além disso, Zhang *et al.* (2017) notaram que a maioria dos trabalhos concordavam com a divisão do processo em três estágios, os quais são listados abaixo e exibidos na Figura 6-1.



- No primeiro estágio, a abertura de fissura  $w$  é menor que uma abertura de fissura limite inferior  $w_1$  e, portanto, a influência da fissuração no coeficiente de difusividade do concreto pode ser desprezada. Tal consideração se deve ao efeito de autocura do concreto;
- No segundo estágio, o coeficiente de difusividade do concreto  $k_{ef}$  vai aumentar assim que a abertura de fissura  $w$  superar o limite inferior  $w_1$  até uma abertura de fissura limite superior  $w_2$ ;
- No último estágio, o coeficiente de difusividade  $k_{ef}$  permanece constante mesmo com o aumento de  $w$ . Isso quer dizer que o valor de  $k_{ef}$  é igual ao valor do coeficiente de difusão em solução livre  $k_0$  assim que  $w$  supera o limite superior  $w_2$ .

Figura 6-1- Estágios da relação  $k_{ef} - w$ .Fonte: Adaptado Zhang *et al.* (2017).

Alguns trabalhos foram realizados com o objetivo de determinar os valores limites de abertura de fissura  $w_1$  e  $w_2$ , contudo, os resultados ainda não são consensuais e seus valores podem ser observados na Tabela 6-2.

Tabela 6-2 – Limites inferiores e superiores de abertura de fissura

<b>Autor</b>	$w_1(\mu m)$	$w_2(\mu m)$
Kato e Uomoto (2005)	-	75
Djerbi <i>et al.</i> (2008)	30	80
Jin <i>et al.</i> (2010)	30	100
Jang <i>et al.</i> (2011)	80	200
Akhavan (2012)	60	80

Fonte: O autor (2023).

Conforme apresentado na Tabela 6-2, há uma grande variabilidade nos valores de  $w_1$  e  $w_2$ . Neste trabalho, para  $w_1$  será considerado de forma conservadora o valor zero, enquanto  $w_2$  será adotado de acordo com a energia de fratura, por exemplo, a expressão (4.29).

## 6.2 Relação coeficiente de difusividade-deformação equivalente

A formulação utilizada em todo este trabalho é contínua, portanto, é possível utilizar do mesmo artifício da técnica de regularização da energia de fratura vista no capítulo de mecânica do dano para “transformar” a abertura de fissura  $w$  em uma deformação equivalente  $E_{eq}$ , já que o processo de fissuração ocorre em uma dada largura de banda  $h$  do elemento finito.

A deformação na zona de processo de fratura é novamente reescrita na expressão (6.2).

$$\varepsilon_w = \frac{w}{h} \quad (6.2)$$

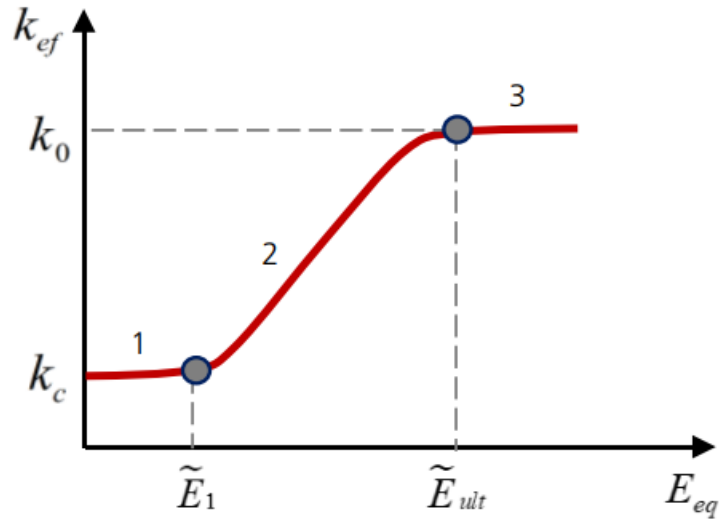
A deformação  $\varepsilon_w$  pode se relacionar com a deformação de Green da seguinte forma:

$$E = \frac{\varepsilon_w^2}{2} + \varepsilon_w \quad (6.3)$$

Além disso, considera-se que a fissuração ocorra somente por deformações de alongamento, tal como no modelo de dano de Mazars (1984). Com isso, a medida de deformação utilizada é a deformação equivalente  $E_{eq}$  calculada pela expressão (4.5).

Por fim, tem-se a relação coeficiente de difusividade  $k_{ef}$  — deformação equivalente  $E_{eq}$  como pode ser vista na Figura 6-2.

Figura 6-2- Relação  $k_{ef} - E_{eq}$ .



Fonte: O autor (2023).

onde os valores de  $E_1$  e  $E_{ult}$  podem ser obtidos segundo a lei coesiva e energia de fratura adotadas, como, por exemplo, as expressões (4.28) a (4.31).

Como neste trabalho é utilizada a relação  $k_{ef} - w$  de Zhang *et al.* (2017), reescreve-se a expressão (6.1) em função das deformações na expressão (6.4).

$$\begin{aligned}
 k_{ef} &= k_c && ; E_{eq} \leq E_1 \\
 k_{ef} &= \frac{k_c + k_0}{2} + \frac{k_0 - k_c}{2} \sin \left[ \frac{\pi}{E_{ult} - E_1} \left( E_{eq} - \frac{E_{ult} + E_1}{2} \right) \right] && ; E_1 \leq E_{eq} \leq E_{ult} \\
 k_{ef} &= k_0 && ; E_{eq} \geq \widetilde{E_{ult}}
 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Com isso, é possível realizar a análise do problema multifísico com auxílio do Método dos Elementos Finitos. Cabe ressaltar que a formulação apresentada assume as seguintes hipóteses:

- Não há interação química entre os íons cloreto e o sólido;
- A difusão ocorre em condições isotérmicas;
- Os efeitos eletroforéticos (*electrophoretic effect*) são desprezados.

Ademais, dado o seu caráter generalista, nada impede que a formulação apresentada seja utilizada com outros modelos de dano, leis coesivas e relações  $k_{ef} - E_{eq}$ .

### 6.3 Exemplos de aplicação

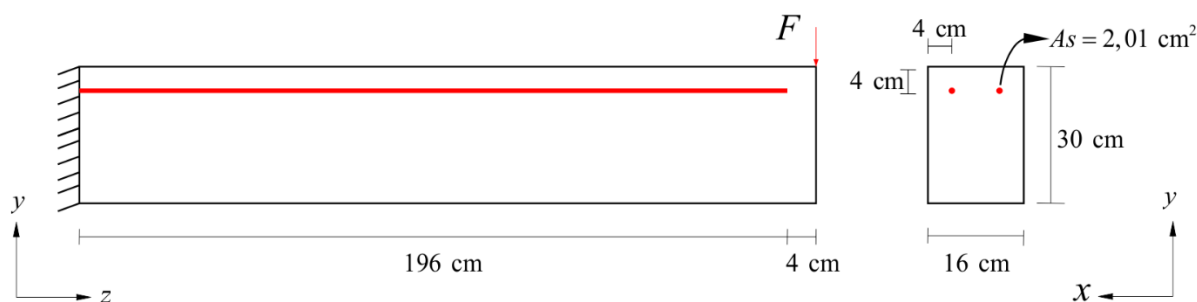
Neste tópico são apresentados exemplos com a formulação de acoplamento proposta aplicada a problemas de difusão de íons cloreto em concretos fissurados. Os exemplos têm como objetivo demonstrar as potencialidades do código computacional desenvolvido neste trabalho.

#### 6.3.1 Exemplo 1 – Viga engastada e livre com fluxo tridimensional

O presente exemplo consiste numa viga de concreto armada engastada e exposta a um ambiente de média agressividade ( $C=1,15\text{kg/m}^3$ ) por um período de 50 anos. O objetivo é estudar o efeito da danificação no processo difusivo de íons cloreto no concreto e as concentrações de cloreto ao redor das armaduras. Para isso, são considerados três cenários, a saber: concreto íntegro, ou seja, solicitado até o regime elástico (sem dano); danificação do concreto correspondente a uma força  $F$  igual a 50% da carga última e, por último, um cenário onde  $F$  é igual a carga última.

A viga analisada possui 2m de comprimento e cobrimento de 4cm. O reforço utilizado foi composto por duas barras de aço com diâmetro de 16mm. O esquema estrutural é apresentado na Figura 6-3, enquanto as propriedades dos materiais e modelos utilizados podem ser consultados na Tabela 6-3.

Figura 6-3- Esquema estrutural da viga engastada.



Fonte: O autor (2023).

Tabela 6-3- Propriedades dos materiais e modelos

<b>Propriedades do concreto (Model Code 2010)</b>			
$f_{ck}$ (MPa)	Mod. Compressão	Mod. Tração	Demais propriedades
50	Popovics (1973)	Bilinear (Model Code 2010)	Model Code 2010
<b>Propriedades do aço CA-50 (Eurocode 2)</b>			
$E_s$ (MPa)	$f_{yk}$ (MPa)	$K^P$ (MPa)	$\epsilon_{uk}$ (%)
200000	500	842	5

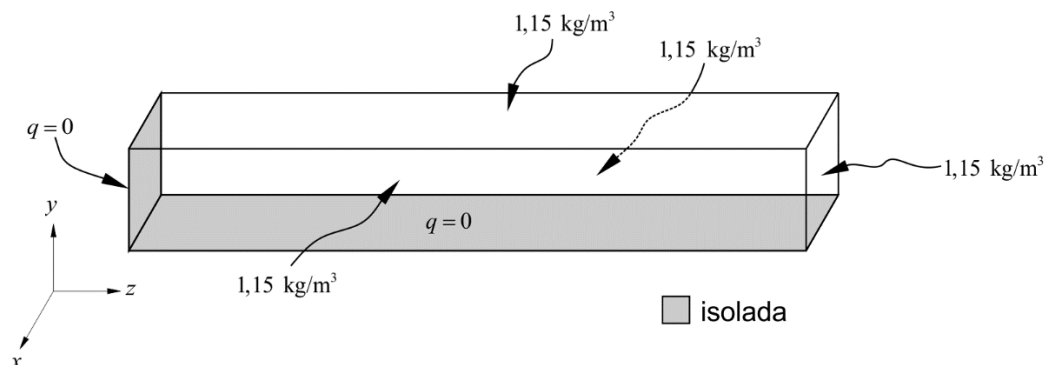
Fonte: O autor (2023).

Quanto ao problema de difusão, considera-se uma estrutura localizada entre 0,1 e 2,84km da costa marítima, resultando em uma concentração constante  $C=1,15\text{kg/m}^3$  (McGee, 1999). O coeficiente de difusividade do concreto íntegro  $k_c$  é calculado conforme a expressão (5.51), onde o fator  $a/c$  pode ser estimado pela seguinte expressão proposta por Balomey (1935):

$$a/c = \frac{27}{f_{ck} + 13,5} \quad (6.5)$$

Com isso, resulta em  $k_c = 30,2\text{mm}^2/\text{ano}$ . Já o coeficiente de difusividade no concreto fissurado  $k_{ef}$  é calculado conforme expressão (6.4), onde a deformação última é calculada de acordo com a expressão (4.40) considerando o Model Code 2010. Neste problema é considerado que somente algumas faces estão expostas, conforme é exibido na Figura 6-4. Além disso, assume-se que a concentração de cloreto em todo o domínio é nula no início da análise  $C(t=0) = 0$ .

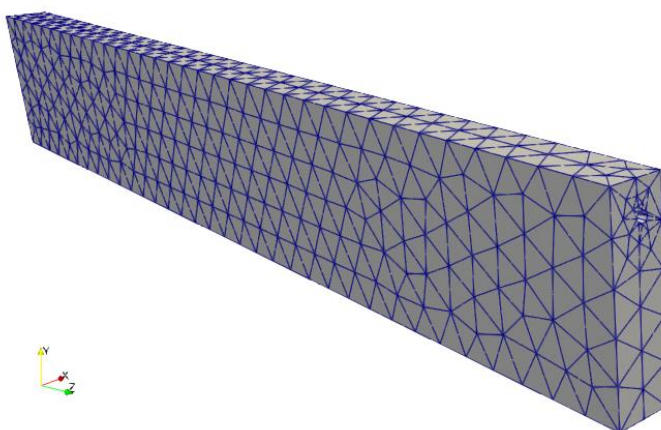
Figura 6-4- Condições de contorno do problema de difusão.



Fonte: O autor (2023).

Dada a simetria de ambos os problemas em relação ao plano  $zy$ , foi empregada uma discretização de metade da viga (3290 elementos sólidos e 17811 GL), como pode ser observado na Figura 6-5. Cabe ressaltar, que devido a desconsideração de fluxo difusivo na armadura neste trabalho, optou-se por não discretizar a armadura tridimensionalmente no problema de difusão e assumir fluxo nulo no perímetro. Em relação ao problema mecânico, a armadura segue sendo considerada como elemento de fibra e embutida no sólido.

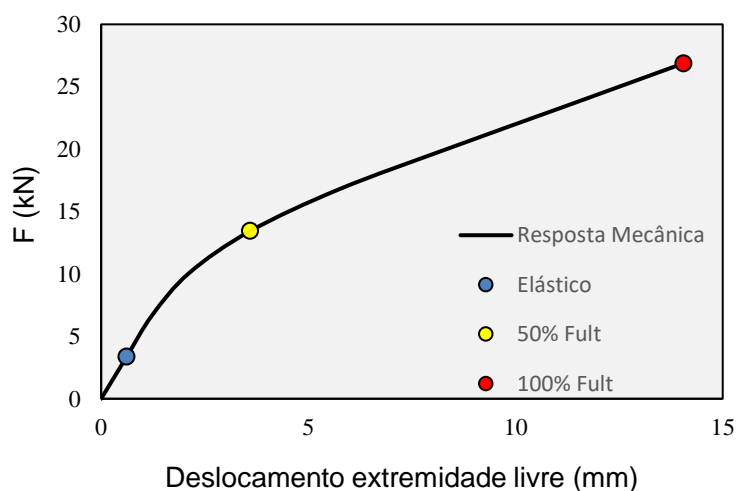
Figura 6-5- Malha do problema.



Fonte: O autor (2023).

Inicialmente, foi aplicada uma força  $F$  sem limitação de valor para a obtenção da capacidade resistente da estrutura. O critério para a definição dessa força última  $F_{ult}$  foi o de última posição convergida numa análise com 100 passos de carga no programa de MEFP para uma tolerância  $\Delta Y_k / \Delta X_k < tol = 10^{-6}$ . O resultado para  $F_{ult}$ , 50% de  $F_{ult}$  e uma força presente no regime elástico (concreto íntegro) estão disponíveis no gráfico de *força x deslocamento* da Figura 6-6.

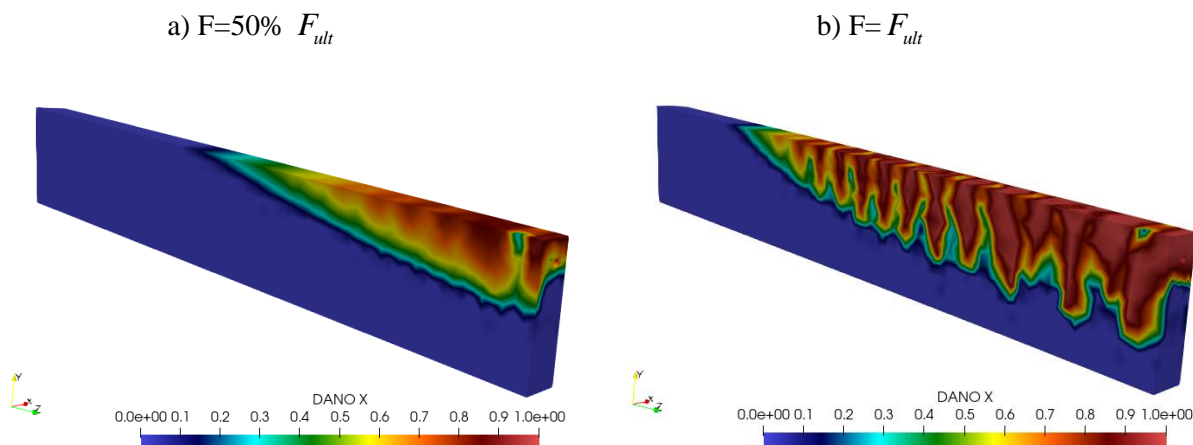
Figura 6-6- Gráfico força  $x$  deslocamento.



Fonte: O autor (2023).

Uma análise qualitativa do padrão de fissuração da estrutura pode ser feita observando os resultados da variável de dano  $D$  na Figura 6-7 para os dois cenários danificados:  $50\% F_{ult}$  e  $F_{ult}$ .

Figura 6-7- Variável de dano ao longo do domínio da viga para diferentes valores de  $F$ :

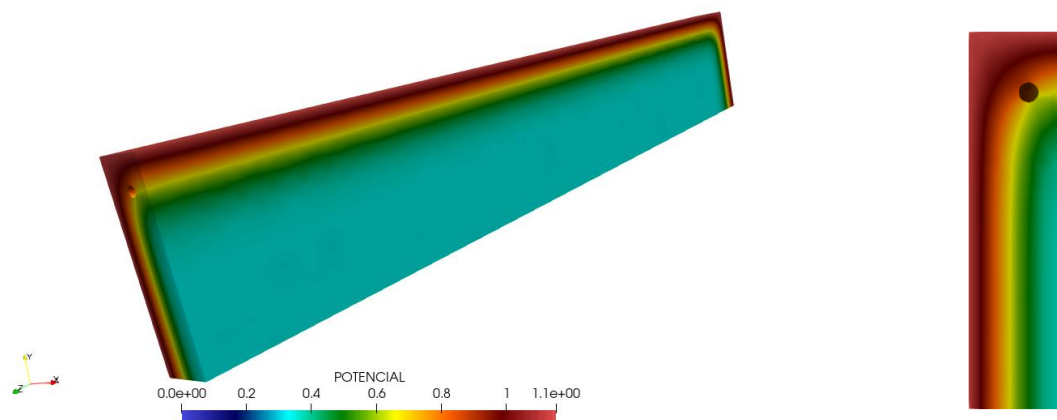


Fonte: O autor (2023).

Em seguida, pode-se comparar os perfis de concentração de cloreto em toda a viga e na seção transversal do engaste para os três cenários na Figura 6-8, Figura 6-9 e Figura 6-10. A seção do engaste foi escolhida por ser a seção com a maior concentração de cloreto ao redor da armadura entre todos os cenários. Com base nessas Figuras, é nítida a influência direta da danificação no processo difusivo, pois quanto mais danificada a estrutura (Figura 6-10), mais acentuado é o perfil de concentração quando comparado com um nível de danificação inferior (Figura 6-9) ou de concreto íntegro (Figura 6-8). Além disso, é possível correlacionar os perfis de danificação da Figura 6-7 (a) e (b) com o perfis de concentração das Figura 6-9 e Figura 6-10, evidenciando a correta implementação computacional do acoplamento entre os problemas.

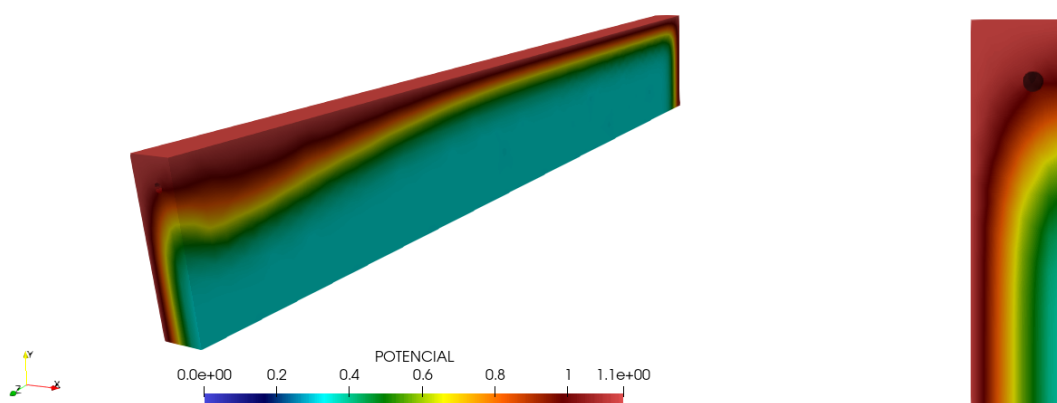
Ademais, na Figura 6-11 são analisados os níveis de concentração ao longo do comprimento da armadura (eixo  $z$ ) para as três situações consideradas neste exemplo. Para isso, considerou-se o ponto com a maior concentração de cloreto no perímetro da armadura em cada seção transversal. Cabe mencionar que a origem do eixo  $z$  da armadura está situada na extremidade da própria armadura contida no balanço ( $z=0$ ) e termina no engaste ( $z=1,96\text{m}$ ).

Figura 6-8- Concentração de cloreto para o concreto íntegro após 50 anos ( $\text{kg/m}^3$ ).



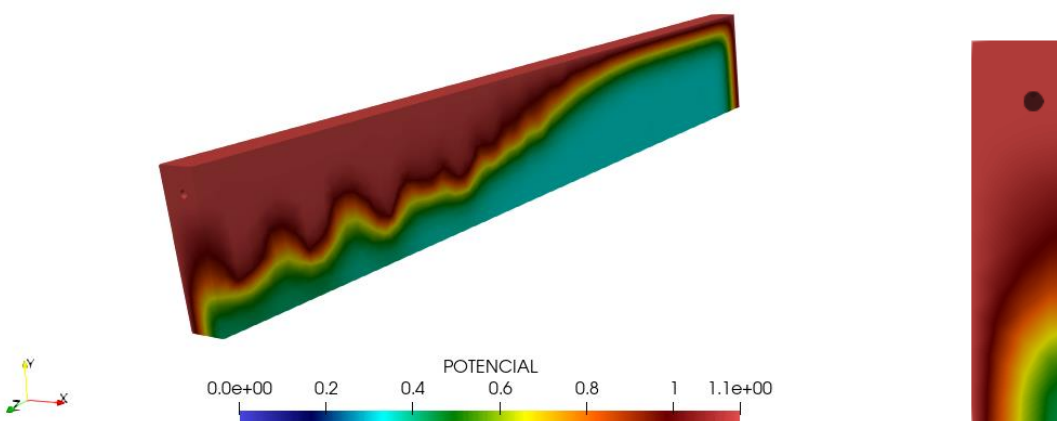
Fonte: O autor (2023).

Figura 6-9- Concentração de cloreto para  $F=50\% F_{ult}$  após 50 anos ( $\text{kg/m}^3$ ).



Fonte: O autor (2023).

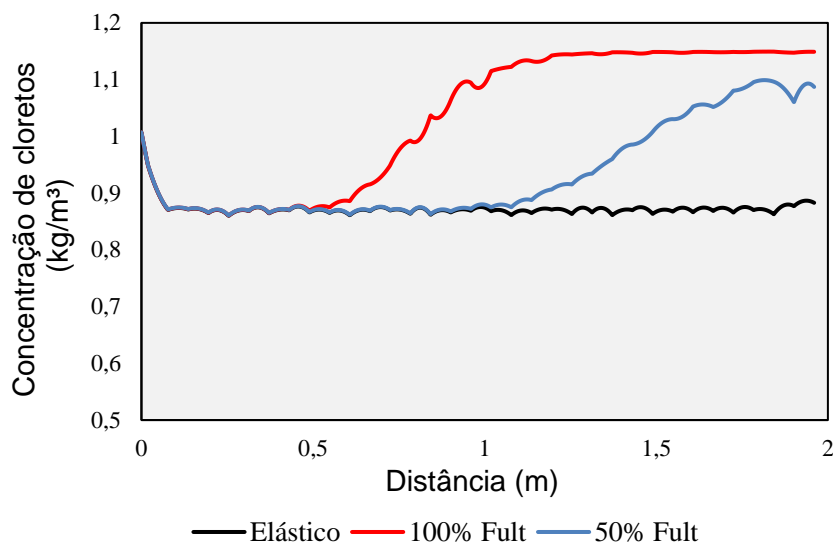
Figura 6-10- Concentração de cloreto para  $F=F_{ult}$  após 50 anos ( $\text{kg/m}^3$ ).



Fonte: O autor (2023).



Figura 6-11- Concentração de cloreto ao longo do comprimento da armadura após 50 anos.



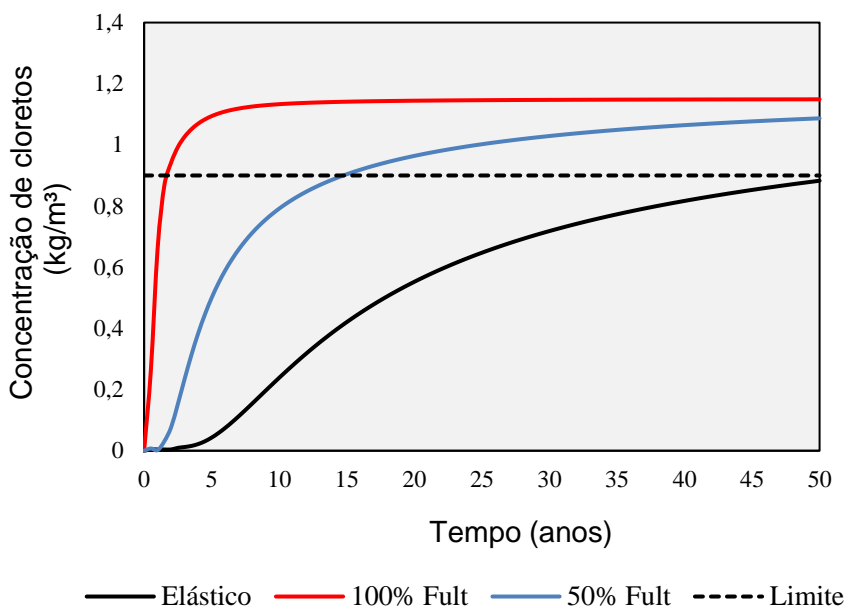
Fonte: O autor (2023).

A partir do gráfico da Figura 6-11, observa-se que no caso elástico (concreto íntegro) a difusão tridimensional governa o problema, já que a concentração é maior na extremidade livre ( $z=0$ ) onde as três faces estão expostas e tende a diminuir até a estabilização (situação de fluxo bidimensional) conforme  $z$  aumenta. Portanto, é possível dividir esse caso em dois intervalos segundo o fluxo atuante: fluxo tridimensional e fluxo bidimensional.

No entanto, nos casos em que há a danificação do concreto (Figura 6-11), além dos dois intervalos observados no regime elástico, nota-se o surgimento de mais um intervalo: fluxo acentuado proveniente da danificação. Neste intervalo, a concentração de cloreto na armadura aumenta à medida que se aproxima do engaste (seção de maior danificação). Além do mais, quanto maior o nível de danificação, maior é o valor da concentração máxima, chegando até mesmo a saturar. Em relação ao tamanho deste intervalo, percebe-se que é diretamente proporcional ao nível de danificação da estrutura.

Por fim, realiza-se uma análise de previsão de vida útil da estrutura. Para isso, no gráfico da Figura 6-12 a concentração de cloreto em um determinado ponto da armadura é analisada ao longo do tempo para os três diferentes cenários. O ponto mais solicitado da seção do engaste foi o escolhido por apresentar a maior concentração dos três casos, entretanto, ressalta-se que no cenário elástico o ponto com maior concentração é o ponto mais próximo da face livre em balanço, diferentemente dos casos fissurados.

Figura 6-12- Concentração de cloreto num ponto da armadura ao longo do tempo.



Fonte: O autor (2023).

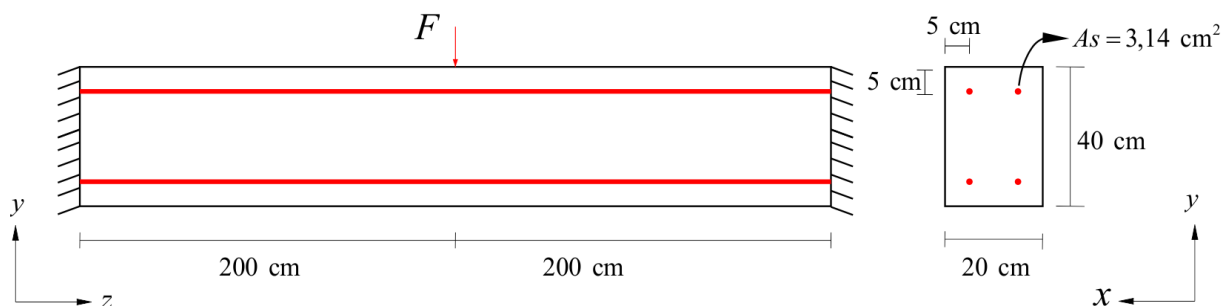
Depreende-se do gráfico da Figura 6-12 que a danificação do concreto tem papel catalisador no tempo de despassivação da armadura. Considerando uma concentração limite de cloretos  $C_{lim} = 0,9 \text{ kg} / \text{m}^3$ , os tempos de despassivação são de 2 anos, 15 anos e mais de 50 anos para os casos  $F = F_{ult}$ ,  $F = 50\% F_{ult}$  e elástico, respectivamente.

### 6.3.2 Exemplo 2: Viga biengastada com carregamento variável no tempo

Neste segundo exemplo é analisada uma viga biengastada inserida num ambiente fortemente agressivo por um período de 50 anos. O objetivo é analisar as consequências na vida útil de uma estrutura que tem seu uso alterado e passa a ser submetida à esforços mecânicos não previstos em projeto. Para tanto, a força  $F$  do esquema estrutural apresentado na Figura 6-13 tem seu valor alterado no tempo (carregamento 2) conforme Figura 6-15 (a). Esta situação indesejada será comparada com a situação inicial de projeto (carregamento 1) e os efeitos deletérios serão mensurados.

No que se refere ao problema mecânico, a viga analisada possui 4m de comprimento e cobertura de 5cm devido ao ambiente com elevada concentração de cloreto. O reforço utilizado é composto por quatro barras de aço com diâmetro de 20mm. O esquema estrutural é apresentado na Figura 6-13, enquanto as propriedades dos materiais e modelos utilizados são os mesmos do exemplo anterior e podem ser consultados na Tabela 6-3.

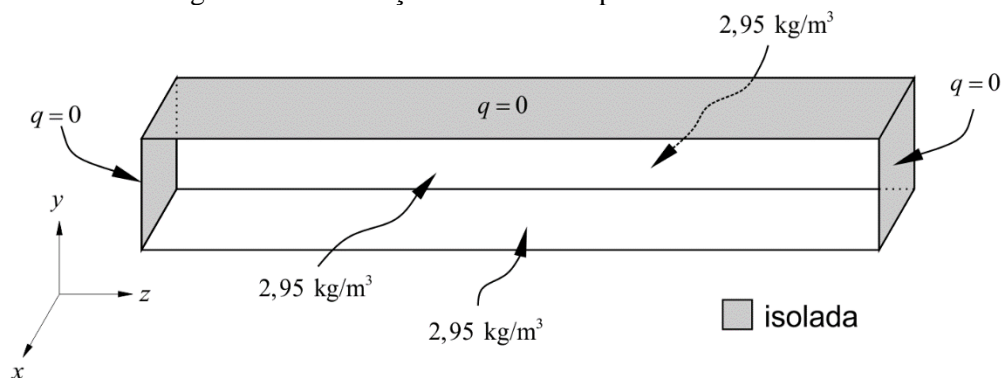
Figura 6-13- Viga biengastada submetida à uma força concentrada.



Fonte: O autor (2023).

No início da análise é admitido que não exista concentração de cloreto no domínio da viga de concreto, ou seja,  $C(0) = 0$ . As condições de contorno do problema de difusão são apresentadas na Figura 6-14.

Figura 6-14- Condições de contorno problema de difusão.



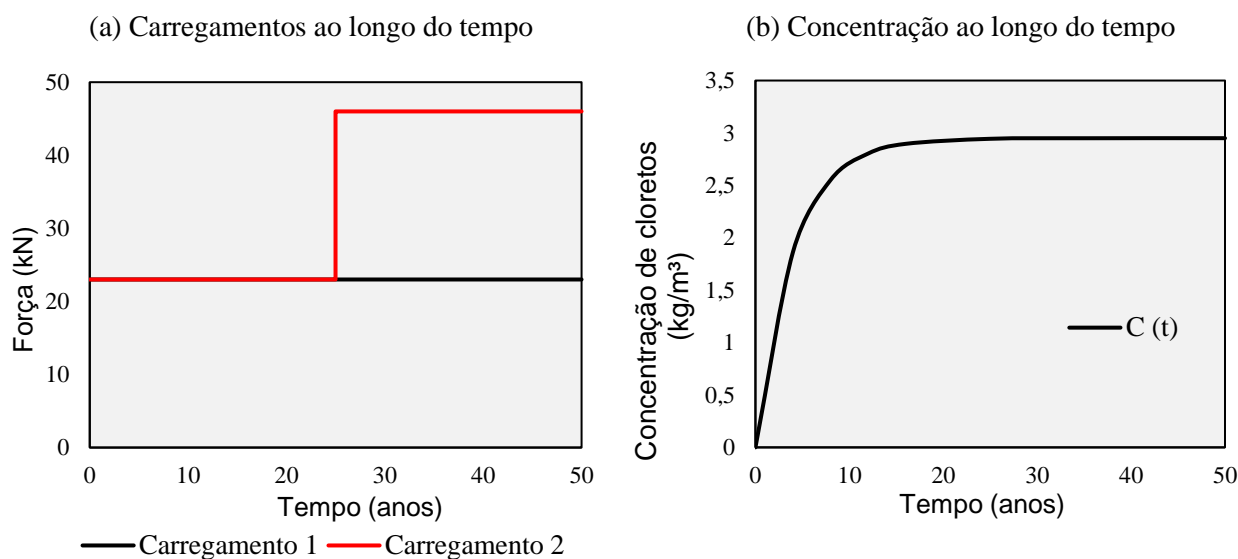
Fonte: O autor (2023).

A concentração de cloreto superficial acumulada é assumida variável no tempo segundo a função exponencial proposta por Kassir e Ghosn (2002):

$$C(t) = C_0 [1 - \exp(-0,25t)] \quad (6.6)$$

onde  $t$  é o tempo e  $C_0$  é o teor de cloreto, considerado constante ao longo do tempo. Assume-se que a estrutura está localizada a 100m da costa e em região de clima temperado, portanto, segundo McGee (1999)  $C_0 = 2,95 \text{ kg} / \text{m}^3$ . Na Figura 6-15 (b) é exibido o comportamento de  $C(t)$  para um período de 50 anos.

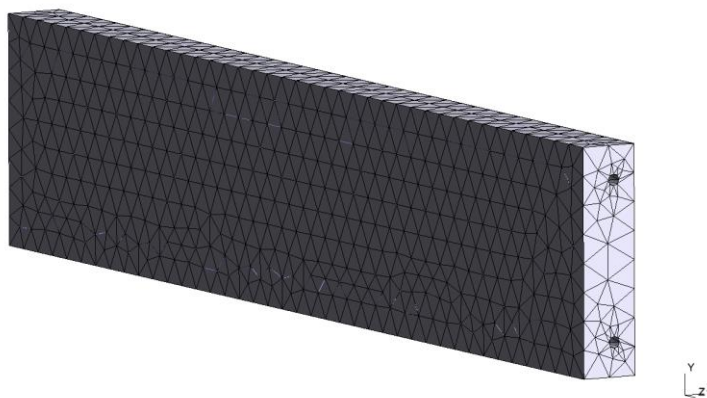
Figura 6-15- Funções de carregamento e concentração de cloreto.



Fonte: O autor (2023).

Novamente, é feito proveito da simetria do problema para empregar uma menor quantidade de elementos. Desta vez, tem-se uma situação de dupla simetria no problema (planos  $zy$  e  $xy$ ). As armaduras são consideradas da mesma forma do exemplo anterior. Na Figura 6-16 é exibida a malha utilizada com 6213 elementos e 33024 GLs.

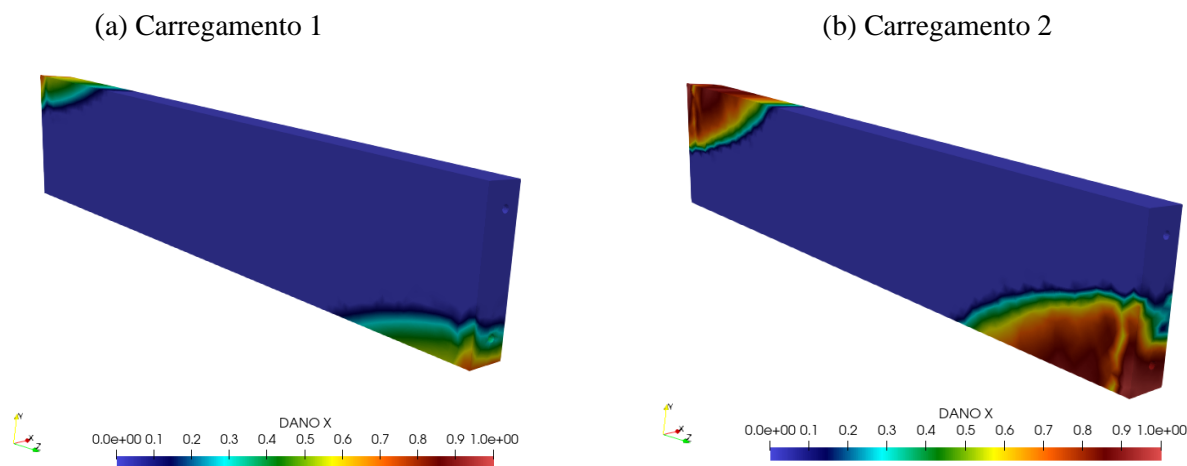
Figura 6-16- Malha em MEF adotada no problema.



Fonte: O autor (2023).

Os estados de danificação resultantes de ambos os carregamentos são exibidas na Figura 6-17. Devido ao esquema estrutural adotado, tem-se uma situação interessante, já que os esforços atuantes na face engastada e no meio do vão são os mesmos (em magnitude, sentidos são opostos), o que proporciona o mapeamento da variável de dano antissimétrico apresentado na Figura 6-17.

Figura 6-17- Estado de danificação.



Fonte: O autor (2023).

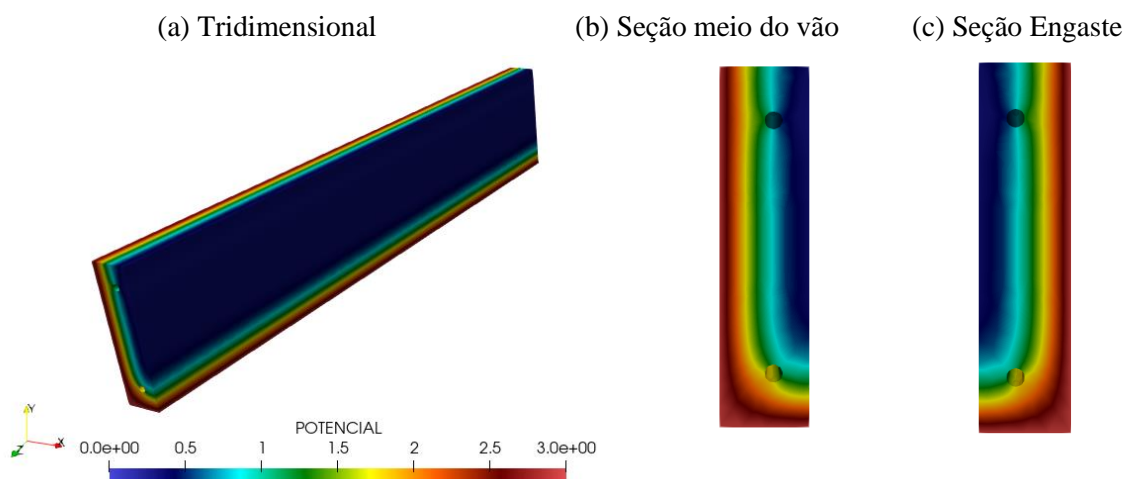
No que tange a difusão de cloretos, pode-se observar as Figura 6-18, Figura 6-19 e Figura 6-20, onde estão os perfis de concentração de cloretos após o período de 50 anos para os carregamentos 1 e 2, além do caso do concreto íntegro. Também são exibidos os perfis de concentração para a seção transversal do meio do vão e do engaste.

Por meio das Figura 6-18, Figura 6-19 e Figura 6-20, constata-se que as armaduras superiores e inferiores estão sujeitas à diferentes fluxos. Nas armaduras superiores o fluxo é predominantemente unidimensional, enquanto na armadura inferior tem-se uma situação de fluxo bidimensional.

Na Figura 6-19, percebe-se um leve acréscimo no perfil de concentração em relação ao caso íntegro, principalmente nas armaduras inferiores no meio do vão e nas armaduras superiores da seção do engaste. Tal comportamento se deve ao fato da localização do dano nessas zonas, ainda que pequeno. Na Figura 6-20, esse mesmo comportamento é observado, no entanto, em uma maior intensidade dada a magnitude da danificação (Figura 6-17 (b)).

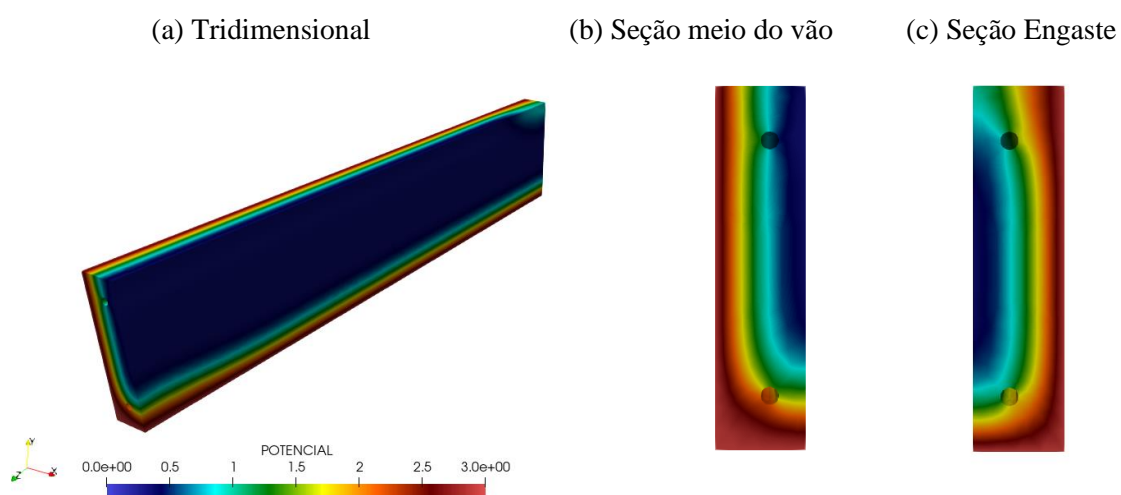
A seguir, uma análise minuciosa é realizada considerando a variação das concentrações ao longo do comprimento da armadura após 50 anos. Para tanto, é considerado para cada uma das armaduras (superior e inferior) o ponto de maior concentração pertencente a superfície da armadura em cada seção transversal. Os resultados dessas análises para os diferentes cenários são apresentados nos gráficos da Figura 6-21.

Figura 6-18- Concentração de cloreto após 50 anos para o concreto íntegro ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ).



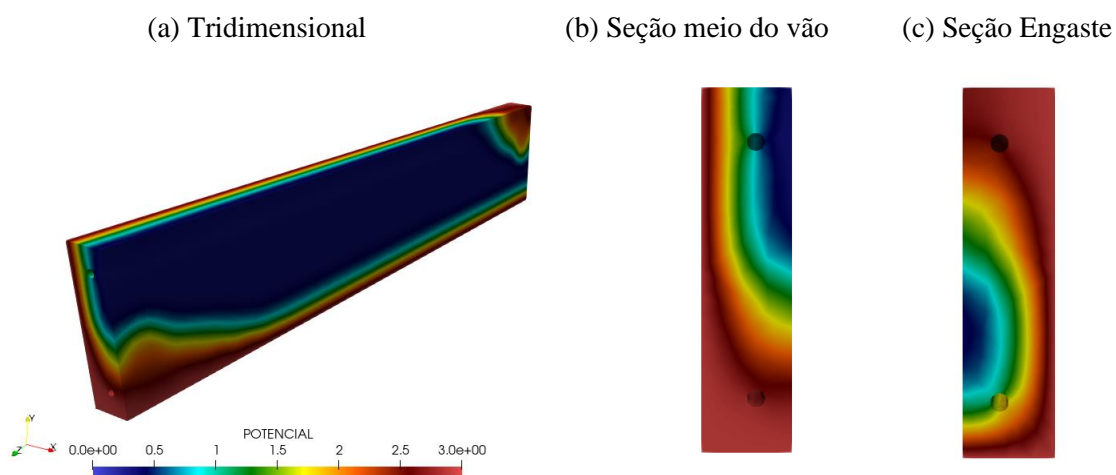
Fonte: O autor (2023).

Figura 6-19- Concentração de cloreto após 50 anos para o Carregamento 1 ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ).

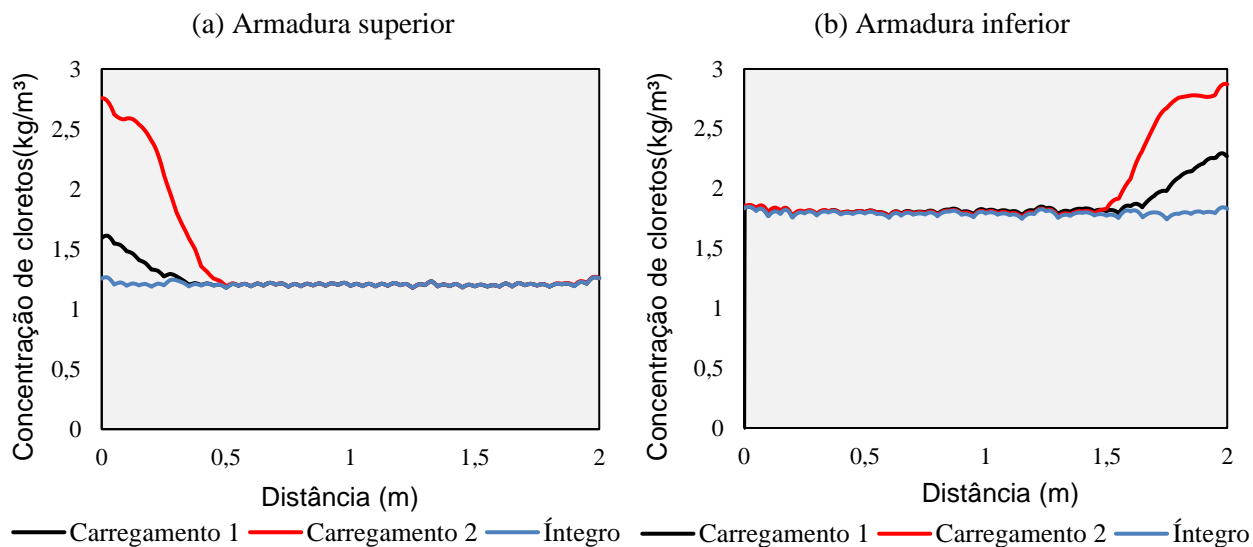


Fonte: O autor (2023).

Figura 6-20- Concentração de cloreto após 50 anos para o Carregamento 2 ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ).



Fonte: O autor (2023).

Figura 6-21- Concentração de cloreto ao longo do comprimento da armadura para  $t=50$ anos.

Fonte: O autor (2023).

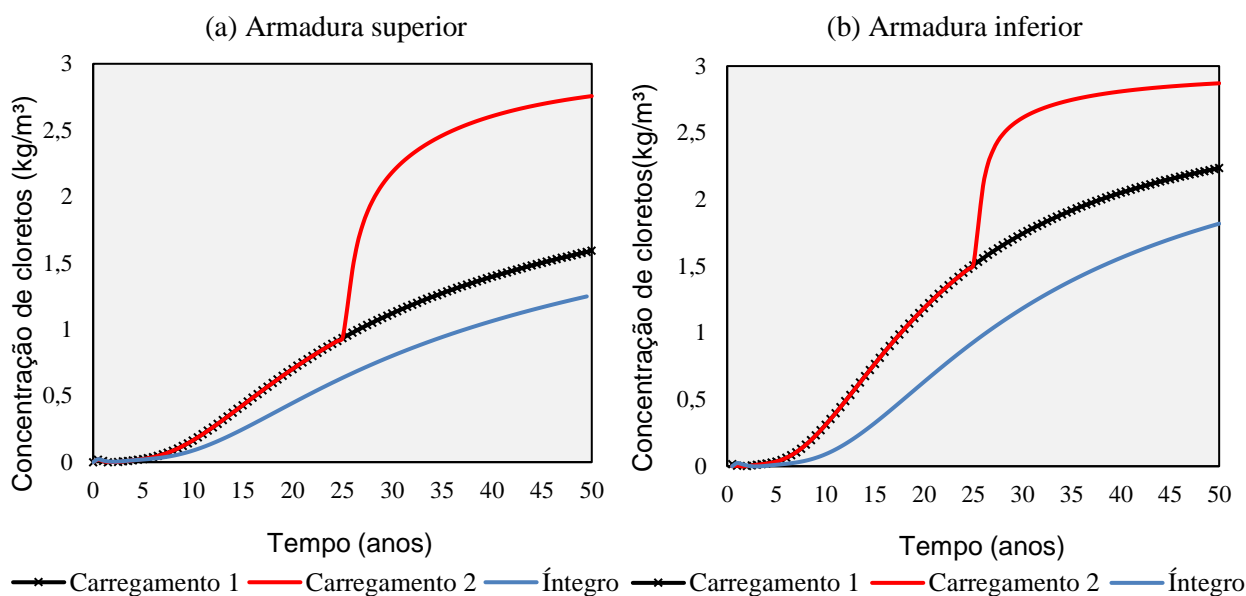
Comparando os resultados da armadura superior com o da armadura inferior para o concreto íntegro, nota-se que em ambos os casos as concentrações permanecem constante ao longo do comprimento, diferenciando-se somente em seu valor médio. Este comportamento pode ser atribuído às condições de contorno do problema que geram um fluxo predominante em cada uma das armaduras. Enquanto a armadura superior tem um fluxo praticamente unidimensional devido a imposição de concentração de cloreto na face lateral, na armadura inferior o fluxo é bidimensional dada as concentrações na face lateral e inferior. Com isso, o valor médio da concentração na armadura inferior é maior que o da superior por estar sujeita a um fluxo bidimensional.

Ao analisar as situações de carregamentos 1 e 2 na Figura 6-21, percebe-se um acréscimo das concentrações de cloreto nas extremidades correspondentes as respectivas zonas de danificação. A perturbação gerada tende a se concentrar num determinado intervalo e depois estabilizar-se em torno de valores da situação do concreto íntegro. O tamanho deste intervalo e o valor da máxima concentração estão diretamente relacionados ao tamanho da zona de danificação. Por isso, os valores da situação de carregamento 2 apresentam os maiores valores e tamanho de intervalo. Com isso, conclui-se que o efeito da fissuração foi corretamente implementado nesta formulação, tendo em vista o caráter localizado e coerente do acréscimo de concentrações de cloreto.

Finalmente, é realizada uma última análise sobre o comportamento da concentração de cloreto na armadura ao longo do tempo para os diferentes carregamentos deste exemplo. Os

resultados para o ponto de maior concentração da armadura superior e da armadura inferior são apresentados na Figura 6-22.

Figura 6-22- Concentração de cloreto num ponto da armadura ao longo do tempo.



Fonte: O autor (2023).

A partir dos gráficos das Figura 6-22 (a) e (b), depreende-se que a fissuração acelera consideravelmente o tempo de iniciação da corrosão, já que para todos os instantes de tempo as curvas dos casos danificados são superiores ao do caso íntegro. Ademais, para o carregamento 2 tem-se um salto significativo da curva de concentração no passo de tempo  $t=25$  anos, justamente quando o carregamento é alterado (Figura 6-15-b). Com isso, percebe-se que o histórico do carregamento é importante para uma previsão adequada de vida útil.

Assumindo uma concentração limite de cloreto na armadura  $C_{lim} = 1,8 \text{ kg} / \text{m}^3$ , na Tabela 6-4 são exibidas os tempos de despassivação das armaduras (vida útil) para cada um dos cenários, juntamente com as comparações com o caso de referência adotado (concreto íntegro). Também estão presentes na Tabela 6-4 as concentrações de cloreto após o período de 50 anos.

Com base na Tabela 6-4, conclui-se que a armadura superior só atinge a concentração limite para o caso do carregamento 2, nos demais casos é alcançada a vida útil mínima de 50 anos recomendada pela NBR 15575 (ABNT, 2013). Ao final do período de análise, a concentração de cloreto na armadura superior para o concreto fissurado do carregamento 2 pode ser até 120% maior que a de um concreto íntegro.

Em relação a armadura inferior, a qual inevitavelmente está sujeita as maiores concentrações, tem-se uma situação desfavorável para qualquer dos cenários, sendo que



nenhum cumpre a VUP. A danificação do concreto pode reduzir a vida útil em quase metade (carregamento 2). Além do mais, as concentrações ao final do período de 50 anos na armadura inferior para o caso do carregamento 2 podem ser até 56,83% superiores ao caso do concreto íntegro.

Tabela 6-4- Resultados para as armaduras superior e inferior

<b>Armadura superior</b>			
	Íntegro	Carregamento 1	Carregamento 2
Tempo $C_{lim}$	+50 anos	+50 anos	27 anos
% (Íntegro)	-	-	-
$C(t = 50)$	1,25 kg/m <sup>3</sup>	1,59 kg/m <sup>3</sup>	2,75 kg/m <sup>3</sup>
% (Íntegro)	-	+27,2%	+120%
<b>Armadura inferior</b>			
	Íntegro	Carregamento 1	Carregamento 2
Tempo $C_{lim}$	49 anos	31,5 anos	25 anos
% (Íntegro)	-	-35,7%	-49%
$C(t = 50)$	1,83 kg/m <sup>3</sup>	2,23 kg/m <sup>3</sup>	2,87 kg/m <sup>3</sup>
% (Íntegro)	-	+21,8%	+56,8%

Fonte: O autor (2023).

Outra constatação interessante é que, para a situação de fluxo unidimensional (armadura superior), a danificação do concreto tem um efeito amplificador maior que para a situação de fluxo bidimensional (armadura inferior), como pode ser observado na Tabela 6-4 em termos relativos.

## 7 CONCLUSÃO

---

Esta tese teve como objetivo principal realizar uma análise multifísica do problema difusivo de íons cloreto em conjunto com o problema mecânico de fissuração distribuída no contexto do concreto armado. Com isso, tornou-se possível estimar a vida útil de estruturas sujeitas a corrosão em armaduras considerando de maneira conservadora somente o período de iniciação.

O método dos elementos finitos posicional mostrou-se uma alternativa valiosa para problemas mecânicos de interesse (pontes e viadutos) por apresentar uma formulação geometricamente exata e intrinsecamente não linear geométrica, o que permite uma melhor descrição dos campos de deformações e consequentemente um melhor mapeamento da danificação do concreto.

A técnica de embutimento foi implementada com êxito, pois é eficiente computacionalmente e os graus de liberdade da estrutura não se alteram, o que permitiu a modelagem de estruturas compósitas, como a do concreto armado. Além disso, a representação unidimensional da armadura diminui bastante o custo computacional em contraponto a representação tridimensional.

O modelo de dano de Mazars (1984) que foi inicialmente implementado apresentou limitações dado o problema de não objetividade da malha causado pelo fenômeno de localização de deformações. Para contornar esse problema foi preciso lançar mão da técnica de regularização da energia de fratura, uma técnica bastante difundida no meio técnico e de boa acurácia. No entanto, novamente o modelo de Mazars (1984) apresentou problemas, dessa vez durante a calibração dos parâmetros de tração. A solução encontrada foi substituir a lei de dano de Mazars (1984) para tração por uma outra lei de evolução do dano que possuísse a mesma função da lei coesiva adotada. Tal estratégia se mostrou bastante precisa.

As análises realizadas permitiram inferir que a função (linear, bilinear, exponencial) da lei de evolução do dano na tração possui pouca influência nas respostas globais da estrutura, desde que tenha a mesma forma da lei coesiva. A relação tensão-deformação para compressão do concreto, utilizada para a calibração dos parâmetros de Mazars de compressão, apresentou relativa importância no comportamento global, e por isso, recomenda-se o uso de relações tensão-deformação que possuam validade para médias deformações no concreto, como a relação de Kent e Park (1976) e Popovics (1973).

Um outro fator que permitiu uma análise mais realística na previsão do comportamento mecânico em estruturas de concreto armado foi a consideração de um modelo elastoplástico para a armadura. Dessa maneira, tem-se um campo de deformações mais preciso, o que conseqüentemente gera uma melhor estimativa da danificação no concreto.

No âmbito do problema difusivo, o problema de potencial implementado com base no Método dos Elementos Finitos permitiu análises mais generalistas, o que não é possível com as soluções analíticas utilizadas na literatura. Com esse tipo de abordagem é possível considerar as mais diversas geometrias, condições de contorno e heterogeneidade do material.

Ao simplificar a dimensionalidade do problema pode-se subestimar a real concentração de cloretos e o tempo de vida útil da estrutura em até nove vezes. Logo, o emprego de um código tridimensional de difusão de cloretos permite uma estimativa mais precisa do tempo de vida útil de uma estrutura de concreto armado. A formulação implementada neste trabalho permite análises em regime estacionário e transiente, sendo este último o mais adequado para modelar o fenômeno de difusão de cloretos. Para ambos os regimes o código foi validado.

Com relação ao acoplamento proposto, pode-se citar a facilidade de implementação e o embasamento em trabalhos da literatura de abordagem discreta. Neste trabalho foi proposto de maneira inédita uma abordagem espalhada e contínua para o problema de difusão em concretos fissurados. Como o problema é formulado em relação as deformações equivalentes, mais uma vantagem do acoplamento proposto é que outros modelos mecânicos e de dano podem ser empregados. Os exemplos apresentados evidenciaram as potencialidades da formulação, no entanto, ainda carece de validações experimentais.

Dentre os efeitos que a fissuração pode desencadear no problema de difusão de íons cloreto em estruturas de concreto armado, pode-se citar: alteração da distribuição da concentração de cloreto ao longo do comprimento da armadura; acentuação do nível de concentração de cloreto máximo na armadura; diminuição do tempo de iniciação da corrosão; uma maior influência em situações de fluxo unidimensional.

Portanto, dada a robustez das formulações mecânica e difusiva de forma isolada, a formulação multifísica proposta é considerada uma ferramenta valiosa no estudo do tema de corrosão e de vida útil de estruturas de concreto armado. Esta área vem ganhando notoriedade conforme o avanço do tempo em estruturas de concreto armado, dada a problemática social e econômica em que está envolvida.

## 7.1 Sugestões para trabalhos futuros

Diante dos desafios confrontados neste estudo, seguem algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Implementação da etapa de propagação da corrosão;
- Realização de ensaios experimentais de difusão de íons cloreto em estruturas de concreto fissurada por ação mecânica;
- Implementar modelos de dano mais robustos;
- Consideração de outros fatores que influenciam na difusividade do concreto, como: temperatura, umidade, concentração de cloretos, tempo, entre outros fatores;
- O problema de difusão é altamente aleatório, por isso recomenda-se uma análise de confiabilidade em conjunto com a formulação multifísica proposta neste trabalho;
- Buscar e implementar técnicas mais eficientes de geração de malha, pois as diferenças dimensionais entre a discretização do aço e do concreto podem gerar distorções na malha, acarretando jacobianos negativos nos elementos e conseqüentemente problemas de ordem numérica;
- Empregar técnicas de paralelização do código, dado o enorme custo computacional do problema multifísico, principalmente da parte mecânica.

## REFERÊNCIAS

---

ABABNEH, A.; BENBOUDJEMA, F.; XI, Y. Chloride Penetration in Nonsaturated Concrete. **Journal of Materials in Civil Engineering**, v. 15, n. 2, p. 183-191, 2003.

ABE, I. P. **Simulação numérica de reforço e reabilitação de vigas em concreto armado**. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

AKHAVAN, A. **Characterizing saturated mass transport in fractured cementitious materials**. Thesis, Pennsylvania State University, Pennsylvania, United States of America, 2012.

AL-JAWARY, M. A.; RAVNIK, J. WROBEL, L. C.; SKERGET, L. Boundary element formulations for the numerical solution of two-dimensional diffusion problems with variable coefficients. **Computers and Mathematics with Applications**, v. 64, p. 2695-2711, 2012.

AL-KUTTI, W. A. S. 2011. **Simulation of chloride transport in concrete with stress induced damage**. Thesis, King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahran, Saudi Arabia, 2011.

ÁLVARES, M. S. **Contribuição ao estudo e emprego de modelos simplificados de dano e plasticidade para a análise de estruturas de barras em concreto armado**. 1999. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

ÁLVARES, M. S. **Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos**. 1993. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.

ANANIA, L.; BADALÀ, A.; D'AGATA, G. Damage and collapse mode of existing post tensioned precast concrete bridge: The case of Petrulla Viaduct. **Engineering Structures**, v. 162, p. 226-244, 2018.

ANDRADE, C. Future trends in research on reinforcement corrosion. *In*: POURSAAE, A. **Corrosion of Steel in Concrete Structures**. Sawston: Woodhead publishing, 2016. p. 269-284.

ANDRADE, C.; ALONSO, C. Corrosion rate monitoring in the laboratory and on-site. **Construction and Building Materials**, v. 10, n. 5, p. 315-328, 1996.

ANDRADE, C.; CASTELLOTE, M.; D'ANDREA, R. Measurement of ageing effect on chloride diffusion coefficients in cementitious matrices. **Journal of Nuclear Materials**, v. 412, n. 1, p. 209-216, 2011.

ANDRADE, J. J. O. **Durabilidade das estruturas de concreto armado: análise das manifestações patológicas nas estruturas no estado de Pernambuco**. 1997. Dissertação (Mestrado em Engenharia) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1997.

ANN, K.; AHN, J.; RYOU, J. The importance of chloride content at the concrete surface in assessing the time to corrosion of steel in concrete structures. **Construction and Building Materials**, v. 23, n. 1, p. 239-245, 2009.

ASSAN, A. E. **Método dos elementos finitos: Primeiros passos**. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **Edificações habitacionais - Desempenho (NBR 15575)**. Rio de Janeiro: ABNT, 2013.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **Projeto de estruturas de concreto - procedimento (NBR 6118)**. Rio de Janeiro: ABNT, 2014. 238 p.

AVANCINI, G. **Análise numérica bidimensional de interação fluido-estrutura: uma formulação posicional baseada em elementos finitos e partículas**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

BALABUCH, T. J. R. **Análise numérica das deformações do concreto sujeito à reação álcali-agregado considerando os efeitos de retração e fluência**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

BALAFAS, L.; BURGOYNE, C. J. Modeling the structural effects of rust in concrete cover. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 137, n. 3, p. 175-185, 2011.

BAMFORTH, P. B. Enhancing reinforced concrete durability guidance on selecting measures for minimising the risk of corrosion of reinforcement in concrete. **Concrete Society Technical Report**, v. 61, 2004.

BAŽANT, Z. P. Physical model for steel corrosion in concrete sea structures – Application. **Journal of the Structural Division**, v. 105, n. 6, p. 1155-1166, 1979.

BAZANT, Z. P.; OH, B. H. Crack band theory for fracture of concrete. **Materials and Structures**, v. 16, n. 93, p. 155-177, 1983.

BENTZ, D. P.; CLIFTON, J. R.; SNYDER, K. A. Predicting service life of chloride-exposed reinforced concrete. **Concrete International**, v. 18, p. 42-47, 1996.

BENTZ, D. P.; GARBOCZI, E. J.; LU, Y.; MARTYS, N.; SAKULICH, A. R.; WEISS, W. J. Modeling of the influence of transverse cracking on chloride penetration into concrete. **Cement and Concrete Composites**, v. 38, p. 65-74, 2013.

BODDY, A.; BENTZ, E.; THOMAS, M. D. A.; HOOTON, R. D. An overview and sensitivity study of a multimechanistic chloride transport model. **Cement and Concrete Research**, v. 29, p. 827-837, 1999.

BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

BONET, J.; WOOD, R.; MAHANEY, J.; HEYWOOD, P. Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5, p. 579-595, 2000.

BOTTA, A. S. **Método dos elementos de contorno para análise de corpos danificados com ênfase no fenômeno da localização de deformações**. 2003. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor de Contorno**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1979.

BROUJERDIAN, V. Smearred Rotating Crack Model for Reinforced Concrete Membrane Elements. **ACI Structural Journal**, v. 107, p. 411-418, 2010.

BROWE, R. D. Design and prediction of the life for reinforced concrete in marine and other chloride environments. **Durability of building material**, v. 1, p. 113-125, 1982.

CAROL, I.; JIRASEK, M.; BAZANT, Z. A thermodynamically consistent approach to microplane theory. Part I. Free energy and consistent microplane stresses. **International Journal of Solids and Structures**, v. 38, p. 2921-2931, 2001.

CARRAZEDO, R. **Estudo e desenvolvimento de Código computacional para análise de impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos**. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

CARVALHO, P. R. P. **Análise numérica bidimensional de sólidos com comportamento visco-elasto-plástico em grandes deformações e situações de contato**. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

CASCUDO, O. **Controle da corrosão de armaduras de concreto**. 1. ed. São Paulo: Editora Pini, 1997.

CAUVIN, A.; TESTA, R. B. Damage mechanics: basic variables in continuum theoris. **International Journal of Solids and Structures**, v. 36, p. 747-761, 1999.

CAVALCANTI, A. N.; CAVALCANTI, G. A. D. Inspeção técnica do pier de atracação de Tambaú. **Revista Ibracon**, v. 57, p. 45-55, 2010.

CEN. **EN 1992-1-1**: Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings. Brussels: Comité Européen de normalization, 2005.

CHEN, W. F.; HAN, D. J. **Plasticity for Structural Engineers**. Fort Lauderdale: J. Ross Publishing, 2007.

CHENG, X.; SU, Q.; MA, F.; LIU, X.; LIANG, X. Investigation on crack propagation of concrete cover induced by nonuniform corrosion of multiple rebars. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 201, p. 366-384, 2018.

CHOI, K. S.; PAN, J. A generalized anisotropic hardening rule based on the mroz multi-yield-surface model for pressure insensitive and sensitive materials. **International Journal of Plasticity**, v. 25, p. 1325-1358, 2009.

CLOUGH, R. W. **The Finite Element Method in Plane Stress Analysis**. Reston: American Society of Civil Engineers, 1960.

CODA, H. B. A finite strain elastoplastic model based on Flory's decomposition and 3D FEM applications. **Computational Mechanics**, v. 69, n. 1, p. 245-266, 2022.

CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF**. 2003. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

CODA, H. B. **O método dos elementos finitos posicional: sólidos e estruturas – não linearidade geométrica e dinâmica**. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2018. Notas de aula.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 33-35, p. 3541-3557, 2004.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells: Curved triangular isoparametric elements. **Computational Mechanics**, v. 40, n. 1, p. 185-200, 2007.

COELHO, K. O. **Modelos numéricos aplicados à modelagem probabilística da degradação mecânica do concreto e corrosão de armaduras**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

COLLEPARDI, M. Quick method to determine free and bound chlorides in concrete. *In: Proceedings of the 1st International RILEM Workshop on Microbial Impacts on Building Materials*, 1995, Saint-Rémy-lès-Chevreuse. **Proceedings** [...]. Saint-Rémy-lès-Chevreuse, 1995. p. 10-16.

COLLEPARDI, M.; MARCIALIS, A.; TURRIZIANI, R. La cinetica di penetrazione degli ioni cloruro nel calcestruzzo. **Il Cemento**, v. 67, p. 157-164, 1970.

COMI, C. Computational modelling of gradient-enhanced damage in quasi-brittle materials. **Mech. Cohes. - Frict. Mater.**, v. 4, n. 1, p. 17-36, 1999.

COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP MODEL CODE 1990: Design Code**. London: Thomas Telford Ltd, 1993. 464 p.



DANCKWERTS, P. V. Absorption by simultaneous diffusion and chemical reaction. **Transactions of the Faraday Society**, v. 46, p. 300-304, 1950.

DAUVERGNE, P. **Corrosion des armatures du béton**. XI colloque CEFRACOR, 1982.

DE BORST, R. Fracture in quasi-brittle materials: a review of continuum damage-based approaches. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 69, p. 95-112, 2002.

DE BORST, R.; HEERES, O. M.; BENALLAL, A. A gradient enhanced damage model: theory and computation. *In*: DIXIT, P. M.; DIXIT, U. S. **Computational Plasticity: Fundamentals and applications**. Barcellona: CRC Press, 1995. p. 975-986.

DE BORST, R.; MÜHLHAUS, B. Continuum models for discontinuous media. *In*: BAKKER, A.; ROTTS, J. G. **Fracture Processes in Concrete, Rock and Ceramics**. Rotterdam: CRC Press, 1991. p. 601-618.

DE VREE, J. H.; BREKELMANS, W. A. M.; VAN GILS, M. A. J. Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. **Computers & Structures**, v. 55, n. 4, p. 581-588, 1995.

DJERBI, A.; BONNET, S.; KHELIDJ, A.; BAROGHEL-BOUNY, V. Influence of traversing crack on chloride diffusion into concrete. **Cement and Concrete Research**, v. 38, p. 877-883, 2008.

DRIEMEIER, L. **Considerações sobre a fadiga em metais e o comportamento do concreto sob solicitação cíclica**. 1995. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1995.

DRIEMEIER, L. **Contribuição ao estudo da localização de deformações com modelos constitutivos de dano e plasticidade**. 1999. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

DU, Y. G.; CLARK, L. A.; CHAN, A. H. C. Residual capacity of corroded reinforcing bars. **Magazine of Concrete Research**, v. 57, n. 3, p. 135-147, 2005.

EL HASSAN, J.; BRESSOLETTE, P.; CHATEAUNEUF, A.; EL TAWIL, K. Reliability based assessment of the effect of climatic conditions on the corrosion of RC structures subject to chloride ingress. **Engineering Structures**, v. 32, p. 3279-3287, 2010.

ELSENER B.; ANGST, U. Mechanism of electrochemical chloride removal. **Corrosion Science**, v. 49, n. 12, p. 4504-4522, 2007.

ENRIGHT, M. P.; FRANGOPOL, D. M. Probabilistic analysis of resistance degradation of reinforced concrete bridge beams under corrosion. **Engineering structures**, v. 20, n. 11, p. 960-971, 1998.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON (FIB). **fib Model Code for Concrete Structures 2010**. Hoboken: Ernst & Sohn, 2012. 402 p.

FELIX, E. F. **Estudo numérico-experimental da fadiga em concretos submetidos à compressão cíclica: proposição de um modelo de dano acumulado**. 2022. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

FELIX, E. F. **Modelagem da deformação do concreto armado devido à formação dos produtos de corrosão**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

FERNANDES, J. W. D. **Interação fluido-estrutura com escoamentos incompressíveis utilizando o método dos elementos finitos**. 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

FERNANDES, J. W. D. **Técnica de superposição de modelos estabilizada para análise de interação fluido-estrutura**. 2020. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

FERNANDES, W. L. **Análise paramétrica da instabilidade de estruturas reticuladas planas esbeltas com comportamento dinâmico geometricamente não linear pelo método posicional dos elementos finitos**. 2022. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2022.

FERREIRA, I. P. **Análise dinâmica não linear geométrica de treliças espaciais**. 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

FORSYTH, M.; LOURENÇO, M. Z. Corrosion and protection of steel in concrete. **Corrosion & Materials**, v. 22, p. 13-16, 1997.

FREITAS, M. L. **Um modelo computacional para simulação do comportamento mecânico de lajes fissuradas**. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2019.

FRÉMOND, M.; NEDJAR, B. Damage, gradient of damage and principle of virtual power. **Int. J. Solids Structures**, v. 33, n. 8, p. 1083-1103, 1996.

GAMINO, A. L. **Modelagem física e computacional de estruturas de concreto reforçadas com CFRP**. 2007. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

GENIKOMSOU, A. S.; POLAK, M. A. Finite element analysis of punching shear of concrete slabs using damaged plasticity model in ABAQUS. **Engineering Structures**, v. 98, p. 38-48, 2015.

GENTIL, V. **Corrosão**. 6. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2011.

GÉRARD, B.; MARCHAND, J. Influence of cracking on the diffusion properties of cement-based materials, part I: Influence of continuous cracks on the steady-state regime. **Cement and Concrete Research**, v. 30, p. 37-43, 2000.

GLASS G.K.; BUENFELD, N.R. The influence of chloride binding on the chloride induced corrosion risk in reinforced concrete. **Corrosion Science**, v. 42, n. 2, p. 329-344, 2000.

GOWRIPALAN, N.; SIRIVIVATNANON, V.; LIM, C. C. Chloride diffusivity of concrete cracked in flexure. **Cement and Concrete Research**. v. 30, p. 725-730, 2000.

GRECO, M.; CODA, H. B. Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 290, n. 3-5, p. 1141–1174, 2006.

GUIMARÃES, A. T. C. *et al.* Determination of chloride diffusivity through partially saturated Portland cement concrete by a simplified procedure. **Construction and Building Materials**, v. 25, n. 2, p. 785-790, 2011.

GUOPING, L.; FANGJIAN, H.; YONGXIAN, W. Chloride ion penetration in stressed concrete. **Journal of Materials in Civil Engineering**, v. 23, p. 1145-1153, 2011.

HELENE, P. R. L. **Contribuição ao estudo da corrosão em armaduras de concreto armado**. 1993. Tese (Livre Docência) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1993.

HELENE, P. R. L. **Corrosão em armaduras para concreto armado**. São Paulo: Pini/IPT, 1986.

HENZE, L. **Querkrafttragverhalten von Stahlbeton-Fahrbahnplatten**. 2019. Tese (Doutorado) – Universidade Técnica de Hamburgo, Hamburgo, 2019.

HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSSON, P. E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. **Cement and Concrete Research**, v. 6, n. 6, p. 773-781, 1976.

HOLZAPFEL, G. **Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineering**. 1. ed. Nova Jersey: John Wiley & Sons, 2000. 470 p.

HORDIJK, D. A. **Local approach to fatigue of concrete**. 1991. Tese (Doutorado) – Universidade Técnica de Delft, Delft, 1991.

IORDACHE, M. M.; WILLAM, K. Localization properties of ‘non-symmetric’ Cosserat formulations. *In*: WALL, W. A.; BLETZINGER, K. U.; SCHWEIZERHOF, K. (eds.). **Computational mechanics: new trends and applications**. Barcelona: CIMNE, 1998.

JANG, S. Y.; KIM, B. S.; OH, B. H. Effect of crack width on chloride diffusion coefficients of concrete by steady-state migration tests. **Cement and Concrete Research**, v. 41, p. 9-19, 2011.

JU, J. W. On energy-based coupled elastoplasticity damage theories: constitutive modeling and computational aspects. **International Journal of Solids and Structures**, v. 25, n. 7, p. 803-833, 1989.

KACHANOV, L.M. On the Time to Failure under Creep Conditions. **Izv. Akad. Nauk. SSR, Otd. Tekhn.**, n. 8, p. 26-31, 1958.

KASSIR, M. K.; GHOSN, M. Chloride-induced corrosion of reinforced concrete bridge decks. **Cement and Concrete Research**, v. 32, n. 1, p. 139-143, 2002.

KATO, E.; UOMOKO, T. Development of simulation model of chloride transportation in cracked concrete. **Journal of Advanced Concrete Technology**, v. 3, p. 85-94, 2005.

KENT, D. C.; PARK, R. Flexural members with confined concrete. **ASCE Proceedings**, v. 97, n. 7, p. 1969-1990, 1971.

KURUMATANI, M.; ANZO, H.; KOBAYASHI, K.; OKAZAKI, S.; HIROSE, S. Damage model for simulating chloride concentration in reinforced concrete with internal cracks. **Cement and Concrete Composites**, v. 84, p. 62-73, 2017.

KZAM, A. K. L. **Análise da instabilidade estrutural global e local pelo MEF posicional com determinação de pontos críticos na trajetória de equilíbrio**. 2016. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

LANCZOS, C. **The Variational Principles of Mechanics**. New York: Dover Publications, 1986.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. **Mechanics of Solid Materials**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 556 p.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. C. **Mechanique des materiaux solides**. Paris: Dunod-Bordas, 1985.

LEUKART, M.; RAMM, E. Identification and interpretation of microplane material laws. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 132, n. 3, p. 295-305, 2006.

LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. N. **Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow**. 1. ed. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, 2004. 341 p.

LI, K. F.; LI, C. Q.; CHEN, Z. Y. Influential depth of moisture transport in concrete subject to drying-wetting cycles. **Cement and Concrete Composites**, v. 31, n. 10, p. 693-698, 2009.

LI, Y.; CHEN, X. H.; JIN, L.; ZHANG, R. B. Experimental and numerical study on chloride transmission in cracked concrete. **Construction and Building Materials**, v. 127, p. 425-435, 2016

LIBERATI, E. A. **Modelos de confiabilidade aplicados à análise de estruturas de concreto armado submetidas à penetração de cloretos**. 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

LIM, C. C.; GOWRIPALAN, N.; SIRIVIVATNANON, V. Microcracking and chloride ion diffusion of concrete under sustained uniaxial compression. **ACI Special Publication 221 - American Concrete Institute**, p. 893-910, 2004.

LIU, Y.; NISHIMURA, N. The fast multipole boundary element method for potential problems: a tutorial. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 30, n. 5, p. 371-381, 2006.

MAAGE, M.; HELLAND, S.; CARLSEN, J. E. Practical non-steady state chloride transport as a part of a model for predicting the initiation period. *In*: NILSSON, L. O.; OLLIVIER, J. P. (org.). **RILEM International Workshop on Chloride Penetration into concrete**, 1995. p. 398-406.

MACIEL, D. N. **Análise de problemas elásticos não-lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional**. 2008. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

MAHESWARAN, T.; SANJAYAN, J. G. A semi-closed-form solution for chloride diffusion in concrete with time-varying parameters. **Magazine of Concrete Research**, v. 56, n. 6, p. 359-366, 2004.

MARQUES, G. C. S. C. **Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais**. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

MARSAVINA, L.; AUDENAERT, K.; DE SCHUTTER, G.; FAUR, N.; MARSAVINA, D. Experimental and numerical determination of the chloride penetration in cracked concrete. **Construction and Building Materials**, v. 23, p. 264-274, 2009.

MARTINS, A. M. **Transporte de cloretos em concretos com adições minerais e o desempenho em relação à corrosão das armaduras**. 2016. Dissertação (Mestrado em Construção Civil) – Escola de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2016.

MARTÍN-PÉREZ, B.; ZIBARA, H.; HOOTON, R. D.; THOMAS, M. D. A. A study of the effect of chloride binding on service life predictions. **Cement and Concrete Research**, v. 30, p. 1215-1223, 2000.

MATTIASSON, K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, n. 1, p. 145-153, 1981.

MAZARS, J. **Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure**. 1984. Tese (Doutorado) – Thèse de Doctorat d'État, Université Paris VI, Paris, 1984.

MCGEE, R. Modelling of durability performance of tasmanian bridges. *In*: MELCHERS, R. E.; STEWART, M. G. (eds.). **ICASP8 applications of statistics and probability in civil engineering**, 1999. p. 297-306.

MCGRATH; P.F. **Development of test methods for predicting chloride penetration into high performance concrete**. 1996. Ph.D. Thesis, University of Toronto, Toronto, 1996.

MEDEIROS, M. H. F.; HELENE, P. Migração de íons cloretos no concreto – influência da consistência, relação água cimento e consume de cimento. **Revista Ibracon**, v. 11, n. 32, p. 53-66, 2003.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concrete: microstructure, properties, and materials**. 4. ed. New York: McGraw-Hill Professional Publishing, 2014. 675 p.

MEIRA, G. R. **Corrosão de armaduras em estruturas de concreto: fundamentos, diagnóstico e prevenção**. João Pessoa: Editora IFPB, 2017. 130 p.

MELAN, E. Zur plastizität des räumlichen kontinuums. **Archive of Applied Mechanics**, v. 9, n. 2, p. 116-126, 1938.

MENIN, R. G.; TRAUTWEIN, L. M.; BITTENCOURT, T. N. Smearred Crack Models for Reinforced Concrete Beams by Finite Element Method. **Revista IBRACON de estruturas e materiais**, v. 2, p. 166-200, 2009.

MOREIRA, A. L. R. **Previsão de vida útil de estruturas de concreto armado submetidas à ação de íons cloretos: modelagem numérica e aplicações**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018.

MOREIRA, D. H. F. R. **Análise numérica bidimensional de interação fluido-estrutura com contato estrutural**. 2021. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

MORINAGA, S. Prediction of service lives of reinforced concrete buildings based on rate of corrosion of reinforcing steel. **Special Report of the Institute of Technology**, Skimiza Corporation, Japan, 1989.

MOTA, M. T. **Modelagem numérica da flexão de vigas de concreto reciclado armado**. 2012. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil e Ambiental) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2012.

MUKHTAR, F. M.; AL-GADHIB, A. H. Numerical Simulation of Chloride Front Movement into Stressed Reinforced Concrete. *In: PROCEEDINGS OF THE THIRTEENTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON CIVIL, STRUCTURAL AND ENVIRONMENTAL ENGINEERING COMPUTING*, 2011, Stirlingshire. **Proceedings** [...]. Stirlingshire: Civil-Comp Press, 2011.

MURAKAMI, S. **Continuum Damage Mechanics: A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture**: 1. ed. New York: Springer, 2012.

NASCIMENTO FILHO, S. I. **Análise comparativa entre modelos de dano aplicáveis a estruturas de concreto com uso do MEF-Posicional**. 2022. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

NEVILLE, M. **Properties of Concrete**. 5. ed. Hoboken: Prentice Hall, 2011. 846 p.

NGALA, V. T.; PAGE, C. L. Effects of carbonation on pore structure and diffusional properties of hydrated cement pastes. **Cement and Concrete Research**, v. 27, n. 7, p. 995-1007, 1997.

NILSSON, L.; MASSAT, M.; TANG, L. The effect of non-linear chloride binding on the prediction of chloride penetration into concrete structures. *In: ACI SP-145, Proceedings of the Third CANMET/ACI International Conference on Durability of Concrete*, 1994, Nice. **Proceedings** [...]. Nice: ACI SP-145, 1994. p. 469-486.

NOGUEIRA, C. G. **Desenvolvimento de modelos mecânicos, de confiabilidade e de otimização para aplicação em estruturas de concreto armado**. 2010. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

NOGUEIRA, G. V. **Formulação de elemento finito posicional para modelagem numérica de porticos planos constituídos por compósitos laminados: uma abordagem não linear geométrica baseada na teoria Layerwise**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

NOGUEIRA, C. G.; RODRIGUES, I. D. Ductility analysis of RC beams considering the concrete confinement effect produced by the shear reinforcement: a numerical approach. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 14, p. 2342-2372, 2017.

NOKKEN, M.; BODDY, A.; HOOTON, R. D.; THOMAS, M. D. A. Time dependent diffusion in concrete—three laboratory studies. **Cement and Concrete Research**, v. 36, n. 1, p. 200-207, 2006.

OLIVEIRA, C. B. L.; GRECO, M.; BITTENCOURT, T. N. Analysis of the Brazilian federal bridge inventory. **Ibracon Structures and Materials Journal**, v. 12, n. 1, p. 1-13, 2019.

OLIVER, J. A consistent characteristic length for smeared cracking models. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 28, p. 461-474, 1989.

OLLIVIER, J. P.; TORRENTI, J. M. A estrutura porosa dos concretos e as propriedades de transporte. *In: OLLIVIER, J. P.; VICHOT, A. (eds.). Durabilidade do concreto: Bases científicas para formulação de concretos duráveis de acordo com o ambiente*. São Paulo: IBRACON, 2014. p. 41-112.

OTIENO, M. B.; BEUSHAUSEN, H. D.; ALEXANDER, M. G. Modelling corrosion propagation in reinforced concrete structures – A critical review. **Cement & Concrete Composites**, v. 33, n. 2, p. 240-245, 2010.

OZBOLT, J.; BALABANIC, G.; PERISKIC, G.; KUSTER, M. Modelling the effect of damage on transport processes in concrete. **Construction and Building Materials**, v. 24, p. 1638-1648, 2010.

OZBOLT, J.; LI, Y.; KOZAR, I. Microplane model for concrete with relaxed kinematic constraint. **International Journal of Solids and Structures**, v. 38, p. 2683– 2711, 2001.

PACK, S. W. *et al.* Prediction of time dependent chloride transport in concrete structures exposed to a marine environment. **Cement and Concrete Research**, v. 40, n. 2, p. 302-312, 2010.

PANTAZOPOULOU, S. J.; PAPOULIA, K. D. Modeling cover-cracking due to reinforcement corrosion in RC structures. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 127, n. 4, p. 342-351, 2001.

PASCON, J. P. **Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos**: estudo e implementação computacional. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

PASCON, J. P. **Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações**: implementação numérica em formulação não linear geométrica. 2012. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

PEERLINGS, R. H. J.; BORST, R.; BREKELMANS, W. A. M.; GEERS, M. G. D. Localisation Issues in Local and Nonlocal Continuum Approaches to fracture. **European Journal of Mechanics A/Solids**, v. 21, p. 175 – 189, 2002.

PELLIZZER, G. P. **Análise mecânica e probabilística da corrosão de armaduras de estruturas de concreto armado submetidas à penetração de cloretos**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

PELLIZZER, G. P. **Sobre a modelagem numérica da difusão de cloretos no concreto**: Uma abordagem pelo método dos elementos de contorno com aplicação de modelos de confiabilidade e otimização. 2019. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

PELLIZZER, G. P.; LEONEL, E. D.; NOGUEIRA, C. G. Numerical approach about the effect of the corrosion on the mechanical capacity of the reinforced concrete beams considering material nonlinear models. **Ibracon Structures and Materials Journal**, v. 11, n. 7, p. 26-51, 2018.

PENNA, S. S. **Formulação multipotencial para modelos de degradação elástica**: unificação teórica, proposta de novo modelo, implementação computacional e modelagem de estruturas de concreto. 2011. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

PEREGO, M. A. **Danneggiamento dei materiali lapidei**: leggi costitutive, analisi per elementi finiti ed applicazioni. 1990. Tese (Doutorado) – Departamento de Engenharia Estrutural, Faculdade de Engenharia, Politecnico di Milano, Milão, 1990.

PIJAUDIER-CABOT, G.; BAZANT, Z. L. Nonlocal damage theory, **ASCE J. Eng. Mech.**, v. 113, p. 1512-1533, 1987.

PITUBA, J. J. C. **Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo**. 1998. Dissertação (Mestrado em Engenharia



de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

PITUBA, J. J. C. **Sobre a formulação de um modelo de dano para o concreto**. 2003. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

POPOVICS, S. A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete. **Cement and Concrete Research**, v. 3, p. 583-599, 1973.

PORTO, T. B.; FERNANDES, D. S. G. **Curso básico de concreto armado**: conforme NBR 6118/2014. 1. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2015.

POSSAN, E. **Modelagem da carbonatação e previsão de vida útil de estruturas de concreto em ambiente urbano**. 2010. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio Grande dos Sul, Porto Alegre, 2010.

POSSAN, E.; DEMOLINER, C. A. **Desempenho, Durabilidade e Vida útil das edificações**: Abordagem Geral. **Revista Técnica do CREA-PR**, v. 1, 2013.

POSTERLLI, M. C. **Modelagem da expansão devido à reação álcali-agregado de concreto armado e reforçado com fibras**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

PRANDTL, L. Spannungsverteilung in plastischen Koerpern. *In*: INTERNATIONAL CONGRESS ON APPLIED MECHANICS, 1924, Delft. **Proceedings** [...]. Delft: J. Waltman Jr., Delf, 1924t. p. 43-54.

PROENÇA, S. P. B. **Análise não linear**. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2018. Notas de aula.

RABOTNOV, Y. N. **Creep problems in structural members**. Amsterdam: NorthHolland Publishing Company, 1969. 120 p.

RAHMAN, M.; AL-KUTTLI, W.; SHAZALI, M.; BALUCH, M. Simulation of chloride migration in compression induced damage in concrete. **Journal Of Materials In Civil Engineering**, v. 24, p. 789-796, 2012.

RAMOS, E. S. **Modelagem numérica da propagação da corrosão por cloretos em estruturas de concreto armado**. 2020. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

RASHID, Y. R. Ultimate strenght analysis of prestressed concrete pressure vessels. **Nuclear Engineering and Design** v. 7, p. 334-344, 1968.

RIBEIRO, D. V.; SALES, A.; SOUSA, C. A. C.; ALMEIDA, F. C. R.; CUNHA, M. P. T.; LOURENÇO, M. Z.; HELENE, P. **Corrosão em estruturas de concreto armado: teoria, controle e métodos de análise**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.

RIGOBELLO, R. **Desenvolvimento e aplicação de código computacional para análise de estruturas de aço apertadas em situação de incêndio**. 2011. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

RODRIGUES, M. A. **Simulação numérica do comportamento de vigas de concreto protendido pós-tracionado**. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

ROTS, J. G. **Computational modeling of concrete fracture**. 1988. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Technische Universiteit Delft, Delft, Nederland, 1988.

SAETTA, A. V.; SCOTTA, R. V.; VITALIANI, R. V. Analysis of chloride diffusion into partially saturated concrete. **ACI Materials Journal**, v. 90, p. 441-451, 1993.

SAHMARAN, M. Effect of flexure induced transverse crack and selfhealing on chloride diffusivity of reinforced mortar. **Journal of Materials Science**, v. 42, p. 9131-9136, 2007.

SAINT-VENANT, B. Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état. **Compt. Rend.**, v. 70, p. 473-480, 1870.

SALOMÃO, R. C. **Análise da influência do campo higrométrico sobre a reação álcali-agregado**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

SALOMÃO, R. C. **Termomecânica em compósito reforçados com fibras e na presença de elementos particulados**. 2021. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

SAMPAIO, M. S. M. **Análise não linear geométrica de cascas laminadas reforçadas com fibras**. 2014. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

SAMPAIO, M. S. M.; CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Análise não linear geométrica de sólidos elásticos bidimensionais reforçados com fibras via MEF. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, v. 13, n. 59, p. 59-62, 2011.

SAMPAIO, M. S. M.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Fully adherent fiber–matrix FEM formulation for geometrically nonlinear 2D solid analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 66, p. 12-25, 2013.

SANCHES, R. A. K. **Análise bidimensional de interação fluido-estrutura: desenvolvimento de Código computacional**. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

SANCHES, R. A. K. **Sobre o acoplamento fluido-casca utilizando o método dos elementos finitos**. 2011. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

SÁNCHEZ, J. A. G. **Uma formulação em elementos finitos para a análise dinâmica e estática não linear de risers incluindo o contato com o leito do mar**. 2013. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

SANTOS, N. O. **Modelos de dano para concreto**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

SEGURA, I.; CAVALARO, S.; LA FUENTE, A.; AGUADO, A.; ALEGRE, V. Service-Life Assessment of Existing Precast Concrete Structure Exposed to Severe Marine Conditions. **Journal of Performance of Constructed Facilities**, v. 30, n. 3, 2015.

SERGI, G.; YU, S. W.; PAGE, C. L. Diffusion of chloride and hydroxyl ions in cementitious materials exposed to a saline environment. **Magazine of Concrete Research**, v. 44, p. 63-69, 1992.

SHABANA A. A. **Definition of the slopes and the finite element absolute nodal coordinate formulation**. *Multibody System Dynamics*, v. 1, p. 339-348, 1997.

SHEWMON, P. **Diffusion in Solids**. 2 ed. [S.l.]: Springer International Publishers, 2016. 246 p.

SILVA, A. P. O. **Desenvolvimento de código computacional para análise estática e dinâmica de pontes pênses, pontes estaiadas e tenso-estruturas simples**. 2020. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

SILVA, M. F. A. **Contribuições teórico-experimentais para a definição das propriedades mecânicas do concreto com fibras aplicadas em simulações numéricas com foco na interação flexão-cisalhamento em vigas de concreto armado**. 2019. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

SILVA, R. C. S. **Análise da interação estaca inclinada e o solo via combinação MEC/MEF**. 2020. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

SIMO, J. C.; JU, J. W. Strain- and stress-based continuum damage models – I. Formulation. **International Journal of Solids and Structures**, v. 23, n. 7, p. 821-840, 1987.

SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. R. **Computational Inelasticity**. [S.l.]: Springer, 1998. 406 p.

SIQUEIRA, T. M. **Análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos reticulados planos com ligações deslizantes**. 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

SIQUEIRA, T. M. **Ligações deslizantes para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos tridimensionais pelo método dos elementos finitos posicional**.

2019. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

SLUYS, L. J. **Wave Propagation, Localisation and Dispersion in Softening Solids**. 1992. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Technische Universiteit Delft, Delft, Nederland, 1992.

SOARES, H. B. **Desenvolvimento de ferramenta computacional para análise de colapso estrutural pelo Método dos Elementos Finitos Posicional**. 2021. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

SOARES, H. B. **Formulação e implementação numérica para análise de estabilidade de perfis de parede fina via MEF posicional**. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

SONG, H. W.; LEE, C. H.; ANN, K. Y. Factors influencing chloride transport in concrete structures exposed to marine environments. **Cement and Concrete Composites**, v. 30, n. 2, p. 113-121, 2008.

SOUZA, R. M. **O Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor**. Núcleo de instrumentação e computação aplicada à engenharia, Universidade Federal do Pará, Belém. 2013. Notas de aula.

SOUZA, V. B. **Formulações numéricas baseadas no método dos elementos de contorno para a análise probabilística da difusão de cloretos no concreto**. 2021. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

SOUZA NETO, E. A.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. **Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. 816 p.

STANISH, K. D.; HOOTON, R. D.; THOMAS, M. D. A. **Testing the chloride penetration resistance of concrete: a literature review**. Canada: University of Toronto, 2000. 31 p.

STEINMANN, P.; STEIN, E. Finite element localization analysis of micropolar strength degrading materials. *In*: MANG, H.; BICANIC, N.; BORST, R. (eds.). **Computer modelling of concrete structures**. [S.l.]: North-Holland Publishing Company, 1994. p. 435-444.

SUN, Y. M.; LIANG, M. T.; CHANG, T. P. Time/depth dependent diffusion and chemical reaction model of chloride transportation in concrete. *Applied Mathematical Modelling*. **Simulation and Computation for Engineering and Environmental Systems**, v. 36, n. 3, p. 1114-1122, 2012.

TRESCA, H. E. **Sur l'écoulement des corps solides soumis à des fortes pressions**. Paris: Comptes-rendus de l'académie des sciences, 1864. 754 p.

TURNER, M. J.; CLOUGH, R. W.; MARTIN H. C.; TOPP, L. J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 23, n. 9, p. 805-823, 1956.

TUUTTI, K. **Chloride induced corrosion in marine concrete structures**. Durability of concrete on saline environment, Uppsala, p. 81-93, 1996.

TUUTTI, K. **Corrosion of steel in concrete**. Stockholm: Swedish Cement and Concrete Research Institute, 1982. 460 p.

VAL, D. V.; MELCHERS, R. E. Reliability of deteriorating RC slab bridges. **Journal of Structural Engineering**, v. 123, n. 12, p. 1638-1644, 1997.

VAL, D. V.; STEWART, M. G.; MELCHERS, R. E. Effect of reinforcement corrosion on reliability of highway bridges. **Engineering Structures**, v. 20, n. 11, p. 1010-1019, 1998.

VANALLI, L. **O MEC e o MEF aplicados à análise de problemas viscoplásticos em meios anisotrópicos e compostos**. 2004. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

VANALLI, L.; PACCOLA, R.; CODA, H. A simple way to introduce fibers into FEM models. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 24, n. 7, p. 585-603, 2008.

VONK, R. A micromechanical investigation of softening of concrete loaded in compression. **Heron**, v. 38, n. 3, p. 1-94, 1993.

WANG, H.; LU, C.; JIN, W.; BAI, Y. Effect of external loads on chloride transport in concrete. **Journal of Materials in Civil Engineering**, v. 23, p. 1043-1049, 2011.

WANG, L.; SODA, M.; UEDA, T. Simulation of Chloride Diffusivity for Cracked Concrete Based on RBSM and Truss Network Model. **Journal of Advanced Concrete Technology**, v. 6, n. 1, p. 143-155, 2008.

WITTMANN, F. H. Crack formation and fracture energy of normal and high strength concrete. **Sadhana**, v. 27, n. 8, p. 413-423, 2002.

XI, Y.; BAZANT, Z. P. Modeling chloride penetration in saturated concrete. **Journal Of Materials In Civil Engineering**, v. 11, n. 1, p. 58-65, 1999.

YUAN, Y.; JI, Y. Modeling corroded section configuration of steel bar in concrete structure. **Construction and Building Materials**, v. 23, n. 6, p. 2461-2466, 2009.

ZENG, Y. Modeling of chloride diffusion in hetero-structured concretes by finite element method. **Cement and Concrete Composites**, v. 29, p. 559-565, 2007.

ZHANG, R.; JIN, L.; LIU, M.; DU, X.-L.; LI, Y. Numerical investigation of chloride diffusivity in cracked concrete. **Magazine of Concrete Research**, v. 69, p. 850-864, 2017.

ZHANG, Y.; SUN, W.; CHEN, S.; GUO, F. Two and threedimensional chloride ingress into fly ash concrete. **Journal Wuhan University of Technology, Materials Science Edition**, v. 26, n. 5, p. 978-982, 2011.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The finite element method: its basics and fundamentals**. 7. ed. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2013. 756 p.

