

**FORMULAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO  
PARA ANÁLISE DE PLACAS VISCOELÁSTICAS**

**RODRIGO COUTO DA COSTA**

Serviço de Pós-Graduação EESC/USP

**EXEMPLAR REVISADO**

Data de entrada no Serviço... 21 / 07 / 08

Ass.: *Maira*

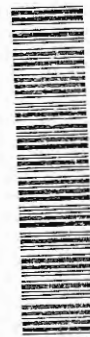
Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Wilson Sergio Venturini



São Carlos  
2008

DEDALUS - Acervo - EESC



31100109781

Class.	TESE ✓
Cult.	0751
Tombo	T158/08
Sysno	1678952

21122109281

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

C837f

Costa, Rodrigo Couto da

Formulações do método dos elementos de contorno para análise de placas viscoelásticas / Rodrigo Couto da Costa ; orientador Wilson Sergio Venturini . -- São Carlos, 2008.

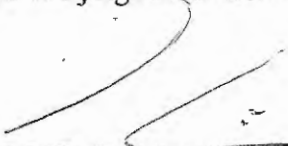
Dissertação (Mestrado-Programa de Pós-Graduação e Área de Concentração em Engenharia de Estruturas ) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2008.

1. Métodos numéricos. 2. Método dos elementos de contorno. Placas. Elástico. 4. Viscoelástico. 5. Kelvin-Voigt. 6. Botzmann. 7. Sistema linear suave. I. Título.

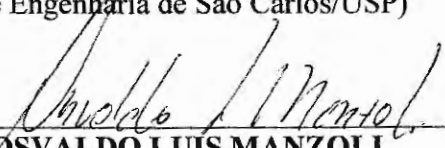
**FOLHA DE JULGAMENTO**

Candidato: Engenheiro **RODRIGO COUTO DA COSTA**

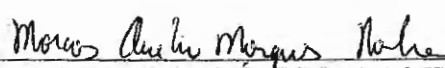
Dissertação defendida e julgada em 20/06/2008 perante a Comissão Julgadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Titular **WILSON SERGIO VENTURINI (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

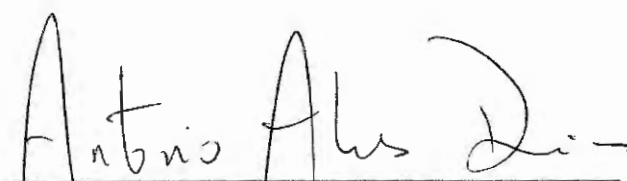
APROVADO

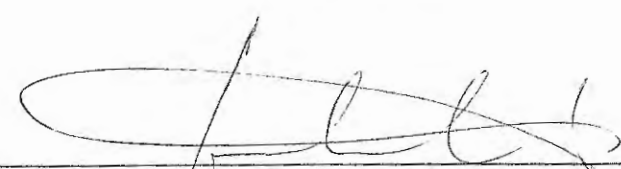
  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. **OSVALDO LUIS MANZOLI**  
(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" /UNESP/Campus de Bauri)

APROVADO

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. **MARCOS AURÉLIO MARQUES NORONHA**  
(Escola Politécnica/USP)

APROVADO

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. **ANTONIO ALVES DIAS**  
Vice-Coordenador do Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)  
Em Exercício

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Associado **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

*Aos meus pais, Rubens e Maria das  
Graças, e a minha noiva, Rosana.*



## **AGRADECIMENTOS**

---

Ao Prof. Dr. Wilson Sergio Venturini pela amizade, confiança, incentivo, atenção e ótima orientação em todos os estágios deste trabalho.

Aos demais professores e aos funcionários do Departamento de Estruturas pelos ensinamentos, eficiência e trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

Aos meus pais por todas as oportunidades que me ofereceram, pelas preocupações que passaram por mim e pela confiança que sempre tiveram na minha capacidade de superar obstáculos na vida.

A minha noiva por seu amor, dedicação, cuidado e companheirismo demonstrado durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

A todos os amigos do Departamento de Estruturas pela amizade, convívio, incentivo e ajuda.

## SUMÁRIO

---

<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	i
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	vii
<b>RESUMO</b> .....	viii
<b>ABSTRACT</b> .....	ix
<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	1
1.1.1 <i>Teoria das Placas</i> .....	1
1.1.2 <i>Método dos Elementos de Contorno</i> .....	4
1.1.3 <i>Método dos Elementos de Contorno na Análise de Placas</i> .....	7
1.1.4 <i>Viscoelasticidade</i> .....	12
1.2 OBJETIVO.....	13
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	13
<b>2. TEORIA DE PLACAS DELGADAS</b> .....	15
2.1 INTRODUÇÃO.....	15
2.2 RELAÇÕES BÁSICAS DA TEORIA DE KIRCHHOFF.....	16
2.2.1 <i>Deslocamentos</i> .....	16
2.2.2 <i>Deformações</i> .....	18
2.2.3 <i>Tensões</i> .....	20
2.2.4 <i>Esforços e Relações Diferenciais</i> .....	21
2.2.5 <i>Sistema Genérico de Coordenadas</i> .....	25
2.2.6 <i>Força Cortante Equivalente</i> .....	26
2.3 EQUAÇÕES DE PLACAS EM COORDENADAS POLARES.....	28
2.4 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE PLACAS.....	36
<b>3. EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA FLEXÃO DE PLACAS</b> .....	45
3.1 INTRODUÇÃO.....	45
3.2 EQUAÇÃO INTEGRAL PARA UM PONTO DO DOMÍNIO DA PLACA.....	45
3.3 EQUAÇÃO INTEGRAL PARA UM PONTO DO CONTORNO DA PLACA.....	53

3.4 TRANSFORMAÇÃO DAS INTEGRAIS DE DOMÍNIO DO CARREGAMENTO EM INTEGRAIS DE CONTORNO .....	58
<b>4. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADOS A PROBLEMAS DE PLACAS .....</b>	<b>62</b>
4.1 INTRODUÇÃO.....	62
4.2 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS.....	63
4.2.1 <i>Aproximação da Geometria do Elemento</i> .....	63
4.2.2 <i>Aproximação das Variáveis do Problema</i> .....	65
4.2.3 <i>Transformações das Equações Integrais em Equações Algébricas</i> .....	70
4.3 SISTEMA DE EQUAÇÕES .....	74
4.4 INTEGRAÇÕES SOBRE OS ELEMENTOS.....	80
4.4.1 <i>Integrações Numéricas</i> .....	82
4.4.2 <i>Integrações Analíticas</i> .....	84
4.5 PROPRIEDADES DA MATRIZ H .....	87
4.6 DESLOCAMENTOS E ESFORÇOS PARA OS PONTOS INTERNOS .....	90
4.7 EXEMPLOS NUMÉRICOS .....	95
4.7.1 <i>Exemplo 1</i> .....	96
4.7.2 <i>Exemplo 2</i> .....	97
4.7.3 <i>Exemplo 3</i> .....	99
4.7.4 <i>Exemplo 4</i> .....	100
4.7.5 <i>Exemplo 5</i> .....	101
<b>5. MODELOS REOLÓGICOS VISCOELÁSTICOS.....</b>	<b>104</b>
5.1 INTRODUÇÃO.....	104
5.2 MODELO DE KELVIN-VOIGT .....	106
5.3 MODELO DE BOLTZMANN.....	109
<b>6. FORMULAÇÕES DO MEC PARA PLACAS VISCOELÁSTICAS.....</b>	<b>114</b>
6.1 INTRODUÇÃO.....	114
6.2 FORMULAÇÃO PARA O MODELO DE KELVIN-VOIGT .....	115
6.2.1 <i>Equações Integrais para os Esforços nos Pontos Internos</i> .....	117
6.2.2 <i>Discretização do Domínio</i> .....	126
6.2.3 <i>Sistema de Equações</i> .....	136
6.2.4 <i>Integração Temporal Numérica</i> .....	142
6.2.5 <i>Exemplos Numéricos</i> .....	144
6.2.5.1 <i>Exemplo 1</i> .....	145

6.2.5.2 Exemplo 2.....	148
6.2.5.3 Exemplo 3.....	150
<b>6.3 FORMULAÇÃO PARA O MODELO DE BOLTZMANN.....</b>	<b>154</b>
6.3.1 <i>Equações Integrais para os Esforços nos Pontos Internos</i> .....	156
6.3.2 <i>Discretização do Domínio</i> .....	158
6.3.3 <i>Sistema de Equações</i> .....	160
6.3.4 <i>Integração Temporal Numérica</i> .....	163
6.3.5 <i>Exemplos Numéricos</i> .....	165
6.3.5.1 Exemplo 1.....	166
6.3.5.2 Exemplo 2.....	168
6.3.5.3 Exemplo 3.....	169
<b>7. FORMULAÇÕES DO MEC PARA PLACAS VISCOELÁSTICAS COM REPRESENTAÇÃO NO CONTORNO.....</b>	<b>172</b>
7.1 INTRODUÇÃO.....	172
7.2 FORMULAÇÃO PARA O MODELO DE KELVIN-VOIGT.....	172
7.2.1 <i>Equações Integrais para os Esforços nos Pontos Internos</i> .....	175
7.2.2 <i>Sistema de Equações</i> .....	176
7.2.3 <i>Integração Temporal Numérica</i> .....	179
7.2.4 <i>Exemplos Numéricos</i> .....	182
7.2.4.1 Exemplo 1.....	183
7.2.4.2 Exemplo 2.....	185
7.2.4.3 Exemplo 3.....	187
7.3 FORMULAÇÃO PARA O MODELO DE BOLTZMANN.....	191
7.3.1 <i>Equações Integrais para os Esforços nos Pontos Internos</i> .....	194
7.3.2 <i>Sistema de Equações</i> .....	196
7.3.3 <i>Integração Temporal Numérica</i> .....	199
7.3.4 <i>Exemplos Numéricos</i> .....	206
7.3.4.1 Exemplo 1.....	206
7.3.4.2 Exemplo 2.....	208
7.3.4.3 Exemplo 3.....	210
<b>8. SISTEMA LINEAR SUAVE – MÍNIMOS QUADRADOS.....</b>	<b>213</b>
8.1 INTRODUÇÃO.....	213
8.2 CONCEITUAÇÃO BÁSICA SOBRE O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS.....	214

8.3 APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS .....	214
8.4 EXEMPLOS NUMÉRICOS .....	217
8.4.1 Exemplo 1 .....	217
8.4.2 Exemplo 2 .....	221
<b>9. CONCLUSÕES</b> .....	<b>226</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>229</b>

## LISTA DE FIGURAS

---

Figura 2.1 - Elemento de placa.....	15
Figura 2.2 – Posicionamento do sistema cartesiano nas placas.....	17
Figura 2.3 – Flexão de uma seção transversal de um elemento de placa .....	17
Figura 2.4 – Posição inicial do elemento abcd.....	18
Figura 2.5 – Posição final do elemento abcd.....	19
Figura 2.6 – Tensões em um elemento de placa.....	22
Figura 2.7 – Esforços em um elemento de placa.....	22
Figura 2.8 – Elemento de placa.....	23
Figura 2.9 – Elemento de placa abc.....	25
Figura 2.10 – Forças cortantes no elemento de placa abc.....	25
Figura 2.11 – Momentos no elemento de placa abc.....	25
Figura 2.12 – Elementos infinitesimais no contorno da placa.....	27
Figura 2.13 – Decompondo os momentos volventes.....	27
Figura 2.14 – Unindo os elementos após a decomposição.....	27
Figura 2.15 – Sistema de coordenadas polares.....	28
Figura 2.16 – Vetores $n$ e $s$ no ponto $P$ do contorno da placa.....	34
Figura 2.17 – Ponto campo $p$ e fonte $q$ em um domínio de placa infinito.....	37
Figura 2.18 – Forças atuantes em um círculo de raio $r$ com uma carga unitária no centro $q$ .....	39

Figura 2.19 – Sistema de coordenadas $m$ e $u$ , com origem em $q$ .....	42
Figura 3.1 – Placa do domínio finito contida em uma de domínio infinito.....	46
Figura 3.2 – Momentos volventes em um canto $i$ da placa.....	49
Figura 3.3 – Contorno circular acrescido a um ponto $Q$ de um canto.....	53
Figura 3.4 – Ponto $q$ no domínio $\Omega_g$ .....	59
Figura 4.1 – Discretização do contorno em elementos.....	63
Figura 4.2 – Geometria do elemento.....	64
Figura 4.3 – Aproximação das variáveis por elemento quadrático.....	66
Figura 4.4 – Funções aproximadoras quadráticas.....	68
Figura 4.5 – Elemento descontínuo.....	69
Figura 4.6 – Elemento contínuo.....	69
Figura 4.7 – Posicionamento dos nós.....	76
Figura 4.8 – Limites dos elementos em relação à $\Gamma$ e $\xi$ .....	81
Figura 4.9 – Forma como o elemento é dividido em sub-elementos.....	83
Figura 4.10 – Posições de um ponto singular e dos nós em um elemento.....	86
Figura 4.11 – Placa discretizada em elementos de contorno.....	88
Figura 4.12 - Placa quadrada com dois lados opostos apoiados e engastada nos outros dois.....	96
Figura 4.13 – Discretização da placa em 16 elementos.....	97
Figura 4.14 - Placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois.....	98
Figura 4.15 - Placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois.....	99
Figura 4.16 - Placa quadrada engastada nos quatro lados.....	100
Figura 4.17 - Placa trapezoidal apoiada nos dois lados paralelos e engastada nos outros dois.....	101

Figura 4.18 - Discretização da placa em 20 elementos.....	102
Figura 5.1 – Modelo reológico uniaxial elástico.....	104
Figura 5.2 – Modelo reológico uniaxial viscoso.....	105
Figura 5.3 – Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt.....	106
Figura 5.4 – Modelo viscoelástico de Boltzmann.....	109
Figura 6.1 – Domínios $\Omega_e$ e $\Omega_c$ .....	119
Figura 6.2 – Discretização do domínio em células triangulares.....	126
Figuras 6.3 – Coordenadas dos nós das células e do ponto fonte q.....	127
Figura 6.4 – Distâncias $R_1(\theta)$ e $R_2(\theta)$ .....	129
Figura 6.5 - Posicionamento dos nós nas células.....	134
Figura 6.6 – Posição geométrica dos nós.....	135
Figura 6.7 – Sistema de coordenadas adimensionais.....	135
Figura 6.8 – Processo para o cálculo dos momentos viscosos ao longo do tempo.....	143
Figura 6.9 – Geometria e discretização da placa em 24 elementos e 144 células.....	145
Figura 6.10 – Deslocamento $w$ do ponto A ao longo do tempo.....	146
Figura 6.11 – Curvaturas $w_{,11}$ e $w_{,22}$ do ponto A ao longo do tempo.....	146
Figuras 6.12 – Momentos $M_{11}$ do ponto A ao longo do tempo.....	147
Figuras 6.13 – Momentos $M_{22}$ do ponto A ao longo do tempo.....	147
Figura 6.14 - Placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois.....	148
Figura 6.15 – Curvatura $w_{,11}$ no ponto 6 para diversos $\Delta t$ .....	149
Figura 6.16 – Curvatura $w_{,22}$ no ponto 9 para diversos $\gamma$ .....	149
Figura 6.17 - Placa retangular engastada nos quatro lados.....	150
Figura 6.18 – Discretizações para a placa retangular.....	151
Figura 6.19 – Curvatura $w_{,22}$ para as quatro discretizações.....	152



Figura 6.20 – Curvatura $w_{,22}$ para os 200 primeiros passos de tempo.....	152
Figura 6.21 – Momentos $M_{22}$ para as discretizações 1 e 4.....	153
Figura 6.22 – Processo de cálculo ao longo do tempo.....	165
Figura 6.23 – Deslocamento $w$ do ponto A ao longo do tempo.....	166
Figura 6.24 – Curvaturas $w_{,11}$ e $w_{,22}$ do ponto A ao longo do tempo.....	167
Figuras 6.25 – Momentos $M_{11}$ do ponto A ao longo do tempo.....	167
Figuras 6.26 – Momentos $M_{22}$ do ponto A ao longo do tempo.....	167
Figura 6.27 – Deslocamento $w$ no ponto 5 para diversos $\Delta t$ .....	168
Figura 6.28 – Curvatura $w_{,11}$ no ponto 10 para diversos $\Delta t$ .....	169
Figura 6.29 – Curvatura $w_{,22}$ para as quatro discretizações.....	170
Figura 6.30 – Momentos $M_{22}$ para as discretizações 1 e 4.....	171
Figura 7.1 – Processo de cálculo ao longo do tempo.....	182
Figura 7.2 – Geometria e discretização da placa em 24 elementos.....	183
Figura 7.3 – Deslocamento $w$ do ponto A ao longo do tempo.....	184
Figura 7.4 – Curvaturas $w_{,11}$ e $w_{,22}$ do ponto A ao longo do tempo.....	184
Figuras 7.5 – Momentos $M_{11}$ do ponto A ao longo do tempo.....	184
Figuras 7.6 – Momentos $M_{22}$ do ponto A ao longo do tempo.....	185
Figura 7.7 - Placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois	186
Figura 7.8 – Deslocamento $w$ no ponto 6 para diversos $\Delta t$ .....	186
Figura 7.9 – Curvatura $w_{,11}$ no ponto 9 para diversos $\Delta t$ .....	187
Figura 7.10 - Placa retangular engastada nos quatro lados.....	187
Figura 7.11 – Discretizações para a placa retangular.....	188
Figura 7.12 – Curvatura $w_{,22}$ para as três discretizações.....	188
Figura 7.13 – Momentos $M_{22}$ para as discretizações 1 e 3.....	189
Figura 7.14 - Deslocamento $w$ para as duas formulações.....	189

Figura 7.15 - Curvatura $w_{,11}$ para as duas formulações.....	190
Figura 7.16 - Momentos $M_{22}$ para as duas formulações.....	190
Figura 7.17 – Processo de cálculo ao longo do tempo.....	205
Figura 7.18 – Deslocamento $w$ do ponto A ao longo do tempo.....	206
Figura 7.19 – Curvaturas $w_{,11}$ e $w_{,22}$ do ponto A ao longo do tempo.....	207
Figuras 7.20 – Momentos $M_{11}$ do ponto A ao longo do tempo.....	207
Figuras 7.21 – Momentos $M_{22}$ do ponto A ao longo do tempo.....	207
Figura 7.22 – Deslocamento $w$ no ponto 5 para diversos $\Delta t$ .....	208
Figura 7.23 – Curvatura $w_{,11}$ no ponto 10 para diversos $\Delta t$ .....	209
Figura 7.24 – Curvatura $w_{,11}$ no ponto 7 com descarregamento.....	209
Figura 7.25 – Curvatura $w_{,22}$ para as três discretizações.....	210
Figura 7.26 – Momentos $M_{22}$ para as discretizações 1 e 3.....	211
Figura 7.27 - Deslocamento $w$ para as duas formulações.....	211
Figura 7.28 - Curvatura $w_{,11}$ para as duas formulações.....	212
Figura 7.29 - Momentos $M_{22}$ para as duas formulações.....	212
Figura 8.1 – Posicionamento dos nós adicionais em vermelho.....	215
Figura 8.2 - Placa retangular com dois lados opostos livres e engastada nos outros dois	217
Figura 8.3 – Discretizações para a placa retangular.....	218
Figura 8.4 – Deslocamentos na borda inferior da placa para o modelo de Kelvin-Voigt	219
Figura 8.5 – Deslocamentos na borda inferior da placa para o modelo de Boltzmann....	219
Figura 8.6 – Rotações normais na borda inferior da placa para o modelo de Kelvin-Voigt.....	220
Figura 8.7 – Rotações normais na borda inferior da placa para o modelo de Boltzmann	220
Figura 8.8 - Placa retangular com dois lados parcialmente apoiados, um totalmente apoiado e o outro livre.....	221

Figura 8.9 – Discretizações para a placa retangular.....	221
Figura 8.10 – Deslocamentos na borda inferior da placa para o modelo de Kelvin-Voigt.....	222
Figura 8.11 – Deslocamentos na borda inferior da placa para o modelo de Boltzmann..	222
Figura 8.12 – Rotações normais na borda inferior da placa para o modelo de Kelvin-Voigt.....	223
Figura 8.13 – Rotações normais na borda inferior da placa para o modelo de Boltzmann.....	223
Figura 8.14 – Forças cortantes equivalentes na borda inferior da placa para o modelo de Kelvin-Voigt.....	224
Figura 8.15 – Forças cortantes equivalentes na borda inferior da placa para o modelo de Boltzmann.....	224

**LISTA DE TABELAS**

---

Tabela 4.1 – Resultados do exemplo 1.....	97
Tabela 4.2 – Resultados do exemplo 2.....	99
Tabela 4.3 – Resultados do exemplo 3.....	100
Tabela 4.4 – Resultados do exemplo 4.....	101
Tabela 4.5 – Resultados do exemplo 5.....	102
Tabela 6.1 – Resultados do exemplo 1.....	147
Tabela 6.2 – Resultados do exemplo 2.....	150

## RESUMO

---

COSTA, R.C. (2008). *Formulações do Método dos Elementos de Contorno para análise de placas viscoelásticas*. São Carlos. 238p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Neste trabalho são propostas formulações do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para placas viscoelásticas com o uso dos modelos reológicos de Kelvin-Voigt e Boltzmann. Inicialmente, apresenta-se a formulação do MEC para placas elásticas pela Teoria de Kirchhoff que é utilizada como base para desenvolvimento das equações viscoelásticas. Em seguida, desenvolvem-se as formulações para os modelos reológicos de Kelvin-Voigt e Boltzmann que primeiramente representarão o comportamento viscoso através de integrais de domínio que devem ser solucionadas com o uso de células internas. Logo depois, complementa-se o trabalho ao se encontrar formulações em que as representações viscosas são obtidas através de integrais de contorno, assim, permitindo análises viscoelásticas com discretizações apenas no contorno e tornando o método mais eficiente, elegante e preciso. Finalizando, aplica-se a técnica de suavização do sistema linear nas formulações viscoelásticas com representação no contorno, com a intenção de se obter melhores resultados para discretizações pobres e descontinuidades nas condições de contorno.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno, placas, elástico, viscoelástico, Kelvin-Voigt, Boltzmann, Sistema Linear Suave.

## ABSTRACT

---

COSTA, R.C. (2008). *Formulations of the Boundary Elements Method for analysis of viscoelastic plates*. São Carlos. 238p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

In this work formulations of the Boundary Elements Method (BEM) for viscoelastic plates using the Kelvin-Voigt's and Boltzmann's rheological models are proposed. Initially, the BEM formulation for elastic plates based on Kirchhoff's Theory is presented, which is used as the basis for the development of the viscoelastic equations. After, the formulations for Kelvin-Voigt's and Boltzmann's rheological models are developed; Initially the viscous behavior will be represent by domain integrals that must be evaluated using internal cells. In the sequel, the work is complemented by deriving formulations wherein the viscous influences are given by boundary integrals, therefore allowing viscoelastic analysis with discretizations defined only along the boundary what makes the method more efficient, elegant and accurate. Finally, the least square method is applied for the viscoelastic formulations with boundary representations, trying to obtain better results using poor discretizations and discontinuities in the boundary conditions.

Keywords: Boundary Elements Method, plates, elastic, viscoelastic, Kelvin-Voigt, Boltzmann, least square method.

## **1. INTRODUÇÃO**

---

Na engenharia existem muitas estruturas que são compostas por placas e, por isso, o entendimento do comportamento desses elementos, quando submetidos a diversos tipos de carregamentos, condições de contorno e diferentes situações é de grande importância. Uma dessas situações apresenta-se quando o material que constitui a placa possui comportamento viscoelástico como em polímeros, concreto, madeira, solos e aços sob altas temperaturas, onde os esforços e os deslocamentos são obtidos ao longo do tempo. A solução analítica de um problema de placa com este tipo de material é matematicamente complexa e, por isso, neste trabalho serão desenvolvidas formulações do Método dos Elementos de Contorno para placas viscoelásticas.

### **1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

#### *1.1.1 Teoria das Placas*

As placas são elementos estruturais comuns na engenharia e o primeiro trabalho voltado ao seu estudo foi realizado por KIRCHHOFF (1850), que desenvolveu a chamada Teoria Clássica, a qual representa o comportamento de placas delgadas com pequenos deslocamentos sob carregamentos transversais. Nesta teoria, através de algumas simplificações como a desconsideração das deformações por cisalhamento transversal, é



obtida uma equação diferencial de quarta ordem, onde devem ser satisfeitas duas condições de contorno ao longo das bordas da placa.

Outra importante teoria foi a proposta por REISSNER (1944,1945), que considerando as deformações por cisalhamento transversal, tem-se um sistema de equações diferenciais de sexta ordem, onde devem ser satisfeitas três condições de contorno ao longo das bordas da placa. Esta teoria permite a análise de placas delgadas e moderadamente espessas.

MINDLIN (1951) propôs uma teoria semelhante à de Reissner, baseada na teoria da elasticidade tridimensional para corpos em movimento, considerando-se a inércia rotacional e o cisalhamento transversal. O sistema de equações diferenciais, também, é de sexta ordem.

HENCKY (1947) e KROMM (1953) desenvolveram teorias baseadas nos deslocamentos e rotações do plano médio da placa.

Outra proposta para o estudo de placas foi desenvolvida por SALERNO & GOLDBERG (1960), que reduziram o sistema de três equações diferenciais de Reissner para uma equação diferencial de quarta ordem, como ocorre na Teoria Clássica, e a uma equação diferencial de segunda ordem para a determinação de uma função de tensão.

PANC (1975) analisou e comparou diversas teorias para resolução de problemas de placas.

NORDGREN (1971,1972) ao realizar estudos comparativos, verificou que a Teoria Clássica pode ser utilizada como uma aproximação para problemas tridimensionais.

REISSNER (1976) apresentou estudos sobre a dificuldade de integração do sistema de equações para o caso de ortotropia e a influência de uma faixa limite de condições de contorno reduzidas na solução do interior de placas isotrópicas. Dessa forma, verificou diferenças entre a deformação por cisalhamento na faixa de contorno e no domínio da placa.

Uma nova teoria foi proposta por CHENG (1979), onde se obteve uma equação diferencial de ordem infinita, cujas derivadas maiores que as de quarta ordem multiplicam os



quadrados da espessura da placa. Nesta teoria é obtida a equação da Teoria Clássica quando a espessura da placa tende a zero.

LEVINSON (1980) desenvolveu uma nova teoria para a análise dinâmica e estática de placas, considerando as deformações por cisalhamento. Esta teoria, no caso dinâmico, possui a mesma equação de onda da teoria de Mindlin para deslocamento transversal.

GREGORY & WAN (1985) demonstraram que com certas condições de contorno para o problema de flexão de placas e utilizando-se a equação de deslocamento de Cheng é obtida a equação da Teoria Clássica.

REISSNER (1986) apresentou uma nova formulação, generalizando as equações para a análise de placas com grandes deformações e com deformação por cisalhamento transversal. O sistema de equações diferenciais obtido é de décima ordem, sendo duas equações simultâneas de quarta ordem complementadas por uma equação de segunda ordem.

REISSNER (1987) pesquisou placas moderadamente espessas através de um sistema de equações de décima segunda ordem.

RYCHTER (1988) verificou que a Teoria de Reissner combinada com o estado plano de tensão é capaz de avaliar o comportamento real de placas elásticas homogêneas com um erro mínimo.

LADEVEZE & PECASTAININGS (1988) realizaram alterações na Teoria de Reissner para placas homogêneas, isotrópicas e com quaisquer condições de contorno, dessa forma, melhorando os resultados obtidos nesta teoria. As mudanças foram efetuadas no valor do fator de deformabilidade por cisalhamento transversal e nas condições de contorno.

BARRET & ELLIS (1988) desenvolveram uma nova formulação baseada na teoria de Cheng, onde se obtém as expressões das componentes de deslocamentos e tensões em termos do deslocamento transversal da superfície média da placa e suas derivadas. No mesmo

trabalho, demonstraram como são obtidas as Teorias de Kirchhoff, Reissner e Mindlin, a partir dessa nova formulação.

REISSNER (1991) analisou a influência das faixas de contorno para placas ortotrópicas e apresentou o conceito de apoio “soft”.

### *1.1.2 Método dos Elementos de Contorno*

Praticamente todos os problemas de engenharia são solucionados através de um modelo teórico com o qual se pretende simular as características existentes e prever o seu comportamento. Estes modelos são descritos por equações diferenciais ou integrais e, atualmente, estão se tornando muito mais complexos e próximos do comportamento real.

As soluções analíticas para essas equações são de difícil obtenção, conseqüentemente, surgiram os métodos numéricos de cálculo, que permitem resolver esses problemas de forma aproximada. Com a grande evolução dos computadores, estes métodos passaram a ser utilizados amplamente e se tornaram uma ferramenta fundamental e imprescindível para a resolução dos problemas de engenharia.

Os principais métodos numéricos são: o Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Os dois primeiros são os mais difundidos e se baseiam em técnicas de domínio, pois fazem o uso de aproximações em todo o domínio do corpo para solucionar as equações diferenciais ou integrais do problema. Já o Método dos Elementos de Contorno se baseia em técnicas de contorno por necessitar apenas de aproximações no contorno do corpo para resolver as equações.

O Método das Diferenças Finitas é o mais antigo, sendo, ainda, muito utilizado atualmente. Este método foi desenvolvido a partir do trabalho de SOUTHWELL (1946) e suas equações são obtidas através da aplicação de operadores, definidos por diferenças finitas, sobre pontos distribuídos em todo o domínio do corpo.

O Método dos Elementos Finitos passou a ser difundido e aplicado nas diversas áreas da engenharia com a rápida evolução e expansão dos computadores, mesmo sendo conhecida sua formulação desde os anos 50 com TURNER et al (1956). Este método consiste em transformar um sólido contínuo em uma associação de elementos discretos e escrever as equações de compatibilidade e equilíbrio entre eles, sendo necessário admitir funções contínuas que representam, por exemplo, o campo de deslocamentos no domínio de um elemento, para se obter o estado de deformações correspondente que, associado às relações constitutivas do material, permitem definir o estado de tensões em todo o elemento.

O Método dos Elementos de Contorno consiste de um conjunto de processos e meios para resolução de problemas formulados por uma equação integral de contorno. A resolução destes problemas é obtida por uma aproximação definida por um conjunto de valores em pontos discretos localizados sobre o contorno da geometria do modelo analisado. Dessa forma, este método apresenta a vantagem de se obter uma redução no número de variáveis do problema e, conseqüentemente, nos dados de entrada. Outra vantagem é encontrada na facilidade com que é possível realizar a representação dos domínios infinitos e na determinação de esforços e deformações em pontos de interesse do domínio, sem introduzir erros de interpolação de domínio e sem a necessidade de se alterar a discretização do contorno. Entretanto, elementos de contorno não apresentam características vantajosas com relação a análise de estruturas em cascas e reticuladas, ao contrário do MEF.

A representação de problemas através da utilização de equações integrais não é uma técnica recente como o MEC, uma vez que têm sido empregadas desde o século XIX. Estas equações foram primeiramente aplicadas por BETTI (1872) na teoria da elasticidade e por CERRUTI (1882) e SOMIGLIANA (1886) na elasticidade plana.

FREDHOLM (1903) utilizou uma técnica de discretização para demonstrar a existência de soluções para equações integrais decorrentes da representação de funções

harmônicas. LAURICELLA (1909) aplicou o trabalho de Fredholm em placas elásticas engastadas.

TREFFTZ (1917) e PRAGER (1928) desenvolveram métodos para a resolução de equações integrais envolvendo a teoria de fluxo de fluidos.

KELLOG (1929) empregou os teoremas de Green para realizar a superposição de duas classes de potencial, dessa forma, obtendo a representação integral de funções harmônicas envolvendo a teoria potencial.

MUSKHELISHVILI (1953) estudou as equações integrais aplicadas a problemas de elasticidade plana e com as contribuições de MIKHLIN (1957) e KUPRADZE (1965), teve início o uso de equações integrais na forma de um método indireto de representação de problemas, uma vez que as variáveis envolvidas não eram as reais.

HESS & SMITH (1962) resolveram numericamente uma equação integral de segunda espécie de Fredholm, associada a um problema de um fluxo uniforme de ar sobre uma superfície de revolução.

JASWON (1963) e SYMM (1963) desenvolveram o método semi-direto de representação de problemas, onde as variáveis reais eram utilizadas em conjunto com uma função de tensão auxiliar.

RIZZO (1967) apresentou a formulação direta para problemas da elasticidade plana, visto que as variáveis utilizadas eram as reais do problema. CRUSE (1969) desenvolveu a mesma formulação para a elasticidade tridimensional. Nestes trabalhos, a equação integral é discretizada através de elementos no contorno, empregando-se uma aproximação constante para forças e deslocamentos. Complementando esses trabalhos, RICCARDELLA (1973) e CRUSE (1974) apresentaram as aproximações lineares e LCHAT (1975) as de ordem superior.

O Método dos Elementos de Contorno recebe essa denominação com a publicação do trabalho de BREBBIA (1978), no qual as equações integrais são obtidas através da técnica dos resíduos ponderados, dessa forma, tornando a formulação dos elementos de contorno mais genérica e facilitando a combinação com outros métodos numéricos. A partir deste trabalho, o MEC passa a ter uma grande expansão e desenvolvimento em diversas áreas da engenharia e, atualmente, consegue representar com grande precisão complexos fenômenos físicos.

### *1.1.3 Método dos Elementos de Contorno na Análise de Placas*

Com a maior expansão e desenvolvimento dos métodos numéricos a partir da década de 60, os problemas de placas da engenharia passaram a ser analisados através do Método dos Elementos de Contorno.

As pesquisas sobre esse elemento estrutural têm como base a Teoria Clássica ou a Teoria Reissner. Assim sendo, considerando inicialmente apenas os autores que utilizaram a Teoria Clássica, temos como o primeiro trabalho o de JASWON et al (1967) que utilizou o método indireto para decompor a equação bi-harmônica em duas harmônicas através de equações integrais, para resolver casos particulares de condições de contorno em placas circulares e elípticas.

FORBES & ROBISON (1969) foram os primeiros a utilizar o método direto na resolução de placas.

HANSEN (1976) desenvolveu uma formulação direta para a análise de placas infinitas com furos de contorno não carregado, através de duas equações integrais, sendo uma para o deslocamento transversal e a outra para a derivada deste em qualquer direção.

BEZINE & GAMBY (1978) apresentaram uma formulação direta através da identidade de Green e consideraram duas equações integrais, sendo uma para o deslocamento transversal e a outra para a derivada deste na direção normal.

BEZINE (1978) estudou placas com cargas concentradas, discretizadas em elementos constantes e com formulação direta.

ALTIERO & SIKARSKIE (1978) analisaram placas engastadas através da formulação indireta, pois consideraram a placa real contida em uma outra fictícia onde a função de Green era conhecida.

STERN (1979) apresentou um trabalho onde os resultados dos cálculos das placas eram obtidos por formulação direta, com o uso de elementos de aproximação linear, do cálculo de reações de canto pelos momentos envolventes, de cargas uniformemente distribuídas e sem considerar a descontinuidade nos cantos.

WU & ALTIERO (1979) complementaram o trabalho de Altiero e Sikarskie ao incluírem na análise a possibilidade de condições arbitrárias de contorno.

TOTTENHAM (1979) estudou a formulação direta e indireta. Na abordagem indireta, é descrita a utilização de uma expansão das densidades fictícias em série de Fourier, que possibilitam expressar a equação integral primitiva em termos de uma série infinita após o cálculo das integrais. Na abordagem direta, o problema é discretizado em elementos constantes e as integrais singulares são substituídas por uma análise finita de integrais.

BEZINE (1981) complementou o seu trabalho de 1978 com a análise de problemas com vínculos no domínio.

HARTMANN & ZOTEMANTEL (1986) também desenvolveram uma formulação que possibilitava a colocação de vínculos no domínio, mas que utilizava uma interpolação hermiteana para os deslocamentos.

GUO-SHU & MUKHERJEE (1986) também apresentaram uma formulação com interpolação hermiteana para os deslocamentos, entretanto, eram utilizadas equações do deslocamento e suas derivadas nas direções normal e tangencial ao contorno para cada nó.

PARIS & DE LEON (1986) realizaram a decomposição da equação bi-harmônica em duas harmônicas, através de formulação direta, para a resolução de placas simplesmente apoiadas.

MOSHAIIOV & VORUS (1986) com o uso de um esquema de carregamento incremental e a consideração de momentos fletores plásticos iniciais calculados por um processo iterativo, analisaram o comportamento elastoplástico das placas. Neste trabalho, a placa foi dividida em células internas para se calcular as integrais de domínio e se considerou constante as componentes do momento plástico sobre cada uma delas.

PAIVA (1987) analisou a interação entre placas, vigas e pilares em pavimentos de edifícios e diversas configurações de condições de contorno, de carregamento e posição do nó singular. Além disso, foi apresentada uma formulação alternativa utilizando-se apenas equações integrais para os deslocamentos transvesais.

HARTLEY & ABDEL-AKHER (1989) desenvolveram fórmulas para realizar a integração analítica dos pontos fontes com singularidade.

PILTNER & TAYLOR (1989) apresentaram uma formulação que considera as deformações por cisalhamento.

KATSIKADELIS & ARMENAKAS (1989) combinaram o Método dos Elementos de Contorno com o Método das Diferenças Finitas com o objetivo de se obter a solução de duas equações integrais e duas equações diferenciais ao mesmo tempo.

CAMP & GIPSON (1990) analisaram diversos tipos de elementos de contorno isoparamétricos com integrais analíticas.

SAPOUNTZAKIS & KATSIKADELIS (1991) também combinaram MEC com MDF, mas com o objetivo de estudar placas com espessura variável.



KARAMI et al. (1992) desenvolveram uma formulação onde uma equação harmônica é utilizada em conjunto com a bi-harmônica, sendo as integrais de contorno calculadas analiticamente.

VABLE & ZHANG (1992), empregando a formulação indireta, analisaram placas através de integrações analíticas em conjunto com funções fictícias.

CHUEIRI (1994) analisou placas elastoplásticas através da técnica dos momentos iniciais, sendo que as integrais de domínio foram calculadas através de células internas triangulares com aproximação linear. Foram propostos neste trabalho, modelos para a análise elastoplástica de lajes de concreto armado.

OLIVEIRA NETO (1998) desenvolveu uma nova formulação com três parâmetros nodais de deslocamento e dois valores nodais para esforços, dessa forma, obtendo-se três equações integrais de contorno por nó.

Considerando os autores que utilizaram a Teoria Reissner, temos como o primeiro trabalho o de VAN DER WEEËN (1982) que desenvolveu uma formulação onde existem três parâmetros nodais de deslocamento e três de esforços, assim, obtendo-se três equações integrais por nó do contorno. Neste trabalho, foram adotados elementos com aproximações quadráticas.

KARAN (1986) demonstrou a eficiência da formulação de Weeën em vários exemplos de placas isotrópicas em regime elástico linear. Neste trabalho, foram utilizados os conceitos de nó duplo e elementos descontínuos.

BARCELOS & SILVA (1987) e WESTPHAL & BARCELOS (1989) identificaram funções livres e funções essenciais como componentes da solução fundamental.

RIBEIRO (1989), com base na formulação de Weeën, escreveu o sistema de equações considerando o ponto fonte fora do domínio, dessa forma, evitando a ocorrência de certas singularidades.



XIAO-YAN et al. (1990) consideram a não-linearidade geométrica devido à ocorrência de grandes deslocamentos.

KARAM et al (1992) e RIBEIRO (1992) desenvolveram uma formulação para a análise do comportamento elastoplástico das placas com base no trabalho de Moshaiov e Vorus para a Teoria Clássica.

DEBBIH et al. (1995) apresentaram uma solução fundamental modificada, que considera placas com geometria qualquer. Em outro trabalho no mesmo ano, alteraram a solução fundamental de forma, assim sendo, as partes das funções representativas do efeito das tensões transversais foram separadas, permitindo a análise de placas finas e espessas.

SILVA (1996) desenvolveu uma formulação para a resolução de problemas de placas com enrijecedores que permite a interação desta com vigas e pilares. Na interação placa-viga, foi utilizado o acoplamento do MEC com o MEF.

ALIABADI et al. (1997) analisaram as tensões no contorno e no domínio da placa. Para o contorno, utilizaram dois métodos, sendo que o primeiro foi baseado nas tensões e deformações locais e o segundo na avaliação direta do tensor das tensões. Para o domínio, verificaram as tensões internas sobre a espessura da placa, comparando os resultados com as soluções do MEC para o caso tridimensional.

EL-ZAFRANY (1998) demonstrou como é realizada a redução das integrais de domínio em integrais de contorno para o carregamento uniforme e linearmente distribuído, forças concentradas e momentos fletores. Estudou, também, o tratamento numérico das equações integrais de contorno nos problemas de canto.

PALERMO (2000) provou a conexão entre a Teoria Clássica e a Teoria de Mindlin, escrevendo as equações diferenciais desta com termos equivalentes aos utilizados no estado plano, deste modo, obteve uma solução fundamental igual à obtida por Weeën e pela Teoria Clássica.

#### 1.1.4 Viscoelasticidade

No século XIX, físicos como Kelvin, Voigt, Boltzmann e Maxwell estudaram o comportamento de materiais que se deformavam ao longo do tempo sob cargas constantes e que recuperavam estas deformações ao se retirar a carga. No século XX, os estudos desses materiais, chamados de viscoelásticos, se aprofundaram com o surgimento e a grande utilização dos polímeros sintéticos.

FLÜGGE (1975) estudou o comportamento de estruturas viscoelásticas e os modelos reológicos.

SOBOTKA (1984) apresentou as relações fundamentais para vários modelos reológicos, os comportamentos não-linearidades e analisou diversas estruturas viscoelásticas, inclusive, placas.

LEMAITRE & CHABOCHE (1990) também apresentaram diversos modelos reológicos, a análise de materiais viscoelásticos e a aplicação da mecânica da fratura e do dano em alguns modelos.

MUNAIAR (1994) tratou dos aspectos de formulação e resposta numérica de modelos viscoelásticos e elasto-viscoplásticos para a análise do comportamento de estruturas. Neste trabalho, também, são revistos os conceitos relativos aos modelos reológicos unidimensionais básicos e suas combinações.

HADDAD (1995) realizou um estudo geral sobre a viscoelasticidade, abordando assuntos como comportamento linear, não-linear, propagação de ondas, problemas de valores de contorno, termoviscoelasticidade e análises numéricas.

MUNAIAR (1998) a apresentou a formulação de modelos constitutivos viscoelásticos e elasto-viscoplásticos nos aspectos relativos à verificação da consistência termodinâmica, pela aplicação do Método do Estado Local, e de verificação da resposta numérica decorrente da utilização de um procedimento implícito de integração.

MESQUITA (2002) desenvolveu novas formulações, técnicas e procedimentos para o tratamento de problemas inelásticos considerando-se acoplamento progressivo. Com relação à viscoelasticidade aplicada ao MEC, foram apresentadas formulações específicas para os modelos de Kelvin-Voigt e Boltzmann para chapas, sendo as representações viscosas obtidas através de integrais de domínio e, posteriormente, por integrais de contorno.

## 1.2 OBJETIVO

Este trabalho tem por objetivo desenvolver formulações do Método dos Elementos de Contorno para placas viscoelásticas, considerando-se a Teoria de Kirchhoff e os modelos reológicos de Kelvin-Voigt e Boltzmann. Deste modo, inicialmente, pretende-se apresentar a formulação do MEC para placas elásticas pela Teoria de Kirchhoff que servirá de base para as formulações viscoelásticas. Em seguida, devem ser desenvolvidas as formulações para os modelos reológicos de Kelvin-Voigt e Boltzmann, onde as representações viscosas serão obtidas através de integrais de domínio e, em seguida, por integrais de contorno. Para finalizar o trabalho, pretende-se aplicar a técnica de suavização do sistema linear nas formulações viscoelásticas com representação no contorno.

## 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Neste item apresenta-se resumidamente o conteúdo de cada capítulo, que estão organizados de forma clara e seqüencial, com o objetivo de facilitar a compreensão dos conceitos abordados. O trabalho está dividido em 9 capítulos, sendo o primeiro a introdução.

No capítulo 2 são expostas as relações básicas da Teoria de Kirchhoff para a flexão de placas, as equações em coordenadas polares e as soluções fundamentais dos deslocamentos e esforços que são utilizadas nas formulações.

No capítulo 3, encontram-se as equações integrais de placas elásticas para pontos do domínio e do contorno e, em seguida, transformam-se as integrais de domínio do carregamento para integrais de contorno.

No capítulo 4, aplica-se o Método dos Elementos de Contorno para se obter soluções aproximadas para as equações integrais. O método consiste na divisão do contorno de uma placa em segmentos, onde as variáveis  $w$ ,  $\partial w / \partial n$ ,  $V_n$  e  $M_n$  são aproximadas por funções interpoladoras polinomiais. Assim, encontram-se equações algébricas com as quais é formado um sistema linear de equações que pode ser resolvido pela imposição das condições de contorno. Em seguida, com a obtenção dos valores incógnitos do sistema, os deslocamentos e esforços internos da placa são determinados. No final deste capítulo, apresentam-se alguns exemplos de análise de placas elásticas.

No capítulo 5 são expostas as relações básicas dos modelos reológicos uniaxiais elástico e viscoso e dos modelos viscoelásticos de Kelvin-Voigt e Boltzmann.

No capítulo 6, apresentam-se as formulações do MEC para placas viscoelásticas, onde se introduz os modelos reológicos de Kelvin-Voigt e de Boltzmann a partir do teorema de Betti e, dessa forma, são geradas integrais de domínio que podem ser solucionadas através da utilização de células internas e técnicas especiais de integração. No final deste capítulo são expostos alguns exemplos de análise de placas viscoelásticas.

No capítulo 7 são obtidas as formulações para os modelos de Kelvin-Voigt e Boltzmann com representações integrais apenas no contorno, que permitem a realização de análises viscoelásticas discretizando-se apenas o contorno do corpo. No final do capítulo, apresentam-se alguns exemplos de análise de placas viscoelásticas para estas formulações.

No capítulo 8, aplica-se a técnica de suavização do sistema linear nas formulações viscoelásticas com representação no contorno, com a intenção de se obter melhores resultados para discretizações pobres e descontinuidades nas condições de contorno, sendo analisados alguns exemplos no final do capítulo.

No capítulo 9 são expostas as conclusões e as considerações finais dos estudos desenvolvidos.

## 2. TEORIA DE PLACAS DELGADAS

---

### 2.1 INTRODUÇÃO

Placas são elementos estruturais simétricos em relação a um plano médio, solicitados por esforços externos normais a esse plano e a sua espessura é definida como a dimensão normal à superfície média, sendo pequena quando comparada com as demais (Figura 2.1).

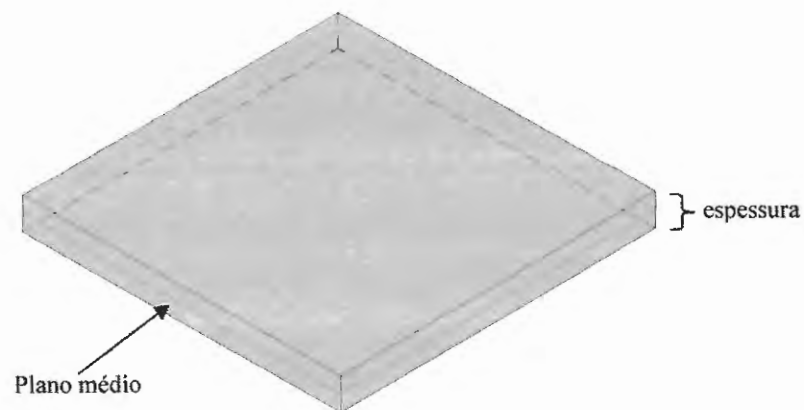


Figura 2.1 - Elemento de placa

Neste trabalho será adotada a Teoria Clássica ou de Kirchhoff, ou seja, serão analisadas placas delgadas com pequenos deslocamentos sob carregamentos transversais. Deste modo, as seguintes hipóteses de Kirchhoff são consideradas:

- o material é homogêneo, isotrópico e com comportamento elástico-linear;
- os deslocamentos transversais são pequenos em relação a espessura  $t$  da placa;
- não ocorrem deformações no plano médio da placa, sob o efeito de cargas transversais;
- o plano médio é admitido como superfície neutra;
- as tensões normais à superfície da placa são pequenas, quando comparadas às demais componentes de tensão, sendo desprezadas;
- uma reta normal ao plano médio mantém-se normal à superfície deformada, ou seja, são desconsideradas as deformações por cisalhamento transversal.

## 2.2 RELAÇÕES BÁSICAS DA TEORIA DE KIRCHHOFF

Com base nas hipóteses apresentadas, podem ser obtidas as relações e equações fundamentais da Teoria Clássica.

### 2.2.1 Deslocamentos

O deslocamento de um ponto qualquer de uma placa fletida pode ser escrito através de componentes  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ , respectivamente nas direções  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , dadas por um sistema cartesiano com origem no plano médio da placa, sendo as direções  $x_1$  e  $x_2$  coincidentes com este plano (Figura 2.2).

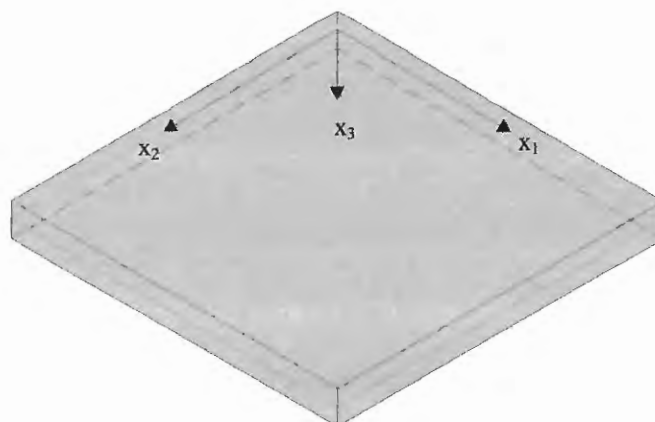


Figura 2.2 – Posicionamento do sistema cartesiano nas placas

Devido às hipóteses da teoria, o deslocamento transversal  $u_3$  dos pontos da placa será representado pelo deslocamento  $w$  do plano médio, assim sendo:

$$u_3 = w(x_1, x_2) \tag{2.1}$$

Considerando-se uma seção transversal paralela ao eixo  $x_1$  e  $x_3$ , pode-se observar que após a flexão, ocorre uma rotação dada por  $w_{,1}$  para um determinado ponto P (Figura 2.3).

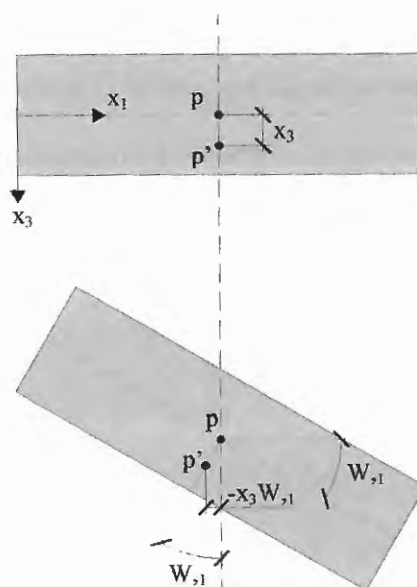


Figura 2.3 – Flexão de uma seção transversal de um elemento de placa

Como uma reta normal ao plano médio mantém-se normal à superfície deformada após a flexão, verifica-se que ocorre um deslocamento do ponto P na direção  $x_1$  no valor de:

$$u_1 = -x_3 w_{,1} \quad (2.2)$$

De forma semelhante, para a direção  $x_2$  se tem:

$$u_2 = -x_3 w_{,2} \quad (2.3)$$

Deste modo, de forma geral, se obtém:

$$u_i = -x_3 w_{,i} \quad (i = 1,2) \quad (2.4)$$

### 2.2.2 Deformações

Observando-se o deslocamento da posição inicial (Figura 2.4) a final (Figura 2.5) de um elemento de placa abcd, paralelo ao plano médio e a uma distância  $x_3$  deste.

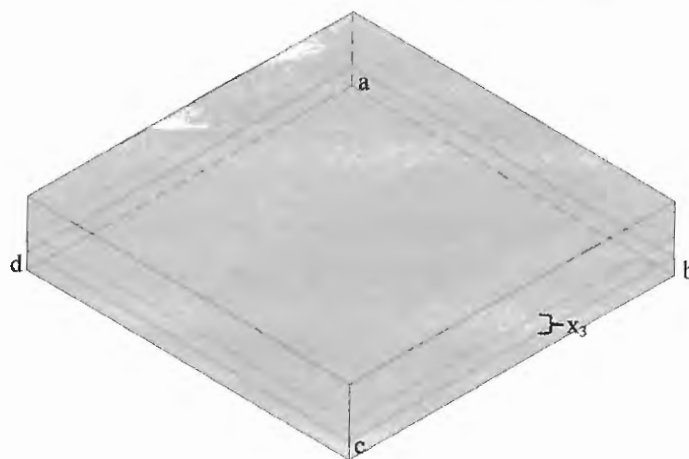


Figura 2.4 – Posição inicial do elemento abcd



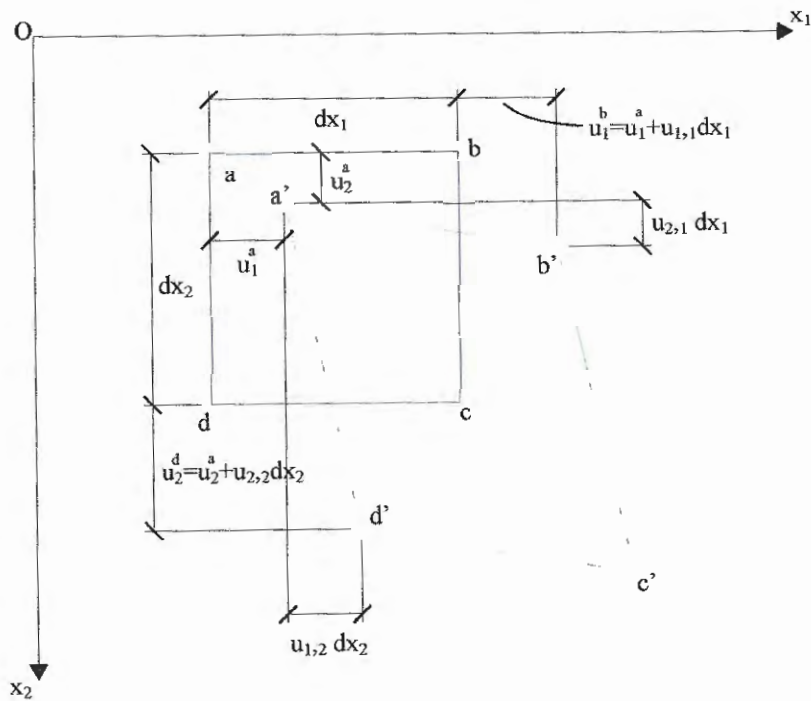


Figura 2.5 – Posição final do elemento abcd

Denominando-se de  $u_i^p$  o deslocamento na direção  $i$  de um ponto  $p$  qualquer, podem ser obtidas as seguintes equações:

$$u_1^b = u_1^a + u_{1,1} dx_1 \tag{2.5}$$

$$u_2^b = u_2^a + u_{2,1} dx_1 \tag{2.6}$$

$$u_1^d = u_1^a + u_{1,2} dx_2 \tag{2.7}$$

$$u_2^d = u_2^a + u_{2,2} dx_2 \tag{2.8}$$

Desta forma, para pequenos deslocamentos, as deformações nas direções  $x_1$  e  $x_2$  são dadas por:

$$\varepsilon_{11} = \frac{u_1^b - u_1^a}{dx_1} = u_{1,1} \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{u_2^d - u_2^c}{dx_2} = u_{2,2} \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{u_{1,2} - u_{2,1}}{2} \quad (2.11)$$

As equações podem ser escritas de forma geral, da seguinte maneira:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \quad (i,j = 1,2) \quad (2.12)$$

Substituindo-se equação (2.4) em (2.12), encontra-se a relação entre as deformações e os deslocamentos transversais do plano médio:

$$\varepsilon_{ij} = -x_3 w_{,ij} \quad (2.13)$$

### 2.2.3 Tensões

Com as deformações definidas em qualquer ponto da placa, as tensões podem ser obtidas através da Lei de Hooke, lembrando que estas são desprezíveis na direção normal ao plano médio. Portanto, tem-se:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (i,j,k = 1,2) \quad (2.14)$$

sendo:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.15)$$

onde:

G é o módulo de elasticidade transversal do material da placa;

E é o módulo de elasticidade longitudinal do material;

$\nu$  é o coeficiente de Poisson do material.

Substituindo-se (2.13) em (2.14), obtém-se:

$$\sigma_{ij} = -\frac{Ex_3}{(1-\nu^2)} \left[ \nu w_{,kk} \delta_{ij} + (1-\nu) w_{,ij} \right] \quad (i,j,k = 1,2) \quad (2.16)$$

#### 2.2.4 Esforços e Relações Diferenciais

Considerando-se uma placa submetida a uma carga transversal  $g$  qualquer, pode-se determinar os esforços que estão presentes nas faces de um elemento genérico desta placa através da integração das componentes de tensão que estão atuando ao longo da espessura (Figuras 2.6 e 2.7).

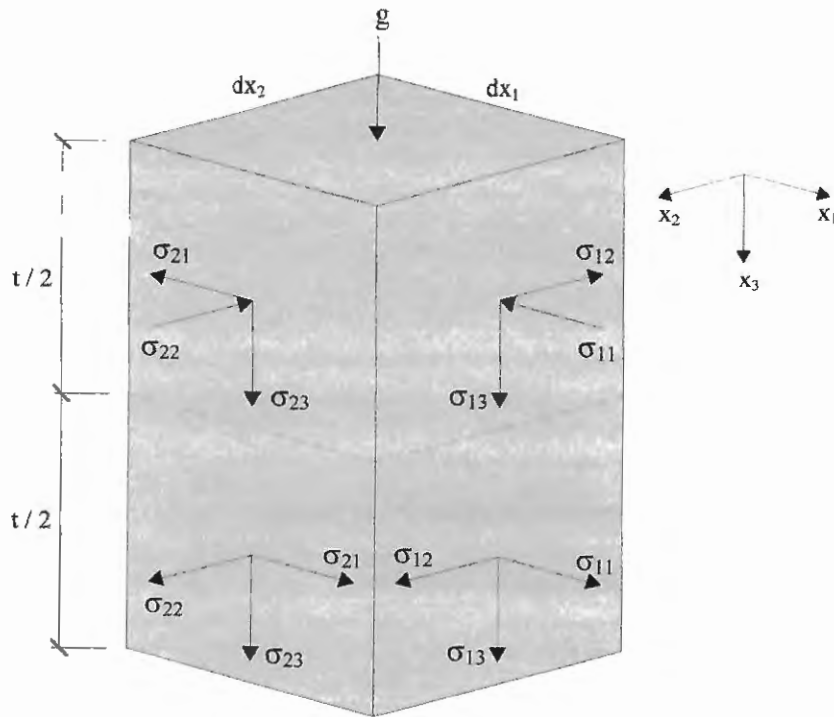


Figura 2.6 – Tensões em um elemento de placa

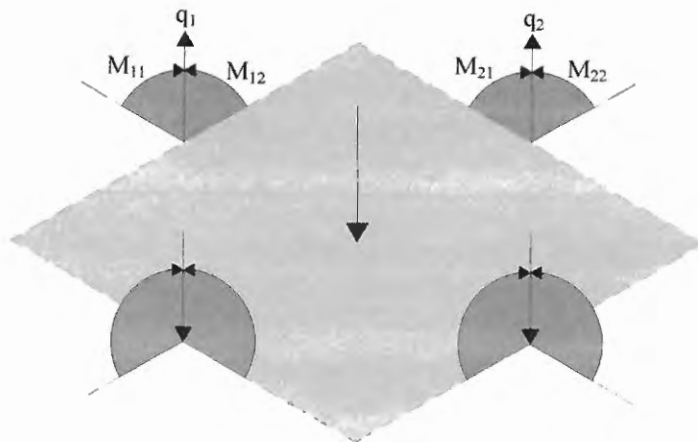


Figura 2.7 – Esforços em um elemento de placa

A integração destas tensões ao longo da espessura do elemento é dada pelas equações (2.17) e (2.18) e os esforços obtidos serão os momentos e as forças cortantes por unidade de comprimento.

$$M_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3 \quad (i,j = 1,2) \quad (2.17)$$

$$q_i = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{i3} dx_3 \quad (i,j = 1,2) \quad (2.18)$$

As equações dos momentos podem ser expressas em função dos deslocamentos transversais, ao se substituir (2.16) em (2.17) e se realizando a integração, resultando em:

$$M_{ij} = -D \left[ \nu w_{,kk} \delta_{ij} + (1-\nu) w_{,ij} \right] \quad (i,j,k = 1,2) \quad (2.19)$$

onde D é a rigidez à flexão da placa, expressa por:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Considerando-se o elemento de placa da Figura 2.8 com os esforços e o carregamento g distribuído indicados, podem-se determinar as equações de equilíbrio de forças verticais e de momentos em torno dos eixos x<sub>1</sub> e x<sub>2</sub>, dados por:

$$q_{i,i} + g = 0 \quad (i = 1,2) \quad (2.20)$$

$$M_{ij,i} - q_j = 0 \quad (i,j = 1,2) \quad (2.21)$$

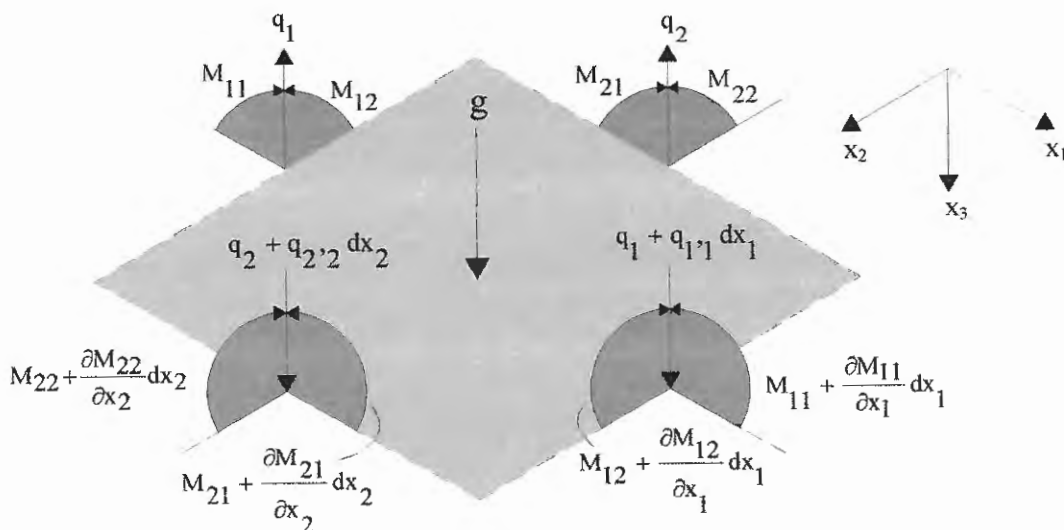


Figura 2.8 – Elemento de placa

Para, também, se obter as equações dos esforços cortantes em função dos deslocamentos transversais, é necessário aplicar a equação (2.19) em (2.21), assim:

$$q_j = -Dw_{,kkj} \quad (j,k = 1,2) \quad (2.22)$$

Substituindo-se (2.20) em (2.21) através de  $q$ , é encontrada a equação diferencial de placas em função dos momentos, expressa por:

$$M_{ij,ij} + g = 0 \quad (i,j = 1,2) \quad (2.23)$$

Em seguida, aplicando-se (2.19) em (2.23), se obtém a equação diferencial de placas em função dos deslocamentos transversais:

$$w_{,kkll} = \frac{g}{D} \quad (k,l = 1,2) \quad (2.24)$$

Utilizando o operador de Laplace em (2.24), se tem:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{g}{D} \quad (2.25)$$

onde:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (2.26)$$

2.2.5 Sistema Genérico de Coordenadas

Nos problemas de placas, algumas variáveis do contorno são calculadas em relação a um sistema genérico de coordenadas  $n$  e  $s$ , sendo  $n$  a direção normal e  $s$  a direção tangencial ao contorno, assim sendo, é necessário também se conhecer os esforços em relação a este sistema. Deste modo, considere o plano médio de um elemento de placa  $abc$ , onde o sistema genérico de coordenadas é adotado para os esforços da face inclinada (Figuras 2.9 a 2.11).

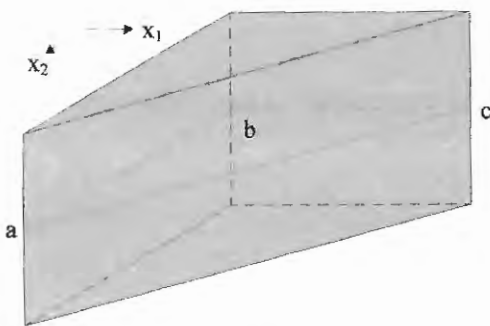


Figura 2.9 – Elemento de placa abc

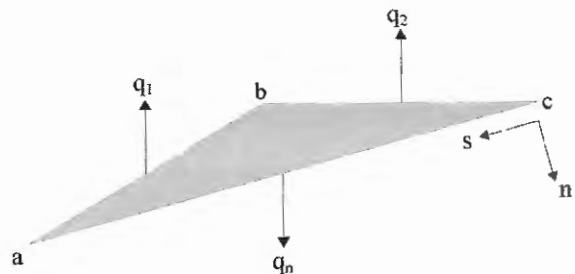


Figura 2.10 – Forças cortantes no elemento de placa abc

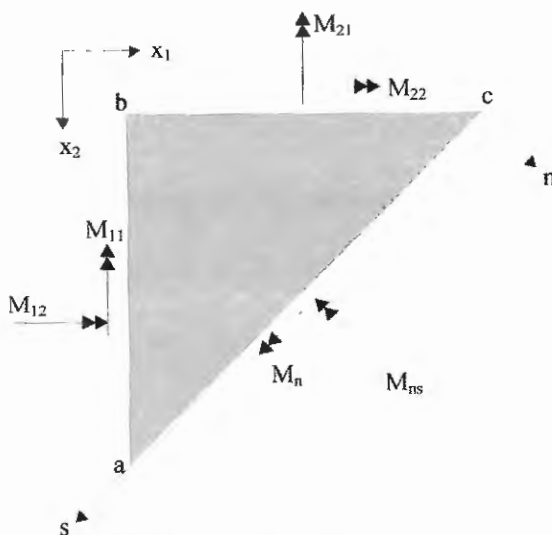


Figura 2.11 – Momentos no elemento de placa abc

Realizando o equilíbrio dos momentos atuantes no elemento abc, as seguintes relações são obtidas:

$$M_n = M_{ij} n_i n_j \quad (i,j = 1,2) \quad (2.27)$$

$$M_{ns} = M_{ij} n_i s_j \quad (i,j = 1,2) \quad (2.28)$$

Desta maneira,  $M_n$  e  $M_{ns}$  são os momentos atuantes na face ac do elemento, sendo  $n_j$  e  $s_j$ , respectivamente, os cossenos diretores das direções n e s.

De forma análoga aos momentos, ao se efetuar o equilíbrio das forças cortantes no elemento abc, se tem a relação dada por:

$$q_n = q_i n_i \quad (i = 1,2) \quad (2.29)$$

### 2.2.6 Força Cortante Equivalente

Nos problemas de placas, usualmente, existem seis condições de contorno, que são o deslocamento transversal  $w$ , a derivada do deslocamento em relação à normal  $\partial w / \partial n$ , a derivada do deslocamento em relação à tangente  $\partial w / \partial s$ , o momento normal  $M_n$ , o momento volvente  $M_{ns}$  e a força cortante normal  $q_n$ . Como a equação diferencial (2.25) é de quarta ordem, apenas duas condições de contorno precisam ser satisfeitas de um total de apenas quatro, deste modo, para a eliminação de duas das condições usuais, a Teoria Clássica desconsidera  $\partial w / \partial s$  e demonstra que a força cortante e o momento volvente devem ser agrupados em uma única condição denominada força cortante equivalente  $V_n$ .

Para isso, considere um ponto P pertencente ao contorno de uma placa, no qual se define um sistema de coordenadas n e s, e dois elementos infinitesimais consecutivos, cuja



junção passa sobre P (Figura 2.12). Os momentos volventes resultantes que estão atuando em cada elemento podem ser decompostos em um binário de forças de intensidade  $M_{ns}$ , aplicados nas extremidades do elemento (Figura 2.13). Observa-se que na junção dos elementos, após a decomposição (Figura 2.14), pode ser obtida uma força vertical resultante de valor  $(\partial M_{ns}/\partial s)ds$ , que somada a força cortante no ponto P, dada por  $q_n ds$ , resulta na força cortante equivalente  $V_n ds$ .

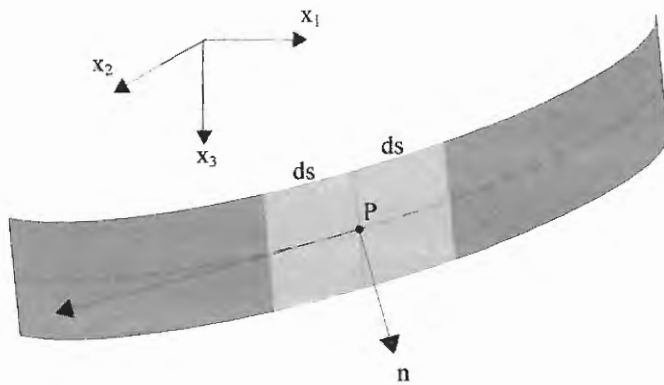


Figura 2.12 – Elementos infinitesimais no contorno da placa

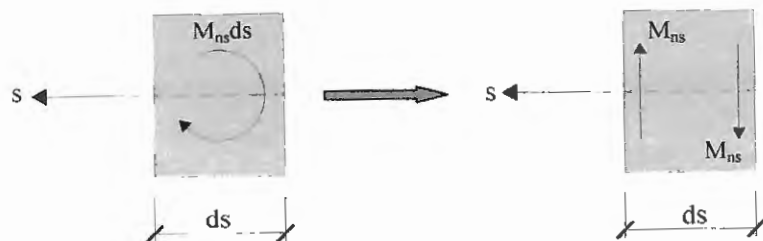


Figura 2.13 – Decompondo os momentos volventes

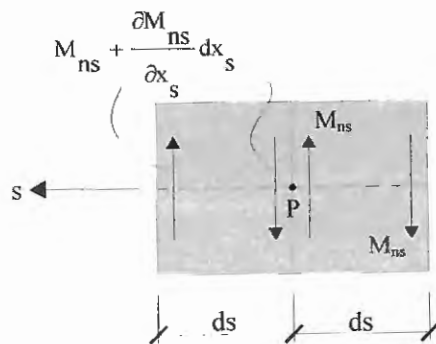


Figura 2.14 – Unindo os elementos após a decomposição

Desta maneira, a equação da força cortante equivalente por unidade de comprimento fica expressa da seguinte forma:

$$V_n = q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \quad (2.30)$$

Essa substituição de forças não modifica a flexão de placas, pois não altera os valores de  $M_{ns}$ , mas afeta a distribuição de tensões na vizinhança do contorno, de acordo com o princípio de St. Venant.

### 2.3 EQUAÇÕES DE PLACAS EM COORDENADAS POLARES

Na solução fundamental para problemas de placas é conveniente que a equação diferencial e todas as outras relações estejam referidas a um sistema de coordenadas polares. Portanto, conforme a Figura 2.15, um ponto P de coordenadas  $(x_1, x_2)$  pode ser definido em função de sua distância  $r$  em relação à origem O do sistema e pelo ângulo  $\theta$  formado pelo eixo  $x_1$  e o segmento OP.

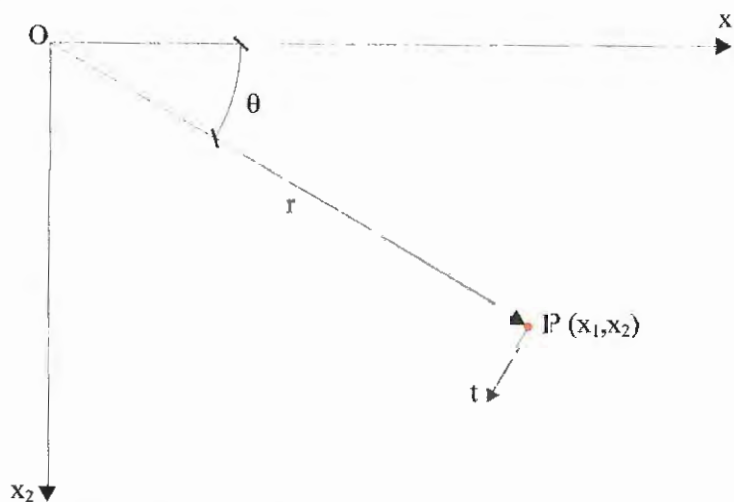


Figura 2.15 – Sistema de coordenadas polares

As equações, que relacionam as coordenadas cartesianas e polares do ponto P, são expressas por:

$$x_1 = r_1 = r \cos \theta \quad (2.31)$$

$$x_2 = r_2 = r \sin \theta \quad (2.32)$$

De forma inversa, se tem:

$$r^2 = r_1 r_2 \quad (2.33)$$

$$\theta = \arctan \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \quad (2.34)$$

Com as quatro relações anteriores, se obtém as relações das derivadas:

$$r_{,1} = \frac{r_1}{r} = \cos \theta \quad (2.35)$$

$$r_{,2} = \frac{r_2}{r} = \sin \theta \quad (2.36)$$

$$\theta_{,1} = -\frac{r_2}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r} \quad (2.37)$$

$$\theta_{,2} = \frac{r_1}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \quad (2.38)$$

Derivando-se as equações (2.35) e (2.36) em relação a  $\theta$  e as equações (2.37) e (2.38) em relação a  $r$ , resulta em:

$$\frac{\partial r_{,1}}{\partial \theta} = -\text{sen}\theta \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial r_{,2}}{\partial \theta} = \text{cos}\theta \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \theta_{,1}}{\partial r} = \frac{\text{sen}\theta}{r^2} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial \theta_{,2}}{\partial r} = -\frac{\text{cos}\theta}{r^2} \quad (2.42)$$

Os cossenos diretores do vetor  $t$ , indicado na Figura 2.14, são dados por:

$$t_1 = -r_{,2} = -\text{sen}\theta \quad (2.43)$$

$$t_2 = r_{,1} = \text{cos}\theta \quad (2.44)$$

Aplicando (2.43) e (2.44) nas equações (2.37) a (2.42), se tem:

$$\theta_{,i} = \frac{t_i}{r} \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial r_{,i}}{\partial \theta} = t_i \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \theta_{,i}}{\partial r} = -\frac{t_i}{r^2} \quad (2.47)$$

Considerando o deslocamento  $w$  função de  $r$  e  $\theta$ , a sua derivada em relação à coordenada genérica  $x_i$  pode ser expressa da seguinte forma:

$$w_{,i} = \frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{\partial w}{\partial r} r_{,i} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \theta_{,i} \quad (2.48)$$

Com a equação anterior, pode-se definir o operador diferencial de primeira ordem:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial r} r_{,i} + \frac{\partial}{\partial \theta} \theta_{,i} \quad (2.49)$$

A segunda derivada de  $w$  é encontrada ao se aplicar (2.49) em (2.48), resultando em:

$$w_{,ij} = \left[ \frac{\partial}{\partial r} r_{,i} + \frac{\partial}{\partial \theta} \theta_{,i} \right] \left[ \frac{\partial w}{\partial r} r_{,j} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \theta_{,j} \right] \quad (2.50)$$

Desenvolvendo as derivadas:

$$\begin{aligned} w_{,ij} = & \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (r_{,i} r_{,j}) + \frac{\partial w}{\partial r} \left( \frac{\partial r_{,j}}{\partial \theta} \theta_{,i} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} (\theta_{,j} r_{,i} + \theta_{,i} r_{,j}) + \\ & + \frac{\partial w}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \theta_{,j}}{\partial r} r_{,i} + \frac{\partial \theta_{,j}}{\partial \theta} \theta_{,i} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} (\theta_{,i} \theta_{,j}) \end{aligned} \quad (2.51)$$

No caso de placas, onde o problema fundamental apresenta simetria em relação à origem do sistema de coordenadas polares, o deslocamento  $w$  é função apenas de  $r$ , pois o seu valor não varia com  $\theta$ . Deste modo, a equação (2.51) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$w_{,ij} = \frac{d^2 w}{dr^2} (r_{,i} r_{,j}) + \frac{dw}{dr} \left( \frac{\partial r_{,j}}{\partial \theta} \theta_{,i} \right) \quad (2.52)$$

Substituindo-se (2.45) e (2.46) em (2.52), pode-se definir o operador diferencial de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = (r_{,i} r_{,j}) \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} (t_i t_j) \frac{d}{dr} \quad (2.53)$$

Repetindo-se os índices em (2.53) e considerando que  $r_{,k} r_{,k} = t_k t_k = 1$ , se obtém o operador de Laplace em coordenadas polares para o deslocamento:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \quad (2.54)$$

Assim sendo, a equação diferencial de placas em coordenadas polares é dada por:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{g}{D} \quad (2.55)$$

ou

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{g}{D} \quad (2.56)$$

As equações dos esforços, também, podem ser obtidas em coordenadas polares, sendo que para os momentos é necessário aplicar os operadores (2.53) e (2.54) em (2.19), resultando em:

$$M_{ij} = -D \left\{ \frac{d^2 w}{dr^2} [\delta_{ij} \nu + (1-\nu)(r_{,i} r_{,j})] + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} [\delta_{ij} \nu + (1-\nu)(t_{,i} t_{,j})] \right\} \quad (2.57)$$

Para as forças cortantes, primeiramente, deve-se obter a terceira derivada do deslocamento através dos operadores (2.49) e (2.54):

$$w_{,kki} = r_{,i} \left( \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \quad (2.58)$$

Em seguida, se substitui (2.58) em (2.22), assim, encontrando:

$$q_i = -Dr_{,i} \left( \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \quad (2.59)$$

As equações do momento normal e volvente e da força cortante equivalente, também, podem ser expressas em coordenadas polares, sendo assim, aplicando-se (2.57) em (2.27) e (2.28), têm-se os momentos:

$$M_n = -D \left\{ \frac{d^2 w}{dr^2} [\nu + (1-\nu)(r_{,i} n_i)^2] + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} [\nu + (1-\nu)(r_{,i} s_i)^2] \right\} \quad (2.60)$$

$$M_{ns} = -D(1-\nu)(r_{,i} n_i)(r_{,j} s_j) \left( \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (2.61)$$

Para se obter a força cortante equivalente, primeiramente, deve-se encontrar a força cortante normal ao substituir (2.59) em (2.29):

$$q_n = -D(r, n_i) \left( \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \quad (2.62)$$

Em seguida, a derivada de  $M_{ns}$  em relação à direção  $s$ , para isso, considere um ponto genérico  $P$  que corresponde à origem de um vetor normal  $n$  e outro tangente  $s$  ao contorno (Figura 2.16).

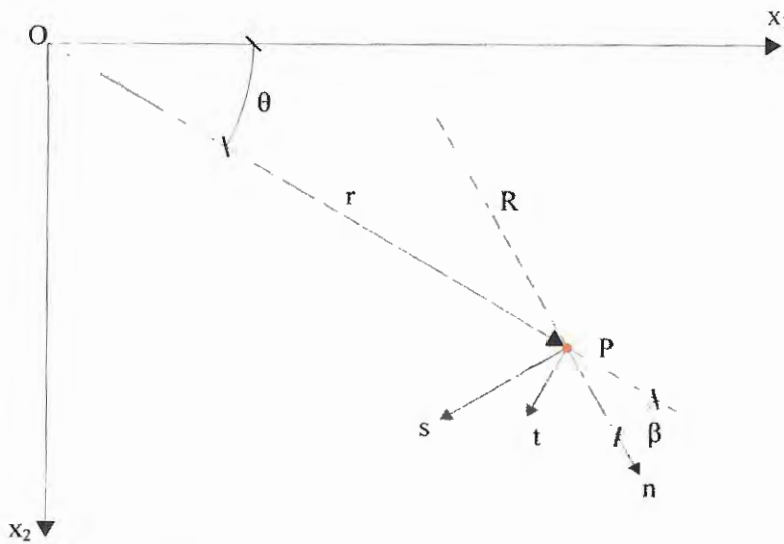


Figura 2.16 – Vetores  $n$  e  $s$  no ponto  $P$  do contorno da placa

Nesta figura é possível verificar que os produtos escalares envolvidos em (2.61) podem ser expressos em função do ângulo  $\beta$ , através das equações:

$$r_{,i} n_i = \cos \beta \quad (2.63)$$

$$r_{,j} s_j = \cos \left( \frac{\pi}{2} + \beta \right) = -\sin \beta \quad (2.64)$$



Aplicando estas duas últimas equações em (2.61), obtém-se:

$$M_{ns} = D(1-\nu)\cos\beta\sin\beta\left(\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) \quad (2.65)$$

Como  $M_{ns}$  depende de  $r$  e  $\beta$ , a sua derivada em relação à  $s$  é dada por:

$$\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{\partial M_{ns}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} \quad (2.66)$$

Analisando a Figura 2.15, sabe-se que:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = r_{,i} s_i = -\sin\beta \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{1}{R} - \frac{\cos\beta}{r} \quad (2.68)$$

onde:

$R$  é o raio de curvatura do contorno no ponto  $P$ .

Portanto, derivando-se (2.65) em relação à  $\beta$  e  $r$ , em seguida, substituindo os resultados e as equações (2.67) e (2.68) em (2.66), se tem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = & -D(1-\nu)\cos\beta \left[ \operatorname{sen}^2\beta \left( -\frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{4\operatorname{sen}^2\beta - 1}{r} \left( \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right] + \\
& + \frac{D(1-\nu)}{R} (1 - 2\operatorname{sen}^2\beta) \left( \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Finalmente, aplicando-se (2.62) e (2.69) em (2.30), encontra-se a expressão da força cortante equivalente:

$$\begin{aligned}
V_n = & -D(1-\nu)(n_i r_{,i}) \left\{ \left[ (s_j r_{,j})^2 + \frac{1}{1-\nu} \right] \left( \frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1 - 4(s_j r_{,j})^2}{r} \left( \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right\} + \\
& + \frac{D(1-\nu)}{R} [1 - 2(s_j r_{,j})^2] \left( \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)
\end{aligned} \tag{2.70}$$

## 2.4 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE PLACAS

A solução fundamental de placas corresponde ao deslocamento transversal  $w$  em um ponto  $p$  qualquer, chamado de ponto de deslocamento ou campo, devido a uma carga unitária aplicada em  $q$ , chamado de ponto de carregamento ou fonte, em um domínio infinito (Figura 2.17).

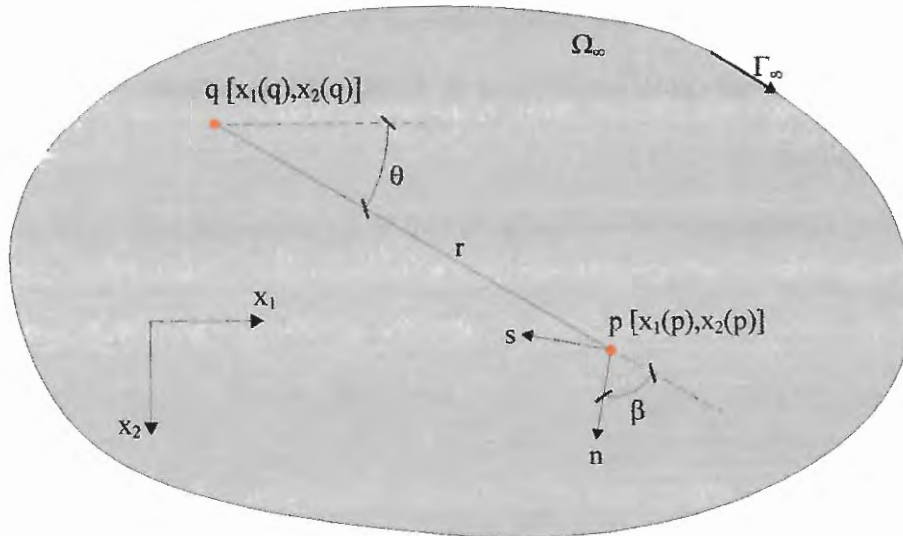


Figura 2.17 – Ponto campo p e fonte q em um domínio de placa infinito

Este carregamento unitário pode ser representado pela função delta de Dirac, denotada por  $\delta(q, p)$ , que apresenta as seguintes propriedades:

$$\delta(q, p) = 0, \text{ para } p \neq q \tag{2.71}$$

$$\delta(q, p) = \infty, \text{ para } p = q \tag{2.72}$$

Para uma função contínua qualquer  $\phi$ , também, se tem:

$$\int_{\Omega_\infty} \phi(p) \delta(q, p) d\Omega_\infty = \phi(q) \tag{2.73}$$

pois,

$$\int_{\Omega_\infty} \delta(q, p) d\Omega_\infty = 1 \tag{2.74}$$

Desta maneira, através das propriedades, pode-se confirmar que a resultante do carregamento representado pela função delta de Dirac sobre o domínio fundamental é uma força unitária aplicada no ponto  $q$ .

A solução fundamental será obtida ao se aplicar a distribuição delta de Dirac em (2.25) no lugar de  $g$ :

$$\nabla^2 \nabla^2 w^* = \frac{\delta(q, p)}{D} \quad (2.75)$$

onde:

$w^*$  é a solução fundamental.

Conforme as propriedades da função delta de Dirac, para todo o domínio, menos no ponto  $q$ , esta equação é expressa da seguinte forma:

$$\nabla^2 \nabla^2 w^* = 0 \quad (2.76)$$

Considerando um sistema de coordenadas polares com origem em  $q$  e a simetria existente no problema, pode-se aplicar a distribuição delta de Dirac do mesmo modo em (2.55):

$$\nabla^2 \nabla^2 w^* = \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr} \right) = 0 \quad (2.77)$$

ou

$$\frac{d^4 w^*}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w^*}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw^*}{dr} = 0 \quad (2.78)$$

Integrando-se (2.78) é encontrada a seguinte solução:

$$w^* = \frac{C_1}{4} r^2 \ln r + (C_2 - C_1) \frac{r^2}{8} + C_3 \ln r + C_4 \quad (2.79)$$

onde:

$C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  são constantes.

Como existe simetria em relação ao ponto  $q$ , verifica-se que  $dw^* / dr = 0$  para  $r = 0$  e, dessa forma,  $C_3 = 0$ . Para a constante  $C_1$ , pode-se obter o seu valor a partir da condição de equilíbrio das forças verticais atuantes em um círculo de raio  $r$  com uma carga unitária aplicada no ponto central  $q$  (Figura 2.18).

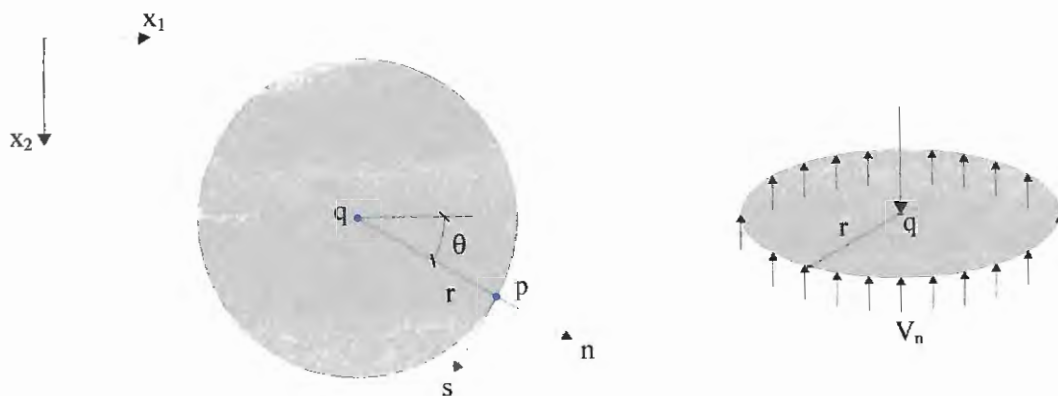


Figura 2.18 – Forças atuantes em um círculo de raio  $r$  com uma carga unitária no centro  $q$

A força cortante equivalente  $V_n$  necessária para equilibrar a carga unitária, em qualquer ponto da circunferência, corresponde a:

$$V_n = -\frac{1}{2\pi r} \quad (2.80)$$

Para este caso, o ângulo  $\beta$  é nulo em todos os pontos da circunferência e, conseqüentemente,  $r_{,i} n_i = 1$  e  $r_{,j} n_j = 0$ . Sendo assim, obtém-se para a equação (2.70) da força cortante equivalente:

$$V_n = -D \left( \frac{d^3 w^*}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w^*}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw^*}{dr} \right) \quad (2.81)$$

Substituindo-se (2.80) em (2.81) e expressando-se  $V_n$  em função do Laplaciano em coordenadas polares, tem-se:

$$-D \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr} \right) = -\frac{1}{2\pi r} \quad (2.82)$$

Aplicando-se (2.79) em (2.82), resulta em:

$$C_1 = \frac{1}{2\pi D} \quad (2.83)$$

Substituindo-se (2.83) e  $C_3 = 0$  em (2.79), se tem:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r + \frac{r^2}{8} \left( C_2 - \frac{1}{2\pi D} \right) + C_4 \quad (2.84)$$

Os valores das constantes  $C_2$  e  $C_4$  são definidos pelas condições de contorno do problema, sendo o raio infinito no caso do problema fundamental, estes valores podem ser quaisquer. Neste trabalho será utilizada a sugestão de DANSON (1979), que adota  $C_2 = C_4 = 0$ , sendo assim, se obtém a seguinte solução fundamental, em termos dos deslocamentos:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) \quad (2.85)$$

A partir da expressão (2.85), podem ser calculados outros valores importantes do problema fundamental, como a derivada dos deslocamentos em relação à normal, o momento normal, o momento volvente e a força cortante equivalente. Para o primeiro, sabendo-se que  $w^*$  é função apenas de  $r$ , se tem:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{dw^*}{dr} \frac{dr}{dn} \quad (2.86)$$

Substituindo (2.85) em (2.86) e calculando a derivada, resulta em:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r(r, n_i) \quad (2.87)$$

Para os esforços, aplicando (2.85) em (2.60), (2.61), (2.70) e, em seguida, calculando as derivadas, são encontradas as seguintes expressões:

$$M_n^* = -\frac{1}{4\pi} \left[ (1+\nu) \ln r + (1-\nu)(r_{,i} n_i)^2 + \nu \right] \quad (2.88)$$

$$M_{ns}^* = -\frac{1}{4\pi} (1-\nu)(r_{,i} n_i)(r_{,j} s_j) \quad (2.89)$$

$$V_n^* = \frac{r_{,i} n_i}{4\pi r} \left[ 2(1-\nu)(r_{,j} s_j)^2 - 3 + \nu \right] + \frac{1-\nu}{4\pi r} \left[ 1 - 2(r_{,i} s_i)^2 \right] \quad (2.90)$$

onde:

$r$  é a distância entre os pontos  $p$  e  $q$ , dada por:

$$r = \left\{ [x_1(p) - x_1(q)]^2 + [x_2(p) - x_2(q)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.91)$$

Deve-se, também, determinar as derivadas desses valores do problema fundamental em relação à direção  $m$  de um sistema de coordenadas  $m$  e  $u$ , com origem em  $q$  (Figura 2.19).

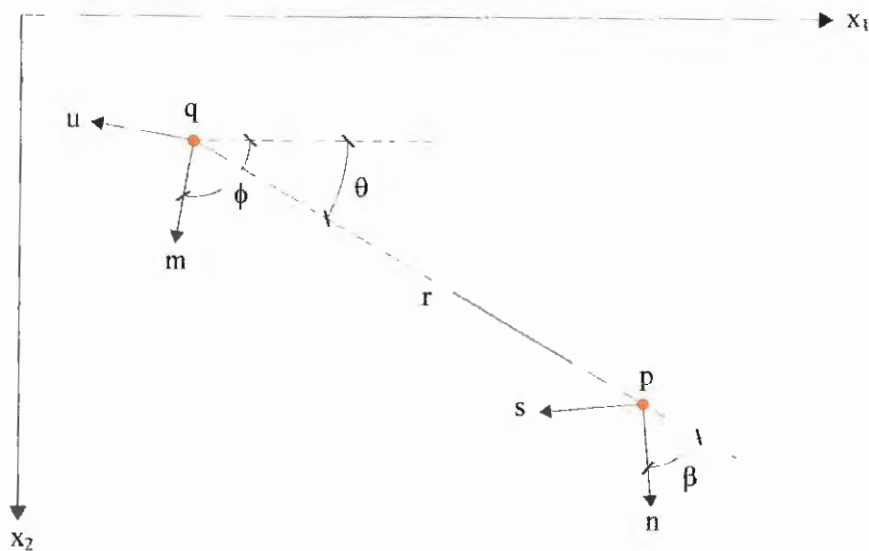


Figura 2.19 – Sistema de coordenadas  $m$  e  $u$ , com origem em  $q$



A derivada do deslocamento  $w^*$  será dada por:

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = \frac{dw^*}{dr} \frac{\partial r}{\partial m} \quad (2.92)$$

onde:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{\partial r}{\partial x_i(q)} \frac{\partial x_i(q)}{\partial m} \quad (2.93)$$

Sendo  $m_i = \partial x_i(q) / \partial m$  os cossenos diretores de  $\vec{m}$  em relação ao sistema de coordenadas  $x_1$  e  $x_2$ , tem-se:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{\partial r}{\partial x_i(q)} m_i \quad (2.94)$$

As derivadas de  $r$  em relação à direção  $x_i$ , definidas no ponto  $q$ , são calculadas a partir de (2.91) e valem:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i(q)} = \frac{x_i(q) - x_i(p)}{r} = -r_{,i} \quad (2.95)$$

$$\frac{\partial r_{,i}}{\partial x_j(q)} = -\frac{\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}}{r} = -r_{,ij} \quad (2.96)$$

Aplicando-se (2.95) em (2.94), obtém-se:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = -r_{,i} m_i \quad (2.97)$$

Dessa forma, substituindo (2.97) em (2.92), encontra-se a derivada do deslocamento fundamental em relação à direção  $m$ :

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = -\frac{r}{4\pi D} \ln r (r_{,i} m_i) \quad (2.98)$$

Utilizando-se (2.96), os outros valores fundamentais podem ser obtidos das equações (2.87) a (2.90), que são:

$$\frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) = -\frac{1}{4\pi D} \left[ (r_{,i} m_i)(r_{,j} n_j) + (m_i n_i) \ln r \right] \quad (2.99)$$

$$\frac{\partial M_n^*}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r} \left\{ (1+\nu)(r_{,i} m_i) + 2(1-\nu)(r_{,i} n_i) \left[ (m_j n_j) + (r_{,j} m_j)(r_{,k} n_k) \right] \right\} \quad (2.100)$$

$$\frac{\partial M_{ns}^*}{\partial m} = \frac{1-\nu}{4\pi r} \left[ (m_i n_i)(r_{,j} s_j) + (m_i s_i)(r_{,j} n_j) + 2(r_{,i} m_i)(r_{,j} n_j)(r_{,k} s_k) \right] \quad (2.101)$$

$$\frac{\partial V_n^*}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ 2(1-\nu)(r_{,i} s_i) \left[ 4(r_{,j} s_j)(r_{,k} m_k)(r_{,l} n_l) + 2(m_j s_j)(r_{,k} n_k) - (m_j n_j)(r_{,k} s_k) \right] + (3-\nu) \left[ (m_i n_i) + 2(r_{,i} m_i)(r_{,j} n_j) \right] \right\} + \frac{1-\nu}{\pi R r} (r_{,i} s_i) \left[ (m_j s_j) - (r_{,j} m_j)(r_{,k} s_k) \right] \quad (2.102)$$

### **3. EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA FLEXÃO DE PLACAS**

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Para se aplicar o Método dos Elementos de Contorno é necessário, inicialmente, se encontrar a equação integral que representa o problema, para isso, pode ser usado o método dos resíduos ponderados, o teorema da reciprocidade de Betti, a terceira identidade de Green ou o princípio dos trabalhos virtuais. Neste trabalho, tais equações serão obtidas a partir do primeiro teorema de Betti, primeiramente, para pontos do domínio e, a seguir, para pontos do contorno.

#### 3.2 EQUAÇÃO INTEGRAL PARA UM PONTO DO DOMÍNIO DA PLACA

Considere uma placa isotrópica qualquer de contorno  $\Gamma$ , domínio  $\Omega$  e submetida a um carregamento  $g$  distribuído em uma área de domínio  $\Omega_g$ , contida em uma outra de domínio infinito  $\Omega_\infty$  e contorno  $\Gamma_\infty$  (Figura 3.1).

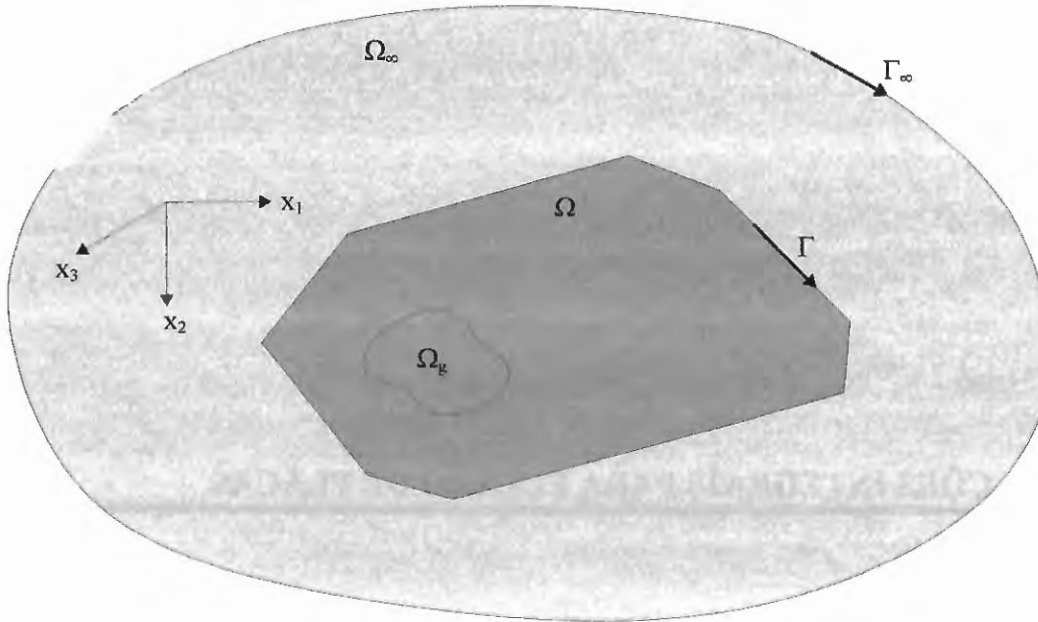


Figura 3.1 – Placa do domínio finito contida em uma de domínio infinito

A placa de domínio finito estará associada a dois carregamentos não simultâneos:  $g$  atuando no sólido finito, problema real, e  $g^*$  que atua no domínio infinito, porém definindo os diversos campos de um problema de placas também no domínio finito. Portanto o último carregamento pertencente ao problema fundamental. Desses carregamentos podem ser obtidas as superfícies elásticas  $w$  e  $w^*$ , os estados de tensão  $\sigma_{ij}$  e  $\sigma_{ij}^*$  e as deformações  $\varepsilon_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}^*$ , todos definidos no domínio real  $\Omega$ . Deste modo, pode-se aplicar o teorema de Betti através da seguinte expressão:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV \quad (i,j = 1,2,3) \quad (3.1)$$

Chamando-se de  $U$  o termo à esquerda da igualdade e desprezando-se, segundo as propriedades apresentadas no item 2.1, as deformações por cisalhamento transversal e as tensões relativas à direção  $x_3$ , se obtém:

$$U = \int_V (\sigma_{11} \varepsilon_{11}^* + \sigma_{22} \varepsilon_{22}^* + \sigma_{12} \varepsilon_{12}^*) dV \quad (3.2)$$

Substituindo-se (2.13) e (2.16) em (3.2) e, em seguida, integrando-se ao longo da espessura, se tem a expressão de  $U$  em função de uma integral sobre o domínio  $\Omega$ :

$$U = \int_{\Omega} -(M_{ij} w_{,ij}^*) d\Omega \quad (3.3)$$

Integrando-se por partes (3.3) em relação à coordenada  $x_j$ , vem:

$$U = - \int_{\Gamma} M_{ij} w_{,i}^* n_j d\Gamma + \int_{\Omega} M_{ij,j} w_{,i}^* d\Omega \quad (3.4)$$

onde:

$n_j$  são os cossenos diretores do vetor normal ao contorno da placa.

Integrando-se por partes a integral de domínio de (3.4) em relação à  $x_i$ , se tem:

$$U = - \int_{\Gamma} M_{ij} w_{,i}^* n_j d\Gamma + \int_{\Gamma} M_{ij,j} w^* n_i d\Gamma - \int_{\Omega} M_{ij,ij} w^* d\Omega \quad (3.5)$$

Aplicando-se (2.23) na integral de domínio de (3.5) e, em seguida, (2.21) e (2.29) na integral de contorno positiva, resulta em:

$$U = - \int_{\Gamma} M_{ij} w_{,i}^* n_j d\Gamma + \int_{\Gamma} q_n w^* d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.6)$$

As derivadas de  $w^*$  em relação à  $x_i$  podem ser calculadas da seguinte forma:

$$w_{,i}^* = \frac{\partial w^*}{\partial x_i} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x_i} + \frac{\partial w^*}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_i} \quad (3.7)$$

ou

$$w_{,i}^* = \frac{\partial w^*}{\partial n} n_i + \frac{\partial w^*}{\partial s} s_i \quad (3.8)$$

onde:

$s_i$  são os cossenos diretores do vetor tangente ao contorno da placa.

Aplicando (3.8) na integral de contorno negativa de (3.6), encontra-se:

$$U = - \int_{\Gamma} \left( M_{ij} n_i n_j \frac{\partial w^*}{\partial n} + M_{ij} s_i n_j \frac{\partial w^*}{\partial s} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} q_n w^* d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.9)$$

Substituindo-se (2.27) e (2.28) em (3.9) e unindo as integrais de contorno, vem:

$$U = - \int_{\Gamma} \left( M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} - q_n w^* \right) d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.10)$$

Integrando-se por partes o segundo termo da integral de contorno de (3.10), se obtém:

$$\int_{\Gamma} \left( M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} \right) d\Gamma = \left[ M_{ns} w^* \right]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \quad (3.11)$$

onde:

$\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são os limites do contorno em que está sendo realizada a integração.

Para contornos fechados, que permitem uma representação paramétrica e possuem derivadas contínuas, o primeiro termo do lado direito da igualdade de (3.11) se anula. Entretanto, quando existem angulosidades ou cantos no contorno, este termo não se anula, desta forma, gerando as reações de canto.

As reações de canto, representadas por  $R_{ci}$ , podem ser obtidas para todos os cantos genéricos  $i$  de uma placa (Figura 3.2) através da seguinte expressão:

$$R_{ci} = M_{nsi}^+ - M_{nsi}^- \tag{3.12}$$

onde:

$M_{nsi}^+$  e  $M_{nsi}^-$  são, respectivamente, os momentos volventes posterior e anterior ao canto  $i$ .

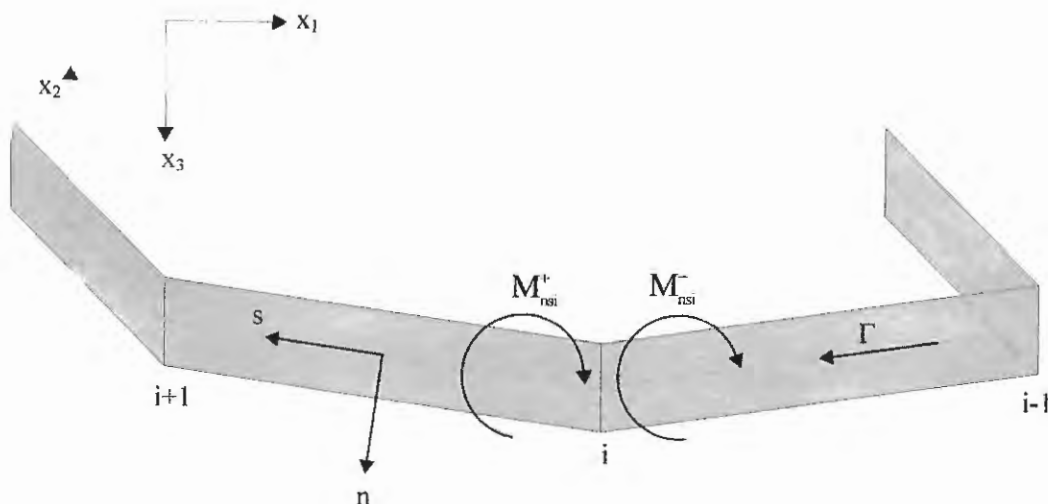


Figura 3.2 – Momentos volventes em um canto  $i$  da placa

Deste modo, aplicando (3.12) em (3.11), encontra-se:

$$\int_{\Gamma} \left( M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} \right) d\Gamma = - \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \quad (3.13)$$

onde:

$N_c$  é o número total de cantos no contorno.

$w_{ci}^*$  é o valor do deslocamento  $w^*$  no canto  $i$ .

Substituindo-se (3.13) em (3.10), tem-se:

$$U = \int_{\Gamma} \left( q_n w^* + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega} g w^* d\Omega \quad (3.14)$$

Considerando a definição da força cortante equivalente, dada em (2.30), e que a carga  $g$  está aplicada em  $\Omega_g$ , se obtém:

$$U = \int_{\Gamma} \left( V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \quad (3.15)$$

Desenvolvendo de forma semelhante o termo à esquerda da igualdade de (3.1), vem:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV = \int_{\Gamma} \left( V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega} g^* w d\Omega \quad (3.16)$$



Dessa forma, unindo (3.15) e (3.16), se tem o desenvolvimento completo da equação (3.1):

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left( V_n^* w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* w_{ci} + \int_{\Omega} g^* w d\Omega = \int_{\Gamma} \left( V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \end{aligned} \quad (3.17)$$

Como foi visto no item 2.4, os deslocamentos e os esforços fundamentais são obtidos a partir do deslocamento transversal em um ponto campo qualquer, sendo este denominado  $p$  quando localizado no domínio e  $P$  quando no contorno, devido a uma carga unitária aplicada em um ponto fonte  $q$  em uma placa de domínio infinito.

Para o problema real, os deslocamentos e os esforços são funções apenas do deslocamento em  $p$ , pois a posição do carregamento é fixa.

Desta forma, trocando  $g^*$  pela sua representação matemática, dada pela função delta de Dirac, e expressando cada variável em função de seus respectivos pontos em (3.17), se encontra:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta(q, p) w(p) d\Omega(p) + \int_{\Gamma} \left( V_n^*(q, P) w(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left( V_n(P) w^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Aplicando-se a propriedade do delta de Dirac, dada por (2.73), no primeiro termo de (3.18), se tem:

$$\int_{\Omega} \delta(q, p) w(p) d\Omega(p) = w(q) \quad (3.19)$$

onde:

$w(q)$  é o deslocamento no ponto de carregamento, ocasionado pela carga  $g$ .

Deste modo, substituindo-se (3.19) em (3.18), obtém-se a equação integral do deslocamento de um ponto  $q$  do domínio da placa, em função dos deslocamentos e esforços do contorno:

$$\begin{aligned} w(q) + \int_{\Gamma} \left( V_n^*(q, P) w(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left( V_n(P) w^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Derivando-se (3.20) em relação à  $m$ , obtém-se a equação integral da derivada direcional do deslocamento em relação à direção  $m$ , para o ponto  $q$  do domínio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(q)}{\partial m} + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(q, P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left( V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, P) - M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[ \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \right) d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (3.21)$$

### 3.3 EQUAÇÃO INTEGRAL PARA UM PONTO DO CONTORNO DA PLACA

Para a formulação dos problemas de placas é necessário se obter, também, as equações integrais para um ponto do contorno. Sendo assim, considere um ponto Q do contorno que passa a pertencer ao domínio pelo o acréscimo de um contorno circular  $\Gamma_\xi$ , com o centro em Q e raio  $\xi$ , e pela retirada da parcela  $\bar{\Gamma}$  (Figura 3.3).

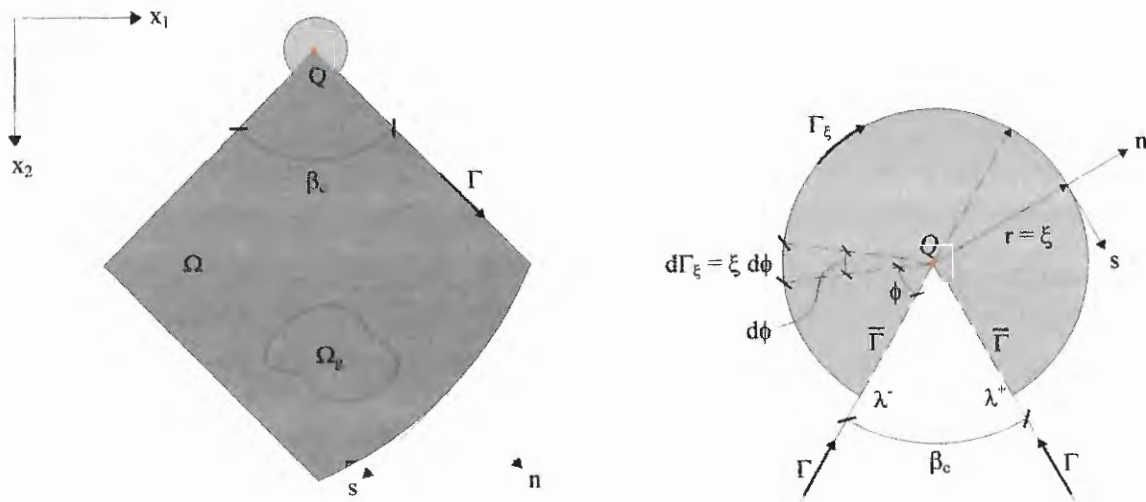


Figura 3.3 – Contorno circular acrescido a um ponto Q de um canto

O novo contorno pode ser escrito como  $\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\xi$  e aplicando-o na equação (3.20) para o ponto Q, resulta em:

$$\begin{aligned}
 & w(Q) + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left( V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & + \int_{\Gamma_\xi} \left( V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi(P) + \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{c_i}^*(Q, P) w_{c_i}(P) + \\
 & + R_{c_{\lambda^-}}^*(Q, P) w_{c_{\lambda^-}}(P) + R_{c_{\lambda^+}}^*(Q, P) w_{c_{\lambda^+}}(P) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left( V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) + \\
&+ \int_{\Gamma_\xi} \left( V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma_\xi(P) + \\
&+ \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{c_i}(P) w_{c_i}^*(Q, P) + R_{c_{i^-}}(P) w_{c_{i^-}}^*(Q, P) + R_{c_{i^+}}(P) w_{c_{i^+}}^*(Q, P) + \\
&+ \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Desta forma, o ponto Q pertencerá ao contorno quando o raio  $\xi$  e, conseqüentemente, as parcelas  $\Gamma_\xi$  e  $\bar{\Gamma}$  tenderem a zero, assim, calculando os limites:

$$\begin{aligned}
&w(Q) + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left( V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\
&+ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left( V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi(P) + \\
&+ \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{c_i}^*(Q, P) w_{c_i}(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ R_{c_{i^-}}^*(Q, P) w_{c_{i^-}}(P) + R_{c_{i^+}}^*(Q, P) w_{c_{i^+}}(P) \right] = \\
&= \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left( V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) + \\
&+ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left( V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma_\xi(P) + \\
&+ \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{c_i}(P) w_{c_i}^*(Q, P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ R_{c_{i^-}}(P) w_{c_{i^-}}^*(Q, P) + R_{c_{i^+}}(P) w_{c_{i^+}}^*(Q, P) \right] + \\
&+ \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Os limites das integrais de  $\Gamma - \bar{\Gamma}$  resultam no valor principal das mesmas, logo, se obtêm:

$$\begin{aligned} \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left( V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) &= \\ &= \int_{\Gamma} \left( V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left( V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) &= \\ &= \int_{\Gamma} \left( V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) \end{aligned} \quad (3.25)$$

A integral de  $\Gamma_\xi$  do lado esquerdo da igualdade de (3.23), pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left( V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi(P) &= \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left( V_n^*(Q, P) [w(P) - w(Q)] - M_n^*(Q, P) \left[ \frac{\partial w}{\partial n}(P) - \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \right] \right) d\Gamma_\xi(P) &+ \\ + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_n^*(Q, P) w(Q) d\Gamma_\xi(P) - \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) d\Gamma_\xi(P) & \end{aligned} \quad (3.26)$$

Considerando-se válida a continuidade ou fazendo o uso da condição de Hölder (JASWON & SYMM, 1977), expressa por:

$$|w(P) - w(Q)| \leq C_1 r^{\alpha_1(P, Q)} \quad (3.27)$$

$$\left| \frac{\partial w}{\partial n}(P) - \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \right| \leq C_2 r^{\alpha_2(P, Q)} \quad (3.28)$$

onde:

$C_1$  e  $C_2$  são constantes.

$0 < \alpha_i \leq 1$  para  $i = 1, 2$

tem-se a anulação da primeira integral do lado direito da igualdade de (3.26) e como  $w(Q)$  e  $\partial w(Q) / \partial n$  são valores do domínio, deste modo, não variando ao longo de  $\Gamma_\xi$ , se obtém para a equação (3.26) a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left( V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi(P) = \\ = w(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_n^*(Q, P) d\Gamma_\xi(P) - \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} M_n^*(Q, P) d\Gamma_\xi(P) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Observando-se que neste caso tem-se:

$$r_{,j} n_{,j} = 1 \quad (3.30)$$

$$r_{,j} s_{,j} = 0 \quad (3.31)$$

$$r = R = \xi \quad (3.32)$$

Em seguida, substituindo os valores de  $V_n^*$  e  $M_n^*$ , dados por (2.88) e (2.90), em (3.29), encontra-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left( V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi(P) = \\ = w(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} -\frac{1}{2\pi\xi} d\Gamma_\xi(P) + \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \frac{1}{4\pi} [(1+\nu) \ln \xi + 1] d\Gamma_\xi(P) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Como  $d\Gamma_\xi(p) = \xi d\phi$ , a equação (3.33) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left( V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi(P) = \\ = w(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi - \beta_c} -\frac{1}{2\pi\xi} \xi d\phi + \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi - \beta_c} \frac{1}{4\pi} [(1 + \nu) \ln \xi + 1] \xi d\phi \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde:

$\beta_c$  é o ângulo interno do canto da placa, conforme Figura 3.3.

Desenvolvendo as integrais de (3.34), vem:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left( V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi(P) = -\frac{2\pi - \beta_c}{2\pi} w(Q) \quad (3.35)$$

Calculando-se de forma semelhante, a outra integral sobre  $\Gamma_\xi$  em (3.23), verifica-se que o seu valor será nulo, do mesmo modo, todos os limites das parcelas referentes às reações de canto serão nulos. Portanto, aplicando estas considerações e as equações (3.24), (3.25) e (3.35) em (3.23), se obtém a expressão da equação integral para um ponto do contorno:

$$\begin{aligned} K(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left( V_n^*(Q, P)w(P) - M_n^*(Q, P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q, P)w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left( V_n(P)w^*(Q, P) - M_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P)w_{ci}^*(Q, P) + \int_{\Omega_g} g(p)w^*(Q, p)d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde:

$$K(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi} \quad (3.37)$$

No caso particular onde o ponto  $Q$  não pertence a um canto, o valor de  $\beta_c$  será igual a  $\pi$  e, assim:

$$K(Q) = \frac{1}{2} \quad (3.38)$$

De forma análoga ao realizado no item 3.2, derivando-se (3.36) em relação à  $m$ , obtém-se a equação integral da derivada direcional do deslocamento em relação à direção  $m$ , para o ponto  $Q$  do contorno.

### 3.4 TRANSFORMAÇÃO DAS INTEGRAIS DE DOMÍNIO DO CARREGAMENTO EM INTEGRAIS DE CONTORNO

Para se aplicar o Método dos Elementos de Contorno em problemas de placas é necessário que as integrais de domínio referente ao carregamento distribuído em  $\Omega_g$ , presente nas equações (3.20), (3.21) e (3.36), sejam transformadas em integrais de contorno. Sendo assim, conforme a Figura 3.4, considere um domínio  $\Omega_g$ , seu contorno  $\Gamma_g$  e um ponto fonte  $q$ .



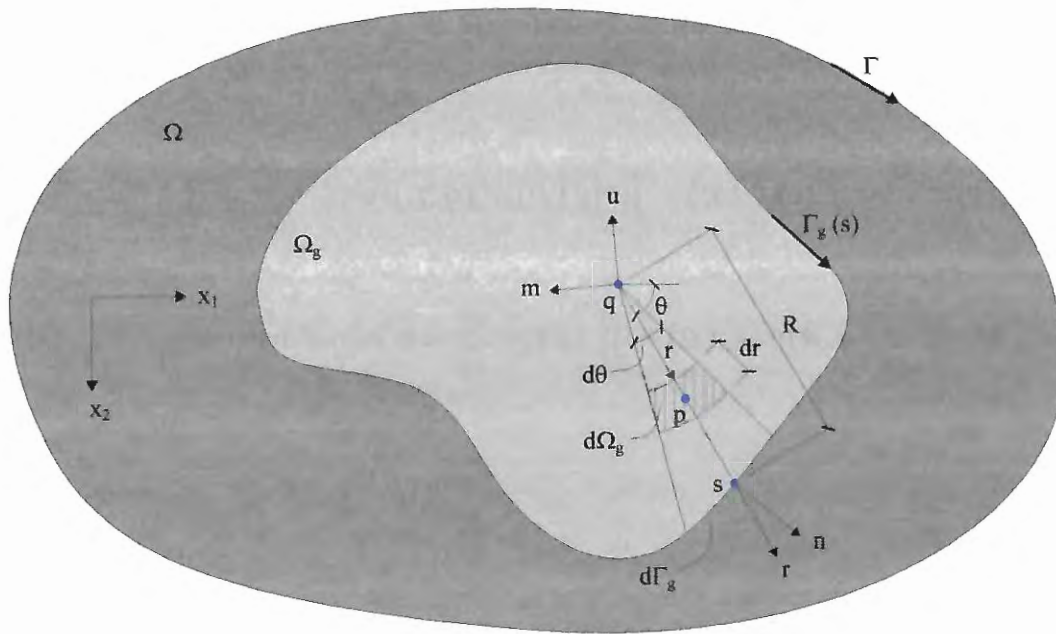


Figura 3.4 – Ponto q no domínio  $\Omega_g$

Através da figura, as seguintes relações podem ser encontradas:

$$d\Omega_g = r dr d\theta \tag{3.39}$$

$$d\theta = \frac{r_{2i} n_i}{R} d\Gamma_g \tag{3.40}$$

onde:

$r_{,i}$  são os cossenos diretores do vetor  $r$ .

$n_i$  são os cossenos diretores da normal  $n$ .

Substituindo-se (3.39) em (3.40), se tem:

$$d\Omega_g = r dr \frac{r_{2i} n_i}{R} d\Gamma_g \tag{3.41}$$

Aplicando (3.41) nas integrais de domínio de (3.20) e (3.21), obtém-se:

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) = \int_{\Gamma_g} \left( \int_0^R g(p) w^*(q, p) r dr \right) \frac{r_{,i} n_i}{R} d\Gamma_g \quad (3.42)$$

$$\int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) d\Omega_g(p) = \int_{\Gamma_g} \left( \int_0^R g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) r dr \right) \frac{r_{,i} n_i}{R} d\Gamma_g \quad (3.43)$$

onde:

R é o valor de r para um ponto qualquer do contorno  $\Gamma_g$ .

Considerando-se que a carga aplicada em  $\Omega_g$  varia linearmente, se encontra a seguinte expressão para g(p) em relação ao sistema  $x_1$  e  $x_2$ :

$$g(p) = Ax_1(p) + Bx_2(p) + C \quad (3.44)$$

Para o ponto q da figura anterior, se tem as seguintes relações entre os sistemas de coordenadas cartesianas e polares:

$$x_1(p) = x_1(q) + r \cos \theta \quad (3.45)$$

$$x_2(p) = x_2(q) + r \sin \theta \quad (3.46)$$

Assim, a equação (3.44) pode ser reescrita como:

$$g(p) = A \cos \theta + B \sin \theta + g(q) \quad (3.47)$$

Sendo  $g(q)$  o valor da intensidade da carga no ponto  $q$ , vem:

$$g(q) = Ax_1(q) + Bx_2(q) + C \quad (3.48)$$

Substituindo-se (3.47) e (2.85) em (3.42) e, em seguida, realizando-se a integração em relação à  $r$ , se obtém a integral sobre o contorno  $\Gamma_g$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) &= \frac{g(q)}{32\pi D_{\Gamma_g}} \int R^3 \left( \ln R - \frac{3}{4} \right) r_{,i} n_i d\Gamma_g + \\ &+ \frac{1}{40\pi D_{\Gamma_g}} \int R^4 \left( \ln R - \frac{7}{10} \right) (A \cos \theta + B \sin \theta) r_{,i} n_i d\Gamma_g \end{aligned} \quad (3.49)$$

Para a derivada direcional em relação à  $m$ , de forma análoga, aplica-se (3.47) e (2.98) em (3.43), realiza-se a integração e, assim, se tem:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, p) d\Omega_g(p) &= -\frac{g(q)}{12\pi D_{\Gamma_g}} \int R^2 \left( \ln R - \frac{1}{3} \right) r_{,i} m_i r_{,j} n_j d\Gamma_g + \\ &- \frac{1}{16\pi D_{\Gamma_g}} \int R^3 \left( \ln R - \frac{1}{4} \right) (A \cos \theta + B \sin \theta) r_{,i} m_i r_{,j} n_j d\Gamma_g \end{aligned} \quad (3.50)$$

Nestas equações, as cargas pontuais ou em linha devem ser consideradas como casos particulares em que o domínio  $\Omega_g$  tende a um ponto ou a uma linha.

## **4. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADOS A PROBLEMAS DE PLACAS**

---

### 4.1 INTRODUÇÃO

As equações integrais obtidas no capítulo anterior possuem solução analítica somente para poucos casos simples, por isso, é importante se utilizar os métodos numéricos para a obtenção de soluções aproximadas. Neste trabalho, será aplicado o Método dos Elementos de Contorno para obterem-se estas soluções, sendo que este consiste na divisão do contorno de uma placa em segmentos, denominados elementos de contorno, onde as variáveis  $w$ ,  $\partial w / \partial n$ ,  $V_n$  e  $M_n$  são aproximadas por funções interpoladoras polinomiais definidas em função dos nós posicionados em cada elemento. Assim, as equações integrais transformam-se em equações algébricas, escritas em função dos valores das variáveis em cada nó ou valores de contorno.

Com todas as equações algébricas resultantes será formado um sistema linear de equações que pode ser resolvido pela imposição das condições de contorno, que definem as variáveis consideradas incógnitas ou prescritas em cada nó. Em seguida, com a obtenção dos

valores incógnitos do sistema, pode-se determinar os deslocamentos e esforços internos da placa.

## 4.2 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS

A discretização das equações integrais será obtida pela divisão do contorno de uma placa em uma seqüência de elementos (Figura 4.1), sendo que a escolha da quantidade e da forma desses elementos é realizada com o objetivo de se representar de maneira adequada o contorno real.

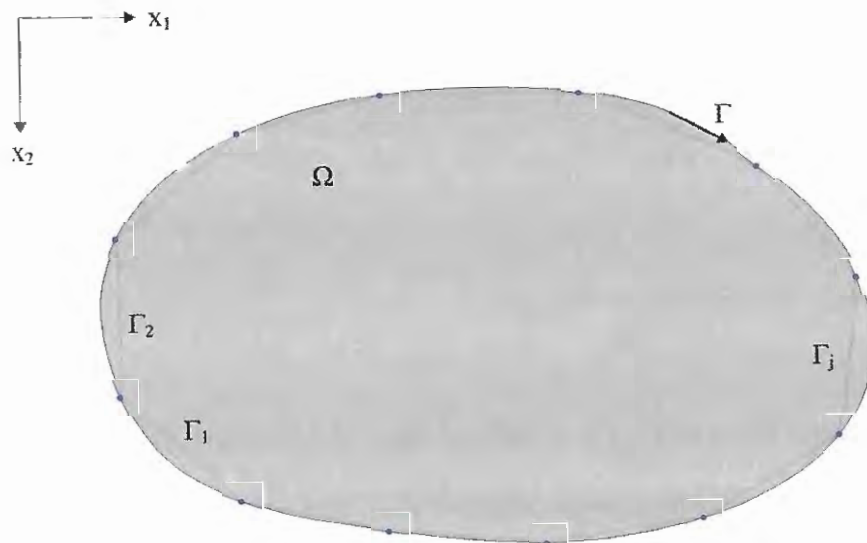


Figura 4.1 – Discretização do contorno em elementos

### 4.2.1 Aproximação da Geometria do Elemento

Para a aproximação da geometria dos elementos serão utilizadas funções lineares, ou seja, serão elementos retos. Como muitas das integrais que devem ser realizadas para a

aplicação do Método dos Elementos de Contorno são numéricas, é necessário expressar estas funções e, conseqüentemente, as coordenadas de cada ponto P de um elemento em relação às coordenadas locais homogêneas  $\xi$  (Figura 4.2).

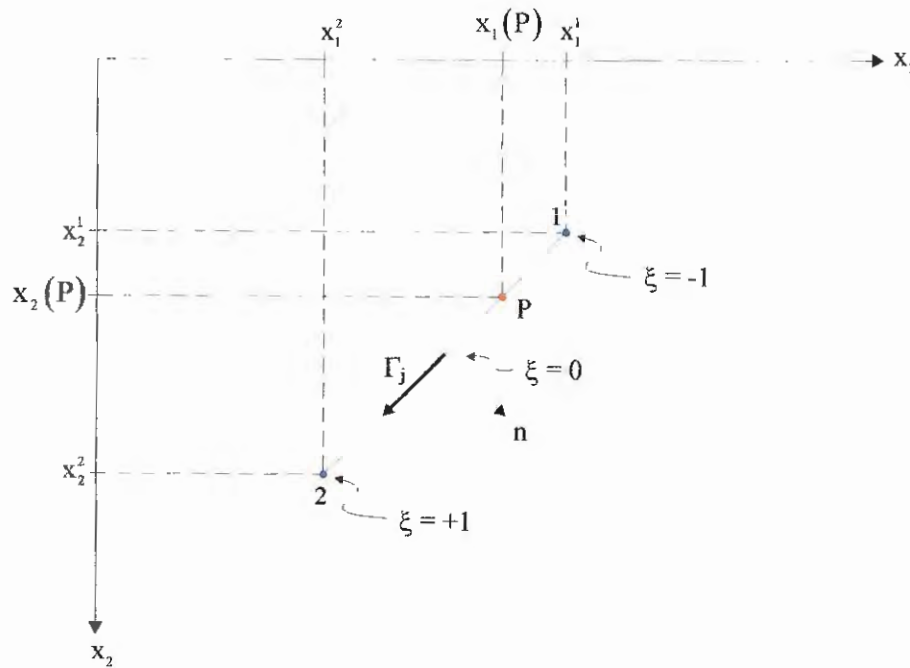


Figura 4.2 – Geometria do elemento

Conforme a figura anterior, considerando que 1 é o nó inicial e 2 é o final, se tem para o ponto P as seguintes coordenadas em função de  $\xi$ :

$$x_1(P) = \frac{x_1^1 + x_1^2}{2} + \xi \left( \frac{x_1^2 - x_1^1}{2} \right) \quad (4.1)$$

$$x_2(P) = \frac{x_2^1 + x_2^2}{2} + \xi \left( \frac{x_2^2 - x_2^1}{2} \right) \quad (4.2)$$

onde:

$x_i^N$  é a coordenada na direção  $i$  do nó  $N$ .

As equações (4.1) e (4.2) podem ser escritas de uma forma geral da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} x_1(P) \\ x_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(p) & \phi_2(p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(p) & \phi_2(p) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_2^1 \\ x_2^2 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

onde:

$$\phi_1(P) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (4.4)$$

$$\phi_2(P) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.5)$$

As equações (4.4) e (4.5) corresponderão às funções aproximadoras para a geometria dos elementos em relação às coordenadas locais homogêneas.

#### 4.2.2 Aproximação das Variáveis do Problema

Para a aproximação das variáveis serão utilizadas funções polinomiais quadráticas, dessa forma, será necessário definir três nós em cada elemento, que podem estar posicionados em qualquer ponto. Neste trabalho, os nós 1 e 3 estarão, respectivamente, nas coordenadas locais  $\xi_1$  e  $\xi_3$ , e o nó 2 estará no centro do elemento, ou seja,  $\xi_2 = 0$  (Figura 4.3).

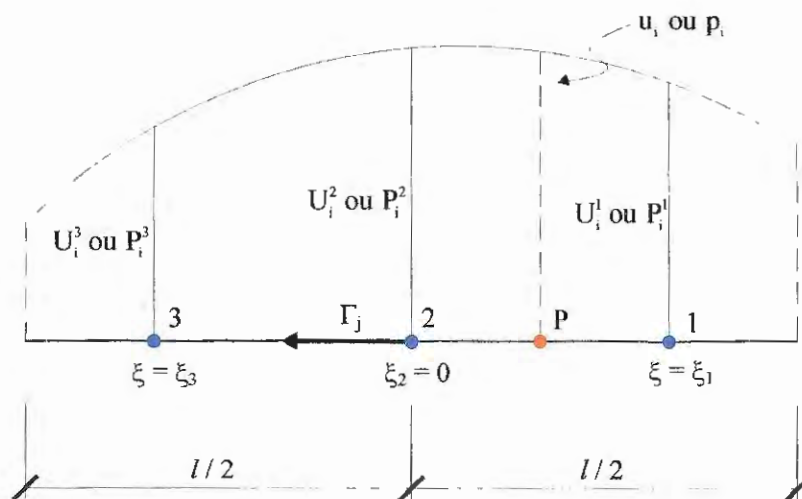


Figura 4.3 – Aproximação das variáveis por elemento quadrático

Através da figura anterior, verifica-se que é possível obter os vetores dos deslocamentos  $u_i$  ou esforços  $p_i$ , para qualquer ponto  $P$  do elemento, em termos dos valores nodais  $U_i^N$  e  $P_i^N$ . Para isso, as seguintes expressões devem ser utilizadas:

$$\begin{Bmatrix} u_1(P) \\ u_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 & \phi_3(P) & 0 \\ 0 & \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 & \phi_3(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_1^3 \\ U_2^3 \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

onde:

$u_1(P)$  é o deslocamento  $w(P)$ .

$u_2(P)$  é o giro  $\partial w(P) / \partial n$ .



$U_1^N$  são os deslocamentos para os nós N do elemento.

$U_2^N$  são as rotações para os nós N do elemento.

e

$$\begin{Bmatrix} p_1(P) \\ p_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 & \phi_3(P) & 0 \\ 0 & \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 & \phi_3(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_1^2 \\ P_2^2 \\ P_1^3 \\ P_2^3 \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

onde:

$p_1(P)$  é a força cortante equivalente  $V_n(P)$ .

$p_2(P)$  é o momento normal  $M_n(P)$ .

$P_1^N$  são as forças cortantes equivalentes para os nós N do elemento.

$P_2^N$  são os momentos normais para os nós N do elemento.

Nas equações (4.6) e (4.7),  $\phi_i$  são as funções aproximadoras quadráticas para as variáveis do problema em relação às coordenadas locais homogêneas (Figura 4.4), sendo expressas da seguinte forma:

$$\phi_1(P) = \frac{1}{\xi_1(\xi_3 - \xi_1)} (\xi_3 - \xi) \xi \quad (4.8)$$

$$\phi_2(P) = 1 - \frac{\xi_3 + \xi_1}{\xi_1 \xi_3} \xi + \frac{1}{\xi_1 \xi_3} \xi^2 \quad (4.9)$$

$$\phi_3(P) = \frac{1}{\xi_3 (\xi_1 - \xi_3)} (\xi_1 - \xi) \xi \quad (4.10)$$

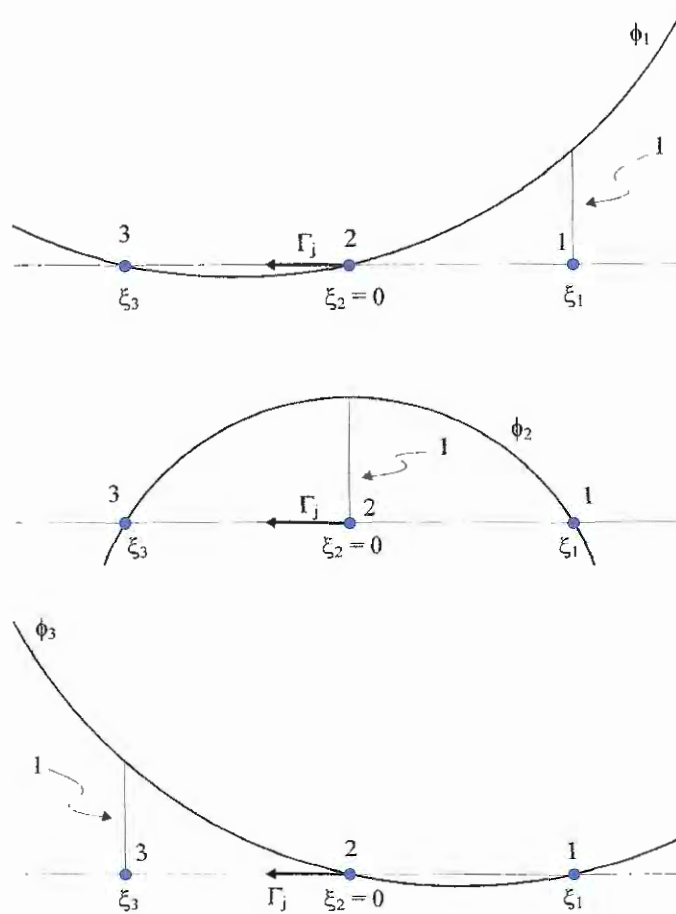


Figura 4.4 – Funções aproximadoras quadráticas

As funções estão escritas de forma geral para que possam ser utilizadas em elementos descontínuos, os quais permitem mudanças nos valores de contorno em nós adjacentes, como ocorre em cantos e em mudanças de vinculação em um mesmo lado de uma placa. Para gerar este tipo elemento é necessário fazer o uso de nós duplos, que consiste em posicionar dois nós na extremidade coincidente entre dois elementos consecutivos e, em seguida, deslocar cada um para o interior de um desses elementos (Figura 4.5).

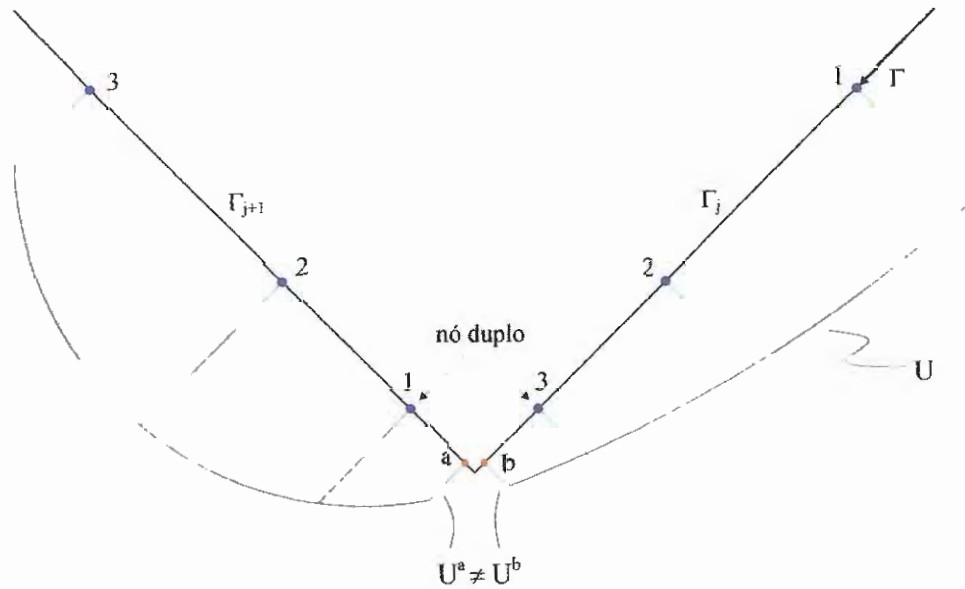


Figura 4.5 – Elemento descontínuo

Nós casos em que não existe descontinuidade nas variáveis do contorno, pode-se utilizar os elementos contínuos, que possuem nós em comum com os elementos adjacentes (Figura 4.6).

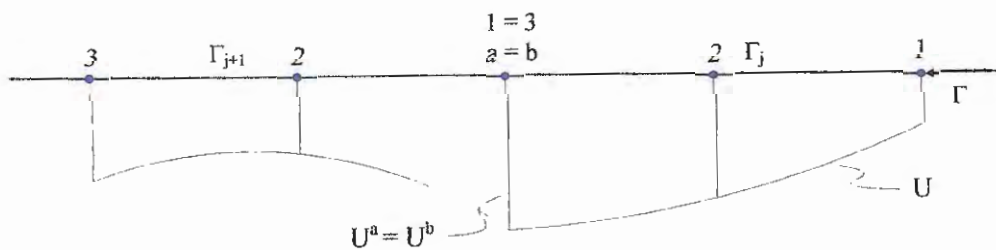


Figura 4.6 – Elemento contínuo

Quando o elemento é contínuo, as coordenadas locais  $\xi_1$  e  $\xi_3$  assumem os valores -1 e +1, respectivamente. Portanto, para este caso particular, as equações das funções aproximadoras ficam expressas da seguinte forma:

$$\phi_1 = -\frac{1}{2}(1-\xi)\xi \tag{4.11}$$

$$\phi_2 = 1 - \xi^2 \quad (4.12)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2}(1 + \xi)\xi \quad (4.13)$$

Neste trabalho, utiliza-se uma combinação de elementos contínuos com descontínuos, sendo estes últimos empregados somente nos casos de descontinuidade nos valores de contorno.

#### 4.2.3 Transformações das Equações Integrais em Equações Algébricas

A equação integral do deslocamento para um ponto do contorno  $Q$ , dada por (3.36), pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} K(Q)u(Q) + \int_{\Gamma} \bar{p}^*(Q,P)\bar{u}(P)d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q,P)w_{ci}(P) = \\ = \int_{\Gamma} \bar{u}^*(Q,P)\bar{p}(P)d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} w_{ci}^*(Q,P)R_{ci}(P) + \\ + \int_{\Omega_s} g(p)w^*(Q,p)d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde:

$$\bar{p}^*(Q,P) = [V_n^*(Q,P) \quad -M_n^*(Q,P)] \quad (4.15)$$

$$\bar{u}(P) = \begin{Bmatrix} w(P) \\ \frac{\partial w}{\partial n}(P) \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\bar{u}^*(Q, P) = \left[ w^*(Q, P) \quad -\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \quad (4.17)$$

$$\bar{p}(P) = \left\{ \begin{matrix} V_n^*(P) \\ M_n^*(P) \end{matrix} \right\} \quad (4.18)$$

$$u(Q) = W(Q) \quad (4.19)$$

$$K(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi} \quad (4.20)$$

Discretizando-se o contorno da placa em  $N_e$  elementos e substituindo-se as variáveis por suas aproximações em cada elemento, expressas por (4.6) e (4.7), tem-se para a equação (4.14):

$$\begin{aligned} K(Q)u(Q) + \sum_{j=1}^{N_e} \left[ \int_{\Gamma_j} \bar{p}^*(Q, P) \bar{\phi}^T(P) d\Gamma(P) \right] \bar{U}_j^N + \sum_{i=1}^{N_e} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) = \\ = \sum_{j=1}^{N_e} \left[ \int_{\Gamma_j} \bar{u}^*(Q, P) \bar{\phi}^T(P) d\Gamma(P) \right] \bar{P}_j^N + \sum_{i=1}^{N_e} w_{ci}^*(Q, P) R_{ci}(P) + \\ + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Utilizando-se as equações dos deslocamentos e dos esforços fundamentais e as funções aproximadoras, podem ser calculadas as integrais de contorno da equação anterior para cada elemento, sendo os resultados representados por:

$$\bar{h}^j(Q) = \int_{\Gamma_j} \bar{p}^*(Q, P) \bar{\phi}^T(P) d\Gamma_j(P) \quad (4.22)$$

$$\bar{g}^j(Q) = \int_{\Gamma_j} \bar{u}^*(Q, P) \bar{\phi}^T(P) d\Gamma_j(P) \quad (4.23)$$

Para a integral de domínio, deve-se usar a equação (3.49), sendo o resultado representado por:

$$t(Q) = \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p) \quad (4.24)$$

Assim, a equação (4.21) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} K(Q)u(Q) + \sum_{j=1}^{N_e} \bar{h}^j(Q) \bar{U}_j^N + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) = \\ = \sum_{j=1}^{N_e} \bar{g}^j(Q) \bar{P}_j^N + \sum_{i=1}^{N_c} w_{ci}^*(Q, P) R_{ci}(P) + t(Q) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Representando matricialmente a equação (4.25), se tem:

$$K(Q)u(Q) + \bar{H}(Q)\bar{U} + \bar{H}_c(Q)\bar{w}_c = \bar{G}(Q)\bar{P} + \bar{G}_c(Q)\bar{R}_c + T(Q) \quad (4.26)$$

onde:

- $\bar{H}(Q)$  e  $\bar{G}(Q)$  são matrizes que contêm, respectivamente, os coeficientes dos esforços e deslocamentos fundamentais em cada elemento, calculados através de (4.22) e (4.23);
- $\bar{H}_c(Q)$  e  $\bar{G}_c(Q)$  são, respectivamente, as matrizes com os coeficientes das reações e deslocamento de canto fundamentais;
- $T(Q)$  é um vetor composto pelos valores resultantes da integração do carregamento na região  $\Omega_g$ , obtidos em (4.24);

- $\bar{U}$  é o vetor com os valores nodais dos deslocamentos, expresso por:

$$\bar{U} = \left\{ w^1 \quad \frac{\partial w^1}{\partial n} \quad w^2 \quad \frac{\partial w^2}{\partial n} \quad \dots \quad w^{N_n} \quad \frac{\partial w^{N_n}}{\partial n} \right\}$$

- $\bar{P}$  é o vetor com os valores nodais dos esforços, dado por:

$$\bar{P} = \left\{ V_n^1 \quad M_n^1 \quad V_n^2 \quad M_n^2 \quad \dots \quad V_n^{N_n} \quad M_n^{N_n} \right\}$$

- $\bar{W}_c$  é o vetor com os valores dos deslocamentos de canto, expresso por:

$$\bar{W}_c = \left\{ w_c^1 \quad w_c^2 \quad \dots \quad w_c^{N_c} \right\}$$

- $\bar{R}_c$  é o vetor com os valores das reações de canto, dado por:

$$\bar{R}_c = \left\{ R_c^1 \quad R_c^2 \quad \dots \quad R_c^{N_c} \right\}$$

- $N_n$  corresponde ao número de nós do problema;
- $N_c$  é o número de cantos.

Deste modo, a expressão (4.26) corresponde à equação algébrica obtida a partir da equação integral do deslocamento para um ponto Q do contorno.

Entretanto, neste caso, onde o ponto Q pertence ao contorno da placa, a expressão (4.26) pode ser simplificada escrevendo-se os deslocamentos  $u(Q)$  em função dos

deslocamentos  $\bar{U}_j$  do elemento que pertence o ponto, de modo que o valor do termo  $K(Q)$  seja distribuído em  $\bar{H}(Q)$  de acordo com a posição do ponto  $Q$  nesse elemento. Dessa forma, pode-se reescrever (4.26) da seguinte forma:

$$\bar{H}(Q)\bar{U} + \bar{H}_c(Q)\bar{w}_c = \bar{G}(Q)\bar{P} + \bar{G}_c(Q)\bar{R}_c + T(Q) \quad (4.27)$$

Com relação aos termos referentes aos cantos das placas, sendo o ponto  $Q$  pertencente ao contorno ou não, pode-se considerar a reação de canto  $\bar{R}_c$  nula e o deslocamento de canto  $\bar{w}_c$  como função dos deslocamentos dos nós vizinhos ao canto, de forma que o valor da reação de canto fundamental, encontrado na matriz  $\bar{H}_c$ , seja distribuído em  $\bar{H}$  ao dividi-lo no meio entre as posições referentes a esses nós. Assim, se obtém para a expressão (4.27):

$$\bar{H}(Q)\bar{U} = \bar{G}(Q)\bar{P} + T(Q) \quad (4.28)$$

### 4.3 SISTEMA DE EQUAÇÕES

Para se encontrar a solução de um problema de placas, é necessário se obter as condições de contorno, para se definir quais as variáveis associadas a um nó serão consideradas incógnitas ou valores prescritos. Como já foi mencionado, para cada nó do contorno se tem quatro variáveis, que são o deslocamento  $w$ , a rotação  $\partial w / \partial n$ , a força cortante equivalente  $V_n$  e o momento normal  $M_n$ . Assim, ao se observar as condições de contorno, verifica-se que, normalmente, quando se tem  $w$  prescrito,  $V_n$  será incógnito, e quando  $\partial w / \partial n$  é prescrito,  $M_n$  será incógnito, e vice-versa. Dessa forma, constata-se que



quando se tem o deslocamento prescrito, o esforço será incógnito, e quando o esforço é prescrito, o deslocamento é incógnito. Assim sendo, nos casos clássicos de vinculação em problemas de placas, obtêm-se as seguintes condições de contorno para os nós:

- borda engastada,  $w = 0$  e  $\partial w / \partial n = 0$ ,  $V_n$  e  $M_n$  são desconhecidos;
- borda simplesmente apoiada,  $w = 0$  e  $M_n = 0$ ,  $V_n$  e  $\partial w / \partial n$  são desconhecidos;
- borda livre,  $V_n = 0$  e  $M_n = 0$ ,  $w$  e  $\partial w / \partial n$  são desconhecidos.

Portanto, impondo-se as condições de contorno em uma placa, se obtém  $2N_n$  incógnitas no problema e, conseqüentemente, para resolvê-lo, é necessário montar um sistema de equações, utilizando-se (4.28) e escrevendo-se duas equações para cada nó do contorno. Neste trabalho, as reações e os deslocamentos de canto não são considerados incógnitas do problema, pois recebem o tratamento mencionado no item 4.2.3. Assim, não é necessário escrever equações no sistema para cada canto, como ocorre em outras técnicas de resolução de problemas de placas por Método dos Elementos de Contorno.

Como são necessárias duas equações por nó, normalmente, escrevem-se uma equação de deslocamento e outra de sua derivada direcional para cada nó, porém, neste trabalho, emprega-se uma alternativa mais eficiente, (PAIVA & VENTURINE, 1987) e (CALDERÓN, 1991), que utiliza apenas a equação de deslocamento para escrever expressões relativas aos nós do contorno e para pontos fora do domínio, associados a estes nós.

Os pontos localizados fora do domínio são posicionados a uma distância  $d_1$ , normal ao contorno, em relação aos seus respectivos nós de referência. Deste modo, considere uma placa dividida em oito elementos, conforme a Figura 4.7.

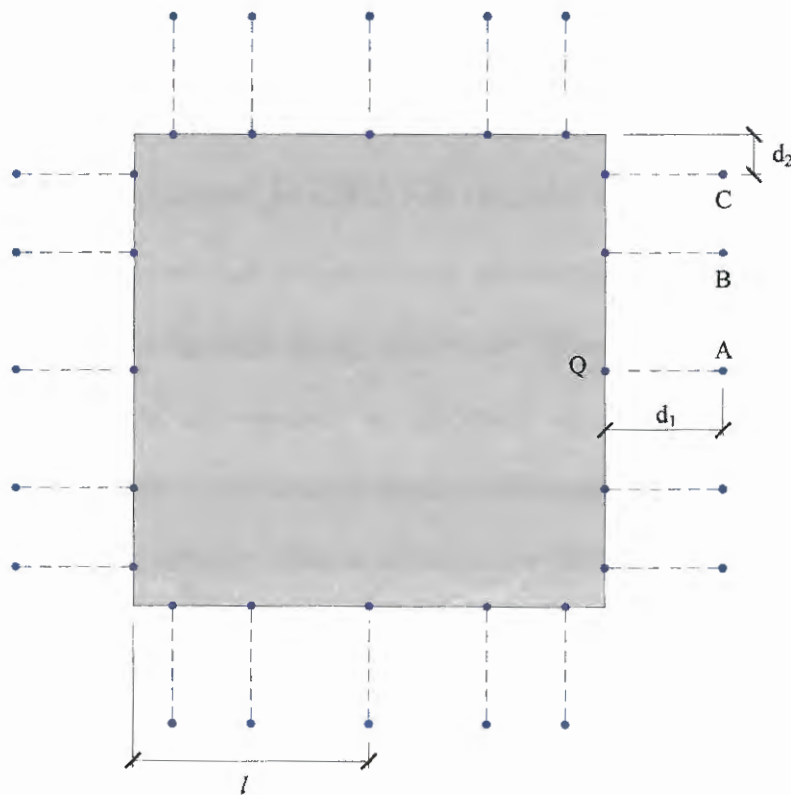


Figura 4.7 – Posicionamento dos nós

Para o ponto A, indicado na figura, cujo nó associado é de extremidade e comum a dois elementos, deve-se calcular a distância  $d_1$  da seguinte forma:

$$d_1 = \psi l_m \quad (4.29)$$

Onde  $\psi$  corresponde a um valor que deve variar entre 0,1 a 0,5 para que não ocorram problemas de singularidades nos cálculos e a variável  $l_m$  é a média dos comprimentos dos elementos concorrentes no nó. Para o ponto B, como o nó de referência é intermediário, a equação utilizada no cálculo de  $d_1$  é a mesma, porém,  $l_m$  é o comprimento do próprio elemento ao qual o nó pertence.

Já no ponto fora do domínio  $C$ , indicado na figura, o nó associado é duplo, portanto, têm-se dois nós na extremidade coincidente entre os dois elementos que compõem o canto, sendo que esses devem ser deslocados cada um para o interior de um destes elementos. O valor deste deslocamento pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$d_2 = \omega l_i \quad (4.30)$$

onde:

$0 < \omega \leq 0,25$  é o coeficiente de afastamento dos nós em relação aos cantos.

$l_i$  é comprimento do elemento no qual o nó será deslocado para o interior.

Com os nós duplos posicionados corretamente nos elementos, em seguida, utiliza-se a equação (4.29) para se encontrar a distância  $d_1$  para  $C$ , entretanto, o comprimento  $l_m$  é o do próprio elemento ao qual o nó duplo pertence.

Deste modo, com todos os pontos fontes posicionados, devem ser escritas as equações para os nós do contorno, representados por  $Q$ , e para os pontos fora do domínio, simbolizados por  $A$ , através da equação integral dos deslocamentos (3.36), com o objetivo de se obter um único sistema de equações. As equações para os nós do contorno já foram expressas em (4.14), para os pontos de fora do domínio, tem-se:

$$\begin{aligned} K(A)u(A) + \int_{\Gamma} \bar{p}^*(A, P) \bar{u}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_e} R_{ci}^*(A, P) w_{ci}(P) = \\ = \int_{\Gamma} \bar{u}^*(A, P) \bar{p}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_e} w_{ci}^*(A, P) R_{ci}(P) + \\ + \int_{\Omega_x} g(p) w^*(A, p) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde:

$$\bar{p}^*(A, P) = [V_n^*(A, P) \quad -M_n^*(A, P)] \quad (4.32)$$

$$\bar{u}(P) = \left\{ \begin{array}{l} w(P) \\ \frac{\partial w}{\partial n}(P) \end{array} \right\} \quad (4.33)$$

$$\bar{u}^*(A, P) = \left[ w^*(A, P) \quad -\frac{\partial w^*}{\partial n}(A, P) \right] \quad (4.34)$$

$$\bar{p}(P) = \left\{ \begin{array}{l} V_n^*(P) \\ M_n^*(P) \end{array} \right\} \quad (4.35)$$

$$u(A) = W(A) \quad (4.36)$$

$$K(Q) = 0 \quad (4.37)$$

Na equação (4.37) o valor de  $K(Q)$  é nulo, pois pela propriedade da função delta de Dirac, vem:

$$\int_{\Omega} \delta(A, P) w(P) d\Omega(P) = w(A) = 0 \quad (4.38)$$

Assim, reescrevendo (4.31) matricialmente, de forma semelhante ao que foi realizado para (4.14) no item anterior, e unindo as equações dos nós do contorno com as dos pontos fora domínio em um único sistema, de modo que na primeira linha do sistema se tenha os coeficientes referentes a um dos nós do contorno e na linha seguinte os do ponto fora do domínio associado a este, e, assim, sucessivamente para o outros, o sistema de equações pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\bar{H}\bar{U} = \bar{G}\bar{P} + \bar{T} \quad (4.39)$$

onde:

- $\bar{H}$  e  $\bar{G}$  são matrizes de ordem  $2N_n \times 2N_n$  que envolvem os coeficientes referentes aos nós do contorno e os pontos fora do domínio;
- $\bar{U}$  e  $\bar{P}$  são vetores de  $2N_n$  elementos, onde estão agrupadas as variáveis do contorno prescritas e incógnitas;
- $\bar{T}$  é um vetor de  $2N_n$  elementos, constituído pelos resultados das integrais do carregamento na região  $\Omega_g$ .

Para resolver este sistema de equações, é necessário isolar as incógnitas no primeiro membro, obtendo-se:

$$\bar{A}\bar{X} = \bar{B} \quad (4.40)$$

onde:

- $\bar{A}$  é a matriz onde estão localizados os coeficientes referentes aos valores incógnitos;
- $\bar{X}$  é o vetor dos deslocamentos e esforços incógnitos;
- $\bar{B}$  é um vetor composto pela multiplicação dos valores dos deslocamentos e esforços prescritos por seus coeficientes, mais o vetor  $\bar{T}$ .

Resolvendo-se este sistema, obtêm-se todas as incógnitas no contorno da placa.

## 4.4 INTEGRAÇÕES SOBRE OS ELEMENTOS

Para se obter os coeficientes das matrizes  $\bar{H}$  e  $\bar{G}$  da equação (4.26), necessários para a montagem do sistema de equações, devem ser realizadas integrações numéricas ou analíticas sobre os elementos do contorno, dadas por (4.22) e (4.23), que podem ser escritas da seguinte forma:

$$h_k^n(Q) = \int_{\Gamma_j} p_k^*(Q, P) \phi_n(P) d\Gamma_j(P) \quad (4.41)$$

$$g_k^n(Q) = \int_{\Gamma_j} u_k^*(Q, P) \phi_n(P) d\Gamma_j(P) \quad (4.42)$$

onde:

$$p_k^*(Q, P) = [V_n^*(Q, P) \quad -M_n^*(Q, P)]$$

$$u_k^*(Q, P) = \left[ w^*(Q, P) \quad -\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right]$$

$n$  é o nó local do elemento onde se mede a resposta do carregamento unitário aplicado.

Para facilitar a resolução das integrais, é preciso que as duas equações anteriores sejam expressas em função das coordenadas locais homogêneas. Para isso, primeiramente, deve-se obter uma relação entre o contorno do elemento e as coordenadas locais, que pode ser verificada através da Figura 4.8, sendo escrita da seguinte forma:

$$\Gamma_j = \xi \frac{l}{2} \quad (4.43)$$

onde:

$l$  é o comprimento do elemento.

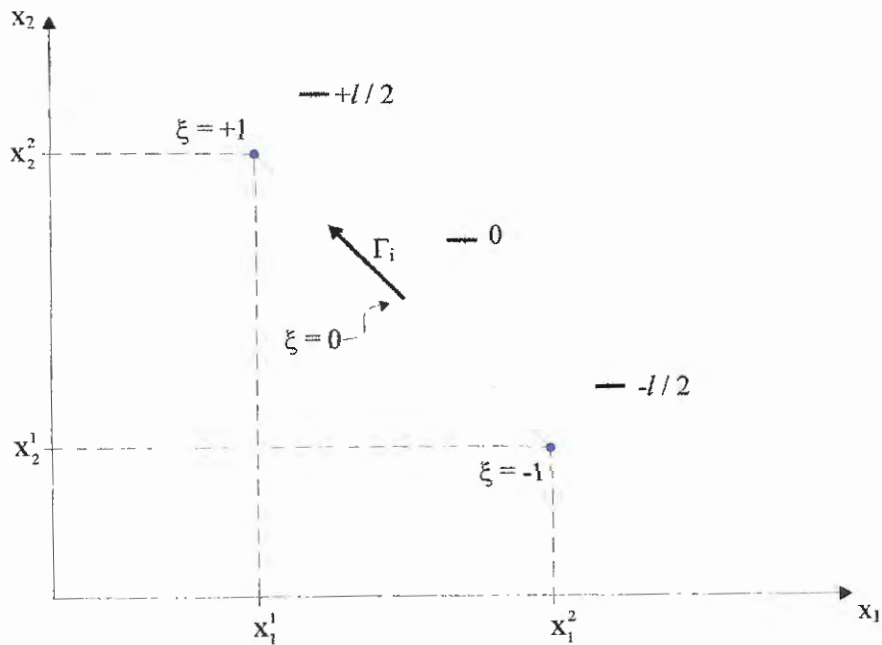


Figura 4.8 – Limites dos elementos em relação à  $\Gamma$  e  $\xi$

Em seguida, é necessário se encontrar o determinante do Jacobiano da transformação, através de (4.43), cujo valor é:

$$|J| = \frac{d\Gamma_j}{d\xi} = \frac{l}{2} \tag{4.44}$$

Dessa forma, aplicando (4.44) em (4.41) e (4.42), vem:

$$h_k^n(Q) = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 p_k^*(Q,P) \phi_n(P) d\xi(P) \tag{4.45}$$

$$g_k^n(Q) = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 u_k^*(Q,P) \phi_n(P) d\xi(P) \tag{4.46}$$

#### 4.4.1 Integrações Numéricas

Quando o ponto  $Q$  não pertence ao elemento a ser integrado, ou para um ponto  $A$  fora do domínio, as integrais podem ser resolvidas numericamente através de quadratura de Gauss, que é expressa da seguinte forma:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{N_g} f(\xi_i) w_i \quad (4.47)$$

onde:

$f(\xi)$  é a função a ser integrada, escrita em relação à coordenada  $\xi$ .

$N_g$  é o número de pontos de Gauss.

$\xi_i$  é a coordenada adimensional do ponto  $i$  de integração ou o ponto de amostragem de Gauss, definido em função de  $N_g$ .

$w_i$  é o fator ponderador ou o peso de Gauss, também, definido em função de  $N_g$ .

Dessa forma, as equações (4.45) e (4.46) podem ser reescritas do seguinte modo:

$$h_k^n(Q) = \frac{l}{2} \sum_{i=1}^{N_g} p_k^*(Q, P) \phi_n(P) w_i \quad (4.48)$$

$$g_k^n(Q) = \frac{l}{2} \sum_{i=1}^{N_g} u_k^*(Q, P) \phi_n(P) w_i \quad (4.49)$$

Para se evitar a quase singularidade que pode existir em alguns pontos muito próximos do contorno e para melhorar a integração numérica e, se utiliza à técnica da sub-



elementação, que consiste basicamente em dividir o elemento que está sendo integrado em pequenos segmentos ou sub-elementos, os quais possuem o seu comprimento reduzido à medida que se aproximam do ponto fonte (Figura 4.9).

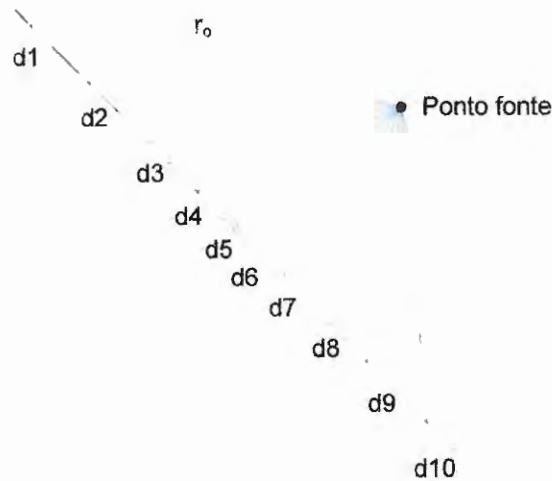


Figura 4.9 – Forma como o elemento é dividido em sub-elementos

Para o cálculo, primeiramente, se mede a distância  $r_0$ , indicada na figura anterior, entre o início do elemento e o ponto fonte, em seguida, deve ser verificado se o cosseno do ângulo formado entre o elemento e  $r_0$  é maior ou menor que 0,5, se for maior será utilizada a expressão (4.50) para o cálculo de tamanho  $d$  do sub-elemento, se for menor ou igual será a (4.51), sendo dadas por:

$$d = \frac{1}{n} \cdot \frac{r_0}{2 \cdot \cos \alpha} \quad (4.50)$$

$$d = \frac{1}{n} \cdot r_0 \quad (4.51)$$

onde:

$n$  é uma constante adotada que gera uma maior subdivisão.

Determinado o tamanho do sub-elemento, a integração numérica é realizada neste e o processo se reinicia a partir do seu final até que todo o comprimento do elemento tenha sido percorrido por completo.

Os coeficientes encontrados no vetor  $T$ , dado em (4.39), constituídos pelos resultados das integrais do carregamento na região  $\Omega_g$ , são obtidos através de (4.24), pela integração numérica sobre os segmentos lineares em que o contorno do carregamento está dividido. Para isso, aplica-se a mudança de variável, indicada em (4.43), e a quadratura de Gauss, expressa em (4.47), na equação (3.49) e, assim, se tem:

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p) = \frac{g(Q)l}{64\pi D} \sum_{j=1}^{N_g} R^3 \left( \ln R - \frac{3}{4} \right) r_{,i} n_i w_j + \frac{l}{80\pi D} \sum_{j=1}^{N_g} R^4 \left( \ln R - \frac{7}{10} \right) (A \cos \theta + B \sin \theta) r_{,i} n_i w_j \quad (4.52)$$

Deve-se observar que no caso do ponto  $Q$  pertencer ao segmento do contorno do carregamento a ser integrado, o que ocorre quando a região carregada  $\Omega_g$  coincide com as bordas da placa, o resultado da integração será nulo, pois  $r_{,i} n_i$  é nulo, para qualquer ponto deste segmento.

#### 4.4.2 Integrações Analíticas

Quando o ponto  $Q$  pertence ao elemento a ser integrado, os valores fundamentais encontrados nas integrações apresentam singularidades, por isso, estas integrais devem ser calculadas no sentido do valor principal de Cauchy e de forma analítica.

Dessa forma, expandindo-se o índice  $k$  das equações (4.45) e (4.46) para um nó  $n$  local de um elemento qualquer, se tem:

$$h_1^n(Q) = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 V_n^*(Q, P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.53)$$

$$h_2^n(Q) = -\frac{l}{2} \int_{-1}^1 M_n^*(Q, P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.54)$$

$$g_1^n(Q) = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 w^*(Q, P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.55)$$

$$g_2^n(Q) = -\frac{l}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \phi_n(P) d\xi(P) \quad (4.56)$$

Considerando-se a Figura 4.10, onde estão indicadas as posições genéricas para um ponto singular  $Q$ , dada pela coordenada adimensional  $\xi_s$ , e para os nós 1 e 3 de um elemento, com as respectivas coordenadas  $\xi_1$  e  $\xi_3$ , e sabendo que as funções aproximadoras para a geometria, dadas no item 4.2.1, relacionam as coordenadas de um ponto genérico com as dos pontos extremos do elemento, pode-se escrever para o posicionamento de um ponto singular genérico:

$$\phi_{1s} = \frac{1}{2}(1 - \xi_s) \quad (4.57)$$

$$\phi_{2s} = \frac{1}{2}(1 + \xi_s) \quad (4.58)$$

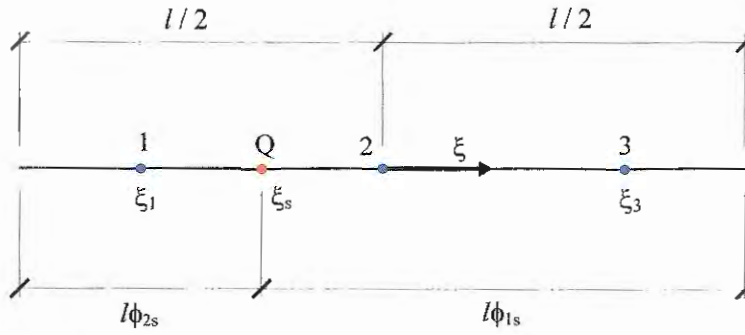


Figura 4.10 – Posições de um ponto singular e dos nós em um elemento

Em seguida, aplicando-se as soluções fundamentais, dadas no item 2.4, as funções aproximadoras para as variáveis, expressas no item 4.2.2, e as expressões (4.57) e (4.58) nas integrais (4.53) a (4.56), obtêm-se as equações que fornecem os resultados analíticos:

$$h_1^n(Q) = 0 \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} h_2^n(Q) = & \frac{l}{4\pi} \left\{ C_1^n (1+\nu) \left[ \phi_{2s} \ln(l\phi_{2s}) + \phi_{1s} \ln(l\phi_{1s}) - 1 \right] + \right. \\ & + C_2^n (1+\nu) \left[ (\phi_{2s})^2 \ln(l\phi_{2s}) - (\phi_{1s})^2 \ln(l\phi_{1s}) - \frac{\xi_s}{2} \right] + \\ & + C_3^n (1+\nu) \left[ \frac{4}{3} (\phi_{2s})^3 \ln(l\phi_{2s}) + \frac{4}{3} (\phi_{1s})^3 \ln(l\phi_{1s}) - \frac{1}{9} (1+3\xi_s^2) \right] + \\ & \left. + \nu \left[ C_1^n + C_2^n \xi_s + \frac{C_3^n}{3} (1+3\xi_s^2) \right] \right\} \quad (4.60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1^n(Q) = & \frac{l^3}{8\pi D} \left\{ \frac{C_1^n}{3} \left[ (\phi_{2s})^3 \left( \ln(l\phi_{2s}) - \frac{5}{6} \right) + (\phi_{1s})^3 \left( \ln(l\phi_{1s}) - \frac{5}{6} \right) \right] + \right. \\ & + \frac{C_2^n}{2} \left[ (\phi_{2s})^4 \left( \ln(l\phi_{2s}) - \frac{3}{4} \right) - (\phi_{1s})^4 \left( \ln(l\phi_{1s}) - \frac{3}{4} \right) \right] + \\ & \left. + \frac{4C_3^n}{5} \left[ (\phi_{2s})^5 \left( \ln(l\phi_{2s}) - \frac{7}{10} \right) + (\phi_{1s})^5 \left( \ln(l\phi_{1s}) - \frac{7}{10} \right) \right] \right\} \quad (4.61) \end{aligned}$$

$$g_2^n(Q) = 0 \quad (4.62)$$

onde, as constantes  $C_1^n$ ,  $C_2^n$  e  $C_3^n$  são relativas aos nós locais e podem ser escritas, genericamente, da seguinte maneira:

$$C_1^n = \frac{-\xi_s^2 + (\xi_i + \xi_j)\xi_s - \xi_i\xi_j}{(\xi_i - \xi_n)(\xi_n - \xi_j)} \quad (4.63)$$

$$C_2^n = \frac{2\xi_s - (\xi_i + \xi_j)}{(\xi_i - \xi_n)(\xi_n - \xi_j)} \quad (4.64)$$

$$C_3^n = \frac{-1}{(\xi_i - \xi_n)(\xi_n - \xi_j)} \quad (4.65)$$

com:

$$n, i, j = 1, 2, 3 \text{ e } n \neq i \neq j$$

Deve-se observar que, nas equações (4.63) a (4.65), a coordenada adimensional  $\xi_2$  é sempre nula, pois o nó 2 está localizado no centro do elemento, e as coordenadas  $\xi_1$  e  $\xi_3$  ou são iguais a -1 e +1, respectivamente, no caso do elemento contínuo, ou podem variar de acordo com as posições dos nós em um elemento descontínuo.

#### 4.5 PROPRIEDADES DA MATRIZ H

Pelas configurações de equilíbrio de uma placa, podem ser determinadas duas propriedades para a matriz  $\bar{\bar{H}}$ . Para isso, considere uma placa discretizada em elementos de contorno (Figura 4.11).

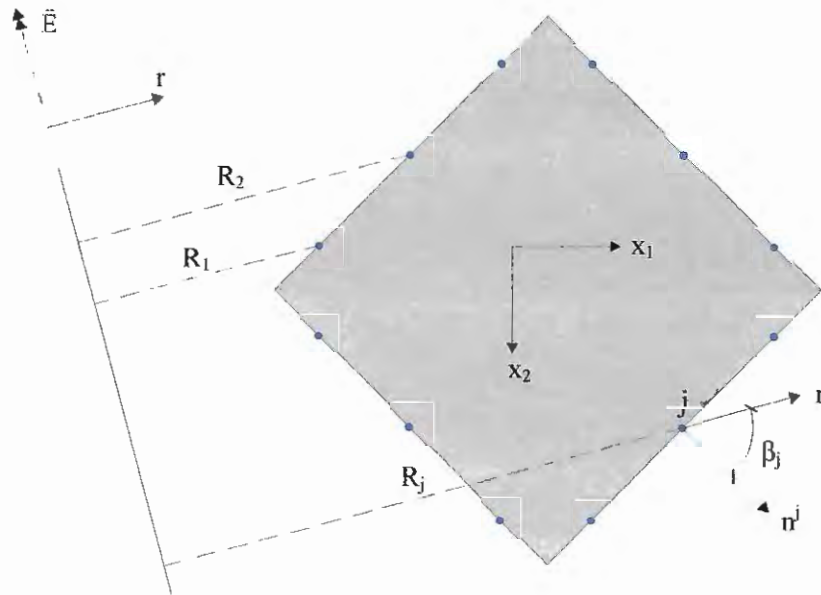


Figura 4.11 – Placa discretizada em elementos de contorno

Admite-se que o carregamento transversal é nulo nesta placa, conseqüentemente, todos os esforços do contorno também serão nulos e, assim, a expressão (4.39) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\bar{H}\bar{U} = 0 \quad (4.66)$$

Este sistema (4.66) admite soluções não triviais, correspondentes aos movimentos de corpo rígido, isto é, deslocamento vertical e rotação em torno de um eixo arbitrário. Deste modo, considerando o movimento vertical  $w_o$ , se tem para o vetor  $\bar{U}$  da equação anterior:

$$\bar{U}^r = \{w_o \quad 0 \quad w_o \quad 0 \quad w_o \quad 0 \quad \dots \quad w_o \quad 0\} \quad (4.67)$$

Substituindo-se (4.67) em (4.66), encontra-se a primeira propriedade, para qualquer linha  $i$ :

$$\sum_{j=1}^{N_n} h_{1,2j-1} = 0 \quad (4.68)$$

Verifica-se, agora, a rotação de corpo rígido  $\alpha$  no sentido indicado pelo eixo  $\bar{E}$ , conforme a Figura 4.11, onde  $\bar{E}$  representa o eixo arbitrário de rotação e  $R_j$  é a distância do nó genérico  $j$  a esse eixo, assim, para o vetor  $\bar{U}$  se obtém:

$$\bar{U}^T = \alpha \{ R_1 \cos\beta_1 \quad R_2 \cos\beta_{N_n} \quad \dots \quad R_{N_n} \cos\beta_{N_n} \} \quad (4.69)$$

onde:

$$\cos\beta_j = n_j r_j$$

$n_j$  são as direções da normal ao contorno do nó  $j$ .

$r_j$  é o versor associado a  $R_j$ .

Substituindo-se (4.69) em (4.66), encontra-se a segunda propriedade:

$$\sum_{j=1}^{N_n} (h_{1,2j-1} R_j + h_{1,2j} \cos\beta_j) = 0 \quad (4.70)$$

Essas propriedades podem ser utilizadas tanto para verificar os valores da matriz  $\bar{H}$ , como para obter os elementos da diagonal principal, correspondentes às integrais com singularidades.

## 4.6 DESLOCAMENTOS E ESFORÇOS PARA OS PONTOS INTERNOS

Com a obtenção dos deslocamentos e esforços para os nós do contorno, é necessário se encontrar estes valores para os pontos no interior da placa.

Dessa forma, para se determinar o deslocamento  $w(q)$  nos pontos internos, deve-se utilizar a equação (3.20), a partir da qual se obtêm as expressões para as curvaturas e as derivadas das curvaturas, em relação às direções  $x_1$  e  $x_2$  de um sistema cartesiano com origem no ponto  $q$ , sendo dadas por:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_i \partial x_j} + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) w(P) - \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\ & + \sum_{c=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) w_c(P) = \int_{\Gamma} \left( V_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) + \right. \\ & \left. - M_n(P) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right) d\Gamma(P) + \sum_{c=1}^{N_c} R_c(P) \frac{\partial^2 w_c^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) + \\ & + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, p) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_k \partial x_k} \right) + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) \right) w(P) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) \right) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\ & + \sum_{c=1}^{N_c} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) \right) w_c(P) = \int_{\Gamma} \left( V_n(P) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) \right) + \right. \\ & \left. - M_n(P) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right) \right) d\Gamma(P) + \sum_{c=1}^{N_c} R_c(P) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 w_c^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) \right) + \\ & + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, p) \right) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (4.72)$$

Através das equações (3.20), (4.71) e (4.72), pode-se escrever uma expressão geral da seguinte forma:



$$\begin{aligned}
 \bar{u}(q) + \int_{\Gamma} \bar{p}^*(q, P) \bar{u}(P) d\Gamma(P) + \sum_{c=1}^{N_c} \bar{p}_c^*(q, P) w_c(P) &= \\
 = \int_{\Gamma} \bar{u}^*(q, P) \bar{p}(P) d\Gamma(P) + \sum_{c=1}^{N_c} \bar{u}_c^*(q, P) R_c(P) + & \quad (4.73) \\
 + \int_{\Omega_g} g(p) \bar{u}_g^*(q, p) d\Omega_g(p) &
 \end{aligned}$$

onde:

$$\bar{u}(q) = \left\{ \begin{array}{l} w(q) \\ \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_i \partial x_j} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_k \partial x_k} \right) \end{array} \right\} \quad (4.74)$$

$$\bar{p}^*(q, P) = \left[ \begin{array}{ll} V_n^*(q, P) & -M_n^*(q, P) \\ \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) & -\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) \right) & -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) \right) \end{array} \right] \quad (4.75)$$

$$\bar{u}^*(q, P) = \left[ \begin{array}{ll} w^*(q, P) & -\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) & -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) \right) & -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right) \end{array} \right] \quad (4.76)$$

$$\bar{P}_c^*(q, P) = \left\{ \begin{array}{l} R_c^*(q, P) \\ \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) \right) \end{array} \right\} \quad (4.77)$$

$$\bar{u}_c^*(q, P) = \left\{ \begin{array}{l} w_c^*(q, P) \\ \frac{\partial^2 w_c^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 w_c^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) \right) \end{array} \right\} \quad (4.78)$$

$$\bar{u}_g^*(q, p) = \left\{ \begin{array}{l} w^*(q, p) \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, p) \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, p) \right) \end{array} \right\} \quad (4.79)$$

Com a discretização do contorno da placa, é possível se determinar os deslocamentos, as curvaturas e as derivadas das curvaturas para  $N_i$  pontos internos, ao se expressar a equação (4.73) da seguinte forma matricial:

$$\bar{u}(q) + \bar{H}'\bar{U} = \bar{G}'\bar{P} + \bar{T}' \quad (4.80)$$

onde:

- $\bar{U}$  e  $\bar{P}$  são vetores compostos pelos deslocamentos e esforços dos nós do contorno, calculados anteriormente ;
- $\bar{H}'$  e  $\bar{G}'$  são matrizes que contêm os coeficientes obtidos pela integração, nos elementos, dos valores fundamentais e suas derivadas, em relação a cada ponto interno;
- $\bar{T}'$  é o vetor formado pela integração do carregamento na região  $\Omega_g$ , em relação a cada ponto interno.

Os termos referentes aos cantos não são representados matricialmente na equação (4.80), por receberem o mesmo tratamento descrito para a expressão (4.27) no item 4.2.3, onde a reação de canto  $R_c$  é nula e o deslocamento de canto  $w_c$  é função dos deslocamentos dos nós vizinhos ao canto. Observa-se, também, que todas as integrais envolvidas nestas equações são numéricas, pois não existem pontos internos singulares.

Para se determinar os momentos fletores, devem-se aplicar as curvaturas encontradas através da equação (4.71) em (2.19). Assim, se tem:

$$M_{ij}(q) = -D \left[ \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_k}(q) \delta_{ij} + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}(q) \right] \quad (4.81)$$

Com relação às forças cortantes, devem-se aplicar as derivadas das curvaturas encontradas através de (4.72) em (2.22) e, portanto, se obtém:

$$q_j(q) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_k}(q) \right) \quad (4.82)$$

As derivadas das soluções fundamentais, expressas nas equações (4.71) e (4.72), são dadas por:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) = \frac{1}{4\pi D} (r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij} \ln r) \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) \right) = -\frac{1}{2\pi r D} r_{,i} \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) = -\frac{1}{4\pi r D} \left[ (2r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij})(r_{,k} n_k) - r_{,i} n_j - r_{,j} n_i \right] \quad (4.85)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right) = \frac{1}{2\pi r^2 D} \left[ 2r_{,i} (r_{,k} n_k) - n_i \right] \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) = & \frac{1}{4\pi r^3} \left\{ 2(1-\nu)(r_{,k} s_k)^2 \left[ 24r_{,i} r_{,j} (r_{,k} n_k) + \right. \right. \\ & -4 \left[ r_{,i} n_j + r_{,j} n_i + \delta_{ij} (r_{,k} n_k) \right] \left. \right] + 2(1-\nu)(r_{,k} s_k) \left[ 2(n_i s_j + n_j s_i) + \right. \\ & -8(r_{,k} n_k)(r_{,i} s_j + r_{,j} s_i) \left. \right] + 4(1-\nu)(r_{,k} n_k)(s_i s_j) + \\ & \left. + (3-\nu) \left[ 2\delta_{ij} (r_{,k} n_k) - 8r_{,i} r_{,j} (r_{,k} n_k) + 2(r_{,i} n_j + r_{,j} n_i) \right] \right\} \quad (4.87) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) \right) = & -\frac{1-\nu}{\pi r^4} \left\{ (r_{,k} s_k)^2 \left[ 24r_{,i} (r_{,i} n_i) - 4n_i \right] + \right. \\ & \left. - (r_{,i} n_i) \left[ 8s_i (r_{,k} s_k) + 4r_{,i} \right] + n_i \right\} \quad (4.88) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) = & -\frac{1}{4\pi r^2} \left\{ (1+\nu)(\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) + 2(1-\nu) \left[ n_i n_j + \right. \right. \\ & -2r_{,j} n_i (r_{,k} n_k) - (\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) (r_{,k} n_k)^2 + \\ & \left. \left. -2r_{,i} (r_{,k} n_k) \left[ n_j - r_{,j} (r_{,k} n_k) \right] \right] \right\} \quad (4.89) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) \right) = -\frac{1-\nu}{\pi r^3} \left[ r_{,i} + 2n_i (r_{,k} n_k) - 4r_{,i} (r_{,k} n_k)^2 \right] \quad (4.90)$$

$$\frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) = \frac{1-\nu}{4\pi r^2} \left\{ 2 \left[ (r_{,k} s_k)(r_{,i} n_j + r_{,j} n_i) + (r_{,k} n_k)(r_{,i} s_j + r_{,j} s_i) + (r_{,k} n_k)(r_{,k} s_k)(\delta_{ij} - 4r_{,i} r_{,j}) \right] - (n_i s_j + n_j s_i) \right\} \quad (4.91)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_k \partial x_k}(q, P) \right) = \frac{1-\nu}{\pi r^3} \left[ 4r_{,i} (r_{,k} s_k)(r_{,i} n_i) - n_i (r_{,k} s_k) - s_i (r_{,i} n_i) \right] \quad (4.92)$$

, com  $i, j, k, l = 1, 2$ .

#### 4.7 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste item, a formulação desenvolvida para a análise elástica de placas é aplicada em alguns exemplos, que possuem diversas condições de contorno e carregamento. Os resultados são comparados com os encontrados analiticamente por TIMOSHENKO (1959), ou com os obtidos por BARES (1972), através de diferenças finitas, ou com os de PAIVA (1987), CALDERÓN (1991), CHUEIRI (1994) e FERNANDES (1998), encontrados através do Método dos Elementos de Contorno, sendo que os dois primeiros utilizaram elementos lineares para a aproximação das variáveis e os outros, fizeram o uso de elementos quadráticos, como ocorre neste trabalho.

Nos exemplos que serão apresentados, o valor da variável  $\psi$  da equação (4.29), que fornece o posicionamento dos pontos fora do domínio, é definido como sendo igual a 0,5. Para os afastamentos dos nós duplos, admite-se o valor da variável  $\omega$ , encontrada na expressão (4.30), como sendo igual a 0,1665, dessa forma, se existir uma seqüência de elementos descontínuos, como os apresentados na Figura 4.5, em uma das bordas da placa, as distâncias entre os nós destes elementos serão exatamente iguais. Com relação à integração

numérica, são utilizados 15 pontos de Gauss e para a constante  $n$ , encontrada nas equações (4.50) e (4.51), é adotado o valor de 20.

#### 4.7.1 Exemplo 1

Neste exemplo, conforme a Figura 4.12, se tem uma placa quadrada com dois lados opostos apoiados e engastada nos outros dois, com um carregamento uniformemente distribuído. Esta placa foi discretizada em 16 elementos iguais, indicados na Figura 4.13, conseqüentemente, existem 36 pontos nodais, e os resultados dos deslocamentos e dos momentos fletores no ponto A, são comparados com os de TIMOSHENKO (1959), CALDERÓN (1991), CHUEIRI (1994) e FERNANDES (1998), através da Tabela 4.1. O valor do coeficiente de Poisson  $\nu$  é igual a 0,3.

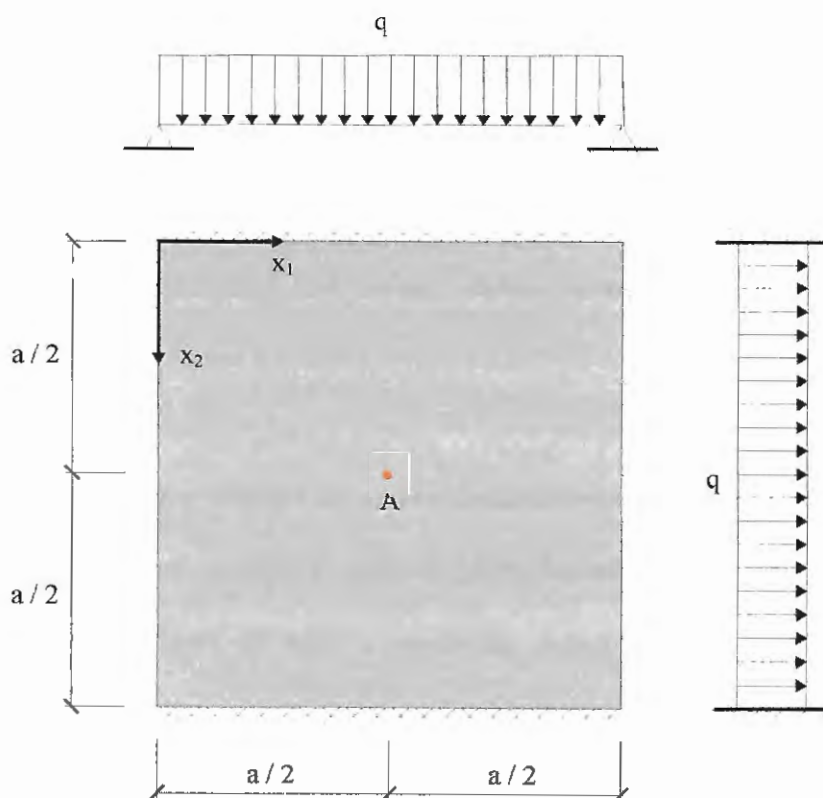


Figura 4.12 - Placa quadrada com dois lados opostos apoiados e engastada nos outros dois

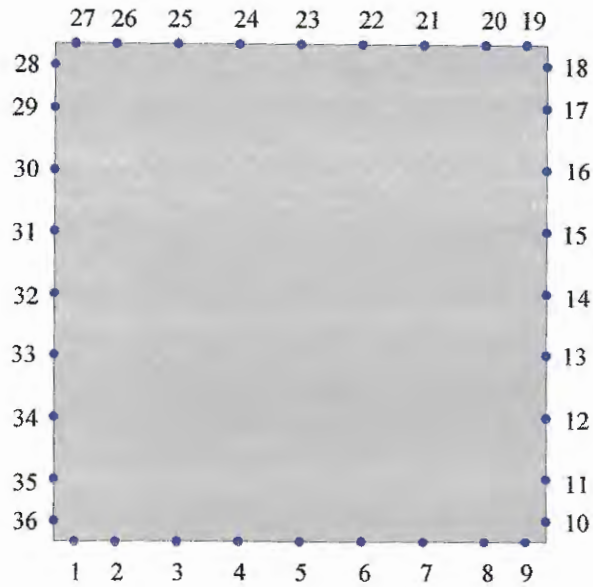


Figura 4.13 – Discretização da placa em 16 elementos

Tabela 4.1 – Resultados do exemplo 1

SOLUÇÕES	PONTO A		
	$w / (qa^4 / D)$	$M_{11} / qa^2$	$M_{22} / qa^2$
TIMOSHENKO	0,00192	0,0244	0,0332
CALDERÓN (40 elementos)	0,00192	0,0244	0,0332
CHUEIRI (16 elementos)	0,00192	0,0244	0,0332
FERNANDES (16 elementos)	0,00192	0,0244	0,0332
PRESENTE ESTUDO (16 elementos)	0,00192	0,0244	0,0332

#### 4.7.2 Exemplo 2

Para este exemplo, conforme figura 4.14, tem-se uma placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois, com um carregamento uniformemente distribuído.



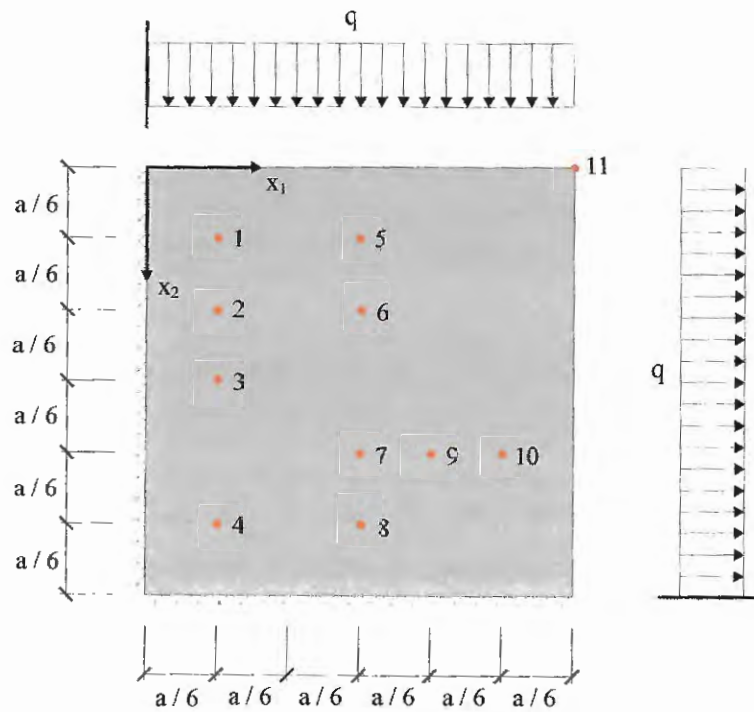


Figura 4.14 - Placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois

Para esta placa utilizou-se a mesma discretização em 16 elementos do exemplo anterior. Os resultados dos deslocamentos e dos momentos fletores nos pontos internos são comparados com os de PAIVA (1987), que obteve os seus resultados através do Método dos Elementos de Contorno, para uma discretização de 40 elementos, e pelo Método dos Elementos Finitos, para uma divisão do domínio em 144 elementos triangulares de seis parâmetros por nó, e com os de CALDERÓN (1991), que utilizou uma discretização de 40 elementos, através da tabela 4.2. O valor de  $\nu$ , para este exemplo, é igual a 0,2.



Tabela 4.2 – Resultados do exemplo 2

VALORES	PAIVA		CALDERÓN	PRESENTE TRABALHO	FATOR
	MEC	MEF			
$w^5$	0,0171	0,0156	0,0159	0,0156	$w / (qa^4 / D)$
$w^6$	0,0131	0,0121	0,0123	0,0121	
$w^{11}$	0,0458	0,0407	0,0415	0,0406	
$M_{11}^1$	-0,1185	-0,1123	-0,1124	-0,1120	$M_{ij} / qa^2$
$M_{11}^2$	-0,0941	-0,0883	-0,0896	-0,0884	
$M_{11}^3$	-0,0652	-0,0608	-0,0619	-0,0608	
$M_{22}^1$	-0,0162	-0,0230	-0,0201	-0,0221	
$M_{22}^2$	-0,0204	-0,0177	-0,018	-0,0177	
$M_{22}^4$	-0,0141	-0,0130	-0,0133	-0,0130	
$M_{22}^7$	-0,0229	-0,0191	-0,0197	-0,0190	
$M_{22}^8$	-0,0652	-0,0608	-0,0619	-0,0608	
$M_{22}^9$	-0,0318	-0,0269	-0,0277	-0,0269	
$M_{22}^{10}$	-0,0418	-0,0337	-0,0349	-0,0331	

4.7.3 Exemplo 3

Considere a mesma placa do exemplo anterior, entretanto, apresentando um carregamento uniforme parcial, conforme a Figura 4.15.

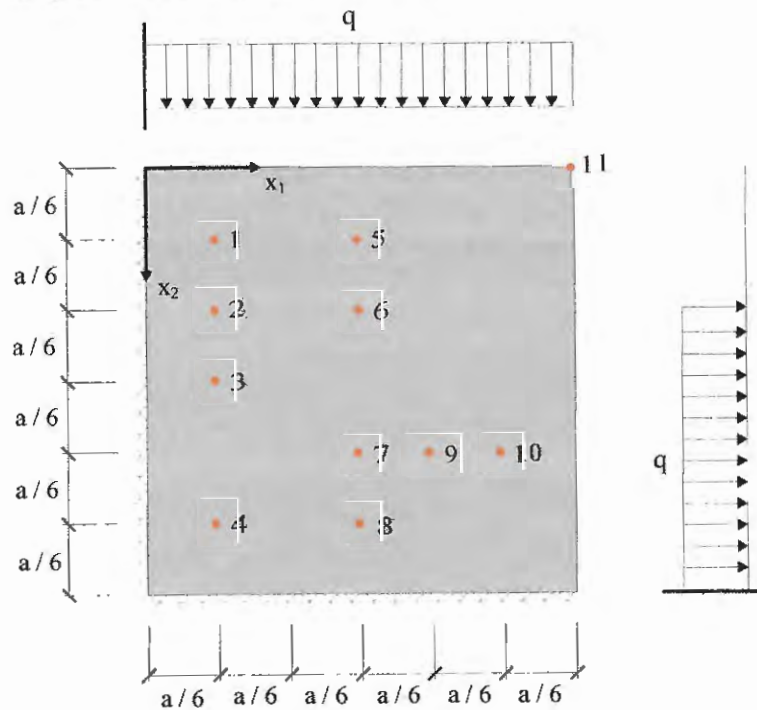


Figura 4.15 - Placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois

Adotando a discretização da Figura 4.13, os resultados dos deslocamentos e dos momentos fletores para os pontos internos são comparados, novamente, com os de PAIVA (1987) e com os de CALDERÓN (1991), pela Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Resultados do exemplo 3

VALORES	PAIVA		CALDERÓN	PRESENTE TRABALHO	FATOR
	MEC	MEF			
$w^1$	0,0009	0,0009	0,0009	0,0009	$w / (qa^4 / D)$
$w^2$	0,0009	0,0009	0,0009	0,0009	
$w^5$	0,0059	0,0059	0,0059	0,0054	
$w^7$	0,0026	0,0025	0,0024	0,0024	
$w^{11}$	0,0154	0,0139	0,0137	0,0136	
$M_{11}^1$	-0,0422	-0,0408	-0,0409	-0,0406	$M_{ij} / qa^2$
$M_{11}^2$	-0,0354	-0,0340	-0,0337	-0,0335	
$M_{11}^3$	-0,0252	-0,0242	-0,0238	-0,0238	
$M_{22}^6$	0,0126	0,0138	0,0137	0,0138	
$M_{22}^7$	0,0066	0,0080	0,0081	0,0081	
$M_{22}^8$	-0,0265	-0,0249	-0,0244	-0,0244	

#### 4.7.4 Exemplo 4

Neste exemplo, considere uma placa quadrada engastada nos quatro lados e submetida ao carregamento linearmente distribuído, indicado na Figura 4.16.

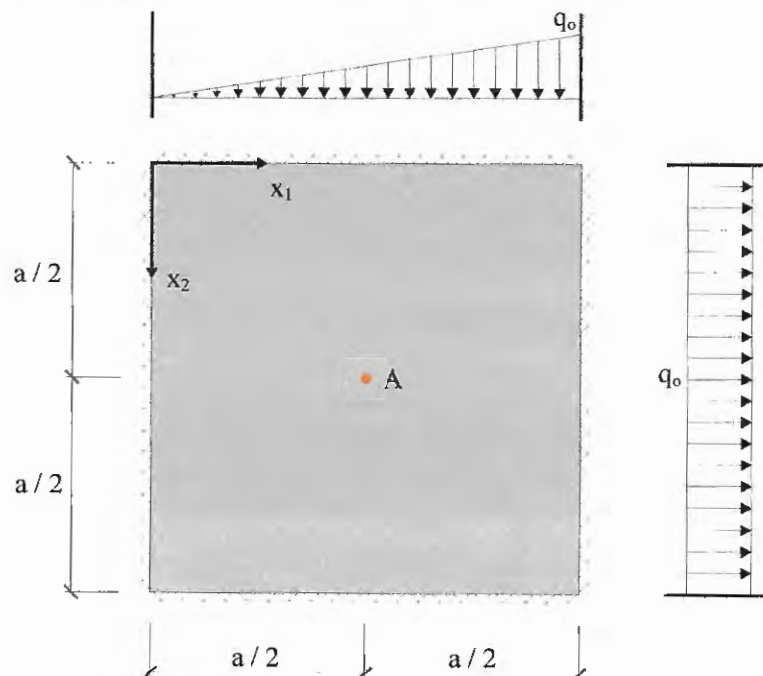


Figura 4.16 - Placa quadrada engastada nos quatro lados



Os resultados obtidos para este exemplo, utilizando-se a discretização com 16 elementos e  $\nu$  igual a 0,3, são comparados com os analíticos de TIMOSHENKO (1959) e os numéricos de PAIVA (1987), CHUEIRI (1994) e FERNANDES (1998), através da Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Resultados do exemplo 4

SOLUÇÕES	PONTO A		
	$w / (q_0 a^4 / D)$	$M_{11} / q_0 a^2$	$M_{22} / q_0 a^2$
TIMOSHENKO	0,00063	0,0115	0,0115
PAIVA (40 elementos)	0,00063	0,0115	0,0115
CHUEIRI (16 elementos)	0,00063	0,0115	0,0115
FERNANDES (16 elementos)	0,00063	0,0115	0,0115
PRESENTE ESTUDO (16 elementos)	0,00063	0,0115	0,0115

4.7.3 Exemplo 5

Para este exemplo, se tem uma placa trapezoidal apoiada nos dois lados paralelos e engastada nos outros dois, com um carregamento uniformemente distribuído (Figura 4.17).

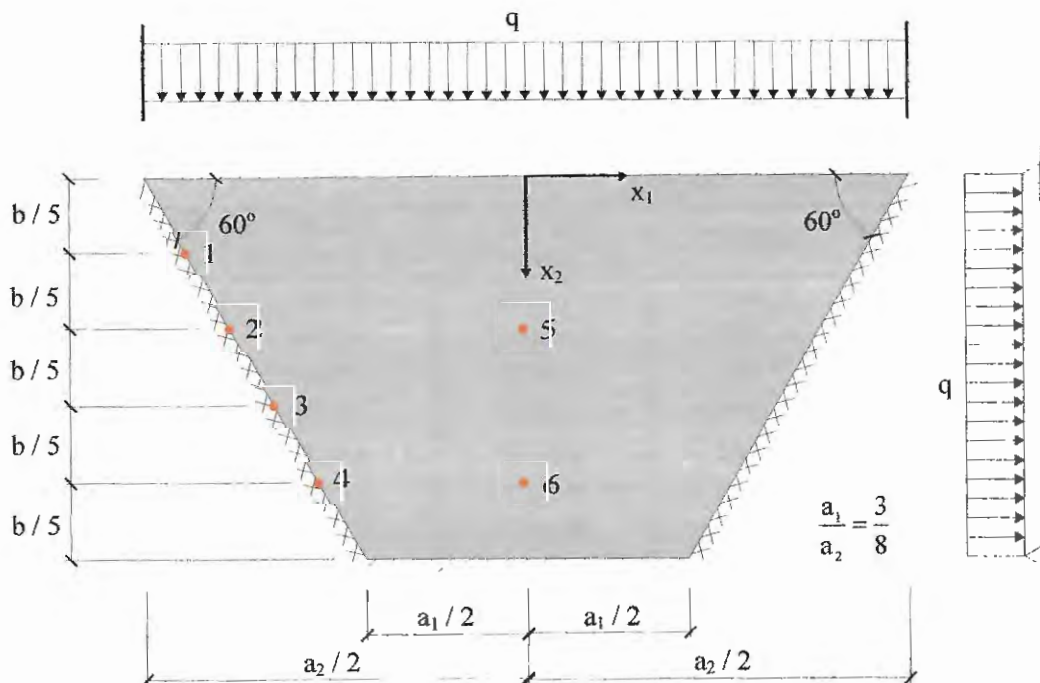


Figura 4.17 - Placa trapezoidal apoiada nos dois lados paralelos e engastada nos outros dois

Esta placa foi analisada por PAIVA (1987), que utilizou uma malha de 40 elementos, obtendo bons resultados, comparados aos valores encontrados por BARES (1972), através de diferenças finitas. Outro autor que a analisou foi CHUEIRI (1994), o qual a dividiu em 20 elementos de contorno, sendo aplicada esta mesma discretização neste presente estudo (Figura 4.18). Dessa forma, na Tabela 4.5 está exposta à comparação de todos os resultados.

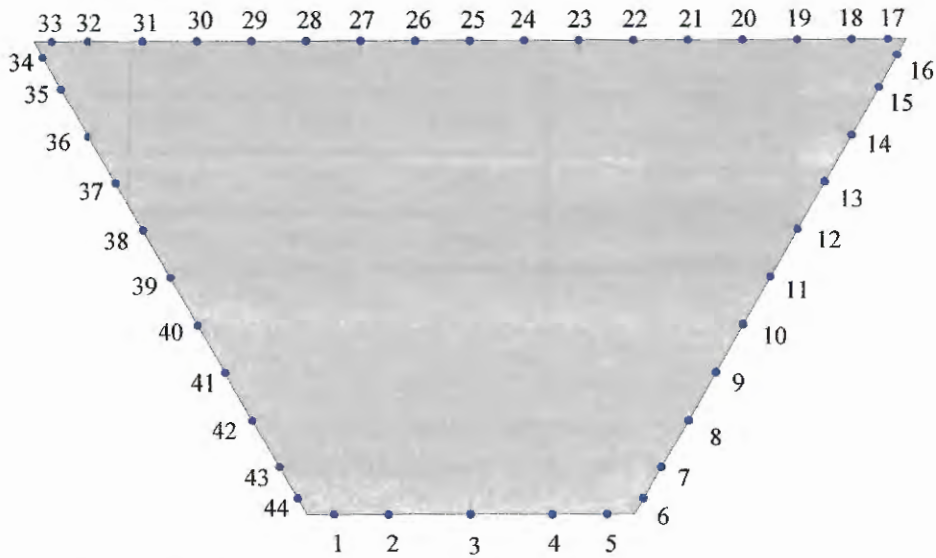


Figura 4.18 - Discretização da placa em 20 elementos

Tabela 4.5 – Resultados do exemplo 5

VALORES $\times 10^2 / (q \cdot a_2)$	BARES	PAIVA (40 elementos)	CHUEIRI (20 elementos)	PRES. ESTUDO (20 elementos)
$M_n^1$	-0,4468	-0,5802	-0,5695	-0,5739
$M_n^2$	-1,3576	-1,6069	-1,6005	-1,6090
$M_n^3$	-2,0370	-2,3660	-2,3207	-2,3403
$M_n^4$	-2,0583	-2,6600	-2,3780	-2,4455
$M_{11}^5$	0,9233	0,8962	1,0533	1,0056
$M_{22}^5$	1,1522	1,0077	1,1386	1,1386
$M_{11}^6$	0,7392	0,7494	0,7412	0,7423
$M_{22}^6$	0,4536	0,3292	0,4199	0,4201

Observa-se que os valores obtidos através do presente estudo, para este exemplo e para os demais, podem possuir variações em relação aos encontrados pelos outros autores, devido às diferentes formulações e discretizações. Entretanto, verifica-se que os resultados do presente estudo são sempre muito próximos aos quais foi comparado e, assim, prova-se a grande eficiência da formulação apresentada para a análise elástica de placas através do Método dos Elementos de Contorno.



## 5. MODELOS REOLÓGICOS VISCOELÁSTICOS

### 5.1 INTRODUÇÃO

Prever o comportamento dos materiais utilizados na engenharia é extremamente difícil, pois, geralmente, estes são influenciados por vários fatores, como o tempo, temperatura, condições ambientais, condições de carregamento, qualidade da fabricação, etc.. Por isso, modelos reológicos são adotados para cada tipo de material, com o objetivo de conseguir soluções próximas do comportamento real.

Os modelos mais simplificados representam os materiais elásticos, viscosos e plásticos, e a combinação destes são utilizados em materiais de comportamento mais complexos. Neste trabalho serão aplicados os modelos viscoelásticos de Kelvin-Voigt e Boltzmann no estudo de placas, portanto, se tem a combinação dos modelos reológicos básicos uniaxiais elástico e viscoso (Figuras 5.1 e 5.2).

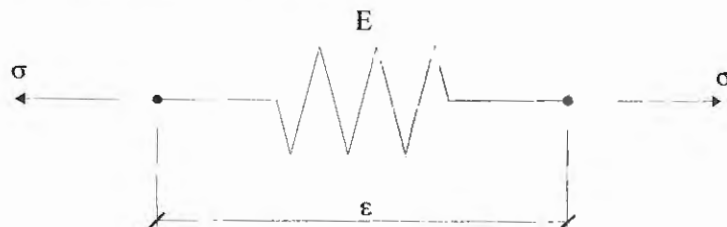


Figura 5.1 – Modelo reológico uniaxial elástico

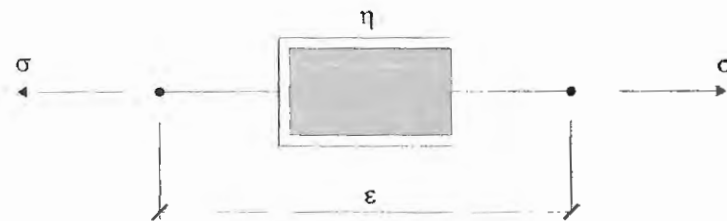


Figura 5.2 – Modelo reológico uniaxial viscoso

O modelo elástico é representado por uma mola e se caracteriza por possuir deformações elásticas instantâneas simultaneamente a aplicação de uma solicitação estática, sendo aplicado em materiais com comportamento invariável com relação ao tempo e que em uma situação de descarregamento não apresentam deformações residuais. A relação constitutiva deste modelo é expressa através da Lei de Hooke por:

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} \quad (5.1)$$

onde:

$\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões.

$\varepsilon_{lm}$  é o tensor de deformações.

$C_{lm}^{ij}$  é o tensor elástico.

Já o modelo viscoso é representado por um amortecedor e se caracteriza por apresentar um comportamento dependente do tempo, assim, mesmo que as tensões aplicadas permaneçam constantes, ocorrerá variação das deformações ao longo do tempo. Este modelo

é muito aplicado em fluidos e em alguns sólidos, sendo a relação constitutiva escrita da seguinte maneira:

$$\sigma_{ij} = \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} \quad (5.2)$$

onde:

$\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões.

$\dot{\epsilon}_{lm}$  é o tensor das taxas de deformação com relação ao tempo.

$\eta_{lm}^{ij}$  é o tensor dos parâmetros constitutivos viscosos.

## 5.2 MODELO DE KELVIN-VOIGT

O primeiro modelo viscoelástico estudado é o de Kelvin-Voigt, que é representado pelo arranjo em paralelo de um amortecedor e de uma mola (Figura 5.3).

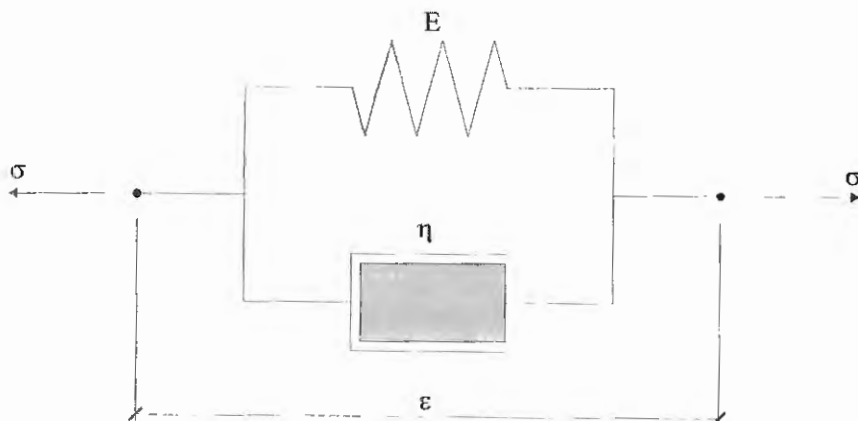


Figura 5.3 – Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt



As deformações nesta representação reológica são iguais nos dois elementos do arranjo, portanto:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^v \quad (5.3)$$

onde:

$\varepsilon_{ij}$  é o tensor de deformações totais.

$\varepsilon_{ij}^e$  é o tensor de deformações elásticas.

$\varepsilon_{ij}^v$  é o tensor de deformações viscosas.

Já as tensões deste modelo são obtidas ao se somar as tensões elásticas e as viscosas, da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^v \quad (5.4)$$

onde:

$\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões totais.

$\sigma_{ij}^e$  é o tensor de tensões elásticas.

$\sigma_{ij}^v$  é o tensor de tensões viscosas.

As tensões elásticas e viscosas podem ser expressas da seguinte maneira:

$$\sigma_{ij}^e = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} \quad (5.5)$$

$$\sigma_{ij}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} \quad (5.6)$$

Como foi visto,  $C_{ij}^{lm}$  é o tensor elástico e  $\eta_{ij}^{lm}$  é o tensor dos parâmetros constitutivos viscosos, que são definidos pelas expressões:

$$C_{ij}^{lm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{lm} + \mu (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \quad (5.7)$$

$$\eta_{ij}^{lm} = \theta_\lambda \lambda \delta_{ij} \delta_{lm} + \theta_\mu \mu (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \quad (5.8)$$

onde:

$\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de Lamé, dadas por:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5.9)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.10)$$

$\theta_\lambda$  e  $\theta_\mu$  são coeficientes representativos da viscosidade do material.

Entretanto, pode-se reescrever de maneira simplificada  $\eta_{ij}^{lm}$  em função de um único parâmetro viscoso  $\gamma$ , sendo esta a representação utilizada neste trabalho. Assim, tem-se:

$$\gamma = \theta_\lambda = \theta_\mu \quad (5.11)$$

$$\eta_{ij}^{lm} = \gamma \left[ \lambda \delta_{ij} \delta_{lm} + \mu (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \right] = \gamma C_{ij}^{lm} \quad (5.12)$$

Esta simplificação é importante para que seja possível se obter as formulações do MEC para placas viscoelásticas com representação no contorno.

Substituindo-se (5.5) e (5.12) em (5.4), encontra-se:

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} + \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} \quad (5.13)$$

Esta relação pode ser aplicada na equação integral de placas para se obter a formulação viscoelástica específica para o modelo de Kelvin-Voigt.

### 5.3 MODELO DE BOLTZMANN

O modelo de Boltzmann é representado pelo arranjo em série do modelo de Kelvin-Voigt com uma mola (Figura 5.4), dessa forma, sendo capaz de simular deformações elásticas instantâneas.

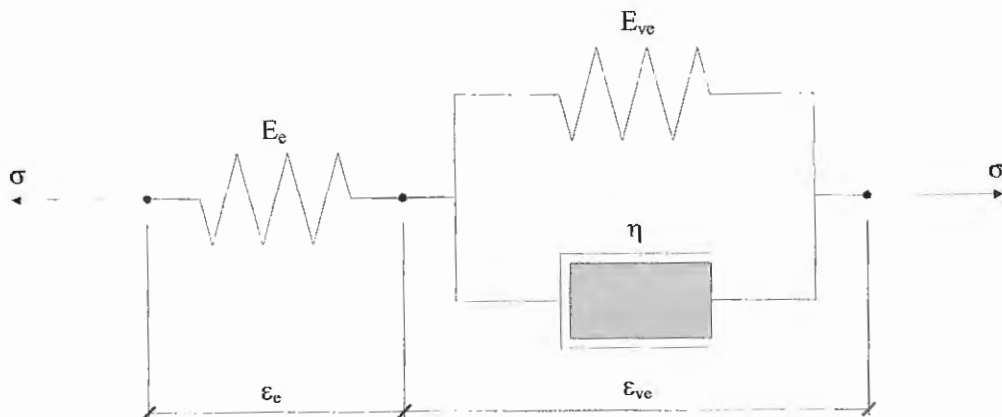


Figura 5.4 – Modelo viscoelástico de Boltzmann

As tensões nesta representação reológica são iguais no trecho elástico e viscoelástico, assim, se tem:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}^{ve} \quad (5.14)$$

onde:

$\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões totais.

$\sigma_{ij}^e$  é o tensor de tensões elásticas.

$\sigma_{ij}^{ve}$  é o tensor de tensões viscoelásticas.

Já as deformações deste modelo são obtidas ao se somarem as deformações do trecho elástico e viscoelástico, da seguinte forma:

$$\varepsilon_{lm} = \varepsilon_{lm}^e + \varepsilon_{lm}^{ve} \quad (5.15)$$

onde:

$\varepsilon_{ij}$  é o tensor de deformações totais.

$\varepsilon_{ij}^e$  é o tensor de deformações elásticas.

$\varepsilon_{ij}^{ve}$  é o tensor de deformações viscoelásticas.

Considerando-se, por simplificação, a igualdade dos coeficientes de Poisson de ambos os trechos e um único parâmetro viscoso  $\gamma$ , as tensões elásticas e viscosas podem ser expressas da seguinte maneira:

$$\sigma_{ij}^e = \tilde{C}_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e = E_e C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e \quad (5.16)$$

$$\sigma_{ij}^{el} = \hat{C}_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} = E_{ve} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} \quad (5.17)$$

$$\sigma_{ij}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} = \gamma E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} \quad (5.18)$$

onde:

$\sigma_{ij}^{el}$  é o tensor de tensões elásticas da mola em paralelo com o amortecedor.

$\sigma_{ij}^v$  é o tensor de tensões viscosas do amortecedor.

$E_e$  é o módulo de elasticidade do trecho elástico.

$E_{ve}$  é o módulo de elasticidade do trecho viscoelástico.

$\tilde{C}_{ij}^{lm}$  e  $\hat{C}_{ij}^{lm}$  são os tensores elásticos, escritos em função de  $E_e$  e  $E_{ve}$ .

Neste modelo, os tensores elásticos são expressos sem o módulo de elasticidade, portanto, vem:

$$C_{ij}^{lm} = \bar{\lambda} \delta_{ij} \delta_{lm} + \bar{\mu} (\delta_{ij} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \quad (5.19)$$

onde:

$\bar{\lambda}$  e  $\bar{\mu}$  são as constantes de Lamé sem o módulo de elasticidade, dadas por:

$$\bar{\lambda} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5.20)$$

$$\bar{\mu} = G = \frac{1}{2(1+\nu)} \quad (5.21)$$

Para o trecho viscoelástico, pode-se escrever a seguinte expressão:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{ve} = \sigma_{ij}^{el} + \sigma_{ij}^v = E_{ve} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} + \gamma E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} \quad (5.22)$$

A partir de (5.15), pode-se obter a seguinte relação para as taxas de deformação em relação ao tempo, para os dois trechos do modelo:

$$\dot{\varepsilon}_{lm} = \dot{\varepsilon}_{lm}^e + \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} \quad (5.23)$$

onde:

$\dot{\varepsilon}_{lm}$  é o tensor das taxas de deformação totais.

$\dot{\varepsilon}_{lm}^e$  é o tensor das taxas de deformação elásticas.

$\dot{\varepsilon}_{lm}^{ve}$  é o tensor das taxas de deformação viscoelásticas.

Isolando-se os termos referentes às deformações elásticas e viscoelásticas, nas equações (5.16) e (5.22), respectivamente, tem-se:

$$\varepsilon_{lm}^e = \frac{1}{E_e} C_{lm}^{ij} \sigma_{ij} \quad (5.24)$$

$$\varepsilon_{lm}^{ve} = \frac{1}{E_{ve}} C_{lm}^{ij-1} \sigma_{ij} - \gamma \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} \quad (5.25)$$

Aplicando-se (5.23) em (5.25), obtém-se:

$$\varepsilon_{lm}^{ve} = \frac{1}{E_{ve}} C_{lm}^{ij-1} \sigma_{ij} - \gamma (\dot{\varepsilon}_{lm} - \dot{\varepsilon}_{lm}^e) \quad (5.26)$$

Substituindo-se (5.24) e (5.26) em (5.15), encontra-se a relação reológica para o modelo de Boltzmann, dada por:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} C_{ij}^{lm} (\varepsilon_{lm} + \gamma \dot{\varepsilon}_{lm}) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{ij} \quad (5.27)$$

onde:

$\dot{\sigma}_{ij}$  é o tensor da taxa de variação da tensão total com o tempo.

Esta relação pode ser aplicada na equação integral de placas para se obter a formulação viscoelástica específica para o modelo de Boltzmann.

## **6. FORMULAÇÕES DO MEC PARA PLACAS VISCOELÁSTICAS**

### **6.1 INTRODUÇÃO**

Muitos materiais apresentam um comportamento viscoso, como polímeros, concreto, madeira, solo e aços sob altas temperaturas. Este comportamento pode ser desconsiderado ao se utilizar certos tipos de simplificações, porém, o conhecimento preciso de todos os deslocamentos, tensões e deformações ao longo do tempo, contribui para a construção de estruturas mais eficientes e com menos patologias.

Para se considerar o comportamento viscoso, geralmente, são utilizadas técnicas muito dispendiosas computacionalmente, com resultados sensíveis ao tamanho do incremento de tempo adotado ou que não levam em conta as características reológicas do material que constitui a estrutura. Entretanto, neste capítulo, é apresentada uma técnica de resolução de problemas viscoelásticos para placas, onde se introduz o modelo reológico de Kelvin-Voigt ou o de Boltzmann na formulação, a partir do teorema de Betti, dessa forma, são geradas integrais de domínio que podem ser solucionadas através da utilização de células internas e técnicas especiais de integração. Além disso, nesta técnica, os cálculos são realizados de forma rápida e podem ser utilizados vários incrementos de tempo diferentes.



Destaca-se, também, que todos os problemas apresentados para esta formulação viscoelástica serão considerados quase-estáticos, isto é, os efeitos da massa serão desconsiderados ao se desprezar o termo dinâmico referente à aceleração.

## 6.2 FORMULAÇÃO PARA O MODELO DE KELVIN-VOIGT

Para se obter a formulação viscoelástica para o modelo de Kelvin-Voigt, primeiramente, deve-se aplicar a relação das tensões desta representação reológica, dada pela equação (5.4), no teorema de Betti, expresso em (3.1). Neste teorema, o problema fundamental e o real têm que ser proporcionais, deste modo, um dos termos da relação de tensões que pode ser substituído na equação (3.1) é o elástico. Assim, se tem:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij}^e \varepsilon_{ij}^* dV \quad (6.1)$$

ou seja,

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV - \int_V \sigma_{ij}^v \varepsilon_{ij}^* dV \quad (6.2)$$

Substituindo-se (2.13) e (2.16) em (6.2) e, em seguida, integrando-se ao longo da espessura, encontra-se as seguintes integrais de domínio:

$$-\int_{\Omega} (M_{ij}^* w_{,ij}) d\Omega = -\int_{\Omega} (M_{ij} w_{,ij}^*) d\Omega + \int_{\Omega} (M_{ij}^v w_{,ij}^*) d\Omega \quad (6.3)$$

Desenvolvendo-se as termos referentes ao momento fundamental e total de (6.3), de forma semelhante ao que foi exposto no item 3.2, se obtém a equação integral do deslocamento de um ponto  $q$  do domínio da placa para o modelo de Kelvin-Voigt:

$$\begin{aligned}
 w(q) + \iint_{\Gamma} \left( V_n^*(q, P) w(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\
 + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) = \iint_{\Gamma} \left( V_n(P) w^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \quad (6.4) \\
 + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \int_{\Omega} M_{ij}^*(p) w_{,ij}^*(q, p) d\Omega + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p)
 \end{aligned}$$

Em seguida, adotando-se os procedimentos apresentados no item 3.3 para a equação (6.4), encontra-se a expressão da equação integral de um ponto  $Q$  do contorno para o modelo de Kelvin-Voigt:

$$\begin{aligned}
 K(Q) w(Q) + \iint_{\Gamma} \left( V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\
 + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) = \iint_{\Gamma} \left( V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) + \quad (6.5) \\
 + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + \int_{\Omega} M_{ij}^*(p) w_{,ij}^*(Q, p) d\Omega + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p)
 \end{aligned}$$

Observa-se que a única diferença entre as equações (3.20) e (3.36) em relação às (6.4) e (6.5), é a presença da integral de domínio referente ao momento viscoso, que será solucionada através da geração de células internas no domínio.

6.2.1 Equações Integrais para os Esforços nos Pontos Internos

Para se obter os esforços nos pontos internos da placa, considerando-se o modelo de Kelvin-Voigt, primeiramente, devem-se encontrar as curvaturas nestes pontos ao se derivar a equação (6.4), em relação às direções  $x_1$  e  $x_2$  de um sistema cartesiano ortogonal, com origem no ponto  $q$ . Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_k \partial x_l} + \iint_{\Gamma} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) w(P) - \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\ & + \sum_{c=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) w_c(P) = \iint_{\Gamma} \left( V_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) + \right. \\ & \left. - M_n(P) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right) d\Gamma(P) + \sum_{c=1}^{N_c} R_c(P) \frac{\partial^2 w_c^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \int_{\Omega} M_{ij}^v(p) w_{,ij}^*(q, p) d\Omega + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, p) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (6.6)$$

, com  $i, j, k, l = 1, 2$ .

Na equação anterior, todas as derivadas das soluções fundamentais foram expressas no item 4.6, com exceção do termo referente ao momento viscoso, que deve ter suas derivadas calculadas de forma criteriosa, pois existem singularidades do tipo  $1/r$  devido à equação de  $w_{,ij}^*$ , dada por:

$$w_{,ij}^*(q, p) = \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, p) = \frac{1}{4\pi D} (r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij} \ln r) \quad (6.7)$$

Para o cálculo das derivadas deste termo, deve-se seguir o procedimento apresentado por MIKHLIN (1962), BUI (1978), TELLES & BREBBIA (1979), RIBEIRO (1992) e CHUEIRI (1994), que será exposto a seguir.

Inicialmente, chamando-se de  $I_{,kl}$  as derivadas do termo referente ao momento viscoso, vem:

$$I_{,kl}(q) = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \int_{\Omega} w_{,ij}^*(q, p) M_{ij}^v(p) d\Omega(p) \quad (6.8)$$

Verifica-se que a primeira derivada de (6.8) pode ser calculada sem singularidades fortes, assim:

$$I_{,kl}(q) = \frac{\partial}{\partial x_l} \int_{\Omega} w_{,ijk}^*(q, p) M_{ij}^v(p) d\Omega(p) \quad (6.9)$$

onde:

$$w_{,ijk}^*(q, p) = -\frac{1}{4\pi D r} (\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} + \delta_{ij} r_{,k} - 2r_{,i} r_{,j} r_{,k}) \quad (6.10)$$

Em (6.9) será denominada por  $V(q)$  a integral da equação. Para se obter a segunda derivada da expressão (6.8), deve-se considerar que do domínio  $\Omega$  é retirado um subdomínio circular  $\Omega_\epsilon$ , com um pequeno raio  $\epsilon$  e com origem no ponto fonte  $q$ . Dessa forma, se tem o subdomínio definido por  $\Omega_\epsilon = \Omega - \Omega_c$  (Figura 6.1).

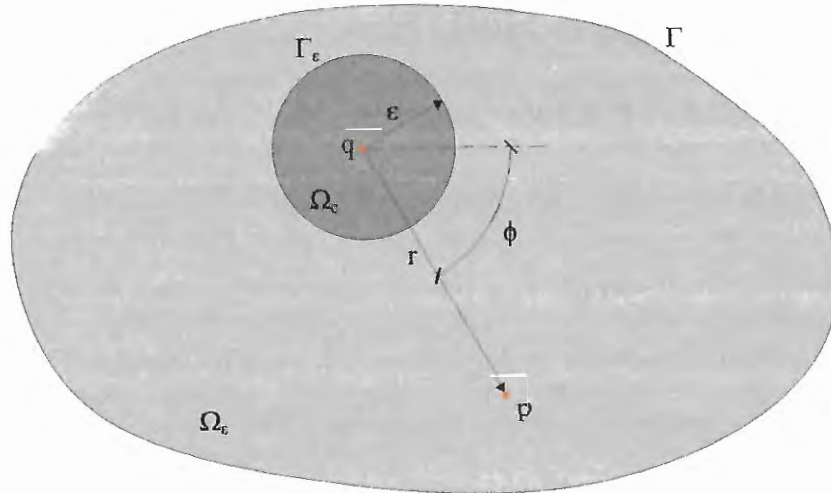


Figura 6.1 – Domínios  $\Omega_\epsilon$  e  $\Omega_c$

Para o domínio  $\Omega_c$ , a integral  $V(q)$  possui singularidade de ordem  $\epsilon$  e pode ser escrita da seguinte forma:

$$V_c(q) = \int_{\Omega_c} w_{,ijk}^*(q,p) M_{ij}^v(p) d\Omega_c(p) \quad (6.11)$$

Considerando-se que  $M_{ij}^v(p)$  possui as suas primeiras e segundas derivadas contínuas em torno do ponto  $q$  e expandindo-se a função correspondente a este momento, na vizinhança deste ponto, através da série de Taylor, se tem:

$$M_{ij}^v(p) = M_{ij}^v(q) + [x_m(p) - x_m(q)] M_{ij,m}^v(q) + \dots \quad (i, j, m = 1, 2) \quad (6.12)$$

Substituindo-se (6.12) em (6.11), encontra-se:

$$\begin{aligned}
 V_c(q) = & M_{ij}^v(q) \int_{\Omega_c} w_{,ijk}^*(q, p) d\Omega_c(p) + \\
 & + M_{ij, m}^v(q) \int_{\Omega_c} [x_m(p) - x_m(q)] w_{,ijk}^*(q, p) d\Omega_c(p)
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Aplicando-se (6.10) em (6.13), e considerando-se que  $r$  coincide com  $\varepsilon$ , no domínio  $\Omega_c$ , e que suas derivadas dependem apenas do ângulo  $\phi$ , e sabendo-se que:

$$d\Omega_c = r dr d\phi \tag{6.14}$$

$$x_m(p) - x_m(q) = r r_{,m} \tag{6.15}$$

Dessa forma, obtém-se:

$$\int_{\Omega_c} w_{,ijk}^*(q, p) d\Omega_c(p) = 0 \tag{6.16}$$

e

$$\int_{\Omega_c} [x_m(p) - x_m(q)] w_{,ijk}^*(q, p) d\Omega_c(p) = -K \varepsilon^2 \tag{6.17}$$

onde:

$$K = \frac{1}{16D} (\delta_{ki} \delta_{jm} + \delta_{kj} \delta_{im} + \delta_{ij} \delta_{km}) \tag{6.18}$$

Substituindo-se (6.16) e (6.17) em (6.13), tem-se:

$$V_c(q) = -K \varepsilon^2 M_{ij, m}^v(q) \tag{6.19}$$

Derivando-se (6.19) em relação à  $x_l$ , encontra-se:

$$\frac{\partial V_\varepsilon(q)}{\partial x_l(q)} = -K \varepsilon^2 M_{ij, \gamma ml}^v(q) \quad (6.20)$$

Verifica-se que a expressão (6.20) tende a zero, quando o limite de  $\varepsilon$  tende a zero.

Assim sendo, a equação (6.9) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$I_{\gamma kl}(q) = \frac{\partial V(q)}{\partial x_l(q)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial}{\partial x_l(q)} \int_{\Omega_\varepsilon} w_{\gamma jk}^*(q, p) M_{ij}^v(p) d\Omega_\varepsilon(p) \right] \quad (6.21)$$

Aplicando-se a regra de Leibnitz para diferenciação de integrais em (6.21), segundo MIKHLIN (1962) e BREBIA et al (1984), vem:

$$\begin{aligned} I_{\gamma kl}(q) = & \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_l(q)} w_{\gamma jk}^*(q, p) M_{ij}^v(p) d\Omega(p) + \\ & - M_{ij}^v(q) \int_{\Gamma_\varepsilon} w_{\gamma jk}^*(q, p) r_{\gamma l} d\Gamma_\varepsilon \end{aligned} \quad (6.22)$$

Na equação anterior, a primeira integral é interpretada no sentido do valor principal de Cauchy e a segunda é a transformação da integral no domínio  $\Omega_\varepsilon$  em integral no contorno  $\Gamma_\varepsilon$ , que pode ser obtida facilmente, pois, como  $d\Gamma_\varepsilon = \varepsilon d\phi$ , todos os valores serão função de  $\phi$ , logo, para esta integral se tem:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} w_{\gamma jk}^* r_{\gamma l} d\Gamma_\varepsilon = \int_{\phi=0}^{2\pi} \varepsilon w_{\gamma jk}^* r_{\gamma l} d\phi \quad (6.23)$$

Substituindo-se (6.10), com  $r = \varepsilon$ , em (6.23), obtém-se:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} w_{\gamma_{ijk}^*} r_{\gamma_l} d\Gamma_\varepsilon = \int_{\phi=0}^{2\pi} -\frac{1}{4\pi D} (\delta_{ki} r_{\gamma_j} + \delta_{jk} r_{\gamma_i} + \delta_{ij} r_{\gamma_k} - 2r_{\gamma_i} r_{\gamma_j} r_{\gamma_k}) r_{\gamma_l} d\phi \quad (6.24)$$

Resultando em:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} w_{\gamma_{ijk}^*} r_{\gamma_l} d\Gamma_\varepsilon = -\frac{1}{8D} (\delta_{ki} \delta_{jl} + \delta_{kj} \delta_{il} + \delta_{ij} \delta_{kl}) \quad (6.25)$$

Calculando-se a derivada da primeira integral da equação (6.22) e aplicando-se (6.25) nesta mesma expressão, é encontrado o valor para  $I_{,kl}$ , dado por:

$$I_{,kl}(q) = \int_{\Omega} \bar{e}_{klij}^*(q, p) M_{ij}^v(p) d\Omega(p) + \bar{g}_{klij}(q) M_{ij}^v(q) \quad (6.26)$$

onde:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{klij}^*(q, p) = w_{\gamma_{ijkl}^*}(q, p) = & -\frac{1}{4\pi D r^2} \left[ 2(\delta_{ki} r_{\gamma_j} r_{\gamma_l} + \delta_{kj} r_{\gamma_i} r_{\gamma_l} + \right. \\ & \left. + \delta_{ij} r_{\gamma_k} r_{\gamma_l} + \delta_{il} r_{\gamma_k} r_{\gamma_j} + \delta_{kl} r_{\gamma_i} r_{\gamma_j} + \delta_{jl} r_{\gamma_i} r_{\gamma_k}) + \right. \\ & \left. - 8r_{\gamma_i} r_{\gamma_j} r_{\gamma_k} r_{\gamma_l} - (\delta_{ki} \delta_{jl} + \delta_{kj} \delta_{il} + \delta_{ij} \delta_{kl}) \right] \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\bar{g}_{klij}(q) = \frac{1}{8D} (\delta_{ki} \delta_{jl} + \delta_{kj} \delta_{il} + \delta_{ij} \delta_{kl}) \quad (6.28)$$



Com a obtenção das derivadas de  $w_{,ij}^*$ , para se calcular os momentos fletores nos pontos internos, considerando-se o modelo de Kelvin-Voigt, deve-se substituir os valores das curvaturas obtidas através (6.6) na equação (2.19).

Com relação às forças cortantes nos pontos internos, devem ser calculadas, primeiramente, as derivadas das curvaturas através de:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_m \partial x_m} \right) + \int_\Gamma \left( \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, P) \right) w(P) - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, P) \right) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\ & + \sum_{c=1}^{N_c} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, P) \right) w_c(P) = \int_\Gamma \left( V_n(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, P) \right) + \right. \\ & \left. - M_n(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_m} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right) \right) d\Gamma(P) + \sum_{c=1}^{N_c} R_c(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w_c^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, P) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \int_\Omega M_{ij}^v(p) \frac{\partial^2 w_{,ij}^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, p) d\Omega + \int_{\Omega_s} g(p) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, p) \right) d\Omega_s(p) \quad (6.29) \end{aligned}$$

Na equação anterior, todas as derivadas das soluções fundamentais foram expressas no item 4.6, com exceção do termo referente ao momento viscoso, que deve ter suas derivadas calculadas de forma análoga ao que foi realizado para a equação (6.8), devido às singularidades existentes. Dessa forma, denominando-se de  $I_\beta$  as derivadas do termo referente ao momento viscoso, vem:

$$I_\beta = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \int_\Omega \frac{\partial^2 w_{,ij}^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, p) M_{ij}^v(p) d\Omega \quad (6.30)$$

Considerando-se os resultados obtidos em (6.26), a equação (6.30) pode ser escrita explicitamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
I_\beta = & \frac{\partial}{\partial x_\beta(q)} \int_\Omega \left[ \frac{\partial^2 w_{,11}^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, p) M_{11}^v(p) + \right. \\
& \left. + 2 \frac{\partial^2 w_{,12}^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, p) M_{12}^v(p) + \frac{\partial^2 w_{,22}^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, p) M_{22}^v(p) \right] d\Omega(p) + \\
& + \frac{\partial}{\partial x_\beta(q)} \left[ \frac{1}{8D} (4M_{11}^v(q) + 4M_{22}^v(q)) \right]
\end{aligned} \quad (6.31)$$

Como o último termo corresponde apenas às derivadas de  $M_{ij}^v$  em relação às coordenadas  $\beta$ , este será denominado por  $q_\beta^v$ . Para se obter as derivadas da integral de (6.31), deve-se considerar, novamente, que do domínio  $\Omega$  é retirado um subdomínio circular  $\Omega_c$ , com um pequeno raio  $\varepsilon$  e com origem no ponto fonte  $q$ , conforme a Figura 6.1. Portanto, a integral de (6.31) para o subdomínio  $\Omega_c$  é expressa por:

$$V_c'(q) = \int_{\Omega_c} w_{,mmij}^*(q, p) M_{ij}^v(p) d\Omega_c(p) \quad (6.32)$$

Expandindo-se  $M_{ij}^v(p)$  na vizinhança do ponto  $q$ , se tem:

$$\begin{aligned}
V_c'(q) = & M_{ij}^v(q) \int_{\Omega_c} w_{,mmij}^*(q, p) d\Omega_c(p) + \\
& + M_{ij, \gamma i}^v(q) \int_{\Omega_c} [x_i(p) - x_j(q)] w_{,mmij}^*(q, p) d\Omega_c(p)
\end{aligned} \quad (6.33)$$

Substituindo-se os valores das soluções fundamentais em (6.33) e considerando-se que  $r$  coincide com  $\varepsilon$ , no domínio  $\Omega_c$ , e as expressões (6.14) e (6.15), obtêm-se:

$$\int_{\Omega_c} w_{,mmij}^*(q, p) d\Omega_c(p) = 0 \quad (6.34)$$

e

$$\int_{\Omega_c} [x_i(p) - x_i(q)] w_{,mmij}^*(q, p) d\Omega_c(p) = 0 \quad (6.35)$$

Como as funções envolvidas dependem apenas do ângulo  $\phi$  e, neste caso, quando são integradas no domínio  $\Omega_c$ , resultam em valores nulos, logo, se tem:

$$V_c(q) = 0 \quad (6.36)$$

Assim sendo, a equação (6.31) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$I_\beta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial}{\partial x_\beta(q)} \int_{\Omega_c} w_{,mmij}^*(q, p) M_{ij}^v(p) d\Omega_\epsilon(p) \right] + q_\beta^v \quad (6.37)$$

Aplicando-se a regra de Leibnitz para diferenciação de integrais em (6.37), é possível obter as derivadas das curvaturas fundamentais encontradas no termo referente ao momento viscoso da equação (6.29), através da seguinte expressão:

$$I_\beta(q) = \int_{\Omega} \bar{e}_{\beta ij}^*(q, p) M_{ij}^v(p) d\Omega(p) + q_\beta^v \quad (6.38)$$

onde:

$$\bar{e}_{\beta ij}^* = \frac{\partial w_{,mmij}^*}{\partial x_\beta}(q, p) \quad (6.39)$$

$$q_\beta^v = \frac{1}{2D} \frac{\partial}{\partial x_\beta}(q) [M_{11}^v(q) + M_{22}^v(q)] \quad (6.40)$$

Com a obtenção das derivadas de  $w_{,ij}^*$ , para se calcular as forças cortantes nos pontos internos, considerando-se o modelo de Kelvin-Voigt, deve-se substituir os valores das derivadas das curvaturas obtidas através (6.29) na equação (2.22).

### 6.2.2 Discretização do Domínio

A aplicação do modelo reológico de Kelvin-Voigt na formulação de placas para o cálculo de problemas viscoelásticos, introduz integrais de domínio referentes ao termo viscoso nas equações integrais. Para que estas integrais sejam resolvidas, é necessário se subdividir todo o domínio em células, sendo, neste trabalho, adotadas células triangulares com aproximações lineares (Figura 6.2).

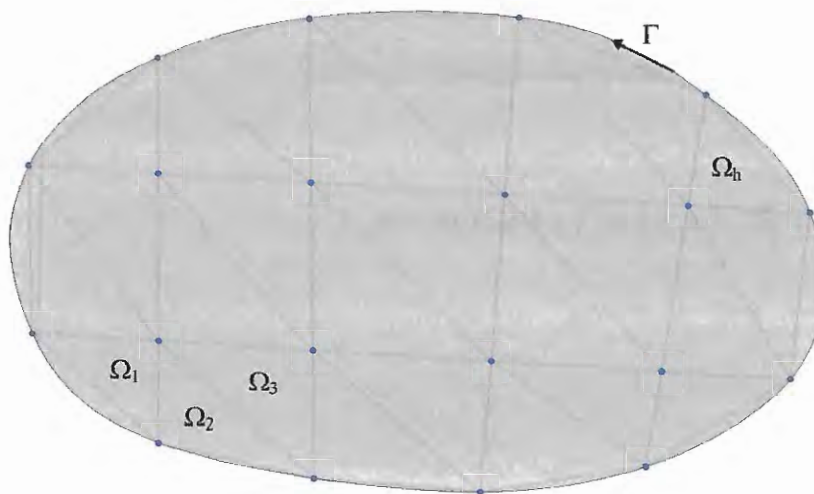
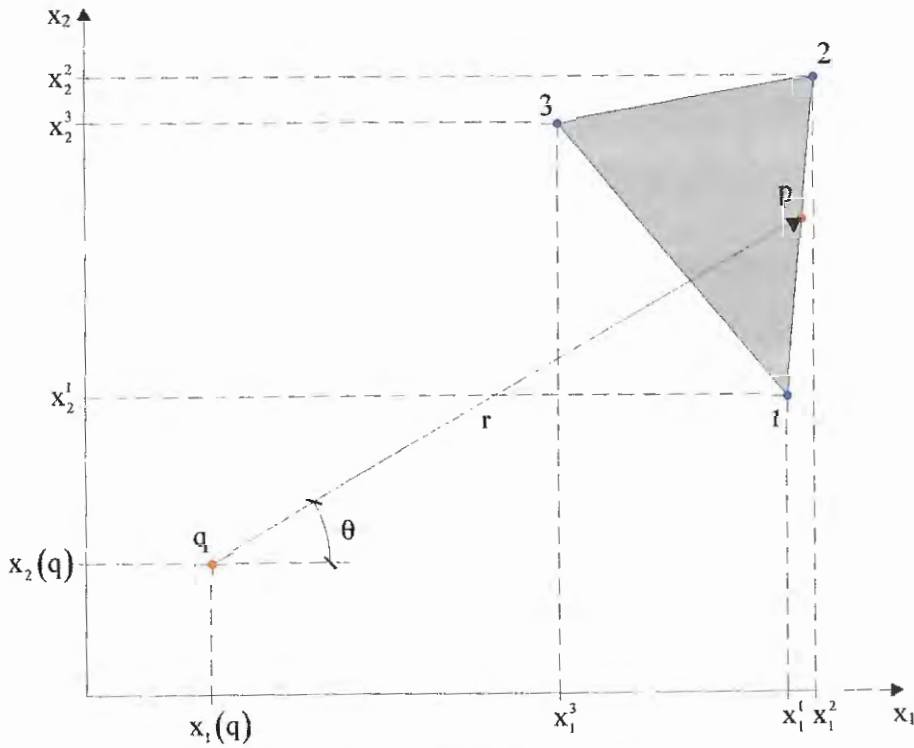


Figura 6.2 – Discretização do domínio em células triangulares

As funções aproximadoras são expressas em relação às coordenadas cartesianas dos nós definidos em cada célula e do ponto fonte  $q$  (Figura 6.3), da seguinte maneira:



Figuras 6.3 – Coordenadas dos nós das células e do ponto fonte  $q$

$$\phi_i(r, \theta) = \frac{a^i}{2A} + \omega^i [x_1(q) + r \cos \theta] + \eta^i [x_2(q) + r \sin \theta] \quad (6.41)$$

onde:

$A$  é a área do triângulo.

$x_i(q)$  são as coordenadas do ponto fonte  $q$ .

$r$  é a distância entre o ponto fonte  $q$  e o ponto campo  $p$ .

$\theta$  é o ângulo entre a reta formada por  $r$  e a horizontal.

Os coeficientes de (6.41) são dados por:

$$\alpha^i = x_1^j x_2^k - x_1^k x_2^j \quad (6.42)$$

$$\omega^i = x_2^j - x_2^k \quad (6.43)$$

$$\eta^i = x_1^k - x_1^j \quad (6.44)$$

Os índices  $i, j, k$  de (6.42) a (6.44) variam ciclicamente de 1 a 3, assim, representando as coordenadas  $x_1$  e  $x_2$  de cada nó da célula.

Neste trabalho, devem ser calculadas três integrais de domínio referentes ao termo viscoso, sendo a primeira para a equação integral dos deslocamentos (6.4) com núcleo  $w_{,ij}^*$ , a segunda para a expressão das curvaturas (6.6) com núcleo  $w_{,ijkl}^*$  e a última para a equação das derivadas das curvaturas (6.29) com  $w_{,\beta m m i j}^*$ . Para se obter essas integrações sobre as células, é adotado um esquema semi-analítico de resolução que consiste em se calcular analiticamente as integrais na variável do raio e numericamente na variável do ângulo. Dessa forma, para a primeira integral de domínio, sabendo-se que  $d\Omega = r dr d\theta$ , tem-se:

$$\int_{\Omega_b} w_{,ij}^*(q, p) \phi_r(p) M_{ij}^{vT} d\Omega = \int_{\theta} \int_r w_{,ij}^*(q, p) \phi_r(p) M_{ij}^{vT} r dr d\theta \quad (6.45)$$

Substituindo-se (6.7) e (6.41) em (6.45), obtém-se a seguinte integral:

$$\int_{\theta} \int_r \frac{1}{4\pi D} (r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij} \ln r) \left\{ \frac{\alpha^i}{2A} + \omega^i [x_1(q) + r \cos \theta] + \eta^i [x_2(q) + r \sin \theta] \right\} r dr d\theta M_{ij}^{vT} \quad (6.46)$$

Integrando-se analiticamente na variável  $r$ , encontra-se:

$$\int_{\theta} \frac{1}{4\pi D} \left\{ \left[ r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij} \left( \ln R(\theta) - \frac{1}{2} \right) \right] \frac{R(\theta)^2}{4A} (a^T + \omega^T x_1(q) + \eta^T x_2(q)) + \left[ r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij} \left( \ln R(\theta) - \frac{1}{3} \right) \right] \frac{R(\theta)^3}{6A} (\omega^T \cos\theta + \eta^T \sin\theta) \right\} d\theta M_{ij}^{vT} \quad (6.47)$$

onde:

$R(\theta) = R_2(\theta) - R_1(\theta)$ , conforme Figura (6.4).

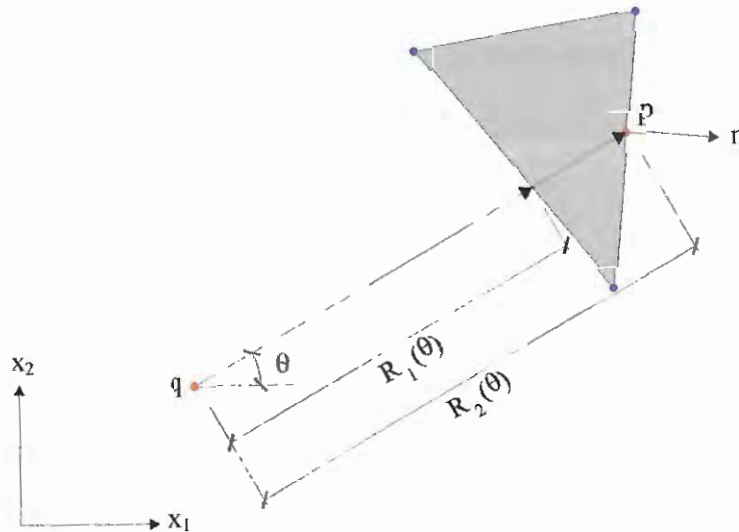


Figura 6.4 – Distâncias  $R_1(\theta)$  e  $R_2(\theta)$

Para se integrar numericamente (6.47), deve-se, por simplificação dos cálculos, trocar a variável de integração  $\theta$  pelo contorno da célula, representado por  $\Gamma_c$ . Assim sendo, considerando-se as seguintes relações:

$$d\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \quad (6.48)$$

e

$$R(\theta) = r \quad (6.49)$$

Portanto, substituindo-se (6.48) e (6.49) em (6.47), vem:

$$\int_{\Gamma_c} \frac{1}{4\pi D} \left\{ \left[ r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij} \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) \right] \frac{r^2}{4A} (\alpha^T + \omega^T x_1(q) + \eta^T x_2(q)) + \right. \\ \left. + \left[ r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij} \left( \ln r - \frac{1}{3} \right) \right] \frac{r^3}{6A} (\omega^T \cos\theta + \eta^T \sin\theta) \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_c M_{ij}^{vT} \quad (6.50)$$

Aplicando-se a quadratura de Gauss, expressa em (4.47), e o Jacobiano, dado por (4.44), na equação (6.50), se tem a seguinte somatória para a integração numérica:

$$\sum_{c=1}^3 \sum_{n=1}^{N_g} \frac{l_c}{8\pi D} \left\{ \left[ r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij} \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) \right] \frac{r^2}{4A} (\alpha^T + \omega^T x_1(q) + \eta^T x_2(q)) + \right. \\ \left. + \left[ r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij} \left( \ln r - \frac{1}{3} \right) \right] \frac{r^3}{6A} (\omega^T \cos\theta + \eta^T \sin\theta) \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} w_n M_{ij}^{vT} \quad (6.51)$$

onde:

$l_c$  é comprimento do lado da célula e o índice  $c$  varia de 1 a 3, assim, representando os três lados.

Utilizando-se o mesmo procedimento para a segunda integral de domínio, se tem primeiramente:



$$\int_{\Omega_k} w_{,ijkl}^*(q, p) \phi_T(p) M_{ij}^{vT} d\Omega = \int_{\theta} \int_r w_{,ijkl}^*(q, p) \phi_T(p) M_{ij}^{vT} r dr d\theta \quad (6.52)$$

Substituindo-se (6.27) e (6.41) em (6.52), obtém-se a seguinte integral:

$$\int_{\theta} \int_r -\frac{1}{4\pi D r^2} \left[ 2(\delta_{kl} r_{,j} r_{,i} + \delta_{kj} r_{,i} r_{,l} + \delta_{ij} r_{,k} r_{,l} + \delta_{il} r_{,k} r_{,j} + \delta_{kl} r_{,i} r_{,j} + \delta_{jl} r_{,i} r_{,k}) - 8r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,l} - (\delta_{kl} \delta_{jl} + \delta_{kj} \delta_{il} + \delta_{ij} \delta_{kl}) \right] \left\{ \frac{a^T}{2A} + \omega^T [x_1(q) + r \cos \theta] + \eta^T [x_2(q) + r \sin \theta] \right\} r dr d\theta M_{ij}^{vT} \quad (6.53)$$

Integrando-se analiticamente na variável  $r$ , encontra-se:

$$\int_{\theta} -\frac{1}{4\pi D} \left[ 2(\delta_{kl} r_{,j} r_{,i} + \delta_{kj} r_{,i} r_{,l} + \delta_{ij} r_{,k} r_{,l} + \delta_{il} r_{,k} r_{,j} + \delta_{kl} r_{,i} r_{,j} + \delta_{jl} r_{,i} r_{,k}) - 8r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,l} - (\delta_{kl} \delta_{jl} + \delta_{kj} \delta_{il} + \delta_{ij} \delta_{kl}) \right] \left[ \frac{1}{2A} (a^T + \omega^T x_1(q) + \eta^T x_2(q)) \ln R(\theta) + \frac{R(\theta)}{2A} (\omega^T \cos \theta + \eta^T \sin \theta) \right] d\theta M_{ij}^{vT} \quad (6.54)$$

Trocando-se a variável de integração  $\theta$  por  $\Gamma_c$ , ao se substituir (6.48) e (6.49) em (6.54), vem:

$$\int_{\Gamma_c} -\frac{1}{4\pi D} \left[ 2(\delta_{kl} r_{,j} r_{,i} + \delta_{kj} r_{,i} r_{,l} + \delta_{ij} r_{,k} r_{,l} + \delta_{il} r_{,k} r_{,j} + \delta_{kl} r_{,i} r_{,j} + \delta_{jl} r_{,i} r_{,k}) - 8r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,l} - (\delta_{kl} \delta_{jl} + \delta_{kj} \delta_{il} + \delta_{ij} \delta_{kl}) \right] \left[ \frac{1}{2A} (a^T + \omega^T x_1(q) + \eta^T x_2(q)) \ln r + \frac{r}{2A} (\omega^T \cos \theta + \eta^T \sin \theta) \right] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_c M_{ij}^{vT} \quad (6.55)$$

Aplicando-se a quadratura de Gauss, expressa em (4.47), e o Jacobiano, dado por (4.44), na equação (6.55), se tem a seguinte somatória para a integração numérica:

$$\sum_{c=1}^3 \sum_{n=1}^{N_k} -\frac{lc}{8\pi D} \left[ 2(\delta_{ki} r_{,j} r_{,l} + \delta_{kj} r_{,i} r_{,l} + \delta_{ij} r_{,k} r_{,l} + \delta_{il} r_{,k} r_{,j} + \delta_{kl} r_{,i} r_{,j} + \delta_{jl} r_{,i} r_{,k}) - 8r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,l} - (\delta_{ki} \delta_{jl} + \delta_{kj} \delta_{il} + \delta_{ij} \delta_{kl}) \right] \quad (6.56)$$

$$\left[ \frac{1}{2A} (\alpha^T + \omega^T x_1(q) + \eta^T x_2(q)) \ln r + \frac{r}{2A} (\omega^T \cos\theta + \eta^T \sin\theta) \right] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} w_n M_{ij}^{vT}$$

Para a terceira integral de domínio é adotando-se o mesmo procedimento, entretanto, o valor de  $w_{\beta m m i j}^*$ , dado por (6.39), não será definido por não possuir uma equação geral. Dessa forma, se tem inicialmente:

$$\int_{\Omega_n} w_{\beta m m i j}^*(q, p) \phi_T(p) M_{ij}^{vT} d\Omega = \int_{\theta} \int_r \frac{\bar{w}_{\beta m m i j}^*}{r^3}(q, p) \phi_T(p) M_{ij}^{vT} r dr d\theta \quad (6.57)$$

onde:

$$\bar{w}_{\beta m m i j}^* = w_{\beta m m i j}^* r^3$$

Substituindo-se (6.41) em (6.52), obtém-se a seguinte integral:

$$\int_{\theta} \int_r \frac{\bar{w}_{\beta m m i j}^*}{r^3} \left\{ \frac{\alpha^T}{2A} + \omega^T [x_1(q) + r \cos\theta] + \eta^T [x_2(q) + r \sin\theta] \right\} r dr d\theta M_{ij}^{vT} \quad (6.58)$$

Integrando-se analiticamente na variável  $r$ , encontra-se:

$$\int_{\theta} \bar{w}_{\beta m n i j}^* \left[ \omega^T \cos \theta \ln R(\theta) + \eta^T \operatorname{sen} \theta \ln R(\theta) + \right. \\ \left. - \left( \frac{\alpha^T + 2A\omega^T x_1(q) + 2A\eta^T x_2(q)}{2AR(\theta)} \right) \right] d\theta M_{ij}^{vT} \quad (6.59)$$

Trocando-se a variável de integração  $\theta$  por  $\Gamma_c$ , ao se substituir (6.48) e (6.49) em (6.59), vem:

$$\int_{\Gamma_c} \bar{w}_{\beta m n i j}^* \left[ \omega^T \cos \theta \ln r + \eta^T \operatorname{sen} \theta \ln r + \right. \\ \left. - \left( \frac{\alpha^T + 2A\omega^T x_1(q) + 2A\eta^T x_2(q)}{2Ar} \right) \right] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_c M_{ij}^{vT} \quad (6.60)$$

Utilizando-se a quadratura de Gauss, expressa em (4.47), e o Jacobiano, dado por (4.44), na equação (6.60), se tem a seguinte somatória:

$$\sum_{c=1}^3 \sum_{n=1}^{N_g} \bar{w}_{\beta m n i j}^* \frac{l_c}{2} \left[ \omega^T \cos \theta \ln r + \eta^T \operatorname{sen} \theta \ln r + \right. \\ \left. - \left( \frac{\alpha^T + 2A\omega^T x_1(q) + 2A\eta^T x_2(q)}{2Ar} \right) \right] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} w_n M_{ij}^{vT} \quad (6.61)$$

As integrações sobre o contorno da célula devem percorrer o sentido anti-horário e, neste trabalho, é utilizada a técnica da sub-elementação sobre cada um dos lados da célula, para se obter melhores resultados.

Com relação à posição dos nós nas células, define-se que para uma célula interna ao domínio que não possui lados ou vértices coincidentes com o contorno, os nós estarão localizados nos vértices do triângulo. Para uma célula que possui lados ou vértices coincidentes com o contorno, os nós pertencentes a estes lados ou vértices serão posicionados dentro do domínio da célula. A Figura 6.5 mostra uma discretização utilizando estes critérios, onde a célula  $\Omega_1$  possui os nós em seus vértices por não possuir lados ou vértices coincidentes com o contorno, a  $\Omega_2$  tem dois nós dentro de seu domínio, pois uma de seus lados é comum ao contorno, e  $\Omega_3$  possui apenas um nó dentro de seu domínio, por ter um de seus vértices coincidente com o contorno. Para os nós comuns a várias células, tem-se a continuidade no valor do momento viscoso.

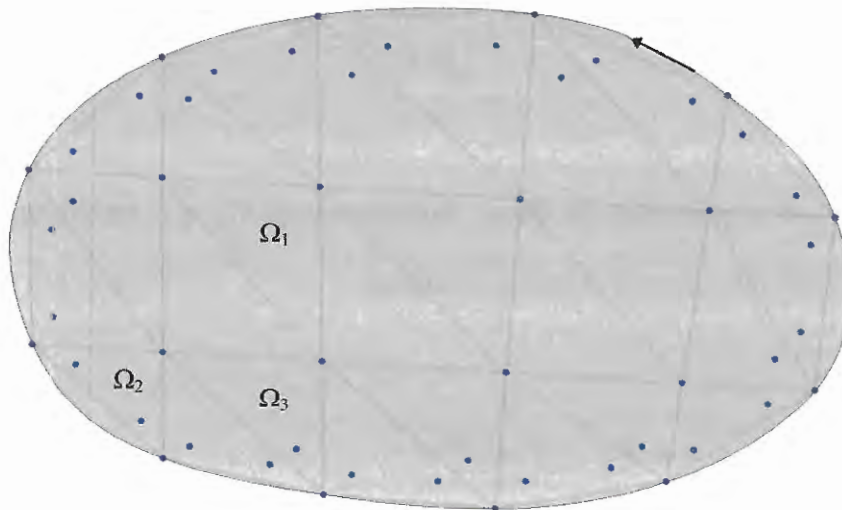


Figura 6.5 - Posicionamento dos nós nas células

A posição dos nós dentro do domínio das células é definida geometricamente conforme a Figura 6.6 e pela seguinte expressão:

$$\bar{r} = r\varphi \quad (6.62)$$

onde:

$r$  é a distância entre o centróide do triângulo e um dos vértices.

$\bar{r}$  é a distância a partir da centróide em direção a um de seus vértices.

$0,35 \leq \varphi \leq 0,45$  é o coeficiente de afastamento dos nós em relação à centróide.

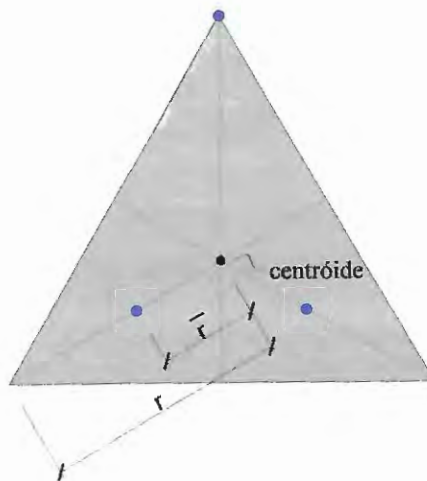


Figura 6.6 – Posição geométrica dos nós

As funções aproximadoras  $\phi_i$ , dadas por (6.41), definem um sistema local de coordenadas adimensionais  $\xi_i$  entre os nós, estando estes no interior ou nos vértices das células (Figura 6.7).

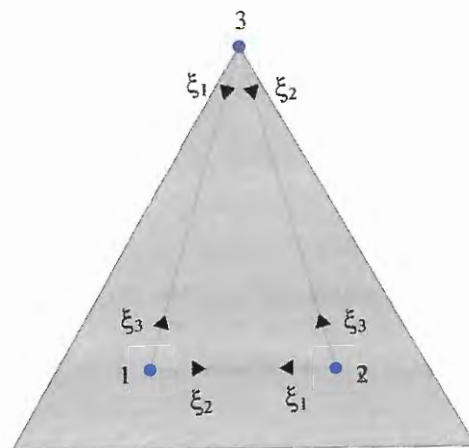


Figura 6.7 – Sistema de coordenadas adimensionais

As integrais (6.51), (6.56) e (6.61) são obtidas sobre o contorno das células, porém as funções aproximadoras utilizadas são as calculadas sobre os nós, os quais podem estar dentro de seu interior ou nos vértices.

O posicionamento dos nós no interior das células evita que equações dos momentos viscosos sejam escritas para os nós do contorno e o cálculo de integrações analíticas de termos singulares.

### 6.2.3 Sistema de Equações

A equação integral para os deslocamentos, dada por (6.5), pode ser escrita na forma matricial ao se aplicar os procedimentos expostos nos item 4.2.3. Sendo a integral de domínio referente ao momento viscoso representada por:

$$\bar{v}(Q) = \int_{\Omega} w_{,ij}^*(Q,p) \phi_{,i}(p) d\Omega(p) \quad (6.63)$$

Dessa forma, tem-se:

$$K(Q)u(Q) + \bar{H}(Q)\bar{U} + \bar{H}_c(Q)\bar{w}_c = \bar{G}(Q)\bar{P} + \bar{G}_c(Q)\bar{R}_c + \bar{V}(Q)\bar{M}_y + \bar{T}(Q) \quad (6.64)$$

Utilizando-se do sistema de equações exposto no item 4.3 e considerando-se as técnicas empregadas para que  $K(Q)$  seja distribuído em  $\bar{H}(Q)$ , a reação de canto  $\bar{R}_c$  seja

nula e o deslocamento de canto  $\bar{w}_c$  seja função dos deslocamentos dos nós vizinhos ao canto, expostas no item 4.2.3. Assim, se obtém o seguinte sistema de equações:

$$\bar{H}\bar{U} = \bar{G}\bar{P} + \bar{V}\bar{M}_{ij}^v + \bar{T} \quad (6.65)$$

onde:

- $\bar{H}$  e  $\bar{G}$  são matrizes de ordem  $2N_n \times 2N_n$ , sendo  $N_n$  o número de nós, que envolvem os coeficientes referentes aos nós do contorno e os pontos fora do domínio;
- $\bar{U}$  e  $\bar{P}$  são vetores de  $2N_n$  elementos, onde estão agrupadas as variáveis do contorno prescritas e incógnitas;
- $\bar{V}$  é uma matriz de ordem  $2N_n \times 3N_i$ , sendo  $N_i$  o número de pontos internos, composta pelos resultados das integrais de domínio, dadas por (6.63);
- $\bar{M}_{ij}^v$  é um vetor de  $3N_i$  elementos, onde estão agrupados os valores incógnitos dos momentos viscosos nos pontos internos;
- $\bar{T}$  é um vetor de  $2N_n$  elementos, constituído pelos resultados das integrais do carregamento na região  $\Omega_g$ .

As equações integrais para os deslocamentos, curvaturas e derivadas das curvaturas nos pontos internos, dadas por (6.4), (6.6) e (6.29), respectivamente, podem ser escritas na forma matricial ao se aplicar os procedimentos expostos nos item 4.6 para a expressão 4.71. Sendo as integrais de domínio referente ao momento viscoso representadas por:

$$\bar{v}'(q) = \int_{\Omega} w_{,ij}^*(q,p) \phi_T(p) d\Omega(p) \quad (6.66)$$

$$\bar{v}'(q) = \int_{\Omega_h} w_{,ijkl}^*(q,p) \phi_T(p) d\Omega(p) \quad (6.67)$$

$$\bar{v}^n(q) = \int_{\Omega_n} w_{,\beta mmij}^*(q, p) \phi_r(p) d\Omega(p) \quad (6.68)$$

Portanto, encontra-se, respectivamente:

$$w(q) + \bar{H}^i(q)\bar{U} + \bar{H}_c^i(q)\bar{w}_c = \bar{G}^i(q)\bar{P} + \bar{G}_c^i(q)\bar{R}_c + \bar{V}^i(q)\bar{M}_{ij}^v + \bar{T}^i(q) \quad (6.69)$$

$$w_{,ij}(q) + \bar{H}'^i(q)\bar{U} + \bar{H}_c'^i(q)\bar{w}_c = \bar{G}'^i(q)\bar{P} + \bar{G}_c'^i(q)\bar{R}_c + \bar{V}'^i(q)\bar{M}_{ij}^v + \bar{T}'^i(Q) \quad (6.70)$$

$$w_{,\beta mm}(q) + \bar{H}''(q)\bar{U} + \bar{H}_c''(q)\bar{w}_c = \bar{G}''(q)\bar{P} + \bar{G}_c''(q)\bar{R}_c + \bar{V}''(q)\bar{M}_{ij}^v + \bar{T}''(Q) \quad (6.71)$$

Empregando-se as simplificações para os termos referentes aos cantos, dadas no item 4.2.3, obtêm-se os seguintes sistemas de equações:

$$w + \bar{H}'\bar{U} = \bar{G}'\bar{P} + \bar{V}'\bar{M}_{ij}^v + \bar{T}' \quad (6.72)$$

onde:

- $w$  é um vetor de  $N_i$  elementos, que deverá receber os resultados dos deslocamentos;
- $\bar{H}^i$  e  $\bar{G}^i$  são matrizes de ordem  $N_i \times 2N_n$ , que envolvem os coeficientes referentes aos pontos internos;
- $\bar{V}^i$  é uma matriz de ordem  $N_i \times 3N_i$  composta pelos resultados das integrais de domínio, dadas por (6.66);



- $\bar{T}^i$  é um vetor de  $N_i$  elementos, constituído pelos resultados das integrais do carregamento na região  $\Omega_g$ .

$$w_{,ij} + \bar{H}' \bar{U} = \bar{G}' \bar{P} + \bar{V}' \bar{M}_{ij}' + \bar{T}' \quad (6.73)$$

onde:

- $w_{,ij}$  é um vetor de  $3N_i$  elementos, que deverá receber os resultados das curvaturas;
- $\bar{H}'$  e  $\bar{G}'$  são matrizes de ordem  $3N_i \times 2N_n$ , que envolvem os coeficientes referentes aos pontos internos;
- $\bar{V}'$  é uma matriz de ordem  $3N_i \times 3N_i$  composta pelos resultados das integrais de domínio, dadas por (6.67);
- $\bar{T}'$  é um vetor de  $3N_i$  elementos, constituído pelos resultados das integrais do carregamento na região  $\Omega_g$ .

$$w_{,\beta mm} + \bar{H}'' \bar{U} = \bar{G}'' \bar{P} + \bar{V}'' \bar{M}_{ij}'' + \bar{T}'' \quad (6.74)$$

onde:

- $w_{,\beta mm}$  é um vetor de  $2N_i$  elementos, que deverá receber os resultados das derivadas das curvaturas;
- $\bar{H}''$  e  $\bar{G}''$  são matrizes de ordem  $2N_i \times 2N_n$ , que envolvem os coeficientes referentes aos pontos internos;

- $\bar{V}$  é uma matriz de ordem  $2N_i \times 3N_i$  composta pelos resultados das integrais de domínio, dadas por (6.68);
- $\bar{T}$  é um vetor de  $2N_i$  elementos, constituído pelos resultados das integrais do carregamento na região  $\Omega_g$ .

Para se calcular os deslocamentos e os esforços no contorno e no domínio de uma placa ao longo do tempo, devem ser obtidos os momentos viscosos nos pontos internos em cada instante. Para isso, é preciso se realizar uma integração temporal numérica, a qual necessita de uma relação entre as curvaturas e estes momentos.

Portanto, para se obter esta relação, inicialmente, é necessário colocar as variáveis de contorno incógnitas no primeiro membro de (6.65), assim sendo, vem:

$$\bar{A}\bar{X} = \bar{B} + \bar{V}\bar{M}_{ij}^v \quad (6.75)$$

onde:

- $\bar{A}$  é uma matriz de ordem  $2N_n \times 2N_n$ , onde estão localizados os coeficientes referentes aos valores incógnitos;
- $\bar{X}$  é um vetor de  $2N_n$  elementos, composto pelos deslocamentos e esforços incógnitos;
- $\bar{B}$  é um vetor de dimensão  $2N_n$ , formado pela multiplicação dos valores dos deslocamentos e esforços prescritos por seus coeficientes, mais o vetor  $\bar{T}$ .

Isolando o vetor  $\bar{X}$  em (6.75), tem-se:

$$\bar{X} = \bar{A}^{-1}\bar{B} + \bar{A}^{-1}\bar{V}\bar{M}_{ij}^v \quad (6.76)$$

Destacando as variáveis de contorno incógnitas em (6.73), encontra-se:

$$w_{,ij} = \bar{A}'\bar{X} + \bar{B}' + \bar{V}'\bar{M}_{ij}^v \quad (6.77)$$

onde:

- $\bar{A}'$  é uma matriz de ordem  $3N_i \times 2N_n$ , onde estão localizados os coeficientes referentes aos valores incógnitos;
- $\bar{X}$  é um vetor de  $2N_n$  elementos, composto pelos deslocamentos e esforços incógnitos;
- $\bar{B}'$  é um vetor de dimensão  $3N_i$ , formado pela multiplicação dos valores dos deslocamentos e esforços prescritos por seus coeficientes, mais o vetor  $\bar{T}$ .

Substituindo-se (6.76) em (6.77), se obtém a relação entre as curvaturas e os momentos viscosos:

$$w_{,ij} = \bar{L}\bar{M}_{ij}^v + \bar{F} \quad (6.78)$$

onde:

- $\bar{L} = \bar{A}'\bar{A}^{-1}\bar{V} + \bar{V}'$ , é uma matriz de ordem  $3N_i \times 3N_i$ ;
- $\bar{F} = \bar{A}'\bar{A}^{-1}\bar{B} + \bar{B}'$ , é um vetor de  $3N_i$  elementos.

### 6.2.4 Integração Temporal Numérica

Como já foi mencionado, para resolver um problema viscoelástico de placa ao longo do tempo, é necessário realizar uma integração temporal com vários passos de tempo, cujo objetivo é se obterem os momentos viscosos em cada instante. Para isso, deve-se observar que as expressões (5.3) a (5.6) para o modelo reológico de Kelvin-Voigt, podem ser reescritas para a formulação de placas da seguinte forma:

$$w_{,ij} = w_{,ij}^e = w_{,ij}^v \quad (6.79)$$

$$M_{ij} = M_{ij}^e + M_{ij}^v \quad (6.80)$$

$$M_{ij}^e = -D \left[ \nu w_{,kk} \delta_{ij} + (1 - \nu) w_{,ij} \right] \quad (6.81)$$

$$M_{ij}^v = -\gamma D \left[ \nu \dot{w}_{,kk} \delta_{ij} + (1 - \nu) \dot{w}_{,ij} \right] \quad (6.82)$$

Para iniciar este processo, primeiramente, deve-se calcular o problema de forma elástica e se obter os momentos  $M_{ij}$  nos pontos internos. Como neste modelo reológico, no tempo igual a zero, o amortecedor absorverá todas as tensões e, à medida que o tempo for passando, estas serão repassadas para a mola, os momentos  $M_{ij}$  possuirão as seguintes características:

$$\text{Para } t = 0 \quad M_{ij} = M_{ij}^v \quad (6.83)$$

$$\text{Para } t = \infty \quad M_{ij} = M_{ij}^e \quad (6.84)$$

Dessa forma, como os valores dos momentos viscosos são conhecidos para  $t = 0$ , expressão (6.83), pode-se calcular as taxas das curvaturas para este instante através de (6.82). Multiplicando-se essas taxas por uma variação de tempo  $\Delta t = t_{s+1} - t_s$ , encontra-se um incremento de curvatura  $\Delta w_{s,ij}$ , com o qual pode ser calculada uma variação de momento  $\Delta M_{ij}$  através de (2.19). Em seguida, do momento viscoso é subtraído  $\Delta M_{ij}$ , resultando em  $M_{ij(s+1)}^v$  que é aplicado na relação (6.78) e, assim, encontram-se as curvaturas de todo o sistema referente ao tempo  $s+1$  e, conseqüentemente, os momentos elásticos  $M_{ij(s+1)}^e$ , ao se aplicarem essas curvaturas em (6.81). Somando-se  $M_{ij(s+1)}^v$  e  $M_{ij(s+1)}^e$  se tem o momento total do sistema  $M_{ij(s+1)}$  e, calculando-se as taxas das curvaturas de  $M_{ij(s+1)}^v$  e as multiplicando por  $\Delta t$ , o processo se reinicia com uma novo passo de tempo. Todos os passos descritos estão esquematizado na Figura 6.8.

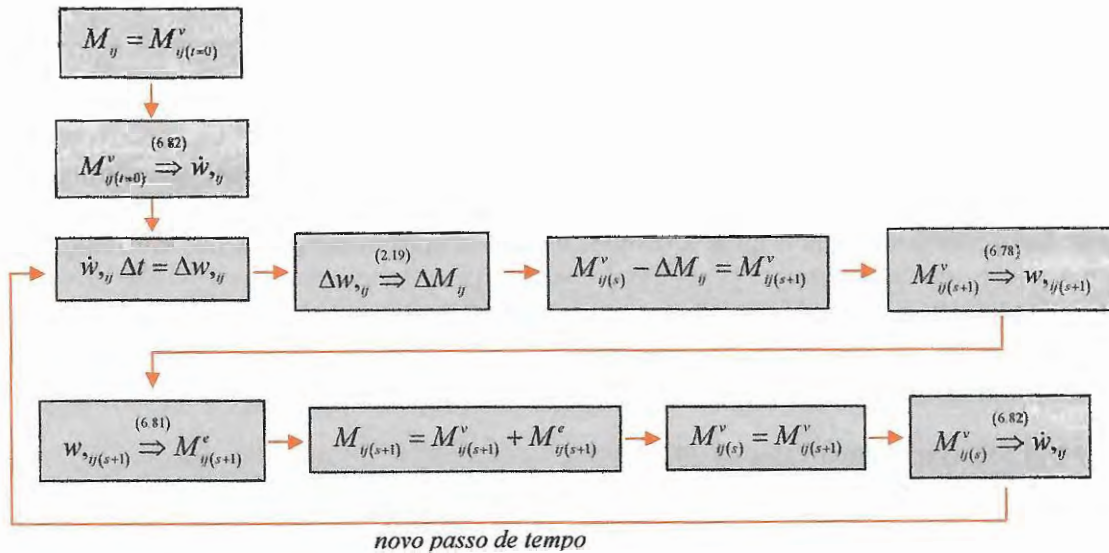


Figura 6.8 – Processo para o cálculo dos momentos viscosos ao longo do tempo

Portanto, através desta integração temporal são encontradas as curvaturas, os momentos viscosos, elásticos e totais para os pontos internos ao longo do tempo. Para se calcular os esforços e deslocamentos para o contorno da placa, devem-se aplicar os momentos viscosos de cada instante de tempo na equação (6.75) e resolver o sistema linear, e para os deslocamentos e as derivadas das curvaturas do domínio, é necessário se aplicar os valores de contorno encontrados e os momentos viscosos em (6.72) e (6.74), e ao se substituir as derivadas das curvaturas em (2.22), se têm as forças cortantes.

### 6.2.5 Exemplos Numéricos

Neste item, a formulação desenvolvida para a análise viscoelástica de placas pelo modelo de Kelvin-Voigt é aplicada em alguns exemplos. Alguns resultados são comparados com os encontrados para a formulação elástica, obtidos no item 4.7, pois como neste modelo existe apenas uma mola em paralelo a um amortecedor, os resultados irão convergir ao longo do tempo para os elásticos dessa mola.

Nos exemplos, o valor da variável  $\psi$  dos afastamentos dos pontos fora do domínio, equação (4.29), é definido como sendo igual a 0,5, para os nós duplos, admite-se o valor de  $\omega$ , expressão (4.30), como sendo igual a 0,1665, e para os afastamentos dos nós em relação às centróides das células, a variável  $\varphi$  da equação (6.62) é igual a 0,4. Com relação à integração numérica, são utilizados 15 pontos de Gauss e para a constante  $n$ , encontrada nas equações (4.50) e (4.51), é adotado o valor de 20.

## 6.2.5.1 Exemplo 1

Este é o mesmo exemplo apresentado no item 4.7.1, onde se tem uma placa quadrada com dois lados opostos apoiados e engastada nos outros dois, com um carregamento uniformemente distribuído. Esta placa foi discretizada em 24 elementos iguais e 144 células (Figura 6.9).

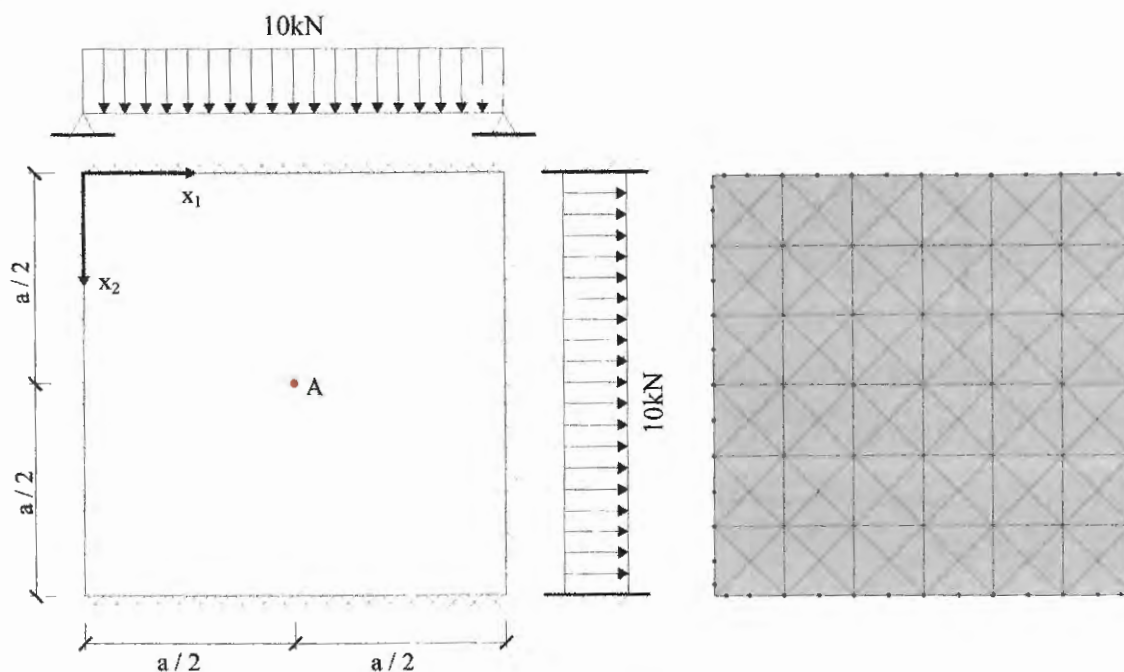


Figura 6.9 – Geometria e discretização da placa em 24 elementos e 144 células

Para este problema, adotam-se os seguintes dados:

- Propriedades físicas

$$E = 2,5 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$\gamma = 7,14285 \text{ dias}$$

- Carregamento

$$q = 10 \text{ kN}$$

- Geometria

$$a = 3 \text{ m}$$

$$t = 0,06$$



- Parâmetros de análise

$$\Delta t = 0,1 \text{ dias}$$

$$\text{interações} = 1000$$

Os resultados para os deslocamentos  $w$  ao longo do tempo no ponto A são apresentados na Figura 6.10, os das curvaturas  $w_{,11}$  e  $w_{,22}$  na Figura 6.11 e para os momentos  $M_{11}$  e  $M_{22}$  nas Figuras 6.12 e 6.13, respectivamente.

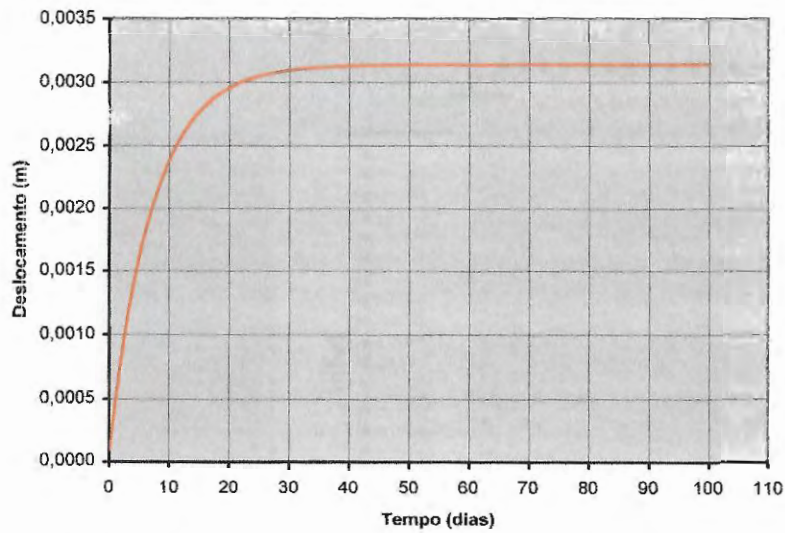


Figura 6.10 – Deslocamento  $w$  do ponto A ao longo do tempo

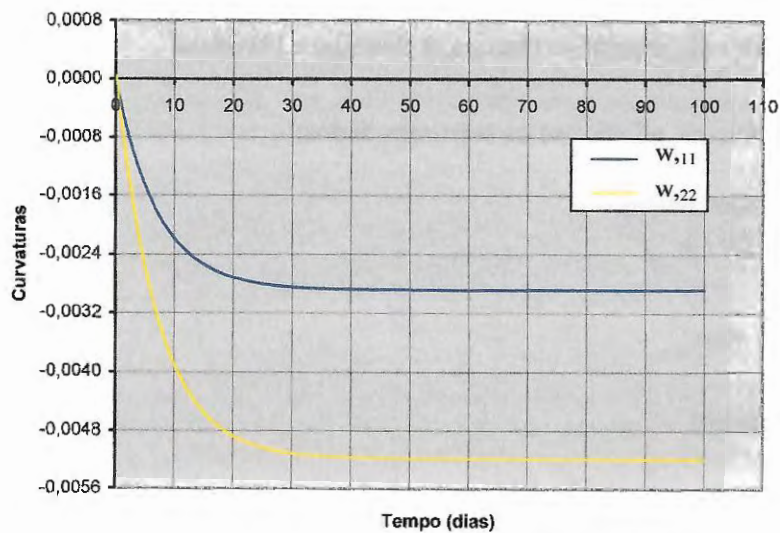
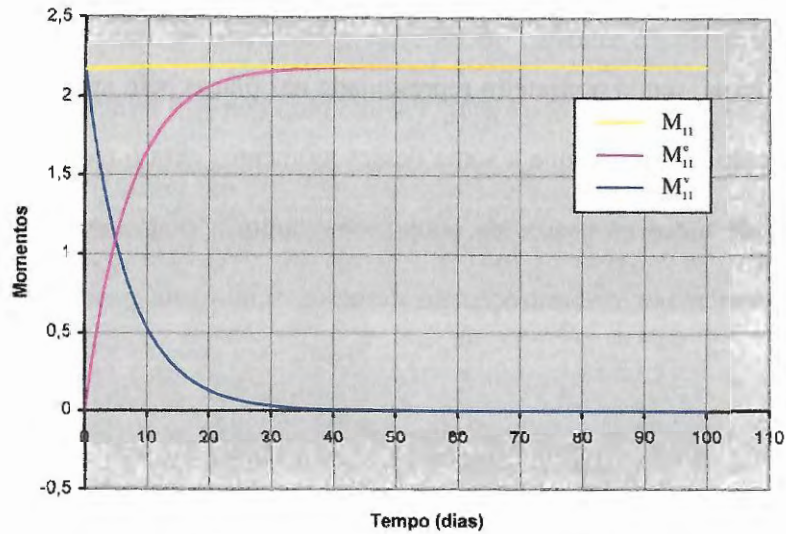
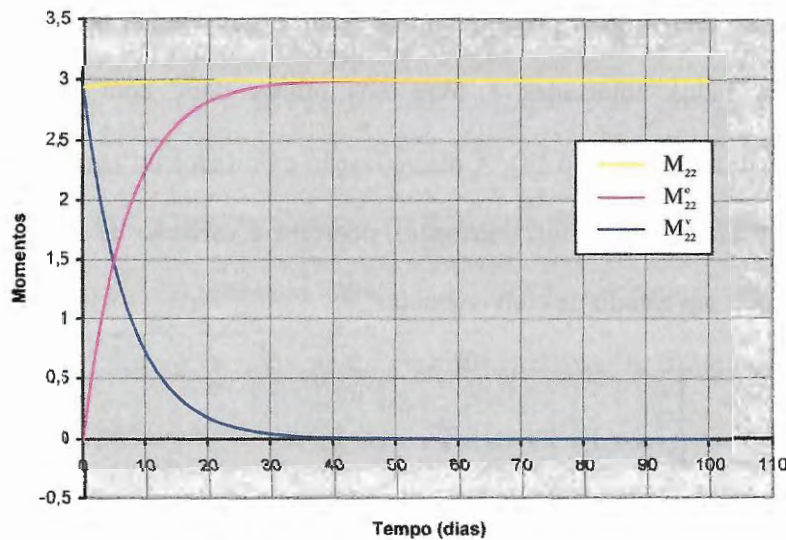


Figura 6.11 – Curvaturas  $w_{,11}$  e  $w_{,22}$  do ponto A ao longo do tempo





Figuras 6.12 – Momentos  $M_{11}$  do ponto A ao longo do tempo



Figuras 6.13 – Momentos  $M_{22}$  do ponto A ao longo do tempo

Observa-se que em torno dos 50 dias, já ocorre a convergência para os valores finais do deslocamento e dos momentos elásticos no ponto A, que são comparados com os resultados para a formulação elástica na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Resultados do exemplo 1

SOLUÇÕES	PONTO A		
	$w / (qa^4 / D)$	$M_{11} / qa^2$	$M_{22} / qa^2$
ELÁSTICA	0,00192	0,0244	0,0332
VISCOELÁSTICA	0,00192	0,0244	0,0332

Verifica-se, também, nas Figuras 6.12 e 6.13 a transferência da tensão presente no amortecedor para a mola, sendo o primeiro representado nas placas pelo momento viscoso e o segundo pelo momento elástico, e que a soma desses momentos gera o total, que deveria ser constante ao longo de todos os passos de tempo, entretanto, não se apresenta desta forma devido à falta de uma maior discretização do domínio, sendo este problema estudado no exemplo 3.

### 6.2.5.2 Exemplo 2

Neste exemplo tem-se uma placa quadrada igual à apresentada no item 4.7.2, que é engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois, com um carregamento uniformemente distribuído (Figura 6.14). A discretização e os dados utilizados são os mesmos apresentados para o exemplo anterior, entretanto, ocorrerá à variação de alguns dos valores para que seja realizado um estudo de convergência.

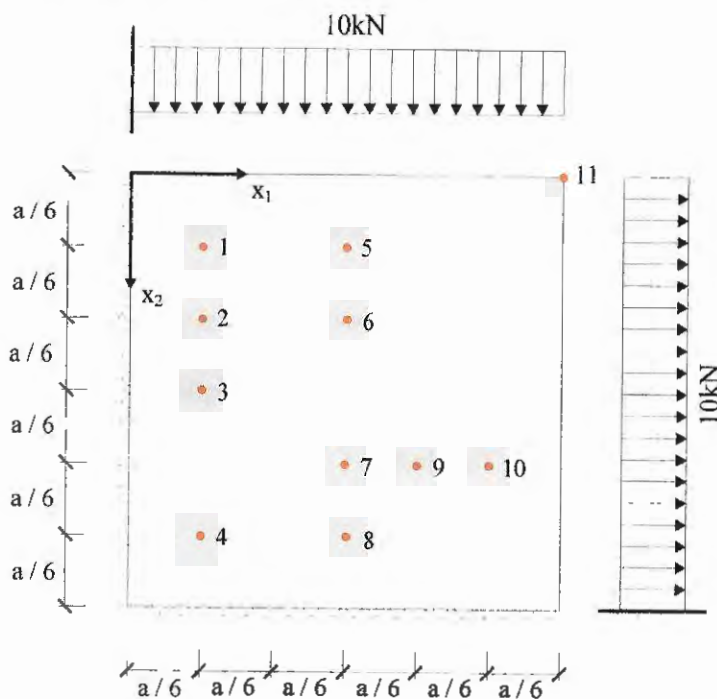


Figura 6.14 - Placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois

Dessa forma, pode ser analisada a variação do tamanho do passo de tempo adotado para o cálculo da curvatura  $w_{,11}$  no ponto 6 pela Figura 6.15.

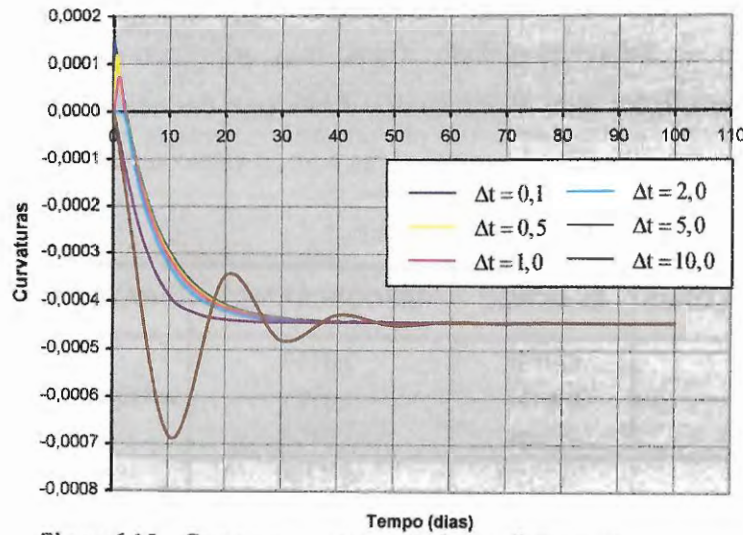


Figura 6.15 – Curvatura  $w_{,11}$  no ponto 6 para diversos  $\Delta t$

Verifica-se que a formulação proposta conduz ao mesmo valor final para qualquer passo de tempo escolhido, porém ocorrem divergências durante os passos de valor muito elevado. Observa-se, também, que para alguns  $\Delta t$ , o valor da curvatura é positivo para depois se tornar negativo e convergir, sendo este um problema causado pela falta de discretização, o qual será estudado no próximo exemplo.

Variando os valores de  $\gamma$  para a curvatura  $w_{,22}$  no ponto 9, se obtém as seguintes respostas conforme a Figura 6.16.

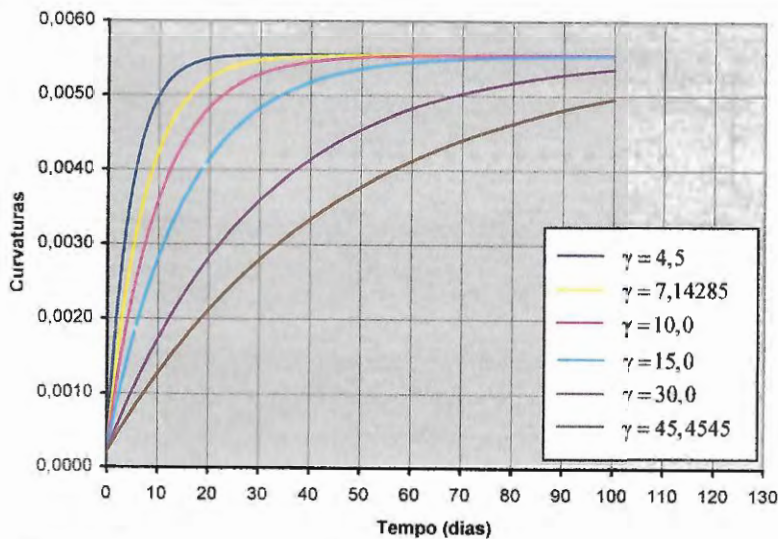


Figura 6.16 – Curvatura  $w_{,22}$  no ponto 9 para diversos  $\gamma$



Percebe-se que quanto maior o valor de  $\gamma$ , mais o material que compõe a estrutura se torna viscoso, pois a convergência para o resultado elastostático é mais demorada, passando dos 100 dias para os casos de  $\gamma$  igual a 30 e 45,4545.

Agora, mantendo os valores dos dados fixos, mas utilizando-se o coeficiente de Poisson igual a 0,2, os resultados para os momentos elásticos e deslocamentos obtidos pela formulação viscoelásticos aos 100 dias são comparados com os elastostáticos na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 – Resultados do exemplo 2

VALORES	ELÁSTICO	VISCOELÁSTICO	FATOR
$w^5$	0,0156	0,0156	$w / (qa^4 / D)$
$w^6$	0,0121	0,0121	
$w^{11}$	0,0406	0,0406	
$M_{11}^1$	-0,1120	-0,1120	$M_{ij} / qa^2$
$M_{11}^2$	-0,0884	-0,0884	
$M_{11}^3$	-0,0608	-0,0608	
$M_{22}^1$	-0,0221	-0,0221	
$M_{22}^2$	-0,0177	-0,0177	
$M_{22}^4$	-0,0130	-0,0130	
$M_{22}^7$	-0,0190	-0,0190	
$M_{22}^8$	-0,0608	-0,0608	
$M_{22}^9$	-0,0269	-0,0269	
$M_{22}^{10}$	-0,0331	-0,0331	

### 6.2.5.3 Exemplo 3

Considere uma placa retangular engastada nos quatro lados e submetida a um carregamento linearmente distribuído (Figura 6.17).

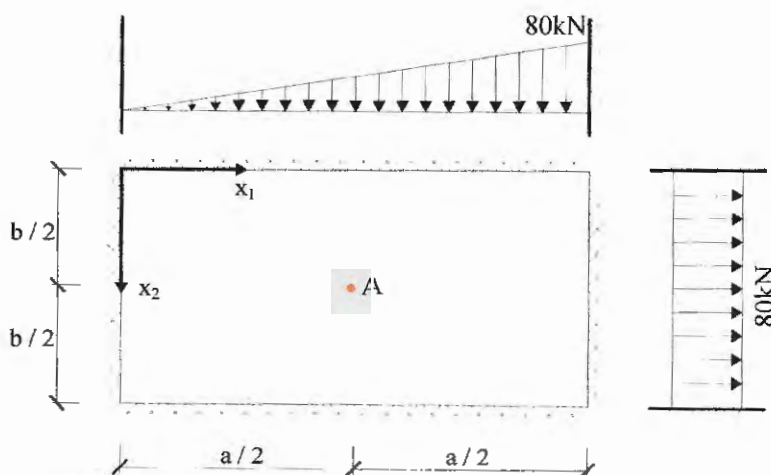


Figura 6.17 - Placa retangular engastada nos quatro lados

Para este exemplo, adotam-se os seguintes dados:

- Propriedades físicas

$$E = 2,5 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$\nu = 0,2$$

$$\gamma = 10 \text{ dias}$$

- Carregamento

$$q_o = 80 \text{ kN}$$

- Geometria

$$a = 2 \text{ m}$$

$$b = 1 \text{ m}$$

$$t = 0,06$$

- Parâmetros de análise

$$\Delta t = 0,05 \text{ dias}$$

$$\text{interações} = 3000$$

A discretização foi realizada de quatro formas diferentes com o objetivo de se realizar um estudo de convergência, assim, nas três primeiras se tem 24 elementos, mas com 64, 128 e 256 células internas, respectivamente, e a última apresenta 48 elementos e 512 células (Figura 6.18).

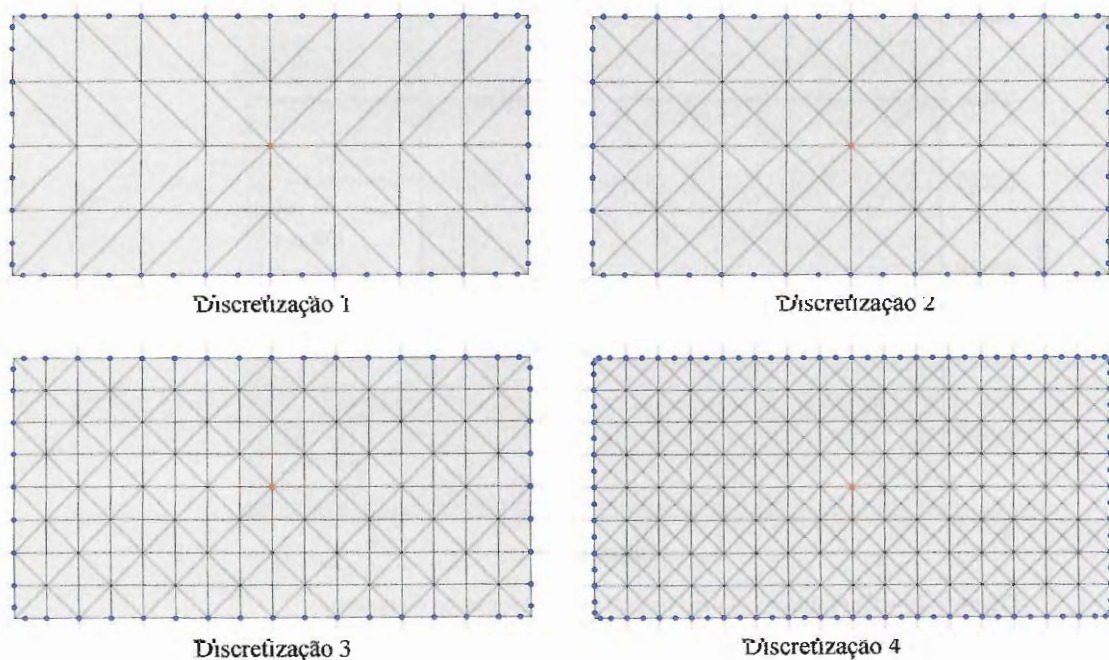


Figura 6.18 – Discretizações para a placa retangular

A curvatura  $w_{,22}$  no ponto A, para cada discretização, pode ser analisada através da Figuras 6.19.

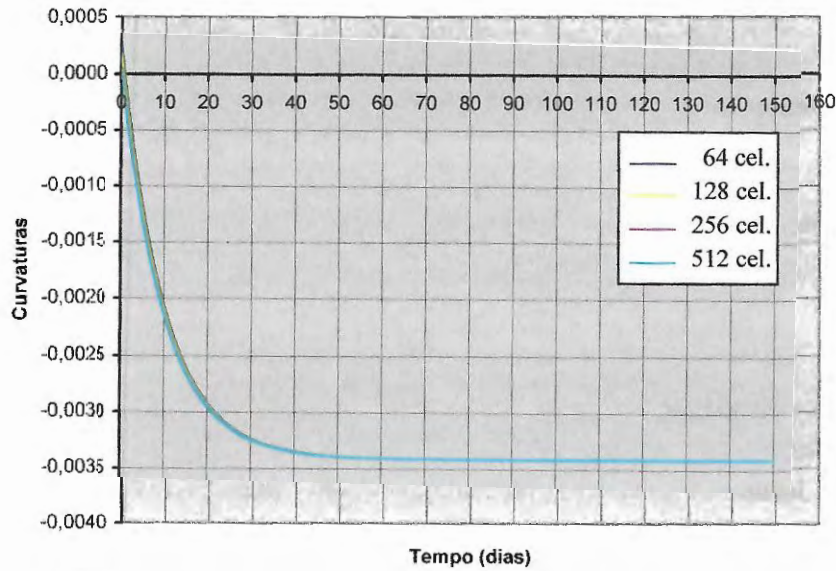


Figura 6.19 – Curvatura  $w_{,22}$  para as quatro discretizações

Observando-se mais detalhadamente os primeiros passos de tempo através da Figura 6.20.

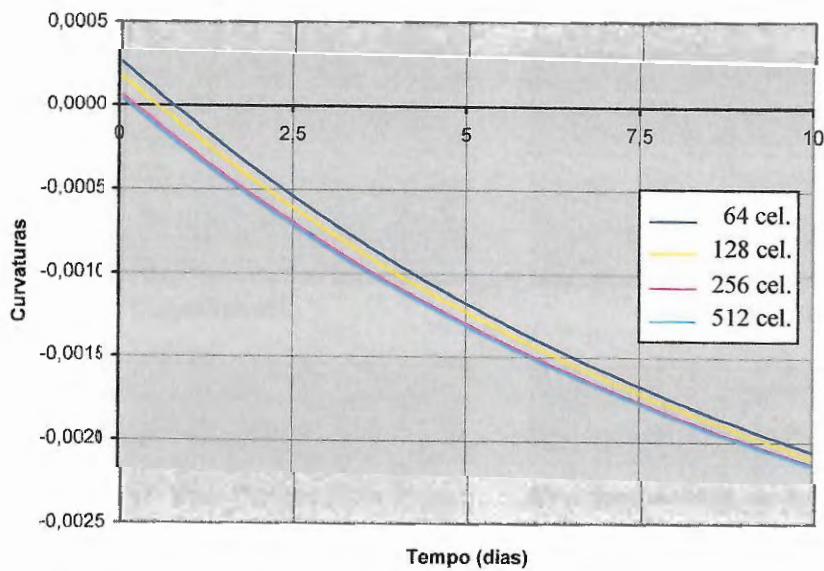


Figura 6.20 – Curvatura  $w_{,22}$  para os 200 primeiros passos de tempo



Verifica-se que quanto mais pobre a discretização maior é o erro no primeiro passo de tempo, pois a curvatura possui a tendência de não se iniciar do ponto zero que é o ponto correto para o começo de todas as curvaturas para este modelo reológico. Este mesmo problema afetará as demais curvaturas e o deslocamento  $e$ , consequentemente, os momentos elásticos e totais, como pode ser visto na Figura 6.21, onde se tem os momentos  $M_{22}$  no ponto A para as discretizações 1 e 4.

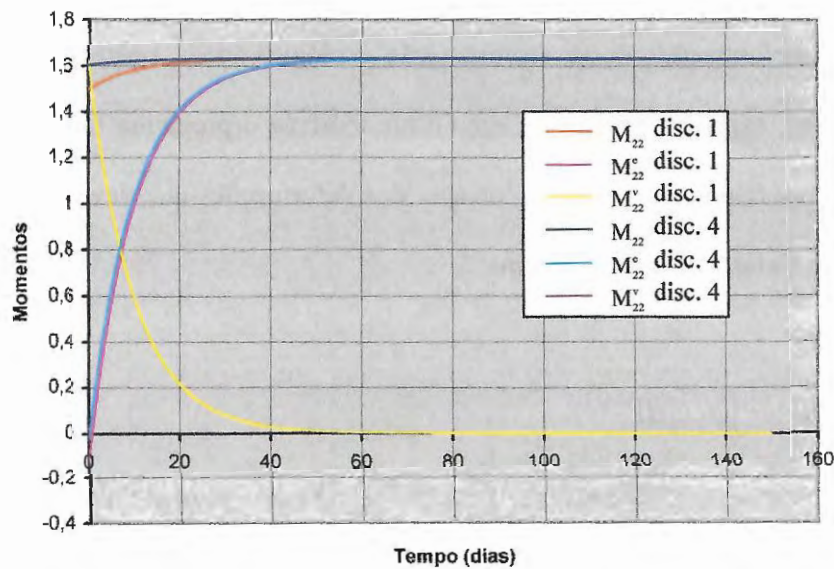


Figura 6.21 – Momentos  $M_{22}$  para as discretizações 1 e 4

Segundo o modelo de Kelvin-Voigt, o momento total deve ser constante durante todos os passos de tempo, sendo este comportamento melhor representado, conforme figura anterior, quando se tem uma boa discretização, pois ao se somar os momentos viscosos aos elásticos nos primeiros passos de tempo, estes últimos serão próximos de zero e os primeiros serão próximos do total. Observa-se, também, através da Figura 6.21, que os momentos viscosos não possuem variação de valores com a alteração da discretização do domínio, pois eles dependem apenas do valor do momento total no tempo zero e dos incrementos de curvatura.

Verifica-se nesta formulação proposta, que mesmo com uma discretização muito pobre do domínio, os valores sempre tendem para os elastoestáticos, independentemente das divergências que podem ocorrer nos primeiros passos de tempo.

### 6.3 FORMULAÇÃO PARA O MODELO DE BOLTZMANN

Para se obter a formulação viscoelástica para o modelo de Boltzmann, deve-se aplicar a relação das deformações desta representação reológica, dada pela equação (5.15), no teorema de Betti, expresso em (3.1). Como neste teorema o problema fundamental e o real têm que ser proporcionais, o termo da relação das deformações que deve ser substituído na equação (3.1) é o elástico. Assim, se tem:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^e dV = \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV \quad (6.85)$$

ou seja,

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV - \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^{ve} dV = \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV \quad (6.86)$$

Substituindo-se (2.13) e (2.16) em (6.86) e, em seguida, integrando-se ao longo da espessura, encontra-se as seguintes integrais de domínio:

$$-\int_{\Omega} (M_{ij}^* w_{,ij}) d\Omega + \int_{\Omega} (M_{ij}^* w_{,ij}^{ve}) d\Omega = -\int_{\Omega} (M_{ij}^* w_{,ij}^*) d\Omega \quad (6.87)$$



Na integral que possui em seu núcleo o termo referente às curvaturas viscoelásticas, o momento fundamental pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} (M_{ij}^* w_{,ij}^{ve}) d\Omega = \int_{\Omega} D_e C_{ij}^{lm} w_{,lm}^* w_{,ij}^{ve} d\Omega \quad (6.88)$$

Reorganizando-se os índices de (6.88), aplicando-se a rigidez à flexão do trecho viscoelástico e considerando-se a equação (5.17) para placas, encontra-se:

$$\int_{\Omega} \frac{D_{ve}}{D_e} D_e C_{ij}^{lm} w_{,ij}^* w_{,lm}^{ve} d\Omega = \frac{D_e}{D_{ve}} \int_{\Omega} w_{,ij}^* M_{ij}^{el} d\Omega \quad (6.89)$$

Assim, sabe-se que:

$$\int_{\Omega} (M_{ij}^* w_{,ij}^{ve}) d\Omega = \frac{D_e}{D_{ve}} \int_{\Omega} w_{,ij}^* M_{ij}^{el} d\Omega \quad (6.90)$$

Substituindo-se (6.90) em (6.87), obtém-se:

$$-\int_{\Omega} (M_{ij}^* w_{,ij}) d\Omega = -\int_{\Omega} (M_{ij} w_{,ij}^*) d\Omega - \frac{D_e}{D_{ve}} \int_{\Omega} (w_{,ij}^* M_{ij}^{el}) d\Omega \quad (6.91)$$

Desenvolvendo-se as termos referentes ao momento fundamental e total de (6.91), de forma semelhante ao que foi exposto no item 3.2, se obtém a equação integral do deslocamento de um ponto q do domínio da placa para o modelo de Boltzmann:

$$\begin{aligned}
& w(q) + \int_{\Gamma} \left( V_n^*(q, P) w(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left( V_n(P) w^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \quad (6.92) \\
& + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) - \frac{D_e}{D_{ve}} \int_{\Omega} M_{ij}^{el}(p) w_{,ij}^*(q, p) d\Omega + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p)
\end{aligned}$$

Em seguida, adotando-se os procedimentos apresentados no item 3.3 para a equação (6.92), encontra-se a expressão da equação integral de um ponto Q do contorno para o modelo de Boltzmann:

$$\begin{aligned}
& K(Q) w(Q) + \int_{\Gamma} \left( V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left( V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) + \quad (6.93) \\
& + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) - \frac{D_e}{D_{ve}} \int_{\Omega} M_{ij}^{el}(p) w_{,ij}^*(Q, p) d\Omega + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p)
\end{aligned}$$

Observa-se que a única diferença entre as equações (3.20) e (3.36) em relação às (6.92) e (6.93), é a presença da integral de domínio referente ao momento elástico do trecho viscoelástico.

### 6.3.1 Equações Integrais para os Esforços nos Pontos Internos

Para se obter os esforços nos pontos internos da placa, considerando-se o modelo de Boltzmann, devem-se encontrar as curvaturas nestes pontos derivando-se a equação (6.92),

em relação às direções  $x_1$  e  $x_2$  de um sistema cartesiano ortogonal, com origem no ponto  $q$ .

Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_k \partial x_l} + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) w(P) - \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\ & + \sum_{c=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) w_c(P) = \int_{\Gamma} \left( V_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) + \right. \\ & \left. - M_n(P) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right) d\Gamma(P) + \sum_{c=1}^{N_c} R_c(P) \frac{\partial^2 w_c^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) + \\ & - \frac{D_e}{D_{ve}} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \int_{\Omega} M_{ij}^{el}(p) w_{,ij}^*(q, p) d\Omega + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, p) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (6.94)$$

Na equação anterior, todas as derivadas das soluções fundamentais foram expressas no item 4.6, com exceção da existente na integral com o termo referente ao momento elástico, que foi obtida no item 6.2.1, sendo dada pelas expressões (6.26) e (6.27). Dessa forma, tem-se:

$$\begin{aligned} - \frac{D_e}{D_{ve}} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \int_{\Omega} M_{ij}^{el}(p) w_{,ij}^*(q, p) d\Omega = - \frac{D_e}{D_{ve}} \int_{\Omega} \bar{e}_{klj}^*(q, p) M_{ij}^{el}(p) d\Omega + \\ + \bar{g}_{klj}(q) M_{ij}^{el}(q) \end{aligned} \quad (6.95)$$

Portanto, para se calcular os momentos fletores nos pontos internos, é necessário substituir os valores das curvaturas obtidas através (6.94) na equação (2.19).

Com relação às forças cortantes nos pontos internos, devem ser calculadas, primeiramente, as derivadas das curvaturas através de:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_m \partial x_m} \right) + \int_\Gamma \left( \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, P) \right) w(P) - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, P) \right) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\
& + \sum_{c=1}^{N_c} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, P) \right) w_c(P) = \int_\Gamma \left( V_n(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, P) \right) + \right. \\
& \left. - M_n(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_m} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right) \right) d\Gamma(P) + \sum_{c=1}^{N_c} R_c(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w_c^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, P) \right) + \\
& - \frac{D_e}{D_{ve}} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \int_\Omega M_{ij}^{el}(p) \frac{\partial^2 w_{,ij}^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, p) d\Omega + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, p) \right) d\Omega_g(p) \quad (6.96)
\end{aligned}$$

Todas as derivadas das soluções fundamentais foram expressas no item 4.6, com exceção, novamente, da existente na integral com o termo referente ao momento elástico, que foi encontrada no item 6.2.1, sendo dada pelas expressões (6.39) e (6.40). Sendo assim, tem-se:

$$\begin{aligned}
- \frac{D_e}{D_{ve}} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \int_\Omega M_{ij}^{el}(p) \frac{\partial^2 w_{,ij}^*}{\partial x_m \partial x_m}(q, p) d\Omega = - \frac{D_e}{D_{ve}} \int_\Omega \bar{e}_{\beta ij}^*(q, p) M_{ij}^{el}(p) d\Omega + q_\beta^r \quad (6.97)
\end{aligned}$$

Deste modo, para se calcular os momentos fletores nos pontos internos, devem-se substituir os valores das derivadas das curvaturas obtidas através (6.96) na equação (2.22).

### 6.3.2 Discretização do Domínio

Para este modelo reológico, também, devem ser calculadas três integrais de domínio, sendo a primeira para a equação integral dos deslocamentos (6.92) com núcleo  $w_{,ij}^*$ , a segunda para a expressão das curvaturas (6.94) com núcleo  $w_{,ijkl}^*$  e a última para a equação

das derivadas das curvaturas (6.96) com  $W_{,\beta m m i j}^*$ . Essas integrações serão realizadas exatamente da mesma forma que foi apresentada no item 6.2.2 e com as mesmas considerações em relação à posição dos nós nas células. Portanto, sendo necessário, simplesmente, trocar a variável do momento viscoso do modelo de Kelvin-Voigt pelo momento elástico para o trecho viscoelástico do modelo de Boltzmann e aplicar a relação  $-D_e/D_{ve}$  à frente da integral. Dessa forma, têm-se as seguintes equações para as integrações nos lados das células para  $W_{,\gamma i j}^*$ ,  $W_{,\gamma i j k l}^*$  e  $W_{,\gamma \beta m m i j}^*$ , respectivamente:

$$-\frac{D_e}{D_{ve}} \int_{\Gamma_c} \frac{1}{4\pi D} \left\{ \left[ r_{,\gamma_i} r_{,\gamma_j} + \delta_{ij} \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) \right] \frac{r^2}{4A} (a^T + \omega^T x_1(q) + \eta^T x_2(q)) + \right. \\ \left. + \left[ r_{,\gamma_i} r_{,\gamma_j} + \delta_{ij} \left( \ln r - \frac{1}{3} \right) \right] \frac{r^3}{6A} (\omega^T \cos\theta + \eta^T \sin\theta) \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_c M_{ij}^{eIT} \quad (6.98)$$

$$-\frac{D_e}{D_{ve}} \int_{\Gamma_c} \frac{1}{4\pi D} \left[ 2(\delta_{kl} r_{,\gamma_j} r_{,\gamma_l} + \delta_{kj} r_{,\gamma_i} r_{,\gamma_l} + \delta_{ij} r_{,\gamma_k} r_{,\gamma_l} + \delta_{il} r_{,\gamma_k} r_{,\gamma_j} + \right. \\ \left. + \delta_{kl} r_{,\gamma_i} r_{,\gamma_j} + \delta_{jl} r_{,\gamma_i} r_{,\gamma_k}) - 8r_{,\gamma_i} r_{,\gamma_j} r_{,\gamma_k} r_{,\gamma_l} - (\delta_{kl} \delta_{ij} + \delta_{kj} \delta_{il} + \delta_{ij} \delta_{kl}) \right] \\ \left[ \frac{1}{2A} (a^T + \omega^T x_1(q) + \eta^T x_2(q)) \ln r + \frac{r}{2A} (\omega^T \cos\theta + \eta^T \sin\theta) \right] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_c M_{ij}^{eIT} \quad (6.99)$$

$$-\frac{D_e}{D_{ve}} \int_{\Gamma_c} \bar{W}_{,\beta m m i j}^* \left[ \omega^T \cos\theta \ln r + \eta^T \sin\theta \ln r + \right. \\ \left. - \left( \frac{a^T + 2A\omega^T x_1(q) + 2A\eta^T x_2(q)}{2Ar} \right) \right] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_c M_{ij}^{eIT} \quad (6.100)$$

### 6.3.3 Sistema de Equações

Todas as equações integrais para o modelo de Boltzmann são escritas na forma matricial de maneira análoga ao que foi apresentado para o modelo de Kelvin-Voigt no item 6.2.3, pois todas as matrizes e vetores possuirão as mesmas dimensões e características. Dessa forma, para a equação dos deslocamentos, dada por (6.93), tem-se:

$$\begin{aligned} K(Q)u(Q) + \bar{H}(Q)\bar{U} + \bar{H}_c(Q)\bar{w}_c = \\ \bar{G}(Q)\bar{P} + \bar{G}_c(Q)\bar{R}_c - \frac{D_e}{D_{ve}}\bar{V}(Q)\bar{M}_{ij}^{el} + \bar{T}(Q) \end{aligned} \quad (6.101)$$

Utilizando-se do sistema de equações exposto no item 4.3 e considerando-se as técnicas empregadas para que  $K(Q)$  seja distribuído em  $\bar{H}(Q)$ , a reação de canto  $\bar{R}_c$  seja nula e o deslocamento de canto  $\bar{w}_c$  seja função dos deslocamentos dos nós vizinhos ao canto, expostas no item 4.2.3. Assim, se obtém o seguinte sistema de equações:

$$\bar{H}\bar{U} = \bar{G}\bar{P} - \frac{D_e}{D_{ve}}\bar{V}\bar{M}_{ij}^{el} + \bar{T} \quad (6.102)$$

As equações integrais para os deslocamentos, curvaturas e derivadas das curvaturas nos pontos internos, dadas por (6.92), (6.94) e (6.96), respectivamente, podem ser escritas da seguinte maneira na forma matricial:

$$w(q) + \bar{H}'(q)\bar{U} + \bar{H}'_c(q)\bar{w}_c = \bar{G}'(q)\bar{P} + \bar{G}'_c(q)\bar{R}_c - \frac{D_e}{D_{ve}}\bar{V}'(q)\bar{M}_{ij}^{el} + \bar{T}'(q) \quad (6.103)$$

$$w_{,ij}(q) + \bar{H}'(q)\bar{U} + \bar{H}_c'(q)\bar{w}_c = \bar{G}'(q)\bar{P} + \bar{G}_c'(q)\bar{R}_c + \left. -\frac{D_e}{D_{ve}}\bar{V}'(q)\bar{M}_{ij}^{el} + \bar{T}'(Q) \right\} \quad (6.104)$$

$$w_{,\beta mm}(q) + \bar{H}''(q)\bar{U} + \bar{H}_c''(q)\bar{w}_c = \bar{G}''(q)\bar{P} + \bar{G}_c''(q)\bar{R}_c + \left. -\frac{D_e}{D_{ve}}\bar{V}''(q)\bar{M}_{ij}^{el} + \bar{T}''(Q) \right\} \quad (6.105)$$

Empregando-se as simplificações para os termos referentes aos cantos, obtêm-se os seguintes sistemas de equações:

$$w + \bar{H}'\bar{U} = \bar{G}'\bar{P} - \frac{D_e}{D_{ve}}\bar{V}'\bar{M}_{ij}^{el} + \bar{T}' \quad (6.106)$$

$$w_{,ij} + \bar{H}'\bar{U} = \bar{G}'\bar{P} - \frac{D_e}{D_{ve}}\bar{V}'\bar{M}_{ij}^{el} + \bar{T}' \quad (6.107)$$

$$w_{,\beta mm} + \bar{H}''\bar{U} = \bar{G}''\bar{P} - \frac{D_e}{D_{ve}}\bar{V}''\bar{M}_{ij}^{el} + \bar{T}'' \quad (6.108)$$

Neste modelo reológico, deve-se encontrar uma relação entre os momentos elásticos e as curvaturas viscoelásticas, para se calcular os deslocamentos e os esforços no contorno e no domínio de uma placa ao longo do tempo. Deste modo, para se obter esta relação, deve-se utilizar o mesmo procedimento apresentado no item 6.2.3 para o modelo de Kelvin-Voigt, observando-se, novamente, que todas as matrizes e os vetores encontrados possuirão as mesmas características e dimensões. Assim sendo, colocando as variáveis de contorno incógnitas no primeiro membro de (6.102), vem:

$$\bar{A}\bar{X} = \bar{B} - \frac{D_e}{D_{ve}} \bar{V}\bar{M}_{ij}^{el} \quad (6.109)$$

Isolando o vetor  $\bar{X}$  em (6.109), tem-se:

$$\bar{X} = \bar{A}^{-1}\bar{B} - \frac{D_e}{D_{ve}} \bar{A}^{-1}\bar{V}\bar{M}_{ij}^{el} \quad (6.110)$$

Destacando as variáveis de contorno incógnitas em (6.107), encontra-se:

$$w_{,ij} = \bar{A}'\bar{X} + \bar{B}' - \frac{D_e}{D_{ve}} \bar{V}'\bar{M}_{ij}^{el} \quad (6.111)$$

Substituindo-se (6.110) em (6.111), se obtém a relação entre as curvaturas totais e os momentos elásticos:

$$w_{,ij} = -\frac{D_e}{D_{ve}} \bar{L}\bar{M}_{ij}^{el} + \bar{F} \quad (6.112)$$

onde:

- $\bar{L} = \bar{A}'\bar{A}^{-1}\bar{V} + \bar{V}'$
- $\bar{F} = \bar{A}'\bar{A}^{-1}\bar{B} + \bar{B}'$



Como no vetor  $F$  estão agrupados os valores das curvaturas instantâneas, deste modo, eliminando-o de (6.112), encontra-se uma relação entre as curvaturas viscoelásticas e os momentos elásticos, dada por:

$$w_{,ij}^{ve} = -\frac{D_e}{D_{ve}} \bar{L} \bar{M}_{ij}^{el} \quad (6.113)$$

#### 6.3.4 Integração Temporal Numérica

Para resolver um problema viscoelástico de placa ao longo do tempo, considerando-se o modelo de Boltzmann, é necessário realizar uma integração temporal com vários passos de tempo, cujo objetivo é obterem-se os momentos elásticos a cada instante. Para isso, observa-se que as equações (5.14) a (5.18) para este modelo reológico, podem ser expressas para a formulação de placas da seguinte forma:

$$M_{ij} = M_{ij}^e = M_{ij}^{ve} \quad (6.114)$$

$$w_{,ij} = w_{,ij}^e + w_{,ij}^{ve} \quad (6.115)$$

$$M_{ij}^e = -D_e \left[ \nu w_{,kk}^e \delta_{ij} + (1 - \nu) w_{,ij}^e \right] \quad (6.116)$$

$$M_{ij}^{el} = -D_{ve} \left[ \nu w_{,kk}^{ve} \delta_{ij} + (1 - \nu) w_{,ij}^{ve} \right] \quad (6.117)$$

$$M_{ij}^v = -\gamma D_{ve} \left[ \nu \dot{w}_{,kk}^{ve} \delta_{ij} + (1 - \nu) \dot{w}_{,ij}^{ve} \right] \quad (6.118)$$

Para se iniciar o processo de cálculo, primeiramente, deve-se calcular o problema de forma elástica e se obter os momentos  $M_{ij}^e$  nos pontos internos. Como neste modelo reológico, no tempo igual a zero, o amortecedor absorverá todas as tensões e, à medida que o

tempo for passando, estas serão repassadas para a mola, os momentos  $M_{ij}^e$  possuirão as seguintes características:

$$\text{Para } t = 0 \quad M_{ij}^e = M_{ij} = M_{ij}^v \quad (6.119)$$

$$\text{Para } t = \infty \quad M_{ij}^e = M_{ij} = M_{ij}^{el} \quad (6.120)$$

Dessa forma, como os valores dos momentos viscosos são conhecidos para  $t = 0$ , expressão (6.119), pode-se calcular as taxas das curvaturas para este instante através de (6.118). Multiplicando essas taxas por uma variação de tempo  $\Delta t = t_{s+1} - t_s$ , encontra-se um incremento de curvatura  $\Delta w_{,ij}$ , com o qual pode ser calculada uma variação de momento  $\Delta M_{ij}$ , ao se utilizar  $D_{ve}$  em (2.19). Em seguida, do momento viscoso é subtraído  $\Delta M_{ij}$ , resultando em  $M_{ij(s+1)}^v$ , e no momento elástico do trecho viscoelástico é somado  $\Delta M_{ij}$ , deste modo, obtém-se  $M_{ij(s+1)}^{el}$  que é aplicado na relação (6.113) e, assim, encontra-se as curvaturas viscoelásticas  $w_{,ij}^{ve}$  de todo o sistema referente ao tempo  $s+1$ . Agora, deve-se subtrair  $\Delta w_{,ij}$  de  $w_{,ij}^{ve}$  e aplicar os resultados em (2.19) utilizando-se  $D_e$ , dessa forma, se obtém um momento de correção  $M_{ij}^c$ , que deve ser somado ao momento viscoso. Somando-se  $M_{ij(s+1)}^v$  e  $M_{ij(s+1)}^{el}$  se tem o momento total do sistema  $M_{ij(s+1)}^e$  e, calculando-se as taxas das curvaturas de  $M_{ij(s+1)}^v$  e as multiplicando por  $\Delta t$ , o processo se reinicia com uma novo passo de tempo. Todos os passos descritos estão esquematizados na Figura 6.22.

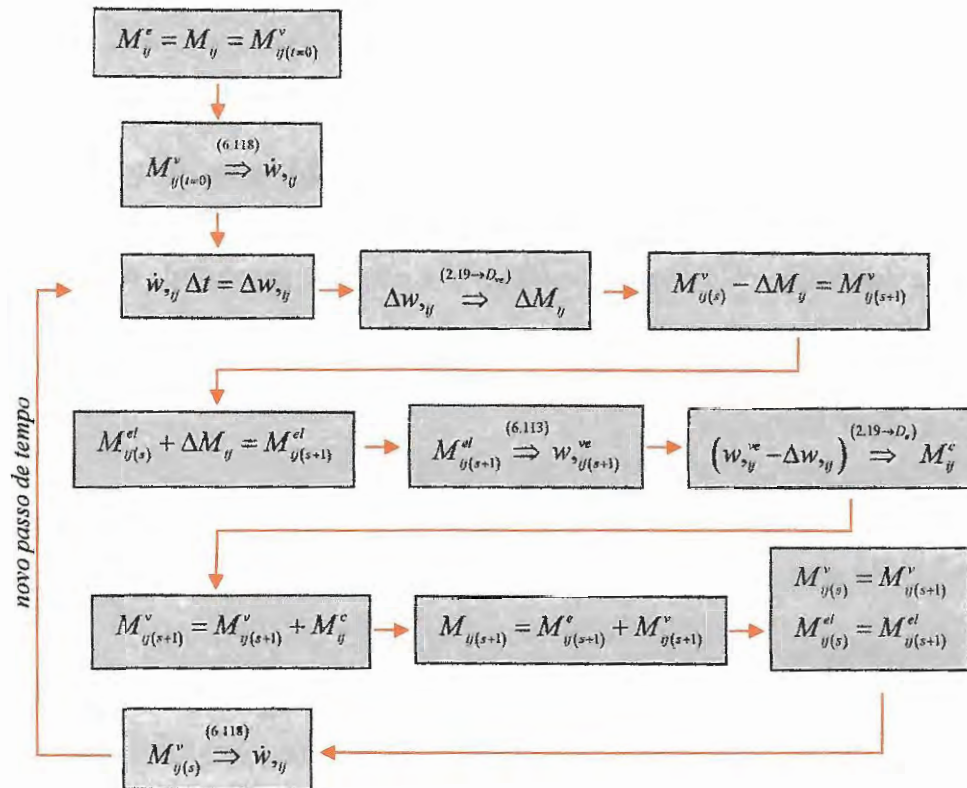


Figura 6.22 – Processo de cálculo ao longo do tempo

Portanto, através desta integração temporal são encontradas as curvaturas, os momentos viscosos, elásticos e totais no trecho viscoelástico para os pontos internos ao longo do tempo. Para se calcular os esforços e deslocamentos para o contorno da placa, devem-se aplicar os momentos elásticos de cada instante de tempo na equação (6.109) e resolver o sistema linear, e para os deslocamentos e as derivadas das curvaturas do domínio, é necessário se aplicar os valores de contorno encontrados e os momentos elásticos em (6.106) e (6.108), e ao se substituir as derivadas das curvaturas em (2.22), se têm as forças cortantes.

### 6.3.5 Exemplos Numéricos

Neste item, a formulação desenvolvida para a análise viscoelástica de placas pelo modelo de Boltzmann é aplicada em alguns exemplos, que utilizam os mesmos valores apresentados no item 6.2.5.

## 6.3.5.1 Exemplo I

Este é o mesmo exemplo apresentado no item 6.2.5.1, onde se tem uma placa quadrada com dois lados opostos apoiados e engastada nos outros dois, com um carregamento uniformemente distribuído. A discretização utilizada é a mesma apresentada na Figura 6.9 e os dados são:

- Propriedades físicas

$$E_e = 1,25 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$E_{ve} = 2,5 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$\gamma = 7,14285 \text{ dias}$$

- Carregamento

$$q = 10 \text{ kN}$$

- Geometria

$$a = 3 \text{ m}$$

$$t = 0,06$$

- Parâmetros de análise

$$\Delta t = 0,1 \text{ dias}$$

$$\text{interações} = 1000$$

Os resultados para os deslocamentos  $w$  ao longo do tempo no ponto A são apresentados na Figura 6.23, os das curvaturas  $w_{,11}$  e  $w_{,22}$  na Figura 6.24 e para os momentos  $M_{11}$  e  $M_{22}$  nas Figuras 6.25 e 6.26, respectivamente.

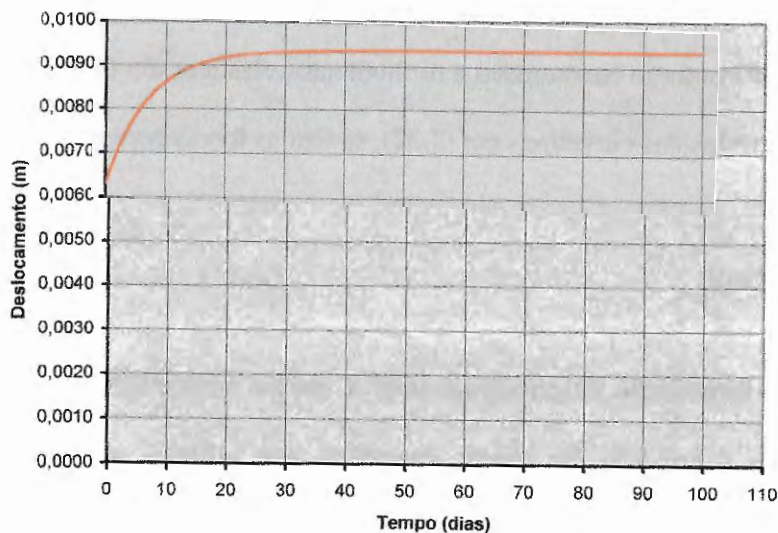


Figura 6.23 – Deslocamento  $w$  do ponto A ao longo do tempo

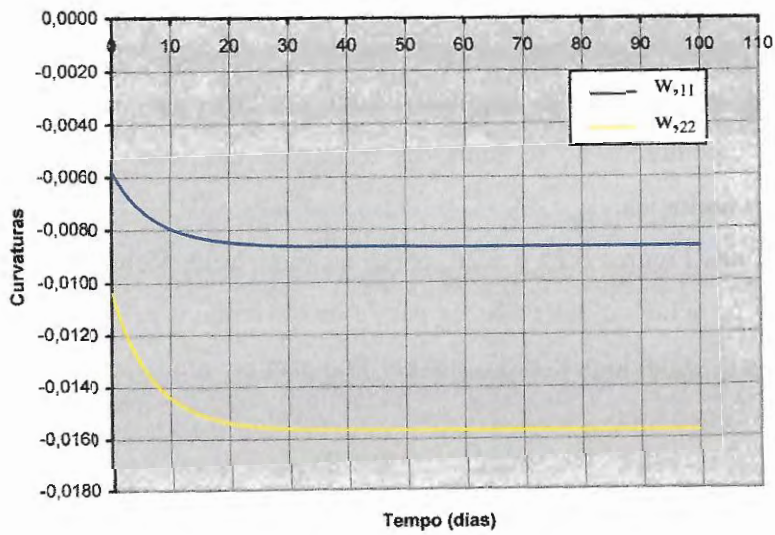
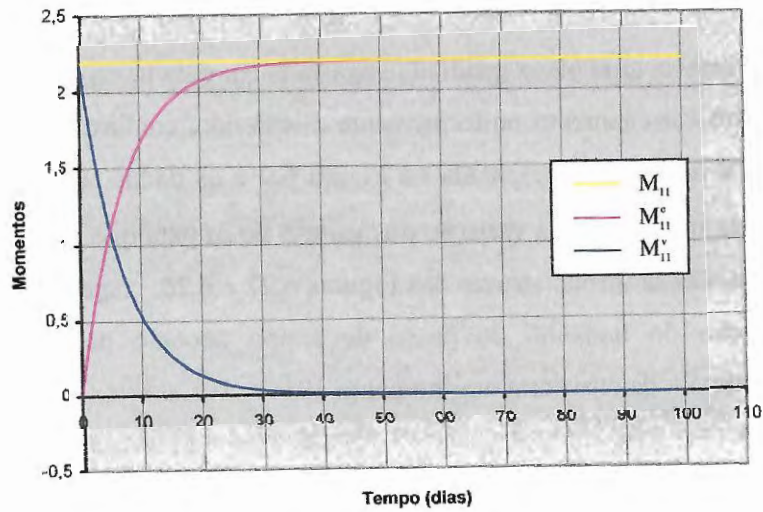
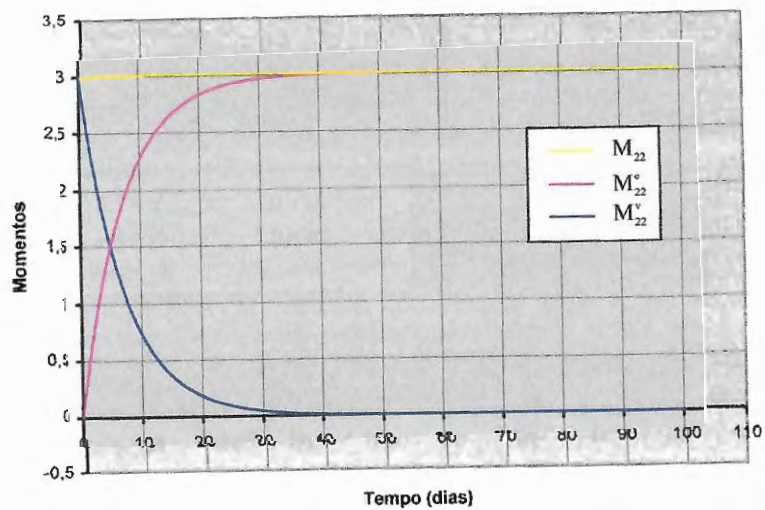


Figura 6.24 – Curvaturas  $w_{,11}$  e  $w_{,22}$  do ponto A ao longo do tempo



Figuras 6.25 – Momentos  $M_{11}$  do ponto A ao longo do tempo



Figuras 6.26 – Momentos  $M_{22}$  do ponto A ao longo do tempo



Pode-se confirmar, através das Figuras 6.23 e 6.24, a deformação elástica inicial instantânea e, em seguida, a deformação viscoelástica, características do modelo de Boltzmann. Observa-se, também, que os resultados finais obtidos para o deslocamento e as curvaturas podem ser encontrados ao se somar os resultados elásticos de cada mola, que formam a representação reológica.

Verifica-se que nas Figuras 6.25 e 6.26, como no modelo de Kelvin-Voigt, ocorre a transferência da tensão presente no amortecedor para a mola, sendo o primeiro representado pelo momento viscoso e o segundo pelo momento elástico para o trecho viscoelástico, e que a soma desses momentos gera o total.

### 6.3.5.2 Exemplo 2

Neste exemplo tem-se uma placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois, com um carregamento uniformemente distribuído, conforme Figura 6.14. A discretização utilizada é a mesma apresentada na Figura 6.9 e os dados são os mesmos do exemplo anterior, entretanto, ocorrerá à variação dos valores de  $\Delta t$  para que seja realizado um estudo de convergência. Dessa forma, através das Figuras 6.27 e 6.28, respectivamente, pode ser analisada a variação do tamanho do passo de tempo adotado para o cálculo do deslocamento  $w$  no ponto 5 e da curvatura  $w_{,11}$  no ponto 10.

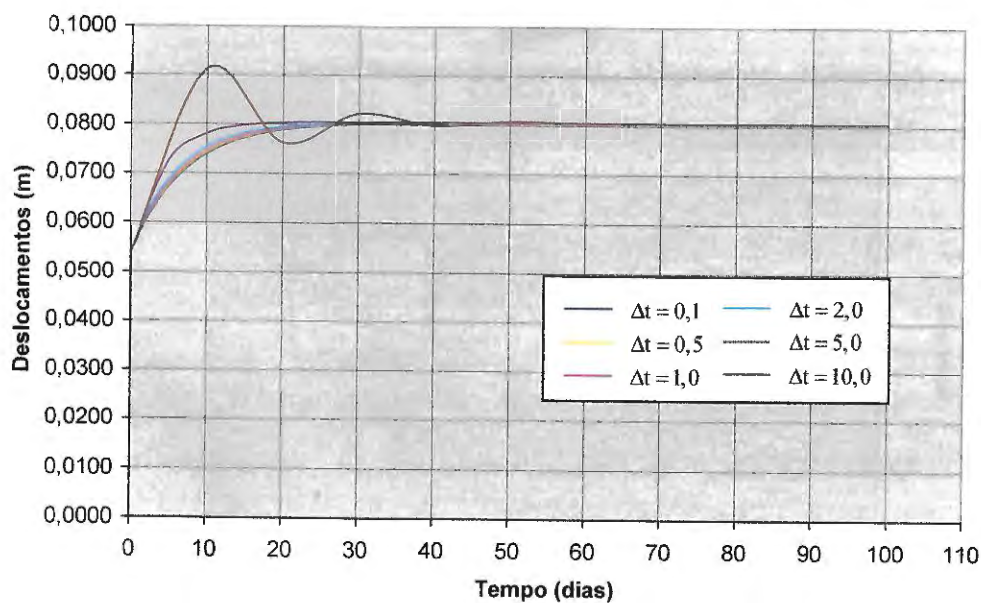


Figura 6.27 – Deslocamento  $w$  no ponto 5 para diversos  $\Delta t$

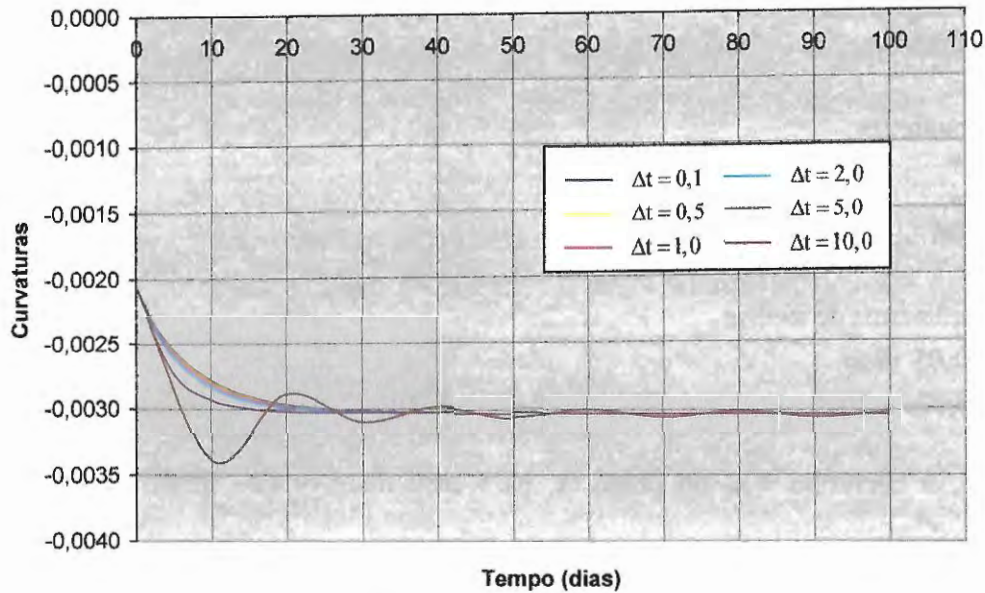


Figura 6.28 – Curvatura  $w_{,11}$  no ponto 10 para diversos  $\Delta t$

Verifica-se que a formulação proposta conduz ao mesmo valor final para qualquer passo de tempo escolhido, porém ocorrem divergências para os passos de valor muito elevado, como se observa para  $\Delta t$  igual a 5 e 10.

### 6.3.5.3 Exemplo 3

Considere uma placa retangular engastada nos quatro lados e submetida a um carregamento linearmente distribuído (Figura 6.17). Neste exemplo, também, é realizado um estudo de convergência ao se utilizar as discretizações da Figura 6.18 e os dados admitidos são:

- Propriedades físicas

$$E_e = 1,25 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$E_{ve} = 2,5 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$\nu = 0,2$$

$$\gamma = 10 \text{ dias}$$

- Carregamento  
 $q_o = 80 \text{ kN}$
- Geometria  
 $a = 2 \text{ m}$   
 $b = 1 \text{ m}$   
 $t = 0,06$
- Parâmetros de análise  
 $\Delta t = 0,05 \text{ dias}$   
 $\text{interações} = 3000$

Assim, a curvatura  $w_{,22}$  no ponto A, para cada discretização, pode ser analisada através da Figura 6.29.

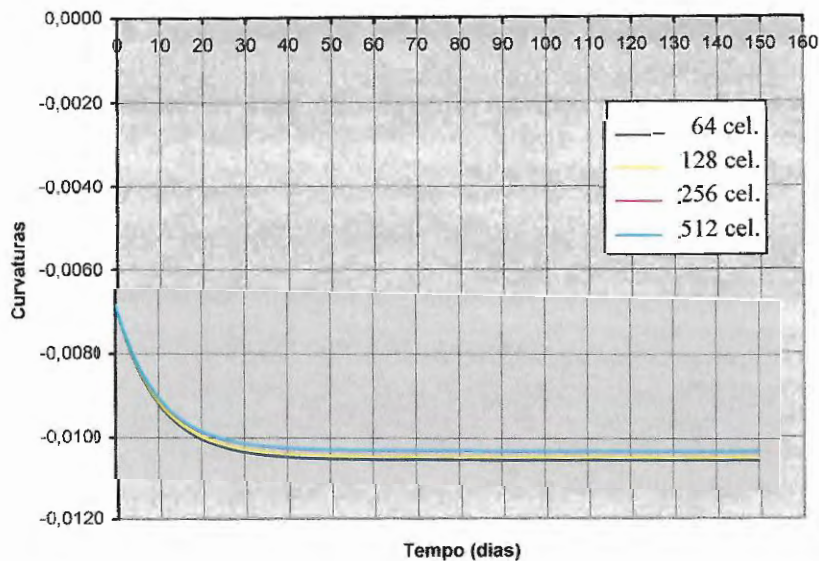


Figura 6.29 – Curvatura  $w_{,22}$  para as quatro discretizações

Nota-se que à medida que a placa é mais discretizada, a curvatura tende a convergir para um único valor, como se pode verificar para as discretizações com 256 e 512 células. Os momentos convergem da mesma forma, como se pode observar pela Figura 6.30, onde se têm os momentos  $M_{22}$  no ponto A para as discretizações 1 e 4, sendo obtida nesta última os melhores resultados.



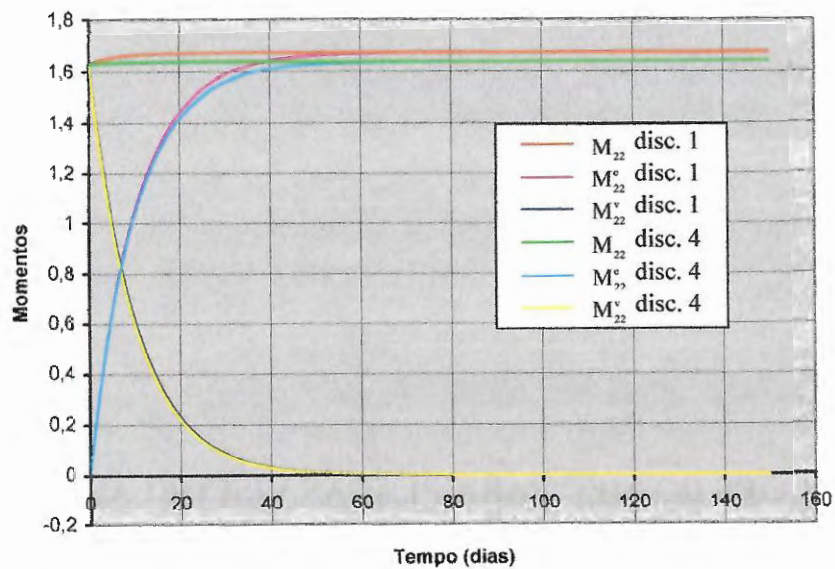


Figura 6.30 – Momentos  $M_{22}$  para as discretizações 1 e 4

## **7. FORMULAÇÕES DO MEC PARA PLACAS VISCOELÁSTICAS COM REPRESENTAÇÃO NO CONTORNO**

---

### **7.1 INTRODUÇÃO**

Neste capítulo, apresentam-se formulações para os modelos de Kelvin-Voigt e Boltzmann com representações integrais apenas no contorno, baseadas nas de MESQUITA (2002), que permitem a realização de análises viscoelásticas discretizando-se apenas o contorno do corpo, assim, evitam-se as integrais de domínio, que apresentam singularidades, necessitam de células internas, de uma grande quantidade de dados de entrada, requerendo portanto o cálculo, um alto custo computacional. Todas as vantagens do MEC são obtidas, tornando a análise viscoelástica de placas mais prática e elegante.

### **7.2 FORMULAÇÃO PARA O MODELO DE KELVIN-VOIGT**

Para se encontrar a formulação viscoelástica para o modelo de Kelvin-Voigt com somente integrais de contorno, deve-se aplicar a relação constitutiva do modelo, equação (5.13), no teorema de Betti, expresso em (3.1). Com essa substituição, a proporcionalidade

entre o problema fundamental e o real é mantida, pois aos termos da equação (5.13) são proporcionais ao módulo de elasticidade. Portanto, tem-se:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV = \int_V \left( C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} + \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} \right) \varepsilon_{ij}^* dV \quad (7.1)$$

ou seja,

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV = \int_V C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} \varepsilon_{ij}^* dV + \int_V \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} \varepsilon_{ij}^* dV \quad (7.2)$$

Substituindo-se (2.13) e (2.16) em (7.2) e, em seguida, integrando-se ao longo da espessura, encontra-se as seguintes integrais de domínio:

$$-\int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij} d\Omega = -\int_{\Omega} C_{ij}^{lm} w_{,lm} w_{,ij}^* d\Omega - \int_{\Omega} \gamma C_{ij}^{lm} \dot{w}_{,lm} w_{,ij}^* d\Omega \quad (7.3)$$

Escrevendo-se os momentos fundamentais do termo no lado esquerdo da igualdade em função das curvaturas fundamentais, vem:

$$-\int_{\Omega} C_{ij}^{lm} w_{,lm}^* w_{,ij} d\Omega = -\int_{\Omega} C_{ij}^{lm} w_{,lm} w_{,ij}^* d\Omega - \int_{\Omega} \gamma C_{ij}^{lm} \dot{w}_{,lm} w_{,ij}^* d\Omega \quad (7.4)$$

Sabendo-se que:

$$C_{ij}^{lm} w_{,lm}^* w_{,ij} = C_{ij}^{lm} w_{,ij}^* w_{,lm} = M_{ij} w_{,ij}^* \quad (7.5)$$

$$C_{ij}^{lm} w_{,lm} w_{,ij}^* = C_{ij}^{lm} w_{,ij} w_{,lm}^* = M_{ij}^* w_{,ij} \quad (7.6)$$

$$\gamma C_{ij}^{lm} \dot{w}_{,lm} w_{,ij}^* = \gamma C_{ij}^{lm} \dot{w}_{,ij} w_{,lm}^* = \gamma M_{ij}^* \dot{w}_{,ij} \quad (7.7)$$

A equação (7.4) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$-\int_{\Omega} M_{ij} w_{,ij}^* d\Omega = -\int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij} d\Omega - \int_{\Omega} \gamma M_{ij}^* \dot{w}_{,ij} d\Omega \quad (7.8)$$

ou

$$-\int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij} d\Omega - \gamma \int_{\Omega} M_{ij}^* \dot{w}_{,ij} d\Omega = -\int_{\Omega} M_{ij} w_{,ij}^* d\Omega \quad (7.9)$$

Desenvolvendo-se os termos da equação anterior de forma semelhante ao que foi exposto no item 3.2, se obtém a equação integral do deslocamento de um ponto  $q$  do domínio da placa para o modelo de Kelvin-Voigt com apenas integrais de contorno:

$$\begin{aligned} w(q) + \gamma \dot{w}(q) + \int_{\Gamma} \left( V_n^*(q, P) w(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\ \gamma \int_{\Gamma} \left( V_n^*(q, P) \dot{w}(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial \dot{w}}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) + \\ + \gamma \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q, P) \dot{w}_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left( V_n(P) w^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (7.10)$$

Em seguida, adotando-se os procedimentos apresentados no item 3.3 para a equação (7.10), encontra-se a expressão da equação integral para um ponto  $Q$  do contorno:

$$\begin{aligned}
 & K(Q)w(Q) + \gamma K(Q)\dot{w}(Q) + \int_{\Gamma} \left( V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & \gamma \int_{\Gamma} \left( V_n^*(Q,P)\dot{w}(P) - M_n^*(Q,P)\frac{\partial \dot{w}}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q,P)w_{ci}(P) + \\
 & + \gamma \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q,P)\dot{w}_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left( V_n(P)w^*(Q,P) - M_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P)w_{ci}^*(Q,P) + \int_{\Omega_g} g(p)w^*(Q,p)d\Omega_g(p)
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

Observa-se que a única diferença entre as equações (3.20) e (3.36) em relação às (7.10) e (7.11) é a presença dos termos multiplicados por  $\gamma$ , responsáveis pelo comportamento viscoso.

### 7.2.1 Equações Integrais para os Esforços nos Pontos Internos

Para se obter os esforços nos pontos internos da placa, primeiramente, deve-se encontrar as curvaturas nestes pontos ao se derivar a equação (7.10), em relação às direções  $x_1$  e  $x_2$  de um sistema cartesiano ortogonal, com origem no ponto  $q$ . Assim, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_k \partial x_l} + \gamma \frac{\partial^2 \dot{w}(q)}{\partial x_k \partial x_l} + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q,P)w(P) - \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & + \gamma \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q,P)\dot{w}(P) - \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q,P)\frac{\partial \dot{w}}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{c=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_k \partial x_l}(q,P)w_c(P) + \gamma \sum_{c=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_k \partial x_l}(q,P)\dot{w}_c(P) = \\
 & = \int_{\Gamma} \left( V_n(P)\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l}(q,P) - M_n(P)\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right) \right) d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{c=1}^{N_c} R_c(P)\frac{\partial^2 w_c^*}{\partial x_k \partial x_l}(q,P) + \int_{\Omega_g} g(p)\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l}(q,p)d\Omega_g(p)
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

Todas as derivadas das soluções fundamentais foram expressas no item 4.6. e, deste modo, para se calcular os momentos fletores nos pontos internos, é necessário substituir os valores das curvaturas obtidas em (7.12) na equação (2.19).

Com relação às forças cortantes nos pontos internos, devem ser calculadas as derivadas das curvaturas em relação à direção  $\beta$  através de:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_m \partial x_m} \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_m \partial x_m} \right) + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_m \partial x_m} (q, P) \right) w(P) + \right. \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_m \partial x_m} (q, P) \right) \frac{\partial w}{\partial n} (P) \Big) d\Gamma(P) + \gamma \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_m \partial x_m} (q, P) \right) \dot{w}(P) + \right. \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_m \partial x_m} (q, P) \right) \frac{\partial \dot{w}}{\partial n} (P) \Big) d\Gamma(P) + \sum_{c=1}^{N_c} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_m \partial x_m} (q, P) \right) w_c(P) + \\
 & + \gamma \sum_{c=1}^{N_c} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_m \partial x_m} (q, P) \right) \dot{w}_c(P) = \int_{\Gamma} \left( V_n(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_m \partial x_m} (q, P) \right) + \right. \\
 & - M_n(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_m} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n} (q, P) \right) \right) \Big) d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{c=1}^{N_c} R_c(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w_c^*}{\partial x_m \partial x_m} (q, P) \right) + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_m \partial x_m} (q, p) \right) d\Omega_g(p)
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

Todas as derivadas das soluções fundamentais, também, foram expressas no item 4.6. e, assim, para se calcular as forças cortantes nos pontos internos, é necessário substituir os valores das derivadas das curvaturas obtidas através (7.13) na equação (2.22).

### 7.2.2 Sistema de Equações

A equação integral para um ponto Q do contorno, dada por (7.11), pode ser escrita na forma matricial ao se aplicar os procedimentos expostos nos item 4.2.3. Dessa forma, tem-se:

$$K(Q)u(Q) + \gamma K(Q)\dot{u}(Q) + \bar{H}(Q)\bar{U} + \gamma\bar{H}(Q)\bar{\dot{U}} + \bar{H}_c(Q)\bar{w}_c + \gamma\bar{H}_c(Q)\bar{\dot{w}}_c = \bar{G}(Q)\bar{P} + \bar{G}_c(Q)\bar{R}_c + \bar{T}(Q) \quad (7.14)$$

onde:

- $\dot{u}$  é o vetor com os valores nodais das taxas dos deslocamentos, expresso por:

$$\dot{u} = \{\dot{w}^1 \quad \dot{w}^2 \quad \dots \quad \dot{w}^{N_n}\}$$

- $\bar{\dot{U}}$  é o vetor com os valores nodais das taxas dos deslocamentos e das taxas de suas derivadas em relação à normal, expresso por:

$$\bar{\dot{U}} = \left\{ \dot{w}^1 \quad \frac{\partial \dot{w}^1}{\partial n} \quad \dot{w}^2 \quad \frac{\partial \dot{w}^2}{\partial n} \quad \dots \quad \dot{w}^{N_n} \quad \frac{\partial \dot{w}^{N_n}}{\partial n} \right\}$$

- $\bar{\dot{w}}_c$  é o vetor com os valores das taxas dos deslocamentos de canto, expresso por:

$$\bar{\dot{w}}_c = \{\dot{w}_c^1 \quad \dot{w}_c^2 \quad \dots \quad \dot{w}_c^{N_c}\}$$

Utilizando-se do sistema de equações exposto no item 4.3 e considerando-se as técnicas empregadas para que  $K(Q)$  seja distribuído em  $\bar{H}(Q)$ , a reação de canto  $\bar{R}_c$  seja nula e o deslocamento de canto  $\bar{w}_c$  seja função dos deslocamentos dos nós vizinhos ao canto,

expostas no item 4.2.3 e aplicando-as, também, nos termos referentes ao comportamento viscoso. Assim, se obtém o seguinte sistema de equações:

$$\bar{H}\bar{U} + \gamma\bar{H}\bar{U} = \bar{G}\bar{P} + \bar{T} \quad (7.15)$$

As equações integrais para os deslocamentos, curvaturas e derivadas das curvaturas nos pontos internos, dadas por (7.10), (7.12) e (7.13), respectivamente, podem ser escritas da seguinte maneira de forma geral, conforme o item 4.6:

$$\begin{aligned} & \bar{u}(q) + \gamma\bar{u}(q) + \int_{\Gamma} \bar{p}^*(q, P)\bar{u}(P)d\Gamma(P) + \gamma \int_{\Gamma} \bar{p}^*(q, P)\bar{u}(P)d\Gamma(P) + \\ & + \sum_{c=1}^{N_c} \bar{p}_c^*(q, P)w_c(P) + \gamma \sum_{c=1}^{N_c} \bar{p}_c^*(q, P)\dot{w}_c(P) = \int_{\Gamma} \bar{u}^*(q, P)\bar{p}(P)d\Gamma(P) + \\ & + \sum_{c=1}^{N_c} \bar{u}_c^*(q, P)R_c(P) + \int_{\Omega_g} g(p)\bar{u}_g^*(q, p)d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (7.16)$$

onde:

$$\bar{u}(q) = \left\{ \begin{array}{c} \dot{w}(q) \\ \frac{\partial^2 \dot{w}(q)}{\partial x_i \partial x_j} \\ \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 \dot{w}(q)}{\partial x_k \partial x_k} \right) \end{array} \right\} \quad (7.17)$$

$$\bar{u}(P) = \left\{ \begin{array}{c} \dot{w}(P) \\ \frac{\partial \dot{w}}{\partial n}(P) \end{array} \right\} \quad (7.18)$$



Empregando-se as simplificações para os termos referentes aos cantos, obtém-se o seguinte sistema de equações, semelhante ao apresentado no item 4.6:

$$\bar{u}(q) + \gamma \bar{\dot{u}}(q) + \bar{H}'\bar{U} + \gamma \bar{H}'\bar{\dot{U}} = \bar{G}'\bar{P} + \bar{T}' \quad (7.19)$$

onde:

- $\bar{\dot{U}}$  é o vetor composto pelas taxas dos deslocamentos.

Os sistemas de equações (7.15) e (7.19) são resolvidos através de uma integração temporal numérica, que será explicada no próximo item do trabalho.

### 7.2.3 Integração Temporal Numérica

Para se resolver o sistema de equações (7.15), adotou-se uma simples aproximação linear para definir as taxas dos deslocamentos e as das derivadas dos deslocamentos em relação à normal, assim, tem-se:

$$\dot{w} = \frac{w_{(s+1)} - w_{(s)}}{\Delta t} \quad (7.20)$$

$$\frac{\partial \dot{w}}{\partial n} = \frac{\frac{\partial w}{\partial n_{(s+1)}} - \frac{\partial w}{\partial n_{(s)}}}{\Delta t} \quad (7.21)$$

ou seja, matricialmente,

$$\bar{\dot{U}} = \frac{\bar{U}_{(s+1)} - \bar{U}_{(s)}}{\Delta t} \quad (7.22)$$

Substituindo-se (7.22) em (7.15), encontra-se:

$$\tilde{H}\bar{U}_{(s+1)} = \bar{G}\bar{P} + \bar{T} + \tilde{F}_s \quad (7.23)$$

onde:

$$\tilde{H} = \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right) \bar{H} \quad (7.24)$$

$$\tilde{F}_s = \frac{\gamma}{\Delta t} \bar{H}\bar{U}_{(s)} \quad (7.25)$$

Impondo-se as condições de contorno, trocando-se as colunas das matrizes  $\tilde{H}$  e  $\bar{G}$ , somando-se os vetores, pode-se resolver o sistema linear dado por (7.23), assim, encontrando-se os deslocamentos e os esforços para o passo de tempo atual. Com os valores dos deslocamentos para o passo de tempo atual e anterior, calculam-se as taxas de deslocamento através de (7.22).

Para o sistema de equações (7.19) dos deslocamentos, curvaturas e derivadas das curvaturas adotam-se a aproximação (7.20) e as seguintes:

$$\dot{W}_{\gamma ij} = \frac{W_{\gamma ij(s+1)} + W_{\gamma ij(s)}}{\Delta t} \quad (7.26)$$

$$\dot{w}_{\gamma kk\beta} = \frac{w_{\gamma kk\beta(s+1)} + w_{\gamma kk\beta(s)}}{\Delta t} \quad (7.27)$$

ou seja,

$$\bar{u} = \frac{\bar{u}_{(s+1)} - \bar{u}_{(s)}}{\Delta t} \quad (7.28)$$

Dessa forma, aplicando-se (7.28) em (7.19), obtém-se:

$$\bar{u}_{(s+1)} = \left( -\bar{H}'\bar{U} - \gamma\bar{H}'\bar{U} + \bar{G}'\bar{P} + \bar{T}' + \frac{\gamma}{\Delta t}u_{(s)} \right) / \left( 1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \quad (7.29)$$

Em seguida, substituindo em (7.29) os valores dos deslocamentos, das taxas dos deslocamentos e dos esforços já encontrados, obtêm-se os deslocamentos, curvaturas e derivadas das curvaturas para os pontos internos e, conseqüentemente, as suas taxas ao se aplicar os resultados em (7.20), (7.26) e (7.27). Os momentos elásticos são calculados ao substituírem-se as curvaturas em (6.81), os momentos viscosos ao aplicarem-se as taxas das curvaturas em (6.82) e os momentos totais se somarem os dois momentos anteriores. Os esforços cortantes são obtidos substituindo-se os valores das derivadas das curvaturas e suas taxas em:

$$q_{\beta} = -D(w_{\gamma kk\beta} + \dot{w}_{\gamma kk\beta}) \quad (7.30)$$

Todos os passos que foram descritos para a integração temporal numérica estão esquematizados na Figura 7.1, onde  $\bar{Y}$  é o vetor com os valores de contorno prescritos.

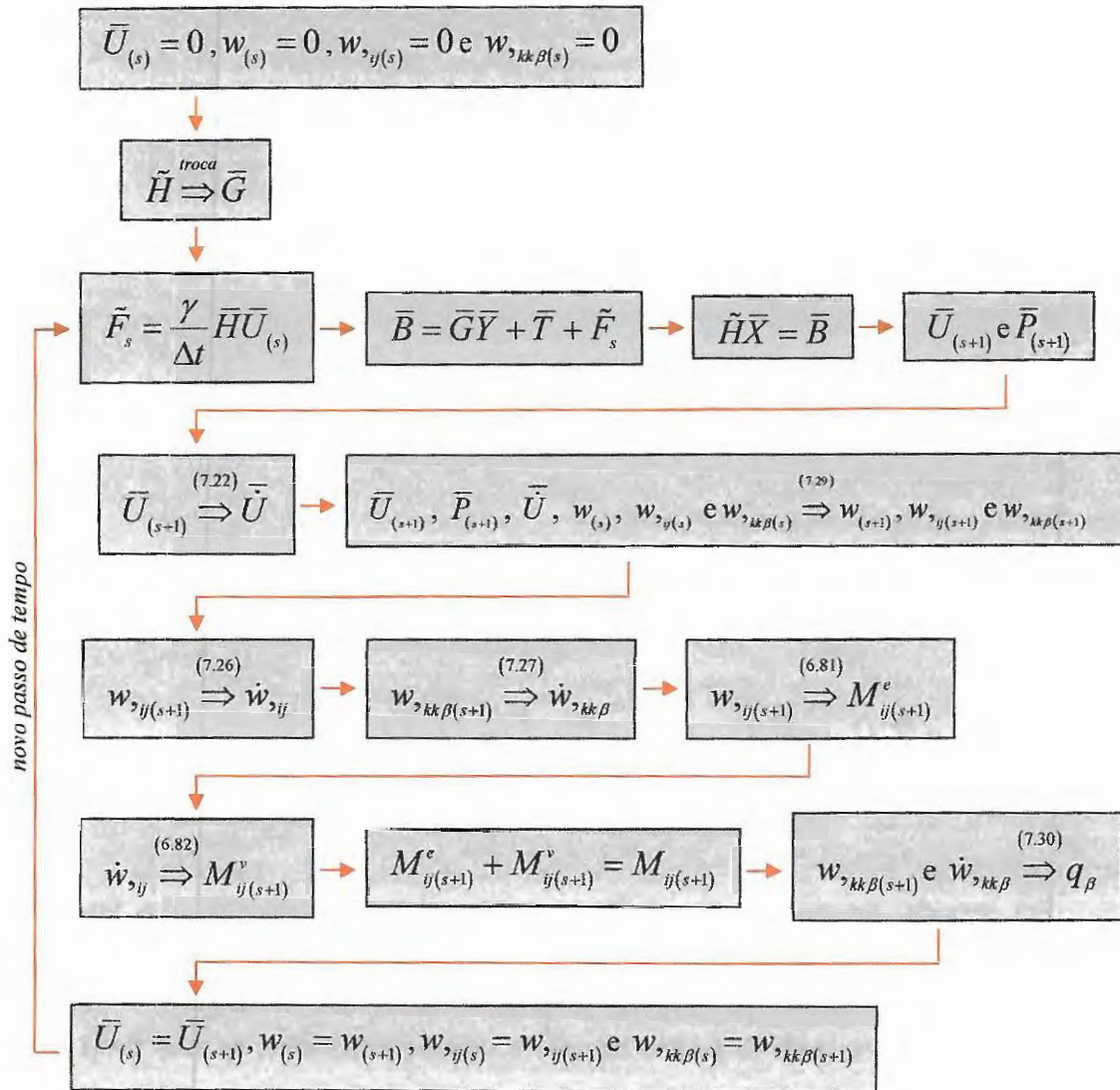


Figura 7.1 – Processo de cálculo ao longo do tempo

### 7.2.4 Exemplos Numéricos

Neste item, a formulação desenvolvida para a análise viscoelástica de placas pelo modelo de Kelvin-Voigt com representação no contorno é aplicada em alguns exemplos, sendo o valor da variável  $\psi$  dos afastamentos dos pontos fora do domínio, equação (4.29), definida igual a 0,5, para os nós duplos, admite-se o valor de  $\omega$ , expressão (4.30), como sendo

igual a 0,1665. Com relação à integração numérica, são utilizados 15 pontos de Gauss e para a constante  $n$ , encontrada nas equações (4.50) e (4.51), é adotado o valor de 20.

#### 7.2.4.1 Exemplo 1

Este é o mesmo exemplo apresentado no item 6.2.5.1, onde se tem uma placa quadrada com dois lados opostos apoiados e engastada nos outros dois, com um carregamento uniformemente distribuído. Esta placa foi discretizada em 24 elementos iguais (Figura 7.2).

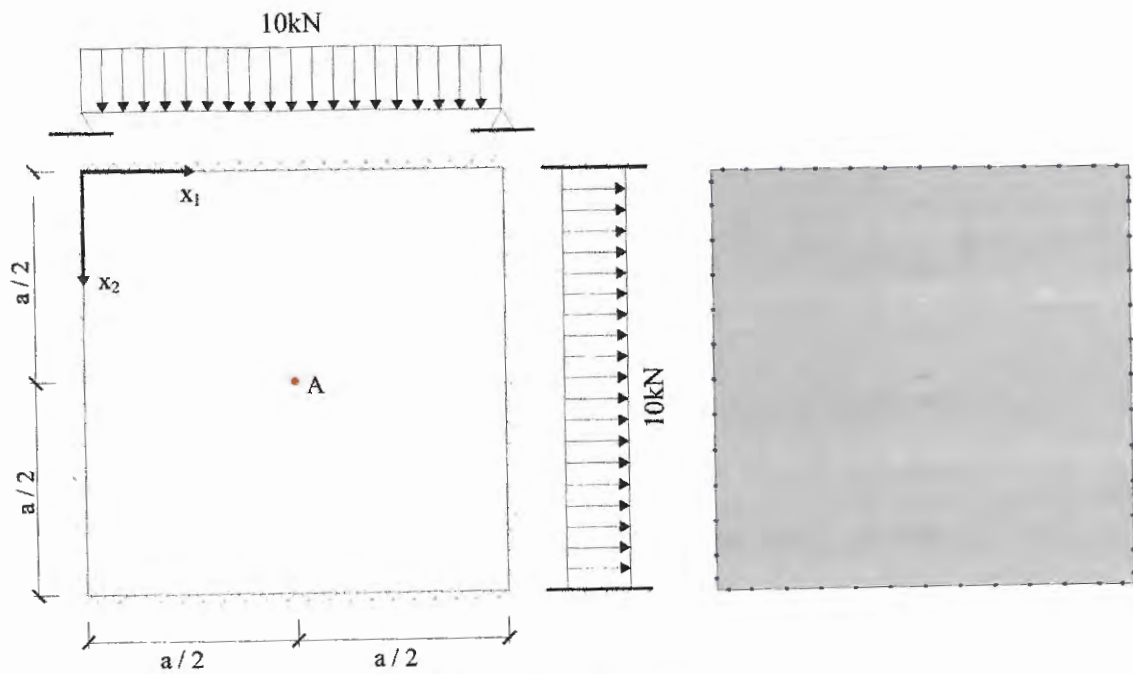


Figura 7.2 – Geometria e discretização da placa em 24 elementos

Os dados utilizados são os mesmos apresentados no item 6.2.5.1 e os resultados para os deslocamentos  $w$  ao longo do tempo no ponto A são apresentados na Figura 7.3, os das curvaturas  $w_{,11}$  e  $w_{,22}$  na Figura 7.4 e para os momentos  $M_{11}$  e  $M_{22}$  nas Figuras 7.5 e 7.6, respectivamente.

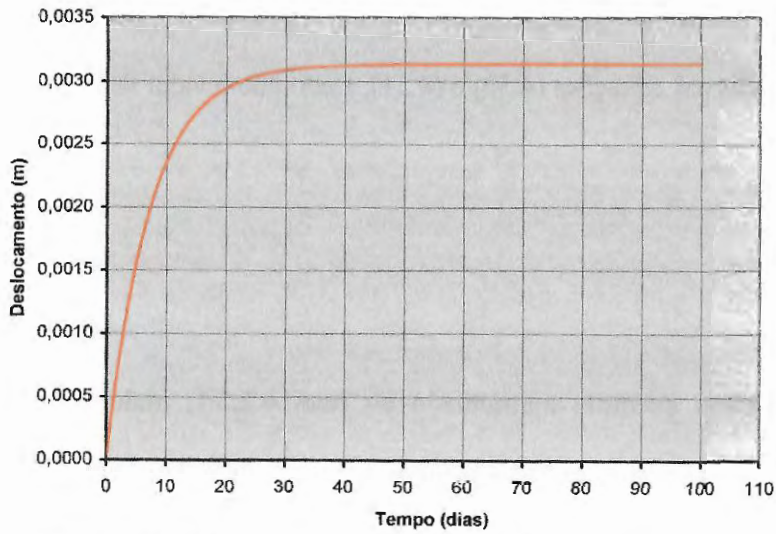


Figura 7.3 – Deslocamento  $w$  do ponto A ao longo do tempo

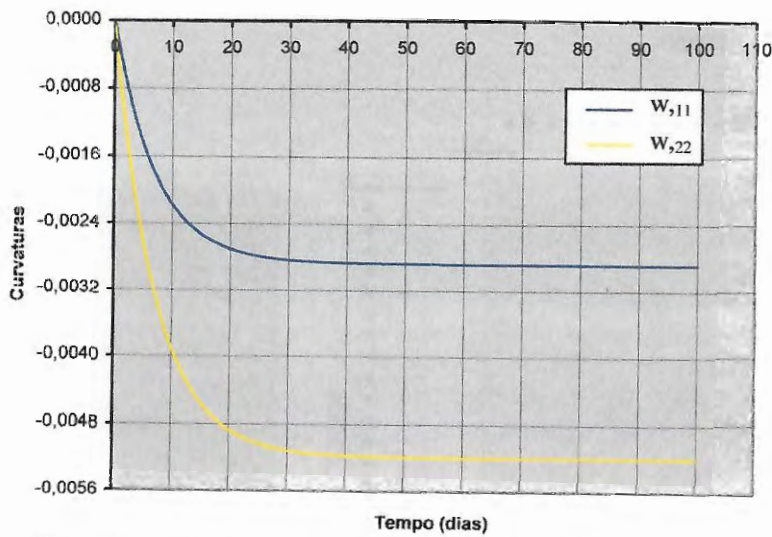
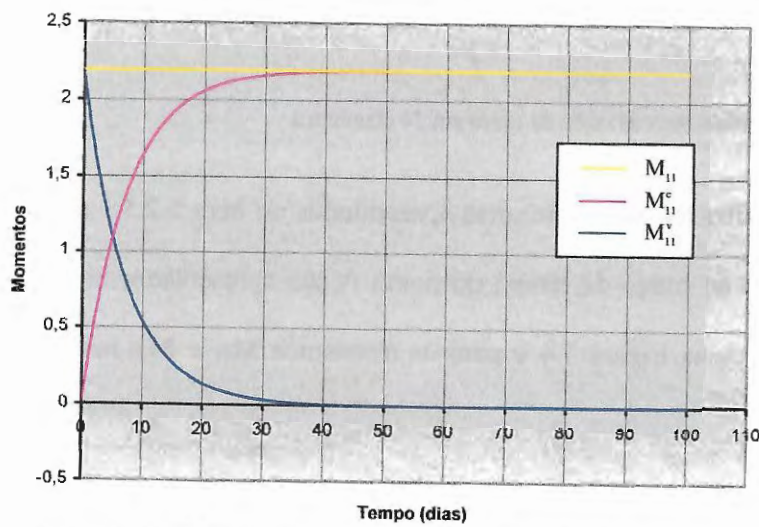
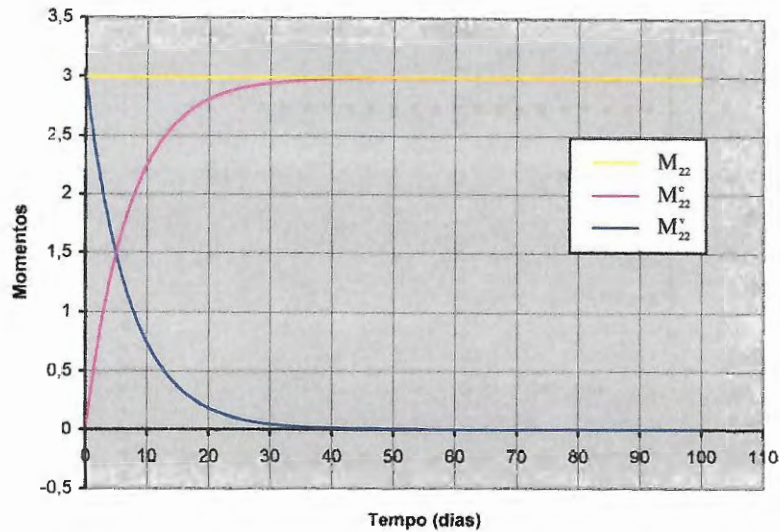


Figura 7.4 – Curvaturas  $w_{s,11}$  e  $w_{s,22}$  do ponto A ao longo do tempo



Figuras 7.5 – Momentos  $M_{11}$  do ponto A ao longo do tempo





Figuras 7.6 – Momentos  $M_{22}$  do ponto A ao longo do tempo

Observa-se que em torno dos 50 dias, já ocorre à convergência para os valores finais do deslocamento e dos momentos elásticos no ponto A, que são idênticos aos apresentados para a formulação com representação no domínio apresentados no item 6.2.5.1.

Verifica-se, também, nas Figuras 7.5 e 7.6 a transferência da tensão presente no amortecedor para a mola, sendo o primeiro representado nas placas pelo momento viscoso e o segundo pelo momento elástico, e que a soma desses momentos gera o total, o qual apresenta o comportamento esperado para o modelo reológico que é ser constante ao longo de todos os passos de tempo, mesmo em discretizações medianas, ao contrário, da formulação com representação no domínio, conforme o exposto no item 6.2.5.3.

#### 7.2.4.2 Exemplo 2

Considere o exemplo dado no item 6.2.5.2, onde tem-se uma placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois, com um carregamento uniformemente distribuído (Figura 7.7).

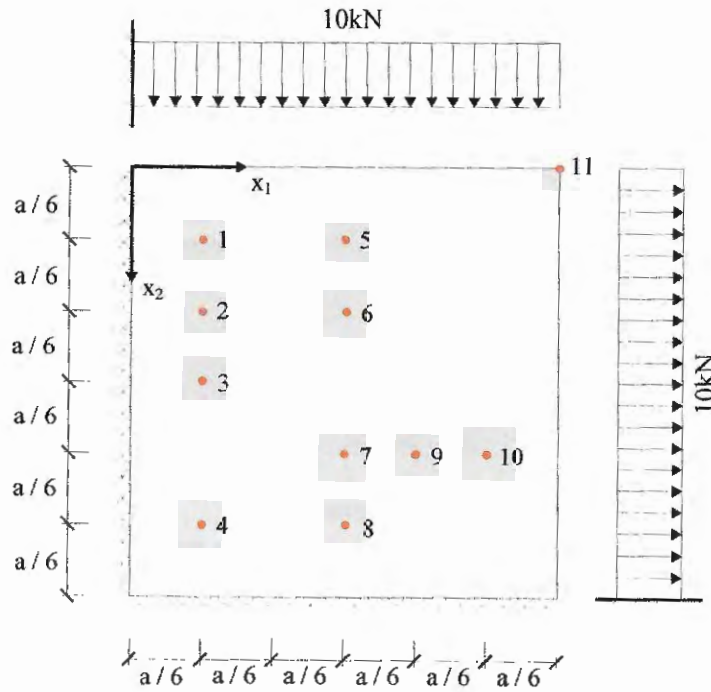


Figura 7.7 - Placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois

A discretização e os dados utilizados são os mesmos para o exemplo anterior, entretanto, ocorrerá à variação dos valores de  $\Delta t$  para que seja realizado um estudo de convergência. Dessa forma, através das Figuras 7.8 e 7.9, respectivamente, pode ser analisada a variação do tamanho do passo de tempo adotado para o cálculo do deslocamento  $w$  no ponto 6 e da curvatura  $w_{,11}$  no ponto 9.

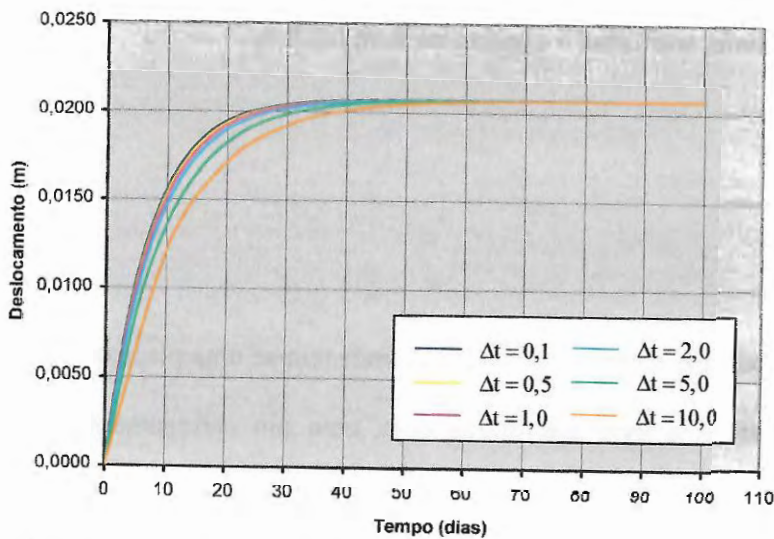


Figura 7.8 – Deslocamento  $w$  no ponto 6 para diversos  $\Delta t$



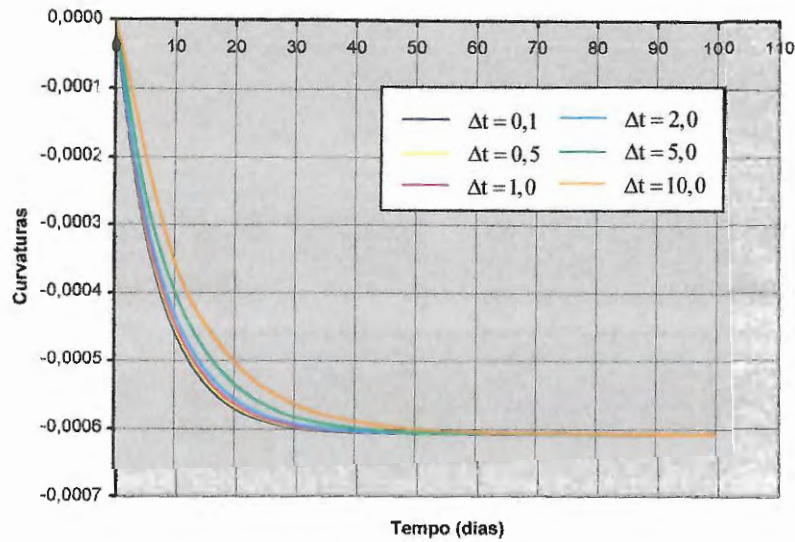


Figura 7.9 – Curvatura  $w_{,11}$  no ponto 9 para diversos  $\Delta t$

Como pode ser observado, os resultados são bastante precisos até mesmo para grandes passos de tempo e convergem para o mesmo valor final para qualquer  $\Delta t$  adotado.

### 7.2.4.3 Exemplo 3

Considere a placa retangular engastada nos quatro lados e submetida a um carregamento linearmente distribuído do item 6.2.5.3 (Figura 7.10). Neste exemplo são utilizados os mesmos dados apresentados neste item citado, sendo, primeiramente, realizado um estudo de convergência de alguns resultados no ponto A para três discretizações diferentes, as quais possuem 12, 24 e 48 elementos, respectivamente, conforme a Figura 7.11.

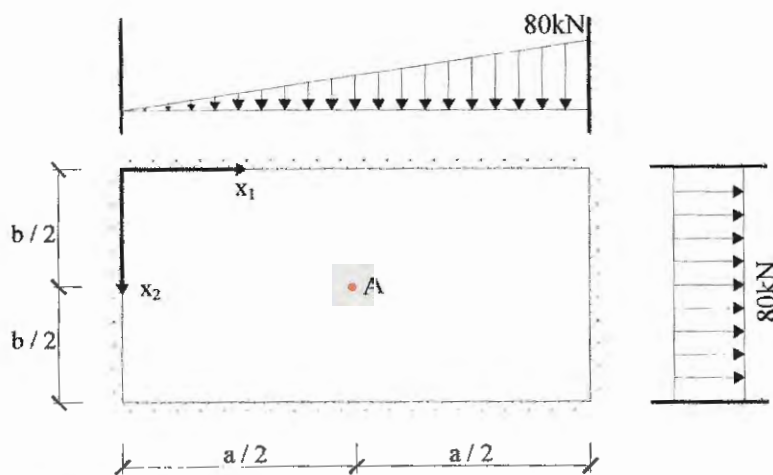


Figura 7.10 - Placa retangular engastada nos quatro lados

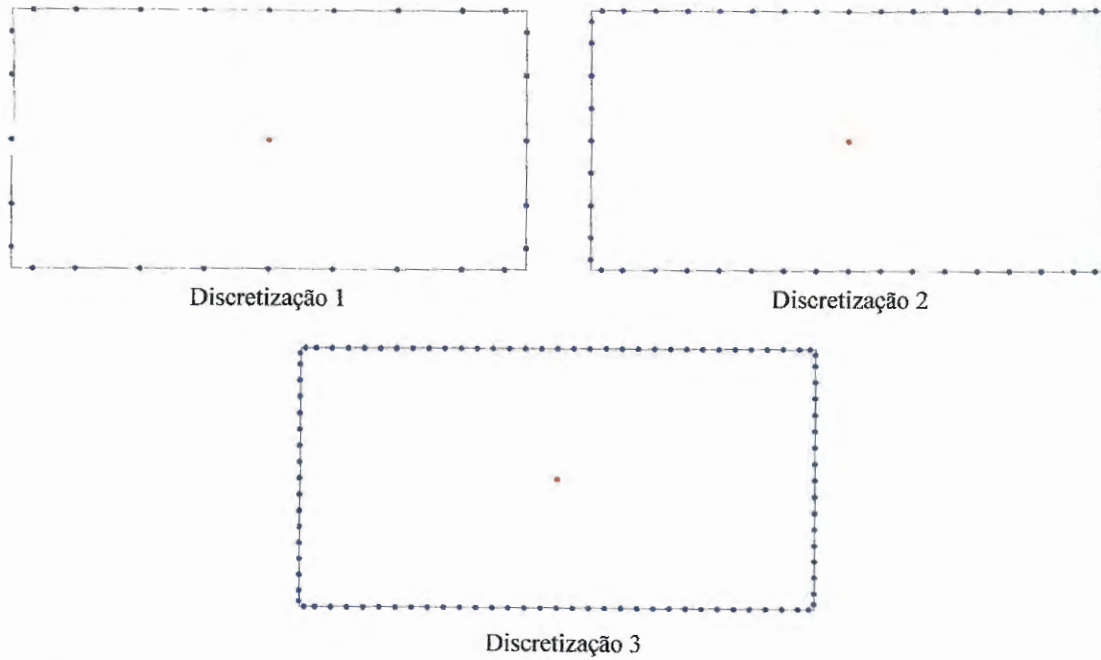


Figura 7.11 – Discretizações para a placa retangular

A curvatura  $w_{,22}$ , para cada discretização, e os momentos  $M_{22}$ , para as discretizações 1 e 3, podem ser analisados através das Figuras 7.12 e 7.13.

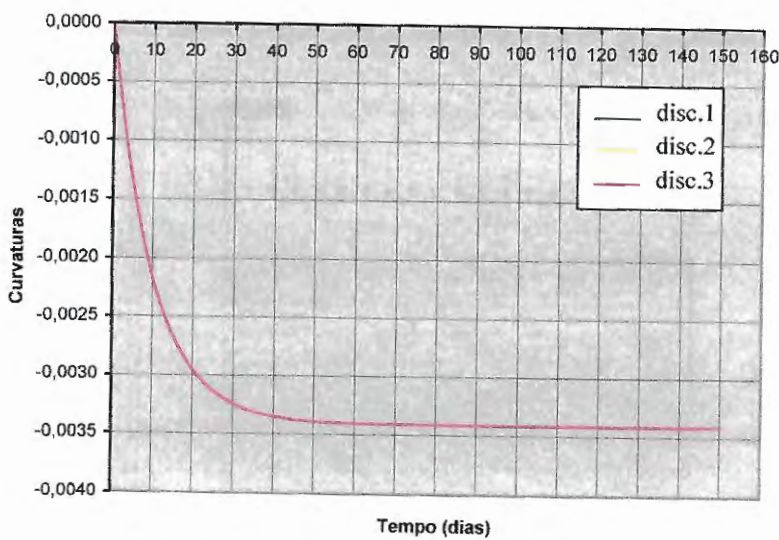


Figura 7.12 – Curvatura  $w_{,22}$  para as três discretizações

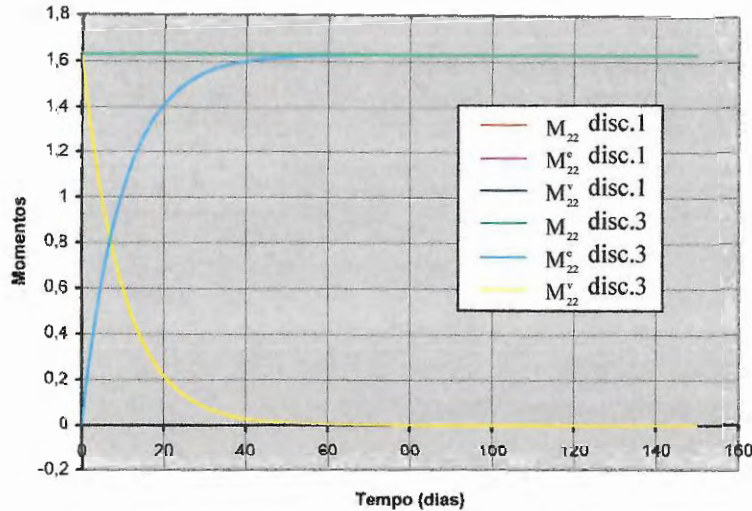


Figura 7.13 – Momentos  $M_{22}$  para as discretizações 1 e 3

Nota-se que os valores obtidos para as três discretizações são praticamente idênticos, pois os resultados estão sobrepostos nas figuras, portanto, verifica-se que mesmo em discretizações pobres, se obtêm resultados satisfatórios para esta formulação.

Agora, é realizado um estudo comparativo entre os resultados para a formulação com representação no domínio e a com representação no contorno. Sendo assim, é adotada a discretização 4, apresentada no item 6.2.5.3, para formulação no domínio e a 3 para a formulação no contorno, exposta neste item. O deslocamento  $w$ , a curvatura  $w_{,11}$  e os momentos  $M_{22}$  no ponto A, para as duas formulações, podem ser analisados através das Figuras 7.14 a 7.16.

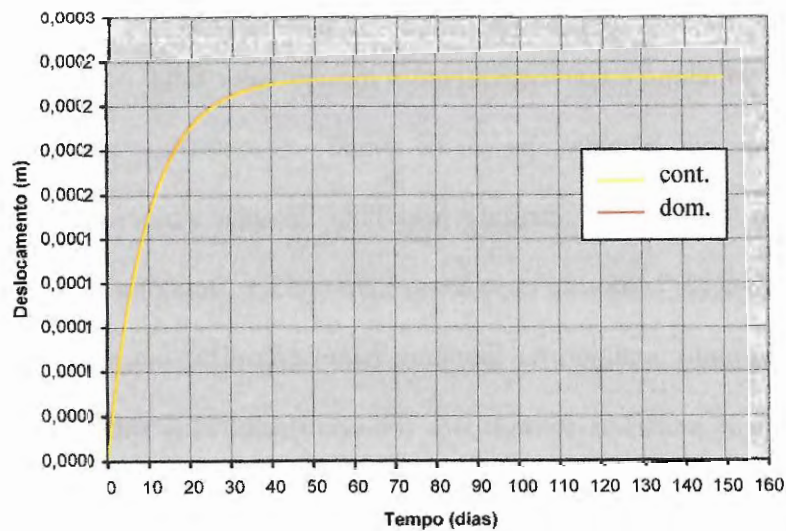


Figura 7.14 - Deslocamento  $w$  para as duas formulações



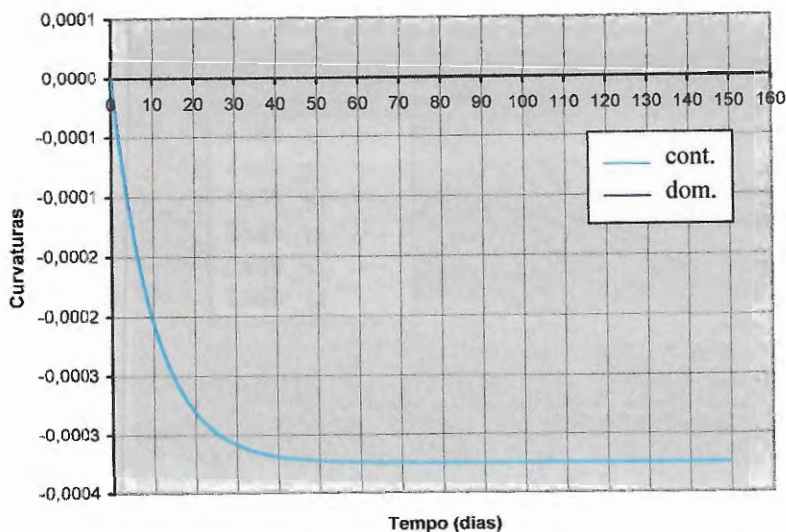


Figura 7.15 - Curvatura  $w_{,11}$  para as duas formulações

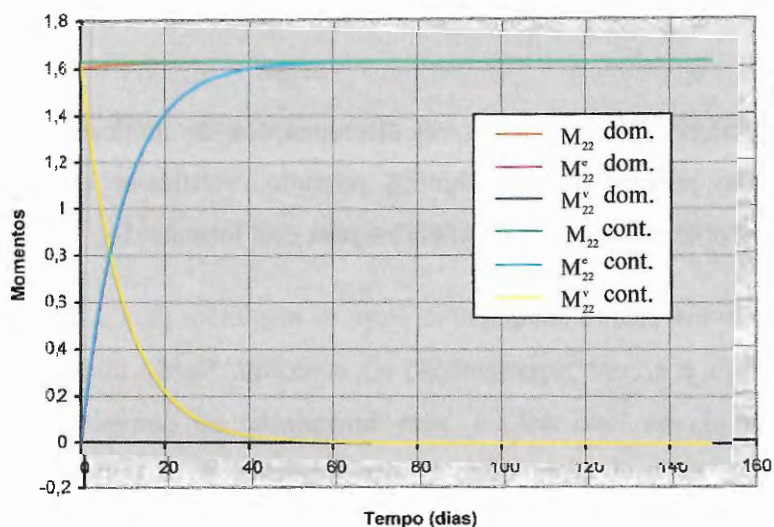


Figura 7.16 - Momentos  $M_{22}$  para as duas formulações

Observa-se que os resultados para as duas formulações se comportam de forma idêntica ao longo do tempo e convergem para o mesmo valor final, ocorrendo uma pequena divergência somente nos primeiros passos de tempo nos momentos  $M_{22}$  para a formulação com representação no domínio, causada pela falta de uma maior quantidade de células internas na discretização, conforme exposto no item 6.2.5.3. Dessa forma, mesmo não sendo encontrado um exemplo analítico na literatura para se realizar um estudo comparativo, é possível verificar que ambas as formulações fornecem resultados válidos para a análise de placas viscoelásticas pelo modelo de Kelvin-Voigt.

### 7.3 FORMULAÇÃO PARA O MODELO DE BOLTZMANN

Para se obter a formulação viscoelástica para o modelo de Boltzmann com apenas integrais de contorno, deve-se aplicar a relação constitutiva do modelo, equação (5.27), no termo à direita do teorema de Betti, expresso em (3.1), e a deformação elástica do trecho elástico  $\varepsilon_{ij}^e$  no termo à esquerda do teorema, deste modo, garante-se a proporcionalidade entre o problema fundamental e o real. Sendo assim, tem-se:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^e dV = \int_V \left( \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} C_{ij}^{lm} (\varepsilon_{lm} + \gamma \dot{\varepsilon}_{lm}) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{ij} \right) \varepsilon_{ij}^* dV \quad (7.31)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^e dV = & \int_V \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} \varepsilon_{ij}^* dV + \\ & + \int_V \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} C_{ij}^{lm} \gamma \dot{\varepsilon}_{lm} \varepsilon_{ij}^* dV - \int_V \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV \end{aligned} \quad (7.32)$$

Substituindo-se (2.13) e (2.16) em (7.32) e, em seguida, integrando-se ao longo da espessura, encontra-se as seguintes integrais de domínio:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij}^e d\Omega = & - \int_{\Omega} \frac{D_e D_{ve}}{D_e + D_{ve}} C_{ij}^{lm} w_{,lm} w_{,ij}^* d\Omega + \\ & - \int_{\Omega} \frac{D_e D_{ve}}{D_e + D_{ve}} C_{ij}^{lm} \gamma \dot{w}_{,lm} w_{,ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\gamma D_{ve}}{D_e + D_{ve}} \dot{M}_{ij} w_{,ij}^* d\Omega \end{aligned} \quad (7.33)$$

Escrevendo-se os momentos fundamentais do termo no lado esquerdo da igualdade em função das curvaturas fundamentais, vem:

$$\begin{aligned}
 -\int_{\Omega} D_e C_{ij}^{lm} w_{,lm}^* w_{,ij}^e d\Omega &= -\int_{\Omega} \frac{D_e D_{ve}}{D_e + D_{ve}} C_{ij}^{lm} w_{,lm} w_{,ij}^* d\Omega + \\
 &-\int_{\Omega} \frac{D_e D_{ve}}{D_e + D_{ve}} C_{ij}^{lm} \gamma \dot{w}_{,lm} w_{,ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\gamma D_{ve}}{D_e + D_{ve}} \dot{M}_{ij} w_{,ij}^* d\Omega
 \end{aligned} \tag{7.34}$$

Sabendo-se que:

$$D_e C_{ij}^{lm} w_{,lm}^* w_{,ij}^e = D_e C_{ij}^{lm} w_{,ij}^* w_{,lm}^e = M_{ij}^e w_{,ij}^* = M_{ij} w_{,ij}^* \tag{7.35}$$

$$D_e C_{ij}^{lm} w_{,lm} w_{,ij}^* = D_e C_{ij}^{lm} w_{,ij} w_{,lm}^* = M_{ij}^* w_{,ij} \tag{7.36}$$

A equação (7.34) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 -\int_{\Omega} M_{ij} w_{,ij}^* d\Omega &= -\int_{\Omega} \frac{D_{ev}}{D_e + D_{ve}} M_{ij}^* w_{,ij} d\Omega + \\
 &-\int_{\Omega} \gamma \frac{D_{ve}}{D_e + D_{ve}} M_{ij}^* \dot{w}_{,ij} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\gamma D_{ve}}{D_e + D_{ve}} \dot{M}_{ij} w_{,ij}^* d\Omega
 \end{aligned} \tag{7.37}$$

Reorganizando (7.37), vem:

$$\begin{aligned}
 -\int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij} d\Omega - \gamma \int_{\Omega} M_{ij}^* \dot{w}_{,ij} d\Omega &= \\
 = -\frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \int_{\Omega} M_{ij} w_{,ij}^* d\Omega - \gamma \int_{\Omega} \dot{M}_{ij} w_{,ij}^* d\Omega
 \end{aligned} \tag{7.38}$$

Desenvolvendo-se os termos da equação anterior de forma análoga ao que foi exposto no item 3.2, se obtém a equação integral do deslocamento total de um ponto  $q$  do domínio da placa para o modelo de Boltzmann com apenas integrais de contorno:

$$\begin{aligned}
 & w(q) + \gamma \dot{w}(q) + \iint_{\Gamma} \left( V_n^*(q, P) w(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & \gamma \iint_{\Gamma} \left( V_n^*(q, P) \dot{w}(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial \dot{w}}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) + \\
 & + \gamma \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q, P) \dot{w}_{ci}(P) = \frac{D_e + D_w}{D_w} \iint_{\Gamma} \left( V_n(P) w^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & \gamma \iint_{\Gamma} \left( \dot{V}_n(P) w^*(q, P) - \dot{M}_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \frac{D_e + D_w}{D_w} \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \\
 & + \gamma \sum_{i=1}^{N_c} \dot{R}_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \frac{D_e + D_w}{D_w} \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) + \\
 & + \gamma \int_{\Omega_g} \dot{g}(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) \tag{7.39}
 \end{aligned}$$

Em seguida, adotando-se os procedimentos apresentados no item 3.3 para a equação

(7.39), encontra-se a expressão da equação integral para um ponto Q do contorno:

$$\begin{aligned}
 & K(Q) w(Q) + \gamma K(Q) \dot{w}(Q) + \iint_{\Gamma} \left( V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & \gamma \iint_{\Gamma} \left( V_n^*(Q, P) \dot{w}(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial \dot{w}}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) + \\
 & + \gamma \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q, P) \dot{w}_{ci}(P) = \frac{D_e + D_w}{D_w} \iint_{\Gamma} \left( V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & \gamma \iint_{\Gamma} \left( \dot{V}_n(P) w^*(Q, P) - \dot{M}_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) + \frac{D_e + D_w}{D_w} \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + \\
 & + \gamma \sum_{i=1}^{N_c} \dot{R}_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + \frac{D_e + D_w}{D_w} \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p) + \\
 & + \gamma \int_{\Omega_g} \dot{g}(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p) \tag{7.40}
 \end{aligned}$$

Observa-se que a diferença entre as equações (3.20) e (3.36) em relação às (7.39) e (7.40) e a presença de uma constante, que relaciona  $D_e$  e  $D_{ve}$ , e dos termos multiplicados por  $\gamma$ , os quais do lado esquerdo da igualdade são responsáveis pelo comportamento viscoso e do lado direito pelo comportamento instantâneo, porém estes últimos podem contribuir também para o comportamento viscoso, caso ocorra variações com o tempo da carga aplicada.

### 7.3.1 Equações Integrais para os Esforços nos Pontos Internos

Para se conseguir os esforços nos pontos internos da placa, primeiramente, devem-se encontrar as curvaturas totais nestes pontos ao se derivar a equação (7.39), em relação às direções  $x_1$  e  $x_2$  de um sistema cartesiano ortogonal, com origem no ponto  $q$ . Assim, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_k \partial x_l} + \gamma \frac{\partial^2 \dot{w}(q)}{\partial x_k \partial x_l} + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) w(P) - \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & \gamma \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \dot{w}(P) - \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \frac{\partial \dot{w}}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_{ci}^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) w_{ci}(P) + \\
 & + \gamma \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_{ci}^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) \dot{w}_{ci}(P) = \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \int_{\Gamma} \left( V_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) + \right. \\
 & \left. - M_n(P) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right) d\Gamma(P) + \gamma \int_{\Gamma} \left( \dot{V}_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) + \right. \quad (7.41) \\
 & \left. - \dot{M}_n(P) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right) d\Gamma(P) + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) \frac{\partial^2 w_{ci}^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) + \\
 & + \gamma \sum_{i=1}^{N_c} \dot{R}_{ci}(P) \frac{\partial^2 w_{ci}^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, P) + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, p) d\Omega_g(p) + \\
 & + \gamma \int_{\Omega_g} \dot{g}(p) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l}(q, p) d\Omega_g(p)
 \end{aligned}$$



Todas as derivadas das soluções fundamentais foram expressas no item 4.6. e, deste modo, para se calcular os momentos fletores nos pontos internos, é necessário realizar uma integração temporal numérica em (7.41), que será explicada posteriormente.

Com relação às forças cortantes nos pontos internos, devem ser calculadas as derivadas das curvaturas totais em relação à direção  $\beta$  através de:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_k \partial x_l} \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 \dot{w}(q)}{\partial x_k \partial x_l} \right) + \int_\Gamma \left( \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_l} (q, P) \right) w(P) + \right. \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_l} (q, P) \right) \frac{\partial w}{\partial n} (P) \Big) d\Gamma(P) + \gamma \int_\Gamma \left( \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_l} (q, P) \right) \dot{w}(P) + \right. \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_l} (q, P) \right) \frac{\partial \dot{w}}{\partial n} (P) \Big) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 R_{ci}^*}{\partial x_k \partial x_l} (q, P) \right) w_{ci}(P) + \\
 & + \gamma \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 R_{ci}^*}{\partial x_k \partial x_l} (q, P) \right) \dot{w}_{ci}(P) = \frac{D_e + D_w}{D_w} \int_\Gamma \left( V_n(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l} (q, P) \right) + \right. \\
 & - M_n(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n} (q, P) \right) \right) \Big) d\Gamma(P) + \gamma \int_\Gamma \left( \dot{V}_n(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l} (q, P) \right) + \right. \\
 & - \dot{M}_n(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left( \frac{\partial w^*}{\partial n} (q, P) \right) \right) \Big) d\Gamma(P) + \frac{D_e + D_w}{D_w} \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w_{ci}^*}{\partial x_k \partial x_l} (q, P) \right) + \\
 & + \gamma \sum_{i=1}^{N_c} \dot{R}_{ci}(P) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w_{ci}^*}{\partial x_k \partial x_l} (q, P) \right) + \frac{D_e + D_w}{D_w} \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l} (q, p) \right) d\Omega_g(p) + \\
 & + \gamma \int_{\Omega_g} \dot{g}(p) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_l} (q, p) \right) d\Omega_g(p) \tag{7.42}
 \end{aligned}$$

Todas as derivadas das soluções fundamentais, também, foram expressas no item 4.6. e, assim, para se calcular as forças cortantes nos pontos internos, é necessário, também, realizar uma integração temporal numérica em (7.42).

## 7.3.2 Sistema de Equações

A equação integral para um ponto Q do contorno, dada por (7.40), pode ser escrita na forma matricial ao se aplicar os procedimentos expostos nos item 4.2.3. Dessa forma, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & K(Q)u(Q) + \gamma K(Q)\dot{u}(Q) + \bar{H}(Q)\bar{U} + \gamma\bar{H}(Q)\bar{\dot{U}} + \bar{H}_c(Q)\bar{w}_c + \\
 & + \gamma\bar{H}_c(Q)\bar{\dot{w}}_c = \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}}\bar{G}(Q)\bar{P} + \gamma\bar{G}(Q)\bar{\dot{P}} + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}}\bar{G}_c(Q)\bar{R}_c + \quad (7.43) \\
 & \gamma\bar{G}_c(Q)\bar{\dot{R}}_c + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}}\bar{T}(Q) + \gamma\bar{\dot{T}}(Q)
 \end{aligned}$$

onde:

- $\dot{u}$  é o vetor com os valores nodais das taxas dos deslocamentos, expresso por:

$$\dot{u} = \left\{ \dot{w}^1 \quad \dot{w}^2 \quad \dots \quad \dot{w}^{N_n} \right\}$$

- $\bar{\dot{U}}$  é o vetor com os valores nodais das taxas dos deslocamentos e das taxas de suas derivadas em relação à normal, expresso por:

$$\bar{\dot{U}} = \left\{ \dot{w}^1 \quad \frac{\partial \dot{w}^1}{\partial n} \quad \dot{w}^2 \quad \frac{\partial \dot{w}^2}{\partial n} \quad \dots \quad \dot{w}^{N_n} \quad \frac{\partial \dot{w}^{N_n}}{\partial n} \right\}$$

- $\bar{\dot{w}}_c$  é o vetor com os valores das taxas dos deslocamentos de canto, expresso por:

$$\bar{\dot{W}}_c = \left\{ \dot{W}_c^1 \quad \dot{W}_c^2 \quad \dots \quad \dot{W}_c^{N_c} \right\}$$

- $\bar{\dot{P}}$  é o vetor com os valores nodais das taxas dos momentos normais e das taxas das forças cortantes equivalentes, expresso por:

$$\bar{\dot{P}} = \left\{ \dot{V}_n^1 \quad \dot{M}_n^1 \quad \dot{V}_n^2 \quad \dot{M}_n^2 \quad \dots \quad \dot{V}_n^{N_n} \quad \dot{M}_n^{N_n} \right\}$$

- $\bar{\dot{R}}_c$  é o vetor com os valores das taxas das reações de canto, expresso por:

$$\bar{\dot{R}}_c = \left\{ \dot{R}_c^1 \quad \dot{R}_c^2 \quad \dots \quad \dot{R}_c^{N_c} \right\}$$

- $\hat{T}(Q)$  é um vetor composto pelos valores resultantes da integração das taxas dos carregamento na região  $\Omega_g$ .

Utilizando-se o sistema de equações exposto no item 4.3 e considerando-se as técnicas empregadas para que  $K(Q)$  seja distribuído em  $\bar{H}(Q)$ , a reação de canto  $\bar{R}_c$  seja nula e o deslocamento de canto  $\bar{w}_c$  seja função dos deslocamentos dos nós vizinhos ao canto, expostas no item 4.2.3 e aplicando-as, também, nos termos referentes ao comportamento viscoso e instantâneo. Assim, se obtém o seguinte sistema de equações:

$$\bar{H}\bar{U} + \gamma\bar{H}\bar{U} = \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}}\bar{G}\bar{P} + \gamma\bar{G}\bar{P} + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}}\bar{T} + \gamma\bar{T} \quad (7.44)$$

As equações integrais para os deslocamentos, curvaturas e derivadas das curvaturas totais nos pontos internos, dadas por (7.39), (7.41) e (7.42), respectivamente, podem ser escritas da seguinte maneira de forma geral, conforme o item 4.6:

$$\begin{aligned}
 & \bar{u}(q) + \gamma \bar{\dot{u}}(q) + \int_{\Gamma} \bar{p}^*(q, P) \bar{u}(P) d\Gamma(P) + \gamma \int_{\Gamma} \bar{p}^*(q, P) \bar{\dot{u}}(P) d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{c=1}^{N_c} \bar{p}_c^*(q, P) w_c(P) + \gamma \sum_{c=1}^{N_c} \bar{p}_c^*(q, P) \dot{w}_c(P) = \\
 & = \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \int_{\Gamma} \bar{u}^*(q, P) \bar{p}(P) d\Gamma(P) + \gamma \int_{\Gamma} \bar{u}^*(q, P) \bar{\dot{p}}(P) d\Gamma(P) + \quad (7.45) \\
 & + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \sum_{c=1}^{N_c} \bar{u}_c^*(q, P) R_c(P) + \gamma \sum_{c=1}^{N_c} \bar{u}_c^*(q, P) \dot{R}_c(P) + \\
 & + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \int_{\Omega_g} g(p) \bar{u}_g^*(q, p) d\Omega_g(p) + \gamma \int_{\Omega_g} \dot{g}(p) \bar{u}_g^*(q, p) d\Omega_g(p)
 \end{aligned}$$

onde:

$$\bar{\dot{u}}(q) = \left\{ \begin{array}{l} \dot{w}(q) \\ \frac{\partial^2 \dot{w}(q)}{\partial x_i \partial x_j} \\ \frac{\partial}{\partial x_\rho} \left( \frac{\partial^2 \dot{w}(q)}{\partial x_k \partial x_k} \right) \end{array} \right\} \quad (7.46)$$

$$\bar{\dot{u}}(P) = \left\{ \begin{array}{l} \dot{w}(P) \\ \frac{\partial \dot{w}}{\partial n}(P) \end{array} \right\} \quad (7.47)$$

$$\bar{\dot{p}}(P) = \left\{ \begin{array}{l} \dot{V}_n(P) \\ \dot{M}_n(P) \end{array} \right\} \quad (7.48)$$

Empregando-se as simplificações para os termos referentes aos cantos, obtém-se o seguinte sistema de equações, semelhante ao apresentado no item 4.6:

$$\begin{aligned} \bar{u}(q) + \gamma \bar{u}(q) + \bar{H}'\bar{U} + \gamma \bar{H}'\bar{U} = & \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \bar{G}'\bar{P} + \gamma \bar{G}'\bar{P} + \\ & + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \bar{T}' + \gamma \bar{T}' \end{aligned} \quad (7.49)$$

onde:

- $\bar{U}$  é o vetor composto pelas taxas dos deslocamentos.
- $\bar{P}$  é o vetor composto pelas taxas dos esforços.
- $\bar{T}'$  é o vetor formado pela integração das taxas do carregamento na região  $\Omega_g$ .

### 7.3.3 Integração Temporal Numérica

Para resolver o sistema de equações (7.44), adotam-se as seguintes aproximações lineares:

$$\dot{w} = \frac{w_{(s+1)} - w_{(s)}}{\Delta t} \quad (7.50)$$

$$\frac{\partial \dot{w}}{\partial n} = \frac{\frac{\partial w}{\partial n_{(s+1)}} - \frac{\partial w}{\partial n_{(s)}}}{\Delta t} \quad (7.51)$$

$$\dot{V}_n = \frac{V_{n(s+1)} - V_{n(s)}}{\Delta t} \quad (7.52)$$

$$\dot{M}_n = \frac{M_{n(s+1)} - M_{n(s)}}{\Delta t} \quad (7.53)$$

$$\dot{g} = \frac{g_{(s+1)} - g_{(s)}}{\Delta t} \quad (7.54)$$

Considerando as representações de  $\bar{U}$ ,  $\bar{P}$  e  $\bar{T}$ , apresentadas no item anterior, pode-se reescrever (7.50) a (7.54) da seguinte forma matricial:

$$\bar{\dot{U}} = \frac{\bar{U}_{(s+1)} - \bar{U}_{(s)}}{\Delta t} \quad (7.55)$$

$$\bar{\dot{P}} = \frac{\bar{P}_{(s+1)} - \bar{P}_{(s)}}{\Delta t} \quad (7.56)$$

$$\bar{\dot{T}} = \frac{\bar{T}_{(s+1)} - \bar{T}_{(s)}}{\Delta t} \quad (7.57)$$

Substituindo-se (7.55) a (7.57) em (7.44), encontra-se:

$$\tilde{H}\bar{U}_{(s+1)} = \tilde{G}\bar{P}_{(s+1)} + \tilde{T} + \tilde{F}_s \quad (7.58)$$

onde:

$$\tilde{H} = \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right) \bar{H} \quad (7.59)$$



$$\tilde{G} = \left( \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \bar{G} \quad (7.60)$$

$$\tilde{T} = \left( \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \bar{T}_{(s+1)} \quad (7.61)$$

$$\tilde{F}_s = \frac{\gamma}{\Delta t} \bar{H} \bar{U}_{(s)} - \frac{\gamma}{\Delta t} \bar{G} \bar{P}_{(s)} - \frac{\gamma}{\Delta t} \bar{T}_{(s)} \quad (7.62)$$

Impondo-se as condições de contorno, trocando-se as colunas das matrizes  $\tilde{H}$  e  $\tilde{G}$ , somando-se os vetores resultantes do lado direito da igualdade, pode-se resolver o sistema linear dado por (7.58), assim, encontrando-se os deslocamentos e os esforços para o passo de tempo atual. Com os valores dos deslocamentos e esforços para o passo de tempo atual e anterior, calculam-se suas taxas através de (7.55) e (7.56), e com os valores do carregamento atual e anterior, sendo estes definidos como um dado do problema analisado, calcula-se a sua taxa por (7.57).

Para o sistema de equações (7.49) dos deslocamentos, curvaturas e derivadas das curvaturas totais adotam-se a aproximação (7.50) e as seguintes:

$$\dot{w}_{,ij} = \frac{w_{,ij(s+1)} + w_{,ij(s)}}{\Delta t} \quad (7.63)$$

$$\dot{w}_{,kk\beta} = \frac{w_{,kk\beta(s+1)} + w_{,kk\beta(s)}}{\Delta t} \quad (7.64)$$

ou seja,

$$\bar{\dot{u}} = \frac{\bar{u}_{(s+1)} - \bar{u}_{(s)}}{\Delta t} \quad (7.65)$$

Dessa forma, aplicando-se (7.65) em (7.49), obtém-se:

$$\bar{u}_{(s+1)} = \left( -\bar{H}'\bar{U} - \gamma\bar{H}'\bar{U} + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}}\bar{G}'\bar{P} + \gamma\bar{G}'\bar{P} + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}}\bar{T}' + \gamma\bar{T}' + \frac{\gamma}{\Delta t}\bar{u}_{(s)} \right) / \left( 1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \quad (7.66)$$

Em seguida, substituindo em (7.66) os valores já encontrados dos deslocamentos, esforços, carregamentos e de suas respectivas taxas, obtêm-se os deslocamentos, curvaturas e derivadas das curvaturas totais para os pontos internos e, conseqüentemente, as suas taxas ao se aplicar os resultados em (7.50), (7.63) e (7.64).

Para se calcularem os momentos totais, deve-se definir a seguinte aproximação:

$$\dot{M}_{ij} = \frac{M_{ij(s+1)} - M_{ij(s)}}{\Delta t} \quad (7.67)$$

Reescrevendo a expressão (5.27) para placas, vem:

$$M_{ij} = \frac{D_e D_{ve}}{D_e + D_{ve}} C_{ij}^{lm} (w_{,lm} + \gamma \dot{w}_{,lm}) - \frac{\gamma D_{ve}}{D_e + D_{ve}} \dot{M}_{ij} \quad (7.68)$$

Substituindo-se (7.67) em (7.68), obtém-se:

$$M_{ij(s+1)} = \left( \frac{D_e D_{ve}}{D_e + D_{ve}} C_{ij}^{lm} (w_{,lm} + \gamma \dot{w}_{,lm}) + \frac{D_{ve}}{D_e + D_{ve}} \frac{\gamma}{\Delta t} M_{ij(s)} \right) / \left( 1 + \frac{D_{ve}}{D_e + D_{ve}} \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \quad (7.69)$$



Assim, aplicando-se as curvaturas totais, suas taxas e os valores dos momentos totais para o passo de tempo anterior em (7.69), encontra-se os momentos totais atuais.

Observa-se que não é possível se calcular os momentos elásticos e viscosos de forma direta, como no modelo de Kelvin-Voigt, pois os resultados encontrados são as curvaturas totais e suas taxas, portanto, uma forma de resolver este problema seria escrever um novo sistema de equações, de maneira que fosse possível obter as curvaturas instantâneas. Deste modo, se subtrairia das curvaturas totais as instantâneas e se encontraria as elásticas para o trecho viscoelástico. Entretanto, esta abordagem é computacionalmente dispendiosa e pode-se contornar esta dificuldade através de um procedimento proposto por MESQUITA & CODA (2001), onde as tensões ou os momentos, no caso deste trabalho, são obtidos pela solução de uma equação diferencial. Esta equação é obtida ao se escrever a expressão (5.17) para placas, em forma de taxa, do seguinte modo:

$$\dot{M}_{ij}^{el} = D_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{w}_{,lm}^{ve} = \frac{1}{\gamma} \gamma D_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{w}_{,lm}^{ve} = \frac{1}{\gamma} \dot{M}_{ij}^v \quad (7.70)$$

ou seja,

$$M_{ij}^v = \gamma \dot{M}_{ij}^{el} \quad (7.71)$$

A equação (7.71) expressa uma relação entre as taxas dos momentos elásticos e os momentos viscosos. Reescrevendo a expressão (5.22) para placas, vem:

$$M_{ij} = M_{ij}^{el} + M_{ij}^v \quad (7.72)$$

Em seguida, aplicando-se (7.71) em (7.72), tem-se a equação diferencial:

$$\gamma \dot{M}_{ij}^{el} + M_{ij}^{el} - M_{ij} = 0 \quad (7.73)$$

Adotando-se a seguinte aproximação para as taxas dos momentos elásticos:

$$\dot{M}_{ij}^{el} = \frac{M_{ij(s+1)}^{el} - M_{ij(s)}^{el}}{\Delta t} \quad (7.74)$$

Substituindo (7.74) em (7.73), obtém-se:

$$M_{ij(s+1)}^{el} = \left( M_{ij(s+1)} + \frac{\gamma}{\Delta t} M_{ij(s)}^{el} \right) / \left( 1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \quad (7.75)$$

Deste modo, encontra-se a resolução numérica para a equação diferencial (7.73) dos momentos elásticos. Verifica-se que na expressão (7.75) necessita-se do valor dos momentos totais que são calculados por (7.69) e, assim, encontrados os momentos totais e os elásticos, pode-se obter os momentos viscosos aplicando-se a relação (7.72).

Para se calcular os esforços cortantes totais, deve-se substituir (7.68) em (2.21), dessa forma, tem-se:

$$q_{\beta} = -\frac{D_e D_{ve}}{D_e + D_{ve}} (w_{,kk\beta} + \gamma \dot{w}_{,kk\beta}) - \frac{\gamma D_{ve}}{D_e + D_{ve}} \dot{q}_{\beta} \quad (7.76)$$

Adotando-se a seguinte aproximação:

$$\dot{q}_{\beta} = \frac{q_{\beta(s+1)} - q_{\beta(s)}}{\Delta t} \quad (7.77)$$

Em seguida, aplicando (7.77) em (7.76), vem:

$$q_{\beta(s+1)} = \left( -\frac{D_e D_{ve}}{D_e + D_{ve}} (w_{,\gamma kk\beta} + \gamma \dot{w}_{,\gamma kk\beta}) + \frac{D_{ve}}{D_e + D_{ve}} \frac{\gamma}{\Delta t} q_{\beta(s)} \right) / \left( 1 + \frac{D_{ve}}{D_e + D_{ve}} \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \quad (7.78)$$

Dessa forma, substituindo-se as derivadas das curvaturas totais, suas taxas e os valores dos esforços cortantes totais para o passo de tempo anterior em (7.77), encontra-se os esforços cortantes totais atuais. Todos os passos que foram descritos para a integração temporal numérica estão esquematizados na Figura 7.17, onde  $\bar{Y}$  são os valores de contorno prescritos.

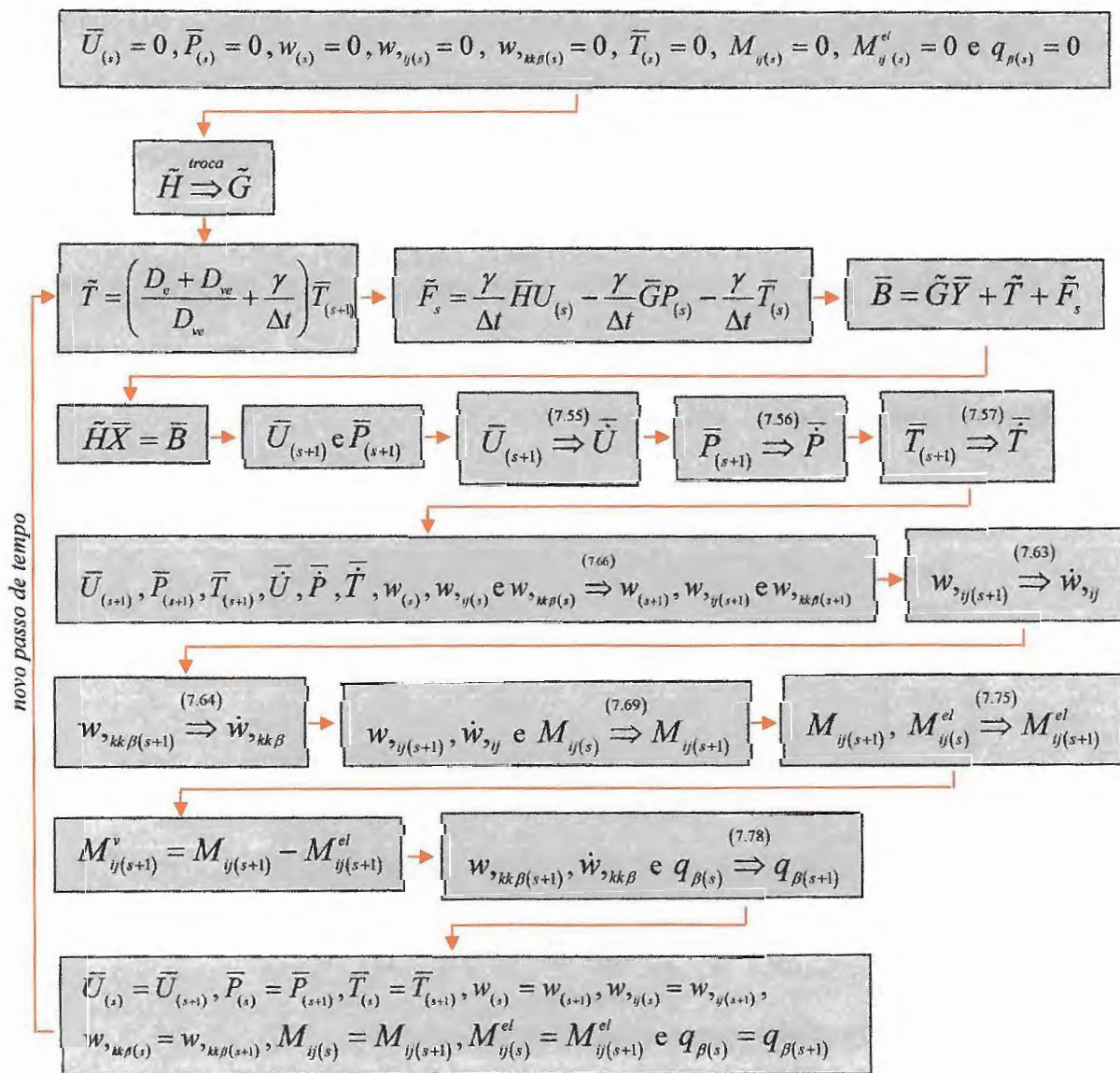


Figura 7.17 – Processo de cálculo ao longo do tempo

### 7.3.4 Exemplos Numéricos

Neste item, a formulação desenvolvida para a análise viscoelástica de placas pelo modelo de Boltzmann com representação no contorno é aplicada em alguns exemplos, os quais utilizam os mesmos valores apresentados no item 7.2.4.

#### 7.3.4.1 Exemplo 1

Considere a placa quadrada com dois lados opostos apoiados e engastada nos outros dois, com um carregamento uniformemente distribuído, analisada no item 6.3.5.1. A geometria e a discretização, na qual são utilizados 24 elementos iguais, estão expostas na Figura 7.2, e os dados utilizados são os mesmos do item citado anteriormente.

Os resultados para os deslocamentos  $w$  ao longo do tempo no ponto A são apresentados na Figura 7.18, os das curvaturas  $w_{,11}$  e  $w_{,22}$  na Figura 7.19 e para os momentos  $M_{11}$  e  $M_{22}$  nas Figuras 7.20 e 7.21, respectivamente.

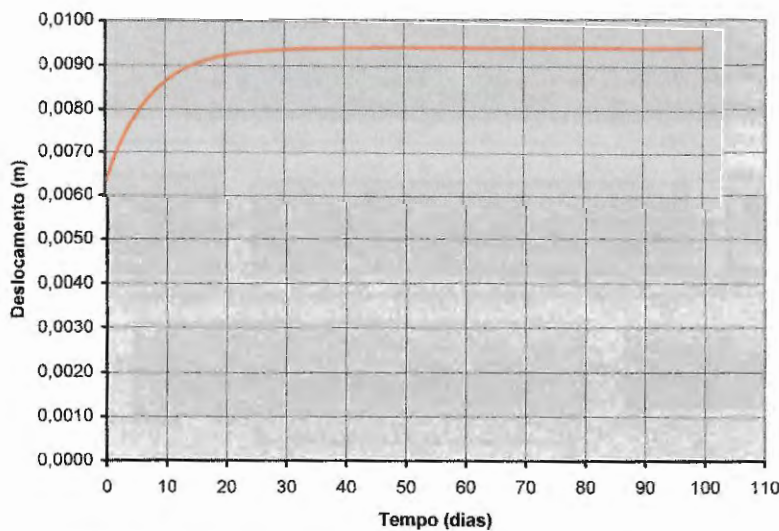


Figura 7.18 – Deslocamento  $w$  do ponto A ao longo do tempo



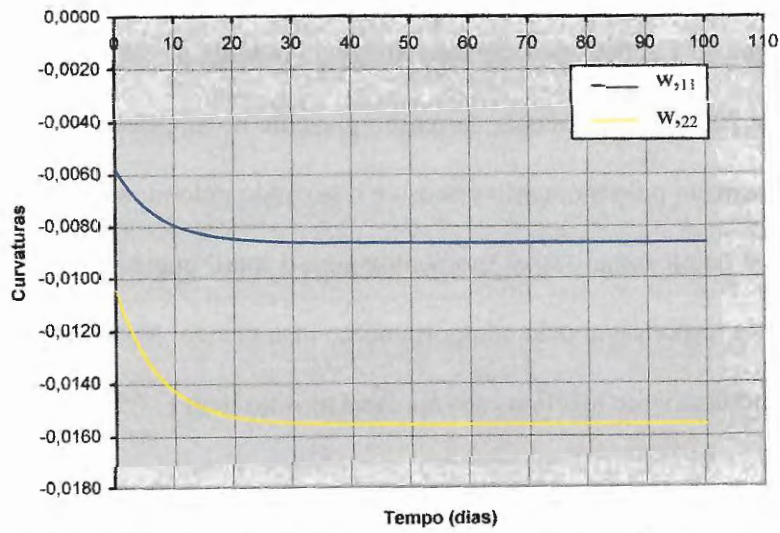
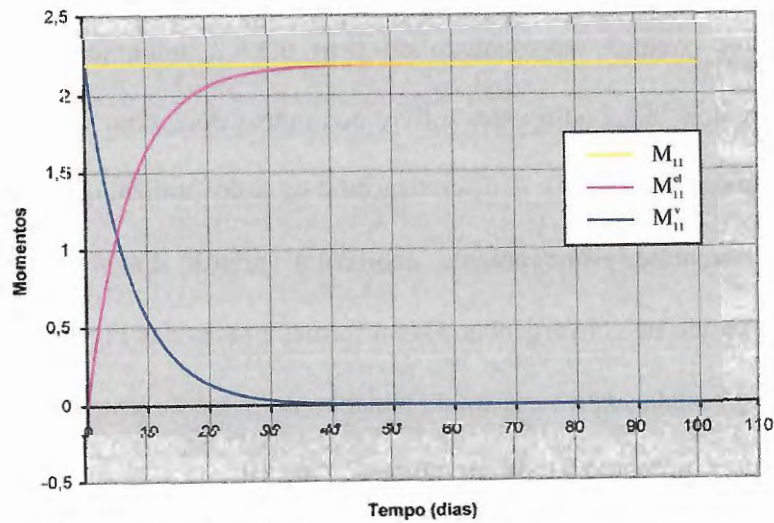
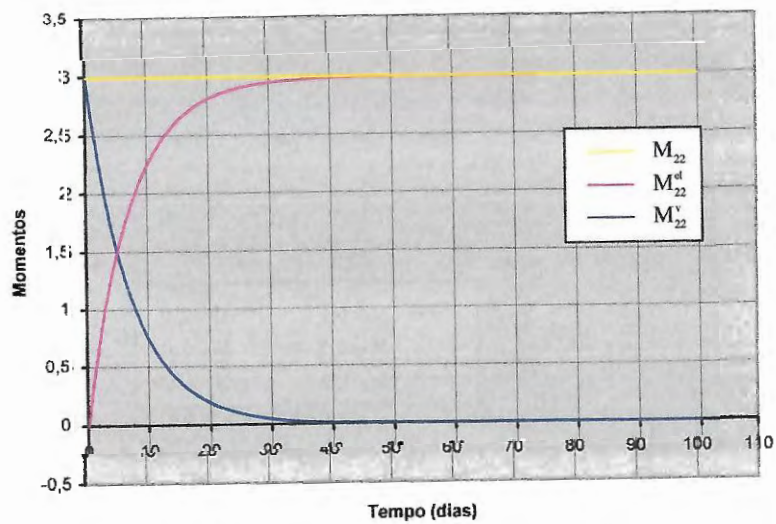


Figura 7.19 – Curvaturas  $w_{11}$  e  $w_{22}$  do ponto A ao longo do tempo



Figuras 7.20 – Momentos  $M_{11}$  do ponto A ao longo do tempo



Figuras 7.21 – Momentos  $M_{22}$  do ponto A ao longo do tempo

Confirma-se, através das Figuras 7.18 e 7.19, a deformação elástica inicial instantânea e, em seguida, a deformação viscoelástica, características do modelo de Boltzmann. Verifica-se, pelas Figuras 7.20 e 7.21, a transferência da tensão presente no amortecedor para a mola, sendo o primeiro representado pelo momento viscoso e o segundo pelo momento elástico para o trecho viscoelástico, e que a soma desses momentos gera o total, que é igual ao momento elástico gerado pela mola responsável pelo comportamento instantâneo. Nota-se, também, que os valores obtidos são praticamente idênticos aos apresentados no item 6.3.5.1.

#### 7.3.4.2 Exemplo 2

Este é o mesmo exemplo apresentado no item 6.3.5.2, onde tem-se uma placa quadrada engastada em dois lados adjacentes e livre nos outros dois, com um carregamento uniformemente distribuído (Figura 7.7). A discretização e os dados utilizados são os mesmos do exemplo anterior, entretanto, primeiramente, ocorrerá à variação dos valores de  $\Delta t$  para que seja realizado um estudo de convergência. Dessa forma, através das Figuras 7.22 e 7.23, respectivamente, pode ser analisada a variação do tamanho do passo de tempo adotado para o cálculo do deslocamento  $w$  no ponto 5 e da curvatura  $w_{,11}$  em 10.

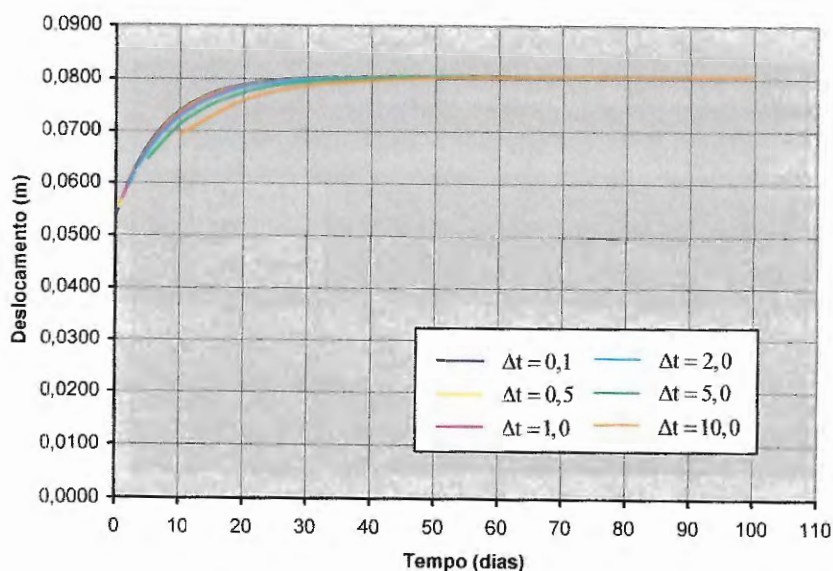


Figura 7.22 – Deslocamento  $w$  no ponto 5 para diversos  $\Delta t$

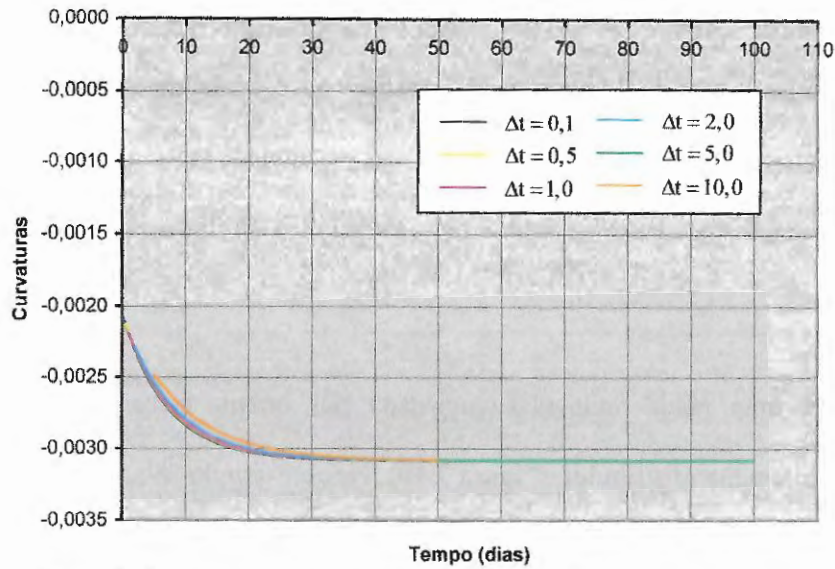


Figura 7.23 – Curvatura  $w_{,11}$  no ponto 10 para diversos  $\Delta t$

Como pode ser observado, os resultados são bastante precisos até mesmo para grandes passos de tempo, porém, nestes casos, perde-se a noção dos valores instantâneos, pois o primeiro  $\Delta t$  é muito distante do tempo  $t = 0$ . Nota-se, também, que os resultados convergem para o mesmo valor final para qualquer  $\Delta t$  adotado.

Agora, é apresentado o comportamento da curvatura  $w_{,11}$  no ponto 7, para um  $\Delta t = 0,1$ , em uma situação mais geral de carregamento, onde a estrutura recebe a carga de 10 kN até os 50 dias, quando esta é removida (Figura 7.24).

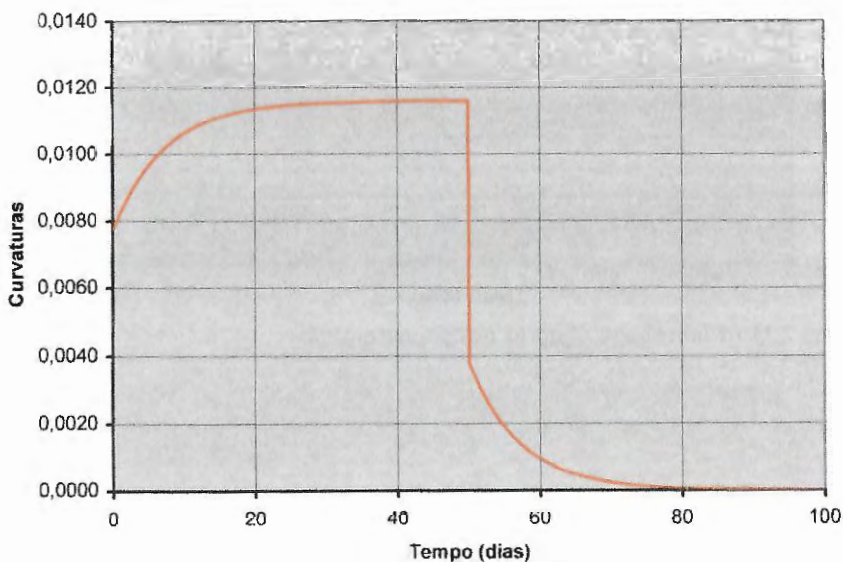


Figura 7.24 – Curvatura  $w_{,11}$  no ponto 7 com descarregamento



Percebe-se que quando a carregamento é retirado, ocorre o retorno instantâneo da curvatura do tempo  $t = 0$  devido ao trecho elástico do modelo reológico e, em seguida, acontece uma regressão viscosa da curvatura até zero, ocasionada pelo trecho viscoelástico.

### 7.3.4.3 Exemplo 3

Considere uma placa retangular engastada nos quatro lados e submetida a um carregamento linearmente distribuído (Figura 7.10). Neste exemplo são utilizados os mesmos dados apresentados no item 6.3.5.3, sendo, primeiramente, realizado um estudo de convergência de alguns resultados no ponto A para três discretizações diferentes, com 12, 24 e 48 elementos, respectivamente, conforme a Figura 7.11. Assim, a curvatura  $w_{,22}$ , para cada discretização, e os momentos  $M_{22}$ , para as discretizações 1 e 3, podem ser analisados através das Figuras 7.25 e 7.26.

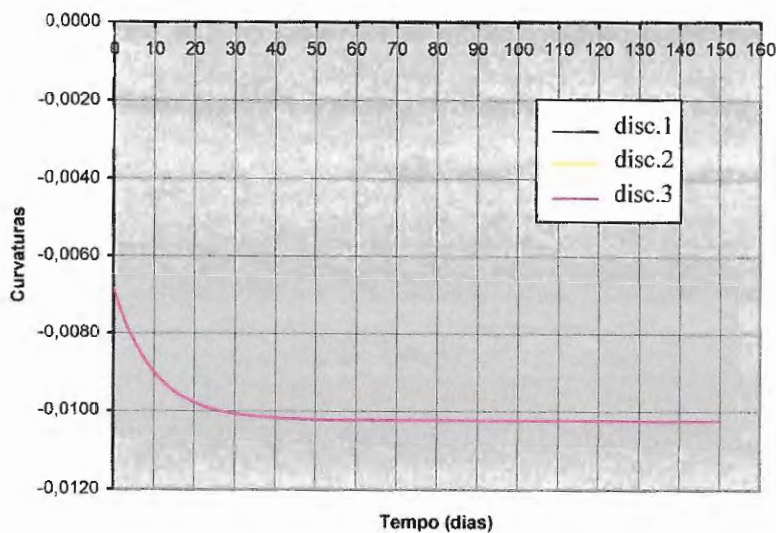


Figura 7.25 – Curvatura  $w_{,22}$  para as três discretizações



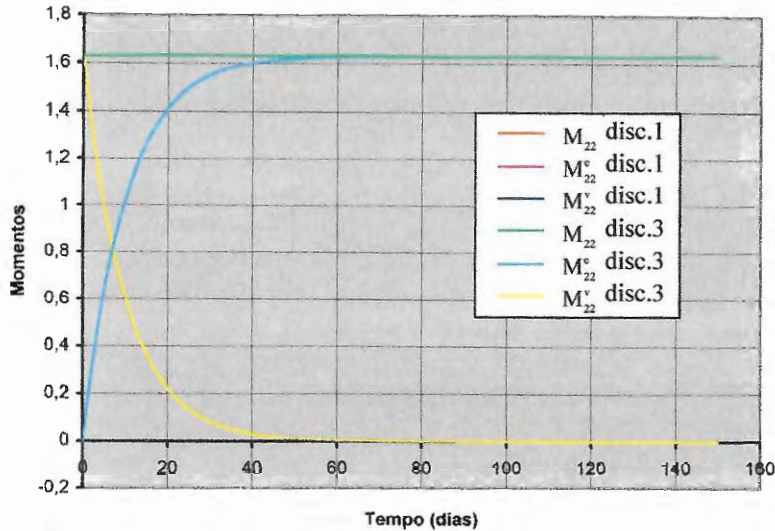


Figura 7.26 – Momentos  $M_{22}$  para as discretizações 1 e 3

Nota-se que os valores obtidos para as três discretizações são praticamente idênticos, pois os resultados estão sobrepostos nas figuras, portanto, verifica-se que mesmo em discretizações pobres, se obtém resultados satisfatórios para esta formulação.

Agora, é realizado um estudo comparativo entre os resultados para a formulação com representação no domínio e a com representação no contorno. Sendo assim, é adotada a discretização 4, utilizada no item 6.3.5.3, para formulação no domínio e a 3 para a formulação no contorno, usada neste item. O deslocamento  $w$ , a curvatura  $w_{,11}$  e os momentos  $M_{22}$  no ponto A, para as duas formulações, podem ser analisados através das Figuras 7.27 a 7.29.

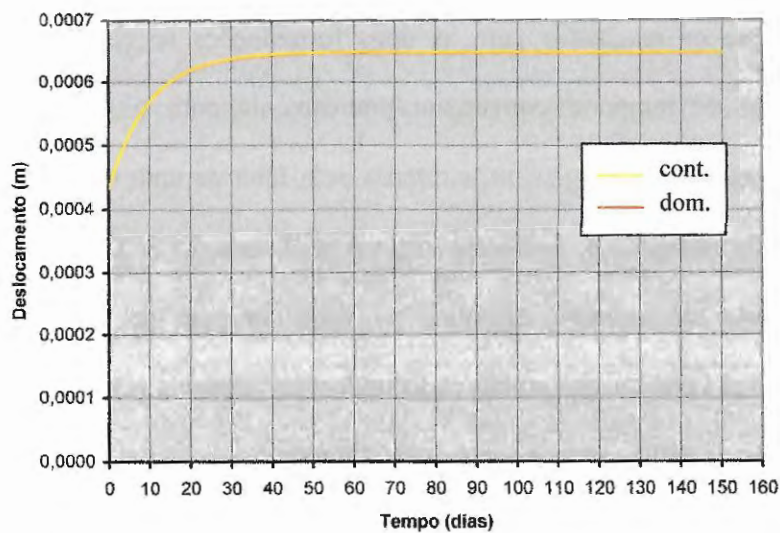


Figura 7.27 - Deslocamento  $w$  para as duas formulações

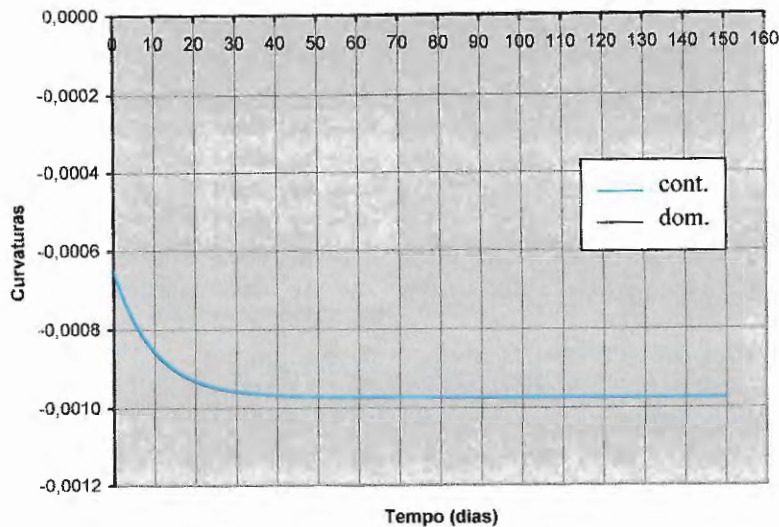


Figura 7.28 - Curvatura  $w_{,11}$  para as duas formulações

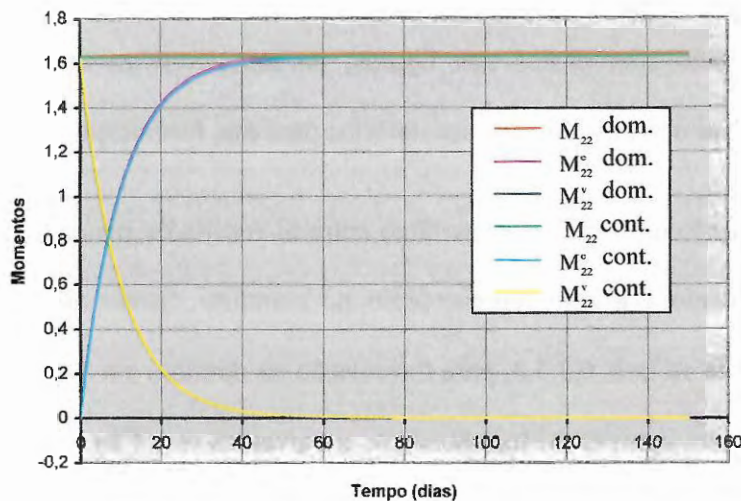


Figura 7.29 - Momentos  $M_{22}$  para as duas formulações

Observa-se que os resultados para as duas formulações se comportam de forma semelhante ao longo do tempo e convergem praticamente para o mesmo valor final, ocorrendo somente pequenas divergências, causadas pela falta de uma maior quantidade de células internas na discretização 4, conforme exposto no item 6.3.5.3. Dessa forma, mesmo não sendo encontrado um exemplo analítico na literatura para se realizar um estudo comparativo, é possível verificar que ambas as formulações fornecem resultados válidos para a análise de placas viscoelásticas pelo modelo de Boltzmann.

## **8. SISTEMA LINEAR SUAVE – MÍNIMOS QUADRADOS**

---

### 8.1 INTRODUÇÃO

Respostas obtidas pelo método dos elementos de contorno podem apresentar oscilações quando existem descontinuidades em certas condições de contorno ou ocorrendo grandes diferenças de módulo de elasticidade ao longo de interfaces de sub-regiões ou em acoplamento MEC/MEF. Para se evitar estas oscilações dos resultados, sem que se aumente excessivamente a discretização, escreve-se um número maior de equações algébricas para o mesmo problema e, em seguida, aplica-se o método dos mínimos quadrados, dessa forma, suavizando o sistema linear. Nesta técnica, também, se obtêm resultados que representam melhor o problema analisado, pois são usadas mais equações algébricas para se encontrar os resultados, sem que seja necessário se aumentar a discretização.

Neste trabalho é adotada a técnica dos mínimos quadrados por sub-região, sendo esta aplicada somente nas formulações para Kelvin-Voigt e Boltzmann com representação no contorno, por apresentarem uma maior eficiência na obtenção dos resultados.

## 8.2 CONCEITUAÇÃO BÁSICA SOBRE O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Considere uma função  $f$  aproximada por uma função  $g$  de uma família  $G$ , existe um erro na aproximação denominado resíduo, expresso por:

$$r(x) = f(x) - g(x) \quad (8.1)$$

Encontrando-se  $\sum_x r(x) = 0$ , provavelmente, se teria uma aproximação correta para  $f$ , entretanto, se existirem erros positivos e negativos com valores iguais ao aplicarmos a equação (8.1), não se terá uma boa aproximação e a condição  $\sum_x r(x) = 0$  estará satisfeita.

Portanto, utilizando somente o valor absoluto dos resíduos e exigindo que  $\sum_x |r(x)| = 0$  seja mínimo, se tem uma ótima aproximação, mas obter o mínimo desta função gera complicações matemáticas. Uma outra condição que possui um tratamento matemático mais simples é exigir que  $\sum_x r^2(x) = 0$  seja mínimo. O método para aproximar uma função  $f$  por uma  $g$ , usando este último critério é denominado método dos mínimos quadrados.

## 8.3 APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Para suavizar o sistema linear com a aplicação dos mínimos quadrados, primeiramente, deve-se escrever um número maior de equações algébricas para um mesmo problema, para isso, adicionam-se mais pontos fontes na discretização. Deste modo, nos elementos escolhidos para possuir nós adicionais são posicionados dois pontos fontes novos,



que estarão localizados, respectivamente, entre o nó inicial e intermediário e entre este e o final, sendo, no caso da existência de nó duplo, posicionados entre este e o intermediário, conforme a Figura 8.1, onde se tem uma placa discretizada em 14 elementos que apresenta descontinuidade das condições de contorno no meio de sua borda superior e inferior, sendo posicionados nós adicionais nos elementos em torno desta descontinuidade.

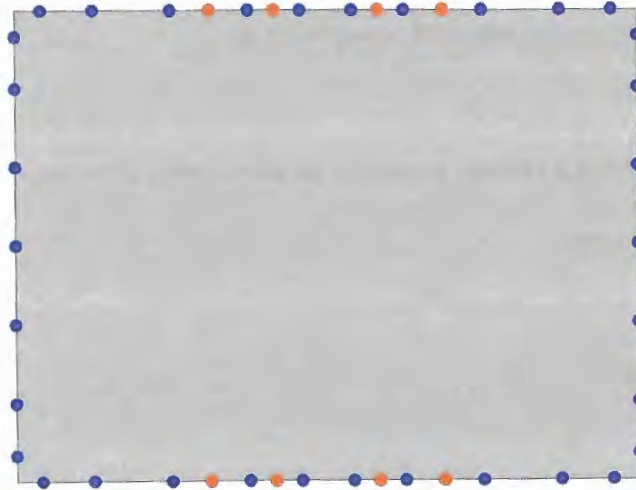


Figura 8.1 – Posicionamento dos nós adicionais em vermelho

Escrevendo-se as equações algébricas para os pontos fontes adicionais, os sistemas de equações para a formulação de Kelvin-Voigt e Boltzmann podem ser expressos da seguinte forma:

$$\bar{H}\bar{U} + \gamma\bar{H}\bar{U} = \bar{G}\bar{P} + \bar{T} \tag{8.2}$$

$$\bar{H}\bar{U} + \gamma\bar{H}\bar{U} = \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}}\bar{G}\bar{P} + \gamma\bar{G}\bar{P} + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}}\bar{T} + \gamma\bar{T} \tag{8.3}$$

onde:

$\bar{H}$  e  $\bar{G}$  são de ordem  $(2N_n + 2N_{ed}) \times 2N_n$ ;

$\bar{T}$  tem ordem  $2N_n + 2N_{ed}$ ;

$\bar{\dot{T}}$  tem ordem  $2N_n + 2N_{ed}$ ;

$\bar{U}$ ,  $\bar{P}$ ,  $\bar{\dot{U}}$  e  $\bar{\dot{P}}$  possuem  $2N_n$  elementos e são os mesmos do problema original;

$N_n$  corresponde ao número de nós do problema;

$N_{ed}$  é o número de elementos que possuem nós adicionais.

Segundo VOLTERRA (1956), a solução de um sistema de equações pelo método dos mínimos quadrados, dado por:

$$[A]_{mm} \{X\}_n = \{B\}_m, \text{ onde } m > n \quad (8.4)$$

Equivale a resolver o seguinte sistema de equações:

$$[A]^T [A] \{X\} = [A]^T \{B\} \quad (8.5)$$

Assim, os sistemas (8.2) e (8.3) podem ser reescritos da seguinte maneira:

$$\bar{H}^T \bar{H} \bar{U} + \gamma \bar{H}^T \bar{H} \bar{\dot{U}} = \bar{H}^T \bar{G} \bar{P} + \bar{H}^T \bar{T} \quad (8.6)$$

$$\bar{H}^T \bar{H} \bar{U} + \gamma \bar{H}^T \bar{H} \bar{\dot{U}} = \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \bar{H}^T \bar{G} \bar{P} + \gamma \bar{H}^T \bar{G} \bar{\dot{P}} + \frac{D_e + D_{ve}}{D_{ve}} \bar{H}^T \bar{T} + \gamma \bar{H}^T \bar{\dot{T}} \quad (8.7)$$

onde:

$\bar{H}^T$  é a transposta de  $\bar{H}$ , sendo de ordem  $2N_n \times (2N_n + 2N_{ed})$ .

Em seguida, aplicando-se as integrações temporais numéricas em (8.6) e (8.7), apresentadas nos itens 7.2.3 e 7.3.3, encontram-se sistemas semelhantes a (8.5).

## 8.4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste item, a técnica para suavização do sistema linear aplicada nas formulações de Kelvin-Voigt e Boltzmann com representação no contorno para placas viscoelásticas é apresentada em alguns exemplos, sendo o valor da variável  $\psi$  dos afastamentos dos pontos fora do domínio, equação (4.29), definida igual a 0,5, para os nós duplos, admite-se o valor de  $\omega$ , expressão (4.30), como sendo igual a 0,1665. Com relação à integração numérica, são utilizados 15 pontos de Gauss e para a constante  $n$ , encontrada nas equações (4.50) e (4.51), é adotado o valor de 20.

### 8.4.1 Exemplo 1

Considere uma placa retangular com dois lados opostos livres e engastada nos outros dois, com um carregamento uniformemente distribuído (Figura 8.2).

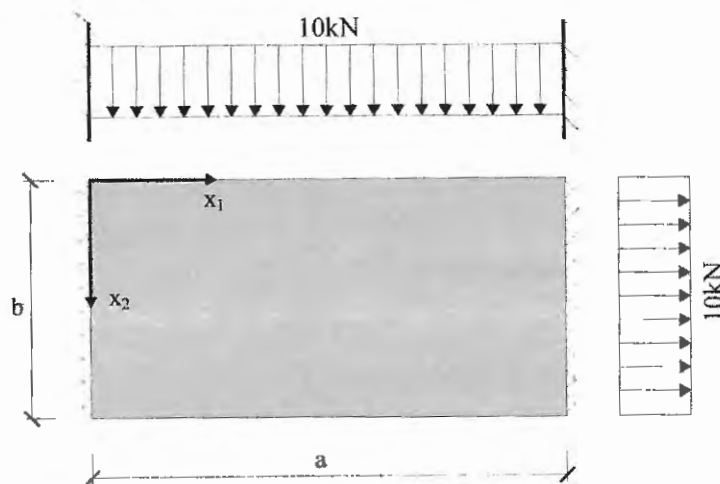


Figura 8.2 - Placa retangular com dois lados opostos livres e engastada nos outros dois

Para este problema, adotam-se os seguintes dados:

- Propriedades físicas (formulação de Kelvin-Voigt)

$$E = 2,5 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$\gamma = 7,14285 \text{ dias}$$

- Propriedades físicas (formulação de Boltzmann)

$$E_e = 1,25 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$E_{ve} = 2,5 \times 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$\gamma = 7,14285 \text{ dias}$$

- Carregamento

$$q = 10 \text{ kN}$$

- Geometria

$$a = 2 \text{ m}$$

$$b = 1 \text{ m}$$

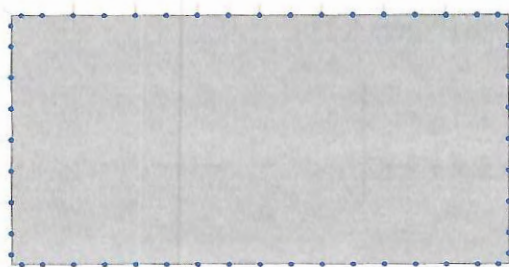
$$t = 0,06$$

- Parâmetros de análise

$$\Delta t = 0,1 \text{ dias}$$

$$\text{interações} = 1000$$

A discretização foi realizada de duas formas diferentes, sendo utilizados 24 elementos e 52 nós na primeira e 192 elementos e 388 nós na segunda, conforme Figura 8.3.



Discretização 1



Discretização 2

Figura 8.3 – Discretizações para a placa retangular

Os deslocamentos na borda inferior da placa para ambos os modelos reológicos, considerando a discretização 1 com a aplicação da técnica dos mínimos quadrados e nós



adicionais em todos os elementos e as discretizações 1 e 2 sem a técnica, estão expostos nas Figuras 8.4 e 8.5.

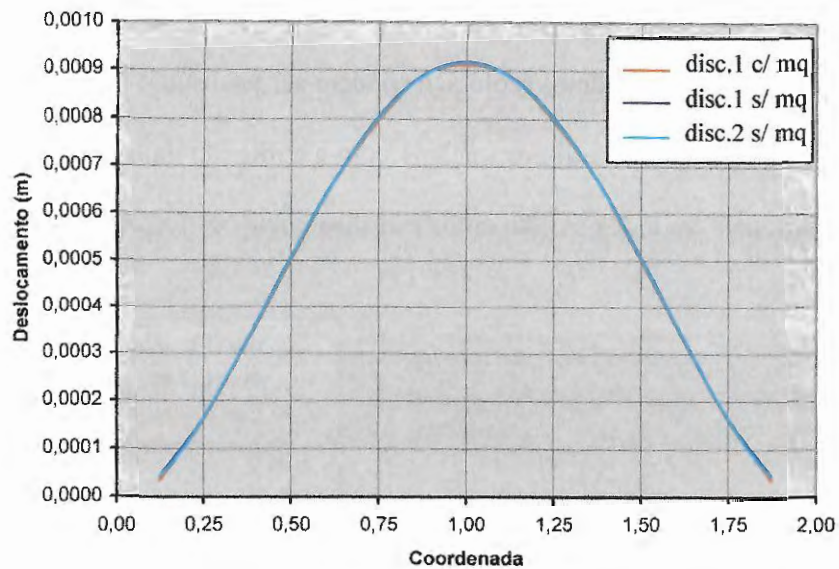


Figura 8.4 – Deslocamentos na borda inferior da placa para o modelo de Kelvin-Voigt

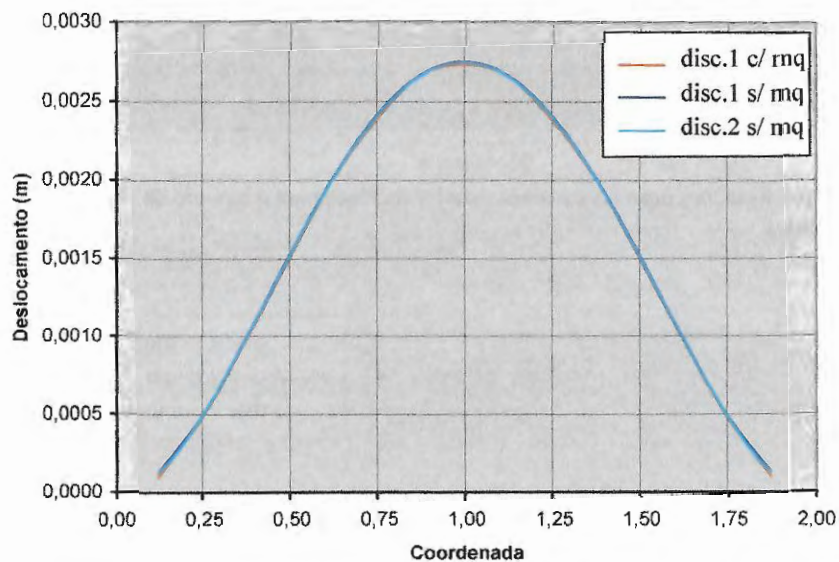


Figura 8.5 – Deslocamentos na borda inferior da placa para o modelo de Boltzmann

Neste caso, verifica-se que a técnica não tem muita influência para os deslocamentos, pois a discretização em 24 elementos já apresenta um resultado satisfatório em comparação aos valores obtidos através da rica discretização em 192 elementos, que possui os resultados mais

corretos. Portanto, a técnica somente proporcionou uma convergência um pouco melhor para os resultados da discretização 1.

As derivadas dos deslocamentos em relação à normal ou as rotações normais da borda inferior da placa para ambos os modelos reológicos podem ser analisadas através das Figuras 8.6 e 8.7, considerando novamente a discretização 1 com a aplicação da técnica dos mínimos quadrados e nós adicionais em todos os elementos e as discretizações 1 e 2 sem a técnica.

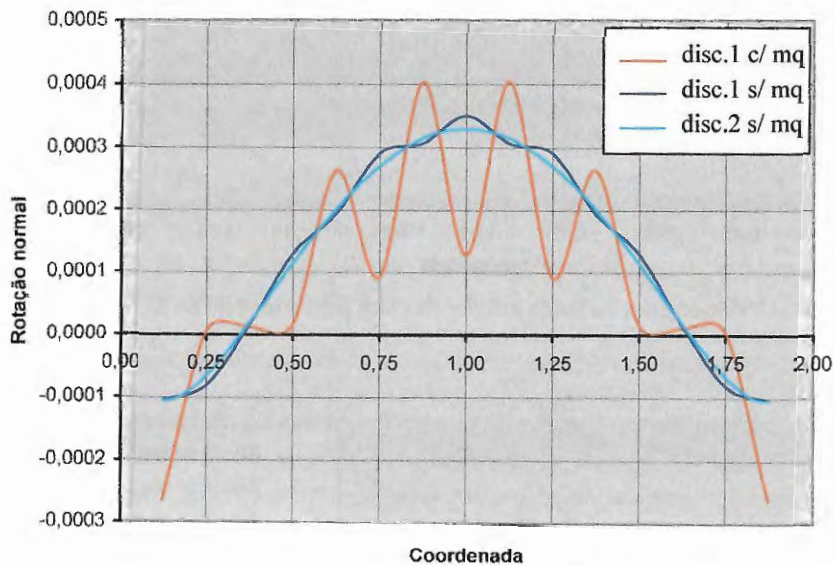


Figura 8.6 – Rotações normais na borda inferior da placa para o modelo de Kelvin-Voigt

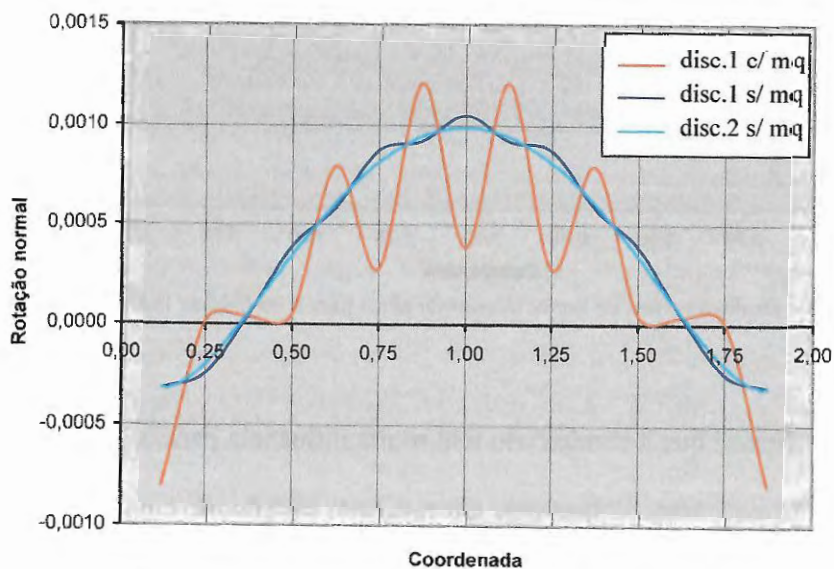


Figura 8.7 – Rotações normais na borda inferior da placa para o modelo de Boltzmann

Observa-se que para as rotações normais, a discretização 1 apresenta grandes oscilações quando é empregada a técnica dos mínimos quadrados, sendo obtidos os melhores resultados através da discretização 2, sem a utilização da técnica.

#### 8.4.2 Exemplo 2

Neste exemplo tem-se uma placa retangular com dois lados parcialmente apoiados, um totalmente apoiado e o outro livre, com um carregamento uniformemente distribuído (Figura 8.8).

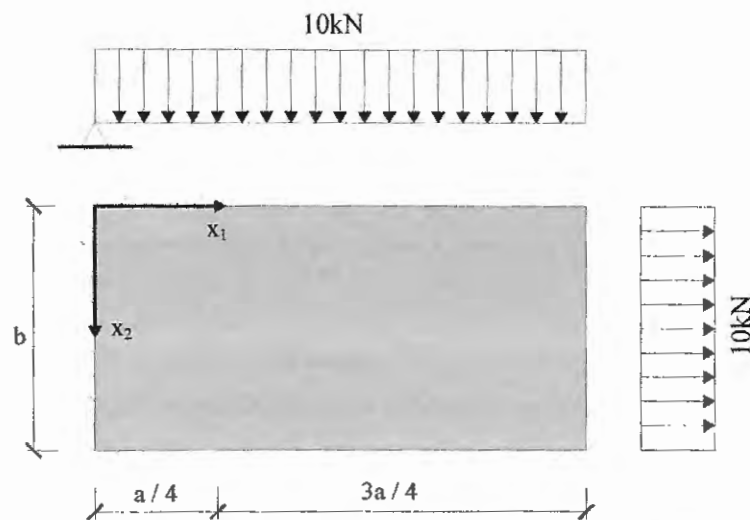


Figura 8.8 - Placa retangular com dois lados parcialmente apoiados, um totalmente apoiado e o outro livre

Os dados são os mesmos utilizados no exemplo anterior e a discretização foi realizada de duas formas diferentes, sendo utilizados 24 elementos e 54 nós na primeira e 192 elementos e 390 nós na segunda, se diferenciando das discretizações do exemplo anterior pela existência de nós duplo nos pontos de descontinuidade das bordas inferior e superior (Figura 8.9).

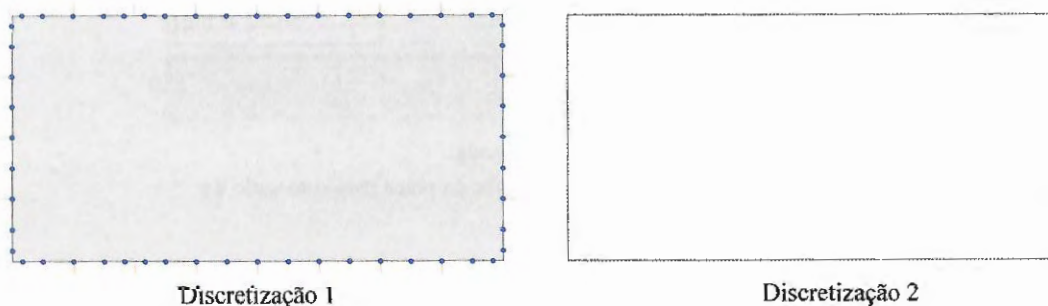


Figura 8.9 – Discretizações para a placa retangular



Os deslocamentos na borda inferior da placa para ambas as formulações, considerando-se as discretizações 1 e 2 com a aplicação da técnica dos mínimos quadrados e nós adicionais em todos os elementos e, em seguida, sem a técnica, podem ser analisados nas Figuras 8.10 e 8.11.

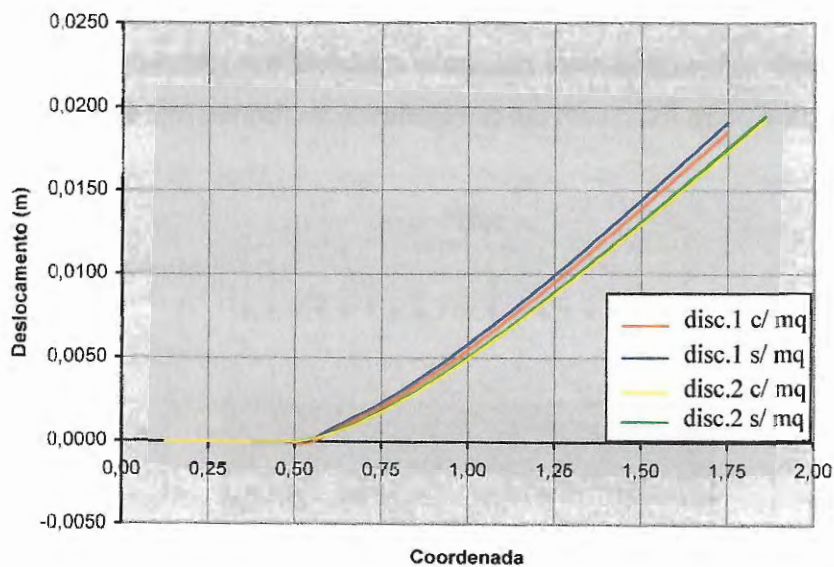


Figura 8.10 – Deslocamentos na borda inferior da placa para o modelo de Kelvin-Voigt

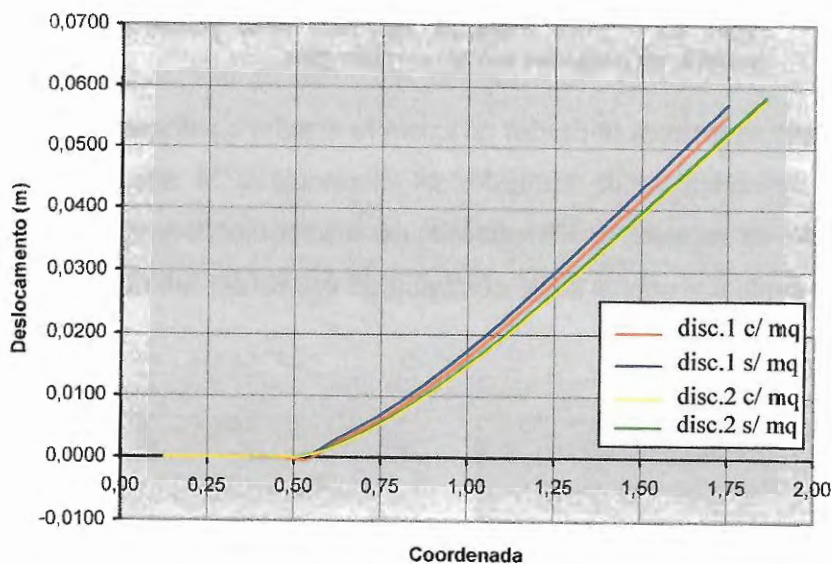


Figura 8.11 – Deslocamentos na borda inferior da placa para o modelo de Boltzmann

Neste exemplo é possível notar pelas figuras a influência dos mínimos quadrados na melhora dos resultados para os deslocamentos, pois se verifica que os valores obtidos para a

discretização 1 com uso da técnica estão mais próximos dos encontrados com a discretização 2. Nota-se, também, que o uso da técnica na discretização 2 não gerou grandes alterações devido aos ótimos resultados obtidos ao se utilizar apenas esta discretização sem nós adicionais, assim sendo, somente proporcionou uma convergência um pouco melhor para os resultados.

As rotações normais na borda inferior da placa para ambos os modelos reológicos podem ser analisadas através das Figuras 8.12 e 8.13, considerando-se as mesmas condições para as discretizações.

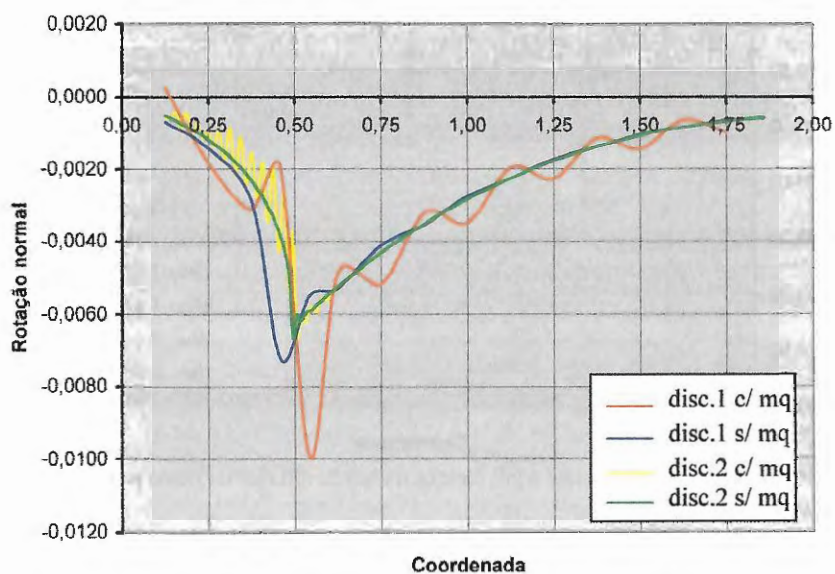


Figura 8.12 – Rotações normais na borda inferior da placa para o modelo de Kelvin-Voigt

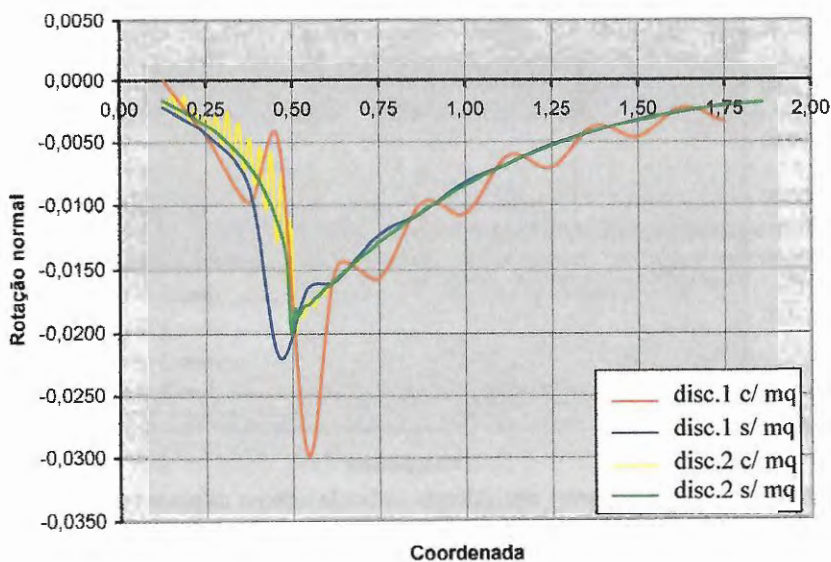


Figura 8.13 – Rotações normais na borda inferior da placa para o modelo de Boltzmann

Verifica-se que a utilização da técnica na discretização 1 e principalmente na 2, geram grandes oscilações nas rotações normais, sendo obtidos os melhores resultados quando não se usa os mínimos quadrados. Os resultados para as forças cortantes equivalentes apresentam o mesmo comportamento com relação ao uso da técnica, conforme pode se observado nas Figuras 8.14 e 8.15.

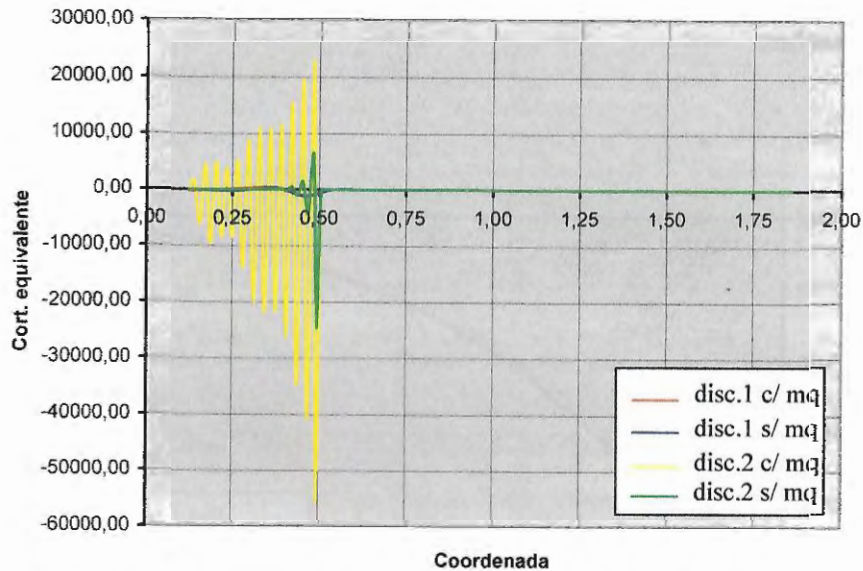


Figura 8.14 – Forças cortantes equivalentes na borda inferior da placa para o modelo de Kelvin-Voigt

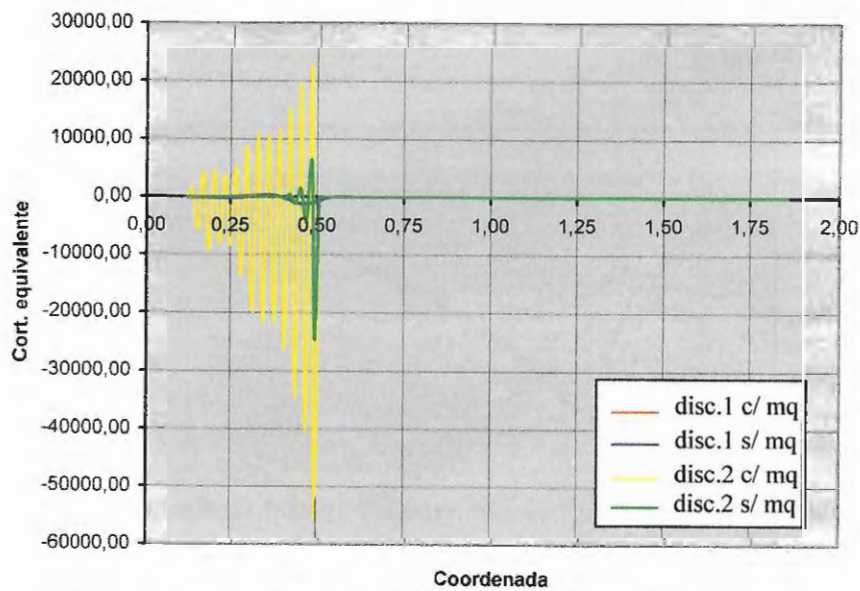


Figura 8.15 – Forças cortantes equivalentes na borda inferior da placa para o modelo de Boltzmann

Portanto, observa-se que a técnica dos mínimos quadrados ou suavização do sistema linear proporciona bons resultados para os deslocamentos, ao contrário do que ocorre com as demais variáveis de contorno, que apresentam grandes oscilações nos resultados quando se utiliza a técnica. Estas oscilações obtidas nas demais variáveis de contorno foram inesperadas e também ocorrem na formulação elástica, pois os valores encontrados na formulação viscoelástica são os das molas presentes nos modelos reológicos.



## 9. CONCLUSÕES

---

As formulações desenvolvidas neste trabalho são de grande importância para a análise de placas viscoelásticas através do Método dos Elementos de Contorno, pois na literatura não se encontra facilmente estudos específicos sobre este assunto, tanto que não foi possível se obter resultados analíticos ou numéricos de outros autores, de modo que fosse possível realizar um estudo comparativo.

Neste trabalho adotou-se a abordagem desenvolvida por MESQUITA (2002) para problemas viscoelásticos, onde os modelos reológicos são introduzidos adequadamente nas equações integrais, assim, evitaram-se os problemas comuns em formulações viscoelásticas clássicas, que são matematicamente complexas, dispendiosas computacionalmente ou simulam somente o modelo de Kelvin-Voigt, desconsiderando o comportamento instantâneo.

As formulações para Kelvin-Voigt e Boltzmann com integrais de domínio apresentaram a grande desvantagem de precisarem da discretização de todo o domínio em células internas, dessa forma, gerando a necessidade de um grande número de dados de entrada. Além disso, se o domínio não possuísse um grande número de células internas, ocorriam distorções nos valores obtidos ao longo do tempo, conseqüentemente, eram gerados muitos pontos internos novos ao longo da borda da placa para se evitar as singularidades,



deste modo, o custo computacional para se encontrar respostas precisas tornava-se muito elevado.

Já as formulações com apenas integrais de contorno foram muito mais eficientes e elegantes, pois permitiram executar análises viscoelásticas discretizando-se apenas o contorno do corpo, evitando o uso de células internas e singularidades, assim, necessitava-se de poucos dados de entrada e o custo computacional diminuiu drasticamente. Os resultados obtidos se apresentaram muito mais estáveis e precisos em relação às formulações anteriores, até mesmo em discretizações muito pobres. Outra vantagem foi a possibilidade de alteração do carregamento ao longo do tempo para a formulação de Boltzmann, deste modo, permitindo verificar situações mais gerais para as placas.

Observou-se que ao se comparar os resultados obtidos através das formulações com representações viscosas no domínio e no contorno para um mesmo problema, os valores se comportam de forma semelhante ao longo do tempo e convergem praticamente para o mesmo resultado final. Dessa forma, verificou-se que estas formulações com abordagens diferentes fornecem resultados similares e válidos para a análise de placas viscoelásticas.

Com relação à técnica de suavização aplicada nas formulações com representações no contorno, verificaram-se bons resultados para os deslocamentos, pois se obteve valores mais precisos e menores oscilações com discretizações mais pobres quando se utilizava a técnica, ao contrário das demais variáveis do contorno que apresentaram um grande acréscimo nas oscilações. Estas oscilações obtidas nas demais variáveis de contorno foram inesperadas e não foi possível encontrar o que as geravam, pois implementou-se esta técnica no final do trabalho e, assim, não houve tempo suficiente para realizar uma análise mais aprofundada dos motivos que ocasionaram este erro. Este problema também ocorrerá nas placas elásticas, pois, como foi exposto neste trabalho, os resultados finais viscoelásticos são iguais aos elásticos encontrados através das molas que compõem os modelos reológicos.

Como propostas de futuros trabalhos temos a implementação das formulações viscoelásticas para placas 3-D, o estudo de placas viscoelásticas com enrijecedores e elaboração de uma técnica eficiente de suavização de sistemas lineares para placas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- ALIABADI, M.H.; BREBBIA, C.A.; RASHED, Y.F. (1997). On the evaluation of the stresses in the BEM for Reissner plate-bending problems. *Appl. Math. Modelling*. v. 21, p. 155-163.
- ALTIERO, N.J.; SIKARSKIE, L. D. (1978). A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form. *Comp. & Struct.*, n. 9, p. 163-168.
- BARCELOS, C.S.; SILVA, L.H.M. (1987). A boundary element formulation for the Mindlin's plate model. In: BREBBIA, C.A.; VENTURINI, W.S., eds. *Boundary element techniques: applications in stress analysis and heat transfer*. Southampton.
- BARES, R. (1972). *Tablas para el calculo de placas y vigas pared*. G. Gili, Barcelona.
- BARRET, K.E.; ELLIS, S. (1988). An exact theory of elastic plates. *Int. J. Solids Struct.* v. 24(9), p. 859-880.
- BEER, G. (2001). *Programming the boundary element method: An introduction for engineers*. John Wiley & Sons, London.
- BETTI, E. (1872). Teoria dell elasticita. *Il Nuovo Cimento*, p. 7-10.
- BÉZINE, G.P. (1978). Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. *Mech. Res. Comm.*, v. 5, n. 4, p. 197-206.
- BÉZINE, G.P.; GAMBY, D.A. (1978). A new integral equation formulation for plate bending problems. In: BREBBIA, C.A., ed. *Recent advances in BEM*. London: Pentech Press, p. 327-342.

- BÉZINE, G.P. (1981). A boundary integral equation method for plate flexure with conditions inside the domain. *Int. J. Num. Meth. Engrg*, n. 17, p. 1647-1657.
- BREBBIA, C.A. (1978). *The boundary element method for engineers*. Pentech Press, London.
- BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C. (1984). *Boundary element techniques - theory and applications in engineering*. Springer-Verlag, Berlin.
- BUI, H.D. (1978). Some remarks about the formulation of three-dimensional thermoelastic problems by integral equations. *Int. J. Solids Structures*, v. 14, p. 935-939.
- CALDERÓN E. T. (1991). *Uma formulação alternativa para o cálculo de placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno*. São Carlos. 191p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CAMP, C.V.; GIPSON, G.S, (1990). Biharmonic analysis of rectilinear plates by the boundary element method. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, n. 30, p. 517-539.
- CERRUTI, V.(1882). Acc. Lincei., *Mem. Fis. Mat.*, Roma.
- CHENG. S. (1979). Elastic theory of plates and a refined theory. *J. Appl. Mech.*, n. 46, p. 644-650.
- CHUEIRI, L.H.M. (1994). *Formulação do método dos elementos de contorno para análise elastoplástica de placas*. São Carlos. 219p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CRUSE, T. A. (1969). Numerical solutions in the three dimensional elastostatics. *Int. J. Solids Structures*, v. 5, p. 1259-1274.
- CRUSE, T.A. (1974). An improved boundary-integral equation method for three dimensional elastic stress analysis. *Computer and Structures*, v. 4, p. 741-754.

- DANSON, D.J. (1979). *Analysis of plate bending problems by direct boundary element method*. Southampton. Dissertation (M.Sc.) - University of Southampton.
- DEBBIH, M.; EL-ZAFRANY, A.; FADHIL, S. (1995). An efficient approach for Boundary Element bending analysis of thin and thick plates. *Computers & Structures*, v. 56, p. 565-576.
- DEBBIH, M.; EL-ZAFRANY, A.; FADHIL, S. (1995). Boundary Element analysis of thick Reissner plates in bending. *Engineering Analysis*, v. 14, p. 159-169.
- EL-ZAFRANY, A. (1998). Boundary Element analysis of thick Reissner plates in bending. *Computational Mechanics Publications*. London.
- FERNANDES, G.R. (1998). *O método dos elementos de contorno aplicado à análise não linear de placas*. São Carlos. 178p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo.
- FORBES, D.J.; ROBINSON, A.R. (1969). Numerical analysis of elastic plates and shallow shells by an integral equation method. *University of Illinois Structural Research Series Report*, n. 346.
- FREDHOLM, I. (1903). Sur une classe d'équations fonctionnelles, *Acta Math.*, v. 27, p. 365-390.
- FLÜGGE, W. (1975). *Viscoelasticity*. Springer-Verlag, New York.
- GREGORY R.D.; WAN F.Y.M. (1985). Edge effect in the stretching of plates. In: LADEVEZE, P., *Local Effects in the Analysis of Structures*, Elsevier Science Publishers, p. 35-54, Amsterdam.
- GUO-SHU, S.; MUKHERJEE, S. (1986). Boundary element method analysis of bending of elastic plates of arbitrary shape with general boundary conditions. *Engineering Analysis*, v. 3, n. 1, p. 36-44.

- HADDAD, Y.M. (1995). *Viscoelasticity of engineering materials*. Chapman & Hall, London.
- HANSEN, E.B. (1976). Numerical Solution of integro-differential and singular integral equations for plate bending problems. *Journal of Elasticity* v. 6, n. 1, p. 39-56.
- HARTLEY, G.A.; ABDE-AKHER, A. (1989). Evaluation of boundary integrals for plate bending. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, v. 28, n. 2, p. 75-93.
- HARTMANN, F.; ZOTEMANTEL, R. (1986). The direct boundary element method in plate bending. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, v. 23, n. 11, p. 2049-2069.
- HENCHY, H. (1947). Uber die berucksichtigung der schubverzerrungen in ebenen platten. *Ing.Arch.*, n. 16.
- HESS, J. L.; SMITH, A., M., O. (1962). *Calculation of non-lifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies*. Report No. E.S. 40622, Douglas Aircraft Co., Long Beach.
- JASWON, M. A.(1963). Integral equation methods in potencial theory I. *Proc. Royal Society*, A275, p. 23-32.
- JASWON M.A.; MAITI, M.; SYMM, G.J. (1967). Numerical biharmonic analysis and some applications. *Int. J. Solids Structures*, n. 3, p. 309-332.
- JASWON, M.A.; SYMM, G.T. (1977). *Itegral equation methods in potential theory and elastostetics*. Academic Press, London.
- KARAM, V. J. (1986). *Aplicação do método dos elementos de contorno à teoria de Reissner para flexão de placas*. Rio de Janeiro. Dissertação (Mestrado) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- KARAM, V.J.; TELLES, J.C.F. (1992). BEM applied to plate bending elastoplastic analysis using Reissner's theory. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 9, n. 4, p. 351-357.

- KARAMI, G. et al. (1992). An eficiente analytical treatment of boundary integrals in direct boundary element analysis of plate bending problems. In: BREBBIA, C.A., DOMINGUEZ, J.; PARIS, F., eds. *Boundary elements XIV*, v. 2.
- KATSIKADELIS, J.T.; ARMENAKAS, A.E. (1989). Analysis of clamped plates on elastic foundation by the boundary integral method. *J. Appl. Mech.*, ASCE, v. 110, n. 7, p. 1085-1104.
- KELLOG. O. D.(1929). *Foundations of potential theory*. Springer, Berlin.
- KIRCHHOFF, G. (1850). Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scleibe. *J. Math.*, n. 40, p. 51-58.
- KROMM, A. (1953). Verallgemeinerte theorie der plattenstatik. *Ing. Arch.*, n. 21.
- KUPRADZE, V. D. (1965). *Potential methods in the theory of elasticity*. Israel Programm for Scientific for Translations, Jerusalem.
- LACHAT, J.C. (1975). *A further development of boundary integral techniques for elastostatics*. Southampton. Thesis (Ph.D.) - University of Southampton.
- LADVEZE, P.; PECASTAINGS, (1988). F. The optimal version of Reissner's theory. *J.Appl. Mech.*, v. 55(2), p. 413-418.
- LAURICELLA, G.(1909). Sur l'intégration de l'équations relative à l'équilibre des plaques élastiques encastées. *Acta Math.*, v. 32, p. 201-256.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.L. (1990). *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press.
- LEVINSON, M. (1980). An accurate simple theory of statics and dynamics of elastic plates. *Mech. Res. Comm.*, v. 7, n. 6, p. 343-350.



- MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. (2001). Na alternative time integration procedure for Boltzmann viscoelasticity: A BEM approach. *Computers & Structures*, v. 79/16, p. 1487-1496.
- MESQUITA, A.D. (2002). *Novas metodologias e formulações para o tratamento de problemas inelásticos com acoplamento progressivo MEC/MEF*. São Carlos. 291p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- MOSHAIOV, A.; VORUS, W.S. (1986). Elasto-plastic plate bending analysis by a boundary element method with initial plastic moments. *Int. J. Solids Structures*, v. 22, n. 11, p. 1213-1229.
- MIKHLIN, S.G. (1957). *Integral equations*. Pergamon Press, London.
- MIKHLIN, S.G. (1962). Singular integral equation. *American Math. Soc. Trans. Series 1*, n. 10, p. 84-197.
- MINDLIN, R.D. (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J. Appl. Mech.*, n. 13, p. 31-38.
- MUNAIAR NETO, J. (1994). *Modelos de comportamentos viscoelástico e viscoplástico na análise de estruturas planas*. São Carlos. 141p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- MUNAIAR NETO, J. (1998). *Um estudo de modelos constitutivos viscoelásticos e elasto-viscoplásticos e do emprego de algoritmos implícitos para a sua integração numérica*. São Carlos. 214p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- MUSKHELISHVILI, N. I. (1953). *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Noordhoff, Gronigen Holand.
- NORDGREN, R.P. (1971). A bound on the error in plates theory. *Quart. Appl. Math.* v. 28, p. 587-595.



- NORDGREN, R.P. (1972). A bound on the error in Reissner's theory plates. *Quart. Appl. Math.* v. 29, p. 551-556.
- OLIVEIRA NETO, L. (1991). *Análise de placas de borda curva pelo método dos elementos de contorno*. São Carlos. 118p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- OLIVEIRA NETO, L. (1998) *Uma formulação do método dos elementos de contorno com três parâmetros nodais em deslocamentos para placas delgadas e suas aplicações em engenharia estrutural*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- PAIVA, J.B. (1987). *Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estrutura*. São Carlos. 195p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- PAIVA, J.B.; VENTURINE, W.S. (1987). Uma formulação alternativa para a resolução de placas via método dos elementos de contorno. In: *CONGRESSO LATINO-AMERICANO E IBÉRICO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA*. Rio de Janeiro, p. 307-314.
- PALERMO JR., L. (2000). *A análise de placas e o Método dos Elementos de Contorno*. Campinas. Tese de Livre Docência – Universidade Estadual de Campinas.
- PANC, V. (1975). *Theories of elastic plates*. International Publishing, Noordhoff.
- PARIS, F.; DE LEON, S. (1986). Simply supported plates by the boundary integral equations. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, v. 23, n. 2, p. 173-191.
- PILTNER, R.; TAYLOR, R.L. (1989). The solution of plate bending problems with aid of a boundary element algorithm based on singular complex functions. In: TANAKA, M.; BREBBIA, C.A.; HONMA, T., eds. *Boundary elements XII*.

- PRAGER, W. (1928). Die druckverteilung na Körpern in ebener Potentialströmung. *Physikalische Zeitschrift*, v. 29, p. 865-869.
- REISSNER, E. (1944). On bending of elastic plates, *J. Math. Physics*, n. 23, p. 184-191.
- REISSNER, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on bending of elastic plates. *J. Appl. Mech*, n. 12.
- REISSNER, E. (1976). On the theory of transverse bending of elastic plates. *Int. J. Solids Struct.*, v. 12 (8-A), p. 545-554.
- REISSNER, E. (1986). On small deflections of shear deformable elastic plates. *Meth. Appl. Mech. Engrg.*, n. 59, p. 227-233.
- REISSNER, E. (1987). On a generalization of some formulas of the theory of moderately thick elastic plates. *Int. J. Solids Struct.*, v. 23(6), p. 711-717.
- REISSNER, E. (1991). On the asymptotic expansions for the sixth-order linear theory problem of transverse bending of orthotropic elastic plates. *Comput. Meth. Appl. Mecn. Engrg.*, v. 85, n. 1, p. 75-88.
- RIBEIRO, G.O. (1989). Aplicação do método dos elementos de contorno no cálculo de placas através da teoria de Reissner. In: *II ENCONTRO NACIONAL DE MECANICA COMPUTACIONAL*. Portugal.
- RIBEIRO, G.O. (1992). *Sobre a formulação do método dos elementos de contorno de placas usando as hipóteses de Reissner*. São Carlos. 266p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo.
- RICCARDELLA, P.C. (1973). *An implementation of the boundary integral technique for planar problems in elasticity and elastoplasticity*. Report No. SM-73- 10, Dept. Mech. Engrg. Carnegie Mellon University, Pittsburg, U.S.A.

- RIZZO, F. (1967). An integral approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 25, n. 1, p. 83-92.
- RYCHTER, Z. (1988). An improved error estimate for Reissner's plate theory. *Int. J. Solids Struct.* v. 24(5), p. 537-544.
- SALERNO, V.L.; GOLDBERG, M.A. (1960). Effect of shear deformations on the bending of rectangular plates. *J. Appl. Mech.* p. 54-58.
- SAPOUNTZAKIS, E.J.; KATSIKADELIS, J.T. (1991). Boundary element solution of plates of variable thickness. *J. Engrg. Mech.*, v. 117, n. 6, p. 1241-1256.
- SILVA, N.A. (1986). *Aplicação do método dos elementos de contorno à análise de placas sobre fundações elásticas*. São Carlos. 162p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SILVA, N.A. (1996). *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno às placas com enrijecedores utilizando a Teoria de Reissner*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SOBOTKA, Z. (1984). *Rheology of materials and engineering structures*. Elsevier Science Publishers, Prague, Czechoslovakia.
- SOMIGLIANA, C. (1886). Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo. *Il Nuovo Cimento*, p. 17-20.
- SOUTHWELL, R.V. (1946). *Relaxation methods in theoretical physics*. Oxford University Press. London.
- STERN, M. (1979). A general boundary integral formulations for the numerical solution of plate bending problems. *Int. J. Sol. Struct.*, v. 15, p. 769-782.
- SYMM, G. T.(1963). Integral equation methods in potencial theory II. *Proc. Royal Society*, A275, p. 33-46.
- TELLES, J.C.F.; BREBBIA, C.A. (1979). On the application of the boundary element method to plasticity. *Appl. Math. Modelling*. n. 3. p. 466-477

- TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. (1959). *Theory of plates and shells*. New York: McGraw-Hill.
- TOTTENHAN, H. (1979). The boundary element method for plates and shells. In: BANERJEE, P. K.; BUTTERFIELD, R. eds. *Developments boundary element methods I*. London: Applied Science Publ., p. 173-205.
- TREFFTZ, E. (1917). Über die Kontraktion kreisförmigen Flüssigkeitsstrahlen. *Zeit. Math. Physik*, v. 64, p. 34-61.
- TURNER, M.J. et al. (1956). Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J.Aero. Science*, v. 23, p. 805-823.
- VABLE, M.; ZHANG, Y. (1992). A boundary element method for plate bending problems. *Int. J. Solids Structures*, v. 29, n. 3, p. 345-361.
- VAN DER WEEËN, F.V. (1982). Application of the direct boundary element method to Reissner's plate model. In: BREBBIA, C.A. ed. *Boundary element methods in engineering*. Berlin, Springer-Verlag.
- VOLTERRA, V. (1956). Opere matematiche. *Acad. Naz. Lincei*, Rome, v. 2, p. 216-275.
- WESTPHAL JR., T.; BARCELLOS, C.S. (1989). Applications of the boundary element method to Reissner's and Mindlin's plate models. In: TANAKA, M.; BREBBIA, C.A.; eds. *Boundary elements XII*.
- WU, B.C.; ALTIERO, N.J. (1979). A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions. *Comput. & Struct.*, n. 10, p. 703-707.
- WUTZOW, W.W. (2003). *Formulação do método dos elementos de contorno para análise de chapas com enrijecedores*. São Carlos. 140p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- XIAO-YAN, L. et al. (1990). Geometrically nonlinear analysis of a Reissner type plate by the boundary element method. *Computers & Structures*, v. 37, n. 6, p. 911-916.