UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Rafael Corrêa Salomão

Termomecânica em compósitos reforçados com fibras e na presença de elementos particulados

São Carlos

2021

Rafael Corrêa Salomão

Termomecânica em compósitos reforçados com fibras e na presença de elementos particulados

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas).

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rogério Carrazedo

São Carlos

2021

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

Salomão, Rafael Corrêa
S173t Termomecânica em compósitos reforçados com fibras e na presença de elementos particulados / Rafael Corrêa Salomão; orientador Rogério Carrazedo. São Carlos, 2021.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2021.

1. sólido compósito. 2. fibra. 3. inclusões. 4. MEF. 5. transferência de calor transiente. 6. termomecânica. I. Título.

Eduardo Graziosi Silva - CRB - 8/8907

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **RAFAEL CORRÊA SALOMÃO.**

Título da tese: "Termomecânica em compósitos reforçados com fibras e na presença de elementos particulados".

Data da defesa: 08/10/2021.

Comissão Julgadora	**Resultado**
Prof. Associado **Rogério Carrazedo** **(Orientador)** (Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)	Aprovado
Prof. Dr. **Ricardo Afonso Angélico** (Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)	Aprovado
Prof. Dr. **Daniel Nelson Maciel** (Universidade Federal do Rio Grande do Norte/UFRN)	Aprovado
Prof. Titular **Humberto Breves Coda** (Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)	Aprovado
Prof. Dr. **Luiz Alkimin de Lacerda** (Universidade Federal do Paraná/UFPR)	Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas):
Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

Dedico este trabalho aos meus amados pais, Egilson e Alba,
e à minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço de todo o coração meus pais, Egilson e Alba, pelo amor, zelo, educação e dedicação despendidos em mim. Sem os quais, não teria conseguido chegar tão longe em minha jornada.

Também agradeço à minha família pelo apoio e carinho transmitidos.

Gostaria de especialmente agradecer ao professor Rogério Carrazedo, pelo apoio, orientação, conhecimento e paciência durante todo este período.

Aos colegas e amigos pelos momentos de descontração, companheirismo e contribuições para a realização deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP pelo conhecimento e experiência transmitidos e ao departamento pela infraestrutura e apoio indispensáveis.

Por fim, o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

SALOMÃO, R. C. **Termomecânica em compósitos reforçados com fibras e na presença de elementos particulados**. 2021. 190p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

Sólidos compósitos são de grande utilidade para a engenharia na criação de materiais com características desejáveis. Além do mais, é de extrema importância a capacidade de avaliar o comportamento adequado destes materiais e, sobretudo, sem incorrer nos diversos problemas e limitações que possam surgir. Apresenta-se neste trabalho nova formulação para a modelagem de problemas termomecânicos de meios reforçados por fibras e elementos particulados, representando inclusões, de forma que suas respectivas malhas de elementos finitos se mantenham independentes. Com o desacoplamento destas malhas, evita-se o respectivo aumento no número de graus de liberdade do sistema e tampouco se faz necessário alçar mão de técnicas de homogeneização das fases. A modelagem do campo mecânico é efetuada por meio do Método dos Elementos Finitos Posicional, que é uma versão Lagrangeana total do método dos elementos finitos baseada em posições. Para o campo térmico, a modelagem é realizada por meio do método dos elementos finitos convencional. Para ambos os campos, faz-se o uso da técnica de embutimento descrita no trabalho para a inclusão das fibras e partículas. É considerado um modelo termomecânico desacoplado, em que há apenas influência do campo térmico sobre o campo mecânico, com a ocorrência de fenômenos de plasticidade e propriedades térmicas dependentes da temperatura. Diversos exemplos ao longo do texto são propostos para a validação e avaliação da formulação. Por meio destes, é possível concluir que a técnica de embutimento é capaz de satisfatoriamente modelar e representar compósitos reforçados por fibras e partículas submetidos à carregamentos termomecânicos. Com o emprego da técnica de embutimento para os campos mecânico e térmico o modelo proposto neste trabalho contribui para o estado da arte na modelagem de compósitos sob regime termomecânico, contemplando-se efeitos de não linearidade geométrica e física, ao possibilitar maior liberdade na análise de compósitos quanto ao número de inclusões, fases, orientação, formato ou arranjo interno.

Palavras-chave: sólido compósito; fibra; inclusões; MEF; transferência de calor transiente; termomecânica.

ABSTRACT

SALOMÃO, R. C. **Thermomechanics in fiber and particle reinforced composites**. 2021. 190p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

Composite solids are very usefull for the creation of materials with desirable characteristics. Aditionally, it's extremely important to be able to model and adequately access these composite materials behavior, especially without the associated problems and limitation, if possible. In this work a new thermomechanical formulation for materials reinforced by fibers and particle elements, representing inclusions, is developed in such manner to promote their finite element mesh independence. Such mesh uncoupling prevents the respective increase on the system's number of degrees of freedom, as well as the use of homogenization technique on it's phases. The mechanical field modeling is done by the Positional Finite Element Method, which is a total Lagrangian finite element method formulation based on nodal coordinates. The thermal field modeling is done by the conventional finite element method. The embedding technique described in this work has been employed on both mechanical and thermal fields to promote the fibers and particles inclusion. The uncoupled thermomechanical model is considered, whereas only the thermal field influences the mechanical field, with the occurrence of plasticity fenomena and thermal dependent material properties. Numerical examples throughout the text are solved for formulation's validation and evaluation. From the obtained results, it's possible to conclude that the embedding technique herein presented is capable to sufficiently model composite materials under thermomechanical loads. With the employment of the embedding technique on the mechanical and thermal fields the proposed model contributes to the thermomechanical composite modelling state of the art, contemplating geometrical and physical non linear effects, by enabling greater analysis flexibility respective to the number, orientation, shape and internal distribution of the composite's phases.

Keywords: composite solids; fiber; inclusions; FEM; transient heat transfer; thermomechanics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Classificação das metodologias para simulação de compósitos reforçados. 31
Figura 2.2 – Discretização total dos elementos do compósito analisado. (a) Modelo geométrico da fibra empregada (b) Distribuição das fibras na amostra (c) Campo de temperatura no modelo de elementos finitos. 32
Figura 2.3 – Modelo do compósito com distribuição de fibras em seu domínio. (a) Modelo e distribuição das fibras de nanotubos de carbono no domínio da amostra (b) Discretização das fibras e domínio em elementos finitos. 33
Figura 2.4 – (a) Delimitação e definição das regiões correspondentes à matriz, inclusões e poros. (b) Malha de elementos finitos resultante para o compósito, junto com as condições de contorno mecânicas. 35
Figura 2.5 – Distribuição das fibras de vidro no interior do compósito e correspondentes seções interiores da malha de elementos finitos resultante. 36
Figura 2.6 – Esquema hierárquico de material composto por feixes de fibras naturais. Neste caso, o material é composto por uma hierarquia de 3 níveis, partindo do Lumen até o nível macroscópico. 41
Figura 2.7 – Procedimento de homogeneização em dois passos. (a) RVE original. (b) Primeiro RVE equivalente com as fibras de Lumen homogeneizadas no feixe. (c) Segundo RVE equivalente com todos os feixes de fibra homogeneizados no sólido. 42
Figura 2.8 – Condições de contorno para análise térmica do elemento volumétrico representativo. 42
Figura 2.9 – Discretização em elementos finitos das fibras de Lumen, num feixe de fibras. (a) Esquema das 106 fibras de lumens. (b) malha de elementos finitos. 43
Figura 2.10–Discretização em elementos finitos na matriz de um feixe de fibras homogeneizado. (a) Esquema do feixe de fibras homogeneizado. (b) malha de elementos finitos. 43
Figura 2.11–Valores normalizados da condutividade efetiva k_e. (a) Variação da condutividade efetiva com a condutividade do sólido que compõe do feixe de fibras k_s. (b) Variação da condutividade efetiva com a condutividade do feixe de fibras homogeneizado k_{fb}. 44
Figura 2.12–Variação do parâmetro k_e em função do volume dos feixes e de lumens num feixe. (a) Variação de k_e com o percentual de volume de feixes de fibras. (b) Variação de k_e com o percentual volumétrico de lumens num feixe de fibras. 44
Figura 2.13–Esquema do elemento volumétrico representativo estudado. 45

Figura 2.14–Campos de temperatura através do RVE. (a) Campo térmico no caso do coeficiente de condução térmico da fibra k^f for maior que o coeficiente da matriz k^m ($k^f > k^m$). (b) Campo térmico para o caso de $k_f < k_m$. . 46

Figura 2.15–Condutividade térmica transversal do compósito. 46

Figura 2.16–Esquema do compósito reforçado com fibras. (a) Compósito formado por um padrão periódico de células unitárias. (b) RUC de um compósito formado por uma fibra curta cilíndrica unidirecional. 47

Figura 2.17–Variação dos coeficientes de condutividade térmica transversal k_T^* e longitudinal k_L^* com a fração volumétrica de fibras. (a) Variação do coeficiente de condução térmico longitudinal (k_L^*) com a variação da fração volumétrica de fibras (b) Variação do coeficiente de condução térmico transversal (k_T^*) com a variação da fração volumétrica de fibras. 48

Figura 2.18–Variação da condutividade térmica normalizada com a proporção de fibras. (a) Variação da condutividade térmica homogênea normalizada do compósito com a variação da fração volumétrica de fibras para $\beta = 4{,}4$ (b) Variação da condutividade térmica homogênea normalizada do compósito com a variação da fração volumétrica de fibras para $\beta = 666$. 48

Figura 2.19–(a)Malha de elementos finitos tetrahédricos para representar a matriz (b)Malha de elementos finitos para as 30 partículas esféricas. 55

Figura 2.20–Definição de um elemento finito de pórtico com seção transversal composta por fibras discretas. 56

Figura 2.21–Condição de contorno sobre a seção transversal. 57

Figura 2.22–Discretização da seção transversal do elemento de pórtico para o problema de condução térmica 2D na seção. (a) 15 fibras. (b) 45 fibras. (c) 72 fibras. 57

Figura 2.23–Distribuição de temperatura na seção 2D. (a)-(c): curvas de isotermas. (d)-(e): temperaturas nas fibras discretas. 58

Figura 2.24–Modelo de partícula embutida num elemento finito poligonal. 59

Figura 2.25–Distribuição de fibras ao longo da seção. Foram analisados 3 padrões: quadrado, hexagonal e aleatório. 60

Figura 2.26–Mapa de distribuição de temperatura para o exemplo numérico. Percebe-se que os resultados praticamente são os mesmos em relação a completa discretização do domínio. 61

Figura 2.27–Amostra com discretização 8x8 com partículas (Alumínio) dispersas em material polimérico (Epoxy). Partículas adjacentes funcionam como caminhos preferenciais para a condução de calor através do sólido. Neste caso, a fração volumétrica é de $\phi = 50\%$. 62

Figura 2.28–Comparação entre valores numéricos e experimentais de condutividade térmica para o compósito $[Al_2O_3 + \text{Polietileno}]$ a 300K em diversas frações volumétricas ϕ. Dados experimentais para comparação são do trabalho de Devpura, Phelan e Prasher (2000). 63
Figura 2.29–Gráficos de comparação entre valores de condutividade térmica numéricos e experimental para material compósito de Epoxy + Alumínio. (a) Comparação entre valores experimental e numéricos para diferentes valores de proporção de filler (ϕ) à 300K. (b)-(d) Comparação entre valores numéricos e experimentais em diferentes proporções volumétricas de filler e temperaturas. 64
Figura 2.30–Definição da interface entre as fases do compósito e identificação dos elementos e nós a serem enriquecidos. 65
Figura 2.31–Processo de subdivisões do domínio num elemento finito para incorporação de mais pontos de integração, proporcionando maior resolução e acurária da resposta. 65
Figura 2.32–(a)Esquema do problema de interesse analisado no trabalho. (b)Malhas de elementos finitos para o problema referência e para o modelo proposto. 66
Figura 4.1 – Representação da função mudança de configuração e dois estados de configuração de um sólido deformável. 81
Figura 4.2 – Mudança de volume de um sólido. 83
Figura 4.3 – Representação da função mudança de configuração e mudança de área. 83
Figura 4.4 – Mapeamento de elemento bidimensional triangular de aproximação cúbica nas configurações inicial e final. 87
Figura 4.5 – Mapeamento de elemento tridimensional tetraédrico de aproximação cúbica nas configurações inicial e final. 88
Figura 4.6 – Representação gráfica do método de Newton-Raphson e procedimento incremental para convergência e obtenção da solução. 92
Figura 4.7 – Diversas posições possíveis das fibras e partículas dentro de um sólido. 95
Figura 4.8 – Posicionamento e distribuição do vetor de força interno de um elemento de fibra imerso numa matriz composta por elementos triangulares. . . . 98
Figura 4.9 – Esquema estrutural para o exemplo numérico da viga engastada não linear geométrica. 108
Figura 4.10–Malha de elementos finitos empregada. 109
Figura 4.11–Gráfico para os resultados de deslocamento normalizado em relação ao nível de carregamento aplicado. 110
Figura 4.12–Deslocamentos horizontal e vertical para a viga não linear. 110
Figura 4.13–Esquema estrutural da chapa sem reforço e malha de elementos finitos empregada. 111

Figura 4.14–Deslocamentos horizontal e vertical para a chapa quadrada de argamassa sem fibras. 112
Figura 4.15–Esquemas estruturais para os três casos de reforço considerados. 112
Figura 4.16–Malha de elementos finitos para os casos de chapa reforçada com fibras. 113
Figura 4.17–Deslocamentos horizontal e vertical para a chapa quadrada de argamassa reforçada apenas com fibras verticais. 114
Figura 4.18–Deslocamentos horizontal e vertical para a chapa quadrada de argamassa reforçada com fibras verticais e horizontais. 114
Figura 4.19–Deslocamentos horizontal e vertical para a chapa quadrada de argamassa reforçada com fibras aleatoriamente distribuídas. 115
Figura 5.1 – Definição do problema de campo térmico. 117
Figura 5.2 – Esquema e malha de elementos finitos para o exemplo da chapa reforçada com 1 fibra horizontal. 123
Figura 5.3 – Campos de temperatura para o exemplo de chapa reforçada com uma fibra horizontal. 124
Figura 5.4 – Valores de temperatura entre os modelos numéricos do Abaqus e do autor. 124
Figura 5.5 – Esquemas do problema de condução térmica para uma peça de concreto com defeito interno. 125
Figura 5.6 – Malhas de elementos finitos para ambos os casos analisados. 126
Figura 5.7 – Resultados de campo de temperatura para ambos os casos e respectiva diferença percentual. 126
Figura 5.8 – Gráfico de temperatura em relação à altura na borda direita extrema do sólido. 127
Figura 5.9 – Esquema do problema de condução de calor em compósito com material de condutividade térmica dependente da temperatura. 128
Figura 5.10–Gráfico da função de condutividade térmica adotada para a região da partícula. 129
Figura 5.11–Malhas de elementos finitos para o problema da análise térmica não linear de chapa com partícula interna. 129
Figura 5.12–Resultados de campo de temperatura para ambos os casos e respectiva diferença nos campos de temperatura. 130
Figura 5.13–Gráfico de temperatura entre os compósitos modelados pela técnica de embutimento e por discretização total. 130
Figura 5.14–Esquemas para o problema térmico de compósito de matriz termicamente não linear reforçada por fibras. 131
Figura 5.15–Malhas de elementos finitos para ambos os casos analisados. 132
Figura 5.16–Campos de temperatura para o caso de chapa sem reforço e materiais termicamente linear e não linear, respectivamente. 132

Figura 5.17–Campos de temperatura para o caso de compósito reforçado por fibras e materiais termicamente linear e não linear, respectivamente. 133
Figura 5.18–Gráficos de temperatura entre os casos de chapa sem e com reforço, de materiais termicamente linear e não linear. 133
Figura 5.19–Gráfico de temperatura entre os compósitos reforçados por fibras, de materiais termicamente linear e não linear. 134
Figura 5.20–Geometria, condições de contorno e resultados do problema de fibra longa imersa. 135
Figura 5.21–Geometria, condições de contorno e resultados para o problema de região interna com condutividade diferente. 136
Figura 5.22–Malhas de elementos finitos empregadas, com suas respectivas nomenclaturas e discretizações. 137
Figura 5.23–Exemplos de arranjos de malhas de elementos finitos que compõem os diversos problemas analisados. 137
Figura 5.24–Mapas de temperatura para os exemplos que envolvem fibra imersa no domínio, para diversas configurações de malhas de elementos finitos. . . 138
Figura 5.25–Mapas de diferença de temperatura em percentual para os exemplos que envolvem fibra imersa no domínio, para diversas configurações de malhas de elementos finitos. 139
Figura 5.26–Mapas de temperatura para os exemplos que envolvem malha de partículas imersa no domínio, para diversas configurações de malhas de elementos finitos. 140
Figura 5.27–Mapas de diferença de temperatura em percentual para os exemplos que envolvem malha de partículas imersa no domínio, para diversas configurações de malhas de elementos finitos. 141
Figura 5.28–Temperatura ao longo da altura x_2 na face direita em $x_1 = 4$. 142
Figura 5.29–Temperatura ao longo do comprimento x_1 na meia altura $x_2 = 2$. . . . 142
Figura 5.30–Esquema do problema analisado, orientação do material e gráfico da função interpoladora. 145
Figura 5.31–Malhas de elementos finitos para a matriz, cada uma das partículas e conjunto total de partículas no domínio, respectivamente. 146
Figura 5.32–Campos de temperatura resultantes e campo de diferenças percentuais. 146
Figura 5.33–Gráfico comparativo entre as curvas de temperatura ao longo da altura x_2 entre o FGM e o compósito modelado por meio da técnica de embutimento. 147
Figura 5.34–Geometria e condições de contorno para o problema de partículas distribuídas no domínio. 148
Figura 5.35–Malhas de elementos finitos da matriz e partículas para os casos de 3, 30, 300 e 3000 partículas dispersas uniformemente no domínio. 149

Figura 5.36–Mapas de temperaturas para cada uma das 4 configurações de partículas. 149
Figura 5.37–Representação de diversos modelos de homogeneização. 150
Figura 5.38–Gráfico de condutividade térmica em função do número de partículas. . 151
Figura 5.39–Comparação entre diversos valores de condutividade térmica obtidos pelo modelo analisado e modelos analíticos da literatura. 151
Figura 6.1 – Esquema termomecânico de uma barra sob processo transiente de condução de calor. 156
Figura 6.2 – Malha de elementos finitos empregada para a viga. 157
Figura 6.3 – Valores de deslocamento na direção x. Escala unitária (1,00) para a representação da deformada da estrutura. 157
Figura 6.4 – Valores de deslocamento na direção y. Escala unitária (1,00) para a representação da deformada da estrutura. 158
Figura 6.5 – Valores de temperatura e deslocamento, respectivamente, para três instantes de tempo e comparação com os valores reportados por Copetti (2002). 158
Figura 6.6 – Curvas de *tensão vs deformação* para o material em duas temperaturas diferentes. 159
Figura 6.7 – Histórico de tensão e temperatura aplicados e resultados para o caso 2. 160
Figura 6.8 – Histórico de tensão e temperatura aplicados e resultados para o caso 3. 161
Figura 6.9 – Histórico de tensão e temperatura aplicados e resultados para o caso 4. 161
Figura 6.10–Esquema para análise de compósito reforçado por partícula com dimensões e orientação dos eixos. 162
Figura 6.11–Malhas de elementos finitos para a análise do compósito reforçado por partículas. 163
Figura 6.12–Campos de deslocamento na direção Z. 164
Figura 6.13–Campos de deslocamento em Z e respectiva diferença. 164
Figura 6.14–Valores de deslocamento em Z ao longo do tempo, ou seja, à medida que a temperatura do sólido vai decaindo de 200°C até 20°C. 165
Figura 6.15–Gráficos de deslocamento em Z e respectivos valores de quartis para cada problema analisado. 165
Figura 6.16–Esquema do problema da viga de material compósito sujeita a solicitações termomecânicas. 167
Figura 6.17–Dimensões de cada uma das partículas que compõem a fase das inclusões do compósito 167
Figura 6.18–Malha de elementos finitos para a matriz do compósito e das partículas embutidas. 168
Figura 6.19–Gráficos das funções que definem as propriedades do material da matriz do compósito dependentes da temperatura. 169

Figura 6.20–Gráfico da função que definite a propriedade de condutividade térmica do material da fase das partículas dependente da temperatura. 170
Figura 6.21–Valores de carregamentos termomecânicos impostos na estrutura ao longo do tempo. 171
Figura 6.22–Campos de temperatura ao longo da viga em diversos instantes de tempo. 171
Figura 6.23–Campo de deslocamento em y para diversos instantes de tempo. 172
Figura 6.24–Deformadas da viga em diversos instantes de tempo. 173
Figura 6.25–Gráfico de deslocamento em y para o ponto f ao longo do tempo. . . . 173
Figura 6.26–Gráfico de temperatura para o ponto f ao longo do tempo. 174

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Custo computacional em relação ao teor de incorporação de fibras no compósito polimérico. 34
Tabela 2 – Comparação do custo computacional entre os elementos de fibra e simulação equivalente no software ABAQUS. 58
Tabela 3 – Tabela de difusividade térmica e tempo de relaxação para materiais não homogêneos e biológicos segundo diversos autores. 75
Tabela 4 – Propriedades do material e carregamento adotados. 109
Tabela 5 – Resultados analítico e numérico para a viga de Mattiasson. 109
Tabela 6 – Propriedades do material da matriz. 111
Tabela 7 – Propriedades do material das fibras. Módulo de elasticidade $\mathbb{E}_f$ e área da seção transversal A_f. 113
Tabela 8 – Valores de deslocamento para os diversos casos de chapa reforçada com fibra analisados. 115
Tabela 9 – Propriedades térmicas e física dos materiais da matriz e fibra. 123
Tabela 10 – Dados de propriedades térmicas e valores para as condições de contorno do problema. 125
Tabela 11 – Valores de condutividade térmica para as fases do compósito. 128
Tabela 12 – Valores dos coeficientes empregados na equação que descreve a condutividade térmica não linear dependente da temperatura. 128
Tabela 13 – Propriedades térmicas do material das fibras. Condutividade térmica k_{Tf} e área da seção transversal A_f. 132
Tabela 14 – Valores de condutividade térmica e de área adotados para o problema de fibra longa imersa no domínio. 135
Tabela 15 – Valores de condutividade térmica para a matriz, região interna e elementos de inclusão. 136
Tabela 16 – Valores de condutividade térmica para as fases do FGM, inclusões e número de divisões efetuadas. 145
Tabela 17 – Valores de condutividade térmica para a matriz, partículas e inclusões e fração volumétrica. 148
Tabela 18 – Propriedades físicas adimensionais do material para o exemplo da viga termomecânica bi-apoiada. 156
Tabela 19 – Parâmetros adimensionais do integrador temporal utilizados neste exemplo. 157
Tabela 20 – Valores adotados para definição do material modelado. 159
Tabela 21 – Dados do material que constitui a matrix metálica do compósito. . . . 163
Tabela 22 – Dados do material que constitui a partícula interna. 163

Tabela 23 – Valores dos quartis para os campos de deslocamento, junto com respectivas diferenças relativas percentuais. 166
Tabela 24 – Valores das coordenadas dos pontos de referência para inserção das partículas na matriz do compósito. 168
Tabela 25 – Valores dos parâmetros mecânicos e térmicos utilizados para o material da matriz do compósito. 169
Tabela 26 – Valores dos parâmetros mecânicos e térmicos para o material da fase das partículas. 169
Tabela 27 – Valores dos parâmetros para a análise termoplástica. 170

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 25
1.1 Justificativa 27
1.2 Metodologia 28
1.3 Objetivos 28
1.4 Organização do trabalho 29

2 ESTADO DA ARTE DA SIMULAÇÃO TÉRMICA E TERMOMECÂNICA DE MATERIAIS COMPÓSITOS 31
2.1 Modelos por discretização 31
2.2 Modelos por homogeneização 36
2.3 Modelos por embutimento 56
2.4 Comentários quanto aos modelos térmicos para materiais compósitos 66

3 TERMODINÂMICA 69
3.1 Primeira lei 69
3.2 Segunda lei 70
3.3 Lei de Fourier 70
3.4 Ondas de calor não Fourier 71
3.4.1 Outros modelos propostos 71
3.4.2 Comentários finais quanto aos modelos de onda de calor 74
3.5 Equação governante para condução de calor transiente 76
3.6 Termomecânica desacoplada 77

4 CAMPO MECÂNICO 81
4.1 Função mudança de configuração 81
4.1.1 Mudança ou variação de volume 82
4.1.2 Mudança de área 83
4.2 Tensor de deformação de Green-Lagrange 84
4.3 Princípio da energia mecânica estacionária 85
4.4 Lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff 86
4.5 Método dos elementos finitos posicional 87
4.5.1 Elementos finitos empregados 87
4.5.2 Princípio da estacionariedade e o MEFP 89
4.5.3 Método de Newton-Raphson 91
4.5.4 Vetor de força interna 92
4.5.5 Hessiana 93

4.6 Incorporação de elementos heterogêneos . . . 94
4.6.1 Método de Newton-Raphson para obtenção de ξ_j . . . 102
4.6.2 Fibras . . . 103
4.6.3 Partículas . . . 103
4.7 Plasticidade . . . 104
4.7.1 Plasticidade independente de taxa . . . 105
4.7.2 Critério de plasticidade . . . 106
4.7.3 Algoritmo de retorno radial para o critério de Von Mises associativo . . . 107
4.8 Exemplos numéricos . . . 108
4.8.1 Viga engastada de Mattiasson . . . 108
4.8.2 Chapa reforçada com fibras . . . 111

5 CAMPO TÉRMICO . . . 117
5.1 Princípio do trabalho virtual . . . 117
5.2 Método dos elementos finitos . . . 118
5.2.1 Integração temporal . . . 119
5.2.2 Elementos finitos empregados . . . 119
5.3 Incorporação de elementos heterogêneos . . . 119
5.3.1 Fibras . . . 122
5.3.2 Partículas . . . 122
5.4 Exemplos numéricos . . . 123
5.4.1 Chapa reforçada com 1 fibra horizontal . . . 123
5.4.2 Defeito interno em bloco de concreto . . . 125
5.4.3 Análise térmica não linear de chapa reforçada com partícula . . . 127
5.4.4 Análise térmica não linear de chapa reforçada com fibras . . . 131
5.4.5 Estudo de convergência e acurácia para a técnica de embutimento . . . 134
5.4.6 Modelagem de materiais de gradação funcional . . . 144
5.4.7 Cálculo de coeficiente de condutividade térmico equivalente . . . 147

6 CAMPO TERMOMECÂNICO . . . 153
6.1 Exemplos numéricos . . . 156
6.1.1 Expansão térmica transiente de barra termoelástica . . . 156
6.1.2 Plasticidade sujeita à variação de temperatura . . . 159
6.1.3 Análise de material compósito de comportamento termoplástico . . . 162
6.1.4 Viga de material compósito sob carregamento termomecânico . . . 167

7 CONCLUSÃO E SUGESTÕES . . . 175
7.1 Sugestões para trabalhos futuros . . . 176

REFERÊNCIAS . . . 179

1 INTRODUÇÃO

Compósitos são materiais compostos por ao menos duas fases distintas, em suas propriedades físicas e/ou químicas, associadas de forma a gerar um novo material com propriedades de interesse aprimoradas. São amplamente empregados na confecção de elementos primários e secundários de estruturas aeroespaciais, marinhas, automotivas, civis, além de equipamentos esportivos. Seja buscando aprimorar a relação inércia/peso, como nos materiais laminados e sanduíche, ou para atender pré-requisitos de desempenho estrutural, como no caso do concreto armado, a associação de fases distintas estabelece novas aplicações que se traduzem em ganhos econômicos.

A ampla aplicabilidade de compósitos e sua importância econômica se traduz em grande número de estudos. Por exemplo, ressaltando brevemente pesquisas recentes, Linganiso e Anandjiwala (2016) discutem a utilização de materiais compósitos laminados reforçados por fibras na engenharia aeroespacial. Williams e Starke (2003) realizam uma revisão dos materiais utilizados na construção aeronáutica, dentre eles ligas metálicas, plásticos reforçados por fibras de carbono, laminados metálicos reforçados por fibras, compósitos reforçados com fibras de vidro, dentre outros. Já Zhang, Chen e Hu (2018) fazem um apanhado dos avanços tecnológicos nos últimos anos para materiais empregados na indústria aeronáutica, dentre eles compósitos e laminados, levando-se em conta os desafios a serem superados. Em Giridharan e Rakham (2018) é realizada uma análise experimental de laminados metálicos reforçados com fibras. O trabalho de Al-Oqla e Sapuan (2014) foca no uso de materiais poliméricos reforçados com fibras naturais na indústria automotiva. Marsh (2003) também discute o uso de materiais compósitos ecologicamente amigáveis, como polímeros reforçados por fibras vegetais, na indústria automotiva e sua crescente tendência de utilização. No trabalho de Tran, Nguyen e Lau (2018) é feita uma análise da performance ao fogo de compósitos poliméricos para infraestrutura marítima. Li *et al.* (2019) promovem a melhoria das propriedades térmicas de compósitos poliméricos com a adição de enchimento metálico (*filler*).

A complexidade para determinar o comportamento global e local de materiais compósitos tem levado ao desenvolvimento de diversas formulações numéricas, empregando modelos equivalentes com propriedades homogeneizadas para um sólido (LI; MA; CUI, 2016; MATINE *et al.*, 2013; SEYEDEIN *et al.*, 2016; WANG; XIAO; QIN, 2017; DONDERO *et al.*, 2011; MATINE *et al.*, 2015; VIEIRA; MARQUES, 2019; AHMADI, 2017; GOU *et al.*, 2015; PENNEC *et al.*, 2013; RAMOS; SANTOS; ROSSI, 2017); modelos que fazem uso de técnicas de embutimento (SHE; WANG; LI, 2019; CHATTERJEE *et al.*, 2019; JEFFERS; SOTELINO, 2012) e modelos totalmente discretos (NAGY; NEHME; SZAGRI, 2015; LI *et al.*, 2012) cada qual com objetivos e limitações distintas.

Em termos de comportamento mecânico e térmico, este trabalho propõe a modelagem numérica do comportamento elastoplástico de materiais compósitos reforçados com fibras ou inclusões (elementos de reforço particulados) dispersas na matriz do compósito e em situações não isotérmicas.

A resposta termodinâmica é determinada por formulação baseada na energia livre de Helmholtz e nas primeira e segunda leis da termodinâmica, relacionando as variáveis internas do compósito, como a entropia, a distribuição da temperatura e o fluxo de calor, utilizando o método dos elementos finitos para resolução do sistema de equações diferenciais parciais (CARRAZEDO, 2009; CARRAZEDO; CODA, 2010). O tópico de transferência de calor em meios reforçados com fibras e partículas é estudado com frequência atualmente, vide Chen *et al.* (2002), Briffaut, Benboudjema e D'Aloia (2016), Dean *et al.* (2015), dentre outros. Isto sugere um forte interesse no estudo deste tipo de compósito.

Quanto à resposta mecânica, é empregada uma formulação não linear geométrica com descrição Lagrangeana total com cinemática exata. Nesta formulação é escrito um funcional de energia a partir de uma função mudança de configuração que relaciona as configurações inicial e atual. Por fim, o método de Newton-Raphson é utilizado para solucionar o sistema de equações não lineares resultantes da minimização deste funcional de energia.

Elencando alguns trabalhos que fizeram uso do método dos elementos finitos posicional, em Greco e Coda (2004) é feita análise não linear geométrica estática de estruturas reticuladas planas. Já em Greco e Coda (2006) é realizada análise não linear dinâmica de estruturas reticuladas planas. Marques (2006) desenvolve formulação não linear geométrica para sólidos bidimensionais, com o objetivo de estudar comportamento dinâmico com impacto. Em Maciel (2008) é feita análise não linear geométrica de problemas envolvendo pórticos planos e sólidos tridimensionais. Coda (2009) apresenta formulação para elementos de pórtico 3D com seção arbitrária. Em Coda (2015) é mostrada formulação de cascas laminadas para os casos estático e dinâmico. Paccola, Piedade Neto e Coda (2015) fazem análise em meso e macroescala de materiais compósitos reforçados por fibras propensas a deslizamento. Por fim, em Paccola e Coda (2016) é desenvolvida formulação para materiais compósitos reforçados por elementos particulados com aderência total.

As fibras e partículas são incluídas ao se escrever as suas posições nodais em função das posições dos nós da matriz, na qual as fibras e partículas estão imersas. Tal abordagem garante a devida inserção da energia interna destes elementos sem a introdução de novos graus de liberdade. Neste caso, é considerada perfeita aderência entre as fibras e elementos particulados com a matriz, não possibilitando escorregamento (VANALLI; PACCOLA; CODA, 2008; SAMPAIO, 2014; MOURA, 2015). O mesmo procedimento é realizado para a inclusão destes elementos no problema térmico, guardadas as devidas diferenças.

A representação de compósitos reforçados com fibras e elementos particulados, com a devida discretização e desacoplamento de suas respectivas malhas por meio da técnica de embutimento proposta, em situações não isotérmicas e contemplando processos fisicamente e geometricamente não lineares, é de suma importância e favorece uma vasta gama de análises envolvendo meios reforçados e transferência de calor.

1.1 Justificativa

Os materiais compósitos vêm ganhando destaque pelas suas vantagens em diversas áreas da engenharia, em especial devido às relações inércia/peso e rigidez/peso. Com seu emprego cada vez mais usual em elementos estruturais primários, deve-se aprofundar o estudo para situações não isotérmicas e em especial para estruturas reforçadas com grande quantidade de fibras e elementos particulados. De forma geral os modelos mais correntes consideram as propriedades de tais compósitos de forma homogeneizada, o que pode acarretar em valores de erro significativos, em especial no caso da existência de efeitos localizados. A efetiva discretização das fases do compósito, mas sem incremento no número de graus de liberdade devido ao desacoplamento de suas malhas é, sem dúvida, solução eficaz para devida modelagem do comportamento termoplástico do compósito.

Tal modelo numérico seria capaz de analisar um grande leque de problemas de engenharia, no que concerne materiais compósitos em regimes termodinâmicos. A característica principal de permitir o desacoplamento e independência das malhas de elementos finitos que descrevem as fases proporciona uma maior abrangência de aplicação do modelo em comparação com os métodos tradicionais, pois evita-se o aumento significativo do número de graus de liberdade do problema final e permite uma maior liberdade e simplificação no processo de criação das malhas de elementos finitos das fases. Tais aplicações podem ser nas áreas de otimização, confiabilidade, problemas multifísicos e acoplamento com outros modelos.

Entende-se que este trabalho contribua de forma relevante ao estado da arte da modelagem termomecânica de materiais compósitos com o desenvolvimento e emprego da técnica de embutimento para os campos térmico e termomecânico, sem a necessidade de compatibilização de graus de liberdade ou fazer uso de técnicas de homogeneização. O modelo descrito neste trabalho também é capaz de modelar situações de não linearidade geométrica e física das fases, na forma de plasticidade e condutividade térmica dependente da temperatura.

1.2 Metodologia

O problema termomecânico é desenvolvido sob enfoque da teoria clássica da termomecânica desacoplada, de forma a determinar a resposta de um corpo submetido a esforços térmicos e mecânicos. Esta abordagem é comumente empregada visto sua relativa facilidade de aplicação, já que se assume que o campo de temperatura não é influenciado pelo campo mecânico. Ainda assim uma enorme gama de problemas de engenharia são enquadrados neste regime.

O modelo térmico é implementado seguindo a lei de Fourier clássica, dado o fato que as situações em que são verificadas ondas de calor não Fourier aparentam ser muito específicas e não são do interesse deste trabalho. O campo térmico empregado é capaz de modelar materiais com parâmetros de condutividade térmica não lineares dependentes da temperatura sob regimes transientes. O modelo mecânico implementado segue uma formulação total Lagrangeana baseada em posições nodais, chamada de Método dos Elementos Finitos Posicional, que garante a representação de problemas não lineares geométricos. É considerada não linearidade do material na forma de plasticidade, por meio do modelo de Von Mises associativo, comumente empregado para modelar fenômenos de plasticidade em materiais metálicos. Também é assumido um regime de pequenas deformações e portanto a decomposição aditiva de Green Naghdi passa a ser válida para a consideração das deformações plásticas.

O modelo numérico é desenvolvido na linguagem de programação C++, em ambiente Linux (distribuição Ubuntu versão 20.04), compilador g++ 9.3.0 e biblioteca numérica Eigen 3.3.9 (GUENNEBAUD; JACOB, 2010). O programa para a geração da malha de elementos finitos é o Gmsh 4.4 (GEUZAINE; REMACLE, 2009) e o visualizador utilizado é o Paraview 5.9.0 (AHRENS; GEVECI; LAW, 2005).

1.3 Objetivos

- Estudar os processos de transferência de calor em meios reforçados por fibras e na presença de elementos particulados.
- Desenvolver formulação termodinamicamente consistente para transferência de calor em compósitos, empregando-se a técnica de embutimento proposta.
- Desenvolver formulação não linear geométrica e física, à luz da termomecânica desacoplada, para materiais compósitos termoelastoplásticos sujeitos a variação de suas propriedades materiais em condições não isotérmicas.
- Implementar a formulação em modelo numérico baseado no Método dos Elementos Finitos (para o problema térmico) e Método dos Elementos Finitos Posicional (para o problema mecânico).

1.4 Organização do trabalho

O trabalho segue a ordem definida a seguir:

No capítulo 1 é feita a introdução do tema do trabalho e delimitação, justificativa, metodologia, objetivos e a organização do mesmo.

No capítulo 2 é descrita a revisão bibliográfica realizada acerca do estado da arte na modelagem térmica e termomecânica de materiais compósitos.

No capítulo 3 é realizada uma discussão sobre a termodinâmica e em especial sobre a lei de Fourier e um apanhado da bibliografia sobre ondas de calor não Fourier. Por fim é feita a definição do regime de termodinâmica desacoplada que norteia o modelo implementado.

No capítulo 4 é descrita a formulação do campo mecânico empregado neste trabalho.

No capítulo 5 é então descrita a formulação do campo térmico implementado no modelo do trabalho.

No capítulo 6 é feita uma descrição mais detalhada sobre o campo termomecânico, a forma de consideração das deformações térmicas, algoritmo de implementação e plasticidade não isotérmica.

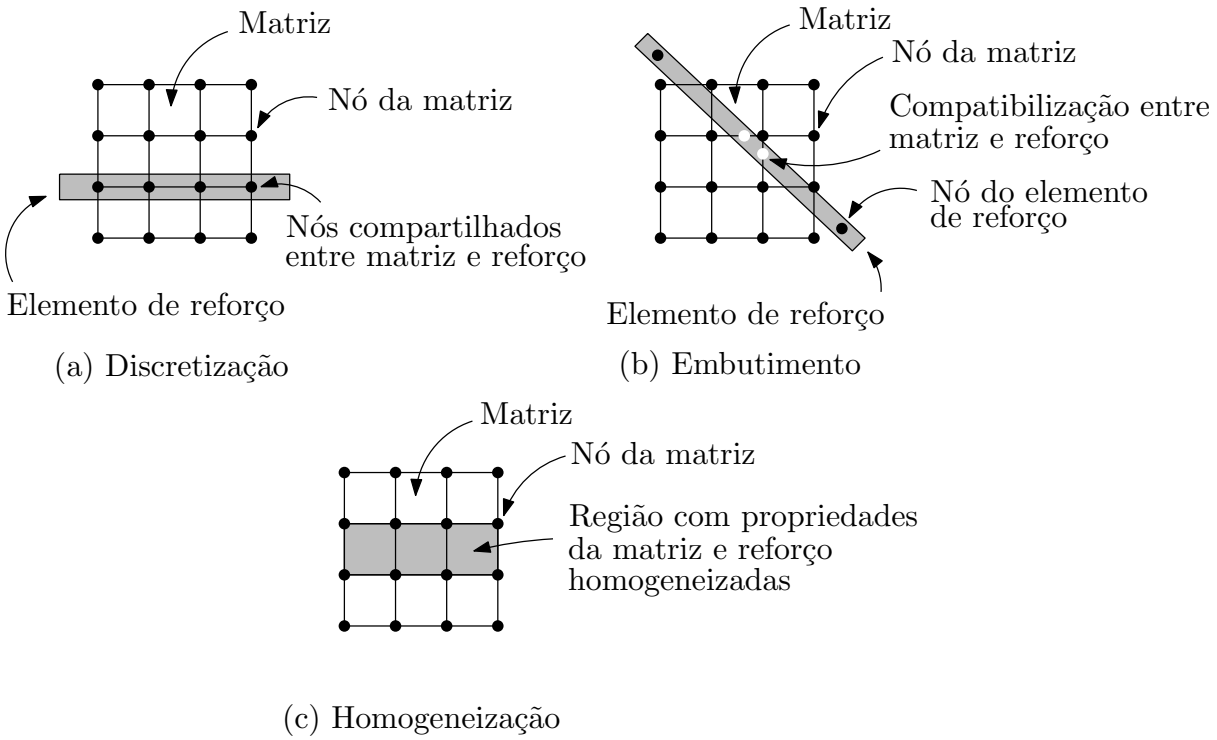
No capítulo 7 se encontram as conclusões finais do trabalho e propostas para trabalhos futuros.

2 ESTADO DA ARTE DA SIMULAÇÃO TÉRMICA E TERMOMECÂNICA DE MATERIAIS COMPÓSITOS

O foco deste trabalho é a proposta de um modelo numérico termomecânico que contemple materiais compósitos de tal forma que as malhas de elementos finitos de suas respectivas fases sejam independentes e não ocorra incremento no número de graus de liberdade total. A seguir são apresentados alguns modelos térmicos e termomecânicos, analíticos ou numéricos, de materiais compósitos encontrados na literatura.

De acordo com Azim *et al.* (2014) é possível identificar e classificar os modelos de sólidos compósitos existentes em 3 categorias de acordo com a metodologia utilizada: discretização, embutimento e homogeneização. A figura 2.1 representa a ideia de cada metodologia, respectivamente.

Figura 2.1 – Classificação das metodologias para simulação de compósitos reforçados.



(a) Discretização

(b) Embutimento

(c) Homogeneização

Fonte: elaborado pelo autor.

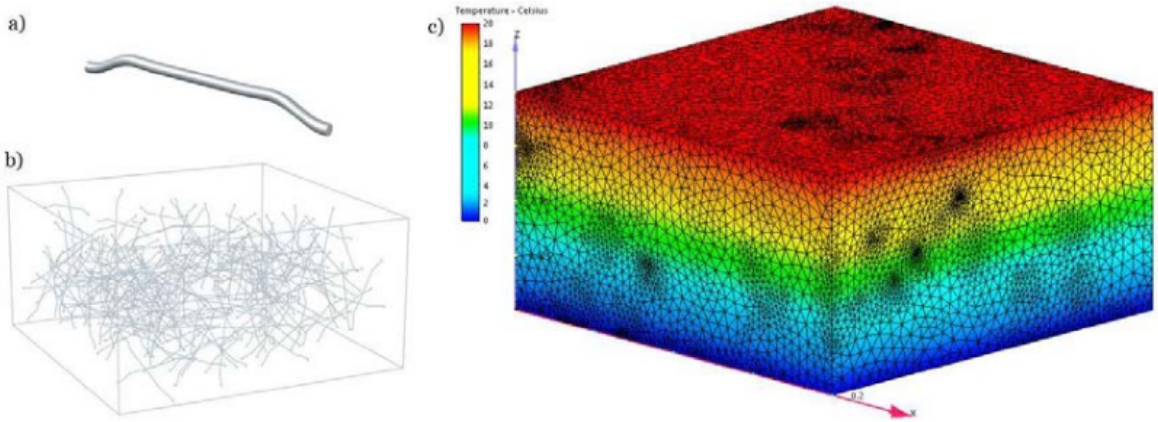
2.1 Modelos por discretização

Modelos para materiais compósitos por discretização total, no que concerne o método dos elementos finitos, baseiam-se na completa definição da geometria e estrutura de todas as fases que integram o compósito. Como consequência, surge a necessidade de compatibilização de todos os nós resultantes da malha de elementos finitos, o que pode

acarretar em dificuldades no processo de geração da malha do domínio. De forma geral, por realizar a discretição de todas as fases do compósito, obtém-se resultados com ótima acurácia e captura de fenômenos localizados. A seguir serão discutidos alguns modelos térmicos e termomecânicos por discretização total.

Nagy, Nehme e Szagri (2015) fazem uma análise térmica numérica e experimental de amostras de concreto com incorporação de fibras metálicas, variando-se o seu percentual de inclusão. Em seu trabalho foi realizada a completa discretização dos elementos que compõem o modelo de concreto com fibras. A quantidade de fibras nas amostras variou de 264 até 461, dependendo do percentual de inclusão. Para a modelagem das amostras foi empregado o software Autodesk Simulation CFD, tomando-se o cuidado de verificar a orientação e colisão das fibras no domínio. A figura 2.2 mostra o modelo e distribuição das fibras metálicas na amostra, junto com o modelo final de elementos finitos discretizado. Percebe-se que a total discretização das fibras no domínio gera um alto número de elementos finitos e de graus de liberdade para o problema.

Figura 2.2 – Discretização total dos elementos do compósito analisado. (a) Modelo geométrico da fibra empregada (b) Distribuição das fibras na amostra (c) Campo de temperatura no modelo de elementos finitos.



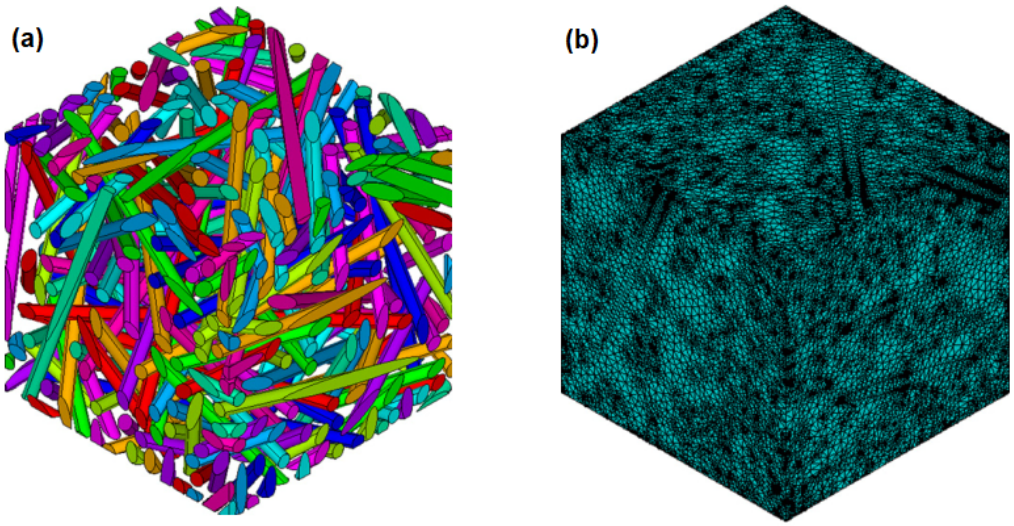
Fonte: Nagy, Nehme e Szagri (2015)

Como resultado, concluiu-se que a inclusão de fibras metálicas são capazes de aumentar o coeficiente de condutividade térmica em comparação com uma amostra de concreto puro. Entretanto, a inclusão de fibras no concreto também aumenta sua porosidade, o que gera um impacto significante na condução térmica. Portanto, para a correta modelagem da condução de calor em estruturas de concreto com incorporação de fibras metálicas, faz-se necessário também levar em consideração o aumento da porosidade e, consequentemente, redução do coeficiente de condutividade. Ou seja, tem-se um efeito conjunto de aumento da condutividade provocado pelas fibras e redução da condutividade pelo aumento da porosidade.

Em Li *et al.* (2012) é efeita análise do comportamento térmico de compósitos poliméricos com inclusão de nanotubos de carbono. Foram analisados dois tipos de compósitos, com base polimérica de epoxy e poliolefina, incorporados com fibras de nanotubos de carbono. Também foram feitas várias amostras, variando-se o teor de incorporação dessas fibras de 1% até 22% de fração volumétrica.

A figura 2.3 mostra o modelo do compósito e sua distribuição de fibras junto com a sua respectiva discretização em elementos finitos para o caso de 22% de fração volumétrica. Por meio da figura 2.3b, perceber-se que é necessário um elevado número de elementos finitos, e por consequência um grande número de graus de liberdade, para contemplar todos os elementos de fibra no domínio do compósito.

Figura 2.3 – Modelo do compósito com distribuição de fibras em seu domínio. (a) Modelo e distribuição das fibras de nanotubos de carbono no domínio da amostra (b) Discretização das fibras e domínio em elementos finitos.



Fonte: Adaptado de Li *et al.* (2012)

Uma consequência direta desta grande quantidade de elementos finitos é o elevado custo computacional para sua análise térmica. A tabela 1 demonstra o custo computacional em segundos (s) em relação ao teor de incorporação de fibras.

Tabela 1 – Custo computacional em relação ao teor de incorporação de fibras no compósito polimérico.

Número de nanotubos	Fração de volume (%)	Elementos ($\times 10^6$)	Nós ($\times 10^6$)	Tempo (s)
6	1	0,18	0,23	40
21	3	0,79	1,05	372
40	6	1,25	1,67	915
59	9	1,47	1,95	1481
122	15	1,90	2,53	2847
255	22	2,13	2,82	4322

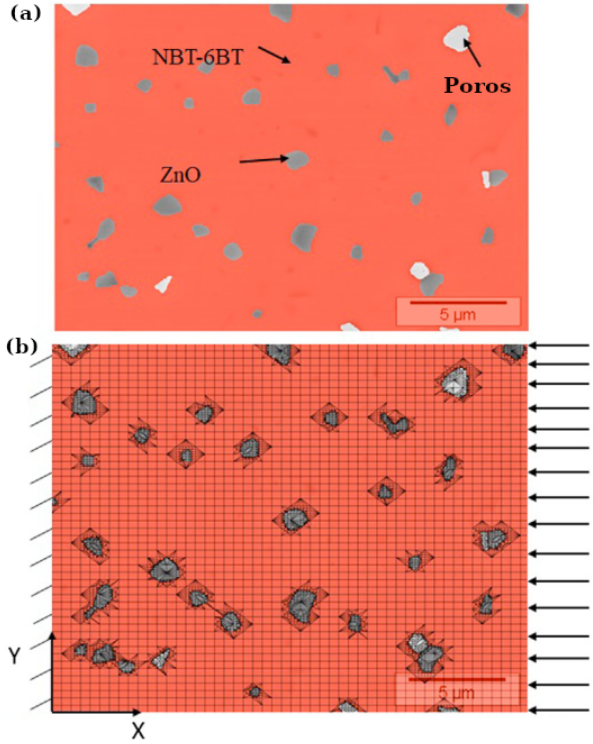
Fonte: Adaptado de Li *et al.* (2012)

Por fim, o trabalho de Li *et al.* (2012) conclui que a incorporação de nanotubos de carbono em polímeros é capaz de contribuir positivamente no coeficiente de condutividade térmico. Entretanto, similarmente ao caso da incorporação de fibras metálicas em concreto, a interface entre os nanotubos e a matriz polimérica interfere de forma significativa reduzindo o coeficiente de condutividade térmica do compósito, e portanto, não pode ser desconsiderada.

Meena *et al.* (2021) se preocupam em realizar uma análise termomecânica em compósitos de $0.94Na_{1/2}Bi_{1/2}TiO_3$-$0.06BaTiO_3$ (NBT-6BT) com incorporações de ZnO. Este material compósito em específico é considerado uma alternativa promissora aos materiais piezoelétricos convencionais baseados em chumbo, que por sua vez causam graves problemas de saúde e ambientais. Como requisito, é necessário que tais materiais mantenham suas características piezoelétricas quando submetidos a diversos tipos de solicitações termomecânicas.

Para realizar a modelagem e investigação do material sob regimes termomecânicos, no estudo foi desenvolvido um fluxo de trabalho específico que permite a análise do compósito pelo método dos elementos finitos por meio da discretização total do domínio. Num primeiro momento são feitas varreduras da estrutura interna do compósito por microscopia eletrônica. Posteriormente tais imagens alimentam um software específico que é responsável por identificar as regiões de matriz (NBT-6BT), inclusões (ZnO) ou poros. Por fim, procede-se para a total discretização do domínio em elementos finitos, como demonstrado na figura 2.4. A figura 2.4a mostra a delimitação e definição das regiões que representam a matriz, inclusões e poros, enquanto que a figura 2.4b mostra o domínio do problema já com a malha de elementos finitos e condições de contorno mecânicas impostas.

Figura 2.4 – (a) Delimitação e definição das regiões correspondentes à matriz, inclusões e poros. (b) Malha de elementos finitos resultante para o compósito, junto com as condições de contorno mecânicas.

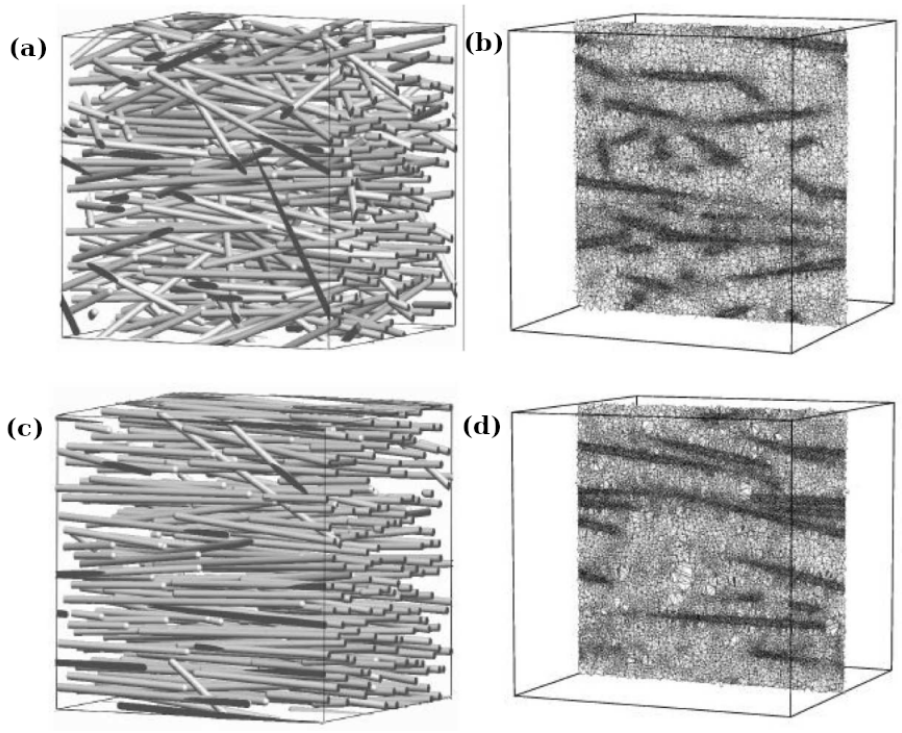


Fonte: Adaptado de Meena *et al.* (2021)

Como conclusão do trabalho, os resultados mostram que os maiores valores de tensão se localizam próximos da interface entre a matriz e inclusões, tornando esta região importante para a estabilidade térmica do compósito. Ainda, a orientação das inclusões de ZnO também interferem na estabilidade. Portanto, recomenda-se o emprego de inclusões no formato de nanofibras ao invés de partícula ou pó. Por fim, quando submetido a carregamentos mecânicos, o processo de falha começa nas regiões de poros, ao invés da interface entre matriz e partícula.

Lusti, Hine e Gusev (2002) se preocupam em estudar compósitos de matriz polimérica reforçados por fibras de vidro com orientações distintas quando submetidas a solicitações termomecânicas. Para tanto, realizam-se modelagens numéricas em elementos finitos e validação experimental. Para modelagem numérica foi empregada discretização total das fases constituintes do compósito, como demonstrado na figura 2.5. As figuras 2.5a e 2.5c mostram as distribuições geométricas das fibras de vidro no interior da matriz polimérica. Já nas figuras 2.5b e 2.5d é possível ver cortes interiores das respectivas malhas de elementos finitos resultantes. No total foram empregados aproximadamente $2{,}4\times10^6$ nós e 15×10^6 tetrahedros em ambas as malhas. Também são reportadas dificuldades no procedimento de malhamento, principalmente nas situações em que as superfícies das fibras resultam muito próximas e portanto exigindo um refinamento maior da malha para garantir um bom formato aos elementos finitos.

Figura 2.5 – Distribuição das fibras de vidro no interior do compósito e correspondentes seções interiores da malha de elementos finitos resultante.



Fonte: Adaptado de Lusti, Hine e Gusev (2002)

Por fim, foi possível por meio dos modelos de elementos finitos por discretização total reproduzir com ótima acurácia o comportamento mecânico e térmico, longitudinalmente e transversalmente, dos compósitos produzidos para validação experimental.

2.2 Modelos por homogeneização

Uma forma de considerar as distintas fases de um compósito numa análise de elementos finitos sem provocar aumento no número de elementos finitos empregados e graus de liberdade é pela técnica de homogeneização. Ao longo do tempo foram, e ainda são, propostas diversas metodologias de como se deve realizar o processo de homogeneização a fim de corretamente considerar a contribuição dos elementos de reforço (fibras e/ou partículas). À partir da homogeneização é possível contornar os problemas já descritos para a técnica de discretização total. Entretanto, de forma geral, a técnica de homogeneização possui a característica de não conseguir capturar de forma detalhada efeitos locais. Portanto, é mais frequentemente empregada para efetuar análises macroscópicas, no qual os efeitos locais não são tão relevantes. A questão está no tamanho da inclusão (fibra ou partícula) em relação à análise realizada. Quando as inclusões são muito menores e em grande quantidade, seus efeitos locais podem ser desconsiderados, e a homogeneização passa a ser a técnica ideal. A seguir, são apresentados alguns trabalhos e modelos térmicos e termomecânicos com a finalidade de mostrar algumas das técnicas de homogeneização encontradas na literatura.

Dos modelos térmicos analíticos é possível começar destacando o modelo de Voigt (1910) que estipula que a propriedade de interesse equivalente pode ser obtida por uma simples ponderação dos valores das propriedades de cada fase do compósito com suas respectivas frações volumétricas:

$$k_{equiv} = \sum_{i=1}^{n} k_i V_i \tag{2.1}$$

em que k_{equiv} é a propriedade de interesse equivalente, k_i são as propriedades de cada fase i e V_i são suas respectivas frações volumétricas no compósito.

Outro modelo analítico é o de Reuss (1929) que assume que o inverso da propriedade equivalente é igual ao inverso das propriedades de cada uma das fases ponderadas pelas respectivas frações volumétricas. Este modelo pode ser representado como:

$$\frac{1}{k_{equiv}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{V_i}{k_i} \tag{2.2}$$

em que k_{equiv} é a propriedade equivalente resultante e k_i e V_i são as propriedades e frações volumétricas de cada fase i.

Alguns trabalhos, como por exemplo Bhouri *et al.* (2021), fazem uso dos modelos de Voigt e Reuss como estimativas iniciais para as propriedades equivalentes do compósito, formando assim limites de valores superior e inferior, respectivamente, onde o verdadeiro valor se encontra.

Hashin e Shtrikman (1962) propõem um modelo analítico para materiais compósitos entendendo que a propriedade equivalente de interesse do material se encontra entre dois valores limites. São dadas duas equações que definem os limites inferiores e superiores para a propriedade equivalente de um compósito a depender de suas fases e frações volumétricas. O limite inferior pode ser dado por:

$$k_1^* = k_1 + \frac{A_1}{1 - \alpha_1 A_1} \tag{2.3}$$

em que

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (3k_1)^{-1}, \\ A_1 &= \sum_{i=2}^{m} \frac{V_i}{(k_i - k_1)^{-1} + \alpha_1} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Já o limite superior é dado como:

$$k_m^* = k_m + \frac{A_m}{1 - \alpha_m A_m} \tag{2.5}$$

em que

$$\begin{aligned} \alpha_m &= (3k_m)^{-1}, \\ A_m &= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{V_i}{(k_i - k_m)^{-1} + \alpha_m} \end{aligned} \tag{2.6}$$

com k_1^* sendo o valor do limite inferior para a propriedade equivalente, k_m^* o valor do limite superior para a propriedade equivalente, k_1 o menor valor da propriedade de todas as fases, k_m o maior valor da propriedade dentre as fases, V_i a fração volumétrica de cada fase i e k^* satisfazendo a inequalidade:

$$k_1^* < k^* < k_m^* \tag{2.7}$$

Ainda, fazendo-se os valores limites tenderem para o pior caso possível, ou seja, para os limites inferior tendendo à 0 e superior tendendo à ∞, obtém-se intervalo:

$$\sum_{i=1}^{m} k_i V_i > k^* > \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} V_i/k_i} \tag{2.8}$$

que são justamente os modelos de Voigt e Reuss para os limites superior e inferior, respectivamente.

Outro modelo comumente utilizado para modelagem de materiais compósitos é o modelo de Mori-Tanaka (MORI; TANAKA, 1973). Stránský *et al.* (2011) e Kim *et al.* (2019) fazem uso deste modelo para obter o valor de condutividade térmica de compósitos reforçados por elementos partículados com imperfeições em suas interfaces. Partindo do seguinte problema, a distribuição do campo e temperatura segue:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = -\mathbf{k}(\mathbf{x})\mathbf{h}(\mathbf{x}),\ \nabla^T \mathbf{q}(\mathbf{x}) = 0 \text{ para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \tag{2.9}$$

em que $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ representa o fluxo de calor, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$ é o gradiente de temperatura θ ($\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \nabla\theta(\mathbf{x})$) e $\mathbf{k}$ representa a matrix positiva-definida de condutividade térmica do material dada por:

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{k}^i \text{ para } \mathbf{x} \text{ pertencente à inclusão} \\ \mathbf{k}^m \text{ para } \mathbf{x} \text{ pertencente à matriz} \end{cases} \tag{2.10}$$

A equação 2.9 é completada pelas condições de contorno:

$$\theta(\mathbf{x}) = \mathbf{H}^T \mathbf{x} \tag{2.11}$$

em que $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^3$ é o gradiente de temperatura macroscópico do sólido. Assumindo um problema de campo térmico linear, é possível introduzir um fator de concentração do gradiente de temperatura $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{H} \tag{2.12}$$

De acordo com Hiroshi e Minoru (1986) e Benveniste (1987) o fator de concentração do gradiente pode ser expresso como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1} = \left(\mathbf{A}^i\right)^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{S}(\mathbf{k}^m)^{-1}(\mathbf{k}^m - \mathbf{k}^i) \text{ para todo } \mathbf{x} \text{ pertencente à inclusão} \tag{2.13}$$

em que $\mathbf{I}$ é a matrix identidade e $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^3$ é o tensor de Eshelby para problemas de difusão, descrito em Eshelby e Peierls (1957). Desta forma, por meio do fator de concentração e tensor de Eshelby, é possível deduzir e levar em consideração diversas configurações de reforço, sejam elas localização, geometria ou orientação das fases. Por fim, particularizando para o caso de diversas partículas de reforço uniformemente dispersas no domínio, tem-se a condutividade térmica efetiva $\mathbf{k}^h$:

$$\mathbf{k}^h = \frac{c^m \mathbf{k}^m + \sum_{r=1}^{N} c^r \mathbf{k}^r \mathbf{T}^r}{c^m \mathbf{I} + \sum_{r=1}^{N} c^r \mathbf{T}^r} \tag{2.14}$$

em que c^m é a fração volumétrica da fase da matriz, c^r são as frações volumétricas para cada uma das fases r, $\mathbf{k}^m$ representa a condutividade térmica do material da matriz, $\mathbf{k}^r$ representa a condutividade térmica de cada uma das fases e $\mathbf{T}^r$ é um tensor parcial do fator de concentração do gradiente que leva em conta a orientação das partículas de cada fase r.

Para o caso mais específico de partículas esféricas distribuídas uniformemente na matriz, com ambos materiais das fases de comportamento isotrópico, pode-se ter a seguinte expressão para o valor da condutividade térmica equivalente:

$$k^h = \frac{c^m k^m + \sum_{r=1}^{N} c^r k^r T^r}{c^m + \sum_{r=1}^{N} c^r T^r} \text{ e } T^r = \frac{3k^m}{2k^m + k^r} \tag{2.15}$$

com $\mathbf{k}^h = k^h \mathbf{I}$ e $\mathbf{k}^r = k^r \mathbf{I}$.

Para levar em consideração a imperfeição na interface das partículas, Stránský *et al.* (2011) faz uso de uma condutividade térmica aparente em função de seu tamanho, descrita pela seguinte expressão:

$$\hat{k}^r = \frac{a^r K^r}{a^r K^r + k^r} \tag{2.16}$$

em que a é o diâmetro da partícula esférica, K^r é a condutividade térmica na interface das partículas da fase r e $\hat{k}^r$ é então a condutividade térmica aparente empregada no modelo 2.15 para as fases das inclusões.

Em Torquato (2013) é proposto um modelo para representação de compósitos de forma que seu arranjo espacial também seja levado em consideração. Para tanto faz-se uso de uma formulação que emprega funções de densidade de probabilidade que descrevem o padrão de dispersão das fases num compósito.

Assume-se que para um compósito o domínio $\mathcal{V}(\omega) \in R^d$ (em que o valor realizado ω parte de uma função de densidade de probabilidade), de volume V, possa ser discretizado por regiões $\mathcal{V}_i$ com respectivas frações volumétricas ϕ_i. Também é introduzida a função indicadora $\mathcal{I}_i(x_j;\omega)$ para cada umas das fases i:

$$\mathcal{I}_i(x_j;\omega) = \begin{cases} 1, & x_j \in \mathcal{V}_i(\omega), \\ 0, & x_j \notin \mathcal{V}_i(\omega) \end{cases} \tag{2.17}$$

As equações que regem o processo de condução de calor estacionário num ponto x_j local de uma amostra são:

$$\nabla \cdot Q_n(x_j) = 0 \text{ em } \mathcal{V}_i \tag{2.18}$$

e

$$Q_n(x_j) = -k(x_j)\nabla\theta(x_j) \tag{2.19}$$

com

$$k(x_j) = \sum_{i=1}^{M} k_i \mathcal{I}_i(x_j) \tag{2.20}$$

em que k_i e $\mathcal{I}_i$ são respectivamente o parâmetro de condutividade e a função indicadora de cada uma das fases i do compósito, Q_n é o vetor de fluxo de calor, $\theta(x_j)$ é o campo de temperatura e $k(x_j)$ é o parâmetro de condutividade local.

A seguir, pela relação constitutiva ponderada do conjunto, é definido o tensor de condutividade efetivo k_e:

$$< Q_n(x_j) >= -k_e(x_j) < \nabla\theta(x_j) > \tag{2.21}$$

em que os colchetes $< \bullet >$ denotam uma operação de média do conjunto. Torquato (1991) ainda define conjunto como uma coleção de um grande número de sistemas que são idênticos macroscopicamente, mas diferentes microscopicamente. O tensor k_e descreve o comportamento macroscópico do sistema no limite em que a razão da escala microscópica para a escala macroscópica tende a zero. Anisotropia macroscópica pode ainda surgir por meio de assimetria na microestrutura, como orientação na distribuição, inclusões não esféricas, presença de lâminas e camadas, etc. A equação 2.21 ainda é válida nas situações em que o compósito possua fases com anisotropia.

Como exemplo, em Torquato e Rintoul (1995) é desenvolvido um modelo que define os limites superiores e inferiores para a condutividade efetiva de compósito formado por inclusões esféricas uniformemente distribuídas no domínio. A equação 2.22 define o valor superior para a condutividade efetiva do compósito:

$$\begin{aligned} \frac{k_e}{k_1} \leq D_U &= 1 + (\alpha - 1)\phi_2 - \frac{E_U}{F_U} \\ E_U &= \phi_2\{\phi_1[-(\alpha-1)^2]\}^2 \\ F_U &= (\alpha-1)^2[3\phi_1 + (\alpha-1)(2\zeta_2\phi_1 + \phi_2^2)] \end{aligned} \tag{2.22}$$

em que $\alpha \equiv k_2/k_1$ é a razão de condutividade entre inclusão e matriz, ϕ_1 e ϕ_2 são as frações volumétricas da matriz e inclusão, respectivamente e ζ_2 é um parâmetro microestrutural, obtido por meio da integral de uma função de correlação espacial da dispersão, como descrito em Torquato (1991).

A seguinte equação definite o valor inferior para a condutividade efetiva:

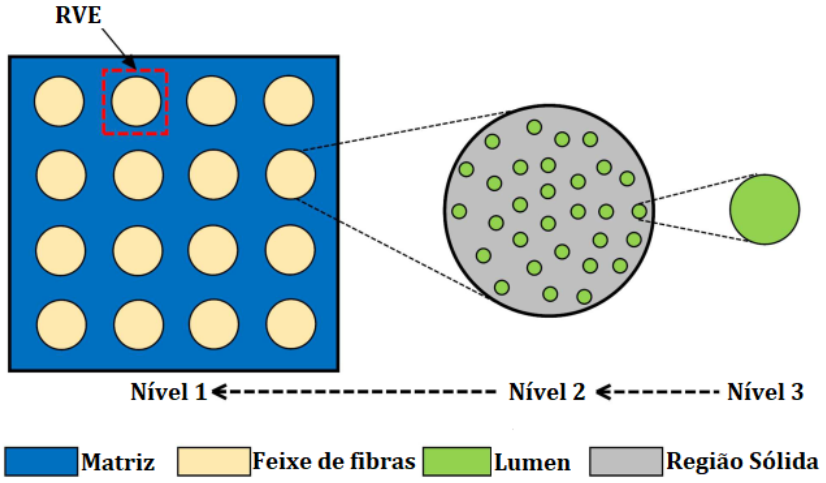
$$\begin{aligned} \frac{k_e}{k_1} \geq D_L &= \left\{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\phi_2 - \frac{E_L}{F_L}\right\}^{-1} \\ E_L &= \phi_2[2\phi_1(\alpha-1)^2]^2 \\ F_L &= 6\alpha^2\{\phi_2[(\alpha-1)^2]\} \\ &\quad + (\alpha-\alpha^2)\{4[\phi_1(\alpha-1)]^2 + 2\zeta_2\phi_1(\alpha-1)^2\} \end{aligned} \tag{2.23}$$

em função dos mesmos parâmetros descritos anteriormente.

Ainda sobre os modelos de homogeneização para problemas térmicos, é possível citar os modelos de ordem numérica. No trabalho de Wang, Xiao e Qin (2017) é feita uma análise térmica de material compósito constituído por feixes de fibras naturais. Para a modelagem do material foi utilizada a técnica do elemento volumétrico representativo (*Representative volumetric element*, RVE), buscando um parâmetro de condutividade térmica efetivo (equivalente) que represente a menor unidade constituinte do padrão que representa a estrutura.

A figura 2.6 mostra o esquema hierárquico em 3 níveis adotado no trabalho e padrão do material compósito. Basicamente o material é composto por um feixe de fibras naturais (Lumen) e este feixe de fibras se repete num padrão retangular ao longo da matriz do sólido.

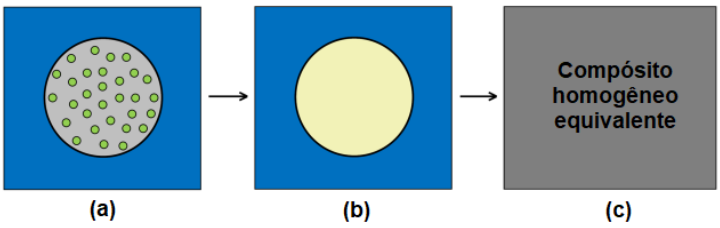
Figura 2.6 – Esquema hierárquico de material composto por feixes de fibras naturais. Neste caso, o material é composto por uma hierarquia de 3 níveis, partindo do Lumen até o nível macroscópico.



Fonte: Adaptado de Wang, Xiao e Qin (2017)

Para a análise do sólido por meio do RVE, foram realizados dois passos de homogeneização, demonstrados figura 2.7. Inicialmente realiza-se a homogeneização das fibras de Lumen no feixe de fibras para posteriormente efetuar a homogeneização dos feixes de fibra ao longo da matriz do sólido.

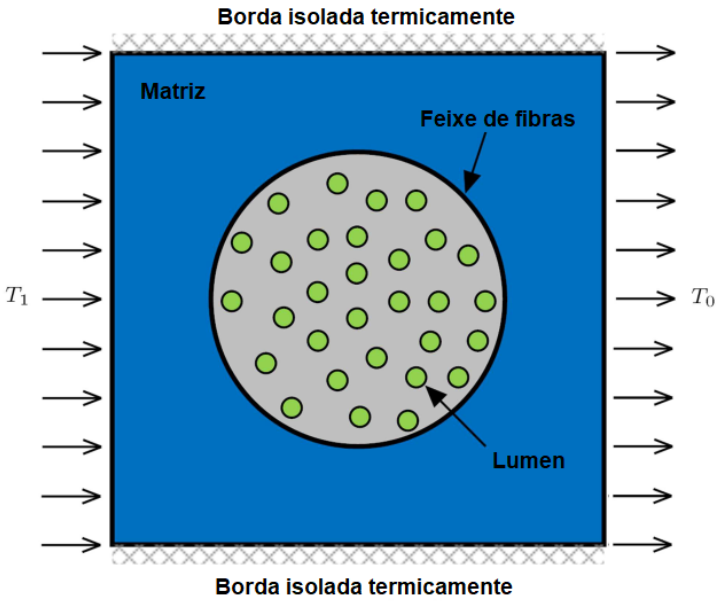
Figura 2.7 – Procedimento de homogeneização em dois passos. (a) RVE original. (b) Primeiro RVE equivalente com as fibras de Lumen homogeneizadas no feixe. (c) Segundo RVE equivalente com todos os feixes de fibra homogeneizados no sólido.



Fonte: Adaptado de Wang, Xiao e Qin (2017)

Para a análise do RVE, segundo a figura 2.8, foram estabelecidas condições de contorno térmicas a fim de se obter um parâmetro de condutividade efetivo, ou equivalente, que representasse adequadamente o RVE. As condições de contorno impostas foram de Dirichlet, sendo $T_0 = 0°C$ na face direita e $T_1 = 20°C$ na face esquerda e isolamento térmico nas bordas superior e inferior.

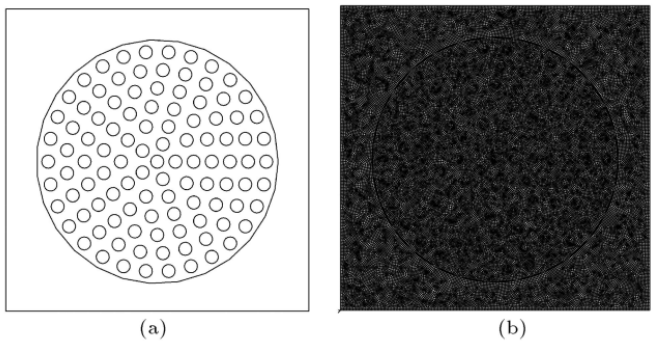
Figura 2.8 – Condições de contorno para análise térmica do elemento volumétrico representativo.



Fonte: Adaptado de Wang, Xiao e Qin (2017)

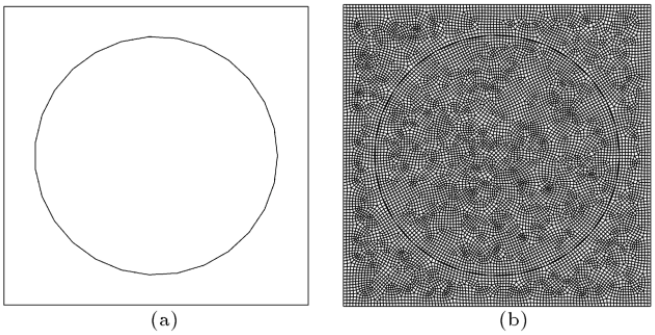
As figuras 2.9 e 2.10 mostram os RVEs e suas respectivas discretizações em elementos finitos. A análise térmica foi efetuada por meio do software ABAQUS e requeriu 51680 elementos finitos quadráticos para o caso da figura 2.9 e 12247 elementos para o caso da figura 2.10.

Figura 2.9 – Discretização em elementos finitos das fibras de Lumen, num feixe de fibras. (a) Esquema das 106 fibras de lumens. (b) malha de elementos finitos.



Fonte: Adaptado de Wang, Xiao e Qin (2017)

Figura 2.10 – Discretização em elementos finitos na matriz de um feixe de fibras homogeneizado. (a) Esquema do feixe de fibras homogeneizado. (b) malha de elementos finitos.



Fonte: Adaptado de Wang, Xiao e Qin (2017)

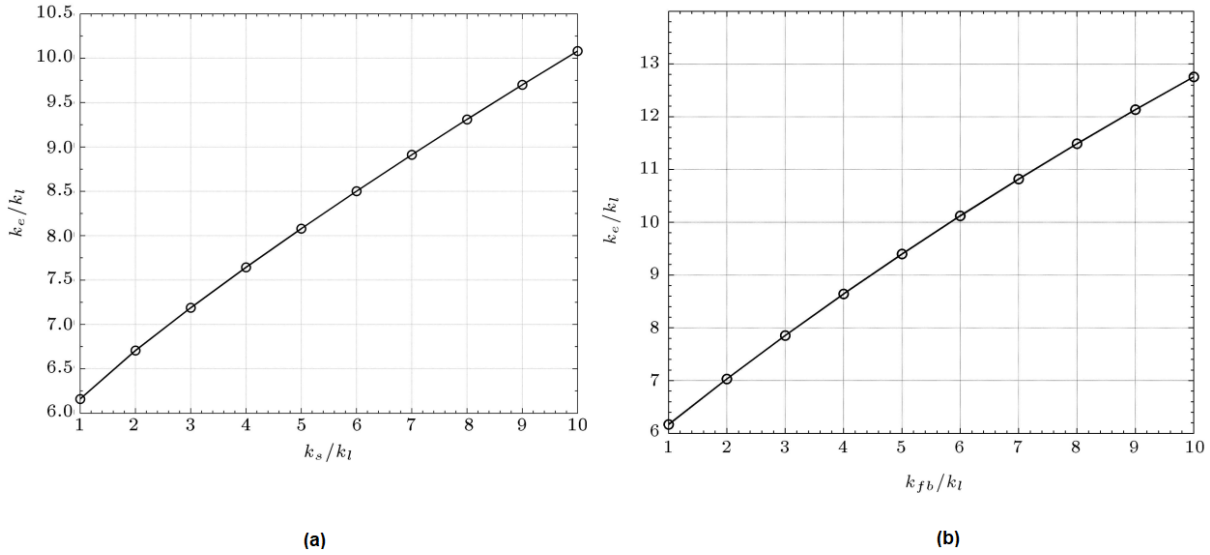
Após realizada a análise térmica e de posse do campo de temperatura, é possível calcular o coeficiente de condutividade térmico efetivo para o material compósito por meio da seguinte equação:

$$k_e = \frac{QL}{(T_1 - T_0)} \tag{2.24}$$

em que k_e é o coeficiente de condutividade térmico efetivo, Q é o fluxo de calor médio nas bordas do RVE, L é o comprimento do RVE e T_1 e T_0 são as temperaturas impostas como condição de contorno.

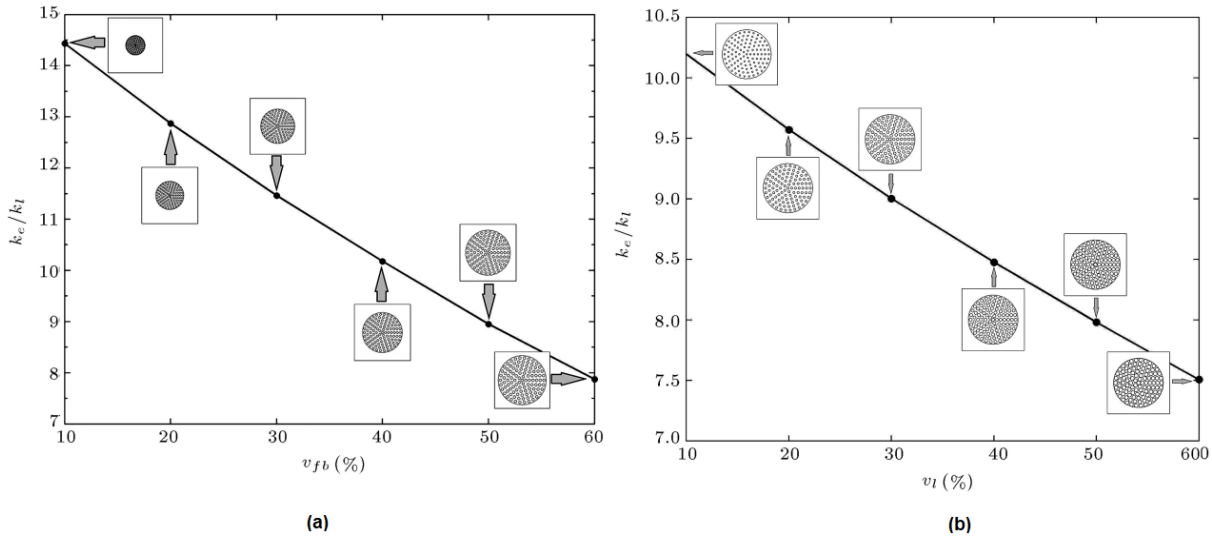
A figura 2.11 mostra os resultados de k_e obtidos, normalizados em relação ao coeficiente de condutividade térmico dos lumens k_l. Naturalmente, quanto maior a condutividade dos componentes constituintes do compósito, maior será a condutividade efetiva do compósito. Já a figura 2.12 mostra respectivamente a variação de k_e em relação à variação de volume dos feixes de fibras e do volume de lumens num feixe.

Figura 2.11 – Valores normalizados da condutividade efetiva k_e. (a) Variação da condutividade efetiva com a condutividade do sólido que compõe do feixe de fibras k_s. (b) Variação da condutividade efetiva com a condutividade do feixe de fibras homogeneizado k_{fb}.



Fonte: Adaptado de Wang, Xiao e Qin (2017)

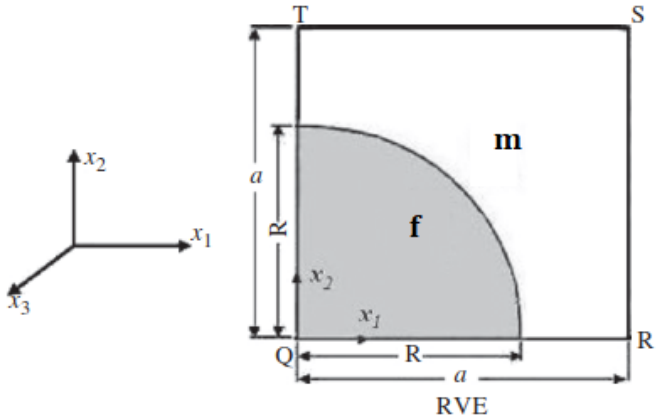
Figura 2.12 – Variação do parâmetro k_e em função do volume dos feixes e de lumens num feixe. (a) Variação de k_e com o percentual de volume de feixes de fibras. (b) Variação de k_e com o percentual volumétrico de lumens num feixe de fibras.



Fonte: Adaptado de Wang, Xiao e Qin (2017)

No trabalho de Ahmadi *et al.* (2010) é investigada a transferência de calor através de materiais compósitos com inclusão de fibras por meio de um método sem malha. Para a análise do compósito, também foi feito uso do elemento volumétrico representativo (RVE), como mostrado na figura 2.13.

Figura 2.13 – Esquema do elemento volumétrico representativo estudado.



Fonte: Adaptado de Ahmadi *et al.* (2010)

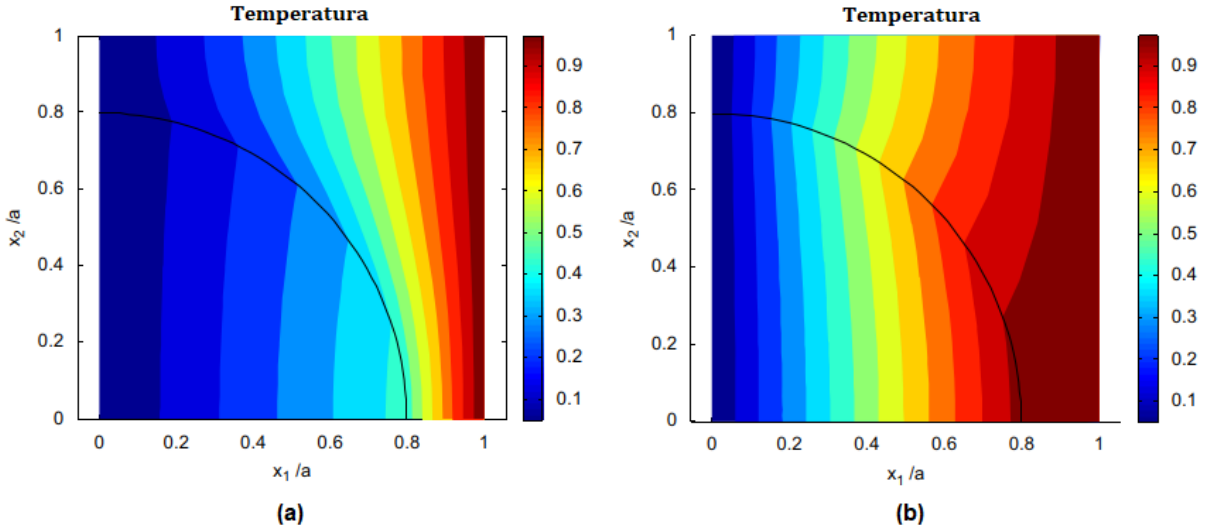
Por se tratar de um método sem malha, foi utilizado o método dos mínimos quadrados para a solução numérica. Foram considerados também materiais homogêneos no domínio. Para o caso do método dos elementos finitos a consideração de materiais heterogêneos é natural, bastando coincidir os nós e elementos na fronteira dos materiais, entretanto para métodos sem malha a abordagem é distinta. No trabalho foram criados dois pontos no mesmo local ao longo da interface, cada um pertencendo a cada um dos materiais.

A figura 2.14 mostra o campo de temperatura resultante através do RVE. De posse do campo de temperatura e do valor médio do fluxo de calor, é possível calcular um coeficiente de condutividade térmico equivalente por meio da seguinte equação:

$$K_1 = \frac{\dot{Q}}{A} \frac{a}{T_1 - T_2} \tag{2.25}$$

em que K_1 é o coeficiente de condutividade térmico do RVE, $\dot{Q}$ é o valor médio do fluxo de calor, A é a área do lado direito do RVE, a é a altura do RVE e T_1 e T_2 são as temperaturas impostas como condição de Dirichlet nas faces esquerda e direita, respectivamente. Nota-se que a equação 2.25 é muito similar à equação 2.24.

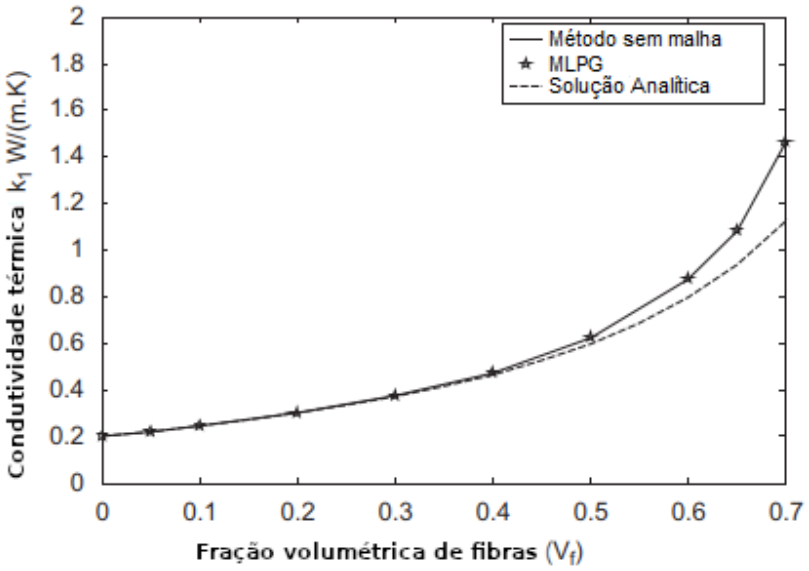
Figura 2.14 – Campos de temperatura através do RVE. (a) Campo térmico no caso do coeficiente de condução térmico da fibra k^f for maior que o coeficiente da matriz k^m ($k^f > k^m$). (b) Campo térmico para o caso de $k_f < k_m$.



Fonte: Adaptado de Ahmadi *et al.* (2010)

Por fim, também foi analisada a influência do percentual volumétrico de inclusão das fibras no coeficiente de condutividade térmico do compósito. A figura 2.15 mostra esta relação. Nota-se que os valores numéricos calculados ficam próximos dos valores analíticos para para frações volumétricas (V_f) menores que 50% e obedecem uma proporção não linear.

Figura 2.15 – Condutividade térmica transversal do compósito.



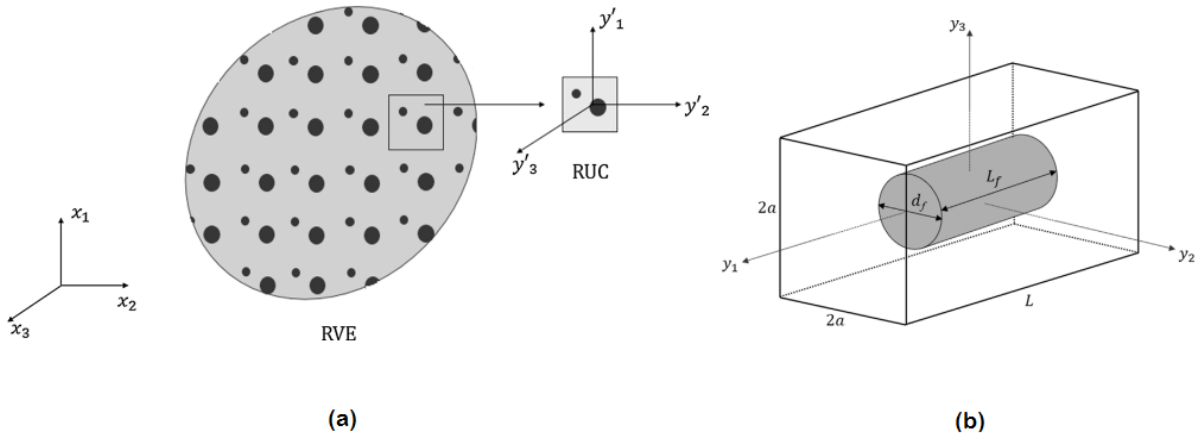
Fonte: Adaptado de Ahmadi *et al.* (2010)

No trabalho de Vieira e Marques (2019) é feita a análise térmica de compósitos com fibras imersas por meio do método dos volumes finitos, desenvolvido em Cavalcante e Khatam (2012) e Escarpini Filho e Marques (2014). Em seu trabalho, é proposto um modelo tridimensional para representar compósitos com a inclusão de fibras ou particulados arranjados num padrão periódico.

Basicamente é criado uma célula unitária repetente (RUC) que contemple as diversas fases, como as fibras ou partículas, integrantes do compósito de forma similar à técnica do elemento volumétrico representativo (RVE). Após realiza-se a completa discretização e análise térmica da RUC, pelo método dos elementos finitos por exemplo, para obtenção do campo de temperatura e fluxo médio ao longo do domínio da célula unitária. De posse do campo térmico e fluxo médio de calor nas faces da RUC, calcula-se a rigidez térmica para cada uma das células que compõem todo o compósito. Por fim monta-se uma matriz de rigidez térmica global e de fluxo médio de calor global entre as RUCs e suas faces, de forma similar ao que é realizado para o método dos elementos finitos e seus graus de liberdade. Ao se resolver o sistema resultante da matriz térmica global e fluxo de calor médio global, obtém-se o campo térmico do compósito.

A figura 2.16 mostra o esquema de um compósito formado por um padrão periódico de células unitárias representativas (similar ao RVE). Também é mostrado a definição de uma destas células como uma fibra cilíndrica imersa num volume cubóide.

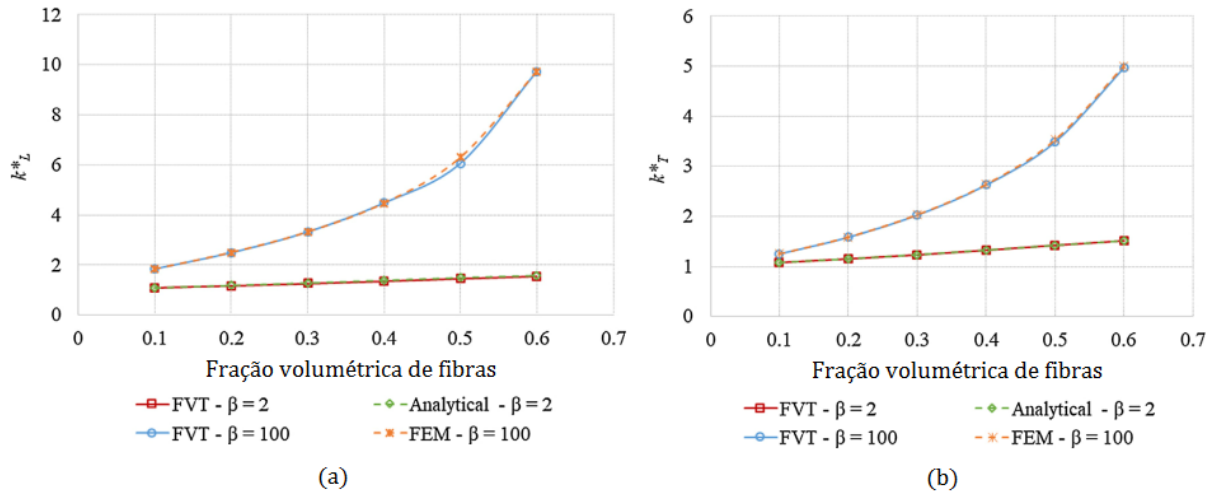
Figura 2.16 – Esquema do compósito reforçado com fibras. (a) Compósito formado por um padrão periódico de células unitárias. (b) RUC de um compósito formado por uma fibra curta cilíndrica unidirecional.



Fonte: Adaptado de Vieira e Marques (2019)

A figura 2.17 mostra a variação dos coeficientes de condutividade térmica transversal e longitudinal com a variação da proporção volumétrica de fibras no compósito. $\beta = \frac{k_f}{k_m}$ simboliza a razão entre os coeficientes de condução da fibra (k_f) e matriz (k_m). Nota-se que para valores baixos de β, o aumento do coeficiente é basicamente linear com o incremento de fibras. Entretanto, para altos valores de β, o incremento de condutividade térmica passa a ser de forma não linear.

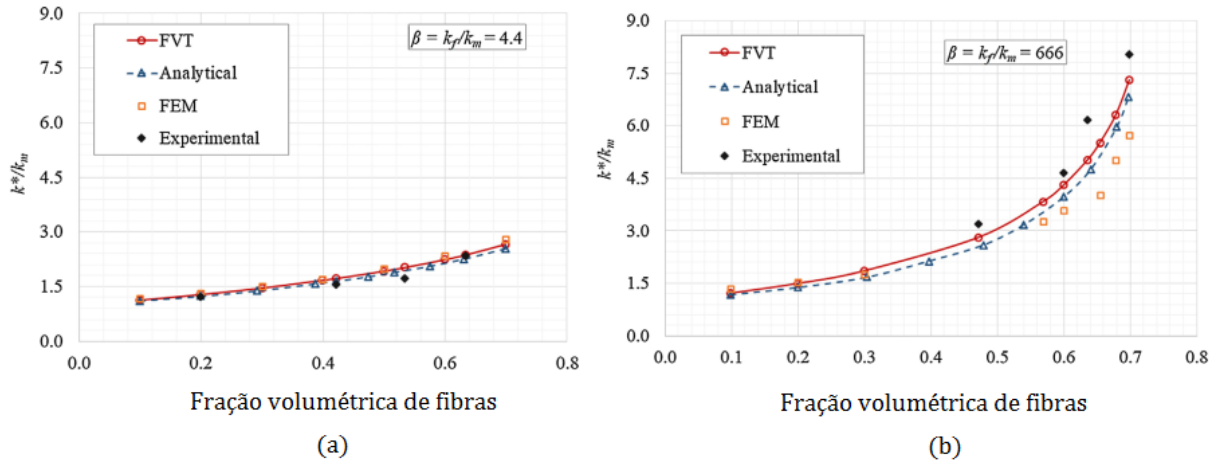
Figura 2.17 – Variação dos coeficientes de condutividade térmica transversal k_T^* e longitudinal k_L^* com a fração volumétrica de fibras. (a) Variação do coeficiente de condução térmico longitudinal (k_L^*) com a variação da fração volumétrica de fibras (b) Variação do coeficiente de condução térmico transversal (k_T^*) com a variação da fração volumétrica de fibras.



Fonte: Adaptado de Vieira e Marques (2019)

A figura 2.18 mostra a variação da condutividade térmica normalizada com o incremento de proporção de fibras para dois valores de β. Novamente percebe-se que, para altos valores de β, o incremento se dá de forma não linear.

Figura 2.18 – Variação da condutividade térmica normalizada com a proporção de fibras. (a) Variação da condutividade térmica homogênea normalizada do compósito com a variação da fração volumétrica de fibras para $\beta = 4{,}4$ (b) Variação da condutividade térmica homogênea normalizada do compósito com a variação da fração volumétrica de fibras para $\beta = 666$.



Fonte: Adaptado de Vieira e Marques (2019)

Para análises termomecânicas, também é possível separar os modelos por homogeneização entre modelos analíticos ou numéricos. Para os modelos analíticos, além da obtenção do valor da condutividade térmica equivalente, também é necessário se calcular as propriedades equivalentes para o campo mecânico, como rigidez, Poisson e coeficiente de expansão térmica.

Para o campo mecânico, seguindo a mesma lógica, também é possível fazer uso dos modelos de Voigt e Reuss, como descritos nas equações 2.1 e 2.2 respectivamente, para modelar um material compósito. Liu, Feng e Zhang (2009) se preocupam em estudar compósitos compostos por camadas de diferentes fases e também faz uso destes dois modelos para estimar os valores limites superiores e inferiores para a rigidez equivalente do sólido.

Hashin e Shtrikman (1963) propõem um modelo de homogeneização para a obtenção dos parâmetros que regem um modelo mecânico para um compósito. Da mesma forma que, para o caso da condutividade térmica equivalente, também são obtidos dois valores limites que devem compreender o valor real da propriedade equivalente. Os valores limites inferiores para o módulo de elasticidade volumétrico (K_1^*) e módulo de cisalhamento (G_1^*) de um material de m fases são dados por:

$$\begin{aligned} K_1^* &= K_1 + \frac{A_1}{1+\alpha_1 A_1}, \\ G_1^* &= G_1 + \frac{B_1}{1+\beta_1 B_1} \end{aligned} \tag{2.26}$$

com

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{3}{3K_1+4G_1}, \\ \beta_1 &= -\frac{3(K_1+2G_1)}{5G_1(3K_1+4G_1)}, \\ A_1 &= \sum_{r=2}^{r=m} \frac{V_r}{[K_r-K_1]^{-1}-\alpha_1}, \\ B_1 &= \sum_{r=2}^{r=m} \frac{V_r}{[2(G_r-G_1)]^{-1}-\beta_1} \end{aligned} \tag{2.27}$$

em que K_1 é o menor valor de módulo de elasticidade volumétrico dentre as fases e G_1 é o menor valor de módulo de cisalhamento entre as fases.

As seguintes expressões reportam os valores do limite superior dos respectivos módulos:

$$\begin{aligned} K_m^* &= K_m + \frac{A_m}{1+\alpha_m A_m}, \\ G_m^* &= G_m + \frac{B_m}{1+\beta_m B_m} \end{aligned} \tag{2.28}$$

com

$$\begin{aligned}
\alpha_m &= -\frac{3}{3K_m + 4G_m}, \\
\beta_m &= -\frac{3(K_m + 2G_m)}{5G_m(3K_m + 4G_m)}, \\
A_m &= \sum_{r=1}^{r=m-1} \frac{V_r}{[K_r - K_m]^{-1} - \alpha_m}, \\
B_m &= \sum_{r=1}^{r=m-1} \frac{V_r}{[2(G_r - G_m)]^{-1} - \beta_m}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

em que K_m é o maior valor de módulo de elasticidade volumétrico dentre as fases e G_m é o maior valor de módulo de cisalhamento entre as fases.

Para ambos os módulos as inequalidades se mantém preservadas:

$$\begin{aligned}
K_1^* < K^* < K_m^*, \\
G_1^* < G^* < G_m^*
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Novamente vale notar que, ao se fazer os valores dos limites tenderem para o pior caso possível, obtém-se os seguintes limites superior e inferior para os dois módulos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} K_i V_i > K^* > \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} V_i/K_i}, \\
\sum_{i=1}^{m} G_i V_i > G^* > \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} V_i/G_i}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Por fim, de posse do módulo de elasticidade volumétrico e do módulo de cisalhamento, calculam-se os valores limites para a rigidez do compósito:

$$\begin{aligned}
E_1^* = \frac{9K_1^* G_1^*}{3K_1^* + G_1^*}, \\
E_m^* = \frac{9K_m^* G_m^*}{3K_m^* + G_m^*}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

O modelo de Mori-Tanaka também é comumente empregado para a modelagem mecânica de compósitos. Posteriormente Benveniste (1987) reapresenta o modelo por meio de uma abordagem mais direta, com foco e interpretações diferentes. Parte-se de condições de contorno homogêneas em deslocamento e tensão:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(S) = \boldsymbol{\epsilon}^0 \boldsymbol{x}, \\
\boldsymbol{\sigma}_n(S) = \boldsymbol{\sigma}^0 \boldsymbol{n}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

em que $\boldsymbol{u}(S)$ e $\boldsymbol{\sigma}_n(S)$ são o deslocamento e tensão aplicados sobre a superfície S. $\boldsymbol{\epsilon}^0$ e $\boldsymbol{\sigma}^0$ são a deformação e a tensão constante no domínio e n é o vetor externo normal à superfície S.

Define-se também:

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{\epsilon}} &= V_1\overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{(1)} + V_2\left\{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{(2)}\right\} = \boldsymbol{\epsilon}^0,\\ \overline{\boldsymbol{\sigma}} &= V_1\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} + V_2\left\{\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}\right\} = \boldsymbol{\sigma}^0\end{aligned} \tag{2.34}$$

em que $\overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{(2)}$ e $\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}$ são a deformação e tensão média dependente da orientação de uma partícula típica individual e as chaves simbolizam o valor médio sobre todas as direções. $\overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{(1)}$ e $\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)}$ são a deformação e tensão média na matriz, V_1 e V_2 são as frações volumétricas da matriz e inclusões respectivamente e as grandezas $\overline{\boldsymbol{\epsilon}}$ e $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ são a deformação e tensão média totais.

É também definido o tensor de rigidez efetiva $\boldsymbol{L}^*$ e o tensor de flexibilidade $\boldsymbol{M}^*$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{\sigma}} &= \boldsymbol{L}^*\overline{\boldsymbol{\epsilon}},\\ \overline{\boldsymbol{\epsilon}} &= \boldsymbol{M}^*\overline{\boldsymbol{\sigma}}\end{aligned} \tag{2.35}$$

sendo possível encontrar em Hill (1963) a representação destes tensores como:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}^* &= \boldsymbol{L}_1 + V_2\left[\left(\boldsymbol{L}_2 - \boldsymbol{L}_1\right)\boldsymbol{A}\right],\\ \boldsymbol{M}^* &= \boldsymbol{M}_1 + V_2\left[\left(\boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1\right)\boldsymbol{B}\right]\end{aligned} \tag{2.36}$$

em que $\boldsymbol{L}_i$ e $\boldsymbol{M}_i$ são os tensores de rigidez e flexibilidade das fases e os tensores $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são chamados de fatores de concentração, definidos como:

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{\epsilon}}^{(2)} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{\epsilon}^0,\\ \overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)} &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{\sigma}^0\end{aligned} \tag{2.37}$$

Desta forma, de posse dos fatores de concentração $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ é possível modelar e representar compósitos com diversas configurações de reforço. Fazendo-se uso dos resultados do trabalho de Eshelby e Peierls (1957), para o caso de partículas elipsoidais, estes fatores podem ser dados por:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{L}_\mathbf{1}^{-1}\left(\boldsymbol{L}_\mathbf{2} - \boldsymbol{L}_\mathbf{1}\right)\right]^{-1},\\ \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{L}_\mathbf{2}\left\{\left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S}\boldsymbol{L}_\mathbf{1}^{-1}\left(\boldsymbol{L}_\mathbf{2} - \boldsymbol{L}_\mathbf{1}\right)\right]^{-1}\right\}\boldsymbol{M}_\mathbf{1}\end{aligned} \tag{2.38}$$

em que $\boldsymbol{I}$ é o tensor identidade de quarta ordem e $\boldsymbol{S}$ é o tensor de Eshelby.

Para o caso particular de compósito reforçado por inclusões esféricas tem-se então para os valores do módulo de elasticidade volumétrico K^* e do módulo de cisalhamento G^*:

$$\begin{aligned}\frac{K^* - K_1}{K_2 - K_1} &= V_2\left\{1 + V_1\left[\frac{K_2 - K_1}{K_1 + \frac{3}{4}G_1}\right]\right\}^{-1},\\ \frac{G^* - G_1}{G_2 - G_1} &= V_2\left\{1 + V_1\left[\frac{G_2 - G_1}{G_1 + f_1}\right]\right\}^{-1}\end{aligned} \tag{2.39}$$

com $f_1 = G_1(9K_1 + 8G_1)/6(K_1 + 2G_1)$

De posse dos módulos equivalentes K^* e G^* é possível calcular o módulo de rigidez E^* equivalente para o compósito.

Vale notar que, desde então, vários trabalhos vêm fazendo uso, modificando e ampliando o modelo de Mori-Tanaka. Por exemplo, Gong, Li e Zhao (2011) e Imani *et al.* (2018) propõem modificações no modelo para modelar compósitos com alta taxa de porosidade e vazios de formatos diversos. Sadeghpour *et al.* (2020) propõem outra modificação para modelar compósitos reforçados com partículas de grafeno sujeitos a grandes deformações e escorregamento na interface inclusão/matriz. Yun *et al.* (2021) modificam o tensor de Eshelby para acomodar inclusões de nanotubo de carbono onduladas, levando em consideração comportamento elastoplástico e dano dúctil.

Ainda no sentido da modelagem termomecânica analítica, resta obter o coeficiente de expansão térmico do compósito. Lu (2013) e Bhouri *et al.* (2021) citam alguns dos modelos mais comumente empregados para se obter o coeficiente de expansão térmico equivalente, a começar pelo modelo de Voigt:

$$\alpha^* = \sum_{r=1}^{N} V_r \alpha_r \tag{2.40}$$

em que α^* é o coeficiente de expansão térmico equivalente, V_r é a fração volumétrica e α_r é o coeficiente de expansão térmico de cada fase r.

Analogamente, é possível empregar o modelo de Reuss:

$$\alpha^* = \frac{\sum_{r=1}^{N} V_r \alpha_r K_r}{\sum_{r=1}^{N} V_r K_r} \tag{2.41}$$

em que K_r é o módulo elástico volumétrico de cada fase r.

No modelo de Kerner (1956) é assumido que o compósito é macroscopicamente isotrópico e homogêneo, com partículas esféricas imersas em matriz isotrópica. Assim, o coeficiente de expansão térmico é dado por:

$$\alpha^* = \alpha_p V_p + \alpha_m V_m + \frac{(\alpha_p - \alpha_m) V_p V_m (K_p - K_m)}{V_p K_p + V_m K_m + (3 K_m K_p / 4 G_m)} \tag{2.42}$$

com α_p e α_m sendo os coeficientes de expansão da partícula e matriz respectivamente, V_p a fração volumétrica da fase da partícula e V_m a fração volumétrica da matriz, K_p o módulo elástico volumétrico da partícula e K_m o módulo elástico volumétrico do material da matriz e G_m o módulo de cisalhamento da matriz.

O modelo de Schapery (1968) é capaz de produzir limites superiores e inferiores mais justos que os limites dados pelos modelos de Voigt e Reuss:

$$\begin{aligned} \alpha^{sup} &= V_p \alpha_p + V_m \alpha_m + \left[\frac{4G_m}{K_{HS}}\right] \left[\frac{(K_{HS} - K_p)(\alpha_m - \alpha_p) V_p}{4G_m + 3K_p}\right]; \\ \alpha^{inf} &= V_p \alpha_p + V_m \alpha_m + \left[\frac{4G_p}{K_{HS}}\right] \left[\frac{(K_{HS} - K_m)(\alpha_p - \alpha_m) V_m}{4G_p + 3K_m}\right] \end{aligned} \tag{2.43}$$

em que G_p é o módulo de cisalhamento das partículas e K_{HS} é o módulo elástico volumétrico médio entre os valores limites K_{HS+} e K_{HS-} dados por Hashin e Shtrikman (1963):

$$\begin{aligned} K_{HS+} &= K_p + V_m \left[\frac{1}{K_m - K_p} + \frac{3V_p}{3K_p + 4G_p} \right]^{-1}; \\ K_{HS-} &= K_m + V_p \left[\frac{1}{K_p - K_m} + \frac{3(1 - V_p)}{3K_m + 4G_m} \right]^{-1} \end{aligned} \tag{2.44}$$

No caso de modelagem de materiais que apresentem deformações inelásticas, em especial deformações plásticas, comenta-se alguns modelos analíticos. No trabalho de Gavazzi e Lagoudas (1990) é descrito o procedimento para contemplar deformações plásticas no modelo de Mori-Tanaka. Assumindo que há encruamento da matriz do compósito de acordo com o critério de Von Mises, a seguinte função descreve a superfície de plastificação:

$$f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha})^T \boldsymbol{D} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) - Y^2 = 0 \tag{2.45}$$

com $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}\}^T$ sendo a tensão média na matriz e $\boldsymbol{\alpha}$ um vetor que corresponde ao centro da superfície de plastificação no espaço de tensões. $\boldsymbol{D}$ é uma matriz numérica de constantes dada por

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \; a = 1, b = -\frac{1}{2}, c = 3, \tag{2.46}$$

enquanto Y é a tensão inicial de plastificação.

É também assumido que a movimentação da superfície de plastificação no espaço de tensões se dá na mesma direção da deformação aplicada. Descreve-se o módulo tangente plástico instantâneo H para um carregamento qualquer por

$$H = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^p} \tag{2.47}$$

em que $d\bar{\sigma} = (3/2 ds_{ij} ds_{ij})^{1/2}$ e $d\bar{\varepsilon}^p = (2/3 d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij})^{1/2}$, com s_{ij} sendo a parte deviatória do tensor de tensões. A matriz numérica de flexibilidade instantânea $\boldsymbol{M}_0$ da matriz do compósito, definida por

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}_0 d\boldsymbol{\sigma}, \tag{2.48}$$

pode ser escrita como $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{M}_0^e + \boldsymbol{M}_0^p$, em que $\boldsymbol{M}_0^e$ é a matriz de flexibilidade elástica e $\boldsymbol{M}_0^p$ é uma matriz correspondente a parcela plástica, dada por

$$\boldsymbol{M}_0^p = \frac{3}{2H} \frac{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^T}{\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{q}^*} \tag{2.49}$$

com $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha})$ e $q^* = q_k$ para $k = 1, 2, 3$ e $q^* = \frac{1}{2} q_k$ para $k = 4, 5, 6$.

No trabalho de Eltaher, Attia e Wagih (2020) é apresentado um modelo para consideração de deformações plásticas em materiais de gradação funcional. Tal classe de materiais possuem como característica a variação contínua e suave de suas fases ao longo de uma determinada direção y. Em seu trabalho, é utilizado o modelo Tamura-Tomota-Ozawa ((TAMURA; TOMOTA; OZAWA, 1973)) para representação da plastificação multilinear. Entende-se que a deformação plástica ocorra na matriz do compósito e o material da fase das inclusões é considerado elástico. Segundo o modelo Tamura-Tomoto-Ozawa (TTO) as propriedades mecânicas que regem o modelo de plasticidade em função da direção y são dadas por:

$$\begin{aligned} E(y) &= \left[\left(\frac{q + E_c}{q + E_m}\right) V_m E_m + V_c E_c\right] \Big/ \left[\left(\frac{q + E_c}{q + E_m}\right) V_m + V_c\right] \\ \sigma_Y(y) &= \sigma_{Ym}\left[V_m + \left(\frac{q + E_m}{q + E_c}\right)\frac{E_c}{E_m} V_c\right] \\ H(y) &= \left[\left(\frac{q + E_c}{q + H_m}\right) V_m H_m + V_c E_c\right] \Big/ \left[\left(\frac{q + E_c}{q + H_m}\right) V_m + V_c\right] \end{aligned} \tag{2.50}$$

em que E_m, σ_{Ym} e H_m são respectivamente o módulo de elasticidade, a tensão limite de plastificação e o módulo tangente da matriz do compósito. V_m e V_c são respectivamente as frações volumétricas da matriz do compósito e inclusões. E_c é o módulo de elasticidade da fase da inclusão, enquanto q é um parâmetro referente ao modelo que representa a razão de transferência de tensão para deformação. O parâmetro empírico q deve ser determinado de forma experimental ou numérica a depender dos materiais que constituem as fases do compósito.

Por fim, o coeficiente de Poisson também é dado em função de y por meio da equação:

$$\nu(y) = \nu_m V_m + \nu_c V_c \tag{2.51}$$

com ν_m e ν_c sendo respectivamente os coeficientes de Poisson da matriz do compósito e da fase das inclusões.

Dos modelos de ordem numérica para modelagem termomecânica, é possível destacar os modelos que também fazem uso da técnica do elemento volumétrico representativo. No trabalho de Bhouri *et al.* (2021) é feita investigação do uso de grafite em compósito de matriz de alumínio a fim de melhorar a durabilidade e desempenho sob solicitações termomecânicas.

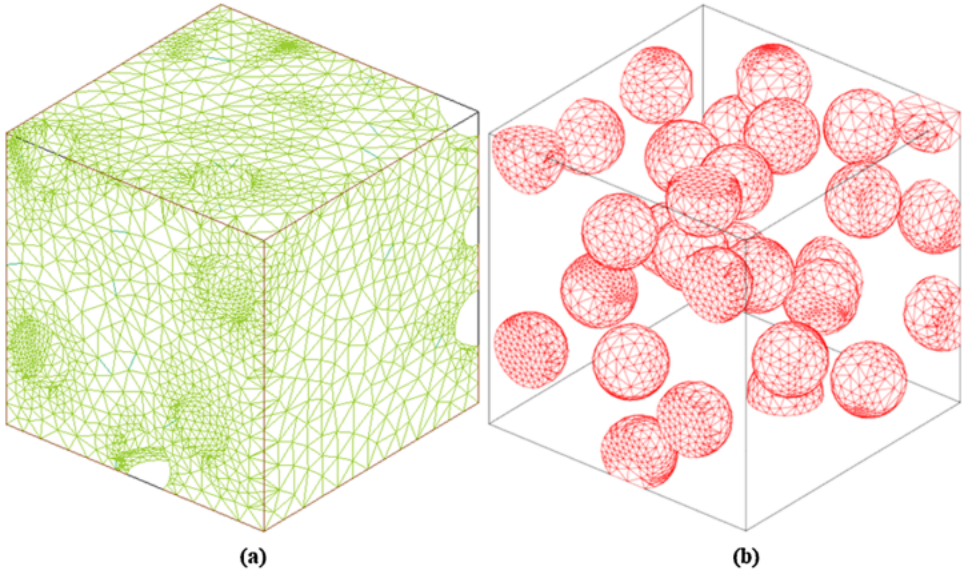
Para tanto, foi realizada a modelagem do compósito empregando a técnica do elemento volumétrico representativo para diversas frações volumétricas de incorporação de partículas de grafite. A primeira questão a ser respondida ao se utilizar a técnica do elemento volumétrico representativo é descobrir o menor volume possível que seja de fato representativo do compósito. Desta forma, inicialmente foram realizadas várias simulações

com a mesma fração volumétrica, mas com número variável de partículas até se obter baixa variância nos resultados obtidos para o parâmetro equivalente calculado.

Neste caso, foi adotado um volume representativo que contenha 30 partículas esféricas uniformemente distribuídas. A figura 2.19 mostra as malhas de elementos finitos para a matriz (figura 2.19a) e inclusões esféricas de grafite (figura 2.19b). Ao todo foram empregados para esta malha em específico 51401 elementos finitos tetrahédricos de aproximação linear para a matriz e 39408 elementos para as partículas.

Para realizar o processo de geração de malha foi empregado um laborioso procedimento de amostragem das partículas, garantindo que o compósito gerado possuísse as características desejadas e fossem evitados defeitos na geometria. São reportadas dificuldades no processo de malhamento, principalmente no momento em que há proximidade entre partículas ou partículas e limites do domínio, onde há a necessidade de grande número de elementos finitos para compatibilização. Também foi reportado dificuldades para gerar compósitos com frações volumétricas maiores que 25%, pois à partir deste momento o algoritmo de amostragem começa a deixar de convergir.

Figura 2.19 – (a)Malha de elementos finitos tetrahédricos para representar a matriz (b)Malha de elementos finitos para as 30 partículas esféricas.



Fonte: Bhouri *et al.* (2021)

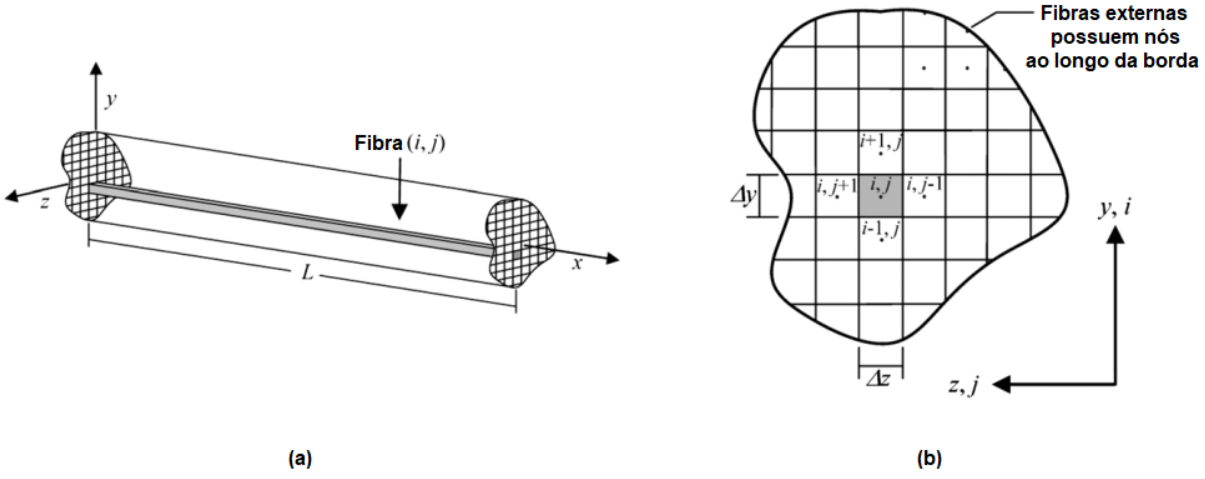
Após a obtenção do valor do coeficiente de expansão térmica equivalente, foi realizada comparação com valores obtidos por meio de diversos modelos analíticos. Foi encontrada boa concordância entre os valores do RVE e dos modelos analíticos comparados. O modelo de Schapery (1968) foi o que reportou menor intervalo de valores limites e foi o que mais próximo ficou dos valores encontrados pelo RVE. Com o aumento da fração volumétrica de grafite, o valor do coeficiente de expansão térmico tende a diminuir. Além do mais, a porosidade também possui forte influência nos valores de expansão térmica.

2.3 Modelos por embutimento

Outra forma de incluir elementos heterogêneos no domínio é pela técnica de embutimento, podendo variar bastante na sua forma e implementação de acordo com os autores. Cada uma das metodologias possui vantagens e desvantagens frente outras técnicas e modelos (homogeneização e/ou discreto), caracterizando sua empregabilidade de acordo com a necessidade. Por meio deste tipo de modelagem também se deseja a correta modelagem de materiais compósitos sem o aumento no número de graus de liberdade do problema. Entretanto, de forma geral, deseja-se também capturar algum comportamento local na estrutura. A seguir são apresentados alguns modelos por embutimento encontrados na literatura.

Nos trabalhos de Jeffers e Sotelino (2009) e Jeffers e Sotelino (2012) é proposto um modelo por embutimento para elementos de pórtico 3D compostos por fibras. Tal modelo visa conseguir representar o fenômeno de condução de calor em elementos de pórtico, compostos por fibras de materiais distintos ou não, sem o acréscimo de custo computacional gerado pela inclusão das fibras. De forma geral, a ideia é subdividir a seção transversal do elemento finito de pórtico por diferenças finitas, e calcular a condução térmica através desta seção. A questão da acurácia dos resultados fica por conta do grau de refinamento da malha da seção transversal, ou seja, a quantidade de fibras que compõem o elemento de pórtico. Como já dito, estas fibras podem ser do mesmo material, ou de materiais distintos. A figura 2.20 mostra como o elemento de pórtico espacial é definido como um conjunto de fibras.

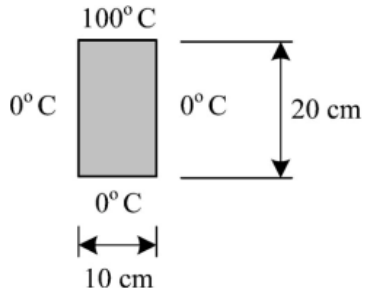
Figura 2.20 – Definição de um elemento finito de pórtico com seção transversal composta por fibras discretas.



Fonte: Jeffers e Sotelino (2012)

Como demonstração dos resultados de tal técnica, apresenta-se um dos exemplos numéricos encontrados em Jeffers e Sotelino (2009). Trata-se da análise de condução de calor através de uma seção retangular sujeita a condições de contorno de Dirichlet. A figura 2.21 mostra a condição de contorno imposta sobre a seção transversal.

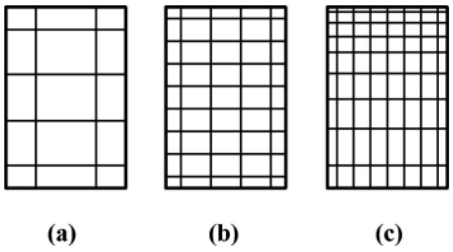
Figura 2.21 – Condição de contorno sobre a seção transversal.



Fonte: Jeffers e Sotelino (2009)

A fim de se avaliar a acurácia dos resultados, foram analisados 3 casos com variação no refinamento da seção transversal. A figura 2.22 mostra as 3 malhas estudadas e a quantidade de fibras que compõem cada uma delas.

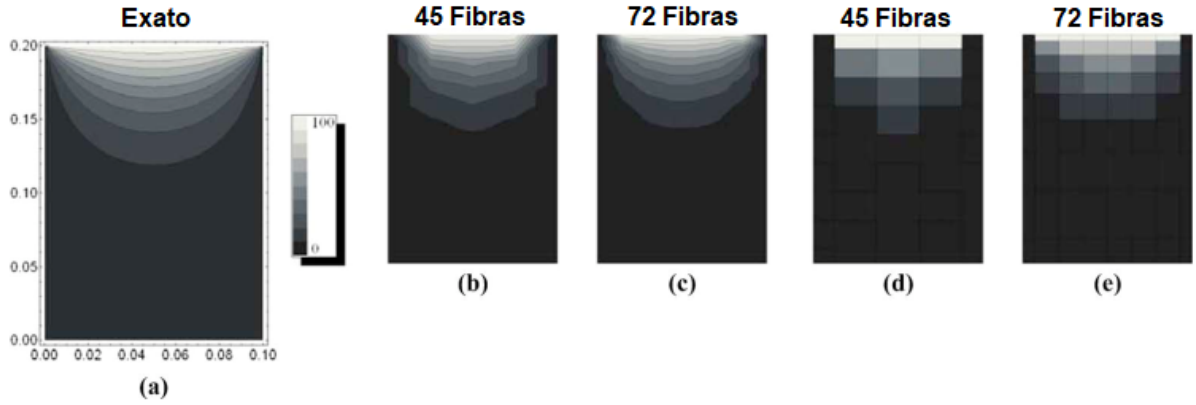
Figura 2.22 – Discretização da seção transversal do elemento de pórtico para o problema de condução térmica 2D na seção. (a) 15 fibras. (b) 45 fibras. (c) 72 fibras.



Fonte: Jeffers e Sotelino (2009)

Percebe-se pela figura 2.23 que, ao se aumentar a quantidade de fibras por meio do refinamento da malha da seção transversal, é possível obter um resultado mais próximo do resultado analítico esperado. À partir de 72 fibras, realizando-se uma interporlação dos resultados de temperatura entre estas, já é possível obter um resultado muito próximo do exato.

Figura 2.23 – Distribuição de temperatura na seção 2D. (a)-(c): curvas de isotermas. (d)-(e): temperaturas nas fibras discretas.



Fonte: Jeffers e Sotelino (2009)

A tabela 2 mostra os resultados de custo computacional das análises térmicas. Percebe-se que, para uma análise 3D de condução térmica através da seção transversal de um elemento de barra 3D, há uma redução considerável no tempo de processamento quando comparado com o método tradicional (discretização total com elementos finitos 3D no ABAQUS). Nota-se também uma redução drástica no número de graus de liberdade do problema térmico. Entretanto, para análises puramente 2D (caso o interesse seja apenas a distribuição de temperatura através da seção transversal) o método proposto não apresenta visível vantagem.

Tabela 2 – Comparação do custo computacional entre os elementos de fibra e simulação equivalente no software ABAQUS.

	Número de	Tempo total (s)
Análise	Graus de Liberdade	Caso C
2D	60	0,40
3D	2117	3,50
Elementos de Fibra	135 à 216	0,80

Fonte: Adaptado de Jeffers e Sotelino (2009)

Por fim ressalta-se que, para análises de pórtico espacial, a técnica apresentada por Jeffers e Sotelino (2012) apresenta vantagens muito interessantes, permitindo assim a realização de análises termomecânicas mais complexas, completas e numa fração do tempo do método tradicional.

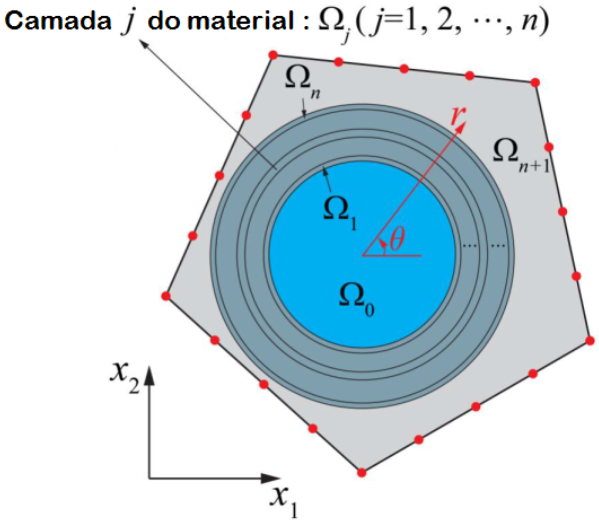
No trabalho de She, Wang e Li (2019) é proposto um modelo híbrido Trefftz-MEF (Hybrid Trefftz-FEM, HT-FEM) para contemplar materiais compósitos com inclusões. O sistema HT-FEM assume a existência de dois campos independentes: (i) um campo interno definido dentro do elemento finito, e (ii) um campo definido ao longo do contorno do elemento.

Um funcional variacional híbrido é introduzido para conectar estes dois campos e todas as integrais de domínio são transformadas em integrais de contorno, permitindo assim a construção de elementos finitos poligonais diversos.

Devido a independência do campo intra-elemento, efeitos locais como fissuras, carregamentos discontínuos, vazios e inclusões podem ser capturados de forma precisa sem a necessidade de remalhamento, como no caso do método dos elementos finitos convencional.

Estendendo trabalhos anteriores com HT-FEM, She, Wang e Li (2019) propõem um elemento finito poligonal com inclusão interna e revestimento para análises térmicas. Tal elemento foi estudado e aplicado para o caso de materiais compósitos reforçados por fibras. A figura 2.24 mostra o esquema de um elemento finito poligonal de 5 lados com a presença de inclusão e diversas camadas heterogêneas. Percebe-se que é possível inserir uma partícula por elemento finito e esta partícula pode possuir quantas camadas desejar.

Figura 2.24 – Modelo de partícula embutida num elemento finito poligonal.

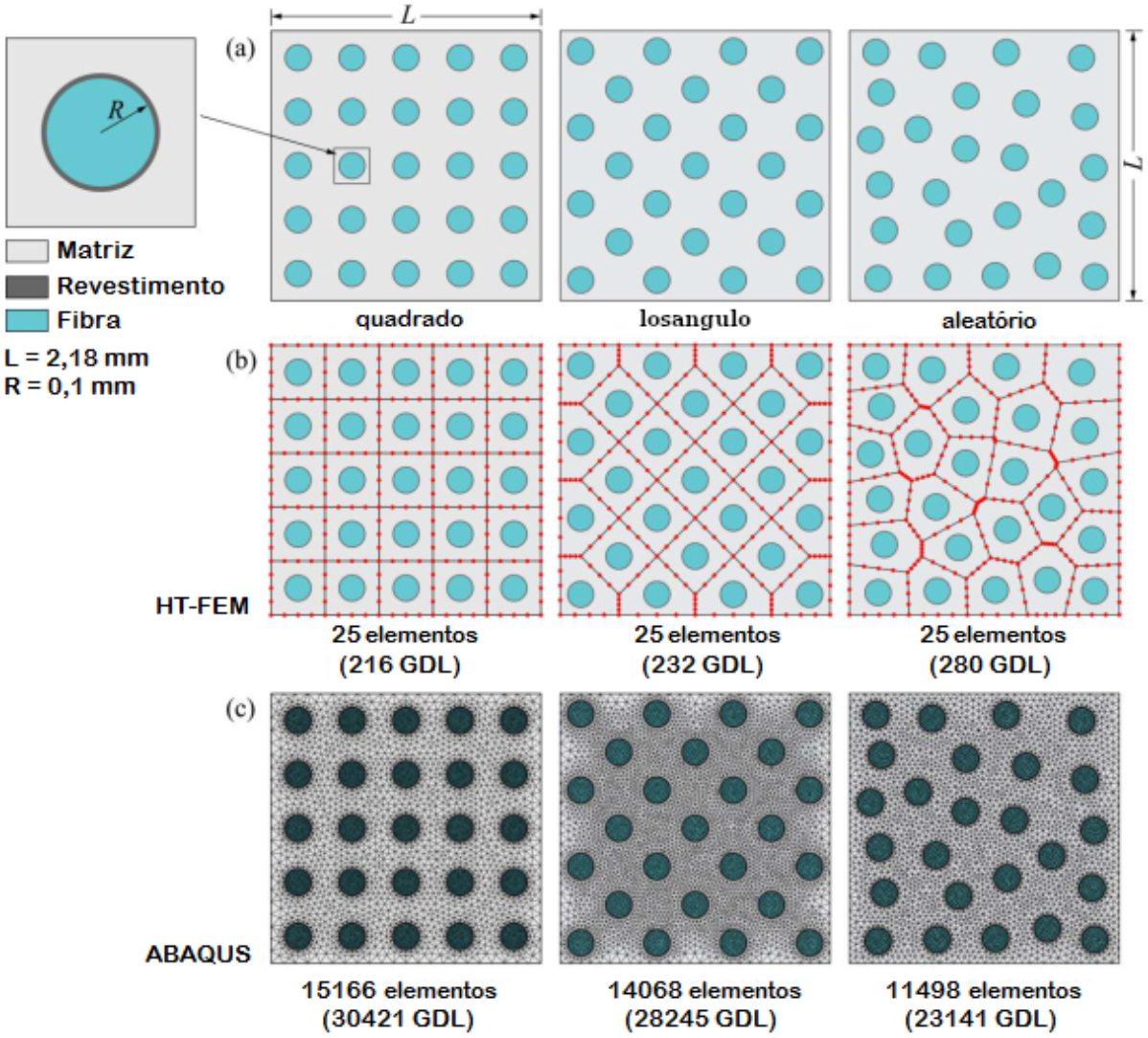


Fonte: Adaptado de She, Wang e Li (2019)

Como um dos exemplos numéricos e demonstração da capacidade do modelo HT-FEM, She, Wang e Li (2019) realizam a modelagem da seção transversal de um material reforçado com fibras que possuem um revestimento. Foram adotados 3 tipos de padrões de espalhamento de fibras: (i) quadrado, (ii) losangulo e (iii) aleatório. Alternativamente foi realizada a mesma análise no software ABAQUS a fim de comparação e validação dos resultados.

A figura 2.25 mostra a geometria adotada para cada um dos 3 casos analisados (quadrado, hexagonal e aleatório), juntamente com as malhas geradas pelo HT-FEM e ABAQUS. A fileira (a) se refere à geometria dos problemas, a fileira (b) mostra a malha de elementos finitos pelo método HT-FEM e por fim a fileira (c) mostra a malha de elementos finitos tradicional gerada pelo ABAQUS. Nota-se que a quantidade de graus de liberdade para o HT-FEM é muito menor que a quantidade obtida pela discretização completa pelo ABAQUS. Percebe-se também que o modelo HT-FEM permite uma modelagem mais simples do problema em questão.

Figura 2.25 – Distribuição de fibras ao longo da seção. Foram analisados 3 padrões: quadrado, hexagonal e aleatório.

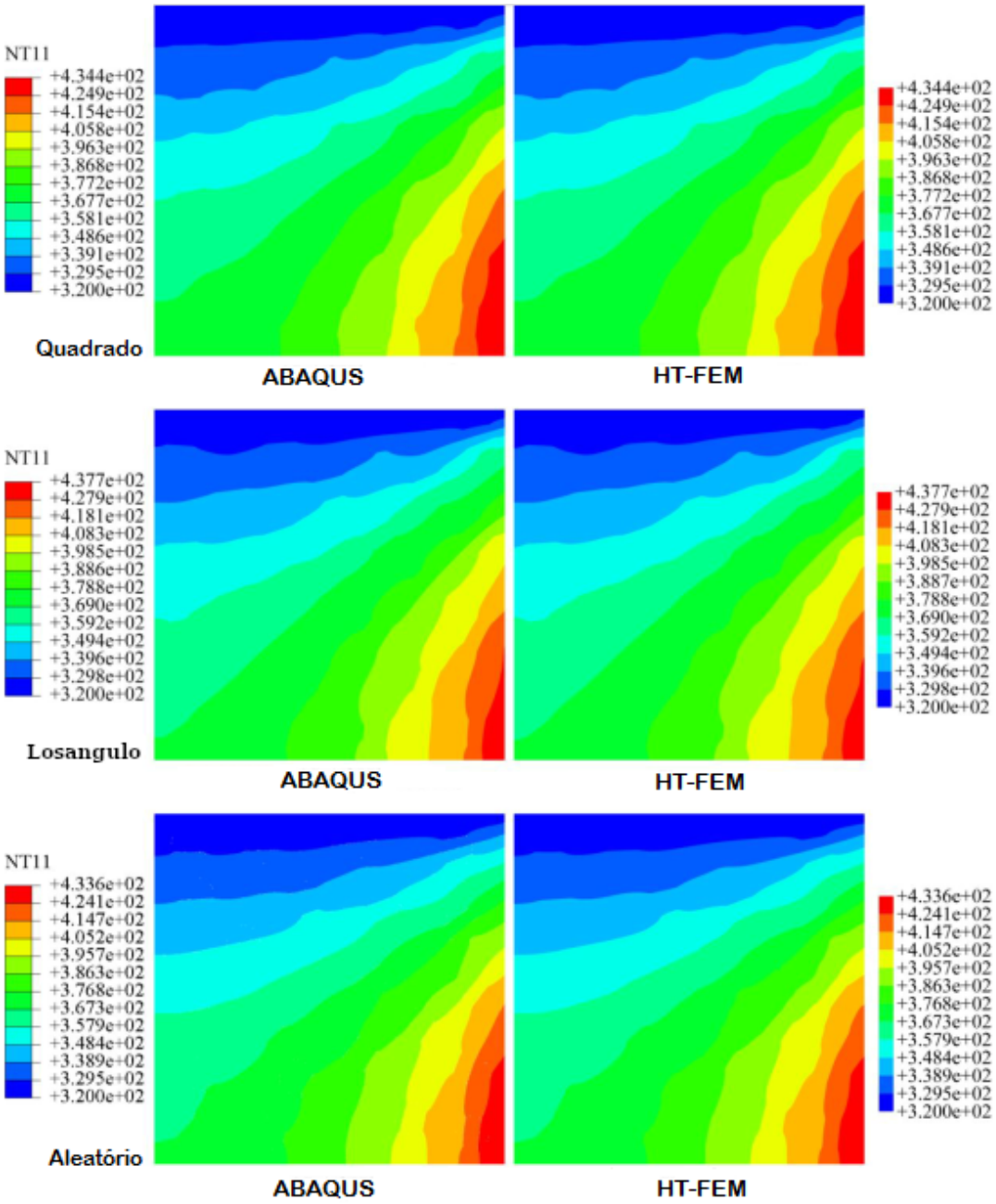


Fonte: Adaptado de She, Wang e Li (2019)

Por fim, a figura 2.26 mostra o resultado da análise térmica estacionária. É possível notar que os valores de temperatura resultaram praticamente iguais aos gerados pelo método tradicional, entretanto com um número muito inferior de graus de liberdade.

Tal técnica de imersão de materiais heterogêneos dentro do domínio pelo HT-FEM se mostra bastante interessante pela simplicidade na geração da malha, acurácia dos resultados e principalmente pela drástica redução nos graus de liberdade (e por consequência, custo computacional) do problema.

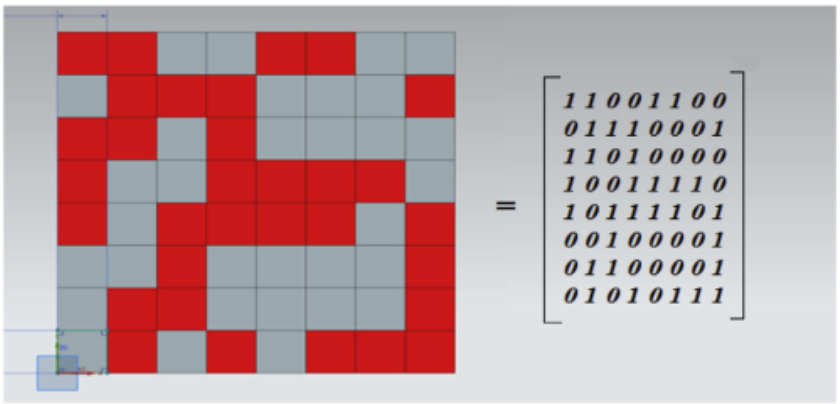
Figura 2.26 – Mapa de distribuição de temperatura para o exemplo numérico. Percebe-se que os resultados praticamente são os mesmos em relação a completa discretização do domínio.



Fonte: Adaptado de She, Wang e Li (2019)

No trabalho de Chatterjee *et al.* (2019) é proposto um modelo para análise térmica de materials compósitos com incorporação de filler. Mais especificamente para materiais poliméricos (Epoxy) com incorporação de partículas de alumínio. Segundo seu trabalho, de acordo com imagens obtidas por microscopia eletrônica, pode-se assumir que as partículas de alumínio possuem formatos cuboide retangular ou cilíndrico. De posse desta hipótese, é possível realizar a discretização do domínio em pedaços (neste caso) retangulares para simular o espalhamento de partículas de alumínio na matriz polimérica. Tal espalhamento pode ser guardado de forma eficiente no formato de uma matriz, em que os valores 0 representam o material polimérico do substrato e o valor 1 representa a partícula de alumínio. A figura 2.27 mostra a matriz polimérica de resina Epoxy em cinza e as partículas de alumínio em vermelho, junto com sua representação numérica em formato de matriz.

Figura 2.27 – Amostra com discretização 8x8 com partículas (Alumínio) dispersas em material polimérico (Epoxy). Partículas adjacentes funcionam como caminhos preferenciais para a condução de calor através do sólido. Neste caso, a fração volumétrica é de $\phi = 50\%$.

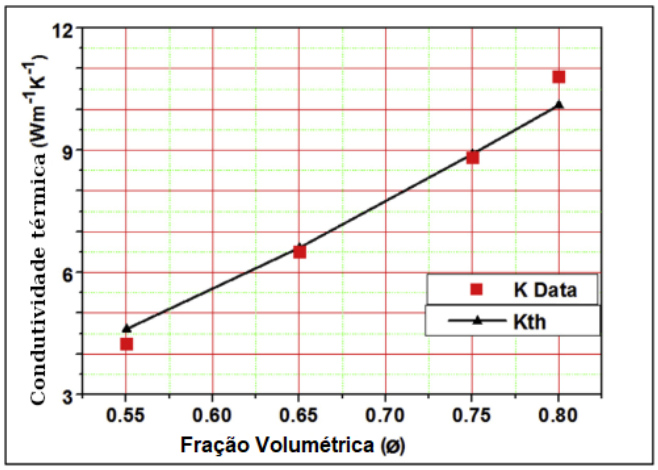


Fonte: Adaptado de Chatterjee *et al.* (2019)

Desta maneira, partículas adjacentes eventualmente formariam caminhos preferenciais de condução de calor ao longo da matriz. Também é formulada uma metodologia para considerar o caso de transferência de calor entre partículas adjacentes diagonalmente, calculando-se um parâmetro de condução térmico equivalente.

A figura 2.28 mostra os resultados do parâmetro de condutividade térmica em relação à fração volumétrica de partículas no compósito. Nota-se ótima concordância do modelo numérico com os resultados experimentais.

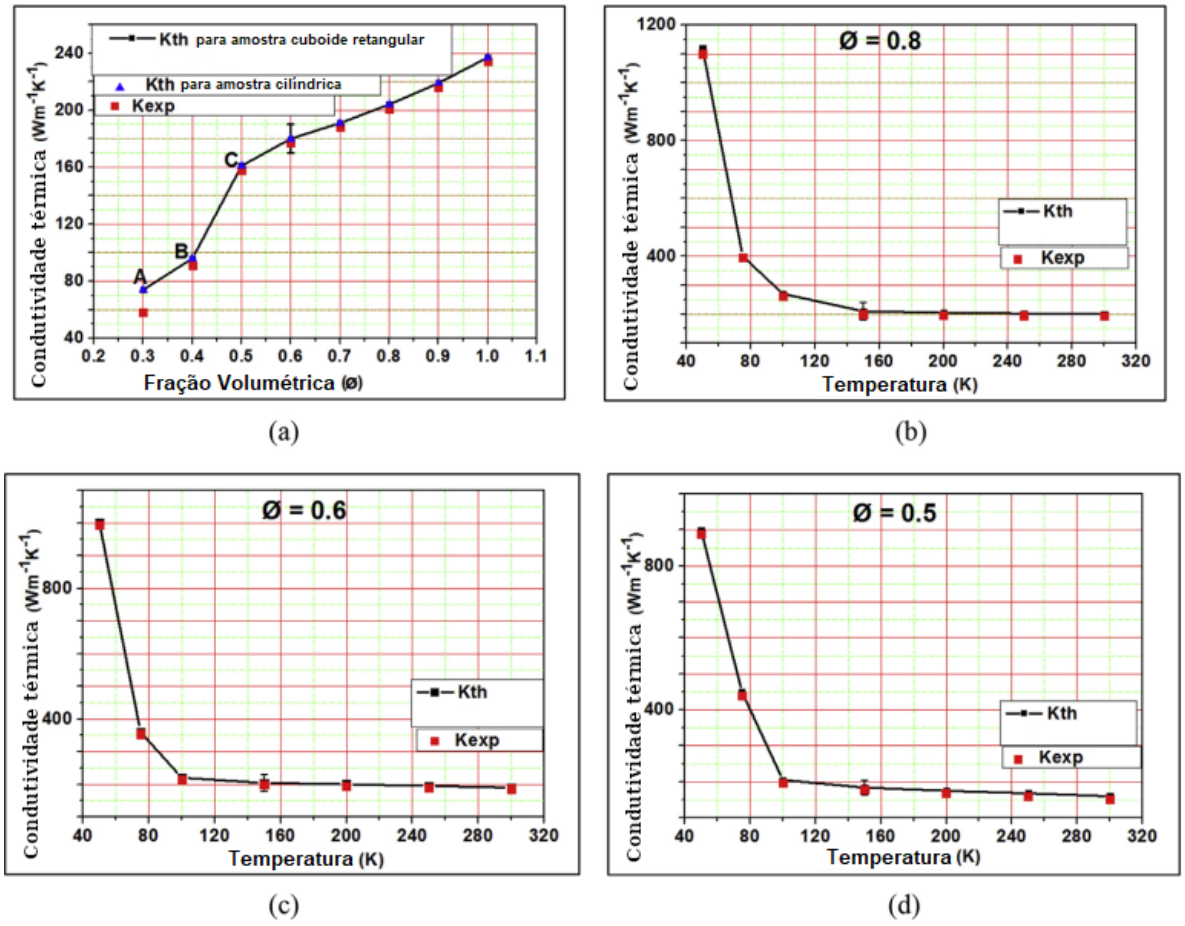
Figura 2.28 – Comparação entre valores numéricos e experimentais de condutividade térmica para o compósito $[Al_2O_3 + \text{Polietileno}]$ a 300K em diversas frações volumétricas ϕ. Dados experimentais para comparação são do trabalho de Devpura, Phelan e Prasher (2000).



Fonte: Adaptado de Chatterjee *et al.* (2019)

A figura 2.29 mostra diversos gráficos de comparação entre os valores de condutividade numéricos e experimentais. Os dados experimentais foram obtidos por meio do trabalho de Verma *et al.* (2017), para o caso de resina Epoxy pura e compósito de Epoxy + Alumínio, com fração volumétrica de filler pré-definida e amplitude de temperatura entre 50K e 300K. Perda de calor por convecção foi minimizada ao aplicar vácuo sobre a amostra durante o ensaio e a perda de calor por radiação foi minimizada ao efetuar múltiplas camadas de isolamento térmico. De acordo com a figura 2.29a o trecho A-B, no qual se encontram baixos valores de condutividade térmica e fração volumétrica de filler, se dá pelo fato das partículas estarem suficientemente dispersas de forma a não conseguirem formar pontes de calor e caminhos preferenciais. Entretanto, ao se aumentar a proporção de filler, nota-se um salto significante na condutividade térmica, representado pelo trecho B-C. Deve-se a este salto o surgimento de caminhos preferenciais de condução de calor pelo fato de, neste momento, as partículas estarem suficientemente próximas entre si. Após o ponto C, o aumento da condutividade térmica se dá de forma gradual e linear com o incremento do percentual volumétrico de filler. As figuras 2.29b, 2.29c e 2.29d mostram os valores de condutividade térmica do compósito para várias frações volumétricas de *filler* em função da temperatura. Percebe-se que a técnica proposta é capaz de modelar satisfatoriamente este tipo de compósito.

Figura 2.29 – Gráficos de comparação entre valores de condutividade térmica numéricos e experimental para material compósito de Epoxy + Alumínio. (a) Comparação entre valores experimental e numéricos para diferentes valores de proporção de filler (ϕ) à 300K. (b)-(d) Comparação entre valores numéricos e experimentais em diferentes proporções volumétricas de filler e temperaturas.

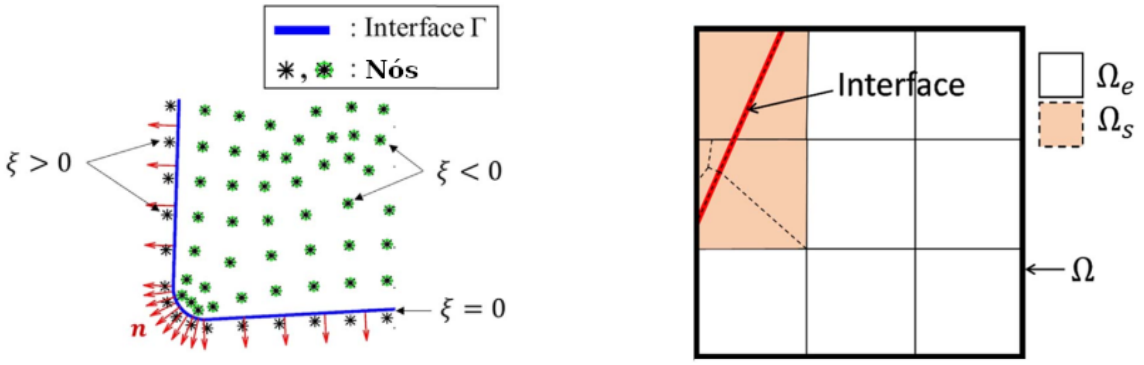


Fonte: Adaptado de Chatterjee *et al.* (2019)

Para o caso de modelo termomecânico por técnica de embutimento, comenta-se sobre o modelo de Bencheikh, Bilteryst e Nouari (2017), que trata de modelar e estudar compósitos reforçados por fina camada de material. É proposto então um modelo multi-escala de filmes finos para análises termomecânicas de usinagem. O modelo faz uso do método dos elementos finitos generalizados com funções level-set nos elementos localmente enriquecidos.

A figura 2.30a mostra a interface Γ descrita pela função level-set e sua relação com os nós adjacentes. De acordo com a posição dos nós em relação à interface, estes serão posteriormente enriquecidos ou não, sendo desta forma demarcada a região que representa a cobertura de outro material. O valor ξ serve para identificar quando um nó se encontra à frente ou atrás da interface. Já a figura 2.30b mostra que apenas os elementos finitos que são atravessados pela interface é que passam pelo processo de enriquecimento. Estes elementos finitos compõem a região Ω_s.

Figura 2.30 – Definição da interface entre as fases do compósito e identificação dos elementos e nós a serem enriquecidos.



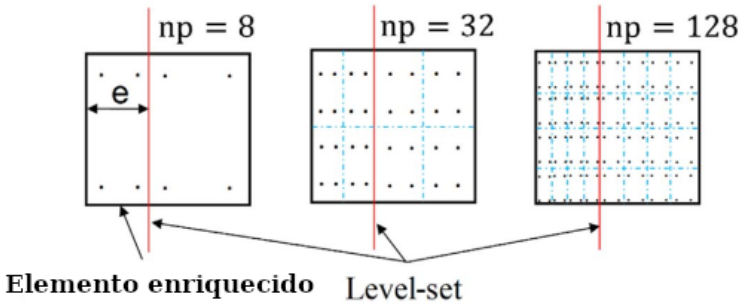
(a) Identificação dos nós a serem enriquecidos em função de sua posição relativa à interface Γ.

(b) Verificação dos elementos convencionais (Ω_e) e elementos a serem enriquecidos (Ω_s).

Fonte: Adaptado de Bencheikh, Bilteryst e Nouari (2017)

A figura 2.31 mostra parte do processo de enriquecimento do elemento finito quando este é atravessado pela função level-set, mais especificamente o aumento no número de pontos de integração por meio de subdivisões no interior o elemento finito.

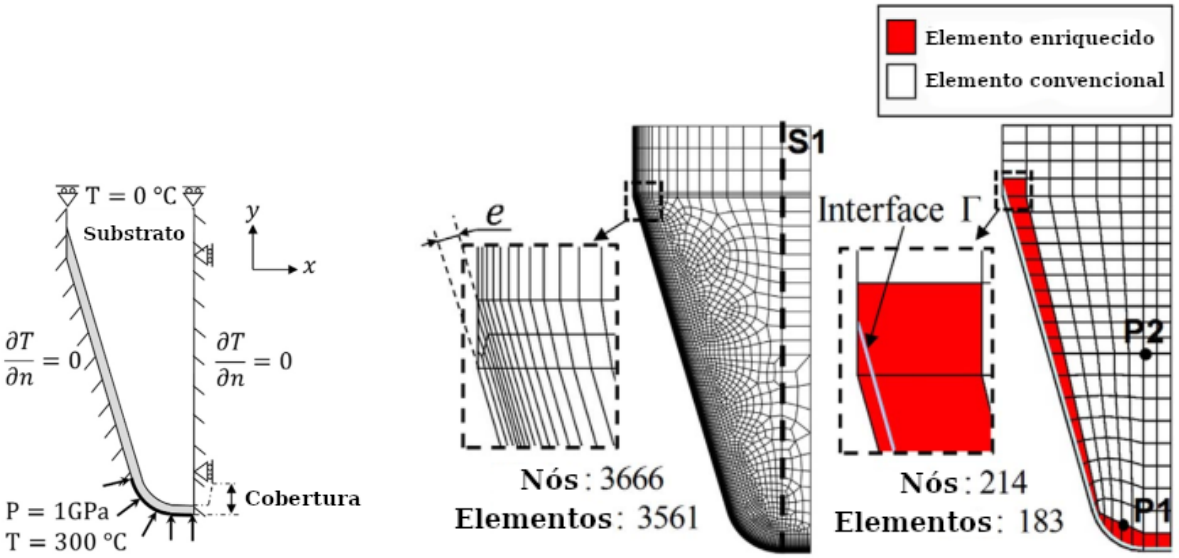
Figura 2.31 – Processo de subdivisões do domínio num elemento finito para incorporação de mais pontos de integração, proporcionando maior resolução e acurária da resposta.



Fonte: Adaptado de Bencheikh, Bilteryst e Nouari (2017)

A figura 2.32 mostra o problema analisado de interesse. Trata-se de uma ponta de ferramenta de usinagem, composta por um substrato de carbeto de tungstênio-cobalto e uma cobertura de óxido de alumínio de $10\mu m$. As condições de contorno dos campos térmico e mecânico estão dadas na figura 2.32a. Pela figura 2.32b é possível ver a malha de elemento finitos convencional utilizada para referência e a malha de elementos finitos do modelo empregado, com seus respectivos números de nós e elementos finitos. Também é possível perceber quais os elementos finitos são identificados para o processo de enriquecimento e quais serão mantidos convencionais.

Figura 2.32 – (a)Esquema do problema de interesse analisado no trabalho. (b)Malhas de elementos finitos para o problema referência e para o modelo proposto.



(a) (b)

Fonte: Adaptado de Bencheikh, Bilteryst e Nouari (2017)

Por fim, o modelo foi capaz de reproduzir e modelar satisfatoriamente o comportamento do compósito, sem haver a necessidade de homogeneização ou excessiva discretização do domínio. Regiões de cobertura com valores de dimensão tão diferentes com o resto do domínio apresentam dificuldades bem significativas. Pela técnica da discretização total é necessário abrir mão de um número muito expressivo de elementos finitos para garantir a compatibilização dos nós e tamanho regular dos elementos finitos.

2.4 Comentários quanto aos modelos térmicos para materiais compósitos

Diante do exposto sobre o processo de modelagem térmica e termomecânica de compósitos, percebe-se que há diversos desafios a serem superados. O processo de discretização completa do domínio pode se tornar inviável a medida que o número de elementos discretos a serem contemplados aumenta. A explosão no número de elementos finitos aumenta significativamente o custo computacional, além de possíveis problemas quanto a topologia da malha resultante.

Dos processos de homogeneização, tais modelos trazem bons resultados quando a estrutura possui propriedades e arranjo dos seus componentes favoráveis a aplicação da metodologia. Tais características são, por exemplo, o arranjo periódico e propriedades térmicas lineares dos materiais constituintes. Entretanto, a acurácia dos resultados numéricos passa a diminuir a medida que o arranjo dos diversos componentes do compósito deixa de ser periódico. Outra desvantagem é na modelagem de materiais com propriedades térmicas não linear, já que, para se calcular os parâmetros térmicos homogeneizados, é necessário realizar novamente todo o procedimento de homogeneização.

Os modelos baseados em processos de embutimentos possuem diferentes abordagens, cada qual com suas vantagens e desvantagens. Dos modelos por embutimento revisados e expostos, percebe-se que estes variam muito em sua metodologia e aplicação de acordo com seus objetivos. De forma geral, busca-se evitar ou reduzir os problemas encontrados com a modelagem convencional e por homogeneização de compósitos, além de também capturar ou modelar fenômenos interessantes ao escopo de estudo.

O modelo por embutimento desenvolvido neste trabalho para problemas termomecânicos pretende contribuir para o estado da arte na modelagem de materiais compósitos reforçados por fibras e/ou partículas. A formulação proposta permite a inserção de quantidades quaisquer de elementos de fibra e/ou partículas na matriz, independentemente da topologia das malhas de elementos finitos empregada e sem aumento no número de graus de liberdade do sistema resultante. Também permite a consideração de propriedades térmicas não lineares das fases do compósito com a mesma eficiência. Acoplando-se com o modelo mecânico dado pelo Método dos Elementos Finitos Posicional, tal modelo termomecânico também é capaz de representar não linearidade geométrica da estrutura. Por fim, a não linearidade física do material também é contemplada por meio do modelo de plasticidade implementado no modelo mecânico, cujos parâmetros também são dependentes do campo de temperatura.

3 TERMODINÂMICA

A Termodinâmica é a área da ciência responsável por estudar a relação entre diversas formas de energia e suas transformações dentro de sistemas. Sua área de concentração está na mudança e transcorrer da energia de sistemas macroscópicos compostos por um grande número de partículas (WANG, 2012).

É dito que a termodinâmica é composta por quatro leis, desenvolvidas e validadas empiricamente ao longo de décadas, por meio diversos pesquisadores como James Watt, Sadi Nicolas Carnot, James Prescott Joule, Julius Robert von Mayer, Rudolph Clausius, dentre outros A lei zero da termodinâmica estabelece que se dois sistemas estão em equilíbrio térmico com um terceiro sistema, então estes dois sistemas também estão em equilíbrio térmico entre si. A primeira lei da termodinâmica versa sobre a conservação de energia em um sistema, baseando-se na equivalência entre calor e trabalho. A segunda lei da termodinâmica trata do fluxo de calor entre dois corpos que possuem temperaturas diferentes, no qual é impossível construir um sistema que opera em ciclos e transfira calor de um corpo mais frio para um mais quente sem a realização de trabalho sobre o sistema pelo entorno. Por fim, a terceira lei da termodinâmica define as condições do sistema quando este se aproxima do zero absoluto. (WINTERBORNE; TURAN, 2015).

Outros aspectos, em maior detalhe, podem ser encontrados em Winterborne e Turan (2015) e em Lienhard IV e Lienhard V (2019). A seguir, as primeira e segunda leis da termodinâmica são apresentadas.

3.1 Primeira lei

A primeira lei da termodinâmica, também conhecida como lei da conservação da energia, diz que em qualquer processo a energia pode ser transformada de uma forma em outra, mas nunca criada ou destruída. Tal lei já invalida máquinas de moto perpétuo que ao operarem em ciclos produzem trabalho sem nenhuma outra interação com seu entorno.

A primeira lei é uma ferramenta poderosa para relacionar duas formas de energia: calor e trabalho. Para um processo termodinâmico, a lei é escrita de forma aditiva relacionando a variação de energia interna com as variações de calor e trabalho do sistema:

$$Q = W + \frac{dU}{dt} \tag{3.1}$$

em que Q e W correspondem, respectivamente, às taxas de transferência de calor e trabalho e $\frac{dU}{dt}$ corresponde à taxa da energia térmica interna do sistema.

A equação 3.1 mostra que uma variação qualquer de calor ou trabalho irá consequentemente provocar uma alteração no respectivo sistema de forma a manter o equilíbrio.

Embora a primeira lei estabeleça a relação entre energia interna, calor e trabalho, esta não garante o sentido do fluxo de calor que poderá acontecer no sistema. É necessário estabelecer o sentido natural do fluxo de calor para garantir que processos impossíveis não ocorram.

3.2 Segunda lei

A segunda lei da termodinâmica foi enunciada pela primeira vez por Clausius (1879) por meio de observação e validação empírica. Tal lei dita que o fluxo de calor sempre ocorrerá, de forma espontânea, do corpo que possuir mais calor para o corpo que possuir menos calor. Tal condição assegura que processos impossíveis não ocorram, como por exemplo, um fluxo de calor espontâneo de um corpo de menos calor para outro de mais calor. A segunda lei da termodinâmica também impede o surgimento de máquinas de moto perpétuo, uma vez que esta define o correto sentido do fluxo de calor dentro de um sistema. A segunda lei, segundo a termodinâmica clássica, é mais conhecida como inequação de Clausius:

$$\dot{S} \geq \frac{Q}{T} \tag{3.2}$$

em que $\dot{S}$ corresponde à taxa de variação da entropia do sistema, Q é a taxa de transferência de calor e T é a temperatura absoluta em Kelvin.

A inequação 3.2 estabelece uma relação entre a entropia gerada pelo sistema global e a quantidade de energia correspondente ao calor, numa determinada temperatura. Neste contexto, a entropia pode ser entendida como uma medida de energia que não pode ser utilizada para produzir trabalho. Pode-se também entender a entropia como uma variável de estado associada ao grau de desordem de um sistema macroscópico (CARRAZEDO, 2009).

3.3 Lei de Fourier

Em 1822, Joseph Fourier publicou sua lei de difusão de calor em sólidos, sendo amplamente utilizada por diversos pesquisadores (FOURIER, 2009). Para materiais lineares e isotrópicos a lei de Fourier, de origem empírica, estabelece que, para problemas de condução térmica:

$$q_i = -k_T \theta_{,i} \tag{3.3}$$

em que q_i é o vetor de fluxo de calor, k_T é o coeficiente de condutividade térmica e θ é a temperatura.

A lei de Fourier atende com suficiência os casos de interesse deste trabalho e portanto este será o modelo de condução adotado. A seguir será apresentada uma breve

exposição sobre modelos de condução de calor em forma de ondas, que não seguem a lei de Fourier. Este é um tema comumente abordado na literatura no âmbito de transferência de calor em sólidos. Como irá se perceber, os casos abordados neste trabalho não se enquadram em tais representações.

3.4 Ondas de calor não Fourier

Cimmelli (2009) e Cattaneo (1948) discutem que a lei de Fourier, por ser uma equação diferencial parcial parabólica, possui uma característica indesejada de fazer propagar quase que "instantaneamente" em todo o domínio do sólido as variações do campo de temperatura. Desta forma, e baseados em resultados empíricos em situações de baixa temperatura e elevados gradientes térmicos, Cattaneo (1948), Vernotte (1958) e Morse e Feshbach (1953) introduzem o modelo de Maxwell-Cattaneo-Vernotte:

$$q_i + \tau_R \dot{q}_i = -k_T \theta_{,ii} \tag{3.4}$$

em que τ_R pode ser entendido como um parâmetro de relaxação do tempo, aplicado sobre a velocidade do fluxo de calor. O parâmetro τ_R, dado em unidade de tempo, permite que a onda de calor possua uma velocidade finita no meio e é intrínseco do material em que a propagação pode ser experimentalmente obtida. Nota-se que o modelo de Maxwell-Cattaneo-Vernotte (MCV) assume a forma de uma equação hiperbólica, com características de onda.

Desde a introdução do modelo MCV, diversos outros modelos foram propostos para representar ondas de calor de velocidade finita. A seguir, são apresentados alguns destes modelos encontrados na literatura e na sequência são alguns comentários finais são elaborados.

3.4.1 Outros modelos propostos

Nesta seção são mostrados alguns modelos propostos encontrados na literatura para representar ondas de calor não Fourier. Historicamente, um dos primeiros modelos para onda de calor hiperbólica proposto é o modelo de Maxwell-Cattaneo-Vernotte (MCV), como já descrito anteriormente. Com a introdução do tempo de atraso τ_R, foi possível transformar a então clássica equação de calor de Fourier em uma equação de onda hiperbólica com velocidade finita. Tal relaxação permite ao modelo capturar respostas em pequena escala no tempo. É possível escrever o modelo MCV de forma matemática como:

$$q_i(r_j, t + \tau_R) = -k\theta_{,ii}(r_j, t) \tag{3.5}$$

em que r_j representa o ponto no qual está sendo avaliado o fluxo de calor, t é o tempo e τ_R é o tempo de atraso ou *phase-lag*. Por causa do termo τ_R, este modelo também é conhecido de *single phase-lag* (TZOU, 1993).

No trabalho de Özisik e Tzou (1994) é feita uma revisão até então dos modelos para ondas de calor e também é descrito o seu modelo de *dual phase-lag*. Matematicamente este modelo pode ser escrito como:

$$q_i(r_j, t + \tau_q) = -k\theta_{,ii}(r_j, t + \tau_T) \tag{3.6}$$

em que o termo τ_q possui o mesmo significado que τ_R, ou seja, um atraso de fase no fluxo de calor. τ_T permite relaxação também no espaço e pode ser entendido como um atraso de fase no gradiente de temperatura. De forma geral, este modelo nos diz que o gradiente de temperatura num ponto r_j em um tempo $t + \tau_T$ resulta num fluxo de calor no mesmo ponto em um tempo $t + \tau_q$.

Com a introdução da segunda variável de relaxação τ_T, o modelo *dual phase-lag* é capaz de capturar efeitos de pequena escala tanto no tempo como no espaço. O tempo de atraso τ_q é devido a efeitos transientes rápidos de inércia térmica (efeitos de pequena escala do transporte de calor no tempo). Já o tempo de atraso τ_T é causado por interações microestruturais (efeitos de pequena escala do transporte de calor no espaço, como por exemplo a interação fônon-eléctron). Por fim, expandindo-se a equação 3.6 em relação à t e eliminando os termos de primeira ordem, é possível obter:

$$q_i(r_j, t) + \tau_q \frac{\partial q_i(r_j, t)}{\partial t} \approx -k \left[\theta_{,ii}(r_j, t) + \tau_T \frac{\partial \theta_{,ii}(r_j, t)}{\partial t} \right] \tag{3.7}$$

Nota-se novamente que, se tanto τ_q e τ_T assumirem valores nulos, recupera-se a lei de Fourier.

Também fazendo uso da ideia de relaxação no tempo, Green e Naghdi (1992) propõem a sua lei de condução do tipo III, que escrita em forma matemática assume a forma:

$$q_i(r_j, t + \tau_q) = -[k\theta_{,i}(r_j, t) + k^*\alpha_{,i}(r_j, t)] \tag{3.8}$$

em que k é a condutividade térmica do material, k^* é uma constante e α é o deslocamento térmico definido em Green e Naghdi (1991), equivalente ao deslocamento mecânico.

Ao se fazer uma expansão por série de Taylor e desconsiderando termos de ordem maior, o modelo 3.8 é escrito como:

$$\left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t}\right) q_i(r_k, t) = -\left[k_{ij}\theta_{,j}(r_k, t) + k^*_{ij}\alpha_{,j}(r_k, t)\right] \tag{3.9}$$

que é denominado como *single-phase-lag Green-Naghdi heat conduction law of type III*, para sólidos anisotrópicos.

Posteriormente, Green e Naghdi (1993) também adicionam relaxação no espaço em seu modelo. É assumido que $q_i(r_k, t + \tau_q) = -k^*_{ij}\alpha_{,j}(r_k, t + \tau_\alpha)$. Realizando-se novamente

expansão por série de Taylor, retendo os termos de primeira ordem em τ_q e τ_α, são obtidos os modelos *dual-phase-lag Green-Naghdi conduction law of type II*:

$$\left(1+\tau_q\frac{\partial}{\partial t}\right)q_i(r_k,t) = -k^*_{ij}\left(1+\tau_\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)\alpha_{,j}(r_k,t) \tag{3.10}$$

e *dual-phase-lag Green-Naghdi conduction law of type III*:

$$\left(1+\tau_q\frac{\partial}{\partial t}\right)q_i(r_k,t) = -\left[\left(k_{ij}+\tau_\alpha k^*_{ij}\right)\theta_{,j}(r_k,t) + k^*_{ij}\alpha_{,j}(r_k,t)\right] \tag{3.11}$$

Seguindo os trabalhos de Green e Naghdi (1992) e Green e Naghdi (1993), El-Karamany e Ezzat (2014) propõem o seguinte modelo unificado para o vetor de fluxo de calor:

$$\left(1+\tau_q\frac{\partial}{\partial t}\right)q_i(r_k,t) = -\left[a_1k_{ij}\theta_{,j}(r_k,t) + a_2\tau_\alpha k^*_{ij}\theta_{,j}(r_k,t) + a_3k^*_{ij}\alpha_{,j}(r_k,t)\right] \tag{3.12}$$

em que a_1, a_2 e a_3 são parâmetros adimensionais, podendo cada um assumir o valor 0 ou 1.

Por meio destes parâmetros é possível obter vários dos modelos já discutidos previamente:

- $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ e $a_3 = 1$: modelo 3.9;
- $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ e $a_3 = 1$: modelo 3.10;
- $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_3 = 1$: modelo 3.11;
- $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ e $a_3 = 0$: modelo MCV;
- $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ e $\tau_q = 0$: lei de Fourier;

Partindo da ideia do modelo 3.6 de Özisik e Tzou (1994), Roy Choudhuri (2007) propõe o *three-phase-lag model*. Matematicamente o modelo é descrito como:

$$q_i(r_k,t+\tau_q) = -\left[k\theta_{,ii}(r_k,t+\tau_T) + k^*\alpha_{,ii}(r_k,t+\tau_\alpha)\right] \tag{3.13}$$

em que τ_q, τ_T e τ_α são parâmetros do material. Assume-se que estes parâmetros satisfazem a inequalidade $0 \leq \tau_\alpha < \tau_T < \tau_q$. Este modelo diz que, para um ponto r_k, o gradiente de temperatura num tempo $t+\tau_T$ e o gradiente de deslocamento térmico num tempo $t+\tau_\alpha$ geram um fluxo de calor num tempo $t+\tau_q$.

Por meio da expansão por série de Taylor até os termos de primeira ordem em relação aos parâmetros do material se obtém a seguinte lei generalizada para a condução de calor válida num ponto r_k em um tempo t:

$$q_i + \tau_q\frac{\partial q_i}{\partial t} = -\left[\tau^*_\alpha\theta_{,ii} + k\tau_T\frac{\partial\theta_{,ii}}{\partial t} + k^*\alpha_{,ii}\right] \tag{3.14}$$

em que $\tau_\alpha^* = k + k^*\tau_\alpha$. Novamente, é possível obter alguns dos modelos já discutidos assumindo valores específicos para os parâmetros τ_q, τ_T e τ_α do material no modelo.

No trabalho de Wang, Cao e Guo (2010) é proposto um modelo baseado no conceito de termomassa, ou seja, no conceito de massa equivalente de gás de fônon. Fônon é uma quasi-partícula que designa um quantum de vibração em uma rede cristalina. O estado da energia térmica de vibração pode ser caracterizado como um gás de fônon composto por um número muito grande de partículas se movendo aleatoriamente. Por meio destes conceitos e da relação massa-energia de Einstein, Wang, Cao e Guo (2010) propõem o seguinte modelo para descrever uma onda térmica hiperbólica para a condução de calor:

$$\tau_h \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\lambda_I q}{2\gamma\rho c_e^2 T^2}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\lambda_I q}{2\gamma\rho^2 c_e^3 T^2}\frac{\partial q}{\partial x} + \lambda_I\left(1 - \frac{q^2}{2\gamma\rho^2 c_e^3 T^2}\right)\frac{\partial T}{\partial x} + q = 0 \tag{3.15a}$$

$$\tau_h \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(1 - \frac{q^2}{2\gamma\rho^2 c_e^3 T^3}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2\tau_h q}{\rho c_e T}\frac{\partial^2 T}{\partial t \partial x} \tag{3.15b}$$

em que τ_h, ρ, c_e, q, λ_I e γ são respectivamente o tempo característico do material, densidade, calor específico, fluxo de calor, condutividade intrínseca do material e parâmetro de Grüneisen.

A equação 3.15a se refere à conservação de momento de termomassa. A equação 3.15b é uma equação hiperbólica que pode ser utilizada para descrever o fenômeno de onda de calor. Se a termomassa for ignorada, a equação 3.15b se reduz na lei de Fourier.

3.4.2 Comentários finais quanto aos modelos de onda de calor

Nas seções anteriores foram discutidas a lei de Fourier e modelos hiperbólicos para a condução de calor. Nesta seção são elaborados alguns comentários sobre os modelos de onda de calor não Fourier, alguns trabalhos experimentais e aplicabilidade da lei de Fourier no escopo deste trabalho.

Ván (2015) realiza uma revisão da teoria e experimentos baseados em pulsos de calor e modelos não Fourier de condução. Foram identificadas algumas situações em que ondas de calor podem ocorrer de acordo com ensaios experimentais. Pode-se citar por exemplo a propagação de pulso de calor em Hélio II líquido (PESHKOV, 1960), sólidos e cristais (He, Bi e NaF) em baixa temperatura (ACKERMAN; GUYER, 1968; GUYER; KRUMHANSL, 1964; MCNELLY *et al.*, 1970; NARAYANAMURTI; DYNES, 1972), materiais heterogêneos em temperatura ambiente (KAMINSKI, 1990; MITRA *et al.*, 1995), problemas de pequena escala (CAHILL *et al.*, 2014) e experimentos relativísticos (MÜLLER, 1967; ISRAEL; STEWART, 1976).

Ademais, Chandrasekharaiah (1998) informa que as situações típicas em que um modelo hiperbólico geraria resultados significantemente diferentes de um modelo parabólico convencional são fonte de calor transiente localizada de alta intensidade, rápida propagação

de ponta de fissura, propagação de onda de choque térmica, ressonância térmica, efeitos interfaciais entre materiais distintos, processamento de material à laser e cirurgias à laser.

Joseph e Preziosi (1989) discutem sobre a velocidade de propagação de uma onda térmica. No caso de hélio líquido, em que foi possível observar o comportamento de onda de calor não Fourier, as velocidades de propagação ficam entre 0 (no caso de temperatura 2,2K) e algum valor na ordem de $10^2 \mathrm{m\,s^{-1}}$. No caso de cristais dielétricos em baixa temperatura, as velocidades giram em torno de $10^3 \mathrm{m\,s^{-1}}$. Por fim, para o caso de metais em temperatura ambiente, a velocidade de propagação de onda de calor giram em torno de $10^6 \mathrm{m\,s^{-1}}$. Vale lembrar que a velocidade da luz é de aproximadamente $3 \times 10^8 \mathrm{m\,s^{-1}}$.

No que concerne o valor de τ_q, (para o caso de modelos que fazem uso deste parâmetro do material) Chandrasekharaiah (1998) reporta que, para metais pode-se encontrar um valor em torno de 10^{-12}s. Para substâncias homogêneas, é possível encontrar em Kaminski (1990) valores de 10^{-8}s a 10^{-10}s para gases e de 10^{-10}s a 10^{-12}s para líquidos e sólidos dielétricos. Kaminski (1990), Roetzel, Putra e Das (2003), Graßmann e Peters (1999), Mitra *et al.* (1995) e Herwig e Beckert (2000) realizam ensaios em materiais não homogêneos (areia) e matéria biológica. De acordo com a tabela 3 é possível perceber que para estes materiais não há um consenso estabelecido. Há trabalhos que resultaram num valor significativo para o parâmetro τ_q. Noutros o modelo clássico da lei de Fourier conseguiu representar adequadamente.

Tabela 3 – Tabela de difusividade térmica e tempo de relaxação para materiais não homogêneos e biológicos segundo diversos autores.

Material	Difusividade térmica ($10^{-6}\mathrm{m^2\,s^{-1}}$)	Tempo de relaxação (s)	Fonte
Areia	0,226	2,26	Roetzel, Putra e Das (2003)
	0,408	20	Kaminski (1990)
	0,218	0	Graßmann e Peters (1999)
	0,169	0	Herwig e Beckert (2000)
$NaHCO_3$	0,185	0,66	Roetzel, Putra e Das (2003)
	0,31	28,77	Kaminski (1990)
Carne processada	0,132	1,77	Roetzel, Putra e Das (2003)
	0,14	15,5	Mitra *et al.* (1995)
	0,1304	0	Herwig e Beckert (2000)

Fonte: Roetzel, Putra e Das (2003)

Como evidenciado pelos resultados resumidos na tabela 3, há uma discordância sobre a evidência de onda de calor não Fourier. Adicionalmente, Maillet (2019) faz uma revisão dos principais ensaios experimentais sobre o assunto e questiona a validade dos resultados obtidos. Entre os ensaios criticados estão os de Kaminski (1990), Mitra *et al.* (1995), Roetzel, Putra e Das (2003), Graßmann e Peters (1999), Herwig e Beckert (2000), Liu e Chen (2010), Jaunich *et al.* (2008) e Sahoo *et al.* (2014). Seu principal ponto é a dificuldade de realização dos ensaios propostos e garantia das corretas condições de contorno para que se possa de fato avaliar a existência ou não de ondas de calor hiperbólicas. Ainda, é discutida a falta de controle e verificação das hipóteses iniciais que garantem a validade dos resultados, além do correto tratamento dos dados à posteriori.

Diante do que foi exposto nesta seção e levando em conta o foco do trabalho que é a implementação de um modelo termomecânico de materiais compósitos para aplicações na engenharia civil, avalia-se que a lei clássica de Fourier é adequada para a modelagem dos fenômenos usualmente encontrados. Foi tomado o cuidado de apresentar os modelos mais recentes de condução de calor e o atual entendimento sobre a área da termodinâmica. Entretanto, para os fenômenos e materiais normalmente encontrados na área da engenharia civil, a lei de Fourier atende suficientemente bem.

3.5 Equação governante para condução de calor transiente

Partindo da lei da conservação da energia (equação 3.1) e considerando apenas as parcelas correspondentes à transferência de calor e energia interna do sistema, obtém-se:

$$Q = \frac{dU}{dt} \tag{3.16}$$

Para um sistema fechado (sistema em que não há troca de massa na sua fronteira) de volume arbitrário V, superfície Γ e um elemento de superfície $d\Gamma$, a taxa de transferência de calor através da superfície do sistema pode ser dada por:

$$Q = -\int_{\Gamma} q_i n_i d\Gamma = \int_{\Gamma} (k_T \theta_{,i}) n_i d\Gamma = \int_{V} (k_T \theta_{,i})_{,i} dV \tag{3.17}$$

em que q_i é o vetor de fluxo de calor que atravessa o elemento de superfície $d\Gamma$ e n_i é um vetor unitário normal à $d\Gamma$. Emprega-se na definição da taxa de transferência de calor a lei de Fourier (equação 3.3) e o teorema de Gauss para converter a integral de superfície em integral de volume.

Definindo u como a energia interna específica e $c_p = \frac{du}{d\theta}$ como o calor específico, é possível descrever a taxa de energia interna como:

$$\frac{dU}{dt} = \int_{V} \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV = \int_{V} \rho \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} dV = \int_{V} \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} dV \tag{3.18}$$

em que ρ é a densidade do material e $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ é a variação da temperatura com o tempo.

Ao substituir as equações 3.17 e 3.18 na equação 3.16 e rearranjar os termos, a equação de condução de calor transiente pode ser escrita como:

$$\int_V \left(\rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} - (k_T \theta_{,i})_{,i} \right) dV = 0 \tag{3.19}$$

Por fim, dado o fato que o volume V é arbitrário, a equação diferencial de condução de calor não estacionária assume a forma:

$$\rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} - (k_T \theta_{,i})_{,i} = 0 \tag{3.20}$$

3.6 Termomecânica desacoplada

Neste trabalho é utilizada a teoria da termomecânica desacoplada, ou seja, a taxa de deformação do sólido é tão baixa que é possível desprezar sua contribuição de calor. Por meio de tal teoria é possível resolver uma vasta gama de problemas relevantes para a engenharia. Apresenta-se nesta seção a teoria da termomecânica desacoplada aos moldes de Carrazedo (2009).

Segundo Boley e Weiner (1997), na teoria introduzida por Duhamel (1837), diferenças de temperatura em relação a um referencial ou entre pontos distintos num mesmo corpo são capazes de gerarem esforços internos. Resultado disso é que, para um sólido inicialmente numa temperatura de referência $\theta^{\{datum\}}$ qualquer, ao se aplicar uma variação térmica $\Delta\theta = \left(\theta - \theta^{\{datum\}}\right)$, haverá uma variação volumétrica na mesma proporção que seu coeficiente de expansão térmico α, sem a ocorrência direta de tensões de cisalhamento. Assim, partindo da Lei de Hooke e da deformação volumétrica isotrópica decorrente da variação de temperatura é possível obter a seguinte relação tensão-deformação para um material elástico, linear, homogêneo e isotrópico:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \alpha \Delta\theta \delta_{ij} \tag{3.21}$$

em que ε_{ij} é o tensor de deformações, G é o módulo de deformação transversal, ν é o coeficiente de Poisson, σ_{ij} é o tensor de tensões internas, α é o coeficiente de expansão térmica e $\Delta\theta$ é a variação de temperatura.

Analogamente, a relação inversa da tensão em função da deformação é dada por:

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \Delta\theta \delta_{ij} \right) \tag{3.22}$$

Ademais, a equação de equilíbrio dinâmico local de um sólido é dada por:

$$\sigma_{ij,j} + F_i - \rho \ddot{y}_i = 0 \tag{3.23}$$

em que F_i são as forças de corpo, ρ é a densidade do material e $\ddot{y}_i$ é a aceleração.

Considerando o tensor de tensões definido em 3.22, pode-se reescrever a equação de equilíbrio dinâmico como:

$$\left[2G\left(\varepsilon_{ij}+\frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}-\frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha\Delta\theta\delta_{ij}\right)_{,j}\right]+F_i-\rho\ddot{y}_i=0 \tag{3.24}$$

A equação 3.24, junto com a relação de deslocamento e deformação, define o campo de deslocamentos dependente da temperatura. Por fim, para completar as equações da teoria da termoelasticidade desacoplada é utilizada a equação de condução de calor transiente, como definida em 3.20, para resolver o campo térmico não estacionário. As equações apresentadas aqui, de forma introdutória, são revistas nos próximos capítulos com maiores detalhes, incluindo as contribuições realizadas pelo autor.

Adicionalmente, boa parte dos problemas termomecânicos desacoplados podem ser modelados como problemas quasi-estáticos, no qual é considerado apenas o processo transiente térmico ao longo do tempo. A parcela dinâmica do problema mecânico passa então a ser desprezada. A seguir são mostrados alguns trabalhos, não exaustivamente, que demonstram a aplicação desta teoria.

Hübel (1996) faz uma exposição sucinta sobre os diferentes aspectos do processo de deformação termoplástica progressiva, sujeita a carregamentos cíclicos. Ao longo de seu trabalho são identificados e discutidos diversos aspectos e fatores que influenciam o processo de deformação progressiva, tais como diferentes constituições de materiais, estados de tensão, configurações estruturais e históricos e formas de carregamentos termomecânicos. Um destes aspectos destacados é a constituição do material, no qual suas propriedades passam a variar com a temperatura, sejam elas elásticas ou plásticas. Desta forma o trabalho visa contribuir para elucidação dos possíveis fatores que contribuem para o processo termoplástico.

Hua e Gu (2013) investigam o comportamento termomecânico de uma liga de alumínio 2080 reforçada por partículas de SiC por meio do modelo de homogeneização Mori-Tanaka. O modelo empregado foi utilizado para estudar o impacto da fração volumétrica, rigidez, razão de alongamento e orientação das partículas nas propriedades macroscópicas do compósito. Foi percebido que a fração volumétrica das partículas afeta significantemente o comportamento termomecânico. Partículas mais rígidas são capazes de aumentar o módulo de elasticidade efetivo, enquanto que a sensitividade dos coeficientes de Poisson e expansão térmica efetivos permanece mínima. Para o caso de partículas com maior razão de alongamento, nota-se um aumento no módulo de elasticidade, assim como uma redução nos coeficientes de Poisson e expansão térmica. A orientação das partículas altera de forma substancial as propriedades do compósito, especialmente ao longo da direção longitudinal das inclusões.

Em Tang *et al.* (2018) é feita uma análise termomecânica do deslizador de uma bomba de pistões axiais para indústria aeronáutica. Por se tratar de um componente sujeito a altas pressões e variação de temperatura ao longo do seu ciclo de utilização, faz-se necessário a correta avaliação do seu comportamento termomecânico a fim de garantir seu desempenho. Haidak, Wang e Shiju (2019), assim como Tang *et al.* (2018), analisam o processo termomecânico em bombas de pistões axiais. Entretanto o foco do trabalho está na análise termomecânica da plataforma retentora dos deslizadores.

Long e Tung (2019) estudam o comportamento de flambagem e pós-flambagem de placas sanduíche reforçadas por nanotubos de carbono quando apoiadas sobre fundação elástica e sujeitas a esforços termomecânicos. Em seu trabalho é estudada a variação dos parâmetros do problema, como condição de contorno, quantidade de reforço, espessura das camadas, rigidez da fundação, e quando são aplicadas cargas mecânicas e térmicas sobre as placas. Os efeitos térmicos são capazes de alterar significativamente os resultados de carga de flambagem.

Amir e Talha (2019) realizam um estudo termoelástico não linear de vibração em painéis porosos constituídos por materiais com gradação funcional. As propriedades do material variam continuamente ao longo da espessura do painel e é estudado a influência de variáveis como temperatura, porosidade, índice de vazios e razões de espessura. Na mesma linha, Trinh, Nguyen e Kim (2019) estudam o comportamento dinâmico de painéis sanduíche porosos com dupla curvatura de materiais com gradação funcional. Como uma das conclusões, verificou-se que a presença de porosidade é capaz de gerar efeitos diversos no deslocamento e vibração da estrutura dependendo das cargas termomecânicas. O incremento de porosidade é capaz de aumentar o deslocamento máximo do painel provocado pelas cargas mecânicas, ao mesmo tempo que reduz o deslocamento máximo provocado pelas cargas térmicas.

No trabalho de Song e Zhang (2019) é desenvolvido e estudado um atuador polimérico composto por duas camadas termoresponsivas. Ao se combinar duas camadas termoresponsivas distintas, é possível criar um atuador 3D à partir de uma geometria 2D que responde a estímulos térmicos, alterando sua forma de acordo. Com isso, foi possível obter um atuador de resposta rápida e capaz de alterar drasticamente sua geometria em função da temperatura imposta por meio da expansão térmica distinta das camadas que o compõe.

Em Guan *et al.* (2019) é estudado o processo de tratamento térmico em placas de aço por meio da teoria da termomecânica desacoplada. Por meio de seu eficiente modelo, é possível prever em tempo real as deformações e tensões internas termomecânicas das placas de aço, sendo de grande valia para a indústria.

Neves, Camargo e Azevedo (2021) desenvolvem modelo numérico baseado no método dos elementos finitos com o objetivo de estimar o comportamento de estruturas de concreto armado e mistas de aço e concreto em situação de incêndio. É incorporado no modelo efeitos de não linearidade geométrica e do material, além de gradientes térmicos não lineares e dependência das propriedades dos materiais em função da temperatura. A metodologia empregada tem como base o acoplamento unidirecional das soluções térmicas e mecânicas.

Em Bhouri *et al.* (2021) é feita investigação sobre o emprego de reforço de partículas de grafite em matriz de alumínio com o fim de promover melhoria na durabilidade frente solicitações termomecânicas. Para tanto, é feito estudo numérico do coeficiente de expansão térmico de compósitos de matriz de alumínio com distribuição uniformemente aleatória de partículas de grafite. Para a modelagem numérica, fez-se uso da técnica do elemento volumétrico representativo, variando-se o percentual de fração volumétrica das inclusões. Como resultados, foi observado uma redução quase linear do coeficiente de expansão térmico do compósito com o aumento da fração volumétrica da fase do grafite. Também foi notada alta sensibilidade quanto a presença de vazios nas propriedades termoelásticas, também sendo evidenciada pelo modelo numérico.

4 CAMPO MECÂNICO

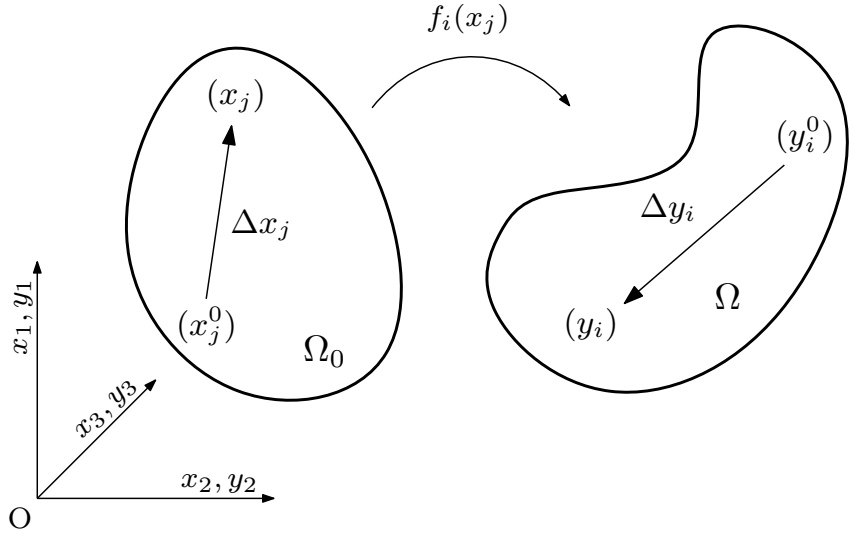
Para o campo mecânico, neste trabalho, é utilizado o método dos elementos finitos posicional (MEFP), que é uma versão Lagrangeana total baseada em posições do método dos elementos finitos. Tal formulação faz uso das posições nodais do corpo ao invés dos deslocamentos, como em outros métodos mais convencionais. Foi primeiramente apresentado por Bonet *et al.* (2000), com conceitos observados em Ogden (1997) e Ciarlet (1994), e posteriormente, de forma independente, por Coda (2003). Maior parte dos conceitos apresentados adiante seguem o último trabalho referido e Coda (2018).

Inicialmente são apresentados conceitos da mecânica dos sólidos, que servem como base para a formulação do campo mecânico. Em seguida é detalhado o método dos elementos finitos posicional e a metodologia de inserção das fibras e elementos particulados. Por fim, é descrito o modelo de plasticidade empregado neste trabalho.

4.1 Função mudança de configuração

Diz-se mudança de forma ou configuração quando um sólido deformável, sujeito a forças externas e em equilíbrio estável, se deforma e muda de configuração. Pode-se imaginar uma função f_i que descreva a mudança de configuração de um sólido de um estado inicial Ω_0 para uma configuração atual Ω, tal como apresentado na figura 4.1.

Figura 4.1 – Representação da função mudança de configuração e dois estados de configuração de um sólido deformável.



Fonte: elaborado pelo autor.

Na figura 4.1, o sistema de coordenadas para as configurações inicial e atual é único e cartesiano, com origem em **O**. As entidades x_j e y_i representam respectivamente as coordenadas nos estados inicial e atual. Os eixos coordenados estão nas direções 1, 2 e 3. Com x_j^0 e x_j pertencendo à Ω_0, x_j localizado na vizinhança de x_j^0 e Δx_j o vetor dado pela diferença entre esses dois pontos, é possível escrever a imagem de x_j (y_i) em Ω da seguinte forma:

$$y_i = f_i(x_j) = f_i(x_j^0) + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x_k^0} \Delta x_j + O^2 \tag{4.1}$$

ou ainda:

$$y_i - y_i^0 = \Delta y_i = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x_k^0} \Delta x_j + O^2 \tag{4.2}$$

O estado de deformação do corpo pode ser definido pelo gradiente da função mudança de configuração. Fazendo-se $\Delta x_j \to 0$ na equação 4.2 resulta em:

$$dy_i = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x_k^0} dx_j \tag{4.3}$$

ou

$$dy_i = A_{ij} dx_j \tag{4.4}$$

com A_{ij} sendo a matriz que representa o gradiente da função mudança de configuração. Sua função é determinar a mudança de forma de um ponto x_j^0 qualquer do domínio Ω_0 para o domínio Ω.

4.1.1 Mudança ou variação de volume

Uma informação que se pode obter de A_{ij} é sobre a variação de volume entre as configurações inicial e atual. Assumindo dV_0 e dV como volumes infinitesimais na configuração inicial e atual, respectivamente:

$$dV_0 = e_{ijk} dx_i^{\{1\}} dx_j^{\{2\}} dx_k^{\{3\}} \tag{4.5}$$

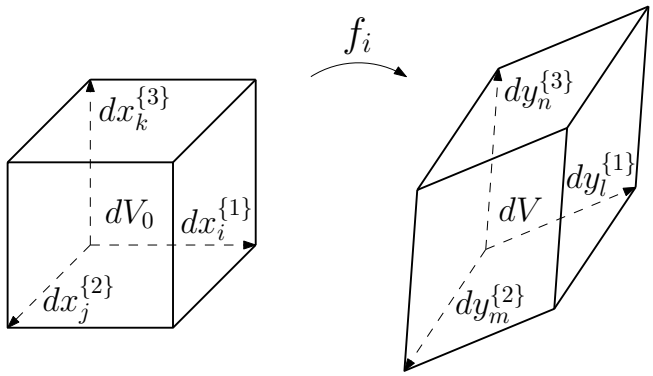
e

$$dV = e_{lmn} dy_l^{\{1\}} dy_m^{\{2\}} dy_n^{\{3\}} \tag{4.6}$$

em que e_{ijk} e e_{lmn} são os operadores cíclicos de Levi-Civita.

A figura 4.2 demonstra a alteração do volume de um sólido definido por 3 vetores $dx_\alpha^{\{i\}}$ quando submetidos ao gradiente da função mudança de configuração.

Figura 4.2 – Mudança de volume de um sólido.



Fonte: elaborado pelo autor.

Lembrando que $dy_m = A_{mj}dx_j$ é possível reescrever o volume atual como:

$$dV = e_{lmn}A_{li}dx_i^{\{1\}}A_{mj}dx_j^{\{2\}}A_{nk}dx_k^{\{3\}} \tag{4.7}$$

Fazendo a razão entre a variação de volumes, resulta em:

$$\frac{dV}{dV_0} = \frac{e_{lmn}A_{li}dx_i^{\{1\}}A_{mj}dx_j^{\{2\}}A_{nk}dx_k^{\{3\}}}{e_{ijk}dx_i^{\{1\}}dx_j^{\{2\}}dx_k^{\{3\}}} \tag{4.8}$$

e reorganizando os termos, percebe-se que:

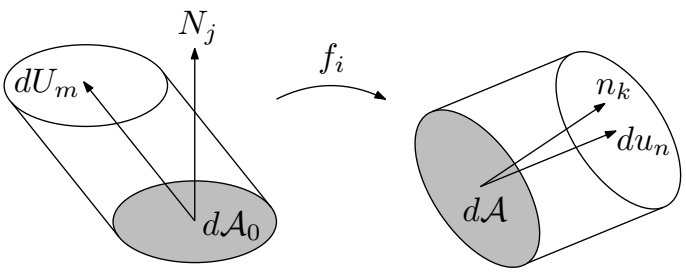
$$\frac{dV}{dV_0} = det(A_{op}) = J \tag{4.9}$$

em que $det(\cdot)$ é o operador determinante e J é conhecido como Jacobiano e representa a variação de volume entre as configurações.

4.1.2 Mudança de área

Outra informação igualmente importante é com relação a mudança de área durante a mudança de configuração, representada na figura 4.3, tomando-se uma área infinitesimal $d\mathcal{A}_0$ e $d\mathcal{A}$:

Figura 4.3 – Representação da função mudança de configuração e mudança de área.



Fonte: elaborado pelo autor.

Representando as áreas inicial ($d\mathcal{A}_0$) e atual ($d\mathcal{A}$) por:

$$d\mathcal{A}_{0j} = N_j d\mathcal{A}_0 \tag{4.10}$$

$$d\mathcal{A}_k = n_k d\mathcal{A} \tag{4.11}$$

com N_j e n_k sendo vetores normais às áreas nas configurações inicial e atual, respectivamente. Partindo-se de um vetor dU_m e du_n para o cálculo do volume:

$$dV_0 = dU_m N_j \delta_{jm} d\mathcal{A}_0 \tag{4.12}$$

$$dV = du_n n_k \delta_{kn} d\mathcal{A} \tag{4.13}$$

Fazendo uso do fato de que:

$$dV = J dV_0 \tag{4.14}$$

e

$$du_n = A_{nm} dU_m \tag{4.15}$$

é possível obter a relação de áreas entre as configurações:

$$du_n n_k \delta_{kn} d\mathcal{A} = J dU_m N_j \delta_{jm} d\mathcal{A}_0 \tag{4.16}$$

$$A_{nm} dU_m n_n d\mathcal{A} = J dU_m N_m d\mathcal{A}_0 \tag{4.17}$$

$$A_{nm} n_n d\mathcal{A} = J N_m d\mathcal{A}_0 \tag{4.18}$$

que, por fim, resulta na equação 4.19, que é conhecida como fórmula de Nanson que estabelece relação entre elementos de área nas configurações inicial e atual:

$$n_n d\mathcal{A} = J A^{-1}_{nm} N_m d\mathcal{A}_0 \tag{4.19}$$

ou

$$d\mathcal{A}_n = J A^{-1}_{nm} d\mathcal{A}_{0m} \tag{4.20}$$

4.2 Tensor de deformação de Green-Lagrange

Neste trabalho foi utilizado o tensor de deformação de Green-Lagrange, definido na seguinte expressão:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(A_{ki} A_{kj} - \delta_{ij}\right) \tag{4.21}$$

em que A_{ki} é o gradiente da função mudança de configuração (f_k) e δ_{ij} é a matriz identidade. O termo $A_{ki}A_{kj}$ também pode ser representado por C_{ij}, que é chamado de

tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green. Os termos de sua diagonal refletem uma medida precisa dos deslocamentos de fibras inicialmente dispostas nos eixos coordenados e os seus termos fora da diagonal estão relacionados com a distorção ocorrida.

Pode-se reescrever o tensor de deformação de Green-Lagrange como:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(C_{ij} - \delta_{ij}\right) \tag{4.22}$$

4.3 Princípio da energia mecânica estacionária

Segundo o princípio da energia mecânica estacionária, o equilíbrio mecânico de um sólido ocorre quando for nula a variação do seu potencial de energia mecânica. O funcional de energia de um corpo pode ser dado como:

$$\Pi = \mathcal{U} + \mathcal{P} + \mathcal{K} \tag{4.23}$$

em que Π é a energia mecânica do sistema, $\mathcal{U}$, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{K}$ são, respectivamente, as energias de deformação interna do corpo, o trabalho das forças externas aplicadas e a energia cinética.

Para então se obter a posição de equilíbrio do sólido, torna-se nula a primeira variação do funcional de energia. No caso de uma formulação Lagrangeana Total, esta variação é feita de acordo com o referencial inicial:

$$\delta\Pi = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y_i}\delta Y_i + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial Y_i}\delta Y_i + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Y_i}\delta Y_i = Grad(\Pi)\delta Y_i = 0 \tag{4.24}$$

em que Y_i é um vetor de variáveis nodais na configuração atualizada em relação à configuração inicial e $Grad(\cdot)$ é o operador gradiente. Como δY_i é arbitrário, este pode ser isolado e desconsiderado. Por fim, a equação do variacional do funcional de energia de um sólido se torna:

$$\delta\Pi = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y_i} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial Y_i} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Y_i} = \frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} = Grad(\Pi) = 0 \tag{4.25}$$

Pelo fato de neste trabalho serem tratados problemas termomecânicos quasi-estáticos e estáticos, desconsidera-se a parcela dinâmica $\mathcal{K}$. Partindo da equação 4.23, aplicando-se o teorema de Gauss e fazendo uso das fórmulas de Nanson, mudança de área e de volume, também é possível obter a seguinte equação para a primeira variação do funcional de energia para o caso estático (CODA, 2018):

$$\delta\Pi = \int_{\Omega_0} S_{ij}\delta E_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_0} q_{0i}\delta y_i d\Gamma - \int_{\Omega_0} b_{0i}\delta y_i d\Omega = 0 \tag{4.26}$$

em que S_{ij} é o segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff, E_{ij} é o tensor de deformações de Green-Lagrange, Γ_0 é a superfície inicial do sólido onde se encontram os carregamentos distribuídos, Ω_0 é o domínio inicial do sólido, q_{0i} são as forças externas aplicadas sobre a superfície inicial, b_{0i} são as forças de corpo aplicadas sobre o domínio inicial do sólido e δy_i é um vetor de posições arbitrário no contínuo.

4.4 Lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff

A lei constitutiva utilizada neste trabalho é a de Saint-Venant-Kirchhoff e fazendo uso da medida de deformação de Green-Lagrange, a equação da energia específica (u_e^{SVK}) é expressa por:

$$u_e^{SVK} = \frac{1}{2} E_{ij} \mathbb{C}_{ijkl} E_{kl} \tag{4.27}$$

com $E_{\alpha\beta}$ sendo o tensor de deformação de Green-Lagrange e $\mathbb{C}_{ijkl}$ o tensor de quarta ordem chamado de tensor constitutivo elástico tangente, também podendo ser definido como:

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}} = \frac{\partial^2 u_e^{SVK}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \tag{4.28}$$

Calculando-se a variação da energia específica de deformação em relação a deformação de Green-Lagrange é possível perceber que:

$$\delta u_e^{SVK} = \frac{\partial u_e^{SVK}}{\partial E_{ij}} \delta E_{ij} \tag{4.29}$$

Confrontando-se a equação 4.29 com a primeira parcela da equação 4.26 é possível concluir que:

$$S_{ij} = \frac{\partial u_e^{SVK}}{\partial E_{ij}} = 2 \frac{\partial u_e^{SVK}}{\partial C_{ij}} = \frac{\mathbb{E}\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} E_{kk} \delta_{ij} + 2GE_{ij} \tag{4.30}$$

com $\mathbb{E}$, G e ν sendo o módulo de elasticidade, módulo de elasticidade transversal e o coeficiente de Poisson, respectivamente. S_{ij} é chamando de tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e é par conjugado energético com o tensor de deformações de Green (E_{ij}). Na equação 4.30 foi considerado material isotrópico.

A lei de Saint-Venant-Kirchhoff é linear pois o tensor constitutivo elástico ($\mathbb{C}_{ijkl}$) é constante independentemente do nível de tensão aplicado. Esta lei é empregada neste trabalho devido sua simplicidade e por conseguir representar bem grandes deslocamentos. Entretanto, como descrito em Holzapfel (2000), esta lei não impede a degeneração do material em situação de compressão, não sendo recomendada para casos de grandes deformações.

É possível estabelecer uma relação entre o segundo tensor de Piola-Kirchhoff e o tensor de tensão de Cauchy, que é dada pela equação:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{J} A_{ik} S_{kl} A_{jl} \tag{4.31}$$

em que $J = det(A_{\alpha\beta})$, sendo $A_{\alpha\beta}$ o gradiente da função mudança de configuração.

Comenta-se ainda que, para casos 3D e material isotrópico, a energia específica u_e^{SVK} assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_e^{SVK} =& \frac{G}{1-2\nu}\Big[(1-\nu)(E_{11}^2+E_{22}^2+E_{33}^2) \\ &+ 2\nu(E_{11}E_{22}+E_{11}E_{33}+E_{22}E_{33}) \\ &+ (1-2\nu)(E_{12}^2+E_{21}^2+E_{13}^2+E_{31}^2+E_{23}^2+E_{32}^2)\Big] \end{aligned} \tag{4.32}$$

4.5 Método dos elementos finitos posicional

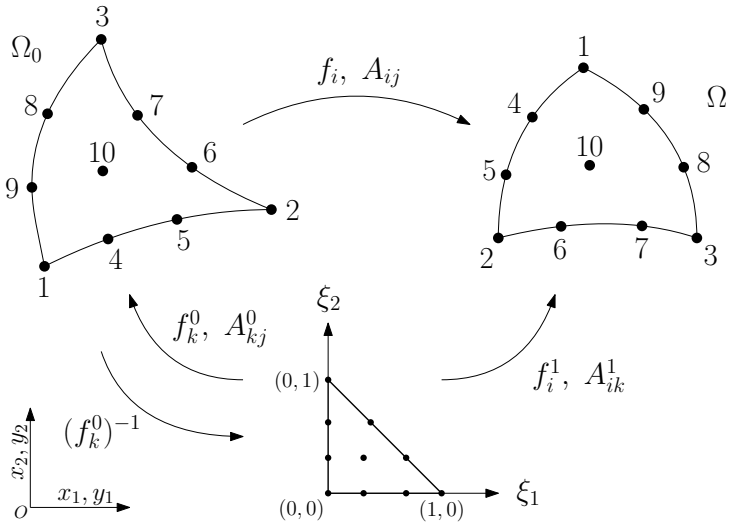
Neste trabalho foi utilizado o Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP). Ao contrário do Método dos Elementos Finitos tradicional que possui o deslocamento como variável principal, o MEFP faz uso das posições nodais. Com isso é possível obter uma formulação que naturalmente contemple a não linearidade geométrica.

O MEFP faz uso da equação 4.26 que representa o Princípio da Energia Mecânica Estacionária. Tal equação possui termos que representam integrais de volume e superfície, todos na sua referência inicial. A seguir, são apresentados alguns mapeamentos que serão importantes para a formulação.

4.5.1 Elementos finitos empregados

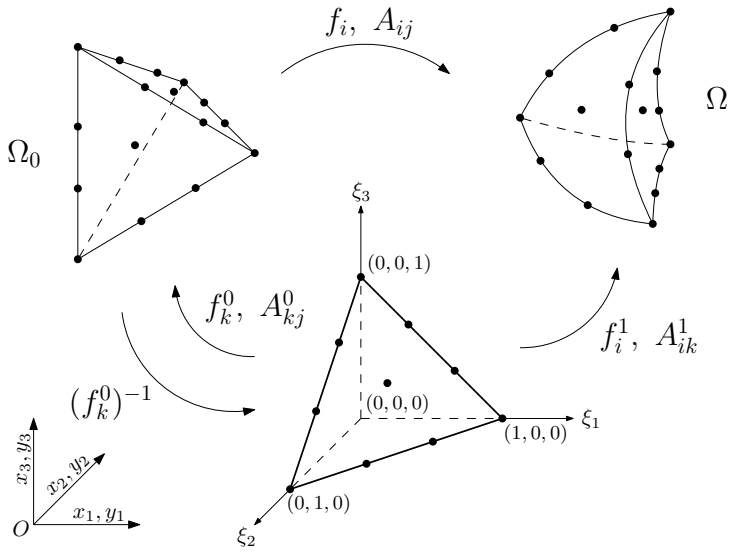
Neste trabalho são utilizados elementos finitos bidimensionais triangulares e tridimensionais tetraédricos de aproximação cúbica. As figuras 4.4 e 4.5 mostram uma representação destes elementos finitos e seus espaços isoparamétricos.

Figura 4.4 – Mapeamento de elemento bidimensional triangular de aproximação cúbica nas configurações inicial e final.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 4.5 – Mapeamento de elemento tridimensional tetraédrico de aproximação cúbica nas configurações inicial e final.



Fonte: elaborado pelo autor.

É possível realizar a decomposição da função mudança de configuração (f_i) e de seu gradiente (A_{ij}) em duas funções cada:

$$f_i = f_i^1\left(\left(f_k^0\right)^{-1}\right) \tag{4.33}$$

e

$$A_{ij} = A_{ik}^1 \cdot \left(A_{kj}^0\right)^{-1} \tag{4.34}$$

Fazendo-se uso do espaço adimensional e das funções de forma do elemento finito empregado, é possível escrever a função mudança de configuração em função das variáveis adimensionais:

$$f_k^0\big(\xi_m\big) = x_k\big(\xi_m\big) = X_k^l \phi^l\big(\xi_m\big) \tag{4.35}$$

$$f_i^1\big(\xi_m\big) = y_i\big(\xi_m\big) = Y_i^l \phi^l\big(\xi_m\big) \tag{4.36}$$

em que o índice l representa o nó do elemento finito empregado e $\phi^l\big(\xi_m\big)$ é a função de forma do nó l avaliada nas coordenadas adimensionais ξ_m.

O mesmo procedimento é aplicado ao seu gradiente:

$$A_{kj}^0 = \frac{\partial f_k^0}{\partial \xi_j} = X_k^l \frac{\partial \phi^l\big(\xi_m\big)}{\partial \xi_j} \tag{4.37}$$

$$A_{ik}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_k} = Y_i^l \frac{\partial \phi^l\big(\xi_m\big)}{\partial \xi_k} \tag{4.38}$$

Por fim, fazendo-se uso das novas definições do gradiente da função mudança de configuração, escreve-se a deformação de Green como:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\big(A_{ki}A_{kj} - \delta_{ij}\big) = \frac{1}{2}\big((A_{kl}^0)^{-1} A_{li}^1 A_{km}^1 (A_{mj}^0)^{-1} - \delta_{ij}\big) \tag{4.39}$$

ou, em notação diádica:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{A}^T\mathbf{A} - \mathbf{I}\Big) = \frac{1}{2}\Big((\mathbf{A}^0)^{-T} \cdot (\mathbf{A}^1)^T \cdot \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} - \mathbf{I}\Big) \tag{4.40}$$

4.5.2 Princípio da estacionariedade e o MEFP

Relembrando a equação 4.26 para o caso estático:

$$\delta\Pi = \int_{\Omega_0} S_{ij}\delta E_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_0} q_{0i}\delta y_i d\Gamma - \int_{\Omega_0} b_{0i}\delta y_i d\Omega - F_i\delta y_i = 0 \tag{4.41}$$

em que o termo $F_i\delta y_i$ se refere ao potencial das forças concentradas aplicadas sobre determinados pontos y_i do sólido.

Aplica-se agora a discretização do domínio em elementos finitos. Os parâmetros inicial x_i e atual y_i do contínuo são aproximados pelas equações 4.35 e 4.36, respectivamente. Já as cargas distribuídas $q_i^{\{0\}}$ e forças de corpo $b_i^{\{0\}}$ no contínuo podem ser aproximadas pelas seguintes equações:

$$q_i^{\{0\}} = Q_i^l \phi^l\Big(\xi_j\Big) \tag{4.42}$$

e

$$b_i^{\{0\}} = B_i^l \phi^l\Big(\xi_j\Big) \tag{4.43}$$

em que o índice l representa o nó proveniente da discretização do contínuo em elementos finitos e i representa a direção ou grau de liberdade. As grandezas X_i^l, Y_i^l, Q_i^l e B_i^l são os valores dos parâmetros nodais iniciais, atuais, carregamento distribuído na superfície dos elementos, e forças de volume atuando nos elementos, respectivamente, encontradas nos nós l de cada elemento finito.

Da equação 4.39 percebe-se que a deformação de Green pode ser escrita em função dos parâmetros nodais:

$$E_{ij} = E_{ij}(Y_k^l) \tag{4.44}$$

e, portanto, sua variação se torna:

$$\delta E_{ij} = \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_k^l}\delta Y_k^l \tag{4.45}$$

Substituindo as equações 4.36, 4.44, 4.45, 4.42 e 4.43 em 4.41 tem-se:

$$\begin{aligned}\delta\Pi = &\int_{\Omega_0} S_{ij}\frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_k^l}\delta Y_k^l d\Omega - \int_{\Gamma_0} \phi^m(\xi_n) Q_k^m \phi^l(\xi_o)\delta Y_k^l d\Gamma \\ &- \int_{\Omega_0} \phi^m(\xi_n) B_k^m \phi^l(\xi_o)\delta Y_k^l d\Omega - F_k^l\delta Y_k^l = 0\end{aligned} \tag{4.46}$$

em que o termo $F_k^l\delta Y_k^l$ se refere à variação do potencial das cargas concentradas aplicadas sobre os nós l do domínio discretizado por elementos finitos, com F_k^l representando o vetor de força aplicado diretamente nestes nós.

Relembrando de 4.25, δY_k^l é um valor arbitrário e pode ser desprezado. A equação do MEFP para a primeira variação do funcional de energia então se torna:

$$\delta\Pi = \int_{\Omega_0} S_{ij} \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_k^l} d\Omega - \int_{\Gamma_0} Q_k^m \phi^m(\xi_n)\phi^l(\xi_o) d\Gamma - \int_{\Omega_0} B_k^m \phi^m(\xi_n)\phi^l(\xi_o) d\Omega - F_k^l = 0 \quad (4.47)$$

Ainda é possível separar os termos da equação 4.47 segundo a organização da equação 4.25. A parcela de correspondente à variação da energia interna de deformação é dada por:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y_k^l} = \int_{\Omega_0} S_{ij} \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_k^l} d\Omega = F_k^{l\{int\}} \quad (4.48)$$

em que $F_k^{l\{int\}}$ é chamado de vetor de forças internas do sólido. Tal parcela representa a resposta da estrutura aos esforços externos e surgimento de deformações e tensões internas.

A parcela correspondente à variação da energia dos esforços externos e de campo aplicados é dada por:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial Y_k^l} = -\int_{\Gamma_0} Q_k^m \phi^m(\xi_n)\phi^l(\xi_o) d\Gamma - \int_{\Omega_0} B_k^m \phi^m(\xi_n)\phi^l(\xi_o) d\Omega - F_k^l = F_k^{l\{ext\}} \quad (4.49)$$

em que $F_k^{l\{ext\}}$ é chamado de vetor de forças externas. Tal parcela é responsável por representar os esforços externos aplicados sobre o corpor sólido, provocando deformação e mudança de configuração.

Pode-se reescrever a variação do potencial na sua configuração de equilíbrio como:

$$\delta\Pi = F_k^{l\{int\}} - F_k^{l\{ext\}} = 0_k^l \quad (4.50)$$

Ainda, em termos de implementação numérica é interessante fazer uso de estruturas de dados convenientes, como vetores e matrizes. Neste sentido, os vetores de força interna e externa são alocados e manipulados segundo a incidência:

$$m = N(l-1) + k \quad (4.51)$$

em que m é o índice, ou grau de liberdade, do vetor. N representa a dimensão do problema, assumindo valor 2 para problemas 2D e 3 para problemas no espaço 3D. l é o índice do nó e k é a direção.

Por fim, levando-se em consideração o mapeamento definido anteriormente em 4.51, a equação 4.50 pode também ser expressa como:

$$\delta\Pi = F_m{}^{\{int\}} - F_m{}^{\{ext\}} = 0_m \quad (4.52)$$

4.5.3 Método de Newton-Raphson

Utilizou-se neste trabalho o método de Newton-Raphson para a resolução do sistema de equações não lineares que surgem com a aplicação do MEFP. Inicialmente define-se um vetor $\vec{g}$ que representa o desbalanceamento do sistema:

$$g_i = \frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} = F_i^{\{int\}} - F_i^{\{ext\}} \approx 0 \tag{4.53}$$

em que $F_i^{\{int\}}$ e $F_i^{\{ext\}}$ são os vetores de força interna e externa respectivamente, já definidos anteriormente.

Na configuração de equilíbrio o vetor de desbalanceamento g_i se torna nulo. Entretanto as incógnitas do problema são justamente as posições na posição atual (Y_i). Segundo o método de Newton-Raphson, busca-se de forma iterativa a configuração da estrutura que anule o vetor de desbalanceamento. De forma geral, faz-se o primeiro valor tentativa para ${Y_i}^{\{0\}}$ o valor da própria configuração inicial X_i do sólido. Expandindo o vetor de desbalanceamento mecânico na vizinhança da posição tentativa ${Y_i}^{\{0\}}$:

$$g_i(Y_j) = g_i({Y_j}^{\{0\}}) + \left.\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\right|_{{Y_k}^{\{0\}}} \Delta Y_j + O_i^2 \approx 0 \tag{4.54}$$

Desprezando os termos de ordem maior e impondo a segunda igualdade de 4.54:

$$\begin{aligned} \Delta Y_j &= -\left(\left.\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\right|_{{Y_k}^{\{0\}}}\right)^{-1} g_i({Y_j}^{\{0\}}) \\ &= -\left(\left.\frac{\partial^2 u_e^{SVK}}{\partial Y_i \partial Y_j}\right|_{{Y_k}^{\{0\}}}\right)^{-1} g_i({Y_j}^{\{0\}}) \\ &= -(H_{ij})^{-1} g_i({Y_j}^{\{0\}}) \end{aligned} \tag{4.55}$$

em que ΔY_j se torna a correção da posição e H_{ij} é a matriz Hessiana ou rigidez tangente para a posição tentativa $\left(\frac{\partial g_i}{\partial Y_j}\right)$.

Em seguida, a solução é atualizada por:

$$Y_i = {Y_i}^{\{0\}} + \Delta Y_i \tag{4.56}$$

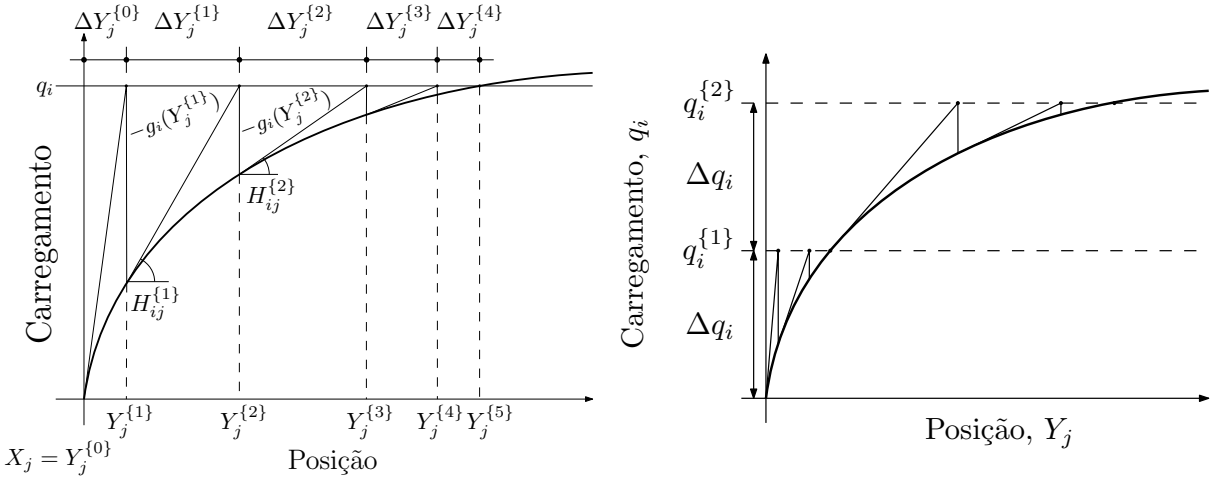
Retorna-se então à equação 4.55 com a posição Y_i atualizada. Este ciclo se repete até que ΔY_i ou g_i se tornem suficientemente pequenos segundo uma norma adotada. O nível de carga aplicado é incremental, o que facilita o processo de convergência. O critério de parada é dado pela comparação da norma normalizada L_2 do erro, com uma tolerância pré-estabelecida:

$$erro = \frac{\sqrt{\Delta Y_i \Delta Y_i}}{\sqrt{X_j X_j}} \leq Tolerância \tag{4.57}$$

A figura 4.6a é a representação gráfica do método e como ocorre sua convergência. A Hessiana aqui é representada por ${H_{ij}}^{\{l\}}$, representando a inclinação da reta no passo de

iteração l. g_i e q_i são os vetores de desbalanceamento e forças externas, respectivamente. $\Delta Y_j^{\{l\}}$ são os resíduos calculados para cada passo de iteração l. É mostrado na figura 4.6b que este método também pode ser usado de forma incremental. Para cada incremento de carga Δq_i é atingido um estado de equilíbrio e assim vai-se caminhando sucessivamente até a solução final.

Figura 4.6 – Representação gráfica do método de Newton-Raphson e procedimento incremental para convergência e obtenção da solução.



(a) Método de Newton-Raphson para resolver a equação de equilíbrio.

(b) Procedimento incremental-iterativo para o método de Newton-Raphson.

Fonte: elaborado pelo autor.

4.5.4 Vetor de força interna

Para um elemento finito qualquer, o vetor de força interna é:

$$F_i^{l\{int\}\{elem\}} = \int_{\Omega_0^{\{elem\}}} \frac{\partial u_e^{SVK}\left(Y_k^m\right)}{\partial Y_i^l} d\Omega = \int_{\Omega_0^{\{elem\}}} f_i^l d\Omega = \sum_{\zeta=1}^{\wedge} f_i^l\left(\xi_n^\zeta\right) J_0\left(\xi_p^\zeta\right) w^\zeta \tag{4.58}$$

com

$$f_i^l = S_{jk}\frac{\partial E_{jk}}{\partial Y_i^l} \tag{4.59}$$

A última forma indica que há integração numérica nos pontos ζ até o número total de pontos de integração $\wedge$. Por fim, resta estabelecer a derivada parcial do tensor de deformações com o vetor de parâmetros nodais:

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_k^\alpha} = \frac{1}{2}\left((A_{li}^0)^{-1}\frac{\partial A_{ml}^1}{\partial Y_k^\alpha}A_{mn}^1(A_{nj}^0)^{-1} + (A_{li}^0)^{-1}A_{ml}^1\frac{\partial A_{mn}^1}{\partial Y_k^\alpha}(A_{nj}^0)^{-1}\right) \tag{4.60}$$

ou, em notação mista:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial Y_i^l} = \frac{1}{2}\Bigg(&(\mathbf{A}^0)^{-T}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_i^l}\right)^T\cdot\mathbf{A}^1\cdot(\mathbf{A}^0)^{-1} \\ &+ (\mathbf{A}^0)^{-T}\cdot(\mathbf{A}^1)^T\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_i^l}\right)\cdot(\mathbf{A}^0)^{-1}\Bigg)\end{aligned} \tag{4.61}$$

4.5.5 Hessiana

A Hessiana surge durante o processo de Newton-Raphson para se anular o vetor de desbalanceamento mecânico. Para um elemento finito, a Hessiana é descrita como:

$$\frac{\partial F_{\alpha}^{\beta\{int\}}}{\partial Y_{\gamma}^{z}} = \int_{\Omega_0^{\{elem\}}} \frac{\partial^2 u_e^{SVK}}{\partial Y_{\gamma}^{z} \partial Y_{\alpha}^{\beta}} d\Omega = \int_{\Omega_0^{\{elem\}}} \frac{\partial}{\partial Y_{\gamma}^{z}} \Big(\frac{\partial u_e^{SVK}}{\partial E_{km}} \frac{\partial E_{km}}{\partial Y_{\alpha}^{\beta}} \Big) d\Omega \tag{4.62}$$

Resolvendo-se a última integral de forma numérica para cada elemento finito:

$$\mathbb{H}_{\gamma\alpha}^{z\beta\,\{elem\}} = \int_{\Omega_0^{\{elem\}}} \mathbb{h}_{\gamma\alpha}^{z\beta} d\Omega_0 = \sum_{\zeta=1}^{\wedge} \mathbb{h}_{\gamma\alpha}^{z\beta}\Big(\xi_i^{\zeta}\Big) J_0\Big(\xi_j^{\zeta}\Big) w^{\zeta} \tag{4.63}$$

com

$$\mathbb{h}_{\gamma\alpha}^{z\beta} = \frac{\partial}{\partial Y_{\gamma}^{z}} \Big(\frac{\partial u_e^{SVK}}{\partial E_{km}} \frac{\partial E_{km}}{\partial Y_{\alpha}^{\beta}} \Big) = \frac{\partial E_{no}}{\partial Y_{\gamma}^{z}} \frac{\partial^2 u_e^{SVK}}{\partial E_{no} \partial E_{km}} \frac{\partial E_{km}}{\partial Y_{\alpha}^{\beta}} + \frac{\partial u_e^{SVK}}{\partial E_{km}} \frac{\partial^2 E_{km}}{\partial Y_{\gamma}^{z} \partial Y_{\alpha}^{\beta}} \tag{4.64}$$

em que $\mathbb{h}_{\gamma\alpha}^{z\beta}$ representa uma parcela da Hessiana, calculada nos pontos de integração $\xi_{\eta}(\zeta)$ ao longo de um elemento finito, obtida através das derivadas parciais da energia específica em relação aos parâmetros nodais Y_{α}^{β} e Y_{γ}^{z}. Ao se fazer o somatório destas parcelas, obtém-se a Hessiana do elemento finito que será composta à Hessiana global do sólido.

Simplificando 4.64:

$$\begin{aligned} \mathbb{h}_{\gamma\alpha}^{z\beta} &= \frac{\partial E_{no}}{\partial Y_{\gamma}^{z}} \mathbb{C}_{nokm} \frac{\partial E_{km}}{\partial Y_{\alpha}^{\beta}} + S_{km} \frac{\partial^2 E_{km}}{\partial Y_{\gamma}^{z} \partial Y_{\alpha}^{\beta}} \\ &= \frac{\partial S_{km}}{\partial Y_{\gamma}^{z}} \frac{\partial E_{km}}{\partial Y_{\alpha}^{\beta}} + S_{km} \frac{\partial^2 E_{km}}{\partial Y_{\gamma}^{z} \partial Y_{\alpha}^{\beta}} \end{aligned} \tag{4.65}$$

Por fim, desenvolvendo último termo da equação anterior:

$$\frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial Y_{\gamma}^{z} \partial Y_{\alpha}^{\beta}} = \frac{1}{2} \left((A_{li}^0)^{-1} \frac{\partial A_{ml}^1}{\partial Y_{\gamma}^{z}} \frac{A_{mn}^1}{\partial Y_{\alpha}^{\beta}} (A_{nj}^0)^{-1} + (A_{li}^0)^{-1} \frac{A_{ml}^1}{\partial Y_{\alpha}^{\beta}} \frac{\partial A_{mn}^1}{\partial Y_{\gamma}^{z}} (A_{nj}^0)^{-1} \right) \tag{4.66}$$

ou ainda, em notação mista:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial Y_{\gamma}^{z} \partial Y_{\alpha}^{\beta}} = \frac{1}{2} \Bigg[& (\mathbf{A}^0)^{-T} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_{\gamma}^{z}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_{\alpha}^{\beta}} \right) \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \\ & + (\mathbf{A}^0)^{-T} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_{\alpha}^{\beta}} \right)^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_{\gamma}^{z}} \right) \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \Bigg] \end{aligned} \tag{4.67}$$

A seguir está outra forma de se escrever $\mathbb{h}^{z\beta}_{\gamma\alpha}$, em notação mista:

$$\begin{aligned}\mathbb{h}^{z\beta}_{\gamma\alpha} = \Bigg[\frac{1}{2}\Bigg(&(\mathbf{A}^0)^{-T}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{A}^1}{\partial Y^z_\gamma}\right)^T\cdot\mathbf{A}^1\cdot(\mathbf{A}^0)^{-1}\\&+(\mathbf{A}^0)^{-T}\cdot(\mathbf{A}^1)^T\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{A}^1}{\partial Y^z_\gamma}\right)\cdot(\mathbf{A}^0)^{-1}\Bigg)\Bigg]:\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial Y^\beta_\alpha}\\&+\frac{1}{2}\Bigg[(\mathbf{A}^0)^{-T}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{A}^1}{\partial Y^z_\gamma}\right)^T\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{A}^1}{\partial Y^\beta_\alpha}\right)\cdot(\mathbf{A}^0)^{-1}\\&+(\mathbf{A}^0)^{-T}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{A}^1}{\partial Y^\beta_\alpha}\right)^T\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{A}^1}{\partial Y^z_\gamma}\right)\cdot(\mathbf{A}^0)^{-1}\Bigg]:\mathbf{S}\end{aligned} \tag{4.68}$$

4.6 Incorporação de elementos heterogêneos

A seguir é apresentada a técnica de incorporação de fibras e elementos particulados empregada neste trabalho. Tal metodologia foi inicialmente apresentada no trabalho de Vanalli (2004) e subsequentemente utilizada em vários outros trabalhos como Vanalli, Paccola e Coda (2008), Sampaio (2014), Moura (2015), Fernandes (2016), Friedel (2016), etc. Vale notar que até então esta técnica de embutimento vem sendo empregada na resolução de problemas mecânicos apenas e a aplicação da mesma para problemas térmicos e termomecânicos (cujo detalhamento se dará em capítulo adiante) se constitui num ponto de inovação deste trabalho.

Para a descrição da técnica, num primeiro momento, leva-se em consideração a parcela de energia interna de deformação do sólido compósito ($\mathcal{U}$) que contribui no funcional de energia do sistema descrito pela equação 4.23.

Assume-se que os elementos de fibra e partículas funcionam como enrijecedores (hipótese que pode ser relaxada, tornando os elementos particulados em penalizadores da rigidez, como defeitos por exemplo). Portanto, a energia interna total do sólido pode ser reescrita como a composição das energias interna da matriz do compósito, das fibras e das partículas:

$$\mathcal{U}^{\{total\}} = \mathcal{U}^{\{matriz\}} + \mathcal{U}^{\{fibra\}} + \mathcal{U}^{\{partícula\}} \tag{4.69}$$

A forma de inserção das fibras e partículas é exatamente a mesma, alterando apenas o tipo de elemento empregado, sendo elementos de barra simples (treliça), elementos planos (chapa) ou elementos sólidos no caso deste trabalho. Para fins de elucidação da formulação, as energias internas das fibras e partículas são aglutinadas numa só parcela de energia interna ($\mathcal{U}^{\{inclusão\}}$) representando os elementos a serem inseridos na matriz do compósito:

$$\mathcal{U}^{\{total\}} = \mathcal{U}^{\{matriz\}} + \mathcal{U}^{\{inclusão\}} \tag{4.70}$$

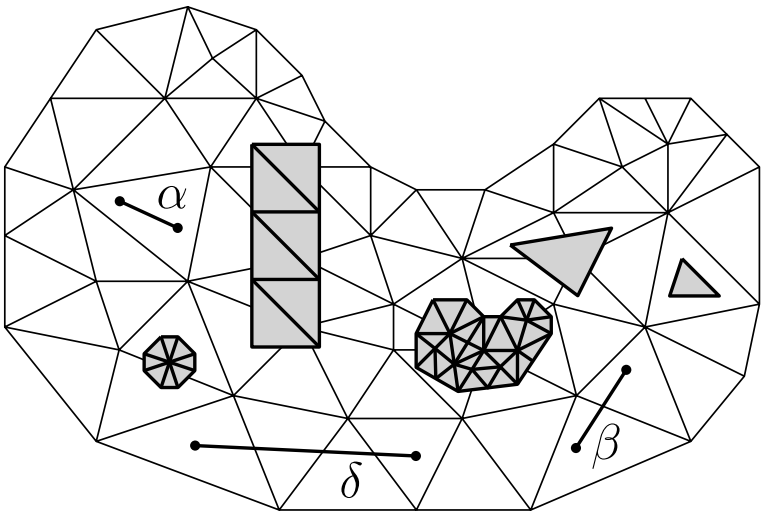
Outra hipótese fundamental para a formulação é a de que a posição dos nós dos elementos de inclusão são reescritos em função da posição dos nós dos elementos da matriz do compósito:

$$Y_\gamma^s = \phi^k(\xi_\alpha^s) Y_\gamma^k \tag{4.71}$$

em que ξ_α^s são as coordenadas adimensionais de um elemento da matriz do compósito avaliadas no nó s de um elemento de inclusão, Y_γ^s é o vetor de parâmetros nodais de um nó s qualquer de um elemento de inclusão, Y_γ^k é o vetor de parâmetros nodais de um nó k qualquer de um elemento da matriz do compósito, $\phi^k(\xi_\alpha^s)$ é a função de forma do nó k da matriz do compósito avaliada na posição ξ_α^s do nó s do elemento de inclusão. Desta forma é possível realizar o acoplamento do elemento de inclusão em qualquer posição do sólido sem que haja aumento no número de graus de liberdade do problema.

A figura 4.7 mostra diversas posições que as fibras e partículas podem adotar dentro de um sólido. Percebe-se que não é necessário a coincidência dos nós entre os elementos de inclusão e da matriz do compósito, além de que um elemento de inclusão pode conectar um ou vários elementos de matriz adjacentes ou separados. Por exemplo, é possível ter o caso de fibras do tipo α que estão completamente inseridas dentro de um elemento finito da matriz do compósito, as fibras do tipo β possuem nós que conectam dois elementos finitos distintos adjacentes, e, por fim, as fibras do tipo δ conectam dois elementos finitos não adjacentes. No caso das partículas, é possível ter casos de partículas compostas por apenas um elemento finito inserido, como também uma malha de partículas representando um sólido de inclusão.

Figura 4.7 – Diversas posições possíveis das fibras e partículas dentro de um sólido.



Fonte: elaborado pelo autor.

Como consequência da equação 4.71, a primeira derivada da energia interna do compósito, que representa o vetor de forças internas, passa a ser:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{U}^{\{total\}}}{\partial Y_i^q} &= \frac{\partial \mathcal{U}^{\{matriz\}} + \partial \mathcal{U}^{\{inclusão\}}}{\partial Y_i^q} = \frac{\partial \mathcal{U}^{\{matriz\}}}{\partial Y_i^q} + \frac{\partial \mathcal{U}^{\{inclusão\}}}{\partial Y_\gamma^s}\frac{\partial Y_\gamma^s}{\partial Y_i^q} \\
&= \frac{\partial \mathcal{U}^{\{matriz\}}}{\partial Y_i^q} + \frac{\partial \mathcal{U}^{\{inclusão\}}}{\partial Y_\gamma^s}\frac{\partial \left(\phi^k(\xi_\alpha^s)Y_\gamma^k\right)}{\partial Y_i^q} \\
&= F_i^{q\{matriz\}} + \frac{\partial \mathcal{U}^{\{inclusão\}}}{\partial Y_\gamma^s}\phi^k(\xi_\alpha^s)\delta_{i\gamma}\delta_{kq} \\
&= F_i^{q\{matriz\}} + F_\gamma^{s\{inclusão\}}\phi^q(\xi_\alpha^s)\delta_{i\gamma} \\
&= F_i^{q\{matriz\}} + F_i^{s\{inclusão\}}\phi^q(\xi_\alpha^s)
\end{aligned} \tag{4.72}$$

em que $F_i^{q\{matriz\}}$ é a componente da força interna no nó q de um elemento finito da matriz do compósito, $F_i^{s\{inclusão\}}$ é a componente da força interna no nó s de um elemento de inclusão em relação aos graus de liberdade do próprio elemento de inclusão e $\phi^q(\xi_\alpha^s)$ é a função de forma do nó q do elemento da matriz do compósito avaliada nas coordenadas adimensionais ξ_α^s do nó s do elemento de inclusão.

A hessiana global do compósito é obtida por meio da segunda derivada da energia específica em relação ao vetor de parâmetros nodais:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{U}^{\{total\}}}{\partial Y_i^q \partial Y_j^r} &= \frac{\partial^2 \mathcal{U}^{\{matriz\}} + \partial^2 \mathcal{U}^{\{inclusão\}}}{\partial Y_i^q \partial Y_j^r} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}^{\{matriz\}}}{\partial Y_i^q \partial Y_j^r} + \frac{\partial}{\partial Y_i^q}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}^{\{inclusão\}}}{\partial Y_\upsilon^z}\frac{\partial Y_\upsilon^z}{\partial Y_j^r}\right) \\
&= \frac{\partial^2 \mathcal{U}^{\{matriz\}}}{\partial Y_i^q \partial Y_j^r} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}^{\{inclusão\}}}{\partial Y_\gamma^s \partial Y_\upsilon^z}\frac{\partial Y_\gamma^s}{\partial Y_i^q}\frac{\partial Y_\upsilon^z}{\partial Y_j^r} \\
&= \mathbb{h}_{ij}^{qr\{matriz\}} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}^{\{inclusão\}}}{\partial Y_\gamma^s \partial Y_\upsilon^z}\frac{\partial \left(\phi^k(\xi_\alpha^s)Y_\gamma^k\right)}{\partial Y_i^q}\frac{\partial \left(\phi^l(\xi_\beta^z)Y_\upsilon^l\right)}{\partial Y_j^r} \\
&= \mathbb{h}_{ij}^{qr\{matriz\}} + \mathbb{h}_{\gamma\upsilon}^{sz\,\{inclusão\}}\phi^k(\xi_\alpha^s)\phi^l(\xi_\beta^z)\delta_{qk}\delta_{i\gamma}\delta_{rl}\delta_{j\upsilon} \\
&= \mathbb{h}_{ij}^{qr\{matriz\}} + \mathbb{h}_{ij}^{sz\{inclusão\}}\phi^q(\xi_\alpha^s)\phi^r(\xi_\beta^z)
\end{aligned} \tag{4.73}$$

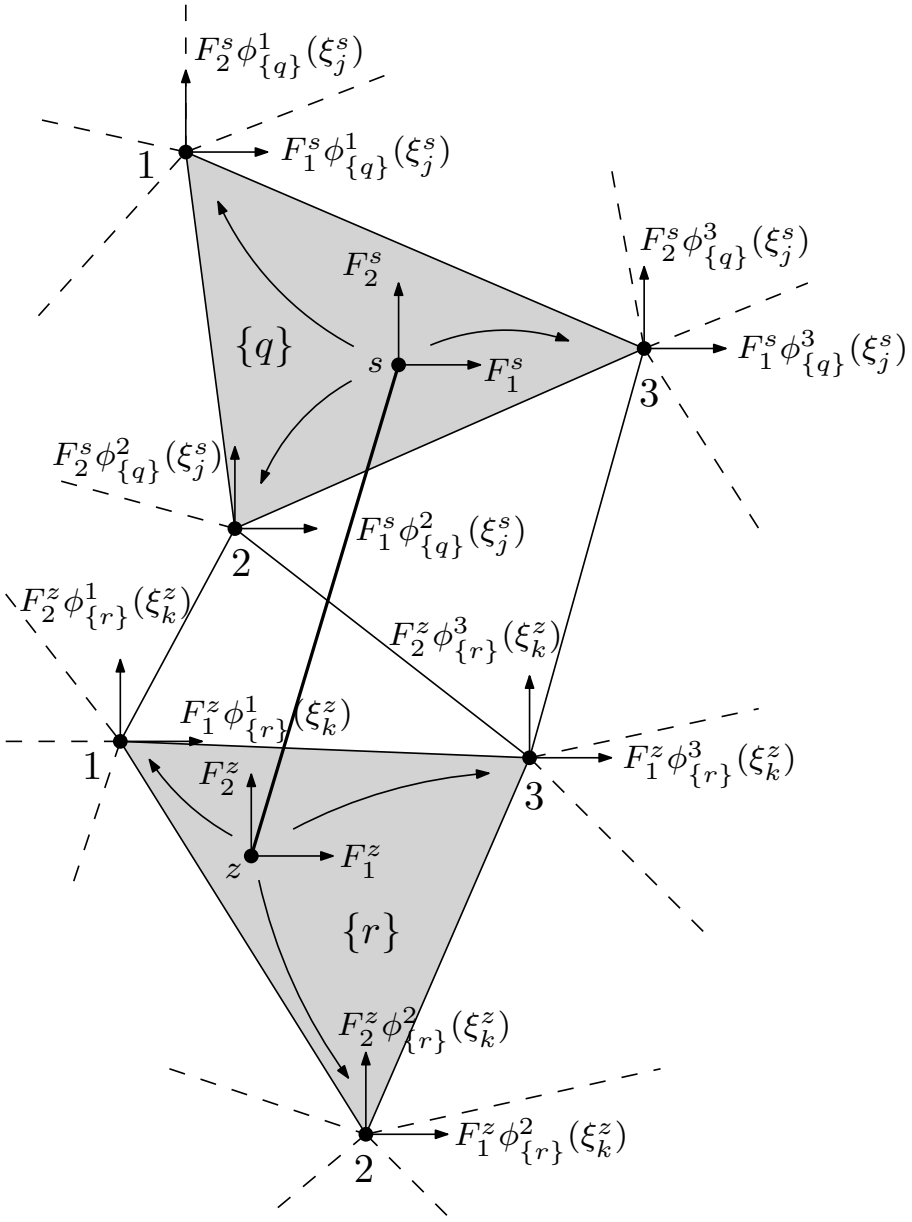
em que $\mathbb{h}_{ij}^{qr\{matriz\}}$ é a parcela da hessiana correspondente aos nós q e r do elemento finito da matriz do compósito, $\mathbb{h}_{ij}^{sz\{inclusão\}}$ é a parcela da hessiana do elemento finito de inclusão em relação aos nós s e z do elemento finito de inclusão e ϕ^q e ϕ^r são respectivamente as funções de forma dos nós q e r do elemento finito da matriz do compósito avaliadas nas coordenadas adimensionais ξ_α^s e ξ_β^z.

É possível perceber que, ao reescrever os parâmetros nodais do elemento de inclusão em função dos nós do elemento da matriz do compósito, o vetor de força interna e a hessiana do sólido total se tornam o somatório das correspondentes parcelas do elemento finito da matriz do compósito e do elemento finito de inclusão *expandido* pelas funções de forma do elemento da matriz do compósito.

É apresentado a seguir um exemplo para demonstrar a técnica de imersão de fibras. O procedimento é o mesmo para o caso de partículas, alterando apenas a quantidade de nós do elemento a ser inserido. Para demonstração, realiza-se o acoplamento de uma fibra numa matriz do compósito composta por elementos triangulares. Inicialmente a demonstração é dada para o vetor de forças internas para um caso em específico. Logo após é feita a generalização para outros tipos de elementos finitos e para a matriz numérica hessiana.

A figura 4.8 mostra uma posição qualquer de uma fibra numa matriz do compósito composta por elementos triangulares. A fibra é representada por um elemento finito de aproximação linear com 2 nós. A matriz do compósito é representada por elementos finitos triangulares de aproximação linear com 3 nós. Para um problema mecânico 2D, com 2 graus de liberdade por nó, os graus de liberdade dos elementos finitos empregados na demonstração são 4 e 6 para a fibra e matriz do compósito, respectivamente. Denota-se por s e z dois nós quaisquer de um elemento de fibra. O nó s está inserido no elemento $\{q\}$ da matriz do compósito e o nó z está inserido no elemento $\{r\}$. Para esta exemplificação, convenciona-se nesta subseção que os subíndices ou sobreíndices nos termos das funções de forma (ex.: $\phi_{\{q\}}$, $\phi_{\{r\}}$ ou $\phi^{\{q\}}$) indicam a qual elemento finito da matriz do compósito estas funções pertencem.

Figura 4.8 – Posicionamento e distribuição do vetor de força interno de um elemento de fibra imerso numa matriz composta por elementos triangulares.



Fonte: elaborado pelo autor.

É possível perceber que, de acordo com a equação 4.72, a componente do vetor de força interna do elemento de inclusão referente ao nó s ($F_i^{s\{inclusão\}}$) é redistribuída aos nós $(1, 2, 3)$ do elemento finito $\{q\}$ da matriz do compósito por meio de uma ponderação das funções de forma $(\phi^1_{\{q\}}, \phi^2_{\{q\}}, \phi^3_{\{q\}})$ dos respectivos nós quando avaliados em ξ^s_j. O mesmo ocorre para a componente $F_i^{z\{inclusão\}}$ do nó z inserido no elemento $\{r\}$ da matriz do compósito.

Os graus de liberdade dos elementos finitos são convenientemente organizados de forma que estes se tornem a concatenação sequencial das direções nó após nó. Desta forma é possível escrever o vetor de força interna do elemento de inclusão como:

$$F_i^{\{inclusão\}} = \begin{Bmatrix} \{F_j^s\} \\ \{F_k^z\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^s \\ F_2^s \\ F_1^z \\ F_2^z \end{Bmatrix} \tag{4.74}$$

de tal forma que este arranjo dos graus de liberdade é obedecido para todo tipo de elemento finito empregado neste trabalho, tanto para o vetor de força interna quanto para a hessiana.

Para fins de implementação, é criada uma matriz numérica responsável por fazer o espalhamento, ou expansão, do vetor de força interna do elemento de fibra para posterior contribuição nos respectivos graus de liberdade dos elementos da matriz do compósito. Tal matriz numérica precisa conter as funções de forma dos elementos finitos da matriz do compósito que, quando pré-multiplicada pelo vetor de força interna do elemento de inclusão, produza um vetor de força interna expandido, já no arranjo correto dos graus de liberdade para contribuição no vetor de força interna global do sólido. Assumindo a disposição dos graus de liberdade previamente discutida, a matriz numérica de espalhamento condizente com a convenção adotada neste trabalho é dada pela equação 4.75.

$$\Phi_{ij} = \begin{bmatrix} \phi^1_{\{q\}} & 0 & \phi^2_{\{q\}} & 0 & \phi^3_{\{q\}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^1_{\{q\}} & 0 & \phi^2_{\{q\}} & 0 & \phi^3_{\{q\}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi^1_{\{r\}} & 0 & \phi^2_{\{r\}} & 0 & \phi^3_{\{r\}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi^1_{\{r\}} & 0 & \phi^2_{\{r\}} & 0 & \phi^3_{\{r\}} \end{bmatrix} \tag{4.75}$$

O número de linhas desta matriz numérica deve ser compatível com o número de graus de liberdade do elemento finito de inclusão. O número de colunas desta matriz numérica deve ser o número de graus de liberdade do elemento finito da matriz do compósito vezes o número de nós do elemento finito de inclusão. Percebe-se que se trata de uma concatenação das matrizes numéricas de funções de forma de cada um dos elementos finitos da matriz do compósito em que os nós s e z se encontram. No caso, primeiramente as funções de forma do elemento $\{q\}$ e depois as funções de forma do elemento $\{r\}$. Todas as outras posições são valores nulos. As funções de forma são intercaladas devido ao arranjo dos graus de liberdade adotados neste trabalho, pois ao se multiplicar com o vetor de força interna da inclusão, gera-se um vetor expandido também com direções em sequência nó a nó para cada elemento finito da matriz do compósito.

De posse da matriz numérica de espalhamento Φ_{ij}, é possível obter o vetor de força interna global pré-multiplicando o vetor de força interna do elemento de inclusão pela transposta da matriz numérica de espalhamento:

$$F_j^{\{inclusão\}\{global\}} = \Phi_{ij} F_i^{\{inclusão\}} = \begin{Bmatrix} F_1^s \phi_{\{q\}}^1 \\ F_2^s \phi_{\{q\}}^1 \\ F_1^s \phi_{\{q\}}^2 \\ F_2^s \phi_{\{q\}}^2 \\ F_1^s \phi_{\{q\}}^3 \\ F_2^s \phi_{\{q\}}^3 \\ F_1^z \phi_{\{r\}}^1 \\ F_2^z \phi_{\{r\}}^1 \\ F_1^z \phi_{\{r\}}^2 \\ F_2^z \phi_{\{r\}}^2 \\ F_1^z \phi_{\{r\}}^3 \\ F_2^z \phi_{\{r\}}^3 \end{Bmatrix} \tag{4.76}$$

em que o vetor resultante representa a contribuição das parcelas do vetor de força interna do elemento de inclusão $F_i^{\{inclusão\}}$ para cada um dos elementos finitos da matriz do compósito $\{q\}$ e $\{r\}$. Nota-se que a metade superior representa a parcela do vetor de força interna do elemento de inclusão referente ao nó s distribuída no elemento $\{q\}$. Analogamente, a metade inferior se refere ao espalhamento da parcela associada ao nó z no elemento $\{r\}$. Este vetor pode então ser contribuído no vetor de forças internas global do sólido.

De forma geral, para um elemento de inclusão (fibra ou partícula) com Υ nós, a matriz numérica de espalhamento assume a forma genérica da equação 4.77, representando a concatenação das matrizes numéricas de funções de forma de cada um dos elementos finitos ($\{q\}, \{r\}, \ldots, \{\Upsilon\}$) da matriz do compósito onde os respectivos nós do elemento de inclusão se encontram.

$$\Phi_{ij} = \begin{bmatrix} \Phi_{kl}^{\{q\}} & [0] & \ldots & [0] \\ [0] & \Phi_{kl}^{\{r\}} & \ldots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \ldots & \Phi_{kl}^{\{\Upsilon\}} \end{bmatrix} \tag{4.77}$$

com

$$\Phi_{kl}^{\{\Upsilon\}} = \begin{bmatrix} \phi_{\{\Upsilon\}}^1 & 0 & \phi_{\{\Upsilon\}}^2 & 0 & \phi_{\{\Upsilon\}}^3 & 0 \\ 0 & \phi_{\{\Upsilon\}}^1 & 0 & \phi_{\{\Upsilon\}}^2 & 0 & \phi_{\{\Upsilon\}}^3 \end{bmatrix} \tag{4.78}$$

para o caso 2D de um elemento triangular da matriz do compósito de aproximação linear com 3 nós.

Para um elemento finito genérico com n nós, $\Phi_{kl}^{\{\Upsilon\}}$ pode ser escrito para o caso 2D como:

$$\Phi_{kl}^{\{\Upsilon\}} = \begin{bmatrix} \phi_{\{\Upsilon\}}^1 & 0 & \phi_{\{\Upsilon\}}^2 & 0 & \ldots & \phi_{\{\Upsilon\}}^n & 0 \\ 0 & \phi_{\{\Upsilon\}}^1 & 0 & \phi_{\{\Upsilon\}}^2 & \ldots & 0 & \phi_{\{\Upsilon\}}^n \end{bmatrix} \tag{4.79}$$

ou para o caso 3D como:

$$\Phi_{kl}^{\{\Upsilon\}} = \begin{bmatrix} \phi_{\{\Upsilon\}}^1 & 0 & 0 & \phi_{\{\Upsilon\}}^2 & 0 & 0 & \dots & \phi_{\{\Upsilon\}}^n & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{\{\Upsilon\}}^1 & 0 & 0 & \phi_{\{\Upsilon\}}^2 & 0 & \dots & 0 & \phi_{\{\Upsilon\}}^n & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{\{\Upsilon\}}^1 & 0 & 0 & \phi_{\{\Upsilon\}}^2 & \dots & 0 & 0 & \phi_{\{\Upsilon\}}^n \end{bmatrix} \tag{4.80}$$

A hessiana deste mesmo elemento de inclusão pode ser representada pela seguinte matriz numérica:

$$\mathbb{h}_{im}^{\{inclusão\}} = \begin{bmatrix} \mathbb{h}_{11} & \mathbb{h}_{12} & \mathbb{h}_{13} & \mathbb{h}_{14} \\ \mathbb{h}_{21} & \mathbb{h}_{22} & \mathbb{h}_{23} & \mathbb{h}_{24} \\ \mathbb{h}_{31} & \mathbb{h}_{32} & \mathbb{h}_{33} & \mathbb{h}_{34} \\ \mathbb{h}_{41} & \mathbb{h}_{42} & \mathbb{h}_{43} & \mathbb{h}_{44} \end{bmatrix} \tag{4.81}$$

De forma análoga ao vetor de forças internas, a hessiana global do elemento de inclusão é obtida a partir da hessiana do elemento de inclusão definida na equação 4.81 e da mesma matriz numérica de espalhamento definida na equação 4.75. Basta pré-multiplicar e pós-multiplicar a hessiana do elemento pelas matrizes numéricas de espalhamento, como definido na seguinte equação:

$$\mathbb{h}_{jn}^{\{inclusão\}^{(global)}} = \Phi_{ij}\mathbb{h}_{im}^{\{inclusão\}}\Phi_{mn} \tag{4.82}$$

Resta ainda discutir sobre as dimensões das matrizes globais resultantes. As dimensões resultantes do vetor de força interna e hessiana global do elemento de inclusão expandido provém da matriz numérica de espalhamento dada em 4.77. Por se tratar de uma concatenação de matrizes numéricas de funções de forma dos respectivos elementos finitos da matriz do compósito, vezes a quantidade de nós do elemento de inclusão, uma regra geral para saber a dimensão da matriz numérica de espalhamento é:

$$[\mathbf{\Phi}]_{\alpha x \beta} \begin{cases} \alpha = \text{Número de graus de liberdade do elemento de inclusão} \\ \beta = \eta\Upsilon \end{cases} \tag{4.83}$$

em que η é o número de graus de liberdade do elemento da matriz do compósito e Υ é o número de nós do elemento de inclusão.

Para o exemplo em questão, α para um elemento de fibra de 2 nós para o caso 2D é 4 (2 nós x 2 graus de liberdade por nó). η para um elemento triangular 2D de 3 nós é 6 (3 nós x 2 graus de liberdade por nó). β passa a ser 2x6 = 12. Portanto a matriz numérica de espalhamento passa a possuir a dimensão de $[\mathbf{\Phi}]_{4x12}$. Por fim, o vetor de força interna global da inclusão passa a ter dimensão de:

$$\vec{F}_{12x1}^{\{global\}} = [\mathbf{\Phi}]_{4x12}^T \vec{F}_{4x1} \tag{4.84}$$

e a matriz hessiana possui a seguinte dimensão:

$$\mathbb{h}_{12x12}^{\{global\}} = [\mathbf{\Phi}]_{4x12}^T \mathbb{h}_{4x4} [\mathbf{\Phi}]_{4x12} \tag{4.85}$$

4.6.1 Método de Newton-Raphson para obtenção de ξ_j

Nos desenvolvimentos realizados até esta seção, assumiu-se que as coordenadas adimensionais ξ_j dos nós do elemento de inclusão eram conhecidas. Também assumiu-se que se sabia em qual elemento finito da matriz do compósito estes nós se encontravam. Entretanto, num primeiro momento se conhece apenas as posições X_i dos nós dos elementos de inclusão e da matriz do compósito. É necessário determinar em qual dos elementos finitos da matriz do compósito estes nós se encontram e descobrir o valor das suas respectivas coordenadas ξ_j.

Para descobrir o valor das coordenadas adimensionais ξ_j de um nó de elemento finito de inclusão é utilizado o método de Newton-Raphson. Parte-se do pressuposto de que se deseja encontrar as coordenadas ξ_j^s de um nó s qualquer de um elemento de inclusão que se encontra dentro de um elemento $\{q\}$ da matriz do compósito. A priori são apenas conhecidas as respectivas coordenadas X_i^q e X_i^s dos nós dos elementos da matriz do compósito e inclusão. De posse destas informações e relembrando a equação 4.71, escreve-se a equação 4.86 que representa o resíduo a ser minimizado:

$$g_{i(t)} = X_i^s - \phi^q(\xi_{j(t)}^k) X_i^q = X_i^s - X_{i(t)}^k \tag{4.86}$$

em que $g_{i(t)}$ representa o resíduo entre a posição X_i^s do nó s do elemento de inclusão e a posição $X_{i(t)}^k$ de um nó k resultante de uma coordenada $\xi_{j(t)}^k$ tentativa dentro de um elemento $\{q\}$ da matriz do compósito.

Ao tornar o resíduo $g_{i(t)}$ nulo, o nó k passa a coincidir com o nó s e portanto $\xi_j^s = \xi_{j(t)}^k$. Para efetuar a minimização do resíduo, realiza-se a expansão da equação 4.86 em série de Taylor de 1ª ordem:

$$\begin{aligned} g_{i(t+1)} &= g_{i(t)} - \left. \frac{\partial \phi^q(\xi_l) X_i^q}{\partial \xi_j} \right|_{\xi_{l(t)}^k} \Delta\xi_j \\ g_{i(t+1)} &= g_{i(t)} - H_{ij} \Delta\xi_j \end{aligned} \tag{4.87}$$

No momento que $g_{i(t+1)}$ se tornar nulo:

$$g_{i(t+1)} = g_{i(t)} - H_{ij}\Delta\xi_j \approx 0 \qquad \rightarrow \qquad g_{i(t)} = H_{ij}\Delta\xi_j \tag{4.88}$$

em que H_{ij} passa a ser uma matriz definida como:

$$H_{ij} = \left. \begin{bmatrix} \sum_{q=1}^{\gamma} \frac{\partial \phi^q(\xi_l)}{\partial \xi_1} X_1^q & \sum_{q=1}^{\gamma} \frac{\partial \phi^q(\xi_l)}{\partial \xi_2} X_1^q \\ \sum_{q=1}^{\gamma} \frac{\partial \phi^q(\xi_l)}{\partial \xi_1} X_2^q & \sum_{q=1}^{\gamma} \frac{\partial \phi^q(\xi_l)}{\partial \xi_2} X_2^q \end{bmatrix} \right|_{\xi_{l(t)}^k} \tag{4.89}$$

para o caso 2D, ou

$$H_{ij} = \left. \begin{bmatrix} \sum_{q=1}^{\gamma} \frac{\partial \phi^q(\xi_l)}{\partial \xi_1} X_1^q & \sum_{q=1}^{\gamma} \frac{\partial \phi^q(\xi_l)}{\partial \xi_2} X_1^q & \sum_{q=1}^{\gamma} \frac{\partial \phi^q(\xi_l)}{\partial \xi_3} X_1^q \\ \sum_{q=1}^{\gamma} \frac{\partial \phi^q(\xi_l)}{\partial \xi_1} X_2^q & \sum_{q=1}^{\gamma} \frac{\partial \phi^q(\xi_l)}{\partial \xi_2} X_2^q & \sum_{q=1}^{\gamma} \frac{\partial \phi^q(\xi_l)}{\partial \xi_3} X_2^q \\ \sum_{q=1}^{\gamma} \frac{\partial \phi^q(\xi_l)}{\partial \xi_1} X_3^q & \sum_{q=1}^{\gamma} \frac{\partial \phi^q(\xi_l)}{\partial \xi_2} X_3^q & \sum_{q=1}^{\gamma} \frac{\partial \phi^q(\xi_l)}{\partial \xi_3} X_3^q \end{bmatrix} \right|_{\xi_{l(t)}^k} \tag{4.90}$$

para o caso 3D. γ é o número total de nós do elemento finito da matriz do compósito.

Ao se resolver a equação 4.88 e obter um valor de $\Delta\xi_j$, a nova coordenada de ξ_j^k é atualizada como:

$$\xi_{j(t+1)}^k = \xi_{j(t)}^k + \Delta\xi_j \tag{4.91}$$

Tal processo é repetido n vezes até que $g_{i(t)}$ seja suficientemente pequeno. Como critério de parada, neste trabalho foi adotado a norma L_2 do vetor resíduo para comparar com um parâmetro de tolerância:

$$\sqrt{g_i g_i} \leq \epsilon_{tol} \tag{4.92}$$

em que ϵ_{tol} é um parâmetro de tolerância arbitrário.

Por fim, vale notar que independentemente do nó s estar realmente dentro do elemento $\{q\}$ da matriz do compósito, haverá convergência do processo iterativo de Newton. Como verificação final para saber se o ponto realmente pertence ao domínio de $\{q\}$ ou não, basta relembrar que as seguintes relações entre as dimensões das coordenadas adimensionais devem ser obedecidas:

$$\xi_3^s = 1 - \xi_1^s - \xi_2^s \qquad \text{e} \qquad 1 \geq \xi_j \geq 0 \tag{4.93}$$

para o caso 2D de um elemento finito triangular de qualquer ordem, ou

$$\xi_4^s = 1 - \xi_1^s - \xi_2^s - \xi_3^s \qquad \text{e} \qquad 1 \geq \xi_j \geq 0 \tag{4.94}$$

para o caso 3D de um elemento finito tetrahédrico de qualquer ordem.

Caso uma das dimensões das coordenadas adimensionais resulte num valor negativo ou superior à unidade, significa que o ponto s não pertence ao domínio do elemento $\{q\}$ finito da matriz do compósito.

4.6.2 Fibras

Neste trabalho foram utilizados elementos de fibra de aproximação linear tanto para o caso 2D quanto para o caso 3D. De acordo com trabalhos recentes como Sampaio (2014) e Fernandes (2016), fibras de aproximação linear resultam em valores com boa acurácia independentemente do grau de aproximação do elemento finito base. Caso seja necessário, basta apenas efetuar uma maior discretização ao longo do comprimento da fibra.

4.6.3 Partículas

Os elementos finitos de partícula empregados no trabalho, ao contrário do caso das fibras, possuem o mesmo grau de aproximação do elemento finito da matriz do compósito. Para o caso 2D foram empregados elementos triangulares de aproximação cúbica com 10

nós. Para o caso 3D foram utilizados elementos tetrahédricos de aproximação cúbica com 20 nós. Desta forma, a movimentação dos domínios se torna congruente, não apenas nos nós da inclusão.

No caso de inserção de partículas, o grau de aproximação do elemento a ser embutido passa a ser relevante. Para o caso de partículas que tendem a contribuir positivamente na rigidez do compósito (soma nos valores da matriz de rigidez do sólido base) ainda é possível fazer uso de elementos de aproximação menor como elementos lineares ou quadráticos. Entretanto, para o caso de defeitos, em que há a necessidade de se subtrair valores da rigidez da matriz do compósito, é imperativo empregar um elemento finito com o mesmo grau de aproximação do elemento finito da matriz do compósito. Observou-se que, ao se fazer uso de elementos finitos de grau inferior, poderia ocorrer a inversão de sinais de alguns termos na matriz de rigidez global. Também não é possível mitigar este efeito com maior discretização da malha de partículas. A consequência desta inversão de sinais é a produção de um resultado numérico incoerente e/ou oposto ao esperado.

4.7 Plasticidade

De forma geral a teoria da plasticidade trata de sólidos que, quando sujeitos à um determinado nível de carregamento, desenvolvem deformações permanentes (plásticas) após o processo de descarregamento. Sua origem pode ser datada da metade do século 19, sendo extensivamente desenvolvida desde então. Atualmente a teoria da plasticidade é bem estabelecida matematicamente e possui uma vasta gama de aplicações importantes para a engenharia. A fundamentação básica teórica e computacional pode ser encontrada em Simo e Hughes (1998), Chen e Han (2007) e Souza Neto, Peric e Owen (2008).

É possível separar as análises não lineares inelásticas em duas categorias: análises com plasticidade concentrada ou análises com plasticidade distribuída.

Os trabalhos de Jiang *et al.* (2019), Kostic, Filippou e Deretic-Stojanovic (2016) e Liew *et al.* (2000) fazem uso de análises com plasticidade concentrada. Tal modelo considera que o fenômeno de plastificação do material se concentra em determinados pontos ou locais, gerando rótulas plásticas, enquanto que todo o resto do domínio permanece elástico. Tal hipótese simplificadora faz uso do fato de que no caso de estruturas reticulares, usualmente, a plastificação do sólido se dá justamente nas ligações ou em algum ponto ao longo da peça. Portanto, bastaria apenas realizar o processo de plastificação nestes locais. Tal modelo traz como vantagens um menor custo computacional em comparação com o modelo de plastificação distribuída, ao custo da resolução e acurácia do resultado depender do refinamento da malha.

Nos trabalhos de Prakash e Srivastava (2019), Pantò *et al.* (2017), Thai e Kim (2015b) e Mazza (2014), por exemplo, é feito uso da análise plástica distribuída. No modelo

de análise plástica distribuída é realizada a integração numérica, avaliação do estado de tensões e dos critérios de plastificação ao longo de todo o domínio do sólido. O processo de plastificação se dá por decorrência das leis que regem o próprio processo e portanto todo o sólido estará sujeito a se plastificar. Em comparação com o modelo de análise concentrada, a análise de plasticidade distribuída é capaz de produzir resultados com maior acurácia. Em contra partida, resulta num custo computacional mais elevado.

De acordo com o que foi exposto, entende-se que o modelo numérico desenvolvido neste trabalho se enquadra na categoria de modelo de análise plástica distribuída. O modelo de plasticidade implementado é o modelo de Von Mises associativo, como descrito em Auricchio e Veiga (2003) e Souza Neto, Peric e Owen (2008). Tal modelo é amplamente empregado para materiais dúcteis e inclusive em situações de plasticidade não isotérmica, como nos trabalhos de Rigobello, Coda e Munaiar Neto (2014), Pettermann *et al.* (1999), Yu *et al.* (2010) e Neves, Camargo e Azevedo (2021).

4.7.1 Plasticidade independente de taxa

Nesta seção é brevemente apresentada a teoria da plasticidade independente de taxa, segundo a termodinâmica de processos irreversíveis em meios contínuos, aos moldes de Botta *et al.* (2007). Num primeiro momento o processo de plasticidade é considerado sob condições isotérmicas e de pequenas deformações, posteriormente serão detalhadas as considerações necessárias para contemplar situações de plasticidade não isotérmica. As variáveis cinemáticas macroscópicas são o tensor de deformações ε_{ij} e o vetor α_i, que representa as variáveis internas capazes de descrever os diversos fenômenos dissipativos. As variáveis básicas estáticas são o tensor de tensões de Cauchy σ_{ij} e o vetor χ_i que representa as forças termodinâmicas associadas à α_i.

Por se tratar de regime de pequenas deformações, assume-se a decomposição aditiva do tensor de deformações em duas partes, elástica e plástica:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^p_{ij} \tag{4.95}$$

em que ε^e_{ij} e ε^p_{ij} são as partes elástica e plástica, respectivamente.

Considerando-se processos plásticos, a energia livre potencial é dada por:

$$\rho\Psi(\varepsilon_{ij} - \varepsilon^p_{ij}, \alpha_i) = \frac{1}{2}\varepsilon^e_{ij} C^e_{ijkl} \varepsilon^e_{kl} + \frac{1}{2}\alpha_i h_{ij} \alpha_j \tag{4.96}$$

em que ρ é a densidade do material, C^e_{ijkl} é o tensor constitutivo elástico de quarta ordem e h_{ij} é um tensor de segunda ordem composto pelos parâmetros de encruamento.

De 4.96, as variáveis estáticas são definidas como:

$$\sigma_{ij} = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon_{ij}} = C^e_{ijkl}\varepsilon^e_{kl} = C^e_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon^p_{kl}\right) \tag{4.97}$$

e

$$\chi_i = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} = -h_{ij}\alpha_j \tag{4.98}$$

Para o comportamento inelástico, a evolução das variáveis internas é definida pela introdução do potencial plástico $F(\sigma_{ij}, \chi_k)$. Desta forma a regra de fluxo, ou lei de evolução do tensor de deformações plásticas é dada de acordo com:

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \tag{4.99}$$

e a regra de encruamento, ou lei de evolução do vetor de encruamento, é representada por:

$$\dot{\alpha}_j = \dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial \chi_j} \tag{4.100}$$

em que γ é o multiplicador plástico que satisfaz as condições de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \dot{\gamma} f = 0 \tag{4.101}$$

em que $f(\sigma_{ij}, \chi_k)$ é a função que define o critério de plastificação a se adotar. O critério de plastificação é a superfície definida no espaço das tensões principais que separa as regiões de comportamento elástico e plástico. Quando $F = f$ é dito que se tem plasticidade associativa. Do contrário, obtém-se um critério de plasticidade não associativo.

4.7.2 Critério de plasticidade

O critério de plasticidade adotado para este trabalho é o critério de Von Mises associativo com encruamento isotrópico e cinemático, descrito na seguinte equação:

$$f = ||\Sigma_{ij}|| - \sigma_y \tag{4.102}$$

com

$$\begin{aligned}
\Sigma_{ij} &= s_{ij} - \alpha_{ij} \\
s_{ij} &= \sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{1}{3}\sigma_{ll} \\
e_{ij} &= \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\frac{1}{3}\varepsilon_{ll} \\
\sigma_y &= \sigma_{y,0} + H_{iso}\gamma \\
\dot{\alpha_{ij}} &= H_{kin}\dot{e^p_{ij}} \\
\dot{e^p_{ij}} &= \dot{\gamma} n_{ij} \\
n_{ij} &= \frac{\delta F}{\delta \Sigma_{ij}} = \frac{\Sigma_{ij}}{||\Sigma_{ij}||}
\end{aligned} \tag{4.103}$$

em que σ_{ij} é o tensor de tensões de Cauchy, ε_{ij} é o tensor de deformações na descrição euleriana, s_{ij} e e_{ij} são as respectivas tensão e deformação desviatórias, Σ_{ij} é a tensão relativa, em função da tensão *backstress* α_{ij} que descreve o mecanismo de encruamento cinemático, γ e n_{ij} são o parâmetro de consistência e um vetor unitário que determinam

a evolução da deformação plástica, H_{iso} e H_{kin} são respectivamente os parâmetros de encruamento isotrópico e cinemático, $\sigma_{y,0}$ é a tensão inicial de plastificação e por fim, f é o critério de plastificação de Von Mises em função da norma euclidiana da tensão relativa $||\Sigma_{ij}||$ e encruamento isotrópico σ_y.

Definidas a regra de fluxo, a regra de encruamento e o critério de plastificação é possível então contemplar processos inelásticos na forma de plasticidade. As condições de Kuhn-Tucker expostas nas equações 4.101 complementam o modelo de plasticidade. Para qualquer instante de tempo t e quaisquer tipos e valor de carregamentos que estejam atuando no sólido, estas condições devem ser obedecidas. Ou seja, quando o critério de plastificação resultar num valor negativo, obrigatoriamente a taxa do multiplicador plástico ($\dot{\gamma}$) deve ser nula. Nas situações em que f resultar em valor positivo, haverá então a necessidade de se calcular uma correção, na forma de uma taxa de deformação plástica, que faça a equação do critério de plastificação se tornar novamente nula. Desta forma são definidas as regiões no espaço de tensões onde se encontram os comportamentos elástico e plástico do sólido. A seguir é descrito o algoritmo responsável por calcular o valor da taxa de deformação plástica.

4.7.3 Algoritmo de retorno radial para o critério de Von Mises associativo

No caso em que o critério de plastificação resultar positivo ($f > 0$), há a necessidade de se calcular o incremento de deformação plástica. Para tanto emprega-se o algorimo de retorno radial, como descrito em Auricchio e Taylor (1995), Auricchio e Veiga (2003), Simo e Hughes (1998) ou Zienkiewicz e Taylor (2000). Assume-se que o intervalo de tempo da análise é repartido em N diversos sub-intervalos definidos pelos pontos $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n < t_{n+1} < \ldots < t_N$. Também é assumido que num instante de tempo genérico t_n, as variáveis de estado que definem o problema são conhecidas, como por exemplo $s_{ij[n]}$, $e_{ij[n]}$, $\alpha_{ij[n]}$ e $\gamma_{[n]}$. Desta forma, pretende-se calcular e obter os valores para as variáveis de estado no próximo passo de tempo t_{n+1}. Num primeiro momento o campo mecânico é entendido como puramente elástico e as seguintes quantidades tentativa são calculadas:

$$\begin{aligned} e^{p,TR}_{ij[n+1]} &= e^{p}_{ij[n]} \\ s^{TR}_{ij[n+1]} &= s_{ij[n]} \\ \alpha^{TR}_{ij[n+1]} &= \alpha^{p}_{ij[n]} \\ \Sigma^{TR}_{ij[n+1]} &= s^{TR}_{ij[n+1]} - \alpha^{TR}_{[n+1]} \\ \gamma^{TR}_{[n+1]} &= \gamma_{[n]} \end{aligned} \tag{4.104}$$

em que o superescrito ^{TR} representa a natureza tentativa das grandezas descritas.

Logo após, o critério de plastificação é verificado:

$$||\Sigma^{TR}_{ij[n+1]}|| \leq \sigma_{y,0} + H_{iso}\gamma^{TR}_{[n+1]} \tag{4.105}$$

e se a inequação for verdadeira, então de fato é confirmada a hipótese inicial de momento puramente elástico e todas as grandezas do passo t_{n+1} assumem o valor da tentativa. Entretanto, caso a inequação não se mostrar verdadeira, é necessário efetuar o segundo passo de correção plástica naquele ponto do domínio de acordo com as seguintes equações:

$$\begin{aligned} e^{p}_{ij[n+1]} &= e^{p,TR}_{ij[n+1]} + \lambda n_{ij} \\ \alpha^{TR}_{ij[n+1]} &= \alpha^{p}_{ij[n]} + H_{kin}\lambda n_{ij} \\ \gamma_{[n+1]} &= \gamma^{TR}_{[n+1]} + \lambda \end{aligned} \tag{4.106}$$

em que λ representa o incremento do parâmetro plástico de consistência ($\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\gamma} dt$).

Para completar o procedimento, o parâmetro λ, calculado por meio da condição $f(\Sigma_{ij}) = 0$, é dado por:

$$\lambda = \frac{||\Sigma^{TR}_{[n+1]}|| - \left(\sigma_{y,0} + H_{iso}\gamma^{TR}_{[n+1]}\right)}{2G + H_{iso} + H_{kin}} \tag{4.107}$$

no qual G é o módulo de cisalhamento.

Por fim, de posse das novas grandezas para o novo passo de tempo t_{n+1}, em especial $e^{p}_{ij[n+1]}$, atualiza-se o modelo mecânico com o novo valor da deformação plástica na descrição lagrangeana e o passo de tempo é incrementado.

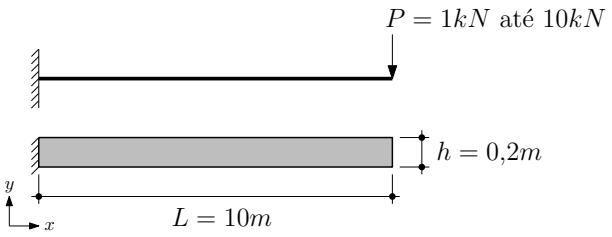
4.8 Exemplos numéricos

Nesta seção são apresentados alguns exemplos numéricos com a intenção de validar o modelo mecânico. São considerados alguns exemplos numéricos clássicos no âmbito da elasticidade não linear e alguns exemplos para validar e demonstrar a capacidade da técnica de embutimento de elementos heterogêneos.

4.8.1 Viga engastada de Mattiasson

No trabalho de Mattiasson (1981) são apresentadas soluções analíticas para configurações de vigas e pórticos planos segundo a elasticidade não linear. Este exemplo numérico trata de uma viga engastada sujeita a uma carga pontual na sua borda extrema. A figura 4.9 mostra o esquema estrutural adotado. A parte inferior mostra a geometria plana 2D adotada para representação da viga. O valor da largura é unitário ($b = 1{,}0$).

Figura 4.9 – Esquema estrutural para o exemplo numérico da viga engastada não linear geométrica.



Fonte: elaborado pelo autor.

A tabela 4 mostra os valores adotados para o módulo de elasticidade $\mathbb{E}$, Poisson ν e carregamento P na ponta extrema direita. Por se tratar de um modelo numérico 2D, o carregamento concentrado foi aplicado de forma distribuída ao longo da altura.

Tabela 4 – Propriedades do material e carregamento adotados.

$\mathbb{E}$ (kPa)	ν	P (kN)
1,5e5	0,0	1 até 10

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 4.10 mostra a malha de elementos finitos adotada. O modelo numérico é composto por um total de 112 elementos finitos triangulares de aproximação cúbica, resultando em 592 nós e 1184 graus de liberdade.

Figura 4.10 – Malha de elementos finitos empregada.



Fonte: elaborado pelo autor.

A tabela 5 mostra os valores de deslocamento nas direções x e y e a comparação com os valores reportados por Mattiasson (1981). Ressalta-se que os valores numéricos são a média dos valores dos nós da borda direita, refletindo assim as coordenadas de um nó na linha média da viga.

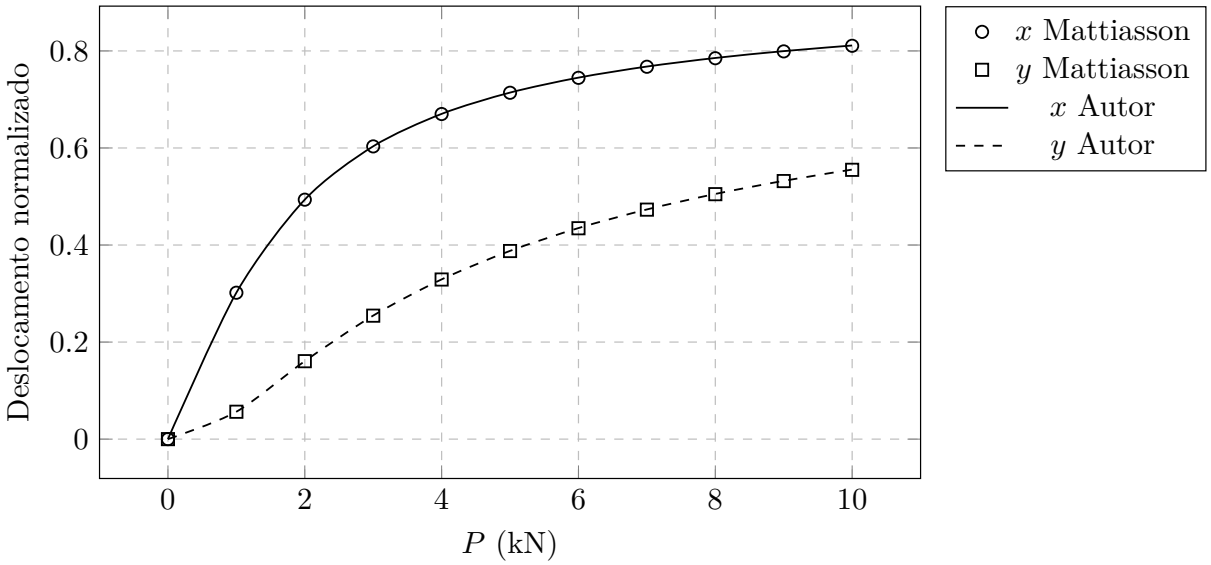
Tabela 5 – Resultados analítico e numérico para a viga de Mattiasson.

	Mattiasson (1981)		Autor			
PL^2/EI	x/L	y/L	x/L	y/L	Diferença x (%)	Diferença y (%)
1	0,30172	0,05643	0,30181	0,05647	0,02950	0,06309
2	0,49346	0,16064	0,49364	0,16075	0,03567	0,06972
3	0,60325	0,25442	0,60350	0,25461	0,04177	0,07507
4	0,66996	0,32894	0,67027	0,32920	0,04627	0,07904
5	0,71379	0,38763	0,71415	0,38794	0,05015	0,08023
6	0,74457	0,43459	0,74498	0,43495	0,05453	0,08215
7	0,76737	0,47293	0,76782	0,47332	0,05864	0,08331
8	0,78498	0,50483	0,78548	0,50526	0,06357	0,08478
9	0,79906	0,53182	0,79960	0,53228	0,06733	0,08668
10	0,81061	0,55500	0,81120	0,55548	0,07229	0,08721

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 4.11 mostra o gráfico de deslocamento normalizado com o comprimento da viga dos modelo numérico e analítico. Nota-se a ótima concordância dos resultados.

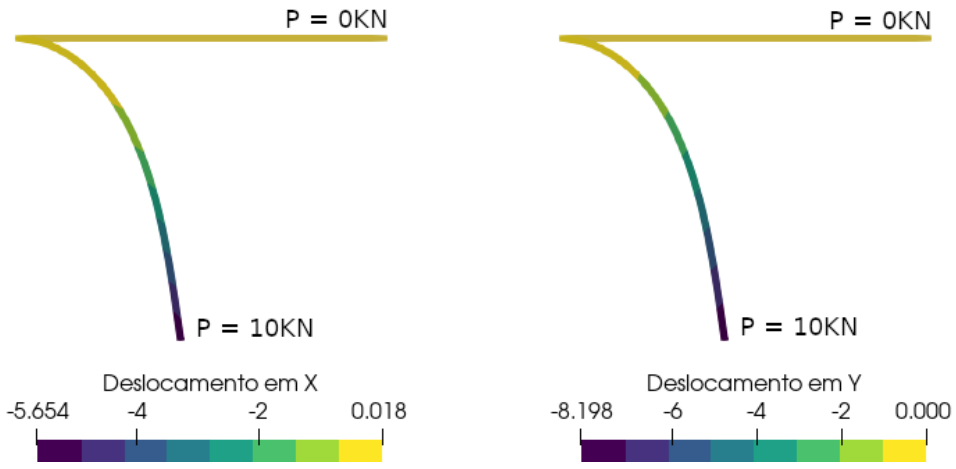
Figura 4.11 – Gráfico para os resultados de deslocamento normalizado em relação ao nível de carregamento aplicado.



Fonte: elaborado pelo autor.

Por fim são apresentadas na figura 4.12 as deformadas da viga e os valores de deslocamento nas direções x e y.

Figura 4.12 – Deslocamentos horizontal e vertical para a viga não linear.



(a) Deslocamento horizontal (b) Deslocamento vertical

Fonte: elaborado pelo autor.

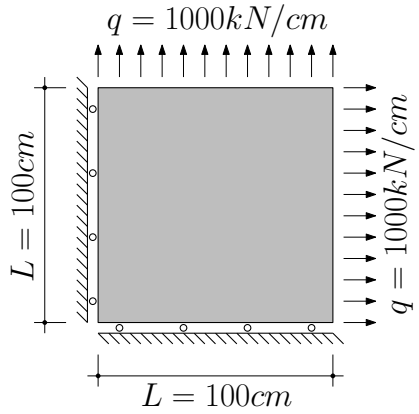
Por meio dos resultados obtidos, valida-se o modelo mecânico para análises não lineares geométricas com destaque para a convergência da solução analítica com a numérica.

4.8.2 Chapa reforçada com fibras

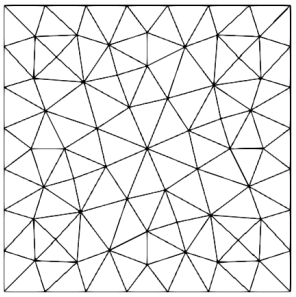
Para validar a aplicação da técnica de embutimento para problemas mecânicos, é considerado um exemplo numérico baseado nos trabalhos de Sampaio (2014) e Felix (2018). Trata-se de uma chapa quadrada sujeita a esforços de tração nas suas bordas superior e direita. São analisados os deslocamentos para os casos sem fibra, com fibras dispostas verticalmente, com fibras dispostas vertical e horizontalmente e, por fim, com fibras de distribuição uniformemente aleatória no domínio e na orientação.

Inicialmente é analisado o deslocamento da chapa quando composta apenas pelo material da matriz, ou seja, sem a inclusão das fibras. A figura 4.13a mostra o esquema estrutural da chapa, com suas respectivas dimensões, nível de carregamento e condições de contorno aplicadas. O valor da espessura é unitário ($e = 1cm$). A figura 4.13b mostra a discretização em elementos finitos empregada para a matriz. Ao todo foram utilizados 124 elementos finitos triangulares de ordem cúbica, totalizando 601 nós e 1202 graus de liberdade do sistema.

Figura 4.13 – Esquema estrutural da chapa sem reforço e malha de elementos finitos empregada.



(a) Esquema estrutural para o caso da chapa sem reforço.



(b) Malha de elementos finitos da matriz.

Fonte: elaborado pelo autor.

Na tabela 6 é possível verificar os dados para as propriedades do material necessários para realizar a análise inicial. $\mathbb{E}_m$ e ν_m são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson da matriz, respectivamente.

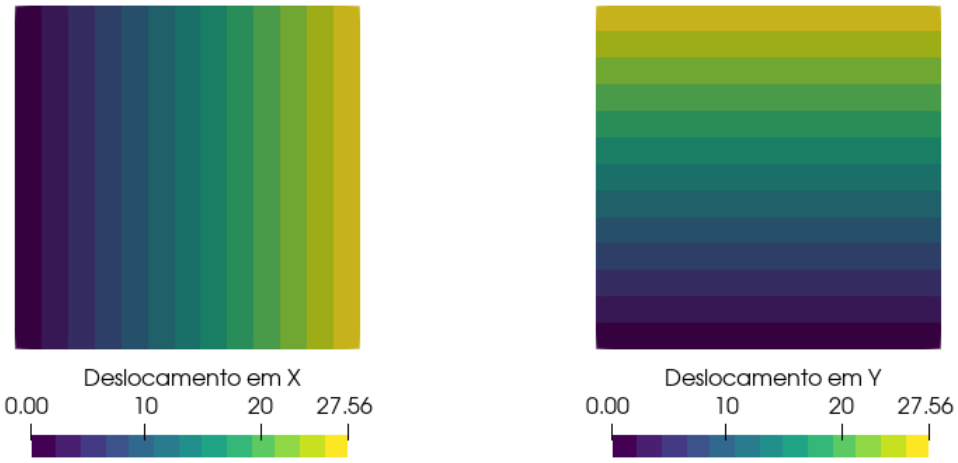
Tabela 6 – Propriedades do material da matriz.

$\mathbb{E}_m$ (kN/cm^2)	ν_m
2100	0,0

Fonte: elaborado pelo autor.

Os resultados de deslocamento horizontal e vertical são apresentados na figura 4.14. Nota-se que, pela natureza simétrica das condições de contorno e material completamente homogêneo, os deslocamentos em ambas direções é o mesmo. Os valores numéricos de deslocamento máximo são compatíveis com os valores encontrados no trabalho de Felix (2018).

Figura 4.14 – Deslocamentos horizontal e vertical para a chapa quadrada de argamassa sem fibras.

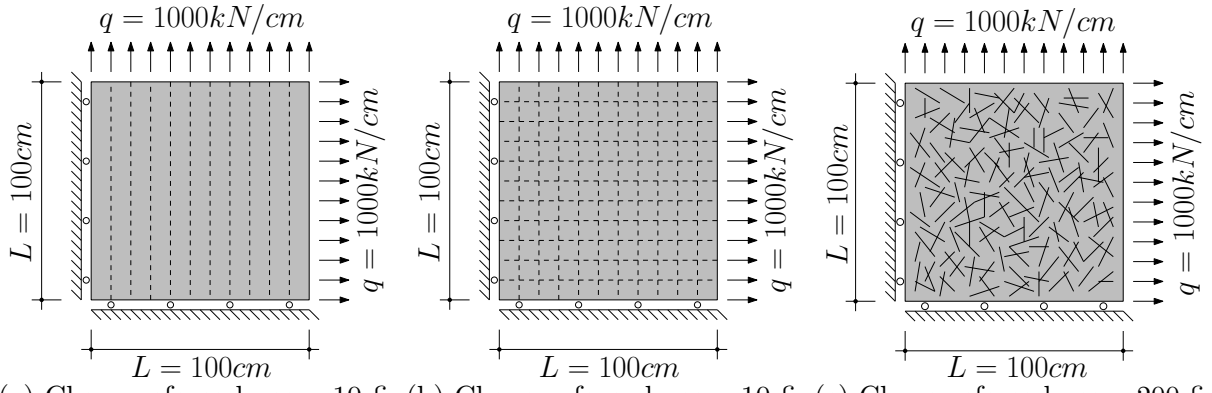


(a) Deslocamento horizontal. (b) Deslocamento vertical.

Fonte: elaborado pelo autor.

Para a análise da chapa com fibras embutidas, foram analisados três casos distintos no que diz respeito à orientação e quantidade de fibras. A figura 4.15 mostra os esquemas estruturais para os três casos.

Figura 4.15 – Esquemas estruturais para os três casos de reforço considerados.



(a) Chapa reforçada com 10 fibras longas dispostas verticalmente.

(b) Chapa reforçada com 10 fibras longas dispostas verificalmente e 10 fibras longas dispostas horizontalmente.

(c) Chapa reforçada com 200 fibras curtas de distribuição uniformemente aleatória no domínio e na orientação.

Fonte: elaborado pelo autor.

As propriedades do material que compõem as fibras são dadas na tabela 7.

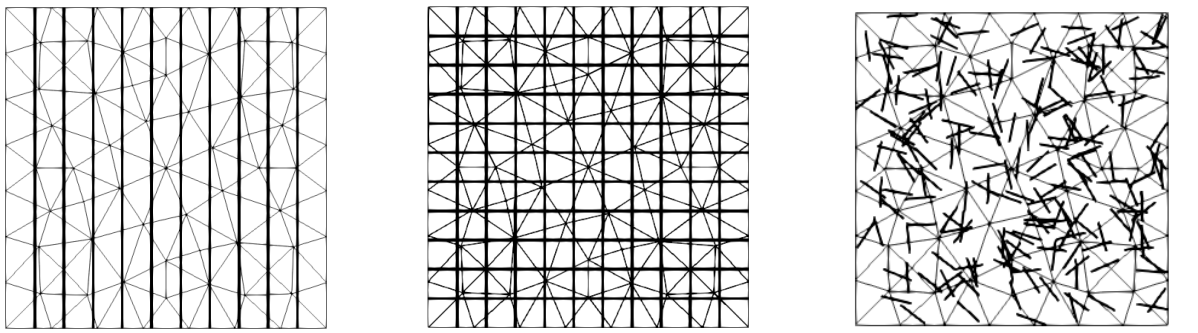
Tabela 7 – Propriedades do material das fibras. Módulo de elasticidade $\mathbb{E}_f$ e área da seção transversal A_f.

$\mathbb{E}_f$ (kN/cm^2)	A_f (cm^2)
20000	0,1

Fonte: elaborado pelo autor.

Analogamente, as malhas de elementos finitos para os três casos respectivamente são apresentadas pela figura 4.16. Nota-se que não é necessário a coincidência dos nós das fibras (elementos a serem embutidos) com os da matriz. Ambas malhas são independentes entre si e a inclusão das fibras não contribui para o acréscimo no número de graus de liberdade do problema. Cada fibra longa foi discretizada em 10 elementos lineares de fibra, totalizando 100 elementos lineares de fibra para o caso de apenas fibras verticais, 200 elementos finitos de fibra para o caso de fibras horizontais e verticais, e 200 elementos de fibra para o caso de fibras com dispersão aleatória.

Figura 4.16 – Malha de elementos finitos para os casos de chapa reforçada com fibras.



(a) Malha de elementos finitos para o caso de apenas fibras verticais.

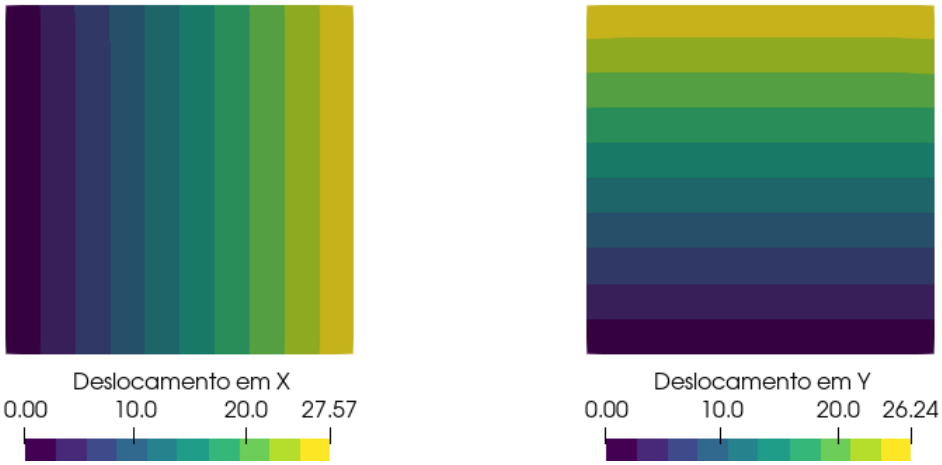
(b) Malha de elementos finitos para o caso de fibras verticais e horizontais.

(c) Malha de elementos finitos para o caso de fibras dispersas aleatoriamente.

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 4.17 mostra os resultados de deslocamentos horizontal e vertical para o caso de chapa reforçada apenas com fibras verticais. Nota-se uma redução de valor apenas para o deslocamento vertical, demonstrando a correta contribuição da orientação da fibra na matriz do sólido.

Figura 4.17 – Deslocamentos horizontal e vertical para a chapa quadrada de argamassa reforçada apenas com fibras verticais.

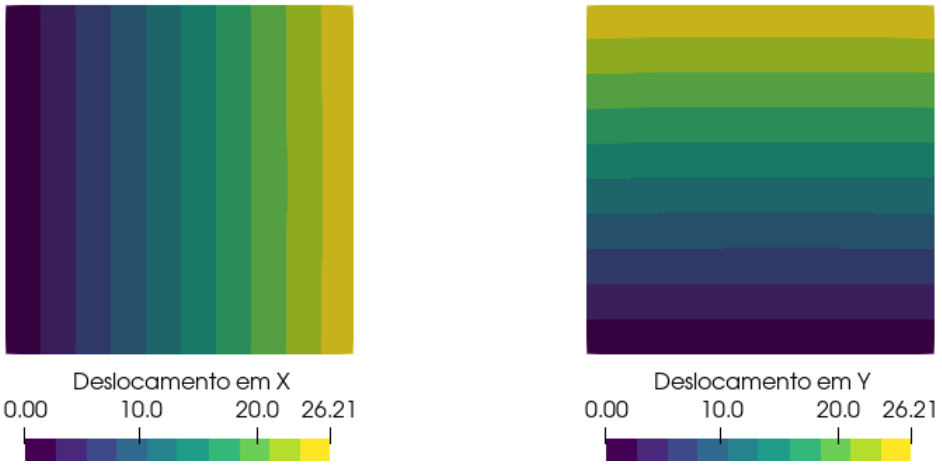


(a) Deslocamento horizontal. (b) Deslocamento vertical.

Fonte: elaborado pelo autor.

Em seguida, a figura 4.18 mostra os resultados de deslocamento horizontal e vertical para a chapa reforçada com 20 fibras longas verticais e horizontais.

Figura 4.18 – Deslocamentos horizontal e vertical para a chapa quadrada de argamassa reforçada com fibras verticais e horizontais.

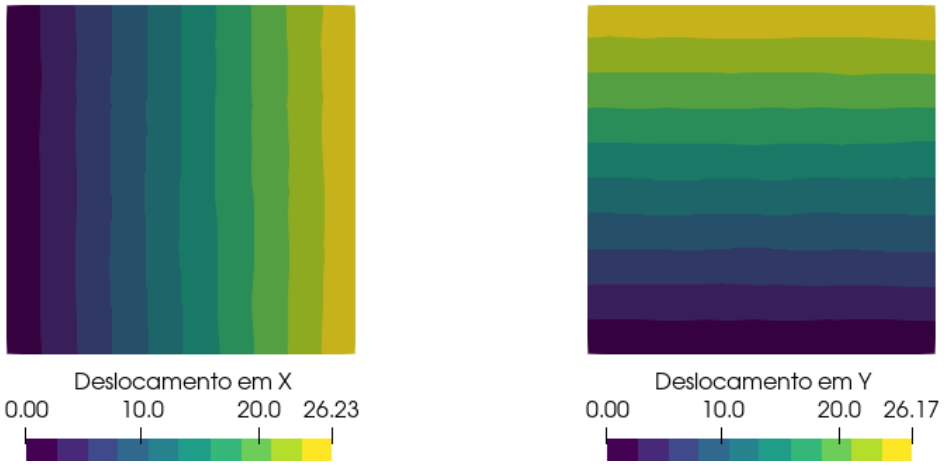


(a) Deslocamento horizontal. (b) Deslocamento vertical.

Fonte: elaborado pelo autor.

Na figura 4.19 estão os resultados de deslocamento horizontal e vertical para o caso de chapa reforçada com fibras aleatoriamente distribuídas. Por ter sido feito uso do mesmo número de fibras do caso imediatamente anterior, é possível notar que os valores de deslocamento resultam similares. Tal resultado demonstra uma equivalência na contribuição de rigidez da matriz nos casos de fibras horizontais e verticais, e fibras de dispersão aleatória.

Figura 4.19 – Deslocamentos horizontal e vertical para a chapa quadrada de argamassa reforçada com fibras aleatoriamente distribuídas.



(a) Deslocamento horizontal. (b) Deslocamento vertical.

Fonte: elaborado pelo autor.

Por fim, é apresentado na tabela 8 um resumo dos valores de deslocamentos encontrados para os 4 casos analisados e valores encontrados no trabalho de Felix (2018) para comparação.

Tabela 8 – Valores de deslocamento para os diversos casos de chapa reforçada com fibra analisados.

Chapa	Deslocamento (cm)			
	Autor		Felix (2018)	
	Horizontal	Vertical	Horizontal	Vertical
Sem fibras	27,56	27,56	27,56	27,56
Fibras longas ordenadas verticalmente	27,57	26,24	27,57	26,22
Fibras longas ordenadas horizontalmente e verticalmente	26,21	26,21	26,20	26,20
Fibras curtas ordenadas de forma uniformemente aleatória	26,23	26,17	26,45	26,28

Fonte: elaborado pelo autor.

De posse dos resultados de deslocamento, é possível chegar a algumas conclusões:

- A técnica de embutimento de elementos de fibra na matriz sólida é bastante efetiva na capacidade de modelar materiais compósitos, sem provocar incremento no número de graus de liberdade do problema.
- Tal técnica também garante que a contribuição na rigidez do sólido reflita a orientação dos elementos de fibra, evidenciado pelo caso do reforço com fibras ordenadas verticalmente. Seu deslocamento horizontal não sofre alteração enquanto há ganho de rigidez e redução de deslocamento vertical.
- Percebe-se que os valores de deslocamento horizontal e vertical entre os casos de fibras longas ordenadas horizontalmente e verticalmente e fibras curtas com distribuição uniformemente aleatória são muito próximos. O que indica equivalência na contribuição de rigidez ao sólido, dado o fato que a quantidade de fibras é constante entre os dois últimos casos.
- A média dos deslocamentos horizontal e vertical para o caso de reforço com fibras dispersas aleatoriamente é de 26,20cm, o que significa uma diferença de 0,04% em relação aos deslocamentos obtidos para o caso das fibras horizontais e verticais. Ademais, os valores obtidos estão de acordo com os encontrados em Sampaio (2014) e Felix (2018).

5 CAMPO TÉRMICO

Neste trabalho, o campo térmico é resolvido através do método dos elementos finitos tradicional. A seguir é apresentada a formulação utilizada ao longo da pesquisa. Os conceitos apresentados seguem Lewis *et al.* (1996) e Nicholson (2008).

5.1 Princípio do trabalho virtual

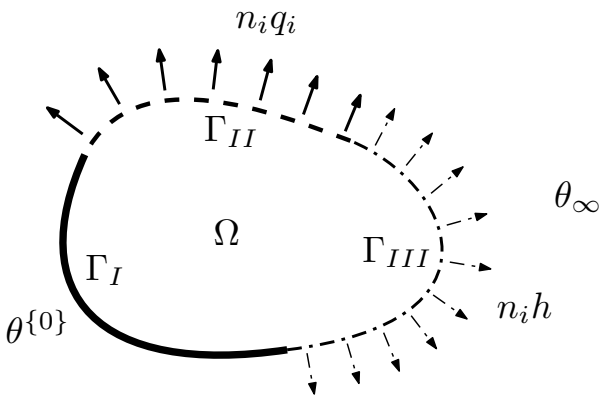
Aplicando o princípio do trabalho virtual na equação 3.20, tem-se a seguinte equação para a transferência de calor por condução em sua forma variacional:

$$\int_{\Omega} \delta\theta_{,i} k_{ij}^{\{T\}}(\theta)\theta_{,j} d\Omega + \int_{\Omega} \delta\theta \rho c_p \dot{\theta} d\Omega = -\int_{\Gamma} \delta\theta n_i q_i d\Gamma \tag{5.1}$$

em que $k_{ij}^{\{T\}}(\theta)$, ρ e c_p são respectivamente o parâmetro de condutividade térmica dependente da temperatura, densidade do material e o calor específico, e q_i é o fluxo de calor que atravessa a superfície Γ.

Para estudo das condições de contorno, supõem-se que o contorno seja decomposto, como demonstrado na figura 5.1, em 3 segmentos $\Gamma = \Gamma_I + \Gamma_{II} + \Gamma_{III}$. Em Γ_I a condição de contorno é de Dirichlet, ou seja, a temperatura em Γ_I é prescrita ($\theta = \theta^{\{0\}}$) e, portanto, $\delta\theta = 0$. Em Γ_{II} a condição de contorno é de Neumann com um fluxo de calor prescrito ($q_i = q_i^{\{0\}}$) e convencionado positivamente quando este sai do domínio. Desta condição deriva que $\delta\theta n_i q_i \rightarrow \delta\theta n_i q_i^{\{0\}}$. Em Γ_{III} o fluxo de calor é dependente da temperatura ambiente (θ_∞) por meio de um coeficiente de transferência de calor por convecção h ($q_i = n_i h(\theta - \theta_\infty)$) que representa o fenômeno de convecção, também convencionado com valor positivo quando saindo do domínio.

Figura 5.1 – Definição do problema de campo térmico.



Fonte: elaborado pelo autor.

Com a definição das superfícies de contorno, a equação 5.1 assume a forma:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \delta\theta_{,i} k_{ij}^{\{T\}}(\theta)\theta_{,j} d\Omega + \int_\Omega \delta\theta \rho c_p \dot{\theta} d\Omega = &- \int_{\Gamma_{II}} \delta\theta n_i q_i^{\{0\}} d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma_{III}} \delta\theta h(\theta - \theta_\infty) d\Gamma\end{aligned} \tag{5.2}$$

5.2 Método dos elementos finitos

Realizando a discretização do domínio e interpolação das variáveis de interesse por elementos finitos para o problema de campo térmico:

$$\begin{aligned}\theta &= \phi_l(\xi_j)\Theta_l(t) \\ \delta\theta &= \phi_l(\xi_j)\delta\Theta_l(t) \\ \theta_{,i} &= \phi_{l,i}(\xi_j)\Theta_l(t) = B_{li}(\xi_j)\Theta_l(t) \\ \delta\theta_{,i} &= \phi_{l,i}(\xi_j)\delta\Theta_l(t) = B_{li}(\xi_j)\delta\Theta_l(t)\end{aligned} \tag{5.3}$$

em que B_{li} é a matriz de derivadas das funções de forma em relação às variáveis adimensionais e Θ é a temperatura nos nós do sólido discretizado.

Substituindo as equações 5.3 em 5.2 resulta num sistema linear de equações diferenciais ordinárias:

$$K_{mn}^{\{T\}}(\theta)\Theta_n(t) + M_{mn}^{\{T\}}\dot{\Theta}_n(t) = f_m^{\{T\}} \tag{5.4}$$

em que:

$$\begin{aligned}K_{mn}^{\{T\}}(\theta) &= K_{mn}^{\{T_1\}}(\theta) + K_{mn}^{\{T_2\}} : \text{Matriz de rigidez térmica;} \\ K_{mn}^{\{T_1\}}(\theta) &= \int_\Omega B_{mi}(\xi_\gamma) k_{ij}^{\{T\}}(\theta) B_{nj}(\xi_\lambda) d\Omega : \text{Matriz de condutividade do domínio;} \\ K_{mn}^{\{T_2\}} &= \int_{\Gamma_{III}} \phi_m(\xi_\gamma) h \phi_n(\xi_\lambda) d\Gamma : \text{Matriz de condutividade na contorno;} \\ M_{mn}^{\{T\}} &= \int_\Omega \phi_m(\xi_\gamma)\rho c_p \phi_n(\xi_\lambda) d\Omega : \text{Matriz de capacitância;} \\ f_m^{\{T\}} &= -f_m^{\{T_1\}} + f_m^{\{T_2\}} : \text{Vetor de fluxo de calor total;} \\ f_m^{\{T_1\}} &= \int_{\Gamma_{II}} \phi_m(\xi_\gamma) n_i {q_i}^{\{0\}} d\Gamma : \text{Vetor de fluxo de calor imposto;} \\ f_m^{\{T_2\}} &= \int_{\Gamma_{III}} \phi_m(\xi_\gamma) h \theta_\infty d\Gamma : \text{Vetor de fluxo de calor por convecção}\end{aligned} \tag{5.5}$$

5.2.1 Integração temporal

Para a solução do campo térmico ao longo do tempo, utilizou-se neste trabalho o método das diferenças finitas como descrito em Lewis *et al.* (1996). A equação 5.6 mostra o integrador temporal $alfa$ empregado:

$$\left(M_{mn}^{\{T\}} + \alpha \Delta t K_{mn}^{\{T\}}(\theta)\right) \Theta_n^{\{t+\Delta t\}} = \left(M_{mn}^{\{T\}} - (1-\alpha)\Delta t K_{mn}^{\{T\}}(\theta)\right) \Theta_n^{\{t\}} + \Delta t f_m^{\{t\}} \tag{5.6}$$

com $0 \leq \alpha \leq 1$ e t, $t + \Delta t$ e Δt são respectivamente o passo de tempo atual, passo de tempo futuro e variação no passo de tempo. O parâmetro α regula o tipo do integrador temporal. Adotando-se um valor adequado, é possível reproduzir um integrador explícito ($\alpha = 0$), implícito ($\alpha = 1$) ou qualquer um outro entre estes dois ($0 < \alpha < 1$).

Em termos de implementação, é interessante agrupar os termos da equação 5.6 de forma a gerar um sistema a ser resolvido:

$$L_{mn} \Theta_n^{\{t+\Delta t\}} = r_m \tag{5.7}$$

com

$$\begin{aligned} L_{mn} &= M_{mn}^{\{T\}} + \alpha \Delta t K_{mn}^{\{T\}}(\theta) \\ r_m &= \left(M_{mn}^{\{T\}} - (1-\alpha)\Delta t K_{mn}^{\{T\}}(\theta)\right) \Theta_n^{\{t\}} + \Delta t f_m^{\{t\}} \end{aligned} \tag{5.8}$$

em que com a resolução da equação 5.7 é possível obter o campo de temperatura para o próximo passo de tempo $\Theta_n^{\{t+\Delta t\}}$.

5.2.2 Elementos finitos empregados

Neste trabalho são empregados para o campo térmico os mesmos tipos de elementos finitos empregados para o campo mecânico. Para análises 2D são utilizados elementos triangulares de aproximação cúbica com 10 nós. Para análises 3D são empregados elementos tetrahédricos de aproximação cúbica com 20 nós.

5.3 Incorporação de elementos heterogêneos

Nesta seção é descrita a forma de incorporação de elementos heterogêneos por meio da técnica de embutimento utilizada neste trabalho. A equação 5.2 pode ser entendida como o balanço energético:

$$\mathbb{U} + \mathbb{C} = \mathbb{F} \tag{5.9}$$

em que $\mathbb{U}$ é a parcela de energia relacionada à condutividade térmica do sólido, $\mathbb{C}$ está relacionada à capacitância e $\mathbb{F}$ está relacionada aos fluxos de calor no contorno do domínio.

Num primeiro momento, assume-se que a parcela de energia referente a condutividade térmica do sólido compósito ($\mathbb{U}$) é composta pelo somatório das parcelas de energia de suas fases, sejam elas a matriz do compósito, fibras e/ou partículas:

$$\begin{aligned} \mathbb{U}^{\{total\}} &= \mathbb{U}^{\{matriz\}} + \mathbb{U}^{\{fibras\}} + \mathbb{U}^{\{partículas\}} \\ &= \mathbb{U}^{\{matriz\}} + \mathbb{U}^{\{inclusões\}} \end{aligned} \tag{5.10}$$

Fibras e partículas são redenominadas inclusões. Para o caso da parcela energética de condutividade térmica de uma inclusão, obtém-se da sua discretização pelo método dos elementos finitos:

$$\begin{aligned}\mathbb{U}^{\{inclusão\}} &= \sum_{o=1}^{l} \int_{\omega} \delta\theta_{,i} k_{ij}^{\{inclusão\}} \theta_{,j} d\omega \\ &= \sum_{o=1}^{l} \int_{\omega} \frac{\partial(\phi_s(\eta_\gamma)\delta\Theta_s)}{\partial x_i} k_{ij}^{\{inclusão\}} \frac{\partial(\phi_z(\eta_\lambda)\Theta_z)}{\partial x_j} d\omega \\ &= \sum_{o=1}^{l} \int_{\omega} \delta\Theta_s B_{si} k_{ij}^{\{inclusão\}} B_{zj} \Theta_z d\omega\end{aligned} \tag{5.11}$$

em que l é o número total de elementos finitos de inclusão, ω é o domínio de cada um dos elementos de inclusão, ϕ_s e ϕ_z são respectivamente as funções de forma dos nós s e z de uma elemento finito de inclusão, Θ_s e Θ_z são respectivamente os valores de temperatura dos nós s e z e η_γ e η_λ são os pontos de integração para a integração numérica no domínio ω do elemento de inclusão.

Emprega-se a seguinte equação para reescrever os valores de temperatura do nó s do elemento de inclusão em função dos valores de temperatura e funções de forma dos nós q de uma elemento de matriz do compósito:

$$\Theta_s = \phi_{sq}\left(\xi_\alpha^s\right)\Theta_q \tag{5.12}$$

em que ξ_α^s é a coordenada adimensional de um elemento finito da matriz do compósito que corresponde a posição do nó s do elemento finito de inclusão e $\phi_{sq}(\xi_\alpha^s)$ é uma matriz numérica composta pelas funções de forma do elemento $\{q\}$ avaliadas na coordenada adimensional ξ_α^s.

Substituindo a equação 5.12 na equação 5.11, obtém-se para a parcela de energia térmica da inclusão:

$$\begin{aligned}\mathbb{U}^{\{inclusão\}} &= \sum_{o=1}^{l} \int_{\omega} \delta\Theta_s B_{si} k_{ij}^{\{inclusão\}} B_{zj} \Theta_z d\omega \\ &= \sum_{o=1}^{l} \phi_{sq}(\xi_\alpha^s)\delta\Theta_q \int_{\omega} B_{si} k_{ij}^{\{inclusão\}} B_{zj} d\omega \phi_{zr}(\xi_\beta^z)\Theta_r \\ &= \sum_{o=1}^{l} \delta\Theta_q \phi_{sq}(\xi_\alpha^s) K_{sz}^{\{inclusão\}} \phi_{zr}(\xi_\beta^z)\Theta_r\end{aligned} \tag{5.13}$$

em que $\phi_{sq}(\xi_\alpha^s)$ é responsável pela expansão da matriz numérica de condutividade térmica da inclusão ($K_{sz}^{\{inclusão\}}$) noutra matriz numérica com graus de liberdade compatíveis com a malha da matriz do compósito. Este é o processo principal da técnica de embutimento, já que a contribuição do elemento de inclusão é espalhada para a matriz numérica da matriz do compósito.

Dá-se o nome de *matriz de espalhamento* para a matriz numérica ϕ_{sq} responsável por realizar a contribuição do elemento de inclusão na malha da matriz do compósito.

Adotando-se uma organização conveniente dos graus de liberdade, é possível construir a matriz numérica de espalhamento por meio da concatenação de matrizes numéricas compostas por funções de forma dos elementos da matriz do compósito avaliadas nas coordenadas adimensionais correspondentes aos nós dos elementos de inclusão:

$$\begin{aligned} \phi_{ij}(\xi_\alpha^\upsilon) &= \begin{bmatrix} \phi_{kl}(\xi_\alpha^1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \phi_{mn}(\xi_\alpha^\gamma) \end{bmatrix} \text{ com} \\ \phi_{mn}(\xi_\alpha^\gamma) &= \begin{bmatrix} \phi^1(\xi_\alpha^\gamma) & \cdots & \phi^N(\xi_\alpha^\gamma) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.14}$$

em que ξ_α^γ é a coordenada adimensional no elemento da matriz do compósito que corresponde ao nó γ do elemento de inclusão e ϕ^N é a função de forma do nó N do elemento da matriz do compósito. Note que, para problemas térmicos, por sempre se tratar de um problema de campo escalar, a dimensão m será sempre unitária ($m = 1$).

Desta forma, é possível obter a matriz numérica de condutividade térmica do elemento de inclusão expandido para os graus de liberdade globais na malha da matriz do compósito:

$$\left[\mathbf{K}^{\{inclusão\}}\right]_{global} = [\Phi]^T \left[\mathbf{K}^{\{inclusão\}}\right] [\Phi] \tag{5.15}$$

em que $[\Phi] = \phi_{ij}(\xi_\alpha^\upsilon)$ é a matriz de espalhamento dada pela equação 5.14, $\left[\mathbf{K}^{\{inclusão\}}\right]$ é a matriz numérica de condutividade térmica do elemento de inclusão e $\left[\mathbf{K}^{\{inclusão\}}\right]_{global}$ é a matriz numérica de condutividade térmica da inclusão expandida para os graus de liberdade globais.

Ao fim, a matriz numérica de condutividade térmica expandida da inclusão (equação 5.15) pode ser incorporada diretamente à matriz numérica global de condutividade térmica do sólido compósito:

$$\left[\mathbf{K}^{\{total\}}\right] = \left[\mathbf{K}^{\{matriz\}}\right] + \left[\mathbf{K}^{\{inclusão\}}\right]_{global} \tag{5.16}$$

O mesmo procedimento é realizado para embutir a parcela de energia do elemento de inclusão correspondente a capacitância. A parcela de energia total do sólido compósito também é entendida como o somatório das parcelas referentes à matriz do compósito e inclusões:

$$\mathbb{C}^{\{total\}} = \mathbb{C}^{\{matriz\}} + \mathbb{C}^{\{inclusão\}} \tag{5.17}$$

Por meio do método dos elementos finitos e promovendo a substituição da equação 5.12 na equação da parcela de energia de capacitância da inclusão é possível obter:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^{\{inclusão\}} &= \sum_{o=1}^{l} \int_{\omega} \delta\Theta_s \phi_s \rho c_p \phi_z \Theta_z d\omega \\ &= \sum_{o=1}^{l} \phi_{sq}(\xi_\alpha^s)\delta\Theta_q \int_{\omega} \phi_s \rho c_p \phi_z d\omega \; \phi_{zr}(\xi_\beta^z)\Theta_r \\ &= \sum_{o=1}^{l} \delta\Theta_q \phi_{sq}(\xi_\alpha^s) M_{sz}^{\{inclusão\}} \phi_{zr}(\xi_\beta^z)\Theta_r\end{aligned} \tag{5.18}$$

em que l é o número total de elementos finitos de inclusão, ω é o domínio de cada um dos elementos de inclusão, ϕ_{sq} é novamente a matriz numérica de espalhamento definida pela equação 5.14 e $M_{sz}^{\{inclusão\}}$ é a matriz numérica de capacitância do elemento de inclusão.

Para se obter a matriz numérica de capacitância da inclusão expandida para os graus de liberdade globais da malha da matriz do compósito, basta realizar o mesmo procedimento descrito pela equação 5.15:

$$\left[\mathbf{M}^{\{inclusão\}}\right]_{global} = [\Phi]^T \left[\mathbf{M}^{\{inclusão\}}\right] [\Phi] \tag{5.19}$$

Por fim, basta contribuir diretamente a parcela de energia do elemento de inclusão na malha do compósito:

$$\left[\mathbf{M}^{\{total\}}\right] = \left[\mathbf{M}^{\{matriz\}}\right] + \left[\mathbf{M}^{\{inclusão\}}\right]_{global} \tag{5.20}$$

Ainda sobre as dimensões da matriz global do elemento de reforço, é possível calcular por meio da seguinte relação:

$$[\mathbf{\Phi}]_{\alpha x \beta} \begin{cases} \alpha = \text{Número de graus de liberdade do elemento de reforço} \\ \beta = \eta \Upsilon \end{cases} \tag{5.21}$$

que é a mesma expressão dada anteriormente na equação 4.6. A expressão se mantém, independentemente da dimensão do problema (1D, 2D ou 3D).

5.3.1 Fibras

Neste trabalho, são utilizadas fibras de aproximação linear com 2 nós, tanto para o caso 2D, quanto para o caso 3D. São os mesmo elementos finitos de fibras empregados para o campo mecânico.

5.3.2 Partículas

São utilizadas para o caso 2D partículas triangulares de aproximação cúbica com 10 nós. Para o caso 3D são empregadas partículas tetrahédricas de aproximação cúbica com 20 nós. Estes são os mesmos elementos finitos empregados para o campo mecânico. Novamente, deve-se tomar o mesmo cuidado relatado na seção 4.6.3 com relação ao grau de aproximação dos elementos finitos do sólido base e das partículas a serem inseridas.

5.4 Exemplos numéricos

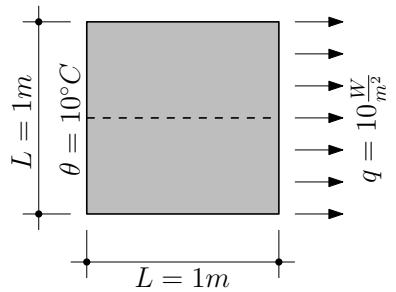
A seguir são apresentados alguns exemplos numéricos para demonstrar e validar a técnica de embutimento para análises térmicas de sólidos compósitos.

5.4.1 Chapa reforçada com 1 fibra horizontal

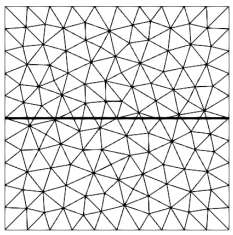
Neste exemplo, analisa-se o campo térmico de um sólido isotrópico com apenas 1 fibra horizontal embutida na sua meia altura. O resultado é comparado com modelagem numérica, por discretização total, feita no software Abaqus 6.14.

A figura 5.2a mostra o esquema do problema térmico a ser resolvido com as devidas condições de contorno. Trata-se basicamente de uma chapa quadrada sob regime estacionário com condições de Dirichlet na face esquerda ($\theta = 10°C$) e Neumann na face direita ($q = 10\frac{W}{m^2}$). A espessura da chapa é unitária ($e = 1{,}0$) e as faces superiores e inferiores são adiabáticas, com fluxo de calor nulo. Já a figura 5.2b mostra a malha de elementos finitos da matriz e da fibra longa empregada. No caso da fibra, foram utilizados 20 elementos lineares de treliça embutidos na matriz. Para a matriz foram utilizados 244 elementos triagulares de aproximação cúbica, resultando num total de 1159 nós e 1159 graus de liberdade para o problema. Para a modelagem no Abaqus, foi feito uso de 100 elementos finitos quadrilaterais de aproximação quadrática para a matriz e 10 elementos finitos de treliça, também de aproximação quadrática, para a fibra. No caso do Abaqus os nós dos elementos da fibra ficaram coincidentes com os nós dos elementos da matriz.

Figura 5.2 – Esquema e malha de elementos finitos para o exemplo da chapa reforçada com 1 fibra horizontal.



(a) Esquema do problema térmico da chapa reforçada com fibra horizontal.



(b) Malha de elementos finitos para a matriz e fibra longa horizontal.

Fonte: elaborado pelo autor.

A tabela 9 mostra os dados da propriedades térmicas dos materiais empregados no exemplo. O subíndice m indica o material da matriz, enquanto o subíndice f indica o material da fibra.

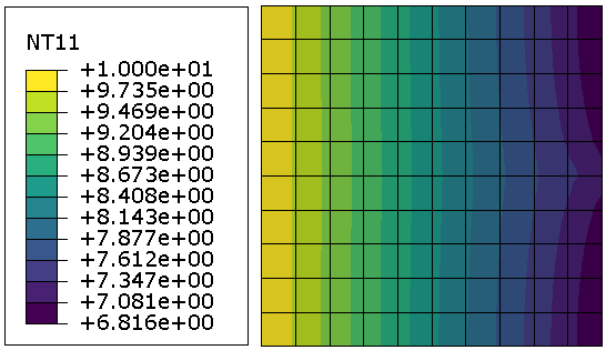
Tabela 9 – Propriedades térmicas e física dos materiais da matriz e fibra.

k_{Tm} $(\frac{W}{m°C})$	k_{Tf} $(\frac{W}{m°C})$	A_f (m^2)
2,75	55	0,01

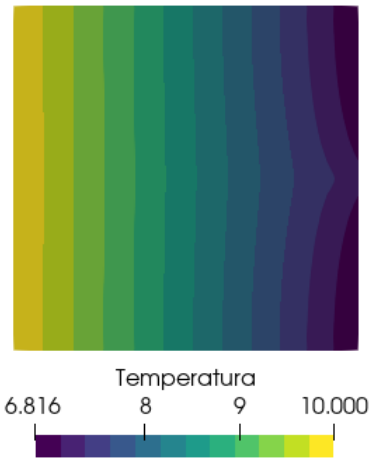
Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.3 mostra os campos de temperatura obtidos pelo Abaqus e pela técnica de embutimento, respectivamente.

Figura 5.3 – Campos de temperatura para o exemplo de chapa reforçada com uma fibra horizontal.



(a) Campo de temperatura obtido por meio do Abaqus.

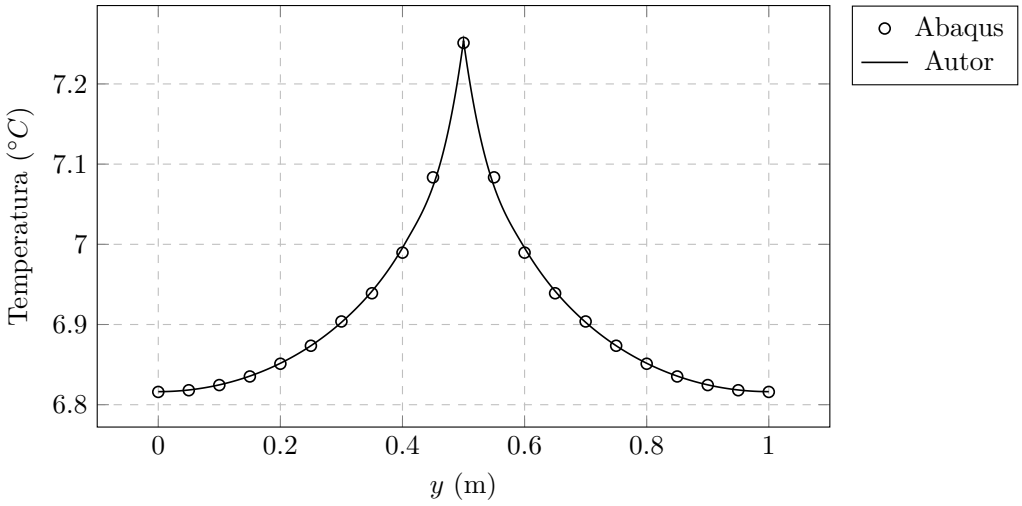


(b) Campo de temperatura obtido por meio da técnica de embutimento.

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.3 mostra a variação de temperatura ao longo da altura da chapa na borda direita extrema. É possível notar que os resultados entre os campos de temperatura obtidos por meio do Abaqus e pela técnica de embutimento são muito próximos, resultando numa diferença máxima de 0,0056%.

Figura 5.4 – Valores de temperatura entre os modelos numéricos do Abaqus e do autor.



Fonte: elaborado pelo autor.

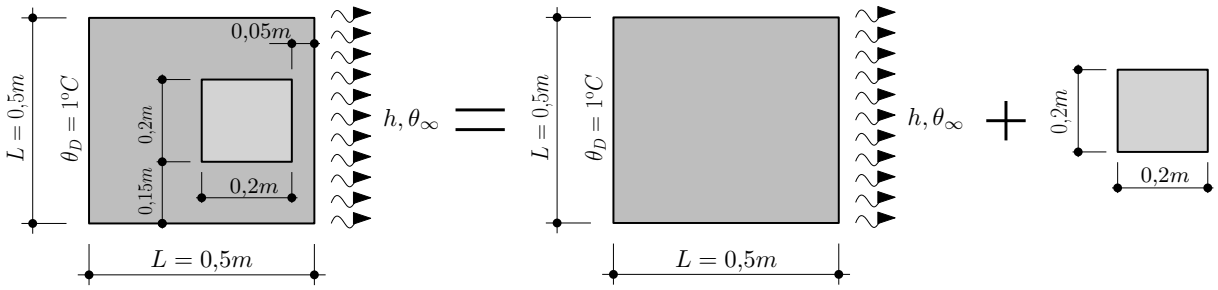
Percebe-se por meio deste exemplo que, para inserção de fibras na matriz, a técnica de embutimento produz resultados tão bons quanto a discretização total sem a necessidade de coincidência de nós entre os elementos da matriz e fibra.

5.4.2 Defeito interno em bloco de concreto

Este exemplo demonstra a capacidade da técnica de embutimento em representar partículas e domínios heterogêneos dentro de um sólido. Trata-se de análise térmica em regime estacionário de uma peça de concreto sujeita fenômeno de convecção, considerando a existência de defeitos internos. Este exemplo é baseado no trabalho de Inacio *et al.* (2009) que trata da avaliação termográfica como ensaio não destrutivo em estruturas de concreto.

A figura 5.5 mostra o esquema completo do problema com as respectivas dimensões e condições de contorno. O valor da espessura é unitário ($e = 1{,}0$) e as faces superiores e inferiores são consideradas adiabáticas com fluxo de calor nulo. A figura 5.5a mostra o problema final, que consiste num cubo de concreto, sujeito a cargas térmicas e com a presença de um defeito interno. As figuras 5.5b e 5.5c mostram a matriz do sólido e o defeito interno, respectivamente. Para comparação, o exemplo foi modelado de duas formas, discretizando-se totalmente o domínio, tal qual na abordagem convencional, e por meio da técnica de embutimento, em que o defeito passa a ser uma malha de partículas que irá contribuir negativamente na condutividade térmica da matriz.

Figura 5.5 – Esquemas do problema de condução térmica para uma peça de concreto com defeito interno.



(a) (b) (c)

Fonte: elaborado pelo autor.

A tabela 10 apresenta as propriedades térmicas e valores das condições de contorno para o problema. O subíndice T significa que tal variável é do problema térmico, enquanto que os subíndices m, i e d simbolizam a matriz, inclusão e defeito, respectivamente. h é o coeficiente de convecção e θ_∞ é a temperatura ambiente. Note que, para este exemplo, foi atribuído para o defeito um coeficiente de condutividade térmico (k_{Td}) no valor de 0,25% do coeficiente da matriz (k_{Tm}).

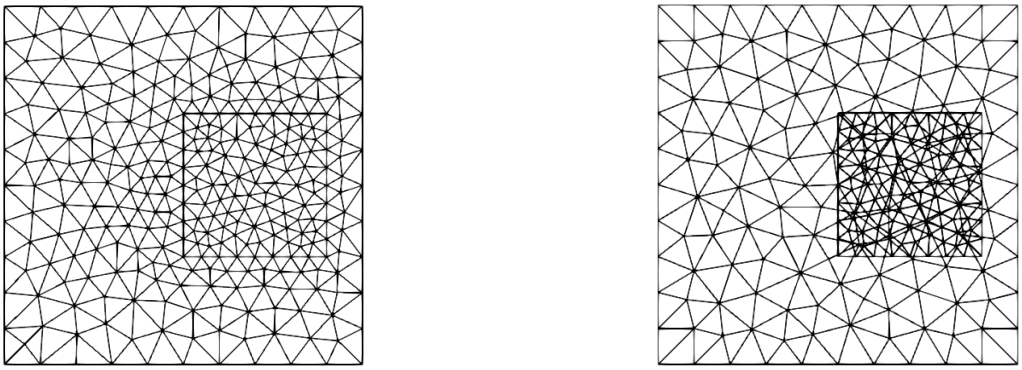
Tabela 10 – Dados de propriedades térmicas e valores para as condições de contorno do problema.

k_{Tm} $(\frac{W}{m°C})$	k_{Ti} $(\frac{W}{m°C})$	k_{Td} $(\frac{W}{m°C})$	h $(\frac{W}{m^2°C})$	θ_∞ $(°C)$
2,75	-2,0625	0,6875	13,95	0,0

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.6 mostra as malhas de elementos finitos para ambos os casos. A figura 5.6a se refere à discretização total do domínio, resultando em 560 elementos finitos triangulares de aproximação cúbica e 2581 nós. A figura 5.6b diz respeito às malhas da matriz e defeito para a técnica de embutimento, totalizando em 262 elementos finitos para a matriz e 180 elementos finitos para o defeito, ambos do tipo triangular de aproximação cúbica. Foram empregados 1150 nós, resultando em 1150 graus de liberdade para o modelo da técnica de embutimento.

Figura 5.6 – Malhas de elementos finitos para ambos os casos analisados.



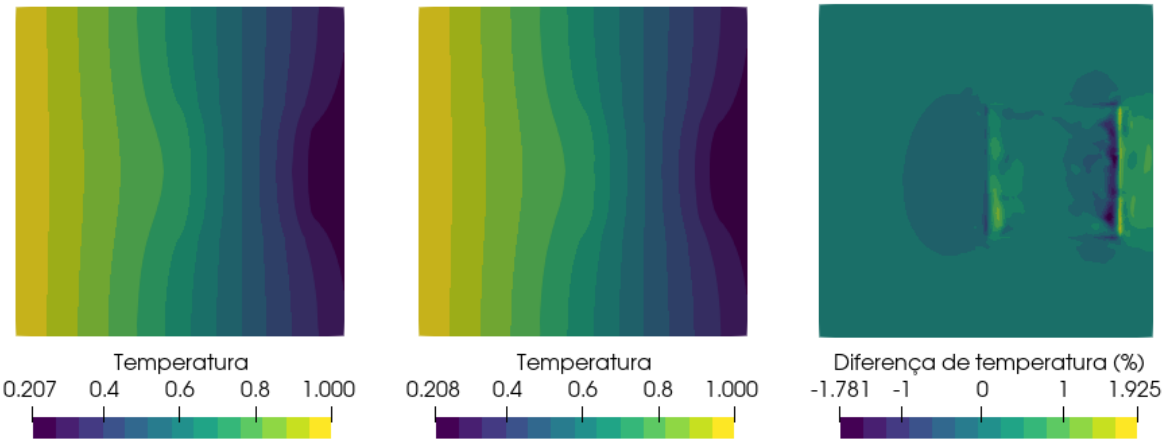
(a) Malha de elementos finitos com a discretização total do domínio.

(b) Malhas de elementos finitos do defeito e da matriz.

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.7 mostra os campos de temperatura para ambos os casos e a respectiva diferença percentual no domínio. Percebe-se que os valores de temperatura resultam muito próximos, evidenciando boa qualidade de resposta para a técnica de embutimento. Neste caso, a diferença máxima absoluta é de 1,925%. Ressalta-se que estes valores máximos se encontram em pontos muito específicos do domínio.

Figura 5.7 – Resultados de campo de temperatura para ambos os casos e respectiva diferença percentual.



(a) Campo de temperatura para o modelo com discretização convencional do domínio.

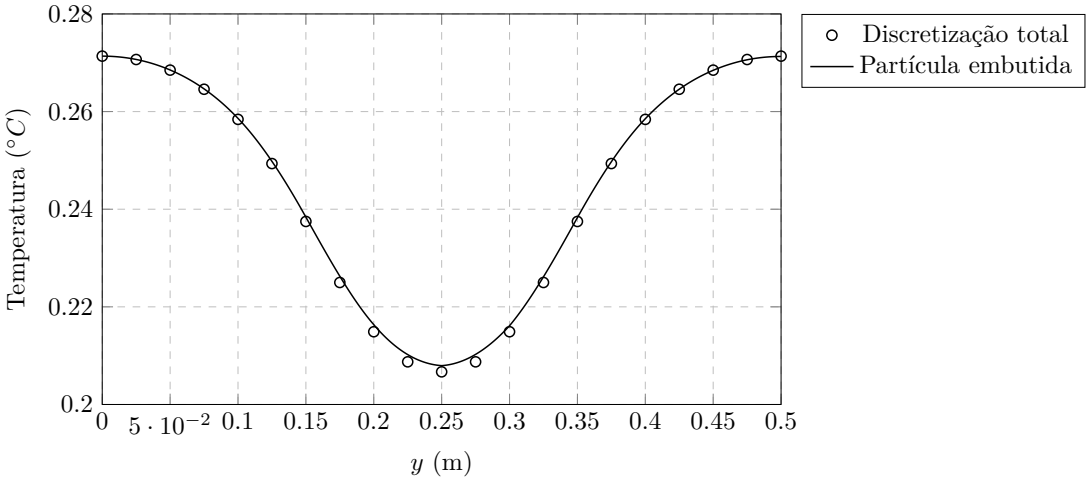
(b) Campo de temperatura para o modelo gerado pela técnica de embutimento.

(c) Diferença de temperatura em percentual entre os modelos de discretização total e pela técnica de embutimento.

Fonte: elaborado pelo autor.

Por fim, é mostrado na figura 5.8 o gráfico de temperatura ao longo da altura na borda extrema direita do sólido ($x = 0{,}5m$). Percebe-se ótima concordância entre os valores de temperatura resultantes. Vale ressaltar que, com uma melhor discretização da malha da matriz é possível obter resultados ainda mais próximos ao modelo convencional.

Figura 5.8 – Gráfico de temperatura em relação à altura na borda direita extrema do sólido.



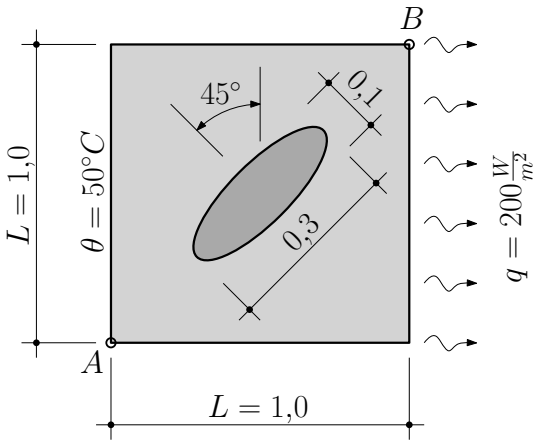
Fonte: elaborado pelo autor.

Por meio deste exemplo foi verificado que, com a técnica de embutimento também é possível modelar materiais heterogêneos com inclusões. A malha de partículas para simular o defeito interno produziu resultados muito próximos daqueles obtidos pela discretização convencional, mas com um número de graus de liberdade significantemente menor.

5.4.3 Análise térmica não linear de chapa reforçada com partícula

Neste exemplo é realizada a análise térmica em regime estacionário de um sólido 2D com propriedades de condutividade térmica não linear para uma das fases pela técnica de embutimento. Para comparação e validação, o problema também é analisado por meio da discretização total das fases constituintes. A figura 5.9 mostra o esquema do problema analisado, com as dimensões geométricas e condições de contorno aplicadas. Trata-se de uma chapa quadrada com uma partícula elipsoidal internal. A partícula possui os valores do raio maior de 0,3m e raio menor de 0,1m, além de estar rotacionada em 45° para a esquerda em sentido anti-horário. A condição de Dirichlet na face esquerda é de 50°C, enquanto que na face direita é aplicada condição de Neumann de $200\frac{W}{m^2}$. As faces horizontais superiores e inferiores são consideradas adiabáticas com fluxo de calor nulo. Também são definidos dois pontos, A e B, localizados respectivamente nos vértices inferior esquerdo e superior direito para construção de gráfico comparativo.

Figura 5.9 – Esquema do problema de condução de calor em compósito com material de condutividade térmica dependente da temperatura.



Fonte: elaborado pelo autor.

Para as propriedades dos materiais modelados, a tabela 11 mostra os valores e funções para as condutividades térmicas da matrix (k_{Tm}) e partícula (k_{Tp}). A condutividade térmica da partícula é dada pela equação 5.22, também utilizada nos trabalhos de Huang, Yan e Chen (1995) e Yang (1999) no âmbito de análise de problemas de condução de calor com condutividade térmica não linear dependente da temperatura. Nota-se que, para a técnica de embutimento, a condutividade térmica dos elementos finitos de inclusão (k_{Ti}) é composta pela equação 5.22 menos o valor da condutividade térmica da matrix.

Tabela 11 – Valores de condutividade térmica para as fases do compósito.

k_{Tm} $(\frac{W}{m°C})$	k_{Tp} $(\frac{W}{m°C})$	k_{Ti} $(\frac{W}{m°C})$
1,0	eq. 5.22	eq. 5.22 - 1,0

Fonte: elaborado pelo autor.

$$k_{Tp}(\theta) = k_0 + k1 \cdot \exp\left(\frac{\theta}{k_2}\right) + k_3 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{k_4}\right) \tag{5.22}$$

Para este problema em questão foram utilizados os valores descritos na tabela 12 para os coeficientes k_i da função de condutividade térmica não linear.

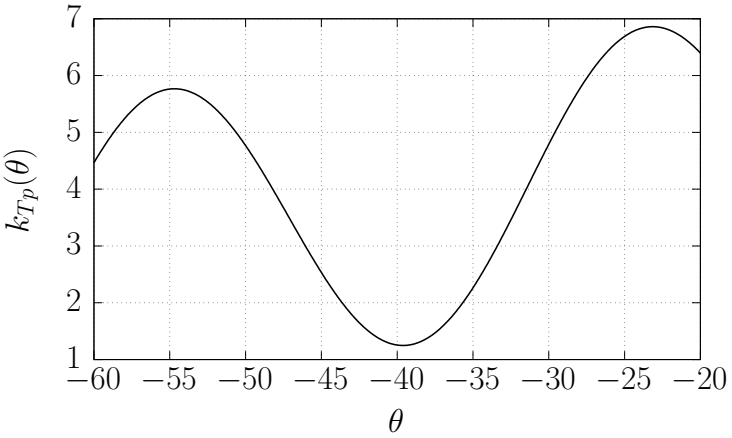
Tabela 12 – Valores dos coeficientes empregados na equação que descreve a condutividade térmica não linear dependente da temperatura.

k_0	k_1	k_2	k_3	k_4
1,0	4,5	80,0	2,5	5,0

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.10 mostra os possíveis valores para a condutividade térmica da partícula dentre o intervalo de temperatura de -60°C à -20°C, que é o intervalo de temperatura ao longo da partícula resultante da análise térmica.

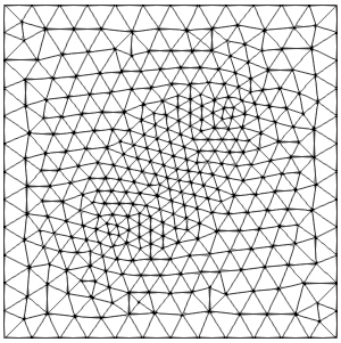
Figura 5.10 – Gráfico da função de condutividade térmica adotada para a região da partícula.



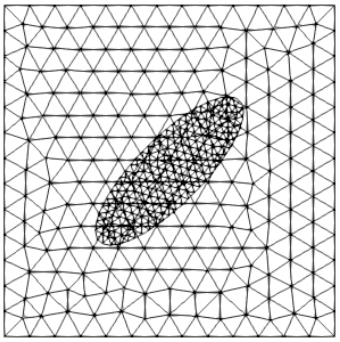
Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.11 mostra as malhas de elementos finitos empregadas para a análise térmica, tanto pela técnica de discretização total (fig. 5.11a) quanto pela técnica de embutimento (fig. 5.11b). Para o modelo gerado por discretização total foram empregados em sua malha 688 elementos finitos triangulares. Para o modelo gerado pela técnica de embutimento, foram utilizados 408 elementos triangulares para a matriz do compósito e 367 elementos para a malha da partícula.

Figura 5.11 – Malhas de elementos finitos para o problema da análise térmica não linear de chapa com partícula interna.



(a) Malha de elementos finitos por discretização total.

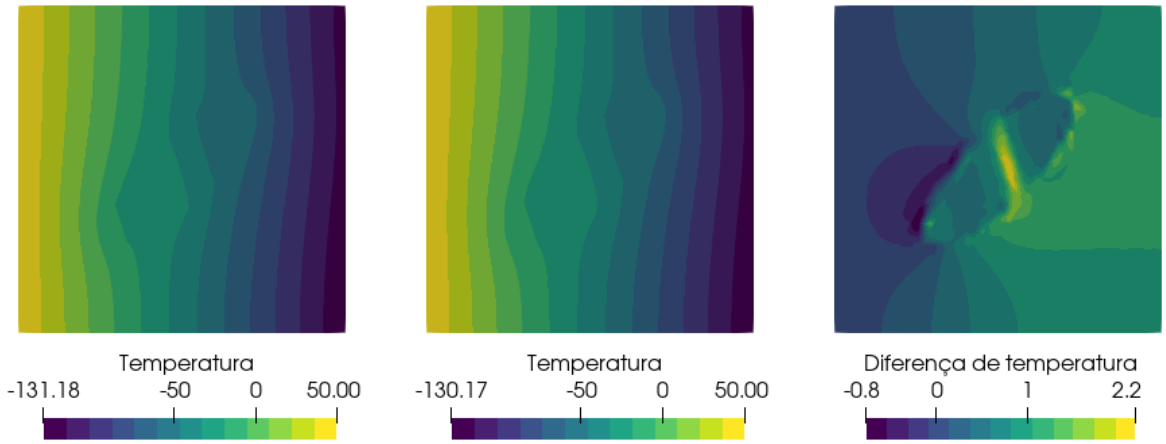


(b) Malhas de elementos finitos da matriz e inclusão para a técnica de embutimento.

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.12 mostra os campos de temperatura para as técnicas de discretização total e embutimento, respectivamente. Também é mostrada a diferença entre os campos de temperatura resultantes da técnica de embutimento em comparação com a discretização total.

Figura 5.12 – Resultados de campo de temperatura para ambos os casos e respectiva diferença nos campos de temperatura.



(a) Campo de temperatura para o modelo com discretização total do domínio.

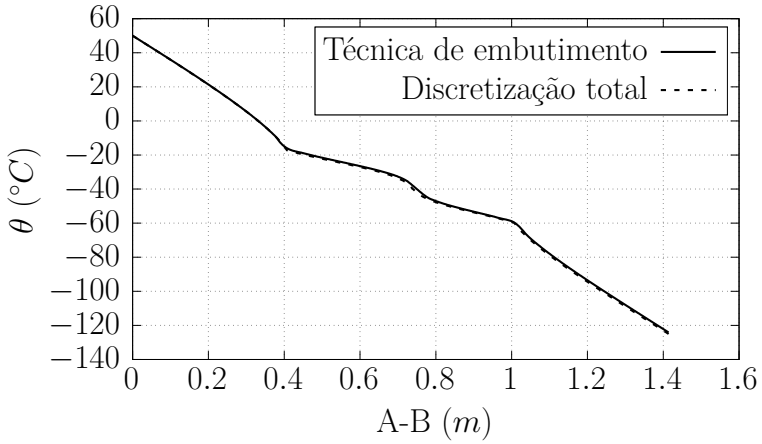
(b) Campo de temperatura para o modelo gerado pela técnica de embutimento.

(c) Campo de diferença de temperatura entre a técnica de embutimento e a técnica de discretização total.

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.13 mostra os valores de temperatura θ ao longo da diagonal A-B para ambos os campos de temperatura resultantes.

Figura 5.13 – Gráfico de temperatura entre os compósitos modelados pela técnica de embutimento e por discretização total.



Fonte: elaborado pelo autor.

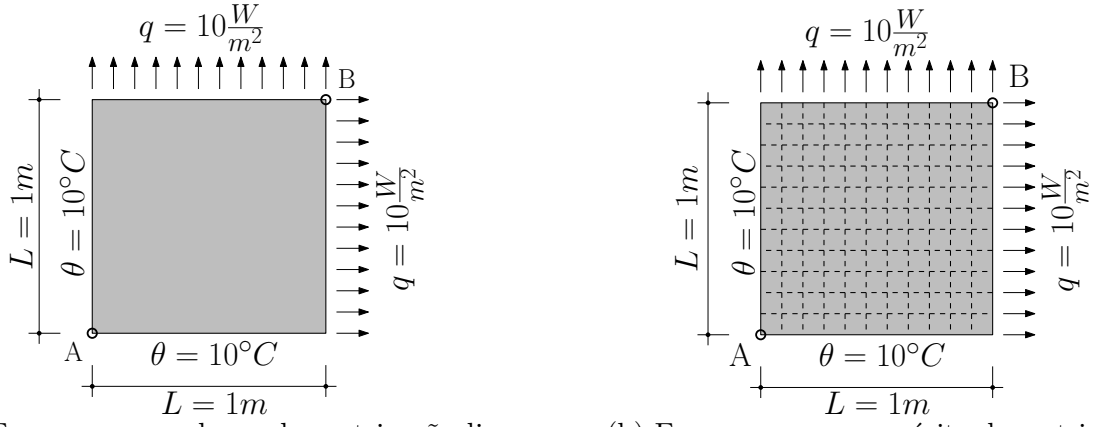
Por fim, é possível notar que há ótima concordância entre os campos de temperatura. Percebe-se especialmente pelo gráfico da figura 5.13 que a técnica de embutimento consegue representar satisfatoriamente o compósito, mesmo com propriedades de condutividade térmica dependentes da temperatura. Mesmo com o emprego da equação 5.22, a técnica de embutimento não encontrou dificuldades no processo de convergência, nem de perda de acurácia do campo de temperatura resultante.

5.4.4 Análise térmica não linear de chapa reforçada com fibras

Este exemplo trata de uma análise térmica não linear em regime estacionário de uma chapa reforçada com fibras, de forma análoga com o exemplo da subseção 4.8.2. São feitas análises do campo térmico para os casos de chapa sem fibras e chapa reforçada com fibras ordenadas horizontalmente e verticalmente. Em ambos os casos o material que constitui a matriz possui condutividade térmica não linear dependente da temperatura. O coeficiente de condutividade térmico da matriz ($k_{Tm}(\theta)$) é representado como uma função da temperatura ao invés de um valor constante. Após, é realizada comparação entre os casos com e sem reforço e também em relação aos casos com coeficiente de condutividade constante.

A figura 5.14 mostra o esquema do problema térmico analisado. Destaque é dado aos pontos A e B, empregados para posterior análise gráfica. O valor da espessura é unitário ($e = 1{,}0$). A figura 5.14a mostra a estrutura sem reforço e as condições de temperatura e fluxo impostas. Já a figura 5.14b mostra o esquema do compósito reforçado por 10 fibras horizontais e 10 fibras verticais, sujeita aos mesmo tipos de carregamento.

Figura 5.14 – Esquemas para o problema térmico de compósito de matriz termicamente não linear reforçada por fibras.



(a) Esquema para chapa de matriz não linear sem reforço.

(b) Esquema para compósito de matriz não linear e reforço por fibras distribuídas horizontalmente e verticalmente.

Fonte: elaborado pelo autor.

Para o problema de condução de calor não linear, o parâmetro de condutividade térmico k_{Tm} da matriz é dado pela equação 5.23. Para a solução do problema não linear, foi arbitrado um campo inicial de temperatura e iterativamente reaplicando e recalculando os novos valores de temperatura até convergência final.

$$k_{Tm}(\theta) = 2{,}75 - 0{,}2\theta \tag{5.23}$$

A tabela 13 mostra os valores das propriedades térmicas para a modelagem das fibras inseridas no compósito.

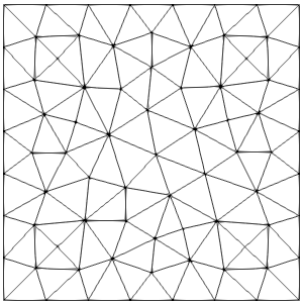
Tabela 13 – Propriedades térmicas do material das fibras. Condutividade térmica k_{Tf} e área da seção transversal A_f.

k_{Tf} $(\frac{W}{m°C})$	A_f (m^2)
55	0,0005

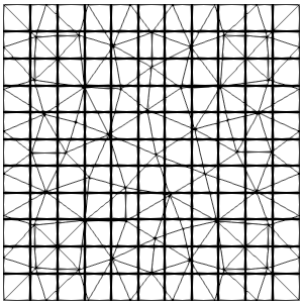
Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.15 mostra as malhas de elementos finitos empregada para a resolução do problema. A malha da matriz é a mesma para ambos os casos, consistindo no emprego de 126 elementos triangulares de aproximação cúbica e 610 nós. Para o caso do compósito reforçado por fibras, foram empregadas 20 fibras, subdivididas em 10 elementos finitos de barra com aproximação linear cada, totalizando em 200 elementos finitos lineares de barra.

Figura 5.15 – Malhas de elementos finitos para ambos os casos analisados.



(a) Malha de elementos finitos para a matriz, sem os elementos de reforço.

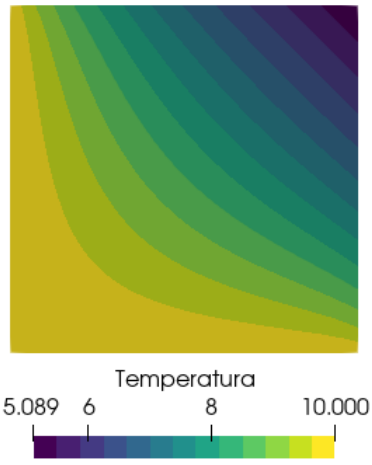


(b) Malha de elementos finitos da matriz e dos elementos de reforço embutidos.

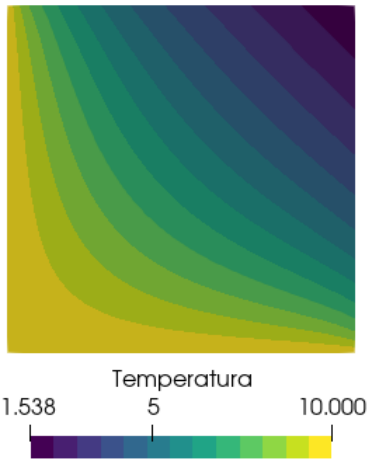
Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.16 mostra os campos de temperatura linear (a) e não linear (b) para o caso da estrutura sem reforço. Para o problema de condução de calor linear, adota-se para o coeficiente de condutividade térmico da matriz o valor de $k_{Tm} = 2{,}5$.

Figura 5.16 – Campos de temperatura para o caso de chapa sem reforço e materiais termicamente linear e não linear, respectivamente.



(a) Campo de temperatura para o caso de chapa sem reforço e material da matriz termicamente linear.

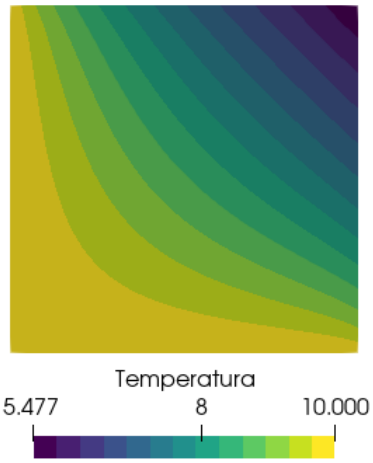


(b) Campo de temperatura para o caso de chapa sem reforço e material da matriz termicamente não linear.

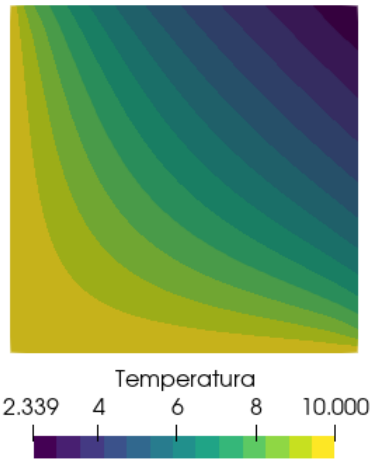
Fonte: elaborado pelo autor.

Já a figura 5.17 mostra os campos de temperatura linear (a) e não linear (b) para o compósito reforçado por fibras horizontais e verticais.

Figura 5.17 – Campos de temperatura para o caso de compósito reforçado por fibras e materiais termicamente linear e não linear, respectivamente.



(a) Campo de temperatura para o caso de compósito reforçado por fibras e material da matriz termicamente linear.

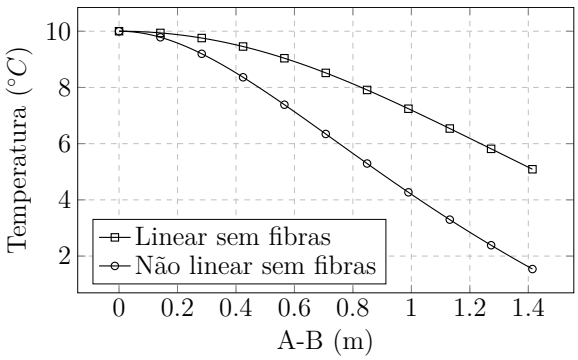


(b) Campo de temperatura para o caso de compósito reforçado por fibras e material da matriz termicamente não linear.

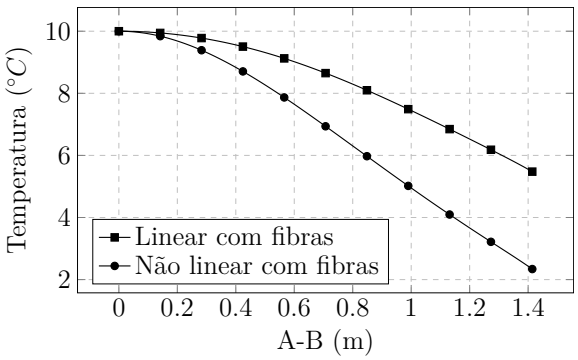
Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.18 mostra os valores de temperatura ao longo da diagonal A-B para os casos sem reforço e com reforço, tanto para os materiais termicamente lineares e não lineares da matriz. A figura 5.18a compara os valores de temperatura entre os materiais linear e não linear para o caso em que não há reforço na matriz. A figura 5.18b compara os valores de temperatura entre os materiais linear e não linear para o caso em que há a presença de reforço na matriz.

Figura 5.18 – Gráficos de temperatura entre os casos de chapa sem e com reforço, de materiais termicamente linear e não linear.



(a) Gráfico de temperatura entre chapas sem reforço, de materiais termicamente linear e não linear.

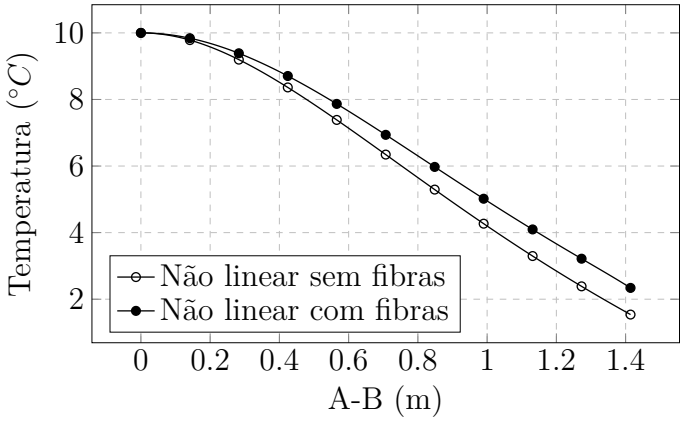


(b) Gráfico de temperatura entre compósitos reforçados por fibras, com materiais da matriz termicamente linear e não linear.

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.19 mostra a diferença nos valores de temperatura, fazendo-se uso de material termicamente não linear, entre as estruturas sem e com reforço na matriz. Os resultados distintos já eram esperados, porém demonstram a importância de se considerar com precisão as diversas fases do compósito e suas propriedades não lineares.

Figura 5.19 – Gráfico de temperatura entre os compósitos reforçados por fibras, de materiais termicamente linear e não linear.



Fonte: elaborado pelo autor.

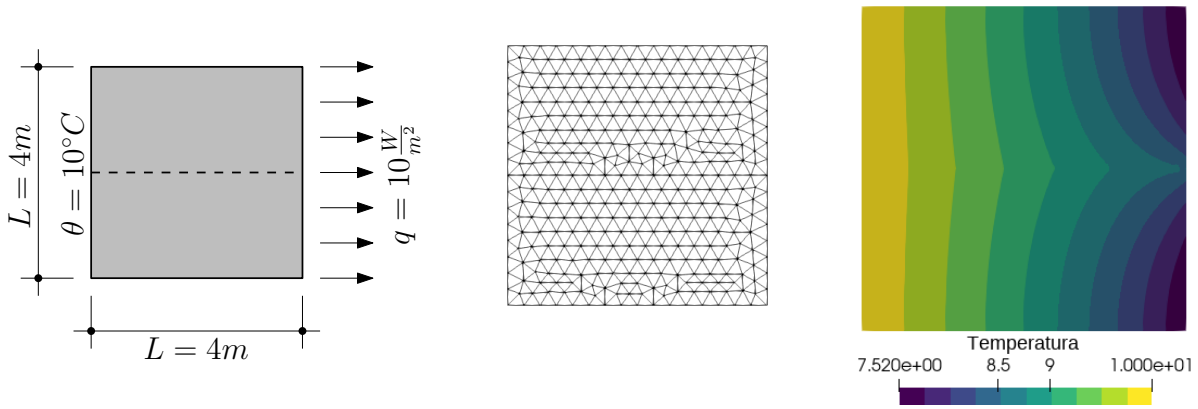
Por fim, nota-se por meio deste exemplo outra importante vantagem desta técnica de modelagem de materiais compósitos frente as atuais alternativas. Tal técnica de embutimento permite, com metodologia simplificada, análises térmicas não lineares. No caso de emprego de técnicas de homogeneização, estas poderiam levar a resultados de menor acurácia, por não refletirem o comportamento não linear independente das fases do compósito.

5.4.5 Estudo de convergência e acurácia para a técnica de embutimento

Neste exemplo procura-se avaliar a questão da acurácia da técnica de embutimento e convergência dos resultados com o refinamento da malha de elementos finitos empregada. Para tanto, propõem-se resolver dois tipos de problemas característicos com a finalidade de avaliar os resultados obtidos.

O primeiro exemplo trata de análise térmica em regime estacionário de uma fibra longa imersa num domínio quadrado, similar ao exemplo 5.4.1. A figura 5.20a mostra a geometria do problema em questão, com as dimensões e condições de contorno aplicadas. A espessura da chapa é considerada unitária ($e = 1{,}0$). Para as condições de contorno, foram aplicadas condições de Dirichlet na face esquerda no valor de $10°C$ e de Neumann na face direita no valor de $10\frac{W}{m^2}$. As faces horizontais superiores e inferiores são consideradas adiabáticas com fluxo de calor nulo. Na figura 5.20b está representada a malha de elementos finitos para o problema de referência. Foram empregados no total 644 elementos finitos triangulares e 16 elementos finitos lineares, totalizando 2995 nós e graus de liberdade. A figura 5.20c mostra o campo de temperatura resultante. Tal resultado será utilizado para comparação entre os campos de temperatura provenientes das diferentes discretizações.

Figura 5.20 – Geometria, condições de contorno e resultados do problema de fibra longa imersa.



(a) Geometria e condições de contorno para o problema da fibra longa imersa no domínio.

(b) Malha de elementos finitos utilizada.

(c) Campo de temperatura resultante.

Fonte: elaborado pelo autor.

Os valores de condutividade térmica da matriz (k_{Tm}) e da fibra (k_{Tf}) e a área adotada para a fibra (A_f) estão descritos na tabela 14.

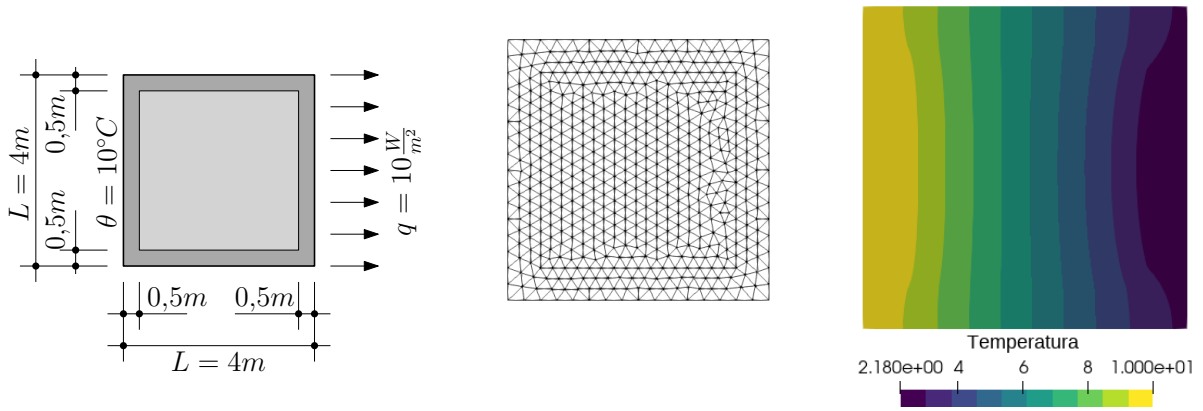
Tabela 14 – Valores de condutividade térmica e de área adotados para o problema de fibra longa imersa no domínio.

k_{Tm} $(\frac{W}{m°C})$	k_{Tf} $(\frac{W}{m°C})$	A_f (m^2)
10	100	0,5

Fonte: elaborado pelo autor.

O segundo exemplo trata de análise térmica em regime estacionário de um domínio com região interna de condutividade térmica reduzida, similar ao exemplo 5.4.2. O problema com suas dimensões e condições de contorno aplicadas está descrito na figura 5.21a. A espessura da chapa é considerada unitária ($e = 1{,}0$). Para as condições de contorno, foram aplicadas condições de Dirichlet na face esquerda no valor de $10°C$ e de Neumann na face direita no valor de $10\frac{W}{m^2}$. As faces horizontais superiores e inferiores são consideradas adiabáticas com fluxo de calor nulo. A figura 5.21b mostra a malha de elementos finitos empregada. Foram utilizados no total 1012 elementos finitos triangulares, resultando em 4651 nós e graus de liberdade. Na figura 5.21c é possível ver o campo de temperatura resultante, que será utilizado como referência.

Figura 5.21 – Geometria, condições de contorno e resultados para o problema de região interna com condutividade diferente.



(a) Geometria e condições de contorno para o problema de região interna com condutividade térmica diferente.

(b) Malha de elementos finitos utilizada.

(c) Campo de temperatura resultante.

Fonte: elaborado pelo autor.

Os valores de condutividade térmica da matriz (k_{Tm}), da região interna (k_{Td}) e das inclusões pertencentes à malha de inclusão empregada (k_{Ti}) estão descritos na tabela 15. A malha de inclusões representará a região interna e portanto, seu coeficiente de condutividade térmico assumirá um valor negativo para representar um valor de condutividade térmica menor que o da matriz.

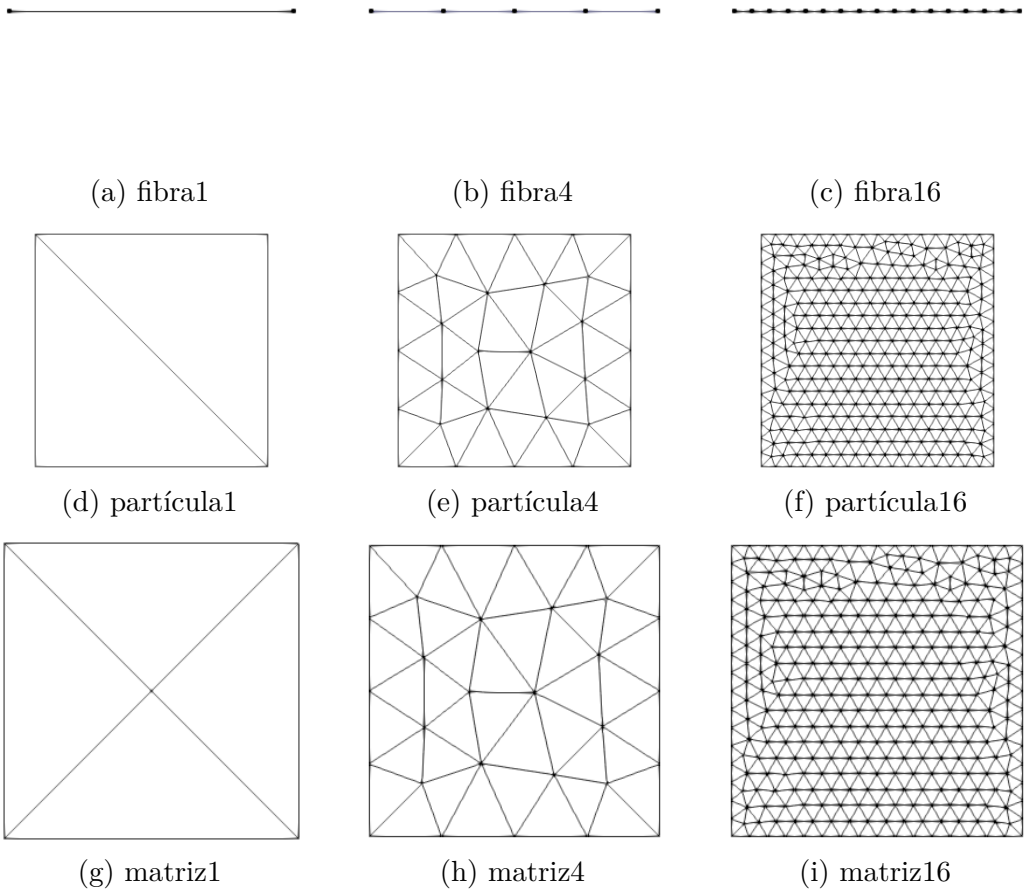
Tabela 15 – Valores de condutividade térmica para a matriz, região interna e elementos de inclusão.

k_{Tm} $(\frac{W}{m°C})$	k_{Td} $(\frac{W}{m°C})$	k_{Ti} $(\frac{W}{m°C})$
10	3	-7

Fonte: elaborado pelo autor.

Para avaliar a alteração nos resultados apenas com o refinamento das malhas de elementos finitos, concebe-se 3 níveis de discretização para as malhas da fibra, da matriz e das partículas. Utilizou-se o programa *Gmsh* para realizar a discretização da malha, variando-se como parâmetro o número de divisões nas faces. Tanto para a fibra, matriz e malha de partículas, foram empregadas 1, 4 e 16 divisões nas faces como níveis de discretização. A figura 5.22 mostra as diversas malhas de elementos finitos empregadas para a fibra, matriz e malha de partículas. Para melhor classificação, adotou-se como nomenclatura o nome que representa a finalidade da malha seguido do número que define seu número de divisões. Por exemplo, *matriz4* refere-se à malha da matriz resultante de 4 divisões em suas laterais, enquanto *fibra16* diz respeito à malha da fibra composta por 16 divisões ao longo da mesma.

Figura 5.22 – Malhas de elementos finitos empregadas, com suas respectivas nomenclaturas e discretizações.



(a) fibra1 (b) fibra4 (c) fibra16

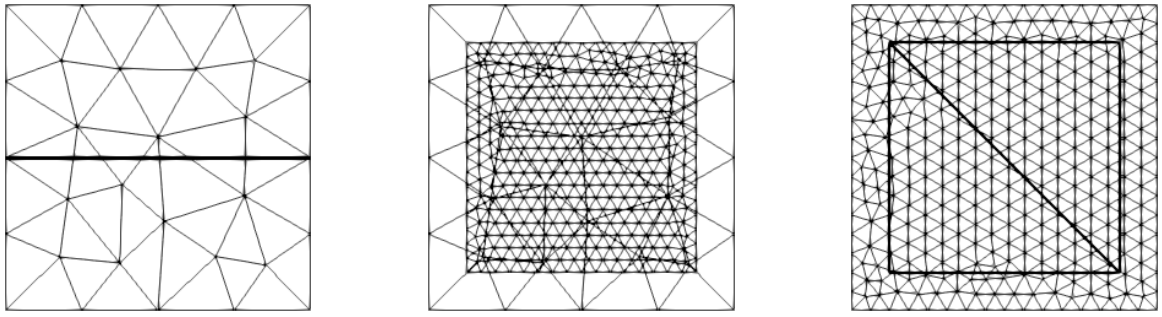
(d) partícula1 (e) partícula4 (f) partícula16

(g) matriz1 (h) matriz4 (i) matriz16

Fonte: elaborado pelo autor.

Deste modo, a nomenclatura de um problema passa a ser a justaposição do nome da malha dos elementos embutidos seguido do nome da malha da matriz. A figura 5.23 mostra diversos arranjos de malhas de elementos finitos e suas respectivas nomenclaturas.

Figura 5.23 – Exemplos de arranjos de malhas de elementos finitos que compõem os diversos problemas analisados.

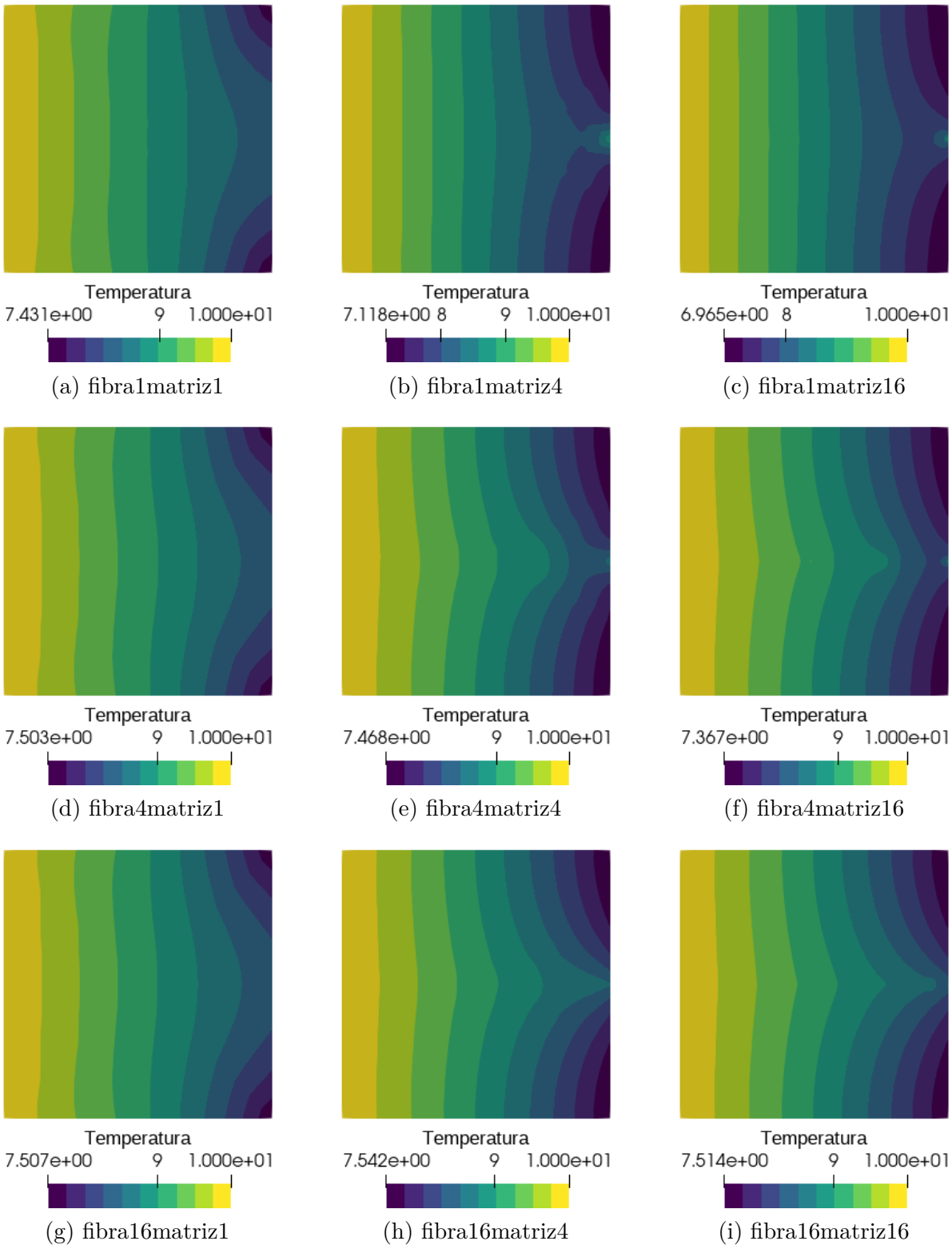


(a) fibra4matriz4 (b) partícula16matriz4 (c) partícula1matriz16

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.24 mostra os campos de temperatura para as diversas discretizações de fibra e matriz possíveis.

Figura 5.24 – Mapas de temperatura para os exemplos que envolvem fibra imersa no domínio, para diversas configurações de malhas de elementos finitos.



(a) fibra1matriz1 (b) fibra1matriz4 (c) fibra1matriz16

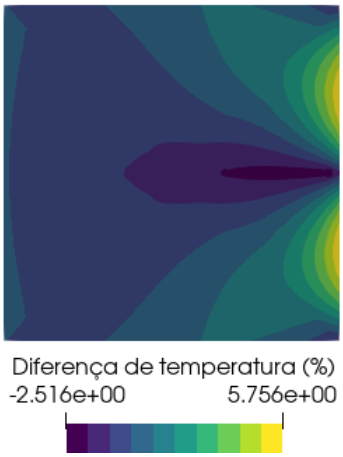
(d) fibra4matriz1 (e) fibra4matriz4 (f) fibra4matriz16

(g) fibra16matriz1 (h) fibra16matriz4 (i) fibra16matriz16

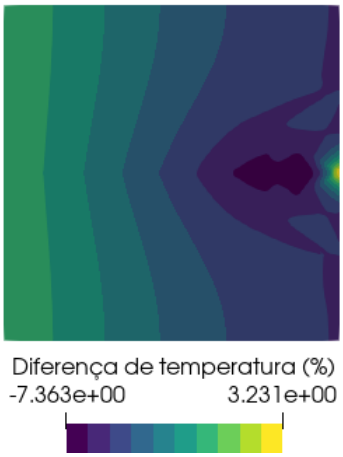
Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.25 mostra os mapas de diferença de temperatura em percentual para as diversas discretizações de fibra e matriz possíveis em comparação com a referência.

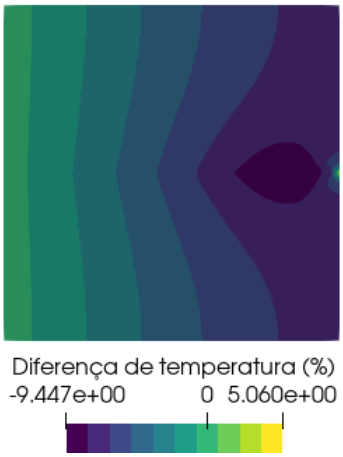
Figura 5.25 – Mapas de diferença de temperatura em percentual para os exemplos que envolvem fibra imersa no domínio, para diversas configurações de malhas de elementos finitos.



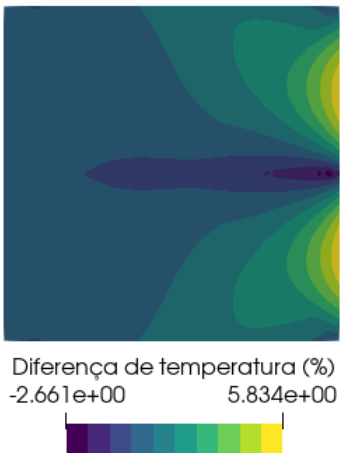
(a) fibra1matriz1



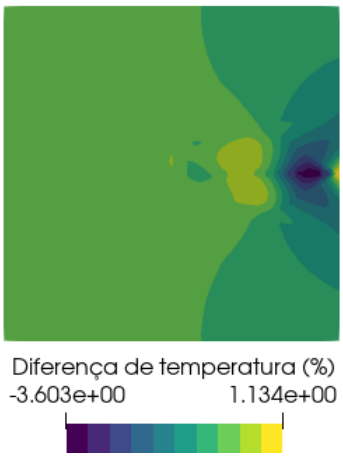
(b) fibra1matriz4



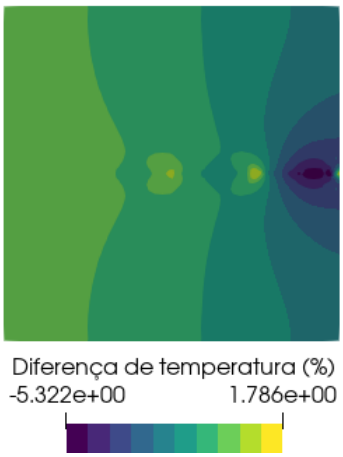
(c) fibra1matriz16



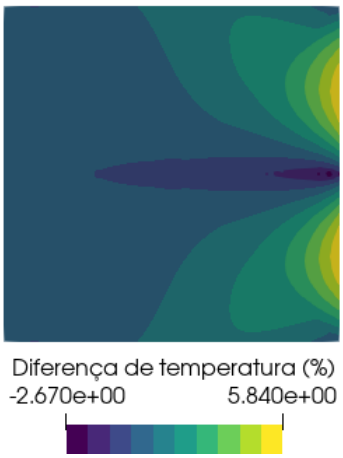
(d) fibra4matriz1



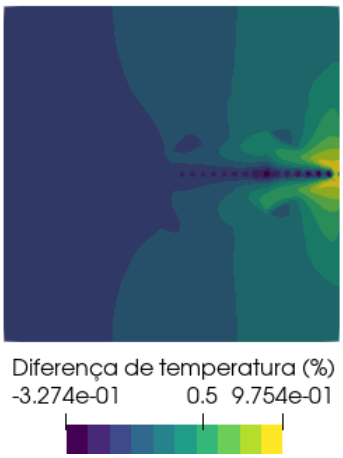
(e) fibra4matriz4



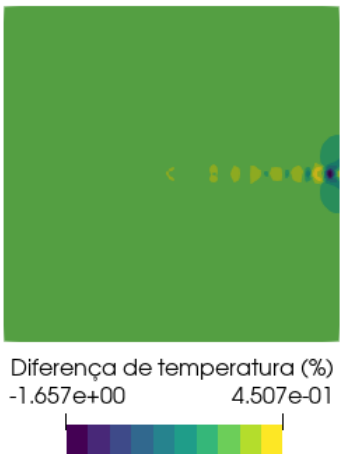
(f) fibra4matriz16



(g) fibra16matriz1



(h) fibra16matriz4

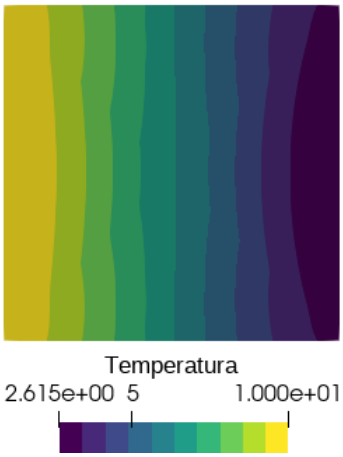


(i) fibra16matriz16

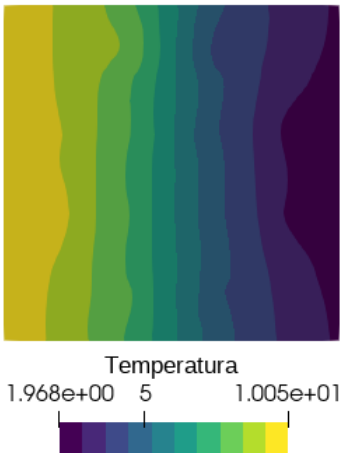
Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.26 mostra os campos de temperatura para as diversas discretizações de partículas e matriz possíveis.

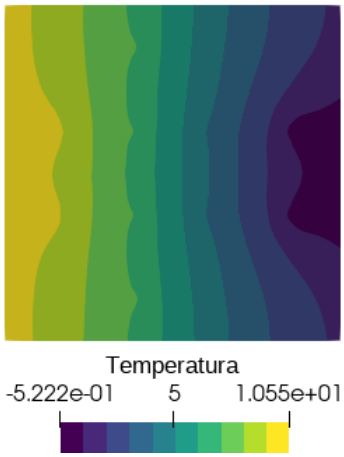
Figura 5.26 – Mapas de temperatura para os exemplos que envolvem malha de partículas imersa no domínio, para diversas configurações de malhas de elementos finitos.



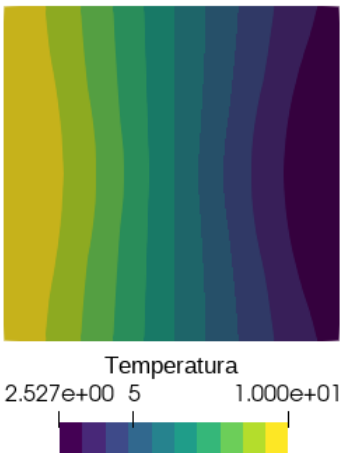
(a) partícula1matriz1



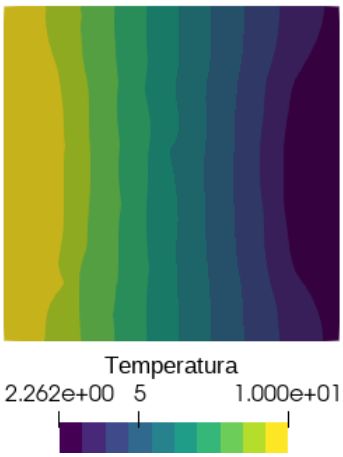
(b) partícula1matriz4



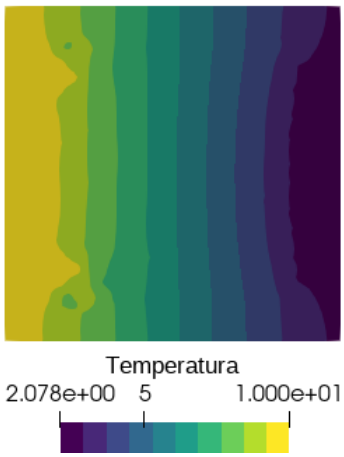
(c) partícula1matriz16



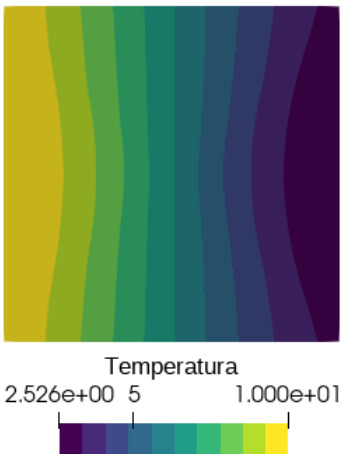
(d) partícula4matriz1



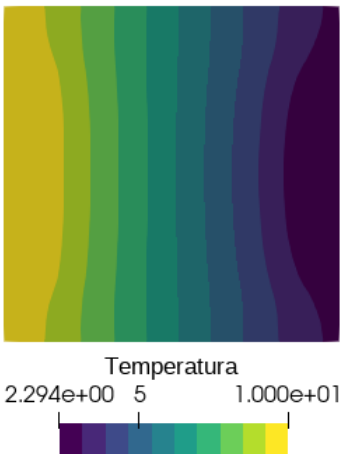
(e) partícula4matriz4



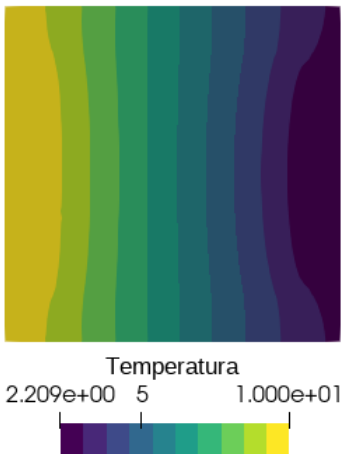
(f) partícula4matriz16



(g) partícula16matriz1



(h) partícula16matriz4

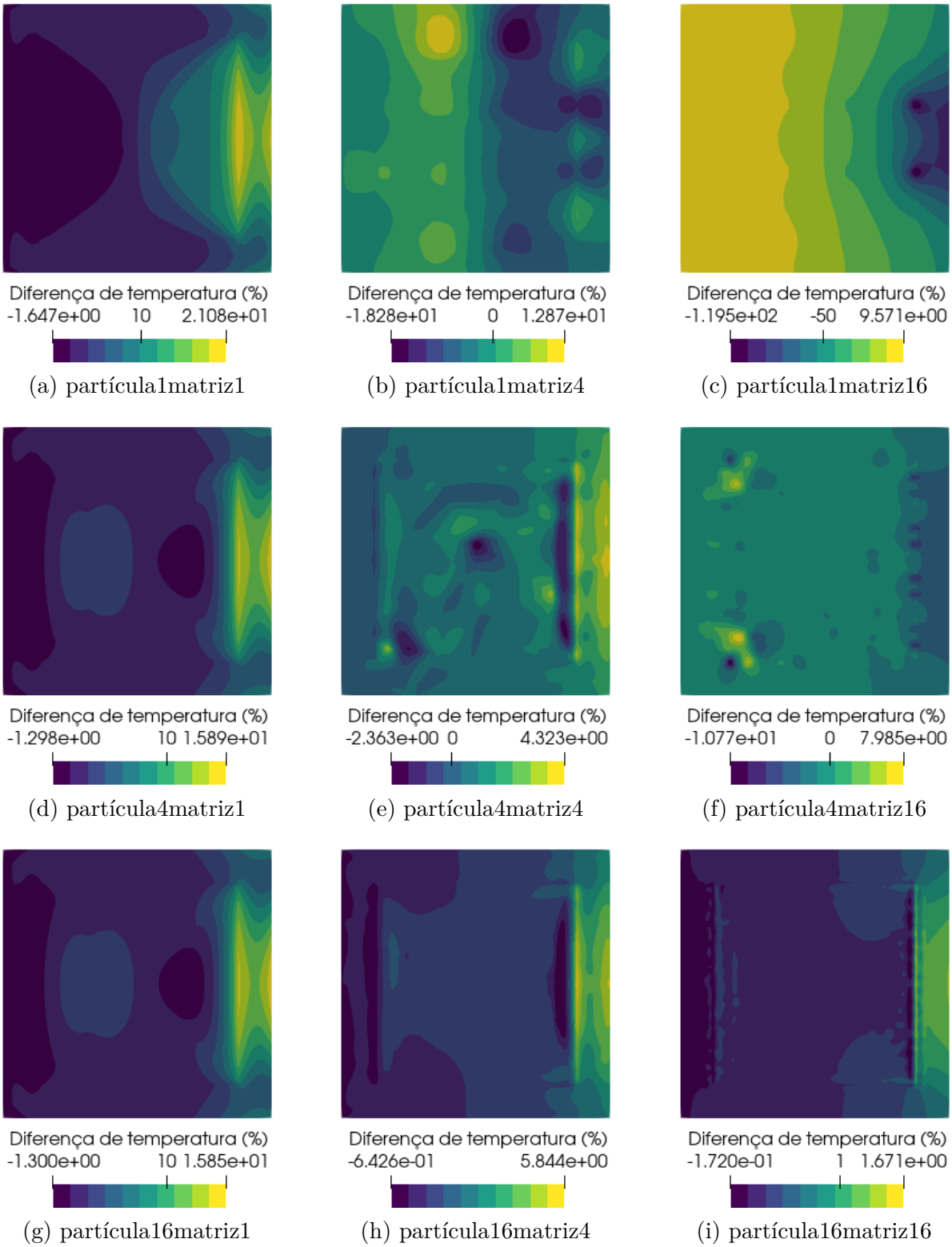


(i) partícula16matriz16

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.27 mostra os mapas de diferença de temperatura em percentual para as diversas discretizações de partículas e matriz possíveis em comparação com a referência.

Figura 5.27 – Mapas de diferença de temperatura em percentual para os exemplos que envolvem malha de partículas imersa no domínio, para diversas configurações de malhas de elementos finitos.



(a) partícula1matriz1 (b) partícula1matriz4 (c) partícula1matriz16

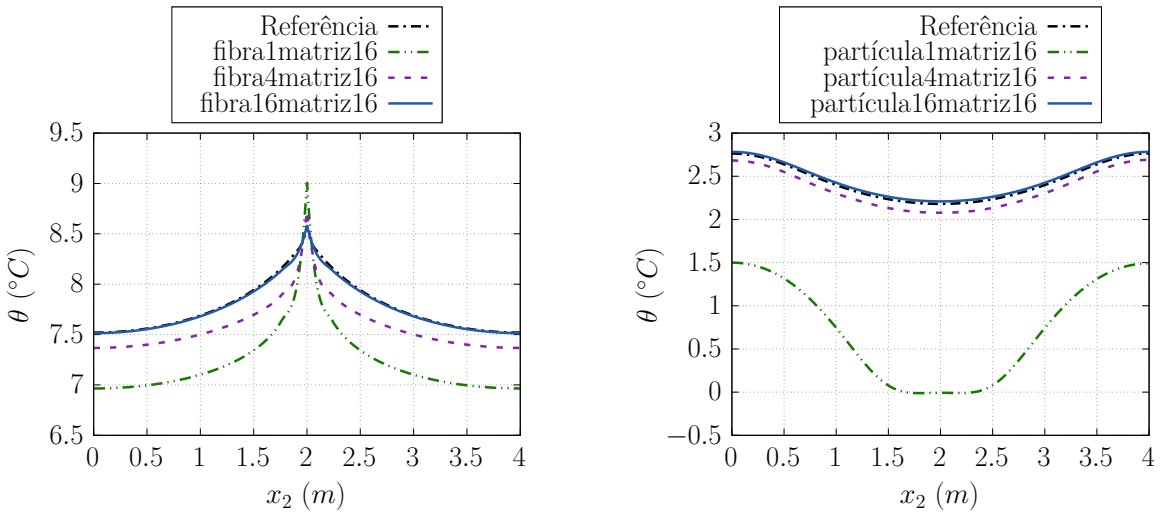
(d) partícula4matriz1 (e) partícula4matriz4 (f) partícula4matriz16

(g) partícula16matriz1 (h) partícula16matriz4 (i) partícula16matriz16

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.28 mostra os gráficos de temperatura em $x_1 = 4$, ao longo da altura x_2 do domínio, para as diversas configurações de fibra e malha de partículas embutidas na *matriz16*, junto com seus respectivos resultados de referência.

Figura 5.28 – Temperatura ao longo da altura x_2 na face direita em $x_1 = 4$.



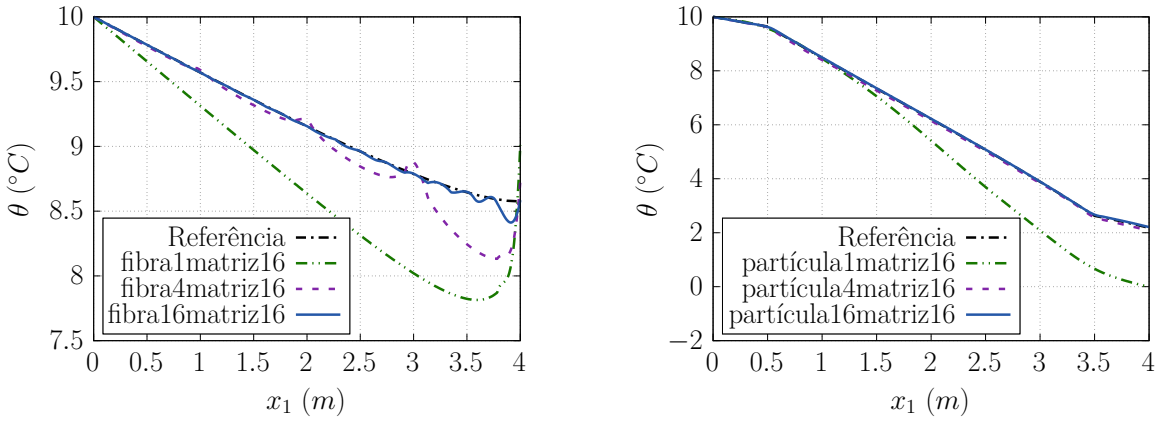
(a) Valores de temperatura ao longo da altura para o problema de fibra longa imersa.

(b) Valores de temperatura ao longo da altura para o problema da malha de partículas imersa.

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.29 mostra os gráficos de temperatura em $x_2 = 2$, ao longo do comprimento x_1 do domínio, para as diversas configurações de fibra e malha de partículas embutidas na *matriz16*, junto com seus respectivos resultados de referência.

Figura 5.29 – Temperatura ao longo do comprimento x_1 na meia altura $x_2 = 2$.



(a) Valores de temperatura ao longo do comprimento para o problema de fibra longa imersa.

(b) Valores de temperatura ao longo do comprimento para o problema da malha de partículas imersa.

Fonte: elaborado pelo autor.

Por meio dos resultados apresentados, é possível tirar algumas conclusões. Primeiramente, nota-se que, com o refinamento das malhas de elementos finitos, tanto da matriz quanto das inclusões, o campo de temperatura resultante converge para a solução referência. No maior grau de refinamento, para o caso da fibra longa, foi obtido uma diferença percentual absoluta máxima de 1,66%, enquanto que no caso da malha de partículas a diferença máxima absoluta no domínio é de 1,67%. O que é interessante, pois mostra que a resposta é convergente, dada a devida atenção quanto ao grau de refinamento das malhas. A informação dos elementos finitos não é perdida, apenas sua representação na malha da matriz que é melhorada ou piorada de acordo com sua discretização.

Para o caso da fibra longa imersa é possível perceber este efeito, principalmente com o gráfico apresentado na figura 5.29a. Com o aumento no grau de discretização a temperatura ao longo da fibra passa a convergir para a solução referência, mas para os casos *fibra1matriz16* e *fibra4matriz16* é possível ver com facilidade a posição e interferência dos nós dos elementos embutidos por meio dos picos nas curvas de temperatura nas posições $x_1 = 4$ no primeiro caso e $x_1 = 1$, $x_1 = 2$, $x_1 = 3$ e $x_1 = 4$ no segundo caso.

O caso da malha de partículas representa uma situação crítica, em que os elementos de partículas embutidos contribuem na matriz com valores negativos para modelar regiões com menor condutividade térmica. Neste caso, quando o tamanho dos elementos finitos embutidos for muito maior que o dos elementos da matriz, pode acontecer da informação da condutividade resultante da integração no domínio da partícula se concentrar num único ponto. Isto pode gerar resultados com erro significativo, especialmente para casos em que a contribuição da inclusão é em forma de subtrair do valor da matriz. Em casos extremos pode ocorrer a inversão de sinal nos valores de condutividade térmica na matriz numérica global utilizada para resolver o problema, gerando resultados completamente irreais. É possível ver esta situação por meio da figura 5.27c e dos gráficos 5.28b e 5.29b. Para o problema *partícula1matriz16*, as diferenças percentuais absolutas no campo de temperatura chegam até quase 120% em alguns pontos do domínio, podendo também ser possível visualizar a posição e interferência dos nós dos elementos finitos embutidos.

Por fim, tomando o devido cuidado quanto ao grau de refinamento das malhas de elementos finitos da matriz e inclusões, é possível obter resultados numéricos com erros negligenciáveis em comparação com o processo de discretização completa do domínio. Ademais, vale ressaltar que estes exemplos numéricos modelados tentam expor casos críticos para a técnica de embutimento. Em compósitos compostos por inúmeras fibras e partículas dispersas, as diferenças percentuais costumam ser significantemente menores.

5.4.6 Modelagem de materiais de gradação funcional

Neste exemplo uma chapa de material de gradação funcional (FGM) é modelada pelo método dos elementos finitos com condutividade térmica equivalente e por meio da técnica de embutimento. Materiais de gradação funcional são materiais em que suas propriedades físicas passam a ser também função do espaço (x_i) (THAI; KIM, 2015a). Posteriormente os resultados dos campos de temperatura são comparados entre si, buscando-se avaliar a aplicabilidade da técnica de embutimento na modelagem de FGMs.

Este exemplo é inspirado nos trabalhos de Cho (2006) e Do, Ong e Lee (2019). Neste caso o coeficiente de condutividade térmico é assumido como função da altura x_2, variando linearmente entre dois valores k_{T1} e k_{T2}. Para tanto, define-se uma função interpoladora $\alpha(x_2)$ que retornará a proporção entre as duas fases:

$$\alpha(x_2) = 1.0 - \frac{x_2}{H} \tag{5.24}$$

em que x_2 é o valor da altura num ponto qualquer dentro do domínio e H é o valor total da altura do domínio. Neste exemplo em específico, por se tratar de um domínio quadrado, $H = L = 3{,}0$.

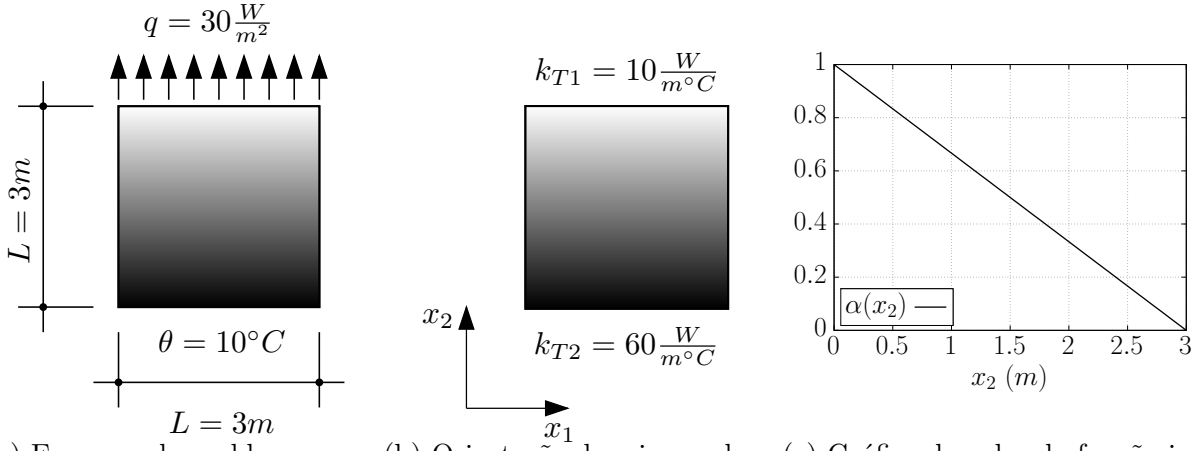
De posse do valor da proporção entre os dois materiais, aplica-se a regra da mistura para calcular a condutividade equivalente do material num ponto qualquer do domínio:

$$k_{T\{FGM\}}(x_2) = k_{T1}(1.0 - \alpha(x_2)) + k_{T2}(\alpha(x_2)) \tag{5.25}$$

em que $k_{T\{FGM\}}$ é a condutividade térmica equivalente do FGM num ponto qualquer do domínio, k_{T1} é o valor da condutividade na parte superior do domínio e k_{T2} é o valor da condutividade na parte inferior do domínio. Percebe-se que a condutividade equivalente é simplesmente uma interpolação entre as duas fases, de acordo com a proporção dada por $\alpha(x_2)$.

A figura 5.30a mostra o esquema do problema analisado, com os valores das dimensões geométricas e condições de contorno. Trata-se de análise térmica em regime estacionário de uma chapa quadrada, de lado $L = 3{,}0m$, condições de Dirichlet na face inferior no valor de $10°C$ e Neumann na face superior no valor de $30\frac{W}{m^2}$. As faces verticais da esquerda e direita são consideradas adiabáticas com fluxo de calor nulo. A figura 5.30b mostra os valores de condutividade térmica das duas fases k_{T1} e k_{T2}. Na figura 5.30c é mostrado o gráfico da função interpoladora $\alpha(x_2)$ em função da altura x_2.

Figura 5.30 – Esquema do problema analisado, orientação do material e gráfico da função interpoladora.



(a) Esquema do problema analisado. Valores das dimensões e das condições de contorno estão indicados na figura.

(b) Orientação dos eixos e descrição do material. O valor das duas fases está indicado na figura. Quanto mais escuro, maior o valor da condutividade térmica.

(c) Gráfico do valor da função interpoladora $\alpha(x_2)$ em função da altura x_2.

Fonte: elaborado pelo autor.

Para a modelagem do FGM por meio da técnica de embutimento, imaginou-se a dispersão de pequenas partículas no domínio de forma que obedeça as frações volumétricas entre as duas fases. Para tanto, divide-se o domínio em 100 divisões para cada direção. Cada linha de altura média x_2 é preenchida com n partículas, uniformemente distribuídas ao longo de x_1, de forma que complete a fração volumétrica dada pela função interpoladora $\alpha(x_2)$. Desta forma é possível construir um FGM com as mesmas características iniciais adotadas. A tabela 16 mostra os valores de condutividade térmica para as duas fases, a condutividade térmica adotada para cada uma das partículas inseridas e o número de divisões adotado.

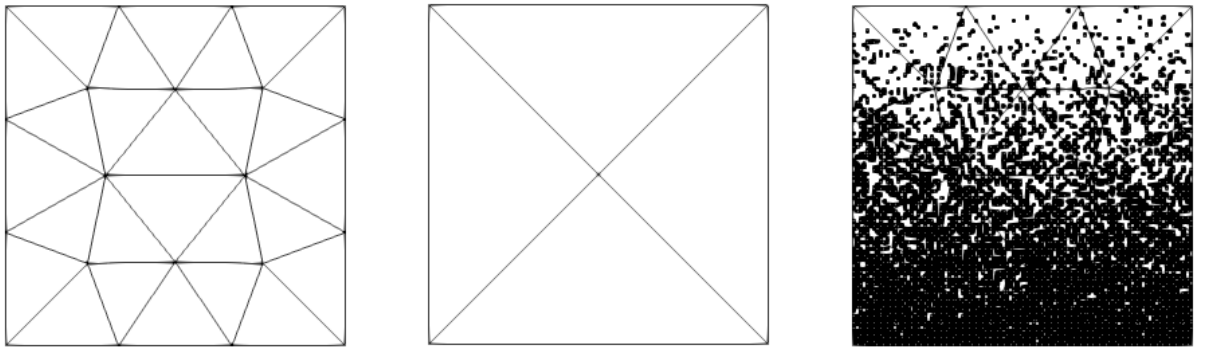
Tabela 16 – Valores de condutividade térmica para as fases do FGM, inclusões e número de divisões efetuadas.

k_{T1} $(\frac{W}{m°C})$	k_{T2} $(\frac{W}{m°C})$	k_{Ti} $(\frac{W}{m°C})$	Número de divisões
10	60	50	100

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.31a mostra a malha de elementos finitos da matriz, composta por 26 elementos finitos triangulares de aproximação cúbica e 136 nós e graus de liberdade. A figura 5.31b mostra a malha de cada uma das partículas embutidas, composta por 4 elementos triangulares de aproximação cúbica e 25 nós e graus de liberdade. Na figura 5.31c é mostrada a malha da matriz mais a configuração de todas as partículas dispersas no domínio. É possível perceber a variação de densidade de partículas entre a borda inferior e superior, que obedece a função interpoladora linear α.

Figura 5.31 – Malhas de elementos finitos para a matriz, cada uma das partículas e conjunto total de partículas no domínio, respectivamente.



(a) Malha de elementos finitos empregada para a matriz.

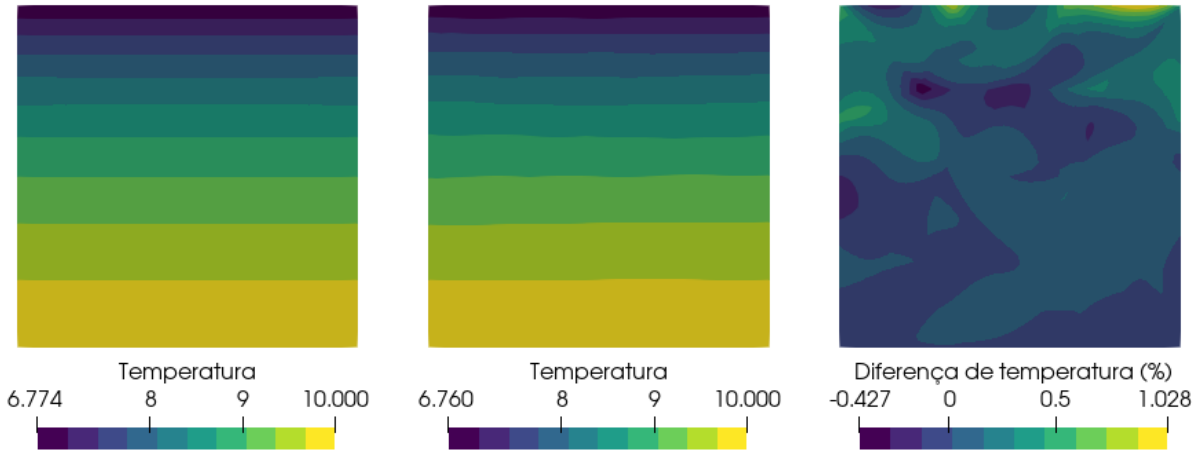
(b) Malha de elementos de cada uma das partículas

(c) Arranjo total das partículas dispersas no domínio.

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.32 mostra os campos de temperatura resultantes do método dos elementos finitos com condutividade equivalente e por meio da técnica de embutimento, além do mapa de diferença percentual entre os dois resultados.

Figura 5.32 – Campos de temperatura resultantes e campo de diferenças percentuais.



(a) Campo de temperatura resultante, fazendo-se uso da condutividade térmica equivalente $k_{T\{FGM\}}$.

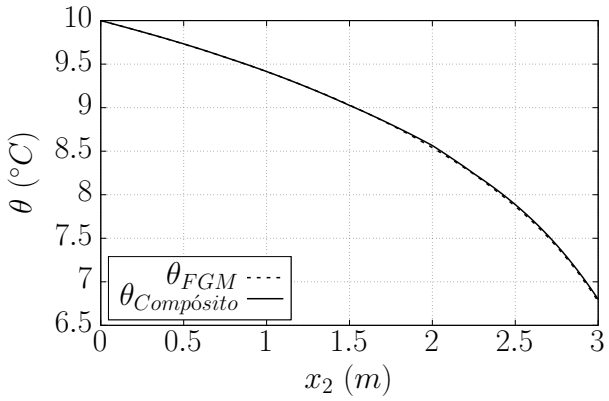
(b) Campo de temperatura resultante por meio da técnica de embutimento.

(c) Campo de diferença de temperatura em percentual entre os dois problemas analisados.

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.33 mostra o gráfico de temperatura θ ao longo da altura x_2 para ambos modelos. É possível perceber ótima concordância entre ambas curvas.

Figura 5.33 – Gráfico comparativo entre as curvas de temperatura ao longo da altura x_2 entre o FGM e o compósito modelado por meio da técnica de embutimento.



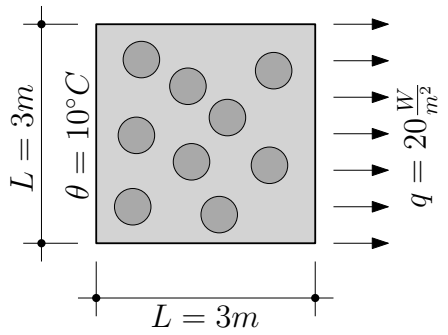
Fonte: elaborado pelo autor.

Por meio deste exemplo percebe-se que, com a técnica de embutimento, também é possível modelar materiais de gradação funcional. Neste caso, para fins de comparação, foram adotadas para as frações volumétricas das fases uma variação linear ao longo da altura, mas com o mesmo procedimento é possível analisar qualquer outra configuração ou distribuição de partículas no domínio. Vale notar que independentemente do número de partículas, o número de graus de liberdade do sistema final permanece o mesmo do caso com a condutividade térmica equivalente. Neste exemplo, com 100 divisões por face, foram empregados aproximadamente 5000 partículas, cada com 4 elementos finitos triangulares de aproximação cúbica. O custo computacional extra com a técnica de embutimento fica a cargo da integração numérica das partículas, que é um procedimento facilmente paralelizável.

5.4.7 Cálculo de coeficiente de condutividade térmico equivalente

Neste exemplo a técnica de embutimento é empregada para determinar o coeficiente de condutividade térmico equivalente de um compósito composto por matriz e partículas uniformemente distribuídas. Tal exemplo é inspirado dos trabalhados de Moura (2015), Felix (2018) e Ramos (2020). A figura 5.34 mostra o problema analisado com suas dimensões geométricas e condições de contorno. Trata-se da análise térmica em regime estacionário de uma chapa quadrada com partículas circulares uniformemente distribuídas em seu interior. As condições de contorno são de Dirichlet no valor de $10°C$ na face esquerda e de Neumann no valor de $20\frac{W}{m^2}$ a face direita. As faces horizontais superiores e inferiores são consideradas adiabáticas com fluxo de calor nulo. Posteriormente, é feita uma comparação dos resultados obtidos do modelo analisado com diversos modelos de homogeneização encontrados em Mehta e Monteiro (2014).

Figura 5.34 – Geometria e condições de contorno para o problema de partículas distribuídas no domínio.



Fonte: elaborado pelo autor.

Para o cálculo do parâmetro de condutividade térmico equivalente ($k_{T\{equiv\}}$), faz-se uso da lei de Fourier como descrita na seção 3.3, que para este caso em específico é simplificada para:

$$q = -\frac{k_{T\{equiv\}}\Delta\theta}{L} \tag{5.26}$$

com q sendo o fluxo de calor aplicado na face direita como condição de contorno de Neumann, L sendo o comprimento da chapa, $\Delta\theta$ é a variação total de temperatura ao longo do domínio e $k_{T\{equiv\}}$ é o parâmetro de condutividade térmico equivalente. Para a obtenção da condutividade equivalente, $\Delta\theta$ é calculado como a diferença de temperatura entre a temperatura de Dirichlet na face esquerda e a temperatura média resultante na face direita.

A fração volumétrica entre as fases do compósito é mantida constante, fazendo-se variar apenas a quantidade e dimensões das partículas dispersas. São modeladas 4 configurações de acordo com o número de partículas, a saber: 3, 30, 300 e 3000 partículas. A tabela 17 mostra os valores de condutividade térmica para a matriz (k_{Tm}), partículas (k_{Tp}) e das inclusões (k_{Ti}), além do valor da fração volumétrica entre partículas e matriz.

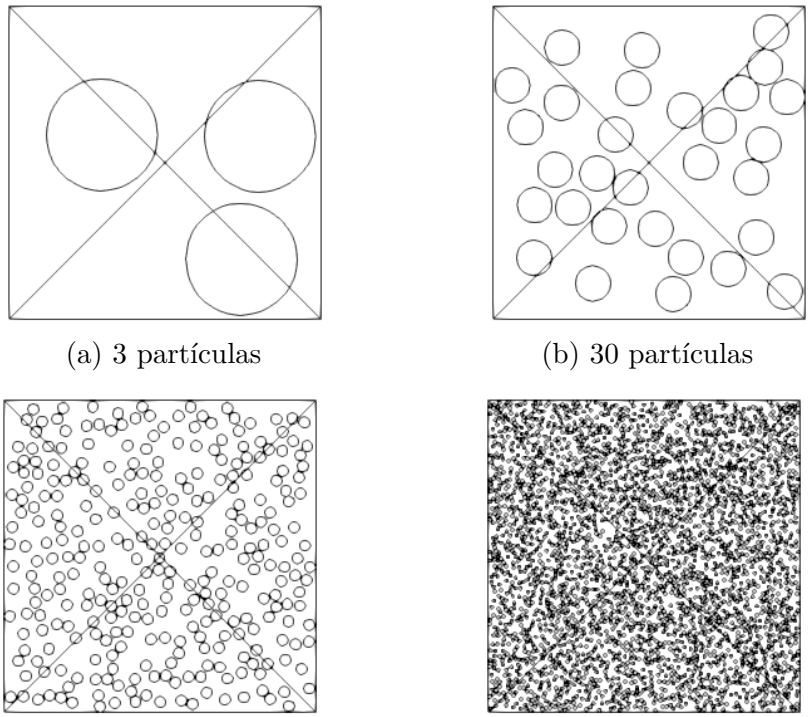
Tabela 17 – Valores de condutividade térmica para a matriz, partículas e inclusões e fração volumétrica.

k_{Tm} $(\frac{W}{m°C})$	k_{Tp} $(\frac{W}{m°C})$	k_{Ti} $(\frac{W}{m°C})$	Fração volumétrica (%)
10	30	20	30

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.35 mostra as malhas de elementos finitos da matriz e partículas para as 4 configurações analisadas. A malha da matriz é mantida constante, sendo composta por 4 elementos finitos triangulares de aproximação cúbica, totalizando 25 nós e graus de liberdade. Cada partícula circular é composta por 1 elemento finito triangular de aproximação cúbica. É verificada a possibilidade de colisão entre as partículas e garantido que elas não se sobreponham entre si. Já a figura 5.36 mostra os campos de temperatura resultantes.

Figura 5.35 – Malhas de elementos finitos da matriz e partículas para os casos de 3, 30, 300 e 3000 partículas dispersas uniformemente no domínio.

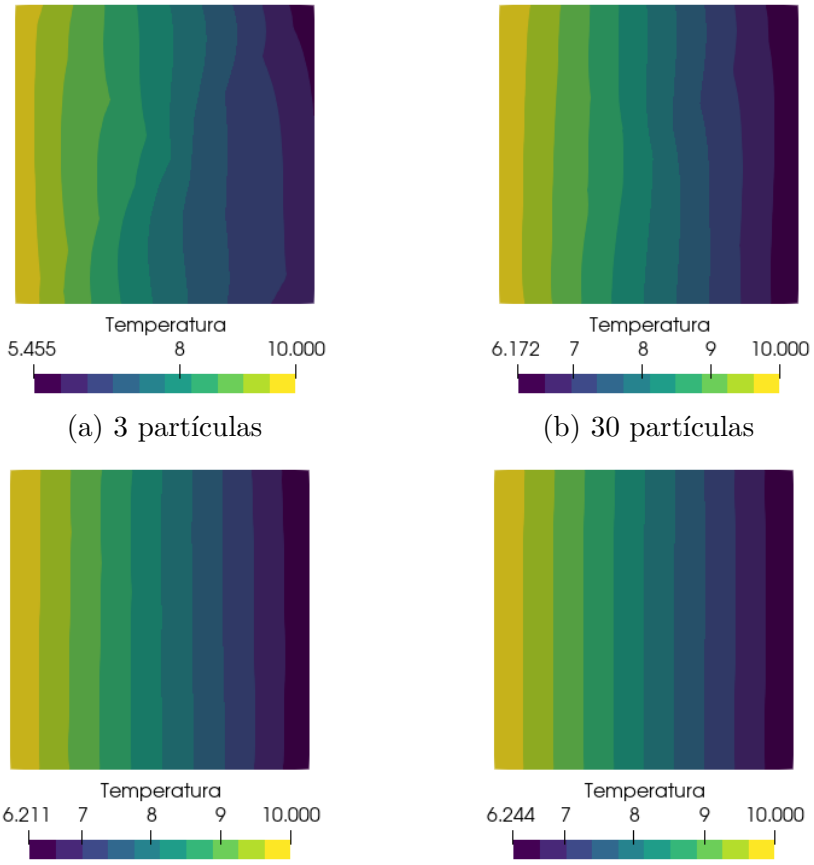


(a) 3 partículas (b) 30 partículas

(c) 300 partículas (d) 3000 partículas

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 5.36 – Mapas de temperaturas para cada uma das 4 configurações de partículas.



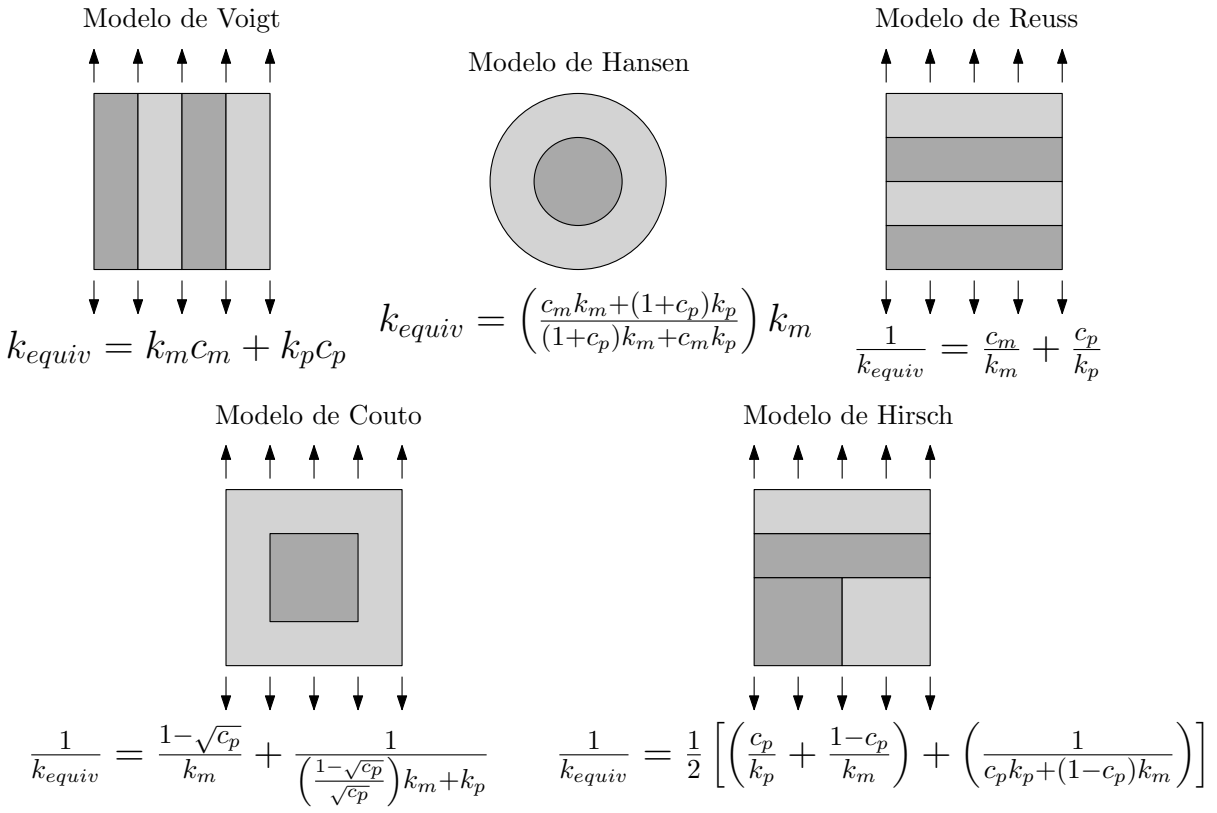
(a) 3 partículas (b) 30 partículas

(c) 300 partículas (d) 3000 partículas

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.37 mostra os modelos de homogeneização utilizados para comparação. Vale notar que cada modelo representa uma hipótese inicial que precisa ser atendida para que o modelo possa representar satisfatoriamente. A priori, o modelo analisado neste exemplo, que é composto por várias partículas uniformemente dispersas no domínio, mais se aproxima da hipótese dada pela regra das misturas (ASKELAND; WRIGHT, 2016), neste caso representada pelo modelo de Voigt.

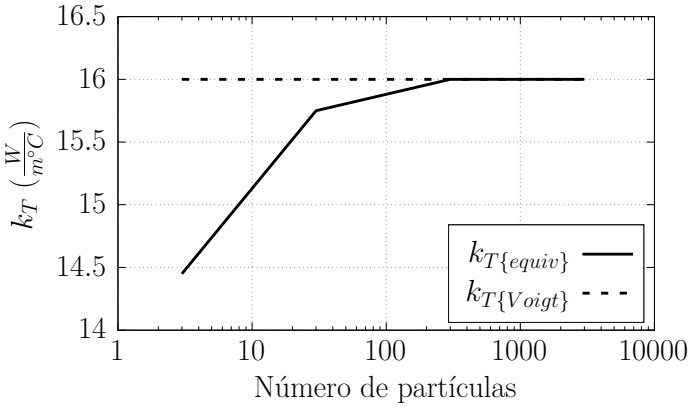
Figura 5.37 – Representação de diversos modelos de homogeneização.



Fonte: elaborado pelo autor.

Na figura 5.38 é mostrado o gráfico do coeficiente de condutividade térmico em função do número de partículas no domínio, mantendo-se constante o valor da fração volumétrica entre as fases do compósito. Percebe-se que com o aumento do número de partículas o valor do coeficiente de condutividade passa a convergir para o valor final dado pelo modelo de Voigt.

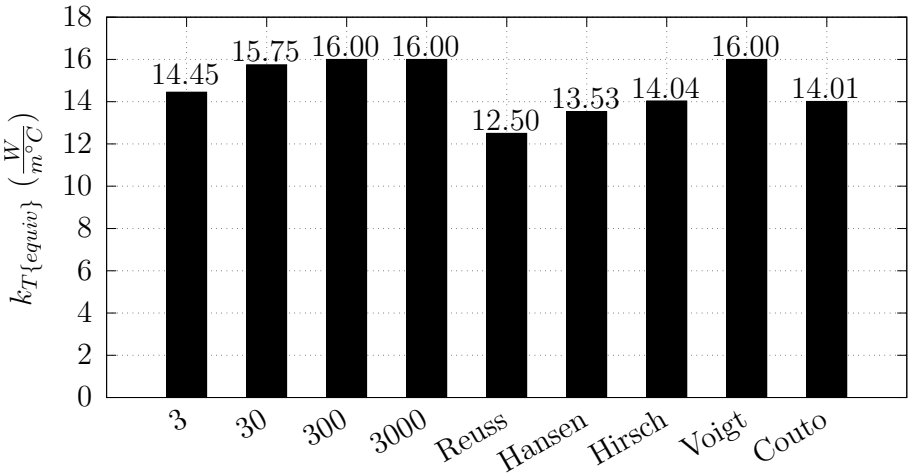
Figura 5.38 – Gráfico de condutividade térmica em função do número de partículas.



Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.39 mostra um comparativo entre os valores de condutividade térmica resultante dos diversos modelos de homogeneização discutidos e o modelo analisado, para as diversas configurações de partículas.

Figura 5.39 – Comparação entre diversos valores de condutividade térmica obtidos pelo modelo analisado e modelos analíticos da literatura.



Fonte: elaborado pelo autor.

Por meio deste exemplo, é possível concluir que a técnica de embutimento é capaz de modelar satisfatoriamente a condução de calor de materiais compósitos compostos por partículas dispersas em sua matriz. Para este caso em específico, um compósito criado pela dispersão de partículas uniformemente distribuídas no domínio, quando em grande número, se aproxima da hipótese inicial do modelo de Voigt. É possível perceber, portanto, que há boa concordância entre os resultados numéricos e analítico. Adicionalmente, na configuração de 3 partículas, a técnica de embutimento resultou num valor de condutividade térmica equivalente mais próximo dos modelos de Hirsch e Couto, pois a configuração resultante desta amostra se aproxima bastante das hipóteses de distribuição das fases

nestes modelos, como ilustrado na figura 5.37. Desta forma, entende-se por meio deste exemplo que a técnica de embutimento é capaz de modelar e representar as propriedades do compósito para uma ampla faixa de tamanho das inclusões e de configurações na distribuição das fases. Vale notar ainda que, independente do número de partículas, o número de graus de liberdade total do problema se mantém constante, dependente apenas da malha da matriz. O único aumento significativo no custo computacional é decorrente do processo de integração numérica das partículas.

6 CAMPO TERMOMECÂNICO

A definição do campo termomecânico utilizado neste trabalho é dada na seção 3.6. Neste capítulo, aproveita-se para discutir detalhes práticos de implementação e apresentação de exemplos numéricos.

Pela termomecânica desacoplada, para um determinado instante de tempo, o campo térmico não sofre interferência do campo mecânico e portanto é possível solucionar ambos campos separadamente. Para um determinado instante de tempo t, calcula-se o campo térmico que atua sobre a estrutura. Após, o campo mecânico é resolvido sob a influência do campo de temperatura, com o surgimento de deformações térmicas e tensões adicionais. Adicionalmente, o campo térmico também promove alterações nas propriedades mecânicas do sólido quando estas são consideradas dependentes da temperatura, sendo necessário reavaliação destas propriedades no momento em que há mudança de temperatura.

Para o caso da termoelasticidade, as deformações de origem térmica são consideradas no problema mecânico por meio de composição aditiva:

$$E_{ij}^{\{total\}} = E_{ij}^{\{elástico\}} + E_{ij}^{\{térmico\}} \tag{6.1}$$

em que $E_{ij}^{\{total\}}$ é a deformação total no sólido, $E_{ij}^{\{elástico\}}$ é a deformação elástica não linear do problema mecânico e $E_{ij}^{\{térmico\}}$ é a deformação oriunda do campo térmico ($E_{ij}^{\{térmico\}} = \alpha(\theta - \theta^{\{datum\}})\delta_{ij}$).

Já para o caso em que há ocorrência de plasticidade, também fazendo uso de composição aditiva para as deformações plásticas como definido em 4.7, a deformação total do sólido se torna:

$$E_{ij}^{\{total\}} = E_{ij}^{\{elástico\}} + E_{ij}^{\{térmico\}} + E_{ij}^{\{plástico\}} \tag{6.2}$$

Para a resolução do problema mecânico, após a obtenção do campo de temperatura, é necessário isolar as deformações de origem elástica. Para tanto, basta subtrair da deformação total as parcelas de origem térmica e/ou plástica:

$$\begin{aligned} &E_{ij}^{\{elástico\}} = E_{ij}^{\{total\}} - E_{ij}^{\{térmico\}} \\ &\text{ou} \\ &E_{ij}^{\{elástico\}} = E_{ij}^{\{total\}} - E_{ij}^{\{térmico\}} - E_{ij}^{\{plástico\}} \end{aligned} \tag{6.3}$$

A seguir, por meio do algoritmo 1, é mostrado o modelo numérico termomecânico implementado neste trabalho.

Algoritmo 1: Modelo termomecânico implementado neste trabalho

Entrada : Malha de elementos finitos, parâmetros térmicos e mecânicos dos materiais, definição do problema e condições de contorno.

Saída : Solução dos campos térmico e mecânico para cada passo de tempo.

Leitura e processamento dos arquivos de entrada com definição dos parâmetros dos materiais, malha de elementos finitos e condições de contorno;

para $t = 0$ **até** $t^{\{final\}}$ **faça**

  início Cálculo do campo térmico

    Cálculo do vetor de fluxo de calor imposto $f_m^{\{T_1\}}$ (eq. 5.5);

    Cálculo do fluxo de calor na superfície por convecção $f_m^{\{T_2\}}$ (eq. 5.5);

    Cálculo do fluxo de calor total $f_m^{\{T\}} = -f_m^{\{T_1\}} + f_m^{\{T_2\}}$;

    Cálculo da matriz de condutividade devido a convecção $K_{mn}^{\{T_2\}}$ (eq. 5.5);

    para cada *elemento "e" do sólido* **faça**

      para cada *ponto de integração* ξ_γ **faça**

        para cada *nó* α *do elemento* **faça**

          para cada *nó* β *do elemento* **faça**

            $K_{\alpha\beta}^{\{T_1\}} = K_{\alpha\beta}^{\{T_1\}} + B_{\alpha i}(\xi_\gamma) k_{ij} B_{\beta j}(\xi_\lambda) |J| \omega^{\{\xi_\gamma\}}$ (eq. 5.5);

            $M_{\alpha\beta}^{\{T\}} = M_{\alpha\beta}^{\{T\}} + \phi_\alpha(\xi_\gamma) \rho c_p \phi_\beta(\xi_\lambda) |J| \omega^{\{\xi_\gamma\}}$ (eq. 5.5);

          fim

        fim

      fim

    fim

    Cálculo da matriz de rigidez térmica $K_{mn}^{\{T\}} = K_{mn}^{\{T_1\}} + K_{mn}^{\{T_2\}}$;

    Cálculo de $L_{mn} = M_{mn}^{\{T\}} + \alpha \Delta t K_{mn}^{\{T\}}$ (eq. 5.8);

    Cálculo de $r_m = \left(M_{mn}^{\{T\}} - (1-\alpha) \Delta t K_{mn}^{\{T\}} \right) \theta_n^{\{t\}} + \Delta t f_m^{\{t\}}$ (eq. 5.8);

    $\theta_n^{\{t+\Delta t\}} = (L_{mn})^{-1} r_m$ (eq. 5.7);

    $\theta_n^{\{t\}} = \theta_n^{\{t+\Delta t\}}$;

  fim

  /* De posse do campo de temperatura $\left(\theta_n^{\{t+\Delta t\}}\right)$, procede-se para o cálculo do campo mecânico. */

Algoritmo 1: Modelo termomecânico implementado neste trabalho

início Cálculo do campo mecânico
  Cálculo de $F_m^{\{ext\}}$ (eq. 4.49);
  Se for o primeiro passo de tempo, adota-se $Y_n = X_n$. Do contrário, Y_n passa a ser o valor das coordenadas na configuração do passo anterior;
  Reavaliação das propriedades mecânicas dependentes da temperatura;
  enquanto *ocorrer correção plástica* **faça**
    `/* Previsão elástica do campo mecânico: */`
    enquanto *erro > tolerância* **faça**
      `/* Cálculo do vetor de força interna e hessiana: */`
      para cada *elemento "e" do sólido* **faça**
        para cada *ponto de integração* ζ **faça**
          Cálculo de A_{ok} (eq. 4.38), J (eq. 4.9) e C_{kl} (eq. 4.22);
          Cálculo de $E_{kl}^{\{elast\}} = E_{kl}^{\{total\}} - E_{kl}^{\{plast\}} - E_{kl}^{\{term\}}$ (eq. 6.3);
          Cálculo de S_{ij} e $\mathfrak{C}^e_{ijkl}$ de acordo com o modelo constitutivo empregado (seção 4.4);
          para cada *nó* α *do elemento e direção* i **faça**
            Cálculo de $\partial E_{kl}/\partial Y_i^\alpha$ (eq. 4.60);
            $F_{N(\alpha-1)+i}^{\{int\}} = F_{N(\alpha-1)+i}^{\{int\}} + S_{kl}\frac{\partial E_{kl}}{\partial Y_i^\alpha}|J_0^\zeta|\omega^\zeta$ (eq. 4.58);
            para cada *nó* β *do elemento e direção* j **faça**
              Cálculo de $\partial S_{kl}/\partial Y_j^\beta$ (eq. 4.65);
              Cálculo de $\partial^2 E_{kl}/\left(\partial Y_j^\beta \partial Y_i^\alpha\right)$ (eq. 4.66);
              $p = N(\alpha-1)+i$; $q = N(\beta-1)+j$;
              $H_{pq} = H_{pq} + \left(\frac{\partial S_{kl}}{\partial Y_j^\beta}\frac{\partial E_{kl}}{\partial Y_i^\alpha} + S_{kl}\frac{\partial^2 E_{kl}}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta}|J_0^\zeta|\omega^\zeta\right)$ (eq. 4.63);
            fim
          fim
        fim
      fim
      `/* Cálculo de` ΔY_n`: */`
      $g_m = F_m^{\{int\}} - F_m^{\{ext\}}$;
      $\Delta Y_n = -\left(H_{mn}\right)^{-1} g_m$; $Y_n = Y_n + \Delta Y_n$ (eq. 4.55);
      $erro = ||\Delta Y_n||/||X_n||$;
    fim
    `/* Verificação e correção plástica do campo mecânico: */`
    para cada *elemento "e"* **faça**
      para cada *ponto de integração* ζ **faça**
        se $f^{\{plast\}}(\sigma_{kl}^\zeta) > 0$ **então** `/* critério de plastificação */`
          $e^{\zeta\ \{plast\}}_{kl[t+\Delta t]} = \lambda n_{kl}$ (eq. 4.106);
          $\varepsilon^{\zeta\ \{plast\}}_{kl[t]} = \varepsilon^{\zeta\ \{plast\}}_{kl[t]} + \varepsilon^{\zeta\ \{plast\}}_{kl[t+\Delta t]}$;
        fim
      fim
    fim
  fim
fim
  $t = t + \Delta t$;
fim

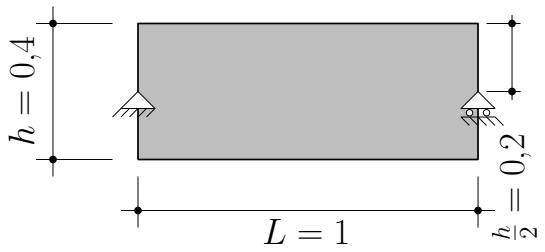
6.1 Exemplos numéricos

Nesta seção são apresentados alguns exemplos numéricos para demonstração e validação da formulação até então descrita, para aplicação em problemas termomecânicos desacoplados.

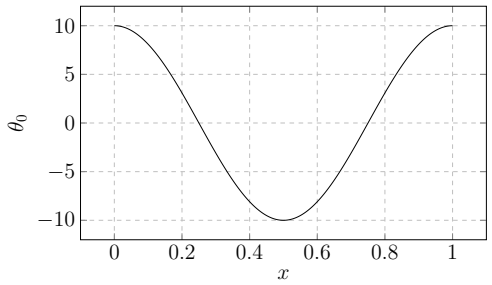
6.1.1 Expansão térmica transiente de barra termoelástica

No trabalho de Copetti (2002) é realizada uma análise de expansão termoelástica de barra unidimensional sob regime transiente de condução de calor, aqui reproduzida para validação da consideração de um campo térmico transiente na deformação de um elemento estrutural. A figura 6.1 mostra o esquema termoestrutural do problema em questão. Trata-se de uma barra de comprimento unitário, bi-apoiada na sua meia altura e sujeita a um campo de temperatura inicial ditado pela equação 6.4. Todas as quatro faces, horizontais e verticais, são consideradas adiabáticas com fluxo de calor nulo.

Figura 6.1 – Esquema termomecânico de uma barra sob processo transiente de condução de calor.



$$\theta_0(x) = 10\cos(2\pi x) \tag{6.4}$$



Fonte: elaborado pelo autor.

A tabela 18 mostra os valores de propriedades térmicas e mecânicas da barra adotadas para o exemplo numérico.

Tabela 18 – Propriedades físicas adimensionais do material para o exemplo da viga termomecânica bi-apoiada.

k_T	ρ	c_p	$\mathbb{E}$	ν	α_T	$\theta^{\{datum\}}$
1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,017	0,0

Fonte: elaborado pelo autor.

A tabela 19 mostra os valores utilizados para a integração temporal. Foi feito uso do processo de diferenças finitas para executar a marcha no tempo, utilizando-se $\alpha^{\{integrador\}} = 2/3$.

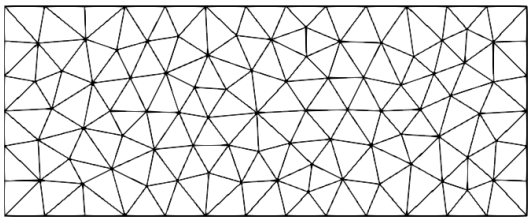
Tabela 19 – Parâmetros adimensionais do integrador temporal utilizados neste exemplo.

$t^{\{inicial\}}$	$t^{\{final\}}$	Δt	$\alpha^{\{integrador\}}$
0,0	0,2	0,001	2/3

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 6.2 mostra a malha de elementos finitos empregada para a barra. No total foram empregados 184 elementos finitos triangulares de aproximação cúbica e 886 nós.

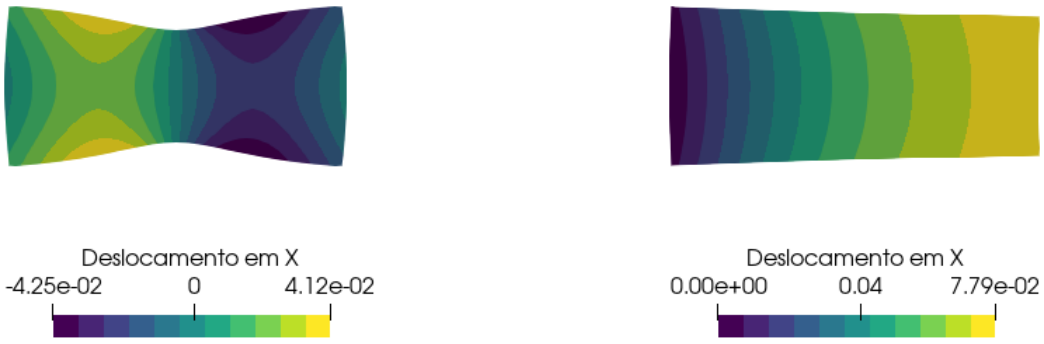
Figura 6.2 – Malha de elementos finitos empregada para a viga.



Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 6.3 mostra os valores de deslocamento na direção x para os tempos 0,0 e 0,2 respectivamente.

Figura 6.3 – Valores de deslocamento na direção x. Escala unitária (1,00) para a representação da deformada da estrutura.



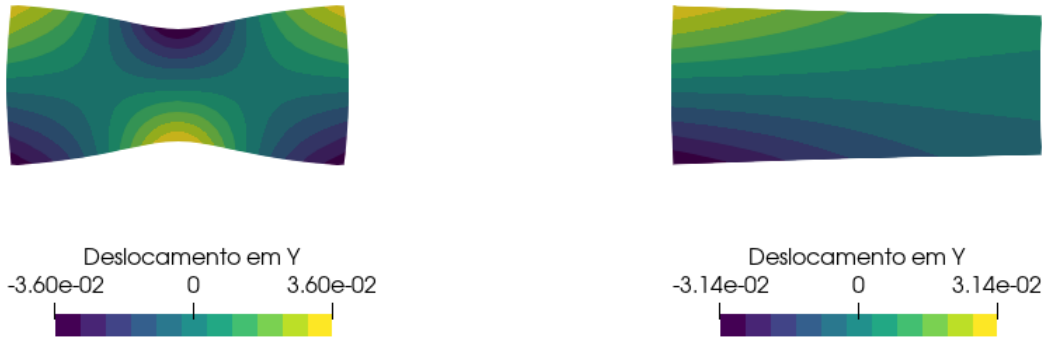
(a) Valores do campo de deslocamento na direção x para $t = 0{,}0$.

(b) Valores do campo de deslocamento na direção x para $t = 0{,}2$.

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 6.4 mostra os campos de deslocamento na direção y para os tempos 0,0 e 0,2 respectivamente.

Figura 6.4 – Valores de deslocamento na direção y. Escala unitária (1,00) para a representação da deformada da estrutura.



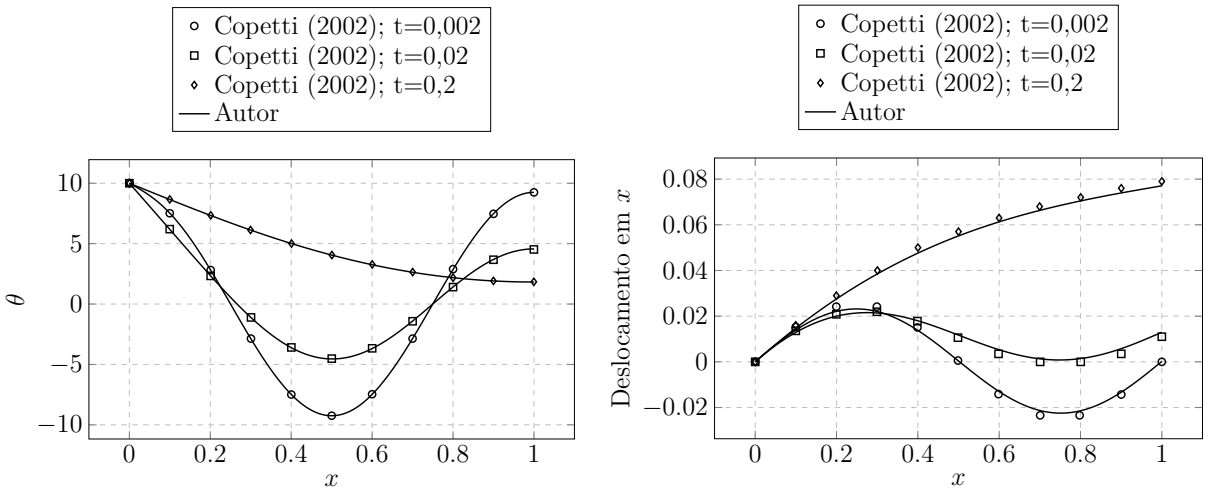
(a) Valores do campo de deslocamento na direção y para $t = 0{,}0$.

(b) Valores do campo de deslocamento na direção y para $t = 0{,}2$.

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 6.5 mostra, para três tempos distintos, os valores de temperatura e deslocamento, respectivamente. Nota-se que os resultados obtidos ao longo do tempo estão de acordo com os valores reportados pelo trabalho de Copetti (2002).

Figura 6.5 – Valores de temperatura e deslocamento, respectivamente, para três instantes de tempo e comparação com os valores reportados por Copetti (2002).



(a) Valores de temperatura ao longo da barra em três instantes de tempo distintos.

(b) Valores de deslocamento na direção x ao longo da barra em três instantes de tempo distintos.

Fonte: elaborado pelo autor.

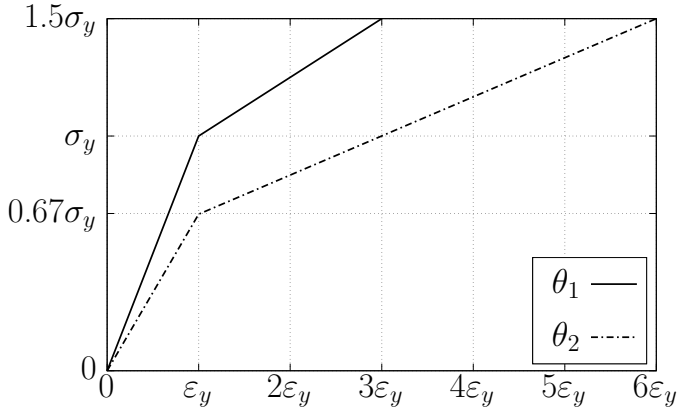
É possível constatar que o modelo numérico implementado consegue representar problemas termomecânicos transientes com boa acurácia, reportando resultados dos campos térmico e mecânicos similares com a referência.

6.1.2 Plasticidade sujeita à variação de temperatura

Neste exemplo pretende-se validar o modelo de plasticidade implementado na situação em que seus parâmetros sejam dependentes do campo de temperatura. Como referência para validação, utiliza-se o trabalho de Allen (1982), em que são contemplados 4 casos distintos. Para todos os casos, trata-se de uma barra sob carregamentos mecânico uniaxial e térmico, com a variação destes carregamentos termomecânicos ao longo do tempo. O material analisado possui comportamento termoplástico, com variação de suas propriedades mecânicas e parâmetros de seu modelo de plasticidade em função da temperatura. Para este exemplo, são apresentados os resultados dos casos 2, 3 e 4 já que o caso 1 trata de plasticidade isotérmica, ou seja, sem a variação da temperatura ao longo do tempo.

A definição do material agora é dada por meio de duas curvas que definem a relação *tensão vs deformação* em duas temperaturas distintas. A figura 6.6, adaptada do trabalho utilizado para referência, mostra duas curvas nas temperaturas θ_1 e θ_2, com os respectivos valores de tensão limite de plastificação σ_y e $0{,}67\sigma_y$. Por meio destas duas curvas é possível construir uma interpolação linear para obter os valores dos parâmetros do modelo de plasticidade em qualquer valor de temperatura.

Figura 6.6 – Curvas de *tensão vs deformação* para o material em duas temperaturas diferentes.



Fonte: elaborado pelo autor.

A tabela 20 mostra valores adotados que fazem parte dos dados de entrada. As relações $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ e $\varepsilon_y = \alpha_T \cdot \Delta\theta$ também são utilizadas.

Tabela 20 – Valores adotados para definição do material modelado.

σ_y	ε_y	$\Delta\theta$ (°C)	ν	α_T	$\theta^{\{datum\}}$ (°C)
$\frac{3{,}0}{\sqrt{1{,}5}}$	0,01	10	0,0	0,001	0,0

Fonte: elaborado pelo autor.

Por fim, de posse dos valores descritos anteriormente, as equações 6.5-6.7 descrevem os valores da rigidez elástica ($\mathbb{E}(\theta)$), encruamento isotrópico ($H_{iso}(\theta)$) e tensão limite de plastificação ($\sigma_y(\theta)$) para o material em função da temperatura θ.

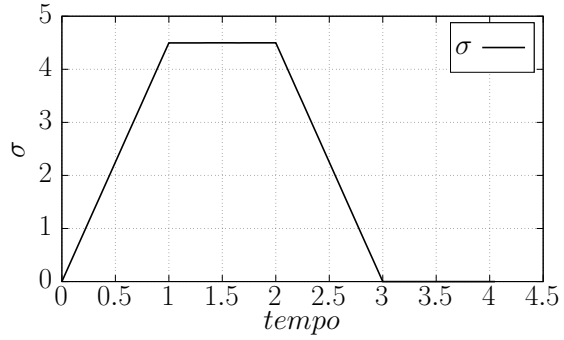
$$\mathbb{E}(\theta) = 300 - 10 \cdot \theta \tag{6.5}$$

$$H_{iso}(\theta) = 100 - \frac{10}{3} \cdot \theta \tag{6.6}$$

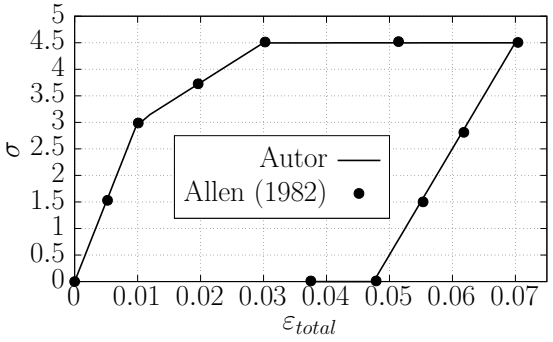
$$\sigma_y(\theta) = \frac{3 - 0{,}1 \cdot \theta}{\sqrt{1{,}5}} \tag{6.7}$$

As figuras 6.7, 6.8 e 6.9 mostram os campos de tensão e temperatura aplicados e os resultados obtidos para os casos 2, 3 e 4 respectivamente. Os históricos de tensão aplicada (σ) são dados pelas figuras 6.7a, 6.8a e 6.9a. Já os históricos de temperatura (θ) aplicada são dados pelas figuras 6.7c, 6.8c e 6.9c. As figuras 6.7d, 6.8d e 6.9d mostram os valores para as deformações elásticas, térmicas, plásticas e totais ao longo do tempo para cada um dos casos analisados. As figuras 6.7b, 6.8b e 6.9b mostram os gráficos de *tensão vs deformação total* para os casos 2, 3 e 4 respectivamente, junto com os valores de referência dados pelo trabalho de Allen (1982). Para todos os casos modelados, utilizou-se passo de tempo Δt de 0,1.

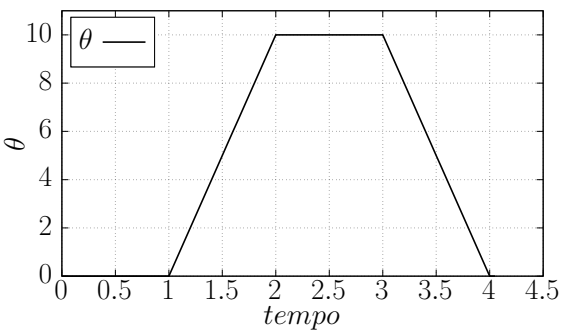
Figura 6.7 – Histórico de tensão e temperatura aplicados e resultados para o caso 2.



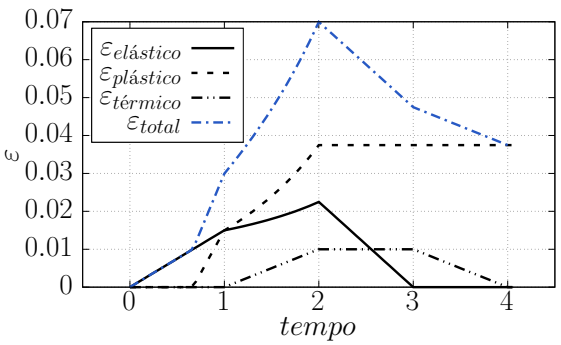
(a) Pressão externa aplicada ao longo do tempo.



(b) *Tensão vs deformação total* ao longo do tempo.



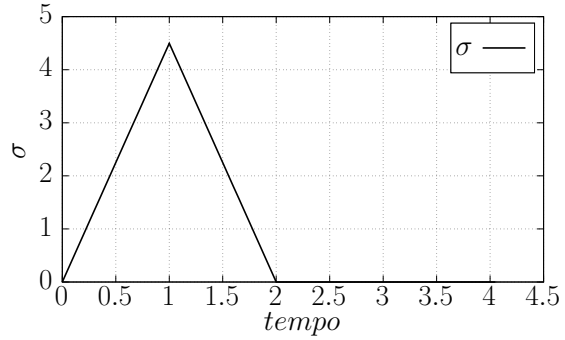
(c) Temperatura aplicada ao longo do tempo.



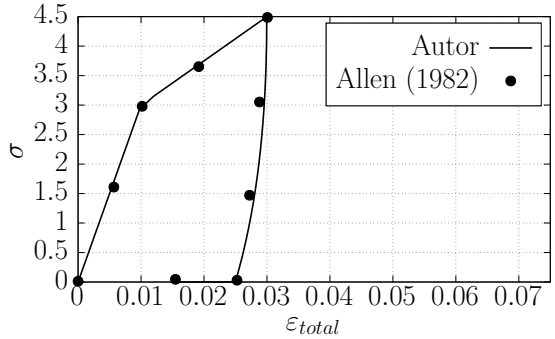
(d) Deformações elásticas, plásticas, térmicas e totais resultantes ao longo do tempo.

Fonte: elaborado pelo autor.

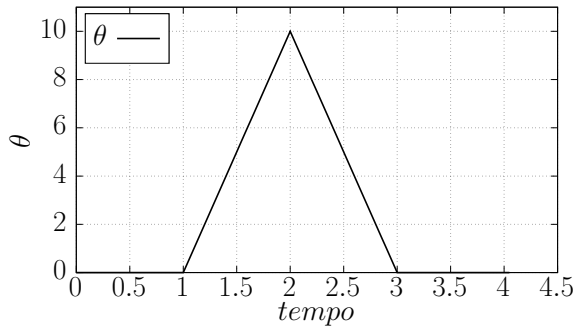
Figura 6.8 – Histórico de tensão e temperatura aplicados e resultados para o caso 3.



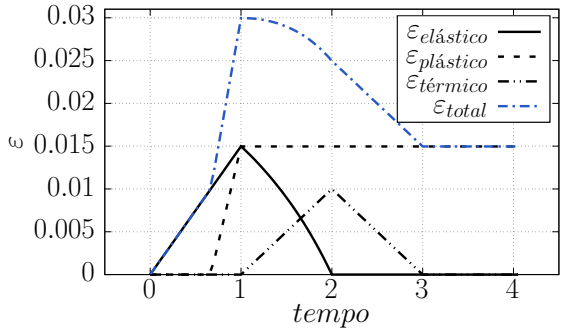
(a) Pressão externa aplicada ao longo do tempo.



(b) *Tensão vs deformação total* ao longo do tempo.



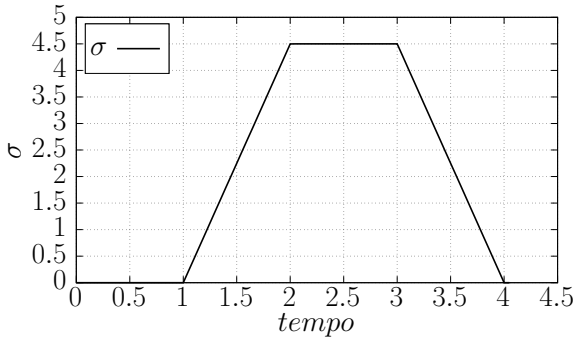
(c) Temperatura aplicada ao longo do tempo.



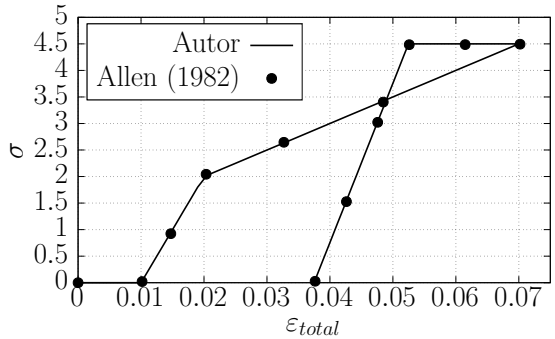
(d) Deformações elásticas, plásticas, térmicas e totais resultantes ao longo do tempo.

Fonte: elaborado pelo autor.

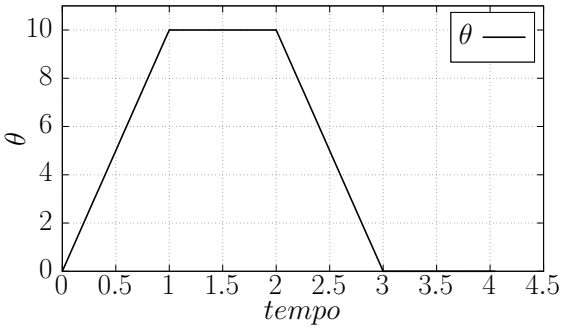
Figura 6.9 – Histórico de tensão e temperatura aplicados e resultados para o caso 4.



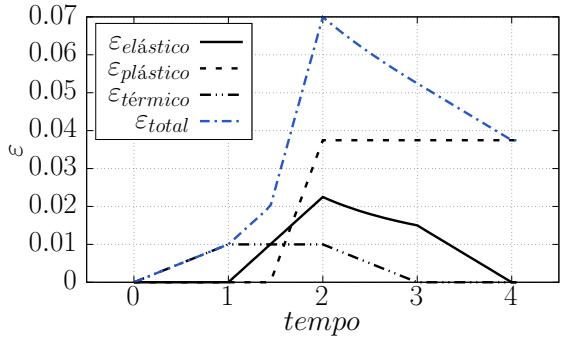
(a) Pressão externa aplicada ao longo do tempo.



(b) *Tensão vs deformação total* ao longo do tempo.



(c) Temperatura aplicada ao longo do tempo.



(d) Deformações elásticas, plásticas, térmicas e totais resultantes ao longo do tempo.

Fonte: elaborado pelo autor.

É possível verificar ótima concordância entre os resultados obtidos dos 3 casos modelados e os valores do trabalho de referência. Percebe-se que o modelo de plasticidade é capaz de responder às alterações do campo de temperatura de acordo com as equações propostas para os parâmetros que o regem. Desta forma, de posse das equações que descrevem os parâmetros que regem os modelos de plasticidade e mecânico em função da temperatura, é possível modelar sólidos em regimes não isotérmicos levando em consideração também não linearidade física do material.

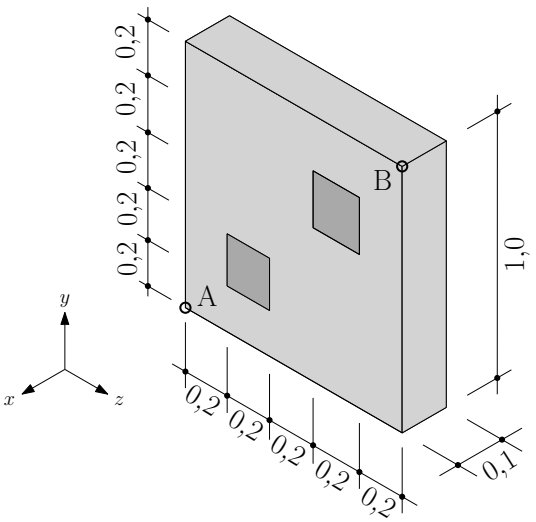
6.1.3 Análise de material compósito de comportamento termoplástico

Realiza-se neste exemplo uma análise termoplástica de material compósito de matriz metálica reforçado por partícula. Este exemplo é similar aos exemplos numéricos encontrados nos trabalhos de Meijer, Ellyin e Xia (2000) e Jain, MacEwen e Wu (1994). A matriz metálica possui comportamento não linear físico plástico e o material que compõe a partícula possui comportamento linear. A figura 6.10 mostra o esquema do exemplo com suas respectivas dimensões e orientação. Trata-se de um sólido com lados de valor unitário e espessura de valor 0,1. Embutidas neste sólido estão duas partículas de lado com valor 0,2 e espessura 0,1, totalizando 8% de fração volumétrica. O compósito é sujeito a uma variação de temperatura de 200°C até 20°C, que promove deformações térmicas e processo de plastificação na matriz.

Como condições de contorno, são aplicadas 3 condições de dirichlet:

- $deslocamento_x = 0$ nas faces y-z para $x = 0$ e $x = 0{,}1$;
- $deslocamento_y = 0$ nas faces x-z para $y = 0$ e $y = 1{,}0$;
- $deslocamento_z = 0$ na face x-y para $z = 0$.

Figura 6.10 – Esquema para análise de compósito reforçado por partícula com dimensões e orientação dos eixos.



Fonte: elaborado pelo autor.

A tabela 21 traz os valores do material que constitui a matriz do compósito. Sendo estes o módulo de elasticidade $\mathbb{E}_m$, poisson ν_m, encruamento isotrópico H_{iso}, tensão limite de plastificação σ_y, coeficiente de expansão térmica α_{Tm} e temperatura datum $\theta^{\{datum\}}$. Tais valores foram obtidos por meio do trabalho de Jain, MacEwen e Wu (1994).

Tabela 21 – Dados do material que constitui a matrix metálica do compósito.

$\mathbb{E}_m$ (MPa)	ν_m	H_{iso} (MPa)	σ_y (MPa)	α_{Tm}	$\theta_m^{\{datum\}}$ (°C)
47500	0,33	1500	47,5	23,6e^{-6}	200

Fonte: elaborado pelo autor.

A tabela 22 mostra os valores adotados para a partícula do compósito. Novamente, os valores foram obtidos por meio do trabalho de Jain, MacEwen e Wu (1994).

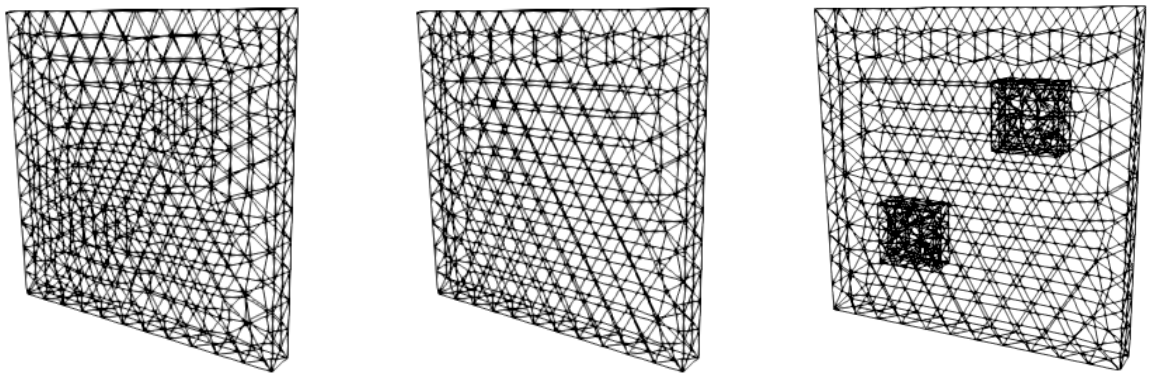
Tabela 22 – Dados do material que constitui a partícula interna.

$\mathbb{E}_p$ (MPa)	ν_p	α_{Tp}	$\theta_p^{\{datum\}}$ (°C)
427000	0,19	4,3e^{-6}	200

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 6.11 mostra as malhas de elementos finitos para o compósito analisado. Para referência e validação também foi realizada a análise por discretização total. Para o problema referência por discretização total foram empregados 1558 elementos tetrahédricos de aproximação cúbica. Já para o caso da técnica de embutimento, foram empregados 1081 elementos finitos para a malha da matriz e 251 elementos para a malha das inclusões, ambas também de elementos tetrahédricos de aproximação cúbica.

Figura 6.11 – Malhas de elementos finitos para a análise do compósito reforçado por partículas.



(a) Malha empregada para resolução do problema pela técnica de discretização total.

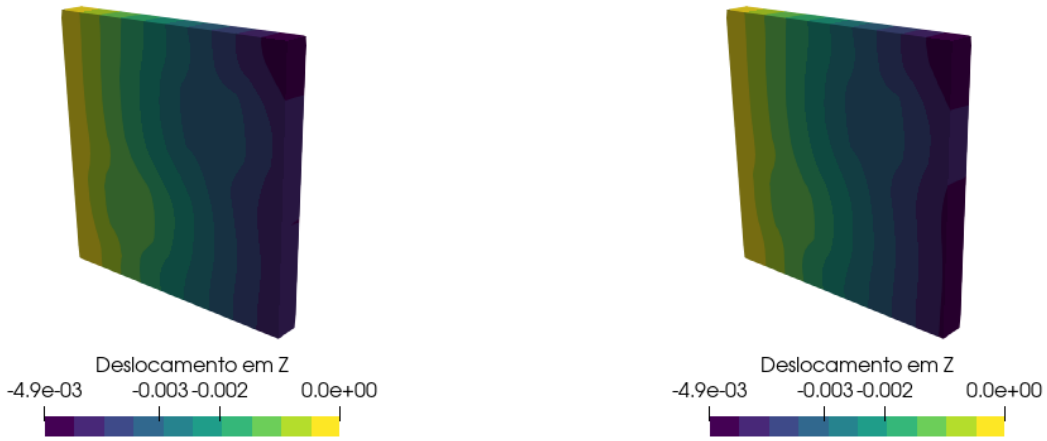
(b) Malha de elementos finitos da matriz para resolução do problema pela técnica de embutimento.

(c) Malha de elementos finitos das partículas embutidas na malha referente à matriz do compósito.

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 6.12 mostra os campos de deslocamento na direção Z, tanto para o caso de discretização total (106a), quanto pela técnica de embutimento (106b).

Figura 6.12 – Campos de deslocamento na direção Z.



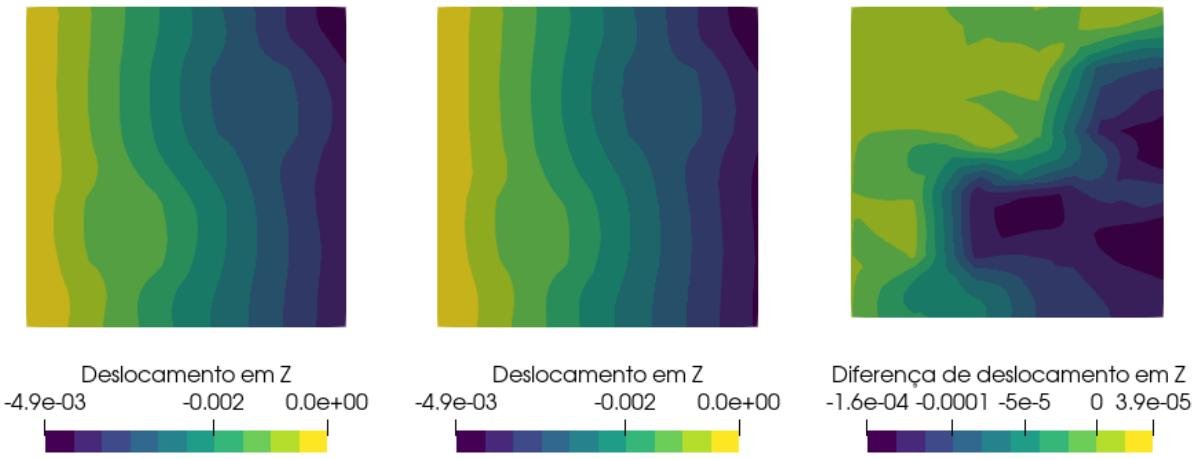
(a) Campo de deslocamento referência por discretização total.

(b) Campo de deslocamento pela técnica de embutimento.

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 6.13 mostra novamente os campos de deslocamento em Z para a técnica de embutimento (6.13a) e referência (6.13b) e o respectivo campo de diferença de deslocamentos (6.13c).

Figura 6.13 – Campos de deslocamento em Z e respectiva diferença.



(a) Campo de deslocamento referência por discretização total.

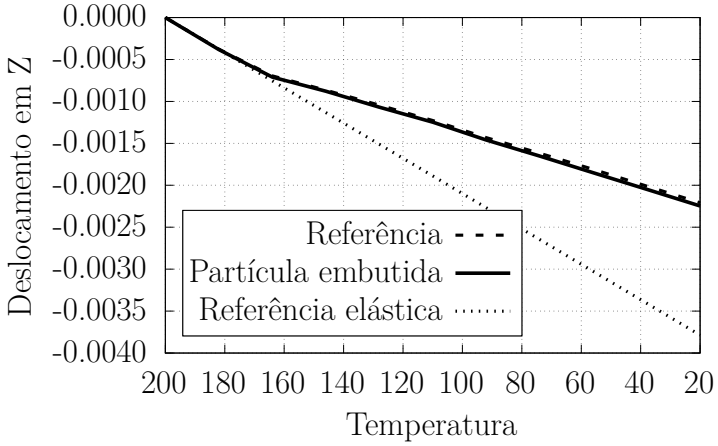
(b) Campo de deslocamento pela técnica de embutimento.

(c) Campo resultante pela diferença entre os campos de deslocamento da técnica de embutimento e referência.

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 6.14 mostra os valores de deslocamento no ponto $x = 0{,}0$, $y = 0{,}5$ e $z = 0{,}5$ ao longo do tempo, quando há a variação de temperatura de 200°C para 20°C. É possível perceber que quando a temperatura atinge valor próximo de 170°C a inclinação da reta muda, sinalizando começo do processo de plastificação da matriz devido a presença das partículas imersas no sólido. Por comparação também é plotada a curva de deslocamento ao longo do tempo assumindo comportamento elástico para todas as fases que compõem o compósito.

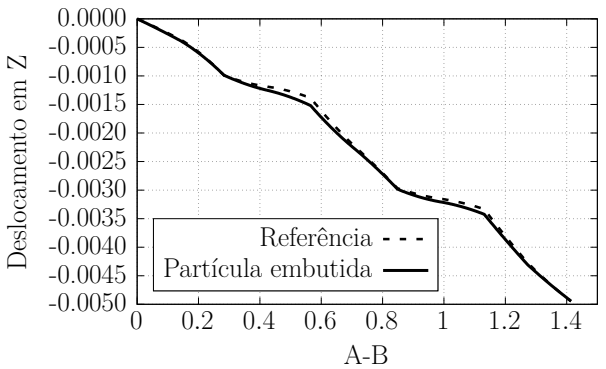
Figura 6.14 – Valores de deslocamento em Z ao longo do tempo, ou seja, à medida que a temperatura do sólido vai decaindo de 200°C até 20°C.



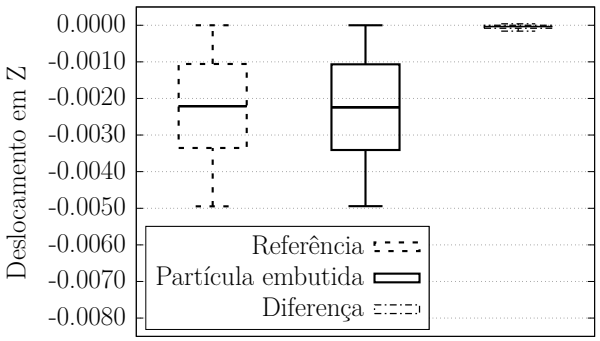
Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 6.15a mostra o gráfico de deslocamento em Z ao longo da diagonal definida pelos pontos A e B. Na figura 6.15b é representada os valores dos quartis para os campos de deslocamento em Z dos problemas referência e da técnica de embutimento, assim como também para o campo de diferença dos respectivos deslocamentos.

Figura 6.15 – Gráficos de deslocamento em Z e respectivos valores de quartis para cada problema analisado.



(a) Valores de deslocamento na direção Z ao longo da diagonal definida pelos pontos A e B.



(b) Gráfico representando os valores mínimo, máximo, 1° quartil, 3° quartil e mediana para os campos de deslocamento do problema referência, técnica de embutimento e respectiva diferença.

Fonte: elaborado pelo autor.

A tabela 23 mostra os valores dos quartis calculados tanto para o caso referência por discretização total como pela técnica de embutimento. Também mostra a respectiva diferença percentual entre os valores encontrados.

Tabela 23 – Valores dos quartis para os campos de deslocamento, junto com respectivas diferenças relativas percentuais.

Caso	Mínimo	1° Quartil	Mediana	3° Quartil	Máximo
Referência	-0,00494741	-0,00335264	-0,00221027	-0,00105773	0
Partícula embutida	-0,00494381	-0,00340781	-0,00224053	-0,00106682	0
Diferença (%)	-0,072765	-1,645569	-1,369064	-0,859388	0

Fonte: elaborado pelo autor.

Por fim, por meio da análise das curvas de deslocamento, campos de deslocamento e de diferença e diferença relativa entre as estatísticas que representam os campos de deslocamento, é possível concluir que a técnica de embutimento é capaz de reproduzir com boa precisão compósitos particulados quando há não linearidade física em uma de suas fases.

No mais vale destacar que o valor máximo de diferença aparenta ocorrer justamente na região próxima da interface entre as fases que compõem o compósito. Neste caso é de se esperar pois a região coberta pela inclusão durante a técnica de embutimento ainda é considerada como material de matriz e portanto é numericamente integrada e corrigida pelo modelo de plasticidade. A técnica de embutimento apenas garante um reforço de natureza linear com o valor dado pela diferença da rigidez da partícula com a matriz naquela região.

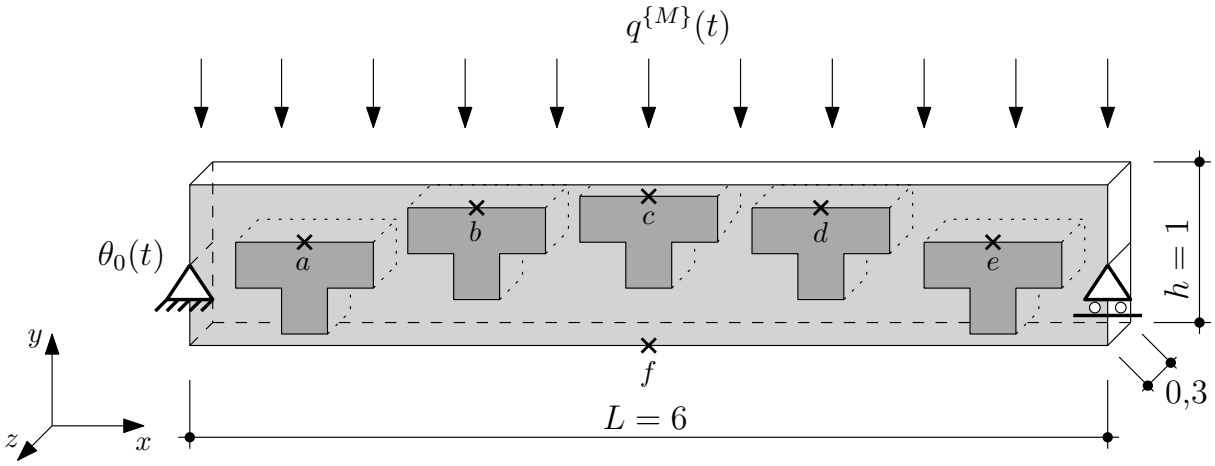
Para reduzir a ocorrência de plastificação em região delimitada pelas inclusões, é empregado o mesmo algoritmo de localização descrito na subseção 4.6.1 para identificar os pontos de integração dos elementos finitos da matriz que estejam por ventura englobados pelos elementos finitos de partícula. Caso verdadeiro, então precede-se para desativar o processo de correção por plasticidade apenas naquele ponto de integração. Deste modo aquela região passa a se comportar de fato como uma região fisicamente linear.

Vale lembrar que, como já demonstrado em exemplos anteriores, é possível obter melhor precisão nos resultados por meio do refinamento das malhas de elementos finitos. O maior refinamento da malha da matriz também contribui para melhor acurácia do modelo por permitir que mais pontos de integração sejam contemplados dentro das regiões delimitadas pelas inclusões, reduzindo assim a ocorrência de correção por plasticidade em região teóricamente linear.

6.1.4 Viga de material compósito sob carregamento termomecânico

Neste exemplo realiza-se uma análise transiente termoplástica de um sólido compósito sujeito a carregamentos termomecânicos variáveis ao longo do tempo. Trata-se de uma viga biapoiada, sujeita a carregamento mecânico distribuído em seu comprimento e variação de temperatura na sua face esquerda. A figura 6.16 mostra o esquema do problema analisado. A viga possui comprimento de 6 unidades com 1 de altura e 0,3 de espessura. Os carregamentos mecânico $q^{\{M\}}(t)$ aplicado na face superior e térmico $\theta_0(t)$ aplicado na face esquerda variam com o tempo. Ao todo são incluídas 5 partículas no formato especificado nos pontos de referência a, b, c, d e e. O ponto central f, em $x = 3$, é definido para posterior construção e apresentação de gráficos do problema.

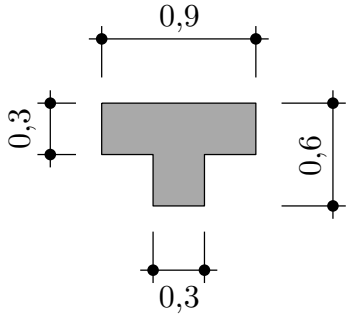
Figura 6.16 – Esquema do problema da viga de material compósito sujeita a solicitações termomecânicas.



Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 6.17 mostra a geometria adotada para cada uma das partículas inseridas na matriz do compósito. O valor de espessura das partículas é o mesmo da viga, de 0,3. Cada partícula possui área de 0,36 e portanto, para todo o conjunto de partículas, a fração volumétrica da fase das inclusões é de 30%.

Figura 6.17 – Dimensões de cada uma das partículas que compõem a fase das inclusões do compósito



Fonte: elaborado pelo autor.

Para a inserção das partículas, foram calculados 5 pontos que seguem uma curva senoidal, a fim de descrever uma trajetória de arco. É utilizada a função $y = 0{,}45 + \sin(\frac{x}{6}\pi)0{,}5$ e a tabela 24 mostra as coordenadas x e y de cada um dos pontos de inserção para cada partícula.

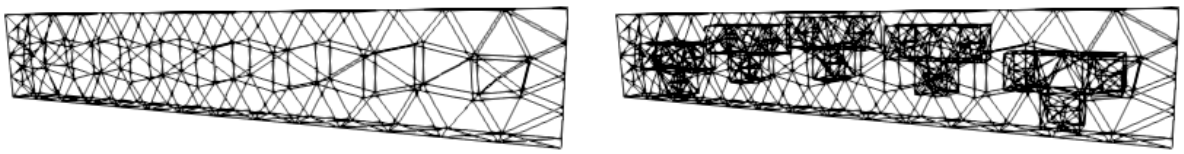
Tabela 24 – Valores das coordenadas dos pontos de referência para inserção das partículas na matriz do compósito.

Coordenada	Ponto				
	a	b	c	d	e
x	0,8	1,9	3	4,1	5,2
y	0,653	0,869	0,95	0,869	0,653

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 6.18 mostra as malhas de elementos finitos empregada para resolução do problema. Ao todo foram empregados 396 elementos finitos tetrahédricos de aproximação cúbica para a malha da matriz do compósito e 345 elementos finitos tetrahédricos de aproximação cúbica para a malha das partículas embutidas.

Figura 6.18 – Malha de elementos finitos para a matriz do compósito e das partículas embutidas.



(a) Malha de elementos finitos da matriz do compósito.

(b) Malha de elementos finitos das partículas embutidas na matriz do compósito.

Fonte: elaborado pelo autor.

Para as propriedades mecânicas e térmicas do material da matriz do compósito, foram utilizados os parâmetros descritos na tabela 25. São considerados constantes o coeficiente de Poisson (ν_m), coeficiente de expansão térmico (α_{Tm}), a condutividade térmica (k_{Tm}), a densidade (ρ_m) e o calor específico (c_{pm}). Assume-se que a matriz do compósito possua comportamento inelástico na forma de plasticidade, empregando-se o modelo de Von Mises com encruamento isotrópico. O módulo de elasticidade ($\mathbb{E}_m$), o encruamento isotrópico (H_{iso}) e a tensão equivalente limite de plastificação (σ_y) são dados como função da temperatura e definidos pelas seguintes equações descritas na respectiva tabela.

Tabela 25 – Valores dos parâmetros mecânicos e térmicos utilizados para o material da matriz do compósito.

$\mathbb{E}_m$	ν_m	$\theta_p^{\{datum\}}$	α_{Tm}	H_{iso}	σ_y	k_{Tm}	ρ_m	c_{pm}
equação 6.8	0,2	30,0	$2e^{-5}$	equação 6.9	equação 6.10	20	1	30

Fonte: elaborado pelo autor.

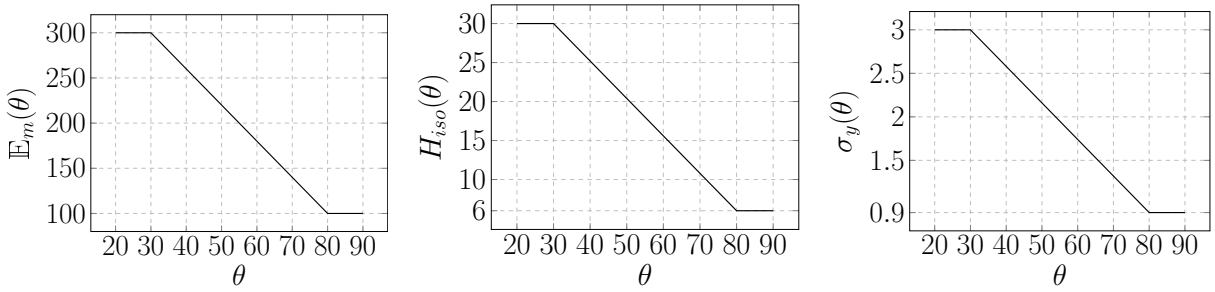
$$\mathbb{E}_m(\theta) = \min\{\max\{g(\theta); 100\}; 300\}, \text{ com } g(\theta) = 300 - \left(\frac{\theta - 30}{50}\right) 200 \tag{6.8}$$

$$H_{iso}(\theta) = \min\{\max\{g(\theta); 6\}; 30\}, \text{ com } g(\theta) = 30 - \left(\frac{\theta - 30}{50}\right) 24 \tag{6.9}$$

$$\sigma_y(\theta) = \min\{\max\{g(\theta); 0{,}9\}; 3\}, \text{ com } g(\theta) = 3 - \left(\frac{\theta - 30}{50}\right) 2{,}1 \tag{6.10}$$

A figura 6.19 mostra a representação gráfica das equações 6.8, 6.9, 6.10 que definem, respectivamente, a variação do módulo de elasticidade, encruamento isotrópico e tensão limite de plastificação para o material da matriz do compósito.

Figura 6.19 – Gráficos das funções que definem as propriedades do material da matriz do compósito dependentes da temperatura.



(a) Módulo de elasticidade da matriz do compósito (equação 6.8).

(b) Encruamento isotrópico da matriz do compósito (equação 6.9).

(c) Tensão limite de plastificação da matriz do compósito (equação 6.10).

Fonte: elaborado pelo autor.

Para o material empregado na fase das partículas, utiliza-se os valores descritos na tabela 26. São considerados constantes o módulo de elasticidade ($\mathbb{E}_p$), o coeficiente de Poisson (ν_p), o coeficiente de expansão térmico (α_{Tp}), a densidade (ρ_p) e o calor específico (c_{pp}). Considera-se que o material possua comportamento elástico. O parâmetro de condutividade térmico não linear em função da temperatura é dado pela equação 6.11.

Tabela 26 – Valores dos parâmetros mecânicos e térmicos para o material da fase das partículas.

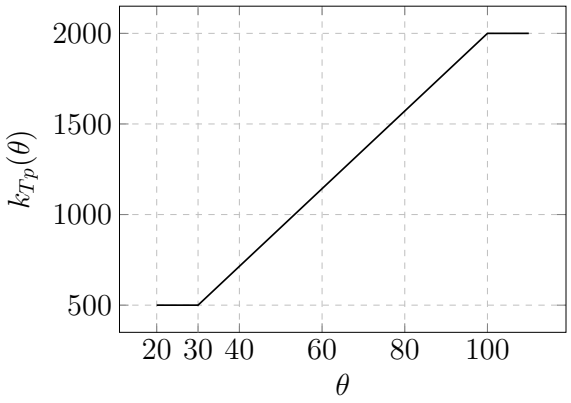
$\mathbb{E}_p$	ν_p	$\theta_p^{\{datum\}}$	α_{Tp}	k_{Tp}	ρ_p	c_{pp}
2000	0,3	30,0	$20e^{-5}$	equação 6.11	5	0,3

Fonte: elaborado pelo autor.

$$k_{Tp}(\theta) = \min\{\max\{g(\theta); 500\}; 2000\}, \text{ com } g(\theta) = 500 + \left(\frac{\theta - 30}{70}\right) 1500 \tag{6.11}$$

A figura 6.20 mostra a representação gráfica da equação 6.11 que define a variação do parâmetro de condutividade térmico para o material da fase das partículas.

Figura 6.20 – Gráfico da função que definite a propriedade de condutividade térmica do material da fase das partículas dependente da temperatura.



Fonte: elaborado pelo autor.

A tabela 27 mostra os valores dos parâmetros utilizados na análise.

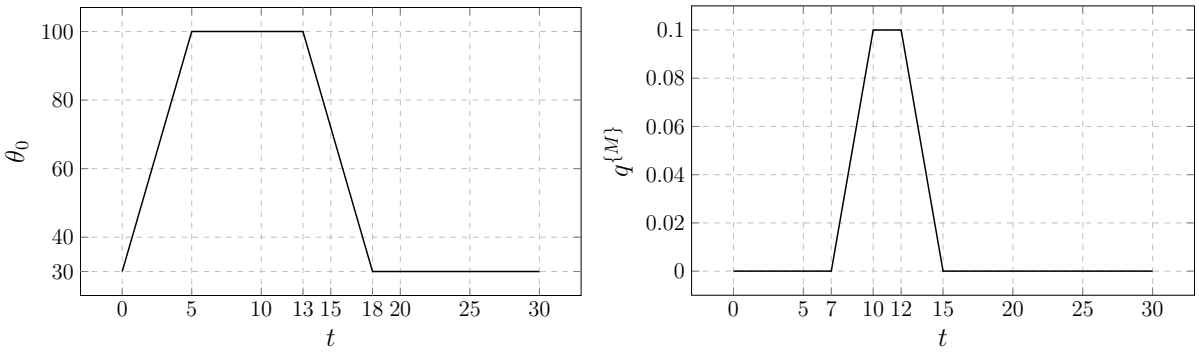
Tabela 27 – Valores dos parâmetros para a análise termoplástica.

$\alpha^{\{integrador\}}$	$t^{\{inicial\}}$	$t^{\{final\}}$	Δt
2/3	0,0	30,0	0,1

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 6.21 mostra os valores dos carregamentos termomecânicos aplicados ao longo do tempo, durante a análise. A figura 6.21a mostra o valor da temperatura imposta na face esquerda enquanto a figura 6.21b representa o valor do carregamento mecânico distribuído na face superior ao longo da viga.

Figura 6.21 – Valores de carregamentos termomecânicos impostos na estrutura ao longo do tempo.

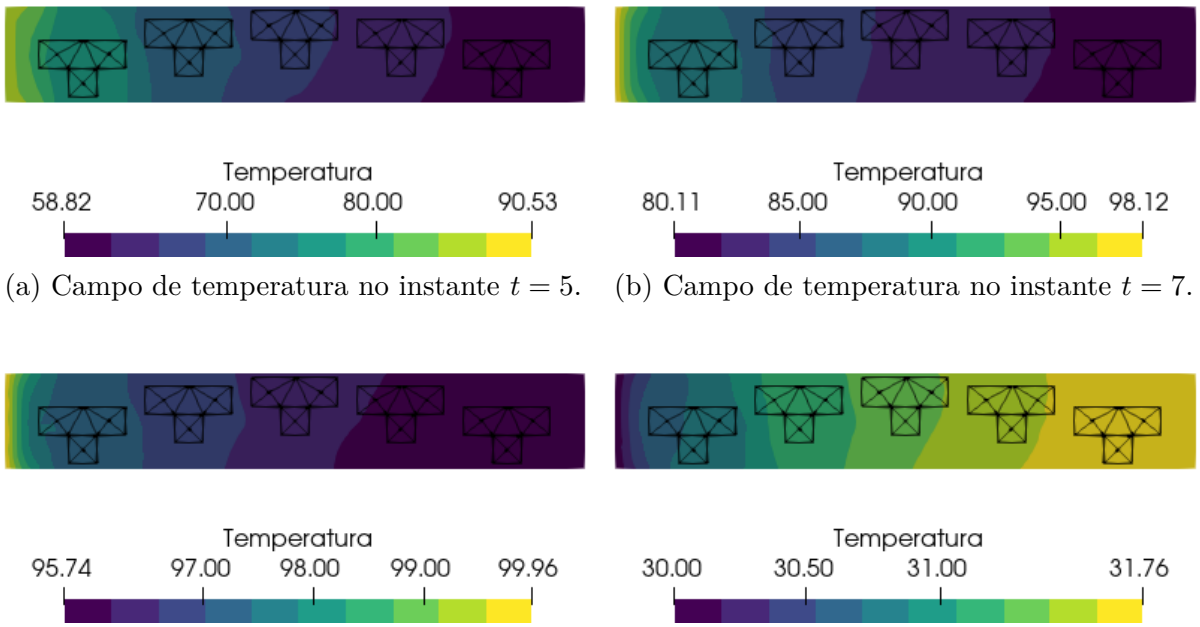


(a) Valores de temperatura θ_0 ao longo do tempo. (b) Valores de carregamento $q^{\{M\}}$ imposto ao longo do tempo.

Fonte: elaborado pelo autor.

Dos resultados obtidos da análise, inicialmente apresenta-se os campos de temperatura na figura 6.22. São mostrados os campo de temperatura nos instantes de tempo 5 (6.22a), 7 (6.22b), 11 (6.22c) e 30 (6.22d). Nota-se que a presença das partículas influencia de forma significativa o campo de temperatura e seu progresso ao longo do tempo. Percebe-se que os elementos particulados promovem uma maior condução de calor na sua localidade e seu arranjo em arco proporciona uma distribuição não uniforme ao longo do comprimento e altura da viga.

Figura 6.22 – Campos de temperatura ao longo da viga em diversos instantes de tempo.



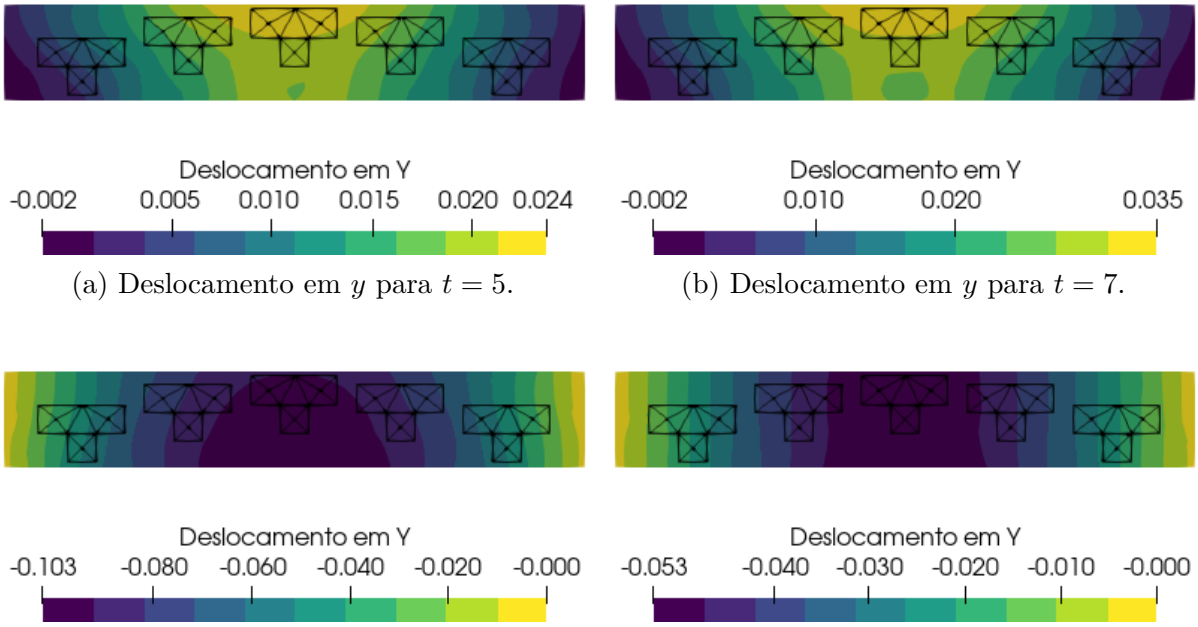
(a) Campo de temperatura no instante $t = 5$. (b) Campo de temperatura no instante $t = 7$.

(c) Campo de temperatura no instante $t = 11$. (d) Campo de temperatura no instante $t = 30$.

Fonte: elaborado pelo autor.

Na figura 6.23 estão representados os campos de deslocamento em y resultantes nos instantes de tempo 5 (6.23a), 7 (6.23b), 11 (6.23c) e 30 (6.23d). Percebe-se que o arranjo das partículas e diferença nos valores de rigidez e expansão térmica promovem um campo de deformação não uniforme no sólido compósito. O efeito localizado das partículas também fica evidenciado pelas figuras apresentadas.

Figura 6.23 – Campo de deslocamento em y para diversos instantes de tempo.



(a) Deslocamento em y para $t = 5$.

(b) Deslocamento em y para $t = 7$.

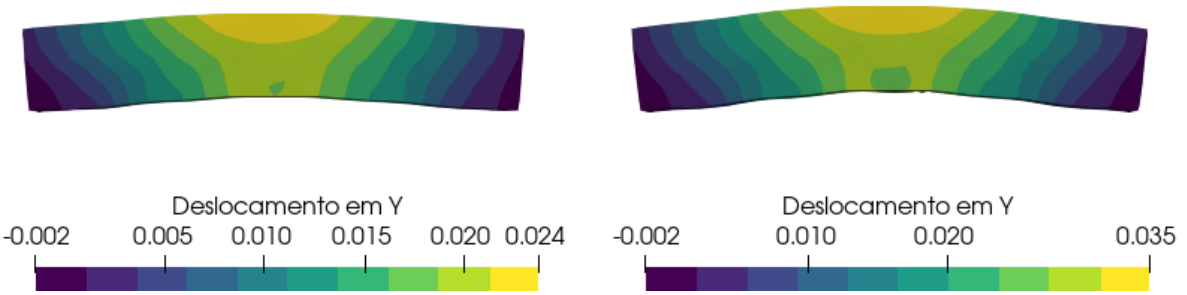
(c) Deslocamento em y para $t = 11$.

(d) Deslocamento em y para $t = 30$.

Fonte: elaborado pelo autor.

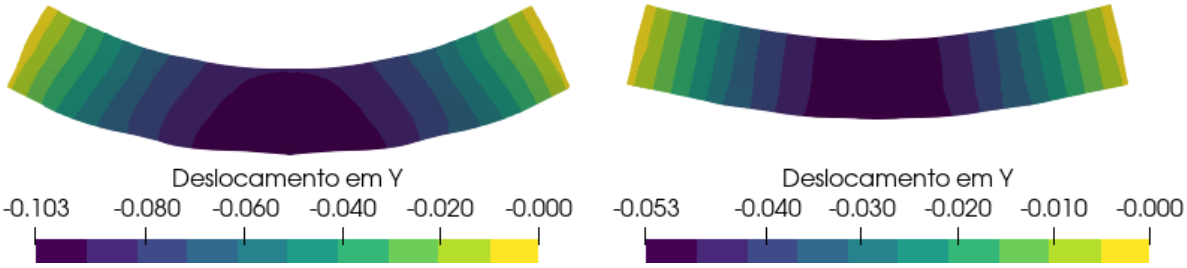
A seguir, na figura 6.24, estão dispostos novamente o campo de deslocamento em y, mas também a deformada da estrutura com magnificação de 9x. Até o instante de tempo 7 (figura 6.24b) a viga está sujeita apenas a esforços térmicos e se deforma de acordo com os coeficientes de expansão térmica e arranjo de suas fases. A figura 6.24c mostra a deformada da viga após a aplicação total do carregamento mecânico $q^{\{M\}}$ no instante de tempo 11, que para este caso, também promove processo de plastificação do material da matriz do compósito e formação de deformação permanente. Na figura 6.24d está mostrada a deformada da viga no instante de tempo 30, após o processo de retirada do carregamento mecânico $q^{\{M\}}$ e retorno da viga a temperatura inicial de 30. Nota-se que devido ao fato da estrutura ter sofrido deformações permanentes, a viga não retorna ao estado original, mesmo com campo de temperatura praticamente igual ao inicial.

Figura 6.24 – Deformadas da viga em diversos instantes de tempo.



(a) Deformada da viga no instante de tempo $t = 5$.

(b) Deformada da viga no instante de tempo $t = 7$.



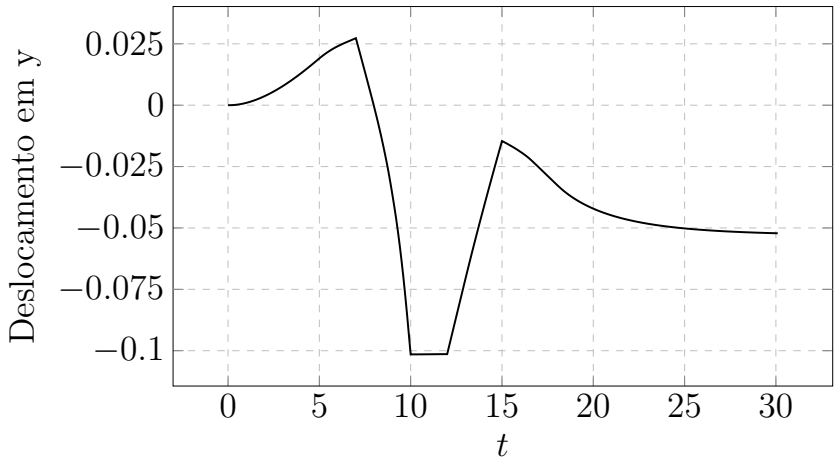
(c) Deformada da viga no instante de tempo $t = 11$.

(d) Deformada da viga no instante de tempo $t = 30$.

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 6.25 mostra o gráfico de deslocamento em y para o ponto f previamente definido na figura 6.16. Neste gráfico é possível perceber o efeito da expansão térmica na viga e os momentos de aplicação do carregamento mecânico. Nota-se também que a viga não retorna ao seu ponto original de deslocamento 0, mostrando aqui um deslocamento residual de aproximadamento 0,05 devido a deformação inelástica.

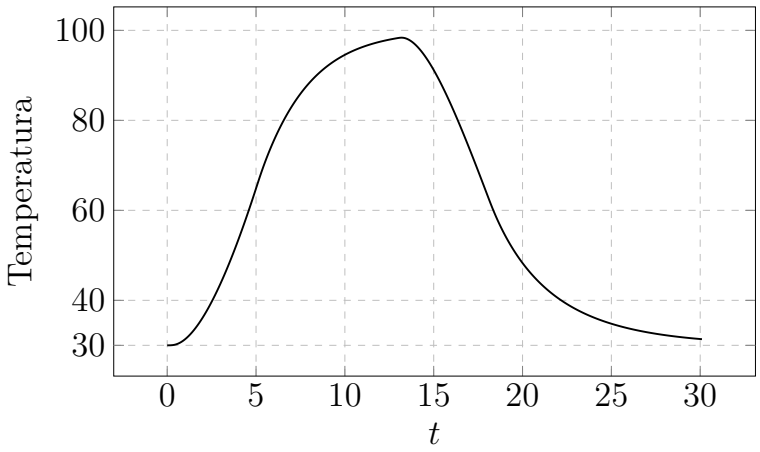
Figura 6.25 – Gráfico de deslocamento em y para o ponto f ao longo do tempo.



Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 6.26 mostra o valor da temperatura resultante no ponto f. É possível notar os dois momentos de aquecimento e resfriamento do sólido compósito, levando-se em consideração o arranjo das fases da inclusão e a propriedade não linear da condutividade térmica das partículas.

Figura 6.26 – Gráfico de temperatura para o ponto f ao longo do tempo.



Fonte: elaborado pelo autor.

Foi feito neste exemplo análise termoplástica de material compósito sob regime térmico não linear transiente e considerando comportamento inelástico na fase da matriz. O modelo implementado foi capaz de satisfatoriamente capturar e modelar o comportamento da estrutura, levando-se em consideração a não linearidade geométrica e física das fases. O modelo consegue capturar e gerar campos de temperatura e deformação levando-se em consideração a perturbação causada pela presença das partículas. O arranjo espacial das partículas, somado a diferença nas propriedades termomecânicas das fases, proporciona que o sólido se comporte e gere configurações interessantes e específicas. Adicionalmente, a formação de deformações inelásticas devido a plasticidade tem como resultado que o sólido não retorne à configuração inicial, mesmo quando o campo térmico assume valores iniciais.

Vale notar que devido a configuração das partículas, o mesmo sólido compósito modelado por discretização total demandaria um número mais elevado de elementos finitos para compatibilizar as fases e disposições geométricas. O fato de não haver arranjo periódico, as condições de contorno não serem simétricas e a razão de tamanho entre as partículas e matriz do compósito não ser significantemente pequena, também traz dificuldades ou impossibilidade de aplicação das técnicas de homogeneização e elemento volumétrico representativo.

Entende-se por meio deste exemplo que o modelo implementado consegue representar componentes e estruturas de materiais compósitos com comportamento termoplástico sob regimes termomecânicos transientes, considerando-se as não linearidades geométrica e física das fases.

7 CONCLUSÃO E SUGESTÕES

Por meio deste trabalho foi realizado estudo e implementação de modelo numérico voltado para compósitos reforçados por fibras e partículas sujeitos a carregamento termomecânicos.

Foi feita uma abrangente revisão da literatura sobre os principais modelos empregados para modelagem de materiais compósitos, especialmente em situações térmicas e termomecânicas. Adicionalmente foram apresentados os conceitos básicos necessários e formulação empregada neste trabalho para a construção do modelo numérico termoplástico. Neste trabalho foi adotada a lei de Fourier para a condução de calor devido ao escopo de interesse, embora foram encontradas na literatura, e também descritas, outras leis de condução de calor não Fourier. A implementação do campo mecânico se dá por meio do método dos elementos finitos posicional, o qual possui uma descrição cinemática Lagrangeana total dos corpos sólidos. A formulação posicional se mostrou capaz de modelar comportamentos não lineares geométricos com ótima acurácia, sem ser demasiadamente complicada em comparação com a formulação convencional de elementos finitos. Para a implementação do campo térmico, foi empregado o método dos elementos finitos convencional, levando-se em conta materiais que possuam propriedade de condução térmica não linear dependentes da temperatura. Para a inclusão das fases do compósito, sejam estas fibras ou partículas, fez-se uso da técnica de embutimento. Desta forma é possível fazer uso da mesma malha de elementos finitos para os campos térmico e mecânico, sem a necessidade de interpolação de valores. Adicionalmente, foi incorporado comportamento mecânico não linear físico na forma de plasticidade nas fases do sólido, permitindo assim a modelagem termoplástica de compósitos sob regimes não isotérmicos.

Entende-se assim que este trabalho contribui de forma positiva para o estado da arte na modelagem de compósitos. A implementação da técnica de embutimento para campos térmicos e subsequentemente acoplamento com o campo mecânico para formação de modelo termomecânico, mostrou trazer vantagens significativas frente modelos convencionais encontrados na literatura. Adicionalmente, o emprego de formulação não linear geométrica e física, na forma de plasticidade, aumenta o escopo de aplicação e abrangência do modelo.

A técnica de embutimento apresentada mostrou resultados satisfatórios, alcançando valores de erro relativamente baixos. Para o caso de análises de campos térmicos em materiais compósitos, além gerar resultados de ótima qualidade, possui diversas vantagens frente a outras técnicas já descritas encontradas na literatura. Dentre estas vantagens está o desacoplamento das malhas de elementos finitos da matriz do compósito e das inclusões. Desta forma não há a obrigatoriedade de compatibilização dos nós dos elementos finitos

entre as fases. Tal característica permite uma maior liberdade no arranjo das inclusões que compõem o compósito, evitando assim a necessidade de organização periódica de suas fases. Além de permitir a adição de inclusões de quaisquer formatos, orientações e disposições no domínio, o desacoplamento também facilita substancialmente o processo de geração das malhas de elementos finitos das fases, pois agora são independentes entre si. Outro problema comumente encontrado na literatura é no caso de quando inclusões eventualmente se encontram muito próximas de si, acarretando em dificuldades de geração de malha e num elevado número de elementos finitos para garantir compatibilização, o que é inexistente no caso da técnica de embutimento proposta. Ressalta-se também que não se trata apenas de homogeneização, mas que se pode entender que toda a informação dos elementos de reforço de fato se encontra distribuída nos nós da matriz, de acordo com sua posição relativa. Outra vantagem é a facilidade no processo de inclusão destes elementos de reforço, bastando alguns dados básicos como a posição dos nós e construção das matrizes de espalhamento.

Ademais, assim como toda técnica, também é possível elencar algumas desvantagens. Como já discutido, é necessário haver uma certa compatibilidade entre as ordens de aproximação dos elementos de reforço e da matriz. Idealmente, espera-se que ambos possuam o mesmo grau de aproximação. Do contrário, se o elemento de reforço possuir grau de aproximação inferior ao da matriz podem ocorrer problemas, havendo possibilidade de resultados incongruentes. A depender da situação, a inclusão dos elementos de reforço pode causar mal condicionamento da matriz global numérica da matriz do compósito e problemas numéricos de convergência e solução.

Entende-se que a técnica de embutimento é extremamente interessante para os campos mecânico, térmico e termomecânico, produzindo bons resultados e contornando os principais problemas com a modelagem convencional de materiais compósitos.

7.1 Sugestões para trabalhos futuros

Diante do exposto previamente neste trabalho e no que foi encontrado na literatura, algumas sugestões para trabalhos futuros podem ser vislumbradas:

- Implementação de outros modelos de não linearidade física para as fases constituintes, como modelos de dano por exemplo. Desta forma amplia-se o escopo de aplicação do modelo numérico.

- A implementação do modelo mecânico por meio do método dos elementos finitos posicional permite a modelagem do comportamento não linear geométrico. Junto com o acoplamento com campo térmico e emprego da técnica de embutimento, passa então ser possível a análise e estudo de máquinas deformáveis e componentes termomecânicos, considerando-se também materiais compósitos.

- Consideração da interferência do campo mecânico no campo térmico, devido a não linearidade fisica ou geométrica e deformação do sólido. Desta forma têm-se uma extensão do modelo segundo a termomecânica acoplada.
- Com a maior liberdade na distribuição e representação das fases do compósito, a técnica de embutimento também pode ser interessante para realizar análises mais complexas como no caso de otimização, seja paramétrica e/ou topológica.
- Pelos mesmos motivos citados no item anterior, também se vislumbra o emprego da técnica de embutimento em análises de confiabilidade e otimização com restrições dadas em confiabilidade.
- Neste trabalho foram empregados elementos finitos sólidos para modelagem da estrutura. Imagina-se também ser interessante o desenvolvimento de modelos com outros tipos de elementos mais específicos, como os de pórtico e casca, também reforçados por técnica de embutimento e submetidos a carregamentos termomecânicos.

REFERÊNCIAS

ACKERMAN, C. C.; GUYER, R. A. Temperature pulses in dielectric solids. **Annals of Physics**, v. 50, n. 1, p. 128–185, 1968.

AHMADI, I. Evaluation of effective thermal diffusivity and conductivity of fibrous materials through computational micromechanics. **Heat and Mass Transfer/Waerme- und Stoffuebertragung**, v. 53, n. 1, p. 277–290, 2017.

AHMADI, I. *et al.* A new local meshless method for steady-state heat conduction in heterogeneous materials. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 34, n. 12, p. 1105–1112, 2010.

AHRENS, J.; GEVECI, B.; LAW, C. **ParaView: An End-User Tool for Large Data Visualization, Visualization Handbook**. [*S.l.: s.n.*]: Elsevier, 2005. ISBN 978-0123875822.

AL-OQLA, F. M.; SAPUAN, S. M. Natural fiber reinforced polymer composites in industrial applications: feasibility of date palm fibers for sustainable automotive industry. **Journal of Cleaner Production**, v. 66, p. 347–354, 2014.

ALLEN, D. H. Computational aspects of the nonisothermal classical plasticity. **Computers & Structures**, v. 15, n. 5, p. 589–599, 1982. ISSN 0045-7949.

AMIR, M.; TALHA, M. Nonlinear vibration characteristics of shear deformable functionally graded curved panels with porosity including temperature effects. **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, v. 172, p. 28–41, 2019.

ASKELAND, D. R.; WRIGHT, W. J. **The Science and engineering of materials**. 7. ed. [*S.l.: s.n.*]: Boston, MA : Cengage Learning, 2016. ISBN 9781305076761.

AURICCHIO, F.; TAYLOR, R. L. Two material models for cyclic plasticity: Nonlinear kinematic hardening and generalized plasticity. **International Journal of Plasticity**, v. 11, p. 65–98, 1995. ISSN 0749-6419.

AURICCHIO, F.; VEIGA, L. Beirão da. On a new integration scheme for von-Mises plasticity with linear hardening. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 56, n. 10, p. 1375–1396, 2003.

AZIM, M. *et al.* Energy Absorption Capacity of Reinforced Concrete Beam-Column Connections, with Ductility Classes Low. **American Journal of Civil Engineering and Architecture**, v. 2, n. 1, p. 42–52, 2014.

BENCHEIKH, I.; BILTERYST, F.; NOUARI, M. Modelling of the thermomechanical behaviour of coated structures using single and multi-level-set techniques coupled with the eXtended Finite Element Method. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 134, p. 68–81, 2017. ISSN 0168-874X.

BENVENISTE, Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. **Mechanics of Materials**, v. 6, n. 2, p. 147–157, 1987. ISSN 0167-6636.

BHOURI, M. *et al.* Numerical homogenization and experimental study of the influence of graphite content and voids on the coefficients of thermal expansion of 2017 aluminium matrix composites. **Materials Today Communications**, v. 26, p. 101638, 2021. ISSN 2352-4928.

BOLEY, B. A.; WEINER, J. H. **Theory of thermal stresses**. [*S.l.: s.n.*]: Dover Publications, 1997. 586 p. ISBN 0486695794.

BONET, J. *et al.* Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5-7, p. 579–595, 2000.

BOTTA, A. S. *et al.* A discussion on volume change in the plastic phase. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 24, n. 11, p. 1149–1162, 2007.

BRIFFAUT, M.; BENBOUDJEMA, F.; D'ALOIA, L. Effect of fibres on early age cracking of concrete tunnel lining. Part II: Numerical simulations. **Tunnelling and Underground Space Technology**, v. 59, p. 221–229, 2016.

CAHILL, D. G. *et al.* Nanoscale thermal transport. II. 2003-2012. **Applied Physics Reviews**, 2014.

CARRAZEDO, R. **Estudo e desenvolvimento de código computacional para análise de impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos**. 2009. 128 p. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Alternative positional FEM applied to thermomechanical impact of truss structures. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 46, n. 11, p. 1008–1016, 2010.

CATTANEO, C. Sulla conduzione del calore. **Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena**, v. 3, p. 83–101, 1948.

CAVALCANTE, M. A. A.; KHATAM, H. Finite-volume micromechanics of periodic materials: Past, present and future. **Composites Part B: Engineering**, v. 43, n. 6, p. 2521–2543, 2012.

CHANDRASEKHARAIAH, D. S. Hyperbolic Thermoelasticity: A Review of Recent Literature. **Applied Mechanics Reviews**, v. 51, n. 12, p. 705, 1998.

CHATTERJEE, A. *et al.* Heat conduction model based on percolation theory for thermal conductivity of composites with high volume fraction of filler in base matrix. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 136, p. 389–395, 2019.

CHEN, C. R. *et al.* Finite element analysis about effects of particle morphology on mechanical response of composites. **Materials Science and Engineering: A**, v. 278, n. 1-2, p. 96–105, 2002.

CHEN, W.-F.; HAN, D. J. **Plasticity for structural engineers**. [*S.l.: s.n.*]: J. Ross Pub, 2007. 606 p. ISBN 1932159754.

CHO, J. R. Optimum material composition design for thermal stress reduction in FGM lathe bit. **Composites: Part A**, v. 37, p. 1568–1577, 2006.

CIARLET, P. G. **Mathematical Elasticity. Volume 1: Three Dimensional Elasticity**. [*S.l.: s.n.*]: Elsevier, 1994.

CIMMELLI, V. A. Different thermodynamic theories and different heat conduction laws. **Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics**, v. 34, n. 4, p. 299–333, 2009.

CLAUSIUS, R. **The Mechanical Theory of Heat**. London: Macmillian and Co., 1879.

CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF**. 2003. Tese (Livre-docência) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

CODA, H. B. A solid-like FEM for geometrically non-linear 3D frames. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 47-48, p. 3712–3722, 2009.

CODA, H. B. Continuous inter-laminar stresses for regular and inverse geometrically non linear dynamic and static analyses of laminated plates and shells. **Composite Structures**, v. 132, p. 406–422, 2015.

CODA, H. B. **O método dos elementos finitos posicional: sólidos e estruturas - não linearidade geométrica e dinâmica**. São Carlos: EESC/USP, 2018.

COPETTI, M. I. M. A one-dimensional thermoelastic problem with unilateral constraint. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 59, n. 4, p. 361–376, 2002.

DEAN, A. *et al.* An invariant-based anisotropic thermo-plastic material model for short fiber reinforced thermoplastics. **20th International Conference on Composite Materials (ICCM20)**, v. 90, p. 186–199, 2015.

DEVPURA, A.; PHELAN, P. E.; PRASHER, R. S. Percolation theory applied to the analysis of thermal interface materials in flip-chip technology. *In*: **ITHERM 2000. The Seventh Intersociety Conference on Thermal and Thermomechanical Phenomena in Electronic Systems (Cat. No.00CH37069)**. [*S.l.: s.n.*], 2000. p. 21–28. ISBN 0-7803-5912-7.

DO, V. N. V.; ONG, T. H.; LEE, C.-H. Isogeometric analysis for nonlinear buckling of FGM plates under various types of thermal gradients. **Thin-Walled Structures**, v. 137, p. 448–462, 2019.

DONDERO, M. *et al.* Effective thermal conductivity of functionally graded random micro-heterogeneous materials using representative volume element and BEM. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 54, n. 17-18, p. 3874–3881, 2011.

DUHAMEL, J. M. C. Second mémoire sur les phénomènes thermo-mechanique. **Journal de L'Escole Polytechnique**, v. 15, n. 25, p. 1–57, 1837.

EL-KARAMANY, A. S.; EZZAT, M. A. On the phase- lag Green-Naghdi thermoelasticity theories. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, n. 9-10, p. 5643–5659, 2014.

ELTAHER, M. A.; ATTIA, M. A.; WAGIH, A. Predictive model for indentation of elasto-plastic functionally graded composites. **Composites Part B**, v. 197, p. 108129, 2020. ISSN 1359-8368.

ESCARPINI FILHO, R. d. S.; MARQUES, S. P. C. A model for evaluation of effective thermal conductivity of periodic composites with poorly conducting interfaces. **Materials Research**, v. 17, n. 5, p. 1344–1355, 2014.

ESHELBY, J. D.; PEIERLS, R. E. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**, v. 241, n. 1226, p. 376–396, 1957.

FELIX, E. F. **Modelagem da deformação do concreto armado devido à formação dos produtos de corrosão.** 2018. 162 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

FERNANDES, V. A. **Análise elastoplástica bidimensional de meios reforçados com fibras.** 2016. 113 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

FOURIER, J. B. J. **The Analytical Theory of Heat**. [*S.l.: s.n.*]: Cambridge University Press, 2009. 466 p. (Cambridge Library Collection - Mathematics).

FRIEDEL, L. F. d. O. **Análise de estruturas planas reforçadas com fibras ativas viscoelásticas e matriz com modelo constitutivo hiperelástico: aplicações gerais em engenharia e biomecânica.** 2016. 213 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

GAVAZZI, A. C.; LAGOUDAS, D. C. On the numerical evaluation of Eshelby's tensor and its application to elastoplastic fibrous composites. **Computational Mechanics**, v. 7, p. 13–19, 1990. ISSN 0178-7675.

GEUZAINE, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 79, n. 11, p. 1309–1331, 2009.

GIRIDHARAN, D.; RAKHAM, B. Experimental Analysis of Fibre Metal Laminates. **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**, v. 455, 2018.

GONG, S.; LI, Z.; ZHAO, Y. Y. An extended Mori–Tanaka model for the elastic moduli of porous materials of finite size. **Acta Materialia**, v. 59, n. 17, p. 6820–6830, 2011. ISSN 1359-6454.

GOU, J. J. *et al.* Numerical prediction of effective thermal conductivities of 3D four-directional braided composites. **Composite Structures**, v. 125, p. 499–508, 2015.

GRASSMANN, A.; PETERS, F. Experimental investigation of heat conduction in wet sand. **Heat and Mass Transfer**, v. 35, n. 4, p. 289–294, 1999.

GRECO, M.; CODA, H. B. A simple and precise FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 33, p. 3541–3557, 2004.

GRECO, M.; CODA, H. B. Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 290, n. 3-5, p. 1141–1174, 2006.

GREEN; NAGHDI. A Re-Examination of the Basic Postulates of Thermomechanics. **Proceedings: Mathematical and Physical Sciences**, v. 432, n. 51851, p. 171–194, 1991.

GREEN, A. E.; NAGHDI, P. M. On undamped heat waves in an elastic solid. **Journal of Thermal Stresses**, v. 15, n. 2, p. 253–264, 1992.

GREEN, A. E.; NAGHDI, P. M. Thermoelasticity without energy dissipation. **Journal of Elasticity**, v. 31, n. 3, p. 189–208, 1993.

GUAN, B. *et al.* Thermomechanical Coupling Model for a Stainless Steel-Clad Plate on Heat Treatment. **Strength of Materials**, v. 51, n. 1, p. 40–55, 2019.

GUENNEBAUD, G.; JACOB, B. **Eigen v3**. 2010. Disponível em: http://eigen.tuxfamily.org/.

GUYER, R. A.; KRUMHANSL, J. A. Dispersion relation for second sound in solids. **Physical Review**, v. 133, n. 5A, 1964.

HAIDAK, G.; WANG, D.; SHIJU, E. Research on the thermo-elastic deformation and fracture mechanism of the slipper retainer in the axial piston pumps and motors. **Engineering Failure Analysis**, v. 100, p. 259–272, 2019.

HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. A Variational Approach to the Theory of the Effective Magnetic Permeability of Multiphase Materials. **Journal of Applied Physics**, v. 33, p. 3125–3131, 1962. ISSN 0021-8979.

HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 11, p. 127–140, 1963. ISSN 0022-5096.

HERWIG, H.; BECKERT, K. Experimental evidence about the controversy concerning Fourier or non-Fourier heat conduction in materials with a nonhomogeneous inner structure. **Heat and Mass Transfer**, v. 36, n. 5, p. 387–392, 2000.

HILL, R. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 11, n. 5, p. 357–372, 1963. ISSN 0022-5096.

HIROSHI, H.; MINORU, T. Equivalent inclusion method for steady state heat conduction in composites. **International Journal of Engineering Science**, v. 24, n. 7, p. 1159–1172, 1986. ISSN 0020-7225.

HOLZAPFEL, G. **Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineering**. [*S.l.: s.n.*]: Wiley, 2000. ISBN 0471823198.

HUA, Y.; GU, L. Prediction of the thermomechanical behavior of particle-reinforced metal matrix composites. **Composites: Part B**, v. 45, p. 1464–1470, 2013. ISSN 1359-8368.

HUANG, C.-H.; YAN, J.-Y.; CHEN, H.-T. Function estimation in predicting temperature-dependent thermal conductivity without internal measurements. **JOURNAL OF THERMOPHYSICS AND HEAT TRANSFER**, v. 9, p. 667–673, 1995. ISSN 0887-8722.

HüBEL, H. Basic conditions for material and structural ratcheting. **Nuclear Engineering and Design**, v. 162, p. 55–65, 1996. ISSN 0029-5493.

IMANI, S. M. *et al.* The modified Mori-Tanaka scheme for the prediction of the effective elastic properties of highly porous ceramics. **Ceramics International**, v. 44, n. 14, p. 16489–16497, 2018. ISSN 0272-8842.

INACIO, G. R. *et al.* Análise de viabilidade do uso de termográfica como ensaio não-destrutivo para identificação de falhas internas de concretagem. *In*: **XXX CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia**. Armação de Búzios: [*S.l.: s.n.*], 2009.

ISRAEL, W.; STEWART, J. M. Thermodynamics of nonstationary and transient effects in a relativistic gas. **Physics Letters A**, v. 58, n. 4, p. 213–215, 1976.

JAIN, M.; MACEWEN, S. R.; WU, L. Finite element modelling of residual stresses and strength differential effect in discontinuously reinforced metal matrix composites. **Materials Science and Engineering**, v. 183, p. 111–120, 1994. ISSN 0921-5093.

JAUNICH, M. *et al.* Bio-heat transfer analysis during short pulse laser irradiation of tissues. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 51, n. 23-24, p. 5511–5521, 2008.

JEFFERS, A. E.; SOTELINO, E. D. Fiber Heat Transfer Element for Modeling the Thermal Response of Structures in Fire. **Journal of Structural Engineering**, v. 135, n. 10, p. 1191–1200, 2009.

JEFFERS, A. E.; SOTELINO, E. D. An efficient fiber element approach for the thermo-structural simulation of non-uniformly heated frames. **Fire Safety Journal**, v. 51, p. 18–26, 2012.

JIANG, Y. *et al.* Concentrated-plasticity modelling of circular concrete-filled steel tubular members under flexure. **Structures**, 2019.

JOSEPH, D. D.; PREZIOSI, L. Heat waves. **Reviews of Modern Physics**, v. 61, n. 1, p. 41–73, 1989.

KAMINSKI, W. Hyperbolic Heat Conduction Equation for Materials With a Nonhomogeneous Inner Structure. **Journal of Heat Transfer**, v. 112, n. 3, p. 555, 1990.

KERNER, E. H. The Elastic and Thermo-elastic Properties of Composite Media. **Proceedings of the Physical Society. Section B**, IOP Publishing, v. 69, n. 8, p. 808–813, aug 1956.

KIM, H. min *et al.* Synergistic improvement of electrical and thermal conductivities of carbon-based nanocomposites and its prediction by Mori-Tanaka scheme with interfacial resistances. **Composite Structures**, v. 211, p. 56–62, 2019. ISSN 0263-8223.

KOSTIC, S. M.; FILIPPOU, F. C.; DERETIC-STOJANOVIC, B. Generalized plasticity model for inelastic RCFT column response. **Computers & Structures**, v. 168, p. 56–67, 2016.

LEWIS, R. W. *et al.* **The finite element method in heat transfer analysis**. Chichester: Wiley, 1996. 279 p. ISBN 0471943622.

LI, H. *et al.* Enhanced thermal conductivity by combined fillers in polymer composites. **Thermochimica Acta**, v. 676, p. 198–204, 2019.

LI, X. *et al.* Computational modeling and evaluation of the thermal behavior of randomly distributed single-walled carbon nanotube/polymer composites. **Computational Materials Science**, v. 63, p. 207–213, 2012.

LI, Z. H.; MA, Q.; CUI, J. Second-order two-scale finite element algorithm for dynamic thermo-mechanical coupling problem in symmetric structure. **Journal of Computational Physics**, v. 314, p. 712–748, 2016.

LIENHARD IV, J. H.; LIENHARD V, J. H. **A Heat Transfer Textbook**. 5th. ed. Mineola, NY: Dover Publications, 2019. ISBN 9780486837352. Disponível em: http://ahtt.mit.edu.

LIEW, J. Y. R. *et al.* Improved nonlinear plastic hinge analysis of space frame structures. **Engineering Structures**, v. 22, n. 10, p. 1324–1338, 2000.

LINGANISO, L. Z.; ANANDJIWALA, R. D. 4 - Fibre-reinforced laminates in aerospace engineering. *In*: RANA, S.; FANGUEIRO, R. (ed.). **Advanced Composite Materials for Aerospace Engineering**. [*S.l.: s.n.*]: Woodhead Publishing, 2016. p. 101–127. ISBN 978-0-08-100939-0.

LIU, B.; FENG, X.; ZHANG, S.-M. The effective Young's modulus of composites beyond the Voigt estimation due to the Poisson effect. **Composites Science and Technology**, v. 69, n. 13, p. 2198–2204, 2009. ISSN 0266-3538. Smart Composites and Nanocomposites Special Issue with Regular Papers.

LIU, K.-C.; CHEN, H.-T. Investigation for the dual phase lag behavior of bio-heat transfer. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 49, n. 7, p. 1138–1146, 2010.

LONG, V. T.; TUNG, H. V. Thermomechanical postbuckling behavior of CNT-reinforced composite sandwich plate models resting on elastic foundations with elastically restrained unloaded edges. **Journal of Thermal Stresses**, v. 42, n. 5, p. 658–680, 2019.

LU, P. Further studies on Mori–Tanaka models for thermal expansion coefficients of composites. **Polymer**, v. 54, n. 6, p. 1691–1699, 2013. ISSN 0032-3861.

LUSTI, H. R.; HINE, P. J.; GUSEV, A. A. Direct numerical predictions for the elastic and thermoelastic properties of short fibre composites. **Composites Science and Technology**, v. 62, p. 1927–1934, 2002. ISSN 0266-3538.

MACIEL, D. N. **Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional**. 2008. 135 p. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

MAILLET, D. A review of the models using the Cattaneo and Vernotte hyperbolic heat equation and their experimental validation. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 139, p. 424–432, 2019.

MARQUES, G. C. d. S. C. **Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais**. 2006. 93 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

MARSH, G. Next step for automotive materials. **Materials Today**, v. 6, n. 4, p. 36–43, 2003.

MATINE, A. *et al.* Modeling of thermophysical properties in heterogeneous periodic media according to a multi-scale approach: Effective conductivity tensor and edge effects. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 62, n. 1, p. 586–603, 2013.

MATINE, A. *et al.* International Journal of Thermal Sciences Transient heat conduction within periodic heterogeneous media : A space-time homogenization approach. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 92, p. 217–229, 2015.

MATTIASSON, K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1981.

MAZZA, F. A distributed plasticity model to simulate the biaxial behaviour in the nonlinear analysis of spatial framed structures. **Computers & Structures**, v. 135, p. 141–154, 2014.

MCNELLY, T. F. *et al.* Heat pulses in NaF: Onset of second sound. **Physical Review Letters**, v. 24, n. 3, p. 100–102, 1970.

MEENA, M. K. *et al.* Thermomechanical analysis of 0.94Na1/2Bi1/2TiO3-0.06BaTiO3/ZnO composites using finite element method. **Journal of Alloy and Compounds**, v. 854, p. 157161, 2021. ISSN 0925-8388.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: microestrutura, propriedades e materiais**. 2. ed. [*S.l.: s.n.*]: São Paulo: Ibracon, 2014. ISBN 9788598576213.

MEIJER, G.; ELLYIN, F.; XIA, Z. Aspects of residual thermal stress/strain in particle reinforced metal matrix composites. **Composites: Part B**, v. 31, p. 29–37, 2000. ISSN 1359-8368.

MITRA, K. *et al.* Experimental Evidence of Hyperbolic Heat Conduction in Processed Meat. **Journal of Heat Transfer**, v. 117, n. 3, p. 568, 1995.

MORI, T.; TANAKA, K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. **Acta Metallurgica**, v. 21, p. 571–574, 1973. ISSN 0001-6160.

MORSE, P. M.; FESHBACH, H. **Methods of theoretical physics**. [*S.l.: s.n.*]: McGraw-Hill, 1953. ISBN 007043316X.

MOURA, C. A. **Aplicação de formulação baseada no Método dos Elementos Finitos Posicional na análise bidimensional elástica de compósitos particulados**. 2015. 85 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

MÜLLER, I. On the entropy inequality. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 26, n. 2, p. 118–141, 1967.

NAGY, B.; NEHME, S. G.; SZAGRI, D. Thermal properties and modeling of fiber reinforced concretes. **Energy Procedia**, v. 78, p. 2742–2747, 2015.

NARAYANAMURTI, V.; DYNES, R. C. Observation of second sound in bismuth. **Physical Review Letters**, v. 28, n. 22, p. 1461–1465, 1972.

NEVES, N. S. das; CAMARGO, R. S.; AZEVEDO, M. S. de. Advanced computer model for analysis of reinforced concrete and composite structures at elevated temperatures. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais.**, v. 14, n. 4, 2021. ISSN 1983-4195.

NICHOLSON, D. W. **Finite element analysis : thermomechanics of solids**. 2. ed. [*S.l.: s.n.*]: CRC Press, 2008. 480 p. ISBN 9781420050950.

OGDEN, R. W. **Non-linear Elastic Deformations**. London: Dover Publications, 1997. 532 p. ISBN 9780486696485.

ÖZISIK, M. N.; TZOU, D. Y. On the Wave Theory in Heat Conduction. **Journal of Heat Transfer**, v. 116, n. 3, p. 526, 1994.

PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A direct FEM approach for particulate reinforced elastic solids. **Composite Structures**, v. 141, p. 282–291, 2016.

PACCOLA, R. R.; Piedade Neto, D.; CODA, H. B. Geometrical non-linear analysis of fiber reinforced elastic solids considering debounding. **Composite Structures**, v. 133, p. 343–357, 2015.

PANTÒ, B. *et al.* A smart displacement based (SDB) beam element with distributed plasticity. **Applied Mathematical Modelling**, v. 44, p. 336–356, 2017.

PENNEC, F. *et al.* A combined finite-discrete element method for calculating the effective thermal conductivity of bio-aggregates based materials. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 60, n. 1, p. 274–283, 2013.

PESHKOV, V. P. Second sound in Helium II. **J. Phys. USSR**, v. 38, p. 799–805, 1960.

PETTERMANN, H. E. *et al.* A thermo-elasto-plastic constitutive law for inhomogeneous materials based on an incremental Mori–Tanaka approach. **Computers & Structures**, v. 71, n. 2, p. 197–214, 1999. ISSN 0045-7949.

PRAKASH, P. R.; SRIVASTAVA, G. Distributed plasticity model for analysis of steel structures subjected to fire using the direct stiffness method. **Fire Safety Journal**, v. 105, p. 169–187, 2019.

RAMOS, G. R.; SANTOS, T. d.; ROSSI, R. An extension of the Hill-Mandel principle for transient heat conduction in heterogeneous media with heat generation incorporating finite RVE thermal inertia effects. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 111, n. 6, p. 553–580, 2017.

RAMOS Éverton S. **Modelagem numérica da propagação da corrosão por cloretos em estruturas de concreto armado**. 2020. 245 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

REUSS, A. Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle. **ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, Wiley Online Library, v. 9, n. 1, p. 49–58, 1929.

RIGOBELLO, R.; CODA, H. B.; Munaiar Neto, J. A 3D solid-like frame finite element applied to steel structures under high temperatures. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 91, p. 68–83, 2014.

ROETZEL, W.; PUTRA, N.; DAS, S. K. Experiment and analysis for non-Fourier conduction in materials with non-homogeneous inner structure. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 42, n. 6, p. 541–552, 2003.

ROY CHOUDHURI, S. K. On a thermoelastic three-phase-lag model. **Journal of Thermal Stresses**, v. 30, n. 3, p. 231–238, 2007.

SADEGHPOUR, E. *et al.* A modified Mori–Tanaka approach incorporating filler-matrix interface failure to model graphene/polymer nanocomposites. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 180, p. 105699, 2020. ISSN 0020-7403.

SAHOO, N. *et al.* Investigation of non-Fourier effects in bio-tissues during laser assisted photothermal therapy. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 76, p. 208–220, 2014.

SAMPAIO, M. d. S. M. **Análise não linear geométrica de cascas laminadas reforçadas com fibras**. 2014. 190 p. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

SCHAPERY, R. A. Thermal Expansion Coefficients of Composite Materials Based on Energy Principles. **Journal of Composite Materials**, v. 2, n. 3, p. 380–404, 1968.

SEYEDEIN, S. H. *et al.* Finite element simulation of residual stress and failure mechanism in plasma sprayed thermal barrier coatings using actual microstructure as the representative volume. **Surface and Coatings Technology**, v. 291, p. 103–114, 2016.

SHE, Z.; WANG, K.; LI, P. Thermal analysis of multilayer coated fiber-reinforced composites by the hybrid trefftz finite element method. **Composite Structures**, v. 224, p. 110992, 2019.

SIMO, J. C. J. C.; HUGHES, T. J. R. **Computational inelasticity**. [*S.l.: s.n.*]: Springer, 1998. 392 p. ISBN 9780387975207.

SONG, J.; ZHANG, Y. From two-dimensional to three-dimensional structures: A superior thermal-driven actuator with switchable deformation behavior. **Chemical Engineering Journal**, v. 360, p. 680–685, 2019.

Souza Neto, E. A. d.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. **Computational methods for plasticity : theory and applications**. [*S.l.: s.n.*]: Wiley, 2008. 791 p. ISBN 0470694521.

STRÁNSKÝ, J. *et al.* Mori-Tanaka Based Estimates of Effective Thermal Conductivity of Various Engineering Materials. **Micromachines**, MDPI AG, v. 2, n. 2, p. 129–149, Apr 2011. ISSN 2072-666X.

TAMURA, I.; TOMOTA, Y.; OZAWA, M. Strength and ductility of fe-ni-c alloys composed of austenite and martensite with various strength. **Proceedings of the third international conference on strength of metals and alloys, 1973**, Cambridge, Institute of Metals, v. 1, p. 611–615, 1973.

TANG, H. *et al.* Impact of the thermal effect on the load-carrying capacity of a slipper pair for an aviation axial-piston pump. **Chinese Journal of Aeronautics**, v. 31, n. 2, p. 395–409, 2018.

THAI, H.-T.; KIM, S.-E. A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded platesand shells. **Composite Structures**, v. 128, p. 70–86, 2015.

THAI, H.-T.; KIM, S.-E. Second-order distributed plasticity analysis of steel frames with semi-rigid connections. **Thin-Walled Structures**, v. 94, p. 120–128, 2015.

TORQUATO, S. Random Heterogeneous Media: Microstructure and Improved Bounds on Effective Properties. **Applied Mechanics Reviews**, v. 44, n. 2, p. 37–76, 02 1991. ISSN 0003-6900.

TORQUATO, S. **Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties**. 1. ed. [*S.l.: s.n.*]: Springer, New York, NY, 2013. (16). ISBN 978-1-4757-6355-3.

TORQUATO, S.; RINTOUL, M. D. Effect of the Interface on the Properties of Composite Media. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 75, p. 4067–4070, Nov 1995.

TRAN, P.; NGUYEN, Q. T.; LAU, K. T. Fire performance of polymer-based composites for maritime infrastructure. **Composites Part B: Engineering**, v. 155, p. 31–48, 2018.

TRINH, M.-C.; NGUYEN, D.-D.; KIM, S.-E. Effects of porosity and thermomechanical loading on free vibration and nonlinear dynamic response of functionally graded sandwich shells with double curvature. **Aerospace Science and Technology**, v. 87, p. 119–132, 2019.

TZOU, D. Y. An engineering assessment to the relaxation time in thermal wave propagation. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 36, n. 7, p. 1845–1851, 1993.

VÁN, P. Theories and heat pulse experiments of non-Fourier heat conduction. **Communications in Applied and Industrial Mathematics**, v. 7, n. 2, p. 150–166, 2015.

VANALLI, L. **O MEC e o MEF aplicados à análise de problemas viscoplásticos em meios anisotrópicos e compostos**. 2004. 193 p. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

VANALLI, L.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A simple way to introduce fibers into FEM models. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 24, n. 7, p. 585–603, 2008.

VERMA, R. *et al.* Measurement of thermal conductivity of materials down to 4.5 K for development of cryosorption pumps. **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**, v. 171, 2017.

VERNOTTE, M. P. La véritable équation de chaleur. **Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences**, 1958.

VIEIRA, C. d. S.; MARQUES, S. P. C. A new three-dimensional finite-volume model for evaluation of thermal conductivity of periodic multiphase composites. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 139, p. 412–424, 2019.

VOIGT, W. **Lehrbuch der kristallphysik:(mit ausschluss der kristalloptik)**. Leipzig, Berlin: BG Teubner, 1910. v. 34.

WANG, H.; XIAO, Y.; QIN, Q.-H. 2D hierarchical heat transfer computational model of natural fiber bundle reinforced composite. **Scientia Iranica**, v. 23, n. 1, p. 268–276, 2017.

WANG, H. D.; CAO, B. Y.; GUO, Z. Y. Heat flow choking in carbon nanotubes. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 53, n. 9-10, p. 1796–1800, 2010.

WANG, J. **Modern thermodynamics : based on the extended carnot theorem**. [*S.l.: s.n.*]: Science Press, 2012. 279 p. ISBN 3642113486.

WILLIAMS, J. C.; STARKE, E. A. Progress in structural materials for aerospace systems. **Acta Materialia**, v. 51, n. 19, p. 5775–5799, 2003.

WINTERBORNE, D. E.; TURAN, A. **Advanced Thermodynamics for Engineers**. 2. ed. [*S.l.: s.n.*]: Butterworth-Heinemann, 2015. 578 p. ISBN 978-0-444-63373-6.

YANG, C. yu. Estimation of the temperature-dependent thermal conductivity in inverse heat conduction problems. **Applied Mathematical Modelling**, v. 23, p. 469–478, 1999. ISSN 0307-904X.

YU, C. *et al.* Development and Validation of 3D Composite Structural Elements at Elevated Temperatures. **Journal of Structural Engineering**, v. 136, n. 3, p. 275–284, 2010.

YUN, G. J. *et al.* A damage plasticity constitutive model for wavy CNT nanocomposites by incremental Mori-Tanaka approach. **Composite Structures**, v. 258, p. 113178, 2021. ISSN 0263-8223.

ZHANG, X.; CHEN, Y.; HU, J. Recent advances in the development of aerospace materials. **Progress in Aerospace Sciences**, v. 97, p. 22–34, 2018.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method: Solid mechanics**. [*S.l.: s.n.*]: Butterworth-Heinemann, 2000. (Fluid Dynamics). ISBN 9780750650557.