UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

EMERSON FELIPE FELIX

Estudo numérico-experimental da fadiga em concretos submetidos à compressão cíclica: proposição de um modelo de dano acumulado

SÃO CARLOS
2022

EMERSON FELIPE FELIX

Estudo numérico-experimental da fadiga em concretos submetidos à compressão cíclica: proposição de um modelo de dano acumulado

VERSÃO CORRIGIDA
A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rogério Carrazedo
Coorientadora: Profa. Dra. Edna Possan

SÃO CARLOS
2022

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

Felix, Emerson Felipe
F316e Estudo numérico-experimental da fadiga em concretos submetidos à compressão cíclica: proposição de um modelo de dano acumulado / Emerson Felipe Felix; orientador Rogério Carrazedo; coorientadora Edna Possan. São Carlos, 2022.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2022.

1. compressão cíclica. 2. fadiga no concreto. 3. dano acumulado. 4. modelagem numérica. 5. método dos elementos finitos. I. Título.

Eduardo Graziosi Silva - CRB - 8/8907

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Bacharel **EMERSON FELIPE FÉLIX.**

Título da tese: "Estudo numérico-experimental da fadiga em concretos submetidos a compressão cíclica: proposição de um modelo de dano acumulado".

Data da defesa: 18/04/2022.

Comissão Julgadora	**Resultado**
Prof. Associado **Rogério Carrazedo (Orientador)** (Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)	Aprovado
Prof. Associado **Edson Denner Leonel** (Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)	Aprovado
Prof. Dr. **Gustavo Henrique Siqueira** (Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)	Aprovado
Prof. Dr. **Jairo José de Oliveira Andrade** (Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul/PUC-RS)	Aprovado
Prof. Dr. **Arthur Medeiros** (Universidade Tecnológica Federal do Paraná/UTFPR)	Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas):
Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

Dedico à minha mãe, Eliane,
e minha avó, Lourdes.

"Os dias prósperos não vêm por acaso,
nascem de muita fadiga e persistência."
(Henry Ford)

AGRADECIMENTOS

Inicialmente agradeço à Deus, que me guia, me protege, me da força e sabedoria para vencer todos os desafios desta vida.

À minha mãe, Eliane, e minha avó, Lourdes, por todo amor e por sempre fazerem de tudo para que eu pudesse realizar meus sonhos.

Ao meu orientador, professor Dr. Rogério Carrazedo, por ter acreditado em meu potencial desde o momento em que tivemos nossa primeira reunião, ainda no mestrado. Agradeço por ter aceitado desbravar comigo os desafios que este trabalho nos trouxe. Agradeço pela sua dedicação, atenção, amizade, experiência e contínua presença em todas as etapas de desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço à minha coorientadora, professora Dra. Edna Possan, por ter me iniciado nos caminhos da investigação científica, e por ter me incentivado a sempre ir atrás dos meus sonhos. Agradeço pela sua dedicação, amizade e comprometimento.

Agradeço à professora Dra. Gláucia Dalfré por sempre ter me incentivado, pelo seu constante suporte, amizade e por ter me encorajado a vir desenvolver a pós no Departamento de Estruturas, da Escola de Engenharia de São Carlos-EESC/USP.

Aos professores Dr. Rodrigo Paccola e Dr. Humberto Breves Coda pelo auxílio no desenvolvimento dos códigos desenvolvidos neste trabalho e por sempre estarem dispostos a transmitir conhecimento. Agradeço também às contribuições fornecidas pelos membros da banca de defesa, os professores: Dr. Edson Leonel, Dr. Jairo José de Oliveira Andrade, Dr. Gustavo Henrique Siqueira e Dr. Arthur Medeiros.

Aos demais professores do Departamento de Estruturas e aos funcionários por todo o suporte. Agradecimento especial aos técnicos de laboratório Luiz Vareda e Romeu Bessan que me auxiliaram no desenvolvimento dos experimentos.

A todos os amigos que fiz em São Carlos, especialmente, no Departamento de Estruturas da EESC/USP, os quais ajudaram a diminuir as saudades de Foz do Iguaçu.

Aos amigos que sempre se fizeram presentes em minha vida, e me apoiaram a continuar firme no desenvolvimento deste trabalho, em especial, Luis, Bianca, Thays e Rubia. Não poderia deixar de agradecer aos meus queridos guerreiros e companheiros de quarentena, Rosemary e Guilherme, que fizeram e fazem os dias serem mais leves, diminuindo a fadiga para tornar os dias mais prósperos.

Por fim, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela bolsa de doutorado concedida.

RESUMO

FELIX, E. F. **Estudo numérico-experimental da fadiga em concretos submetidos à compressão cíclica: proposição de um modelo de dano acumulado.** 2022. 309 p. Tese (Doutorado em Ciências - Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

O mecanismo de degradação do concreto por fadiga está relacionado à deterioração e à danificação do compósito quando submetido a carregamentos cíclicos. De modo geral, a deterioração do material observada em estudos experimentais, conduzidos com cargas cíclicas, ocorre de forma análoga aos ensaios com cargas estáticas. No entanto, o modo de propagação das fissuras, a velocidade de propagação e o dano podem ser diferentes em função da amplitude e da taxa de carregamento. Neste contexto, o presente trabalho tem como objetivos a investigação experimental do comportamento do concreto na fadiga à compressão, e o desenvolvimento de formulações analíticas e de modelos numéricos que subsidiem análises de previsão da vida útil à fadiga e na avaliação do nível de dano acumulado nos ciclos de carregamento. No estudo experimental, são avaliados concretos com três classes de resistência (30, 50 e 70 MPa) e distintas configurações de carregamento. As cargas impostas consideram três diferentes frequências ($0,125$, $0,25$ e $0,5$ Hz) com dois níveis de tensão máxima (50% e 70% da resistência à compressão). Dos resultados obtidos experimentalmente, foi possível avaliar a influência dos parâmetros investigados, demonstrando a necessidade da incorporação dos mesmos nos estudos e desenvolvimento de modelos da vida útil à fadiga do concreto. As formulações desenvolvidas são acopladas a um código numérico gerado via Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP), sob formulação Lagrangeana total, com lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff e comportamentos não linear geométrico e físico. A não linearidade geométrica é inserida de modo natural pelo MEFP. Para a representação da não linearidade física, o modelo de dano de Mazars é utilizado, conduzindo algumas modificações na sua implementação para que fosse possível representar carregamentos cíclicos. Acrescenta-se que uma abordagem numérica inovadora, baseada na técnica de embutimento, foi empregada para criar malhas fantasmas, onde o tempo de processamento da análise mecânica é significativamente otimizado. Quanto aos modelos desenvolvidos e implementados, os mesmos foram avaliados por meio de dez exemplos numéricos, onde os resultados demonstram a aplicabilidade das formulações propostas e que os códigos gerados se apresentam como ferramentas alternativas e eficientes para a simulação do concreto considerando a fadiga na compressão cíclica.

Palavras-chave: compressão cíclica; fadiga no concreto; dano acumulado; modelagem numérica; método dos elementos finitos.

ABSTRACT

FELIX, E. F. **Numerical-experimental study of concrete fatigue due to cyclical compression: proposal of an accumulate damage model.** 2022. 309 p. Thesis (PhD. in Civil Engineering (Structural Engineering)) – School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2022.

The concrete degradation mechanism due to fatigue is related to the deterioration and the damage of the composite when subjected to cyclic loading. In general, the deterioration of the material observed in experimental studies, which were conducted with cyclic loading, occurs in a similar way to tests with static loads. However, the cracking propagation mode, the propagation velocity and the damage can be different depending on the amplitude and loading rate. In this context, the present work has as objectives the experimental investigation of the behaviour of the concrete under compression fatigue, and the development of analytic formulations and numerical models that analize the fatigue life and accumulated damage due to cyclic loading. Concretes with three different compressive strengths (30, 50 and 70 MPa) and distinct loading configurations are evaluated in the experimental study. The imposed loadings consider three different frequencies (0.125, 0.25 e 0.5 Hz) with two levels of maximum stress (50% e 70% of the compressive strength). From the experimental results, it was possible to evaluate the influence ofthe parameters investigated, demonstrating the necessity to incorporate them into the models of the concrete fatigue life. The developed formulations are coupled to a numerical of Positional Finite Element Method (MEFP, in Portuguese), under total Lagrangian formulation, with Saint-Venant-Kirchhoff constitutive law and geometric and physical nonlinear behaviour. The geometric nonlinearity is naturally introduced by the MEFP. For physical nonlinearity representation, the Mazars damage model is used, conducting some modifications in its implementations allowing the representation of cyclic loads. Besides, a novel numerical approach, based on the embedding technique, was used to create a hidden mesh, where the processing times of the mechanical analysis are significantly optimized. The developed and implemented models were evaluated through ten numerical examples, where the results show the applicability of the proposed formulations and that the generated codes are presented as alternative and efficient tools for the concrete simulation considering fatigue in cyclic compression.

Key-words: cyclical compression; concrete fatigue; accumulate damage; numerical modeling; finite element method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Estruturas de concreto sujeitas a carregamentos cíclicos. 24
Figura 1.2 – Aspectos fenomenológicos dos modelos numéricos. 27
Figura 1.3 – Representação dos modelos em macroescala e mesoescala. 31
Figura 1.4 – Representação da modelagem com microplanos. 34
Figura 1.5 – Curva *S-N* típica de um material metálico. 39
Figura 1.6 – Método de cálculo da energia absorvida (demonstrada até o segundo ciclo). 42
Figura 1.7 – Evolução das deformações em função da vida útil. 43
Figura 1.8 – Dimensões e esquema do espécime ensaiado. 44
Figura 1.9 – Evolução de fissuras em função do número de ciclos. 47
Figura 1.10–Curvas de envelope para ensaios estáticos e cíclicos. 48
Figura 1.11–Curvas tensão residual versus numéro de ciclos e nível de confiabilidade. . . 49
Figura 1.12–Evolução da deformação axial e dano em função do número de ciclos. . . . 52
Figura 1.13–Imagens por microscopia eletrônica de CPs de (a) GPC e (b) PCC, testados à fadiga, (c) variação do número de cilos necessários para a ruptura em função do nível da tensão máxima, com 10 Hz, e (d) variação do número de ciclos em função da frequência, para um nível de tensão máxima de 0,75. 54
Figura 1.14–Distribuição superficial das fissuras. 55
Figura 1.15–Distribuição interna dos poros. 55
Figura 1.16–Caracterização de fissuras por correlação de imagem digital (DIC). 56
Figura 1.17–Caracterização de fissuras por emissão acústica (EA). 56
Figura 1.18–Casos de falhas associadas à fadiga. 58
Figura 1.19–Avanços nos estudos da fadiga no concreto. 60
Figura 1.20–Número de trabalhos experimentais desenvolvidos frente às diferentes solicitações. 61
Figura 1.21–Número de trabalhos numéricos desenvolvidos considerando abordagens baseadas na mecânica da fratura e mecânica do dano. 62
Figura 2.1 – Diferentes fases da vida útil à fadiga associada à fissuração do material. . . . 68
Figura 2.2 – Carregamento cíclico de amplitude constante e a nomenclatura associada: (a) carregamento cíclico completamente reverso, com tensão média nula; (b) carregamento cíclico com tensão média diferente de zero; (c) carregamento com tensão mínima nula e; (d) carregamento com tensão máxima nula. . . . 70
Figura 2.3 – Modos de carregamento considerando a forma de onda, a amplitude e a continuidade no espectro de carga. 71

Figura 2.4 – Avanço de fissuras no concreto em função da deformação máxima e tempo de ensaio em corpos de prova submetidos à fadiga. 73
Figura 2.5 – Heterogeneidade do concreto em microescala. 75
Figura 2.6 – Formação de vazios devido à direção de moldagem. 76
Figura 2.7 – Fotografias por microscopia de concretos: (a) sem carregamento, (b) sob compressão estática, (c) sob compressão ciclica, e (d) sob cargas de impacto por compressão. 76
Figura 2.8 – Distribuição da vida útil à fadiga em função da proporção de poros/cimento. 77
Figura 2.9 – Curvas S-N para concretos submetidos à fadiga com diferentes R. 81
Figura 2.10–Perda de rigidez com o histórico de carregamento cíclico para concretos carregados com frequência de: (a) 1 Hz e (b) 4 Hz. 82
Figura 2.11–Curva S-log(N) de concretos sob fadiga na: (a) compressão e (b) flexão. . . 82
Figura 2.12–Número de ciclos versus frequência de carregamento na fadiga à flexão. . . 84
Figura 2.13–Curva S-N para concretos sob tração cíclica com diferentes frequências. . . 84
Figura 2.14–Variação do número de ciclos em função da frequência de carregamento. . . 85
Figura 2.15–Curvas alternativas de representação da vida útil à fadiga. 86
Figura 3.1 – Mudança de configuração de um sólido deformável. 100
Figura 3.2 – Mudança de volume de um corpo. 101
Figura 3.3 – Discretização de um contínuo via método dos elementos finitos. 109
Figura 3.4 – Representação do método iterativo de Newton-Raphson para encontrar a configuração de equilíbrio. 111
Figura 3.5 – Elemento finito bidimensional do tipo chapa com aproximação cúbica. . . . 112
Figura 3.6 – Configuração do elemento finito linear - barra de treliça. 116
Figura 3.7 – Representação em mesoescala de elementos compósitos. 119
Figura 3.8 – Fluxograma do código de análise de compósitos via MEFP. 121
Figura 3.9 – Propriedades geométricas e malha do pilar. 123
Figura 3.10–Configuração deformada do pilar no passo F = 3500 kN. 123
Figura 3.11–Configuração deformada do pilar no passo F = 6300 kN. 124
Figura 3.12–Configuração deformada do pilar no passo F = 37100 kN. 124
Figura 3.13–Desclocamento horizontal da extremidade livre do pilar em função da carga. 125
Figura 3.14–Propriedades geométricas e malha da viga. 126
Figura 3.15–Deslocamento vertical da extremidade livre (análise linear). 126
Figura 3.16–Tensão de compressão na extremidade engastada (análise linear). 127
Figura 3.17–Deslocamento vertical da extremidade livre (análise não linear). 127
Figura 3.18–Configuração deformada das vigas na análise não linear geométrica. 128
Figura 3.19–Propriedades geométricas do corpo de prova e malha da matriz. 129
Figura 3.20–Elementos de partícula para representação de agregados. 130
Figura 3.21–Distribuição das partículas na matriz. 130
Figura 3.22–Mapeamento dos deslocamentos do concreto C30 - Simulação com caso 1. . 132

Figura 3.23–Mapeamento dos deslocamentos do concreto C30 - Simulação com caso 2. . 132
Figura 3.24–Mapeamento dos deslocamentos do concreto C30 - Simulação com caso 3. . 133
Figura 3.25–Mapeamento dos deslocamentos do concreto C30 - Simulação com caso 4. . 133
Figura 3.26–Mapeamento dos deslocamentos do concreto C30 - Simulação com caso 5. . 134
Figura 3.27–Curva tensão versus deformação vertical do concreto C30. 134
Figura 3.28–Mapeamento dos deslocamentos do concreto C50 - Simulação com caso 5. . 135
Figura 3.29–Mapeamento dos deslocamentos do concreto C70 - Simulação com caso 5. . 135
Figura 3.30–Modelos preditivos do módulo de elasticidade de materiais compósitos. . . . 136
Figura 3.31–Comparação entre os valores do módulo de elasticidade. 136
Figura 3.32–Geometria e condições de contorno da viga. 138
Figura 3.33–Elementos de partícula para representação de agregados. 138
Figura 3.34–Relação força aplicada versus deslocamento. 139
Figura 3.35–Mapeamento dos deslocamentos e tensão horizontal da viga para carga de $6,8$ kN. 140
Figura 4.1 – Corpo de prova cilíndrico nas configurações danificada e não danificada efetiva. 146
Figura 4.2 – Determinação da configuração efetiva não danificada pelos métodos de separação. 148
Figura 4.3 – Curvas tensão-deformação descritas pelas variáveis de dano de Mazars. . . . 157
Figura 4.4 – Curva tensão versus deformação com os diferentes estágios de dano. 159
Figura 4.5 – Malha, condições de contorno e distribuição do dano na viga. Malha definida com a utilização de elementos com ordem de aproximação cúbica. 161
Figura 4.6 – Análise não linear física com elementos previamente definidos. 161
Figura 4.7 – Fluxograma do código para análise de dano com elementos fantasmas. . . . 164
Figura 4.8 – Uso de malha fantasma com região estrategicamente determinada. 165
Figura 4.9 – Uso de malha fantasma com elementos dispersos aleatoriamente. 165
Figura 4.10–Propriedades geométricas e condições de contorno dos sólidos. 167
Figura 4.11–Resultados obtidos na simulação da tração: (a) curva tensão versus deformação e (b) mapa de cores dos deslocamentos verticais e índice de dano. . . . 167
Figura 4.12–Resultados obtidos na simulação da compressão: (a) curva tensão versus deformação e (b) mapa de cores dos deslocamentos verticais e índice de dano. 168
Figura 4.13–Propriedades geométricas e condições de contorno das simulações. 169
Figura 4.14–Discretização em mesoescala do sólido simulado. 170
Figura 4.15–Curva tensão versus deformação dos corpos de prova ensaiados. 170
Figura 4.16–Mapeamento dos deslocamentos no concreto. 171
Figura 4.17–Mapeamento das tensões no concreto. 171
Figura 4.18–Mapeamento da variável de dano nos elementos de concreto. 172
Figura 4.19–Evolução do dano no concreto. 172
Figura 4.20–Detalhamento da viga de concreto. 173
Figura 4.21–Curva força aplicada versus deslocamento. 174

Figura 4.22–Distribuição do dano. 174
Figura 4.23–Partículas usadas para representar elementos fantasmas dispersos na matriz. 175
Figura 4.24–Malhas com elementos fantasmas dos casos 2-5. 175
Figura 4.25–Malhas com elementos fantasmas dos casos 6-11. 176
Figura 4.26–Curva força versus deslocamento e tempo - Casos 1-5. 176
Figura 4.27–Distribuição do dano na viga - Casos 1-5. 177
Figura 4.28–Curva força versus deslocamento e tempo - Casos 6-11. 178
Figura 4.29–Distribuição do dano na viga - Casos 6-11. 178
Figura 4.30–Resultados com obtidos ao alterar a posição dos elementos fantasmas do caso 8.179
Figura 4.31–Medidas de erros associadas aos resultados dos casos 2 a 11 em relação ao caso 1. 180
Figura 4.32–Propriedades geométricas e condições de contorno do sólido. 181
Figura 4.33–Curva tensão versus deformação no comportamento cíclico. 182
Figura 5.1 – Metodologia do estudo experimental. 186
Figura 5.2 – Condicões de instrumentação dos corpos de prova no ensaio de compressão. 188
Figura 5.3 – Condições de contorno impostas ao corpo de prova para a excitação do modo de vibração (a) longitudinal e (b) flexional. 189
Figura 5.4 – Esquema do posicionamento dos extensômetros e LVDT nos corpos de prova. 190
Figura 5.5 – Esquema do carregamento cíclico e sistema de leitura e aquisição dos resultados. 190
Figura 5.6 – Condições de carregamento avaliados experimentalmente na compressão cíclica. 192
Figura 5.7 – Determinação da evolução do dano em função do histórico de deformações. 193
Figura 5.8 – Sistema do aparato criado para a aquisição das imagens por câmera. 194
Figura 5.9 – Metodologia para avaliação da evolução do dano superficial. 194
Figura 5.10–Resumo do programa experimental. 195
Figura 5.11–Resistência à compressão média dos concretos. 196
Figura 5.12–Vida útil à fadiga dos concretos do lote C30-28. 198
Figura 5.13–Vida útil à fadiga dos concretos do lote C30-90. 199
Figura 5.14–Vida útil à fadiga dos concretos do lote C50. 200
Figura 5.15–Vida útil à fadiga dos concretos do lote C70. 201
Figura 5.16–Variação da vida útil à fadiga. 203
Figura 5.17–Vida útil à fadiga média de todos os concretos ensaiados. 203
Figura 5.18–Histórico das deformações máximas dos concretos do lote C30-90. 205
Figura 5.19–Histórico das deformações máximas dos concretos do lote C50. 206
Figura 5.20–Histórico das deformações máximas dos concretos do lote C70. 207
Figura 5.21–Envoltórias das curvas de deformação máxima. 208
Figura 5.22–Taxa de deformação versus vida útil à fadiga. 210
Figura 5.23–Acúmulo de dano em função da técnica de avaliação. 211
Figura 5.24–Evolução do dano determinada pela TEI para concretos do lote C30-28. . . 212

Figura 5.25–Evolução do dano determinada pela TEI para concretos do lote C30-90. . . 213
Figura 5.26–Evolução do dano determinada pela TEI para concretos do lote C50. 213
Figura 5.27–Evolução do dano determinada pela TEI para concretos do lote C70. 213
Figura 5.28–Dano determinado após primeiro ciclo de carregamento. 214
Figura 5.29–Acúmulo de dano determinado por processamento de imagem e técnica TEI. 216
Figura 5.30–Imagens binarizadas de amostras após ensaio de compressão cíclica. 217
Figura 6.1 – Metodologia adotada no desenvolvimento do modelo. 231
Figura 6.2 – Distribuição: (a) resistência à compressão (MPa); (b) razão entre nível mínimo de tensão e resistência à compressão (%); (c) razão entre nível máximo de tensão e resistência à compressão (%); (d) frequência de carregamento (Hz); e (e) razão R. 234
Figura 6.3 – Coeficiente de correlação de Pearson e perfil de distribuição dos parâmetros. 235
Figura 6.4 – Etapas da regressão não linear multivariada. 236
Figura 6.5 – Performance do modelo: (a) distribuição amostral dos resíduos; (b) histograma dos resíduos; (c) comparação entre valores preditos e observados; e (d) percentil residual. 240
Figura 6.6 – Resultados da análise de aplicabilidade dos modelos. 242
Figura 6.7 – Parâmetros estatísticos das variáveis e do modelo. 243
Figura 6.8 – Efeito de f_c e f_h na VUF em (a) gráfico de superfície e (b) contornos de nível.244
Figura 6.9 – Efeito de f_h e S_{max} na VUF em (a) gráfico desuperfície e (b) contornos de nível. 245
Figura 6.10–Efeito de f_c e S_{min} na VUF em (a) gráfico desuperfície e (b) contornos de nível.246
Figura 6.11–Metodologia adotada no desenvolvimento da formulação. 247
Figura 6.12–Relação entre o dano e os parâmetros de entrada do modelo. 249
Figura 6.13–Performance do modelo: (a) distribuição amostral dos erros; (b) histograma dos erros; (c) comparação entre valores preditos e observados; e (d) percentil residual. 254
Figura 6.14–Resultados da análise de aplicabilidade dos modelos. 255
Figura 6.15–Parâmetros estatísticos das váriaveis e do modelo. 256
Figura 6.16–Fluxograma da análise de fadiga em concretos submetidos à compressão cíclica.259
Figura 6.17–Propriedades geométricas e condições de contorno das simulações. 261
Figura 6.18–Evolução do dano no concreto C70-S7F5 simulado com domínio homogêneo. 262
Figura 6.19–Malhas empregadas na modelagem em mesoescala e parâmetros de dano. . . 263
Figura 6.20–Comparação dos resultados obtidos com malhas homogênea e heterogênea. . 264
Figura 6.21–Evolução da deformação máxima longitudinal do corpo de prova. 264
Figura 6.22–Mapa de cores referente à evolução do dano total no corpo de prova. 265
Figura 6.23–Evolução do dano no concreto C50-S7F125 modelado em mesoescala. . . . 266
Figura 6.24–Evolução do dano no concreto C30-S5F25 modelado em mesoescala. 267
Figura 6.25–Evolução da deformação máxima longitudinal dos corpos de prova. 267

Figura 6.26–Mapa de cores referente à evolução do dano total no corpo de prova. 268
Figura 6.27–Propriedades geométricas e condições de contorno das simulações. 269
Figura 6.28–Dano acumulado em concretos submetidos à compressão cíclica com $S_{max} = 0,7$. 270
Figura 6.29–Evolução do dano nos concretos submetidos à compressão cíclica com $S_{max} = 0,5$. 271
Figura 6.30–Evolução do dano nos concretos submetidos à compressão cíclica com $f_r = 0,5$ Hz. 271
Figura 6.31–Evolução do dano em função de f_c em (a) gráfico de superfície e (b) mapas de contorno. 272
Figura 6.32–Evolução do dano em função de f_h em (a) gráfico de superfície e (b) mapas de contorno. 273
Figura 6.33–Evolução do dano em função de S_{max} em (a) gráfico de superfície e (b) mapas de contorno. 273
Figura 6.34–Propriedades geométricas, condições de contorno e malhas das simulações. . 274
Figura 6.35–Partículas usadas para representar os elementos fantasmas. 275
Figura 6.36–Trajetória de equilíbrio do pilar. 276
Figura 6.37–Evolução dos deslocamento horizontal e dano no pilar. 277
Figura 6.38–Mapa de cores referente à evolução do dano no pilar. 277

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 – Modelos baseados nos conceitos de vida útil. 37
Tabela 1.2 – Modelos baseados na mecânica do dano. 37
Tabela 3.1 – Comparação entre os deslocamento máximos (cm). 128
Tabela 3.2 – Parâmetros da discretização dos agregados graúdos. 131
Tabela 4.1 – Limite dos parâmetros do modelo de dano de Mazars. 157
Tabela 5.1 – Caracterização física dos agregados. 186
Tabela 5.2 – Consumo de materiais dos concretos. 187
Tabela 5.3 – Propriedades mecânicas aos 28 dias do concreto C30-28. 196
Tabela 5.4 – Propriedades mecânicas aos 90 dias do concreto C30-90. 197
Tabela 5.5 – Propriedades mecânicas aos 90 dias do concreto C50. 197
Tabela 5.6 – Propriedades mecânicas aos 90 dias do concreto C70. 197
Tabela 5.7 – Vida útil à fadiga aferida nos concretos lote C30-28. 201
Tabela 5.8 – Vida útil à fadiga aferida nos concretos lote C30-90. 201
Tabela 5.9 – Vida útil à fadiga aferida nos concretos lote C50. 202
Tabela 5.10–Vida útil à fadiga aferida nos concretos lote C70. 202
Tabela 5.11–Dano nos concretos C30-28 com nível máximo de tensão de 50%. 218
Tabela 5.12–Dano nos concretos C30-28 com nível máximo de tensão de 70%. 218
Tabela 5.13–Dano nos concretos C30-90 com nível máximo de tensão de 50%. 218
Tabela 5.14–Dano nos concretos C30-90 com nível máximo de tensão de 70%. 218
Tabela 5.15–Dano nos concretos C50 com nível máximo de tensão de 50%. 219
Tabela 5.16–Dano nos concretos C50 com nível máximo de tensão de 70%. 219
Tabela 5.17–Dano nos concretos C70 com nível máximo de tensão de 50%. 219
Tabela 5.18–Dano nos concretos C70 com nível máximo de tensão de 70%. 219
Tabela 6.1 – Parâmetros estatísticos dos dados. 233
Tabela 6.2 – Parâmetros da formulação de VUF. 238
Tabela 6.3 – Parâmetros de performance do modelo de VUF. 240
Tabela 6.4 – Parâmetros estatísticos dos dados. 250
Tabela 6.5 – Parâmetros da formulação de dano. 252
Tabela 6.6 – Parâmetros de performance do modelo de dano. 253

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 23
1.1 Estado da Arte 26
1.1.1 Estudos numéricos 27
1.1.1.1 Modelos relacionados ao conceito de vida útil 28
1.1.1.2 Modelos associados à deformabilidade do material 31
1.1.2 Estudos experimentais e fenomenológicos 38
1.2 Motivações e justificativa do trabalho 58
1.3 Objetivos 63
1.3.1 Objetivos específicos 63
1.4 Metodologia 63
1.5 Organização da tese 65

2 CARGAS CÍCLICAS NO CONCRETO 67
2.1 Considerações iniciais 67
2.2 Cargas cíclicas: definições e conceitos 69
2.3 Fadiga no concreto 72
2.3.1 Influência de parâmetros internos 74
2.3.2 Influência de parâmetros externos 80
2.4 Modelos de vida útil à fadiga 85
2.5 Conclusão do capítulo 95

3 MECÂNICA DO CONTÍNUO 97
3.1 Não linearidade geométrica 97
3.2 Cinemática dos sólidos deformáveis 98
3.2.1 Configuração de um corpo 99
3.2.2 Mudança de volume 101
3.2.3 Tensor de estiramento à direita de Cauchy-Green 102
3.2.4 Tensor de deformação Green-Lagrange 102
3.2.5 Energia específica de deformação 103
3.2.6 Lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff 104
3.3 Princípios fundamentais da mecânica dos sólidos 105
3.4 Modelagem de compósitos via MEFP 107
3.4.1 Formulação 108
3.4.2 Solução do sistema não linear 110
3.4.3 Elemento bidimensional (representação da matriz e partículas) 112
3.4.3.1 Forças internas e Hessiana 113
3.4.4 Elemento Finito linear (representação de fibras) 115
3.4.5 Elementos compósitos 118
3.5 Exemplos numéricos 122
3.5.1 Pilar excêntrico - Não linearidade geométrica com material homogêneo . 122
3.5.2 Viga reforçada - Não linearidade geométrica com material heterogêneo . . 125
3.5.3 Módulo de elasticidade - Distribuição dos elementos de partículas 129

3.5.4 *Viga de concreto armado - Modelagem trifásica* *137*
3.6 **Conclusão do capítulo** **140**

4 **MECÂNICA DO DANO** **143**
4.1 **Mecânica do dano contínuo** **143**
4.1.1 *Conceitos fundamentais* *145*
4.1.2 *Decomposição da varíavel de dano em uma dimensão* *147*
4.1.3 *Decomposição da variável de dano em três dimensões* *151*
4.1.4 *Lei constitutiva* *153*
4.2 **Modelagem do dano usando elementos fantasmas** **160**
4.2.1 *Estratégia numérica proposta* *160*
4.3 **Exemplos numéricos** **166**
4.3.1 *Ensaio de tração e compressão - Análise não-linear física* *166*
4.3.2 *Viga - Análise de performance dos elementos fantasmas* *173*
4.3.3 *Compressão cíclica - Curva de trajetória* *181*
4.4 **Conclusão do capítulo** **183**

5 **ESTUDO EXPERIMENTAL DA FADIGA** **185**
5.1 **Programa experimental** **185**
5.1.1 *Seleção e caracterização dos materiais* *186*
5.1.2 *Dosagem e produção dos concretos* *187*
5.1.3 *Descrição dos ensaios e equipamentos* *187*
5.1.4 *Resumo do programa experimental* *195*
5.2 **Resultados e discussão** **195**
5.2.1 *Ensaios de caracterização* *195*
5.2.2 *Vida útil à fadiga* *198*
5.2.3 *Histórico de deformações* *204*
5.2.4 *Análise da evolução e acúmulo de dano* *211*
5.2.5 *Análise da evolução da fissuração superficial* *215*
5.3 **Conclusão do capítulo** **220**

6 **MODELAGEM DO ACÚMULO DE DANO EM CONCRETOS SOB COMPRESSÃO CÍCLICA** **221**
6.1 **Dano acumulado na fadiga** **221**
6.1.1 *Estágios da fratura na fadiga* *221*
6.1.2 *Dano acumulado* *223*
6.2 **Modelos de Regressão Multivariada** **226**
6.3 **Proposição de formulação preditiva da VUF** **231**
6.3.1 *Coleta dos dados* *232*
6.3.2 *Análise dos dados e preparação da modelagem* *233*
6.3.3 *Formulação da VUF* *236*
6.3.4 *Validação e performance da formulação* *238*
6.4 **Proposição de lei de dano acumulado** **246**
6.4.1 *Coleta e preparação dos dados* *248*
6.4.2 *Formulação do dano acumulado* *250*
6.4.3 *Validação e performance da formulação* *252*
6.5 **Acoplamento dos modelos ao código de análise mecânica** **257**
6.6 **Exemplos numéricos** **259**
6.6.1 *Compressão cíclica - Validação do código* *260*

6.6.2 Compressão cíclica - Estudo paramétrico 268
6.6.3 Pilar de concreto armado - Análise de fadiga 274
6.7 Conclusão do capítulo 278

7 CONCLUSÕES 281

REFERÊNCIAS 289

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Estruturas de concreto são geralmente projetadas diante da hipótese de que as cargas que atuarão ao longo de sua vida útil serão estáticas e que os elementos estruturais trabalham em regime elástico linear (ou com baixo nível de danificação). Entretanto, solicitações cíclicas como a ação do vento, as ondas de marés, os abalos sísmicos, os efeitos de temperatura e outras cargas flutuantes (como o tráfego de veículos em uma ponte), podem levar à falha da estrutura sob níveis de tensões abaixo dos estabelecidos em projeto, e isto ocorre devido ao fenômeno da fadiga (GUO, 2014).

De modo a corroborar com os mecanismos externos degradativos do concreto, acrescenta-se a existência de diversos problemas relacionados à ação de cargas cíclicas em baixa frequência, as quais ocasionam a deterioração de componentes estruturais que, somados à solicitação de outras origens, podem levar à ruína da estrutura. Portanto, como as normas de projetos estruturais buscam de forma eficiente conferir integridade e durabilidade às estruturas, torna-se imprescindível o desenvolvimento de métodos confiáveis para prever e modelar o seu comportamento mecânico.

Para se elaborar melhores modelos, deve-se compreender o mecanismo de fadiga dos materiais. A fadiga se refere à deterioração, ou ruptura, de um sólido quando submetido a repetidas cargas e descargas, e que ocorre devido à degradação permanente e progressiva da microestrutura do material (LU; LI; SONG, 2004; SAINI; SINGH, 2020). Logo, a fadiga deve ser considerada no projeto de elementos que trabalham principalmente sob ações de cargas cíclicas, a fim de que os danos permanentes que comprometem a integridade estrutural sejam minimizados.

Com relação à deterioração do concreto, quando se é analisada por meio de ensaios dinâmicos, esta ocorre de forma análoga ao observado em ensaios estáticos. Entretanto, o modo de fissuração, a velocidade de propagação das fissuras e o dano podem ser distintos, em função do nível e da taxa de carregamento ao qual o material é submetido (DOWLING, 2012).

Para a norma internacional ASTM E206-72 (ASTM, 1985), o fenômeno denominado

por fadiga remete a um processo de mudança estrutural, progressivo, permanente e localizado em sólidos submetidos a condições que geram tensões e deformações flutuantes em um ou mais pontos do material. Como exemplos de estruturas de concreto sujeitas a diferentes espectros de carregamento podem ser citados os edifícios, as pontes, as torres eólicas, as estruturas marítimas (*off-shore*), os pavimentos e os elementos que configuram vasos de pressão, e.g. tubulações de sistemas de armazenamento e usinas nucleares (Figura 1.1). Para estes casos, os códigos internacionais ASTM E206-72 (ASTM, 1985) e ACI 215R-92 (ACI, 2002) e o nacional NBR 6118 (ABNT, 2014), especificam apenas verificações para a flexão, sendo recomendada a realização de modelagens e simulações a fim de avaliar a integridade estrutural do elemento e do material como um sistema compósito.

Figura 1.1 – Estruturas de concreto sujeitas a carregamentos cíclicos.

(a) Edíficios. **(b)** Pontes. **(c)** Torres.

(d) Unisas nucleares. **(e)** Estruturas off-shore.

Fonte: (a) Speranza (2012), (b) Retrofutur (2018), (c) Rodrigues e Lúcio (2012), (d) Theregreview (2018), (e) IE (2014).

No Brasil, os projetos de estruturas de concreto armado que consideram, além das cargas de impacto, as cargas cíclicas e o fenômeno de fadiga são realizados há mais de 30 anos, sendo hoje normatizado pela NBR 6118 (ABNT, 2014). Contudo, os critérios existentes consideram a fadiga da armadura, não no concreto, o que requer um conhecimento mais aprofundado do comportamento do compósito para que curvas S-N[1] ou formulações preditivas de vida útil sejam assimiladas nos critérios de cálculo.

Os parâmetros que melhor descrevem o comportamento mecânico de estruturas de concreto sob fadiga são a deformação, o nível de dano e o grau de fissuração. Após a realização de um determinado número de repetições da carga, as fissuras podem adquirir dimensões

[1] Curvas do nível de tensão aplicado no material versus número de ciclos necessários para causar a falha.

significativas, e em alguns casos progredirem até a ruptura do material. Assim, pode-se dizer que a falha não é causada pela fadiga. Ela é decorrente das deteriorações progressivas no material, causadas pela ação das cargas cíclicas associada à perda de rigidez decorrente do fenômeno (DRIEMEIER, 1995). O desenvolvimento das fissuras e o dano associado são mecanismos relativos à meso e macro-estrutura do material, que refletem na não-linearidade das leis constitutivas que descrevem a relação tensão-deformação (KINDRACHUK; THIELE; UNGER, 2015).

Sabe-se que a maioria dos cenários de carregamento relacionados a aspectos de durabilidade é caracterizada por uma degradação constante do concreto. Para problemas de fadiga, a vida útil pode durar milhões de ciclos de carregamento. Como consequência, a maioria dos modelos existentes na literatura se baseiam em abordagens empíricas que definem uma redução das propriedades relevantes do material ou da taxa de propagação de fissuras. Um exemplo típico é a *lei de Paris* (PARIS, 1961), uma formulação empírica que descreve a taxa de crescimento de fissuras de uma amostra entalhada, relacionada a um fator de intensidade de tensão.

Para amostras não entalhadas, a fadiga é geralmente descrita pelo uso das curvas de *Wöhler*, que relacionam o nível de tensão aplicado no material em função da vida útil à fadiga (número de ciclos necessários para causar a falha no material). Com base nas curvas de *Wöhler*, o tempo de vida de uma estrutura sob carga cíclica pode ser estimado. No entanto, essas curvas só podem ser construídas após a realização de um extenso programa experimental, onde diferentes cenários de carregamento são simulados. Acrescenta-se ainda que estas curvas são aplicadas apenas para carregamentos com amplitudes fixas.

Em situações onde as cargas cíclicas apresentam distintas amplitudes, uma teoria alternativa é utilizada: a regra *Palmgren-Miner* (PALMGREN, 1924), a qual representa um acúmulo linear de dano para cada um dos níveis de tensão aplicado. No entanto, essa teoria é refutada por alguns pesquisadores, sendo confrontada por resultados experimentais que demonstram que o dano acumulado não pode ser representado de forma linear (STEPHENS et al., 2000). Assim, formulações de dano acumulativo não-linear foram propostas para sanar as deficiências da suposição anterior (FATEMI; YANG, 1998; TAHERI; VINCENT; LE-ROUX, 2013), onde as principais diferenças dessas abordagens a um modelo constitutivo realista, reside no fato que apenas uma abordagem fenomenológica é empregada para a estimativa da vida útil. Neste caso, a maior parte destes modelos empregam apenas um dos seguintes parâmetros como variável de entrada de seus modelos: energia absorvida pelo material, deformação total, deformação residual ou o dano acumulado. Este aspecto faz com que muitos modelos não sejam aplicáveis, já que são parâmetros de difícil mensuração em situações práticas.

Diversas pesquisas vêm sendo desenvolvidas com o intuito de propor modelos constitutivos que descrevam coerentemente o comportamento não-linear do material, e que apresentem maior praticidade no seu emprego (BALUCH et al., 2003; RAY; CHANDRA KISHEN, 2011; KINDRACHUK; THIELE; UNGER, 2015; KIRANE; BAZANT, 2016; ISOJEH; EL-ZEGHAYAR; VECCHIO, 2017b; BAKTHEER; HEGGER; CHUDOBA, 2019; KEERTHANA;

KISHEN, 2020). O desenvolvimento de técnicas experimentais sofisticadas, que permitem avaliar o comportamento do material e o surgimento de novos métodos numéricos, são fatores que corroboram com a proposição de novas formulações. Somando-se a esse fator, tem-se as diferentes abordagens que podem subsidiar o desenvolvimento das formulações, a exemplo das teorias da elasticidade, plasticidade, mecânica do dano e mecânica da fratura.

Os modelos constitutivos que levam em conta o processo de fissuração como principal fator gerador da não-linearidade física do concreto podem ser classificados em modelos teóricos discretos ou contínuos. Os modelos discretos consideram que o meio é descontínuo desde o surgimento da fissura (em nível microscópico), e são baseados na mecânica da fratura (PAAS; SCHREURS; BREKELMANS, 1993). Os modelos contínuos descrevem o meio de forma contínua, tendo como base relações constitutivas entre a tensão e a deformação (GONÇALVES, 2003). Estes modelos são determinados via mecânica do dano contínuo, considerando efeitos da deterioração do material em nível macroscópico.

As formulações desenvolvidas via mecânica do dano contínuo podem ser divididas em escalares (isotrópicos) e tensoriais (anisotrópicos). Os modelos constitutivos escalares consideram que a degradação do material ocorre de tal modo a manter invariante a propriedade de isotropia inicial (MAZARS; BERTHAUD; RAMTANI, 1990; LU; LI; SONG, 2004). Já nos modelos tensoriais, tem-se a hipótese de que o processo de microfissuração conduz a uma anisotropia do material (PAPA; TALIERCIO, 1996; KUNA-CISKAŁ; SKRZYPEK, 2004; ALLICHE, 2004).

Com relação ao processo de danificação do concreto, as formulações existentes permitem tratar o material como um compósito bifásico, composto por uma fase de agregado e uma fase de cimento ou argamassa (constituída de agregados finos e aglomerante). Os danos identificados em estruturas de concreto podem ser classificados em função do mecanismo de degradação, podendo este ser mecânico, físico, químico ou uma combinação destes (PROENÇA, 1992).

Diante das considerações supracitadas, a teoria da mecânica do dano se apresenta como uma ferramenta eficiente para descrever o comportamento mecânico do concreto, pois possibilita a consideração de efeitos da fissuração do sólido difusa sobre a degradação das propriedades dos materiais. Assim, com intuito de compreender e representar o comportamento do concreto quando submetido a cargas cíclicas, de amplitude constante, neste trabalho é proposto um modelo de dano associado à fadiga, em nível mesoscópico, com uma abordagem numérica inovadora considerando o Método dos Elementos Finitos. A formulação se baseia em aspectos fenomenológicos do mecanismo, observados em um estudo experimental realizado concomitantemente ao desenvolvimento dos códigos.

1.1 Estado da Arte

O principal requisito para que um projeto de estruturas de concreto, sujeitas a cargas cíclicas, seja econômico e seguro remete a uma caracterização profunda da resistência à fadiga

do material. Assim, torna-se necessária uma visão sistêmica e global do comportamento à fadiga para reduzir significativamente o consumo de material, aumentar a vida útil e a confiabilidade destas estruturas.

O cálculo da resistência e vida útil à fadiga do concreto são parâmetros de difícil predição, decorrente da variabilidade dos resultados existentes na literatura, do número de parâmetros que se relacionam ao mecanismo e da heterogeneidade do material, os quais impossibilitam a simulação do comportamento mecânico do concreto, a não ser de forma simplificada.

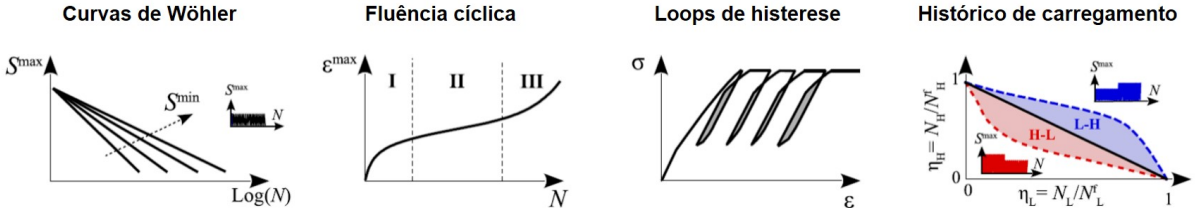
Com o objetivo de sanar estas dificuldades, neste trabalho são explorados alguns aspectos fenomenológicos da fadiga e mecânica do dano, para propor um modelo numérico capaz de representar o acúmulo de dano no concreto decorrente de ações cíclicas.

Dada a interdisciplinariedade da pesquisa desenvolvida, na sequência são apresentados os paradigmas teóricos que fundamentam a tese, contextualizando os temas tratados no trabalho, sejam eles de cunho experimental ou numérico. Este apanhado bibliográfico traz a base necessária para compreensão dos objetivos, metodologia, justificativa e das principais contribuições da presente pesquisa.

1.1.1 Estudos numéricos

A caracterização do comportamento à fadiga do concreto é uma tarefa desafiadora que tem atraído cada vez mais a atenção de pesquisadores ao longo dos últimos anos. Na sequência é apresentada uma revisão bibliográfica tratando dos principais modelos desenvolvidos nos últimos anos. Os trabalhos apresentados abarcam os conteúdos relativos à mecânica do dano associada à fadiga no concreto considerando duas vertentes: uma relacionada ao conceito de vida útil à fadiga e outra baseada na deformabilidade do material.

Figura 1.2 – Aspectos fenomenológicos dos modelos numéricos.



Fonte: Adpatado de Baktheer e Chudoba (2019).

De modo geral, os modelos que vêm apresentando as melhores respostas, e apresentam comportamento mais fiéis a realidade, empregam aspectos relacionados à fenomenologia da fadiga, baseando-se nas curvas de Whohler, fluência cíclica, loops de histerese ou no histórico de carregamento (Figura 1.2).

1.1.1.1 Modelos relacionados ao conceito de vida útil

Formulações analíticas e empíricas foram desenvolvidas ao longo dos últimos anos com o objetivo de representar o comportamento à fadiga do concreto empregando aspectos relacionados à vida útil do material (FATHIMA; KISHEN, 2015; LIU; ZHOU, 2016; ISOJEH; EL-ZEGHAYAR; VECCHIO, 2017a; LIU; ZHOU, 2017; ISOJEH; EL-ZEGHAYAR; VECCHIO, 2017b; HAAR; MARX, 2018; KEERTHANA; CHANDRA-KISHEN, 2018; HUANG; LI; XU, 2019). Nestes modelos, o principal objetivo consiste em descrever os campos de tensão e deformação ou parâmetros de dano em função do número de ciclos de carregamento conforme expresso na Equação 1.1.

$$\omega = f\left(N, S^{max}, S^{min}\right) \tag{1.1}$$

em que ω é o parâmetro relacionado à evolução do dano, N é o número de ciclos de carregamento, S^{max} e S^{min} são as tensões máximas e mínimas, respectivamente. É importante destacar que S representa a tensão real de Cauchy.

O desenvolvimento de modelos empregando esse conceito foi inicialmente apresentado no trabalho de Pfister, Petryna e Stangenberg (2006). Os autores criaram um modelo que relacionava aspectos da plasticidade ao dano por fadiga e ao número de ciclos. Para representar o estado de tensão multiaxial do concreto, os autores aplicaram o modelo de plasticidade de *Drucker Prager*, assumindo a equivalência energética entre os estados uniaxial e multiaxial. Para validar e demonstrar a aplicabilidade do modelo, os autores simularam casos de fadiga em estruturas de concreto, considerando o Método dos Elementos Finitos (MEF), onde os resultados demonstraram a eficiência da formulação proposta.

Outro modelo desenvolvido associando o número de ciclos à mecânica do dano foi proposto por Grünberg e Göhlmann (2006). O modelo triaxial de dano por fadiga foi concebido considerando o postulado apresentado em Pfanner (2003), onde o autor descreve que o estado de dano no concreto sujeito à fadiga está diretamente associado ao trabalho aplicado e ao histórico de carregamento, sendo o índice de dano atrelado à energia dissipada. Entretanto, essa hipótese de dano foi contestada nos anos seguintes, por não ser observada em pesquisas experimentais (ZANUY; ALBAJAR; FUENTE, 2011; ONESCHKOW, 2014), causando assim uma pausa de quase uma década no desenvolvimento de modelos sob essa vertente.

Cerca de dez anos depois, no trabalho desenvolvido por Fathima e Kishen (2015), uma expressão para o potencial de dissipação foi obtida considerando aspectos relacionados à termodinâmica dos processos irreversíveis. Por meio deste potencial, uma lei de evolução do dano foi proposta para o concreto solicitado ciclicamente, utilizando os conceitos da mecânica do dano e da fratura. O modelo é capaz de avaliar o processo de evolução do dano, considerando os estágios de micro e macro-fissuração do concreto. No entanto, a formulação possui limitações que reduzem o seu potencial de aplicabilidade, já que só pode ser empregada em concretos convencionais e para cargas cíclicas com razão nula entre as tensões mínima e máxima.

No modelo proposto por Liu e Zhou (2016), a deformação do concreto sujeito a cargas

cíclicas é expressa em função do número de ciclos de carregamento, conforme Equação 1.2.

$$\varepsilon^{atual}(N) = \varepsilon^0 \alpha \left(\frac{\beta}{\beta - \frac{N}{N_f}} - 1 \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.2}$$

em que ε^0 é a máxima deformação para o primeiro ciclo de carregamento, α, β e p são parâmetros do material e N_f é a vida útil à fadiga do concreto.

A natureza simplificada de abordagens como a realizada por Liu e Zhou (2016) faz com que a previsão da vida à fadiga não seja possível para níveis de carregamento diferentes dos analisados pelos autores, sendo o modelo altamente dependente das condições da modelagem. Essa limitação se deve ao fato de que essas abordagens não descrevem coerentemente o comportamento em nível macroscópico do material, isto é, não refletem os mecanismos dissipativos que regem a propagação do dano por fadiga no concreto.

Sabendo disso, Isojeh, El-Zeghayar e Vecchio (2017a) avaliaram a aplicabilidade de modelos representativos da fadiga no concreto existentes na literatura (ZHANG; PHILLIPS; WU, 1996; GAO; HSU, 1998; ZHANG; PHILLIPS; GREEN, 1998), confrontando os resultados obtidos na aplicação destes com os de uma campanha experimental. Ao analisar o desempenho dos modelos, os autores propuseram alterações de modo que fossem incorporados aspectos relacionados à mecânica do dano, à frequência de carregamento, à razão entre tensão mínima e máxima, e ao formato das curvas de carregamento. Os resultados obtidos pelos autores, considerando as modificações, mostraram que as novas versões dos modelos apresentam maior robustez, gerando melhores estimativas para a previsão da resistência residual do concreto. Ademais, demonstrou-se a importância de acoplar a mecânica do dano às formulações fenomenológicas da fadiga.

Liu e Zhou (2017) propuseram um modelo de evolução do módulo de fadiga, que expressa a relação entre as amplitudes de tensão e deformação. A formulação foi estabelecida tomando como base modelos de evolução da deformação do concreto sujeito à fadiga, e na hipótese de que o módulo de fadiga é inversamente proporcional à amplitude de deformação. Os resultados obtidos com a aplicação do modelo indicaram a sua aplicabilidade para diferentes níveis de tensão aplicado (70% a 90% da resistência), e que o mesmo descreve adequadamente a evolução da deformação máxima, apresentando boa adaptabilidade e acuracidade nos casos analisados.

No mesmo ano, Isojeh, El-Zeghayar e Vecchio (2017b) desenvolveram um modelo constitutivo para o concreto submetido à fadiga na compressão, considerando o acúmulo de deformações em função do número de ciclos de carregamento. A lei de acúmulo de deformações irreversíveis empregada no modelo proposto é dada em função da resistência residual, do módulo secante à fadiga proposto por Liu e Zhou (2017), e do nível de dano. Considerando os resultados obtidos na utilização do modelo, os autores observaram que o módulo de fadiga secante é geralmente maior do que o módulo de elasticidade secante correspondente, demonstrando que a formulação proposta apresenta melhores resultados para a estimativa da deformação máxima em função do número de ciclos aplicado. Os resultados mostraram ainda que, em simulações de

fadiga de alto ciclo, um alto custo computacional está associado à modelagem e, nestes casos, expressar o comportamento da fadiga no concreto usando evoluções da deformação máxima é uma boa alternativa a fim de minimizar tempo de processamento.

Haar e Marx (2018) propuseram um modelo numérico para a determinação da deformação do concreto submetido a cargas cíclicas. O modelo assume que a deformação total é dada em função das componentes de deformação elástica, viscosa, térmica e induzida por dano. Os autores consideraram aspectos fenomenológicos de cada tipo de deformação, associando fatores referentes ao número de ciclos de carregamento e aos níveis de tensão ao qual o material é submetido. Os resultados mostraram que, para os concretos investigados, a componente de deformação induzida por dano é diretamente dependente do logaritmo do número de ciclos referentes à ruptura. A magnitude da componente da deformação viscosa foi especificada em função da duração do ensaio e pelo nível de tensão associada à fluência. Em testes com frequências baixas e durações de teste correspondentemente mais longas, maiores deformações viscosas foram observadas, comparando com os obtidos em ensaios de alta frequência. Ademais, os resultados mostraram que as deformações térmicas geram um alongamento dos corpos de prova, enquanto as componentes de deformação elástica, viscosa e induzida por dano, causam um encurtamento dos elementos.

Um modelo de fadiga para concretos convencionais e submetidos a carregamentos de amplitude variável foi proposto por Keerthana e Chandra-Kishen (2018). O modelo acopla conceitos da mecânica do dano e da fratura por meio de uma energia equivalente, que considera aspectos relacionados à análise dimensional e auto-similaridade. Os efeitos da razão entre as tensões mínima e máxima, e das sobrecargas que aceleram a taxa de propagação de fissuras, foram inseridos na formulação a fim de capturar com maior fidelidade o comportamento do concreto. Experimentos foram realizados concomitantemente para calibrar e verificar a validade do modelo. Os resultados obtidos mostram que a formulação proposta engloba os diferentes mecanismos associados ao comportamento complexo do concreto sob fadiga, e fornece um método racional para calcular a vida útil de estruturas de concreto.

Huang, Li e Xu (2019) propuseram uma formulação para descrever a evolução da deformação de concretos submetidos à fadiga. O modelo (Equação 1.3) é baseado na função de distribuição de Weibull com três parâmetros e considera a lei de evolução da deformação para os três estágios que definem a curva de fluência cíclica. A formulação desenvolvida gera estimativas do nível de deformação do concreto para tensões variando entre zero e a resistência à fadiga do material. Todos os parâmetros do modelo foram determinados para concretos com e sem fibras. Os resultados possibilitaram inferir que a formulação proposta gera estimativas adequadas para a deformação de elementos de concretos sujeitos à fadiga na compressão, flexão e tração.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \lambda \left(-ln\left(1 - \frac{n-1}{N_f}\right)\right)^{\frac{1}{k}} \tag{1.3}$$

em que ε_0 é a deformação para o primeiro ciclo de carregamento, e k e λ são os parâmetros de forma e escala da função de Weibull, respectivamente.

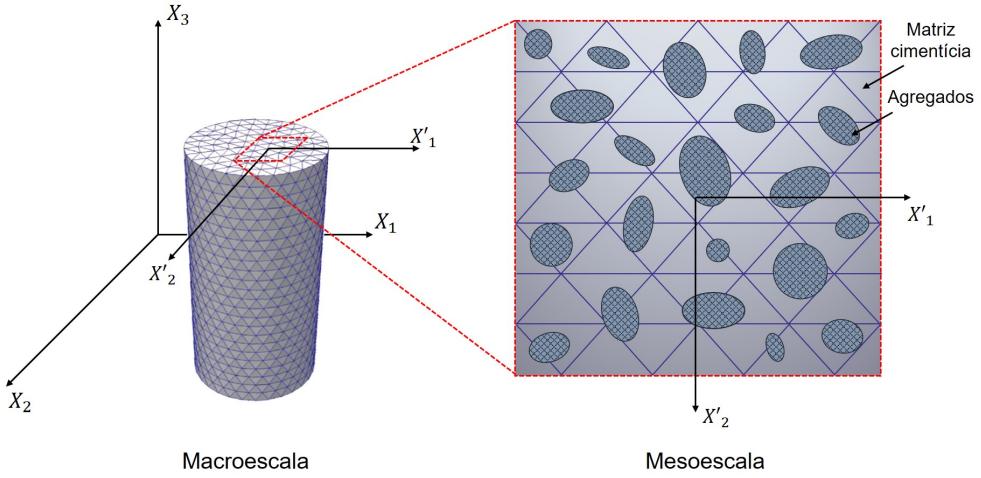
Nota-se uma pequena semelhança entre os modelos desenvolvidos por Liu e Zhou (2016) e Huang, Li e Xu (2019), equações 1.2 e 1.3, respectivamente. De modo geral, os modelos propostos baseados na vida útil à fadiga do concreto consideram que a evolução do dano ou das deformações tem comportamento semelhante à curva de fluência cíclica, sendo geralmente o principal aspecto investigado e empregado no desenvolvimento de modelos.

Diante dos trabalhos apresentados e discutidos nesta seção, é possível observar que é recente o desenvolvimento de modelos que acoplam princípios da mecânica do contínuo e do dano a aspectos relacionados à fenomenologia da fadiga, demonstrando que essa metodologia apresenta uma vertente atual e de grande aplicabilidade.

1.1.1.2 Modelos associados à deformabilidade do material

Com o desenvolvimento de novas tecnologias e com o poder de processamento dos computadores, tornou-se possível a simulação do mecanismo de dano por fadiga, ciclo a ciclo, em níveis de carga subcrítico e para um alto número de ciclos de carregamento. Como resultado, hipóteses mais detalhadas sobre a evolução e propagação do dano por fadiga puderam ser definidas, fornecendo melhores análises do comportamento do concreto sujeito à fadiga. Estes modelos, definidos em macroescala (modelos tensoriais), ou em mesoescala (modelos discretos ou de micro-planos), conforme mostra a Figura 1.3, consideram aspectos relacionados à mecânica do dano ou da fratura, e são concebidos considerando a deformabilidade do material.

Figura 1.3 – Representação dos modelos em macroescala e mesoescala.



Fonte: Própria autoria.

Modelos de plasticidade com dano são usualmente empregados para estabelecer relações tensoriais entre as variáveis de tensão e deformação com as equações constitutivas que representam de forma distribuída os efeitos de dano por fadiga. Com base em uma variável de índice de dano por fadiga, pode-se estabelecer diferentes grupos de modelos tensoriais, por exemplo, modelos baseados na taxa positiva da deformação total, na deformação inelástica ou na deformação referente ao deslizamento dos planos cristalinos. O último é um método que

representa macroscopicamente o comportamento em microescala do material (BAKTHEER; CHUDOBA, 2019).

Um modelo tensorial baseado na taxa positiva de deformação total foi proposto inicialmente por Marigo (1985), onde foram utilizados os princípios da visco-plasticidade para determinar um novo parâmetro de deformação limite do material, de modo a refletir as condições irreversíveis de um carregamento cíclico. Os autores descrevem que o dano por fadiga pode ser expresso em função da taxa positiva da deformação equivalente, conforme Equação 1.4. O mesmo princípio foi mais tarde empregado por Alliche (2004) para representar o comportamento do concreto sujeito às cargas cíclicas de compressão e por Mai et al. (2012), onde foi introduzida uma lei de evolução do dano por meio de leis de potência de uma taxa da deformação equivalente.

$$\omega = f\left(\dot{\varepsilon}_{eq}^{+}\right) \tag{1.4}$$

em que ω refere-se a um parâmetro de evolução do dano, e $\dot{\varepsilon}_{eq}^{+}$ é a taxa positiva da deformação equivalente.

Al-Gadhib et al. (2000) e Baluch et al. (2003) propuseram modelos anisotrópicos para o concreto sujeito à fadiga, onde o conceito de múltiplas superfícies de fissuração foi introduzido. Tal simulação possibilitou a representação com sucesso da evolução do dano por fadiga. Entretanto estes modelos apresentam grandes limitações devido ao custo computacional de processamento para a modelagem do concreto sob altas frequências de carregamento.

Baseando-se na mecânica do dano contínuo, Kindrachuk et al. (2018) desenvolveram uma formulação anisotrópica para a representação da evolução do dano em concretos sujeitos à fadiga por compressão. O modelo é definido por uma regra de salto nos ciclos de carregamento a fim de simular a fadiga de alto ciclo. A formulação foi concebida diante da decomposição de um problema de valor de contorno, considerando o efeito de carregamentos periódicos em micro e macroescala, por aproximações do campo de deslocamento com séries de Fourier.

Considerando a hipótese de que o dano por fadiga está associado ao deslizamento de planos na estrutura cristalina do material, uma correlação entre a taxa de evolução do dano e a taxa de deformação inelástica foi proposta por Kindrachuk, Thiele e Unger (2015), o que possibilitou a determinação de modelos baseados nas taxas de deformações inelásticas, que possuem, de modo simplificado, a configuração da Equação 1.5.

$$\omega = f\left(\varepsilon^{p}, \varepsilon^{vp}\right) \tag{1.5}$$

em que ω refere-se a um parâmetro de evolução do dano, ε^{p} é a deformação plástica e ε^{vp} é a deformação visco-plástica.

De modo semelhante, Wu, Li e Faria (2006) desenvolveram uma formulação relacionando a evolução do dano às taxas de deformação inelásticas, em termos da taxa de liberação de energia. A formulação foi posteriormente avaliada e alterada por Xue e Yang (2014), sendo inseridos os efeitos da fluência, garantido maior fidelidade à representação do mecanismo da fadiga.

Questões relativas à combinação das deformações plásticas, fenomenologicamente

relacionada à evolução do dano por fadiga, foram tratadas e inseridas na formulação desenvolvida por Ren e Li (2013), onde os autores definiram uma relação entre as taxas de dano e deformação. Considerando o mesmo princípio, a correlação entre o índice de dano e a deformação plástica, Grassl e Rempling (2008), Liang, Ren e Li (2016), Grassl e Jirásek (2006) e Liang et al. (2017) desenvolveram modelos para a evolução do dano por fadiga, acoplando aspectos relacionados à termodinâmica. Cabe destacar que Liang, Ren e Li (2016) e Liang et al. (2017) inseriram em suas formulações os efeitos da abertura e fechamento de fissuras, considerando para isso o histórico de carga e descarga, gerando uma boa representação do deslizamento de planos cristalinos do material.

A fim de incorporar e representar adequadamente os efeitos de abertura e fechamento de fissuras e da propagação das mesmas devido à fadiga de baixo ciclo, a formulação dos mecanismos dissipativos foi refinada pela introdução de uma variável representativa da deformação inerente ao deslizamento de planos cristalinos. Essa abordagem foi tratada inicialmente por Mazars, Berthaud e Ramtani (1990), que estabeleceu os princípios da mecânica do dano para a modelagem de materiais quase frágeis, classe esta à qual se insere o concreto.

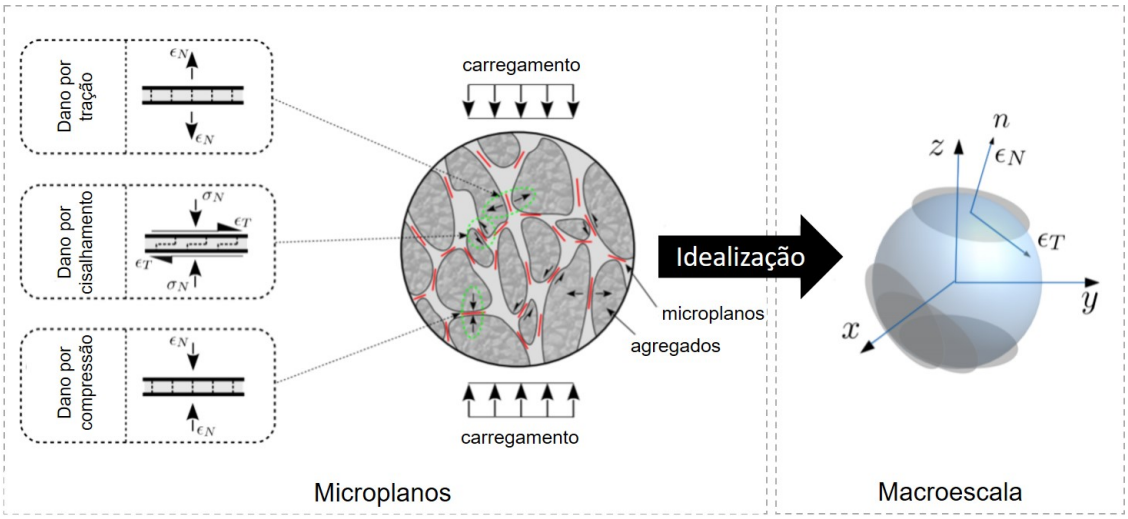
A formulação de Mazars, Berthaud e Ramtani (1990) baseada na termodinâmica estabelece um procedimento geral para a representação da não linearidade física do material, considerando-o como um parâmetro isotrópico, proporcionando um refinamento nas hipóteses de dano, conhecidas até aquele momento. Este método passou a ser amplamente empregado por pesquisadores que realizam a modelagem do material empregando métodos numéricos e desejam representar a não linearidade física do material (DESMORAT, 2006; DESMORAT; RAGUENEAU; PHAM, 2007; RICHARD et al., 2010; ADELAIDE et al., 2010; RICHARD; RAGUENEAU, 2013; LANOYE et al., 2013). Assim, apesar do modelo ser definido como isotrópico, o mesmo gera uma resposta para a anisotropia do material (na forma fraca) devido à relação do dano com o tensor de deformações internas, que carrega em sua definição informações referentes ao deslizamento dos planos cristalinos.

Com o objetivo de representar o comportamento mecânico de materiais heterogêneos com maior fidelidade, especialmente a danificação do material quando submetido a solicitações externas, modelos de microplanos foram desenvolvidos por meio de formulações que consideram as propriedades e deformabilidade do material em um nível mesoscópico (JIRÁSEK, 1999; KUHL; STEINMANN; CAROL, 2001; CANER; BAŽANT, 2013a; CANER; BAŽANT, 2013b; KIRANE; BAŽANT, 2015).

Os modelos de microplanos são definidos por meio das deformações macroscópicas em um ponto material que, sobre uma esfera de raio unitário centrada neste ponto, são extrapoladas para um conjunto de microplanos, com direções normais à superfície esférica (Figura 1.4). Dessa forma, introduz-se um nível de representação (em mesoescala) abaixo do nível de análise (em macroescala). Mesmo que este nível não reflita a microestrutura do material, ele pode representar o índice de dano e sua evolução anisotrópica durante o carregamento. De acordo com Caner e Bažant (2013a), os modelos baseados em microplanos empregam o conceito de

restrição cinemática e homogeneização de tensões para estabelecer uma relação entre o nível macroscópico de análise do material, e os microplanos empregados para a sua discretização.

Figura 1.4 – Representação da modelagem com microplanos.



Fonte: Adaptado de Baktheer et al. (2019).

A consistência termodinâmica das formulações que descrevem os modelos de microplanos foi avaliada e comprovada por Kuhl, Steinmann e Carol (2001) e Carol, Jirásek e Bažant (2001), onde os autores verificaram que os processos termodinâmicos decorrentes dos ciclos de carregamento e descarregamento são melhores representados em modelagens desenvolvidas em nível mesoscópico. O sucesso referente aos resultados obtidos nos trabalhos de Kuhl, Steinmann e Carol (2001) e Carol, Jirásek e Bažant (2001) podem ser atrelados ao trabalho pioneiro de Jirásek (1999), onde o autor desenvolveu um modelo implicitamente consistente com os mecanismos dissipativos e não-dissipativos do processo da fadiga, considerando os preceitos da modelagem com microplanos.

Uma característica particularmente atraente dos modelos de microplanos remete à possibilidade de refletir a distribuição das tensões triaxiais em um único ponto material, considerando níveis subcríticos de carregamento (BAKTHEER; CHUDOBA, 2019). Este aspecto foi abordado e explorado por Kirane e Bažant (2015), onde os autores conseguiram descrever os termos dissipativos devido aos danos por fadiga, relacionando-os aos mecanismos de desintegração do material.

De modo geral, pode-se dizer que o principal objetivo dos modelos de fadiga no concreto que empregam os microplanos consiste em relacionar a evolução do dano à uma medida cumulativa de deformação, sendo o comprimento da trajetória da deformação volumétrica associada aos processos de carga e descarga (Equação 1.6), principal parâmetro representativo destes modelos.

$$\omega = f\left(\varepsilon^{v,cum}\right) \tag{1.6}$$

em que ω refere-se a evolução do dano e $\varepsilon^{v,cum}$ remete ao comprimento da trajetória da deformação volumétrica.

Na mesma linha de desenvolvimento, Baktheer e Chudoba (2018) propuseram um modelo considerando microplanos para a representação da fadiga no concreto, baseando-se também na termodinâmica inerente aos processos de carregamento e descarregamento. No entanto, os autores empregaram a trajetória das deformações de cisalhamento para descrever a evolução do dano por fadiga, onde os resultados mostraram que, o emprego destas deformações pode melhor descrever o processo de deslizamento dos planos cristalinos do material.

Mesmo diante do crescente emprego dos modelos de microplanos para a representação e modelagem da fadiga no concreto, as simulações com esta técnica entregam uma resolução muito refinada dos efeitos dissipativos, apresentando grande limitação de aplicação em problemas de fadiga, devido ao grande número de ciclos envolvidos (BAKTHEER; CHUDOBA, 2019).

Muitos dos modelos existentes são concebidos para aplicações específicas, onde as formulações são desenvolvidas considerando a resistência à fadiga do material. De acordo com Aguado (1990), os limites de resistência à fadiga são determinados pela classificação do número de ciclos que o material suporta, havendo duas regiões distintas, das quais: até 10^4 ciclos considera-se um regime de fadiga de baixo ciclo; para um número de ciclos variando entre 10^4 e 10^7 (ou mais), fadiga de alto ciclo.

A fim de contornar os problemas citados anteriormente, Kiewel, Aktaa e Munz (2000) e Maekawa, Fukuura e Soltani (2008) avaliaram a utilização dos modelos de microplanos na representação da fadiga de alto ciclo, considerando uma pequena parcela do histórico de carregamento, sendo os resultado obtidos estendidos para todo o carregamento. No entanto, as informações alcançadas com este procedimento demonstraram uma baixa correlação com os valores obtidos experimentalmente (MOSLEMIAN; KARLSSON; BERGGREEN, 2011), e os erros associados ao emprego desta técnica não apresentam relação com a razão entre a dimensão da parcela do histórico de carregamento modelada e o número de ciclos responsável pela ruptura do material. Assim, na maioria dos casos, se torna inviável a aplicação desses modelos para a análise do comportamento do concreto na fadiga de médio e alto ciclo.

A modelagem em mesoescala da fadiga no concreto também pode ser realizada por meio de modelos discretos, os quais geram uma caracterização simples e transparente dos efeitos dissipativos elementares, isto é, das descontinuidades (fissuras) ou do desenvolvimento de tensões internas de tração. Estes modelos fornecem uma visão sistêmica sobre a fenomenologia dos mecanismos de danificação do material, podendo auxiliar na formulação de hipóteses referentes à evolução do dano por fadiga no concreto, em um nível mesoscópico.

Uma classe bem conhecida de modelos discretos são os "lattice models", que possibilitam a representação de três a quatro fases do material: os vazios, a pasta de cimento, os agregados e a interface agregado/pasta. Essa técnica de modelagem requer um grande poder de processamento para a resolução das formulações que regem o fenômeno simulado, demandando um alto custo computacional. Mesmo diante desta limitação, estes modelos apresentam atualmente uma

grande capacidade de mapeamento de diferentes problemas correlatos à fratura dos materiais (ELIÁŠ; LE, 2012; VAN-MIER, 2012; TOMPKINS; KHAZANOVICH; BOLANDER, 2015), aos efeitos de baixas e altas temperaturas (PHAM et al., 2020; SHEN et al., 2020), aos fenômenos de transporte (GRASSL et al., 2012; WANG; BAO; UEDA, 2016) e à fadiga (GRASSL; REMPLING, 2008; GUO et al., 2009; CHANG et al., 2019; GAO; KOVAL; CHAZALLON, 2019).

A fim de contornar as limitações da aplicação dos modelos discretos, formulações simplificadas foram desenvolvidas ao longo dos últimos anos considerando a associação individual da rigidez a cada fase do material (CUSATIS; PELESSONE; MENCARELLI, 2011; ELIÁŠ et al., 2015). Com isso, o grau de complexidade inerente ao processo de resolução dos sistemas de equações foi significativamente reduzido, diminuindo o custo computacional de processamento e potencializando a sua aplicação.

Ainda é recente a aplicação destes modelos na representação do efeito da fadiga no concreto. Eliáš e Stang (2012) empregou modelos discretos para representar e avaliar a propagação de fissuras no concreto submetido à compressão cíclica. Os resultados mostraram que a técnica descreve com certo nível de fidelidade a evolução da taxa de crescimento das fissuras, apresentando bons resultados apenas até a metade do histórico do carregamento cíclico.

Também fazendo o uso de modelos discretos, Zhaodong e Jie (2018) desenvolveram uma formulação considerando os efeitos da fadiga por compressão, no qual a energia de dissipação é estabelecida em um nível mesoscópico, diferente dos trabalhos desenvolvidos até aquele instante, onde diferentes rigidezes eram associadas a cada fase do material.

Considerando a mesma estratégia de adotar diferentes parâmetros para cada fase do material, recentemente Wang (2019) propôs um modelo no qual a falha do material é descrita isoladamente para cada mesoelemento. O autor identificou a falha por meio de valores críticos das deformações e energia dissipada acumulada. Os resultados obtidos mostraram que os modelos de Zhaodong e Jie (2018) e de Wang (2019) reproduzem razoavelmente bem a aleatoriedade dos resultados experimentais e a evolução do dano decorrente da ação de cargas cíclicas.

Também com o propósito de simular em mesoescala o comportamento mecânico do concreto, considerando o fenômeno de fadiga, Sun e Xu (2021) propuseram uma formulação de dano que incopora aspectos fenomenológicos da fadiga e da mecânica da fratura. No modelo numérico desenvolvido, um procedimento controlado pelo gradiente de evolução de dano foi empregado para acelerar a simulação numérica da degradação do concreto. Neste modelo, o concreto é simulado em um sistema bifásico (pasta e agregados), considerando elementos finitos distribuídos aleatoriamente, conforme as funções de distribuição Gaussianas representativas dos materiais.

Além de representar o material em nível mesoscópico, Sun e Xu (2021) empregaram uma nova estratégia numérica para a redução do tempo computacional de processamento, denominada, *salto de ciclos de bloco*. Nesta abordagem numérica, faz-se necessário, a priori, realizar a simulação do comportamento mecânico de uma amostra de concreto para um bloco de

ciclos de carga e descarga, onde é definido o gradiente de dano associado ao bloco. Definido o gradiente de dano do bloco, na sequência é possível realizar a modelagem completa da vida útil do concreto, fazendo a normalização do tempo total de vida do material em função do número de ciclos do bloco. Com essa técnica os autores obtiveram resultados com bons níveis de acuracidade e uma significativa redução do tempo de processamento da modelagem, um item que vem sendo objeto de estudo pelos pesquisadores da área, já que os modelos atuais conseguem representar com fidelidade a fadiga, mas demandam grande tempo de processamento.

Ao analisar os modelos representativos da fadiga no concreto, observa-se que a maior parte deles foram desenvolvidos no decorrer dos últimos 20 anos. Isso se deve ao avanços na capacidade de processamento dos computadores e ao maior entendimento do fenômeno. Nos dias atuais, são diversas as estratégias empregadas na representação numérica da fadiga, sendo que as formulações baseadas na mecânica do dano acoplada aos conceitos de vida útil geram resultados com maior fidelidade, além de possibilitarem fácil implementação, quando comparado com modelos desenvolvidos via mecânica da fratura.

Nas Tabelas 1.1 e 1.2 são apresentados os modelos que apresentaram as melhores respostas para a simulação da fadiga, e que apresentam aspectos fenomenológicos acoplados em suas formulações. Estes modelos serviram de embasamento para a concepção das formulações propostas nesta tese, e foram escolhidos por representarem com coerência o comportamento do concreto sob ações cíclicas, e serem de fácil implementação.

Tabela 1.1 – Modelos baseados nos conceitos de vida útil.

Modelos com parâmetros de deformação	**Modelos com parâmetros de danificação**
Huang, Li e Xu (2019)	Pfanner (2003)
Liu e Zhou (2016)	Pfister, Petryna e Stangenberg (2006)
Isojeh, El-Zeghayar e Vecchio (2017b)	Sun e Xu (2021)

Fonte: Própria autoria.

Tabela 1.2 – Modelos baseados na mecânica do dano.

Modelos tensoriais	**Modelos com microplanos**	**Modelos discretos**
Alliche (2004)	Kirane e Bažant (2015)	Guo et al. (2009)
Desmorat, Ragueneau e Pham (2007)	Caner e Bažant (2013b)	Zhaodong e Jie (2018)
Kindrachuk, Thiele e Unger (2015)	Baktheer e Chudoba (2019)	Wang (2019)

Fonte: Própria autoria.

Dentre os modelos elencados nesta seção, atenção especial deve ser dada ao modelo de Sun e Xu (2021), onde os autores fizeram o uso do dano acumulado para representar a degradação do concreto ao ser submetido a ciclos de carga e descarga. A estratégia proposta pelos autores, proporciona a redução do tempo de processamento das simulações, apresentando-se uma estratégia interessante para se embasar. Porém, ao utilizar o dano acumulado, faz-se necessário conhecer a priori, a vida útil à fadiga do concreto, um parâmetro que vem sendo

estudado experimentalmente em diversas pesquisas ao longo dos últimos 100 anos, mas que ainda não possui seu comportamento bem definido para o concreto.

Tendo isso em mente, na sequência é apresentado um apanhado bibliográfico acerca dos estudos experimentais disponíveis na literatura, a fim de compreender o comportamento à fadiga do concreto. O levantamento bibliográfico e a falta de dados para o desenvolvimento de formulações representativas da fadiga, deram subsídios para a definição de uma campanha experimental que ocorreu concomitantemente ao desenvolvimento do modelo proposto .

1.1.2 Estudos experimentais e fenomenológicos

O fenômeno da fadiga foi observado pela primeira vez no início do século XIX, quando peças de máquinas e estruturas constituídas de aço começaram a falhar em pouco tempo de serviço. Apesar de produzidos com aço, material dúctil, os componentes estruturais exibiam características de fraturas frágeis. Rankine (1843) publicou o primeiro trabalho na área, intitulado *"As causas da ruptura inesperada de eixos ferroviários"*, no qual dizia que o material apresentava "cristalização", o qual o tornava frágil devido às tensões flutuantes ao qual era submetido (NORTON, 2013).

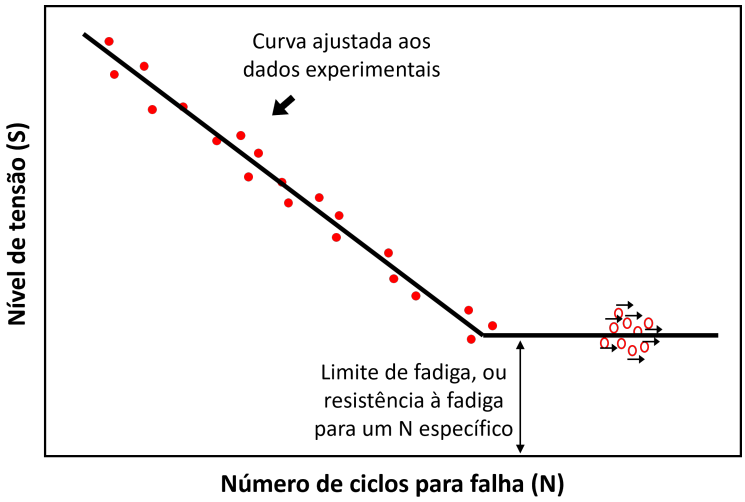
O engenheiro alemão August Wohler (1819-1914) realizou a primeira investigação científica (por um período de 12 anos) sobre o que estava sendo chamado de falha por fadiga, testando, em laboratório, eixos de trem até a falha considerando solicitações cíclicas. Wohler publicou suas descobertas em 1870, identificando o número de ciclos ao qual o material entra em ruptura e a descoberta da existência de uma tensão limite, denominada hoje como resistência à fadiga. O diagrama *S-N* ou curva de *Wohler*, mostrado na Figura 1.5, tornou-se a forma padrão de caracterização do comportamento de materiais submetidos a solicitações cíclicas, sendo ainda amplamente empregado, apesar de outras medidas estarem disponíveis.

Ao longo do século XX muitos trabalhos foram desenvolvidos sobre o mecanismo de fadiga e o efeito da ação de cargas cíclicas em materiais dúcteis como o aço. No entanto, para as estruturas de concreto, o fenômeno só começou a ser investigado cerca de 100 anos após iniciados os estudos com o aço e, desde então, muito se foi desenvolvido considerando tal temática por meio dos mais diversos tipos de ensaios, sejam eles de flexão, tração direta, tração alternada com compressão ou compressão pura.

O primeiro trabalho que traz informações acerca do efeito de cargas repetidas no concreto foi reportado em Ornum (1903), onde o autor analisou experimentalmente o efeito da fadiga por compressão em pequenos elementos, verificando que o material fraturava sob cargas de baixa magnitude. Mesmo após essa publicação, os estudos com o concreto só foram impulsionados com o trabalho de Clemmer (1922), 20 anos depois, onde foi observado que o concreto possui um comportamento distinto ao do aço quando submetido a carregamento cíclico, e que este mecanismo de degradação estava correlacionado aos princípios da mecânica da fratura, introduzidos na mesma década por Griffith (1921).

Graf e Brenner (1936) foram os pioneiros em gerar diagramas *S-N* para representar a

Figura 1.5 – Curva *S-N* típica de um material metálico.



Fonte: Própria autoria.

vida útil de corpos de prova de concreto sujeitos a ação de cargas repetidas e considerando a probabilidade de ruptura do material. Estas curvas são conhecidas como *S-N-P*, e possibilitam a estimativa do número de ciclos necessários para causar a falha no material associada ao nível de tensão aplicada e em função da natureza da variação e dispersão dos dados. Os resultados apresentados por Graf e Brenner (1936) possibilitaram, por exemplo, que Raju (1969) inferisse, por meio de experimentos com concretos submetidos a cargas cíclicas com frequência de carregamento de 4 Hz, que a vida útil à fadiga possui uma distribuição aproximadamente log-normal. Além disso, inferiu que as curvas *S-N-P* derivadas da função de distribuição normal acumulada, da relação *S-N*, são geralmente válidas para corpos de prova submetidos a níveis de tensão máxima entre 65% e 85%.

McCall (1958) também realizou testes de fadiga no concreto. Os resultados possibilitaram a determinação de relações entre o nível de tensão aplicado, o número de ciclos responsáveis por causar a falha e a probabilidade de falha. O autor verificou que essa relação pode ser facilmente mapeada para concretos submetidos a altos níveis de tensão, o que não acontece quando baixas tensões são aplicadas. Testes de fadiga também foram realizados por Antrim e McLaughlin (1959), considerando dois tipos de concreto, um convencional e outro com ar incorporado. As amostras foram testadas em níveis de tensão máxima de 50%, 60%, 70%, 80% e 90% da resistência à compressão estática dos corpos de prova. Dentro dos limites da investigação, os autores notaram que o comportamento à fadiga do concreto com ar incorporado é semelhante ao convencional. No entanto, os resultados obtidos para o concreto com ar incorporado geraram uma menor variabilidade no que diz respeito às propriedades de fadiga e de resistência.

Até a década de 1960, todas as pesquisas haviam sido realizadas para concretos secos, sendo a primeira com concretos em condição saturada reportada por Karanfilov (1967). O autor investigou o efeito de cargas cíclicas em concretos secos e totalmente saturados. Foram investigados diversos valores de níveis máximos de tensão, sendo mantida a relação de $0,3$ entre

o valor máximo e o mínimo. Os resultados mostraram que a resistência à fadiga de concretos em condição saturada é muito superior ao dos concretos secos. Além disso, caso considerado o número de ciclos de $2x10^6$ como sendo o valor limite que gera uma vida infinita, os concretos saturados possuem vida infinita quando submetidos à um nível de tensão máximo inferior a $71,5\%$ da resistência à compressão, enquanto que os concretos secos possuem um limitante de $36,5\%$. Mais tarde, dando continuidade às suas pesquisas, Karanfilov (1969) realizou ensaios em concretos totalmente saturados, considerando desta vez quatro diferentes relações entre a tensão máxima e mínima ($0,1$, $0,3$, $0,5$ e $0,7$) a uma frequência de carregamento de $6,67$ Hz. Com isto, o autor observou uma relação linear entre a razão das tensões mínima e máxima e a resistência á fadiga.

A importância do nível de tensão aplicado em corpos de prova de concreto no processo de crescimento de fissuras é ilustrada pioneiramente no trabalho de Hansen (1968), onde amostras foram analisadas na compressão estática cíclica. Considerando o carregamento estático, as primeiras fissuras foram observadas para níveis máximos de tensão entre 45% e 55% da resistência à compressão, sendo que as fissuras eram sempre verticais, paralelas ao campo de tensão induzido na compressão. Hansen atribuiu o lento crescimento à influência da rigidez da matriz de cimento na concentração de tensões nas pontas das fissuras. Quanto ao comportamento do concreto, quando submetido a cargas repetidas, o autor não conseguiu identificar um comportamento padrão no surgimento e progressão das fissuras. Porém Hansen concluiu que o processo de fratura em materiais cimentícios é fortemente correlacionado a um limitante de deformação. Tal limitante foi relatado onze anos depois por Smith (1979), que investigou a tenacidade à fratura do concreto, apresentando as constantes referentes à taxa de propagação das fissuras e os limites críticos de tensão e deformação.

O efeito das concentrações de tensão em oclusões presentes em elementos de concreto foi inicialmente reportado por Raju (1970). O autor analisou os efeitos das oclusões em corpos de prova submetidos a cargas cíclicas e estáticas. As análises foram conduzidas em corpos de prova produzidos com um furo circular. Os resultados mostraram que as resistências à compressão estática e à fadiga não eram significativamente alteradas pela introdução de um orifício. No entanto, o autor verificou que os vazios da matriz de concreto e as microfissuras presentes no material afetam de forma significativa as resistências e o modo de deformação do material, a tal ponto que o efeito das concentrações de tensão introduzidas pelo orifício, produzido artificialmente, é desprezível comparado aos dos defeitos pré-existentes no material.

Béres (1974) investigou a deformação de concretos de classe C30 (com resistência à compressão de 30 MPa) sob efeito de diferentes níveis de carregamento cíclico. Os testes de fadiga foram realizados considerando frequências de $8,3$ Hz, com tensão mínima de 3 MPa e máxima variando entre 43% e 93% da resistência do material. As investigações provaram que a deterioração por fadiga do concreto comprimido é causada pela perda gradual de rigidez do material. Foi provado que as mudanças induzidas por cargas cíclicas no concreto podem ser descritas qualitativamente por meio das deformações, isto é, pelas mudanças volumétricas dos

corpos de prova. O autor verificou que o valor da constante de Poisson, quando sujeito a cargas repetidas, situa-se entre $0,3$ e $0,4$, e que este valor é alterado a medida em que progride o efeito da fadiga, indicando um caráter visco-elástico do material.

A fim de analisar o efeito da microestrutura de materiais cimentícios, Garrett, Jennings e Tait (1979) ensaiaram corpos de prova submetidos a dois níveis de tensão máxima (50% e 60% da resistência a compressão), com uma frequência de 10 Hz. A morfologia da fratura de produtos à base de cimento foi estudada usando técnicas de reidratação e microscopia eletrônica por varredura. Os resultados mostraram que a fratura estática resulta em um caminho de fratura amplamente intergranular, isto é, através das regiões do gel hidratado. A fadiga, por outro lado, produz extensas regiões de partículas de cimento expostas e não hidratadas. A consideração do modo e das origens do microfissuramento decorrente da fadiga sugere que essas partículas não hidratadas são expostas por um processo de atrito que ocorre após o aparecimento das principais microfissuras.

Zielinski, Reinhard e Körmeling (1981) realizaram testes de fadiga à tração em concretos com agregado leve, utilizando garras de fricção nas amostras. Os resultados dos testes mostraram que o concreto leve não apresentou um limite de fadiga para a tração direta. Entretanto, pôde-se inferir uma resistência à fadiga de $75,4\%$ da resistência à tração estática, considerando 2 milhões de ciclos como vida infinita. Quando foram analisados concretos convencionais, verificou-se que a sua resistência à fadiga na tração é consideravelmente menor do que no concreto produzido com agregado leve. Os resultados obtidos também indicaram que as relações tensão-deformação sob cargas de tração repetidas são aproximadamente lineares, e que a declividade das curvas vão reduzindo a medida em que aumenta o número de ciclos.

Tepfer (1982) investigou o comportamento do concreto à fadiga por meio de um ensaio cíclico com tensão alternada utilizando duas combinações de carregamento: uma com tensões de compressão constante na direção horizontal (aplicada lateralmente) e tração variável na direção vertical, e outra, com tensões de tração constante na direção horizontal e compressão variável na direção vertical. O autor observou por meio dos ensaios que a tensão alternada afetou o comportamento à fadiga do material, mas concluiu que o efeito era relativamente pequeno para que fosse inserido em um modelo de fadiga sendo, portanto, necessário realizar mais investigações a cerca da importância deste efeito.

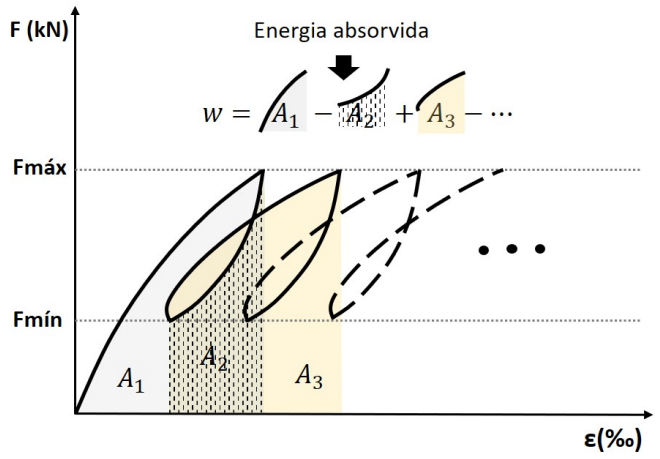
Dois anos depois, Cornelissen (1984) determinou o efeito da tensão alternada no comportamento à fadiga do concreto, realizando duas séries de ensaios: tração-compressão alternada e flexão. Os resultados possibilitaram a proposição de um modelo que estimasse a vida útil à fadiga do concreto. Ademais, os resultados mostraram que o número de ciclos necessários para que ocorra o colapso aumenta com a diminuição da razão entre os níveis mínimo e máximo das tensões aplicadas, e que a tração-compressão alternada causa maior deterioração por fadiga no concreto do que a própria flexão.

Pons e Maso (1984) apresentaram os primeiros resultados referentes ao comportamento do concreto quando submetido a cargas cíclicas com baixa frequência de carregamento. Os

autores analisaram concretos submetidos a fadiga na compressão, com níveis de tensão máxima de 25%, 37,5% e 50% da resistência à compressão e frequência de carregamento de 0,03 Hz. Os autores observaram que, para o caso onde é imposto um baixo número de ciclos com baixa tensão máxima (25%), a perda de rigidez do material é quase imperceptível, sendo este efeito relacionado ao índice de vazios da matriz cimentícia, indicando assim a existência de um efeito da consolidação da micro-estrutura do material.

Até meados da década de 80, as pesquisas desenvolvidas para o estudo do comportamento da fadiga no concreto haviam demonstrado que os métodos de mensuração do nível de deterioração do material, ao ser submetido a cargas cíclicas, não apresentavam resultados consistentes. Entretanto, Tepfers, Hedberg e Szczekocki (1984) propuseram um método que levava em consideração a quantidade de energia absorvida pelo material, conforme Figura 1.6. As análises foram conduzidas em corpos de prova cilíndricos de 300x150 mm, submetidos a níveis de tensão máxima de 70% a 90% da resistência característica e com frequências de carregamento entre 1 e 5 Hz. Os resultados obtidos mostraram que, mesmo com as dificuldades de aplicação da técnica por parte da aquisição dos dados, o método apresentava resultados coerentes com os preceitos da *Mecânica da Fratura*, sendo que existe uma equivalência entre a energia absorvida e a causa de ruptura em concretos submetidos a ensaios estáticos e cíclicos.

Figura 1.6 – Método de cálculo da energia absorvida (demonstrada até o segundo ciclo).

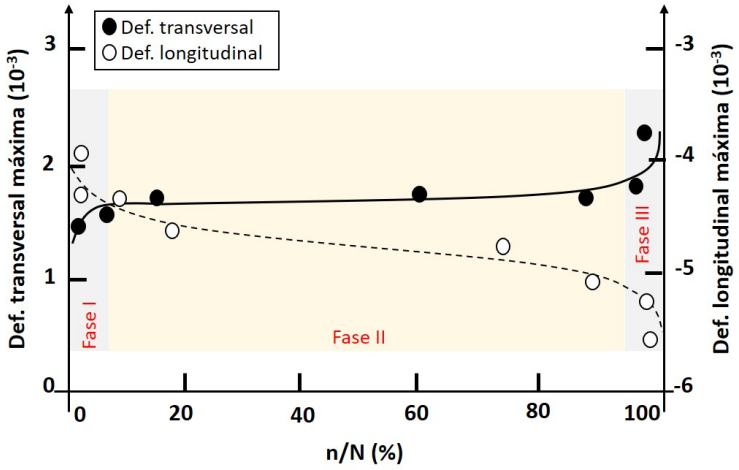


Fonte: Própria autoria.

O comportamento à fadiga do concreto também foi estudado por Alliche e François (1986), considerando cargas de compressão com uma relação entre tensões minima e máxima de 0,1. Um dos objetivos do trabalho consistia em analisar técnicas de mensuração da deterioração do material, sendo elas a emissão acústica e ondas ultrassônicas. As amostras foram imersas em água à temperatura ambiente antes dos ensaios. Os resultados mostraram que, para um mesmo lote, existe uma grande variabilidade da vida à fadiga em função da amplitude de tensão aplicada. As deformações longitudinais e radiais também foram registradas, verificando três distintos estágios (Figura 1.7). No início dos testes, a deformação por ciclo aumenta rapidamente, até

alcançar um estado estacionário, que ocupou a maior parte da vida da amostra. Na segunda fase, pseudo-estacionária, a deformação longitudinal por ciclo é praticamente constante, não sendo observada deformação axial (Figura 1.7). A taxa de deformação aumentou novamente no final do teste, na terceira fase, até que a ruptura acontecesse. Os resultados mostraram uma boa correlação entre a vida à fadiga e a taxa de deformação por ciclo durante o estado estacionário. As técnicas de emissão acústica e ondas ultrassônicas apresentaram resultados coerentes, demonstrando que a perda de rigidez do material segue o mesmo comportamento da taxa de deformação.

Figura 1.7 – Evolução das deformações em função da vida útil.



Fonte: Adptado de Alliche e François (1986).

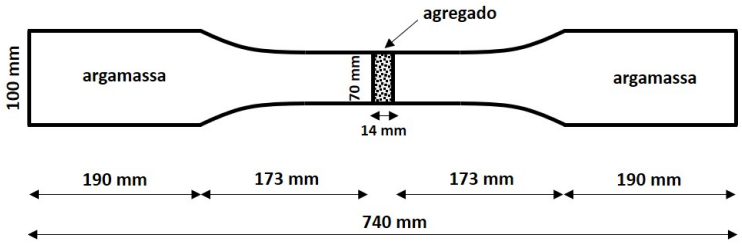
Oh (1986) investigou a resistência à fadiga de concreto simples na flexão. Foram realizados ensaios em espécimes de dimensões 100x100x500 mm, considerando testes de flexão em quatro pontos, com uma frequência de carregamento de $4,16$ Hz. Curvas *S-N* foram geradas a partir dos resultados e uma equação foi obtida por análise de regressão para prever a resistência à fadiga por flexão. Uma abordagem probabilística foi introduzida a fim de prever a confiabilidade do concreto quando submetido à fadiga. A distribuição da vida à fadiga do material sob um determinado nível de tensão foi encontrada, mostrando-se semelhante à função de distribuição de Weibull. Mostrou-se ainda que a distribuição de Weibull possui características físicas mais convincentes do que a distribuição log-normal, sendo apropriada para a representação deste mecanismo.

O formato e a propagação de microfissuras no concreto convencional foram avaliadas no trabalho de Saito (1987). O autor realizou uma observação direta de laminas cortadas de amostras prismáticas de concreto submetidas a cargas estáticas e cíclicas de tração. Os resultados possibilitaram inferir que as fissuras na zona de transição progridem linearmente com o aumento do carregamento, e que as fissuras na argamassa se desenvolveram extensivamente até cerca de 100% da carga final. Os resultados também indicaram que a natureza repetitiva do carregamento conduz a um ligeiro aumento na quantidade total de microfissuras internas.

No ano seguinte, Saito (1988) analisou a resistência efetiva na zona de transição entre

agregados e a argamassa. Os ensaios foram conduzidos com a produção de provetas alongadas, contendo argamassa nas duas extremidades e um agregado na região central (Figura 1.8). Tensões cíclicas de tração foram aplicadas nos corpos de prova sob uma frequência de 5 Hz. Os resultados foram analisados estatisticamente para obter uma relação entre o nível de tensão e a vida à fadiga, considerando uma probabilidade de falha de 50%. A relação obtida indicou uma resistência à fadiga de $74,9\%$ da resistência estática, para uma vida útil de 2 milhões de ciclos.

Figura 1.8 – Dimensões e esquema do espécime ensaiado.



Fonte: Redesenho de Saito (1988).

No estudo realizado por Bazant e Xu (1991), o crescimento de fissuras decorrente da flexão cíclica foi investigado em amostras de concreto com diferentes dimensões e geometricamente semelhantes. As amostras continham um entalhe inserido na região central. Os ensaios foram conduzidos em concretos de classe C30, tensão mínima nula e tensão máxima de 80% da resistência à flexão. A flexão foi imposta considerando o ensaio de três pontos, com frequência de carregamento variando entre $0,033$ e $0,044$ Hz. As análises foram realizadas com objetivo de verificar se a *lei de Paris*, da Mecânica da Fratura, representava de forma adequada a progressão das fissuras em função da amplitude das cargas e do tamanho das amostras. Os resultados mostraram que a *lei de Paris* não representava de forma adequada a progressão das fissuras para todas as dimensões, sendo válida apenas para amostras muito grandes, mostrando a necessidade de uma adequação da lei. Assim, os autores propuseram ajustes na formulação, onde a *lei de Paris* foi combinada com a *lei do efeito do tamanho* proposta por Bažant (1984), que considera fissuras sob carga monotônica. O emprego dessa nova formulação mostrou que a dimensão inicial da fissura, considerando carregamento cíclico, é muito maior do que em carregamentos monotônicos, demonstrando que a fragilidade do material quando submetido a cargas repetidas é superior à de carregamentos estáticos. Os autores verificaram ainda que o efeito do tamanho da amostra desaparece para estruturas pequenas.

Com o desenvolvimento dos métodos de mensuração do nível de deterioração, e diante dos princípios da mecânica do dano na década de 90, ensaios experimentais começaram a ser conduzidos com o objetivo de corroborar com o desenvolvimento de modelos representativos da evolução do dano no concreto, considerando o carregamento cíclico. No trabalho de Alliche e Frangois (1992), testes de fadiga na flexão por três pontos foram realizados em dois tipos de concreto, utilizando duas relações entre as tensões mínima e máxima ($0,1$ e $0,4$) e duas frequências de carregamento (1 e 3 Hz). Diante dos resultados obtidos, os autores propuseram

um modelo de dano para a fadiga do concreto na flexão. O modelo foi baseado em um parâmetro de dano, relacionado à parcela de deformação irreversível, associada à máxima deformação positiva principal de cada ciclo. A aplicação deste modelo, nos testes de flexão à fadiga, forneceu uma previsão razoável da vida útil à fadiga a partir das medições da deformação inicial e do incremento de deformação por ciclo. Ademais, os autores verificaram que o modelo representava de forma adequada o comportamento do concreto quando submetido à fadiga por compressão uniaxial.

No mesmo ano, Cividini et al. (1992) desenvolveram um aparato especificamente projetado para testes triaxiais, estáticos e cíclicos, de amostras cilíndricas de concreto e rochas. Uma característica particular deste equipamento foi a possibilidade de variação mútua da carga cíclica de confinamento lateral e da carga aplicada verticalmente. Os autores observaram por meio de 100 testes realizados em concretos convencionais, com frequências de carregamento variando entre 1 e 10 Hz, que a vida útil do material cresce em função da frequência aplicada. Além disso observaram que a deformação longitudinal possui um valor crítico, a partir do qual o material entra em ruína de forma inesperada. Foi observado ainda que, a depender da pressão de confinamento, imposta lateralmente, a vida útil à fadiga pode ser estendida.

Um estudo de fadiga à compressão foi realizado por Do, Chaallal e Aïtcin (1993) para dois concretos de alta resistência, 70 e 95 MPa, com relações água/cimento de $0,28$ e $0,23$, respectivamente. Os testes foram conduzidos sob amplitude constante, considerando diferentes níveis de tensão máxima (70%, 75%, 85% e 95% da resistência) e frequência de carregamento de 1 Hz. Os resultados mostraram que o método de *McCall* para previsão da vida à fadiga apresenta respostas coerentes com a realidade sendo, portanto, mais seguro quando comparado às curvas de *Wohler*. A evolução da tensão e a degradação da rigidez com o número de ciclos no concreto de alta resistência foram semelhantes às do concreto convencional. A deformação na falha, considerando carga cíclica, foi encontrada com a mesma ordem que a obtida na carga de pico do ensaio estático. Ademais, os resultados mostraram a existência de uma correlação entre a taxa de deformação e número de ciclos até a falha.

Paskova e Meyer (1994) realizaram um estudo para verificar a variabilidade dos resultados obtidos em testes de fadiga em corpos de prova cilíndricos de concreto, e definiram a quantidade mínima de amostras que deveriam ser testados de modo a reduzir as incertezas sobre os resultados. Assim, os autores analisaram uma série de ensaios realizados com 23 prismas de concreto de classe C30, submetidos a uma frequência de carregamento de 1 Hz e sob tensão máxima de 85% da resistência à compressão. A avaliação estatística dos resultados levou à conclusão de que quatro espécimes são suficientes para garantir um nível razoável de confiança dos dados, informação útil para os pesquisadores que planejam experimentos com níveis de confiança entre 80 e 90% e com erros de até 20%.

Dyduch, Szerszeń e Destrebecq (1994) analisaram a fadiga em cilindros de concreto simples submetidos a compressão cíclica axial. A tensão máxima aplicada variou entre 60% e 90% da resistência à compressão estática. Um método baseado na medição da deformação

volumétrica foi empregado para prever a força estática individual de cada amostra testada. Os resultados dos testes de fadiga foram apresentados por meio do diagrama carga versus número de ciclos para a ruptura. Para níveis de carga que variam até 80% da resistência estática, o número de ciclos até a falha não mostrou nenhuma variação com o efeito do tempo de ensaio. Acima desse nível, a resistência à fadiga mostrou ser mais sensível aos efeitos dependentes do tempo e a medida que o nível de carga aumentou, os efeitos se tornaram mais significativos.

No estudo realizado por Kim e Kim (1996), amostras cilíndricas de concreto com vários níveis de resistência foram testadas para investigar o comportamento à fadiga do concreto na compressão. As variáveis analisadas nos testes foram a resistência à compressão (26, 52, 84 e 103 MPa), e o nível de tensão máxima aplicada (75%, 80%, 85% e 95% da resistência à compressão). No total, foram analisados 160 corpos de prova cilíndricos, com dimensões de 100x200 mm. O teor de umidade das amostras foi preservado durante o teste de fadiga. Nos ensaios, o carregamento foi conduzido com uma frequência de 1 Hz. Os resultados dos testes mostraram que a vida à fadiga diminuiu com o aumento da resistência do concreto, sendo proposto o primeiro modelo para a relação *S-N* que considerava o efeito da resistência do material.

Ballatore e Bocca (1997) avaliaram as alterações ocorridas nas propriedades mecânicas do concreto quando submetido à compressão cíclica de baixa intensidade e curta duração. Amostras foram submetidas a tensões máximas de 10% ou 20% da resistência à compressão, mantendo uma relação entre a tensão mínima e máxima de $0,1$. Os corpos de prova foram submetidos a uma frequência de carregamento de 1 Hz. Os ensaios cíclicos foram conduzidos por 7200 ciclos, sendo em seguida realizado o ensaio de resistência à compressão estática. Observou-se que o concreto sofre um pequeno endurecimento, gerando um correspondente aumento na rigidez. Assim, a energia armazenada na amostra durante o carregamento cíclico produz um endurecimento do material que aumenta, parcialmente, a carga responsável pela falha do material. Entretanto, os autores observaram que este aumento de rigidez alterava a matriz cimentícia do concreto, tornando-a mais frágil quanto ao modo de ruptura observado em amostras de concreto submetidas à compressão estática.

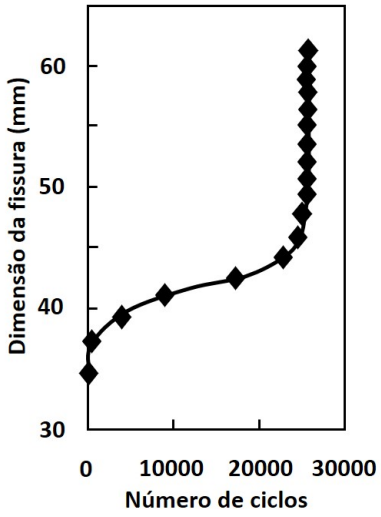
Com o propósito de avaliar a progressão de fissuras em elementos de concreto submetido à fadiga em flexão, Toumi, Bascoul e Turatsinze (1998) estudaram por meio da técnica de réplica associada à microscopia eletrônica de varredura, a abertura da ponta da fissura (CMOD). Os testes foram realizados considerando concretos de classe C50 e flexão de três pontos. A carga máxima foi variada entre 70% e 93% da carga de ruptura, sendo aplicada com uma frequência de 1 Hz. Os resultados mostraram que as características referentes ao crescimento de fissuras são mais complexas de compreender em testes cíclicos do que nos estáticos, sendo difícil de prever o momento de ruptura do material. Fenômenos clássicos foram observados, como o espalhamento da fissura ao longo da zona de transição interfacial. No entanto, mais microfissuras foram detectadas na matriz cimentícia, próximo à área da extremidade da fissura. Considerando todos os resultados, os autores não detectaram a presença de microfissuras descontínuas à frente

do caminho principal de progressão, o oposto do observável em testes estáticos.

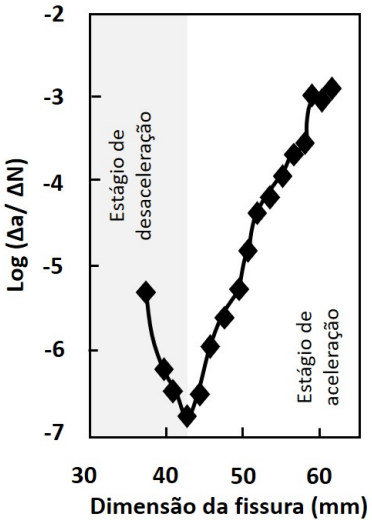
Dois anos depois, em um trabalho semelhante, Kolluru et al. (2000) observaram que o crescimento de fissuras devido a cargas cíclicas de amplitude constante é descrito por uma curva semelhante à curva de fluência cíclica (Figura 1.9a), e que a relação da taxa de crescimento da fissura com o número de ciclos aplicado compreende duas fases: o estágio de desaceleração, quando ocorre uma diminuição na taxa de crescimento da fissura com o aumento do seu comprimento, seguido por um estágio de aceleração, em que a taxa de crescimento da fissura aumenta à uma taxa constante (Figura 1.9b). Os autores observaram que a dimensão da fissura quando a taxa de crescimento altera do estágio de desaceleração para o da aceleração é igual ao comprimento da fissura obtida com a carga de pico do ensaio estático.

Figura 1.9 – Evolução de fissuras em função do número de ciclos.

(a) Progressão da fissura.



(b) Taxa de crescimento da fissura.



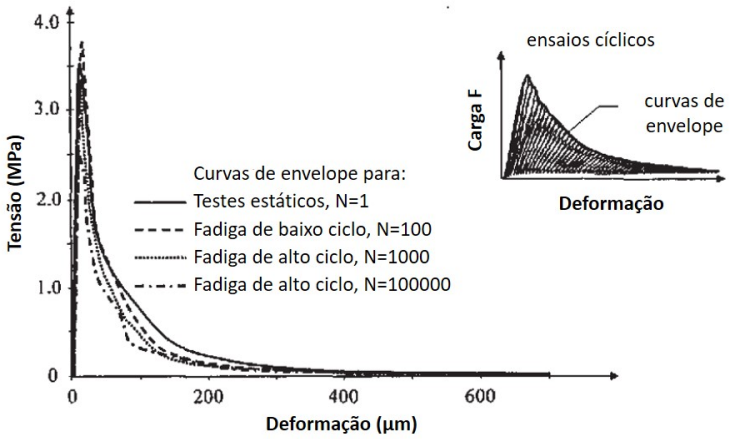
Fonte: Adaptado de Kolluru et al. (2000).

Subramaniam, Popovics e Shah (2002) apresentaram o comportamento de corpos de prova cilíndricos submetidos a tensões cíclicas de tração-compressão alternada. O programa experimental também incorporou amostras cilíndricas ocas, submetidas à torção cíclica. Os resultados mostraram que o crescimento das fissuras é um processo constituído de duas fases, aceleração e desaceleração, resultado semelhante ao obtido em Kolluru et al. (2000) (Figura 1.9b), onde foi analisada a fadiga na flexão. Os autores relataram que a representação do mapeamento de fissuras no concreto, devido à fadiga, é de difícil obtenção, já que existem dois mecanismos concorrentes que influenciam na taxa de crescimento da fissura: o aumento da resistência ao crescimento da fissura e o aumento do intensificador de tensão, do *Modo I* de falha, com o comprimento da fissura. Assim, os resultados apontam que, em aplicações práticas que envolvam a fadiga, o monitoramento das deflexões por si só não fornece indicação suficiente do estado da estrutura, sendo necessário analisar mudanças na conformidade, calculadas a partir da mudança

relativa nas deflexões.

Com o objetivo de investigar o mecanismo de fratura no concreto submetido à fadiga à tração, Kessler-Kramer, Mechtcherine e Mueller (2003) analisaram concretos de resistência média (50 MPa) e alta (100 MPa), submetidos a carregamentos estáticos e cíclicos. Os autores realizaram uma série de ensaios de tração uniaxial em prismas de concreto entalhados e não entalhados. Os principais parâmetros analisados nos experimentos foram o número de ciclos até a falha, a taxa de deformação e a resistência à fadiga. Além disso, as superfícies de fratura foram estudadas usando o método *Fringe Projection*, que combina ferramentas de medição óptica com técnicas de triangulação e interferometria. Os resultados experimentais mostraram que, para um certo número crescente de ciclos de carregamento, a resistência à tração uniaxial diminui. Além disso, para um dado número de ciclos, as curvas de envelope correspondentes aos ensaios estáticos começam a apresentar grandes discordâncias, mostrando que estas curvas só apresentam comportamento adequado na fadiga de baixo ciclo, conforme Figura 1.10.

Figura 1.10 – Curvas de envelope para ensaios estáticos e cíclicos.



Fonte: Traduzido de Kessler-Kramer, Mechtcherine e Mueller (2003).

Wei, Yupu e Jinsong (2005) realizaram um estudo experimental sobre a performance do concreto submetido a cargas cíclicas triaxiais de tração-compressão alternada, com amplitude variável. Os corpos de prova, de concretos C30, foram submetidos à tensão mínima de 2% da resistência à compressão ou tração (dependendo do modo de carregamento), e à tensão máxima variando entre 20% e 55% das respectivas resistências. As análises foram conduzidas considerando o modo de falha da amostra, a evolução das deformações longitudinais e a evolução do dano. Os resultados mostraram que o dano progride, sob ação de cargas cíclicas triaxiais, com comportamento diferente do observado com carregamento cíclico uniaxial, mostrando que esse comportamento deve ser considerado na previsão de vida útil à fadiga do concreto. Acrescenta-se que os autores verificaram que a determinação do dano pode ser realizada considerando as deformações residuais, porém a sua relação aos parâmetros de dano não são equivalentes ao da mecânica do dano contínuo. Além disso, a relação de Palmgren (1924) gerou valores com

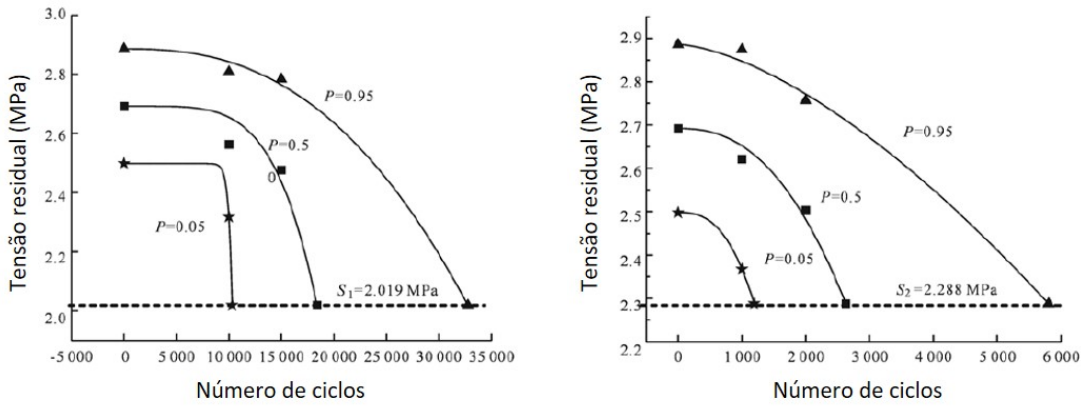
desvios de 23-50% dos resultados experimentais, não sendo indicada para o estudo de cargas cíclicas, de amplitude variável, no concreto.

A determinação do diagrama *S-N* para o concreto é um processo que pode levar um período extremamente longo, principalmente se um alto nível de confiança probabilística for almejado. Pensando nisso, Nieto, Chicharro e Pintado (2006) avaliaram amostras de concreto submetidas à fadiga na flexão no ensaio de quatro pontos. Os ensaios foram conduzidos com frequência de carregamento de 12 Hz e tensão máxima de 55% da resistência à ruptura na flexão. Os autores propuseram um método alternativo e simplificado para determinar a vida útil à fadiga do concreto. O método se baseia em suposições simplificadas do formato da curva *S-N*, considerando aspectos relacionados ao dano acumulado e à influência da tensão média aplicada nos ciclos de carregamento. Os autores também tinham como objetivo a avaliação do acúmulo de dano nas amostras, e para isso elas foram monitoradas após cada grupo de ciclos. A evolução da primeira frequência de ressonância em função do número de ciclos foi estudada, assim como a variação do módulo de elasticidade. Os resultados mostraram que o material apresenta uma redução de rigidez até a faixa de um milhão de ciclos, não sendo observada nenhuma variação perceptível após essa quantidade. Esse resultado pode ser útil na criação de esquemas para o monitoramento de estruturas.

Figura 1.11 – Curvas tensão residual versus numéro de ciclos e nível de confiabilidade.

(a) Tensão máxima de 0,75 da resisência à flexão.

(b) Tensão máxima de 0,85 da resisência à flexão.



Fonte: Traduzido de Meng e Song (2007).

No trabalho de Meng e Song (2007) foi avaliada a relação entre a resistência à tração residual do concreto e o número de carregamentos cíclicos. Os autores realizaram 99 testes de fadiga por tração axial em prismas de concreto, submetidos a tensões máximas de 75% ou 85% da resistência. Com base na distribuição de probabilidade da resistência à tração residual, foram obtidas expressões empíricas da resistência à tração residual correspondentes ao número de ciclos (Figura 1.11). Os resultados mostraram que as curvas de atenuação da resistência à tração residual podem ser empregadas para prever a vida útil da fadiga residual do concreto. Ademais, existe uma boa correlação entre a resistência à tração residual e o módulo elástico

secante residual. Também foi estabelecida uma relação entre o módulo elástico secante residual e o número de ciclos de carregamento.

A fim de analisar e propor formulações analíticas para a vida útil à fadiga, e descrever o comportamento do concreto sob ação de cargas cíclicas, Wang e Song (2011) analisaram amostras de concreto lateralmente confinadas, submetidas a tensões de amplitudes constantes. Nos ensaios foram consideradas cargas de compressão, tração e tração-compressão alternada. Com base nos resultados do experimento, foram estabelecidas equações referentes às curvas *S-N* considerando diferentes níveis de tensão de confinamento, e foram propostos critérios de falha à fadiga para os diferentes casos estudados. Com os resultados, foi possível descrever critérios de falhas para estruturas de concreto. Os resultados indicaram que a resistência à fadiga em elementos lateralmente confinados é maior do que em amostras sem confinamento, e que quanto maior o confinamento, maior é a resistência à fadiga.

Com a crescente utilização de agregados reciclados para a produção de concreto, Xiao, Li e Yang (2013) analisaram o comportamento do compósito considerando composições sem e com 100% de substituição do agregado graúdo natural. Os ensaios foram realizados considerando cargas cíclicas de compressão uniaxial, em concretos de classe C40. Foram empregadas tensões máximas de 65% a 85% da resistência à compressão, com frequência de carregamento de 10 Hz. Os resultados possibilitaram inferir que não existem diferenças significativas no comportamento da fadiga entre concretos de agregado graúdo reciclado e o concreto com agregados naturais. Ademais, com base nos resultados experimentais e nos princípios da mecânica do dano contínuo, os autores propuseram um modelo de fadiga relacionando a variação da deformação e da degradação do módulo de elasticidade com a evolução do dano por fadiga. Acrescenta-se ainda que, sob carga cíclica de compressão, a deformação residual e a deformação por fadiga do concreto com agregado reciclado aumentam com o incremento do número de ciclos, e suas variações também podem ser divididas em três estágios, assim como no concreto com agregados naturais: estágio de fluência cíclica, acoplamento fluência-fadiga e fadiga pura.

No ano seguinte, Thomas et al. (2014) também estudaram a resistência à fadiga de concretos com agregado reciclado. Na pesquisa, os autores analisaram concretos com diferentes teores de substituição de agregados graúdos naturais por reciclados (0%, 20%, 50% e 100%), considerando ainda diferentes relações água/cimento ($0,45$, $0,50$, $0,55$ e $0,65$). Os ensaios foram realizados em concretos de classes C20, C30 e C50, considerando cargas cíclicas de compressão com 50% da resistência à compressão, com frequência de carregamento de 10 Hz. Os resultados mostraram que, para a mesma relação água/cimento, os concretos com agregado reciclado apresentam uma perda de rigidez maior que o concreto de agregado natural. Além disso, o uso de agregados reciclados no concreto implica numa redução da vida útil à fadiga. Essas diferenças se mostraram mais significativas para baixas relações água/cimento. A partir dos resultados obtidos, os autores propuseram teores recomendáveis para a substituição de agregados naturais por reciclados, considerando concretos empregados em componentes estruturais e sujeitos a carregamentos cíclicos.

No mesmo ano, Onoue et al. (2014) avaliaram a fadiga à compressão em concretos produzidos com cimentos convencional e com adição de escória de alto forno. Os autores conduziram ensaios experimentais, simulando cargas cíclicas referentes aos componentes estruturais a qual aquele concreto seria aplicado, isto é, em estruturas marinhas e portuárias. Os ensaios foram conduzidos em amostras de concreto de classe C30, considerando tensões máximas entre 60% e 75% da resistência à compressão e a uma frequência de carregamento de $1,5$ Hz. A resistência à fadiga do concreto com escória de alto forno apresentou resultados inferiores ao do concreto com cimento comum. Os autores observaram que, nestes casos, agregados com maior rigidez devem ser empregados na produção deste concreto, a fim de aumentar a resistência do compósito.

No trabalho de Medeiros et al. (2015) foram realizadas análises experimentais acerca do efeito da frequência de carregamento no comportamento à fadiga do concreto. Os autores investigaram concretos convencionais e com fibras de polipropileno e aço. Os ensaios de fadiga foram conduzidos com cargas cíclicas de compressão em 123 amostras cúbicas de 100 mm de aresta. Os concretos simples eram de classe C50, enquanto os reforçados com fibras eram de classe C60 e C80. Os corpos de prova foram submetidos a quatro frequências de carregamento (4, 1, $0,25$ e $0,0625$ Hz). A tensão máxima aplicada nas amostras foi de 85% de sua resistência à compressão e a relação entre as tensões mínima e máxima foi mantida constante em $0,3$. Os resultados mostraram que o efeito da frequência de carregamento no comportamento à fadiga do concreto simples é significativo, sendo observado que a vida à fadiga, em frequências mais baixas, é menor do que em frequências mais altas. Nos concretos com fibras, observou-se uma melhora no comportamento à fadiga sob baixas frequências. Além disso, os resultados mostraram a existência de uma relação direta entre a taxa de deformação secundária e a vida à fadiga, à qual se mostrou dependente inclusive da frequência de carregamento.

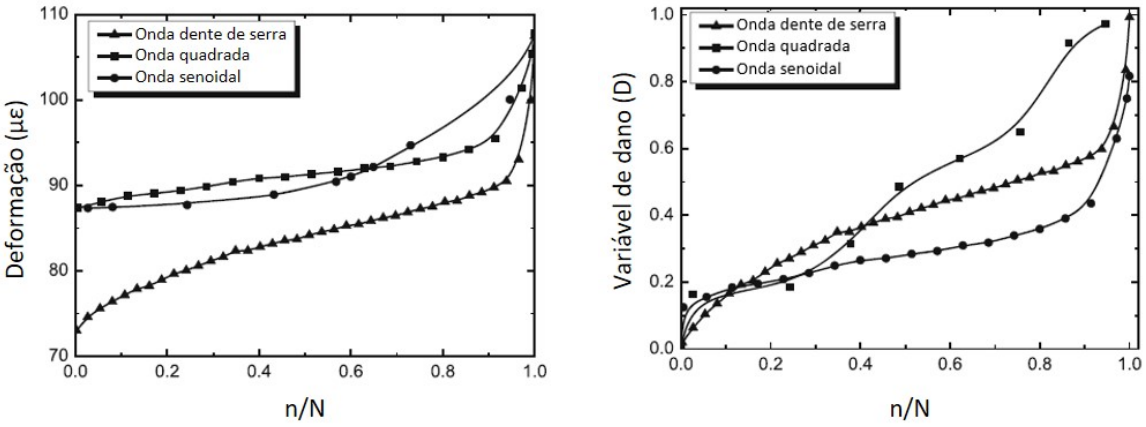
Chen, Chen e Bu (2017) estudaram as propriedades mecânicas do concreto sob carga de tração cíclica, utilizando diferentes espectros de carregamento, como a onda quadrada, a onda senoidal e a onda dente de serra. Os ensaios foram conduzidos em concretos de classe C40, considerando uma frequência de carregamento de 2 Hz e tensão máxima de 95% da resistência à tração. A tensão axial, a energia dissipada por ciclo de carregamento, a evolução de dano e o módulo de deformação foram investigados. Os resultados mostraram que uma lei de evolução em três estágios da deformação axial (Figura 1.12a) e da variável de dano do concreto (Figura 1.12b), se mostraram mais coerentes para a representação da fadiga em cargas cíclicas que seguem ondas do tipo serra de dente e senoidal, do que aquelas sob a forma de ondas quadradas. Comenta-se que, usualmente os resultados obtidos em ensaios de fadiga são plotados em função da proporção do número de ciclos (n) em relação ao número de cíclos responsável por causar a falha do material (N ou N_f), com o propósito de padronizar os resultados e facilitar a sua comparação.

Seguindo as análises, Chen, Chen e Bu (2017) verificaram que a energia dissipada muda em diferentes estágios da vida à fadiga. No início e no final da vida útil, a taxa de energia

dissipada é maior que a do estágio médio do tempo de fadiga, devido a formação das fissuras. A evolução do módulo de deformação do concreto submetido à carga de tração cíclica, empregando as três formas de onda de carga, também se mostrou representada por curvas de três estágios (curva de fluência cíclica), sendo as três fases nesta ordem: aumento rápido do dano, aumento do dano seguindo uma taxa constante e lenta, e aumento acelerado do dano até a ocorrência da ruptura.

Figura 1.12 – Evolução da deformação axial e dano em função do número de ciclos.

(a) Deformação em função do número de ciclos. **(b)** Dano em função do número de ciclos.



Fonte: Traduzido de Chen, Chen e Bu (2017).

No mesmo ano, Lei et al. (2017) analisaram a evolução da dissipação de energia na fadiga por compressão em corpos de prova cúbicos de concreto. Concretos de classe C25 foram testados com frequência de carregamento de 5 Hz, considerando tensões máximas variando em três valores ao longo do ensaio. Os resultados mostraram que a evolução da dissipação de energia é dividida em três estágios, conforme visto por Chen, Chen e Bu (2017), e que no segundo estágio, a dissipação da energia permanece estável e mostra uma relação exponencial com o nível de tensão, mas é independente do nível de dano associado. Os autores descrevem que a dissipação crítica de energia acumulada é uma propriedade intrínseca do concreto sob cargas cíclicas, o que reflete sua capacidade de absorver e armazenar energia, sendo um parâmetro de grande relevância no estudo da fadiga no concreto.

Uma investigação conduzida por Isojeh, El-Zeghayar e Vecchio (2017b), mostrou a influência da frequência de carregamento no formato das curvas de histerese por fadiga. Os autores testaram concretos de classe C20, C40 e C50, com cargas de compressão cíclica sob frequências de 1 e 5 Hz. As amostras foram submetidas a tensões máximas variando entre 69% e 80% da resistência à compressão. Os resultados mostraram que, para a modelagem da fadiga de alto ciclo, é melhor empregar taxas de evolução da deformação máxima a fim de reduzir o custo computacional para representar todos os loops de histerese. Os resultados ainda possibilitaram inferir que o módulo secante à fadiga é geralmente maior que o módulo estático correspondente.

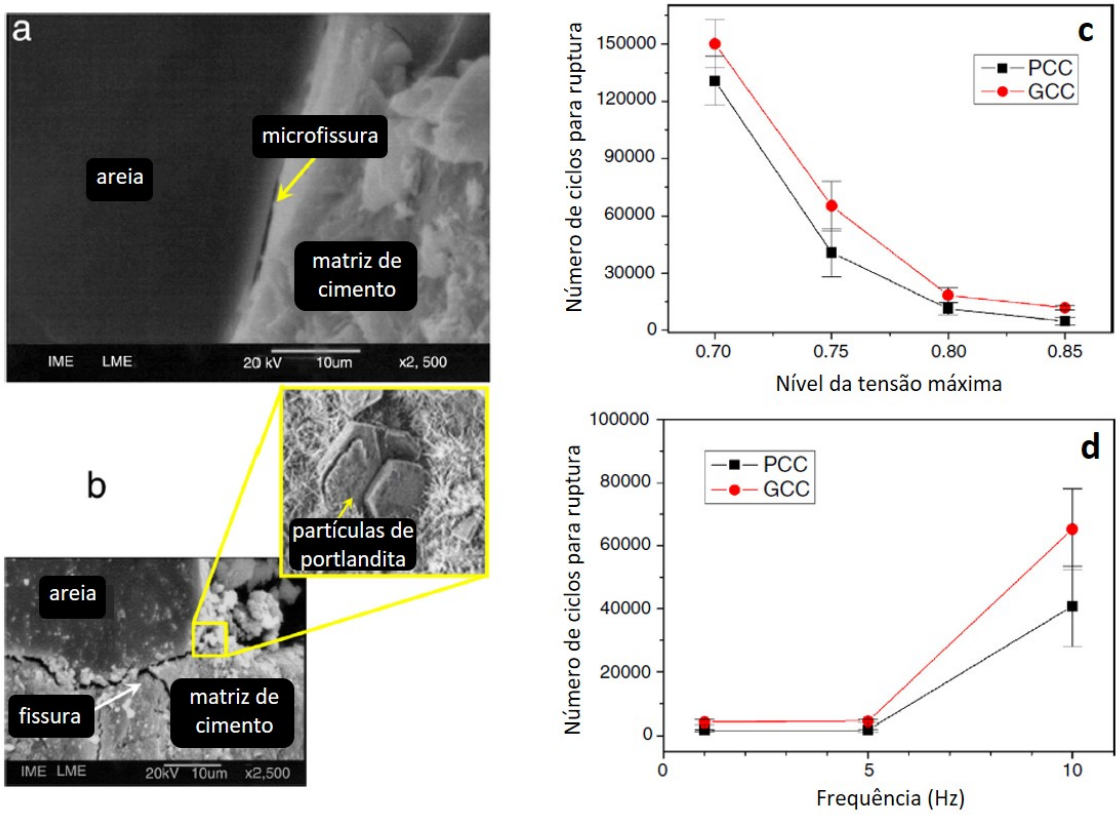
No estudo conduzido por Vicente et al. (2018), 60 amostras de concreto de resistência à compressão entre 70 e 100 MPa foram testadas quanto ao comportamento à fadiga. As análises foram conduzidas com o objetivo de avaliar concretos com distintas proporções de ar incorporado/cimento (0%, 0,1%, 0,2%, 0,3% e 0,4%). As amostras foram escaneadas por meio de tomografia computadorizada com a intenção de visualizar a porosidade interna das amostras. Por meio do uso de software específico, foram definidos os parâmetros morfológicos da porosidade de cada lote. Foram testados nove espécimes de cada lote considerando cargas cíclicas de compressão. Quando comparados os parâmetros morfológicos dos poros e a vida útil à fadiga, observou-se a existência de uma relação inversa entre a porosidade e o número de ciclos necessários para levar o concreto à ruptura. Em síntese, quanto maior a porosidade menor a vida útil à fadiga, e quanto maiores as dimensões dos poros mais prejudiciais eles são. Os resultados revelaram ainda que, quanto maior a porcentagem de poros de tamanho pequeno (definidos pelo volume ou comprimento), maior é a vida útil da fadiga. Isto porque, segundo os autores, poros maiores provocam concentrações de tensões que enfraquecem o material causando sua ruptura prematura, conforme observado nos trabalhos de Chen, Wu e Zhou (2013) e Wu et al. (2016).

A fim de avaliar o dano em prismas de concreto submetidos à flexão cíclica, com amplitude variável, Keerthana e Chandra-Kishen (2018) ensaiaram corpos de prova com diferentes dimensões e com a inclusão de um entalhe no centro dos espécimes. Os ensaios foram conduzidos em concretos de classe C50, por flexão em três pontos, considerando uma carga máxima variável (0,2, 0,3, 0,55 e 0,8 kN) e, mínima fixa, de 0,05 kN. O carregamento foi aplicado com uma frequência de 1 Hz. Os resultados mostraram que, em todos os corpos de prova, independente das dimensões, a falha devido ao carregamento cíclico ocorre quando as fissuras alcançam uma dimensão de 30% a 40% do tamanho do entalhe introduzido na peça de concreto. Foi observado que as falhas ocorrem quando a amplitude máxima da carga cíclica situava-se entre 80% e 90% da carga de ruptura do ensaio estático. Os resultados obtidos mostraram que, além da taxa de crescimento da fissura devido à sobrecarga, a amplitude também desempenha um papel importante para a avaliação da fadiga em materiais cimentícios.

Candido et al. (2018) avaliaram o comportamento à fadiga de concretos produzidos com cimentos álcali ativados, conhecidos como concretos geopoliméricos (GPC), analisando a sua viabilidade na aplicação de componentes estruturais sujeitos a cargas cíclicas. Concretos com cimento Portland (PCC) também foram testados, a fim de comparar os resultados. As amostras de concreto foram submetidas a testes de flexão em três pontos, considerando carregamentos com frequências de 1 a 10 Hz e cargas máximas de 70%, 75%, 80% e 85% da carga de ruptura no ensaio estático. Os resultados mostraram que, sob condição de fadiga (Figura 1.13), o GPC e o PCC exibem desempenho semelhantes considerando níveis de tensão constantes. Uma tendência a um número superior de ciclos necessários para a ruptura em GPC ocorre para frequências superiores a 5 Hz. Considerando um aumento no nível de tensão aplicada, o GPC apresenta um desempenho melhor que o PCC. Os autores inferiram que o cimento geopolimérico gera uma matriz mais homogênea, reduzindo as imperfeições no material, responsáveis pelo surgimento de

fissuras. Ademais, observou-se que a ausência de partículas pequenas de portlandita, na interface entre o cimento polimérico e os agregados, é o principal fator responsável pela melhora no desempenho do GPC versus PCC.

Figura 1.13 – Imagens por microscopia eletrônica de CPs de (a) GPC e (b) PCC, testados à fadiga, (c) variação do número de cilos necessários para a ruptura em função do nível da tensão máxima, com 10 Hz, e (d) variação do número de ciclos em função da frequência, para um nível de tensão máxima de 0,75.



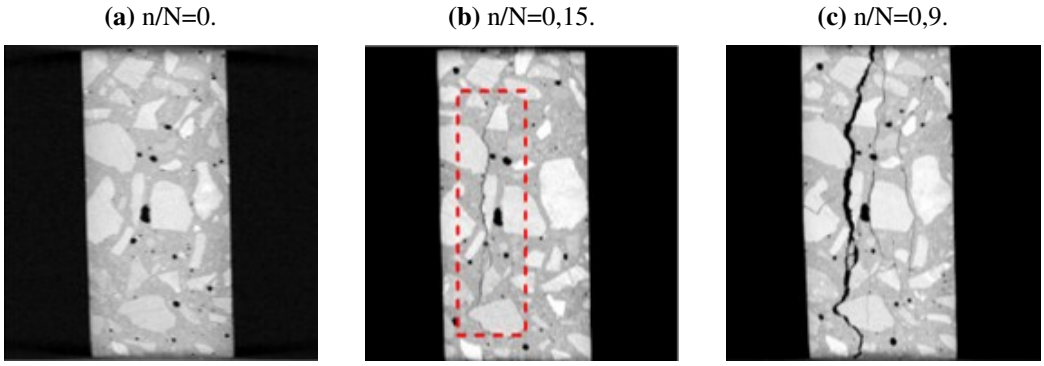
Fonte: Adpatado de Candido et al. (2018).

Harwalkar e Awanti (2019) avaliaram o efeito de adições de cinza volante em grande volume no comportamento à fadiga do concreto. Os autores testaram 95 espécimes em ensaios de flexão cíclica, considerando carregamentos com amplitude fixa, variável e composta. Os testes foram realizados considerando um nível de tensão mínima de 1% da resistência à flexão, obtida nos ensaios estáticos (5,3 MPa), com níveis de tensão máxima variando entre 50% e 80% da resistência e frequência de carregamento do 4 Hz. Os resultados mostraram que as relações *S-N* obtidas nos espécimes testados com amplitude constante e composta, fornecem uma previsão idêntica se considerados níveis de tensão semelhantes, especialmente para os valores mais altos. O nível de dano acumulado obtido a partir dos resultados com carregamento composto e de amplitude variável seguem uma distribuição normal. Os resultados obtidos vão de acordo com a regra de *Palmgren-Miner* (PALMGREN, 1924), onde o dano acumulado para cada ciclo de carga, considerando amplitudes fixa ou variável, é dado por uma relação linear.

No mesmo ano, Fan e Sun (2019) avaliaram a utilização de uma tecnologia de tomografia

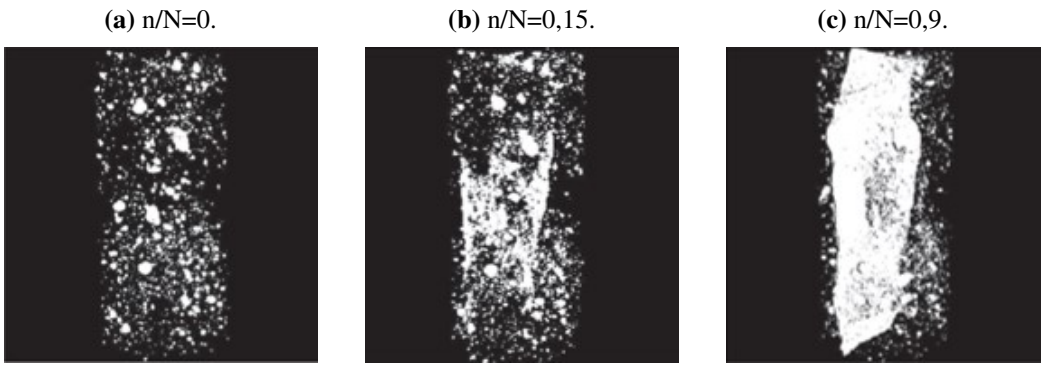
computadorizada industrial para a avaliação do nível de danificação em elementos de concreto submetidos a testes de fadiga por compressão. Os ensaios foram conduzidos para corpos de prova cilíndricos (50 x 100 mm) em concretos de classe C30, considerando uma frequência de carregamento de 10 Hz, e níveis de tensão mínima de 10% e máxima de 80% e 85% da resistência à compressão. Os resultados mostraram que a técnica empregada possibilitou, de forma precisa, a visualização da distribuição espacial das fissuras (Figura 1.14) e da expansão do material, além de auxiliar na determinação da taxa de crescimento das fissuras internas (Figura 1.15). Além disso, com base no método de descrição quantitativa da distribuição de fissuras por carregamento cíclico, foi possível definir um parâmetro de fadiga que pôde refletir a distribuição total das fissuras no material.

Figura 1.14 – Distribuição superficial das fissuras.



Fonte: Fan e Sun (2019).

Figura 1.15 – Distribuição interna dos poros.



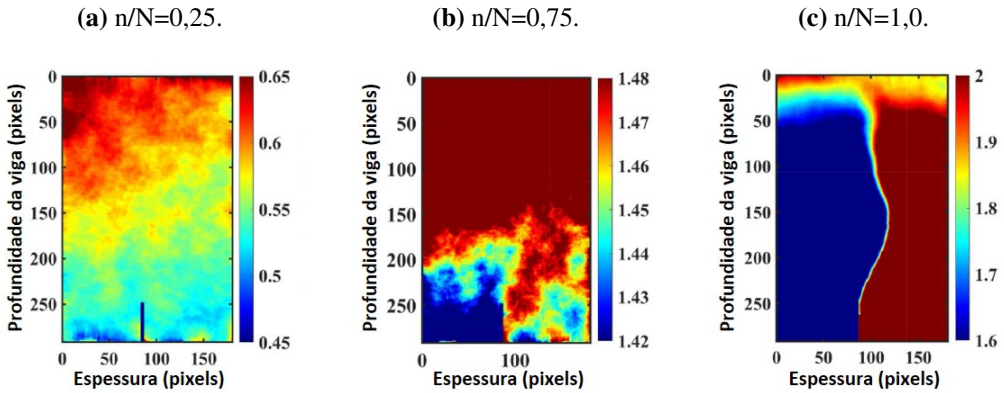
Fonte: Fan e Sun (2019).

Chen et al. (2019) analisaram o comportamento à fadiga na flexão de concretos com agregado natural ou reciclado. Os autores submeteram as amostras a ensaios estático e cíclico de flexão em quatro pontos, considerando uma frequência de carregamento de 1 Hz, carga máxima de 75%, 80% e 85% da carga de ruptura, e carga mínima de $0,5$ kN. Os resultados obtidos mostraram que a área de um ciclo de histerese cresce com o aumento dos níveis de tensão e

do número de ciclos de carregamento. Além disso, sob carga cíclica, o módulo de elasticidade dinâmico, a deformação total e a deformação plástica das amostras exibiram os três estágios de desenvolvimento da curva de fluência cíclica.

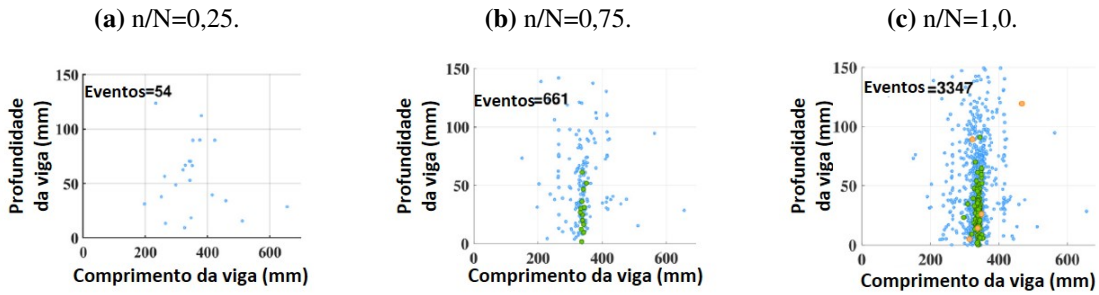
Considerando o mesmo tipo de estudo, Saini e Singh (2020) avaliaram a fadiga em concretos de classe C40, com 100% de agregados reciclados. Os ensaios foram conduzidos considerando tensões máximas entre 65% e 85% da resistência à flexão (5,13 MPa), e razão entre tensão mínima e máxima de 0,1. Os resultados mostraram que a resistência à fadiga em termos do limite de dois milhões de ciclos é menor para concretos produzidos com 100% de agregado reciclado, com uma diferença de 7% quando comparado com concretos produzidos sem agregado reciclado.

Figura 1.16 – Caracterização de fissuras por correlação de imagem digital (DIC).



Fonte: Keerthana e Kishen (2020)

Figura 1.17 – Caracterização de fissuras por emissão acústica (EA).



Fonte: Keerthana e Kishen (2020)

Recentemente, no trabalho desenvolvido por Keerthana e Kishen (2020), foram caracterizados os processos de fratura em concretos submetidos a cargas monotônicas e de fadiga, sendo avaliadas as diferenças nos mecanismos de falha empregando técnicas de emissão acústica (EA) e correlação de imagem digital (DIC - *digital image correlation*). Os ensaios de flexão em três pontos foram realizados em vigas de concreto simples, contendo entalhes na região central. As atividades micro e macro-estruturais foram classificadas com base nos níveis de energia acústica

para diferenciar a formação de uma zona de processo de fratura (FPZ - *fracture process zone*) sob cargas monotônicas ou cíclicas. Os resultados mecânicos, considerando as técnicas DIC (Figura 1.16) e EA (Figura 1.17), mostraram que o processo de fraturamento no concreto não é o mesmo para cargas monotônicas e cíclicas. A curva de carregamento cíclico versus a abertura característica de fissura, excede ou cai dentro da curva de carregamento monotônico versus a abertura característica de fissura.

Keerthana e Kishen (2020) ainda relatam que a inconsistência entre o comportamento do material para os dois casos estudados se deve ao efeito combinado da amplitude de carga, resistência, frequência de carga e heterogeneidade do concreto. A partir dessas observações, pôde-se concluir que o critério de falha por fadiga baseado em curvas de envelope, obtidas em ensaios estáticos, não é adequado para o concreto. Ademais, sob carga de fadiga, a FPZ dentro de sua definição convencional não é formada. As microfissuras definidas sob fadiga são isoladas e dispersas aleatoriamente ao longo da dimensão da amostra, não ocorrendo a redistribuição das tensões. As microfissuras formadas na amostra, ao longo da vida útil à fadiga, degradam continuamente a rigidez do material até que um valor crítico seja atingido, momento em que se dá a falha.

Considerando os trabalhos descritos e discutidos nessa seção, pode-se observar que a maioria possui como escopo a determinação do número de ciclos necessários para levar a falha do concreto, e que, ao passar do tempo, novos parâmetros passaram a ser explorados, como o índice de dano e a taxa de progressão das fissuras, principalmente após a década de 90, onde a mecânica do dano e da fratura começaram a ser exploradas para representar o mecanismo de fadiga.

Outro aspecto importante e que merece destaque remete às mudanças na imposição das condições de contorno dos ensaios de fadiga. Observa-se que poucos trabalhos exploram e avaliam a fadiga na compressão, sendo a maioria dos ensaios realizados na flexão. Ademais, nota-se que, nos casos em que a compressão é empregada, os ensaios são conduzidos sob alta frequência de carregamento. Se considerado os trabalhos experimentais discutidos nesta seção, verifica-se que apenas 31% deles retratam a fadiga na compressão. Destes, somente 12% foram conduzidos sob baixas frequências de carregamento. Uma justificativa para este cenário deve-se à dificuldade de impor altas taxas de carregamento necessárias para a realização dos ensaios sob compressão, ao comparar com os testes de flexão.

Ao analisar os resultados gerados nas pesquisas descritas, verifica-se que, em virtude da heterogeneidade do material e das diversas condições de realização dos ensaios, existem diferentes hipóteses que ainda não foram validadas ou refutadas, o que inviabiliza a determinação de ábacos e formulações para a estimativa da vida útil à fadiga do concreto. Uma justificativa para a falta de continuidade e evolução das pesquisas de cunho experimental se dá ao tempo de realização dos ensaios e à incipiência de equipamentos nos laboratórios, os quais impossibilitam a realização dos testes de fadiga para as mais diversas configurações de carregamento.

Assim, com o propósito de otimizar gastos e tempo, ou até mesmo na impossibilidade da

realização dos ensaios, a simulação numérica se tornou uma metodologia alternativa e eficiente para complementar o estudo da fadiga no concreto, dada às novas tecnologias desenvolvidas ao longo dos últimos anos.

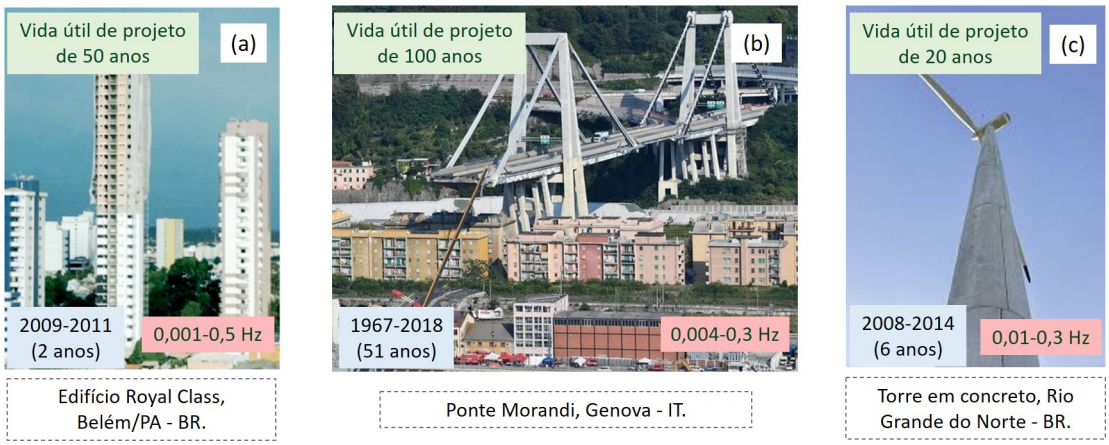
1.2 Motivações e justificativa do trabalho

É de conhecimento geral que o concreto é o material mais empregado para a produção de estruturas dentro do setor da construção civil, já que apresenta baixo custo e alta trabalhabilidade quando comparado aos demais materiais. Pode-se ainda justificar a sua alta empregabilidade à boa resistência à compressão e à facilidade de encontrar as matérias-primas utilizadas em sua produção (cimento, agregados e água).

No entanto, o concreto possui limitações atreladas ao seu uso, sendo a principal sua baixa resistência à tração. Essa característica o configura como um material de comportamento frágil, com baixa capacidade de deformação. A fim de superar essa limitação, faz-se a sua associação ao aço, garantido a ductilidade e resistência à tração, necessárias para a produção de estruturas.

Com o crescente desenvolvimento de trabalhos na área de tecnologia do concreto e o desenvolvimento de modelos sofisticados, tornou-se possível a simulação e representação do comportamento mecânico deste material com maior fidelidade, proporcionando assim o desenvolvimento de elementos estruturais esbeltos e otimizados para as mais variadas aplicações: fundações, torres eólicas, estruturas off-shore, pontes, edificações e outras.

Figura 1.18 – Casos de falhas associadas à fadiga.



Fonte: (a) Ribeiro e Oliveira (2018), (b) IE (2018) e (c) DYWIDAG (2018).

De modo geral, as estruturas de concreto são projetadas diante da hipótese de que as cargas que atuarão ao longo da vida útil são estáticas e que os elementos estruturais ou trabalham em regime elástico linear ou com baixo nível de danificação. Porém, solicitações cíclicas como a ação do vento, ondas de marés, abalos sísmicos e efeitos de temperatura, podem causar a falha da estrutura sob níveis de tensões abaixo dos estabelecidos em projeto devido ao mecanismo

da fadiga (GUO, 2014). Casos precoces desse tipo de ruína são observados em torres eólicas e pontes, a exemplo das reportadas na Figura 1.18.

Dos casos apresentados na Figura 1.18, o primeiro refere-se ao desabamento do edifício Royal Class situado em Belém do Pará no Brasil, em 2011, onde o prédio entrou em colapso ainda em fase de construção, devido à falta de análises e considerações em projeto das cargas cíclicas induzidas pelo vento. O segundo caso refere à ruína da Ponte Morandi situada em Genova na Itália, em 2018, onde a fadiga foi um dos mecanismos degradativos responsáveis pela falha. Por último, relata-se o colapso em uma torre eólica no Rio Grande do Norte, no Brasil, em 2014, região com maior concentração de torres eólicas do país. De acordo com Milititsky, Consoli e Schnaid (2015), é cada vez mais comum a falha destas torres devido à falta de rigidez nos elementos de fundações ou a não consideração em projeto do mecanismo da fadiga.

A maioria dos acidentes associados à fadiga decorrem devido à falta de conhecimento sobre o comportamento do concreto quando sujeito a cargas cíclicas. A deterioração do concreto quando analisada por ensaios dinâmicos ocorre de forma análoga aos ensaios estáticos. Entretanto, o modo de propagação de fissuras, a velocidade de propagação e o dano, podem ser distintos em função do nível e da taxa de carregamento ao qual o material é submetido (DOWLING, 2012).

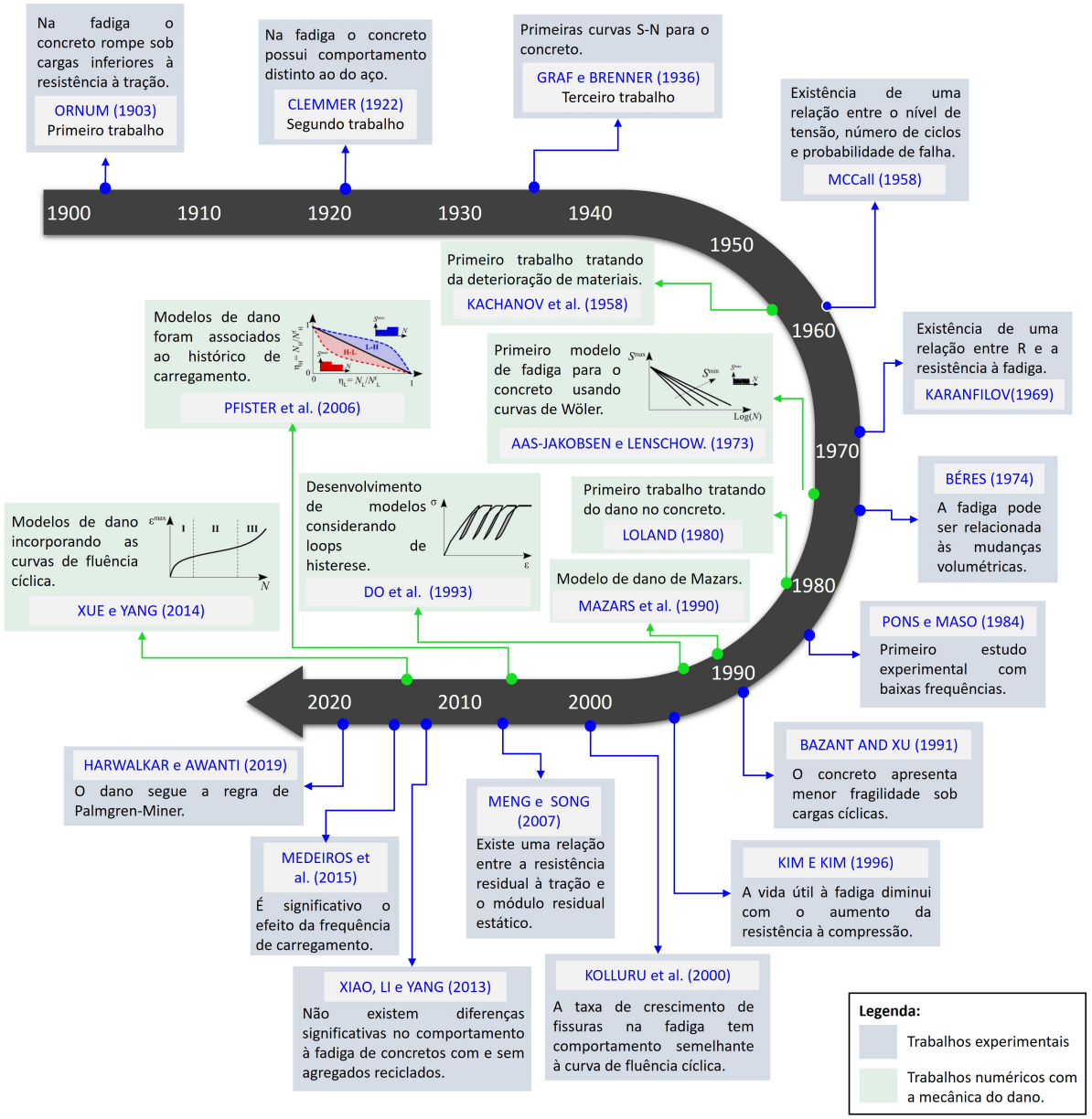
A norma nacional de projeto de estruturas de concreto armado NBR 6118 (ABNT, 2014), assim como as normas internacionais ASTM E206-72 (ACI, 2002) e ACI 215R-92 (ASTM, 1985), apresentam prescrições para a avaliação da resistência à fadiga das armaduras imersas no concreto que, para os casos de flexão, recebem as maiores solicitações. No entanto, nos casos em que o concreto está sujeito ao maiores níveis de solicitação, as normas recomendam que análises de fadiga sejam também avaliadas no concreto.

Uma das explicações para ainda não existirem formulações que descrevam à resistência a fadiga do concreto nas normas, deve-se ao fato de que apenas os materiais dúcteis como os aços e as ligas apresentam ábacos e curvas de Wohler bem definidas. Para o concreto e outros materiais frágeis ainda não estão disponíveis curvas para todas as classes do material, uma vez que o desenvolvimento de pesquisas relacionadas à fadiga só ganhou destaque no decorrer das duas últimas décadas, onde os estudos correlatos às áreas de durabilidade, mecânica da fratura e mecânica do dano tiveram substancial avanço.

Na Figura 1.19 são identificados as principais hipóteses e resultados referentes ao estudo da fadiga no concreto. Os tópicos referenciados na linha do tempo foram definidos por meio da análise de resultados de pesquisas numéricas e experimentais levantadas em uma revisão bibliográfica sistematizada que deu embasamento a esse trabalho. Ao todo foram levantados e avaliados 212 trabalhos, sendo os que estavam ligados à esta tese foram apresentados e discutidos no estado da arte, texto que antecede essa seção. O levantamento bibliográfico foi conduzido nas seguintes bases de dados: *ScienceDirect*, *ASCE Library*, *American Concrete Institute*, *SciELO* e *MDPI Journals Library* e *Google Scholar*.

No levantamento, a busca levou em conta artigos, livros e capítulos de livros, teses e dissertações. Os idiomas considerados foram o português e o inglês. As palavras chaves

Figura 1.19 – Avanços nos estudos da fadiga no concreto.



Fonte: Própria autoria.

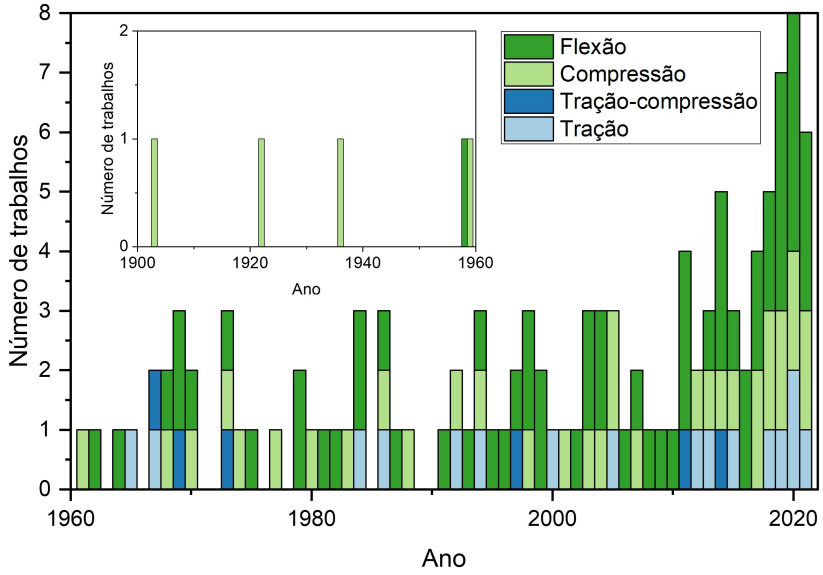
empregadas nas buscas foram: concreto, cargas cíclicas, fadiga, mecânica do dano e mecânica da fratura. Tais palavras foram utilizadas em diferentes combinações. É importante pontuar qual o domínio de busca da revisão sistematizada, para indicar que existem outros trabalhos fora dos mencionados neste texto.

Fazendo um panorama geral, investigações do comportamento do concreto sob ação de cargas cíclicas vêm sendo realizadas por meio de estudos teóricos, experimentais e numéricos, sendo divididos quanto ao tipo solicitação: fadiga por tração (SUBRAMANIAM; SHAH, 2003; GUO et al., 2007); tração-compressão (LU; LI; SONG, 2004; WEI; YUPU; JINSONG, 2005);

compressão (KIM; KIM, 1996; XIAO; LI; ZHANG, 2005; XIAO; LI; YANG, 2013; ONOUE et al., 2014; LANTSOGHT; VANDER-VEEN; BOER, 2016; JIANG et al., 2017; VICENTE et al., 2018; SUN et al., 2022); e flexão (LI; SUN; JIANG, 2011; KIM et al., 2013; ARORA; SINGH, 2016; KEERTHANA; CHANDRA-KISHEN, 2018; CANDIDO et al., 2018; KASU et al., 2019; HARWALKAR; AWANTI, 2019; SAINI; SINGH, 2020).

Nos estudos experimentais, a maioria das pesquisas encontradas na literatura têm como objetivo a avaliação da fadiga à flexão (Figura 1.20), devido à grande incidência de estruturas submetidas a este tipo de solicitação, e, principalmente, pelo fato de que os mais variados níveis de carga e frequência são facilmente explorados nos laboratórios, quando comparado aos outros modos de solicitação. A Figura 1.20 apresenta a quantidade de trabalhos desenvolvidos e publicados desde o primeiro, Ornum (1903), até o mês de Dezembro de 2021, considerando apenas pesquisas de cunho experimental. A quantidade de trabalhos (119), e a proporção de cada tipo de solicitação estudada, foi determinada no levantamento bibliográfico.

Figura 1.20 – Número de trabalhos experimentais desenvolvidos frente às diferentes solicitações.

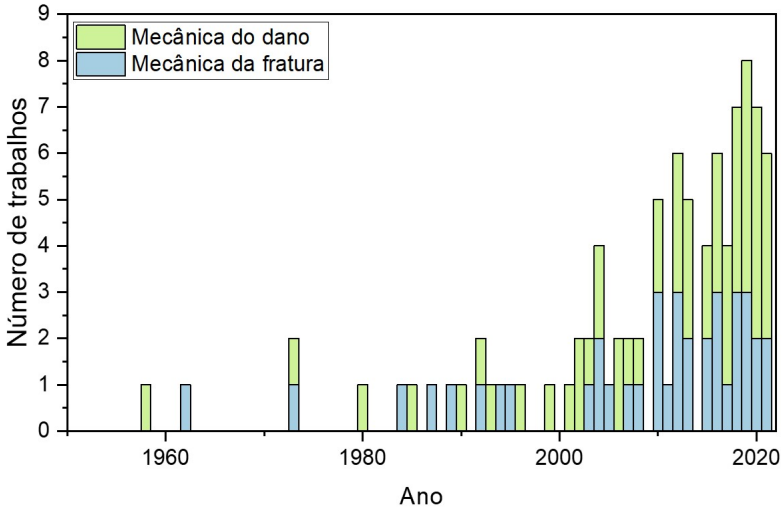


Fonte: Própria autoria.

Quanto aos estudos numéricos, é possível verificar pela Figura 1.19 que a utilização de aspectos fenomenológicos da fadiga vêm sendo associados aos modelos de representação da não-linearidade física do concreto, o que possibilitou o desenvolvimento de modelos robustos e eficientes. A Figura 1.21 apresenta a quantidade de trabalhos (93) desenvolvidos e publicados até o mês de Dezembro de 2021, considerando pesquisas de simulação e desenvolvimento de formulações. Observa-se que a teoria da mecânica do dano possui a maior taxa de emprego, apresentado uma vertente em corrente ascensão. De modo geral, essa técnica de representação da não linearidade física do material vem demonstrando grande facilidade de implementação, principalmente quando comparada à mecânica da fratura, e possibilita um acoplamento simplificado

à técnica de simulação via Método dos Elementos Finitos (MEF).

Figura 1.21 – Número de trabalhos numéricos desenvolvidos considerando abordagens baseadas na mecânica da fratura e mecânica do dano.



Fonte: Própria autoria.

Em virtude da heterogeneidade do material e das diversas condições de realização dos ensaios, os resultados dos trabalhos existentes apontam a existência de diferentes hipóteses, sendo estas pouco confrontadas ou comprovadas em outras pesquisas. Ademais, aponta-se a necessidade da realização de ensaios com diferentes amplitudes, taxas e frequências de carregamento, já que a maior parte dos experimentos foram desenvolvidos empregando os mesmos valores de frequências (de 1 a 10 Hz) e níveis de tensão máxima (entre 70% e 95% da resistência do material). A falta de dados está principalmente atrelada aos custos envolvendo os ensaios ou ao tempo de sua realização. Assim, a falta de formulações e modelos com maior nível de fidelidade e capacidade de generalizar os resultados, está associada à baixa quantidade de resultados experimentais, e, principalmente, à falta de trabalhos que possibilitem a generalização das hipóteses existentes.

No Brasil, por exemplo, as pesquisas referentes aos efeitos de cargas cíclicas são prioritariamente desenvolvidas considerando a fadiga por flexão em vigas ou compressão e flexão em pavimentos de concreto, sendo a maioria dos trabalhos de cunho numérico ou teórico-numérico (SCHAFFER, 2002; GONÇALVES, 2003; SILVAFILHO, 2005; MENEGHETTI, 2007; BARONI, 2010; JUNGES et al., 2017; MASCARENHAS; CARVALHO, 2019). No que diz respeito aos estudos experimentais, são encontrados quatro trabalhos (CERVO, 2004; CHAMON, 2006; MEDEIROS, 2012; CANDIDO et al., 2018), sendo que a maioria, com exceção de Medeiros (2012), tratam da fadiga por flexão.

A principal dificuldade encontrada e apontada para o estudo experimental da fadiga no concreto no Brasil deve-se à falta de equipamentos capazes de realizar ensaios cíclicos com alta velocidade de carregamento. Medeiros (2012), por exemplo, realizou parte de sua pesquisa no

exterior devido a indisponibilidade, na época, de equipamentos que possibilitassem a realização de ensaios de fadiga com os níveis de carregamento avaliados pelo autor.

Assim, motivado pela carência de estudos envolvendo a fadiga no concreto, este trabalho pretende atingir o estado da arte tanto por investigar e avaliar experimentalmente o comportamento do concreto sujeito à fadiga por compressão, como por oferecer uma nova técnica para a análise e simulação do mecanismo em nível mesoscópico, via Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP), considerando para isso a proposição de novos modelos representativos da evolução do dano no concreto devido à ação de cargas cíclicas. Ademais, a presente tese busca contribuir com o desenvolvimento de trabalhos na área, principalmente no país, estendendo a linha de pesquisa em processos dinâmicos no Departamento de Engenharia de Estruturas (SET/EESC-USP).

1.3 Objetivos

Diante das motivações e estado da arte apresentados anteriormente, delimita-se como objetivos gerais deste trabalho o estudo numérico-experimental do comportamento do concreto devido à ação de cargas cíclicas de compressão, e a proposição de modelos representativos da vida útil à fadiga e evolução do dano. Para tanto, elencam-se os objetivos específicos:

1.3.1 Objetivos específicos

- Estudar a influência da frequência de carregamento, resistência à compressão do concreto e nível máximo de tensão aplicada, na vida útil à fadiga do material;
- Desenvolver formulação preditiva da vida útil à fadiga do concreto sob compressão cíclica;
- Propor uma formulação representativa da evolução do dano considerando aspectos fenomenológicos da fadiga no concreto;
- Desenvolver um código baseado no MEFP, para análises mecânicas de sólidos compósitos, sobretudo o concreto, considerando a não linearidade geométrica e física.
- Propor uma estratégia numérica para reduzir o tempo computacional despendido na análise não-linear física, empregando-se a técnica de embutimento.

1.4 Metodologia

Esta tese foi concebida considerando uma metodologia de trabalho dividida em sete partes, sendo: (i) levantamento bibliográfico; (ii) desenvolvimento de um código computacional para a análise não linear geométrica de sólidos compósitos; (iii) desenvolvimento de um código para a análise não linear física de sólidos, e proposição de uma estratégia numérica de redução do

tempo de processamento do código; (iv) estudo experimental da fadiga decorrente da compressão cíclica; (v) desenvolvimento de formulações representativas da evolução do dano por fadiga e vida útil; (vi) acoplamento dos modelos de dano por fadiga no código computacional; (vii) aplicação e avaliação dos modelos desenvolvidos.

A seguir, apresenta-se de forma detalhada a metodologia adotada no trabalho:

i **Levantamento bibliográfico:** Etapa onde foram estudados e coletados dados e hipóteses relacionadas ao tema da pesquisa, tornando possível alcançar os objetivos almejados;

ii **Desenvolvimento de um código computacional para a análise não linear geométrica de sólidos compósitos:** Nesta etapa, foi implementado em linguagem Fortran um código para a simulação de sólidos compósitos. O programa foi desenvolvido com base no método dos elementos finitos posicional (MEFP), usando a relação constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff para materiais elásticos não lineares. Com esta formulação, a não linearidade geométrica é contemplada naturalmente, recorrendo-se ao método incremental iterativo de Newton-Raphson para a solução dos sistemas de equações não lineares. Para a discretização do contínuo, utilizou-se os polinômios de Lagrange aplicados à elementos finitos triangulares com ordem de aproximação cúbica. Concomitantemente, foram implementados elementos finitos para a representação de fibras (para simular barras de aço imersas no concreto) e partículas (para representar os agregados do concreto). As fibras são representadas por elementos de barra simples, também denominados barras de treliça. As partículas são representadas por elementos finitos triangulares com ordem cúbica de aproximação para as suas posições nodais. O acoplamento dos elementos finitos do tipo fibra e partícula no programa de chapa (elemento finito para a representação da matriz), foi realizado utilizando a técnica de embutimento adotada por Vanalli (2004), Sampaio, Coda e Paccola (2011), Sampaio (2014), Nogueira et al. (2014), Moura (2015) e Paccola e Coda (2016), o qual consiste na inserção das posições nodais das fibras/partículas sobre os elementos finitos representativos da matriz (do tipo chapa), onde estão inseridas;

iii **Desenvolvimento de um código para a análise não linear física de sólidos, e proposição de uma estratégia numérica de redução do tempo de processamento do código:** Nesta etapa foi implementada e acoplada ao código de análise de sólidos via MEFP, uma formulação para a análise não linear física, via mecânica do dano, considerando a lei de evolução do dano de Mazars (1984). Ademais, com o propósito de reduzir o tempo de processamento do código baseado no MEFP, para análises não linear física, uma estratégia numérica denominada *malha fantasma* foi proposta, baseando-se na técnica de embutimento, mesma técnica empregada na representação de sólidos compósitos, descrita na etapa anterior;

iv **Estudo experimental da fadiga decorrente da compressão cíclica:** Para o estudo e melhor compreensão dos efeitos da incidência de carregamentos cíclicos no concreto, um

estudo experimental foi desenvolvido, onde cargas com diferentes níveis de tensão máxima (50% e 70% da resistência à compressão média) e distintas frequências de carregamento ($0,5$, $0,25$ e $0,125$ Hz) foram aplicadas em concretos de três classes de resistência C30, C50 e C70. Os ensaios de fadiga foram conduzidos com dois objetivos: para definição da vida útil à fadiga; e para a determinação da evolução do dano em função do número de ciclos de carregamento. A vida útil à fadiga foi determinada mediante a média do número de ciclos necessários para causar a ruptura de quatro corpos de prova, ensaiados sob as mesmas condições. O dano foi determinado por meio da variação do módulo de elasticidade dinâmico do material, considerando o instante inicial (material íntegro) e em diferentes momentos do ensaio de fadiga (20%, 40%, 60% e 80% da vida útil à fadiga da amostra). A rigidez do material foi determinada por meio de ensaios em corpos de prova para a determinação do módulo de elasticidade, de acordo com a NBR 8522 (ABNT, 2008) e, por ensaios não destrutivos via Técnica de Excitação por Impulso;

v **Desenvolvimento de formulações representativas da evolução do dano por fadiga e vida útil:** Nesta etapa, aspectos relacionados à fenomenologia e à mecânica do dano foram empregados a fim de determinar formulações representativas da evolução do dano e da vida útil à fadiga do concreto. As formulações foram determinadas por modelagens pela técnica de regressão não linear multivariada, utilizando os resultados obtidos no estudo experimental e dados coletados da literatura;

vi **Acoplamento dos modelos de dano por fadiga no código computacional:** Nesta etapa foi realizada a implementação e o acoplamento ao código das leis propostas para o acumulo de dano e predição da vida útil à fadiga do concreto.;

vii **Aplicação e avaliação dos modelos desenvolvidos:** A última etapa compreende da realização de simulações numéricas de elementos de concretos solicitados ciclicamente, considerando exemplos coletados da literatura e resultados obtidos no estudo experimental, com o intuito de validar e verificar a eficiência das formulações e códigos desenvolvidos.

Os códigos computacionais foram desenvolvidos em linguagem *Fortran 90*. A geração das malhas foi conduzida por meio dos programas *Gmsh 4.4* (GEUZAINE; REMACLE, 2009) e *AcadMesh2D* (PIEDADE NETO; FAGÁ JÚNIOR; PACCOLA, 2012). Para o pós-processamento e geração de gráficos foram empregados, respectivamente, o *AcadView* (PACCOLA; CODA, 2015) e o *OriginPro* (ORIGINLAB, 2019).

1.5 Organização da tese

A estrutura deste trabalho está organizada em sete capítulos, os quais abordam temas referentes à mecânica do dano e ao fenômeno da fadiga no concreto. Os conteúdos dos capítulos são apresentados na sequência.

Resumidamente, no *Capítulo* 1 são apresentadas as motivações, a importância e a contextualização no cenário científico do presente trabalho. Assim, apresentam-se inicialmente os principais aspectos relacionados à fadiga, descrevendo o estado da arte dos trabalhos desenvolvidos ao longo do tempo, fornecendo ao leitor o embasamento teórico necessário para a compreensão do tema abordado e visualização em um panorama científico do estado atual das pesquisas na área. Na sequência, são apresentadas as motivações e justificativas para o desenvolvimento da pesquisa. Os objetivos e a metodologia estão dispostos ao final do capítulo.

Ao longo do *Capítulo* 2, o comportamento do concreto sob fadiga é apresentado, descrevendo os aspectos fenomenológicos da deterioração do material devido à ação de cargas cíclicas e os principais fatores intervenientes.

No *Capítulo* 3 são apresentadas, inicialmente, as leis representativas da mecânica do contínuo, tratando da não-linearidade geométrica. Conceitos e formulações que subsidiam a modelagem do comportamento mecânico de elementos compósitos são apresentados, bem como a obtenção de soluções numéricas via Método dos Elementos Finitos Posicional. Por fim, o código desenvolvido é avaliado e validado por meio da simulação de problemas de interesse.

O *Capítulo* 4 trata da não linearidade física dos materiais submetidos a carregamentos estáticos, apresentando uma discussão sucinta dos fundamentos do dano contínuo. Na sequência é apresentada uma nova estratégia numérica, baseada na técnica de embutimento, para reduzir o tempo de processamento das modelagens via método dos elementos finitos posicional. Ao final do capítulo são apresentados alguns exemplos a fim de demonstrar a eficiência das formulações desenvolvidas e implementadas, evidenciando a sua aplicabilidade.

No *Capítulo* 5 é apresentado o programa experimental desenvolvido para o estudo e compreensão do mecanismo da fadiga no concreto. Neste capítulo são descritos os materiais empregados para a confecção dos corpos de prova, os ensaios mecânicos e de caracterização conduzidos, os resultados obtidos na caracterização dos materiais: módulo de elasticidade estático e dinâmico; resistência à compressão; e coeficiente de Poisson. Os resultados referentes à compressão cíclica são apresentados considerando a vida útil à fadiga e os históricos de deformação máxima e evolução do dano.

O *Capítulo* 6 trata do desenvolvimento das formulações para a predição da vida útil à fadiga e da lei de acúmulo de dano no concreto. Neste capítulo é apresentado a validação dos modelos e na sequência é descrito o acoplamento das formulações ao código baseado no MEFP. Por último, exemplos numéricos são apresentados com o intuito de avaliar a aplicabilidade dos modelos propostos.

No *Capítulo* 7 estão dispostas as considerações finais do trabalho e, com base nestas, são delineadas algumas sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO

2

CARGAS CÍCLICAS NO CONCRETO

Considerando que este trabalho tem como escopo o estudo experimental e a modelagem do comportamento mecânico do concreto sob ação de solicitações cíclicas, na sequência é apresentada uma breve explanação acerca das hipóteses existentes na literatura, que auxiliam no entendimento dos principais aspectos inerentes ao comportamento da fadiga no material. Assim, neste capítulo são apresentados os aspectos fenomenológicos que regem o efeito de cargas cíclicas no concreto, discutindo a influência das propriedades intrínsecas ao material e das condições externas, a exemplo dos modos de carregamento.

2.1 Considerações iniciais

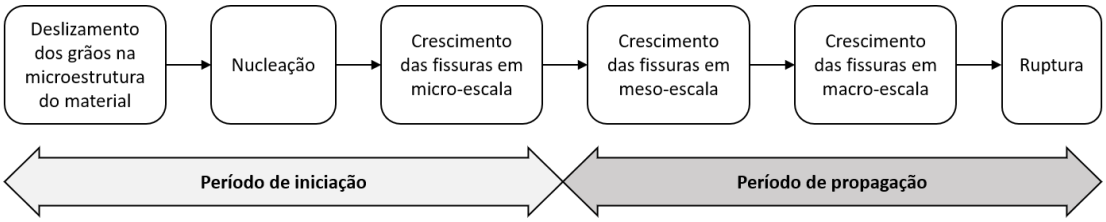
Em um sólido submetido a cargas cíclicas, nucleações em nível microscópico são originadas com um baixo número de repetições devido ao efeito da fadiga no material. A progressão das fissuras até a sua observação em nível macroscópico é, de modo geral, lenta se considerada a vida útil à fadiga do sólido usualmente expressa pelo número de ciclos necessário para causar a falha do material (N_f).

A compreensão do mecanismo de fadiga é essencial para que se possa considerar e relacionar os diferentes fatores intervenientes na vida útil à fadiga e/ou na propagação de fissuras por este mecanismo, como, por exemplo, a qualidade microestrutural do material, os níveis de tensão aplicados e a influência das condições do ambiente que circundam o sólido. Esse conhecimento é essencial para a análise das propriedades de fadiga de uma estrutura. De acordo com Schijve (2003), os métodos de previsão e avaliação da fadiga só podem ser empregados se a mesma for entendida como um processo de nucleação e danificação do material, onde as fissuras se desenvolvem em um nível microscópico e causam a falha do material quando se propagam e alcançam dimensões críticas.

A vida útil à fadiga é geralmente classificada em dois estágios: um referente ao surgimento das nucleações no material e outro à propagação das fissuras. No período de iniciação

também é observado o crescimento microestrutural de fissuras, porém em dimensões tão insignificantes que não são consideradas na representação ou quantificação do nível de danificação do material. O período de propagação é geralmente caracterizado pelo instante em que o crescimento das fissuras é observado em nível mesoscópico. Na Figura 2.1 são apresentadas as diferentes fases representativas da vida útil à fadiga, considerando aspectos relacionados à fissuração dos materiais.

Figura 2.1 – Diferentes fases da vida útil à fadiga associada à fissuração do material.



Fonte: Adaptado de Schijve (2003).

Para uma eficiente análise de projeto de elementos estruturais sujeitos a cargas cíclicas, Schijve (2003) recomenda que ela seja conduzida de forma isolada, de modo que cada um dos estágios do fenômeno sejam avaliados à parte, uma vez que em muitas aplicações, ou dependendo da natureza do material, se torna importante identificar o momento em que ocorre a sua nucleação, algo que não é identificado pela aplicação da maioria dos modelos de vida útil à fadiga.

Investigações em nível microscópico realizadas nos últimos anos mostraram que a fissuração por fadiga tem início com microfissuras invisíveis em bandas deslizantes da microestrutura cristalina dos materiais (O'BRIEN; TAYLOR; LEE, 2003; BALBI et al., 2009; BIAN et al., 2011; SHAN et al., 2019; PILKEY; PILKEY; BI, 2020). Estas observações permitiram inferir que a nucleação ocorre de forma precoce, cerca de 3-8% de N_f (BIAN et al., 2011; SHAN et al., 2019; PILKEY; PILKEY; BI, 2020). Ademais, os resultados possibilitaram indicar que a nucleação pode ocorrer quase imediatamente após a aplicação das cargas, se for aplicada um nível de tensão cíclica acima do limite de resistência à fadiga do material.

Apesar da nucleação ocorrer precocemente com a aplicação de cargas cíclicas, as microfissuras permanecem indetectáveis em um nível macroscópico por um significativo período de tempo. A partir do instante em que as fissuras se tornam visíveis, ou seja, com dimensões em macroescala, a vida útil residual do sólido é definida como uma pequena parcela da vida útil total (SCHIJVE, 2003; PILKEY; PILKEY; BI, 2020).

Após o estágio de iniciação da fissuração, a progressão das fissuras apresenta-se como um mecanismo lento, tomando cerca de 80-90% da vida útil. De acordo com Schijve (2003), um dos principais motivos para esta caracterização se deve às diferentes propriedades intrínsecas ao material, destacando-se a disposição dos grãos. No entanto, a taxa de progressão das fissuras se torna maior quando do surgimento de fissuras fora da região em que se desenvolveu a primeira nucleação. Neste momento são observados índices de dano da ordem de $0,1$. De acordo com Bian et al. (2011), a análise do dano serve como um poderoso e alternativo parâmetro quantitativo

do nível de deterioração do material, devido à ação de cargas cíclicas. Ademais, um dano de $0,1$, no concreto, é um indicativo do início do período de progressão das fissuras.

De modo geral a distinção entre os dois períodos, iniciação e progressão, é de grande importância na análise do mecanismo, principalmente pelo fato de que em projetos de engenharia um dos grandes objetivos é identificar as condições de solicitação que propiciam a progressão das fissuras. Porém, é complexa a definição do instante de transição entre estes dois estágios, já que são diversos os fatores que interferem no comportamento à fadiga, principalmente em materiais heterogêneos e frágeis, como é o caso do concreto.

Assim, faz-se necessário avaliar os diferentes fatores que interferem e corroboram com a progressão da deterioração do concreto por fadiga. Porém, antes de descrever a interveniência destes fatores, é necessário apresentar alguns conceitos relacionados às solicitações cíclicas como a amplitude das tensões, a forma de onda do carregamento e entre outros.

2.2 Cargas cíclicas: definições e conceitos

A fim de compreender o efeito do carregamento cíclico em uma estrutura, é importante definir o modo do carregamento, sua frequência de aplicação e a intensidade. Os conceitos e definições apresentados na sequência são baseadas nos preceitos do livro *"Comportamento mecânico dos materiais"* (DOWLING, 2012).

Algumas aplicações práticas, assim como os ensaios laboratoriais de fadiga, envolvem um carregamento repetitivo que tem sua intensidade variando entre níveis constantes de tensão máxima e mínima (tensões axiais). Nestes casos, dizemos que o material está submetido à um carregamento cíclico de amplitude constante. Este modo é apresentado na Figura 2.2, onde são representadas as possíveis condições de carregamentos com uma carga senoidal.

A variação das tensões é definida pela diferença entre os níveis máximo e mínimo de tensão, e por conseguinte será sempre definida positivamente, como se vê na Equação 2.1. A média das tensões é definida como a metade da soma das tensões máxima e mínima e seu valor pode ser nulo, positivo ou negativo (Figura 2.2), conforme mostra a Equação 2.2. A amplitude do carregamento é definida como sendo a metade da variação dos níveis de tensão aplicados (Equação 2.3), o que faz com que seu valor seja sempre positivo. A amplitude representa a variação do carregamento em torno da média das tensões.

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} \tag{2.1}$$

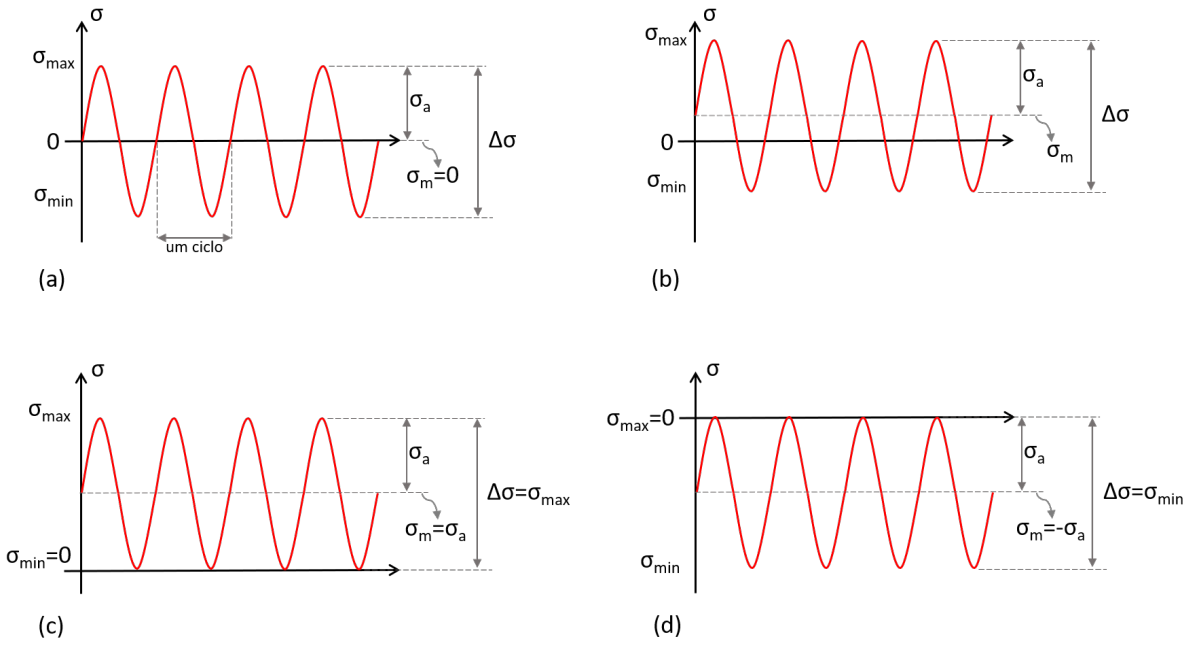
$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \tag{2.2}$$

$$\sigma_a = \frac{\Delta\sigma}{2} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \tag{2.3}$$

em que $\Delta\sigma$ refere-se a variação das tensões, σ_{max} é a tensão máxima aplicada no sólido, σ_{min} representa o nível mínimo de tensão aplicado, σ_m é a tensão média, σ_a é a amplitude de tensão

do carregamento cíclico.

Figura 2.2 – Carregamento cíclico de amplitude constante e a nomenclatura associada: (a) carregamento cíclico completamente reverso, com tensão média nula; (b) carregamento cíclico com tensão média diferente de zero; (c) carregamento com tensão mínima nula e; (d) carregamento com tensão máxima nula.



Fonte: Própria autoria.

Quanto ao modo de carregamento, o mesmo pode ser definido por meio da forma de onda e do modo de repetição do padrão da onda. Na Figura 2.3 são apresentados carregamentos cíclicos com padrão de repetição constante (ciclos contínuos), com intervalos na repetição dos ciclos (ciclos descontínuos) e com diferentes formas de onda (senoidal, dente de serra, triangular e quadrada). Devido às diferentes possibilidades de representação do modo de carregamento, é de grande importância a sua definição para uma correta análise da vida útil de componentes estruturais ou de sua resistência à fadiga.

Em um estudo realizado por Fan et al. (2018), corpos de prova de concreto foram testados na fadiga por compressão, considerando carregamentos com forma de onda triangular (forma usualmente empregada em estudos experimentais com o concreto) e com ciclos contínuos e descontínuos sob os mesmos níveis de tensões máxima e mínima. Os resultados obtidos mostraram que os concretos sujeitos a ciclos descontínuos possuem vida útil à fadiga superior aos concretos submetidos a ciclos contínuos. Ademais, foi observado que, quanto maior o tempo da descontinuidade, maior será a vida útil do concreto.

Além das variáveis já descritas, é de grande importância definir a relação entre os níveis de tensão que atuam no material, uma vez que este valor apresenta grande influência sobre o comportamento da fadiga (AGUADO, 1990). Assim, nos estudos de fadiga, faz-se necessário informar a razão entre as tensões mínima e máxima (R), a qual é dada pela Equação 2.4. Ademais,

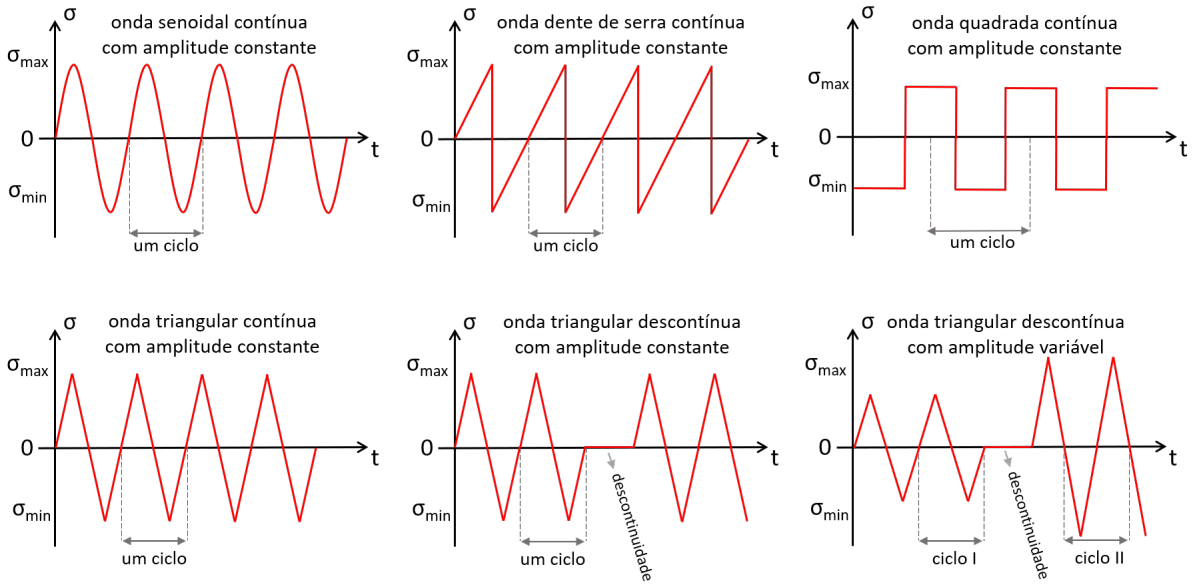
nas Equações 2.5 e 2.6 são apresentadas formas alternativas para a amplitude de tensão e a tensão média, considerando o valor de R e as Equações 2.2 e 2.3.

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \tag{2.4}$$

$$\sigma_a = \frac{\Delta\sigma}{2} = \frac{\sigma_{max}}{2} \cdot (1 - R) \tag{2.5}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max}}{2} \cdot (1 + R) \tag{2.6}$$

Figura 2.3 – Modos de carregamento considerando a forma de onda, a amplitude e a continuidade no espectro de carga.



Fonte: Própria autoria.

De modo geral, um carregamento cíclico com média nula pode ser definido pela amplitude de tensões, ou pelo valor da tensão máxima, que é numericamente igual à amplitude de tensões. Quando a tensão média não é zero, dois valores independentes são necessários para definir o carregamento cíclico, os quais podem ser: σ_a e σ_m, σ_{max} e R, $\Delta\sigma$ e R, σ_{max} e σ_{min}.

A expressão carregamento cíclico totalmente reverso é empregada para definir uma situação onde a tensão média é nula ou a razão entre tensões é inteira e negativa ($R = -1$). Ademais, um carregamento com $R = 0$ é definido como carregamento cíclico de mínimo nulo, situação comum nos ensaios experimentais que consideram a compressão pura com relaxamento instantâneo do corpo de prova.

Comenta-se que o conjunto de variáveis definido até o momento foi determinado em função das tensões axiais atuantes em um componente estrutural sob carregamento cíclico. No entanto, todos estes valores podem ser igualmente definidos em função de deformações, forças,

momentos fletores ou torção.

2.3 Fadiga no concreto

Em diversas situações, o concreto está sujeito a cargas estáticas com pouca ou nenhuma flutuação. No entanto, quando variações apreciáveis na carga ocorrem, a fadiga é um dos prováveis fenômenos associados à ruptura. Gonçalves (2003) descreve que a fadiga é a diminuição gradual da resistência de um material devido a ação de solicitações cíclicas, onde o elemento experimenta uma redução de sua rigidez.

Para Aguado (1990), o efeito da fadiga é intensificado quando as condições de solicitações são alternadas com tensões de tração e compressão. Além disto, o autor comenta que o mecanismo de deterioração do material é o mesmo, independente do modo de solicitação, isto é, por tração pura, compressão ou flexão, por exemplo. Há de se destacar que as solicitações podem ser combinadas por diferentes modos e, de acordo com as características destas combinações de solicitações simultâneas, se obtêm respostas diferentes no comportamento do material à fadiga (GONÇALVES, 2003).

A fadiga é um fenômeno que ocasiona danos localizados, permanentes e progressivos, quando o material é submetido a cargas cíclicas (RITCHIE, 1988). O processo de degradação do concreto por fadiga está associado à sua deterioração quando submetido a repetidas cargas e descargas, causando o surgimento e evolução de fissuras na matriz do material (CORNELISSEN, 1984).

Callister e Rethwisch (2020) descrevem que a fissura ocasionada no concreto devido ao fenômeno da fadiga é de natureza frágil, existindo assim, pouca ou nenhuma deformação plástica associada à evolução do dano, e que o dano progride até que ocorra a ruptura do material.

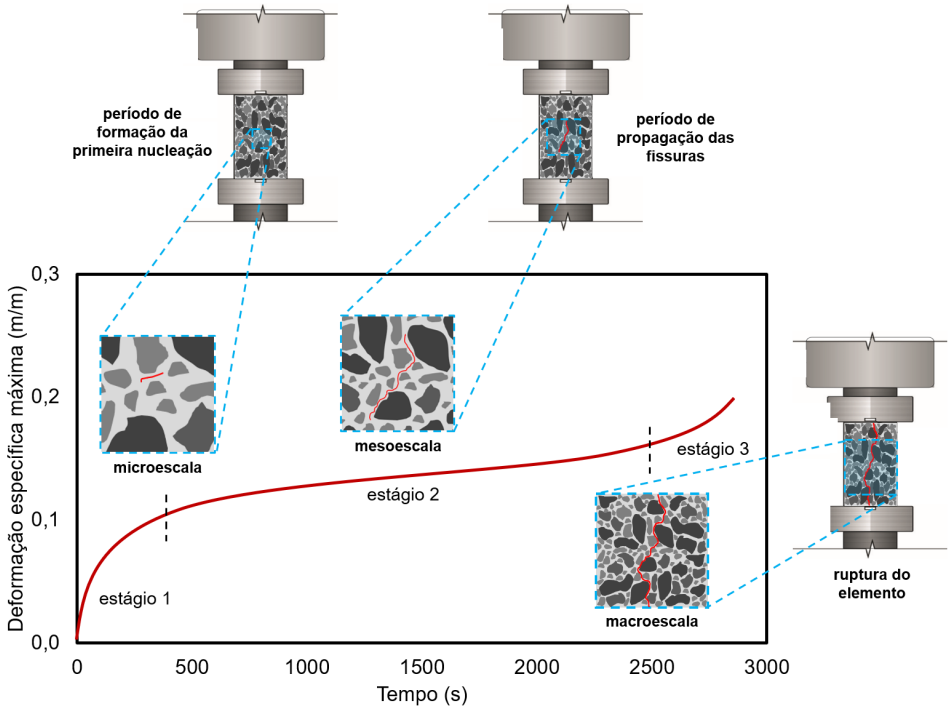
De modo geral, do surgimento da primeira microfissura até a ruptura do material, o dano por fadiga no concreto pode ser caracterizado por três estágios, de acordo com os níveis de deformação (Figura 2.4): (*i*) origem da fissura, quando as microfissuras surgem devido à alta concentração de tensões em pontos de descontinuidades na estrutura cristalina, ou em regiões com nucleações pré-existentes no material; (*ii*) propagação da fissura, devido ao acúmulo de energia nas extremidades das já existentes; e (*iii*) ruptura do material, que ocorre de maneira abrupta, devido a natureza quase-frágil do material.

A fim de prever ou monitorar a vida útil de um elemento de concreto quando sujeito à fadiga, faz-se necessário conhecer o comportamento mecânico do material quando submetido à ciclos de carga e descarga. As propriedades do concreto referentes à fadiga são determinadas a partir de ensaios laboratoriais, e os dados obtidos geralmente são apresentados por meio do gráfico de tensão ou de deformação específica em função do número de ciclos até a ruptura, curva *S-N* e ε-*N*, respectivamente.

Uma curva *S-N* completa é geralmente dividida em duas partes: uma referente à fase de baixo ciclo e outra da fase de alto ciclo. Não existe uma separação definida entre as duas partes,

sendo necessário estabelecer um limite arbitrário entre elas. De acordo com Aguado (1990), a classificação pode ser realizada da seguinte forma: até 10^4 ciclos considera-se fadiga de baixo ciclo; para um número de ciclos variando entre 10^4 e 10^7 (ou mais), fadiga de alto ciclo.

Figura 2.4 – Avanço de fissuras no concreto em função da deformação máxima e tempo de ensaio em corpos de prova submetidos à fadiga.



Fonte: Própria autoria.

Ainda existe uma divergência quanto à classificação da fadiga de baixo ou alto ciclo para estruturas de concreto. Gonçalves (2003), por exemplo, relata que a fadiga de baixo ciclo manifesta-se numa faixa entre 0 e 10^3 ciclos, enquanto que a fadiga de alto ciclo é evidenciada em pavimentos de aeroportos, pontes e base de máquinas, sendo definida por um número de ciclos variando entre 10^3 e 10^6.

Existem na literatura diversos modelos de previsão da vida útil do concreto quando submetido a solicitações cíclicas, sendo alguns apresentados nas Equações 2.7-2.10, modelos definidos em Raithby e Galloway (1974), Tepfers e Kutti (1979), Sparks (1982). Entretanto, boa parte dos modelos possuem como diretrizes as curvas *S*-*N* e ε-*N*, obtidas em campanhas experimentais, às quais só atendem a um pequeno número de casos, o que inviabiliza o seu emprego de forma generalizada.

$$\frac{S_{max}}{f_{t,f}} = d + e \cdot log(N) \tag{2.7}$$

$$log(N) = 13,275 - 11,39 \cdot \left(\frac{S_{max}}{f_{ck}}\right) \tag{2.8}$$

$$\frac{S_{max}}{f_{est}} = 1 - 0,0685 \cdot (1 - R) \cdot log(N) \tag{2.9}$$

$$log(N) = -2,66 - 0,94 \cdot log(\dot{\varepsilon}_{sec}) \tag{2.10}$$

em que S_{max} é a tensão máxima aplicada, $f_{t,f}$ é a resistência à tração na flexão estática do concreto, N é o número de ciclos para o colapso do material, d e e são parâmetros do material obtido por regressão dos dados, R é a razão entre a tensão mínima e máxima, f_{ck} é a resistência característica do concreto, f_{est} é a resistência à compressão ou à tração estática do concreto (depende da análise a ser feita), $\dot{\varepsilon}_{sec}$ é a taxa de deformação específica secundária, ou ainda taxa de fluência secundária.

De acordo com Lee e Barr (2004), são muitos os motivos que inviabilizam o uso da curva de *Wöhler* (Equação 2.7) de forma generalizada, sendo a principal a determinação dos parâmetros por meio da regressão de dados, uma vez que existe uma dispersão considerável nos resultados de ensaios de fadiga quando os corpos de prova do mesmo lote são ensaiados sob o mesmo nível de tensão.

Ortega et al. (2018) relatam que a grande dispersão nos resultados é decorrente da sensibilidade da resistência à fadiga. Mais precisamente, comentam que a variedade de parâmetros relacionados ao ensaio e ao material são quase impossíveis de serem controlados de maneira precisa. Tais parâmetros podem ser a microestrutura do material, as condições de moldagem, o alinhamento do corpo de prova no equipamento de ensaio, a imposição das tensões máximas e mínimas, a frequência de carregamento ou então o posicionamento dos extensômetros ou *Strain Gauges*.

A variabilidade observada em resultados obtidos por ensaios de fadiga no concreto podem levar a incertezas de projeto quanto a vida útil à fadiga, à resistência a este fenômeno ou à deformação do elemento por ação de cargas cíclicas, se essas forem preditas por modelos simplistas que se baseiam apenas na classe de resistência do concreto e nível de tensão aplicada. Assim, torna-se necessário avaliar e identificar a influência dos diferentes parâmetros que interferem no mecanismo, a fim de compreender a fadiga no concreto, e então conceber formulações que possibilitem modelar o problema com maior nível de fidelidade.

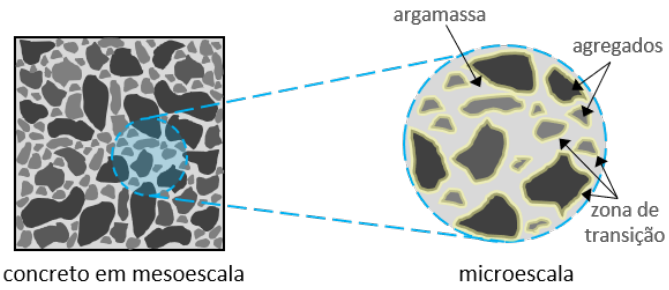
2.3.1 *Influência de parâmetros internos*

Ao analisar o concreto em nível microscópico, é possível observar a sua heterogeneidade, sendo o mesmo definido por três fases distintas: agregado graúdo (material inerte envolvido pela argamassa), matriz de argamassa (agregado miúdo envolvido por uma pasta de cimento, adições e água) e zona de transição (Figura 2.5).

A zona de transição é uma camada delgada presente ao redor do agregado graúdo, na interface agregado-cimento. De acordo com Mehta e Monteiro (2014), em concretos recém lançados, uma lâmina de água se forma ao redor das partículas de agregado. Este processo gera

relações água/cimento mais elevadas nas proximidades do agregado graúdo quando comparado a regiões distantes do agregado. É nessa região, entre os agregados e a pasta, que se forma a zona de transição.

Figura 2.5 – Heterogeneidade do concreto em microescala.



Fonte: Própria autoria.

A zona de transição se caracteriza como a região/fase de maior fragilidade do concreto, sendo responsável pela definição da resistência limite do material. Assim, devido à presença da zona de transição, o concreto tem sua falha sob níveis de tensão consideravelmente mais baixos do que a resistência das demais fases constituintes.

A quantidade de água usada no concreto é geralmente maior que a necessária para as reações químicas do cimento, almejando uma maior trabalhabilidade no lançamento do material nas formas. Uma parte do excesso de água, comumente denominada de água evaporável, é fixada por adsorção aos micro-cristais, e o restante, chamada de água capilar, permanece dispersa nos vazios capilares, formando uma rede capilar (GONÇALVES, 2003).

Para Van Mier (1996), os vazios capilares constituem os espaços não preenchidos pelos componentes sólidos da pasta, que se formam devido ao fato da densidade média dos produtos da hidratação ser consideravelmente menor do que a densidade do cimento.

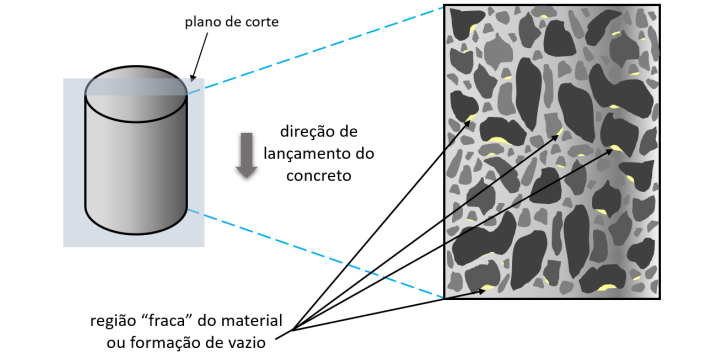
A estrutura da zona de transição e o volume de vazios possui significativa influência sobre a rigidez e sobre o módulo de elasticidade do concreto, sendo muitas vezes utilizado como parâmetros indicativos da durabilidade do material. Além disso, na zona de transição podem ser gerados defeitos de aderência e vazios associados à direção de moldagem também associados com vibração insuficiente após o lançamento (Figura 2.6).

É graças às microfissuras e vazios iniciais existentes na zona de transição que, mesmo antes de qualquer solicitação, se torna difícil separar os dois regimes que representam as deformações e falhas do material (DRIEMEIER, 1995). De acordo com Mehta e Monteiro (2014), sob condições normais de cura, existe uma fase inicial em que a deformação pode ser considerada como o resultado de movimentos quase reversíveis de átomos e, portanto, elástica. Durante este período, as fissuras da zona de transição permanecem estáveis.

Com o aumento da tensão atuante em um material, superando o limite elástico, as microfissuras na zona de transição começam a progredir, produzindo deformações permanentes que se superpõem às elásticas, fazendo com que a curva tensão-deformação deixe de apresentar

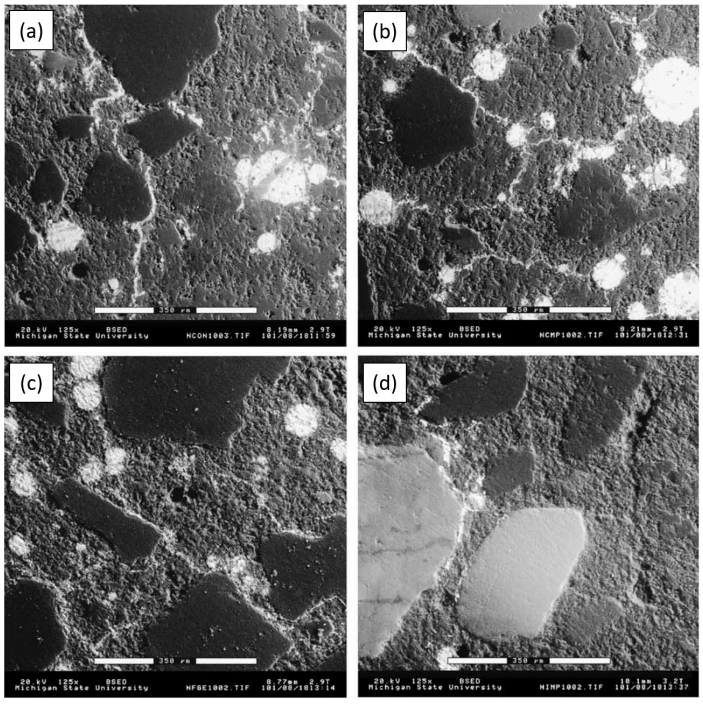
uma relação linear. Este desvio é sensível até a formação de microfissuras na matriz. Em estágio mais avançado, fissuras macroscópicas, resultantes da progressão das microfissuras, também passam a corroborar no desenvolvimento de deformações irreversíveis levando à ruptura do material.

Figura 2.6 – Formação de vazios devido à direção de moldagem.



Fonte: Própia autoria.

Figura 2.7 – Fotografias por microscopia de concretos: (a) sem carregamento, (b) sob compressão estática, (c) sob compressão ciclica, e (d) sob cargas de impacto por compressão.



Fonte: Soroushian e Elzafraney (2004).

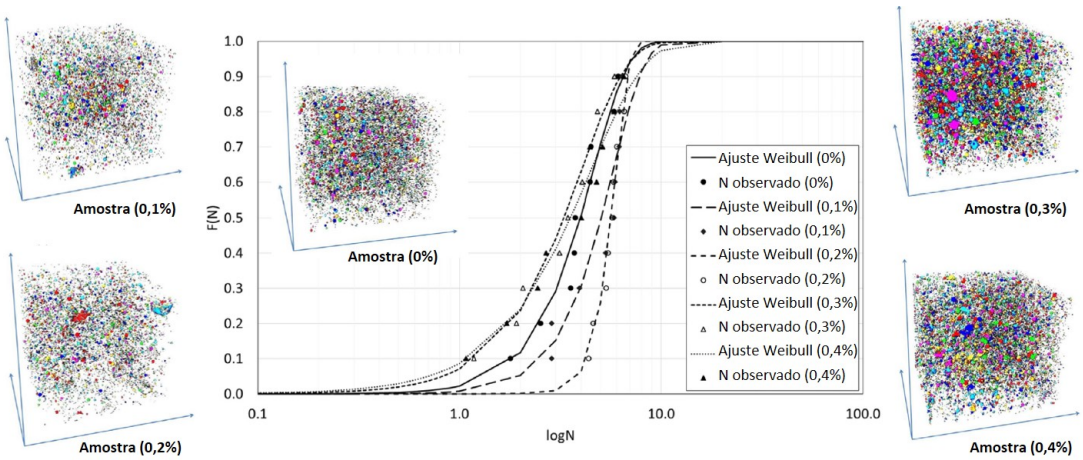
Em um estudo realizado por Soroushian e Elzafraney (2004), a formação e progressão de fissuras foram avaliadas por meio de testes em laboratório com corpos de prova de concreto sob as mesmas condições de produção (traço) e cura, e sob diferentes condições de carregamento. Os carregamentos induzidos foram todos de compressão, sendo eles estáticos, cíclicos e de impacto.

Imagens obtidas por microscopia são apresentadas na Figura 2.7, onde é observado uma maior quantidade de microfissuras nos concretos submetidos a cargas cíclicas, quando comparado com os outros modos de carregamento. Em cada uma das imagens da Figura 2.7, é possível observar: (a) as microfissuras pré-existentes no material; (b) as fissuras conectam um agregado ao outro, em geral, iniciando-se na zona de transição; (c) as fissuras ocorrem de forma semelhante em (b), porém são em menores dimensões e difusas no meio; e (d) as fissuras se concentram na zona de transição.

Ainda da observação da Figura 2.7, no que se refere ao efeito da zona de transição na capacidade mecânica do concreto, os autores observaram que é baixa a sua influência no mecanismo de fadiga, devido ao fato de que microfissuras surgem em diversas regiões do material, deixando-o com uma estrutura interna altamente frágil, onde a falha acontece de modo abrupto. Nos concretos sujeitos a cargas estáticas e de impacto, foi confirmado que a zona de transição apresenta grande influência na resistência do material, já que o processo de fissuração inicia nessa região, tendo o seu processo de propagação nas demais regiões.

Vicente et al. (2018) avaliaram 60 amostras de concreto com resistência à compressão entre 70 e 100 MPa quanto ao comportamento à fadiga. As análises foram conduzidas com o objetivo de identificar a influência do índice de vazios internos, considerando distintas proporções de ar incorporado/cimento (0%, 0,1%, 0,2%, 0,3% e 0,4%). As amostras foram escaneadas por meio de tomografia computadorizada (Figura 2.8), onde foi possível visualizar a distribuição dos poros na microestrutura das amostras. Através do uso de software específico, foram definidos os parâmetros morfológicos da porosidade de cada lote. Foram testados nove espécimes de cada lote, considerando cargas cíclicas de compressão. Quando comparados os parâmetros morfológicos dos poros e a vida à fadiga, observou-se a existência de uma relação inversa entre a porosidade e o número de ciclos necessários para levar o concreto à ruptura.

Figura 2.8 – Distribuição da vida útil à fadiga em função da proporção de poros/cimento.



Fonte: Adaptado de Vicente et al. (2018).

Em síntese, quanto maior a porosidade, menor a vida à fadiga, sendo que os poros mais prejudiciais são os de maiores dimensões. Os resultados revelaram ainda que, quanto maior a

porcentagem de poros de tamanho pequeno (definidos pelo volume ou comprimento), maior é a vida útil à fadiga. Os poros maiores provocam concentração de tensões que enfraquecem o material, causando uma ruptura prematura, conforme resultados observado nos trabalhos de Chen, Wu e Zhou (2013) e Wu et al. (2016).

A quantidade de poros na matriz de argamassa do concreto está diretamente atrelada à relação água/cimento empregada na produção do concreto. Sabendo disso, alguns pesquisadores vêm analisando a relação deste parâmetro com a resistência à fadiga do material.

Em um estudo de fadiga na flexão conduzido por Klcriber et al. (1982), os autores observaram que a resistência à fadiga do concreto aumenta quando a relação água/cimento decresce, considerando valores abaixo $0,4$. No entanto, para relações entre $0,4$ e $0,6$ não houve variação significativa, indicando a incipiência ou baixa influência deste parâmetro no comportamento à fadiga do concreto. A mesma observação foi feita por Zhang, Phillips e Wu (1997), ao considerar concretos submetidos a solicitações cíclicas de flexão, contendo diferentes relações água/cimento ($0,39$, $0,45$, $0,53$, e $0,65$).

Até este momento, são poucos os trabalhos que investigam ou reportam a influência da relação água/cimento no comportamento do concreto, isso porque, é difícil de avaliar a relação direta do índice de vazios com o ganho ou perda de resistência à fadiga do concreto. Uma alternativa encontrada pelos pesquisadores para estudar a influência dos poros, consiste em avaliar o efeito da relação água/cimento. Klcriber et al. (1982), por exemplo, avaliaram o efeito da relação/água cimento, da influência do tipo de agregado e do índice de vazios do material, observando que o tipo de agregado apresenta maior influência comparada à relação água/cimento e ao índice de vazios.

Um complicador na análise do efeito da relação água/cimento no comportamento à fadiga do material, se dá pelo fato de que ao alterar o teor de água na mistura, as resistências à compressão, tração e flexão são modificadas, interferindo no estudo do fenômeno da fadiga. Kim e Kim (1996) observaram que concretos de alta resistência à compressão apresentam comportamento à fadiga completamente diferente aos de concretos de baixa resistência, e que a medida em que aumenta a resistência do material, sua vida útil à fadiga é diminuída. Lee e Barr (2004) apontam que existe uma tendência da perda de resistência à fadiga (na tração, flexão ou compressão) ao aumentar a resistência à compressão do material.

Quanto à influência do tipo de agregado empregado na produção do concreto, os estudos existentes apresentam resultados controversos, sendo que alguns pesquisadores relatam a não existência de uma influência deste parâmetro no comportamento à fadiga do material (TEPFERS; KUTTI, 1979; SPARKS, 1982), e outros apontam um ganho de resistência à fadiga ao utilizar agregados de maior rigidez (WILLIAMS, 1943; CORNELISSEN, 1984; ZHANG; PHILLIPS; WU, 1997).

Contrariando este conceito, Zhang, Phillips e Wu (1997) afirmam que, na fadiga por compressão, os concretos produzidos com agregados leves possuem maior vida útil quando comparados a concretos com agregados convencionais. Este mesmo comportamento foi observado

por Saito (1984), porém em concretos submetidos à fadiga na tração.

Assim, observa-se que não há uma comprovação da hipótese de que agregados de maior rigidez geram concretos com maior resistência à fadiga. Os resultados disponíveis na literatura não corroboram com essa ideia, e isso se deve, principalmente, pela grande variabilidade referente às condições de contorno inerentes aos testes de fadiga, já que resultados obtidos em ensaios de compressão podem não ser válidos para a fadiga na tração ou na flexão.

No que se refere à influência da dimensão máxima dos agregados, Iwama e Fukuda (1987) avaliaram a resistência à fadiga de concretos produzidos com agregados de dimensão máxima de 20 e 40 mm, concluindo que não existe uma diferença significativa no comportamento dos dois concretos. Entretanto, Koyanagawa, Yoneya e Kokubu (1994) analisaram concretos com agregados de mesmas dimensões máximas (20 e 40 mm), inferindo que não há influência deste parâmetro, quando da aplicação de níveis de tensão máxima acima de 80% da resistência à compressão. Porém, quando os corpos de prova foram submetidos a níveis de tensão máxima inferior aos 80%, os concretos com agregado de dimensão máxima de 20 mm apresentaram maior resistência à fadiga.

Em um estudo recente, Kasu et al. (2019) verificaram que concretos submetidos a níveis de tensão acima dos 80% também demonstram ser influenciados pela dimensão máxima do agregado, sendo que a resistência à fadiga aumenta a medida em que reduz o diâmetro máximo empregado na produção do compósito.

Ainda sobre a consideração do efeito dos materiais constituintes no comportamento à fadiga do concreto, o consumo de cimento foi explorado em Tepfers e Kutti (1979), onde os autores analisaram concretos com consumo variando entre 236 e 365 kg/m³. Os resultados mostraram que não há influência significativa deste parâmetro na fadiga à tração. Entretanto, ao analisar concretos submetidos à fadiga na compressão, Zhang, Phillips e Wu (1997) verificaram um ganho de resistência à fadiga a medida em que se aumenta o consumo de cimento.

Observa-se que são poucos os estudos que analisam a influência dos materiais constituintes no comportamento à fadiga do concreto, e que os trabalhos existentes não permitem a comprovação de algumas hipóteses levantadas em pesquisas, já que não há consenso em relação à quanto e como cada parâmetro interno ao material interfere no mecanismo da fadiga.

Assim, por mais que exista uma considerável quantidade de trabalhos referentes à fadiga do concreto, ainda existem diversas lacunas inerentes ao comportamento deste fenômeno. Atualmente, os pesquisadores vêm demonstrando um esforço em determinar os efeitos referentes aos fatores externos ao material, como a amplitude de carregamento, razão entre tensões mínima e máxima e frequência de carregamento, uma vez que estando bem definida a influência destes parâmetros, torna-se possível descrever com maior segurança os efeitos dos fatores intrínsecos ao material.

2.3.2 Influência de parâmetros externos

Ao longo dos últimos cem anos, após a publicação dos primeiros trabalhos, muitos estudos de fadiga no concreto foram desenvolvidos, sendo a maioria (até a década de 90) referentes à determinação de um modelo geral de vida útil à fadiga, que considerasse os distintos tipos de solicitações simulados nos ensaios: tração direta, tração na flexão, tração por compressão, compressão, e tração-compressão alternada.

Nos anos iniciais do estudo da fadiga no concreto, Crepps (1923) e Hatt (1925) avaliaram o comportamento de corpos de prova realizando ensaios de tração-compressão alternada, inferindo que este tipo de solicitação não afetava a resistência à fadiga do concreto quando comparado a testes de tração ou compressão não alternados.

Alguns anos depois, Tepfer (1982) desenvolveu um novo modo de ensaio de fadiga considerando tensões alternadas empregando duas combinações de carregamento, sendo uma com tensão de compressão constante na direção horizontal e tração variável na direção vertical. A segunda combinação refere-se à aplicação de uma tensão de tração constante na direção horizontal e compressão variável na direção vertical. Com este novo método, o autor observou que a aplicação de tensões alternadas possui influência significativa na vida útil à fadiga do material, contrariando os resultados obtidos em Crepps (1923) e Hatt (1925). Ademais, foi observado que, quanto maior é a amplitude do carregamento, menor é a vida útil à fadiga do concreto.

Ainda considerando a influência do modo de solicitação no comportamento à fadiga do concreto, Cornelissen (1984) verificou que a razão entre os níveis de tensões mínimas e máximas observadas em ensaios de tração-compressão pura e flexão possui grande interferência na resistência à fadiga do concreto, e que o número de ciclos necessários para que ocorra a falha do corpo de prova aumenta com a diminuição da razão entre tensões. Os autores inferiram ainda que a incidência de solicitações alternadas de tração-compressão pura causam maior dano por fadiga no concreto do que os ensaios considerando solicitações alternadas na flexão.

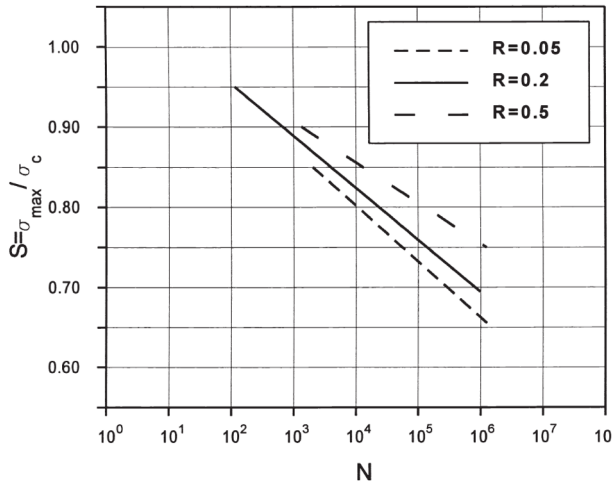
Posteriormente, Zhang, Phillips e Wu (1996) observaram que a submissão de tensões alternadas causa uma significativa redução na resistência à fadiga do concreto, sendo o modo de carregamento que mais causa deterioração no material. Ademais, os autores comprovaram que o nível de dano causado pela fadiga é decrescente com o aumento da razão entre os níveis de tensão mínima e máxima (R), sendo este efeito independente do modo de solicitação.

A fim de demonstrar o efeito da razão R no comportamento à fadiga do concreto, na Figura 2.9 são apresentados os resultados obtidos por Pindado, Aguado e Josa (1999) em testes de fadiga na compressão de corpos de prova prismáticos submetidos a três valores distintos de R ($0,05$, $0,2$ e $0,5$). Os ensaios foram conduzidos considerando frequências de carregamento de 15 Hz e concretos de classe C20. É possível observar que, quanto maior a razão R, maior é a vida útil do material, resultado obtido anteriormente nos trabalhos de Cornelissen (1984) e Zhang, Phillips e Wu (1996).

No que se refere à influência do histórico do carregamento, Cook e Chindaprasirt (1980)

relatam que um carregamento estático ou quase-estático de longa duração produz um pequeno acréscimo na resistência e grande aumento na rigidez do concreto, enquanto um carregamento cíclico provoca uma pequena perda de resistência e grande redução na rigidez do material. Os autores descrevem ainda que as histórias de carregamentos de ambos os modos reduzem o pico de tensão, e que o carregamento de longa duração causa uma redistribuição das concentrações de tensão, enquanto que o carregamento cíclico produz microfissuras por todo o corpo de prova, deixando-o altamente frágil.

Figura 2.9 – Curvas S-N para concretos submetidos à fadiga com diferentes R.



Fonte: Pindado, Aguado e Josa (1999).

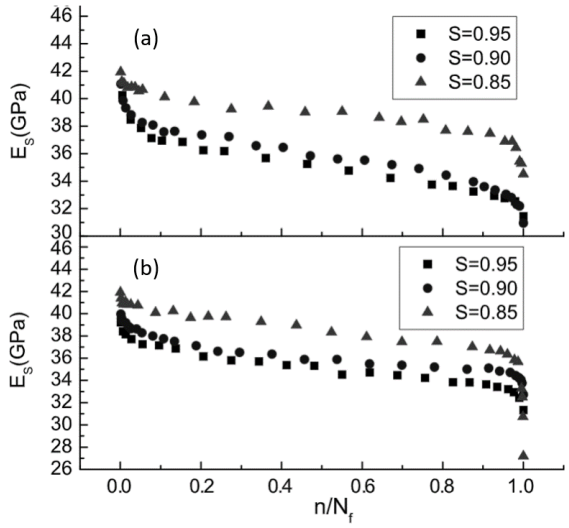
No ano seguinte, Cook e Chindaprasirt (1981) avaliaram a influência do histórico de carregamento em concretos sujeitos a cargas cíclicas de tração, e observaram o mesmo comportamento na fadiga na compressão. Os autores observaram ainda que o módulo de elasticidade é reduzido a medida em que o carregamento cíclico é aplicado, e que a perda de rigidez é mais acentuada em concretos de baixas resistências.

Assim, independente do tipo de solicitação, o concreto, quando sujeito a cargas cíclicas, apresenta uma tendência de perda de rigidez. Este comportamento está diretamente atrelado ao desenvolvimento de microfissuras na matriz de argamassa, causando danificação em todo o material. Chen et al. (2017) verificaram que a perda de rigidez em função do histórico de carregamento cíclico pode ser expresso de acordo com a lei de três estágios empregada para descrever as deformações máximas do concreto (Figura 2.10), apresentada e definida anteriormente como curva de fluência cíclica (Figura 2.4).

Da Figura 2.11 também é possível observar uma influência do nível máximo de tensão (S) aplicado no corpo de prova. Diversos trabalhos disponíveis na literatura vêm demonstrando que, quanto maior é o nível máximo de tensão aplicado (valor dado em relação à resistência do material), menor é a vida útil à fadiga do material, e maior é a danificação decorrente da fadiga (LEE; BARR, 2004; CHEN et al., 2011; MEDEIROS et al., 2015; CHEN et al., 2017; WU; JIN,

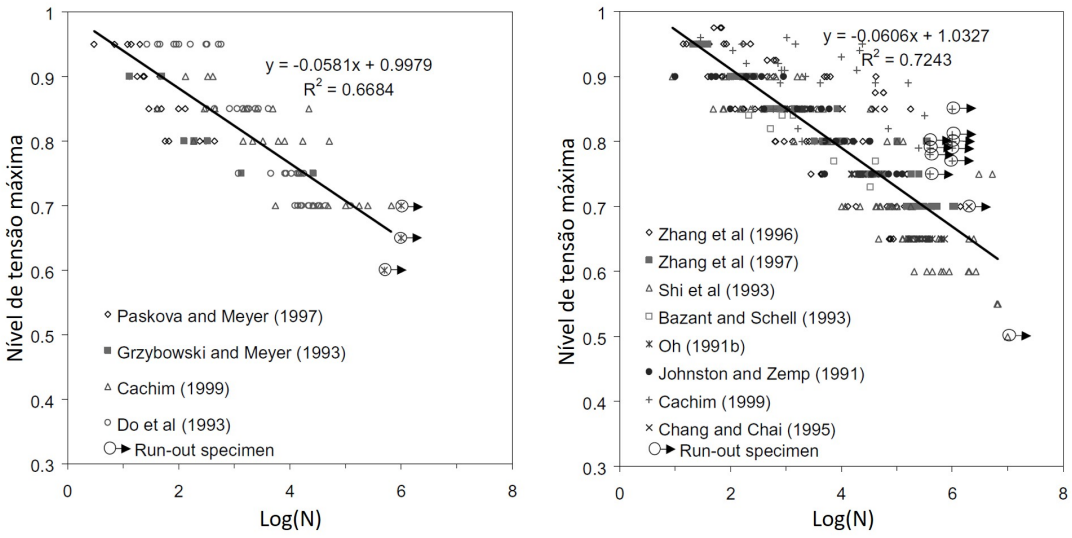
2019). Na Figura 2.11 são dispostos os resultados da análise conduzida por Lee e Barr (2004), com dados oriundos de diversas pesquisas[1], referentes à vida útil de concretos submetidos a distintos níveis máximos de tensão e sob diferentes modos de solicitação.

Figura 2.10 – Perda de rigidez com o histórico de carregamento cíclico para concretos carregados com frequência de: (a) 1 Hz e (b) 4 Hz.



Fonte: Chen et al. (2017).

Figura 2.11 – Curva S-log(N) de concretos sob fadiga na: (a) compressão e (b) flexão.



Fonte: Lee e Barr (2004).

[1] Para a definição dos gráficos apresentados na Figura 2.11, Lee e Barr (2004) coletou dados dos trabalhos de Johnston e Zemp (1991), Oh (1991), Shi, Fwa e Tan (1993), Grzybowski e Meyer (1993), Do, Chaallal e Aïtcin (1993), Bazant e Schell (1993), Chang e Chai (1995), Zhang, Phillips e Wu (1996), Zhang, Phillips e Wu (1997), Paskova e Meyer (1997), Cachim (1999).

Por fim, sabe-se que a frequência de carregamento (f) pode exercer grande influência no comportamento à fadiga do concreto, e que, ao se elevar a frequência a vida útil aumenta. Porém, a maioria dos trabalhos existentes na literatura que corroboram com essa afirmação foram desenvolvidos para altas frequências ($f > 1,0$) e para níveis de tensão máxima variando entre 75% e 95% da resistência estática (ZHANG; PHILLIPS; WU, 1996).

Um resultado semelhante havia sido observado nos ensaios de fadiga conduzidos por Hanson, Ballinger e Linger (1974), onde foi verificado que concretos submetidos a níveis de tensão máxima abaixo de 75% da resistência estática, em alta frequência, a variação da frequência não apresentava mudanças significativas na vida útil à fadiga do material. Em contrapartida, Sparks e Menzies (1973) relatam que, em concretos submetidos a níveis de tensão máxima entre 75% e 100% da resistência estática, um acréscimo na frequência de carregamento melhora o desempenho à fadiga do material. No entanto, os resultados gerados na pesquisa não permitiram aos autores quantificar essa melhoria.

Jansen (1996) observou que, para um nível de tensão máxima menor que 75% da resistência estática do concreto, as frequências entre 1 e 15 Hz apresentam pequena influência na resistência à fadiga, e que uma redução de 100 vezes na frequência resulta em uma redução de 10 a 30 vezes no número de ciclos.

Para Cornelissen (1984) e Milenkovic e Pluis (2000), se a frequência do carregamento for reduzida em X vezes, o número de ciclos responsável por gerar a falha do material sofrerá uma redução de $\sqrt{X}$. Os autores relatam ainda que a frequência de carregamento possui duas distintas influências no comportamento a fadiga, sendo elas:

i O valor da frequência de carregamento interfere no comportamento à fadiga do concreto de maneira semelhante à taxa de carregamento em ensaios estáticos. Assim, um crescimento na frequência de carregamento aumenta a resistência à fadiga, e este aumento se torna especialmente significativo para altos níveis de tensão;

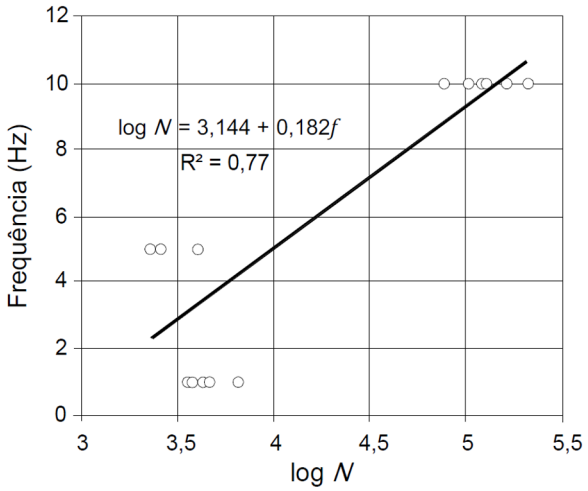
ii Ao submeter o concreto a uma carga cíclica de baixa frequência que atue por um longo período de tempo, existe a possibilidade de surgirem efeitos oriundos do mecanismo de fluência. Esta hipótese vêm sendo verificada em concretos sujeitos a altos níveis de tensão (MEDEIROS, 2012).

De modo geral, os efeitos da frequência de carregamento são observados nos mais variados modos de solicitação. Cervo (2004) analisou o efeito de altas frequências de carregamento (1, 5 e 10 Hz) em concretos submetidos à fadiga na flexão. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 2.12, onde é possível observar que o número de ciclos necessários para causar a ruptura do material cresce a medida que aumenta a frequência empregada no ensaio.

Chen et al. (2017) verificaram que, na fadiga por tração, a influência da frequência também é observada (Figura 2.13). Os autores verificaram que o número de ciclos responsável pela ruptura dos corpos de prova aumenta com um acréscimo da frequência empregada. Os autores avaliaram também a influência do nível de tensão máxima empregado nos ensaios, onde

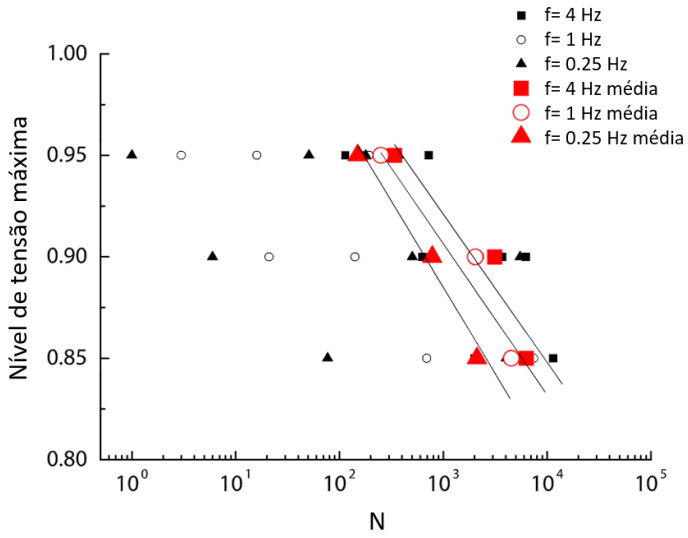
foi confirmado que a medida em que este nível é reduzido, se torna mais significativa a influência da frequência de carregamento na vida útil à fadiga.

Figura 2.12 – Número de ciclos versus frequência de carregamento na fadiga à flexão.



Fonte: Cervo (2004).

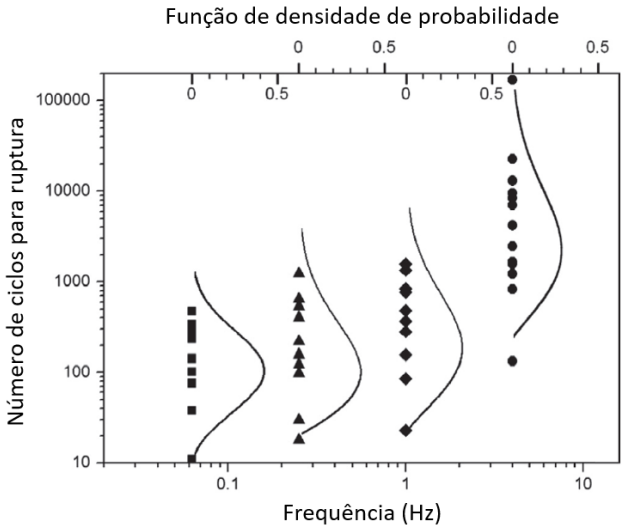
Figura 2.13 – Curva S-N para concretos sob tração cíclica com diferentes frequências.



Fonte: Chen et al. (2017).

Medeiros et al. (2015) avaliaram a influência de quatro diferentes frequências de carregamento (1/16, 1/4, 1 e 4 Hz) na fadiga à compressão de corpos de prova de concretos de classe C50, e verificaram que, mesmo sob baixa frequência, quanto maior é a frequência submetida ao corpo de prova, maior é a sua vida útil (Figura 2.14). Ademais, os resultados indicam que, a medida em que se aumenta a frequência de carregamento, torna-se maior a variabilidade dos resultados.

Figura 2.14 – Variação do número de ciclos em função da frequência de carregamento.



Fonte: Medeiros et al. (2015).

Assim, diante do que foi relatado nas duas últimas seções, é possível observar que são diversos os fatores que interferem na vida útil à fadiga do concreto, merecendo destaque a frequência de carregamento, parâmetro não muito explorado nos modelos de vida útil desenvolvido nos últimos anos. Outro parâmetro que possui grande influência no comportamento à fadiga do concreto é a resistência à compressão do material, já que muitos trabalhos vêm apontando que o comportamento do material é alterado a medida em que aumenta a resistência do concreto. Ademais, é recente a inserção desta variável nas formulações de vida úti ou nas curvas $S-N$.

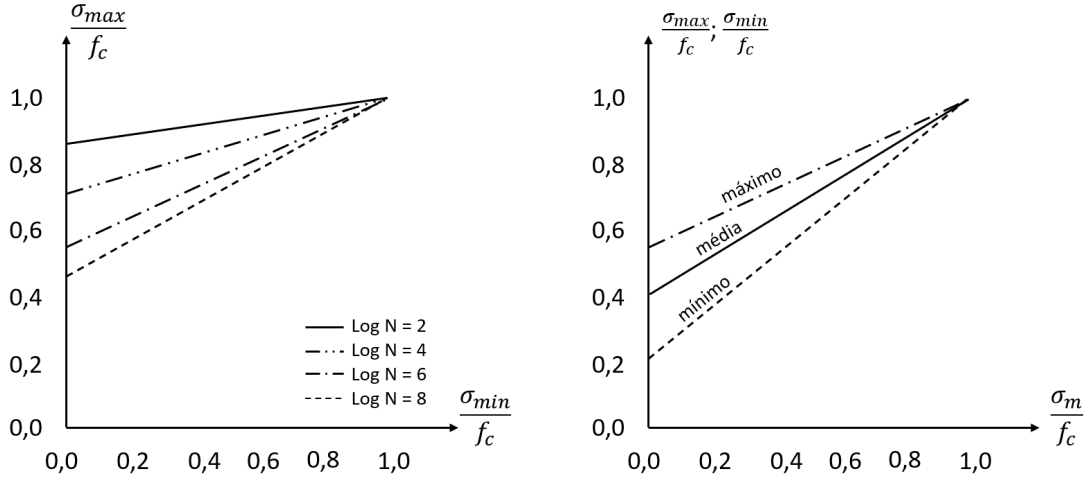
2.4 Modelos de vida útil à fadiga

A fim de prever ou monitorar a vida útil de um elemento de concreto quando sujeito à fadiga, faz-se necessário conhecer o comportamento mecânico do material quando submetido a ciclos de carga e descarga. As propriedades do concreto referentes à fadiga são determinadas a partir de ensaios laboratoriais, e os dados obtidos geralmente são apresentados por meio do gráfico de tensão ou de deformação específica em função do número de ciclos até a ruptura, curvas $S-N$ e $\varepsilon-N$, respectivamente.

Deste modo, a resistência à fadiga é geralmente definida como uma fração da resistência estática que pode ser suportada repetidamente por um determinado número de ciclos, sendo definida muitas vezes pelas curvas $S-N$. Outra maneira de representar a vida útil à fadiga é usando os diagramas de *Goodman* ou *Smith*, apresentados na Figura 2.15, que representam a dependência da tensão máxima e mínima aplicada no carregamento cíclico à resistência à fadiga do material.

Figura 2.15 – Curvas alternativas de representação da vida útil à fadiga.

(a) Diagrama de Goodman. **(b)** Diagrama de Smith.



Fonte: Própria autoria.

Em situações de fadiga de alto ciclo, o desempenho dos materiais é geralmente caracterizado por uma curva $S-N$, também conhecida como curva de *Wohler*. Estas curvas demonstram a relação entre uma amplitude de tensão, ou a tensão máxima aplicada no material, e o número de ciclos que levam à falha, conforme apresentado na Figura 2.13. Muitos pesquisadores também vêm empregando a curva $S-N$ para a representação e caracterização da vida útil à fadiga de concretos submetidos à fadiga de baixo ciclo (MEDEIROS et al., 2015; CHEN et al., 2017).

Para a determinação da curva de *Wohler*, corpos-de-prova são testados e expostos a um carregamento cíclico de amplitude constante, onde o número de ciclos responsável por gerar a falha da amostra é coletado. Diante dos resultados obtidos no ensaio, o número de ciclos necessário para causar a falha, ou o seu logaritmo ($log(N)$), é associado ao nível de tensão máxima aplicado (σ_{max}), gerando a curva $S-N$ (Figura 2.13).

Uma das maiores dificuldades para a caracterização do concreto por este método deve-se ao fato de ser necessário testar um elevado número de amostras para cada nível de tensão, já que nos testes de fadiga existe uma grande variabilidade nos resultados. Uma alternativa para contornar esse problema é o emprego de teorias de probabilidade e confiabilidade, a fim de indicar o nível de confiança associado ao número de amostras empregado nas análises (MCCALL, 1958; ANTRIM; MCLAUGHLIN, 1959; SAITO, 1988; SAIN; CHANDRA-KISHEN, 2008; MEDEIROS et al., 2015; LIANG; DING; LI, 2017).

Com o propósito de avaliar a vida útil à fadiga do concreto, seja para a definição de um projeto ou avaliação do nível de degradação de um elemento estrutural, existem na literatura diversos modelos preditivos (RAITHBY; GALLOWAY, 1974; TEPFERS; KUTTI, 1979; SPARKS, 1982; CORNELISSEN, 1984; CORNELISSEN; LEEWIS, 1987; ZHANG; PHILLIPS; WU, 1996; SIEMES, 1988; MEDEIROS, 2012), os quais em sua maioria se baseiam

na Equação 2.11.

$$\frac{S_{max}}{f_{cout}} = d + e \cdot log(N) \tag{2.11}$$

A Equação 2.11 representa a curva $S-N$, onde as constantes d e e são determinadas por meio do ajuste das curvas geradas com resultados obtidos experimentalmente. Aas-Jakobsen (1970), por exemplo, determinou um modelo considerando resultados obtidos em ensaios de tração na flexão cíclica (Equação 2.12). Contudo o autor relata que a mesma formulação pode ser empregada para avaliar o concreto sob compressão cíclica, sendo necessário apenas substituir a resistência à tração na flexão pela resistência à compressão do material.

$$\frac{S_{max}}{f_{t,f}} = 1,0 - \left(1,0 - \frac{S_{min}}{S_{max}}\right) \cdot \beta \cdot log(N) \tag{2.12}$$

em que S_{max} é a tensão máxima, $f_{t,f}$ é a resistência à tração na flexão do concreto, S_{min} é a tensão mínima, N é o número de ciclos necessários para causar a falha e β é um parâmetro do material obtido por regressão dos dados.

Tepfers e Kutti (1979) também desenvolveram uma formulação para a vida útil à fadiga do concreto, porém considerando resultados obtidos em ensaios de compressão cíclica (Equação 2.13). Os autores verificaram por meio de análises estatísticas que a mesma expressão poderia ser aplicada para a fadiga na tração.

$$\frac{S_{max}}{f_c} = 1,0 - 0,0685 \cdot (1,0 - R) \cdot log(N) \tag{2.13}$$

em que f_c é a resistência à compressão ou tração do material, e R é a razão entre as tensões mínima e máxima.

Cornelissen (1984) avaliou o efeito de tensões alternadas no comportamento à fadiga do concreto, realizando dois modos de solicitação: tração-compressão pura e tração-compressão na flexão. Os resultados obtidos foram empregados para o desenvolvimento de dois modelos, um para a fadiga na tração-compressão pura (Equação 2.14) e outro para a fadiga na tração-compressão por flexão (Equação 2.15).

$$log(N) = 9,36 - 7,93 \cdot \left(\frac{S_{max}}{f_t}\right) - 2,59 \cdot \left(\frac{S_{min}}{f_{ck}}\right) \tag{2.14}$$

$$log(N) = 9,36 - 7,45 \cdot \left(\frac{S_{max}}{f_{ct,f}}\right) - 1,93 \cdot \left(\frac{S_{min}}{f_{ck}}\right) \tag{2.15}$$

em que f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto, f_t a resistência à tração pura e $f_{ct,f}$ é a resistência à flexão.

Três anos depois, Cornelissen e Leewis (1987) avaliaram o comportamento do concreto sob fadiga, considerando amostras saturadas e secas. Os autores determinaram modelos considerando os resultados obtidos com corpos de prova saturados (Equação 2.16) e secos (Equação 2.17) submetidos à fadiga na tração pura, incluindo níveis de tensão máxima entre 40 e 90%, e mínima entre 0 e 40% da resistência à tração. Também foram avaliadas amostras saturadas e

secas submetidas a solicitações cíclicas de tração-compressão pura, diante de níveis de tensão máxima entre 40 e 90%, e mínima entre 0 e 30% da resistência à compressão. Para o caso de tensões alternadas, os autores verificaram que o comportamento do material era indiferente sob condições secas ou saturadas, sendo neste caso a vida útil dada pela Equação 2.18. Para todos os ensaios a frequência de carregamento empregada foi de 6 Hz.

$$log(N) = 13,92 - 14,52 \cdot \left(\frac{S_{max}}{f_t}\right) - 2,79 \cdot \left(\frac{S_{min}}{f_t}\right) \tag{2.16}$$

$$log(N) = 14,81 - 14,52 \cdot \left(\frac{S_{max}}{f_t}\right) - 2,79 \cdot \left(\frac{S_{min}}{f_t}\right) \tag{2.17}$$

$$log(N) = 9,36 - 7,93 \cdot \left(\frac{S_{max}}{f_t}\right) - 2,59 \cdot \left(\frac{S_{min}}{f_{ck}}\right) \tag{2.18}$$

Com o intuito de avaliar as condições de umidade do concreto ao ser submetido à fadiga, Raithby e Galloway (1974) avaliaram a flexão cíclica em corpos de prova saturados, com amostras secas ao ar por uma semana e corpos de prova secos em forno por uma semana. Os ensaios foram realizados após seis meses de moldagem das amostras, considerando a razão da tensão máxima e a resistência à tração na flexão, entre $0,55$ e $0,95$. Os ensaios foram conduzidos com frequência de carregamento de 20 Hz, onde os resultados possibilitaram o desenvolvimento de expressões para cada uma das condições de umidade: condição saturada (Equação 2.19), amostras secas ao ar por sete dias (Equação 2.20) e corpos de prova secos no forno por sete dias (Equação 2.21).

$$log(N) = 13,275 - 11,39 \cdot \left(\frac{S_{max}}{f_{t,f}}\right) \tag{2.19}$$

$$log(N) = 14,965 - 12,676 \cdot \left(\frac{S_{max}}{f_{t,f}}\right) \tag{2.20}$$

$$log(N) = 13,48 - 11,42 \cdot \left(\frac{S_{max}}{f_{t,f}}\right) \tag{2.21}$$

Diferente de muitos autores, Sparks (1982) foi contra a tendência de relacionar a vida útil ao nível de tensão aplicado, ou da razão entre tensões mínima e máxima. O autor afirmou que existe uma forte correlação entre a taxa de deformação secundária $\dot{\varepsilon}_{sec}$ (taxa de deformação determinada no segundo estágio da curva de fluência cíclica) e o número de ciclos necessários para causar a ruptura do concreto na compressão cíclica. Diante disso, duas formulações foram propostas considerando concretos produzidos com agregados convencionais (Equação 2.22) e com agregados leves (Equação 2.23).

$$log(N) = -2,66 - 0,94 \cdot log\left(\dot{\varepsilon}_{sec}\right) \tag{2.22}$$

$$log(N) = -3,79 - 1,06 \cdot log\left(\dot{\varepsilon}_{sec}\right) \tag{2.23}$$

Sob a mesma perspectiva de Sparks (1982), Cornelissen (1984) também propôs uma

formulação baseada na taxa de deformação secundária (Equação 2.24), considerando concretos com agregados convencionais e submetidos à flexão cíclica com frequência de carregamento de 6 Hz. Embora as formulações propostas com esse conceito tenham demonstrado boa aplicabilidade e acurácia, nos anos seguintes não foi observada a proposição de novos modelos considerando a taxa de deformação secundária.

$$log(N) = -3,25 - 0,89 \cdot log\left(\dot{\varepsilon}_{sec}\right) \tag{2.24}$$

Como pode-se observar, até o momento, os modelos não consideram a influência da frequência de carregamento, visto que a maioria dos ensaios foram conduzidos com este parâmetro fixo. Assim, na década de 80 surgem as primeiras formulações considerando a frequência de carregamento, a exemplo do trabalho de Hsu (1981), onde foram determinados dois modelos para a vida útil à fadiga do concreto sob compressão cíclica, um para a fadiga de alto ciclo (Equação 2.25) e outro para a fadiga de baixo ciclo (Equação 2.25).

$$\frac{S_{max}}{f_c} = 1,0 - 0,0662 \cdot (1 - 0,556 \cdot R) \cdot log(N) - 0,0294 \cdot log(T) \tag{2.25}$$

$$\frac{S_{max}}{f_c} = 1,2 - 0,2 \cdot R - 0,133 \cdot (1 - 0,779 \cdot R) \cdot log(N) - 0,053 \cdot (1 - 0,455 \cdot R) \cdot log(T) \tag{2.26}$$

em que T é o período de repetição da carga e R é a razão entre as tensões mínima e máxima.

Sob o mesmo conceito, Furtak (1984) também desenvolveu uma formulação para a vida útil à fadiga (Equação 2.27) considerando o efeito da frequência, utilizando para isso um parâmetro de frequência baseado em dados experimentais de corpos de prova de concreto submetidos à compressão cíclica.

$$\frac{S_{max}}{f_c} = C \cdot N^{-A} \cdot (1 + B \cdot R \cdot log(N)) \cdot C_f \tag{2.27}$$

$$C_f = 1 + m \cdot (1 - n \cdot R) \cdot log(f) \tag{2.28}$$

em que A, B, C, m e n são constantes determinadas experimentalmente, f é a frequência de carregamento e C_f é o parâmetro de frequência, calculado por meio da Equação 2.28.

Zhang, Phillips e Wu (1996) avaliaram concretos sujeitos a ciclos de tensões alternadas tração-compressão e desenvolveram um modelo considerando o efeito da frequência de carregamento na fadiga do material, vide Equação 2.29. Nos ensaios, o autor considerou diferentes razões entre tensões mínimas e máximas ($0,5$, $0,2$, 0, $-0,2$, $-0,5$, $-0,8$ e $-1,0$) com tensões máximas variando de 50% a $97,5\%$ da resistência do material. O autor avaliou frequências de 1, 5 e 20 Hz e observou em seu trabalho que, quanto maior a frequência empregada nos ensaios, maior é a vida útil do material.

$$\frac{S_{max}}{f_{est}} = \left(o \cdot p^{-log(f)} + q\right) \cdot \left[1 - \left(1 - R'\right) \cdot \beta \cdot log(N)\right] \tag{2.29}$$

$$R' = R \qquad para\ R \geq 0 \tag{2.30}$$

$$R' = \left| \frac{f_{ct,f}}{f_{ck}} \right| \qquad para\ R < 0 \tag{2.31}$$

em que o, p, q e β são constantes determinadas experimentalmente, f_{est} é a resistência estática, R' é a razão entre tensões mínima e máxima para o caso de tensões alternadas, onde o seu cálculo é dado pelas Equações 2.30 ou 2.31, dependendo do sinal de R.

Wang e Song (2011) avaliaram o efeito do confinamento lateral de amostras de concreto submetidas a compressão cíclica e determinaram um modelo para a vida útil à fadiga, conforme Equação 2.32. Os ensaios de fadiga empregados para a determinação do modelo foram conduzidos considerando níveis de tensão máxima entre 65% e 90% da resistência estática e tensão mínima constante de 10% da resistência estática. A formulação é valida para razões da tensão de confinamento (σ_{conf}) e de resistência à compressão entre 0 e $0,5$.

$$|S_{max}| = \left[1 + 0,8304 \cdot \left(\frac{|\sigma_{conf}|}{f_c}\right)\right] - \left[0,0638 + 0,115 \cdot \left(\frac{|\sigma_{conf}|}{f_c}\right)\right] \cdot (1-R) \cdot log(N) \tag{2.32}$$

Medeiros (2012) propôs um modelo para a determinação da vida útil à fadiga de concretos submetidos à compressão cíclica, considerando o efeito da frequência de carregamento e os preceitos da teoria de confiabilidade e probabilidade, vide Equação 2.33. A formulação foi validada considerando resultados experimentais de fadiga, desenvolvidos para frequências de carregamento de $1/16$, $0,25$, 1 e 4 Hz.

$$N(PF; \sigma_{max}; R; f) = \left[\frac{\lambda \sqrt[k]{-ln(1-PF)}}{\sigma_{max_0} + \sigma_{min_0}}\right]^{\frac{1}{a \cdot [1-R]}} \tag{2.33}$$

$$a = b + c \cdot ln(1+f) \tag{2.34}$$

em que b e c são constantes determinadas experimentalmente, que se relacionam com o efeito da frequência de carregamento, a um parâmetro inerente à frequência, definido por meio da Equação 2.34, k é o parâmetro de forma, λ o parâmetro de escala da função de distribuição cumulativa CDF, e PF é a probabilidade de falha associada à estimativa da vida útil.

Com relação as normativas existentes que tratam sobre o assunto, tem-se que, por exemplo, no antigo código Holandês, NEN 6723 (NEN, 2009), a força de resistência a fadiga $f'_{b,v}$ é dada pela Equação 2.35, sendo válida para classes de resistência do concreto acima de C25/30.

$$f'_{b,v} = \frac{f'_{b,rep,v}}{\gamma_m} \tag{2.35}$$

$$f'_{b,rep,v} = 0,5 \cdot \left(f'_{b,rep,k} - 0,85 \cdot 30\right) + 0.85 \cdot 30 \tag{2.36}$$

em que γ_m é um fator parcial do material equivalente a $1,2$, $f'_{b,rep,k}$ é o valor característico da resistência à compressão uniaxial do concreto nas primeiras idades $(0,85 \cdot f_{ck})$, em MPa, e $f'_{b,rep,v}$ é o valor característico da resistência à compressão do concreto no estado limite de fadiga, também em MPa.

Segundo a mesma norma holandesa, o número de ciclos N para falha para uma dada tensão de compressão $\sigma'_{b,d,max}$ e $\sigma'_{b,d,min}$ pode ser determinado como mostra a Equação 2.37.

$$Log(N) = \frac{10}{\sqrt{1-R}} \cdot \left(1 - \frac{\sigma'_{b,d,max}}{f'_{b,v}}\right) \qquad para \qquad \frac{\sigma'_{b,d,max}}{f'_{b,v}} > 0,25 \tag{2.37}$$

sendo que R a razão entre tensões expresso pela Equação 2.38.

$$R = \frac{\sigma'_{b,d,min}}{\sigma'_{b,d,max}} = \frac{S_{min}}{S_{max}} \tag{2.38}$$

onde $\sigma'_{b,d,min}$ e $\sigma'_{b,d,max}$ referem-se, respectivamente, aos valores de projeto da mínima e máxima tensão de compressão do concreto, em MPa, e S_{min} e S_{max} representam, respectivamente, a fração mínima e máxima de força aplicada em ciclos de carga.

Já de acordo com a norma do Eurocódigo NEN-EN 1992-1-1+C2 (NEN, 2011a), o valor de projeto da resistência à fadiga $f_{cd,fat}$ é dado por:

$$f_{cd,fat} = k_1 \cdot \beta_{cc}(t_0) \cdot f_{cd} \cdot (1 - \frac{f_{ck}}{250}) \tag{2.39}$$

$$\beta_{cc}(t_0) = e^{s \cdot [1 - \left(\frac{28}{t_0}\right)^{0.5}]} \tag{2.40}$$

em que $\beta_{cc}(t_0)$ é o coeficiente para a resistência do concreto na primeira aplicação de carga, k_1 é o fator da relação de fadiga do Código Europeu, (igual a $0,85$ para um número de ciclos de $N = 10^6$) e f_{cd} é o valor de projeto da resistência à compressão dado pela razão entre o valor de resistência do concreto f_{ck} e pelo fator parcial para o concreto em estado limite de fadiga, $\gamma_{c,fat} = 1,5$. Na Equação 2.40 t_0 é o tempo para início da carga cíclica no concreto, em dias, e s depende na classe de resistência do cimento.

Segundo essa mesma normativa, um valor satisfatório de resistência à fadiga para concreto sob compressão pode ser dado pela relação apresentada em 2.41.

$$E_{cd,max,equ} + 0,43 \cdot \sqrt{1 - R_{equ}} \leq 1 \tag{2.41}$$

em que R_{equ} é a razão entre a resistência mínima e máxima, conforme apresentado em 2.42.

$$R_{equ} = \frac{E_{cd,min,equ}}{E_{cd,max,equ}} \tag{2.42}$$

$$E_{cd,max,equ} = \frac{\sigma_{cd,max,equ}}{f_{cd,fat}} \tag{2.43}$$

$$E_{cd,min,equ} = \frac{\sigma_{cd,min,equ}}{f_{cd,fat}} \tag{2.44}$$

em que $\sigma_{cd,min,equ}$ e $\sigma_{cd,max,equ}$ são, respectivamente, o valor mínimo e máximo de tensão da amplitude última para N ciclos.

A norma NEN-EN 1992-2+C1 (NEN, 2011b) afirma que o número de ciclos para falha pode ser determinado baseado nos diagramas $S-N$ prescritos nacionalmente, ou baseado na Equação 2.41, onde o coeficiente $0,43$ é trocado por $log(N_i/14)$ e a inequação na expressão é omitida. O valor de resistência suficiente contra fadiga para concreto sob compressão pode ser assumido usando a lei de Palmgren-Miner, expressa por:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{N_i} \leq 1 \tag{2.45}$$

em que n_i é o número de ciclos com amplitude constante em um intervalo i e N_i é o número de ciclos para falha com amplitude constante no mesmo intervalo i.

O valor m de ciclos de amplitude constante são descritos pela Equação 2.45. O número de ciclos para falha N_i pode ser calculado de acordo com a Equação 2.46.

$$N_i = 10^{\left(14 \cdot \frac{1-E_{cd,max,i}}{\sqrt{1-R_i}}\right)} \tag{2.46}$$

sendo R_i a razão entre resistência mínima ($E_{cd,min,i}$) e máxima ($E_{cd,max,i}$).

A diferença entre o Código Nacional Holandês e o Eurocódigo se dá pelo resultado da tensão significantemente menor permitida no Eurocódigo para o mesmo número de ciclos do que apresentado na NEN 6723 (NEN, 2009). Para que o Código Nacional Holandês seja alinhado com a prática de projeto holandesa, expressões que levam a uma vida de fadiga maior para um dado valor de fração máxima de força em ciclos de carga (S_{max}) do que prescrito no Eurocódigo são usadas nas normativas desse país.

A capacidade suficiente contra fadiga é assumida quando a lei de Palmgren-Miner é cumprida, com um valor de N_i igual a:

$$N_i = 10^{\left(\frac{6}{1-0,57 \cdot k_1 \cdot \left(1-\frac{f_{ck}}{250}\right)} \cdot \left(\frac{1-E_{cd,max,i}}{\sqrt{1-R_i}}\right)\right)} \qquad para \qquad N_i \leq 10^6 \tag{2.47}$$

$$E_{cd,min,i} = \frac{\sigma_{cd,min,i}}{f_{cd} \cdot \left(0,9 + \frac{logN_i}{60}\right)} \qquad para \qquad N_i \leq 10^6 \tag{2.48}$$

$$E_{cd,max,i} = \frac{\sigma_{cd,max,i}}{f_{cd} \cdot \left(0,9 + \frac{logN_i}{60}\right)} \qquad para \qquad N_i \leq 10^6 \tag{2.49}$$

$$N_i = 10^{\left(14 \cdot \frac{1-E_{cd,max,i}}{\sqrt{1-R_i}}\right)} \qquad para \qquad N_i > 10^6 \tag{2.50}$$

$$E_{cd,min,i} = \frac{\sigma_{cd,min,i}}{f_{cd,fat}} \qquad para \qquad N_i > 10^6 \tag{2.51}$$

$$E_{cd,max,i} = \frac{\sigma_{cd,max,i}}{f_{cd,fat}} \qquad para \qquad N_i > 10^6 \tag{2.52}$$

em que o valor de $f_{cd,fat}$ é calculado de acordo com a Equação 2.39, mas com $k_1 = 1$ de acordo com o código holandês NEN (2011) . O valor de f_{cd} é baseado em $\gamma_{c,fat} = 1,35$ ao invés de $\gamma_c = 1,5$. A força de compressão para um ciclo é tomada como $0,9 \cdot f_{cd}$, que pode ser encontrado quando $N_i = 1$ na Equação 2.48. Tal valor de f_{cd} é igual a $f_{cd} = f_{ck}/\gamma_{c,fat}$ ao invés de $f_{cd} = f_{ck}/\gamma_c$, de forma que o valor da resistência à compressão para um ciclo se torna o valor de resistência à compressão estática.

No Fib Model Code 2010 (MC2010, 2012), o valor de resistência à compressão de referência de fadiga $f_{ck,fat}$ é calculado baseado no valor de resistência à compressão característica f_{ck}, de acordo com a Equação 2.53.

$$f_{ck,fat} = \beta_{cc}(t) \cdot \beta_{c,sus}(t,t_0) \cdot f_{ck} \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{400}\right) \tag{2.53}$$

$$\beta_{cc}(t) = e^{s\cdot\left[1-\left(\frac{28}{t_0}\right)^{0.5}\right]} \tag{2.54}$$

sendo que o valor de $\beta_{c,sus}(t,t_0)$ é o fator para carga sustentada igual a $0,85$. A expressão dada em 2.54 descreve o desenvolvimento da resistência ao longo do tempo, onde s depende da classe de resistência do cimento e t se refere a idade do concreto em dias, corrigido para temperatura de acordo com:

$$t_T = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \cdot e^{13,65-\frac{4000}{273+T(\Delta t_i)}} \tag{2.55}$$

Na Equação 2.55 o número de dias com temperatura T são contados como Δt_i, de forma que $T\Delta t_i$ descreve a temperatura durante o período de tempo Δt_i. O fator 400 na Equação 2.53 difere do modelo de 1990 (CEB-FIP, 1993) e também dos demais Eurocódigos. O uso do valor de 400 foi empregado para acomodar resistências à compressão maiores do que $125MPa$ e também para melhor corresponder a resultados experimentais de corpos de prova de concretos de alta resistência.

As relações $S-N$ no Fib Model Code 2010 (MC2010, 2012) são dadas por:

$$logN_1 = \frac{8}{Y-1} \cdot (S_{c,max} - 1) \tag{2.56}$$

$$logN_2 = 8 + \frac{8 \cdot \ln(10)}{Y-1} \cdot (Y - S_{c,min}) \cdot \left(\frac{S_{c,max} - S_{c,min}}{Y - S_{c,min}}\right) \tag{2.57}$$

$$Y = \frac{0,45 - 1,8 \cdot S_{c,min}}{1 + 1,8 \cdot S_{c,min} - 0,3 \cdot S_{c,min}^2} \tag{2.58}$$

$$S_{c,max} = \frac{\sigma_{c,max}}{f_{ck,fat}} \tag{2.59}$$

$$S_{c,min} = \frac{\sigma_{c,min}}{f_{ck,fat}} \tag{2.60}$$

$$\Delta S_c = |S_{c,max}| - |S_{c,min}| \tag{2.61}$$

onde se $logN_1 \leq 8$, tem-se que $logN = logN_1$ e se $logN_1 > 8$, tem-se que $N = logN_2$. Caso $S_{c,min} > 0,8$, as relações $S-N$ para $S_{c,min} = 0,8$ devem ser usadas. Essas expressões são válidas para concretos localizados em um ambiente com temperatura de aproximadamente 20^oC. As relações $S-N$ foram desenvolvidas baseadas em experimentos com concretos de ultra alto desempenho (superiores a C200) e validados para resistências normais e altas de concreto. As curvas foram verificadas com experimentos com número de ciclos maiores que 10^7 para a fratura. Para $log > 8$ as curvas se aproximam assintoticamente do nível mínimo de tensão da respectiva curva.

As relações de projeto para $0 \leq S_{cd,min} \leq 0,8$, são dadas por:

$$logN_1 = \frac{8}{Y-1} \cdot \left(S_{cd,max} - 1\right) \tag{2.62}$$

$$logN_2 = 8 + \frac{8 \cdot \ln(10)}{Y-1} \cdot \left(Y - S_{cd,min}\right) \cdot \left(\frac{S_{cd,max} - S_{cd,min}}{Y - S_{cd,min}}\right) \tag{2.63}$$

$$Y = \frac{0,45 - 1,8 \cdot S_{cd,min}}{1 + 1,8 \cdot S_{cd,min} - 0,3 \cdot S_{cd,min}^2} \tag{2.64}$$

$$S_{cd,max} = \frac{\gamma_{E,d} \cdot \sigma_{c,max} \cdot \eta_c}{f_{cd,fat}} \tag{2.65}$$

$$S_{cd,min} = \frac{\gamma_{E,d} \cdot \sigma_{c,min} \cdot \eta_c}{f_{cd,fat}} \tag{2.66}$$

sendo que $\gamma_{E,d}$ é um parâmetro equivalente a $1,1$. O fator η_c leva em consideração o gradiente de tensão para concreto em compressão na zona de compressão de uma seção fissurada. O valor de $f_{cd,fat}$ é fornecido por:

$$f_{cd,fat} = \frac{0,85 \cdot \beta_{cc}(t) \cdot [f_{ck} \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{25 \cdot f_{ck0}}\right)]}{\gamma_{c,fat}} \tag{2.67}$$

com $f_{ck0} = 10MPa$ e $\gamma_{c,fat} = 1,5$, em que f_{ck0} é a resistência à compressão do concreto no primeiro ciclo de carregamento.

Lantsoght, Vander-Veen e Boer (2016) compararam as mencionadas normas do Eurocódigo com a adaptação Holandesa e observaram que as curvas $S-N$ prescritas são estudadas separadamente e que a relação $S-N$ dada pela NEN (2011b), por exemplo, se demostra excessivamente conservadora (em 1 ciclo, o valor de S_{max} já é muito inferior do que 1, o que implicaria que, para 1 ciclo de carregamento a resistência à compressão estática não poderia ser obtida). Além disso, os autores concluem que, na norma NEN (2011), a relação $S-N$ prescrita é dividida em uma expressão para $N \leq 10^6$ e em uma expressão para $N > 10^6$, o que implica em uma descontinuidade no valor de $N = 10^6$. Em relação ao Fib Model Code 2010 (MC2010, 2012), os autores afirmam que as expressões de projeto dessa normativa fornecem resultados similares aos obtidos na NEN (2011b).

No que se refere as normativas nacionais, a NBR 6118 (ABNT, 2014) especifica que,

quando a estrutura de concreto armado está sujeita a choques ou vibrações, efeitos dinâmicos devem ser considerados na determinação dos espectros de solicitações, sendo necessário avaliar a possibilidade de ocorrência da fadiga. No entanto a norma especifica apenas verificações em vigas de pontes, viadutos e pontes rolantes, onde no estado limite último faz-se necessário avaliar o estado de fadiga, e no estado limite de serviço, considera-se que o material sofrerá microfissurações que o tornará mais deformável.

Na NBR 6118 (ABNT, 2014) não são tratadas as ações de fadiga de alta intensidade, onde grande danos são causados com menos de 20.000 ciclos de carga e descarga. Para os demais casos a norma define que o dano é mensurado pelo emprego da regra de Palmgren-Miner, que considera o dano por fadiga dado pela Equação 2.68.

$$Dano = \sum \frac{n_i}{N_i} \leq 1 \tag{2.68}$$

em que n_i é o número de repetições aplicadas sob condição particular de tensões, e N_i é o número de repetições que causaria a ruptura por fadiga para a mesma condição de tensões aplicadas.

É importante destacar que, para os casos de flexão, tanto o concreto quanto a armadura são verificados na fadiga, porém apenas o aço possuí curvas $S-N$ definidas e indicadas na NBR 6118 (ABNT, 2014), não sendo possível, por exemplo, determinar a vida útil à fadiga do concreto.

Ao analisar os modelos apresentados e discutidos nesta seção, verifica-se que existe um grande avanço no desenvolvimento de formulações preditivas da vida útil à fadiga do concreto. Porém, ainda se faz necessário avaliar diversas hipóteses a fim de que modelos preditivos com maior capacidade de aplicação sejam concebidos.

Uma das principais dificuldades para a criação de modelos mais generalistas, ou da prescrição de curvas $S-N$ em normas, se deve ao grande número de parâmetros que estão associados ao fenômeno da fadiga no concreto, e da grande variabilidade nos valores que estes parâmetros podem ter, sendo necessário que novos estudos sejam conduzidos a fim de que no futuro tenha-se um grande banco de dados que possibilite a concepção de um modelo mais abrangente.

2.5 Conclusão do capítulo

Neste capítulo foram apresentados os aspectos fenomenológicos que regem o efeito de cargas cíclicas no concreto, discutindo a influência das propriedades intrínsecas ao material e das condições externas, a exemplo dos modos de carregamento. Também foram apresentados os principais modelos que possibilitam a predição da resistência à fadiga e/ou vida útil à fadiga do concreto.

O conhecimento da resistência ou vida útil à fadiga é de grande interesse, por se apresentarem como parâmetros necessários para a simulação do concreto sob cargas cíclicas, principalmente quanto da utilização de modelos fenomenológicos (GRASSL; REMPLING, 2008;

GUO et al., 2009; MOSLEMIAN; KARLSSON; BERGGREEN, 2011; CUSATIS; PELESSONE; MENCARELLI, 2011; CANER; BAŽANT, 2013a; CANER; BAŽANT, 2013b; ELIÁŠ et al., 2015; KIRANE; BAŽANT, 2015; BAKTHEER; CHUDOBA, 2018; ZHAODONG; JIE, 2018; BAKTHEER; CHUDOBA, 2019; CHANG et al., 2019; GAO; KOVAL; CHAZALLON, 2019; WANG, 2019). No entanto, diante dos modelos apresentados e discutidos neste capítulo, é possível observar que boa parte das formulações que possibilitam a predição da vida útil à fadiga do concreto foram geradas tendo como base a Equação 2.11, possuindo como diretriz as curvas $S-N$ ou $\varepsilon-N$, e fazem o uso de um único banco de dados. Assim, estes modelos apresentam limitada capacidade de aplicação, já que atendem a um pequeno número de casos devido às condições de contorno empregadas nas campanhas experimentais e à grande variabilidade das propriedades dos materiais que compõe o concreto, condições de cura e preparação dos corpos de prova, e condições de contorno dos ensaios.

Sabendo disso, nos próximos capítulos são apresentados os fundamentos da mecânica do contínuo e do dano, que dão subsídios para o desenvolvimento de um modelo numérico para a simulação do concreto sob compressão cíclica. E para contornar as dificuldades impostas na predição da vida útil à fadiga, mais adiante é proposto um novo modelo preditivo, o qual foi concebido considerando resultados da literatura e de uma campanha experimental desenvolvida neste trabalho.

CAPÍTULO

3

MECÂNICA DO CONTÍNUO

Com relação a este capítulo, inicialmente são apresentados os conceitos associados à mecânica do contínuo, necessários para o entendimento da formulação utilizada na representação do campo mecânico de um corpo. Na sequência, o Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP) é apresentado, sendo detalhada a metodologia de acoplamento de elementos unidimensionais (fibras) e bidimensionais (partículas) a uma matriz bidimensional (definida por um elemento de chapa), para a representação de sólidos compósitos em mesoescala. Ao final, exemplos numéricos são apresentados a fim de demonstrar a aplicabilidade e nível de acuracidade dos códigos implementados.

O MEFP possui como vertente a descrição da configuração de um corpo em função de suas posições nodais, ao invés dos deslocamentos, parâmetro empregado nos métodos convencionais de elementos finitos associados a problemas mecânicos. A formulação do MEFP foi inicialmente apresentada em Bonet et al. (2000), e posteriormente, de forma independente, formulada por Coda (2003).

Os conceitos apresentados ao longo do capítulo são embasados no trabalho de Coda (2018) e nas notas de aulas das disciplinas *SET5876 – Fundamentos da Mecânica dos Materiais e das Estruturas* e *SET5884 – Introdução à Dinâmica Não Linear de Estruturas Reticuladas*, ambas ministradas pelo professor Titular Humberto Breves Coda, no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC - USP. Para complementar as discussões, foram utilizadas as referências de Ogden (1997), Gere e Timoshenko (1997) e Criesfield (1991).

3.1 Não linearidade geométrica

De modo geral, as estruturas são dimensionadas e projetadas de modo a permanecerem estaticamente equilibradas ao longo de sua vida útil, independente dos tipos de solicitações que venham a ser submetidas. O equilíbrio descrito pela análise linear geométrica é conduzido considerando a sua configuração inicial ou indeformada.

A determinação da configuração de equilíbrio de estruturas e componentes estruturais via análise linear geométrica é considerada eficiente e simples (PASCON, 2008). No entanto, este método é restrito a estruturas submetidas a pequenos deslocamentos, quando há a possibilidade de confundir a configuração indeformada com a deformada.

Assim, da existência de grandes deslocamentos, ou diante da impossibilidade de confundir as configurações inicial e final, a obtenção da condição de equilíbrio de um sólido pela análise linear geométrica deixa de ser eficaz (CRIESFIELD, 1991). A solução neste caso é empregar a metodologia de análise não linear geométrica, onde a condição de equilíbrio é definida em função da posição atual do sólido, sendo necessário considerar nos equacionamentos os deslocamentos e as deformações impostas pela solicitação.

Criesfield (1991) descreve que, mesmo diante de uma maior complexidade matemática, o emprego da análise não linear geométrica se torna obrigatória para o estudo e determinação dos campos de tensão e deformação de estruturas sujeitas a grandes deslocamentos. Sob essa perspectiva, muitos trabalhos vêm sendo desenvolvidos considerando a não-linearidade geométrica para a análise dos mais variados tipos de problemas estruturais (SURANA, 1983; BATHE; DVORKIN, 1986; BÜCHTER; RAMM; ROEHL, 1994; GHALI; NEVILLE; BROWN, 2003; CODA, 2003; CODA; GRECO, 2004; CODA; GRECO, 2008; RIGOBELLO, 2011; SAMPAIO, 2014; KZAM, 2016).

Para a descrição e representação da mudança de configuração, ou movimentação de um corpo, é necessário definir uma representação para essa mudança. De acordo com Holzapfel (2000), na mecânica do contínuo as representações Lagrangiana e Euleriana são as mais empregadas, sendo que a Lagrangiana (ou material) se ajusta melhor à mudança de configuração dos sólidos deformáveis, uma vez que o referencial do movimento acompanha o deslocamento das partículas do sólido no espaço (OGDEN, 1997).

Por sua vez, a descrição Euleriana representa o referencial de modo estático. Esta representação é usualmente usada na descrição de fluídos em movimento, já que nas modelagens de fluídos e interações com estes, almeja-se analisar o que acontece em um ponto fixo no espaço para cada instante do movimento (COIMBRA, 1978).

Assim, sabendo que neste trabalho são estudados e modelados os campos de tensão, deformação e deslocamentos de elementos de concreto (i.e., sólidos deformáveis), o movimento será tratado segundo a representação Lagrangiana, o que vai possibilitar a resolução de problemas com significativas mudanças de configuração, limitado-os a pequenas deformações decorrente do modo de falha do material. Ademais, comenta-se que a descrição adotada é a Lagrangiana total, uma vez que o referencial adotado será sempre o inicial, configuração indeformada.

3.2 Cinemática dos sólidos deformáveis

Para a representação do movimento de sólidos deformáveis, torna-se necessário estudar a cinemática destes corpos. Nas teorias da cinemática não são consideradas as causas decorrentes

das mudanças de configuração, fazendo com que um sólido tenha comportamento semelhante ao de um meio contínuo, sob a ótica da análise macroscópica.

Holzapfel (2000) descreve que um corpo é representado como um meio totalmente homogêneo, sendo constituído de uma única fase, descartando o fato do material que representa o corpo ser constituído de moléculas e átomos. Assim, diante dessa hipótese, um corpo é considerado como um conjunto contínuo de pontos materiais, cujas grandezas (posição, velocidade, aceleração, massa e volume) são definidas através de funções contínuas. Kzam (2016) relata que uma definição eficiente de formulações que representem as grandezas associadas aos pontos de um contínuo consiste em associar a cada instante do movimento o lugar geométrico dos pontos do corpo, fazendo o uso de suas coordenadas nodais em função do referencial espacial.

Deste modo, para determinar a configuração de equilíbrio de um sólido sujeito a um sistema de forças, em sua posição atual, é necessário representar de forma completa o movimento que originou a mudança de configuração do estado inicial ao atual.

3.2.1 Configuração de um corpo

Os corpos são configurados por um conjunto de partículas ou pontos materiais, onde suas posições são usualmente descritas pelo emprego de uma função contínua, fazendo univocamente a correspondência entre o ponto material e suas coordenadas no espaço Euclidiano, perante um ponto referencial.

Na literatura o referencial é caracterizado como observador, e possuí origem ($\boldsymbol{O}$) fixa no espaço, contendo três eixos ($\vec{e_i}$, $\vec{e_j}$ e $\vec{e_k}$), os quais formam a base ortonormal do espaço vetorial $\Re^3$, conforme Equações 3.1 e 3.2.

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \tag{3.1}$$

$$e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk} e_k \tag{3.2}$$

em que δ_{ij} é o delta de Kronecker, ε_{ijk} representa a permutação cíclica de Levi-Cevita e e_i, e_j e e_k representam as componentes cartesianas da base ortonormal.

Descreve-se a configuração inicial utilizando $\vec{X}$, e a configuração atual é definida por meio de $\vec{Y}$. Assim, a posição de um corpo, especificamente de seus pontos materiais, é definida por meio das Equações 3.3 e 3.4.

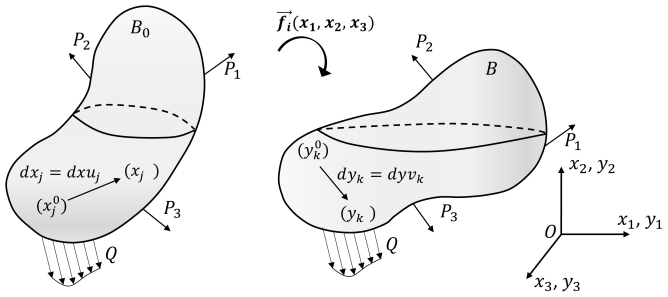
$$\vec{X} = X_1 \cdot \vec{e_1} + X_2 \cdot \vec{e_2} + X_3 \cdot \vec{e_3} \tag{3.3}$$

$$\vec{Y} = Y_1 \cdot \vec{e_1} + Y_2 \cdot \vec{e_2} + Y_3 \cdot \vec{e_3} \tag{3.4}$$

em que X_1, X_2 e X_3 são as coordenadas da posição inicial do corpo no espaço tridimensional, chamadas de coordenadas materiais ou de referência (PASCON, 2008), e Y_1, Y_2 e Y_3 as coordenadas da posição atual.

Conhecendo o conceito de configuração de um corpo, pode-se finalmente definir e representar o processo de mudança de configuração. Todos os sólidos deformáveis estão sujeitos a mudanças de configuração quando submetidos a solicitações (OGDEN, 1997). Diz-se mudança de forma ou configuração quando um sólido deformável, sujeito a solicitações e em equilíbrio estável, se deforma e tem alteração nas posições dos seus pontos materiais. A Figura 3.1 apresenta um corpo em sua configuração inicial (B_0) e atual (B), onde f_i representa a função mudança de configuração.

Figura 3.1 – Mudança de configuração de um sólido deformável.



Fonte: Própria autoria.

Na maioria dos casos a função mudança de configuração (f_i) é desconhecida, e a sua determinação é feita por meio dos mapeamentos nas configurações indeformada e deformada. Assim, com x_0 e x pertencendo à B_0 e Δx_j o vetor dado pela diferença entre os dois pontos, define-se a imagem de x em B por meio da Equação 3.5. O estado de deformação do sólido pode ser definido pelo gradiente da função mudança de configuração, considerando para tanto as derivadas de f_i, conforme Equação 3.6, ou Equação 3.7, e fazendo $\Delta x_j \longrightarrow 0$ na Equação 3.6, onde os termo O^2 vai a zero. $\mathbf{A}$ é o tensor que representa o gradiente da função mudança de configuração em qualquer ponto do domínio B_0, dada pela Equação 3.8. É importante destacar que neste texto os tensores de segunda ordem estão sendo definidos em negrito.

$$y_i = f_i\left(x_j\right) = f_i\left(x_j^0\right) + \frac{\partial f_i}{\partial x_j}|_{x_j^0}\Delta x_j + O^2 \tag{3.5}$$

$$y_i - y_i^0 = dy_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}|_{x_j^0}\Delta x_j + O^2 \tag{3.6}$$

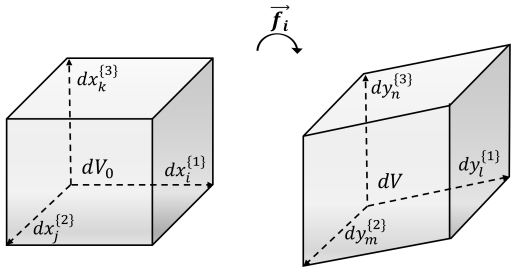
$$dy_i = \mathbf{A_{ij}} dx_j \tag{3.7}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

3.2.2 Mudança de volume

O tensor que representa o gradiente da função mudança de configuração carrega uma importante informação, a variação de volume entre as configurações inicial e atual. A Figura 3.2 apresenta a alteração de volume de um sólido definido por três vetores $dx_{\alpha}^{\{i\}}$ quando submetidos a função mudança de configuração.

Figura 3.2 – Mudança de volume de um corpo.



Fonte: Própria autoria.

Assim, sendo dV_0 e dV os volumes infinitesimais na configuração inicial e atual, estes podem ser definidos de acordo com as Equações 3.9 e 3.10, respectivamente.

$$dV_0 = \varepsilon_{ijk} dx_i^{\{1\}} dx_j^{\{2\}} dx_k^{\{3\}} \tag{3.9}$$

$$dV = \varepsilon_{lmn} dy_l^{\{1\}} dy_m^{\{2\}} dy_n^{\{3\}} \tag{3.10}$$

em que ε_{ijk} e ε_{lmn} representam os operadores de permutação cíclica de Levi-Cevita.

Ao utilizar a definição do tensor $\mathbf{A}$ (Equação 3.6), pode-se escrever a variação de volume no estado atual por meio da Equação 3.11. Ademais, ao definir a razão entre as variações de volumes no estado atual e inicial (Equação 3.12), descreve-se o Jacobiano da função mudança de configuração (Equação 3.13). O Jacobiano representa, portanto, a variação de volume entre duas configurações.

$$dV = \varepsilon_{lmn} dy_l^{\{1\}} dy_m^{\{2\}} dy_n^{\{3\}} = \varepsilon_{lmn} \mathbf{A_{li}} dx_i^{\{1\}} \mathbf{A_{mj}} dx_j^{\{2\}} \mathbf{A_{nk}} dx_k^{\{3\}} \tag{3.11}$$

$$\frac{dV}{dV_0} = \frac{\varepsilon_{lmn} \mathbf{A_{li}} dx_i^{\{1\}} \mathbf{A_{mj}} dx_j^{\{2\}} \mathbf{A_{nk}} dx_k^{\{3\}}}{\varepsilon_{ijk} dy_l^{\{1\}} dy_m^{\{2\}} dy_n^{\{3\}}} \tag{3.12}$$

$$\mathrm{J} = \det\left(\mathbf{A_{op}}\right) \tag{3.13}$$

em que $\det(\cdot)$ é o operador determinante.

De acordo com Coda (2003), o gradiente da função de mudança de configuração possibilita estabelecer uma condição da mecânica do contínuo, a condição local de impenetrabilidade (i.e., o material não penetra em si mesmo e não se aniquila). Para tal, faz-se necessário que o

Jacobiano seja sempre positivo definido (o que implica em não nulidade).

O conhecimento do gradiente da função mudança de configuração possibilita também a determinação de diferentes medidas de deformação. Fridel (2016) relata que a deformação representa fisicamente as mudanças de forma de um corpo, sendo as principais: a medida de deformação não linear de engenharia, a medida de deformação linear de engenharia e a medida de deformação de Green-Lagrange. Criesfield (1991) apresenta também como principais medidas de deformação o alongamento à direita e à esquerda de Cauchy-Green e a medida de Almansi.

No presente trabalho é adotada a medida de deformação de Green-Lagrange para a descrição e implementação dos elementos finitos, já que a mesma representa coerentemente análises não lineares, por se apresentar na forma de tensor, livre da hipótese de pequenos deslocamentos ou rotações, e do movimento de corpo rígido, se apresentando como uma medida objetiva.

3.2.3 Tensor de estiramento à direita de Cauchy-Green

A fim de representar o estiramento quadrático de uma fibra contida internamente em sólido, dada sua configuração atual, torna-se necessário o emprego do tensor à direita de Cauchy-Green (**C**), definido como o produto entre o transposto do gradiente da função mudança de configuração com o próprio gradiente, conforme apresentado na Equação 3.14.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{A} \tag{3.14}$$

Além do tensor de estiramento ser uma medida positiva definida, o mesmo é simétrico e representa a medida Lagrangiana do alongamento de uma fibra do corpo. Este tensor engloba as deformações longitudinais e as distorções do corpo, constituindo-se em uma importante grandeza para a obtenção de medidas de deformação não lineares.

3.2.4 Tensor de deformação Green-Lagrange

Para Criesfield (1991), o tensor de deformação de Green-Lagrange (Equação 3.15) descreve de modo simples uma medida não linear de deformação associada ao tensor de estiramento de Cauchy-Green (Equação 3.14). Kzam (2016) comenta que a deformação de Green-Lagrange representa satisfatoriamente a maior parte dos problemas da mecânica dos sólidos deformáveis, do ponto de vista da análise não linear geométrica.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C} - \mathbf{I}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}\right) \tag{3.15}$$

em que **E** refere-se a deformação Green-Lagrange, **C** é o tensor de estiramento de Cauchy-Green e **I** representa o tensor identidade de segunda ordem.

Outra forma de descrever o tensor de deformação de Green-Lagrange é definindo-o em função dos deslocamentos nodais do corpo aplicando a operação gradiente com o intuito de

calcular o tensor de Cauchy-Green, conforme apresentado na Equação 3.16.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\Delta\overrightarrow{u}^t \cdot \Delta\overrightarrow{u} + \Delta\overrightarrow{u}^t + \Delta\overrightarrow{u}\right) \tag{3.16}$$

Em elementos unidimensionais, a exemplo de barras de treliça ou elementos de fibras, a deformação de Green-Lagrange é definida pela Equação 3.17, resultado da diferença do quadrado do comprimento de uma fibra do contínuo, antes e após se deformar.

$$\bar{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{L}^2}{\bar{L_0}^2} - 1\right) \tag{3.17}$$

em que $\bar{E}$ representa a deformação não linear da fibra, $\bar{L_0}^2$ refere-se ao quadrado do comprimento inicial da fibra e $\bar{L}^2$ é o quadrado do seu comprimento atual. Neste texto, barras sobrescritas são utilizadas para indicar parâmetros associados a elementos de fibras.

A medida de Green-Lagrange pode representar com eficiência as pequenas deformações em sólidos e também grandes deslocamentos com pequenas ou grandes deformações, sendo dependente das condições de Kuhn-Tucker. Assim, **E** é uma medida invariante em relação ao sistema de coordenadas e aos movimentos de corpo rígido, que caracteriza o conceito de objetividade.

No âmbito da teoria da elasticidade linear, o termo quadrático do gradiente da função deslocamento presente na Equação 3.16 pode ser ignorado, gerando os termos descritos na Equação 3.18, que, por sua vez, não atendem a objetividade da Equação 3.16, já que os termos não são invariantes ao movimento de corpo rígido de rotação.

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ &\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right); \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right); \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{3.18}$$

em que u, v e w são as funções de deslocamentos segundo cada uma das direções x, y e z.

Considerando todos os preceitos e teorias discutidas até o momento, torna-se possível relacionar as diferentes medidas de tensão com a tensão de Cauchy.

3.2.5 Energia específica de deformação

De modo geral, todo sólido tem a propriedade de armazenar energia em seu interior ao ser solicitado e se deformar, que é definida como energia de deformação, a qual constitui-se em uma das parcelas de energia mecânica do corpo.

A fim de obter leis constitutivas consistentes é fundamental a especificação de uma formulação para a energia específica de deformação armazenada no interior de um sólido (u_e), a qual pode ser definida como o inverso trabalho gerado pela aplicação de uma tensão nominal (σ_0) no corpo (Equação 3.19). Ao aplicar a operação de derivada em função da medida de deformação (ε) em ambos os lados da Equação 3.19, obtém-se uma forma alternativa (Equação 3.20) para a

definição da energia armazenada.

$$u_e = \int_0^{\varepsilon} \sigma_0(\varepsilon_0)\, d\varepsilon \tag{3.19}$$

$$\sigma_0 = \frac{\partial u_e}{\partial \varepsilon} \tag{3.20}$$

A Equação 3.20 conduz a duas hipóteses: (i) na existência de uma expressão para determinar explicitamente a energia específica de deformação, há também a possibilidade de estabelecer relações entre os níveis de tensão e deformação, tornando possível a formulação de leis constitutivas que descrevam o comportamento físico do material que configura o corpo e; (ii) a tensão é conjugada energética da deformação.

Com o propósito de obter expressões para a energia específica de deformação, responsável pela definição de leis constitutivas consistentes, faz-se necessário adotar potenciais convexos. Esta especificação garante que as medidas de tensão e deformação possuam sinais iguais (i.e, deformações positivas gerando tensões positivas e deformações negativas resultando tensões negativas).

3.2.6 *Lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff*

As leis constitutivas impõem uma relação entre os níveis de solicitação interna ao corpo, também denominadas tensões, e as mudanças de configuração ou forma (deformações) do sólido (PASCON, 2008). Deste modo estas leis estão intimamente relacionadas com a estrutura cristalina do material e, por consequência, com as características definidas em nível microscópico do contínuo, definindo o comportamento do contínuo frente às solicitações externas.

No presente trabalho é considerada um modelo constitutivo para materiais isotrópicos (Equação 3.21), sendo a energia específica de deformação dada em função da deformação de Green-Lagrange (Equação 3.15). O modelo constitutivo adotado é o de Saint-Venant-Kirchhoff, o qual relaciona linearmente a medida de deformação de Green com o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, seu conjugado energético.

$$u_e = \frac{1}{2}(\mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E}) \tag{3.21}$$

$$\mathbb{C} = \left(\frac{2G\nu}{1-2\nu}\right)\mathbf{I}\bigotimes\mathbf{I} + G\mathbb{I} \tag{3.22}$$

em que u_e é a energia específica de deformação, $\mathbf{E}$ é a deformação de Green-Lagrange, $\mathbb{I}$ é o tensor identidade de quarta ordem, $\mathbf{I}$ é o tensor identidade de segunda ordem, ν é o coeficiente de Poisson, G é o módulo de rigidez transversal do material e $\mathbb{C}$ representa o tensor constitutivo de quarta ordem (Equação 3.22).

A partir da energia específica de deformação u_e, da hipótese de materiais isotrópicos, e da 2^a lei da termodinâmica, pode-se obter os tensores de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira

e segunda espécies respectivamente, nas Equações 3.23 e 3.24.

$$\mathbf{P} = \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{A}} \tag{3.23}$$

$$\mathbf{S} = \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{E}} = \mathbb{C} : \mathbf{E} \tag{3.24}$$

em que u_e se refere à energia específica de deformação, $\mathbf{E}$ é a deformação de Green-Lagrange, $\mathbb{C}$ é o tensor de rigidez elástica (tensor de quarta ordem), $\mathbf{P}$ representa o tensor de tensões de primeira espécie de Piola-Kirchhoff e $\mathbf{S}$ o de segunda espécie.

A Equação 3.23 apresenta o tensor tensão de Piola-Kirchhoff de primeira espécie, que é o conjugado energético do gradiente da função mudança de configuração. Já na Equação 3.24 é definido o tensor tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, que é o conjugado energético da deformação de Green-Lagrange.

Verifica-se que é possível derivar a energia específica de deformação em relação ao campo tensorial de deformação ou de tensão e obter uma relação explícita entre tensão e deformação, relação esta denominada por lei constitutiva (CODA, 2003).

O segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff ($\mathbf{S}$) não possui interpretação física em termos de força de superfície. No entanto é comumente empregado na mecânica computacional para a análise de sólidos deformáveis (CODA, 2003). É possível gerar uma relação entre o tensor $\mathbf{S}$ e o tensor de tensões de Cauchy (σ) para proceder com as análises dos campos de tensão, já que este possuí significado físico bem definido, conforme expressa a Equação 3.25.

$$\mathbf{S} = \mathrm{J}\left(\mathbf{A^{-1}} \cdot \sigma \cdot \mathbf{A^{-t}}\right)^t = det\,(\mathbf{A})\left(\mathbf{A^{-1}} \cdot \sigma \cdot \mathbf{A^{-t}}\right)^t \quad ou \quad \sigma = \frac{\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A^t}\right)}{\mathrm{J}} \tag{3.25}$$

em que σ é o tensor de tensões de Cauchy e J é o jacobiano do gradiente de transformação.

3.3 Princípios fundamentais da mecânica dos sólidos

A determinação do equilíbrio de um corpo é de grande interesse em diversos problemas da mecânica. A fim de descrever e determinar o equilíbrio dos sólidos deformáveis, faz-se necessário definir dois princípios que norteiam a teoria da mecânica, o princípio da conservação da energia mecânica e da mínima ação.

O princípio da conservação da energia mecânica define que, em um sistema físico fechado, sob a ação de forças conservativas, a energia mecânica total que atua no sistema se mantém constante (OGDEN, 1997). Este princípio expressa a energia mecânica pela soma da energia cinética, energia de deformação e energia potencial das forças externas (Equação 3.26). Como no presente trabalho é adotado o regime quase estático de aplicação do carregamento, a energia mecânica do sistema é calculada apenas a partir da contribuição da energia de deformação e de potencial das forças externas (Equação 3.27).

$$\Pi = U + P + K \tag{3.26}$$

$$\Pi = U + P \tag{3.27}$$

em que Π refere-se à energia mecânica total do sistema, U é a energia das deformações, P é a energia potencial das forças externas e K é a energia cinética.

A energia potencial das deformações em termos das quantidades Lagrangianas pode ser definida considerando o volume inicial e por intermédio da Equação 3.28. Para a determinação da energia potencial das forças externas, utiliza-se o trabalho realizado pela resultante das forças na configuração atual, conforme 3.29.

$$U = \int_{V_0} u_e dV_0 \tag{3.28}$$

$$P = -\vec{F^{ext}} \cdot \vec{Y} \tag{3.29}$$

em que u_e é a energia específica de deformação, $\vec{F^{ext}}$ é o vetor de forças externas ao qual o corpo está submetido e $\vec{Y}$ é o vetor das posições atuais dos pontos materiais do corpo.

O sinal presente na Equação 3.29 aponta que as forças externas, ao qual um corpo é submetido, são responsáveis por diminuir a capacidade do mesmo em armazenar energia de deformação a medida em que é aumentada a intensidade da solicitação.

O princípio da mínima ação define que a mudança de um corpo da configuração inicial para uma atual é tal que a ação referente a essa mudança é caracterizada por um mínimo (SYMON, 1971). Pela teoria da mecânica dos corpos deformáveis, essa ação representará um mínimo se, e somente se, a Equação 3.30 for satisfeita durante a mudança de configuração.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{q}} = 0 \tag{3.30}$$

em que $\mathcal{L}$ representa a Lagrangiana do sistema e $\vec{q}$ refere-se ao vetor de coordenadas generalizadas.

A Equação 3.30 é conhecida como formulação de Euler-Lagrange, e é independente do tempo. A Equação 3.30 é utilizada como base para a representação Lagrangiana e indica como um sólido deformável se deforma, ou seja, tem sua configuração inicial alterada para a atual.

A medida Lagrangiana é uma quantidade escalar descrita pela diferença entre a energia cinética e a energia potencial total. Como a energia cinética em regime estático de carregamento é desprezada, a Lagrangiana é a própria energia potencial e a Equação 3.30 define que a energia potencial é estacionária em relação às coordenadas generalizadas.

Fazendo as substituições do termo à direita da Equação 3.27 na Equação 3.30, chega-se ao princípio da mínima ação (Equação 3.31), que é usualmente denominado como princípio da estacionariedade da energia mecânica. A Equação 3.30 representa a segunda lei de Newton para um sistema de forças conservativo em equilíbrio estático.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{q}} = -\frac{\partial}{\partial \vec{q}}(U + P) \tag{3.31}$$

Se a Equação 3.29 for inserida na Equação 3.31, sendo considerada a Equação 3.30, e admitindo que as coordenadas generalizadas estão definidas no espaço Euclidiano, encontra-se que o vetor de coordenadas generalizadas é o vetor de posições nodais das partículas na descrição Lagrangiana, que, por consequência, são as posições atuais, e definem a Equação 3.32.

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{Y}} - \vec{F^{ext}} = 0 \tag{3.32}$$

A Equação 3.32 representa um corolário da lei da ação e reação, a qual demonstra que, para um sistema se manter em equilíbrio, o conjugado energético das posições deve representar as forças internas que surgem no sólido, sendo o equilíbrio satisfeito se, e somente se, o resultado obtido na Equação 3.32 for garantido. Para isso, é necessário se resolver a Equação 3.33, onde as forças externas são igualadas às forças internas, sendo estas dadas em função energia de deformação interna.

$$\vec{F^{ext}} = \frac{\partial U}{\partial \vec{Y}}\left(\vec{Y}\right) = \vec{F^{int}} \tag{3.33}$$

em que $\vec{F_{int}}$ é o vetor de forças internas do corpo.

Como se observa na Equação 3.33, a energia potencial das deformações é uma função não linear das posições. Portanto, é necessário se recorrer a estratégias de solução de sistemas não lineares para se alcançar o equilíbrio das estruturas. Na sequência são apresentados o método dos elementos finitos posicional, as estratégias adotadas para a representação de sólidos compósitos, em especial do concreto, e a metodologia de solução de sistemas não lineares para a determinação do equilíbrio dos sólidos deformáveis.

3.4 Modelagem de compósitos via MEFP

O método dos elementos finitos (MEF) pode ser caracterizado como uma robusta e eficiente ferramenta numérica para a simulação do comportamento de sólidos e fluídos, sendo amplamente empregada na representação de elementos estruturais. Assan (2003) define o método dos elementos finitos como um modelo matemático responsável por gerar uma solução aproximada de um problema descrito por equações diferenciais, a exemplo da avaliação do comportamento mecânico de sólidos deformáveis.

O MEF proporciona a representação e discretização de um contínuo em uma quantidade finita de elementos. Os elementos responsáveis pela discretização do domínio possuem um determinado número de pontos de processamento de informação, sendo normalmente denominados de nós. Os nós são caracterizados pela sua localização, em geral diante de um sistema de referência euclidiano, e contemplam os parâmetros nodais que descrevem as grandezas modeladas no problema, a exemplo da força, deslocamento, velocidade, aceleração e outros.

Segundo Pascon (2008), a função aproximadora que representa uma grandeza almejada durante a simulação numérica é descrita apenas nos subdomínios do corpo, o que faz com não

seja necessário determinar uma aproximação que obedeça às condições de contorno de todo o corpo. A determinação da função aproximadora proporciona a estimativa de outras grandezas, a exemplo da rigidez referentes aos elementos finitos, que possibilita a determinação dos campos de deslocamentos em toda a malha empregada na discretização do sólido. Ao associar as equações de compatibilidade e as leis constitutivas, pode-se ainda determinar os campos de deformações e tensões, respectivamente.

De modo geral, o método de elementos finitos tradicional emprega como parâmetros nodais os deslocamentos na solução de um problema mecânico, diferente do método dos elementos finitos posicional (MEFP), que é uma versão alternativa do MEF, onde os parâmetros são definidos pelas posições nodais (CODA, 2003).

O MEFP é empregado neste trabalho pois o mesmo apresenta grandes vantagens frente ao MEF tradicional, a exemplo da contemplação de modo natural da não linearidade geométrica em sua formulação, proporcionando uma implementação mais fácil e rápida, comparada aos outros métodos. Outra justificativa para o emprego deste método remete a um dos objetivos deste trabalho, que consiste em dar continuidade no desenvolvimento de formulações e modelos numéricos baseados no MEFP para a representação do comportamento mecânico de compósitos submetidos a diferentes tipos de solicitações.

3.4.1 Formulação

O MEF utilizado no presente trabalho considera a formulação Lagrangiana total, descrita em Coda (2003). A obtenção da configuração atual de um sólido, assim como dos seus campos de deformações e tensões, é feita por meio da sua configuração inicial, e em função da deformação de Green-Lagrange, sendo o equilíbrio expresso pelo princípio da mínima ação (Equação 3.15).

A utilização do método dos elementos finitos proporciona a determinação de uma função aproximadora para a configuração atual do sólido, a qual é determinada para todos os elementos que discretizam o mesmo. Assim, o domínio do contínuo discretizado por elementos finitos (Figura 3.3), fica representado pela contribuição de todos os elementos finitos, conforme expressa a Equação 3.34.

$$B = \sum_{i=1}^{nelem} B_i \tag{3.34}$$

em que B é o domínio do sólido, B_i é um subdomínio representativo do sólido e *nelem* remete ao número de elementos empregados na discretização.

Ao definir uma configuração auxiliar (Figura 3.3), torna-se possível definir funções aproximadoras responsáveis por mapear as mudanças de configuração, sejam elas das posição inicial ou atual para a configuração auxiliar, conforme mostram as Equações 3.35 e 3.36. O mapeamento da mudança de configuração é conduzido com o uso dos polinômios de Lagrange, também conhecidos como funções de forma, em que os parâmetros são os próprios valores

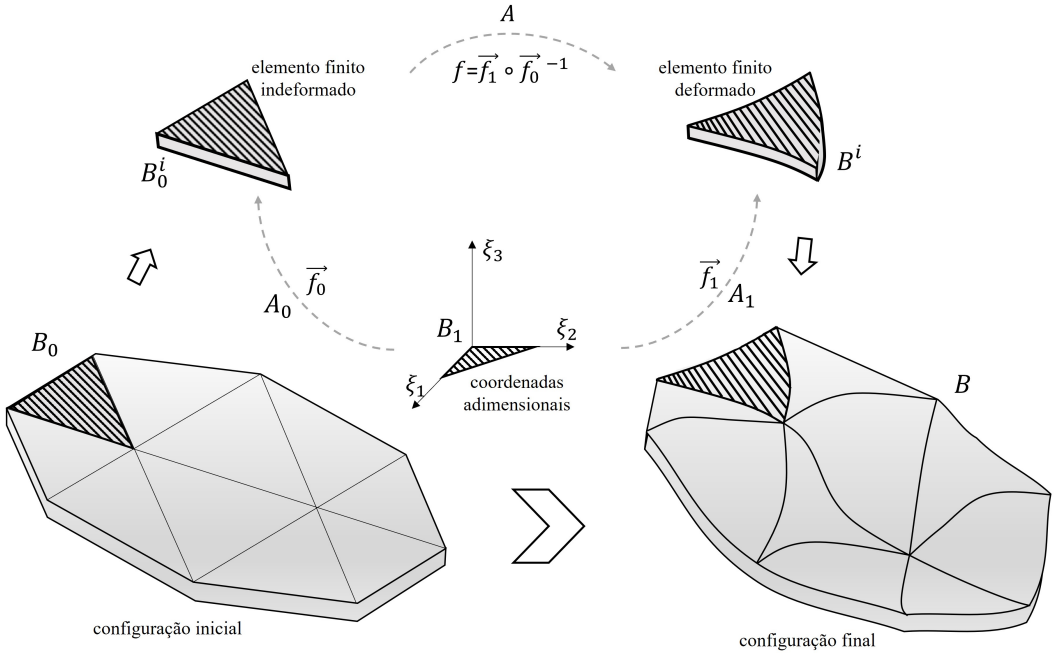
assumidos pela função aproximada nos pontos base da aproximação.

$$\overrightarrow{B_0} = \overrightarrow{B_0}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \overrightarrow{X}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \Rightarrow f_i^0 = X_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \sum_{j=1}^{nnos} \phi_j(\xi_1,\xi_2,\xi_3)X_{ji} \quad (3.35)$$

$$\overrightarrow{B_1} = \overrightarrow{B_1}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \overrightarrow{Y}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \Rightarrow f_i^1 = Y_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \sum_{j=1}^{nnos} \phi_j(\xi_1,\xi_2,\xi_3)Y_{ji} \quad (3.36)$$

em que ξ_1, ξ_2 e ξ_3 referem-se às coordenadas adimensionais, *nnos* é o número de nós do elemento finito empregado, $\overrightarrow{X}$ é o vetor referente à posições nodais da configuração inicial, ϕ é a função de forma, $\overrightarrow{Y}$ é o vetor posição atual, *i* e *j* referem-se respectivamente à direção e ao nó à qual a grandeza está associada, f_0 é o mapeamento da configuração auxiliar à inicial e f_1 o mapeamento da configuração auxiliar à atual.

Figura 3.3 – Discretização de um contínuo via método dos elementos finitos.



Fonte: Própria autoria.

Por meio das Equações 3.35 e 3.36, observa-se que as funções aproximadoras são descritas considerando as funções de forma e as posições iniciais e atuais do sólido.

Utilizando as Equações 3.35 e 3.36 e a definição do gradiente da função mudança de configuração (Equação 3.8), é torna-se possível determinar o gradiente de transformação da configuração auxiliar para as configurações inicial $\mathbf{A_0}$ (Equação 3.37) e atual $\mathbf{A_1}$ (Equação 3.38). A partir destes, pode-se obter os tensores de alongamento à direita de Cauchy-Green (Equação 3.14) e de deformação Green-Lagrange (3.15). Nas Equações 3.37 e 3.38 foram utilizadas as notações diádica e indicial, a fim de facilitar a leitura das formulações.

$$\mathbf{A_0} = \mathbf{A_0}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \Rightarrow (A_0)_{ij} = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{A_1} = \mathbf{A_1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \Rightarrow (A_1)_{ij} = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} \tag{3.38}$$

Com as Equações 3.14, 3.15, 3.37 e 3.38, escreve-se os tensores de alongamento à direita de Cauchy-Green (Equação 3.39) e a deformação Green-Lagrange (Equação 3.40).

$$\mathbf{C} = \mathbf{A^T A} = \left[\mathbf{A_1}(\mathbf{A_0})^{-1}\right]^T \left[\mathbf{A_1}(\mathbf{A_0})^{-1}\right] \tag{3.39}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \tag{3.40}$$

em que **C** refere-re ao tensor de estiramento à direita de Cauchy-Green, **E** é a deformação de Green-Lagrange e **I** remete ao tensor identidade de segunda ordem.

Para a obtenção do tensor de tensão de segunda espécie de Piola-Kirchhoff, recorda-se a Equação 3.24, que relaciona com o tensor de deformação de Green-Lagrange. Já a condição de equilíbrio estático do sistema de forças na configuração atual é obtido por meio do princípio da mínima ação (Equação 3.30) e da consideração de forças conservativas, fazendo o emprego da energia potencial total (Equação 3.26).

Comenta-se que a resolução de problemas segundo a análise não linear geométrica via MEFP pode ser definida pela obtenção da posição de equilíbrio do corpo (posição atual), onde a Equação 3.28 deve ser satisfeita. Neste caso, como o principal objetivo reside na obtenção do vetor referente a configuração atual ($\overrightarrow{Y}$), torna-se necessário resolver a Equação 3.33, que é não linear. Assim, torna-se imprescindível a utilização de estratégias numéricas que contornem e resolvam o problema, a exemplo do método de Newton-Raphson, empregado neste trabalho.

3.4.2 Solução do sistema não linear

Esta seção apresenta a estratégia numérica adotada para a resolução do sistema não linear de equações referentes à determinação da configuração atual de um corpo via MEFP. Assim, considerando que $\overrightarrow{F}^{ext}$ e $\overrightarrow{F}^{int}$ são os vetores que contêm as forças nodais externas e internas, respectivamente, agindo em um sólido, o sistema não linear em que busca-se a solução é o exposto na Equação 3.41. O vetor $\overrightarrow{g}$ representa o desbalanceamento do sistema, sendo igual ao vetor nulo quando o equilíbrio do sistema é satisfeito.

$$g_j = \frac{\partial \Pi}{\partial Y_j} = \frac{\partial U_e}{\partial Y_j} - F_j^{ext} = F_j^{int} - F_j^{ext} = 0_j \tag{3.41}$$

em que F_j^{int} é o vetor de forças internas, F_j^{ext} é o vetor de forças externas dado pelas condições de carregamento e j os graus de liberdade do problema.

Sabendo que no método dos elementos finitos posicional as posições atuais são as incógnitas do problema, a determinação destes valores é conduzida por meio do método de Newton-Raphson. Para isso, adota-se uma posição estimativa para o equilíbrio, e em seguida calcula-se o valor do vetor de desbalanceamento (Equação 3.41), o qual será não nulo (configura-

ção que não gera o equilíbrio do sistema). Para aproximar o valor do vetor inicialmente estimado ao valor real, torna-se necessário expandir por séries de Taylor o vetor de desbalanceamento na vizinhança da posição tentativa Y^0, conforme Equação 3.42.

$$g_j(Y) = g_j(Y^0) + \left.\frac{\partial g_j}{\partial Y_i}\right|_{Y^0} \Delta Y_i + O_j^2 = g_j(Y^0) + H_{ij} \cdot \Delta Y_j + O_j^2 = 0 \tag{3.42}$$

em que ΔY é o vetor de incremento (correção) da posição, O_j^2 representa os termos de ordem superior a dois da série de Taylor e H_{ij} refere-se à matriz Hessiana.

Considerando a Equação 3.42, ao desconsiderar os termos da série de Taylor com ordem quadrática ou superior, define-se o incremento em posição a ser acrescentado no vetor posição estimativa, conforme Equação 3.43. Este processo é conduzido de modo iterativo por meio da Equação 3.44 até obter as posições que representam a configuração de equilíbrio, onde o vetor de desbalanceamento é nulo.

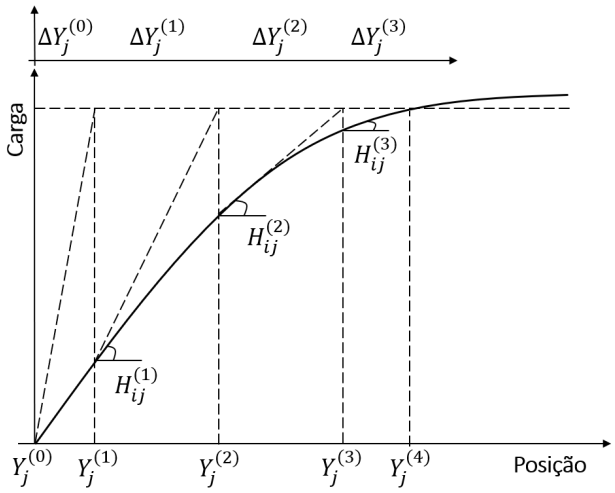
$$H_{ij} \cdot \Delta Y_i = g_j(Y) - g_j(Y_0) \tag{3.43}$$

$$Y_i = Y_0 + \Delta Y_i = Y_0 + \frac{-g\,(Y_0)}{g^{'}\,(Y_0)} \tag{3.44}$$

Para fins práticos, a posição de equilíbrio pode ser definida para posições que gerem valores suficientemente pequenos para o vetor de desbalanceamento ou o incremento, dada a tolerância estipulada no inicio da simulação. Neste trabalho o critério de convergência adotado foi o da norma normalizada L_2 do erro (Equação 3.45), considerando uma tolerância de 10^{-6}.

$$erro = \frac{\sqrt{\Delta Y_i \cdot \Delta Y_i}}{\sqrt{X \cdot X}} \tag{3.45}$$

Figura 3.4 – Representação do método iterativo de Newton-Raphson para encontrar a configuração de equilíbrio.



Fonte: Própria autoria.

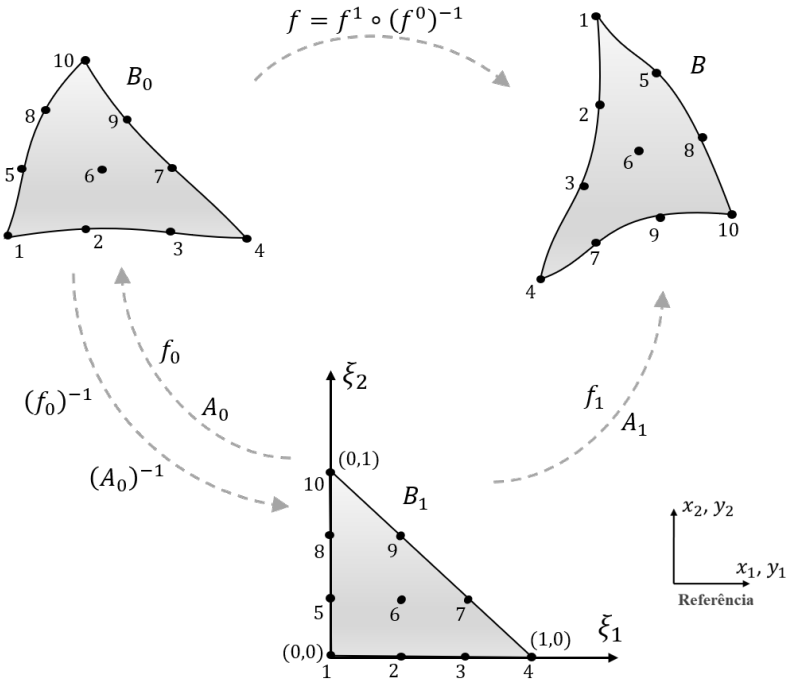
A Figura 3.4 representa graficamente o método de Newton-Raphson para a determinação

da posição de equilíbrio do sistema, e como ocorre a convergência do método. Note que a Hessiana configura a inclinação da reta no passo de iteração. Destaca-se que neste trabalho as análises são conduzidas considerando as não linearidades geométrica e física, assim o método de Newton-Raphson é empregado para a determinação do equilíbrio de cada incremento de força, de modo a encontrar a curva que representa o local geométrico de todas as configurações de equilíbrio da estrutura.

3.4.3 *Elemento bidimensional (representação da matriz e partículas)*

A Figura 3.5 apresenta a disposição de um elemento plano (do tipo chapa) considerando as configurações inicial (B_0), atual (B) e em coordenadas adimensionais (B_1) empregada como configuração auxiliar. O elemento do tipo chapa é utilizado neste trabalho para a representação bidimensional da matriz cimentícia do concreto, dos elementos particulados representativos dos agregados e da malha empregada na simulação do dano no material. A técnica de acoplamento entre os diferentes elementos é apresentada ao final do capítulo.

Figura 3.5 – Elemento finito bidimensional do tipo chapa com aproximação cúbica.



Fonte: Própria autoria.

A configuração inicial, cujas posições nodais são dadas por x_i, é mapeada pelo espaço adimensional via funções de forma, conforme Equação 3.46. Analogamente, obtém-se o mapeamento da configuração auxiliar à atual, conforme Equação 3.47.

$$x_i = f_i^0 = \phi_j(\xi_1, \xi_2) X_i^j \tag{3.46}$$

$$y_i = f_i^1 = \phi_j(\xi_1, \xi_2) Y_i^j \tag{3.47}$$

em que f^0 representa a função que faz o mapeamento entre as configurações auxiliar e inicial, f^1 representa a função que faz o mapeamento entre as configurações auxiliar e a atual, ξ_1 e ξ_2 referem-se às coordenadas adimensionais, ϕ_j são as funções de forma, X_i^j são as coordenadas nodais dos elementos finitos na configuração inicial e Y_i^j as coordenadas nodais na configuração atual.

A função mudança de configuração responsável por mapear as posições nodais da configuração inicial à atual é desconhecida. No entanto, por intermédio da configuração auxiliar, a mesma pode ser escrita pela composição dos mapeamentos da configuração auxiliar à inicial e à atual, conforme Equação 3.48.

$$f = f^1 \circ (f^0)^{-1} \tag{3.48}$$

Na metodologia empregada, as funções de mapeamento não precisam ser determinadas, apenas o gradiente. Desta forma, os gradientes das funções mudança de configuração podem ser facilmente calculados por intermédio das Equações 3.36 e 3.37.

3.4.3.1 Forças internas e Hessiana

Neste trabalho é empregada a energia específica de deformação definida pela lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff, conforme mostra a Equação 3.21, que tem sua formulação dada em função das componentes do tensor de quarta ordem das constantes elásticas do material (Equação 3.49) e do tensor de segunda ordem das deformações de Green-Lagrange (Equação 3.50).

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{3.49}$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ki}A_{kj} - \delta_{ij}) \tag{3.50}$$

em que G é o módulo de elasticidade transversal e ν é o coeficiente de Poisson.

Ao empregar a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff (Equação 3.21) nas Equações 3.49 e 3.50, a energia específica de deformação para o Estado Plano de Deformação (EPD) pode ser escrita pela Equação 3.51, enquanto que sólidos representados no Estado Plano de Tensão (EPT) têm sua energia de deformação dada pela Equação 3.52. No caso em que o coeficiente de Poisson é nulo, o EPD e EPT se tornam equivalentes.

$$u_e = \frac{G}{1-2\nu}\left\{(1-\nu)(E_{11}^2 + E_{22}^2) + 2\nu E_{11}E_{22} + (1-2\nu)(E_{12}^2 + E_{21}^2)\right\} \tag{3.51}$$

$$u_e = \frac{G}{1-\nu^2}\left\{E_{11}^2 + E_{22}^2 + 2\nu E_{11}E_{22} + (1-\nu^2)(E_{12}^2 + E_{21}^2)\right\} \tag{3.52}$$

Considerando as formulações previamente apresentadas, a energia de deformação acumu-

lada em um elemento finito pode ser determinada integrando a energia específica de deformação (Equação 3.21) em relação ao volume inicial do corpo, conforme mostra a Equação 3.53.

$$U_e = \int_{V_0} u_e dV_0 \tag{3.53}$$

Devido ao fato das funções de forma e o gradiente de transformação serem representados em função das coordenadas adimensionais, torna-se necessário definir a energia específica de deformação em função destas mesmas coordenadas, de acordo com a Equação 3.54.

$$U_e = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} u_e(\xi_1,\xi_2) J_0(\xi_1,\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \tag{3.54}$$

em que $J_0(\xi_1,\xi_2) = det(\mathbf{A_0})$ é o jacobiano do mapeamento do espaço adimensional na configuração inicial, obtido pelo determinante do gradiente de transformação da configuração auxiliar à inicial.

A Equação 3.54 é determinada numericamente via quadratura de Hammer (Equação 3.55), fazendo a substituição da integral pelo somatório dos valores de U_e calculados em pontos pré-estabelecidos do espaço adimensional (ξ_1,ξ_2), que recebem o nome de pontos de Hammer, sendo multiplicados pelos seus respectivos pesos de integração, w_i.

$$U_e = \sum_{i=1}^{NPH} u_e(\xi_1,\xi_2) J_0(\xi_1,\xi_2) w_i \tag{3.55}$$

Neste trabalho utilizam-se sete pontos para a integração numérica via quadratura de Hammer ($NPH = 7$), onde seus valores e respectivos pesos de integração podem ser visualizados em Reddy (2004).

Deste modo, a energia total de deformação é calculada pela soma das energias de deformação nos nós do domínio do contínuo, acumuladas em todos os elementos finitos que discretizam o corpo, conforme Equação 3.55.

Como discutido e apresentado na seção referente ao método de solução do sistema não linear de equações, faz-se necessário determinar a matriz Hessiana para direcionar a correção do método iterativo de Newton-Raphson. Assim, para a determinação da Hessiana, um tensor de quarta ordem, utiliza-se a Equação 3.56.

$$H_{ijkl} = \frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_{ij}\partial Y_{kl}} = \int_{V_0} \frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_{ij}\partial Y_{kl}} dV_0 = \sum_{p=1}^{NPH} \frac{\partial^2 u_e\left(Y_{mn}\left(\xi_1^p,\xi_2^p\right)\right)}{\partial Y_{ij}\partial Y_{kl}} J_0\left(\xi_1^p,\xi_2^p\right) w_p \tag{3.56}$$

Para a determinação da Hessiana, torna-se necessário realizar a integração numérica considerando os pontos de Hammer. Assim, explorando a segunda derivada da energia específica de deformação para o elemento finito, integrada no volume, pode-se definir a Equação 3.57. Comenta-se que as equações foram descritas em notação mista.

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_{ij}\partial Y_{kl}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial Y_{ij}} : \frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial Y_{kl}} + \frac{\partial u_e}{\mathbf{E}} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial Y_{ij}\partial Y_{kl}} \tag{3.57}$$

Realizando algumas simplificações na Equação 3.57, a exemplo da substituição da

segunda derivada da energia específica de deformação pelo tensor constitutivo elástico (Equação 3.49) e da troca da primeira derivada da energia especifica pelo segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff (Equação 3.25), obtém-se a Equação 3.58.

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_{ij}\partial Y_{kl}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial Y_{ij}} : \mathbb{C} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial Y_{kl}} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial Y_{ij}\partial Y_{kl}} \tag{3.58}$$

A primeira derivada da energia de deformação específica em relação às posições nodais é dada pela Equação 3.59, enquanto que a segunda derivada é dada pela Equação 3.60. Na Equação 3.60 é preciso determinar a segunda derivada do gradiente da mudança de configuração $\mathbf{A_1}$, que por sua vez é nula, já que a primeira derivada é constante. Assim, a segunda derivada da energia de deformação é calculada pela Equação 3.61

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial Y_{ij}} = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{A_0})^{-t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A_1})^t}{\partial Y_{ij}} \cdot \mathbf{A_1} \cdot (\mathbf{A_0})^{-1} + (\mathbf{A_0})^{-t} \cdot (\mathbf{A_1})^t \cdot \frac{\partial (\mathbf{A_1})}{\partial Y_{ij}} \cdot (\mathbf{A_0})^{-1}\right] \tag{3.59}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial Y_{ij}\partial Y_{kl}} = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} (\mathbf{A_0})^{-t} \cdot \dfrac{\partial^2 (\mathbf{A_1})^t}{\partial Y_{ij}\partial Y_{kl}} \cdot (\mathbf{A_1}) \cdot (\mathbf{A_0})^{-1} + \\ (\mathbf{A_0})^{-t} \cdot \dfrac{\partial (\mathbf{A_1})^t}{\partial Y_{ij}} \cdot \dfrac{\partial (\mathbf{A_1})}{\partial Y_{kl}} \cdot (\mathbf{A_0})^{-1} + \\ (\mathbf{A_0})^{-t} \cdot \dfrac{\partial (\mathbf{A_1})^t}{\partial Y_{kl}} \cdot \dfrac{\partial (\mathbf{A_1})}{\partial Y_{ij}} \cdot (\mathbf{A_0})^{-1} + \\ (\mathbf{A_0})^{-t} \cdot (\mathbf{A_1})^t \cdot \dfrac{\partial^2 (\mathbf{A_1})}{\partial Y_{kl}\partial Y_{ij}} \cdot (\mathbf{A_0})^{-1} \end{array}\right] \tag{3.60}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial Y_{ij}\partial Y_{kl}} = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} (\mathbf{A_0})^{-t} \cdot \dfrac{\partial (\mathbf{A_1})^t}{\partial Y_{ij}} \cdot \dfrac{\partial (\mathbf{A_1})}{\partial Y_{kl}} \cdot (\mathbf{A_0})^{-1} + \\ (\mathbf{A_0})^{-t} \cdot \dfrac{\partial (\mathbf{A_1})^t}{\partial Y_{kl}} \cdot \dfrac{\partial (\mathbf{A_1})}{\partial Y_{ij}} \cdot (\mathbf{A_0})^{-1} \end{array}\right] \tag{3.61}$$

A Equação 3.61 representa um tensor de quarta ordem, tornando-se necessário realizar a sua incidência na matriz Hessiana global da estrutura com dimensão equivalente ao número de graus de liberdade presentes no sólido. Para tal, utiliza-se inicialmente a correspondência descrita na Equação 3.62 para obter a matriz Hessiana no sistema local, à qual é, a posteriori, espalhada na matriz de rigidez global.

$$H_{ijkl} \rightarrow H_{mn} \qquad com \qquad m = 2(i-1)+j \qquad e \qquad n = 2(k-1)+l \tag{3.62}$$

em que i e k denotam a numeração do nós, e os termos j e l remetem à direção.

3.4.4 Elemento Finito linear (representação de fibras)

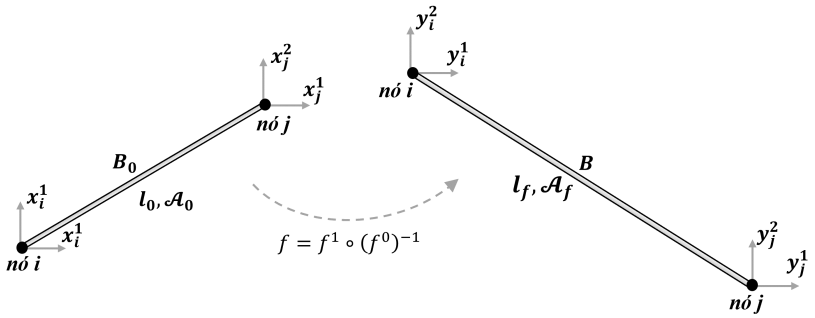
A fim de modelar sólidos compósitos com fibras, neste trabalho é empregado o elemento finito linear constituído de dois nós para a representação das fibras. A matriz, onde as fibras estão dispostas, é representada pelo elemento bidimensional do tipo chapa, apresentado anteriormente.

Considerando um elemento linear disposto em sua configuração inicial (B_0), o mesmo sofrerá uma deformação ao ser submetido a um sistema de forças externas, passando à configuração

atual (B), conforme apresentado na Figura 3.6. O elemento finito linear descrito possui aplicação limitada, já que não oferece resistência à flexão. Essa característica configura um elemento finito de treliça, aplicado neste trabalho para a representação de barras de aço, imersas no concreto. O emprego destes elementos se justificam devido à presença de deformações pequenas, que não comprometem a aderência entre os domínios matriz-fibra.

Assim, sendo $\overline{x}_i^j$ as coordenadas referentes às posições nodais do nó i e direção j de um elemento de barra na configuração inicial e $\overline{y}_i^j$ as posições nodais do elemento na configuração atual, o elemento finito linear pode ser representado por uma barra com seção transversal $\mathcal{A}$, conforme apresentado na Figura 3.6. Comenta-se que para facilitar a leitura das formulações, alterou-se a notação dos tensores, sendo a notação $X_{\alpha\beta}$ equivalente a X_α^β, onde α o nó e β a direção. Para facilitar a leitura e interpretação dos termos da formulação que fazem jus a elementos finitos lineares, utilizou-se o simbolo sobrescrito $(\overline{\bullet})$ nas variáveis que definem este elemento.

Figura 3.6 – Configuração do elemento finito linear - barra de treliça.



Fonte: Própria autoria.

Para determinar a função aproximadora da configuração atual do elemento pelo MEFP, torna-se necessário determinar a energia interna do elemento de barra. Para tal, determina-se o comprimento da barra nas configurações inicial e atual por meio das Equações 3.63 e 3.64, respectivamente.

$$\overline{l_0} = \sqrt{(\overline{x_2^1} - \overline{x_1^1})^2 + (\overline{x_2^2} - \overline{x_1^2})^2} \tag{3.63}$$

$$\overline{l_f} = \sqrt{(\overline{y_2^1} - \overline{y_1^1})^2 + (\overline{y_2^2} - \overline{y_1^2})^2} \tag{3.64}$$

Após determinado o comprimento atual e inicial, torna-se possível calcular a deformação uniaxial de Green do elemento linear, conforme a Equação 3.65, a qual se confunde com a deformação não linear de engenharia (Equação 3.66) quando da consideração de pequenos deslocamentos. As Equações 3.65 e 3.66 são definidas como medidas objetivas, já que não apresentam variações em função da direção, sendo portanto, dependentes exclusivamente da

dimensão da fibra deformada.

$$\overline{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{l_f}^2}{\overline{l_0}^2 - 1}\right) \tag{3.65}$$

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\overline{l_f} - \overline{l_0}}{\overline{l_0}} \tag{3.66}$$

A relação constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff também é empregada para o elemento finito linear, cuja energia específica de deformação é dada pela Equação 3.67, que ao ser integrada em relação ao volume inicial do elemento passa a representar a energia total de deformação armazenada referente às fibras (Equação 3.68).

$$\overline{u_e} = \frac{\mathbb{E}\overline{E}^2}{2} \tag{3.67}$$

$$\overline{U_e} = \int_{\overline{V_0}} \overline{u_e} d\overline{V_0} = \frac{\mathbb{E}\overline{E}^2\overline{V_0}}{2} = \frac{\mathbb{E}\overline{E}^2\mathcal{A}_l\overline{l_0}}{2} \tag{3.68}$$

em que $\overline{E}$ representa a deformação de Green para o elemento de barra, $\overline{V_0}$ é o volume inicial das barras, $\mathcal{A}_0$ é a área do elemento na configuração inicial, $\overline{l_0}$ é o comprimento da barra na configuração inicial e $\mathbb{E}$ é o módulo de elasticidade do material.

Para a determinação do vetor de forças internas do elemento finito linear, torna-se necessário calcular a primeira derivada da energia de deformação em relação aos parâmetros nodais, por meio da Equação 3.69, ou de forma expandida pela Equação 3.70.

$$\frac{\partial\overline{U_e}}{\partial\overline{y_i^j}} = \frac{\partial\overline{E}}{\partial\overline{l_f}}\frac{\partial\overline{l_f}}{\partial\overline{y_i^j}} \tag{3.69}$$

$$\frac{\partial\overline{U_e}}{\partial\overline{y_i^j}} = \frac{\partial}{\partial\overline{y_i^j}}\left(\frac{\mathbb{E}\overline{E}^2\mathcal{A}_0\overline{l_0}}{2}\right) = \mathbb{E}\overline{E}\mathcal{A}_0\overline{l_0}\frac{\partial\overline{E}}{\partial\overline{y_i^j}} \tag{3.70}$$

Para a determinação da matriz Hessiana da barra, calcula-se a segunda derivada da energia de deformação em relação aos parâmetros nodais do elemento finito, conforme Equação 3.71. Os termos i e p referem-se aos nós (variam de 1 a 2) enquanto j e m referem-se às direções, também com variação de 1 a 2.

$$\overline{H_{ijpm}} = \frac{\partial^2\overline{U_e}}{\partial\overline{y_i^j}\partial\overline{y_p^m}} = \frac{\partial}{\partial\overline{y_i^j}}\left(\mathbb{E}\overline{E}\mathcal{A}_0\overline{l_0}\frac{\partial\overline{E}}{\partial\overline{y_i^j}}\right) = \mathbb{E}\mathcal{A}_0\overline{l_0}\left(\frac{\partial\overline{E}}{\partial\overline{y_i^j}}\frac{\partial\overline{E}}{\partial\overline{y_p^m}} + \mathbb{E}\frac{\partial^2\overline{E}}{\partial\overline{y_i^j}\partial\overline{y_p^m}}\right) \tag{3.71}$$

Para o cálculo dos termos associados à primeira e à segunda derivada da deformação de Green, utilizam-se as Equações 3.72 e 3.73, respectivamente.

$$\frac{\partial\overline{E}}{\partial\overline{y_i^j}} = \frac{(-1)^j}{\overline{l_0}^2}\left(\overline{y_2^j} - \overline{y_1^j}\right) \tag{3.72}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial \overline{y_i^j} \partial \overline{y_p^m}} = \frac{(-1)^i (-1)^p}{\overline{l_0}^2} \delta_{jm} \tag{3.73}$$

em que δ_{jm} é o delta de Kronecker.

3.4.5 Elementos compósitos

Até o presente momento foram apresentadas as formulações para a determinação, de modo isolado, das forças internas e da matriz Hessiana para os elementos finitos do tipo chapa (bidimensional) e linear (barra de treliça). Porém este trabalho tem como propósito simular e representar em mesoescala sólidos compósitos submetidos a solicitações cíclicas, em especial, o concreto sujeito à fadiga na compressão.

Assim, a fim de representar elementos de concreto considerando-os de modo bifásico (argamassa e agregados graúdos) ou trifásico no caso do concreto armado (matriz de argamassa, agregados graúdos e armaduras), torna-se necessário garantir a correta interação entre a matriz e os elementos que estão imersos nela, garantindo a correta aderência entre os diferentes elementos.

A metodologia numérica utilizada para garantir a correta interação entre as fibras e/ou partículas com a matriz ao qual estão imersas, foi apresentada inicialmente em Vanalli (2004), e empregada em diversos trabalhos ao longo dos últimos anos (VANALLI; PACCOLA; CODA, 2008; SAMPAIO; CODA; PACCOLA, 2011; NOGUEIRA et al., 2014; SAMPAIO, 2014; PACCOLA; CODA, 2016; FELIX, 2018; RAMOS; CARRAZEDO, 2020; FELIX et al., 2020).

A técnica tem como base o embutimento entre as diferentes malhas de elementos finitos que discretizam os distintos materiais que compõem o sistema compósito. A vantagem no emprego da formulação reside na garantia que as fibras ou partículas podem ser inseridas no domínio em qualquer posição, sem a necessidade de coincidência dos nós da chapa que discretiza a matriz, fazendo com que o número de graus de liberdade do problema não seja acrescido, sendo portanto, definido pela malha que discretiza a matriz. Essa característica torna a simulação de sólidos compósitos via técnica de embutimento de elementos rápida e eficiente.

A disposição dos elementos de fibras ou partículas pode ser feita de distintas formas, considerando a representação de sólidos compósitos contendo elementos particulados, de fibras ou com os dois, conforme apresentado na Figura 3.7.

A estratégia descrita em Vanalli (2004), Vanalli, Paccola e Coda (2008) e Paccola e Coda (2016) consiste em escrever as posições nodais dos elementos representativos das fibras ou partículas em função das posições dos nós do elemento da matriz ao qual estão imersas.

As posições nodais dos elementos de fibras e partículas, sejam nas configurações inicial ou atual, são descritos em função das posições nodais da matriz, conforme as Equações 3.74, para as posições iniciais, e 3.75, para as posições atuais. As Equações 3.74 e 3.75 têm por finalidade garantir a aderência dos nós dos elementos de fibras ou partículas à matriz.

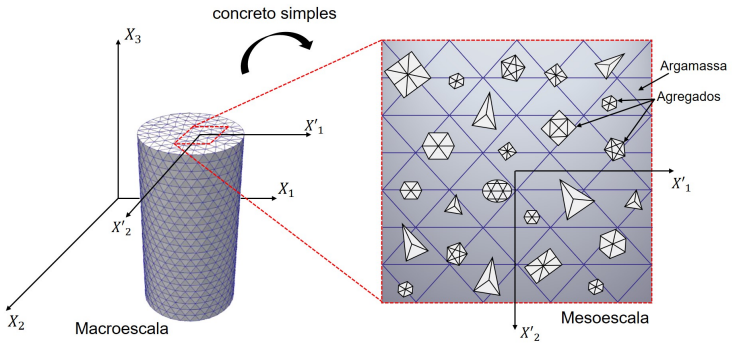
$$\overline{X}_i = \phi_j(\xi_1^p, \xi_2^p) X_i^j \ \ (\textit{para fibras}) \qquad e \qquad \widetilde{X}_i = \phi_j(\xi_1^p, \xi_2^p) X_i^j \ \ (\textit{para partículas}) \tag{3.74}$$

$$\overline{Y}_i = \phi_j(\xi_1^p, \xi_2^p) Y_i^j \ \ (para\ fibras) \qquad e \qquad \widetilde{Y}_i = \phi_j(\xi_1^p, \xi_2^p) Y_i^j \ \ (para\ partículas) \tag{3.75}$$

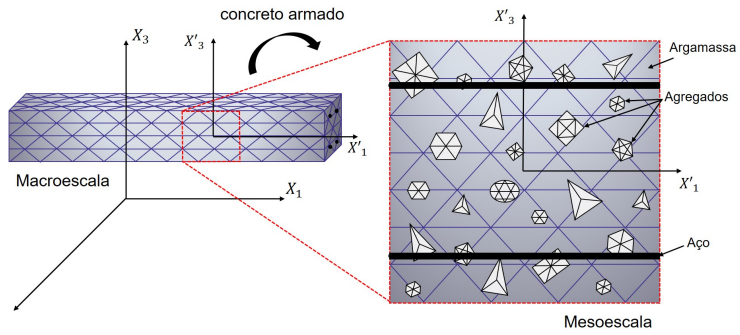
em que ϕ_j são as funções de forma do elemento finito da matriz calculadas para as coordenadas adimensionais ξ_i^p do nó p dos elementos de fibra ou partícula, $\widetilde{X}_i^j$ e $\widetilde{Y}_i^j$ são as posições nodais (inicial e atual) da partícula, $\overline{X}_i$ e $\overline{Y}_i$ são as posições nodais do elemento de fibra e X_i^j e Y_i^j são as posições nodais da matriz. Neste trabalho adotou-se que, para os parâmetros referentes aos elementos de fibras, usa-se o símbolo $(\overline{\bullet})$ e, para as partículas $(\widetilde{\bullet})$.

Figura 3.7 – Representação em mesoescala de elementos compósitos.

(a) Corpo de prova de concreto simples.



(b) Viga de concreto armado.



Fonte: Própria autoria.

Sampaio (2014) descreve que é possível considerar qualquer quantidade de fibras dispersas no domínio sem que haja acréscimo do número de graus de liberdade do problema, e que a condição de aderência entre a matriz e as fibras permanece garantida. O mesmo vale para os elementos de partículas, conforme demonstrado em Paccola e Coda (2016). Na sequência apresenta-se como determinar a energia de deformação armazenada em elementos compósitos e, consequentemente, as forças internas desses sistemas.

De modo geral, a energia de deformação interna de um sólido compósito contendo fibras e/ou partículas é determinada pela soma das energias armazenadas em cada um dos elementos que compõe o sistema, conforme Equação 3.76.

$$U_e^{total} = U_e + \widetilde{U_e} + \overline{U_e} \tag{3.76}$$

em que U_e é a energia de deformação armazenada no elemento da matriz, $\overline{U_e}$ é a energia armazenada nos elementos de fibra e $\widetilde{U_e}$ é a energia de deformação armazenada nas partículas.

Diante das Equações 3.74-3.75, a força interna no elemento representativo da matriz composto de fibras e/ou partículas é obtida por meio da Equação 3.77. A energia de deformação pode ser calculada usando a Equação 3.78. Note que, na Equação 3.78, as energias específicas de deformação das fibras partículas são dadas em função da posição nodal da matriz.

$$\left(F_i^{j^{int}}\right)^{total} = \frac{\partial U_e^{total}}{\partial y_i^j} = \frac{\partial\left(U_e + \widetilde{U_e} + \overline{U_e}\right)}{\partial y_i^j} \tag{3.77}$$

$$U_e^{total} = \int_{V_0} u_e dV_0 + \int_{\widetilde{V_0}} \widetilde{u_e}(\widetilde{y_j}(y_i))d\widetilde{V_0} + \int_{\overline{V_0}} \overline{u_e}(\overline{y_j}(y_i))d\overline{V_0} \tag{3.78}$$

Substituindo a Equação 3.78 na Equação 3.77, obtém-se finalmente a força interna da matriz (Equação 3.79) considerando a inserção de fibras e partículas em seu domínio.

$$\left(F_i^{j^{int}}\right)^{total} = \frac{\partial U_e^{total}}{\partial y_i^j} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial y_i^j} dV_0 + \int_{\widetilde{V_0}} \frac{\partial \widetilde{u_e}}{\partial y_i^j}(\widetilde{y_j}(y_i))d\widetilde{V_0} + \int_{\overline{V_0}} \frac{\partial \overline{u_e}}{\partial y_i^j}(\overline{y_j}(y_i))d\overline{V_0} \tag{3.79}$$

A primeira derivada da energia de deformação dos elementos representativos das fibras e partículas em relação às posições nodais do elemento da matriz é obtida utilizando a regra da cadeia (Equação 3.80).

$$\frac{\partial \overline{u_e}}{\partial y_i^j} = \frac{\partial \overline{u_e}}{\partial \overline{y_k^p}} \frac{\partial \overline{y_k^p}}{\partial y_i^j} \ (para\ fibras) \qquad e \qquad \frac{\partial \widetilde{u_e}}{\partial y_i^j} = \frac{\partial \widetilde{u_e}}{\partial \widetilde{y_k^p}} \frac{\partial \widetilde{y_k^p}}{\partial y_i^j} \ (para\ \text{partículas}) \tag{3.80}$$

O termo referente à derivada das posições nodais dos elementos de fibras ou partículas, em relação às posições nodais da matriz, é dado por meio da Equação 3.81, exceto quando $i \neq k$, que resulta em 0.

$$\frac{\partial \overline{y}_k^p}{\partial y_i^j} = \phi_j(\xi_1^p, \xi_2^p) \ (para\ fibras) \qquad e \qquad \frac{\partial \widetilde{y}_k^p}{\partial y_i^j} = \phi_j(\xi_1^p, \xi_2^p) \ (para\ \text{partículas}) \tag{3.81}$$

em que i e j são a direção e a incidência, respectivamente, do nó de um elemento da matriz, e k e p são a direção e a incidência de um elemento imerso na matriz.

Determinada a força interna, pode-se realizar o cálculo da matriz Hessiana, que é definida como a segunda derivada da energia de deformação em relação às posições nodais, ou seja, a primeira derivada das forças internas em relação às posições nodais. Assim, para um sólido contendo em sua matriz elementos de fibras e partículas, deve-se derivar a Equação 3.79 em relação às posições nodais da matriz, obtendo a Equação 3.82.

$$H_{ijkl} = \frac{\partial^2 U_e^{total}}{\partial y_i^j \partial y_k^l} = \int_{V_0} \frac{\partial^2 U_e}{\partial y_i^j \partial y_k^l} dV_0 + \int_{\overline{V_0}} \frac{\partial^2 \overline{U_e}}{\partial y_i^j \partial y_k^l}(\overline{y_i}(y_k))d\overline{V_0} + \int_{\widetilde{V_0}} \frac{\partial^2 \widetilde{U_e}}{\partial y_i^j \partial y_k^l}(\widetilde{y_i}(y_k))d\widetilde{V_0} \tag{3.82}$$

O primeiro termo da segunda igualdade da Equação 3.82 refere-se à Hessiana de um elemento da matriz onde estão imersos os elementos de fibras e/ou de partículas, já descrito na Equação 3.61. Já a segunda derivada da energia de deformação das fibras ou partículas, em

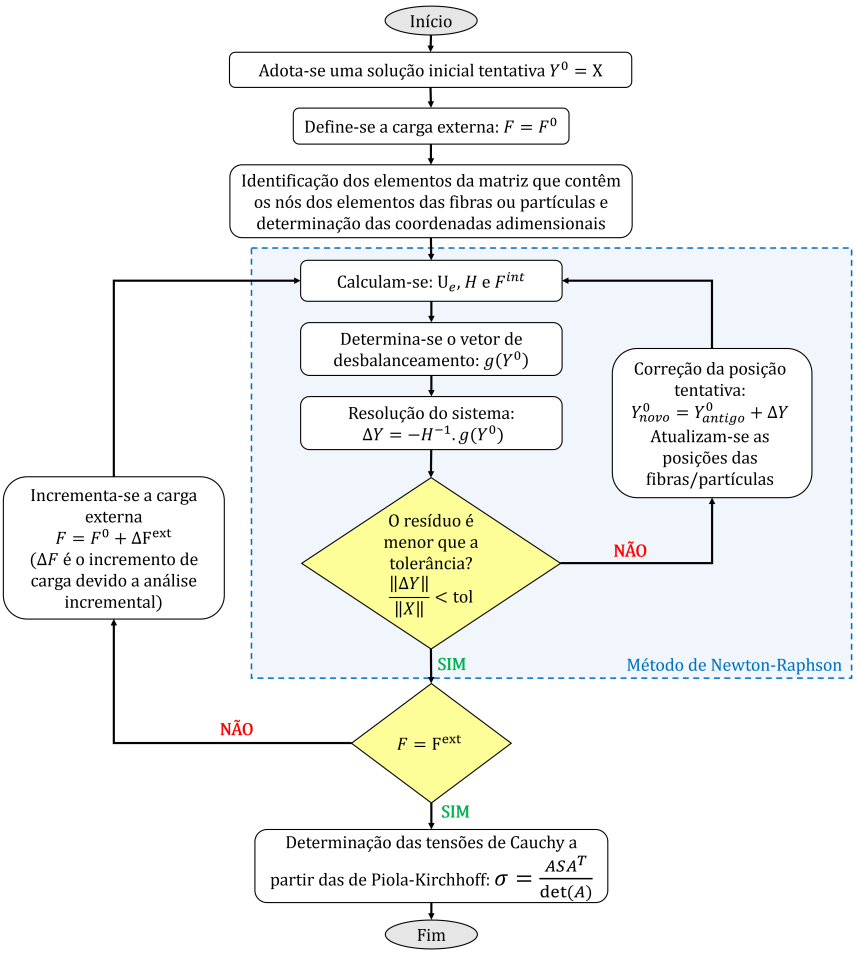
relação aos parâmetros nodais da matriz, pode ser expandida conforme Equações 3.83 e 3.84.

$$\frac{\partial^2 \overline{U_e}}{\partial y_i^j \partial y_k^l} = \frac{\partial^2 \overline{U_e}}{\partial \bar{y}_\omega^\rho \partial \bar{y}_\omega^\rho} \frac{\partial \bar{y}_\omega^\rho}{\partial y_i^j} \frac{\partial \bar{y}_\omega^\rho}{\partial y_k^l} + \frac{\partial^2 \overline{U_e}}{\partial \bar{y}_\omega^\rho \partial \bar{y}_\pi^\eta} \frac{\partial \bar{y}_\omega^\rho}{\partial y_i^j} \frac{\partial \bar{y}_\pi^\eta}{\partial y_k^l} + \\ + \frac{\partial^2 \overline{U_e}}{\partial \bar{y}_\pi^\eta \partial \bar{y}_\omega^\rho} \frac{\partial \bar{y}_\pi^\eta}{\partial y_i^j} \frac{\partial \bar{y}_\omega^\rho}{\partial y_k^l} + \frac{\partial^2 \overline{U_e}}{\partial \bar{y}_\pi^\eta \partial \bar{y}_\pi^\eta} \frac{\partial \bar{y}_\pi^\eta}{\partial y_i^j} \frac{\partial \bar{y}_\pi^\eta}{\partial y_k^l} \tag{3.83}$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{U_e}}{\partial y_i^j \partial y_k^l} = \frac{\partial^2 \widetilde{U_e}}{\partial \tilde{y}_\omega^\rho \partial \tilde{y}_\omega^\rho} \frac{\partial \tilde{y}_\omega^\rho}{\partial y_i^j} \frac{\partial \tilde{y}_\omega^\rho}{\partial y_k^l} + \frac{\partial^2 \widetilde{U_e}}{\partial \tilde{y}_\omega^\rho \partial \tilde{y}_\pi^\eta} \frac{\partial \tilde{y}_\omega^\rho}{\partial y_i^j} \frac{\partial \tilde{y}_\pi^\eta}{\partial y_k^l} + \\ + \frac{\partial^2 \widetilde{U_e}}{\partial \tilde{y}_\pi^\eta \partial \tilde{y}_\omega^\rho} \frac{\partial \tilde{y}_\pi^\eta}{\partial y_i^j} \frac{\partial \tilde{y}_\omega^\rho}{\partial y_k^l} + \frac{\partial^2 \widetilde{U_e}}{\partial \tilde{y}_\pi^\eta \partial \tilde{y}_\pi^\eta} \frac{\partial \tilde{y}_\pi^\eta}{\partial y_i^j} \frac{\partial \tilde{y}_\pi^\eta}{\partial y_k^l} \tag{3.84}$$

Na Figura 3.8 é apresentado um fluxograma que resume os processos necessários para a implementação do código de simulação de compósitos, constituídos por elementos de fibras ou partículas, via MEFP. Maiores detalhes acerca das formulações empregadas e à técnica de embutimento, recomenda-se a leitura dos trabalhos de Sampaio (2014) e Paccola e Coda (2016).

Figura 3.8 – Fluxograma do código de análise de compósitos via MEFP.



Fonte: Própria autoria.

3.5 Exemplos numéricos

A fim de validar os códigos implementados e demonstrar suas potencialidades, na sequência são apresentados quatro exemplos numéricos. Os exemplos foram selecionados de modo a comprovar a eficácia do código, abordando cada uma das etapas e implementações realizadas.

Dessa forma, o primeiro exemplo tem como propósito validar a capacidade do código em simular o comportamento geométrico não linear, uma propriedade intrínseca à formulação do MEFP. Para tal, modelou-se bidimensionalmente um pilar esbelto com aplicação de carga excêntrica. Os resultados obtidos são comparados com a literatura a fim de evidenciar o nível de acuracidade obtido na simulação.

O segundo exemplo tem como objetivo analisar uma viga de concreto reforçada com aço, engastada e com carregamento uniformemente distribuído. O reforço é simulado utilizando elementos de fibra, discretizados pelo elemento finito de treliça. A matriz de concreto é simulada por uma única fase, utilizando elementos finitos de chapa. A partir da análise dos resultados, confrontando-os com os dados presentes na literatura, procura-se demonstrar a validade da formulação aplicada a meios compósitos.

O terceiro exemplo tem como objetivo demonstrar a potencialidade do código na representação do concreto em mesoescala, modelando-o por duas fases (argamassa e agregado graúdo). No exemplo são avaliados diversos modos de distribuição dos agregados na matriz de argamassa. No quarto exemplo, uma viga de concreto armado é simulada, considerando-a como um sistema trifásico, onde elementos de partículas são usados para representar os agregados e a matriz de argamassa, e a armadura longitudinal é representada por elementos de fibra. Estes dois últimos exemplos demonstram a potencialidade do código na análise estática de sólidos bidimensionais enrijecidos.

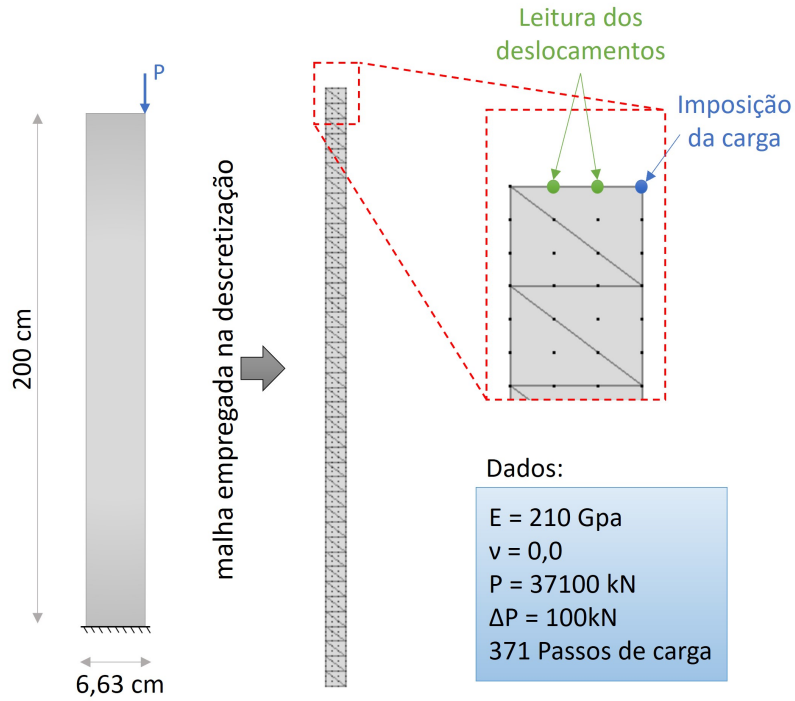
3.5.1 Pilar excêntrico - Não linearidade geométrica com material homogêneo

Neste primeiro exemplo avalia-se um dos problemas clássicos da análise não linear geométrica, um pilar com base engastada sob carregamento excêntrico (Figura 3.9). Este problema foi originalmente avaliado por Fumio (1983), e posteriormente em Marques (2006) e Ramos (2020). Este exemplo também é conhecido como linha elástica de Euler e foi escolhido para verificar a aplicabilidade das formulações em problemas que envolvem grandes deslocamentos.

Para a simulação, o pilar foi discretizado por uma malha estruturada com 80 elementos finitos, sendo aplicados 371 passos de cargas de 100 kN. Tanto o número de elementos finitos quanto o número de passos de carga foram tomados como sendo iguais aos adotados nas simulações em Marques (2006). As propriedades geométricas do pilar são: altura de 200 cm, base de $6,63$ cm, e espessura unitária. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson são dados, respectivamente, por $E = 210$ GPa e $\upsilon = 0$. Os detalhes da geometria e os pontos de mensuração dos deslocamentos podem ser observados na Figura 3.9. Destaca-se que Marques

(2006) e Ramos (2020) também utilizaram o MEFP, e simularam o pilar com elementos finitos triangulares com ordem de aproximação cúbica.

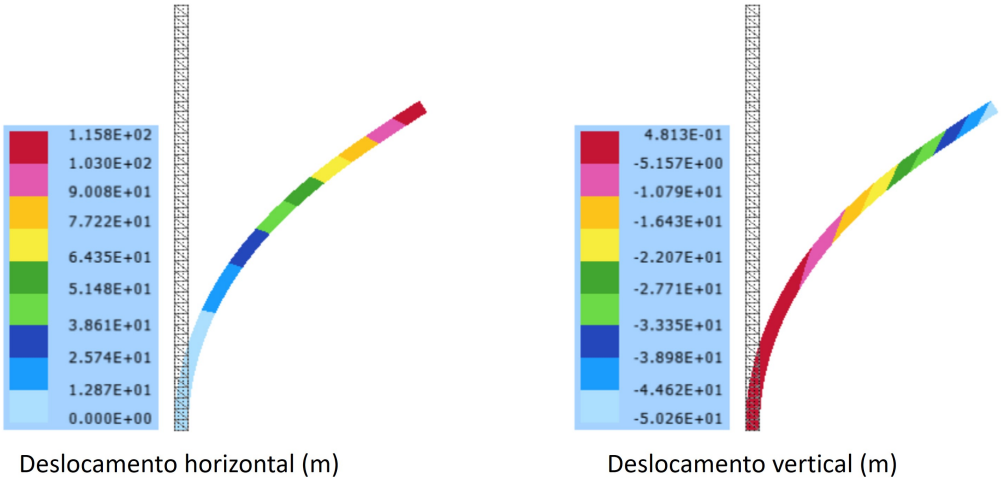
Figura 3.9 – Propriedades geométricas e malha do pilar.



Fonte: Própria autoria.

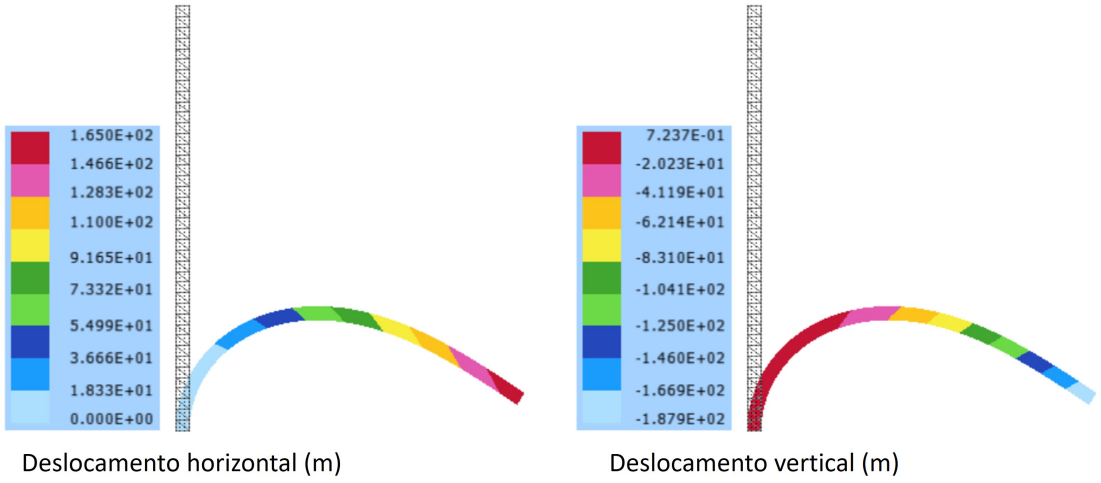
A configuração deformada da estrutura referente aos passos 35, 63 e 371, é apresentada nas Figuras 3.10, 3.11 e 3.12, respectivamente. Os deslocamentos horizontais e verticais do pilar são indicados por meio de esquemas de cores.

Figura 3.10 – Configuração deformada do pilar no passo F = 3500 kN.



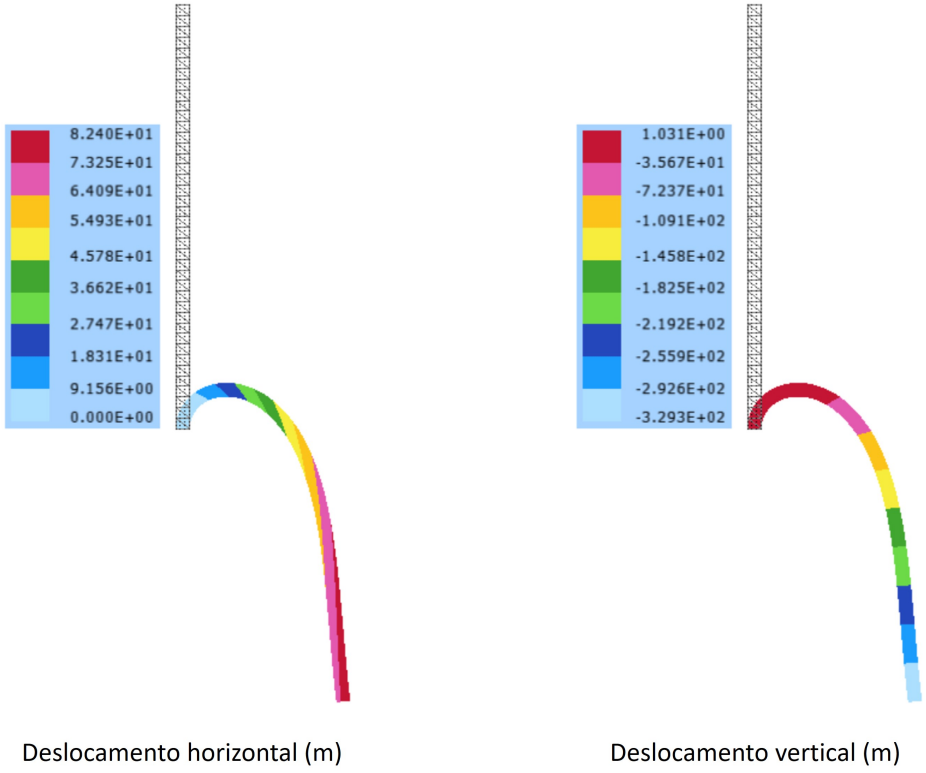
Fonte: Própria autoria.

Figura 3.11 – Configuração deformada do pilar no passo F = 6300 kN.



Fonte: Própria autoria.

Figura 3.12 – Configuração deformada do pilar no passo F = 37100 kN.

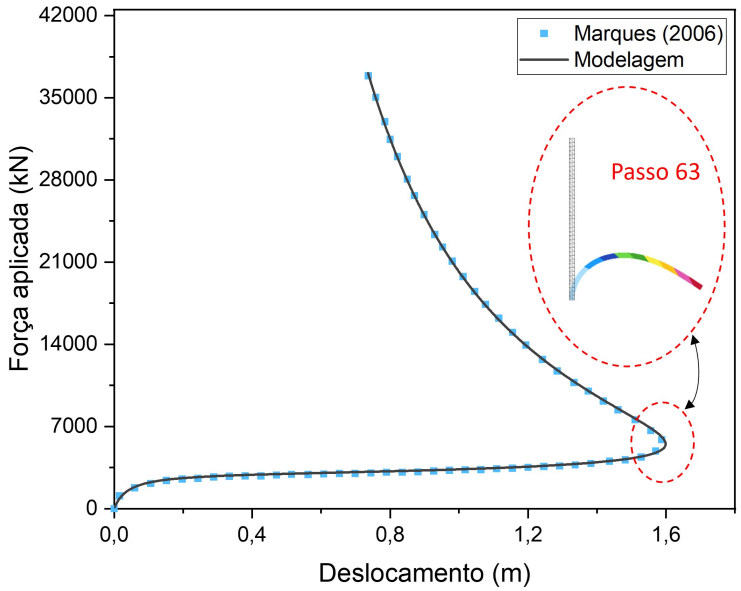


Fonte: Própria autoria.

A fim de avaliar o nível de acuracidade obtido na simulação, os deslocamentos horizontais da extremidade livre do pilar foram confrontados com os resultados obtidos na simulação de Marques (2006). O deslocamento horizontal foi aferido para todos os passos de cargas, gerando a curva deslocamento versus força aplicada (3.13), ou trajetória de equilíbrio. Comenta-se que na Figura 3.13 é apresentado o momento em que ocorre o *snap-back*, ou ponto de salto dinâmico

em análises sob controle de deslocamento.

Figura 3.13 – Desclocamento horizontal da extremidade livre do pilar em função da carga.



Fonte: Própria autoria.

Avaliando a Figura 3.13 pode-se observar que os resultados obtidos são idênticos aos observados em Marques (2006), sendo observada uma diferença percentual média de $0,08\%$, o que demonstra a correta implementação do código, e que o mesmo está apto a representar coerentemente a não linearidade geométrica de sólidos homogêneos. Verificada a consistência dos resultados, no próximo exemplo é avaliada a capacidade do código em representar o comportamento não linear geométrico de sólidos compósitos.

3.5.2 *Viga reforçada - Não linearidade geométrica com material heterogêneo*

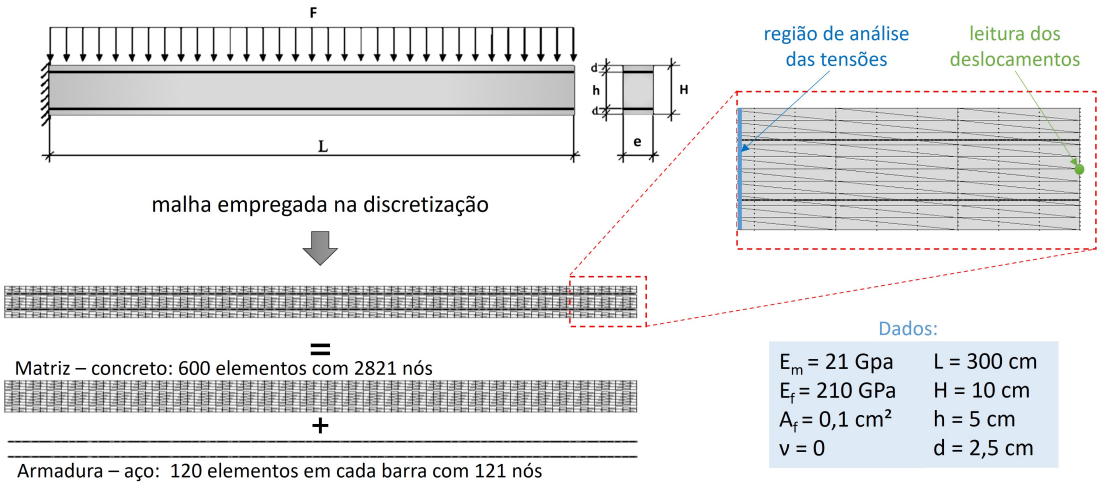
Neste exemplo, uma viga engastada sob carregamento distribuído (Figura 3.14) foi simulada para avaliar se o acoplamento fibra-matriz está funcionando adequadamente para análises sob pequenos e grandes deslocamentos. Este problema foi previamente avaliado por Sampaio (2014), sendo recentemente analisado por Ramos (2020).

As propriedades geométricas adotadas para a viga são: $L = 300$ cm, $H = 10$ cm, $d = 2,5$ cm, $h = 5$ cm e espessura unitária. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson da matriz são dados, respectivamente, por $E_m = 21$ GPa e $\upsilon_m = 0$. Para as fibras, o módulo de elasticidade e a área transversal são, respectivamente, $E_f = 210$ GPa e $A_f = 0,1$ cm².

A viga foi simulada considerando os regimes linear e não linear geométrico, para a viga com e sem armaduras. Para o caso linear o carregamento transversal aplicado é $F = 5$ N/cm e para o caso não linear aplicou-se $F = 50$ N/cm. Para a análise e validação dos resultados em pequenos deslocamentos utilizam-se as expressões analíticas da Resistência dos Materiais. Já os resultados em grandes deslocamentos são comparados com resultados de referência obtidos com

uma formulação denominada barra geral 3D que utiliza a cinemática de Timoshenko-Reissner apresentada por Coda e Paccola (2010) e Coda e Paccola (2011).

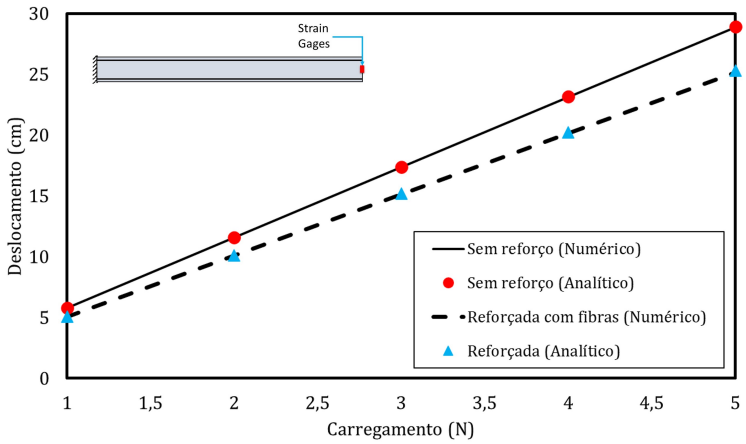
Figura 3.14 – Propriedades geométricas e malha da viga.



Fonte: Própria autoria.

Para a representação do problema, a matriz foi discretizada em 600 elementos finitos triangulares, totalizando 2.821 nós e 5.642 graus de liberdade. Para a representação de cada uma das fibras foram adotados 120 elementos finitos de barra simples. Para a formulação em barra geral 3D foram utilizados 10 elementos com aproximação do quinto grau para as variáveis. A análise não linear foi realizada em 50 passos de carga.

Figura 3.15 – Deslocamento vertical da extremidade livre (análise linear).

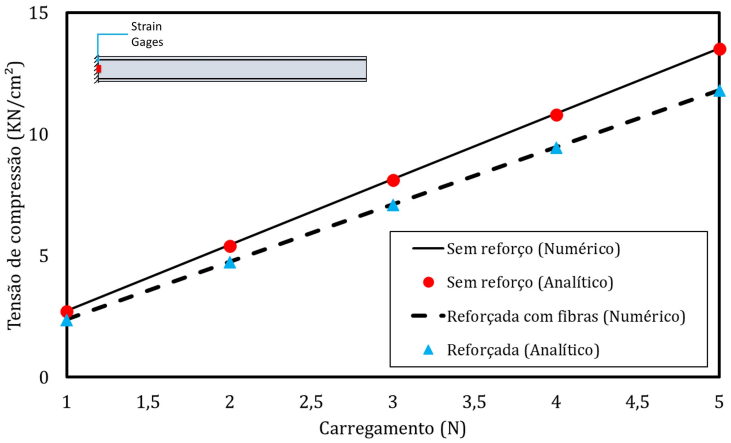


Fonte: Própria autoria.

A Figura 3.15 apresenta os deslocamentos obtidos para as vigas com e sem fibras. A Figura 3.16 apresenta as tensões máximas de tração e compressão na extremidade engastada das vigas com e sem armaduras. Ambas as Figuras, 3.15 e 3.16, apresentam os resultados obtidos

pelo código desenvolvido e de cálculos empregando os princípios da Resistência dos Materiais, considerando a análise linear das estruturas.

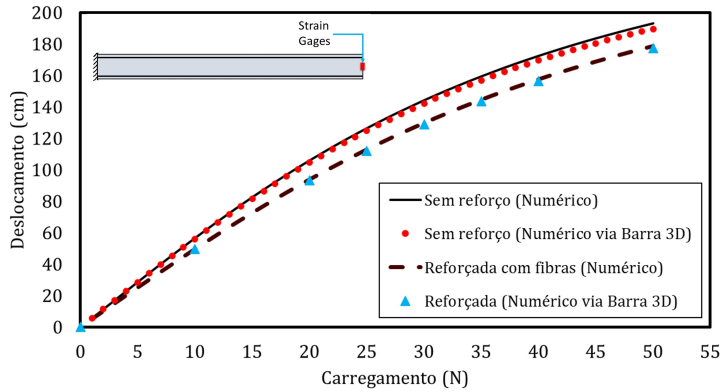
Figura 3.16 – Tensão de compressão na extremidade engastada (análise linear).



Fonte: Própria autoria.

Na Figura 3.17 são apresentados os deslocamentos obtidos na análise não linear para as vigas com e sem fibras. Os resultados são comparados aos obtidos por meio da formulação de barra geral 3D.

Figura 3.17 – Deslocamento vertical da extremidade livre (análise não linear).



Fonte: Própria autoria.

Na análise não linear sem fibras, o deslocamento máximo na extremidade livre da barra, obtida com a presente formulação, foi $193,10$ cm, enquanto que, pela formulação de barra geral 3D, foi de $189,20$ cm, havendo uma diferença percentual de $2,06$ % entre as duas modelagens. Sampaio (2014) analisou este mesmo exemplo, usando o MEFP e elementos de chapa reforçados com elementos de fibras, obtendo um deslocamento de $193,05$ cm, o que representa um desvio de $0,12$ % em relação os resultados obtidos com o código desenvolvido.

Na análise não linear com fibras, a flecha máxima no nó central da extremidade livre da viga foi de $178,74$ cm, enquanto a flecha obtida pela formulação de barra 3D foi de $177,32$ cm,

resultando em uma diferença percentual de $0,80$ % entre as soluções.

Por meio da Figura 3.17, considerando os resultados obtidos para ambos os casos (com e sem fibras), observou-se que a estrutura se mostrou mais flexível com a formulação implementada do que com o modelo de barra geral 3D, o que comprova que o modelo de chapa proporciona maior liberdade ao contínuo modelado, conforme discutido em Sampaio (2014).

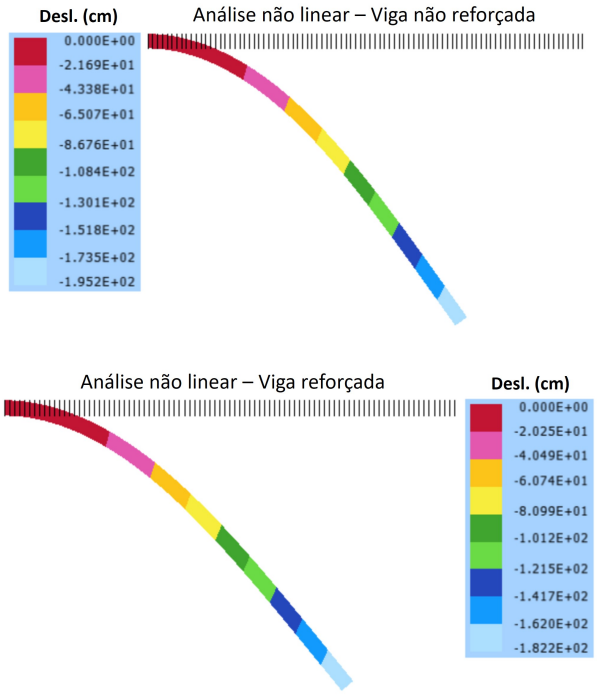
Por fim, na Tabela 3.1 são apresentados os resultados obtidos nos diferentes casos analisados, e na Figura 3.18 apresentam-se as configurações deformadas para o último passo de carga, das vigas modeladas com e sem reforço, considerando a análise não linear geométrica.

Tabela 3.1 – Comparação entre os deslocamento máximos (cm).

Discretização	**Tipo de análise**			
	Linear		**Não linear**	
	Presente formulação	**Resistência dos Materiais**	**Presente formulação**	**Barra geral 3D**
Sem fibras	28,88	28,92	193,1	189,2
Desvio médio (%)	**0,138**		**2,061**	
Com fibras	25,12	25,28	178,74	177,32
Desvio médio (%)	**0,633**		**0,801**	

Fonte: Própria autoria.

Figura 3.18 – Configuração deformada das vigas na análise não linear geométrica.



Fonte: Própria autoria.

Os resultados obtidos por meio dos códigos desenvolvidos apresentam pequenas diferenças nos resultados comparados com as soluções analíticas e as numéricas, obtidas por meio

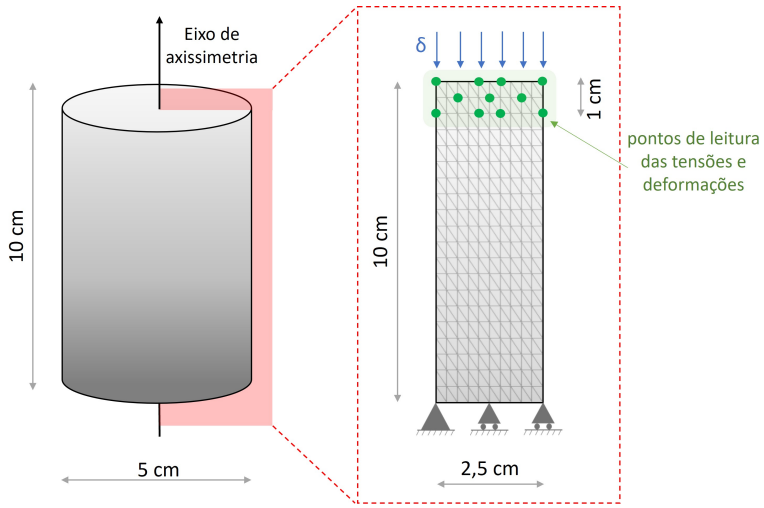
de elementos de barra geral 3D, o que demonstra a aplicabilidade do código para a análise não linear geométrica de sólidos compósitos.

3.5.3 *Módulo de elasticidade - Distribuição dos elementos de partículas*

Este exemplo possui o propósito de avaliar a capacidade do código em representar o comportamento mecânico do concreto, modelando-o como um sistema bifásico (matriz de argamassa + agregados graúdos). Este exemplo foi inicialmente investigado em Felix (2018) e depois em Ramos (2020). Como contribuição, neste trabalho foram investigadas diferentes formas de distribuir os elementos de partículas sobre o elemento de chapa, que representa a matriz de argamassa, a fim de avaliar a influência do tamanho das partículas e a configuração de dispersão das partículas no domínio.

Para tal, foram conduzidas diferentes simulações numéricas do ensaio de compressão estática de corpos de prova cilíndricos (5 x 10 cm), de concretos com classes de resistências C30, C50 e C70. Os valores dos módulos de elasticidade do compósito são comparados com os valores observados experimentalmente. Detalhes sobre os ensaios e o resultados obtidos na campanha experimental podem ser visualizados no *Capítulo* 5.

Figura 3.19 – Propriedades geométricas do corpo de prova e malha da matriz.



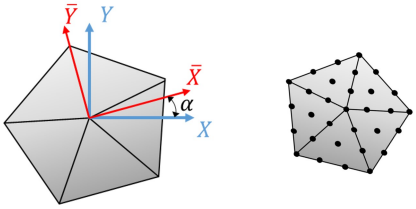
Fonte: Própria autoria.

A simulação numérica foi realizada considerando que os corpos de prova são axissimétricos, com cargas simétricas em relação ao eixo de revolução, conforme indicado na Figura 3.19. Assim, na simulação a matriz de argamassa foi representada por uma chapa retangular com dimensões $B = 2,5$ cm e $L = 10$ cm, e discretizada, de modo estruturado, por 800 elementos triangulares com ordem de aproximação cúbica, totalizando 3721 nós. O nível de refinamento da malha foi definido em função da dimensão máxima do agregado graúdo de origem basáltica, imerso no concreto (brita 0, com $d_{max} = 9,5mm$), e que será representado por elementos de partícula. Na Figura 3.19 é apresentada a malha da matriz, as condições de contorno da simulação

e os pontos onde foram aferidas as tensões e deformações. A simulação foi conduzida por meio do controle de deslocamento, considerando 10 passos, com $\delta = 0,01$ cm.

Para a representação dos agregados dispersos na matriz, elementos de partículas foram criados e dispersos aleatoriamente sobre a mesma. A fim de facilitar a criação da malha dos elementos particulados, desenvolveu-se um código para a geração de partículas, que se embasou em um desenvolvido e cedido para uso, pelo professor Rodrigo Ribeiro Paccola, professor no departamento de Estruturas da EESC/USP. Para a geração das partículas, foi considerada a aleatoriedade da sua configuração inicial. Para isso foi criado um elemento de partícula discretizado por meio de 5 elementos finitos triangulares com aproximação cúbica, contendo 31 nós e 62 graus de liberdade (Figura 3.20).

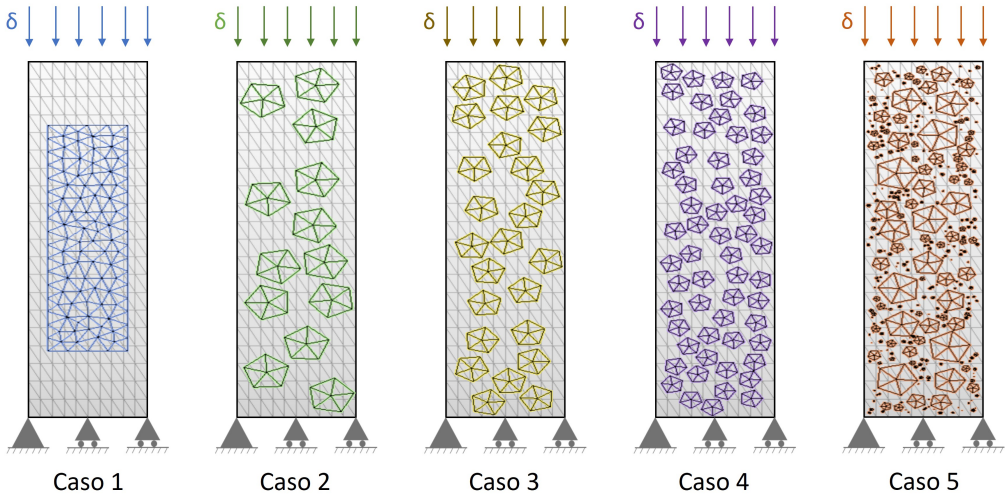
Figura 3.20 – Elementos de partícula para representação de agregados.



Fonte: Própria autoria.

A partir do elemento de partícula (Figura 3.20), gerou-se os elementos de representação dos agregados com posições e rotações arbitrárias, evitando a sobreposição dos elementos na matriz. Para avaliar a influência das dimensões e distribuição dos elementos de partícula no enrijecimento da matriz, cinco distintas configurações foram analisadas. A Figura 3.21 apresenta as configurações definidas para representar o concreto como um sistema bifásico.

Figura 3.21 – Distribuição das partículas na matriz.



Fonte: Própria autoria.

De acordo com a Figura 3.21, para o caso 1, um grande elemento de enrijecimento foi

empregado para descrever toda a fração volumétrica de agregado graúdo. Apenas para este caso uma malha não estruturada de elementos triangulares com ordem de aproximação cúbica, foi empregada. Para os casos 2 a 4, elementos de uma só dimensão, dispersos na matriz, foram utilizados na representação dos agregados. As dimensões que configuram os lados dos elementos de partícula dos casos 2, 3 e 4 são respectivamente de $6,25$ mm, $3,75$ mm e $2,5$ mm. Para o caso 5, os agregados foram representados por partículas com cinco diferentes dimensões, às quais foram definidas pelas dimensões da abertura das peneiras que representam os limites da composição granulométrica do agregado graúdo utilizado na produção dos concretos, a brita 0. As dimensões utilizadas para os lados dos elementos, foram $9,5$ mm, $6,3$ mm, $4,8$ mm, $2,4$ mm e $1,2$ mm. As dimensões dos limites da curva granulométrica da brita 0 foram definidas de acordo a norma NBR 7211 (ABNT, 2009).

A Tabela 3.2 apresenta a quantidade de partículas, de elementos e nós que configuram a malha dos agregados de cada caso. Os traços dos concretos, e por consequência, o consumo dos materiais empregados na produção de cada concreto, podem ser visualizados na Tabela 5.2, no *Capítulo* 5. Por simplicidade, para simplificar a simulação, comenta-se que as proporções volumétricas da matriz e dos agregados graúdos foram definidos considerando a relação entre os pesos dos materiais que constituem cada fase, e o peso total.

Tabela 3.2 – Parâmetros da discretização dos agregados graúdos.

Classe do concreto	Distribuição	N° de partículas	N° de elementos	N° de nós
C30	**caso 1**	-	438	2044
	caso 2	16	80	496
	caso 3	61	305	1891
	caso 4	91	455	2821
	caso 5	547	2735	16957
C50 e C70	**caso 1**	-	438	2044
	caso 2	13	65	65
	caso 3	48	240	240
	caso 4	73	365	2263
	caso 5	429	2147	13299

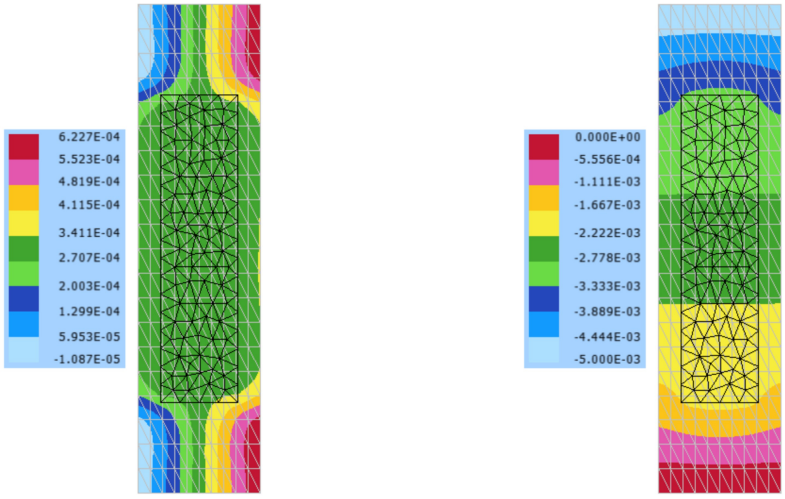
Fonte: Própria autoria.

No que se refere às propriedades dos materiais, foram adotados os seguintes valores para os agregados graúdos: módulo de elasticidade de $E_p = 65$ GPa, e coeficiente de Poisson $\nu_p = 0$. Para a matriz de argamassa do concreto C30, o módulo de elasticidade utilizado foi $E_m = 15,1$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu_m = 0,2$. Para a matriz de argamassa do concreto C50, o módulo de elasticidade utilizado foi $E_m = 17,85$ GPa, e coeficiente de Poisson $\nu_m = 0,2$. Para a matriz de argamassa do concreto C70, o módulo de elasticidade utilizado foi $E_m = 24,55$ GPa, e coeficiente de Poisson $\nu_m = 0,2$. Os valores das propriedades da matriz foram definidas por meio de ensaios experimentais. Já as propriedades dos agregados foram definidas utilizando valores descritos em Mehta e Monteiro (2014), e que se referem ao valor médio do módulo de elasticidade de rochas Basálticas.

A fim de demonstrar a correta interação/aderência entre os elementos de partículas e a chapa, nas Figuras 3.22-3.26 são apresentados os mapeamentos dos deslocamentos nas direções horizontal e vertical correspondentes ao quinto passo de carga (com deslocamento $\delta = 0,005cm$) dos cinco casos que simulam o concreto C30, e na Figura 3.27 são apresentadas as curvas tensão versus deformação para todos os casos.

Figura 3.22 – Mapeamento dos deslocamentos do concreto C30 - Simulação com caso 1.

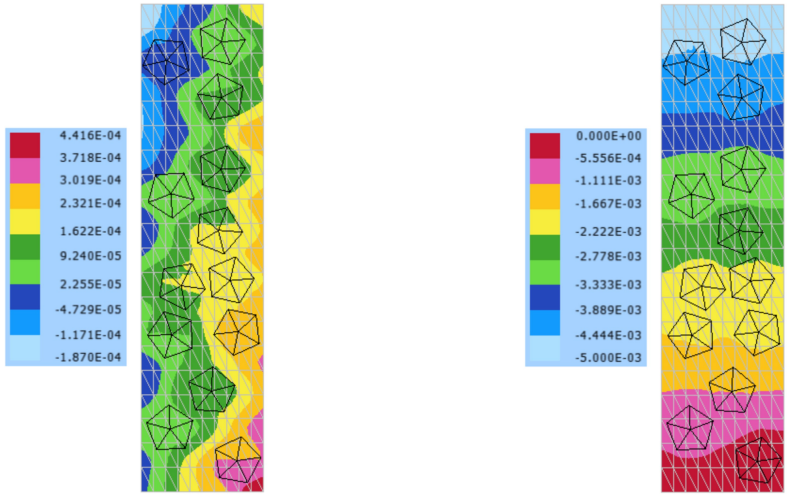
(a) Deslocamento horizontal (cm). **(b)** Deslocamento vertical (cm).



Fonte: Própria autoria.

Figura 3.23 – Mapeamento dos deslocamentos do concreto C30 - Simulação com caso 2.

(a) Deslocamento horizontal (cm). **(b)** Deslocamento vertical (cm).



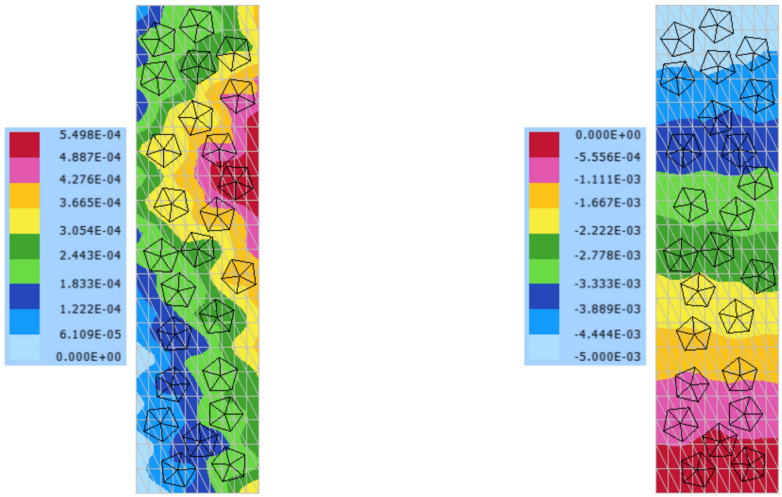
Fonte: Própria autoria.

Ao analisar os mapeamentos dos deslocamentos verticais, observa-se que, para o caso 1, existe uma alta concentração de rigidez na região em que está inserido o bloco de enrijecimento.

No caso em que elementos de partículas são dispersos aleatoriamente na matriz, e que reduz-se o tamanho dos elementos e aumenta-se a quantidade de partículas, há uma melhora na homogeneização da rigidez do compósito, fazendo com que variação dos valores de deslocamentos se torne mais suave e linear. Esta observação é um primeiro indicativo que, quanto melhor é a distribuição dos agregados, menor são as pertubações na matriz causadas pelos elementos de enrijecimento, gerando uma representação mais fiel da mesoestrutura do concreto.

Figura 3.24 – Mapeamento dos deslocamentos do concreto C30 - Simulação com caso 3.

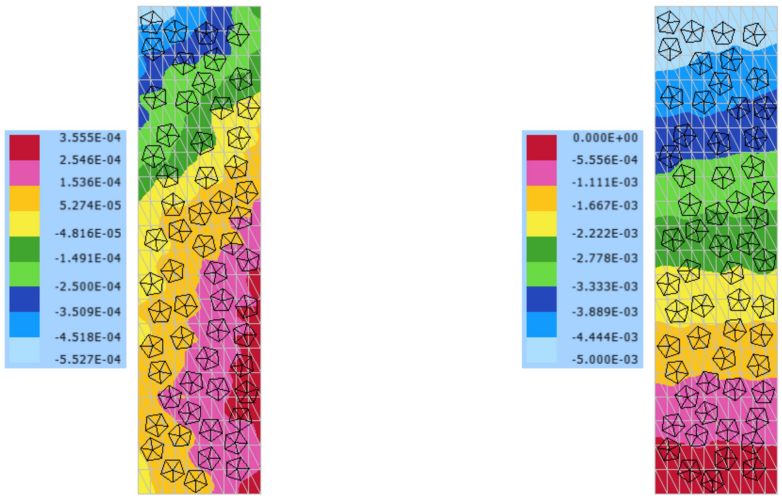
(a) Deslocamento horizontal (cm). **(b)** Deslocamento vertical (cm).



Fonte: Própria autoria.

Figura 3.25 – Mapeamento dos deslocamentos do concreto C30 - Simulação com caso 4.

(a) Deslocamento horizontal (cm). **(b)** Deslocamento vertical (cm).



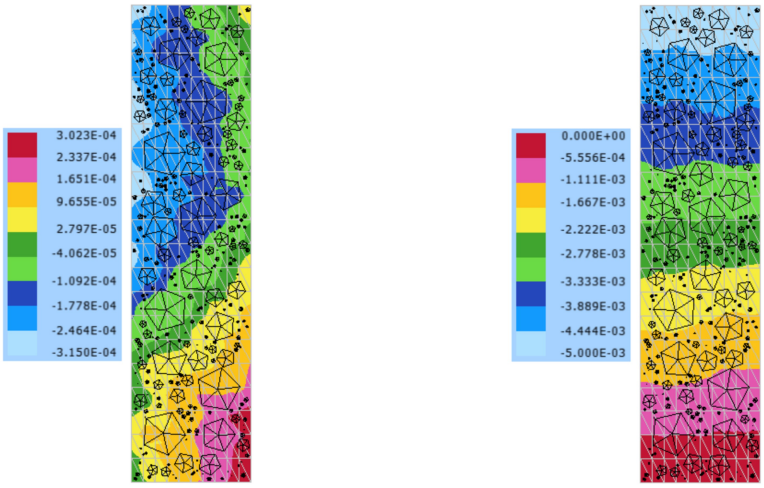
Fonte: Própria autoria.

Por meio das curvas tensão versus deformação, foram determinados os valores do módulo de elasticidade do compósito para cada uma das configurações, sendo: $E = 23,68$ GPa para o

caso 1; $E = 22,65$ GPa para o caso 2; $E = 23,50$ GPa para o caso 3; $E = 32,59$ GPa para o caso 4; $E = 36,34$ GPa para o caso 5. Sabendo que o valor médio do módulo de elasticidade observado experimentalmente foi de $E = 35,84$ GPa (Tabela 5.4), a discretização do caso 5 foi a que apresentou a melhor distribuição dos agregados para a simulação do comportamento mecânico do concreto, sendo observado uma diferença percentual de $1,39\%$.

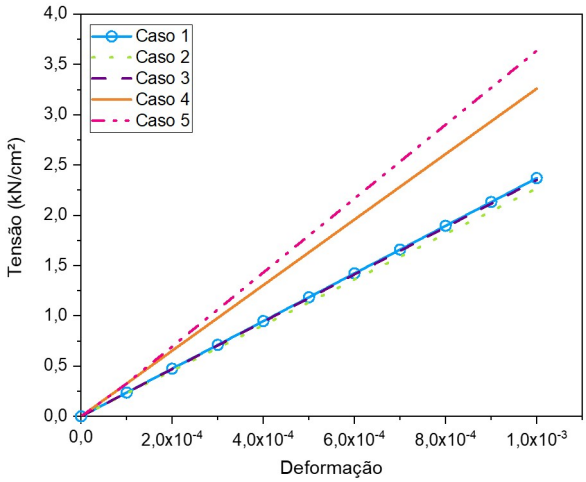
Figura 3.26 – Mapeamento dos deslocamentos do concreto C30 - Simulação com caso 5.

(a) Deslocamento horizontal (cm). **(b)** Deslocamento vertical (cm).



Fonte: Própria autoria.

Figura 3.27 – Curva tensão versus deformação vertical do concreto C30.



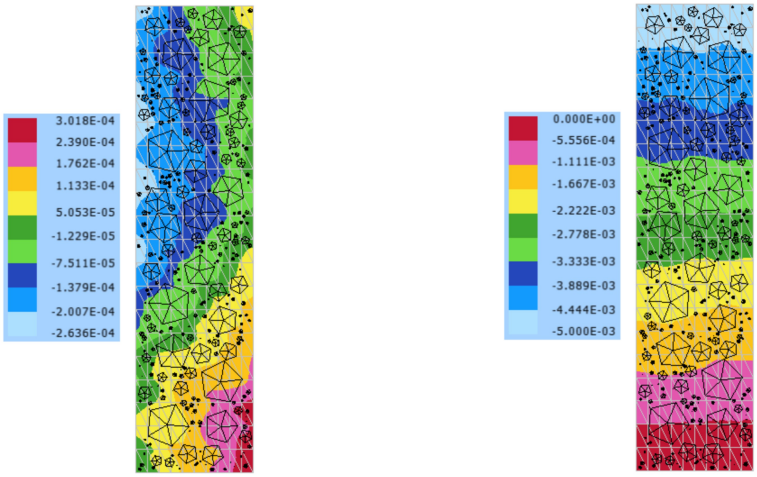
Fonte: Própria autoria.

Dando continuidade às análises, e considerando que o caso 5 apresenta a melhor representação para a simulação em mesoescala, nas Figuras 3.28 e 3.29 são apresentados os mapeamento dos deslocamentos horizontal e vertical dos concretos C50 e C70.

Os módulos de elasticidade determinados pelas curvas tensão versus deformação destes dois casos foram de $E = 37,95$ GPa para o concreto C50, e $E = 45,14$ GPa para o concreto C70. Os resultados observados experimentalmente para os concretos C50 e C70 (Tabelas 5.5 e 5.6) foram respectivamente de $E = 38,29$ GPa e $E = 46,05$ GPa. A diferença percentual observada entre os valores aferidos via simulação numérica e na campanha experimental foram de $0,88\%$ para o concreto C50 e $1,97\%$ para o C70.

Figura 3.28 – Mapeamento dos deslocamentos do concreto C50 - Simulação com caso 5.

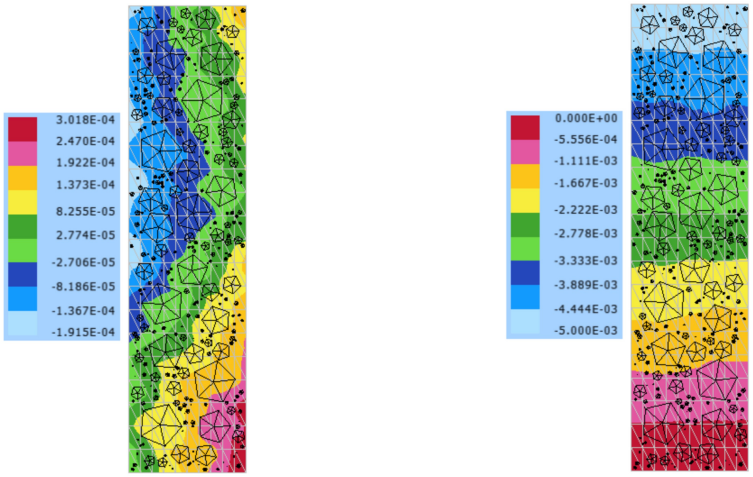
(a) Deslocamento horizontal (cm). **(b)** Deslocamento vertical (cm).



Fonte: Própria autoria.

Figura 3.29 – Mapeamento dos deslocamentos do concreto C70 - Simulação com caso 5.

(a) Deslocamento horizontal (cm). **(b)** Deslocamento vertical (cm).

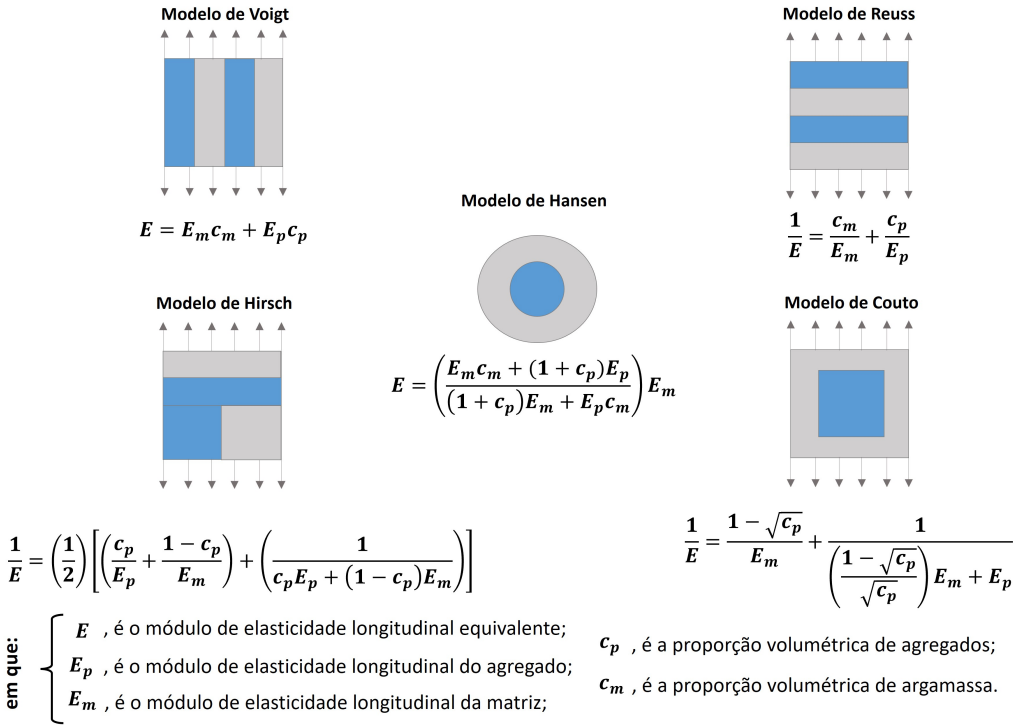


Fonte: Própria autoria.

Com o propósito de avaliar todos os resultados obtidos e demonstrar a consistência dos códigos desenvolvidos, os valores do módulo de elasticidade do concreto também foram

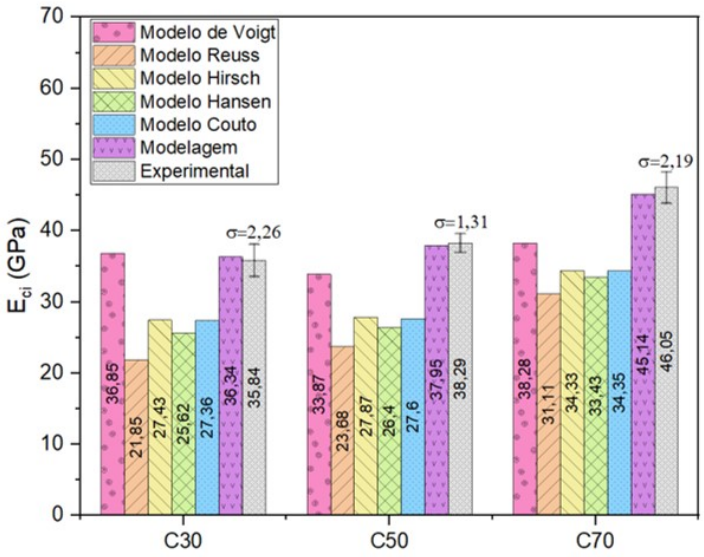
determinados pelo uso de modelos matemáticos, que se baseiam na teoria da elasticidade e na reologia de materiais compósitos (NILSEN; MONTEIRO, 1993). As formulações e suas peculiaridades são apresentadas na Figura 3.30.

Figura 3.30 – Modelos preditivos do módulo de elasticidade de materiais compósitos.



Fonte: Própria autoria.

Figura 3.31 – Comparação entre os valores do módulo de elasticidade.



Fonte: Própria autoria.

Os módulos de elasticidade obtidos experimentalmente, numericamente, e por meio dos modelos dispostos na Figura 3.30, são expostos na Figura 3.31, onde também são apresentados os desvios padrão σ, obtidos nos ensaios.

Ao analisar os resultados obtidos, observa-se que os valores do módulo de elasticidade determinados via modelagem numérica foram condizentes com os provindos dos resultados experimentais, evidenciando a aplicabilidade do código na representação de sólidos particulados, e especialmente elementos de concreto, além de se apresentar como uma ferramenta que possibilita a análise do módulo de elasticidade do material compósito.

Ademais, é possível observar que os valores obtidos numericamente apresentam melhores resultados que os obtidos pelos modelos de Reuss, Hirsch, Hansen, Couto e Voigt. Outro aspecto importante avaliado remete-se ao fato de que, ao utilizar um grande número de partículas, o resultado se aproxima do modelo de Voigt, o qual considera a homogeneização integral do corpo de prova. Porém, o modelo de Voigt só se mostra eficiente para a predição do módulo de elasticidade de concretos de baixa resistência, diferente do observado com a simulação numérica, via técnica de embutimento.

Diante dos resultados obtidos, foi possível avaliar a contribuição do reforço particulado na rigidez da matriz, permitindo inferir que a distribuição de partículas com tamanhos aleatórios representa uma alternativa para a melhor aferir as propriedades do concreto.

3.5.4 Viga de concreto armado - Modelagem trifásica

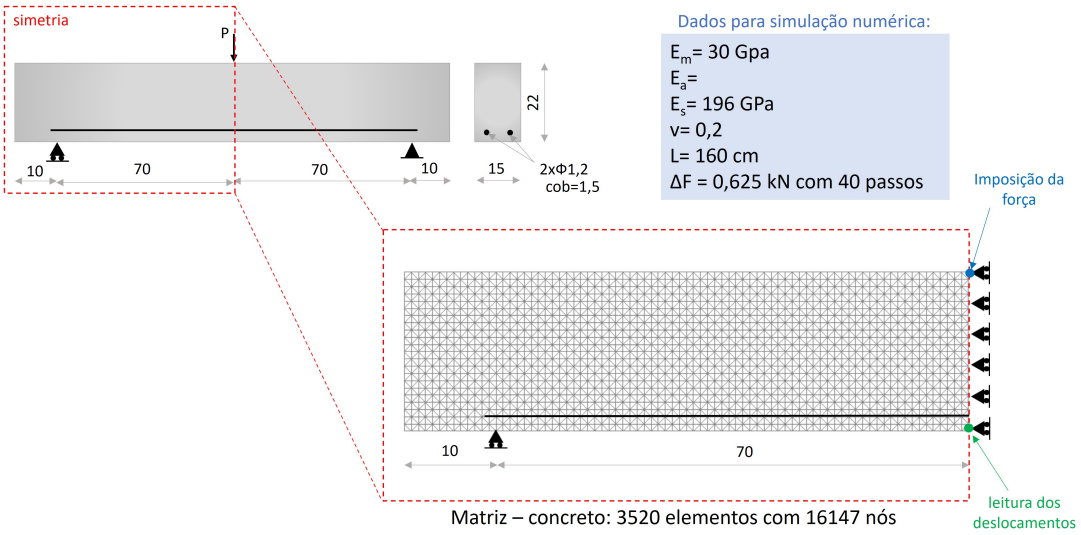
Com o propósito de avaliar a aplicabilidade do código em representar o comportamento elástico-linear de estruturas de concreto armado como um sistema trifásico sendo composto pela matriz de argamassa, com agregados graúdos e armaduras de aço, a seguir é apresentado um exemplo numérico de simulação de um ensaio de flexão em três pontos de uma viga de concreto armado. A simulação foi conduzida em viga biapoiada com carga aplicada no centro do vão, ensaiada experimentalmente por Mazars (1984). A geometria, as condições de contorno e a malha da matriz estão dispostas na Figura 3.32.

Considerando a simetria existente no problema, apenas a metade do domínio foi simulado, conforme mostra a discretização da matriz apresentada na Figura 3.32. Para a matriz de argamassa, empregou-se uma malha estruturada de elementos finitos contendo 3520 elementos triangulares com ordem de aproximação cúbica, com 16147 nós. Nesta simulação apenas a armadura longitudinal foi representada, sendo a mesma estratégia adotada em Ramos (2020). Desta forma, a armadura longitudinal foi discretizada com elementos finitos unidimensionais com aproximação linear (fibras), por meio de técnica de embutimento, com 280 elementos, totalizando 281 nós. A Figura 3.33 apresenta o esquema de discretização de cada fase do compósito.

Para demonstrar a potencialidade da técnica de embutimento empregada neste trabalho, a estrutura foi simulada considerando a dispersão aleatória de elementos particulados representativos dos agregados graúdos. Para esta modelagem os agregados são dispersos ocupando 30% do volume da matriz de argamassa, adotando uma relação entre os respectivos módulos de

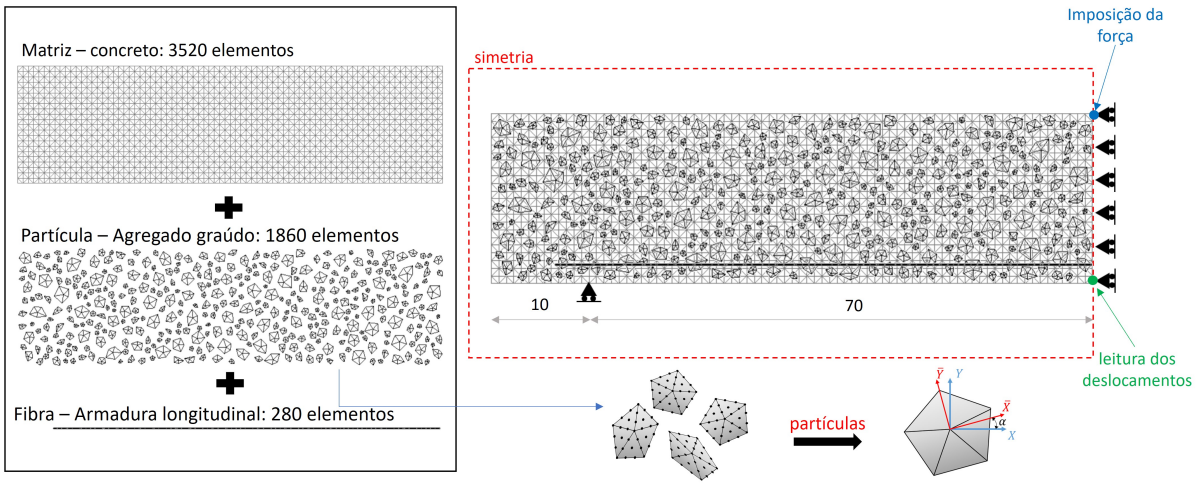
elasticidade correspondente à $E_{aço}/E_{matriz} = 0,2$. Essa estratégia foi a mesma que a empregada por Ramos (2020).

Figura 3.32 – Geometria e condições de contorno da viga.



Fonte: Própria autoria.

Figura 3.33 – Elementos de partícula para representação de agregados.



Fonte: Própria autoria.

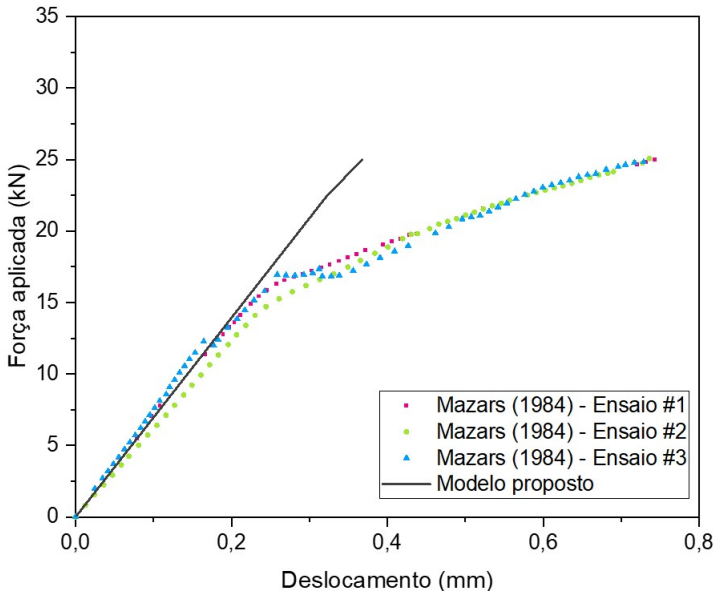
A representação dos agregados foi conduzida por meio do uso de elementos de partículas. As partículas foram criadas e dispersas aleatoriamente sobre a matriz de argamassa. Para isso, foi utilizado um elemento de partícula discretizado por meio de 5 elementos finitos triangulares com aproximação cúbica, contendo 31 nós e 62 graus de liberdade, conforme mostra a Figura 3.33.

As partículas foram geradas com posições e rotações arbitrárias, evitando a sobreposição dos elementos. Além disso, o tamanho dos agregados foi definido de modo aleatório, considerando o valor mínimo de $4,75$ mm, e máximo de $9,5$ mm. Essas dimensões foram consideradas devido ao fato de que o concreto foi produzido com brita 2, que tem dimensões variando entre $9,5$ mm e $19,0$ mm, conforme prescrito na NBR 7211 (ABNT, 2009). A Figura 3.20 apresenta os formatos das partículas que foram utilizadas na representação dos agregados.

No que tange as propriedades mecânicas dos elementos simulados, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson da matriz são dados, respectivamente, por $E = 19,90$ GPa e $\upsilon = 0,2$. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson dos agregados são dados, respectivamente, por $E = 9,95$ GPa e $\upsilon = 0,2$. Para o aço, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson são dados, respectivamente, por $E = 196$ GPa e $\upsilon = 0$. Estes valores foram definidos seguindo as especificações indicadas no trabalho de Ramos (2020), e visam garantir rigidez à flexão equivalente a viga homogênea, para um análise elástica linear. Comenta-se que a análise foi conduzida realizando controle de força, sendo aplicados em 40 passos incrementais de $\Delta P = 0,625$ kN.

A Figura 3.34 apresenta os resultados obtidos na simulação numérica e nos ensaios experimentais conduzidos em três vigas, por Mazars (1984). Os resultados são expostos por meio de curvas força aplicada versus deslocamento vertical, cujos valores foram aferidos nos pontos indicados na Figura 3.33.

Figura 3.34 – Relação força aplicada versus deslocamento.



Fonte: Própria autoria.

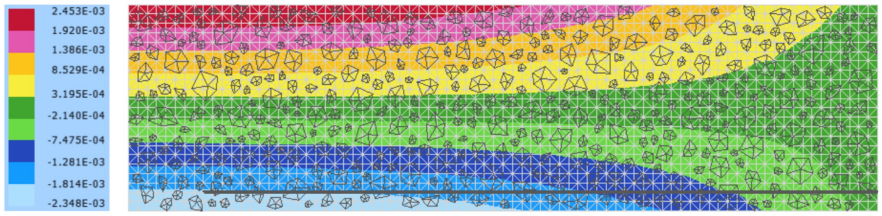
Da Figura 3.34, pode-se observar que o código implementado descreve coerentemente o comportamento mecânico da viga, no trecho inicial da curva força versus deslocamento, trecho caracterizado pelo regime elástico-linear. A diferença percentual observada entre os resultados da

simulação numérica e dos três ensaios (ensaio #1, #2 e #3), considerando o trecho elástico-linear (trecho onde a força varia entre 0 e 10,0 kN), são respectivamente de: 0,85%, 5,27% e 2,61%.

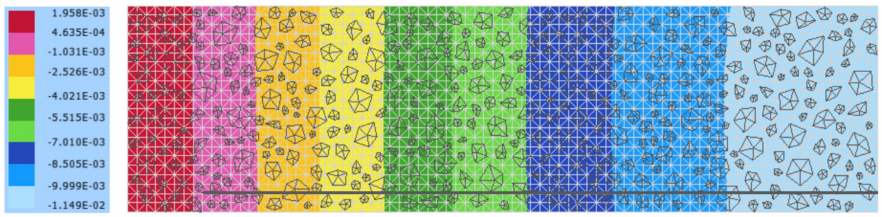
De forma a demonstrar a perfeita aderência entre as três fases que descrevem a estrutura de concreto armado, na Figura 3.35 são apresentados mapas dos deslocamentos horizontal e vertical da viga para a carga de 6,8 kN.

Figura 3.35 – Mapeamento dos deslocamentos e tensão horizontal da viga para carga de 6,8 kN.

(a) Deslocamento horizontal (cm).



(b) Deslocamento vertical (cm).



Fonte: Própria autoria.

Por fim, diante dos resultados obtidos e das discussões realizadas, verifica-se que o código até este instante pode representar adequadamente estruturas de concreto armado em mesoescala, considerando um regime elástico-linear. Porém, como as estruturas de concreto podem estar sujeitas a níveis de carga que superam o regime elástico-linear, faz-se necessário introduzir no código, formulações que possibilitam simular a não linearidade física. A análise não linear física é tratada no próximo capítulo.

3.6 Conclusão do capítulo

O principal objetivo deste capítulo refere-se à apresentação das formulações do Método dos Elementos Finitos em sua versão posicional (MEFP), assim como, da técnica de embutimento, estratégia numérica adotada para a simulação de elementos compósitos. A formulação do elemento finito bidimensional foi descrita dentro da análise linear física e não linear geométrica, discutindo os conceitos referentes à energia específica de deformação, forças internas e tensor Hessiano. O elemento finito do tipo chapa foi implementado considerando um elemento triangular de ordem cúbica de aproximação, e tem como propósito representar a matriz e elementos de partículas dispersos sobre a matriz.

Em seguida, foram descritas as formulações que possibilitam a incorporação do elemento unidimensional, de barra simples com quatro graus de liberdade, que foram empregados, nesta tese, para simulação das armaduras imersas na matriz cimentícia. Na sequência, a técnica de embutimento foi apresentada, evidenciando as principais vantagens da metodologia na simulação de materiais compósitos.

Por fim, quatro exemplos numéricos foram modelados para demonstrar a aplicabilidade do código desenvolvido, mostrando que o mesmo está apto a representar o comportamento mecânico de materiais compósitos, especialmente o concreto, e estruturas de concreto armado, considerando análises não linear geométrica e elástica linear. A fim de simular com maior fidelidade o comportamento mecânico do concreto, o próximo capítulo aborda aspectos relacionados à Mecânica do Dano, apresentando as formulações necessárias para que o código passe a realizar análises não lineares físicas.

CAPÍTULO

4

MECÂNICA DO DANO

Neste capítulo, inicialmente são apresentados os conceitos associados à mecânica do dano, discutindo aspectos relacionados às leis da termodinâmica e da cinemática, associadas à degradação do material ao ser submetido a um sistema de forças externas. As formulações apresentadas têm o objetivo de indicar os procedimentos matemáticos empregados na simulação do comportamento físico não-linear de materiais compósitos, em especial, o concreto. Atenção especial é dada ao modelo de dano de Mazars (1984), empregado para a representação da não linearidade física da matriz. Definida as leis de evolução do dano na matriz, uma nova estratégia numérica é proposta para reduzir o tempo de processamento do código durante a simulação da não linearidade física. Ao final do capítulo são apresentados exemplos numéricos com o objetivo de validar o código desenvolvido e demonstrar a sua aplicabilidade.

Os conceitos apresentados ao longo do capítulo são embasados em Kachanov (1986), Lemaitre (2012), Kattan e Voyiadjis (2012), Skrzypek e Ganczarski (2013) e nas notas de aulas das disciplinas – *SMM5786 - Fadiga e fratura dos materiais*, ministrada pelo professor Dr. Waldek Wladimir Bose Filho, no Departamento de Engenharia de Materiais e, *SET5926 – Introdução à mecânica da Fratura*, ministrada pelo professor Dr. Edson Denner Leonel, no Departamento de Engenharia de Estruturas.

4.1 Mecânica do dano contínuo

Os materiais empregados nos projetos de engenharia estão sujeitos, ao longo de sua vida útil, a condições mecânicas e ambientais desfavoráveis que diminuem gradualmente a sua resistência devido ao acúmulo de danos em sua microestrutura. A título de exemplo, nos metais pode-se mencionar os danos decorrentes da fluência, danos plásticos devido à fragilização do material e pelo processo de fadiga. No concreto, citam-se os danos irrecuperáveis por fragilização e os decorrentes do processo de fadiga.

A fim de estimar de modo coerente o nível de danificação ao qual se encontra um

material, torna-se necessário formular o fenômeno deteriorativo ao qual o mesmo está/estará sujeito, empregando os princípios da mecânica do dano.

No decorrer dos últimos anos, os modelos desenvolvidos com base na teoria do dano contínuo vêm sendo eficientemente empregados na simulação de materiais que apresentam perda de rigidez associada à micro/macro fissuração, como é o caso do concreto.

De acordo com Gonçalves (2003), a degradação das propriedades mecânicas do concreto está associada ao surgimento e progressão de microfissuras, que podem ter origem ainda na fase de produção e cura, por exemplo promovidos pela retração, ou ao longo da vida útil devido a ação de solicitações externas. O desenvolvimento da fissuração e, por consequência, do dano, pode ser considerado contínuo, tendo início quando são impostas tensões internas superiores a 30% da resistência mecânica do material.

Kachanov (1958) foi o pioneiro a investigar e desenvolver trabalhos relacionados à mecânica do dano contínuo, introduzindo o conceito de tensão efetiva. Este conceito baseia-se na consideração de uma configuração fictícia não danificada de um corpo e na comparação deste com a configuração real, danificada. O autor formulou sua teoria considerando esforços e tensões uniaxiais.

Seguindo o trabalho de Kachanov (1958), pesquisas em diversas áreas aplicaram o seu conceito de mecânica de dano contínuo para o estudo da danificação de materiais frágeis (KRAJCINOVIC; FONSEKA, 1981; FANELLA; KRAJCINOVIC, 1988; PAAS; SCHREURS; BREKELMANS, 1993; CHABOCHE; LESNE; MAIRE, 1995; DESMORAT; RAGUENEAU; PHAM, 2007; RICHARD et al., 2010) e dúcteis (LEMAITRE, 1984; DUSZA; KOLCZUGA, 1987; ZHENG; ZHOU; ZHAO, 1995; ZHU et al., 2012). Nas décadas seguintes surgiram diversos modelos e aplicações da mecânica do dano contínuo relacionados à plasticidade e materiais compósitos (CHABOCHE; LESNE, 1988; PAAS; SCHREURS; BREKELMANS, 1993; CHABOCHE; LESNE; MAIRE, 1995; SHERMAN; LEMAITRE; LECKIE, 1996; HOMAND-ETIENNE; HOXHA; SHAO, 1998; DESMORAT; LEMAITRE, 2001; DESMORAT, 2006; DESMORAT; RAGUENEAU; PHAM, 2007; RICHARD et al., 2010; OVCHINSKY et al., 2013).

Os preceitos da mecânica do dano contínuo estão fundamentados nos processos irreversíveis da termodinâmica e em conceitos associados ao estado interno do material. A variável de dano para materiais frágeis, em especial para o concreto, geralmente é formulada considerando parâmetros relacionados à forma ou orientação das fissuras, à taxa de propagação, à anisotropia do material, entre outros.

A depender do parâmetro empregado para descrever as leis de evolução do dano, as formulações desenvolvidas podem se tornar complexas, definidas através da introdução de variáveis escalares (LEMAITRE, 1984) ou tensoriais, indo desde uma forma vetorial (KRAJCINOVIC, 1983), passando por tensores de segunda ordem (KACHANOV, 1980), quarta ordem (ORTIZ, 1985), ou até mesmo, tensores de oitava ordem (CHABOCHE, 1982).

Considerando as diferentes formas de definir e construir os modelos da não-linearidade

física do material que a teoria da mecânica do contínuo oferece, a mais simples e consistente refere-se à aplicação da variável de dano isotrópico, na qual o comportamento não-linear do material é caracterizado pelo emprego de uma variável escalar referente ao nível de danificação.

Devido à simplicidade, coerência e aplicabilidade em diversos casos práticos, as formulações de dano isotrópico são empregadas nas mais diversas áreas de pesquisa. Para Gonçalves (2003), o recorrente emprego das formulações de dano isotrópico à modelagem do concreto se deve à capacidade de representação das principais características do comportamento mecânico do material e por serem fundamentadas em equações termodinamicamente consistentes.

Os preceitos da teoria da mecânica do dano contínuo são fundamentados na termodinâmica e proporcionam leis constitutivas para a representação de sólidos definidos por materiais danificados. De modo geral, as particularidades do formalismo termodinâmico são inseridas nas hipóteses fundamentais admitidas na definição dos modelos de dano, onde os processos termodinâmicos irreversíveis são considerados por meio de um número finito de variáveis internas ao contínuo, que dependem exclusivamente dos valores que o caracterizam.

Desta forma, o formalismo inserido na teoria da mecânica do dano é caracterizado por três aspectos fundamentais: (i) definição dos parâmetros internos representativos do material; (ii) definição da energia interna e; (iii) representação das leis de evolução dos parâmetros internos. Assim, considerando estes três aspectos fundamentais, torna-se possível gerar novas formulações que representem a não-linearidade ou definam leis constitutivas para o material.

4.1.1 Conceitos fundamentais

A fim de descrever o significado físico do dano e caracterizar os princípios da mecânica do dano contínuo, na sequência são apresentados os principais conceitos que definem a variável de dano, considerando inicialmente um estado de tensão uniaxial. É importante lembrar que neste trabalho o dano é formulado considerando-o como isotrópico.

Considere inicialmente que um corpo de prova cilíndrico foi submetido a uma força axial de tração T, com seção transversal A, conforme mostra a Figura 4.1. A área A remete à seção transversal total do sólido, sendo composta pela área íntegra de material, os defeitos pré-existentes e as fissuras que surgem no elemento após ser submetido ao esforço T. De modo geral, pode-se utilizar o conceito da tensão média para determinar a força de superfície que atua na seção transversal do sólido, conforme mostra a Equação 4.1.

$$\sigma = \frac{T}{A} \tag{4.1}$$

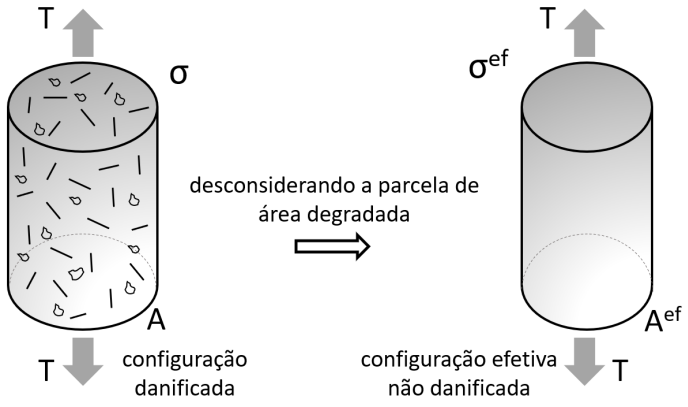
Entretanto, sabe-se que a tensão efetiva (real) atuando no material não será aquela determinada pela Equação 4.1, já que existe uma parcela da área total A que não apresenta resistência às solicitações, a qual é definida pela soma das áreas dos defeitos do material e das fissuras. Assim, ao definir uma seção transversal que efetivamente resiste aos esforços (A^{ef}), caracterizada pela proporção íntegra de material, pode-se calcular a tensão efetiva por meio

da Equação 4.2. O emprego da seção transversal efetiva configura o princípio fundamental da mecânica do dano contínuo.

$$\sigma^{ef} = \frac{T}{A^{ef}} \tag{4.2}$$

em que σ^{ef} refere-se à tensão efetiva que atua no material.

Figura 4.1 – Corpo de prova cilíndrico nas configurações danificada e não danificada efetiva.



Fonte: Própria autoria.

Considerando as Equações 4.1 e 4.2, e sabendo que ambos os elementos apresentados na Figura 4.1 estão submetidos à mesma força T, pode-se definir a tensão efetiva no material por meio da relação entre as áreas total e efetiva, conforme apresentado na Equação 4.3.

$$\sigma^{ef} = \frac{A}{A^{ef}}\sigma = \left[1 - \left(\frac{A - A^{ef}}{A}\right)\right]^{-1} \sigma = (1 - (D))^{-1}\,\sigma \tag{4.3}$$

$$D = \frac{A - A^{ef}}{A} \tag{4.4}$$

Empregando a relação entre as áreas total e efetiva, utilizada na Equação 4.3, torna-se possível definir o parâmetro de dano (D), o qual é apresentado na Equação 4.4. A variável de dano, conforme apresentado na Equação 4.4, foi descrita pioneiramente por Kachanov (1958), onde o autor formulou as teorias que apontam a consistência da variável frente à mecânica do contínuo e conceitos relacionados à termodinâmica e à mecânica da fratura.

Observa-se que é intuitiva a caracterização e definição da variável de dano (D), principalmente quando considerada a isotropia do material, já que o dano passa a se apresentar como um parâmetro quantitativo da razão entre as áreas danificadas e íntegra do material. Ademais, percebe-se que a variável apresenta valores compreendidos entre 0 e 1, sendo $D = 0$ para um material não danificado, e $D = 1$ para o caso de um material completamente danificado (estado que configura a ruptura teoricamente perfeita). Nota-se ainda que é impossível, considerando as teorias físicas que descrevem um corpo, o índice de dano apresentar valor unitário. Essa afirmação pode ser facilmente demonstrada quando define-se a tensão efetiva em função da

variável de dano segundo a Equação 4.5, já que o denominador não pode ser nulo.

$$\sigma^{ef} = \frac{\sigma}{1-D} \tag{4.5}$$

Usualmente, a definição do dano por meio da degradação de um parâmetro que define a capacidade resistente do material, a exemplo do módulo de elasticidade, é empregada para a criação dos modelos de dano. A maioria dos modelos desenvolvidos nos últimos anos consideram diferentes formas de descrever as grandezas internas que representam o material, o que possibilita a criação de leis de degradação do material em função do tipo ou nível de solicitação, ou ainda, da natureza do material empregado (dúctil, frágil, quase-frágil). No geral, aplicações simples permitem empregar a decomposição da variável de dano em uma dimensão, porém, para a resolução de problemas gerais, faz-se necessário decompor a variável D em três dimensões.

4.1.2 Decomposição da varíavel de dano em uma dimensão

Considerando o princípio fundamental da mecânica do dano, apresentado na seção anterior, a decomposição da variável de dano em uma dimensão permite descrever o comportamento não-linear físico de um material, considerando os defeitos pré-existentes em seu interior, a exemplo dos poros na matriz de argamassa do concreto e as fissuras desenvolvidas pela ação de solicitação de diferentes origens.

Com o interesse em definir um modelo de dano para o concreto, a área danificada do material pode ser indicada pela soma das áreas representativas das fissuras existentes na matriz de argamassa e dos vazios pré-existente no material, desenvolvidos durante os processos de moldagem, vibração ou cura do concreto. Assim, define-se a área total do material pela soma da área íntegra com as áreas representativas das fissuras e dos poros, conforme Equação 4.6.

$$A = A^{ef} + A^{f} + A^{p} \tag{4.6}$$

em que A^f é a área representativa das fissuras, e A^p a área que remete aos poros.

Considerando que a proporção de área danificada do material é o principal parâmetro que define e quantifica a variável de dano do modelo, e como a área danificada foi definida pela soma das área das fissuras e dos poros do concreto, conforme Equação 4.6, torna-se possível definir o dano pela composição da deterioração gerada pelos poros e pelas fissuras, conforme Equação 4.7.

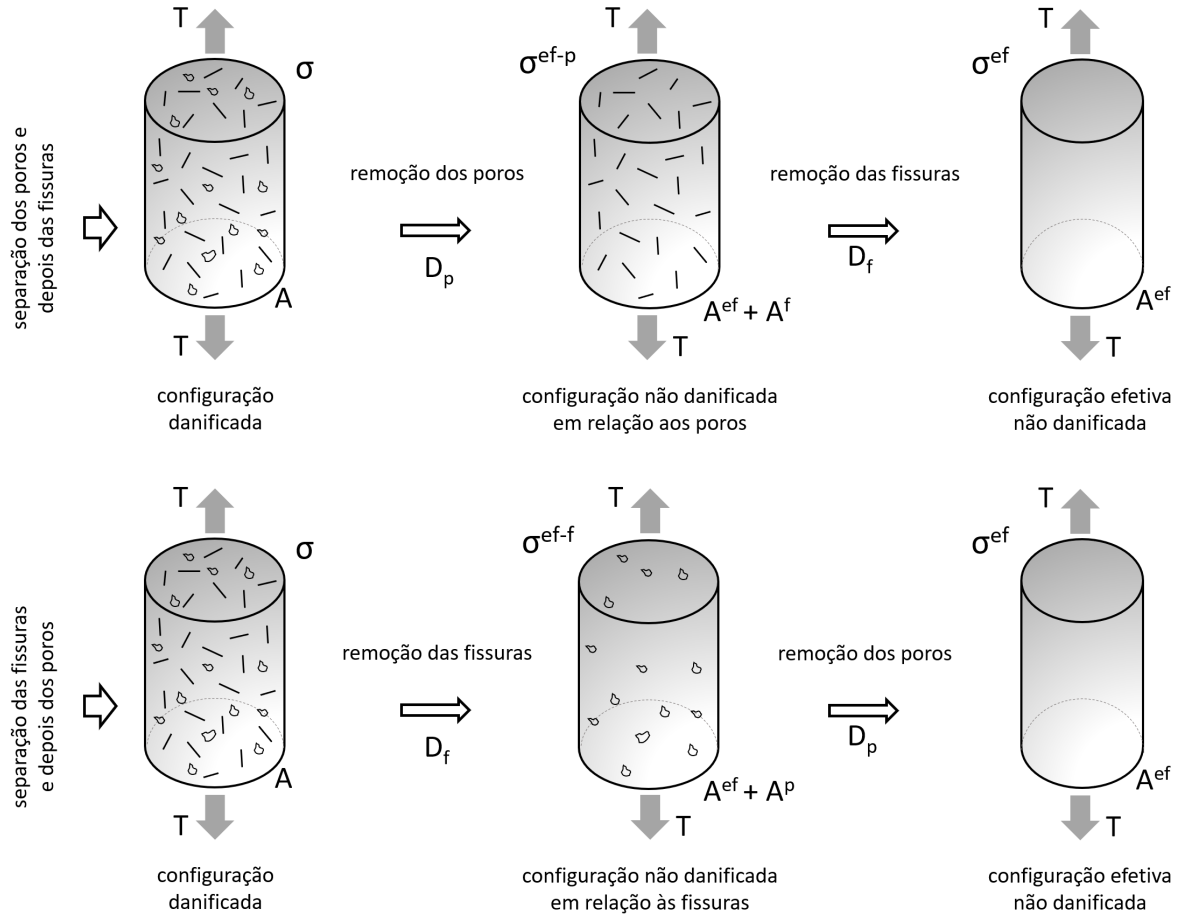
$$D = D_f + D_p \tag{4.7}$$

em que D_f é o dano causado pelas fissuras, e D_p é o dano criado pelos poros.

Para definir o dano pela composição dos danos causados pelas fissuras e pelo poros, seria necessário, teoricamente, separar os danos decorrentes de cada um do defeitos quando da construção da configuração efetiva não danificada do corpo de prova analisado (Figura 4.1). Essa separação pode ser conduzida de duas maneiras (ver Figura 4.2): (i) removendo primeiramente

os poros e então as fissuras; e (ii) removendo as fissuras e em seguida os poros. As duas situações descritas são exploradas na sequência, onde são empregadas para definir as formulações que norteiam o cálculo do dano em função das áreas danificadas.

Figura 4.2 – Determinação da configuração efetiva não danificada pelos métodos de separação.



Fonte: Adaptado de Kattan e Voyiadjis (2012).

Comenta-se que os métodos de separação definidos e representados na Figura 4.2 apresentam formas teóricas de divisão dos defeitos do material para descrever matematicamente o dano, não apresentando nenhum significado físico. Assim, considerando os dois métodos de separação, pode-se determinar as tensões efetivas atuando em cada uma das configurações efetivas não danificadas, calculando o dano associado.

A princípio analisa-se o método onde é conduzida a separação dos poros, e à posteriori, a separação das fissuras. Deste modo, considera-se que todos os poros são retirados do corpo de prova, gerando a área da seção transversal do material na configuração não danificada em relação aos poros ($A^{ef} + A^{f}$). A tensão efetiva atuando nesta seção transversal é dada pela Equação 4.8. Ademais, empregando os fundamentos da mecânica do dano, pode-se definir o dano ocasionado

isoladamente pelos poros, conforme Equação 4.9.

$$\sigma^{ef-p} = \frac{A}{A^{ef} + A^{f}}\sigma \tag{4.8}$$

$$D_p = 1 - \frac{A^{ef} + A^{f}}{A} \tag{4.9}$$

Substituindo a Equação 4.9 na Equação 4.8, obtém-se a Equação 4.10, que descreve a relação entre as tensões atuantes nas configurações danificada e não danificada em relação aos poros.

$$\sigma^{ef-p} = \frac{\sigma}{1 - D_p} \tag{4.10}$$

Ao definir a seção transversal sem os poros e a tensão efetiva que atua no mesmo, pode-se fazer a retirada das fissuras, chegando por fim na configuração efetiva não danificada do elemento. Para definir a tensão efetiva que atua na seção não danificada, utiliza-se como estado inicial de tensão aquela calculada no corpo na configuração não danificada em relação aos poros. Assim, sob os mesmos preceitos que geraram a Equação 4.8, obtém-se a Equação 4.11, onde o dano causado pelas fissuras é definido pela Equação 4.12.

$$\sigma^{ef} = \frac{A^{ef} + A^{f}}{A^{ef}}\sigma^{ef-p} \tag{4.11}$$

$$D_f = 1 - \frac{A^{ef}}{A^{ef} + A^{f}} \tag{4.12}$$

Ao substituir a Equação 4.12 na Equação 4.11, e fazendo as simplificações necessárias, chega-se à formulação que descreve a tensão efetiva no corpo de prova na configuração efetiva não danificada (Equação 4.13). Ademais, ao acoplar as Equações 4.10 e Equação 4.12, obtém-se a formulação que possibilita o cálculo da tensão atuante na configuração efetiva não danificada (Equação 4.14).

$$\sigma^{ef} = \frac{\sigma^{p}}{1 - D_f} \tag{4.13}$$

$$\sigma^{ef} = \frac{\sigma}{(1 - D_p)\left(1 - D_f\right)} \tag{4.14}$$

A Equação 4.14 representa a tensão efetiva na seção transversal do corpo de prova, considerando de modo isolado os danos causados pelas fissuras e pelos poros existentes na matriz do material, considerando o primeiro método de separação dos defeitos.

Agora, considerando que inicialmente todas as fissuras são removidas, gerando a área da seção transversal do material na configuração não danificada em relação às fissuras ($A^{ef} + A^{p}$), a tensão efetiva atuante é calculada por meio da Equação 4.15. O dano ocasionado isoladamente pelas fissuras é definido conforme Equação 4.16.

$$\sigma^{ef-f} = \frac{A}{A^{ef} + A^{p}}\sigma \tag{4.15}$$

$$D_f = 1 - \frac{A^{ef} + A^p}{A} \tag{4.16}$$

Substituindo a Equação 4.16 na Equação 4.15, obtém-se a Equação 4.17, que descreve a relação entre as tensões atuantes nas configurações danificada e não danificada em relação às fissuras.

$$\sigma^{ef-f} = \frac{\sigma}{1 - D_f} \tag{4.17}$$

Ao definir a seção transversal sem as fissuras e a tensão efetiva atuante na mesma, pode-se fazer a remoção dos poros da matriz, gerando assim a configuração efetiva não danificada do elemento. Para calcular a tensão efetiva atuante na seção não danificada, emprega-se o estado inicial de tensão atuante na configuração não danificada em relação às fissuras. Assim, diante dos mesmos preceitos que geraram a Equação 4.15, obtém-se a Equação 4.18, onde o dano causado pelos poros é dado pela Equação 4.19.

$$\sigma^{ef} = \frac{A^{ef} + A^p}{A^{ef}} \sigma^{ef-f} \tag{4.18}$$

$$D_p = 1 - \frac{A^{ef}}{A^{ef} + A^p} \tag{4.19}$$

Ao substituir a Equação 4.19 na Equação 4.18, e fazendo as simplificações necessárias, chega-se à formulação que descreve a tensão efetiva no corpo de prova na configuração efetiva não danificada (Equação 4.20). Ademais, ao acoplar as Equações 4.17 e Equação 4.19, obtém-se a formulação que possibilita o cálculo da tensão atuante na configuração efetiva não danificada (Equação 4.21).

$$\sigma^{ef} = \frac{\sigma^f}{1 - D_p} \tag{4.20}$$

$$\sigma^{ef} = \frac{\sigma}{\left(1 - D_f\right)\left(1 - D_p\right)} \tag{4.21}$$

A Equação 4.21 representa a formulação da tensão efetiva na seção transversal do corpo de prova, considerando de modo isolado, os danos causados pelas fissuras e pelos poros existentes na matriz do material, diante do segundo método de separação (fissuras e depois poros).

De imediato, é possível verificar que as Equações 4.14 e 4.21 apresentam os mesmos resultados, e que portanto, independente do método de separação empregado, a estimativa da tensão atuante no material na configuração efetiva e não danificada é idêntica nos dois métodos. Assim, a decomposição do tensor de dano em uma dimensão está completa, e mais, ao comparar as formulações obtidas para a determinação da tensão efetiva considerando os dois métodos (Equações 4.14 e 4.21) e o caso geral (Equação 4.4), igualando os denominadores de cada uma das três equações, chega-se à representação geral da variável de dano considerando a decomposição dos defeitos do material, conforme mostram as Equações 4.22 e 4.23, e apontam

a existência de um dano associado à fissuração e aos defeitos pré-existentes.

$$1 - D = (1 - D_p)\left(1 - D_f\right) \tag{4.22}$$

$$D = D_p + D_f - D_p D_f \tag{4.23}$$

A Equação 4.23 demonstra como o dano total pode ser determinado em função da decomposição dos danos associados a cada um dos defeitos do material. Ademais, é fácil verificar que continua válida a condição do dano estar restrito ao intervalo $[0,1)$, assim como das variáveis de dano de cada um do defeitos terem seus valores restritos ao mesmo intervalo.

Por fim, pelas formulações descritas nesta seção é possível observar que, se um material é definido sem a existência de poros ou defeitos pré-existentes em sua matriz ($D_p = 0$), então o dano total é definido diretamente pelo dano causado pelas fissuras ($D = D_f$). De modo análogo, se em um material não se desenvolvem fissuras ($D_f = 0$), o dano será definido exclusivamente pelo dano decorrente dos poros ($D = D_p$).

4.1.3 Decomposição da variável de dano em três dimensões

Diante das formulações apresentadas na seção anterior e dos fundamentos da mecânica do dano, é possível decompor a variável de dano para o caso geral, onde o estado de tensão é definido tridimensionalmente. De acordo com Kattan e Voyiadjis (1999), para o caso geral, o tensor de tensão efetiva pode ser definido conforme Equação 4.24.

$$\sigma^{ef_{ij}} = M_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{4.24}$$

em que M_{ijkl} é um tensor de quarta ordem que define a relação entre o estado de tensão tridimensional do corpo na configuração danificada e o estado de tensão efetiva da configuração efetiva não danificada. O tensor M_{ijkl} pode ser definido em notação reduzida (de Voigt) por $\mathbf{M}$, de ordem 6x6 (no caso tridimensional), dada na Equação 4.25, onde seus termos são calculados conforme expressam as Equações 4.26-4.36. Este tensor é comumente denominado de tensor do efeito de dano.

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2\Theta}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 2\lambda_4 & 2\lambda_7 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 2\lambda_4 & 0 & 2\lambda_9 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 2\lambda_7 & 2\lambda_9 \\ \lambda_4 & \lambda_4 & 0 & \lambda_5 & \lambda_6 & \lambda_7 \\ \lambda_7 & 0 & \lambda_7 & \lambda_6 & \lambda_8 & \lambda_4 \\ 0 & \lambda_6 & \lambda_6 & \lambda_7 & \lambda_4 & \lambda_9 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

$$\lambda_1 = 2\psi_{22}\psi_{33} - 2D_{23}^2 \tag{4.26}$$

$$\lambda_2 = 2\psi_{11}\psi_{33} - 2D_{13}^2 \tag{4.27}$$

$$\lambda_3 = 2\psi_{11}\psi_{22} - 2D_{12}^2 \tag{4.28}$$

$$\lambda_4 = D_{13}D_{23} + D_{12}\psi_{33} \tag{4.29}$$

$$\lambda_5 = \psi_{22}\psi_{33} + \psi_{11}\psi_{33} - D_{23}^2 - D_{13}^2 \tag{4.30}$$

$$\lambda_6 = D_{12}D_{13} + D_{23}\psi_{11} \tag{4.31}$$

$$\lambda_7 = D_{12}D_{23} + D_{13}\psi_{22} \tag{4.32}$$

$$\lambda_8 = \psi_{22}\psi_{33} + \psi_{11}\psi_{33} - D_{23}^2 - D_{13}^2 \tag{4.33}$$

$$\lambda_9 = \psi_{11}\psi_{33} + \psi_{11}\psi_{22} - D_{13}^2 - D_{12}^2 \tag{4.34}$$

$$\psi_{ij} = \delta_{ij} - D_{ij} \tag{4.35}$$

$$\Theta = \psi_{11}\psi_{22}\psi_{33} - D_{23}^2\psi_{11} - D_{13}^2\psi_{22} - D_{12}^2\psi_{33} - 2D_{12}D_{23}D_{13} \tag{4.36}$$

O tensor M_{ijkl} representa a relação entre as áreas efetiva e total da seção transversal analisada. Usualmente o tensor M_{ijkl} é denominado como tensor do efeito de dano. Observa-se que o tensor é descrito apenas em função das variáveis de dano, já que o termo Θ é definido pelas constantes de dano e a função delta de Kronecker (δ_{ij}), conforme Equação 4.35. A partir disso pode-se verificar que todos os termos da matriz **M** possuem seus valores entre 0 e 1.

Definida a relação entre os estados de tensão nas configurações efetiva não danificada e danificada, pode-se descrever o tensor **M** em função dos dois danos considerados neste trabalho, os danos associados aos poros e às fissuras, seguindo as mesmas estratégias de separação dos defeitos apresentadas na Figura 4.2. De modo a não tornar o texto repetitivo, será omitido o procedimento passo a passo, já que é semelhante ao conduzido para a decomposição em uma dimensão, descrito na seção anterior. Para maiores esclarecimentos, convida-se à leitura do trabalho de Kattan e Voyiadjis (2012).

Deste modo, considerando que a proporção total de material danificado de um elemento é representada neste trabalho pela composição das fissuras com os poros, pode-se definir o tensor **M** pela composição de dois outros tensores, um associado ao dano produzido pelas fissuras (**MF**), e outro aos poros (**MP**), conforme Equação 4.37. Para calcular os termos dos tensores (**MF**) e (**MP**), empregam-se o mesmo conjunto de formulações (Equações 4.26-4.35), considerando para cada tipo de defeito as suas próprias variáveis de dano.

$$[M] = [MF][MP] = [MP][MF] \tag{4.37}$$

De acordo com a Equação 4.37 é indiferente a ordem da posição dos tensores na operação algébrica, um resultado que demonstra o fato de ser indiferente o método aplicado na separação teórica dos defeitos (Figura 4.2).

Assim, para expressar o estado tridimensional de tensão efetiva em um corpo danificado, deve-se substituir a Equação 4.37 na Equação 4.24, obtendo ao final a Equação 4.38.

$$\sigma_{ij}^{ef} = MP_{ijmn} MF_{mnkl} \sigma_{kl} \tag{4.38}$$

Até o momento foi descrito como determinar o verdadeiro (efetivo) estado de tensão atuante no material, considerando a proporção entre áreas integra e danificada. Entretanto, não existe até os dias atuais uma metodologia eficiente para mensuração dessas áreas, sendo empregados outros parâmetros representativos do material que possibilitem a definição e representação de leis de evolução do dano.

4.1.4 Lei constitutiva

Esta seção apresenta a lei constitutiva empregada neste trabalho para representar o estado de tensão no material. Inicialmente define-se a relação entre o estado de tensão e deformação de um corpo em sua configuração danificada (Equação 4.39), assumindo que a formulação obedece a lei de Hooke generalizada. Considerando a mecânica do contínuo, pode-se determinar a correspondente energia de deformação atuante no material com defeitos, conforme mostra a Equação 4.40.

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \tag{4.39}$$

$$U = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \tag{4.40}$$

em que E_{ijmn} é o tensor elástico efetivo de quarta ordem e U refere-se à energia de deformação elástica efetiva, na configuração danificada.

Ao aplicar a transformação de Legendre na Equação 4.40, a energia de deformação elástica efetiva complementar pode ser calculada de acordo com a Equação 4.41. Analogamente, pode-se descrever a energia de deformação elástica complementar do corpo em configuração efetiva não danificada, conforme Equação 4.42.

$$\upsilon = \frac{1}{2} E_{ijkl}^{-1} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \tag{4.41}$$

$$\upsilon^{ef} = \frac{1}{2} E_{ijkl}^{ef\ -1} \sigma_{ij}^{ef} \sigma_{kl}^{ef} \tag{4.42}$$

Considerando a equivalência entre as energias elásticas de um corpo, chega-se a conclusão de que as Equações 4.41 e 4.42 são iguais, e o tensor de elasticidade do material, em uma

configuração efetiva não danificada, dada pela Equação 4.43.

$$E^{ef}_{ijkl} = M^{-1}_{pqkl} E_{rspq} M^{-1}_{rsij} \tag{4.43}$$

Definida a lei que descreve a relação do tensor de elasticidade em função do dano, pode-se calcular o tensor de tensão de Cauchy, por meio do tensor **M** (Equação 4.44). Fazendo as operações necessárias, pode-se também definir o tensor de deformação efetiva em função do tensor do efeito de dano, conforme Equação 4.45.

$$\sigma^{ef} = E^{ef} \times \varepsilon = M^{-1} \times E \times M^{-1} \varepsilon \tag{4.44}$$

$$\varepsilon^{ef} = M^{-1} \times \varepsilon \tag{4.45}$$

A Equação 4.44 refere-se à lei constitutiva para um material danificado representado monofasicamente, ou estritamente homogêneo. Entretanto, a mesma lei pode ser empregada para representar materiais heterogêneos, sendo necessário acoplar as rigidezes de cada um dos materiais à formulação, processo a ser discutido ao final deste capítulo, para simulação e modelagem do concreto como um sistema compósito.

O modelo constitutivo descrito na Equação 4.44 estará totalmente definido se os parâmetros do tensor **M** puderem ser determinados para cada processo de carregamento, ou deformação. Para tal, neste trabalho é empregado o modelo de dano de Mazars (MAZARS, 1984), que considera as seguintes hipóteses:

i Durante o processo evolutivo de danificação o material apresenta comportamento mecânico elástico, em que as deformações permanentes observadas ao decorrer de uma possível situação de descarregamento são totalmente desprezadas;

ii O dano ocorre somente por deformações que provocam alongamentos, ou seja, a condição necessária para a evolução do dano consiste na existência de pelo menos uma componente de tração no tensor de deformações principais;

iii Em geral, quando sujeitos à degradação mecânica, os materiais assumem um comportamento anisotrópico. No entanto, a fim de reduzir o número de variáveis intrínsecas ao fenômeno, o modelo de dano de Mazars é considerado isotrópico, sendo a danificação em um ponto do sólido determinada por meio de uma única grandeza escalar;

iv Em um determinado ponto pertencente ao contínuo, seu estado de danificação é definido por meio de uma variável escalar de dano representada por D, a qual varia entre zero (estado teórico de material íntegro) e um (estado teórico de degradação total).

O modelo de Mazars foi selecionado dentre muitas outras leis de evolução do dano por ser amplamente empregado na literatura na representação da não linearidade física do concreto.

De acordo com Proença (1992) o dano não é uma grandeza física diretamente mensurável, porém, para fins da modelagem matemática, é possível relacioná-lo com a redução progressiva de características mecânicas, por exemplo, o módulo de elasticidade. Deste modo, uma variável interna representativa do estado de deterioração do material é definida de forma a permitir quantificar e distinguir, macroscopicamente, um sólido deteriorado de outro íntegro.

O estado de alongamento do material é caracterizado pela deformação equivalente ε_{eq}, conforme Equação 4.46.

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{(\varepsilon_1)_+^2 + (\varepsilon_2)_+^2 + (\varepsilon_3)_+^2} \tag{4.46}$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_i + |\varepsilon_i|\right] \tag{4.47}$$

em que ε_{eq} representa a deformação equivalente e as variáveis $(\varepsilon_i)_+$, correspondem às componentes positivas do vetor de deformações principais, onde $\varepsilon_i = \varepsilon_i$ se $\varepsilon_i > 0$ e $\varepsilon_i = 0$ se $\varepsilon_i \leq 0$.

Segundo o critério adotado, o processo de dano inicia quando ε_{eq} atinge um valor convencional igual à deformação crítica ε_{d0}, que representa a deformação correspondente ao início do processo de danificação. A deformação crítica pode ser determinada experimentalmente via ensaios de tração, sendo tomado como a deformação correspondente ao pico de tensão presente no ensaio uniaxial de tração.

É importante pontuar que, nos ensaios experimentais mensura-se a deformação específica (E_{d0}), ou deformação linear de engenharia, que pode ser confundida com a deformação de Green-Lagrange na presença de pequenas deformações. Assim, para definir a formulação de maneira matematicamente consistente, a Equação 4.48 pode ser utilizada para realizar a conversão entre as distintas medidas de deformação.

$$\varepsilon_{d0}\left(E_{d0}\right) = \frac{1}{2}\left(E_{d0}\right)^2 + E_{d0} \tag{4.48}$$

Na impossibilidade de determinar o valor da deformação específica E_{d0}, a qual se faz necessária para definir a deformação crítica, Nogueira (2010) indica que a resistência à tração inferior do concreto pode ser empregada, ao considerar a lei de Hooke em sua versão uniaxial. Assim, a deformação específica E_{d0} pode ser definida pela Equação 4.49.

$$E_{d0} = \frac{f_{ctk,inf}}{E_{ci}} \tag{4.49}$$

em que $f_{ctk,inf}$ é a resistência à tração inferior do concreto, e E_{ci} é o módulo de elasticidade longitudinal do material.

Definidas as deformações equivalente e crítica, o critério de danificação pode ser enunciado para um estado geral de dano D, fazendo o uso do critério de resistência enunciado na Equação 4.50. A Equação 4.50 mostra que a evolução do dano acontecerá sempre que ε_{eq} for superior a uma deformação de referência. A lei de evolução do dano pode então, ser expressa em termos de taxas de variação no tempo, associadas a passos finitos de carregamento e/ou

deslocamento, conforme mostram as Equações 4.51 e 4.52.

$$f\left(\varepsilon_{eq}, D\right) = \varepsilon_{eq} - \varepsilon_{lim}(D) > 0 \tag{4.50}$$

$$dD = 0 \;\; se \;\; f < 0 \;\; ou \;\; f = 0 \;\; e \;\; df < 0 \tag{4.51}$$

$$dD = F\left(\varepsilon_{eq}, d\left(\varepsilon_{eq}\right)_+\right) \;\; se \;\; f = 0 \;\; e \;\; df = 0 \tag{4.52}$$

em que ε_{lim} representa um parâmetro que carrega a informação da máxima deformação alcançada durante o histórico de deformações, em que, no início do processo iterativo, assume-se como sendo a deformação crítica. Note que, se $D = 0$, então $\varepsilon_{lim}(D) = \varepsilon_{ed}$.

Na Equação 4.52, $F\left(\varepsilon_{eq}, d\left(\varepsilon_{eq}\right)_+\right)$ representa uma função contínua e positiva da deformação equivalente dada em termos de parâmetros numéricos intrínsecos ao modelo de dano de Mazars. As condições impostas por essa função idênticas às condições de complementaridade (Kuhn-Tucker) e consistência, advindas da teoria da plasticidade, e que são expressas pela Equações 4.53 e 4.54.

$$dD \cdot f = 0 \longrightarrow \text{Condição de complementaridade} \tag{4.53}$$

$$dD \cdot df = 0 \longrightarrow \text{Condição de consistência} \tag{4.54}$$

Nos casos particulares de tração e compressão uniaxial, a Equação 4.52 é substituída pela Equações 4.55 e 4.56, respectivamente.

$$dD_T = F\left(\varepsilon_{eq}, d\left(\varepsilon_{eq}\right)_+\right) \tag{4.55}$$

$$dD_C = F\left(\varepsilon_{eq}, d\left(\varepsilon_{eq}\right)_+\right) \tag{4.56}$$

em que D_T e D_C representam as variáveis de dano que indicam, respectivamente, a região não-linear das curvas tensão-deformação dos estados uniaxiais de tração e compressão. A Figura 4.3 apresenta as curvas tensão versus deformação do concreto, descritas em função das variáveis de dano do modelo de Mazars.

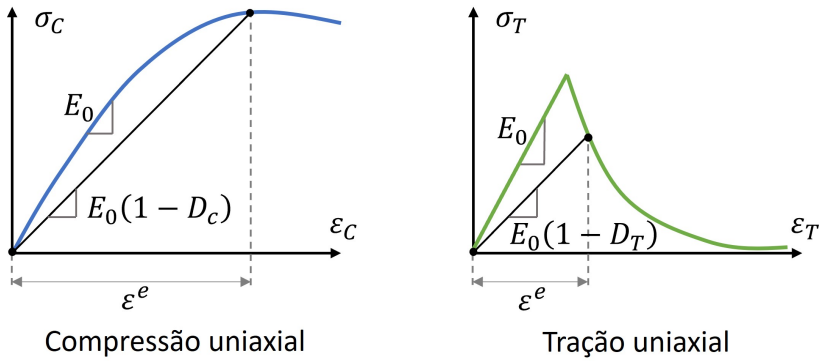
No caso de solicitações monotonicamente crescente, as Equações 4.55 e 4.56 são integráveis, sendo possível descrevê-las de forma explicita, conforme Equações 4.57 e 4.58.

$$D_T = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_T)}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_T}{e^{B_T\left(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0}\right)}} \tag{4.57}$$

$$D_C = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_C)}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_C}{e^{B_C\left(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0}\right)}} \tag{4.58}$$

em que A_T, A_C, B_T e B_C são parâmetros do modelo que podem ser identificados com base em resultados de ensaios de tração e compressão. Estes parâmetros possuem valores definidos de acordo com a Tabela 4.1 (MAZARS, 1984).

Figura 4.3 – Curvas tensão-deformação descritas pelas variáveis de dano de Mazars.



Fonte: Própria autoria.

Tabela 4.1 – Limite dos parâmetros do modelo de dano de Mazars.

Limites	A_T	B_T	A_C	B_C	ε_{d0}
Mínimo	0,70	10^4	1,00	10^3	10^{-5}
Máximo	1,00	10^5	1,50	$2x10^4$	10^{-4}

Fonte: Própria autoria.

As variáveis de dano foram definidas de modo isolado nas Equações 4.57 e 4.58, considerando os casos de estados de tensão uniaxial, de tração e compressão, respectivamente. Porém, para o caso multiaxial, é necessário fazer uma combinação entre essas duas variáveis, dando origem a uma única variável, como se vê na Equação 4.59.

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \tag{4.59}$$

$$\alpha_T = \frac{\sum_i (E_{Ti})_+}{E_V^+} \tag{4.60}$$

$$\alpha_C = \frac{\sum_i (E_{Ci})_-}{E_V^+} \tag{4.61}$$

$$E_V^+ = \sum_i (E_{Ti})_+ + \sum_i (E_{Ci})_- \tag{4.62}$$

em que os parâmetros α_T e α_C, são calculados por meio das Equações 4.60 e 4.61. A variável E_V^+, é a deformação volumétrica de alongamento, calculada pela Equação 4.62. Os parâmetros E_{Ti} e E_{Ci}, referem-se, respectivamente, ao vetor de deformações principais, associados às parcelas de tração e compressão do vetor de tensões principais.

Como os parâmetros E_{Ti} e E_{Ci} representam respectivamente as parcelas de tração e

compressão do vetor de tensões principais, os mesmos são obtidos via Equações 4.63 e 4.64.

$$(E_{Ti})_+ = \frac{1+\nu}{E_{ci}}(S_{Ti})_+ - \frac{\nu}{E_{ci}}\sum_{j=1}^{3}(S_{Tj})_+ \tag{4.63}$$

$$(E_{Ci})_- = \frac{1+\nu}{E_{ci}}(S_{Ci})_- - \frac{\nu}{E_{ci}}\sum_{j=1}^{3}(S_{Cj})_- \tag{4.64}$$

em que $(S_{Ti})_+$ e $(S_{Ci})_-$ são calculados de acordo com as Equações 4.65 e 4.66.

$$(S_{Ti})_+ = (S_{Ti}) \;\; se \;\; (S_{Ti}) > 0 \;\; e \;\; (S_{Ti})_+ = 0 \;\; se \;\; (S_{Ti}) \leq 0 \tag{4.65}$$

$$(S_{Ci})_- = (S_{Ci}) \;\; se \;\; (S_{Ci}) < 0 \;\; e \;\; (S_{Ci})_- = 0 \;\; se \;\; (S_{Ci}) \geq 0 \tag{4.66}$$

Finalmente, a lei constitutiva do material, definida no modelo de Mazars, válida na hipótese de carregamento monotonicamente crescente, é expressa na Equação 4.67

$$\sigma^{ef} = E^{ef}\varepsilon = \mathbf{E}(1-D)\varepsilon \tag{4.67}$$

em que σ^{ef} refere-se ao tensor de tensão efetiva, $\mathbf{E}$ é o tensor de rigidez elástico e $\mathbf{E}(1-D)$ representa o tensor $\mathbf{M}$, apresentado na seção anterior, que define a relação entre as áreas efetiva e total do domínio simulado.

Comenta-se que, para o acoplamento do modelo de dano de Mazars ao MEFP utilizado na modelagem de elementos compósitos, a verificação do critério de dano é realizada nos pontos de integração da matriz. Ademais, destaca-se que as tensões são atualizadas em cada processo de iteração do processo incremental de Newton-Raphson, utilizado para achar as posições deformadas na análise não-linear geométrica.

Como o objetivo do trabalho é representar o comportamento de sólidos sob solicitações cíclicas, e a lei constitutiva de Mazars foi proposta para casos de solicitações monotonicamente crescentes, manipulações numéricas foram conduzidas no código para contemplar os estágios de descarga e recarga em análises de sólidos submetidos a solicitações cíclicas. As estratégias incorporadas ao código são:

i As tensões são aplicadas sob pequenos incrementos;

ii A cada incremento de carga, avalia-se se o corpo está sob um processo de carga ou descarga (curvas ascendente ou descendente) por meio do controle de ciclo por limite de carga, que tem o regime de carregamento definido segundo as condições de Kuhn-Tucker. Esta estratégia foi analisada em Pereira e Penna (2022), na qual mostrou-se eficiente para a representação da não linearidade física em elementos de concreto solicitados ciclicamente;

iii No controle de ciclo por limite de carga, deve-se definir os limites de carga para o qual o ciclo se inicia, os limites que definem o descarregamento e início do recarregamento;

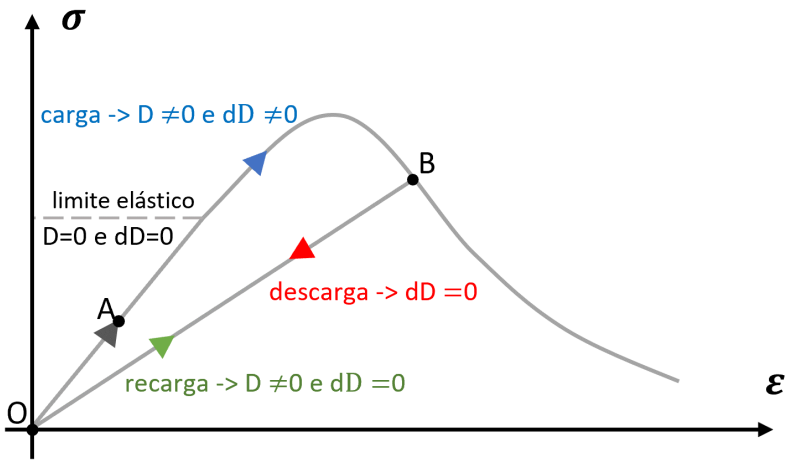
iv Quando o corpo tiver seu estado de tensão e deformação sob um trecho descendente, não haverá aumento da degradação do material. Assim, neste estágio, a derivada do dano é nula, e o dano será definido pelo valor calculado no pico do trecho ascendente do ciclo. Esta estratégia configura um descarregamento e recarregamento secante;

v No processo de carga deve-se avaliar se o material está sob um novo nível de tensão (estágio de nova carga), ao qual não havia sido submetido anteriormente, ou se está sob um nível de tensão ao qual já havia experimentado antes (estágio de recarga). A avaliação destes estágios é definida pelo critério de dano;

vi O critério de dano segue sendo definido por meio da avaliação da variável de deformação equivalente e o valor limite do dano, ou valor crítico da deformação que causa um certo nível de dano no material.

A Figura 4.4 apresenta uma representação hipotética de uma curva tensão versus deformação de um corpo de prova de concreto, submetido à compressão cíclica.

Figura 4.4 – Curva tensão versus deformação com os diferentes estágios de dano.



Fonte: Adaptado de Gonçalves (2003).

Na Figura 4.4 são definidos os trechos considerando estágios de carga, descarga e recarga. O trecho $\overline{OA}$ representa o período em que as tensões e deformações apresentam relação linear, sendo o dano e a taxa de dano nulos ($D = 0$ e $dD = 0$). O trecho $\overline{AB}$ representa regiões onde são geradas deformações anelásticas, sendo observados danos no material ($D \neq 0$ e $dD \neq 0$). Os trechos $\overline{BO}$ e $\overline{OB}$ representam regiões de descarga e recarga, respectivamente. Nos dois trechos ($\overline{BO}$ e $\overline{OB}$) não é observada a acumulação de dano ($dD = 0$).

4.2 Modelagem do dano usando elementos fantasmas

Até o momento foram definidas as formulações e estratégias numéricas acopladas ao código de análise de sólidos compósitos via método dos elementos finitos posicional (MEFP). As formulações previamente descritas permitem que o dano seja avaliado considerando cargas monotonicamente crescentes ou cíclicas, e foram definidas de modo que todos os elementos da matriz passam pelo processo de avaliação do dano. No entanto, em muitas aplicações, não é possível identificar a priori as regiões que o dano estará concentrado ou as regiões do domínio em que não haverá dano. Nestes casos, um significativo tempo de processamento do código poderia ser reduzido se fossem indicados os elementos que realmente se faz necessário calcular o índice de dano.

Assim, considerando o objetivo de otimizar o tempo despendido em um análise não física linear via MEFP, uma nova estratégia numérica foi desenvolvida, onde elementos finitos são empregados por meio da técnica de embutimento (descrita no *Capítulo 3*) para avaliar e impor o dano em uma região específica do domínio. Estes elementos foram denominados de elementos fantasmas, e remete ao fato de serem utilizados apenas para avaliar a existência de dano e definirem o nível de danificação dos elementos da matriz ao qual estão embutidos.

Na sequência são apresentados a estratégia numérica desenvolvida e todo o tratamento matemático que define a análise de dano por meio do uso de elementos fantasmas.

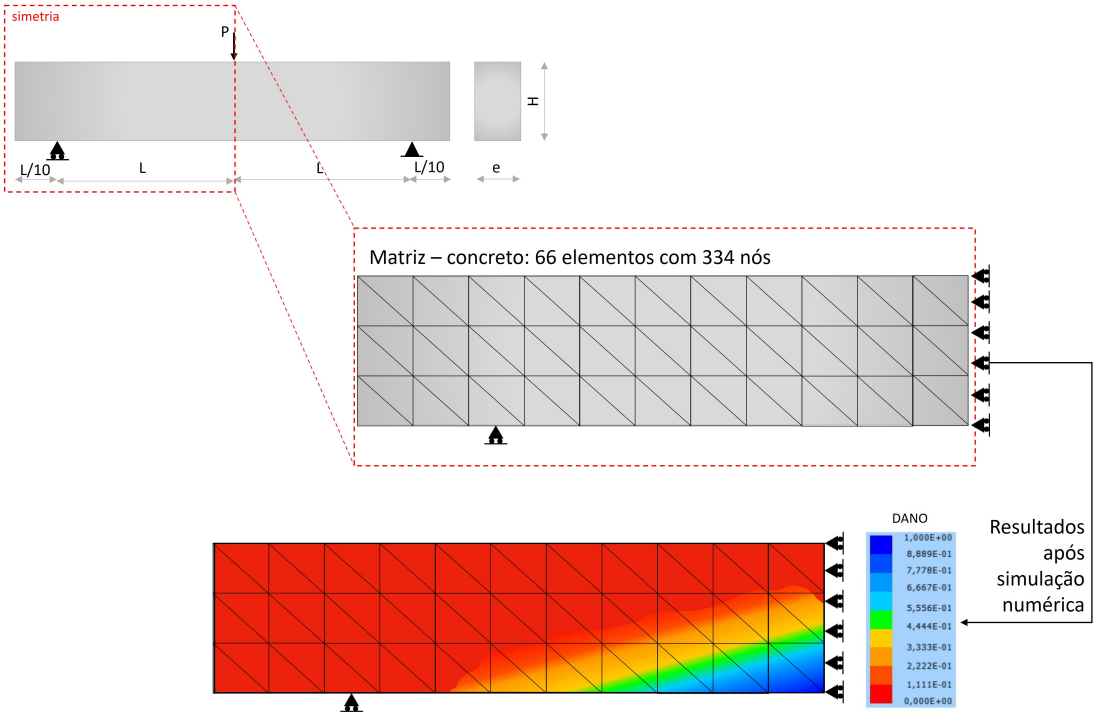
4.2.1 Estratégia numérica proposta

Considere que almeja-se avaliar numericamente o dano em uma viga biapoiada, com as condições de contorno e malha indicadas na Figura 4.5. Sabe-se que, para a viga apresentada, o dano se localizará na parte inferior central da viga, conforme mostra o mapa de cores da distribuição do dano apresentado na Figura 4.5.

Conhecida a região onde o dano se localizará, uma análise mecânica via MEFP poderia ser conduzida considerando que apenas a região inferior central da viga passaria pela verificação de não linear física. A Figura 4.6 apresenta a possível região onde o dano deve ser avaliado para que o comportamento mecânico da viga seja coerentemente representado. Com a aplicação desta estratégia, o número de elementos que passaria pela análise seria de 26, 40 elementos a menos da quantidade usada na análise conduzida em todo o domínio. Essa diminuição pode gerar uma redução de até 60% do tempo despendido na análise não linear física da viga.

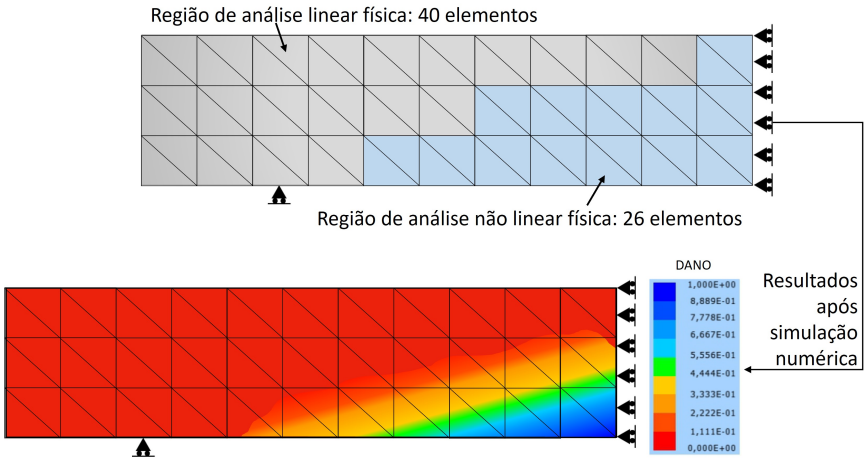
Considerando a estratégia de calcular o dano em regiões específicas de um sólido e considerando o objetivo de reduzir o tempo de processamento da análise numérica, neste trabalho é proposto o uso de elementos embutidos na matriz sem rigidez inicialmente atribuída, denominados de elementos fantasmas. A estratégia desenvolvida consiste em realizar o cálculo do dano nos elementos fantasmas, via modelo de dano de Mazars, e depois penalizar os elementos da matriz onde estão imersos. Os elementos fantasmas foram desenvolvidos fazendo o uso técnica de embutimento, que foi descrita no capítulo anterior.

Figura 4.5 – Malha, condições de contorno e distribuição do dano na viga. Malha definida com a utilização de elementos com ordem de aproximação cúbica.



Fonte: Própria autoria.

Figura 4.6 – Análise não linear física com elementos previamente definidos.



Fonte: Própria autoria.

Sabendo que os elementos fantasmas fazem o uso da técnica de embutimento, o seu uso passa a ter como vantagem o fato de não limitar as posições nodais dos elementos, o que garante liberdade na geração das malhas. Essa condição faz com que os elementos utilizados para descrever as regiões de dano não agreguem novos graus de liberdade ao problema.

A aderência entre as duas malhas é garantida através dos nós dos elementos fantasmas, onde a estratégia fundamenta-se em escrever os parâmetros nodais do elemento fantasma em função dos parâmetros nodais dos elementos da matriz, por meio das funções de forma utilizadas

na aproximação. Assim, para um determinado nó de um elemento fantasma incidindo em um elemento da matriz, a sua posição é dada em função das posições nodais do respectivo elemento da matriz, onde o mapeamento das posições iniciais e atuais do elemento fantasma são determinadas de acordo com as Equações 4.68 e 4.69.

$$\widehat{X}_i = \phi_j(\xi_1^p, \xi_2^p) X_i^j \tag{4.68}$$

$$\widehat{Y}_i = \phi_j(\xi_1^p, \xi_2^p) Y_i^j \tag{4.69}$$

em que ϕ_j são as funções de forma do elemento finito da matriz, calculadas para as coordenadas adimensionais ξ_i^p do nó p do elemento fantasma, $\widehat{X}_i^j$ e $\widehat{Y}_i^j$ são as posições nodais (inicial e atual) do elemento fantasma, e X_i^j e Y_i^j são as posições nodais da matriz. Neste trabalho, para os parâmetros referentes aos elementos fantasmas, usa-se o símbolo $(\widehat{\bullet})$.

Assume-se que os elementos fantasmas e de partículas interagem da mesma forma com a matriz, sendo que os elementos de partículas são usados para enrijecer o domínio e os elementos fantasmas são utilizados para reduzir a rigidez da matriz, com valor negativo. O dano é calculado nos elementos fantasmas e inserido na matriz por meio da penalização de sua rigidez. Deste modo, a energia interna total do compósito apresentada no *Capítulo* 4 passa ser escrita por meio da composição das energias interna da matriz (vide Equação 3.76), das fibras (quando houverem), das partículas (quando houverem) e dos elementos fantasmas, conforme mostra a Equação 4.70.

$$U_e^{\{total\}} = U_e + \widetilde{U_e} + \overline{U_e} + \widehat{U_e} \tag{4.70}$$

em que U_e é a energia de deformação armazenada no elemento representativo da matriz, $\overline{U_e}$ é a energia armazenada nos elementos de fibra, $\widetilde{U_e}$ é a energia de deformação armazenada nas partículas e $\widehat{U_e}$ é a energia de deformação armazenada nos elementos fantasmas.

Conforme descrito, os elementos fantasmas penalizam os elementos da matriz, sendo essa penalização o parâmetro que insere a danificação. Deste modo, a análise não linear física é conduzida apenas nos elementos fantasmas, e emprega o modelo de dano de Mazars (Equações 4.46-4.67).

Definido o índice de dano de todos os nós dos elementos fantasmas, faz-se necessário determinar duas rigidezes, uma com o valor atualizado da rigidez do elemento fantasma (rigidez empregada na análise de dano da iteração subsequente) e outra com o valor da penalização causada na rigidez, porém com valor negativo (valor usado para penalizar a rigidez da matriz).

A rigidez dos elementos é definida por meio de constantes elásticas do material, a exemplo dos módulos de elasticidade longitudinal E, transversal G, e do coeficiente de Poisson υ. Como o módulo de elasticidade transversal pode ser estimado pelo módulo de elasticidade longitudinal e a não linearidade física é avaliada com o modelo de dano de Mazar, o cálculo da rigidez atualizada e da rigidez de penalização, é realizado por intermédio do módulo de elasticidade atualizado e do módulo de elasticidade de penalização os quais são definidos

respectivamente, nas Equações 4.71 e 4.72.

$$E_{ci}^{\{atualizado\}} = (1-D) \times E_{ci}^{\{atual\}} \tag{4.71}$$

$$E_{ci}^{\{penalizado\}} = (-D) \times E_{ci}^{\{atual\}} \tag{4.72}$$

em que $E_{ci}^{\{atualizado\}}$ é o módulo de elasticidade atualizado, $E_{ci}^{\{penalizado\}}$ é o valor do módulo de elasticidade penalizado, $E_{ci}^{\{atual\}}$ é o módulo de elasticidade atual, D é o índice de dano.

Conhecida a penalização, calculam-se os vetores de forças internas e a matriz Hessiana dos elementos fantasmas, que são conduzidos analogamente aos dos elementos de partículas, por meio das Equações 3.49-3.62.

Após o cálculo da força interna e Hessiana das partículas, da fibras, dos elementos fantasmas e da matriz, é possível determinar a primeira derivada da energia interna do sistema (Equação 4.73), a qual representa o vetor de força interna. Destaca-se que, quando não houverem fibras e/ou partículas, as parcelas desses elementos são automaticamente eliminadas.

$$\begin{aligned}\left(F_i^{j^{int}}\right)^{\{total\}} &= \frac{\partial U_e^{\{total\}}}{\partial y_i^j} = \frac{\partial\left(U_e + \widetilde{U_e} + \overline{U_e} + \widehat{U_e}\right)}{\partial y_i^j} \\ &= \frac{\partial U_e}{\partial y_i^j} + \frac{\partial \widetilde{U_e}}{\partial y_i^j} + \frac{\partial \overline{U_e}}{\partial y_i^j} + \frac{\partial \widehat{U_e}}{\partial y_i^j}\end{aligned} \tag{4.73}$$

Definida a força interna, pode-se realizar o cálculo da Hessiana global, que é definida como a segunda derivada da energia de deformação em relação às posições nodais, ou seja, a primeira derivada das forças internas em relação às posições nodais. Assim, para um sistema contendo em sua matriz elementos de fibras, partículas e elementos fantasmas, deriva-se a Equação 4.73 em relação às posições nodais da matriz, obtendo a Equação 4.74.

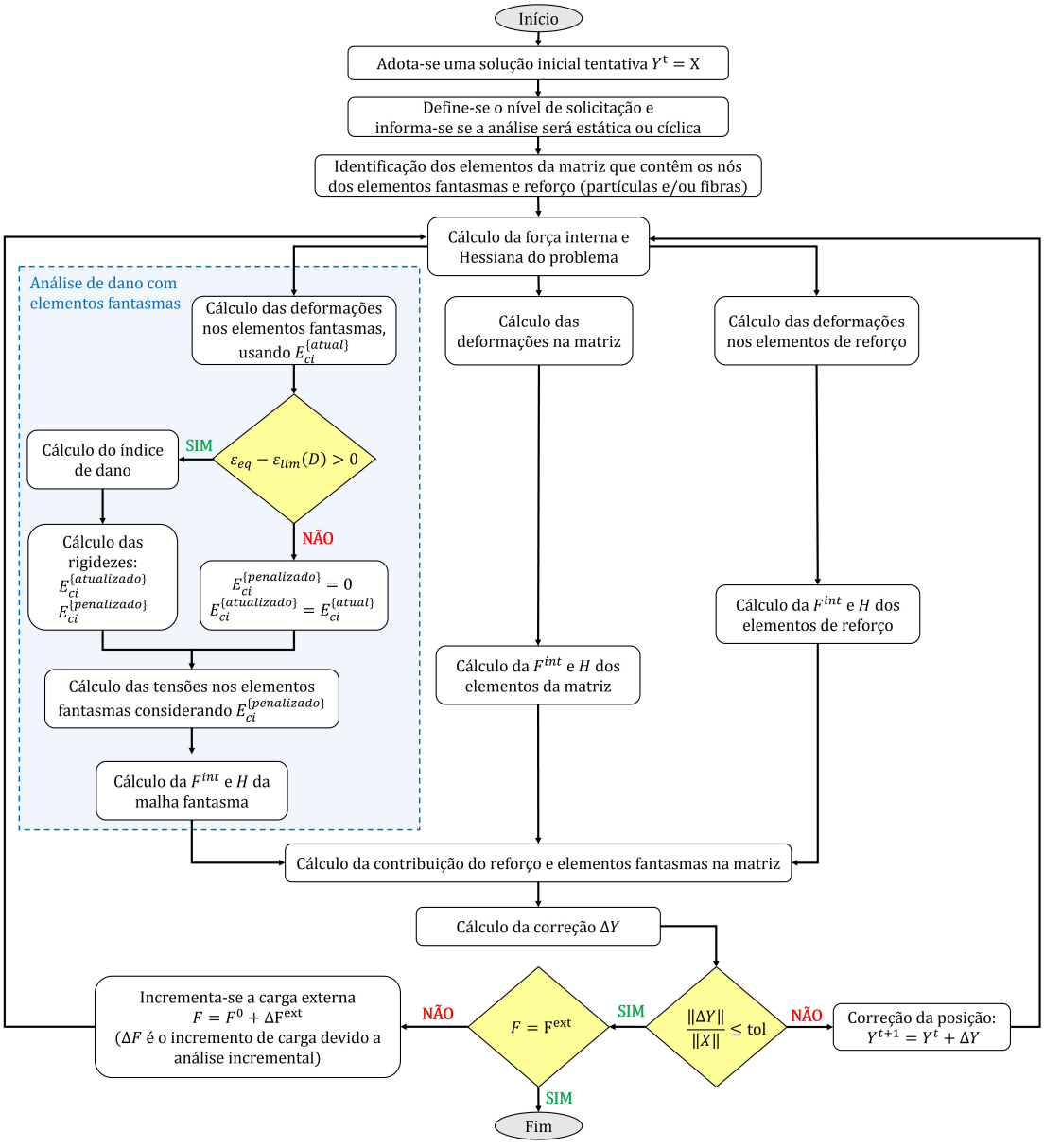
$$\begin{aligned}H_{ijkl} = \frac{\partial^2 U_e^{\{total\}}}{\partial y_i^j \partial y_k^l} &= \int_{V_0} \frac{\partial^2 U_e}{\partial y_i^j \partial y_k^l} dV_0 + \int_{\overline{V_0}} \frac{\partial^2 \overline{U_e}}{\partial y_i^j \partial y_k^l} (\overline{y_j}(y_i)) d\overline{V_0} \\ &+ \int_{\widetilde{V_0}} \frac{\partial^2 \widetilde{U_e}}{\partial y_i^j \partial y_k^l} (\widetilde{y_j}(y_i)) d\widetilde{V_0} + \int_{\widehat{V_0}} \frac{\partial^2 \widehat{U_e}}{\partial y_i^j \partial y_k^l} (\widehat{y_j}(y_i)) d\widehat{V_0}\end{aligned} \tag{4.74}$$

O primeiro termo da segunda igualdade da Equação 4.74 refere-se à Hessiana de um elemento da matriz, onde estão imersos os elementos de fibras, partículas, e/ou fantasmas, que tem a sua determinação descrita no capítulo 4. A segunda derivada da energia de deformação das fibras e partículas, em relação aos parâmetros nodais da matriz, pode ser expandida conforme mostram as Equações 3.83 e 3.84. De modo análogo, a Equação 4.74 apresenta a segunda derivada da energia de deformação dos elementos fantasmas em relação à matriz.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \widehat{U_e}}{\partial y_i^j \partial y_k^l} &= \frac{\partial^2 \widehat{U_e}}{\partial \widehat{y}_\omega^\rho \partial \widehat{y}_\omega^\rho} \frac{\partial \widehat{y}_\omega^\rho}{\partial y_i^j} \frac{\partial \widehat{y}_\omega^\rho}{\partial y_k^l} + \frac{\partial^2 \widehat{U_e}}{\partial \widehat{y}_\omega^\rho \partial \widehat{y}_\pi^\eta} \frac{\partial \widehat{y}_\omega^\rho}{\partial y_i^j} \frac{\partial \widehat{y}_\pi^\eta}{\partial y_k^l} + \\ &+ \frac{\partial^2 \widehat{U_e}}{\partial \widehat{y}_\pi^\eta \partial \widehat{y}_\omega^\rho} \frac{\partial \widehat{y}_\pi^\eta}{\partial y_i^j} \frac{\partial \widehat{y}_\omega^\rho}{\partial y_k^l} + \frac{\partial^2 \widehat{U_e}}{\partial \widehat{y}_\pi^\eta \partial \widehat{y}_\pi^\eta} \frac{\partial \widehat{y}_\pi^\eta}{\partial y_i^j} \frac{\partial \widehat{y}_\pi^\eta}{\partial y_k^l}\end{aligned} \tag{4.75}$$

Na Figura 4.7 é apresentado um fluxograma que resume os processos referente à análise não linear física de sólidos compósitos, onde o dano é calculado em elementos fantasmas por meio da lei constitutiva definida por Mazars (1984). Comenta-se que, para análises cíclicas, faz-se necessário acrescentar os critérios que definem os regimes de carga, descarga e recarga, descritos na seção anterior.

Figura 4.7 – Fluxograma do código para análise de dano com elementos fantasmas.



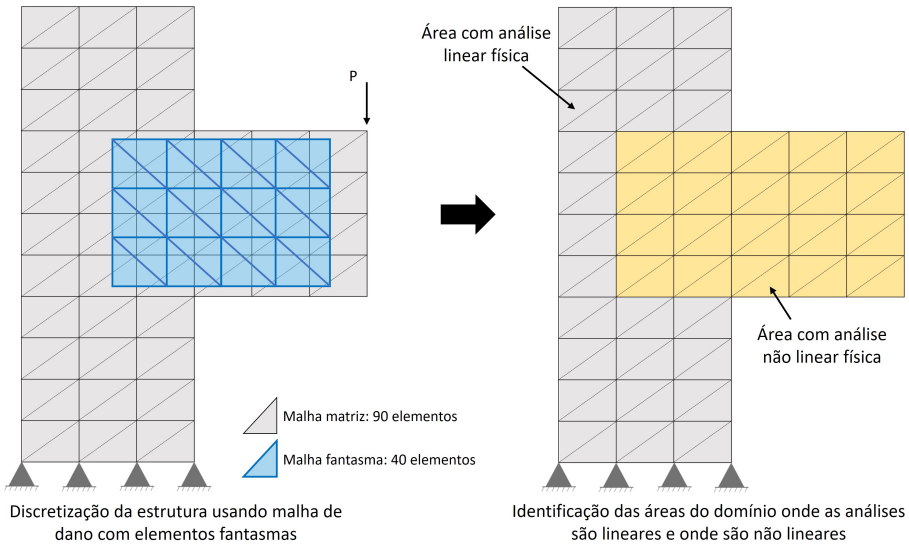
Fonte: Própria autoria.

Por fim, nas Figuras 4.8 e 4.9 são apresentados exemplos da utilização de elementos fantasmas para discretizar as regiões de análise do dano em um corpo. A primeira Figura 4.8 demonstra o caso onde o dano é avaliado em uma região específica do sólido, e a Figura 4.9 indica o caso onde o dano é avaliado em regiões aleatórias do domínio do corpo. Observa-se que, para os dois casos representados, o uso de elementos fantasmas configurará um menor tempo

de processamento na análise não linear física, uma vez que o número de elementos da matriz é superior ao da malha fantasma.

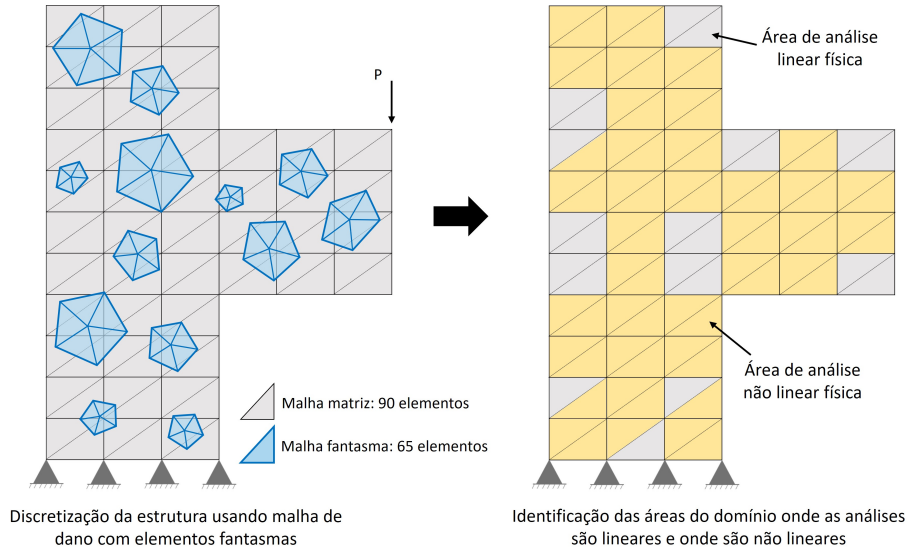
É importante destacar que o grau de eficiência na otimização do tempo de processamento da análise física não linear depende da proporção entre o número de elementos fantasmas e de elementos da matriz.

Figura 4.8 – Uso de malha fantasma com região estrategicamente determinada.



Fonte: Própria autoria.

Figura 4.9 – Uso de malha fantasma com elementos dispersos aleatoriamente.



Fonte: Própria autoria.

4.3 Exemplos numéricos

A fim de validar as formulações implementadas e acopladas ao código de análise de sólidos compósitos, três exemplos numéricos são apresentados nesta seção. Os exemplos foram selecionados de modo a demonstrar a aplicabilidade do código, abordando cada uma das etapas e implementações realizadas.

Dessa forma, o primeiro exemplo tem como propósito validar as formulações implementadas para a representação do comportamento físico não-linear do concreto. Para tal, modelou-se bidimensionalmente corpos de prova de concreto submetidos a ensaios uniaxiais de tração e compressão, considerando a modelagem do concreto como material homogêneo e heterogêneo bifásico (matriz de argamassa e agregados graúdos). Os resultados obtidos foram comparados com resultados obtidos em campanha experimental e/ou disponíveis na literatura.

O segundo exemplo tem como propósito avaliar a aplicabilidade da estratégia numérica desenvolvida otimizar o tempo de processamento despendido em análises físicas não-linear de sólidos via MEFP. Para tal, uma viga de concreto foi simulada considerando diferentes discretizações da região de dano por elementos fantasmas. Os resultados obtidos foram comparados com resultados da literatura, verificando-se a potencialidade da estratégia.

O terceiro exemplo tem como objetivo validar as modificações realizadas no modelo de dano de Mazars para que o mesmo represente o comportamento físico não-linear de sólidos submetidos a cargas cíclicas. Para tal, avaliou-se o comportamento mecânico de um corpo de prova de concreto sob ensaio de compressão cíclica direta. Neste exemplo também foi avaliado o uso de malhas fantasmas, dispersas na matriz, com o propósito de analisar a otimização proporcionada pela estratégia em aplicações com solicitações cíclicas.

4.3.1 Ensaio de tração e compressão - Análise não-linear física

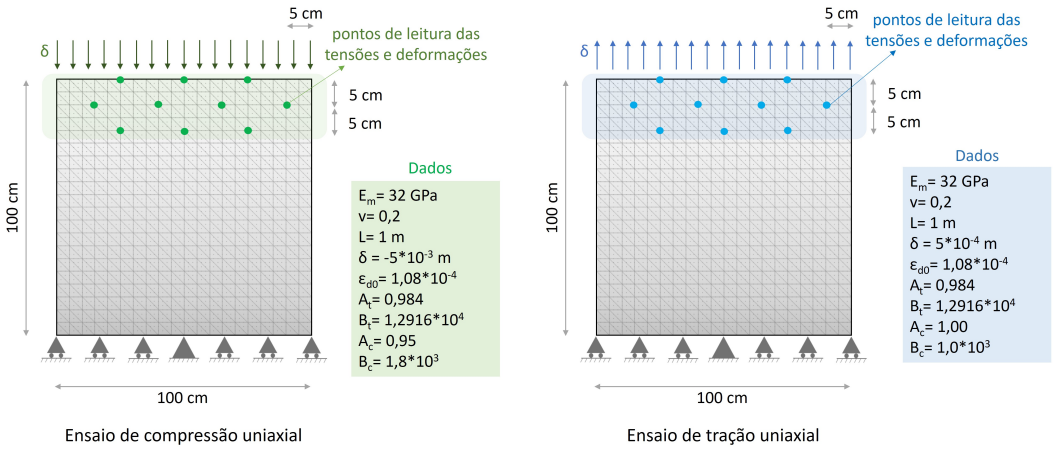
A fim de avaliar o acoplamento da formulação de dano de Mazars no código, este exemplo apresenta três simulações numéricas. Inicialmente é avaliada a capacidade das formulações em representar o comportamento físico não-linear de um domínio bidimensional, composto por um material monofásico, submetido a ensaios de tração e compressão pura. Em seguida, apresenta-se a modelagem de um corpo de prova de concreto submetido ao ensaio de compressão uniaxial, onde o concreto é representado em mesoescala, considerado-o como um meio bifásico.

Conforme descrito, inicialmente é testada a capacidade da formulação na representação da não linearidade física de domínios homogêneos. Para tal, um corpo de prova prismático foi simulado diante de ensaios de tração e compressão. Na Figura 4.10 são apresentadas as condições de contorno dos ensaios e as propriedades geométricas das malhas empregadas na discretização dos domínios. As simulações foram conduzidas por elementos de chapa, com espessura unitária.

Para ambas as simulações, o domínio foi discretizado com malhas estruturadas, utilizando 800 elementos triangulares com ordem de aproximação cúbica, totalizando 3721 nós. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, são respectivamente, de $E = 32\ GPa$ e $\nu = 0,2$.

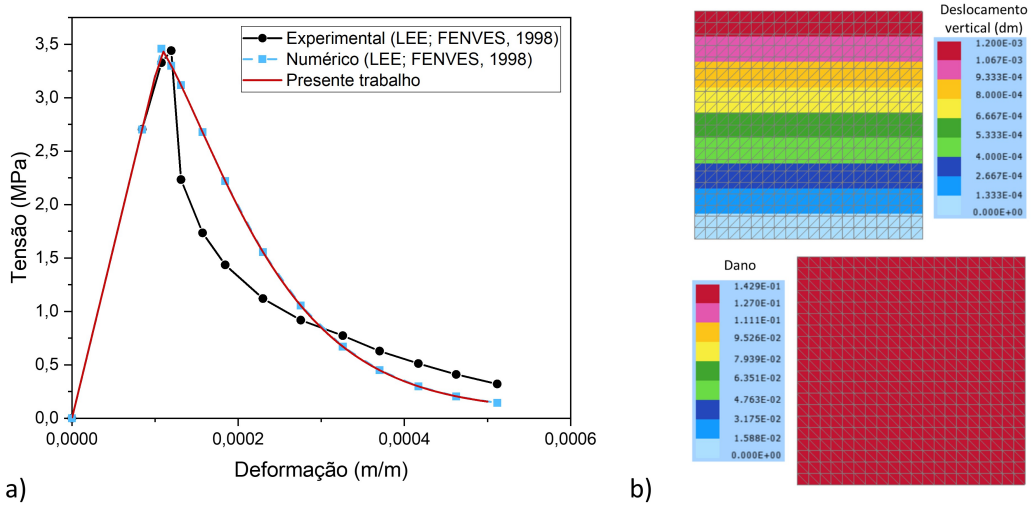
Para a simulação da tração, o incremento de posição foi de $5 \times 10^{-4}\ m$, a simulação da compressão foi feita considerando um incremento de posição de $-5 \times 10^{-3}\ m$. Os parâmetros do modelo de Mazars, associados à lei de evolução de dano, utilizados nas duas simulações são apresentados na Figura 4.10. As análises foram conduzidas considerando 50 passos de incremento de deslocamento.

Figura 4.10 – Propriedades geométricas e condições de contorno dos sólidos.



Fonte: Própria autoria.

Figura 4.11 – Resultados obtidos na simulação da tração: (a) curva tensão versus deformação e (b) mapa de cores dos deslocamentos verticais e índice de dano.



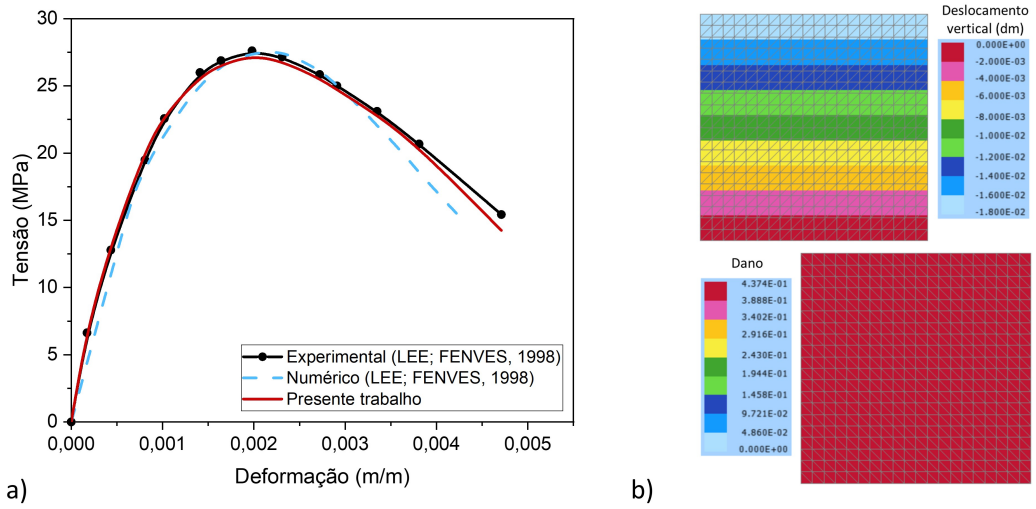
Fonte: Própria autoria.

Os resultados obtidos no ensaio de tração são apresentados na Figura 4.11 e os de compressão são apresentados na Figura 4.12. Ambos os resultados são esquematizados por meio de curvas tensão versus deformação. Os resultados das modelagens são comparados com os obtidos experimentalmente e numericamente em Lee e Fenves (1998). As figuras apresentam

ainda, mapas de cores referentes aos deslocamentos verticais e a distribuição do dano para o incremento 6, que esta associado à tensão de pico.

Ao analisar os resultados obtidos na modelagem da tração uniaxial, é possível ver na Figura 4.11 que a tensão de pico, e por consequência a força de pico, foi coerentemente captada na análise numérica, assim como o trecho ascendente de tensão. O trecho descendente não foi coerentemente representado pelo modelo de dano, havendo divergência com os resultados experimentais. Essa diferença ocorre devido as simplificações existentes no modelo de dano de Mazars (LEE; FENVES, 1998).

Figura 4.12 – Resultados obtidos na simulação da compressão: (a) curva tensão versus deformação e (b) mapa de cores dos deslocamentos verticais e índice de dano.



Fonte: Própria autoria.

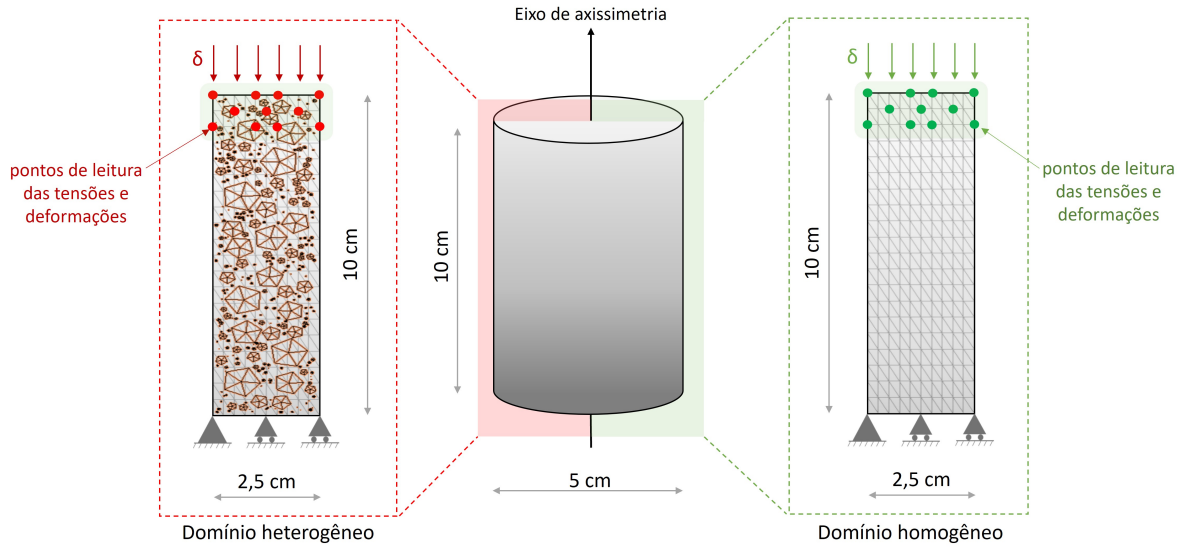
Avaliando os resultados obtidos na simulação da compressão uniaxial, é possível ver na Figura 4.12 que a tensão de pico também foi captada na análise numérica e, diferente do ensaio de tração, tanto o trecho ascendente quanto o descendente apresentaram comportamento semelhante ao experimental.

Comparando os resultados obtidos em ambas as simulações, observa-se a coincidência entre as cruvas geradas pelo código desenvolvido e os resultados numéricos de Lee e Fenves (1998), validando implementação das formulações. Cabe destacar que no trabalho de Lee e Fenves (1998), foi empregado um modelo de dano diferente do implementado neste trabalho, onde foram considerados conceitos associados à energia de fratura e à degradação da rigidez do material.

Dando continuidade às modelagens, realizou-se a simulação de ensaios de compressão uniaxial em corpos de prova cilíndricos de concretos com classe de resistência C70. Os concretos foram simulados representado-os com domínio bifásico ou monofásico. Os resultados obtidos nas simulações foram comparados com os valores aferidos na campanha experimental desenvolvida concomitantemente, apresentada no *Capítulo* 5.

Na primeira simulação, o corpo de prova foi representado por um elemento de chapa retangular, com dimensões especificadas na Figura 4.13. Na modelagem considerou-se a axissimetria do problema, conforme mostra a Figura 4.13. A discretização do corpo de prova foi feita considerando o domínio como um meio monofásico, com 800 elementos e 3721 nós. Quanto às propriedades mecânicas dos elementos simulados, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson da do concreto são respectivamente de $E = 46,05$ GPa e $\upsilon = 0,2$.

Figura 4.13 – Propriedades geométricas e condições de contorno das simulações.



Fonte: Própria autoria.

Na segunda simulação, o corpo de prova foi representado em mesoescala, considerando uma matriz cimentícia e partículas dispersas sobre a mesma, correspondentes aos agregados graúdos. A matriz foi discretizada com 800 elementos e 3721 nós. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson da matriz são dados, respectivamente, por $E_m = 24,55$ GPa e $\upsilon_m = 0,2$. Na modelagem considerou-se a axissimetria do problema, conforme mostra a Figura 4.13.

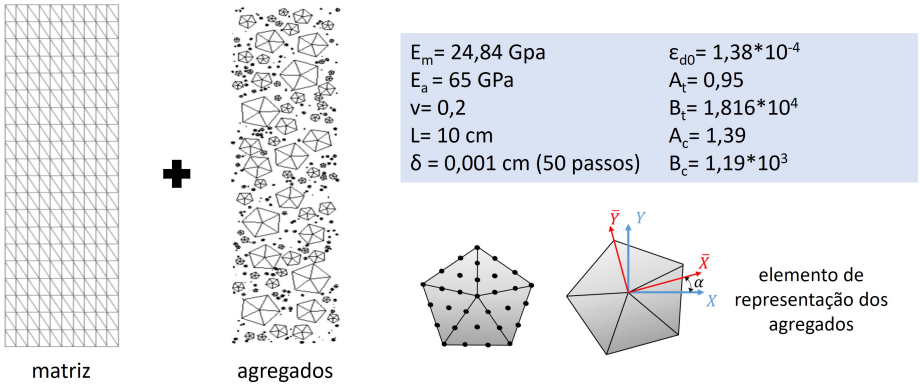
As partículas foram criadas e dispersas aleatoriamente sobre a matriz de argamassa. Para tal, foi utilizado um elemento de partícula discretizado por meio de 5 elementos finitos triangulares com aproximação cúbica, contendo 31 nós e 62 graus de liberdade, conforme mostra a Figura 4.14.

As partículas foram geradas com posições e rotações arbitrárias, evitando a sua sobreposição. A discretização do concreto foi feita de modo análogo ao que foi realizado no terceiro exemplo numérico apresentado no *Capítulo* 4. Quanto às propriedades mecânicas, o módulo de elasticidade empregado foi de $E_p = 65$ *GPa*, e coeficiente de Poisson é de $\nu_p = 0$.

Para a simulação da compressão, o incremento de posição foi de $-0,002$ *cm*, e os parâmetros do modelo de Mazars, associados à lei de evolução de dano, foram obtidos após a calibração com os dados experimentais e considerando a simulação com representação homogênea do concreto, estratégia apresentada com detalhes em Ramos (2020). Após calibração, os dados obtidos foram: $A_T = 0,95$, $A_C = 1,39$, $B_T = 1,816 \times 10^4$, $B_C = 1,19 \times 10^3$ e $\varepsilon_{d0} =$

$1,06 \times 10^{-4}$. Para a simulação em mesoescala, os parâmetros de dano A_T, B_T, A_C e B_C, não foram alterados, porém o valor da deformação crítica precisou ser ajustada para $\varepsilon_{d0} = 1,38 \times 10^{-4}$. As análises foram conduzidas considerando 50 passos de incremento de deslocamento.

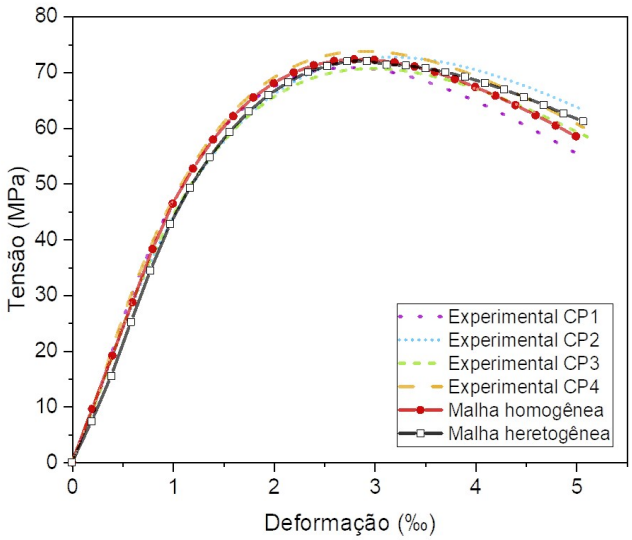
Figura 4.14 – Discretização em mesoescala do sólido simulado.



Fonte: Própria autoria.

Na Figura 4.15 são apresentados os resultados numéricos obtidos nas simulações com as representações homogênea e heterogênea, e os resultados obtidos nos quatro ensaios realizados.

Figura 4.15 – Curva tensão versus deformação dos corpos de prova ensaiados.



Fonte: Própria autoria.

Na Figura 4.16 são apresentados os mapas de deslocamentos horizontal e vertical, do corpo de prova, para o passo 40 de incremento de deslocamento. Considerando ainda o passo 40, na Figura 4.17 são apresentados os mapas de tensão horizontal e vertical.

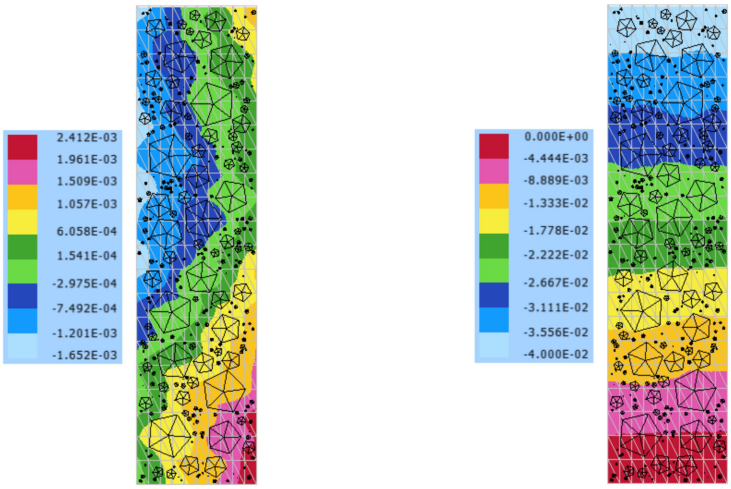
Dos resultados obtidos, assim como os dispostos na Figura 4.15, é possível observar que a tensão de pico foi coerentemente captada nas simulações numéricas, independente da representação ser homogênea ou heterogênea, e que as curvas tensão versus deformação, obtidas

nas simulações, se inserem dentro de um espectro de respostas gerado pelas quatro curvas experimentais.

Ao avaliar as duas simulações, observou-se que a discretização homogênea gerou um elemento menos rígido, e com mais deformabilidade. No entanto a diferença percentual média entre as duas simulações foi de $2,14\%$, demonstrando que ambas as simulações representam de modo semelhante o comportamento físico não-linear do concreto.

Figura 4.16 – Mapeamento dos deslocamentos no concreto.

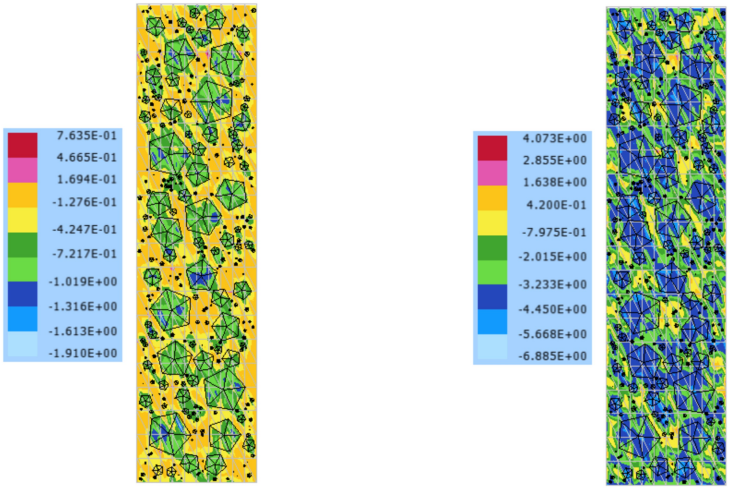
(a) Deslocamento horizontal (cm). **(b)** Deslocamento vertical (cm).



Fonte: Própria autoria.

Figura 4.17 – Mapeamento das tensões no concreto.

(a) Tensão horizontal (kN/cm^2). **(b)** Tensão vertical (kN/cm^2).

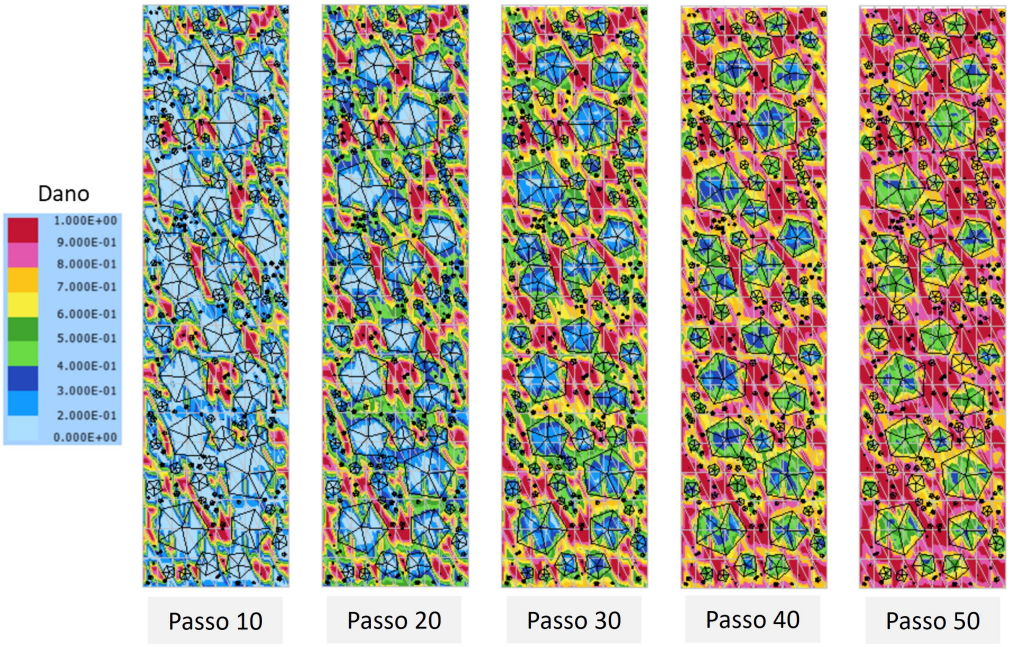


Fonte: Própria autoria.

Observou-se uma concentração de tensão na região de interface entre matriz de argamassa e os agregados, conforme se vê na Figura 4.17a. A distribuição do dano nos elementos simulados

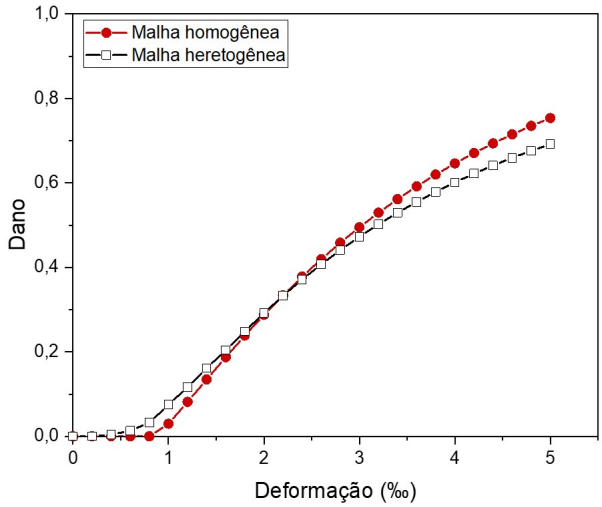
é representada por meio de mapa de cores, sendo disposta na Figura 4.18. Já na Figura 4.19 apresenta-se a evolução do dano para os incrementos de 10, 20, 30, 40 e 50, do corpo de prova simulado em mesoescala.

Figura 4.18 – Mapeamento da variável de dano nos elementos de concreto.



Fonte: Própria autoria.

Figura 4.19 – Evolução do dano no concreto.



Fonte: Própria autoria.

Ao avaliar a evolução do dano, constatou-se que o concreto representado como um sólido heterogêneo apresentou maior deformabilidade, comparado com o sólido simulado em mesoescala. Ademais, verificou-se que, na fase física não-linear, o concreto simulado com

elementos de partículas apresentou níveis de carga superiores ao obtido na simulação homogênea. Este comportamento é atrelado ao enrijecimento local proporcionado pelos elementos de partículas, que promovem uma distribuição da danificação material nas regiões que circundam as partículas.

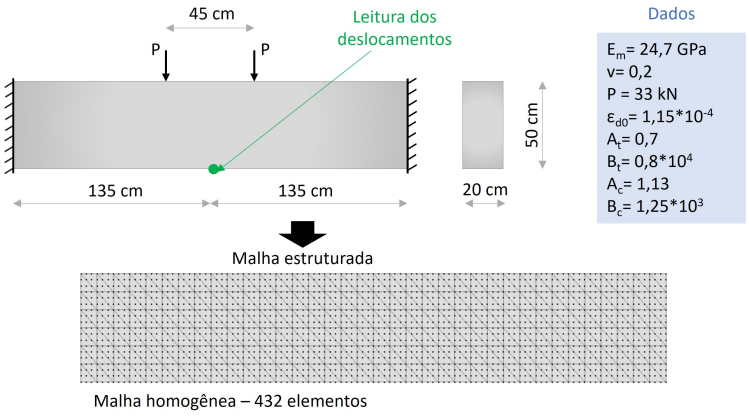
Diante dos resultados obtidos e das discussões realizadas, é possível verificar a eficiência do código na representação do concreto via lei de evolução de dano de Mazars. Ademais, verifica-se que o emprego da técnica de embutimento possibilita a modelagem numérica da não linearidade física de compósitos reforçados com partículas, considerando satisfatoriamente a existência de diferentes fases.

4.3.2 *Viga - Análise de performance dos elementos fantasmas*

Avalia-se neste exemplo a estratégia numérica desenvolvida para otimizar o tempo de processamento despendido em análises físicas não-linear, via mecânica do dano contínuo. A estratégia numérica proposta utiliza elementos fantasmas dispersos na matriz para descrever a região na qual o dano é analisado.

A fim de analisar a técnica, simulou-se o ensaio de flexão em quatro pontos em uma viga bi-engastada de concreto. Os resultados obtidos na simulação são comparados com os obtidos por Guello (2002) e Pituba e Lacerda (2012). Este problema foi previamente apresentado em Proença, Papa e Maier (1991), e foram empregados os mesmos dados da referência, onde o concreto foi simulado como um material homogêneo. Na Figura 4.20 é representada a viga simulada, de dimensões 20x50x270 cm, com as condições de contorno do ensaio.

Figura 4.20 – Detalhamento da viga de concreto.



Fonte: Própria autoria.

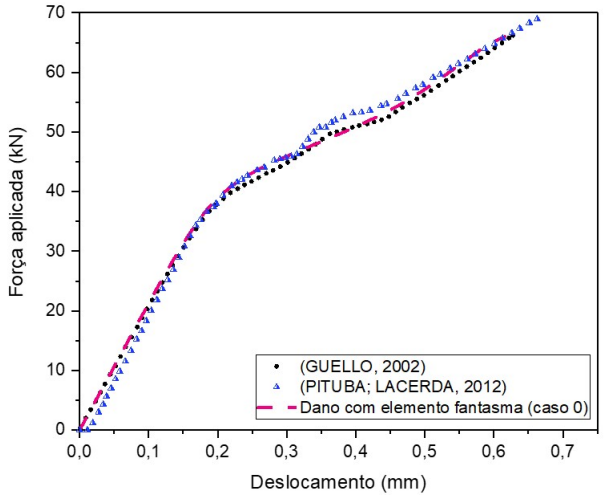
A discretização da viga de concreto foi feita considerando uma malha estruturada, com 2071 nós e 432 elementos triangulares com ordem de aproximação cúbica. A análise da viga foi realizada com controle de carga, com 50 passos de 1 kN.

Inicialmente, para demonstrar que a estratégia numérica para avaliação do dano com malha fantasma foi implementada coerentemente, simulou-se a viga empregando uma malha

fantasma com elementos coincidentes com a malha da matriz. A malha da matriz é apresentada na Figura 4.20. Note que para este caso, o qual foi denominado de caso 1, todos os elementos da matriz são danificados podem sofrer danificação.

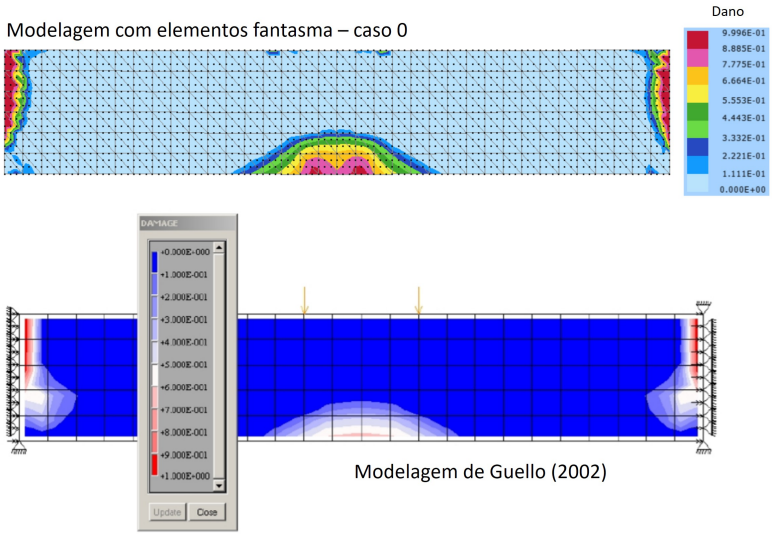
Na Figura 4.21 apresentam-se as curvas da força total aplicada versus deformação vertical, para a simulação do caso 1 e os resultados obtidos em Guello (2002) e Pituba e Lacerda (2012). A Figura 4.22 apresenta a distribuição do dano para a carga total de 52 kN, obtidas para o caso 1, e na modelagem realizada por Guello (2002).

Figura 4.21 – Curva força aplicada versus deslocamento.



Fonte: Própria autoria.

Figura 4.22 – Distribuição do dano.



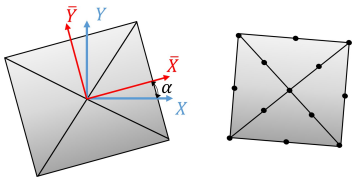
Fonte: Própria autoria.

Da Figura 4.21 é possível observar que os resultados obtidos são equivalentes aos de Guello (2002) e Pituba e Lacerda (2012), demonstrando que a não linearidade física foi

coerentemente representada com o uso de elementos fantasmas. Ao comparar as curvas, observou-se pequenas diferenças entre os resultados obtidos neste trabalho e os da literatura. As diferenças ocorreram pelos diferentes modelos usados nas modelagens. Neste trabalho, foi empregado o MEFP com a não linearidade física determinada via modelo de dano de Mazars. Nos trabalhos de Guello (2002) e Pituba e Lacerda (2012) foi empregado o método dos elementos finitos convencional. Além disso, em Pituba e Lacerda (2012) foi usado um modelo de dano anisotrópico, e em Guello (2002) o modelo de dano de Mazars.

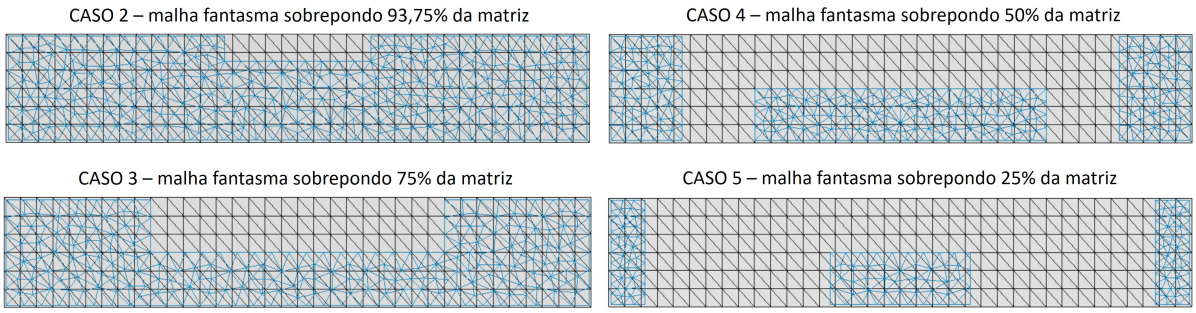
Dando continuidade nas análises, simulações numéricas foram conduzidas com 10 diferentes malhas fantasmas, com o propósito de avaliar a capacidade de otimização do tempo de processamento ao empregar a estratégia. Para a criação das malhas fantasmas, duas estratégias foram utilizadas: (i) as malhas foram criadas de modo a concentrar os elementos nas regiões em que são esperadas as maiores concentrações de dano na viga (ver Figura 4.22); e (ii) elementos fantasmas foram dispersos aleatoriamente na matriz, com partículas retangulares (ver Figura 4.23), considerando diferentes proporções da área superficial da matriz. Para todos os casos, foram considerados elementos finitos triangulares com ordem de aproximação quadrática. Nas Figuras 4.24 e 4.25 são apresentadas, respectivamente, as malhas com elementos fantasmas para os casos com elementos concentrados e dispersos aleatoriamente. Para facilitar a visualização dos elementos fantasmas, os mesmos foram representados na cor azul.

Figura 4.23 – Partículas usadas para representar elementos fantasmas dispersos na matriz.



Fonte: Própria autoria.

Figura 4.24 – Malhas com elementos fantasmas dos casos 2-5.

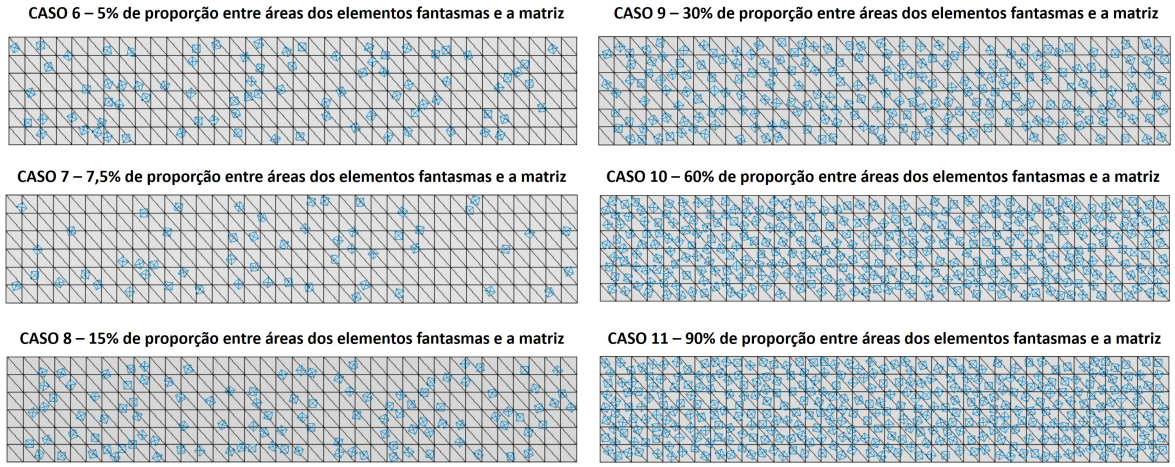


Fonte: Própria autoria.

Diante das diferentes malhas usadas, apresentadas nas Figuras 4.24 e 4.25, os resultados obtidos nas simulações foram comparados tendo como base a curva força versus deslocamento do caso 1. Para avaliar a redução do tempo de processamento das simulações computou-se o

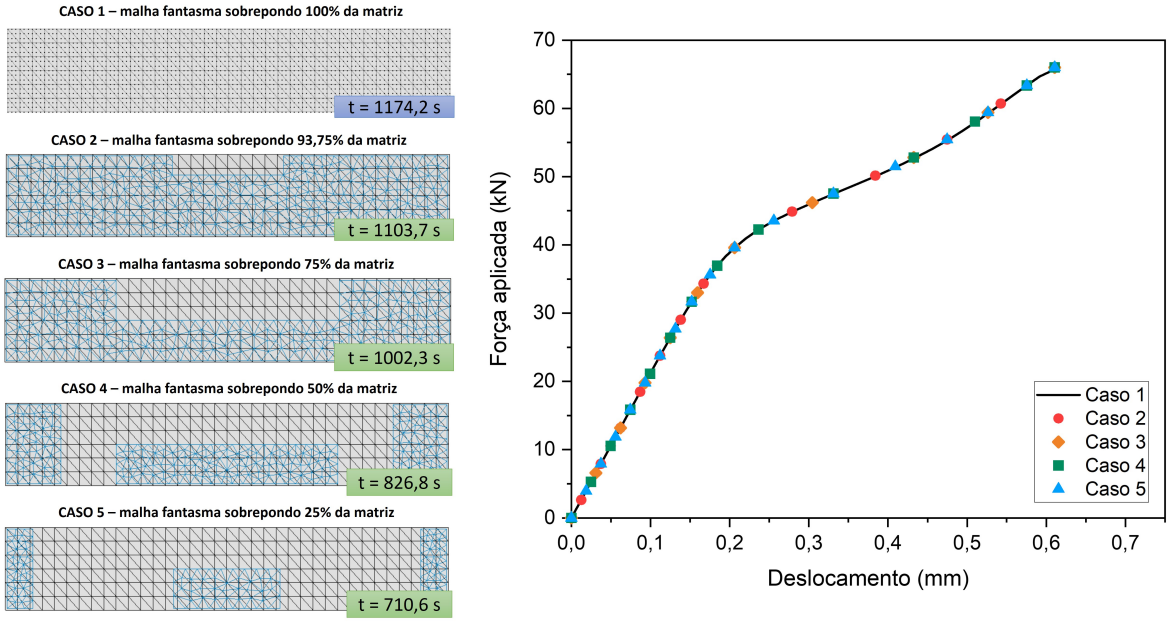
tempo despendido em cada modelagem. Comenta-se que, em todas as simulações, as mesmas condições de processamento foram empregadas, sendo contabilizado apenas para os processos de cálculos. A Figura 4.26 apresenta os resultados obtidos nas simulações com as malhas dos casos 1-5.

Figura 4.25 – Malhas com elementos fantasmas dos casos 6-11.



Fonte: Própria autoria.

Figura 4.26 – Curva força versus deslocamento e tempo - Casos 1-5.

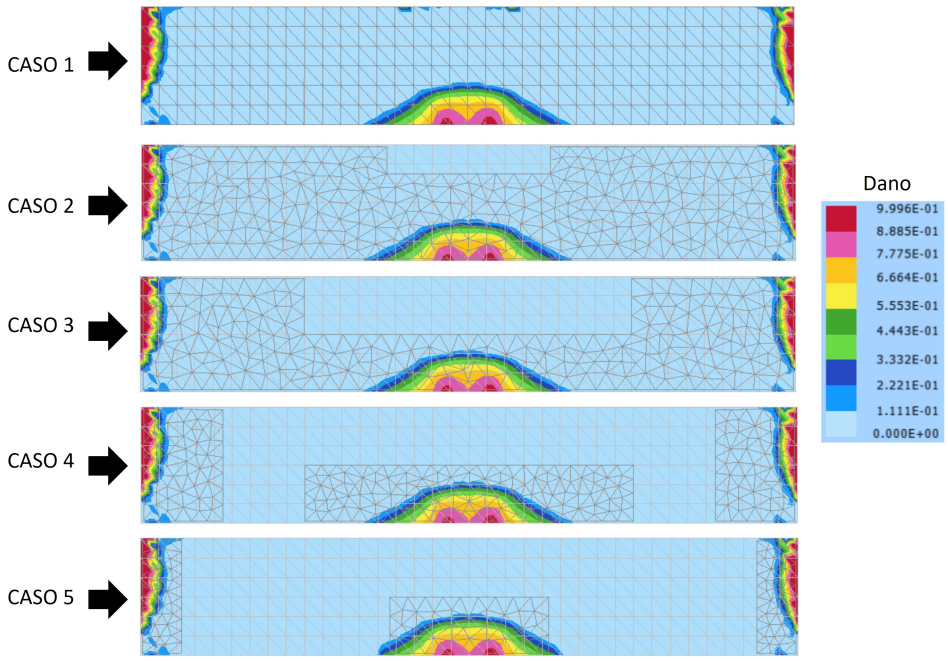


Fonte: Própria autoria.

Da Figura 4.26 é possível observar que, em todos os casos, o comportamento mecânico da viga foi coerentemente modelado. Dos resultados obtidos para os casos 2-5, o caso 5 foi o que apresentou a maior diferença percentual absoluta média para os deslocamentos $(0,16\%)$, ao

comparar com os deslocamentos do caso 1. Na Figura 4.27 são apresentados os mapas de cores com a distribuição do dano, onde observa-se que a distribuição foi semelhante em todos os casos.

Figura 4.27 – Distribuição do dano na viga - Casos 1-5.



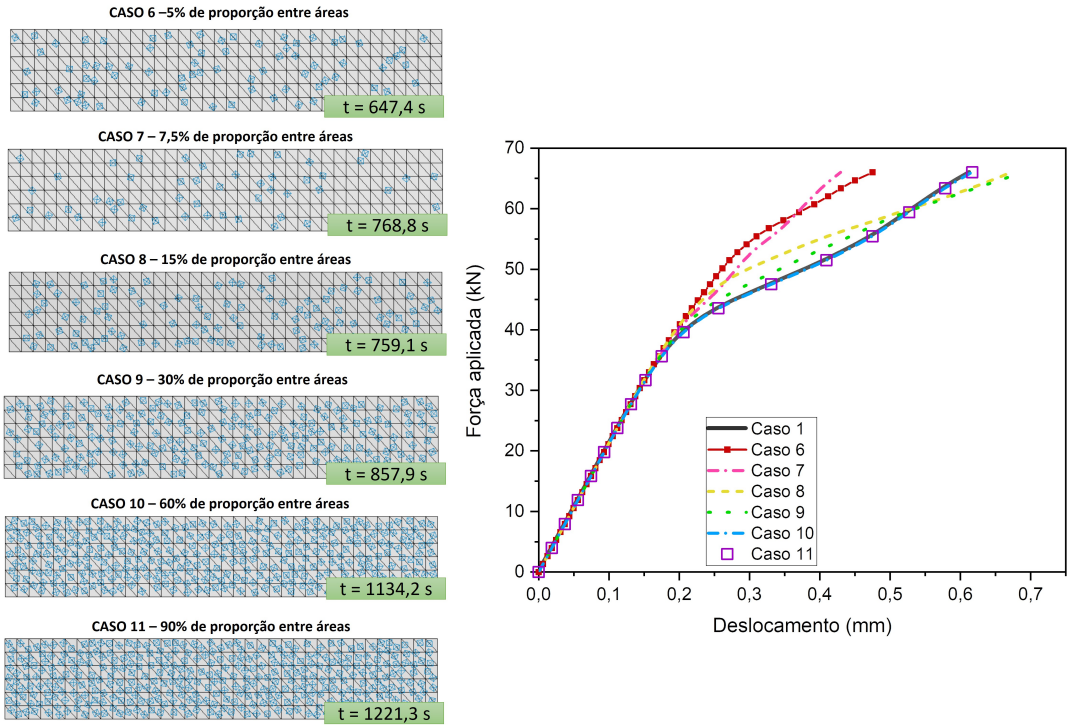
Fonte: Própria autoria.

Considerando os tempos despendidos nas simulações dos casos 1-5 (ver Figura 4.26), é possível inferir que o uso de elementos fantasmas com áreas inferiores à área da matriz geram reduções no tempo de processamento do código. As reduções do tempo de processamento, obtidas nos casos 2, 3, 4 e 5, foram respectivamente de 6%, 14,6%, 29,6% e 39,5%. Com os resultados obtidos nos casos 2-5, verificou-se que o uso de malhas fantasmas posicionadas em regiões específicas apresenta um alternativa eficiente para a otimização do tempo de processamento do código, logicamente para problemas onde se conhece a priori as regiões de concentração de dano.

Na sequência são avaliadas as vigas usando malhas fantasmas geradas com diferentes quantidades de elementos dispersos aleatoriamente na matriz (Figura 4.23). As malhas foram criadas com o objetivo de mostrar que as malhas fantasmas também podem ser empregadas para a redução do tempo de processamento em análises de dano, onde não se conhecem à priori as regiões de dano. Desse modo, na Figura 4.28 são apresentadas as curvas força versus deslocamento dos casos 6-11, as quais foram comparados com os resultados do caso 1. Na mesma figura também são apresentados os tempos de processamento despendidos nas simulações. A Figura 4.29 apresenta as distribuições do dano para os seis casos.

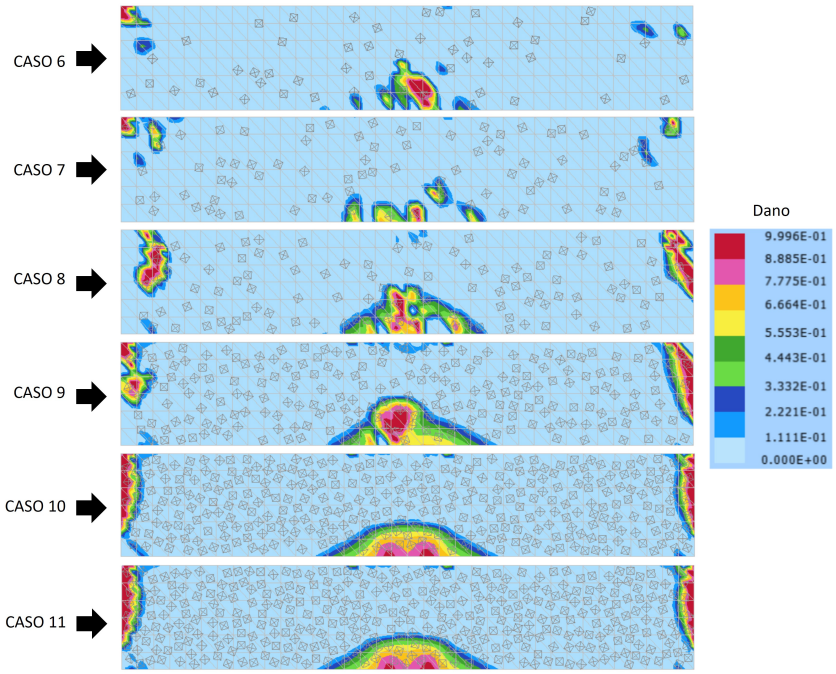
Da Figura 4.28 observa-se que nem todos os casos apresentaram bons resultados, e que os resultados melhoram a medida em que se aumenta o número de elementos fantasmas utilizados. A diferença percentual absoluta média entre os deslocamentos obtidos no caso 1 e nos casos 6 a 11 é, respectivamente, de 21,05%, 19,22%, 7,63%, 3,30%, 0,16% e 0,15%.

Figura 4.28 – Curva força versus deslocamento e tempo - Casos 6-11.



Fonte: Própria autoria.

Figura 4.29 – Distribuição do dano na viga - Casos 6-11.



Fonte: Própria autoria.

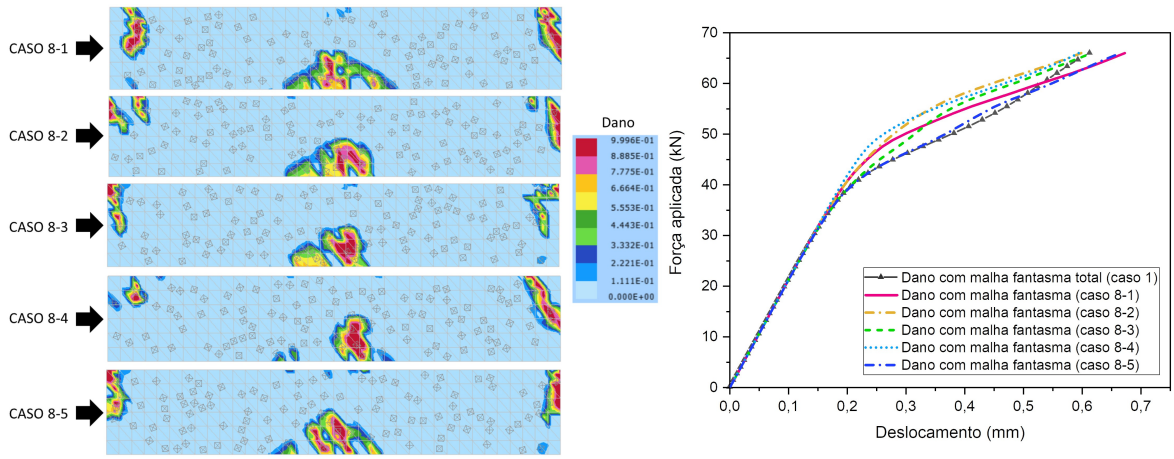
Ao avaliar o tempo despendido nas simulações dos casos 6-11, em conjunto com resultados referentes ao comportamento mecânico da viga, verificou-se que a discretização

do caso 9 gerou resultados satisfatórios, apresentando uma otimização de $18,42\%$ no tempo de processamento do código. Estes resultados indicam que a estratégia proposta também pode ser empregada em estruturas onde não se conhecem as regiões de localização do dano.

No que se refere à distribuição do dano, considerando os casos 8 e 9, observou-se que mesmo a distribuição do dano não apresentando o mesmo perfil observado em uma simulação onde todos os elementos da matriz são danificados, as vigas apresentam um comportamento mecânico próximo ao do caso 1, e que o uso de elementos dispersos aleatoriamente, pode ser empregado para uma primeira análise, em elemento estruturais mais complexos, para investigar as áreas de localização do dano. Essa estratégia permite, definir uma malha fantasma que proporcione melhor aproximação da distribuição do dano, mantendo a redução no tempo de processamento.

Neste ponto cabe destacar que os resultados obtidos nas simulações com elementos fantasmas dispersos aleatoriamente na matriz são altamente dependentes do perfil de distribuição dos mesmos. A fim de demonstrar essa condição, simulou-se novamente a viga discretizada com a malha do caso 8, considerando quatro novas configurações de distribuição (casos 8-1 a 8-5). Em todos os casos os elementos foram dispersos aleatoriamente na matriz, mantendo apenas a fração volumétrica. A Figura 4.30 apresenta os resultados obtidos para as curvas força versus deslocamento e o perfil de distribuição do dano.

Figura 4.30 – Resultados com obtidos ao alterar a posição dos elementos fantasmas do caso 8.



Fonte: Própria autoria.

Avaliando a Figura 4.30, é possível observar a aleatoriedade dos resultados obtidos com o uso da mesma quantidade de elementos fantasmas, demonstrando que os resultados são altamente dependentes da posição dos elementos fantasmas.

Ao avaliar a distribuição do dano, também é possível identificar que a mesma alterna de acordo com o perfil de distribuição dos elementos fantasmas. No entanto, observou-se que mesmo a distribuição do dano não apresentando o mesmo perfil observado em uma simulação onde todos os elementos da matriz são danificados, algumas curvas força versus deslocamento apresentaram um perfil semelhante ao do caso 1. Citam-se como exemplos os casos 8-2 e 8-5,

onde o primeiro obteve os piores resultados, apresentando uma diferença percentual absoluta média de $15,72\%$ em relação ao caso 1, e o caso 8-5 que apresentou os melhores resultados, gerando uma diferença percentual absoluta média de $2,83\%$ com o caso 1.

Por fim, na Figura 4.31 são apresentados os valores do erro absoluto médio - *MAE* (Equação 4.76), raiz do erro médio quadrático - *RMSE* (Equação 4.77) e erro percentual absoluto médio - *MAPE* (Equação 4.78), obtidos ao comparar os casos 2 a 11 com o caso 1.

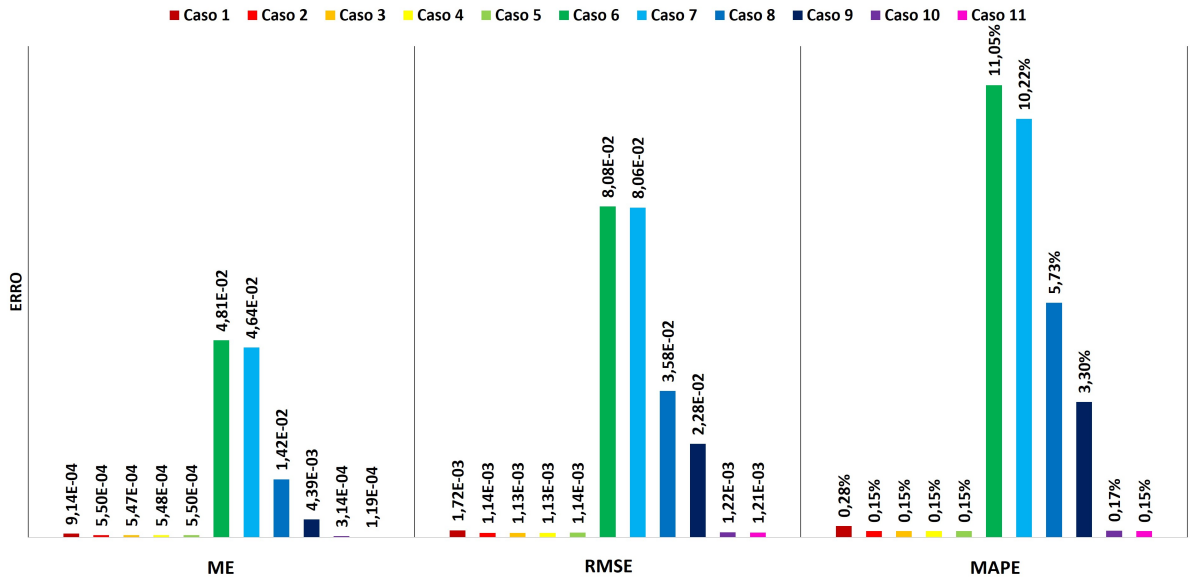
$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|}{n} \tag{4.76}$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}{n}} \tag{4.77}$$

$$MAPE = \frac{100\%}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{y_i - x_i}{n} \right| \tag{4.78}$$

em que *MAE* é o erro absoluto médio, *RMSE* é a raiz do erro médio quadrático, *MAPE* é o erro percentual absoluto médio, y_i é o valor de referência, x_i é o valor calculado, n é o número de amostras.

Figura 4.31 – Medidas de erros associadas aos resultados dos casos 2 a 11 em relação ao caso 1.



Fonte: Própria autoria.

Dos resultados dispostos na Figura 4.31, observa-se que, independente da medida de erro, o uso de malha fantasma se mostra eficiente para a representação da não linearidade física. Ademais, diante dos resultados obtidos, demonstra-se que a estratégia numérica se apresenta como uma solução alternativa e eficiente para a redução do tempo de processamento despendido

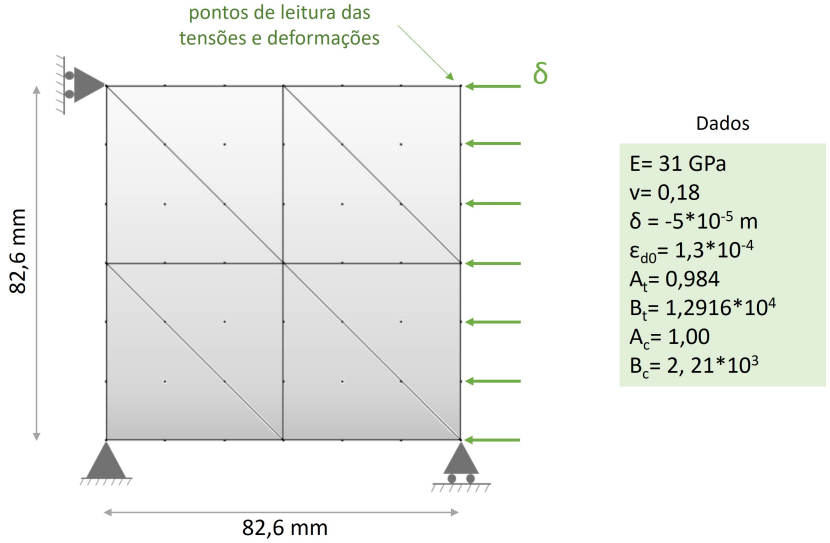
em análises mecânicas que considera a não linearidade física do material, ao utilizar o método dos elementos finitos posicional. A malha fantasma configura ainda uma estratégia que possibilita a realização de estudos numéricos para a determinação dos pontos de concentração de dano em estruturas com elevado número de elementos e/ou complexas, com reduzido tempo de análise.

4.3.3 Compressão cíclica - Curva de trajetória

Este exemplo possui o propósito de avaliar as modificações realizadas no modelo de dano de Mazars para que o mesmo representasse carregamentos cíclicos, captando coerentemente o comportamento mecânico do sólido simulado.

Para avaliar a capacidade de representação do comportamento mecânico de sólidos submetidos a cargas cíclicas, modelou-se um ensaio de compressão direta cíclica em um elemento cúbico de concreto que foi analisado experimentalmente por Karsan e Jirsa (1969). Na Figura 4.32 são apresentadas as propriedades geométricas, condições de contorno da simulação e os parâmetros de dano.

Figura 4.32 – Propriedades geométricas e condições de contorno do sólido.



Fonte: Própria autoria.

O elemento de concreto foi discretizado por oito elementos triangulares, com ordem de aproximação cúbica. Este problema foi modelado por (NGUYEN, 2005), onde foram utilizados quatro elementos finitos retangulares, do tipo chapa, com aproximação linear. Recentemente, Pereira e Penna (2022) simularam o mesmo problema empregando 16 elementos retangulares, do tipo chapa, também com ordem de aproximação linear.

Neste trabalho, a simulação foi realizada considerando 5000 passos de deslocamento, com incrementos de $-5,0 \times 10^{-2}$ mm. Os ciclos de carregamento e descarregamento foram impostos considerando o critério de deslocamento, com tolerância de 10^{-4}. Conforme descrito

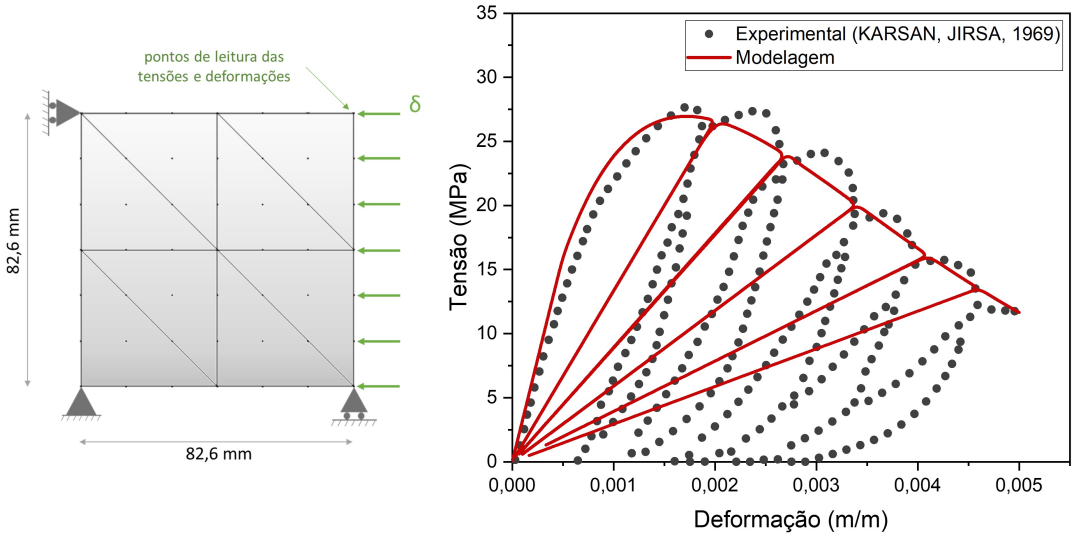
neste capítulo, a definição dos ciclos é feita por meio do controle de carga/deslocamento, empregando leis de descarregamento e recarregamento secante.

De acordo com Pereira e Penna (2022), os parâmetros mecânicos empregados para o ensaio numérico são: módulo de elasticidade $E = 31$ GPa, coeficiente de Poisson de $\upsilon = 0,18$, resistência à compressão $f_c = 27,6$ MPa, resistência à tração de $f_c = 2,7$ MPa.

Para realizar a análise da não linearidade física, usando o modelo de dano de Mazars, se fez necessário definir a priori os valores dos parâmetros de dano. Assim, foram realizadas análises de convergência com a curva de envoltória do ensaio de compressão cíclica, onde foram determinados os parâmetros de dano da modelagem: $A_C = 1,00$, $B_C = 2,21 \times 10^3$, $A_T = 0,984$, $B_T = 1,2916 \times 10^4$ e $\varepsilon_{d0} = 1,3 \times 10^{-4}$.

Os resultados obtidos na simulação estão dispostos na Figura 4.33, onde os mesmos foram confrontados com os resultados experimentais de Karsan e Jirsa (1969).

Figura 4.33 – Curva tensão versus deformação no comportamento cíclico.



Fonte: Própria autoria.

Diante dos resultados, é possível observar que o modelo representou coerentemente os inícios dos trechos de descarga, empregando a estratégia secante de descarregamento e recarregamento, mesmo não sendo possível determinar as deformações permanentes de cada ciclo. As deformações residuais não foram captadas devido às simplificações impostas na modelagem com o modelo de dano de Mazars, que não considera as deformações residuais.

No que se refere à representação dos laços de histerese dos ciclos de carga e descarga, o modelo gerou um comportamento semelhante ao observado experimentalmente, validando a estratégia numérica implementada. As diferenças observadas podem ser relacionadas às dificuldades de se parametrizar os modelos de descarregamento e recarregamento a partir das propriedades do material, definidas com base em ensaios monotônicos. Este mesmo comportamento foi observado em Pereira e Penna (2022), onde os autores empregaram outras leis de carregamento e descarregamento, verificando que independentemente da estratégia empregada na representação

dos diferentes trechos que definem um ciclo, os laços de histerese não são representados com fidelidade.

4.4 Conclusão do capítulo

Neste capítulo foram apresentadas as formulações implementadas para a representação da não linearidade física do concreto, considerando o material como um meio monofásico ou bifásico (constituído da matriz de argamassa e agregados graúdos). Para a avaliação do dano, empregou-se o modelo de dano escalar de Mazars (1984). O modelo foi aplicado para a simulação do comportamento mecânico da matriz de concreto. Como a análise do dano pode levar a um alto tempo de processamento do código, desenvolveu-se uma nova estratégia numérica que emprega elementos fantasmas embutidos na matriz, onde o dano é calculado nos elementos fantasma, sendo em seguida distribuído nos elementos da matriz.

Sabendo que o modelo de dano escalar de Mazars (1984) foi concebido para a avaliação de carregamentos monotonicamente crescentes, modificações foram realizadas na formulação de modo que o mesmo proporcionasse a simulação de sólidos sujeitos a cargas cíclicas. A representação dos ciclos foi feita considerando critérios de carga ou deslocamento limite, empregando a estratégia de descarregamento e recarregamento com rigidez secante.

A fim de validar e avaliar a aplicabilidade do código, diversos problemas foram modelados, mostrando que o mesmo está apto a representar o comportamento físico não linear de sólidos submetidos a solicitações quase-estáticas ou cíclicas.

Ao avaliar a estratégia de representação do dano com elementos fantasmas, os resultados mostraram que a técnica se mostra eficiente para a representação da não linearidade física. Ademais, demonstrou-se que a estratégia numérica se apresenta como uma solução alternativa e eficiente para a redução do tempo de processamento despendido em análises da não linearidade física do material, ao utilizar o método dos elementos finitos posicional.

Por fim, comenta-se que o código desenvolvido permite simular ensaios de compressão cíclica direta, onde o objetivo é representar a envoltória da curva tensão versus deformação do ensaio de compressão estática associada à compressão cíclica direta, onde não se observa o fenômeno da fadiga. Porém, como deseja-se simular a fadiga no concreto, determinando o dano acumulado nos ciclos de carregamento, faz-se necessário, determinar uma lei de evolução do dano, para depois inseri-la no código. Desta forma, no próximo capítulo é apresentado um estudo experimental cujo desenvolvimento se deu pela necessidade de obter dados para a formulação de uma lei de evolução do dano em concretos submetidos à compressão cíclica. O modelo desenvolvido, e a aplicação deste, são apresentados no *Capítulo* 6.

CAPÍTULO

5

ESTUDO EXPERIMENTAL DA FADIGA

Com o objetivo de avaliar o comportamento à fadiga do concreto submetido à compressão cíclica, realizaram-se ensaios em concretos com diferentes classes de resistência e sob distintas condições de carregamento. O estudo experimental foi realizado no Laboratório de Estruturas do Departamento de Engenharia de Estruturas, da Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo.

Assim, neste capítulo são apresentados os procedimentos dos ensaios realizados, os materiais empregados e os resultados obtidos. Com os resultados foi possível verificar a influência da frequência de carregamento, do nível de tensão aplicado e da resistência do material, no comportamento da fadiga no concreto. Ademais, os resultados obtidos deram subsídio para o desenvolvimento de formulações para a representação e estimativa da vida útil à fadiga e obtenção de uma lei de evolução do dano acumulado em função do histórico de carregamento.

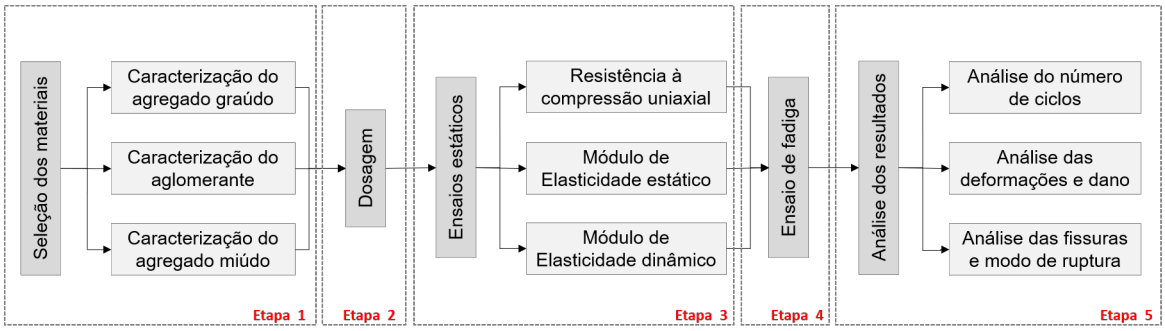
5.1 Programa experimental

O estudo experimental foi desenvolvido considerando cinco etapas, as quais são apresentadas de modo sequencial na Figura 5.1, e referem-se a: i) seleção e caracterização dos materiais empregados na produção dos concreto; ii) dosagem e moldagem dos corpos de prova; iii) ensaios de definição das propriedades mecânicas do material, considerando carregamentos estáticos; iv) ensaio de fadiga à compressão; e v) análise dos resultados.

Os corpos de prova de concretos 30, 50 e 70 MPa foram produzidos com os mesmos materiais, alterando apenas as proporções de cada um. Os concretos são denominados neste texto em função da sua classe de resistência, C30, C50 e C70, onde a resistência é definida no ensaio de compressão estática, aos 28 dias. Para o C30, o concreto foi produzido sem aditivo superplastificante, diferentemente dos demais, onde o produto foi adicionado afim de reduzir a quantidade de água da mistura e aumentar a resistência do concreto.

Todos os ensaios de fadiga foram realizados com as mesmas condições de carregamento,

Figura 5.1 – Metodologia do estudo experimental.



Fonte: Própria autoria.

variando-se apenas suas frequências (0,125, 0,25 e 0,5 Hz) e os níveis máximos de tensão (50% e 70% da resistência à compressão do material). Maiores detalhes acerca da produção dos concretos, materiais empregados e condições de carregamento, são apresentados na sequência.

5.1.1 Seleção e caracterização dos materiais

Neste estudo, para a produção dos concretos empregou-se como aglomerante o cimento Portland CP II Z 32 (por ser o cimento mais empregado na região de São Carlos), composto com pozolana e de classe de resistência de 32 MPa. A massa específica (3,06 g/cm³) e a área superficial específica (3965,00 cm²/g) deste cimento foram determinadas de acordo com a NBR NM 23 (ABNT, 2001) e com a NBR 16372 (ABNT, 2015), respectivamente.

Areia quartzosa e brita 0 de origem basáltica foram utilizadas como agregados miúdo e graúdo, respectivamente. Para a caracterização dos agregados, foram realizados os ensaios de composição granulométrica, massa específica, massa unitária, absorção de água e módulo de finura, cujos resultados são dispostos na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Caracterização física dos agregados.

Propriedades	Agregado miúdo	Agregado graúdo	Normas utilizadas
Massa unitária (kg/dm³)	1,39	1,40	NBR 7251:1982
Massa especifica (kg/dm³)	2,52	2,59	NBR NM 53:2003
Absorção (%)	0,22	1,45	NBR NM 53:2003
Módulo de finura	1,46	-	NBR NM 53:2003

Fonte: Própria autoria.

Quanto à composição granulométrica do agregado miúdo, verificou-se que os dois lotes analisados se encaixavam dentro dos limites granulométricos recomendados pela NBR 7211 (ABNT, 2009) para areia fina. Em relação aos agregados graúdos, com os resultados foi possível definir a dimensão máxima característica de 9,5 mm, correspondente à brita 0.

Para os concretos de classe C50 e C70, foi necessário empregar aditivo superplastificante, que é composto de polímeros orgânicos, comumente empregados como redutores de água, o que

possibilita a redução do fator água/cimento e a dispersão das partículas de cimento, melhorando assim a fluidez dos traços.

Por fim, relata-se que em todas as concretagens foi utilizada água potável proveniente da rede de abastecimento local, sendo dispensável o controle de sua aceitação.

5.1.2 Dosagem e produção dos concretos

Na presente pesquisa foram produzidos concretos considerando três traços, sendo um para o concreto convencional, com resistência característica à compressão igual a 30 MPa, e outros para concretos com 50 e 70 MPa. Para a dosagem, fez-se o uso do método da ABCP com abatimento fixado em (120 ± 20) mm. Na Tabela 5.2 são apresentados os consumo de materiais, para cada um dos traços produzidos.

Tabela 5.2 – Consumo de materiais dos concretos.

Consumo de material em kg/m³	CP30	CP50	CP70
Cimento CP II Z	353,96	395,55	553,43
Agregado miúdo	800,44	1000,76	853,92
Agregado graúdo	1023,68	819,96	826,75
Água	184,19	166,37	168,92
Aditivo	-	2,38	4,41
Relação água/cimento	0,52	0,42	0,30

Fonte: Própria autoria.

O estudo de dosagem foi conduzido considerando curvas de dosagem desenvolvidas pelo grupo de pesquisa em dosagem da professora Dr. Alessandra Lorenzetti de Castro, do Departamento de Estruturas da EESC/USP. Ao todo foram produzidos 240 corpos de prova cilíndricos de 5 cm de diâmetro e 10 cm de altura, sendo 60 para cada um dos concretos C50 e C70, e 120 para o concreto C30. Os concretos foram adensados em mesa vibratória e submetidos à cura com temperatura e umidade controladas até o instante de realização dos ensaios.

5.1.3 Descrição dos ensaios e equipamentos

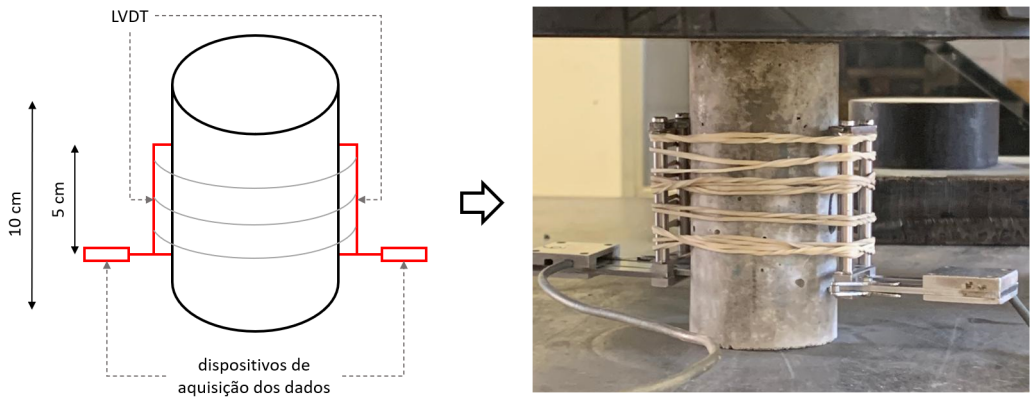
Com o objetivo de avaliar o comportamento do concreto sob cargas cíclicas, inicialmente foram realizados ensaios de caracterização da resistência à compressão e do módulo de elasticidade do material.

Para a caracterização dos concretos, os ensaios de resistência à compressão foram conduzidos aos 28 dias, considerando 6 corpos de prova para cada traço. Também realizaram-se ensaios de resistência à compressão, coeficiente de Poisson e módulos de elasticidade estático e dinâmico no instante de realização dos ensaios de fadiga, os quais foram realizados após 90 dias de cura, para os três traços. Cabe ressaltar que, para o concreto de classe C30, foram realizados os ensaios supracitados em duas idades diferentes. Além dos ensaios aos 90 dias, também foram

realizados ensaios aos 28 dias. Os ensaios foram conduzidos de acordo com as normas NBR 5739 (ABNT, 2007), NBR 8522 (ABNT, 2008) e ASTM E1876 (ASTM, 2021).

Para a realização dos ensaios de resistência à compressão foram testados corpos de prova cilíndricos de 10 cm de altura e 5 cm de diâmetro, em uma máquina servo hidráulica Instron 8805 de capacidade máxima de $\pm$ 1500 kN. Essas dimensões foram determinadas em função da capacidade da máquina em gerar as taxas de carregamentos necessárias para definir os espectros da compressão cíclica. Os acessórios e os extensômetros necessários para os ensaios foram adaptados à máquina em função das características específicas dos corpos de prova e configuração dos ensaios. Para a leitura dos deslocamentos versus carga imposta no ensaio, utilizaram-se dois LVDT posicionados no eixo longitudinal do corpo de prova, conforme Figura 5.2. A máquina utilizada para este ensaio impõe um carregamento compressivo, perpendicular à seção transversal do corpo de prova até que a falha ocorra, sendo possível a determinação da resistência à compressão e o módulo de elasticidade secante e inicial.

Figura 5.2 – Condicões de instrumentação dos corpos de prova no ensaio de compressão.



Fonte: Própria autoria.

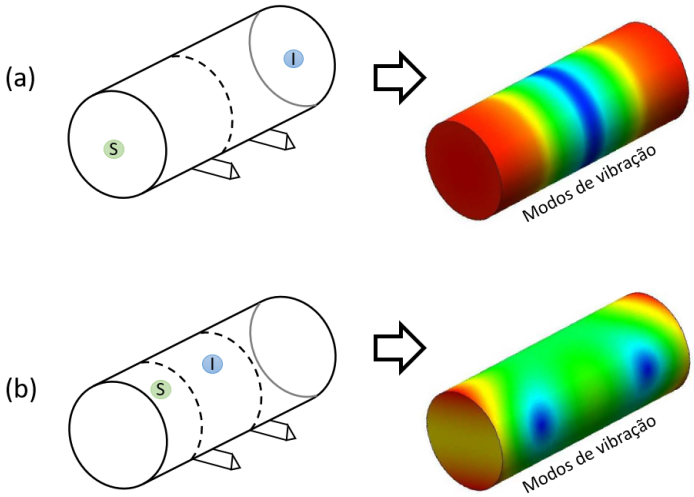
Os ensaios do módulo de elasticidade dinâmico foram realizados por meio da técnica de excitação por impulso (TEI), técnica não destrutiva que permite que o corpo de prova seja empregado em outro ensaio. Este ensaio foi realizado com o propósito de determinar a variação do módulo de elasticidade e o dano correspondente, durante a realização dos ensaios de fadiga.

Para a determinação do módulo de elasticidade via técnica de excitação, faz-se necessário aplicar no corpo de prova os modos de vibração desejados, definindo as condições de contorno que impõe as excitações correspondentes. Neste trabalho foram avaliados os modos de vibração longitudinal e flexional, que tem as condições de contorno representadas na Figura 5.3, onde o ponto *I* refere-se ao local de aplicação do martelo de impacto e *S* é o ponto de leitura do sinal. Na Figura 5.3 é apresentado um mapa de cores referente à intensidade das amplitudes de vibração determinadas em cada modo de vibração. Para a leitura, associa-se à cor vermelha a amplitude máxima, e à cor azul, a amplitude mínima.

De modo geral, no modo de vibração longitudinal, o módulo elástico obtido refere-se à

direção do comprimento do corpo de prova, ou seja, o módulo de elasticidade longitudinal. Já no modo de vibração flexional, o valor obtido para o módulo elástico será idêntico ao obtido no modo longitudinal, desde que os materiais sejam classificados como homogêneos e isotrópicos, caso contrário o resultado obtido diferirá do módulo longitudinal, em função da existência de um gradiente de variação da rigidez interna do material. Deste modo, o módulo obtido no modo flexional se torna útil para avaliar a existência de defeitos no corpo de prova, a exemplo de fissuras ou trincas, uma informação interessante, já que neste trabalho será avaliado o dano decorrente da ação de cargas cíclicas.

Figura 5.3 – Condições de contorno impostas ao corpo de prova para a excitação do modo de vibração (a) longitudinal e (b) flexional.



Fonte: Própria autoria.

O módulo de elasticidade dinâmico e seu respectivo módulo estático, obtido via formulação de Popovics, Zemajtis e Shkolnik (2008) (Equação 5.1), foi determinado em todos os corpos de prova antes do início dos ensaios de fadiga e após a realização de um dado número de ciclos de carregamento, considerando para tal, 20, 40, 60 e 80% do N_f (número médio de ciclos que causa a ruptura da amostra), para cada conjunto de amostras. As amostras são definidas em função das frequências de carregamento, resistência à compressão do concreto e nível máximo de tensão aplicado.

$$E_c = 0,107 \cdot E_d^{1,4} \cdot \rho^{-1} \tag{5.1}$$

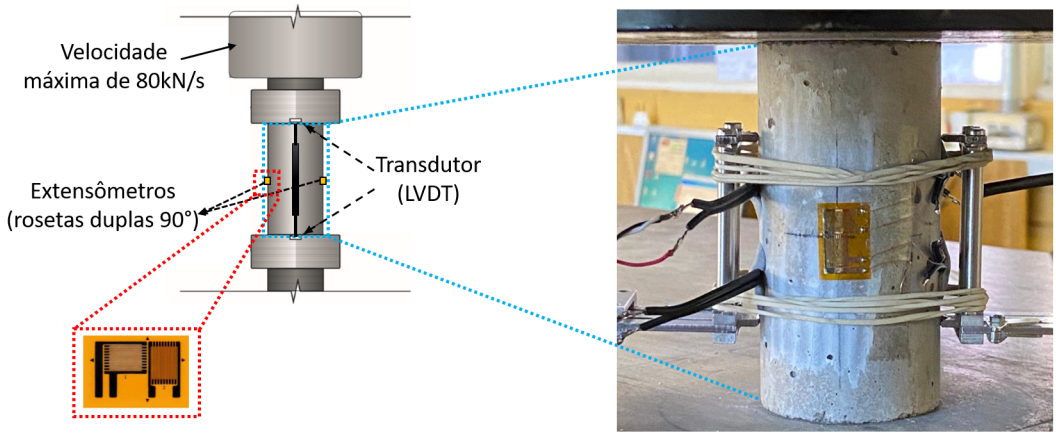
em que E_c é o módulo de elasticidade estático (em Pa), ρ é a densidade do concreto (em kg/m³), E_d é o módulo de elasticidade dinâmico (em Pa).

Para a realização dos ensaios de fadiga por compressão, também foram utilizados corpos de prova cilíndricos de 10 cm de altura e 5 cm de diâmetro em uma máquina servo hidráulica Instron 8805 de capacidade máxima de ± 1500 kN. A escolha dos corpos de prova foi realizada buscando uma dimensão com que a velocidade máxima de carregamento usada nos ensaios fosse

inferior à velocidade máxima suportada pela máquina (80 kN/s), e que possibilitasse a imposição das frequências de carregamento investigadas neste trabalho.

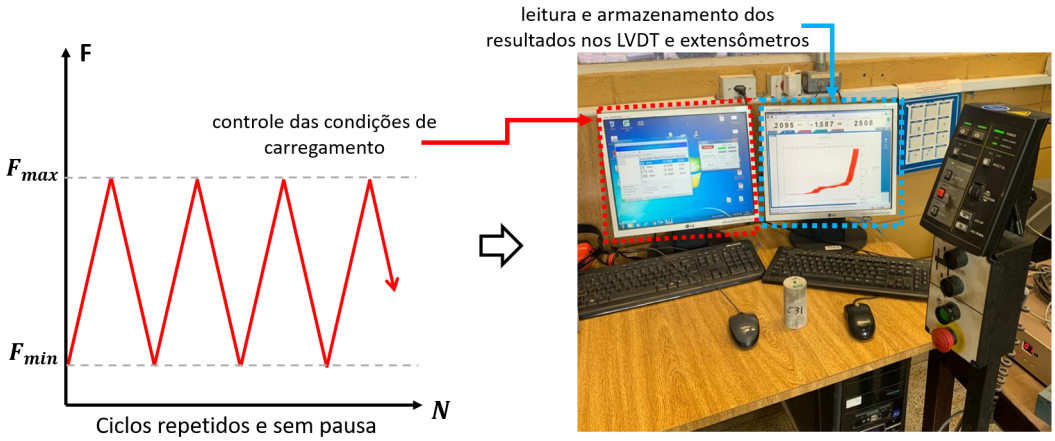
A máquina servo-hidráulica possui controle eletrônico que recebe sinais analógicos de até seis canais diferentes, seja carga, deslocamento ou leitura proveniente de um extensômetro qualquer. A Figura 5.4 apresenta um esquema básico do carregamento cíclico aplicado nos corpos de prova, e mostra uma visão geral da posição dos dois extensômetros do tipo roseta dupla (com direções variando em 90°) e dois LVDT, utilizados nos corpos de prova.

Figura 5.4 – Esquema do posicionamento dos extensômetros e LVDT nos corpos de prova.



Fonte: Própria autoria.

Figura 5.5 – Esquema do carregamento cíclico e sistema de leitura e aquisição dos resultados.



Fonte: Própria autoria.

Os ensaios de fadiga foram conduzidos por meio do controle de carga. Conforme apresentado na Figura 5.5, a definição das cargas máximas e mínimas foi realizada considerando duas configurações distintas, uma para a carga máxima de 50% referente à resistência à compressão estática, e outra para a carga máxima de 70% da resistência do material. Considerou-se nos dois casos a carga mínima nula, preservando em todos os ensaios uma razão entre tensões

mínima e máxima (R) de 0. Assim, o carregamento cíclico foi imposto por meio de uma onda triangular contínua com amplitude fixa.

Para a determinação dos resultados referentes às deformações, obtidos com os LVDT e extensômetros, utilizou-se um sistema de aquisição de dados associado à própria máquina de ensaios, permitindo o armazenamento dos dados em diversas configurações, com diferentes taxas de armazenamento. As taxas variaram em função do teste realizado, compressão quase-estática e compressão cíclica. Para a compressão cíclica, as taxas de armazenamento diferiram em razão da frequência de carregamento aplicada.

Nos ensaios de compressão quase-estática foram armazenados 10 dados por segundos, enquanto nos ensaios de fadiga foram armazenados 120 dados por segundo para ensaios com frequência de $0,5$ Hz, 100 dados por segundo para a frequência de $0,25$ Hz, e 80 dados por segundo para a frequência de $0,125$ Hz.

Foram ensaiados quatro corpos de prova para a determinação do número de ciclos médio necessário para a ruptura por fadiga na compressão (vida útil à fadiga) para cada um dos cenários investigados. Ao todo foram avaliados 24 cenários, que se referem à combinação das três frequências de carregamento ($0,125$, $0,25$ e $0,5$ Hz) com os dois níveis de tensão máxima (50% e 70% da resistência à compressão), para cada um dos quatro lotes de concreto (dois lotes C30, um C50 e um C70, vide Figura 5.6). Comenta-se que neste trabalho foram investigadas apenas baixas frequências de carregamento, devido a limitação dos equipamentos disponíveis no laboratório, que de acordo com o discutido na introdução, ainda limita o estudo da compressão cíclica no concreto.

Os ensaios de fadiga foram conduzidos após 90 dias de cura para três lotes de concretos, sendo um lote para cada uma das classes de resistência avaliadas (C30, C50 e C70). A imposição e consideração dos ensaios após 90 dias de cura se deu por dois fatores:

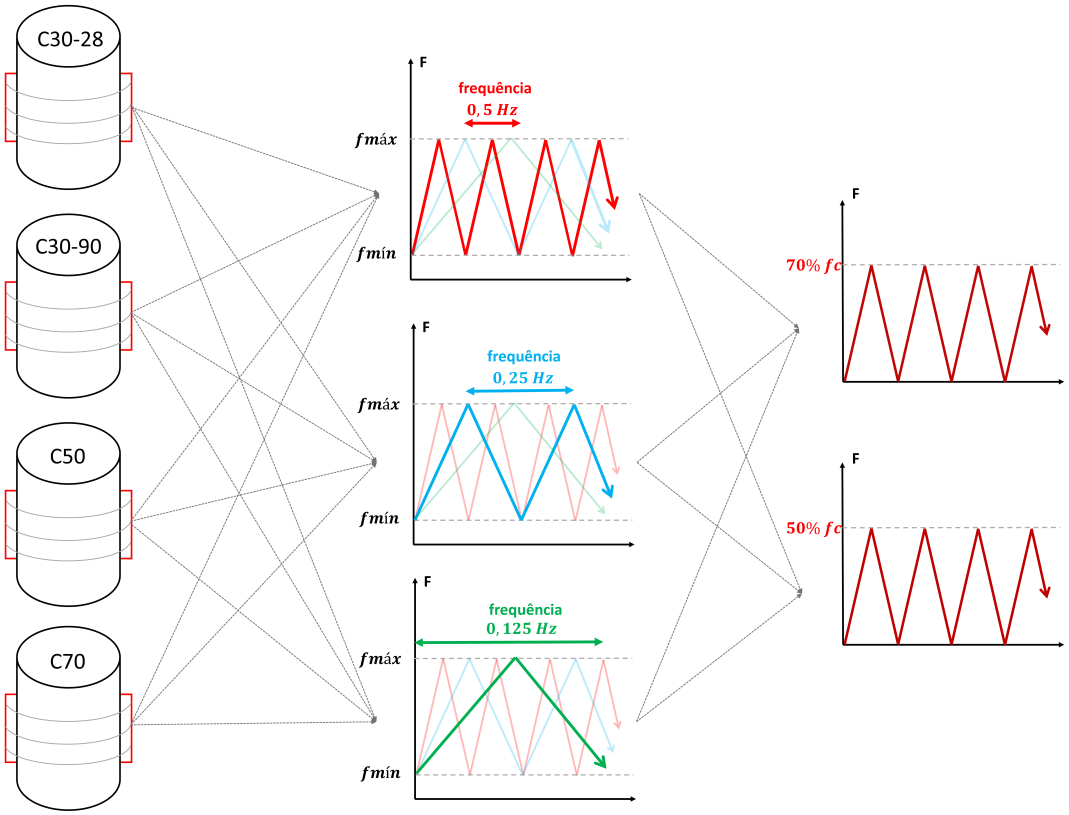
- Os ensaios de fadiga consomem grande tempo de utilização dos equipamentos do laboratório, e como existiam diversas pesquisas ocorrendo de forma concomitante a esta, havia a possibilidade dos mesmos serem interrompidos, promovendo variação significativa das propriedades mecânicas dentro de um mesmo conjunto à exemplo dos ensaios aos 28 dias de cura;

- A fadiga é um fenômeno que ocorre após um determinado período da vida útil das estruturas de concreto, logo seria mais coerente investigar os efeitos das cargas cíclicas após um período de tempo em que o material já possui sua microestrutura bem definida, apresentando baixa flutuação nos valores das propriedades físicas e/ou mecânicas.

Para investigar o efeito da idade no comportamento à fadiga do concreto e demonstrar que a idade de ensaio especificada (90 dias) não interfere nos resultados, o lote de concretos com classe de resistência C30, foi duplicado, sendo produzidos 120 corpos de provas divididos em dois lotes. Cada lote foi ensaiado em um determinado período de tempo, sendo o lote C30-28 ensaiado após 28 dias da moldagem, o lote C30-90 ensaiado após transcorridos 90 dias da

moldagem. De modo a resumir todos os cenários investigados experimentalmente, na Figura 5.6 são apresentados todos os grupos de amostras configurados com os quatro lotes de concretos (C30-28, C30-90, C50 e C70), considerando as diferentes configurações de carregamento investigadas neste trabalho.

Figura 5.6 – Condições de carregamento avaliados experimentalmente na compressão cíclica.



Fonte: Própria autoria.

Para facilitar a leitura dos resultados, utilizou-se a nomenclatura C30-28-SxFyPz, onde C30-28 remete ao lote do concreto, que especifica a resistência e o tempo de ensaio (para o caso do traço C30), Sx refere-se à tensão máxima adotada (S5 para 50% e S7 para 70%), Fy descreve a frequência do carregamento (F125 para 0,125 Hz, F25 para 0,25 Hz e F5 para 0,5 Hz) e, Pz remete-se ao número do corpo de prova (P1, P2, P3 ou P4).

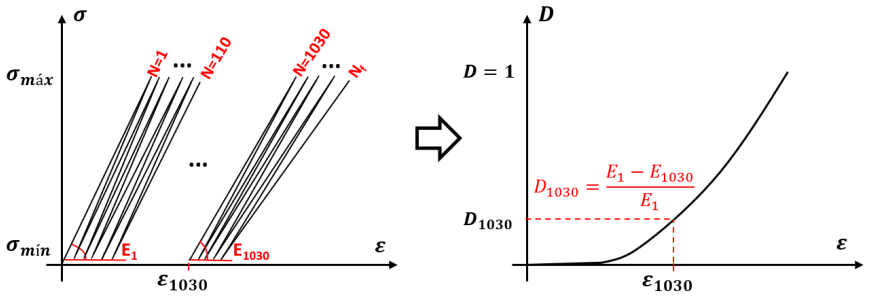
A avaliação do dano em função do número de ciclos foi conduzida após a determinação da vida útil de cada uma das condições de carregamento investigadas. O dano foi mensurado considerando duas distintas estratégias: (i) por meio da avaliação da perda de rigidez do material, avaliando as curvas tensão versus deformação obtidas nos ensaios de fadiga; e (ii) por meio da comparação entre os módulos elásticos dos corpos de prova íntegros e pós submissão a diferentes ciclos de carregamento, instante definido em função da vida útil da amostra (20, 40, 60 e 80% do N_f). Assim, para a análise e determinação do dano, para cada uma das 24 condições de carregamento, quatro corpos de prova foram ensaiados novamente à fadiga, a fim de determinar o nível de dano em função do histórico de carregamento.

De acordo com Lemaitre (2012) a estratégia de estimar o dano considerando as curvas tensão versus deformação é a mais eficiente, sendo o dano ocasionado em um determinado número de ciclos, calculado pela razão entre a variação do módulo no período avaliado e o módulo inicial, conforme Equação 5.2. A Figura 5.7 exemplifica como os dados são extraídos dos gráficos obtidos com o sistema de aquisição de dados, e como será determinada a lei de evolução do dano em função da deformação específica longitudinal do concreto. Destaca-se que foram definidas curvas da evolução do dano em função do histórico de carregamento, considerando o número de ciclos.

$$D = \frac{E_i - E_D}{E_i} \tag{5.2}$$

em que D é a variável de dano, que especifica o nível de dano em que o material se encontra, E_i é o módulo elástico do material no início da análise, e E_D o módulo de elasticidade efetivo do material danificado.

Figura 5.7 – Determinação da evolução do dano em função do histórico de deformações.



Fonte: Própria autoria.

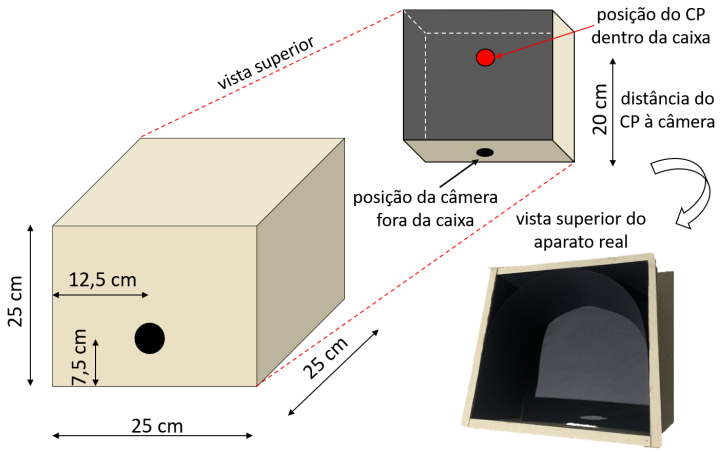
Para a determinação do dano via técnica de excitação, todos os corpos de prova foram submetidos ao ensaio não destrutivo antes da realização dos ensaios de fadiga, sendo determinado o módulo de elasticidade dinâmico do material íntegro. Após a avaliação do módulo no material íntegro, para cada um dos quatro corpos de prova de cada um dos cenários avaliados, as amostras foram submetidas a diferentes números de ciclos de carregamento (20, 40, 60 e 80% do N_f). Ao final do ensaio, os corpos de prova foram novamente submetidos à técnica não destrutiva para determinação do módulo de elasticidade efetivo do material danificado, onde o dano é determinado pela Equação 5.2.

A avaliação do dano por meio da técnica de excitação por impulso foi conduzida neste trabalho a fim de avaliar se o ensaio não destrutivo possibilita uma estimativa eficiente do dano em estruturas de concreto sujeitos à fadiga, e se o mesmo pode ser indicado para a avaliação da vida útil residual de estruturas sujeitas a cargas cíclicas.

Por fim, com o intuito de investigar os modos de ruptura nos corpos de prova devido à ação de cargas cíclicas, e associar o grau de fissuração superficial ao dano, decidiu-se coletar

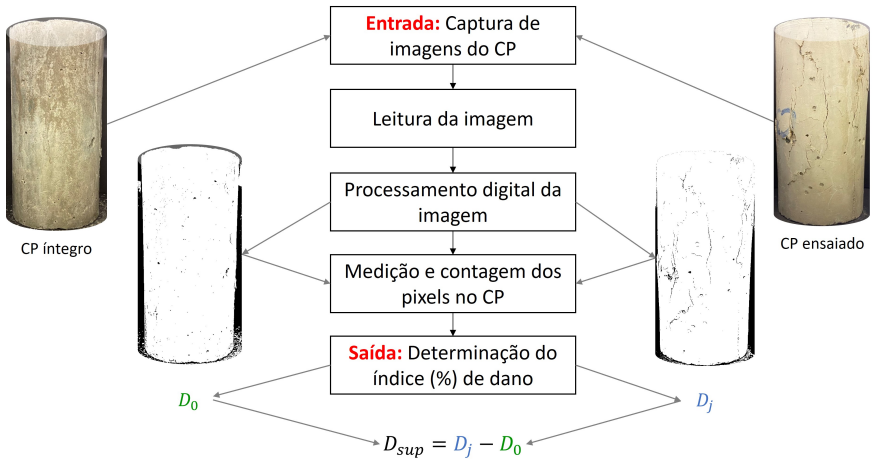
imagens dos corpos de prova utilizados para a avaliação do dano por fadiga na compressão, utilizando uma câmera acoplada à uma caixa preta, confeccionada de acordo com o esquema representado na Figura 5.8. O método adotado neste trabalho para inspecionar o grau de fissuração do concreto foi desenvolvido por Martins, Junior e Belini (2013) (Figura 5.9), e apresenta uma alternativa eficiente e prática para a análise de fissuras superficiais em elementos de concreto, conforme mostram os resultados obtidos pelos autores em uma campanha experimental, onde os valores obtidos pela técnica desenvolvida se mostraram equivalentes aos determinados com softwares que usam técnicas de processamento de imagem.

Figura 5.8 – Sistema do aparato criado para a aquisição das imagens por câmera.



Fonte: Própria autoria.

Figura 5.9 – Metodologia para avaliação da evolução do dano superficial.



Fonte: Própria autoria.

O método desenvolvido por Martins, Junior e Belini (2013) fundamenta-se na aplicação de técnicas de processamento digital no domínio espacial de imagens obtidas por sensores fotográficos, empregando um algoritmo que tem seus processos definidos pelo fluxograma

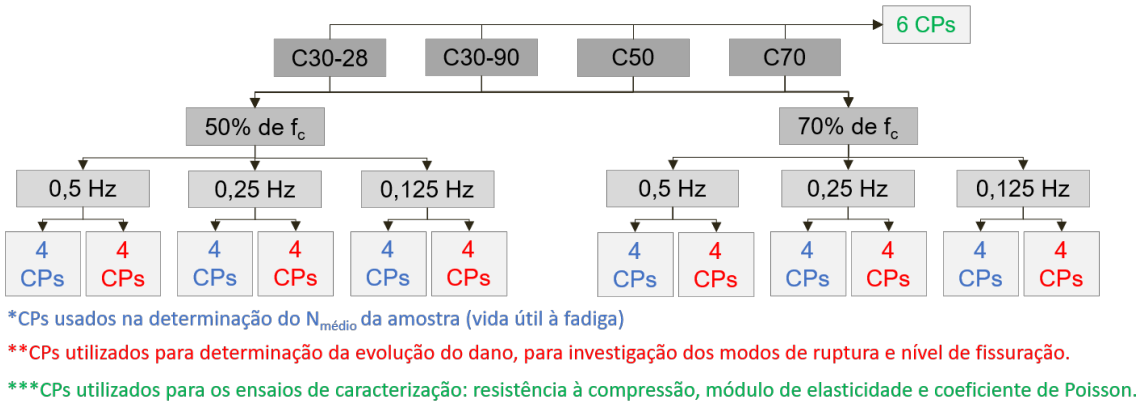
apresentado na Figura 5.9. O método trabalha diretamente na morfologia matemática dos pixeis considerando imagens previamente convertidas em uma matriz binária. Assim, a estratégia principal consiste em estimar o índice (%) de fissuração de um elemento estrutural usando uma matriz binária, para caracterização dos pixeis, onde a imagem é processada e avaliada pelo algoritmo como um sistema de duas cores, uma para o material e outra para os defeitos superficiais do corpo de prova, conforme exemplificado na Figura 5.9.

Destaca-se que, além do método de captação de imagens e avaliação das fissuras apresentados, neste trabalho também foi considerada a avaliação visual destas, considerando para tal o posicionamento de uma filmadora para registrar os ensaios de compressão cíclica. Os vídeos serviram para avaliar o surgimento das primeiras fissuras superficiais e o tempo de sua progressão até o instante de falha do material.

5.1.4 *Resumo do programa experimental*

Na Figura 5.10 é apresentada a quantidade de corpos de prova submetida a cada um dos ensaios conduzidos no programa experimental, considerando os quatro lotes de concretos confeccionados (C30-28, C30-90, C50 e C70), que configuram os 24 cenários investigados.

Figura 5.10 – Resumo do programa experimental.



Fonte: Própria autoria.

5.2 Resultados e discussão

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos na campanha experimental.

5.2.1 *Ensaios de caracterização*

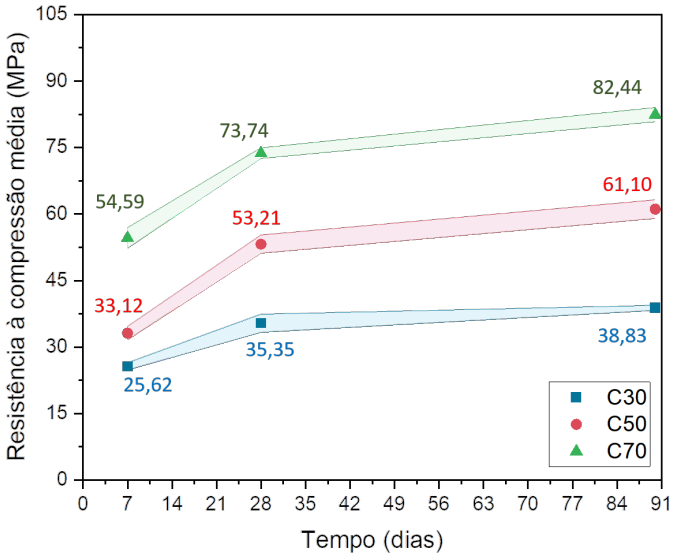
Conforme descrito no início deste capítulo, a caracterização das propriedades mecânicas dos concretos empregados no estudo experimental foi conduzida por meio de ensaios de

resistência à compressão do concreto (f_c), módulo de elasticidade estático (E_c), módulo de elasticidade dinâmico (E_d) e coeficiente de Poisson (υ).

Na Figura 5.11 são apresentadas as médias das resistências à compressão dos concretos, considerando os três instantes de tempo avaliados. As áreas sombreadas no gráfico representam a faixa de valores referente à média mais ou menos o desvio padrão amostral.

É possível observar que os concretos produzidos apresentam níveis de resistência adequadas às classes aos quais foram dosados, e que as amostras apresentam baixos desvios padrão. Estes resultados apontam a existência de uma baixa variabilidade na propriedade mecânica avaliada, característica que pode vir a contribuir para uma baixa variabilidade na avaliação da vida útil à fadiga.

Figura 5.11 – Resistência à compressão média dos concretos.



Fonte: Própria autoria.

Tabela 5.3 – Propriedades mecânicas aos 28 dias do concreto C30-28.

nº da amostra	f_c **(MPa)**	E_c **(GPa)**	E_d **(GPa)**	υ
CP1	38,64	35,10	43,91	0,16
CP2	36,16	34,85	42,94	0,15
CP3	35,27	35,68	44,01	0,16
CP4	34,66	35,59	46,10	0,17
CP5	32,39	35,26	44,22	0,17
CP6	35,04	34,92	42,55	0,15
Média	35,35	35,23	43,95	0,16
Desvio Padrão	2,04	0,34	1,24	0,01

Fonte: Própria autoria.

Na Tabela 5.3 são apresentados os resultados obtidos para todas as propriedades mecânicas avaliadas aos 28 dias nos concretos de lote C30-28. Os dados foram dispostos de modo a

indicar a resistência à compressão, o módulo de elasticidade estático, o módulo de elasticidade dinâmico e o coeficiente de Poisson. Além disso, são descritas as médias e os desvios padrão das propriedades avaliadas. Nas Tabelas 5.4-5.6 são apresentados os resultados dos parâmetros mecânicos que caracterizam os concretos ensaiados aos 90 dias.

Tabela 5.4 – Propriedades mecânicas aos 90 dias do concreto C30-90.

nº da amostra	f_c **(MPa)**	E_c **(GPa)**	E_d **(GPa)**	υ
CP1	39,22	38,38	46,79	0,17
CP2	38,20	32,93	42,12	0,18
CP3	39,22	35,29	43,42	0,17
CP4	39,47	36,24	44,36	0,16
CP5	38,71	35,93	44,55	0,17
CP6	38,20	36,29	44,79	0,17
Média	38,83	35,84	44,34	0,17
Desvio Padrão	0,55	2,26	1,55	0,01

Fonte: Própria autoria.

Tabela 5.5 – Propriedades mecânicas aos 90 dias do concreto C50.

nº da amostra	f_c **(MPa)**	E_c **(GPa)**	E_d **(GPa)**	υ
CP1	61,62	39,14	47,52	0,17
CP2	63,12	36,58	46,59	0,17
CP3	59,11	37,84	46,89	0,16
CP4	60,98	39,10	48,56	0,18
CP5	63,45	37,19	47,08	0,17
CP6	58,35	39,91	49,32	0,17
Média	61,11	38,29	46,89	0,17
Desvio Padrão	2,07	1,31	1,06	0,01

Fonte: Própria autoria.

Tabela 5.6 – Propriedades mecânicas aos 90 dias do concreto C70.

nº da amostra	f_c **(MPa)**	E_c **(GPa)**	E_d **(GPa)**	υ
CP1	79,89	44,21	52,67	0,17
CP2	82,16	48,42	54,35	0,17
CP3	84,21	43,44	52,21	0,18
CP4	83,54	45,33	52,35	0,17
CP5	83,35	46,55	52,95	0,18
CP6	81,53	48,36	53,89	0,175
Média	82,45	46,05	53,07	0,17
Desvio Padrão	1,58	2,19	0,87	0,01

Fonte: Própria autoria.

Os resultados obtidos apontam que os concretos dosados apresentam resistência à compressão média aos 28 dias adequada à classe de resistência para o qual foram dosados,

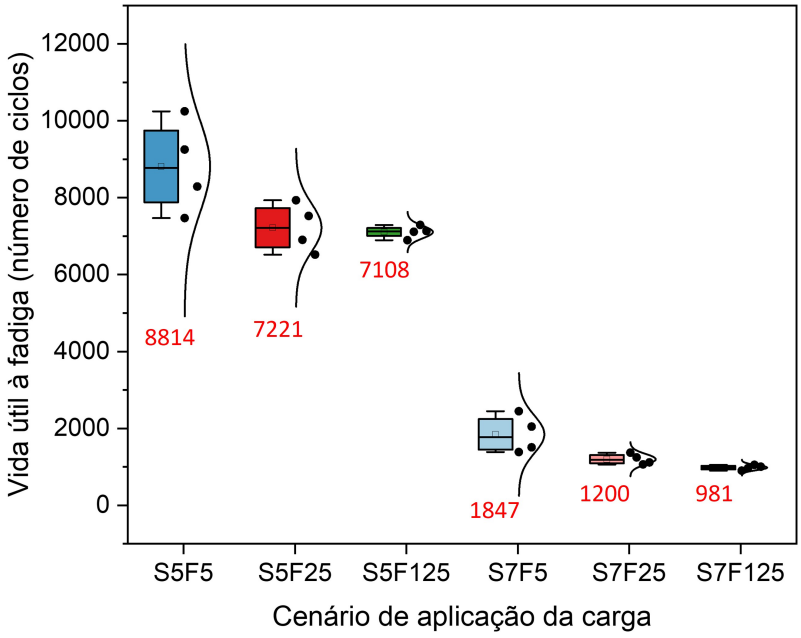
sendo as resistências médias de 35,35 MPa para o traço C30, 53,21 MPa para o traço C50 e 73,74 MPa para o traço C70.

Ao considerar todos os resultados, torna-se essencial apontar a baixa variabilidade aferida em todos os parâmetros avaliados, já que essa característica reduz a imprecisão e variabilidade associada à determinação da vida útil à fadiga determinada na campanha experimental, e em possíveis erros associados aos modelos propostos neste trabalho.

5.2.2 *Vida útil à fadiga*

A princípio, com o objetivo de avaliar a influência da idade do concreto na resistência à fadiga por compressão, os concretos do traço C30 foram divididos em dois lotes, conforme discutido anteriormente. O primeiro lote, C30-28, teve os ensaios de compressão cíclica realizados após 28 dias de cura, onde a resistência à compressão média da amostra foi aferida no valor de 35,35 MPa, conforme apresentado na Tabela 5.3. O segundo lote de concretos referente ao traço C30, o C30-90, teve os ensaios realizados aos 90 dias, onde a resistência à compressão média da amostra foi de 38,83 MPa, valor 9,84% superior à resistência obtida aos 28 dias.

Figura 5.12 – Vida útil à fadiga dos concretos do lote C30-28.

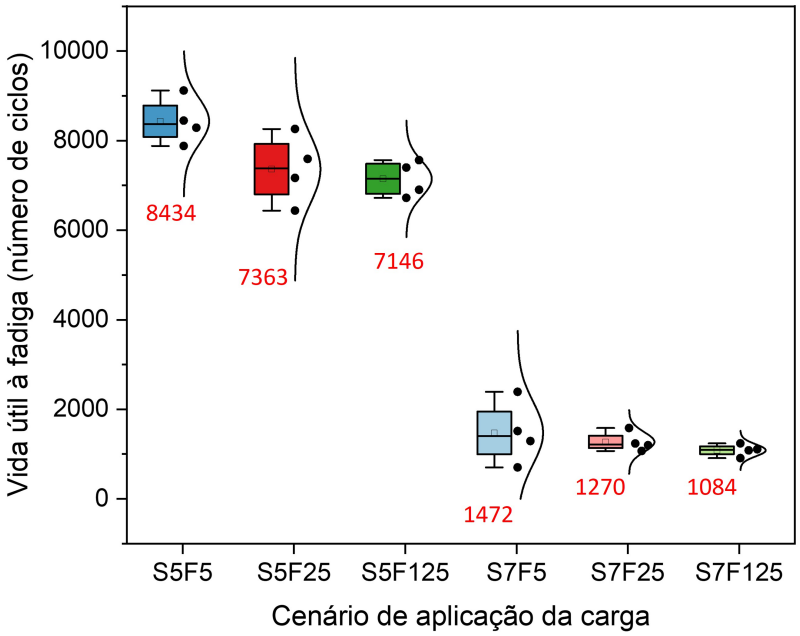


Fonte: Própria autoria.

Diante dos diferentes cenários apresentados na Figura 5.6, e considerando a resistência à compressão média aferida nas diferentes idades de ensaio, nas Figuras 5.12 e 5.13 são apresentados os resultados obtidos nos ensaios de compressão cíclica dos lotes C30-28 e C30-90, respectivamente. Os resultados foram dispostos de modo a apresentar o número de ciclos necessários para causar a falha de cada um dos quatro corpos de prova, o valor médio da amostra (destacado em vermelho) e a função de distribuição normal da vida útil à fadiga. Nos gráficos

são ainda representados *boxes* contendo as seguintes informações: primeiro e terceiro quartis, mediana e os valores máximo e mínimo das amostras.

Figura 5.13 – Vida útil à fadiga dos concretos do lote C30-90.



Fonte: Própria autoria.

Ao avaliar a vida útil à fadiga aferida nos dois lotes de concreto, C30-28 e C30-90, os resultados encontrados indicaram uma tendência de diminuição ou aumento do número de ciclos responsáveis por causar a ruptura do material, ao aumentar o tempo de cura do concreto.

Analisando o número de ciclos necessários para causar a falha do material, observou-se que, para os concretos ensaiados com uma tensão máxima de 50% da resistência à compressão, a variação máxima entre as médias da vida útil à fadiga dos dois lotes foi de $4,31\%$, e refere-se ao caso da aplicação de uma frequência de carregamento de $0,5$ Hz. Já para a frequência de $0,125$ Hz, a variação foi a menor, de $0,52\%$. Para os concretos submetidos níveis de tensão de 70% da resistência à compressão, a variação máxima nas médias da vida útil à fadiga dos dois lotes foi de $20,28\%$ quando da aplicação de uma frequência de carregamento de $0,5$ Hz, e mínima de $5,87\%$ para a frequência de $0,25$ Hz.

Os resultados indicam a existência de uma pequena influência da idade do concreto no valor da VUF, quando da aplicação de uma tensão máxima de 70%, e que essa influência se torna mais significativa ao aumentar a frequência do carregamento.

Corroborando com os resultados encontrados, o estudo experimental conduzido por Kim e Kim (1996) aponta que a vida útil à fadiga do concreto diminui na medida em que aumenta a tensão máxima aplicada, e que essa característica possui maior evidência em concretos de alta resistência. Para Medeiros (2012), a vida útil à fadiga do concreto também diminui com o aumento da resistência à compressão do material. Medeiros (2012) aponta ainda a importância

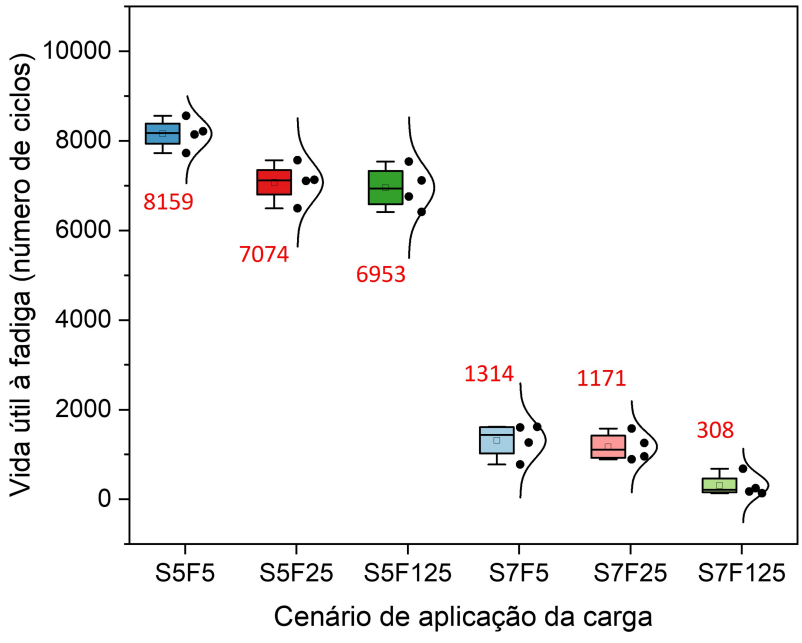
de avaliar a frequência de carregamento empregada nos ensaios, já que esse parâmetro interfere de modo significativo na quantidade de ciclos que o concreto pode resistir.

Deste modo constatou-se que o comportamento do material observado nos ensaios realizados após 90 dias de cura é semelhante ao observado nos ensaios conduzidos após 28 dias, e que a idade apresenta uma influência secundária comparada à frequência de carregamento e ao nível de tensão máxima aplicado nos ensaios de compressão cíclica.

Os resultados mostraram que a influência da idade está associada ao ganho de resistência que o material apresenta no tempo, e como este valor é significativamente pequeno após os 28 dias, a variação nos valores da vida útil à fadiga também é pequena.

Dando continuidade nas análises da vida útil à fadiga, nas Figuras 5.14 e 5.15 são apresentados os resultados dos ensaios de compressão cíclica dos concretos do lotes C50 e C70, respectivamente. As tensões máximas aplicadas nos ensaios são dadas em função da resistência à compressão média, aferida aos 90 dias, conforme valores apresentados na Figura 5.11. Todos os valores aferidos nos ensaios são apresentados nas Tabelas 5.7-5.10, onde também estão dispostos os valores médios e os desvios padrão de cada um dos cenários avaliados. Os resultados foram indicados em função da frequência de carregamento e do nível de tensão máxima adotado nos diferentes cenários.

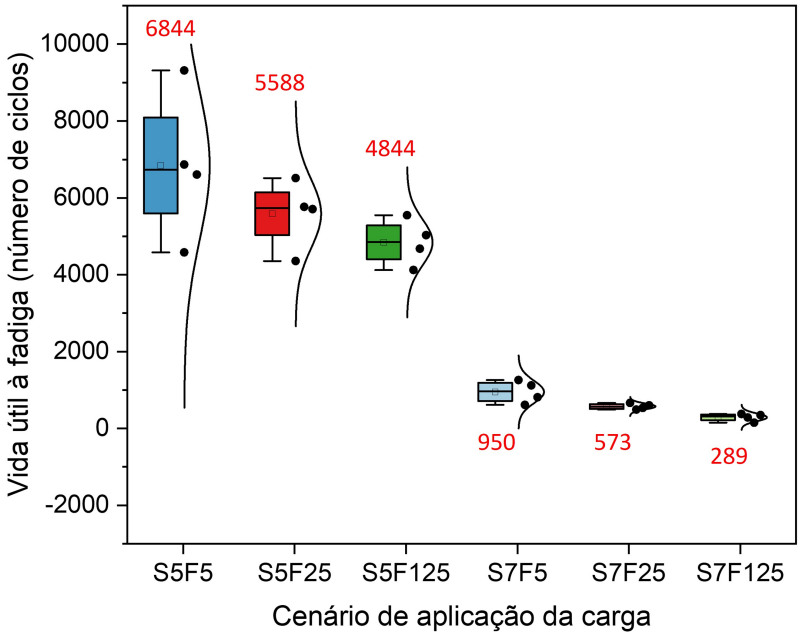
Figura 5.14 – Vida útil à fadiga dos concretos do lote C50.



Fonte: Própria autoria.

Ao analisar os resultados dispostos nas Figuras 5.12-5.15, é possível comprovar a existência de uma relação positiva entre a resistência à compressão do concreto e a vida útil à fadiga, sendo essa relação mais evidente quando da avaliação de concretos com resistência superior a 50 MPa, conforme apontado nos trabalhos de Kim e Kim (1996), Al-Gadhib et al. (2000) e Kessler-Kramer, Mechtcherine e Mueller (2003).

Figura 5.15 – Vida útil à fadiga dos concretos do lote C70.



Fonte: Própria autoria.

Tabela 5.7 – Vida útil à fadiga aferida nos concretos lote C30-28.

nº da amostra	S5F5	S5F25	S5F125	S7F5	S7F25	S7F125
CP 1	7470	7935	6896	1386	1370	903
CP 2	10245	6904	7114	2447	1246	964
CP 3	9251	7526	7290	2046	1066	1054
CP 4	8291	6518	7133	1509	1117	1005
Média	**8814**	**7221**	**7108**	**1847**	**1200**	**981**
Desvio Padrão	**934**	**510**	**106**	**399**	**109**	**48**

Fonte: Própria autoria.

Tabela 5.8 – Vida útil à fadiga aferida nos concretos lote C30-90.

nº da amostra	S5F5	S5F25	S5F125	S7F5	S7F25	S7F125
CP 1	8449	6435	6720	700	1580	910
CP 2	9120	8261	6900	2389	1234	1239
CP 3	7879	7166	7399	1512	1069	1083
CP 4	8288	7590	7564	1288	1197	1104
Média	**8434**	**7363**	**7146**	**1472**	**1270**	**1084**
Desvio Padrão	**351**	**563**	**336**	**478**	**155**	**88**

Fonte: Própria autoria.

Al-Gadhib et al. (2000) relatam que, para concretos de baixa resistência ($f_c < 50$ MPa), um pequeno acréscimo na resistência do material não gera significativas alterações no comportamento à fadiga do concreto, diferente do que ocorre nos concretos de alta resistência, em que variações da ordem de 10% da resistência à compressão, podem causar variações de

$\pm$1000 ciclos. No entanto, torna-se importante destacar que na maioria dos trabalhos existentes na literatura, assim como no de Al-Gadhib et al. (2000), os ensaios de fadiga são conduzidos com altas frequências de carregamento, diferente do que foi feito nos ensaios desta pesquisa.

Tabela 5.9 – Vida útil à fadiga aferida nos concretos lote C50.

nº da amostra	**S5F5**	**S5F25**	**S5F125**	**S7F5**	**S7F25**	**S7F125**
CP 1	8558	7568	7538	1601	1579	683
CP 2	8141	6495	6758	1265	893	172
CP 3	7725	7106	6413	777	1257	247
CP 4	8213	7129	7118	1614	957	133
Média	**8159**	**7074**	**6956**	**1314**	**1171**	**308**
Desvio Padrão	**226**	**290**	**371**	**293**	**246**	**187**

Fonte: Própria autoria.

Tabela 5.10 – Vida útil à fadiga aferida nos concretos lote C70.

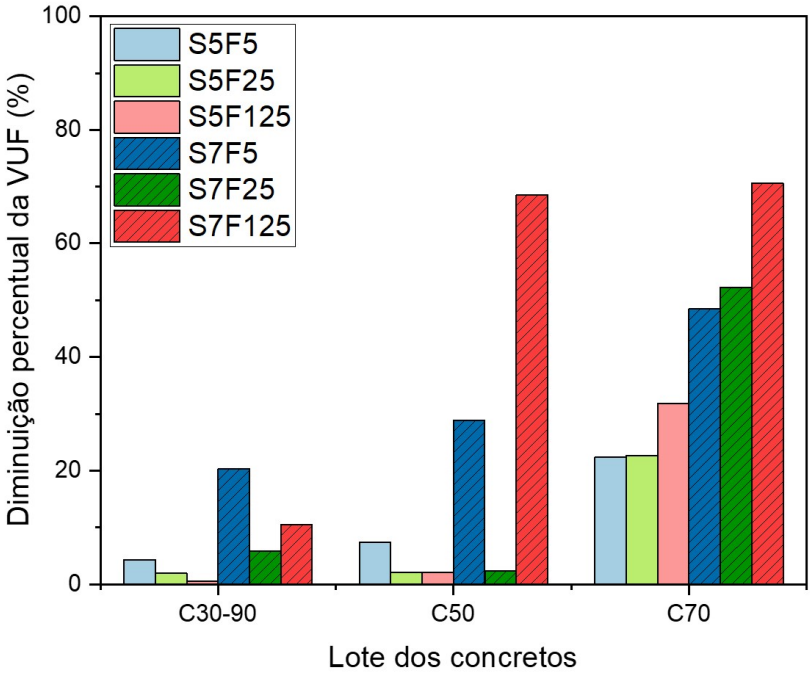
nº da amostra	**S5F5**	**S5F25**	**S5F125**	**S7F5**	**S7F25**	**S7F125**
CP 1	9315	6518	5550	1260	665	376
CP 2	6870	4358	4121	613	488	284
CP 3	6608	5768	4676	1118	536	149
CP 4	4583	5708	5029	810	602	347
Média	**6844**	**5588**	**4844**	**950**	**573**	**289**
Desvio Padrão	**1249**	**615**	**445**	**239**	**61**	**73**

Fonte: Própria autoria.

Assim, com o propósito de avaliar a influência da resistência à compressão do concreto conjuntamente com a frequência do carregamento e o nível de tensão máxima na resistência à fadiga do material, na Figura 5.16 é apresentado um gráfico contendo a diminuição percentual da vida útil à fadiga (VUF) dos concretos do lote C30-90, C50 e C70, em relação à VUF aferida nos concretos de lote C30-28. A comparação com o lote C30-28 foi conduzida pelo fato deste lote apresentar os concretos com as menores resistências, tornando possível a visualização da variação da VUF em função do aumento de resistência do material. Para facilitar a análise, na Figura 5.17 são apresentados os valores médios com uma faixa referente à média e o desvio padrão amostral.

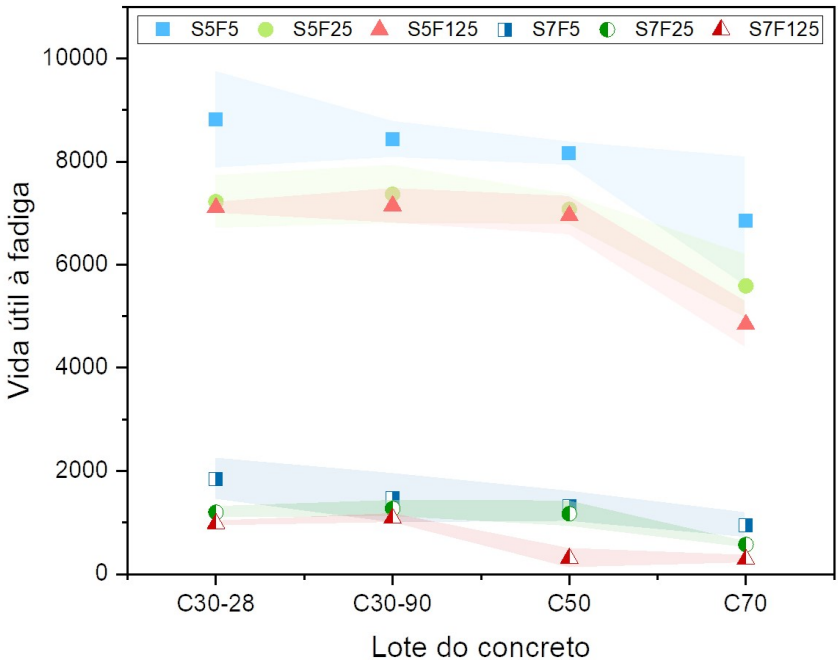
Considerando os resultados dispostos na Figura 5.16 e sabendo que os corpos de prova dos lotes C30-90, C50 e C70 apresentam, respectivamente, resistências médias superiores a $9,84\%$, $72,87\%$ e $133,23\%$ dos concretos do lote C30-28. É possível observar que a redução da VUF é maior para os concretos submetidos ao maior nível de tensão máxima aplicado, independente da resistência do material. Observou-se que as reduções na VUF aumentam com a diminuição da frequência do carregamento adotado. Entretanto, este padrão de redução na vida útil à fadiga foi verificado apenas nos concretos de alta resistência à compressão.

Figura 5.16 – Variação da vida útil à fadiga.



Fonte: Própria autoria.

Figura 5.17 – Vida útil à fadiga média de todos os concretos ensaiados.



Fonte: Própria autoria.

Diante da Figura 5.17 infere-se ainda que, mesmo quando da aplicação de baixas frequências de carregamento ($f < 1{,}0$ Hz), o número de ciclos necessário para causar a ruptura decresce à medida em que diminui a frequência de carregamento. Este mesmo comportamento foi observado no estudo experimental conduzido por Zhang, Phillips e Wu (1996) e Zhang, Li e

Stang (2001), onde os autores analisaram concretos submetidos a altas frequências ($f > 1,0$ Hz).

Ao avaliar concretos sujeitos à compressão cíclica com baixas frequências de carregamento, Medeiros et al. (2015) observou que a resistência à fadiga do concreto também possui uma relação positiva com a frequência de carregamento, apontando que este parâmetro possui grande influência na representação e avaliação da vida útil à fadiga do concreto.

Dos resultados apresentados nas Figuras 5.16 e 5.17, é possível comprovar a redução da vida útil à fadiga na medida em que diminui a frequência de carregamento aplicada no concreto. Observou-se que essa diminuição ocorre independente do nível de tensão máxima adotada no ensaio (50% ou 70% de f_c), diferente do observado por Jansen (1996), em que o autor relata a existência de uma pequena ou quase inexistente influência da frequência de carregamento na resistência à fadiga de concretos submetidos a tensões máximas inferiores a 75% da resistência à compressão.

Considerando os resultados apresentados nesta seção, observa-se um acréscimo na vida útil à fadiga ao aumentar a frequência de carregamento, desde que mantido o mesmo nível de tensão aplicado no material, e que este comportamento é melhor visualizado quando da análise de concretos de alta resistência à compressão.

Uma possível justificativa encontrada por Chen et al. (2017) para explicar este fenômeno refere-se ao fato de que, na aplicação de carregamentos cíclicos, o concreto deixa de ter o seu comportamento definido por propriedades estáticas, sendo melhor representado por propriedades dinâmicas, que por sua vez são superiores às estáticas.

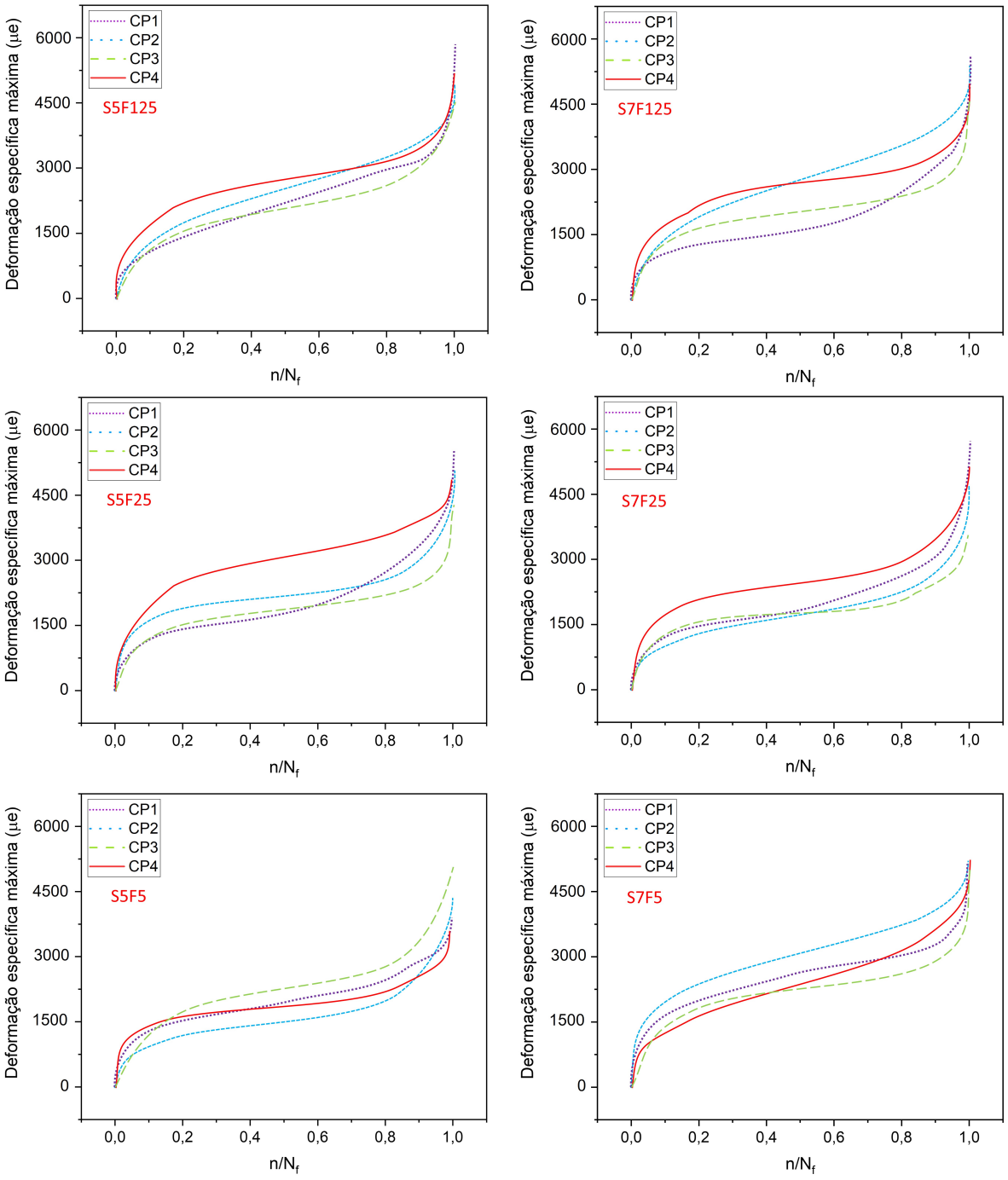
Ao analisar a variabilidade do número de ciclos necessários para gerar a ruptura no material (Figuras 5.12-5.15), observou-se que a dispersão dos dados em torno da média decresce na medida em que diminui a frequência de carregamento, independente do nível de tensão máxima empregado. Este fato indica que o grau de confiabilidade de modelos de estimativa da vida útil à fadiga de componentes estruturais de concreto sujeitos a solicitações cíclicas é função da frequência de carregamento. Ortega et al. (2018) encontraram resultados que corroboram com tal afirmação. Os autores desenvolveram modelos para a previsão da VUF verificando que o grau de confiabilidade obtido nas formulações associadas à fadiga de baixo ciclo é maior que na de alto ciclo, e que, para este último, o número de dados necessários para a concepção da formulação deve ser superior ao empregado nos modelos de baixo ciclo.

5.2.3 Histórico de deformações

Uma forma alternativa que pode auxiliar na análise do efeito de cargas cíclicas no comportamento do concreto refere-se à avaliação do histórico de deformações máximas do material. Nas Figuras 5.18-5.20 são apresentadas as curvas de evolução da deformação específica máxima em função do número de ciclos normalizado pela vida útil à fadiga da amostra. Nas referidas figuras, n é número de ciclos em análise e N_f é o número de ciclos que leva à ruptura da amostra. Comenta-se que foram plotadas apenas as deformações associadas aos concretos dos lotes C30-90, C50 e C70, já que estes possuem o mesmo período de realização dos ensaios,

excluindo a possibilidade da existência de uma influência de tempo nos resultados. Também é importante destacar que as curvas foram plotadas considerando a função *B-spline* do software Origin (ORIGINLAB, 2019), que é uma função de interpolação ordem 3 definida pela união de funções polinomiais quadráticas estabelecida nos pontos de entrada (nós).

Figura 5.18 – Histórico das deformações máximas dos concretos do lote C30-90.

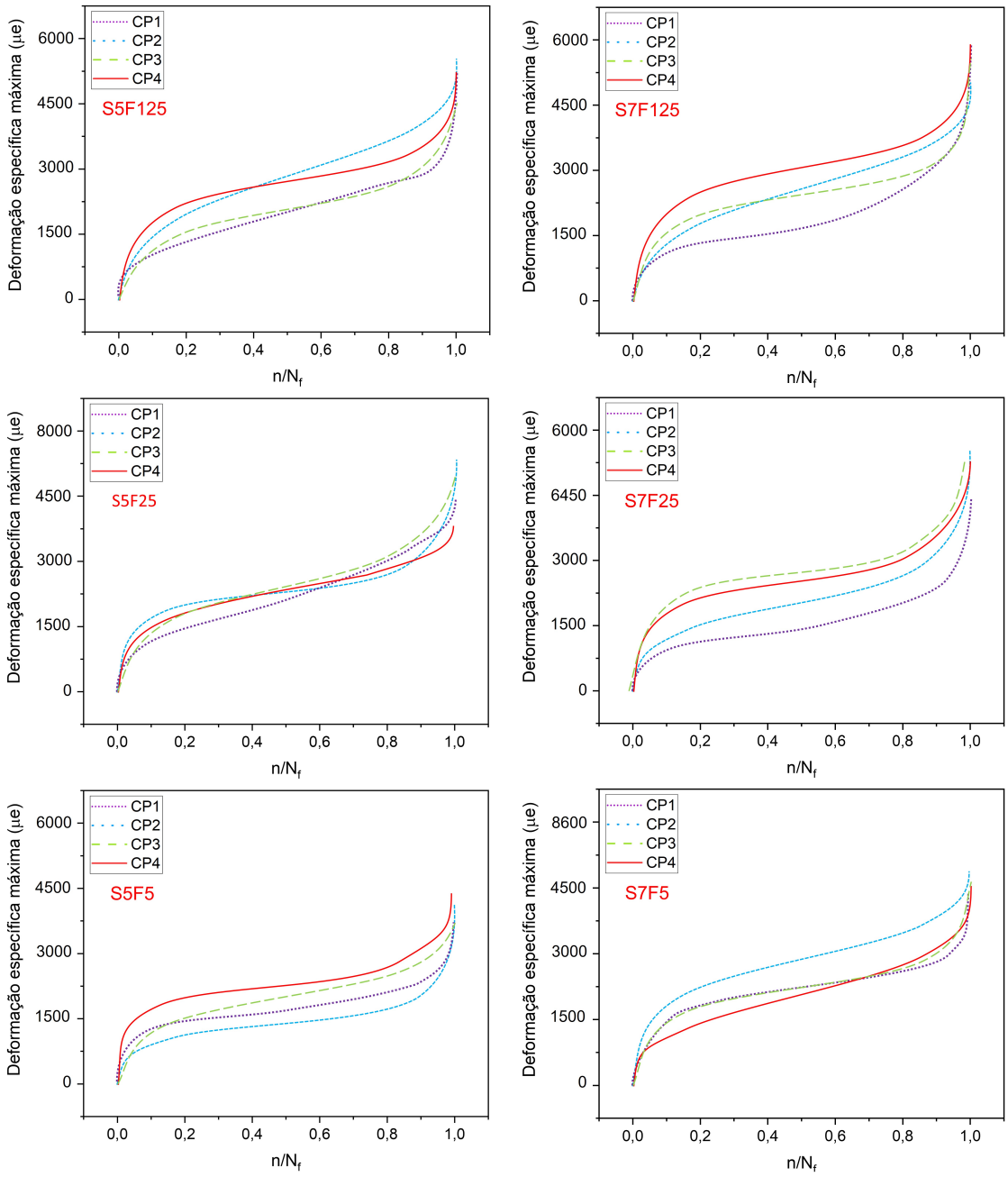


Fonte: Própria autoria.

Conforme observa-se nas Figuras 5.18-5.20, o histórico das deformações máximas

pode ser descrito por meio de curvas do tipo *S* ou se assemelham a curvas de fluência cíclica, independente da frequência de carregamento, do nível de tensão empregado ou da classe de resistência do material. Este comportamento permite descrever uma lei evolutiva para as deformações máximas do concreto aplicando, por exemplo, a técnica de modelagem por regressão com o ajuste de funções do tipo logarítmica.

Figura 5.19 – Histórico das deformações máximas dos concretos do lote C50.

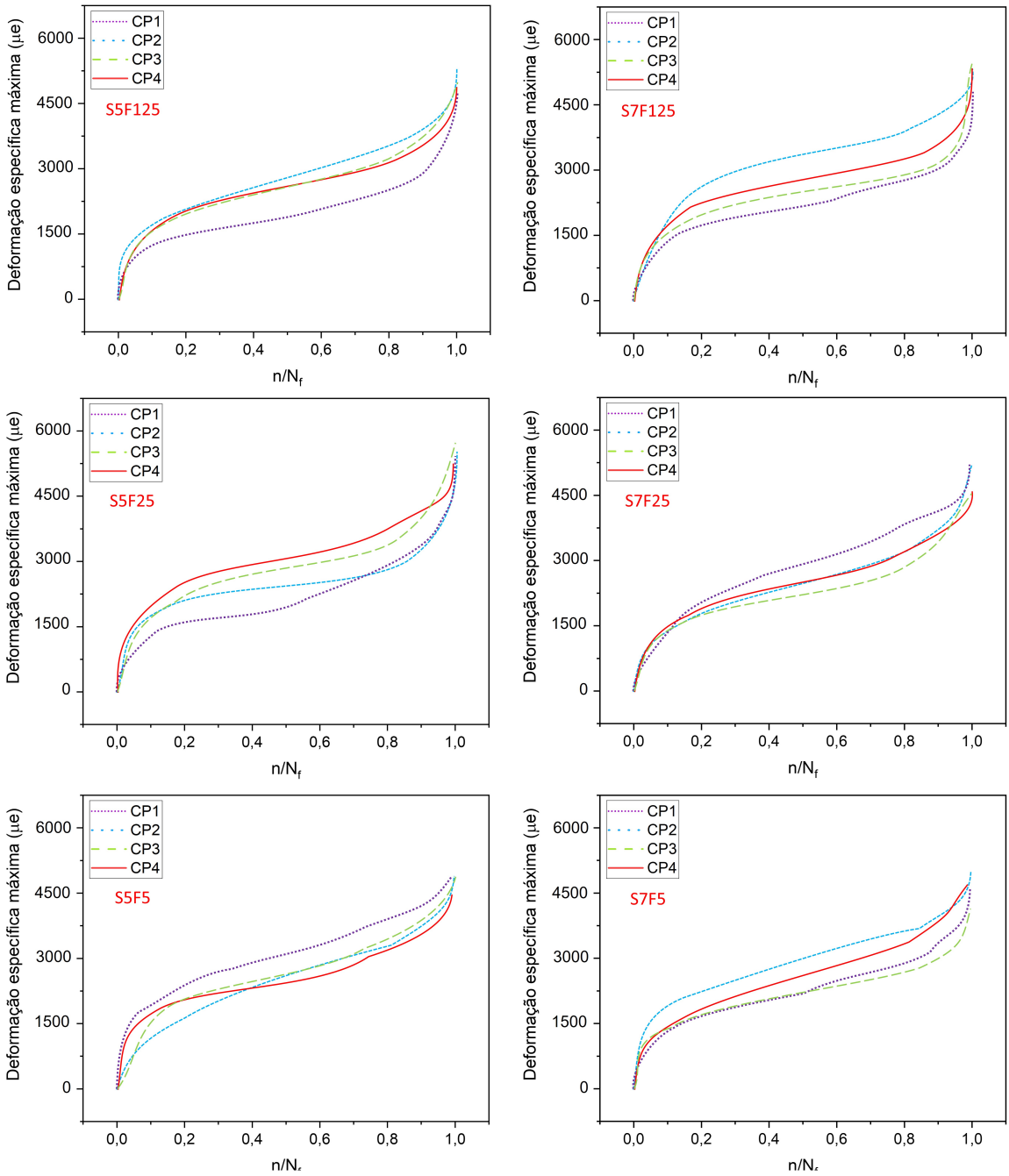


Fonte: Própria autoria.

Observou-se que as deformações máximas finais, no instante de ocorrência da ruptura, são maiores para o maior nível de tensão máxima aplicado nos ensaios (70% de f_c). Também foi observado uma redução no nível máximo da deformação que o material suporta na medida em que

aumenta a sua resistência à compressão. No estudo experimental conduzido por Medeiros (2012), verificou-se que o modo de ruptura observado em concretos submetidos à fadiga por compressão apresenta maior abruptalidade na medida em que aumenta a resistência do material. O autor verificou que, quanto maior a frequência de carregamento aplicada, maior é a variabilidade observada nos níveis de deformação máxima suportados pelo material.

Figura 5.20 – Histórico das deformações máximas dos concretos do lote C70.

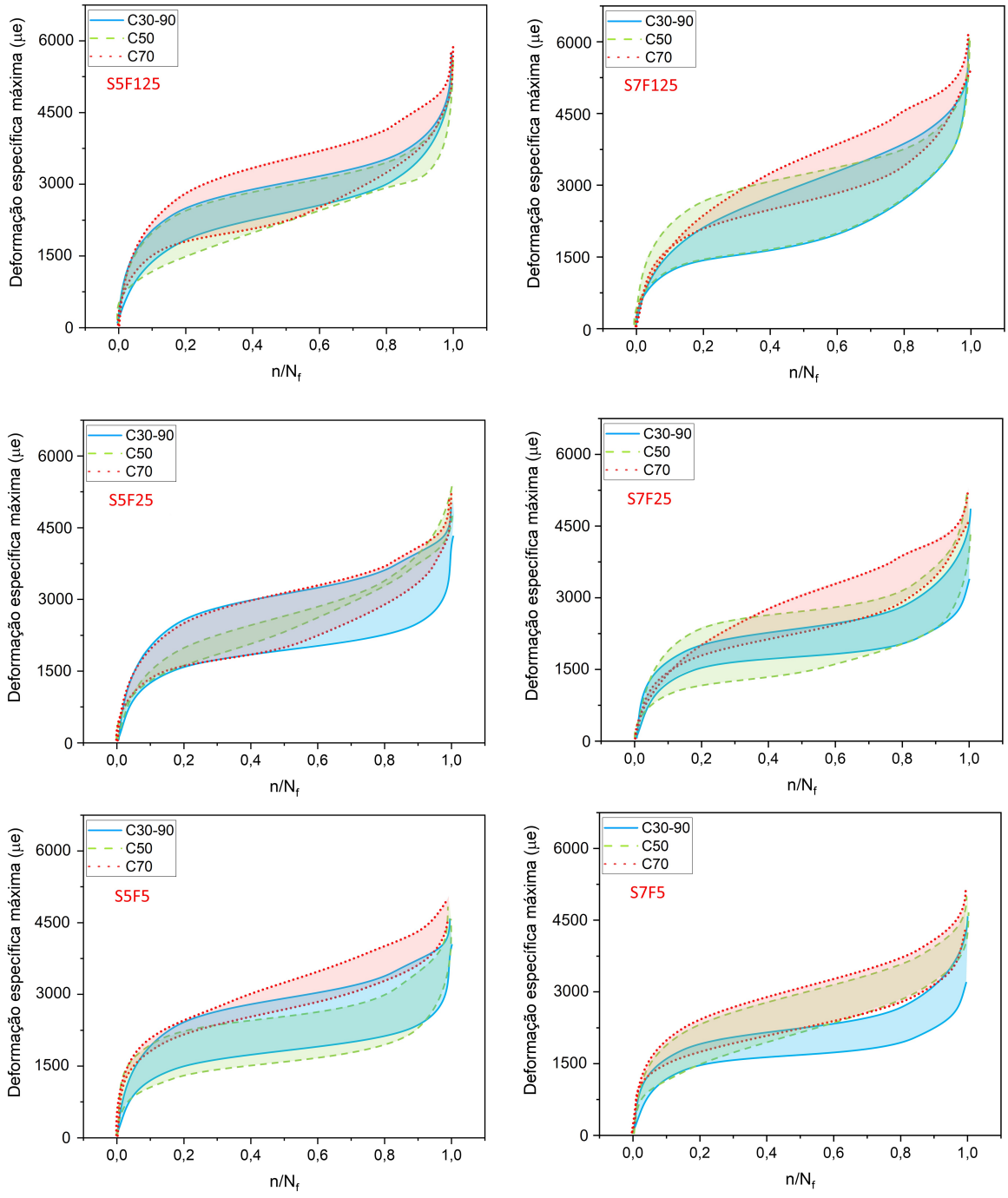


Fonte: Própria autoria.

Com o propósito de avaliar a influência da frequência de carregamento e da resistência à compressão no histórico de deformação máxima, as curvas de evolução das deformações

apresentadas nas Figuras 5.18-5.20 foram acopladas considerando os lotes dos concretos, conforme mostra a Figura 5.21. Para uma melhor avaliação, foram selecionadas duas curvas para cada um dos lotes, as quais representam as maiores e menores deformações máximas. Essa estratégia proporcionou a produção das envoltórias das deformações específicas máximas para todos os cenários avaliados, que serão de grande auxílio na validação dos modelos numéricos propostos neste trabalho.

Figura 5.21 – Envoltórias das curvas de deformação máxima.



Fonte: Própria autoria.

Observando os resultados da Figura 5.21, torna-se possível indicar que a aplicação de um maior nível de tensão máxima acarreta em uma menor deformabilidade do material, e que, independentemente da frequência de carregamento aplicada, reduz-se o intervalo de valores que compreende as menores e maiores deformações máximas. Estes resultados indicam a existência de uma redução da área da envoltória das deformações máximas dado um acréscimo no nível de tensão máxima aplicado.

Por meio das curvas de evolução da deformação máxima, estimou-se a proporção do número de ciclos no qual o material se encontra nos diferentes estágios de degradação, considerando os três estágios que definem uma curva de fluência cíclica (ver Figura 2.4). Neste estudo, foi observado que independente do nível de tensão aplicado, a fase de propagação de fissuras, definido pelo estágio II (Figura 2.4), ocorre em um intervalo médio que compreende de 4% a 97% da vida útil à fadiga (N_f). Desta forma, a proporção do período de vida útil associada ao estágio II pode estar relacionada à frequência de carregamento aplicada.

A fim de exemplificar quantitativamente esta observação, citam-se os resultados de dois corpos de prova do mesmo lote, C30-90, submetidos ao mesmo nível de tensão máxima (50% de f_c), contendo diferentes frequências de carregamento ($0,5$ e $0,125$ Hz). O concreto associado ao cenário C30-90-S5F5 teve o estágio II iniciado aos 4% e finalizado aos 96% de N_f. Para o concreto associado ao cenário C30-90-S5F125 inferiu-se o início e o fim do estágio II aos 6% e 88% de N_f, respectivamente.

Deste modo, a avaliação do histórico da deformação máxima possibilitou inferir que o intervalo de tempo entre o surgimento das fissuras e o início da ruptura, período que define o estágio II, decresce à medida que diminui a frequência de carregamento. Ademais, observou-se que, para uma mesma frequência de carregamento, a proporção da vida útil que define o período de propagação das fissuras se mantém fixa independente do nível de tensão máxima aplicado, desde que mantida a relação entre as tensões mínima e máxima (R).

De acordo com os resultados obtidos neste trabalho e em investigações experimentais, disponíveis na literatura ao longo dos últimos 20 anos (O'BRIEN; TAYLOR; LEE, 2003; BALBI et al., 2009; BIAN et al., 2011; SHAN et al., 2019; PILKEY; PILKEY; BI, 2020), observou-se a existência de uma relação entre a vida útil à fadiga do concreto e a proporção da vida útil em que o material se encontra na fase de propagação das fissuras, que configura o estágio II da curva de fluência cíclica.

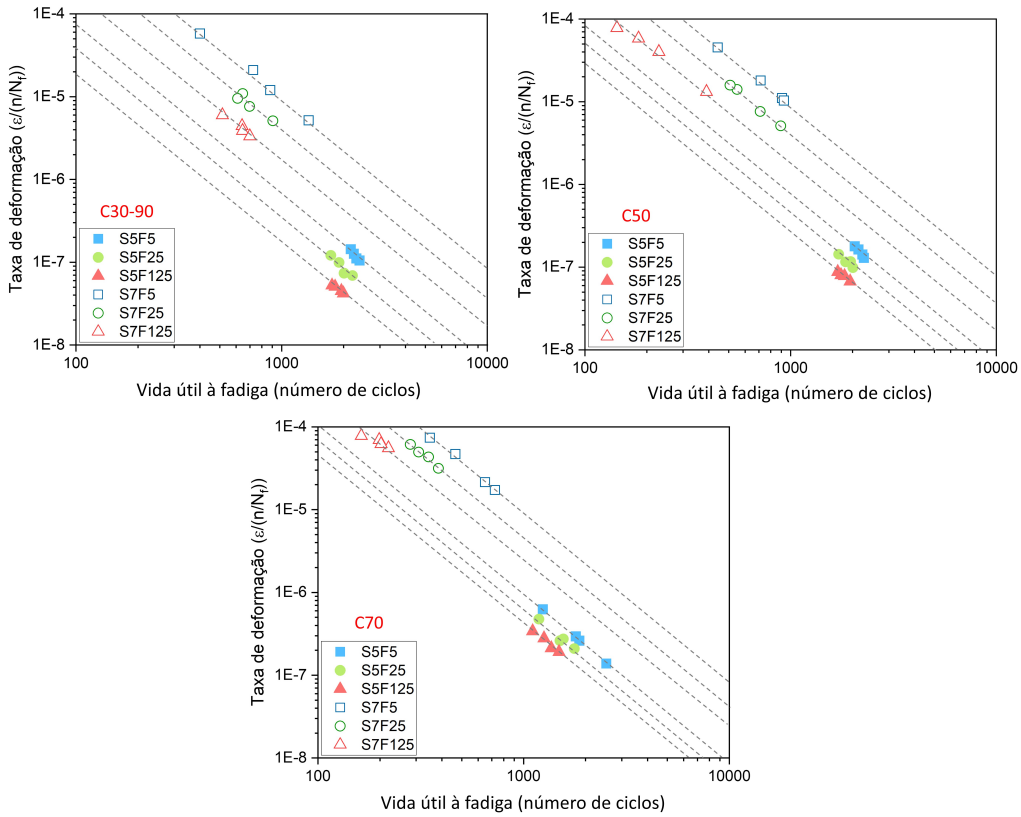
O'Brien, Taylor e Lee (2003) e Balbi et al. (2009) relatam que o desenvolvimento de microfissuras em concretos submetidos à compressão cíclica ocorre de forma precoce, iniciando-se logo após a realização de um baixo número de ciclos de carregamento, período compreendido entre 3 e 8% da vida útil à fadiga. Para Bian et al. (2011), Shan et al. (2019) e Pilkey, Pilkey e Bi (2020) a nucleação no concreto ocorre quase que imediatamente à aplicação do carregamento cíclico, pois o concreto já possui micro defeitos em sua estrutura cristalina, o que faz com que o surgimento das fissuras ocorra sob baixos níveis de tensão.

Considerando os resultados obtidos neste trabalho e sabendo que a proporção da vida

útil à fadiga associada ao estágio II representa o tempo em que o concreto tem suas fissuras propagadas, observou-se que, após a nucleação, o desenvolvimento das fissuras se configura como um mecanismo lento, tomando cerca de 75-90% da vida útil. De acordo com Schijve (2003), a velocidade em que o concreto alcança a fase de progressão de fissuras está diretamente relacionada às propriedades mecânicas do material. No entanto, o autor cita que, para os casos de cargas cíclicas, outros aspectos se tornam importantes e devem ser avaliados, a exemplo da integridade microestrutural do material e das configurações de aplicação do carregamento cíclico.

A fim de avaliar a influência da frequência de carregamento na taxa de progressão das fissuras, na Figura 5.22 são apresentadas as taxas médias das deformações específicas máximas observadas em todos os corpos de prova ensaiados. As taxas foram determinadas considerando o valor médio de três pontos centrais do tramo da curva de deformação máxima que configura o estágio II de uma curva de fluência cíclica. Os resultados foram dispostos de forma a indicar a vida útil à fadiga, a frequência do carregamento e o nível da tensão máxima aplicado. A taxa de deformação e a vida útil à fadiga foram inseridas em escala logarítmica, estratégia usualmente adotada para facilitar a visualização dos resultados, conforme indicam Bian et al. (2011), Chen et al. (2017) e Shan et al. (2019).

Figura 5.22 – Taxa de deformação versus vida útil à fadiga.



Fonte: Própria autoria.

Com os resultados apresentados na Figura 5.22, verifica-se a influência da frequência do

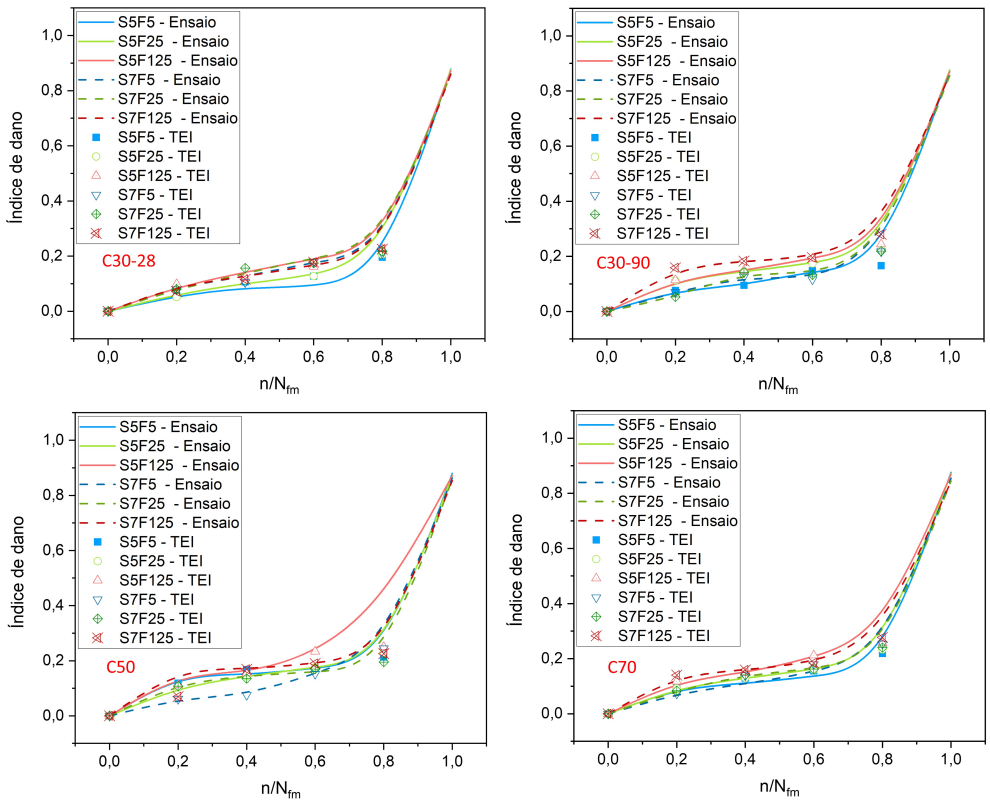
carregamento na taxa de deformação do concreto, indicando a existência de uma relação linear (em escala log-log) entre essa taxa e a vida útil à fadiga do material. Observa-se que, independentemente do nível de tensão máxima aplicado, ao aumentar a frequência de carregamento aumenta a taxa de deformação. Este resultado sugere que maiores frequências de carregamento geram maiores taxas de progressão de fissuras no concreto.

Observa-se na Figura 5.22 que os resultados individuais de cada uma das condições de carregamento ensaiadas se dispõem em torno de uma direção, a qual é definida no gráfico por meio de uma reta tracejada. Por meio dessas linhas, infere-se que um aumento na classe de resistência do material provoca uma redução no espaçamento entre as retas que definem os resultados obtidos em concretos submetidos ao mesmo nível de tensão máxima. Assim, os resultados indicam que, quanto maior é a resistência à compressão do concreto, maior é a taxa de progressão das fissuras e menor é a vida útil à fadiga do material.

5.2.4 *Análise da evolução e acúmulo de dano*

A fim de avaliar a evolução do dano em função do número de ciclos, na Figura 5.23 são dispostos os índices de dano determinados por meio da curva tensão-deformação, aferidos nos ensaios de compressão cíclica, e pela variação do módulo de elasticidade dinâmico determinado pela técnica de excitação por impulso (TEI).

Figura 5.23 – Acúmulo de dano em função da técnica de avaliação.



Fonte: Própria autoria.

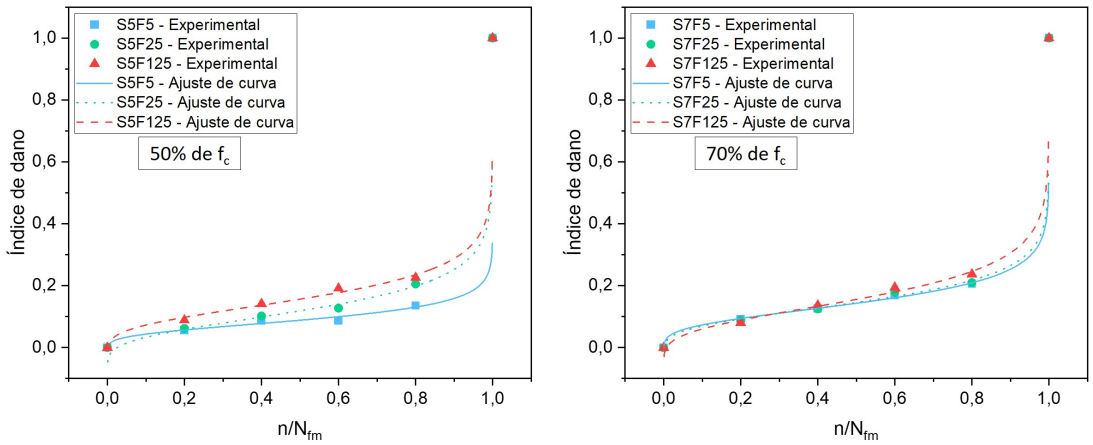
Destaca-se que, para as análises foram retirados os valores de dano extraídos após o primeiro carregamento, já que estes não estariam diretamente associado ao dano acumulado na fadiga, mas sim à deformação instantânea, e que o dano foi plotado em função do número de ciclos normalizado pelo número de ciclos médio para ruptura N_{fm}.

Os resultados apresentados na Figura 5.23 apontam uma semelhança entre os índices de dano mensurados pelas duas técnicas empregadas. No entanto, observam-se maiores diferenças entre os índices coletados pelas duas técnicas no momento em que o material se encontra próximo aos 80% da vida útil à fadiga. Este comportamento pode ser explicado pela possível incidência de uma grande quantidade de fissuras no material, acarretando em uma maior dificuldade de mensurar corretamente o módulo de elasticidade via técnica de excitação por impulso. Gidrão (2015) também verificou por meio de análises experimentais que a técnica TEI apresenta grande dificuldade na obtenção do módulo de elasticidade dinâmico quando as amostras possuem muitas fissuras.

Ao avaliar todos os corpos de prova ensaiados, verificou-se que a diferença média entre os índices determinados pelas duas técnicas foi de $7,21\%$, considerando até 80% da VUF, o que aponta a eficiência da TEI frente a determinação do dano em concretos sujeitos à compressão cíclica. Esta eficiência se torna significativamente maior se for associada à técnica a facilidade de determinação do índice de dano frente ao cálculo realizado com as curvas tensão versus deformação.

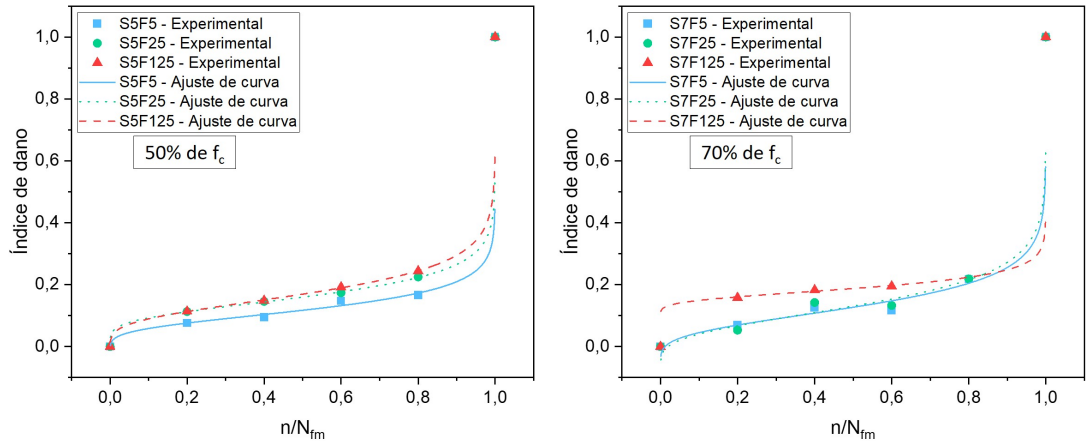
Considerando a técnica de excitação por impulso, nas Figuras 5.24-5.27 são apresentadas a evolução do dano em função da vida útil à fadiga. Os resultados foram plotados em função das distintas configurações de aplicação do carregamento, em especial, do nível de tensão máxima. Foram inseridas curvas de tendência definidas após um estudo de regressão, o qual é apresentado no *Capítulo* 7, que descreve o desenvolvimento dos modelos de vida útil à fadiga e evolução do dano.

Figura 5.24 – Evolução do dano determinada pela TEI para concretos do lote C30-28.



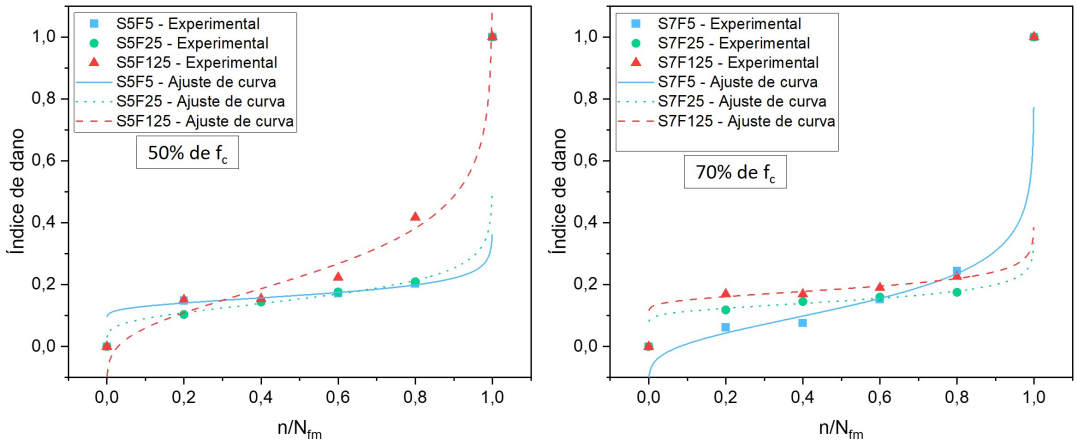
Fonte: Própria autoria.

Figura 5.25 – Evolução do dano determinada pela TEI para concretos do lote C30-90.



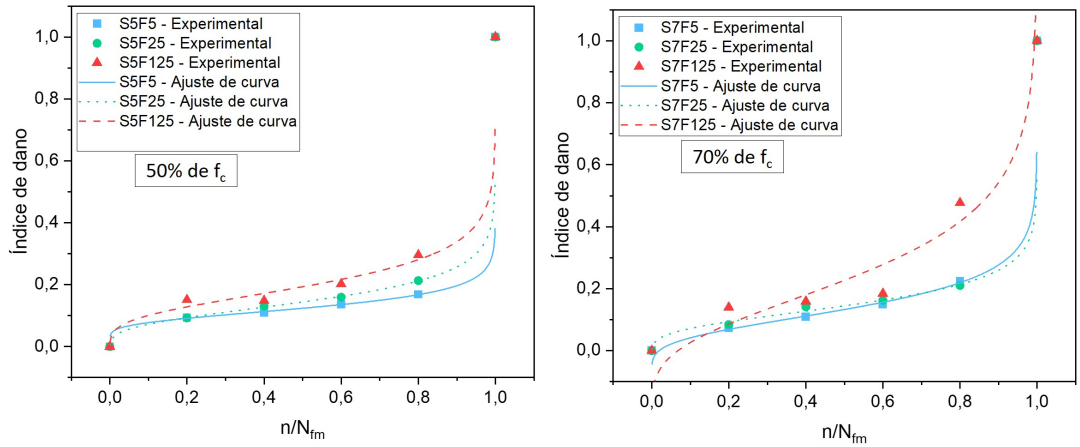
Fonte: Própria autoria.

Figura 5.26 – Evolução do dano determinada pela TEI para concretos do lote C50.



Fonte: Própria autoria.

Figura 5.27 – Evolução do dano determinada pela TEI para concretos do lote C70.



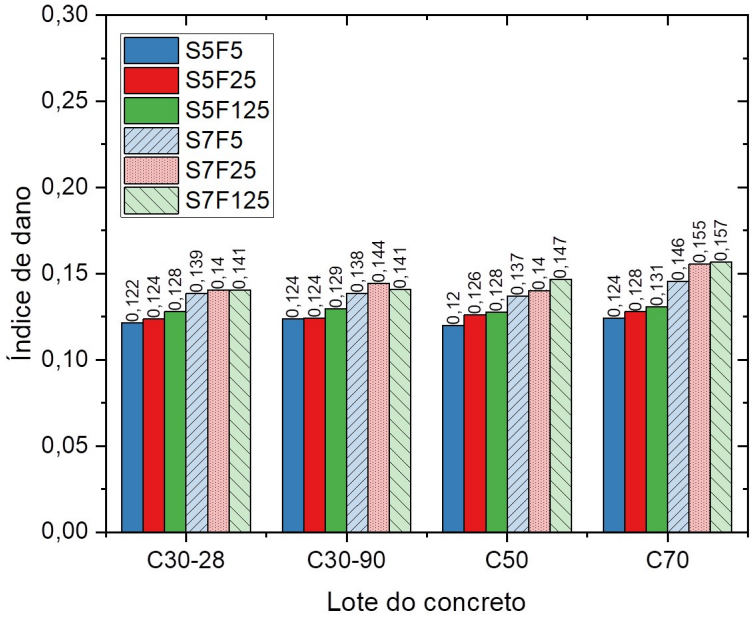
Fonte: Própria autoria.

Observa-se que, independentemente do cenário de aplicação do carregamento, o concreto quando sujeito a cargas cíclicas apresenta uma tendência de perda de rigidez ao longo da aplicação dos ciclos de carga e descarga. Este comportamento está diretamente associado ao desenvolvimento de microfissuras na matriz de argamassa, havendo danificação em todo o material.

Diante das Figuras 5.24-5.27 é possível indicar que uma curva do tipo *S* pode ser empregada para representar o avanço do dano no concreto em função do número de ciclos. Verifica-se que o índice de danificação do material cresce em função do nível de tensão máxima aplicada, como esperado, e diminui com o aumento da frequência de carregamento. Este mesmo padrão de comportamento foi observado por Chen et al. (2017) em ensaios realizados em corpos de prova de concretos submetidos à tração direta cíclica. Para Chen et al. (2017), a perda de rigidez em função do histórico de carregamento cíclico pode ser expressa considerando os três estágios que descrevem o histórico de deformações máximas do concreto (Figura 2.10), definindo as curvas teóricas de fluência cíclica (Figura 2.4).

De modo análogo, Cook e Chindaprasirt (1981) avaliaram a influência do histórico de carregamento na evolução do dano para concretos sujeitos a cargas cíclicas de tração e compressão, e observaram que o material apresenta a mesma tendência de redução da rigidez nos dois modos de carregamento. Os autores observaram ainda que o módulo de elasticidade é reduzido na medida em que o carregamento cíclico é aplicado e que a perda de rigidez é mais acentuada em concretos de baixa resistência.

Figura 5.28 – Dano determinado após primeiro ciclo de carregamento.



Fonte: Própria autoria.

Conforme comentado, o dano foi determinado considerando apenas os valores acumulados após o primeiro ciclo de carregamentos, não levando em conta o dano contínuo sofrido

pelo material ao experimentar pela primeira vez os diferentes níveis de solicitações ensaiados. Assim, para desenvolver uma formulação de dano que possibilite realizar simulações numéricas do concreto submetido a solicitações cíclicas, objeto de estudo deste trabalho, faz-se necessário conhecer o valor do dano sofrido pelo material no primeiro ciclo. Na Figura 5.28 são apresentados os valores médios do índice de dano mensurado pela avaliação das curvas tensão-deformação.

Os resultados mostram que o índice de dano inicial varia entre $0,122$ e $0,157$, e que este valor flutua em função das condições de carregamento e da rigidez do material. Lü, Li e Song (2004) observaram um valor máximo de $0,16$ para o índice de dano inicial ao avaliarem experimentalmente corpos de prova submetidos a ensaios tração-compressão alternada cíclica. Os ensaios foram conduzidos em concretos de resistência à compressão média de $31,48$ MPa, considerando as frequências de carregamento de 5 e 15 Hz.

Observou-se que o dano inicial aumenta em função do nível de tensão máxima adotada, e que o dano inicial aumenta ao passo em que reduz a frequência de carregamento. Este resultado pode ser associado ao observado nos ensaios quase-estáticos, onde o concreto se mostra mais deformável ao utilizar menores taxas de carregamento. Na literatura são muitos os trabalhos que comprovam que as propriedades mecânicas do concreto são superiores para taxas de carregamento elevadas (BISCHOFF; PERRY, 1991; WU et al., 2001; ZHANG et al., 2012), onde o material passa a ter seu comportamento controlado pelas propriedades dinâmicas.

5.2.5 Análise da evolução da fissuração superficial

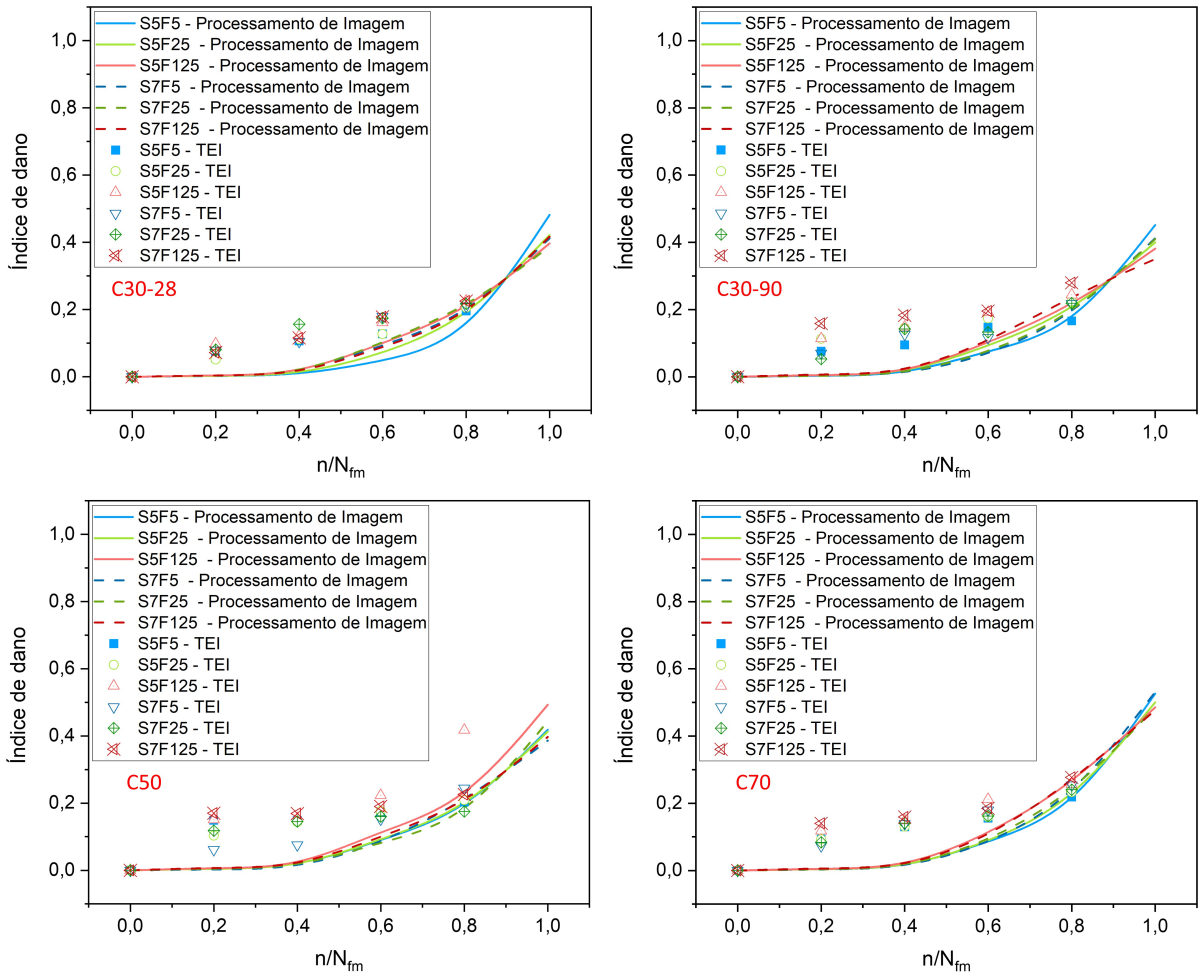
Na Figura 5.29 são apresentadas as curvas da evolução do dano superficial. Nessas mesmas figuras também são indicados os valores de dano obtidos experimentalmente ao considerar a redução do módulo de elasticidade determinado pela técnica de excitação por impulso (TEI). Na Figura 5.30 são apresentadas algumas das imagens binarizadas de 12 amostras, as quais estão identificadas de acordo com a nomenclatura empregada. As Tabelas 5.11-5.18 apresentam os valores de dano obtidos por: (i) análise das curvas tensão versus deformação; (ii) técnica TEI; e (iii) processamento de imagens.

Considerando a Figura 5.29 e as Tabelas 5.11-5.18 é possível observar que, para a maior parte da vida útil à fadiga, o dano determinado pelo método que considera a morfologia dos pixeis da imagem da amostra é inferior ao valor calculado pela redução do módulo de elasticidade obtido via TEI, assim como dos valores de dano obtidos via análise das curvas tensão versus deformação.

Da Figura 5.29 infere-se que o índice de dano é praticamente nulo para a primeira metade da vida útil à fadiga do concreto ao considerar o método de cálculo via processamento de imagens, um comportamento que não adere com os preceitos da literatura, e tampouco com os valores obtidos pela análise do módulo de elasticidade via técnica TEI e relação tensão/deformação. O'Brien, Taylor e Lee (2003) e Balbi et al. (2009) relatam que o desenvolvimento de microfissuras em concretos submetidos à compressão cíclica ocorre de forma precoce, iniciando-se logo após a realização de um baixo número de ciclos de carregamento, período compreendido entre 3 e 8%

da vida útil à fadiga. Para Bian et al. (2011), Shan et al. (2019) e Pilkey, Pilkey e Bi (2020) a nucleação no concreto ocorre quase que imediatamente à aplicação do carregamento cíclico pois o concreto já possui micro defeitos em sua estrutura cristalina, o que faz com que a propagação das fissuras ocorra sob baixos níveis de tensão.

Figura 5.29 – Acúmulo de dano determinado por processamento de imagem e técnica TEI.



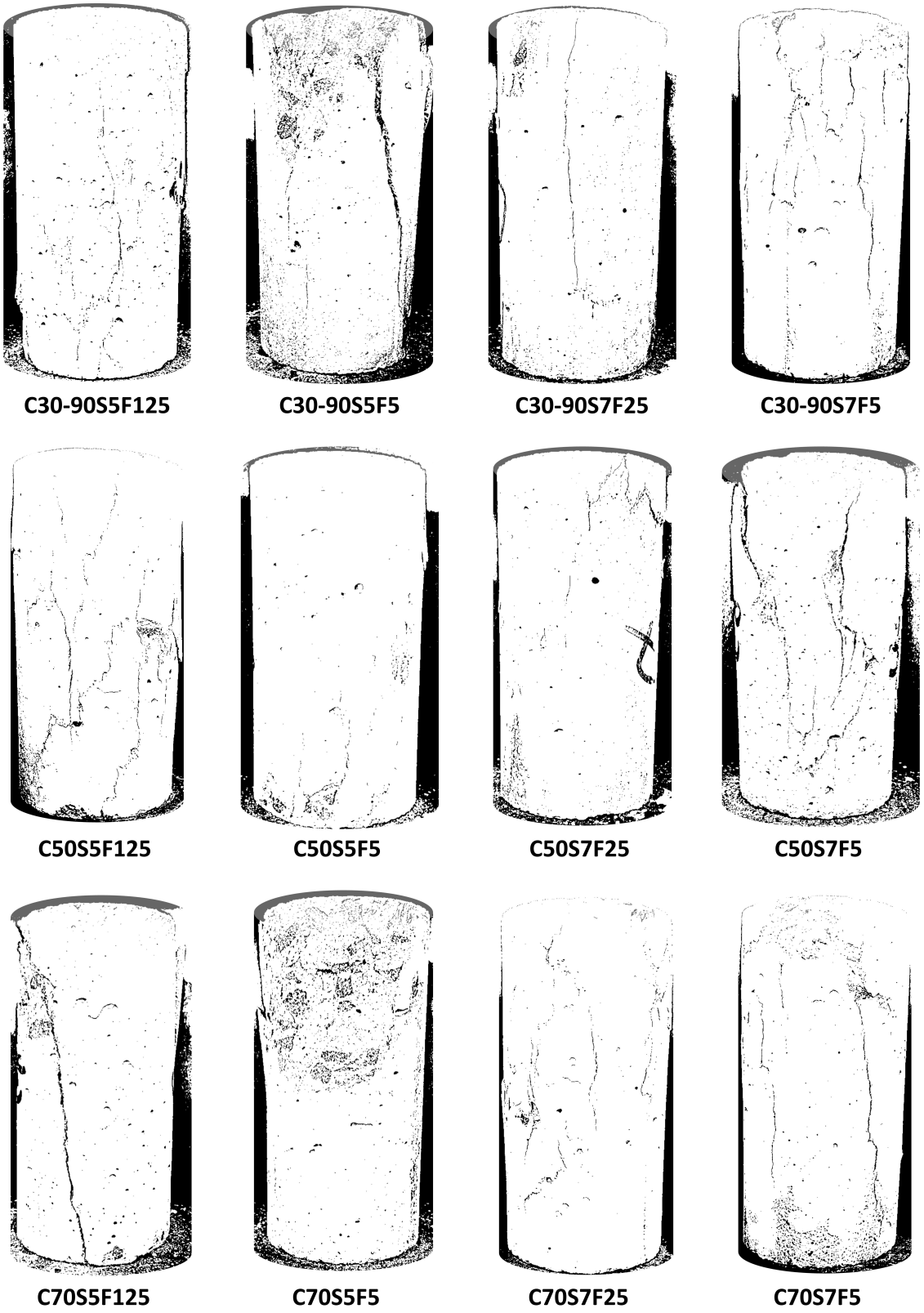
Fonte: Própria autoria.

Como o índice de dano obtido pela técnica de processamento de imagens é determinado pela análise da superfície do concreto, não é possível determinar os micro defeitos que surgem e/ou progridem internamente no material. Estes resultados indicam que a técnica de avaliação do dano considerando imagens não proporciona um método eficiente para a determinação dos estágios I e II, da curva de fluência cíclica, os quais representam o início da fissuração e o estágio de propagação contínua das fissuras, respectivamente.

No entanto, o índice de dano aos 80% da VUF é aproximadamente igual para os dois métodos empregados, sendo observada uma diferença percentual média de $16,12\%$, ao avaliar todos os casos. Este resultado indica que o método de processamento de imagens pode servir como um indicador do início do terceiro estágio da curva de fluência cíclica, apresentando-se

como uma técnica alternativa para o monitoramento de estruturas de concreto submetidas a solicitações cíclicas, e em especial, que define o estágio de eminência de ruptura.

Figura 5.30 – Imagens binarizadas de amostras após ensaio de compressão cíclica.



Fonte: Própria autoria.

Tabela 5.11 – Dano nos concretos C30-28 com nível máximo de tensão de 50%.

n/Nf	S5F5			S5F25			S5F125		
	Curvas $\sigma \times \varepsilon$	**TEI**	**Imagens**	**Curvas $\sigma \times \varepsilon$**	**TEI**	**Imagens**	**Curvas $\sigma \times \varepsilon$**	**TEI**	**Imagens**
0,2	0,06	0,06	0,00	0,06	0,05	0,00	0,09	0,10	0,00
0,4	0,09	0,11	0,00	0,10	0,11	0,00	0,14	0,12	0,01
0,6	0,09	0,13	0,05	0,13	0,13	0,07	0,19	0,16	0,10
0,8	0,14	0,20	0,11	0,21	0,21	0,17	0,23	0,23	0,19
1,0	0,88	0,36	0,42	0,88	0,37	0,37	0,87	0,40	0,35

Fonte: Própria autoria.

Tabela 5.12 – Dano nos concretos C30-28 com nível máximo de tensão de 70%.

n/Nf	S5F5			S5F25			S5F125		
	Curvas $\sigma \times \varepsilon$	**TEI**	**Imagens**	**Curvas $\sigma \times \varepsilon$**	**TEI**	**Imagens**	**Curvas $\sigma \times \varepsilon$**	**TEI**	**Imagens**
0,2	0,09	0,08	0,00	0,08	0,08	0,00	0,09	0,07	0,00
0,4	0,12	0,10	0,01	0,14	0,16	0,01	0,13	0,12	0,01
0,6	0,18	0,18	0,09	0,19	0,17	0,10	0,17	0,18	0,09
0,8	0,21	0,21	0,18	0,24	0,22	0,20	0,21	0,23	0,17
1,0	0,86	0,39	0,35	0,86	0,39	0,33	0,86	0,41	0,36

Fonte: Própria autoria.

Tabela 5.13 – Dano nos concretos C30-90 com nível máximo de tensão de 50%.

n/Nf	S5F5			S5F25			S5F125		
	Curvas $\sigma \times \varepsilon$	**TEI**	**Imagens**	**Curvas $\sigma \times \varepsilon$**	**TEI**	**Imagens**	**Curvas $\sigma \times \varepsilon$**	**TEI**	**Imagens**
0,2	0,08	0,08	0,00	0,11	0,11	0,01	0,11	0,11	0,01
0,4	0,09	0,11	0,00	0,15	0,14	0,01	0,15	0,14	0,01
0,6	0,15	0,15	0,08	0,17	0,16	0,09	0,19	0,19	0,10
0,8	0,17	0,19	0,14	0,22	0,22	0,19	0,24	0,24	0,21
1,0	0,88	0,36	0,40	0,88	0,37	0,35	0,87	0,38	0,33

Fonte: Própria autoria.

Tabela 5.14 – Dano nos concretos C30-90 com nível máximo de tensão de 70%.

n/Nf	S5F5			S5F25			S5F125		
	Curvas $\sigma \times \varepsilon$	**TEI**	**Imagens**	**Curvas $\sigma \times \varepsilon$**	**TEI**	**Imagens**	**Curvas $\sigma \times \varepsilon$**	**TEI**	**Imagens**
0,2	0,07	0,07	0,00	0,05	0,05	0,00	0,16	0,16	0,01
0,4	0,13	0,11	0,01	0,14	0,11	0,01	0,18	0,18	0,01
0,6	0,12	0,17	0,06	0,13	0,17	0,07	0,20	0,20	0,10
0,8	0,22	0,22	0,18	0,22	0,22	0,18	0,28	0,28	0,24
1,0	0,86	0,38	0,36	0,86	0,39	0,35	0,86	0,41	0,30

Fonte: Própria autoria.

Avaliando as imagens capturadas nos ensaios experimentais, os resultados descritos neste capítulo, e sabendo que a proporção da vida útil à fadiga associada ao estágio II representa o tempo em que o concreto tem suas fissuras propagadas, observou-se que, após a iniciação da propagação, o desenvolvimento delas configura-se como um mecanismo lento, compreendendo 75-90% da VUF.

Tabela 5.15 – Dano nos concretos C50 com nível máximo de tensão de 50%.

n/Nf	S5F5			S5F25			S5F125		
	Curvas $\sigma \times \varepsilon$	**TEI**	**Imagens**	**Curvas $\sigma \times \varepsilon$**	**TEI**	**Imagens**	**Curvas $\sigma \times \varepsilon$**	**TEI**	**Imagens**
0,2	0,15	0,12	0,01	0,10	0,10	0,00	0,15	0,11	0,01
0,4	0,15	0,17	0,01	0,14	0,14	0,01	0,15	0,15	0,01
0,6	0,17	0,17	0,09	0,18	0,18	0,09	0,22	0,23	0,12
0,8	0,20	0,21	0,17	0,21	0,23	0,18	0,42	0,25	0,20
1,0	0,88	0,36	0,37	0,87	0,39	0,36	0,87	0,38	0,43

Fonte: Própria autoria.

Tabela 5.16 – Dano nos concretos C50 com nível máximo de tensão de 70%.

n/Nf	S5F5			S5F25			S5F125		
	Curvas $\sigma \times \varepsilon$	**TEI**	**Imagens**	**Curvas $\sigma \times \varepsilon$**	**TEI**	**Imagens**	**Curvas $\sigma \times \varepsilon$**	**TEI**	**Imagens**
0,2	0,06	0,06	0,00	0,12	0,11	0,01	0,17	0,07	0,01
0,4	0,08	0,08	0,00	0,15	0,14	0,01	0,17	0,17	0,01
0,6	0,15	0,15	0,08	0,16	0,17	0,08	0,19	0,19	0,10
0,8	0,24	0,24	0,20	0,18	0,20	0,15	0,23	0,23	0,19
1,0	0,86	0,42	0,33	0,86	0,42	0,38	0,85	0,41	0,34

Fonte: Própria autoria.

Tabela 5.17 – Dano nos concretos C70 com nível máximo de tensão de 50%.

n/Nf	S5F5			S5F25			S5F125		
	Curvas $\sigma \times \varepsilon$	**TEI**	**Imagens**	**Curvas $\sigma \times \varepsilon$**	**TEI**	**Imagens**	**Curvas $\sigma \times \varepsilon$**	**TEI**	**Imagens**
0,2	0,09	0,09	0,00	0,09	0,09	0,00	0,12	0,12	0,01
0,4	0,11	0,13	0,01	0,13	0,13	0,01	0,15	0,15	0,01
0,6	0,14	0,16	0,08	0,16	0,16	0,08	0,20	0,21	0,11
0,8	0,17	0,22	0,17	0,21	0,23	0,20	0,30	0,26	0,25
1,0	0,88	0,35	0,46	0,87	0,38	0,44	0,87	0,41	0,42

Fonte: Própria autoria.

Tabela 5.18 – Dano nos concretos C70 com nível máximo de tensão de 70%.

n/Nf	S5F5			S5F25			S5F125		
	Curvas $\sigma \times \varepsilon$	**TEI**	**Imagens**	**Curvas $\sigma \times \varepsilon$**	**TEI**	**Imagens**	**Curvas $\sigma \times \varepsilon$**	**TEI**	**Imagens**
0,2	0,07	0,07	0,00	0,08	0,08	0,00	0,14	0,14	0,01
0,4	0,11	0,14	0,01	0,14	0,14	0,01	0,16	0,16	0,01
0,6	0,15	0,18	0,08	0,16	0,16	0,09	0,18	0,18	0,10
0,8	0,22	0,25	0,21	0,21	0,24	0,22	0,28	0,28	0,26
1,0	0,85	0,40	0,45	0,84	0,39	0,41	0,84	0,43	0,48

Fonte: Própria autoria.

De acordo com Schijve (2003), a velocidade em que o concreto alcança a fase de progressão de fissuras está diretamente relacionada às propriedades mecânicas do material. No entanto, o autor cita que, para os casos de cargas cíclicas, outros aspectos se tornam importantes e devem ser avaliados, a exemplo da integridade microestrutural do material e das configurações de aplicação do carregamento cíclico.

5.3 Conclusão do capítulo

De modo inédito, neste trabalho foram tratados espectros de carregamento considerando relaxamento total do concreto, onde a razão R foi igual a zero para todos os cenários de ensaio. Mesmo diante dessa condição, os resultados obtidos mostraram que um acréscimo na vida útil à fadiga ao aumentar a frequência de carregamento, desde que mantido o mesmo nível de tensão aplicado no material. Também foi possível observar como a frequência de carregamento influencia significativamente no comportamento à fadiga do concreto, assim como a resistência à compressão do material.

Os resultados mostraram que o acúmulo de dano é maior ao diminuir a frequência de carregamento, sendo também maiores as deformações máximas sofridas pelas amostras. Estes resultados auxiliam no entendimento do motivo que leva a vida útil à fadiga ser superior em concretos submetidos a altas frequências de carregamento.

A avaliação do histórico da deformação máxima possibilitou concluir que o intervalo de tempo entre o surgimento das fissuras e o início da ruptura, período que define o estágio II, decresce à medida que diminui a frequência de carregamento. Também observou-se que, para uma mesma frequência de carregamento, a proporção da vida útil que define o período de propagação das fissuras se mantém fixa independentemente do nível de tensão máxima aplicado.

No que se refere à avaliação do dano, a comparação entre os valores obtidos com as diferentes técnicas empregadas mostrou que o dano determinado pela análise da variação do módulo de elasticidade dinâmico, obtido via técnica de excitação por impulso, descreve coerentemente a perda de rigidez do material. Desta forma, a técnica se apresenta como um método eficiente para avaliar de modo prático a degradação do concreto submetido a solicitações cíclicas.

Por fim, os resultados mostraram que uma curva do tipo S, representativa da fluência cíclica, pode ser empregada para representar o avanço do dano no concreto em função do número de ciclos de carregamento. Ademais, verificou-se que o índice de danificação aumenta ao aumentar o nível de tensão máxima aplicado e diminui com o aumento da frequência de carregamento.

CAPÍTULO

6

MODELAGEM DO ACÚMULO DE DANO EM CONCRETOS SOB COMPRESSÃO CÍCLICA

Com o propósito de modelar o comportamento à fadiga em concretos submetidos à compressão cíclica, neste capítulo são apresentadas as formulações analíticas propostas para o cálculo do dano acumulado a cada ciclo de carregamento e para a predição da vida útil à fadiga.

Inicialmente são apresentadas as premissas que fundamentam o dano acumulado na fadiga, considerando os princípios da mecânica do dano contínuo. Em seguida são descritos os procedimentos de modelagem matemática utilizados para a determinação das formulações analíticas do acúmulo de dano e vida útil à fadiga. Os modelos são apresentados juntamente com as validações e testes de performance. Ao final do capítulo, apresentam-se o acoplamento das formulações ao código de simulação numérica via MEFP, e os exemplos numéricos empregados para validar o código e demonstrar sua aplicabilidade.

6.1 Dano acumulado na fadiga

Nesta seção são apresentados os principais aspectos relacionados ao dano gerado em um corpo submetido à ação de cargas cíclicas. Além da definição do processo de danificação do material pela ação da fadiga, apresenta-se como o dano é quantificado em função do histórico de carregamento.

6.1.1 Estágios da fratura na fadiga

Em um sólido submetido à ação de cargas cíclicas, o processo de fratura tem início com a nucleação e o desenvolvimento de microfraturas em seu interior. O processo de progressão das fissuras no concreto sob fadiga ocorre de modo análogo ao do concreto sujeito a ações estáticas ou quase-estáticas, onde inicialmente microfissuras são formadas, e então, sob uma determinada

taxa de progressão, macrofissuras se desenvolvem causando a falha do material.

De acordo com Kolluru et al. (2000), o crescimento de fissuras devido à ação de cargas cíclicas, de amplitude constante, é descrito por uma curva semelhante à curva de fluência cíclica, e que a relação da taxa de crescimento da fissura com o número de ciclos aplicado compreende duas fases: (i) um estágio de desaceleração, quando ocorre uma diminuição na taxa de crescimento da fissura com o aumento do seu comprimento e; (ii) um estágio de aceleração, em que a taxa de crescimento da fissura aumenta a uma taxa constante.

Kolluru et al. (2000) relatam que a dimensão da fissura, quando ocorre a mudança do estágio de desaceleração para o de aceleração, é igual ao do comprimento da fissura obtida com a carga de pico do ensaio de compressão estática.

Para um sólido contendo defeitos preexistentes em sua microestrutura, como o concreto, a fase de fratura latente (fase que compreende o período inicial da fratura, ou nucleação das fissuras) pode ser inexistente ou definida por um pequeno intervalo de tempo, considerando sua vida útil. Já o período de propagação das fissuras compreende de 20% e 80% da vida útil à fadiga do material, conforme relatam Kolluru et al. (2000).

Este aspecto foi também observado nos ensaios conduzidos na campanha experimental, apresentada no capítulo anterior. Porém, a análise foi conduzida diante da observação do índice de dano, onde verificou-se que o dano não apresenta variação em seu valor no intervalo que compreende de 15% a 80% da vida útil à fadiga. Este comportamento foi verificado ao analisar o dano definido pela redução do módulo de elasticidade do material.

A relação entre os intervalos de tempo que compreendem as fases de fratura latente e de propagação das fissuras é altamente dependente da geometria do corpo e da natureza e proporção dos defeitos preexistentes no material. Conforme apresentado no *Capítulo* 4, os defeitos preexistentes configuram uma parcela do dano total. Assim, quanto maior for a porção de defeitos preexistentes, menor é a vida útil do elemento na fadiga ou menor é a sua resistência à fadiga.

A determinação do período latente de fratura é um trabalho difícil de ser realizado, sendo geralmente caracterizado em função do grau de homogeneização que ele apresenta. No entanto, se um material é definido como monofásico torna-se simples a definição desta fase. Ademais, a proporção do tempo entre a fase latente e a vida útil é maior nos materiais homogêneos do que nos heterogêneos.

De modo geral, é quase impossível definir e quantificar o dano de um material em sua fase latente, assim como a acumulação do dano neste período. Assim, na maioria dos casos, o dano só é mensurado quando o material entra na fase de propagação das fissuras, sendo este o motivo do dano acumulado ser definido sem especificação das fases de fratura em problemas da mecânica da fadiga. Nestes casos, o dano é descrito em função de todo o histórico de carregamento, conforme mostra a Equação 6.1.

$$D_a = \frac{N}{N_f} \tag{6.1}$$

em que D_a é o dano acumulado para um determinado número de ciclos de carregamento (N) e N_f é o número de ciclos associado à falha do material para uma amplitude de carregamento constante.

Para representar de modo adequado o processo de acumulação do dano em um corpo sujeito a solicitações cíclicas, é essencial a caracterização do regime de fadiga ao qual o material é submetido, sendo eles a fadiga de alto ciclo ou fadiga de baixo ciclo.

A fadiga de alto ciclo caracteriza regimes de carregamentos cíclicos com baixos níveis de tensão máxima, em relação à resistência do material, e com a imposição de grandes números de ciclos para gerar a falha. A fadiga de baixo ciclo é caracterizada por um regime de carregamentos com alto nível de tensão máxima aplicado, e por um baixo número de ciclos de carregamento.

Comenta-se que, até os dias atuais, persiste a definição dos regimes de fadiga pela caracterização do número de ciclos necessários para gerar a falha do material e pelo nível de tensão aplicada. Porém, como discutido no estado da arte (*Capítulo* 1), os resultados dispostos na literatura mostram que outros parâmetros podem, e devem, ser empregados na definição dos regimes de fadiga, a exemplo da frequência de carregamento, que teve sua influência investigada na campanha experimental.

Ao considerar os resultados obtidos no estudo experimental (*Capítulo* 5), foi possível observar como a frequência de carregamento influencia significativamente no comportamento à fadiga do concreto, sendo verificado um acréscimo na vida útil à fadiga ao aumentar a frequência de carregamento, desde que mantido o mesmo nível de tensão aplicado no material.

Ainda analisando os resultados da campanha experimental, eles possibilitaram inferir que o acúmulo de dano é maior ao diminuir a frequência de carregamento, e que são maiores as deformações máximas sofridas pelas amostras de concreto ao diminuir a frequência do carregamento. Estes resultados auxiliam no entendimento do porquê de a vida útil à fadiga ser superior em concretos submetidos a altas frequências. Ademais, verificou-se que uma curva do tipo *S*, representativa da fluência cíclica, pode ser empregada para representar o avanço do dano no concreto em função do número de ciclos de carregamento.

6.1.2 Dano acumulado

Diante da ação de cargas cíclicas, a análise do dano em um corpo pode ser conduzida por meio do princípio da soma linear do dano, processo comumente denominado de acumulação do dano. Este princípio foi pioneiramente definido e aplicado no estudo da fratura por fadiga conduzido em Palmgren (1924) e Miner et al. (1945).

O princípio da soma linear do dano, definido por Palmgren (1924) e Miner et al. (1945) é de fácil compreensão, podendo ser aplicado de maneira simples em formulações numéricas para a representação do dano associado à fadiga.

Para descrever o dano associado à fadiga, ou dano acumulado nos ciclos de carregamento, Palmgren (1924) e Miner et al. (1945) definem que o dano gerado a cada ciclo (D_{ciclo}) corresponde ao inverso do número de ciclos necessário para levar à falha do material (Equação 6.2).

Este princípio foi desenvolvido considerando que o carregamento cíclico é contínuo e possui amplitude e frequência constantes.

$$D_{ciclo} = \frac{1}{N_f} \tag{6.2}$$

Quando o carregamento cíclico tem amplitude de tensão com variação constante ao longo do tempo, a taxa de dano em relação ao histórico do carregamento é dada pela Equação 6.3. Para carregamentos com amplitude variando continuamente no tempo, o dano em função do histórico é definido pela Equação 6.4, que também é determinada considerando o princípio do dano acumulado.

$$\sum_{k=1}^{s} \frac{\Delta N_k}{N_k^{'}} = 1 \tag{6.3}$$

$$\int_0^{N_f} \frac{dN}{N} = 1 \tag{6.4}$$

em que ΔN_k é o número de ciclos associado a uma determinada amplitude de tensão ($\Delta\sigma_k$) e $N_k^{'}$ é o número de ciclos necessário para causar a falha do material na amplitude $\Delta\sigma_k$.

Ao considerar a Equação 6.4, o dano para um certo número de ciclos de carregamento passa a ser expresso pela Equação 6.5 que por consequência, ao ser derivada em relação ao número de ciclos N, define uma lei linear para a evolução do dano, conforme apresentado na Equação 6.6. Das Equações 6.5 e 6.6, verifica-se que as formulações apresentadas preservam o significado físico do dano, já que o mesmo é definido apenas no intervalo $[0,1)$.

$$\int_0^{N} \frac{dN}{N} = D \tag{6.5}$$

$$\frac{dD}{dN} = \frac{1}{N} \tag{6.6}$$

A lei de evolução para o dano por fadiga, em seu modo mais simples (Equação 6.6), considera apenas o número de ciclos. No entanto, modelos mais sofisticados podem ser obtidos diante do acoplamento dos parâmetros associados à fenomenologia do mecanismo de deterioração do material. Deste modo, uma lei de evolução do dano acumulado pode ser definida via Equação 6.7, onde a influência das variáveis que definem o material e as condições de carregamento são inseridas na formulação por meio da observação de resultados experimentais, e/ou premissas que definem o comportamento mecânico do concreto.

$$\frac{dD}{d\zeta} = f(\sigma, R, N, ...) \tag{6.7}$$

em que $\zeta > 0$ é definido por parâmetro monotonicamente crescente, similar à variável tempo (t).

De acordo com Kachanov (1986), para o caso de processos irreversíveis, um parâmetro associado à entropia $s(t)$ deve ser introduzido para a definição da variável ζ (Equação 6.8), onde a seleção do parâmetro que define ζ e as variáveis de entrada da função f, dada na Equação 6.7,

é feita de acordo com resultados obtidos experimentalmente.

$$\zeta = \int_0^t s(\tau) d\tau \tag{6.8}$$

em que $\zeta > 0$ é um parâmetro monotonicamente crescente, similar à variável tempo (t) e $s(\tau)$ é uma função monotonicamente crescente associada à $s(t)$, que define a entropia do sistema.

Em muitos dos modelos desenvolvidos e disponíveis na literatura (GAO; HSU, 1998; ALLICHE, 2004; PFISTER; PETRYNA; STANGENBERG, 2006; SUN; XU, 2021; KINDRACHUK; THIELE; UNGER, 2015; BAKTHEER; CHUDOBA, 2019; WANG, 2019), as formulações referentes ao acúmulo de dano foram propostas considerando ζ igual ao número de ciclos N, que é um parâmetro monotonicamente crescente e define uma variável que pode ser associada ao tempo em análises mecânicas com solicitações cíclicas.

Para Gao e Hsu (1998), por exemplo, o acúmulo de dano por fadiga no concreto é expresso em função do número de ciclos N, do nível máximo de tensão σ_{max} e da resistência característica do material f_c, conforme Equação 6.9.

$$\frac{dD}{dN} = F\left(N, \sigma_{max}, f_c\right) = \alpha \exp\left(\frac{\beta \sigma_{max}}{f_c}\right) N^k \tag{6.9}$$

em que α, β e k são parâmetros do modelo que precisam ser ajustados a dados experimentais.

Entretanto, ao utilizar o número de ciclos como um dos parâmetros da lei do acúmulo de dano, um complicador natural é inserido na formulação, que é a determinação do número de ciclos que causa a falha no material.

Na literatura existem diversos modelos que possibilitam a estimativa da vida útil à fadiga do concreto (TEPFERS; KUTTI, 1979; SPARKS, 1982; CORNELISSEN, 1984; CORNELISSEN; LEEWIS, 1987; ZHANG; PHILLIPS; WU, 1996; SIEMES, 1988; WANG; SONG, 2011; MEDEIROS, 2012). Esses e outros modelos foram apresentados e discutidos no *Capítulo* 2, onde identificou-se que grande parte das formulações foram geradas tendo como base a Equação 6.10, possuindo como diretriz as curvas $S-N$ ou $\varepsilon - N$, e fazem o uso de um único banco de dados.

$$\frac{\sigma_{max}}{f_{c,t}} = d + e \cdot log(N) \tag{6.10}$$

em que d e e são constantes determinadas por meio do ajuste das curvas geradas com resultados obtidos experimentalmente e $f_{c,t}$ refere-se à resistência de tração ou compressão do material.

Através das análises conduzidas nos modelos, percebeu-se que muitos apresentam limitada capacidade de aplicação, já que atendem a um pequeno número de casos devido às condições de contorno empregadas nas campanhas experimentais, à grande variabilidade das propriedades dos materiais que compõem o concreto, condições de cura, preparação dos corpos de prova e condições de contorno dos ensaios. Acrescenta-se que a maior parte das formulações disponíveis na literatura foram desenvolvidas considerando dados obtidos de campanhas experimentais onde não foram avaliadas a influência da frequência de carregamento ou da razão entre os níveis mínimo e máximo das tensões aplicadas, parâmetros que possuem

significativa influência no comportamento do material ao ser submetido a cargas cíclicas.

Para que uma lei representativa do acúmulo de dano, considerando concretos submetidos à compressão cíclica, seja definida com os principais aspectos fenomenológicos que governam a fadiga, torna-se necessário gerar um modelo para a vida útil à fadiga que tenha em sua formulação parâmetros associados às propriedades do material e defina com maior fidelidade o espectro do carregamento.

Neste trabalho foram desenvolvidas duas formulações analíticas, uma para a lei de acúmulo do dano, e outra para a estimativa da vida útil à fadiga. O modelo do acúmulo de dano foi proposto baseando-se na Equação 6.7, considerando como parâmetros de entrada: a vida útil à fadiga N, o nível de tensão máxima S_{max}, a frequência de carregamento f_h, a razão entre os níveis de tensão mínima e máxima R e a resistência à compressão do concreto f_c. Estes mesmos parâmetros foram empregados para definir o modelo de predição do número de ciclos que causa a falha por fadiga.

As formulações foram obtidas via modelagem matemática por meio de Regressão Multivariada com técnicas de regressão não linear. A escolha deste método se deu em função de análises estatísticas dos resultados obtidos na campanha experimental, dados disponíveis na literatura e de pesquisas bibliográficas previamente realizadas que indicaram uma relação não linear dos parâmetros preditores com o dano acumulado $\frac{dD}{dN}$ e com a vida útil à fadiga N.

6.2 Modelos de Regressão Multivariada

Na ciência de dados, a regressão é um método comumente empregado para explorar e inferir a relação de uma ou mais variáveis de interesse com parâmetros preditores. Os modelos de regressões não lineares vêm sendo utilizados para descrever problemas de distintas naturezas, onde os parâmetros podem ter interpretações práticas (GRAYBILL; IYER, 1994).

Na modelagem com regressão de dados, os modelos são usualmente classificados como: modelos lineares, onde há relação linear entre os parâmetros explicativos do modelo; modelos linearizáveis, onde o modelo pode ser descrito de modo linear, por meio de alguma transformação; e modelos não lineares, onde ao menos uma das derivadas parciais do modelo é dependente de um dos seus parâmetros.

Para Seber e Wild (2003), o uso de modelos não lineares apresenta vantagem em relação os modelos lineares e linearizáveis, uma vez que os seus parâmetros configuram um maior conhecimento sobre o fenômeno em estudo, fornecendo um ajuste adequado mesmo com o uso de poucas variáveis. Porém, existe desvantagem no uso de regressões não lineares, que se refere ao fato da maioria das vezes exigir uma otimização iterativa de funções que, muitas vezes, não converge facilmente para a solução desejada. Assim, a regressão com modelos não lineares tem sua performance dependente do uso de algoritmos que resolvam esse problema.

A fim de contornar as dificuldades existentes na regressão não linear, a maioria dos algoritmos disponíveis na literatura que permitem uma otimização iterativa do ajuste de funções

são baseados em modificações e aproximações de Newton-Raphson e Gauss-Newton. De acordo com Searle e Gruber (2016), ao considerar aspectos associados à inferência estatística clássica, no desenvolvimento de modelos de regressão não linear, os estimadores de mínimos quadrados configuram ótimas características que maximizam as chances de convergência no ajuste de curvas, por serem não enviesados, normalmente distribuídos e com variância mínima entre qualquer outra classe de estimadores. Estas características se fazem presentes quando o tamanho da amostra é suficiente para descrever uma relação entre os preditores e as variáveis de interesse.

O uso do método de mínimos quadrados pode não gerar convergência no ajuste de dados e nestes casos, ou os dados não possibilitam inferir uma relação ou as funções empregadas para o ajuste não descrevem o problema analisado. No entanto, o método dos mínimos quadrados pode ser empregado para a determinação de parâmetros de modelos não lineares. Porém, para sistemas de equações não lineares, não existe uma solução explícita direta, sendo necessário utilizar processos iterativos que permitam obter os parâmetros da curva (GALLANT, 2009).

Segundo Prado (2020), existem diversos métodos iterativos na literatura que proporcionam a obtenção das estimativas de mínimos quadrados dos parâmetros das curvas ajustadas via regressão não linear. Dos modelos existentes na literatura, Prado (2020) descreve que os mais utilizados são o método de Gauss-Newton (conhecido como método da linearização), o método Steepest-Descent (método gradiente) e o método de Marquardt. Neste trabalho foi empregado o método iterativo de Gauss-Newton, o qual será apresentado na sequência após a definição do modelo de regressão não linear multivariada.

Diante do exposto, Gallant (2009) descreve duas formas para definir o modelo não linear de forma vetorial, as quais facilitam a implementação do método de regressão. A primeira forma se embasa no fato de que o modelo consiste de M equações com regressão não linear univariadas independentes, onde são definidas de acordo com a Equação 6.11, que tem a sua forma matricial descrita na Equação 6.12.

$$\breve{y}_{\alpha} = \breve{f}_{\alpha}\left(\breve{x}_t, \breve{\theta}_{\alpha}\right) + \breve{e}_{\alpha} \tag{6.11}$$

$$\begin{bmatrix} y_{\alpha 1} \\ y_{\alpha 2} \\ \vdots \\ y_{\alpha t} \\ \vdots \\ y_{\alpha n} \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} f_{\alpha}\left(\breve{x}_1, \breve{\theta}_{\alpha}\right) \\ f_{\alpha}\left(\breve{x}_2, \breve{\theta}_{\alpha}\right) \\ \vdots \\ f_{\alpha}\left(\breve{x}_t, \breve{\theta}_{\alpha}\right) \\ \vdots \\ f_{\alpha}\left(\breve{x}_n, \breve{\theta}_{\alpha}\right) \end{bmatrix}_{n\times 1} + \begin{bmatrix} e_{\alpha 1} \\ e_{\alpha 2} \\ \vdots \\ e_{\alpha t} \\ \vdots \\ e_{\alpha n} \end{bmatrix}_{n\times 1} \tag{6.12}$$

em que $\alpha = 1,2,...,M$ se refere a cada característica avaliada na unidade experimental, $t = 1,2,...,n$ representa o número de observações de cada característica α, $\breve{x}_t$ refere-se ao vetor k-dimensional dos parâmetros regressores, $\breve{y}_{\alpha}$ refere-se ao vetor k-dimensional dos parâmetros preditos, $\breve{\theta}_{\alpha}$ é o vetor dos parâmetros desconhecidos do modelo e $\breve{e}_{\alpha}$ descreve o vetor n-dimensional dos erros experimentais de cada variável resposta.

A segunda forma para descrever formulações não lineares considera um modelo de regressão em que enfatiza-se a natureza multivariada dos dados, sendo definida pela Equação 6.13. O uso da técnica de regressão multivariada possibilita otimizar o tempo despendido na regressão.

$$\breve{y}_t = \breve{f}\left(\breve{x}_t, \breve{\theta}\right) + \breve{e}_t \tag{6.13}$$

em que $t = 1, 2, ..., n$ define o vetor M-dimensional dos parâmetros preditos $\breve{y}_t$, $\breve{x}_t$ refere-se ao vetor k-dimensional dos parâmetros regressores, $\breve{\theta}$ é o vetor dos parâmetros desconhecidos do modelo e $\breve{e}_\alpha$ descreve o vetor M-dimensional dos erros experimentais de cada variável resposta.

Na Equação 6.11, que descreve a forma de modelos não lineares, a estimativa do vetor de parâmetros $\breve{\theta}_\alpha$ de cada modelo é determinada pelo vetor $\breve{\Theta}_\alpha$, o qual minimiza a soma de quadrados do resíduo. A minimização da soma dos quadrados dos resíduos é definida pela Equação 6.14, a qual permite generalizar os erros dos modelos conforme mostra a Equação 6.15. Na Equação 6.16 é definida a matriz $\hat{E}$, que representa as estimativas dos vetores de resíduos (erros) de cada modelo de regressão.

$$S\left(\breve{\theta}_\alpha\right) = \left[\breve{y}_\alpha - \breve{f}_\alpha\left(\breve{x}_t, \breve{\theta}_\alpha\right)\right]^T \left[\breve{y}_\alpha - \breve{f}_\alpha\left(\breve{x}_t, \breve{\theta}_\alpha\right)\right] \tag{6.14}$$

$$\breve{\varepsilon}_\alpha = \breve{y}_\alpha - \breve{f}_\alpha\left(\breve{x}_t, \breve{\Theta}_\alpha\right) \tag{6.15}$$

$$\hat{E} = [\breve{\varepsilon}_1 \breve{\varepsilon}_2 \ldots \breve{\varepsilon}_M] \tag{6.16}$$

Ao considerar as Equações 6.14 e 6.16, pode-se definir a matriz $\hat{\sum}$ de variância e covariância do modelo, com ordem $M \times M$ conforme mostra a Equação 6.17.

$$\hat{\sum} = \frac{1}{n}\hat{E}^T\hat{E} \tag{6.17}$$

Definida a soma que minimiza os quadrados dos resíduos e a matriz de variância e covariância, pode-se reescrever o conjunto de M regressões rearranjando-o em uma única regressão $\breve{y}$, conforme apresentado na Equação 6.18, ou em modo matricial na Equação 6.19.

$$\breve{y} = \breve{f}\left(\breve{\theta}\right) + \breve{e} \tag{6.18}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix}_{nM\times 1} = \begin{bmatrix} f_1\left(\breve{x}_1, \breve{\theta}_1\right) \\ f_2\left(\breve{x}_2, \breve{\theta}_2\right) \\ \vdots \\ f_M\left(\breve{x}_t, \breve{\theta}_M\right) \end{bmatrix}_{nM\times 1} + \begin{bmatrix} \breve{e}_1 \\ \breve{e}_2 \\ \vdots \\ \breve{e}_M \end{bmatrix}_{nM\times 1} \tag{6.19}$$

Para facilitar a implementação da técnica, a matriz de variância e covariância dos erros pode ser reescrita de acordo com a Equação 6.20.

Ao realizar a fatoração de Cholesky da inversa da matriz de variâncias e covariâncias

(Equação 6.21) pode-se definir o modelo de regressão rotacionado (Equação 6.22). Neste modelo, verifica-se que a matriz de variância e covariância entre os erros é uma matriz identidade e que o modelo rotacionado define um modelo não linear univariado no qual $\breve{\theta}$ pode ser estimado pela minimização definida na Equação 6.23.

$$C\left(e,e^T\right)=\begin{bmatrix}\sigma_{11}\mathbf{I} & \sigma_{12}\mathbf{I} & \dots & \sigma_{1M}\mathbf{I}\\ \sigma_{21}\mathbf{I} & \sigma_{22}\mathbf{I} & \dots & \sigma_{2M}\mathbf{I}\\ \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{M1}\mathbf{I} & \sigma_{M2}\mathbf{I} & \dots & \sigma_{MM}\mathbf{I}\end{bmatrix}=\sum\otimes\mathbf{I}=\Omega \tag{6.20}$$

em que $\otimes$ representa o operador produto de Kronecker, $\mathbf{I}$ é a matriz Identidade de dimensão $n\times n$, $\sum$ é a matriz de variância e covariância das estimativas dos erros e $C\left(e,e^T\right)=\Omega$ define a resultante do produto de dimensões $nM\times nM$.

$$\breve{\sum}^{-1}=\breve{\Lambda}^T\breve{\Lambda} \tag{6.21}$$

$$\breve{y}^*=\breve{f}\left(\breve{\theta}\right)^*+\breve{e}^* \tag{6.22}$$

$$S\left(\breve{\theta},\sum\right)=\left[\breve{y}^*-\breve{f}\left(\breve{\theta}\right)^*\right]^T\left[\breve{y}^*-\breve{f}\left(\breve{\theta}\right)^*\right]=\left[\breve{y}-\breve{f}\left(\breve{\theta}\right)\right]^T\left(\breve{\sum}^{-1}\otimes\mathbf{I}\right)\left[\breve{y}-\breve{f}\left(\breve{\theta}\right)\right] \tag{6.23}$$

em que $\breve{\Lambda}$ representa o fator de Cholesky, que é uma matriz triangular superior com elementos diagonais positivo definido estraídos de C.

Comenta-se que, na Equação 6.23, $\sum$ é desconhecido, mas pode ser substituído por $\hat{\Sigma}$, que foi definido na Equação 6.17, de forma que pode-se estimar $\breve{\theta}$ por $\breve{\Theta}$ minimizando $S\left(\breve{\theta},\hat{\Sigma}\right)$.

A decomposição de Cholesky da inversa da matriz de covariâncias se faz extremamente necessária, uma vez que permite o uso do método de mínimos quadrados ordinários, ao invés do método de mínimos quadrados generalizados (PRADO, 2020). Ainda de acordo com Prado (2020), as ideias apresentadas até o momento podem ser facilmente implementadas ao considerar o esquema de notação multivariada apresentado na Equação 6.13, e que pode ser reescrita matricialmente, conforme mostra a Equação 6.24.

$$\breve{y}_t=\begin{bmatrix}y_{1t}\\ y_{2t}\\ \vdots\\ y_{Mt}\end{bmatrix}_{M\times 1}=\begin{bmatrix}f_1\left(\breve{x}_t,\breve{\theta}_1\right)\\ f_2\left(\breve{x}_t,\breve{\theta}_2\right)\\ \vdots\\ f_M\left(\breve{x}_t,\breve{\theta}_M\right)\end{bmatrix}_{M\times 1}+\begin{bmatrix}\breve{e}_{1t}\\ \breve{e}_{2t}\\ \vdots\\ \breve{e}_{Mt}\end{bmatrix}_{M\times 1} \tag{6.24}$$

$$\begin{aligned}S\left(\breve{\theta},\sum\right)&=\sum_{t=1}^{n}\left[\breve{y}_t-\breve{f}\left(\breve{x}_t,\breve{\theta}\right)\right]^T\left[\breve{y}_t-\breve{f}\left(\breve{x}_t,\breve{\theta}\right)\right]\\ &=\left[\breve{y}_t-\breve{f}\left(\breve{x}_t,\breve{\theta}\right)\right]^T\left(\breve{\sum}^{-1}\otimes\mathbf{I}\right)\left[\breve{y}_t-\breve{f}\left(\breve{x}_t,\breve{\theta}\right)\right]\end{aligned} \tag{6.25}$$

Ao utilizar o esquema de notação multivariada, a soma de quadrados fica definida de modo análogo ao da Equação 6.23, conforme mostra a Equação 6.25. Assim, a soma de quadrados é a mesma para os modelos não linear univariado e multivariado.

De forma a automatizar a busca pela soma de quadrados, a qual é de suma importância para determinar os parâmetros $\breve{\theta}$ das funções ajustadas, pode-se reescrever a Equação 6.25, considerando a Equação 6.21, conforme mostra a Equação 6.26, ou de forma acoplada na Equação 6.27, em que Λ_α^T denota a α-ésima linha do fator de Cholesky Λ.

$$S\left(\breve{\theta},\sum\right)=\sum_{t=1}^{n}\left[\Lambda\breve{y}_t-\Lambda\breve{f}\left(\breve{x}_t,\breve{\theta}\right)\right]^T\left[\Lambda\breve{y}_t-\Lambda\breve{f}\left(\breve{x}_t,\breve{\theta}\right)\right] \tag{6.26}$$

$$S\left(\breve{\theta},\sum\right)=\sum_{t=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{M}\left[\Lambda_\alpha^T\breve{y}_t-\Lambda_\alpha^T\breve{f}\left(\breve{x}_t,\breve{\theta}\right)\right]^2 \tag{6.27}$$

Na Equação 6.27, a soma de quadrados é definida como a soma dos quadrados dos termos univariados. Porém pode-se remover o duplo somatório da formulação pela utilização dos termos do modelo rotacionado (Equação 6.23), onde a soma de quadrados passa a ser expressa pela Equação 6.28. Este processo permite automatizar a busca dos parâmetros.

$$S\left(\breve{\theta},\sum\right)=\sum_{s=1}^{nM}\left[\breve{y}_s^*-\breve{f}_s^*\left(\breve{x}_s^*,\breve{\theta}\right)\right]^2 \tag{6.28}$$

Definido o modelo de regressão não linear multivariado, falta definir o método iterativo que possibilitará a determinação de uma solução explicita para os parâmetros dos ajustes. Como destacado acima, neste trabalho é empregado o método da linearização (Gauss-Newton).

A definição exposta do método de Gauss-Newton segue as notas apresentadas por Gallant (2009), sendo descrita com o emprego do modelo rotacionado (Equação 6.22). No método de Gauss-Newton, valores iniciais são aleatoriamente definidos para os parâmetros $\breve{\theta}$ do modelo e, em seguida, por meio do vetor de correção, dado pelo método de mínimos quadrados, os valores são atualizados. Este processo se repete até que uma solução explicita é obtida. O vetor de correção, definido pelo método dos mínimos quadrados, é apresentado na Equação 6.29.

$$\begin{aligned}D\left(\breve{\theta},\sum\right)=&\left[\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\breve{\theta}}\breve{f}\left(\breve{x}_t,\breve{\theta}\right)\right)^{-1}\sum\left(\frac{\partial}{\partial\breve{\theta}}\breve{f}\left(\breve{x}_t,\breve{\theta}\right)\right)\right]^{-1}\times\\&\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\breve{\theta}}\breve{f}\left(\breve{x}_t,\breve{\theta}\right)\right)^{-1}\sum\left[\breve{y}_t-\breve{f}\left(\breve{x}_t,\breve{\theta}\right)\right]\end{aligned} \tag{6.29}$$

Assim, considerando o vetor de correção, o algoritmo de Gauss-Newton modificado para minimizar $S\left(\breve{\theta},\sum\right)$ e que permite encontrar uma solução para o modelo de regressão não linear multivariada, segue os seguintes processos:

i Inicialmente deve-se escolher valores arbitrários para os parâmetros do modelo $\breve{\theta}_0$. Em seguida deve-se calcular o vetor de correção $D_0=D\left(\breve{\theta}_0,\sum\right)$ e determinar $0<\lambda_0<1$ de modo que $S\left(\breve{\theta}_0+\lambda_0 D_0,\sum\right)<S\left(\breve{\theta}_0,\sum\right)$;

ii Na sequência deve-se atualizar o vetor dos parâmetros $\breve{\theta}_1 = \breve{\theta}_0 + \lambda_1 D_0$, e então calcular $D_1 = D\left(\breve{\theta}_1, \sum\right)$ e encontrar $0 < \lambda_1 < 1$ de modo que $S\left(\breve{\theta}_1 + \lambda_1 D_1, \sum\right) < S\left(\breve{\theta}_1, \sum\right)$;

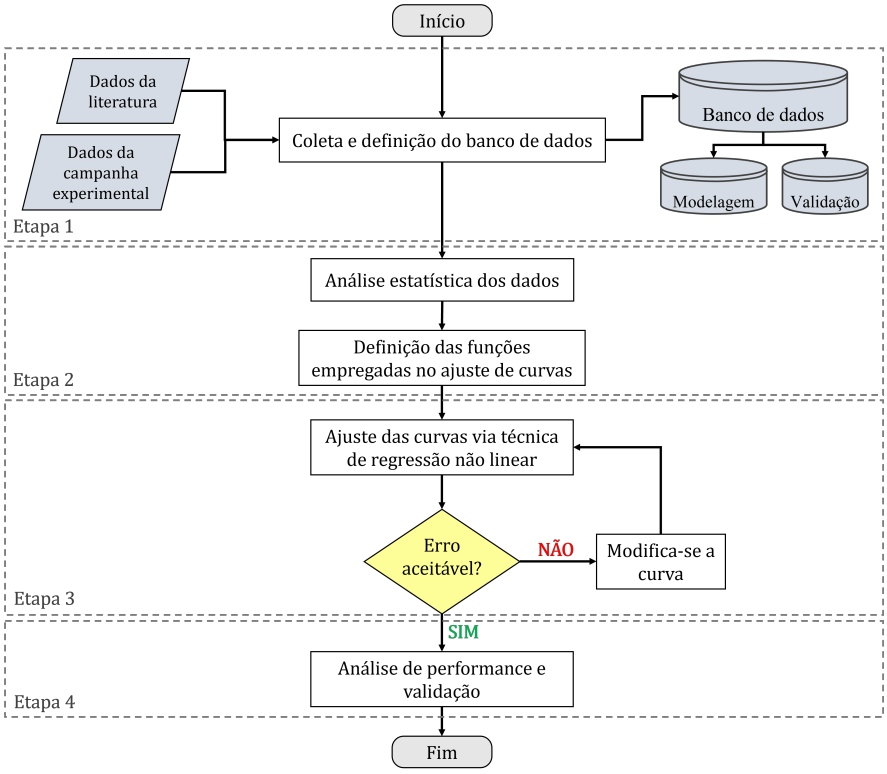
iii O procedimento anterior é repetido até que se alcance uma convergência, que neste trabalho refere-se a $\breve{\theta}_k \rightarrow \breve{\Theta}$, em que k é o número de iterações realizadas e $\breve{\Theta}$ é o vetor estimado dos parâmetros.

Para o desenvolvimento dos modelos de dano acumulado e vida útil à fadiga, implementou-se uma rotina de cálculo referente à técnica de regressão não linear multivariada, com método iterativo de Gauss-Newton. A rotina de cálculo foi desenvolvida no software *Matlab*, considerando a Toolbox R2012a, que já possui funções que permitem calcular de forma direta a correção dos parâmetros via método dos mínimos quadrados. Comenta-se que as modelagens foram realizadas utilizando como critério de convergência a norma do vetor de correção com valor menor ou igual a 10^{-6}.

6.3 Proposição de formulação preditiva da VUF

Com o objetivo de criar um modelo de estimativa da vida útil à fadiga de concretos submetidos à compressão cíclica considerando baixas frequências de carregamento ($f < 1$), adotou-se a metodologia representada na Figura 6.1.

Figura 6.1 – Metodologia adotada no desenvolvimento do modelo.



Fonte: Própria autoria.

De forma simplificada, na primeira etapa foi realizada a coleta e montagem do banco de dados, considerando os resultados obtidos na campanha experimental e oriundos de outros trabalhos da literatura. A coleta de dados da literatura foi feita com o objetivo de expandir o domínio de aplicabilidade do modelo, e para que o mesmo não fosse gerado considerando apenas os dados obtidos de um único estudo experimental. Na segunda etapa foram realizadas análises estatísticas para avaliar a distribuição dos dados e definir o domínio de aplicabilidade do modelo. Na segunda etapa também foram determinadas as funções que seriam empregadas na técnica de regressão. Na terceira etapa realizou-se a modelagem com a técnica de regressão não linear multivariada, obtendo uma formulação para a estimativa da vida útil à fadiga. Por fim, na quarta etapa foram realizadas a validação e uma análise de performance da formulação gerada.

6.3.1 Coleta dos dados

A definição de um banco de dados consistente, contendo dados confiáveis e representativos, refere-se à primeira e principal etapa para o desenvolvimento de um modelo com regressão não linear. Assim, um banco de dados foi montado considerando os resultados obtidos na campanha experimental (*Capítulo* 5) e resultados coletados da literatura (KIM; KIM, 1996; SAUCEDO et al., 2013; MEDEIROS et al., 2015; ONESCHKOW, 2016; ISOJEH; EL-ZEGHAYAR; VECCHIO, 2017a). Resultados da literatura foram adicionados ao banco de dados, com o propósito de expandir o domínio de aplicabilidade do modelo.

Como neste trabalho é avaliada a fadiga em concretos submetidos a compressão cíclica de baixa frequência, a busca se restringiu a resultados obtidos em ensaios de compressão cíclica com $f < 1$ Hz. Os dados foram determinados considerando os trabalhos selecionados na revisão sistematizada definida no *Capítulo* 1. Além da limitação da frequência de carregamento, definiu-se que o modelo seria concebido para estimar a VUF de concretos de baixa e alta resistência, considerando valores de resistência à compressão no intervalo de $[20, 120]$ MPa. Esses valores foram definidos de acordo com as classes de resistência descritas na NBR 6118 (ABNT, 2014).

No total foram coletados 170 dados referentes a concretos submetidos à compressão cíclica, em que 72 foram extraídos da campanha experimental e 98 são oriundos da literatura, dos trabalhos de Kim e Kim (1996) (16 dados), Saucedo et al. (2013) (10 dados), Medeiros et al. (2015) (30 dados), Oneschkow (2016) (38 dados) e Isojeh, El-Zeghayar e Vecchio (2017a) (4 dados). A baixa quantidade de dados disponíveis na literatura se deve ao baixo número de trabalhos que tratam do estudo experimental da fadiga associada à compressão cíclica no concreto, conforme discutido no estado da arte (*Capítulo* 1). Outro motivo que corroborou com o baixo número de dados levantados se deve ao fato da maioria das pesquisas considerarem altas frequências de carregamento variando, com valores entre 5 e 10 Hz. Acrescenta-se que foram observados outros trabalhos com dados de vida útil à fadiga, porém eles não apresentavam todas as informações referentes às condições de contorno dos ensaios, dificultado a identificação dos parâmetros que são necessários para definir o carregamento.

Para o processo de modelagem, o banco de dados foi dividido em dois subconjuntos: um

para o treinamento (80% dos dados) e um para a validação (20% dos dados). A subdivisão foi realizada de modo que cada subconjunto apresentasse uma distribuição dos dados equivalente ao do conjunto geral, de modo a minimizar as chances de ocorrer um super ajuste e aumentar a capacidade de interpolação no domínio de aplicabilidade da formulação. Ademais, a fim de reduzir a dimensão da variável resposta, decidiu-se por realizar uma transformação na mesma, sendo utilizado o logaritmo da VUF. Essa estratégia foi empregada no desenvolvimento da maioria dos modelos disponíveis na literatura, os quais foram apresentados no *Capítulo* 2.

6.3.2 Análise dos dados e preparação da modelagem

Em todo processo de modelagem a escolha das variáveis do modelo é de suma importância, pois a seleção inapropriada pode fazer com que o método de regressão não linear não alcance uma convergência e assim, não consigam associar as informações dos parâmetros de entrada, inviabilizando o mapeamento entre os dados de entrada e saída.

Sabendo disso, inicialmente foi realizada uma análise de dispersão do banco de dados em relação à vida útil à fadiga (VUF), considerando a influência dos parâmetros conhecidos e disponíveis, tais como: resistência à compressão (f_c); nível máximo de tensão em relação à resistência à compressão (S_{max}); nível mínimo de tensão em relação à resistência à compressão (S_{min}); razão entre as tensões mínima e máxima (R); e frequência de carregamento (f_h). Em cada uma das análises foram determinados os coeficientes de correlação de Pearson (ρ) (Equação 6.30) e Spearman (ρ_s) (Equação 6.31), assim como a média, desvio padrão, valor mínimo e o valor máximo. O coeficiente de correlação de Pearson indica a existência ou não de uma relação linear entre duas variáveis, sendo essa relação mais forte a medida que o valor em módulo se aproxima de 1. O coeficiente de correlação de Spearman indica com que intensidade a relação entre duas variáveis pode ser representada por uma função monótona. Os valores do coeficiente de Spearman variam entre -1 e $+1$, sendo que os valores extremos indicam que cada uma das variáveis é uma função monótona perfeita da outra. Na Tabela 6.1 são apresentados os parâmetros estatísticos citados, e na Figura 6.2, são mostradas as frequências de distribuição com as respectivas curvas.

Tabela 6.1 – Parâmetros estatísticos dos dados.

Parâmetro	Média	Desvio padrão	Mínimo	Mediana	Máximo	ρ	ρ_s
f_c	77,290	27,274	23,107	78,706	116,000	-0,268	-0,213
S_{min}	0,089	0,008	0,000	0,050	0,255	0,126	0,134
S_{max}	0,739	0,010	0,500	0,800	0,950	-0,431	-0,349
f_h	0,540	0,373	0,062	0,500	1,000	0,245	0,289
R	0,106	0,009	0,000	0,055	0,333	-0,081	-0,013
VUF	2894	387	11	1111	55739	-	-

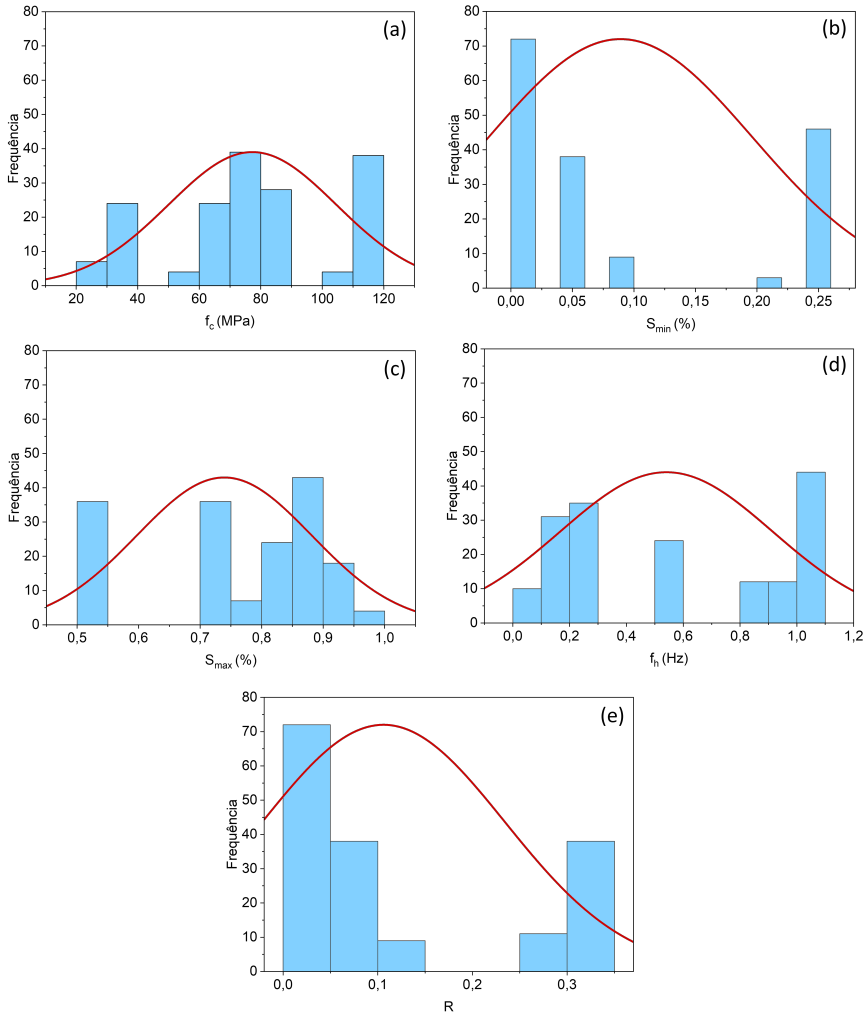
Fonte: Própria autoria.

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{med}\right)\left(y_i - y_{med}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{med}\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_{med}\right)^2}} \tag{6.30}$$

$$\rho_s = \frac{cov\left(rg_x, rg_y\right)}{\sigma\left(rg_x\right)\sigma\left(rg_y\right)} \tag{6.31}$$

em que x_i e y_i são as variáveis analisadas, x_{med} e y_{med} representam os valores médios das variáveis, $cov(\bullet)$ é a função covariância, $\sigma(\bullet)$ é a função desvio padrão e rg_x e rg_y são os desvios padrão das variáveis em postos fracionários.

Figura 6.2 – Distribuição: (a) resistência à compressão (MPa); (b) razão entre nível mínimo de tensão e resistência à compressão (%); (c) razão entre nível máximo de tensão e resistência à compressão (%); (d) frequência de carregamento (Hz); e (e) razão *R*.



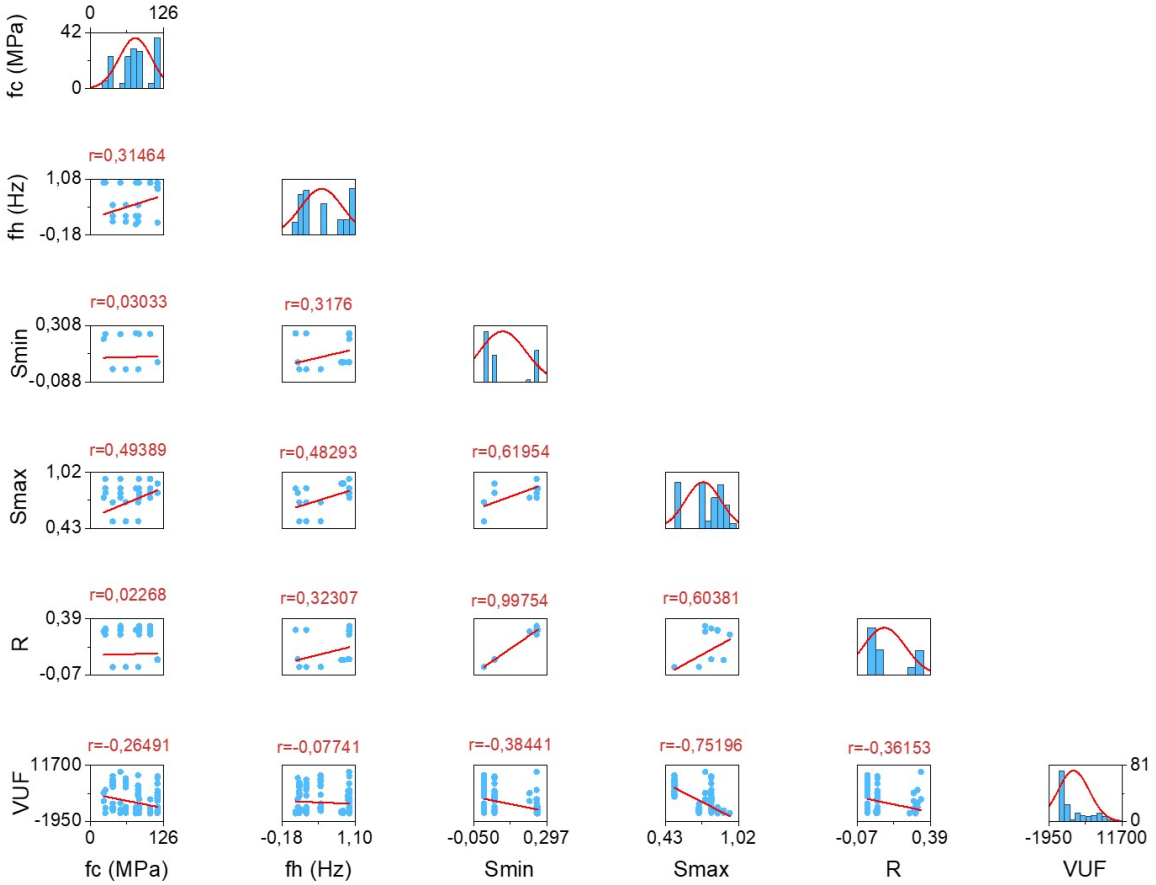
Fonte: Própria autoria.

Como o processo de modelagem foi conduzido pelo uso da técnica de regressão multivariada fazendo o ajuste por regressão não linear, realizou-se também a análise da correlação de Pearson e perfil de distribuição combinada das variáveis. Os resultados das análises são apresentados na Figura 6.3, onde é indicado o valor encontrado para a correlação de Pearson.

Considerando os histogramas apresentados nas Figuras 6.2 e 6.3 e os coeficientes de

correlação dispostos na Tabela 6.1, foi possível analisar a distribuição dos dados disponíveis e se estes apresentavam variabilidades possíveis de se representar por funções de distribuições normal, log-normal ou exponencial.

Figura 6.3 – Coeficiente de correlação de Pearson e perfil de distribuição dos parâmetros.



Fonte: Própria autoria.

Das análises estatísticas observou-se: (i) que existe uma relação inversa entre a vida útil à fadiga e a resistência à compressão; (ii) que a VUF tem um pequeno acréscimo ao elevar o nível mínimo de tensão aplicado no concreto; (iii) que existe uma correlação média entre o nível máximo de tensão e a vida útil à fadiga, e que essa correlação é negativa; (iv) que um aumento no valor da frequência de carregamento gera um acréscimo no número de ciclos que causa a falha no material; (v) que não foi observada uma relação direta entre a razão R e a VUF; (vi) que existe uma alta correlação ao considerar a influência combinada da razão R com S_{min} ou R com S_{max}; e (vii) que há uma correlação média ao considerar a influência combinada de f_c com S_{max} e com f_h.

Verificou-se que a utilização dos parâmetros S_{max}, f_c, S_{min} e f_h podem gerar curvas de ajuste que indicam o comportamento da vida útil à fadiga do concreto, porém o parâmetro R não apresentou correlação direta com a VUF. Uma possível justificativa para que não se tenha obtido uma correlação que evidenciasse uma relação direta entre a VUF e R, remete-se ao fato

de que não há uma significativa variabilidade nos valores de R que permitisse a determinação de uma correlação sobre o banco de dados. Entretanto, como as correlações de Pearson e Spearman indicam apenas a existência de relações lineares entre os preditores e a variável resposta, os parâmetros podem se relacionar não linearmente. Como foi empregada uma técnica de regressão não linear, todos os parâmetros foram utilizados na modelagem, deixando para que os parâmetros estatísticos de performance indicassem se os mesmos se faziam ou não necessários, e indicassem a formulação que melhor mapeava o dano.

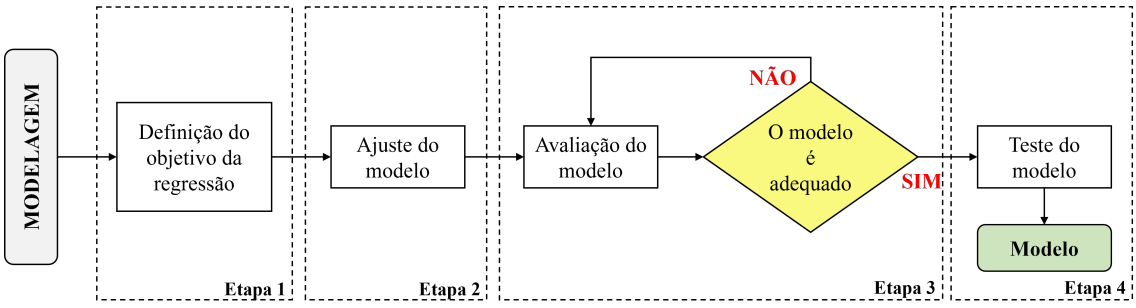
Por fim, os domínios de aplicabilidade de cada um dos parâmetros de entrada do modelo são definidos pelos valores máximo e mínimo apresentados na Tabela 6.1.

6.3.3 *Formulação da VUF*

Para o desenvolvimento da formulação de predição da vida útil à fadiga, utilizou-se os modelos de regressões não linear multivariada, considerando funções polinomial, racional e/ou exponencial. A escolha desta técnica se deu em função dos resultados obtidos nas análises estatísticas com os dados coletados na literatura e na campanha experimental, assim como da revisão bibliográfica apresentada no estado da arte. Adotou-se a regressão não linear por serem observadas relações lineares e não lineares entre as variáveis preditoras e a variável resposta.

Para a definição das equações que melhor se ajustavam aos dados, regressões foram realizadas seguindo os quatro processos representados na Figura 6.4. A primeira etapa remete à definição do objetivo, que neste caso é a predição da vida útil à fadiga de concretos submetido à compressão cíclica. Nesta etapa foram definidas as variáveis dependentes e independentes do modelo.

Figura 6.4 – Etapas da regressão não linear multivariada.



Fonte: Própria autoria.

Na segunda etapa definiram-se as possíveis formas que o modelo geral pode adotar. Para a definição, fez-se necessário determinar a priori as funções que representavam a relação combinada ou individual dos parâmetros de entrada com o logaritmo VUF. A definição das possíveis formas da formulação analítica foi determinada por meio da análise de parâmetros estatísticos calculados sobre o banco de dados, principalmente dos coeficientes de correlação

das variáveis com o $Log(VUF)$. Assim, foram analisadas tanto a correlação individual, quanto a combinada (duas variáveis versus a VUF), o que possibilitou definir as Equações 6.32 e 6.33.

$$Log(VUF) = \beta_0 + \sum f_i\left(\theta_p, \theta_q\right)\beta_i + \sum f_j\left(\theta_o\right)\beta_j + \varepsilon \tag{6.32}$$

$$Log(VUF) = \beta_0 + \prod f_i\left(\theta_p, \theta_q\right)\beta_i + \prod f_j\left(\theta_o\right)\beta_j + \varepsilon \tag{6.33}$$

em que β_0 é uma constante referente ao valor do $Log(VUF)$ quando todas as variáveis independentes são iguais a zero, θ_p, θ_q e θ_o refere-se à variáveis de entrada, β_i e β_j são constantes referentes às relações multivariadas dos parâmetros e ε representa o erro do ajuste. As funções f_j e f_i descrevem as relações individual ou combinada dos parâmetros de entrada com a VUF, e foram determinadas considerando funções do tipo polinomial (Equação 6.34), exponencial (Equação 6.35), racional (Equação 6.36) ou composta (Equações 6.37 e 6.38).

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \tag{6.34}$$

$$f(x,y) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{(\alpha_2 x)} + \alpha_3 e^{(\alpha_4 y)} \tag{6.35}$$

$$f(x,y) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y}{\alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 y} \tag{6.36}$$

$$f(x,y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 \tag{6.37}$$

$$f(x,y) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 e^{(\alpha_2 x)} + \alpha_3 e^{(\alpha_4 y)}}{\alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 x^2 + \alpha_9 y^2} \tag{6.38}$$

em que α_i são constantes referentes às relações multivariadas dos parâmetros.

Para estimar os coeficientes α_i e β_i das Equações 6.32-6.38 que melhor ajustam o modelo ao conjunto de dados, empregou-se o método dos mínimos quadrados (HAIR et al., 2009). O processo de modelagem foi conduzido considerando todas as possíveis combinações para as variáveis de entrada, para as funções que ajustavam a relação entre as entradas e saídas (Equações 6.34-6.38), e para a forma geral da formulação (Equações 6.32 e 6.33).

Na etapa 3, onde realiza-se a avaliação da formulação obtida na etapa 2, adotou-se a técnica de eliminação de *Backward* (HAIR et al., 2009), que tem por objetivo indicar o melhor conjunto de parâmetros (α_i e β_i) que podem conformar os modelos de regressão, retirando aqueles termos que não contribuem para o desenvolvimento da mesma. Santana et al. (2018) relatam que um princípio que deve nortear a construção de modelos obtidos via regressão é a parcimônia, onde as funções mais simples são selecionadas, desde que não ocorra uma redução no grau de acurácia do ajuste. Assim, a etapa 3 foi repetida de forma iterativa até que não fosse necessário recalcular os coeficientes de ajuste com uma nova forma paramétrica para a formulação.

Na etapa 4 foram avaliadas a performance e a capacidade de predição do modelo obtido.

A análise foi realizada mediante comparação dos resultados calculados com a formulação proposta e os valores do conjunto de validação (20% dos dados).

O processo de *Backward* foi aplicado a partir da forma geral do modelo (Equações 6.32 e 6.33), contendo todos as possíveis variáveis de entrada (resistência à compressão, nível máximo de tensão, nível mínimo de tensão, razão R e frequência de carregamento), com o intuito de selecionar as equações que melhor representassem as relações conjuntas ou individuais destas variáveis com o logaritmo da VUF.

Após realização da modelagem, verificou-se que a forma geral dada na Equação 6.32 apresentava a melhor expressão para mapear a vida útil à fadiga. Desta forma, a Tabela 6.2 exibe as expressões selecionadas para cada uma das funções f_i, e seus respectivos parâmetros. Os termos que não são reportados na Tabela 6.2 correspondem aos que foram eliminados no processo de *Backward*.

Tabela 6.2 – Parâmetros da formulação de VUF.

Função utilizada	**Equação**	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4
$f_1(f_h, f_c)$	Equação 6.34	2,043	1,143	-0,0066	0,0013282	-0,756
$f_2(R, S_{min})$	Equação 6.37	0,00	24,971	10,206	-118,005	0,00
$f_3(S_{max})$	Equação 6.37	0,00	9,964	-12,252	0,00	0,00

Fonte: Própria autoria.

Com os dados dispostos na Tabela 6.2, define-se a formulação geral para o logaritmo da vida útil à fadiga (Equação 6.39).

$$Log(VUF) = f_1(f_c, f_h) + f_2(R, S_{min}) + f_3(S_{max}) \tag{6.39}$$

em que f_1, f_2 e f_3 são as funções que representam as relações das variáveis com a saída, definidas respectivamente pelas Equações 6.40, 6.41 e 6.42.

$$f_1(f_h, f_c) = 2,043 + 1,143 f_h - 0,0066 f_c + 0,0013 f_h f_c - 0,756 f_h^2 \tag{6.40}$$

$$f_2(R, S_{min}) = 24,971 R + 10,206 S_{min} - 118,005 R S_{min} \tag{6.41}$$

$$f_3(S_{max}) = 9,964 S_{max} - 12,252 S_{max}^2 \tag{6.42}$$

6.3.4 Validação e performance da formulação

Após a determinação da formulação, um conjunto de ações foram realizadas com o propósito de certificar se o modelo proposto foi definido de forma adequada, assegurando que o mesmo descreve com coerência a relação entre as variáveis de entrada e a resposta. Neste trabalho, a validação e a análise de performance foram conduzidas por meio de análises estatísticas dos resultados, análise de sensibilidade e comparação com alguns modelos da literatura.

Assim, inicialmente foram avaliados os pressupostos da regressão não linear multivariada, a exemplo da normalidade, homoscedasticidade e independência dos resíduos, conforme recomendam Santana et al. (2018). Para a análise de normalidade, utilizou-se o teste de Shapiro-Wilk (Equação 6.43), que testa a hipótese nula de que uma amostra veio de uma população normalmente distribuída. O teste de Durbin-Watson foi utilizado para avaliar a existência de autocorrelação residual (Equação 6.44).

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2} \tag{6.43}$$

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^{n} \left(e_i - e_{i-1}\right)}{\sum_{i=2}^{n} e_i^2} \tag{6.44}$$

em que $\overline{x}$ é a média da amostra, $x_{(i)}$ é a i-ésima estatística de ordem, ou seja, o i-ésimo menor número da amostra, a_i são parâmetros estatísticos do modelo, e_k é o resíduo no tempo k, e_{k-1} é o resíduo no tempo $k-1$.

Os resultados obtidos para o teste de hipótese de Shapiro-Wilk, permitiram testar a normalidade dos resíduos, onde obteve-se um valor de W igual a $0,893$ (em que o grau de normalidade aumenta a medida em que W tende a $1,0$), enquanto que o teste de Durbin-Watson, usado para testar a independência dos resíduos, foi de $0,810$ (onde valores próximos de $1,0$ indicam que não há correlação entre os termos de erro adjacentes à zero). As análises foram realizadas considerando um nível de significância de 5%. Assim, estes valores permitiram demonstrar que os parâmetros determinados pela técnica dos mínimos quadrados são não tendenciosos e imparciais, sendo estimados coerentemente.

Ainda com o intuito de verificar o desempenho do modelo e de analisar sua aplicabilidade quanto à predição da vida útil à fadiga, realizou-se uma análise comparativa entre os valores preditos e observados, determinando alguns parâmetros estatísticos de performance, como: coeficiente de determinação R^2 (Equação 6.45); erro médio EM (Equação 6.46); erro quadrático médio EQM (Equação 6.47); raiz do erro médio quadrático $REMQ$ (Equação 6.48); erro médio absoluto EMA (Equação 6.49); e erro percentual médio absoluto $EPMA$ (Equação 6.50).

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \overline{y}\right)^2} \tag{6.45}$$

$$EM = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - \overline{y}_i}{n} \tag{6.46}$$

$$EMQ = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - x_i\right)^2}{n} \tag{6.47}$$

$$REMQ = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - x_i\right)^2}{n}} \tag{6.48}$$

$$EMA = \frac{\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|}{n} \tag{6.49}$$

$$EPMA = \frac{100\%}{n} \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| \tag{6.50}$$

em que y_i é o valor de referência, x_i é o valor calculado, $\overline{y}$ e $\overline{x}$ representam as médias e n é o número de amostras.

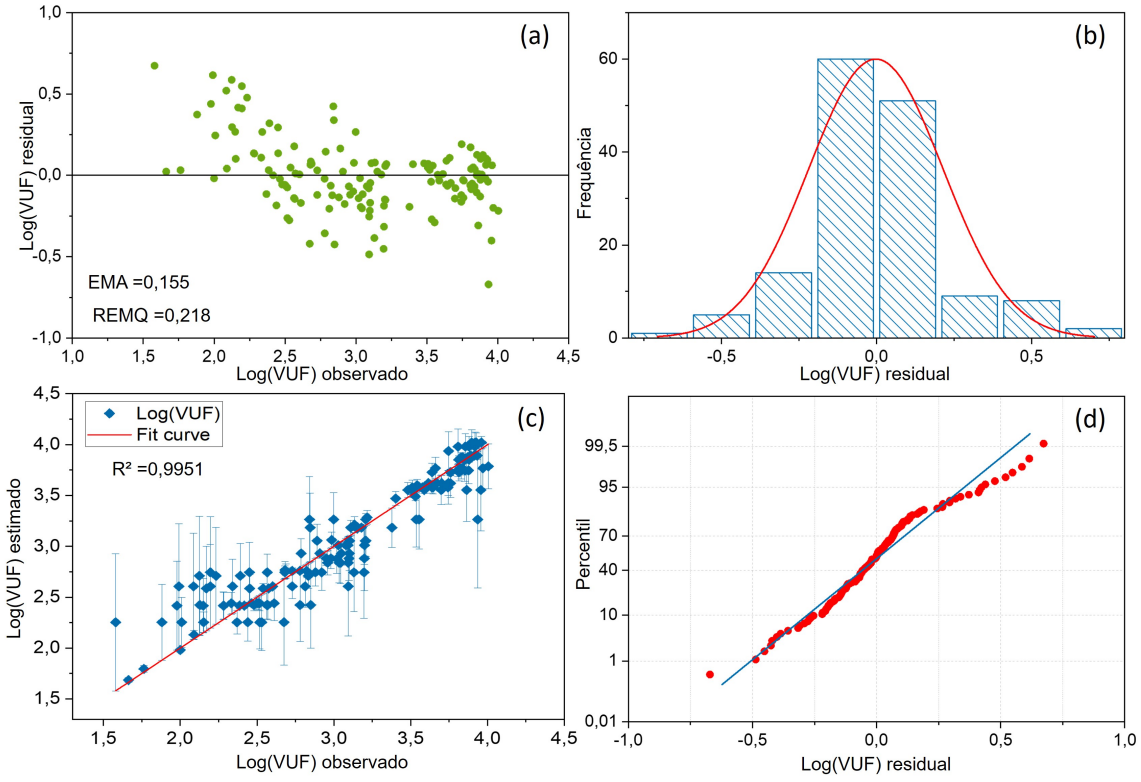
Os resultados da análise de performance são dispostos na Tabela 6.3, e na Figura 6.5 são apresentados gráficos que indicam a distribuição amostral dos resíduos, o histograma dos resíduos e comparações entre os valores preditos e observados.

Tabela 6.3 – Parâmetros de performance do modelo de VUF.

Parâmetro avaliado	R^2	EM	EMQ	REMQ	EMA	EPMA
Resultado	0,995	-0,007	0,048	0,218	0,155	5,86%
Valores ótimos	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0%

Fonte: Própria autoria.

Figura 6.5 – Performance do modelo: (a) distribuição amostral dos resíduos; (b) histograma dos resíduos; (c) comparação entre valores preditos e observados; e (d) percentil residual.



Fonte: Própria autoria.

Dos resultados apresentados na Figura 6.5 e Tabela 6.3, verifica-se que o modelo proposto demonstra desempenho satisfatório frente à predição da vida útil à fadiga, indicando resultados coerentes quando confrontados com dados reais. Essa observação é confirmada ao analisar os avaliadores de performance, a exemplo do coeficiente de determinação ($0,995$), o qual indica uma forte relação entre os valores preditos e observados. Neste ponto, é importante entender que um alto coeficiente de determinação não necessariamente indica que o modelo prevê com fidelidade a variável resposta, sendo necessário analisar os parâmetros associados aos erros (resíduos).

Na análise dos resíduos, verificou-se que eles apresentam uma distribuição normal com média nula, e que o erro percentual médio absoluto obtido da aplicação do modelo, é de $5,86\%$, indicando que o modelo mapeia com acurácia a vida útil à fadiga de concretos sob compressão cíclica.

Continuando as análises de performance, realizou-se um teste de aplicação do modelo empregando os dados alocados no conjunto de validação, o qual contém os dados que não foram utilizados na modelagem. Além de avaliar a aplicabilidade da formulação, realizou-se uma comparação entre os resultados preditos com o modelo proposto e pelos modelos de Tepfers e Kutti (1979) (Equação 6.51) e Hsu (1981) (Equação 6.52), ambos disponíveis nas referências.

$$\frac{\sigma_{max}}{f_c} = 1,0 - 0,0685 \cdot (1,0 - R) \cdot log(N) \tag{6.51}$$

$$\frac{\sigma_{max}}{f_c} = 1,0 - 0,0662 \cdot (1 - 0,556 \cdot R) \cdot log(N) - 0,0294 \cdot log(T) \tag{6.52}$$

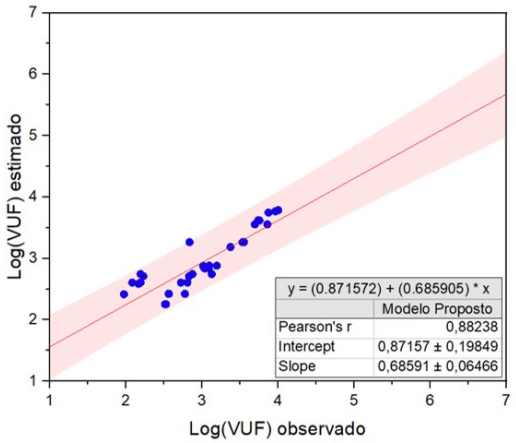
em que f_c é a resistência à compressão do material, σ_{max} é a máxima tensão, σ_{min} é a mínima de tensão, R é a razão entre as tensões mínima e máxima e T é o período de repetição da carga.

Os modelos indicados foram empregados na análise comparativa por serem os únicos que permitem uma aplicação direta, não sendo necessário realizar um ajuste prévio dos parâmetros do modelo com o banco de dados. Os resultados das análises estão dispostos na Figura 6.6, onde são apresentados os gráficos da relação entre os valores observados e os estimados em cada modelo, e gráfico dos erros absolutos gerados nas predições. Nos gráficos que apresentam a comparação entre os valores observados e estimados, são indicados o coeficiente de correlação de Pearson e os limites de confiança representados pela região sombreada. As faixas definidas com nível de confiança de 95%, retratam os limites de confiança superior e inferior do modelo para todos os pontos em uma linha ajustada dentro do intervalo de dados.

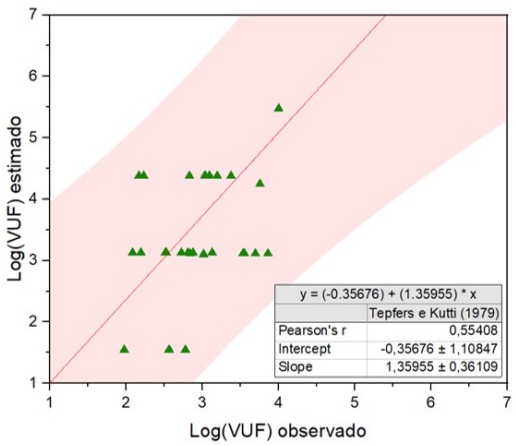
Dos resultados dispostos na Figura 6.6 é possível observar que o modelo proposto foi o que apresentou o melhor mapeamento da VUF. As correlações obtidas com o uso dos modelos de Tepfers e Kutti (1979) e Hsu (1981), configuraram correlações médias de $0,55$ e $0,57$, respectivamente, enquanto o modelo proposto gerou uma correlação forte de $0,88$. Ao comparar a espessura das faixas de confiança geradas para as predições de cada modelo, infere-se que a formulação proposta configura uma predição mais confiável da VUF, o que pode ser constatado pela distribuição dos erros em relação aos valores observados.

Figura 6.6 – Resultados da análise de aplicabilidade dos modelos.

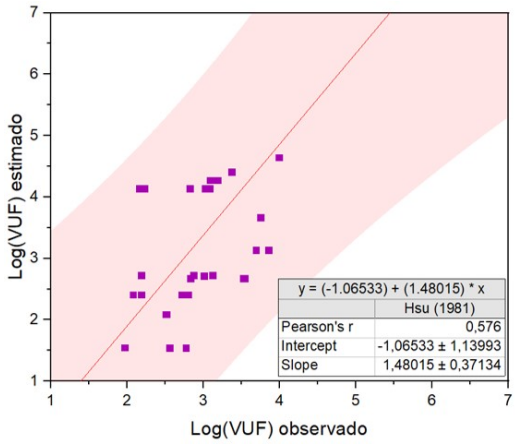
(a) Modelo proposto.



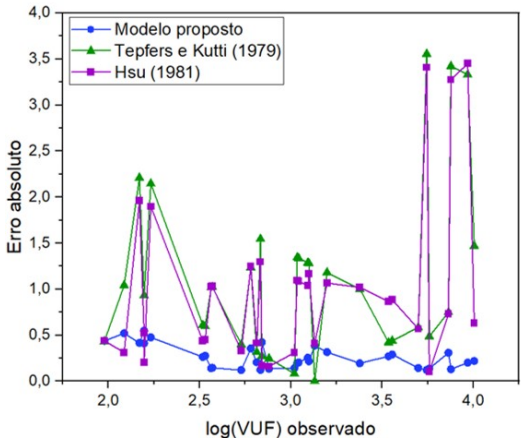
(b) Modelo de Tepfers e Kutti (1979).



(c) Modelo de Hsu (1981).



(d) Erro absoluto versus valor observado.



Fonte: Própria autoria.

Uma das justificativas para a melhor performance do modelo se deve à metodologia empregada na determinação da formulação, onde foram usados dados representativos da VUF obtidos de diferentes campanhas experimentais, e, sobretudo, devido ao fato do modelo obtido neste trabalho considerar mais parâmetros de entrada, a exemplo da resistência à compressão e da frequência de carregamento. Outro fato que corroborou para que o modelo proposto apresentasse melhor mapeamento da VUF refere-se às variáveis de entrada utilizadas para a concepção da formulação. No modelo de Tepfers e Kutti (1979) (Equação 6.51), são empregadas apenas três variáveis de entrada, a razão entre a tensão máxima e a resistência à compressão ($\frac{\sigma_{max}}{f_c} = S_{max}$) e a razão R. Já no modelo de Hsu (1981) (Equação 6.52), o autor considerou três variáveis, sendo S_{max}, R e T, onde a última descreve a influência da frequência de carregamento por meio do período de repetição do mesmo.

Ao avaliar os parâmetros de entrada da formulação proposta, é possível verificar que a resistência à compressão apresenta influência no valor da VUF, diferente dos modelos dispostos nas Equações 6.51 e 6.52, onde a resistência à compressão não interfere no valor predito. Nestes

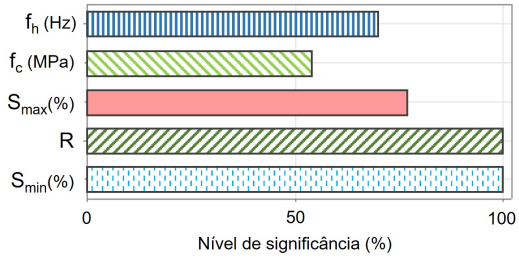
modelos, a VUF dependente da razão entre a tensão máxima e a resistência compressão S_{max}. Assim, considerando todos os outros parâmetros de entrada fixos, a VUF de um concreto com $f_c = 50$ MPa submetido à $\sigma_{max} = 40$ MPa é igual à VUF de um concreto com $f_c = 100$ MPa submetido à $\sigma_{max} = 80$ MPa, o que não é verdade, uma vez que a resistência à compressão apresenta uma relação inversa com a VUF, conforme mostraram os resultados obtidos na campanha experimental.

Além da influência da resistência à compressão, o modelo desenvolvido incorpora a influência da frequência de carregamento e da razão entre nível mínimo de tensão e a resistência à compressão. Desta forma a formulação gerada apresenta parâmetros que permitem descrever com mais detalhes o espectro de carregamento.

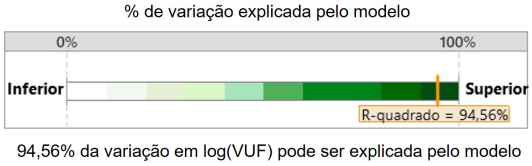
A fim de avaliar a influência das variáveis de entrada da formulação desenvolvida, realizaram-se análises de sensibilidade dos parâmetros de entrada e da capacidade preditiva da mesma. Na Figura 6.7 são apresentados gráficos contendo o grau de sensibilidade de cada um dos parâmetros e o coeficiente de determinação referente à comparação entre os valores observados e preditos. As análises foram realizadas considerando todo o banco de dados.

Figura 6.7 – Parâmetros estatísticos das variáveis e do modelo.

(a) Nível de significância das variáveis.



(b) Coeficiente de determinação global.



Fonte: Própria autoria.

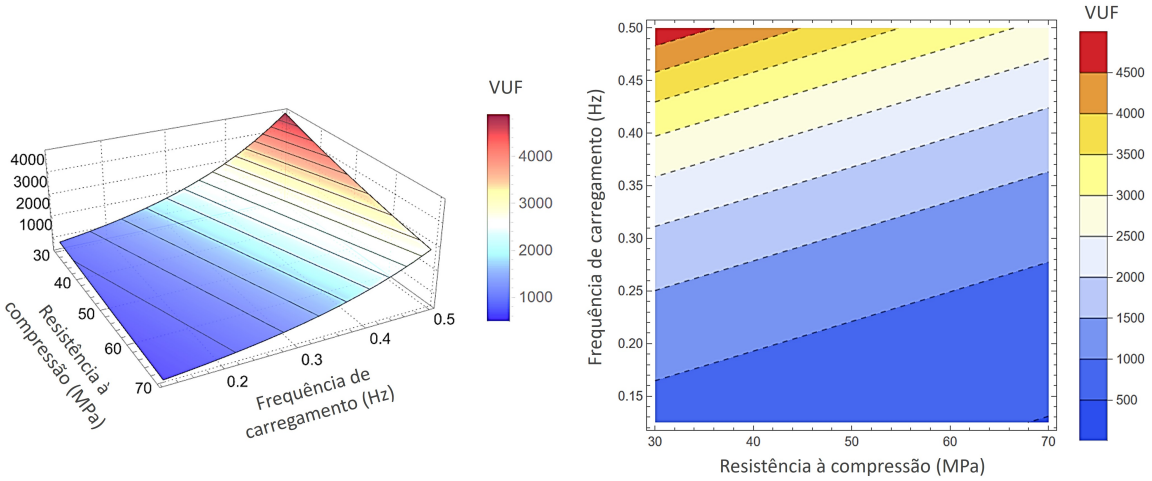
Da Figura 6.7, é possível inferir que a razão entre o nível mínimo de tensão e a resistência à compressão, e a razão R apresentaram 100% de significância sobre a VUF, indicando que as mesmas são imprescindíveis para explicar o fenômeno modelado. Dos resultados, observou-se que as demais variáveis apresentaram um alto nível de influência no mapeamento da vida útil à fadiga, e que o uso de todas as variáveis de entrada gerou um modelo onde $94,56\%$ da variação observada no logaritmo da VUF é explicada pelo modelo. Estes resultados corroboram com a hipótese definida no início da modelagem, onde esperava-se que a VUF seria melhor mapeada pelo uso de formulações contendo parâmetros que descrevem com maior nível detalhe o espectro do carregamento cíclico.

Conforme mostram os resultados obtidos até o momento, a VUF se mostra altamente dependente dos parâmetros que descrevem o carregamento cíclico. Desta forma, na sequência é apresentado um estudo paramétrico do modelo proposto a fim de analisar a sua aplicabilidade e verificar a influência das variáveis utilizadas na concepção do modelo (resistência à compressão

f_c, frequência de carregamento f_h, razão entre o nível máximo de tensão e a resistência à compressão S_{max}, razão entre o nível mínimo de tensão e a resistência à compressão S_{min} e razão entre os níveis mínimo e máximo de tensão R).

Na primeira análise avaliou-se as influências da frequência de carregamento e da resistência à compressão do concreto. As simulações foram realizadas considerando três parâmetros com valores fixos ($S_{max} = 0,7$, $S_{min} = 0,0$ e $R = 0,0$) e os demais com valores variáveis ($30,0 < f_c < 70,0$ MPa e $0,125 < f_h < 0,5$ Hz). Cabe destacar que as análises foram conduzidas para valores dos parâmetros dentro do domínio de aplicabilidade do modelo, o qual foi definido pelos valores máximos e mínimos dispostos na Tabela 6.1. A Figura 6.8 apresenta os resultados obtidos por meio da superfície que indica a relação combinada da resistência à compressão e da frequência de carregamento com a VUF. Comenta-se os gráficos foram plotados considerando o valor da vida útil à fadiga, e não do logaritmo da VUF, ou seja, em função do numero de ciclos de carga/descarga.

Figura 6.8 – Efeito de f_c e f_h na VUF em (a) gráfico de superfície e (b) contornos de nível.



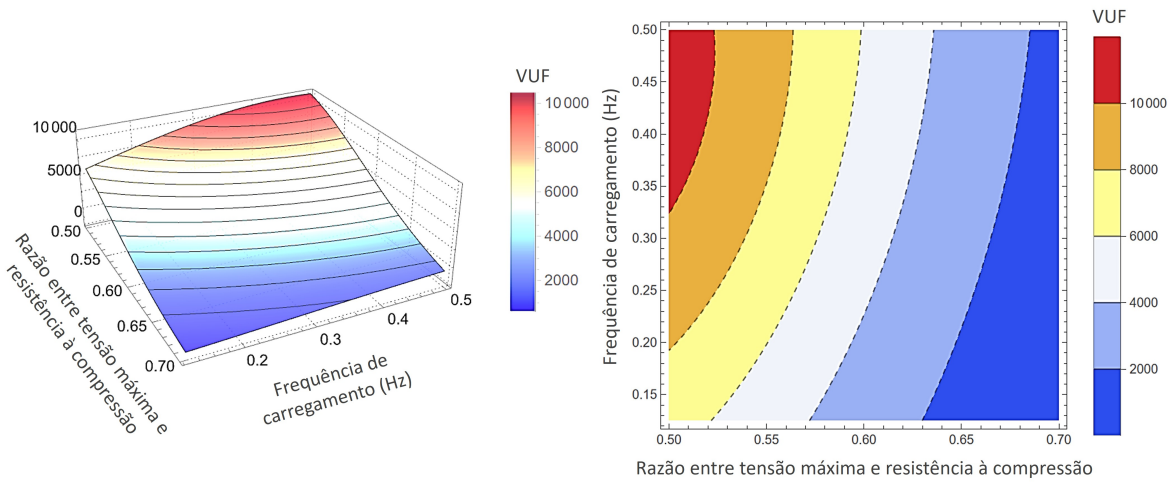
Fonte: Própria autoria.

Da Figura 6.8 é possível observar uma correlação negativa entre a resistência à compressão e a vida útil à fadiga, demonstrando que o modelo apresenta de forma coerente o efeito do parâmetro de entrada. Na pesquisa desenvolvida por Kim e Kim (1996), os autores observaram que, em concretos de alta resistência à compressão, o comportamento à fadiga é completamente diferente aos de concretos de baixa resistência, e que a medida em que aumenta a resistência do material decresce a vida útil à fadiga do material.

O efeito da frequência de carregamento também foi coerentemente captado pelo modelo, onde a frequência de carregamento apresenta uma relação positiva com a VUF. No estudo desenvolvido por Cervo (2004), analisou-se o efeito de altas frequências de carregamento (1, 5 e 10 Hz) em concretos submetidos à fadiga na flexão, onde os resultados obtidos mostraram que o número de ciclos necessários para causar a ruptura do material cresce à medida que aumenta a frequência empregada no ensaio.

De modo semelhante Chen et al. (2017), verificaram que o número de ciclos responsável pela ruptura dos corpos de prova de concreto aumenta com um acréscimo da frequência empregada. Os autores avaliaram também a influência do nível de tensão máxima empregado nos ensaios, onde foi confirmado que a medida em que este nível é reduzido, se torna mais significativa a influência da frequência de carregamento na vida útil à fadiga. Essa influência combinada da frequência de carregamento e da razão entre o nível máximo de tensão e a resistência à compressão foi coerentemente descrita pela formulação proposta, conforme mostra a Figura 6.9. As simulações foram realizadas considerando três parâmetros com valores fixos ($S_{min} = 0,0$, $f_c = 50,0$ MPa e $R = 0,0$) e os demais com valores variáveis ($0,5 < S_{max} < 0,7$ e $0,125 < f_h < 0,5$ Hz).

Figura 6.9 – Efeito de f_h e S_{max} na VUF em (a) gráfico desuperfície e (b) contornos de nível.



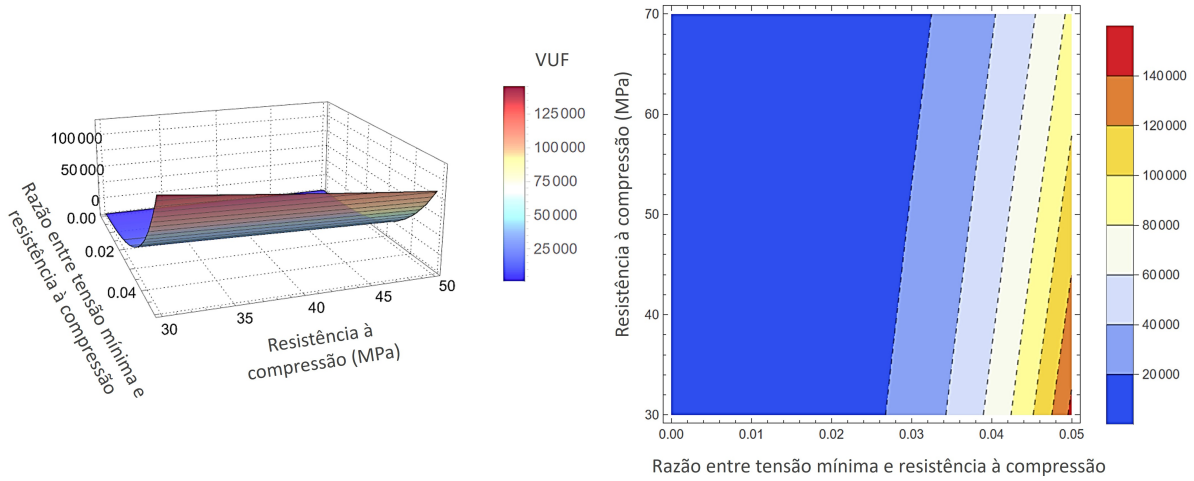
Fonte: Própria autoria.

Na sequência, dando continuidade na análise dos parâmetros relacionados às condições de carregamento no comportamento à fadiga do concreto, avaliou-se a influência combinada do nível mínimo de tensão e da resistência à compressão do concreto. As simulações foram realizadas considerando três parâmetros com valores fixos ($S_{max} = 0,7$, $f_h = 0,25$ Hz e $R = 0,0$) e os demais com valores variáveis ($0,0 < S_{min} < 0,25$ e $50,0 < f_c < 70,0$ MPa). Os resultados são apresentados na forma de gráficos de superfície e isolinhas na Figura 6.10.

Dos resultados dispostos na Figura 6.10, foi possível inferir que o nível mínimo de tensão aplicado exerce grande influência na vida útil à fadiga, principalmente ao considerar valores próximos de zero. No mesmo gráfico é possível ver que o nível de tensão mínima passa a exercer maior influência na VUF nos concretos de baixa resistência. Este mesmo comportamento foi observado experimentalmente por Cornelissen (1984), onde verificou-se que o número de ciclos necessários para que ocorra a falha do corpo de prova diminui significativamente com a diminuição do nível de tensão aplicado. Este resultado é válido apenas diante da consideração de diminuir o nível mínimo de tensão e manter o nível máximo de tensão. Deste modo, o autor

também verificou que a razão entre os níveis de tensões mínima e máxima observadas em ensaios possui grande interferência na resistência à fadiga do concreto.

Figura 6.10 – Efeito de f_c e S_{min} na VUF em (a) gráfico desuperfície e (b) contornos de nível.



Fonte: Própria autoria.

Diante de todas as análises conduzidas e considerando as características do modelo, verificou-se que a formulação proposta possibilita um mapeamento coerente da vida útil à fadiga de concretos submetidos à compressão cíclica. Quanto ao poder de generalização do modelo, observou-se que o mesmo representa $94,56\%$ adequadamente os valores de VUF do banco de dados. Ressalta-se que o modelo proposto deve ser empregado apenas para situações onde os parâmetros de entrada tenham seus valores dentro do domínio de aplicabilidade, definido pelos valores máximos e mínimos dispostos na Tabela 6.1.

Assim, o modelo proposto neste trabalho pode ser utilizado como uma ferramenta eficiente para a análise e estudo da vida útil à fadiga de concretos submetidos a solicitações cíclicas com baixa frequência de carregamento. O modelo tem como principal vantagem a obtenção de forma direta da VUF, sem que haja a necessidade de calibração dos parâmetros com dados experimentais, uma condição que facilita o seu emprego nas mais variadas situações.

6.4 Proposição de lei de dano acumulado

Em muitos dos modelos desenvolvidos e disponíveis na literatura (GAO; HSU, 1998; ALLICHE, 2004; PFISTER; PETRYNA; STANGENBERG, 2006; SUN; XU, 2021; KINDRACHUK; THIELE; UNGER, 2015; BAKTHEER; CHUDOBA, 2019; WANG, 2019), as formulações do acúmulo de dano por fadiga no concreto são definidas em função do número de ciclos n, e da relação entre a tensão máxima aplicada e a resistência à compressão característica do material, que representa o nível máximo de tensão σ_{max}. Porém a maioria dos modelos não consideram de fato, a influência da resistência à compressão do concreto e da frequência

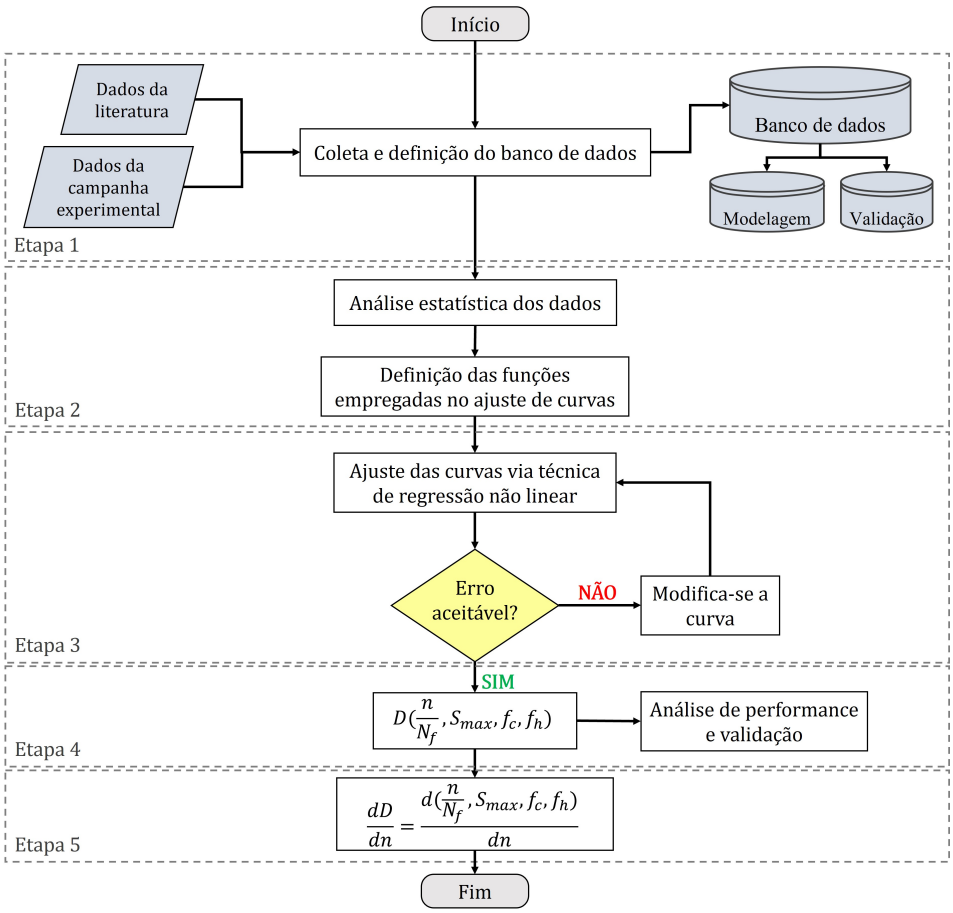
de carregamento, a exemplo do modelo de Gao e Hsu (1998), onde os autores propuseram a Equação 6.53, que possui uma variável referente à razão entre a tensão máxima e a resistência à compressão, o que não insere na formulação a relação da resistência à compressão na variável resposta. Assim, se mantida a relação $\frac{\sigma_{max}}{f_c}$, independentemente do valor da resistência à compressão, nenhuma alteração será observada no valor de dano calculado.

$$\frac{dD}{dn} = F\left(n, \sigma_{max}, f_c\right) = \alpha \exp\left(\frac{\beta \sigma_{max}}{f_c}\right) n^k \tag{6.53}$$

em que α, β e k são parâmetros do modelo que precisam ser ajustados a dados experimentais.

Assim, considerando os resultados apresentados e discutidos no *Capítulo* 5, a evolução do dano é significativamente influenciada pela resistência à compressão e pela frequência de carregamento. Sabendo disso, um modelo de evolução do dano foi proposto considerando os dados obtidos na campanha experimental. Comenta-se que não foram utilizados dados da literatura pelo fato de que não foi encontrado nenhum trabalho experimental onde são apresentados valores de dano para concretos submetidos à compressão cíclica com baixa frequência de carregamento. O levantamento dos dados considerou todos os trabalhos obtidos na revisão sistematizada, a qual foi apresentada no *Capítulo* 1.

Figura 6.11 – Metodologia adotada no desenvolvimento da formulação.



Fonte: Própria autoria.

Para o desenvolvimento da formulação, utilizou-se a metodologia de regressão não linear multivariada, considerando o mapeamento do índice de dano D por curvas lineares, polinomial, racional, exponencial e/ou compostas. A escolha deste método é função dos resultados das análises estatísticas dos dados experimentais coletados e de pesquisas bibliográficas previamente realizadas, que indicam uma relação não linear entre os parâmetros de entrada e a variável resposta.

Como o objetivo é determinar a taxa de evolução do dano em relação ao número de ciclos de compressão e os dados obtidos se referem ao índice de dano, decidiu-se por modelar este parâmetro e a posteriori realizar a derivada parcial do dano em relação ao número de ciclos, obtendo $\frac{dD}{dn}$. Na Figura 6.11 é apresentada a metodologia empregada no desenvolvimento da formulação do dano acumulado.

Resumidamente, na primeira etapa foi realizada a coleta e montagem do banco de dados, considerando os resultados obtidos na campanha experimental. Na segunda etapa foram realizadas análises estatísticas para avaliar a distribuição dos dados e definir o domínio de aplicabilidade do modelo. Também foram determinadas as funções que seriam empregadas na técnica de regressão. Na terceira, realizou-se a modelagem com a técnica de regressão não linear multivariada, obtendo uma formulação para a estimativa da vida útil à fadiga. Na quarta etapa foram realizadas a validação e uma análise de performance do modelo referente ao índice de dano. Por último, na quinta etapa foi definida a expressão do dano acumulado considerando a derivada parcial da função de dano em relação ao número de ciclos.

6.4.1 Coleta e preparação dos dados

Para que uma formulação fosse obtida mediante uso da técnica de regressão não linear multivariada, um banco de dados foi definido considerando os valores de dano aferidos na campanha experimental (*Capítulo* 5).

O banco de dados foi construído com 180 registros, contemplando os seguintes parâmetros: resistência à compressão do concreto (f_c); nível máximo de tensão (S_{max}); frequência de carregamento (f_h); o número de ciclos que configura a vida útil à fadiga ($N_f = VUF$); o número de ciclos associado ao instante de aferição do dano n; e o índice de dano D. O nível mínimo de tensão (s_{min}) e a razão entre as tensões mínima e máxima (R) não foram considerados na modelagem pelo fato de que todos os dados empregados possuem os mesmos valores para estas variáveis.

Como almejava-se um modelo que possibilitasse a análise do dano de forma otimizada, sem que fosse despendido muito tempo nas simulações numéricas, as variáveis referentes ao número de ciclos n e vida útil à fadiga N_F foram transformadas em um único parâmetro, definido pelo número de ciclos normalizado $\frac{n}{N_f}$. Essa estratégia permite que as simulações sejam conduzidas sem a necessidade de avaliar todos os ciclos de carregamento.

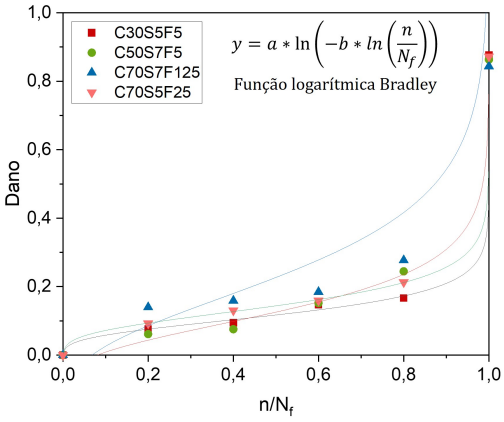
Para a modelagem, o banco de dados foi dividido em dois subconjuntos, um para o treinamento (80% dos dados) e outro para a validação (20% dos dados). A subdivisão foi

realizada de modo que cada subconjunto apresentasse uma distribuição de dados equivalente ao do conjunto geral, de modo a minimizar as chances de ocorrer um super ajuste. Essa estratégia permite ainda testar a capacidade de mapeamento da formulação no domínio de aplicabilidade do modelo.

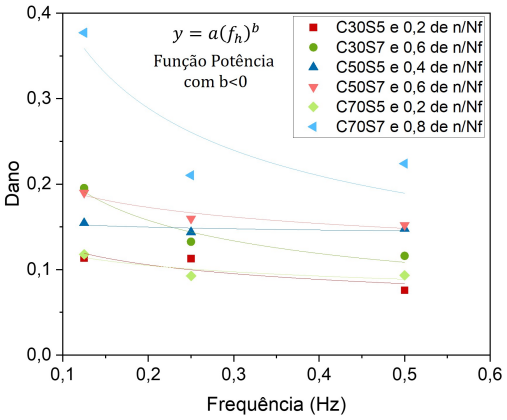
A escolha das variáveis do modelo é de suma importância, pois a seleção inapropriada pode dificultar ou fazer com que o método de regressão não linear não alcance convergência, inviabilizando o mapeamento entre os parâmetros de entrada e a variável resposta. Sabendo disso, inicialmente foi realizada uma análise paramétrica das variáveis do banco de dados com a variável resposta, o índice de dano. Em cada uma das análises foram determinados os coeficientes de correlação de Pearson (ρ) (Equação 6.30) e Spearman (ρ_s) (Equação 6.31), assim como os valores mínimo e máximo. Na Tabela 6.4 são apresentados os parâmetros estatísticos citados, e a Figura 6.12 contém os gráficos que descrevem a relação entre o dano e os parâmetros de entrada do modelo. Destaca-se que o índice de dano avaliado e modelado neste trabalho refere-se à danificação associada à fadiga, o dano sofrido pelo material após o primeiro ciclo de carregamento, conforme discutido no capítulo anterior.

Figura 6.12 – Relação entre o dano e os parâmetros de entrada do modelo.

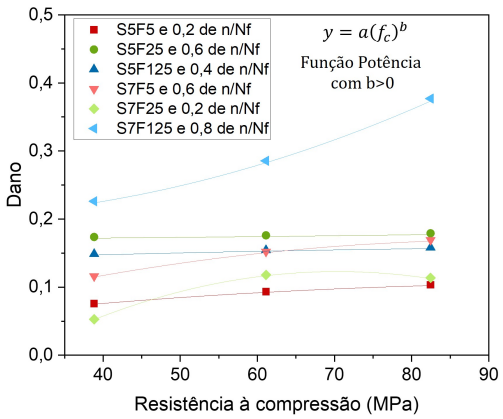
(a) Dano versus $\frac{n}{N_f}$.



(b) Dano versus f_h.



(c) Dano versus f_c.



Fonte: Própria autoria.

Tabela 6.4 – Parâmetros estatísticos dos dados.

Parâmetro	Média	Mínimo	Máximo	ρ	ρ_s
f_c	60,800	38,830	82,450	-0,007	-0,017
S_{max}	0,600	0,500	0,700	-0,181	-0,140
f_h	0,291	0,125	0,500	-0,214	-0,243
$\frac{n}{N_f}$	0,500	0,025	0,975	0,896	0,903
D	0,302	0,052	0,880	-	-

Fonte: Própria autoria.

Dos resultados obtidos nas análises estatísticas observou-se: (i) que existe uma relação inversa entre o índice de dano e o nível máximo de tensão aplicada no material; (ii) que a frequência de carregamento apresenta uma correlação inversa com o dano, que a mesma demonstra apresentar uma relação não linear com a variável resposta, e que, o dano apresenta um comportamento monotonicamente decrescente em relação à f_h; (iii) que não há uma correlação linear evidente entre a resistência à compressão e o dano; e (iv) que o dano possui uma forte relação com o número de ciclos de carregamento.

A correlação obtida para f_c é fraca, ou quase inexistente. Porém, como as correlações de Pearson e Spearman indicam apenas a existência de relações lineares entre os preditores e a variável resposta, os parâmetros podem se relacionar não linearmente com o dano, conforme se vê na Figura 6.12. A Figura 6.12 apresenta os resultados obtidos em uma análise de regressão da variável resposta os parâmetros de entrada. Os resultados obtidos indicam que todas os parâmetros podem ser relacionados ao dano, e que estas relações são dadas pelas funções não lineares indicadas nos gráficos. Como exemplo, cita-se o caso do nível máximo de tensão S_{max}, onde observou-se que, para um mesmo número de ciclos, o nível de dano aumenta ao diminuir o nível máximo de dano aplicado, podendo o mesmo ser descrito por uma função potência, com $b < 0$, igual ao caso da frequência de carregamento.

Considerando que neste trabalho é utilizado o método de regressão não linear acoplado à técnica de eliminação de *Backward* (HAIR et al., 2009), todas as variáveis foram utilizadas na modelagem, permitindo que os parâmetros estatísticos de performance indicassem se os parâmetros se faziam ou não necessários no mapeamento do dano. Ademais, comenta-se que os domínios de aplicabilidade de cada um dos parâmetros de entrada são definidos pelos valores máximo e mínimo apresentados na Tabela 6.4.

6.4.2 Formulação do dano acumulado

Para o desenvolvimento da formulação do índice de dano, utilizou-se os modelos de regressões não linear multivariada, considerando funções polinomial, exponencial e logarítmica. A escolha destas curvas se deu em função dos resultados obtidos nas análises estatísticas e dos preceitos levantados na revisão bibliográfica apresentada no estado da arte. Adotou-se a regressão não linear por serem observadas relações não lineares entre os parâmetros preditores e a variável

resposta.

O processo de modelagem para obtenção da formulação do dano consiste no mesmo utilizado para a concepção da formulação da vida útil à fadiga, apresentado na *Subseção 6.3.3*. As formas gerais das formulações analíticas utilizadas para determinar uma expressão para o índice de dano são expressas pelas Equações 6.54 e 6.55, que tiveram seus parâmetros determinados no processo de regressão não linear.

$$D = \beta_0 + \sum f_i\left(\theta_p, \theta_q\right)\beta_i + \sum f_j\left(\theta_o\right)\beta_j + \varepsilon \tag{6.54}$$

$$D = \beta_0 + \prod f_i\left(\theta_p, \theta_q\right)\beta_i + \prod f_j\left(\theta_o\right)\beta_j + \varepsilon \tag{6.55}$$

em que β_0 é uma constante referente ao valor do dano quando todas as variáveis independentes são iguais a zero, θ_p, θ_q e θ_o referem-se às variáveis de entrada, β_i e β_j são constantes referentes às relações multivariadas dos parâmetros e ε representa o erro do ajuste. As funções f_j e f_i descrevem as relações individuais ou combinadas dos parâmetros de entrada com o dano, e foram determinadas considerando funções do tipo polinomial (Equação 6.56), logarítmica (Equação 6.57) e exponencial do tipo potência (Equações 6.58 e 6.59).

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \tag{6.56}$$

$$f(x) = \alpha_0 \ln\left(-\alpha_1 \ln\left(x + \alpha_2\right) + \alpha 3\right) \tag{6.57}$$

$$f(x) = \alpha_0 x^{\alpha 1} \quad \text{com} \quad \alpha_1 < 0 \tag{6.58}$$

$$f(x) = \alpha_0 x^{\alpha 1} \quad \text{com} \quad \alpha_1 > 0 \tag{6.59}$$

em que α_i são constantes referentes às relações multivariadas dos parâmetros.

Para estimar os coeficientes α_i e β_i das Equações 6.32-6.38 que melhor ajustam o modelo ao conjunto de dados, empregou-se o método dos mínimos quadrados (HAIR et al., 2009). Para a avaliação e ajuste dos parâmetros obtidos, adotou-se a técnica de eliminação de *Backward* (HAIR et al., 2009), que tem por objetivo indicar o melhor conjunto de parâmetros (α_i e β_i) que podem conformar os modelos de regressão, retirando os termos que não contribuem para o desenvolvimento do mesmo.

O processo de *Backward* foi aplicado sobre as Equações 6.54 e 6.55, que contém todos as possíveis variáveis de entrada (resistência à compressão, nível máximo de tensão, frequência de carregamento e o número de ciclos normalizado), com o intuito de selecionar as funções que melhor representassem as relações conjuntas ou individuais destas variáveis com o dano.

Após realização da modelagem, verificou-se que a forma geral definida pela Equação 6.55 apresentava a melhor expressão para mapear o dano. Desta forma, na Tabela 6.5 são exibidas as expressões selecionadas para cada uma das funções f_i e seus respectivos parâmetros. Os

termos que não são reportados na Tabela 6.5 correspondem aos que foram eliminados no processo de *Backward*.

Tabela 6.5 – Parâmetros da formulação de dano.

Função utilizada	Equação	α_0	α_1	α_2	α_3
$f_1\left(\frac{n}{N_f}\right)$	Equação 6.57	-0,068	0,113	$4,4E^{-5}$	$-0,6E^{-5}$
$f_2(f_h)$	Equação 6.58	1,0	-0,124	0,0	0,0
$f_3(S_{max})$	Equação 6.58	1,0	-0,192	0,0	0,0
$f_4(f_c)$	Equação 6.59	1,0	0,234	0,0	0,0

Fonte: Própria autoria.

Diante dos valores dispostos na Tabela 6.5, pode-se escrever a formulação que define a curva que gerou o melhor ajuste dos dados (Equação 6.60), obtida considerando o critério de convergência previamente definido. A Equação 6.60 pode ser reescrita conforme Equação 6.61, utilizando as funções empregadas no ajuste de curvas e os seus respectivos parâmetros, descritos na Tabela 6.5.

$$D = 0,25\prod_{i=1}^{4} f_i \tag{6.60}$$

$$D\left(\frac{n}{N_f}, f_h, S_{max}, f_h,\right) = \lambda_1 \ln\left(-\lambda_2 \ln\left(\frac{n}{N_f} + \lambda_3\right) + \lambda_4\right) f_h^{\lambda_5} S_{max}^{\lambda_6} f_c^{\lambda_7} \tag{6.61}$$

em que f_1, f_2, f_3 e f_4 são as funções que representam as relações das variáveis de entrada com a saída, definidas respectivamente pelas Equações 6.57, 6.58, 6.58 e 6.59, e $\lambda_1 = -0,017$, $\lambda_2 = 0,113$, $\lambda_3 = 0,000044$, $\lambda_4 = -0,000006$, $\lambda_5 = -0,124$, $\lambda_6 = -0,192$ e $\lambda_7 = 0,234$, são os parâmetros do modelo.

Por fim, definiu-se a derivada parcial da Equação 6.61 em relação ao número de ciclos (n), resultando na Equação 6.62.

$$\frac{dD}{dn}\left(\frac{n}{N_f}, f_h, S_{max}, f_h,\right) = \frac{-\lambda_1\lambda_2 f_h^{\lambda_5} S_{max}^{\lambda_6} f_c^{\lambda_7}}{\left(\lambda_3 N_f + n\right)\left(\lambda_4 - \lambda_2 \ln\left(\frac{n}{N_F} + \lambda_3\right)\right)} \tag{6.62}$$

6.4.3 Validação e performance da formulação

Após a determinação da formulação, realizou-se a validação da mesma, onde um conjunto de ações foram realizadas com o propósito de certificar se o modelo matemático proposto foi definido de forma adequada, assegurando que o mesmo descreve com coerência a relação entre as variáveis de entrada e o índice de dano. Neste trabalho a validação e análise de performance foram conduzidas por meio de análises estatísticas dos resultados obtidos frente a aplicação do modelo, análise de sensibilidade dos parâmetros de entrada e da comparação com o modelo de Gao e Hsu (1998).

Desta forma, inicialmente foram avaliados os pressupostos da regressão não linear multivariada, a exemplo da normalidade, homoscedasticidade e independência dos resíduos, conforme recomendam Santana et al. (2018). Para a análise de normalidade, utilizou-se o teste de Shapiro-Wilk (Equação 6.43), que testa a hipótese nula de que uma amostra veio de uma população normalmente distribuída. O teste de Durbin-Watson foi utilizado para avaliar a existência de autocorrelação residual (Equação 6.44).

Os resultados obtidos para o teste de hipótese de Shapiro-Wilk, permitiram testar a normalidade dos resíduos, onde foi obtido $W = 0,916$ (em que o grau de normalidade aumenta à medida em que W tende a $1,0$). Já no teste de Durbin-Watson, que foi utilizado para testar a independência dos resíduos, obteve-se $DW = 0,872$ (onde valores próximos de $1,0$ indicam que não há correlação entre os termos de erro adjacente é zero). Estes valores indicam que os parâmetros determinados pela técnica dos mínimos quadrados são não tendenciosos e imparciais, sendo estimados coerentemente. Comenta-se que as análises foram realizadas considerando um nível de significância de 5%.

Ainda com o intuito de verificar o desempenho do modelo, avaliando a sua aplicabilidade quanto à determinação do índice de dano em concretos submetidos à compressão cíclica, realizou-se uma análise comparativa entre os valores preditos e observados experimentalmente, avaliando alguns parâmetros de performance: coeficiente de determinação R^2 (Equação 6.45); erro médio EM (Equação 6.46); erro quadrático médio EQM (Equação 6.47); raiz do erro médio quadrático $REMQ$ (Equação 6.48); erro médio absoluto EMA (Equação 6.49); e erro percentual médio absoluto $EPMA$ (Equação 6.50). Os resultados obtidos na análise de performance são indicados na Tabela 6.6, e na Figura 6.13 são apresentados gráficos que descrevem a distribuição amostral dos resíduos, o histograma dos erros e correlação entre os valores preditos e observados.

Tabela 6.6 – Parâmetros de performance do modelo de dano.

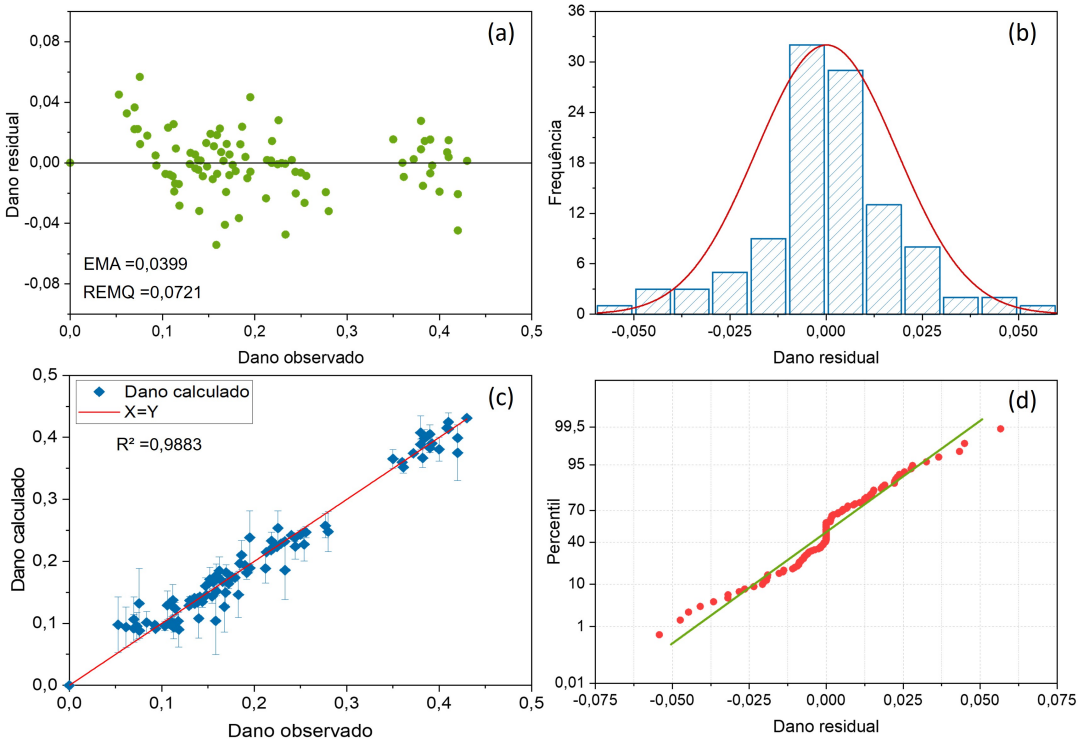
Parâmetro avaliado	**R^2**	**EM**	**EMQ**	**REMQ**	**EMA**	**EPMA**
Resultado	0,9883	0,0285	0,00521	0,0721	0,0399	6,80%
Valores ótimos	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0%

Fonte: Própria autoria.

Por meio dos resultados apresentados na Figura 6.13 e Tabela 6.6, verifica-se que o modelo proposto demonstra desempenho satisfatório frente ao cálculo do índice de dano, indicando resultados coerentes. Essa observação é constatada ao analisar os parâmetros de performance, a exemplo do coeficiente de determinação ($0,9883$), o qual indica uma forte relação entre os valores preditos e observados.

Na análise dos resíduos, verificou-se que os mesmos apresentam uma distribuição normal com média nula, e que cerca de 98% dos valores preditos apresentaram erros inferiores ao EMQ, e que o erro percentual médio absoluto obtido da aplicação do modelo é de $6,80\%$, indicando que a formulação estima com precisão o nível de danificação nos concretos avaliados sob compressão cíclica de baixa frequência de carregamento.

Figura 6.13 – Performance do modelo: (a) distribuição amostral dos erros; (b) histograma dos erros; (c) comparação entre valores preditos e observados; e (d) percentil residual.



Fonte: Própria autoria.

Dando continuidade nas análises de performance, realizou-se um teste de aplicabilidade do modelo empregando os dados alocados no conjunto de validação. Além de avaliar a aplicabilidade da formulação, realizou-se uma comparação entre os resultados preditos com o modelo proposto e mediante uso da formulação desenvolvida por Gao e Hsu (1998) (Equação 6.63), que possui como parâmetros de entrada o nível máximo de tensão ($\frac{\beta\sigma_{max}}{f_c}$) e o número de ciclos. Este modelo foi empregado por ser o único dos avaliados na revisão bibliográfica que mapeia o dano sem a necessidade de avaliar os níveis de deformação do material, além de considerar parâmetros associados à fenomenologia da fadiga no concreto. Comenta-se que, para o uso do modelo, fez-se necessário realizar uma calibração dos parâmetros com o banco de dados.

$$\frac{dD}{dn} = \alpha \exp\left(\frac{\beta\sigma_{max}}{f_c}\right) N^k \tag{6.63}$$

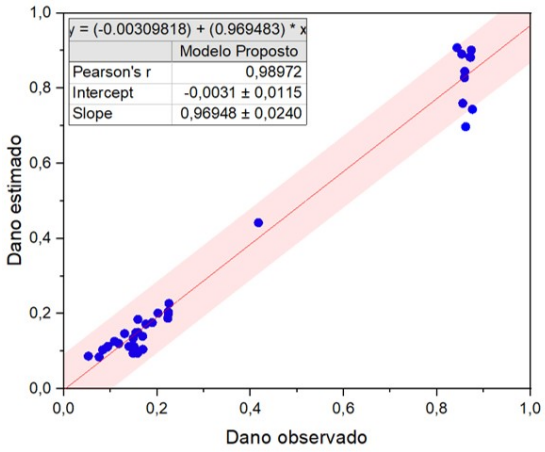
em que $\alpha = 1,687E-9$, $\beta = 13,1803$ e $k = 1,48299$ são parâmetros do modelo que que foram ajustados no software *Origin* com os dados experimentais.

Os resultados obtidos na análise comparativa estão dispostos na Figura 6.14, onde são apresentadas as relações entre os valores observados e os estimados em cada modelo, e os erros absolutos gerados nas predições. Nos gráficos que apresentam a comparação entre os valores observados e estimados são indicados o coeficiente de correlação de Pearson e os limites de confiança representados pela região sombreada em vermelho. As faixas definidas com nível de

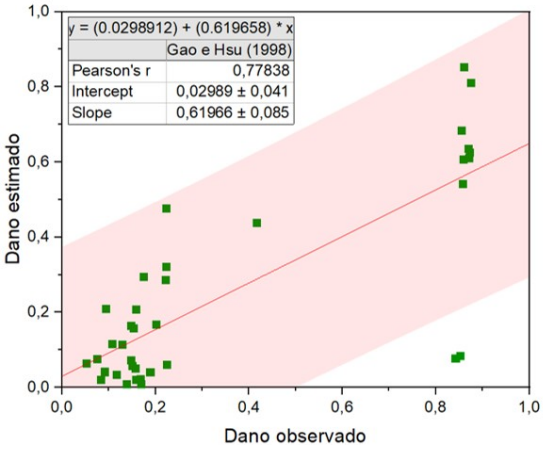
confiança de 95% retratam os limites de confiança superior e inferior do modelo para todos os pontos em uma linha ajustada dentro do intervalo de dados.

Figura 6.14 – Resultados da análise de aplicabilidade dos modelos.

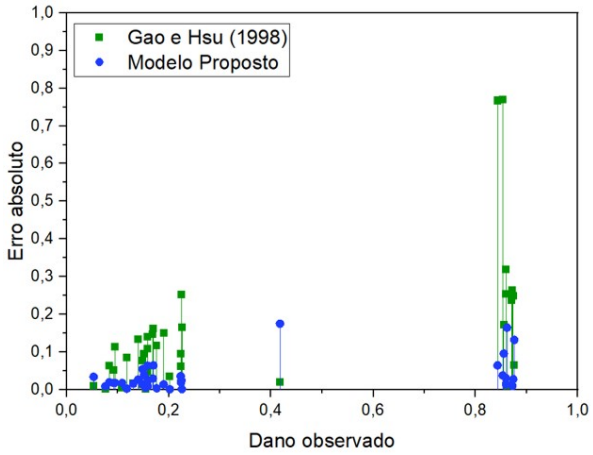
(a) Modelo proposto.



(b) Modelo de Gao e Hsu (1998).



(c) Erro absoluto versus valor observado.



Fonte: Própria autoria.

Na Figura 6.14, é possível observar que o modelo proposto apresentou o melhor mapeamento do dano. O uso do modelo de Gao e Hsu (1998) configurou uma correlação de $0,77$ entre os valores estimados e os observados experimentalmente, enquanto o modelo proposto gerou uma forte correlação $(0,98)$. Ao comparar a espessura das faixas de confiança geradas para as predições de cada modelo, verifica-se que a formulação proposta configura uma predição mais confiável do índice de dano, o que pode ser constatado pela distribuição dos erros em relação aos valores observados. O erro máximo absoluto obtido na predição do dano pelo modelo proposto foi de $0,1752$, valor muito inferior ao erro máximo absoluto $(0,7694)$ obtido com a formulação de Gao e Hsu (1998).

Uma das justificativas para a melhor performance do modelo frente à formulação de Gao e Hsu (1998), deve-se ao fato do modelo proposto considerar mais parâmetros associados

à fenomenologia da fadiga como, por exemplo, a resistência à compressão e a frequência de carregamento.

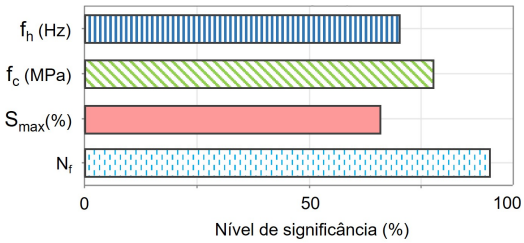
Ao avaliar os parâmetros de entrada da formulação proposta, é possível verificar que a resistência à compressão apresenta influência no valor do dano, diferente do modelo de Gao e Hsu (1998) (Equação 6.63), onde a resistência à compressão não interfere no valor predito, sendo o dano dependente da razão entre a tensão máxima e a resistência à compressão S_{max}. Assim, ao utilizar o modelo de referência, se todos os outros parâmetros de entrada forem fixados, o nível de danificação em um concreto com $f_c = 50$ MPa e $\sigma_{max} = 40$ MPa é igual à VUF de um concreto com $f_c = 100$ MPa submetido à $\sigma_{max} = 80$ MPa, o que não é verdade, uma vez que a resistência à compressão apresenta uma relação inversa com o dano associado à fadiga, conforme indicaram os resultados obtidos na campanha experimental.

Além da influência da resistência à compressão, o modelo desenvolvido incorpora a influência da frequência de carregamento e da vida útil à fadiga do concreto. Desta forma a formulação gerada apresenta parâmetros que permitem descrever com mais detalhes o espectro de carregamento e a resistência à fadiga do material.

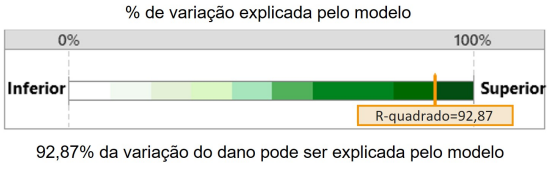
Com o propósito de investigar a influência das variáveis de entrada da formulação proposta, realizaram-se análises de sensibilidade dos parâmetros do modelo e a sua capacidade preditiva. Na Figura 6.15 são apresentados gráficos contendo o grau de sensibilidade de cada um dos parâmetros e o coeficiente de determinação referente à comparação entre os valores observados e preditos. As análises foram realizadas considerando todo o banco de dados.

Figura 6.15 – Parâmetros estatísticos das váriaveis e do modelo.

(a) Nível de significância das variáveis.



(b) Coeficiente de determinação global.



Fonte: Própria autoria.

Diante dos resultados dispostos na Figura 6.15, verifica-se que a vida útil à fadiga (N_f) apresenta 92% de significância sobre a variável resposta, indicando a necessidade da inserção deste parâmetro na formulação de mapeamento do dano acumulado na fadiga. Ademais, observou-se que as demais variáveis apresentam grande influência sobre a variável de dano, e que o uso de todas as variáveis como parâmetros de entrada gerou um modelo onde $92,87\%$ da variação observada no nível de danificação é explicada. Estes resultados corroboram com a hipótese definida no início da modelagem, onde esperava-se que o dano seria mapeado pelo uso de formulações contendo parâmetros que descrevem com maior nível de detalhe o espectro do

carregamento cíclico.

Diante dos resultados apresentados nesta seção, verifica-se que o modelo proposto demonstra desempenho satisfatório frente à estimativa do dano em concretos submetidos à compressão cíclica, indicando resultados coerentes quando confrontados com dados reais. Considerando os avaliadores de performance, pôde-se constatar que a formulação desenvolvida apresenta um coeficiente geral de determinação de $0,92$, apontando a sua capacidade de mapeamento do dano. Em relação aos erros gerados pela aplicação da formulação, observou-se que eles apresentam uma distribuição normal, com erro percentual médio absoluto de $6,80\%$ e erro máximo de $0,17$, sendo este, o parâmetro adotado como o erro máximo do modelo. Comenta-se ainda que este erro máximo foi observado ao prever o valor do dano para os instantes finais da VUF do material, momento em que já existe uma grande dificuldade em mensurar com acurácia o nível de danificação do concreto.

6.5 Acoplamento dos modelos ao código de análise mecânica

Diante da ação de cargas cíclicas, a análise numérica do dano no concreto pode ser conduzida por meio do princípio da soma linear do dano, considerando: o dano ocasionado no primeiro ciclo de carregamento, determinado pelos fundamentos da mecânica do dano contínuo; e o dano associado à fadiga, calculado por leis de acúmulo de dano.

Considerando que neste trabalho foi implementada a lei de dano de Mazars para a avaliação da não linearidade física do concreto (*Capítulo* 4), e que a mesma considera a combinação de duas variáveis de dano (Equação 6.64), uma associada ao estado de tração D_T e outra associada ao estado compressão D_C, o modelo de Mazars foi modificado de forma a compreender o acúmulo de dano para um estado de compressão cíclica (Equação 6.67).

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \tag{6.64}$$

$$D_T = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}\,(1 - A_T)}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_T}{e^{B_T\left(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0}\right)}} \tag{6.65}$$

$$D_C = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}\,(1 - A_C)}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_C}{e^{B_C\left(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0}\right)}} \tag{6.66}$$

$$\frac{dD_{acum}}{dn} = \frac{-\lambda_1 \lambda_2 f_h^{\lambda_5} S_{max}^{\lambda_6} f_c^{\lambda_7}}{\left(\lambda_3 N_f + n\right)\left(\lambda_4 - \lambda_2 \ln\left(\frac{n}{N_F} + \lambda_3\right)\right)} \tag{6.67}$$

A formulação proposta descreve o acúmulo do dano a cada ciclo de carga e descarga, considerando concretos submetidos à compressão cíclica. Assim, o modelo de dano acumulado foi acoplado ao código por meio do princípio da soma linear dos danos acumulados a cada ciclo de carregamento (definido após o primeiro descarregamento), e a variável de dano contínuo, calculada pelo modelo de dano de Mazars no primeiro ciclo. Assim, a Equação 6.64 foi

reescrita de modo a compreender o acúmulo de dano diante de um estado de compressão cíclica, vide Equação 6.68. Comenta-se que, para o primeiro ciclo de carregamento, o valor do dano acumulado é definido como nulo.

$$D_n = \begin{cases} \alpha_T D_T + \alpha_C D_C, & n = 1 \\ \alpha_T D_T + \alpha_C D_C + \sum_{i=2}^{n} \frac{dD_{acum}}{dn}, & n \geq 2 \end{cases} \tag{6.68}$$

em que A_T, A_C, B_T e B_C são parâmetros usuais do modelo de dano de Mazars, que podem ser identificados com base em resultados de ensaios de tração e compressão uniaxial, com valores definidos de acordo com a Tabela 4.1. Os parâmetros do modelo de dano proposto são dados por: $\lambda_1 = -0,017$, $\lambda_2 = 0,113$, $\lambda_3 = 0,000044$, $\lambda_4 = -0,000006$, $\lambda_5 = -0,124$, $\lambda_6 = -0,192$ e $\lambda_7 = 0,234$. Ademais, f_c é a resistência à compressão do concreto em MPa, f_h é a frequência de carregamento em Hz, S_{max} é o nível de tensão aplicado ($S_{max} = \frac{\sigma_{max}}{f_c}$) ou a razão entre a tensão média de compressão do elemento finito avaliado com a resistência à compressão do material, n refere-se ao número de ciclos repetidos (que desconsidera o primeiro ciclo) e N_f refere-se à vida útil à fadiga, que é estimada pela formulação desenvolvida, apresentada na Equação 6.39.

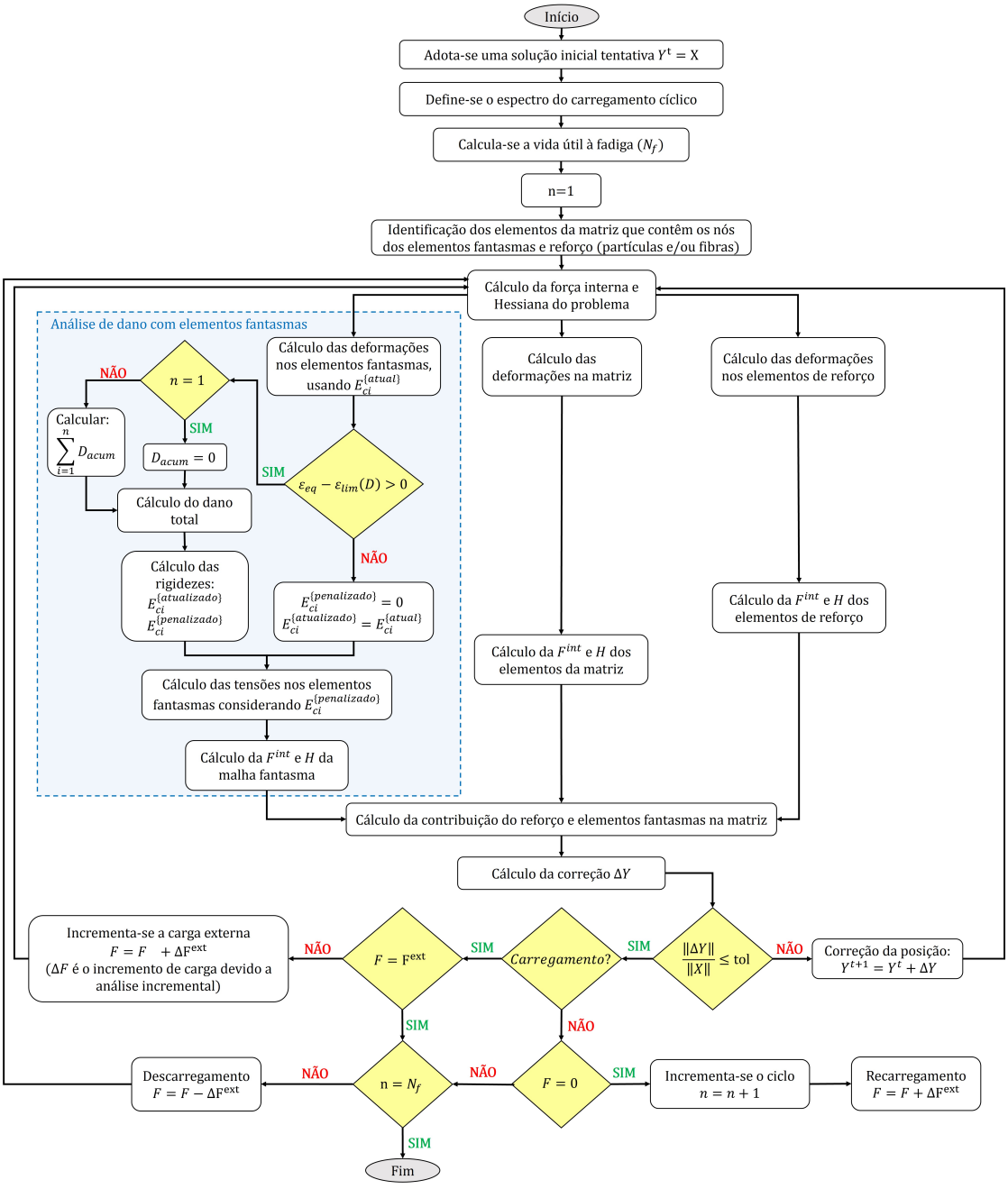
A metodologia empregada para a análise não linear física, seja para avaliação da existência de dano ou para a danificação do material, segue os mesmos processos conduzidos com uso do modelo de dano de Mazars. A representação dos ciclos de carga e descarga segue a metodologia definida no *Capítulo* 4. Na Figura 6.16 é apresentado um fluxograma referente aos processos implementados para criar o código de modelagem via MEFP da fadiga em sólidos submetidos a solicitações cíclicas.

As alterações conduzidas no código estabelecido para a análise física não linear, descrito no *Capítulo* 4, referem-se apenas ao cálculo do acúmulo de dano, decorrente da repetição dos ciclos de carregamento, e à sua soma às variáveis de dano de Mazars. Para a simulação de compressão cíclica, o nível de danificação do material é calculado pela Equação 6.68, que considera apenas a variável de dano associada ao estado de compressão. Porém, para a análise de um corpo sob estado de tensão multiaxial, faz-se necessário acoplar à formulação uma lei referente ao acúmulo de dano na tração cíclica.

De acordo com Aas-Jakobsen (1970), o comportamento à fadiga do concreto na tração cíclica é semelhante ao da compressão cíclica sendo possível utilizar as formulações obtidas para a compressão cíclica, em análises de tração cíclica e vice-versa. Aas-Jakobsen (1970), por exemplo, determinou um modelo considerando resultados obtidos em ensaios de tração na flexão cíclica, e observou que a mesma formulação poderia ser empregada para avaliar o concreto sob compressão cíclica, fazendo-se necessário apenas substituir a variável de resistência à tração na flexão pela resistência à compressão. Além disso, para um estado de tensão multiaxial, o nível máximo de tensão deve ser definido considerando a razão entre a tensão máxima observada no elemento finito (definida no último passo de carregamento do primeiro ciclo) e a resistência (de tração ou compressão) do material. Essa estratégia foi adotada e empregada na análise de um pilar de concreto armado em um exemplo numérico, desenvolvido para demonstrar a aplicabilidade

do código, apresentado ao final deste capítulo.

Figura 6.16 – Fluxograma da análise de fadiga em concretos submetidos à compressão cíclica.



Fonte: Própria autoria.

6.6 Exemplos numéricos

A fim de validar as formulações desenvolvidas e implementadas no código de análise de sólidos compósitos, três exemplos numéricos são apresentados nesta seção. Os exemplos foram selecionados de modo a demonstrar a aplicabilidade do código.

O primeiro exemplo tem como propósito validar as formulações implementadas para a representação do comportamento à fadiga de elementos de concreto submetidos à compressão cíclica. Para tal, corpos de prova cilíndricos de concreto foram modelados considerando o concreto como material homogêneo ou heterogêneo, composto pela matriz cimentícia e agregados graúdos. Os resultados obtidos foram comparados aos resultados determinados na campanha experimental, descrita no *Capítulo* 5.

O segundo exemplo foi desenvolvido com o objetivo de investigar o comportamento mecânico de elementos de concreto submetidos à compressão cíclica. A investigação foi realizada por meio de uma análise paramétrica conduzida com o código. Ao todo foram realizadas 90 simulações numéricas, variando os valores da resistência à compressão, da frequência de carregamento e do nível máximo de tensão.

O terceiro exemplo tem o objetivo avaliar a aplicabilidade do código na análise de estruturas de concreto submetidas, prioritariamente, à compressão cíclica. Desta forma, um pilar de concreto armado foi simulado e teve o seu comportamento mecânico analisado sob duas condições de carregamento: compressão estática e compressão cíclica. Os resultados obtidos foram comparados, analisando o comportamento à fadiga da estrutura.

6.6.1 Compressão cíclica - Validação do código

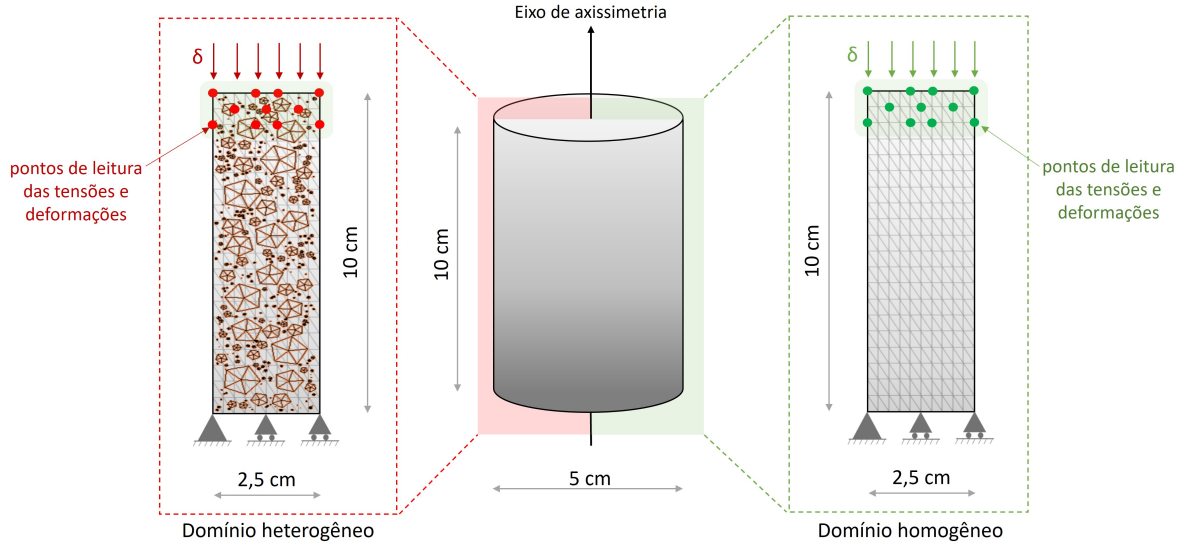
A fim de avaliar o acoplamento ao código das formulações desenvolvidas para a previsão da vida útil à fadiga e do acúmulo de dano, neste exemplo são apresentadas simulações de ensaios de compressão cíclica. Os corpos de prova de concreto simulados fazem referência às amostras avaliadas na campanha experimental, apresentada e discutida no *Capítulo* 5. Este exemplo possui também o objetivo de demonstrar a eficiência do código na modelagem em mesoescala do material, e avaliar a redução do tempo de simulação proporcionada ao realizar a modelagem com passos de ciclos normalizados ao em vez de simular todos os ciclos, estratégia comumente utilizada em modelagens que empregam formulações não dependentes da variável N_f (vida útil à fadiga).

Dessa forma, inicialmente é avaliada a capacidade das formulações em representar o comportamento físico não linear de um corpo de prova de concreto submetido à compressão cíclica, onde o material foi representado com um domínio homogêneo. Em seguida, apresentam-se três modelagens onde o concreto foi modelado em mesoescala, considerando a matriz cimentícia e agregados graúdo.

Para a primeira simulação, um corpo de prova referente a um dos concretos do lote C70 foi representado por um elemento de chapa retangular, com dimensões especificadas na Figura 6.17. Na modelagem considerou-se a axissimetria do problema, e a discretização do corpo de prova foi feita considerando o domínio como um meio monofásico, por meio de um elemento de chapa com 800 elementos e 3721 nós. Quanto às propriedades mecânicas, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do concreto são respectivamente de $E = 46,05$ GPa e $\upsilon = 0,2$. Estes valores foram aferidos nos ensaios de caracterização do concreto, apresentados

no *Capítulo* 5.

Figura 6.17 – Propriedades geométricas e condições de contorno das simulações.



Fonte: Própria autoria.

Os parâmetros do modelo de Mazars, associados à lei de evolução de dano, foram obtidos após a calibração com os dados experimentais considerando a simulação com representação homogênea do concreto. Após calibração, os dados obtidos foram: $A_T = 0,95$, $A_C = 1,39$, $B_T = 1,816 \times 10^4$, $B_C = 1,19 \times 10^3$ e $\varepsilon_{d0} = 1,06 \times 10^{-4}$.

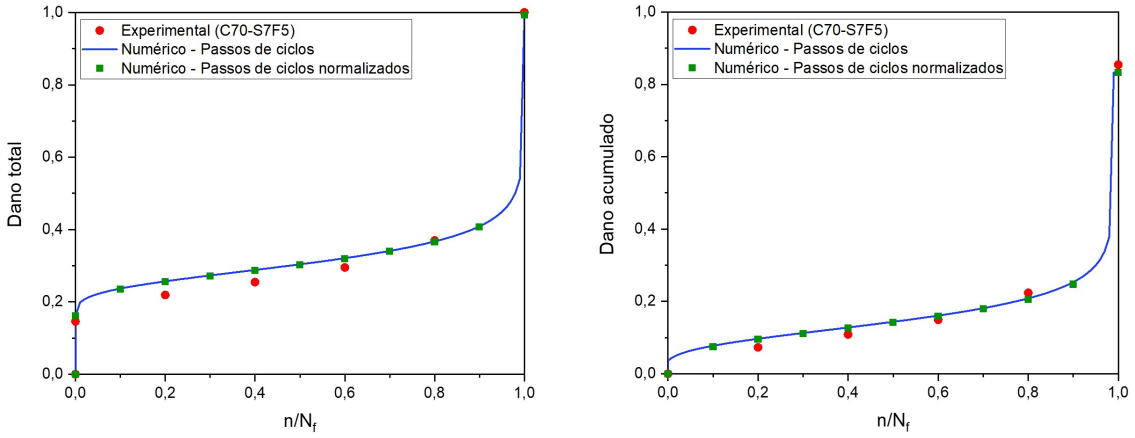
Para a simulação da compressão cíclica, duas metodologias distintas foram empregadas para representar os ciclos de vida útil à fadiga do material: (i) todos os ciclos foram simulados, e a análise foi feita por passos de ciclos; e (ii) análise foi conduzida com passos de ciclos normalizados, onde onze ciclos foram simulados, sendo um referente ao primeiro ciclo ($n = 1$), nove relacionados às seguintes frações da vida útil à fadiga: $\frac{n}{N_f} = \frac{i}{10}$ com $i = 1,2,\cdots,9$, e um último considerando a fração $\frac{n}{N_f} = 0,99$. Comenta-se que, para garantir convergência do código nas análises, o último ciclo de carregamento não é modelado (passo $\frac{n}{N_f} = 1,0$), garantindo que o dano nunca apresente valor unitário e, consequentemente, módulo de elasticidade nulo.

Para cada ciclo realizaram-se carregamentos e descarregamentos com dez passos. Os ciclos de compressão foram definidos com uma frequência de carregamento de $0,5$ Hz e um nível máximo de tensão de 70% sobre a resistência à compressão média aferida aos 90 dias ($82,42$ MPa). Utilizou-se a resistência obtida aos 90 dias, devido ao fato de o ensaio experimental de compressão cíclica ter sido realizado neste instante de tempo. Comenta-se que a vida útil à fadiga foi estimada diretamente no código, considerando a formulação proposta.

Na Figura 6.18 são apresentados os resultados numéricos obtidos nas simulações considerando o concreto com representação homogênea, e análises numéricas conduzidas sob passos de ciclos e passos de ciclos normalizados. Na Figura 6.18 é apresentada a evolução do dano total (dano aferido no primeiro ciclo mais dano acumulado na repetição dos ciclos), e o acúmulo de dano a cada ciclo de carregamento.

Figura 6.18 – Evolução do dano no concreto C70-S7F5 simulado com domínio homogêneo.

(a) Evolução do dano. **(b)** Evolução do dano acumulado.



Fonte: Própria autoria.

Conforme observa-se na Figura 6.18, são idênticos os resultados obtidos com as análises conduzidas com passos de ciclos e passos de ciclos normalizados, indicando que, para o código desenvolvido, é indiferente se todos os ciclos são analisados ou se apenas uma parcela deles. Porém, ao avaliar o tempo despendido nas análises, excluindo os processos de leitura dos arquivos de dados e da montagem do arquivo de saída, verificou-se que, para a simulação com passos de ciclos, o tempo de processamento na análise com passos de ciclos foi de 30.286 segundos (8 horas e 24 minutos e 46 segundos), enquanto na simulação com passos de ciclos normalizados foi de 539 segundos (8 minutos e 59 segundos), apresentando uma redução no tempo de $98,22\%$. Estes resultados indicam que a forma em que a formulação do acúmulo de dano foi desenvolvida e implementada proporciona uma significativa redução do tempo de processamento das simulações, indicando uma vantagem no seu emprego.

Ademais, ao comparar os resultados obtidos na simulação numérica com os aferidos na campanha experimental, é possível constatar que a formulação possibilitou representar com significativo nível de acurácia o dano acumulado. Ao avaliar o dano total observa-se que os resultados numéricos apresentaram pequenas divergências com os valores mensurados experimentalmente, principalmente ao avaliar primeiros instantes da vida útil à fadiga. Estas divergências podem ser explicadas pelos valores de dano determinados durante o primeiro ciclo de carregamento não possui nenhuma interferência associada à taxa do carregamento, ou efeito Rusch.

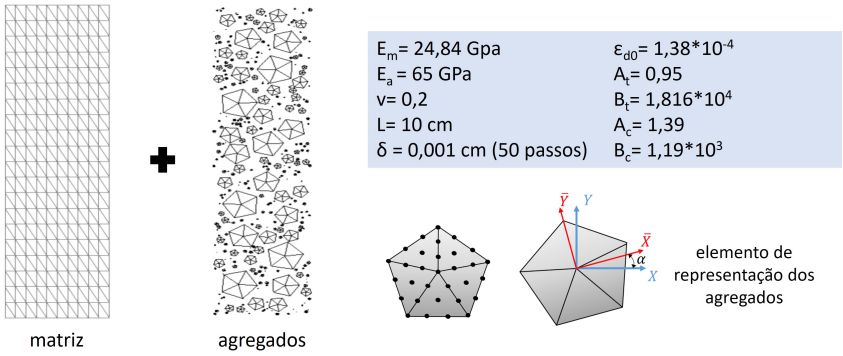
O efeito Rusch considera que a resistência à compressão do concreto é reduzida a medida em que diminui a taxa de carregamento ao qual o concreto é submetido. Como a resistência à compressão utilizada no modelo de dano de Mazars refere-se ao valor aferido em ensaios de compressão estática, conduzidos sobre taxa de carregamento variando entre $0,3$ MPa/s a $0,8$ MPa/s, conforme recomenda a NBR 5739 (ABNT, 2007), a resistência real que o material tem ao ser submetido a uma compressão cíclica pode ser inferior, a depender da frequência do

carregamento. No entanto, como o objetivo do trabalho compreende em descrever o acúmulo de dano, os resultados obtidos se mostraram coerentes com os valores obtidos experimentalmente.

Considerando que o código possibilitou representar com bom nível de acurácia a evolução do dano no corpo de prova com representação homogênea do domínio, na sequência a mesma amostra foi modelada, porém representando o material como um meio bifásico, composto pela matriz cimentícia e agregados graúdos. A matriz foi discretizada com 800 elementos e 3721 nós. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson da matriz são dados, respectivamente, por $E_m = 24,55$ GPa e $\upsilon_m = 0,2$. Na modelagem considerou-se a axissimetria do problema, conforme mostra a Figura 6.17.

Os agregados graúdos foram representados por partículas, as quais foram criadas e dispersas aleatoriamente sobre a matriz cimentícia. Para tal, foi utilizado um elemento de partícula discretizado por meio de cinco elementos finitos triangulares com aproximação cúbica, contendo 31 nós e 62 graus de liberdade, conforme mostra a Figura 6.19.

Figura 6.19 – Malhas empregadas na modelagem em mesoescala e parâmetros de dano.



Fonte: Própria autoria.

As partículas foram geradas com posições e rotações arbitrárias, evitando a sua sobreposição. A discretização do concreto foi feita de modo análogo ao que foi realizado no terceiro exemplo numérico apresentado no *Capítulo* 4. Quanto às propriedades mecânicas, o módulo de elasticidade empregado foi de $E_p = 65$ *GPa*, e para o coeficiente de Poisson utilizou-se $\nu_p = 0$.

Considerando que a análise numérica com passos de ciclos normalizados proporciona uma significativa redução no tempo de processamento, a simulação da compressão cíclica foi realizada considerando essa metodologia. Ademais, comenta-se que, daqui em diante todas as modelagens apresentadas neste texto foram desenvolvidas utilizando essa estratégia.

Para a modelagem em mesoescala, os parâmetros de dano A_T, B_T, A_C e B_C não foram alterados, porém o valor da deformação crítica precisou ser ajustada para $\varepsilon_{d0} = 1,38 \times 10^{-4}$. As simulações para este caso foram realizadas considerando o mesmo espectro de carregamento empregado na simulação do concreto com domínio homogêneo.

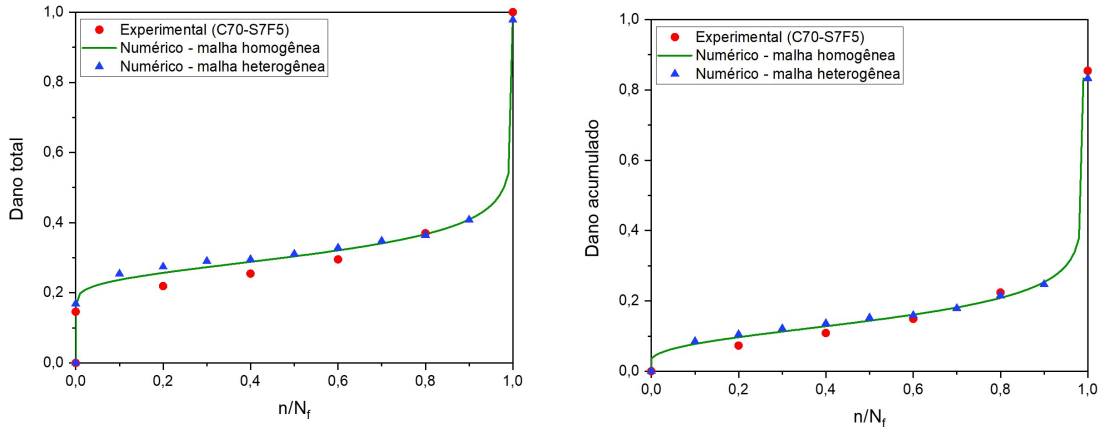
Na Figura 6.20 são apresentados os resultados numéricos obtidos para a evolução do dano total (Equação 6.20a) e para a evolução do dano acumulado (Equação 6.20a), diante da modelagem com malha homogênea e malha heterogênea. Na Figura 6.21 são apresentadas as

curvas da evolução da deformação específica máxima longitudinal do corpo de prova simulado em mesoescala e dos quatro corpos de prova avaliados experimentalmente. A Figura 6.22 apresenta os mapas de cores referentes à evolução do dano total das duas modelagens.

Conforme observa-se na Figura 6.20, os valores de dano determinados na modelagem em mesoescala foram semelhantes aos obtidos na simulação com representação homogênea do domínio, verificando-se uma diferença percentual média de $5,26\%$. Para o dano acumulado, a diferença percentual média entre as duas modelagens foi de $3,96\%$. As divergências observadas entre os valores experimentais e numéricos podem estar associados à: (i) dificuldade de especificação dos parâmetros de dano de Mazars na representação em mesoescala; (ii) dificuldade da definição de um valor médio para o dano observado na amostra simulada em mesoescala, já que o dano não apresenta distribuição homogênea no domínio, conforme se vê na Figura 6.22.

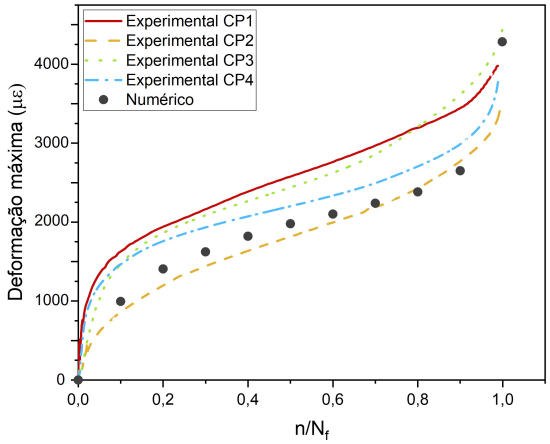
Figura 6.20 – Comparação dos resultados obtidos com malhas homogênea e heterogênea.

(a) Evolução do dano. **(b)** Evolução do dano acumulado.



Fonte: Própria autoria.

Figura 6.21 – Evolução da deformação máxima longitudinal do corpo de prova.

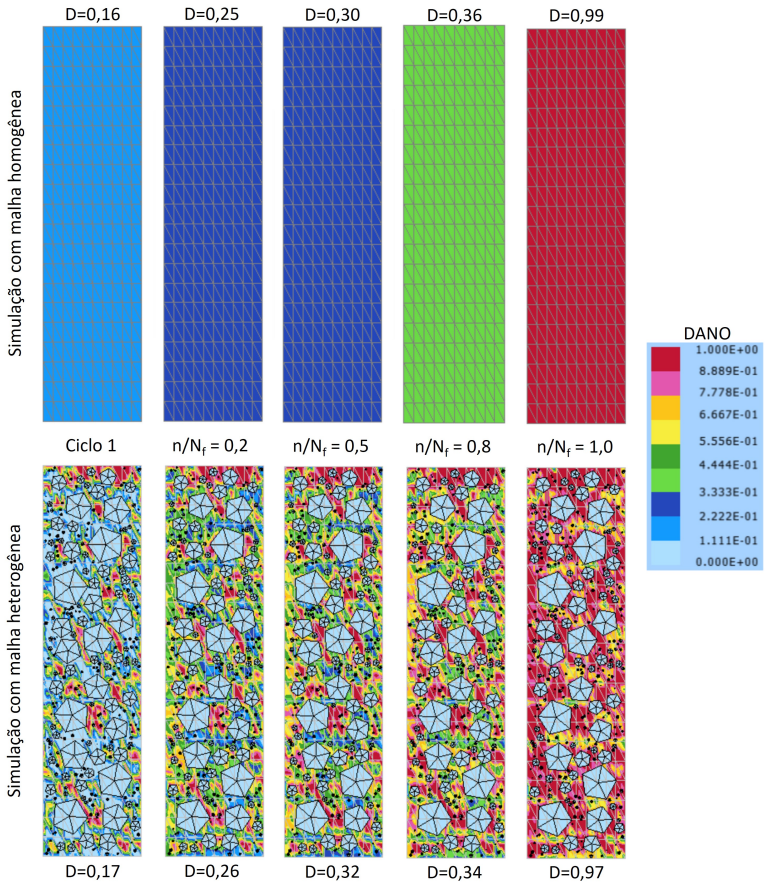


Fonte: Própria autoria.

Da Figura 6.21 verifica-se que as deformações máximas obtidas nas simulações numéricas se inserem, em sua maioria, dentro do espectro de respostas das deformações máximas aferidas nas amostras ensaiadas, indicando que o modelo proposto representa com eficiência o comportamento mecânico do concreto diante de compressões cíclicas.

Ao avaliar os mapas de cores que representam a distribuição do dano no corpo de prova, e os valores médios do dano total em diferentes momentos da vida útil à fadiga do corpo de prova simulado (com $N_f = 797$ ciclos), é possível observar que é semelhante o dano médio determinado nas duas simulações. Porém, a modelagem em mesoescala permite a visualização da distribuição do dano nas diferentes fases do material.

Figura 6.22 – Mapa de cores referente à evolução do dano total no corpo de prova.



Fonte: Própria autoria.

A fim de verificar se o modelo também representa coerentemente outros espectros de carregamento cíclico, mais dois corpos de prova cilíndricos de concreto foram simulados, um referente ao concreto do lote C50 e outro do lote C30. As simulações foram realizadas considerando a mesma discretização adotada para o caso anterior, alterando apenas as proporções dos materiais e suas propriedades.

Para a matriz cimentícia do concreto do lote C50, o módulo de elasticidade foi definido em $E_m = 1785\ kN/cm^2$, e o coeficiente de Poisson em $\nu_m = 0,2$. Para a matriz cimentícia do

concreto do lote C30, o módulo de elasticidade utilizado foi $E_m = 1510\ kN/cm^2$, e coeficiente de Poisson $\nu_m = 0,2$.

Os agregados graúdos foram representados por partículas, as quais foram criadas e dispersas aleatoriamente sobre a matriz de cimentícia. Para tal, foi utilizado um elemento de partícula discretizado por meio de cinco elementos finitos triangulares com aproximação cúbica, contendo 31 nós e 62 graus de liberdade, conforme mostra a Figura 6.19.

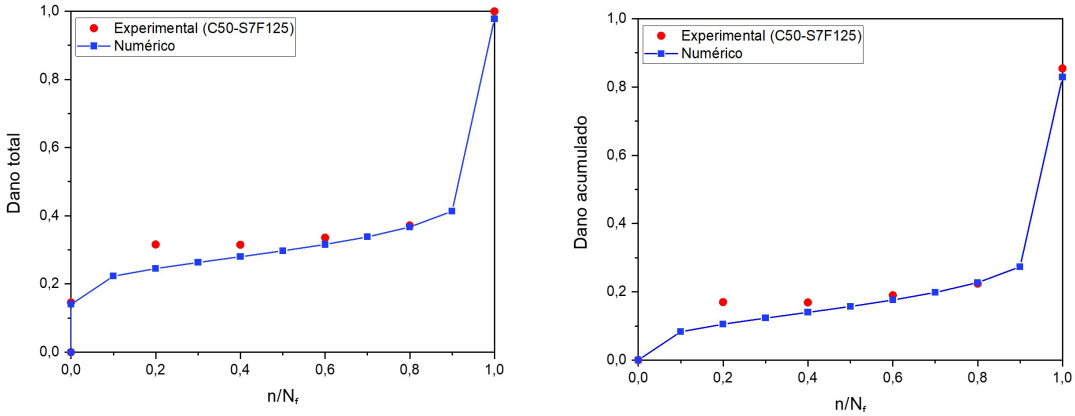
As partículas foram geradas novamente com posições e rotações arbitrárias, evitando a sua sobreposição. A discretização do concreto foi feita de modo análogo ao que foi realizado no terceiro exemplo numérico apresentado no *Capítulo* 3. Quanto às propriedades mecânicas, o módulo de elasticidade empregado foi de $E_p = 65\ GPa$, e coeficiente de Poisson é de $\nu_p = 0$.

Para a modelagem em mesoescala, os parâmetros de dano do concreto do lote C50 foram de: $A_T = 1$; $B_T = 10000$; $A_C = 1,42$; $B_C = 1425$; e $\varepsilon_{d0} = 1,8 \times 10^{-4}$. Os parâmetros de dano do concreto do lote C30 foram de: $A_T = 1$; $B_T = 10000$; $A_C = 1,19$; $B_C = 1875$; e $\varepsilon_{d0} = 1,2 \times 10^{-4}$. Estes parâmetros foram previamente calibrados empregando a técnica descrita em Ramos (2020).

No que se refere ao espectro de carregamento, os ciclos de compressão foram definidos para a simulação do concreto do lote C50 com uma frequência de carregamento de $0,125$ Hz e um nível máximo de tensão de 70% sobre a resistência à compressão média, aferida aos 90 dias ($61,1$ MPa). Para o concreto do lote C30, o carregamento cíclico foi definido com uma frequência de carregamento de $0,25$ Hz e um nível máximo de tensão de 50% sobre a resistência à compressão média, aferida aos 90 dias ($38,8$ MPa). Utilizou-se a resistência obtida aos 90 dias, devido ao fato de o ensaio experimental de compressão cíclica ter sido realizado neste instante.

Figura 6.23 – Evolução do dano no concreto C50-S7F125 modelado em mesoescala.

(a) Evolução do dano. **(b)** Evolução do dano acumulado.



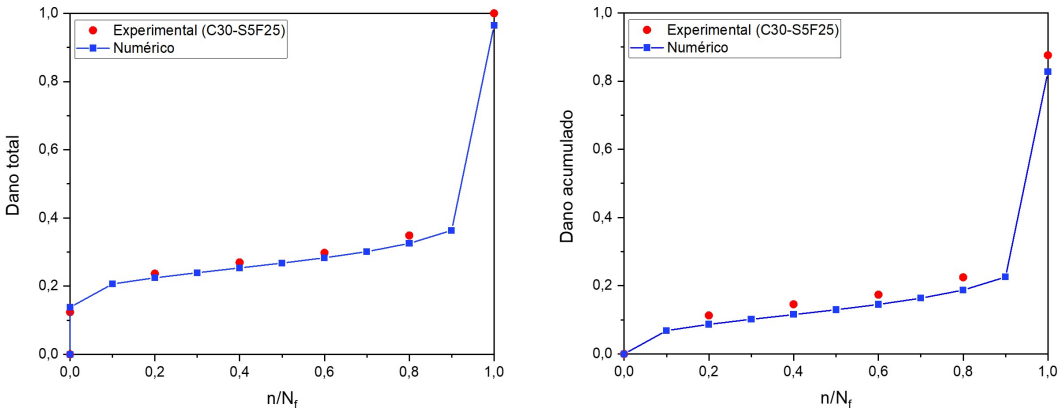
Fonte: Própria autoria.

Nas Figuras 6.23 e 6.24 são apresentados os resultados numéricos obtidos nas simulações para as amostras C50-S7F125 e C30-S5F25. Na Figura 6.25 são apresentadas as curvas de evolução da deformação máxima longitudinal obtidas nas simulações e nos ensaios experimentais, e na Figura 6.26 são apresentados os mapas de cores referentes à evolução do dano total. Comenta-

se que a vida útil determinada no código foi de 566 ciclos para a amostra C50-S7F125 e 9058 ciclos para a amostra C30-S5F25.

Figura 6.24 – Evolução do dano no concreto C30-S5F25 modelado em mesoescala.

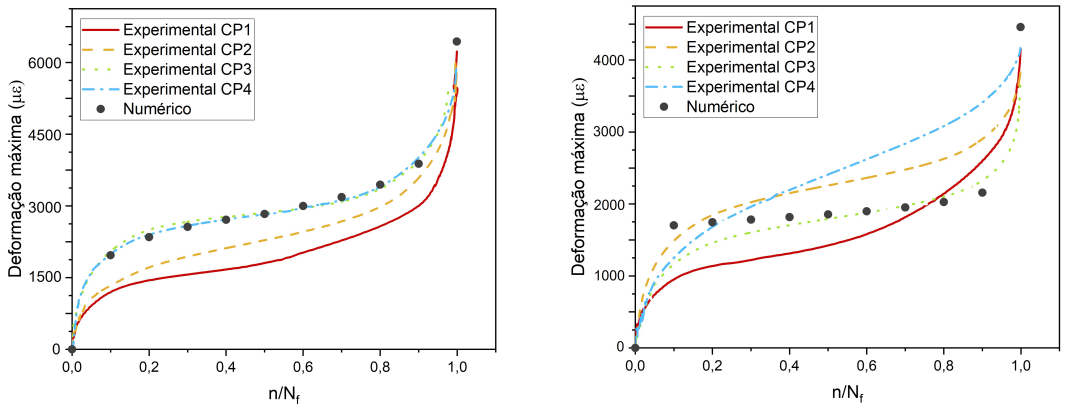
(a) Evolução do dano. **(b)** Evolução do dano acumulado.



Fonte: Própria autoria.

Figura 6.25 – Evolução da deformação máxima longitudinal dos corpos de prova.

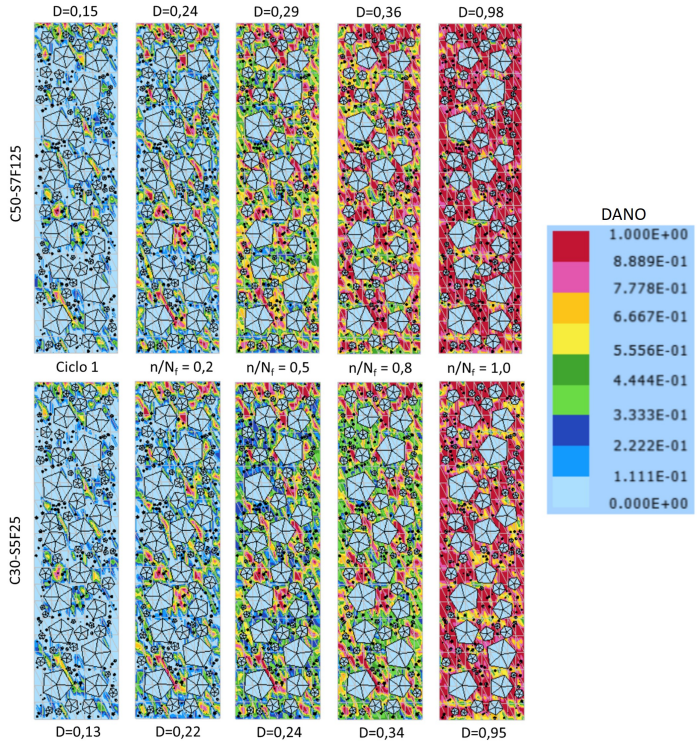
(a) Amostra C50-S7F125. **(b)** Amostra C30-S5F25.



Fonte: Própria autoria.

Por meio das Figuras 6.23 e 6.24 observa-se que, para alguns instantes da vida útil à fadiga, os valores de dano acumulado determinados numericamente foram semelhantes aos valores aferidos experimentalmente. Ao comparar todos os valores numéricos aos experimentais, verificou-se uma diferença percentual média de $9,22\%$ para a amostra C50-S7F125 e de $7,78\%$ para a amostra C30-S5F25. Como na simulação em mesoescala foi considerado que os agregados não danificam, as pequenas diferenças encontradas apontam a eficiência da representação do dano em mesoescala, uma vez que as divergências nos valores experimentais e numéricos podem ser associadas à dificuldade em determinar o valor médio do dano na amostra simulada em mesoescala, onde o dano não se distribui homogeneamente no domínio (Figura 6.26).

Figura 6.26 – Mapa de cores referente à evolução do dano total no corpo de prova.



Fonte: Própria autoria.

Dos resultados dispostos na Figura 6.25, comprova-se a eficiência do código na representação do comportamento mecânico do concreto submetido à compressão cíclica, uma vez que as deformações máximas obtidas nas simulações numéricas se inserem dentro do espectro de respostas das deformações máximas aferidas nas amostras ensaiadas. Ademais, observa-se que, para a amostra C50-S7F125, as deformações máximas são praticamente iguais às aferidas experimentalmente nos corpos de prova CP3 e CP4, apresentando uma diferença percentual média de $1,76\%$ com o CP3, e $0,59\%$ com o CP4.

6.6.2 Compressão cíclica - Estudo paramétrico

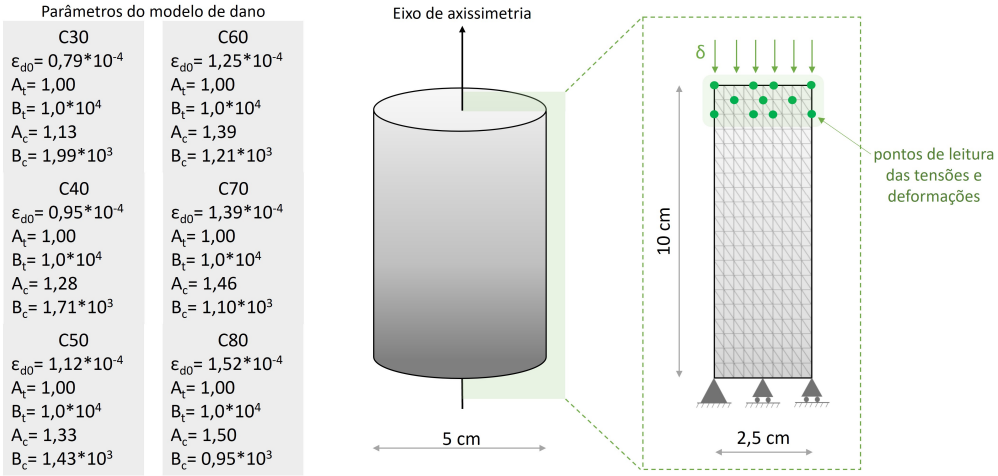
A fadiga no concreto consiste em um fenômeno associado à perda de resistência do material ao ser submetido a ciclos de carregamento. Ao avaliar experimentalmente o efeito de cargas cíclicas compressivas foi observado que a resistência à compressão do material e as condições de carregamento (níveis de tensão e frequência de carregamento) interferem significativamente na vida útil à fadiga do mesmo. Porém, nas análises do acúmulo de dano, a influência da frequência de carregamento e da resistência à compressão não foram completamente captadas, isso ocorreu principalmente pela complexidade do problema.

Como o modelo numérico proposto foi concebido para representar o comportamento mecânico do concreto, sendo o mesmo desenvolvido considerando os resultados experimentais, na sequência é apresentado um estudo paramétrico a fim de analisar e verificar a influência de

cada uma das variáveis utilizadas na concepção do modelo do acúmulo de dano: resistência à compressão; frequência de carregamento; número de ciclos de carregamento; e nível máximo de tensão. Na realização deste estudo, 90 simulações foram conduzidas considerando seis diferentes valores de resistência à compressão (30, 40, 50, 60, 70 e 80 MPa), cinco frequências de carregamento ($0,125$, $0,1875$, $0,25$, $0,375$ e $0,5$ Hz) e três níveis de tensão máxima (50%, 60% e 70% da resistência à compressão). Comenta-se que os valores utilizados para a análise paramétrica foram especificados sem extrapolar o domínio de aplicabilidade do modelo.

Para a realização das modelagens, corpos de prova cilíndricos foram simulados por meio de um elemento de chapa, com dimensões especificadas na Figura 6.27. Na modelagem considerou-se a axissimetria do problema, e a discretização do corpo de prova foi feita considerando o domínio como um meio monofásico, por meio de um elemento de chapa com 800 elementos e 3721 nós.

Figura 6.27 – Propriedades geométricas e condições de contorno das simulações.



Fonte: Própria autoria.

Quanto às propriedades mecânicas, o coeficiente de Poisson foi fixado em $\upsilon = 0,2$, e o módulo de elasticidade foi estimado de acordo com as Equações 6.69 e 6.70, prescritas na NBR 6118 (ABNT, 2014). Assim, os módulos empregados foram de: $36,81$ GPa para o C30; $42,50$ GPa para o C40; $47,52$ GPa para o C50; $49,93$ GPa para o C60; $52,13$ GPa para o C70; $54,16$ GPa para o C80. Os parâmetros do modelo de Mazars, associados à lei de evolução de dano, foram obtidos após a calibração, os quais são apresentados na Figura 6.27.

$$E_{ci} = 5600 \times \alpha_e \times \sqrt{f_{ck}} \quad \text{para} \quad 20 \leq f_{ck} \leq 50 \quad \text{MPa} \tag{6.69}$$

$$E_{ci} = 21500 \times \alpha_e \times \left(\frac{f_{ck}}{10} + 1,25\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{para} \quad 55 \leq f_{ck} \leq 90 \quad \text{MPa} \tag{6.70}$$

em que $\alpha_e = 1,2$, considerando que o agregado empregado é de origem basáltica.

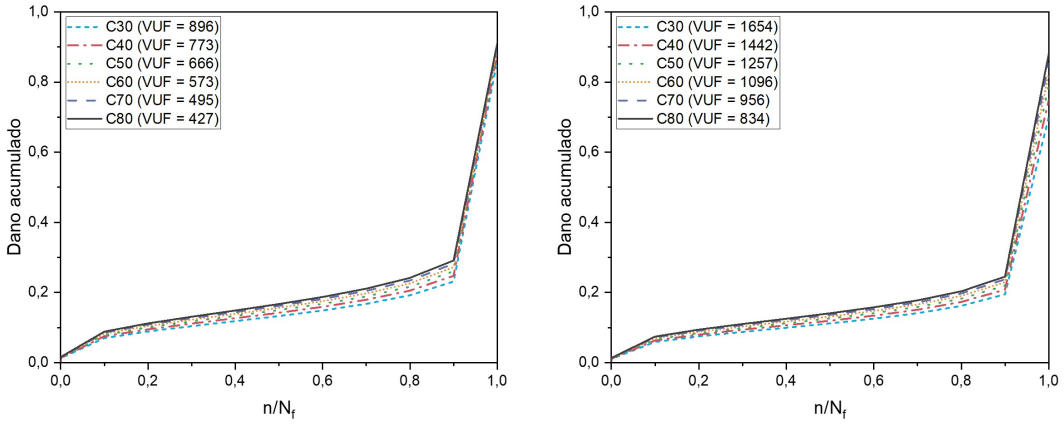
Para a simulação da compressão cíclica, adotou-se a metodologia que permite reduzir

o tempo de processamento, utilizando passos de ciclos normalizados, onde onze ciclos foram simulados, sendo um referente ao primeiro ciclo ($n = 1$), nove relacionados às seguintes frações da vida útil à fadiga: $\frac{n}{N_f} = \frac{i}{10}$ com $i = 1, 2, \cdots, 9$, e um último considerando a fração $\frac{n}{N_f} = 0,99$. Para cada ciclo, realizaram-se carregamentos e descarregamentos com dez passos.

Na primeira análise, investigou-se a influência da resistência à compressão do material no acúmulo de dano decorrente dos ciclos de carregamento. As simulações foram conduzidas variando os valores da resistência à compressão, mantendo fixo o nível máximo de tensão (70% da resistência à compressão), e com dois valores de frequência de carregamento ($0,125$ e $0,5$ Hz). Nas Figuras 6.28 são apresentadas as curvas de evolução do acúmulo de dano para as duas frequências investigadas. Nos gráficos são indicados os valores da vida útil à fadiga (*VUF*) determinados pela formulação proposta.

Figura 6.28 – Dano acumulado em concretos submetidos à compressão cíclica com $S_{max} = 0,7$.

(a) Concretos submetidos à $f_h = 0,125$ Hz. **(b)** Concretos submetidos à $f_h = 0,5$ Hz.



Fonte: Própria autoria.

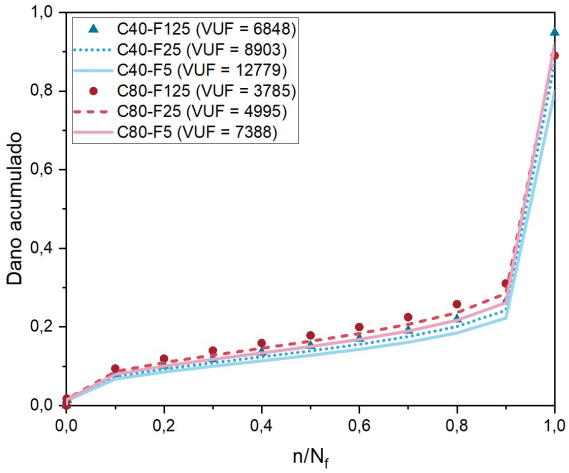
Por meio dos resultados dispostos na Figura 6.28 é possível verificar que os valores do dano acumulado aumentam a medida em que se aumenta a resistência à compressão do concreto, e que o valor do dano possui uma relação inversa com a vida útil à fadiga, ou seja, quanto maior é a *VUF* do concreto, menor é o valor do dano acumulado. Ao avaliar a variação do dano em função da resistência à compressão, verificou-se que um aumento de 10 MPa na resistência acarreta um acréscimo de $7,9\%$ a $14,1\%$ no valor de dano.

Ao comparar os valores dispostos na Figura 6.28, é possível ver que a frequência de carregamento exerce influência sobre o acúmulo de dano no concreto, e que menores frequências de carregamento geram maiores níveis de dano no material. Ademais, observa-se que, ao reduzir a frequência de carregamento, a influência da resistência à compressão se torna mais evidente e significativa.

Sabendo disso, na sequência é avaliada a influência da frequência de carregamento no acúmulo de dano decorrente da compressão cíclica. Para a análise, as simulações foram conduzidas variando os valores da frequência de carregamento ($0,125$, $0,25$ e $0,5$ HZ), considerando

duas resistências à compressão (40 e 80 MPa), mantendo fixo o nível máximo de tensão em 50% da resistência à compressão. Na Figura 6.29 são apresentadas as curvas de evolução do acúmulo de dano em função da resistência do material e da frequência de carregamento.

Figura 6.29 – Evolução do dano nos concretos submetidos à compressão cíclica com $S_{max} = 0,5$.

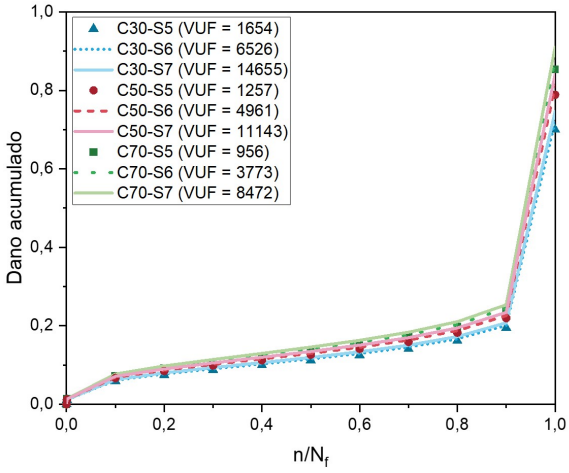


Fonte: Própria autoria.

Os resultados apresentados na Figura 6.29 demonstram que a frequência de carregamento possui uma influência secundária quando comparada com a influência da resistência à compressão. Observa-se ainda que, ao aumentar a frequência de carregamento, aumenta o dano acumulado nos ciclos de compressão.

Ao avaliar a variação do dano em função da frequência de carregamento, inferiu-se que uma redução de 50% na frequência gera um acréscimo de aproximadamente $6,3\%$ no dano. Ademais, foi observado que a influência da frequência de carregamento é mais significativa nos concretos com maiores resistências à compressão.

Figura 6.30 – Evolução do dano nos concretos submetidos à compressão cíclica com $f_r = 0,5$ Hz.



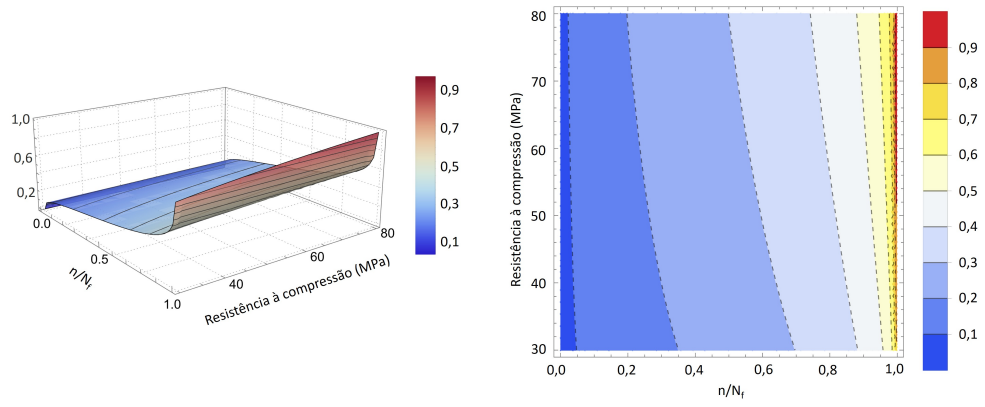
Fonte: Própria autoria.

Em seguida foi avaliada a influência do nível máximo de tensão aplicado no concreto. Para a análise, as simulações foram conduzidas variando o nível máximo de tensão em 50%, 60% ou 70% da resistência à compressão. As simulações foram conduzidas em concretos com três diferentes resistências (30, 50 e 70 MPa), mantendo fixa a frequência de carregamento de $0,5$ Hz. Na Figura 6.30 são apresentadas as curvas referentes à evolução do acúmulo de dano. Os valores da vida útil à fadiga (*VUF*) preditos também são indicados no figura.

Ao avaliar os resultados dispostos na Figura 6.30, infere-se que o nível máximo da tensão aplicada exerce significativa influência no acúmulo de dano. Ao analisar os dados, verificou-se que um acréscimo de 10% no nível de tensão máxima que define o espetro de carregamento, acarreta um aumento médio de $6,9\%$ a $13,7\%$ do nível de danificação, sendo este acréscimo maior nos concretos com maior resistência à compressão.

Todos os resultados obtidos nas simulações numéricas foram compilados gerando superfícies tridimensionais que permitiram visualizar, sob uma perspectiva global, a influência de cada um dos parâmetros analisados. As Figuras 6.31, 6.32 e 6.33 apresentam gráficos de superfície e mapas de contorno (isolinhas) do dano. As superfícies 3D foram geradas por meio de funções de interpolação *B-Spline*.

Figura 6.31 – Evolução do dano em função de f_c em (a) gráfico de superfície e (b) mapas de contorno.



Fonte: Própria autoria.

Com as superfícies geradas, constatou-se que a resistência à compressão e o acúmulo de dano possuem uma relação não linear com o dano, enquanto que, para o conjunto de dados analisados, a frequência de carregamento e o nível máximo de tensão se mostraram relacionarem-se linearmente com o acúmulo de dano. De modo geral, os resultados obtidos na análise das superfícies tridimensionais permitiram inferir que:

i O acúmulo de dano apresenta uma relação positiva com o número de ciclos ao qual o concreto é submetido, e essa relação pode ser descrita por meio de uma curva logarítmica semelhante à que descreve o efeito de fluência cíclica no concreto;

ii A resistência à compressão exerce significativa influência no acúmulo de dano, sendo ela

superior à observada para a frequência de carregamento e para o nível máximo de tensão aplicado;

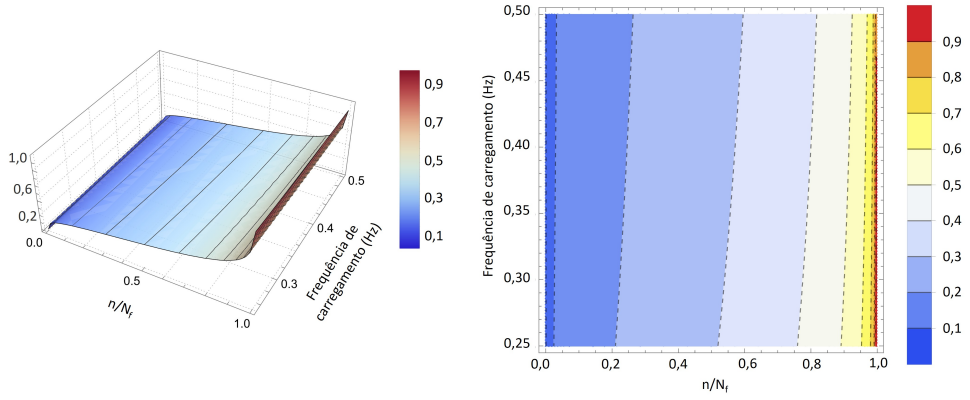
iii A frequência de carregamento possui maior influência sobre o dano acumulado a medida em que se aumenta a resistência à compressão do concreto;

iv Nos concretos de alta resistência, o acúmulo de dano é maior ao aumentar o nível máximo de tensão utilizado no carregamento cíclico;

v É constante a taxa do acúmulo de dano entre as frações $0,2$ e $0,8$ da vida útil à fadiga, não observando neste período de vida significativos acréscimos nas deformações do material;

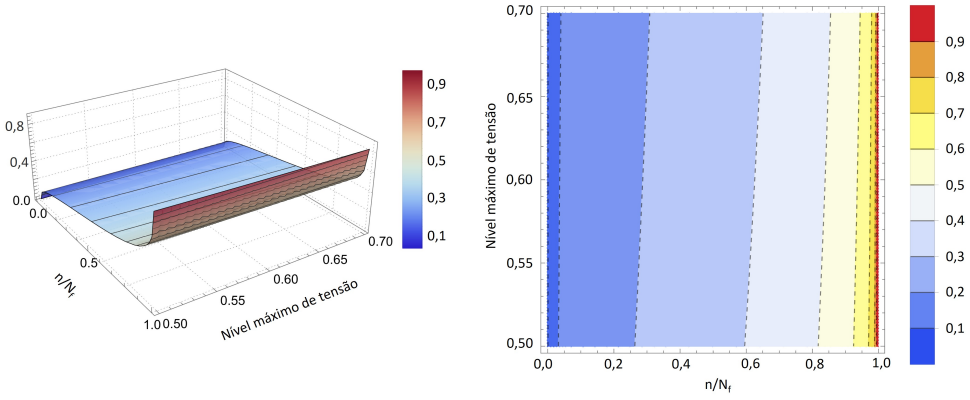
vi As mesmas observações feitas para o dano acumulado podem ser extrapoladas para a evolução da deformação máxima observada nos ciclos de carregamento.

Figura 6.32 – Evolução do dano em função de f_h em (a) gráfico de superfície e (b) mapas de contorno.



Fonte: Própria autoria.

Figura 6.33 – Evolução do dano em função de S_{max} em (a) gráfico de superfície e (b) mapas de contorno.



Fonte: Própria autoria.

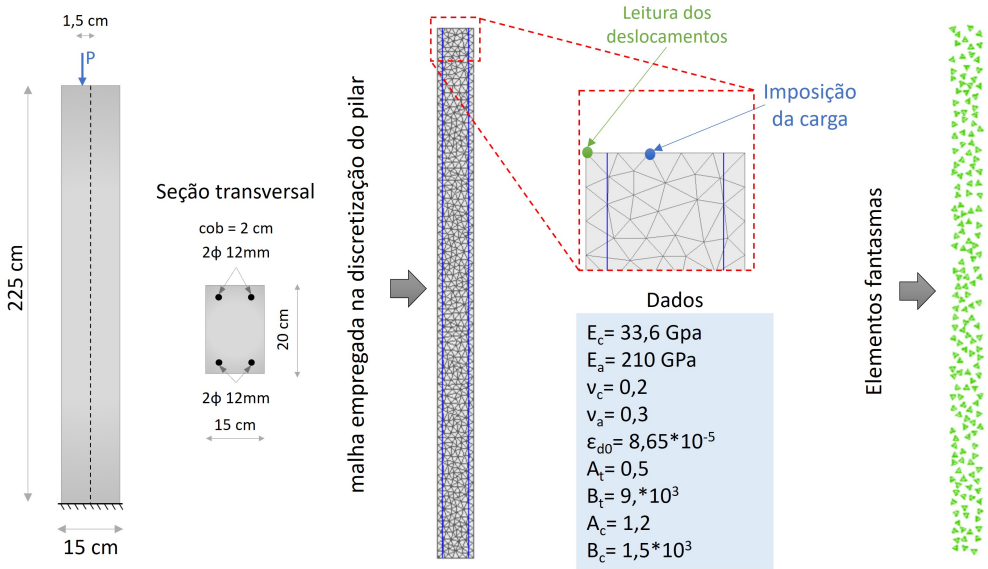
6.6.3 Pilar de concreto armado - Análise de fadiga

Este exemplo, de cunho exploratório, tem o propósito de investigar a consistência do código perante a análise do comportamento não linear físico e geométrico de uma estrutura de concreto armado submetido a cargas cíclicas, considerando a aplicação do modelo de dano acumulado e da estratégia de avaliação do dano via elementos fantasmas.

Considerando a incipiência de resultados experimentais disponíveis na literatura, que compreendam o comportamento mecânico de uma estrutura de concreto submetida a compressão cíclica (Figura 6.34), considerando ensaios em escala real, um pilar de concreto armado foi idealizado e analisado numericamente fazendo o uso dos modelos desenvolvidos.

A fim de que fosse simulada uma possível situação de carga cíclica em um pilar de concreto armado, fez-se necessário a priori avaliar o comportamento da estrutura sob um regime de carregamento quase-estático. Ademais, para que o pilar simulasse uma estrutura real, foram utilizados os dados coletados em uma campanha experimental desenvolvida por Espion (1993), onde o autor ensaiou um pilar de concreto armado submetido à uma carga de compressão excêntrica. Este pilar foi simulado por Ramos (2020), também utilizando o método dos elementos finitos posicional, onde o autor determinou os parâmetros relacionados ao modelo de dano de Mazars que melhor ajustavam os resultados obtidos numericamente e os dados experimentais de Espion (1993).

Figura 6.34 – Propriedades geométricas, condições de contorno e malhas das simulações.



Fonte: Própria autoria.

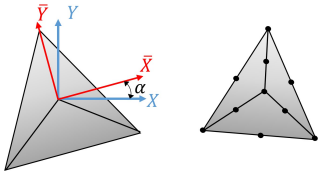
Na modelagem do pilar sob regime de carregamento quase-estático, as propriedades geométricas, as condições de contorno e os parâmetros de dano de Mazars, seguiram os valores adotados em Ramos (2020), apresentadas na Figura 6.34. Duas simulações foram realizadas das quais considerando que o dano é avaliado em todo o domínio do pilar, e outra com o dano avaliado por meio de elementos fantasmas dispersos no domínio da estrutura. A análise com os

elementos fantasmas foi desenvolvida com o objetivo de verificar a consistência dos resultados, de modo a empregar essa estratégia na análise subsequente, onde o pilar foi submetido a ciclos de carga e descarga.

Para ambas as simulações, o concreto armado foi discretizado considerando-o como um sistema bifásico, constituído pelas barras de aço e matriz de concreto. A matriz de concreto foi discretizada com uma malha não estruturada, utilizando 996 elementos triangulares com ordem de aproximação cúbica, totalizando 4708 nós. O módulo de elasticidade, a resistência à compressão e o coeficiente de Poisson do concreto são, respectivamente, de $E_c = 33,6$ GPa, $f_c = 37,6$ MPa e $\nu_c = 0,2$. Para as barras de aço, utilizaram-se 900 elementos finitos unidimensionais com ordem de aproximação linear (elementos de fibras). O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do aço, são respectivamente, de $E_a = 210$ GPa e $\nu_a = 0,3$. Comenta-se que, as malhas foram definidas de modo que reproduzissem, com certo grau de fidelidade, as malhas adotadas por Ramos (2020).

Nas modelagens com avaliação do dano via elementos fantasmas, os mesmos foram dispersos aleatoriamente na matriz de concreto, considerando elementos de chapa triangular. Os elementos fantasmas são compostos por três elementos de chapa, com ordem de aproximação quadrática, conforme mostra a Figura 6.35. A dispersão dos elementos foi feita de modo aleatório considerando uma proporção entre a área total de elementos fantasmas e a área da matriz de 30%.

Figura 6.35 – Partículas usadas para representar os elementos fantasmas.



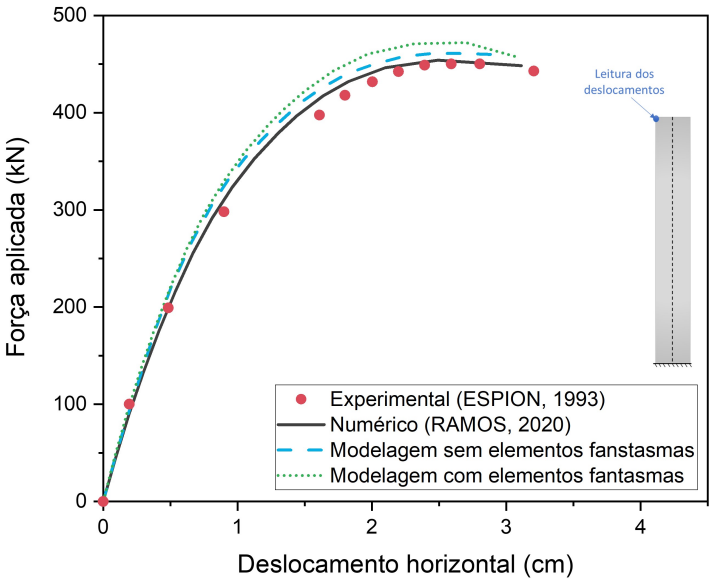
Fonte: Própria autoria.

As análises sob regime quase-estático foram conduzidas por meio da aplicação de deslocamentos, considerando 20 passos incrementais de $\delta = -0,012$ cm, com a determinação da respectiva força no ponto de aplicação.

Os resultados obtidos nas simulações são apresentados na Figura 6.36, por meio das curvas de força aplicada versus deslocamentos horizontais desenvolvidos na extremidade esquerda da face superior do pilar. Na Figura 6.36 são indicados também os resultados numéricos obtidos por Ramos (2020) e os obtidos experimentalmente em Espion (1993).

Por meio dos resultados, verificou-se que a força máxima atingida durante a trajetória de equilíbrio é de $459,35$ kN para a modelagem com o dano avaliado em todo o domínio do pilar, e de $468,62$ kN para a modelagem com o uso de elementos fantasma. A diferença percentual dos resultados obtidos nas duas modelagens é de $2,01\%$. Ao avaliar o tempo de processamento, verificou-se que a modelagem sem elementos fantasmas consumiu 6.360 segundos, enquanto a simulação com elementos fantasmas despendeu 4.826 segundos, gerando uma redução de 24%

Figura 6.36 – Trajetória de equilíbrio do pilar.



Fonte: Própria autoria.

no tempo de processamento. A diferença entre as forças máximas atingidas na simulação com o uso de elementos fantasmas e as obtidas nas simulações de Ramos (2020) e experimentalmente por Espion (1993), foi respectivamente de $3,22\%$ ($454,00$ kN) e $4,09\%$ ($450,19$ kN). Estes resultados apontam a eficiência do uso dos elementos fantasmas para a análise do comportamento mecânico do pilar.

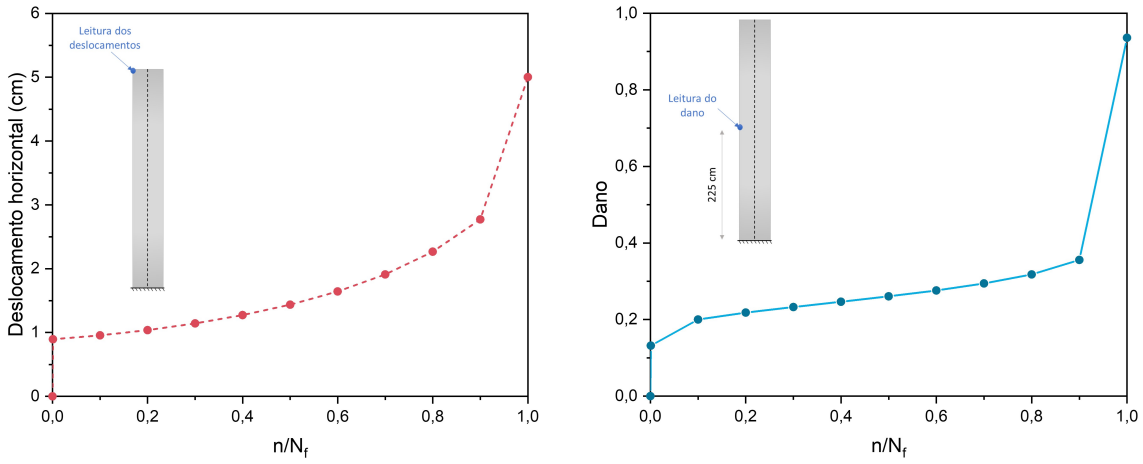
Ao avaliar os resultados obtidos neste trabalho e os da simulação desenvolvida por Ramos (2020), é possível verificar que os resultados obtidos por Ramos (2020) foram mais próximos dos experimentais, e isto é explicado pelo fato do autor ter empregado um modelo de plasticidade para a modelagem das armaduras.

Dando continuidade às análises, o pilar foi simulado considerando um carregamento cíclico. Para a definição do espectro do carregamento, considerou-se uma frequência de carregamento de $0,25$ Hz e uma carga máxima de 70% do valor da força máxima atingida na trajetória de equilíbrio do pilar ($328,03$ kN), valor aferido na simulação com regime de carregamento quase-estático, e $R = 0$ configurando um alívio completo dos esforços aplicados. Comenta-se que, para a análise do dano acumulado em um estado multiaxial de tensão, o nível máximo de tensão é determinado pela razão entre o valor máximo de tensão observado em um elemento finito e a tensão de resistência do material. Dessa forma, o nível máximo de tensão é diferente em cada um dos elementos que discretiza o domínio. Ademais, a mesma formulação obtida para a lei do acúmulo de dano para um estado de compressão cíclica pura foi utilizada para representar a tração cíclica pura, fazendo a troca do parâmetro de resistência à compressão pela resistência à tração.

Na Figura 6.37 são apresentados os deslocamentos horizontais desenvolvidos na extremidade esquerda da face superior do pilar, em função do número de ciclos normalizados e o índice

Figura 6.37 – Evolução dos deslocamento horizontal e dano no pilar.

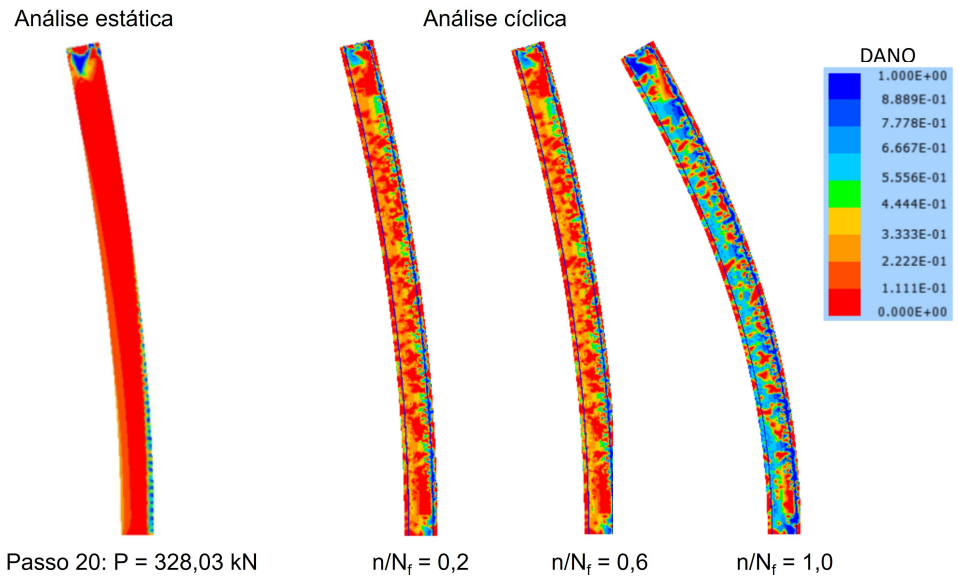
(a) Evolução do deslocamento horizontal. **(b)** Evolução do dano.



Fonte: Própria autoria.

de dano máximo avaliado na região central da face lateral esquerda do pilar (lateral comprimida). A vida útil à fadiga do concreto, determinada para um nível de tensão de 70%, frequência de carregamento de $0,25$ Hz e resistência à compressão de $37,6$ MPa, foi de 1049 ciclos. Para ilustrar a propagação do índice de dano no pilar, na Figura 6.38 são apresentados mapas de cores referente aos valores de dano para os casos de carregamento quase-estático e cíclico. Para efeitos de visualização, a configuração deformada da estrutura foi ampliada por um fator de 20.

Figura 6.38 – Mapa de cores referente à evolução do dano no pilar.



Fonte: Própria autoria.

Ao avaliar a Figura 6.37a, observa-se que a curva de evolução do deslocamento horizontal da extremidade esquerda da face superior não apresenta o perfil da curva de fluência cíclica,

diferente da evolução do dano observado na região central da face lateral esquerda do pilar. Uma possível justificativa para isso se deve à natureza do estado de tensão ao qual o corpo é submetido, que fazem com que o deslocamento horizontal da extremidade esquerda da face superior do pilar aumente exponencialmente ao acumular dano no material.

A distribuição do dano acumulado não ocorreu de forma homogênea no domínio da matriz de concreto, diferente do que foi observado no primeiro exemplo apresentado neste capítulo, onde o material estava submetido a um estado puro de compressão. Assim, para uma estrutura com estado multiaxial de tensão, observou-se que o dano acumulado tem sua intensidade intensificada nas regiões com maior nível de tensão, análogo ao que ocorre em análises de dano em estruturas com solicitações em regime quase-estático. Destaca-se que as análises foram desenvolvidas com o uso de elementos fantasmas dispersos na matriz, logo a distribuição do dano apresentada na Figura 6.38 apresenta um perfil de distribuição aleatória no domínio do pilar.

Destaca-se ainda que a simulação foi desenvolvida considerando que o acúmulo de dano decorrente de um estado de tração cíclico era semelhante ao acúmulo de dano determinado pelo modelo proposto para estados de compressão cíclica, fazendo apenas as modificações citadas no início do exemplo. Por este motivo, o acúmulo de dano foi igualmente distribuído nas regiões de tração e compressão, sendo visualizado um índice de dano superior na face lateral direita do pilar, uma vez que ao final do primeiro ciclo já era superior o dano observado nesta face.

Por fim, comenta-se que no código foi implementada a análise cíclica com controle de carga, considerando uma lei secante para definir os regimes de descarregamento e recarregamento, o que pode não ser interessante na análise de um problema com estado multiaxial de tensão, sendo necessário avaliar outras estratégias de representação de laços de histereses segundo leis de descarregamento com referência em um ponto focal e não linear (POPOVICS, 1973).

6.7 Conclusão do capítulo

Os modelos desenvolvidos e apresentados neste capítulo, apresentam substancial inovação para as áreas de estudo associadas ao concreto e seu comportamento mecânico diante da compressão cíclica.

O principal objetivo deste capítulo refere-se ao desenvolvimento de um código capaz de modelar o comportamento mecânico do concreto sob compressão cíclica. Para o desenvolvimento do código, formulações para a previsão da vida útil à fadiga e evolução do acúmulo de dano em concretos submetidos a ciclos de compressão foram propostas a partir da observação de dados experimentais.

As formulações foram obtidas via modelagem matemática por meio de Regressão Multivariada com técnicas de regressão não linear. A escolha deste método se deu em função de análises estatísticas dos resultados obtidos na campanha experimental, dados disponíveis na literatura e de pesquisas bibliográficas previamente realizadas, que indicaram uma relação não

linear dos parâmetros preditores com o dano acumulado $\frac{dD}{dN}$ e com a vida útil à fadiga VUF/N_f. Comenta-se que este método de modelagem já havia sido explorado para o desenvolvimento de uma formulação de predição do módulo de elasticidade de concretos com agregado graúdo reciclado, apresentando-se como uma eficiente técnica para a regressão não linear (FELIX; POSSAN; CARRAZEDO, 2021).

Verificou-se que o modelo proposto para a previsão da vida útil à fadiga apresenta desempenho satisfatório, indicando resultados coerentes quando confrontados com dados reais. O mesmo foi observado na lei do acúmulo de dano proposta, onde a formulação desenvolvida apresentou um coeficiente de determinação de $0,92\%$, ao confrontar os valores preditos com os resultados obtidos na campanha experimental.

Destaca-se que a formulação desenvolvida não possibilita estimar os valores inicial e final do dano, referentes respectivamente ao dano que o material possui associado aos defeitos pré-existentes na microestrutura do material, e o dano no instante de falha do material. Para o dano inicial, adotou-se o mesmo com valor nulo (Não considerando pré-danificações), e considerou-se que o dano no instante de falha do material é unitário, conforme aponta a mecânica do dano contínuo.

Para avaliar a aplicabilidade código e a consistência dos resultados obtidos com o seu uso, três exemplos numéricos foram desenvolvidos e apresentados. Dos resultados apresentados nos primeiro e segundo exemplos, comprovou-se a eficiência do código na representação do comportamento mecânico do concreto submetido à compressão cíclica, uma vez que as deformações máximas obtidas nas simulações numéricas se inserem dentro do espectro de respostas das deformações máximas aferidas nas amostras ensaiadas. Os resultados mostraram ainda que o modelo proporciona uma análise numérica com menor tempo de processamento, diante do uso de passos de ciclos normalizados. No terceiro exemplo, uma estrutura em escala real foi simulada e verificou-se que a distribuição do dano apresenta comportamento coerente com os princípios da mecânica do dano. Porém, para que a estrutura apresente um comportamento mecânico com maior fidelidade, uma lei de dano acumulado, em situações de tração cíclica, deve ser acoplada ao código desenvolvido, permitindo a simulação de estruturas submetidas a solicitações cíclicas que configuram um estado de tensão multiaxial.

É importante pontuar que ambos os modelos desenvolvidos neste trabalho apresentam limitações de aplicabilidade, definidas pelo domínio das variáveis de entrada. Para o modelo de previsão da vida útil à fadiga, foi possível extrair dados da literatura que possibilitaram estender a sua aplicabilidade para além dos valores avaliados experimentalmente. No entanto o mesmo só pode ser aplicado para avaliar compressão cíclica de baixa frequência de carregamento, podendo considerar diferentes razões entre tensões mínima e máxima.

O modelo de dano acumulado, onde a formulação foi proposta considerando apenas os dados obtidos na campanha experimental, o mesmo também só é aplicável para análises de compressão cíclica de baixa frequência de carregamento, e diante de ciclos de carregamento com relaxamento total, onde a razão R entre as tensões mínima e máxima é nula. Para que a

formulação aqui desenvolvida, possa ser aplicada em outras condições de carregamento, torna-se imprescindível o desenvolvimento de outras pesquisas experimentais que compreendam diferentes condições de contorno, para que a formulação seja recalibrada e estenda seu domínio de aplicabilidade.

CAPÍTULO

7

CONCLUSÕES

Diante das atuais necessidades da construção civil, no que se refere à durabilidade das estruturas de concreto, torna-se imprescindível que engenheiros e pesquisadores da área consigam determinar e garantir que as estruturas projetadas tenham vida útil definida em projeto. Para que seja possível o estudo e análise de estruturas de concreto armado considerando o efeito da fadiga, faz-se necessário deter conhecimento e métodos que permitam entender o comportamento da fadiga em cada um dos materiais que constituem o compósito.

Neste contexto, é imprescindível o uso de ferramentas que possibilitem a análise do comportamento à fadiga do concreto e possam realizar previsões sobre a vida útil à fadiga do material. Assim, neste trabalho foram desenvolvidas formulações matemáticas e códigos de simulação numérica que possibilitaram analisar a vida útil à fadiga de concretos com resistência à compressão entre 23 e 116 MPa, submetidos à compressão cíclica de baixa frequência de carregamento (com valores abaixo de $1,0$ Hz). As formulações foram concebidas considerando resultados obtidos em campanha experimental, realizada concomitantemente com o desenvolvimento dos modelos, além de dados oriundos da literatura.

Considerando que este trabalho foi desenevolvido sob três eixos (estudo experimental, modelagem matemática e simulação numérica), na sequência são apresentadas as conclusões que compreendem cada um deles.

Dos resultados obtidos na campanha experimental, e análise destes, as seguintes conclusões são elencadas:

- A vida útil à fadiga do concreto cresce na medida em que aumenta a frequência de carregamento aplicada, desde que mantido o nível de tensão. A razão para este fenômeno se deve ao fato de que, para maiores frequências de carregamento, o material passa a ter seu comportamento mecânico governado por propriedades dinâmicas, sendo estas em geral superiores às obtidas em ensaios com cargas estáticas;

- Observou-se que a razão R afeta significativamente a vida útil à fadiga do concreto, ao

comparar os resultados obtidos na campanha experimental com os resultados disponíveis na literatura, verificando que a VUF é reduzida a medida em que diminui o valor de R;

- Ao avaliar a variabilidade do número de ciclos necessários para gerar a ruptura no material, observou-se que a dispersão dos dados em torno da média decresce a medida em que se diminui a frequência de carregamento, independentemente do nível máximo de tensão empregado. Este fato indica que o grau de confiabilidade de modelos de estimativa da vida útil à fadiga de componentes estruturais de concreto sujeitos a solicitações cíclicas é função da frequência de carregamento.

- A perda de rigidez do material ocorre de modo gradual em função do aumento no número de ciclos de carregamento. Foi observado que o dano pode ser descrito por meio de uma curva do tipo "S", comportamento este semelhante ao da curva de fluência cíclica. Para índices de dano superiores a $0,3$ (sendo promovido por cargas cíclicas), o material se encontrará no estágio III, região de iminência de ruptura;

- Independentemente do nível de tensão aplicado, a propagação de fissuras ocorre dentro de um intervalo médio de 85% do número de ciclos necessários para levar o corpo de prova à ruptura, sendo os valores iniciais e finais dependentes da frequência de carregamento;

- A avaliação do histórico da deformação máxima possibilitou concluir que o intervalo de tempo entre o surgimento das fissuras e o início da ruptura, período que define o estágio II, decresce à medida que diminui a frequência de carregamento. Para uma mesma frequência de carregamento, a proporção da vida útil que define o período de propagação das fissuras se mantém fixa independentemente do nível de tensão máxima aplicado;

- No que se refere à avaliação do dano, a comparação entre os valores obtidos com as diferentes técnicas empregadas mostrou que o dano determinado pela análise da variação do módulo de elasticidade dinâmico, obtido via técnica de excitação por impulso, descreve coerentemente a perda de rigidez do material. Desta forma, a técnica se apresenta como um método eficiente para avaliar de modo prático a degradação do concreto submetido a solicitações cíclicas;

- Observou-se que a evolução do dano pode ser descrito por funções exponenciais e/ou logarítmicas, devido à semelhança das curvas do dano versus o número de ciclos com a de fluência cíclica;

- O uso do índice de dano obtido pela técnica de processamento de imagens, que é determinado pela análise da superfície do concreto, não possibilita a determinação de micro defeitos que surgem e/ou progridem no material. Assim, a técnica de avaliação do dano considerando imagens não proporciona um método eficiente para a determinação dos estágios I e II da curva de fluência cíclica, os quais representam o início da fissuração e o estágio de propagação contínua das fissuras, respectivamente, visto que as nucleações não

foram superficiais, mas internas. Porém, o método possibilita identificar quando o concreto está adentrando no estágio III, onde o material já apresenta grandes níveis de degradação. Este resultado indica que a metodologia pode ser empregada para indicar situações em que há risco de falha do material.

Considerando o desenvolvimento das formulações analíticas para a previsão da vida útil à fadiga e evolução do acúmulo de dano, as seguintes conclusões são elencadas:

- Os modelos de previsão da vida útil à fadiga e de mapeamento do acúmulo de dano foram concebidos mediante emprego da técnica de regressão não linear multivariada, com método iterativo de Gauss-Newton. A técnica utilizada se mostrou eficiente, em ambas as modelagens, na busca de uma combinação de funções para representar a relação entre os parâmetros de entrada e a variável resposta;

- Verificou-se que a utilização dos parâmetros S_{max}, f_c, S_{min} e f_h geraram uma curva capaz de mapear com bom nível de acurácia a vida útil à fadiga do concreto. Ademais, os resultados obtidos para os testes de hipótese de Shapiro-Wilk $(0,893)$ e de Durbin-Watson $(0,810)$ demonstraram que o modelo apresenta normalidade e independência dos resíduos, indicando que os parâmetros determinados para a formulação são não tendenciosos e imparciais, sendo estimados coerentemente;

- Ao avaliar os resíduos gerados com a predição da VUF via formulação proposta, verificou-se que eles apresentam uma distribuição normal com média nula, que cerca de 94% dos valores preditos apresentaram erros inferiores à raiz do erro médio quadrático, e que o erro percentual médio absoluto obtido da aplicação do modelo, é de $5,97\%$, indicando que o mesmo mapeia com acurácia a vida útil à fadiga de concretos sob compressão cíclica de baixa frequência;

- Através de análises de sensibilidade dos parâmetros do modelo de vida útil à fadiga, inferiu-se que a razão entre o nível mínimo de tensão e a resistência à compressão, e a razão R apresentaram 100% de significância sobre a VUF, indicando que as mesmas se fazem necessárias para explicar o fenômeno modelado. Ademais, observou-se que as demais variáveis apresentaram um alto nível de influência no mapeamento da vida útil à fadiga, e que o uso de todas as variáveis de entrada gerou um modelo onde $94,56\%$ da variação observada na variável resposta é explicada pelo modelo;

- No desenvolvimento da formulação do acúmulo de dano verificou-se que a utilização dos parâmetros S_{max}, f_c, N_f e f_h geraram uma curva capaz de mapear o dano ocasionado no concreto a cada ciclo de carregamento. Ao avaliar a consistência do modelo por meio dos testes de hipótese de Shapiro-Wilk $(0,916)$ e de Durbin-Watson $(0,872)$, constatou-se que o mesmo apresenta normalidade e independência dos resíduos, indicando que

os parâmetros obtidos por regressão não linear multivariada, com método iterativo de Gauss-Newton, são não tendenciosos ou imparciais;

- Ao avaliar os parâmetros de performance do modelo de acúmulo de dano, inferiu-se que a formulação desenvolvida possui um coeficiente de determinação de $0,9883$, indicando uma forte relação entre os valores preditos e observados experimentalmente. Nas análises, verificou-se que os resíduos gerados na predição do dano apresentam uma distribuição normal com média nula, e cerca de 98% dos valores preditos apresentaram erros inferiores à raiz do erro médio quadrático $(0,072)$. Inferiu-se que o erro percentual médio absoluto obtido da aplicação do modelo é de $6,80\%$, indicando que a formulação estima com rigor a danificação nos concretos;
- Os modelos propostos neste trabalho podem ser utilizados como ferramentas para o estudo e análise de concretos submetidos a solicitações cíclicas com baixa frequência de carregamento. O modelo tem como principal vantagem a obtenção de forma direta da vida útil à fadiga e do dano acumulado, sem que haja a necessidade de calibração dos parâmetros com dados experimentais, uma condição que facilita o seu emprego nas mais variadas situações.

Considerando os códigos desenvolvidos para a modelagem em mesoescala do concreto, e os resultados obtidos nas simulações, as seguintes conclusões puderam ser listadas:

- O modelo mecânico implementado para a análise não linear geométrica de sólidos bidimensionais, baseado no método dos elementos finitos posicional, com descrição Lagrangiana total, se mostrou eficiente e capaz de representar coerentemente o campo de deslocamento de um elemento estrutural sob pequenos e grandes deslocamentos. O código foi desenvolvido considerando elementos bidimensionais, e utiliza os polinômios de Lagrange aplicados à elementos finitos triangulares com ordem de aproximação cúbica, onde foi possível averiguar a acuidade da formulação para tratativas geometricamente não lineares;
- Para a representação de sólidos constituídos de materiais compósitos, em especial o concreto armado, foram implementados elementos finitos para a representação de fibras (para simular barras de aço imersas no concreto) e partículas (para representar os agregados do concreto). As fibras foram representadas por elementos de barra simples, também denominados barras de treliça. As partículas foram representadas por elementos finitos bidimensionais, do tipo chapa. O acoplamento dos elementos finitos do tipo fibra e partícula ao programa de chapa (elemento finito para a representação da matriz), foi realizado utilizando a técnica de embutimento adotada por Vanalli (2004), Sampaio, Coda e Paccola (2011), Sampaio (2014), Nogueira et al. (2014), Moura (2015) e Paccola e Coda (2016), o qual consiste na inserção das posições nodais das fibras/partículas sobre os elementos finitos representativos da matriz (do tipo chapa), onde estão imersas;

- Para representar a não linearidade física do material, a lei de evolução do dano de Mazars (1984) foi implementada e acoplada ao código de análise de sólidos via MEFP. Ademais, com o propósito de reduzir o tempo de processamento nas análises físicas não linear, propôs-se uma estratégia numérica denominada *malha fantasma*, baseando-se na técnica de embutimento, mesma técnica empregada na representação de sólidos compósitos. Nesta técnica o dano é calculado apenas nos elementos fantasmas, sendo em seguida distribuído aos elementos da matriz. Ao avaliar a estratégia de representação do dano com elementos fantasmas, aplicando-os na análise não linear de uma viga de concreto, os resultados apontaram que a técnica proposta é eficiente para a representação da não linearidade física do material. Ademais, demonstrou-se que a estratégia numérica se apresenta como uma solução alternativa e eficiente para a redução do tempo de processamento despendido em análises da não linearidade física do material, conduzidas com o método dos elementos finitos posicional. Os resultados obtidos com os exemplos de validação, mostraram que código desenvolvido está apto a representar o comportamento mecânico de materiais compósitos, especialmente o concreto, e estruturas de concreto armado, considerando análises não linear geométrica e elástica linear, e que a técnica de modelagem pode ser empregada para avaliar o módulo de elasticidade do concreto;

- Sabendo que o modelo de dano escalar de Mazars (1984) foi concebido para a avaliação de carregamentos monotonicamente crescentes, modificações foram realizadas na formulação de modo que o mesmo proporcionasse a simulação de sólidos sujeitos a cargas cíclicas. A representação dos ciclos foi feita considerando critérios de carga limite, empregando a estratégia de descarregamento e recarregamento com rigidez secante. Ao aplicar o código desenvolvido em um exemplo numérico referente à simulação de um ensaio de compressão cíclica direta, verificou-se que o modelo representou coerentemente os trechos de descarga e recarga, empregando a estratégia secante de descarregamento e recarregamento. Ademais, no que se refere à representação dos laços de histerese dos ciclos de carga e descarga, o modelo gerou um comportamento semelhante ao observado experimentalmente, validando a estratégia numérica implementada;

- Para que o código pudesse representar o comportamento à fadiga de concretos submetidos a ciclos de compressão, acoplou-se ao mesmo os modelos propostos para a previsão da vida útil à fadiga e determinação do dano acumulado a cada ciclo de carregamento. Ao avaliar a consistência e aplicabilidade do código implementado, constatou-se a sua eficiência na representação em mesoescala do comportamento mecânico do concreto quando da existência do fenômeno da fadiga. Os resultados mostraram que o modelo proporciona uma análise numérica com menor tempo de processamento, uma vez que a formulação possibilita que a vida útil à fadiga do material seja simulada considerando passos de ciclos normalizados;

- O código desenvolvido possibilitou reproduzir com eficiência a perda de rigidez e o

aumento das deformações do material a medida em que se desenvolvem os ciclos de compressão. Os resultados obtidos nas simulações apontaram que os três estágios do processo de fadiga foram coerentemente captados, considerando concretos simulados com espectro de carregamento definido com parâmetros dentro dos domínios de aplicabilidade;

- Os modelos de vida útil à fadiga e do acúmulo de dano desenvolvidos neste trabalho apresentam limitações de aplicabilidade, as quais são definidas pelo domínio dos dados utilizadas no processo de regressão. Para o modelo de previsão da vida útil à fadiga, os limites são definidos por: resistência à compressão com valores entre $23,1$ e $116,0$ MPa; nível mínimo de tensão com valores variando de 0 a $25,5\%$; nível máximo de tensão com valores entre 50 e 95%; frequência de carregamento com valores entre $0,062$ e $1,0$ Hz; e razão R com valores variando entre $0,0$ e $0,055$. Para o modelo de acúmulo de dano, os limites são definidos por: resistência à compressão entre $38,83$ e $82,45$ MPa; nível mínimo de tensão fixo de $0,0$; nível máximo de tensão variando entre 50 a 70%; frequência de carregamento com valores entre $0,125$ e $0,5$ Hz; e razão R com valor fixo de $0,0$.

Considerando os objetivos deste trabalho, sejam eles de cunho experimental ou numérico, os resultados obtidos agregam conhecimento às áreas de pesquisa correlatas aos temas desta tese, e proporcionam o desenvolvimento de novos trabalhos que visem a concepção de ferramentas de cálculo e modelagem para a avaliação de elementos de concreto condicionados à compressão cíclica. Assim, em decorrência dos resultados obtidos com este trabalho, e da vasta área de concentração do tema desta pesquisa, relacionam-se as seguintes sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros:

- Ensaiar amostras de diferentes tamanhos a fim de verificar se a dimensão do corpo de prova interfere nos valores de vida útil à fadiga;
- Realizar experimentos considerando diferentes espectros de carregamento, a fim de que um modelo mais generalista e com maior domínio de aplicabilidade seja desenvolvido;
- Realizar experimentos de tração cíclica considerando os mesmos espectros de carregamento deste trabalho, a fim de verificar se o comportamento do material sob tração cíclica é semelhante ao observado na compressão cíclica;
- Avaliar se o agregado graúdo possui influência sobre o comportamento à fadiga do material, uma vez que na literatura são divergentes as hipóteses de que o tipo e o tamanho do agregado graúdo interferem na vida útil à fadiga do concreto;
- Investigar se a frequência de carregamento, resistência à compressão, razão R e níveis máximo e mínimo de tensão aplicados também influenciam na resistência à fadiga do concreto sob outras formas de solicitação, a exemplo da tração, flexão e tração-compressão alternada;

- Investigar experimentalmente, o comportamento do concreto considerando carregamentos cíclicos de aplitude variável e com ciclos interrompidos;
- Realizar estudos experimentais que possibilitem analisar microscopicamente a progressão de fissuras em concretos solicitados por cargas cíclicas, para propor formulações numéricas que propiciem a simulação do desenvolvimento e progressão de fissuras no material;
- Avaliar o comportamento à fadiga de estruturas de concreto armado, verificando se o comportamento observado para cada um dos seus materiais constituintes pode ser estendido ao compósito;
- Avaliar se os modelos propostos são capazes de representar condições de carregamento diferentes das empregadas neste trabalho, e caso não sejam, ajustar os parâmetros dos modelos, recalibrando-os por meio da técnica de regressão não linear;
- Utilizar algoritmos baseados em inteligência artificial para desenvolver formulações mais robustas, comparando-as com o modelo proposto neste trabalho;
- Acoplar um modelo que descreva a perda de rigidez nas armaduras devido ao efeito da fadiga para simular o concreto armado com maior fidelidade;
- Acoplar modelos que possibilitem considerar os efeitos de maturação e Rush, de forma a representar, respectivamente, o ganho de resistência do material ao longo do tempo e o efeito da velocidade do carregamento na resistência à compressão do material;
- Desenvolver um modelo do acúmulo de dano decorrente de ciclos de tração e acoplá-lo ao código para que seja possível simular a fadiga em um elemento de concreto considerando um estado de tensão multiaxial;
- Avaliar probabilisticamente a vida útil à fadiga do concreto acoplando os modelos desenvolvido à um código que permita a análise com a técnica de simulação de Monte Carlo.

REFERÊNCIAS

AAS-JAKOBSEN, K. *Fatigue of concrete beams and columns*. [S.l.]: Division of Concrete Structures, Norwegian Inst. of Technology, University of Trondheim, 1970.

ADELAIDE, L.; RICHARD, B.; RAGUENEAU, F.; CREMONA, C. Thermodynamical admissibility of a set of constitutive equations coupling elasticity, isotropic damage and internal sliding. *Comptes rendus mécanique*, Elsevier, v. 338, n. 3, p. 158–163, 2010.

AGUADO, A. *El comportamiento a fatiga de estructuras de hormigón en masa, armado y pretensado*. [S.l.]: Universitat Politècnica de Catalunya, Departament d'Enginyeria de la Construcció, 1990.

AL-GADHIB, A.; BALUCH, M.; SHAALAN, A.; KHAN, A. Damage model for monotonic and fatigue response of high strength concrete. *International Journal of Damage Mechanics*, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 9, n. 1, p. 57–78, 2000.

ALLICHE, A. Damage model for fatigue loading of concrete. *International Journal of Fatigue*, v. 26, n. 9, p. 915 – 921, 2004.

ALLICHE, A.; FRANGOIS, D. Damage of concrete in fatigue. *Journal of engineering mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 118, n. 11, p. 2176–2190, 1992.

ALLICHE, A.; FRANçOIS, D. Fatigue behavior of hardened cement paste. *Cement and Concrete Research*, v. 16, n. 2, p. 199 – 206, 1986.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *ACI 215R-92*: Considerations for design of concrete structures subjected to fatigue loading. Farmington Hills, MI, 2002.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. *ASTM E206-85*: Standad definitions of terms relating to fatigue testing and the statistical analysis of fatigue data. West Conshohocken, 1985.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. *ASTM E1876-21*: Dynamic young's modulus, shear modulus, and poisson's ratio by impulse excitation of vibration. West Conshohocken, 2021.

ANTRIM, J. d. C.; MCLAUGHLIN, J. F. Fatigue study of air-entrained concrete. In: *Journal Proceedings*. [S.l.: s.n.], 1959. v. 55, n. 5, p. 1173–1182.

ARORA, S.; SINGH, S. Analysis of flexural fatigue failure of concrete made with 100*Construction and Building Materials*, v. 102, p. 782 – 791, 2016.

ASSAN, A. E. *Método dos elementos finitos: primeiros passos*. São Paulo: Ed. da UNICAMP, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR NM 23*: Cimento portland e outros materiais em pó: Determinação da massa específica. Rio de Janeiro, 2001.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 5739*: Concreto—ensaio de compressão de corpos de prova cilíndricos. Rio de Janeiro, 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 8522*: Concreto-determinação do módulo estático de elasticidade à compressão. Rio de Janeiro, 2008.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 7211*: Agregados para concreto-especificação. Rio de Janeiro, 2009.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6118*: Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 16372*: Cimento portland e outros materiais em pó-determinação da finura pelo método de permeabilidade ao ar (método blaine). Rio de Janeiro, 2015.

BAKTHEER, A.; AGUILAR, M.; HEGGER, J.; CHUDOBA, R. Microplane damage plastic model for plain concrete subjected to compressive fatigue loading. In: *10th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures*. [S.l.: s.n.], 2019.

BAKTHEER, A.; CHUDOBA, R. Pressure-sensitive bond fatigue model with damage evolution driven by cumulative slip: Thermodynamic formulation and applications to steel-and frp-concrete bond. *International Journal of Fatigue*, Elsevier, v. 113, p. 277–289, 2018.

BAKTHEER, A.; CHUDOBA, R. Classification and evaluation of phenomenological numerical models for concrete fatigue behavior under compression. *Construction and Building Materials*, v. 221, p. 661 – 677, 2019.

BAKTHEER, A.; HEGGER, J.; CHUDOBA, R. Enhanced assessment rule for concrete fatigue under compression considering the nonlinear effect of loading sequence. *International Journal of Fatigue*, v. 126, p. 130 – 142, 2019.

BALBI, M.; AVALOS, M.; BARTALI, A. E.; ALVAREZ-ARMAS, I. Microcrack growth and fatigue behavior of a duplex stainless steel. *International journal of fatigue*, Elsevier, v. 31, n. 11-12, p. 2006–2013, 2009.

BALLATORE, E.; BOCCA, P. Variations in the mechanical properties of concrete subjected to low cyclic loads. *Cement and Concrete Research*, v. 27, n. 3, p. 453 – 462, 1997.

BALUCH, M.; AL-GADHIB, A.; KHAN, A.; SHAALAN, A. Cdm model for residual strength of concrete under cyclic compression. *Cement and Concrete Composites*, v. 25, n. 4, p. 503 – 512, 2003. Concrete Durability.

BARONI, H. J. M. Simulação da vida útil de fadiga do concreto em vigas de tabuleiro de pontes em função do fluxo de veículos pesados. 2010.

BATHE, K. J.; DVORKIN, E. N. A formulation of general shell elements—the use of mixed interpolation of tensorial components. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 22, n. 3, p. 697–722, 1986.

BAŽANT, Z. P. Size effect in blunt fracture: concrete, rock, metal. *Journal of engineering mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 110, n. 4, p. 518–535, 1984.

BAZANT, Z. P.; SCHELL, W. F. Fatigue fracture of high-strength concrete and size effect. *ACI Materials Journal*, American Concrete Institute, v. 90, p. 472–472, 1993.

BAZANT, Z. P.; XU, K. Size effect in fatigue fracture of concrete. *ACI Materials Journal*, American Concrete Institute, v. 88, n. 4, p. 390–399, 1991.

BÉRES, L. Failure process of concrete under fatigue loading. *Rheologica Acta*, Springer, v. 13, n. 3, p. 639–643, 1974.

BIAN, G. X.; CHEN, Y. L.; HU, J. J.; ZHANG, Y. Fatigue microcrack initiation and propagation of aluminum alloy under different stress level and stress ratio. In: TRANS TECH PUBL. *Advanced Materials Research*. [S.l.], 2011. v. 239, p. 1495–1500.

BISCHOFF, P. H.; PERRY, S. Compressive behaviour of concrete at high strain rates. *Materials and structures*, Springer, v. 24, n. 6, p. 425–450, 1991.

BONET, J.; WOOD, R.; MAHANEY, J.; HEYWOOD, P. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 190, n. 5, p. 579–595, 2000.

BÜCHTER, N.; RAMM, E.; ROEHL, D. Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 37, n. 15, p. 2551–2568, 1994.

CACHIM, P. B. Experimental and numerical analysis of the behaviour of structural concrete under fatigue loading with applications to concrete pavements. 1999.

CALLISTER, W.; RETHWISCH, D. *Fundamentals of materials science and engineering: an integrated approach*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2020.

CANDIDO, V. S.; SILVA, A. C. R. da; SIMONASSI, N. T.; LIMA, E. S.; LUZ, F. S. da; MONTEIRO, S. N. Mechanical and microstructural characterization of geopolymeric concrete subjected to fatigue. *Journal of Materials Research and Technology*, v. 7, n. 4, p. 566 – 570, 2018.

CANER, F. C.; BAŽANT, Z. P. Microplane model m7 for plain concrete. i: Formulation. *Journal of Engineering Mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 139, n. 12, p. 1714–1723, 2013.

CANER, F. C.; BAŽANT, Z. P. Microplane model m7 for plain concrete. ii: Calibration and verification. *Journal of Engineering Mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 139, n. 12, p. 1724–1735, 2013.

CAROL, I.; JIRÁSEK, M.; BAŽANT, Z. A thermodynamically consistent approach to microplane theory. part i. free energy and consistent microplane stresses. *International journal of solids and structures*, Elsevier, v. 38, n. 17, p. 2921–2931, 2001.

CERVO, T. C. *Estudo da resistência à fadiga de concretos de cimento Portland para pavimentação*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Maria, 2004.

CHABOCHE, J. Le concept de contrainte effective appliqué à l'élasticité et à la viscoplasticité en présence d'un endommagement anisotrope. In: *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids/Comportment Méchanique des Solides Anisotropes*. [S.l.]: Springer, 1982. p. 737–760.

CHABOCHE, J.; LESNE, P. A non-linear continuous fatigue damage model. *Fatigue & fracture of engineering materials & structures*, Wiley Online Library, v. 11, n. 1, p. 1–17, 1988.

CHABOCHE, J.; LESNE, P.; MAIRE, J. Continuum damage mechanics, anisotropy and damage deactivation for brittle materials like concrete and ceramic composites. *International Journal of Damage Mechanics*, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 4, n. 1, p. 5–22, 1995.

CHAMON, J. *Estudo da influência de adições no módulo de elasticidade dinâmico, na resistência à fadiga e na tenacidade à fratura para concretos convencionais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2006.

CHANG, D.-I.; CHAI, W.-K. Flexural fracture and fatigue behavior of steel-fiber-reinforced concrete structures. *Nuclear Engineering and Design*, Elsevier, v. 156, n. 1-2, p. 201–207, 1995.

CHANG, Z.; ZHANG, H.; SCHLANGEN, E.; ŠAVIJA, B. Lattice model for numerical analysis of fracture process of concrete material under various loading conditions. In: *10th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures*. [S.l.: s.n.], 2019.

CHEN, X.; BU, J.; FAN, X.; LU, J.; XU, L. Effect of loading frequency and stress level on low cycle fatigue behavior of plain concrete in direct tension. *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 133, p. 367–375, 2017.

CHEN, X.; SHI, D.; SHEN, N.; LI, S.; LIU, S. Experimental study and analytical modeling on fatigue properties of pervious concrete made with natural and recycled aggregates. *International Journal of Concrete Structures and Materials*, Springer, v. 13, n. 1, p. 10, 2019.

CHEN, X.; WU, S.; ZHOU, J. Influence of porosity on compressive and tensile strength of cement mortar. *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 40, p. 869–874, 2013.

CHEN, Y.; CHEN, X.; BU, J. Mechanical properties of concrete to cyclic uniaxial tensile loading using variable waveforms. *Sādhanā*, Springer, v. 42, n. 1, p. 111–117, 2017.

CHEN, Y.; NI, J.; ZHENG, P.; AZZAM, R.; ZHOU, Y.; SHAO, W. Experimental research on the behaviour of high frequency fatigue in concrete. *Engineering Failure Analysis*, Elsevier, v. 18, n. 7, p. 1848–1857, 2011.

CIVIDINI, A.; TALIERCIO, A.; LANDRIANI, G. S.; BELLOTTI, R.; FERRARA, G.; ROSSI, P. An apparatus for cyclic tests on cylindrical concrete specimens. *Materials and Structures*, Springer, v. 25, n. 8, p. 490, 1992.

CLEMMER, H. F. Fatigue of concrete. *Proceedings, American Society for Testing and Materials*, v. 22, n. 2, p. 408 – 419, 1922.

CODA, H. *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF. 168 p*. Tese (Doutorado) — Tese (Tese para concurso de professor titular)—Escola de Engenharia de Estruturas de São Carlos-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2003.

CODA, H. B. *O método dos elementos finitos posicional: sólidos e estruturas–não linearidade geométrica e dinâmica*. [S.l.]: São Carlos: EESC-USP, 2018.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple fem formulation for large deflection 2d frame analysis based on position description. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 193, n. 33, p. 3541–3557, 2004.

CODA, H. B.; GRECO, M. Positional fem formulation for geometrically non-linear shells. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 5, n. 3, p. 205–223, 2008.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Improved finite element for 3d laminate frame analysis including warping for any cross-section. *Applied Mathematical Modelling*, n. 34, p. 1107–1137, 2010.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A fem procedure based on positions and unsconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3d frames. *Finite Elements in Analisys and Design*, n. 67, p. 319–333, 2011.

CODE COMMITTEE 351 001. *NEN 6723*: Regulations for concrete - bridges - structural requirements and calculation methods. Holanda, 2009.

COIMBRA, A. L. *Lições de mecanica do continuo*. [S.l.]: E. Blucher, 1978.

COMITÉ EUROPéEN DE NORMALISATION. *NEN 1992-1-1+C2*: National annex to nen-en 1992-1-1+c2 eurocode 2: Design of concrete structures - part 1-1: General rules and rules for buildings. Bruxelas, Bélgica, 2011.

COMITÉ EUROPéEN DE NORMALISATION. *NEN 1992-2+C1*: Eurocode 2: Design of concrete structures - concrete bridges - design and detailing rules. Bruxelas, Bélgica, 2011.

COOK, D.; CHINDAPRASIRT, P. Influence of loading history upon the compressive properties of concrete. *Magazine of Concrete Research*, Thomas Telford Ltd, v. 32, n. 111, p. 89–100, 1980.

COOK, D.; CHINDAPRASIRT, P. Influence of loading history upon the tensile properties of concrete. *Magazine of concrete research*, Thomas Telford Ltd, v. 33, n. 116, p. 154–160, 1981.

CORNELISSEN, H.; LEEWIS, M. Fatigue experiments for the design of plain concrete pavements. In: *Workshop on theoretical design of concrete pavement NE 1986, Epen-the Netherlands (Crow Report 1)*. [S.l.: s.n.], 1987.

CORNELISSEN, H. A. W. Fatigue failure of concrete in tension. *HERON, 29 (4), 1984*, Delft University of Technology, 1984.

CREPPS, R. Fatigue of mortar. In: *Proceedings*. [S.l.: s.n.], 1923. p. 329–340.

CRIESFIELD, M. A. *Non linear finite element analysis of solids and structures, Vol. 1*. [S.l.]: Wiley, New York, 1991.

CUSATIS, G.; PELESSONE, D.; MENCARELLI, A. Lattice discrete particle model (ldpm) for failure behavior of concrete. i: Theory. *Cement and Concrete Composites*, Elsevier, v. 33, n. 9, p. 881–890, 2011.

DESMORAT, R. Damage and fatigue: continuum damage mechanics modeling for fatigue of materials and structures. *Revue européenne de génie civil*, Taylor & Francis, v. 10, n. 6-7, p. 849–877, 2006.

DESMORAT, R.; LEMAITRE, J. Section 6.15 - a two-scale model for quasi-brittle and fatigue damage. In: LEMAITRE, J. (Ed.). *Handbook of Materials Behavior Models*. Burlington: Academic Press, 2001. p. 525 – 535. ISBN 978-0-12-443341-0.

DESMORAT, R.; RAGUENEAU, F.; PHAM, H. Continuum damage mechanics for hysteresis and fatigue of quasi-brittle materials and structures. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, Wiley Online Library, v. 31, n. 2, p. 307–329, 2007.

DO, M.-T.; CHAALLAL, O.; AÏTCIN, P.-C. Fatigue behavior of high-performance concrete. *Journal of Materials in civil Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 5, n. 1, p. 96–111, 1993.

DOWLING, N. E. *Mechanical behavior of materials: engineering methods for deformation, fracture, and fatigue*. [S.l.]: Pearson, 2012.

DRIEMEIER, L. *Considerações sobre a fadiga em metais e o comportamento do concreto sob solicitações cíclica*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1995.

DUSZA, E.; KOLCZUGA, M. Ductile creep rupture in the context of continuum damage mechanics. *Res mechanica*, v. 20, n. 3, p. 279–286, 1987.

DUTCH INSTITUTE FOR NORMALIZATION. *NEN-EN 1992-2+C1:2011/NB:2011*: National annex to nen-en 1992-2+c1, eurocode 2: Design of concrete structures – concrete bridges – design and detailing rules. Delft, Amsterdam, 2011.

DYDUCH, K.; SZERSZEŃ, M.; DESTREBECQ, J.-F. Experimental investigation of the fatigue strength of plain concrete under high compressive loading. *Materials and Structures*, Springer, v. 27, n. 9, p. 505–509, 1994.

DYWIDAG SYSTEMS INTERNATIONAL. *Parque eólico de Atlântica*. 2018. Acesso em: 07 de abr. de 2020. Disponível em: <https://www.dywidag.com.br/projetos/2013-info-21/>.

ELIÁŠ, J.; LE, J.-L. Modeling of mode-i fatigue crack growth in quasibrittle structures under cyclic compression. *Engineering Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 96, p. 26–36, 2012.

ELIÁŠ, J.; STANG, H. Lattice modeling of aggregate interlocking in concrete. *International journal of fracture*, Springer, v. 175, n. 1, p. 1–11, 2012.

ELIÁŠ, J.; VOŘECHOVSKỲ, M.; SKOČEK, J.; BAŽANT, Z. P. Stochastic discrete meso-scale simulations of concrete fracture: Comparison to experimental data. *Engineering Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 135, p. 1–16, 2015.

ESPION, B. Benchmark examples for creep and shrinkage analysis computer programs. In: CHAPMAN & HALL. *Rilem Proceedings*. [S.l.], 1993. p. 877–877.

EUROPEAN CONCRETE COMMITTEE AND INTERNATIONAL FEDERATION FOR PRESTRESSING. *CEB-FIP 1990*: Final draft. fib bulletin 65–66. Lausanne, Switzerland, 1993.

FAN, J.; JIANG, D.; CHEN, J.; LIU, W.; NGAHA, W. T.; CHEN, J. Fatigue performance of ordinary concrete under discontinuous cyclic loading. *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 166, p. 974–981, 2018.

FAN, Z.; SUN, Y. Detecting and evaluation of fatigue damage in concrete with industrial computed tomography technology. *Construction and Building Materials*, v. 223, p. 794 – 805, 2019.

FANELLA, D.; KRAJCINOVIC, D. A micromechanical model for concrete in compression. *Engineering fracture mechanics*, Elsevier, v. 29, n. 1, p. 49–66, 1988.

FATEMI, A.; YANG, L. Cumulative fatigue damage and life prediction theories: a survey of the state of the art for homogeneous materials. *International journal of fatigue*, Elsevier, v. 20, n. 1, p. 9–34, 1998.

FATHIMA, K. P.; KISHEN, J. C. A thermodynamic framework for the evolution of damage in concrete under fatigue. *Archive of Applied Mechanics*, Springer, v. 85, n. 7, p. 921–936, 2015.

FELIX, E. F. *Modelagem da deformação do concreto armado devido à formação dos produtos de corrosão*. 2018.

FELIX, E. F.; CARRAZEDO, R.; POSSAN, E.; RAMOS, E. S. Desenvolvimento e análise de um modelo numérico da expansão do concreto armado sujeito à corrosão uniforme. *Revista ALCONPAT*, v. 10, n. 3, p. 300–316, 2020.

FELIX, E. F.; POSSAN, E.; CARRAZEDO, R. A new formulation to estimate the elastic modulus of recycled concrete based on regression and ann. *Sustainability*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 13, n. 15, p. 8561, 2021.

FRIDEL, L. F. O. *Análise de estruturas planas reforçadas com fibras ativas viscoelásticas e matriz com modelo constitutivo hiperelástico: aplicações gerais em engenharia e biomecânica.* Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

FUMIO, F. A simple mixed formulation for elastica problems. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 17, n. 1, p. 79–88, 1983.

FURTAK, K. Ein verfahren zur berechnung der betonfestigkeit unter schwellenden belastungen. *Cement and Concrete Research*, Elsevier, v. 14, n. 6, p. 855–865, 1984.

GALLANT, A. R. *Nonlinear statistical models*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009.

GAO, L.; HSU, C.-T. T. Fatigue of concrete under uniaxial compression cyclic loading. *Materials Journal*, v. 95, n. 5, p. 575–581, 1998.

GAO, X.; KOVAL, G.; CHAZALLON, C. A discrete element model for damage and fatigue crack growth of quasi-brittle materials. *Advances in Materials Science and Engineering*, Hindawi, v. 2019, 2019.

GARRETT, G. G.; JENNINGS, H. M.; TAIT, R. B. The fatigue hardening behaviour of cement-based materials. *Journal of Materials Science*, Springer, v. 14, n. 2, p. 296–306, 1979.

GERE, J. M.; TIMOSHENKO, S. P. *Mechanics of materials*. [S.l.]: PWS-KENT Publishing Company, 1997.

GEUZAINE, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 79, n. 11, p. 1309–1331, 2009.

GHALI, A.; NEVILLE, A.; BROWN, T. *Structural analysis: a unified classical and matrix approach*. [S.l.]: Crc Press, 2003.

GIDRÃO, G. d. M. S. *Propriedades dinâmicas do concreto e relações com sua microestrutura*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2015.

GONÇALVES, R. *Análise de propagação de fissuras por fadiga em concreto pelo MEF mediante a mecânica do dano contínuo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2003.

GRAF, O.; BRENNER, E. *Versuche zur Ermittlung des Widerstandsfähigkeit von Beton gegen oftmals wiederholte Druckbelastung: zweiter Teil; ausgeführt in der Materialprüfungsanstalt der Technischen Hochschule Stuttgart in den Jahren 1933 bis 1935*. [S.l.]: Ernst, 1936.

GRASSL, P.; FAHY, C.; GALLIPOLI, D.; BOLANDER, J. E. A lattice model for fracture and mass transport in concrete. *Proceedings of Microdurability, The Netherlands*, 2012.

GRASSL, P.; JIRáSEK, M. Damage-plastic model for concrete failure. *International Journal of Solids and Structures*, v. 43, n. 22, p. 7166 – 7196, 2006.

GRASSL, P.; REMPLING, R. A damage-plasticity interface approach to the meso-scale modelling of concrete subjected to cyclic compressive loading. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 75, n. 16, p. 4804 – 4818, 2008.

GRAYBILL, F. A.; IYER, H. K. *Regression analysis: concepts and applications*. [S.l.]: Duxbury Resource Center, 1994.

GRIFFITH, A. A. Vi. the phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, The royal society London, v. 221, n. 582-593, p. 163–198, 1921.

GRÜNBERG, J.; GÖHLMANN, J. Schädigungsberechnung an einem spannbetonschaft für eine windenergieanlage unter mehrstufiger ermüdung. *Beton-und Stahlbetonbau*, Wiley Online Library, v. 101, n. 8, p. 557–570, 2006.

GRZYBOWSKI, M.; MEYER, C. Damage accumulation in concrete with and without fiber reinforcement. *Materials Journal*, v. 90, n. 6, p. 594–604, 1993.

GUELLO, G. A. *Computational Simulation of Concrete Structures through Damage Mechanics*. Tese (Doutorado) — Masters Thesis. University of Sao Paulo, São Paulo-Brazil, 2002.

GUO, L. P.; CARPINTERI, A.; RONCELLA, R.; SPAGNOLI, A.; SUN, W.; VANTADORI, S. Fatigue damage of high performance concrete through a 2d mesoscopic lattice model. *Computational Materials Science*, Elsevier, v. 44, n. 4, p. 1098–1106, 2009.

GUO, L. P.; SUN, W.; ZHENG, K.-R.; CHEN, H.-J.; LIU, B. Study on the flexural fatigue performance and fractal mechanism of concrete with high proportions of ground granulated blast-furnace slag. *Cement and Concrete Research*, v. 37, n. 2, p. 242 – 250, 2007.

GUO, Z. Chapter 17 - fatigue resistance. In: GUO, Z. (Ed.). *Principles of Reinforced Concrete*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2014. p. 437 – 456. ISBN 978-0-12-800859-1.

HAAR, C. von der; MARX, S. A strain model for fatigue-loaded concrete. *Structural Concrete*, Wiley Online Library, v. 19, n. 2, p. 463–471, 2018.

HAIR, J. F.; BLACK, W. C.; BABIN, B. J.; ANDERSON, R. E.; TATHAM, R. L. *Análise multivariada de dados*. [S.l.]: Bookman editora, 2009.

HANSEN, T. C. Cracking and fracture of concrete and cement paste. *Special Publication*, v. 20, p. 43–66, 1968.

HANSON, J. M.; BALLINGER, C. A.; LINGER, D. Considerations for design of concrete structures subjected to fatigue loading. *ACI J*, v. 71, n. 3, p. 97–120, 1974.

HARWALKAR, A.; AWANTI, S. Flexural fatigue behavior of high volume fly ash concrete under constant amplitude, compound, and variable amplitude loading. In: *Airfield and Highway Pavements 2019: Testing and Characterization of Pavement Materials*. [S.l.]: American Society of Civil Engineers Reston, VA, 2019. p. 389–398.

HATT, W. Fatigue of concrete. In: *Highway Research Board Proceedings*. [S.l.: s.n.], 1925. v. 4.

HOLZAPFEL, G. A. *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. [S.l.]: West Sussex, England: John Wiley & Sons, Ltd, 2000.

HOMAND-ETIENNE, F.; HOXHA, D.; SHAO, J.-F. A continuum damage constitutive law for brittle rocks. *Computers and Geotechnics*, Elsevier, v. 22, n. 2, p. 135–151, 1998.

HSU, T. T. Fatigue of plain concrete. In: *Journal Proceedings*. [S.l.: s.n.], 1981. v. 78, n. 4, p. 292–305.

HUANG, B.-T.; LI, Q.-H.; XU, S.-L. Fatigue deformation model of plain and fiber-reinforced concrete based on weibull function. *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 145, n. 1, p. 04018234, 2019.

INSTITUTO DE ENGENHARIA. *A maior plataforma de petróleo do mundo*. 2014. Acesso em: 03 de abr. de 2020. Disponível em: <https://www.institutodeengenharia.org.br/site/2014/10/31/a-maior-plataforma-de-petroleo-do-mundo/>.

INSTITUTO DE ENGENHARIA. *Entenda a tragédia da queda da ponte Morandi, em Genova – Itália*. 2018. Acesso em: 07 de abr. de 2020. Disponível em: <https://www.institutodeengenharia.org.br/site/2018/08/20/entenda-a-tragedia-da-queda-da-ponte-morandi-em-genova-italia/>.

INTERNATIONAL FEDERATION FOR STRUCTURAL CONCRETE. *fib Model Code 2010*: Final draft. fib bulletin 65–66. Lausanne, Switzerland, 2012.

ISOJEH, B.; EL-ZEGHAYAR, M.; VECCHIO, F. J. Concrete damage under fatigue loading in uniaxial compression. *ACI Mater. J*, v. 114, n. 2, p. 225–235, 2017.

ISOJEH, B.; EL-ZEGHAYAR, M.; VECCHIO, F. J. Simplified constitutive model for fatigue behavior of concrete in compression. *Journal of Materials in Civil Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 29, n. 7, p. 04017028, 2017.

IWAMA, S.; FUKUDA, T. Design method and researches of concrete pavements in japan. In: *WORKSHOP ON THEORETICAL DESIGN OF CONCRETE PAVEMENT NE 1986, EPEN-THE NETHERLANDS (CROW REPORT 1)*. [S.l.: s.n.], 1987.

JANSEN, A. *Research to fatigue behaviour of topping on prefabricated concrete girders*. Tese (Doutorado) — Master thesis, Delft University of Technology, 1996, 128 p.(in Dutch), 1996.

JIANG, C.; GU, X.; HUANG, Q.; ZHANG, W. Deformation of concrete under high-cycle fatigue loads in uniaxial and eccentric compression. *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 141, p. 379–392, 2017.

JIRÁSEK, M. Comments on microplane theory. *Mechanics of quasi-brittle materials and structures*, Hermès Science Publications Paris, p. 55–77, 1999.

JOHNSTON, C. D.; ZEMP, R. W. Flexural fatigue performance of steel fiber reinforced concrete–influence of fiber content, aspect ratio, and type. *Materials Journal*, v. 88, n. 4, p. 374–383, 1991.

JUNGES, P. et al. Análise de fadiga em pontes curtas de concreto armado a partir de dados de sistemas b-wim. 2017.

KACHANOV, L. On the creep fracture time, izv. *Akad Nauk USSR Otd. Tekh., v8*, p. 26–31, 1958.

KACHANOV, L. *Introduction to continuum damage mechanics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1986. v. 10.

KACHANOV, M. Continuum model of medium with cracks. *Journal of the engineering mechanics division*, ASCE, v. 106, n. 5, p. 1039–1051, 1980.

KARANFILOV, T. S. Fatigue of water-saturated concrete. *Hydrotechnical Construction*, Springer, v. 1, n. 9, p. 798–800, 1967.

KARANFILOV, T. S. Effect of range of stress on fatigue strength of waterlogged concrete. *Power Technology and Engineering (formerly Hydrotechnical Construction)*, Springer, v. 3, n. 3, p. 235–236, 1969.

KARSAN, I. D.; JIRSA, J. O. Behavior of concrete under compressive loadings. *Journal of the Structural Division*, American Society of Civil Engineers, v. 95, n. 12, p. 2543–2564, 1969.

KASU, S. R.; DEB, S.; MITRA, N.; MUPPIREDDY, A. R.; KUSAM, S. R. Influence of aggregate size on flexural fatigue response of concrete. *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 229, p. 116922, 2019.

KATTAN, P. I.; VOYIADJIS, G. Z. *Advances in damage mechanics: metals and metal matrix composites*. [S.l.]: Elsevier, 1999.

KATTAN, P. I.; VOYIADJIS, G. Z. *Damage mechanics with finite elements: practical applications with computer tools*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

KEERTHANA, K.; CHANDRA-KISHEN, J. An experimental and analytical study on fatigue damage in concrete under variable amplitude loading. *International Journal of Fatigue*, v. 111, p. 278 – 288, 2018.

KEERTHANA, K.; KISHEN, J. C. Micromechanics of fracture and failure in concrete under monotonic and fatigue loadings. *Mechanics of Materials*, v. 148, p. 103490, 2020.

KESSLER-KRAMER, C.; MECHTCHERINE, V.; MUELLER, H. S. Failure of normal and high strength concrete under monotonic and cyclic tensile loading. In: BRANDT, A.; LI, V.; MARSHALL, I. (Ed.). *Brittle Matrix Composites 7*. [S.l.]: Woodhead Publishing, 2003. p. 277 – 286. ISBN 978-1-85573-769-3.

KIEWEL, H.; AKTAA, J.; MUNZ, D. Application of an extrapolation method in thermocyclic failure analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 182, n. 1-2, p. 55–71, 2000.

KIM, J.; YI, C.; LEE, S.-J.; ZI, G. Flexural fatigue behaviour of concrete under uniaxial and biaxial stress. *Magazine of concrete research*, Thomas Telford Ltd, v. 65, n. 12, p. 757–764, 2013.

KIM, J.-K.; KIM, Y.-Y. Experimental study of the fatigue behavior of high strength concrete. *Cement and Concrete Research*, v. 26, n. 10, p. 1513 – 1523, 1996.

KINDRACHUK, V.; TITSCHER, T.; HIRTHAMMER, V.; UNGER, J. A continuum damage model for the simulation of concrete under cyclic loading. In: CRC PRESS. *Computational Modelling of Concrete Structures: Proceedings of the Conference on Computational Modelling of Concrete and Concrete Structures (EURO-C 2018), February 26-March 1, 2018, Bad Hofgastein, Austria*. [S.l.], 2018. p. 155.

KINDRACHUK, V. M.; THIELE, M.; UNGER, J. F. Constitutive modeling of creep-fatigue interaction for normal strength concrete under compression. *International Journal of Fatigue*, v. 78, p. 81 – 94, 2015.

KIRANE, K.; BAŽANT, Z. P. Microplane damage model for fatigue of quasibrittle materials: Sub-critical crack growth, lifetime and residual strength. *International Journal of Fatigue*, Elsevier, v. 70, p. 93–105, 2015.

KIRANE, K.; BAZANT, Z. P. Size effect in paris law and fatigue lifetimes for quasibrittle materials: Modified theory, experiments and micro-modeling. *International Journal of Fatigue*, v. 83, p. 209 – 220, 2016.

KLCRIBER, F. W. et al. The effects of air content, water-cement ratio, and aggregate type on the flexural fatigue strength of plain concrete. *Special Publication*, v. 75, p. 111–132, 1982.

KOLLURU, S. V.; O'NEIL, E. F.; POPOVICS, J. S.; SHAH, S. P. Crack propagation in flexural fatigue of concrete. *Journal of Engineering mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 126, n. 9, p. 891–898, 2000.

KOYANAGAWA, M.; YONEYA, H.; KOKUBU, K. Evaluation of reliability of concrete pavement in consideration of fatigue properties. In: *Proceedings of the 3rd International Workshop on the Design and Evaluation of Concrete Pavements*. [S.l.: s.n.], 1994. p. 207–216.

KRAJCINOVIC, D. Constitutive equations for damaging materials. *Journal of Applied Mechanics*, v. 50, n. 2, 1983.

KRAJCINOVIC, D.; FONSEKA, G. The continuous damage mechanics of brittle materials, parts i and ii. *J. Appl. Mech.*, v. 48, p. 809, 1981.

KUHL, E.; STEINMANN, P.; CAROL, I. A thermodynamically consistent approach to microplane theory. part ii. dissipation and inelastic constitutive modeling. *International journal of solids and structures*, Elsevier, v. 38, n. 17, p. 2933–2952, 2001.

KUNA-CISKAŁ, H.; SKRZYPEK, J. J. Cdm based modelling of damage and fracture mechanisms in concrete under tension and compression. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 71, n. 4, p. 681 – 698, 2004. Fracture and Damage Mechanics.

KZAM, A. K. L. *Análise da instabilidade estrutural global e local pelo MEF posicional com determinação de pontos críticos na trajetória de equilíbrio*. 2016.

LANOYE, E.; CORMERY, F.; KONDO, D.; SHAO, J.-F. An isotropic unilateral damage model coupled with frictional sliding for quasi-brittle materials. *Mechanics Research Communications*, Elsevier, v. 53, p. 31–35, 2013.

LANTSOGHT, E. O.; VANDER-VEEN, C.; BOER, A. Proposal for the fatigue strength of concrete under cycles of compression. *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 107, p. 138–156, 2016.

LEE, J.; FENVES, G. L. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. *Journal of engineering mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 124, n. 8, p. 892–900, 1998.

LEE, M. K.; BARR, B. I. G. An overview of the fatigue behaviour of plain and fibre reinforced concrete. *Cement and Concrete Composites*, Elsevier, v. 26, n. 4, p. 299–305, 2004.

LEI, D.; ZHANG, P.; HE, J.; BAI, P.; ZHU, F. Fatigue life prediction method of concrete based on energy dissipation. *Construction and Building Materials*, v. 145, p. 419 – 425, 2017.

LEMAITRE, J. How to use damage mechanics. *Nuclear engineering and design*, Elsevier, v. 80, n. 2, p. 233–245, 1984.

LEMAITRE, J. *A course on damage mechanics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

LI, W.; SUN, W.; JIANG, J. Damage of concrete experiencing flexural fatigue load and closed freeze/thaw cycles simultaneously. *Construction and Building Materials*, v. 25, n. 5, p. 2604 – 2610, 2011.

LIANG, J.; DING, Z.; LI, J. A probabilistic analyzed method for concrete fatigue life. *Probabilistic Engineering Mechanics*, v. 49, p. 13 – 21, 2017.

LIANG, J.; NIE, X.; MASUD, M.; LI, J.; MO, Y. A study on the simulation method for fatigue damage behavior of reinforced concrete structures. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 150, p. 25–38, 2017.

LIANG, J.; REN, X.; LI, J. A competitive mechanism driven damage-plasticity model for fatigue behavior of concrete. *International Journal of Damage Mechanics*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 25, n. 3, p. 377–399, 2016.

LIU, F.; ZHOU, J. Fatigue strain and damage analysis of concrete in reinforced concrete beams under constant amplitude fatigue loading. *Shock and Vibration*, Hindawi, v. 2016, 2016.

LIU, F.; ZHOU, J. Research on fatigue strain and fatigue modulus of concrete. *Advances in Civil Engineering*, Hindawi, v. 2017, 2017.

LÜ, P.; LI, Q.; SONG, Y. Damage constitutive of concrete under uniaxial alternate tension–compression fatigue loading based on double bounding surfaces. *International journal of solids and structures*, Elsevier, v. 41, n. 11-12, p. 3151–3166, 2004.

LU, P.; LI, Q.; SONG, Y. Damage constitutive of concrete under uniaxial alternate tension–compression fatigue loading based on double bounding surfaces. *International Journal of Solids and Structures*, v. 41, n. 11, p. 3151 – 3166, 2004.

MAEKAWA, K.; FUKUURA, N.; SOLTANI, M. Path-dependent high cycle fatigue modeling of joint interfaces in structural concrete. *Journal of Advanced Concrete Technology*, Japan Concrete Institute, v. 6, n. 1, p. 227–242, 2008.

MAI, S. H.; LE-CORRE, F.; FORÊT, G.; NEDJAR, B. A continuum damage modeling of quasi-static fatigue strength of plain concrete. *International Journal of Fatigue*, Elsevier, v. 37, p. 79–85, 2012.

MARIGO, J. Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids. *Engineering Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 21, n. 4, p. 861–874, 1985.

MARQUES, G. C. S. C. *Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica nãão linear geométrica de sólidos bidimensionais*. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

MARTINS, A. P.; JUNIOR, J. P.; BELINI, V. L. Image-based method for monitoring of crack opening on masonry and concrete using mobile platform. *Revista IBRACON de estruturas e materiais*, SciELO Brasil, v. 6, n. 3, p. 414–435, 2013.

MASCARENHAS, F. J. R.; CARVALHO, R. C. Vida útil à fadiga da armadura longitudinal de vigas de pontes de concreto armado frente ao tráfego real de veículos pesados. *Revista ALCONPAT*, v. 9, n. 3, p. 303–319, 2019.

MAZARS, J. Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure. *These de docteur es sciences presentee a l'universiten Pierre et Marie Curie - PARIS*, 1984.

MAZARS, J.; BERTHAUD, Y.; RAMTANI, S. The unilateral behaviour of damaged concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 35, n. 4, p. 629 – 635, 1990.

MCCALL, J. T. Probability of fatigue failure of plain concrete. In: *Journal Proceedings*. [S.l.: s.n.], 1958. v. 55, n. 8, p. 233–244.

MEDEIROS, A. *Estudo do comportamento à fadiga em compressão do concreto com fibras. 2012. 201 f.* Tese (Doutorado) — Tese (Doutorado em Engenharia Civil)–Centro Técnico Científico, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2012.

MEDEIROS, A.; ZHANG, X.; RUIZ, G.; YU, R. C.; VELASCO, M. de S. L. Effect of the loading frequency on the compressive fatigue behavior of plain and fiber reinforced concrete. *International Journal of Fatigue*, v. 70, p. 342 – 350, 2015.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. *Concreto: microestrutura, propriedades e materiais*. São Paulo: Ibracon, 2014. 751 p. ISBN 9788598576213.

MENEGHETTI, L. C. *Análise do comportamento à fadiga de vigas de concreto armado reforçadas com PRF de vidro, carbono e aramida. 2007. 275p*. Tese (Doutorado) — Tese (Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2007.

MENG, X.; SONG, Y. Residual tensile strength of plain concrete under tensile fatigue loading. *Journal of Wuhan University of Technology-Mater. Sci. Ed.*, Springer, v. 22, n. 3, p. 564, 2007.

MILENKOVIC, A.; PLUIS, M. *Fatigue of normal weight concrete and lightweight concrete*. [S.l.]: Document No. BE96-3942, 2000.

MILITITSKY, J.; CONSOLI, N. C.; SCHNAID, F. *Patologia das fundações*. [S.l.]: Oficina de textos, 2015.

MINER, M. et al. Cumulative fatigue damage. *Journal of applied mechanics*, v. 12, n. 3, p. A159–A164, 1945.

MOSLEMIAN, R.; KARLSSON, A. M.; BERGGREEN, C. Accelerated fatigue crack growth simulation in a bimaterial interface. *International Journal of Fatigue*, Elsevier, v. 33, n. 12, p. 1526–1532, 2011.

MOURA, C. A. *Aplicação de formulação baseada no Método dos Elementos Finitos Posicional na análise bidimensional elástica de compósitos particulados*. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

NGUYEN, G. D. *A thermodynamic approach to constitutive modelling of concrete using damage mechanics and plasticity theory*. Tese (Doutorado) — Oxford University, UK, 2005.

NIETO, A.; CHICHARRO, J.; PINTADO, P. An approximated methodology for fatigue tests and fatigue monitoring of concrete specimens. *International Journal of Fatigue*, v. 28, n. 8, p. 835 – 842, 2006.

NILSEN, A. U.; MONTEIRO, P. J. Concrete: a three phase material. *Cement and Concrete Research*, Elsevier, v. 23, n. 1, p. 147–151, 1993.

NOGUEIRA, C. G. *Desenvolvimento de modelos mecânicos, de confiabilidade e de otimização para aplicação em estruturas de concreto armado*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2010.

NOGUEIRA, G. V.; SAMPAIO, M. S. M.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Consideração do deslizamento na análise de sólidos elásticos bidimensionais reforçados por fibras através do método dos elementos finitos posicional. In: *XXXV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE*. Fortaleza: [s.n.], 2014.

NORTON, R. L. *Projeto de máquinas*. [S.l.]: Bookman editora, 2013.

O'BRIEN, F. J.; TAYLOR, D.; LEE, T. C. Microcrack accumulation at different intervals during fatigue testing of compact bone. *Journal of biomechanics*, Elsevier, v. 36, n. 7, p. 973–980, 2003.

OGDEN, R. W. *Non-linear elastic deformations*. [S.l.]: Courier Corporation, 1997.

OH, B. H. Fatigue analysis of plain concrete in flexure. *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 112, n. 2, p. 273–288, 1986.

OH, B. H. Fatigue life distributions of concrete for various stress levels. *Materials Journal*, v. 88, n. 2, p. 122–128, 1991.

ONESCHKOW, N. *Analyse des Ermüdungsverhaltens von Beton anhand der Dehnungsentwicklung*. [S.l.]: Institut für Baustoffe, 2014.

ONESCHKOW, N. Fatigue behaviour of high-strength concrete with respect to strain and stiffness. *International Journal of Fatigue*, Elsevier, v. 87, p. 38–49, 2016.

ONOUE, K.; TOKITSU, M.; OHTSU, M.; BIER, T. A. Fatigue characteristics of steel-making slag concrete under compression in submerged condition. *Construction and Building Materials*, v. 70, p. 231 – 242, 2014.

ORIGINLAB. *OriginPro 2019: software*. Massachusetts, USA, 2019. Disponível em: <https://www.originlab.com/>.

ORNUM, L. L. V. The fatigue of cement products. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, LI, n. 2, p. 443 – 445, 1903.

ORTEGA, J. J.; RUIZ, G.; RENA, C. Y.; AFANADOR-GARCIA, N.; TARIFA, M.; POVEDA, E.; ZHANG, X.; JR, F. E. Number of tests and corresponding error in concrete fatigue. *International Journal of Fatigue*, Elsevier, v. 116, p. 210–219, 2018.

ORTIZ, M. A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. *Mechanics of materials*, Elsevier, v. 4, n. 1, p. 67–93, 1985.

OVCHINSKY, A. S.; MEZA, P. T.; SANDOVAL-PINEDA, J. M.; FLORES-HERRERA, L. A.; ZAPATA, A. Á. Damage accumulation and redistribution of stresses in fiber reinforced material. *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia*, Universidad de Antioquia, n. 69, p. 109–123, 2013.

PAAS, M.; SCHREURS, P.; BREKELMANS, W. A continuum approach to brittle and fatigue damage: Theory and numerical procedures. *International Journal of Solids and Structures*, v. 30, n. 4, p. 579 – 599, 1993.

PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. *AcadView: software - versão 3*. São Carlos, 2015. Disponível em: <http://www.set.eesc.usp.br/portal/pt/softwares/27-pesquisa/softwares/157-acadview>.

PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A direct fem approach for particulate reinforced elastic solids. *Composite Structures*, Elsevier, v. 141, p. 282–291, 2016.

PALMGREN, A. Die lebensdauer von kugellagern zeitschrift des vereines deutscher ingenieure. *Sci. Res*, v. 68, p. 339–341, 1924.

PAPA, E.; TALIERCIO, A. Anisotropic damage model for the multiaxial static and fatigue behaviour of plain concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 55, n. 2, p. 163 – 179, 1996.

PARIS, P. C. A rational analytic theory of fatigue. *The trend in engineering*, v. 13, p. 9, 1961.

PASCON, J. P. *Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação computacional*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2008.

PASKOVA, T.; MEYER, C. Optimum number of specimens for low-cycle fatigue tests of concrete. *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 120, n. 7, p. 2242–2247, 1994.

PASKOVA, T.; MEYER, C. Low-cycle fatigue of plain and fiber-reinforced concrete. *Materials Journal*, v. 94, n. 4, p. 273–286, 1997.

PEREIRA, L. R. S.; PENNA, S. S. Nonlinear analysis method of concrete structures under cyclic loading based on the generalized secant modulus. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, SciELO Brasil, v. 15, 2022.

PFANNER, D. *Zur Degradation von Stahlbetonbauteilen unter Ermüdungsbeanspruchung*. [S.l.]: VDI-Verlag, 2003.

PFISTER, T.; PETRYNA, Y.; STANGENBERG, F. Damage modelling of reinforced concrete under multi-axial fatigue loading. *Computational modelling of concrete structures. Balkema, Mayrhofen*, p. 421–429, 2006.

PHAM, D.-T.; VU, M.-N.; TRIEU, H. T.; BUI, T. S.; NGUYEN-THOI, T. A thermo-mechanical meso-scale lattice model to describe the transient thermal strain and to predict the attenuation of thermo-mechanical properties at elevated temperature up to 800° c of concrete. *Fire Safety Journal*, Elsevier, p. 103011, 2020.

PIEDADE NETO, D.; FAGÁ JÚNIOR, R.; PACCOLA, R. R. *AcadMesh2D: software*. São Carlos, 2012. Disponível em: <http://www.set.eesc.usp.br/portal/pt/softwares/27-pesquisa/softwares/410-acadmesh>.

PILKEY, W. D.; PILKEY, D. F.; BI, Z. *Peterson's stress concentration factors*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2020.

PINDADO, M. Ángel; AGUADO, A.; JOSA, A. Fatigue behavior of polymer-modified porous concretes. *Cement and Concrete Research*, v. 29, n. 7, p. 1077 – 1083, 1999.

PITUBA, J.; LACERDA, M. M. S. Simplified damage models applied in the numerical analysis of reinforced concrete structures. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, SciELO Brasil, v. 5, p. 26–37, 2012.

PONS, G.; MASO, J. Microstructure evolution of concrete under low-frequency cyclic loading: Determination of the porosity variations. In: VALLURI, S.; TAPLIN, D.; RAO, P. R.; KNOTT, J.; DUBEY, R. (Ed.). *Fracture 84*. [S.l.]: Pergamon, 1984. p. 2817 – 2824. ISBN 978-1-4832-8440-8.

POPOVICS, J. S.; ZEMAJTIS, J.; SHKOLNIK, I. A study of static and dynamic modulus of elasticity of concrete. *ACI-CRC Final Report*, 2008.

POPOVICS, S. A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete. *Cement and concrete research*, Elsevier, v. 3, n. 5, p. 583–599, 1973.

PRADO, T. K. L. *Regressão não linear multivariada no crescimento do coco variedade anã verde*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2020.

PROENçA, S.; PAPA, E.; MAIER, G. Meccanica del danneggiamento di materiali e strutture: aplicazioni al calcestruzzo. *Rapporto sul contratto di ricersa*, p. 90–91, 1991.

PROENÇA, S. B. Simulação numérica do comportamento de elementos estruturais em concreto e argamasa armada pelo emprego de um modelo de dano. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 1992.

RAITHBY, K.; GALLOWAY, J. Effects of moisture condition age, and rate of loading on fatigue of plain concrete. *Special Publication*, v. 41, p. 15–35, 1974.

RAJU, N. Prediction of the fatigue life of plain concrete in compression. *Building Science*, v. 4, n. 2, p. 99 – 102, 1969.

RAJU, N. K. Effect of stress concentrations on the static and fatigue strength of concrete in compression. *Matériaux et constructions*, Springer, v. 3, n. 2, p. 85–89, 1970.

RAMOS, É. S. *Modelagem numérica da propagação da corrosão por cloretos em estruturas de concreto armado*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2020.

RAMOS, É. S.; CARRAZEDO, R. Cross-section modeling of the non-uniform corrosion due to chloride ingress using the positional finite element method. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Springer, v. 42, n. 10, p. 1–18, 2020.

RANKINE, W. J. M. On the causes of the unexpected breakage of the journals of railway axles. *Minutes of the Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, v. 2, p. 105 – 108, 1843.

RAY, S.; CHANDRA KISHEN, J. Fatigue crack propagation model and size effect in concrete using dimensional analysis. *Mechanics of Materials*, v. 43, n. 2, p. 75 – 86, 2011.

REDDY, J. *An introduction to the finite element method*. [S.l.]: McGraw-Hill New York, 2004. v. 1221.

REN, X.; LI, J. A unified dynamic model for concrete considering viscoplasticity and rate-dependent damage. *International Journal of Damage Mechanics*, Sage Publications Sage UK: London, England, v. 22, n. 4, p. 530–555, 2013.

RETROFUTUR. *The Bridge spans over a highly urbanized suburb of Genova at a height of 45m*. 2018. Acesso em: 03 de abr. de 2020. Disponível em: <http: //www.retrofutur.org/retrofutur/app/main?DOCID=1000116018>.

RIBEIRO, R. J. C.; OLIVEIRA, D. R. C. The collapse of real class building o colapso do edifício real class. 2018.

RICHARD, B.; RAGUENEAU, F. Continuum damage mechanics based model for quasi brittle materials subjected to cyclic loadings: Formulation, numerical implementation and applications. *Engineering Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 98, p. 383–406, 2013.

RICHARD, B.; RAGUENEAU, F.; CREMONA, C.; ADELAIDE, L. Isotropic continuum damage mechanics for concrete under cyclic loading: Stiffness recovery, inelastic strains and frictional sliding. *Engineering Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 77, n. 8, p. 1203–1223, 2010.

RIGOBELLO, R. *Desenvolvimento e aplicação de código computacional para análise de estruturas de aço aporticadas em situação de incêndio*. 2011.

RITCHIE, R. Mechanisms of fatigue crack propagation in metals, ceramics and composites: role of crack tip shielding. *Materials Science and Engineering: A*, Elsevier, v. 103, n. 1, p. 15–28, 1988.

RODRIGUES, C. C.; LÚCIO, V. J. d. G. Torres pré-fabricadas de betão para suporte de turbinas eólicas. *Design of precast concrete structures against accidental actions*, Fundação da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, p. 91–106, 2012.

SAIN, T.; CHANDRA-KISHEN, J. Probabilistic assessment of fatigue crack growth in concrete. *International Journal of Fatigue*, v. 30, n. 12, p. 2156 – 2164, 2008.

SAINI, B. S.; SINGH, S. Flexural fatigue life analysis of self compacting concrete containing 100*Construction and Building Materials*, v. 253, p. 119176, 2020.

SAITO, M. Tensile fatigue strength of lightweight concrete. *International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete*, Elsevier, v. 6, n. 3, p. 143–149, 1984.

SAITO, M. Characteristics of microcracking in concrete under static and repeated tensile loading. *Cement and Concrete Research*, v. 17, n. 2, p. 211 – 218, 1987.

SAITO, M. Tensile fatigue strength of the mortar-aggregate bond. *Cement and Concrete Research*, v. 18, n. 5, p. 710 – 714, 1988.

SAMPAIO, M. S. M. *Análise não linear geométrica de cascas laminadas reforçadas com fibras*. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

SAMPAIO, M. S. M.; CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Análise não linear geométrica de sólidos elásticos bidimensionais reforçados com fibras via mef. *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, v. 13, n. 59, p. 59–62, 2011.

SANTANA, M. R. O.; DOMINGUEZ, D. S.; IGLESIAS, S. M.; PESSÔA, J. R. C.; DIAS, L. A. Modelos de regressão aplicados na caracterização de argamassas leves contendo agregados não convencionais de eva e fibras de piaçava. *Matéria (Rio de Janeiro)*, SciELO Brasil, v. 23, 2018.

SAUCEDO, L.; RENA, C. Y.; MEDEIROS, A.; ZHANG, X.; RUIZ, G. A probabilistic fatigue model based on the initial distribution to consider frequency effect in plain and fiber reinforced concrete. *International journal of fatigue*, Elsevier, v. 48, p. 308–318, 2013.

SCHAFFER, A. *Verificação de seções de concreto armado solicitadas por flexão composta à fadiga*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002.

SCHIJVE, J. Fatigue of structures and materials in the 20th century and the state of the art. *International journal of fatigue*, Elsevier, v. 25, n. 8, p. 679–702, 2003.

SEARLE, S. R.; GRUBER, M. H. *Linear models*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2016.

SEBER, G. A.; WILD, C. J. Nonlinear regression. hoboken. *New Jersey: John Wiley & Sons*, v. 62, n. 63, p. 1238, 2003.

SHAN, Z.; YU, Z.; LI, X.; XIE, Y. Damage quantification in concrete under fatigue loading using acoustic emission. *Journal of Sensors*, Hindawi, v. 2019, 2019.

SHEN, L.; LI, W.; ZHOU, X.; FENG, J.; LUZIO, G. D.; REN, Q.; CUSATIS, G. Multiphysics lattice discrete particle model for the simulation of concrete thermal spalling. *Cement and Concrete Composites*, Elsevier, v. 106, p. 103457, 2020.

SHERMAN, D.; LEMAITRE, J.; LECKIE, F. Damage and deformation growth in brittle-ductile laminates. *European journal of mechanics. A. Solids*, v. 15, n. 6, p. 1013–1035, 1996.

SHI, X.; FWA, T.; TAN, S. Flexural fatigue strength of plain concrete. *Materials Journal*, v. 90, n. 5, p. 435–440, 1993.

SIEMES, A. M. Fatigue evaluation of concrete structures. preliminary studies, procedure and examples. *Heron (Delft)*, v. 33, n. 3, 1988.

SILVAFILHO, J. N. *Análise do comportamento à fadiga de vigas de concreto armado reforçadas com PRF de vidro, carbono e aramida. 2007. 275p*. Tese (Doutorado) — Universidade de Brasília, 2005.

SKRZYPEK, J. J.; GANCZARSKI, A. *Modeling of material damage and failure of structures: theory and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.

SMITH, R. A. An introduction to fracture mechanics for engineers part ii: Using the stress intensity factor to characterise fracture and fatigue crack growth. *International Journal of Materials in Engineering Applications*, Elsevier, v. 1, n. 4, p. 227–235, 1979.

SOROUSHIAN, P.; ELZAFRANEY, M. Damage effects on concrete performance and microstructure. *Cement and Concrete Composites*, Elsevier, v. 26, n. 7, p. 853–859, 2004.

SPARKS, P. The influence of rate of loading and material variability on the fatigue characteristics of concrete. *Special Publication*, v. 75, p. 331–342, 1982.

SPARKS, P. R.; MENZIES, J. The effect of rate of loading upon the static and fatigue strengths of plain concrete in compression. *Magazine of Concrete Research*, Thomas Telford Ltd, v. 25, n. 83, p. 73–80, 1973.

SPERANZA ENGENHARIA E CONSULTORIA. *Infiltrações causaram desabamento em edifício de São Bernardo do Campo*. 2012. Acesso em: 03 de abr. de 2020. Disponível em: <http://speranzaengenharia.ning.com/page/desabamento-sbc>.

STEPHENS, R. I.; FATEMI, A.; STEPHENS, R. R.; FUCHS, H. O. *Metal fatigue in engineering*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2000.

SUBRAMANIAM, K. V.; POPOVICS, J. S.; SHAH, S. P. Fatigue fracture of concrete subjected to biaxial stresses in the tensile c-t region. *Journal of engineering mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 128, n. 6, p. 668–676, 2002.

SUBRAMANIAM, K. V.; SHAH, S. P. Biaxial tension fatigue response of concrete. *Cement and Concrete Composites*, v. 25, n. 6, p. 617 – 623, 2003. Infrastructure Development.

SUN, B.; XU, Z. An efficient numerical method for meso-scopic fatigue damage analysis of heterogeneous concrete. *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 278, p. 122395, 2021.

SUN, X.; TIAN, Y.; YIN, W.; WANG, H. Effect of free water on fatigue performance of concrete subjected to compressive cyclic load. *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 318, p. 125995, 2022.

SURANA, K. S. Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 19, n. 4, p. 581–615, 1983.

SYMON, K. R. *Mechanics: 3d Ed.* [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1971.

TAHERI, S.; VINCENT, L.; LE-ROUX, J.-C. A new model for fatigue damage accumulation of austenitic stainless steel under variable amplitude loading. *Procedia engineering*, Elsevier, v. 66, p. 575–586, 2013.

TEPFER, R. Fatigue of plain concrete subjected to stress reversals. *ACI Journals, Special Publication*, v. 75, p. 195–215, 1982.

TEPFERS, R.; HEDBERG, B.; SZCZEKOCKI, G. Absorption of energy in fatigue loading of plain concrete. *Matériaux et Construction*, Springer, v. 17, n. 1, p. 59, 1984.

TEPFERS, R.; KUTTI, T. Fatigue strength of plain, ordinary, and lightweight concrete. In: *Journal Proceedings*. [S.l.: s.n.], 1979. v. 76, n. 5, p. 635–652.

THE REGULATORY REVIEW. *Nuclear energy at the forefront of states' clean energy policies*. 2018. Acesso em: 03 de abr. de 2020. Disponível em: <https://www.theregreview.org/2018/08/16/ko-nuclear-energy-forefront-states-clean-energy/>.

THOMAS, C.; SETIéN, J.; POLANCO, J.; LOMBILLO, I.; CIMENTADA, A. Fatigue limit of recycled aggregate concrete. *Construction and Building Materials*, v. 52, p. 146 – 154, 2014.

TOMPKINS, D.; KHAZANOVICH, L.; BOLANDER, J. Lattice modelling of fracture in composite concrete pavements and overlays. *International Journal of Pavement Engineering*, Taylor & Francis, v. 16, n. 1, p. 56–68, 2015.

TOUMI, A.; BASCOUL, A.; TURATSINZE, A. Crack propagation in concrete subjected to flexuralcyclic loading. *Materials and Structures*, Springer, v. 31, n. 7, p. 451–458, 1998.

Van Mier, J. G. M. *Fracture processes of concrete*. [S.l.]: CRC press, 1996. v. 12.

VAN-MIER, J. G. M. *Concrete fracture: a multiscale approach*. [S.l.]: CRC press, 2012.

VANALLI, L. *O MEC e o MEF aplicados à análise de problemas viscoplásticos em meios anisotrópicos e compostos*. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

VANALLI, L.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A simple way to introduce fibers into fem models. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, v. 24, n. 7, p. 585–603, 2008.

VICENTE, M. A.; GONZáLEZ, D. C.; MíNGUEZ, J.; TARIFA, M. A.; RUIZ, G.; HINDI, R. Influence of the pore morphology of high strength concrete on its fatigue life. *International Journal of Fatigue*, v. 112, p. 106 – 116, 2018.

WANG, H.; SONG, Y. Fatigue capacity of plain concrete under fatigue loading with constant confined stress. *Materials and structures*, Springer, v. 44, n. 1, p. 253–262, 2011.

WANG, L.; BAO, J.; UEDA, T. Prediction of mass transport in cracked-unsaturated concrete by mesoscale lattice model. *Ocean Engineering*, Elsevier, v. 127, p. 144–157, 2016.

WANG, Y. Physical stochastic damage model for concrete subjected to fatigue loading. *International Journal of Fatigue*, Elsevier, v. 121, p. 191–196, 2019.

WEI, C.; YUPU, S.; JINSONG, Z. Experimental study on performance of plain concrete due to triaxial variable-amplitude tension-compression cyclic loading. *Journal of Wuhan University of Technology-Mater. Sci. Ed.*, Springer, v. 20, n. 3, p. 104–109, 2005.

WILLIAMS, H. A. Fatigue tests of lightweight aggregate concrete beams. In: *Journal Proceedings*. [S.l.: s.n.], 1943. v. 39, p. 441–448.

WU, B.; JIN, H. Compressive fatigue behavior of compound concrete containing demolished concrete lumps. *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 210, p. 140–156, 2019.

WU, H.; LIU, Z.; SUN, B.; YIN, J. Experimental investigation on freeze–thaw durability of portland cement pervious concrete (pcpc). *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 117, p. 63–71, 2016.

WU, J. Y.; LI, J.; FARIA, R. An energy release rate-based plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, v. 43, n. 3-4, p. 583–612, 2006.

WU, K.-R.; CHEN, B.; YAO, W.; ZHANG, D. Effect of coarse aggregate type on mechanical properties of high-performance concrete. *Cement and concrete research*, Elsevier, v. 31, n. 10, p. 1421–1425, 2001.

XIAO, J.; LI, H.; YANG, Z. Fatigue behavior of recycled aggregate concrete under compression and bending cyclic loadings. *Construction and Building Materials*, v. 38, p. 681 – 688, 2013. 25th Anniversary Session for ACI 228 – Building on the Past for the Future of NDT of Concrete.

XIAO, J.; LI, J.; ZHANG, C. Mechanical properties of recycled aggregate concrete under uniaxial loading. *Cement and Concrete Research*, v. 35, n. 6, p. 1187 – 1194, 2005.

XUE, X.; YANG, X. A damage model for concrete under cyclic actions. *International Journal of Damage Mechanics*, Sage Publications Sage UK: London, England, v. 23, n. 2, p. 155–177, 2014.

ZANUY, C.; ALBAJAR, L.; FUENTE, P. de la. The fatigue process of concrete and its structural influence. *Materiales de Construcción*, v. 61, n. 303, p. 385–399, 2011.

ZHANG, B.; PHILLIPS, D.; GREEN, D. Sustained loading effect on the fatigue life of plain concrete. *Magazine of Concrete Research*, Thomas Telford Ltd, v. 50, n. 3, p. 263–278, 1998.

ZHANG, B.; PHILLIPS, D.; WU, K. Effects of loading frequency and stress reversal on fatigue life of plain concrete. *Magazine of concrete research*, Thomas Telford Ltd, v. 48, n. 177, p. 361–375, 1996.

ZHANG, B.; PHILLIPS, D.; WU, K. Further research on fatigue properties of plain concrete. *Magazine of concrete research*, Thomas Telford Ltd, v. 49, n. 180, p. 241–252, 1997.

ZHANG, J.; LI, V. C.; STANG, H. Size effect on fatigue in bending of concrete. *Journal of materials in civil engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 13, n. 6, p. 446–453, 2001.

ZHANG, X.; RUIZ, G.; RENA, C. Y.; POVEDA, E.; PORRAS, R. Rate effect on the mechanical properties of eight types of high-strength concrete and comparison with fib mc2010. *Construction and Building Materials*, Elsevier, v. 30, p. 301–308, 2012.

ZHAODONG, D.; JIE, L. A physically motivated model for fatigue damage of concrete. *International Journal of Damage Mechanics*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 27, n. 8, p. 1192–1212, 2018.

ZHENG, M.; ZHOU, G.; ZHAO, G. Predicting ductile crack initiation near notch tip under mode i loading by the damage theory. *International journal of fracture*, v. 73, n. 1, p. R9–R13, 1995.

ZHU, S.-P.; HUANG, H.-Z.; LIU, Y.; HE, L.-P.; LIAO, Q. A practical method for determining the corten-dolan exponent and its application to fatigue life prediction. *International Journal of Turbo & Jet-Engines*, De Gruyter, v. 29, n. 2, p. 79–87, 2012.

ZIELINSKI, A. J.; REINHARD, H. W.; KÖRMELING, H. A. Experiments on concrete under repeated uniaxial impact tensile loading. *Matériaux et Construction*, Springer, v. 14, n. 3, p. 163–169, 1981.