UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

RAY CALAZANS DOS SANTOS SILVA

ANÁLISE DA INTERAÇÃO ESTACA INCLINADA E O SOLO VIA COMBINAÇÃO MEC/MEF

SÃO CARLOS

2020

RAY CALAZANS DOS SANTOS SILVA

ANÁLISE DA INTERAÇÃO ESTACA INCLINADA E O SOLO VIA COMBINAÇÃO MEC/MEF

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Assoc. João Batista de Paiva

SÃO CARLOS

2020

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

S586a

Silva, Ray Calazans dos Santos
Análise da interação estaca inclinada e o solo via combinação MEC/MEF / Ray Calazans dos Santos Silva; orientador João Batista de Paiva. São Carlos, 2020.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil(Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2020.

1. Método dos Elementos de Contorno. 2. Método dos Elementos Finitos. 3. Acoplamento MEC/MEF. 4. Estacas Inclinadas. 5. Interação Solo-Estrutura. I. Título.

Eduardo Graziosi Silva - CRB - 8/8907

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Bacharel **RAY CALAZANS DOS SANTOS SILVA.**

Título da dissertação: " Análise da interação estaca inclinada e o solo via combinação MEC/MEF".

Data da defesa: 08/04/2020

Comissão Julgadora	**Resultado**
Prof. Associado **João Batista de Paiva** **(Orientador)** (Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)	Aprovado
Prof. Dr. **Angelo Vieira Mendonça** (Universidade Federal da Paraíba/UFPB)	Aprovado
Prof. Dr. **Valério da Silva Almeida** (Escola Politécnica/EP-USP)	Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas):
Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:
Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus por tudo que me deu.

Aos meus pais, Belmiro e Ilmara, por todo apoio incondicional dado ao longo da minha vida. Essa vitória é de vocês.

Ao professor João Batista de Paiva pela oportunidade, orientação e disponibilidade durante este trabalho.

Aos meus familiares, em especial aos meus irmãos, Bruno pela contribuição direta neste trabalho e Igor pelos momentos de descontração.

Minha namorada Adrielle, por todo o companheirismo, amor e compreensão ao longo desta caminhada.

Aos meus amigos de longa data, Hélder e Rosângela, pelas conversas, conselhos e brincadeiras.

Agradeço aos meus amigos de turma por todo o companheirismo e momentos de descontração, em especial a Danilo Pereira dos Santos e Luan Reginato.

A equipe de revisão deste trabalho: Isabella, Uiny e Roh. Não poderiam ser melhores, muito obrigado.

Ao mestre Marcílio F. G. Silva e ao amigo Pedro Alexandre pelo incentivo ao mestrado.

Aos professores Rodrigo R. Paccola e Leandro Palermo pelas contribuições dadas no exame de qualificação.

Por fim, agradeço a todos do Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos- USP.

RESUMO

SILVA, R. C. S. **Análise da interação estaca inclinada e o solo via combinação MEC/MEF.** 2020. 132p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas))- Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

O uso de estacas inclinadas está cada vez mais recorrente tendo em vista a sua eficiência em determinados problemas, estas são elementos de fundação profunda muito utilizados na engenharia civil devido a sua capacidade de atingir camadas de solos mais resistentes e por suportar grandes cargas. Tendo em vista que as análises numéricas surgem como alternativa em relação às análises empíricas, o presente trabalho tem como objetivo realizar a análise numérica de estacas inclinadas isoladas e em grupos por meio do acoplamento MEC/MEF. A estaca é modelada por vários elementos finitos de pórtico tridimensional com dois nós, cinco parâmetros nodais e qualquer inclinação. O solo é modelado pelo método dos elementos de contorno, sendo considerado um meio semi-infinito, elástico-linear, homogêneo e isotrópico. Tendo sido a solução fundamental de Mindlin utilizada, a discretização do solo é feita somente na superfície de contato com a estaca, não sendo necessário a discretização da superfície do solo. O acoplamento da formulação MEC/MEF é feito considerando a transformação da matriz dos coeficientes do solo (MEC) em uma matriz equivalente do MEF, que somada a matriz de rigidez do pórtico tridimensional fornece o sistema final. As forças de interação na interface estaca-solo têm uma distribuição linear. Os resultados obtidos foram validados através de comparação com os disponíveis na literatura, mostrando eficácia e robustez da formulação. Assim sendo, foram realizadas as análises paramétricas para estacas isoladas e em grupos, cujos resultados demonstram pouca influência do ângulo de inclinação nos deslocamentos das estacas inclinadas isoladas; porém, para grupo de estacas inclinadas, o ângulo de inclinação apresenta maior relevância nas alterações dos deslocamentos.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno. Método dos Elementos Finitos.

Acoplamento MEC/MEF. Estacas Inclinadas. Interação Solo-Estrutura.

ABSTRACT

SILVA, R. C. S. **Analysis of inclined pile and soil interaction via BEM/FEM coupling.** 2020. 132p. Dissertation (M. Sc. in Civil Engineering (Structural Engineering)) - School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2020.

The use of battered piles is more and more recurrent in view of their efficiency in certain problems, these are deep-foundation elements widely used in civil engineering due to their ability to reach more resistant soil layers and to support large loads. Bearing in mind that the numerical analyzes appear as an alternative in relation to the empirical analyzes, the present work aims to perform the numerical analysis of isolated battered piles and in groups through the BEM/FEM coupling. The pile is modeled by several finite elements of three-dimensional frame with two nodes, five nodal parameters and any inclination. The soil is modeled by the boundary element method, being considered a semi-infinite, elastic-linear, homogeneous and isotropic medium. Having been the fundamental solution of Mindlin used, the soil discretization is done only on the contact surface with the pile, it is not necessary to discretize the soil surface. The coupling of the BEM / FEM formulation is done considering the transformation of the matrix of soil coefficients (BEM) into a matrix equivalent to the FEM, which added to the stiffness matrix of the three-dimensional frame provides the final system. The interaction forces at the stake-ground interface have a linear distribution. The results obtained were validated by comparison with those available in the literature, showing effectiveness and robustness of the formulation. Therefore, parametric analyzes were carried out for isolated and group piles, the results of which showed little influence of the angle of inclination on the displacements of isolated battered piles; however, for a group of battered piles, the angle of inclination is more relevant in the changes in displacements.

Key-words: Boundary Element Method. Finite Element Method. BEM/FEM Coupling. Battered Piles. Soil-Structure Interaction.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2-1- Sistema Estrutural de um edifício 23

Figura 3-1-(a) Malha do MEF (b) Malha do MEC 35

Figura 3-2- (a) Componentes dos deslocamentos (b) Componentes das forças de superfície . 37

Figura 3-3- Domínio fictício 39

Figura 3-4- Corpo com parte do seu contorno coincidindo com a superfície do meio semi-infinito. 42

Figura 4-1-Decomposição do elemento 50

Figura 4-2: (a) Forças no topo da estaca (b) Forças distribuídas (c) Forças nodais equivalentes 56

Figura 5-1- Linha de carga 60

Figura 5-2- Projeções do ponto campo 63

Figura 5-3-Sistemas de coordenada global e local 65

Figura 5-4- Elemento Imaginário 69

Figura 6-1-Ensaio de Whitaker & Cooke 72

Figura 6-2- Deslocamentos verticais ao longo da estaca 72

Figura 6-3-Ensaio de Kérisel & Adam 73

Figura 6-4- Deslocamentos horizontais ao longo da estaca 74

Figura 6-5- Estaca Inclinada sujeita a carregamento axial 74

Figura 6-6- Deslocamento axial no topo em função do ângulo de inclinação 75

Figura 6-7- Coeficiente I_a em função da relação L/d 76

Figura 6-8- Deslocamento axial em função da rigidez relativa K 77

Figura 6-9-Estaca inclinada sujeita a carregamento transversal 78

Figura 6-10- (a) Deslocamento transversal no topo (b) Rotação no topo 78

Figura 6-11- Coeficiente de deslocamento I_{nn} em função do fator de flexibilidade 80

Figura 6-12- Coeficiente $I_{\theta n}$ em função do fator de flexibilidade 80

Figura 6-13- Estaca inclinada sujeita a momento 81

Figura 6-14- Rotação em função do ângulo de inclinação 82

Figura 6-15- Coeficiente de rotação $I_{\theta\theta}$ em função do fator de flexibilidade 83

Figura 6-16- Estaca inclinada 83

Figura 6-17- Deslocamento horizontal (DH) e deslocamento vertical (DV) 84

Figura 6-18- Rotação em função do ângulo de inclinação 84

Figura 6-19- Grupo de duas estacas solicitadas axialmente 85

Figura 6-20- Deslocamento vertical ao longo do eixo vertical 85

Figura 6-21- Coeficiente α em função de S/d 86

Figura 6-22- Grupo de estacas verticais sujeito a carregamento lateral 87

Figura 6-23- Deslocamento Horizontal ao longo do comprimento 87

Figura 6-24- Coeficiente α em função de S/d 88

Figura 6-25- Grupo de estacas inclinadas solicitadas axialmente 89

Figura 6-26- Deslocamentos axiais, normais e rotações ao longo do comprimento 89

Figura 6-27- Coeficientes α em função de S/d 90

Figura 6-28- Coeficientes α para diferentes razões L/d 91

Figura 6-29- Coeficientes α para diferentes K 92

Figura 6-30- Grupo de estacas inclinadas solicitadas transversalmente 93

Figura 6-31- Deslocamentos e rotação ao longo do comprimento 93

Figura 6-32- Coeficientes α em função de S/d para diferentes inclinações 94

Figura 6-33- Coeficientes α em função de S/d para diferentes razões L/d 95

Figura 6-34- Coeficientes α em função de S/d para diferentes K 96

Figura 6-35- Grupos de estacas solicitados por forças horizontais 97

Figura 6-36- Deslocamentos horizontais ao longo do comprimento da estaca GP 4 98

Figura 6-37- Deslocamentos horizontais de todos os GPs ao longo do comprimento 99

Figura 6-38- Deslocamento horizontal da estaca central ao longo do comprimento 99

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 19

1.1. Considerações iniciais *19*

1.2. Objetivos *20*

1.3. Justificativa *20*

1.4. Metodologia *21*

1.5. Organização do texto *22*

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 23

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO 35

3.1. Formulação integral de contorno *36*

3.2. Formulações Integrais para pontos no contorno *38*

3.2.1. Problema fundamental de Kelvin 39

3.2.2. Problema Fundamental de Mindlin 41

4. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS 45

4.1. Formulação geral do MEF *46*

4.2. Elemento finito de pórtico tridimensional *49*

4.3. Matriz de Rigidez *52*

4.4. Vetor de cargas nodais *55*

5. ANÁLISE DA INTERAÇÃO ESTACA-SOLO 59

5.1. Introdução *59*

5.2. Hipóteses adotadas *59*

5.3. Formulação *60*

5.3.1. Interação de um meio tridimensional com estruturas de barras gerais 60

5.3.2. Implementação numérica do MEC 61

5.3.3. Matriz de Rotação 64

5.3.4. Acoplamento MEC/MEF 67

5.4. Apoio Inclinado *68*

6. RESULTADOS 71

6.1. Ensaio de Whitaker & Cooke 71

6.2. Ensaio de Kérisel & Adam 73

6.3. Estaca Inclinada com carregamento axial 74

6.4. Estaca Inclinada com carregamento transversal 77

6.5. Estaca Inclinada com Momento aplicado no topo 81

6.6. Estaca Inclinada 83

6.7. Grupo de estacas verticais sob carregamento axial 85

6.8. Grupo de estacas verticais sob carregamento lateral 87

6.9. Grupo de estacas inclinadas sob carregamento axial 89

6.10. Grupo de estacas inclinadas sob carregamento transversal 93

6.11. Grupos de estacas 97

7. CONCLUSÃO 101

REFERÊNCIAS 103

APÊNDICE A: FUNDAMENTOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE 113

A.1 Estado de Tensão 113

A.2 Equação de equilíbrio 116

A.3 Estado de deformação 117

A.4 Relações Constitutivas 119

A.5 Problema de Valor de Contorno 120

A.6 Equação de Navier 122

Apêndice B: SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS 125

B.1 Solução fundamental de Kelvin 125

B.2 Solução Fundamental de Mindlin 128

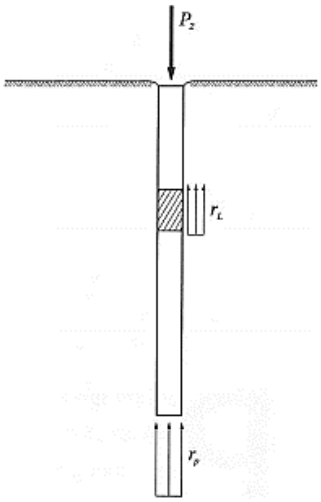
B.3 Solução Fundamental de Boussinesq-Cerruti 131

1. INTRODUÇÃO

1.1. Considerações iniciais

As estacas são elementos estruturais que fazem parte do sistema de fundação estaca-solo, estando-as necessariamente envolvidas pelo maciço de solo. São geralmente empregadas quando as camadas superficiais de solo não possuem resistência suficiente, sendo que sua capacidade resistente é composta por duas parcelas: resistência de fuste e resistência de ponta. A primeira parcela é oriunda do atrito lateral entre o fuste da estaca e o solo, ou adesão quando o solo for argila, por outro lado, a segunda parcela é referente ao surgimento de tensões normais à sua base. O esquema é ilustrado na Figura 1-1.

Figura 1-1- Capacidade resistente da estaca



Fonte: Adaptado de Cintra (2010).

A interação estaca-solo há bastante tempo é um dos temas que tem recebido atenção especial de pesquisadores do mundo todo, dada a sua grande aplicabilidade prática. Em um projeto de engenharia é necessário determinar a carga última que a estaca pode suportar e também a máxima deflexão que esse elemento de fundação irá sofrer (recalque). Haja vista a complexidade para determinar essas grandezas de forma precisa analiticamente, surge como alternativa os métodos numéricos, tais quais o método dos elementos finitos (MEF), método dos elementos de contorno (MEC), método das diferenças finitas (MDF), entre outros. Os dois primeiros são utilizados neste trabalho.

A combinação MEC/MEF tem se mostrado apropriada para a resolução de problemas compreendendo domínios infinitos interagindo com domínios finitos, possibilitando um melhor

aproveitamento de ambos os métodos. As estacas, por se tratar de meios com dimensões finitas, são modeladas pelo método dos elementos finitos (MEF). Tal método tem se comprovado a melhor opção para os chamados “problemas de domínio” devido à sua praticidade e eficiência, convertendo-se no método numérico mais difundido pelo meio técnico.

Contudo, quando é preciso analisar meios infinitos ou semi-infinitos como o solo, este método torna-se limitado, tendo em vista a grande quantidade de elementos a serem empregados. Uma alternativa que tem se mostrado viável para modelagem desses meios é o método dos elementos de contorno (MEC), onde em análises elásticas o meio é discretizado somente em seu contorno, reduzindo-se o número de equações e variáveis envolvidas e diminuindo o custo computacional.

A análise do sistema estaca-solo é geralmente realizada com as estacas dispostas verticalmente. Porém, as estacas inclinadas são usualmente utilizadas em algumas situações específicas, como nos casos de pontes, muros de arrimo sobre estacas e etc. Seu uso é recomendado quando este elemento passa a participar ativamente no equilíbrio da estrutura, ocasionado por esforços horizontais de grande preponderância, tais quais: vento, empuxo da água, frenagem de veículos, empuxo do solo ou até mesmo combinações destes.

1.2. Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo analisar por meio da combinação MEC/MEF a interação solo-estrutura para o caso de estacas inclinadas isoladas e em grupos, estando sujeitas a carregamentos verticais, horizontais, inclinados e momentos. Para isso, será desenvolvimento um código computacional com formulações matemáticas baseadas no método dos elementos finitos e no método dos elementos de contorno. Tal formulação permitirá discretizar a estaca inclinada com vários elementos finitos, buscando uma resposta mais precisa.

1.3. Justificativa

A interação solo-estrutura continua sendo um tema muito abordado, isso se deve ao fato de muitos problemas terem surgido devido ao seu negligenciamento, como os casos de recalques diferenciais altos e cargas expressivas não previstas em projeto, que levam desde o aparecimento de manifestações patológicas à ruína de todo o sistema estrutural.

Dado o aumento da capacidade de armazenamento e processamento dos computadores, tornou-se possível a implementação de códigos computacionais com maior refinamento. Desta

forma, problemas considerados complexos podem ser solucionados de forma mais rápida e precisa, como o caso das análises do conjunto estaca-solo. Sendo assim, o presente trabalho se propõe a analisar esses tipos de problema no contexto de estacas inclinadas atendendo as sugestões deixadas em trabalhos anteriores do mesmo grupo de pesquisa.

As estacas inclinadas estão em crescente uso em estruturas com grandes solicitações horizontais, tais como: muro de contenção, torres eólicas, estruturas offshore, fundações de pontes, estruturas de portos e cais, entre outros. Porém, a literatura ainda é incipiente acerca do tema, o que acaba gerando o não aproveitamento de todo o potencial deste elemento de fundação.

1.4. Metodologia

A fim de cumprir os objetivos propostos, o desenvolvimento desse trabalho foi organizado em quatro etapas que são complementares e contíguas para demonstrar as formulações matemáticas baseadas no método dos elementos finitos e no método dos elementos de contorno

Na primeira etapa, foi feita uma revisão bibliográfica sobre os seguintes temas: método dos elementos de contorno, método dos elementos finitos, acoplamento MEC/MEF e estudos numéricos de estacas. A partir disto, foi projetado um acervo de problemas da literatura para a subsequente validação da formulação proposta.

Na etapa seguinte foi desenvolvido o código computacional em linguagem Fortran para a análise numérica MEC/MEF. Primeiramente tratou-se da estaca inclinada isolada, discretizada em vários elementos finitos, desenvolveu-se uma matriz de rotação entre os sistemas de coordenadas adotados e foram analisadas as mudanças nas formulações e procedimentos numéricos de ambos os métodos decorrente dessa rotação de eixos. Na sequência, a formulação foi estendida para grupo de estacas inclinadas.

A terceira etapa consistiu na validação numérica do código desenvolvido. Para tanto, exemplos numéricos e experimentais encontrados na literatura tiveram suas respostas confrontadas com as respostas deste trabalho. Onde foram feitas discussões pertinentes aos resultados obtidos por diferentes formulações.

Por fim, o autor redigiu a dissertação de mestrado onde apresentou a revisão bibliográfica realizada, metodologias empregadas, a formulação proposta, exemplos de validação e conclusões obtidas. Em seguida, será feita a divulgação da pesquisa desenvolvida à comunidade científica por meio de artigos em periódicos e congressos.

1.5. Organização do texto

No presente capítulo é feita a introdução ao tema e contextualização da pesquisa a ser realizada neste trabalho. Os demais capítulos são apresentados e descritos a seguir:

Capítulo 2: É feita uma revisão bibliográfica sobre estacas, modelos de cálculo, métodos numéricos, MEF, MEC e trabalhos anteriores;

Capítulo 3: É realizada uma breve descrição da formulação do método dos elementos de contorno, bem como sua origem e características do método;

Capítulo 4: Contém os conceitos utilizados do método dos elementos finitos, tais como: formulação geral, formulação do elemento finito empregado para modelar a estaca;

Capítulo 5: Apresenta a formulação desenvolvida, mostrando as hipóteses adotadas, a implementação computacional e como é feito o acoplamento entre os métodos;

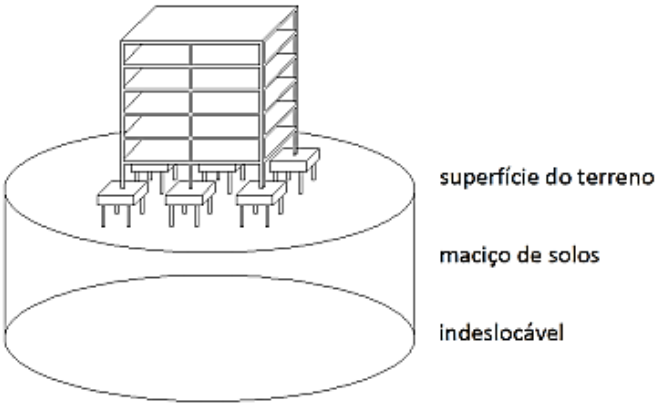
Capítulo 6: Exemplos numéricos são resolvidos e comparados com ensaios experimentais e formulações de outros autores. Além disso, também são realizadas algumas análises paramétricas;

Capítulo 7: Traz as conclusões do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Toda obra civil é basicamente dividida em três partes: superestrutura (lajes, vigas e pilares), fundação (sapatas, estacas, caixões, tubulões, etc.) e o maciço de solo. Dentre estes, existe um mecanismo de interação e interface que garante a transferência dos esforços e a compatibilidade dos deslocamentos, ainda que muitas vezes essa interação entre os meios é ignorada na prática de projetos (Rosa, 2013).

Figura 2-1- Sistema Estrutural de um edifício



Fonte: Rosa (2013)

Geralmente as análises dos meios vêm sendo feitas de forma isolada. O engenheiro de estruturas está preocupado somente com os fenômenos que ocorrem na superestrutura, sem levar em conta a redistribuição dos esforços que ocorre devido aos deslocamentos gerados no solo. Sob outra perspectiva, o engenheiro geotécnico se atenta exclusivamente a análise da interação da subestrutura com o maciço de solo, não prevendo um estado de tensão que venha a aparecer decorrente das mudanças de configuração na superestrutura. Essas simplificações adotadas se justificam pelo alto nível de complexidade ao analisar todo o conjunto unido, visto que, cada um dos meios já compreende um grande campo de estudos (Almeida, 2003).

Toda estrutura é mais bem modelada quando assumido um modelo matemático que represente a estrutura real, inclusive suas condições de apoio da forma mais verídica. Porém, a prática comumente adotada é considerar a superestrutura engastada sobre uma superfície rígida indeformável, o que de fato não acontece, pois o solo é um meio deformável que sofre recalques diferenciais, os quais conduzem a superestrutura para uma nova posição de equilíbrio.

A interação solo-estrutura pode ser entendida como um único sistema mecânico composto por superestrutura, fundação e solo, onde cada parte exerce influência direta nas

demais. Tal consideração conduz a uma redistribuição nos esforços dos elementos da superestrutura não prevista convencionalmente, principalmente em pilares. Inúmeros fatores contribuem para essa redistribuição, como: rigidez relativa estrutura-estrutura, rigidez relativa estrutura-solo, número de pavimentos, edificações vizinhas e processo construtivo (Colares, 2006).

Quando analisados de forma isolada, os modelos que representam a superestrutura têm se mostrado bastante avançados, no entanto, no que se refere aos maciços de solo o comportamento se mostra complexo, podendo ser assumido um meio não-homogêneo ou homogêneo, com comportamento elástico ou plástico, isótropo ou anisotrópico, dependendo do modelo adotado. Em meio as dificuldades para a sua representação, foram desenvolvidos diversos modelos de cálculo que estimam seus deslocamentos e tensões.

Winkler (1867) propôs que a reação do solo em um ponto qualquer é diretamente proporcional ao deslocamento neste ponto, independente dos deslocamentos em outros pontos. Neste modelo, o solo é discretizado por uma série de molas lineares e independentes entre si. Dentre as dificuldades do método podem-se citar a não consideração do efeito de vizinhança e a determinação do valor da constante da mola (módulo de reação do solo), tal constante é determinada através de ensaios e correlações empíricas, possuindo um alto grau de incertezas. Por outro lado, apresenta como vantagem a sua simplicidade e fácil implementação computacional.

Uma outra técnica, a qual considera o meio como contínuo, é baseada na teoria da elasticidade. Quando o solo é estratificado são aplicadas as condições de equilíbrio e compatibilidade nas superfícies de contanto entre as camadas, como nos trabalhos de Burmister (1945a,1945b), onde foram obtidas as expressões de deslocamentos e tensões para solos com duas e três camadas, respectivamente. Esses modelos apresentam algumas limitações, pois foram solucionados para problemas específicos, no caso de problemas mais gerais, suas soluções não foram obtidas, por tratar-se de uma abordagem analítica de alta complexidade.

Um terceiro método proposto é o modelo de dois parâmetros. Duas constantes elásticas independentes são definidas para avaliar as respostas do solo, essas constantes são definidas por meio do modelo de Winkler em conjunto com o modelo de meio contínuo, tendo como sua principal vantagem a redução das descontinuidades do modelo de Winkler e a relativa simplicidade em relação ao modelo baseado na teoria da elasticidade. Ainda assim, segundo Selvadurai (1979), alguns pesquisadores propuseram seus próprios modelos de dois parâmetros, sendo eles: Pasternak, Filonenko-Borodich, Hetényi, Vlasov, entre outros.

O método da camada finita (MCF) é outro modelo que simula o comportamento do solo. Nesta técnica, é aplicada a transformada de Fourier nas variáveis de interesse (como os deslocamentos e tensões), fazendo com que a dimensão do problema seja reduzida.

O Problema de Valor de Contorno é resolvido por meio das funções de tensão de Airy, obtendo de forma exata a relação de flexibilidade de cada camada; a construção da matriz de flexibilidade de todo o sistema é feita respeitando as condições de continuidade e equilíbrio entre camadas; as análises de interação do solo com estruturas são feitas combinando o MCF com o MEF, sendo este último método é utilizado para analisar os radiers e estacas; o MCF apresenta fácil implementação computacional e grande eficiência, tendo em vista a redução do problema; o solo pode ser considerado com diversas camadas e anisotropia. Sua principal limitação fica por conta da restrição à análise no regime elástico.

Os métodos numéricos surgiram devido as limitações das soluções analíticas, sua utilização nas mais diversas linhas de pesquisas vem em constante crescente, e apesar das soluções não serem matematicamente exatas, possui um caráter mais generalista. O emprego desta ferramenta de cálculo só foi possível devido ao surgimento dos computadores.

Com o crescente avanço tecnológico, o desempenho dos microcomputadores é cada vez melhor, tornando estes métodos alternativas viáveis e muito precisos. Dentre os métodos numéricos mais utilizados pelo meio acadêmico em estudos de estruturas hoje em dia podemos citar: método dos elementos finitos (MEF) e o método dos elementos de contorno (MEC).

O conceito de discretizar um problema contínuo para poder resolve-lo data de mais de dois mil anos atrás, quando os filósofos gregos propuseram que tudo era constituído por infinitas partículas muito pequenas, chamadas de átomos. Mais tarde, Eudóxio criou o método da exaustão, o qual utilizava de figuras e sólidos retilíneos para determinar áreas, volumes e perímetros, tais como: cones, esferas e círculos. Recentemente, na década de 30, engenheiros aeronáuticos britânicos desenvolveram, o que viria a ser mais tarde os primeiros elementos finitos para a análise de tensões em chapas de asa de avião. Somente em Turner et al. (1956) e Clough (1960) que foi proposta a formulação (através do PTV) e denominação de como conhecemos hoje do MEF (Assan, 2003).

Quando o MEF é empregado na análise de domínio semi-infinito, como é o caso do solo, é necessária a discretização de todo o domínio ou grande parte dele, gerando um grande custo computacional para armazenamento e resolução do sistema final. Mesmo com as desvantagens apresentadas pelo MEF para esse tipo de problema, alguns trabalhos nesse sentido já foram realizados, é o caso dos trabalhos de Bae et al. (2005) e Karakus et al. (2007) para

análise de túneis, já no âmbito da interação solo-estrutura, podem ser citados os trabalhos de Ottaviani (1975) e Chow & Teh (1991).

O MEC é um método numérico que tem suas raízes nos fundamentos do cálculo e na teoria da elasticidade. As primeiras soluções numéricas foram desenvolvidas na década de 60, com os trabalhos de Jaswon (1963) no problema de potencial no plano e Rizzo (1967) para o problema elástico no plano. Em Brebbia (1978a) o método é demonstrado através do Métodos dos Resíduos Ponderados, igualmente a outros métodos numéricos, promovendo um maior embasamento ao mesmo. Com isso, tornou-se possível formulações híbridas do MEC com outros métodos numéricos. Foi em Brebbia (1977) que o "Método das Equações Integrais" (como era conhecido na época) passou a se chamar "Método dos Elementos de Contorno".

O método só é passível de aplicação quando a solução fundamental é conhecida, estas são expressões analíticas que fornecem os campos mecânicos de um determinado problema. Diversos autores desenvolveram soluções fundamentais para diferentes problemas, pode-se citar: Kelvin (1848), Cerruti (1882), Boussinesq (1885), Flamant (1892), Melan (1932) e Mindlin (1936).

Lord Kelvin (1848) obteve as soluções fundamentais para um problema elastostático tridimensional, isotrópico, com domínio infinito e submetido a uma força concentrada unitária em qualquer direção do meio. Estas soluções vieram mais tarde a receber o seu nome. Estas foram melhor detalhadas no Anexo B do presente trabalho.

Cerruti (1882) propôs soluções fundamentais para um meio semi-infinito tridimensional, elástico, homogêneo, isotrópico, submetido a cargas concentradas unitárias tangenciais ao plano de corte, assumindo que as forças de superfície fossem nulas nesse plano.

Boussinesq (1885) apresentou soluções fundamentais para um problema similar ao de Cerruti (1882), mudando apenas a direção da carga, que passou a ser normal ao plano de corte.

Quando somadas as duas ultimas soluções, obtem-se a solução fundamental de Boussinesq-Cerruti, a qual representa os campos de deslocamentos e tensões dentro do semi-espaço infinito quando em sua superfície são aplicadas forças concentradas unitarias nas três direções. A versão 2D do problema fundamental de Boussinesq-Cerruti é coincidente ao problema fundamental de Flamant (1892). Tais expressões da solução fundamental e ilustração do problema podem ser consultadas no Anexo B.

Mindlin (1936) deu prosseguimento aos estudos de meios semi-infinitos. Em seu trabalho, são assumidas forças unitárias aplicadas no interior de um meio semi-infinito, elástico, homogêneo e isotrópico. Para a resolução desse problema, Mindlin utilizou dezoito núcleos de tensões com condições de contorno em tensões nulas na superfície livre do semi-espaço,

conforme Anexo B. Quando analisado um semi-plano, as soluções fundamentais de Mindlin coincidem com as de Melan (1932).

Um dos primeiros estudos numéricos sobre o comportamento de estaca-solo foi o de Poulos & Davis (1968), os quais empregaram o acoplamento MEC/MDF. Neste trabalho, é analisado o problema de uma estaca cilíndrica incompressível submetida a ação de uma carga axial, a estaca é dividida em vários elementos cilíndricos, onde são assumidas tensões cisalhantes uniformes e uma base alargada com tensões normais constante.

Para meios estratificados não homogêneos e/ou com camada indeslocável prescrita, é possível empregar a solução fundamental de Mindlin juntamente com a técnica de Steinbrenner (1934). Para a determinação de qualquer deslocamento final no solo, promove-se a diferença entre o deslocamento obtido por Mindlin no ponto desejado e o deslocamento da superfície indeslocável, o meio semi-infinito é considerado elástico, homogêneo e isotrópico e ao final, são obtidas as soluções para os deslocamentos e a distribuição da tensão cisalhante ao longo da estaca.

Em Poulos (1968) são analisados grupos de estacas com a mesma formulação. Primeiro, são analisados os deslocamentos de duas estacas idênticas imersas no mesmo meio, verifica-se o aumento nos deslocamentos em relação a análise da estaca isolada e determina-se um coeficiente de interação α. Este coeficiente é utilizado para a determinação do aumento do deslocamento em cada estaca devido a interação com outras estacas. Posteriormente, a análise é expandida para grupos maiores de estacas com simetria, tomadas de duas em duas. O aumento no deslocamento individual da estaca é obtido através da superposição dos valores de α.

Mattes e Poulos (1969) incluem a consideração da compressibilidade da estaca na formulação anterior. As equações diferenciais de deslocamentos são resolvidas pelo método das diferenças finitas. Os resultados encontrados evidenciam que a compressibilidade da estaca influencia consideravelmente nos deslocamentos. Futuramente, Poulos (1971a) acrescenta na formulação a consideração de cargas horizontais e momentos aplicados no topo da estaca isolada, propondo ainda em seu trabalho subsequente, Poulos (1971b) propõe o mesmo para grupos de estacas.

Polous e Madhav (1971) realizaram uma análise no plano dos deslocamentos de estacas inclinadas isoladas e em grupos. Os carregamentos aplicados em seu topo podiam ser: força transversal, axial e momento. Quando solicitada axialmente, a estaca foi considerada incompressível, entretanto, na flexão a estaca possuía flexibilidade. Os resultados obtidos via teoria da elasticidade (solução de Mindlin) e diferenças finitas constatou que para uma gama de ângulos utilizadas na prática (-30° a 30°), os deslocamentos calculados quase que independem

do ângulo de inclinação, e que, a solução para a estaca vertical poderia ser utilizada sem grandes prejuízos. Com isso, os autores propuseram um método simples para calcular os deslocamentos, através do uso de apenas fórmulas e tabelas construídas para estacas verticais, obtendo boa concordância com resultados experimentais da literatura.

Outro sistema de fundação utilizado em obras civís são os “radiers estaqueados”, em cujas subestruturas são combinados dois elementos de fundação. O primeiro, compreende um tipo de fundação rasa denominada radier, o qual consiste em uma grande laje de concreto armado que recebe as cargas da superestutura e descarrega diretamente no solo em que se encontra apoiado. Apresenta comportamento mecânico equivalente ao de uma placa apoiada continuamente em uma base elástica. As estacas são acopladas com o intuito de diminuir os recalques diferenciais do radier. Entretanto, os modelos de cálculo convencionais não preveem essa contribuição, levando a um super-dimensionamento dessa estrutura. Diante desse cenário, alguns pesquisadores propuseram modelos numéricos que avaliam o comportamento desse conjunto.

No estudo de Poulos (1968b), que considera a interação placa-estaca-solo, analisa-se a influência que o capeamento rígido exerce sobre o deslocamento das estacas sujeitas ao carregamento axial, tendo-as dispostas ao longo da circunferência. Buterfield & Banerjee (1971) ampliam a referida formulação para capeamentos rígidos de qualquer geometria, considerando a compressibilidade radial da estaca, no entanto, verificam que este último parâmetro pouco influencia nas análises.

Hain & Lee (1978) propõem uma formulação, na qual o método dos elementos finitos é empregado em conjunto com as soluções de Mindlin, para realizar o estudo de um grupo de estacas sob capeamento flexível, cuja análise considerou a interação completa entre a placa, grupos de estacas e o solo. Este último pode ser tratado como um material elástico linear ou um material elástico que tem seu módulo de elasticidade variando com a profundidade. O MEF é utilizado para modelar as placas, bem como na análise do solo não-homogêneo. A referida formulação desenvolvida foi comparada com as medições reais de dois edifícios localizados em países diferentes, tendo-se obtido resultados satisfatórios que a validaram.

Em Paiva (1993), estuda-se todas as interações envolvidas no conjunto placa-estaca-solo via MEC. A estaca é considerada como um único elemento de contorno, a placa pode ser considerada tanto rígida quanto flexível e os elementos de contorno triangulares são usados para modelar a interface placa-solo. Todo o sistema de equações é escrito em torno dos nós que discretizam a superfície do solo.

Segundo Brebbia el al. (1984), o emprego das soluções fundamentais de Mindlin no método dos elementos de contorno foi apresentado em Nakaguma (1979). Neste trabalho, é utilizada uma formulação direta do método, na qual as incógnitas do problema já são as grandezas de interesse. Como a solução fundamental de Mindlin considera as forças na superfície livre do solo nulas, não é necessária a discretização desta superfície; promovendo, assim, significativo ganho computacional. Dessa forma, evidencia-se a potencialidade do MEC para aplicações nestes tipos de problemas de meio semi-infinito. Há, ainda, a análise de problemas geotécnicos, inclusive, de solo estrutura.

A combinação entre diferentes métodos numéricos tem sido uma solução encontrada por diversos autores das áreas do conhecimento. O objetivo desse acoplamento é aproveitar as vantagens que cada um dos métodos tem a oferecer. Em problemas que envolvem certo grau de complexidade, geralmente, as partes envolvidas têm naturezas diferentes; sendo, portanto, melhor representadas por um determinado método numérico.

A combinação MEC/MEF foi apresentada pela primeira vez na engenharia elétrica, em McDonald e Wexler (1972). A mesma combinação foi utilizada por Chen e Mei (1974), em mecânica dos fluidos, e por Zienkiewicz et al. (1977), em mecânica dos sólidos. Na engenharia estrutural e geotécnica, as quais enfrentam problemas de domínios finitos imersos em domínios infinitos ou semi-infinitos, o acoplamento entre o método dos elementos de contorno (MEC) pode ser feito com o método dos elementos finitos (MEF) ou com o método das diferenças finitas (MDF).

Pode-se destacar inúmeros trabalhos que utilizam o MEC/MDF para analisar problemas de solo estrutura, dentre os quais: Buterfield e Banerjee (1971), Poulos e Davis (1980), AI et al. (2011), Rosa (2013). Outros trabalhos, por outro lado, tratam o mesmo problema com o acoplamento MEC/MEF, quais sejam, Vallabhan et al (1984), Beer (1986), Paula et al. (1987), Coda (1993), Almeida (2003), Ribeiro (2005), Ramos (2012) e Luamba (2018).

Cumpre acrescer que, no Brasil, o método de Aoki e Lopes (1975) é um dos mais utilizados, por engenheiros, para as análises de estacas. Neste, os recalques do solo estratificado são calculados por meio da solução de Mindlin (1936), em que pese o solo não seja um material elástico, homogêneo e isótropo. Para levar em conta a estratificação do solo, é utilizado o procedimento de Steinbrenner (1934). Diversos trabalhos acadêmicos se basearam no referido método para análise de problemas de solo estrutura, a exemplo de Moura (1995), Reis (2000), Iwamoto (2000), Colares (2006), Araujo (2009), Mota (2009).

A aplicação da solução fundamental de Mindlin no MEC possui limitações, visto que a sua formulação foi desenvolvida considerando o meio elástico, homogêneo, isotrópico e livre

de forças de superfície. Devido a isso, dentro da teoria da elasticidade, não é possível a introdução de solos estratificados, mesmo com a consideração da hipótese de Steinbrenner (1934). Uma forma de solucionar esse problema é empregar a solução fundamental de Kelvin, que possibilita a compatibilização e o equilíbrio entre as superfícies de fronteira e, assim, obedece a continuidade do meio. Entre os autores que utilizaram a referida alternativa em suas pesquisas, destacam-se: Banerjee (1976), Banerjee e Davies (1977), Maier e Novati (1987), Almeida (2003), Ribeiro (2005) e Ribeiro (2009).

No Departamento de Engenharia de Estruturas, da Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, foram desenvolvidos significativos trabalhos na linha de pesquisa de interação solo estrutura via MEC/MEF. Dentre eles, serão comentados os que forem considerados convenientes ao desenvolvimento deste trabalho.

Ferro (1993) utilizou uma formulação MEC/MEF para a análise da interação estrutura-estaca-solo. A estaca foi considerada com um elemento finito de barra, enquanto o solo foi modelado pelo MEC, utilizando as soluções fundamentais de Mindlin. A superestrutura foi modelada pelo software de elementos finitos COSMOS/M (1988). Os resultados dos deslocamentos e forças de interação foram comparados com testes experimentais e outras formulações, ao que obteve-se bons resultados. Posteriormente, Ferro (1999) expande sua formulação para a análise estaca-solo, passando a considerar a não linearidade física do solo na interface com a estaca.

Mendonça (1997) empregou a formulação híbrida MEC/MEF para a análise da interação placa-estaca-solo. A placa foi modelada pelos elementos finitos DKT (Discrete Kirchhoff Theory) e HSM (Hybrid Stress Model). A estaca foi representada por apenas um elemento, com 3 pontos nodais, tendo sua tensão cisalhante aproximada por um polinômio do segundo grau e a tensão normal na sua base inferior constante. O solo, por sua vez, foi modelado por elementos de contorno como um meio elástico semi-infinito e a solução fundamental de Mindlin. Os resultados apresentaram boa convergência quando comparados com outros métodos, principalmente com o de Paiva (1993).

Matos Filho (1999) apresentou alguns tipos de formulações numéricas para a análise da interação estaca-solo com ou sem blocos de capeamento rígidos, adotando cargas verticais, horizontais e momentos. A estaca é modelada pelo método das diferenças finitas (MDF) ou pelo MEF. Quando modelada pelo MEF, os deslocamentos e forças de interação foram representadas por várias funções polinomiais, chegando-se a um elemento finito final considerado eficiente. O elemento é composto por quatro nós e quatorze parâmetros nodais,

sendo doze de translações (X_1, X_2 e X_3) e dois de rotação no topo da estaca, a fim de permitir a consideração do momento fletor. O solo é modelado como sendo um meio contínuo, elástico-linear, semi-infinito, isótropo e homogêneo.

Almeida (2003), por sua vez, fez uma análise da interação superestrutura-subestrutura-solo. A subestrutura e a superestrutura foram modeladas pelo MEF, usando elementos reticulares e laminados. O solo foi modelado pelo MEC e considerado um meio não homogêneo, com uma camada de apoio indeslocável a uma distância conhecida. Para isso, as soluções fundamentais de Kelvin foram utilizadas e os resultados obtidos foram considerados satisfatórios.

Em Ribeiro (2005) é dada continuidade ao trabalho de Almeida (2003), adicionando-se ao código computacional um bloco tridimensional acoplado nas estacas. É utilizada a técnica das sub-regiões para acoplá-lo ao sistema final de equações. Por fim, analisa-se a interação do conjunto bloco-estaca-solo com um edifício tridimensional modelado pelo MEF. Os resultados, ao serem comparados com o programa Ansys e publicações de outros autores, demonstraram boa consistência.

Oshima (2004) expande a formulação desenvolvida por Matos Filho (1999) para analisar estacas inclinadas isoladas, grupo de estacas inclinadas e grupo de estacas inclinadas acopladas com uma placa rígida no topo. Nesse caso, consideram-se forças horizontais, verticais e momento fletor aplicados no topo da estaca. As forças de interação são aproximadas por funções polinomiais cúbicas nas direções transversais. Já para as forças de interação na direção longitudinal da estaca é utilizado um polinômio quadrático, além de se assumir uma tensão normal constante atuando na base (último nó). Neste trabalho, pode-se perceber que, para estacas inclinadas sujeitas a carregamentos verticais ou horizontais, o comportamento é muito similar ao das estacadas verticais, pois os deslocamentos são poucos influenciados pelo ângulo de inclinação.

Luamba (2018), por seu turno, fez uma análise tridimensional de problemas de interação solo-estrutura com o acoplamento MEC/MEF. Os elementos de estacas são modelados por vários elementos finitos de viga com dois nós e dez parâmetros nodais; as placas (radiers, sapatas e bloco de fundações) são modeladas por elementos finitos de casca plana, permitindo a consideração dos efeitos de flexão e membrana. O solo é modelado pelo MEC, utilizando a solução fundamental de Mindlin e considerado um meio homogêneo, elástico linear e isotrópico. Promove-se análises de grupos de estacas com capeamento rígido e com um radier estaqueado flexível. Uma das maiores contribuições deste trabalho é o desenvolvimento de um

código computacional em que a estaca é modelada através de vários elementos finitos de viga tridimensional. Diverge, portanto, dos trabalhos anteriores dessa linha de pesquisa que consideraram a estaca como um único elemento finito de viga com quatro nós.

A temática acerca da análise numérica de estacas continua sendo de grande relevância atualmente, tanto assim que trabalhos com diversas propostas de formulações foram e continuam a ser desenvolvidos no mundo inteiro.

Ai et al. (2011) apresentam como solução fundamental para o solo o método de elemento de camada, o qual é obtido através da abordagem de autovalor, após a aplicação de uma transformada de Laplace-Hankel. As equações governantes são resolvidas analiticamente. Este método possui a vantagem de não existirem funções exponenciais positivas e redução da operação da matriz, o que proporciona maior eficiência e estabilidade computacional.

Ai et al. (2013) realizam a análise estática de estacas isoladas carregadas lateralmente em solos transversalmente isotrópicos e de múltiplas camadas. A interação estaca-solo é modelada pelo MEC. A estaca é modelada pelo método das diferenças finitas (MDF), utilizando a viga de Euler-Bernoulli. As camadas de solo são representadas pelo seu método de elemento de camada.

Uma discussão detalhada sobre o caráter estratificado do solo revela que as camadas rasas desempenham um papel preponderante na influência do comportamento das estacas em comparação com as camadas profundas, o que significa que o reforço nos solos rasos irá efetivamente melhorar o desempenho das estacas. Em resumo, o comportamento da estaca carregada lateralmente é na verdade uma ação combinada dos seguintes fatores: a isotropia transversal; o caráter estratificado do solo; e o tamanho da estaca e suas propriedades físicas.

Ai & Cheng (2013) realizam a análise estática de estacas isoladas carregadas verticalmente em solos transversalmente isotrópicos e de múltiplas camadas. Baseado na solução analítica de elemento de camada, um estudo paramétrico da diferença de rigidez entre as direções horizontal e vertical de solos transversalmente isotrópicos mostra que a rigidez da cabeça de estacas pode ser aumentada com o aumento da razão módulo do solo transversalmente isotrópico.

Ai & Feng (2014) estendem o estudo de AI et al. (2013) para um grupo de estacas carregadas lateralmente e engastadas no topo por um bloco de capeamento rígido. Os resultados obtidos foram comparados com os da literatura, ao que se pode concluir pela precisão do estudo então desenvolvido.

Ghasemzadeh et al. (2018) realizam um estudo da interação estaca-solo-estaca para grupos de estacas inclinadas sob capeamento rígido. O método dos elementos finitos é

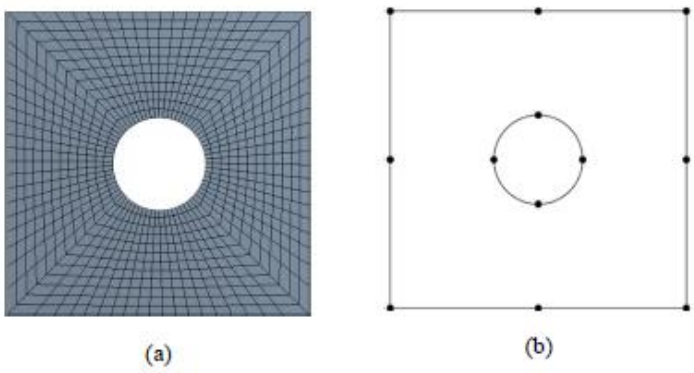
empregado via software comercial Abaqus. O contato entre a estaca e o solo é considerado de duas formas. Na primeira, é considerada a aderência perfeita, sem deslizamentos. Na segunda forma, é utilizado um modelo de Moher Coulomb para analisar o efeito da plastificação do solo nos deslocamentos.

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é um método numérico de resolução de equações integrais escritas no contorno que apresenta grande eficiência e precisão em análises de problemas de meios infinitos, semi-infinitos e de concentração de tensão (mecânica da fratura). Na engenharia de Estruturas, esse método é utilizado para resolver problemas de valores de contorno (Anexo A). Para isso, transformam-se as equações diferenciais governantes do problema em equações integrais por meio do Teorema da Divergência do cálculo vetorial.

Uma das mais importantes características do método é que geralmente só o contorno precisa ser discretizado e não o domínio, como é feito no MEF. Com isso, em face de problemas de domínio bidimensional apenas será preciso representar a linha (unidimensional) do contorno. Assim, pode-se concluir que há a diminuição de uma dimensão na análise do problema, o que, por conseguinte, reduz o custo computacional para a geração de malhas e sistemas de equações. A Figura 3-1 ilustra as diferenças entre as malhas do MEF e do MEC.

Figura 3-1-(a) Malha do MEF (b) Malha do MEC



Fonte: Luamba (2018)

Em problemas de domínios de grandes dimensões, em que a discretização em elementos finitos seria muito custosa, o MEC surge como uma alternativa de menor custo computacional. Isso fez com que seu uso fosse difundido na comunidade científica, principalmente em análises de meios infinitos ou semi-infinitos.

Apesar de toda a formulação ser proposta em relação ao contorno do problema, é possível calcular os valores dos campos mecânicos no domínio usando-se, novamente, as equações integrais e os valores obtidos no contorno. Os resultados fornecidos são de alta precisão.

Em contrapartida, a construção das matrizes (não-esparsas), integrais numéricas de núcleos singulares e resolução do sistema de equações pode ser custosa computacionalmente. Sendo este um dos motivos que acabam por dificultar a popularização do método. Contudo, devido ao crescente avanço computacional das últimas décadas, o MEC tornou-se uma alternativa mais viável (Andrade, 2017).

3.1. Formulação integral de contorno

Seja a equação de equilíbrio governante do problema:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \tag{3.1}$$

Segundo o Teorema da Reciprocidade Betti (1872), dado dois estados, (I) e (II), submetidos a diferentes estados de tensões que provocam dois diferentes campos de deslocamentos, o trabalho obtido pelas tensões do estado (I) sobre as deformações do estado (II) e das tensões do estado (II) sobre as deformações do estado (I) são iguais. Como se segue:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}^{(\mathrm{I})} \varepsilon_{ij}^{(II)} d\Omega = \int_\Omega \sigma_{ij}^{(\mathrm{II})} \varepsilon_{ij}^{(I)} d\Omega \tag{3.2}$$

Com Ω sendo o domínio do problema.

Da relação deformação-deslocamento (A.20):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)}{2} = u_{i,j} \tag{3.3}$$

Substituindo em (3.2):

$$\int_\Omega \sigma_{ij}^{(\mathrm{I})} u_{i,j}^{(II)} d\Omega = \int_\Omega \sigma_{ij}^{(\mathrm{II})} u_{i,j}^{(I)} d\Omega \tag{3.4}$$

Do Teorema da Divergência:

$$\int_\Omega \sigma_{ij} u_{i,j} d\Omega = \int_\Gamma \sigma_{ij} n_j u_i d\Gamma - \int_\Omega \sigma_{ij,j} u_i d\Omega \tag{3.5}$$

Substituindo em (3.4):

$$\int_\Gamma \sigma_{ij}^{(I)} n_j u_i^{(II)} d\Gamma - \int_\Omega \sigma_{ij,j}^{(I)} u_i^{(II)} d\Omega = \int_\Gamma \sigma_{ij}^{(II)} n_j u_i^{(I)} d\Gamma - \int_\Omega \sigma_{ij,j}^{(II)} u_i^{(I)} d\Omega \tag{3.6}$$

Sabendo que:

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \tag{3.7}$$

Da Equação de equilíbrio (3.1):

$$\sigma_{ij,j} = -b_i \tag{3.8}$$

Então:

$$\int_{\Gamma} p_i^{(I)} u_i^{(II)} d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{(I)} u_i^{(II)} d\Omega = \int_{\Gamma} p_i^{(II)} u_i^{(I)} d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{(II)} u_i^{(I)} d\Omega \tag{3.9}$$

Para o prosseguimento da demonstração, chamemos o estado (I) de problema real e nas equações subsequentes os sobrescritos deixam de existir. O estado (II) é agora chamado de problema fundamental, podendo ser assumido qualquer um do Anexo B. É utilizado sobrescrito (*) para escrever tais campos. Empregando essas novas nomenclaturas, a expressão (3.9) é reescrita da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} p_i u_i^{(*)} d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^{(*)} d\Omega = \int_{\Gamma} p_i^{(*)} u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{(*)} u_i d\Omega \tag{3.10}$$

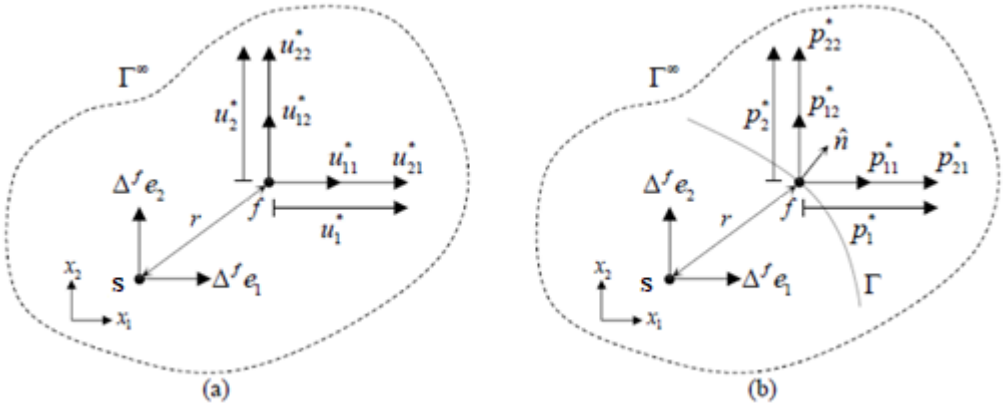
No problema fundamental, a componente b_i^* da força de volume corresponde à força concentrada aplicada no meio semi-infinito. Esta força é representada pela função delta de Dirac aplicada sobre um ponto arbitrário "s", dito “source point”, ou ponto fonte, na qual o componente pode agora ser representada por:

$$b_i^* = \Delta^s e_i \tag{3.11}$$

Onde e_i é o versor na direção i .

A variável $u_i^{(*)}$ presente na expressão (3.10) representa o deslocamento na direção i de um ponto campo "f", localizado a uma distância “r” do ponto fonte “s”, provocado pela aplicação da força unitária concentrada na direção e_i do problema fundamental. Os deslocamentos gerados possuem parcelas provenientes de cada direção e_i de aplicação da força concentrada unitária, conforme Figura 3-2.

Figura 3-2- (a) Componentes dos deslocamentos (b) Componentes das forças de superfície



Fonte: Adaptado Andrade (2017)

A partir da Figura 3-2 (a) é possível ver como é dada à composição dos deslocamentos em cada direção no plano. A composição para os deslocamentos no espaço é análoga, assim como para as forças de superfície $p_i^{(*)}$. Tais grandezas podem ser obtidas por meio das expressões (3.12) e (3.13).

$$u_i^{(*)} = u_{ji}^{(*)} e_j \tag{3.12}$$

$$p_i^{(*)} = p_{ji}^{(*)} e_j \tag{3.13}$$

Onde j é a direção da aplicação da força unitária, i a direção do deslocamento provocado e e_j é o versor na direção j.

As componentes $u_{ji}^{(*)}$ e $p_{ji}^{(*)}$ são obtidas por meio das soluções fundamentais mostradas no ANEXO B.

Substituindo as expressões (3.11), (3.12) e (3.13) na expressão (3.10), obtém-se:

$$\left(\int_\Gamma p_i u_{ji}^{(*)} d\Gamma\right) e_j + \left(\int_\Omega b_i u_{ji}^{(*)} d\Omega\right) e_j = \left(\int_\Gamma p_{ji}^{(*)} u_i d\Gamma\right) e_j + \left(\int_\Omega \Delta^s u_i d\Omega\right) e_i \tag{3.14}$$

Fazendo-se uso da propriedade do delta de Dirac e realizando operações indiciais na expressão (3.14), chega-se a:

$$\int_\Gamma p_i u_{ji}^{(*)} d\Gamma + \int_\Omega b_i u_{ji}^{(*)} d\Omega = \int_\Gamma p_{ji}^{(*)} u_i d\Gamma + u_j(s) \tag{3.15}$$

$u_j(s)$ é o deslocamento do ponto fonte na direção j, sendo possível determiná-lo em todo o domínio analisado, desde que: sejam conhecidos os deslocamentos e forças de superfície em todo o contorno, e as forças de volume em todo o domínio.

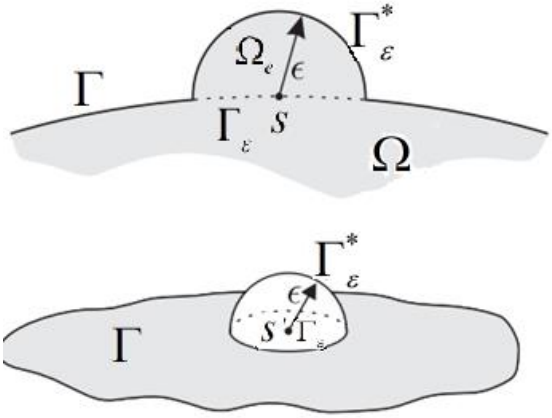
Tal expressão (3.15) é conhecida como identidade Somigliana, ou equação integral singular, devido ao processo de singularidade que ocorre quando a distância “r” entre o ponto fonte s e o ponto campo f (“field point”) tende a zero.

3.2. Formulações Integrais para pontos no contorno

A determinação do deslocamento u_i no domínio Ω por meio da identidade Somigliana requer o conhecimento dos campos mecânicos no contorno. Desse modo, deve-se buscar uma equação integral que permita o cálculo dessas grandezas, pois a expressão (3.15) é válida apenas para s no domínio. Assim, considera-se um domínio fictício semi-esférico Ω_ε de raio ε ao redor do ponto fonte s posicionado sobre o contorno, conforme Figura 3-3. Com isso, a

identidade Somigliana pode ser aplicada, uma vez que o ponto fonte faz parte do domínio. Nesse contexto, é aplicado o processo limite, no qual o raio ε tende a zero. Assim sendo, manipulações algébricas apresentadas neste tópico são executadas de maneira que a incógnita do domínio associada ao ponto fonte se torne incógnita do contorno gerando a equação integral desejada, pois os deslocamentos e forças de superfície conhecidos e incógnitos pertencem ao contorno.

Figura 3-3- Domínio fictício



Fonte: Adaptado Alatawi (2016).

As expressões obtidas para pontos sobre o contorno dependem do tipo de solução fundamental empregada, por essa razão, nesta seção serão demonstradas tanto para o problema fundamental de Kelvin, quanto para o problema fundamental de Mindlin.

3.2.1. Problema fundamental de Kelvin

A realização do processo limite é feita na identidade Somigliana (3.15) considerando o novo domínio igual a $\Omega+\Omega_\varepsilon$ e novo contorno igual a $\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma^*_\varepsilon$, conforme Figura 3-3. Com isso, a Expressão(3.15) pode ser reescrita como:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma^*_\varepsilon} p_i u^{(*)}_{ji} d\Gamma\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Omega+\Omega_\varepsilon} b_i u^{(*)}_{ji} d\Omega\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma^*_\varepsilon} p^{(*)}_{ji} u_i d\Gamma\right)+u_j(s) \qquad (3.16)$$

Onde Γ é o contorno inicial, Γ_ε é o trecho do contorno inicial subtraído devido à adição do contorno Γ^*_ε da esfera.

As integrais da expressão (3.16) serão analisadas separadamente, examinando o comportamento de cada termo quando ε tende a zero, de maneira que seja possível tratar eventuais singularidades.

Inicialmente, separa-se a primeira integral do lado esquerdo da expressão (3.16), como se segue:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_\varepsilon^*} p_i u_{ji}^{(*)} d\Gamma\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} p_i u_{ji}^{(*)} d\Gamma\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Gamma_\varepsilon^*} p_i u_{ji}^{(*)} d\Gamma\right) \tag{3.17}$$

No limite temos:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} p_i u_{ji}^{(*)} d\Gamma\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Gamma_\varepsilon^*} p_i u_{ji}^{(*)} d\Gamma\right) = \int_{\Gamma} p_i u_{ji}^{(*)} d\Gamma + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Gamma_\varepsilon^*} p_i u_{ji}^{(*)} d\Gamma\right) \tag{3.18}$$

Considerando a solução fundamental de Kelvin (Anexo B.1), a primeira integral do lado direito da expressão (3.18)pode ser avaliada como uma integral imprópria. Na parcela adicional, correspondente a segunda integral do lado direito da expressão (3.18), os valores das soluções fundamentais $u_{ji}^{(*)}$ (Eq. (B.14)) possuem singularidade de ordem $o\left(1/\varepsilon\right)$, enquanto o diferencial de contorno Γ_ε produz ε^2, resultando em:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Gamma_\varepsilon^*} p_i u_{ji}^{(*)} d\Gamma\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\varepsilon^2\right) = 0 \tag{3.19}$$

Ao analisar a integral com os termos de domínio da expressão (3.16), percebe-se que não há alteração no processo limite, pois, quando $\varepsilon \to 0$ o domínio fictício $\Omega_\varepsilon \to 0$ e o domínio do problema retorna a Ω, conforme pode ser visto na expressão (3.20).

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Omega+\Omega_\varepsilon} b_i u_{ji}^{(*)} d\Omega\right) = \int_{\Omega} b_i u_{ji}^{(*)} d\Omega \tag{3.20}$$

Por fim, a integral do segundo membro da expressão (3.16) é analisada da seguinte forma:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_\varepsilon^*} p_{ji}^{(*)} u_i d\Gamma\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} p_{ji}^{(*)} u_i d\Gamma\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Gamma_\varepsilon^*} p_{ji}^{(*)} u_i d\Gamma\right) \tag{3.21}$$

A primeira integral do lado direito no processo limite se comporta como uma integral imprópria e deve ser avaliada no sentido do Valor Principal de Cauchy (VPC). Já a segunda integral se comporta de maneira diferente, pois seu núcleo $p_{ji}^{(*)}$ apresenta uma singularidade forte de ordem $o\left(1/\varepsilon^2\right)$. Para regularizar esta integral, é utilizado o procedimento descrito em Aliabadi (2002), no qual é somado e subtraído o primeiro termo da expansão em série de Taylor dos deslocamentos sobre o ponto fonte, obtendo-se:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Gamma_\varepsilon^*} p_{ji}^{(*)} u_i d\Gamma\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Gamma_\varepsilon^*} p_{ji}^{(*)}\left[u_i(x)-u_i(s)\right] d\Gamma\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(u_i(s)\int_{\Gamma_\varepsilon^*} p_{ji}^{(*)} d\Gamma\right) \tag{3.22}$$

Na expressão (3.22), o primeiro termo do lado direito tende a zero, devido à condição de continuidade em deslocamentos exigida. No último termo da expressão (3.22), $u_i(s)$ é constante e pode sair da integral. Como a ordem de singularidade de $p_{ji}^{(*)}$ e do diferencial de contorno Γ_ε é a mesma $\left(1/\varepsilon^2\right)$, a expressão (3.22) resulta em:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\Gamma_\varepsilon^*} p_{ji}^{(*)} u_i d\Gamma\right) = \alpha_{ij}(s) u_i(s) \tag{3.23}$$

Onde $\alpha_{ij}(s)$ é o coeficiente de geometria do contorno.

No caso do ponto fonte estar situado em um contorno sem angulosidade (dito “smooth”), o coeficiente de geometria do contorno $\alpha_{ij}(s) = -\delta_{ij}/2$. Para os demais casos, pode-se recorrer a imposição de movimento de corpo rígido.

Com isso, substituindo os limites das integrais fornecidos pelas expressões (3.18), (3.19) , (3.20), (3.22) e (3.23) na expressão (3.16), obtém-se uma expressão geral para os deslocamentos:

$$C_{ij}(s) u_i(s) + \int_\Gamma^{VPC} p_{ji}^{(*)} u_i d\Gamma = \int_\Gamma p_i u_{ji}^{(*)} d\Gamma + \int_\Omega b_i u_{ji}^{(*)} d\Omega \tag{3.24}$$

Onde:

$$\begin{aligned} &C_{ij}(s) = \delta_{ij} \rightarrow \text{ Ponto fonte interno ao domínio;} \\ &C_{ij}(s) = \delta_{ij} + \alpha_{ij}(s) \rightarrow \text{ Ponto fonte sobre o contorno;} \\ &C_{ij}(s) = 0 \rightarrow \text{ Ponto fonte externo ao domínio.} \end{aligned} \tag{3.25}$$

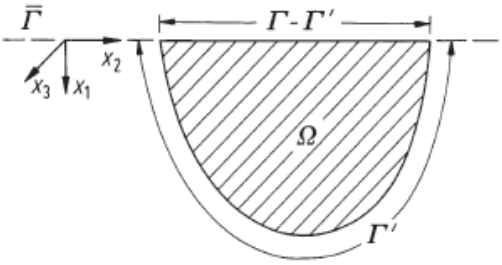
3.2.2. Problema Fundamental de Mindlin

A expressão Somigliana (3.15) sofre uma importante alteração quando aplicada à domínio semi-infinito. A parcela que envolve $p_{ij}^{(*)}$ desaparece, pois na solução fundamental de Mindlin (Anexo B.2) as forças de superfície são consideradas nulas quando em superfície que delimita o semi-espaço. Com isso, a identidade Somigliana para o meio semi-infinito pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\int_\Gamma p_i u_{ji}^{(*)} d\Gamma + \int_\Omega b_i u_{ji}^{(*)} d\Omega = u_j(s) \tag{3.26}$$

A expressão (3.26) também é válida para pontos fontes no contorno. Isso por que os núcleos $u_{ji}^{(*)}$ das integrais possuem singularidade de ordem $o(1/r)$ e o diferencial de contorno $d\Gamma$ é de ordem $o(r^2)$ em coordenadas esféricas. Com isso, quando $c=0$ (ver Anexo B.2), ambas as integrais da expressão (3.26) podem ser avaliadas no sentido usual, com a singularidade fraca removida.

Figura 3-4- Corpo com parte do seu contorno coincidindo com a superfície do meio semi-infinito.



Fonte: Brebbia et al. (1984).

Quando há a existência de um corpo no meio semi-infinito, em que parte do contorno desse corpo coincide com a superfície do espaço semi-infinito (Figura 3-4), a integral com essa parcela de contorno desaparece devido à solução fundamental empregada. Assim, a equação integral de deslocamentos é dada por:

$$u_j(s) = \int_\Gamma p_i u_{ji}^{(*)} d\Gamma + \int_\Omega b_i u_{ji}^{(*)} d\Omega - \int_{\Gamma'} p_{ij}^{(*)} u_i d\Gamma \tag{3.27}$$

Onde Γ' representa a parte do contorno Γ do corpo imersa, ou seja, quando $x_1 > 0$.

A análise do ponto fonte sobre o contorno Γ' do corpo é feita de forma equivalente ao do problema de Kelvin. Sabe-se que as soluções fundamentais de Mindlin são compostas por duas parcelas. A parcela complementar não apresenta comportamento singular, enquanto a parcela da solução fundamental de Kelvin apresenta exatamente as mesmas singularidades de sua formulação. Por essa razão, a seguinte equação geral para deslocamentos é obtida:

$$C_{ij}(s) u_j(s) = \int_\Gamma p_i u_{ji}^{(*)} d\Gamma + \int_\Omega b_i u_{ji}^{(*)} d\Omega - \int_{\Gamma'}^{VPC} p_{ij}^{(*)} u_i d\Gamma \tag{3.28}$$

Onde:

$$
\begin{aligned}
&C_{ij}(s) = \delta_{ij} \rightarrow \text{ Ponto fonte interno ao domínio;} \\
&C_{ij}(s) = \delta_{ij} \rightarrow \text{ Ponto fonte sobre a superfície livre;} \\
&C_{ij}(s) = \delta_{ij} + \alpha_{ij}(s) \rightarrow \text{ Ponto fonte sobre o contorno } \Gamma' \text{;} \\
&C_{ij}(s) = 0 \rightarrow \text{ Ponto fonte externo ao domínio.}
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

4. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos é o método numérico que possui aplicabilidade mais ampla, simples e eficiente em análise de estruturas, como pode ser visto pela gama de softwares comerciais disponíveis. Nada obstante, há casos práticos em que outros métodos numéricos oferecem desempenho superior, a exemplo do MEC na análise de domínios infinitos ou semi-infinitos.

O MEF é formulado a partir do tipo de grandeza de interesse adotada como parâmetro nodal, enquanto as demais grandezas são obtidas por meio das equações da elasticidade. Tal formulação pode se dar por modelos de equilíbrio, método dos deslocamentos, métodos híbridos ou métodos mistos.

Na formulação em deslocamentos, os parâmetros nodais a serem determinados são os deslocamentos no domínio, cuja aproximação de cada elemento é realizada de forma suave através das “funções de forma”. Quanto aos modelos de equilíbrio, promove-se uma distribuição suave e equilibrada das tensões no domínio de cada elemento, sendo as tensões os parâmetros nodais utilizados. Por fim, nos métodos híbridos e mistos, desenvolvem-se diversas formulações através de combinações de duas ou mais grandezas de interesse como parâmetros nodais, aproximadas no domínio de cada elemento. Oportunamente, cumpre esclarecer que, devido a maior simplicidade, versatilidade e facilidade de ser encontrado na literatura, o método dos deslocamentos será o único abordado neste trabalho.

A formulação do método poder ser obtida através dos princípios variacionais, resíduos ponderados ou Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Um princípio variacional é baseado em conceitos de energia e no cálculo variacional, no qual deve ser satisfeita a condição de estacionariedade de um funcional. No método dos resíduos ponderados, a formulação é obtida diretamente das equações diferenciais e condições de contorno do problema, sem a necessidade de um funcional. Nesta abordagem é possível fazer uma generalização do método devido a sua forte base matemática.

O PTV pode ser utilizado no desenvolvimento das formulações anteriores, como também pode ser utilizado de forma direta ao impor deslocamentos e deformações virtuais no corpo analisado, obrigando o trabalho externo e interno a serem iguais.

4.1. Formulação geral do MEF

É possível formular o método dos elementos finitos de forma geral através de princípios variacionais, utilizando o funcional que representa a energia potencial total, conforme desenvolvido nos trabalhos de Assan (1996), Assan (2003), Savassi (2016) e Soriano (2003).

O caráter aproximado do método exige que as grandezas de interesse sejam representadas por funções aproximadoras no domínio do elemento. As funções polinômios são geralmente escolhidas para essa aproximação. Quando utilizada uma formulação baseada em deslocamentos, ou seja, os parâmetros nodais e funções aproximadas são em relação aos deslocamentos, temos a seguinte função aproximadora para um determinado deslocamento:

$$u^e(x) = \phi_i^e v_i^e \tag{4.1}$$

Onde o sobrescrito "e" representa o elemento ϕ_i são as funções de interpolação ou funções de forma e v_i são os deslocamentos nodais do elemento.

As funções de forma ϕ_i^e devem ser linearmente independentes e devem satisfazer individualmente as condições de contorno, além de serem contínuas até o grau $m-1$, sendo m a ordem da maior derivada do funcional que será visto mais adiante.

Assumindo que podem existir deslocamentos em todos os eixos do espaço tridimensional, temos o seguinte vetor $\{\mathbf{u}^e\}$ que contém as funções aproximadoras:

$$\{\mathbf{u}^e\} = \begin{Bmatrix} u^e \\ \mathrm{v}^e \\ w^e \end{Bmatrix} \tag{4.2}$$

O vetor de funções de deslocamentos $\{\mathbf{u}^e\}$ é obtido combinando a expressão (4.1) com (4.2), como se segue:

$$\{\mathbf{u}^e\} = \left[\mathbf{N}^e\right]\{\mathbf{v}^e\} \tag{4.3}$$

Onde $\left[\mathbf{N}^e\right]$ representa a matriz de funções de forma e $\{\mathbf{v}^e\}$ o vetor de deslocamentos nodais.

A equação (A.24) que relaciona tensão com deformação pode ser escrita de forma matricial da seguinte maneira:

$$\{\boldsymbol{\sigma}^e\} = \left[\mathbf{D}^e\right]\{\boldsymbol{\varepsilon}^e\} \tag{4.4}$$

Onde $\{\boldsymbol{\sigma}^e\}$ é o pseudo-vetor de tensões, $\{\boldsymbol{\varepsilon}^e\}$ o pseudo-vetor de deformações e $[\mathbf{D}^e]$ a pseudo-matriz constitutiva que contém parâmetros elásticos do material.

Para materiais isotrópicos em comportamento linear elástico, a matriz $[\mathbf{D}^e]$ depende apenas do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν do material.

As deformações ε do material em função dos deslocamentos é expressa em (A.20), reescrevendo-a para notação matricial, temos:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^e\} = [\mathbf{L}^e]\{\mathbf{u}^e\} \tag{4.5}$$

Onde $[\mathbf{L}^e]$ é uma matriz de operadores diferenciais, podendo variar de acordo com o problema.

Para o caso geral tridimensional, por exemplo, a expressão (4.5) é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u^e \\ v^e \\ w^e \end{Bmatrix} \tag{4.6}$$

Substituindo a expressão (4.3) em (4.5), obtém-se:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^e\} = [\mathbf{L}^e][\mathbf{N}^e]\{\mathbf{v}^e\} = [B^e]\{\mathbf{v}^e\} \tag{4.7}$$

Onde:

$$[B^e] = [\mathbf{L}^e][\mathbf{N}^e] \tag{4.8}$$

Sabendo-se que a energia interna de deformação é dada por:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \{\boldsymbol{\sigma}^e\}^T \{\boldsymbol{\varepsilon}^e\}\, dV = \frac{1}{2}\int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}^e\}^T \{\boldsymbol{\sigma}^e\}\, dV \tag{4.9}$$

A energia potencial das forças volumétricas $\{\mathbf{b}\}$ e forças externas $\{\mathbf{p}\}$ é expressa por:

$$\Omega = -\int_V \{\mathbf{u}^e\}^T \{\mathbf{b}\}\, dV - \int_S \{\mathbf{u}^e\}^T \{\mathbf{p}\}\, dS \tag{4.10}$$

Onde V e S são o volume do elemento e a superfície de aplicação das cargas, respectivamente.

A energia potencial total é obtida somando (4.9) com (4.10), resultando no funcional Π, como se segue:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \left\{\boldsymbol{\varepsilon}^e\right\}^T \left\{\boldsymbol{\sigma}^e\right\} dV - \int_V \left\{\mathbf{u}^e\right\}^T \left\{\mathbf{b}\right\} dV - \int_S \left\{\mathbf{u}^e\right\}^T \left\{\mathbf{p}\right\} dV \tag{4.11}$$

Sabendo que a condição de estacionariedade do funcional energia potencial total é também condição de mínimo, a primeira variação do funcional deve ser nula e a segunda variação positiva. Impondo-se a nulidade da primeira variação do funcional (4.11), obtém-se:

$$\delta\Pi = \int_V \left\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}^e\right\}^T \left\{\boldsymbol{\sigma}^e\right\} dV - \int_V \left\{\delta\mathbf{u}^e\right\}^T \left\{\mathbf{b}\right\} dV - \int_S \left\{\delta\mathbf{u}^e\right\}^T \left\{\mathbf{p}\right\} dV = 0 \tag{4.12}$$

$$\int_V \left\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}^e\right\}^T \left\{\boldsymbol{\sigma}^e\right\} dV = \int_V \left\{\delta\mathbf{u}^e\right\}^T \left\{\mathbf{b}\right\} dV + \int_S \left\{\delta\mathbf{u}^e\right\}^T \left\{\mathbf{p}\right\} dV \tag{4.13}$$

A expressão (4.13) mostra que os trabalhos interno e externo são iguais.

As variações das incógnitas são obtidas a partir da variação dos deslocamentos nodais $\left\{\delta\mathbf{v}^e\right\}$ e são expressas da seguinte forma:

$$\left\{\delta\mathbf{u}^e\right\} = \left[\mathbf{N}^e\right]\left\{\delta\mathbf{v}^e\right\} \tag{4.14}$$

$$\left\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}^e\right\} = \left[B^e\right]\left\{\delta\mathbf{v}^e\right\} \tag{4.15}$$

Substituindo (4.14) e (4.15) em (4.13), tem-se:

$$\int_V \left\{\delta\mathbf{v}^e\right\}^T \left[B^e\right]^T \left\{\boldsymbol{\sigma}^e\right\} dV = \int_V \left\{\delta\mathbf{v}^e\right\}^T \left[\mathbf{N}^e\right]^T \left\{\mathbf{b}\right\} dV + \int_S \left\{\delta\mathbf{v}^e\right\}^T \left[\mathbf{N}^e\right]^T \left\{\mathbf{p}\right\} dV \tag{4.16}$$

Como as variações $\left\{\delta\mathbf{v}^e\right\}$ podem ser quaisquer, obtém-se:

$$\int_V \left[B^e\right]^T \left\{\boldsymbol{\sigma}^e\right\} dV = \int_V \left[\mathbf{N}^e\right]^T \left\{\mathbf{b}\right\} dV + \int_S \left[\mathbf{N}^e\right]^T \left\{\mathbf{p}\right\} dV \tag{4.17}$$

As tensões podem ser substituídas pelas deformações, conforme (4.4), as quais, por sua vez, podem ser substituídas pelos deslocamentos nodais, conforme (4.7). Portanto, substituindo (4.4) e (4.7) em (4.17), tem-se:

$$\left(\int_V \left[B^e\right]^T \left[\mathbf{D}^e\right]\left[B^e\right] dV\right)\left\{\mathbf{v}^e\right\} = \int_V \left[\mathbf{N}^e\right]^T \left\{\mathbf{b}\right\} dV + \int_S \left[\mathbf{N}^e\right]^T \left\{\mathbf{p}\right\} dV \tag{4.18}$$

A expressão (4.18) é comumente encontrada na literatura na forma compacta:

$$\left[\mathbf{k}^e\right]\left\{\mathbf{v}^e\right\} = \left\{\mathbf{f}^e\right\} \tag{4.19}$$

Onde:

$$\left[\mathbf{k}^e\right] = \int_V \left[B^e\right]^T \left[\mathbf{D}^e\right]\left[B^e\right] dV \tag{4.20}$$

$$\left\{\mathbf{f}^{\mathbf{e}}\right\} = \int_V \left[\mathbf{N}^e\right]^T \left\{\mathbf{b}\right\} dV + \int_S \left[\mathbf{N}^e\right]^T \left\{\mathbf{p}\right\} dS \tag{4.21}$$

O vetor $\left\{\mathbf{f}^{\mathbf{e}}\right\}$ da expressão (4.19) e (4.21) é conhecido como vetor de cargas nodais equivalentes, pois transforma carregamentos ao longo do domínio do elemento em carregamentos nodais equivalentes. A matriz $\left[\mathbf{k}^e\right]$ da expressão (4.19) e (4.20) é conhecida como matriz de rigidez do elemento finito, pois relaciona os deslocamentos nodais com as forças nodais.

Lembrando que, até aqui, foram estudadas as expressões para um único elemento finito. Para que possa ser considerada a contribuição de todos os elementos finitos de uma estrutura em uma análise geral, é preciso levar em conta a contribuição das matrizes de rigidez de cada elemento. Nesta senda, faz-se necessário definir um único vetor geral de deslocamentos $\left\{u\right\}$, que contenha todos os deslocamentos nodais de todos os elementos finitos, e um único vetor de forças $\left\{\mathbf{F}\right\}$. A contribuição de cada matriz de rigidez (elemento) em uma matriz de rigidez geral $\left[K\right]$ é feita nas posições nodais correspondentes. Enfim, tem-se o seguinte sistema:

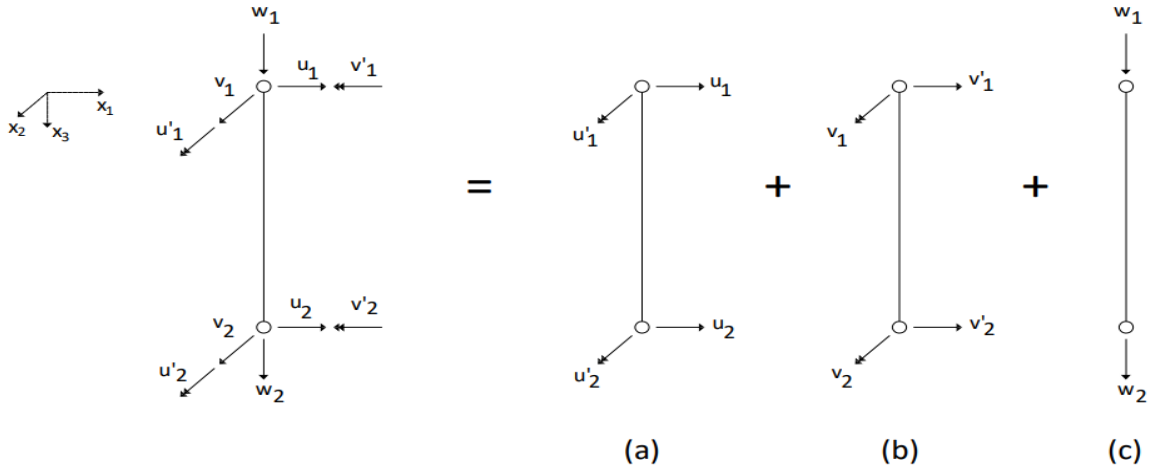
$$\left[\mathbf{K}\right]\left\{u\right\} = \left\{\mathbf{F}\right\} \tag{4.22}$$

Para resolver este sistema é preciso aplicar as condições de contorno em forças e deslocamentos. Como resultado têm-se os valores de todos os deslocamentos nodais, que são usados para determinar o restante das forças nodais incógnitas (reações de apoio). Por fim, com os vetores de deslocamentos e forças nodais conhecidos é possível voltar em cada elemento e determinar quaisquer grandezas de interesse.

4.2. Elemento finito de pórtico tridimensional

A estaca deste trabalho será modelada como um elemento finito de pórtico tridimensional. Sua discretização é feita por um elemento unidimensional e é representada por seu eixo baricêntrico. O elemento é formado por dois nós, tendo cinco graus de liberdade por nó (três translações e dois giros), totalizando dez graus de liberdade. Vale destacar que a rigidez à torção foi desprezada e, portanto, o grau de liberdade referente ao giro no eixo longitudinal foi desconsiderado. Como resultado, têm-se o seguinte elemento finito e parâmetros nodais:

Figura 4-1-Decomposição do elemento
(a) Elemento de viga plano x_1x_3 (b) Elemento de viga plano x_2x_3 (c)Elemento de treliça



Fonte: Elaboração do autor (2020)

A fim de facilitar a compreensão, conforme pode ser visto na Figura 4-1, o elemento de pórtico tridimensional pode ser dividido em três elementos já conhecidos: duas vigas e uma treliça. As vigas se encontram em planos distintos, sendo uma no plano x_1x_3 e a outra no plano x_2x_3.

Os deslocamentos são aproximados por funções polinomiais. O grau do polinômio é determinado de acordo com o número de parâmetros nodais do elemento. Para o elemento de viga, por exemplo, têm-se quatro parâmetros nodais e o seguinte polinômio de grau 3 é utilizado:

$$v(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \tag{4.23}$$

Os coeficientes a_i são determinados através das condições de contorno:

$$\begin{aligned}
&v(0) = v_1 \rightarrow a_1 = v_1 \\
&v'(0) = v_1' \rightarrow a_2 = v_1' \\
&v(l) = v_2 \rightarrow a_3 = \frac{3(v_2 - v_1)}{l^2} - \frac{v_2' + 2v_1'}{l} \\
&v'(l) = v_2' \rightarrow a_4 = \frac{2(v_1 - v_2)}{l^3} + \frac{v_1' + v_2'}{l^2}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

A expressão (4.23) resulta em:

$$v(x) = v_1 + v_1'x + \left[\frac{3(v_2 - v_1)}{l^2} - \frac{v_2' + 2v_1'}{l}\right]x^2 + \left[\frac{2(v_1 - v_2)}{l^3} + \frac{v_1' + v_2'}{l^2}\right]x^3 \tag{4.25}$$

Conforme (4.3), é preferível escrever a função aproximadora em função dos parâmetros nodais, então a expressão (4.25) é reescrita adotando-se também a coordenada adimensional $\xi = x / l$ com intervalo [0,1], como se segue:

$$v(\xi) = \phi_1(\xi)\,\mathrm{v}_1 + \phi_2(\xi)v_1^{'} + \phi_3(\xi)v_2 + \phi_4(\xi)v_2^{'} \tag{4.26}$$

Onde as funções de forma ϕ_i são:

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ \phi_2(\xi) &= (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)l \\ \phi_3(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ \phi_4(\xi) &= (\xi^3 - \xi^2)l \end{aligned} \tag{4.27}$$

Cumpre observar que as funções de forma, ou suas derivadas, são unitárias no ponto onde se determina o parâmetro nodal que a acompanha, e nulas no outro ponto, como pode ser visto na expressão seguinte:

$$\begin{aligned} v(0) &= v_1 \rightarrow \phi_1(0) = 1 \\ v'(0) &= v_1^{'} \rightarrow \phi_2^{'}(0) = 1 \\ v(1) &= v_2 \rightarrow \phi_3(1) = 1 \\ v'(1) &= v_2^{'} \rightarrow \phi_4^{'}(1) = 1 \end{aligned} \tag{4.28}$$

As funções aproximadoras dos deslocamentos para o elemento de treliça são obtidas pelo mesmo procedimento apresentado para vigas. Tendo em vista que possuem dois parâmetros nodais, emprega-se um polinômio de grau 1 como função aproximadora em coordenadas adimensionais no intervalo de [0,1], como se segue:

$$w(\xi) = \varphi_1 w_1 + \varphi_2 w_2 \tag{4.29}$$

Onde as funções de forma φ_i são:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 - \xi \\ \varphi_2 &= \xi \end{aligned} \tag{4.30}$$

Por fim, as funções de deslocamentos para o elemento de pórtico no seu sistema de coordenadas local são:

$$u = \left[N^1 \right] \{u_i\} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1^{'} \\ u_2 \\ u_2^{'} \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

$$v = \left[N^2\right]\{v_i\} = \left[\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4\right]\begin{pmatrix} v_1 \\ v_1' \\ v_2 \\ v_2' \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

$$w = \left[N^3\right]\{w_i\} = \left[\varphi_1 \quad \varphi_2\right]\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

4.3. Matriz de Rigidez

A matriz de rigidez do elemento de pórtico pode ser obtida segundo a expressão (4.20) da formulação geral do MEF, para o que se requer apenas a determinação de suas matrizes $\left[B\right]$ e $\left[D\right]$. Para tanto, divide-se a análise em três elementos, de modo que cada um representa a rigidez em determinada direção, possibilitando que ao final seja montada a matriz de rigidez.

Para o elemento de treliça, sabe-se que a sua deformação longitudinal é fornecida por:

$$\varepsilon_{x_3} = \frac{\partial w}{\partial x_3} \tag{4.34}$$

Portanto, sua matriz de operadores diferenciais é:

$$\left[L^3\right] = \left[\frac{\partial}{\partial x_3}\right] \tag{4.35}$$

A matriz $\left[B\right]$ é obtida usando a equação (4.8), na qual faz-se o uso do operador diferencial (4.35) na matriz de funções de forma da treliça (4.33), como se segue:

$$\left[B^3\right] = \left[\frac{\partial}{\partial x_3}\right]\left[(1-\xi) \quad \xi\right] = \left[\frac{-1}{l} \quad \frac{1}{l}\right] \tag{4.36}$$

Nota-se que a regra da cadeia foi utilizada na expressão anterior e será utilizada daqui pra frente, tendo em vista que a diferenciação é feita no domínio x_i, enquanto as funções de forma estão em função de ξ. Como $\xi = x / L$ tem-se de forma geral que:

$$\frac{\partial N(\xi)}{\partial x_i} = \frac{\partial N}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial^n N(\xi)}{\partial x_i^n} = \frac{\partial^n N}{\partial \xi^n}\frac{1}{l^n} \tag{4.37}$$

Por se tratar de um caso uniaxial, a matriz constitutiva $\left[D^1\right]$ é dada por:

$$\left[D^3\right]=\left[E\right] \tag{4.38}$$

Reunindo as expressões (4.36) e (4.38) na expressão da matriz de rigidez (4.20), para o elemento de treliça tem-se:

$$\left[\mathbf{k}^3\right]=\int_0^l \begin{Bmatrix} \frac{-1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{Bmatrix}\left[E\right]\begin{bmatrix} \frac{-1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} A dx=\int_0^1 \begin{bmatrix} \frac{E}{l^2} & -\frac{E}{l^2} \\ -\frac{E}{l^2} & \frac{E}{l^2} \end{bmatrix} Al d\xi \tag{4.39}$$

Integrando no domínio adimensional, sabendo-se que $dx = ld\xi$, obtém-se a matriz de rigidez do elemento de treliça que representa a rigidez na direção x_3:

$$\left[k^3\right]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

Para ambos elementos de viga (plano x_1x_3 e plano x_2x_3), o procedimento é o mesmo que o utilizado para treliça. As matrizes de rigidez das duas vigas se diferenciam apenas pelo momento de inércia de cada plano.

Sabe-se que para os elementos de viga que seguem a hipótese cinemática de Euler-Bernoulli as deformações assumidas são:

$$\begin{cases} \varepsilon_{33} = -y\dfrac{\partial^2 u}{dx_3^2} \\ \varepsilon_{11} = 0 \\ \varepsilon_{13} = 0 \end{cases} \tag{4.41}$$

Por isso, sua matriz de operadores diferenciais é:

$$\left[L^1\right]=\left[-y\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right] \tag{4.42}$$

Onde y é a distância da fibra analisada até o centro de gravidade da seção transversal.

Usando a expressão (4.42) e a matriz de funções de forma da viga (4.31) em (4.8), obtém-se:

$$\left[B^1\right]=\left[\frac{(6-12\xi)}{l^2}y \quad \frac{(4-6\xi)}{l}y \quad \frac{(-6+12\xi)}{l^2}y \quad \frac{(2-6\xi)}{l}y\right] \tag{4.43}$$

A matriz constitutiva $\left[D^1\right]$ devido a hipótese cinemática adotada é dada por:

$$\left[D^1\right]=\left[E\right] \tag{4.44}$$

A matriz de rigidez da viga no plano é obtida substituindo as expressões (4.43) e (4.44) em (4.20), resultando na seguinte integral:

$$\int_0^1 \begin{Bmatrix} \dfrac{(6-12\xi)}{l^2} \\ \dfrac{(4-6\xi)}{l} \\ \dfrac{(-6+12\xi)}{l^2} \\ \dfrac{(2-6\xi)}{l} \end{Bmatrix} \left[E\right] \begin{bmatrix} \dfrac{(6-12\xi)}{l^2} & \dfrac{(4-6\xi)}{l} & \dfrac{(-6+12\xi)}{l^2} & \dfrac{(2-6\xi)}{l} \end{bmatrix} \mathrm{I}_{x_2}.l.d\xi \tag{4.45}$$

Onde o momento de inércia em relação ao eixo x_2 é dado por:

$$I_{x_2}=\int y^2 dA \tag{4.46}$$

Resolvendo a integral (4.45), obtém-se a matriz de rigidez na direção x_1 da viga no plano x_1x_3:

$$\left[k^1\right]=\begin{bmatrix} \dfrac{12EI_{x_2}}{l^3} & \dfrac{6EI_{x_2}}{l^2} & -\dfrac{12EI_{x_2}}{l^3} & \dfrac{6EI_{x_2}}{l^2} \\ \dfrac{6EI_{x_2}}{l^2} & \dfrac{4EI_{x_2}}{l} & -\dfrac{6EI_{x_2}}{l^2} & \dfrac{2EI_{x_2}}{l} \\ -\dfrac{12EI_{x_2}}{l^3} & -\dfrac{6EI_{x_2}}{l^2} & \dfrac{12EI_{x_2}}{l^3} & -\dfrac{6EI_{x_2}}{l^2} \\ \dfrac{6EI_{x_2}}{l^2} & \dfrac{2EI_{x_2}}{l} & -\dfrac{6EI_{x_2}}{l^2} & \dfrac{4EI_{x_2}}{l} \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

Por analogia, a matriz de rigidez na direção x_2 da viga no plano x_2x_3 é fornecida por:

$$\left[k^2\right]=\begin{bmatrix} \dfrac{12EI_{x_1}}{l^3} & \dfrac{6EI_{x_1}}{l^2} & -\dfrac{12EI_{x_1}}{l^3} & \dfrac{6EI_{x_1}}{l^2} \\ \dfrac{6EI_{x_1}}{l^2} & \dfrac{4EI_{x_1}}{l} & -\dfrac{6EI_{x_1}}{l^2} & \dfrac{2EI_{x_1}}{l} \\ -\dfrac{12EI_{x_1}}{l^3} & -\dfrac{6EI_{x_1}}{l^2} & \dfrac{12EI_{x_1}}{l^3} & -\dfrac{6EI_{x_1}}{l^2} \\ \dfrac{6EI_{x_1}}{l^2} & \dfrac{2EI_{x_1}}{l} & -\dfrac{6EI_{x_1}}{l^2} & \dfrac{4EI_{x_1}}{l} \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

É necessário a escolha de uma ordem dos dez parâmetros nodais do elemento para auxiliar na montagem da matriz de rigidez do elemento final, por isso define-se o seguinte vetor local de deslocamentos do elemento:

$$\left\{v^e\right\}^T = \left\{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_1^{'} \quad v_1^{'} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad u_2^{'} \quad v_2^{'}\right\} \tag{4.49}$$

Logo, a matriz de rigidez do elemento de pórtico tridimensional no sistema local pode ser obtida com as devidas contribuições das matrizes $\left[k^1\right],\left[k^2\right]$ e $\left[k^3\right]$ em seus respectivos parâmetros nodais. O resultado é uma matriz simétrica, com dez linhas e dez colunas:

$$\left[k^e\right] = \begin{bmatrix}
\frac{12EI_{x_2}}{l^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_{x_2}}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_{x_2}}{l^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_{x_2}}{l^2} & 0 \\
0 & \frac{12EI_{x_1}}{l^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_{x_1}}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_{x_1}}{l^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_{x_1}}{l^2} \\
0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
\frac{6EI_{x_2}}{l^2} & 0 & 0 & \frac{4EI_{x_2}}{l} & 0 & -\frac{6EI_{x_2}}{l^2} & 0 & 0 & \frac{2EI_{x_2}}{l} & 0 \\
0 & \frac{6EI_{x_1}}{l^2} & 0 & 0 & \frac{4EI_{x_1}}{l} & 0 & -\frac{6EI_{x_1}}{l^2} & 0 & 0 & \frac{2EI_{x_1}}{l} \\
-\frac{12EI_{x_2}}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI_{x_2}}{l^2} & 0 & \frac{12EI_{x_2}}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI_{x_2}}{l^2} & 0 \\
0 & -\frac{12EI_{x_1}}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI_{x_1}}{l^2} & 0 & \frac{12EI_{x_1}}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI_{x_1}}{l^2} \\
0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
\frac{6EI_{x_2}}{l^2} & 0 & 0 & \frac{2EI_{x_2}}{l} & 0 & -\frac{6EI_{x_2}}{l^2} & 0 & 0 & \frac{4EI_{x_2}}{l} & 0 \\
0 & \frac{6EI_{x_1}}{l^2} & 0 & 0 & \frac{2EI_{x_1}}{l} & 0 & -\frac{6EI_{x_1}}{l^2} & 0 & 0 & \frac{4EI_{x_1}}{l}
\end{bmatrix} \tag{4.50}$$

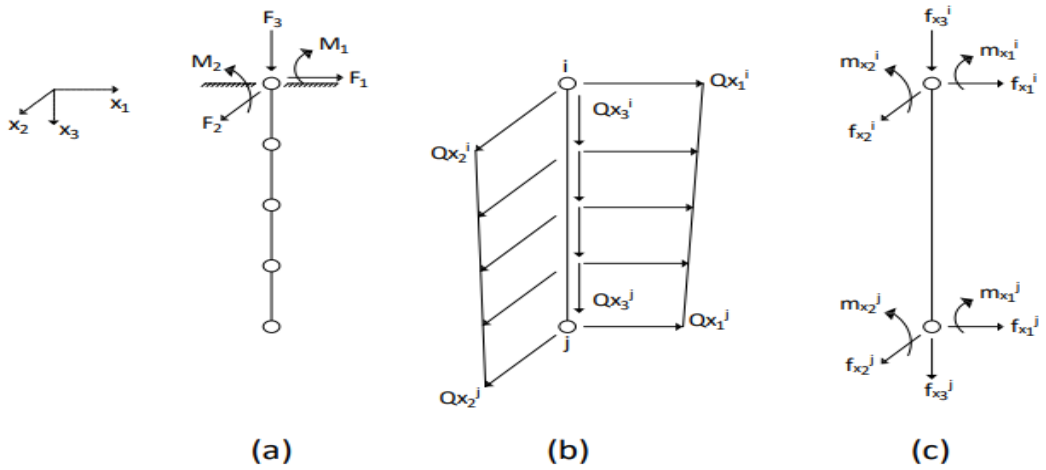
4.4. Vetor de cargas nodais

Conforme a expressão (4.21), o vetor de carregamentos é constituído por duas parcelas: uma de forças de corpo e outra de forças externas. O vetor $\left\{\mathbf{b}\right\}$, referente às forças volumétricas, é assumido nulo neste trabalho. Como pode ser visto na Figura 4-2 (a) e (b), pode-se dividir a parcela de forças externas em duas. Na expressão (4.51), a primeira parcela corresponde às forças aplicadas diretamente nos nós e a segunda parcela é proveniente de forças atuantes no elemento.

$$\left\{\mathbf{f^e}\right\} = \left\{f_{nos}^e\right\} + \left\{f_{eq}^e\right\} \tag{4.51}$$

Onde $\left\{f_{nos}^e\right\}$ e $\left\{f_{eq}^e\right\}$ são os vetores de forças externas aplicadas nos nós e forças externas equivalentes, respectivamente.

Figura 4-2: (a) Forças no topo da estaca (b) Forças distribuídas (c) Forças nodais equivalentes



Fonte: Elaboração do autor (2020)

O vetor $\{f_{nos}\}$ é obtido inserindo a força nodal diretamente na posição do parâmetro nodal correspondente, obedecendo à convenção de sinais adotada. Por exemplo, o vetor de forças nodais aplicadas no topo da estaca é:

$$\{f_{nos}^{e}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ M_2 \\ M_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.52}$$

Para determinar o vetor $\{f_{eq}\}$ é preciso aproximar o carregamento atuante no elemento, conforme pode ser visto na Figura 4-2 (b). É utilizada uma função aproximadora polinomial de grau um para todas as direções de carregamento, de modo que, o carregamento em qualquer direção do sistema local é representado pela expressão (4.53):

$$\{q_k^e\} = \begin{bmatrix} (1-\xi) & \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Qx_k^i \\ Qx_k^j \end{Bmatrix} \tag{4.53}$$

Onde k=1,2,3

Para o elemento de pórtico tridimensional, o vetor de forças nodais equivalentes é obtido a partir da expressão (4.21). A expressão (4.54) apresenta a integral que deve ser resolvida a partir do produto da matriz de funções de forma e matriz de carregamento:

$$\left\{ f_{eq}^{e} \right\} = \int_0^1 \begin{bmatrix} (1-3\xi^2+2\xi^3) & 0 & 0 \\ 0 & (1-3\xi^2+2\xi^3) & 0 \\ 0 & 0 & (1-\xi) \\ (\xi-2\xi^2+\xi^3)l & 0 & 0 \\ 0 & (\xi-2\xi^2+\xi^3)l & 0 \\ (3\xi^2-2\xi^3) & 0 & 0 \\ 0 & (3\xi^2-2\xi^3) & 0 \\ 0 & 0 & \xi \\ (\xi^3-\xi^2)l & 0 & 0 \\ 0 & (\xi^3-\xi^2)l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{x_1}^{i} \\ q_{x_2}^{i} \\ q_{x_3}^{i} \\ 0 \\ 0 \\ q_{x_1}^{f} \\ q_{x_2}^{f} \\ q_{x_3}^{f} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} l d\xi \quad (4.54)$$

Por fim, ao resolver a integral, obtém-se o vetor de forças nodais equivalentes:

$$\begin{Bmatrix} F_1^{i} \\ F_2^{i} \\ F_3^{i} \\ M_2^{i} \\ M_1^{i} \\ F_1^{f} \\ F_2^{f} \\ F_3^{f} \\ M_2^{f} \\ M_1^{f} \end{Bmatrix} = \left[T^{e} \right] \begin{Bmatrix} q_{x_1}^{i} \\ q_{x_2}^{i} \\ q_{x_3}^{i} \\ 0 \\ 0 \\ q_{x_1}^{f} \\ q_{x_2}^{f} \\ q_{x_3}^{f} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.55)$$

Onde $\left[T^{e} \right]$ é a matriz de transformação dada por:

$$\left[T^e\right]=\begin{bmatrix} \frac{7}{20}l & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20}l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{20}l & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{20}l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{20}l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{30}l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{20}l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{30}l^2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{20}l & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{20}l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}l & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{20}l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30}l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{20}l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{30}l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{20}l^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.56}$$

O sistema de equações do elemento pode agora ser escrito como:

$$\left[\mathbf{k}^e\right]\left\{\mathbf{v}^\mathbf{e}\right\}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ M_2 \\ M_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}+\left[T^e\right]\begin{Bmatrix} q^i_{x_1} \\ q^i_{x_2} \\ q^i_{x_3} \\ 0 \\ 0 \\ q^f_{x_1} \\ q^f_{x_2} \\ q^f_{x_3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.57}$$

5. ANÁLISE DA INTERAÇÃO ESTACA-SOLO

5.1. Introdução

A análise da interação estaca-solo é feita por uma formulação baseada no acoplamento entre o método dos elementos de contorno (Capítulo 3) e o método dos elementos finitos (Capítulo 4).

O MEC é empregado para modelar o solo como um meio semi-infinito, por meio deste método é obtida a interação entre o solo e as estacas contidas em seu domínio. Já as estacas são consideradas elementos finitos de pórticos tridimensionais orientados em qualquer direção do espaço, conforme apresentado no Capítulo 4.

A combinação entre os métodos pode se dar de duas maneiras. Na primeira, o sistema de equações obtido pelo método dos elementos de contorno é transformado em um sistema equivalente ao do método dos elementos finitos. Na segunda, é feito o inverso, transforma-se o sistema de equações do MEF em um equivalente ao do MEC. Neste trabalho, por questões de simplicidade, foi adotada a primeira opção.

5.2. Hipóteses adotadas

Diversos fatores influenciam na análise do sistema estaca-solo, tendo como exemplo: o método de execução da estaca, regime físico considerado, regime de deslocamentos, deslizamento relativo, estratificação do solo, forças volumétricas e etc. Por essa razão, algumas hipóteses simplificadoras são utilizadas na análise numérica, sendo elas:

- ✓ O solo é considerado um meio elástico-linear, homogêneo e isótropo;
- ✓ A estaca trabalha no regime elástico-linear de pequenos deslocamentos e pequenas deformações;
- ✓ As estacas e o solo estão livres de tensões iniciais provenientes da execução construtiva;
- ✓ Não é admitido o deslizamento relativo na interface do conjunto estaca-solo, existindo a compatibilidade entre os deslocamentos;
- ✓ As forças de volume são assumidas nulas;
- ✓ A deformação radial da estaca é desprezada.

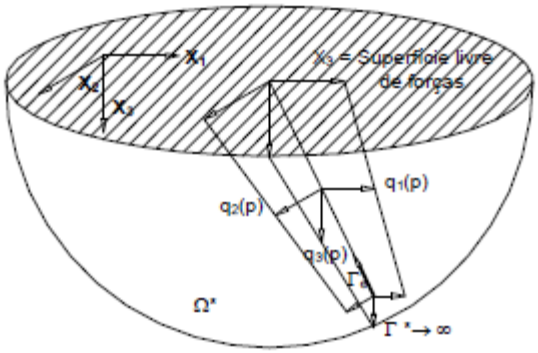
5.3. Formulação

5.3.1. Interação de um meio tridimensional com estruturas de barras gerais

Neste trabalho são considerados elementos finitos de pórticos tridimensionais ligados ao meio semi-infinito tridimensional. Uma forma de avaliar essa interação é proposta em Venturini (1988), nesta estratégia são consideradas linhas de carga aplicadas no meio semi-infinito como forma de representar as forças de interação ao longo da estaca, estas, devem ser consideradas na formulação do MEC.

Considere uma linha de carga Γ^e com componentes nas três direções do sistema de coordenadas global atuando em um meio semi-infinito de domínio Ω^* e contorno Γ^*, conforme Figura 5-1. A presença da linha de carga acrescenta um termo na identidade Somigliana da expressão(3.26), a dedução desse termo é feita a partir do limite da integral de domínio das forças volumétricas.

Figura 5-1- Linha de carga



Fonte: Matos Filho (1999)

A equação integral de deslocamentos para um domínio com N_e linhas de carga representando às estacas é expressa da seguinte forma:

$$u_j(s) = \int_\Gamma p_i u_{ji}^{(*)} d\Gamma + \int_\Omega b_i u_{ji}^{(*)} d\Omega + \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} u_{ji}^{(*)} q_i^e d\Gamma \tag{5.1}$$

Onde q_i^e representa a força de interação da linha de carga e na direção i, N_e é o número de estacas e Γ_e é a linha onde essas forças estão aplicadas.

Neste trabalho são assumidas algumas simplificações na expressão (5.1). A parcela referente às forças volumétricas é desprezada, e a priori não são consideradas forças atuando

na superfície livre do solo em $x_3 = 0$. Portanto, a expressão (5.1) pode ser reescrita como se segue:

$$u_i(s) = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Gamma_e} u_{ji}^{(*)} q_i^e d\Gamma \tag{5.2}$$

5.3.2. Implementação numérica do MEC

A formulação desenvolvida no tópico anterior é totalmente analítica. Tendo em vista a implementação computacional, é preciso calcular essas grandezas numericamente. Para isso, é necessário discretizar a linha de carga em um número finito de elementos, os quais são aproximados por funções polinomiais, análogo ao MEF (Eq.(4.1)).

Os elementos utilizados neste trabalho são isoparamétricos e, portanto, as grandezas de interesse são aproximadas pela mesma função polinomial adotada para a geometria. Quaisquer valores ao longo do elemento são obtidos por interpolação via funções de forma de valores nodais. As funções de forma são obtidas a partir dos polinômios de Lagrange:

$$\phi_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{n} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \tag{5.3}$$

Onde ϕ_i é o polinômio de Lagrange de grau $n-1$ associado ao nó i, ξ é a coordenada adimensional de um ponto qualquer dentro do elemento, cujo intervalo é de [-1,1], ξ_i é a coordenada adimensional do nó i e ξ_j é a coordenada adimensional do nó j.

No presente trabalho é adotada uma aproximação linear para os elementos. Portanto, as funções de forma são:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1-\xi}{2} \\ \phi_2 &= \frac{1+\xi}{2} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Ao discretizar a linha de carga Γ_e da expressão (5.2) em *nelems* elementos e aproximando as forças de interação q_i^e, obtém-se:

$$[I]_{3x3} \{u^f\}_{3x1} = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{k=1}^{nelems} \left(\int_{\Gamma_e} \left[U^{(*)}\right]_{3x3} [\phi]_{3x6} \, d\Gamma \right) \{Q^k\}_{6x1}^e \tag{5.5}$$

Onde:

$[I]$: Matriz identidade;

$\left\{u^f\right\}$: Vetor de deslocamentos do ponto fonte;

$\left[U^{(*)}\right]$: Matriz que contém as componentes da solução fundamental de Mindlin;

$[\phi]$: Matriz com as funções de forma do elemento k;

$\left[Q^k\right]^e$: Vetor com as forças de interface nos nós do elemento k da estaca e.

Para calcular numericamente a integral da expressão (5.5) é utilizada a quadratura de Gauss-Legendre. Todavia, é necessária a transformação do domínio real de cada elemento para um domínio adimensional ξ compreendido no intervalo $[-1,1]$. O espaço real e o espaço adimensional se relacionam por meio do Jacobiano Jac_1, de modo que a integral da expressão (5.5) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\left\{u^f\right\}_{3x1} = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{k=1}^{nelems} \left(\int_{-1}^{1} \left[U^{(*)}\right]_{3x3} [\phi]_{3x6} \, Jac_1 \, d\xi \right) \left\{Q^k\right\}_{6x1}^{e} \tag{5.6}$$

Onde:

$$Jac_1 = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \tag{5.7}$$

Determinando-se o número de pontos de Gauss ($npts_1$), é possível substituir a integral da expressão (5.6) por um somatório ponderado de valores da função nestes pontos, como se segue:

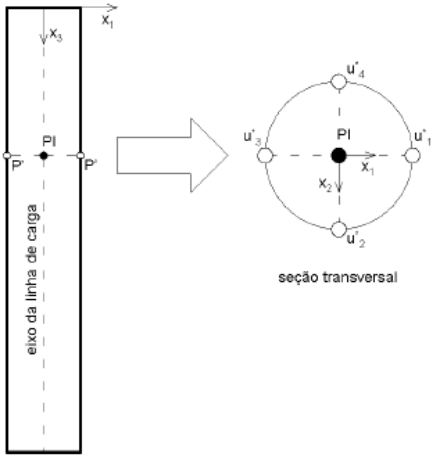
$$\left\{u^f\right\} = \sum_{e=1}^{N_e} \left\langle \sum_{k=1}^{nelems} \left\{ \sum_{m=1}^{npts1} \left(\left[U^{(*)}\right][\phi] \right)_m (Jac_1)_m \mathrm{w}_m \right\} \right\rangle \left\{Q^k\right\}^e \tag{5.8}$$

Além disso, alerta-se que a aproximação em linha de carga apresenta singularidade quando o ponto fonte encontra-se sobre o elemento integrado. Uma alternativa para a resolução desse problema é apresentada em Ferro (1999), na qual a estratégia utilizada consiste na consideração das forças de interação agindo de maneira constante sobre a superfície de contato estaca-solo. Dessa maneira, a menor distância entre o ponto fonte e o ponto campo passa a ser o raio da estaca, não havendo, portanto, singularidade. As integrais numéricas passam então a ser realizadas também ao longo da circunferência.

A metodologia de Ribeiro (2009) é empregada neste trabalho, pois apresenta uma forma mais eficiente computacionalmente para considerar as forças de interação agindo no perímetro

da estaca. Nesta proposta, as soluções fundamentais são calculadas em quatro pontos distribuídos de forma simétrica em relação ao eixo da linha de carga, conforme o esquema ilustrado na Figura 5-2. Com isso, as contribuições do ponto campo para cada direção são obtidas pela média das quatro soluções.

Figura 5-2- Projeções do ponto campo



Fonte: Ribeiro (2009)

Sabendo-se que a expressão (5.8) é obtida para apenas um ponto de colocação f. O sistema de equações algébricas resultante da integração numérica para os N pontos de colocação é dado por:

$$\left\{u^i\right\} = \sum_{j=1}^{N}\left[G^{ij}\right]\left\{Q^j\right\} \tag{5.9}$$

Onde $\left\{u^i\right\}$ são as componentes de deslocamento no ponto de colocação i, $\left\{Q^j\right\}$ são as componentes da força de interação no ponto de colocação j e $\left[G^{ij}\right]$ é a matriz de influência de um ponto de colocação i sobre um ponto de colocação j.

Por fim, reescreve-se a expressão (5.9) de acordo com os parâmetros nodais adotados no MEF:

$$\left\{u_{MEC}\right\} = \left[G\right]\left\{Q_{MEC}\right\} \tag{5.10}$$

Onde:

$\left\{u_{MEC}\right\}$: É o vetor de deslocamentos nodais da estaca (linha de carga) obtido pelo MEC;

$\left[G\right]$: É a matriz de coeficientes de influência do solo;

$\left\{Q_{MEC}\right\}$: É o vetor de forças de interface.

5.3.3. Matriz de Rotação

Para realizar o acoplamento MEC/MEF é necessário escrever as equações do solo e da estaca num mesmo sistema de coordenadas, pois é sabido que as soluções fundamentais do solo são escritas em relação ao sistema global, enquanto as grandezas mecânicas da estaca estão em seu sistema local. Consequentemente é preciso definir uma matriz de rotação que relacione o sistema de coordenadas global e o sistema de coordenadas local adotado.

Nesta demonstração serão utilizadas as letras minúsculas $x, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ para representar os eixos locais e X, Y, Z para representar os eixos globais. As equações (5.11) e (5.12) relacionam o sistema de coordenadas local e o sistema de coordenadas global.

$$\left\{\overline{x_L}\right\} = [r]\{X_G\} \tag{5.11}$$

$$\{X_G\} = [r]^T \left\{\overline{x_L}\right\} \tag{5.12}$$

Onde $\left\{\overline{x_L}\right\}$ é o sistema de coordenadas local, $\{X_G\}$ é o sistema de coordenadas global e $[r]$ é a matriz de rotação dada por:

$$[r] = \begin{bmatrix} \cos\theta_{xX} & \cos\theta_{xY} & \cos\theta_{xZ} \\ \cos\theta_{yX} & \cos\theta_{yY} & \cos\theta_{yZ} \\ \cos\theta_{zX} & \cos\theta_{zY} & \cos\theta_{zZ} \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

A partir das expressões (5.11), (5.12) e (5.13), pode-se perceber que a determinação da matriz de rotação $[r]$ acaba recaindo na determinação dos seus nove elementos, onde cada elemento representa o cosseno diretor de um eixo local em relação a um eixo global.

Os três cossenos diretores da terceira linha da matriz $[r]$, referentes ao eixo local z, são facilmente determinados por trigonometria, conforme expressões (5.14), (5.15), (5.16) e Figura 5-3.

$$\cos\theta_{zX} = \frac{X_j - X_i}{L} \tag{5.14}$$

$$\cos\theta_{zY} = \frac{Y_j - Y_i}{L} \tag{5.15}$$

$$\cos\theta_{zZ} = \frac{Z_j - Z_i}{L} \tag{5.16}$$

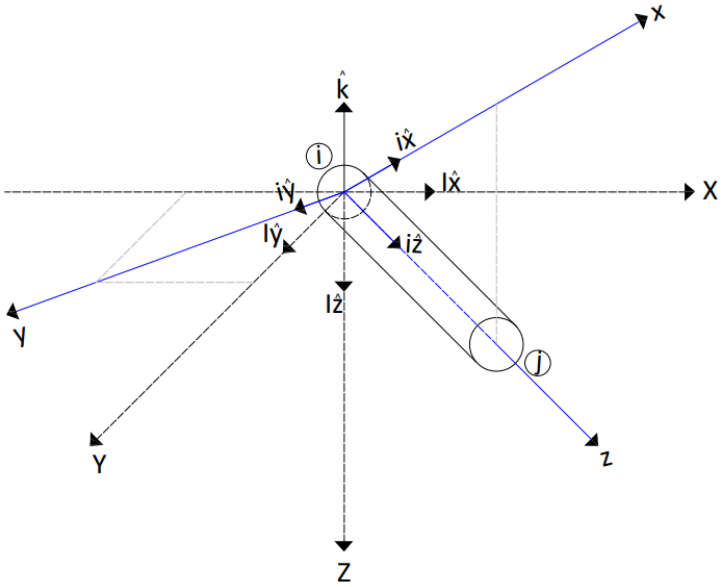
Onde o comprimento L do elemento é dado por:

$$L = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \tag{5.17}$$

Para calcular os demais cossenos diretores é necessária a determinação de um plano de referência. Por questões de simplicidade de implementação é adotado um plano de referência baseado na estratégia do "ângulo de rolagem" descrita em Kassimali (2012).

Sua obtenção acontece da seguinte forma: o eixo local z está orientado na direção do eixo longitudinal do membro, enquanto os eixos locais x e y estão orientados de forma que o plano zx seja vertical e o eixo y esteja em um plano horizontal, conforme a Figura 5-3.

Figura 5-3-Sistemas de coordenada global e local



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Como o eixo y é perpendicular ao plano vertical zx, um vetor $\hat{y}$ com a mesma orientação de y pode ser determinada pelo produto vetorial entre o vetor $i\hat{z}$ e um vetor unitário vertical $i\hat{k}$, estando $i\hat{k}$ necessariamente na direção oposta de Z para que o produto vetorial resultante seja o do eixo local convencionado (Figura 5-3) e que obedeça a dextrosidade do sistema de coordenadas. Assim, o vetor $\hat{y}$ é obtido pela expressão (5.18).

$$\hat{y} = i\hat{z} \otimes \hat{k} = \begin{bmatrix} I\hat{x} & I\hat{y} & I\hat{z} \\ \cos\theta_{zX} & \cos\theta_{zY} & \cos\theta_{zZ} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -\cos\theta_{zY} I\hat{x} + \cos\theta_{zX} I\hat{y} \tag{5.18}$$

Para obter o vetor unitário $i\hat{y}$ da direção do eixo local y é necessário dividir o vetor $\hat{y}$ pela sua magnitude, conforme a expressão (5.19).

$$i\hat{y} = \frac{\hat{y}}{|\hat{y}|} = \frac{-\cos\theta_{zY} I\hat{x} + \cos\theta_{zX} I\hat{y}}{\sqrt{(-\cos\theta_{zY})^2 + \cos^2\theta_{zX}}} = \frac{-\cos\theta_{zY} I\hat{x} + \cos\theta_{zX} I\hat{y}}{|\hat{y}|} \tag{5.19}$$

Agora, o vetor unitário $i\hat{x}$ na direção do eixo local x é obtido pelo produto vetorial entre $i\hat{y}$ e $i\hat{z}$:

$$i\hat{x} = i\hat{y} \otimes i\hat{z} = \frac{\cos\theta_{zX}\cos\theta_{zZ}}{|\hat{y}|} I\hat{x} + \frac{\cos\theta_{zY}\cos\theta_{zZ}}{|\hat{y}|} I\hat{y} - |\hat{y}| I\hat{z} \tag{5.20}$$

Finalmente, através das expressões (5.14) a (5.20) é possível estabelecer a matriz de rotação da expressão (5.13), dada por:

$$[r] = \begin{bmatrix} \frac{\cos\theta_{zX}\cos\theta_{zZ}}{|\hat{y}|} & \frac{\cos\theta_{zY}\cos\theta_{zZ}}{|\hat{y}|} & -|\hat{y}| \\ \frac{-\cos\theta_{zY}}{|\hat{y}|} & \frac{\cos\theta_{zX}}{|\hat{y}|} & 0 \\ \cos\theta_{zX} & \cos\theta_{zY} & \cos\theta_{zZ} \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

Vale ressaltar que quando a estaca está orientada na vertical, alguns termos da matriz de rotação (5.21) tornam-se indefinidos. Neste caso, a matriz de rotação de estacas verticais é fornecida pela expressão (5.22).

$$[r] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

A matriz de rotação para o sistema de equações do acoplamento MEC/MEF é dada por:

$$[R] = \begin{bmatrix} [r] & [\bar{0}] & \cdots & [\bar{0}] \\ [\bar{0}] & [r] & \cdots & [\bar{0}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & [\bar{0}] \\ [\bar{0}] & [\bar{0}] & [\bar{0}] & [r] \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

Onde:

$$[\bar{0}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

5.3.4. Acoplamento MEC/MEF

No item 5.3.2, a equação (5.10) de deslocamentos do solo obtida pelo MEC é reescrita de forma análoga ao MEF, ou seja, em função dos nós. Assim, ao discretizar a linha de interação estaca-solo de forma igual em ambos os métodos, é possível realizar o acoplamento por meio das condições de equilíbrio e compatibilidade entre seus nós. Além disso, no item anterior foi apresentada a matriz de rotação, tornando-se possível analisar os meios (estaca e solo) em um sistema de coordenadas comum.

A equação de equilíbrio da estaca pelo MEF (sistema de coordenadas local) é dada pela expressão (4.22), dividindo-se o vetor de forças como em (4.57) e assumindo que as forças distribuídas sejam as forças de interação estaca-solo, tem-se:

$$[K]_L \{u\}_L = \{f_{nos}\}_L + [T]_L \{q^e\}_L \tag{5.25}$$

Onde:

$\{f_{nos}\}_L$: Vetor de forças externas aplicadas no topo da estaca;

$[T]_L$: Matriz de transformação de forças;

$\{q^e\}_L$: Vetor de forças de interação;

Subscrito L: Sistema de coordenadas local.

A partir da equação de deslocamentos do solo (5.10), a equação da força de interação pelo MEC é facilmente obtida:

$$\{Q_{MEC}\}_G = [G]_G^{-1} \{u_{MEC}\}_G \tag{5.26}$$

Onde o subscrito G indica o sistema de coordenas global.

Para escrever a equação de equilíbrio nodal é necessário adotar um sistema de coordenadas em comum. Por ser mais abrangente, é utilizado o sistema de coordenadas global do solo, podendo assim rotacionar as grandezas da expressão (5.25) do sistema local para o sistema global através da expressão (5.11), obtendo-se:

$$[K]_L [R]\{u\}_G = [R]\{f_{nos}\}_G + [T]_L [R]\{q^e\}_G \tag{5.27}$$

Do equilíbrio de forças na interface, tem-se:

$$\{q^e\}_G = -\{Q_{MEC}\}_G \tag{5.28}$$

Substituindo as expressões (5.28) e (5.26) em (5.27), alcança-se:

$$[K]_L [R]\{u\}_G = [R]\{f_{nos}\}_G - [T]_L [R][G]_G^{-1} \{u_{MEC}\}_G \tag{5.29}$$

Da condição de compatibilidade de deslocamentos, detém-se:

$$\{u\}_G = \{u_{MEC}\}_G \tag{5.30}$$

Substituindo a expressão (5.30) em (5.29) e rearranjando-a, consegue-se:

$$[K]_L [R]\{u\}_G + [T]_L [R][G]_G^{-1} \{u\}_G = [R]\{ f_{nos}\}_G \tag{5.31}$$

Pré-multiplicando toda a expressão (5.31) por $[R]^T$ e sabendo que $[R]^T [R] = [I]$, dispõe-se:

$$[R]^T [K]_L [R]\{u\}_G + [R]^T [T]_L [R][G]_G^{-1} \{u\}_G = \{ f_{nos}\}_G \tag{5.32}$$

A expressão (5.32) representa a equação de equilíbrio do conjunto estaca-solo via acoplamento MEC/MEF. Finalmente, sugere-se uma matriz de rigidez equivalente do conjunto, resultando no seguinte sistema:

$$\left[\overline{K}\right]_G \{u\}_G = \{ f_{nos}\}_G \tag{5.33}$$

Onde:

$$\left[\overline{K}\right]_G = \left([K_{MEF}]_G + [K_{MEC}]_G\right) \tag{5.34}$$

$$[K_{MEF}]_G = [R]^T [K]_L [R] \tag{5.35}$$

$$[K_{MEC}]_G = [T]_G [G]_G^{-1} \tag{5.36}$$

$$[T]_G = [R]^T [T]_L [R] \tag{5.37}$$

5.4. Apoio Inclinado

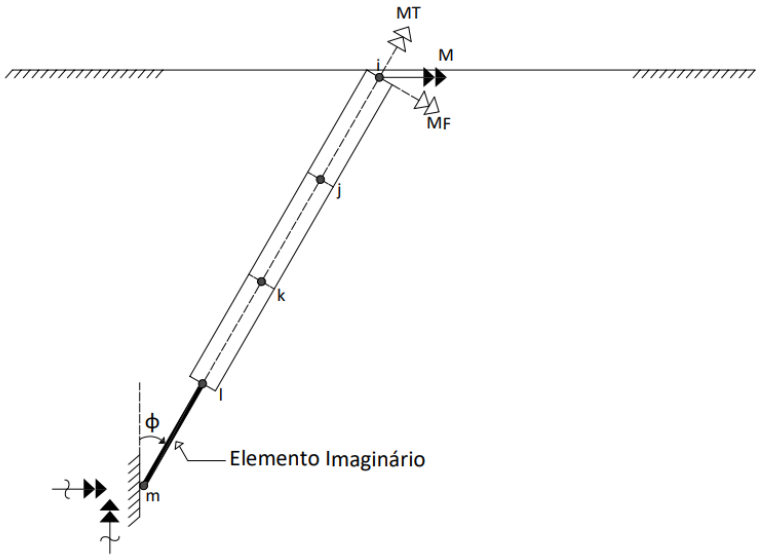
Em alguns casos de estacas inclinadas é necessário restringir o giro em torno do eixo longitudinal causados pelo surgimento de momento torsor (Figura 5-4), pois a presente formulação não contempla esse grau de liberdade e para isso, é necessária a introdução de um apoio inclinado. Todavia, como a formulação adota o sistema de coordenadas global, permite-se apenas a restrição do apoio nas direções principais e não na inclinada.

Uma alternativa evidente seria orientar o sistema de coordenadas global para o sistema local inclinado e assim fazer as devidas restrições do giro de torção. No entanto, essa solução não é válida quando temos mais de uma estaca inclinada, e com ângulos diferentes.

A solução encontrada consiste em introduzir na extremidade de cada estaca um elemento imaginário de rigidez a torção altíssima. Este elemento, que funciona como um apoio

inclinado, é orientado na mesma direção da estaca e liga seu último nó a um engaste imaginário, o qual serve para garantir que apenas o momento torsor se desenvolva no elemento quando a estaca for carregada. Todo o esquema é exposto na Figura 5-4.

Figura 5-4- Elemento Imaginário



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Com o intuito de garantir que este membro não influencie na rigidez da estaca e desenvolva apenas momento torsor de reação, é adotada apenas rigidez à torção. Por fim, a restrição do giro de torção é feita no engaste imaginário restringindo-se qualquer giro no sistema de coordenadas global.

Para que o elemento imaginário represente com exatidão o efeito do apoio inclinado, seu tamanho deve ser da mesma ordem dos elementos da estaca e sua rigidez a torção deve ser suficientemente grande para que sua rotação seja desprezível. Entretanto, a adoção de valores de rigidez elevados demais pode fazer com que ocorram erros numéricos na resolução do sistema. Neste trabalho, foi adotado um valor de 10^6 multiplicado pelo maior termo da rigidez à flexão.

6. RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados exemplos para a validação da formulação MEC/MEF proposta. Primeiramente, exemplos de estacas verticais são resolvidos com intuito de atestar a formulação antes de prosseguir para a estaca inclinada, estas são analisadas sob a ação exclusiva dos seguintes esforços: força axial, transversal ou momento, onde são realizadas algumas análises paramétricas. Este estudo busca ainda aferir a influência do ângulo de inclinação nos deslocamentos para os mais diversos casos de geometria e propriedades mecânicas. Por último, uma estaca inclinada sujeita a ação simultânea desses três carregamentos é estudada e os resultados obtidos são confrontados com os de outros autores.

Posteriormente, os estudos são estendidos para grupos de estacas. Inicia-se pela validação da formulação para grupo de estacas verticais submetidos a carga horizontal e vertical, então prossegue-se com um estudo paramétrico de grupo de estacas inclinadas solicitadas axialmente e transversalmente.

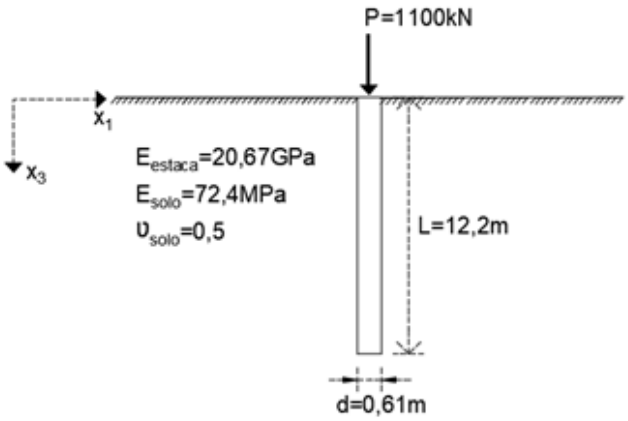
Por fim, é apresentado um exemplo com uma quantidade maior de estacas e com dois arranjos possíveis, um somente com estacas verticais e o outro com algumas estacas inclinadas, diante disso é feita uma análise da influência que a quantidade de estacas exerce nos deslocamentos, buscando-se também a solução de arranjo mais vantajosa para o problema apresentado.

Destaca-se que são utilizados 20 elementos finitos de pórtico tridimensional como quantidade padrão em todos os exemplos.

6.1. Ensaio de Whitaker & Cooke

No ensaio de Whitaker & Cooke (1966, apud Poulos & Davis, 1980) foi analisada uma estaca vertical de 12,2m submetida à um carregamento vertical de 1100kN. O esquema estrutural e demais dados do problema são mostrados na Figura 6-1.

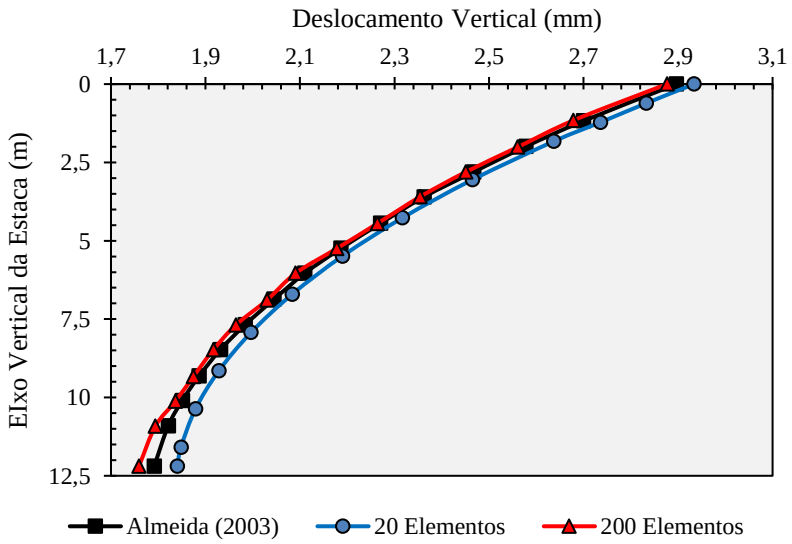
Figura 6-1-Ensaio de Whitaker & Cooke



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Na Figura 6-2 os deslocamentos verticais obtidos com a presente formulação são comparados com os obtidos por Almeida (2003). Tal autor considera o solo como um meio semi-infinito e, por utilizar a solução fundamental de Kelvin, são utilizados elementos de contorno triangulares planos para discretizar a superfície da estaca e a superfície livre do solo até distâncias consideradas sem perturbações.

Figura 6-2- Deslocamentos verticais ao longo da estaca



Fonte: Elaboração do autor (2020)

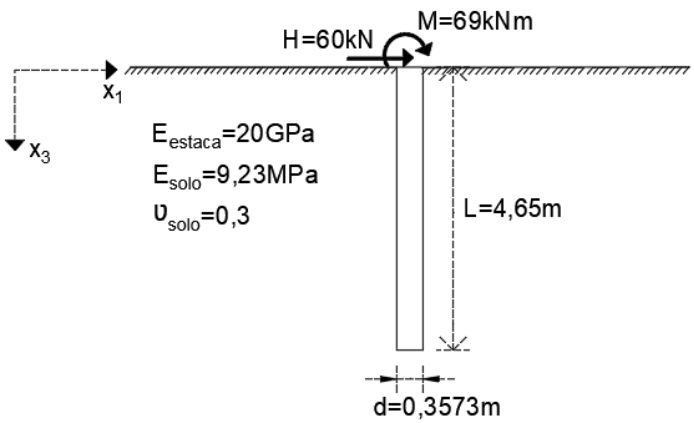
Whitaker & Cooke aferiram um deslocamento vertical no topo da estaca de 2,84mm. Almeida (2003) utilizou 248 elementos de contorno e obteve 2,89mm, enquanto o obtido pela formulação MEC/MEF foi de 2,87mm com 200 elementos, uma diferença relativa de apenas

1%. Nota-se, ainda, a boa concordância da formulação desde uma pequena quantidade de elementos.

6.2. Ensaio de Kérisel & Adam

Neste exemplo procura-se validar a formulação para estacas verticais em flexão. Para isso, os deslocamentos obtidos são confrontados com resultados experimentais de Kérisel & Adam (1967), os quais ensaiaram uma estaca de 4,65m com um carregamento aplicado em seu topo, conforme Figura 6-3. Os dados do problema são mostrados abaixo:

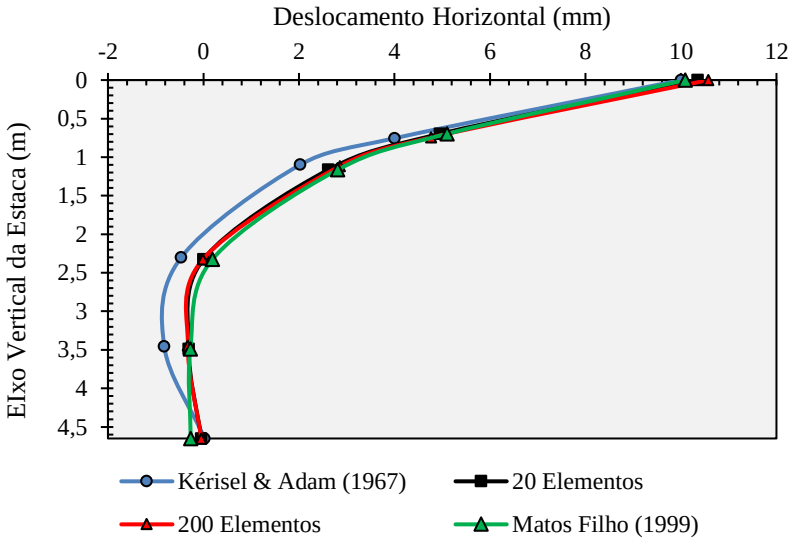
Figura 6-3-Ensaio de Kérisel & Adam



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Os resultados obtidos para os deslocamentos horizontais ao longo da estaca são mostrados na Figura 6-4. Observa-se, novamente, a boa concordância da formulação em relação aos resultados do ensaio e os resultados numéricos de Matos Filho (1999). Além do que, os resultados obtidos com 20 elementos ou 200 elementos é praticamente o mesmo.

Figura 6-4- Deslocamentos horizontais ao longo da estaca

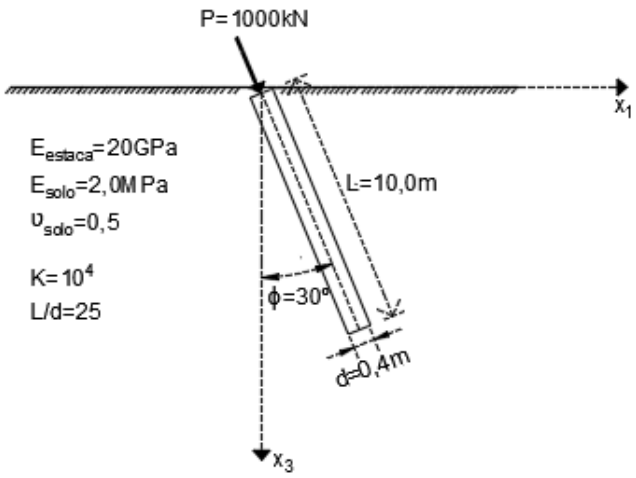


Fonte: Elaboração do autor (2020)

6.3. Estaca Inclinada com carregamento axial

Uma estaca isolada com inclinação de ϕ em relação ao eixo vertical é submetida à uma força axial de 1000kN. A geometria da estaca, as propriedades do solo e da estaca são mostradas na Figura 6-5.

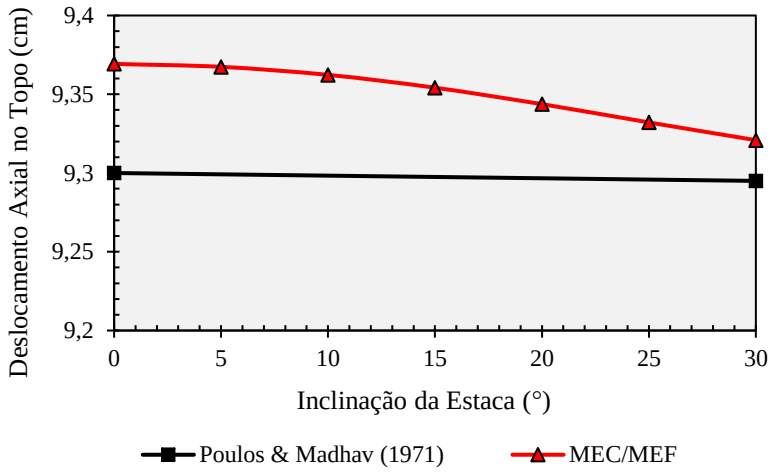
Figura 6-5- Estaca Inclinada sujeita a carregamento axial



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Na Figura 6-6 os deslocamentos axiais no topo da estaca obtidos para uma gama de ângulos usuais são comparados com os obtidos por Poulos & Madhav (1971). Salienta-se que o carregamento acompanha a direção axial da estaca.

Figura 6-6- Deslocamento axial no topo em função do ângulo de inclinação



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Percebe-se uma boa adequação entre os resultados dos autores, apresentando diferenças menores que 1%. Os resultados obtidos por Poulos & Madhav (1971) possuem muito pouca variação, enquanto os obtidos pelo acoplamento MEC/MEF mostram que conforme o aumento do ângulo de inclinação, menores são os deslocamentos. No entanto, para ambas as formulações o ângulo de inclinação da estaca pouco influencia no deslocamento axial (menos de 0,5%).

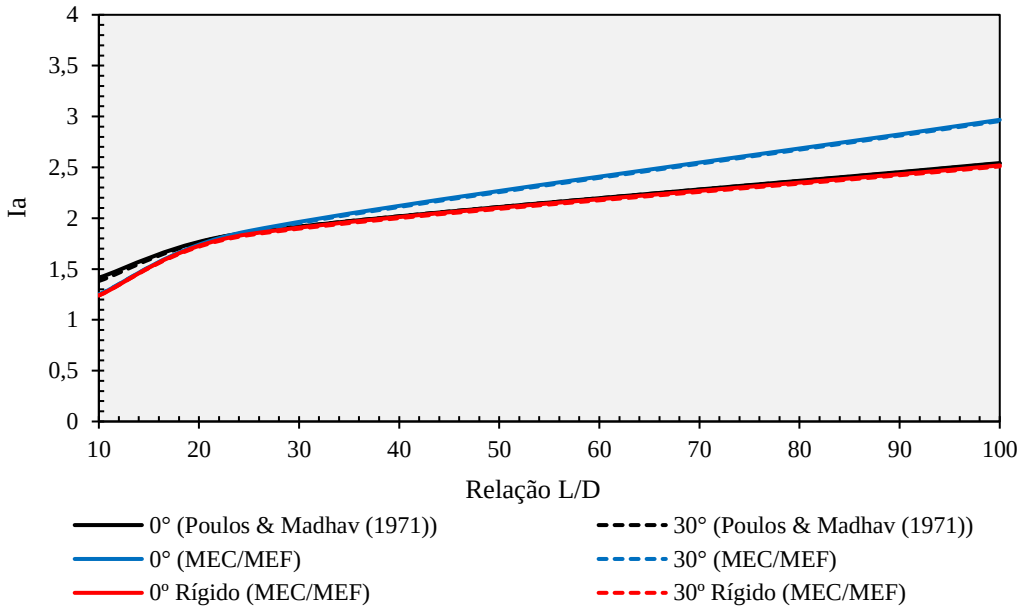
Antes de prosseguirmos para uma análise paramétrica, define-se o coeficiente de deslocamento axial no topo da estaca I_a da seguinte forma:

$$I_a = \frac{u_a}{\left(\frac{P}{E_s L}\right)} \tag{6.1}$$

Onde u_a é o deslocamento axial no topo da estaca provocado pela carga P.

Propõe-se variar a relação L/d para verificar se os resultados das estacas inclinadas continuam próximos das estacas verticais. A Figura 6-7 traz os resultados obtidos para I_a em função razão L/d, juntamente com os de Poulos & Madhav (1971). Como estes últimos autores consideram as estacas rígidas axialmente, também são plotados os resultados do acoplamento MEC/MEF para estacas rígidas.

Figura 6-7- Coeficiente I_a em função da relação L/d

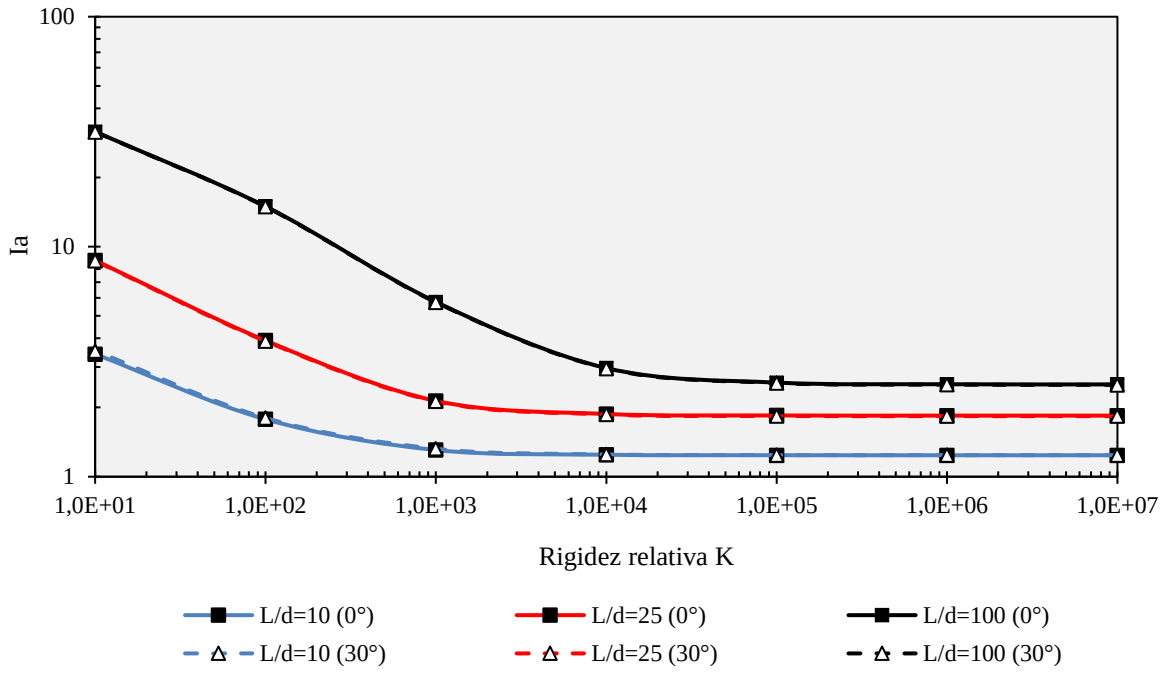


Fonte: Elaboração do autor (2020)

Percebe-se uma boa concordância entre os resultados dos autores, mas chama-se atenção para a sutil diferença encontrada para estacas curtas (L/d baixos). Acredita-se que esta diferença decorre da consideração da resistência de ponta da estaca pelo outro autor, cuja influência é significativa para este tipo de estaca. Além disso, é notável que a deformabilidade das estacas altera seus deslocamentos, principalmente, para estacas mais esbeltas (L/d altos), enquanto a sua a inclinação, novamente, pouco influencia nos deslocamentos. Por fim, é observado que o coeficiente I_a, e, consequentemente, os deslocamentos, crescem conforme a relação L/d aumenta.

Promove-se, desta vez, uma última análise variando a rigidez relativa estaca/solo ($K=E_{estaca}/E_{solo}$) para avaliar se a deformabilidade da estaca influencia na proximidade dos resultados entre as estacas inclinadas e as verticais. O gráfico da Figura 6-8 relaciona os coeficientes I_a com a rigidez relativa K para estacas inclinadas em 30º e estacas verticais.

Figura 6-8- Deslocamento axial em função da rigidez relativa K



Fonte: Elaboração do autor (2020)

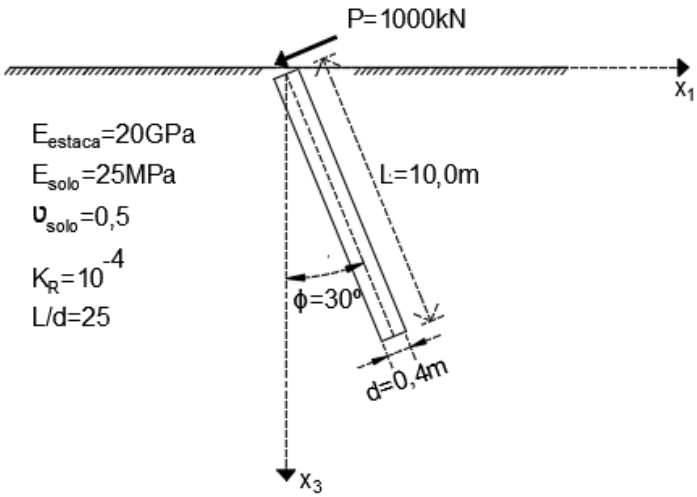
Depreende-se que a rigidez relativa pouco influencia na proximidade entre os deslocamentos da estaca vertical e estaca inclinada, os quais permanecem muito próximos. Entretanto, pode-se facilmente inferir que estacas com baixa rigidez relativa K tendem a ter deslocamentos maiores e que valores de K acima de 10^5 apresentam comportamento de estaca rígida.

Neste exemplo foi possível concluir que a inclinação da estaca pouco altera o seu campo de deslocamentos axiais, seja qual for a sua relação L/d, ângulo de inclinação (até 30º) e rigidez relativa K, pelo que torna-se completamente razoável considerar seus deslocamentos axiais iguais ao de sua posição vertical.

6.4. Estaca Inclinada com carregamento transversal

Este exemplo consiste numa estaca inclinada com uma força transversal aplicada em seu topo. A força é sempre aplicada na direção perpendicular à direção da estaca. Com isso, mesmo variando-se o ângulo de inclinação, ocorrerá somente flexão na estaca. Os dados do problema são fornecidos na Figura 6-9.

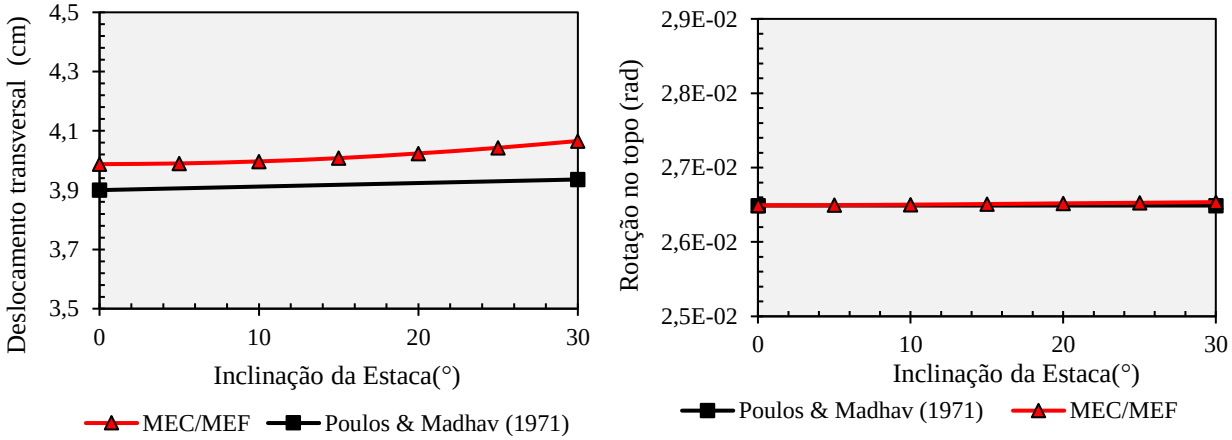
Figura 6-9-Estaca inclinada sujeita a carregamento transversal



Fonte: Elaboração do autor (2020)

As rotações e deslocamentos transversais no topo da estaca em função do ângulo de inclinação ϕ podem ser vistos na Figura 6-10, onde também são apresentados os resultados obtidos pela de Poulos & Madhav (1971).

Figura 6-10- (a) Deslocamento transversal no topo (b) Rotação no topo



(a) (b)

Fonte: Elaboração do autor (2020)

É observada uma boa concordância entre os resultados dos autores, principalmente para as rotações, na medida em que a diferença para os deslocamentos transversais é inferior a 3%. No presente exemplo, ao analisar os deslocamentos transversais da Figura 6-10-(a), percebe-se que o ângulo de inclinação aumenta os deslocamentos, no acoplamento MEC/MEF mais que em Poulos e Madhav (1971). Contudo, esse aumento ainda não é significativo, uma vez que se

mantém abaixo de 2% no range de ângulos analisados. Já para as rotações, quase não há alteração em função do ângulo de inclinação em ambas as formulações.

Para avaliar o quanto a flexibilidade da estaca influencia na proximidade das respostas entre estaca vertical e inclinada, é preciso definir o fator de flexibilidade K_R, o coeficiente de deslocamento normal ao eixo longitudinal da estaca I_{nn} no topo e o coeficiente de rotação $I_{\theta n}$ no topo da seguinte forma:

$$I_{nn} = \frac{u_n}{\left(\frac{P}{E_s L_P}\right)} \tag{6.2}$$

$$I_{\theta n} = \frac{\theta}{\left(\frac{M}{E_s L_p^2}\right)} \tag{6.3}$$

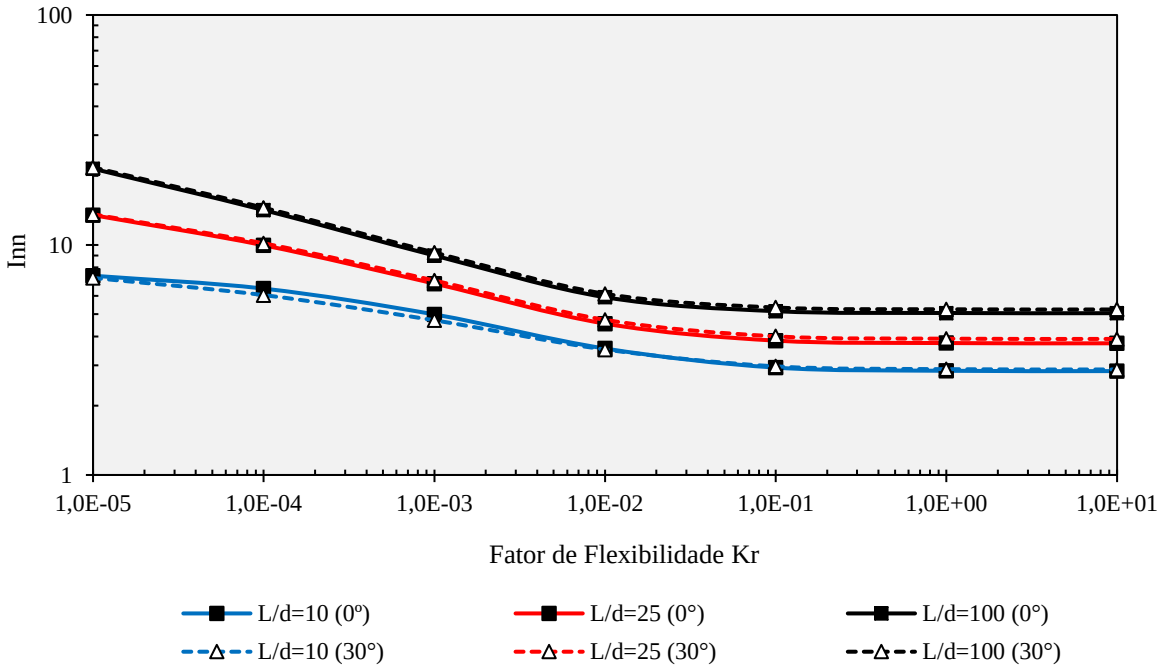
$$K_R = \frac{E_P I_P}{E_S L_P{}^4} \tag{6.4}$$

Onde:

$u_n \rightarrow$ Deslocamento normal ao eixo da estaca no topo
$\theta \rightarrow$ Rotação no topo da estaca
$E_P \rightarrow$ Módulo de Elasticidade Longitudinal da Estaca
$I_P \rightarrow$ Momento de Inércia da Estaca
$E_S \rightarrow$ Módulo de Deformabilidade do Solo
$L_P \rightarrow$ Comprimento da Estaca

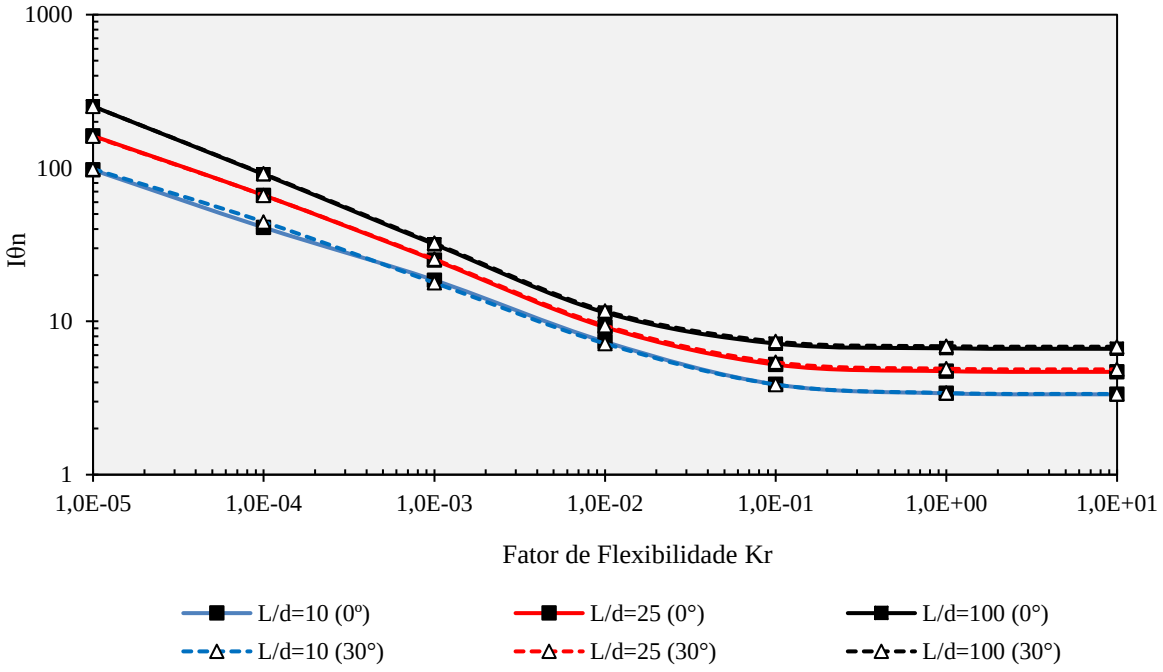
Na Figura 6-11 e Figura 6-12 são mostrados os coeficiente I_{nn} e $I_{\theta n}$ em função do fator de flexibilidade K_R, respectivamente.

Figura 6-11- Coeficiente de deslocamento I_{nn} em função do fator de flexibilidade



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Figura 6-12- Coeficiente $I_{\theta n}$ em função do fator de flexibilidade



Fonte: Elaboração do autor (2020)

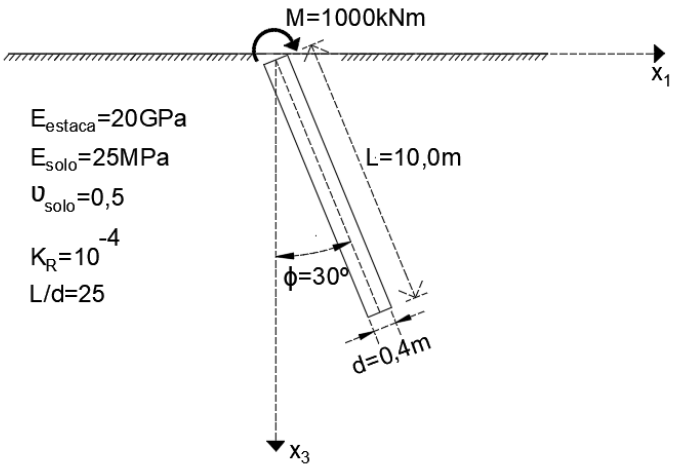
Os coeficientes I_{nn} e $I_{\theta n}$ apresentam basicamente o mesmo comportamento: quanto mais rígida for a estaca, menores são os deslocamentos e giros. Outra conclusão importante é que

estacas mais esbeltas (L/d altos) apresentam os maiores giros e deslocamentos. Quanto à inclinação da estaca, não foi notada muita significância, tendo em vista que as maiores diferenças observadas (estacas curtas) em relação à estaca vertical não superaram 5%. Ademais, para valores de K_R maiores que 1 foi percebido que a estaca se comportava como rígida à flexão, conforme sugerido por Poulos & Davis (1980).

6.5. Estaca Inclinada com Momento aplicado no topo

A mesma estaca do exemplo anterior é agora sujeita a um carregamento de momento em seu topo. As dimensões da estaca, carregamento e propriedades mecânica são dadas na Figura 6-13.

Figura 6-13- Estaca inclinada sujeita a momento



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Constatou-se que os deslocamentos transversais dessa estaca são iguais às rotações da estaca do exemplo anterior (Figura 6-10 (b)). Tal fato se justifica por tratar-se de uma análise linear-elástica com forças/momentos de mesma intensidade, na qual o teorema da reciprocidade de Maxwell-Betti prova que:

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}_A.\delta_B = M_B.\theta_A \\ &1000kN.\delta_B = 1000kNm.\theta_A \\ &\delta_B = \theta_A.m \end{aligned} \tag{6.5}$$

Definindo-se os coeficientes de deslocamento normal $I_{n\theta}$ e de rotação $I_{\theta\theta}$ devido ao momento M, têm-se:

$$I_{n\theta} = \frac{u_n}{\left(\dfrac{M}{E_s L_p^2}\right)} \tag{6.6}$$

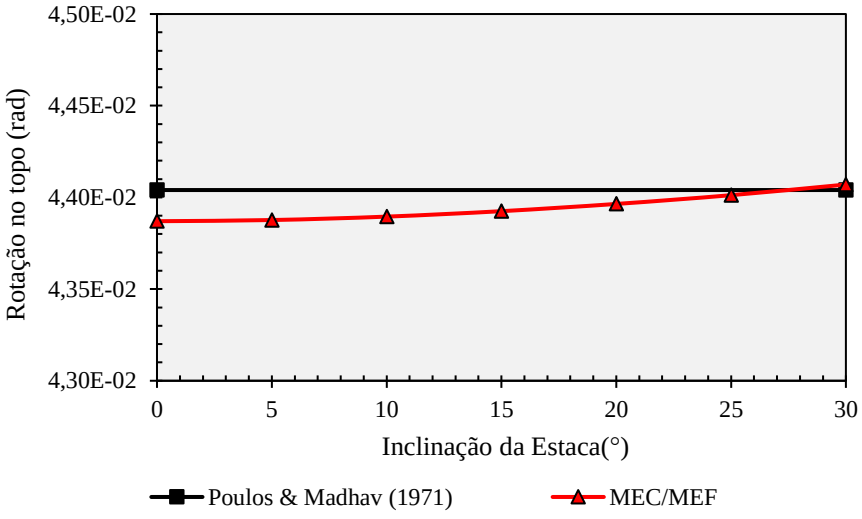
$$I_{\theta\theta} = \frac{\theta}{\left(\dfrac{M}{E_s L_p^3}\right)} \tag{6.7}$$

Por meio do teorema de Maxwell-Betti pode-se generalizar a igualdade da expressão (6.5) para os coeficientes $I_{\theta n}$ e $I_{n\theta}$, como se segue:

$$I_{n\theta} = I_{\theta n} \tag{6.8}$$

A rotação no topo da estaca em função do ângulo de inclinação é dada na Figura 6-14. Novamente, é observada muito pouca variação da resposta em relação ao ângulo de inclinação (menos de 1%). Nota-se grande concordância dos resultados com a formulação de Poulos & Madhav (1971), na qual não é considerada a variação da rotação em função do ângulo de inclinação.

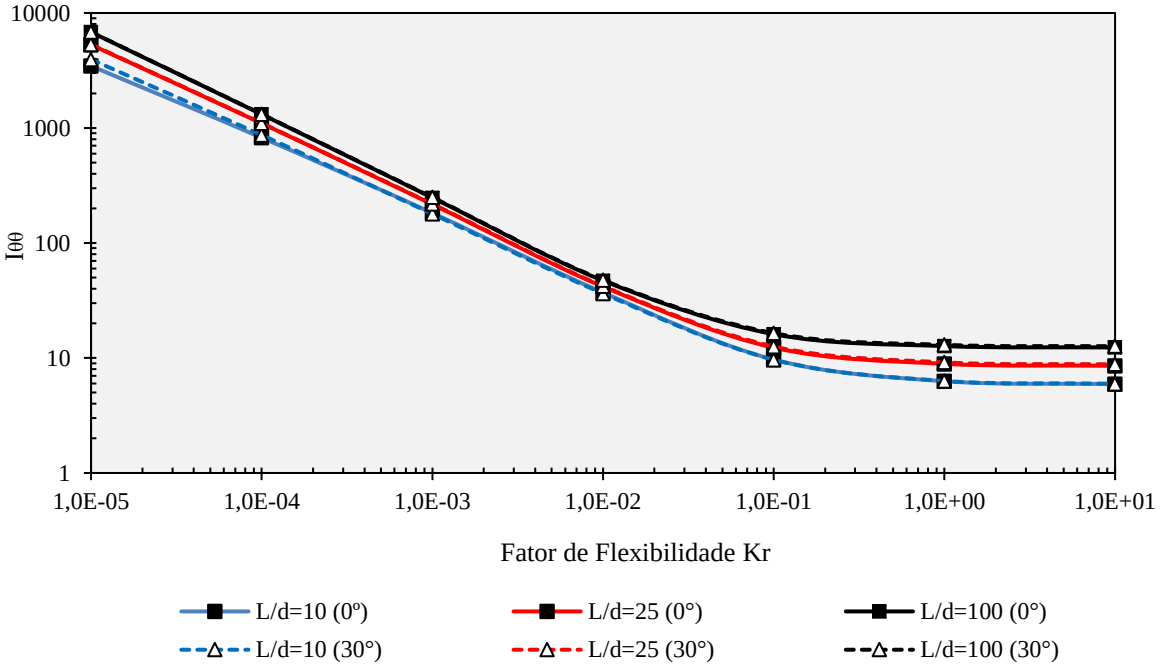
Figura 6-14- Rotação em função do ângulo de inclinação



Fonte: Elaboração do autor (2020)

O mesmo comportamento é observado para outras relações L/d e flexibilidades diferentes, conforme Figura 6-15. Portanto, as rotações da estaca vertical e inclinada, quando submetidas ao momento, são praticamente as mesmas (diferença máxima de 5%). Verifica-se, ademais, que para fatores de flexibilidade K_R muito altos, a rotação no topo da estaca tende a ser baixa e as estacas mais esbeltas (L/d alto) possuem maiores rotações em seu topo.

Figura 6-15- Coeficiente de rotação $I_{\theta\theta}$ em função do fator de flexibilidade

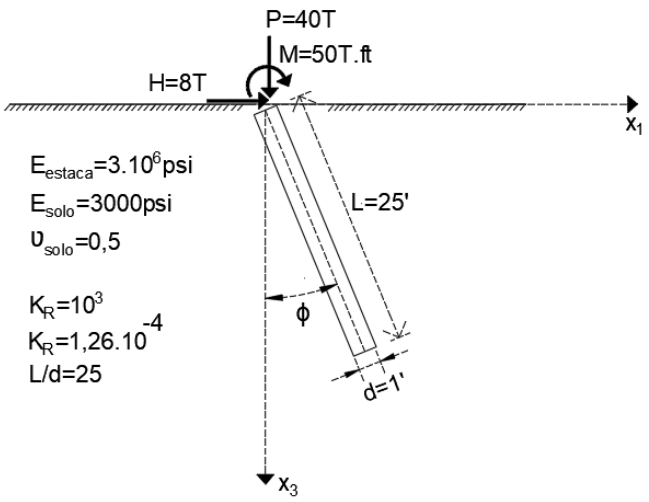


Fonte: Elaboração do autor (2020)

6.6. Estaca Inclinada

Este exemplo foi extraído de Poulos & Madhav (1971). A estaca inclinada está sujeita aos três tipos de carregamentos anteriores, simultaneamente. O ângulo ϕ assumirá valores compreendidos no intervalo de -30º a +30º. O problema é exposto na Figura 6-16.

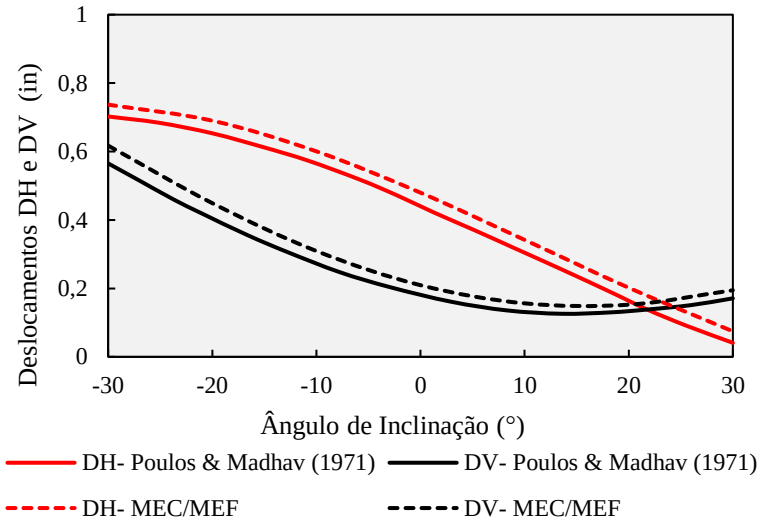
Figura 6-16- Estaca inclinada



Fonte: Elaboração do autor (2020)

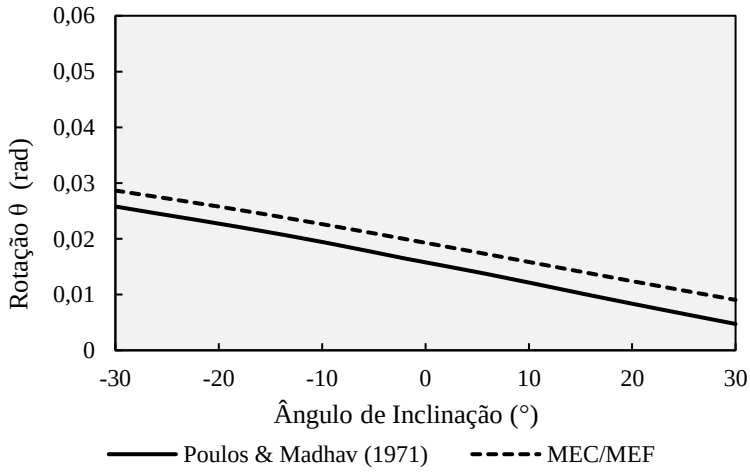
Os resultados para deslocamentos horizontais, verticais e rotações no topo da estaca em função do ângulo de inclinação são exibidos na Figura 6-17 e Figura 6-18, juntamente com os fornecidos por Poulos e Madhav (1971).

Figura 6-17- Deslocamento horizontal (DH) e deslocamento vertical (DV)



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Figura 6-18- Rotação em função do ângulo de inclinação



Fonte: Elaboração do autor (2020)

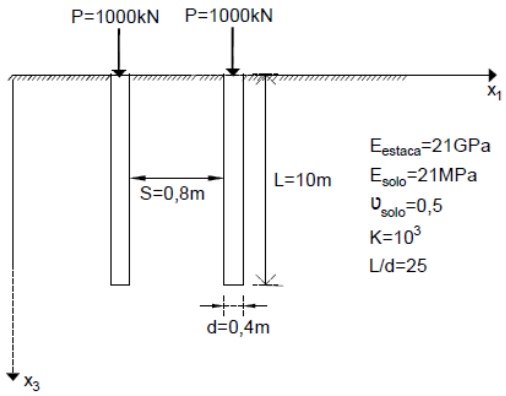
Os resultados obtidos apresentam boa concordância com Poulos & Madhav (1971), atestando a validade da formulação. Para os ângulos negativos temos os maiores deslocamentos e giros, enquanto que para os ângulos positivos têm-se os menores deslocamentos e giros. A

partir da Figura 6-17 e Figura 6-18, fica evidente que o ângulo de +30º é a solução ótima do problema, até mesmo em relação à estaca vertical. Dessa forma, pode-se concluir que estacas inclinadas podem apresentar soluções mais vantajosas para determinados problemas.

6.7. Grupo de estacas verticais sob carregamento axial

A Figura 6-19 traz o exemplo onde duas estacas verticais são solicitadas por carregamentos verticais idênticos. As estacas possuem as mesmas propriedades físicas e geométricas. O espaçamento entre elas é de 0,8 metro.

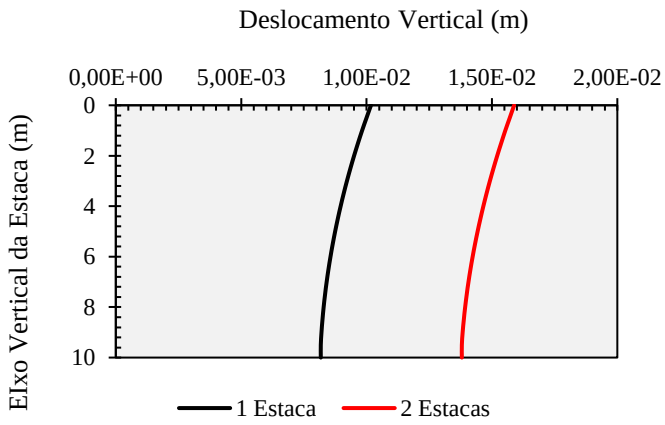
Figura 6-19- Grupo de duas estacas solicitadas axialmente



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Os deslocamentos verticais para as duas estacas são os mesmos devido a simetria do problema. Na Figura 6-20 é possível observar estes deslocamentos verticais ao longo do eixo da estaca. Para efeito de comparação, também são plotados os resultados de uma única estaca com as mesmas propriedades e condições de carregamento.

Figura 6-20- Deslocamento vertical ao longo do eixo vertical



Fonte: Elaboração do autor (2020)

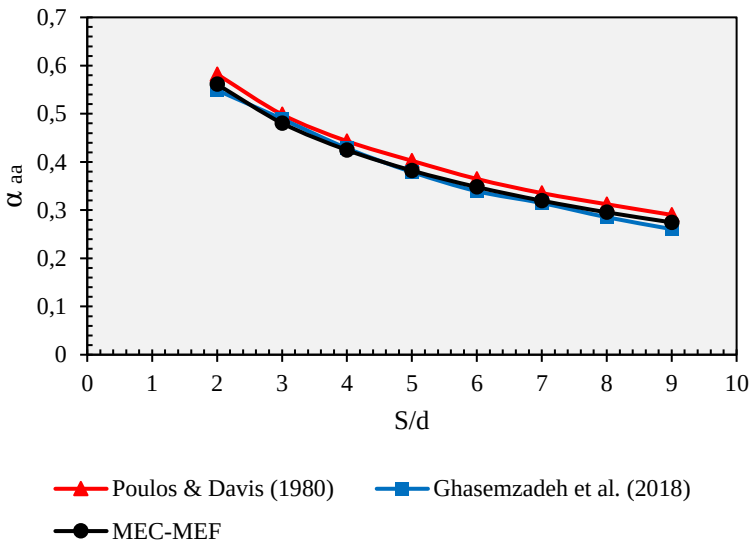
De posse desses resultados, é possível constatar que a presença de uma outra estaca afeta nos deslocamentos da estaca analisada, assim como a estaca analisada afeta nos deslocamentos da outra. Este trata-se de um efeito mútuo conhecido como “efeito de grupo”. Para analisar o quanto isso influencia nos deslocamentos finais, é preciso definir o coeficiente α da seguinte forma:

$$\alpha_{ij} = \frac{\text{deslocamento adicional na direção } i \text{ causado pela estaca adjacente}}{\text{deslocamento na direção } j \text{ devido sua própria carga (estaca isolada)}} \tag{6.9}$$

Onde i é a direção do deslocamento analisado causado pelo carregamento na direção j.

Assim, com o intuito de validar a formulação proposta, a Figura 6-21 traz os coeficientes α_{aa} do topo da estaca em função da razão S/d obtidos por diferentes autores. A razão S/d pode ser entendida como um espaçamento relativo entre as duas estacas.

Figura 6-21- Coeficiente α em função de S/d



Fonte: Elaboração do autor (2020)

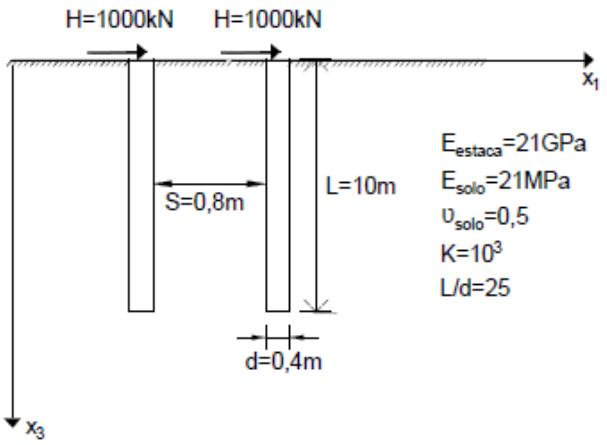
Onde o subscrito a é referente a direção axial.

Os resultados obtidos mostram que quanto mais afastadas forem as estacas, menor será o efeito de grupo. Para além disso, o acoplamento MEC/MEF é validado pela boa concordância com os resultados de Ghasemzadeh et al. (2018) e Poulos & Davis (1980), os quais empregaram o MEF e o acoplamento MDF/MEC, respectivamente.

6.8. Grupo de estacas verticais sob carregamento lateral

Neste exemplo temos duas estacas verticais espaçadas por uma distância S entre si e solicitadas lateralmente. Neste primeiro momento, restringimos as rotações nos topos das estacas e focamos no estudo dos deslocamentos laterais. A Figura 6-22 mostra o esquema do problema e seus dados.

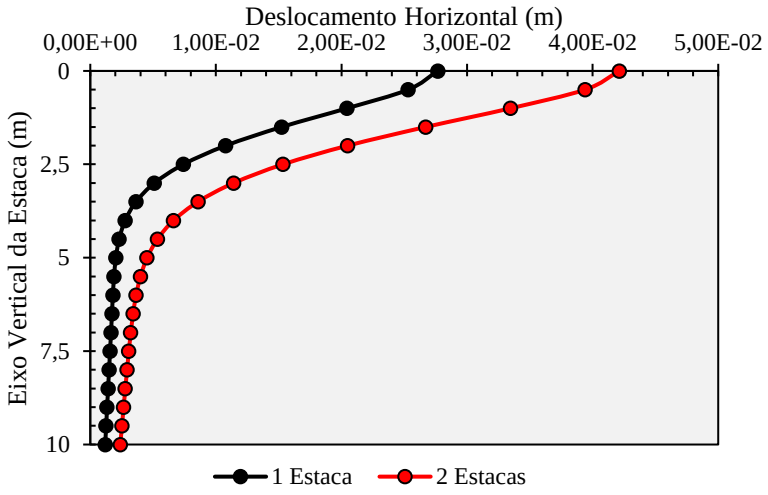
Figura 6-22- Grupo de estacas verticais sujeito a carregamento lateral



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Os deslocamentos laterais obtidos para as duas estacas foram os mesmos, seus valores ao longo do comprimento de uma das estacas são mostrados na Figura 6-23. Nesta, verificam-se, ainda, os deslocamentos obtidos para uma estaca isolada submetida a sua parcela de carregamento.

Figura 6-23- Deslocamento Horizontal ao longo do comprimento

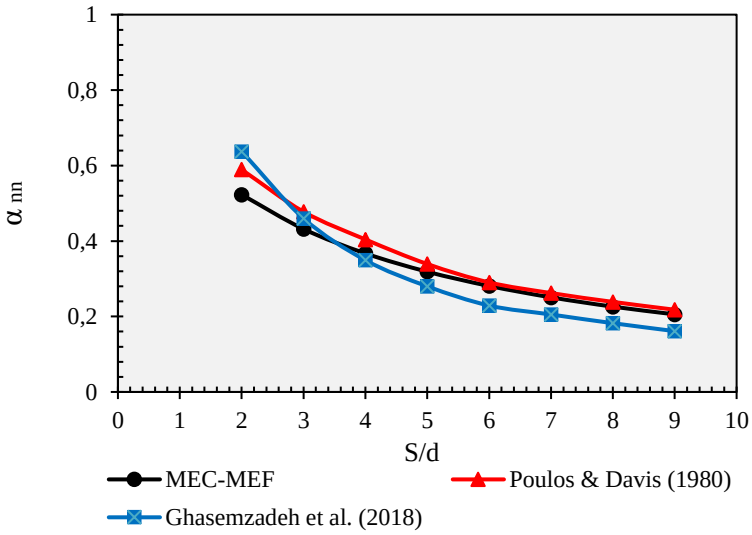


Fonte: Elaboração do autor (2020)

Como no exemplo anterior, é notória a influência que uma nova estaca gera na rigidez do conjunto. Neste exemplo, as estacas em grupo têm maiores deslocamentos do que teriam sendo solicitadas individualmente. O efeito de grupo está novamente presente e acontece para qualquer tipo de solicitação, sem que necessariamente a outra estaca esteja solicitada; a simples presença no meio já o enrijece.

Na Figura 6-24 é analisada a influência que o espaçamento relativo S/d exerce no coeficiente α_{nn}. Os resultados obtidos por outros autores também são exibidos.

Figura 6-24- Coeficiente α em função de S/d



Fonte: Elaboração do autor (2020)

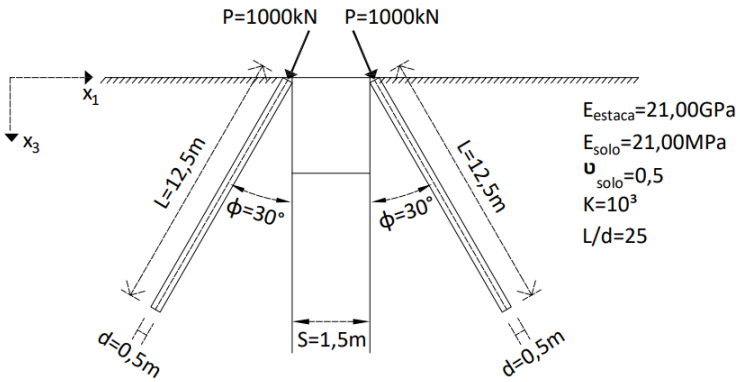
Onde n é a direção normal ao eixo longitudinal da estaca.

Observa-se uma boa conformidade dos resultados quando comparados com os dos outros autores, principalmente com Poulos & Davis (1980). Para todas as formulações mostradas na Figura 6-24 o comportamento é o mesmo: os coeficientes α_{nn} diminuem conforme a distância entre as estacas aumenta.

6.9. Grupo de estacas inclinadas sob carregamento axial

O problema consiste em duas estacas inclinadas em ângulos iguais, porém, em sentidos diferentes, sendo solicitadas por duas cargas axiais de mesma intensidade aplicadas em seus topos, conforme Figura 6-25.

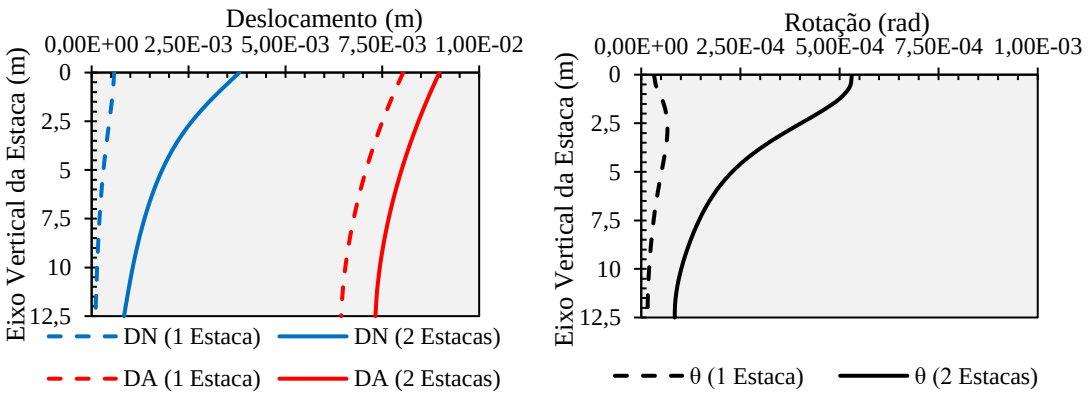
Figura 6-25- Grupo de estacas inclinadas solicitadas axialmente



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Um resultado importante que deve ser comentando é que cargas axiais também provocam deslocamentos normais ao eixo da estaca (deslocamento lateral). Isso acontece devido ao emprego da solução fundamental de Mindlin que leva em conta a continuidade do meio. Em algumas formulações esse comportamento é negligenciado, por isso, a Figura 6-26 traz os gráficos dos deslocamentos axiais (DA), normais (DN) e rotações (θ) ao longo do comprimento para uma e duas estacas.

Figura 6-26- Deslocamentos axiais, normais e rotações ao longo do comprimento

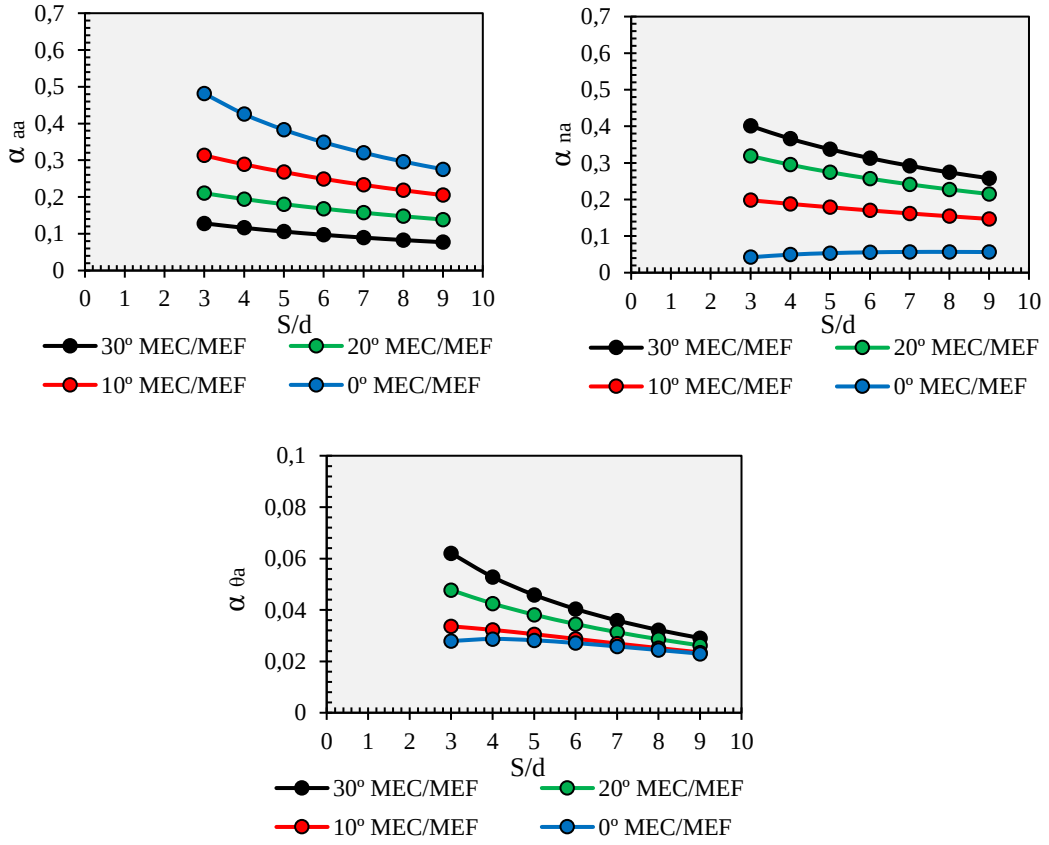


Fonte: Elaboração do autor (2020)

Analisando os dois gráficos da Figura 6-26, percebe-se que todos os deslocamentos para duas estacas são maiores que os da estaca isolada. O deslocamento lateral (DN) que era quase nulo para uma estaca isolada, passou a ser expressivo quando se têm duas estacas; as rotações, embora tenham crescido, ainda são muito pequenas para ambos os casos; e o deslocamento axial, o de maior magnitude do problema, sofreu o menor aumento.

Agora, um estudo paramétrico é realizado para avaliar a influência que o ângulo de inclinação ϕ exerce sobre os coeficientes α_{ij}. Permanecem fixos a razão L/d, K e ν. Os resultados podem ser conferidos na Figura 6-27.

Figura 6-27- Coeficientes α em função de S/d

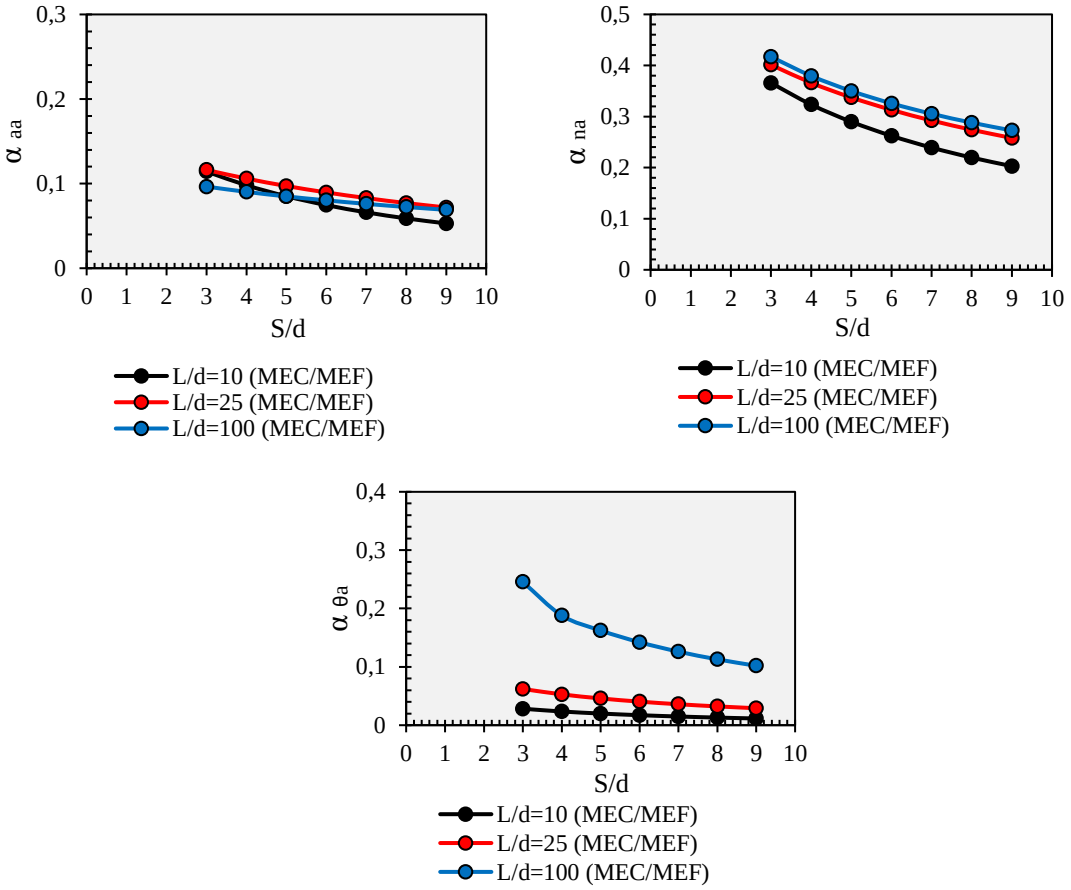


Fonte: Elaboração do autor (2020)

Observa-se que quanto mais próximo da vertical estiverem as estacas, maior será o coeficiente da direção axial α_{aa} e menores serão os coeficientes relacionados com a flexão α_{na} e $\alpha_{\theta a}$. Nas estacas inclinadas, os coeficientes decrescem com o aumento do espaçamento relativo S/d, enquanto para estacas verticais os coeficientes α_{na} e $\alpha_{\theta a}$ permanecem quase constantes e sem muita importância devido aos valores baixos.

O mesmo tipo de análise é realizada para diferentes relações L/d, com $\phi = 30^{o}, K = 1000, \nu = 0,5$. Os resultados dos coeficientes α_{ij} em função do espaçamento relativo L/d são mostrados na Figura 6-28.

Figura 6-28- Coeficientes α para diferentes razões L/d

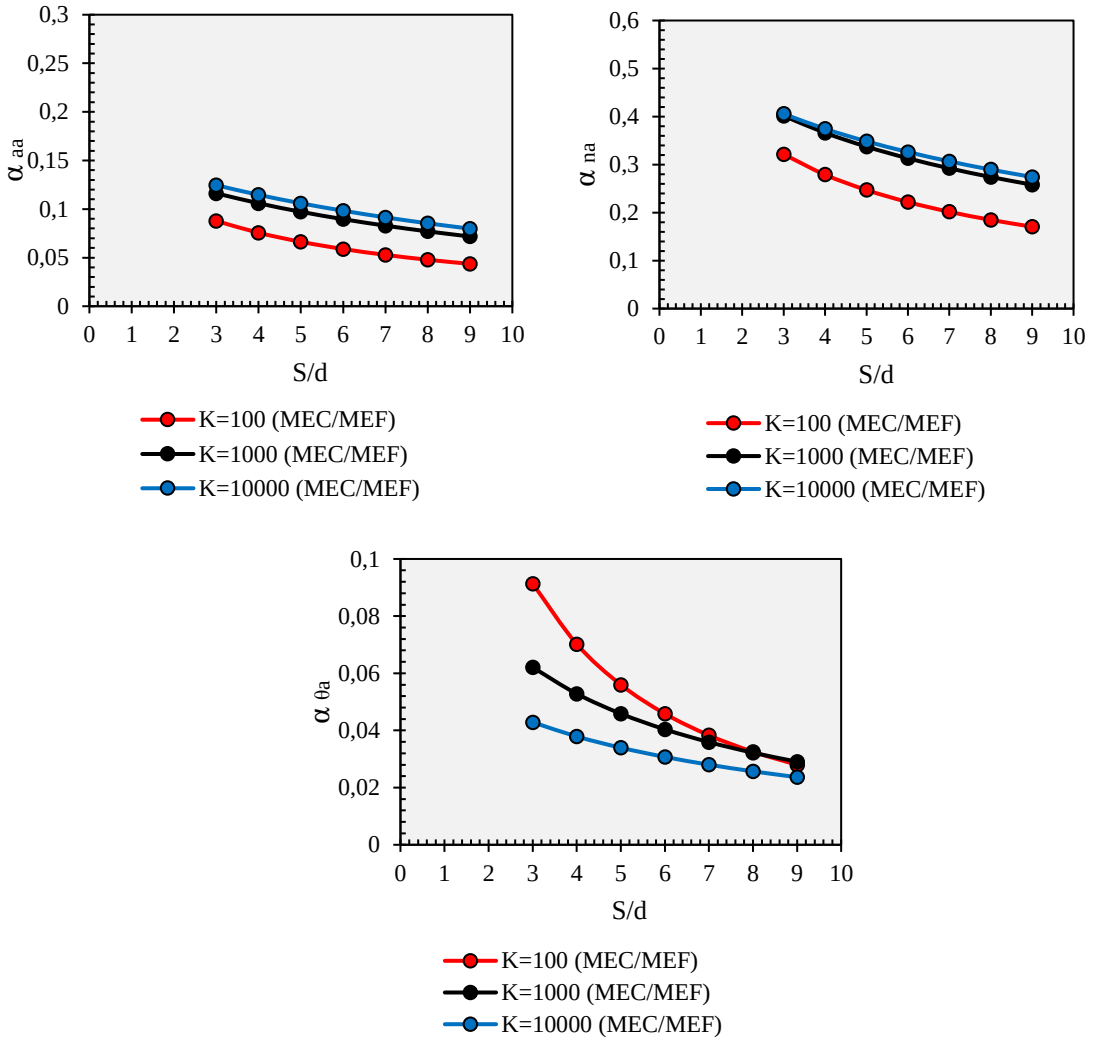


Fonte: Elaboração do autor (2020)

A Figura 6-28 demonstra que para as diferentes relações L/d existem poucas diferenças entre os seus coeficientes α_{aa}, evidenciando a pouca influência desse parâmetro neste coeficiente. Já para os coeficientes α_{na} e $\alpha_{\theta a}$, quanto mais esbeltas forem as estacas, maiores serão estes coeficientes, o que apresenta coerência, pois são coeficientes ligados à flexão.

Por fim, na Figura 6-29 são exibidos os coeficientes α_{ij} em função de S/d para diferentes razões K, com $\phi = 30^{o}, L/d = 25, \nu = 0,5$.

Figura 6-29- Coeficientes α para diferentes K



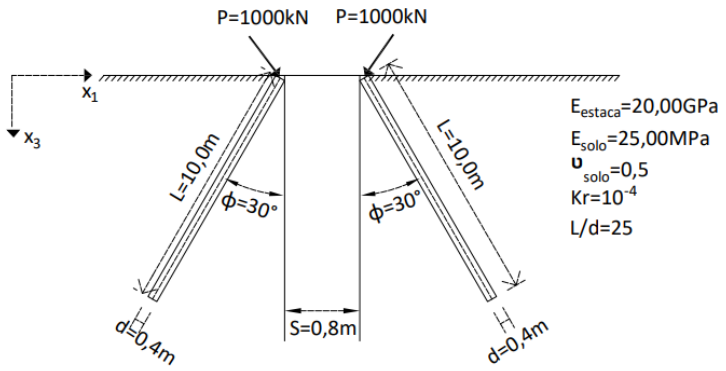
Fonte: Elaboração do autor (2020)

Depreende-se que a rigidez relativa K é um parâmetro importante na obtenção dos coeficientes α_{ij}. Os coeficientes α_{aa} e α_{na} apresentam comportamento muito similar, para os maiores valores de K temos os maiores coeficientes e conforme o espaçamento relativo S/d aumenta, os coeficientes diminuem, afinal, temos maiores deslocamentos e capacidade de transferência de carga para rigidezes relativas mais altas. Já para o caso do $\alpha_{\theta a}$, o comportamento é um pouco diferente devido o emprego da solução fundamental que prevê maiores ganhos de deslocamento axial do que giro conforme K aumenta. Ademais, o comportamento dos coeficientes α_{ij} em relação ao espaçamento relativo entre as estacas permanece o mesmo.

6.10. Grupo de estacas inclinadas sob carregamento transversal

Neste exemplo temos duas estacas inclinadas carregadas transversalmente. Como pode ser observado na Figura 6-30, trata-se de um problema de flexão em grupo de estacas, nelas, serão analisados os deslocamentos e parâmetros do efeito de grupo.

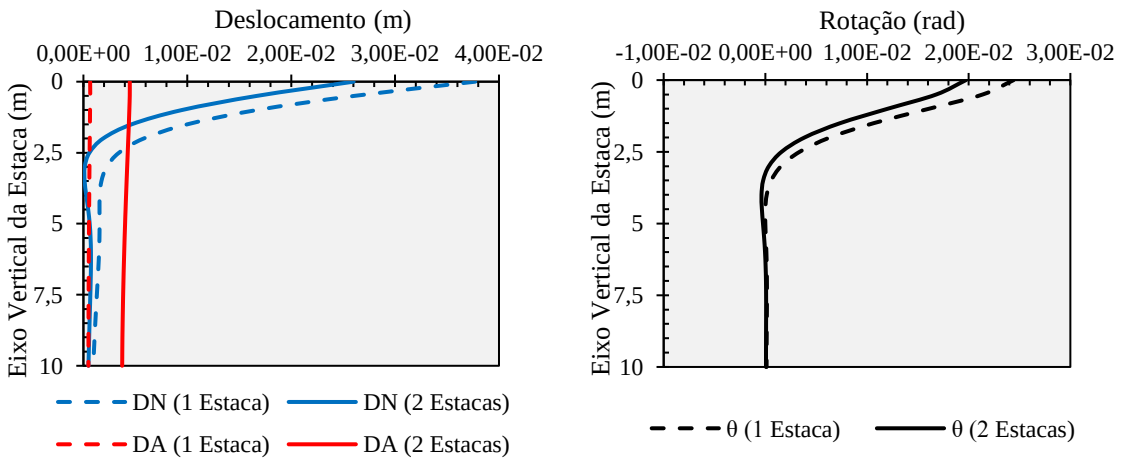
Figura 6-30- Grupo de estacas inclinadas solicitadas transversalmente



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Os deslocamentos obtidos para ambas as estacas foram iguais, conforme previsto para um problema simétrico, o que indica a correta implementação da matriz de rotação. Na Figura 6-31 são exibidos os deslocamentos na direção axial (DA), direção normal ao eixo longitudinal da estaca (DN) e rotações θ ao longo do comprimento. Para efeito de comparação também são mostrados os deslocamentos e rotações referentes a mesma estaca de forma isolada.

Figura 6-31- Deslocamentos e rotação ao longo do comprimento



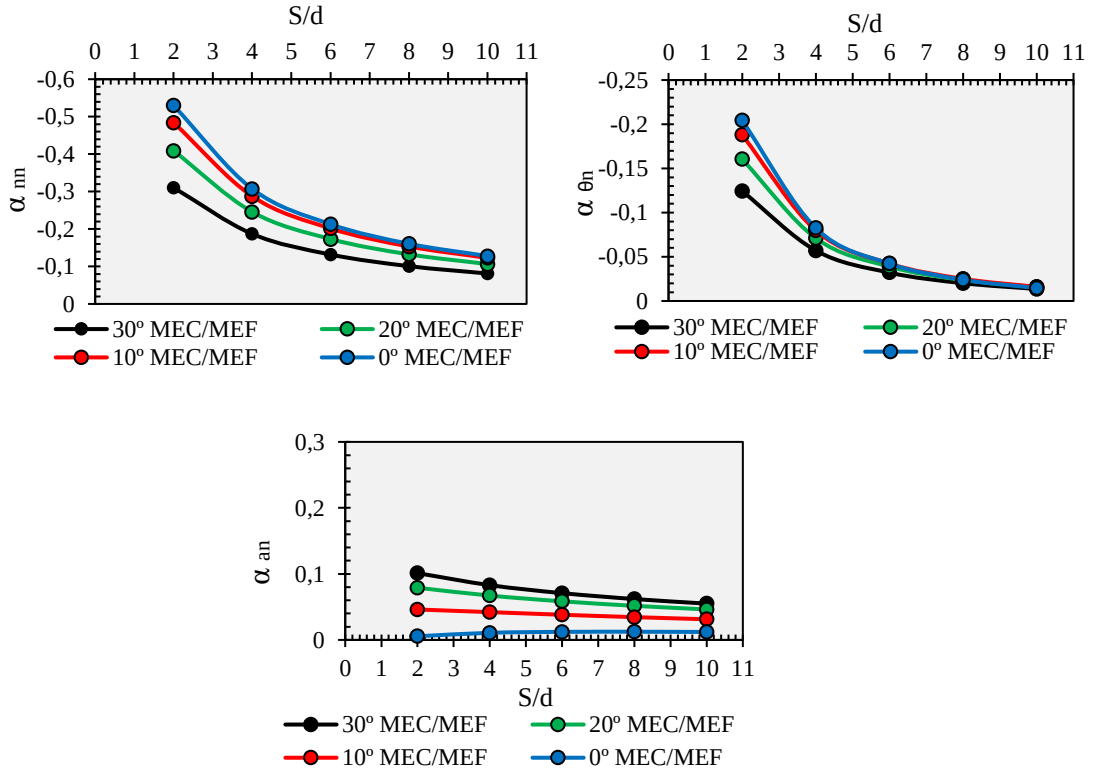
Fonte: Elaboração do autor (2020)

Da Figura 6-31 percebe-se que, diferentemente do exemplo anterior, os deslocamentos DN e rotações θ para duas estacas são menores que o de uma estaca. Isso mostra que o fator de grupo não apenas aumenta os deslocamentos, como pode diminuí-los. Já os deslocamentos axiais que eram quase nulos na estaca isolada, passam a ter maior importância no grupo de duas estacas devido ao aumento considerável.

Uma forma de avaliar essas alterações no campo de deslocamentos das estacas em grupo é realizando uma análise paramétrica dos coeficientes α_{ij} em função do espaçamento relativo S/d. A seguir são feitas discussões acerca destes parâmetros.

Primeiramente, são feitas variações no ângulo de inclinação ϕ das estacas do problema. Os resultados para α_{ij} em função de S/d estão na Figura 6-32.

Figura 6-32- Coeficientes α em função de S/d para diferentes inclinações



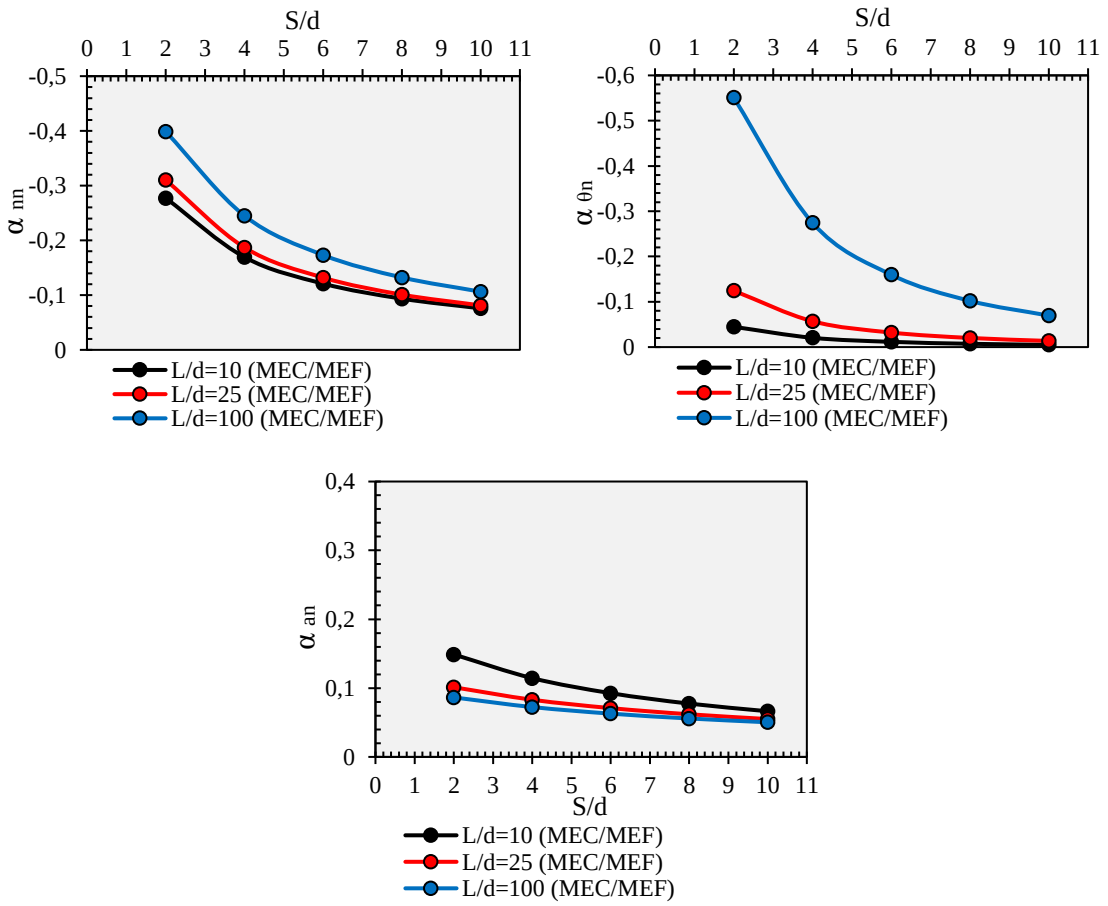
Fonte: Elaboração do autor (2020)

Nota-se que estacas com maiores ângulos de inclinação ϕ possuem menores coeficientes α_{nn} e $\alpha_{\theta n}$ (em módulo), enquanto seus coeficientes α_{an} são maiores. Na maioria dos casos os coeficientes α_{ij} possuem uma relação inversa com o espaçamento relativo S/d,

exceto para o caso do coeficiente α_{an} da estaca vertical, que permanece quase constante e próximo de zero.

Em seguida são feitas análises do problema variando-se a relação L/d e mantendo as demais propriedades inalteradas. Os resultados podem ser conferidos na Figura 6-33.

Figura 6-33- Coeficientes α em função de S/d para diferentes razões L/d

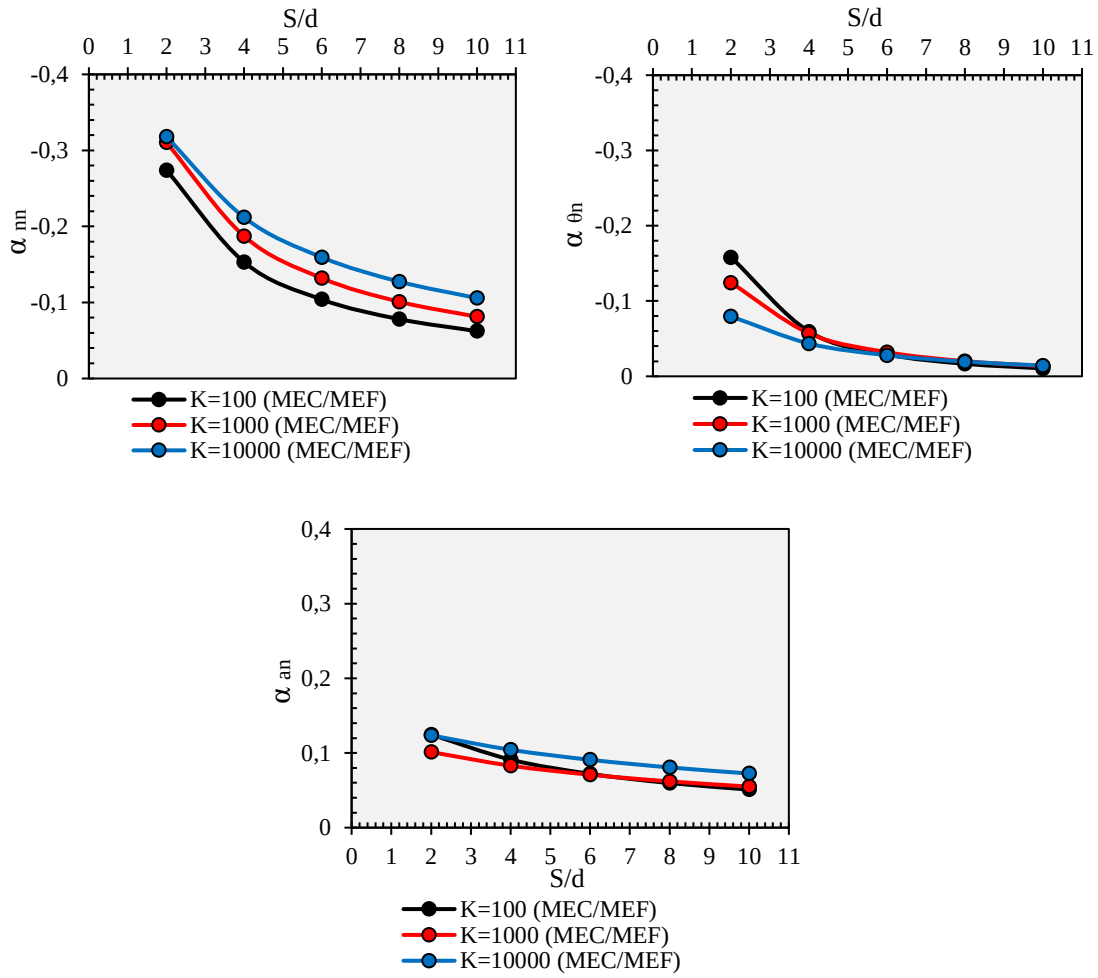


Fonte: Elaboração do autor (2020)

Percebe-se que os coeficientes α_{nn} e $\alpha_{\theta n}$ são maiores (em módulo) para as estacas mais esbeltas, ou seja, com maior razão L/d. Já as estacas mais curtas possuem maiores coeficientes α_{an}. Esses resultados mostram que a parcela da rigidez do sistema proveniente das propriedades geométricas tem influência significativa nos coeficientes α_{ij}.

Buscando avaliar a influência da rigidez relativa entre os materiais nos coeficientes α_{ij}, são feitas análises supondo três diferentes valores de K para o problema da Figura 6-30. A Figura 6-34 ilustra os resultados obtidos para os coeficientes α_{ij} ao longo do espaçamento S/d.

Figura 6-34- Coeficientes α em função de S/d para diferentes K



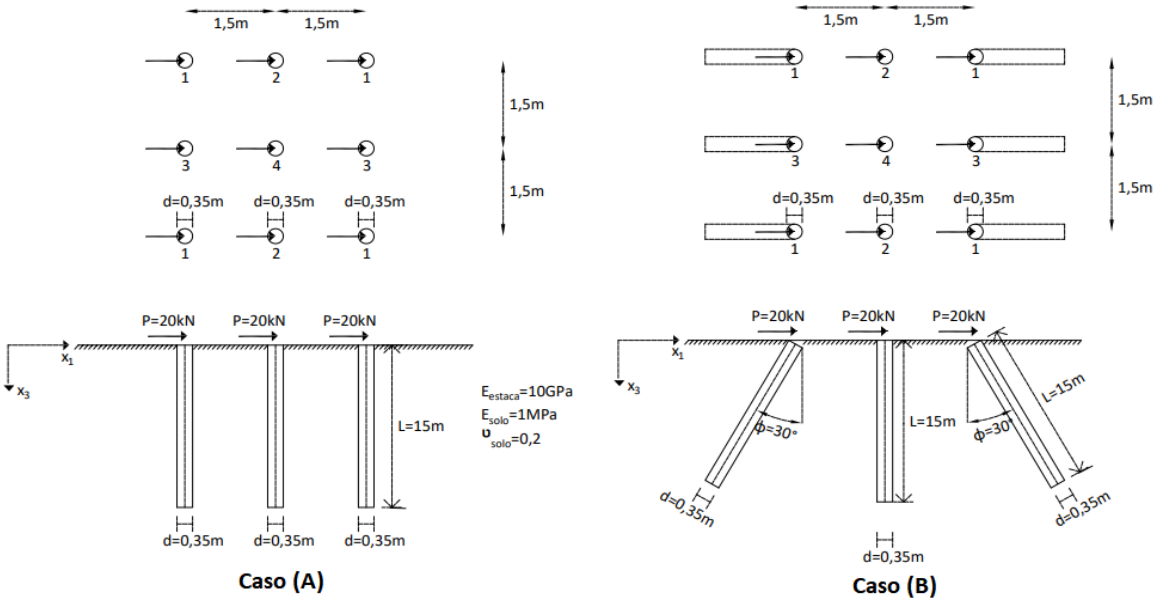
Fonte: Elaboração do autor (2020)

A partir da Figura 6-34 é possível constatar que a rigidez relativa K influencia consideravelmente no coeficiente α_{nn}, sendo os maiores valores (em módulo) deste coeficiente atribuídos aos de maiores K. Em relação ao coeficiente α_{an} é notada muito pouca variação entre as curvas, continuando com valores baixos e que tendem a diminuir ainda mais com o distanciamento S/d. Quanto ao coeficiente $\alpha_{\theta n}$ é observado que seus maiores valores são atribuídos aos menores valores de K e para espaçamentos pequenos, com o aumento dos espaçamentos os valores de K não exercem influência significativa.

6.11. Grupos de estacas

Neste exemplo é analisada a interação de uma grande quantidade de estacas com o solo. Serão estudados dois grupos solicitados por carregamentos horizontais: o primeiro com nove estacas verticais e o segundo com nove estacas, sendo seis delas inclinadas. As propriedades de ambos os problemas são as mesmas. A Figura 6-35 traz todos os detalhes dos problemas.

Figura 6-35- Grupos de estacas solicitados por forças horizontais



Fonte: Elaboração do autor (2020)

O Caso (A) foi um problema proposto por Matos Filho (1999), onde foram analisados os deslocamentos horizontais para 4 subgrupos (Figura 6-35). Estes subgrupos foram determinados fazendo-se proveito da simetria. Na Tabela 1 são mostrados os resultados para os deslocamentos horizontais nos topos das estacas, onde são comparados com os obtidos por Matos Filho (1999) e Luamba (2018).

Tabela 1-Deslocamentos horizontais no topo (cm)

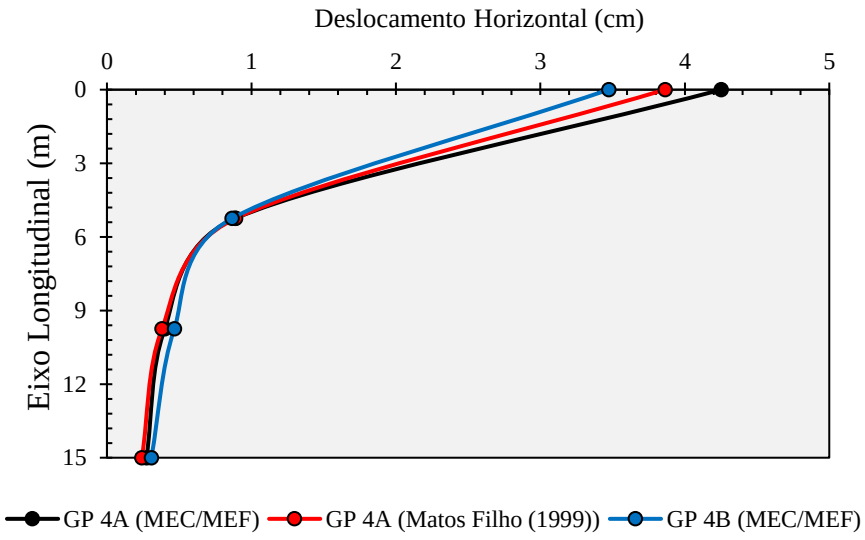
Grupo	Este trabalho	Luamba (2018)	Diferença (%)	Matos Filho (1999)	Diferença (%)
1	3,5979	3,6156	-0,49	3,2946	8,43
2	3,8692	3,9094	-1,03	3,5284	8,81
3	3,9288	3,9474	-0,47	3,5842	8,77
4	4,2522	4,2986	-1,08	3,8632	9,15

Fonte: Elaboração do autor (2020)

As respostas obtidas apresentaram boa concordância com os demais autores, principalmente com Luamba (2018), que também utilizou o acoplamento MEC/MEF com 20 elementos finitos. Quando comparado com Matos Filho (1999), temos uma leve diferença devido a formulação MEC/MEF por ele utilizada, no qual é considerada somente um elemento finito com quatro nós. As formulações que consideram vários elementos finitos permitem melhor simulação da flexão da estaca.

Na Figura 6-36 são exibidos os deslocamentos na direção horizontal (x_1) ao longo do eixo longitudinal da estaca central (GP 4) para os caso A e B da Figura 6-35.

Figura 6-36- Deslocamentos horizontais ao longo do comprimento da estaca GP 4

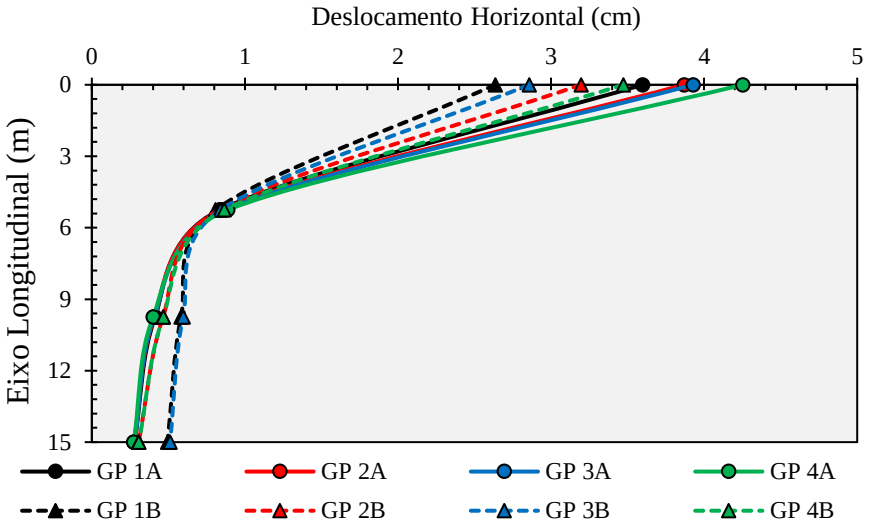


Fonte: Elaboração do autor (2020)

Observa-se novamente a boa concordância com os resultados de Matos Filho (1999), ficando mais evidente a partir dos 5m do eixo longitudinal. Além disso, o caso B apresentou os menores deslocamentos no topo, evidenciando a eficácia de estacas inclinadas neste tipo de problema.

Quanto a Figura 6-37, é analisado o comportamento de todos os subgrupos (GP 1, GP 2, GP3, GP4) ao longo do comprimento, tanto para o caso A, quanto para o caso B. Percebe-se que o caso B apresenta os menores deslocamentos no topo para todos os subgrupos, mas em alguns subgrupos os deslocamentos na base são maiores em comparação com o caso A. Além disso, para ambos os casos, os maiores deslocamentos estão na estaca central (GP 4), mostrando que essa região é a mais solicitada, enquanto as mais afastadas do centro (GP 1) são menos solicitadas.

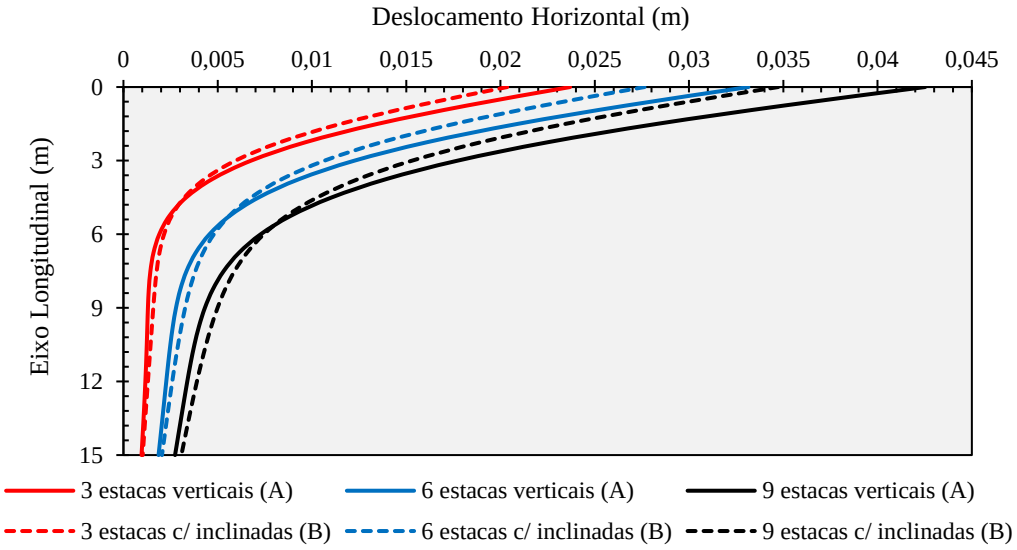
Figura 6-37- Deslocamentos horizontais de todos os GPs ao longo do comprimento



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Por fim, é feito um estudo dos deslocamentos devido a quantidade de estacas no solo. Para isso, são considerados grupos de 3, 6 e 9 estacas para uma, duas e três fileiras da Figura 6-35, respectivamente. Os deslocamentos horizontais ao longo do eixo longitudinal das estacas centrais são mostrados na Figura 6-38.

Figura 6-38- Deslocamento horizontal da estaca central ao longo do comprimento



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Os resultados obtidos ratificam que o número de estacas é um fator determinante, pois para nove estacas tem-se praticamente o dobro do deslocamento de três estacas. Em todas as quantidades analisadas o caso B teve os menores deslocamentos em relação ao caso A,

mostrando que o emprego de algumas estacas inclinadas já é o suficiente para reduzir os deslocamentos horizontais.

7. CONCLUSÃO

No presente trabalho foi apresentada uma formulação híbrida MEC/MEF para análise da interação de estacas com o solo, em especial, ao que toca o caso de estacas inclinadas isoladas e em grupos. Por meio deste método, permite-se o aproveitamento de dois dos principais métodos numéricos da atualidade: o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

O solo considerado elástico, linear, isótropo e homogêneo foi modelado pelo MEC, sendo necessário apenas a discretização de seu contorno em contato com a estaca, devido ao emprego da solução fundamental de Mindlin. A estaca, por seu turno, foi modelada por um elemento finito de pórtico tridimensional com cinco parâmetros nodais e dois nós. O presente conjunto de soluções corroborou para o desenvolvimento de um código computacional notadamente eficiente e "leve", aspectos relevantes que podem viabilizar a sua aplicação nos projetos de engenharia.

Constatou-se, ainda, que as estacas isoladas têm seus deslocamentos influenciados principalmente por alguns parâmetros, tais como: a relação geométrica L/d, onde as estacas mais esbeltas (L/d altos) apresentam os maiores deslocamentos; a rigidez relativa K entre a estaca e o solo, na qual são observados maiores deslocamentos para rigidezes K baixas; e o fator de flexibilidade K_R que relaciona os dois últimos parâmetros para o problema de flexão, e permite concluir que estacas mais flexíveis (K_R baixos) têm maiores deslocamentos e rotações.

Quanto ao problema de estacas inclinadas isoladas, foram realizadas análises paramétricas, buscando identificar a influência do ângulo de inclinação em seus deslocamentos. Contudo, as diversas aferições realizadas no curso deste trabalho, revelaram que a diferença apurada não supera 5% (cinco por cento), que foi para o caso das estacas inclinadas curtas submetidas à flexão. Dessa forma, insta concluir em conformidade à posição de Poulos & Madhav (1971), recomendando-se aproximar os deslocamentos de estacas inclinadas isoladas aos de estacas verticais, o que não acarreta em grandes prejuízos.

Para grupos de estacas foram definidos e estudados coeficientes α para melhor avaliar as alterações notadas nos deslocamentos da própria estaca e das estacas vizinhas; o chamado "efeito de grupo". Dentre os fatores que mais interferem nos deslocamentos de grupos pode-se citar: espaçamento relativo S/d entre as estacas, quanto maior for o espaçamento, menor é a alteração de deslocamentos; quantidade de estacas no solo, onde é observado um aumento no deslocamento conforme o número de estacas no solo cresce; relação geométrica L/d; rigidez relativa K e ângulo de inclinação. Estas últimas dependem da direção analisada e do tipo de

solicitação. Salienta-se que em grupos de estacas inclinadas o ângulo de inclinação não pode ser negligenciado, pois seus coeficientes de grupo divergem significativamente dos obtidos para grupos de estacas verticais.

No geral, o emprego de estacas inclinadas mostrou-se uma solução válida para determinados problemas, principalmente para aqueles com solicitações horizontais, onde os deslocamentos obtidos foram menores que os de estacas verticais. Deve-se atentar para o sentido da resultante das cargas aplicadas, para que a estaca esteja o mais próximo dessa direção, conforme foi observado no exemplo 6.6.

A formulação MEC/MEF proposta manifesta boa robustez, como pôde ser observado nos exemplos expostos. Os resultados obtidos foram de acordo com os apresentados por outros autores, como: Almeida (2003), Matos filho (1999), Poulos & Madhav (1971), Poulos & Davis (1980) e Ghasemzadeh et al. (2018). Além disso, esta mostrou-se como uma formulação mais geral para análise de estacas, pois contempla estacas inclinadas sem aproximações por estacas verticais, ainda que existam aperfeiçoamentos por fazer.

Dentre as extensões que podem ser feitas tomando como base este trabalho, cita-se:

- Consideração da rigidez à torção;
- Acoplamento com placa flexível;
- Acoplamento com uma superestrutura;
- Estratificação do solo;
- Comportamento não linear do solo;
- Consideração do deslizamento na interface;
- Efeito de vizinhança das edificações;
- Inclusão de modelos de confiabilidade estrutural.

REFERÊNCIAS

AI, Z.Y.; FENG, D.L.; CHENG, Y.C. Analytical layer-element solution to axisymmetric consolidation of multilayered soils. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 38, p. 227-232, 2011.

AI, Z.Y.; CHENG, Y.C. Analysis of vertically loaded piles in multilayered transversely isotropic soils by BEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 37, p. 327-335, 2013.

AI, Z.Y.; FENG, D.L.; CHENG, Y.C. BEM analysis of laterally loaded piles in multi-layered transversely isotropic soils. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 37, p. 1095-1106, 2013.

AI, Z.Y.; FENG, D.L. BEM analysis of laterally loaded pile groups in multi-layered transversely isotropic soils. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 44, p. 143-151, 2014.

ALATAWY, I. **Extended Boundary Element Method approach for Direct and Accurate Evaluation of Stress Intensity Factor**s. 2016. 207 p. Ph.D. Thesis – School of Engineering and Computing Sciences. Duhram University, Durham, 2016.

ALIABADI, M.H. **The Boundary Element Method: Application in solids and structures**. v.2. New York: Wiley, 2002.

ALMEIDA, V. S. **Análise da interação solo não-homogêneo/estrutura via acoplamento MEC/MEF**. 192p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

ANDRADE, H.C. **Análise da propagação de fissuras em estruturas bidimensionais não-homogêneas via Método dos Elementos de Contorno**. 2017. 241p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

AOKI, N.; LOPES, F. R. **Estimating stress and settlements due to deep foundation**. In: V Pan American Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering., Buenos Aires, Tomo I, p. 377-386, 1975.

ARAUJO, A. C. **Análise da interação solo-estrutura em edifícios sobre estacas**. 144p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2009.

ASSAN, A. E. **Método dos elementos finitos: Primeiros passos**. 2º Ed., Campinas: Editora da Unicamp, 2003.

ASSAN, A. E. **Métodos energéticos e análise estrutural**. 1º Ed., Campinas: Editora da Unicamp, 1996.

BAE, G. J., SHIN, H. S., SICILIA, C., CHOI, Y. G., LIM, J. J. Homogenization framework for the three-dimensional elastoplastic finite element analyseis of a grouted pipe-roofing reinforcement method for tunneliling. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 29, p. 1-24, 2005.

BANERJEE, P. K. Integral equation methods for analysis of piece-wise nonhomogeneous three-dimensional elastic solids of arbitrary shape. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 18, p. 293-303, 1976.

BANERJEE, P. K.; DAVIES, T. G. **Analysis of pile groups embedded in Gibson soil**. In: Conf. Soil Mechs Fdn ENgng., 9th, v. 1, p. 381-386, Tokyo, 1977.

BEER, G. Implementation of combined boundary element-finite element analysis with applications in geomechanics. In: BENERJEE, D. K.; WATSON, J. O., eds. **Developments in boundary element methods-4**. Barking: App. Sci. Publ., p. 191-225, 1986.

BETTI, E. Teoria della elasticita`. **Nuovo Cimento, Ser**. v.2, p. 6–10, 1872.

BOUSSINESQ, J. Applications des potenciels à L'etude de L'equilibre et du moviment des solides. **Gualtier-Villars**, Paris, 1885.

BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J. Boundary element methods for potential problems. **Appl Math Modell**. v.1, p. 372–378, 1977.

BREBBIA, C.A. Weighted residual classification of approximate methods. **Applied Mathematical Modelling**, v.2, n. 3, p.160-164, 1978a.

BREBBIA, C.A. **The Boundary Element method for engineers**. London, Pentech Press. 1978b.

BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements: An Introductory Course**. 2ed. Southampton: McGraw Hill, 1992.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering**. 1º Ed., Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1984.

BURMISTER, D. M. The general theory of stresses and displacements in layered systems I. **Journal of applied physics**, v.16, p. 89-96, 1945a.

BURMISTER, D. M. The general theory of stresses and displacements in layered soil systems III. **Journal of applied physics**, v.16, p. 296-302, 1945b.

BUTTERFIELD, R., BANERJEE, P. K. The problem of pile group-pile cap interaction. **Géotechnique**, v. 21, p. 135-142, 1971.

CERRUTI, V. Mem. Fis. Mat. **Acc. Lincei**, Roma, 1882.

CHEN, H. S.; MEI, C. C. **Oscillations and wave forces in a man-made harbr**. In: NAVAL HIDRO. SYMP., 10th, Cambridge, USA, 1974.

CHOU, P.C.; PAGANO, N.J. **Elasticity: tensor, dyadic, and engineering approaches**. Courier Corporation, New York, 1992.

CHOW, Y. K., TEH, C. I. Pile-cap-pile-group interaction in nonhomogeneous soil. **Journal of Geotechnical Engineering**, v. 117, p. 1655-1668, 1991.

CINTRA, J.C.A.; AOKI, N. **Fundações por estacas: projeto geotécnico**. 1º Ed., São Paulo: Oficina de Textos, 2010.

CLOUGH, R. W. **The Finite Element Method in Plane Stress Analysis**. American Society of Civil Engineers, 1960.

CODA, H. B. **Análise tridimensional transiente de estruturas pela combinação entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos**. 211p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.

CODA, H. B. **Fundamentos da mecânica dos materiais e das estruturas**. Notas de aula - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

COLARES, G. M. **Programa para análise da interação solo-estrutura no projeto de edifícios**. 83p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

FERRO, N. C. P. **Uma combinação do método dos elementos de contorno com o método dos elementos finitos para análise de fundações enrijecidas por estacas**. 135p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.

FERRO, N. C. P. **Uma combinação MEC/MEF para análise da interação solo-estrutura**. 193p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

FLAMANT, A. Sur la répartititions des pressions dans un solide rectangulaire chargé transversalement. **CR Acad Sci**, v. 114, p. 1465-1468, 1892.

GHASEMZADEH, H., TARZABAN, M., HAJITAHERIHA, M. M. Numerical Analysis of Pile-Soil-Pile Interaction in Pile Groups with Batter Piles. **Geotechnical and Geological Engineering**, v. 36, p. 2189-2215, 2018.

HAIN, S. J., LEE, I. K. The analysis of flexible raft-pile systems. **Géotechnique**, v. 28, p. 65-83, 1978.

IWAMOTO, R. K. **Alguns aspectos dos efeitos da interação solo-estrutura em edifícios de múltiplos andares com fundação profunda**. 157p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.

JASWON, M. A. Integral Equation Methods in Potential Theory. I. **Proceedings Of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v.275, n.1360, p.23-32, 1963.

KARAKUS, M., OZSAN, A., BASAIR, H. Finite element analysis for the twin metro tunnel constructed in Ankara clay, turkey. **Bulletin of Engineering Geology and the Environment**, v. 66, p. 71-79, 2007.

KASSIMALI, A. **Matrix Analysis of Structures**. 2 ed. Stamford: Cengage Learning, 2012.

KELVIN, W.T. Note on the integrations of the equations of equilibrium of an elastic solid. **Cambridge Dublin Math J.**, v.3, 1848.

LEE, C. Y.; SMAL, J. C. Finite layer analysis of laterally loaded piles in cross-anisotropic soils. **International Journal for Numerical Methods in Geomechanics**, vol. 15, p. 785-808, 1991.

LOVE, A. E. H. **A treatise on the mathematical theory of elasticity**. Dover, New York, 4º Ed., 1944.

LUAMBA, E. S. **Análise da interação casca plana - estaca - solo via acoplamento MEC/MEF tridimensional e suas aplicações.** 154p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

MAIER, G.; NOVATI, G. **Boundary element elastic analysis by a successive stiffness method**. Int. J. for Numerical and Anal. Methods in Geomechanics, v. 11, p. 435-447, 1987.

MATOS FILHO, R. F. **Análise da interação estaca-solo via combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno**. 116p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

MATTES, N. S.; POULOS, H. G. Settlement of single compressible pile. **Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division**, ASCE, v.97, n.SM1, p.189-207, 1969.

MCDONALD, B. H., WEXLER, A. Finite element solution of unbounded field problems. **IEE Trans. Microwave Theory and Technique**, MTT-20, p. 841-847, 1972.

MELAN, E. Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im Innern beanspruchten Halbscheibe. **Z Angew Math Mech**, v. 12, p.343–346, 1932.

MENDONÇA, A. V. **Análise da interação placa-estaca-solo via combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno**. 151p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

MINDLIN, R. D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. **J. Physics**, 7:195-202, 1936.

MINDLIN, R. D. **Force at a point in the interior of a semi-infinite solid**. Office of naval research project nº. 064-388. Technical report nº. 8, May, 1953.

MOTA, M. M. C. **Interação solo-estrutura em edifícios com fundação profunda: método numérico e resultados observados no campo**. 222p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

MOURA, A. R. L. U. **Interação solo-estrutura em edifícios**. Dissertação (Mestrado) – Centro de Tecnologia e Geociência, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1995.

NAKAGUMA, R. K. **Three-dimensional elastostatics using the boundary element method**. Ph.D. Thesis - University of Southampton, Southampton, 1979.

OSHIMA, S. T. **Uma combinação MEC/MEC para análise da interação de estacas inclinadas e o solo**. 84p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

OTTAVIANI, M. Three-dimensional finite element analyses of vertically loaded pile groups. **Géotechnique**, v. 25, p. 159-174, 1975.

PAIVA, J. B. **Formulação do método dos elementos de contorno para análise de interação solo-estrutura**. Tese (Livre docência) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.

PAULA, F. A.; TELLES, J. C. F.; MANSUR, W. J. Combination of boundary elements and finite elements to solve two-dimensional elasticity problems. In: BREBBIA, C. A.; VENTURINI, W. S., eds. **Boundary element techniques: applications in stress analysis and heat transfer**. Southampton: CML. Publ., p. 163-176, 1987.

POULOS, H. G. Analysis of the settlement of pile groups. **Geotechnique**, v.18, p.449- 471, 1968a.

POULOS, H. G. The influence of a rigid cap on the settlement behaviour of an axially loaded pile. **Civ. Eng. Trans., Inst. Engrs. Aust.**, vol. CE10, no.2, p. 206-208, 1968b.

POULOS, H.G. Behavior of laterally loaded piles I-Single piles. **Journal of the soil mechanics and foundations division**, ASCE, v. 97, s. SM5, p. 711-731, 1971a.

POULOS, H.G. Behavior of laterally loaded piles II- pile groups. **Journal of the soil mechanics and foundations division**, ASCE, v. 97, s. SM5, p. 733-751, 1971b.

POULOS, H.G.; DAVIS, E.H. The settlement behavior of single axially loaded incompressible piles and piers. **Géotechnique**, v. 18, p. 351-371, 1968.

POULOS, H.G.; DAVIS, E.H. **Pile foundation analysis and design**. New York: John Wiley & Sons, 1980.

POULOS, H. G. & MADHAV, M. R. Analysis of the movement of battered piles. Proc. 1º Aust. N. Z. **Conf. On Geomechs.**, Melbourne, p. 268-275, 1971.

PROENÇA, S. P. B. **Introdução aos métodos numéricos**. Notas de aula - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

RAMOS, A. P. F. **Análise da interação estaca-solo-superestrutura com o acoplamento MEC-MEF**. 193p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

REIS, J. H. C. **Interação solo-estrutura de grupo de edifícios em fundações superficiais em argila mole**. 172p. Dissertação (Mestrado em Geotecnia) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.

RIBEIRO, D. B. **Análise da interação solo-estrutura via acoplamento MEC-MEF**. 121p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

RIBEIRO, D. B. **Estudo e aplicação de um elemento de contorno infinito na análise da interação solo-estrutura via combinação MEC/MEF**. 232p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

RIBEIRO, I. S.; INOUE, H.; SILVA, K. I.; ROCHA, P. A. S. **Análise Linear Elástica de Pórticos Espaciais**. SIMMEC/EMMCOMP 2014, Juiz de Fora, MG, 2014.

RIZZO, F.J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. **Quarterly of Applied Mathematics**, v.25, n.1, p.83-95, 1967.

ROSA, A. K. **Estudo comparativo de formulações do MEC para análise de interação estaca-solo.** 110p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

SAVASSI, W. **Método da energia potencial total na análise numérica de estruturas: primeiras noções sobre o método dos elementos finitos.** 1º Ed., São Carlos: EESC/USP, 2016.

SELVADURAI, A. P. S. **Elastic analysis of soil-foundation interaction**. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1979.

SMALL, J. C.; BOOKER, J. R. Finite layer analysis of layered elastic materials using a flexibility approach. Part 1 - strip loadings. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 20, p. 1025-1037, 1984.

SMALL, J. C.; BOOKER, J. R. Finite layer analysis of layered elastic materials using a flexibility approach. Part 2 – circular and rectangular loadings. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 23, p. 959-978, 1986.

SORIANO, H. L. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. 1º Ed., São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003.

STEINBRENNER, W. Tafelun Zur Setzungsberechnung. **Die Strasse**, v. 1, p. 121, 1934.

TA, L. D.; SMALL, J. C. Analysis and performance of pile draft foundations on layered soils-case studies. **Soil and Foundations**, vol. 38, p. 145-150, 1998.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Teoria da Elasticidade**, traduzido por Villaça, S. F.; Soriano, H. L.; Souza, H. S., 3 ed., Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980.

TURNER, M. J., CLOUGH, R. W., MARTIN H. C. AND TOPP, L. J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. **Journal of the Aeronautical Sciences**, Vol. 23 No. 9, 1956 pp. 805-823.

VALLABHAN, C. V. G.; SIVAKUMAR, J.; RADHAKRISHNAN, N. Application of boundary element method for soil-structure interaction problems. In: **International Conference on Boundary Element Methods**, 6th, p. 27-39, 1984.

VENTURINI, W. S. **Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia**. Tese (livre docência) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.

WINKLER, E. **Die lehre von der Elastizistat und Festigkeit**. Domicius. Prage, 1867.

ZIENKIEWICZ, O. C.; KELLY, D. W., BETTESS, P. **The coupling of the finite element method and boundary solution procedures**. Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 11, p. 355-375, 1977.

APÊNDICE A: FUNDAMENTOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE

Os fundamentos da elasticidade são imprescindíveis para o desenvolvimento deste trabalho devido ao aparato teórico que oferecem aos métodos numéricos, tendo em vista que muitos materiais têm a capacidade de voltar a sua forma inicial ao serem descarregados (a depender dos níveis de tensões), e que a teoria da elasticidade oferece meios para teorias inelásticas mais sofisticadas.

A teoria da elasticidade se baseia na teoria do contínuo, no qual é assumido que o material preenche homogeneamente o sólido em todo o seu domínio, e que interações mútuas acontecem em todos os pontos internos oriundas de forças de corpo e de superfície.

No presente trabalho são assumidas as seguintes hipóteses:

- A elasticidade é assumida linear, ou seja, a relação entre tensão e deformação é linear;
- O corpo está sujeito a pequenos deslocamentos e rotações;
- A configuração de equilíbrio do corpo pode ser admitida como a posição indeformada (Lagrangiana) e que as deformações produzidas são infinitesimais;
- O material é isotrópico;
- As análises são estáticas ou quase-estáticas (ausência dos termos de aceleração nas equações de equilíbrio).

Para melhor compreensão dos conceitos e deduções presentes neste anexo, recomenda-se a consulta aos livros que serviram de subsídio ao trabalho: Love (1944), Chou e Pagano (1992) e Timoshenko e Goodier (1980).

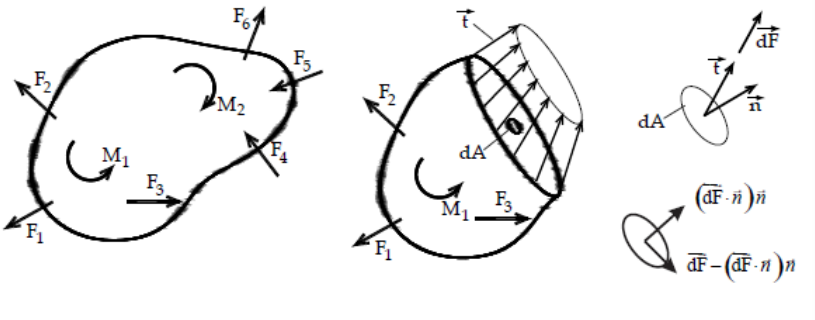
A.1 Estado de Tensão

Um sólido qualquer sujeito a ações de forças externas auto equilibradas desenvolve forças internas devido as interações intermoleculares entre as partículas. Realizando-se um corte numa seção arbitrária, o corpo é separado em duas partes, onde é possível perceber que pela 3º lei de Newton surge uma distribuição de forças por unidade de superfície, conforme Figura A- 1.

Ao tomar um vetor $\vec{n}$ normal ao plano do corte, uma pequena área dA onde atua a resultante $d\vec{F}$ da distribuição de forças na direção $\vec{n}$, pode-se definir a Tensão normal como:

$$\sigma_n = \lim_{dA \to 0} \frac{d\vec{F}}{dA} \tag{A.1}$$

Figura A- 1-Sólido qualquer submetido a ações externas.



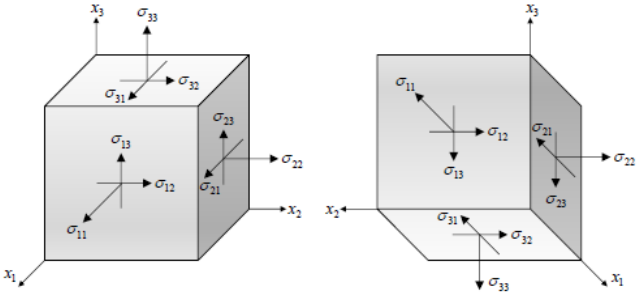
Fonte: Coda (2017).

Para calcularmos as Tensões que atuam tangencialmente ao plano do corte mantem-se o mesmo raciocínio, é necessário apenas que tomemos duas direções ortonormais entre si e a $\vec{n}$, decompor a distribuição de forças através do produto escalar para a direção desejada e realizar o processo limite na área.

Uma forma de visualizarmos esse procedimento de forma clara é pela realização de seis cortes no sólido, paralelos dois a dois, distanciadas infinitesimalmente e ortogonais aos eixos coordenados, de forma que para cada face do cubo gerado pelos cortes, tenhamos três componentes de tensão, como pode ser visto na Figura A- 2.

.

Figura A- 2- Estado de tensão em um ponto.



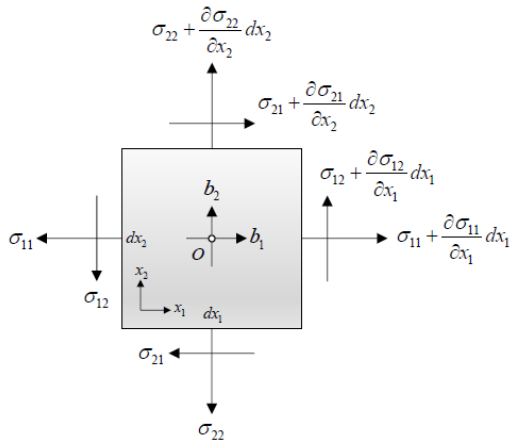
Fonte: Andrade (2017).

Como o cubo elementar extraído do sólido está em equilíbrio, as tensões nas faces opostas são iguais. Portanto, é necessário apenas determinarmos nove componentes de tensão para representarmos um estado de tensão, de forma a organizar estes componentes de tensão σ_{ij}, o índice i representa o plano onde atua e o índice j a direção. Obtém-se o seguinte tensor de tensões:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

Dado o equilíbrio do cubo elementar da Figura A- 3 temos que, resultantes de forças infinitesimais geradas pelas componentes de tensões atuando em suas respectivas áreas, causam momento em relação ao seu centro de gravidade. No caso do equilíbrio de momento em torno no eixo x_3 temos:

Figura A- 3- Equilíbrio de momentos em torno do eixo x_3



Fonte: Andrade (2017).

Ao realizar o equilíbrio tem-se:

$$-(\sigma_{12} dx_2 dx_3).\frac{dx_1}{2} - (\sigma_{12} dx_2 dx_3).\frac{dx_1}{2} + (\sigma_{21} dx_1 dx_2).\frac{dx_2}{2} + (\sigma_{21} dx_1 dx_2).\frac{dx_2}{2} = 0 \tag{A.3}$$

$$\Rightarrow \sigma_{12} = \sigma_{21}$$

Promovendo o equilíbrio para os demais eixos, temos a seguinte expressão usualmente chamada de Teorema de Cauchy:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{A.4}$$

O que resulta na simetria do tensor de tensões, restando apenas seis componentes de tensões independentes, como pode ser visto no tensor de tensões de Cauchy:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

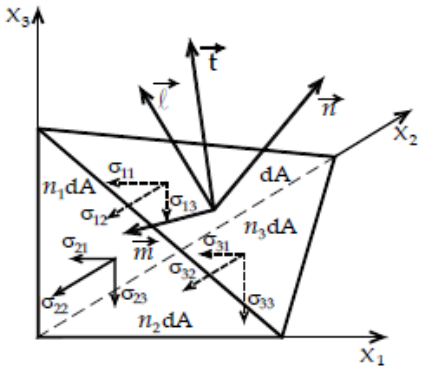
Ao fazer um corte qualquer no cubo elementar, temos como resultado um tetraédrico elementar (Figura A- 4). A força atuante na direção normal da superfície de corte é chamada de

força de superfície, a qual pode ser determinada realizando-se o equilíbrio do tensor de Cauchy. A força de superfície p_i é dada por:

$$p_i = \sigma_{ij}.n_j \tag{A.6}$$

Onde n_j é o versor normal ao plano de corte.

Figura A- 4- Força de superfície normal ao plano de corte



Fonte: Coda (2017).

Dessa forma, pode-se determinar todas as componentes de força de superfície atuante em qualquer ponto sobre uma área do corpo, bastando conhecer seu Tensor de Cauchy e a direção desejada n_j.

A.2 Equação de equilíbrio

Tomando um elemento infinitesimal que faça parte do contínuo, analisa-se a variação das componentes de tensão dentro do seu domínio. A Figura A- 3 mostra a variação de tensão ao longo do eixo x_1, como também a componente de força de volume.

Somando-se todas as forças na direção x_1, tem-se:

$$\left(\sigma_{22} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 dx_3 + \left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 dx_3 + \left(\sigma_{32} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 dx_3 + b_2 dx_1 dx_2 dx_3 \tag{A.7}$$

$$\Rightarrow \sigma_{22} dx_1 dx_3 + \sigma_{12} dx_2 dx_3 + \sigma_{32} dx_1 dx_3$$

Sendo $dV = dx_1 dx_2 dx_3$, obtém-se:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + b_2\right) dV = 0 \tag{A.8}$$

Podendo ser escrita como:

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + b_2 = 0 \tag{A.9}$$

Ao realizarmos o equilíbrio em função das tensões para os demais eixos, podemos escrever a equação de equilíbrio na forma indicial da seguinte forma:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0 \tag{A.10}$$

A.3 Estado de deformação

Um corpo quando submetido a ações externas tende a absorver certa quantidade de energia e utiliza-la para mudar de forma, as deformações são as medidas dessa mudança.

As deformações de um sólido contínuo podem ser relacionadas ao campo de deslocamento ao qual está submetido. Neste trabalho serão consideradas as deformações lineares de engenharia para os casos de pequenos deslocamentos, giros e deformações, além de serem definidas na configuração inicial (grandeza Lagrangiana).

Por simplificação, será utilizado um sólido bidimensional para à análise das deformações, mas é importante salientar que as expressões encontradas podem ser extrapoladas para os casos tridimensionais, como será feito mais adiante.

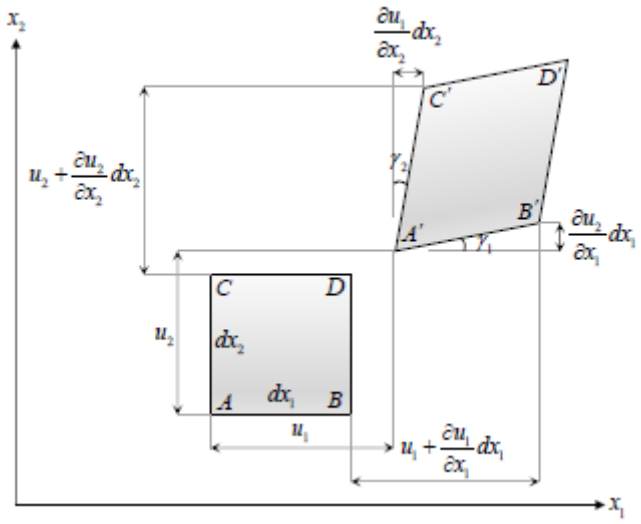
Aplicando um campo de deslocamentos u_1 e u_2 no elemento infinitesimal inicialmente retangular da Figura A- 5, os vértices A, B, C e D vão para as posições A', B', C' e D'. As deformações longitudinais sobre os eixos x_1 e x_2 são definidas como a variação do comprimento em relação ao comprimento inicial:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{A'B' - AB}{AB} \cong \frac{dx_1 + u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 - u_1 - dx_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \tag{A.11}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{A'C' - AC}{AC} \cong \frac{dx_2 + u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 - u_2 - dx_2}{dx_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \tag{A.12}$$

Onde foi considerado que $\cos(\gamma) = 1$ pois $\gamma \ll 1$.

Figura A- 5- Deformações elemento bidimensional



Fonte: Andrade (2017).

Tendo em vista que os ângulos na posição deslocada não são mais retos, é definida a distorção angular (radianos) como a quantidade angular do quanto os lados deixam de ser ortogonais, ou seja, a variação do ângulo formado pelos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$:

$$\gamma_{12} = \gamma_1 + \gamma_2 \tag{A.13}$$

Considerando o regime de pequenas deformações e que $sen(\gamma) \cong \gamma$ pois $\gamma \ll 1$, tem-se:

$$\gamma_1 \cong \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1}{dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1} = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}} \cong \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = u_{2,1} \tag{A.14}$$

$$\gamma_2 \cong \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}dx_2}{dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}dx_2} = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}{1+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}} \cong \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = u_{1,2} \tag{A.15}$$

Substituindo (A.14) e (A.15) em (A.13) resulta na distorção angular:

$$\gamma_{12} = u_{2,1} + u_{1,2} \tag{A.16}$$

Em busca de determinar uma única expressão para deformações longitudinais e distorções foi definida a semi-distorção, ou distorção matemática, que é retratada como:

$$\varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{12}}{2} = \frac{u_{1,2} + u_{2,1}}{2} \tag{A.17}$$

Assim, é possível perceber que:

$$\varepsilon_{21} = \frac{u_{2,1} + u_{1,2}}{2} = \varepsilon_{12} \tag{A.18}$$

Devido a expressão (A.4) o tensor de deformações é simétrico, inclusive para o caso tridimensional, obtendo-se:

$$\varepsilon_{ij=} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \tag{A.19}$$

As expressões (A.11), (A.12) e (A.17) foram deduzidas para o caso bidimensional, mas podem ser generalizadas para as três dimensões e escritas de forma compacta na notação indicial:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \tag{A.20}$$

A.4 Relações Constitutivas

Quando um sólido é submetido a ações externas desenvolve um estado de tensões e deformações, como retratado nos tópicos anteriores. As relações constitutivas são justamente as correlações entre essas duas grandezas que regem os problemas estruturais. Entretanto, estas relações dependem das propriedades físicas do material e por isso, neste trabalho serão considerados os materiais no regime elástico linear (Lei de Hooke) e isotrópicos (mesmo comportamento para todas as direções).

A lei de Hooke generalizada para matérias isótropos na conhecida notação de Voigt é escrita como:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \tag{A.21}$$

Onde G é o módulo de elasticidade transversal obtido por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{A.22}$$

A equação (A.21) pode ser escrita de forma compacta em notação indicial da seguinte maneira:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{A.23}$$

Onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Pode-se ainda ser útil reescrever a equação (A.23) para tensões, como se segue:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{A.24}$$

Onde λ é a constante de Lamé, a qual pode ser expressa por:

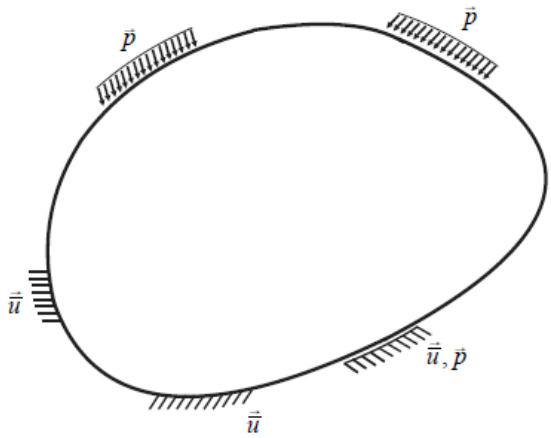
$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{A.25}$$

A.5 Problema de Valor de Contorno

A maioria dos problemas de engenharia estrutural são problemas da elasticidade, onde o corpo analisado está sujeito à ação de forças e/ou deslocamentos e sofre deformações. Nesses problemas buscamos determinar os deslocamentos e forças em todo o domínio, mas para isso precisamos conhecer as condições no contorno, sendo estas em forças de superfície ou deslocamento. Contudo, somente uma dessas grandezas é conhecida em cada trecho do

contorno (ver Figura A- 6), surgindo o chamado Problema de Valor de Contorno (PVC), que busca determinar todos os deslocamentos e forças de superfície ao longo do contorno.

Figura A- 6- Problema de valor de contorno



Fonte: Coda (2017).

O PVC é o conjunto de equações de equilíbrio (A.10), deslocamento-deformação (A.20) e constitutiva (A.23), que adicionadas às condições de contorno constituem o problema. Os três deslocamentos, seis deformações e seis tensões formam o conjunto de quinze incógnitas do problema. As três equações de equilíbrio (A.10), seis equações deformação-deslocamento (A.20) e seis relações constitutivas (A.23) nos fornecem quinze equações, impondo-se as condições de contorno, o problema é solucionado.

Como mencionado anteriormente, é fundamental conhecer as condições de contorno do PVC, pois para cada condição o método de solução difere, por essa razão os PVCs são classificados segundo sua condição de contorno e consequente técnica de resolução, como se segue:

- 1º PVC em elasticidade: As forças de superfície são conhecidas em todos os trechos do contorno e não há condições de contorno em deslocamentos. A técnica emprega é da Formulação de Tensões, onde é feita a representação das equações governantes do problema em termos de tensões;
- 2º PVC em elasticidade: Os deslocamentos são todos conhecidos no contorno e não há condições de contorno em forças de superfície. Nesta, é empregada a Formulação de deslocamentos para esse tipo de problema, na qual é feita a representação das equações governantes do problema em termos de deslocamentos na chamada equação de Navier-Cauchy. Neste caso, a formulação é empregada para a análise de meios infinitos e será

utilizada neste trabalho para a dedução da solução fundamental, onde supõe-se que no infinito os deslocamentos são nulos;

- 3º PVC em elasticidade: Em parte do contorno deslocamentos são conhecidos e na outra as forças de superfície, configurando um problema misto. Esse tipo de problema é o mais comum e árduo a ser elucidado, as soluções analíticas só existem para casos particulares, com simples geometria, carregamentos e condições de vinculação. Para resolução de problemas mais genéricos possíveis, foram então desenvolvidos os métodos numéricos, que buscam obter respostas aproximadas para o modelo físico matemático analisado. Como o modelo real apresenta infinitos graus de liberdade e o modelo numérico possui um número finito, espera-se que quanto mais refinada seja a malha, mais próximo esteja da resposta real.

A.6 Equação de Navier

A representação das equações governantes do 2º PVC em termos de deslocamentos é chamada de equação de Navier-Cauchy ou equação de equilíbrio em termo dos deslocamentos. Seu uso provém do conhecimento dos deslocamentos no contorno, os quais são considerados nulos no infinito para análises de meios infinitos. A solução desta equação para meio isotrópico é chamada de solução fundamental de Kelvin e empregada na formulação do MEC.

Utilizando a expressão deslocamento-deformação (A.20) para escrever a Lei de Hooke (A.24), obtém-se:

$$\sigma_{ij} = 2G\left(\frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}\right) + \lambda u_{k,k}\delta_{ij} = G\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) + \lambda u_{k,k}\delta_{ij} \qquad \text{(A.26)}$$

Derivando a expressão (A.26) em relação a x_j e usando a propriedade do Delta de Kronecker, tem-se:

$$\sigma_{ij,j} = G(u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \lambda u_{k,kj}\delta_{ij} = G(u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \lambda u_{k,ki} \qquad \text{(A.27)}$$

Manipulando a notação indicial da expressão (A.27) podemos reescreve-la da seguinte maneira:

$$\sigma_{ij,j} = G(u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \lambda u_{\mathrm{j,ji}} \qquad \text{(A.28)}$$

Finalmente, reescrevendo a equação de equilíbrio (A.10) com o auxílio da expressão (A.28) chegamos na equação de equilíbrio em termos de deslocamentos:

$$Gu_{i,jj} + (G+\lambda)u_{j,\mathrm{ji}} + b_i = 0 \tag{A.29}$$

A expressão (A.29) é chamada de equação de Navier-Cauhy e é comumente encontrada na literatura na seguinte forma:

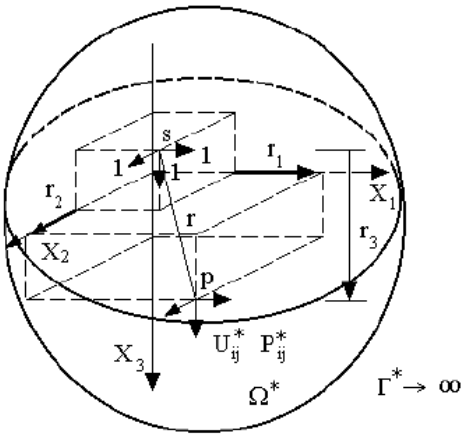
$$\frac{1}{(1-2\nu)}u_{j,ji} + u_{i,jj} + \frac{1}{G}b_i = 0 \tag{A.30}$$

APÊNDICE B: SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

No método dos elementos de contorno é necessário o conhecimento de deslocamentos, tensões, deformações e forças de superfície de um determinado problema imaginário, dito problema fundamental. As incógnitas do problema recebem o nome de soluções fundamentais.

Conhecidas as propriedades do material e suas condições de contorno, temos um Problema de Valor de Contorno (PVC), no qual é possível, através da Teoria da Elasticidade, determinar as soluções fundamentais de maneira exata. Diante disso, conforme será visto, os campos de deslocamentos, tensão, deformação e forças de superfície de um problema real podem ser aproximados pelo MEC, correlacionando o problema real com o problema fundamental. As soluções fundamentais de Kelvin, em que pese não sejam utilizadas diretamente na formulação, corroboram para o presente trabalho, na medida em que são empregadas na demonstração da solução de Mindlin, a qual, por sua vez, será aplicada na formulação do MEC.

Figura B- 1- Problema fundamental de Kelvin.



Fonte: Oshima (2004).

B.1 Solução fundamental de Kelvin

Dada a equação de Navier-Cauchy (expressão(A.30)), na qual são representadas as equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos e, sabendo que no problema fundamental a força unitária aplicada num ponto qualquer s é correspondente a força de volume, a representação matemática desta força é feita através da função Delta de Dirac, e pode ser entendida como uma força unitária atuando numa área infinitesimal, resultando numa tensão

infinita. Portanto, a parcela de força de corpo na direção e_i da equação (A.30) é representada como:

$$b_i = \Delta^s e_i \tag{B.1}$$

Onde Δ^s é a função Delta de Dirac aplicada no ponto s.

Empregando o vetor de Galerkin G para representar os deslocamentos, a componente de deslocamento na direção e_i pode ser escrita como:

$$u_i = G_{i,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,im} \tag{B.2}$$

Substituindo as expressões (B.1) e (B.2) na equação (A.30) e passando a utilizar μ para representar o módulo de elasticidade transversal, tem-se:

$$\frac{1}{(1-2\nu)}\left[G_{j,mmji} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,jmji}\right] + \left[G_{i,mmjj} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,imjj}\right] + \frac{\Delta^s e_i}{\mu} = 0 \tag{B.3}$$

Observando a existência de índices mudos, o índice m pode ser trocado por qualquer índice. Dessa forma, utilizando-se da propriedade de livre permutação da ordem de derivação, a expressão (B.3) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{(1-2\nu)}\left[G_{j,jjji} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{j,jjji}\right] + \left[G_{i,iijj} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{j,jjji}\right] + \frac{\Delta^s e_i}{\mu} = 0 \tag{B.4}$$

Desenvolvendo (B.4) algebricamente:

$$G_{i,jjii} + \frac{\Delta^s e_i}{\mu} = 0 \tag{B.5}$$

A expressão final (B.5) é comumente encontrada na literatura escrita da seguinte maneira:

$$\nabla^2(\nabla^2 G_i) + \frac{\Delta^s e_i}{\mu} = 0 \tag{B.6}$$

Adotando $F_i = \nabla^2 G_i$, a expressão (B.6) pode ser escrita como:

$$\nabla^2 F_i + \frac{\Delta^s e_i}{\mu} = 0 \tag{B.7}$$

A solução da expressão (B.7) é conhecida por meio da teoria de potencial em Alliabadi (2002) e é dada por:

$$F_i = \frac{1}{4\pi\mu r} e_i \tag{B.8}$$

Portanto, seu vetor de Galerkin G é:

$$G_i = \frac{1}{8\pi\mu} r e_i \tag{B.9}$$

Para casos tridimensionais, assume-se que os deslocamentos resultantes da aplicação de uma carga unitária em uma determinada direção não sofrem alteração devido à aplicação de um carregamento unitário em outra direção. Então, o vetor de Galerkin pode ser reescrito considerando a independência das cargas unitárias:

$$G_{ik} = G\delta_{ik} \tag{B.10}$$

Onde δ_{ik} é a função Delta de Kronecker e G_{ik} é a componente k do vetor de Galerkin provocada pela carga unitária aplicada no ponto s (campo fonte) na direção i.

O mesmo pode ser feito para os deslocamentos gerados em qualquer ponto pela aplicação das cargas unitárias:

$$u_i^* = u_{ik}^* e_k \tag{B.11}$$

Onde u_{ik}^* indica o deslocamento em qualquer ponto f (ponto campo) na direção k provocado pela aplicação da carga unitária no ponto fonte s na direção i.

Utilizando as definições (B.10) e (B.11) para reescrever (B.2), obtém-se:

$$u_{ik}^* = G_{ik,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{im,km} \tag{B.12}$$

A distância r entre o ponto fonte s e o ponto campo f é dada por:

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i^f - x_i^s)^2} \tag{B.13}$$

Onde x_i^f e x_i^s são as coordenadas do ponto campo e ponto fonte, respectivamente.

Substituindo (B.9) e (B.10) em (B.12), e notando que $r_{,km} = (\delta_{km} - r_{,k} r_{,m}) / r$ e $r_{,mm} = 2/r$, resulta-se em:

$$u_{ik}^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)\delta_{ik} + r_{,i} r_{,k} \right] \tag{B.14}$$

A expressão (B.14) é conhecida como a solução fundamental de Kelvin para deslocamentos. As derivadas de r são tomadas em relação ao ponto campo e são expressas por:

$$r_{,i} = \frac{r_i}{r} = \frac{x_i^f - x_i^s}{r} \tag{B.15}$$

Onde r_i é a componente de r na direção i.

Para encontrarmos as demais soluções fundamentais, revela-se suficiente a utilização das equações da elasticidade. As deformações fundamentais podem ser obtidas em termos de deslocamentos, derivando a expressão (B.14) em relação ao ponto campo e substituindo na equação de deformação-deslocamento(A.20), ao que obtém-se:

$$\varepsilon_{ikm}^* = -\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)r}\left[(1-2\nu)(r_{,m}\delta_{ik} + r_{,k}\delta_{im}) + 2r_{,i}r_{,k}r_{,m} - r_{,i}\delta_{km}\right] \tag{B.16}$$

As tensões fundamentais são obtidas através da substituição da expressão (B.16) na equação da lei de Hooke generalizada para materiais isotrópicos (A.24):

$$\sigma_{ikm}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r}\left[(1-2\nu)(r_{,m}\delta_{ik} + r_{,k}\delta_{im} - r_{,i}\delta_{km}) + 2r_{,i}r_{,k}r_{,m}\right] \tag{B.17}$$

Por fim, as forças de superfície são calculadas substituindo-se as tensões da expressão (B.17) na equação (A.6) de força de superfície, ao que obtém-se:

$$p_{ik}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2}\left[(1-2\nu)(\eta_i r_{,k} - \eta_k r_{,i}) + \frac{\partial r}{\partial \eta}\left[(1-2\nu)\delta_{ik} + 3r_{,i}r_{,k}\right]\right] \tag{B.18}$$

Onde η é o vetor normal ao contorno e $\frac{\partial r}{\partial \eta} = r_{,m}\eta_{,m}$.

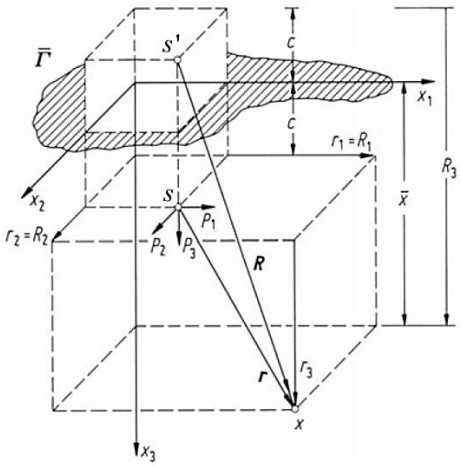
B.2 Solução Fundamental de Mindlin

As soluções fundamentais em tensões e deslocamentos, para o problema elástico de um meio semi-infinito tridimensional, homogêneo, isótropo e elástico linear submetido à ação de forças concentradas unitárias em seu interior, foram propostas por Mindlin (1936).

Para a determinação da solução fundamental do semi-espaço da Figura B-2, é necessária a superposição de seis núcleos de tensões para cada componente da força, totalizando dezoito núcleos, os quais são abordados em Love (1944). O primeiro núcleo empregado em cada direção é dado pela solução fundamental de Kelvin; todos os outros núcleos, por seu turno,

envolvem as coordenadas da imagem do ponto fonte s' em relação à superfície $\bar{\Gamma}$, fazendo com que as condições de contorno sejam satisfeitas.

Figura B- 2- Problema fundamental de Mindlin.



Fonte: Adaptado de Brebbia (1984).

Portanto, a solução de Mindlin pode ser obtida através da superposição da solução de Kelvin e de uma solução complementar, sendo escrita da seguinte forma:

$$(\ )^M = (\ )^K + (\ )^C \tag{B.19}$$

Onde $(\ )^K$ e $(\ )^C$ representam a parcela da solução de Kelvin e da solução complementar, respectivamente.

A obtenção das expressões das soluções fundamentais requer algumas operações algébricas laboriosas, conforme se verifica em Mindlin (1953). O conjunto completo de expressões para os deslocamentos e tensões é apresentado no artigo de Mindlin (1936) e no trabalho de Nakaguma (1979). Por seu turno, o conjunto das expressões complementares é abordado em Brebbia et al. (1984). Com efeito, a título de exemplo, ora apresenta-se as expressões complementares dos deslocamentos devido as cargas unitárias dentro do semi-espaço :

$$u_{11}^c = K_d \left[\frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R} + \frac{(3-4\nu)R_1^2 - 2c\bar{x}}{R^3} + \frac{6c\bar{x}R_1^2}{R^5} \right] \tag{B.20}$$

$$u_{12}^c = K_d r_2 \left[\frac{(3-4\nu)r_1}{R^3} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_1)} + \frac{6c\bar{x}R_1}{R^5} \right] \tag{B.21}$$

$$u_{13}^{c} = \frac{r_3}{r_2} u_{12}^{c} \tag{B.22}$$

$$u_{21}^{c} = K_d r_2 \left[\frac{(3-4\nu) r_1}{R^3} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_1)} - \frac{6c\bar{x}R_1}{R^5} \right] \tag{B.23}$$

$$u_{22}^{c} = K_d \left[\frac{1}{R} + \frac{(3-4\nu) r_2^2}{R^3} + \frac{2c\bar{x}}{R^3}\left(1 - \frac{3r_2^2}{R^2}\right) + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{(R+R_1)}\left(1 - \frac{r_2^2}{R(R+R_1)}\right) \right] \tag{B.24}$$

$$u_{23}^{c} = K_d r_2 r_3 \left\{ \frac{3-4\nu}{R^3} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R(R+R_1)^2} - \frac{6c\bar{x}}{R^5} \right\} \tag{B.25}$$

$$u_{31}^{c} = \frac{r_3}{r_2} u_{21}^{c} \tag{B.26}$$

$$u_{32}^{c} = u_{23}^{c} \tag{B.27}$$

$$u_{33}^{c} = K_d \left[\frac{1}{R} + \frac{(3-4\nu) r_3^2}{R^3} + \frac{2c\bar{x}}{R^3}\left(1 - \frac{3r_3^2}{R^2}\right) + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{(R+R_1)}\left(1 - \frac{r_3^2}{R(R+R_1)}\right) \right] \tag{B.28}$$

Onde (i=1,2,3):

$$R = (R_i R_i)^{1/2} \tag{B.29}$$

$$r_i = x_i(f) - x_i(\mathrm{s}) \tag{B.30}$$

$$R_i = x_i(f) - x_i(s') \tag{B.31}$$

$$c = x_3(\mathrm{s}) \geq 0 \tag{B.32}$$

$$\bar{x} = x_3(f) \geq 0 \tag{B.33}$$

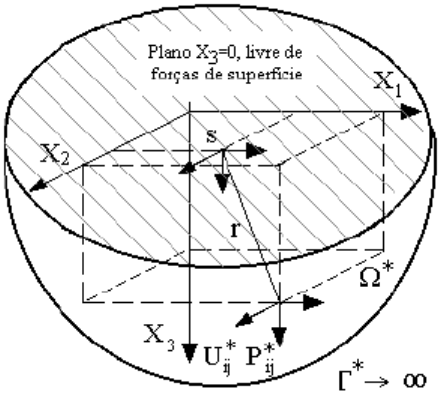
$$K_d = \frac{1}{16\pi(1-\nu)\mu} \tag{B.34}$$

Oportunamente, insta promover a seguinte observação: quando temos a aplicação da força num ponto muito longe da superfície, ou seja, quando $c \to \infty$, $R \to \infty$ e as parcelas complementares tornam-se nulas; resultando, assim, na solução de Kelvin.

B.3 Solução Fundamental de Boussinesq-Cerruti

Um caso particular da solução fundamental de Mindlin acontece quando a distância c de aplicação da força tende a zero, ou seja, as cargas concentradas unitárias são aplicadas na superfície, conforme Figura B-3. Esse caso é conhecido como problema de Boussinesq-Cerruti.

Figura B- 3- Problema fundamental de Boussinesq-Cerruti.



Fonte: Oshima (2004).

As soluções fundamentais de deslocamento são dadas por:

$$u_{11}^{*} = \frac{(1-\nu)+\nu r_{,1}^{2}}{2\pi\mu r} \tag{B.35}$$

$$u_{12}^{*} = u_{21}^{*} = \frac{\nu r_{,1} r_{,2}}{2\pi\mu r} \tag{B.36}$$

$$u_{13}^{*} = \frac{(0,5-\nu) r_{,1}}{2\pi\mu r} \tag{B.37}$$

$$u_{22}^{*} = \frac{(1-\nu)+\nu r_{,2}^{2}}{2\pi\mu r} \tag{B.38}$$

$$u_{23}^{*} = \frac{(0,5-\nu) r_{,2}}{2\pi\mu r} \tag{B.39}$$

$$u_{31}^{*} = \frac{(\nu-0,5) r_{,1}}{2\pi\mu r} \tag{B.40}$$

$$u_{32}^{*} = \frac{(\nu-0,5) r_{,2}}{2\pi\mu r} \tag{B.41}$$

$$u_{33}^{*} = \frac{(1-\nu)}{2\pi\mu r} \tag{B.42}$$

A solução de Kelvin (1848) pode ser usada no estudo de campos de deslocamentos e tensões devido a uma força aplicada a uma grande distância da superfície, enquanto a solução de Boussinesq-Cerruti (1885) é aplicável no caso em que a força atua na superfície. As soluções descritas por Mindlin (1936) preenchem a lacuna entre os dois, fornecendo as soluções fundamentais para o caso em que a força é aplicada próximo da superfície, a exemplo do que ocorre nas estacas, objeto de estudo desse trabalho.