

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

MATHEUS ANDRÉ RODRIGUES

**Simulação numérica do comportamento de vigas de concreto
protendido pós-tracionado**

SÃO CARLOS

2019

MATHEUS ANDRÉ RODRIGUES

**Simulação numérica do comportamento de vigas de concreto
protendido pós-tracionado**

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, como parte dos quesitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil (Estruturas).

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola

SÃO CARLOS

2019

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

R696s Rodrigues, Matheus André
 Simulação numérica do comportamento de vigas de
concreto protendido pós-tracionado / Matheus André
Rodrigues; orientador Rodrigo Ribeiro Paccola. São
Carlos, 2019.

 Dissertação (Mestrado) - Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil(Engenharia de
Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas --
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de
São Paulo, 2019.

 1. Concreto protendido pós-tracionado. 2.
Simulação numérica. 3. Método dos elementos finitos
posicional. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **MATHEUS ANDRÉ RODRIGUES**.

Título da dissertação: "Simulação numérica do comportamento de vigas de concreto protendido pós-tracionado".

Data da defesa: 01/11/2019.

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Associado **Rodrigo Ribeiro Paccola**
(Orientador)

APROVADO

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **Fernando Menezes de Almeida Filho**

APROVADO

(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

Prof. Dr. **Caio Gorla Nogueira**

APROVADO

(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"/UNESP- Bauru)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, sou grato a Deus, pelo dom da vida e por ser meu Guia.

Agradeço a minha mãe Andréa e a meu pai Paulo César, por compartilhar e acreditar nos sonhos, pelo amor, educação e carinho.

A meu irmão Paulo César pelo companheirismo e pela amizade.

A família e amigos em Minas Gerais, por todo o apoio ao longo desses anos em São Carlos.

À família de São Carlos, por todos esses anos trilhando o caminho juntos.

Agradeço ao professor Rodrigo Ribeiro Paccola pela orientação, sempre incentivadora, bem-humorada, pela paciência e pela amizade.

Aos amigos do Departamento de Engenharia de Estruturas, mais recentes na família de São Carlos, pelas discussões, companheirismo e amizade.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas que contribuíram de alguma forma para este trabalho.

Finalmente, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 – pela bolsa de estudos concedida, primordial para a realização deste trabalho.

“I love you 3000!”

Stark, M.

RESUMO

RODRIGUES, M. A. **Simulação numérica do comportamento de vigas de concreto protendido pós-tracionado**. 2019. 123 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil (Estruturas)) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

Este trabalho tem por finalidade o estudo e desenvolvimento de código computacional para simulação numérica de vigas de concreto protendido pós-tracionado com aderência e vigas reforçadas com protensão externa, a partir do método dos elementos finitos posicional. A medida de deformação utilizada é a de Green-Lagrange, cuja lei constitutiva associada é a de Saint-Venant-Kirchhoff. Por se tratar de uma formulação lagrangeana total, o corpo em sua configuração inicial é a referência para os cálculos e equacionamento do problema. A posição de equilíbrio é obtida a partir do princípio de mínima energia total e o sistema não linear resultante é solucionado a partir do método iterativo e incremental de Newton-Raphson. A inserção das armaduras na matriz de concreto é feita escrevendo-se as posições nodais dos elementos de barra simples em função das posições dos nós dos elementos bidimensionais, fato que implica em não haver aumento do número de graus de liberdade do sistema. Para simular o comportamento do concreto empregou-se o modelo de dano proposto por Mazars (1984), enquanto para o aço das armaduras utilizou-se a plasticidade uniaxial com encruamento isotrópico. Para validar as implementações e explorar as funcionalidades do código computacional, exemplos encontrados na literatura foram apresentados e os resultados comparados, respeitando as limitações das formulações consideradas.

Palavras-chave: Concreto protendido pós-tracionado. Simulação numérica. Método dos elementos finitos posicional.

ABSTRACT

RODRIGUES, M. A. Numerical simulation of the behavior of post-tensioned prestressed concrete beams. 2019. 123 p. Dissertation (M. Sc. in Civil Engineering (Structures)) – School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2019.

This work aims to study and develop a computational code for the modelling of post-tensioned prestressed concrete beams with bonded tendons and beams reinforced with external tendons/rods, using the Finite Element Method. The strain measure and the constitutive law employed are the Green-Lagrange one and Saint-Venant-Kirchhoff Constitutive Law, respectively. As the formulation uses a Total Lagrangean description, the reference for the calculations is the initial configuration of the body. The equilibrium is achieved from the Principle of Minimum Potential Energy and the non-linear system is solved by the Newton-Raphson iterative and incremental procedure. The rebar is embedded in the concrete by writing the positions of the nodes of truss elements as function of the nodes of the bidimensional elements. Therefore, there is no increase in the number of degrees of freedom of the system. In order to represent the behavior of the concrete, the damage model proposed by Mazars (1984) was used. Meanwhile, for the steel of the rebar unidimensional plasticity model with linear positive hardening was used. With the aim to validate and explore the implementations of the computational code, examples found in the literature were presented and results of simulations were compared with experimental ones, respecting the limitations of the formulation employed.

.

Keywords: Post-tensioned prestressed concrete. Numerical simulation. Finite Element Method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Elemento pré-tracionado em pista de protensão. Fonte: Weiler (2019).....	25
Figura 2 – Viga pré-moldada em canteiro de obra em concreto protendido pós-tracionado com aderência. Fonte: EVEHX (2019).	25
Figura 3 – Cordoalhas engraxadas em lajes de um edifício residencial. Fonte: MAC Protensão (2019).	26
Figura 4 – Algumas geometrias para cordoalhas e as correspondentes forças externas aplicadas: (a) cordoalha reta e sem excentricidade; (b) cordoalha reta com excentricidade; (c) cordoalha poligonal; e (d) cordoalha com perfil parabólico.	27
Figura 5 – Curva tensão-deformação para o aço das armaduras ativas. Os valores com índice y correspondem ao escoamento, enquanto aqueles com índice u correspondem aos valores na ruptura. Fonte: Adaptado de Ceccon (2007).	30
Figura 6 – Bainha metálica corrugada, para uso na pós-tração com aderência. Fonte: MAC Protensão (2019).....	31
Figura 7 – Cordoalha engraxada, utilizada na pós-tração sem aderência. Representação da bainha de PEAD, da graxa inerte e da cordoalha. Fonte: Impacto Protensão (2019).	31
Figura 8 – Força de protensão em função do tempo, considerando as perdas imediatas e progressivas associadas à pós-tração. Fonte: Adaptado de Hanai (2005).	33
Figura 9 – Ponte do Galeão, Rio de Janeiro: primeira obra em concreto protendido no Brasil. Fonte: AWA (2019).....	35
Figura 10 – Ponte de Juazeiro (Presidente Eurico Gaspar Dutra), primeira obra protendida construída com aço brasileiro. Fonte: Viver as cidades (2013).....	35
Figura 11 – Ponte Rio-Niterói, na Baía de Guanabara. Fonte: Construct App (2018).....	36
Figura 12 – Cidade Administrativa de Minas Gerais – Belo Horizonte. Fonte: Construct App (2018).	37
Figura 13 – Ponte do Atântico no Canal do Panamá. Fonte: ArchDaily (2018).	37
Figura 14 – Torre de Telecomunicação Namur, na Bélgica. Fonte: Rigot e Gaspart (1999)....	38
Figura 15 – Edifício Landmark 72, em Hanói, no Vietnã. Fonte: Landmark 72 (2019).....	39
Figura 16 – Torre Parnas, em Seul, Coréia do Sul. Fonte: Skyscraper (2018).....	39
Figura 17 – Edifício Raemian Yongsan, na Coréia do Sul. Fonte: Skyscraper (2019).	40
Figura 18 – Consideração da protensão como ação externa em uma viga biapoiada.	46

Figura 19 – Estratégia empregada para simular a protensão não aderente. Fonte: Adaptado de Brenkus et al. (2019).	46
Figura 20 – Mudança de configuração de um corpo qualquer.	55
Figura 21 – Mudança de configuração para o elemento finito bidimensional. Fonte: Adaptado de Coda (2018).	59
Figura 22 – Mudança de configuração para um elemento de treliça (fibra) reto.	63
Figura 23 – Mudança de configuração para o elemento de fibra curvo de n nós e coordenada adimensional auxiliar. Fonte: Adaptado de Sampaio (2014).	66
Figura 24 – Elementos de fibra retos e curvos inseridos em elementos bidimensionais.	68
Figura 25 – Representação da variável de dano. Fonte: Adaptado de Kachanov (1986).	74
Figura 26 – Curva tensão-deformação para o concreto, considerando dano. Fonte: Adaptado de Leonel (2017).	75
Figura 27 – Fluxograma para o cálculo das tensões segundo o modelo de dano de Mazars...	77
Figura 28 – Curva tensão-deformação para o aço, considerando encruamento isótropo linear.	79
Figura 29 – Rotina de cálculo das tensões nos elementos de treliça, considerando plasticidade uniaxial com encruamento linear positivo.	80
Figura 30 – Esquema estático e geometria do exemplo 1 – grandes deslocamentos. Fonte: Adaptado de Pereira (2015).	82
Figura 31 – Deslocamentos verticais para a viga engastada, em metros.	83
Figura 32 – Esquema estático e geometria para o exemplo de uma viga biapoiada com protensão nas barras inferiores.	83
Figura 33 – Deslocamentos verticais para a viga biapoiada sujeita apenas aos esforços decorrentes da protensão.	84
Figura 34 – Elemento bidimensional reforçado com fibra. Fonte: Adaptado de Sampaio (2014).	85
Figura 35 – Posições finais para os casos (A) e (B), considerando aproximação linear e cúbica para as fibras, respectivamente.	86
Figura 36 – Domínios retangulares sujeitos à tração e à compressão uniaxial.	88
Figura 37 – Resultados para o domínio retangular submetido a (a) compressão uniaxial e (b) tração uniaxial.	89
Figura 38 – Esquema estático da treliça e curva tensão-deformação para o material das barras – aço, com modelo elastoplástico bilinear. Fonte: Adaptado de Proença (2016).	89
Figura 39 – Resultados para a força vertical em função do incremento de posição imposto.	90

Figura 40 – Seção transversal e longitudinal para as vigas (a) subarmada, (b) normalmente armada e (c) superarmada.....	91
Figura 41 – Curvas tensão-deformação para (a) concreto e (b) aço.....	92
Figura 42 – Esquema estático com simetria empregado na simulação, com controle de posição no ponto p, leitura do deslocamento δ e força interna F.....	93
Figura 43 – Resultados obtidos na simulação para as vigas (a) subarmada, (b) normalmente armada e (c) superarmada.....	94
Figura 44 – Geometria da cordoalha e seção transversal da viga.....	95
Figura 45 – Deslocamentos da viga, em metros, decorrente da aplicação da protensão na armadura ativa. O esquema estático utilizado na simulação considera a simetria do problema.	96
Figura 46 – Esquema estático e armaduras para as vigas ensaiadas por Lee, Shin e Lee (2018). Dimensões em mm, exceto quando especificadas. Fonte: Adaptado de Lee, Shin e Lee (2018).	97
Figura 47 – Comparação entre as curvas tensão x deformação calibradas e os modelos constitutivos conhecidos.....	99
Figura 48 – Curvas força x deslocamento para as vigas de controle (No).....	102
Figura 49 – Curvas força x deslocamento e força x deformação na barra do reforço para a viga S1 D22, considerando comportamento elástico para as armaduras.....	103
Figura 50 – Curvas força x deslocamento e força x deformação na barra do reforço para a viga S1 D22, considerando comportamento elastoplástico perfeito para as armaduras.....	103
Figura 51 – Curvas força x deslocamento e força x deformação na barra do reforço para a viga S1 D28, considerando comportamento elástico para as armaduras.....	104
Figura 52 – Curvas força x deslocamento e força x deformação na barra do reforço para a viga S1 D28, considerando comportamento elastoplástico perfeito para as armaduras.....	104
Figura 53 – Curvas força x deslocamento e força x deformação na barra do reforço para a viga S2 D22, considerando comportamento elástico para as armaduras.....	105
Figura 54 – Curvas força x deslocamento e força x deformação na barra do reforço para a viga S2 D22, considerando comportamento elastoplástico perfeito para as armaduras.....	105
Figura 55 – Curvas força x deslocamento e força x deformação na barra do reforço para a viga S2 D28, considerando comportamento elástico para as armaduras.....	106
Figura 56 – Curvas força x deslocamento e força x deformação na barra do reforço para a viga S2 D28, considerando comportamento elastoplástico perfeito para as armaduras.....	106

Figura 57 – Curvas força x deslocamento e força x deformação na barra do reforço para a viga S3 D22, considerando comportamento elástico para as armaduras.	107
Figura 58 – Curvas força x deslocamento e força x deformação na barra do reforço para a viga S3 D22, considerando comportamento elastoplástico perfeito para as armaduras.	107
Figura A 1 – Representação da variável dano para a viga subarmada simulada.	121
Figura A 2 – Representação da variável dano para a viga de controle No S1 no primeiro passo de carga em que ocorre danificação e no último passo de carga simulado.....	122
Figura A 3 – Representação da variável dano para as vigas reforçadas com protensão externa S1 D22.....	123

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Deslocamentos encontrados na literatura e resultado da simulação, em centímetros.	82
Tabela 2 – Resultados obtidos e calculados para tensões e deslocamentos.	84
Tabela 3 – Posições dos nós calculadas pelas duas formas propostas para (A) e (B), em metros.	87
Tabela 4 – Propriedades dos materiais e parâmetros utilizados no modelo de dano de Mazars.	92
Tabela 5 – Resultados para os deslocamentos no meio do vão, em milímetros.....	96
Tabela 6 – Propriedades dos materiais, das armaduras e geometria das vigas ensaiadas por Lee, Shin e Lee (2018).	97
Tabela 7 – Valores de deformação imposta às barras do reforço e força aplicada no instante da protensão para as vigas simuladas.	98
Tabela 8 – Parâmetros calibrados para o modelo de dano, a partir do módulo de elasticidade do concreto.	99
Tabela 9 – Recuperação do deslocamento no meio do vão para as vigas simuladas.	108

SUMÁRIO

1 O CONCRETO PROTENDIDO	23
1.1 Materiais	27
1.1.1 Concreto	27
1.1.2 Aço	29
1.1.2 Bainhas	31
1.2 Perdas de protensão	32
1.3 Histórico da protensão	33
2 OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA	41
3 METODOLOGIA.....	43
4 REVISÃO DA LITERATURA	45
4.1 Concreto protendido e simulação numérica	45
4.2 Histórico de desenvolvimentos no grupo de pesquisa.....	49
5 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL	55
5.1 Mecânica do contínuo.....	55
5.2 Discretização do contínuo	58
5.2.1 Elemento bidimensional	60
5.2.2 Elemento de fibra reto	63
5.2.3 Elemento de fibra com aproximação qualquer	65
5.3 Acoplamento fibra-sólido.....	68
6 NÃO LINEARIDADE FÍSICA.....	73
6.1 Modelo de dano proposto por Mazars (1984)	73
6.2 Plasticidade uniaxial.....	78
7 EXEMPLOS NUMÉRICOS	81
7.1 Viga reforçada com fibras e estratégia para simular a protensão.....	81
7.2 Acoplamento fibra-matriz para elementos de fibra de aproximação qualquer.....	85
7.3 Domínio bidimensional sujeito a controle de posição.....	88

7.4	Treliça elastoplástica sujeita a controle de posição	89
7.5	Aplicação do modelo de dano proposto por Mazars (1984) a vigas de concreto armado	91
7.6	Protensão de cordoalha com perfil parabólico	95
7.8	Protensão externa: reforço de vigas de concreto armado.....	96
8	CONCLUSÕES	111
8.1	Sugestões para trabalhos futuros.....	112
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	113
	APÊNDICE A – REPRESENTAÇÃO DA VARIÁVEL DANO NAS VIGAS SIMULADAS	121

1 O CONCRETO PROTENDIDO

O concreto possui bom comportamento quando solicitado à compressão, porém possui baixa resistência à tração – cerca de 8 a 14% da resistência à compressão (NAWY, 2006). Logo, surge a necessidade de combinar o concreto a algum material que seja capaz de absorver os esforços de tração, a fim de controlar o processo de fissuração na tração e na flexão. No concreto armado convencional as armaduras assumem essa função. Segundo Pfeil (1984), a solidarização entre o aço e o concreto torna-se fisicamente possível por uma série de fatores: há boa aderência entre os materiais, o que faz com que trabalhem de forma conjunta quando solicitados; o coeficiente de dilatação térmica possui valores próximos para ambos os materiais; e o concreto é capaz de proteger o aço contra a corrosão. Em particular, o concreto protendido se beneficia dessas propriedades que favorecem a compatibilidade entre os materiais.

Enquanto no concreto armado convencional são empregadas apenas as armaduras denominadas passivas, no concreto protendido são utilizadas armaduras passivas e ativas. Conforme indica a ABNT NBR 6118 (2014), as armaduras ativas são aquelas submetidas a pré-alongamento, enquanto as armaduras denominadas passivas não são pré-alongadas. O artifício da protensão tem como propósito produzir tensões de compressão em pontos críticos do elemento estrutural, nos quais em condições de serviço se desenvolveriam tensões de tração. Portanto, antes de provocar tensões de tração no concreto, os esforços solicitantes deverão anular a pré-compressão no concreto, proveniente da protensão. Leonhardt (1964) cita algumas das vantagens no emprego do concreto protendido:

- a) Melhor durabilidade, por ser controlada a fissuração do concreto, de modo que o aço das armaduras estará protegido contra a corrosão;
- b) Economia de 15 a 30% de concreto, em comparação com elementos de concreto armado convencional, sendo essa maior ainda para o aço: de 60 a 80%. Isso se deve ao fato de serem utilizados aços de alta resistência para as armaduras ativas;
- c) Deslocamentos reduzidos, permitindo maior esbeltez das peças e levando a menores frequências de vibração para as estruturas em concreto protendido;
- d) Elevada resiliência; isto é, alta capacidade de se recuperar substancialmente dos efeitos advindos de uma sobrecarga. As fissuras que se desenvolvem nessa situação se fecham parcialmente quando cessa a sobrecarga;

- e) Boa resistência à fadiga, devida a menores variações nas tensões no aço das armaduras ativas. Essa característica torna favorável o uso do concreto protendido em estruturas sujeitas a ações dinâmicas, como pontes rodoviárias.

Em contrapartida às vantagens técnicas do concreto protendido, há o fato de que os materiais utilizados apresentam maior custo – concretos e aços de maior resistência-, custo com as operações de protensão e com a confecção de formas mais complexas. Entretanto, segundo Nawy (2006), se for produzida grande quantidade de elementos protendidos, as diferenças entre os custos iniciais para a solução em concreto armado convencional e o concreto protendido tornam-se irrisórias. Além disso, a economia indireta, em longo prazo, quando se opta pelo concreto protendido é significativa, dado que é necessária menor frequência de manutenção, garante-se maior vida útil à estrutura e, por resultar em uma estrutura mais leve, há atenuação dos esforços na fundação. Em particular, para as vigas, quanto maior o vão, mais pronunciado torna-se o efeito do peso próprio na fissuração e nos deslocamentos. Para o concreto armado convencional, a resistência à tração pode ser atingida antes mesmo de o elemento estrutural ser solicitado por ações externas. Portanto, para grandes vãos, o concreto protendido é uma boa escolha – por exemplo, em longarinas de pontes estaiadas.

Na literatura são encontradas algumas classificações para o concreto protendido quanto ao sistema de protensão, à presença ou não de aderência, quanto à geometria dos cabos e outros aspectos. No tocante aos sistemas de protensão, podem ser enumeradas a pré-tração e a pós-tração. Na pré-tração, Figura 1, o alongamento das armaduras ativas é realizado em etapa anterior à concretagem. As cordoalhas são ancoradas em apoios externos nas cabeceiras das pistas de protensão e, após a concretagem, são liberadas. Nesse caso, a transferência dos esforços do aço para o concreto ocorre necessariamente por aderência, exceto pelos trechos nos quais se deseje interrompê-la. Em geral, as cordoalhas assumem geometria reta ou poligonal, a qual é obtida com o auxílio de desviadores dispostos na pista de protensão. Já na pós-tração o estiramento das armaduras ativas é realizado após o endurecimento do concreto, utilizando a própria peça como apoio definitivo para ancoragem dos cabos. A protensão das cordoalhas é realizada com macacos hidráulicos; esse sistema de protensão é usual em pré-moldados de canteiro, Figura 2, como vigas de pontes e viadutos. Na pós-tração, pode haver ou não aderência.



Figura 1 – Elemento pré-tracionado em pista de protensão. Fonte: Weiler (2019).



Figura 2 – Viga pré-moldada em canteiro de obra em concreto protendido pós-tracionado com aderência. Fonte: EVEHX (2019).

Quanto à aderência, há duas possibilidades: com ou sem aderência. Havendo aderência, os esforços de protensão são transmitidos do aço para o concreto, a exemplo da pré-tração. Na pós-tração com aderência, as cordoalhas são protendidas em bainhas, nas quais é injetada nata de cimento, garantindo a proteção da armadura ativa contra a corrosão e a aderência. Por outro lado, na pós-tração sem aderência são utilizadas as cordoalhas engraxadas, revestidas por bainhas de polietileno de alta densidade (PEAD), Figura 3. Nesse caso, os esforços de protensão são transferidos do aço para o concreto apenas nas ancoragens. A protensão não aderente é uma solução eficiente para situações em que seja necessária a reprotensão ou substituição das cordoalhas em algum instante, como estruturas envolventes de unidades geradoras nucleares (PFEIL, 1984). Também é amplamente empregada em sistemas construtivos de lajes lisas, possibilitando maiores vãos livres e melhor flexibilidade da geometria dos cabos em planta.

Dentre as soluções envolvendo protensão não aderente, pode ser citada a protensão externa, utilizada para reforço de estruturas ou para solidarizar aduelas pré-moldadas de pontes, por exemplo. Essa técnica permite aumentar a resistência de uma estrutura já construída, controlar deslocamentos excessivos e fissuração.



Figura 3 – Cordoalhas engraxadas em lajes de um edifício residencial. Fonte: MAC Protensão (2019).

A Figura 4 ilustra as possíveis configurações, analisando as geometrias da cordoalha e as correspondentes forças equivalentes aplicadas. No texto, as figuras em que a fonte não foi explicitada foram elaboradas pelo autor. Considerando uma viga prismática reta, nas duas últimas geometrias surgem forças verticais devidas à mudança de direção do cabo, o que não ocorre para os cabos retos. O que torna as geometrias poligonal e parabólica interessantes é o fato de poder traçar o cabo de modo a combater os esforços de tração de maneira mais eficiente. Por exemplo, em uma viga biapoiada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído o momento fletor é nulo nos apoios. Para uma cordoalha reta, com excentricidade, será gerado um momento devido à protensão.

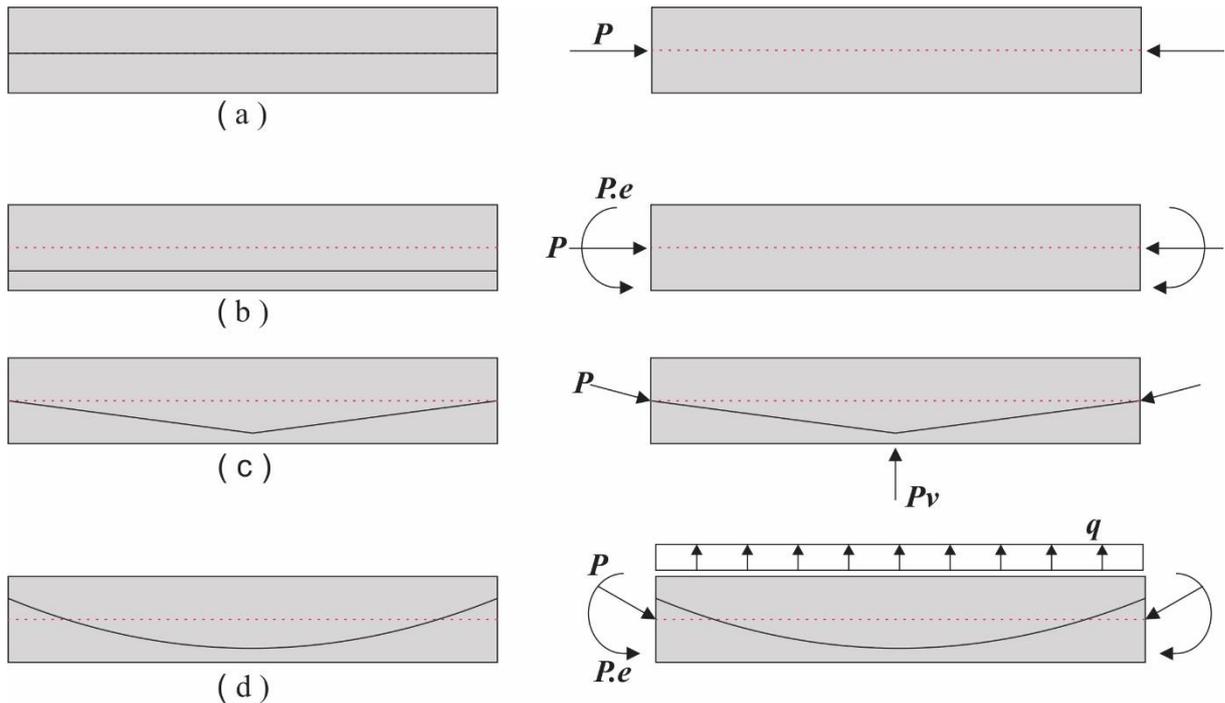


Figura 4 – Algumas geometrias para cordoalhas e as correspondentes forças externas aplicadas: (a) cordoalha reta e sem excentricidade; (b) cordoalha reta com excentricidade; (c) cordoalha poligonal; e (d) cordoalha com perfil parabólico.

1.1 Materiais

Neste item serão descritas algumas características dos materiais empregados na protensão: o concreto, o aço e as bainhas para disposição das armaduras ativas. São discutidas propriedades desejáveis e o comportamento dos materiais, a fim de melhor compreender a sua influência no concreto protendido.

1.1.1 Concreto

Como no concreto protendido são utilizadas técnicas mais avançadas, quando comparadas àquelas empregadas no concreto armado, torna-se necessário um controle de qualidade mais rigoroso dos materiais. Um dos aspectos principais é a resistência elevada dos concretos utilizados – enquanto no concreto armado é usual f_{ck} entre 20 e 35 MPa, em concreto

protendido recomenda-se f_{ck} superior a 30 MPa. Hanai (2005) afirma que essa característica é desejável pelas seguintes razões:

- a) A aplicação da força de protensão introduz tensões de compressão mais altas do que aquelas observadas na situação de serviço;
- b) O uso de concretos de alta resistência possibilita economia de material, resultando em elementos estruturais com menor peso próprio;
- c) Em geral, os concretos de resistência mais alta possuem maior módulo de elasticidade, o que diminui as perdas de protensão por retração e fluência do concreto.

No dimensionamento de elementos estruturais de concreto protendido é necessário conhecer a resistência à compressão para uma idade menor que 28 dias. Normalmente, a protensão e a retirada do escoramento é feita após um período de 3 a 7 dias a partir da concretagem (CECCON, 2007). Para tal, deve ser determinado o f_{cj} , parâmetro que depende da idade efetiva do concreto, do tipo de cimento utilizado e do f_{ck} do concreto. Além disso, é importante que o concreto possua baixa permeabilidade. Isso é garantido por meio do controle da vibração, escolha da granulometria dos agregados e outras medidas de controle tecnológico dos materiais. Adicionalmente, os cobrimentos estabelecidos nos documentos normativos são mais elevados para o concreto protendido, a fim de garantir melhor proteção das armaduras contra a corrosão. Destaca-se que as armaduras ativas, sujeitas a tensões elevadas, são susceptíveis a um processo acelerado de corrosão, denominado na literatura “corrosão sob tensão”.

Os efeitos da retração e da fluência no concreto devem ser levados em consideração no projeto, pois esses fenômenos provocam a diminuição da força de protensão aplicada inicialmente. Nos estágios iniciais de desenvolvimento da tecnologia do concreto protendido, tais efeitos eram desprezados e a força de protensão aplicada se tornava praticamente nula ao longo do tempo. A fluência corresponde ao aumento da deformação sob ação de carregamento constante, devido às propriedades plásticas do gel de cimento hidratado. A deformação inicial devida ao carregamento é denominada deformação elástica, enquanto a parcela devida à permanência da ação é a deformação por fluência (NAWY, 2006). Essa consideração é aceitável, pois a deformação inicial engloba poucos efeitos dependentes do tempo. Como no caso da retração, a taxa de deformação devida à fluência diminui com o tempo. A deformação por fluência não pode ser determinada de maneira direta, sendo calculada como a subtração das parcelas de deformação elástica e por retração da deformação total. Tanto a deformação por fluência quanto a deformação por retração não são completamente reversíveis. Isto é, se um

corpo de prova é descarregado após ficar sujeito a uma ação por um intervalo de tempo, uma recuperação elástica é observada, inferior à deformação causada pelo carregamento. Essa recuperação é seguida por um gradual decréscimo na deformação, denominado recuperação por fluência. O valor da recuperação depende da idade do concreto quando solicitado, com concretos mais maduros apresentando maiores recuperações.

Em geral, um concreto que possui bom comportamento relativo à fluência possui a mesma característica quanto à retração, pois os dois fenômenos estão relacionados à pasta de cimento hidratado. Alguns dos fatores que influenciam na fluência são a composição do concreto, as condições do meio ambiente, as dimensões do elemento estrutural e a solicitação ao longo do tempo. A composição do concreto é determinada pela relação água/cimento e pela proporção entre os agregados. Por exemplo, um aumento na relação água/cimento provoca aumento da fluência e o agregado graúdo induz efeito de travamento, diminuindo os efeitos da fluência (HANAI, 2005).

A retração é o encurtamento devido à perda de água, ou seja, a água em excesso evapora enquanto o gel de cimento que envolve as partículas retrai. Quanto à classificação, a retração pode ser dividida em retração plástica e retração por secagem. Segundo Nawy (2006), a retração plástica ocorre durante as primeiras horas após a concretagem. As superfícies expostas perdem umidade para o meio ambiente de maneira mais acelerada do que as camadas inferiores de concreto. A retração por secagem, por sua vez, ocorre depois da desforma, quando boa parte do processo químico de hidratação do gel de cimento já aconteceu. Corresponde à diminuição do volume quando há perda de umidade por evaporação. Como supracitado, a retração não é um processo totalmente reversível: se um corpo de prova é saturado com água após ter sofrido retração, não voltará a ter o seu volume inicial. Dentre os fatores que influenciam na retração, estão a composição dos agregados, a relação água/cimento, as dimensões do elemento estrutural, as condições de temperatura e umidade do ambiente, a taxa de armadura, aditivos, o tipo de cimento e a carbonatação, que é a reação entre os compostos da pasta de cimento e o gás carbônico.

1.1.2 Aço

Os aços para armaduras ativas possuem resistência mais elevada do que os empregados nas armaduras passivas. Além disso, não possuem patamar de escoamento. Na Figura 5 é

ilustrado o comportamento tensão-deformação dos aços empregados nas armaduras ativas. São encontrados nas seguintes formas:

- a) Fios trefilados de aço carbono, com diâmetros de 3 a 8 mm, fornecidos em rolos ou bobinas;
- b) Cordoalhas: fios enrolados em forma de hélice, com dois, três ou sete fios;
- c) Barras de aço-liga de alta resistência, laminadas a quente, com diâmetros superiores a 12 mm.

O aço das armaduras ativas deve ser capaz de manter a sua elasticidade, pois a ideia da protensão baseia-se na tendência do aço, após o alongamento, em voltar para o seu comprimento original. A elevada resistência é desejável para que, ocorridas as perdas por retração e fluência, ainda haja considerável tensão nas armaduras ativas. Outra característica que o aço deve apresentar é a pequena relaxação, para que a perda de protensão associada a esse fenômeno não seja acentuada. Quanto ao tipo de tratamento, podem ser classificados em aços de relaxação normal ou de baixa relaxação. Os aços de relaxação normal são retificados por tratamento térmico, que alivia as tensões internas devidas à trefilação. Já os aços de baixa relaxação recebem tratamento termomecânico, o qual melhora as características elásticas e reduz as perdas por relaxação do aço.

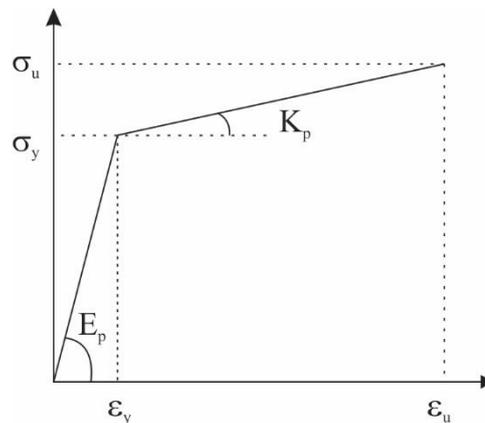


Figura 5 – Curva tensão-deformação para o aço das armaduras ativas. Os valores com índice y correspondem ao escoamento, enquanto aqueles com índice u correspondem aos valores na ruptura.

Fonte: Adaptado de Ceccon (2007).

1.1.2 Bainhas

As bainhas são dutos empregados para a disposição das armaduras ativas na pós-tração, possibilitando diferentes geometrias para os cabos. Na pós-tração com aderência, as cordoalhas são protendidas e então é injetada nata de cimento para garantir a aderência entre a armadura ativa, a bainha e, conseqüentemente, o concreto, além da proteção contra a corrosão. Neste caso, são usuais bainhas fabricadas com aço laminadas a frio e corrugadas, Figura 6, para que haja melhor ligação entre a armadura e o concreto. Por outro lado, as bainhas empregadas na pós-tração sem aderência são fabricadas em polietileno de alta densidade (PEAD) e preenchidas com graxa inerte, Figura 7. A graxa faz com que as cordoalhas deslizem em relação à bainha, de modo que haja continuidade de deslocamentos na direção tangente ao cabo apenas nas ancoragens. Além disso, a graxa inerte garante a proteção contra a corrosão de maneira eficaz.



Figura 6 – Bainha metálica corrugada, para uso na pós-tração com aderência. Fonte: MAC Protensão (2019).

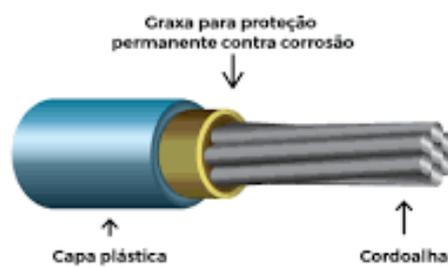


Figura 7 – Cordoalha engraxada, utilizada na pós-tração sem aderência. Representação da bainha de PEAD, da graxa inerte e da cordoalha. Fonte: Impacto Protensão (2019).

1.2 Perdas de protensão

É importante citar as perdas de protensão, ainda que não sejam o foco deste trabalho, pois a sua existência influencia diretamente as considerações relacionadas ao projeto de estruturas protendidas. Podem ser divididas em perdas imediatas e progressivas. As perdas imediatas são aquelas associadas ao sistema de protensão e ao processo construtivo, ocorrendo no ato da protensão. Na pós-tração, as perdas imediatas são as seguintes:

- a) Perda por atrito entre os fios/cordoalhas e a bainha: o contato entre a armadura e a bainha no ato da protensão faz surgir forças de atrito, as quais ocasionam a diminuição da força de protensão. Além disso, há as ondulações parasitas, originadas por variações angulares inevitáveis mesmo nos cabos retos;
- b) Perda por acomodação das ancoragens: aplicada a força de protensão, os dispositivos de ancoragem acomodam-se no concreto. Essa movimentação faz com que o cabo diminua, provocando então diminuição da tensão na armadura ativa;
- c) Perdas por deformação elástica do concreto: são consideradas de maneiras distintas. Quando há apenas uma cordoalha a ser protendida, não ocorre. Caso contrário, a protensão da cordoalha atual provocará diminuição da força de protensão nas cordoalhas já protendidas. Esse efeito pode ser atenuado, aplicando-se forças de protensão maiores nas cordoalhas protendidas no início do processo, de modo que a tensão final seja aquela desejada no projeto.

Na pré-tração, as considerações sobre as perdas imediatas são:

- a) Não ocorrem perdas por atrito, dado que a armadura ativa está em contato direto com o concreto. A transferência dos esforços do aço para o concreto ocorre ao longo de toda a armadura ativa, exceto nos trechos em que se deseje interrompê-la.
- b) Para pistas de concretagem longas, são ignoradas as perdas por acomodação das ancoragens. Quando a razão entre o deslocamento das ancoragens e o comprimento total da pista é muito pequena, a perda de protensão é desprezível.
- c) As perdas por deformação elástica do concreto são constantes para todas as cordoalhas.

As perdas de protensão progressivas estão associadas às propriedades viscoelásticas do concreto e do aço: retração do concreto, deformação lenta do concreto (fluência) e relaxação do aço, fenômenos descritos anteriormente. Essas perdas ocorrem nos primeiros anos após

a concretagem do elemento estrutural. A Figura 8 apresenta a força de protensão ao longo do tempo e as perdas associadas a cada instante.

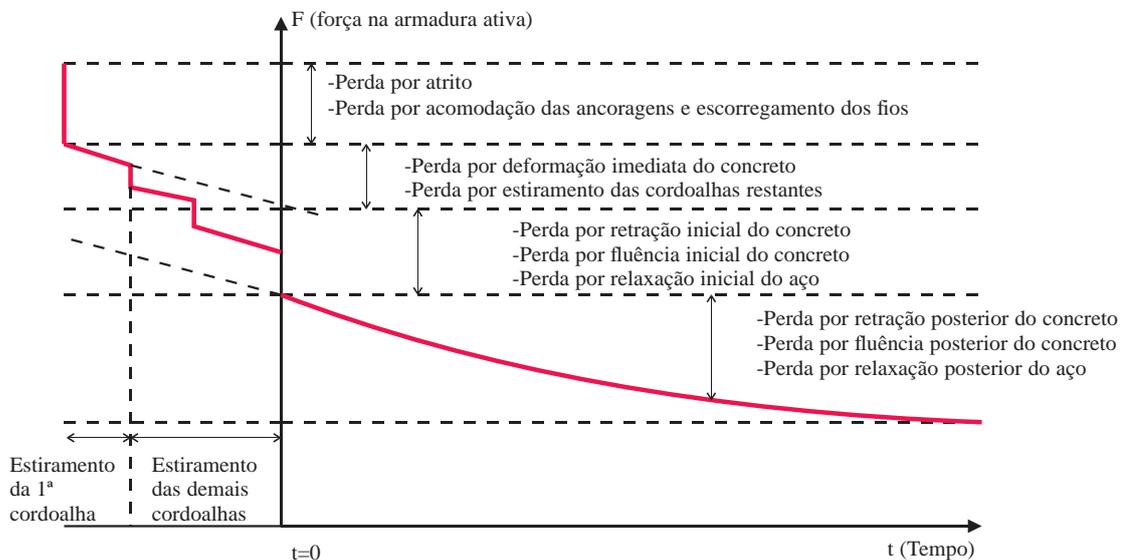


Figura 8 – Força de protensão em função do tempo, considerando as perdas imediatas e progressivas associadas à pós-tração. Fonte: Adaptado de Hanai (2005).

1.3 Histórico da protensão

Neste ponto do texto enumeram-se nomes importantes na evolução do concreto protendido, assim como obras importantes no contexto nacional e internacional. Também são descritas de maneira breve situações em que a protensão foi empregada em edifícios comerciais, residenciais e obras de arte. Na literatura, alguns trabalhos apresentam a revisão bibliográfica da história do concreto protendido no mundo. Dentre eles, citam-se Sanabra-Loewe e Capellà-Llovera (2014), Dinges (2009), Marrey e Grote (2003), Nawy (2006), Casson (1971) e Torr (1964).

Segundo Sanabra-Loewe e Capellà-Llovera (2014), a evolução da aplicação da protensão em estruturas de concreto pode ser dividida em quatro fases. Na primeira fase, as vantagens da protensão foram observadas por meio da intuição dos projetistas idealizadores da técnica. Na segunda fase, graças aos engenheiros, houve a racionalização, formalização matemática e física no emprego da técnica. Também foram aprimorados os conceitos de aplicação de cargas que agiam no sentido de aliviar as solicitações nas estruturas. Por sua vez, a terceira fase foi caracterizada pela percepção da existência das perdas de protensão, ainda que

sua quantificação e controle fossem tarefas difíceis. Por fim, na quarta fase, os efeitos de longa duração foram compreendidos com maior clareza, permitindo assim que os engenheiros desenvolvessem maneiras de combater os efeitos das perdas de protensão.

Em 1872, P. H. Jackson, engenheiro na Califórnia, patenteou um sistema de protensão que utilizava uma barra para construir vigas e arcos a partir de blocos individuais. Conforme exposto por Nawy (2006), em 1888 C. W. Doehringer, engenheiro alemão, obteve a patente de um sistema de protensão para lajes, utilizando fios metálicos. Contudo, as tentativas iniciais de protensão não apresentavam bons resultados em longo prazo. Por ser uma técnica ainda incipiente à época, não eram conhecidos os fenômenos que regiam as perdas de protensão. Assim, com o passar do tempo, a força de protensão tornava-se praticamente nula e era observado comportamento semelhante ao de uma estrutura em concreto armado convencional.

No início do século XX, J. Lund, norueguês, e G. R. Steiner, dos Estados Unidos da América, tentaram resolver essa situação, porém sem sucesso. Após um longo período sem progressos na área, devido à indisponibilidade de aços de alta resistência para as armaduras ativas, R. E. Dill notou os efeitos da retração e da fluência do concreto nas perdas de protensão (DINGES, 2009). A partir desse conhecimento, desenvolveu um sistema que envolvia a protensão não aderente sucessiva de várias barras, a fim de compensar as ditas perdas. No início da década de 20, W. H. Hewett desenvolveu, em Minneapolis, os princípios da protensão circular, utilizada em reservatórios para garantir a estanqueidade, por meio da prevenção contra a fissuração provocada pelas pressões hidrostáticas internas. O emprego da protensão circular avançou de maneira acelerada nos Estados Unidos da América nos 30 anos seguintes. Recordar-se também o método do balanceamento das cargas, proposto por T. Y. Lin, uma maneira simplificada de considerar a protensão e que permitiu o projeto de diversas estruturas com vigas contínuas (LIN E BURNS, 1981).

Na Europa, a protensão continuou a ser estudada e grandes avanços foram alcançados. Em particular, por meio da genialidade do engenheiro francês Eugene Freyssinet, o qual propôs, entre 1926 e 1928, métodos para contornar as perdas de protensão utilizando aços de alta resistência e alta ductilidade (LEONHARDT, 1964). Em 1940, apresentou o sistema de protensão Freyssinet, composto por ancoragens cônicas para cordoalhas de 12 fios. Sua preocupação ao desenvolver tal sistema foi amenizar o escorregamento das ancoragens, o que provocava encurtamento da armadura ativa e consequente perda de protensão. Principalmente na Europa Central e Ocidental, após a Segunda Grande Guerra, tornou-se necessária a

reconstrução de diversas pontes destruídas. G. Magnel, da Bélgica e Y. Guyon, francês, também desenvolveram técnicas para a construção de pontes protendidas.

No Brasil, a primeira obra em concreto protendido foi a ponte do Galeão, Figura 9, no Rio de Janeiro, construída em 1948 utilizando o sistema patenteado por Freyssinet. Os materiais utilizados e o projeto foram importados da França e, em 1952, a Companhia Siderúrgica Belgo-Mineira iniciou a fabricação do aço para as armaduras ativas (AWA, 2019). A segunda obra desse tipo no Brasil foi a ponte de Juazeiro, Figura 10. Feita com aço produzido no Brasil, liga os municípios de Juazeiro, na Bahia, a Petrolina, em Pernambuco, e tem extensão de 801 metros sobre o rio São Francisco. Ambas as pontes citadas foram projetadas por Freyssinet, ratificando a importância deste como um dos idealizadores da aplicação da protensão ao concreto (VIVER AS CIDADES, 2013).



Figura 9 – Ponte do Galeão, Rio de Janeiro: primeira obra em concreto protendido no Brasil. Fonte: AWA (2019).



Figura 10 – Ponte de Juazeiro (Presidente Eurico Gaspar Dutra), primeira obra protendida construída com aço brasileiro. Fonte: Viver as cidades (2013).

Cita-se também a ponte Rio-Niterói, localizada na Baía de Guanabara (RJ), Figura 11. É a maior ponte em concreto protendido do Hemisfério Sul. Inaugurada em 1974, tem comprimento total de 13,29 km e altura máxima de pilar igual a 72 metros. Cerca de 2150 km de cabos foram utilizados em sua construção. O tramo central constitui um dos maiores vãos em viga contínua reta do mundo, com aproximadamente 300 m de comprimento. De acordo com os engenheiros responsáveis pelo projeto e pela execução, o maior desafio foi a construção dos 9 km da ponte sobre o mar. Essa etapa da construção demandou a perfuração profunda do subsolo oceânico, a fim de encontrar terreno rochoso competente, capaz de suportar as cargas transmitidas às fundações. Quando foi inaugurada, era a segunda maior ponte em extensão do mundo, atrás apenas da Pontchartrain, nos Estados Unidos da América. Manteve essa colocação até 1985, quando foi inaugurada a Penang, na Malásia (CIMENTO ITAMBÉ, 2018).



Figura 11 – Ponte Rio-Niterói, na Baía de Guanabara. Fonte: Construct App (2018).

Outro marco do concreto protendido no Brasil é a Cidade Administrativa de Minas Gerais, Figura 12, sede do governo estadual de Minas Gerais. Inaugurada em 2010, conta com o maior edifício de concreto protendido suspenso do mundo (CONSTRUCT APP, 2018). Com 270000 m² de área construída e seis edificações principais, a Cidade Administrativa abriga secretarias do estado, centro de convivência, auditório, prédio de serviços, heliponto, praças de alimentação e restaurantes. O projeto foi elaborado pelo arquiteto Oscar Niemeyer. O Palácio Tiradentes, o maior dos seis edifícios que compõem o complexo, é o maior prédio de concreto protendido suspenso do mundo, com vão livre de 147 metros de comprimento e 17 metros de largura. A estrutura é suspensa por tirantes metálicos protendidos, presos à cobertura por dois grandes pórticos dispostos paralelamente e que constituem os quatro únicos pontos de apoio da estrutura (ECIVILUFES, 2011).



Figura 12 – Cidade Administrativa de Minas Gerais – Belo Horizonte. Fonte: Construct App (2018).

Destaca-se também a ponte do Atlântico, no canal do Panamá. Quando finalizada, será a estrutura estaiada em concreto mais longa do mundo. Com vão central de 530 metros, conectará o porto marítimo de Colon às comunidades a oeste do canal. Sua construção iniciou-se em 2013 e deve ser concluída em 2019. Por se localizar em uma das rotas cruciais para o comércio marítimo, a ponte tem altura livre de 75 metros, o suficiente para que a maior embarcação possa navegar por debaixo dela. As quatro pistas serão suportadas por um sistema de cabos, ancorados em pilares com 212,50 metros de altura (ARCHDAILY, 2018). Na Figura 13 é apresentada a geometria da ponte do Atlântico, no Panamá.



Figura 13 – Ponte do Atlântico no Canal do Panamá. Fonte: ArchDaily (2018).

No âmbito mundial, cita-se a Torre de Telecomunicações Namur, Figura 14. Com 171 metros de altura, a torre de telecomunicação Namur em Vedrin, na Bélgica, foi a estrutura mais alta construída em concreto protendido do mundo à época de sua construção, iniciada em 1991. A estrutura se assemelha a um tripé até a altura de 96 metros; daí em diante, se estende como

uma torre cilíndrica. A estrutura principal é composta por anéis pré-moldados de concreto, solidarizados com argamassa e um sistema de pós-tração. Rigot e Gaspart (1999) descrevem o processo construtivo e a estrutura da torre com mais detalhes.



Figura 14 – Torre de Telecomunicação Namur, na Bélgica. Fonte: Rigot e Gaspart (1999).

Por fim, cita-se o trabalho de Chung et al. (2017), no qual os autores discorrem sobre o uso da pós-tração em edifícios altos e descrevem minuciosamente as soluções construtivas empregadas em diversos projetos. Há cerca de uma década, esse tipo de sistema começou a ser utilizado na Coreia, assumindo um papel importante na superação dos limites arquitetônicos impostos pelo uso do concreto armado convencional, na medida em que permite maiores vãos com menores alturas das vigas. Na atualidade, a tecnologia da pós-tração tem sido adaptada para elementos estruturais especiais, como paredes de cintamento. Algumas das edificações abordadas no artigo são: Landmark 72, Torres Parnas e Raemian Yong-san.

O edifício Landmark 72 localizado em Hanói, Vietnã, Figura 15, é um complexo composto por uma torre de escritórios de 72 andares, com altura de 350 metros e duas torres residenciais de 48 andares. Por causa das dimensões do pavimento tipo, os projetistas precisaram buscar uma solução estrutural ótima. Chegaram à conclusão de que vãos de cerca de 13 metros seriam viáveis com o uso de lajes protendidas. Sua área construída o coloca na lista dos cinco edifícios com maior área construída do mundo. (CHUNG ET AL., 2017)



Figura 15 – Edifício Landmark 72, em Hanói, no Vietnã. Fonte: Landmark 72 (2019).

Já a Torre Parnas, Figura 16, teve seu projeto finalizado em 2016 e possui área construída de 219385 m². Localizada em Seul, na Coreia do Sul, tem 38 andares acima do nível do terreno, 8 andares no subsolo e altura de 183 metros. (ARCHDAILY, 2017). A princípio, o arquiteto do projeto desejava vãos de 12 metros sem pilares internos, característica adequada para construções empregando o sistema construtivo *steel frame*. Contudo, essa opção não satisfazia o pé direito exigido pelo cliente. Logo, também foram empregadas lajes protendidas, como para o Landmark 72.



Figura 16 – Torre Parnas, em Seul, Coreia do Sul. Fonte: Skyscraper (2018).

O edifício Raemian Yongsan, Figura 17, localizado em Seul, na Coreia do Sul, possui área construída de 202634 m², 40 andares acima do nível do terreno, 9 andares no subsolo e 160 metros de altura. (SKYSCRAPER, 2019) A solução construtiva empregada possui vãos entre 10 e 12 metros, com lajes nervuradas protendidas e pé direito superior ao padrão usual da Coreia – cerca de 2,7 metros.



Figura 17 – Edifício Raemian Yongsan, na Coreia do Sul. Fonte: Skyscraper (2019).

Neste capítulo foram apresentadas motivações para o uso do concreto protendido, vantagens em seu emprego e os sistemas de protensão utilizados na Engenharia. Também foram discutidas a influência da geometria das armaduras ativas nos esforços de protensão e as características desejáveis para os materiais envolvidos na protensão: o concreto, o aço e as bainhas. Além disso, foram mencionadas as perdas de protensão – ainda que não sejam o foco deste trabalho, influenciam drasticamente no projeto de estruturas em concreto protendido.

Em seguida, foram expostos aspectos históricos do desenvolvimento do concreto protendido, citando nomes importantes para o avanço de seu uso. Por fim, citaram-se algumas obras no Brasil e no mundo que lançaram mão do concreto protendido para vencer desafios estruturais e arquitetônicos, mostrando a versatilidade e robustez das soluções.

2 OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA

Este trabalho tem como objetivo geral o estudo numérico do comportamento de vigas de concreto protendido pós-tracionado, por meio do desenvolvimento de um código computacional capaz de simular tais estruturas. Exemplos numéricos e experimentais encontrados na literatura foram utilizados para validar as implementações realizadas e descritas ao longo do texto. Assim, foram feitas contribuições para o estudo das estruturas protendidas no grupo de pesquisa de Mecânica Computacional do Departamento de Engenharia de Estruturas, da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Os objetivos específicos pretendidos na pesquisa são a simulação de vigas de concreto protendido com pós-tração aderente e o estudo da protensão externa como reforço em estruturas de concreto, avaliando as situações de carregamento de interesse - sejam elas solicitações externas em ensaios experimentais ou esforços decorrentes da protensão das armaduras ativas.

Dadas as vantagens das soluções em concreto protendido em comparação às suas equivalentes em concreto armado convencional, o estudo das estruturas protendidas é um tema muito atual. Então, esse fato justifica a escolha do tema, principalmente quando se associa o conhecimento em concreto protendido às ferramentas de simulação numérica, como o Método dos Elementos Finitos utilizando posições como incógnitas, a técnica de embutimento para armaduras e a ativação das armaduras via prescrição de deformações. Embora ocorram pequenos deslocamentos nos elementos estruturais que se objetiva simular, a formulação do método dos elementos finitos com posições como incógnitas foi utilizada, por já estar consolidada no grupo de pesquisa em que este trabalho se insere. Destaca-se que a formulação é não linear geométrica exata, pois o equilíbrio é feito na posição deslocada.

3 METODOLOGIA

Para alcançar os objetivos pretendidos neste trabalho, inicialmente realizou-se uma revisão da literatura, que compreendeu trabalhos abordando simulações numéricas, análise experimental de vigas de concreto protendido, o método dos elementos finitos posicional e não linearidade física em estruturas de concreto. Posteriormente, foram implementados os códigos computacionais para simular elementos de treliça e elementos de chapa. Estudou-se ainda a estratégia de embutimento das barras nos elementos de chapa, os quais representam as armaduras e o concreto, respectivamente.

Então implementaram-se as rotinas para considerar a não linearidade física dos materiais, via modelo de dano proposto por Mazars (1984) para o concreto e a formulação de plasticidade uniaxial com encruamento isótropo para as armaduras. Validadas as implementações anteriores, estudou-se uma estratégia para simular a protensão das armaduras ativas, por meio da prescrição de deformações nos elementos de barra. Por fim, foram simulados exemplos encontrados na literatura para vigas de concreto protendido pós-tracionado com aderência e com protensão externa para validação do código, respeitando os limites da formulação empregada.

Todas as implementações computacionais foram realizadas na linguagem Fortran e o pós-processamento das simulações foi realizado no software de livre acesso Acadview, desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP.

4 REVISÃO DA LITERATURA

Apresentados os conceitos primordiais à compreensão do concreto protendido e aspectos históricos da protensão, parte-se para a revisão da literatura abordando a simulação numérica e análise experimental de vigas em concreto protendido. O propósito da revisão foi localizar o trabalho na literatura, estudar maneiras de simular a protensão das armaduras e compreender como são validados os resultados numéricos. Concomitantemente, foi realizada a revisão relacionada ao método dos elementos finitos, localizando trabalhos com temática semelhante a este (sólidos reforçados com fibras, fibras ativas, não linearidade física) e variados, a fim de mostrar a versatilidade do método.

4.1 Concreto protendido e simulação numérica

Prattes Junior (1992) desenvolveu uma ferramenta computacional, utilizando o método dos elementos finitos para analisar estruturas em concreto armado convencional e concreto protendido. Esse estudo avaliou situações de carregamento em curto e em longo prazo, considerando retração e fluência no concreto e relaxação do aço das armaduras ativas. O autor empregou modelos constitutivos viscoelastoplásticos para representar os materiais. Por sua vez, Barbieri (2003) analisou numericamente o comportamento na flexão de elementos com protensão aderente e não aderente. Para isso, compatibilizou a cinemática das cordoalhas e da matriz de concreto, obtendo uma formulação exata em forças e distribuição da curvatura ao longo da cordoalha. Nesse trabalho foi empregado o elemento finito de pórtico e foi utilizado o modelo reológico de Maxwell para representar o comportamento viscoso dos materiais.

Em uma primeira abordagem, Lou et al. (2006) consideraram a protensão como ação externa – carga uniformemente distribuída, momento fletor e força normal de compressão, conforme a Figura 18 - e assumiram deformação constante nas cordoalhas para simular vigas de concreto protendido. Posteriormente, Lou et al. (2013) aprimoraram esse método, descrevendo a resposta não-linear de vigas contínuas de concreto protendido com protensão não aderente. Para computar a deformação da cordoalha não aderente foi empregada a deformação média, calculada com os deslocamentos na região das ancoragens. De maneira análoga, Moreira, Sousa Jr. e Parente Jr. (2018) desenvolveram um modelo de elementos finitos

para vigas de concreto protendido com cordoalhas não aderentes, avaliando situações de carregamento de curta duração. Para tal, utilizaram uma abordagem lagrangeana total, elementos com cinemática de Euler-Bernoulli para representar a matriz de concreto e um único elemento poligonal embutido na matriz para representar as cordoalhas. O modelo implementado considera não linearidades física e geométrica.

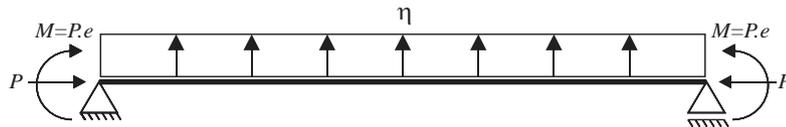


Figura 18 – Consideração da protensão como ação externa em uma viga biapoiada.

Em seu trabalho, Brenkus et al. (2019) modelaram e validaram uma abordagem para protensão com e sem aderência. Para simular a protensão aderente os nós dos elementos que representam as cordoalhas foram conectados aos nós dos elementos que simulam a matriz de concreto. Já para a protensão não aderente foram empregados dois elementos, conectados por molas, conforme a Figura 19. Um deles representa a cordoalha e o outro representa a bainha, com rigidez nula. O alongamento é aplicado no elemento de rigidez nula e as forças são transferidas para o elemento que representa a cordoalha, apenas na direção radial – como ocorre com as cordoalhas engraxadas. O alongamento é aplicado por meio de uma variação de temperatura entre a cordoalha e a matriz de concreto; os resultados foram validados a partir de análise experimental, comparando a resistência última à flexão, o modo de ruptura e a tensão nas cordoalhas.

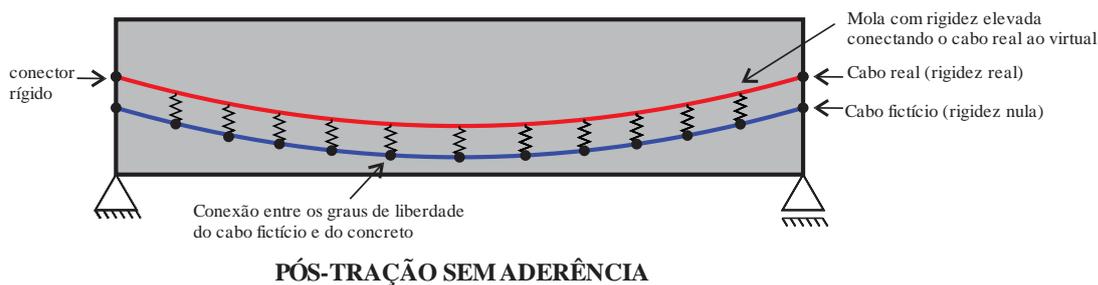


Figura 19 – Estratégia empregada para simular a protensão não aderente. Fonte: Adaptado de Brenkus et al. (2019).

Ainda no contexto da simulação numérica, Cornejo et al. (2018) desenvolveram um modelo de elementos finitos tridimensional para simular o comportamento de estruturas de concreto armado, reforçadas com cordoalhas pós-tracionadas. Para representar a interação entre os materiais foi utilizada a lei série-paralelo, a qual supõe um estado de isodeformações na

direção da armadura e de isotensões nas demais direções. Para considerar a relaxação do aço foi empregado o modelo viscoelástico generalizado de Maxwell. Os resultados das simulações foram comparados com as respostas analíticas para uma viga com cabo reto, com cabo parabólico e alguns exemplos de viscoelasticidade foram utilizados para validação das implementações.

Lee, Tai e Chung (2019) estudaram o uso de um sistema de reforço de vigas de pontes, para melhorar a resistência à flexão de estruturas que foram danificadas por ação do meio ambiente. Esse reforço foi feito com um sistema de pós-tração, disposto na superfície das vigas. Foram feitas análises com elementos finitos e os resultados foram comparados com os obtidos em ensaios de flexão a quatro pontos. Identificada a lacuna no estudo do comportamento de elementos com materiais poliméricos reforçados com fibras de carbono, Zhou e Xie (2019) se propuseram a analisar vigas com esse tipo de reforço, com protensão não aderente, ensaiando-as com carregamento monotônico até a ruptura para estudar o comportamento dos elementos na flexão.

Na análise de vigas contínuas em concreto protendido pós-tracionado com armadura ativa não aderente pode ser citado o trabalho de Kim e Lee (2012). Os autores destacam que grande parte da literatura abordava, até então, apenas elementos estruturais isostáticos e que o principal objetivo dos estudos anteriores era a predição da resistência última. Então, propuseram um modelo não linear que permitiu avaliar o comportamento desses elementos em situação de serviço. Para validação, os resultados foram comparados com dados experimentais, para elementos superarmados, elementos com pós-tração não aderente externa e interna, além de elementos com diversas geometrias de cordoalha e de seção transversal. Mohammed et al. (2017) simularam vigas com balanços em concreto protendido pós-tracionado com aderência, utilizando software comercial. Avaliaram a influência do perfil das cordoalhas no comportamento das vigas, considerando as seguintes configurações: sem cordoalhas; duas cordoalhas retilíneas na parte inferior, média e superior; e cordoalhas parabólicas. Os parâmetros utilizados para comparar os resultados com análises experimentais foram a carga de ruptura, deslocamentos e curvas força *versus* deslocamento, para todos os modelos simulados.

Yang e Mun (2013) estudaram o comportamento de vigas pós-tracionadas com armadura ativa não aderente, empregando concretos leves. Para tal, analisaram o efeito das armaduras passivas, da força de protensão e da taxa de armadura ativa no desempenho dessas vigas, comparando os resultados com aqueles obtidos para elementos em concreto de peso próprio convencional. Observaram tendência semelhante, independentemente do tipo de

concreto utilizado: elevada taxa de armadura levou à maior resistência, menor ductilidade e menor acréscimo de tensões nas armaduras. Compararam os resultados com aqueles obtidos seguindo às recomendações do ACI, notando que tais diretrizes levavam a um resultado mais conservador.

O reforço de estruturas de concreto armado com armaduras ativas externas pós-tracionadas é abordado por Lee, Shin e Lee (2018). Nove vigas simplesmente apoiadas, três vigas de controle e seis vigas reforçadas foram submetidas a ensaios de flexão a três pontos. Os parâmetros variados foram a quantidade de armadura ativa e seu diâmetro. Os autores optaram por um perfil poligonal em V para o reforço, com desviador na face inferior das vigas. Com a protensão da armadura externa é possível diminuir deslocamentos excessivos e aumentar a resistência do elemento estrutural, em comparação com a situação anterior à disposição do reforço. O sistema de protensão utilizado consistiu em barras de aço, com a força de protensão aplicada por meio do aperto de porcas nas extremidades das barras. Foi observado aumento da resistência e da rigidez em intervalos de 40 a 112% e 28 a 73%, respectivamente.

Visando compreender a influência da corrosão sob tensão em vigas de concreto protendido pós-tracionado com aderência, Zhang et al. (2017) realizaram testes experimentais em oito vigas, sujeitas a diferentes níveis de corrosão, obtida por meio de um processo acelerado. O principal objetivo dos autores foi identificar e quantificar os efeitos da corrosão na fissuração do concreto, em sua rigidez após a fissuração, na resistência última, no modo de falha e na ductilidade dos elementos estruturais. Concluíram então que perdas decorrentes da corrosão a partir de 27% afetam drasticamente a resistência última, perdas inferiores a esse valor influenciam pouco na rigidez anterior à fissuração, mas diminuem a rigidez observada após a fissuração.

Hussien et al. (2012) conduziram um programa experimental para estudar o efeito da protensão aderente e não aderente em vigas de concreto protendido. O programa consistiu na análise experimental de nove vigas, sendo duas em concreto armado convencional, quatro com armadura ativa aderente e as demais com armadura não aderente. Foram variadas a resistência à compressão do concreto (43, 72 e 97 MPa) e a taxa de protensão, razão entre a força na armadura ativa e a soma das forças resultantes nas armaduras ativa e passiva. Para a previsão dos resultados, a força última teórica foi calculada a partir de equações encontradas na literatura. Os autores concluíram que os exemplares com armadura ativa aderente apresentaram maior ductilidade, rigidez inicial (anterior à fissuração) e maior flecha na ruptura. Além disso, observaram que a disposição de armadura passiva melhorou consideravelmente a ductilidade

dos elementos estruturais. Por fim, notaram que o aumento da resistência à compressão do concreto pouco influenciou na força última e na força que causou o início do processo de fissuração – aumento de 4% e 18%, respectivamente.

Em seu trabalho, Zona, Ragni e Dall’Asta (2008) desenvolveram uma formulação a partir do método dos elementos finitos, considerando não linearidades geométrica e física para simular vigas com protensão externa. À época, os trabalhos abordando esse assunto partiam da formulação linear e incluíam a variação da excentricidade da armadura ativa. Porém, o modelo empregado pelos autores parte de uma cinemática não linear, resultando em uma descrição geometricamente exata da interação entre as cordoalhas e a viga. Também foram consideradas as interações entre o comportamento à flexão e axial das vigas. Os resultados foram comparados com curvas força x deslocamento e tensão nas armaduras ativas x deslocamento, encontrados em trabalhos experimentais da literatura.

4.2 Histórico de desenvolvimentos no grupo de pesquisa

Bonet (2000) e Coda (2003) apresentaram a formulação do método dos elementos finitos utilizando posições nodais como incógnitas, em vez de deslocamentos. Por se tratar de um método de análise não linear geométrica, sua descrição é denominada geometricamente exata, para grandes deslocamentos e deformações moderadas. No grupo de pesquisa em que este trabalho se insere, foram desenvolvidas pesquisas com as mais diversas aplicações, empregando o MEF-P.

Desenvolvimentos relacionados ao comportamento de fibras ativas com aplicações em engenharia e biomecânica foram alcançados por Friedel (2016). Nesse trabalho, o autor utilizou elementos finitos triangulares, com imersão de elementos finitos de barras simples. As formulações propostas são idealizações para a simulação de tecidos musculares, não se limitando a essa aplicação, nos quais as fibras possuem comportamento ativo e viscoso. Ramirez (2018) deu continuidade ao estudo da análise não linear geométrica de músculos esqueléticos empregando o MEF-P. Em sua pesquisa desenvolveu modelo transversalmente isotrópico hiperelástico quase incompressível para simular o tecido muscular. Ainda usou a energia livre de Helmholtz para modelar o comportamento ativo e passivo dos músculos.

Na análise de estruturas treliçadas sujeitas a grandes deslocamentos Coda e Greco (2004) apresentaram uma das aplicações do MEF-P. Os autores destacam que a formulação utilizando as posições como incógnitas nodais é simples e apresenta bons resultados, sendo a primeira característica a principal da formulação. Nesse trabalho é citada a importância da análise não linear geométrica na engenharia: otimização de custos e do uso de materiais para alguns tipos de estruturas, como aquelas compostas por barras esbeltas.

Estudo de estruturas em casca empregando elementos isoparamétricos curvos foi feito por Coda e Paccola (2007). Os autores propuseram que fossem utilizados como parâmetros nodais as posições e vetores generalizados, os quais compreendem os cossenos diretores e a variação de espessura do elemento de casca simultaneamente. Assim, a formulação considera seis parâmetros por nó e variação de espessura constante. Também permite o mapeamento tridimensional compatível e necessita de uma lei constitutiva relaxada para evitar travamento. Para abordar essa situação, Coda e Paccola (2008) apresentaram um enriquecimento para evitar o travamento, permitindo assim que fosse utilizada a lei constitutiva completa de Saint-Venant-Kirchhoff. Coda, Paccola e Sampaio (2013) simularam cascas e placas ortotrópicas laminadas, empregando a formulação lagrangeana total em vez da abordagem corrotacional, mais comumente empregada na literatura.

Pesquisa relacionada à análise dinâmica não linear de estruturas e mecanismos planos com ligações deslizantes foi desenvolvida por Siqueira e Coda (2016). Nesse trabalho, é citado que a temática é atual, envolvendo aplicações em satélites, braços robóticos, guindastes e a interação entre um veículo e uma ponte pela qual transita. Os autores empregaram elementos de pórtico para isso, com uma abordagem lagrangeana total. As estruturas estudadas estão sujeitas a grandes deslocamentos e rotações, sendo desenvolvida a formulação para considerar ligações deslizantes. Essas ligações compreendem as juntas prismáticas e cilíndricas. As juntas cilíndricas são aquelas que garantem a continuidade de posição entre os elementos conectados. Já as juntas prismáticas são aquelas que garantem continuidade de rotação entre os elementos. Ambas as ligações foram modeladas utilizando multiplicadores de Lagrange, contribuindo na energia do sistema, na força interna e na hessiana global. Nesse trabalho, os materiais foram analisados com comportamento elástico, respeitando o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff. Siqueira e Coda (2017) deram continuidade aos desenvolvimentos, implementando um perfil de rigidez arbitrária na trajetória de deslizamento e dissipação de energia no sistema, utilizando o modelo reológico modificado de Kelvin-Voigt.

No âmbito dos desenvolvimentos relacionados aos sólidos reforçados com fibras, Sampaio, Paccola e Coda (2013) estudaram a aderência completa entre fibra e matriz para sólidos bidimensionais, destacando algumas das vantagens da formulação empregada. A modelagem foi feita sem acrescentar graus de liberdade ao sistema, por meio da técnica de embutimento, a qual não necessita de coincidência entre a malha da matriz e das fibras. Os autores empregaram elementos de fibra curvos e elementos de chapa bidimensionais, em ambos os casos com grau de aproximação qualquer. Observaram a necessidade de implementar elementos de fibra com grau de aproximação maior ou igual ao utilizado para a matriz, garantindo aderência completa, o que é importante quando se simula sólidos com grandes deslocamentos. Dando continuidade aos desenvolvimentos atingidos, Paccola, Sampaio e Coda (2013) analisaram as tensões de contato entre fibra e matriz para sólidos compósitos bidimensionais, tanto para pequenos deslocamentos quanto para grandes deslocamentos. Tal análise foi realizada para elementos de fibra retos e curvos, utilizando duas estratégias distintas. A primeira utilizou relações diferenciais consistentes e a segunda foi deduzida a partir de um cálculo médio das tensões. Concluíram então que o comportamento global da estrutura depende pouco da discretização utilizada para as fibras e que, para elementos de fibra com aproximação de alta ordem, o comportamento das tensões calculadas apresenta problemas. Identificou-se que tais problemas advêm da aplicação de forças concentradas nos nós intermediários dos elementos de fibra, o que não permite a convergência das tensões mesmo com o refinamento das fibras.

Paccola, Neto e Coda (2015) contribuíram para o estudo dos materiais compósitos em níveis macro e meso, analisando o descolamento do reforço em relação à matriz, seja ele composto por fibras longas ou curtas. Havendo descolamento, novos graus de liberdade são incorporados à formulação. A matriz foi modelada com comportamento linear elástico, enquanto as fibras possuem relação constitutiva elastoplástica multilinear. São propostas duas maneiras de calcular as tensões no contato: por meio da relação diferencial e empregando uma tensão de contato média, em ambos os casos para elementos de fibra curvos.

Alguns outros assuntos foram estudados, como a interação fluido-estrutura, por Sanches e Coda (2014). Nesse trabalho foi desenvolvido um algoritmo para análise não linear geométrica da interação entre fluidos e estruturas em casca. A equação de Navier-Stokes foi escrita usando a descrição lagrangeana-euleriana arbitrária, a fim de acoplar contornos móveis com os elementos de casca. Coda (2009) analisou estruturas infláveis sujeitas a grandes deslocamentos, simulando algumas situações distintas: pressão negativa em um balão

cilíndrico; enchimento e esvaziamento de um balão; e a forma natural de um balão. Analisando situações de impacto termomecânico em estruturas treliçadas, Carrazedo e Coda (2010) adotaram como estratégia de solução a divisão do problema em duas partes. Em uma primeira etapa é resolvido o problema mecânico e, então, é avaliado o problema térmico. Para tal, empregaram a decomposição aditiva do tensor de deformações, comparando as simulações com resultados de outros autores e de análise experimental.

Uma formulação alternativa para a análise de sólidos compostos por materiais viscoelásticos foi proposta por Pascon e Coda (2017). Para tal, foram utilizados elementos tetraédricos isoparamétricos, os quais não apresentam problema de travamento quando são empregadas distribuições de tensão e de deformação mais complexas. Nessa nova metodologia, associa-se à lei constitutiva hiperelástica do material o modelo de viscoelasticidade de Zener. Essa formulação é capaz de simular fluência, relaxação e enrijecimento viscoelástico dependente da taxa de deformação, fenômenos observados em materiais poliméricos.

Nogueira, Paccola e Coda (2018) apresentaram uma generalização da formulação de elementos finitos que permite a descrição exata bidimensional de estruturas laminadas, com a devida distribuição de tensões. Empregaram o método da penalização para acoplar elementos não colineares, introduzindo rótulas ideais, rótulas elásticas e ligações monolíticas. As implementações realizadas pelos autores foram capazes de: simular estruturas laminares sem apresentar problemas de travamento; modelagem geometricamente exata de elementos curvilíneos; modelagem de ligações rígidas ou flexíveis e de apoios externos elásticos.

A fim de avaliar o comportamento de placas e cascas do tipo sanduíche, Carrazedo, Paccola e Coda (2018) propuseram uma estratégia para considerar o enrijecimento inerente a esse tipo de estrutura. Combinaram elementos tridimensionais de membrana a elementos sólidos prismáticos. Essa estratégia se diferencia daquela encontrada usualmente na literatura, em que são utilizados apenas elementos de sólido na discretização ou as propriedades equivalentes da camada de preenchimento. Uma das vantagens da técnica, do ponto de vista computacional e numérico, é o fato de não haver aumento do número de graus de liberdade na ocasião da inserção de reforços.

Para analisar estruturas planas e mecanismos, Coda e Paccola (2014) desenvolveram uma formulação baseada em posições para elementos de pórtico, cujas seções transversais são constituídas por diferentes materiais e espessuras. Adotaram a cinemática de Reissner-Mindlin para considerar os efeitos do cisalhamento na formulação. Nessa cinemática, as seções planas

permanecem planas, porém não necessariamente ortogonais à linha de referência, como na cinemática de Euler-Bernoulli. Além disso, foram consideradas ligações semirrígidas entre os elementos e relações constitutivas elastoplásticas com encruamento isótropo para as ligações e para os elementos. Dentre os exemplos empregados na validação, vale a pena destacar a simulação do colapso progressivo de um edifício de grande altura sujeito a um carregamento sísmico real.

Em um trabalho inédito, Soares, Paccola e Coda (2019) apresentaram aplicações envolvendo elementos finitos de casca, utilizando posições nodais e vetores generalizados como graus de liberdade nodais, na análise de instabilidade de elementos estruturais de paredes finas. O uso dos vetores generalizados e o enriquecimento das tensões na direção transversal permite melhor representação das tensões e deformações, possibilitando o uso da lei constitutiva completa. Desenvolveram também uma estratégia capaz de simular estruturas com painéis não coplanares, considerando a rigidez da ligação, para a qual foi determinada uma expressão analítica. Nos exemplos numéricos foram avaliados os pontos de bifurcação (grandes deslocamentos), a força crítica (pequenos deslocamentos) e a sensibilidade do modelo quanto à rigidez da ligação entre os painéis não coplanares.

A revisão da literatura permitiu analisar algumas metodologias para a simulação da protensão das armaduras ativas, assim como reunir exemplos para simulação e resultados experimentais para validação das simulações. No âmbito do método dos elementos finitos, foi possível compreender a sua formulação e suas diversas aplicações, permitindo então ampliá-las com os desenvolvimentos realizados neste trabalho.

Foram encontrados trabalhos relacionados à ativação de fibras utilizando o MEF-P (FRIEDEL,2016; RAMIREZ,2018), porém nenhum deles abordando especificamente o concreto protendido. No âmbito da simulação numérica em concreto protendido, observou-se que a maioria dos trabalhos encontrados abordam protensão não aderente ou protensão aderente, sendo dado maior foco à protensão externa nos trabalhos de caráter experimental.

5 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL

Neste capítulo são apresentados os conceitos da mecânica do contínuo essenciais à formulação do método dos elementos finitos posicional, presente em Coda (2018), assim como a cinemática dos elementos finitos utilizados no desenvolvimento deste trabalho.

5.1 Mecânica do contínuo

Seja um corpo qualquer, com volume inicial V_0 e um vetor dX nele contido. Existe uma função f , capaz de mapear os pontos da configuração inicial V_0 na configuração atual V , denominada mudança de configuração. Na abordagem lagrangeana total, f é função das posições iniciais, ou seja, o referencial é fixo e previamente conhecido. Na Figura 20, X são as posições iniciais e Y são as posições atuais do corpo. Além disso, P representa forças concentradas, q são forças distribuídas e b , forças de volume.

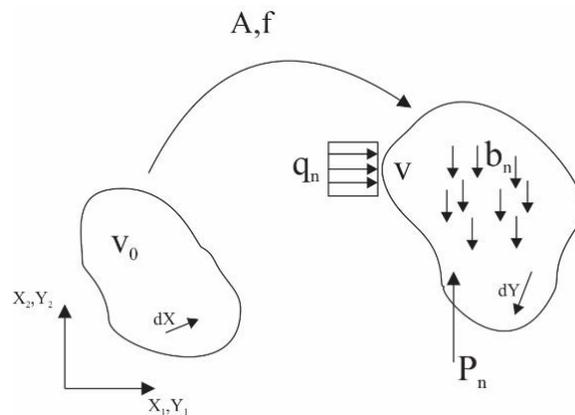


Figura 20 – Mudança de configuração de um corpo qualquer.

Na vizinhança de um ponto X_0 , a mudança de configuração pode ser escrita conforme a Equação 1, utilizando aproximação por expansão em série de Taylor de primeira ordem, como:

$$f(x_j) \cong f(x_j^0) + \left. \frac{\partial f}{\partial X_1} \right|_{X^0} \cdot \Delta X_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial X_2} \right|_{X^0} \cdot \Delta X_2 \quad (1)$$

Fazendo $\Delta X \rightarrow 0$, obtém-se a relação diferencial apresentada na Equação 2, onde $\nabla f = A$ é o gradiente da mudança de configuração.

$$\overrightarrow{dY} = \nabla f(X_0) \cdot \overrightarrow{dX} = A \cdot \overrightarrow{dX} \quad (2)$$

Os vetores \overrightarrow{dX} e \overrightarrow{dY} podem ser escritos como o produto de escalares pelos seus respectivos versores, Equação 3.

$$\overrightarrow{dX} = dx \cdot \vec{u}, \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{dX}}{\|\overrightarrow{dX}\|} \quad \overrightarrow{dY} = dy \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} = \frac{\overrightarrow{dY}}{\|\overrightarrow{dY}\|} \quad (3)$$

Pré-multiplicando a Equação 3 pelo transposto de \overrightarrow{dY} dos dois lados da igualdade, obtém-se uma relação entre os comprimentos dy e dx , Equação 4.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \vec{u}^T \cdot A^T \cdot A \cdot \vec{u} \quad (4)$$

Onde $C = A^T \cdot A$ é o tensor alongamento à direita de Cauchy-Green e A é o gradiente da mudança de configuração. Segundo Coimbra (1981), o tensor C mede o afastamento da mudança de configuração em relação a um movimento de corpo rígido. Outras duas propriedades de C são a simetria e ser um tensor positivo definido. A primeira é apresentada na Equação 5, enquanto a segunda decorre do próprio conceito de um tensor positivo definido e do fato de $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ resultar um escalar maior que 0.

$$C = A^T \cdot A \rightarrow C^T = (A)^T \cdot (A^T)^T \rightarrow C^T = C \quad (5)$$

A partir deste mesmo tensor, define-se o tensor das deformações de Green-Lagrange E , conforme a Equação 6, onde I é o tensor identidade de ordem 2 para problemas bidimensionais. Ogden (1984) cita que esta é uma medida objetiva de deformação, isto é, resulta no tensor nulo para movimentos translacionais e rotacionais de corpo rígido.

$$E = \frac{1}{2} \cdot [C - I] \quad (6)$$

Escolheu-se a lei constitutiva de Saint-Venant Kirchhoff para descrever o comportamento dos materiais, a qual relaciona de maneira linear o tensor das tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie S e o tensor das deformações de Green E , por meio do tensor constitutivo elástico do material \mathbb{C} . Essa lei advém da energia específica de deformação u_e e é válida para deformações moderadas. Merodio, Soldatos e Ogden (2015) citam que George Green foi pioneiro em definir um material elástico como aquele que possui uma relação entre

energia e deformação, dando origem à elasticidade de Green ou hiperelasticidade. Na Equação 7 são apresentadas as expressões para a energia de deformação específica e a lei constitutiva supracitada.

$$u_e = \frac{1}{2} \cdot E_{ij} \cdot C_{ijkl} \cdot E_{kl} \quad S_{ij} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{ij}} = C_{ijkl} \cdot E_{kl} \quad \frac{\partial^2 u_e}{\partial E_{ij} \cdot \partial E_{kl}} = C_{ijkl} \quad (7)$$

Reddy (2004) afirma que para valores de pequenas deformações, a deformação de Green se confunde com a medida de deformação linear. Isso se dá pois a deformação de Green possui um termo quadrático, que tende a zero mais rapidamente quando comparado ao termo linear, para pequenas mudanças de configuração.

A energia mecânica total, dada pela Equação 8 para um problema estático, é escrita como a soma da energia de deformação U e do potencial das forças externas P . São abordadas por ora apenas as forças ditas conservativas, cujo trabalho independe da trajetória.

$$\Pi = U - P = \int_{V_0} u_e \cdot dV_0 - P \quad (8)$$

Segundo Tauchert (1974), quando o corpo está em uma posição de equilíbrio a energia mecânica total passa por um valor estacionário e, se este valor for um ponto de mínimo, o equilíbrio é denominado estável. Este princípio é conhecido como princípio da estacionariedade. Ainda que a ideia de discretização do contínuo não tenha sido apresentada, por conveniência, será suposto que o corpo já foi discretizado em nós e elementos, para que as derivações em relação às posições, o vetor de posições e a hessiana sejam factíveis. Seja o vetor \vec{g} , denominado vetor de desbalanceamento mecânico, definido pela Equação 9.

$$\vec{g}(\vec{Y}) = \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Y}} = \frac{\partial U}{\partial \vec{Y}} - \frac{\partial P}{\partial \vec{Y}} = \vec{F}_{int} - \vec{F}_{ext} \quad (9)$$

Nota-se que, caso haja equilíbrio entre as forças internas e as forças externas, o vetor de desbalanceamento mecânico terá módulo nulo. Como o sistema de equações a ser resolvido no MEF-P é não linear, é proposto que seja utilizado o método de Newton-Raphson. Aproximando a Equação 9 por uma expansão em série de Taylor, considerando apenas termos de primeira ordem, resulta a expressão apresentada na Equação 10.

$$\vec{g}(\vec{Y}) = \vec{g}(\vec{Y}_0) + \left. \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{Y}} \right|_{\vec{Y}_0} \cdot \Delta \vec{Y} \quad (10)$$

Onde $\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{Y}}$ é a matriz hessiana do problema e $\Delta \vec{Y}$ a correção a ser aplicada às posições.

Isolando $\Delta \vec{Y}$ em função dos demais parâmetros, obtém-se a igualdade da Equação 11.

$$\Delta \vec{Y} = - \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{Y}} \Big|_{\vec{Y}_0} \right)^{-1} \cdot \vec{g}(\vec{Y}_0) \quad (11)$$

Então, o vetor de posições \vec{Y}_0 , tentativa para a posição de equilíbrio no início de uma iteração, é atualizado com a correção, Equação 12.

$$\vec{Y} = \vec{Y}_0 + \Delta \vec{Y} \quad (12)$$

A razão apresentada na Equação 13 é utilizada como critério de convergência para a resposta obtida em posições, e é comparada com um valor de tolerância pré-estabelecido dada pela variável *tol*. A resolução do sistema pelo método de Newton-Raphson possui, assim, caráter iterativo e incremental.

$$\frac{\|\Delta \vec{Y}\|}{\|\vec{X}\|} < tol \rightarrow \text{convergência na iteração} \quad (13)$$

5.2 Discretização do contínuo

As expressões analíticas que são solução de um problema para o contínuo dificilmente são conhecidas, limitando-se a casos específicos de geometria e carregamento. Assim, o método dos elementos finitos usa a discretização de um corpo qualquer em elementos menores como, por exemplo, triângulos (2D) ou tetraedros (3D). Os campos de deslocamentos nos elementos, por sua vez, são obtidos interpolando-se valores em pontos que definem suas geometrias, denominados nós. Como resposta do MEF-P são obtidas as posições atuais de cada um dos nós da discretização e, a partir delas, são calculados os demais parâmetros de interesse, como tensões e deslocamentos.

Para aproximar e interpolar os parâmetros nodais em pontos ao longo dos elementos unidimensionais que não sejam nós, e a própria geometrias dos elementos, são utilizadas as funções de forma φ . Essas funções são obtidas por polinômios de Lagrange para os elementos

unidimensionais, conforme a Equação 14. Observa-se que a função φ_j vale 0 se $x_i \neq x_j$, 1 se $x_i = x_j$ e que essas funções de forma respeitam a partição da unidade, conforme Babuska e Melenk (1997). As funções de forma para os nós dos elementos bidimensionais são obtidas a partir da solução de um sistema linear, sendo o valor da função de forma 1 em seu respectivo nó e 0 nos demais.

$$L(x) = \sum_{j=0}^k y_j \cdot \varphi_j(x) \quad \varphi_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad (14)$$

Neste trabalho são utilizados elementos bidimensionais triangulares isoparamétricos com aproximação cúbica para discretizar a matriz, e elementos unidimensionais lineares e com grau de aproximação qualquer para representar as armaduras. Para mapear as configurações inicial e atual dos elementos é empregado o mapeamento posicional duplo, apresentado por Coda e Paccola (2007) e Pascon (2008). Para tal, é de suma importância o espaço adimensional auxiliar, ilustrado na Figura 21.

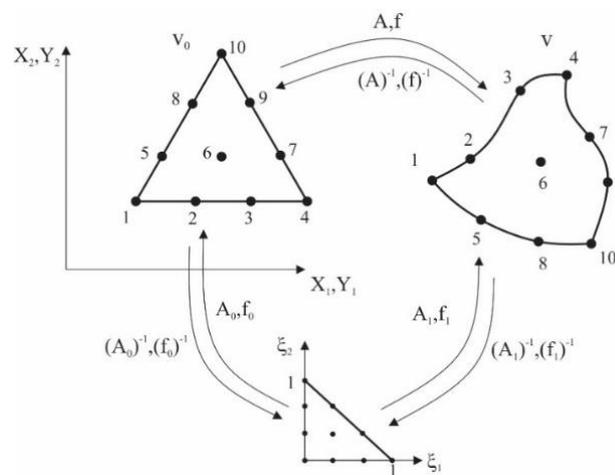


Figura 21 – Mudança de configuração para o elemento finito bidimensional. Fonte: Adaptado de Coda (2018).

Nota-se que as funções de forma levam do espaço adimensional para a configuração inicial ou para a configuração atual, representando assim uma mudança de configuração. Logo, fazendo uma composição de funções, é possível escrever a mudança de configuração f , inicialmente desconhecida, como composição de funções conhecidas, Equação 15, ainda que na forma de tentativa.

$$f = f^1 \circ (f^0)^{-1} \quad (15)$$

Então, o gradiente das mudanças de configuração do espaço adimensional para a configuração inicial A_{ij}^0 , atual A_{ij}^1 e da configuração inicial para a atual A são, respectivamente, as expressões das Equações 16.

$$\begin{aligned} A_{ij}^0 &= X_{i,j} = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} \rightarrow A_{ij}^0 = \varphi_{r,j} \cdot X_i^r \\ A_{ij}^1 &= Y_{i,j} = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} \rightarrow A_{ij}^1 = \varphi_{r,j} \cdot Y_i^r \\ \nabla f &= A = A^1 \cdot (A^0)^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

Determinado o gradiente da mudança de configuração f , é possível escrever o tensor alongamento à direita de Cauchy-Green como apresentado na Equação 17.

$$C = A^T \cdot A \rightarrow C = (A^0)^{-T} \cdot (A^1)^T \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} \quad (17)$$

5.2.1 Elemento bidimensional

O elemento bidimensional empregado neste trabalho é o isoparamétrico com aproximação cúbica, que será utilizado para representação da matriz (concreto). Essa aproximação é comum na literatura por apresentar funções de forma com melhor comportamento, quando comparadas a aproximações de maior grau, e por permitir a inflexão dos lados do elemento, o que não ocorre para aproximações lineares ou de segundo grau.

A energia específica de deformação para o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff é dada pela Equação 18.

$$u_e = \frac{1}{2} \cdot E_{ij} \cdot C_{ijkl} \cdot E_{kl} \quad (18)$$

Sendo E a deformação de Green-Lagrange e C o tensor constitutivo elástico do material. A energia de deformação U resulta da integração da energia específica de deformação no volume do elemento, Equação 19. Por se tratar de uma formulação lagrangeana total, a integração é realizada no volume inicial.

$$U = \int_{V_0} u_e \cdot dV_0 \quad (19)$$

A partir da derivação da energia de deformação em relação às posições nodais obtém-se o vetor de forças internas. O diferencial de energia de deformação é dado pela integral na Equação 20.

$$\delta U = \int_{V_0} S : \delta E . dV_0 \quad (20)$$

A regra da cadeia é aplicada em δE , Equação 21, a fim de se obter uma expressão coerente para a minimização da energia mecânica total.

$$\delta E = \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_\alpha^\beta} . \delta Y_\alpha^\beta \quad (21)$$

Substituindo na expressão do diferencial da energia de deformação e manipulando de maneira devida, resulta a expressão apresentada na Equação 22.

$$\frac{\partial U}{\partial Y_\alpha^\beta} = \int_{V_0} S_{ij} . \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_\alpha^\beta} . dV_0 \quad (22)$$

Onde $\beta = 1, \dots, 10$ indica os nós do elemento e $\alpha = 1, 2$, as direções. Na expressão para a deformação de Green, apenas o alongamento à direita de Cauchy-Green depende das posições atuais. Assim, a derivada da deformação de Green em relação às posições atuais é expressa pela Equação 23.

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{1}{2} . \frac{\partial C_{ij}}{\partial Y_\alpha^\beta} \quad (23)$$

Aplicando a regra da derivada do produto, é obtida a derivada do lado direito da igualdade, conforme Equação 24.

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial Y_\alpha^\beta} = (A^0)^{-T} \left(\frac{\partial A^1}{\partial Y_\alpha^\beta} \right)^T A^1 (A^0)^{-1} + (A^0)^{-T} (A^1)^T \left(\frac{\partial A^1}{\partial Y_\alpha^\beta} \right) (A^0)^{-1} \quad (24)$$

A derivada do gradiente da mudança de configuração do espaço adimensional para a configuração atual é diferente de zero apenas quando há correspondência entre graus de liberdade e direções. Assim, escreve-se a Equação 25:

$$\frac{\partial A_{ij}^1}{\partial Y_\alpha^\beta} = \varphi_{r,j} . \delta_{i\alpha} . \delta_{r\beta} = \varphi_{\beta,j} . \delta_{i\alpha} \quad (25)$$

Onde δ é o delta de Kroenecker. Dada uma direção α , a derivada anterior é expressa por matrizes 2x2, conforme a Equação 26.

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_{1j}^1}{\partial Y_1^\beta} &= \begin{pmatrix} \varphi_{\beta,1} & \varphi_{\beta,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial A_{2j}^1}{\partial Y_2^\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_{\beta,1} & \varphi_{\beta,2} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (26)$$

Neste trabalho é utilizada a integração numérica via quadratura de Hammer para as integrais correspondentes ao domínio bidimensional. Esta abordagem utiliza pesos e determinados pontos no espaço adimensional auxiliar e a expressão para a quadratura é apresentada na Equação 27.

$$\frac{\partial U}{\partial Y_\alpha^\beta} = (F_{\text{int}})_\alpha^\beta = \sum_{i=1}^{nph} \left(S_{ij} \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} \right)_{ij} \cdot \|J_0\| \cdot wh \cdot e \right) \quad (27)$$

Onde $\|J_0\| = \det(A^0)$ é o jacobiano para a mudança de variáveis, wh são os pesos de Hammer e e é a espessura do elemento em análise. Estes cálculos são feitos para todos os elementos finitos da discretização e os valores são devidamente alocados e acumulados no vetor de forças internas por meio da correspondência entre graus de liberdade locais e globais.

Para a resolução do sistema, é necessário calcular a matriz hessiana, denominada também rigidez tangente, que é dada pela segunda derivada da energia de deformação em relação às posições atuais dos nós, Equação 28.

$$H_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} = \frac{\partial (F_{\text{int}})_\alpha^\beta}{\partial Y_\gamma^z} \quad (28)$$

Onde $z = 1, \dots, 10$ indica os nós do elemento e $\gamma = 1, 2$ as direções. Aplicando novamente a regra da cadeia para facilitar o desenvolvimento das expressões, Equação 29, agora na derivada da energia específica de deformação, tem-se que:

$$H_{\alpha\beta\gamma z} = \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial Y_\gamma^z} \cdot \left(\frac{\partial u_e}{\partial E_{km}} \cdot \frac{\partial E_{km}}{\partial Y_\alpha^\beta} \right) \cdot dV_0 \quad (29)$$

Derivando o termo entre parênteses em relação às posições nodais, resulta a Equação 30:

$$H_{\alpha\beta\gamma z} = \int_{V_0} \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \mathbb{C} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + \frac{\partial u_e}{\partial E_{km}} \cdot \frac{\partial^2 E_{km}}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} \cdot dV_0 \quad (30)$$

Da Equação 24, é conhecida a expressão para $\frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z}$, \mathbb{C} é o tensor constitutivo elástico do material e $\frac{\partial u_e}{\partial E_{km}}$ é o tensor das tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie. Assim, falta determinar a expressão para a segunda derivada da deformação de Green em relação às posições nodais. Para o elemento finito empregado, a expressão é dada pela Equação 31.

$$\frac{\partial^2 E_{km}}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} = \frac{1}{2} \cdot \left((A^0)^{-T} \left(\frac{\partial A^1}{\partial Y_\alpha^\beta} \right)^T \left(\frac{\partial A^1}{\partial Y_\gamma^z} \right) (A^0)^{-1} + (A^0)^{-T} \left(\frac{\partial A^1}{\partial Y_\gamma^z} \right)^T \left(\frac{\partial A^1}{\partial Y_\alpha^\beta} \right) (A^0)^{-1} \right) \quad (31)$$

Como para a força interna, os cálculos são feitos para todos os elementos da discretização, devidamente alocados e acumulados na matriz hessiana global, por meio da correspondência entre graus de liberdade local e global. A expressão para a integração numérica é apresentada na Equação 32.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} = H_{\alpha\beta\gamma z} = \sum_{i=1}^{nph} \left(\left(\left(\frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} \right)_{lk} \cdot C_{lkmn} \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} \right)_{mn} + S_{ij} \cdot \left(\frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} \right)_{ij} \right) \cdot \|J_0\|, \text{w.h.e} \right) \quad (32)$$

5.2.2 Elemento de fibra reto

Neste item é apresentada a cinemática para um caso particular de elemento de fibra, importante no desenvolvimento dos exemplos futuros e em exemplos encontrados na literatura. Os elementos unidimensionais resistem apenas a esforços de tração e compressão paralelos ao seu eixo longitudinal, comportamento semelhante ao de barras de treliça. Na Figura 22 são apresentados os parâmetros de interesse para elementos de fibra retos.

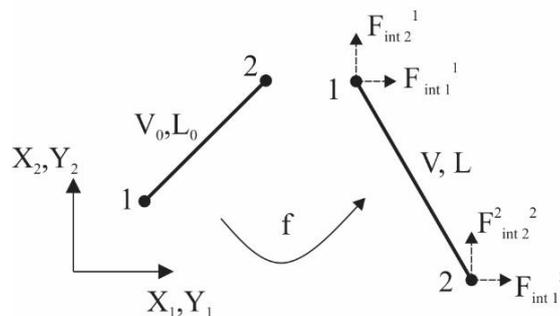


Figura 22 – Mudança de configuração para um elemento de treliça (fibra) reto.

A deformação de Green para o elemento de fibra reto é escrita em função de seus comprimentos na configuração inicial L_0 e atual L , segundo a Equação 33.

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{(L^2 - L_0^2)}{L_0^2} \quad (33)$$

Estes comprimentos são representados pelas posições nodais do elemento, na devida configuração, conforme a Equação 34.

$$\begin{aligned} L_0^2 &= (X_1^2 - X_1^1)^2 + (X_2^2 - X_2^1)^2 \\ L^2 &= (Y_1^2 - Y_1^1)^2 + (Y_2^2 - Y_2^1)^2 \end{aligned} \quad (34)$$

Escreve-se então a energia específica de deformação para o elemento unidimensional, Equação 35, sendo K o módulo de elasticidade do material que o compõe.

$$u_e = \frac{1}{2} \cdot K \cdot E^2 \quad (35)$$

A energia de deformação é dada pela integração da energia específica de deformação no volume inicial do corpo. O diferencial de energia de deformação é dado pela Equação 36, já com a regra da cadeia aplicada.

$$\delta U = \int_{V_0} S \cdot \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} \cdot dV_0 \cdot \delta Y_\alpha^\beta \quad (36)$$

Desta maneira, a expressão que representa a força interna é dada pela Equação 37, onde $\beta=1,2$ indica os nós e $\alpha=1,2$ as direções do elemento de fibra reto:

$$(F_{\text{int}})_\alpha^\beta = \frac{\partial U}{\partial Y_\alpha^\beta} = \int_{V_0} S \cdot \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} \cdot dV_0 \quad (37)$$

Como o elemento de fibra possui o comprimento predominante em relação às dimensões da seção transversal, admite-se que não ocorre variação de área. Assim, o volume inicial é admitido $V_0 = A_0 \cdot L_0$. A expressão para a derivada da deformação de Green em relação às posições é apresentada na Equação 38, notando que apenas o comprimento atual depende da posição atual na expressão para a deformação de Green.

$$\frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{1}{L_0} \cdot (-1)^\beta \cdot (Y_\alpha^2 - Y_\alpha^1) \quad (38)$$

Substituindo devidamente e realizando a integração, obtém-se a expressão para a força interna, Equação 39.

$$(F_{\text{int}})_{\alpha}^{\beta} = \frac{K.E.A_0}{L_0} \cdot (-1)^{\beta} \cdot (Y_{\alpha}^2 - Y_{\alpha}^1) \quad (39)$$

A matriz hessiana é obtida por meio da derivação da força interna em relação às posições atuais, conforme a Equação 40, onde $z = 1, 2$ indica os nós do elemento e $\gamma = 1, 2$ as direções.

$$H_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y_{\gamma}^z \partial Y_{\alpha}^{\beta}} = \frac{\partial (F_{\text{int}})_{\alpha}^{\beta}}{\partial Y_{\gamma}^z} \quad (40)$$

Substituindo a expressão para a força interna, determinada na Equação 39, obtém-se a Equação 41.

$$H_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial}{\partial Y_{\gamma}^z} \left(K.E.A_0.L_0 \cdot \frac{\partial E}{\partial Y_{\alpha}^{\beta}} \right) \quad (41)$$

Na expressão da força interna, a deformação de Green e sua derivada dependem da posição atual. Assim, é necessário aplicar a regra de derivação do produto de funções, resultando na expressão da Equação 42.

$$H_{\alpha\beta\gamma z} = K.A_0.L_0 \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial Y_{\gamma}^z} \cdot \frac{\partial E}{\partial Y_{\alpha}^{\beta}} + E \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial Y_{\gamma}^z \partial Y_{\alpha}^{\beta}} \right) \quad (42)$$

Na Equação 42, todos os termos são conhecidos, exceto a segunda derivada da deformação de Green. Derivando a Equação 38 em relação às posições obtém-se o termo cuja expressão ainda é desconhecida, Equação 43.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Y_{\gamma}^z \partial Y_{\alpha}^{\beta}} = \frac{1}{L_0^2} \cdot (-1)^{\beta} \cdot (-1)^z \cdot \delta_{\alpha\gamma} \quad (43)$$

Substituindo na expressão para os termos da hessiana, resulta a Equação 44.

$$H_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{K.A_0}{L_0} \cdot (-1)^{\beta} \cdot (-1)^z \cdot \left[(Y_{\alpha}^2 - Y_{\alpha}^1) \cdot (Y_{\gamma}^2 - Y_{\gamma}^1) + \delta_{\alpha\gamma} \cdot E \right] \quad (44)$$

5.2.3 Elemento de fibra com aproximação qualquer

Quando o elemento de fibra utilizado é reto e com aproximação linear, a aderência entre as fibras e a matriz ocorre apenas nos nós e, para um resultado satisfatório, deve ser utilizado um número elevado de elementos de fibra na discretização. A fim de melhorar este

comportamento, Sampaio (2014) apresenta a formulação para elementos unidimensionais com grau de aproximação qualquer.

O mapeamento das posições ao longo do elemento é feito utilizando as funções de forma $\varphi(\eta)$ e as posições dos nós, conforme a Equação 45, onde n é o número de nós do elemento, $r=1, \dots, n$, $i=1, 2$ são as direções e $l=1, \dots, n$ os nós do elemento.

$$\begin{aligned} X_i^l &= \varphi_r(\eta^l) \cdot X_i^r \\ Y_i^l &= \varphi_r(\eta^l) \cdot Y_i^r \end{aligned} \quad (45)$$

Para cada ponto do elemento, são definidos vetores tangentes \vec{T}_0 e \vec{T} , na configuração inicial e atual, respectivamente. A expressão para o módulo destes vetores é apresentada na Equação 46.

$$\begin{aligned} \|\vec{T}_0\|^2 &= \left(\frac{\partial X_1}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial \eta} \right)^2, \text{ onde } \frac{\partial X_i}{\partial \eta} = \varphi_{r,\eta} \cdot X_i^r \\ \|\vec{T}\|^2 &= \left(\frac{\partial Y_1}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y_2}{\partial \eta} \right)^2, \text{ onde } \frac{\partial Y_i}{\partial \eta} = \varphi_{r,\eta} \cdot Y_i^r \end{aligned} \quad (46)$$

Na Figura 23 é apresentado um elemento com aproximação de ordem qualquer, em sua configuração inicial e atual.

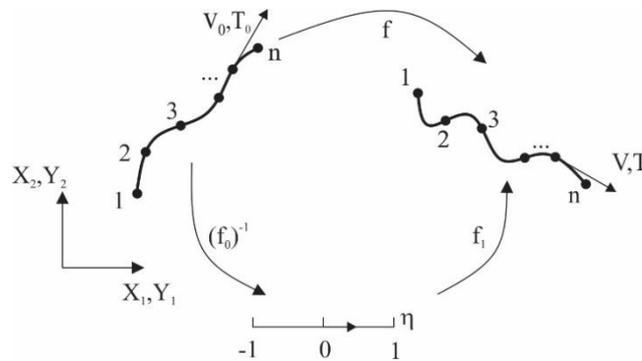


Figura 23 – Mudança de configuração para o elemento de fibra curva de n nós e coordenada adimensional auxiliar. Fonte: Adaptado de Sampaio (2014).

A partir dos módulos dos vetores tangentes, é calculada a deformação de Green, conforme a Equação 47.

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{\|\vec{T}\|^2 - \|\vec{T}_0\|^2}{\|\vec{T}_0\|^2} \quad (47)$$

Como para o elemento de fibra linear, a força interna para um nó $\beta = 1, \dots, n$ e direção $\alpha = 1, 2$ do elemento de fibra curvo é dada pela Equação 48.

$$(F_{\text{int}})_{\alpha}^{\beta} = \frac{\partial U}{\partial Y_{\alpha}^{\beta}} = \int_{V_0} S \cdot \frac{\partial E}{\partial Y_{\alpha}^{\beta}} \cdot dV_0 \quad (48)$$

Na Equação 47 apenas o módulo do vetor tangente atual depende da posição atual. Assim, aplicando a regra da cadeia, obtém-se a derivada da deformação de Green em relação às posições, conforme a Equação 49.

$$\frac{\partial E}{\partial Y_{\alpha}^{\beta}} = \frac{1}{\|T_0\|^2} \cdot (\varphi_{r,\eta} \cdot Y_{\alpha}^r) \cdot \varphi_{\beta,\eta} \quad (49)$$

O termo entre parênteses representa a derivada $\frac{\partial Y_{\alpha}^{\beta}}{\partial \eta}$. Então, substituindo na integral para o cálculo da força interna, obtém-se a Equação 50.

$$(F_{\text{int}})_{\alpha}^{\beta} = \int_{V_0} \frac{K \cdot E}{\|T_0\|^2} \cdot (\varphi_{r,\eta} \cdot Y_{\alpha}^r) \cdot \varphi_{\beta,\eta} \cdot dV_0 \quad (50)$$

Para elementos de fibra com grau de aproximação qualquer, é utilizada a quadratura de Gauss-Legendre como alternativa para o cálculo numérico da integral anterior, Equação 51. Assim, é necessário mudar os limites de integração para as coordenadas adimensionais η .

$$(F_{\text{int}})_{\alpha}^{\beta} = \sum_{i=1}^{npg} \frac{K \cdot E}{\|T_0\|^2} \cdot (\varphi_{r,\eta} \cdot Y_{\alpha}^r) \cdot \varphi_{\beta,\eta} \cdot \|T_0\| \cdot A_0 \cdot w_g \quad (51)$$

Onde npg é o número de pontos de integração, w_g são os pesos e $\|T_0\|$ é o módulo do vetor tangente inicial, jacobiano da mudança de coordenadas.

A expressão para a segunda derivada da energia de deformação em relação às posições atuais é dada pela Equação 52.

$$H_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y_{\gamma}^z \partial Y_{\alpha}^{\beta}} = \frac{\partial (F_{\text{int}})_{\alpha}^{\beta}}{\partial Y_{\gamma}^z} \quad (52)$$

Onde $z = 1, \dots, n$ indica os nós do elemento de fibra e $\gamma = 1, 2$, as direções. Na Equação 50, a deformação de Green e sua derivada são escritas a partir das posições atuais. Aplicando a regra da cadeia, surge a segunda derivada das posições atuais, expressa pela Equação 53.

$$\frac{\partial(\varphi_{r,\eta} \cdot Y_\alpha^r)}{\partial Y_\gamma^z} = \delta_{\alpha\gamma} \cdot \delta_{rz} \cdot \varphi_{r,\eta} = \delta_{\alpha\gamma} \cdot \varphi_{z,\eta} \quad (53)$$

Integrando no volume inicial do corpo, obtém-se a Equação 54.

$$H_{\alpha\beta\gamma z} = \int_{V_0} \frac{K}{\|T_0\|^2} \left[\frac{1}{\|T_0\|^2} (\varphi_{r,\eta} \cdot Y_\alpha^r) \cdot \varphi_{\beta,\eta} \cdot (\varphi_{r,\eta} \cdot Y_\gamma^r) \cdot \varphi_{z,\eta} + \delta_{\alpha\gamma} \cdot \varphi_{\beta,\eta} \cdot \varphi_{z,\eta} \cdot E \right] \cdot dV_0 \quad (54)$$

Onde os termos entre parênteses representam as derivadas $\frac{\partial Y_\alpha^\beta}{\partial \eta}$ e $\frac{\partial Y_\gamma^z}{\partial \eta}$,

respectivamente. A expressão para a quadratura de Gauss-Legendre resulta na Equação 55.

$$H_{\alpha\beta\gamma z} = \sum_{i=1}^{npg} \left(\frac{K}{\|T_0\|^2} \cdot \left[\frac{1}{\|T_0\|^2} \cdot (\varphi_{r,\eta} \cdot Y_\alpha^r) \cdot \varphi_{\beta,\eta} \cdot (\varphi_{r,\eta} \cdot Y_\gamma^r) \cdot \varphi_{z,\eta} + \delta_{\alpha\gamma} \cdot \varphi_{\beta,\eta} \cdot \varphi_{z,\eta} \cdot E \right] \cdot \|T_0\| \cdot A_0 \cdot w_g \right) \quad (55)$$

5.3 Acoplamento fibra-sólido

As expressões apresentadas para a força interna e hessiana dos elementos de fibra nos itens anteriores são derivadas da energia de deformação em relação às posições dos próprios nós do elemento de fibra. A fim de acoplar os elementos de fibra à matriz, utilizando a estratégia empregada por Vanalli, Paccola e Coda (2008), Vanalli et al. (2010) e Radtke, Simone e Sluys (2010), é preciso escrever as posições dos nós das fibras em função das posições dos nós dos elementos da matriz.

A priori, identifica-se em qual elemento bidimensional o nó de fibra se localiza, por meio de um processo iterativo, resolvido utilizando o método de Newton-Raphson, no qual são determinadas as coordenadas adimensionais (ξ_1, ξ_2) dos nós de fibra, assim como o elemento bidimensional no qual estes se encontram. A Figura 24 ilustra elementos de fibra inseridos em um domínio bidimensional.

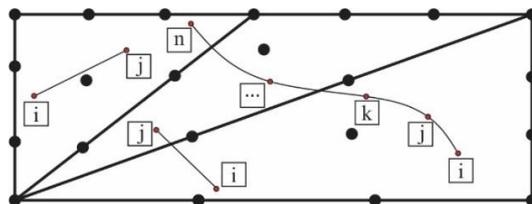


Figura 24 – Elementos de fibra retos e curvos inseridos em elementos bidimensionais.

Para um nó de fibra, as posições iniciais são escritas utilizando as funções de forma e as posições iniciais dos nós dos elementos bidimensionais, Equação 56, representadas pelo índice ch .

$$X_o^p = \varphi_r^{(ch)}(\xi_1^p, \xi_2^p).X_o^{r(ch)} \quad (56)$$

Sendo $o=1,2$ as direções, $p=1,\dots,n$ os nós do elemento de fibra e $r=1,\dots,10$ os nós do elemento bidimensional de aproximação cúbica. Aproximando a expressão por expansão em série de Taylor, Equação 57, considerando apenas os termos de primeira ordem, em torno de coordenadas adimensionais tentativas (ξ_1^t, ξ_2^t) obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} X_o^p &\cong \varphi_r^{(ch)}(\xi_1^t, \xi_2^t).X_o^{r(ch)} + \varphi_{o,j}^{(ch)}(\xi_1^t, \xi_2^t).\Delta\xi_j \\ X_o^p &\cong (X_o^p)^t + H_{oj}.\Delta\xi_j \end{aligned} \quad (57)$$

Onde H_{oj} é uma matriz quadrada 2×2 e $\Delta\xi$ é a correção aplicada no vetor das coordenadas adimensionais tentativa $(\xi_1^t, \xi_2^t)^T$. Isto é feito até que o módulo da correção seja menor ou igual à uma tolerância pré-estabelecida. Rearranjando a Equação 57, escreve-se $\Delta\xi$ de maneira mais conveniente, conforme Equação 58.

$$\Delta\xi_j = (H_{oj})^{-1} \cdot (X_o^p - (X_o^p)^t) \quad (58)$$

Determinadas as coordenadas adimensionais dos nós de fibra (ξ_1, ξ_2) , torna-se possível o espalhamento da força interna F_{int}^f e da hessiana H_{int}^f para o vetor de forças internas e hessiana globais, respectivamente, com as contribuições da matriz e das fibras. A energia de deformação total pode ser escrita como a soma de duas contribuições, correspondentes à matriz e às fibras, Equação 59.

$$U_T = U_M + U_F \quad (59)$$

A força interna e a hessiana da matriz permanecem inalteradas, pois resultam da derivação em relação às posições nodais da própria matriz. Então, aplica-se a regra da cadeia para a obtenção das derivadas da energia de deformação das fibras, como apresentado na Equação 60.

$$\frac{\partial U_F}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{\partial U_F}{\partial Y_o^p} \cdot \frac{\partial Y_o^p}{\partial Y_\alpha^\beta} \quad (60)$$

$$\frac{\partial^2 U_F}{\partial Y_\gamma^z \cdot \partial Y_\alpha^\beta} = \frac{\partial^2 U_F}{\partial Y_o^p \cdot \partial Y_o^p} \cdot \frac{\partial Y_o^p \cdot \partial Y_o^p}{\partial Y_\gamma^z \cdot \partial Y_\alpha^\beta} + 2 \cdot \frac{\partial^2 U_F}{\partial Y_o^p \cdot \partial Y_q^s} \cdot \frac{\partial Y_o^p \cdot \partial Y_q^s}{\partial Y_\gamma^z \cdot \partial Y_\alpha^\beta} + \frac{\partial^2 U_F}{\partial Y_q^s \cdot \partial Y_q^s} \cdot \frac{\partial Y_q^s \cdot \partial Y_q^s}{\partial Y_\gamma^z \cdot \partial Y_\alpha^\beta}$$

Onde p, s e o, q são, respectivamente, nós e direções dos elementos de fibra e β, z e α, γ são nós e direções dos elementos bidimensionais. A derivada das posições atuais dos nós das fibras em relação às posições atuais dos nós da matriz é dada pela Equação 61.

$$\frac{\partial Y_o^p}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{\partial}{\partial Y_\alpha^\beta} \left(\varphi_r^{(ch)} \cdot Y_o^{r(ch)} \right) = \varphi_\beta^{(ch)} \cdot \delta_{\alpha o} \quad (61)$$

Esta derivada pode ser organizada em uma matriz Φ , Equação 62, que assume a seguinte configuração para um elemento de fibra linear e elementos bidimensionais triangulares com aproximação cúbica:

$$\Phi_{4 \times 40} = \begin{bmatrix} \varphi_1^{(ch)i} & 0 & \dots & \varphi_{10}^{(ch)i} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1^{(ch)i} & \dots & 0 & \varphi_{10}^{(ch)i} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \varphi_1^{(ch)j} & 0 & \dots & \varphi_{10}^{(ch)j} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \varphi_1^{(ch)j} & \dots & 0 & \varphi_{10}^{(ch)j} \end{bmatrix} \quad (62)$$

Onde i e j são, respectivamente, o nó inicial e final do elemento de fibra. Estes índices fazem referência às funções de forma do elemento bidimensional em que se encontram tais nós. Para elementos de fibra com grau de aproximação qualquer, as dimensões da matriz variam conforme o grau da aproximação utilizada. As multiplicações para a expansão do vetor de forças internas e da hessiana para posterior espalhamento, assim como as dimensões dos vetores e matrizes em função do grau de aproximação gf dos elementos de fibra são apresentadas na Equação 63. Então, a partir da correspondência entre graus de liberdade locais e globais, são realizadas as devidas contribuições e é possível resolver o sistema não linear de equações.

$$\left(F_\alpha^\beta \right)_{\text{int } 20.(gf+1)}^f = \Phi^T_{20.(gf+1) \times 20.(gf+1)} \cdot \left(F_o^p \right)_{\text{int } 2.(gf+1)}^f \quad (63)$$

$$\left(H_{\alpha\beta\gamma z}^f \right)_{20.(gf+1) \times 20.(gf+1)} = \Phi^T_{20.(gf+1) \times 20.(gf+1)} \cdot \left(H_{opqs}^f \right)_{2.(gf+1) \times 2.(gf+1)} \cdot \Phi_{20.(gf+1) \times 20.(gf+1)}$$

Neste capítulo foram discutidos aspectos da mecânica do contínuo, a escrita da energia mecânica total e dos princípios da estacionariedade. Então, foram abordadas a discretização dos domínios, o mapeamento entre as configurações inicial, adimensional e atual, assim como a lei

constitutiva de Saint-Venant Kirchhoff e o método de resolução do sistema não linear do MEF-P.

Ademais, foram apresentados os elementos finitos utilizados neste trabalho: bidimensional e elemento de treliça, descrevendo a dedução matemática das expressões para a construção dos vetores de força interna e da matriz hessiana. Por fim, discutiu-se a estratégia de acoplamento entre os elementos bidimensionais e de treliça, sem a necessidade de adicionar graus de liberdade ao sistema.

6 NÃO LINEARIDADE FÍSICA

Com a formulação do método dos elementos finitos posicional devidamente discutida, prossegue-se para as considerações relativas à não linearidade física dos materiais. Para simular o comportamento do concreto, foi escolhido o modelo de dano proposto por Mazars (1984), enquanto a plasticidade uniaxial com encruamento isótropo foi selecionada para representar o comportamento do aço das armaduras.

Destacam-se os seguintes trabalhos encontrados na literatura, utilizados como base para os desenvolvimentos e implementação das não linearidades físicas, nomeadamente o modelo de dano no concreto e a plasticidade uniaxial nas armaduras: Chaboche (2008) aborda algumas teorias relacionadas à plasticidade e viscoplasticidade, enquanto Lemaitre (1985) estuda um modelo contínuo de dano para fratura dúctil. Leonel (2017) apresenta a formulação detalhada relativa ao modelo de dano proposto por Mazars (1984) e outros modelos de dano, enquanto Proença (2016) traz conceitos importantes relativos à plasticidade, em particular, à plasticidade uniaxial com encruamento isótropo positivo, utilizada neste trabalho.

Devem ser mencionados também os trabalhos de Mazars (1984), Mazars (1986) e Mazars e Pijaudier-Cabot (1989), que apresentam o desenvolvimento matemático do modelo de dano de Mazars. No mesmo sentido, Lee e Fenves (1998) tratam de um modelo de dano adequado para o concreto, quando solicitado por carregamentos monotônicos e cíclicos, comparando os resultados obtidos com resultados experimentais. Cita-se também o estudo da contribuição dos mecanismos complementares na resistência ao cisalhamento por Nogueira, Venturini e Coda (2013).

6.1 Modelo de dano proposto por Mazars (1984)

Seja um volume qualquer, cuja área da seção transversal é S . Se é aplicada uma força F , normal a essa seção, a tensão normal σ é dada pela expressão apresentada na Equação 64.

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (64)$$

Caso ocorra degradação mecânica do material que compõe a seção transversal, a área S pode ser escrita como a soma da área íntegra \tilde{S} e da área danificada S_D , conforme a Figura 25. Por definição, a variável de dano D é a razão entre a área danificada e a área total considerada. Rabotnov (1969) apresenta o conceito de tensão efetiva $\tilde{\sigma}$, calculada com a área que realmente contribui na resistência ao esforço normal, conforme a Equação 65.

$$S = \tilde{S} + S_D, \quad D = \frac{S_D}{S} \rightarrow \tilde{S} = (1 - D) \cdot S$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} = \frac{\sigma}{(1 - D)} \quad (65)$$

Segundo Nogueira, Venturini e Coda (2013), o comportamento não linear do concreto tem origem no desenvolvimento de fissuras na matriz e os modelos de dano são particularmente interessantes por permitir a redução da rigidez do material em função do aumento das deformações.

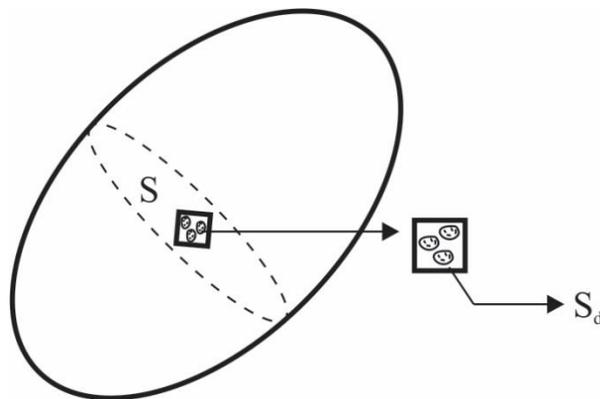


Figura 25 – Representação da variável de dano. Fonte: Adaptado de Kachanov (1986).

Dentre os modelos de dano encontrados na literatura o de mais simples implementação e que possui bons resultados para simular o comportamento do concreto é o modelo de dano proposto por Mazars (1984). As hipóteses desse modelo são as seguintes:

- a) o modelo não considera a presença de deformações residuais em eventuais ciclos de carga e descarga; também se despreza o comportamento unilateral do concreto, fenômeno que acarreta o aumento da rigidez devido ao fechamento de fissuras;
- b) a variável de dano é isotrópica, isto é, o dano ocorre de maneira igual, independente da orientação considerada;

- c) a danificação do material decorre da existência de alongamentos – deformações com sinal positivo;
- d) a variável de dano D assume valores entre 0 e 1, onde $D=0$ indica que o material está íntegro e $D=1$ que o material está totalmente degradado. Para valores intermediários, identifica-se um estado danificado do material. A Figura 26 ilustra o comportamento do concreto submetido à tração e à compressão.

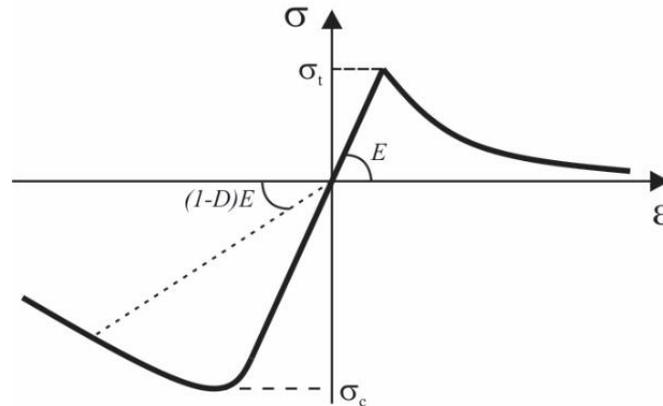


Figura 26 – Curva tensão-deformação para o concreto, considerando dano. Fonte: Adaptado de Leonel (2017).

Para descrever o estado de deformações em um ponto, é utilizada a deformação equivalente $\tilde{\varepsilon}$, Equação 66, função das deformações principais positivas $(\varepsilon_i)_+$. A evolução do processo de fissuração acontecerá se a deformação equivalente superar um valor de referência, dado pela função $S(D)$.

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{(\varepsilon_1)_+^2 + (\varepsilon_2)_+^2 + (\varepsilon_3)_+^2}, \text{ onde } (\varepsilon_i)_+ = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon_i + |\varepsilon_i|) \quad (66)$$

Na primeira iteração de uma simulação, tal valor é igual a ε_{d0} , deformação associada à resistência à tração do concreto. Sendo verificada a desigualdade $f \geq 0$ e havendo convergência, $S(D)$ recebe o valor da deformação equivalente, visto que o estado de danificação aumenta apenas se o valor da deformação equivalente do passo superar o valor do último passo em que houve convergência. A função f é apresentada na Equação 67.

$$f = \tilde{\varepsilon} - S(D) \quad (67)$$

O modelo propõe duas variáveis independentes de dano D_C e D_T , dadas pelas expressões da Equação 68, responsáveis por considerar as parcelas de contribuição da compressão e da tração, respectivamente, no processo de fissuração.

$$\begin{aligned} D_C &= 1 - \frac{\varepsilon_{d0} \cdot (1 - A_C)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_C}{e^{B_C \cdot (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}} \\ D_T &= 1 - \frac{\varepsilon_{d0} \cdot (1 - A_T)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_T}{e^{B_T \cdot (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}} \end{aligned} \quad (68)$$

Os parâmetros A_C , B_C , A_T e B_T dependem do material e são determinados a partir de ensaios uniaxiais de tração e compressão. Mazars (1984) indica intervalos de valores para tais parâmetros, obtidos a partir de análise experimental. Álvares (1993) analisa a influência destes parâmetros na curva tensão-deformação do concreto.

$$\begin{aligned} 0,7 &\leq A_T \leq 1,0 \\ 1,0 &\leq A_C \leq 1,5 \\ 10^4 &\leq B_T \leq 10^5 \\ 10^3 &\leq B_C \leq 2 \cdot 10^3 \\ 10^{-5} &\leq \varepsilon_{d0} \leq 10^{-4} \end{aligned}$$

Perego (1990) propõe as seguintes expressões para os parâmetros α_C e α_T , Equação 69, utilizados para escrever a variável de dano:

$$\begin{aligned} \alpha_C &= \frac{\sum (\varepsilon_{Ci})_+}{(\varepsilon_V)_+} & \alpha_T &= \frac{\sum (\varepsilon_{Ti})_+}{(\varepsilon_V)_+} \\ (\varepsilon_V)_+ &= \sum (\varepsilon_{Ci})_+ + \sum (\varepsilon_{Ti})_+ \end{aligned} \quad (69)$$

Onde $(\varepsilon_{Ti})_+$ são as deformações de alongamento calculadas a partir das tensões principais positivas, $(\varepsilon_{Ci})_+$ as deformações de alongamento calculadas para as tensões principais negativas e $(\varepsilon_V)_+$ representa o estado de alongamento no ponto avaliado.

Então, calcula-se a variável D , Equação 70, como uma combinação da parcela de tração e de compressão, recalculando-se posteriormente as tensões para o módulo de elasticidade corrigido $E_D = (1 - D) \cdot E$, utilizado no cálculo da matriz hessiana e do vetor de forças internas dos elementos bidimensionais.

$$D = \alpha_C \cdot D_C + \alpha_T \cdot D_T \quad (70)$$

Na Figura 27 é apresentado o fluxograma para a rotina de cálculo das tensões, considerando o modelo de dano de Mazars.

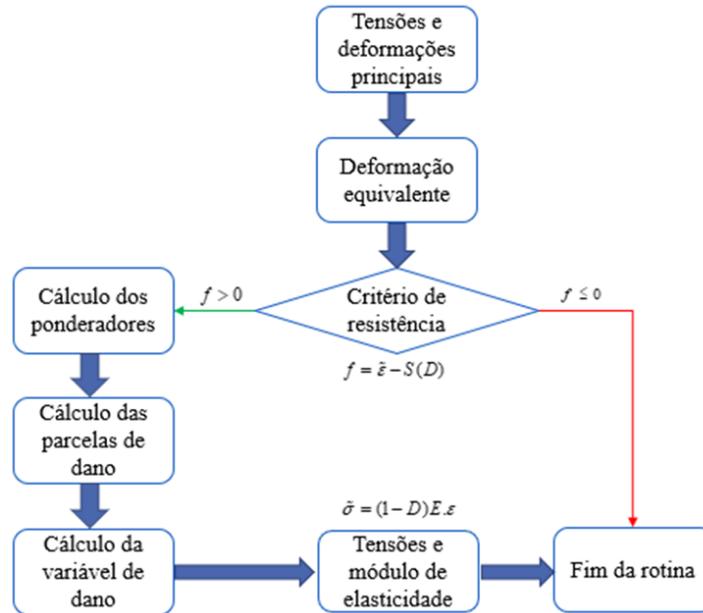


Figura 27 – Fluxograma para o cálculo das tensões segundo o modelo de dano de Mazars.

Neste trabalho é utilizada a calibração dos parâmetros do modelo de dano de Mazars proposta por Nogueira (2005), Nogueira (2010) e Pellizzer (2015). Nesse procedimento numérico, são empregadas leis constitutivas conhecidas para reproduzir os ensaios de compressão e de tração uniaxial – Popovics (1973) e Figueiras (1983), respectivamente. Os parâmetros do modelo de dano, para uma dada resistência à compressão ou um dado módulo de elasticidade, são determinados a partir do método dos mínimos quadrados. A função erro pode ser escrita conforme a Equação 71.

$$E = E(y^C(x, \underline{a}), y^S(x)) = E(\underline{a}) \quad (71)$$

Onde \underline{a} é o vetor dos n parâmetros a serem identificados, y^C é a resposta numérica obtida pelo modelo de dano dependente dos parâmetros \underline{a} e y^S é a resposta fornecida pela relação constitutiva conhecida.

Conforme Pellizzer (2015), a função erro, a ser minimizada, é dada por um somatório sobre o intervalo de observação estabelecido. Como as respostas são fornecidas em passo discreto, escreve-se a Equação 72.

$$E(a_i) = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N \left[y_K^C(x_K, a_k) - y_K^S(x_K) \right]^2 \quad (72)$$

Onde N é o número de pontos utilizados na calibração dos parâmetros. Destaca-se que essa técnica pode ser utilizada para calibrar os parâmetros do modelo de dano a partir de curvas experimentais de ensaios uniaxiais de tração, de compressão ou a partir de outros modelos constitutivos encontrados na literatura.

6.2 Plasticidade uniaxial

O aço possui comportamento elástico-linear até que seja atingida a tensão de escoamento σ_y . Atingido este valor, passam a ocorrer as chamadas deformações plásticas. Segundo Lemaitre e Chaboche (1990), as deformações elásticas e plásticas podem ser tratadas separadamente sem prejuízos para a formulação, dado que essas implicam em movimentos com mudanças nas ligações interatômicas e aquelas estão associadas a mudanças nas distâncias interatômicas, sem alterar as ligações. Destaca-se que esta decomposição aditiva é válida somente para pequenas deformações.

Para verificar a existência de deformações plásticas, empregando o encruamento isótropo linear, é utilizada a expressão apresentada na Equação 73:

$$f = \sigma_s - (\sigma_p + E_p \cdot \alpha) \quad (73)$$

Onde σ_s é a tensão calculada para a barra, E_p é o módulo tangente elastoplástico e α é uma medida equivalente de deformação plástica. Observa-se que $f \leq 0$ indica que não há acréscimo de deformação plástica. Por outro lado, se $f > 0$ ocorrem deformações plásticas e o material se encontra no segundo trecho da curva tensão-deformação apresentada na Figura 28.

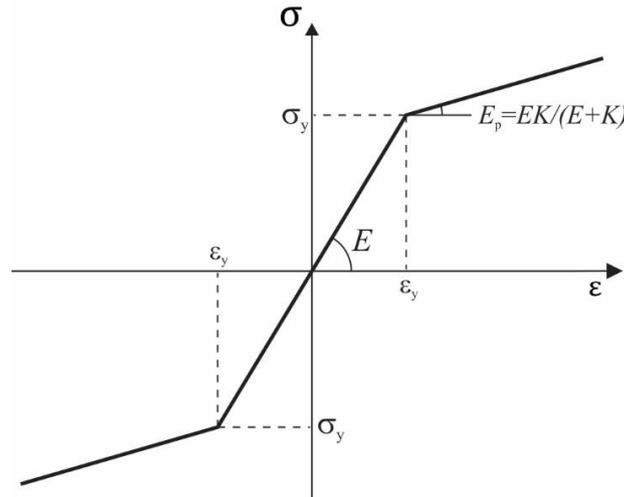


Figura 28 – Curva tensão-deformação para o aço, considerando encruamento isótropo linear.

Então, apresenta-se o algoritmo considerado na implementação da plasticidade uniaxial, para carregamentos monotônicos crescentes. A princípio são calculadas a deformação e a tensão no material, admitindo-se comportamento elástico, Equação 74, para a iteração atual $i+1$.

$$\sigma_{i+1} = E \cdot \varepsilon_{i+1}^e \quad (74)$$

É verificada a expressão apresentada na Equação 73. Caso $f \leq 0$, a tensão calculada é a correta. Caso contrário, existe acréscimo na deformação plástica e a tensão deve ser recalculada, conforme a Equação 75.

$$\sigma_{i+1} = E \cdot \varepsilon_{i+1}^e + E_p \cdot \varepsilon_{i+1}^p \quad (75)$$

Sendo o acréscimo de tensão devido à deformação plástica $\Delta\sigma_{i+1}$ dado pela Equação 76.

$$\Delta\sigma_{i+1} = E_p \cdot (|\varepsilon_y| - |\varepsilon_{i+1}^e|) \cdot \text{sign}(\sigma_{i+1}) = \text{sign}(\sigma_{i+1}) \cdot E_p \cdot |\varepsilon_{i+1}^p| \quad (76)$$

Onde a função $\text{sign}(\cdot)$ leva em consideração o sinal da tensão, conforme as Equações 77.

$$\begin{aligned} \text{sign}(\sigma_{i+1}) &= +1, \text{ se } \sigma_{i+1} \geq 0 \\ \text{sign}(\sigma_{i+1}) &= -1, \text{ se } \sigma_{i+1} < 0 \end{aligned} \quad (77)$$

Em seguida, os valores de tensão e deformação calculados para o elemento unidimensional são utilizados para a determinação dos termos do vetor de forças internas e da matriz hessiana para os elementos unidimensionais. Na Figura 29 é apresentada a rotina para a consideração da plasticidade uniaxial com encruamento positivo linear.

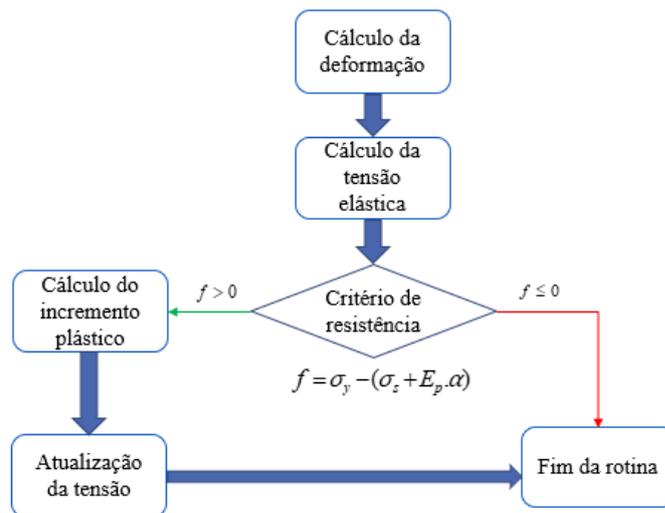


Figura 29 – Rotina de cálculo das tensões nos elementos de treliça, considerando plasticidade uniaxial com encruamento linear positivo.

O presente capítulo abordou as formulações do modelo de dano proposto por Mazars (1984) e da plasticidade uniaxial com encruamento isótopo, as quais objetivam simular a não linearidade física do concreto e das armaduras, respectivamente. Com as rotinas descritas no texto implementadas no código computacional, parte-se para a validação desse, a partir de exemplos propostos e encontrados na literatura.

7 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Para validar o comportamento das formulações implementadas no código computacional, os resultados de 7 exemplos são analisados. O primeiro exemplo consiste em uma viga reforçada com fibras contínuas, sujeita a carregamento uniformemente distribuído. O segundo tem por finalidade verificar a consistência entre as posições da matriz (domínio bidimensional) e dos elementos de fibra (domínio unidimensional) para pontos que não coincidem com os nós das fibras, enquanto o terceiro consiste na simulação numérica de um domínio retangular, reproduzindo um corpo de prova de concreto, sujeito a ensaios de tração e de compressão uniaxiais. Por sua vez, o quarto exemplo consiste em uma treliça de três barras, submetida a controle de posição, com intuito de ratificar a formulação utilizada para consideração de não linearidade física nos elementos de fibra. No quinto exemplo, são simuladas três vigas de concreto armado, submetidas ao ensaio de flexão a quatro pontos para avaliar o comportamento do modelo de dano de Mazars em vigas de concreto armado. Os resultados são comparados com aqueles apresentados em Álvares (1993).

No sexto exemplo é simulada uma viga com cordoalha de perfil parabólico, comparando o deslocamento no meio do vão com valores de simulação e calculado por meio da teoria da Mecânica dos Sólidos. Por fim, no sétimo exemplo são simuladas vigas de concreto armado reforçadas com protensão externa, utilizando os parâmetros calibrados para o modelo de dano proposto por Mazars (1984).

7.1 Viga reforçada com fibras e estratégia para simular a protensão

A primeira etapa deste exemplo simula uma viga engastada, reforçada com fibras contínuas (armaduras superior e inferior) e submetida a um carregamento uniforme $q = 5MN/m$ (grandes deslocamentos). O comprimento da viga é $L = 3m$, a altura e a base da seção transversal são, respectivamente, $h = 0,6m$ e $b = 0,2m$, conforme a Figura 30. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material que compõe a matriz são $E_m = 21GPa$ e $\nu = 0$. Para as armaduras, o módulo de elasticidade e a área da seção transversal de cada uma das barras correspondem a $E_f = 210GPa$ e $A_f = 2.10^{-4}m^2$. Aplicou-se o carregamento em 20 passos e o cobrimento da armadura adotado foi $c = 3,8cm$.

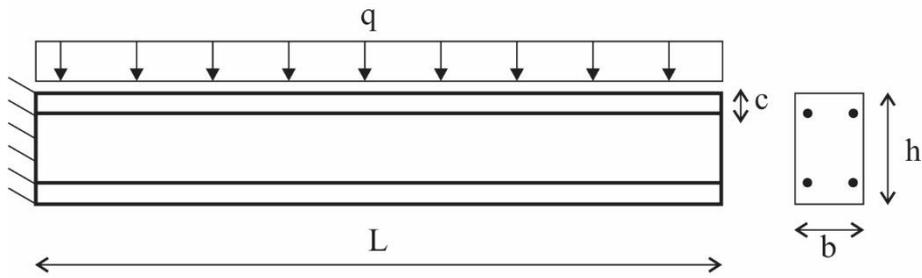


Figura 30 – Esquema estático e geometria do exemplo 1 – grandes deslocamentos. Fonte: Adaptado de Pereira (2015).

A discretização da matriz utilizada é composta por 160 elementos triangulares de aproximação cúbica, totalizando 793 nós e 1586 graus de liberdade. Tanto a armadura inferior quanto a superior foram modeladas com 81 nós cada, resultando em 80 elementos de barra de treliça com aproximação linear. Reitera-se que a abordagem utilizada para inserção das fibras não aumenta o número de graus de liberdade do sistema a ser resolvido.

Para verificação dos resultados obtidos, o deslocamento na extremidade livre é comparado com valores apresentados por Sampaio (2014), (a) e (b), calculados por meio de formulações distintas: (a) barra geral 3D com cinemática de Reissner – Timoshenko, Coda (2009); (b) sólido bidimensional com fibras, Sampaio, Paccola e Coda (2013) e (c) sólido tridimensional reforçado com fibras, Pereira (2015).

Os resultados presentes na Tabela 1 atestam o bom desempenho do código computacional implementado em se tratando de domínios bidimensionais reforçados com fibras, submetidos a grandes deslocamentos. A diferença observada entre os valores dá-se por particularidades inerentes aos modelos, como, por exemplo, restrições cinemáticas. Na Figura 31 são apresentados os deslocamentos verticais obtidos para a viga simulada.

Tabela 1 – Deslocamentos encontrados na literatura e resultado da simulação, em centímetros.

(a)	(b)	(c)	Presente trabalho
57,894	62,949	63,292	63,287

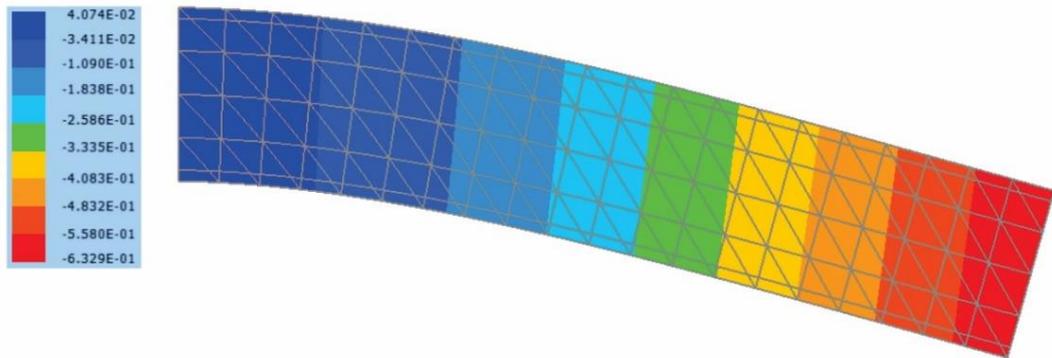


Figura 31 – Deslocamentos verticais para a viga engastada, em metros.

Em uma segunda simulação, as condições de contorno são modificadas, mantendo-se a geometria da seção transversal e as propriedades físicas dos materiais, conforme a Figura 32. A carga distribuída é reduzida para $q = 5 \text{ kN} / \text{m}$, de modo que a resposta obtida para o problema seja em pequenos deslocamentos. Além disso, é introduzida na armadura inferior uma deformação $\varepsilon_{\text{prot}} = \frac{1}{1000}$, no intuito de simular o efeito da protensão e o comprimento da viga é modificado para $L = 6 \text{ m}$. A malha utilizada para a matriz é composta por 1264 nós e 260 elementos triangulares de aproximação cúbica. Para cada uma das barras, foram utilizados 161 nós, resultando 160 elementos de barra de treliça com aproximação linear.

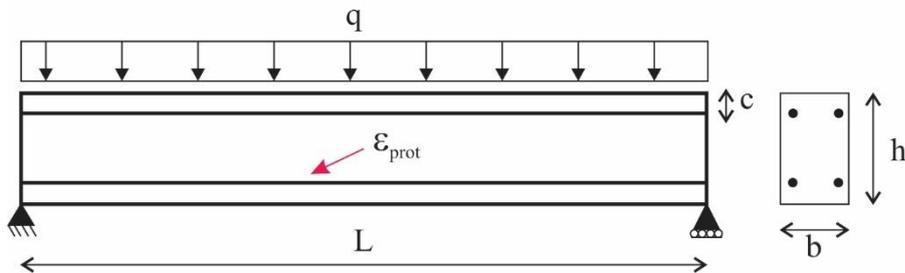


Figura 32 – Esquema estático e geometria para o exemplo de uma viga biapoiada com protensão nas barras inferiores.

São consideradas quatro situações de carregamento: na primeira, atua a carga distribuída e não há armadura de flexão; na segunda, atua a carga distribuída e a viga possui armadura de flexão; a terceira situação, de maior interesse para este trabalho, possui como solicitações apenas os esforços devidos à protensão da armadura positiva de flexão; por sua vez, o quarto carregamento é composto pelos esforços devidos à protensão e pela carga distribuída. Na Figura 33 é apresentado o resultado em deslocamentos para o terceiro carregamento.



Figura 33 – Deslocamentos verticais para a viga biapoiada sujeita apenas aos esforços decorrentes da protensão.

Para fins de comparação, os valores de tensões na fibra inferior, na extremidade inferior da seção transversal no meio do vão e o deslocamento no meio do vão são calculados, utilizando a teoria da Mecânica dos Sólidos. Estes resultados e os obtidos na simulação são apresentados na Tabela 2. Destaca-se o bom desempenho quando se comparam as tensões e deslocamentos para o carregamento composto apenas pela protensão.

Tabela 2 – Resultados obtidos e calculados para tensões e deslocamentos.

CARREGAMENTO		TENSÃO (MPa)			
		SEM REFORÇO	COM REFORÇO	PROTENSÃO	PROTENSÃO + CARGA
CALCULADO	BORDA	1,875	1,649	-2,248	-0,620
	FIBRA	-	14,398	189,540	203,939
SIMULAÇÃO	BORDA	1,881	1,632	-2,247	-0,616
	FIBRA		14,223	189,541	203,764
DIF. REL. (%)	BORDA	0,30	-1,02	-0,01	-0,64
	FIBRA	-	-1,22	0,00	-0,09
CARREGAMENTO		DESLOCAMENTO (mm)			
		SEM REFORÇO	COM REFORÇO	PROTENSÃO	PROTENSÃO + CARGA
CALCULADO		1,116	0,981	-1,152	-0,171
SIMULAÇÃO		1,157	1,009	-1,151	-0,142
DIF. REL. (%)		3,55	2,72	-0,10	-16,49

7.2 Acoplamento fibra-matriz para elementos de fibra de aproximação qualquer

Este exemplo é análogo ao proposto por Sampaio (2014), porém utiliza geometria distinta. Nesse trabalho, a autora conclui que não ocorrem variações de posições relativas entre a fibra e a matriz caso o grau da aproximação utilizado para o elemento de fibra seja no mínimo igual àquele utilizado para as arestas do elemento bidimensional. Um elemento de fibra é inserido em um elemento bidimensional, conforme a Figura 34.

O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson da matriz são $E_m = 10^4 \text{ N} / \text{m}^2$ e $\nu = 0$, respectivamente. Por sua vez, o módulo de elasticidade e a área da seção transversal da fibra valem $E_f = 10^5 \text{ N} / \text{m}^2$ e $A = 10^{-1} \text{ cm}^2$. O lado horizontal do elemento está engastado e a força aplicada vale $F = 5 \text{ N}$, para a análise em pequenos deslocamentos, e $F = 500 \text{ N}$, para a análise em grandes deslocamentos. Os comprimentos da fibra e das arestas indicados na Figura 34 valem, respectivamente, $L_f = 1,8 \text{ m}$ e $L = 2,0 \text{ m}$.

São determinadas as posições dos pontos de duas maneiras distintas, conforme as Equações 78: na primeira, são utilizadas as coordenadas adimensionais (ξ_1, ξ_2) e as funções de forma do elemento bidimensional, enquanto na segunda são utilizadas as coordenadas adimensionais (η) e as funções de forma do elemento de fibra. Foram determinadas as posições finais para 12 pontos igualmente espaçados ao longo da fibra, sendo k e i as direções 1 ou 2, l os nós do elemento bidimensional, j os nós do elemento de fibra, $r = 1, \dots, l$ e $n = 1, \dots, j$

$$\begin{aligned} Y_k^{l(ch)} &= \varphi_r^{(ch)}(\xi_1^{(l)}, \xi_2^{(l)}) \cdot Y_k^{r(ch)} \\ Y_i^{j(f)} &= \varphi_n^{(f)}(\eta^{(j)}) \cdot Y_i^{n(f)} \end{aligned} \quad (78)$$

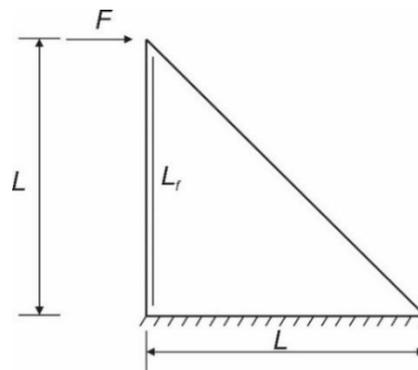


Figura 34 – Elemento bidimensional reforçado com fibra. Fonte: Adaptado de Sampaio (2014).

Os resultados obtidos em posições para aproximações linear e cúbica do elemento de fibra são apresentados na Tabela 3. Observando a diferença entre as posições calculadas para a matriz e a fibra, conclui-se que para a aproximação cúbica dos elementos unidimensionais – mesmo grau de aproximação utilizado para o domínio bidimensional - não há movimento relativo entre a fibra e a matriz, como ilustra a Figura 35.

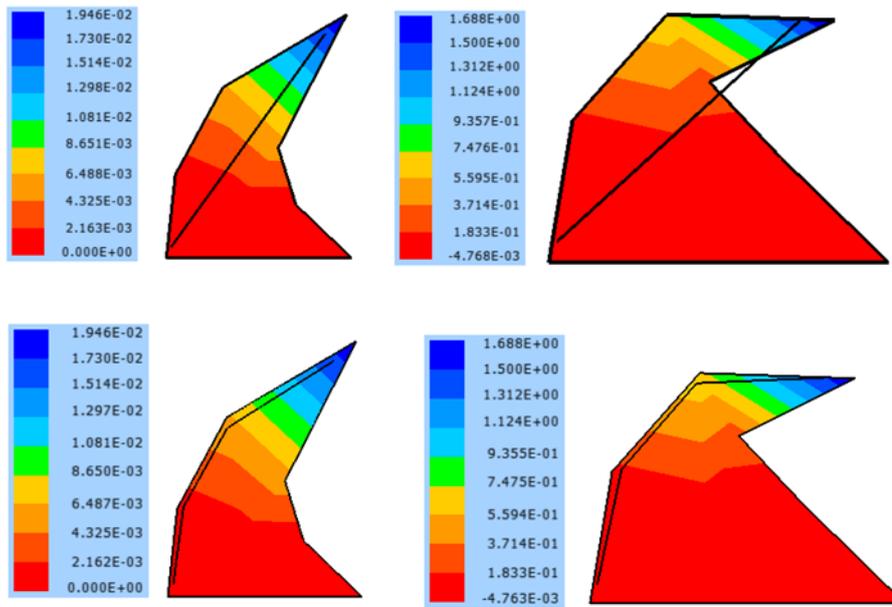


Figura 35 – Posições finais para os casos (A) e (B), considerando aproximação linear e cúbica para as fibras, respectivamente.

Tabela 3 – Posições dos nós calculadas pelas duas formas propostas para (A) e (B), em metros.

(A)			(B)			CÚBICA			
GRAU DE LIBERDADE	LINEAR		GRAU DE LIBERDADE	LINEAR		CHAPA	FIBRA	CHAPA	FIBRA
	CHAPA	FIBRA		CHAPA	FIBRA				
1	0,0500501	0,0500501	1	0,0452315	0,0452315	0,0452000	0,0452000	0,0452000	0,0452000
2	0,1002252	0,1002252	2	0,1174656	0,1174656	0,1174554	0,1174554	0,1174554	0,1174554
3	0,0501676	0,0515612	3	0,0561409	0,1763990	0,0561000	0,0561000	0,0561000	0,0561000
4	0,2643218	0,2643367	4	0,3178239	0,2378232	0,3177951	0,3177951	0,3177951	0,3177951
5	0,0503820	0,0530722	5	0,0904645	0,3075664	0,0905000	0,0905000	0,0905000	0,0905000
6	0,4285074	0,4284482	6	0,5224184	0,3581807	0,5223710	0,5223710	0,5223710	0,5223710
7	0,0507539	0,0545833	7	0,1484146	0,4387339	0,1483936	0,1483936	0,1483936	0,1483936
8	0,5927534	0,5925598	8	0,7245035	0,4785383	0,7244406	0,7244406	0,7244406	0,7244406
9	0,0513440	0,0560944	9	0,2302039	0,5699013	0,2301590	0,2301590	0,2301590	0,2301590
10	0,7570309	0,7566713	10	0,9173340	0,5988959	0,9172612	0,9172612	0,9172612	0,9172612
11	0,0522127	0,0576055	11	0,3360447	0,7010688	0,3359713	0,3359713	0,3359713	0,3359713
12	0,9213115	0,9207828	12	1,0941644	0,7192534	1,0940905	1,0940905	1,0940905	1,0940905
13	0,0534207	0,0591165	13	0,4661497	0,8322362	0,4660447	0,4660447	0,4660447	0,4660447
14	1,0855663	1,0848944	14	1,2482491	0,8396110	1,2481857	1,2481857	1,2481857	1,2481857
15	0,0550287	0,0606276	15	0,6207313	0,9634037	0,6205929	0,6205929	0,6205929	0,6205929
16	1,2497668	1,2490059	16	1,3728428	0,9599685	1,3728047	1,3728047	1,3728047	1,3728047
17	0,0570972	0,0621387	17	0,8000019	1,0945711	0,7998308	0,7998308	0,7998308	0,7998308
18	1,4138843	1,4131174	18	1,4612001	1,0803261	1,4612046	1,4612046	1,4612046	1,4612046
19	0,0596868	0,0636498	19	1,0041742	1,2257386	1,0039724	1,0039724	1,0039724	1,0039724
20	1,5778901	1,5772289	20	1,5065755	1,2006837	1,5066430	1,5066430	1,5066430	1,5066430
21	0,0628582	0,0651608	21	1,2334605	1,3569060	1,2332324	1,2332324	1,2332324	1,2332324
22	1,7417556	1,7413405	22	1,5022235	1,3210412	1,5023774	1,5023774	1,5023774	1,5023774
23	0,0666719	0,0666719	23	1,4880735	1,4880735	1,4878230	1,4878230	1,4878230	1,4878230
24	1,9054520	1,9054520	24	1,4413988	1,4413988	1,4416628	1,4416628	1,4416628	1,4416628

7.3 Domínio bidimensional sujeito a controle de posição

Neste exemplo, um domínio retangular, livre para se deslocar na direção vertical, exceto pelo nó central, em uma extremidade e livre na outra, está sujeito a incrementos de posição impostos à extremidade livre, como apresentado na Figura 36. Em uma primeira abordagem, o controle de posição reproduz o ensaio de tração uniaxial em um corpo de prova de concreto. Em seguida, reproduz-se o ensaio de compressão uniaxial. O domínio foi discretizado em 200 elementos bidimensionais, totalizando 961 nós.

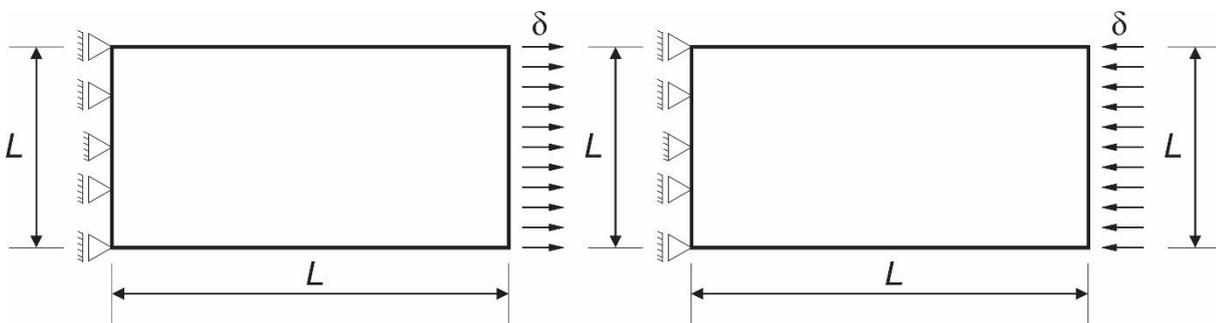


Figura 36 – Domínios retangulares sujeitos à tração e à compressão uniaxial.

O módulo de elasticidade, o coeficiente de Poisson e o comprimento do lado do corpo de prova para ambos os casos valem $E_m = 3,2 \cdot 10^4 \text{ kN} / \text{m}^2$, $\nu = 0,2$ e $L = 1 \text{ m}$, respectivamente. No primeiro caso – tração uniaxial – o incremento de posição foi $\delta = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, enquanto os parâmetros inerentes ao modelo de Mazars utilizados foram $\varepsilon_{d0} = 1,08 \cdot 10^{-4}$, $A_T = 0,984$, $B_T = 1,2916 \cdot 10^4$, $A_C = 1,00$ e $B_C = 1,0 \cdot 10^3$. Para a simulação do ensaio de compressão uniaxial, admitiu-se $\delta = -5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ e os parâmetros utilizados para o modelo de dano foram $\varepsilon_{d0} = 1,08 \cdot 10^{-4}$, $A_T = 0,984$, $B_T = 1,2916 \cdot 10^4$, $A_C = 0,95$ e $B_C = 1,8 \cdot 10^3$. Nas duas simulações o incremento de posição foi aplicado em 50 passos. Isto é feito para validar o modelo de dano de Mazars, implementado para considerar não linearidade física no concreto. Os resultados obtidos – em tensão e deformação – são comparados com valores experimentais encontrados em Lee e Fenves (1998), na Figura 37.

O par ordenado tensão-deformação, obtido na simulação numérica, em que o dano começa a ocorrer se aproximou daquele obtido na análise experimental. O trecho em que o dano ocorre de maneira mais pronunciada apresenta diferença quando comparado ao resultado experimental e isto ocorre por hipóteses simplificadoras do modelo de dano de Mazars.

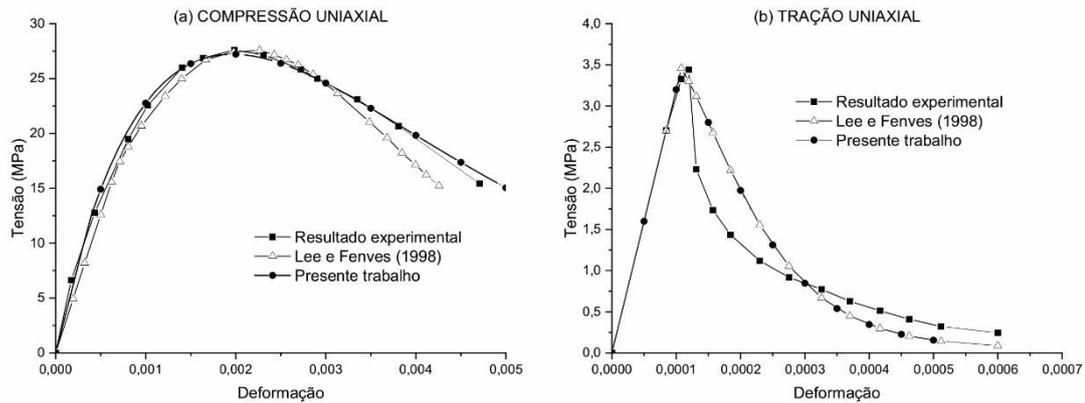


Figura 37 – Resultados para o domínio retangular submetido a (a) compressão uniaxial e (b) tração uniaxial.

7.4 Treliça elastoplástica sujeita a controle de posição

Proença (2016) apresenta os cálculos para determinar a força vertical resultante no nó central de uma treliça composta por três barras. O esquema estático e a curva tensão – deformação para o material das barras são apresentados na Figura 38. O módulo de elasticidade e o módulo constitutivo elastoplástico tangente do material valem, respectivamente $E = 1000$ e $\frac{EK}{(E + K)} = 100$. A área da seção transversal das barras e a tensão de escoamento assumem os valores de $A = 1$ e $\sigma_y = 4$.

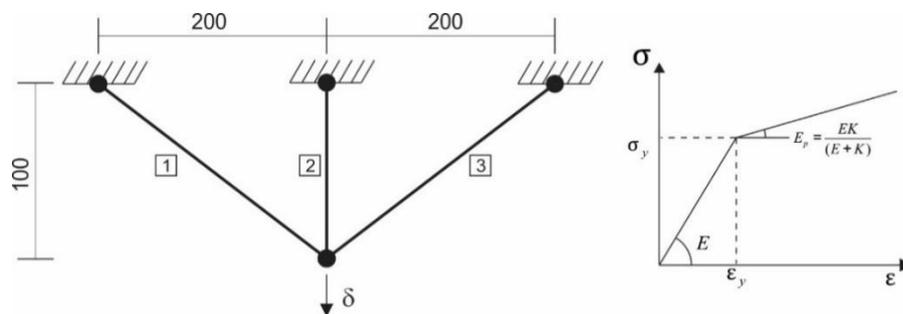


Figura 38 – Esquema estático da treliça e curva tensão-deformação para o material das barras – aço, com modelo elastoplástico bilinear. Fonte: Adaptado de Proença (2016).

Na simulação, são impostos 10 passos de incremento de posição $\delta = 0,20$ ao nó no qual se deseja determinar a força. Por se tratar de uma análise em pequenos deslocamentos, dividiu-se o incremento de posição por 1000 e, então, multiplicou-se o resultado obtido para a força por

este mesmo fator, eliminando a não linearidade geométrica inerente ao MEF-P. Os resultados são apresentados na Figura 39.

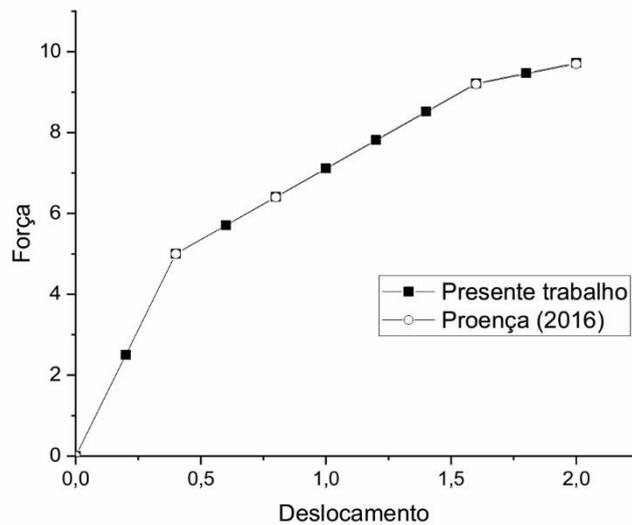


Figura 39 – Resultados para a força vertical em função do incremento de posição imposto.

A primeira mudança na inclinação observada na Figura 39 é devida à plastificação da barra vertical, enquanto a segunda decorre da plastificação das duas barras inclinadas. Os valores para a força vertical a partir da simulação numérica são condizentes com os apresentados por Proença (2016), indicando que a plasticidade unidimensional com encruamento isótropo foi implementada com sucesso.

7.5 Aplicação do modelo de dano proposto por Mazars (1984) a vigas de concreto armado

Neste exemplo são simuladas três vigas, conforme esquema apresentado na Figura 40. Os resultados da simulação são confrontados com aqueles apresentados em Álvares (1993).

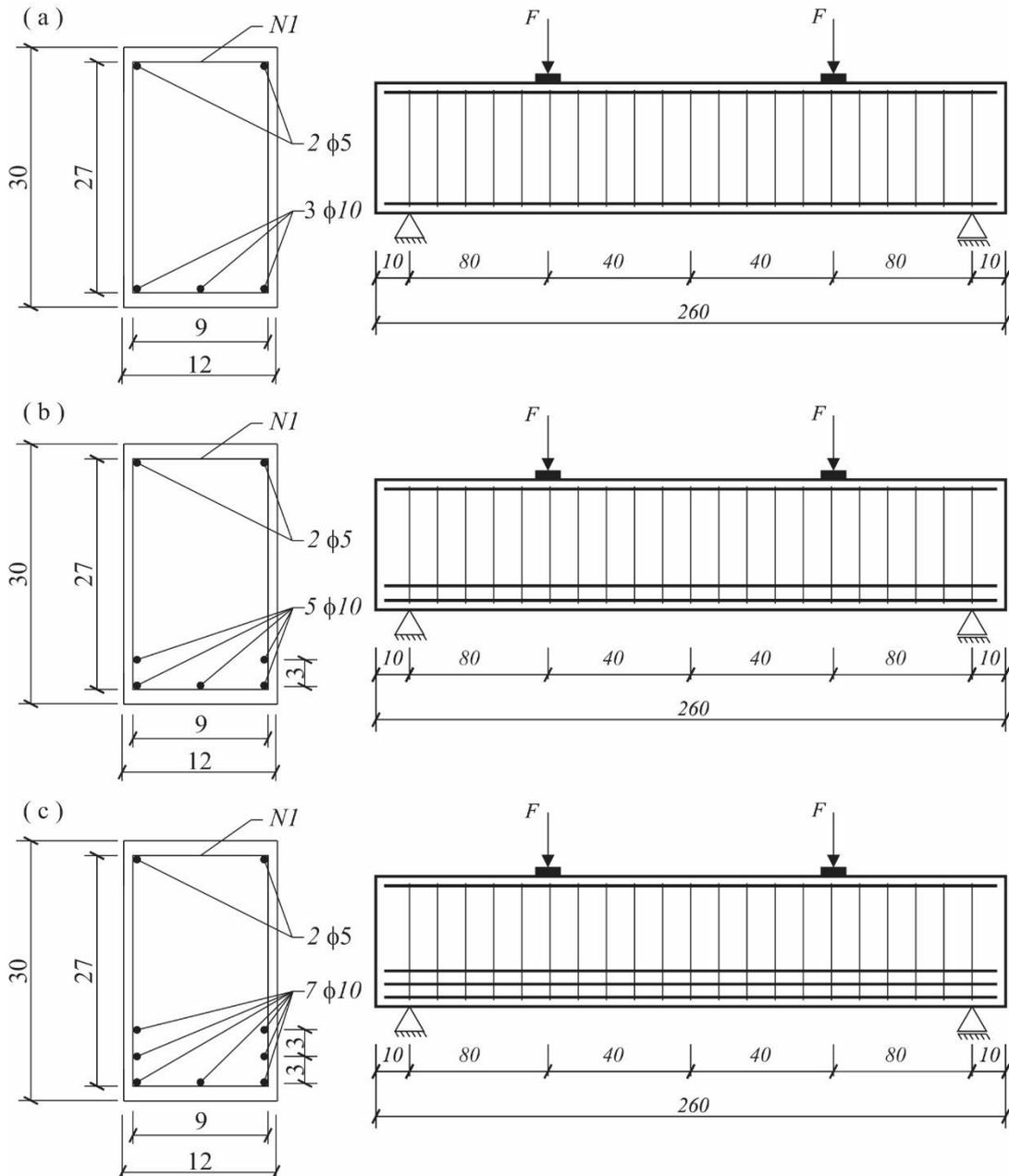


Figura 40 – Seção transversal e longitudinal para as vigas (a) subarmada, (b) normalmente armada e (c) superarmada.

As três vigas apresentam mesmo comprimento $L = 260 \text{ cm}$, seção transversal $12 \times 30 \text{ cm}$, armadura superior $2\phi 5 \text{ mm}$ e transversal $N1 \phi 5 \text{ mm}$ a cada 12 cm , sendo alterada a armadura inferior, para que sejam contempladas as situações de vigas subarmadas, normalmente armadas e superarmadas. Considerou-se ainda cobrimento para as armaduras de $1,5 \text{ cm}$. Os parâmetros do modelo de Mazars e as propriedades dos materiais, extraídos de Álvares (1993), são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 – Propriedades dos materiais e parâmetros utilizados no modelo de dano de Mazars.

	CONCRETO	AÇO
MÓDULO DE ELASTICIDADE	29200 MPa	196000 MPa
COEFICIENTE DE POISSON	0,2	-
PARÂMETROS DO MODELO		
$A_T = 0,995$	$B_T = 8000$	$\varepsilon_{d0} = 0,00007$
$A_C = 0,85$	$B_C = 1620$	

Para a simulação é considerada a não linearidade física do concreto, enquanto para o aço é admitido comportamento elástico linear, conforme ilustra a Figura 41. Álvares (1993) apresenta resultados experimentais e numéricos para as vigas, sendo esses últimos obtidos por meio de análise tridimensional, utilizando elementos de 8 nós degenerados, e análise plana, utilizando elementos finitos de 4 nós.

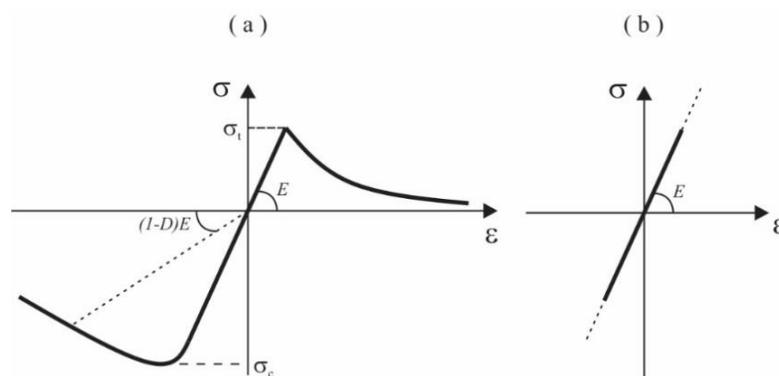


Figura 41 – Curvas tensão-deformação para (a) concreto e (b) aço.

Utilizando a simetria do problema, empregou-se o esquema estático apresentado na Figura 42, substituindo-se a viga biapoiada por uma viga com metade do comprimento inicial, livre para se movimentar na horizontal em um dos pontos de apoio e com um engaste móvel em uma das extremidades, sem prejuízo para os resultados. Foi realizado controle de posição no ponto p (face inferior da viga), indicado na Figura 42, e foram avaliados a força interna no

ponto de aplicação de uma das cargas no ensaio (face superior da viga) e o deslocamento δ no ponto que representa o meio do vão (face inferior da viga).

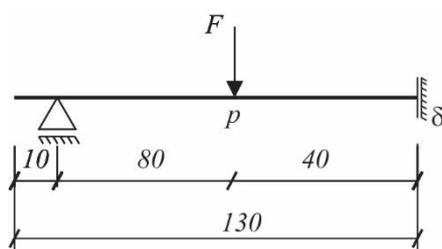


Figura 42 – Esquema estático com simetria empregado na simulação, com controle de posição no ponto p , leitura do deslocamento δ e força interna F .

A discretização utilizada na presente simulação resultou em 312 elementos bidimensionais, totalizando 1501 nós. Para simular cada linha de barras da armadura longitudinal foram utilizados 40 elementos unidimensionais, enquanto para cada estribo foram empregados 6 elementos. O deslocamento imposto foi de $1,5\text{ cm}$, aplicado em 100 passos.

Na Figura 43 são confrontados os resultados obtidos nas simulações e os apresentados por Álvares (1993). Destaca-se que os resultados experimentais representam os extremos inferior e superior dos dados obtidos por Álvares (1993). Houve concordância entre os resultados das simulações e aqueles encontrados na referência, tanto experimentais quanto numéricos, para as vigas normalmente armada e superarmada. Para a viga subarmada, quando o resultado é comparado com aquele proveniente da análise experimental observa-se diferença mais significativa. Isso ocorre pois o modelo de dano distribuído possui dificuldades em representar a degradação mecânica do material quando esta é localizada, além do fato de não ser considerada a plastificação da armadura. No Apêndice A encontram-se as figuras correspondentes ao início da degradação mecânica do concreto para a viga subarmada.

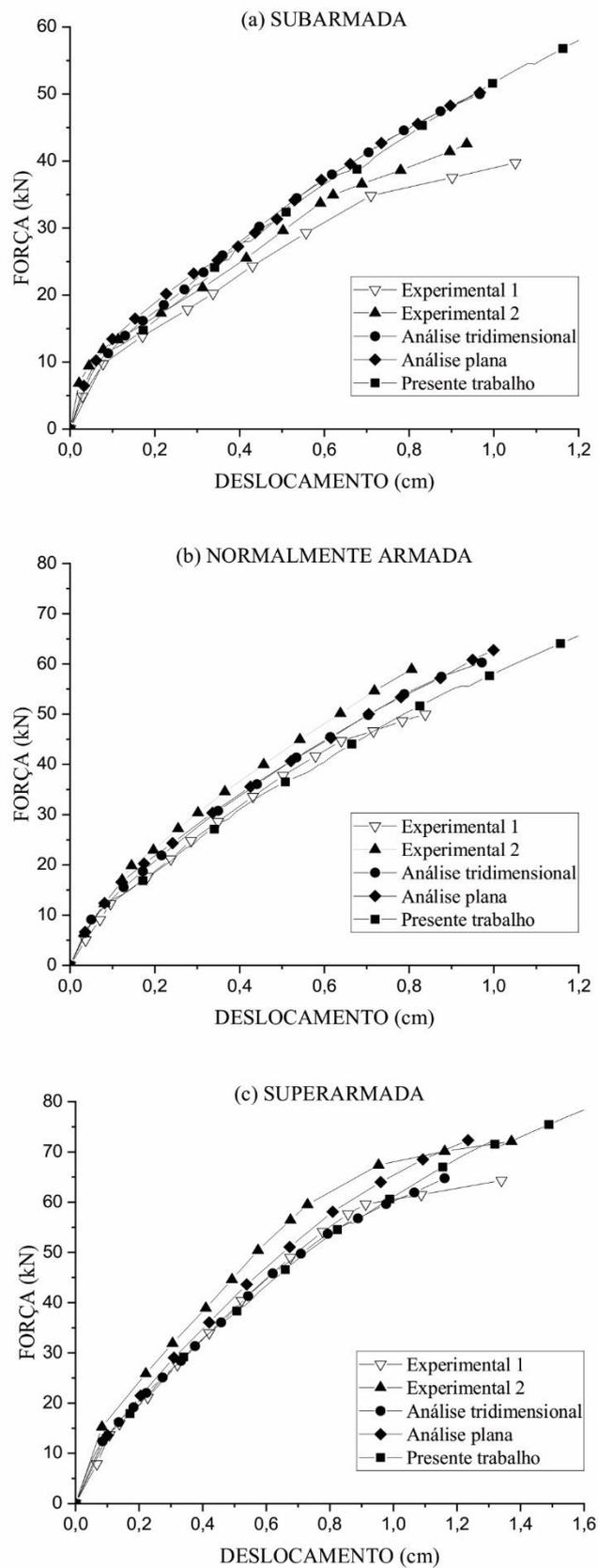


Figura 43 – Resultados obtidos na simulação para as vigas (a) subarmada, (b) normalmente armada e (c) superarmada.

7.6 Protensão de cordoalha com perfil parabólico

Neste exemplo, proposto por Cornejo et al. (2018), é simulada uma viga com comprimento $L=10\text{ m}$ e seção transversal de dimensões $b=1\text{ m}$ e $h=1\text{ m}$. Tal elemento estrutural possui armadura ativa aderente, com perfil parabólico, conforme a Figura 44. As excentricidades nas extremidades e_1 e no meio do vão e_2 valem $0,30\text{ m}$. Na discretização, foram empregados 250 elementos triangulares para a matriz e 40 elementos unidimensionais para a armadura ativa.

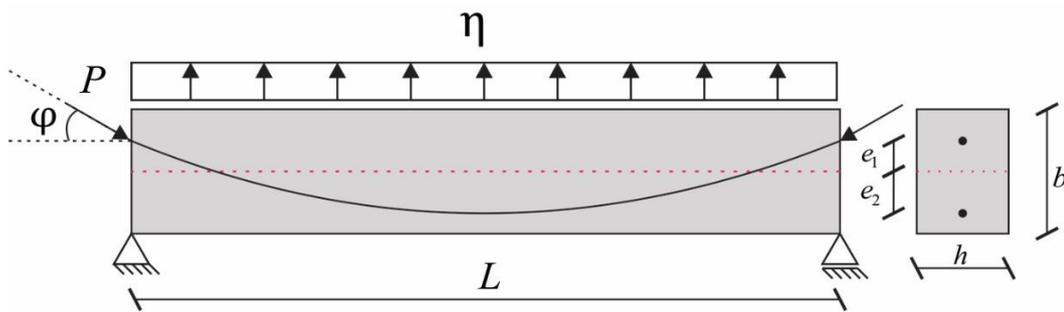


Figura 44 – Geometria da cordoalha e seção transversal da viga.

O módulo de elasticidade admitido para o concreto foi $E_c = 35875\text{ MPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$. Para o aço, assumiu-se módulo de elasticidade $E_p = 200000\text{ MPa}$ e área da armadura ativa $A_p = 0,005\text{ m}^2$. A tensão correspondente à força de protensão aplicada vale $\sigma_p = 1000\text{ MPa}$, correspondendo a uma deformação na armadura ativa de $\varepsilon_p = 0,005$. Cornejo et al. (2018) apresentam expressões matemáticas para o cálculo das forças externas equivalentes – carga distribuída e momento fletor – e do deslocamento no meio do vão, Equação 79.

$$\eta = \frac{8.P.(e_1 + e_2)}{L^2}$$

$$\delta = \frac{5.\eta.L^4}{384.E.I_h} - \frac{3.p.\cos\varphi.e_1.L^2}{24.E.I_h} \quad (79)$$

Destaca-se que o deslocamento calculado pela Equação 79 não considera deformações por cisalhamento nem a perda de protensão por deformação elástica do concreto. Ainda assim, os resultados apresentam boa concordância, conforme demonstrado na Tabela 5 e na Figura 45.

Tabela 5 – Resultados para os deslocamentos no meio do vão, em milímetros.

	Numérico	Equação	Presente trabalho
Deslocamento (mm)	4,30	4,38	4,31
Dif. Rel. (%)	0,23	1,60	-

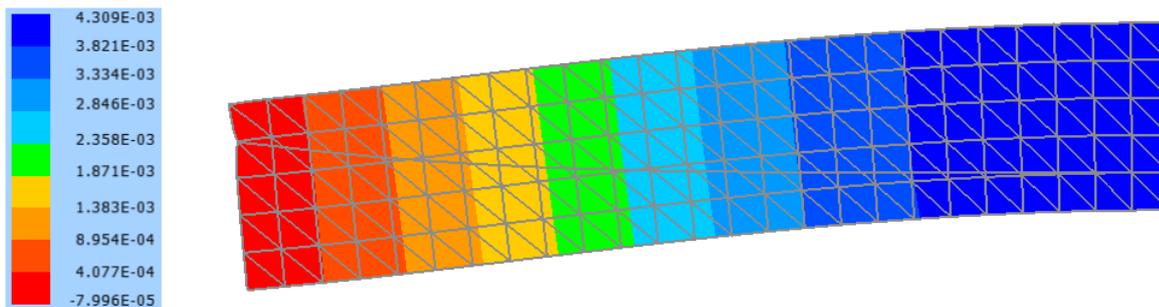


Figura 45 – Deslocamentos da viga, em metros, decorrente da aplicação da protensão na armadura ativa. O esquema estático utilizado na simulação considera a simetria do problema.

7.8 Protensão externa: reforço de vigas de concreto armado

Neste exemplo foram simuladas as vigas de concreto armado ensaiadas por Lee, Shin e Lee (2018), submetidas a ensaio de flexão a três pontos. No total, foram analisadas nove vigas de concreto armado: três vigas de controle e seis vigas danificadas, posteriormente reforçadas com protensão externa. As vigas possuem vão total de 440 cm, vão livre de 380 cm, seção transversal 27 cm x 40 cm e armaduras com propriedades apresentadas na Tabela 6 e na Figura 46. O sistema de reforço é composto por barras de aço, ancoradas na extremidade da viga e com excentricidade garantida por um aparato desviador no meio do vão, formando um perfil em V. Foram utilizados dois diâmetros para as barras de aço do reforço: 22 e 28 mm, a fim de estudar a influência da variação desse parâmetro no comportamento dos elementos estruturais. Por problemas durante a aplicação da protensão na viga S3 D28 não foram registrados os resultados do ensaio por Lee, Shin e Lee (2018).

Tabela 6 – Propriedades dos materiais, das armaduras e geometria das vigas ensaiadas por Lee, Shin e Lee (2018).

Nº	Elemento	A_s' (mm ²)	f_y/f_u (MPa)	A_s (mm ²)	f_y/f_u (MPa)	A_{ps} (mm ²)	f_{py}/f_{pu} (MPa)	d_p (mm)	d_v (mm)	d_h (mm)	Seção (mm)
1	S1-No					n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	b=270
2	S1-D22	3-D13 (380,1)	544/ 655	2-D22 + 2-D25 (1787,6)	500/ 640	2-φ22 (760,3)	655/ 805	435	125	100	h=400
3	S1-D28					2-φ28 (1231,5)	625/ 765	435	125	100	d=352
4	S2-No					n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	b=270
5	S2-D22	3-D13 (380,1)	544/ 655	4-D19 (1146,0)	493/ 630	2-φ22 (760,3)	655/ 805	435	125	100	h=400
6	S2-D28					2-φ28 (1231,5)	625/ 765	435	125	100	d=354
7	S3-No					n/a	n/a	n/a	n/a	n/a	b=270
8	S3-D22	3-D13 (380,1)	544/ 655	3-D19 (859,5)	493/ 630	2-φ22 (760,3)	655/ 805	435	125	100	h=400
9	S3-D28					2-φ28 (1231,5)	625/ 765	435	125	100	d=354

Na Tabela 6, A_s' é a área da armadura negativa, f_y e f_u são as tensões de escoamento e de ruptura do aço da armadura negativa, A_s é área das armaduras positivas, f_y e f_u são as tensões de escoamento e de ruptura do aço da armadura positiva, A_{ps} é a área de armadura ativa do reforço, d_p é a excentricidade da armadura ativa em relação ao topo da viga, d_v e d_h são as distâncias indicadas na Figura 46 e d é a altura útil da viga.

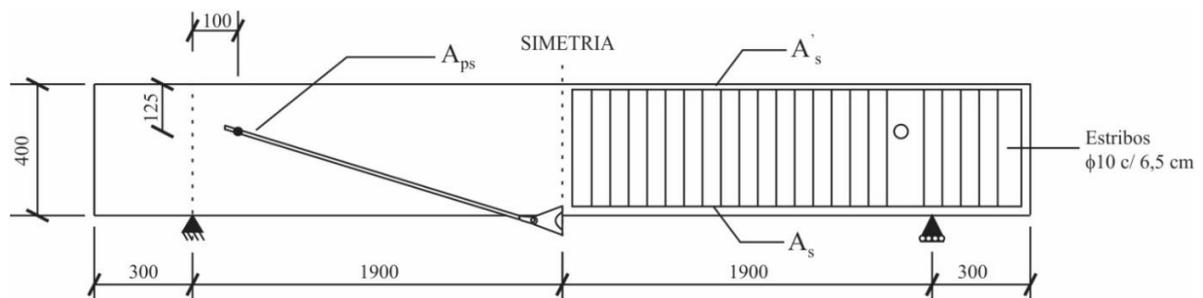


Figura 46 – Esquema estático e armaduras para as vigas ensaiadas por Lee, Shin e Lee (2018).

Dimensões em mm, exceto quando especificadas. Fonte: Adaptado de Lee, Shin e Lee (2018).

O programa experimental realizado, conforme descrito por Lee, Shin e Lee (2018), foi o seguinte:

- a) A princípio foram ensaiadas vigas de controle (No), sem reforço, a fim de determinar a força que provocaria o escoamento da armadura positiva, a resistência última e a curva força x deslocamento;
- b) As vigas que seriam reforçadas foram preparadas e os furos para a ancoragem das barras nas extremidades das vigas foram realizados;
- c) Então, as vigas ainda sem o reforço (No) foram ensaiadas ciclicamente até que fosse atingida a força correspondente ao escoamento da armadura positiva, provocando degradação mecânica do concreto nesses elementos estruturais;
- d) Após a redução da carga em cerca de 33%, as barras de reforço foram protendidas;
- e) A protensão foi aplicada enquanto a curva força x deslocamento e a deformação das barras de reforço eram monitoradas. O processo seguiu até que uma das duas condições a seguir fossem satisfeitas: o deslocamento vertical no meio do vão fosse totalmente recuperado (retorno para a curva depois do descarregamento) ou deformação correspondente a $2000 \mu\epsilon$ fosse atingida, a qual equivale ao torque que pode ser aplicado por duas pessoas adultas utilizando chaves inglesas. Para manter a força aplicada às vigas durante a protensão foi utilizado um atuador.
- f) Após o tensionamento, as vigas foram carregadas até a falha.

Na Tabela 7 são apresentados os valores das deformações nas barras do reforço, assim como a força aplicada no meio do vão em cada uma das vigas, no instante da protensão.

Tabela 7 – Valores de deformação imposta às barras do reforço e força aplicada no instante da protensão para as vigas simuladas.

	VIGA	ϵ ($\mu\epsilon$)	F (kN)
S1	D22	2163,00	230,00
	D28	1841,00	225,00
S2	D22	2153,00	157,00
	D28	2035,00	153,00
S3	D22	2148,00	120,00

As propriedades do concreto são: resistência média à compressão aos 28 dias $f_{cm} = 30 \text{ MPa}$, módulo de elasticidade $E_c = 25900 \text{ MPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$. Para o aço, foi adotado $E_s = 200000 \text{ MPa}$ e $K = 0$, quando considerada a plasticidade. Na calibração dos parâmetros do modelo de dano proposto por Mazars (1984), manteve-se o módulo de elasticidade e calcularam-se as demais propriedades do concreto a partir das

Equações 79, presentes na ABNT NBR 6118 (2014) e válidas para concretos de classe menor que C50. O valor calculado para a resistência característica à compressão para o concreto foi $f_{ck} = 21,4 \text{ MPa}$.

$$E_{ci} = \alpha_e 5600 \sqrt{f_{ck}}$$

$$\varepsilon_{d0} = \frac{f_{ctk,inf}}{E_{ci}} \quad (79)$$

$$f_{ctk,m} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2}$$

$$f_{ctk,inf} = 0,7 \cdot f_{ct,m}$$

Os valores calibrados para os parâmetros do modelo de dano são apresentados na Tabela 8. Para a compressão o modelo balizador utilizado foi o proposto por Popovics (1973), enquanto para tração foi aquele proposto por Figueiras (1983).

Tabela 8 – Parâmetros calibrados para o modelo de dano, a partir do módulo de elasticidade do concreto.

PARÂMETROS DO MODELO		
$A_T = 0,723$	$B_T = 11569$	$\varepsilon_{d0} = 0,0000625$
$A_C = 0,637$	$B_C = 1379$	

As curvas tensão x deformação calibradas para o concreto, para compressão e tração uniaxiais, são apresentadas na Figura 47, assim como as curvas dos modelos constitutivos conhecidos, empregados na calibração

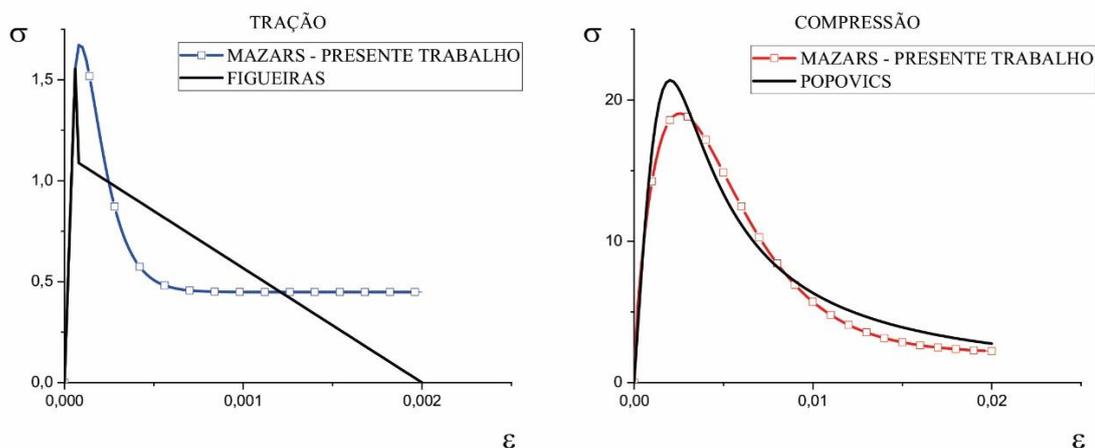


Figura 47 – Comparação entre as curvas tensão x deformação calibradas e os modelos constitutivos conhecidos.

Vale ressaltar que na implementação do modelo de dano proposto por Mazars (1984) o dano foi limitado a 0,90. Lemaitre e Chaboche (1990) discutem o conceito de dano crítico para um material, afirmando ser o valor do dano correspondente ao instante da perda da coesão interatômica. Se σ_f é a tensão na fratura por perda de coesão interatômica e σ_u é a tensão de ruptura usual, então a expressão para o dano crítico D_c é dada pela Equação 80.

$$D_c = 1 - (\sigma_u / \sigma_f) \quad (80)$$

Para materiais usuais, os valores de D_c estão entre 0,5 e 0,9 (LEMAITRE E CHABOCHE, 1990), justificando a limitação do dano adotada quando se associa essa informação aos resultados dos exemplos anteriores.

Foram empregadas duas malhas nas simulações. A malha 1 consistiu em 441 elementos bidimensionais, resultando 2134 nós. Para as armaduras, foram utilizados 285 elementos, totalizando 322 nós. Nessa malha, o desviador no meio do vão foi discretizado como um elemento bidimensional. Já a malha 2, mais refinada, compreendeu 3960 elementos bidimensionais, resultando 18262 nós. Para as armaduras, foram utilizados 4038 elementos, somando 4074 nós. Nesse caso, o desviador foi discretizado em 88 elementos para as vigas D22 e 96 elementos para as vigas D28. Para as duas malhas a variável de dano foi restrita a zero nos elementos que representaram o desviador. Como Lee, Shin e Lee (2018) apresentaram apenas a área das armaduras e a altura útil da seção transversal, considerou-se apenas uma barra com o valor integral da área da armadura positiva e outra com a área total da armadura negativa.

As forças foram aplicadas da seguinte maneira: 10 passos no carregamento, 10 passos para o descarregamento, 10 passos para a protensão e 10 passos de força após a protensão. Na etapa anterior à protensão a rigidez da barra do reforço foi desconsiderada, enquanto a do desviador foi considerada como um décimo da rigidez do concreto. No primeiro passo da protensão, ambas as rigidezes foram atualizadas com o valor do módulo de elasticidade do aço.

Os resultados das simulações utilizados para comparar o desempenho do código em relação aos resultados experimentais registrados por Lee, Shin e Lee (2018) foram as curvas força x deslocamento, a deformação nas barras da armadura ativa e a recuperação do deslocamento vertical no meio do vão.

A simulação das vigas de controle ratificou a implementação da calibração dos parâmetros do modelo de dano. Na Figura 48 observa-se que as curvas dos resultados numéricos acompanham as respectivas curvas experimentais até a “força de pico”. Atingido esse valor de

força, o modelo numérico se mostrou mais rígido do que as vigas ensaiadas. Isso se justifica pelo fato de o modelo de dano empregado neste trabalho ser distribuído (*smearred*) e, portanto, não ser capaz de simular a localização do dano no elemento estrutural. Além disso, como não está sendo considerado escorregamento entre a armadura e o concreto, espera-se que a simulação superestime a rigidez após o escoamento do aço para as vigas de controle.

No Apêndice A encontram-se as figuras que representam a degradação mecânica do concreto para a viga de controle S1-No e para a viga S1 D22 , sem considerar plasticidade nas armaduras.

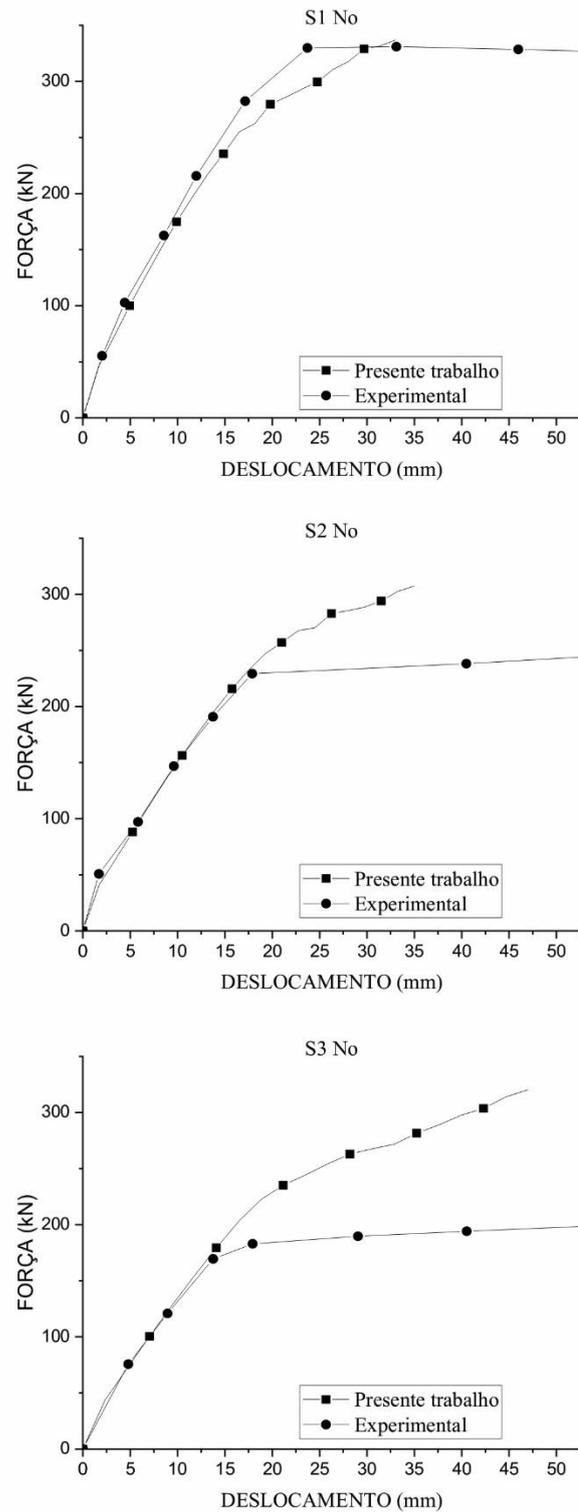


Figura 48 – Curvas força x deslocamento para as vigas de controle (No).

Nas Figuras 49 a 58 são apresentadas as curvas força x deslocamento e força x deformação na barra do reforço para as vigas simuladas, considerando as duas malhas empregadas nas simulações e diferentes modelos constitutivos para as armaduras. Nas legendas,

SP e CP indicam armaduras com comportamento linear e elastoplástico perfeito, respectivamente. Já as abreviações M1 e M2 indicam malha 1 e malha 2 para a discretização das vigas.

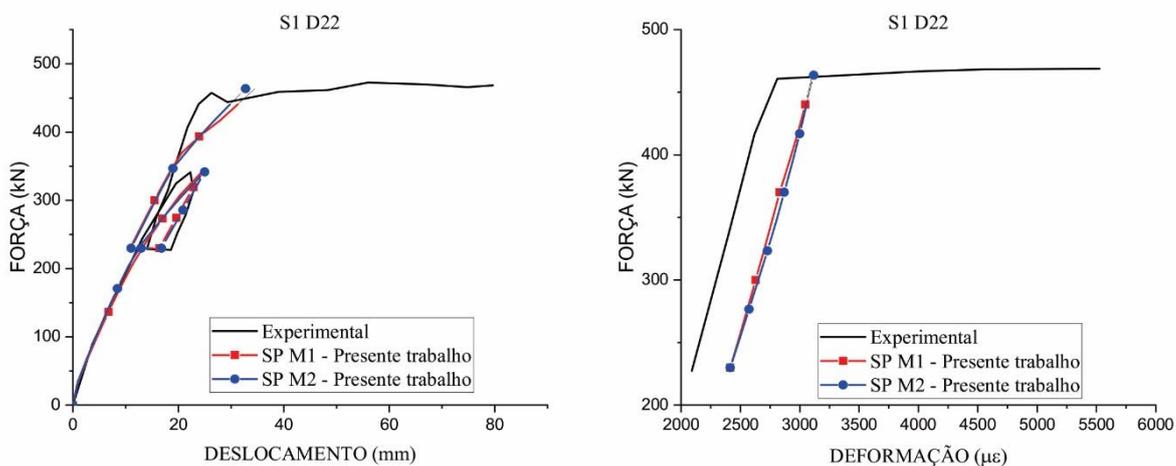


Figura 49 – Curvas força x deslocamento e força x deformação na barra do reforço para a viga S1 D22, considerando comportamento elástico para as armaduras.

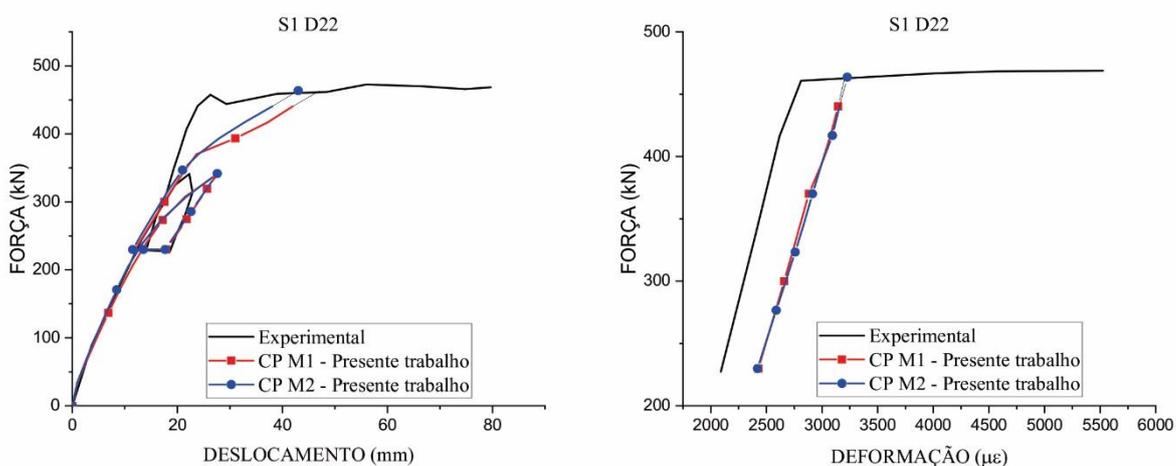


Figura 50 – Curvas força x deslocamento e força x deformação na barra do reforço para a viga S1 D22, considerando comportamento elastoplástico perfeito para as armaduras.

As vigas S1, com maior área de armadura passiva, apresentaram resultados mais coerentes com os experimentais em se tratando da curva força x deslocamento. Como a viga S1 No foi a viga de controle com melhor concordância entre as curvas numérica e experimental, Figura 48, o par ordenado força-deslocamento associado ao início da protensão do reforço na simulação das vigas S1, Figuras 49 e 50, se aproximou daquele obtido na análise experimental.

Reitera-se que, como as simulações das vigas reforçadas foram realizadas com controle de força, apenas a igualdade de força correspondente ao instante da protensão do reforço foi garantida.

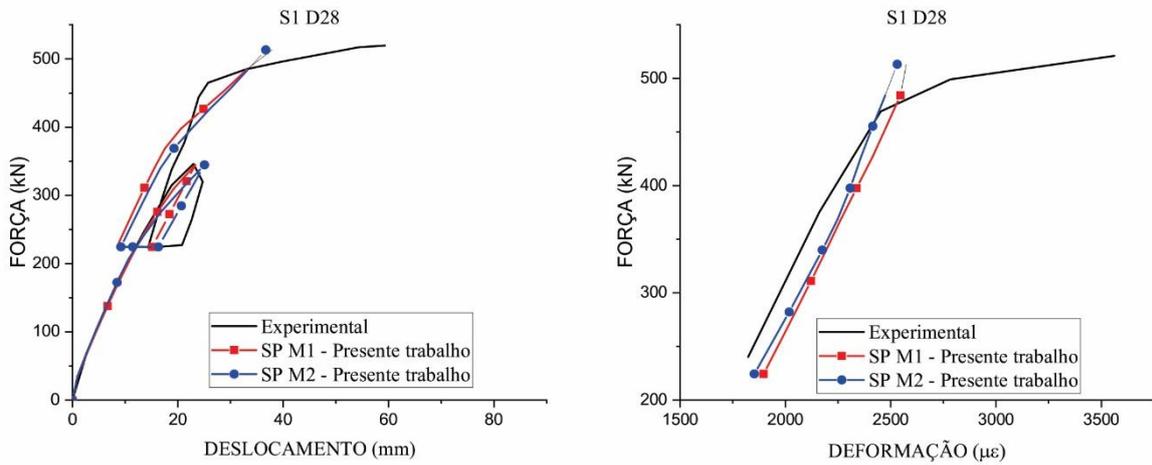


Figura 51 – Curvas força x deslocamento e força x deformação na barra do reforço para a viga S1 D28, considerando comportamento elástico para as armaduras.

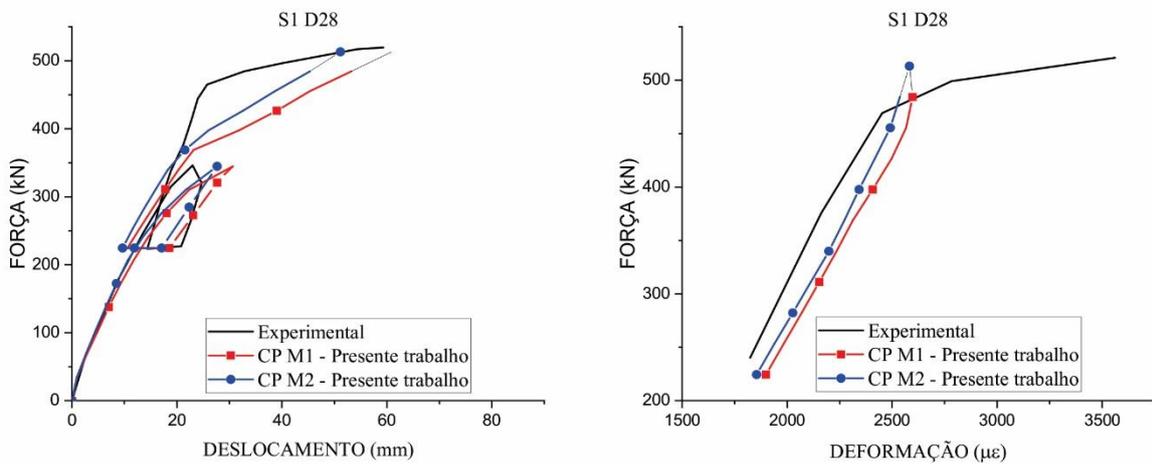


Figura 52 – Curvas força x deslocamento e força x deformação na barra do reforço para a viga S1 D28, considerando comportamento elastoplástico perfeito para as armaduras.

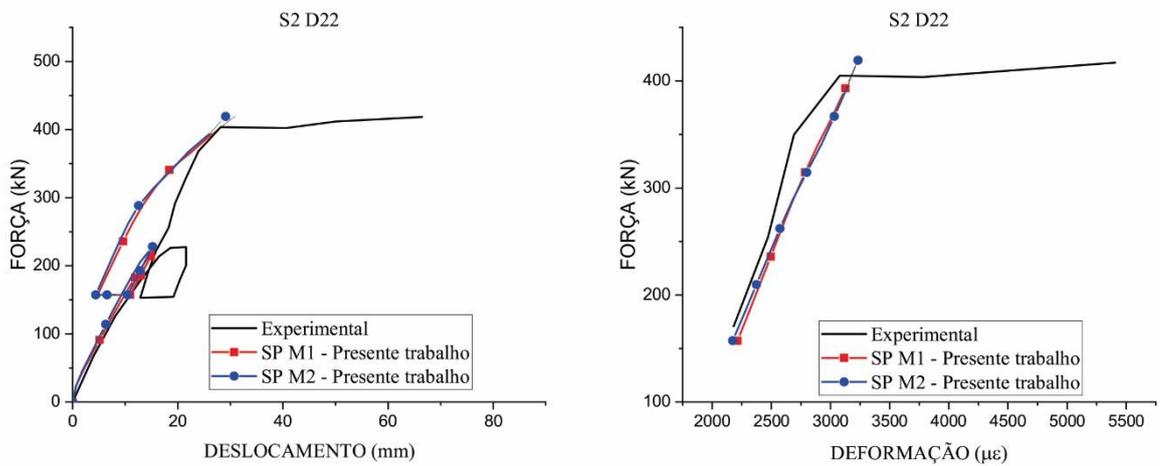


Figura 53 – Curvas força x deslocamento e força x deformação na barra do reforço para a viga S2 D22, considerando comportamento elástico para as armaduras.

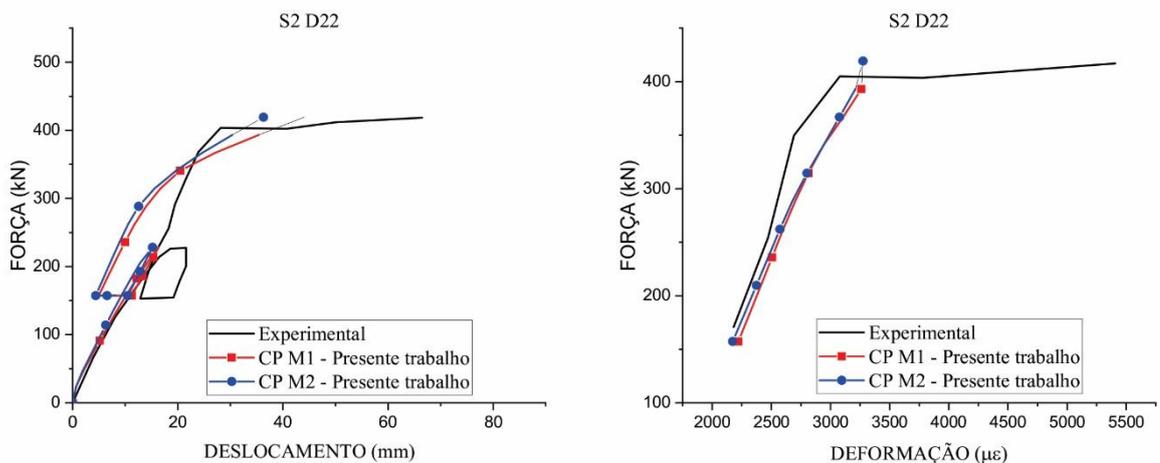


Figura 54 – Curvas força x deslocamento e força x deformação na barra do reforço para a viga S2 D22, considerando comportamento elastoplástico perfeito para as armaduras.

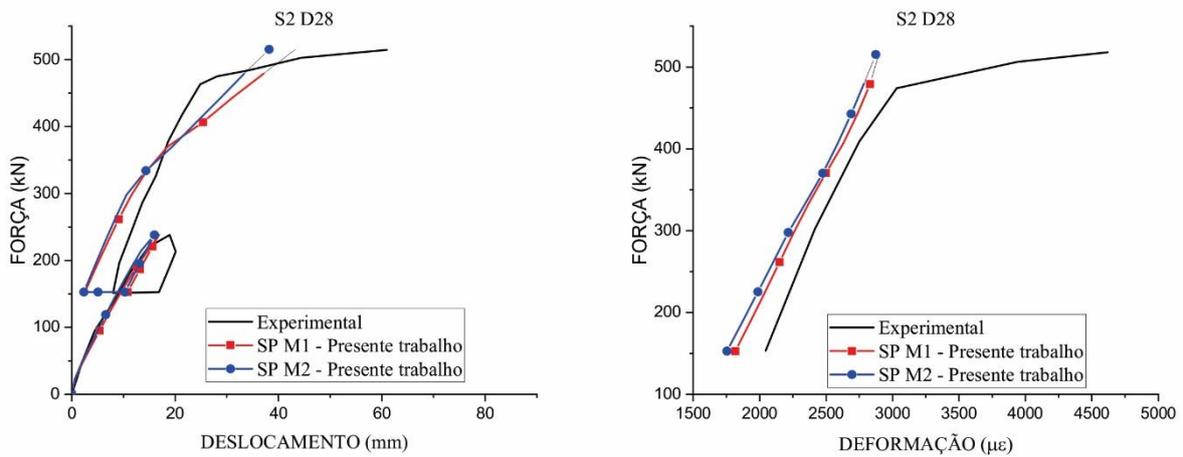


Figura 55 – Curvas força x deslocamento e força x deformação na barra do reforço para a viga S2 D28, considerando comportamento elástico para as armaduras.

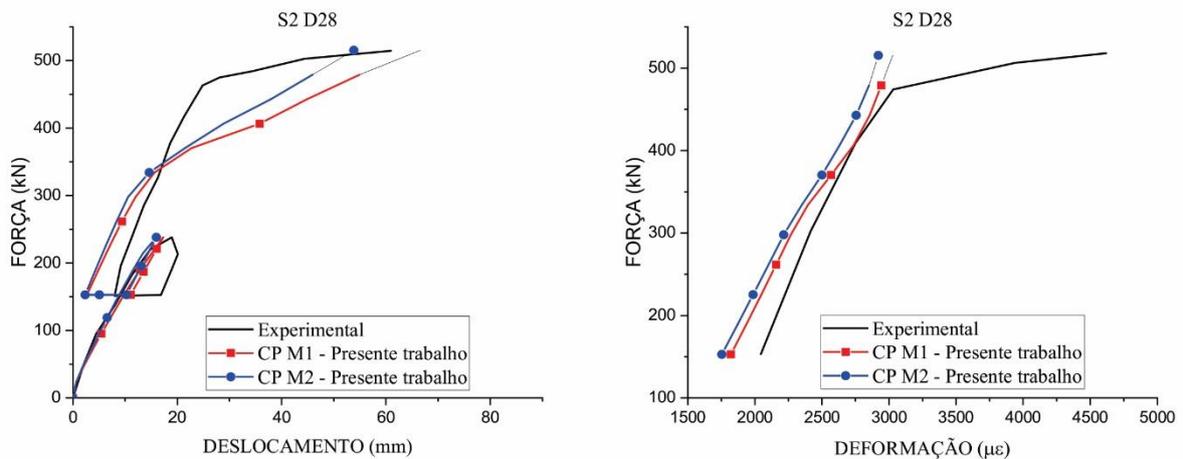


Figura 56 – Curvas força x deslocamento e força x deformação na barra do reforço para a viga S2 D28, considerando comportamento elastoplástico perfeito para as armaduras.

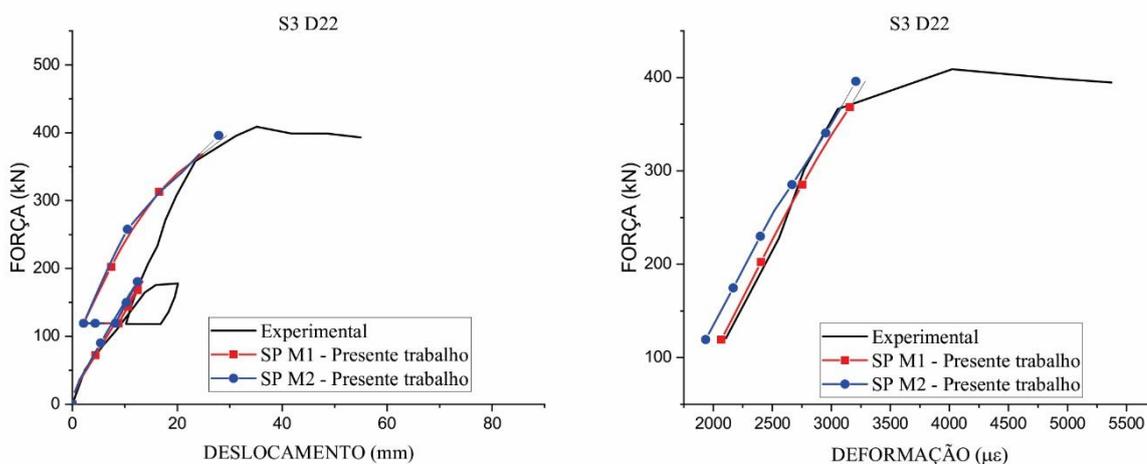


Figura 57 – Curvas força x deslocamento e força x deformação na barra do reforço para a viga S3 D22, considerando comportamento elástico para as armaduras.

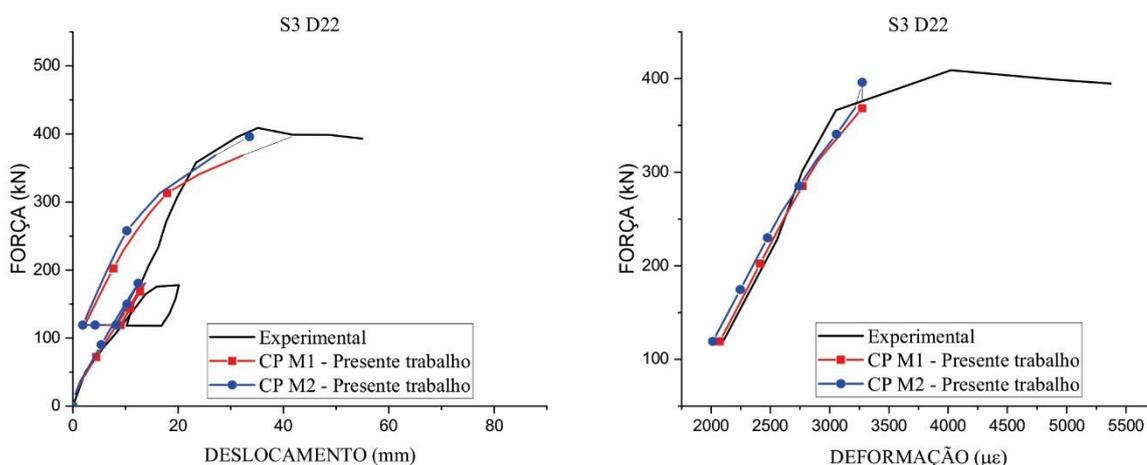


Figura 58 – Curvas força x deslocamento e força x deformação na barra do reforço para a viga S3 D22, considerando comportamento elastoplástico perfeito para as armaduras.

Analisando as curvas experimentais, constata-se que há deformação plástica após o descarregamento das vigas. Nos resultados das simulações, isso não ocorre, decorrente de uma das hipóteses do modelo de dano proposto por Mazars (1984). O fato de o modelo não considerar deformações plásticas faz com que o trecho de descarregamento da curva se direcione para a origem dos eixos coordenados.

As curvas força x deformação na armadura ativa apresentaram bom comportamento quando se compararam os resultados das simulações empregando as malhas 1 e 2. Para a viga

S1 D22 houve discrepância relevante entre os valores numéricos e experimentais, porém boa concordância entre os resultados numéricos. Houve plastificação das barras do reforço das vigas S1 D28, Figura 52, S2 D22, Figura 54, e S3 D22, Figura 58. Quando confrontados os resultados para as demais vigas, observa-se comportamento satisfatório, respeitando as limitações do modelo numérico. O fato de o modelo ser incapaz de capturar o trecho “pós-pico” da curva força-deslocamento também se manifesta nas curvas força x deformação: o modelo numérico superestima a rigidez da armadura plastificada.

Qualitativamente, é possível afirmar que o reforço das vigas foi efetivo, ou seja, verificou-se nas simulações numéricas o efeito de aumento da rigidez desejado após a aplicação da protensão, mesmo nos casos em que os resultados numéricos não ficaram tão próximos dos valores experimentais. Contudo, com o aumento da força, a queda na rigidez nas simulações foi mais acentuada do que nas vigas ensaiadas por Lee, Shin e Lee (2018).

Na Tabela 9 são apresentados valores da recuperação dos deslocamentos para as malhas 1 (M1) e 2 (M2) para todas as vigas simuladas, assim como os valores experimentais encontrados por Lee, Shin e Lee (2018).

Tabela 9 – Recuperação do deslocamento no meio do vão para as vigas simuladas.

VIGA	RECUPERAÇÃO DO DESLOCAMENTO (mm)					
	SEM PLAST.		COM PLAST.		EXPERIMENTAL Lee, Shin e Lee (2018)	
	M1	M2	M1	M2		
S1	D22	5,56	5,76	5,95	6,18	4,1
	RAZÃO	1,355	1,404	1,451	1,508	1
	D28	6,70	7,09	7,99	7,44	6,4
	RAZÃO	1,047	1,108	1,248	1,163	1
S2	D22	6,18	6,09	6,29	6,09	5,7
	RAZÃO	1,084	1,069	1,103	1,069	1
	D28	8,25	7,92	8,37	7,92	8,5
	RAZÃO	0,970	0,932	0,984	0,932	1
S3	D22	6,66	6,07	6,76	6,32	6
	RAZÃO	1,109	1,012	1,127	1,053	1

Para a maioria das simulações, a malha 2 apresentou-se mais rígida, levando a valores menores para a recuperação do deslocamento vertical no meio do vão. Isto ocorre por terem sido usados mais elementos na discretização do aparato desviador, utilizado para garantir a excentricidade do reforço no meio do vão, visando representa-lo de maneira mais adequada na simulação. Considerando as limitações do modelo numérico, a recuperação obtida para as vigas

S2 e S3 são aproximações razoáveis, quando comparadas aos resultados experimentais, permitindo validar as implementações realizadas e possibilitando a consideração de modelos de dano mais sofisticados em estudos posteriores.

8 CONCLUSÕES

Este trabalho objetivou a simulação numérica de vigas de concreto protendido pós-tracionado, empregando para isso uma associação entre a formulação posicional do método dos elementos finitos, a estratégia de embutimento de elementos de treliça em domínios bidimensionais, o modelo de dano proposto por Mazars (1984) e a formulação de plasticidade uniaxial com encruamento linear positivo.

O método dos elementos finitos posicional mostrou-se capaz de simular elementos sujeitos a grandes e pequenos deslocamentos, havendo concordância nos resultados das simulações realizadas com os resultados encontrados na literatura. Da mesma forma, o embutimento dos elementos de treliça em domínios bidimensionais, usando a estratégia empregada por Vanalli, Paccola e Coda (2008), Vanalli et al. (2010) e Radtke, Simone e Sluys (2010) se mostrou eficaz na simulação de meios reforçados com fibras contínuas, sem que houvesse aumento do número de graus de liberdade do sistema.

Em se tratando dos elementos de treliça com grau de aproximação qualquer, as implementações demonstraram resultados que concordaram com as conclusões feitas por Sampaio (2014). No tocante à ativação das fibras, simulando a protensão das armaduras ativas, conclui-se que a imposição da deformação por meio da soma de um valor pré-estabelecido à deformação de Green mostrou-se uma boa estratégia para os propósitos do presente trabalho.

As implementações realizadas associando o método dos elementos finitos às formulações do modelo de dano proposto por Mazars (1984) para a matriz e de plasticidade uniaxial para a armadura foram capazes de simular de maneira satisfatória o comportamento de vigas de concreto armado. Ainda que o modelo de dano empregado possua hipóteses simplificadoras, este demonstrou potencialidade em representar o comportamento do concreto fissurado. É possível concluir também que a metodologia utilizada para a calibração dos parâmetros do modelo de dano se mostrou adequada, permitindo obter tais grandezas a partir da resistência do concreto, do seu módulo de elasticidade ou de curvas experimentais. Quando abordada a protensão externa como reforço para vigas de concreto armado mecanicamente degradadas, obteve-se o efeito desejado de aumento de rigidez das vigas. Ainda que o modelo de dano proposto por Mazars (1984) possua suas limitações, a compreensão de sua formulação simplificada possibilita o estudo de modelos de dano mais sofisticados. Assim, com base na comparação dos resultados dos exemplos encontrados na literatura, conclui-se que o código

computacional desenvolvido foi capaz de simular vigas de concreto protendido pós-tracionado com aderência e vigas de concreto armado reforçadas com protensão externa de modo satisfatório, alcançando-se os objetivos estabelecidos para a presente pesquisa.

8.1 Sugestões para trabalhos futuros

Como continuação dos desenvolvimentos alcançados nesse trabalho, sugere-se a implementação de elementos finitos tridimensionais, a fim de simular elementos estruturais e estruturas mais complexas, como cascas e lajes protendidas. Partindo para o concreto armado em particular, também se recomenda o estudo da perda de aderência entre o concreto e o aço das armaduras em estágios mais avançados de carregamento. Para simular o comportamento do concreto fissurado, podem ser estudados modelos de dano mais gerais, capazes de considerar as deformações plásticas após o descarregamento e de representar o comportamento unilateral do concreto.

Abordando o concreto protendido, podem ser estudadas as perdas de protensão: retração e fluência no concreto, perdas por atrito, por acomodação das ancoragens e por relaxação do aço das armaduras ativas. Para a continuidade dos estudos relacionados à pós-tração, é possível que seja implementada uma estratégia que simule a protensão não aderente. Por fim, sugere-se o estudo dos efeitos dinâmicos da protensão, seja no processo construtivo, no controle de vibrações de estruturas existentes ou em situações transitória, como o transporte, em que o elemento estrutural é submetido a esforços diferentes daqueles encontrados em sua utilização final.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ÁLVARES, M. S. Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos. Dissertação de mestrado, 150 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil (Estruturas)) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.
- ARCHDAILY. Disponível em: <<https://www.archdaily.com/874819/parnas-tower-chang-jo-architects>>. Acesso em: 14 de maio de 2019.
- ARCHDAILY. Disponível em: <<https://www.archdaily.com/901087/worlds-longest-prestressed-concrete-bridge-nears-completion-over-panama-canal>>. Acesso em: 14 de maio de 2019.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- AWA COMERCIAL. Disponível em: <<http://awacomercial.com.br/blog/efeitos-da-protensao-e-seus-beneficios-nas-estruturas-de-concreto/ponte-do-galeao-rio-de-janeiro/>>. Acesso em: 15 de abril de 2019.
- BABUSKA, I., MELENK, J.M. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, p. 727–758, 1997.
- BARBIERI, R.A. Modelo numérico para análise à flexão de elementos estruturais com protensão aderente e não aderente. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 2003. 305 p. Tese de doutorado em Engenharia Civil.
- BONET, J. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 5-7, p. 579–595, 2000.
- BRENNUS, N. R., TATAR, J., HAMILTON, H. R., CONSOLAZIO, G. R. Simplified finite element modelling of post-tensioned concrete members with mixed bonded and unbonded tendons. *Engineering Structures*, v. 179, p. 387–397, 2019.
- CARRAZEDO, R., CODA, H. B. Alternative positional FEM applied to thermomechanical impact of truss structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 46, p. 1008–1016, 2010.
- CARRAZEDO, R., PACCOLA, R. R., CODA, H. B. Active face prismatic positional finite element for linear and geometrically nonlinear analysis of honeycomb sandwich plates and shells. *Composite Structures*, v. 200, p. 849–863, 2018.
- CASSON, L. *Ships and seamanship in the ancient world*, Princeton: Princeton University Press. 1971.
- CECCON, J. L. *Concreto Protendido – Notas de Aula*. Universidade Federal do Paraná. 2007.
- CHABOCHE, J. L. A review of some plasticity and viscoplasticity theories. *International Journal of Plasticity*, v. 24, p. 1642–1693, 2008.

CHUNG, R. C., JUNGWOO, P., YOUNGHYE, K., DOHUN, K. Application of Post-Tension Technology on Tall Buildings. *International Journal of High-Rise Buildings*, v.6, p. 285-296, 2017.

CIMENTO ITAMBÉ. Disponível em: <<https://www.cimentoitambe.com.br/icone-da-engenharia-rio-niteroi-completa-40-anos/>>. Acesso em 12 de julho de 2019.

CODA, H. B. An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description. 17th International Congress of Mechanical Engineering. 2003, São Paulo. Anais...São Paulo: ABCM, 2003.

CODA, H. B. O Método dos Elementos Finitos Posicional: Sólidos e Estruturas – Não Linearidade Geométrica e Dinâmica. ISBN: 975-85-8023-068-0. São Carlos: EESC/USP, 2018.

CODA, H. B., GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, p. 3541–3557, 2004.

CODA, H. B., PACCOLA, R. R. A positional FEM Formulation for geometrical non-linear analysis of shells. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 5, p. 205–223, 2008.

CODA, H. B., PACCOLA, R. R. A total-Lagrangian position-based FEM applied to physical and geometrical nonlinear dynamics of plane frames including semi-rigid connections and progressive collapse. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 91, p. 1–15, 2014.

CODA, H. B., PACCOLA, R. R. An Alternative Positional FEM Formulation for Geometrically Non-linear Analysis of Shells: Curved Triangular Isoparametric Elements. *Computational Mechanics*, Springer Science +Business Media, v. 40, n. 1, p.185-200, 2007.

CODA, H. B. Two dimensional analysis of inflatable structures by the positional FEM. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 6, p. 187–212, 2009.

CODA, H. B., PACCOLA, R. R., SAMPAIO, M. S. M. Positional description applied to the solution of geometrically non-linear plates and shells. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 67, p. 66–75, 2013.

CONSTRUCT APP. Disponível em: <<https://constructapp.io/pt/maiores-obras-de-engenharia-civil-brasil/>>. Acesso em: 23 de julho de 2019.

CORNEJO, A., BARBU, L. G., ESCUDERO, C., MARTINEZ, X., OLLER, S., BARBAT, A. H. Methodology for the analysis of post-tensioned structures using a constitutive serial-parallel rule of mixtures. *Composite Structures*, v. 200, p. 480–497, 2018.

DINGES, T. The History of prestressed concrete. Report submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science. Department of Architectural Engineering and Construction Science. College of Engineering. Kansas State University. Manhattan, Kansas. 2009.

ECIVILUFES. Disponível em: <<https://ecivilufes.wordpress.com/tag/cidade-administrativa/>>. Acesso em: 17 de agosto de 2019.

EVEHX. Disponível em: <<https://evehx.com/servicos/protensao-aderente>>. Acesso em: 14 de abril de 2019.

FIGUEIRAS, J.A. Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells. PhD Thesis, University of Wales, 1983.

FRIEDEL, L. F. O. Análise de estruturas planas reforçadas com fibras ativas viscoelásticas e matriz com modelo constitutivo hiperelástico: aplicações gerais em engenharia e biomecânica. 2016. 213 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil (Estruturas)) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

HANAI, J. B. Fundamentos do Concreto Protendido: e-book de apoio para o curso de Engenharia Civil. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo. 2005. Disponível em:

<http://www.set.eesc.usp.br/mdidatico/protendido/arquivos/cp_ebook_2005.pdf>. Acesso em: 19 de setembro de 2018.

HUSSIEN, O. F., ELAFANDY, T. H. K., ABDELRAHMAN, A. A., ABDEL BAKY, S. A., NASR, E. A. Behavior of bonded and unbonded prestressed normal and high strength concrete beams. HBRC Journal, v. 8, p. 239–251, 2012.

IMPACTO PROTENSÃO. Disponível em:

<<http://impactoprotensao.com.br/servicos/protensao/protensao-nao-aderente/>>. Acesso em: 14 de maio de 2019.

KACHANOV, L.M. Introduction to Continuum Damage Mechanics, Martinus Nighoff Publishers, 1986.

KIM, K. S., LEE, D. H. Nonlinear analysis method for continuous post-tensioned concrete members with unbonded tendons. Engineering Structures, v. 40, p. 487–500, 2012.

LEE, H., TAI, W., CHUNG, W. Post-tension near-surface mounted strengthening system for reinforced concrete beams with changes in concrete condition. Composites Part B, v.161, p. 514–529, 2019.

LEE, J., FENVES, J. L. Plastic damage model for cyclic loading of concrete structures. Journal of Engineering Mechanics, v. 124, p. 892–900, 1998.

LEE, S., SHIN, K., LEE, H. Post-Tensioning Steel Rod System for Flexural Strengthening in Damaged Reinforced Concrete (RC) Beams, Applied Science, v. 8, 2018.

LEMAITRE, J. A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture. Journal of Engineering Materials and Technology, v. 107, p. 83–89, 1985.

LEMAITRE, J., CHABOCHE, J.C. Mechanics of Solid Materials, Cambridge University Press, 1990.

LEONEL, E.D. Notas de aula para a disciplina Introdução à Mecânica da Fratura. Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2017.

LEONHARDT, F. Prestressed concrete – Design and Construction. Ed. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1964.

LIN, T. Y., BURNS, N. H. Design of prestressed concrete structures. Wiley; 1981

LOU, T., LOPES, S. M. R., LOPES, A. V. Finite element modeling of concrete beams prestressed with external tendons. Computers and Structures, v. 28, p. 1919–1926, 2006.

LOU, T., LOPES, S. M. R., LOPES, A. V. Nonlinear and time-dependent analysis of continuous unbonded prestressed concrete beams. Engineering Structures, v. 119, p. 166–176, 2013.

MAC Protensão. Disponível em: <<http://www.macprotensao.com.br/servico/5>>. Acesso em: 14 de abril de 2019.

MACHADO, M.A.S. Aplicação do método dos elementos finitos para a análise elastoviscoplastica de peças de concreto armado e protendido, submetidas a estados planos de tensão. Porto Alegre, PPGEC/UFRGS, 2002, 150 p. Dissertação de mestrado em Engenharia Civil.

MARREY, B., GROTE, J. The story of prestressed concrete from 1930 to 1945: A step towards the European Union. Proceedings of the First International Congress in Construction History, Madrid. 2003.

MAZARS, J. A description of micro and macroscale damage of concrete structures. Engineering Fracture Mechanics, v. 25, p. 729–737, 1986.

MAZARS, J. Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure, Paris, Thèse de Doctorat d'État, Université Paris, 1984.

MAZARS, J., PIJAUDIER - CABOT, G. Continuum damage theory - application to concrete. Journal of Engineering Mechanics, v. 115, p. 345–365, 1989.

MERODIO, J., SOLDATOS, K. P., OGDEN, R. W. Preface to the special issue on “Mechanics of Fibre-Reinforced Materials : Theory and Applications , Part II .” Journal of Engineering Mathematics, p. 1–4, 2015.

MOHAMMED, A. H., TAYSI, N., FAQE, A. H., ABDUL-RAZZAQ, K. Modelling of Bonded Post-Tensioned Concrete Cantilever Beams under Flexural Loading. Civil Engineering Journal, v. 3, p. 463–479, 2017.

MOREIRA, L. S., SOUSA, J. B. M., PARENTE, E. Nonlinear finite element simulation of unbonded prestressed concrete beams. Engineering Structures, v. 170, p. 167–177, 2018.

NAWY, E. G. Prestressed concrete: A fundamental approach. Upper Saddle River, N.J: Pearson/Prentice Hall. 2nd ed. 789 p. 2006.

NOGUEIRA, C. G., VENTURINI, W. S., CODA, H. B. Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frame structures considering the influence of shear strength complementary mechanisms. Latin American Journal of Solids and Structures, v. 10, p. 953–980, 2013.

- NOGUEIRA, C.G. Desenvolvimento de modelos mecânicos, de confiabilidade e de otimização para aplicação em estruturas de concreto armado. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.
- NOGUEIRA, C.G. Um modelo de confiabilidade e otimização aplicado às estruturas de barras de concreto armado. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.
- NOGUEIRA, G. V., PACCOLA, R. R., CODA, H. B. A consistent UVLWT formulation for laminated plane frame analysis considering semi-rigid connections. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 140, p. 59–83, 2018.
- OGDEN, R. W. *Non-linear elastic deformations*. Chichester: Ellis Horwood, 1984.
- PACCOLA, R. R., NETO, D. P., CODA, H. B. Geometrical non-linear analysis of fiber reinforced elastic solids considering debonding. *Composite Structures*, v. 133, p. 343–357, 2015.
- PACCOLA, R. R., SAMPAIO, M. S. M., CODA, H.B. Fiber-matrix Contact Stress Analysis for Elastic 2D Composite Solids. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v.12, p. 583–611, 2013.
- PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. *AcadView: Software para pós-processamento em elementos finitos 2D e 3D*. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2005.
- PASCON, J. P. Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação computacional. 2008. 230 p. (Dissertação Mestrado em engenharia de estruturas). São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC, USP, 2008.
- PASCON, J. P., CODA, H. B. Finite deformation analysis of visco-hyperelastic materials via solid tetrahedral finite elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 133, p. 25–41, 2017.
- PELLIZZER, G.P. Análise mecânica e probabilística da corrosão de armaduras de estruturas de concreto armado submetidas à penetração de cloretos. Dissertação (Programa de Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2015.
- PEREGO, M.A. *Danneggiamento dei materiali lapidei: leggi costitutive, analisi per elementi finiti ed applicazioni*. Tesi di Laurea, Politecnico di Milano, Milano, 1990.
- PEREIRA, D. P. Análise não linear geométrica de sólidos elásticos tridimensionais reforçados com fibras através do método dos elementos finitos. 2015. 85 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.
- PFEIL, W. *Concreto Protendido, volume 3: dimensionamento à flexão*. Rio de Janeiro: LTC – Livros técnicos e Científicos Editora S.A., 1984.
- POPOVICS, S. A numerical approach to the complete stress strain curve for concrete. *Cement and concrete research*, v.3, n.5, p. 583-599, 1973.

PRATES JUNIOR, N. P. Um modelo elasto-viscoplástico de peças de concreto estrutural, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1992. 110p. Dissertação de mestrado em Engenharia Civil.

PROENÇA, S.P.B. Análise não linear de Estruturas – Notas de aula. Pós Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2016.

RABOTNOV, Y.N. Creep problems in structural members. Amsterdam, North Holland, 1969.

RADTKE, F.; SIMONE, A.; SLUYS, L. A computational model for failure analysis of fibre reinforced concrete with discrete treatment of fibres. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 77, p. 597–620, 2010.

RAMIREZ, C.Q. Análise não linear geométrica de músculos esqueléticos via método dos elementos finitos posicional. 2018. 248p. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos. Departamento de Estruturas. São Carlos, 2018.

REDDY, J. N. An introduction to nonlinear finite element analysis. New York: Oxford University Press Inc., 2004.

RIGOT, G., GASPART, M. The Tower at Namur – World’s Tallest Precast Prestressed Concrete Structure. *PCI Journal* May – June 1999. P. 16 – 24. Disponível em: <https://www.pci.org/PCI_Docs/Publications/PCI%20Journal/1999/MayJune/The%20Tower%20at%20Namur%20%20World's%20Tallest%20Precast%20Prestressed%20Concrete%20Structure.pdf>. Acesso em: 25 de agosto de 2019.

SAMPAIO, M. S. M. Análise não linear geométrica de cascas laminadas reforçadas com fibras. 2014. 190 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

SAMPAIO, M. S. M., PACCOLA, R. R., CODA, H. B. Fully adherent fiber-matrix FEM formulation for geometrically nonlinear 2D solid analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 66, p. 12–25, 2013.

SANABRA-LOEWE, CAPELLÁ-LLOVERA, J. The four ages of early prestressed concrete structures. *PCI Journal*. Fall 2014. p. 93-121, 2014.

SANCHES, R.A.K., CODA, H.B. On fluid – shell coupling using an arbitrary Lagrangian – Eulerian fluid solver coupled to a positional Lagrangian shell solver. *Applied Mathematical Modelling*, v. 38, p. 3401–3418, 2014.

SIQUEIRA, T. M. Análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos reticulados planos com ligações deslizantes. 2016. 137 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

SIQUEIRA, T. M., CODA, H. B. Development of Sliding Connections for Structural Analysis by a Total Lagrangian FEM Formulation. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 13, p.2059–2087, 2016.

SIQUEIRA, T. M., CODA, H. B. Total Lagrangian FEM formulation for nonlinear dynamics of sliding connections in viscoelastic plane structures and mechanisms. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 129, p. 63–77, 2017.

SKYSCRAPER. Disponível em: <<http://www.skyscrapercenter.com/complex/3454>>. Acesso em 13 de julho de 2019.

SKYSCRAPER. Disponível em: <<http://www.skyscrapercenter.com/building/parnas-tower/19632>>. Acesso em: 13 de julho de 2019.

SOARES, H. B., PACCOLA, R. R., CODA, H. B. Unconstrained Vector Positional Shell FEM formulation applied to thin-walled members instability analysis. *Thin Walled Structures*, v. 136, p. 246–257, 2019.

TAUCHERT, T. R. *Energy principles in structural mechanics*. McGraw Hill Book, 1974.

TORR, C. *Ancient ships*, Chicago: Argonaut. 1964.

VANALLI, L., PACCOLA, R. R., SCOARIS, M. R., CODA, H. B. A simple method for non-linear analysis of steel fiber reinforced concrete. *Acta Scientiarum - Technology*, v. 32, p. 367–374, 2010.

VANALLI, L., PACCOLA, R. R., CODA, H. B. A simple way to introduce fibers into FEM models. *Communications In Numerical Methods In Engineering*, v. 24, n. 7, p.585- 603, 2008.

VIVER AS CIDADES. Disponível em: <<http://viverascidades.blogspot.com/2013/02/totens-urbanos-ponte-juazeiro-petrolina.html>>. Acesso em: 24 de julho de 2019.

WEILER. Disponível em: <<http://www.weiler.com.br/dormentes/dormentes.html>>. Acesso em: 14 de abril de 2019.

YANG, K., MUN, J. Flexural Capacity and Stress in Unbonded Tendons of Post Tensioned Lightweight Concrete Beams, v. 16, p. 1297–1310, 2013.

ZHANG, X., WANG, L., ZANG, J., MA, Y., LIU, Y. Flexural behavior of bonded post-tensioned concrete beams under strand corrosion. *Nuclear Engineering and Design*, v. 313, p. 414–424, 2017.

ZHOU, W., XIE, X. Flexural response of continuous unbonded post-tensioned beams strengthened with CFRP laminates. *Composite Structures*, v. 211, p. 455–468, 2019.

ZONA, A., RAGNI, L., DALL'ASTA, A. Finite element formulation for geometric and material nonlinear analysis of beams prestressed with external slipping tendons, v. 44, p. 910–919, 2008.

APÊNDICE A – REPRESENTAÇÃO DA VARIÁVEL DANO NAS VIGAS SIMULADAS

Neste apêndice são apresentados os resultados das simulações de algumas das vigas dos exemplos 7.5 e 7.8. Estes resultados são ilustrações do valor da variável dano nas vigas, plotados na posição deslocada. Para melhor visualização, os deslocamentos foram multiplicados por um fator de escala igual a 5.

A.1 Aplicação do modelo de dano proposto por Mazars (1984) a vigas de concreto armado: viga subarmada

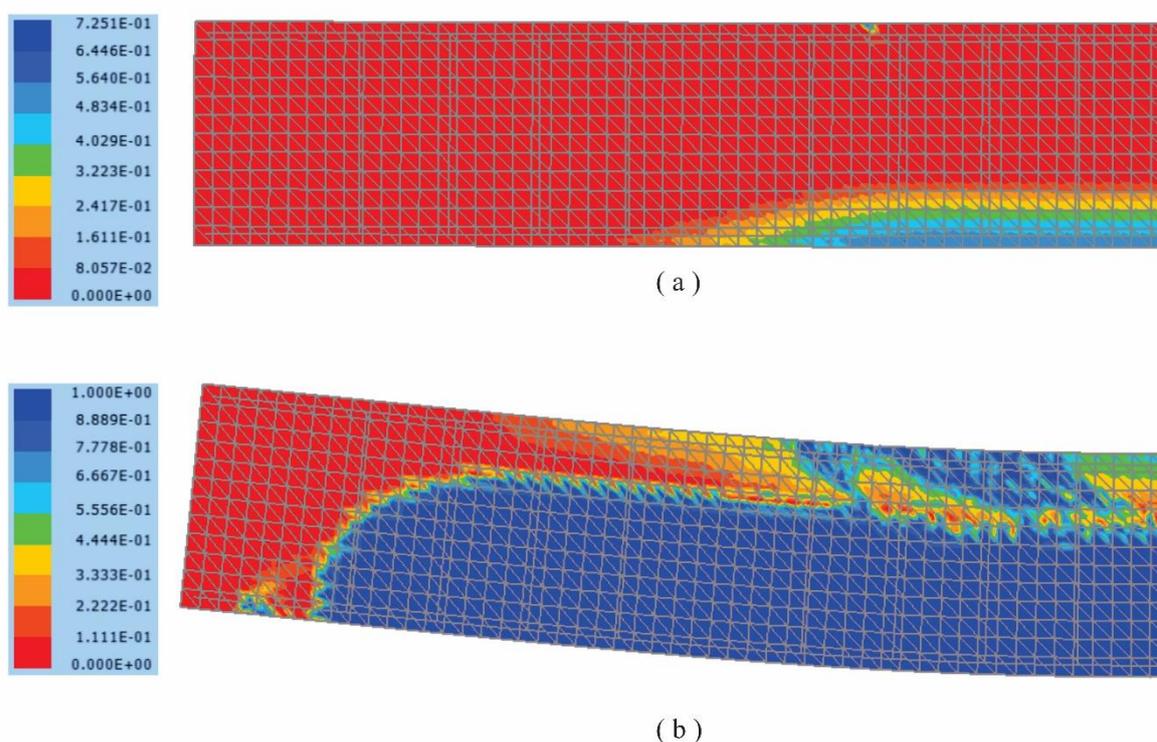
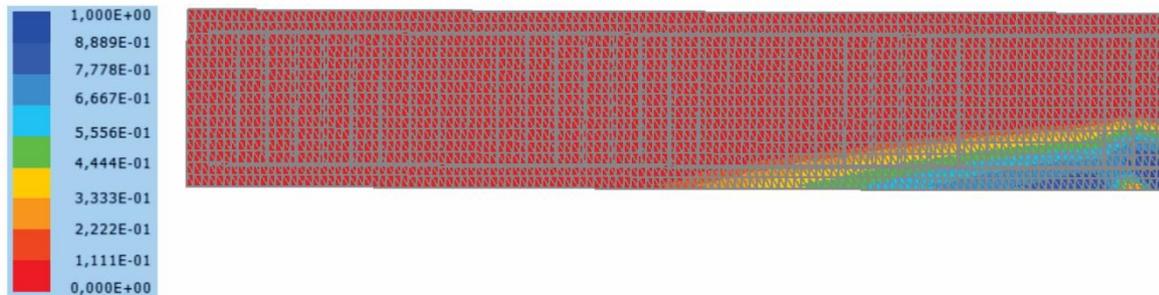


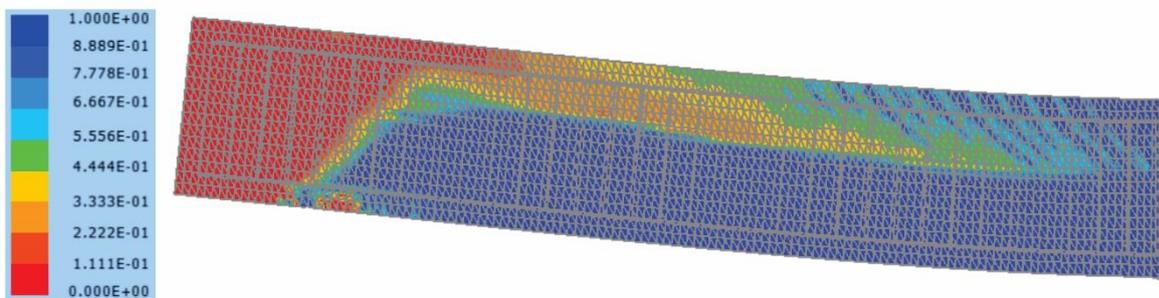
Figura A 1 – Representação da variável dano para a viga subarmada simulada.

Na Figura A 1, o item (a) ilustra o primeiro passo em que ocorreu a danificação do concreto, do lado tracionado. Já no item (b), é ilustrado o valor da variável dano ao longo da viga no último passo simulado. Observa-se a formação da rótula plástica na região mais próxima da extremidade direita: ocorreu movimento de corpo rígido nesta região.

A.2 Protensão externa: reforço de vigas de concreto armado – Viga S1 D22 sem plasticidade nas armaduras



(a)



(b)

Figura A 2 – Representação da variável dano para a viga de controle No S1 no primeiro passo de carga em que ocorre danificação e no último passo de carga simulado.

Na Figura A 2 (a) foi apresentado o primeiro passo no qual ocorreu a degradação mecânica do concreto na simulação. Já no item (b), é ilustrado o resultado para o último passo da simulação. Observa-se que, conforme a simulação evolui, o concreto das fibras superiores passa também a ser degradado – por esmagamento.

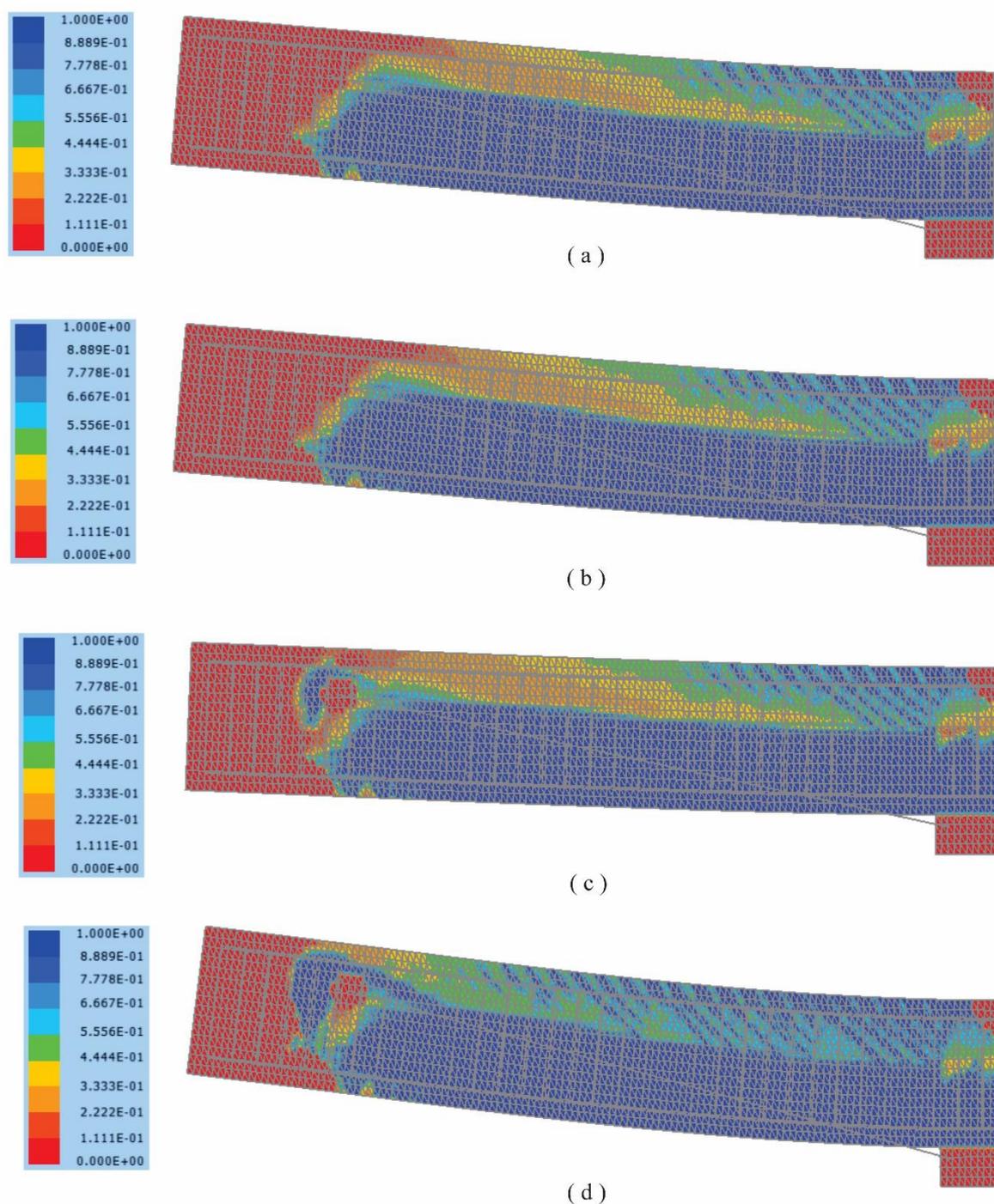


Figura A 3 – Representação da variável dano para as vigas reforçadas com protensão externa S1 D22.

Na Figura A 3 são apresentadas 4 imagens, correspondentes a cada um dos processos dos ensaios realizados por Lee, Shin e Lee (2018). No item (a), ilustra-se o último passo de carga antes do início do descarregamento. Já no item (b), é representado o último passo de carga correspondente ao descarregamento. Por outro lado, no item (c), é apresentado o último passo da aplicação da protensão, ficando evidente a recuperação do deslocamento vertical no meio do vão. Finalmente, no item (d) é ilustrado o último passo de carga da simulação.