

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

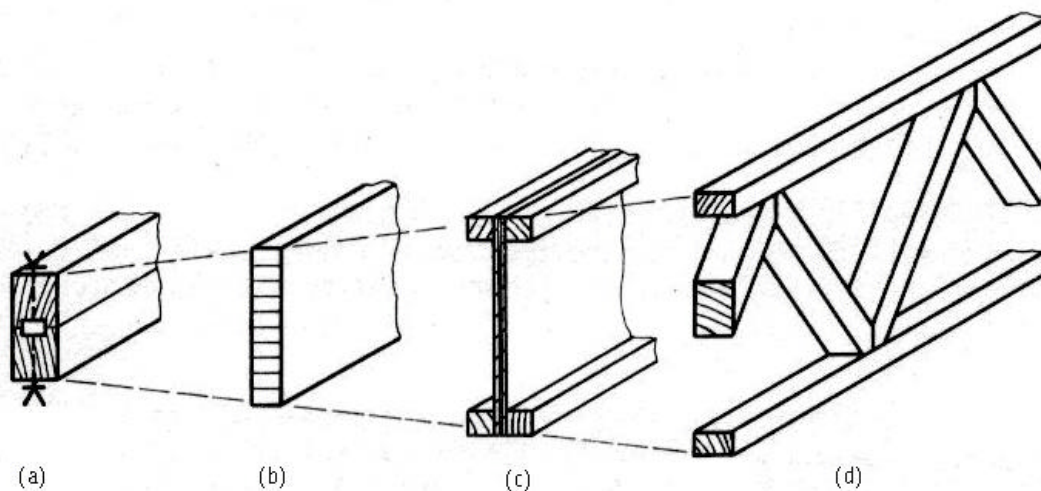
### 2.1. Vigas de madeira compostas

As vigas compostas são elementos estruturais sujeitos basicamente a solicitação de flexão, formados pela união de duas ou mais peças justapostas. As peças compostas apresentam várias características, que fazem com que sejam largamente empregados nos mais variados tipos de construções. Entre as mais importantes é possível citar:

- Possibilidade de alcance de grandes vãos com o emprego de peças com dimensões reduzidas.
- Maior aproveitamento da tora.
- Melhor adaptação às condições de variação climática, com menos problemas de secagem quando comparadas às peças maciças.
- Redução da possibilidade de presença de defeitos.
- Adequação para utilização em estruturas de cobertura e outros tipos de estruturas onde o menor peso e a mais fácil montagem do sistema sejam aspectos de interesse prioritário.

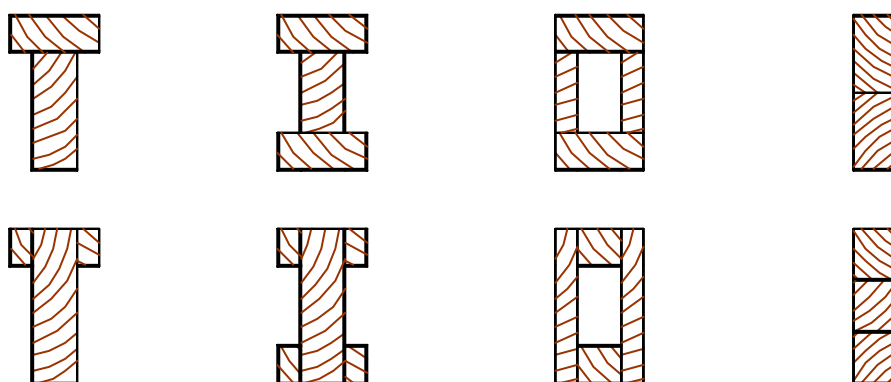
As seções transversais podem ser compostas por peças de madeira serrada ou de outros materiais, como os derivados de madeira (compensado, OSB – Oriented Strand Board, LVL – Laminated Veneer Lumber) ou até mesmo o concreto (utilização comum em tabuleiro de pontes). Da mesma forma, existem vários tipos de ligação que podem ser empregados para a união das peças. Pode-se dividi-las em dois grandes grupos: uniões mecânicas e uniões adesivas. As uniões adesivas são consideradas na bibliografia como “uniões rígidas”, ou seja, não proporcionam deslizamentos significantes entre as partes unidas. Já as uniões mecânicas são naturalmente deformáveis, e suas deformações devem ser computadas no cálculo estrutural.

Assim, ficam evidentes os inúmeros tipos de seções transversais que podem ser construídos. As vigas compostas podem ser classificadas pela forma da composição como indicado na figura 1.



**Figura 1** – Tipos de vigas compostas. (a) viga composta de madeira maciça; (b) viga laminada colada; (c) viga com alma esbelta; (d) viga em treliça. Fonte: GEHRI (1988)

O primeiro tipo de viga composta, apresentado na figura 1, é justamente o estudado neste trabalho. Essas vigas podem ter várias formas como por exemplo as seções T, I, Caixão, ou retangular solidarizadas continuamente, (vide figura 2). As três primeiras formas de seção transversal são usualmente unidas por pinos metálicos, em especial os pregos. Já as peças de seção retangular utilizam os mais variados tipos de conectores, dentre eles os mais utilizados são os anéis metálicos, os tarugos metálicos e os tarugos de madeira.



**Figura 2** – Exemplos de configuração de seções transversais compostas solidarizadas continuamente.

Essa forma de composição não possibilita emendas longitudinais, tornando seu comprimento restrito ao tamanho usual das peças de madeira. A facilidade e o baixo custo de produção,

---

fazem com que essas vigas compostas sejam extensamente utilizadas como vigas de uso doméstico, para 4 a 6 metros de vão, como também para longarinas de pequenas pontes até 12 metros de vão.

O segundo tipo (figura 1-(b)) é a chamada Madeira Laminada Colada (MLC). Esse tipo de composição possibilita o emprego de várias formas e dimensões, favorecendo sua utilização para os mais variados fins. Extensamente utilizadas em vários países do mundo, são pré-fabricadas, agregando ao produto final maior confiabilidade, em consequência do rigoroso controle de qualidade. No Brasil, existem estudos sobre este tipo de composição, mas pouco se encontra no mercado, devido principalmente ao alto custo dos adesivos.

As vigas compostas com alma esbelta (do tipo *c*) são ótimas soluções para coberturas em geral. Como características principais, esse tipo apresenta leveza e facilidade de construção. As mesas geralmente são fabricadas de madeira serrada, podendo ser de Madeira Laminada Colada, quando usadas em grandes dimensões. Já a alma é encontrada dos mais variados materiais, desde tábuas inclinadas até os materiais derivados de madeira, compensado e OSB. Nos EUA, é comum o uso dessas vigas como barroteamento para pisos de residências, são chamadas de "I-Joists". No Brasil, existe a previsão de fabricação de OSB a partir do começo do próximo ano, e o compensado é um material com grande potencial para o uso.\*

As vigas compostas em treliça (figura 1-(d)) são geralmente usadas em grandes vãos. Seus elementos podem ser fabricados de madeira serrada ou Madeira Laminada Colada e suas ligações podem ser adesivas ou mecânicas. O desenvolvimento dos conectores tipo chapa com dentes estampados (CDE) possibilitou maior agilidade na fabricação desse tipo de peça composta, impulsionando o seu emprego principalmente em coberturas.

Em todos os casos de peças compostas unidas por ligações mecânicas deformáveis, os deslizamentos devem ser considerados. Esses deslizamentos devem ser definidos para cada tipo de seção composta a fim de apresentar um critério de dimensionamento que reproduza a realidade, com simplicidade e precisão.

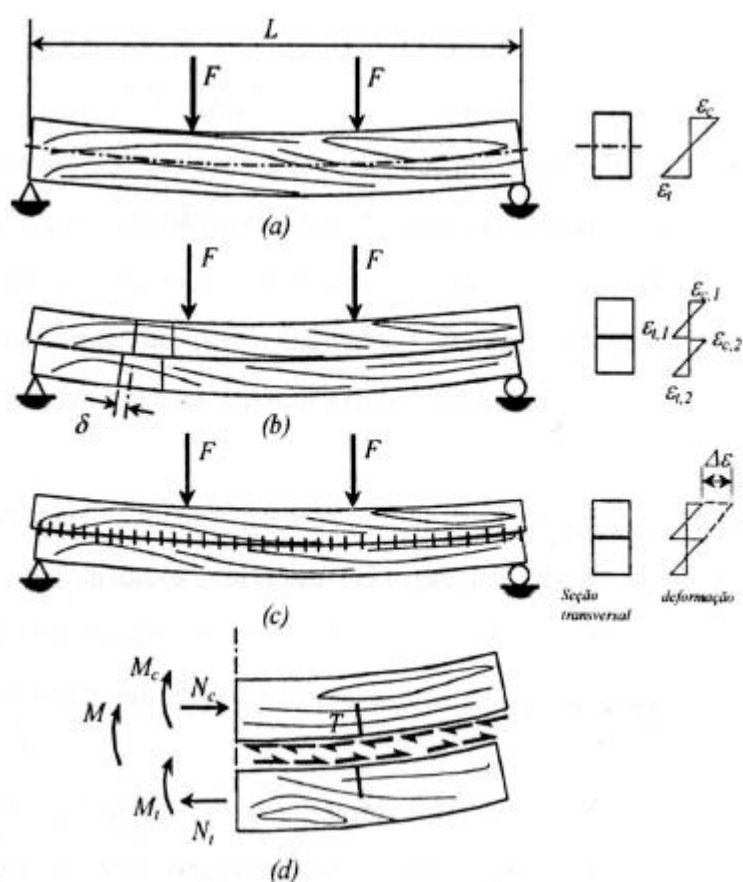
---

\* Comunicação pessoal: Andrés Armstrong Wurth – Diretor de Marketing Masisa do Brasil Ltda.

## 2.2. Métodos de Análise de Vigas Compostas

### 2.2.1. Conceitos Básicos

Segundo a hipótese de Navier, uma viga apresenta, numa seção transversal qualquer, distribuição contínua de deformações longitudinais ao longo de sua altura, figura 3-(a). Por outro lado, numa peça de elementos sobrepostos independentes, isto é, sem nenhum tipo de conector interligando-os, a distribuição das deformações é contínua somente ao longo da altura de cada elemento. Nas superfícies de separação são observadas descontinuidades decorrentes do comportamento individualizado. Verificam-se, nessas interfaces, alongamentos e encurtamentos das superfícies externas dos elementos adjacentes da viga, figura 3-(b).



**Figura 3** – Deformação de uma barra fletida. (a) seção maciça; (b) barras sobrepostas; (c) seção composta interligada por pinos metálicos; (d) esforços solicitantes. Fonte: ALVIM (2002)

Quando os elementos constituintes de uma viga composta estiverem interligados, os conectores restringem parte dos deslizamentos relativos que ocorrem entre as peças

---

independentes, produzindo uma interação entre eles. A distribuição das deformações nessa viga, ainda apresenta as descontinuidades nas interfaces; entretanto, são inferiores às verificadas na peça de elementos independentes, figura 3-(c).

Diante do exposto, fica evidenciada a principal característica das vigas compostas: o comportamento mecânico interposto ao das vigas maciças e ao das peças de elementos independentes.

O comportamento intermediário é influenciado diretamente pela rigidez dos elementos de ligação utilizados para a sua solidarização. Considerando o emprego de uma ligação “perfeitamente rígida”, não surgem deslocamentos relativos entre os pontos da borda que delimitam a zona de contato entre as peças.

Na teoria, tais peças podem ser consideradas como de seção homogênea, supondo uma seção transversal equivalente à soma de todas as outras seções transversais individuais, aplicando-se a teoria clássica da flexão para vigas. Contudo, os dispositivos de união usados nos casos correntes de projeto são deformáveis. Com isto, tem-se uma “ligação elástica” onde, após a deformação da peça por flexão, ocorrem escorregamentos das porções interligadas, ocasionados pela deformabilidade dos conectores.

O aparecimento de tais deslocamentos relativos produzem uma distribuição de esforços internos que difere consideravelmente daqueles correspondentes às ligações rígidas. Portanto, o momento de inércia e o módulo de resistência das peças compostas, unidas por conectores deformáveis, passam a ser uma fração daqueles das peças consideradas maciças. A magnitude dessa fração dependerá de parâmetros geométricos da viga, bem como de uma série de fatores que caracterizam a rigidez da ligação.

O efeito da composição dessas peças é garantido pela transmissão dos esforços cortantes por meio da ligação. Os conectores devem suportar as tensões de cisalhamento distribuídas na região de contato entre as peças, figura 3-(d). Desse modo, é estabelecido um certo grau de monolitismo entre as peças justapostas.

Então, fica evidente a necessidade de utilização de critérios especiais para o correto dimensionamento dos elementos estruturais formados de peças compostas.

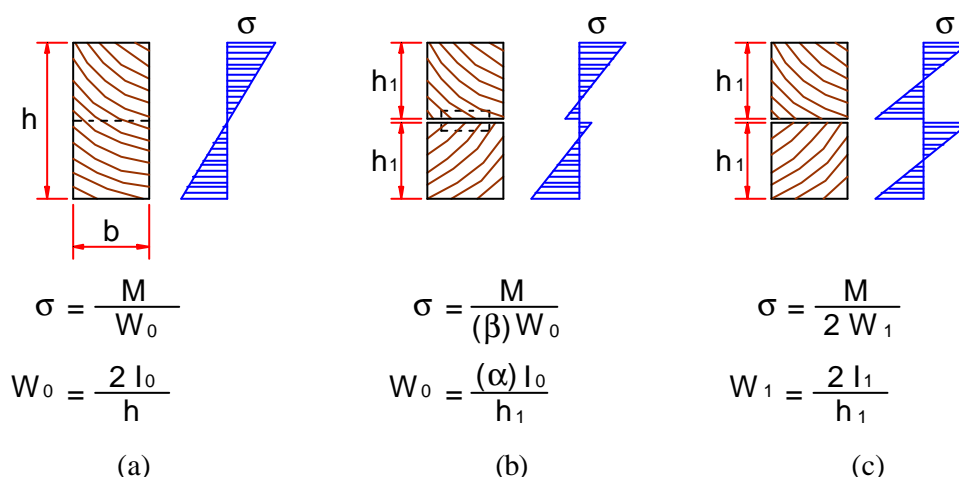
Atualmente são utilizados basicamente dois métodos distintos, adotados pelos principais documentos normativos do mundo, para o dimensionamento de peças compostas: o método dos coeficientes de minoração e o método analítico.

O primeiro é adotado por alguns documentos normativos, como por exemplo, a norma suíça SIA 164 (1981) e a recente norma brasileira NBR 7190 (1997). Esse método consiste no emprego de coeficientes de minoração os quais são aplicados ao módulo de resistência e ao momento de inércia da área transversal total da viga composta. Os coeficientes de minoração, também chamados de coeficientes de eficiência, podem ser determinados em função dos resultados de experimentação de pares de vigas semelhantes, uma composta e outra maciça.

A outra forma de se projetar vigas compostas é sobre a ótica do desenvolvimento analítico do problema, em que as deformações dos conectores são consideradas com algumas hipóteses simplificadoras. As normas EUROCODE 5 (1993) e DIN 1052 (1988) apresentam critérios de dimensionamento fundamentados neste método. A seguir são apresentados os dois métodos e os principais trabalhos de autores nacionais e internacionais sobre o tema, desenvolvidos no decorrer de todo o século XX.

### 2.2.2. Método dos Coeficientes de Minoração

Esse método consiste na aplicação de coeficientes redutores sobre as propriedades geométricas das peças compostas. Os coeficientes de minoração ou de eficiência têm a função de estabelecer a correspondência entre peças compostas e maciças. Para isso, são necessários dados experimentais adequados para estabelecer essa correspondência.



**Figura 4** – Comportamento interposto das peças compostas. (a) seção maciça equivalente; (b) seção composta interligada por união deformável; (c) seção com dois elementos sobrepostos. Fonte: GEHRI (1988)

A figura 4 ilustra o comportamento interposto das peças compostas e o uso dos coeficientes de minoração.

Esse processo ganhou aceitação no meio técnico após a publicação do trabalho de KIDWELL (1897). O autor estudou alguns tipos de vigas compostas utilizadas no final do século XIX, realizando vários ensaios de flexão com carregamento concentrado no centro do vão.

O coeficiente de redução do módulo de resistência ( $\beta$ ) foi estimado pela relação entre os valores das cargas de ruptura da viga composta e da viga maciça, adicionados os respectivos pesos próprios de cada viga (vide eq. 1).

$$\beta = \frac{P_c + g_c}{P_s + g_s} \quad (1)$$

Onde:

$P_c$  = carga de ruptura da viga composta;

$P_s$  = carga de ruptura da viga maciça;

$g_c$  = peso próprio da viga composta;

$g_s$  = peso próprio da viga maciça.

O coeficiente de redução do momento de inércia ( $\alpha$ ) foi estimado pelo quociente das flechas centrais, verificadas na viga maciça e na viga composta, quando estas são solicitadas por um mesmo carregamento (vide equação 2).

$$\alpha = \frac{f_s}{f_c} \quad (2)$$

Onde:

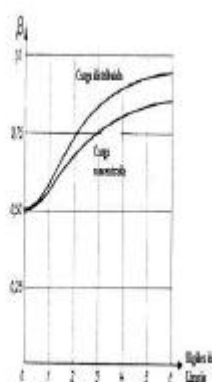
$f_s$  = flecha verificada na seção central da peça maciça;

$f_c$  = flecha verificada na seção central da peça composta.

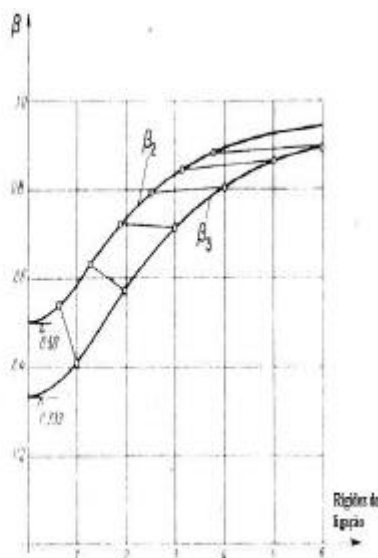
Na determinação dos valores dos coeficientes, a influência do espaçamento dos conectores, suas dimensões, a relação vão/altura da viga composta foram consideradas de maneira global através de média aritmética dos resultados obtidos nos diversos ensaios realizados. KIDWELL destaca que os valores de eficiência revelam-se como sendo um parâmetro altamente variável, principalmente quando não é feita nenhuma particularização envolvendo qualquer um dos parâmetros relacionados acima. Apesar da grande variabilidade, foram

lançadas as bases para os documentos normativos vigentes na época, adotando o método dos coeficientes, considerando os propostos por KIDWELL.

A partir da década de quarenta, começaram a surgir novos trabalhos avaliando alguns fatores que influenciam nos valores dos coeficientes. STÜSSI (1943), *apud* GEHRI (1988), estudou a influência do tipo de carregamento e, em 1947, segundo GEHRI (1988), a influência do número de elementos das vigas compostas (vide figuras 5 e 6). Em seguida MÖHLER (1956), *apud* GEHRI (1988), sugeriu um processo aproximado, considerando também a influência do comprimento do vão (vide figura 7).



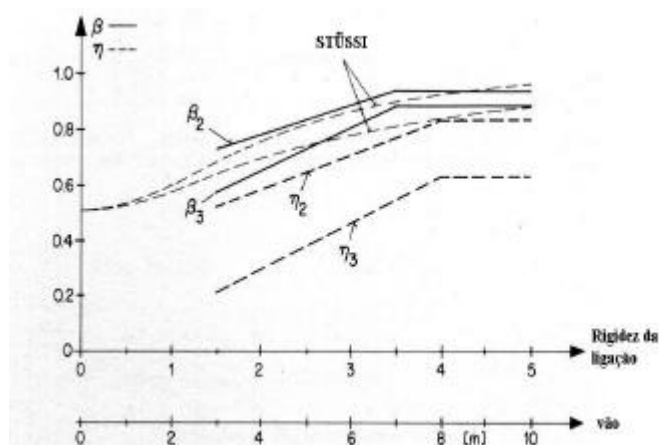
**Figura 5** – Influência do tipo de carregamento no coeficiente **b**. Fonte: GEHRI (1988)



**Figura 6** – Eficiência **b** em função da rigidez da ligação para vigas compostas com 2 e 3 elementos. Fonte: STÜSSI (1947)

Outros autores como PEARSON et al. (1967), *apud* RODRIGUES (1984), apresentam alguns coeficientes de minoração, aplicáveis à forma de vigas compostas mais modernas.





**Figura 7** –Valores dos coeficientes de redução em função do vão. Fonte: GEHRI (1988)

Como dito anteriormente, esse método ainda é adotado por alguns documentos normativos, como a norma suíça SIA 164/81 (atualmente em estágio de revisão) e a norma brasileira NBR 7190/97. A tabela 1 apresenta os valores propostos pelos dois documentos normativos.

**Tabela 1:** Valores dos coeficientes de eficiência da Norma Brasileira e Suíça.

Normas	Viga de seção T		Viga de seção I		Viga de seção retangular			
					Duas peças		Três peças	
	a	b	a	b	a	b	a	b
<b>NBR 7190/97</b> †	0,95	-	0,85	-	0,85	-	0,70	-
<b>SIA 164/81</b> ‡	-	-	-	-	0,65	0,85	0,33	0,60

As verificações das tensões normais e dos deslocamentos máximos são feitas considerando a redução do módulo de resistência e do momento de inércia. Já a verificação das tensões cisalhantes, bem como da força atuante nos conectores, é feita como se a viga fosse de seção maciça.

Apesar de proporcionar agilidade no cálculo, tal método apresenta grande variabilidade e por este motivo alguns documentos normativos que anteriormente adotavam-no, após revisão optaram pelo método analítico.

† A norma brasileira não faz referência ao coeficiente de redução do módulo de resistência ( $\beta$ ), mas pode ser considerado com o mesmo valor do coeficiente ( $\alpha$ ).

‡ A norma suíça apresenta coeficientes distintos para elementos compostos de duas ou três peças, mas não faz distinção entre a forma da seção transversal, seja ela T, I ou retangular.

### 2.2.3. Método Analítico de Cálculo

Foi NEWMARK, em 1943, o primeiro autor a apresentar uma formulação analítica e geral para as vigas compostas, envolvendo o grau de interação dos elementos proporcionado pelos conectores empregados na composição. No trabalho publicado por NEWMARK *et al.* (1951), além do método experimental mais conveniente para a caracterização dos conectores, são apresentadas observações experimentais em vigas compostas de aço e concreto, comprovando o tratamento analítico de sua autoria. A teoria de sua análise é baseada nas equações de equilíbrio e na compatibilidade de deslocamentos, fundamentada nas hipóteses da Resistência dos Materiais. Cabe ainda ressaltar o fato dos estudos posteriores, desenvolvidos por outros autores, seguirem os princípios estabelecidos por NEWMARK.

Na mesma época, GRANHOLM (1949), *apud* GOODMAM (1968), relatou na Suíça, suas investigações sobre vigas e colunas compostas de madeira, baseadas nos princípios de NEWMARK.

Em seguida, PLESKOV (1952), *apud* SMITH (1980), publicou na União Soviética um estudo teórico-experimental sobre o comportamento de pilares de madeira construídos de elementos interligados deformáveis. O autor deduziu as equações diferenciais de comportamento e apresentou as soluções em séries trigonométricas.

MÖHLER (1956) desenvolveu o método de análise baseado nas equações de equilíbrio, e seu trabalho serviu de base para a norma alemã DIN 1052, no que se refere ao cálculo de vigas compostas.

As vigas compostas de três elementos foram estudadas por GOODMAN & POPOV (1968), tendo sido desenvolvido um equacionamento fundamentado nas hipóteses de NEWMARK. Novas contribuições ao estudo das vigas compostas foram apresentadas com análise teórica e experimentação da influência no comportamento dessas peças produzidas, quando a interligação das extremidades dos elementos das vigas é feita ou utilizando-se uniões rígidas (adesivo), ou utilizando-se uniões deformáveis.

KUENZI & WILKINSON (1971) aplicaram a teoria de vigas sandwich, desenvolvida por NORRIS *et al.* (1952) para a análise de vigas simplesmente apoiadas com duas cargas concentradas simetricamente no meio do vão. Em seguida, os autores estenderam a teoria para vigas simplesmente apoiadas com carregamento uniformemente distribuído.

---

Uma aplicação do método dos elementos finitos no estudo das vigas compostas, usadas em pisos residenciais, foi desenvolvida por THOMPSON *et al.* (1975). O funcional de energia potencial considera: força normal e momento fletor nos elementos, tensões cisalhantes nos conectores e as ações exteriores. Os deslocamentos verticais e horizontais da viga foram aproximados por funções cúbicas e por funções lineares, respectivamente, as quais são expressas por variável única, a do posicionamento dos pontos nodais dos elementos finitos. As variações de forma geométrica e de propriedades mecânicas dos componentes da viga composta e os diferentes valores do módulo de deslizamento das conexões, podem ser considerados no cálculo das flechas e dos deslocamentos horizontais.

O grau de precisão dos deslocamentos, os quais foram calculados num programa de computador especialmente desenvolvido, foi avaliado pela comparação dos resultados calculados com os verificados em experimentação de dezesseis vigas. Tendo em vista a diferença observada, os autores concluíram pela validade do método de análise, viabilizando, então, o estudo de problemas mais complexos por simulação em computador evitando, com isso, alguns trabalhos experimentais dispendiosos.

ITANI & BRITO (1978) estudaram as vigas compostas unidas com adesivos flexíveis, comprovando experimentalmente a validade dos modelos desenvolvidos pelos autores citados anteriormente, para este tipo de composição.

SMITH (1980) apresentou um estudo geral das peças compostas de dois e três elementos, biapoiadas e submetidas a oito formas de carregamento. O autor empregou as Séries de Fourier para a solução das equações diferenciais e seus resultados teóricos foram comparados com os experimentais obtidos por KUENZI. A respeito da utilização das séries trigonométricas, não foi possível fixar o número de termos da série necessário para se obter a solução mais próxima da exata, pois é função da forma de carregamento.

Nos trabalhos anteriores, a análise de vigas compostas utiliza o conceito de módulo de deslizamento constante. Com esse conceito, as equações diferenciais podem ser obtidas e resolvidas. Todavia, KAMIYA (1985) afirma que, como os deslocamentos verticais das vigas calculados por estas teorias são proporcionais ao carregamento externo aplicado, a teoria só é válida, quando o deslizamento nos conectores é muito pequeno.

O comportamento não-linear das ligações por pregos pode ser admitido com a adoção do módulo de deslizamento variável, em função do nível de carregamento da ligação. GOODMAN (1969), *apud* KAMIYA (1985), considera esta não-linearidade variando o valor

do coeficiente de deslizamento a cada novo incremento de carga, tomando por base a força máxima atuante no conector do extremo da viga.

Outro efeito físico muito importante destacado por KAMIYA (1987) é que a força atuante nas ligações não varia somente com o nível de carregamento externo, mas também ao longo do comprimento da viga. Então, em uma análise mais rigorosa, o módulo de deslizamento do conector deve variar não somente com a força atuante sobre o mesmo, mas também de acordo com seu posicionamento ao longo da viga.

BESSETTE & HOYLE (1985) apresentam um estudo experimental de vigas compostas unidas por adesivo flexível, fazendo comparação com programas computacionais e o método proposto por KUENZI, obtendo bons resultados.

Vigas compostas de seção T e I com alma em madeira maciça e mesas em derivados de madeira, como o Compensado e OSB (analogia ao sistema de piso muito utilizado nos EUA) são investigadas por MCCUTCHEON (1986). O autor apresenta uma metodologia simplificada para o cálculo desse tipo de composição, baseada na teoria de KUENZI e adotando o método da seção transformada.

BOHNHOFF (1992) apresenta uma nova análise não-linear pelo método dos elementos finitos, para as peças compostas com várias lâminas. O autor utiliza um novo modelo de abordagem para o efeito do deslizamento da ligação por pregos. Realiza vários ensaios em vigas compostas de peças maciças, com espaçamento entre pregos constante ou variável, obtendo resultados próximos dos calculados pelo seu programa.

GIRHAMMAR & GOPU (1993) apresentaram a análise teórica exata de primeira e segunda ordem para vigas e colunas compostas com interação parcial. O método foi aplicado em exemplos numéricos para o caso de vigas simplesmente apoiadas de seção T com mesa em concreto. Foram desenvolvidas expressões explícitas para os deslocamentos e para as ações internas dessas vigas. Os resultados ilustram claramente a magnitude das ações e deformações devido ao efeito de segunda ordem.

WHEAT e CALIXTO (1994) fazem outra abordagem para a análise de vigas compostas, baseada nos princípios da energia, com a utilização do cálculo variacional, incluindo a relação não-linear para a ligação.

KREUZINGER (1995) apresenta uma solução analítica para vigas e colunas compostas com uniões deformáveis, baseado no emprego das equações diferenciais, desenvolvidas por

MÖHLER. O autor afirma que, embora a derivação seja baseada em uma distribuição senoidal de carregamento, a solução é aplicável para as mais variadas distribuições de carregamento. No desenvolvimento não são considerados o módulo de fundação elástica da madeira e a teoria de segunda ordem.

No Brasil, foram realizadas algumas pesquisas sobre o efeito da composição não rígida de peças compostas e a seguir estão relatados alguns dos principais trabalhos.

RODRIGUES (1984) desenvolveu um estudo de vigas compostas de quatro elementos de madeira roliça, interligadas por anéis metálicos.

ALMEIDA (1990) apresentou extenso trabalho sobre peças de madeira composta com especial atenção para vigas com alma treliçada. Como resultado de seu trabalho, foi construída, em 1990, uma ponte de 28 metros de vão sobre o rio Piracicaba, no Estado de São Paulo, com longarinas e transversinas compostas com alma treliçada.

SANTANA (1997) apresentou pesquisa teórica e experimental a respeito das vigas de seção I e Caixão com alma em compensado. Em seu trabalho, foi feito um estudo teórico, investigando o comportamento da viga composta, tendo sido incluídos os efeitos que influenciam em sua rigidez, particularmente a deformação das ligações. A partir da revisão de códigos normativos e outras pesquisas sobre o assunto, SANTANA (1997) observou que o efeito da composição parcial da seção é amplamente considerada, justificando a sua inclusão na análise da viga.

A partir da análise teórica, SANTANA (1997) observou que a influência da composição parcial pode chegar até a 20% em relação aos deslocamentos da viga, sendo que os parâmetros influentes, além da rigidez da ligação, são a área da mesa, o seu distanciamento do eixo da seção e o comprimento do vão.

Outra importante conclusão de seu trabalho é a afirmação de que, apesar de os deslocamentos destas vigas serem altamente influenciados pela composição parcial, a influência nas tensões é praticamente desprezível.

FERREIRA (1999), em sua tese sobre pontes pré-fabricadas de madeira, realizou um estudo do comportamento de peças com seção transversal composta tipo I simétrica de madeira maciça, para aplicação em pontes de pequenos vãos. A autora comparou os métodos utilizados pela norma brasileira e pelo EUROCODE 5 com os seus resultados experimentais, por meio do coeficiente de rendimento  $\alpha$  (razão entre o momento de inércia efetivo e o

momento de inércia da seção maciça). Verificou que o valor indicado na norma brasileira ( $\alpha_r = 0,85$ , para seção I) é muito superior àqueles determinados experimentalmente e pelo EUROCODE 5, e que o método do EUROCODE 5 conduziu a valores próximos dos valores de  $\alpha$  determinados experimentalmente.

TACITANO (1999) desenvolveu uma análise teórica e experimental sobre vigas de seção T em madeira-concreto com ligação semi-rígida, as quais têm sido utilizadas com sucesso em estruturas de ponte. TACITANO & DEMARZO (2000) realizaram uma análise comparativa entre o método exato e o método aproximado, concluindo que o método aproximado é ideal para o uso em engenharia, pois os procedimentos de cálculo são mais simples e resultam em boa precisão.

SORIANO & MASCIA (2000) desenvolveram trabalho sobre vigas mistas de concreto-madeira com seção T. Foi apresentada uma análise experimental de vigas T em concreto-madeira, submetidas à carga concentrada, verificando a eficiência do sistema de ligação por pregos. Os autores concluíram que o sistema de conexão por pregos apresenta eficiência de pouca relevância. A utilização de um sistema de conexão de baixa eficiência acarreta, para baixos níveis de carregamento, o surgimento de duas linhas neutras sobre a seção do elemento estrutural. Com isso, as fibras inferiores da mesa em concreto passam a grandes solicitações de tração, exigindo, assim, altas taxas de armadura. Para estruturas submetidas a elevados carregamentos, deve-se buscar outros elementos metálicos que possibilitem maior eficiência da ligação.

STAMATO (2000) apresentou um estudo teórico de códigos normativos referentes ao dimensionamento de peças compostas por chapas de madeira compensada. O efeito da composição parcial e a grande deformação por cisalhamento influenciaram no dimensionamento desses elementos.

SANTANA & MASCIA (2000) apresentaram uma abordagem numérica de vigas compostas de madeira com alma em chapa de compensado, fornecendo meios para a solução desse tipo de viga composta, incluindo a consideração do comportamento não linear para as ligações. Foi apresentada uma abordagem teórica baseada na minimização da energia potencial total e o método de solução numérica por meio do método das diferenças finitas.

ALVIM (2002) propôs um modelo de rigidez efetiva, baseado na teoria de PLESHKOV para o estudo de pilares de madeira composta. Em sua investigação experimental física, realizada

com o método de carregamento incremental, obtém resultados satisfatórios, quando comparados com o modelo teórico proposto.

A seguir são apresentados os desenvolvimentos teóricos do modelo analítico, baseado nas equações de equilíbrio, com a finalidade de proporcionar maior compreensão sobre essa teoria.

### **2.3. Modelo Teórico Baseado nas Equações de Equilíbrio**

Todo o desenvolvimento dessa teoria é baseado em hipóteses, nas quais a linearidade entre causa e efeito é sempre observada. Admite-se a validade das seguintes hipóteses:

- As ligações entre os elementos são contínuas, distribuídas uniformemente e apresentam as mesmas propriedades mecânicas em todo o comprimento da viga.
- O deslocamento relativo da região correspondente à superfície de contato dos elementos é diretamente proporcional ao esforço atuante na conexão.
- Os deslocamentos verticais dos elementos da viga composta, tomadas em qualquer posição ao longo do comprimento, são sempre as mesmas para todos os elementos.
- A distribuição das deformações ao longo da altura dos elementos da viga composta é linear.
- Os elementos constituintes da viga composta seguem a lei de Hooke.
- Os deslocamentos verticais.
- São desprezadas as deformações produzidas pelo esforço cortante, no cálculo dos deslocamentos das seções transversais.

A adoção da primeira hipótese significa o estudo de um caso particular de vigas compostas. O fato de se considerar a superfície fictícia de interligação com propriedades mecânicas invariantes, implica em se ter os conectores aplicados em arranjos regulares por todo o plano de separação dos elementos.

Com a segunda hipótese fica assumido um comportamento linear para o conector isolado. Tal fato, entretanto, por vezes não é confirmado experimentalmente em ensaios dos

conectores isolados, porém a determinação da característica de rigidez com base na inclinação de reta secante à curva experimental do conector isolado, e o seu posterior emprego nas expressões teóricas, conduzem a resultados coerentes com os de experimentação de vigas.

A integridade da viga composta é admitida na terceira hipótese. As demais se enquadram no grupo de hipóteses da modelagem de Bernoulli-Navier para a flexão de vigas ordinárias.

Sendo assim, inicia-se a apresentação do método com a subdivisão do modelo exato e do modelo aproximado. Para a análise do modelo exato optou-se por utilizar uma configuração de seção genérica com três elementos de propriedades e dimensões quaisquer, apresentada por CHUI & BARCLAY (1998). Já para o modelo aproximado é considerada uma seção tipo T apresentada por KREUZINGER (1995). O autor afirma que este desenvolvimento é o mesmo considerado pelo EUROCODE 5.

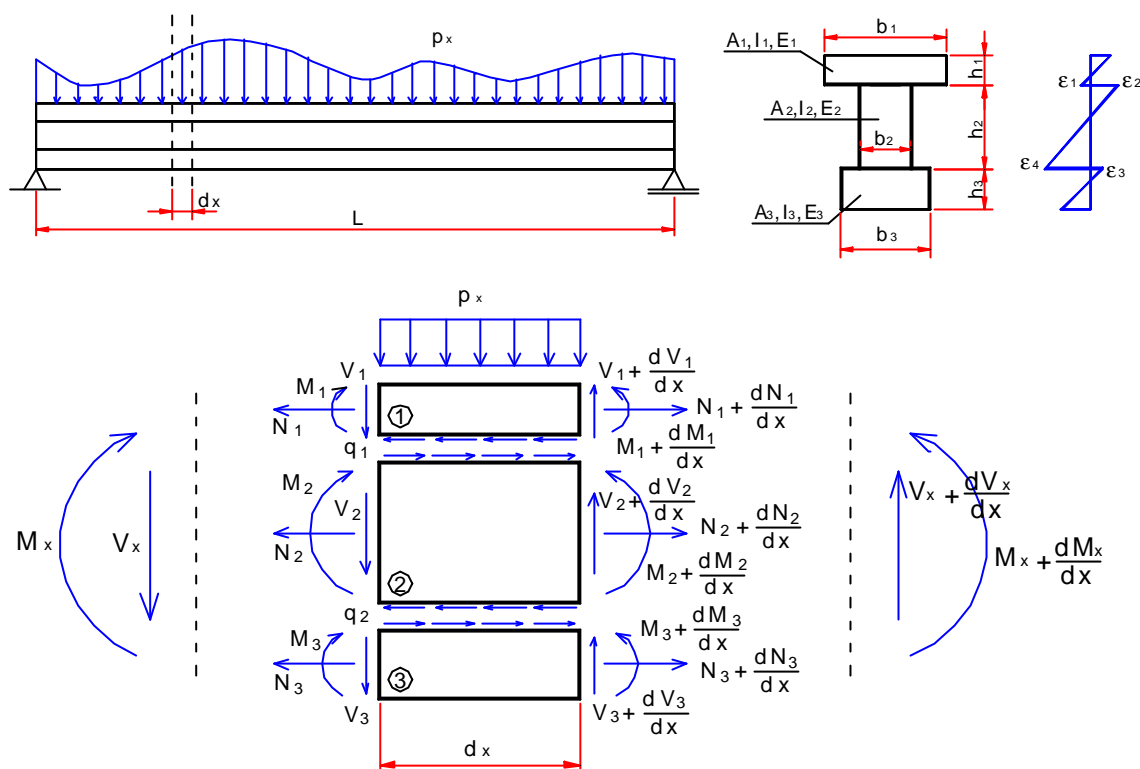
### **2.3.1. Modelo Exato (CHUI & BARCLAY - 1998)**

O princípio do estudo de vigas compostas, segundo este método, consiste na análise da viga como sendo formada por elementos em equilíbrio, solidarizados por uma equação de compatibilidade de deslocamentos. A figura 8 ilustra o típico sistema considerado com seção transversal genérica de três elementos.

Tomando uma viga biapoiada composta solicitada por um carregamento transversal qualquer, surgem os esforços internos  $M(x)$  e  $V(x)$ . Estes esforços internos podem ser decompostos para cada elemento componente da seção transversal, atuando sobre eles forças normais e cisalhantes, além dos momentos. Esses esforços são equilibrados pelo fluxo de cisalhamento atuante na interface entre as mesas e a alma. O equilíbrio de um elemento diferencial de comprimento  $dx$  é ilustrado na figura 8.

A partir da distribuição de esforços descrita, é apresentada a configuração do diagrama de deformações normais, devido aos momentos e as forças normais. As deformações devido aos esforços cisalhantes não são consideradas.





**Figura 8** –Viga composta de três elementos com seção transversal genérica, distribuição de deformações e esforços internos para um elemento diferencial.

Se o fluxo de cisalhamento ao longo do comprimento da viga entre as camadas 1 e 2 é  $q_1$  e entre as camadas 2 e 3 é  $q_2$ , fazendo o equilíbrio para o elemento 1,

$$\frac{dN_1}{dx} = -q_1 \quad (3)$$

para o elemento 2,

$$\frac{dN_2}{dx} = q_1 - q_2 \quad (4)$$

para o elemento 3,

$$\frac{dN_3}{dx} = q_2 \quad (5)$$

A deformação em cada camada é causada por uma combinação de momento fletor e força axial:

$$\varepsilon_1 = \frac{M_1}{E_1 I_1} \frac{h_1}{2} + \frac{N_1}{E_1 A_1} \quad (6)$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{M_2}{E_2 I_2} \frac{h_2}{2} + \frac{N_2}{E_2 A_2} \quad (7)$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{M_3}{E_3 I_3} \frac{h_3}{2} + \frac{N_3}{E_3 A_3} \quad (8)$$

$$\varepsilon_4 = \frac{M_2}{E_2 I_2} \frac{h_2}{2} + \frac{N_2}{E_2 A_2} \quad (9)$$

A deformação devido ao deslizamento entre os elementos 1 e 2 é

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \quad (10)$$

e a deformação correspondente entre os elementos 2 e 3 é

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \quad (11)$$

A deformação devido ao deslizamento pode ser rescrita em função do módulo de deslizamento da ligação ( $K_1$  e  $K_2$ ) e do fluxo de cisalhamento entre as camadas ( $q_1$  e  $q_2$ ), como mostrado em (12) e (13).

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{K_1} \frac{dq_1}{dx} \quad (12)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{K_2} \frac{dq_2}{dx} \quad (13)$$

Substituindo as equações (3), (6), (7) e (10) em (12) obtém-se a seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2 N_1}{dx^2} = K_1 \left( \frac{M_1}{E_1 I_1} \frac{d_1}{2} + \frac{M_2}{E_2 I_2} \frac{h_2}{2} + \frac{N_1}{E_1 A_1} - \frac{N_2}{E_2 A_2} \right) \quad (14)$$

Combinando as equações (4) e de (6) a (13), outra equação diferencial de segunda ordem é obtida:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N_2}{dx^2} = K_1 \left( -\frac{M_1}{E_1 I_1} \frac{h_1}{2} - \frac{M_2}{E_2 I_2} \frac{h_2}{2} - \frac{N_1}{E_1 A_1} + \frac{N_2}{E_2 A_2} \right) \\ + K_2 \left( \frac{M_2}{E_2 I_2} \frac{h_2}{2} + \frac{M_3}{E_3 I_3} \frac{h_3}{2} + \frac{N_2}{E_2 A_2} - \frac{N_3}{E_3 A_3} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

A terceira equação diferencial de segunda ordem é obtida considerando (5), (8), (9), e (11):

$$\frac{d^2 N_3}{dx^2} = K_2 \left( -\frac{M_2}{E_2 I_2} \frac{h_2}{2} - \frac{M_3}{E_3 I_3} \frac{h_3}{2} - \frac{N_2}{E_2 A_2} + \frac{N_3}{E_3 A_3} \right) \quad (16)$$

Pode ser demonstrado que as seguintes equações de equilíbrio também se aplicam a seção transversal sujeita ao momento interno M:

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 + N_3 &= 0 \\ M &= M_1 + M_2 + M_3 + N_2 z_1 + N_3 z_2 \end{aligned} \quad (17)$$

onde  $z_1 = (h_1 + h_2)/2$  e  $z_2 = h_1/2 + h_2 + h_3/2$ .

Admitindo que os três elementos tenham a mesma curvatura, então

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_1}{E_1 I_1} = \frac{M_2}{E_2 I_2} = \frac{M_3}{E_3 I_3} \quad (18)$$

Substituindo as equações (17) em (18):

$$\frac{M - N_2 z_1 - N_3 z_2}{\Sigma EI} = \frac{M_1}{E_1 I_1} = \frac{M_2}{E_2 I_2} = \frac{M_3}{E_3 I_3} \quad (19)$$

onde  $\Sigma EI = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3$ .

Substituindo (19) em (14), (15) e (16), obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N_1}{dx^2} &= a_{11} N_1 + a_{12} N_2 + a_{13} N_3 + a_{14} M \\ \frac{d^2 N_2}{dx^2} &= a_{21} N_1 + a_{22} N_2 + a_{23} N_3 + a_{24} M \\ \frac{d^2 N_3}{dx^2} &= a_{31} N_1 + a_{32} N_2 + a_{33} N_3 + a_{34} M \end{aligned} \quad (20)$$

onde:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{K_1}{E_1} A_1 & a_{12} &= -K_1 \left( \frac{z_1^2}{\Sigma EI} + \frac{1}{E_2 A_2} \right) \\ a_{13} &= -\frac{K_1 z_1 z_2}{\Sigma EI} & a_{14} &= \frac{K_1 z_1}{\Sigma EI} \\ a_{21} &= -\frac{K_1}{E_1 A_1} & a_{22} &= \frac{K_1 z_1^2 - K_2 z_1 z_2}{\Sigma EI} + \frac{K_1 + K_2}{E_2 A_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{23} &= \frac{K_1 z_1 z_2 - K_2 z_2 z_4}{\Sigma EI} - \frac{K_2}{E_3 A_3} & a_{24} &= \frac{-K_1 z_1 + K_2 z_4}{\Sigma EI} \\
a_{31} &= 0 & a_{32} &= K_2 \left( \frac{z_1 z_4}{\Sigma EI} - \frac{1}{E_2 A_2} \right) \\
a_{33} &= K_2 \left( \frac{z_2 z_4}{\Sigma EI} + \frac{1}{E_3 A_3} \right) & a_{34} &= -\frac{z_2 z_4}{\Sigma EI} \\
z_4 &= \frac{h_2 + h_3}{2}
\end{aligned}$$

Para a determinação das funções de forças axiais  $N_1$ ,  $N_2$ , e  $N_3$ , devem ser aplicadas as condições de contorno para do problema. A solução desse sistema de equações diferenciais de segunda ordem (20), recai em um problema de autovalores. No Anexo A encontra-se a resolução do problema de uma viga simplesmente apoiada sob duas formas de carregamento comuns: carga uniformemente distribuída e carga concentrada.

Uma vez conhecidas, as forças axiais são substituídas na (18) para calcular o deslocamento da viga. Nos cálculos de projeto de engenharia, o deslocamento no centro do vão é usualmente requerido. Então, para facilitar o uso deste método pelos projetistas, uma solução explícita para o deslocamento do centro do vão é apresentada em (21) e (22).

- Carga uniformemente distribuída:

$$\begin{aligned}
y_{L/2} &= \frac{p}{\text{ÓEI}} \left[ \frac{5L^4}{384} (1 + y_1 + y_2) - \frac{L^2}{8} \left( \frac{y_1}{\ddot{e}_1} + \frac{y_2}{\ddot{e}_2} \right) + \frac{y_1}{\ddot{e}_1^2} + \frac{y_2}{\ddot{e}_2^2} \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{y_1}{I_1^2} \operatorname{sech} \frac{\sqrt{I_1} \cdot L}{2} + \frac{y_2}{I_2^2} \operatorname{sech} \frac{\sqrt{I_2} \cdot L}{2} \right) \right] \quad (21)
\end{aligned}$$

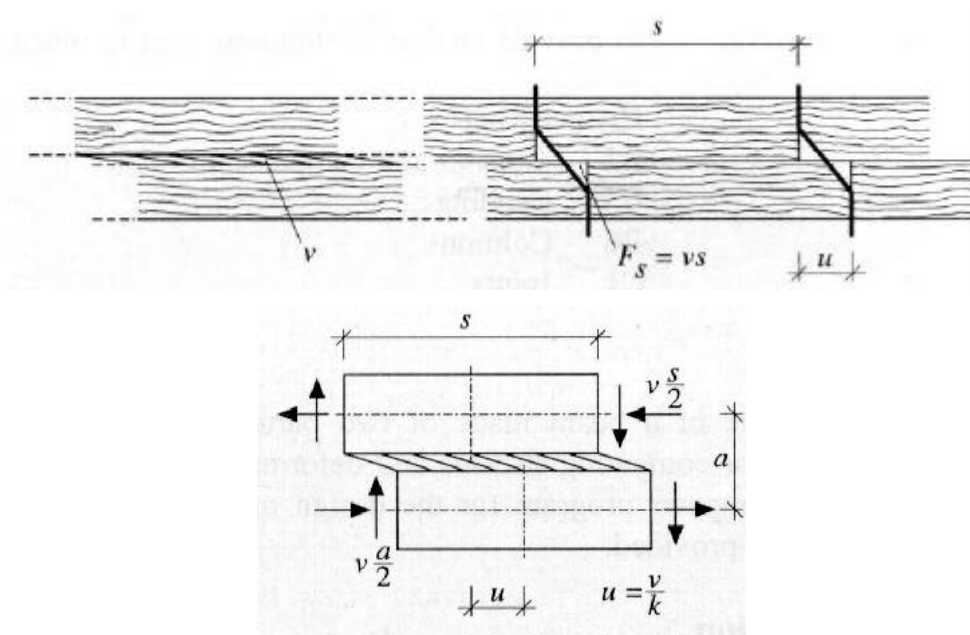
- Carga concentrada:

$$\begin{aligned}
y_{L/2} &= \frac{P}{\text{ÓEI}} \left[ \frac{L^3}{48} (1 + y_1 + y_2) - \frac{L}{4} \left( \frac{y_1}{\ddot{e}_1} + \frac{y_2}{\ddot{e}_2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{y_1}{2\ddot{e}_1^{1.5}} \tanh \frac{\sqrt{\ddot{e}_1} \cdot L}{2} + \frac{y_2}{2\ddot{e}_2^{1.5}} \tanh \frac{\sqrt{\ddot{e}_2} \cdot L}{2} \right] \quad (22)
\end{aligned}$$

Os símbolos exibidos nas equações (21) e (22) são definidos no Anexo A. Expressões para outras formas de carregamento podem ser obtidas de maneira similar.

### 2.3.2. Modelo Aproximado (KREUZINGER – 1995)

Inicia-se a apresentação do modelo com referência à rigidez da união. Cada conector é solicitado por forças de cisalhamento, causando um deslocamento. A relação entre a força atuante e o deslocamento  $u$  entre os elementos individuais que compõem a seção transversal composta é definido pelo módulo de deslizamento  $K$ . A figura 9 ilustra a configuração padrão da união, apresentando o deslocamento  $u$  e o fluxo de cisalhamento  $v$ .



**Figura 9** –Deslocamento e força cisalhante entre os elementos individuais. Fonte: KREUZINGER (1995)

O efeito da distribuição contínua de ligações como apresentado na figura 9 pode ser expressa da seguinte forma:

$$\dot{1} = \frac{F_s}{s}; \quad C = \frac{K}{s}; \quad \dot{1} = C \cdot u \quad (23)$$

onde:

$v$  = fluxo de cisalhamento atuante na superfície de contato entre os elementos (N/mm);

$F_s$  = força atuante no conector (N);

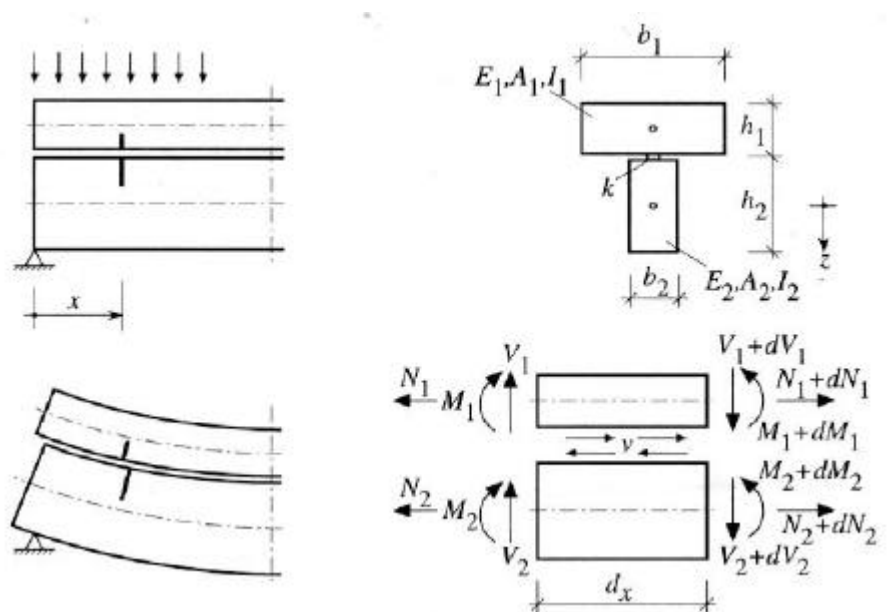
$u$  = deslocamento da ligação (mm);

$s$  = espaçamento entre conectores (mm);

$K$  = módulo de deslizamento (N/mm);

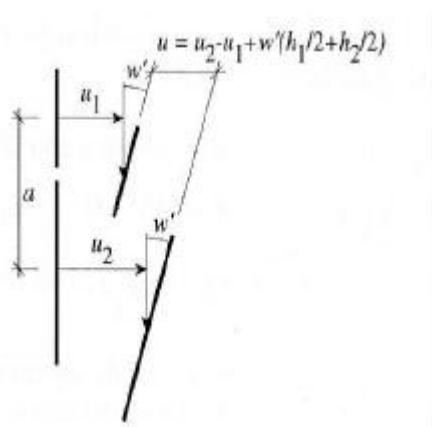
$C$  = rigidez da ligação (N/mm<sup>2</sup>).

Considerando uma peça composta de seção transversal tipo T, são ilustradas na figura 10 o sistema de carregamento, a configuração da seção transversal, a deformação e o elemento  $dx$  com as respectivas forças de equilíbrio.



**Figura 10** – Detalhes de uma viga composta e a configuração de equilíbrio de um elemento  $dx$ . Fonte: KREUZINGER (1995)

O deslocamento relativo entre as partes unidas é demonstrado na figura 11.



**Figura 11** – Deformações. Fonte: KREUZINGER (1995)

Onde,  $u_1$  e  $u_2$  são os deslocamentos longitudinais dos eixos 1 e 2 da seção transversal,  $w'$  é a rotação causada pelo momento fletor e  $u$  é o deslocamento relativo entre as partes individuais no local da ligação. Essa análise de deslocamento apresentada é válida somente quando as deformações devido ao cisalhamento são desprezadas.

$$u = u_2 - u_1 + w' \cdot \left( \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} \right) = u_2 - u_1 + w' \cdot a \quad (24)$$

Observando a equação (24) pode ser verificado que a dimensão crítica é a distância entre os eixos das peças; quanto maior for este valor, maior será a deformação relativa.

Adicionando os princípios da elasticidade à teoria de flexão simples, tem-se:

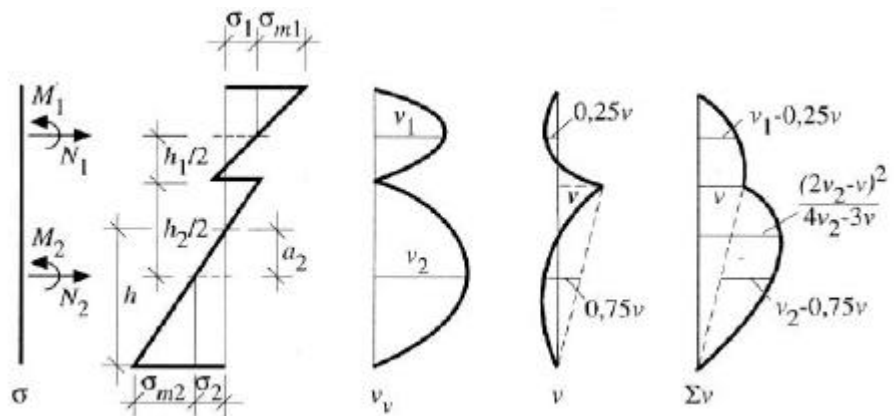
$$N_1 = E_1 \cdot A_1 \cdot u_1' \quad \text{e} \quad N_2 = E_2 \cdot A_2 \cdot u_2' \quad (25)$$

$$M_1 = -E_1 \cdot I_1 \cdot w'' \quad \text{e} \quad M_2 = -E_2 \cdot I_2 \cdot w'' \quad (26)$$

$$V_1 = -E_1 \cdot I_1 \cdot w''' \quad \text{e} \quad V_2 = -E_2 \cdot I_2 \cdot w''' \quad (27)$$

$$\acute{e} = C \cdot u = C \cdot (u_2 - u_1 + w' \cdot a) \quad (28)$$

A figura 12 apresenta os diagramas de tensões normais e cisalhantes para a seção composta.



**Figura 12** – Distribuição de tensões. Fonte: KREUZINGER (1995)

Equilibrando os dois elementos na direção x e z:  $[p_x = 0, (N_1 + N_2)' = 0]$

$$N_1' + \acute{e} = 0 \quad (29)$$

$$N_2' + \acute{e} = 0 \quad (30)$$

$$M_1' = V_1 - \acute{e} \cdot \frac{h_1}{2} \quad (31a)$$

$$M_2' = V_2 - \acute{e} \cdot \frac{h_2}{2} \quad (31b)$$

$$V_1' + V_2' = -p = V' \quad (31c)$$

Somando os momentos e diferenciando em relação a x:

$$M_1'' + M_2'' + i' \cdot a + p = 0 \quad (32)$$

Desta forma, existem três equações de equilíbrio (29), (31) e (32) e três deformações incógnitas  $u_1$ ,  $u_2$  e  $w$ . Substituindo os princípios da elasticidade nestas equações de equilíbrio:

$$E_1 \cdot A_1 \cdot u_1'' + C \cdot (u_2 - u_1 + w' \cdot a) = 0 \quad (33)$$

$$E_2 \cdot A_2 \cdot u_2'' - C \cdot (u_2 - u_1 + w' \cdot a) = 0 \quad (34)$$

$$(E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2) \cdot w'''' - C \cdot a \cdot (u_2' - u_1' + w'' \cdot a) = p \quad (35)$$

Para a resolução das equações de equilíbrio são adotados carregamento e deformações senoidais. Além de facilitar a derivação, o autor afirma que esta consideração ainda proporciona soluções aplicáveis para as mais diferentes distribuições de carregamento.

$$p = p_0 \cdot \text{sen} \cdot \left( \frac{\delta}{L} \cdot x \right) \quad (36)$$

$$u_1 = u_{10} \cdot \cos \cdot \left( \frac{\delta}{L} \cdot x \right); u_2 = u_{20} \cdot \cos \cdot \left( \frac{\delta}{L} \cdot x \right); w = w_0 \cdot \text{sen} \cdot \left( \frac{\delta}{L} \cdot x \right) \quad (37a,b,c)$$

Substituindo esses termos nas equações de equilíbrio (24), (25) e (26), resulta o sistema de equações apresentado abaixo.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{10} \cdot \left[ -\frac{\pi^2}{L^2} \cdot E_1 \cdot A_1 - C \right] + u_{20} \cdot [C] + w_0 \cdot \left[ C \cdot \frac{\pi}{L} \cdot a \right] = 0 \\ u_{10} \cdot [C] + u_{20} \cdot \left[ -\frac{\pi^2}{L^2} \cdot E_1 \cdot A_1 - C \right] + w_0 \cdot \left[ -C \cdot \frac{\pi}{L} \cdot a \right] = 0 \\ u_{10} \cdot \left[ -C \cdot \frac{\pi}{L} \cdot a \right] + u_{20} \cdot \left[ C \cdot \frac{\pi}{L} \cdot a \right] + w_0 \cdot \left[ \frac{\pi^4}{L^4} \cdot (E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2) + C \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \cdot a^2 \right] = p_0 \end{array} \right.$$

A solução do sistema é apresentada a seguir.

$$w_0 = p_0 \cdot \frac{L^4}{\pi^4} \cdot \frac{1}{E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + \frac{E_1 \cdot A_1 \cdot \gamma_1 \cdot a^2}{1 + \gamma_1 \cdot \frac{E_1 \cdot A_1}{E_2 \cdot A_2}}} = p_0 \cdot \frac{L^4}{\pi^4} \cdot \frac{1}{(EI)_{ef}} \quad (38a)$$



$$u_{10} = w_0 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot \frac{a \cdot \gamma_1 \cdot E_2 \cdot A_2}{\gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2}; \quad (38b)$$

$$u_{20} = -w_0 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot \frac{a \cdot \gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1}{\gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2} \quad (38c)$$

$$k_1 = \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \frac{E_1 \cdot A_1}{k}; \quad \gamma_1 = \frac{1}{(1 + k_1)} \quad (39a,b)$$

As tensões podem ser obtidas aplicando os princípios da elasticidade a estas deformações. Conforme figura 12, a tensão no eixo do elemento 1 da seção transversal é:

$$\sigma_1 = E_1 \cdot u'_1(x = \frac{L}{2}) = -E_1 \cdot u_{10} \frac{\pi}{L} \quad (40)$$

Usando os seguintes termos

$$w_0 = p_0 \cdot \frac{L^4}{\pi^4} \cdot \frac{1}{(EI)_{ef}} \quad (41)$$

$$M_0 = p_0 \cdot \frac{L^2}{\pi^2} \quad (42)$$

$$a_2 = \frac{\gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot a}{\gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2} \quad (43)$$

$$a_1 = a - a_2 \quad (44)$$

a tensão é:

$$\sigma_1 = \frac{\gamma_1 \cdot E_1 \cdot a_1 \cdot M_0}{(EI)_{ef}} \quad (45)$$

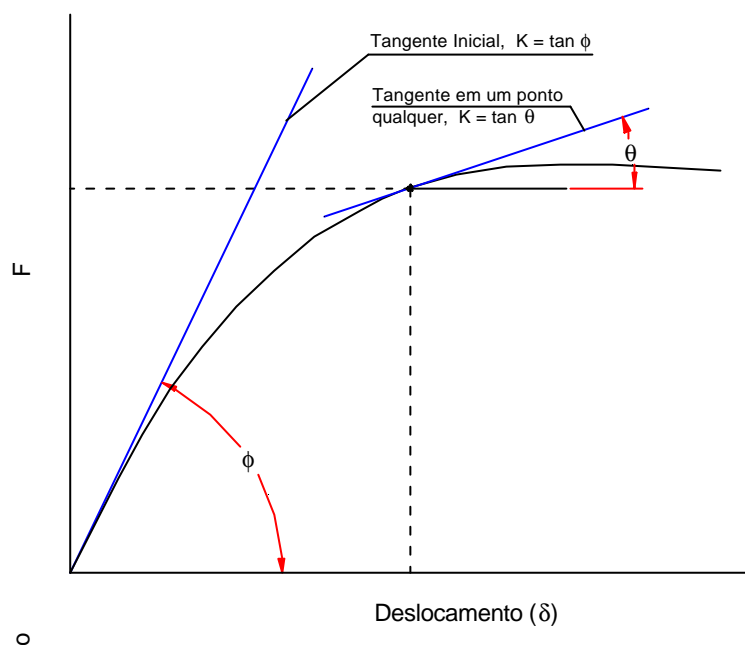
Nota-se que a equação obtida é semelhante à equação de uma viga simples. No anexo B do EUROCODE 5 são apresentadas as equações de rigidez efetiva, tensões normais, tensão máxima cisalhante e carga atuante nos conectores para uma seção genérica composta com dois ou três elementos.

## 2.4. Rigidez das Ligações

O fenômeno característico das ligações por conectores metálicos em vigas compostas é o deslizamento entre os elementos adjacentes. No instante em que a viga é solicitada, forças de

cisalhamento são induzidas e transferidas à interface dos elementos adjacentes, por meio de forças laterais desenvolvidas sobre os conectores. O comportamento entre o conector e a madeira da viga é similar ao que ocorre em uma ligação de madeira solicitada ao corte fabricada com madeira e conectores iguais aos dessas vigas. O comportamento da ligação (madeira e conector) pode ser descrito por um parâmetro de referência chamado Módulo de Deslizamento (Slip Modulus).

Uma típica curva carga-deslocamento para ligações com pinos metálicos quando solicitadas ao corte é ilustrada na figura 13. A inclinação da reta tangente desenhada para qualquer ponto sobre a curva descreve o Módulo de Deslizamento para a ligação em um dado valor de carga.



**Figura 13** – Típica curva carga-deslocamento. Fonte: VAN DYER (1992)

Como se pode observar, o conhecimento da rigidez das ligações é um dos aspectos de fundamental importância na investigação do comportamento das peças compostas. Sendo assim, é apresentado neste item um estudo sucinto sobre o comportamento das ligações por pinos metálicos, sendo pesquisados alguns modelos de comportamento, além de métodos de dimensionamento.

O comportamento das ligações por pinos metálicos em madeira, já vem sendo estudado mundialmente desde meados do século XX. Durante esse período, muitos trabalhos foram desenvolvidos e vários modelos de comportamento foram propostos para as ligações.

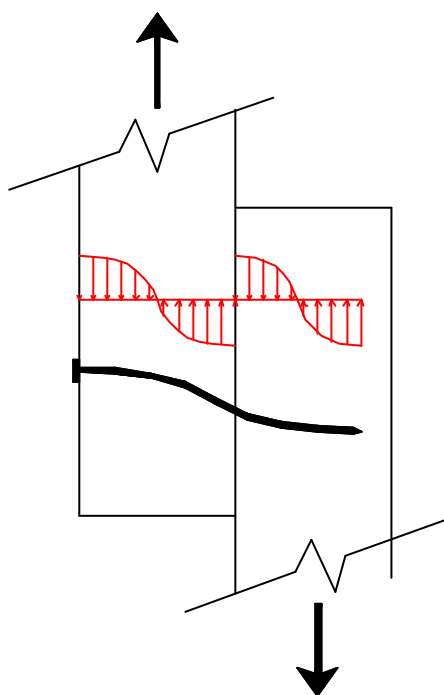
A seguir são apresentados os conceitos básicos do comportamento das ligações, bem como alguns dos modelos analíticos mais importantes.

### 2.4.1. Conceitos Básicos

Quando duas peças de madeira solicitadas por uma força longitudinal, são ligadas uma à outra, ocorre uma transmissão de esforços entre elas, de forma que a ligação sofre um deslocamento devido à deformação do prego e da madeira na região em torno do furo.

Considere-se a ligação tracionada mostrada na figura 14. Em cada peça a força de cisalhamento é transmitida à madeira gerando uma distribuição de tensões de compressão sobre a parede do furo. A mesma distribuição atua sobre o prego. Devido à transmissão da força de cisalhamento, a madeira sofre um esmagamento na parede do furo na região comprimida e o prego sofre uma deflexão.

No estudo das ligações pregadas considera-se apenas um prego individualmente, admitindo que o comportamento seja o mesmo para todos os pregos.

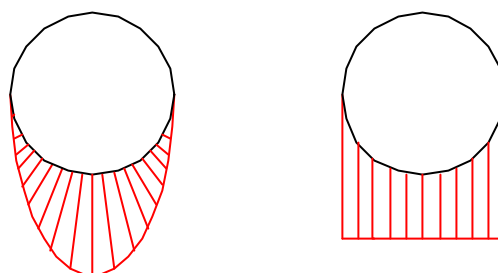


**Figura 14** – Esquema da distribuição de tensões sobre o prego ao longo de seu comprimento em uma ligação tracionada. Fonte: SANTANA (1997)

Em geral, o desenvolvimento dos modelos é baseado nas seguintes hipóteses básicas:

- O efeito do atrito entre as peças no comportamento da ligação pode ser desprezado.

- As componentes de tração que surgem no prego na direção de seu eixo devido à sua configuração deformada podem ser desprezadas.
- A distribuição da carga de cisalhamento entre os pregos é uniforme, hipótese adotada que torna possível estudar apenas um prego individualmente.
- A distribuição de tensões na parede do furo pode ser aproximada por uma distribuição de tensões no plano da ligação. Essa distribuição de tensões é considerada uniforme na projeção da largura do furo, conforme mostra a figura 15.



**Figura 15** – (a) Esquema real de distribuição de tensões na parede do furo. (b) Esquema aproximado de distribuição de tensões na parede do furo. Fonte: SANTANA (1997)

A grande maioria dos trabalhos sobre ligações é direcionada para a determinação da força máxima suportada pela ligação ou capacidade de carga da ligação. Poucos são os trabalhos desenvolvidos especificamente para investigar o comportamento da curva carga-deslocamento da ligação.

Uma extensa revisão bibliográfica sobre o estudo das ligações por pinos metálicos foi realizada por PATTON-MALLORY *et al.* (1997). Os autores indicam que os modelos de investigação das ligações por pinos metálicos podem ser divididos basicamente em dois grupos; o modelo do escoamento (Yield Model) e os modelos de viga sob fundação.

#### **2.4.2. Modelo do Escoamento (Yield Model)**

O modelo do escoamento foi inicialmente desenvolvido por JOHANSEN (1949) e assume o comportamento perfeitamente plástico tanto para madeira quanto para o pino. Segundo o autor, a resistência das ligações por pinos, depende da resistência da madeira ao embutimento do pino ( $f_c$ ) e da resistência do pino à flexão ( $f_y$ ). De fato, tanto o embutimento quanto a flexão do pino são fenômenos plásticos perto da ruptura, e portanto a capacidade de carga de um pino metálico pode ser formulada com base nesse comportamento.

Uma série de modos de ruptura foram postulados para ligação de duas ou três partes. O autor utilizou o princípio de equilíbrio para desenvolver as formulações para cada modo de ruptura.

O texto original assume iguais propriedades para todos os membros da ligação além de indicar os espaçamentos mínimos para evitar a ruptura por fendilhamento.

LARSEN (1973) *apud* PATTON-MALLORY *et al.* (1997) expandiu o modelo perfeitamente plástico para descrever a capacidade de carga quando as partes de madeira tem diferentes propriedades. O resultado foi uma determinada carga de escoamento para cada possível modo de ruptura.

O modo de ruptura com a menor capacidade de carga é selecionado como o limite de carga da ligação. Esse modelo é freqüentemente chamado de modelo do escoamento (Yield Model) e tem sido utilizado como base para métodos de dimensionamento de ligações de muitos códigos normativos atuais, inclusive do EUROCODE 5 (1993).

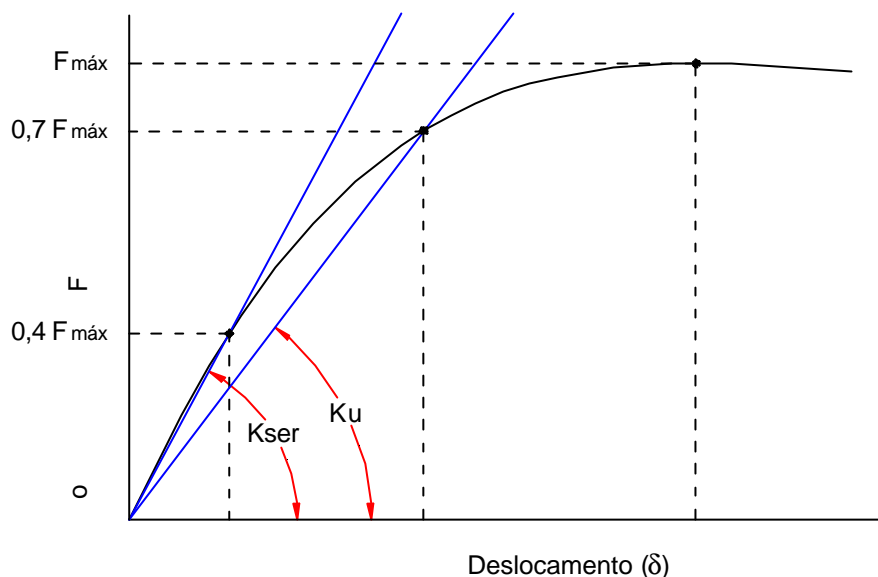
Esse modelo possui razoável precisão na determinação da capacidade de carga das ligações, mas não possibilita prescrever a rigidez da ligação e nem o deslocamento na ruptura, dois importantes fatores para o dimensionamento das ligações.

Os códigos normativos que adotam o modelo do escoamento para dimensionamento de ligações, apresentam equações empíricas para a determinação tanto da rigidez da ligação quanto do deslocamento.

EHLBECK & LARSEN (1991), abordam em seu trabalho os conceitos estabelecidos pelo EUROCODE 5 com referência às ligações de elementos estruturais de madeira. Os autores indicam que o EUROCODE 5 (1993) utiliza dois valores de Módulo de Deslizamento, um para o dimensionamento nos Estados Limites Últimos ( $K_u$ ) e outro para os Estados Limites de Utilização ( $K_{ser}$ ). De fato, como pode ser observado na figura 13, o Módulo de Deslizamento normalmente decresce com o aumento da carga.

O Módulo de Deslizamento instantâneo para os Estados Limites de Utilização – denotado  $K_{ser}$  – é assumido como o módulo secante da curva carga-deslocamento ao nível de carga de aproximadamente 40% da carga máxima da ligação (figura 16). Nesse baixo nível de carregamento, de 0 a  $0,4 F_{max}$ , a relação linear entre carga e deslocamento é assumida como aceitável para os propósitos de dimensionamento.

O módulo de deslizamento instantâneo para os Estados Limites Últimos – denotado  $K_u$  – é assumido como o módulo secante da curva carga deslocamento a um nível de carga de aproximadamente 60 a 70% da carga máxima. Como uma razoável simplificação aplicável para os procedimentos de dimensionamento,  $K_u$  pode ser dado por  $K_u = 2/3 K_{ser}$ .



**Figura 16** – Módulo de Deslizamento secante.

EHLBECK & LARSEN (1991) também indicam que a fórmula para estimar o valor do Módulo de Deslizamento ( $K_{ser}$ ) parte da equação de capacidade de carga de ligações pregadas que na maioria dos casos é governada pela seguinte equação (plastificação do pino e madeira):

$$R = \sqrt{\frac{2 \cdot \beta}{1 + \beta}} \cdot \sqrt{2 \cdot M_y \cdot f_{e,1} \cdot d} \quad (46)$$

Onde:

$R$  = capacidade máxima da ligação (N);

$\beta$  = relação entre a resistência ao embutimento das peças 1 e 2 ligadas ( $\beta = f_{e,1}/f_{e,2}$ );

$d$  = diâmetro do pino (mm);

$M_y$  = momento de escoamento do pino ( $M_y = f_y \cdot \frac{d^3}{6}$ ) (N·mm).

Considerando peças com iguais características físicas ( $\beta = 1$ ) e valores da tensão de embutimento dados por:

$$f_{e,k} = 0,082 \cdot (1 - 0,01 \cdot d) \cdot \rho_k \quad (47)$$

para ligações com pinos metálicos (pregos e parafusos) com pré-furação, e

$$f_{e,k} = 0,082 \cdot \rho_k \cdot d^{-0,3} \quad (48)$$

para pregos sem pré-furação.

A capacidade de carga para ligação pregada pode então ser calculada como:

$$R = \sqrt{0,3 \cdot (100 - d) \cdot d^{3,6} \cdot \rho_k} \quad (49)$$

Para ligações por pinos com pré-furação, e

$$R = \sqrt{30 \cdot d^{3,3} \cdot \rho_k} \quad (50)$$

para ligações sem pré-furação.

EHLBECK & LARSEN (1991) indicam que o deslocamento instantâneo em aproximadamente 40% da capacidade de carga, estimada por muitos testes em vários laboratórios é:

$$u_{inst} = \frac{40 \cdot d^{0,8}}{\rho_k} \quad (51)$$

Com pré-furação, e

$$u_{inst} = \frac{60 \cdot d^{0,8}}{\rho_k} \quad (52)$$

sem pré-furação.

O Módulo de Deslizamento instantâneo para os Estados Limites de Utilização pode ser considerado como:

$$K_{ser,inst} = \frac{0,4 \cdot R}{u_{inst}} \quad (53)$$

Para ligações pregadas com pré-furação, isso conduz a

$$K_{ser,inst} = \frac{0,55}{100} \cdot \sqrt{100 - d} \cdot \rho_k^{1,5} \cdot d \quad (54)$$

E com o diâmetro do prego variando entre 2 e 8 mm isso pode ser simplificado para:

$$K_{ser,inst} = \frac{\rho_k^{1,5} \cdot d}{20} \quad (55)$$

Para ligações pregadas sem pré-furação:

$$K_{ser,inst} = \frac{\rho_k^{1,5} \cdot d^{0,8}}{27,4} \approx \frac{\rho_k^{1,5} \cdot d^{0,8}}{25} \quad (56)$$

Se as densidades características dos membros da ligação são diferentes, então a densidade para o cálculo do módulo pode ser dado por:

$$\rho_k = \sqrt{\rho_{k,1} \cdot \rho_{k,2}} \quad (57)$$

### 2.4.3. Modelos de Viga sob Fundação

A outra forma de se abordar o problema das ligações é utilizando os modelos de viga sob fundação. Estes modelos possibilitam a determinação da resistência e rigidez das ligações. O comportamento dos materiais (madeira e pino) podem ser considerados elásticos, perfeitamente plásticos, ou elasto-plásticos.

Um desses modelos, também conhecido como Modelo de KUENZI, faz analogia uma analogia do prego na ligação com uma viga em fundação elástica. Esse conceito foi inicialmente proposto por WINKLER (1867) *apud* KUENZI (1955).

Na década de 40, HETENYI (1946), *apud* KUENZI (1955), formulou várias soluções para vigas de comprimento finito sob diferentes condições de carregamento. As considerações básicas assumidas por HETENYI foram:

- Os materiais são elásticos e obedecem a Lei de Hooke.
- A força de reação em um ponto qualquer da viga é proporcional a deflexão desta.
- As forças de reação são verticais em todas as seções transversais.
- Fundação não transmite esforços de cisalhamento.

Essas considerações, levam a uma equação diferencial que permite determinar a curva de deflexão da viga de fundação elástica, dada por:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -\bar{k} \cdot y \quad (58)$$



onde

$EI$  = a rigidez da viga de fundação elástica;

$E$  = o módulo de elasticidade do material da viga;

$I$  = o momento de inércia da viga;

$y$  = a deflexão no ponto  $x$ ;

$\bar{k}$  = o módulo de deformação da fundação.

A solução da equação (38) resulta em uma outra expressão que envolve um parâmetro de caracterização  $\lambda$ , dado por:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\bar{k}}{4 \cdot EI}} \quad (59)$$

As equações para flechas, momentos fletores e cortantes na viga são obtidas em função do valor deste parâmetro de caracterização.

Em seu trabalho, KUENZI (1955) aplicou este conceito de analogia de uma viga de fundação elástica, figura 17, e desenvolveu uma teoria para estimar a resistência e a rigidez de ligações pregadas e parafusadas. Foram adicionadas ao conceito inicial outras considerações:

- O atrito entre os elementos de madeira deve ser desprezado.
- A profundidade efetiva da fundação é igual a uma polegada.

O módulo elástico da fundação é definido por KUENZI como igual a:

$$\bar{k} = \frac{d \cdot E_{c0}}{D_e} \quad \text{ou} \quad \bar{k} = \frac{d \cdot E_{c90}}{D_e} \quad (60)$$

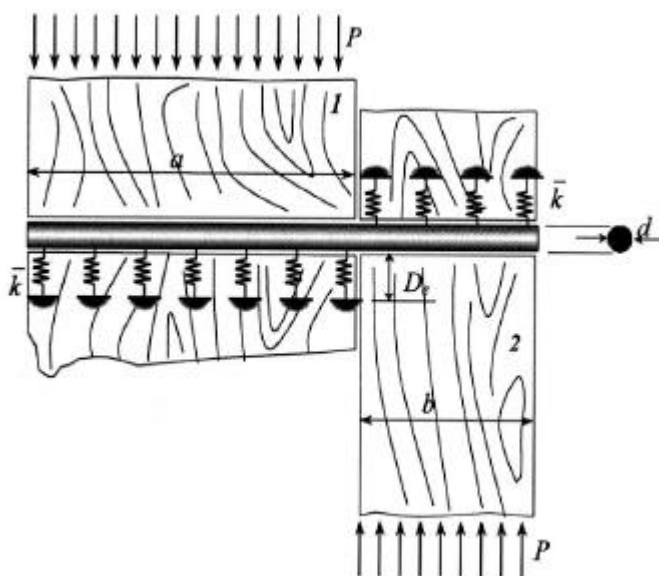
onde

$\bar{k}$  = o módulo elástico da fundação em  $N/mm^2$ ;

$E_{c0}$  ou  $E_{c90}$  = o módulo de elasticidade da madeira paralelo ou perpendicular às fibras em  $N/mm^2$ ;

$d$  = o diâmetro dos pregos ou parafusos em mm;

$D_e$  = a profundidade efetiva da fundação com valor convencional igual a 1 polegada.

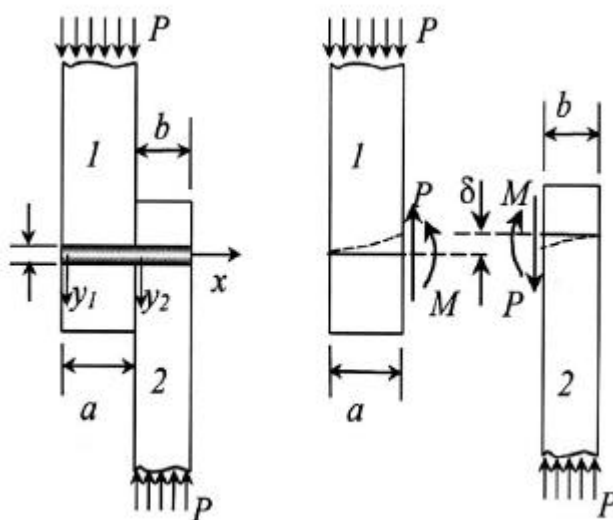


**Figura 17** – Analogia de viga de fundação elástica. Fonte: ALVIM (2002).

Conforme o modelo de KUENZLI, para vigas de madeira de seção composta, que apresentem deslizamento entre as peças, a relação entre a carga e o deslocamento relativo  $\delta$ , para uma ligação a corte simples de um único prego e duas peças interligadas, figura 18, pode ser dada por:

$$\delta = P \left[ 2(L_1 + L_2) - \frac{(J_1 - J_2)^2}{(K_1 + K_2)} \right] \quad (61)$$

onde  $\delta$  é o deslizamento da ligação e  $P$  é o carregamento aplicado.



**Figura 18** – Ligação com duas peças. Fonte: ALVIM (2002).

Os fatores  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $K_1$  e  $K_2$  são combinações de funções hiperbólicas e trigonométricas e são dadas por:

$$L_1 = \frac{\lambda_1}{k_1} \left( \frac{\sinh \lambda_1 a \cdot \cosh \lambda_1 a - \sin \lambda_1 a \cdot \cos \lambda_1 a}{\sinh^2 \lambda_1 a \cdot \sin^2 \lambda_1 a} \right) \quad (62)$$

$$L_2 = \frac{\lambda_2}{k_2} \left( \frac{\sinh \lambda_2 b \cdot \cosh \lambda_2 b - \sin \lambda_2 b \cdot \cos \lambda_2 b}{\sinh^2 \lambda_2 b \cdot \sin^2 \lambda_2 b} \right) \quad (63)$$

$$J_1 = \frac{\lambda_1^2}{k_1^2} \left( \frac{\sinh^2 \lambda_1 a + \sin^2 \lambda_1 a}{\sinh^2 \lambda_1 a - \sin^2 \lambda_1 a} \right) \quad (64)$$

$$J_2 = \frac{\lambda_2^2}{k_2^2} \left( \frac{\sinh^2 \lambda_2 b + \sin^2 \lambda_2 b}{\sinh^2 \lambda_2 b - \sin^2 \lambda_2 b} \right) \quad (65)$$

$$K_1 = \frac{\lambda_1^3}{k_1} \left( \frac{\sinh \lambda_1 a \cdot \cosh \lambda_1 a + \sin \lambda_1 a \cdot \cos \lambda_1 a}{\sinh^2 \lambda_1 a - \sin^2 \lambda_1 a} \right) \quad (66)$$

$$K_2 = \frac{\lambda_2^3}{k_2} \left( \frac{\sinh \lambda_2 b \cdot \cosh \lambda_2 b + \sin \lambda_2 b \cdot \cos \lambda_2 b}{\sinh^2 \lambda_2 b - \sin^2 \lambda_2 b} \right) \quad (67)$$

onde os subscritos referem-se aos elementos 1 e 2 que compõem a ligação e  $a$  e  $b$  são as profundidades de penetração dos pregos ou parafusos na ligação, figura 17.

Por sua vez, o valor do parâmetro de caracterização  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  é dado em função das características individuais das peças interligadas, ou seja:

$$\lambda_{1,2} = \sqrt[4]{\frac{\bar{k}_{1,2}}{4 \cdot E_s \cdot I_p}} \quad (68)$$

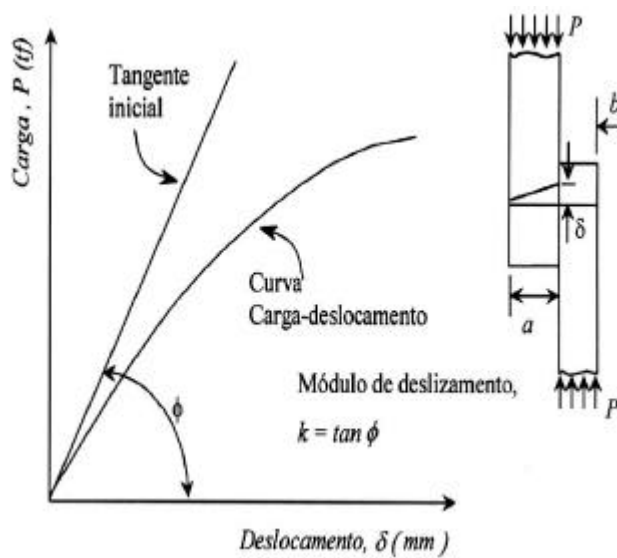
onde  $E_s$  é o módulo de deformação do pino metálico ( $\text{N/mm}^2$ ),  $\bar{k}_{1,2}$  é o módulo elástico da fundação de suporte dos pinos em cada uma das peças ( $\text{N/mm}^2$ ) e  $I_p$  é o momento de inércia do pino metálico, cujo valor é dado por:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \quad (69)$$

Reorganizando os termos da expressão (61), obtém-se o módulo de deslizamento  $k$ , que é dado por:

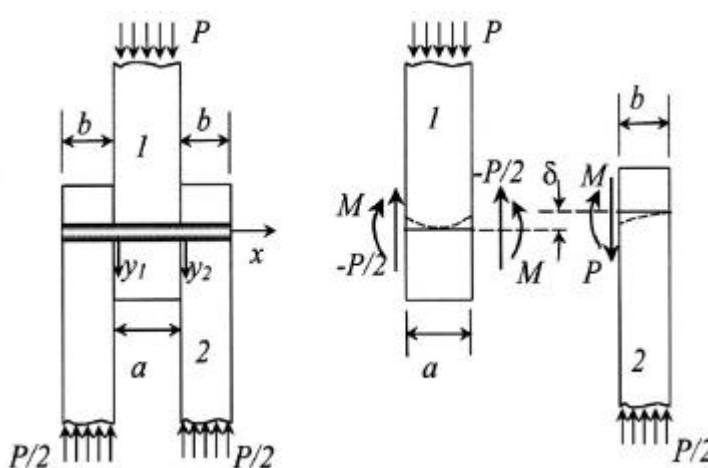
$$k_{\text{Kuenzi}} = \frac{P}{\delta} = \frac{(K_1 + K_2)}{2(L_1 + L_2) \cdot (K_1 + K_2) - (J_1 - J_2)^2} \quad (70)$$

A figura 19 ilustra uma curva típica de carga-deslocamento para uma ligação pregada. A inclinação da tangente inicial define o módulo de deslizamento, para este caso particular de ligação.



**Figura 19** – Curva típica de carga-deslocamento de uma ligação pregada. Fonte: MALHORTA & VAN DYER (1977) apud ALVIM (2002).

A expressão (60) tem a forma da reta tangente inicial, isto devido as considerações de comportamento elástico assumidas.



**Figura 20** – Ligação com duas peças. Fonte: KUENZI (1955) apud ALVIM (2002).

Para as peças submetidas a corte duplo, considere-se a ligação com três elementos da figura 20. Nesses casos, segundo a teoria de KUENZI (1955), a expressão para a determinação do módulo de deslizamento da ligação passa a valer:

$$k_{\text{Kuenzi}} = \frac{P}{\delta} = \frac{2 \cdot (K_1 + K_2)}{2(L_1 + L_2) \cdot (K_1 + K_2) - (J_1 - J_2)^2} \quad (71)$$

Os fatores  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $K_1$  e  $K_2$ , que comparecem na expressão (71), são também combinações de funções hiperbólicas e trigonométricas, mas com valor igual a:

$$L_1 = \frac{\lambda_1}{k_1} \left( \frac{\cosh \lambda_1 a + \cos \lambda_1 a}{\sinh \lambda_1 a + \sin \lambda_1 a} \right) \quad (72)$$

$$L_2 = \frac{\lambda_2}{k_2} \left( \frac{\sinh \lambda_2 b \cdot \cosh \lambda_2 b - \sin \lambda_2 b \cdot \cos \lambda_2 b}{\sinh^2 \lambda_2 b \cdot \sin^2 \lambda_2 b} \right) \quad (73)$$

$$J_1 = \frac{\lambda_1^2}{k_1} \left( \frac{\sinh \lambda_1 a - \sin \lambda_1 a}{\sinh \lambda_1 a + \sin \lambda_1 a} \right) \quad (74)$$

$$J_2 = \frac{\lambda_2^2}{k_2} \left( \frac{\sinh \lambda_2 b + \sin^2 \lambda_2 b}{\sinh^2 \lambda_2 b - \sin^2 \lambda_2 b} \right) \quad (75)$$

$$K_1 = \frac{\lambda_1^3}{k_1} \left( \frac{\cosh \lambda_1 a - \cos \lambda_1 a}{\sinh^2 \lambda_1 a + \sin^2 \lambda_1 a} \right) \quad (76)$$

$$K_2 = \frac{\lambda_2^3}{k_2} \left( \frac{\sinh \lambda_2 b \cdot \cosh \lambda_2 b + \sin \lambda_2 b \cdot \cos \lambda_2 b}{\sinh^2 \lambda_2 b - \sin^2 \lambda_2 b} \right) \quad (77)$$

WILKINSON (1971) *apud* ALVIM (2002), baseou-se no trabalho de KUENZI para desenvolver relações aproximadas entre o carregamento aplicado e o deslizamento de uma ligação a corte simples.

Para o caso das ligações onde os termos  $\lambda_1 a$  ou  $\lambda_2 b$  são ambos maiores que 2 (parafusos ou pregos muito longos) e as duas peças são de um mesmo tipo de madeira, então, é possível considerar:

$$\bar{k}_1 = \bar{k}_2 = \bar{k} \quad (78)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \quad (79)$$

Portanto,

$$L_1 = L_2 = \frac{\lambda}{k} \quad (80)$$

$$J_1 = J_2 = \frac{\lambda^2}{k} \quad (81)$$

$$K_1 = K_2 = \frac{\lambda^3}{k} \quad (82)$$

Substituindo (80), (81) e (82) em (70), tem-se:

$$\delta = 4 \cdot P \cdot L \quad (83)$$

Como  $L = \frac{\lambda}{k}$ , então:

$$\delta = \frac{4 \cdot P \cdot \lambda}{k} \quad (84)$$

E também:

$$\lambda = \frac{P}{\delta} = \frac{\bar{k}}{4 \cdot \lambda} \quad (85)$$

Portanto, substituindo  $\lambda$  em (64), tem-se:

$$k = \frac{\bar{k}}{4 \cdot \frac{\bar{k}}{4 \cdot \lambda}} = 0,25 \cdot \bar{k}^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{4 \cdot EI} \quad (86)$$

Outro estudo, foi desenvolvido por FOSCHI (1974) *apud* ALVIM (2002). Com base em aproximações pelo método dos elementos finitos, foi proposto um método teórico para determinar o comportamento de pinos metálicos sob carregamento lateral. Os resultados do modelo teórico proposto por FOSCHI, foram verificados por meio de ensaios físicos.

FOSCHI descreveu o comportamento das ligações, no âmbito não-linear, com base em modelos elasto-plásticos para a madeira e o aço. A rigidez da ligação é descrita por uma expressão que relaciona a força transmitida ao pino metálico, F, com o deslizamento  $\delta$  entre as peças de madeira conectadas, isto é:

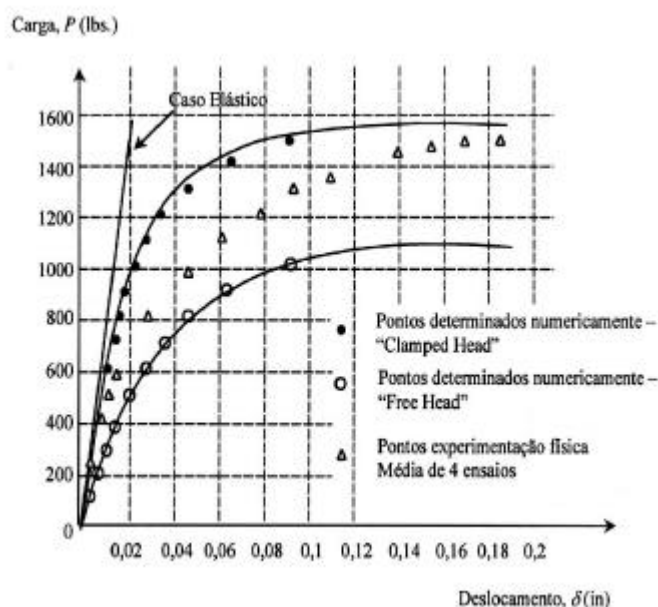
$$F = \bar{a} \left( 1 - e^{-\bar{b} \cdot \delta} \right) \quad (87)$$

onde  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  são parâmetros que dependem do tipo de ligação.

Desse modo, verifica-se a intenção de representar o comportamento da ligação por meio de funções exponenciais, isto devido a forma das curvas de força-deslocamento obtidas nos ensaios.

Alguns dos resultados obtidos nos ensaios experimentais físicos e numéricos são apresentados na figura 21.

Suas principais conclusões foram que apesar das aproximações lineares baseadas na teoria de vigas em fundação elásticas não serem exatas o suficiente para estimar as cargas limites, elas são no entanto válidas para estimar o comportamento inicial de ligações pregadas em peças de madeira, conforme a curva do caso elástico da figura 21.



**Figura 21** – Diagramas experimentais de carga-deslocamento. Fonte: FOSCHI (1974) apud ALVIM (2002).

Nos trabalhos anteriormente descritos, verifica-se a consistência da formulação proposta por KUENZI. Mesmo com técnicas modernas de investigação, a teoria baseada na analogia de viga de fundação elástica apresenta resultados satisfatórios para o domínio linear.

## 2.5. Revisão de Normas Técnicas

Neste item são apresentados métodos de dimensionamento e verificação de vigas de madeira com seção composta unidas continuamente por conectores metálicos deformáveis que podem ser encontrados na literatura, incluindo o método da norma brasileira de projeto de estruturas

de madeira e métodos normalizados utilizados em outros países. O objetivo dessa revisão de literatura é obter uma visão geral dos métodos para cálculo das tensões máximas atuantes e deslocamentos máximos. Não estão sendo considerados os métodos para cálculo das tensões e deslocamentos máximos permitidos, pois dependem dos critérios de segurança de cada norma. Além das normas citadas neste item também foram estudadas normas de outros países com grande tradição no setor de estruturas de madeira, como Estados Unidos, Canadá e Austrália. Nestes documentos normativos não foram encontradas indicações com respeito a metodologia de cálculo para este tipo específico de viga composta.

### 2.5.1. NBR 7190 (1997)

A norma brasileira não faz menção específica ao detalhamento das ligações em estruturas compostas. No entanto, apresenta critério que considera a redução da inércia das peças compostas utilizando coeficientes em função do tipo de arranjo da seção transversal para considerar o efeito de composição parcial.

No item 7.7.2 desta norma é recomendado que as peças compostas por peças serradas formando seção T, I ou Caixa, solidarizadas permanentemente por ligações rígidas por pregos podem ser dimensionadas como se a viga fosse de seção maciça, com área igual à soma das áreas das seções dos elementos componentes, admitindo um momento de inércia efetivo dado por:

$$I_{ef} = \alpha_r \cdot I_{th} \quad (88)$$

Onde  $I_{th}$  é o momento de inércia da seção total da peça como se ela fosse maciça, sendo

- para seções T:  $\alpha_r = 0,95$
- para seções I ou Caixa:  $\alpha_r = 0,85$

Como pode-se observar, essa consideração independe de fatores como o diâmetro e o espaçamento entre conectores.

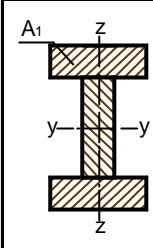
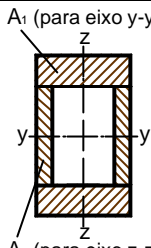
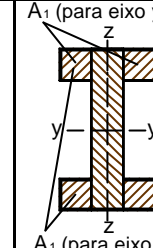
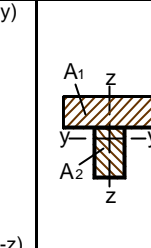
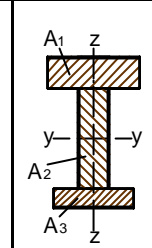
### 2.5.2. DIN 1052 (1988)

Esta norma estabelece o conceito de inércia efetiva para as seções compostas em função da rigidez da ligação. Cada tipo de união é caracterizada por um módulo de deslizamento, que expressa a carga necessária para produzir um deslocamento relativo entre as peças individuais da seção composta.



No item 8.3.1, a norma alemã apresenta o valor do módulo de deslizamento tabelado em função do tipo de configuração da seção transversal (ver tabela 2).

**Tabela 2** - Módulo de deslizamento "K" em N/mm, para as seções transversais de vigas.

Eixo	Conector	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4	Tipo 5
						
y - y	Pregos (um plano de corte)	600	600	900	600	600
	Pregos (dois planos de corte)	700 por ligação	700 por ligação	900 por ligação	-	700
z - z	Pregos (um plano de corte)	-	900	600	-	-
	Pregos (dois planos de corte)	-	900 por ligação	700 por ligação	-	-

A partir do módulo de deslizamento dado pela tabela 2 calcula-se a constante de deslizamento (C).

$$C_{1,3} = \frac{\pi^2 \cdot E_{1,3} \cdot A_{1,3} \cdot e'_{1,3}}{K_{1,3} \cdot L^2} \quad (89)$$

onde:

$E_1$  e  $E_3$  são os módulos de elasticidade das partes 1 e 3 que formam a seção transversal;

$A_1$  e  $A_3$  são as áreas das partes 1 e 3 que formam a seção transversal;

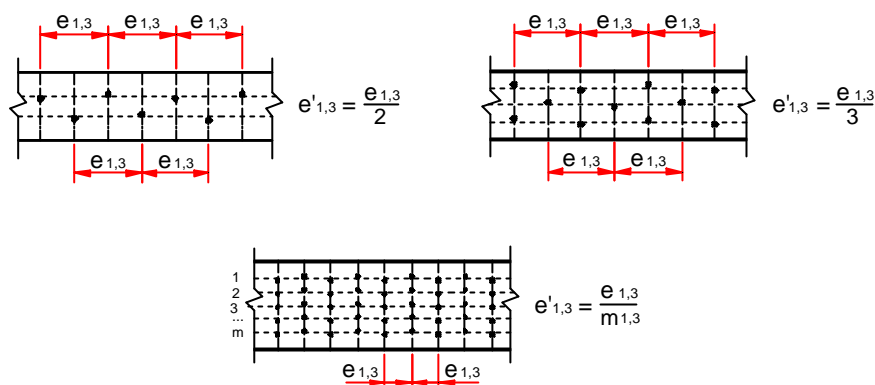
$e'_1$  e  $e'_3$  são as distâncias médias entre os conectores (em relação a uma mesma linha (ver figura 22));

$K_1$  e  $K_3$  são os módulos de deslizamento dos conectores obtidos da tabela 2;

$L$  é o vão efetivo da viga.

A partir da constante de deslizamento é calculado o coeficiente de redução de inércia do conjunto ( $\gamma$ ):

$$\gamma_{1,3} = \frac{1}{1 + C_{1,3}} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = 1 \quad (90)$$



**Figura 22** - Distância  $e'_{1,3}$  conforme arranjo dos conectores para mais de uma linha de pregação.

A distância entre os centros de gravidade da seção até a linha neutra da peça (ver figura 5) é dado como segue:

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma_1 \cdot n_1 \cdot A_1 \cdot (h_1 + h_2) - \gamma_3 \cdot n_3 \cdot A_3 \cdot (h_2 + h_3)}{\sum_{i=1}^3 \gamma_i \cdot n_i \cdot A_i} \quad (91)$$

$$a_1 = \left( \frac{h_1 + h_2}{2} \right) - a_2 \quad \text{e} \quad a_3 = \left( \frac{h_2 + h_3}{2} \right) + a_2 \quad (92)$$

onde:

$a_i$  é a distância do centróide da área de cada elemento que compõe a seção transversal até a linha neutra y-y, desde que  $a_2$  não seja menor que zero e não maior que  $h_2/2$ ;

$h_i$  é a altura de cada parte dos elementos componentes da seção transversal;

$b_i$  é a largura de cada parte dos elementos componentes da seção transversal;

$n_i$  é a razão  $E_i/E_v$ , onde  $E_v$  é o módulo de elasticidade comparativo de qualquer uma das peças da seção.

Assim é possível o cálculo da inércia efetiva levando em consideração a rigidez da ligação.

$$I_{ef} = \sum_{i=1}^3 \left( n_i \cdot I_i + \gamma_i \cdot n_i \cdot A_i \cdot a_i^2 \right) \quad (93)$$

Onde:

$I_i$  é o momento de inércia de cada elemento componente da seção transversal ( $I_i = b_i \cdot h_i^3 / 12$ ).

Os cálculos dos deslocamentos verticais e das tensões máximas atuantes devem ser baseados no momento de inércia efetivo ( $I_{ef}$ ). A seguir, são apresentadas as equações para o cálculo das tensões normais.

$$\sigma_{si} = \pm \frac{M}{I_{ef}} \cdot \gamma_i \cdot a_i \cdot \frac{A_i}{A_{in}} \cdot n_i \quad (94)$$

$$\sigma_{ri} = \pm \frac{M}{I_{ef}} \cdot \left( \gamma_i \cdot a_i \cdot \frac{A_i}{A_{in}} + \frac{h_i}{2} \cdot \frac{I_i}{I_{in}} \right) \cdot n_i \quad (95)$$

Onde:

$\sigma_{si}$  é a tensão normal no centróide da peça “i” devido a parcela de força normal;

$\sigma_{ri}$  é a tensão normal na extremidade da peça “i” devido as parcelas de força normal e momento; os sinais apropriados são mostrados na figura 23;

M é o momento fletor, com sinal positivo na presença de tensões de compressão na borda superior, e tensões de tração na fibra mais baixa da viga;

$A_{in}$  é a área de cada elemento componente da seção transversal descontando os furos dos pregos;

$I_{in}$  é o momento de inércia de cada elemento componente da seção transversal descontando os furos dos pregos.

A força máxima atuante no conector é dada por:

$$F_{1,3} = \frac{V_{max}}{I_{ef}} \cdot \gamma_{1,3} \cdot n_{1,3} \cdot S_{1,3} \quad (96)$$

E o espaçamento entre os conectores pode ser estimado por:

$$e'_{1,3} = \frac{zulN_{1,3}}{F_{1,3}} \quad (97)$$

Se o espaçamento dos conectores variar em função do esforço cortante e o máximo espaçamento  $e'_{1,3max}$  não for maior que  $4e'_{1,3min}$ , então o espaçamento efetivo correspondente pode ser tomado como:

$$e'_{1,3} = 0,75 \cdot e'_{1,3min} + 0,25 \cdot e'_{1,3max} \quad (98)$$

A tensão máxima cisalhante ocorre na alma e é dada pela seguinte expressão:

$$\tau_{max} = \frac{V_{max}}{b_2 \cdot I_{ef}} \cdot \sum_{i=1}^2 \gamma_i \cdot n_i \cdot S_i \quad (99)$$

Onde:

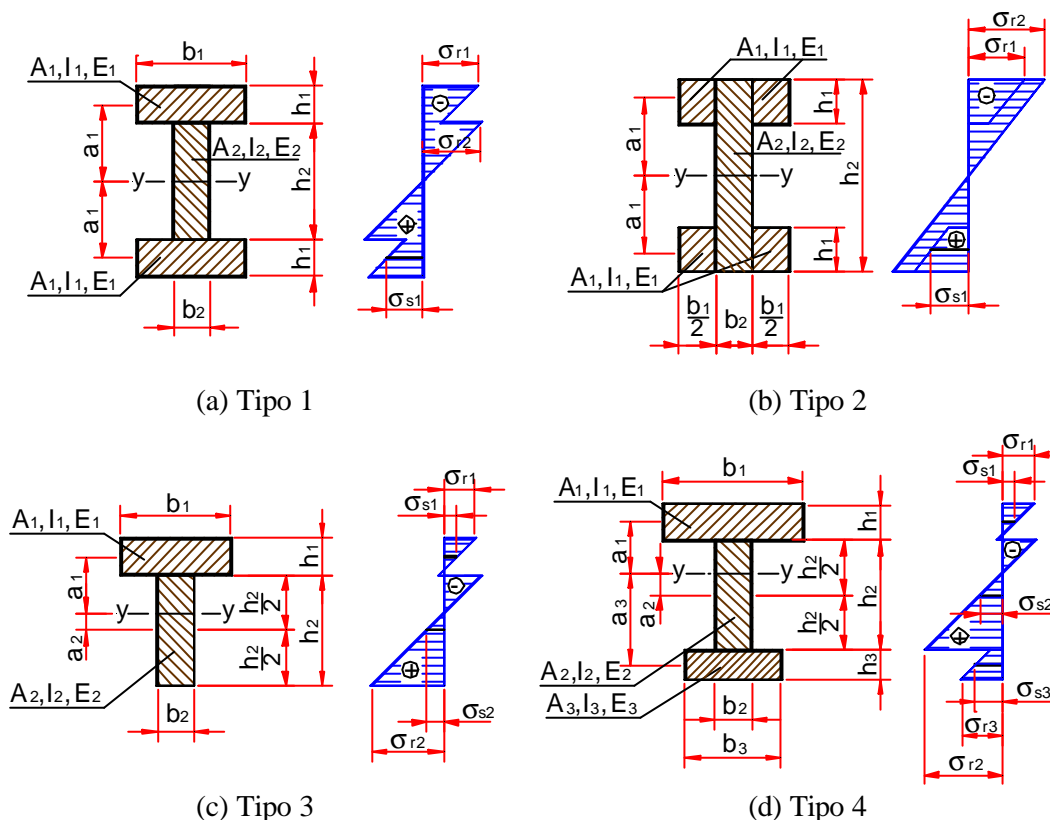
$V_{\max}$  é a cortante máxima atuante na viga;

$S_1$  e  $S_3$  são os momentos estáticos de cada mesa ( $S_{1,3} = b_{1,3} \cdot h_{1,3} \cdot a_{1,3}$ );

$S_2$  é o momento estático da parte da alma acima da linha neutra ( $S_2 = b_2 \cdot (h_2/2 - a_2)^2 / 2$ );

Zul  $N_1$  e  $N_3$  são as cargas permissíveis dos conectores.

A figura 23 ilustra alguns tipos de seções compostas com seus correspondentes diagramas de tensões normais.



**Figura 23** – Seções transversais e distribuição de tensões da DIN 1052.

### 2.5.3. EUROCODE 5 (1993)

No anexo B desta norma européia é apresentado o critério de dimensionamento para vigas compostas unidas por conectores metálicos (uniões flexíveis). Recomenda que o efeito da deformabilidade da ligação seja levada em consideração, assumindo-se uma relação linear entre a carga de cisalhamento e o deslocamento longitudinal relativo entre os elementos da ligação.

O módulo de deslizamento é determinado em função da densidade da madeira e do diâmetro do pino utilizado. No caso de ligações com pré-furação os valores de  $K$  são dados por:

$$K_u = \frac{2}{3} \cdot K_{ser} \quad (100)$$

$$K_{ser} = \frac{\rho_k^{1,5} \cdot d}{20} \quad (101)$$

onde:

$K = K_u$  para os estados limites últimos (N/mm);

$K = K_{ser}$  para os estados limites de utilização (N/mm);

$d$  é o diâmetro do prego em mm;

$\rho_k$  é a densidade da madeira em  $\text{kg/m}^3$ . Se as peças forem de madeiras diferentes deve-se utilizar uma densidade equivalente  $\rho_k = \sqrt{\rho_{k1} \cdot \rho_{k2}}$ .

A partir deste módulo de deslizamento, é definido o fator de redução da inércia do conjunto, levando em consideração além do tipo de união, a disposição e espaçamento dos elementos de ligação, o tipo de madeira, a forma de montagem e proporção das peças individuais e o vão entre apoios da viga composta.

$$\gamma_2 = 1 \quad \text{e} \quad \gamma_i = \left[ 1 + \frac{\pi^2 \cdot E_i \cdot A_i \cdot s_i}{K_i \cdot L^2} \right]^{-1} \quad \text{para } i = 1 \text{ e } 3 \quad (102)$$

onde:

$E_i$  = módulo de elasticidade de cada elemento da seção transversal;

$A_i$  = área de cada parte da seção transversal;

$s_i$  = espaçamento dos pregos na interface do elemento  $i$  com o elemento 2;

$K_i$  = módulo de deslizamento da ligação do elemento  $i$  com o elemento 2;

$L$  = vão efetivo da viga ( $L = \text{vão}$ , para vigas biapoiadas), ( $L = 0,8 \cdot \text{vão}$ , para vigas contínuas) e ( $L = 2 \cdot \text{vão}$ , para vigas em balanço).

O espaçamento dos pregos pode ser uniforme ou variar conforme a força de cisalhamento, entre um valor mínimo  $s_{\min}$  e  $s_{\max}$ , sendo  $s_{\max} \leq 4 \cdot s_{\min}$ . Nesse último caso um valor efetivo de espaçamento pode ser usado, dado por:

$$s_{ef} = 0,75 \cdot s_{\min} + 0,25 \cdot s_{\max} \quad (103)$$

A distância entre os centros de gravidade da seção até a linha neutra da peça (ver figura 24) é dado por:

$$a_2 = \frac{\gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot (h_1 + h_2) - \gamma_3 \cdot E_3 \cdot A_3 \cdot (h_2 + h_3)}{2 \cdot \sum_{i=1}^3 \gamma_i \cdot E_i \cdot A_i} \quad (104)$$

$$a_1 = \left( \frac{h_1 + h_2}{2} \right) - a_2 \quad \text{e} \quad a_3 = \left( \frac{h_2 + h_3}{2} \right) + a_2 \quad (105)$$

onde:

$a_i$  = distância do centróide da área de cada elemento que compõe a seção transversal até a linha neutra y-y, desde que  $a_2$  não seja menor que zero e não maior que  $h_2/2$ ;

$h_i$  = altura de cada parte dos elementos componentes da seção transversal com  $h_3$  nulo para seção T;

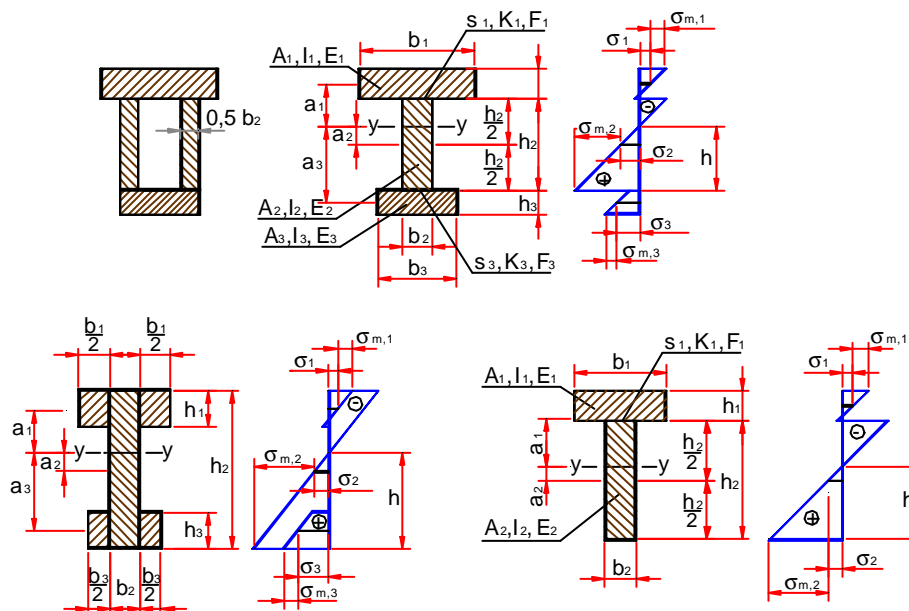
$b_i$  = largura de cada parte dos elementos componentes da seção transversal;

Assim é possível o cálculo da rigidez efetiva levando em consideração a rigidez da ligação.

$$(EI)_{ef} = \sum_{i=1}^3 (E_i \cdot I_i + \gamma_i \cdot E_i \cdot A_i \cdot a_i^2) \quad (106)$$

onde:

$I_i$  = momento de inércia de cada elemento componente da seção transversal ( $I_i = b_i \cdot h_i^3 / 12$ ).



**Figura 24** – Seções transversais e distribuição de tensões do EUROCODE 5.

Da mesma forma, são equacionadas as tensões normais e cisalhantes atuantes nas peças, bem como a força aplicada nos elementos de ligação ocasionada pelo deslizamento entre as peças.

Para vigas com geometria de seção transversal conforme as da figura 24, as tensões normais devem ser calculadas conforme mostrado a seguir:

$$\sigma_i = \gamma_i \cdot E_i \cdot a_i \cdot \frac{M}{(EI)_{ef}} \quad (107)$$

$$\sigma_{m,i} = 0,5 \cdot E_i \cdot h_i \cdot \frac{M}{(EI)_{ef}} \quad (108)$$

onde:

M = momento fletor;

$\sigma_i$  = tensão normal no centróide do elemento “i” devido a força normal;

$\sigma_{m,i}$  = tensão normal na extremidade do elemento “i” devido ao momento.

A máxima tensão cisalhante ocorre onde a tensão normal é nula. A tensão máxima de cisalhamento na alma da viga pode ser obtida como:

$$\tau_{2,max} = \left( \gamma_3 \cdot E_3 \cdot A_3 \cdot a_3 + 0,5 \cdot E_2 \cdot b_2 \cdot h^2 \right) \cdot \frac{V}{b_2 \cdot (EI)_{ef}} \quad (109)$$

onde:

V = força máxima de cisalhamento.

E por fim apresenta-se a equação para o cálculo da carga aplicada no conector.

$$F_i = \gamma_i \cdot E_i \cdot A_i \cdot a_i \cdot s_i \cdot \frac{V}{(EI)_{ef}} \quad \text{para } i = 1 \text{ e } 3 \quad (110)$$

## 2.6. Conclusões da Revisão Bibliográfica

Do estudo sobre peças compostas realizado na bibliografia, pode-se concluir que as vigas compostas de madeira serrada, ligadas por pregos, apresentam grande facilidade e baixo custo de produção, e podem ser largamente empregadas nas construções de madeira principalmente quando é requerido um acréscimo de inércia sem a disponibilidade de peças de seção maciça.

O comportamento das peças compostas unidas por conectores mecânicos é fortemente influenciado pela rigidez da ligação, portanto são necessários critérios especiais para o correto dimensionamento desses elementos estruturais.

Atualmente são utilizados basicamente dois métodos distintos de análise de peças compostas: o método dos coeficientes de minoração e o método analítico. Apesar de proporcionar agilidade no cálculo, o método dos coeficientes apresenta grande variabilidade por não considerar a rigidez da ligação e, por este motivo, alguns documentos normativos, que anteriormente o adotavam, após revisão optaram pelo método analítico. Já o método analítico proporciona maior precisão no cálculo de peças compostas, considerando a influência do deslizamento relativo entre as peças que compõem a seção em função das propriedades de rigidez de cada elemento, da geometria da seção, do vão, do módulo de deslizamento da ligação e do espaçamento entre conectores.

O método analítico baseado nas equações de equilíbrio pode ser apresentado de maneira exata ou aproximada. A diferença entre os dois modelos é a consideração do carregamento. O modelo exato apresenta uma equação final para cada forma de carregamento aplicado. Já o modelo aproximado considera um carregamento fictício senoidal o que proporciona uma equação final mais simples.

Os modelos de estudo de peças compostas descritos neste trabalho também se mostram adequados para o dimensionamento de vigas compostas T de madeira e concreto, e para vigas com alma em compensado, guardadas as particularidades de cada sistema.

O conhecimento da rigidez das ligações é um dos aspectos de fundamental importância na investigação do comportamento das peças compostas. A grande maioria dos trabalhos sobre ligações é direcionada para a determinação da capacidade de carga da ligação e poucos são os trabalhos desenvolvidos especificamente para investigar a rigidez das ligações.

Os modelos de investigação das ligações por pinos metálicos podem ser divididos em dois grupos; o modelo do escoamento (Yield Model) e os modelos de viga sob fundação. O modelo do escoamento assume o comportamento perfeitamente plástico tanto para madeira quanto para o pino. Esse modelo possui razoável precisão na determinação da capacidade de carga das ligações, mas não possibilita prescrever a rigidez da ligação e nem o deslocamento na ruptura, dois importantes fatores para o dimensionamento das ligações. Já os modelos de viga sob fundação possibilitam a determinação da resistência e rigidez das ligações. O



comportamento dos materiais (madeira e pino) podem ser considerados elásticos, perfeitamente plásticos, ou elasto-plásticos.

Os códigos normativos que adotam o modelo do escoamento para dimensionamento de ligações, apresentam equações empíricas para a determinação tanto da rigidez da ligação quanto do deslocamento.

O modelo de viga sob fundação elástica, também conhecido como Modelo de KUENZI, apresenta consistência na formulação. Mesmo com técnicas modernas de investigação, a teoria de KUENZI apresenta resultados satisfatórios para o domínio linear e indica ser conveniente para a determinação da rigidez da ligação para as peças compostas.

A norma brasileira apresenta uma metodologia simples de cálculo para o dimensionamento de peças com seção transversal composta, recomendando a redução da inércia da peça, por meio de coeficientes, para levar em conta a não solidarização total das peças que compõem a seção transversal. Estes coeficientes são apresentados conforme o arranjo da seção transversal, independente da rigidez da ligação.

As normas DIN 1052 e EUROCODE 5 apresentam metodologia muito semelhante derivada do método analítico das equações de equilíbrio – modelo simplificado. A diferença é que o EUROCODE 5 define a rigidez efetiva  $(EI)_{ef}$  e a outra o momento de inércia efetivo  $I_{ef}$ . Entretanto, a maneira de calcular o módulo de deslizamento é diferente. Enquanto a norma européia define o valor do módulo de deslizamento por uma equação empírica que considera a densidade da madeira e o diâmetro do pino, a norma alemã propõe valores tabelados em função da configuração da seção transversal. Os valores de módulo de elasticidade indicados pela norma alemã são muito inferiores aos que normalmente resultam do cálculo pela fórmula do EUROCODE 5.