ANEXO A

Resolução do sistema de equações diferenciais de segunda ordem do modelo exato (CHUI & BARCLAY – 1998).

Para determinar a solução do sistema de equações diferenciais (20) é necessário aplicar as devidas condições e contorno do problema. Para uma viga simplesmente apoiada, o presente problema pode ser escrito como

$$\frac{d^2 N}{dx^2} = A \cdot N + V \cdot M(x), \qquad 0 \le x \le L \qquad \text{(A1)}$$
$$N(0) = 0\,,\ N(L) = 0$$

Onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{11} & -a_{12} - a_{32} & -a_{13} - a_{33} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix} \qquad \text{(A2)}$$

M(x) é o momento fletor. Para vigas simplesmente apoiadas sobre um carregamento distribuído w, M(x) é dado por

$$M(x) = \frac{w}{2}(L - x)x \qquad \text{(A3)}$$

Para vigas simplesmente apoiadas com carga concentrada P a uma distância a = αL da origem, M(x) pode ser expresso como

$$M(x) = P[(1-\alpha)x - (x-a)U_a(x)] \qquad \text{(A4)}$$

Onde U_a é a função passo na qual $U_a = 1$ para $a < x < L$, e $U_a = 0$ para $x \le a$.

Pode-se provar que o determinante de A é nulo e que o autovalor $\lambda_0 = 0$. Os outros dois autovalores λ_1 e λ_2 podem ser encontrados em A5.

$$\lambda_1 = \frac{-b - (b^2 - 4c)^{\frac{1}{2}}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{-b + (b^2 - 4c)^{\frac{1}{2}}}{2} \qquad \text{(A5)}$$

Onde

$b = a_{12} + a_{32} - a_{11} - a_{33}$

e

$$c = a_{33}(a_{11} - a_{12}) + a_{32}(a_{13} - a_{11})$$

As soluções para as forças normais e deslocamentos são

$$N_1(x) = -N_2(x) - N_3(x) \tag{A6}$$

$$N_2(x) = -q_1 p_1 r_1(x) - q_2 p_2 r_2(x) \tag{A7}$$

$$N_3(x) = p_1 r_1(x) + p_2 r_2(x) \tag{A8}$$

$$y(x) = \frac{1}{\Sigma EI}\left[-r_0(x)(1 + y_1 + y_2) + y_1 r_1(x) + y_2 r_2(x)\right] \tag{A9}$$

Na qual os parâmetros p_1, p_2, q_1, q_2, y_1, e y_2 são funções das dimensões e propriedades dos elementos da viga composta, e $r_0(x)$, $r_1(x)$, e $r_2(x)$ são funções da configuração do carregamento e das condições de contorno. Os parâmetros p_1, p_2, q_1, q_2, y_1, e y_2 são apresentados em (A10)-(A12).

$$p_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{da_{34} + 2a_{32}a_{14}}{(b^2 - 4c)^{\frac{1}{2}}} + a_{34}\right)$$

(A10)

$$p_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{da_{34} + 2a_{32}a_{14}}{(b^2 - 4c)^{\frac{1}{2}}} + a_{34}\right)$$

Onde $d = a_{11} + a_{32} - a_{33} - a_{12}$.

$$q_1 = \frac{a_{33} - \lambda_1}{a_{32}}, \quad q_2 = \frac{a_{33} - \lambda_2}{a_{32}} \tag{A11}$$

$$y_1 = \frac{p_1}{\lambda_1}(h_2 - h_1 q_1), \quad y_2 = \frac{p_2}{\lambda_2}(h_2 - h_1 q_2) \tag{A12}$$

Onde $h_1 = (d_1 + d_2)/2$ e $h_2 = d_1/2 + d_2 + d_3/2$.

As funções $r_0(x)$, $r_1(x)$, e $r_2(x)$ para carregamento distribuído uniformemente e para carga concentrada são apresentadas em (A13) e (A14).

- Carga uniformemente distribuída:

$$r_i(x) = -\frac{w}{\lambda_i}\left[\frac{\sinh\left(\sqrt{\lambda_i}\,x\right)+\sinh\left(\sqrt{\lambda_i}\,(L-x)\right)}{\lambda_i \sinh\left(\sqrt{\lambda_i}\,L\right)} + \frac{x(L-x)}{2} - \frac{1}{\lambda_i}\right], \quad i = 1,2 \tag{A13}$$

$$r_i(x) = \frac{w}{24}\,x(L-x)\left(x^2 - xL - L^2\right), \quad i = 0$$

- Carga concentrada:

$$r_i(x) = \frac{P}{\lambda_i}\left\{\frac{\sinh\left(\sqrt{\lambda_i}\,(L-a)\right)\sinh\left(\sqrt{\lambda_i}\,x\right)}{\sqrt{\lambda_i}\sinh\left(\sqrt{\lambda_i}\,L\right)} + (\alpha-1)x - \left[\frac{\sinh\left(\sqrt{\lambda_i}\,(x-a)\right)}{\sqrt{\lambda_i}} - (x-a)\right]U_a(x)\right\}, \quad i = 1,2 \tag{A14}$$

$$r_i(x) = \frac{P}{6}\left[(1-\alpha)\left(x^2 - L^2\right)x + \frac{x}{L}(L-a)^3 - (x-a)^3\,U_a(x)\right], \quad i = 0$$