

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

CAMILA BARELLA LUIZ

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE TRELIÇAS
HIPERESTÁTICAS CONSIDERANDO INCERTEZAS**

**SÃO CARLOS
2020**

CAMILA BARELLA LUIZ

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE TRELIÇAS
HIPERESTÁTICAS CONSIDERANDO INCERTEZAS**

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências. Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. André Teófilo Beck, Ph. D.

SÃO CARLOS

2020

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Engenheira **CAMILA BARELLA LUIZ**.

Título da dissertação: "Otimização topológica de treliças hiperestáticas considerando incertezas".

Data da defesa: 17/04/2020

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Associado **André Teófilo Beck**

Aprovado

(Orientador)

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Dr. **Rafael Holdorf Lopez**

Aprovado

(Universidade Federal de Santa Catarina/UFSC)

Prof. Dr. **Eduardo Lenz Cardoso**

Aprovado

(Universidade do Estado de Santa Catarina/UDESC)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço ao meu orientador, Prof. André Beck, pelos ensinamentos e suporte ao longo desses dois anos. Ao meu coorientador, Prof. André Torii, pela sua contribuição e disponibilidade em me auxiliar todas as vezes que o solicitei.

A todos os professores do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP e do Departamento de Engenharia Civil da UEM, os quais contribuíram para minha formação.

Aos amigos do SET, pelas conversas, conselhos e assistências que muito me ajudaram durante o mestrado.

A minha família, meus pais, Silvana Barella Pretti Luiz e Célio Pretti Luiz, e minha irmã, Julia Barella Luiz, pelo suporte e incentivo nos meus anos de estudo. Ao meu namorado, Vinícius Tavares, pelo apoio e paciência nesse período em que permaneci distante.

Finalmente, agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro para o desenvolvimento desta pesquisa.

RESUMO

LUIZ, C.B. **Otimização Topológica de Treliças Hiperestáticas Considerando Incertezas.** 120p. Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

Embora a otimização topológica de treliças seja objeto de estudo desde as primeiras pesquisas sobre a otimização estrutural, problemas com restrição de flambagem ainda são um desafio devido a descontinuidade da derivada das cargas críticas e dificuldade na definição dos comprimentos de flambagem durante a otimização. Nesse contexto, ainda há um número restrito de pesquisas que consideram as incertezas e a possibilidade de falhas progressivas após ruptura inesperada de um elemento. Essas descon siderações levam a respostas ótimas isostáticas, contrariando um dos requisitos mínimos para prevenção do colapso progressivo exigidos pelas normas internacionais. A redundância permite a redistribuição dos esforços após a falha inesperada de um elemento, sendo essencial para a segurança das estruturas. Diante disso, esta pesquisa teve por objetivo comparar duas formulações de otimização baseada em incertezas, *Reliability Based Design Optimization* (RBDO) e *Risk Optimization* (RO), aplicadas ao problema topológico de treliças com restrições de flambagem considerando a capacidade de redistribuição dos esforços das estruturas redundantes. Para isto, desenvolveu-se um código de otimização determinístico, *Firefly*, acoplado a algoritmos de confiabilidade considerando instabilidades locais e global. O modelo mecânico foi representado pelo método dos elementos finitos posicional, que implica a consideração da não linearidade geométrica. Os resultados mostram que, mesmo considerando a capacidade da redistribuição dos esforços das estruturas hiperestáticas, a formulação RBDO sempre encontra estruturas ótimas isostáticas. Todavia, a formulação baseada em risco inclui topologias hiperestáticas entre as soluções ótimas. Isto é possível pela diferenciação do custo de colapso direto de estruturas isostáticas, do colapso progressivo de estruturas hiperestáticas.

Palavras-chave: Otimização topológica. Confiabilidade Estrutural. Otimização baseada em confiabilidade. Otimização de Risco.

ABSTRACT

LUIZ, C.B. **Topology Optimization of Hyperstatic Truss Considering Uncertainties.**

120p. Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

Although truss topology optimization has been studied since the first researches on structural optimization, problems with buckling constraint still a challenge to scientific community because of discontinuity of the derivative of critical loads and difficulty in defining buckling lengths during optimization. In this context, there is a limited number of studies that considers uncertainties and progressive collapse in the truss optimization problem. This leads to optimal isostatic responses, going against one of the minimum requirements to prevent the progressive collapse by international norms. Redundancy allows loads redistribution after an unexpected element failure, which is essential for the safety of structures. Thus, this research aimed to compare two optimization formulations based on uncertainties: Reliability Based Design Optimization (RBDO) e Risk Optimization (RO), applied to truss topology problem with buckling constraints considering the ability of load redistribution of redundant structures. A deterministic optimization code (Firefly) was developed, which was connected with reliability algorithms considering local and global instabilities. Mechanical models were represented by a non-linear geometric finite element method. Results shown that even considering load redistribution of hyperstatic structures, the RBDO formulations always find isostatic structures as best solution. However, the RO formulation included hyperstatic topologies within results. This is possible by differentiating the cost of direct collapse of isostatic structures, and the cost of sequential collapse of hyperstatic structures.

Keywords: Topology optimization. Structural reliability. Reliability Based Design Optimization. Risk optimization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Tipos de otimização estrutural.....	17
Figura 2.1 – Fluxograma da implementação do MEF-Posicional.....	28
Figura 2.2 – Mudança de configuração de um sólido.....	31
Figura 2.3 – Linha média de um elemento e seus vetores nodais.....	32
Figura 2.4 – Ponto genérico na configuração inicial do elemento de pórtico.....	33
Figura 2.5 – Configuração atual do elemento de pórtico.....	34
Figura 2.6 – Mudança de configuração – mapeamento posicional.....	35
Figura 2.7 – Mudança de configuração – mapeamento posicional.....	38
Figura 2.8 – Eixos locais para as tensões de Cauchy.....	41
Figura 2.9 – Torre treliçada sujeita a flexão.....	43
Figura 2.10 – Deslocada da Torre Treliçada.....	44
Figura 2.11 – Coluna submetida a flexocompressão.....	44
Figura 2.12 – Estrutura deslocada para diferentes níveis de carregamento.....	46
Figura 2.13 – Geometria inicial e deformada do pórtico articulado.....	47
Figura 2.14 – Deslocadas da estrutura a) tração b) compressão.....	48
Figura 3.1 – Situações de equilíbrio.....	50
Figura 3.2 – Instabilidade bifurcacional.....	52
Figura 3.3 – Instabilidade por “Snap-through”.....	53
Figura 3.4 – Treliça de Von-Mises.....	53
Figura 4.1 – Fluxograma do algoritmo Firefly.....	59
Figura 4.2 – Transformação composta do espaço original \mathbb{X} ao espaço normal padrão \mathbb{Y}	64
Figura 4.3 – Peso das amostras no espaço de projeto.....	74
Figura 5.1 – Exemplo de imperfeição imposto nas barras da treliça.....	77
Figura 5.2 – Barra biapoiada submetida a compressão.....	78
Figura 5.3 – Histórico de deslocamentos.....	79
Figura 5.4 – Estrutura reticulada de 5 barras.....	80
Figura 5.5 – Diagrama de esforços normais para $P < 0$	80
Figura 5.6 – Deslocamento horizontal da treliça para $P < 0$	81
Figura 5.7 – Diagrama de esforços normais para $P > 0$	81
Figura 5.8 – Deslocamento horizontal da treliça para $P > 0$	82
Figura 5.9 – Fluxograma para otimização paramétrica.....	82
Figura 5.10 – Treliça de 18 barras e 4 áreas de projeto.....	83

Figura 5.11 – Deslocada da solução ótima.....	85
Figura 5.12 – Fluxograma RBDO com incertezas nas variáveis de projeto.....	86
Figura 5.13 – Treliça de 6 nós e 10 barras.....	87
Figura 5.14 – Diagrama de esforços normais.....	89
Figura 5.15 – Distribuição das variáveis de projeto.....	90
Figura 5.16 – Malha inicial para Treliça de 17 barras.....	91
Figura 5.17 – Solução ótima para restrição de tensão + deslocamento.....	91
Figura 5.18 – Fluxograma para otimização topológica.....	93
Figura 5.19 – Treliça de 6 nós e 11 barras.....	93
Figura 5.20 – Topologia ótima.....	94
Figura 5.21 – Treliça com 6 nós e 15 elementos.....	95
Figura 5.22 – Topologias ótimas.....	96
Figura 5.23 – Treliça com 12 nós e 39 barras.....	97
Figura 5.24 – Três melhores topologias obtidas para o problema.....	98
Figura 5.25 – Seleção das três melhores topologias obtidas para o problema.....	99
Figura 5.26 – Diagramas de esforço normal –unidade lb.....	100
Figura 5.27 – Fluxograma RBDO com variáveis de projeto.....	102
Figura 5.28 – Três melhores topologias encontradas na RBDO.....	104
Figura 5.29 – Fluxograma da otimização considerando o colapso progressivo para determinação da probabilidade de falha do sistema.....	106
Figura 5.30 – Treliça com 4 nós e 6 barras.....	107
Figura 5.31 – Topologia ótima: mão francesa.....	108
Figura 5.32 – Treliça com dois carregamentos e configuração isostática.....	109
Figura 5.33 – Três melhores topologias encontradas na RO.....	110

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Intervalos mínimos para geração de amostras do WASM.....	73
Tabela 5.1 – Sequência das implementações do código computacional.....	76
Tabela 5.2 – Força crítica para barras comprimidas.....	79
Tabela 5.3 – Estatísticas da convergência para parâmetros de entrada distintos.....	84
Tabela 5.4 – Comparação da solução ótima encontrada com as da referência.....	84
Tabela 5.5 – Comparação da solução ótima: seção transversal quadrada.....	85
Tabela 5.6 – Parâmetros estatísticos das V.A.	87
Tabela 5.7 – Confiabilidade Estrutural em relação ao critério de deslocamentos.....	88
Tabela 5.8 – Confiabilidade Estrutural em relação ao critério de tensão.....	88
Tabela 5.9 – Confiabilidade Estrutural em relação a flambagem das barras.....	89
Tabela 5.10 – Áreas transversais ótimas.....	90
Tabela 5.11 – Configuração ótima para treliça de 6 nós e 11 barras.....	95
Tabela 5.12 – Configuração ótima para treliça de 6 nós e 15 barras.....	96
Tabela 5.13 – Configuração ótima para treliça de 2 nós e 39 barras.....	98
Tabela 5.14 – Comparação da solução ótima: seção transversal quadrada.....	101
Tabela 5.15 – Comparação da melhor topologia para diferentes confiabilidades.....	105
Tabela 5.16 – Configurações ótimas.....	108
Tabela 5.17 – Configurações ótimas para treliça com dois carregamentos.....	110
Tabela 5.18 – Configurações ótimas obtidas no RO.....	111

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 2.1 – Força pelo deslocamento vertical.....	43
Gráfico 2.2 – Evolução dos deslocamentos transversais.....	45
Gráfico 2.3 – Evolução do deslocamento axial.....	45
Gráfico 2.4 – Deslocamentos para força de compressão.....	47
Gráfico 2.5 – Deslocamentos para força de tração.....	48
Gráfico 5.1 – Convergência das otimizações – Treliça de 11 barras.....	94
Gráfico 5.2 – Convergência das otimizações – Treliça de 15 barras.....	96

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
1.1 OBJETIVOS	20
1.2 METODOLOGIA	20
1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
2 MODELO MECÂNICO	27
2.1 ENERGIA MECÂNICA TOTAL	27
2.2 SOLUÇÃO DO SISTEMA PELO PROCESSO DE NEWTON-RAPHSON	28
2.3 ELEMENTO DE BARRA	29
2.3.1 Força Interna para Elemento de Barra	30
2.3.2 Força Externa para Elemento de Barra	31
2.3.3 Determinação da matriz Hessiana do Elemento de Barra	31
2.4 ELEMENTO DE PÓRTICO	32
2.4.1 Mudança de Configuração	32
2.4.2 Força interna do elemento de pórtico	37
2.4.3 Força externa do elemento de pórtico	38
2.4.4 Determinação da matriz Hessiana	39
2.4.5 Primeira e segunda derivada da deformação de Green	40
2.4.6 Tensões Internas e Esforços Solicitantes	41
2.4.7 Aplicação de Rótulas	43
2.5 VALIDAÇÃO DO MODELO MECÂNICO	43
2.5.1 Elementos de Barra	43
2.6.1 Elemento de Pórtico	45
3 ESTABILIDADE ESTRUTURAL	51
3.1 TIPOS DE PERDA DE ESTABILIDADE	52
3.1.1 Instabilidade bifurcacional	53
3.1.2 Instabilidade por “Snap-Through”	53
3.2 ANÁLISES DE ESTABILIDADE	55
4 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	57
4.1 ALGORITMO FIREFLY	59
4.2 OTIMIZAÇÃO COM CONFIABILIDADE	62
4.3 SOLUÇÃO DE PROBLEMAS RBDO BASEADAS NO FORM	65

4.3.1 Método de Confiabilidade de Primeira Ordem	65
4.3.2 Abordagem acoplada	67
4.3.3 Abordagem desacoplada de laço único	68
4.4 SOLUÇÃO DE PROBLEMAS RBDO E RO BASEADAS EM SIMULAÇÃO	69
4.4.1 Simulação de Monte Carlo	70
4.4.2 Números Aleatórios Comuns	72
4.4.3 Função Indicadora Contínua	72
4.4.4 Método de Simulação com Ponderação Média	73
4.4.5 Simulação com Ponderação Média Ordenada	75
5 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	77
5.1 IMPERFEIÇÕES NAS BARRAS RETICULADAS	78
5.1.1 Exemplo: Verificação da perda de estabilidade de barras comprimidas	79
5.1.2 Exemplo: Análise de uma estrutura reticulada	81
5.2 OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA	83
5.2.1 Exemplo: Otimização paramétrica determinística de treliça de 18 barras	84
5.3 OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA BASEADA EM CONFIABILIDADE	86
5.3.1 Exemplo: Avaliação da confiabilidade estrutural de uma treliça	88
5.3.2 Exemplo: Otimização paramétrica de treliça com restrição de confiabilidade	90
5.4 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	91
5.4.1 Exemplo: Otimização topológica determinística de treliça com 11 barras	94
5.4.2 Exemplo: Otimização topológica determinística de treliça com 15 barras	96
5.4.3 Exemplo: Otimização topológica determinística de treliças com 39 barras	98
5.4.4 Exemplo: Treliça de 11 barras com restrição de flambagem	100
5.5 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COM INCERTEZAS	102
5.5.1 Exemplo: RBDO topológica de treliça com 11 barras	103
5.6 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA CONSIDERANDO O COLAPSO PROGRESSIVO....	106
5.6.1 Exemplo: RBDO e RO de treliça com 6 barras	107
5.6.2 Exemplo: RBDO e RO de treliça com 11 barras	111
6 CONCLUSÕES	113
6.1 SUGESTÕES DE DESENVOLVIMENTOS FUTUROS	114
REFERÊNCIAS	115

1 INTRODUÇÃO

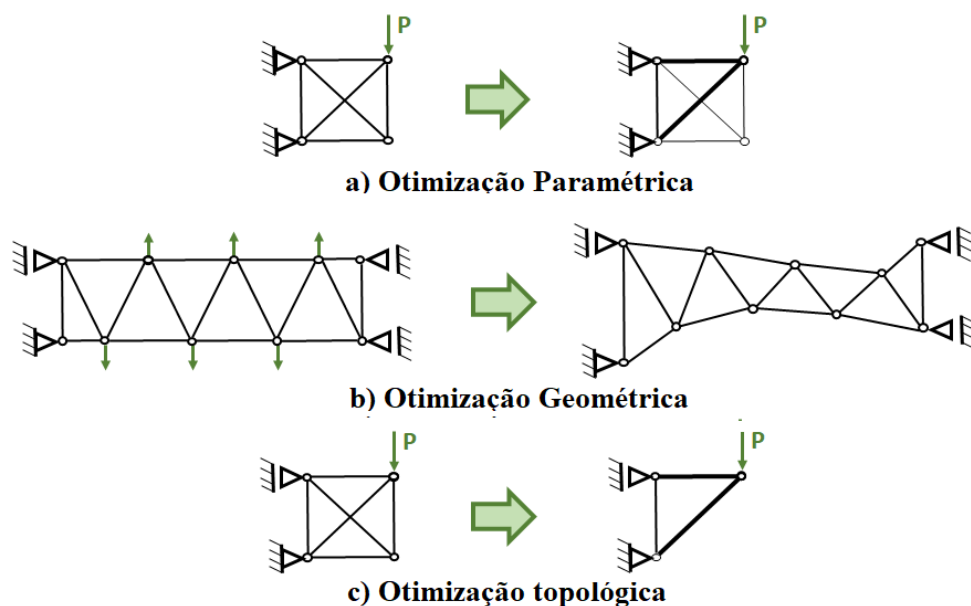
A otimização consiste em uma técnica matemática, a qual busca um valor ótimo para variáveis de projeto que minimizem uma função objetivo, sujeita a restrições de igualdade, desigualdade e laterais. Esta técnica aplica-se a diversos problemas de engenharia, como a minimização da flexibilidade, minimização da energia de deformação, minimização do peso estrutural e maximização da frequência natural.

A otimização estrutural pode ser classificada em: paramétrica; geométrica e topológica. A primeira caracteriza-se pelo emprego das dimensões do elemento estrutural (altura, largura, área transversal) como variáveis de projeto. Neste caso, todos os elementos pertencentes a estrutura inicial estarão presentes na estrutura ótima, apenas as suas dimensões serão modificadas, Figura 1.1 (a).

Do mesmo modo, a otimização geométrica também não exclui elementos da malha inicial. Nesta otimização, varia-se a forma estrutural, em outras palavras, altera-se posições nodais da estrutura, Figura 1.1 (b).

Por último, a otimização topológica, também conhecida como otimização de layout, tem o objetivo de encontrar a melhor distribuição de material dentro do domínio de projeto, visando a redução de gastos com materiais em regiões com pouca sollicitação. Desse modo, nem todos os elementos pertencentes a malha inicial estarão presentes na solução ótima, Figura 1.1 (c).

Figura 1.1: Tipos de otimização estrutural



O emprego destas técnicas de otimização tem ganhado importância no mercado atual, uma vez que, para a elaboração de projetos competitivos, deve-se apresentar estruturas cada vez mais leves (redução de custos com materiais) sem comprometer a integridade estrutural da mesma.

Todavia, frequentemente a otimização é realizada de forma muito simples, adotando-se geometrias, materiais e ações solicitantes conhecidos sem considerar as dispersões espaciais associadas à essas variáveis (GOMES, 2001). Tal simplificação do problema real pode comprometer a segurança e o custo total do projeto.

Os coeficientes de segurança estabelecidos em normas técnicas são comumente as únicas formas de considerar as incertezas nos projetos estruturais. Os métodos de otimização determinísticos utilizam-se deles para encontrar a melhor configuração do ponto de vista mecânico. Contudo, como mostrado em Beck e Gomes (2012), mesmo quando empregado, coeficientes ótimos na análise determinística, a segurança e o custo total da estrutura são comprometidos ao se otimizar a estrutura.

A otimização baseada em confiabilidade, *Reliability-Based Design Optimization* (RBDO), consiste na integração das incertezas existentes no problema, através de análise probabilística na avaliação da segurança quanto ao colapso ou falha da estrutura. Desse modo, garante-se uma estrutura otimizada e segura. Esta análise, porém, ainda não considera os custos relativos à manutenção da estrutura ao longo de sua vida útil, nem os custos esperados de falha.

Uma vez que a viabilidade econômica é um fator fundamental na decisão de realizar ou não um empreendimento, surgiu a otimização estrutural de risco, *Risk Optimization* (RO). Nessa abordagem os custos de falha do sistema estrutural são contabilizados e implementados na formulação do problema, mesmo que estruturas convencionais como prédios e pontes não admitam falha. Resultando em um modelo no qual a configuração estrutural, segurança e custos são otimizados simultaneamente. A otimização de risco engloba as outras duas formulações e, portanto, é a mais completa dentre as aqui apresentadas. Seu desafio, porém, é a complexidade dos cálculos exigidos pela formulação, os quais não podem ser resolvidos por simples métodos de programação matemática (BECK e GOMES, 2012).

Outra simplificação muito comum nos projetos estruturais é a predeterminação dos carregamentos e esforços recebidos por cada elemento estrutural e a realização do dimensionamento de cada membro isoladamente, ainda que a estrutura seja hiperestática. Uma justificativa para essa prática é que as normas técnicas, nacionais e estrangeiras, apresentam fatores parciais calibrados com base na confiabilidade estrutural de membros, ao invés de usar fatores relacionados à confiabilidade do sistema.

A confiabilidade de sistemas trabalha com múltiplos modos de falha em estruturas compostas por múltiplos elementos ao invés de componente governado por um único modo de falha, o que apesar de ser suficiente em alguns casos, não corresponde com diversas aplicações práticas (FABER, 2006).

Sistemas muito complexos podem ser divididos em sistemas menores de acordo com duas possíveis associações: em série e em paralelo. Nos sistemas com associação em série a falha é determinada pela falha de um único elemento, já nas associações em paralelo a falha de um único elemento não caracteriza a falha da estrutura. Contudo, é possível que a falha do sistema ocorra antes da falha de todos os seus componentes (DITLEVSEN e BJERAGER, 1986).

Os sistemas paralelos são conhecidos como sistemas redundantes e podem ser classificados em redundância ativa, quando todos os elementos estruturais são solicitados simultaneamente, e redundância passiva, quando alguns elementos permanecem em standby, sendo solicitados apenas em caso de falha dos outros componentes.

A aplicação da confiabilidade de sistemas se faz necessária na consideração de redistribuições de carregamentos entre os elementos estruturais, após a falha de um. Tal característica é fundamental no estudo do colapso progressivo em estruturas hiperestáticas (NOGUEIRA, 2005).

O colapso progressivo pode ser definido como a propagação de um dano local, causado por um evento inicial, de elemento em elemento, resultando (eventualmente) no colapso completo da estrutura ou desproporcionalmente de grande parte dela, também chamado de colapso desproporcional (ELLINGWOOD, 2007).

Esse fenômeno começou a ser estudado em 1968, após o acidente ocorrido no edifício Ronan Point, na cidade de Londres. No 18º andar da torre de 22 andares, uma explosão de gás na cozinha provocou a ruína de todas as cozinhas da estrutura de concreto pré-moldado. Em 1995, o edifício Alfred P. Murrah, localizado em Oklahoma, EUA, foi atingido por um caminhão-bomba em uma de suas fachadas. A explosão causou vários danos a fachada e se estendeu cerca de 20m dentro do edifício.

Após o acidente, alguns países como Reino Unido, Canadá e Estados Unidos passaram a adotar normas regulamentares para prevenir o colapso progressivo. No Eurocode 1, por exemplo, é aconselhado que uma falha localizada devido a uma ação acidental pode ser aceitável contanto que a estabilidade estrutural não seja comprometida, de modo que medidas de emergência possam ser adotadas. Nos edifícios, essas medidas devem garantir que as pessoas consigam ser evacuadas em segurança do local e dos arredores. Além disso, define-se um limite

aceitável de “falha localizada”: 100m² ou 15% da área em planta em não mais que em dois pavimentos consecutivos.

Já nas normas brasileiras, o tema é tratado de forma sumária e sem aprofundamentos. A NBR 9062 – Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado, no sub-item 5.1.1.4 orienta apenas que “devem ser tomados cuidados especiais na organização geral da estrutura e nos detalhes construtivos de forma a minimizar a possibilidade de colapso progressivo”. Já na NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto, na subseção 19.5.4, intitulada Colapso Progressivo, recomenda-se armações nas lajes “para garantir a ductilidade local e a consequente proteção contra o colapso progressivo”.

Apesar de um crescente interesse no estudo de problemas de otimização aplicando confiabilidade (RBDO e RO), ainda há uma ausência de publicações sobre o projeto ótimo de estruturas redundantes que consideram de forma objetiva a redistribuição dos esforços para os elementos remanescentes após a falha de um elemento hiperestático. Dessa forma o trabalho tem por objetivo a otimização topológica de treliças hiperestáticas considerando as possibilidades de falha de seus membros e sua propagação ao longo da estrutura. Este trabalho se justifica por estar inserido num campo amplamente aberto para pesquisa.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo desta pesquisa consiste em analisar e comparar o projeto ótimo de treliças obtidas por meio das formulações RBDO e RO. Os objetivos específicos desta dissertação são:

1. Desenvolver uma metodologia para a otimização topológica de treliças considerando instabilidades locais e global e a propagação da falha dos elementos;
2. Implementar a metodologia em um programa computacional na linguagem Fortran;
3. Estudar o efeito das incertezas na obtenção de topologias ótimas, por meio das técnicas de otimização: baseada em confiabilidade e risco.

1.2 METODOLOGIA

Este trabalho consiste na elaboração de um programa de otimização de treliças hiperestáticas submetidas a incertezas no carregamento considerando o colapso progressivo. A linguagem de programação utilizada é o Fortran. Para a avaliação das incertezas foram empregadas técnicas de otimização RBDO e RO baseadas em métodos de simulação. Estas foram acopladas ao algoritmo heurístico *Firefly* responsável pelo problema de otimização. A

representação do modelo mecânico foi efetuada pelo método dos elementos finitos posicional, o qual considera a não linearidade geométrica.

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A concepção de um projeto estrutural consiste em uma série de decisões racionais a fim de se obter o menor consumo de material, com a maior segurança e/ou facilidade de execução, as quais refletem diretamente nos custos do projeto. Um projeto ótimo é aquele que, dentre as inúmeras soluções estruturais que atendem às necessidades de projeto, possui menor custo sem comprometer a funcionalidade e segurança da estrutura.

Diante disso, a otimização estrutural é definida como um conjunto de ferramentas numéricas que buscam os melhores valores das variáveis de projeto, levando ao projeto ótimo enquanto satisfaz todas as restrições impostas. A eficiência desta ferramenta é dependente da definição correta do modelo matemático representativo do problema.

Um dos primeiros trabalhos sobre a otimização estrutural foi desenvolvido por Maxwell (1869), o qual estudou a otimização do volume de material de estruturas de barras submetidas a determinada força axial. Este trabalho teve continuidade em Michell (1904), que estudou a ótima conectividade entre todos os elementos de barra, sendo a base dos métodos conhecidos como “*fully stressed design*”. Esta pesquisa é considerada por diversos autores como a pioneira no campo da otimização topológica.

Nos anos seguintes, diversas pesquisas propuseram métodos para resolução de problemas de otimização determinística. Estes caracterizam-se pela busca dos valores para variáveis de projeto (como espessura, altura da seção), que minimizam uma função objetivo (geralmente relacionada ao volume ou o peso da estrutura) sujeita a restrições relacionadas a requisitos de normas.

Paralelamente, pesquisas como de Mayer (1926), Wierzbick (1936) e Straletzki (1947) mostravam a impossibilidade de se afirmar que uma estrutura é absolutamente segura, devido às incertezas dos parâmetros de resistência dos materiais empregados e das ações atuantes. Apesar destes trabalhos apresentarem formulações matemáticas para o problema da segurança estrutural, foi apenas com a pesquisa de Freudenthal (1947) que as teorias estatísticas foram implementadas para a quantificação da probabilidade de falha. Em Hasofer & Lind (1974) definiu-se o índice de confiabilidade como a mínima distância entre a equação de estado limite e a origem do espaço normal padrão, também conhecido como a medida geométrica da probabilidade de falha.

No entanto, apenas na década de 70 estes dois temas foram abordados conjuntamente. Moses (1977) propôs a consideração da segurança estrutural na função de custo da estrutura ótima. No estudo da otimização baseada na confiabilidade de sistemas, o artigo ressalta a dificuldade da análise de confiabilidade devido aos diferentes modos de falha.

Contudo, sabendo que o emprego da confiabilidade de sistemas representa melhor o comportamento real da estrutura, muitas pesquisas apresentaram técnicas para sua incorporação na otimização. Enevoldsen e Sorensen (1993) estudaram quatro abordagens para o problema: duas abordagens diretas, uma incluindo sensibilidades semi-analíticas e outra incluindo sensibilidades aproximadas; uma formulação sequencial baseada em critérios de otimalidade e uma formulação sequencial incluindo um novo modo de iteração de limites, chamado de *Bounds Iteration Method* (BIM). Esta última mostrou-se rápida e estável, sendo eficiente tanto para sistema em série como para sistemas em paralelo ou misto.

Liang, Mourelatos e Nikolaidis (2007) empregaram uma probabilidade de falha alvo como variável na otimização de sistemas em série. Nesta formulação o usuário especifica um valor mínimo para a confiabilidade do sistema ao invés de determinar uma confiabilidade mínima para cada um dos modos de falha.

Nesta mesma linha, Aoues e Chateaneuf (2008) propuseram uma metodologia, na qual a otimização dos componentes não é definida pela minimização do custo estrutural sob um alvo de confiabilidade prescrito para um único estado limite, mas sim por um alvo adaptável que busca o melhor compromisso entre segurança e desempenho.

Uma metodologia para otimização estrutural baseada em confiabilidade para cargas dependentes do tempo foi apresentada por Kuschel e Rackwitz (2000). Já Jensen et al. (2009) adicionaram estas incertezas na otimização com confiabilidade de sistemas estruturais.

A implementação dos conceitos de confiabilidade no processo de otimização pode ser feita de duas maneiras: através do uso de índices de confiabilidade alvo nas funções de restrição, RBDO, ou de funções objetivo baseada nos custos esperados para todo o ciclo de vida da estrutura, RO.

Wen e Kang (2001) apresentam um método para modelar as incertezas e avaliar o custo esperado do ciclo de vida de um sistema sob múltiplos riscos. Sua análise concluiu que o custo do ciclo de vida é um dos principais fatores na tomada de decisão do projeto racional. Métodos convencionais, baseados em análise determinística ou análise probabilística por si só, podem não ser vantajosos a longo prazo, comparados à consideração de custo.

Ang e Lee (2001) propuseram uma abordagem sistemática para a avaliação do custo-benefício dos critérios de projeto em relação ao custo de todo ciclo de vida da estrutura. Em seu artigo analisam a otimização de um edifício de concreto armado submetido a terremotos.

Uma comparação entre a otimização determinística (DDO), a RBDO e a RO é realizada por Beck e Gomes (2012). Compreendendo que a otimização de risco é a mais ampla das três, esta é realizada primeiro. Nesta análise, encontra-se além dos resultados comuns, coeficientes de segurança e probabilidade de falha ótimos que são utilizados como restrições para a DDO e a RBDO, respectivamente. Os resultados apontam que, mesmo utilizando-se os parâmetros ótimos, as formulações DDO e RBDO resultam em estruturas de custo total superior as encontradas na RO, embora os custos de fabricação sejam reduzidos.

A otimização de risco também foi comparada com a formulação robusta por Beck et al. (2015). O fator alfa, utilizado na formulação robusta e escolhido subjetivamente pelo analista, é equivalente ao custo de falha empregado na RO. Todavia, os resultados obtidos são drasticamente distintos. A formulação robusta apresenta resultados largamente dependentes de parâmetros arbitrários e constantes de normalização arbitrárias. Já na RO o custo de falha é uma medida mais objetiva que o fator alfa, de modo que sempre que a quantificação dos custos for possível, é preferível o uso da RO. Mesmo quando não é possível a determinação precisa dos custos, a sua aproximação é potencialmente menos arbitrária do que a utilização das constantes de normalização.

Por avaliar o custo ao longo de todo ciclo de vida da estrutura, a otimização de risco foi utilizada na determinação da melhor estratégia de manutenção estrutural. Okasha e Frangopol (2009) apresentam duas abordagens para a otimização da manutenção. Uma consiste na seleção otimizada dos diferentes tipos de manutenção, aplicados nas diferentes partes da estrutura ao mesmo tempo, a outra é indicada quando o número de possibilidades de opções práticas de manutenção for limitado.

Rackwitz e Joani (2009) analisaram a relação de custo-benefício de três estratégias de manutenção de obras civis: manutenção dependente da idade da estrutura, manutenção programada para determinados intervalos de tempo e manutenção baseada em inspeção e reparos. No estudo considerou-se os índices de qualidade de vida como critério de aceitação dos riscos. Um exemplo numérico mostrou que a estratégia de manutenção de inspeção/reparo é mais econômica do que a estratégia dependente da idade.

Gomes e Beck (2014) aplicam a otimização de custo no estudo do planejamento de inspeção e reparo de estruturas metálicas suscetíveis a propagação aleatória de trincas/falhas.

A formulação busca o tamanho ideal para reparação da trinca, assim como o tempo da primeira inspeção e o tempo entre as subsequentes.

Um exemplo prático de otimização envolvendo custos é apresentado por Beck e Verzenhassi (2008). Os autores investigaram a otimização de torres de telefonia considerando os custos de reconstrução e indenizações em caso de falha. Concluíram que, sendo as consequências de falha onerosas, a busca da minimização do custo total esperado, incluindo a falha, é essencial na determinação de níveis ótimos de segurança. Quando o custo da estrutura representa um baixo percentual dos custos totais do empreendimento, é provável que se tenha estruturas mais robustas e seguras; contudo, para obras de infraestrutura como pontes e barragens, a utilização das técnicas de RO é altamente recomendada. Outro fator importante na otimização é o tempo de projeto quando a estrutura está submetida a ações variáveis no tempo.

Gomes e Beck (2013) aborda os desafios na solução de otimização de problemas estruturais reais. O exemplo estudado foi a otimização de uma torre de linha de transmissão feita de aço e submetida a uma ação aleatória de vento. Para tal, os autores desenvolveram um programa computacional que combina uma análise não-linear pelo MEF-posicional, uma análise de confiabilidade, redes neurais artificiais e um algoritmo híbrido de otimização por enxame de partículas. Os resultados mostram que o emprego de Redes Neurais Artificiais como substitutos para a função objetivo, reduz significativamente o esforço computacional, sem causar prejuízo aos resultados. Já as redes *Multi-Layer Perceptron* apresentaram maiores reduções. E uma combinação de ambas as redes levou a reduções ainda mais significativas.

Outra aplicação da otimização de risco é abordada por Beck, Kougioumtzoglou e Santos (2014). Neste artigo, desenvolveu-se um código computacional para a determinação da rigidez ideal de uma estrutura de concreto armado não linear submetida a excitação estacionária do vento. Os exemplos numéricos mostraram um aumento significativo na rigidez ideal, quando considerada a não linearidade na resposta do sistema. Devido à variabilidade da ação do vento no tempo, o valor da vida útil da estrutura também influencia a rigidez ideal. Os custos considerados na otimização consistem nos custos iniciais dos materiais (forma, concreto e aço), assim como custos de falha ao longo da vida útil da estrutura.

Devido ao número limitado de pesquisas envolvendo otimização e análise probabilística do colapso progressivo, Beck, Tessari e Kroetz (2018) estudaram a otimização de uma treliça hiperestática. Neste artigo compara-se os resultados encontrados para a RBDO e a RO. Curiosamente demonstraram que ao buscar a melhor geometria para uma probabilidade de falha alvo, RBDO, encontra-se sempre uma estrutura isostática. Resultados semelhantes também foram encontrados por Fu e Frangopol (1990).

Todavia, na formulação RO os custos de falha se alteram conforme a gravidade da falha. Falhas parciais incluem apenas custos de reparos e pequenos inconvenientes, já o colapso total considera custos de indenizações, retirada de escombros e reconstrução da estrutura. Tais diferenças resultaram em estruturas hiperestáticas nos projetos.

A fim de compreender melhor as diferenças e os efeitos das duas formulações na otimização de estruturas redundantes submetidas ao colapso progressivo, Beck (2019) investigou o projeto ideal de sistemas redundantes ativo-passivo de duas barras.

Em seu artigo, Beck (2019) introduz o conceito de probabilidade de falha latente, a qual caracteriza-se por ser constante e independente das ações e ou da resistência dos elementos. Segundo o autor, essa probabilidade deriva de fatores não estruturais como mão de obra, cargas imprevistas e confiabilidade das conexões. Os resultados encontrados mostram que esta probabilidade é o parâmetro de maior impacto no projeto estrutural. A equivalência de projetos redundantes e não-redundantes é encontrada quando a probabilidade de falha latente é menor do que a probabilidade de falha alvo da estrutura. Contudo, quando esta é menor que a probabilidade de falha latente, as estruturas ótimas tornam-se necessariamente as hiperestáticas.

Diante do levantamento do estado da arte aqui exposto, mostra-se a importância da pesquisa proposta, assim como sua contextualização no cenário da pesquisa atual.

2 MODELO MECÂNICO

Independente da técnica de otimização empregada, é necessário que haja uma análise mecânica da estrutura para a avaliação dos esforços e deslocamentos apresentados por determinada configuração.

O método dos elementos finitos (MEF) é um dos métodos numéricos mais empregados na solução de problemas de engenharia. Diversos pacotes comerciais (softwares) utilizam o MEF para a análise estrutural devido a sua generalidade (SILVA, 2010).

Este método baseia-se no entendimento de que os meios contínuos podem ser analisados como um conjunto de diversos elementos finitos ligados entre si. Sua formulação baseia-se na energia mecânica total do sistema em função dos deslocamentos, no caso da abordagem clássica, ou em função da posição, no caso do MEF- Posicional.

Neste capítulo são apresentadas as formulações do MEF- Posicional para análise não linear geométrica de treliças e pórticos planos, as quais foram implementadas no código computacional desenvolvido.

2.1 ENERGIA MECÂNICA TOTAL

O MEF- Posicional é uma formulação lagrangeana total em posição baseada no princípio da conservação da energia, a qual declara que o equilíbrio de uma estrutura acontece quando o potencial da energia mecânica é estacionário, ou seja, quando seu variacional é nulo. Esse mesmo princípio mostra que o sinal da segunda variação da energia mecânica indica a natureza do equilíbrio. Sendo este estável para segunda variação positiva, o que representa um ponto de mínimo no funcional.

A energia mecânica total é formada por duas parcelas, a energia de deformação, \mathbb{U} , e o potencial das forças conservativas, \mathbb{P} :

$$\pi = \mathbb{U} + \mathbb{P} . \quad (2.1)$$

Sendo assim, o equilíbrio é dado por:

$$\delta\pi = \frac{\partial\pi}{\partial\vec{Y}} \delta\vec{Y} = \frac{\partial\mathbb{U}}{\partial\vec{Y}} \delta\vec{Y} + \frac{\partial\mathbb{P}}{\partial\vec{Y}} \delta\vec{Y} = 0 \quad (2.2)$$

Uma vez que $\delta\vec{Y}$ é arbitrário, o gradiente da energia mecânica é nulo e pode ser escrito como:

$$\frac{\partial\pi}{\partial\vec{Y}} = \frac{\partial\mathbb{U}}{\partial\vec{Y}} + \frac{\partial\mathbb{P}}{\partial\vec{Y}} = 0 \quad (2.3)$$

Da energia de deformação se obtém a força interna, enquanto que do potencial das forças conservativas se obtém o vetor das forças externas provenientes de cargas nodais e cargas de superfície. Logo é possível reescrever a equação (2.3) como:

$$F^{int}(\vec{Y}) - F^{ext} = 0 \quad (2.4)$$

Desse modo o equilíbrio é escrito em função da posição atual da estrutura, \vec{Y} , que é desconhecida inicialmente e será calculada por meio do método numérico de Newton-Raphson.

2.2 SOLUÇÃO DO SISTEMA PELO PROCESSO DE NEWTON-RAPHSON

O sistema não linear pode ser resolvido por um procedimento numérico que consiste no acréscimo do vetor \vec{g} a equação (2.4). Este vetor é conhecido como desbalanceamento mecânico do método de Newton-Raphson.

$$g_i = F_i^{int} - F_i^{ext} \quad (2.5)$$

onde F_i^{int} é o vetor de forças internas calculado como derivada da energia de deformação em relação às posições nodais atuais.

Esta técnica de solução resume-se em adotar uma posição tentativa para as posições nodais atuais, Y_i^0 , tornando possível o cálculo da força interna da estrutura. Contudo, uma vez que a posição tentativa não é igual a posição de equilíbrio, o desbalanceamento mecânico retorna valor não nulo. É importante ressaltar que a primeira posição tentativa é sempre a posição indeslocada, ou seja, a posição inicial do problema, X_i .

Expandindo-se em série de Taylor o vetor desbalanceamento mecânico em torno da posição nodal, tem-se:

$$g_i(\vec{Y}) = g_i(\vec{Y}^0) + \left. \frac{\partial g_i}{\partial Y_k} \right|_{(Y_0)} \Delta Y_k + O_i^2 = 0 \quad (2.6)$$

onde \vec{Y} é a solução procurada pelo problema, \vec{Y}^0 é a posição tentativa e ΔY_k é a correção da posição.

Desprezando-se os termos de ordem superior O_i^2 e rearranjando a igualdade:

$$\Delta Y_k = - \left(\left. \frac{\partial g_i}{\partial Y_k} \right|_{(Y_0)} \right)^{-1} g_i(\vec{Y}^0) = - \left(\left. \frac{\partial^2 \mathbb{U}_e}{\partial Y_k \partial Y_i} \right|_{(Y_0)} \right)^{-1} g_i(\vec{Y}^0) \quad (2.7)$$

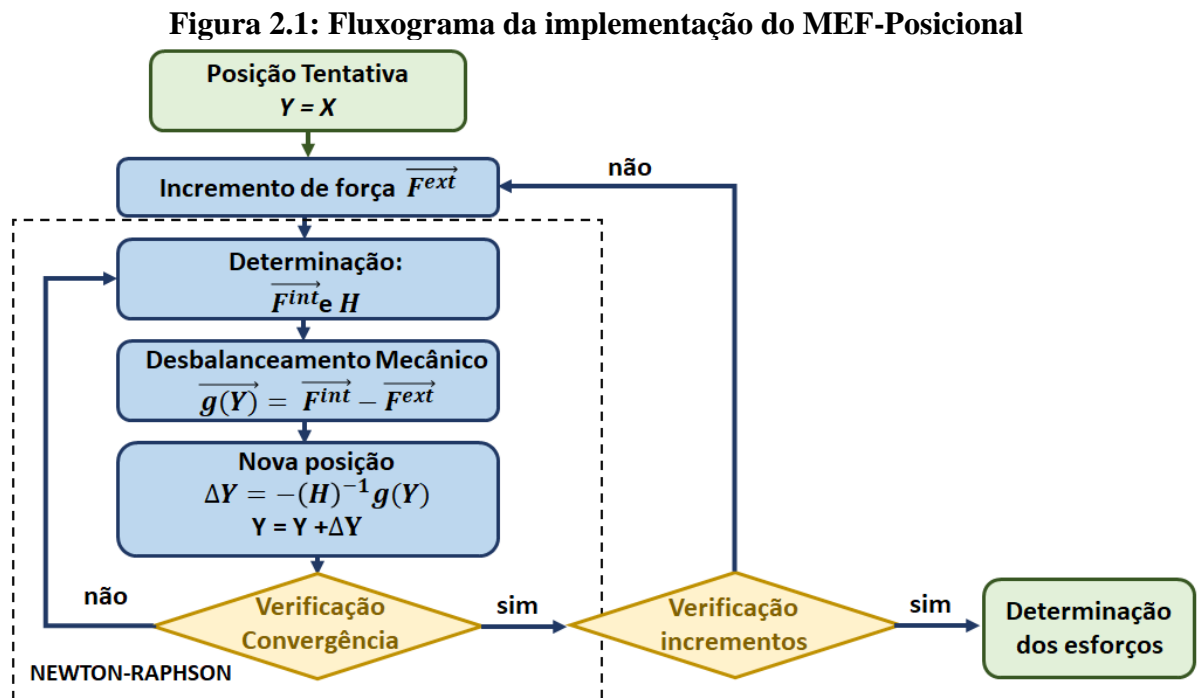
na qual o termo $\left. \frac{\partial^2 \mathbb{U}_e}{\partial Y_k \partial Y_i} \right|_{(Y_0)} = H_{ki}$ é a matriz Hessiana ou rigidez tangente do problema para a posição tentativa. Note que a matriz Hessiana corresponde a segunda derivada da energia

mecânica em relação à variável vetorial posição atual, o que faz dela um indicativo da natureza do equilíbrio encontrado. Para que este seja estável a matriz Hessiana deve ser positiva definida.

Após a determinação da correção da posição, atualiza-se a posição tentativa, recalcula-se a força interna, resolve-se o sistema e encontra-se uma nova correção. Este procedimento se repete até que ΔY_k seja suficientemente pequeno:

$$Y_k^0 = Y_k^0 + \Delta Y_k \quad (2.8)$$

O passo a passo aqui descrito é representado na Figura 2.1. O fluxograma apresenta um loop de incremento de carga, empregado nos casos em que o caminho de deformação da estrutura é de interesse.



Fonte: Autor

Nos itens seguintes descreve-se a obtenção da força interna, força externa e hessiana para os elementos de barra e pórtico. Maiores detalhes sobre as deduções das formulações e implementação do código computacional podem ser consultados em Coda (2018).

2.3 ELEMENTO DE BARRA

Evidencia-se que a formulação para elemento de barra aqui apresentada limita-se a barras de treliça cuja área transversal é considerada inalterável para qualquer nível de deformação.

2.3.1 Força Interna para Elemento de Barra

A força interna do elemento é uma força reativa, não conservativa, necessária para manter a estrutura deformada. Esta força vem da derivada da energia de deformação e depende da posição atual do corpo. A energia de deformação, por sua vez, é determinada pela integral da energia específica de deformação sobre o volume inicial.

$$\mathbb{U} = \int_{V_0} u_e dV_0 \quad (2.9)$$

Logo, a determinação da força interna está diretamente ligada ao modelo constitutivo adotado. Nesta formulação emprega-se a deformação de Green, E , que é indicada por diversos autores como Coda (2018), Crisfield (1991) e Ogden (1984). Segundo Coda (2018) a deformação de Green se confunde com a medida de deformação linear para pequenos deslocamentos. Contudo, ao contrário desta, a deformação de Green é um tensor, ou seja, as leis de rotação são aplicáveis a ele.

A medida da deformação de Green uniaxial, caso do elemento de barra, é dada por:

$$E = \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} \quad (2.10)$$

onde E é a deformação de Green, l_0 e l são o comprimento inicial e atual do elemento de barra. O primeiro é obtido por meio das coordenadas iniciais, \vec{X} , enquanto que o segundo pelas coordenadas atuais, \vec{Y} .

Definida a medida de deformação, é necessário a escolha do modelo constitutivo. Neste caso, o modelo adotado é o de Saint-Venant-Kirchhoff por utilizar o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, o qual é conjugado energético da medida de deformação de Green. Para este, a energia específica de deformação de um elemento uniaxial é descrito por:

$$u_e(E) = \frac{K}{2} E^2 \quad (2.11)$$

onde K é a constante longitudinal do modelo. A tensão de Piola-Kirchhoff, S , é obtida pela derivada da energia de deformação, sendo descrita pela expressão (2.12).

$$S = \frac{du_e}{dE} = K \cdot E \quad (2.12)$$

Diante disso, escreve-se a força interna como:

$$F_{\beta k}^{\text{int}} = \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y_k^\beta} = \int_{\text{vol}} \frac{\partial u_e}{\partial Y_k^\beta} dV_0 = \sum_{j=1}^{nel} A_0^j S \frac{(-1)^\beta}{l_0^j} (Y_k^2 - Y_k^1) \quad (2.13)$$

na qual A_0^j e l_0^j são a área transversal e o comprimento inicial do elemento j ; S a tensão de Piola-Kirchhoff uniaxial do elemento; o índice $\beta=1,2$ refere-se ao nó local do elemento, e $k=1,2$ indica a direção para um problema 2D.

2.3.2 Força Externa para Elemento de Barra

O vetor da força externa provém da derivada do potencial das forças aplicadas. Uma vez que estruturas treliçadas são submetidas apenas a cargas concentradas nos nós, a derivada de \mathbb{P} em relação ao grau de liberdade i equivale a força aplicada com sinal contrário, equação (2.14).

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_i} = \frac{\partial(-F_k Y_k)}{\partial Y_i} = -F_i \quad (2.14)$$

O sinal negativo na expressão (2.14) representa a perda de potencial de trabalho de uma força que na posição atual ocupa posições positivas em relação à referência adotada.

2.3.3 Determinação da matriz Hessiana do Elemento de Barra

Para a resolução do sistema (2.5) é necessária a determinação da matriz Hessiana, também conhecida como rigidez tangente. Para uma análise estática, na qual a energia cinética não é considerada, a matriz Hessiana é constituída apenas da segunda derivada da energia interna:

$$H = \frac{\partial^2 \mathbb{U}_e}{\partial \bar{Y} \partial \bar{Y}} = \int_{V_0} \frac{\partial^2 u_e}{\partial \bar{Y} \partial \bar{Y}} dV_0 = A_0 l_0 \left(K \frac{\partial E}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial E}{\partial \bar{Y}} + S \frac{\partial^2 E}{\partial \bar{Y} \partial \bar{Y}} \right) \quad (2.15)$$

onde a primeira derivada da deformação de Green é dada por (2.16), e a segunda pela expressão (2.17).

$$\frac{\partial E}{\partial Y_k^\beta} = \frac{(-1)^\beta}{l_0^2} (Y_k^2 - Y_k^1) \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} = \frac{(-1)^\beta (-1)^\alpha}{l_0^2} \delta_{ik} \quad (2.17)$$

De modo que pode-se reescrever a equação (2.15) como:

$$H_{\alpha i \beta k} = (-1)^\beta (-1)^\alpha \frac{A_0}{l_0} \left(K \frac{(Y_i^2 - Y_i^1)(Y_k^2 - Y_k^1)}{l_0} + S \delta_{ik} \right) \quad (2.18)$$

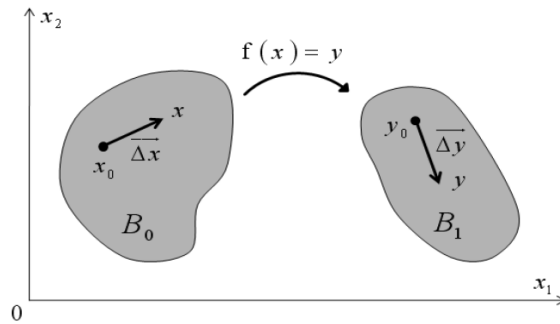
onde α e β indicam o nó, e i e k a direção.

2.4 ELEMENTO DE PÓRTICO

2.4.1 Mudança de Configuração

Toda ação mecânica aplicada a um corpo provoca uma mudança da configuração geométrica deste. Assim, o corpo passa da configuração indeslocada, inicial, para a configuração deslocada, atual, submetida a tensões e deformações ao longo do sólido. Matematicamente esta mudança é governada pela função mudança de configuração ($f(x)$) como mostra a Figura 2.2 (Silva, 2010).

Figura 2.2: Mudança de configuração de um sólido



Fonte: Silva (2010)

Para a determinação desta função é necessário o mapeamento da estrutura na configuração inicial e final distintamente. Nos itens seguintes mostra-se a obtenção dos mapeamentos individuais e como sua combinação resulta na função mudança de configuração.

2.4.1.1 Mapeamento inicial

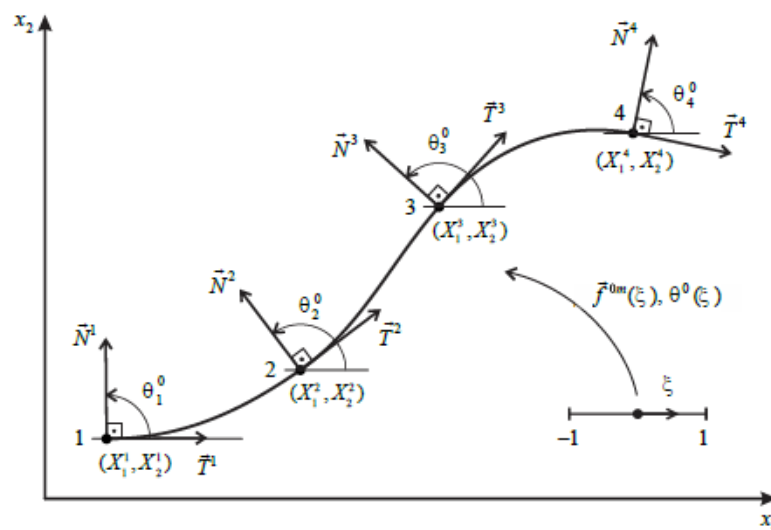
O mapeamento inicial se dá com base nas coordenadas iniciais fornecidos pelo usuário. A aproximação da superfície (linha) é obtida pela expressão:

$$f_i^0 = x_i(\xi) = \phi_l(\xi) X_i^l \quad (2.19)$$

na qual o índice i refere-se à direção e o l ao nó local do elemento, importante lembrar que a repetição do índice em notação indicial representa soma sobre os nós. O termo $\phi_l(\xi)$ corresponde ao polinômio de Lagrange associado ao nó l , também chamado de função de forma e X_i^l a coordenada do nó l na direção i .

No caso do elemento de pórtico o mapeamento descrito pela Equação (2.19) se dá pela linha média do elemento. Outra particularidade deste elemento é a necessidade da definição do ângulo formado pela seção transversal com o eixo de referência horizontal (eixo x_1). Isso se dá pela aplicação da teoria de Reissner na formulação, a qual considera que a seção do elemento permanece plana, mas não necessariamente perpendicular à linha média. A Figura 2.3 ilustra o mapeamento para um elemento cúbico; contudo, o código computacional aceita qualquer ordem de aproximação.

Figura 2.3: Linha média de um elemento e seus vetores nodais



Fonte: Siqueira (2016)

Os ângulos iniciais nos nós são obtidos pela equação (2.20) a partir do vetor normal à linha de referência, pois para a configuração inicial considera-se a seção ortogonal a linha média.

$$\theta_k^0 = \arctg\left(\frac{N_2^{(k)}}{N_1^{(k)}}\right) \quad (2.20)$$

O vetor normal $N_i^{(k)}$ é obtido através do vetor tangente à linha de referência, como mostra a equação (2.21):

$$N_1^{(k)} = -\frac{T_2^{(k)}}{\|\vec{T}\|} \quad e \quad N_2^{(k)} = \frac{T_1^{(k)}}{\|\vec{T}\|} \quad (2.21)$$

onde $\|\vec{T}\|$ representa a norma euclidiana do vetor \vec{T} , o qual é obtido por:

$$T_i^k = x_{i,\varepsilon}(\xi_k) = \phi_{i,\varepsilon}(\xi_k) X_i^l \quad (2.22)$$

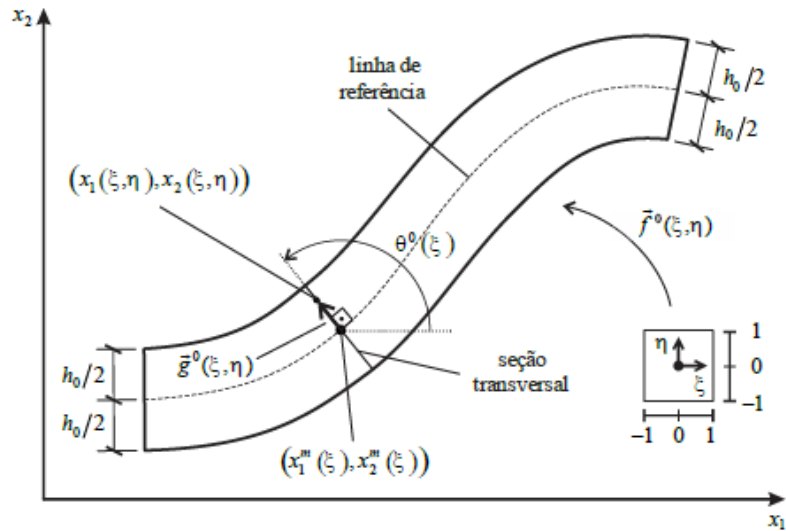
Importante mencionar que em notação indicial a variável escrita após a vírgula indica a operação de derivada em relação a mesma.

Obtidos os ângulos que definem a seção transversal para os nós do elemento é possível utilizar as funções de forma para aproximar $\theta^0(\xi)$ ao longo da barra como:

$$\theta^0(\xi) = \phi_l(\xi)\theta_l^0 \quad (2.23)$$

Com essas informações, é possível determinar a posição de qualquer ponto no interior da barra através do vetor $g_i^0(\xi, \eta)$, apresentado na Figura 2.4. Para isso é necessário o acréscimo de uma segunda variável adimensional, η , ortogonal a variável ξ .

Figura 2.4: Ponto genérico na configuração inicial do elemento de pórtico



Fonte: Siqueira (2016)

Considerando-se altura, h_0 , e largura, b_0 , constantes o vetor $g_i^0(\xi, \eta)$ fica:

$$g_1^0(\xi, \eta) = \frac{h_0}{2} \eta \cos(\phi_l(\xi)\theta_l^0) \quad (2.24)$$

$$g_2^0(\xi, \eta) = \frac{h_0}{2} \eta \sin(\phi_l(\xi)\theta_l^0) \quad (2.25)$$

Sendo assim, as coordenadas de um ponto genérico são determinadas por:

$$f_1^0(\xi, \eta) = x_1(\xi, \eta) = \phi_l(\xi)X_{1l} + \frac{h_0}{2} \eta \cos(\phi_l(\xi)\theta_l^0) \quad (2.26)$$

$$f_2^0(\xi, \eta) = x_2(\xi, \eta) = \phi_l(\xi)X_{2l} + \frac{h_0}{2} \eta \sin(\phi_l(\xi)\theta_l^0) \quad (2.27)$$

2.4.1.2 Mapeamento atual

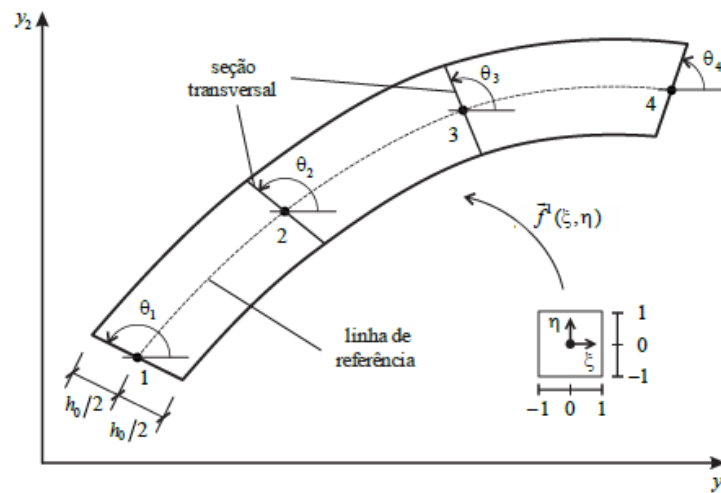
Na configuração atual, posições e ângulo de cada nó são incógnitas do problema e serão determinados pela análise. Contudo, a formulação é semelhante a configuração inicial, de modo que as coordenadas de um ponto genérico podem ser obtidas como:

$$f_1^1(\xi, \eta) = y_1(\xi, \eta) = \phi_1(\xi)Y_{1l} + \frac{h_0}{2}\eta \cos(\phi_1(\xi)\theta_1) \quad (2.28)$$

$$f_2^1(\xi, \eta) = y_2(\xi, \eta) = \phi_1(\xi)Y_{2l} + \frac{h_0}{2}\eta \text{sen}(\phi_1(\xi)\theta_1) \quad (2.29)$$

onde y_i representa as coordenadas atuais do ponto, Y_{il} as coordenadas atuais nodais e θ_i os ângulos nodais atuais. Na configuração atual, apresentada na Figura 2.5, observa-se que as seções transversais permanecem planas, mas não ortogonais a linha média.

Figura 2.5: Configuração atual do elemento de pórtico



Fonte: Siqueira (2016)

2.4.1.3 Mudança de configuração e gradiente

Após a determinação dos mapeamentos dimensionais para as configurações inicial e atual através das posições nodais do elemento, é possível escrever a função mudança de configuração (\vec{f}). Esta função é obtida através da composição entre \vec{f}^0 e \vec{f}^1 da seguinte forma:

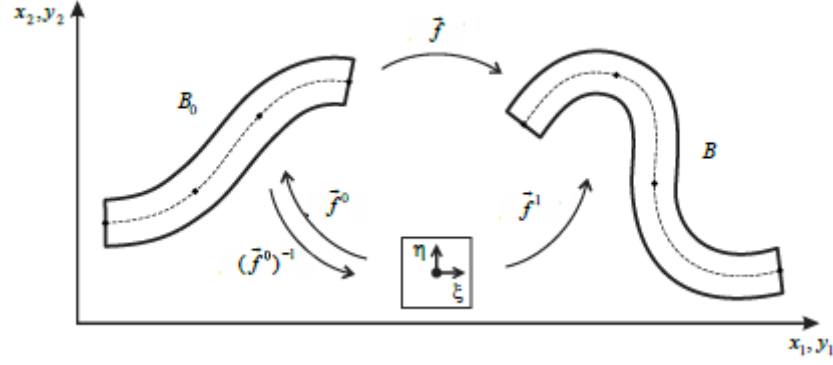
$$\vec{f} = \vec{f}^1 \cdot (\vec{f}^0)^{-1} \quad (2.30)$$

O vetor \vec{f}^0 corresponde a função que realiza a mudança da configuração inicial do espaço real para o dimensional, analogamente o vetor \vec{f}^1 faz o mesmo para a configuração

atual, como mostra a Figura 2.6. Cada vetor possui um gradiente que, combinados, resultam no gradiente de \vec{f} , chamado de matriz \mathbb{A} .

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^1 \cdot (\mathbb{A}^0)^{-1} \quad (2.31)$$

Figura 2.6: Mudança de configuração – mapeamento posicional



Fonte: Siqueira (2016)

Os gradientes de \vec{f}^0 e \vec{f}^1 são calculadas pra cada elemento finito e consistem em matrizes de ordem 2.

$$\mathbb{A}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^0}{\partial \xi} & \frac{\partial f_1^0}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f_2^0}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2^0}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\mathbb{A}^1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^1}{\partial \xi} & \frac{\partial f_1^1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f_2^1}{\partial \xi} & \frac{\partial f_2^1}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Derivando as equações (2.26), (2.27), (2.28) e (2.29) em relação a ξ e η tem-se:

$$\mathbb{A}^0 = \begin{bmatrix} \phi_{l,\xi}(\xi)X_1^l - \frac{h_0}{2}\eta \text{sen}(\phi_l(\xi)\theta_l^0)\phi_{k,\xi}(\xi)\theta_k^0 & \frac{h_0}{2}\eta \cos(\phi_l(\xi)\theta_l^0) \\ \phi_{l,\xi}(\xi)X_2^l - \frac{h_0}{2}\eta \cos(\phi_l(\xi)\theta_l^0)\phi_{k,\xi}(\xi)\theta_k^0 & \frac{h_0}{2}\eta \text{sen}(\phi_l(\xi)\theta_l^0) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\mathbb{A}^1 = \begin{bmatrix} \phi_{l,\xi}(\xi)Y_1^l - \frac{h_0}{2}\eta \text{sen}(\phi_l(\xi)\theta_l) \phi_{k,\xi}(\xi)\theta_k & \frac{h_0}{2}\eta \cos(\phi_l(\xi)\theta_l) \\ \phi_{l,\xi}(\xi)Y_2^l - \frac{h_0}{2}\eta \cos(\phi_l(\xi)\theta_l) \phi_{k,\xi}(\xi)\theta_k & \frac{h_0}{2}\eta \text{sen}(\phi_l(\xi)\theta_l) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Portanto para cada par de coordenadas adimensionais (ξ, η) as matrizes \mathbb{A}^0 e \mathbb{A}^1 são numéricas, sendo possível calcular o alongamento de Cauchy-Green à direita dado por:

$$C = \mathbb{A}^t \cdot \mathbb{A} = (\mathbb{A}^o)^{-t} (\mathbb{A}^1)^t \mathbb{A}^1 (\mathbb{A}^o)^{-1} \quad (2.36)$$

Através de C se determina a deformação de Green por:

$$E = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2}(\mathbb{A}^t \mathbb{A} - I) \quad (2.37)$$

onde I é o tensor identidade de segunda ordem.

2.4.2 Força interna do elemento de pórtico

Como mencionado anteriormente a força interna depende do modelo constitutivo adotado. Assim como no elemento de treliça, o modelo escolhido é o de Saint-Venant-Kirchhoff. Este descreve a energia específica de deformação para um material homogêneo e isotrópico no estado plano de deformações como:

$$u_e = \frac{\mathbb{E}}{2} \left\{ (E_{11}^2 + E_{22}^2) + (E_{12}^2 + E_{21}^2) \right\} \text{ ou } u_e = \frac{1}{2} E : \mathfrak{C} : E \quad (2.38)$$

Na equação (2.38), considera-se coeficiente de Poisson nulo, isto é, $\mathbb{G} = \mathbb{E}/2$. O termo E_{ij} representa a deformação de Green, dada por (2.37), e \mathbb{E} se confunde com o módulo de elasticidade longitudinal para o caso de pequenas deformações.

O tensor constitutivo elástico \mathfrak{C} é obtido por:

$$\mathfrak{C} = \frac{\partial^2 u_e}{\partial E \partial E} = \begin{bmatrix} \mathbb{E} & 2\mathbb{G} \\ 2\mathbb{G} & \mathbb{E} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

onde S é o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff dado por:

$$S = \frac{\partial u_e}{\partial E} = \mathfrak{C} : E = \begin{bmatrix} \mathbb{E}E_{11} & 2\mathbb{G}E_{12} \\ 2\mathbb{G}E_{21} & \mathbb{E}E_{22} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

que para coeficiente de Poisson nulo fica:

$$S_{ij} = \mathbb{E} \cdot E_{ij} \quad (2.41)$$

na qual os índices i e j variam de 1 a 2 conforme a direção.

Assim, é possível escrever a força interna como:

$$F^{\text{int}} = \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial Y} dV_0 = \int_{V_0} S : \frac{\partial E}{\partial Y} dV_0 \quad (2.42)$$

Transformando a integral de volume para as coordenadas adimensionais ξ e η .

$$F_{ab}^{\text{int}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 S_{ij} \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_{ab}} J_0(\xi, \eta) b_0 d\xi d\eta \quad (2.43)$$

onde $J_0(\xi, \eta) = \det(A^0(\xi, \eta))$ e b_0 é a largura da seção transversal.

Devido à complexidade dos núcleos das integrais, as integrais serão resolvidas numericamente através da quadratura de Gauss. Logo, as integrais são substituídas por somatórios como mostrado na equação (2.44).

$$F_{ab}^{\text{int}} = \sum_{i_g=1}^{ng_\xi} \sum_{j_g=1}^{ng_\eta} S_{ij}(\xi_{i_g}, \eta_{j_g}) \frac{\partial E_{ij}(\xi_{i_g}, \eta_{j_g})}{\partial Y_{ab}} J_0(\xi_{i_g}, \eta_{j_g}) b_0 w_{j_g} w_{i_g} \quad (2.44)$$

Particularmente, o elemento de pórtico possui, além das posições nodais, a posição angular das seções como variável do sistema, de modo que surge também um momento interno. O cálculo deste é análogo a força interna e é apresentado nas equações (2.45) e (2.46).

$$M_a^{\text{int}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 S_{ij} \frac{\partial E_{ij}}{\partial \theta_a} J_0(\xi, \eta) b_0 d\xi d\eta \quad (2.45)$$

$$M_a^{\text{int}} = \sum_{i_g=1}^{ng_\xi} \sum_{j_g=1}^{ng_\eta} S_{ij}(\xi_{i_g}, \eta_{j_g}) \frac{\partial E_{ij}(\xi_{i_g}, \eta_{j_g})}{\partial \theta_a} J_0(\xi_{i_g}, \eta_{j_g}) b_0 w_{j_g} w_{i_g} \quad (2.46)$$

2.4.3 Força externa do elemento de pórtico

No elemento de pórtico o potencial das forças externas é constituído por duas parcelas apresentadas na equação (2.47).

$$\mathbb{P} = -\vec{F} \cdot \vec{Y} - \int_{S_0} \vec{q} \cdot \vec{y}^m dS_0 \quad (2.47)$$

O primeiro termo refere-se as forças externas concentradas, idêntico ao exposto para elemento de barra. Neste caso, ressalta-se que o grau de liberdade 3 no vetor de posição, \vec{X} e \vec{Y} , representa o giro nodal e conseqüentemente o momento nodal no vetor de forças externas concentradas:

$$F_i^{\text{conc}} = F_k^\alpha \quad \text{com } i = d \cdot (\alpha - 1) + k \quad (2.48)$$

onde α corresponde ao nó, k a direção e d a dimensão do problema.

Já, o segundo termo exposto em (2.47) trata das cargas distribuídas ao longo de toda linha média do elemento. Esta parcela pode ser escrita em função das coordenadas adimensionais como:

$$\int_{S_0} q_i \cdot y_i^m dS_0 = \int_{-1}^1 q_i(\xi) \cdot y_i^m(\xi) J_0^{(m)}(\xi) d\xi \quad (2.49)$$

onde i é direção, q_i é o vetor de carga distribuída, y_i^m é a posição da linha média do elemento e $J_0^{(m)}$ é o jacobiano da transformação da coordenada adimensional ξ para a linha média inicial S_0 . O jacobiano é a norma euclidiana do vetor \vec{T} , calculado pela equação (2.22).

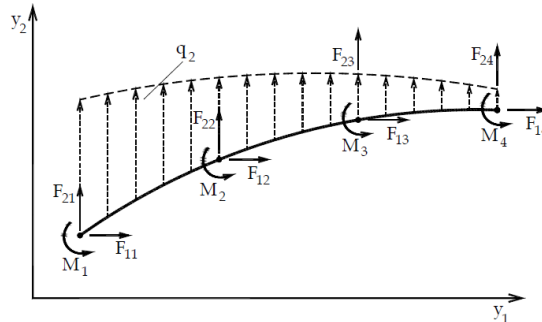
Assim como a posição da linha média pode ser aproximada empregando o polinômio de Lagrange, equação (2.50), o carregamento distribuído é aproximado por:

$$y_i^m = \phi_l(\xi)Y_{il} \quad (2.50)$$

$$q_i(\xi) = \phi_l(\xi)q_{il} \quad (2.51)$$

na qual q_{il} são os valores da distribuição nos nós l do elemento, como mostrado na Figura 2.7.

Figura 2.7: Mudança de configuração – mapeamento posicional



Fonte: Coda (2018)

Substituindo as equações (2.50) e (2.51) na integral de (2.49) tem-se:

$$F_{ik}^{dist} Y_{ik} = \int_{-1}^1 (\phi_l(\xi)q_{il})\phi_k(\xi)J_0^{(m)}(\xi) d\xi Y_{ik} \quad (2.52)$$

A integral contínua da equação (2.52) é calculada numericamente através da quadratura de Gauss, de modo que força nodal externa resultante do carregamento distribuído equivalha a:

$$F_{ik}^{dist} = \sum_{i_g=1}^{n_g} \left(\phi_l(\xi_{i_g})q_{il} \right) \phi_k(\xi_{i_g}) J_0^{(m)}(\xi_{i_g}) w_{i_g} \quad (2.53)$$

onde ξ_{i_g} é o ponto de Gauss e w_{i_g} é peso de Gauss.

2.4.4 Determinação da matriz Hessiana

Como mencionado, a matriz Hessiana é necessária no processo de Newton-Raphson para a obtenção da posição atual da estrutura. Esta é constituída apenas da segunda derivada da energia interna:

$$H = \frac{\partial^2 \mathcal{U}_e}{\partial \bar{Y} \partial \bar{Y}} = \int_{V_0} \frac{\partial^2 u_e}{\partial \bar{Y} \partial \bar{Y}} dV_0 = \int_{V_0} \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{Y}} : \frac{\partial E}{\partial \bar{Y}} + S : \frac{\partial^2 E}{\partial \bar{Y} \partial \bar{Y}} \right) dV_0 \quad (2.54)$$

onde S é a tensão de Piola-Kirchhoff, dada pela equação (2.40), e sua derivada é dada por:

$$\frac{\partial S}{\partial \vec{Y}} = \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} \begin{bmatrix} \mathbb{E}E_{11} & 2\mathbb{G}E_{12} \\ 2\mathbb{G}E_{21} & \mathbb{E}E_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{E} \frac{\partial E_{11}}{\partial \vec{Y}} & 2\mathbb{G} \frac{\partial E_{12}}{\partial \vec{Y}} \\ 2\mathbb{G} \frac{\partial E_{21}}{\partial \vec{Y}} & \mathbb{E} \frac{\partial E_{22}}{\partial \vec{Y}} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

de modo que se precisa apenas da derivada da deformação de Green que será detalhada na próxima subseção.

Assim como nas forças interna e externa de superfície, a integral da Hessiana é resolvida numericamente através da quadratura de Gauss. Logo, a equação (2.54) passa a ser o somatório:

$$H_{\alpha\beta\gamma z} = \sum_{i_g=1}^{ng_z} \sum_{j_g=1}^{ng_\eta} \left(\frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \mathbf{c} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + S : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} \right) b_0 w_{j_g} w_{i_g} \quad (2.56)$$

onde α e γ indicam a direção e β e z o nó.

2.4.5 Primeira e segunda derivada da deformação de Green

Como visto nas equações (2.44) e (2.56), é necessário o cálculo das derivadas da deformação de Green para a resolução do problema não linear. Dessa forma, segue a dedução da primeira derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \vec{Y}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial \vec{Y}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} (\mathbb{A}^t \cdot \mathbb{A}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} \left((\mathbb{A}^0)^{-t} (\mathbb{A}^1)^t \mathbb{A}^1 (\mathbb{A}^0)^{-1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left((\mathbb{A}^0)^{-t} \frac{\partial (\mathbb{A}^1)^t}{\partial \vec{Y}} \mathbb{A}^1 (\mathbb{A}^0)^{-1} + (\mathbb{A}^0)^{-t} (\mathbb{A}^1)^t \frac{\partial \mathbb{A}^1}{\partial \vec{Y}} (\mathbb{A}^0)^{-1} \right) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Neste caso, é importante citar que $\frac{\partial (\mathbb{A}^1)^t}{\partial \vec{Y}} = \left(\frac{\partial \mathbb{A}^1}{\partial \vec{Y}} \right)^t$; logo, a segunda matriz da soma é

a transposta da primeira, permitindo uma simplificação na implementação computacional.

Uma vez que o gradiente da função mudança de configuração atual é dado pela expressão (2.35), suas derivadas para os graus de liberdade (1, 2 ou 3) do nó β são dadas por:

$$\frac{\partial \mathbb{A}^1}{\partial Y_1^\beta} = \begin{bmatrix} \phi_{\beta,\xi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial \mathbb{A}^1}{\partial Y_2^\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \phi_{\beta,\xi} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial \mathbb{A}^1}{\partial Y_3^\beta} = \frac{\partial \mathbb{A}^1}{\partial \theta_3^\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{h_0}{2} \eta \left[\cos(\phi_l \theta_l) \phi_\beta (\phi_{k,\xi} \theta_k) + \text{sen}(\phi_l \theta_l) \phi_{\beta,\xi} \right] & -\frac{h_0}{2} \text{sen}(\phi_l \theta_l) \phi_\beta \\ \frac{h_0}{2} \eta \left[-\text{sen}(\phi_l \theta_l) \phi_\beta (\phi_{k,\xi} \theta_k) + \cos(\phi_l \theta_l) \phi_{\beta,\xi} \right] & \frac{h_0}{2} \cos(\phi_l \theta_l) \phi_\beta \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Já a segunda derivada da deformação de Green fica:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \bar{Y} \partial \bar{Y}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2(\mathbb{A}^0)^{-t} \frac{\partial (\mathbb{A}^1)^t}{\partial \bar{Y}} \frac{\partial \mathbb{A}^t}{\partial \bar{Y}} (\mathbb{A}^0)^{-1} + (\mathbb{A}^0)^{-t} (\mathbb{A}^1)^t \frac{\partial^2 \mathbb{A}^1}{\partial \bar{Y} \partial \bar{Y}} (\mathbb{A}^0)^{-1} + \\ + \left((\mathbb{A}^0)^{-t} (\mathbb{A}^1)^t \frac{\partial^2 \mathbb{A}^1}{\partial \bar{Y} \partial \bar{Y}} (\mathbb{A}^0)^{-1} \right)^t \end{bmatrix} \frac{1}{2} \quad (2.61)$$

na qual a derivada do gradiente \mathbb{A}^1 já é conhecido, faltando apenas a segunda derivada deste.

$$\frac{\partial^2 \mathbb{A}^1}{\partial Y_3^\beta \partial Y_3^z} = \frac{\partial^2 \mathbb{A}^1}{\partial \theta^\beta \partial \theta^z} = \begin{bmatrix} \frac{h_0}{2} \eta \left\{ \text{sen}(\phi_l \theta_l) \phi_\beta \phi_z (\phi_{k,\xi} \theta_k) - \cos(\phi_l \theta_l) [\phi_\beta \phi_{z,\xi} + \phi_z \phi_{\beta,\xi}] \right\} & -\frac{h_0}{2} \cos(\phi_l \theta_l) \phi_\beta \phi_z \\ -\frac{h_0}{2} \eta \left\{ \cos(\phi_l \theta_l) \phi_\beta \phi_z (\phi_{k,\xi} \theta_k) - \text{sen}(\phi_l \theta_l) [\phi_\beta \phi_{z,\xi} + \phi_z \phi_{\beta,\xi}] \right\} & -\frac{h_0}{2} \text{sen}(\phi_l \theta_l) \phi_\beta \phi_z \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

onde β e z são os nós do elemento.

2.4.6 Tensões Internas e Esforços Solicitantes

A determinação das tensões de Cauchy no sólido é importante para a análise estrutural, já que esta medida possui significado físico e constitui muitos modelos de falha ou ruptura (CODA, 2018). Dessa forma, utiliza-se a relação da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie com a tensão de Cauchy, dada pela equação (2.63).

$$\sigma = \frac{\mathbb{A} \cdot S \cdot \mathbb{A}^t}{\det(\mathbb{A})} \quad (2.63)$$

onde \mathbb{A} é o gradiente da função mudança de configuração, equação (2.31).

O cálculo do tensor de Cauchy é feito após a convergência do sistema. A aplicação da expressão (2.63) resulta em tensões de Cauchy nas direções dos eixos globais (x_1, x_2) ou (y_1, y_2) , pois estes são coincidentes. Contudo, para a análise é necessária a determinação destas tensões na ‘superfície’ das seções transversais. Para isso convencionou-se um sistema de eixos local definido pelo ângulo $\varphi = \theta - \pi/2$, constituído por um eixo y_1 perpendicular à seção

transversal e y_2 paralelo ao plano da seção, como mostra a Figura 2.8. O ângulo θ é a posição angular da seção transversal.

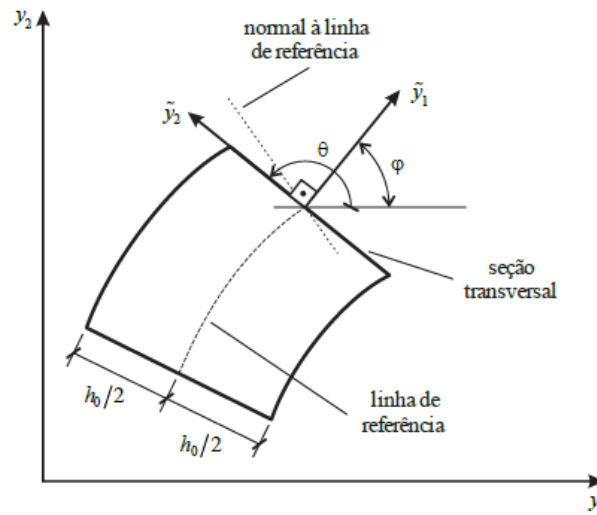
Uma vez que a tensão de Cauchy é um tensor, basta aplicar a matriz de rotação para obter as tensões na direção dos eixos locais.

$$\bar{\sigma} = R^t \cdot \sigma \cdot R \quad (2.64)$$

sendo R a matriz de rotação dada por:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\text{sen} \varphi \\ \text{sen} \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Figura 2.8: Eixos locais para as tensões de Cauchy



Fonte: Siqueira (2016)

Desse modo, a tensão normal à seção é dada por $\bar{\sigma}_{11}$ e a tensão cisalhante por $\bar{\sigma}_{12}$ e seus respectivos esforços são dados pela integral dessas tensões na área da seção.

$$N = \int_{A_0} \bar{\sigma}_{11} dA_0 = \sum_{ig_\eta=1}^{ng_\eta} b_0 \frac{h_0}{2} \bar{\sigma}_{11} w_{ig_\eta} \quad (2.66)$$

$$Q = \int_{A_0} \bar{\sigma}_{12} dA_0 = \sum_{ig_\eta=1}^{ng_\eta} b_0 \frac{h_0}{2} \bar{\sigma}_{12} w_{ig_\eta} \quad (2.67)$$

O momento fletor da seção é dado por:

$$M = \int_{A_0} \bar{\sigma}_{11} \bar{y}_2 dA_0 = \sum_{ig_\eta=1}^{ng_\eta} b_0 \left(\frac{h_0}{2} \right)^2 \bar{\sigma}_{11} \eta_{ig_\eta} w_{ig_\eta} \quad (2.68)$$

Observe que os esforços obtidos pelas equações (2.66), (2.67) e (2.68) são nos pontos de integração longitudinal do elemento; porém, nos interessam os esforços nos nós da discretização do elemento. No caso particular do elemento de pórtico, o número de pontos de

integração longitudinal é igual ao número de nós do elemento; logo, tem-se que o esforço interno no ponto de integração B_{ig} é:

$$B_{ig} = \phi_l(\xi_{ig})B_l \quad \text{ou} \quad \bar{B} = \Phi \cdot \bar{B} \quad (2.69)$$

onde B_l representa o esforço no nó do elemento e $\phi_l(\xi_{ig})$ a função de forma do nó l do elemento avaliada no ξ_{ig} do espaço adimensional. Isolando a matriz de esforços nodais na equação (2.69)

$$\bar{B} = \Phi^{-1} \cdot \bar{B} \quad (2.70)$$

Nas expressões (2.69) e (2.70) \bar{B} e \bar{B} são vetores de qualquer esforço interno para os nós e pontos de integração respectivamente.

2.4.7 Aplicação de Rótulas

A introdução das rótulas nos elementos finitos de pórtico plano se deu por meio da compatibilidade cinemática dos graus de liberdade no nó rotulado. Esta técnica simples permite que os componentes do sistema rotulado compartilhem os graus de liberdade translacionais do nó rotulado, liberando a rotação relativa na montagem do sistema. Diversos trabalhos aplicam esse método de implementação de rótula, como Greco e Coda (2006), Reis (2012), Coda e Paccola (2014) e Siqueira (2016).

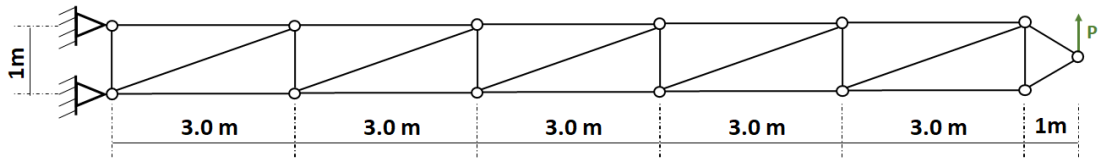
2.5 VALIDAÇÃO DO MODELO MECÂNICO

2.5.1 Elementos de Barra

2.5.1.1 Exemplo 1: Flexão de uma torre treliçada engastada

Para a validação da resolução do problema mecânico com elementos de barra, gera-se a curva Força x Deslocamento da treliça apresentada na Figura 2.9. A torre possui 16m de comprimento, seção transversal de $A_0 = 0.1$ e $K = 10000$.

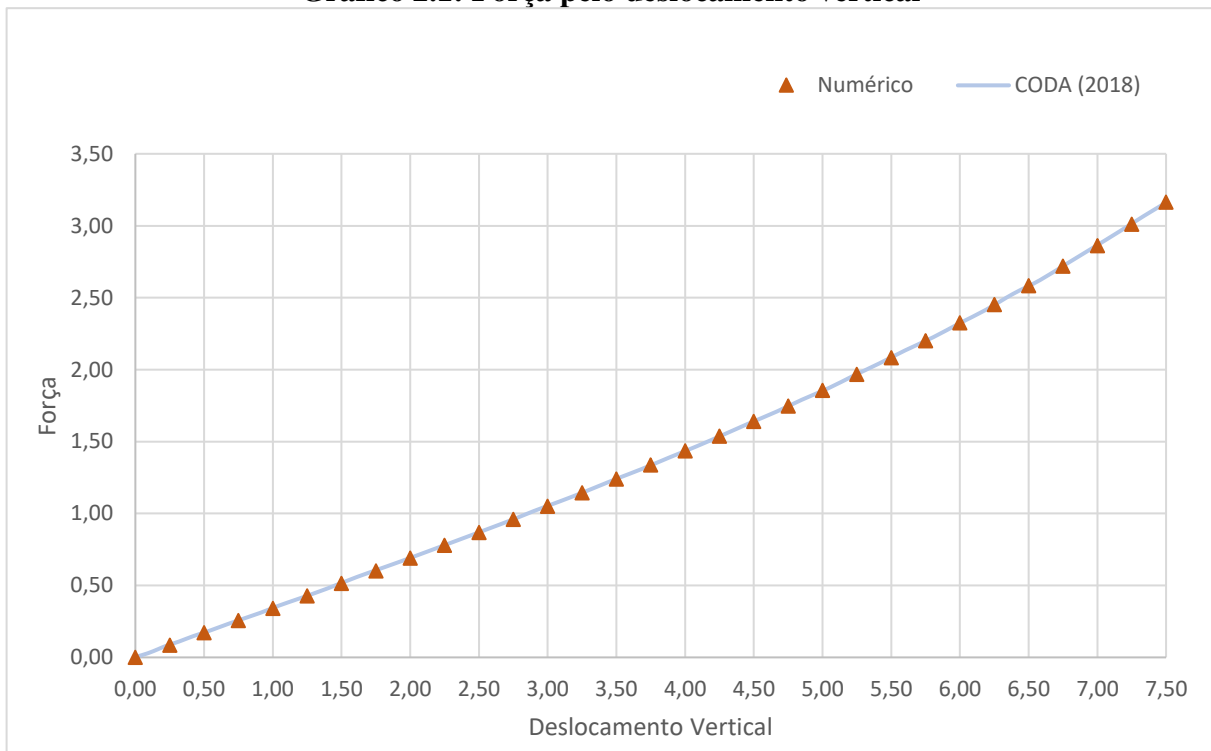
Figura 2.9: Torre treliçada sujeita a flexão



Fonte: Autor

Este exemplo foi resolvido por Coda (2018) e os seus resultados comparados aos obtidos pelo programa desenvolvido no Gráfico 2.1. A correspondência da curva encontrada e a apresentada na referência demonstra a correta implementação dos elementos de barra no código desenvolvido.

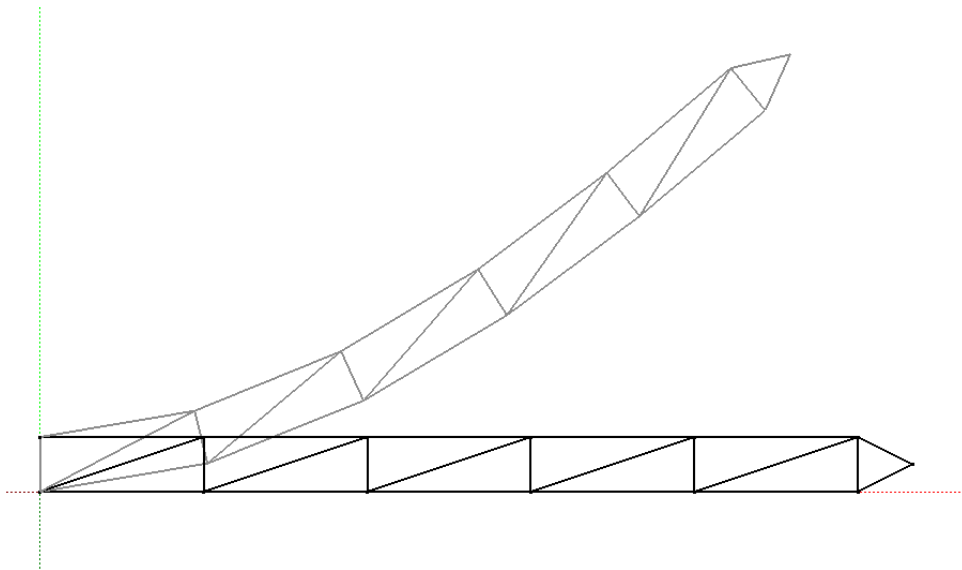
Gráfico 2.1: Força pelo deslocamento vertical



Fonte: Autor

A Figura 2.10 apresenta a deslocada da treliça analisada, nota-se que apesar do pequeno nível de deformação mostrado pelo Gráfico 2.1 a estrutura está sujeita a grandes níveis de deslocamento.

Figura 2.10 Deslocada da Torre Treliçada



Fonte: Autor

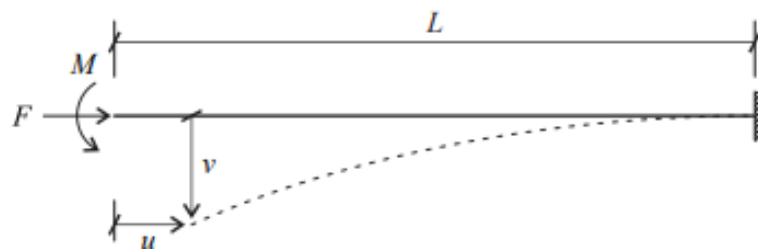
2.6.1 Elemento de Pórtico

2.6.1.1 Exemplo 1: Flambagem elástica de uma coluna

Para a validação do problema mecânico com elementos de pórtico, analisou-se a flambagem estática de uma coluna submetida a flexocompressão. Este exemplo foi resolvido analiticamente por Goto, Yoshimitsu e Obata (1990) e numericamente por Siqueira (2016).

A coluna estudada é esbelta com comprimento igual a $10m$ e engastada na base. A outra extremidade está submetida a uma força axial de $1152N$ e um momento fletor de $0.96N \cdot m$, como mostrado na Figura 2.11. A fim de se obter a trajetória de carregamento da estrutura, o carregamento mencionado é incrementado em 100 passos de carga, para cada qual obteve-se o deslocamento transversal, v , e axial, u , da extremidade livre.

Figura 2.11: Coluna submetida a flexocompressão

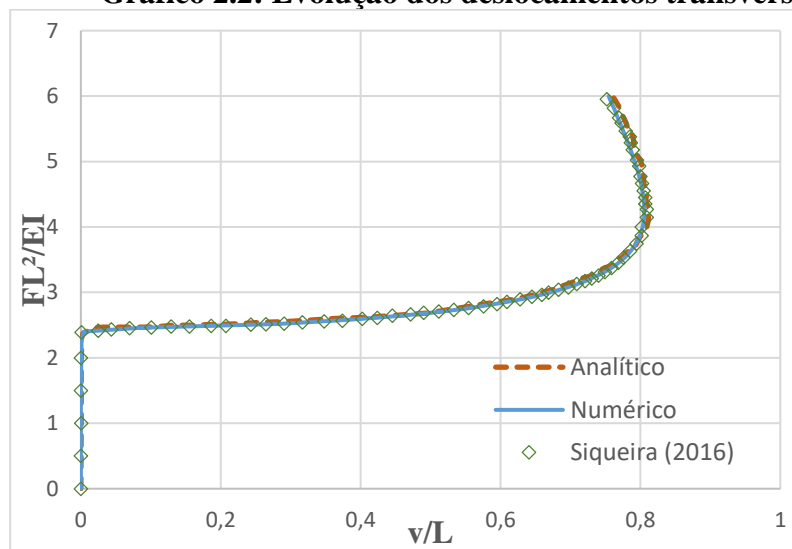


Fonte: Autor

De modo a se obter um índice de esbeltez igual a 100, adotou-se uma seção transversal quadrada de lado $b_0 = h_0 = 69.282 \text{ cm}$. Para o material utilizou-se módulo de elasticidade longitudinal $\mathbb{E} = 1.0 \times 10^6 \text{ Pa}$ e módulo transversal $\mathbb{G} = 4.0 \times 10^5 \text{ Pa}$.

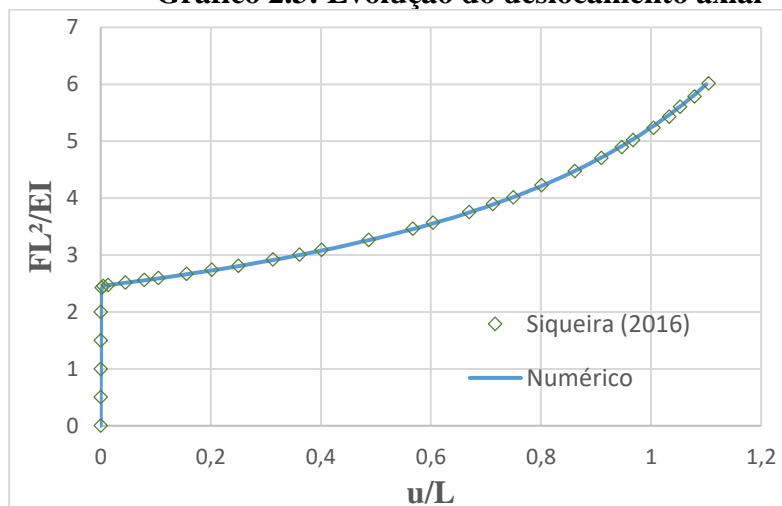
A simulação numérica foi realizada com 5 elementos finitos de aproximação cúbica. Os resultados, mostrados nos Gráficos 2.2 e 2.3, são comparados com a resposta analítica de Goto, Yoshimitsu e Obata (1990) e com a aproximação numérica de Siqueira (2016).

Gráfico 2.2: Evolução dos deslocamentos transversais



Fonte: Autor

Gráfico 2.3: Evolução do deslocamento axial



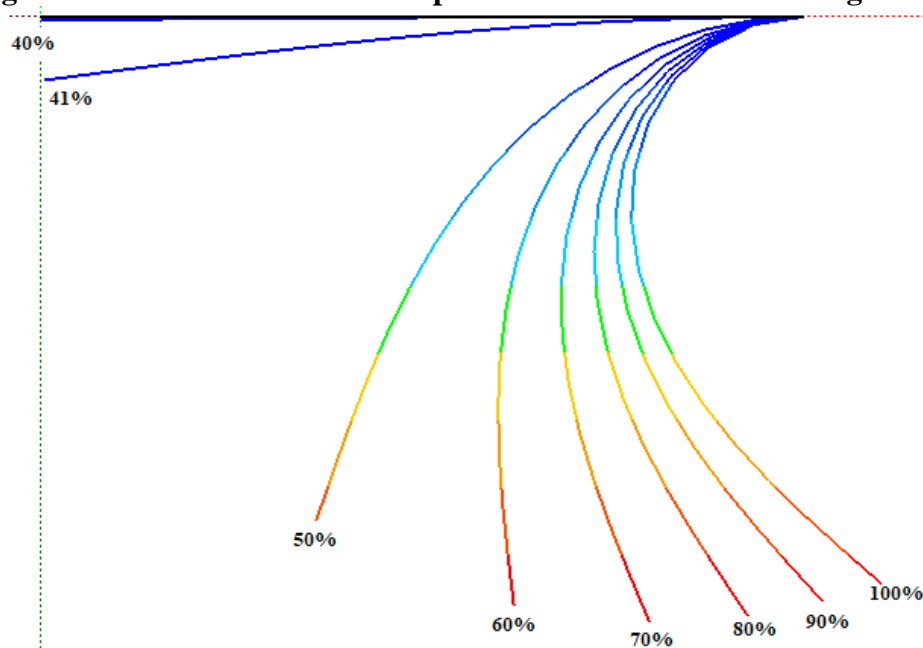
Fonte: Autor

Os resultados do deslocamento transversal mostram a precisão da formulação empregada na representação do comportamento não linear geométrico de estruturas

aporticadas. A partir do histórico de carregamento, é possível observar a bifurcação do equilíbrio quando atingida a carga de flambagem elástica.

A Figura 2.12 apresenta as deslocadas da estrutura em diferentes carregamentos de carga. É possível observar a perda de estabilidade devido a flambagem, após 40% da carga final. É interessante observar que o mesmo incremento de carga de 10% gera grandes saltos de deslocamentos, validando o esperado no fenômeno de flambagem.

Figura 2.12: Estrutura deslocada para diferentes níveis de carregamento



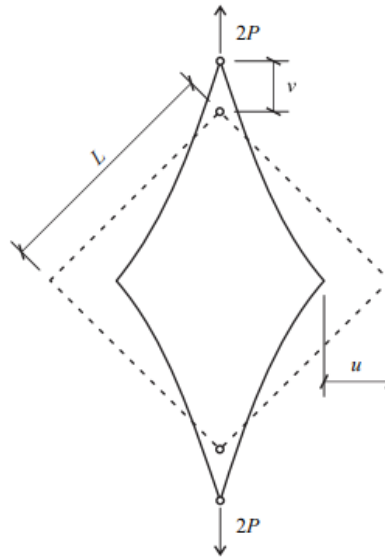
Fonte: Autor

2.6.1.2 Exemplo 2: Pórtico articulado

O exemplo 2 foi realizado para a validação da implementação do uso de rótulas, assim como para a demonstração da capacidade do programa desenvolvido na análise não linear geométrica. O pórtico analisado é ilustrado da Figura 2.13. Os resultados foram comparados com a resposta analítica tabelada em Mattiason (1981), e os valores numéricos obtidos por Siqueira (2016).

O problema consiste em um pórtico em forma de losango, articulado em vértices opostos, de lado igual a $6m$ e sujeito a forças concentrada nas rótulas. Para a simulação numérica, discretizou-se o pórtico em 24 elementos finitos de aproximação cúbica, sendo seis elementos por aresta. Para o material, considerou-se módulo de elasticidade longitudinal $E = 1.0 \times 10^4$ e módulo transversal $G = 5.0 \times 10^3$. As seções transversais de todas as barras possuem base de $20cm$ e altura de $60cm$.

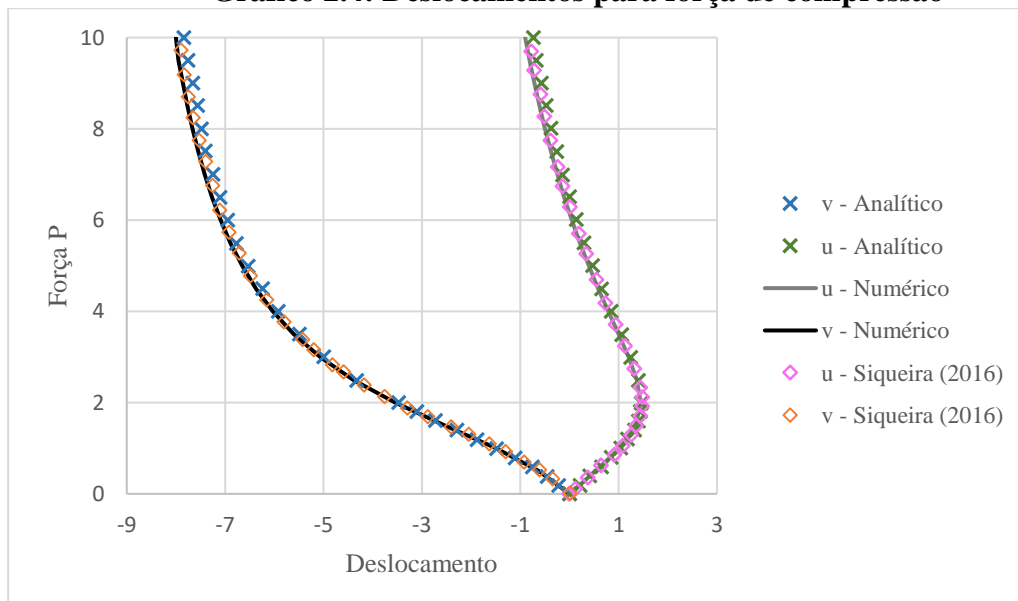
Figura 2.13: Geometria inicial e deformada do pórtico articulado



Fonte: Autor

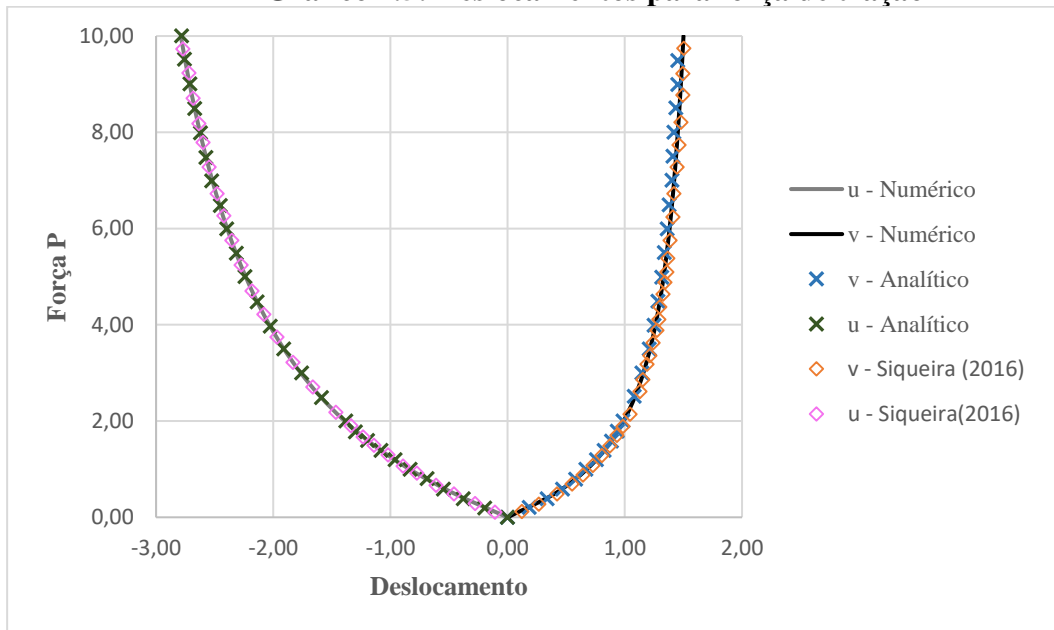
A estrutura foi submetida a uma força de $2P$ de compressão, gráfico 2.4, e tração, gráfico 2.5. A Figura 2.14 apresenta as deslocadas da estrutura após o carregamento completo. Através dos gráficos é possível verificar a eficiência da formulação utilizada e a correta implementação da mesma no programa desenvolvido. As pequenas variações, apresentadas entre os resultados analíticos e os numéricos para as cargas superiores, são justificadas por Siqueira (2016) devido ao uso de diferentes cinemáticas. A resposta analítica utiliza a cinemática de Euler-Bernoulli, ao passo que o MEF-Posicional emprega a cinemática de Reissner.

Gráfico 2.4: Deslocamentos para força de compressão



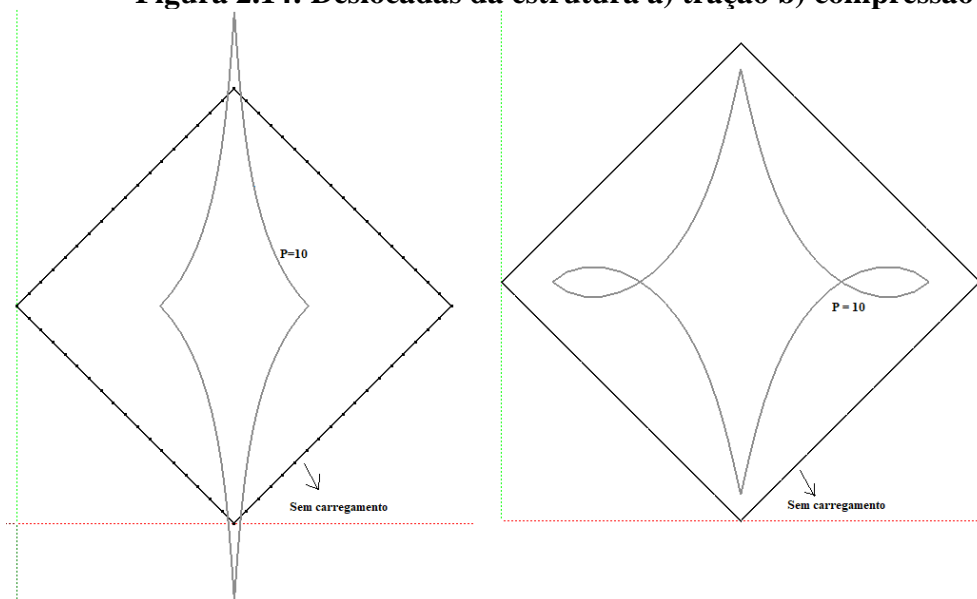
Fonte: Autor

Gráfico 2.5: Deslocamentos para força de tração



Fonte: Autor

Figura 2.14: Deslocadas da estrutura a) tração b) compressão



Fonte: Autor

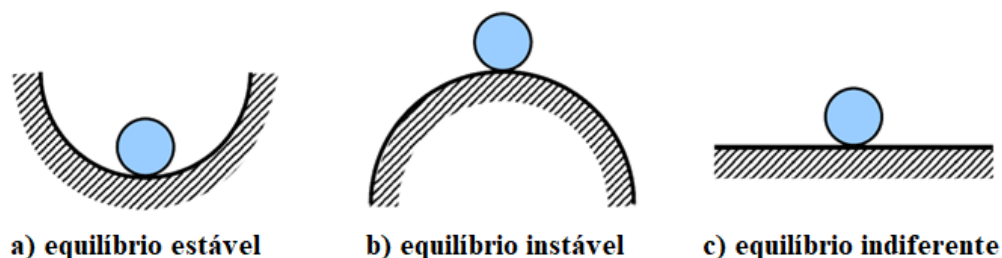
3 ESTABILIDADE ESTRUTURAL

O termo ‘estabilidade’ é utilizado para classificar o equilíbrio de uma configuração estrutural. Isto porque a ação de forças externas gera deslocamentos nos pontos pertencentes a estrutura, como resposta ao carregamento. A configuração deslocada pode ser classificada em “estável” ou “instável” de acordo com a resposta à imposição de uma pequena perturbação (REIS E CAMOTIM; 2000).

Simitses e Hodges (2006) salientam que a perturbação aplicada deve ser infinitesimal, pois perturbações finitas podem levar a estrutura para pontos de equilíbrio distantes da configuração inicial, impossibilitando a avaliação do equilíbrio inicial.

A classificação do equilíbrio é facilmente observada na Figura 3.1, na qual uma esfera sujeita a ação do peso próprio é posicionada em três superfícies distintas: côncava, convexa e horizontal. A primeira proporciona um equilíbrio estável ao corpo, uma vez que, após uma pequena perturbação, o corpo oscila em torno da posição inicial. Já no segundo caso, após a mesma perturbação o corpo se afasta da posição inicial, caracterizando um equilíbrio instável. O terceiro cenário retrata um equilíbrio neutro (ou indiferente), no qual a configuração imposta pela perturbação também é de equilíbrio.

Figura 3.1: Situações de equilíbrio



Fonte: Autor

O conceito de equilíbrio para corpos rígidos se estende para corpos deformáveis, nos quais a estabilidade pode ser avaliada por meio dos teoremas da energia (SOARES, 2019). O primeiro teorema está relacionado ao equilíbrio estrutural e foi apresentado, no subitem 2.2 do capítulo anterior, como princípio da estacionariedade da energia mecânica.

O segundo teorema, conhecido como teorema de Lagrange-Dirichlet, diz que sendo a energia total contínua, um sistema possui equilíbrio estável, se e somente se, a segunda variação da energia for positiva. Como já mencionado no capítulo anterior, e aqui demonstrado por (3.1), o segundo variacional da energia mecânica equivale a matriz Hessiana calculada para a resolução do Newton-Raphson.

$$\delta^2\Pi = \frac{1}{2} \delta Y_i \frac{\partial \Pi}{\partial Y_i \partial Y_j} \delta Y_j = \frac{1}{2} \delta Y_i \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y_i \partial Y_j} \delta Y_j = \frac{1}{2} \delta Y_i \cdot \mathbf{H} \cdot \delta Y_j \quad (3.1)$$

Desse modo, a verificação da matriz Hessiana é condição suficiente para a caracterização do equilíbrio estrutural. Devendo esta ser positiva definida para um equilíbrio estável.

$$\delta Y_i \cdot \mathbf{H} \cdot \delta Y_j > 0 \quad (3.2)$$

Uma vez que \mathbf{H} é simétrica, ela é dita positiva definida se todos os seus autovalores são positivos; sendo necessária a resolução de um problema de autovalor para a avaliação da estabilidade. Tal problema é descrito genericamente por:

$$\mathbf{A}\vec{v} = \mu\mathbf{B}\vec{v} \quad (3.3)$$

onde \mathbf{A} e \mathbf{B} são as matrizes do problema.

Nos casos em que a matriz \mathbf{A} é simétrica positiva semi-definida e \mathbf{B} é indefinida sugere-se o algoritmo desenvolvido por Lanczos (1950) na resolução do problema (GRIMES, LEWIS e SIMON; 1986). Este algoritmo passou por melhorias ao longo dos anos, primeiramente, Paige (1976) expandiu a aplicabilidade ao resolver problemas de instabilidade numérica; e por último Lehoucq, Sorensen e Yang (1998) propuseram uma versão mais estável chamada *Implicit Restarted Lanczos Method* (IRLM).

O IRLM encontra-se disponível na biblioteca computacional ARPACK, que disponibiliza modos específicos para cada tipo de problema a ser analisado. Nesta pesquisa utilizou-se o modo de análise da estabilidade estrutural. Maiores detalhes sobre a formulação e rotinas desta biblioteca podem ser encontrados em Grimes, Lewis e Simon (1994); Lehoucq, Sorensen e Yang (1998); e Soares (2019).

3.1 TIPOS DE PERDA DE ESTABILIDADE

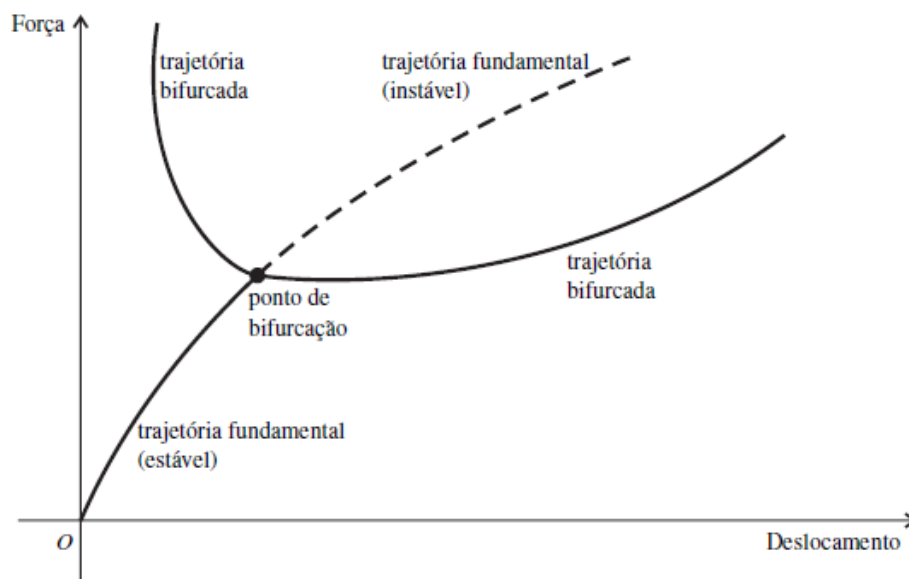
A perda da estabilidade estrutural pode ser observada ao longo da trajetória de equilíbrio da estrutura. Portanto, uma análise incremental-iterativa é fundamental para a obtenção da trajetória e, conseqüentemente, do ponto correspondente a transição entre a configuração de equilíbrio estável e instável, também conhecido como ponto crítico.

O ponto crítico pode ser classificado em ponto limite ou ponto de bifurcação de acordo com as características da trajetória. O reconhecimento do tipo de ponto crítico caracteriza a perda de estabilidade sendo importante na análise incremental (SOARES, 2019). As características dos dois tipos de instabilidade são descritas nas próximas subseções.

3.1.1 Instabilidade bifurcacional

Como o próprio nome sugere, a instabilidade bifurcacional é aquela que possui um ponto de bifurcação. Este ponto corresponde ao ponto no gráfico de força-deslocamento a partir do qual surge mais de uma trajetória. Uma destas caracteriza-se por ter início na origem do gráfico e apresentar equilíbrio instável após o ponto de bifurcação, a essa trajetória dá-se o nome de trajetória fundamental (REIS E CAMOTIM; 2000).

Figura 3.2: Instabilidade bifurcacional

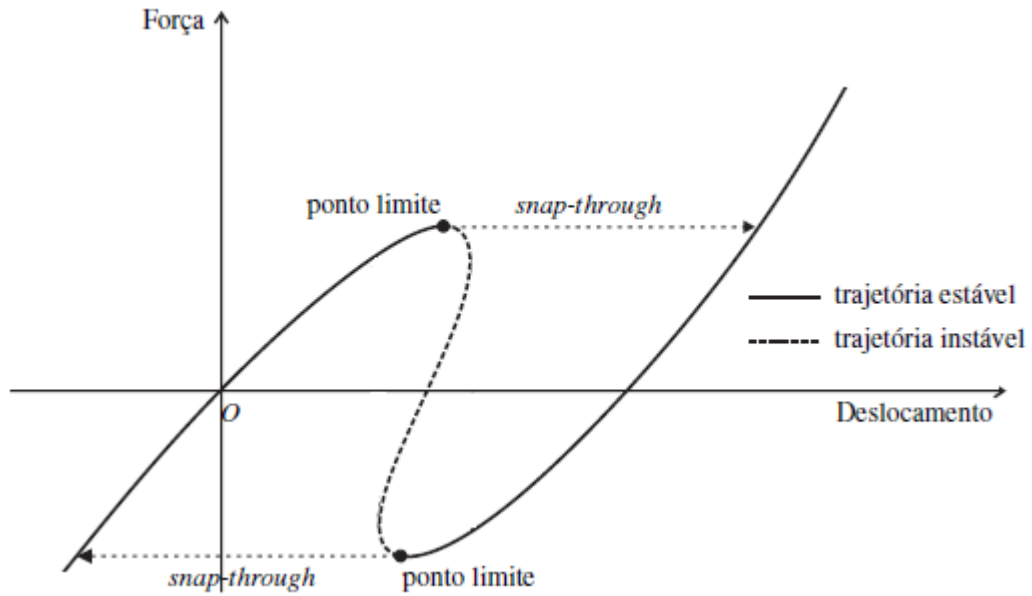


Fonte: Soares (2019)

A instabilidade bifurcacional caracteriza-se pela ocorrência de deslocamentos repentinos, inexistentes na trajetória fundamental. Um exemplo típico dessa instabilidade é a flambagem de colunas comprimidas, nas quais os deslocamentos transversais geram uma redução repentina da rigidez. Neste caso, a correta determinação da carga de bifurcação só é possível por meio de uma análise não-linear geométrica.

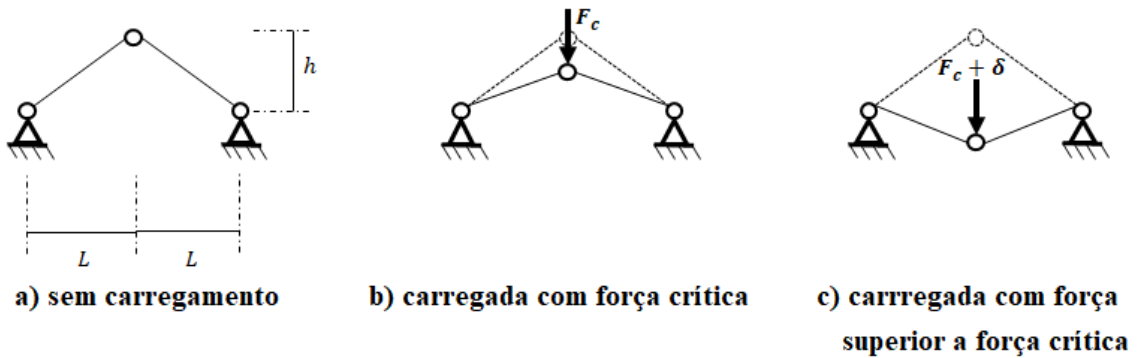
3.1.2 Instabilidade por “Snap-Through”

A instabilidade por “snap-through” identifica-se pela presença de um ponto limite no gráfico força-deslocamento, que representa um declive nulo na trajetória do equilíbrio. Em outras palavras, o ponto limite equivale a um ponto de máximo ou mínimo local como mostrado na Figura 3.3. Após atingir o ponto limite, a estrutura encontra uma posição de equilíbrio estável e afastada com o mínimo acréscimo da força atuante, a este fenômeno dá-se o nome de “snap-through”.

Figura 3.3: Instabilidade por “Snap-through”

Fonte: Autor

Um exemplo desta instabilidade pode ser visto na Figura 3.4, onde apresenta-se o problema de Von Mises. A treliça confinada é submetida a ação de uma força vertical negativa, até atingir uma força crítica, Figura 3.4 (b), a partir da qual qualquer acréscimo leva a estrutura para a posição de equilíbrio da Figura 3.4 (c).

Figura 3.4: Treliça de Von-Mises

Fonte: Autor

Nesta instabilidade os deslocamentos, presentes desde o início do carregamento, levam a uma diminuição progressiva da rigidez estrutural até que esta se anule no ponto limite. A obtenção do ponto limite só é possível por meio de análise não-linear.

3.2 ANÁLISES DE ESTABILIDADE

Toda análise de estabilidade abrange uma análise não-linear geométrica. Todavia, nos casos de instabilidade bifurcacional é possível realizar uma análise linear da estabilidade. O termo ‘linear’, neste caso, refere-se à suposição de uma variação linear da parcela da rigidez geométrica com a tensão (SOARES, 2019).

A análise linear da estabilidade permite a determinação da trajetória fundamental e da menor carga crítica de bifurcação. Todavia, a trajetória de pós-encurvadura obtida é degenerada, portanto, não há qualquer informação sobre seu comportamento.

Esta análise também se limita a pequenos deslocamentos, uma vez que estruturas sujeitas a grandes deslocamentos não apresentam um comportamento linear da rigidez geométrica. Assim, os resultados encontrados em uma análise linear podem não condizer com os observados na realidade.

Diante disso, para os casos em que se interessa apenas na carga crítica de bifurcação de uma estrutura sujeita a pequenos deslocamentos, a estabilidade é avaliada por uma análise linear. Podendo esta ser realizada em sistemas contínuos ou discretos.

Todavia, quando se busca informações sobre o comportamento da estrutura após o ponto crítico é necessária uma análise não linear da estabilidade, a qual considera termos não lineares nas equações de equilíbrio (REIS E CAMOTIM; 2000). Neste tipo de análise classifica-se os modos de instabilidade e suas respectivas cargas críticas.

4 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Como já mencionado anteriormente os métodos de otimização consistem na determinação da variável de projeto que represente o menor (ou maior) valor da função objetivo e satisfaça restrições pré-estabelecidas. Estes termos são definidos especificamente a seguir:

- Variáveis de projeto: são as variáveis modificadas durante o processo de otimização, elas podem ser contínuas ou discretas.
- Função objetivo: equivale a função dependente das variáveis de projeto que se deseja otimizar, isto é, minimizar ou maximizar.
- Restrições: são funções de igualdade ou desigualdade que descrevem situações desejáveis de projeto.
- Ponto ótimo: é o resultado da otimização, representa as variáveis de projeto que minimiza ou maximiza a função objetivo e respeita as funções de restrição.
- Valor ótimo: equivale ao valor da função objetivo obtida pelo ponto ótimo.
- Espaço de projeto: compreende os valores viáveis para as variáveis de projeto.

No caso da otimização determinística paramétrica e topológica de estruturas reticuladas, estudadas nesta pesquisa, as variáveis de projeto são as áreas transversais das barras; a função objetivo é o peso da estrutura; e as restrições são as condições de equilíbrio da estrutura, as tensões de escoamento das barras e os limites do espaço de projeto. Formalmente este problema é escrito da seguinte forma:

$$\text{determine:} \quad \vec{d}^* = \{A_1, \dots, A_n\} \quad (4.1)$$

$$\text{que minimiza:} \quad f(\vec{d}) = \sum_{i=1}^n A_i l_i$$

$$\text{sujeito a:} \quad g_{\text{tensão}} = |\sigma_i(x)| - \bar{\sigma}_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$g_{\text{equilíbrio}} = \vec{F}_{\text{ext}} - \vec{F}_{\text{int}} = 0$$

$$A_i^{\min} \leq A_i \leq A_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, n$$

onde A_i é a área da seção transversal, l_i o comprimento e $|\sigma_i(x)|$ a tensão atuante no elemento i , n é o número de barras da treliça, $\bar{\sigma}_i$ a tensão limite e A_i^{\max} , A_i^{\min} são as áreas limite máxima e mínima do elemento. A diferença da otimização paramétrica para a topológica é definida pelo limite mínimo da área transversal, A_i^{\min} . Na otimização topológica pode-se utilizar uma abordagem assintótica, na qual a área transversal é reduzida iterativamente até um limite próximo de zero (CHENG E GUO, 1997; STOLPE E SYANBERG, 2001); ou permitir que a

área transversal possa assumir valor nulo desde que precauções sejam tomadas para evitar problemas numéricos (KOCVARA E ZOWE, 1996; ACHTZIGER, 2007).

Para a resolução desse problema há inúmeras metodologias, as quais são divididas em dois grandes grupos: as técnicas de programação matemática e as heurísticas.

Os métodos clássicos também conhecidos como métodos de programação matemática, necessitam de uma configuração inicial, a partir da qual buscará iterativamente uma solução melhorada. Estes processos utilizam informações dos gradientes das funções envolvidas na determinação da direção de procura do mínimo da função objetivo. Desse modo, conduzem a melhor solução nas vizinhanças do ponto de partida, contudo, dependendo das características do problema, não há garantias de que a solução encontrada é a solução ótima global (RODRIGUES JUNIOR, 2005).

Bastos (2004) ainda ressalta a necessidade do emprego de funções objetivo contínuas e diferenciáveis no espaço de busca por estes métodos, limitando sua aplicação a problemas de engenharia que possuem tais características. Todavia, estes algoritmos são considerados rápidos e eficientes, pois desde a primeira iteração inicia-se a convergência para o mínimo.

Em contrapartida os métodos heurísticos baseiam-se na busca sobre todo o espaço de possíveis soluções, aumentando as chances de encontrar a solução ótima global; podendo, assim, ser considerados algoritmos de otimização global. A procura sobre todo o domínio requer um grande número de avaliações do valor da função objetivo e das restrições, podendo ser computacionalmente caros em casos destas funções demandarem um considerável tempo de processamento (RODRIGUES JUNIOR, 2005). Outro agente do custo computacional é o número de variáveis de projeto, uma vez que, as combinações possíveis entre as variáveis aumentam fatorialmente com o número destas.

Entretanto, o emprego desses métodos apresenta vantagens como: a não necessidade de informações do gradiente das funções envolvidas; permissão do uso de funções suaves ou descontínuas; facilidade na otimização de problemas com variáveis mistas; e a possibilidade da obtenção do mínimo global apesar de não se poder garantir que o ponto ótimo encontrado é de fato o mínimo da função objetivo.

Diante disso é evidente que cada metodologia possui particularidades, as quais se adequam melhor a um ou outro problema. Na última década, uma série de trabalhos tem utilizado métodos heurísticos na otimização estrutural. Miguel e Miguel (2012) aplicam dois algoritmos heurísticos, o *Harmony Search* e o *Firefly*, na otimização geométrica de treliças. Seus resultados mostram a eficácia e aplicabilidade desses algoritmos e enfatizam a capacidade de ambos na resolução de problemas não-lineares. Em uma comparação entre os métodos

constataram que o *Harmony Search* apresentou um tempo de resolução inferior ao *Firefly*. Em contrapartida, este encontrou soluções melhores.

Miguel, Lopez e Miguel (2013) empregam o *Firefly* na otimização topológica de treliças. Resolvem problemas bem conhecidos da literatura, provando a eficiência do algoritmo na busca por ótimas topologias. Outras pesquisas como Gandomi, Yang e Alavi (2011); Talatahari, Gandomi e Yun (2014) e Lieu, Do e Lee (2018) também utilizaram este algoritmo na otimização estrutural.

Os problemas de otimização estudados nesta pesquisa foram resolvidos por meio do algoritmo heurístico *Firefly* descrito com mais detalhes na próxima subseção. Para maiores detalhes sobre outros algoritmos heurísticos e algoritmos baseados em gradiente sugere-se a leitura de Arora (2012) e Brasil e Silva (2019).

4.1 ALGORITMO FIREFLY

O algoritmo *Firefly* foi desenvolvida por Yang (2009), sendo baseado no comportamento dos vaga-lumes que utilizam sua luz como meio de comunicação. Segundo o autor, o algoritmo possui três regras:

1. Todos os vaga-lumes se atraem;
2. A atração é proporcional ao brilho, de modo que, para qualquer par de vaga-lumes o de menor brilho irá em direção ao de maior;
3. O brilho do vaga-lume é associado a função objetivo. No entanto, caso não haja diferença no brilho dos vaga-lumes, estes se moverão aleatoriamente.

Baseado nestas regras o algoritmo *Firefly* é exemplificado no fluxograma da Figura 4.1.

Desse modo, há dois assuntos primordiais: a variação da intensidade da luz e a formulação da atratividade, os quais estão relacionados entre si. A intensidade da luz e a atratividade entre os vaga-lumes diminuem à medida que a distância entre eles aumenta. Portanto, a função da variação da intensidade e atratividade deve ser monotonicamente decrescente. A intensidade da luz é dada por:

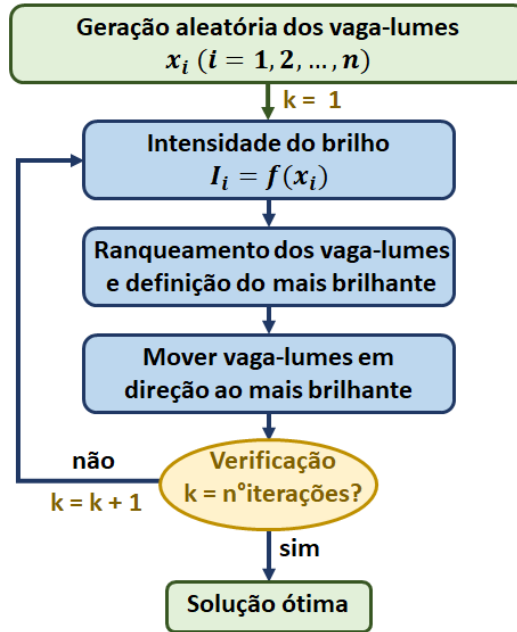
$$I(r) = I_0 e^{-\gamma r^2} \quad (4.2)$$

onde I_0 é a intensidade original da luz, γ é o coeficiente de absorção de luz, um parâmetro do algoritmo, e r é a distância entre os vaga-lumes analisados. Como a atratividade dos vaga-lumes é proporcional a intensidade da luz, ela pode ser definida como:

$$\beta(r) = \beta_0 e^{-\gamma r^2} \quad (4.3)$$

na qual β_0 representa a atratividade para uma distância nula.

Figura 4.1: Fluxograma do algoritmo Firefly



Fonte: Autor

O movimento do vaga-lume de menor brilho, i , em direção ao de maior brilho, j , depende de três parcelas: a posição atual, a atratividade e a aleatoriedade. Logo, a nova combinação de variáveis de projeto, \vec{d}_{i+1} , é expressa por:

$$\vec{d}_{i+1} = \vec{d}_i + \beta_0 e^{-\gamma r_{ij}^2} (\vec{d}_j - \vec{d}_i) + \alpha \left(rand - \frac{1}{2} \right) \quad (4.4)$$

onde \vec{d}_i e \vec{d}_j representam as coordenadas atuais dos vaga-lumes i e j ; α é um parâmetro de aleatoriedade; e $rand$ um número aleatório gerado por uma distribuição uniforme em $[0,1]$. A parcela aleatória do movimento causa variações nas soluções à medida que os vaga-lumes se aproximam do ótimo. Como esta mudança pode dificultar a convergência a redução gradual da aleatoriedade melhora a qualidade da solução (YANG, 2009).

Diante disso, tem surgido diversas variantes do algoritmo *Firefly* na literatura, como as propostas por: Gandomi et al. (2013), Fister et al. (2013), Wang et al. (2016), Zhang et al. (2016) e Brajević e Satnimirović (2018).

Outro fator que influencia a qualidade da solução e a velocidade de convergência é a função de penalização aplicada aos vaga-lumes cujo \vec{d} não satisfaz as restrições de otimização. A forma mais simples de penalização associa um valor constante, λ , ao brilho do vaga-lume.

Todavia, há uma variedade de técnicas de penalização na bibliografia. Griffin e Kolda (2017) comparam algumas das funções de penalização mais conhecidas para resolução de otimizações com restrições não-lineares, concluindo que funções de penalidade exata e suavizada são adequadas para resolução de problemas caracterizados por avaliações dispendiosas. Outras pesquisas como Costa et al. (2016) e Anescu (2017) também apresentam técnicas de penalização para restrições não-lineares em algoritmos heurísticos.

Nesta pesquisa, a penalização somada à função objetivo é proporcional a violação das restrições. No caso da otimização determinista, cujas restrições são tensões de escoamento, tensão crítica de Euler e deslocamentos nodais, a penalização proposta por Miguel et al. (2013) é calculada por:

$$P(\vec{d}) = \lambda \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta_i(\vec{d}) - \bar{\delta}_i}{\bar{\delta}_i} \right)^+ + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\sigma_j(\vec{d}) - \bar{\sigma}_j^t}{\bar{\sigma}_j^t} \right)^+ + \sum_{k=1}^l \left(\frac{|\sigma_k(\vec{d})| - |\bar{\sigma}_k^c|}{|\bar{\sigma}_k^c|} \right)^+ \right] \quad (4.5)$$

onde $(\cdot)^+ = \frac{[(\cdot) + |(\cdot)|]}{2}$ garante que apenas as restrições violadas resultem valores diferentes de zero. O primeiro somatório refere-se ao deslocamentos, sendo n o número de nós, $\delta_i(\vec{d})$ o deslocamento do nó i e $\bar{\delta}_i(\vec{d})$ o deslocamento limite. Os outros dois somatórios avaliam as tensões nas barras, nos quais m é o número de barras tracionadas, l é o número de barras comprimidas, $\sigma_k(\vec{d})$ a tensão atuante na barra, $\bar{\sigma}_j^t$ a tensão de escoamento a tração e $\bar{\sigma}_k^c$ a tensão limite a compressão, que é o maior valor entre a tensão de escoamento e a tensão de Euler. O fator de penalização λ é uma constante igual a 10^5 .

Já na otimização baseada em confiabilidade, na qual as restrições mecânicas são substituídas pela probabilidade de falha, $P_f(\vec{d})$, a penalização fica:

$$P(\vec{d}) = \lambda \left[\sum_{i=1}^r \left(\frac{P_{fi}(\vec{d}) - P_{fTi}}{P_{fTi}} \right)^+ \right] \quad (4.6)$$

quando a confiabilidade é avaliada para cada membro estrutural r é igual ao número de barras da estrutura, no entanto, quando analisa-se a confiabilidade do sistema r equivale a 1.

4.2 OTIMIZAÇÃO COM CONFIABILIDADE

Os problemas de engenharia são afetados por uma série de incertezas, as quais podem ser divididas em intrínseca e epistêmica. As incertezas intrínsecas, em geral, estão relacionadas a natureza aleatória dos fenômenos físicos, químicos, biológicos e atmosféricos que nos rodeiam. O estudo e coleta de maiores informações sobre estas incertezas permite a diminuição das mesmas, mas não a sua eliminação. Um exemplo é a variação da resistência do concreto: se uma concreteira implementa um controle de qualidade e produção, ela reduz a variação da resistência de ruptura de cada corpo de prova; contudo, ela jamais conseguira que todos os corpos de prova de todos os lotes rompam exatamente com a mesma tensão.

As incertezas epistêmicas estão relacionadas ao conhecimento até então adquiridos sobre as variáveis e os processos envolvidos no problema. Aqui inclui-se as incertezas estatísticas; a incerteza em relação ao modelo simplificado para representação de um sistema estrutural complexo; e ainda a incerteza fenomenológica, a qual corresponde ao entendimento incompleto de fenômenos envolvidos na sobrevivência de uma estrutura. Logo, devido a subjetividade das incertezas epistêmicas, estas nem sempre apresentarão uma variabilidade tão ‘bem-comportada’ como uma distribuição Gaussiana. Através do estudo e maior informações sobre os problemas, essas incertezas são reduzidas e podendo, em teoria, vir a ser eliminadas.

Diante de tantas incertezas, é evidente a possibilidade da estrutura responder de forma indesejável; em outras palavras, há uma probabilidade do sistema estrutural não atender às especificações de projeto, dentro do tempo de vida estabelecido, respeitadas as condições de operação de projeto. Beck (2019) define confiabilidade como a probabilidade do sistema não falhar. Logo, o cálculo da probabilidade de falha da estrutura é fundamental para o estudo da confiabilidade.

A probabilidade de falha (p_f) é determinada pela integral da função conjunta de densidade de probabilidades ($f_x(\vec{x})$) no domínio de falha da estrutura (Ω_f):

$$p_{f_i} = P[\vec{X} \in \Omega_{f_i}] = \int_{\Omega_{f_i}} f_x(\vec{x}) dx \quad (4.7)$$

O domínio de falha é determinado através das equações de estado limites ($g_i(\vec{x})$) que descrevem os modos de falha da estrutura.

$$\Omega_{f_i}(d) = \{\vec{x} \mid g_i(\vec{x}) \leq 0\}, \quad i = 1, \dots, n_{EEL} \quad (4.8)$$

sendo n_{EEL} o número de equações de estado limite e \vec{X} é um vetor de variáveis aleatórias da estrutura.

Para o estudo de sistemas estruturais o domínio e a probabilidade de falha são dados pelas equações (4.9) e (4.10), respectivamente.

$$\Omega_{f\text{ SYS}}(\vec{d}) = \left\{ \vec{x} \mid \bigcup_k \left[\bigcap_{i \in C_k} (g_i(\vec{x}) \leq 0) \right] \right\} \quad (4.9)$$

$$p_{f\text{ SYS}} = \int_{\Omega_{f\text{ SYS}}} f_x(\vec{x}) dx \quad (4.10)$$

A partir da probabilidade de falha da estrutura é possível considerar as incertezas nos processos de otimização. O método conhecido como otimização baseada em confiabilidade ou *Reliability-Based Design Optimization* (RBDO) utiliza restrições em probabilidade, no lugar de restrições deterministas. Assim, a equação geral (4.1) pode ser reescrita para cada modo de falha, como na equação (4.11)

$$\begin{aligned} \text{determine:} & \quad \vec{d}^* & (4.11) \\ \text{que minimiza:} & \quad f(\vec{d}) \\ \text{sujeito a:} & \quad p_{fi}(\vec{d}) \leq p_{fTi} \quad i = 1, \dots, n_{EEL} \\ & \quad \vec{d} \in \{ \vec{d}_{\min}, \vec{d}_{\max} \} \end{aligned}$$

onde $p_{fi}(\vec{d})$ é a probabilidade de falha em relação ao modo de falha i , p_{fTi} a probabilidade de falha admissível e n_{EEL} é o número de equações de estado limite.

A restrição da formulação também pode ser escrita em função da probabilidade de falha do sistema, equação (4.12).

$$\begin{aligned} \text{determine:} & \quad \vec{d}^* & (4.12) \\ \text{que minimiza:} & \quad f(\vec{d}) \\ \text{sujeito a:} & \quad p_{f\text{ SYS}}(\vec{d}) \leq p_{fT\text{ SYS}} \\ & \quad \vec{d} \in \{ \vec{d}_{\min}, \vec{d}_{\max} \} \end{aligned}$$

Problemas de otimização com restrições em confiabilidade de sistemas possuem maior complexidade na resolução. Estes também não possuem correspondência com a formulação determinística. A RBDO encontra a concepção ótima da estrutura em termos mecânicos, sem comprometer a segurança. Contudo, a relação entre economia e segurança não são abordados por esta formulação, e sim pela otimização de risco (RO).

Eventuais falhas de sistemas estruturais ocorrem, mesmo com o avanço tecnológico e científico dos últimos anos. Apesar de grandes colapsos estruturais serem raros, eventualmente eles ocorrem. O novo conceito de engenharia baseada em desempenho ou *Performance-Based*

Engineering (PBE) baseia-se justamente no reconhecimento de que a falha ocorre de forma contínua entre os estados de ‘funcionamento’ e ‘colapso total’ (MELCHERS e BECK, 2018).

Se a ocorrência de falhas é reconhecida, torna-se essencial que os custos referentes as falhas sejam incluídos no projeto. Custos de falhas de serviço consistem nos custos de reparo e de indisponibilidade da estrutura; já na falha última, os custos incluem remoção dos elementos que falham, indisponibilidade e reconstrução da estrutura. Há ainda o custo de indenizações em caso de danos físicos, morte ou danos ambientais. Estes assuntos entram no contexto de vida social e são abordados por Rackwitz (2002,2004), o qual discute o valor da vida humana em um contexto de tomada de decisões sobre empreendimentos que beneficiam a sociedade.

O custo esperado da falha (C_{ef}), para cada modo de falha, coincide com a definição de risco, que é o produto entre a probabilidade de ocorrência da falha (p_f) e custo da falha (C_f)

$$C_{ef}(\vec{d}) = C_f(\vec{d}) \cdot p_f(\vec{d}) \quad (4.13)$$

O custo esperado total para a estrutura durante toda sua vida útil é dado pela equação (4.14)

$$C_{et}(\vec{d}) = C_{construção}(\vec{d}) + C_{operação}(\vec{d}) + C_{inspec.\&manut.}(\vec{d}) + C_{descarte}(\vec{d}) + \sum_{i=1}^{n_{EEL}} C_{fi}(\vec{d}) \cdot p_{fi}(\vec{d}) \quad (4.14)$$

Na otimização de risco os custos esperados de falha são adicionados na função objetivo, permitindo a obtenção do ponto de equilíbrio entre segurança e economia. O equacionamento do problema fica:

$$\begin{aligned} \text{determine:} & \quad \vec{d}^* & (4.15) \\ \text{que minimiza:} & \quad C_{et}(\vec{d}) \\ \text{sujeito a:} & \quad \vec{d} \in \{ \vec{d}_{\min}, \vec{d}_{\max} \} \end{aligned}$$

Melchers e Beck (2018) salientam que coeficientes de segurança ótimos, ou índices de confiabilidades ótimos, são subprodutos da solução do problema. Ao comparar o equacionamento da RO com o da RBDO, nota-se que as restrições de confiabilidade são incorporadas à função objetivo, tornando as formulações formalmente diferentes. À formulação (4.15) podem ser acrescentadas restrições de segurança ou níveis de risco social, obtendo a equação (4.16).

$$\begin{aligned} \text{determine:} & \quad \vec{d}^* & (4.16) \\ \text{que minimiza:} & \quad C_{et}(\vec{d}) \\ \text{sujeito a:} & \quad p_{f\text{SYS}}(\vec{d}) \leq p_{fT\text{SYS}} \end{aligned}$$

$$\vec{d} \in \{ \vec{d}_{\min}, \vec{d}_{\max} \}$$

4.3 SOLUÇÃO DE PROBLEMAS RBDO BASEADAS NO FORM

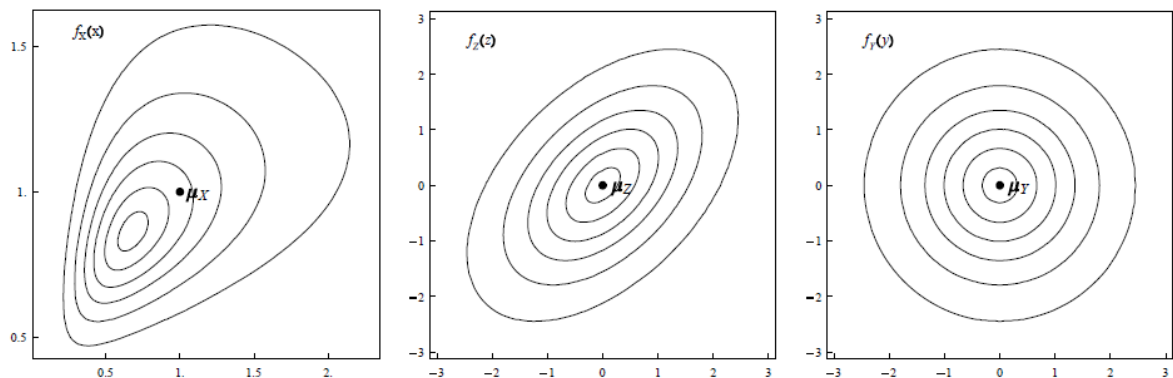
Os problemas de otimização envolvendo confiabilidade inserem índices de confiabilidade ou probabilidades de falha como restrições. Estas podem ser avaliadas por diversos métodos. Nesta seção destaca-se o método de confiabilidade de primeira ordem - *First Order Reliability Method* (FORM) - popularmente empregado devido a sua eficiência e precisão na solução de problemas cujas equações de estado limite são fracamente não lineares.

4.3.1 Método de Confiabilidade de Primeira Ordem

Os métodos de transformação são técnicas para a determinação da função conjunta de densidade de probabilidades, $f_{\mathbf{x}}(\vec{x})$, necessária para solução dos problemas de confiabilidade. Tais métodos necessitam de informações existentes para a construção desta função. O FORM é um destes métodos, o qual utiliza as distribuições marginais não normais e os coeficientes de correlação entre pares das variáveis aleatórias.

Esta transformação engloba três etapas: a transformação das distribuições marginais originais em distribuições normais equivalentes; a determinação de coeficientes de correlação equivalentes para as distribuições normais; e a eliminação da correlação. A Figura 4.2 apresenta estes três estágios.

Figura 4.2: Transformação composta do espaço original \mathbb{X} ao espaço normal padrão \mathbb{Y}



Fonte: Beck (2019)

O primeiro passo é dado pelo mapeamento do espaço original \mathbb{X} para o espaço intermediário \mathbb{Z} , chamado de espaço normal padrão multi-variado, no qual ainda há uma correlação entre as variáveis aleatórias. Nesta etapa utiliza-se o Princípio da Aproximação Normal para a geração de um espaço normal equivalente que preserve o conteúdo de probabilidade de \mathbb{X} . A transformação $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ e sua inversa $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$ são dadas por:

$$\vec{z} = J_{ZX} \{ \vec{x} - \mu^{neq} \} \quad (4.17)$$

$$\vec{x} = J_{XZ} \cdot \vec{z} + \mu^{neq} \quad (4.18)$$

sendo $J_{XZ} = \mathbf{D}^{neq}$ a jacobiana da transformação $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$, $J_{ZX} = (\mathbf{D}^{neq})^{-1}$ a sua inversa, μ^{neq} o vetor de médias equivalentes e \mathbf{D}^{neq} a matriz diagonal de desvios padrão equivalente a \mathbb{X} .

A segunda etapa é realizada pelo modelo de Nataf, o qual impõe uma correlação equivalente no espaço \mathbb{Z} . Já o terceiro passo consiste na eliminação da correlação entre as variáveis. Isto pode ser feito por meio da Decomposição Ortogonal ou pela Fatoração de Cholesky. Na primeira, o mapeamento de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$ e sua inversa $\mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$ são dados por:

$$\vec{y} = J_{YZ} \cdot \vec{z} \quad (4.19)$$

$$\vec{z} = J_{ZY} \cdot \vec{y} \quad (4.20)$$

onde a jacobiana da transformação é definida por:

$$J_{YZ} = \mathbf{A}^t \quad (4.21)$$

$$J_{ZY} = (\mathbf{A}^t)^{-1}$$

sendo $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}$, $\bar{\mathbf{A}}$ a matriz ortogonal cujas colunas são autovetores de \mathbf{C}_z , $\mathbf{\Lambda}$ a matriz diagonal dos autovalores de \mathbf{C}_z e \mathbf{C}_z a matriz de covariância equivalente.

Já no espaço normal padrão \mathbb{Y} , a equação de estado limite é aproximado por hiperplano tangente ao ponto de projeto, \vec{y}^* , que corresponde ao ponto de menor distância, β , entre a origem e a equação de estado limite. Todavia, este ponto é desconhecido e, portanto, sua solução é obtida através de algoritmos de otimização com a seguinte formulação:

$$\text{determine: } \vec{y}^* \quad (4.22)$$

$$\text{que minimiza: } \beta = \|\vec{y}\| = (\vec{y}^t \vec{y})^{1/2}$$

$$\text{sujeito a: } g(\vec{y}) = 0$$

Definido o ponto de projeto, lineariza-se a equação de estado limite e então determina-se o índice de confiabilidade, β , e a probabilidade de falha, p_f , correspondente.

4.3.2 Abordagem acoplada

Como visto no subitem anterior, o FORM engloba a solução de um problema de otimização para a determinação da probabilidade de falha. Isto, faz com que a associação do problema RBDO ao FORM produza laços de otimização aninhados, ou seja, para cada laço de otimização é necessário um laço de confiabilidade. Essa característica possui impacto direto no custo computacional da solução.

A probabilidade de falha para cada configuração de projeto \vec{d} é definida através do ponto de projeto \vec{y}^* , o qual será resolvido no laço de confiabilidade. A equação (4.23) apresenta a probabilidade de falha expressa por equações de estado limite.

$$P_f(\vec{d}) = P\left[g(\vec{d}, \vec{x}) \leq 0\right] = \int_{g(\vec{d}, \vec{x}) \leq 0} f_X(\vec{x}) dx \approx \Phi(-\beta(\vec{d})) \quad (4.23)$$

Sendo assim, o problema de confiabilidade é resolvido em termos de $g(\vec{d}, \vec{x}) = 0$. Contudo, muitas configurações de projeto não terão as restrições ativas, o que significa $g(\vec{d}, \vec{x}) \neq 0$. Portanto, define-se uma medida de desempenho g válida para qualquer $g = g^*$.

$$F_G(g^*) = \int_{-\infty}^{g^*} f_G(g) dg = \int_{g(\vec{d}, \vec{x}) \leq g^*} f_X(\vec{x}) dx \approx \Phi(-\beta_{g^*}) \quad (4.24)$$

O índice de confiabilidade generalizado, β_{g^*} , presente na equação (4.24) permite a associação de medidas de restrições para configurações de projeto não ativas. Desse modo reescreve-se as restrições de confiabilidade por:

$$P_f(\vec{d}) = F_G(0) \leq \Phi(-\beta_T) \quad (4.25)$$

onde β_T é o índice de confiabilidade alvo. Esta restrição pode ser imposta ao problema de otimização através de duas abordagens distintas: *Reliability-Index Approach* (RIA) e *Performance-Measure Approach* (PMA).

A abordagem RIA baseia-se na busca do índice de confiabilidade, para o qual a equação de estado limite é nula. O \vec{y}^* obtido nesta formulação corresponde ao ponto de projeto, ou seja, ao ponto de maior probabilidade de falha. A técnica é expressa por:

$$\text{dado: } \vec{d} \quad (4.26)$$

$$\text{determine: } \vec{y}^*$$

$$\text{que minimiza: } \beta(\vec{d}) = \|\vec{y}\| = (\vec{y}^t \vec{y})^{1/2}$$

$$\text{sujeito a: } g(\vec{d}, \vec{y}) = 0$$

Já a abordagem PMA consiste na procura do ponto de menor valor da função de desempenho sobre cujo índice de confiabilidade é igual ao β_T . O \vec{y}^* encontrado representa o ponto de mínimo desempenho. Formalmente esta abordagem é escrita por:

$$\begin{aligned} \text{dado: } & \vec{d} \\ \text{determine: } & \vec{y}^* \\ \text{que minimiza: } & g(\vec{d}, \vec{y}) \\ \text{sujeito a: } & \|\vec{y}\| = \beta_T \end{aligned} \quad (4.27)$$

É importante comentar que apesar de tomarem caminhos distintos na determinação do \vec{y}^* , os valores deste para restrições ativas é o mesmo para ambas as abordagens. Beck (2019) apresenta um apanhado de trabalhos que comparam estas formulações, os quais concluem ser a abordagem PMA mais robusta, eficiente e estável na resolução de problemas RBDO.

4.3.3 Abordagem desacoplada de laço único

Buscando a diminuição do custo computacional gerado pelo aninhamento dos laços de otimização, diversas técnicas de desacoplamento de laços foram desenvolvidas. Nesta subseção destaca-se a abordagem de laço único ou *Single Loop Approach* (SLA). Este método tem por objetivo a eliminação do laço de confiabilidade interno através da imposição de restrições no laço externo. De modo que ocorra uma convergência simultânea das variáveis de projeto, \vec{d} , e do ponto de projeto, \vec{y}^* .

O método SLA proposto por Liang et al. (2004) fundamenta-se na imposição das condições de otimalidade de primeira ordem de KKT do laço de confiabilidade como restrição do laço de otimização. Sendo expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{determine: } & \vec{d}_{k+1} \\ \text{que minimiza: } & f(\vec{d}) \\ \text{sujeito a: } & g_i(\vec{d}_k, \vec{x}_{ik}^*) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_{EEL} \\ & \vec{d} \in \mathfrak{D} \end{aligned} \quad (4.28)$$

na qual \vec{x}_{ik} é uma aproximação linear do ponto de mínimo desempenho das variáveis aleatórias.

Tal aproximação é dada pela equação:

$$\vec{x}_{ik}(\vec{d}) = (\mu_x)_k - (J_{xy})_{ik} \alpha_{ik}(\vec{d}) \beta_{Ti} \quad (4.29)$$

sendo α_i o gradiente normalizado da equação de estado limite i , J_{xy} a matriz jacobiana da transformação, e μ_x o vetor de médias das variáveis aleatórias. Este vetor deve ser atualizado nos problemas em que as variáveis de projeto são também variáveis aleatórias.

$$J_{xy} = \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right\}_{i=1, \dots, n_{RV}; j=1, \dots, n_{RV}} \quad (4.30)$$

A expressão (4.28) resolve problemas RBDO com restrições para cada modo de falha, contudo, o emprego de restrições às probabilidades de falha do sistema conduz a projetos melhores. Isto pois, o reduzido número de restrições do problema leva a valores menores para a função objetivo. O uso da probabilidade de falha do sistema como restrição, também permite que os pontos ótimos de compromisso entre os diferentes modos de falha concorram entre si.

Diante disso, Liang et al. (2007) propõem uma metodologia de SLA para RBDO de sistemas em série. Esta é estendida por Nguyen et al. (2010) para problemas de sistema genérico. O método baseia-se na introdução das confiabilidades alvo dos componentes como variáveis de projeto:

$$\begin{aligned} \text{determine:} \quad & \{\vec{d}^*, \vec{\beta}_T^*\} & (4.31) \\ \text{que minimiza:} \quad & f(\vec{d}) \\ \text{sujeito a:} \quad & p_{f\text{SYS}}(\vec{d}) \leq p_{f\text{SYS}}, \quad g_i(\vec{d}, \vec{x}_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n_{EEL} \\ & \vec{d} \in \mathfrak{D} \end{aligned}$$

onde $\vec{\beta}_T^*$ é o vetor de confiabilidade alvo dos componentes, \vec{x}_i é a aproximação do ponto de mínimo desempenho, dada pela equação (4.29).

4.4 SOLUÇÃO DE PROBLEMAS RBDO E RO BASEADAS EM SIMULAÇÃO

As técnicas de simulação podem ser empregadas em problemas de otimização de estruturas com restrições de probabilidades (RBDO) ou para otimização do custo total do ciclo de vida da estrutura (RO) sob incertezas.

A simulação é uma técnica numérica para a realização de um experimento por computador, na qual testa-se o sistema estrutural para um grande número de possíveis combinações das incertezas. Estes métodos são também conhecidos como exatos por, em teoria, tenderem a resposta exata quando o número de amostras tende ao infinito e por não utilizarem certas aproximações como os métodos analíticos. Todavia, Beck (2019) salienta que o termo

exato se limita apenas a estas duas características, sendo os métodos de simulação suscetíveis a outros erros, como erros de modelo e das aproximações algorítmicas na geração dos números aleatórios.

4.4.1 Simulação de Monte Carlo

Com o intuito de escrever a probabilidade de falha, p_f , como uma integral ao longo de todo o domínio amostral, multiplica-se a equação (4.7) uma função indicadora, $I(\vec{x})$, a qual é unitária para \vec{x} pertencente ao domínio de falha e nula caso contrário. Desse modo, tem-se:

$$I(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \vec{x} \in \Omega \\ 0, & \text{se } \vec{x} \notin \Omega \end{cases} \quad (4.32)$$

$$p_f = \int_{\Omega} I(\vec{x}) f_X(\vec{x}) dx \quad (4.33)$$

Sendo assim, a p_f é igual ao valor esperado da função indicadora, podendo ser estimada para uma amostra de tamanho finito, como:

$$p_f \approx \hat{p}_f = \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} I(x_k) = \frac{n_f}{n_s} \quad (4.34)$$

onde $\left(\hat{p}_f \right)$ representa uma estimativa da probabilidade de falha, n_s é o número de amostras e n_f é o número de amostras pertencentes ao domínio de falha.

Tal estimativa acarreta em um erro estatístico, representado pela variância de $I(x)$:

$$\text{Var}[\hat{p}_f] = \frac{1}{(n_s - 1)} \sum_{k=1}^{n_s} (I(x_k) - p_f)^2 \quad (4.35)$$

Esta incerteza diminui com o aumento da amostragem, contudo, não converge para zero. Como mostra o limite da equação (4.35) para $n_s \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n_s \rightarrow \infty} \text{Var}[\hat{p}_f] = (p_f)^2 \quad (4.36)$$

O resultado direto da simulação de Monte Carlo é a probabilidade de falha da estrutura, entretanto, é possível determinar o índice de confiabilidade, β , em função de p_f .

$$\beta_{MC} = -\Phi^{-1}(p_f) \quad (4.37)$$

Uma vez que a probabilidade de falha de elementos estruturais é muito pequena, necessita-se de um grande número de amostras para garantir uma resposta adequada. Ao longo

dos anos diversas técnicas de simulação foram desenvolvidas para reduzir o número de amostras necessárias. Aqui, destaca-se a Simulação de Monte Carlo com Amostragem por Importância.

Esta técnica consiste no emprego de uma função de amostragem, $h_x(\vec{x})$, de modo que, se evite a geração de amostras longe da região de interesse. A escolha de uma boa função de amostragem é fundamental para o sucesso da técnica.

Definida a função de amostragem, reescreve-se a probabilidade de falha com:

$$p_f = \int_{\Omega} I(\vec{x}) \frac{f_x(\vec{x})}{h_x(\vec{x})} h_x(\vec{x}) dx \quad (4.38)$$

Esta é expressa para um número finito de amostras como:

$$p_f \approx p_f = \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} I(x_k) w_k \quad (4.39)$$

onde w_k representa o peso de amostragem associado a cada ponto k da amostra, o qual é dado por:

$$w_k = \frac{f_x(\vec{x})}{h_x(\vec{x})} \quad (4.40)$$

No caso de problemas envolvendo a otimização de variáveis de projeto, \vec{d} , a probabilidade de falha é estimada através de probabilidades condicionais:

$$\begin{aligned} p_f(\vec{d}) &= \int_{\Omega} p(f | \vec{d}, \vec{x}) \cdot p(\vec{x} | \vec{d}) dx \\ &= \int_{\Omega} I_f(\vec{d}, \vec{x}) \cdot p(\vec{x} | \vec{d}) dx \end{aligned} \quad (4.41)$$

sendo f o evento falha; $p(\vec{x} | \vec{d}) = f_x(\vec{x})$ a função de densidade conjunta das variáveis aleatórias, a qual é função explícita de \vec{d} , quando variáveis aleatórias de projeto estão presentes; e $I_f(\vec{d}, \vec{x})$ a função indicadora:

$$I_f(\vec{d}, \vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \vec{x} \in \Omega_f \\ 0, & \text{se } \vec{x} \notin \Omega_f \end{cases} \quad (4.42)$$

Afim de trabalhar com pequenas probabilidades de falha e aplicar técnicas de amostragem por importância, a equação (4.41) fica:

$$p_f(\vec{d}) = \int_{\Omega} \frac{I_f(\vec{d}, \vec{x}) p(\vec{x} | \vec{d})}{h(\vec{x} | \vec{d})} h(\vec{x} | \vec{d}) dx \quad (4.43)$$

Logo, a partir de um conjunto de amostras obtidas da função de amostragem $h(\vec{x}|\vec{d})$, a probabilidade de falha pode ser interpretada como o valor esperado de $\frac{I_f(\vec{d},\vec{x})p(\vec{x}|\vec{d})}{h(\vec{x}|\vec{d})}$.

4.4.2 Números Aleatórios Comuns

A técnica conhecida como números aleatórios comuns, ou *Common Random Numbers* (CRN), tem por objetivo aumentar a exatidão da otimização através da diminuição do erro relativo. Este erro é reduzido por meio da minimização da variância entre estimativas da probabilidade de falha para alternativas, d_1 e d_2 , das variáveis de projeto. Uma vez que, a variância entre as estimativas é dada por:

$$\begin{aligned} Var\left[p_f(d_1, \Omega_{n_{s1}}) - p_f(d_2, \Omega_{n_{s2}})\right] &= Var\left[p_f(d_1, \Omega_{n_{s1}})\right] + Var\left[p_f(d_2, \Omega_{n_{s2}})\right] \\ &\quad - 2Cov\left[p_f(d_1, \Omega_{n_{s1}}), p_f(d_2, \Omega_{n_{s2}})\right] \end{aligned} \quad (4.44)$$

tem-se que covariâncias positivas geram uma redução da variância. Tal característica pode ser obtida ao utilizar-se da mesma amostra de números aleatórios na estimativa da $p_f(d_1, \Omega_{n_{s1}})$ e $p_f(d_2, \Omega_{n_{s2}})$ desde que as alternativas d_1 e d_2 não sejam muito diferentes.

O emprego desta metodologia produz maior estabilidade na busca da solução ótima. Esta ainda possui melhor desempenho ao ser associado a função indicadora contínua, a qual é detalhada na próxima subseção.

4.4.3 Função Indicadora Contínua

As equações de estado limite sugerem que a transição entre os estados de sobrevivência e falha das estruturas é discreta, em outras palavras, estas equações permitem que duas alternativas muito próximas, d_1 e d_2 , representem estados distintos entre si. Entretanto, tal comportamento não condiz com a realidade das estruturas.

Esta característica introduz uma instabilidade nas soluções baseadas em simulação. A técnica da função indicadora contínua tem por objetivo reduzir essa variabilidade através da inserção de uma pequena perturbação na equação de estado limite.

$$g(\vec{d}, \vec{x}) = g(\vec{d}, \vec{x}) + \epsilon = 0 \quad (4.45)$$

A perturbação é representada pela variável ϵ de média zero e desvio-padrão pequeno, a qual produz uma transição contínua entre sobrevivência e falha. A probabilidade de falha para a nova equação de estado limite fica:

$$p_f(\vec{d}) = \int_{\Omega} \left[1 - F_{\epsilon} \left(g(\vec{d}, \vec{x}) \right) \right] p(\vec{x} | \vec{d}) dx \quad (4.46)$$

sendo $F_{\epsilon}(\cdot)$ a distribuição cumulativa de probabilidades da variável ϵ . Para um número finito de amostras, a probabilidade de falha pode ser estimada pela equação (4.47).

$$p_f(\mathbf{d}) = \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} I_f(\vec{d}, \vec{x}_i) \approx \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} \left[1 - F_{\epsilon} \left(g(\vec{d}, \vec{x}_i) \right) \right] \quad (4.47)$$

4.4.4 Método de Simulação com Ponderação Média

O método de simulação com ponderação média ou *Weighted Average Simulation Method* (WASM) consiste no cobrimento de todo espaço de projeto por uma amostragem uniforme. Para cada amostra se associa um peso amostral dependente do vetor de variáveis de projeto analisado (\vec{d}). Esta técnica foi proposta por Rashki, Miri e Moghaddam (2012) para a estimativa da probabilidade de falha dentro de um problema de otimização. Uma das vantagens do WASM é o reduzido número de amostras necessário para a determinação de pequenas probabilidades de falha, fazendo deste uma alternativa vantajosa a Simulação de Monte Carlo. Em relação a Simulação de Monte Carlo por Importância, o WASM também é vantajoso pois não requer informações detalhadas da região de falha.

A correta implementação do WASM deve seguir os cinco passos descritos por Rashki, Miri e Moghaddam (2012).

1. Escolha adequada do espaço de amostragem;
2. Geração uniforme de amostras ao longo do espaço definido;
3. Determinação do peso de cada amostra;
4. Encontro da amostra de maior peso;
5. Cálculo da probabilidade de falha.

A escolha do espaço de amostragem consiste na correta definição dos limites inferior e superior para geração das amostras. Estes podem ser definidos por meio do uso de uma simulação de Monte Carlo. Para isso, assume-se inicialmente uma probabilidade de falha para a definição do número de amostras necessário. Uma simulação de Monte Carlo é realizada para a geração das amostras, os valores mínimo e máximo da amostragem são os limites do intervalo.

Outro procedimento para a escolha dos limites baseia-se em índices de confiabilidade conservativos. Os intervalos são tabelados para diferentes índices de confiabilidade, Tabela 4.1. Nesta F^{-1} é a inversa da CDF de cada variável aleatória. A probabilidade de falha não se altera quando o intervalo utilizado é igual ou maior ao indicado.

Tabela 4.1: Intervalos mínimos para geração de amostras do WASM

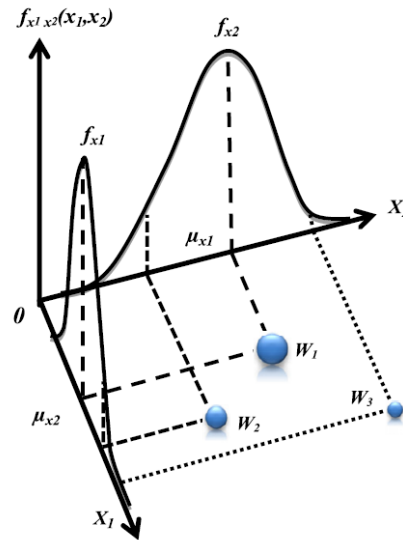
Índice de confiabilidade	Limite inferior	Limite superior
1.00	$F^{-1}(5 \cdot 10^{-3})$	$F^{-1}(1 - 5 \cdot 10^{-3})$
2.00	$F^{-1}(5 \cdot 10^{-5})$	$F^{-1}(1 - 5 \cdot 10^{-5})$
3.00	$F^{-1}(5 \cdot 10^{-7})$	$F^{-1}(1 - 5 \cdot 10^{-7})$
4.00	$F^{-1}(5 \cdot 10^{-9})$	$F^{-1}(1 - 5 \cdot 10^{-9})$
5.00	$F^{-1}(5 \cdot 10^{-12})$	$F^{-1}(1 - 5 \cdot 10^{-12})$
6.00	$F^{-1}(5 \cdot 10^{-16})$	$F^{-1}(1 - 5 \cdot 10^{-16})$
7.00	$F^{-1}(5 \cdot 10^{-19})$	$F^{-1}(1 - 5 \cdot 10^{-19})$
8.00	$F^{-1}(5 \cdot 10^{-24})$	$F^{-1}(1 - 5 \cdot 10^{-24})$

Fonte: Rashki, Miri e Moghaddam (2012)

O peso das amostras faz com que duas amostras na região de falha tenham efeitos distintos na estimativa da probabilidade de falha. Como apresentado na Figura 4.3, o peso de três amostras com duas variáveis aleatórias independentes depende da função densidade de probabilidades. A expressão (4.48) apresenta o cálculo do peso de amostras com S variáveis aleatórias independentes, na qual w_i é o peso da amostra i e $f_j(i)$ é a PDF da variável j . No caso de variáveis aleatórias dependentes, usa-se a função conjunta de densidades de probabilidades.

$$w_i = \prod_{j=1}^S f_j(i) \quad (4.48)$$

Figura 4.3: Peso das amostras no espaço de projeto



Fonte: Rashki, Miri e Moghaddam (2012)

O ponto pertencente a região de falha com maior peso amostral, ou valor maior que um peso específico, é caracterizado como o ponto ou região, caso em que há mais de um ponto, com maior potencial de falha.

A probabilidade de falha é dada pela razão da soma dos índices de peso das amostras localizadas na região de falha pelo somatório dos pesos de todas as amostras, como mostra a equação:

$$P_f = \frac{\sum_{i=1}^N I_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^N w_i} \quad (4.49)$$

onde I_i é a função indicadora da amostra i , a qual possui valor 1 ou 0 para amostras dentro ou fora da região de falha, respectivamente.

4.4.5 Simulação com Ponderação Média Ordenada

A simulação com ponderação média ordenada ou *Ranked Weighted Average Simulation* (RWAS) baseia-se no WASM, apresentado no item anterior, e foi apresentada por Okasha (2016). A alteração proposta por este gera um menor custo computacional para o cálculo da probabilidade de falha, comparado ao WASM, sem comprometimento da precisão do resultado final.

O RWAS consiste no ranqueamento (ordenado em ordem decrescente) dos pontos amostrados, x_i , de acordo com o peso de amostragem $w_i(\vec{d})$. Tal disposição reflete a contribuição de cada amostra na estimativa da probabilidade de falha, de modo que as aproximações incrementais são obtidas como:

$$p_{fk}(\vec{d}, \Omega_{ns}) = \frac{\sum_{i=1}^k I_f(\vec{d}, \vec{x}_{ri}) w_{ri}(\vec{d})}{\sum_{i=1}^{ns} w_i(\vec{d})} \quad (4.50)$$

A avaliação é cessada quando o critério de convergência é satisfeito, impedindo que a equação de estado limite seja avaliada mais do que as k vezes necessárias. Admitindo que todos os demais pontos pertençam ao domínio de falha, o resto é dado por:

$$r_k = \frac{\sum_{i=k+1}^k w_{ri}(\vec{d})}{\sum_{i=1}^{ns} w_i(\vec{d})} \quad (4.51)$$

Portanto, o limite superior para a probabilidade de falha pode ser obtido por:

$$\left(p_{fk}\right)_U = \frac{\sum_{i=1}^k I_f(\vec{d}, \vec{x}_{ri}) \cdot w_{ri}(\vec{d}) + \sum_{i=k+1}^k w_{ri}(\vec{d})}{\sum_{i=1}^{ns} w_i(\vec{d})} \quad (4.52)$$

O critério de convergência, que determina a ordem k para a aproximação da probabilidade de falha, é:

$$\left(p_{fk}\right)_U - p_{fk} \leq \varepsilon_{pf} \quad (4.53)$$

onde ε_{pf} é uma tolerância especificada pelo usuário.

Okasha (2016) ressalta que, para resolução de problemas RBDO com restrições, não é necessário saber o valor exato da p_f , apenas saber se a restrição foi violada ou não. Assim, se $1 - p_f$ é a confiabilidade alvo, temos:

$$\begin{aligned} \text{se } p_f > p_{fT} &\rightarrow \text{inviável} \\ \text{se } \left(p_f\right)_U \leq p_{fT} &\rightarrow \text{viável} \end{aligned} \quad (4.54)$$

5 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo aponta-se para o processo de implementação computacional dos métodos de otimização utilizados neste trabalho, bem como a sequência de execução do programa desenvolvido, resumida na Tabela 5.1. Visando a validação do código computacional são apresentados exemplos após a descrição de cada técnica implementada.

Tabela 5.1: Sequência das implementações do código computacional

Implementação	Descrição
Imperfeições nas barras reticuladas	Inserção de imperfeições nas barras, modeladas por elementos de pórtico, para avaliação da flambagem quando sujeitas a forças de compressão.
Otimização paramétrica	Algoritmo para a busca da melhor combinação das áreas transversais que suporte as ações atuantes e resulte no menor peso estrutural. Neste caso todas as barras presentes na malha inicial permanecem na solução final. A estrutura é avaliada quanto a tensão última e a instabilidade local e global.
Otimização paramétrica com incertezas	Acoplamento de método de simulação para a estimativa da probabilidade de falha estrutural proveniente das incertezas ao algoritmo de otimização paramétrica.
Otimização topológica	Algoritmo de busca da melhor topologia estrutural que suporte as ações atuantes e possua menor peso. Neste caso nem todas as barras presentes na malha inicial permanecem na solução final. A estrutura é avaliada quanto a tensão última e a instabilidade local e global.
Otimização topológica com incertezas	Acoplamento ao algoritmo de otimização topológica de método de simulação para a estimativa da probabilidade de falha estrutural proveniente das incertezas.
Otimização topológica considerando o colapso progressivo	Desenvolvimento de sub-rotina para avaliação da redistribuição dos esforços após a falha de um elemento estrutural. Acoplamento desta ao método de simulação para estimativa da probabilidade de falha do sistema e ao algoritmo de otimização topológica para realização da RBDO e RO.

Fonte: Autor

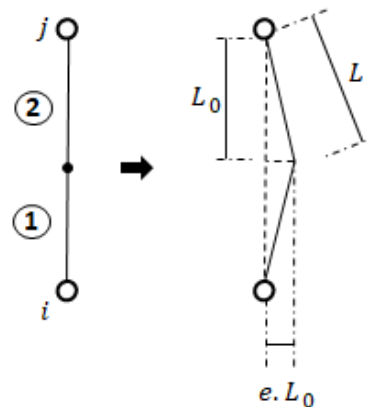
5.1 IMPERFEIÇÕES NAS BARRAS RETICULADAS

A imposição de imperfeições no centro das barras tem por finalidade a obtenção da instabilidade local das barras comprimidas sem o emprego da tensão última de Euler. Isto é possível por meio da modelagem não linear geométrica de barras de treliça por elementos de pórtico. Esta deve ser composta por no mínimo dois elementos de pórtico, como mostra a Figura 5.1. A excentricidade do centro da barra é definida por uma aproximação suave da função de Heaviside, também conhecida como função degrau:

$$e(e_0) = \frac{e_0}{1 + e^{k \cdot e_0}}; \quad e_0 = \frac{L - L_0}{L_0} \quad (5.1)$$

onde e_0 é a maior excentricidade necessária; e_0 é a deformação equivalente; L e L_0 são o comprimento final e inicial da barra; e k é um parâmetro de suavização da função, em seu artigo Madah e Amir (2019) utilizam $k = 10\,000$.

Figura 5.1: Exemplo de imperfeição imposto nas barras da treliça



Fonte: Autor

Dessa forma, a imperfeição é nula quando ocorre alongamento da barra, sendo assim sujeita apenas a esforços normais. Já nas barras com encurtamento a imperfeição equivale a e_0 , ocasionando esforços de flexão nas barras comprimidas.

O programa desenvolvido permite que o usuário informe o grau de aproximação do elemento de pórtico, gerando automaticamente nós internos ao elemento. É fundamental que seja aplicada uma imperfeição proporcional nestes nós. A posição final dos nós após a imposição da imperfeição é:

$$x_k^1 = x_k^1 + \frac{(x_j^1 - x_i^1)}{2 \cdot o} \cdot (n-1) - e_c \cdot \frac{(x_j^2 - x_i^2)}{2 \cdot o}$$

$$x_k^2 = x_k^1 + \frac{(x_j^2 - x_i^2)}{2 \cdot o} \cdot (n-1) + e_c \cdot \frac{(x_j^1 - x_i^1)}{2 \cdot o}$$

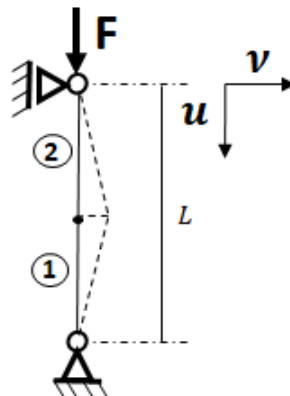
onde i e j representam o nó inicial e final da barra respectivamente, k o nó global, n o nó local e o a ordem de aproximação. A excentricidade e_c varia com o elemento da barra analisado, sendo $e_c = (n-1) \cdot e_o$ para os nós pertencentes ao elemento 1 e $e_c = (o-n+1) \cdot e_o$ para o elemento 2.

Internamente a imperfeição é calculada dentro do Newton-Raphson. Inicialmente as imperfeições são nulas, já que a posição deslocada é igual a indeslocada. Todavia, após a primeira correção da posição final, \bar{y} , calcula-se as imperfeições que são atualizadas a cada nova correção.

5.1.1 Exemplo: Verificação da perda de estabilidade de barras comprimidas

Para validação da imposição da imperfeição em barras comprimidas e da verificação da estabilidade estrutural, analisou-se 12 configurações de pilares com índice de esbeltez entre 35 e 200. Estes são biapoiados submetidos apenas a uma força compressiva. A discretização é feita por dois elementos finitos de pórtico com função de aproximação cúbica. Para a verificação da flambagem é aplicada uma imperfeição de 0.01% no centro da barra, conforme a Figura 5.2. O módulo de elasticidade de todas as configurações foi de $\mathbb{E} = 1.0 \times 10^6 \text{ Pa}$.

Figura 5.2: Barra biapoiada submetida a compressão



Fonte: Autor

A seção transversal é quadrada. A largura e o comprimento de cada barra variam como mostrado na Tabela 5.2, a qual compara os valores da carga crítica estimados pela equação de Euler e os obtidos no programa, mostrando a equivalência entre eles.

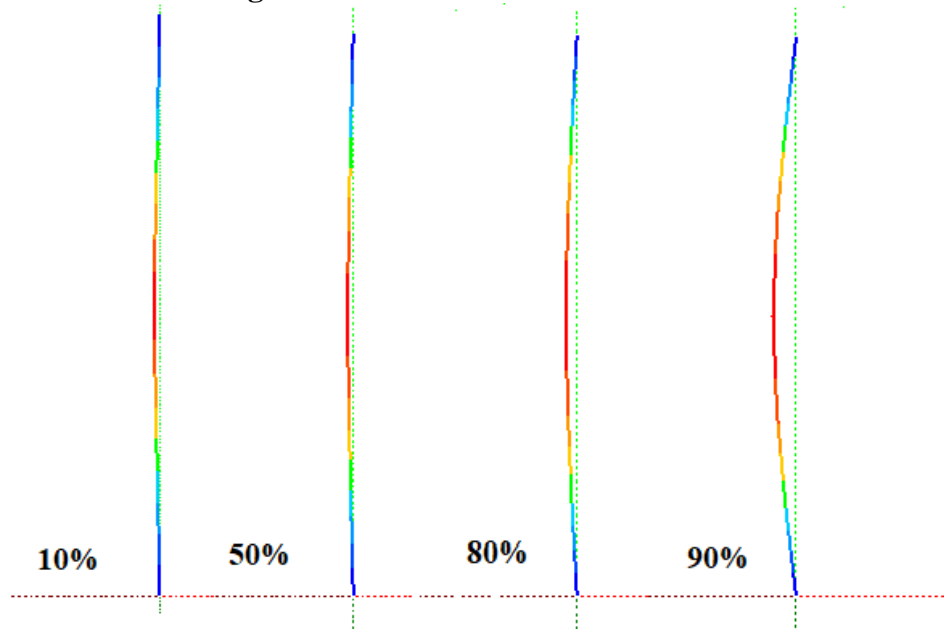
A Figura 5.3 apresenta o crescimento dos deslocamentos transversais no pilar ao longo do carregamento. Para melhor visualização os deslocamentos foram amplificados em 10 vezes.

Tabela 5.2: Força crítica para barras comprimidas

λ	d (cm)	L (m)	PCRÍTICA		ERRO
			EULER (N)	PROGRAMA (N)	
35	25	2.50	514.04	505.45	-1.7%
42	25	3.00	356.97	353.40	-1.0%
55	25	4.00	200.80	200.26	-0.3%
69	25	5.00	128.51	128.50	0.0%
74	28	6.00	140.43	140.43	0.0%
83	25	6.00	89.24	89.26	0.0%
94	22	6.00	53.52	53.51	0.0%
104	20	6.00	36.55	36.54	0.0%
115	18	6.00	23.98	24.09	0.5%
139	15	6.00	11.57	11.63	0.5%
160	13	6.00	6.53	6.56	0.5%
200	10	6.00	2.28	2.30	0.9%

Fonte: Autor

Figura 5.3: Histórico de deslocamentos

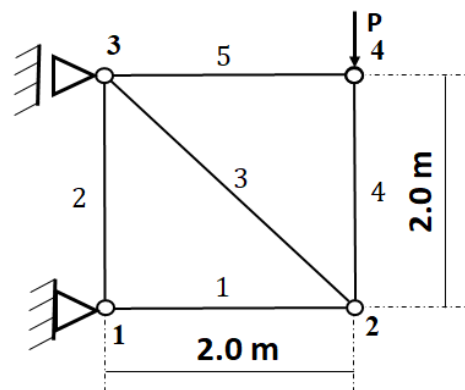


Fonte: Autor

5.1.2 Exemplo: Análise de uma estrutura reticulada

Este exemplo é realizado para a avaliação do comportamento de uma estrutura reticulada cujas barras estão no limite da instabilidade. As barras da estrutura apresentada na Figura 5.4 são modeladas por dois elementos de pórtico com função de aproximação cúbica. A imperfeição aplicada no centro das barras comprimidas foi de 0.01%. O módulo de elasticidade do material é de $E = 1.0 \times 10^6 Pa$. A seção transversal das barras é quadrada de lado igual a 15cm.

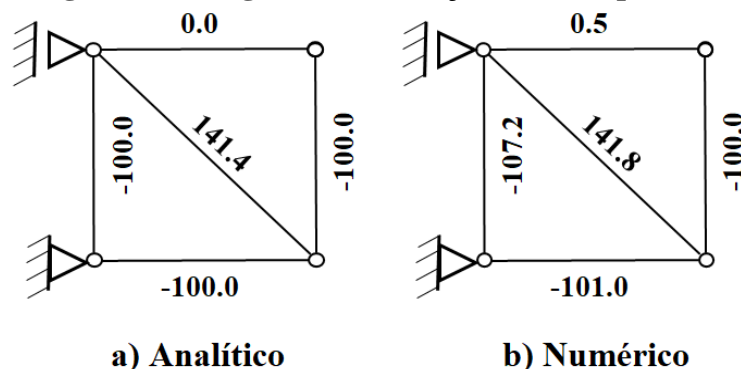
Figura 5.4: Estrutura reticulada de 5 barras



Fonte: Autor

As barras verticais e horizontais estão suscetíveis a instabilidade local quando a força aplicada no nó 4 é negativa. A Figura 5.5 apresenta os diagramas de esforços normais para uma treliça e para a estrutura reticulada analisada, submetidas a uma força $P = -100N$. Sendo este o máximo carregamento suportado pela estrutura, já que a barra 2 perde estabilidade para qualquer acréscimo do carregamento. A força crítica definida pela fórmula de Euler equivale a 104.1N.

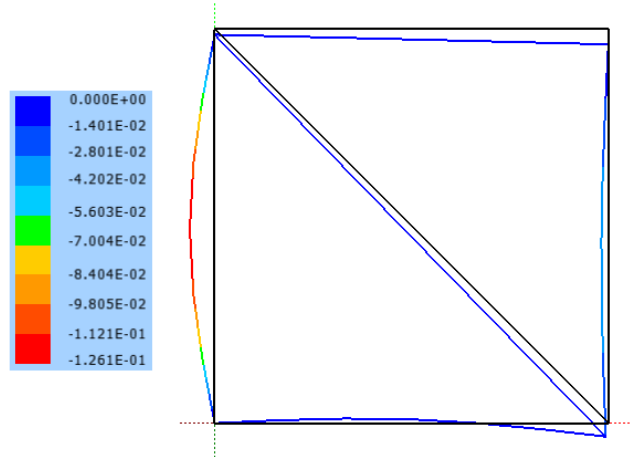
Figura 5.5: Diagrama de esforços normais para $P < 0$



Fonte: Autor

Na Figura 5.6 é possível verificar os deslocamentos da estrutura. Novamente amplificou-se estes para melhor visualização.

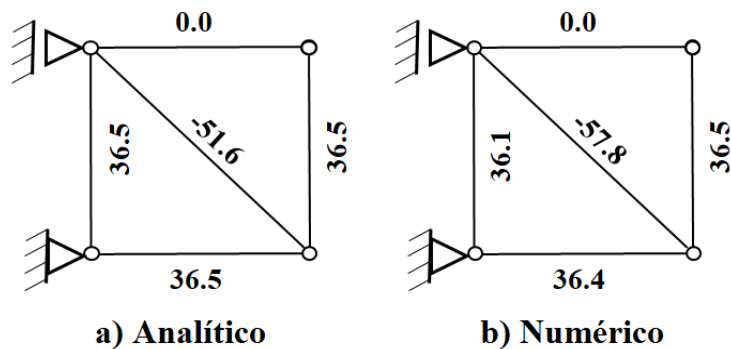
Figura 5.6: Deslocamento horizontal da treliça para $P < 0$



Fonte: Autor

Para o caso de uma carga $P > 0$ a barra diagonal passa a ser comprimida, estando passível a flambagem. Neste caso a força crítica reduz para 52.05 N em consequência do maior comprimento da barra comprimida. As distribuições dos esforços normais obtidos analiticamente para uma treliça e numericamente para a estrutura reticulada são mostradas na Figura 5.7. O carregamento aplicado é de $P = 36.5\text{ N}$. A deformada é apresentada na Figura 5.8.

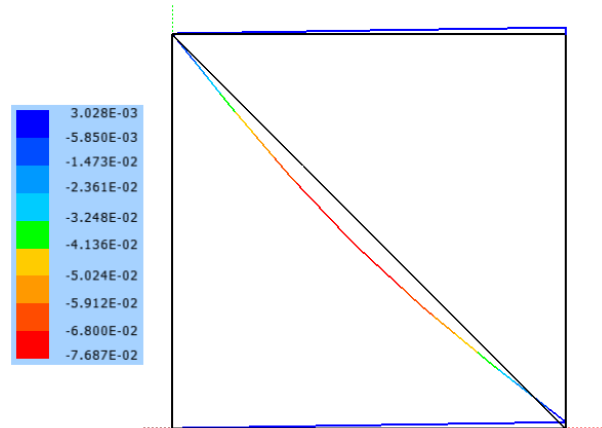
Figura 5.7: Diagrama de esforços normais para $P > 0$



Fonte: Autor

Diante dos resultados apresentados verifica-se a eficiência da modelagem de treliças sujeitas a flambagem por estruturas reticuladas. As pequenas variações das forças normais das barras devem-se aos efeitos da não linearidade geométrica.

Figura 5.8: Deslocamento horizontal da treliça para $P > 0$



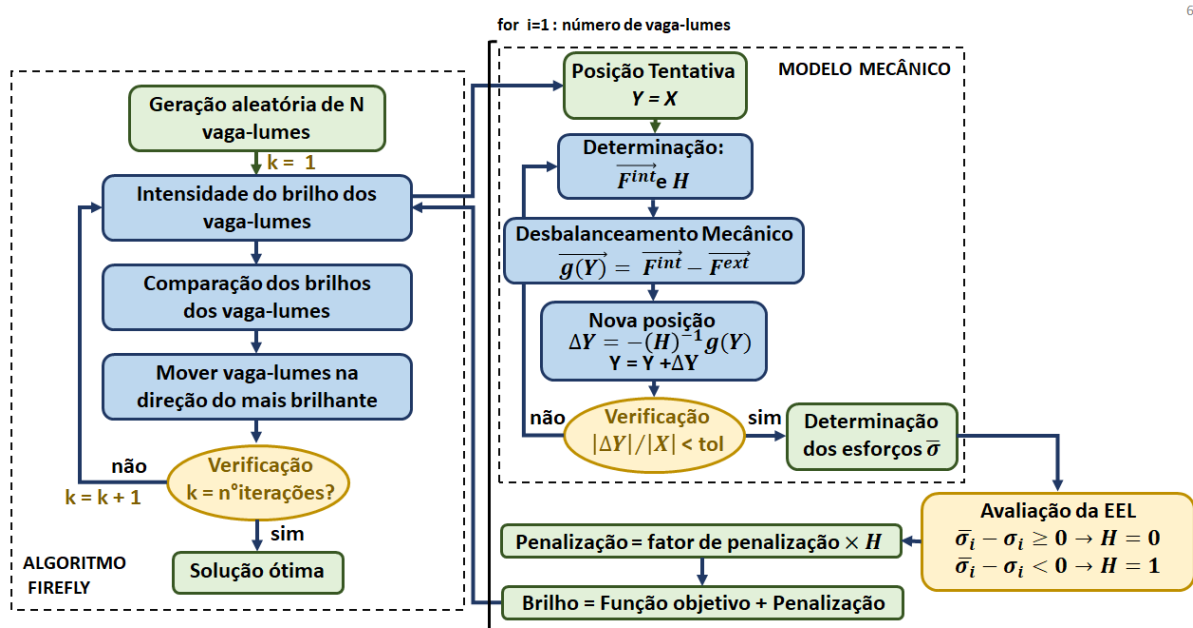
Fonte: Autor

5.2 OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA

Na otimização paramétrica as variáveis de projeto, áreas transversais das barras, são limitadas inferiormente por um valor diferente de zero, de forma que a topologia da treliça não seja modificada. Sendo necessário o acoplamento de um método de otimização com um método de análise estrutural. Nesta pesquisa usou-se o algoritmo *Firefly* com o MEF-Posicional, ambos já detalhados nos capítulos 3 e 4.

O fluxograma da rotina do *Firefly* acoplado ao MEF-Posicional é apresentado na Figura 5.9. Este é o mesmo para qualquer tipo de elemento analisado: treliça ou pórtico.

Figura 5.9: Fluxograma para otimização paramétrica



Fonte: Autor

5.2.1 Exemplo: Otimização paramétrica determinística de treliça de 18 barras

O primeiro exemplo tem por finalidade a validação do algoritmo *Firefly* na otimização determinística paramétrica de uma treliça com 18 barras. Este exemplo foi resolvido anteriormente por: Imai e Schmit (1991) que utilizaram o Método dos Multiplicadores de Lagrange; Lee e Greem (2004) os quais aplicaram o algoritmo *Harmony Search*; e por último, Sonmez (2011) que empregou o algoritmo *Bee Colony*.

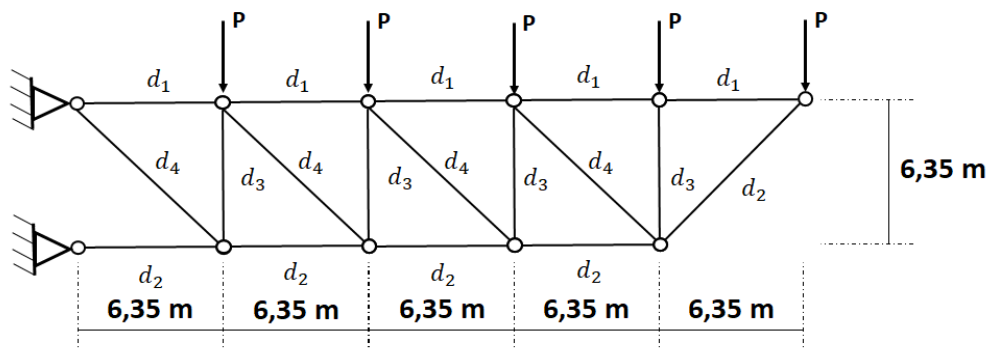
A geometria e as condições de carregamento são apresentadas na Figura 5.10. A treliça é engastada na extremidade esquerda e recebe uma carga concentrada de $89,0\text{ kN}$ em todos os nós do banzo superior. O material de todas as barras possui módulo de elasticidade de $68.947,6\text{ MPa}$ e densidade de $\rho = 2.768,0\text{ kg/m}^3$.

As áreas transversais são divididas em 4 grupos distintos, os quais são as variáveis de projeto d_1 , d_2 , d_3 e d_4 . A área transversal mínima das barras é de $0,645\text{ cm}^2$ e a máxima de $322,58\text{ cm}^2$. As restrições do problema de otimização são: a tensão última do material que é igual a $137,9\text{ MPa}$; e a flambagem das barras comprimidas dada pela fórmula de Euler. A tensão limite de flambagem de cada barra, i , é dada por:

$$\sigma_i = \frac{K.E.A_i}{L_i^2} \quad i = 1, 2, \dots, nb \quad (5.2)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material, A_i a área transversal, L_i o comprimento da barra e K é uma constante proveniente da geometria da seção transversal. Neste exemplo a constante K possui valor igual a 4, o mesmo utilizado nas referências já mencionadas.

Figura 5.10: Treliça de 18 barras e 4 áreas de projeto



Fonte: Autor

Primeiramente, utilizou-se elementos finitos de barra na análise mecânica para a validação do algoritmo *Firefly*. A influência dos parâmetros de entrada (número de vaga-lumes

e número de iterações) na convergência foi estudada. Para tal, adotou-se 2 combinações distintas de números de vaga-lumes e iterações para cada número de verificações totais das equações de estado limites (EEL). As médias dos resultados de 10 convergências são apresentados na Tabela 5.3. Esta mostra que a dispersão das configurações ótimas diminui com o aumento do número de verificações das EEL. Quando este é igual as combinações com menor número de vaga-lumes e maior número de iterações obtêm-se os melhores resultados. Provando assim que o número de iterações é mais significativo que o número de vaga-lumes na convergência dos resultados.

Tabela 5.3: Estatísticas da convergência para parâmetros de entrada distintos

Verificações das EEL	40000	40000	20000	20000
Vaga-Lumes	40	20	40	20
Iterações	1000	2000	500	1000
d1	64,516	64,522	64,522	64,600
d2	139,684	139,684	139,684	139,684
d3	80,651	80,651	80,651	80,664
d4	45,626	45,619	45,626	45,626
Peso Médio	2.917,001	2.916,977	2.917,011	2.917,817
Desvio Padrão	0,039	0,024	0,075	1,342

Fonte: Autor

A Tabela 5.4 compara as configurações ótimas das referências com o melhor resultado encontrado, obtido por 20 vaga-lumes e 2000 iterações. O peso final apresenta um erro de 0.14% quando comparado ao resultado de Lee e Greem (2004) e apenas 0.01% em comparação ao de Imai e Schimit (1991) e Soumeiz (2011).

Tabela 5.4: Comparação da solução ótima encontrada com as da referência

A	Imai e Schimit	Lee e Greem	Soumeiz	Firefly
(cm ²)	(1991)	(2004)	(2011)	
d1	64,503	64,503	64,516	64,522
d2	139,677	139,548	139,684	139,684
d3	80,645	80,580	80,645	80,651
d4	45,626	45,529	45,619	45,619
Peso				
(kg)	2.916,597	2.912,913	2.916,837	2.916,977

Fonte: Autor

Uma vez validado o algoritmo *Firefly*, valida-se a técnica proposta para verificação da instabilidade estrutural, substituindo a restrição de flambagem. O elemento finito de pórtico

implementado nesta proposta possui seção quadrada, que equivale a uma constante $K = 0,8225$. Desse modo, o problema é otimizado duas vezes: na primeira a modelagem usa elementos de barra e a restrição de flambagem, definida pela equação (5.2); na segunda a treliça é modelada como uma estrutura reticulada por meio de elementos de pórtico, a perda de instabilidade é verificada através da matriz Hessiana. As configurações ótimas são apresentadas na Tabela 5.5.

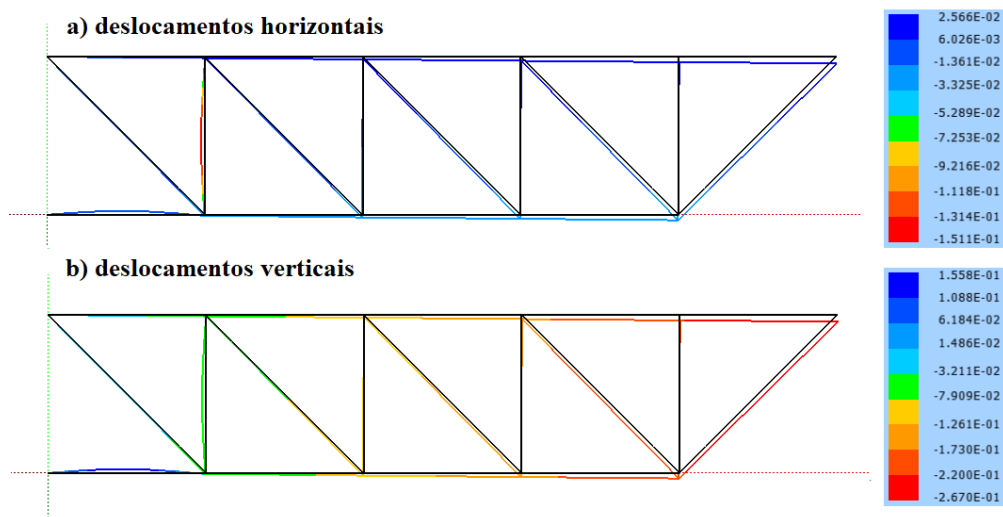
Tabela 5.5: Comparação da solução ótima: seção transversal quadrada

A (cm ²)	E.f. de barra + Euler	E.f. de pórtico
d1	64,522	64,735
d2	308,038	314,374
d3	177,909	184,109
d4	45,626	45,664
Peso (kg)	5.202,963	5.309,033

Fonte: Autor

A Figura 5.11 apresenta os deslocamentos presentes na solução ótima obtida.

Figura 5.11: Deslocada da solução ótima



Fonte: Autor

5.3 OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA BASEADA EM CONFIABILIDADE

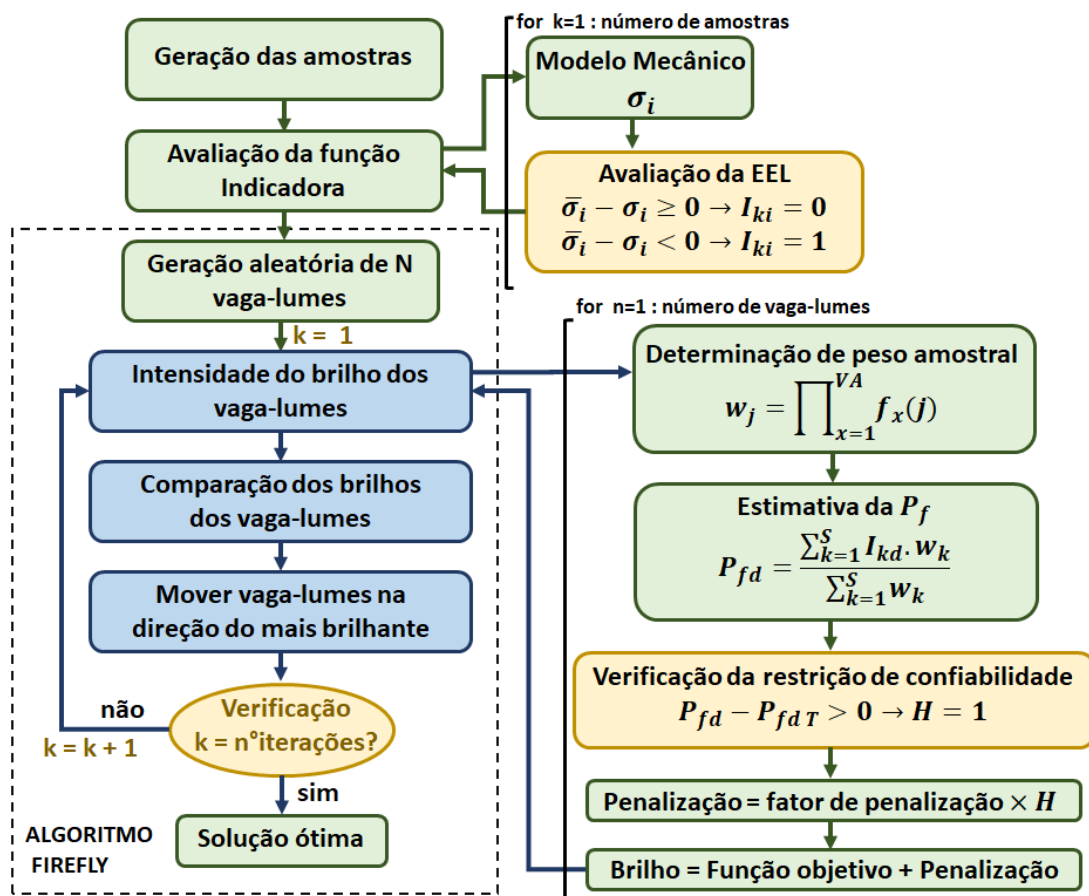
Como já tratado, a otimização baseada em confiabilidade (RBDO) comuta as diversas restrições mecânicas por restrições de confiabilidade. Esta pode ser única, quando se limita a

probabilidade de falha do sistema, ou, mais de uma, quando busca-se definir uma probabilidade limite específica para cada modo de falha e/ou membro estrutural.

Por conseguinte, necessita-se calcular a probabilidade de falha para cada conjunto de variáveis de projeto avaliado, podendo esta ser determinada por métodos de transformação ou simulação, descritos no capítulo 4. Este trabalho utilizou o algoritmo WASM para determinação das probabilidades de falha necessárias na restrição RBDO da otimização paramétrica.

O WASM requer a geração de uma única amostragem para todo o espaço das variáveis aleatórias. A grande vantagem do uso desse método ocorre quando as variáveis de projeto também são variáveis aleatórias. Isso porque o custo computacional é reduzido ao avaliar a função indicadora de cada amostra antes do início da otimização. Durante a busca pelo \vec{d}_k^* ótimo calcula-se apenas o peso amostral com relação a nova média analisada que é \vec{d}_k . Tudo isto pode ser observado no fluxograma da Figura 5.12 que mostra o acoplamento do algoritmo *Firefly* com o WASM.

Figura 5.12: Fluxograma RBDO com incertezas nas variáveis de projeto



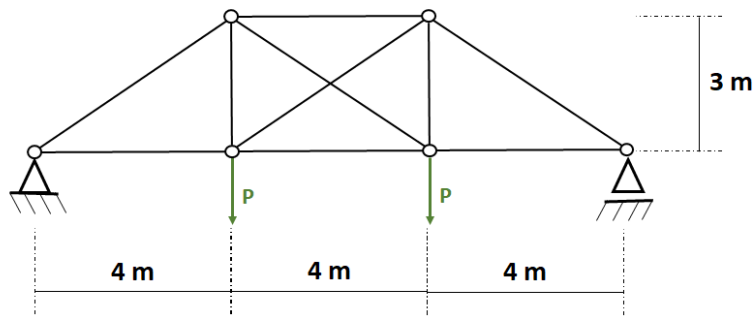
Fonte: Autor

5.3.1 Exemplo: Avaliação da confiabilidade estrutural de uma treliça

Neste exemplo apresenta-se uma análise de confiabilidade da treliça apresentada na Figura 5.13. Com isto busca-se a validação do algoritmo WASM na estimativa da probabilidade de falha. Esta estrutura foi analisada anteriormente por Lie e Zhang (2013), o qual estimou a probabilidade de falha através de simulação de Monte Carlo, do método de superfície de resposta (RSM), do método de superfície de resposta com Monte Carlo (RSM-MC) e do método de superfície de resposta com amostragem por importância (RSM-ISM).

A estrutura é constituída por 10 barras de mesma seção transversal, cuja área transversal é de $A = 25\text{cm}$. O material apresenta comportamento elástico com módulo de elasticidade $E = 200\text{GPa}$. As forças verticais são aplicadas nos nós inferiores centrais e possuem valor de $P = 200\text{kN}$.

Figura 5.13: Treliça de 6 nós e 10 barras



Fonte: Autor

As variáveis aleatórias do problema são o carregamento, P , e a área transversal, A . Os parâmetros estatísticos dessas variáveis são apresentados na Tabela 5.6.

Tabela 5.6: Parâmetros estatísticos das V.A.

V.A.	Média	CV	Distribuição
A	1.00	0.10	Lognormal
P	1.00	0.25	Gumbel

Fonte: Autor

Os critérios de falha avaliados são deslocamentos nodais, não superiores a 3cm , e a tensão de escoamento do material, $\bar{\sigma} = 210\text{MPa}$. Sendo as equações de estado limites:

$$g_j^1(\bar{x}) = 0.03 - \delta_j(\bar{x}) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.3)$$

$$g_i^2(\bar{x}) = 210 - \sigma_i(\bar{x}) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.4)$$

onde δ_j é o deslocamento vertical do nó j e σ_i é a tensão atuante na barra i .

Os resultados obtidos neste trabalho são relativamente próximos aos da referência, como mostrado nas Tabelas 5.7 e 5.8. O algoritmo WASM apresentou, para ambos os critérios de falha, os melhores resultados quando comparado a resposta “exata” (Monte Carlo).

Tabela 5.7: Confiabilidade Estrutural em relação ao critério de deslocamentos

Método de Confiabilidade	P_f (%)	β
Monte Carlo	0.064	3.2204
RSM	0.070	3.1946
RSM-MC	0.072	3.1865
RSM-IMS	0.073	3.1817
WASM	0.067	3.2066

Fonte: Autor

Tabela 5.8: Confiabilidade Estrutural em relação ao critério de tensão

Método de Confiabilidade	P_f (%)	β
Monte Carlo	0.0391	1.7608
RSM	0.0381	1.7729
RSM-MC	0.0408	1.7419
RSM-ISM	0.0400	1.7508
WASM	0.0387	1.7660

Fonte: Autor

É importante ressaltar que o número de amostras foi de 10000 e que a análise estrutural foi realizada por MEF com elementos de barra. Estendendo este exemplo para o problema de instabilidade proposto neste trabalho, avaliou-se a confiabilidade estrutural da treliça em relação ao critério de falha por flambagem, determinado pela equação:

$$g_i^3(\vec{x}) = \frac{K.E.A}{L_i^2} - \sigma_i(\vec{x}) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.5)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material, A é a área transversal igual para todas as barras e tem média igual a 94 cm^2 , L_i o comprimento da barra i e $K = 0.8225$ é a constante para uma seção transversal quadrada.

As probabilidades de falha encontradas a partir da equação (5.5) e da verificação da estabilidade da estrutura reticulada são similares, Tabela 5.9. Mostrando, assim, a equivalência das duas abordagens em relação ao critério de falha por instabilidade local.

Tabela 5.9: Confiabilidade Estrutural em relação a flambagem das barras

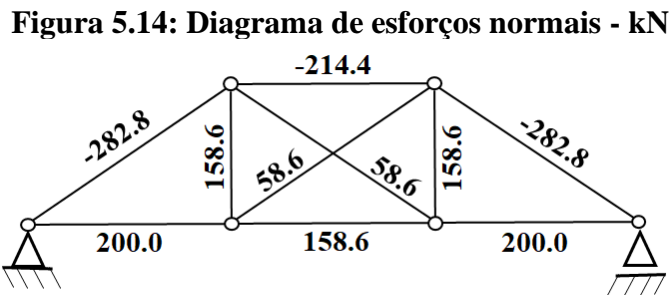
Abordagem	P_f	β
Treliça + g^3	1.412	2.1872
Estrutura reticulada	1.327	2.2182

Fonte: Autor

5.3.2 Exemplo: Otimização paramétrica de treliça com restrição de confiabilidade

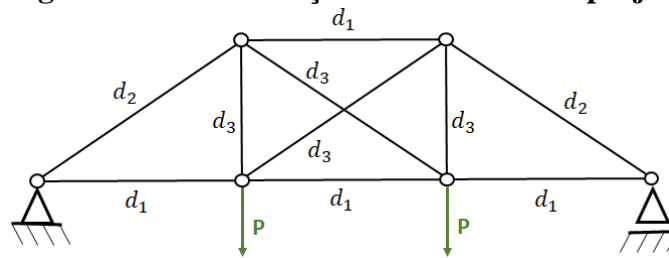
Este segundo exemplo, busca a validação do algoritmo WASM dentro da otimização estrutural. Para isso, a estrutura reticulada do exemplo anterior é otimizada para uma confiabilidade limite de $\beta = 2.5$. O número de amostras para a estimativa da probabilidade de falha foi de 10000.

Para 50 vaga-lumes e um total de 1500 iterações, encontrou-se uma área transversal mínima de 95 cm^2 que resulta em um volume de $V = 0.399\text{ m}^3$. Esta área é limitada pela probabilidade de falha por instabilidade das diagonais externas, como mostra o diagrama de esforços normais na Figura 5.14.



Fonte: Autor

Buscando uma diminuição do volume total, divide-se as áreas das barras em três variáveis de projeto (d_1 , d_2 e d_3) como mostra a Figura 5.15. O novo volume obtido é 48% menor que o anterior, Tabela 5.10. Tal diminuição é coerente, uma vez que, as barras do grupo d_1 e d_3 possuem carregamentos muito inferiores aos das diagonais.

Figura 5.15: Distribuição das variáveis de projeto

Fonte: Autor

A área transversal das barras diagonais permaneceu 95 cm^2 , comprovando que a instabilidade dessas barras limitou a primeira otimização. A segunda maior área encontrada é a das barras horizontais, as quais estão sujeitas a flambagem, barra superior, e as máximas tensões de tração, barras inferiores. Por último estão as áreas das barras centrais limitadas apenas pela tensão de escoamento do material.

Os resultados encontrados comprovam a eficiência e a correta implementação do acoplamento do algoritmo *Firefly* com o método WASM para a otimização RBDO de estruturas reticuladas sujeitas a instabilidades locais.

Tabela 5.10: Áreas transversais ótimas

Vaga-Lumes	50	
Iterações	1500	
d1	0.0060	m ²
d2	0.0095	m ²
d3	0.0011	m ²
Volume	0.2076	m ³

Fonte: Autor

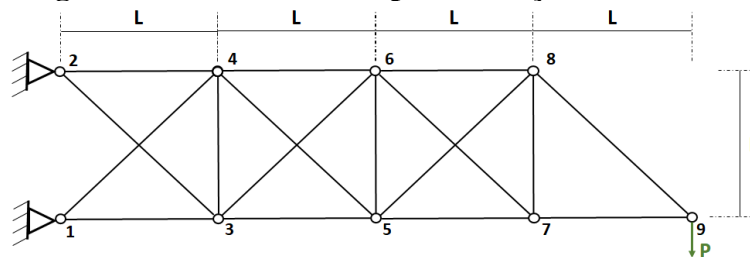
5.4 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Na otimização topológica de treliças as áreas transversais das barras são reduzidas até valores muito próximos de zero, ε , de modo que nem todas as barras da malha inicial precisem pertencer a solução final. O emprego de áreas transversais pequenas, mas não nulas, chama-se relaxação, uma técnica muito difundida na literatura. Esta metodologia é uma estratégia para evitar a singularidade da matriz de rigidez, causada por áreas nulas, assim como a obtenção de estruturas ótimas singulares por métodos baseados em gradiente. Mais detalhes sobre esta técnica podem ser encontrados em Kirsch (1990), Cheng e Guo (1997) e Stolpe e Svanberg (2001).

Todavia, a presença de uma área mínima nas barras traz problemas quando considerada restrições de flambagem na otimização. Isto porque por menor que possa parecer a rigidez dessas áreas, estas estabilizam nós que não existirão na estrutura final, o que significa uma alteração no comprimento das barras finais levando a uma alteração, não avaliada, na resistência a flambagem. Tal dificuldade é descrita em Zhou (1996).

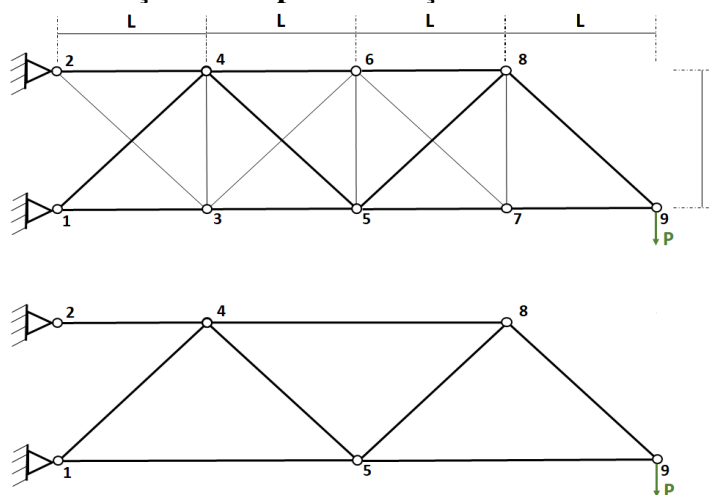
Para melhor entendimento vamos a um exemplo: a Figura 5.16 apresenta uma treliça muito conhecida na literatura. Esta foi solucionada por Lee e Greem (2004) e Hadidi et al. (2010) usando uma área mínima, ε , e restrições de tensão e deslocamento. A estrutura ótima apresenta todas as barras responsáveis pelo travamento vertical dos nós 3, 6 e 7 com valor mínimo, Figura 5.17, levando a substituição das barras horizontais destes nós por barras de comprimento $2L$ na estrutura final. Isto não altera o problema proposto, uma vez que, a tensão de escoamento não depende do comprimento da barra. Todavia, o mesmo não aconteceria se fosse adicionado ao problema restrições de flambagem.

Figura 5.16: Malha inicial para Treliça de 17 barras



Fonte: Autor

Figura 5.17: Solução ótima para restrição de tensão + deslocamento



Fonte: Autor

Diante disso, tendo em vista que este trabalho aplica métodos heurísticos de otimização e restrições de instabilidade de barras, evitou-se tal situação permitindo que as áreas transversais

dos elementos não pertencentes a treliça sejam nulas. A singularidade da matriz de rigidez é resolvida por meio do travamento dos nós soltos, nós que recebem apenas barras de área nula. Em seguida avalia-se a estabilidade global da estrutura, caso esta seja positiva, analisa-se as restrições de tensão e deslocamento.

A sequência de passos para verificação da estabilidade estrutural implementada baseia-se na apresentada por Deb e Gulati (2001): reconhecimento dos nós não pertencentes à topologia examinada e averiguação de que estes não são carregados; avaliação do critério de Grubler; e conferência da matriz de rigidez.

O critério de Grubler não é fundamental para o funcionamento do algoritmo, entretanto, sua verificação diminui o custo computacional exigido pela verificação da positividade da matriz de rigidez. Este critério é conhecido como a determinação da hiperestaticidade da treliça, determinada pela equação (5.6) para treliças planas, sendo m o número de barras, n_r o número de restrições e n o número de nós.

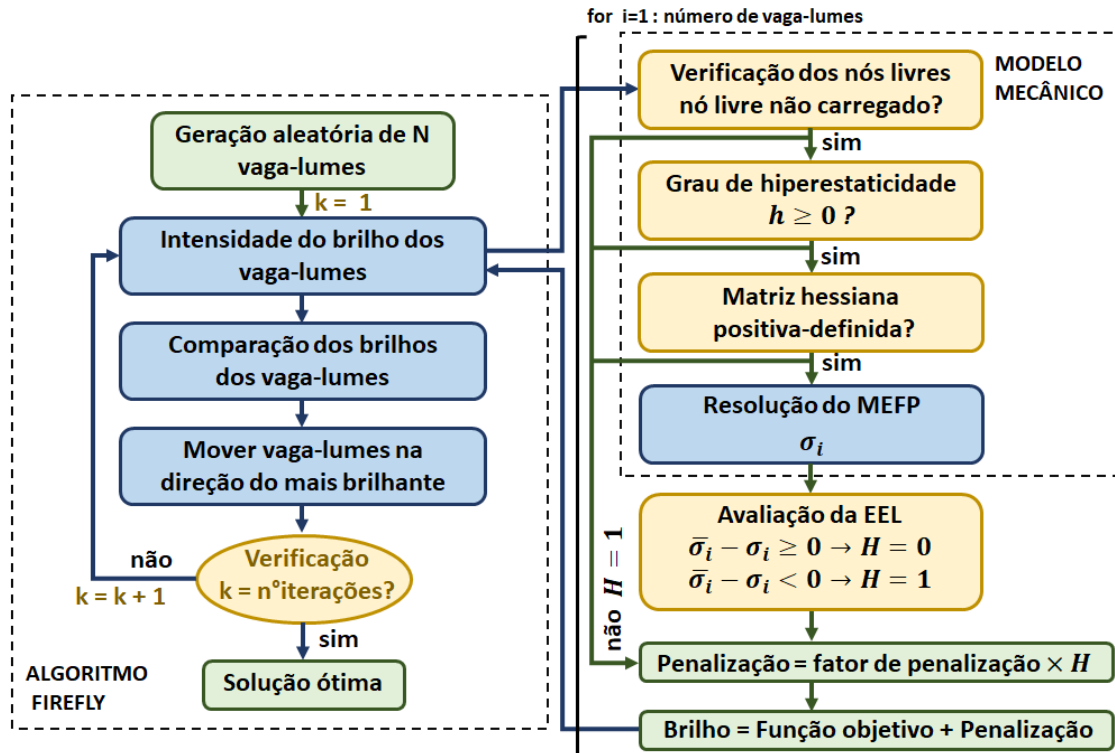
$$h = m + n_r - 2n \quad (5.6)$$

A avaliação da estabilidade pela matriz de rigidez se dá apenas para as topologias com $h \geq 0$. Neste cenário analisa-se os autovalores da matriz. Na constatação de autovalor negativo ou nulo interrompe-se a avaliação mecânica e prescreve-se uma penalização. Caso contrário, a matriz é positiva definida; portanto, se dá sequência a análise mecânica para determinação das tensões e deslocamentos.

Outra questão importante na otimização topológica por métodos heurísticos é a escolha dos limites, inferior e superior, das áreas transversais. Esses devem ser selecionados de modo que haja uma probabilidade adequada de retirar um membro da solução. Logo, o emprego de $A_{\min} = -A_{\max}$ juntamente com uma A_{crit} pequena gera uma probabilidade próxima dos 50% de qualquer elemento estar ou não presente na treliça. A A_{crit} é a menor área admissível para os elementos, barras de área transversal menor que A_{crit} tem sua área zerada pelo algoritmo.

O fluxograma da otimização topológica determinística é apresentado na Figura 5.18.

Figura 5.18: Fluxograma para otimização topológica

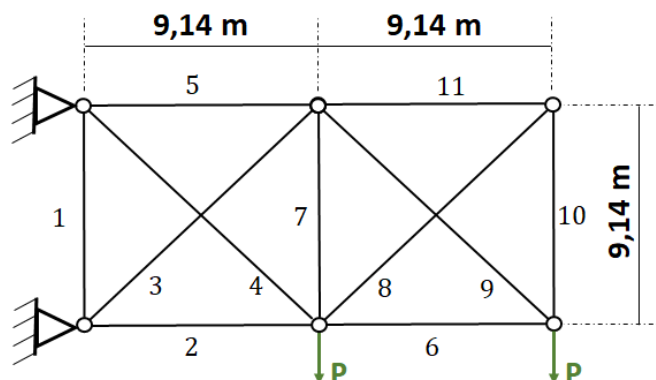


Fonte: Autor

5.4.1 Exemplo: Otimização topológica determinística de treliça com 11 barras

O primeiro problema é abordado por diversos trabalhos de otimização topológica. A geometria da treliça é mostrada na Figura 5.19. O material das barras possui módulo de elasticidade de $E = 6.894,6 \text{ MPa}$, densidade de $\rho = 2.768,0 \text{ kg/m}^3$ e tensão de ruptura, $\bar{\sigma} = 172,4 \text{ MPa}$, tanto para tração como em compressão. O deslocamento nodal limite equivale a $\bar{\delta} = 5,08 \text{ cm}$. E a força atuante é de $P = 444,8 \text{ kN}$.

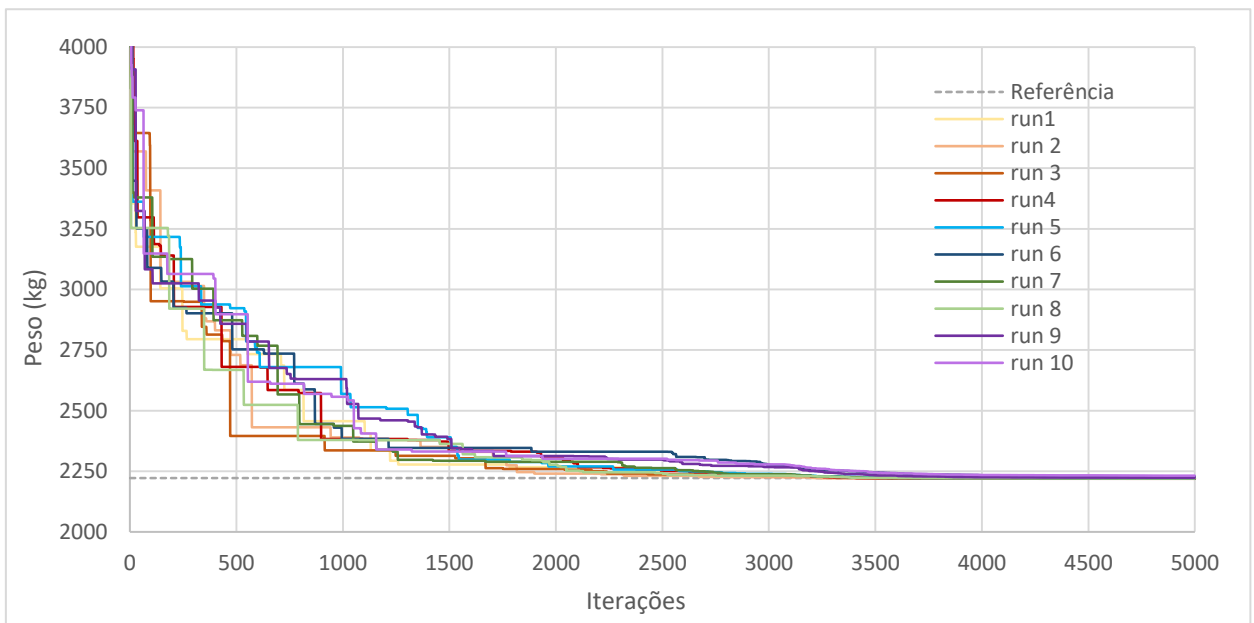
Figura 5.19: Treliça de 6 nós e 11 barras



Fonte: Autor

Para resolução do problema utilizou-se 50 vaga-lumes, 5000 iterações e limites laterais de $-225,8 \leq A \leq 225,8 \text{ cm}^2$. A área crítica, a partir da qual considerou-se a barra eliminada da topologia, foi de $A_{\text{crítica}} = 0,581 \text{ cm}^2$. Executou-se um total de 10 replicações da otimização para verificação da convergência. O Gráfico 5.1 apresenta o caminho de otimização obtido nas 10 simulações.

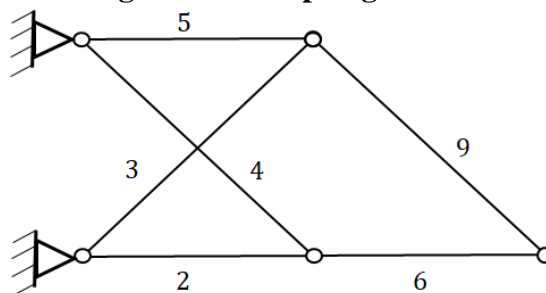
Gráfico 5.1: Convergência das otimizações – Treliça de 11 barras



Fonte: Autor

A topologia encontrada nas 10 replicações é apresentada na Figura 5.20. Os valores médios são comparados com a melhor solução conhecida até o momento, obtida pela aplicação de algoritmos genéticos por Deb e Gulati (2001) na Tabela 5.11. O menor peso encontrado foi 0.14% inferior ao da referência. O coeficiente de variação das 10 simulações foi de 0.19%.

Figura 5.20: Topologia ótima



Fonte: Autor

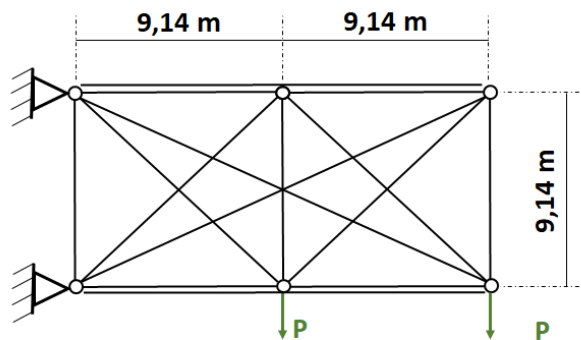
Tabela 5.11: Configuração ótima para treliça de 6 nós e 11 barras

Barra	Área transversal cm ²	
	Proposta	Deb e Gulati (2001)
2	144,64	142,39
3	136,65	138,32
4	39,47	39,29
5	191,29	191,48
6	99,87	98,71
9	136,59	137,36
Peso kg	2.222,37	2.222,22

Fonte: Autor

5.4.2 Exemplo: Otimização topológica determinística de treliça com 15 barras

Neste exemplo analisa-se o mesmo problema do exemplo anterior com uma malha inicial composta por $\binom{6}{2} = 15$ barras, a maior possível para este caso. Esta é apresentada na Figura 5.21. As propriedades do material, carregamento e restrições permanecem os mesmos do problema anterior.

Figura 5.21: Treliça com 6 nós e 15 elementos

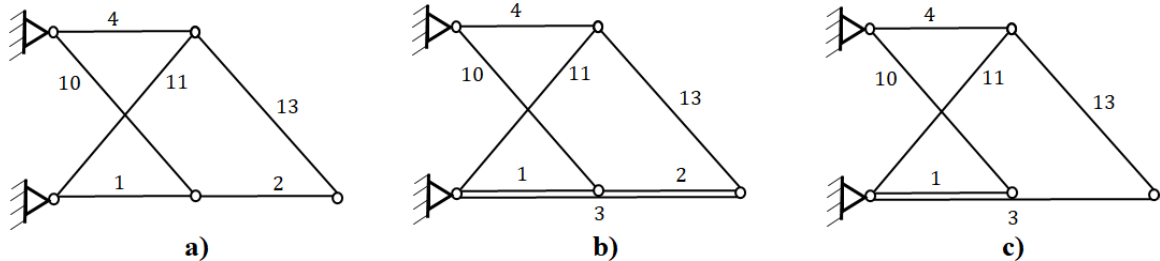
Fonte: Autor

Ao todo realizou-se 40 repetições da otimização, cada 10 com números de vaga-lumes distintos. Para os 4 diferentes números de vaga-lumes adotados obteve-se 3 topologias distintas, apresentadas na Figura 5.22. Isto é possível devido existência de barras concorrentes na malha, fazendo com que este problema não tenha uma solução única.

Embora a topologia apresentada na Figura 5.22 (c) apresentar o menor peso encontrado, a máxima diferença de peso encontrada é de 3,7%, mostrando a equivalência das topologias. Esse tipo de paridade pode não ser possível quando se adicionar restrições de instabilidade ao

problema, uma vez que, no caso de as barras concorrentes estarem submetidas a forças de compressão, as de menor comprimento tenderão a ter maior resistência.

Figura 5.22: Topologias ótimas



Fonte: Autor

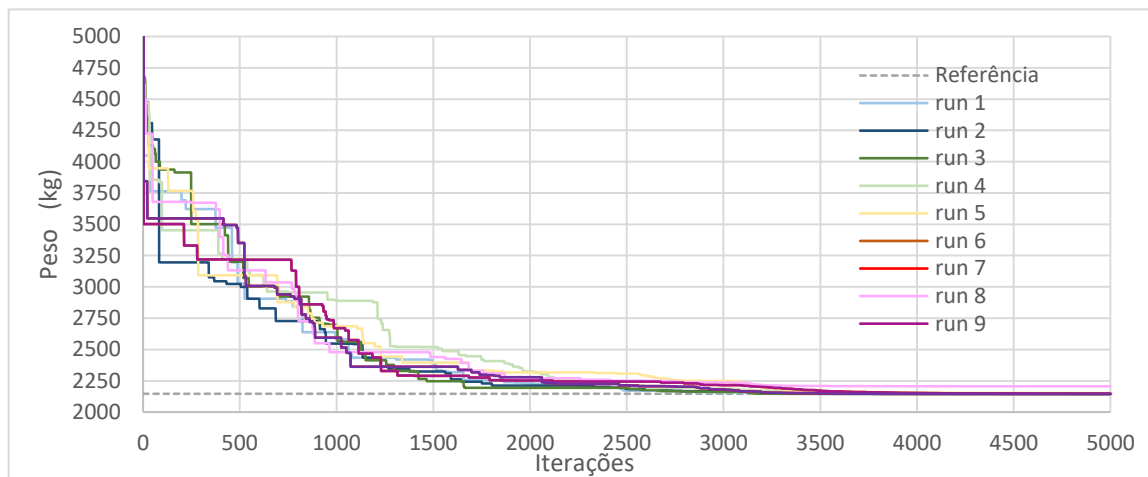
A Tabela 5.12 compara a melhor topologia encontrada com a obtida por Deb e Gulati (2001). Já o Gráfico 5.2 mostra a convergência das 10 melhores otimizações.

Tabela 5.12: Configuração ótima para treliça de 6 nós e 15 barras

Barra	Área transversal cm ²	
	Proposta	Deb e Gulati (2001)
1	34,65	33,68
3	92,77	94,13
4	183,61	181,87
10	129,55	50,13
11	49,48	131,03
13	134,32	133,23
Peso kg	2.143,78	2.146,24

Fonte: Autor

Gráfico 5.2: Convergência das otimizações – Treliça de 15 barras

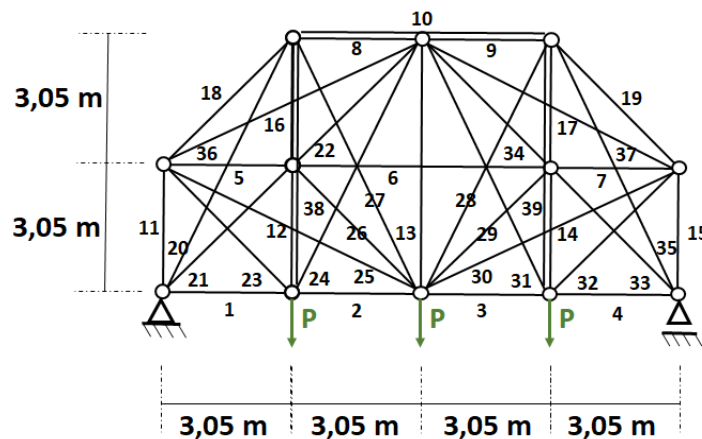


Fonte: Autor

5.4.3 Exemplo: Otimização topológica determinística de treliças com 39 barras

O terceiro exemplo de validação da otimização topológica é uma treliça com 39 barras iniciais. Este problema foi analisado pela primeira vez por Deb e Gulati (2001), e mais tarde por Miguel, Lopez e Miguel (2013). Ambos consideraram uma tensão de escoamento de $\bar{\sigma} = 137,9 \text{ MPa}$ e deslocamentos nodais de $\bar{\delta} = 5,08 \text{ cm}$ como restrições da otimização.

Figura 5.23: Treliça com 12 nós e 39 barras



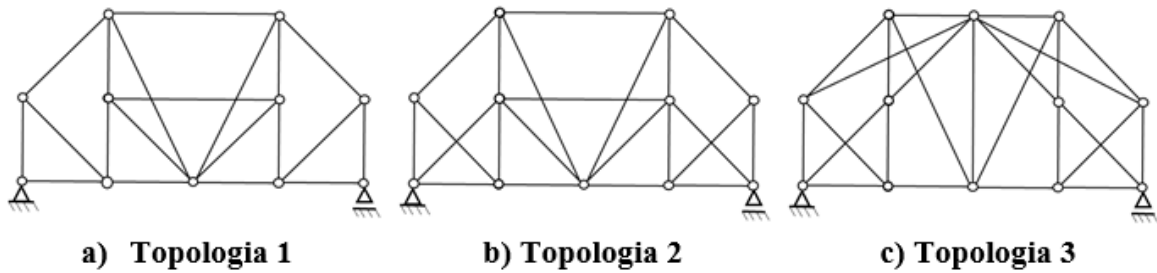
Fonte: Autor

As propriedades do material da estrutura são: módulo de elasticidade de $E = 68.947,6 \text{ MPa}$ e densidade de $\rho = 2.768,0 \text{ kg / m}^3$. O carregamento atuante é formado por três forças aplicadas nos nós inferiores da treliça, cujo valor equivale a $444,82 \text{ kN}$. As áreas transversais das 39 barras são agrupadas em 21 variáveis de projeto de acordo com a simetria estrutural. Os limites laterais destas variáveis são $-14,52 \leq A \leq 14,52 \text{ cm}^2$ e a área crítica, a partir da qual a barra é eliminada da topologia, é $A_{crítica} = 0,32 \text{ cm}^2$.

O grande número de barras, assim como a existência de elementos concorrentes, faz deste um problema complexo de inúmeras soluções. Nem mesmo as referências aqui mencionadas chegam a uma única solução. Ao todo são apresentadas cinco topologias distintas nos dois artigos, e apesar do menor peso ter sido apresentado por Miguel et al. (2013), a diferença entre este e o encontrado por Deb e Gulati (2001) não ultrapassa 1.5%.

Diante disso, foram realizadas 40 replicações deste exemplo, para as quais encontrou-se uma gama de topologias distintas cujo coeficiente de variação é de 7.5%. Na Figura 5.24 apresenta-se as três melhores distribuições obtidas.

Figura 5.24: Três melhores topologias obtidas para o problema



Fonte: Autor

A melhor topologia é comparada as apresentadas pelas referências na Tabela 5.13. Como mencionado anteriormente, nenhuma das topologias é igual, todavia o peso de cada uma é semelhante. A topologia obtida pelo programa desenvolvido é 1.8% superior à de Miguel et al. (2013) e 0.3% comparada a de Deb e Gulati (2001).

Tabela 5.13: Configuração ótima para treliça de 2 nós e 39 barras

Barra	Área transversal cm ²		
	Proposta	Miguel et al. (2013)	Deb e Gulati (2001)
1-4	0,323	0,323	-
2-3	4,839	4,852	4,845
5-7	-	-	0,329
6	0,503	-	-
8-9	-	-	-
10	6,284	6,465	6,484
11-15	9,677	9,677	9,690
12-14	1,961	-	-
13	-	-	-
16-17	1,929	0,000	0,335
18-19	6,832	6,845	6,858
20-35	-	-	-
21-33	-	-	0,329
22-31	-	-	-
23-32	6,832	6,871	6,845
24-31	-	-	-
25-30	-	-	-
26-29	0,645	-	-
27-28	3,239	3,613	3,606
36-37	-	-	-
38-39	-	1,613	1,619
Peso (kg)	89,404	87,791	89,152

Fonte: Autor

Apesar dos resultados satisfatórios, destaca-se aqui o imenso custo computacional imposto pelo número de variáveis de projeto em um algoritmo de otimização heurístico. Tal esforço inviabiliza a utilização de grandes malhas iniciais, neste caso o emprego de algoritmos baseados em gradiente poderia ser mais vantajoso.

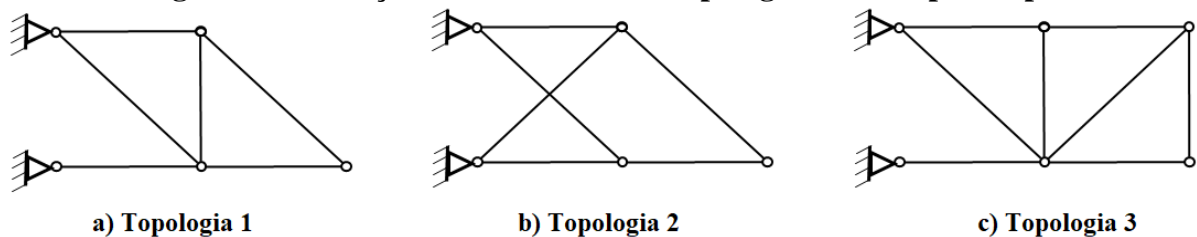
5.4.4 Exemplo: Treliça de 11 barras com restrição de flambagem

Tendo validado o programa desenvolvido com os exemplos anteriores, parte-se agora para a otimização da estrutura do exemplo 5.4.1 considerando também uma restrição de flambagem. Aqui, a otimização é resolvida duas vezes, como feito na paramétrica. A princípio utiliza-se elementos de barra com uma restrição de flambagem, dada pela fórmula de Euler equação (5.2). Em seguida, otimiza-se uma estrutura reticulada a qual é modelada por elementos de pórtico rotulados nas extremidades das barras com imperfeições quando solicitados a compressão. A flambagem passa a ser avaliada pela perda da estabilidade.

As propriedades do material, carregamento e área crítica continuam iguais ao problema 5.4.1. Já os limites laterais devem ser alterados, uma vez que o limite superior adotado anteriormente é inferior a área necessária para atendimento da carga crítica da malha inicial. Portanto, os novos limites laterais são $-350 \leq A \leq 650 \text{ cm}^2$. Com o aumento do espaço de projeto, o número de vaga-lumes e iterações também deve ser aumentado para que o coeficiente de variação dos resultados seja mantido.

Após 10 replicações da otimização da treliça com restrição de flambagem, obteve-se três topologias distintas, Figura 5.25. As duas topologias mais leves, 1 e 2, também foram encontradas na otimização da estrutura reticulada, na qual o peso médio da topologia 1 é de 3.757,33 kg enquanto a topologia 2 possui 3.816,53 kg. Sendo assim, a melhor topologia quando considerada a flambagem das barras comprimidas é 1, que possui peso inferior a topologia obtida com restrições de tensão e deslocamento.

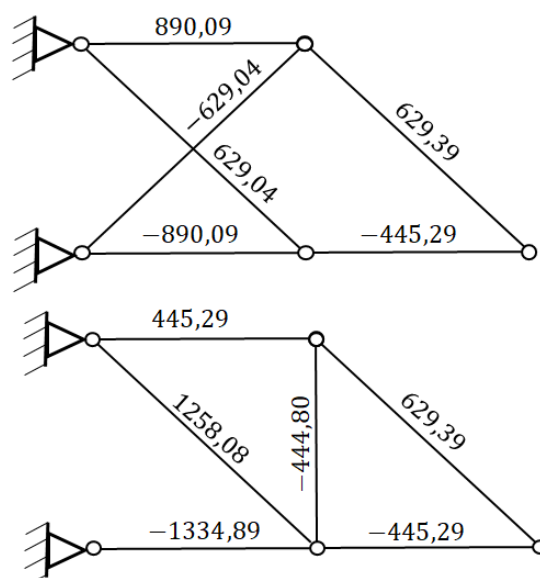
Figura 5.25: Seleção das três melhores topologias obtidas para o problema



Fonte: Autor

A mudança da topologia ideal é facilmente explicada pelo diagrama de esforço normal das estruturas, mostrado na Figura 5.26. A topologia 2 possui esforços normais em módulo inferiores aos encontrados na topologia 1, o que justifica a sua predileção quando considerado apenas a tensão de escoamento. Entretanto, ao considerar a flambagem dos elementos comprimidos, a força crítica das barras depende do comprimento e área transversal destas. Sendo assim, a topologia 1 passa a ser mais vantajosa, uma vez que as barras comprimidas possuem menor comprimento apesar de módulo superior ao da topologia 2. Isto demonstra a importância das restrições de flambagem na otimização topológica de treliças.

Figura 5.26: Diagramas de esforço normal (kN)



Fonte: Autor

A Tabela 5.14 mostra as áreas transversais ótimas obtidas pelos dois métodos analisados. Assim como na otimização paramétrica os resultados encontrados pela estrutura reticulada e para a treliça com restrição de Euler são semelhantes, não justificando o custo computacional exigido pela modelagem do elemento de pórtico, mesmo este sendo uma representação mais próxima do comportamento real da estrutura, podendo vir a considerar as imperfeições de fabricação das barras. Desse modo, na sequência do trabalho utilizou-se apenas os elementos de barra com restrições de flambagem para a otimização das treliças.

Tabela 5.14: Comparação da solução ótima: seção transversal quadrada

A (cm²)	E.f. de barra + Euler	E.f. de pórtico
d1	0,000	0,000
d2	443,548	443,612
d3	0,000	0,000
d4	178,000	178,322
d5	97,613	95,677
d6	255,999	258,580
d7	256,129	256,193
d8	0,000	0,000
d9	125,806	126,064
d10	0,000	0,000
d11	0,000	0,000
Peso (kg)	3753,188	3757,343

Fonte: Autor

5.5 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA COM INCERTEZAS

A consideração das incertezas na otimização topológica difere da paramétrica. Nesta aplicou-se a técnica de simulação WASM que utiliza uma única amostragem uniforme ao longo de todo espaço de projeto. A amostragem consiste em diferentes combinações das variáveis aleatórias (áreas transversais e carga) para a treliça estudada. Entretanto a mesma técnica não pode ser aplicada ao problema topológico, pois as áreas nulas alteram a estrutura avaliada. Isto transforma a amostragem em um conjunto de diferentes estruturas submetidas a diferentes carregamentos, que não pode ser usado para a determinação da p_f de uma topologia específica.

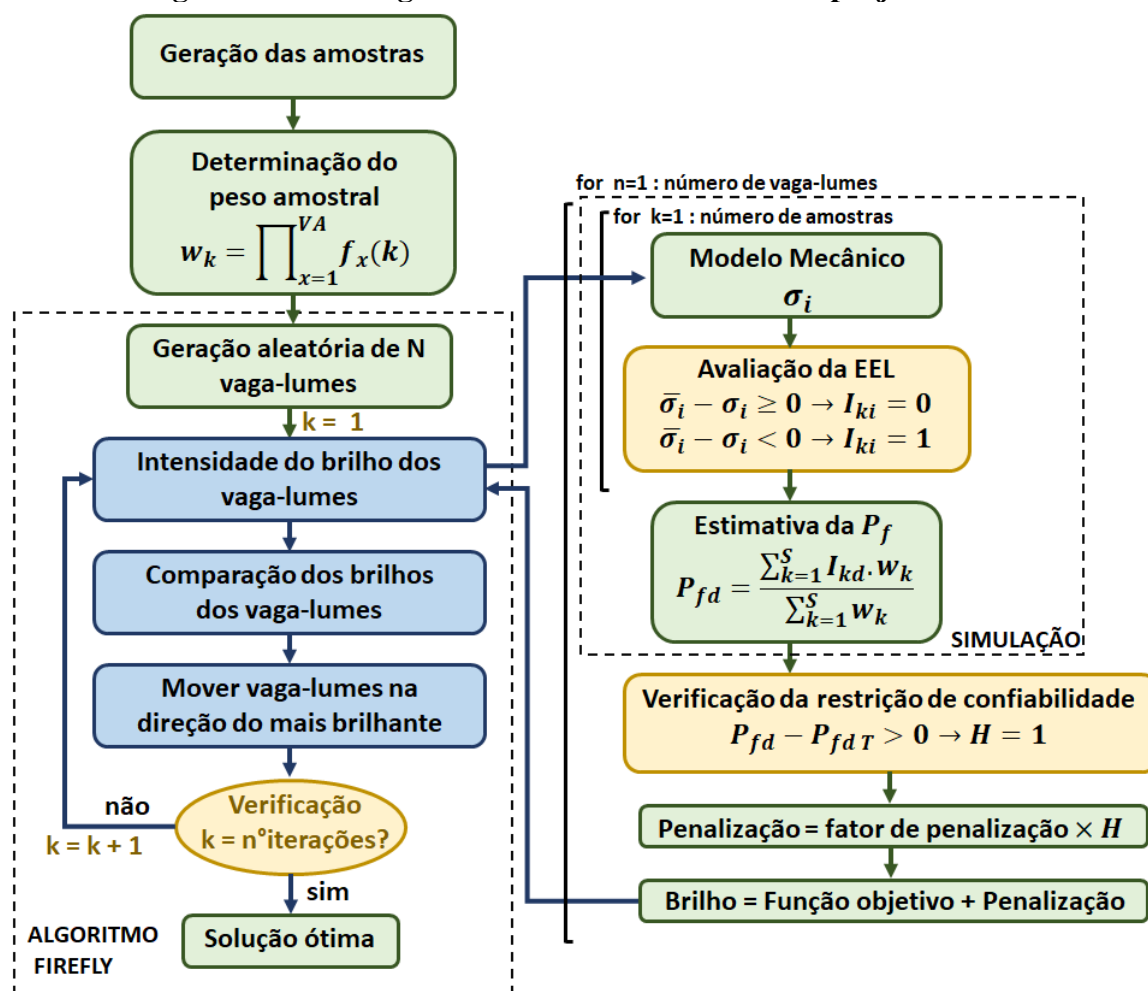
Logo, a p_f deve ser calculada por outra técnica seja esta de transformação ou simulação. Buscando dar continuidade ao desenvolvido na otimização paramétrica, optou-se pelos métodos de simulação. Estes apresentam erros relacionados a estimativa da probabilidade, os quais podem ser absolutos, reduzidos com o aumento da amostragem; ou relativos, relacionados à variância das estimativas.

A adoção de simulações independentes para cada avaliação das variáveis de projeto permite a redução apenas do erro absoluto impactando diretamente no custo computacional. O erro relativo é minimizado com o emprego de uma amostragem comum, todavia, como já

discutido, esta não é possível para a otimização topológica quando as variáveis de projeto são variáveis aleatórias. Dessa forma, parte do trabalho desconsidera as incertezas das áreas transversais. Isto não leva a grandes perdas, uma vez que, as incertezas oriundas do carregamento são predominantes.

Sendo as ações atuantes na estrutura as únicas variáveis aleatórias do problema, gera-se uma amostragem uniforme antes do início do algoritmo de otimização, juntamente com a determinação do peso amostral. Dentro do *Firefly* a função indicadora será avaliada para cada topologia \vec{d}_k , como mostrado na Figura 5.27.

Figura 5.27: Fluxograma RBDO com variáveis de projeto determinísticas



Fonte: Autor

5.5.1 Exemplo: RBDO topológica de treliça com 11 barras

Novamente estuda-se a treliça do exemplo 5.4.1, desta vez adiciona-se incertezas no carregamento. Neste exemplo, a força P é considerada uma variável aleatória com distribuição

de Gumbel, cuja média é de 444,82 kN , mesmo valor utilizado na otimização determinística, e desvio padrão de 44,48 kN .

A probabilidade de falha para a barra i foi determinada pela tensão limite do elemento analisado, sendo representada pela equação de estado limite:

$$g_i(\vec{x}, \vec{d}) = \sigma_{\text{lim}}(\vec{d}) - \sigma_i(\vec{x}, \vec{d}) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.7)$$

onde m é ao número de barras da treliça; $\sigma_i(\vec{x}, \vec{d})$ a tensão de solicitação do elemento i ; e $\sigma_{\text{lim}}(\vec{d})$ a tensão limite, que depende da solicitação do elemento. Para as barras tracionadas a tensão limite equivale a tensão de escoamento do material, já nas barras comprimidas esta tensão equivale ao menor valor entre a tensão de escoamento e a tensão crítica de flambagem, (5.8). Nesta, $K = 0.8225$ é uma constante geométrica, E é o módulo de elasticidade do material, A é a área transversal e L o comprimento da barra i .

$$\sigma_i^{\text{critica}} = \frac{K \cdot E_i \cdot A_i}{L_i^2} \quad (5.8)$$

O problema de otimização aqui resolvido é descrito na seguinte expressão:

$$\text{determine:} \quad \vec{d}^* = \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \quad (5.9)$$

$$\text{que minimiza:} \quad W(\vec{d}) = \sum_{i=1}^m A_i \cdot L_i \cdot \rho$$

$$\text{sujeito a:} \quad p_{fi}(\vec{d}) \leq p_{fTi} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$A_i^{\text{min}} \leq A_i \leq A_i^{\text{max}}$$

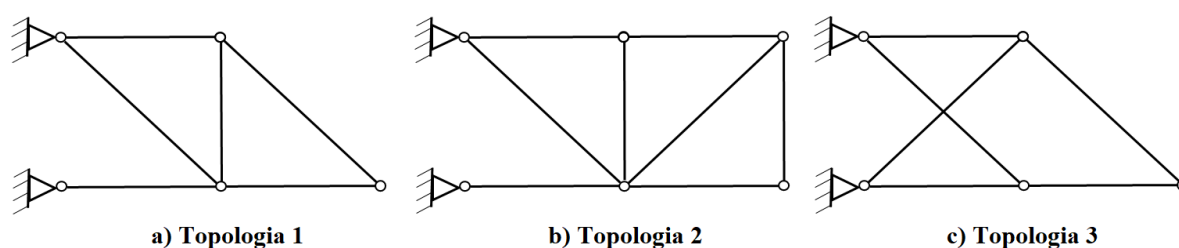
Para resolução deste problema utilizou-se 25 vaga-lumes e 1500 iterações. Os limites laterais foram de -350 cm^2 para área mínima e 800 cm^2 para a máxima. A área crítica continuou como $0,58 \text{ cm}^2$. E o número de amostras usados para estimativa da probabilidade de falha foi de 2500.

As probabilidades de falha limites analisadas foram $6,21 \cdot 10^{-3}$ e $1,35 \cdot 10^{-3}$, que equivalem a um β de 2,5 e 3,0, respectivamente. Para cada p_{fT} realizou-se um total de 10 replicações da otimização. Novamente, as três melhores topologias encontradas na otimização determinística com restrição de flambagem, foram as melhores na otimização com incertezas. Todavia, a ordem de preferência é modificada.

A Figura 5.28 apresenta a ordem das melhores topologias obtidas de acordo com a média dos pesos para cada topologia. Para um índice de confiabilidade de 2,5 as médias foram

4.213,21 kg , 4.564,89 kg e 5.195,64 kg respectivamente. Já para uma confiabilidade de 3,0 as médias são 4.713,47 kg , 5.220,73 kg e 5.610,53 kg . Quando comparado aos resultados obtidos na otimização determinística com restrição de flambagem, a topologia ideal não muda. Entretanto, a topologia 3 que naquele caso era apenas 1,6% superior a ideal e 4% inferior a topologia 2, passa a ser cerca de 10% superior a esta e 20% a ótima quando considerado as incertezas do carregamento. Destaca-se aqui, que a topologia 3 é dita como ótima na bibliografia quando considerada apenas as restrições de tensão e deslocamento.

Figura 5.28: Três melhores topologias encontradas na RBDO



Fonte: Autor

Em relação ao emprego de probabilidade de falha limite como restrição da otimização, este levou a estruturas com peso estrutural mais elevado e conseqüentemente um custo de construção superior as treliças ótimas determinísticas. Tais resultados eram esperados, uma vez que, para garantir a segurança estrutural é necessário a construção de estruturas mais robustas. Isto é facilmente observado na Tabela 5.15, que apresenta a melhor configuração para as confiabilidades 2,5 e 3,0 para a topologia ótima.

É interessante notar que todas as topologias encontradas na otimização determinística, assim como na otimização baseada na confiabilidade de cada elemento são isostáticas. Tal resultado deixa a estrutura suscetível a qualquer ação não previsível, pois a falha de um único elemento leva ao colapso total da estrutura.

Todavia, as estruturas hiperestáticas são capazes de redistribuir os esforços após a falha/perda de um elemento. Tal característica faz da hiperestaticidade um requisito fundamental para a prevenção do colapso progressivo. A substituição das restrições de confiabilidade elementar para uma única restrição envolvendo a confiabilidade do sistema, poderia levar a soluções ótimas hiperestáticas. Buscando estudar esta suposição, implementou-se uma sub-rotina para redistribuição dos esforços após a falha de um membro. Com isto, avaliou-se a vulnerabilidade da estrutura quanto ao risco de colapso progressivo.

Tabela 5.15: Comparação da melhor topologia para diferentes confiabilidades

A (cm ²)	$\beta = 2,5$	$\beta = 3,0$
d1	0,000	0,000
d2	604,192	657,031
d3	0,000	0,000
d4	135,806	160,580
d5	47,935	60,000
d6	348,386	393,741
d7	349,548	379,741
d8	0,000	0,000
d9	68,000	80,387
d10	0,000	0,000
d11	0,000	0,000
Peso (kg)	4146,561	4713,470

Fonte: Autor

5.6 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA CONSIDERANDO O COLAPSO PROGRESSIVO

A presença de elementos redundantes faz com que a falha global da estrutura seja governada pela falha de mais de um elemento. Neste caso, os membros falham de modo progressivo até que toda a estrutura entre em colapso. As diferentes combinações das falhas individuais caracterizam os chamados caminhos de falha.

As estruturas hiperestáticas classificam-se como sistemas mistos, nos quais os diferentes caminhos de falha, C_k , estão associados em série; e os diferentes componentes pertencentes cada caminho, E_i , em paralelo. Desse modo, a probabilidade de falha do sistema pode ser escrita como:

$$p_f = P\left[\bigcup_k \left[\bigcap_{i \in C_k} (E_i)\right]\right] \quad (5.10)$$

No caso da estimativa da p_f por meio de técnicas de simulação, aplicada neste trabalho, a mudança ocorre na determinação da função indicadora, $I_f(\vec{d}, \vec{x})$, que passa a depender do domínio de falha do sistema.

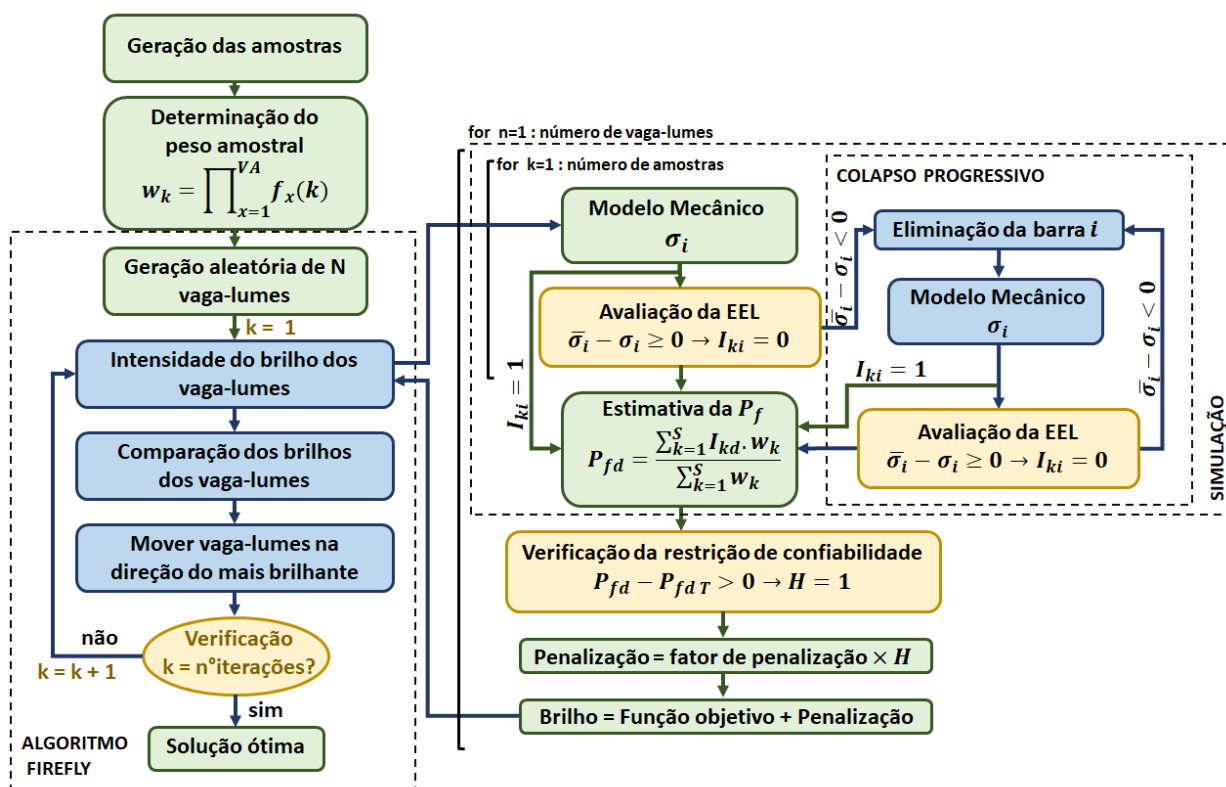
No programa desenvolvido, esta função é avaliada para cada amostra podendo receber valor igual a um, quando a estrutura entra em colapso; ou igual a zero, quando os esforços são suportados sem gerar falhas. O colapso progressivo é verificado por uma sub-rotina, a qual

constatada a falha de um elemento, elimina-o e redistribui os esforços até que estes sejam suportados pelos elementos restantes ou a estrutura entre em colapso. A falha do elemento é dada pela equação de estado limite (5.7). Quando mais de uma barra ultrapassa a tensão limite apenas a barra com maior diferença, $|\sigma_{lim} - \sigma_i|$, é eliminada.

Configurações que apresentam falha de alguns elementos, mas não chegam ao colapso são contabilizadas na função indicadora de serviço. Esta função é utilizada para a determinação da probabilidade de serviço, necessária no custo total da estrutura.

A figura 5.29 apresenta o fluxograma para o problema RBDO com restrição da probabilidade do sistema. O cálculo da probabilidade de colapso total é a mesmo para o problema RO, todavia este é usado juntamente com a de serviço na determinação do custo ao longo da vida estrutural, função objetivo, e não na penalização.

Figura 5.29: Fluxograma da otimização considerando o colapso progressivo para determinação da probabilidade de falha do sistema



Fonte: Autor

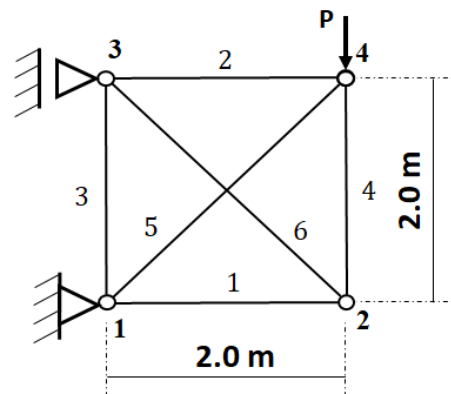
5.6.1 Exemplo: RBDO e RO de treliça com 6 barras

Para o primeiro exemplo considerando colapso progressivo adotou-se um exemplo simples devido, principalmente, ao custo computacional exigido por uma malha inicial de

muitas barras. A malha uma vez hiperestática, apresentada na Figura 5.30, é otimizada três vezes: determinística com restrição de flambagem; RBDO com restrição do sistema; e RO.

Em todas as otimizações o material das barras possui módulo de elasticidade de $E = 200\text{ GPa}$, tensão de escoamento de $\bar{\sigma} = 250\text{ MPa}$ e densidade de $\rho = 7850\text{ kg/m}^3$. O carregamento é uma variável aleatória de média $\mu = 500\text{ kN}$ e desvio de $\sigma = 50\text{ kN}$, com distribuição de Gumbel. Na otimização determinística o valor do carregamento equivale a média da variável.

Figura 5.30: Treliça com 4 nós e 6 barras



Fonte: Autor

O índice de confiabilidade limite para a otimização RBDO foi de 2,5. A otimização de risco, RO, não utiliza um índice limite pois ela determina o β ideal de acordo com os custos de falha. A função objetivo passa a ser o custo total da estrutura ao longo de toda sua vida, que pode incluir custos com operação, manutenção, inspeção e descarte, como mostrado no capítulo 4. Neste trabalho considerou-se apenas os custos de material e os custos esperados de falha. Sendo assim a função objetivo descrita por:

$$C_{EF}(\vec{d}) = C_C(\vec{d}) + C_{FS} \cdot p_{sf}(\vec{d}) + C_{CT} \cdot p_{ct}(\vec{d}) \quad (5.11)$$

na qual, o custo de construção é igual ao volume do material para a topologia, \vec{d} , analisada. Já o custo das falhas de serviço é constante e igual ao volume estrutural considerando todas as barras com área transversal de 60 cm^2 : $C_{REF} = (4\sqrt{2} + 8) \cdot 60 \cdot 10^{-4}$.

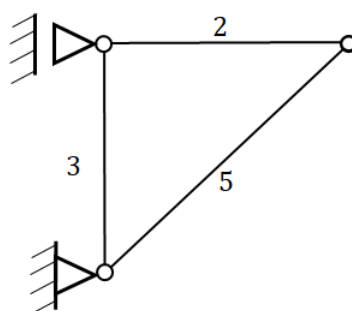
A falha de membros hiperestáticos é considerada uma falha de serviço e seu custo é proporcional ao volume da barra perdida. O custo do colapso é diferenciado para as estruturas hiperestáticas e isostáticas. Isto é justificado pelo aviso de uma falha primária, o qual permitiria a evacuação da estrutura diminuindo custos com indenizações por ferimentos e mortes. Assim, o custo para a falha do segundo membro da estrutura hiperestática é $C_{CT} = k \cdot C_{REF}$, e para a

falha de uma estrutura isostática é $C_{CT} = 10 \cdot k \cdot C_{REF}$. Dois cenários para constante k , presente no custo de colapso, são avaliados; sendo $k = 1$ e $k = 5$.

Os parâmetros de entrada para a otimização foram: 15 vagalumes e 2000 iterações para a determinística; e 15 vagalumes e 500 iterações para a RBDO e RO. Os limites laterais empregados foram $-20 \leq A \leq 80 \text{ cm}^2$ e o número de amostras igual a 5000 para todos os métodos.

Devido a simplicidade do exemplo as otimizações ótimas obtidas pelos três métodos apresentaram a topologia já conhecida da mão francesa, Figura 5.31. As áreas transversais e confiabilidade diferem para cada método e seus valores são mostrados na Tabela 5.16.

Figura 5.31: Topologia ótima: mão francesa



Fonte: Autor

Tabela 5.16: Configurações ótimas

	Determinístico	RBDO - Sistema	RO [k=1]	RO [k=5]
	Média (cm ²)	Média (cm ²)	Média (cm ²)	Média (cm ²)
A1	0,000	0,000	0,000	0,000
A2	20,026	27,032	29,659	32,173
A3	4,001	2,070	2,195	2,311
A4	0,000	0,000	0,000	0,000
A5	58,625	68,108	71,337	74,299
A6	0,000	0,000	0,000	0,000
Peso (kg)	167,888	196,911	208,400	219,107
C.V.	0,001%	0,191%	0,564%	0,155%
β_{sys}	-	2,50	3,04	3,50

Fonte: Autor

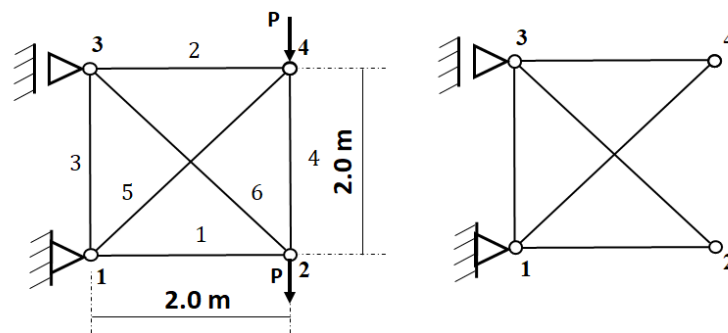
Apesar da necessária redução no número de iterações nas otimizações com incertezas devido ao custo computacional de determinação da probabilidade de falha, os resultados obtidos após as 10 replicações foram satisfatórios. As pequenas variações originam-se principalmente da área da barra 3, a qual possui pequena solicitação, proveniente da não-linearidade geométrica.

Como visto nos exemplos anteriores, ao considerar a segurança estrutural como um parâmetro da otimização o peso ótimo tende a ser superior ao encontrado nas otimizações determinísticas. Quanto a RO percebe-se que a confiabilidade da solução depende dos custos decorrentes da falha estrutural.

No tocante a suposição de que o uso da probabilidade de falha de sistema levaria a uma solução hiperestática, conclui-se que não é uma verdade para todos os casos. Neste exemplo, para que a estrutura ótima passasse a ser hiperestática seria necessário o acréscimo de 3 outras barras o que significa dobrar os elementos da mesma. Dessa forma, torna-se mais vantajoso aumentar as áreas transversais, a fim de reduzir a probabilidade de colapso total, do que tornar a estrutura hiperestática.

Entretanto, nos casos em que a hiperestaticidade depende do acréscimo de poucos elementos comparado ao número de elementos da isostática, a solução redundante é encontrada pela formulação RO. Isto pode ser observado ao inserir uma segunda carga ao nó 2 da malha inicial. Assim, as estruturas ótimas isostáticas passam a incluir este nó, Figura 5.32. Para esta situação a solução encontrada pela formulação RO compreende as seis barras da malha inicial, Tabela 5.17.

Figura 5.32: Treliça com dois carregamentos e configuração isostática



Fonte: Autor

Este exemplo mostra que a consideração da falha dos membros hiperestáticos como aviso leva a uma menor confiabilidade ideal do sistema, o que resulta em estruturas de menor peso.

Tabela 5.17: Configurações ótimas para treliça com dois carregamentos

	RDBO - Sistema	RO [k=1]
	Média (cm ²)	Média (cm ²)
A1	40,339	33,941
A2	30,210	31,533
A3	40,457	34,092
A4	0,000	7,122
A5	67,845	73,360
A6	37,934	27,016
Peso (kg)	409,140	390,366
C.V.	0,566%	4,028%
β_{sys}	2,50	2,01

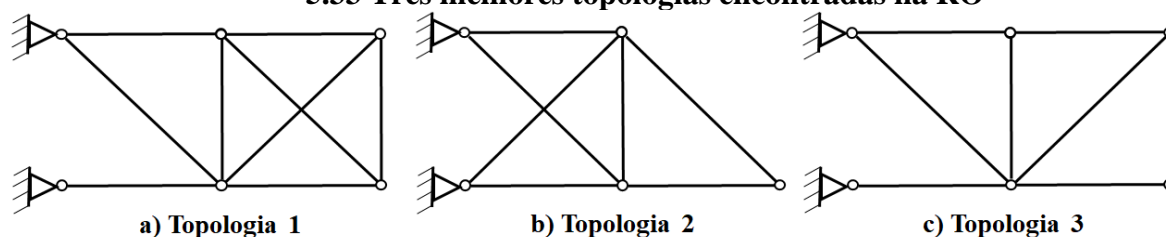
Fonte: Autor

5.6.2 Exemplo: RBDO e RO de treliça com 11 barras

Dando continuidade ao estudo da treliça do exemplo 5.4.1, fazemos a otimização desta considerando o colapso progressivo. As incertezas nas forças atuantes são as mesmas apresentadas no exemplo 5.5.1. O custo total ao longo da vida da estrutura é determinado pela equação (5.11), para a qual o custo das falhas de serviço equivale ao volume estrutural considerando todas as barras com área transversal de 600 cm^2 . Dois cenários para constante k presente no custo de colapso, são avaliados; sendo $k = 1$ e $k = 5$.

Os parâmetros de entrada para a otimização foram: 35 vagalumes e 800 iterações. Os limites laterais empregados foram $-350 \leq A \leq 800\text{ cm}^2$ e o número de amostras igual a 2500 para todos os métodos.

Como nos métodos anteriores, foi encontrada mais de uma topologia ideal durante as 10 replicações do problema de otimização. As três melhores topologias são apresentadas nas Figuras 5.33 para $k = 1$ e $k = 5$; assim como suas respectivas áreas transversais, custo ótimo total, peso e índice de confiabilidade são mostrados na Tabela 5.18.

5.33 Três melhores topologias encontradas na RO

Fonte: Autor

Tabela 5.18: Configurações ótimas obtidas no RO

(cm ²)	Topologia 1		Topologia 2		Topologia 3	
	k = 1	k = 5	k = 1	k = 5	k = 1	k = 5
A1	0,00	0,00	15,66	29,95	10,16	63,72
A2	427,11	495,32	582,15	629,11	666,46	696,80
A3	606,31	665,23	0,00	0,00	0,00	0,00
A4	43,98	64,94	125,94	147,12	165,25	180,66
A5	92,04	114,29	44,47	77,13	58,27	64,05
A6	321,99	365,24	269,72	235,84	384,23	10,22
A7	10,74	10,03	270,70	236,34	390,93	10,15
A8	0,00	0,00	335,62	463,95	0,00	676,62
A9	58,05	74,71	42,57	31,23	82,70	0,00
A10	0,00	0,00	15,68	30,00	210,04	63,76
A11	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
β_T	2,01	2,82	2,29	2,80	3,10	3,45
Peso (kg)	4691,60	5373,81	4837,70	5433,46	5241,20	5368,53
C_{et}	5050,63	5567,42	5015,72	5639,53	5401,81	5594,50

Fonte: Autor

Os resultados encontrados mostram que os menores custos de construção não garantem os menores custos totais, no primeiro cenário a topologia apresenta menor peso quando comparada a topologia 2, entretanto esta é a topologia ótima ao se olhar o custo total.

Da mesma forma que no exemplo anterior fica evidente a dependência da RO com os custos decorrentes da falha estrutural. Estes são fundamentais para a determinação do índice de confiabilidade ideal, de modo que este aumenta quando o custo proveniente da falha é multiplicado por 5 (constante k).

Em relação a presença ou não de membros redundantes nas topologias ideais, observa-se que para este caso foram obtidas duas topologias ótimas hiperestáticas e uma isostática. Sendo que para os dois cenários estudados (k=1 e k=5) a topologia com menor custo era hiperestática.

6 CONCLUSÕES

Este trabalho aborda o problema de otimização topológica de treliças sujeitas a incertezas considerando o colapso progressivo, tendo por objetivo a avaliação de duas metodologias de otimização considerando incertezas, RBDO e RO. Para o alcance deste propósito seguiu-se cinco passos de implementação a fim de melhor compreender e solucionar as dificuldades do problema estudado. Estas etapas foram: 1) otimização determinística paramétrica de treliças com restrições de flambagem para validação do algoritmo heurístico Firefly; 2) incorporação do WASM para determinação da probabilidade de falha durante a RBDO paramétrica; 3) otimização topológica de treliças com restrição de flambagem, elementos passam a ser eliminados da estrutura durante o processo de busca adicionando problemas de singularidade e instabilidade estrutural, os quais foram solucionados mediante o travamento de nós soltos e avaliação da hessiana, respectivamente; 4) introdução das incertezas à RBDO topológica; 5) avaliação do colapso progressivo ao longo da otimização por meio da redistribuição dos esforços após falha de um elemento estrutural, permitindo o cálculo da probabilidade de falha do sistema (colapso total) e de falhas parciais (serviço) para a realização da RO. Os resultados obtidos em cada etapa de implementação foram satisfatórios quando comparados com a literatura, validando o programa computacional desenvolvido.

Quanto as formulações, RBDO e RO, estudadas, observou-se que todas as soluções obtidas pela RBDO são isostáticas. Tais resultados mostram que esta formulação não considera adequadamente as vantagens dos membros redundantes. Por outro lado, a formulação RO estima tais vantagens por meio de custo de colapso menor para estruturas hiperestáticas, que é justificado pelo aviso gerado pela falha dos membros redundantes antes do colapso total. Diante disso, as topologias ótimas alcançadas por esta formulação incluem estruturas isostáticas e hiperestáticas. Nestes casos, as topologias ideais dependem dos custos inerentes a construção das topologias isostáticas e hiperestáticas, associadas com seus respectivos custos de falha de serviço e colapso. Estes últimos são fundamentais na determinação da confiabilidade ideal do sistema obtida na otimização RO.

Os exemplos aqui apresentados são de referência acadêmica, todavia são relevantes para o estudo inicial de projetos estruturais robustos considerando o colapso progressivo.

Em relação ao emprego de algoritmos heurísticos na otimização topológica de treliças, conclui-se que apesar dos resultados encontrados serem confiáveis o seu custo computacional dificulta a resolução de problemas com malhas iniciais complexas, nos quais o número de variáveis de projeto é elevado.

Esta pesquisa também avaliou a aplicabilidade de modelagem das treliças por elementos de pórtico rotulados, de modo que a estabilidade das barras fosse avaliada dentro do modelo mecânico. Tal técnica foi empregada por outros autores com o intuito de evitar dificuldades provenientes do uso da fórmula de Euler, todavia sua aplicação em métodos heurísticos torna-se muito custosa computacionalmente. Sendo inviável sua utilização em problemas de grande complexidade.

6.1 SUGESTÕES DE DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Visando a continuidade desta pesquisa, sugere-se a avaliação do impacto de outras incertezas presentes nas treliças, como não retilinearidade das barras e incertezas nas propriedades do material. Já para o seguimento da consideração dos efeitos não lineares em técnicas de otimização, indica-se a implementação da não linearidade física do material. Além disso, é possível o acréscimo das coordenadas nodais as variáveis de projeto para uma otimização simultânea da geometria e topologia da treliça.

Em relação a redução do custo computacional, recomenda-se o emprego de técnicas de otimização baseadas em gradiente. Isto permitirá a avaliação da metodologia em problemas de maior complexidade.

Quanto ao colapso progressivo, é interessante a consideração do efeito dinâmico gerado pela perda instantânea de um elemento. As normas internacionais mencionam a possibilidade de considerar este efeito em análises estáticas por meio da amplificação das cargas atuantes. Esta muda de acordo com a estrutura avaliada, para pórticos um fator de amplificação igual a 2 produz resultados estáticos próximos as respostas dinâmicas (MARJANISHVILI e AGNEW, 2006). No caso das estruturas treliçadas de aço, empregadas em pontes, este fator tende a ser próximo de 1,85 (KHUYEN e IXASAKI, 2016).

REFERÊNCIAS

- ACHTZIGER, W. On simultaneous optimization of truss geometry and topology. Published in: **Struct Multidisc Optim**, p. 285-304, vl. 33(4-5). 2007.
- ANG, A.H.S.; LEE, J.C. Cost optimal design of R/C buildings. Published in: **Reliability Engineering and System Safety**, p. 233-238, vl. 73. 2001.
- ANESCU, G. An adaptive penalty function method for constrained continuous optimization in population-based meta-heuristic optimization methods. Published in: **19h International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing**. 2017.
- AOUES, Y.; CHATEAUNEUF, A. Reliability-based optimization of structural systems by adaptive target safety – Application to RC frames. Published in: **Structural Safety**, p. 144-161, vl. 30. 2008.
- ARORA, J. S. **Introduction to optimum design**. 3^o edição, Elsevier, Iowa City, 2012.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado — Procedimentos. Rio de Janeiro, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 9062**: Projeto e Execução de Estruturas de Concreto Pré-moldado. Rio de Janeiro, 2006.
- BASTOS, E.A. **Otimização de Seções Retangulares de Concreto Armado Submetidas à Flexo-Compressão Oblíqua Utilizando Algoritmos Genéticos**. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2004.
- BECK, A.T. Optimal Design of Redundant Structural Systems considering Progressive Collapse: Fundamentals. Artigo submetido à aprovação em **Structural Safety**, 2019.
- BECK, A.T. **Confiabilidade e Segurança das Estruturas**. 1^o edição, Elsevier, Rio de Janeiro, 2019.
- BECK, A.T.; GOMES, W.J.S. A comparison of deterministic, reliability-based and risk-based structural optimization under uncertainty. **Probabilistic Engineering Mechanics**, vol.8, p. 18-29, April 2012.
- BECK, A.T.; GOMES, W.J.S.; LOPEZ, R.H.; MIGUEL, L.F.F. A comparison between robust and risk-based optimization under uncertainty. Published in: **Struct Multidisc Optim**, p. 479-492, vl. 52. 2015.
- BECK, A.T.; KOUGIOUMTZOGLU, I.A.; SANTOS, K.R.M. Optimal performance-based design of non-linear stochastic dynamical RC structures subject to stationary wind excitation. Published in: **Engineering Structures**, p. 145-153, vl. 78. 2014.
- BECK, A.T.; TESSARI, R.K.; KROETZ, H.M. System reliability-based design optimization and risk-based optimization: a benchmark example considering progressive collapse. **Engineering Optimization**:doi.org/10.1080/0305215X.2018.1502760. August 2018.

BRAJEVIĆ, I.; STANIMIROVIĆ, P. Na improved chaotic firefly algorithm for global numerical optimization. Published in: **International Journal of Computational Intelligence Systems**, v. 12, pp. 131-148. 2018.

BRASIL, M.L.R.F.; SILVA, M.A. **Otimização de Projetos de Engenharia**. 1º edição, Blucher, São Paulo, 2019.

CHENG, G.D.; GUO, X. ϵ -relaxed approach in structural topology optimization. Published in: **Structural Optimization**, v. 13, pp. 258-266. 1997.

CODA, H. B. **O Método dos Elementos Finitos Posicional: Sólidos e Estruturas - Não Linearidade Geométrica e Dinâmica**. ISBN: 975-85-8023-068-0. São Carlos: EESC/USP, 2018

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A positional FEM Formulation for geometrical non-linear analysis of shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 5, n. 3, p. 205–223, 2008.

COSTA, M.F.P.; ROCHA, A.M.A.C.; FRANCISCO, R.B.; FERNANDES, E.M.G.P. Firefly penalty-based algorithm for bound constrained mixed-integer nonlinear programming. Published in: **A Journal of Mathematical Programming and Operations Research**, v. 65 (5), pp. 1085-1104. 2016.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. Vol 1. New York: John Wiley & Sons, 1991.

DEB, K.; GULATI, S. Design of truss-structures for minimum weight using genetic algorithms. Published in: **Finite Elements in analysis and Design**, v. 37, pp. 447-465. 2001.

DITLEVSEN, O.; BJERAGER, P. Methods of structural systems reliability. **Structural Safety**, vol.3, p. 195-229, August 1986.

DUYSINX, P.; BENDSOE, M.P. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. Published in: **International Journal for Numerical Methods in Engineering** 43, 1453-1478. 1998.

ELLINGWOOD, B. et al. **Best Practices for Reducing the Potential for Progressive Collapse in Buildings**. NISTIR 7396 – National Institute of Standard and Technology, USA, 2007.

ENEVOLDSEN, I.; SORENSEN, J.D. Reliability-Based Optimization of Series Systems of Parallel Systems. Published in: **Journal of Structural Engineering**, p. 1069-1084, v. 119. 1993.

EUROPEAN STANDARD. **Eurocode 1: Actions on Structures**. part 1-7: General Actions - Accidental Actions. Brussels, 2003.

FABER, M. H. **Risk and Safety in Civil, Surveying and Environmental Engineering**, Swiss Federal Institute of Tecnology. Zürich: Institute of Structural Engineering, ETH Höggerberg, 2006.

FISTER, I.; YANG, X.S.; BREST, J.; FISTER JUNIOR, I. Modified firefly algorithm using quaternion representation. Published in: **Expert Systems with applications**, v. 40 (18), pp. 7220-7230. 2013.

GANDOMI, A.H.; YANG, X.S.; ALAVI, A.H. Mixed variable structural optimization using Firefly Algorithm. Published in: **Computers and Structures** 89, 23-36. 2011.

GANDOMI, A. H.; YANG, X.S.; TALATAHRI, S.; ALAVI, A.H. Firefly algorithm with chaos. Published in: **Nonlinear Science na Numerical Simulation** v.18 (1), p. 89-98. 2013.

GRECO, M.; CODA, H. B. Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 290, n. 3-5, p. 1141–1174, 2006.

GRIFFIN, J.D., KOLDA, T.G. Nonlinearly-constrained optimization using heuristic penalty methods and asynchronous parallel generating set search. Published in: **Oxford University Press Ltd Journal**, p. 1- 17. 2017.

GOMES, H. M. **Técnicas de Avaliação da Confiabilidade em Estruturas de Concreto Armado**. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GOMES, W.J.S.; BECK, A.T. Global structural optimization considering expected consequences of failure and using ANN surrogates. Published in: **Computers and Structures**, p. 56-68, v 126. 2013.

GOMES, W.J.S.; BECK, A.T. Optimal inspection and design of onshore pipelines under external corrosion process. Published in: **Structural Safety**, p. 48-58, v. 47. 2014.

GOTO, Y.; YOSHIMITSU, T.; OBATA, M. Elliptic integral solutions of plane elastica with axial and shear deformations. **International Journal of Solids and Structures**, v. 26, n. 4, p. 375–390, jan. 1990.

HADIDI, A.; AZAD, S.K.; AZAD, S.K. Structural optimization using artificial bee colony algorithm. Published in: **2º International Conference on Engineering Optimization**. Lisbon, Portugal. 2010.

IMAI, K.; SCHIMIT, L.A. Configuration optimization of trusses. Published in: **Journal of Structural Division ASCE**, v. 107, pp. 745-756. 1991.

JENSEN, H.A.; VALDEBENITO, M.A.; SCHUELLER, G.I.; KUSANOVIC, D.S. Reliability-based optimization of stochastic systems using line search. Published in: **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, p. 3915-3924, v 198. 2009.

KHUYEN, H.T.; IWASAKI, E. Na approximate method of dynamic amplification factor for alternate load path in redundancy and progressive collapse linear static analysis for steel truss bridges. Published in: **Structural Engineering**, p. 53-62, v. 6. 2016.

KIRSCH, U. On singular topologies in optimum structural design. Published in: **Structural Optimization**, v. 2, pp. 133-142. 1990.

KOCVARA, M.; ZOWE, J. How mathematics can help in design of mechanical structures. Published in: **Griffiths D, Watson G (eds) Numerical analysis**. Longman Scientific and Technical, Harlow, p. 76-93. 1996.

KUSCHEL, N.; RACKWITZ, R. Optimal design under time-variant reliability constraints. Published in: **Structural Safety**, p. 113-127, vl. 22. 2000.

LEE, K.S.; GEEM, Z.W. A new structural optimization method based on the Harmony search algorithm. Published in: **Computers and Structures**, v. 82, pp. 781-798. 2004.

LI, Y.; ZHANG, D. Plane Truss Reliability Numerical Simulation Based on MATLAB. Published in: **Applied Mechanics and Materials**, v. 256-259, pp. 1091-1096. 2013.

LIANG, J.; MOURELATOS, Z.P.; TU, J. A single-loop method for reliability-based design optimization. Published in: **Proceedings of ASME design engineering technical conferences**. 2004.

LIANG, J.; MOURELATOS, Z.P.; NIKOLAIDIS, E. A Single-Loop Approach for System Reliability-Based Design Optimization. Published in: **Journal of Mechanical Design**, p. 1215-1224, vl. 129. 2007.

LIEU, Q.X.; DO, D.T.T.; LEE, J. An adaptive hybrid evolutionary firefly algorithm for shape and size optimization of truss structures with frequency constraints. Published in: **Computers and Structures** 195, 99-112. 2018.

MADAH, H.; AMIR, O. Truss optimization with buckling considerations using geometrically nonlinear beam modeling. Published in: **Computers and Structures**, 192, 233-247. 2017.

MADAH, H.; AMIR, O. Concurrent structural optimization of buckling-resistant trusses and their initial imperfections. Published in: **International Journal of Solids and Structures**, 162, 244-258. 2019.

MARJANISHVILI, S.; AGNEW, E. Comparison of Various Procedures for Progressive Collapse Analysis. Published in: **Journal of Performance of Constructed Facilities**, v.20(4), p.365-374. 2006.

MATTIASSON, K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, n. 1, p. 145-153, 1981.

MAXWELL, J.C. On Reciprocal Figures, Frames, and Diagrams of Forces. Published in: **Transactions of the Royal Society of Edinburgh**, vl. 26. 1869.

MELCHERS, R.E.; BECK, A.T. **Structural Reliability Analysis and Prediction**. Third Edition, John Wiley and Sons, West Sussex, 2018.

MICHELL, A.G.M.. The Limits of Economy of Material in Frame-structures. Published in: **Philosophical Magazine**, p. 305-316. 1904.

MIGUEL, L.F.F.; MIGUEL, L.F.F. Shape and size optimization of truss structures considering dynamic constraints through modern metaheuristic algorithms. Published in: **Expert Systems with Applications** 39, 9458-9467. 2012.

MIGUEL, L.F.F.; LOPEZ, R.H.; MIGUEL, L.F.F. Multimodal size, shape, and topology optimisation of truss structures using the Firefly Algorithm. Published in: **Advances in Engineering Software** 56, 23-37. 2013.

MOSES, F. Structural System Reliability and Optimization. Published in: **Computers and Structures**, p. 283-290, vl. 7. 1977.

NOGUEIRA, C.G. **Um modelo de confiabilidade e otimização aplicado às estruturas de barras de concreto armado**. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo - Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 2005.

NGUYEN, T.H.; SONG, J.; PAULINO, G.H. Single-loop System Reliability-Based Optimization Using Matrix-Based System Reliability Method: Theory and Applications. Published in: **Journal of Mechanical Design**, 132, 011005-1-11. 2010.

OGDEN, R. W. **Non-linear elastic deformations**. Chichester: Ellis Horwood, 1984.

OKASHA, N.M. An improved weighted average simulation approach for solving reliability-based analysis and design optimization problems. Published in: **Structural Safety** 60, 47-55. 2016.

OKASHA, N.M.; FRANGOPOL, D.M. Lifetime-oriented multi-objective optimization of structural maintenance considering system reliability, redundancy and life-cycle cost using GA. Published in: **Structural Safety**, p. 460-474, vl. 31. 2009.

RACKWITZ, R. Optimization and risk acceptability based on the life quality index. Published in: **Structural Safety** 24, 297-331. 2002.

RACKWITZ, R. Life quality index revisited. Published in: **Structural Safety** 26, 443-451. 2004.

RACKWITZ, R.; JOANNI, A. Risk acceptance and maintenance optimization of aging civil engineering infrastructures. Published in: **Structural Safety**, p. 251-259, vl. 31. 2009.

RASHKI, M.; MIRI, M.; MOGHADDAM, M.A. A new efficient simulation method to approximate the probability of failure and most probable point. Published in: **Structural Safety** 39, 22-29. 2012.

REIS, M.C.J. **Análise não linear geométrica de pórticos planos considerando ligações semirrígidas elastoplásticas**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2012.

REIS, A.; CAMOTIM, D. **Estabilidade estrutural**. Lisboa: McGraw-Hill, 2000.

RODRIGUES JÚNIOR, S.J. **Otimização de Pilares de Edifícios Altos de Concreto Armado**. Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2005.

SILVA, W.Q. **Análise não linear geométrica do acoplamento solo-estrutura através da combinação MEC-MEF**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2010.

SIMITSES, G. J.; HODGES, D. H. **Fundamentals of Structural Stability**. 1° edição. Burlington: Butterworth-Heinemann, 2006.

SIQUEIRA, M.T. **Análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos reticulados planos com ligações deslizantes**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2016.

SOARES, H. B. **Formulação e implementação numérica para análise de estabilidade de perfis de parede fina via MEF posicional**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2019.

SONMEZ, M. Artificial Bee Colony algorithm for optimization of truss structures. Published in: **Applied Soft Computing**, v. 11, pp. 2406-2418. 2011.

STOLPE, M.; SVANBERG, K. On the trajectories of the epsolin-relaxation approach for stress-constrained truss topology optimization. Published in: **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 21, pp. 140-151. 2001.

TALATAHARI, S.; GANDOMI, A.H.; YUN, G.J. Optimum design of tower structures using Firefly Algorithm. Published in: **The Structural Design of Tall and Special Buildings** 23, 350-361. 2014.

TORII, A.J.; FARIA, J.R. Structural optimization considering smallest magnitude eigenvalues: a smooth approximation. Published in: **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, 39, 1745-1754. 2017.

TORII, A.J.; LOPEZ, R.H.; BIONDINI, F. An approach to reliability-based shape and topology optimization of truss structures. Published in: **Engineering Optimization**, 44, 37-53. 2012.

TORII, A.J.; LOPEZ, R.H.; MIGUEL, L.F.F. Modeling of global and local stability in optimization of truss-like structures using frame elements. Published in: **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 51, 1187-1198. 2015.

WANG, H.; WANG, W.J.; SU, H.; RAHNAMAYAN, S. Firefly algorithm with random attraction. Published in: **International Journal of Bio-Inspired Computation**, v. 8(1), pp. 33-41. 2016.

WEN, Y.K.; KANG, Y.J. **Minimum Building Life-Cycle Cost Design Criteria I: Methodology**. Published in: *Journal of Structural Engineering*, p. 330-337, vl. 127. 2001.

XU, B. Dynamic non-probabilistic reliability-based topology optimization of truss with uncertain-but-bounded parameters. Published in: **Journa of Vibration and Control**, 21, 12, 2484-2496. 2015.

YANG, X.S. Firefly Algorithms for Multimodal Optimization. Published in: **Stochastic Algorithms: Foundations and Applications**. SAGA 2009. Lecture Notes in Computer Science, vol 5792, 169-178. 2009.

ZHANG, L.; LIU, L.; YANG, X.S.; DAI, Y. A Novel Hybrid Firefly Algorithm for Global Optimization. Published in: **PLOS ONE**, v. 11(9), pp. 1-17. 2016

ZHOU, M. Difficulties in truss topology optimization with stress and local buckling constraints. Published in: **Structural Optimization**, v. 11, pp. 134-136. 1996.