

#### 4.1 Considerações Iniciais

Este capítulo apresenta uma breve introdução à teoria de *wavelets* sob a ótica da análise de sinais. A todo momento estamos nos deparando com sinais, por exemplo: sinais sísmicos, sinais de rádio, imagens, entre outros. Esses sinais, para seu processamento e análise, contam com uma série de ferramentas, onde talvez a mais conhecida seja a transformada de Fourier, que representa um sinal através de funções senoidais de diferentes frequências. Através da transformada de Fourier, um sinal representado no domínio do tempo é transformado para o domínio da frequência.

A transformada *wavelet* apresenta-se como uma ferramenta alternativa para o processamento de sinais, mudando o paradigma de representação dos mesmos, ao utilizar funções base de suporte compacto (em vez das senoidais de Fourier) para transformar um sinal para o espaço de tempo-escala.

No caso de processamento de imagens, um dos pontos fortes da transformada *wavelet* vem do fato que com uma quantidade mínima de valores (em uma escala menor da imagem) é possível representar a imagem toda sem perdas relativas na maioria dos casos. Esses valores podem ser aproveitados na montagem do vetor de característica para representação de uma imagem.

As *wavelets* estão sendo utilizadas em inúmeras áreas, por exemplo; na mecânica de fluidos, computação numérica, análise de imagens, processamento de

sinais, sistemas de controle, fenômenos biológicos, medicina e psicologia. No futuro próximo, espera-se que a análise de *wavelets* seja uma ferramenta de análise e visualização como a transformada de Fourier. Nas próximas seções seguir apresenta-se uma breve introdução a esta interessante teoria, onde a abordagem utilizada é a de multiresolução.

## 4.2 Transformada de Fourier

Como foi mencionado no início deste capítulo, uma das técnicas mais populares no processamento de sinais é a transformada de Fourier, que tem como objetivo transformar um sinal (função) do domínio de espaço para o domínio de frequência [WANG, J. Z. (2000); GONZALEZ, R. C. & WOODS, R. E. (1992)].

A função responsável pela transformação é dada por:

$$F(u) = \int f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (4.1)$$

Esta equação corresponde à transformada de Fourier de um sinal contínuo  $f(t)$ , a qual apresenta algumas deficiências, entre elas o fato de que esta transformação não relaciona os intervalos de tempo com as frequências. Isto é devido ao fato de que a transformada está baseada na integração de toda a função para o cálculo de cada frequência. Esse não seria um problema se o sinal não mudasse durante o tempo (sinais estacionários), mas acontece que muitos sinais interessantes contém muitas características não estacionárias ou transitórias (fluxos, tendências, mudanças repentinas, início e final de um evento). Essas características geralmente são a parte mais importante do sinal.

Para solucionar esse problema Dennis Gabor no ano de 1946 adaptou a transformada de Fourier para analisar só uma pequena porção do sinal em um tempo, introduzindo a chamada transformada por janelas de Fourier (*Windowed Fourier Transform – WFT*). Nesse caso, uma janela de observação é deslocada no domínio do tempo e a transformada de Fourier da porção “visível” do sinal é calculada para cada posição da janela. Considerando  $j(t)$  a função que cumpre o papel de janela, pode-se definir a transformada por janelas de Fourier de um sinal contínuo  $f(t)$  como:

$$F(u,b) = \int j(t-b)f[t]e^{-i2\pi ut} dt \quad (4.2)$$

O problema é que uma vez definido o tamanho para a janela, esta permanece constante para todas as frequências. Pode acontecer que alguns sinais precisem de um enfoque mais flexível, onde o tamanho da janela possa mudar com o objetivo de detectar o conteúdo local da frequência [DAUBECHIES, I. (1990); GOMEZ, J. et al. (1997)].

### 4.3 Transformada Wavelet

Depois da transformada por janelas de Fourier, a utilização das *wavelets* é o passo lógico seguinte. Logo, pode-se interpretá-la como uma técnica por janelas com regiões de dimensão variável, onde as *wavelets*, diferentemente de Fourier, tem como base uma função de duração limitada, isso é, de suporte compacto, que é uma propriedade na qual seu domínio é diferente de zero em uma extensão finita e igual a zero em todo o resto. Isto torna interessante a utilização das *wavelets* no caso específico da análise de imagens, pois as mudanças de regiões ou bordas podem ser detectadas mais facilmente.

A definição de uma transformada *wavelet* considerando um sinal contínuo é dada por:

$$F(a,b) = \int f(t)\Psi_{a,b}(t)dt \quad (4.3)$$

Nesta equação os parâmetros  $a$  e  $b$  variam continuamente em  $\Re$ , sendo que as funções  $\Psi_{a,b}$  são denominadas *wavelets* e definidas da seguinte forma:

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (4.4)$$

A transformada *wavelet* para sinais contínuos é definida como:

$$F_{m,n}(a,b) = a_0^{-\frac{m}{2}} \int f(t)\Psi(a_0^{-m}t - nb_0) \quad (4.5)$$

Pode-se ver claramente que o comportamento desta função está baseada em dilatações e translações a partir de uma *wavelet* mãe  $\Psi$ . Em ambos os casos, essa *wavelet* mãe, deve satisfazer a propriedade:

$$\int \Psi(t)dt = 0 \quad (4.6)$$

Observando-se a equação 4.3, percebe-se que a transformada wavelet depende de dois parâmetros  $a$  e  $b$ , que correspondem às informações de escala e tempo respectivamente [DAUBECHIES, I. (1990); GOMEZ, J. et al. (1997); MISITI, M. et al. (2001)]

Segundo [DAUBECHIES, I. (1992)], dentro da transformada discreta de *wavelet* distinguem-se duas abordagens: sistemas redundantes discretos (frames) e o ortonormal (e outras) bases de *wavelets*. A segunda abordagem considera a estratégia de análise de multiresolução, desenvolvida por [MALLAT, S. (1989)].

### 4.3.1 Métodos Multiresolução

As primeiras construções de bases ortonormais de *wavelets* pareciam um pouco miraculosas. A situação mudou com a chegada da análise de multiresolução, formulada em 1986 por Mallat e Meyer. A multiresolução fornece um referencial onde permitem a construção de novas bases de *wavelets*. Quando Mallat trabalhou com *wavelets* de Meyer pela primeira vez, ele estava trabalhando com análise de imagens, onde a idéia de se estudar imagens em várias escalas simultaneamente era popular. Isso o estimulou a ver bases ortonormais de *wavelets* como uma ferramenta para descrever matematicamente o “incremento na informação” necessário para se ir de uma aproximação grosseira para uma aproximação com maior resolução [DAUBECHIES, I. (1990)].

Uma decomposição multiresolução permite obter uma interpretação invariante de escala da imagem. A escala de uma imagem muda em razão da distância entre a cena e o centro ótico da câmera. Quando a escala da imagem é modificada, a interpretação da imagem não deveria mudar. Uma representação multiresolução pode

ser parcialmente invariante em escala se a seqüência de parâmetros da resolução  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  varia exponencialmente [MALLAT, S. (1989)].

Para um melhor entendimento, utiliza-se o conceito de “espaço vetorial” da álgebra linear. Um espaço vetorial  $V$  é basicamente uma coleção de “objetos” (nomeados vetores, neste contexto) para os quais a adição e o produto escalar estão definidos. Assim é possível adicionar dois vetores, escalar um vetor por alguma constante e assim sucessivamente [STOLLNITZ, E. J. et al. (1996)]. É preciso definir uma base para cada espaço vetorial  $V_j$ . As funções base para o espaço  $V_j$  são denominadas funções escalares e são usualmente denotadas pelo símbolo  $f$ . Uma base simples para  $V_j$  é dada pelo conjunto de funções *scaling* escaladas e transladadas:

$$f_i^j(x) := f(2^j x - i), \quad i = 0, \dots, 2^j - 1$$

Onde

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se caso contrário} \end{cases}$$

A Figura 4.1 mostra duas aproximações de uma função contínua por funções *scaling*.

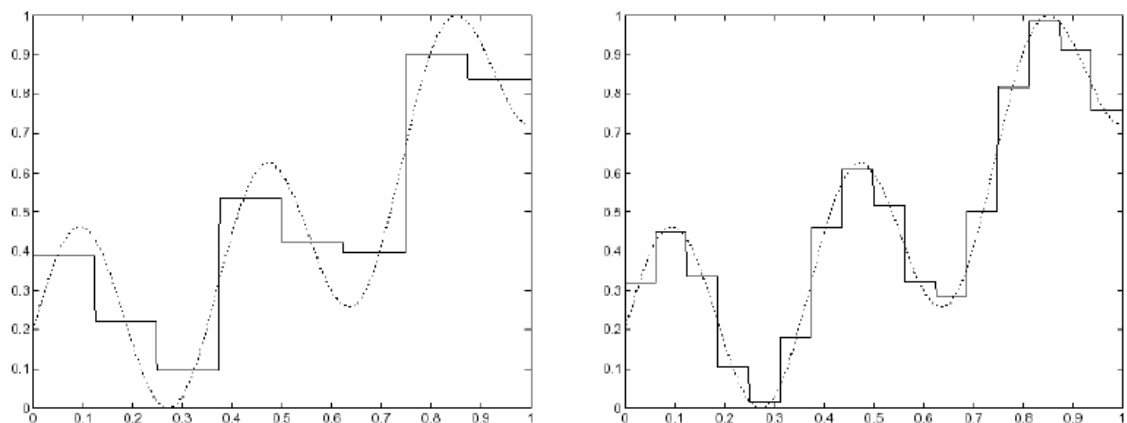


Figura 4.1: Uma função contínua  $f(x)$  (linhas pontilhadas) e a função de aproximação caixa (linhas sólidas) em duas resoluções. Na esquerda a aproximação grosseira  $A_0 f(x)$  e na direita a aproximação de maior resolução  $A_1 f(x)$  [DAVIS, G. M. & NOSRATINIA, A. (1998)].

O passo seguinte na construção da análise de multiresolução consiste em escolher um produto interno definido sobre os espaços de vetores  $V_j$ . Para o exemplo mostrado, o produto interno “padrão” é dado por:

$$\langle f | g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad (4.7)$$

Dois vetores  $u$  e  $v$  são ditos ortogonais sob um produto interno escolhido se  $\langle u | v \rangle = 0$ . É possível então definir um novo espaço vetorial  $W_j$  como complemento ortogonal de  $V_j$  em  $V_{j+1}$ . Em outras palavras,  $W_j$  é o espaço de todas as funções em  $V_{j+1}$  que são ortogonais a todas as funções em  $V_j$  no produto interno escolhido.

Uma coleção de funções  $\Psi_i^j(x)$  de  $W_j$ , são nomeadas *wavelets*. Estas funções base tem duas propriedades importantes:

- as funções base  $\Psi_i^j(x)$  de  $W_j$ , juntas às funções base  $f_i^j$  de  $V_j$ , formam uma base para  $V_{j+1}$ .
- cada função  $\Psi_i^j(x)$  de  $W_j$  é ortogonal a cada função base  $f_i^j$  de  $V_j$  no produto interno escolhido.

A Figura 4.2 ilustra graficamente a construção de  $V_j$  e  $W_j$

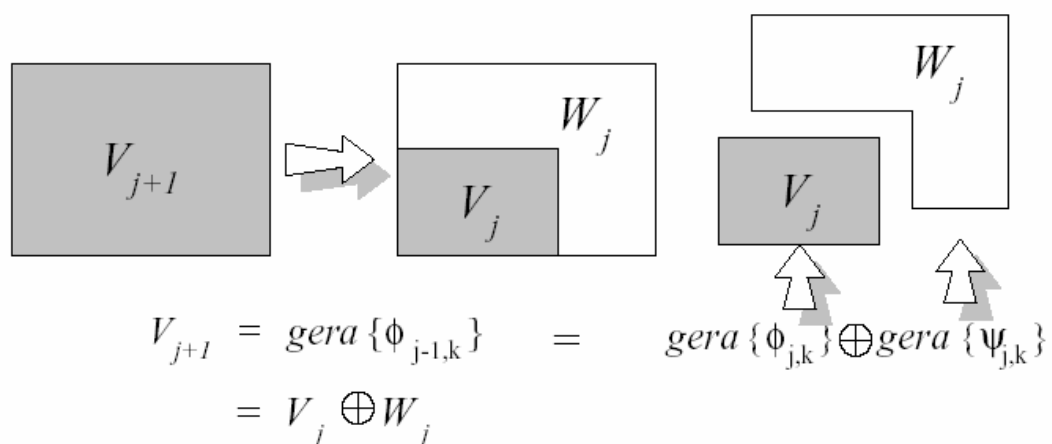


Figura 4.2: Geração do espaço superior em função de  $f(x)$  e  $y(x)$

Em resumo [DAUBECHIES, I. (1992)], a análise de multiresolução consiste de uma seqüência de espaços de aproximação sucessivos  $V_j$ . Mais precisamente, os subespaços fechados  $V_j$  satisfazem:

$$\dots V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \dots \quad (4.8)$$

sendo

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathfrak{R}) \quad (4.9)$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \quad (4.10)$$

Todos os espaços são uma versão escalada do espaço central  $V_0$ .

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_0 \quad (4.11)$$

e

$$f(x) \in V_0 \Rightarrow f(x-n) \in V_0, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}. \quad (4.12)$$

É preciso saber que  $f \in V_0$

$$f_{0,n}(x) = f(x-n), n \in \mathbb{Z} \text{ constitui uma base ortonormal para } V_0. \quad (4.13)$$

A propriedade indicada pela equação 4.11 expressa que todos os espaços estão relacionados por escala a um mesmo espaço  $V_0$  (este é o aspecto da “multiresolução”).

Ainda por causa dessa propriedade, se  $f(x) \in V_j$ , então,  $f(x - 2^j n) \in V_j$ , para todo  $n \in Z$ . As condições indicadas pelas equações 4.13 e 4.11 implicam que  $\{f_{j,n}\}_{j,n} \in Z$  é uma base ortonormal para  $V_j$  para todo  $j \in Z$ . Se definirmos  $P_j$  como o operador projeção ortogonal sobre  $V_j$ , a condição 4.10 assegura que  $\lim_{j \rightarrow \infty} P_j f = f$  para todo  $f \in L^2(\mathfrak{R})$ .

Cada  $V_j$  pode ser interpretado como um espaço de aproximação sucessiva: a aproximação de  $f \in L^2(\mathfrak{R})$  na resolução  $2^j$  é definida como a projeção de  $f$  sobre  $V_j$  e quanto maior  $j$ , mais fina é a resolução obtida. A condição 4.11 significa que nenhuma escala é privilegiada. Os detalhes adicionais necessários para aumentar a resolução de  $2^j$  para  $2^{j+1}$  são dados pela projeção de  $f$  sobre o complemento ortogonal de  $V_j$  em relação a  $V_{j+1}$  o qual é denotado por  $W_j : V_j \oplus W_j = V_{j+1}$  [DAUBECHIES, I. (1990)].

### 4.3.2 Transformada *Wavelet* de Haar

A análise com *wavelets* pode estar baseada no enfoque desenvolvido por Haar [MEYER, Y. (1993)]. Em 1909, A. Haar descreveu uma base ortonormal de *wavelets* definida sobre o domínio  $[0,1]$ , ou seja  $h_0(x), h_1(x), \dots, h_n(x), \dots$  outras bases, além das de Fourier, tal que para qualquer função contínua  $f(x)$  sobre o intervalo  $[0,1]$ , a série

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle f, h_j \rangle h_j(x) \quad (4.14)$$

converge a  $f(x)$  de forma uniforme sobre  $[0,1]$ . Aqui  $\langle u, v \rangle$  denota o produto interno de  $u$  e  $v$ :

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x) \overline{v(x)} dx \quad (4.15)$$

onde  $\overline{v}$  é o conjugado complexo de  $v$  o qual é igual a  $v$  se a função é real.



Uma versão da construção de Haar é a seguinte:

$$h(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0, 0.5) \\ -1, & x \in [0.5, 1) \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (4.16)$$

$$h_n(x) = 2^{j/2} h(2^j x - k) \quad (4.17)$$

onde  $n = 2^j + k, k \in [0, 2^j), x \in [k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$ .

Existem limitações no uso da construção de Haar. Como as funções base de Haar são funções de passos descontínuos, não são muito adequadas para a análise de funções estáveis com derivações contínuas. Visto que as imagens geralmente contêm regiões estáveis, a transformada *wavelet* de Haar não provê resultados satisfatórios em muitas aplicações com imagens [WANG, J. Z. (2000)].

### 4.3.3 Transformada *Wavelet* de Daubechies

Outro tipo de base para *wavelets* é a proposta por [DAUBECHIES, I. (1992)]. Para cada inteiro  $r$ , a base ortonormal para  $L^2(\mathfrak{R})$  está definida como

$$\mathbf{f}_{r,j,k}(x) = 2^{j/2} \mathbf{f}_r(2^j x - k), j, k \in Z \quad (4.18)$$

onde a função  $\mathbf{f}_r(x)$  em  $L^2(\mathfrak{R})$  tem a propriedade que  $\mathbf{f}_r(x-k) | k \in Z$  é uma base seqüencial ortonormal em  $L^2(\mathfrak{R})$ . Aqui,  $j$  é o índice de escala,  $k$  é o índice de translação e  $r$  é o índice de filtragem.

Então, a tendência  $f_j$  na escala  $2^{-j}$  de uma função  $f \in L^2(\mathfrak{R})$  está definida como

$$f_j(x) = \sum_k \langle f, \mathbf{f}_{r,j,k} \rangle \mathbf{f}_{r,j,k}(x) \quad (4.19)$$

Os detalhes ou flutuações são definidos por

$$d_j(x) = f_{j+1}(x) - f_j(x) \quad (4.20)$$

Para analisar esses detalhes em uma dada escala, define-se uma base ortonormal  $\mathbf{y}_r(x)$  com propriedades similares às de  $\mathbf{f}_r(x)$  descritas anteriormente.

As funções  $\mathbf{f}_r(x)$  e  $\mathbf{y}_r(x)$ , denominadas *wavelet* pai (função *scaling*) e *wavelet* mãe (função *wavelet*), respectivamente, são as funções protótipos necessárias para a análise de *wavelets*. As famílias de *wavelets*, como aquelas definidas na equação 4.18 são geradas a partir da *wavelet* pai ou da mãe mudando a escala e translação no tempo (ou espaço em processamento de imagens).

A base ortonormal de Daubechies tem as seguintes propriedades:

- $\mathbf{y}_r$  tem o intervalo de suporte compacto  $[0, 2r+1]$ ;
- $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y}_r(x) dx = \dots = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \mathbf{y}_r(x) dx = 0$ .

As *wavelets* de Daubechies fornecem excelentes resultados no processamento de imagens devido às propriedades acima indicadas [WANG, J. Z. (2000)]. As funções *wavelets* com suporte compacto podem ser implementadas mediante um filtro de longitude finita. Além disso, o suporte compacto permite a localização no domínio espacial. Devido ao fato das funções base de *wavelets* terem derivações contínuas, é possível decompor uma função contínua mais eficientemente com os objetos da borda previstos. As *wavelets* mãe são utilizadas para determinar os detalhes de um sinal e a informação de tendência é armazenada nos coeficientes obtidos pelas *wavelets* pai.

As *wavelets* de Daubechies são usualmente implementadas numericamente através de filtros de espelho quadráticos (QMF – *Quadrature Mirror Filters*) [MEYER, Y. (1993)]. A análise de multiresolução da tendência e flutuação de uma função é implementada mediante sua convolução com um filtro passa-baixa e um filtro passa-alta que são versões da mesma *wavelet*. A transformada *wavelet* de Haar é um caso especial da *wavelet* de Daubechies com  $r=2$ , onde as equações:

$$F_0(x(n)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x(n) + x(n+1)) \quad (4.21)$$

$$F_1(x(n)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x(n) - x(n+1)) \quad (4.22)$$

provêm a transformada do sinal  $x(n), n \in Z$  mediante a *wavelet* de Haar. Os filtros passa-baixa (equação 4.23) e passa-alta (equação 4.24) correspondentes são:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \quad (4.23)$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \quad (4.24)$$

As transformadas *wavelet* de Daubechies com  $r > 2$  apresentam uma melhor concentração da energia preservando mais a informação de tendência nos sinais ao se considerar apenas a parte do filtro passa-baixa. Por exemplo, para  $r=4$  a transformada é denominada de *wavelet* de Daubechies-4 onde os filtros de passa-baixa (equação 4.25) e de passa-alta (equação 4.26) correspondentes são [PETERS, T. M. & WILLIAMS, J. (1998)]:

$$\left\{ \frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{2}}, \frac{(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}} \right\} \quad (4.25)$$

$$\left\{ -\frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}}, \frac{(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{2}} \right\} \quad (4.26)$$

#### 4.3.4 Extensões para Dimensões Maiores

As transformadas *wavelet* uni-dimensionais descritas até agora podem ser estendidas para dimensões maiores de várias maneiras.

Uma forma bastante natural, de complexidade razoável, de estender a transformada para domínios 2D é através do produto tensorial [GOMEZ, J. et al. (1997); STOLLNITZ, E. J. et al. (1996)].

Observa-se então o aparecimento de três diferentes tipos de funções de *wavelets*: duas componentes cruzadas e uma componente pura. É possível interpretar como componentes *wavelets* horizontais (quando compostas com funções de escala verticais), *wavelets* verticais (quando compostas com funções de escala horizontais) e *wavelets* diagonais (quando são o produto tensorial de funções de *wavelets* horizontais e verticais) [GOMEZ, J. et al. (1997)].

O algoritmo para a transformada *wavelet* bi-dimensional explora a propriedade de separabilidade advinda da sua construção pelo produto tensorial. Dessa maneira, tanto o algoritmo de decomposição (Figura 4.3 para 2D), quanto o algoritmo de reconstrução, podem ser implementados em duas dimensões com a aplicação dos algoritmos uni-dimensionais correspondentes, nas linhas e nas colunas da imagem.

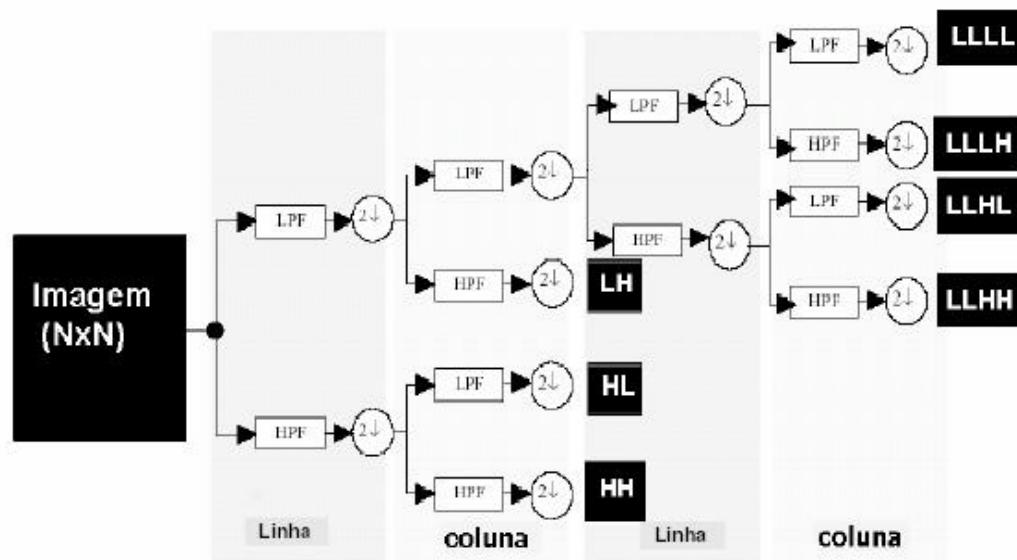


Figura 4.3: Processo de decomposição ao aplicar a transformada *wavelet* em um domínio 2D [ALBUS, E. et al. (2001)].

## 4.4 Wavelets e Extração de Características

A análise multi resolução de *wavelets* apresenta muitas funcionalidades vantajosas que podem ser aproveitadas no processo de extração de características das imagens. Além da definição da função *wavelet* adequada ao processamento das imagens de faces humanas, também é importante estabelecer as técnicas de seleção e extração de características a serem utilizadas.

Nesta seção são apresentados aspectos a serem considerados na geração do conjunto de vetores de características para o conjunto de imagens de faces humanas, utilizando os filtros de *wavelets*. Isto é, são considerados os processos de transformação, extração de característica e avaliação do conjunto de vetores gerados. A seguir são descritas algumas atividades e considerações referentes a esses passos no processo de extração de características considerando abordagens de multiresolução de *wavelets*.

### 4.4.1 Similaridade Semântica das Imagens

Na maioria dos sistemas de recuperação de imagens por conteúdo, o usuário não está interessado nas características de baixo nível das imagens (cor, textura, forma), isso porque o usuário geralmente pensa em termos de conceitos semânticos. Por exemplo, alguma imagem que ele se lembra de já ter analisado e que deseja recuperar no banco de imagens, ou mesmo buscar as imagens mais parecidas com uma determinada imagem sob análise.

Nesse caso é preciso desenvolver sistemas que tenham a capacidade de armazenar e recuperar as imagens em termos de conceitos semânticos. Em [BRADSHAW, B. (2000)] existe uma abordagem para recuperação de imagens baseada na semântica, aplicando um enfoque probabilístico. O trabalho de [VALAYA, A. (2000)] aproveita as características de baixo nível para aplicá-las no desenvolvimento da categorização semântica das imagens.

Wang [WANG, J. Z. (2000)] desenvolveu um enfoque sensível à semântica visando solucionar problemas de busca em uma base de imagens de propósito geral. Os métodos de classificação semântica são usados para categorizar imagens, tal que esses métodos de busca semântica sejam aplicáveis a cada uma das categorias. Além disso, o sistema pode limitar o alcance da busca a um subconjunto da base original para facilitar um processamento rápido. Dessa forma, o grande problema é procurar um método

adequado de extração de características junto a uma métrica de casamento (*matching*) que tenha a capacidade de diferenciar cada uma das classes semânticas.

Uma abordagem recente que tenta fazer uma classificação semântica das imagens é apresentada em [WANG, J. Z. (2001)]. Nesse trabalho o processo de segmentação aplica a transformada *wavelet* a pequenos blocos 4 x 4 para extrair um vetor de características para cada bloco. Em seguida utiliza o algoritmo de agrupamento *k-means* [THEODORIDIS, S. (1999)] diminuindo significativamente o cálculo computacional da segmentação.

No presente trabalho, o problema de definir o domínio semântico de recuperação de imagens é dado pela semelhança das imagens de faces humanas em conjuntos de imagens de faces. Por exemplo, imagens de faces podem formar um grupo semântico e cada vez que seja feita uma consulta, o sistema deve fornecer como respostas as imagens correspondentes ao mesmo grupo semântico.

#### 4.4.2 Escolha da Wavelet Analisadora

A análise multiresolução de *wavelets* [MALLAT, S. (1989)] é uma estratégia que se mostra bastante adequada para a extração de características das imagens pelas seguintes razões:

- poucos coeficientes representam bem a imagem,
- armazena informações de arestas e bordas,
- praticamente não dependem da resolução original.

Em geral o foco de muitas pesquisas recentes em *wavelets* é criar uma função de *wavelet* mãe para obter uma descrição útil, eficiente e informativa do sinal de interesse. Não é fácil planejar um procedimento uniforme para desenvolver a melhor *wavelet* mãe ou transformada *wavelet* para um determinado sinal. Mas, considerando as características gerais das funções *wavelets* é possível determinar quais das funções *wavelets* são mais adequadas para uma determinada aplicação.

Características de representação no tempo e escala, assim como o fato de serem compactas e de possuírem energia finita fazem com que as funções *wavelets* sejam aplicáveis para analisar não só sinais estacionários, mas também para decompor sinais dinâmicos, de tempo variável ou sinais transientes.

Do ponto de vista prático, existem dois tipos de decomposição baseada em *wavelets*: a primeira que é denominada como redundante (*Continuous Wavelet Transform – CWT*) ou *wavelets* de frames, e a segunda que é denominada como não redundante (bases de *wavelets* ortogonal, semi-ortogonal ou bi-ortogonal). As *wavelets* redundantes são preferencialmente usadas em análises de sinais, extração e detecção de características, já as *wavelets* não redundantes são mais adequadas quando precisa-se realizar algum tipo de redução de informação ou quando a ortogonalidade da representação é um fator de importância. Porém, escolher entre essas duas opções não é simples devido as considerações computacionais que devem ser feitas [UNSER, M. & ALDROUBI, A. (1996)].

As propriedades das *wavelets* podem ser muito bem aproveitadas em várias aplicações. Unser [UNSER, M. & ALDROUBI, A. (1996)] define algumas dessas propriedades e o contexto de aplicação em que elas podem ser utilizadas: (a) *wavelets* como bancos de filtros, (b) *wavelets* como filtros multiescala de casamento, (c) *wavelets* e localização Tempo-Frequência, (d) bases de *wavelets* e (e) *wavelets* com modelo de percepção.

Existe uma variedade de funções *wavelets* que tem comportamento distinto de acordo com o domínio em imagens. As *wavelets* de Daubechies [DAUBECHIES, I. (1992)] apresentam-se como as que melhor caracterizam os detalhes através das *wavelets* mãe que ficam nas sub-bandas de baixa resolução (os coeficientes de *wavelets*) enquanto que as *wavelets* pai caracterizam a tendência do sinal [WANG, J. Z. (2000)]. Essas propriedades podem ser aproveitadas para caracterizar uma imagem e gerar o espaço de características aplicando descritores estatísticos sobre novos espaços.

#### 4.4.3 Geração do Espaço de Características

A parte crítica do processo de recuperação de imagens é definir o espaço de características a ser utilizado para realizar o casamento entre atributos similares. Espaços de características comuns incluem bordas, contornos, superfícies e outras características salientes tais como esquinas, intersecção de linhas e pontos de alta curvatura da imagem.

O espaço de características é a representação dos dados que serão usados no processo de recuperação de imagens por conteúdo. A eleição dos espaços de

características determina o que será casado no momento da busca de imagens mediante a métrica de semelhança que determina quão parecidas são duas imagens.

No caso da aplicação da transformada *wavelet* para a geração do espaço de características, tem que se efetuar uma análise estatística em cada uma das subbandas onde cada elemento do vetor poderia corresponder a uma descrição de cada sub-imagem, de maneira que o conteúdo presente na imagem seja corretamente descrito pelo vetor. Para efetuar essa análise estatística pode-se utilizar os coeficientes estatísticos como a energia, desvio-padrão, entre outras.

Uma descrição mais completa, mas computacionalmente cara, é feita através de uma matriz de co-ocorrência (no caso de características de textura). Uma vez que a matriz de co-ocorrência é calculada são determinados alguns parâmetros que permitem estabelecer o relacionamento de textura em uma imagem.

No caso de se trabalhar com momentos invariantes, uma forma de gerar o vetor de características é calcular  $n$  níveis de decomposição da *wavelet* em escalas  $2^j, 1 \leq j \leq n$ , para então aplicar os momentos invariantes  $f_i^j, 1 \leq i \leq 7$  (momentos de Hu), a cada uma das escalas. Para o caso de gerar 4 níveis de *wavelets*, então, ter-se-iam 28 números reais como assinatura para cada imagem. [DO, M. N. et al. (1999)].

#### 4.5 Considerações Finais

Neste capítulo foi mostrado a transformada *wavelet* considerando sua evolução a partir da transformada de Fourier e sua posterior formalização matemática.

É importante observar que a transformada *wavelet* permite a análise local do sinal. Isso ocorre devido às funções base de suporte compacto. Especial atenção tem-se dado a escolha da função.

Foram apresentados alguns aspectos importantes a serem considerados no processo de extração de características mediante a aplicação da transformada *wavelet*, mostrando pesquisas desenvolvidas nesta área, que visam solucionar os problemas existentes na recuperação de imagens por conteúdo.