Universidade de São Paulo - USP
Escola de Engenharia de São Carlos - EESC
Departamento de Engenharia Elétrica

Análise de Fibras Ópticas Microestruturadas pelo Método da Sobre Relaxação Sucessiva

Autor: Danilo Henrique Spadoti

Dissertação de mestrado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica

DEDALUS - Acervo - EESC
31100047384

Orientador: Prof. Dr. Murilo Araujo Romero

EESC - USP
Biblioteca
CAMPUS DE S. CARLOS

Serviço de Pós-Graduação EESC/USP
EXEMPLAR REVISADO
Data de entrada no Serviço 28/10/04
Ass.:

São Carlos
2004

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **DANILO HENRIQUE SPADOTI**

Dissertação defendida e julgada em 27-08-2004 perante a Comissão Julgadora:

Prof. Associado **MURILO ARAÚJO ROMERO (Orientador)** — Aprovado
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Prof. Dr. **BEN-HUR VIANA BORGES** — Aprovado
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

Prof. Dr. **HYPOLITO JOSÉ KALINOWSKI** — Aprovado
(Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná/CEFET – PR)

Prof. Associado **MURILO ARAUJO ROMERO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica

Profa. Titular **MARIA DO CARMO CALIJURI**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Dedico este trabalho,

A Deus

Aos meus familiares:

Luiz, Sueli, Giovanna e à Avó Zola.

À minha namorada:

Ana Rita Gatto

e aos amigos.

Pela força e carinho nos momentos difíceis.

Agradecimentos

Ao Professor Doutor Murilo Araujo Romero, pela confiança e pelos sábios ensinamentos.

Ao Professor Doutor Ben-Hur Viana Borges, pelas sugestões e incansáveis cobranças.

Ao Professor Doutor Amílcar Careli César, pela valiosa colaboração.

Ao Doutor e Amigo Carlos Alberto De Francisco, pelas horas de consultoria e incentivo.

À minha namorada Ana Rita Gatto, pelas simulações e paciência.

Aos colegas do Curso de Pós-Graduação e funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica, pelo auxílio e companhia durante a realização deste trabalho.

Ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Meus sinceros agradecimentos.

"Procure ser uma pessoa de valor, ao invés de tentar ser alguém de sucesso."
Albert Einstein

"O importante não é o que fizeram de você, mas o que você vai fazer com o que fizeram de você".
Sartre

Sumário

Sumário i

Resumo ii

Abstract iii

Lista de figuras iv

Lista de tabelas vii

1. Introdução 1

2. Fibras Microestruturadas 7

3. Método da Sobre Relaxação Sucessiva - SOR 14

3.1. Aproximação em Diferenças Finitas 14

3.2. Formalismo Matemático para o Método SOR 17

4. Validação do método SOR 26

4.1. Fibra óptica índice degrau 26

4.2. Fibra óptica tipo D 34

4.3. Guia tipo rib 39

5. Estudo das fibras ópticas microestruturadas pelo método SOR 46

5.1. Comparação entre os formalismos com relação ao cálculo do índice efetivo 46

5.2. Comparação entre os formalismos com relação ao cálculo da dispersão cromática 54

6. Conclusões 62

7. Bibliografia 64

I. Apêndice – Diferenças Finitas 69

I.1. Aproximação em diferenças finitas de primeira e segunda ordem 70

I.2. Aproximação em diferenças finitas de quarta ordem 72

II. Apêndice – Formulação do método SOR 75

II.1. Obtenção da Equação Vetorial de Helmholtz. 75

II.2. Discretização em Diferenças Finitas 80

III. Apêndice - Cálculo da constante de propagação - β 94

Resumo

Neste trabalho é investigada uma nova classe de fibras ópticas, baseada no conceito de cristais fotônicos, denominada fibra microestruturada. Sua geometria particular, com materiais de diferentes índices de refração estruturados de forma periódica, permite uma alta flexibilidade de projeto. Consegue-se, portanto, ajustar, conforme a necessidade, as propriedades de dispersão, área efetiva, perdas por confinamento, entre outras, o que torna estas fibras especialmente úteis para aplicações em comunicações ópticas.

Para o estudo das propriedades das fibras microestruturadas foi implementado, em diferenças finitas, o método numérico da sobre relaxação sucessiva - SOR com as três aproximações possíveis para a equação de Helmholtz: escalar, semivetorial e vetorial completa. Adicionalmente, no intuito de melhorar alguns aspectos do formalismo SOR, como precisão e velocidade de convergência, foi proposta a aproximação em diferenças finitas de quarta ordem.

Abstract

This work investigates a new class of optical fibers based on the photonic crystal concept. The main advantage of these fibers is the flexibility offered by their particular geometry, which is formed by materials of different refractive index periodically arranged in a specific pattern. The dispersion properties of these microstructured optical fibers are analyzed by using the finite difference Successive Over Relaxation (SOR) method, where three different formalisms are implemented under the scalar, semivectorial and full vectorial approximations. Finally, a fourth order approximation for the SOR method is proposed in order to improve the convergence and precision.

Lista de figuras

FIGURA 1 Vista superior da estrutura periódica com a presença de um defeito..... 2

FIGURA 2 Seção transversal de uma fibra microestruturada com núcleo sólido (IG) [7]. 3

FIGURA 3 Fibra com banda fotônica proibida núcleo de ar (PBG) [14]..... 4

FIGURA 4 Exemplo da mudança da estrutura da rede em função dos fatores *f* e *M* [18]. (a) Duas estruturas com diferente fator de preenchimento *f* e mesmo fator de escala *M*, ($a/\Lambda \neq a'/\Lambda$); (b) Duas estruturas com diferente fator de escala *M* e mesmo fator de preenchimento *f*, ($a/\Lambda = a'/\Lambda'$)..... 7

FIGURA 5 Fibra com o raio dos furos variando com relação ao eixo central..... 12

FIGURA 6 Representação esquemática dos pontos na vizinhança de x..... 15

FIGURA 7 Representação esquemática da vizinhança do ponto central x..... 16

FIGURA 8 Fluxograma representativo do método SOR..... 24

FIGURA 9 Componentes do campo magnético para a fibra índice degrau com guiamento fraco; (a) contorno da componente H_x; (b) contorno da componente H_y; (c) componente H_x em três dimensões; (d) componente H_y em três dimensões..... 28

FIGURA 10 Curvas de convergência comparativa para os formalismo baseados no método SOR. Índice efetivo normalizado *b* em função de diferentes passos de discretização $\Delta x = \Delta y$..... 29

FIGURA 11 Erro relativo para os diversos formalismos empregando o método SOR, como função de diferentes passos de discretização Δ_x..... 30

FIGURA 12 Componentes do campo magnético para a fibra índice degrau; (a) contorno da componente H_x; (b) contorno da componente H_y; (c) componente H_x em três dimensões; (d) componente H_y em três dimensões..... 32

FIGURA 13 Convergência do parâmetro b em função do número de iterações, para diferentes valores do parâmetro ω..... 33

FIGURA 14 Secção transversal da fibra óptica tipo D..... 34

FIGURA 15 Componentes do campo magnético, para a fibra tipo D, com aproximação de segunda ordem do formalismo vetorial, para $d = 0$. (a) contorno da componente H_x; (b) contorno da componente H_y; (c) componente H_x em três dimensões; (d) componente H_y em três dimensões..... 36

FIGURA 16 Componentes de campo magnético para a fibra tipo D, com formalismo vetorial de quarta ordem, para d = 1,0. (a) contorno da componente H_x; (b) contorno da componente H_y; (c) componente H_x em três dimensões; (d) componente H_y em três dimensões..... 37

FIGURA 17 Variação de L_π em função do parâmetro *d*..... 38

FIGURA 18 Desenho esquemático do guia de onda tipo rib..... 39

FIGURA 19 Comparação entre a componente de campo magnético H_x. (a) e (b) formalismo de quarta ordem com a presença da singularidade. (c) e (d) formalismo de quarta ordem com variação gradativa do índice de refração guia-ar..... 43

FIGURA 20 Componentes do campo magnético para o guia tipo rib geradas a partir do formalismo SOR vetorial de segunda ordem. (a) componente majoritária H_x em três dimensões, (b) componente minoritária H_y em três dimensões, (c) contorno da componente H_x (d) contorno da componente H_y..... 44

FIGURA 21 Componentes de campo magnéticas para o guia tipo rib geradas a partir do formalismo SOR vetorial de segunda ordem, para diferentes *t*. (a) componente majoritária H_x para t = 0,1μm e (b) componente minoritária H_y para t = 0,1μm; (c) contorno da componente H_x para t =0,9μm e (d) contorno da componente H_y para t =0,9μm..... 45

FIGURA 22 Cálculo do índice efetivo em função do comprimento de onda para *S* = 0,4, 0,8, 1,2 e 1,6. (a) *f* = 0,90; (b) *f* = 0,75; (c) *f* = 0,60; (d) *f* = 0,45..... 48

FIGURA 23 Diferença relativa percentual entre os valores do índice efetivo gerados pelos formalismos escalar e semivetorial com relação ao vetorial completo, para quatro valores distintos de *f*..... 51

FIGURA 24 Representação esquemática da região do núcleo na fibra microestruturada. 52

FIGURA 25 Fator de confinamento do campo eletromagnético para *f* = 0,90; 0,75; 0,60 e 0,45..... 53

FIGURA 26 Índice efetivo em função do comprimento de onda para a fibra microestruturada com *f* = 0,9 e *S* = 0,4, 0,8, 1,2 e 1,6; (a) n_{Si} = 1,45 (b) n_{Si} = valor resultante da formula de Sellmeier..... 56

FIGURA 27 Cálculo da dispersão cromática para *f* = 0,75. (a) dispersão de material, dispersão de guia de onda dispersão e dispersão cromática dada pela equação (5.5); (b) Comparação entre dispersão cromática dada pela equação (5.4) com a dispersão cromática dada pela equação (5.5)..... 57

FIGURA 28 Cálculo da dispersão cromática para f = 0,90. (a) dispersão de material, dispersão de guia de onda dispersão e dispersão cromática dada pela equação (5.4); (b) Comparação entre dispersão cromática dada pela equação (5.3) com a dispersão cromática dada pela equação (5.4) 57

FIGURA 29 Dispersão guia de onda em função do parâmetro S, pelo formalismo vetorial completo, para quatro diferentes fibras 58

FIGURA 30 Dispersão guia de onda em função de λ pelo formalismo vetorial completo para quatro diferentes fibras. 59

FIGURA 31 Cálculo da dispersão cromática. (a) $f = 0,90$ e Λ = 1,0μm; (b) f = 0,45 e Λ = 1,0μm. 60

FIGURA 32 Comparação entre os resultados gerados pelos formalismos no cálculo da dispersão cromática para f = 0,45 e f = 0,90. 60

FIGURA 33 Malha discretizada em diferenças finitas. 70

Lista de tabelas

TABELA 1 Comparação entre os formalismos do método SOR para a fibra com guiamento fraco 27

TABELA 2 Comparação entre os resultados fornecidos pelo método SOR para a fibra com alto degrau de índice de refração 29

TABELA 3 Comparação entre os índices efetivos, fornecidos pelas diferentes implementações, para fibra tipo D, calculado para componente majoritária H_x do modo fundamental. 35

TABELA 4 Comparação entre os formalismos do método SOR com aproximação de segunda ordem para modos TM. 40

TABELA 5 Comparação entre os formalismos do método SOR com aproximação de quarta ordem para modos TM. 41

TABELA 6 Diferentes valores simulados no projeto das fibras microestruturadas 49

TABELA 7 Valores da janela computacional, $L_x = L_y$ e da discretização, $\Delta_x = \Delta_y$ 50

1. Introdução

Nas últimas décadas, o controle das propriedades ópticas em materiais tem sido amplamente pesquisado. É possível ordenar materiais de maneira a formar estruturas periódicas capazes de orientar a propagação da luz. Estas estruturas são conhecidas como *cristais fotônicos* [1].

Este tipo de material permitiu o desenvolvimento de uma nova categoria de fibras ópticas, denominadas **fibras microestruturadas** (*MOF – microstructured optical fibers*). Por apresentarem características próprias e inovadoras, possibilitam solucionar problemas atualmente existentes em sistemas de comunicações ópticas, estimulando, assim, inúmeras pesquisas na comunidade científica.

É importante, antes do estudo da fibra, realizar uma análise sucinta do cristal fotônico, que é seu embasamento. Este pode ser definido como uma rede microscópica de materiais, com diferentes índices de refração, estruturada periodicamente na escala do comprimento de onda óptico [2]. O cristal fotônico está para o fóton assim como o cristal semicondutor está para o elétron [3].

Purcell [4], em 1946, verificou que era possível alterar substancialmente as propriedades de radiação de uma onda eletromagnética. Esta idéia, no domínio óptico, foi se desenvolvendo ao longo dos anos, e, em 1987, Yablonovitch [5] introduziu o conceito de banda fotônica proibida, em analogia às bandas eletrônicas proibidas em cristais semicondutores. Fleming e co-autores [6], em 1999, fabricaram o primeiro cristal fotônico tridimensional, com banda proibida numa faixa de comprimento de onda que abrangia desde 1,35μm até 1,95μm.

Essencialmente, pode-se projetar e construir cristais fotônicos com bandas fotônicas proibidas que não permitem a propagação da luz em certas direções e em freqüências específicas, agindo como um perfeito espelho para o fóton [1]. Ajustando-se adequadamente as dimensões da rede, a banda proibida no cristal pode apresentar propriedades distintas para diferentes polarizações de ondas eletromagnéticas. Especificamente, características de polarização elétrica transversal (TE) e polarização magnética transversal (TM) podem ser completamente diferentes. Em particular, pode-se ter banda proibida para uma polarização e não para outra [1].

A idéia de guiamento de luz em cristais fotônicos baseia-se na quebra da periodicidade do cristal, criando-se assim um defeito na estrutura, conforme verificado na Figura 1. Nesse defeito pode ocorrer a existência de um modo de propagação eletromagnético com uma freqüência (isto é, energia) permitida dentro da banda proibida. Devido à existência da banda fotônica proibida, a luz permanece confinada dentro do defeito, mantendo o confinamento mesmo na presença de curvaturas [1].

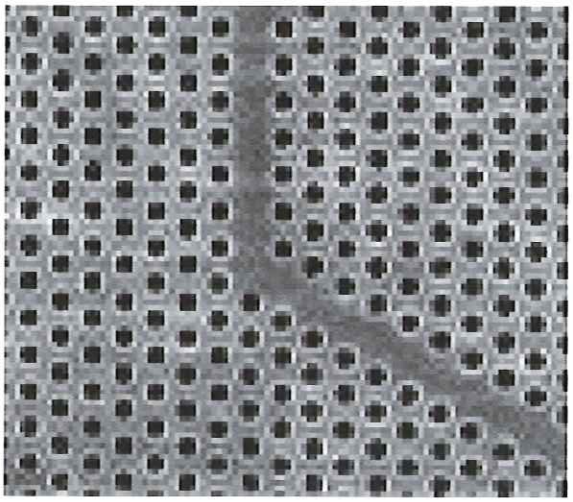


FIGURA 1 Vista superior da estrutura periódica com a presença de um defeito

Entre as aplicações possíveis para cristais fotônicos podem-se citar filtros, ressoadores, lasers, guias de onda, entre outras. A idéia de utilizar o cristal fotônico como guia de onda é a base da proposição de um novo tipo de fibra óptica, de interesse neste trabalho.

A fabricação dessas fibras foi primeiramente relatada por Knight e co-autores [7] em 1996, que a nomeou fibra de cristal fotônico, visualizada na Figura 2. Neste caso particular, a fibra óptica baseada em cristal fotônico consiste de um bastão com núcleo de sílica pura e com casca de sílica perfurada ao longo de seu comprimento por canais de ar de diâmetro *d*, arranjados de forma periódica, com espaçamento entre os centros dos furos de ar denominado *pitch* (Λ) [7].

Vale mencionar que, na literatura, ainda não há uma padronização na nomenclatura das fibras baseadas em cristais fotônicos. Alguns autores, com a justificativa de que o arranjo dos furos de ar na casca das fibras não precisa ser necessariamente periódico para que ocorra o guiamento da luz, preferem chamá-las

fibras perfuradas (*HF – holey fibers*) [8], ou fibras microestruturadas (*MOF – microstructured optical fibers*) [9], [10]. Estes termos são utilizados para classificar as fibras paralelamente ao de fibra de cristal fotônico (*PCF - photonic-crystal fibers*) [11], [12]. Neste trabalho, será utilizada a denominação fibra microestruturada.

Na fibra com o núcleo sólido pode-se explicar o guiamento da luz com base na diferença de índice de refração, ou seja, no guiamento por índice (*IG - index-guiding*) [10]. Nessa fibra, o guiamento da luz é obtido pois o índice de refração da área central (núcleo) é maior do que o índice de refração médio do conjunto ao redor do núcleo (casca) [12]. As propriedades dessas fibras microestruturadas assemelham-se às tradicionais fibras índice degrau. Entretanto, ocorrem modificações importantes como resultado da complexidade da geometria da casca [12], [13].

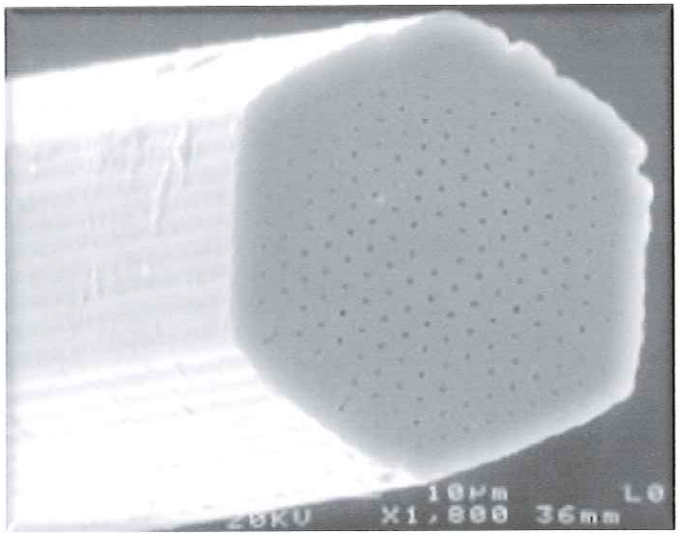


FIGURA 2 Seção transversal de uma fibra microestruturada com núcleo sólido (IG) [7].

No ano de 1999, Cregan e co-autores [14] demonstraram uma outra forma possível para as fibras microestruturadas, a qual apresentava o núcleo vazado por ar, exemplificada na Figura 3. O mecanismo de guiamento da luz, nesse caso, pode ser explicado através do conceito de banda proibida. O núcleo da fibra, modificado pela exclusão de sete tubos centrais, forma o defeito ao longo do qual a luz será guiada. Esta região central modificada fica composta por ar, portanto, com menor índice de refração do que a casca [13], [14]. Esta fibra possui características únicas devido ao mecanismo de guiamento não-usual, e é conhecida como fibra com banda fotônica proibida (*PBG –*

photonic bandgap). Para sua análise faz-se necessário investigar o diagrama de bandas de energia, não sendo de interesse nesse trabalho.

A perspectiva de guiar luz na região de ar é interessante, pois serão minimizados efeitos como a dispersão cromática e a absorção óptica [13]. Essa nova fibra sinaliza um futuro promissor na criação de sensores, no projeto de lasers, na espectroscopia, entre outras aplicações.

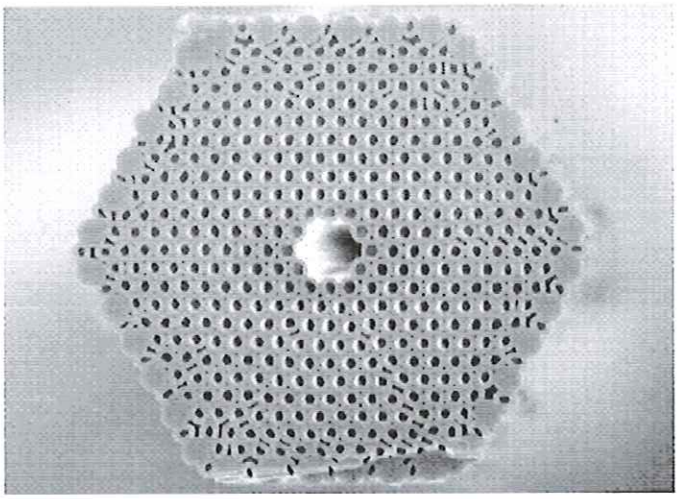


FIGURA 3 Fibra com banda fotônica proibida núcleo de ar (PBG) [14].

Diversos métodos numéricos encontrados na literatura são capazes de modelar matematicamente as fibras microestruturadas. Entre eles, menciona-se o método do índice efetivo (effective index method) [15], que aproxima a fibra microestruturada pela tradicional fibra índice degrau. O índice da casca, nesse caso, é o índice do modo fundamental encontrado resolvendo-se a equação de onda escalar aplicada a uma célula da estrutura da casca, a qual tem diâmetro Λ e está centrada em um dos furos de ar [13]. Esse método é utilizado para o estudo do comportamento do campo eletromagnético nas fibras com núcleo sólido, não sendo apropriado para gerar o diagrama de bandas.

Para estudar as características de propagação do campo eletromagnético nos guias de onda e também fornecer o diagrama de bandas, os métodos mais usuais são: a técnica de diferenças finitas no domínio do tempo (*FDTD - finite difference time domain*) [16], conforme o próprio nome indica, as equações de Maxwell são resolvidas no domínio do tempo e o método de ondas planas (*PWM – plane wave method*) [17], que consiste

basicamente em escrever o campo eletromagnético como uma expansão em ondas planas ponderada por uma função com periodicidade do cristal.

Nesse trabalho, para o estudo das fibras microestruturadas de núcleo sólido, é utilizada para a solução da equação de onda, uma formulação numérica simples e de boa precisão, baseada no método **sobre relaxação sucessiva** *(SOR – successive over relaxation)*, formulado com as três aproximações possíveis: escalar, semivetorial e vetorial completa.

No formalismo vetorial completo são considerados tanto os efeitos de polarização quanto o acoplamento entre as componentes transversais do campo eletromagnético nas direções x e y. O formalismo semivetorial é mais simples que o vetorial completo, pois os efeitos de polarização são considerados, mas o acoplamento entre as componentes transversais do campo eletromagnético é desprezado. Por fim, o menos complexo dos formalismos é o escalar, onde tanto os efeitos de polarização, quanto o acoplamento entre as componentes do campo são desconsiderados.

Foi escolhido o método SOR por ser relativamente simples de ser implementado e por não requerer um grande esforço computacional, se comparado com outros métodos geralmente encontrados na literatura. A formulação implementada do método SOR é capaz, ainda, de fornecer a distribuição do campo eletromagnético na fibra microestruturada. A descrição completa e detalhada dos três formalismos aplicados ao método SOR encontra-se no Capítulo 3.

Parece ser senso comum na literatura que somente com tratamento vetorial completo consegue-se determinar de forma precisa o diagrama de dispersão para fibras microestruturadas. Todavia, conforme mencionado, este formalismo tem a derivação e implementação complexa e, ainda, demanda grande esforço computacional, quando comparados com os formalismos semivetoriais ou escalares. Ademais, no estudo das fibras microestruturadas, o grupo de microondas e óptica da Escola de Engenharia de São Carlos, já demonstrou em [11] que é possível obter, ao menos em alguns casos, resultados precisos utilizando um formalismo semivetorial baseado no método numérico da sobre relaxação sucessiva.

Em conseqüência, o objetivo desse trabalho é responder a questão que surge, isto é, determinar para quais geometrias das fibras microestruturadas torna-se necessária, obrigatoriamente, a utilização do formalismo vetorial completo e investigar em quais casos um formalismo mais simples é suficiente. Portanto, busca-se determinar uma figura de mérito capaz de avaliar adequadamente cada situação de interesse.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: O Capítulo 2 discorre sobre os conceitos das fibras microestruturadas. O desenvolvimento matemático detalhado do método SOR está apresentado no Capítulo 3. O Capítulo 4 apresenta a validação dos formalismos SOR implementados. No Capítulo 5 são apresentados e discutidos os resultados do trabalho. Por fim, as conclusões e comentários finais da dissertação estão apresentados no Capítulo 6.

2. Fibras Microestruturadas

Nos próximos parágrafos são discutidas brevemente as principais características das fibras microestruturadas de núcleo sólido com guiamento regido por diferença de índice de refração.

No projeto de fibras microestruturadas são quatro os principais parâmetros que determinam as propriedades fotônicas das fibras: o primeiro é o contraste entre os índices de refração da casca e do núcleo, o segundo é a fração de preenchimento de ar e sílica na casca (ou, fator de preenchimento de ar f), o terceiro é o fator de escala M, e o quarto é o tipo de arranjo estrutural para os elementos da rede [3], [18].

O fator de preenchimento de ar f é definido pela expressão: $f = (4\pi/3)(a/\Lambda)^2$, onde a é o raio dos furos de ar e Λ é o período da rede, e envolve uma taxa adimensional (a/Λ), a qual fornece a proporção de ar na sílica. O valor de f define a porcentagem de ar na estrutura, como mostrado na Figura 4(a). O fator de escala M, descreve a mudança simultânea na escala, isto é, ambos os parâmetros a e Λ alteram-se na mesma proporção, mantendo o fator de preenchimento, como exemplificado na Figura 4(b) [18].

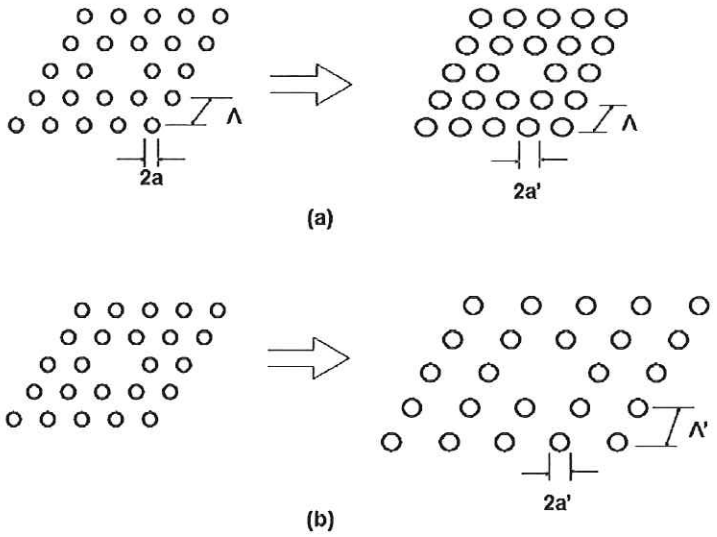


FIGURA 4 Exemplo da mudança da estrutura da rede em função dos fatores f e M [18]. (a) Duas estruturas com diferente fator de preenchimento f e mesmo fator de escala M, ($a/\Lambda \neq a'/\Lambda$); (b) Duas estruturas com diferente fator de escala M e mesmo fator de preenchimento f, ($a/\Lambda = a'/\Lambda'$).

Entre as principais propriedades das fibras microestruturadas de núcleo sólido podem-se citar:

- **Operação Monomodo:** Publicações anteriores [3], [13], [19] demonstram a capacidade da fibra de propagar apenas o modo fundamental para uma larga faixa de comprimentos de onda. É possível variar a freqüência óptica de operação mantendo o comportamento monomodo das fibras [8], [12].

  Na fibra índice degrau, com raio do núcleo ρ, índice de refração da casca n_{cl} e índice de refração do núcleo n_{co}, o número de modos guiados é determinado pelo valor do número V :

$$V = (2\pi\rho/\lambda)(n_{co}^2 - n_{cl}^2)^{1/2} \tag{2.1}$$

  o qual deve ser menor do que 2,405 para que a fibra permaneça em operação monomodo. Na fibra índice degrau, tanto o valor do índice de refração do núcleo quanto o índice de refração da casca são fixos, não variando em função do comprimento de onda λ. Nas fibras microestruturadas o comportamento monomodo pode ser explicado fisicamente devido ao fato do índice de refração efetivo do conjunto da casca ser função do comprimento de onda [19].

  Analisando o parâmetro V, pode-se explicar essa operação monomodo nas fibras microestruturadas, utilizando a fibra índice degrau como modelo e também, considerando fixo o raio do núcleo ρ nas fibras microestruturadas. Examinando o efeito do aumento do comprimento de onda no parâmetro V, verifica-se que seu valor tende a diminuir, porém, o confinamento da luz no núcleo também diminui. Neste caso, a luz interage mais com os furos de ar, o que tende a diminuir o índice efetivo da casca, aumentando assim a diferença entre os índices efetivos da casca e do núcleo, o que por sua vez aumenta o valor de V. Verifica-se então que há um contra balanceamento entre dois efeitos, o que tende a manter o valor de V aproximadamente constante.

  De maneira contrária, diminuindo-se o comprimento de onda λ, o parâmetro V tente a aumentar e a luz a permanecer mais confinada na região do núcleo. Neste caso, a luz interage menos com o ar presente na casca, o que aumenta o índice

efetivo da casca diminuindo assim a diferença entre os índices efetivos da casca e do núcleo, fazendo o número V também diminuir.

Sendo assim, consegue-se projetar fibras com arranjos periódicos que mantenham o valor V praticamente constante, possibilitando portanto, o guiamento monomodo em uma extensa faixa espectral [7].

A condição que garante o balanceamento entre os efeitos previamente discutidos mantendo V abaixo de 2,405 é obtida assegurando que a relação entre o diâmetro dos furos de ar d ($d = 2a$) e a distância entre os centros dos furos de ar Λ menor que 0,406, isto é: $d/\Lambda < 0,406$ [24].

- **Perdas por curvatura:** As perdas por curvatura são importantes, não somente do ponto de vista prático, mas também porque informam o comportamento dos modos de propagação eletromagnéticos na fibra [13]. Como visto anteriormente, fibras microestruturadas que apresentam a casca com elevado preenchimento de ar, mantém a luz fortemente confinada no núcleo, tornando-as menos sensíveis às perdas por curvaturas [13]. Mantendo-se o valor de Λ fixo e reduzindo o diâmetro dos furos de ar, a diferença entre os índices efetivos da casca e do núcleo se reduz, tornando a fibra mais susceptível às perdas por curvaturas [19].

  Entretanto, uma vantagem nas fibras microestruturadas é que estas perdas, devido à redução no diâmetro dos furos de ar, podem ser minimizadas, diminuindo o espaçamento Λ, mantendo-se portanto, o mesmo valor do fator de preenchimento f, isto é, a relação entre as frações de sílica e ar presentes na casca.

- **Perdas por propagação:** A parte imaginária do índice efetivo na fibra microestruturada, a qual descreve as perdas por propagação, varia com o comprimento de onda, com o diâmetro e com o número de anéis de furos de ar que circundam o núcleo da fibra e com o Λ [23].

  Para diâmetros pequenos dos furos de ar e poucos anéis, a perda é elevada. Entretanto, decai rapidamente assim que os furos são alargados ou mais anéis são introduzidos na casca [8]. Essa análise é de fácil compreensão tendo em vista que estes dois fatores contribuem para o aumento da fração de ar na casca, diminuindo seu índice de refração e aumentando a diferença do índice entre

núcleo-casca. Portanto, aumenta-se o confinamento do campo eletromagnético, reduzindo as perdas por propagação.

Outro aspecto importante é a dependência com relação ao comprimento de onda. As perdas por propagação são maiores para comprimentos de onda mais elevados, pois diminui-se o confinamento do campo à medida que se aumenta o comprimento de onda [23].

A perda por propagação, também conhecida por perda por confinamento, pode ser calculada em dB/km, por meio da equação [26]:

$$\text{Perda por propagação} = 8{,}686\ Im\{n_{eff}\, k_0\} \tag{2.2}$$

Onde *Im* é a parte imaginária, n_{eff} é o índice efetivo e k_0 é a constante de propagação no vácuo.

Portanto, deve haver um cuidadoso dimensionamento dos parâmetros físicos das fibras microestruturadas para que as perdas sejam minimizadas.

- **Dispersão de guia de onda e dispersão de material:** Nas fibras microestruturadas, o fator de preenchimento de ar é fundamental para determinar a dispersão cromática. Essa dispersão é formada pela superposição de dois efeitos: dispersão de material e dispersão de guia de onda.

  A dispersão de material está relacionada à variação do índice de refração em função do comprimento de onda e pode ser calculada pela expressão [18]:

$$D_m = -\frac{\lambda}{c}\frac{\partial^2 n_r(\lambda)}{\partial \lambda^2} \tag{2.3}$$

onde c é velocidade da luz no vácuo e n_r é o índice de refração do material.

A dispersão de guia de onda, por sua vez, está relacionada ao mecanismo de guiamento da luz e pode ser ajustada pela escolha apropriada do índice de refração, dada por [18]:

$$D_g = -\frac{\lambda}{c}\frac{\partial^2 n_{eff}}{\partial \lambda^2} \tag{2.4}$$

onde n_{eff} é o valor do índice efetivo.

As fibras microestruturadas tornam-se particularmente atrativas, pois permitem uma maior liberdade no projeto das curvas de dispersão, sobretudo em função da dispersão de guia de onda, a qual pode ser ajustada alterando-se tanto o diâmetro dos furos de ar como sua distribuição espacial.

Desta forma, variando-se os parâmetros físicos das fibras que são o diâmetro do furo de ar d e o espaçamento Λ, pode-se reduzir significativamente a dispersão cromática ou torná-la plana numa larga faixa de comprimentos de onda [13], [22]. Esta característica indica uma aplicação interessante para essas fibras atuando como compensadoras de dispersão. Poli e co-autores [25], demonstraram teoricamente uma fibra microestruturada com pico de dispersão aproximadamente de –1700 ps/(nm.km) para o comprimento de onda de 1,55 μm.

- **Área efetiva:** A área efetiva é um parâmetro fundamental no projeto das fibras microestruturadas, pois determina a intensidade das não linearidades ópticas. Dependendo da aplicação das fibras, duas situações diferentes podem ser analisadas. A primeira é o caso de uma fibra com a área efetiva pequena guiando alta densidade de potência óptica, com elevados efeitos não-lineares. Devido ao alto contraste entre os índices de refração da sílica e do ar, a fibra oferece a possibilidade de grande confinamento modal, para uma longa faixa de comprimento de onda [8], [21]. Este efeito pode ser explorado com sucesso, por exemplo, em amplificadores Raman [25]. A segunda, oposta à primeira, é para a fibra com uma área do núcleo elevada, podendo guiar alta intensidade de potência óptica sem excitar efeitos não-lineares [25].

  A área efetiva pode ser calculada pela expressão [26]:

$$A_{eff} = \frac{\left(\iint_S |H_t|^2 \, \partial x \, \partial y\right)^2}{\iint_S |H_t|^4 \, \partial x \, \partial y} \tag{2.5}$$

onde H_t é o campo magnético transversal.

Atualmente, modificações na estrutura geométrica das fibras microestruturadas com núcleo sólido têm despertado o interesse dos pesquisadores. Entre as possíveis modificações, aumentar o diâmetro dos furos de ar conforme o aumento da distância em relação ao eixo central da fibra, conforme a Figura 5, tem-se mostrado eficiente no ajuste da dispersão cromática [24], [26]. Para comprimentos de onda mais curtos, a luz é bem confinada dentro da região do núcleo e a dispersão é afetada pelo anel interno dos furos de ar. Em contraste, para comprimentos de onda mais longos, a área efetiva do núcleo é ampliada, e a dispersão, então, não é afetada apenas pelo anel mais interno, mas também pelos outros anéis. É possível otimizar o diâmetro do furo de ar em cada anel, de forma a controlar a inclinação da curva de dispersão.

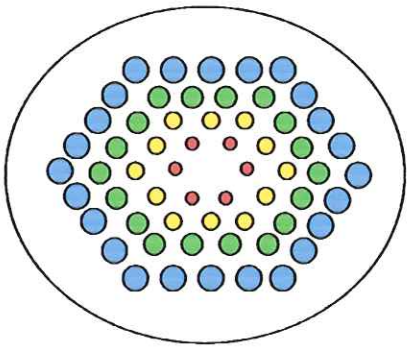


FIGURA 5 Fibra com o raio dos furos variando com relação ao eixo central.

No tratamento da dispersão cromática das fibras microestruturadas com núcleo sólido, Saitoh e co-autores [26], investigaram numericamente duas possíveis fibras microestruturadas com o diâmetro dos furos de ar aumentado com relação à distância ao núcleo. A primeira é uma fibra composta por quatro anéis e apresentou dispersão plana de aproximadamente 0 ± 0,5 ps/(nm.km) para uma faixa do comprimento de onda que varia entre 1,19 μm e 1,69 μm. Na segunda fibra microestruturada estudada aumentou-se o número de anéis para cinco. A dispersão plana encontrada foi de 0 ± 0,4 ps/(nm.km) para uma faixa de comprimento de onda entre 1,23 μm e 1,72 μm. Portanto, consegue-se manter um valor de dispersão em torno de zero para uma grande largura de faixa do comprimento de onda. Ademais, mantendo-se o anel mais externo com diâmetro elevado, não somente consegue-se controlar a dispersão cromática, como também reduzir as perdas por confinamento [26].

Com relação às perdas nas fibras microestruturadas com núcleo sólido, Renversez e co-autores [24] provaram numericamente que para essa nova forma de distribuição geométrica, com sete anéis a perda por propagação é de apenas 0,2 dB/km para comprimento de onda de 1,55 μm.

3. Método da Sobre Relaxação Sucessiva - SOR

A importância da modelagem matemática, viabilizada pelo avanço tecnológico dos computadores, é permitir um melhor entendimento dos mecanismos envolvidos no objeto em estudo. Adicionalmente, facilita a modificação de parâmetros e permite a análise das respectivas respostas sem onerar excessivamente o custo de projeto.

A modelagem matemática das fibras microestruturadas pode ser feita por meio de diferentes técnicas. Diversos métodos numéricos são propostos na literatura para modelar guias de onda [11], [13]. Neste Capítulo será abordada a técnica da **Sobre Relaxação Sucessiva - SOR** formulada em termos de diferenças finitas. O método SOR pode ser implementado utilizando o formalismo escalar, semivetorial e vetorial completo.

O método SOR começou a ser extensivamente utilizado a partir da década de sessenta [33], é similar ao método de Jacobi e Gauss-Seidel, mas emprega, porém, uma técnica de aceleração de convergência. O parâmetro que determina a evolução do método é conhecido por *parâmetro de relaxação*, ω. Encontra-se na literatura alguns livros clássicos a respeito do método SOR, entre eles, pode-se citar os elaborados por Varga [34] e Young [35].

Antes de descrever o formalismo matemático do método SOR, faz-se necessário uma introdução resumida sobre o conceito de diferenças finitas. No Apêndice 1 estão relatadas, detalhadamente, todas as passagens matemáticas referentes à Seção 3.1.

3.1. Aproximação em Diferenças Finitas

Problemas matemáticos que envolvem equações diferenciais parciais podem ser resolvidos numericamente com o auxilio da técnica de discretização em diferenças finitas, uma vez que a solução analítica dos problemas nem sempre é possível.

A idéia geral do método de diferenças finitas é a discretização do domínio e a substituição das derivadas presentes na equação diferencial por aproximações envolvendo valores numéricos da função [28], [30].

A ferramenta matemática básica no cálculo de aproximações para as derivadas é a série de Taylor, que relaciona valores da função *f(x)* e suas derivadas, num ponto *x*, com valores dessa função na vizinhança de *x*, ou seja, *f(x + h)* e *f(x - h)*.

Seja a expansão em série de Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)(h) + \frac{f''(x)(h)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(x)(h)^{(n+1)}}{(n+1)!} + R_n \qquad (3.1a)$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)(h) + \frac{f''(x)(h)^2}{2!} - \cdots + \frac{f^{(n+1)}(x)(h)^{(n+1)}}{(n+1)!} - R_n \qquad (3.1b)$$

Nota-se que a derivada em *x* é de ordem *n+1*, o último termo da expressão R_n é o erro de aproximação de *f(x ± h)* e o grau do polinômio é *(n+1)*.

Nesse trabalho, visando um estudo preciso do erro envolvido nas aproximações numéricas, estão detalhadas a seguir as aproximações de segunda e de quarta ordem.

A) Aproximação Segunda Ordem

Considerando que a função *f(x)* possa ser expandida em série de Taylor na vizinhança do ponto *x*, e sendo *h* a distância entre dois pontos adjacentes de x, conforme ilustrado na Figura 6.

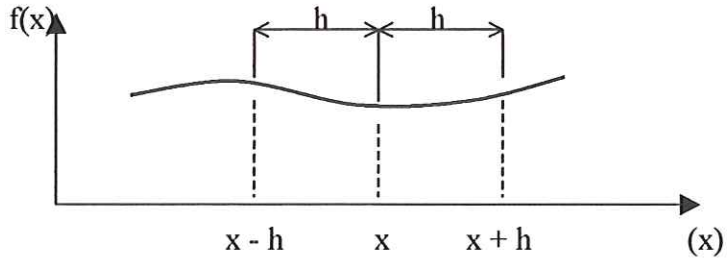


FIGURA 6 Representação esquemática dos pontos na vizinhança de x

Seja o erro $\epsilon(x,h) = h^p \cdot R_n(x)$. A ordem do erro é fornecida pelo valor de *p*, e a notação utilizada é $O(h^p)$ [28].

A aproximação de primeira ordem para a primeira derivada *f'(x)* é fornecida pela equação 3.1a, e deve ser obtida considerando-se os dois primeiros termos da série, com erro de truncamento a partir do terceiro termo [28].

Para a aproximação de segunda ordem, a primeira derivada é obtida subtraindo a equação 3.1a da 3.1b, com erro de truncamento a partir do quarto termo, denominada *formula centrada*, é dada pela expressão [28]:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \tag{3.2}$$

O tratamento da segunda derivada para aproximação de segunda ordem é obtido truncando a expansão da série de Taylor a partir do quinto termo. A fórmula centrada para a segunda derivada é calculada somando-se as equações 3.1a e 3.1b, resultando na seguinte equação [28]:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \tag{3.3}$$

B) Aproximação de Quarta Ordem

As aproximações numéricas podem ser melhoradas aumentando-se a ordem da aproximação. Para isso, torna-se necessária a utilização de mais pontos na vizinhança de *x*. Na aproximação de quarta ordem, dois pontos são considerados em cada lado na vizinhança do ponto central *x*, conforme mostra a Figura 7.

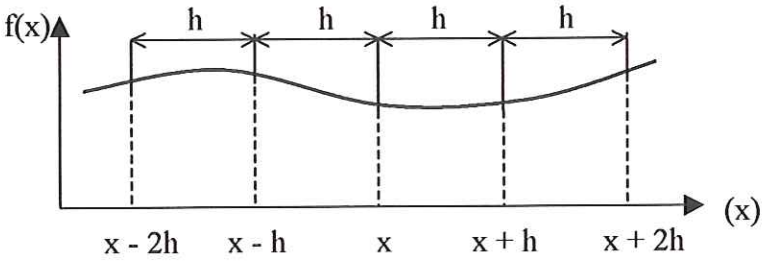


FIGURA 7 Representação esquemática da vizinhança do ponto central x.

Neste caso, a aproximação para a primeira derivada *f'(x)*, é obtida subtraindo a equação 3.1a da equação 3.1b, com o erro de truncamento sendo dado pelo sexto termo da série de Taylor. A fórmula fica:

$$f'(x) = \frac{1}{12h}\left(-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)\right) + O(h^4) \qquad (3.4)$$

A segunda derivada *f''(x)* é obtida pela soma das equações 3.1a e 3.1b, com o erro de truncamento dado pelo do sétimo termo da série. A expressão fica:

$$f''(x) = \frac{1}{12h^2}\left(-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - f(x-2h)\right) + O(h^4) \qquad (3.5)$$

No Apêndice 1, além de todas as passagens matemáticas para expansão da série de Taylor de segunda ordem, também se encontra a expansão matemática da aproximação de quarta ordem. Ambas utilizadas no formalismo SOR.

3.2. Formalismo Matemático para o Método SOR

Neste trabalho a derivação do formalismo matemático do método SOR de segunda e quarta ordem é utilizada com o objetivo de estudar o comportamento do campo eletromagnético nas fibras microestruturadas. Neste item algumas passagens do formalismo matemático para o método SOR são omitidas, pois estão descritas minuciosamente no Apêndice 2.

Tendo em vista esse detalhamento e considerando ainda a similaridade da derivação para o campo elétrico e magnético polarizados tanto na direção x como y, a partir desse ponto será estudado apenas o campo magnético.

Sendo assim, trabalhando as equações de Maxwell (vide Apêndice 2):

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (3.6\,a) \qquad \nabla \cdot \vec{D} = \rho & (3.6\,b) \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (3.7\,a) \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 & (3.7\,b) \end{cases}$$

Resulta na equação de Helmholtz:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + n^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial}{\partial y}\right) + \kappa_0^2 n^2 - \beta^2\right] H_x = \left[n^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\right] H_y \qquad (3.8)$$

onde n^2 é o índice de refração, κ_0 é o número de onda no vácuo e β é a constante de propagação.

Analisando a Equação (3.8), pode-se observar que o lado direito da equação contém as derivadas cruzadas de H_y, as quais descrevem o acoplamento entre as componentes transversais do campo magnético nas direções x e y. O segundo termo do lado esquerdo da Equação (3.8) descreve os efeitos de polarização modal. Sendo assim, utilizando a Equação (3.8) conforme descrita, tem-se o formalismo vetorial completo.

Por outro lado, desprezando o acoplamento entre as componentes de campo, ou seja, supondo os modos como sendo linearmente polarizados, pode-se desprezar todo o lado direito da Equação (3.8) caracterizando, desta forma, o tratamento semivetorial. Portanto, no formalismo semivetorial as derivadas cruzadas são desprezadas [36], [39].

Uma aproximação ainda mais simplificada pode ser obtida desprezando-se além das derivadas cruzadas, os efeitos com relação à polarização modal. Dessa forma o segundo termo do lado esquerdo da Equação (3.8) torna-se uma derivada segunda discretizada de forma direta, conforme Equação (3.3). Nesse caso, tem-se então o tratamento escalar [43].

Feita essa caracterização, o próximo passo é a expansão da equação vetorial de Helmholtz em diferenças finitas. Primeiro será feito o desenvolvimento para a aproximação de segunda ordem e posteriormente para a de quarta ordem, tornando possível, no próximo capítulo, à análise da precisão das aproximações numéricas feitas na equação de Helmholtz.

A) Discretização de Segunda Ordem

Utilizando os conceitos desenvolvidos no item 3.1.A, as derivadas das componentes transversais do campo no lado esquerdo da Equação (3.8) em diferenças finitas de segunda ordem tornam-se:

$$\frac{\partial^2 Hx_{(i,j)}}{\partial x^2} = \frac{Hx_{i+1,j} - 2Hx_{i,j} + Hx_{i-1,j}}{\Delta x^2} \tag{3.9}$$

$$n_{i,j}^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n_{i,j}^2}\frac{\partial Hx_{(i,j)}}{\partial y}\right) = \frac{a\,Hx_{i,j+1} - bHx_{i,j} + cHx_{i,j-1}}{\Delta y^2} \tag{3.10}$$

Os termos *a, b* e *c* da Equação (3.10) estão associados ao índice de refração, e são definidos como:

$$a = 2n_{i,j}^2 \frac{1}{n_{i,j+1}^2 + n_{i,j}^2}$$

$$b = 2n_{i,j}^2\left(\frac{1}{n_{i,j+1}^2 + n_{i,j}^2} + \frac{1}{n_{i,j-1}^2 + n_{i,j}^2}\right) \Rightarrow b = a + c$$

$$c = 2n_{i,j}^2 \frac{1}{n_{i,j-1}^2 + n_{i,j}^2}$$

Deve-se ressaltar que na aproximação escalar a Equação (3.10) é considerada como uma segunda derivada simples, tornando os termos $a = c = 1$.

O lado direito da Equação (3.8), que contém as derivadas cruzadas, torna-se:

$$L_D H_y = \frac{Hy_{i+1,j+1}}{4\Delta x\Delta y}\left(\frac{n_{i,j}^2}{n_{i,j+1}^2} - 1\right) - \frac{Hy_{i-1,j+1}}{4\Delta x\Delta y}\left(\frac{n_{i,j}^2}{n_{i,j+1}^2} - 1\right) - \\ - \frac{Hy_{i+1,j-1}}{4\Delta x\Delta y}\left(\frac{n_{i,j}^2}{n_{i,j-1}^2} - 1\right) + \frac{Hy_{i-1,j-1}}{4\Delta x\Delta y}\left(\frac{n_{i,j}^2}{n_{i,j-1}^2} - 1\right) \tag{3.11}$$

Substituindo as derivadas da equação (3.8) por seus termos discretizados, e isolando a componente $H_{x\,(i,j)}$, resulta:

$$Hx_{i,j}^{INT} = \frac{\frac{1}{\Delta x^2}\left(Hx_{i+1,j} + Hx_{i-1,j}\right) + \frac{1}{\Delta y^2}\left(aHx_{i,j+1} + cHx_{i,j-1}\right) - L_D H_y}{\left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{b}{\Delta y^2} - \kappa_0^2 n_{i,j}^2 + \beta^2\right)} \tag{3.12}$$

Onde $Hx_{i,j}^{INT}$ é o campo intermediário.

O parâmetro β é a constante de propagação e é calculada na aproximação vetorial completa a cada iteração por [29]. O Apêndice 3 apresenta o desenvolvimento para obtenção do parâmetro β :

$$\beta^2 = \frac{\kappa_0^2 \int n_{i,j}^2 |Hx|^2 \, dx\, dy + \int \left(\frac{\partial^2 Hx}{\partial_x{}^2}\right) Hx^* \, dx\, dy + R - R_1 + R_2}{\int |Hx|^2 \, dx\, dy} \tag{3.13}$$

onde, H_x^* representa o complexo conjugado do campo magnético e R, R_1 e R_2 são calculados por:

$$R = \int n_{i,j}^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n_{i,j}^2}\frac{\partial Hx}{\partial y}\right) Hx^* \, dx\, dy \tag{3.14}$$

$$R_1 = \int n_{i,j}^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n_{i,j}^2}\frac{\partial Hy}{\partial x}\right) Hx^* \, dx\, dy \tag{3.15}$$

$$R_2 = \int \left(\frac{\partial^2 Hy}{\partial y \partial x}\right) Hx^* \, dx\, dy \tag{3.16}$$

Com relação à Equação (3.13), na aproximação escalar o termo R torna-se uma segunda derivada simples de H_x, pois os índices de refração $n_{i,j}^2$ se cancelam e os termos R_1 e R_2 são iguais a zero. Na aproximação semivetorial considera-se o termo R

como descrito na Equação (3.14), sendo nulos os termos R_1 e R_2. Como comentado, no cálculo do β, a formulação vetorial completa considera todos os termos da Equação (3.13).

Após o cálculo da constante de propagação β, o termo $Hx_{i,j}^{INT}$ da Equação (3.12) é utilizado para o cálculo do campo subseqüente, isto é, do $Hx_{i,j}^{novo}$, através do esquema iterativo dado pelo método SOR. A relação para a correção do campo a cada iteração é fornecida pela expressão [11]:

$$H_{x_{i,j}}^{novo} = \omega H_{x_{i,j}}^{INT} + (1-\omega) H_{x_{i,j}}^{velho} \tag{3.17}$$

Onde ω é conhecido como parâmetro de relaxação, $Hx_{i,j}^{velho}$ é o campo inicial fornecido no inicio de cada iteração, $Hx_{i,j}^{INT}$ é o campo intermediário definido pela Equação (3.12), e $Hx_{i,j}^{novo}$ é o campo atualizado. Sendo assim, a cada iteração o campo $Hx_{i,j}^{novo}$ torna-se o campo $Hx_{i,j}^{velho}$ na próxima iteração.

A escolha adequada do parâmetro de relaxação ω caracteriza a velocidade de convergência do método. Para ω igual a 1 tem-se o método de Gauss-Seidel [31], [34]. Quando o valor de ω está entre 0 e 1, o método é conhecido como sub-relaxado, e a convergência não é garantida [30]. Para ω variando entre 1 e 2, o método é conhecido como sobre-relaxado, por isso da denominação SOR - sobre relaxação sucessiva, do inglês, *successive over relaxation.*

É possível estabelecer um valor ótimo para o parâmetro de relaxação, denominado de ω_{opt} o qual pode ser estimado por [31]:

$$\omega_{opt} = \frac{2}{\sqrt{1+\left(1-\rho^2\right)}} \tag{3.18}$$

onde ρ é o maior autovalor da matriz de Jacobi associada e pode ser estimado iterativamente por [11], [32]:

$$\rho^2 \cong \frac{\| e_k \|}{\| e_{k-1} \|} \tag{3.19}$$

Onde $\|e_k\|$ é a norma Euclidiana para o resíduo da iteração k, dado por:

$$\| e_k \| = \sqrt{\sum_{i,j} \left| Hx_{i,j}^{INT} - Hx_{i,j}^{velho} \right|^2} \tag{3.20}$$

Desta forma, fica estabelecido um método iterativo capaz de gerar a distribuição de campo e o valor da constante de propagação para o modo fundamental de guias de onda genéricos.

B) Discretização de Quarta Ordem

Similarmente ao exposto na Seção 3.2.A, e utilizando os conceitos desenvolvidos no item 3.1.B, as derivadas da equação vetorial de Helmholtz em diferenças finitas de quarta ordem, do lado esquerdo da Equação (3.8) ficam: (vide Apêndice 2)

$$\frac{\partial^2 Hx_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{1}{12\Delta x^2}\left(-Hx_{i+2,j} + 16Hx_{i+1,j} - 30Hx_{i,j} + 16Hx_{i-1,j} - Hx_{i-2,j}\right) \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} n_{i,j}^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n_{i,j}^2}\frac{\partial Hx_{(i,j)}}{\partial y}\right) = {} & \frac{Hx_{i,j+2}}{36\Delta y^2}\left(-3ax-4bx\right) + \frac{Hx_{i,j+1}}{36\Delta y^2}\left(60\,bx+4cx\right) + \frac{Hx_{i,j-1}}{36\Delta y^2}\left(4bx+60\,cx\right) \\ & + \frac{Hx_{i,j-2}}{36\Delta y^2}\left(-4cx-3dx\right) + \frac{Hx_{i,j}}{36\Delta y^2}\left(3ax-60\,bx-60\,cx+3dx\right) \end{aligned} \tag{3.22}$$

As derivadas do lado direito da equação (3.8) se tornam:

$$n^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial Hx_{i,j}}{\partial x}\right) = \frac{n^2{}_{i,j}}{12\Delta y}\frac{(-1)}{n^2{}_{i,j+2}}\left(\frac{-Hy_{i+2,j+2}+8Hy_{i+1,j+2}-8Hy_{i-1,j+2}+Hy_{i-2,j+2}}{12\Delta_X}\right)+$$

$$+\frac{n^2{}_{i,j}}{12\Delta y}\frac{8}{n^2{}_{i,j+1}}\left(\frac{-Hy_{i+2,j+1}+8Hy_{i+1,j+1}-8Hy_{i-1,j+1}+Hy_{i-2,j+1}}{12\Delta_X}\right)+$$

$$+\frac{n^2{}_{i,j}}{12\Delta y}\frac{-8}{n^2{}_{i,j-1}}\left(\frac{-Hy_{i+2,j-1}+8Hy_{i+1,j-1}-8Hy_{i-1,j-1}+Hy_{i-2,j-1}}{12\Delta_X}\right)+$$

$$+\frac{n^2{}_{i,j}}{12\Delta y}\frac{1}{n^2{}_{i,j-2}}\left(\frac{-Hy_{i+2,j-2}+8Hy_{i+1,j-2}-8Hy_{i-1,j-2}+Hy_{i-2,j-2}}{12\Delta_X}\right) \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}Hy = \frac{1}{144\,\Delta y\,\Delta x}[\,(Hy_{i+2,j+2}-8Hy_{i+1,j+2}+8Hy_{i-1,j+2}-Hy_{i-2,j+2})-$$

$$(8Hy_{i+2,j+1}-8Hy_{i+1,j+1}+8Hy_{i-1,j+1}-Hy_{i-2,j+1})+$$

$$(8Hy_{i+2,j-1}-8Hy_{i+1,j-1}+8Hy_{i-1,j-1}-Hy_{i-2,j-1})-$$

$$(Hy_{i+2,j-2}+8Hy_{i+1,j-2}+8Hy_{i-1,j-2}-Hy_{i-2,j-2})\,] \tag{3.24}$$

A partir desse ponto, deve-se seguir os mesmos passos da discretização de segunda ordem. Isto é, substituir as derivadas da Equação (3.8) por seus termos discretizados de quarta ordem. Isolar o termo $Hx_{i,j}^{INT}$, e a cada nova iteração, calcular o valor de β para obter através da Equação (3.17) o campo $Hx_{i,j}^{novo}$. O valor do parâmetro ótimo de relaxação ω_{opt} é obtido por equações similares às (3.18) à (3.20), e encontra-se detalhado no Apêndice 2.

Por fim, o algoritmo do método SOR pode ser resumido conforme a Figura 8:

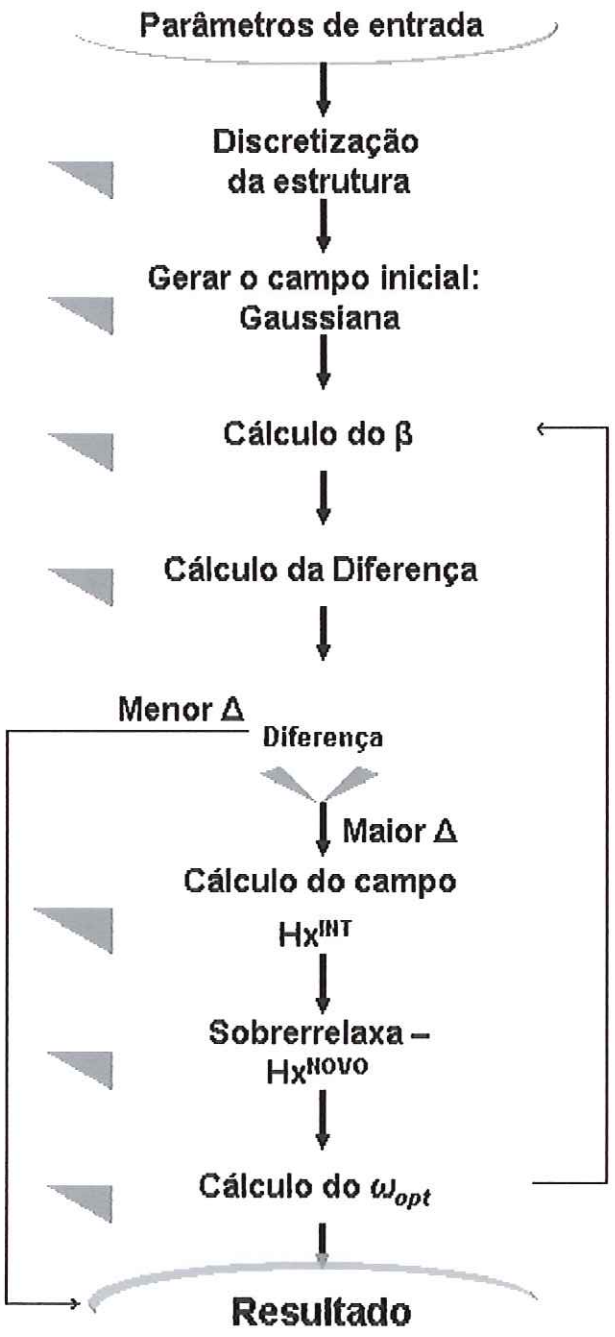


FIGURA 8 Fluxograma representativo do método SOR

No fluxograma mostrado na Figura 8, os parâmetros de entrada estão relacionados à estrutura física da fibra microestruturada, como por exemplo, os valores de Λ, do raio do núcleo da fibra, do comprimento de onda λ, entre outros. Após o ajuste dos parâmetros iniciais, ocorre a discretização da estrutura, isto é, a fibra microestruturada é

descrita por pontos dentro da janela computacional. O campo magnético inicial H_x é adotado como tendo a forma gaussiana. O próximo passo então será calcular a constante de propagação β, conforme Equação (3.13). Nesse ponto, ocorre a verificação da convergência, e toma-se a decisão com relação ao próximo passo. A *diferença* nesse caso é calculada em função do índice efetivo. A convergência do método é alcançada quando a diferença entre duas iterações sucessivas é menor que valor do erro máximo assumido. O próximo passo após a aplicação do critério de convergência é o cálculo do campo intermediário dado pela Equação (3.12). A distribuição final do campo magnético H_x^{novo} é obtida pela Equação (3.17). Por fim, um novo valor do parâmetro de relaxação é calculado pela Equação (3.18). Este processo é repetido a cada iteração, com o campo novo tornando-se o campo velho na iteração seguinte, até que o critério de convergência, nesse caso, dado pelo valor do erro seja verificado.

Após a derivação e implementação do método SOR deve-se realizar sua aferição. A comparação dos resultados fornecidos pelos formalismos de segunda e quarta ordens, aplicados ao método SOR, será feita com algumas estruturas-padrão encontradas na literatura. Esta aferição está apresentada no capítulo seguinte.

4. Validação do método SOR

Neste capítulo é feita a validação do método SOR por meio da comparação entre os resultados fornecidos por este método em comparação com resultados padrão encontrados na literatura.

Para aferição do método, foram utilizadas três estruturas, 'benchmark', que são: a fibra óptica índice degrau, a fibra óptica tipo D e o guia tipo rib, sendo utilizado como parâmetros comparativos o valor do índice efetivo n_{eff} e o valor do índice efetivo normalizado b.

No caso das fibras, duas configurações são utilizadas na aferição do método. A primeira apresenta um contraste baixo entre os índices de refração, já a segunda trata-se de uma estrutura hipotética, que apresenta um degrau de índice de refração alto. Para a segunda foi realizado um estudo de convergência do método SOR, isto é, um estudo do parâmetro b em função do passo de discretização. Em seguida, foi realizado também, um estudo da velocidade de convergência do método em função do parâmetro de relaxação, ω, utilizado.

4.1 Fibra óptica índice degrau

A fibra óptica monomodo índice degrau foi escolhida para aferir o método SOR por ser um guia de onda de uso amplamente difundido e por apresentar solução analítica.

A primeira fibra óptica analisada apresenta guiamento fraco, com o modo sendo quase linearmente polarizado. Os índices de refração do núcleo e da casca são $n_1 = 1{,}46$ e $n_2 = 1{,}456$, respectivamente. O raio do núcleo é $a = 2\mu m$ e o comprimento de onda $\lambda = 0{,}6328\mu m$ [36]. A janela computacional foi ajustada para $25\mu m$ de forma que a condição de contorno transparente (TBC – transparent boundary condition) [38] utilizada, não afete a precisão do método. A estrutura é discretizada com $\Delta_x = \Delta_y = 0{,}05\mu m$. O índice efetivo analítico é $n_{eff} = 1{,}45784235$ e o índice efetivo normalizado é $b = 0{,}46025$. A comparação dos formalismos do método SOR implementados, para as diferentes aproximações, segue na Tabela 1.

TABELA 1 Comparação entre os formalismos do método SOR para a fibra com guiamento fraco

	Componente de campo H_x Segunda ordem		**Componente de campo H_x Quarta ordem**	
MÉTODO	**b**	**erro***	**b**	**erro***
SOR escalar	0,46066	$9{,}0.10^{-4}$	0,46086	$7{,}8.10^{-4}$
SOR semi	0,45994	$6{,}7.10^{-4}$	0,46011	$3{,}0.10^{-4}$
SOR vetorial	**0,45994**	**$6{,}7.10^{-4}$**	**0,46011**	**$3{,}0.10^{-4}$**
BPM vetorial	b = 0,46011		erro* = $3{,}0.10^{-4}$	

* erro relativo = $(b_{sor} - b_{analítico})/ b_{analítico}$

Para a fibra com guiamento fraco analisada, o formalismo escalar apresenta bons resultados estando com o erro relativo na ordem de 10^{-4} do índice efetivo normalizado. O formalismo vetorial completo e o formalismo semivetorial apresentam resultados próximos entre si e coerentes com o valor analítico, estando os formalismos com o erro relativo em relação ao índice efetivo normalizado também na quarta casa decimal.

A semelhança encontrada entre os resultados obtidos para os três formalismos pode ser explicada por dois motivos. Primeiro, como a fibra apresenta um degrau de índice de refração baixo ($\Delta = 0{,}04$), os modos tornam-se quase linearmente polarizados (LP) e os efeitos devido ao acoplamento entre as componentes transversais do campo são minimizados. O segundo motivo é também devido ao guiamento fraco, que minimiza a descontinuidade das derivadas da componente normal do campo magnético. Sendo assim, as aproximações inerentes aos formalismos escalar e semivetorial não são suficientes para afetar significativamente o resultado final. De fato, conforme o autor Vassallo [44] e [45], pode-se considerar que um método numérico é eficiente quando a precisão com relação ao índice efetivo normalizado está na terceira casa decimal.

Pode-se visualizar graficamente na Figura 9, para o modo com polarização quase-TE da fibra índice degrau com guiamento fraco, o comportamento das componentes do campo magnético: (a) componente majoritária H_x e (b) componente minoritária H_y.

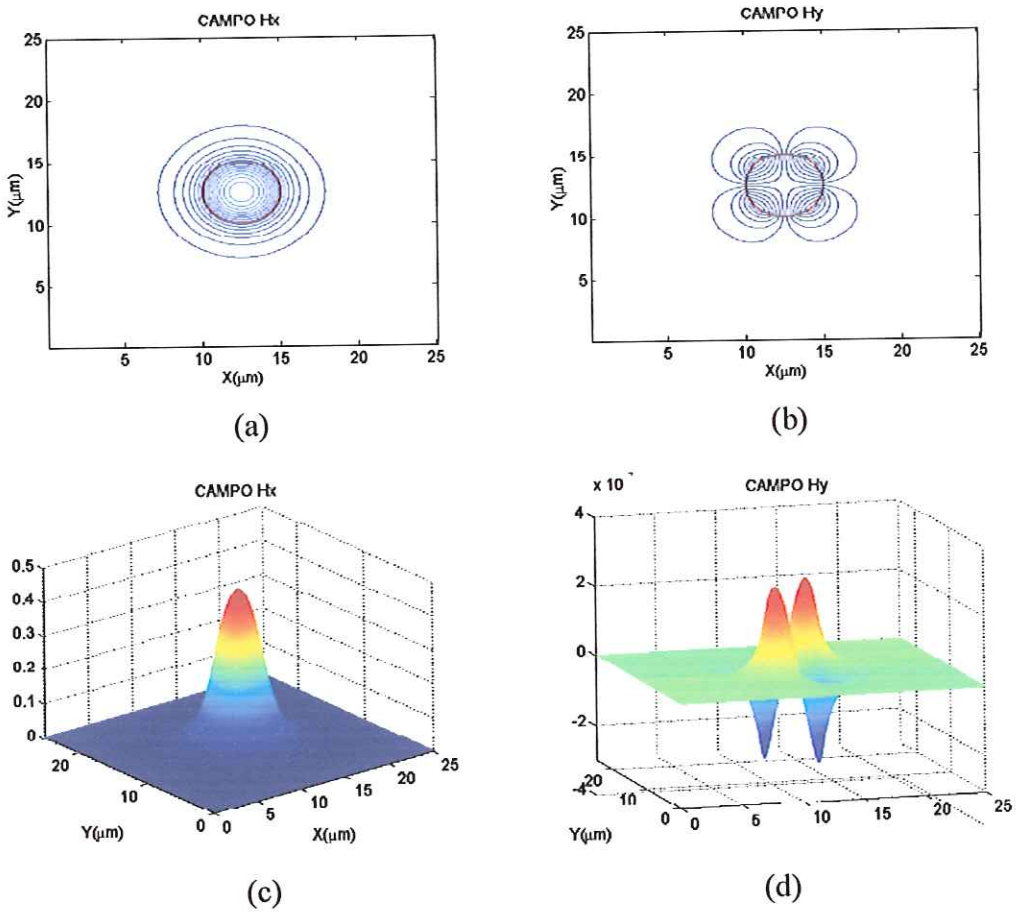


FIGURA 9 Componentes do campo magnético para a fibra índice degrau com guiamento fraco; (a) contorno da componente H_x; (b) contorno da componente H_y; (c) componente H_x em três dimensões; (d) componente H_y em três dimensões.

A segunda fibra selecionada é um caso oposto ao da fibra anteriormente estudada, pois, neste caso, há um alto degrau de índice de refração. A referência [40] propõe uma fibra hipotética, com índices de refração que simulam os índices de refração de dispositivos ópticos. Utiliza-se esta fibra apenas para fins de aferição numérica. A fibra é definida em [40], com o diâmetro do núcleo sendo d = 9μm e índice de refração n_1 = 3,41477. Para a casca adotou-se o índice de refração n_2 = 3,16589 e o comprimento de onda é λ = 1,3μm. A solução analítica para o modo fundamental é n_{eff} = 3,4130933 e b = 0,9930.

Este caso crítico apresentando um alto degrau de índice de refração foi selecionado para verificar se a aproximação em diferenças finitas da descontinuidade da componente normal de campo elétrico, na região do degrau, pode causar problemas na solução da equação de onda vetorial (3.8).

Para o estudo da convergência do método SOR, são utilizados dois parâmetros: o do índice efetivo normalizado $b = (n_{eff}^2 - n_2^2)/(n_1^2 - n_2^2)$ [39], e o erro relativo, definido por: $(|n_{eff_SOR} - n_{eff\,analítico}|)/(n_{eff\,analítico})$ [40], ambos simulados para diferentes passos de discretização, mantendo-se sempre a mesma janela computacional de $L_x = L_y = 20\mu m$.

A Figura 10 apresenta o comportamento de convergência dos formalismos escalar, semivetorial e vetorial completo, para as aproximações de segunda e quarta ordem.

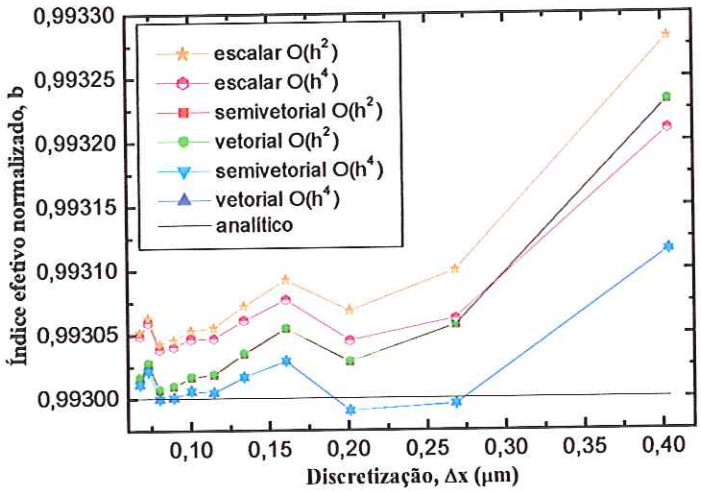


FIGURA 10 Curvas de convergência comparativa para os formalismo baseados no método SOR. Índice efetivo normalizado *b* em função de diferentes passos de discretização $\Delta x = \Delta y$.

A Tabela 2 compara os valores de *b* gerados pelos formalismos do método SOR e o resultado de *b* fornecido pelo método de diferenças finitas [FD] para $\Delta_x = \Delta_y = 0{,}1\mu m$ com o valor da solução analítica.

TABELA 2 Comparação entre os resultados fornecidos pelo método SOR para a fibra com alto degrau de índice de refração

	Componente de campo H_x Segunda ordem		**Componente de campo H_x Quarta ordem**	
MÉTODO	***b***	**erro***	***b***	**erro***
SOR escalar	0,99306	$6{,}0.10^{-5}$	0,99304	$4{,}0.10^{-5}$
SOR semi	0,99302	$2{,}0.10^{-5}$	0,99301	$1{,}0.10^{-5}$
SOR vetorial	**0,99302**	**$2{,}0.10^{-5}$**	**0,99301**	**$1{,}0.10^{-5}$**
FD [40]	b = 0,99299		erro* = $8{,}8.10^{-6}$	
Analítico	b = 0,9930			

erro * = $(b_{sor} - b_{analítico})/b_{analítico}$

Em geral é possível obter resultados com maior precisão aumentando o número de pontos da discretização da malha. Entretanto, uma malha muito fina requer um alto esforço computacional. Sendo assim, Wayne e co-autores [48] sugerem utilizar a técnica da extrapolação para aumentar a precisão dos resultados, sem a necessidade do alto esforço computacional. Nesta técnica, alguns valores são calculados utilizando espaçamentos Δ_x e Δ_y elevados, que requerem pouca memória e baixo tempo de processamento computacional. Esses valores são aproximados por uma equação polinomial e, então, extrapolados para valores Δ_x e Δ_y tendendo à zero.

A Figura 11 apresenta o erro relativo com relação ao índice efetivo normalizado para os diferentes formalismos implementados, calculados utilizando a técnica da extrapolação. Dessa forma, estima-se qual será o resultado fornecido pelo método, quando um elevado passo de discretização é utilizado, evitando-se, ainda, o erro associado à precisão da máquina e diminuindo o esforço computacional, ou seja, diminuindo o tempo de processamento.

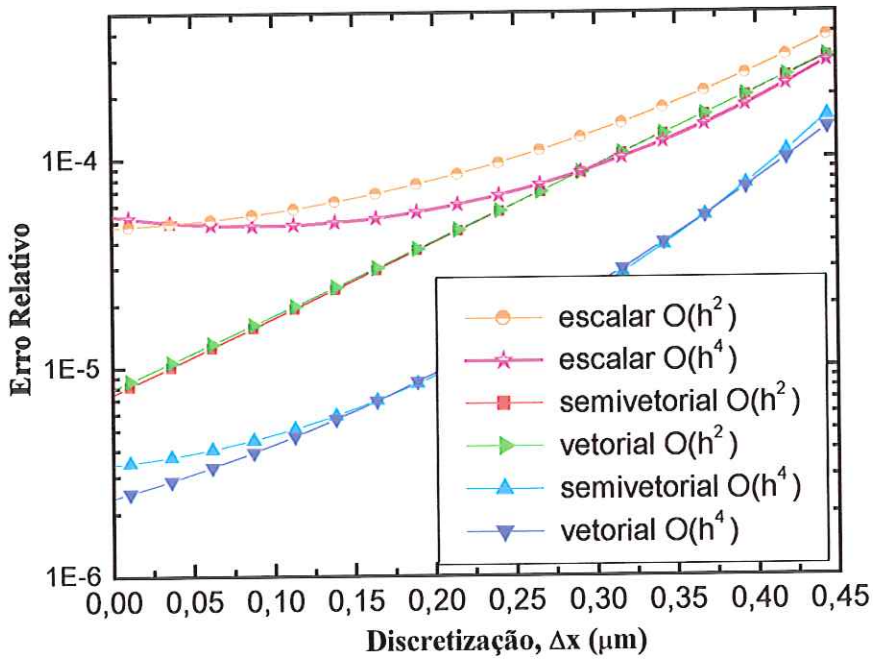


FIGURA 11 Erro relativo para os diversos formalismos empregando o método SOR, como função de diferentes passos de discretização Δ_x.

Para o caso particular da fibra índice degrau, verifica-se conforme Figuras 10 e 11, que os formalismos convergem, entretanto, com velocidades e precisões diferentes. Comparando a implementação escalar de ordem $O(h^2)$ com o escalar de ordem $O(h^4)$, verifica-se que a aproximação de quarta ordem apresenta uma velocidade de convergência maior que a aproximação de segunda ordem. O erro relativo de *b*, conforme Tabela 1 é da ordem de $5{,}0 \times 10^{-5}$, observando-se que, diminuindo o passo de discretização, diminui-se o erro relativo.

Ao comparar o formalismo semivetorial de ordem $O(h^2)$ com o semivetorial de ordem $O(h^4)$, verifica-se que a velocidade de convergência da aproximação $O(h^4)$ também é maior do que a velocidade de convergência do formalismo semivetorial $O(h^2)$. Observa-se que, quando um valor $\Delta_x = \Delta_y = 0{,}1\mu m$ é utilizado, o erro relativo de *b* é de aproximadamente $2{,}0 \times 10^{-5}$ para a aproximação $O(h^2)$, e de $1{,}0 \times 10^{-5}$ para o formalismo de ordem $O(h^4)$, evidenciando uma melhor precisão do formalismo de ordem mais alta.

Considerando agora a comparação entre as aproximações de segunda e quarta ordem, para o formalismo vetorial completo, também se verifica uma maior velocidade de convergência para o formalismo de quarta ordem. O erro relativo de *b*, para um passo de discretização $\Delta_x = \Delta_y = 0{,}1\mu m$, é de aproximadamente $2{,}0 \times 10^{-5}$ para a aproximação $O(h^2)$, e de $1{,}0 \times 10^{-5}$ para a aproximação ordem $O(h^4)$. A aproximação de quarta ordem apresenta resultados com maior precisão.

Deve-se observar que, ao adotar um alto passo de discretização Δ_x e Δ_y (por exemplo, $\Delta_x = \Delta_y \approx 0{,}40\mu m$), nota-se que as implementações de mais alta ordem sempre fornecem melhores resultados que aquelas de ordem mais baixa. Neste caso, dependendo da precisão requerida, ao utilizar a aproximação de quarta ordem, consegue-se uma diminuição do esforço computacional, reduzindo-se o tempo de processamento.

Outra observação relevante é que, conforme indica a Figura 11, verifica-se que fazendo a extrapolação do erro relativo em função do passo de discretização Δ_x, o erro relativo tende a diminuir. Como exemplo, para o formalismo vetorial de segunda ordem, o erro relativo de *b* aproxima-se de $9{,}0 \times 10^{-6}$ enquanto que, para o formalismo vetorial de quarta ordem, o erro relativo de *b* tende para $2{,}0 \times 10^{-6}$.

Após a comparação entre as diferentes aproximações utilizando a mesma técnica, será realizada a comparação entre os vários formalismos que utilizam a mesma ordem de aproximação.

Verifica-se que, para ambas as aproximações, o resultado final fornecido pelo formalismo vetorial completo é semelhante ao formalismo semivetorial. Estes, por sua vez, apresentam melhores resultados que o formalismo escalar. Nesse caso, pode-se explicar esta menor precisão pelo fato da aproximação escalar desprezar o efeito de polarização, tornando as condições de contorno nas interfaces iguais para as componentes nas direções x e y. Para todos os formalismos, analisando a Figura 11, nota-se que à medida que o passo da discretização Δ_x diminui, isto é, aumenta-se o número de pontos de discretização, a precisão do método também aumenta, tendendo a valores muito próximos ao analítico.

Feita a análise de convergência e aferição dos formalismos do método SOR, é apresentada na Figura 12, para o modo com polarização quase-TE da fibra índice degrau descrita acima, a distribuição das componentes do campo magnético: (a) majoritária H_x e (b) minoritária H_y.

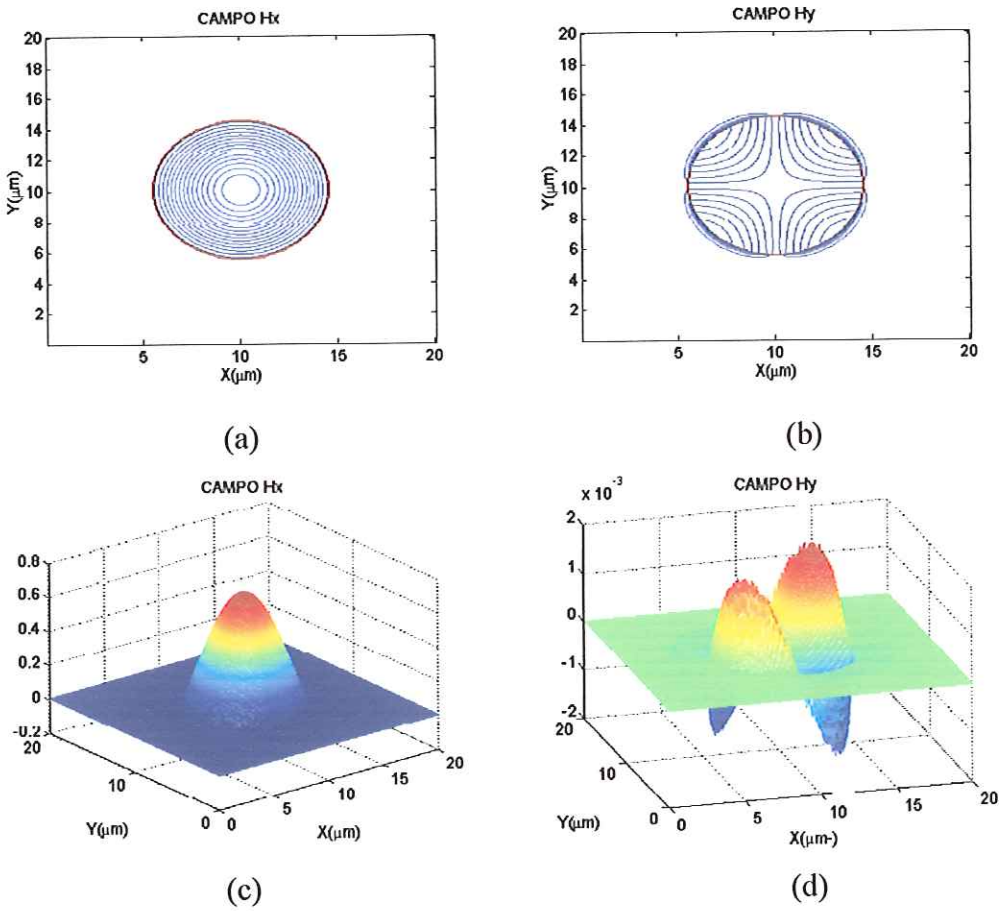


FIGURA 12 Componentes do campo magnético para a fibra índice degrau; (a) contorno da componente H_x; (b) contorno da componente H_y; (c) componente H_x em três dimensões; (d) componente H_y em três dimensões.

Analisando a Figura 12 (a) e (b), nota-se que os modos estão bem confinados ao núcleo da fibra devido ao alto degrau de índice de refração. Esse confinamento fica evidente quando comparado com a Figura 9, onde a fibra apresenta um confinamento fraco do campo magnético.

Na fibra índice degrau o valor de pico da componente de campo minoritária H_y é duas ordens de grandeza menor que o valor de pico da componente de campo majoritária H_x. Devido a essa diferença, analisando-se os termos responsáveis pelo acoplamento entre as componentes de campo magnético, que são as derivadas cruzadas na equação vetorial de Helmholtz (3.8), pode-se explicar a semelhança entre os resultados fornecidos pelos métodos semivetoriais e vetoriais completos. O formalismo escalar, nesse caso, apresenta uma menor precisão, pelo fato de desprezar também o efeito de polarização.

Outra análise importante e de interesse nesse trabalho, refere-se à velocidade de convergência quando diferentes valores do parâmetro de relaxação ω são utilizados. Com esse intuito, foi realizado um estudo da variação do índice efetivo normalizado em função do número de iterações necessárias para a convergência do método. Utilizou-se valores de ω fixos numa faixa entre 1,0 e 1,8, comparados ao valor do ω-iterativo discutido no Capítulo anterior e ao ω apresentado na referência [11], denominado nesse trabalho por ω–fórmula. Foi mantida a mesma discretização em todos as aferições.

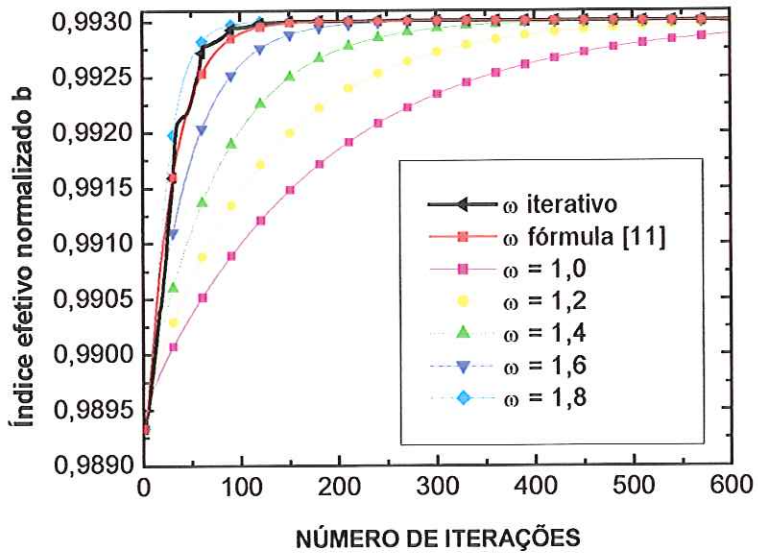


FIGURA 13 Convergência do parâmetro b em função do número de iterações, para diferentes valores do parâmetro ω

Analisando o gráfico da Figura 13, verifica-se que o parâmetro de relaxação iterativo utilizado nesse trabalho apresenta uma boa velocidade de convergência, sendo muito eficiente para todas as estruturas estudadas, considerado, portanto, como ω-ótimo. Deve-se observar que com a utilização do parâmetro ω-iterativo, ocorre uma elevada melhora na velocidade de convergência quando comparados a $\omega = 1{,}0$ que seria a aproximação de Gauss-Seidel [31].

4.2 Fibra óptica tipo D

Este segundo exemplo utilizado para validação dos formalismos empregando o método SOR utiliza-se da estrutura 'benchmark' conhecida como fibra óptica tipo-D, ilustrada na Figura 14.

A estrutura escolhida [36] apresenta o índice de refração do núcleo, da casca e do ar dados por: $n_1 = 1{,}46$, $n_2 = 1{,}456$ e $n_3 = 1{,}0$, respectivamente. O raio do núcleo é $a = 2{,}0\mu m$, o comprimento de onda $\lambda = 0{,}6328\mu m$, a distância entre a interface núcleo-casca e a interface plana é um parâmetro variável e referido pela letra d, que permite controlar a intensidade de campo na seção reta.

A escolha dessa fibra deve-se a dois motivos: primeiro por exibir uma alta birrefringência, devido a alterações na forma da fibra. Nesse caso, os dois modos polarizados ortogonalmente apresentam a constante de propagação β_x diferente da constante de propagação β_y [36]. Segundo, pelo fato do modo fundamental não poder ser considerado linearmente polarizado devido à excitação da componente de campo magnético minoritário H_y [36].

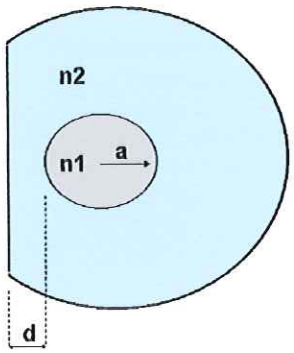


FIGURA 14 Secção transversal da fibra óptica tipo D

A aferição é feita para todas as combinações possíveis entre os diferentes formalismos (escalar, semivetorial e vetorial completo) e entre as diferentes aproximações (segunda e quarta ordem), para três valores do parâmetro *d*, sendo utilizado, *d* = 0,0, d = 0,5μm, d = 1,0μm. Na Tabela 3 os formalismos baseados no método SOR e no método vetorial completo da propagação de feixe (FV-*BPM – full-vectorial beam propagation method*) são comparados com um método de alta precisão denominado método da potência inversa deslocada (SIPM – *shifted inverse power method*) [36]. A janela computacional utilizada foi de 25μm x 25μm e o passo de discretização utilizado foi Δx = Δy = 0,1μm.

TABELA 3 Comparação entre os índices efetivos, fornecidos pelas diferentes implementações, para fibra tipo D, calculado para componente majoritária H_x do modo fundamental.

		Campo H_x Segunda ordem		**Campo H_x Quarta ordem**	
MÉTODO	**d(μm)**	**n_{eff}**	**diferença***	**n_{eff}**	**diferença***
SOR escalar	0	1,4575312	$1,6.10^{-5}$	1,4575287	$1,3.10^{-5}$
SOR semi	0	1,4575283	$1,3.10^{-5}$	1,4575252	$1,0.10^{-5}$
SOR vetorial	**0**	**1,4575283**	**$1,3.10^{-5}$**	**1,4575252**	**$1,0.10^{-5}$**
BPM	0	n_{eff} = 1,4575065		diferença* = $8,7.10^{-6}$	
SIPM	0	*n_{eff} = 1,4575152*			
SOR escalar	0,5	1,4576966	$6,1.10^{-6}$	1,4576949	$4,4.10^{-6}$
SOR semi	0,5	1,4576936	$3,1.10^{-6}$	1,4576914	$1,0.10^{-6}$
SOR vetorial	**0,5**	**1,4576936**	**$3,1.10^{-6}$**	**1,4576914**	**$1,0.10^{-6}$**
BPM	0,5	n_{eff} = 1,4576882		diferença* = $2,3.10^{-6}$	
SIPM	0,5	*n_{eff} = 1,4576905*			
SOR escalar	1,0	1,4577846	$1,0.10^{-5}$	1,4577872	$1,2.10^{-5}$
SOR semi	1,0	1,4577719	$2,5.10^{-6}$	1,4577703	$4,2.10^{-6}$
SOR vetorial	**1,0**	**1,4577719**	**$2,5.10^{-6}$**	**1,4577703**	**$4,2.10^{-6}$**
BPM	1,0	n_{eff} = 1,4577763		diferença* $1,8.10^{-6}$	
SIPM	1,0	*n_{eff} = 1,4577745*			

* diferença = $|\, n_{eff\,SIPM} - n_{eff\,SOR} \,|$

Adotando o método SIPM como exato, pode-se verificar, pela tabela anterior, a precisão das diversas implementações do método SOR. Os valores obtidos para o índice efetivo com os métodos SOR vetorial completo e semivetorial, para as duas formulações, têm excelente concordância com o método SIPM, com a diferença sempre próxima a $2x10^{-6}$. A formulação escalar, devido à birrefringência, apresenta uma maior diferença.

São apresentados na Figura 15, o contorno e a distribuição em três dimensões das componentes do campo magnético gerados pelo formalismo vetorial de segunda ordem do método SOR, com o parâmetro $d = 0$.

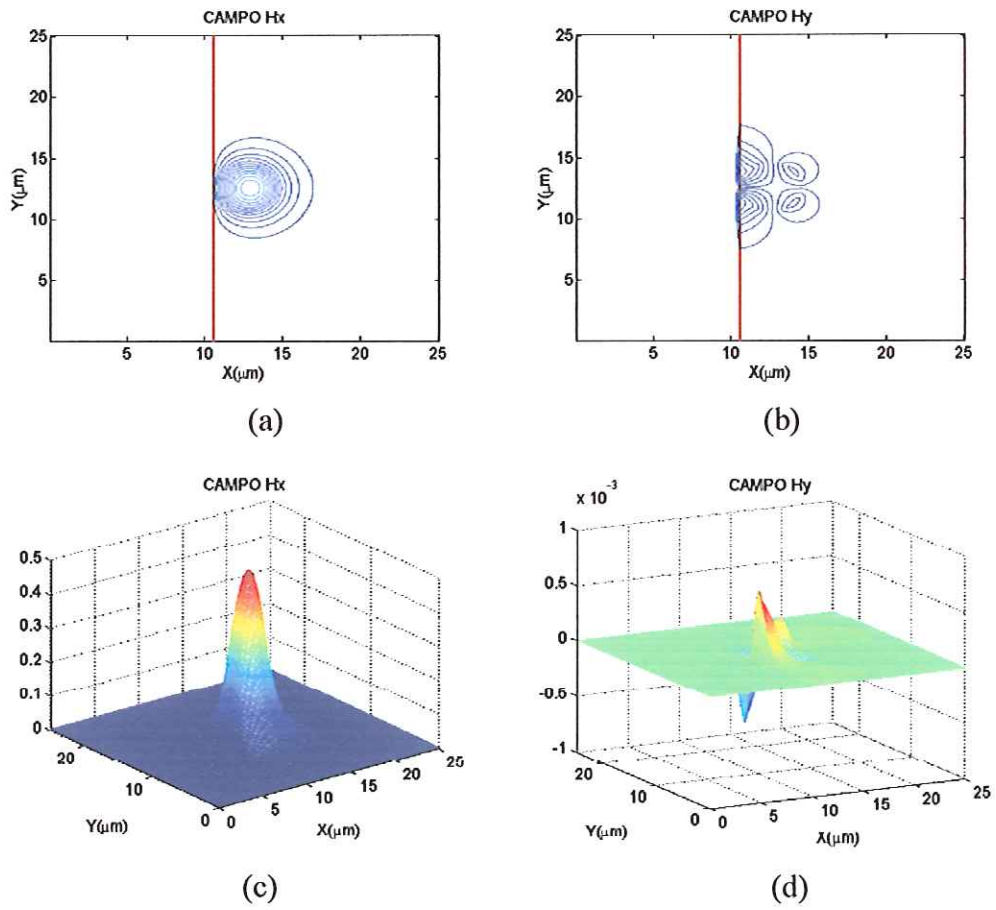


FIGURA 15 Componentes do campo magnético, para a fibra tipo D, com aproximação de segunda ordem do formalismo vetorial, para $d = 0$. (a) contorno da componente H_x; (b) contorno da componente H_y; (c) componente H_x em três dimensões; (d) componente H_y em três dimensões.

Finalmente, a título de avaliação dos resultados gerados pelo formalismo de quarta ordem, são apresentados na Figura 16 o contorno e a distribuição em três dimensões das componentes do campo magnético gerados pela formulação de quarta ordem e com o valor do parâmetro $d = 1{,}0\mu m$.

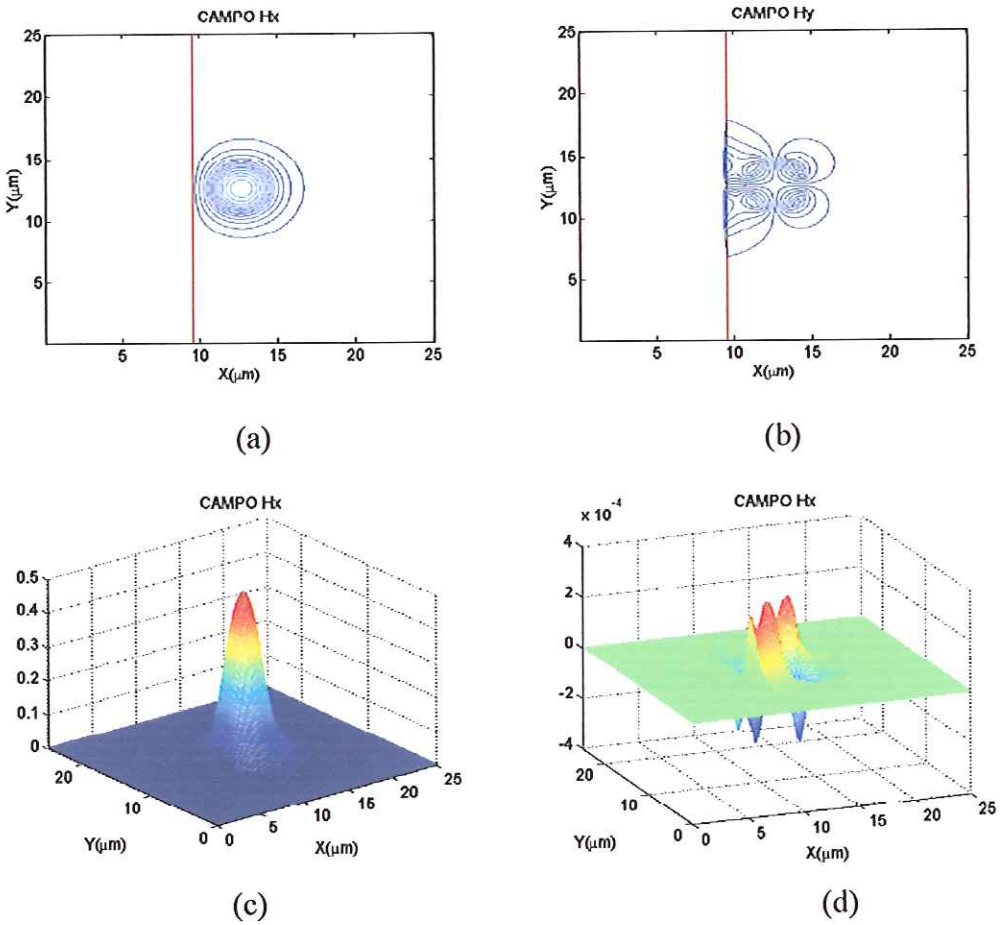


FIGURA 16 Componentes de campo magnético para a fibra tipo D, com formalismo vetorial de quarta ordem, para d = 1,0. (a) contorno da componente H_x; (b) contorno da componente H_y; (c) componente H_x em três dimensões; (d) componente H_y em três dimensões.

Nas Figuras 15 e 16 estão mostradas a componente de campo majoritária H_x e a componente de campo minoritária H_y. Pode-se verificar, analisando a distribuição das componentes do campo na Figuras 15 - 16 (c) e (d), que a amplitude da componente minoritária, H_y é 3 ordens de grandeza menor que a componente majoritária, H_x. Com isso, pode-se explicar a boa concordância entre os resultados obtidos com o formalismo vetorial completo, que considera o acoplamento entre as componentes de campo, com o formalismo semivetorial, o qual despreza o acoplamento entre as componentes de campo. O formalismo escalar apresenta uma maior diferença com relação ao valor exato devido à característica birrefringente da fibra.

Conforme Lüsse e co-autores [47], se a amplitude da componente minoritária do campo é suficientemente pequena, com a diferença acima de duas ordens de magnitude, o tratamento semivetorial é suficiente.

Quando a luz é acoplada na fibra óptica com determinada polarização, ambos os modos são excitados. Como as fibras tipo-D apresentam diferentes constantes de propagação ($\beta_x \neq \beta_y$), os modos propagam-se com diferentes velocidades, resultando em um atraso de fase relativo. Quando essa diferença de fase é um múltiplo inteiro de 2π, os dois modos encontram-se com o mesmo estado da polarização inicial [46]. O comprimento que esse batimento ocorre é conhecido como L_π, e determinado: $L_\pi = \pi / |\beta_x - \beta_y|$. A Figura 17 compara graficamente o resultado entre os valores gerados pelo método SOR de segunda e quarta ordem, com o método BPM e com o método SIPM.

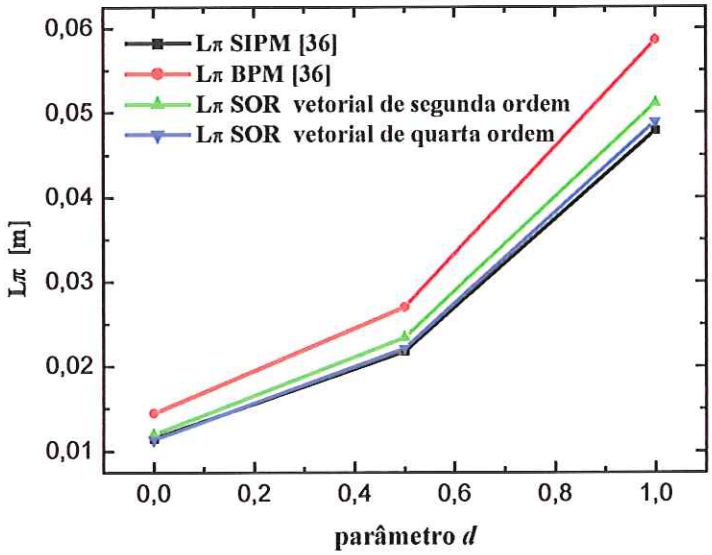


FIGURA 17 Variação de L_π em função do parâmetro d

Analisando o gráfico acima, fica evidente a precisão de ambas as implementações do método SOR. Quando o parâmetro d é igual 1,0μm, a cada 48cm de propagação a polarização inicial é novamente obtida. Já para d = 0,5μm e d = 0,0 após cada 22cm e 12cm, respectivamente, é que a polarização encontra-se no seu estado inicial.

4.3 Guia tipo rib

Para finalizar a aferição das implementações do método SOR, foi escolhido o guia tipo rib [39]. Sua escolha pode ser justificada pelo fato desse guia oferecer uma grande flexibilidade de projeto e, também, por permitir a verificação do comportamento da aproximação em diferenças finitas para as derivadas do campo magnético.

Os parâmetros do guia estão representados esquematicamente na Figura 18, onde o índice do substrato é $n_1 = 3{,}40$, o índice da camada guiante é $n_2 = 3{,}44$ e o índice do ar é $n_3 = 1{,}0$. O comprimento de onda utilizado é $\lambda = 1{,}15\mu m$, a largura do rib é $w = 3{,}0\mu m$, a espessura da camada guiante mais a altura do rib é $t = 1{,}0\mu m$. A espessura da camada guiante t_1 é um parâmetro que varia de 0,1 a 0,9μm. A janela computacional é ajustada pelos parâmetros $Y_a = 0{,}5\mu m$ acima do topo do rib, pela espessura do substrato $Y_s = 3{,}0\mu m$ e pelo espaçamento lateral $X_a = 2{,}5\mu m$ (ou 5,5μm quando $t_1 = 0{,}9\mu m$).

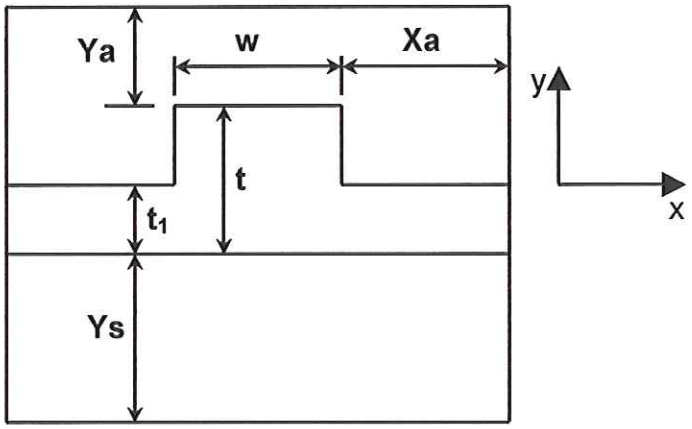


FIGURA 18 Desenho esquemático do guia de onda tipo rib

A aferição dos formalismos escalar, semivetorial e vetorial completo é mostrada na Tabela 4 para aproximação de segunda ordem e na Tabela 5 para a aproximação de quarta ordem, considerando o parâmetro t_1 com três valores, que são: 0,1μm, 0,5μm e 0,9μm, para uma discretização $\Delta_x = \Delta_y = 0{,}025$, conforme [39].

O parâmetro de comparação utilizado é o índice efetivo normalizado *b*. Os resultados são comparados com os valores fornecidos por um método considerado de

alta precisão denominado método da ressonância transversal (MTRM – *modal transverse resonance method*) [45].

TABELA 4 Comparação entre os formalismos do método SOR com aproximação de segunda ordem para modos TM.

Método	$t_1 = 0{,}1\mu m$		$t_1 = 0{,}5\mu m$		$t_1 = 0{,}9\mu m$	
	b	diferença*	b	diferença*	b	diferença*
Escalar	0,31267	$4{,}5.10^{-2}$	0,33459	$4{,}3.10^{-2}$	0,39036	$4{,}4.10^{-2}$
S.V.	0,26970	$2{,}3.10^{-3}$	0,29049	$1{,}5.10^{-3}$	0,34561	$1{,}1.10^{-4}$
Vetorial	0,27090	$3{,}5.10^{-3}$	0,29545	$6{,}4.10^{-3}$	0,34602	$5{,}2.10^{-4}$
MTRM	0,2674	-	0,2890	-	0,3455	-

* diferença = $| b_{MTRM} - b_{SOR} |$

Analisando os valores da Tabela 4, verifica-se que, no caso do guia rib, devido às suas inerentes aproximações, o formalismo escalar não fornece bons resultados. Para a discretização utilizada $\Delta_x = \Delta_y = 0{,}025\mu m$, os resultados obtidos com o formalismo semivetorial são mais próximos ao valor considerado exato, se comparados com os resultados gerados pelo formalismo vetorial completo.

Essa menor precisão do formalismo vetorial completo foi também observada pelo autor Vassallo em [45] e, ao menos para esse guia de onda, o método semivetorial fornece o valor de *b* com melhor precisão. Uma possível explicação para esse fato decorre que, na equação vetorial de Helmholtz, inclui-se a discretização das derivadas cruzadas em diferenças finitas. Estes termos adicionais podem acarretar menor velocidade de convergência do formalismo vetorial completo, exigindo uma maior discretização para se obter melhores resultados.

Comparando a velocidade de convergência entre as implementações com aproximação de segunda ordem, para o guia tipo rib, verifica-se que o formalismo semivetorial converge mais rápido do que a formulação vetorial completa. Isto pode ser explicado, como citado acima, pelo fato da discretização direta das derivadas cruzadas resultar numa pior característica de convergência para o caso particular desse guia [39]. Como neste guia os modos são híbridos, existe um forte acoplamento entre as componentes de campo H_x e H_y, isto é, o peso das derivadas cruzadas na equação vetorial de Helmholtz (3.8) é maior do que nos outros casos anteriormente estudados.

Alguns autores [39], [43], [44], no intuito de melhorar a precisão e a velocidade de convergência do formalismo vetorial, propõem diferentes formas de discretização das equações diferenciais em diferenças finitas. Nesse trabalho, uma aproximação em diferenças finitas mais exata para as derivadas é conseguida pela utilização das aproximações de quarta ordem que, para os casos anteriormente estudados, demonstrou melhoria na precisão e na velocidade de convergência do método.

A Tabela 5 apresenta os valores para a aproximação de quarta ordem, mantendo-se os mesmos parâmetros para o cálculo da aproximação de segunda ordem.

TABELA 5 Comparação entre os formalismos do método SOR com aproximação de quarta ordem para modos TM.

Método	$t_1 = 0{,}1\mu m$		$t_1 = 0{,}5\mu m$		$t_1 = 0{,}9\mu m$	
	b	diferença*	b	diferença*	b	diferença*
Escalar	0,31216	$4{,}4.10^{-2}$	0,33410	$4{,}5.10^{-2}$	0,38939	$4{,}3.10^{-2}$
S.V.	0,27535	$7{,}9.10^{-3}$	0,29637	$7{,}3.10^{-3}$	0,35043	$4{,}9.10^{-3}$
Vetorial	0,25283	$1{,}4.10^{-2}$-	0,29897	$9{,}9.10^{-3}$	0,35222	$6{,}7.10^{-3}$
MTRM	0,2674	-	0,2890	-	0,3455	-

* diferença = $| b_{MTRM} - b_{SOR} |$

De igual forma à aproximação de segunda ordem, também a aproximação escalar de quarta ordem não é a mais indicada para estudar esse tipo de guia. O formalismo semivetorial de quarta ordem fornece um resultado mais preciso, mantendo a diferença em relação ao índice efetivo normalizado em torno de 10^{-3}, indicando a precisão do método.

Ademais, sabe-se que o comportamento do campo eletromagnético nas descontinuidades de guias retangulares é de difícil modelagem [42]. O formalismo de quarta ordem vetorial completo mostrou-se mais sensível ao efeito da singularidade de campo nas descontinuidades geométricas do guia. Este problema ocorre devido à existência das derivadas cruzadas na equação de acoplamento (3.8) [39]. A discretização das derivadas na aproximação de quarta ordem é mais complexa, conforme equações (3.23) e (3.24), tornado-a mais sensível à manifestação deste

problema. Como também verificado por Yamauchi e co-autores [39], o formalismo de mais alta ordem é eficiente, exceto para os pontos de descontinuidade.

Portanto, nos guias que apresentam descontinuidade, o formalismo vetorial completo com aproximação direta das derivadas em diferenças finitas de quarta ordem necessita de um tratamento especial. Pode-se, nesse caso, fornecer informações adicionais com respeito às equações de onda e distribuição do campo no guia para completar a descrição da formulação do método, como sugerido em [42].

Lui e co-autores em [42] recomendam que a análise de estruturas com uso de formulação vetorial completa deve acontecer em duas etapas. Dada a estrutura guia de onda, primeiro aplica-se a formulação vetorial completa convencional. Caso exista a descontinuidade, sugere-se, então, uma modificação na formulação do método, por exemplo, as propostas em [39], [43] e [44].

Neste trabalho, optou-se pela utilização de um filtro espacial [41]. Esta proposta é mais simples do que as sugeridas por [39], [43] e [44] pois, simplesmente, modifica-se a interface guia-ar de forma a torná-la menos abrupta, variando o índice de refração de forma gradativa. Com essa modificação, conseguiu-se eliminar o efeito da singularidade.

A titulo de visualização e comparação do comportamento do campo magnético majoritário H_x, a Figura 19 (a) e (b) apresenta o campo antes e (c) e (d) após a aplicação do filtro espacial.

Examinando as componentes do campo magnético obtidas pelo formalismo vetorial completo de quarta ordem na Figura 19 (a) nota-se que há uma ampliação do valor do campo majoritário H_x, exatamente no ponto onde ocorre a descontinuidade. O que é coerente, considerando a natureza divergente da singularidade [42].

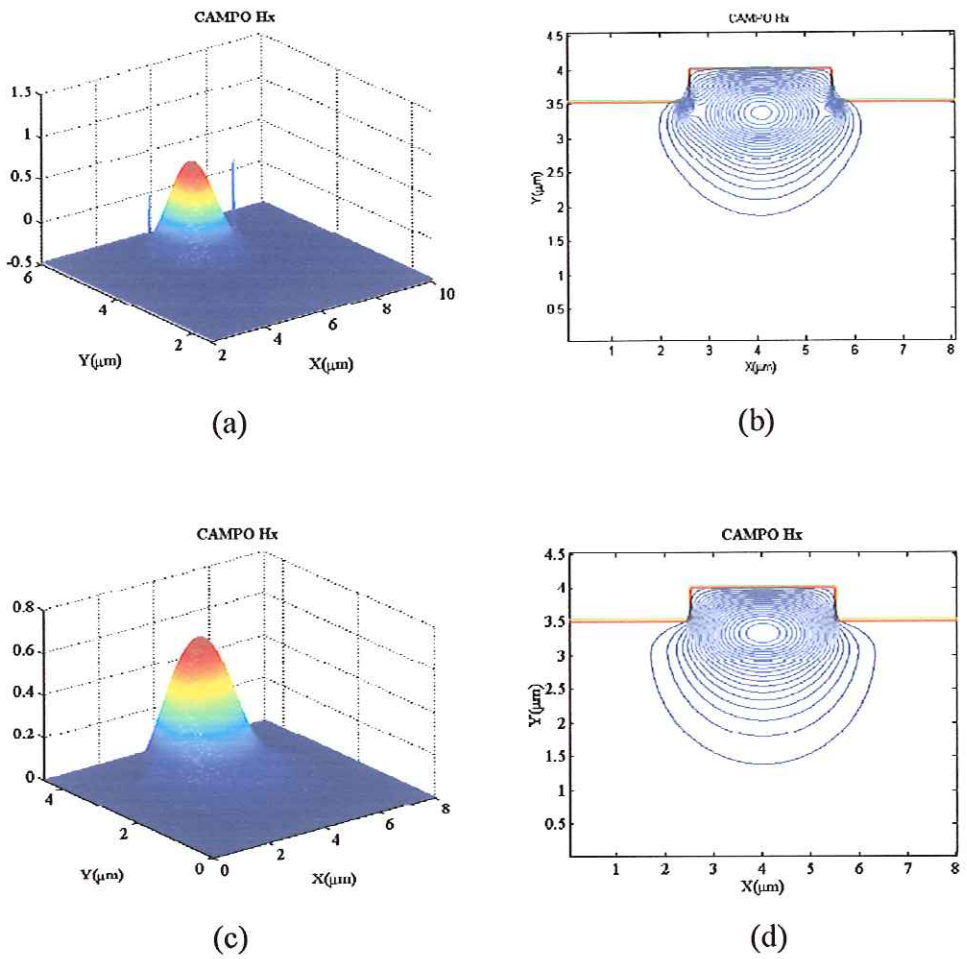


FIGURA 19 Comparação entre a componente de campo magnético H_x. (a) e (b) formalismo de quarta ordem com a presença da singularidade. (c) e (d) formalismo de quarta ordem com variação gradativa do índice de refração guia-ar.

A visualização gráfica das componentes do campo magnético, para as diferentes espessuras da camada guiante, está apresentada em duas figuras separadamente. A Figuras 20 apresenta a visualização em três dimensões e o contorno do campo para a altura do rib t_1 = 0,5μm. Na Figura 21 estão mostrados apenas o contorno do campo magnético para as alturas t_1 = 0,1μm e t_1 = 0,9μm.

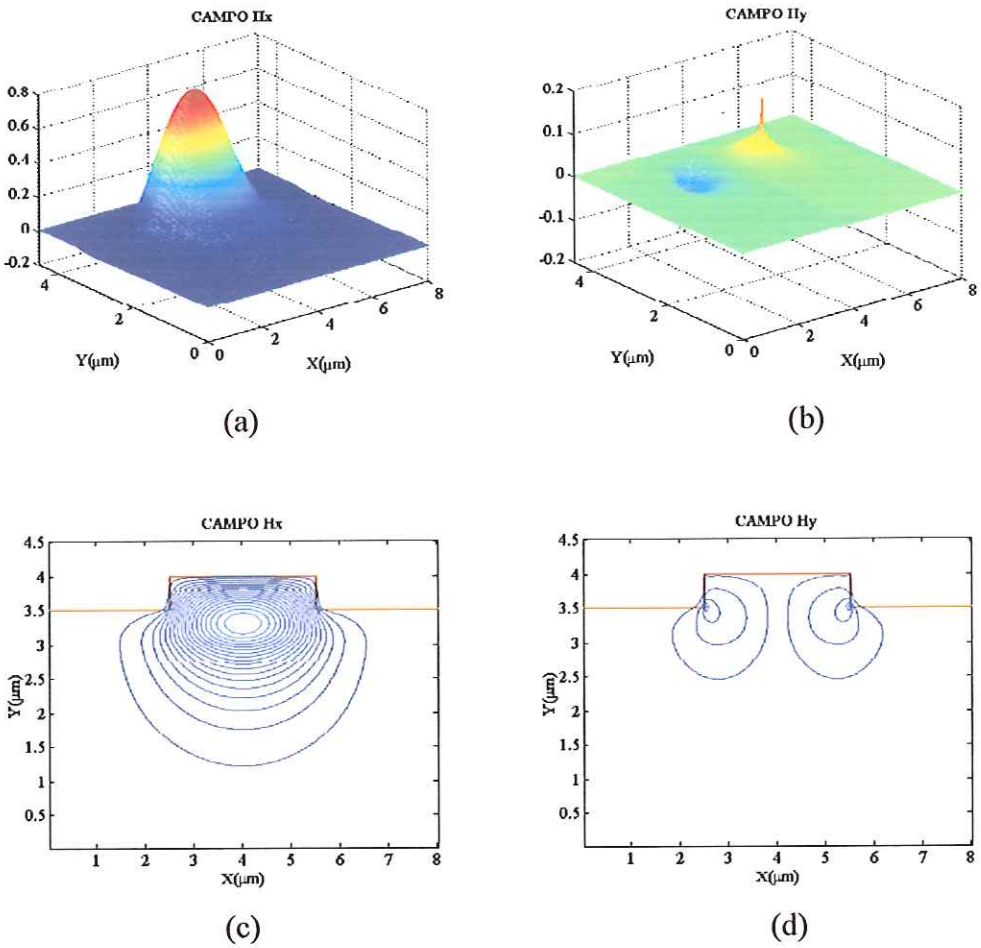


FIGURA 20 Componentes do campo magnético para o guia tipo rib geradas a partir do formalismo SOR vetorial de segunda ordem. (a) componente majoritária H_x em três dimensões, (b) componente minoritária H_y em três dimensões, (c) contorno da componente H_x (d) contorno da componente H_y.

Conforme Figura 20, verifica-se que a amplitude do campo minoritário H_y está na mesma ordem de grandeza da componente majoritária H_x. Isto, diferente do que acontece para as fibras ópticas estudadas, ressalta que a componente do campo H_y é significativa, confirmando que o modo em guias tipo rib é essencialmente híbrido.

No intuito de avaliar a distribuição final das componentes do campo magnético quando o parâmetro t é alterado, apresenta-se na Figura 21 essa distribuição.

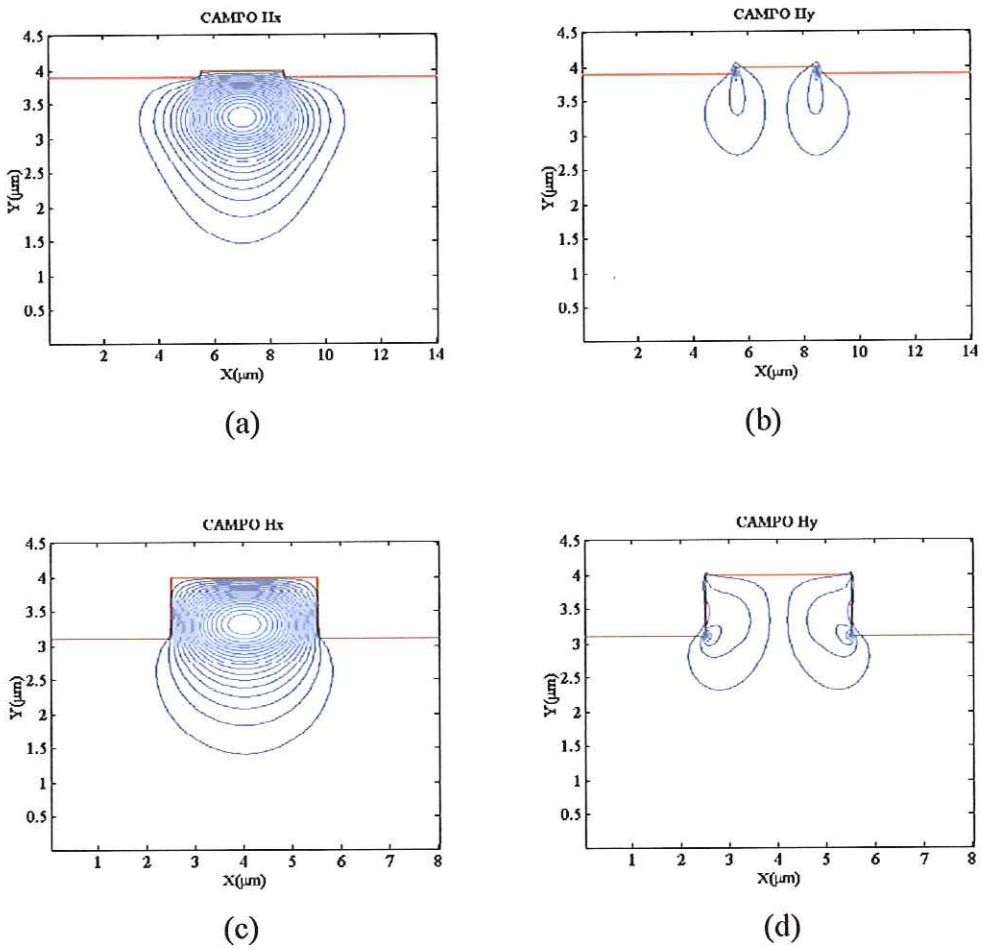


FIGURA 21 Componentes de campo magnéticas para o guia tipo rib geradas a partir do formalismo SOR vetorial de segunda ordem, para diferentes *t*. (a) componente majoritária H_x para t = 0,1μm e (b) componente minoritária H_y para t = 0,1μm; (c) contorno da componente H_x para t =0,9μm e (d) contorno da componente H_y para t =0,9μm.

Feita a aferição dos métodos de segunda e quarta ordem, no próximo Capítulo os formalismos desenvolvidos são aplicados nas fibras microestruturadas. Tendo em vista os bons resultados numéricos do formalismo semivetorial, o objetivo é o de investigar em quais situações de análise das fibras microestruturadas haverá a necessidade de se operar, obrigatoriamente, com o formalismo vetorial completo

5. Estudo das fibras ópticas microestruturadas pelo método SOR

Nos capítulos anteriores foram apresentadas algumas características das fibras ópticas microestruturadas, assim como o detalhamento dos formalismos escalar, semivetorial e vetorial completo do método SOR. Como já comentado um dos objetivos deste trabalho é investigar para quais situações de projeto das fibras ópticas microestruturadas deve-se utilizar o formalismo vetorial completo. Então, neste capítulo será definida uma figura de mérito para examinar a diferença entre os resultados gerados com relação ao índice efetivo, para os três formalismos do método SOR de segunda ordem implementados. Em seguida, será investigada a diferença entre os resultados gerados, também pelos três formalismos, com relação ao cálculo da dispersão nas fibras microestruturadas.

5.1 Comparação entre os formalismos com relação ao cálculo do índice efetivo

Na apresentação das fibras ópticas microestruturadas (Capítulo 2) foi mencionado que entre as principais vantagens dessas fibras está a sua alta flexibilidade de projeto. Neste projeto das fibras faz-se necessário analisar três parâmetros físicos fundamentais, o espaçamento entre os furos de ar, Λ, o diâmetro dos furos de ar, d e o comprimento de onda, λ. Visando otimizar o estudo das fibras microestruturadas, os três parâmetros físicos são normalizados. Nesse caso, passa-se a trabalhar apenas com dois parâmetros, o fator de preenchimento de ar, f, o qual é definido como $f = d/\Lambda$ e com o fator de escala, S, definido como $S = \lambda/\Lambda$.

Neste trabalho as figuras de mérito adotadas para comparação são a diferença relativa percentual entre o formalismo escalar e o formalismo vetorial completo, DR_{EV}, conforme equação (5.1), e também, a diferença relativa percentual entre o formalismo semivetorial e o formalismo vetorial completo, DR_{SV}, conforme equação (5.2).

$$DR_{EV} = \frac{\left(n_{eff(vet)} - n_{eff(esc)}\right)}{\left(n_{eff(vet)}\right)} 100 \tag{5.1}$$

$$DR_{SV} = \frac{\left(n_{eff(vet)} - n_{eff(semi)}\right)}{\left(n_{eff(vet)}\right)} 100 \tag{5.2}$$

Verificou-se neste trabalho que a grande vantagem de se utilizar os parâmetros normalizados f e S é que, conforme será demonstrado, duas fibras microestruturadas apresentando valores idênticos de f e S apresentarão, independentemente dos parâmetros físicos, valores iguais para o índice efetivo do modo fundamental. Este fato é de grande valia no que concerne à construção de gráficos de projeto, uma vez que a partir de valores fixos de f e S, pode-se analisar uma família de fibras microestruturadas, economizando-se tempo computacional.

Analisando a Figura 22 pode-se comprovar a afirmativa acima, de que o valor do índice efetivo permanece constante para valores fixos dos parâmetros f e S. Para essas simulações foram alterados proporcionalmente, o diâmetro dos furos de ar, d, o espaçamento entre os furos de ar, Λ e o comprimento de onda, λ de forma a manter tanto o fator de preenchimento de ar, f, quanto o fator de escala, S, constantes. Foi calculado o valor do índice efetivo em função do comprimento de onda para $S = 0{,}4$; 0,8; 1,2 e 1,6 e para $f = 0{,}45$; 0,60; 0,75 e 0,90. A fibra microestruturada simulada é formada por 14 anéis. A discretização, $\Delta_x = \Delta_y$ é função da janela computacional, $L_x = L_y$ a qual é ajustada conforme o valor do espaçamento, Λ que, por sua vez, é função de S.

Deve-se ressaltar que os parâmetros físicos da grande maioria das fibras ópticas microestruturadas encontradas na literatura, encontram-se entre:

Fator de preenchimento de ar : $0{,}45 \leq f \leq 0{,}90$;

Espaçamento entre os furos de ar: $0{,}8\mu m \leq \Lambda \leq 3{,}0\mu m$;

Comprimento de onda: $0{,}6\mu m \leq \lambda \leq 1{,}6\mu m$.

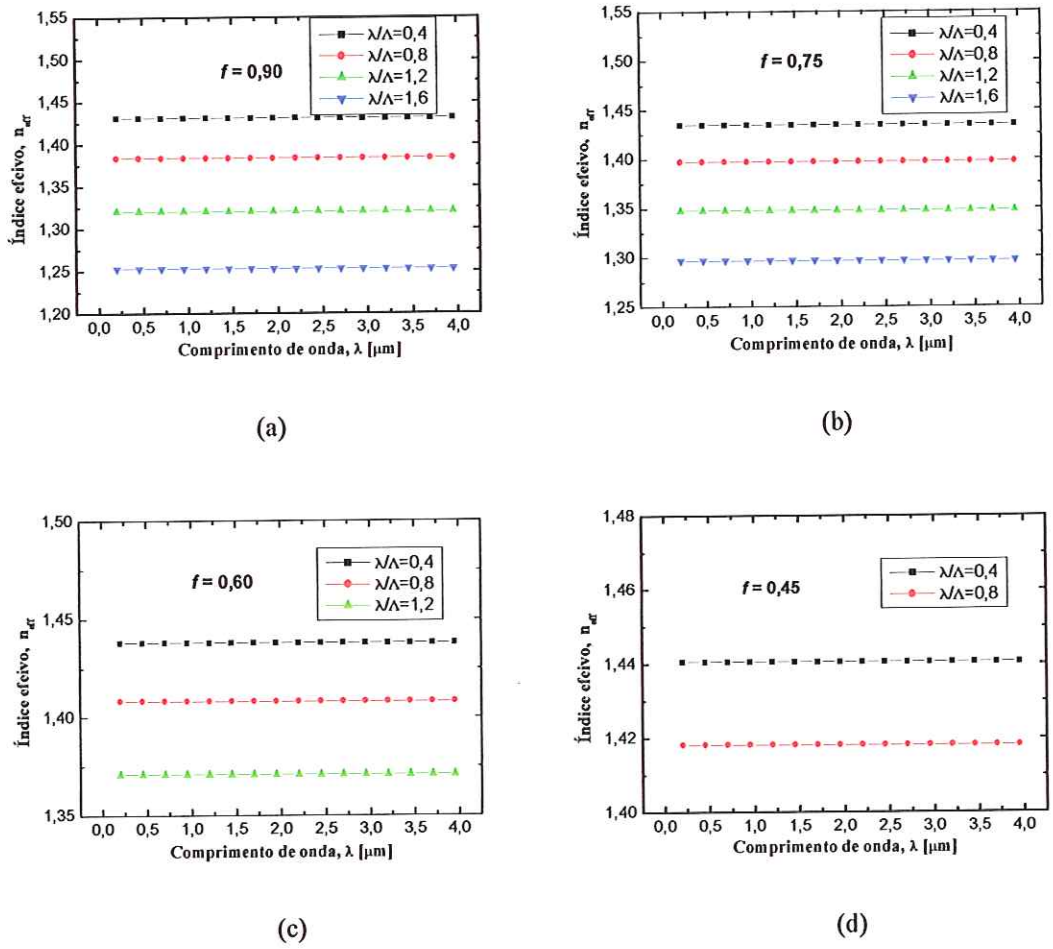


FIGURA 22 Cálculo do índice efetivo em função do comprimento de onda para S = 0,4, 0,8, 1,2 e 1,6. (a) f = 0,90; (b) f = 0,75; (c) f = 0,60; (d) f = 0,45.

Uma das características das fibras microestruturadas, que pode ser observada na Figura 22 é que, aumentando a relação λ/Λ, isto é, aumentando o comprimento de onda em relação ao espaçamento Λ, o valor do índice efetivo tende a diminuir. Isto pode ser explicado, conforme comentado no Capítulo 2, pelo fato de que, ao aumentar o comprimento de onda λ, o campo eletromagnético tende a se estender em direção aos anéis mais externos da fibra microestruturada. Essa maior interação do campo eletromagnético com os furos de ar diminui o índice de refração da casca, reduzindo, portanto, o valor do índice efetivo.

Na Tabela 6 estão listados alguns valores de S dentro da faixa de variação proposta do comprimento de onda. Foram, então, determinados os valores do espaçamento, Λ, e os valores específicos do diâmetro, d, a fim de manter o fator, f, constante. Na Tabela 7 estão listados os valores de L_x e Δ_x utilizados nas simulações.

TABELA 6 Diferentes valores simulados no projeto das fibras microestruturadas

			diâmetro dos furos de ar			
$S = \lambda/\Lambda$	λ	Λ	f = 0,90	f = 0,75	f = 0,60	f = 0,45
0,4	0,6	1,5	1,35	1,125	0,9	0,675
0,4	0,8	2	1,8	1,5	1,2	0,9
0,4	1	2,5	2,25	1,875	1,5	1,125
0,4	1,2	3	2,7	2,25	1,8	1,35
0,6	0,6	1	0,9	0,75	0,6	0,45
0,6	0,8	1,333333	1,2	1	0,8	0,6
0,6	1	1,666667	1,5	1,25	1	0,75
0,6	1,2	2	1,8	1,5	1,2	0,9
0,6	1,4	2,333333	2,1	1,75	1,4	1,05
0,6	1,6	2,666667	2,4	2	1,6	1,2
0,8	0,6	0,75	0,675	0,5625	0,45	0,3375
0,8	0,8	1	0,9	0,75	0,6	0,45
0,8	1	1,25	1,125	0,9375	0,75	0,5625
0,8	1,2	1,5	1,35	1,125	0,9	0,675
0,8	1,4	1,75	1,575	1,3125	1,05	0,7875
0,8	1,6	2	1,8	1,5	1,2	0,9
1	0,8	0,8	0,72	0,6	0,48	0,36
1	1	1	0,9	0,75	0,6	0,45
1	1,2	1,2	1,08	0,9	0,72	0,54
1	1,4	1,4	1,26	1,05	0,84	0,63
1	1,6	1,6	1,44	1,2	0,96	0,72
1,2	1	0,833333	0,75	0,625	0,5	0,375
1,2	1,2	1	0,9	0,75	0,6	0,45
1,2	1,4	1,166667	1,05	0,875	0,7	0,525
1,2	1,6	1,333333	1,2	1	0,8	0,6
1,4	1	0,714286	0,642857	0,535714	0,428571	0,321429
1,4	1,2	0,857143	0,771429	0,642857	0,514286	0,385714
1,4	1,4	1	0,9	0,75	0,6	0,45
1,4	1,6	1,142857	1,028571	0,857143	0,685714	0,514286
1,6	1,0	0,625	0,5625	0,46875	0,375	0,28125
1,6	1,2	0,75	0,675	0,5625	0,45	0,3375
1,6	1,4	0,875	0,7875	0,65625	0,525	0,39375
1,6	1,6	1	0,9	0,75	0,6	0,45

TABELA 7 Valores da janela computacional, $L_x = L_y$ e da discretização, $\Delta_x = \Delta_y$

$S = \lambda/\Lambda$	λ	Λ	$L_x = L_y$	$\Delta_x = \Delta_y$
0,4	0,6	1,5	$4,35\ 10^{-5}$	$1,08\ 10^{-7}$
0,4	0,8	2	$5,8\ 10^{-5}$	$1,45\ 10^{-7}$
0,4	1	2,5	$7,25\ 10^{-5}$	$1,81\ 10^{-7}$
0,4	1,2	3	$8,7\ 10^{-5}$	$2,175\ 10^{-7}$
0,6	0,6	1	$2,9\ 10^{-5}$	$7,25\ 10^{-8}$
0,6	0,8	1,333333	$3,87\ 10^{-5}$	$9,7\ 10^{-8}$
0,6	1	1,666667	$4,85\ 10^{-5}$	$1,2\ 10^{-7}$
0,6	1,2	2	$5,8\ 10^{-5}$	$1,45\ 10^{-7}$
0,6	1,4	2,333333	$6,77\ 10^{-5}$	$1,69\ 10^{-7}$
0,6	1,6	2,666667	$7,73\ 10^{-5}$	$1,94\ 10^{-7}$
0,8	0,6	0,75	$2,175\ 10^{-5}$	$5,43\ 10^{-8}$
0,8	0,8	1	$2,9\ 10^{-5}$	$7,25\ 10^{-8}$
0,8	1	1,25	$3,625\ 10^{-5}$	$9,0625\ 10^{-8}$
0,8	1,2	1,5	$4,25\ 10^{-5}$	$1,0875\ 10^{-7}$
0,8	1,4	1,75	$5,075\ 10^{-5}$	$1,2\ 10^{-7}$
0,8	1,6	2	$5,8\ 10^{-5}$	$1,45\ 10^{-7}$
1	0,8	0,8	$2,32\ 10^{-5}$	$5,48\ 10^{-8}$
1	1	1	$2,9\ 10^{-5}$	$7,25\ 10^{-8}$
1	1,2	1,2	$3,48\ 10^{-5}$	$8,7\ 10^{-8}$
1	1,4	1,4	$4,06\ 10^{-5}$	$1,015\ 10^{-7}$
1	1,6	1,6	$4,64\ 10^{-5}$	$1,16\ 10^{-7}$
1,2	1	0,833333	$2,417\ 10^{-5}$	$6,04\ 10^{-8}$
1,2	1,2	1	$2,9\ 10^{-5}$	$2,25\ 10^{-8}$
1,2	1,4	1,166667	$3,38\ 10^{-5}$	$8,45\ 10^{-8}$
1,2	1,6	1,333333	$3,87\ 10^{-5}$	$9,6\ 10^{-8}$
1,4	1	0,714286	$2,07\ 10^{-5}$	$5,178\ 10^{-8}$
1,4	1,2	0,857143	$2,4857\ 10^{-5}$	$6,214\ 10^{-8}$
1,4	1,4	1	$2,9\ 10^{-5}$	$7,25\ 10^{-8}$
1,4	1,6	1,142857	$3,314\ 10^{-5}$	$8,28\ 10^{-8}$
1,6	1,0	0,625	$1,8125\ 10^{-5}$	$4,53\ 10^{-8}$
1,6	1,2	0,75	$2,175\ 10^{-5}$	$5,437\ 10^{-8}$
1,6	1,4	0,875	$2,5375\ 10^{-5}$	$6,34\ 10^{-8}$
1,6	1,6	1	$2,9\ 10^{-5}$	$7,25\ 10^{-8}$

EESC - USP
Biblioteca
CAMPUS DE S. CARLOS

A Figura 23 apresenta os resultados obtidos em função da figura de mérito pré-definida. Visualiza-se a diferença relativa percentual entre os valores do índice efetivo gerados pelos formalismos semivetorial e escalar com relação ao valor fornecido pelo formalismo vetorial completo. Deve-se lembrar que o formalismo semivetorial despreza o acoplamento entre as componentes transversais de campo. Já o formalismo escalar despreza, tanto o acoplamento entre as componentes de campo quanto os efeitos de polarização. Dessa forma, o tempo de simulação e o esforço computacional utilizado pelo formalismo escalar são menores do que o empregado na simulação com o formalismo semivetorial. Este, por sua vez, demanda um menor tempo de simulação e requer um menor esforço computacional que o exigido na simulação com o formalismo vetorial completo.

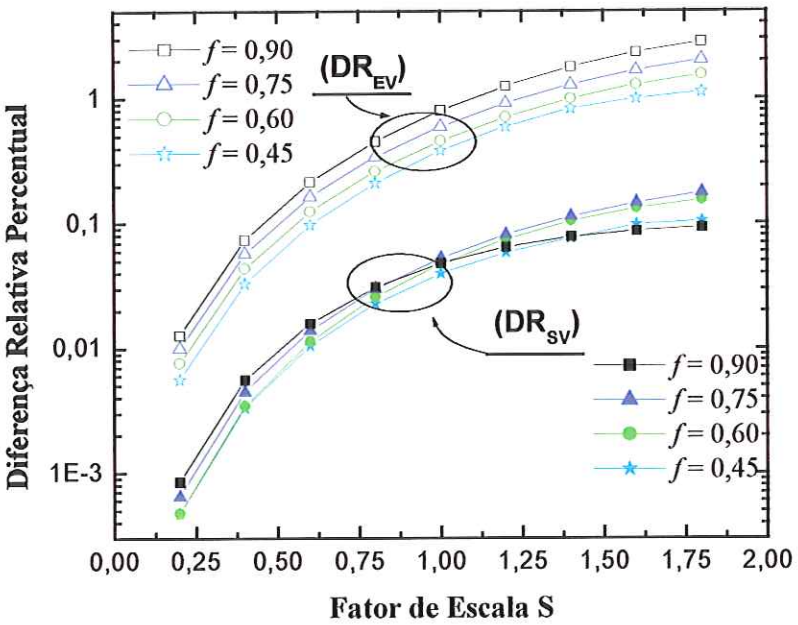


FIGURA 23 Diferença relativa percentual entre os valores do índice efetivo gerados pelos formalismos escalar e semivetorial com relação ao vetorial completo, para quatro valores distintos de *f*.

Pode-se recorrer à Figura 23 e avaliar a precisão dos resultados gerados pelos formalismos escalar e semivetorial com relação ao formalismo vetorial completo. Dessa forma, se no projeto das fibras microestruturadas necessita-se apenas estimar o valor do índice efetivo, dependendo da precisão requerida não é necessário o uso do formalismo

vetorial completo, podendo-se utilizar um dos formalismos mais simples, o que demanda um menor tempo de simulação.

Se, por exemplo, a diferença relativa percentual aceitável for menor que 0,1%, desde que o valor S esteja aproximadamente abaixo de 1,20, pode-se utilizar o formalismo escalar. Para valores de S acima de 1,2, verifica-se na Figura 23, que o formalismo escalar apenas apresenta uma diferença relativa de 1,0%. Ademais, se houver a necessidade de uma precisão em torno de 0,01%, o formalismo escalar só poderá ser utilizado para $S < 0{,}5$. Com relação ao formalismo semivetorial, a diferença relativa percentual permanece sempre acima de 0,1%, praticamente na ordem de 0,01%. Caso seja necessária uma maior precisão nos resultados, por exemplo, uma diferença relativa na ordem de 0,001%, que corresponde a um erro na quinta casa decimal do índice efetivo, o formalismo semivetorial só pode ser utilizado quando $S < 0{,}5$. Se a fibra apresentar o valor de $S > 0{,}5$ e a precisão desejada for maior que 0,001% faz-se necessário à utilização do formalismo vetorial completo.

Outra característica das curvas da Figura 23 é que a diferença relativa tende a aumentar com o aumento de S. Este fato pode ser explicado analisando o confinamento do campo eletromagnético no núcleo da fibra. Para tal, a figura 25 apresenta o cálculo do fator de confinamento, Γ_g, em função do comprimento de onda e também o cálculo do fator de confinamento em função do fator de escala. O fator de confinamento representa a quantidade relativa de potência óptica transportada no núcleo, podendo ser calculada integrando-se o vetor de Poynting conforme a expressão [49]:

$$\Gamma_g = \frac{\int\int_0^{\rho} |Hx|^2 \, dxdy}{\int\int_0^{\infty} |Hx|^2 \, dxdy} \tag{5.3}$$

Para a análise das fibras microestruturadas o raio do núcleo, ρ, foi considerado fixo, tendo dimensão $\rho = \Lambda$ conforme ilustrado na Figura 24.

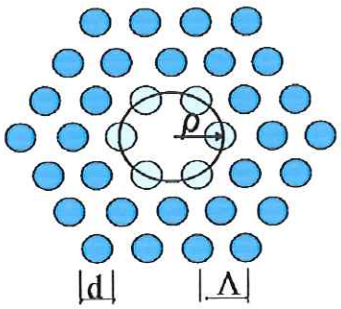


FIGURA 24 Representação esquemática da região do núcleo na fibra microestruturada.

Dessa forma, a Figura 25 apresenta o fator de confinamento do campo eletromagnético para o parâmetro *f* entre 0,45 e 0,90, simulados pelo formalismo vetorial completo.

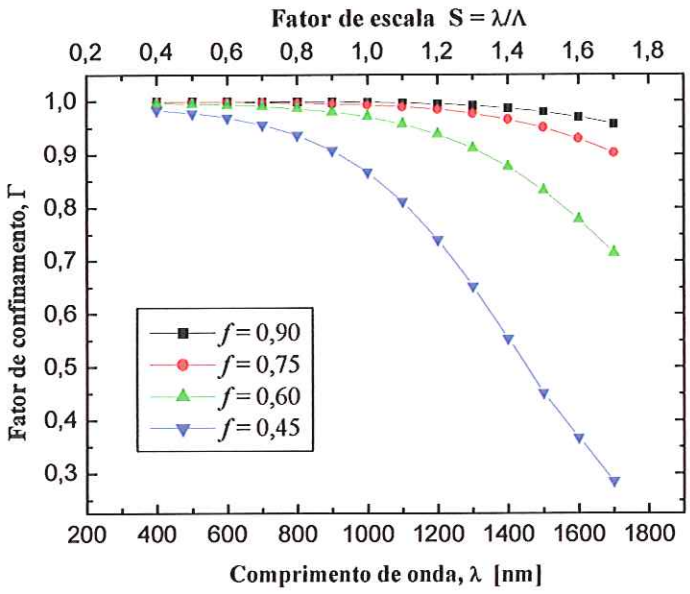


FIGURA 25 Fator de confinamento do campo eletromagnético para *f* = 0,90; 0,75; 0,60 e 0,45.

Analisando a Figura 25 observa-se que, com o aumento do comprimento de onda, ou seja, aumento de *S*, a potência óptica transportada pela região do núcleo tende a diminuir. Com isso explica-se porque, ao aumentar o parâmetro *S*, Figura 23, a diferença relativa entre os formalismos semivetorial e escalar com relação ao formalismo vetorial completo tende a aumentar. Quanto maior for S, maior a intensidade de campo na região da casca, diminuindo, dessa forma, a precisão dos formalismos.

Nas fibras ópticas microestruturadas ocorre algo semelhante ao verificado nas fibras ópticas índice degrau convencional. As simulações para as fibras microestruturadas com menor *f*, isto é, menor contraste de índice de refração entre núcleo-casca, apresentam resultados com melhor precisão se comparados com as simulações para as fibras com maior *f*, ou seja, fibras com maior contraste de índice de refração. Este fato só não é valido quando o formalismo semivetorial é utilizado nas fibras com *f* = 0,90 e *S* > 1,0, ou seja, quando houver um forte confinamento de campo e um alto contraste de índice de refração. Neste caso, o campo eletromagnético apresenta-

se tão intensamente confinado que o aumento do parâmetro S não é suficiente para diminuir a precisão do formalismo semivetorial.

Por fim, por meio da Figura 23 e analisando apenas o fator de escala, S, e o fator de preenchimento de ar, f, pode-se saber se os resultados gerados pelos formalismos escalar ou semivetorial estão ou não dentro de uma margem de erro aceitável. Dessa forma, pode-se concluir, que dependendo da precisão desejada no projeto das fibras microestruturadas, pode-se ou não recorrer ao formalismo escalar. Com relação ao uso do formalismo semivetorial no projeto das fibras microestruturadas, conforme a referência [11] já havia afirmado, pode-se concluir que sua utilização fornece uma boa precisão de resultados, podendo-se utilizá-lo com segurança no projeto das fibras microestruturadas. A utilização do formalismo vetorial completo fica, então, restrita aos casos particulares onde é necessária uma grande precisão nos resultados.

5.2 Comparação entre os formalismos com relação ao cálculo da dispersão cromática

No estudo das fibras microestruturadas há um grande interesse no cálculo da dispersão cromática, a qual pode ser projetada tanto para ser próxima de zero e plana, quanto para apresentar um grande valor negativo com uma determinada inclinação [13], [22]. Desta forma, as fibras microestruturadas podem ser usadas para transmissão em enlaces de comunicação ópticas e para compensação de dispersão em enlaces que utilizam fibras convencionais [25]. A dispersão cromática total é definida por:

$$D_T = -\frac{\lambda}{c}\frac{\partial^2 n_{eff}(\lambda)}{\partial \lambda^2} \tag{5.4}$$

No entanto, como comentado no Capítulo 2, o cálculo da dispersão cromática, D_c pode ser feito por uma aproximação, proposta inicialmente por Ferrando e co-autores [18], resultante da composição linear entre a dispersão de guia de onda, D_{wg} e da dispersão de material, D_m, conforme equação (5.5).

$$D_c = D_{wg} + D_m \tag{5.5}$$

Neste caso, no cálculo da dispersão de guia de onda considera-se a sílica como material não dispersivo, ou seja, despreza-se a variação do índice de refração da sílica em função de λ. A dispersão de guia de onda pode, então, ser calculada [18]:

$$D_{wg} = -\frac{\lambda}{c}\frac{\partial^2 n_{eff}}{\partial \lambda^2} \tag{5.6}$$

Deve-se ressaltar que a dispersão de guia de onda é função da segunda derivada do índice efetivo em função do comprimento de onda, o qual tem valores diferentes para o mesmo S, conforme pode ser observado na Tabela 6. Este fato é fundamental para entender porque, mesmo as fibras microestruturadas apresentando valores idênticos para S e f, isto é, os mesmo valores do índice efetivo, não irão apresentar o mesmo diagrama de dispersão.

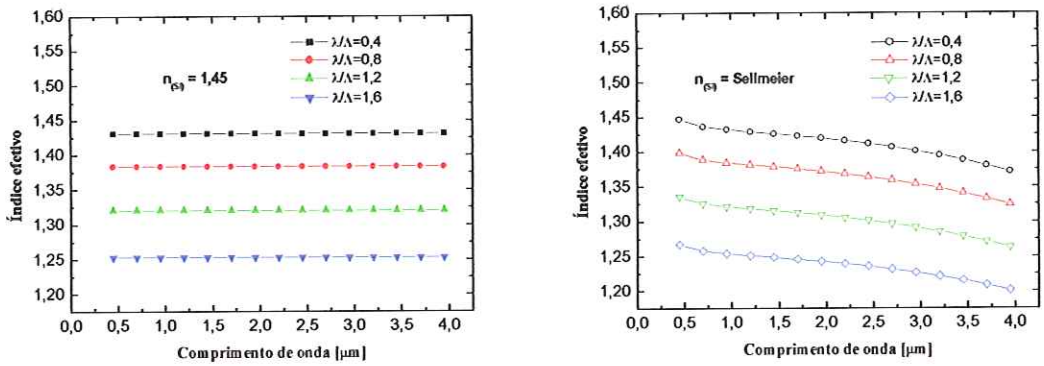
A dispersão de material, D_m, por sua vez, é calculada por meio da segunda derivada do índice de refração em função do comprimento de onda. A variação do índice de refração da sílica em função de λ pode ser obtida pela equação de Sellmeier [49]. A dispersão de material pode ser expressa conforme equação (5.7) [18]:

$$D_m = -\frac{\lambda}{c}\frac{\partial^2 n_{Si}(\lambda)}{\partial \lambda^2} \tag{5.7}$$

Tendo definido a dispersão cromática, e antes de avaliar a precisão dos resultados gerados pelos formalismos escalar e semivetorial no cálculo de D_T, faz-se necessário examinar duas questões: 1°) avaliar para quais casos das fibras microestruturadas é valida a aproximação feita pela equação (5.5); 2°) se a utilização dos parâmetros normalizados f e S permite reduzir o número de simulações e estudar uma família de fibras a partir de um mesmo gráfico de dispersão.

Inicialmente é apresentado na Figura 26, para alguns valores do parâmetro S, o comportamento do índice efetivo para dois casos distintos. No primeiro caso simulado, Figura 26 (a), o índice de refração da sílica foi considerado fixo, n_{Si} = 1,45, enquanto que no segundo caso, Figura 26 (b), o índice de refração da sílica é dependente do comprimento de onda λ. Nessa figura foi considerado apenas o caso de f = 0,9. Pode-se, então, diferenciar as duas maneiras de se calcular a dispersão cromática. Uma das possibilidades, por meio da equação (5.4), considera a sílica como um material

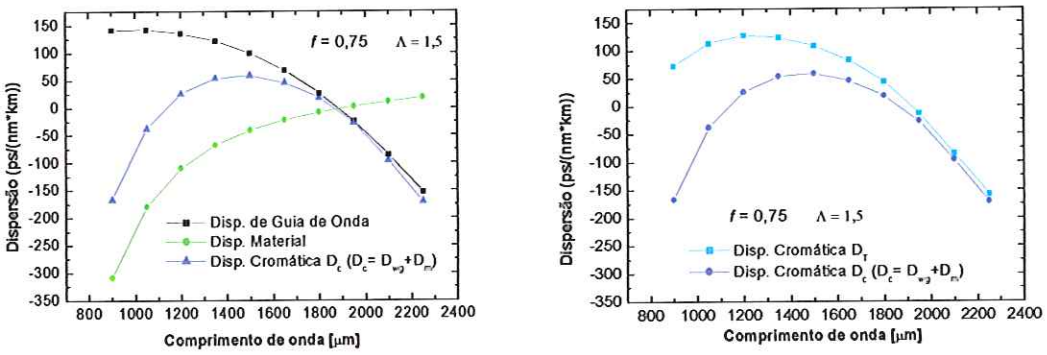
dispersivo, Figura 26(b). A outra possibilidade para o cálculo da dispersão cromática é pela equação aproximada (5.5), a qual considera separadamente o efeito dispersivo da sílica, Figura 26(a). Para avaliar para quais situações essa aproximação é valida foram examinados dois casos distintos com os resultados apresentados nas figuras 27 e 28.



(a) (b)

FIGURA 26 Índice efetivo em função do comprimento de onda para a fibra microestruturada com f = 0,9 e S = 0,4, 0,8, 1,2 e 1,6; (a) n_{Si} = 1,45 (b) n_{Si} = valor resultante da formula de Sellmeier.

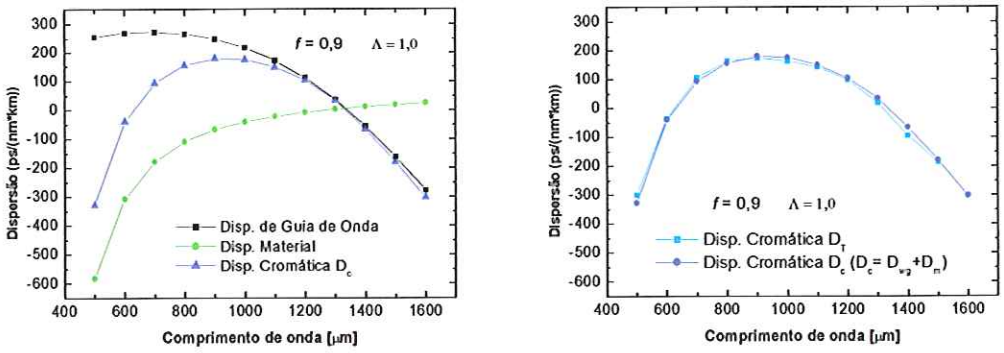
O primeiro caso, de um fraco confinamento do campo eletromagnético, é apresentado na Figura 27. Figura 27 (a) apresenta as curvas de dispersão de material, de guia de onda e de dispersão cromática dada pela equação aproximada (5.5). A Figura 27 (b), por sua vez, compara a curva de dispersão cromática gerada diretamente pela equação (5.4) com a calculada anteriormente pela equação (5.5). Para essas figuras, foram considerados os parâmetros f = 0,75 e S variando entre 0,4 e 1,6 e Λ = 1,5μm. Observa-se na Figura 27 (b), que o cálculo da dispersão cromática pela equação aproximada (5.5) não correspondeu ao resultado fornecido pela equação (5.4), principalmente para comprimento de ondas menores.



(a) (b)

FIGURA 27 Cálculo da dispersão cromática para $f = 0{,}75$. (a) dispersão de material, dispersão de guia de onda dispersão e dispersão cromática dada pela equação (5.5); (b) Comparação entre dispersão cromática dada pela equação (5.4) com a dispersão cromática dada pela equação (5.5)

As curvas de dispersão geradas pelas equações (5.4) e (5.5), foram, então, comparadas para um caso oposto ao anterior, ou seja, para um forte confinamento do campo eletromagnético. Os parâmetros utilizados nessa simulação foram, $f = 0{,}90$, S variando entre 0,4 e 1,6 e $\Lambda = 1{,}0\mu m$. A Figura 28(a) mostra o comportamento das curvas de dispersão de material, de guia de onda e de dispersão cromática dada pela equação (5.5). A Figura 28(b) compara as curva de dispersão cromática obtidas com as equações (5.4) e (5.5). Portanto, o cálculo da dispersão cromática como proposto por Ferrando [18], equação (5.5), fornece valores semelhantes ao calculado pela equação (5.4) desde que o campo seja fortemente confinado.



(a) (b)

FIGURA 28 Cálculo da dispersão cromática para $f = 0{,}90$. (a) dispersão de material, dispersão de guia de onda dispersão e dispersão cromática dada pela equação (5.4); (b) Comparação entre dispersão cromática dada pela equação (5.3) com a dispersão cromática dada pela equação (5.4)

Pode-se concluir a partir destes resultados que o cálculo da dispersão cromática pela equação aproximada $D_c = D_{wg} + D_m$ proposta por Ferrando é valido apenas para a fibra microestruturada com um forte confinamento do campo eletromagnético ($f = 0{,}90$). Para um fraco confinamento do campo eletromagnético ($f = 0{,}75$) essa equação aproximada apresenta-se menos adequada, principalmente em comprimentos de onda mais curtos, onde a influência da dispersão material é mais intensa.

Após avaliar a validade da aproximação da equação (5.5) proposta por Ferrando e co-autores em [18], agora será investigada a utilização de f e S. Para avaliar se realmente é possível obter vantagens na utilização dos parâmetros f e S no cálculo da dispersão, a sílica foi considerada como material não-dispersivo. O índice de refração foi mantido fixo, $n_{Si} = 1{,}45$, pois, nesse caso, as fibras microestruturadas apresentando valores idênticos de f e S apresentarão, independente dos parâmetros físicos, valores iguais para o índice efetivo. Como a dispersão material não é função dos parâmetros físicos das fibras microestruturadas pode-se simplesmente examinar a dispersão de guia de onda. Para isso, foram estudadas quatro fibras microestruturadas com diferentes parâmetros físicos (Λ, d) com Λ = 0,75μm; 1,00μm; 1,25μm e 1,50μm. Calculou-se o valor do índice efetivo para uma faixa de valores de S entre 0,4 e 1,6 e para f fixo, $f = 0{,}90$. A Figura 29 apresenta o gráfico correspondente ao cálculo da dispersão de guia de onda gerado pelo formalismo vetorial completo para as quatro diferentes estruturas.

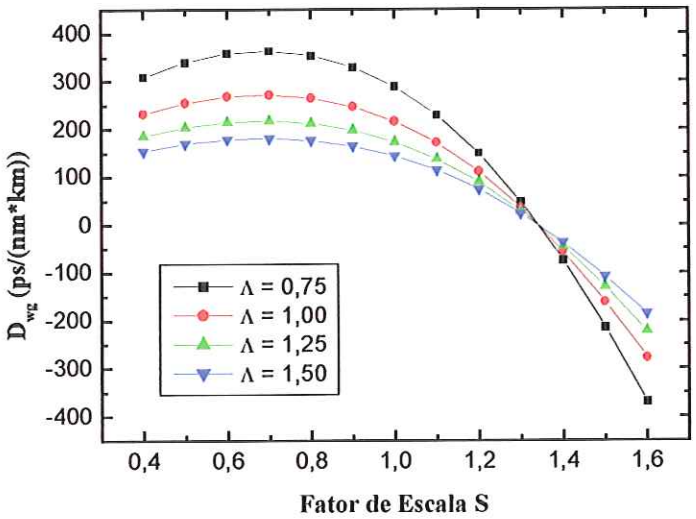


FIGURA 29 Dispersão guia de onda em função do parâmetro S, pelo formalismo vetorial completo, para quatro diferentes fibras.

Analisando a Figura 29, verifica-se que, para o mesmo valor de *S*, as fibras microestruturadas apresentam diferentes valores de dispersão de guia de onda, apesar de apresentarem o mesmo valor do índice efetivo. Este fato é devido aos diferentes valores do comprimento de onda investigados para o mesmo *S*, pois ao efetuar a segunda derivada no cálculo da dispersão, conforme equação (5.5), resultam valores diferentes para a D_{wg}. Para se comprovar a variação da D_{wg} em função da variação do índice efetivo com o comprimento de onda, a Figura 30 apresenta, para as quatro estruturas, o gráfico de dispersão de guia de onda em função do comprimento de onda λ.

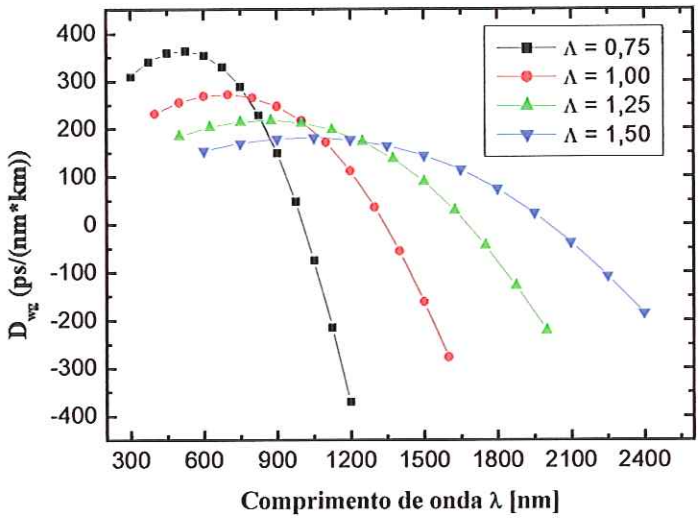


FIGURA 30 Dispersão guia de onda em função de λ pelo formalismo vetorial completo para quatro diferentes fibras.

Com relação às curvas de dispersão de guia de onda quanto menor o espaçamento Λ, maior é a concavidade da curva, resultando, para a faixa de λ investigada, valores de dispersão mais negativos à medida que se aumenta o comprimento de onda.

Com a utilização dos parâmetros normalizados S e *f* é possível reduzir o número de simulações e determinar o valor do índice efetivo para uma grande família de fibras microestruturadas. Entretanto, esse raciocínio não é válido no estudo da dispersão cromática. Devido à sua formulação, ou seja, a segunda derivada, a alteração de qualquer um dos parâmetros físicos da fibra acarretará um novo valor de dispersão, exigindo uma nova simulação a cada alteração de um dos parâmetros geométricos.

Como um dos escopos do trabalho é a comparação entre os resultados gerados pelos três diferentes formalismos no cálculo da dispersão cromática total, equação (5.4), a Figura 31 apresenta o diagrama de dispersão gerado pelos três formalismos, escalar, semivetorial e vetorial completo. Nessas simulações foram considerados dois casos distintos, $f = 0{,}90$ e $f = 0{,}45$, ambos para o espaçamento $\Lambda = 1{,}0\mu m$.

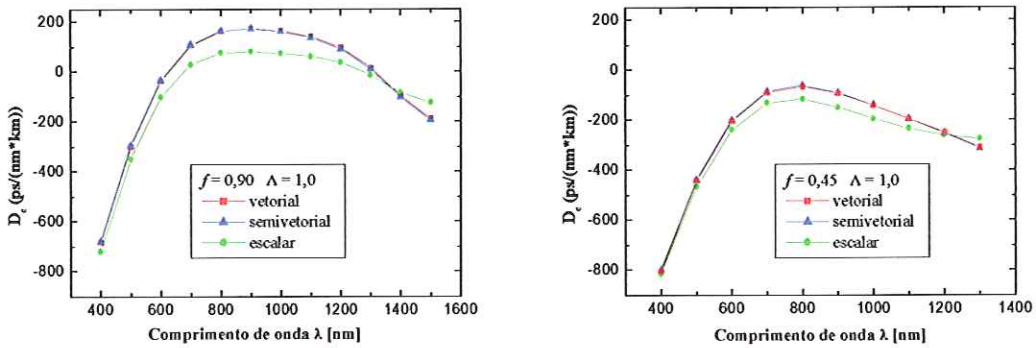


FIGURA 31 Cálculo da dispersão cromática. (a) $f = 0{,}90$ e $\Lambda = 1{,}0\mu m$; (b) $f = 0{,}45$ e $\Lambda = 1{,}0\mu m$.

Por fim, para melhor visualização, a Figura 32 apresenta a diferença entre os valores gerados pelos formalismos para os dois casos apresentados acima. Foi calculada a diferença entre o formalismo escalar e vetorial completo e também, a diferença entre o formalismo semivetorial e vetorial completo no cálculo de D_T.

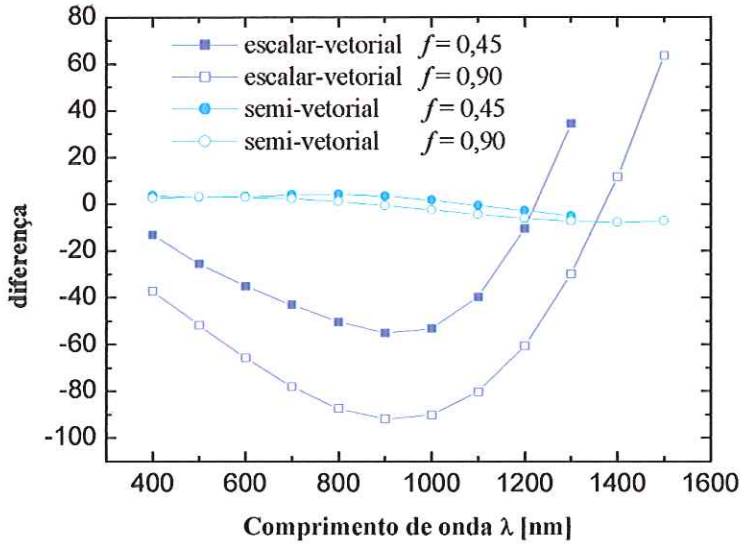


FIGURA 32 Comparação entre os resultados gerados pelos formalismos no cálculo da dispersão cromática para $f = 0{,}45$ e $f = 0{,}90$.

Analisando as Figuras 31 e 32, verifica-se que, assim como no cálculo do índice efetivo, também no cálculo da dispersão cromática o formalismo semivetorial forneceu resultados muito próximos aos fornecidos pelo formalismo vetorial completo, evidenciando, novamente, uma excelente precisão. Já o formalismo escalar, devido às simplificações discutidas no Capitulo 3, gera resultados com menor precisão.

Portanto, o objetivo deste trabalho, que era investigar para quais situações de projeto das fibras microestruturadas seria necessária a utilização do formalismo vetorial completo, foi alcançado. Por meio da figura de mérito adotada, construiu-se o gráfico correspondente à Figura 23, no qual encontram-se as informações necessárias para se determinar a precisão que cada formalismo irá fornecer para o índice efetivo. Dessa forma, dependendo da precisão requerida e dos parâmetros físicos da fibra microestruturada sabe-se se será ou não necessário recorrer ao formalismo vetorial completo.

6. Conclusões

Nesse trabalho foram estudadas as principais características das fibras microestruturadas, sendo implementado, em diferenças finitas, o método numérico da sobre relaxação sucessiva (SOR) na forma escalar, semivetorial e vetorial completa com aproximações de segunda e quarta ordem.

Analisando os dados das Tabelas 1-5 no Capítulo 4, fica caracterizado que para os guias de onda avaliados, o formalismo escalar é o que apresenta resultados com menor precisão. O formalismo semivetorial tem boa concordância com o vetorial completo na maior parte dos casos estudados, e em situações específicas, como guias tipo rib, pode fornecer valores até mais precisos para uma mesma discretização. Ficou demonstrada a validação e a eficiência computacional do método SOR para os três formalismos.

Outra análise importante foi feita com relação à velocidade de convergência em função do parâmetro de relaxação ω. Com as equações (3.18) à (3.20) foi possível estabelecer um valor ótimo para ω. O parâmetro de relaxação iterativo utilizado nesse trabalho apresentou uma boa velocidade de convergência, sendo eficiente para todas as estruturas estudadas, considerado, portanto, como ω-ótimo.

Na modelagem matemática das fibras microestruturadas pelo método SOR, a figura de mérito foi adotada como sendo a diferença relativa percentual entre o formalismo vetorial completo e o formalismo escalar, e também, a diferença relativa percentual entre o formalismo vetorial completo e o formalismo semivetorial. Determinou-se que a grande vantagem de utilizar os parâmetros normalizados f e S é que, independente dos parâmetros físicos utilizados, duas fibras microestruturadas diferentes, mas que apresentem valores idênticos de f e S apresentam valores iguais para o índice efetivo do modo fundamental, conforme demonstrado na Figura 22 do Capítulo 5. Ainda no Capítulo 5, no projeto das fibras microestruturadas, pode-se recorrer a Figura 23 e escolher, conforme a necessidade de precisão nos resultados, qual formalismo pode ser utilizado. Por fim, foi feito um estudo com relação à dispersão nas fibras microestruturas. O cálculo da dispersão cromática pela superposição da dispersão de material mais dispersão de guia de onda só é valido quando a fibra apresenta um forte confinamento, ou quando a dispersão de material é próxima de zero. No estudo

comparativo com relação à dispersão cromática, o formalismo escalar apresentou menor precisão, e novamente os resultados gerados pelo formalismo semivetorial apresentaram excelente concordância com o formalismo vetorial completo.

7. Bibliografia

[1] JOANNOPOULOS, J.D., MEADE, R.D., WINN, J.N. (1995), **Photonic Crystals – Molding the Flow of Light**, Princeton University Press.

[2] SAKODA, K., **Optical Properties of Photonic Crystals** (2001), Springer Series in Optical Sciences.

[3] KRAUSS, T.F., DE LA RUE, R.M. (1999), **Photonic crystal in the optical regime – past, present and future**, Progress in Quantum Electronics 23, p.51-96.

[4] PURCELL, E.M. (1946), **Spontaneous Emission Probabilities at Radio Frequencies,** Physical Review Letters, v. 69, p. 681, 1946.

[5] YABLONOVITCH, E. (1987), **Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics**, Physical Review Letters, v. 58, no. 20, p. 2060 - 2062, Maio 1987.

[6] FLEMING, J.G., LIN, S.-Y. (1999), **Three-dimensional photonic crystal with a stop band from 1.35 to 1.95 μm**, Optics Letters, v. 24, no. 1, p. 49-51, Janeiro 1999.

[7] KNIGHT, J.C., BIRKS, T.A., RUSSELL, P.St.J., ATKIN, D.M., (1996), **All-silica single-mode optical fiber with photonic crystal cladding**, Optics Letters, v. 21, no. 19, p. 1547-1549, Outubro 1996.

[8] ZHELTIKOV, A.M. (2000), **Holey Fibers**, Physics-Uspekhi 43 (11), p. 1125-1136.

[9] WHITE, T.P., McPHEDRAN, R.C., STERKE, C.M., BOTTEN, L.C, STELL, M.J., (2001), **Confinement losses in microstructured optical fibers**, Optics Letters, v. 26, no. 21, p. 1660-1662, Novembro 2001.

[10] WHITE, T.P., McPHEDRAN, R.C., STERKE, C.M., LITCHINITSER, N.M., EGGLETON, B.J. (2002), **Resonance and scattering in microstructured optical fibers**, Optics Letters, v. 27, no. 22, p. 1977-1979, Novembro 2002.

[11] De FRANCISCO, C.A., BORGES, B.-H. V., ROMERO, M.A. (2003) **A Semivectorial Method for the Modeling of Photonic Crystal Fibers**, Microwave and Optical Technology Letters, v. 38, no. 5, p. 418 – 421, Setembro 2003.

[12] BRECHET, F., MARCOU, J., PAGNOUX, D., ROY, P. (2000), **Complete Analysis of the Characteristics of Propagation into Photonic Crystal Fibers, by the Finite Element Method**, Optical Fiber Technology 6, p. 181-191, 2000.

[13] BROENG, J., MOGILEVSTEV, D., BARKOU, S.E., BJARKLEV, A. (1999), **Photonic Crystal Fibers: A New Class of Optical Waveguides**, Optical Fiber Technology 5, p. 305-330, 1999.

[14] CREGAN, R.F., MANGAN, B.J., KNIGHT, J.C., BIRKS, T.A., RUSSELL, P.St.J. (1999), **Single-Mode Photonic Band Gap Guidance of Light in Air**, Science, v. 285, p. 1537-1539, Setembro 1999.

[15] TAMIR, T., **Guide-Wave Optoelectronics,** Editora. Springer Verlag, ed. 2, p. 14-16.

[16] YEE, K.(1966), **Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media,** IEEE Transactions on Antennas and Propagation, v. 14, no. 3, p. 302 – 307, Maio 1966.

[17] HO, K.M., CHAN, C.T., SOUKOULIS, C. M. (1990), **Existence of a Photonic Gap in Periodic Dielectric Structures**, Physical Review Letters, v. 65, no. 25, p. 3152, Dezembro 1990.

[18] FERRANDO, A., SILVESTRE, E., ANDRÉS, P., MIRET, J.J., ANDRÉS, M.V. (2001), **Designing the properties of dispersion-flattened photonic crystal fibers**, Optics Express, v. 9, no. 13, Dezembro 2001.

[19] BIRKS, T.A., KNIGHT, J.C., RUSSELL, (1997), **Endlessly single-mode photonic crystal fiber**, Optics Letters, v. 22, no. 13, p. 961-963, Julho 1997.

[20] YABLONOVITCH, E., GMITTER, T. J., MEADE, R. D., RAPPE, A. M., BROMMER, K. D., JOANNOPOULOS, J. D. (1991), **Donor and acceptor modes in photonic band structure**, Physical Review Letters, v. 67, p. 3380 - 3383, Dezembro 1991.

[21] MORTENSEN, N.A. (2002) **Effective area of photonic crystal fibers**, Optics Express, v. 8, no. 7, Abril 2002.

[22] REEVES, W.H., KNIGHT, J.C., RUSSELL, P.St.J.(2002), **Demonstration of ultra-flattened dispersion in photonic crystal fibers**, Optics Express, v. 10, no. 14, Julho 2002.

[23] FERRARINI, D., VINCETTI, L., ZOBOLI, M., CUCINOTTA, A., SELLERI, S. (2002), **Leakage properties of photonic crystal fibers**, Optics Express, v. 10, no. 23, Novembro 2002.

[24] RENVERSEZ, G., KUHLMEY,B., McPHEDRAN, R. (2003), **Dispersion management with microstructured optical fibers: ultra-flattened chromatic dispersion with low losses**, Optics Letters, v. 28, no. 12, p. 989-991, Junho 2003.

[25] POLI, F., CUCINOTTA, A., FUOCHI, M., SELLERI, S., VINCETTI, L. (2003), **Characterization of microstructured optical fibers for wideband dispersion compensation**, Journal of Optic Society American A, v. 20, no. 10, p. 1958 – 1962, Outubro 2003.

[26] SAITOH, K., KOSHIBA, M., HASEGAWA, T., SASAOKA, E. (2003), **Chromatic dispersion control in photonic crystal fibers: application to ultra-flattened dispersion**, Optics Express, v. 11, no. 8, Abril 2003.

[27] XU, Y., YARIV, A. (2003), **Loss analysis of air-core photonic crystal fibers**, Optics Letters, v. 28, no. 20, p. 1885-1887, Outubro 2003.

[28] CUMINATO, J.A., JUNIOR, M. M., (2002), **Discretização de equações diferenciais parciais – Técnicas de diferenças finitas,** 5 Agosto 2002.

[29] HUANG, W., HAUSS, H.A., (1990), **Analysis of Buried-Channel Waveguides and Couplers: Scalar Solution and Polarization Correction**, Journal of Lightwave Technologic, v. 8, no. 5, Maio 1990.

[30] HORNBECK, R.W., **Numerical Methods**, Inc. Quantum Publishers, p. 7-34.

[31] CUNHA, M.C.C., **Métodos Numéricos**, Editora Unicamp, ed. 2, p. 58- 66, 2003

[32] THOMAZ, J.W., **Numerical Partial Differential Equations – Conservation laws and elliptic equations**, Editora Springer, v. 2, p. 295 – 370.

[33] FAIRES, J.D., BURDEN, R.L., **Numerical Methods**, Publishing Company Boston, p. 242-269.

[34] VARGA, R.S., **Matrix Iterative Analysis,** Editora Prentice-Hall, ed. 1, 1962.

[35] YOUNG, D.M., **Iterative |Solution of Large Linear Systems** - Computer Science and Applied Mathematics, Editora Academic Press, ed. 1, 1971.

[36] HSUEH, Y.-L., YANG, M.-C., CHANG H.-C. (1999), **Three-dimensional Noniterative Full-Vectorial Beam Propagation Method Based on the Alternating Direction Implicit Method**, Journal of Lightwave Technologic, v. 17, no.11, Novembro 1999.

[37] VARNHAM, M.P., PAYNE, D.N., LOVE, J.D (1984), **Fundamental limits to the transmission of linearly polarizer light by birefringent optical fibers,** IEEE - Journal of. Quantum Electronics, v. 20, no. 1, Janeiro 1984.

[38] HADLEY, G.R. (1992), **Transparent Boundary Condition for the Beam Propagation Method**, IEEE - Journal of. Quantum Electronics, v. 28, no. 1, Janeiro 1992.

[39] YAMAUCHI, J., TAKAHASHI, G., NAKANO, H. (1998), **Full-Vectorial Beam-Propagation Method Based on the McKee-Mitchell Scheme with Improved Finite-Difference Formulas**, Journal of Lightwave Technology, v. 16, no. 12, Dezembro 1998.

[40] LÜSSE, P., STIWE, P., SCJÜLE, J., UNGER, H.-G. (1994), **Analysis of Vectorial Mode Fields in Optical Waveguides by a New Finite Difference Method**, Journal of Lightwave Technology, v. 12, no. 3, Março 1994.

[41] LI, D.-H., CHANG, H.-C. (2000), **An Efficient Full-Vectorial Finite-Element Modal Analysis of Dielectric Waveguides Incorporating Inhomogeneous Elements Across Dielectric Discontinuities,** IEEE - Journal of Quantum Electronics, v. 36, no. 11, Novembro 2000.

[42] LUI, W., W., XU, C.-L., HUANG, W.-P., YOKOYAMA, K., SEKI, S. (1999), **Full-Vectorial Mode Analysis with Considerations of Field Singularities at Corners of Optical Waveguides**, IEEE – Journal of Lightwave Technology, v. 17, no. 8, Agosto 1999.

[43] CHIOU, Y.-P., CHIANG, Y.-C., CHANG, H.-C. (2000), **Improved Three-Point Formulas Considering the Interface Conditions in the Finite-Difference Analysis of Step-Index Optical Devices**, IEEE - Journal. Lightwave Technology, v. 18, no. 2, Fevereiro 2000.

[44] VASSALLO, C. (1992) **Improved of Finite Difference Methods for Step-Index Optical Waveguide**, J. Inst. Elect. Eng. Proc., v. 139, p. 137-142, 1992.

[45] VASSALLO, C. (1997) **1993-1995 Optical Mode Solvers**, Optical and Quantum Electronics 29, p. 95-114, 1997

[46] KEISER, G. (1991) **Optical Fiber Communications,** Editora. McGraw-Hill, ed. 2, p. 51-54.

[47] LÜSSE, P., RAMM, K., UGER, H.-G., SCHÜLE, J. (1997), **Comparison of a vectorial and new semivectorial finite-difference approach for optical waveguides**, Optical and Quantum Electronics 29, p. 115-120, 1997.

[48] LUI, W. W., HUANG, W.-P., YOKOYAMA, K. (1997), **Precision Enhancement for Optical Waveguide Analysis,** Journal of Lightwave Technology, v. 15, no. 2, Fevereiro 1997.

[49] AGRAWAL, G. P., **Nonlinear Fiber Optics**, 2° Edição, Ed. Academic Press, p. 07 - 12, 1995.

I. Apêndice – Diferenças Finitas

Entre as possíveis soluções numéricas de equações diferenciais parciais a técnica da aproximação em diferenças finitas é amplamente difundida e utilizada. A idéia básica dos vários métodos de diferenças finitas existentes é substituir as derivadas parciais de uma equação diferencial por aproximações baseadas nas expansões em séries de Taylor na região dos pontos de interesse, isto é, relacionar valores da função $f(x)$ e suas derivadas, num ponto x, com valores dessa função na vizinhança de x, ou seja, $f(x + h)$ e $f(x - h)$.

Seja a expansão em série de Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)(h) + \frac{f''(x)(h)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(x)(h)^{(n+1)}}{(n+1)!} + R_n \qquad (1.a)$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)(h) + \frac{f''(x)(h)^2}{2!} - \cdots + \frac{f^{(n+1)}(x)(h)^{(n+1)}}{(n+1)!} - R_n \qquad (1.b)$$

Nota-se que a ordem da derivada em x é $n+1$, o último termo da expressão R_n é o erro de aproximação de $f(x \pm h)$ e o grau do polinômio é $(n+1)$.

Para melhor entendimento, o problema pode ser visualizado de forma bi-dimensional na Figura 22. Sejam x_0 e y_0 números reais e h um número inteiro positivo. Define-se malha de passo h associada a x_0 e y_0 sendo o conjunto dos pontos:

$$x_i = x_0 \pm ih \qquad (2.a)$$

$$y_j = y_0 \pm jh \qquad (2.b)$$

com: i,j =1, 2, ..., n, conforme ilustra a Figura 22.

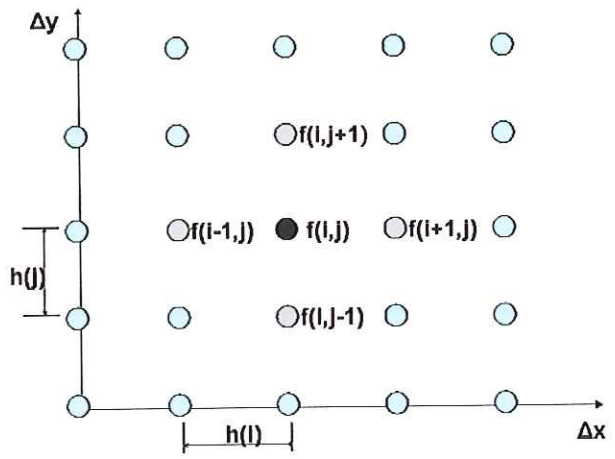


FIGURA 33 Malha discretizada em diferenças finitas.

Sendo a função *f(x,y)*, pode-se expandi-la em serie de Taylor nas vizinhanças do ponto *x* e *y*, com *h* sendo a distância entre dois pontos adjacentes em *x* e *y*, conforme ilustrado na Figura 22.

Seja o erro $E(x,h) = h^p R_n(x)$, onde $R_n(x)$ não depende de *h*. A ordem do erro é fornecida pelo valor de *p*, e a notação utilizada é: $O(h^p)$

I.1. Aproximação em diferenças finitas de primeira e segunda ordem

A.1) Primeira derivada

A.1.1- Primeira ordem

A aproximação de primeira ordem para a primeira derivada *f'(x)* é fornecida pela equação 1.a e 1.b, e deve ser obtida considerando-se os dois primeiros termos da série, com erro de truncamento a partir do terceiro termo. Isolando o termo que contém a primeira derivada

de 1.a tem-se $f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} - \dfrac{O(h)}{2}$ (3)

que é denominada *fórmula progressiva.*

e de 1.b tem-se: $f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{O(h)}{2}$ (4)

que é denominada *fórmula regressiva.*

A.1.2- Segunda ordem

Para a aproximação de segunda ordem, a primeira derivada é obtida subtraindo-se a equação 1.a da equação 1.b, com erro de truncamento a partir do quarto termo.

Equação 1.a: $f(x+h) = f(x) + f'(x)(h) + \frac{f''(x)(h)^2}{2!} + O(h^3)$

Equação 1.b: $f(x-h) = f(x) - f'(x)(h) + \frac{f''(x)(h)^2}{2!} - O(h^3)$

Subtraindo e isolando $f'(x)$ resulta:

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{O(h^2)}{3}} \quad (5)$$

denominada *formula centrada.*

A.2) Segunda derivada

A.2.1- Segunda ordem

O tratamento da derivada segunda para aproximação de segunda ordem é obtido truncando a expansão da série Taylor a partir do quinto termo. A fórmula centrada para a segunda derivada é calculada somando-se as equações 1.a e 1.b.

de 1.a: $f(x+h) = f(x) + f'(x)(h) + \frac{f''(x)(h)^2}{2!} + \frac{f'''(x)(h)3}{3!} + \frac{O(h^4)}{4!}$

de 1.b: $f(x-h) = f(x) - f'(x)(h) + \frac{f''(x)(h)^2}{2!} - \frac{f'''(x)(h)^3}{3!} + \frac{O(h^4)}{4!}$

Somando e isolando $f''(x)$ resulta:

$$\boxed{f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \frac{O(h^2)}{12}} \qquad (6)$$

I.2. Aproximação em diferenças finitas de quarta ordem

B.1) Primeira derivada

As aproximações numéricas podem ser melhoradas aumentando-se a ordem do erro. Para isso, torna-se necessária a utilização de mais pontos na vizinhança de *x* e *y*. Na aproximação de quarta ordem, dois pontos são considerados em cada lado na vizinhança do ponto central *(x,y)*.

Neste caso, a aproximação para a primeira derivada *f'(x)* é obtida subtraindo-se a equação 1.a da equação 1.b, com o erro de truncamento sendo dado pelo sexto termo da série de Taylor:

de 1.a: $f(x+h) = f(x) + f'(x)(h) + \frac{f''(x)(h)^2}{2!} + \frac{f^3(x)(h)^3}{3!} + \frac{f^4(x)(h)^4}{4!} + \frac{O(h^5)}{5!}$

de 1.b: $f(x-h) = f(x) - f'(x)(h) + \frac{f''(x)(h)^2}{2!} - \frac{f^3(x)(h)^3}{3!} + \frac{f^4(x)(h)^4}{4!} - \frac{O(h^5)}{5!}$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)(h) + \frac{2f^3(x)(h)^3}{3!} + \frac{2O(h^5)}{5!}$$

Dividindo por 2h e rearranjando:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2.h} - \frac{f^3(x)(h)^2}{3!} - \frac{O(h^4)}{5!}$$

Sabe-se que: $\frac{\partial^3 u}{\partial_{x^3}} = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + 2u_{i-1} - u_{i-2}}{2h^3}$. Substituindo na equação acima:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{(f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h))(h^2)}{3!\,2h^3} - \frac{O(h^4)}{5!}$$

Rearranjando resulta em:

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{12h}(-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)) - \frac{O(h^4)}{5!}} \qquad (7)$$

B.2) Segunda derivada:

A segunda derivada *f''(x)* é obtida pela *soma* das equações 1.a e 1.b, com o erro de truncamento dado pelo sétimo termo da série. A expressão fica:

de 1.a: $f(x+h) = f(x) + f'(x)(h) + \frac{f''(x)(h)^2}{2!} + \frac{f^3(x)(h)^3}{3!} + \frac{f^4(x)(h)^4}{4!} + \frac{f^5(x)(h)^5}{5!} + \frac{O(h^6)}{6!}$

de 1.b: $f(x-h) = f(x) - f'(x)(h) + \frac{f''(x)(h)^2}{2!} - \frac{f^3(x)(h)^3}{3!} + \frac{f^4(x)(h)^4}{4!} - \frac{f^5(x)(h)^5}{5!} + \frac{O(h^6)}{6!}$

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + \frac{2f''(x)(h)^2}{2!} + \frac{2f^4(x)(h)^4}{4!} + \frac{2O(h^6)}{6!}$$

Dividindo por h^2 e rearranjando:

$$f''(x) = \frac{f(x+h)+f(x-h)}{h^2} - \frac{2f(x)}{h^2} - \frac{2f^4(x)(h)^2}{4!} - \frac{2O(h^4)}{6!}$$

Sabe-se que: $\frac{\partial^4 u(x)}{\partial_x} = \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{h^4}$. Substituindo esta expressão na equação acima:

$$f''(x) = \frac{f(x+h)+f(x-h)}{h^2} - \frac{2f(x)}{h^2} - \frac{1}{12}\left(\frac{f(x+2h)-4f(x+h)+6f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{h^2}\right) - \frac{2O(h^4)}{6!}$$

Rearranjando, resulta em:

$$\boxed{f''(x) = \frac{1}{12h^2}\left(-f(x+2h)+16f(x+h)-30f(x)+16f(x-h)-f(x-2h)\right) + \frac{2O(h^4)}{6!}} \quad (9)$$

II. Apêndice – Formulação do método SOR

Neste apêndice está desenvolvido o formalismo matemático do método SOR utilizando a técnica da aproximação em diferenças finitas desenvolvidas no apêndice 1. No item A é feito o desenvolvimento para obtenção da equação vetorial de Helmholtz. A equação vetorial de Helmholtz será a base para o desenvolvimento do método SOR, apresentado no item B, que por sua vez, está dividido em duas partes. Na primeira está o desenvolvimento do método vetorial SOR com aproximação de segunda ordem, e na segunda parte o desenvolvimento para a aproximação de quarta ordem.

Deve-se observar que o método SOR conhecido por *Simultaneous Over Relaxation* é construído a partir da sobre relaxação do método de Jacobi. Nesse trabalho, para todos os formalismos do método SOR implementados, foram utilizados o esquema conhecido como 'Tabuleiro de Xadrez', construído a partir da sobre relaxação do método de Gauss-Seidel e denominado *Successive Over Relaxation* [28], [32].

Considerando a similaridade da derivação para o campo elétrico e magnético serão deduzidas: a equação de onda vetorial, semivetorial e escalar apenas para o campo magnético.

II.1. Obtenção da Equação Vetorial de Helmholtz.

A partir das equações de Maxwell, será deduzida primeiramente a equação vetorial de Helmholtz.

As equações de Maxwell são:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (1a) \qquad \nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad (1b) \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (2a) \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (2b) \end{cases}$$

No domínio da freqüência

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -j\omega\vec{B} & (3) \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega\vec{D} + \vec{J} & (4) \end{cases}$$

Considerando o meio isotrópico $\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} & (5a) \\ \vec{B} = \mu \vec{H} & (5b) \end{cases}$

Como: $\mu = \mu_0$

$$n = \sqrt{\varepsilon / \varepsilon_0} \Rightarrow D = n^2 \varepsilon_0 \vec{E} \tag{6}$$

Substituindo (6) em (4); como $\vec{J}$ e $\rho = 0$ (meio dielétrico e região sem fontes), tem-se:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon_0 n^2 \vec{E}$$

Aplicando o operador ($\nabla \times$) em ambos os lados da equação acima:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon_0 \left(\nabla \times n^2 E \right)$$

Utilizando a identidade vetorial: $\nabla \times \left(\phi \vec{F} \right) = \phi \nabla \times \vec{F} + \nabla \phi \times \vec{F}$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon_0 \left(n^2 \nabla \times \vec{E} \right) + j\omega\varepsilon_0 \left(\nabla n^2 \times \vec{E} \right)$$

Substituindo a equação (3) na equação acima:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon_0 \left(-n^2 j\omega \vec{B} \right) + j\omega\varepsilon_0 \left(\nabla n^2 \times \vec{E} \right) \tag{7}$$

Agora, substituindo (6) em (4):

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon_0 n^2 \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{\nabla \times \vec{H}}{j\omega\varepsilon_0 n^2} \tag{8}$$

Substituindo as equações (5b) e (8) na equação (7):

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \omega^2 n^2 \varepsilon_0 \mu \vec{H} + j\omega \varepsilon_0 \left(\nabla n^2 \times \frac{\nabla \times \vec{H}}{j\omega \varepsilon_0 n^2} \right)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \omega^2 n^2 \varepsilon_0 \mu \vec{H} + \nabla n^2 \times \left(\frac{1}{n^2} \nabla \times \vec{H} \right) \tag{9}$$

Operando por partes, primeiro expandindo o lado direito de (9):

O termo: $\nabla n^2 \times \left(\frac{1}{n^2} \nabla \times \vec{H} \right)$ da equação (9), fica:

$$\left(\hat{i} \frac{\partial n^2}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial n^2}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial n^2}{\partial z} \right) \times \left[\left(\hat{i} \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial Hz}{\partial y} - \frac{\partial Hy}{\partial z} \right) \right) + \left(\hat{j} \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial Hx}{\partial z} - \frac{\partial Hz}{\partial x} \right) \right) + \left(\hat{k} \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial Hy}{\partial x} - \frac{\partial Hx}{\partial y} \right) \right) \right] =$$

Efetuando a multiplicação vetorial

$$\hat{i} \left[\overbrace{\frac{\partial n^2}{\partial y}}^{ESCALAR} \overbrace{\left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial Hy}{\partial x} \right)}^{VETOR} - \frac{\partial n^2}{\partial y} \left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial Hx}{\partial y} \right) - \frac{\partial n^2}{\partial z} \left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial Hx}{\partial z} \right) + \frac{\partial n^2}{\partial z} \left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial Hz}{\partial x} \right) \right] \tag{10}$$

$$\hat{j} \left[- \frac{\partial n^2}{\partial x} \left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial Hy}{\partial x} \right) + \frac{\partial n^2}{\partial x} \left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial Hx}{\partial y} \right) + \frac{\partial n^2}{\partial z} \left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial Hz}{\partial y} \right) - \frac{\partial n^2}{\partial z} \left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial Hy}{\partial z} \right) \right] \tag{11}$$

$$\hat{k} \left[- \frac{\partial n^2}{\partial y} \left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial Hz}{\partial y} \right) + \frac{\partial n^2}{\partial y} \left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial Hy}{\partial z} \right) + \frac{\partial n^2}{\partial x} \left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial Hx}{\partial z} \right) - \frac{\partial n^2}{\partial x} \left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial Hz}{\partial x} \right) \right] \tag{12}$$

Trabalhando apenas as coordenadas transversais (i,j) e utilizando a identidade:

$$\frac{\partial (\phi \hat{F})}{\partial u} = \phi \frac{\partial \hat{F}}{\partial u} + \frac{\partial \phi \hat{F}}{\partial u} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \phi \hat{F}}{\partial u} = -\phi \frac{\partial \hat{F}}{\partial u} + \frac{\partial (\phi \hat{F})}{\partial u}$$

Se o índice de refração varia lentamente em z, pode-se desprezar os termos que contém $\frac{\partial n^2}{\partial z}$, logo $\frac{\partial n^2}{\partial z} = 0$

A equação (10) fica:

$$\hat{i}\left[-n^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial Hy}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(n^2 \frac{1}{n^2}\frac{\partial Hy}{\partial x}\right) + \frac{n^2 \partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial Hx}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(n^2 \frac{1}{n^2}\frac{\partial Hx}{\partial y}\right)\right]$$

Cancelando os termos, tem-se:

$$\hat{i}\left[-n^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial Hy}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 Hy}{\partial y \partial x} + n^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial Hx}{\partial y}\right) - \frac{\partial^2 Hx}{\partial y^2}\right] \tag{13}$$

A equação (11) fica:

$$\hat{j}\left[n^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial Hy}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(n^2 \frac{1}{n^2}\frac{\partial Hy}{\partial x}\right) - n^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial Hx}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(n^2 \frac{1}{n^2}\frac{\partial Hx}{\partial y}\right)\right]$$

Cancelando os termos, tem-se:

$$\hat{j}\left[n^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial Hy}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 Hy}{\partial x^2} - n^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial Hx}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 Hx}{\partial x \partial y}\right] \tag{14}$$

Agora, trabalhando o lado esquerdo da equação (9):

Usando a identidade $\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{H}\right) - \nabla^2 \vec{H}$

De (2b) $\nabla \cdot \vec{H} = 0$

Expandindo o termo: $-\nabla^2 \vec{H}$

$$-\nabla^2 \vec{H} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\hat{i}Hx, \hat{j}Hy, \hat{k}Hz\right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\hat{i}Hx, \hat{j}Hy, \hat{k}Hz\right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\hat{i}Hx, \hat{j}Hy, \hat{k}Hz\right)$$

$$\text{em } \hat{i}: \quad -\frac{\partial^2 Hx}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Hx}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Hx}{\partial z^2} \tag{15}$$

$$\text{em } \hat{j}: \quad -\frac{\partial^2 Hy}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Hy}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Hy}{\partial z^2} \tag{16}$$

Supondo o campo como sendo uma onda plana e escrevendo o campo como uma parte com variação lenta e uma parte de variação rápida em z (aproximação de envelope lento) pode-se escrever:

$$H = H_t e^{-j\beta z}$$

onde o termo H_t descreve a variação lenta do campo transversal e o termo $e^{-j\beta z}$ descreve a variação rápida do campo (variação de fase). A primeira e segunda derivadas em relação a z podem então ser descritas como:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = -j\beta \vec{H} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = -\beta^2 \vec{H} \tag{17}$$

A equação (9) era: $\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \omega^2 . n^2 . \varepsilon_0 . \mu . \vec{H} + \nabla n^2 \times \left(\frac{1}{n^2} \nabla \times \vec{H} \right)$, após substituir os termos expandidos torna-se

Na direção $\hat{i}$: nas equações (13) e (15) substitui-se as derivadas em z pela equação (17), considerando $\kappa_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$, logo:

$$-\frac{\partial^2 Hx}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Hx}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Hx}{\partial z^2} = \kappa^2 n^2 \vec{H}x - n^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial Hy}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 Hy}{\partial y \partial x} + n^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial Hx}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 Hx}{\partial y^2}$$

Rearranjando, isolando H_x e multiplicando por (-1):

$$\boxed{\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + n^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \kappa_0^2 n^2 - \beta^2 \right] H_x = \left[n^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \right] H_y} \tag{18}$$

Na direção $\hat{j}$: nas equações (14) e (16) substitui-se as derivadas em z pela equação (17) tem-se :

$$-\frac{\partial^2 Hy}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Hy}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Hy}{\partial z^2} = \kappa^2 n^2 \vec{H}y + n^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial Hy}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 Hy}{\partial x^2} - n^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n^2} \frac{\partial Hx}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 Hx}{\partial x \partial y}$$

Rearranjando, isolando H_y e multiplicando por (-1):

$$\boxed{\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}+n^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial}{\partial x}\right)+\kappa_0^2 n^2-\beta^2\right]H_y=\left[n^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial}{\partial y}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right]H_x} \quad (19)$$

As equações (18) e (19) são as equações vetoriais de Helmholtz.

II.2. Discretização em Diferenças Finitas

B.1. Aproximação de Segunda Ordem

Utilizando os conceitos desenvolvidos no Apêndice 1.A, será obtida, com base na equação vetorial de Helmholtz, a formulação vetorial completa para o método da sobre relaxação sucessiva.

Relembrando, as aproximações em diferenças finitas de segunda ordem das derivadas são:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{f_{i+1,j}-f_{i-1,j}}{2.\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=\frac{f_{i+1,j}-2.f_{i,j}+f_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x.\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)=\frac{f_{i+1,j+1}-f_{i-1,j+1}-f_{i+1,j-1}+f_{i-1,j-1}}{4\Delta x\Delta y}$$

A partir desse ponto, serão detalhadas as passagens matemáticas apenas para a equação (18). Para a equação (19) serão apresentados diretamente os resultados da discretização de cada termo.

Equação (18):

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+n^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial}{\partial y}\right)+\kappa_0^2 n^2-\beta^2\right]H_x=\left[n^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial}{\partial x}\right)-\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\right]H_y$$

O primeiro termo do lado esquerdo da equação (18) para a aproximação em diferenças finitas de segunda ordem torna-se:

$$\frac{\partial^2 Hx_{i,j}}{\partial x^2}=\frac{Hx_{i+1,\,j}-2Hx_{i,\,j}+Hx_{i-1,\,j}}{\Delta x^2} \tag{20}$$

Para a equação (19),

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}+n^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial}{\partial x}\right)+\kappa_0^2 n^2-\beta^2\right]H_y=\left[n^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial}{\partial y}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right]H_x$$

o primeiro termo do lado esquerdo torna-se:

$$\frac{\partial^2 Hy_{i,j}}{\partial y^2}=\frac{Hy_{i,\,j+1}-2Hy_{i,\,j}+Hy_{i,\,j-1}}{\Delta y^2} \tag{20.a}$$

Expandindo em diferenças finitas o segundo termo do lado esquerdo da equação (18), que são as derivadas complexas, tem-se:

$$n_{i,j}^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n_{i,j}^2}\frac{\partial}{\partial y}Hx_{i,j}\right)=$$

Chamando de $T_{i,j}=\frac{1}{n_{i,j}^2}.\frac{\partial}{\partial y}Hx_{i,j}$

$$n^2{}_{i,j}\frac{\partial}{\partial y}\left(T_{i,j}\right)=n^2{}_{i,j}\frac{T_{i,j+1/2}-T_{i,j-1/2}}{\Delta y}=$$

Substituindo $T_{i,j}$:

$$n_{i,j}^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n_{i,j}^2}\frac{\partial}{\partial y}Hx_{i,j}\right)=\frac{n^2{}_{i,j}}{\Delta y}\left(\frac{1}{n^2{}_{i,j+1/2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(Hx_{i,j+1/2}\right)-\frac{1}{n^2{}_{i,j-1/2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(Hx_{i,j-1/2}\right)\right)$$

Expandindo a derivada:

$$n_{i,j}^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n_{i,j}^2}\frac{\partial}{\partial y}Hx_{i,j}\right)=\left[\frac{n^2{}_{i,j}}{\Delta y}\frac{1}{n^2{}_{i,j+1/2}}\left(\frac{Hx_{i,j+1}-Hx_{i,j}}{\Delta y}\right)-\frac{n^2{}_{i,j}}{\Delta y}\frac{1}{n^2{}_{i,j-1/2}}\left(\frac{Hx_{i,j}-Hx_{i,j-1}}{\Delta y}\right)\right]=$$

Substituindo: $n^2{}_{i,j+1/2}=\dfrac{n^2{}_{i,j}+n^2{}_{i,j+1}}{2}$ e desenvolvendo a expressão, resulta:

$$n_{i,j}^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n_{i,j}^2}\frac{\partial}{\partial y}Hx_{i,j}\right)=2n_{i,j}^2\frac{1}{n^2{}_{i,j+1}+n_{i,j}^2}\frac{Hx_{i,j+1}}{\Delta y^2}-2n_{i,j}^2\frac{1}{n^2{}_{i,j+1}+n_{i,j}^2}\frac{Hx_{i,j}}{\Delta y^2}-$$
$$2n_{i,j}^2\frac{1}{n^2{}_{i,j-1}+n_{i,j}^2}\frac{Hx_{i,j}}{\Delta y^2}+2n_{i,j}^2\frac{1}{n^2{}_{i,j-1}+n_{i,j}^2}\frac{Hx_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

Definindo:

$$a=2n_{i,j}^2\frac{1}{n_{i,j+1}^2+n_{i,j}^2}$$

$$b=2n_{i,j}^2\left(\frac{1}{n_{i,j+1}^2+n_{i,j}^2}+\frac{1}{n_{i,j-1}^2+n_{i,j}^2}\right)\Rightarrow b=a+c$$

$$c=2n_{i,j}^2\frac{1}{n_{i,j-1}^2+n_{i,j}^2}$$

A expressão final do segundo termo do lado esquerdo, que corresponde à derivada complexa, em diferenças finitas torna-se:

$$n_{i,j}^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n_{i,j}^2}\frac{\partial}{\partial y}Hx_{i,j}\right)=\frac{aHx_{i,j+1}-bHx_{i,j}+cHx_{i,j-1}}{\Delta y^2} \tag{21}$$

Para a equação (19), a expressão final do segundo termo do lado esquerdo (derivada complexa), em diferenças finitas torna-se:

$$n_{i,j}^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n_{i,j}^2}\frac{\partial}{\partial x}Hy_{i,j}\right)=\frac{a'Hy_{i+1,j}-b'Hy_{i,j}+c'Hy_{i-1,j}}{\Delta x^2} \tag{21.a}$$

com:

$$a' = 2n_{i,j}^2 \frac{1}{n^2{}_{i+1,j} + n_{i,j}^2}$$

$$b' = 2n_{i,j}^2 \left(\frac{1}{n^2{}_{i+1,j} + n_{i,j}^2} + \frac{1}{n_{i,j}^2 + n^2{}_{i-1,j}} \right) \Rightarrow b' = a' + c'$$

$$c' = 2n_{i,j}^2 \frac{1}{n_{i,j}^2 + n^2{}_{i-1,j}}$$

Agora, trabalhando o lado direito da equação 18, que são os termos com as derivadas cruzadas. O primeiro termo que contém a derivada cruzada, em diferenças finitas fica:

$$n_{i,j}^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{n_{i,j}^2} \frac{\partial}{\partial x} Hy_{i,j} \right) =$$

Denominando: $T_{i,j} = \frac{1}{n_{i,j}^2} \frac{\partial}{\partial x} Hy_{i,j}$

$$n_{i,j}^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(T_{i,j} \right) = n_{i,j}^2 \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\Delta y} =$$

Substituindo $T_{i,j}$:

$$n_{i,j}^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{n_{i,j}^2} \frac{\partial}{\partial x} Hy_{i,j} \right) = \frac{n_{i,j}^2}{2\Delta y} \left(\frac{1}{n^2{}_{i,j+1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(Hy_{\,i,j+1} \right) - \frac{1}{n^2{}_{i,j-1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(Hy_{\,i,j-1} \right) \right)$$

Expandindo a derivada:

$$n_{i,j}^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{n_{i,j}^2} \frac{\partial}{\partial x} Hy_{i,j} \right) = \left[\frac{n^2{}_{i,j}}{2\Delta y} \frac{1}{n^2{}_{i,j+1}} \left(\frac{Hy_{i+1,j+1} - Hy_{i-1,j+1}}{2\Delta x} \right) - \frac{n^2{}_{i,j}}{2\Delta y} \frac{1}{n^2{}_{i,j-1}} \left(\frac{Hy_{i+1,j-1} - Hy_{i-1,j-1}}{2\Delta x} \right) \right]$$

Rearranjando, a expressão final do primeiro termo do lado direito em diferenças finitas resulta:

$$n_{i,j}^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n_{i,j}^2}\frac{\partial}{\partial x}Hy_{i,j}\right)=\frac{1}{4\Delta y\Delta x}\left[\frac{n_{i,j}^2}{n^2{}_{i,j+1}}\left(Hy_{i+1,j+1}-Hy_{i-1,j+1}\right)-\frac{n_{i,j}^2}{n^2{}_{i,j-1}}\left(Hy_{i+1,j-1}-Hy_{i-1,j-1}\right)\right] \tag{22}$$

Para a equação (19), a expressão final do primeiro termo do lado direito em diferenças finitas fica:

$$n_{i,j}^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n_{i,j}^2}\frac{\partial}{\partial y}Hx_{i,j}\right)=\frac{1}{4\Delta x\Delta y}\left[\frac{n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i+1,j}}\left(Hx_{i+1,j+1}-Hx_{i+1,j-1}\right)-\frac{n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i-1,j}}\left(Hx_{i-1,j+1}-Hx_{i-1,j-1}\right)\right] \tag{22.a}$$

O segundo termo do lado direito da equação (18) torna-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}Hy_{i,j}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}Hy_{i,j}\right)=\frac{Hy_{i+1,j+1}-Hy_{i-1,j+1}-Hy_{i+1,j-1}+Hy_{i-1,j-1}}{4\Delta x\Delta y} \tag{23}$$

Para a equação (19), o segundo termo do lado direito torna-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}Hx_{i,j}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}Hx_{i,j}\right)=\frac{Hx_{i+1,j+1}-Hx_{i-1,j+1}-Hx_{i+1,j-1}+Hx_{i-1,j-1}}{4\Delta y\Delta x} \tag{23.a}$$

Logo, o lado direito da equação (18) o qual contém as derivadas cruzadas é a soma das equações (22) com (23), e torna-se:

$$L_D H_y=\frac{1}{4\Delta y\Delta x}\left[\left(\frac{n_{i,j}^2}{n^2{}_{i,j+1}}-1\right)\left(Hy_{i+1,j+1}-Hy_{i-1,j+1}\right)-\left(\frac{n_{i,j}^2}{n^2{}_{i,j-1}}-1\right)\left(Hy_{i+1,j-1}-Hy_{i-1,j-1}\right)\right] \tag{24}$$

Já, o lado direito da equação (19) é soma das equações (22.a) com (23.a), e torna-se:

$$L_D H_x=\frac{1}{4\Delta x\Delta y}\left[\left(\frac{n_{i,j}^2}{n^2{}_{i+1,j}}-1\right)\left(Hx_{i+1,j+1}-Hx_{i+1,j-1}\right)-\left(\frac{n_{i,j}^2}{n^2{}_{i-1,j}}-1\right)\left(Hx_{i-1,j+1}-Hx_{i-1,j-1}\right)\right] \tag{24.a}$$

Portanto, a equação (18) que era:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+n^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial}{\partial y}\right)+\kappa_0^2 n^2-\beta^2\right]H_x=\left[n^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial}{\partial x}\right)-\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\right]H_y$$

em diferenças finitas resulta nas equações:

$$\left(eq.(20)+eq.(21)+\kappa_0^2 n_{i,j}^2 Hx_{i,j}-\beta^2 Hx_{i,j}\right)=eq(24)$$

substituindo as equações, tem-se a equação (25):

$$\frac{Hx_{i+1,j}-2Hx_{i,j}+Hx_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{aHx_{i,j+1}-bHx_{i,j}+cHx_{i,j-1}}{\Delta y^2}+\kappa_0^2 n_{i,j}^2 Hx_{i,j}-\beta^2 Hx_{i,j}=L_D H_y \tag{25}$$

A equação (25) é aproximação em diferenças finitas para a equação vetorial (18) de Helmholtz.

Já, a equação (19) que era:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}+n^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial}{\partial x}\right)+\kappa_0^2 n^2-\beta^2\right]H_y=\left[n^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial}{\partial y}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right]H_x$$

em diferenças finitas resulta nas equações:

$$\left(eq.(20.a)+eq.(21.a)+\kappa_0^2 n_{i,j}^2 Hy_{i,j}-\beta^2 Hy_{i,j}\right)=eq(24.a)$$

substituindo as equações, tem-se a equação (25.a):

$$\frac{Hy_{i,j+1}-2Hy_{i,j}+Hy_{i,j-1}}{\Delta y^2}+\frac{a'Hy_{i+1,j}-b'Hy_{i,j}+c'Hy_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\kappa_0^2 n_{i,j}^2 Hy_{i,j}-\beta^2 Hy_{i,j}=L_D H_x \tag{25.a}$$

Como comentando no texto principal, a equação (25) e (25.a) são as aproximações em diferenças finitas de segunda ordem da equação vetorial de Helmholtz (18) e (19) respectivamente, e descreve o formalismo vetorial completo.

A partir delas será construído o método SOR.

Inicialmente, isolando o termo central $Hx_{i,j}$ da equação (25):

$$Hx_{i,j}^{INT} = \frac{\frac{1}{\Delta x^2}\left(Hx_{i+1,j} + Hx_{i-1,j}\right) + \frac{1}{\Delta y^2}\left(aHx_{i,j+1} + cHx_{i,j-1}\right) - L_D H_y}{\left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{b}{\Delta y^2} - \kappa_0^2 n_{i,j}^2 + \beta^2\right)} \tag{26}$$

Isolando o termo central $Hy_{i,j}$ da equação (25.a):

$$Hy_{i,j}^{INT} = \frac{\frac{1}{\Delta y^2}\left(Hy_{i,j+1} + Hy_{i,j-1}\right) + \frac{1}{\Delta x^2}\left(a' Hy_{i+1,j} + c' Hy_{i-1,j}\right) - L_D H_x}{\left(\frac{2}{\Delta y^2} + \frac{b'}{\Delta x^2} - \kappa_0^2 n_{i,j}^2 + \beta^2\right)} \tag{26.a}$$

OBS: Está demonstrado, portanto, todos os passos para se obter a equação corresponde à equação (3.12).

Na seqüência iterativa, os termos $Hx_{i,j}^{INT}$ e $Hy_{i,j}^{INT}$,das equações (26) e (26.a), são utilizados para o cálculo do campo seguinte, isto é, do $Hx_{i,j}^{novo}$ e $Hy_{i,j}^{novo}$, através do esquema iterativo dado pelo método SOR. A relação para cada iteração entre os campos é fornecida pela expressão:

$$Hx_{i,j}^{novo} = \omega Hx_{i,j}^{INT} + (1-\omega) Hx_{i,j}^{velho} \tag{27}$$

$$Hy_{i,j}^{novo} = \omega Hy_{i,j}^{INT} + (1-\omega) Hy_{i,j}^{velho} \tag{27'}$$

Onde ω é conhecido como parâmetro de relaxação. $Hx_{i,j}^{velho}$ é a componente inicial do campo magnético na direção x, sendo aproximada inicialmente por uma Gaussiana. $Hy_{i,j}^{velho}$ é a componente do campo magnético inicial na direção y, sendo inicialmente zero. A cada iteração, calcula-se as componentes dos campos

intermediários $Hx_{i,j}^{INT}$ e $Hy_{i,j}^{INT}$ dados pelas equações (26) e (26.a), respectivamente. Por meio das equações (27) e (27.a) ocorre a sobre relaxação e, então, geram-se as novas componentes do campo $Hx_{i,j}^{novo}$ e $Hy_{i,j}^{novo}$. Dessa forma, ao final de cada iteração a componente do campo $Hx_{i,j}^{novo}$ torna-se a componente do campo $Hx_{i,j}^{velho}$, e a componente do campo $Hy_{i,j}^{novo}$ torna-se a componente do campo $Hy_{i,j}^{velho}$, e inicia-se a próxima iteração com os novos valores das componentes do campo.

Desprezando todo o lado direito da equação (18), ou seja, a equação (24) em diferenças finitas, caracteriza o tratamento semivetorial para o modo TE, onde o acoplamento entre as componentes transversais do campo magnético é desprezado. De forma semelhante, desprezando todo o lado direito da equação (18.a), ou seja, a equação (24.a) em diferenças finitas, caracteriza o tratamento semivetorial para o modo TM, onde, da mesma forma, o acoplamento entre as componentes do campo magnético são desprezadas.

Para o formalismo escalar, além de se desprezar a equação (24) e (24.a), deve-se fazer os parâmetros a = a' = c = c' = 1, o que implica em desprezar os efeitos de polarização, tornando as condições de contorno nas interfaces iguais para as componentes nas direções x e y.

B.2. Aproximação de Quarta Ordem

Utilizando os conceitos desenvolvidos no apêndice 1.B, será desenvolvida, com base na equação vetorial de Helmholtz, a formulação vetorial completa para o método da sobre relaxação sucessiva com aproximação em diferenças finitas de quarta ordem.

Relembrando, as aproximações em diferenças finitas de quarta ordem das derivadas são:

$$\frac{\partial Hx_{i,j}}{\partial x} = \frac{1}{12\Delta x}\left(-Hx_{i+2,j} + 8Hx_{i+1,j} - 8Hx_{i-1,j} + Hx_{i-2,j}\right)$$

$$\frac{\partial^2 Hx_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{1}{12\Delta x^2}\left(-Hx_{i+2,j} + 16Hx_{i+1,j} - 30Hx_{i,j} + 16Hx_{i-1,j} - Hx_{i-2,j}\right)$$

$$\frac{\partial^2 Hx_{i,j}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{144h^2}[+Hx_{i+2,j+2} - 8Hx_{i+1,j+2} + 8Hx_{i-1,j+2} - Hx_{i-2,j+2} -$$
$$8Hx_{i+2,j+1} + 64Hx_{i+1,j+1} - 64Hx_{i-1,j+1} + 8Hx_{i-2,j+1} +$$
$$8Hx_{i+2,j-1} - 64Hx_{i+1,j-1} + 64Hx_{i-1,j-1} - 8Hx_{i-2,j-1} +$$
$$Hx_{i+2,j-2} + 8Hx_{i+1,j-2} - 8Hx_{i-1,j-2} + Hx_{i-2,j-2}]$$

A partir desse ponto é feito o desenvolvimento em aproximação de quarta ordem de forma semelhante ao desenvolvido para a aproximação de segunda ordem. Dada a equação (18): (o desenvolvimento para a equação (19) é análogo)

Equação 18:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + n^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial}{\partial y}\right) + \kappa_0^2 n^2 - \beta^2\right] H_x = \left[n^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\right] H_y$$

O primeiro termo do lado esquerdo da equação (18) para a aproximação em diferenças finitas de quarta ordem fica:

$$\frac{\partial^2 Hx_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{1}{12\Delta x^2}\left(-Hx_{i+2,j} + 16Hx_{i+1,j} - 30Hx_{i,j} + 16Hx_{i-1,j} - Hx_{i-2,j}\right) \qquad (27)$$

Para a equação (19) o primeiro termo do lado esquerdo fica:

$$\frac{\partial^2 Hy_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{1}{12\Delta y^2}\left(-Hy_{i,j+2} + 16Hy_{i,j+1} - 30Hy_{i,j} + 16Hy_{i,j-1} - Hy_{i,j-2}\right) \qquad (27.a)$$

O segundo termo do lado esquerdo da equação 18 em diferenças finitas fica:

$$n_{i,j}^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\underbrace{\frac{1}{n_{i,j}^2}\frac{\partial}{\partial y}(Hx)}_{W_{ij}}\right) = n_{i,j}^2\left(\frac{1}{6\Delta y}\left(-W_{i,j+2/2} + 8W_{i,j+1/2} - 8W_{i,j-1/2} + W_{i,j-2/2}\right)\right) =$$

Substituindo $W_{i,j}$:

$$= n_{i,j}^2 \frac{1}{6\Delta y}\left(\begin{array}{l} -\dfrac{1}{n^2{}_{i,j+1}}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(Hx_{i,j+1}\right)+\dfrac{8}{n^2{}_{i,j+1/2}}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(Hx_{i,j+1/2}\right)- \\ \qquad\qquad \dfrac{8}{n^2{}_{i,j-1/2}}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(Hx_{i,j-1/2}\right)+\dfrac{1}{n^2{}_{i,j-1}}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(Hx_{i,j-1}\right) \end{array}\right)=$$

Expandindo as derivadas internas:

$$\begin{aligned} n_{i,j}^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n_{i,j}^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(Hx_{i,j}\right)\right) = & -\frac{1}{6\Delta y}\frac{n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i,j+1}}\left(\frac{-Hx_{i,j+2}+8Hx_{i,j+3/2}-8Hx_{i,j+1/2}+Hx_{i,j}}{6\Delta y}\right)+ \\ & \frac{8}{6\Delta y}\frac{n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i,j+1/2}}\left(\frac{-Hx_{i,j+3/2}+8Hx_{i,j+1}-8Hx_{i,j}+Hx_{i,j-1/2}}{6\Delta y}\right)- \\ & \frac{8}{6\Delta y}\frac{n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i,j-1/2}}\left(\frac{-Hx_{i,j+1/2}+8Hx_{i,j}-8Hx_{i,j-1}+Hx_{i,j-3/2}}{6\Delta y}\right)+ \\ & \frac{1}{6\Delta y}\frac{n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i,j-1}}\left(\frac{-Hx_{i,j}+8Hx_{i,j-1/2}-8Hx_{i,j-3/2}+Hx_{i,j-2}}{6\Delta y}\right) \end{aligned}$$

Como:

$$Hx_{i,j+1/2} = \frac{Hx_{i,j+1}+Hx_{i,j}}{2} \qquad Hx_{i,j-1/2} = \frac{Hx_{i,j}+Hx_{i,j-1}}{2}$$

:

$$Hx_{i,j+3/2} = \frac{Hx_{i,j+2}+Hx_{i,j+1}}{2} \qquad Hx_{i,j-3/2} = \frac{Hx_{i,j-1}+Hx_{i,j-2}}{2}$$

$$n^2{}_{i,j-1/2} = \frac{n^2{}_{i,j}+n^2{}_{i,j-1}}{2} \qquad n^2{}_{i,j+1/2} = \frac{n^2{}_{i,j}+1+n^2{}_{i,j}}{2}$$

Definindo:

$$a_x = \frac{n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i,j+1}}; \qquad b_x = \frac{2n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i,j}+n^2{}_{i,j+1}}; \qquad c_x = \frac{2n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i,j}+n^2{}_{i,j-1}}; \qquad d_x = \frac{n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i,j-1}};$$

Substituindo as expressões definidas acima, o segundo termo do lado esquerdo da equação (18) fica:

$$\begin{aligned} n_{i,j}^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n_{i,j}^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(Hx_{i,j}\right)\right) = & \frac{Hx_{i,j+2}}{36\Delta y^2}\left(-3a_x-4b_x\right)+\frac{Hx_{i,j+1}}{36\Delta y^2}\left(60b_x+4c_x\right)+\frac{Hx_{i,j-1}}{36\Delta y^2}.\left(4b_x+60c_x\right)+ \\ & \frac{Hx_{i,j-2}}{36\Delta y^2}\left(-4c_x-3d_x\right)+\frac{Hx_{i,j}}{36\Delta y^2}\left(+3a_x-60b_x-60c_x+3d_x\right) \end{aligned} \tag{28}$$

Para a equação (19), a expressão final do segundo termo do lado esquerdo em diferenças finitas fica:

$$n_{i,j}^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n_{i,j}^2}\frac{\partial}{\partial x}Hy_{i,j}\right)=\frac{Hy_{i+2,j}}{36\Delta x^2}\left(-3a_y-4b_y\right)+\frac{Hy_{i+1,j}}{36\Delta x^2}\left(60b_y+4c_y\right)+\frac{Hy_{i-1,j}}{36\Delta x^2}\left(4b_y+60c_y\right)+$$
$$\frac{Hy_{i-2,j}}{36\Delta x^2}\left(-4c_y-3d_y\right)+\frac{Hy_{i,j}}{36\Delta x^2}\left(+3a_y-60b_y-60c_y+3d_y\right) \tag{28.a}$$

com:

$$a_y=\frac{n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i+1,j}};\qquad b_y=\frac{2n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i,j}+n^2{}_{i+1,j}};\qquad c_y=\frac{2n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i,j}+n^2{}_{i-1,j}};\qquad d_y=\frac{n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i-1,j}};$$

Agora, trabalhando o lado direito da equação (18). O primeiro termo em diferenças finitas que contém a derivada cruzada fica:

$$n_{i,j}^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\underbrace{\frac{1}{n_{i,j}^2}\frac{\partial}{\partial x}Hy_{i,j}}_{W_{i,j}}\right)=n_{i,j}^2\frac{\partial}{\partial y}\left(W_{i,j}\right)=n_{i,j}^2\left(\frac{1}{12\Delta y}\left(-W_{i,j+2}+8W_{i,j+1}-8W_{i,j-1}+W_{i,j-2}\right)\right)=$$

Substituindo $W_{i,j}$

$$=\frac{n^2{}_{i,j}}{12\Delta y}\left(-\frac{1}{n^2{}_{i,j+2}}\frac{\partial}{\partial x}Hy_{i,j+2}+\frac{8}{n^2{}_{i,j+1}}\frac{\partial}{\partial x}Hy_{i,j+1}-\frac{8}{n^2{}_{i,j-1}}\frac{\partial}{\partial x}Hy_{i,j-1}+\frac{1}{n^2{}_{i,j-2}}Hy_{i,j-2}\right)$$

Expandindo as derivadas internas:

A expressão final do primeiro termo do lado direito em diferenças finitas fica:

$$n_{i,j}^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n_{i,j}^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(Hy_{i,j}\right)\right)=-\frac{1}{12\Delta y}\frac{n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i,j+2}}\left(\frac{-Hy_{i+2,j+2}+8Hy_{i+1,j+2}-8Hy_{i-1,j+2}+Hy_{i-2,j+2}}{12\Delta x}\right)+$$
$$\frac{8}{12\Delta y}\frac{n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i,j+1}}\left(\frac{-Hy_{i+2,j+1}+8Hy_{i+1,j+1}-8Hy_{i-1,j+1}+Hy_{i-2,j+1}}{12\Delta x}\right)-$$
$$\frac{8}{12\Delta y}\frac{n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i,j-1}}\left(\frac{-Hy_{i+2,j-1}+8Hy_{i+1,j-1}-8Hy_{i-1,j-1}+Hy_{i-2,j-1}}{12\Delta x}\right)+$$
$$\frac{1}{12\Delta y}\frac{n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i,j-2}}\left(\frac{-Hy_{i+2,j-2}+8Hy_{i+1,j-2}-8Hy_{i-1,j-2}+Hy_{i-2,j-2}}{12\Delta x}\right) \tag{29}$$

Para a equação (19), a expressão final do primeiro termo do lado direito em diferenças finitas fica:

$$n_{i,j}^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n_{i,j}^2}\frac{\partial}{\partial y}Hx_{i,j}\right) = -\frac{1}{12\Delta x}\frac{n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i+2,j}}\left(\frac{-Hx_{i+2,j+2}+8Hx_{i+2,j+1}-8Hx_{i+2,j-1}+Hx_{i+2,j-2}}{12\Delta y}\right)+$$
$$\frac{8}{12\Delta x}\frac{n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i+1,j}}\left(\frac{-Hx_{i+1,j+2}+8Hx_{i+1,j+1}-8Hx_{i+1,j-1}+Hx_{i+1,j-2}}{12\Delta y}\right)-$$
$$\frac{8}{12\Delta x}\frac{n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i-1,j}}\left(\frac{-Hx_{i-1,j+2}+8Hx_{i-1,j+1}-8Hx_{i-1,j-1}+Hx_{i-1,j-2}}{12\Delta y}\right)+$$
$$\frac{1}{12\Delta x}\frac{n^2{}_{i,j}}{n^2{}_{i-2,j}}\left(\frac{-Hx_{i-2,j+2}+8Hx_{i-2,j+1}-8Hx_{i-2,j-1}+Hx_{i-2,j-2}}{12\Delta y}\right) \tag{29.a}$$

O segundo termo do lado direito da equação (18) fica:

$$\frac{\partial^2 Hy_{i,j}}{\partial y \partial x} = \frac{1}{144\Delta y\Delta x}[+Hy_{i+2,j+2}-8Hy_{i+1,j+2}+8Hy_{i-1,j+2}-Hy_{i-2,j+2}-$$
$$8Hy_{i+2,j+1}+64Hy_{i+1,j+1}-64Hy_{i-1,j+1}+8Hy_{i-2,j+1}+$$
$$8Hy_{i+2,j-1}-64Hy_{i+1,j-1}+64Hy_{i-1,j-1}-8Hy_{i-2,j-1}-$$
$$Hy_{i+2,j-2}+8Hy_{i+1,j-2}-8Hy_{i-1,j-2}+Hy_{i-2,j-2}] \tag{30}$$

O segundo termo do lado direito da equação (19) é idêntico à equação (30), assim:

$$\frac{\partial^2 Hx_{i,j}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{144\Delta x\Delta y}[+Hx_{i+2,j+2}-8Hx_{i+2,j+1}+8Hx_{i+2,j-1}-Hx_{i+2,j-2}-$$
$$8Hx_{i+1,j+2}+64Hx_{i+1,j+1}-64Hx_{i+1,j-1}+8Hx_{i+1,j-2}+$$
$$8Hx_{i-1,j+2}-64Hx_{i-1,j+1}+64Hx_{i-1,j-1}-8Hx_{i-1,j-2}-$$
$$Hx_{i-2,j+2}+8Hx_{i-2,j+1}-8Hx_{i-2,j-1}+Hx_{i-2,j-2}] \tag{30.a}$$

Logo, o lado direito da equação (18) é a diferença entre as equações (29) e (30), que corresponde ao acoplamento entre os campos H_x e H_y, ou seja:

$$L_D H_y = \left(eq.(29) - eq.(30)\right) \tag{31}$$

De igual forma, o lado direito da equação (19) é a diferença entre as equações (29.a) com (30.a), que corresponde ao acoplamento entre os campos H_x e H_y.

$$L_D H_x = \left(eq.(29.a) - eq.(30.a)\right) \tag{31.a}$$

Portanto, em diferenças finitas com aproximação de quarta ordem, a equação (18) fica:

$$\left(eq.(27) + eq.(28) + \kappa_0^2 n_{i,j}^2 Hx_{i,j} - \beta^2 Hx_{i,j}\right) = eq(31)$$

Substituindo:

$$\left(\frac{1}{12\Delta x^2}\left(-Hx_{i+2,j} + 16Hx_{i+1,j} - 30Hx_{i,j} + 16Hx_{i-1,j} - Hx_{i-2,j}\right)\right) + \frac{Hx_{i,j+2}}{36\Delta y^2}\left(-3a_x - 4b_x\right) +$$
$$\frac{Hx_{i,j+1}}{36\Delta y^2}\left(60b_x + 4c_x\right) + \frac{Hx_{i,j-1}}{36\Delta y^2}\left(4b_x + 60c_x\right) + \frac{Hx_{i,j-2}}{36\Delta y^2}\left(-4c_x - 3d_x\right) +$$
$$\frac{Hx_{i,j}}{36\Delta y^2}\left(+3a_x - 60b_x - 60c_x + 3d_x\right) + \kappa_0^2 n_{i,j}^2 Hx_{i,j} - \beta^2 Hx_{i,j} = L_D H_y \tag{32}$$

Isolando $Hx_{i,j}$:

$$Hx_{i,j}^{INT} = \frac{\left(\begin{array}{l} -\frac{1}{12\Delta x^2}\left(-Hx_{i+2,j} + 16Hx_{i+1,j} + 16Hx_{i-1,j} - Hx_{i-2,j}\right) - \frac{Hx_{i,j+2}}{36\Delta y^2}\left(-3a_x - 4b_x\right) - \\ \frac{Hx_{i,j+1}}{36\Delta y^2}\left(60b_x + 4c_x\right) - \frac{Hx_{i,j-1}}{36\Delta y^2}\left(4b_x + 60c_x\right) - \frac{Hx_{i,j-2}}{36\Delta y^2}\left(-4c_x - 3d_x\right) + L_D H_y \end{array}\right)}{\left(-\frac{30Hx_{i,j}}{12\Delta x^2} + \frac{\left(+3a_x - 60b_x - 60c_x + 3d_x\right)}{36\Delta y^2} + \kappa_0^2 n_{i,j}^2 - \beta^2\right)} \tag{33}$$

Por fim, em diferenças finitas com aproximação de quarta ordem, a equação (19) fica:

$$\left(eq.(27.a) + eq.(28.a) + \kappa_0^2 n_{i,j}^2 Hy_{i,j} - \beta^2 Hy_{i,j}\right) = eq(31.a)$$

Isolando $Hy_{i,j}$:

$$Hy_{i,j}^{INT} = \frac{\left(\begin{array}{l} -\frac{1}{12.\Delta y^2}\left(-Hy_{i,j+2}+16Hy_{i,j+1}+16Hy_{i,j-1}-Hy_{i,j-2}\right)-\frac{Hy_{i+2,j}}{36\Delta x^2}\left(-3a_y-4b_y\right)- \\ \frac{Hy_{i+1,j}}{36\Delta x^2}\left(60b_y+4c_y\right)-\frac{Hy_{i-1,j}}{36\Delta x^2}\left(4b_y+60c_y\right)-\frac{Hy_{i-2,j}}{36\Delta x^2}\left(-4c_y-3d_y\right)+L_D H_x \end{array} \right)}{\left(-\frac{30.Hy_{i,j}}{12\Delta y^2}+\frac{\left(+3a_y-60b_y-60c_y+3d_y\right)}{36\Delta x^2}+\kappa_0^2\, n_{i,j}^2-\beta^2 \right)} \tag{33.a}$$

Estão demonstrados, portanto, todos os passos para se obter a equação $Hx_{i,j}^{INT}$ e $Hy_{i,j}^{INT}$ para a aproximação de quarta ordem.

Como já comentado no texto principal, a equação (32) é a aproximação em diferenças finitas de quarta ordem da equação vetorial de Helmholtz (18), e descreve o formalismo vetorial completo.

Desprezando-se todo o lado direito das equações (18) e (19), ou seja, as equações (31) e (31.a) em diferenças finitas, caracteriza-se o tratamento semivetorial. Para o formalismo escalar, além de se desprezar as equações (31) e (31.a), deve-se fazer os parâmetros $a_x = d_x = 0$, $b_x = c_x = 3/4$, $a_y = d_y = 0$ e $b_y = c_y = 3/4$.

III. Apêndice - Cálculo da constante de propagação - β

Este apêndice apresenta o desenvolvimento matemático para a obtenção da constante de propagação β. A partir da equação vetorial de Helmholtz:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+n^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial}{\partial y}\right)+\kappa_0^2 n^2-\beta^2\right]H_x=\left[n^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial}{\partial x}\right)-\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\right]H_y$$

Multiplicando todos os termos pelo complexo conjugado do campo Hx^*, tem-se:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}H_x^*+n^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)H_x^*+\kappa_0^2 n^2 H_x H_x^*-\beta^2 H_x H_x^*=n^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)H_x^*-\frac{\partial^2 H_y}{\partial y\partial x}H_x^*$$

Integrando cada termo em x e y

$$\iint\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}H_x^* d_x d_y+\iint n^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)Hx^* d_x d_y+\iint\kappa_0^2 n^2|H_x|^2 d_x d_y-\iint\beta^2|H_x|^2 d_x d_y=$$
$$\iint n^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)H_x^* d_x d_y-\iint\frac{\partial^2 H_y}{\partial y\partial x}H_x^* d_x d_y$$

Resolvendo para β:

$$\beta^2=\frac{\kappa_0^2\iint n^2|H_x|^2 d_x d_y+\iint\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}H_x^* d_x d_y+R-R_1+R_2}{\iint|H_x|^2 d_x d_y} \qquad (1)$$

onde:

$$R=\iint n^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)H_x^* d_x d_y$$

$$R_1 = \iint n^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial H_y}{\partial x}\right) H_x^* d_x d_y$$

$$R_2 = \iint \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial x} H_x^* d_x d_y$$

A aproximação escalar contém o primeiro e o segundo termos do numerador da equação (1), o termo R é simplificado por uma segunda derivada simples e os termos R_1 e R_2 são iguais a zero. A aproximação semivetorial considera, além do primeiro e do segundo termo, também o termo R como apresentado, sendo nulos os termos R_1 e R_2. Para aproximação vetorial completa são considerados todos os termos da equação (1).