

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	2
1 HIPÓTESES DA ECONOMIA ESPACIAL.....	3
1.1 Externalidades e bens coletivos	3
1.2 Bens coletivos, externalidades, custos de transporte e economias de escala: forças de aglomeração e dispersão	7
2 O FEDERALISMO FISCAL.....	11
2.1 O Federalismo Fiscal normativo	12
2.2 O problema da determinação do tamanho ótimo de uma jurisdição	16
2.2.1 Mobilidade dos consumidores e a definição da jurisdição ótima.....	18
2.3 O uso de transferências intergovernamentais	19
2.3.1 Redistribuição de renda.....	20
2.3.2 Equidade horizontal	21
2.4 Impostos em um sistema federal	22
2.4.1 Um exemplo de interação jurisdicional pela via fiscal	25
2.4.2 Impostos sobre propriedade	25
2.5 O federalismo fiscal positivo	26
2.6 Conclusão: A migração como questão política.....	28
3 A NOVA GEOGRAFIA ECONÔMICA (NGE).....	30
3.1 O modelo de competição monopolística de Dixit-Stiglitz.....	31
3.1.1 Motor e combustível: Dixit Stiglitz, custos de transporte e migração.....	32
3.2 O modelo-base da NGE	33
3.3 Resultados do modelo de Krugman.....	35
3.4 Uma tentativa de integração entre NGE e NEU.....	37
4 UM MODELO DE INTERAÇÃO JURISDICIONAL.....	40
4.1 Visão geral	40
4.2 Hipóteses.....	41
4.3 Características	42
4.3.1 Uma estratégia para evitar o problema do carona	46
4.4 O problema: maximização conjunta com equilíbrio migratório	49
4.4.1 Evitando o problema do carona.....	53
4.5 Confirmando as proposições.....	53
CONCLUSÕES	57
REFERÊNCIAS	58
ANEXOS.....	60

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma teoria que justifique a transferência horizontal e unilateral de recursos entre uma jurisdição e outra, sem contrapartidas, obrigação legal, imposição de terceiros ou superiores, não motivadas por altruísmo ou filantropia, tendo como causa única o interesse privado dos indivíduos.

A motivação para o desenvolvimento de tal teoria é derivada da existência empírica de tais transferências, como entre os países europeus no período da unificação. Desta maneira, esta dissertação se insere na literatura de federalismo fiscal.

O primeiro capítulo apresenta a base epistemológica dos capítulos seguintes. A natureza espacial da economia é explicada pela existência de externalidades, ganhos de escala, bens coletivos e custos de transporte. O segundo capítulo apresenta a teoria do federalismo fiscal, mostrando causas e consequências da migração. Também discute brevemente a diferença entre normativismo e positivismo dentro da literatura de federalismo fiscal. O terceiro capítulo traz um resumo da Nova Geografia Econômica, ressaltando a importância da combinação do modelo Dixit-Stiglitz com a existência de migração e custos de transporte.

O quarto capítulo apresenta o modelo propriamente dito, e os resultados do mesmo formam a conclusão deste trabalho. A resolução do mesmo pode ser encontrada no anexo.

1 HIPÓTESES DA ECONOMIA ESPACIAL

Este capítulo aborda hipóteses que justificam as teorias de economia espacial. Em epistemologia, justificação é um tipo de autorização a crer em alguma coisa. Quando o indivíduo acredita em alguma coisa verdadeira, e está justificado a crer, sua crença é conhecimento. Assim, a justificação é um elemento fundamental do conhecimento.

Por ser apenas um resumo rápido, este capítulo não se aprofunda no processo histórico pelo qual os pensadores elaboraram o grupo de hipóteses apresentado. Também não recorre a testes empíricos destas proposições. O objetivo é muito mais modesto: apresentar uma breve descrição das hipóteses mais aceitas, em que se baseiam as teorias da distribuição espacial de atividades econômicas e indivíduos¹.

Na primeira seção são apresentadas definições de bens públicos e externalidades. Mas o que há de espacial nas externalidades e bens públicos? A segunda seção responde esta pergunta, mostrando que seus efeitos são localizados espacialmente, devido ao meio físico e social de propagação.

1.1 Externalidades e bens coletivos

A definição de externalidade do manual *Microeconomic Theory* é:

Uma externalidade está presente sempre que o bem estar de um consumidor ou o conjunto de possibilidades de produção de uma firma é diretamente afetado pelas ações de outro agente na economia². (MAS-COL-LEL, WHINSTON & GREEN, 1995, pp.352).

O mesmo texto diz ainda que a expressão “afeta diretamente” significa a exclusão dos efeitos mediados por preços, eliminando as “externalidades pecuniárias”. Para os propósitos desta dissertação, entretanto, tais externalidades são importantes, principalmente para as

¹ O conteúdo aqui apresentado é, portanto, o básico de qualquer manual de economia espacial, somado apenas à interpretação do autor.

² *An externality is present whenever the well-being of a consumer or the production possibilities of a firm are directly affected by the actions of another agent in the economy.*

últimas sessões deste capítulo. Define-se como *externalidade pecuniária* aquela está presente quando uma ação de um consumidor ou firma afeta o preço de equilíbrio para todas as firmas e consumidores deste mercado; ou seja, quando a ação de um agente afeta outros via preços.

Claramente este mecanismo pecuniário está sempre presente em mercados competitivos. Esta externalidade é o que faz o desejo de lucro privado de uma firma levar a uma redução do lucro total do conjunto de firmas em um mercado. A própria eficiência de um mercado competitivo está intimamente ligada a esta externalidade pecuniária³.

É preciso complementar um pouco a definição do manual para caracterizar externalidade apropriadamente. Em princípio, pode parecer que a perda de bem estar de um goleiro numa partida de futebol, ao não conseguir agarrar o chute do artilheiro adversário, é uma externalidade. A ação de outro agente afetou o bem estar do goleiro diretamente, sem ser preciso uma negociação ou qualquer venda entre eles. Aceitar a definição do manual equivaleria a acreditar que uma sabotagem em uma firma pela rival pode ser considerada uma externalidade. Mas em nenhum momento estas ações deveriam ser incluídas sob esta denominação.

O efeito externo da ação não está na motivação do agente que o provoca. Por exemplo: a motivação de uma plataforma de petróleo é explorar sua jazida, e não afetar a pesca local. Um grupo de crianças, ao escolher uma rua para jogar bola, não tem como intenção quebrar o vidro de alguém. “Apenas aconteceu”, dirão, se forem perguntados. Se tiverem a intenção de causar este mal, eles talvez tenham que jogar bola por mais tempo até que, finalmente, dêem a sorte de a bola voar “sem querer” na direção almejada. Isto implica que a ação na verdade seria diferente, caso sua motivação fosse outra.

O fato de o efeito considerado “externalidade” não estar na motivação do agente que o gera não significa que ele não está ciente das amplas conseqüências de seus atos. Este efeito apenas não é a causa ou motivação de sua ação, ou seja, não é uma variável que afete suas preferências.

Propõe-se portanto a seguinte definição para os dois tipos de externalidade:

³ Este texto se referirá à externalidade pecuniária por seu nome completo.

Definição 1: Uma *externalidade* está presente sempre que o bem estar de um consumidor ou as possibilidades de produção de uma firma sofrem diretamente efeitos não-intencionais de uma ação intencional de outro agente na economia.

Definição 2: Uma *externalidade pecuniária* está presente sempre que o bem estar de um consumidor ou as possibilidades de produção de uma firma sofrem via preços efeitos não-intencionais de uma ação intencional de outro agente na economia.

Bem público é um tipo de bem coletivo que apresenta duas características distintivas: o consumo por parte de um agente não diminui o total disponível para outro (não-rivalidade) e não é possível impedir que um indivíduo tenha acesso a este bem (não-exclusividade). Logo, a decisão individual de consumir um bem com tais características ocasionará a externalidade de disponibilidade deste bem para outro indivíduo.

Imagine dois irmãos que dividem o quarto e possuem os mesmos gostos quanto a programas televisivos. Se um deles decide comprar uma televisão, não é possível excluir o outro de seu uso. Visando apenas o seu próprio prazer, ele permitiu o do outro. Exemplos clássicos de tais bens são a qualidade do ar, a segurança nacional, o som ou silêncio em uma sala.

Os bens coletivos são de uma classe um pouco mais geral que a dos bens públicos. Existem por exemplo bens cuja rivalidade é parcial: o consumo de uma quantidade x do bem diminui em θx a disponibilidade deste bem para outro agente, sendo que θ está entre zero e um. Outros bens possuem o problema da congestão, que pode assumir formas bastante variadas. Uma estrada, por exemplo, é um bem coletivo. Quando ela se encontra quase vazia, um carro a mais não afetará de maneira alguma o uso da estrada feito pelos demais. À medida que o número de automóveis aumenta, entretanto, os carros extras começam a diminuir a velocidade dos outros, até que finalmente um pequeno aumento do número de carros piora sensivelmente o usufruto de todos. Este é um fato cotidiano nas grandes metrópoles: nos horários de rush, a velocidade média cai numa proporção maior que o aumento do número de carros. Consideremos a velocidade o serviço almejado pelos usuários da via. Neste caso a rivalidade é variável de acordo com a quantidade de usuários: não rivalidade, em caso de poucos carros; rivalidade parcial ou total, à medida que o tráfego aumenta. A congestão é uma externalidade negativa do excesso de usuários.

Outro exemplo é a produção de conhecimento. Uma vez que um conhecimento foi adquirido, ele pode ser transmitido a outros sem perdas para quem já o possui – logo seria um bem não-rival. Entretanto, o conhecimento é um bem que em diversos casos possui exclusividade – ainda que imperfeitamente, como um sistema de patentes que impede o acesso de alguns a uma parte do conhecimento ou seu uso. A externalidade do conhecimento pode ser considerada positiva: uma descoberta feita por um indivíduo pode melhorar o bem estar de outro indivíduo. Este trabalho só considera bens coletivos aqueles em que o grau de exclusividade não é completo.

A externalidade positiva na provisão de um bem coletivo permite aos agentes dividir o custo de obtenção do mesmo. À medida que o número de usuários cresce, o custo médio, para uma mesma quantidade de provisão, é reduzido. No caso dos dois irmãos, certamente eles estarão em melhor situação para comprar a televisão caso morem no mesmo quarto, podendo dividir o custo da mesma. Contudo, a possibilidade de dividir o custo e a impossibilidade de um dos irmãos impedir o outro de utilizar a televisão, uma vez que ela tenha sido comprada, resultam no seguinte problema: quanto cada um deverá pagar. Cada agente sabe que irá se beneficiar da ação do outro. Cada um dos irmãos pode fingir desinteresse na obtenção do aparelho, esperando que o outro se esforce para comprá-lo.

Para grupos maiores o problema da provisão privada de bens coletivos se amplia. À medida que o número de pagantes cresce, o efeito marginal da contribuição individual se torna cada vez menor e cada indivíduo relega aos outros o esforço. A racionalidade dos agentes levará a muito pouca contribuição individual, ou uma provisão ineficiente do bem. Resumindo, a não-exclusividade leva cada agente a deixar nas costas dos demais o peso de arcar com os custos da provisão.

Um agente que apresenta tal comportamento, estritamente racional ao nível individual, porém gerador de um resultado ineficiente para a coletividade, é conhecido como “free-rider”, ou carona, ou oportunista. Devido a esta dificuldade na provisão privada de bens públicos, a solução é geralmente imposta à coletividade através de impostos. Nas palavras de Olsom (1971),

“Apesar da força do patriotismo, do apelo da ideologia nacional, da força agregadora de uma cultura comum e da indispensabilidade de um sistema legal e político, nenhum Estado da História moderna têm sido capaz de se manter através de donativos ou contribuições voluntárias. (...)”

Impostos, pagamentos compulsórios por definição, são necessários. De fato, como indica o velho ditado, a necessidade de utilizá-los é tão certa quanto a morte⁴.”

O próprio autor lembra que colocar em uma autoridade superior o poder de obrigar a provisão de bens públicos não é uma solução para o problema. Todo governo é formado por indivíduos auto-interessados e capazes de criar dispositivos, leis, que distribuem os custos de maneira que lhes seja benéfica. A provisão ótima do bem público não é assim assegurada, exceto quando se supõe a existência de um Estado normativo ou ideal. O Estado real está sujeito às pressões políticas e pode não possuir as informações suficientes para uma escolha ótima.

Não cabe, neste momento, entrar no mérito das estratégias ideais que podem ser utilizadas para levar ao provimento ótimo de bens coletivos. Este ponto será retomado na análise da literatura de Federalismo Fiscal no próximo capítulo. O interesse deste capítulo é entender como o espaço condiciona e é condicionado pela presença dos bens coletivos e externalidades (além dos custos de transportes).

1.2 Bens coletivos, externalidades, custos de transporte e economias de escala: forças de aglomeração e dispersão

O espaço físico condiciona a força das externalidades. Como vimos acima, uma plataforma de petróleo afeta a pesca em seu entorno e este efeito é menor quanto mais distante da sua origem; uma televisão comprada por um dos irmãos poderá ser utilizada pelo outro, que mora no mesmo quarto; os garotos brincando na rua podem acabar acertando alguma janela, mas somente dentro do raio de alcance de seus chutes. Muitas externalidades têm, portanto, um efeito que é mais forte quanto mais perto da sua fonte original. Dessa maneira, a espacialidade possui papel importante para entender o impacto de uma externalidade.

⁴ “...despite the force of patriotism, the appeal of the national ideology, the bond of a common culture, and the indispensability of the system of law and order, no major state in modern history has been able to support itself through voluntary dues or contributions. (...) Taxes, compulsory payments by definition, are needed. Indeed, as the old saying indicates, their necessity is as certain as death itself.”

A poluição sonora, por exemplo, é uma onda de choque de partículas. Essa onda de choque é tão mais forte quanto maior a energia da fonte emissora. À medida em que se espalha pelo espaço, a energia total permanece, mas é dividida por um número maior de partículas (e parte da energia se transforma em calor, devido ao atrito). Assim, a poluição sonora se reduz por uma razão quadrática da distância da fonte emissora. Analogamente, a poluição química é maior quanto mais concentrada for a presença do elemento prejudicial. À medida que o óleo de um vazamento se espalha pelo mar, esta concentração vai se reduzindo cada vez mais. A poluição visual é tão maior quanto mais visível o objeto gerador e sua visibilidade diminui com a distância. Existem inúmeros exemplos semelhantes de externalidades positivas, como a beleza de uma paisagem ao invés da poluição visual, ou a utilização da água aquecida de uma fábrica para a piscicultura (o que não é muito útil em um país tropical como o Brasil).

Outras externalidades, como a congestão, ocorrem devido ao grande número de usuários de um bem coletivo. Em geral, não apenas o número importa, mas também a densidade. No uso de um parque, por exemplo, é a proximidade entre os usuários que aumenta o risco de que a atividade de um grupo interfira à de outro grupo. A congestão é fruto da densidade de utilização, sendo assim um fenômeno espacial.

Algumas externalidades não possuem uma propagação física. Diversos tipos de conhecimento, como científico, tecnológico ou cultural (considerados coletivos, como vimos acima) são transmitidos através de redes sociais. O “meio” de propagação é a rede de relacionamentos, aonde faz diferença o tipo de ligação entre os entes em questão. No mundo contemporâneo, ao mesmo tempo em que a cultura está adquirindo um caráter “globalizado”, a maioria das relações humanas se dá entre indivíduos espacialmente próximos. Usando uma palavra da moda, a existência de “clusters” tecnológicos e científicos é uma prova da necessidade de proximidade física.

A externalidade pecuniária tem efeito somente entre firmas e consumidores que se relacionam competitivamente. A competição é mais fácil quanto mais próximos estiverem os agentes. A distância entre os competidores gera poder de mercado sobre os consumidores locais, permitindo, por exemplo, um produtor elevar um pouco os preços, para se aproveitar do fato de que os rivais têm o acréscimo do custo de transporte. Assim, a externalidade pecuniária é um fenômeno essencialmente espacial e requer a concentração, a proximidade. Mais adiante, será desenvolvido com mais profundidade que a necessidade de proximidade para a geração de externalidades pecuniárias é central na literatura da NGE.

Algumas maneiras pelas quais o espaço influencia a existência e magnitude das externalidades:

a)- Propagação através de um meio físico (por exemplo um bem coletivo) usado por emissores e receptores do efeito.

b)- Externalidade crescente com a densidade de uso de um bem coletivo. Todos os seus usuários são simultaneamente emissores e receptores do efeito.

c)- Propagação através de um meio social espacialmente localizado.

d)- Propagação reduzida pelo custo de transporte (que é crescente com a distância).

Externalidade positiva é uma força de atração: agentes tentarão se aproveitar de seu efeito, escolhendo implantar sua firma ou morar numa região próxima à fonte emissora. Por outro lado, externalidades negativas são forças centrífugas. O resultado é que as externalidades geram efeitos de aglomeração e de dispersão das atividades. Se o efeito total fosse positivo em qualquer escala, resultaria na total aglomeração, ou seja, a concentração das atividades em um só ponto do espaço. Se o efeito total fosse negativo em qualquer escala, resultaria na total dispersão, ou seja, uma completa homogeneidade e baixa densidade das atividades econômicas. Mas a observação empírica revela que nenhum dos casos extremos ocorre: a atividade econômica e a densidade demográfica possuem grande concentração, mas não total (senão toda a população do mundo estaria em Nova Iorque, ou existiria apenas uma cidade por país).

A economia de escala é outro fator de aglomeração muito importante. Economias de escala externas à firma podem ser reduzidas a externalidades, mas as economias de escala internas às firmas não. Este tema não será aprofundado, e o modelo mais microfundamentado aqui apresentado utilizará um formato simples para a função de produção da firma⁵.

Importante é que os ganhos de escala são uma força de atração; se o custo médio é reduzido quanto maior for a escala, a tendência é de toda a atividade econômica ocorrer em um só ponto.

⁵ O modelo citado é o Centro-periferia de Krugman, marco inaugural da Nova Geografia Econômica. A função de custos decrescentes com a escala presente nesse modelo é simplesmente $CT(q) = F + aq$.

O espaço determina o efeito da externalidade e as externalidades geram a aglomeração e dispersão da atividade econômica no espaço. O próximo capítulo expõe como a literatura de federalismo fiscal normativa busca organizar o espaço de maneira a se aproveitar otimamente das externalidades. Na sessão seguinte, será demonstrada a forma pela qual a Nova Geografia Econômica (NGE) se utiliza dos ganhos de escala e externalidades pecuniárias para explicar as grandes aglomerações econômicas no espaço.

2 O FEDERALISMO FISCAL

Federalismo fiscal é um corpo de estudos em economia sobre a implementação de impostos, transferências e gastos entre diferentes níveis de governo. Chama-se federalismo por supor que o governo não é uma entidade única, mas várias, e possui diferentes níveis hierárquicos. É denominado fiscal por que trata das questões relativas a incentivos econômicos, em grande parte resultado da estrutura fiscal.

O foco deste capítulo é compilar causas e conseqüências da migração. Certamente a literatura sobre federalismo fiscal é uma das mais ricas sobre o assunto, pois assume que dentro do espaço econômico de uma federação os agentes têm liberdade para migrar, gerando externalidades fiscais. A motivação individual é a melhoria das condições de vida, mas o resultado do grupo pode ser uma piora.

As primeiras pesquisas tinham uma preocupação normativa, com o objetivo de encontrar a estrutura de incentivos perfeita ou mais eficiente possível. Autores clássicos desta corrente são Musgrave, Oates e Tiebout.

A grande crítica à teoria normativa é pressupor que o Estado não enfrenta problemas de decisão e alocação de um bem coletivo, como apresentado em Olson (1971). Em resposta a esta incorreção da literatura normativa, a seção 2.5 trata brevemente do federalismo fiscal positivo.

Trabalhos mais recentes, como Aghion, Alesina e Trebbi (2005), enxergam a estrutura fiscal como fruto da interação de grupos com interesses distintos. Como o ótimo não é garantido, a comparação dos resultados normativos contra os resultados positivos é inevitável. Em geral, a estrutura fiscal normativa é eficiente, enquanto as positivas são "second-" ou "third-best".

Em seu livro *Democracy in América*, Tocqueville (1840) afirma: “O sistema federal foi criado com a intenção de combinar diferentes vantagens que resultam da magnitude e pequenez das nações”⁶. Quais são as vantagens dos diferentes tamanhos de uma nação? Conforme será demonstrado, a existência de bens coletivos e externalidades são parte desta explicação.

⁶*The federal system was created with the intention of combining the different advantages which result from the magnitude and the littleness of the nations.* Citado em Oates, 1972.

2.1 O Federalismo Fiscal normativo

Apesar da construção das unidades políticas ser histórica, certamente há aspectos econômicos que levaram ao surgimento das hierarquias do governo e seu grau de descentralização. Na literatura normativa de federalismo, exagera-se a importância dos aspectos econômicos, imaginando que as unidades políticas e sua estrutura fiscal foram escolhidas da *melhor maneira possível*. A definição desta melhor maneira possível é problemática e sua implementação, apenas um ideal.

No primeiro capítulo de seu livro *Fiscal Federalism* (1972), Oates afirma que o governo possui três funções: alocativa, por garantir um uso eficiente dos recursos; distributiva, por minimizar as desigualdades de renda; e estabilizadora, por manter a economia em altos níveis de emprego e com razoável estabilidade dos preços. A pergunta inicial do autor é: que organização do setor público irá resolver melhor tais funções? Para facilitar a resposta, Oates supõe dois casos extremos: um governo totalmente centralizado e outro altamente descentralizado.

Um governo descentralizado terá problemas claros em garantir a estabilidade. Caso as diferentes unidades utilizem uma mesma moeda, com emissão descentralizada, teremos problemas sérios de coordenação. Sendo o valor da moeda (o câmbio desta com relação às demais, assim como o poder de compra interno) coletivo, todas as unidades de governo sofrerão com sua depreciação ou inflação. A descentralização faz com que o benefício de uma emissão extra seja plenamente captado pela unidade emissora, enquanto o custo da depreciação é coletivo. Assim, cada unidade tem o incentivo de emitir o máximo possível, o que é racional para as partes mas não para o todo. Consequentemente, a função estabilizadora é mal efetuada por governos descentralizados.

Já um governo central internaliza as externalidades de cada emissão. Esta função será, portanto, melhor realizada em um sistema centralizado.

A função distributiva também apresenta dificuldades para um governo fragmentado. Suponha que uma das unidades resolva, para melhorar a distribuição da renda interna, oferecer um programa de renda mínima (imposto de renda negativo), custeado pela população local. Esta unidade política irá atrair para si todos os cidadãos candidatos a receber esta renda mínima, que são os que têm a ganhar com a medida. O custo de tal programa crescerá e as famílias que pagam imposto iriam preferir migrar para estados que não possuem tal

transferência de renda. Como resultado final, a cidade selecionaria os pobres para si e expulsaria os ricos para outras regiões⁷.

Oates assinala que tal resultado ocorreria mesmo que houvesse um genuíno interesse por parte dos ricos desta localidade em votar a favor de tal programa de renda:

“Pode acontecer de que todo indivíduo resolva votar por um programa de imposto de renda negativo e, ainda assim, se uma pessoa perceber uma maneira pela qual evita sua própria contribuição, pode ser de seu interesse fazê-lo. O ponto é que a contribuição de cada pessoa ou família para a eliminação geral da pobreza (...) é praticamente negligenciável. Por esta razão, a migração dos indivíduos relativamente ricos de uma localidade que adota uma agressiva redistribuição pode ser perfeitamente consistente com um compromisso geral [voto] (...) a uma política objetivando a redução ou a eliminação da pobreza⁸.” OATES, 1972, pp. 7 - 8.

O problema está na capacidade de um agente conseguir deixar para os outros o custo, evitando o seu próprio. Não é que o voto pelo programa não seja sincero; o indivíduo pode realmente achar que este programa é o melhor pra sociedade; por outro lado, ele está certo em pensar que sua própria contribuição não faz diferença. Sendo assim, ele está agindo racionalmente tanto no voto como na migração. Quanto menor a unidade da federação (ou ainda, quanto maior a mobilidade, ou facilidade de migrar), menor a possibilidade de realizar um programa de redistribuição de renda.

Eis então o primeiro exemplo de como a literatura de federalismo fiscal inclui a migração em seus modelos. Ela ocorre livremente dentro de uma nação e é motivada pela melhoria de bem estar pessoal, entretanto esta busca pela melhoria pessoal pode piorar as condições do grupo.

⁷ Estamos considerando que a mobilidade dos agentes é ampla e que eles são capazes de encontrar trabalho em outras localidades sem grandes perdas salariais.

⁸ No original (mais completo): “*Every individual might stand willing to vote for a negative income tax program, and yet, if any one person perceived an avenue through which he could avoid his own contribution to the program, it might well be in his interest to do so. The point is that the contribution of any single person or family to the general elimination of poverty in a society is likely to be negligible. There is, therefore, a real incentive for the so-called free-rider behavior by which an individual would leave to the others the burden of financing redistributive programs. For this reason, the migration of relatively wealthy individuals from a locality that adopts an aggressive redistributive program may be perfectly consistent with a general commitment on the part of that society to a policy aimed at reducing or eliminating poverty.*”

O que aconteceria com um programa de redistribuição realizado por um governo centralizado? Neste caso, a mobilidade seria extremamente reduzida, uma vez que para fugir a tal plano é preciso sair do país. A possibilidade do oportunismo dos agentes é, assim, menor e o programa de redistribuição melhor realizado.

Nas duas primeiras funções do Estado, estabilidade e distribuição, governos mais centralizados melhores resultados que os muito fragmentados. O que acontece na terceira função, a alocativa?

O governo central é mais apto a fornecer certo grupo de bens e serviços. Todos os bens públicos cuja abrangência inclua o país todo serão melhor providos por um governo tão grande quanto possível. A segurança nacional seria um desses casos. A provisão descentralizada de tal bem recairia mais uma vez no problema do governo oportunista: como toda unidade se beneficiaria dos gastos das demais com defesa, nenhuma teria incentivo em investir uma quantidade grande em tal tarefa, resultando em um provimento sub-ótimo.

Qual será então a vantagem de um governo descentralizado?

Na verdade, para tudo o que é específico de uma região, unidades menores de governo serão mais eficientes. Um governo central precisa de muita informação para poder prover diferentes bens a diferentes localidades. Dessa maneira, a tendência é que a provisão de bens coletivos por parte do governo central seja homogênea, ainda que as regiões sejam extremamente heterogêneas. Unidades menores podem ter vantagens informacionais, por estarem mais perto dos agentes locais, conhecendo melhor suas preferências, escolhendo melhor a combinação de bens públicos que satisfaz as necessidades locais.

Além disso, existe a possibilidade de que o grande número de unidades locais, com mobilidade entre elas, leve a uma competição entre estas unidades políticas. Esta idéia foi sugerida primeiramente por Tiebout (1956), partindo das hipóteses: a existência de muitas localidades e um número ainda maior de agentes, heterogeneidade das preferências, plena mobilidade e renda independente da localização.

Como o indivíduo pode mostrar suas preferências via migração, há um mecanismo de competição entre as unidades de governo, que levará ao oferecimento do bem público no nível

desejado⁹ (TIEBOUT, 1954, pp. 418). Este autor imaginou uma maneira de inserir mecanismos de mercado na esfera pública, que ele chamou de “votar com os pés”.

Mais dois aspectos favorecem o governo descentralizado. O grande número de unidades políticas permite uma variação maior das experiências em administração pública, podendo gerar inovações com mais presteza. Esta é uma vantagem dinâmica da descentralização. Da mesma maneira que a competição entre empresas as leva para o desenvolvimento tecnológico, a competição entre as unidades de governo as levaria as melhorias na alocação ou produção de bens coletivos e menores custos de arrecadação.

Por fim, há para Oates a possibilidade de que a conexão próxima entre o governo e o povo governado conduza as decisões para um maior realismo fiscal. Mais uma vez, se trata de um problema de oportunismo. O dinheiro do governo central é visto como fruto da contribuição de residentes e não residentes da jurisdição em questão, logo esta se sente menos responsável por seus gastos quando é com o dinheiro de outros. O governo local recebe os benefícios do gasto, mas somente parte do custo de arrecadação. Quando cada despesa local precisa ser coberta por uma receita também local, pode-se medir corretamente o equilíbrio entre custos e benefícios.

O raciocínio de Oates segue a lógica da afirmação de Tocqueville. Governos centrais e pulverizados têm vantagens diferentes, em tarefas diferentes. O sistema federal é vantajoso, pois é capaz de combinar as vantagens das diferentes escalas de governo.

Separar as funções não é simples. Diferentes federalismos podem surgir como respostas a diferentes sociedades. Mas existem princípios que permeiam a escolha das unidades federais e suas responsabilidades. Como demonstrado nas diferenças entre a centralização e a descentralização, o problema está em evitar os agentes oportunistas ou “free-riders”, que surgem devido aos problemas de compartilhamento de bens coletivos e externalidades entre as jurisdições. Ou seja, o problema é fazer com que cada ação governamental seja decidida a partir dos reais custos e benefícios.

Conforme já colocado, a ação oportunista ocorre quando é possível a um membro de uma comunidade se aproveitar dos benefícios da ação de outros. No caso, por exemplo, da função estabilizadora, vimos que as províncias não sentem o real custo de uma emissão extra de moeda. De uma maneira geral, a resolução deste problema está em recorrer a uma instância

⁹ Oates se preocupa com a provisão de bens públicos no nível desejado; no trabalho de Tiebout, entretanto, o que importa mais é o perfil do mix de bens públicos oferecido.

que internalize todos os custos da externalidade em questão (e, como esta literatura é normativa, este bom governo resolverá o problema da alocação).

Tal solução é denominada por Oates de “perfeita correspondência”. Supondo que não há mobilidade dos indivíduos e se tal governo detém informação completa sobre os gostos e desejos de seus cidadãos, a demarcação de cada unidade de governo como sendo aquela que internaliza a externalidade de um bem irá prover o nível de produção pareto-eficiente. Mais fortemente, Oates sugere que a melhor administração é aquela formada por uma coleção das menores jurisdições possíveis que internalizem completamente as externalidades¹⁰.

Um exemplo seria a administração das emissões de poluentes por diversas administrações públicas localizadas ao redor de um lago. Os sistemas de esgoto devem desembocar no manancial, mas é possível, a um custo razoavelmente alto, tratar os dejetos antes do despejo. Se esta região for dividida em várias unidades políticas, cada uma delas terá incentivos de despejar sua poluição no lago. Afinal, o nível de poluição do mesmo é coletivo, pouco influenciado pela ação de uma unidade isolada, e assim os malefícios do acréscimo de poluição parecem menores que os custos do tratamento. Se esta região for uma única unidade de governo, suas decisões de poluir ou não serão baseadas nos verdadeiros custos e benefícios. Logo, o nível de poluição será menor ou igual ao do caso das decisões isoladas. O que resolve o problema é unificar toda a região afetada pelas externalidades do bem coletivo.

2.2 O problema da determinação do tamanho ótimo de uma jurisdição

A perfeita correspondência é uma possível solução para a determinação das unidades de governo, conforme já discutido. Entretanto, algumas dificuldades impedem a existência da perfeita correspondência. Em particular, se não houver um bem coletivo cuja área de impacto seja bem definida, ou se houver uma multiplicidade de bens coletivos sobrepostos, parcialmente coincidentes, o número de jurisdições será grande. Mais ainda, as responsabilidades de uma jurisdição esbarrarão nas de outra. Uma solução é, na falta da correspondência perfeita, demarcar as jurisdições com base na correspondência aproximada.

¹⁰ Este é o teorema da descentralização (OATES, 1979, pp. 35).

Oates encaminha seu raciocínio a partir de uma simplificação. Imaginando que os indivíduos são imóveis, limita o problema à determinação da área geográfica de uma jurisdição (a escolha do local determinará indiretamente os moradores também, já que são supostamente presos a um local). Supondo um grau razoável de não-rivalidade, quanto maior o número de indivíduos inserido na jurisdição, menor o custo para cada e maior a provisão de um bem coletivo. O efeito negativo da população seria que o grau de heterogeneidade das preferências tenderia a aumentar. Em particular, Oates aponta que maior será a discordância acerca do nível desejado de provisão do bem público. Supondo convexidade dos custos e concavidade dos benefícios, conclui-se que existe um tamanho ótimo para a jurisdição, que é aquele em que o custo de incorporar o próximo indivíduo supera o benefício¹¹.

Mais uma vez, pode-se criticar em Oates a falta da problematização das decisões em cada nível de governo. Parece que uma organização se comporta em benefício do grupo, como se fosse antropomórfica. O único problema ocorre se os indivíduos de um grupo discordam entre si. Este posicionamento do autor pode ser criticado com base nas palavras introdutórias em *The logic of collective action* (OLSON, 1971, pp. 1-2):

“A idéia de que grupos tendem a agir em apoio a seu interesse como grupo é suposto derivado logicamente desta vastamente aceita premissa do comportamento racional, auto-interessado. (...) Mas não se segue que eles irão agir para atingir este objetivo. (...) Na verdade, a menos que haja coerção (...) *indivíduos racionais, auto-interessados não agirão de maneira a obter seu interesse comum ou de grupo*”.¹² (itálico do autor).

Assim, não se deve imaginar que cada nível de governo, simplesmente por abranger todos os elementos atingidos por uma externalidade, é capaz de agir de maneira a levar à alocação ótima¹³.

¹¹ É interessante notar que na provisão deste bem não aparece o problema do “free-rider”. Ao contrário do problema como o vê Olson, Oates acredita que a heterogeneidade das preferências piora a provisão do bem. Isto não deve surpreender o leitor, pois o governo em Oates não é oportunista, sempre sendo capaz de fornecer a melhor quantidade de bem público. O que acontece para Oates é que o aumento da heterogeneidade diminui a concordância sobre qual é esta melhor quantidade. (OATES, 1972, pp. 42); (OLSON, 1971, caps. 1 e 2).

¹² “*The idea that groups tend to act in support of their group interests is supposed to follow logically from this widely accepted premise of rational, self-interested behavior. (...) But it does not follow, that they would act to achieve that objective (...) Indeed, unless there is coercion (...) rational, self interested individuals will not act to achieve their common or group interests*”.

¹³ Não é o caso dizer que Oates jamais trata do Estado como formado por indivíduos. Na página 73 do mesmo livro, ele escreve que “mesmo que todas as preferências dos consumidores sejam conhecidas com acurácia

Outro problema contra a possibilidade da perfeita correspondência é a existência de custos da decisão coletiva. Ainda que seja possível separar perfeitamente os indivíduos em zonas sem intercessão e sem “spill-overs”, a necessidade de criar múltiplas instâncias de governo poderia gerar um custo expressivo. Em decorrência, na hora de decidir o tamanho de uma jurisdição, é preciso levar em conta o compartilhamento dos custos de administração pública e do processo de decisão. Nota-se aqui um suposto ganho de escala na administração pública.

Nos Estados Unidos, há grande independência financeira e legal das unidades estaduais e boa parte dos programas de ajuda governamental não são abrangentes e homogêneos, mas negociados caso a caso. Por exemplo, ao invés de haver programas abrangentes de financiamento a escolas, a maioria das ajudas depende de um contrato direto entre o governo federal e a específica unidade escolar. Os programas com as diferentes escolas podem, dependendo das negociações, prover benefícios bastante diferentes – ou seja, o auxílio é heterogêneo. É claro que tal fragmentação das relações pode levar a mais inovação e competição entre as escolas, mas talvez gere um custo de administração excessivamente elevado.

2.2.1 Mobilidade dos consumidores e a definição da jurisdição ótima

Na determinação da correspondência perfeita, e mesmo nos casos menos restritos que serão tratados depois, considerou-se que os consumidores-votantes são imóveis.

Seguindo os passos do modelo de “voto com os pés” de Tiebout, imaginar-se-á que a mobilidade dos agentes é positiva para a alocação de bens públicos. Oates porém argumenta que a mobilidade pode trazer consigo não apenas benefícios, como também custos, por exemplo de congestão. Ao escolher seu local de residência, o indivíduo não consideraria o custo que gera aos demais. Assim, temos um problema de induzir o comportamento individual a se adequar ao interesse do grupo.

perfeita, o governo pode ter outros objetivos (...), por exemplo, (...) a maximização do número de votos recebidos. (...) Isso tipicamente irá resultar em má alocação de recursos”. Oates sabe que o governo não é o ideal, mas prefere fazer uma teoria como se o fosse. Mais interessante, ele supõe em certos momentos individualismo e, em outros, comportamento voltado para o grupo.

Uma maneira é a criação de uma taxa a ser paga para entrar na jurisdição. A possibilidade de cobrar esta taxa é o mesmo que dizer que o local de residência, como um bem, é exclusivo. Bastaria então cobrar de cada entrante o seu custo de congestão (“congestion tolls”). Existe uma ampla literatura sobre as taxas de congestão, mas cabe aqui a pergunta: será tal cobrança factível? Oates reconhece que no que tange bens coletivos ofertados pelo governo, tal possibilidade de exclusão é inexistente ou bastante imperfeita. Uma cobrança direta de tais taxas de adesão não é possível, por razões legais e culturais, mas Oates salienta que, indiretamente, através de mecanismos mais ou menos sutis, os governos locais procuram impor custos e assim restringir a migração excessiva.

A presente dissertação desenvolve um modelo em que não é a geração de custos, mas a criação de benefício alhures que restringe o excesso de imigração. Esse benefício é gerado pela transferência de recursos de uma jurisdição para outra. Como será colocado a seguir, mecanismos de transferências para resolver problemas de externalidades são comuns na literatura de federalismo fiscal.

2.3 O uso de transferências intergovernamentais

Um aspecto interessante da literatura de federalismo fiscal é a teoria sobre o uso de transferências horizontais e verticais. Por horizontal, entende-se a transferência de recursos entre entes federativos do mesmo nível, como entre dois estados ou dois municípios. Por vertical, a que ocorre entre entes de níveis diferentes, por exemplo, uma transferência do governo federal para um município.

Oates desenvolve uma tipologia das transferências. Este assunto é muito rico, sendo uma das partes mais úteis de sua formulação teórica. Todavia, será evitado o aprofundamento excessivo; o foco será apenas a resolução de externalidades (“spill overs”) entre entes de mesmo nível hierárquico.

O remédio proposto para o problema dos “spill-overs” ou externalidades é uma transferência de recursos¹⁴ que leve à alocação eficiente. Se o efeito externo é positivo, o emissor deverá receber um subsídio por unidade igual ao valor marginal do benefício que cria

¹⁴ Esse mecanismo é denominado de “imposto pigouviano”. (PIGOU, 1932).

para os demais. Se o efeito externo é negativo, o emissor deve pagar semelhante valor (igual ao custo marginal que cria) para os indivíduos que sofrem a externalidade. Pode-se demonstrar que tal procedimento conduz à eficiência.

O imposto pigouviano é decretado por uma instância superior de poder, mas é possível que as unidades federativas consigam chegar a um acordo sem precisarem usar esse instrumento. O teorema de Coase¹⁵ mostra que, sem custos de negociação e sem comportamento oportunista ou estratégico, pode-se atingir o resultado sem intervenção externa. Mais ainda: o resultado nesse caso será mais eficiente que o imposto, pois os agentes têm acesso a melhores informações sobre seus interesses.

As duas hipóteses de Coase nem sempre serão encontradas. Mais uma vez, trata-se do problema da ação organizada ou coletiva de Olson. Quanto maior o número de entes interessados, maiores as dificuldades de evitar o comportamento oportunista e maiores os custos de negociação. De volta ao problema do lago, se houver um número pequeno de cidades utilizando o lago como esgoto, pode ser que elas consigam chegar a um acordo, mas essa possibilidade diminui com o aumento do número de agentes. Nesses casos, o imposto pigouviano forçado por uma instância superior de governo pode ser mais eficientemente utilizado.

2.3.1 Redistribuição de renda

Conforme discutido anteriormente, a função distributiva deve ser realizada pelo nível de governo mais alto, evitando assim efeitos danosos de tal política. Como deve se dar esta política? Será que as transferências verticais podem ser um mecanismo útil?

A política de redistribuição de renda pretende resolver as diferenças ao nível do indivíduo, mas em geral os governos centrais não conseguem ter um foco tão preciso em sua política. Geralmente, o que os governos podem fazer é gerar transferências para os estados, esperando com isso solucionar a desigualdade individual. Existem províncias mais ricas e outras mais pobres, mas dentro destas províncias há indivíduos com níveis de riqueza bastante diferentes.

¹⁵ Coase, 1960, pp. 24.

Assim, a transferência que visa à redução da desigualdade, na verdade, gera um problema de equidade: indivíduos com mesmo nível de riqueza, mas morando em estados com diferentes rendas médias, serão tratados de maneira desigual. Esse problema é mais uma vez importante, pois estes indivíduos têm o incentivo de declarar impostos em províncias que lhes sejam mais favoráveis, ou mesmo migrar para elas. A não equidade pode gerar comportamento estratégico por parte dos individuais. Assim, muitos governos centrais confiam em programas de distribuição mais suaves, como por exemplo o repasse igual para estados que contribuíram com montantes diferentes de impostos.

Sempre que o governo conseguir atuar de maneira focada, ele conseguirá atacar melhor o problema da desigualdade. Mais uma vez o problema aqui é o custo de obter informações e de atuar em diversas localidades diferentes.

2.3.2 Equidade horizontal

O uso de transferências intergovernamentais com o objetivo de resolver o problema da distribuição é imperfeito, pois o benefício é para grupos e não para indivíduos. Entretanto, a questão da equidade horizontal pode dar razão ao uso de tal mecanismo.

Como sugerido antes, o uso de repasses para jurisdições pobres beneficia os ricos locais, que estarão em melhor situação que em outras localidades. Entretanto, pode ser que este favorecimento não ocorra. Afinal, sendo pobre, a oferta local de bens públicos será menor do que a de outra província, com mais indivíduos ricos e remediados. O indivíduo rico de uma localidade pobre pode, apesar das transferências, estar prejudicado frente a indivíduos ricos de outras localidades¹⁶.

Assim, temos que a política social ótima do governo central é uma combinação de distribuição de renda direta a indivíduos e transferência de recursos para províncias, na busca de equalizar sua capacidade fiscal. Estas medidas precisam de um acompanhamento estatístico-econométrico para se decidir a amplitude das transferências, que são um ajuste fino e nunca perfeito. A citação que Oates faz de Wheare é exemplar:

¹⁶ Deve-se ter em mente que a preocupação por detrás da equidade não é distribuição de renda, mas a justiça (tratar igualmente os iguais) e equilíbrio (evitar incentivos ao oportunismo, que pode ser exercido através da migração, por exemplo).

“Não existe e não existirá nenhuma solução final para a alocação de recursos financeiros em um sistema federal. Pode-se apenas realizar ajustes e re-alocações de acordo com as mudanças das condições. O que o governo federal precisa, portanto, é de uma maquinaria adequada para realizar estes ajustes.¹⁷” (WHEARE, citado em OATES, 1972, pp. 65.)

Na verdade, como Oates afirma mais à frente, limitar o problema da desigualdade e da equidade apenas a diferentes níveis de riqueza individuais pode significar reduzir demasiado esta linha de pesquisa. Existem diversas outras clivagens sociais (sexo, raça, idade) assim como uma diversidade de mecanismos, como impostos sobre consumo, sobre lucro, sobre renda e propriedade. A multiplicidade de mecanismos fiscais cria incentivos inevitáveis para classes e grupos terem comportamento oportunista. Assim, a busca de uma estrutura fiscal ótima na verdade é trocada pela busca de uma estrutura fiscal “factível”.

2.4 Impostos em um sistema federal

No final da sessão anterior, mostrou-se um pouco como o sistema fiscal (até então, as transferências) pode gerar incentivos para a estratégia de grupos ou indivíduos. O sistema de impostos aprofunda ainda mais a complexidade dos incentivos. Até o presente momento, nossa interpretação do financiamento do bem público parecia sugerir que seu pagamento era efetuado voluntariamente ou através da determinação por parte de uma agência, do pagamento de impostos por benefício individual. É claro que tal agência precisaria de um nível de informação bastante elevado.

Tão grande é a complexidade dos impactos de uma estrutura tributária que o Capítulo quatro de Oates se utiliza de uma nova abordagem, quase sem relação nenhuma com os capítulos anteriores. Em suas palavras,

¹⁷ “There is and can be no final solution to the allocation of financial resources in a federal system. There can only be adjustments and re-allocations in the light of changing conditions. What a federal government needs, therefore, is machinery adequate to make these adjustments” Wheare, citado em Oates, 1972, pp. 65.

“Quando nos distanciamos de nosso mundo ideal (...) o problema de especificar um sistema de impostos efetivos se torna extremamente complicado. (...) entramos no mundo do *second-best*.¹⁸” (OATES, 1972, pp. 121).

Oates não consegue ver o problema do dispêndio e do financiamento sob a mesma perspectiva. Enquanto no primeiro havia sempre a busca por um ideal, neste há objetivos ideais, mas o que comanda as decisões é o pragmatismo. Ao invés do princípio da taxa ótima por benefício individual, agora o princípio dominante é a capacidade de pagamento. Partiu-se de uma abordagem normativa para uma outra mais positiva. Contudo, o Estado continua sendo o ideal; é a imperfeição dos pagadores de impostos que obriga ao realismo “*second-best*”.

Existem princípios regendo a ação do Estado. O sistema de impostos deve evitar efeitos colaterais. De uma maneira geral, para cada nível de arrecadação, deve-se minimizar o custo em termos de bem estar para os pagadores de impostos. Este é o critério de eficiência da arrecadação. Para executá-lo, uma maneira pode ser cobrar alíquotas neutras, ou seja, a mesma taxa (em termos de porcentagem do preço do bem) para todos os produtos. Independente do perfil de gastos de um consumidor, ele pagará a mesma proporção de sua renda. Desta forma, evitam-se comportamentos estratégicos por parte dos consumidores, que justamente obrigariam a um aumento ainda maior das taxas.

Este imposto deveria ser acompanhado de uma alíquota extra pigouviana sobre atividades que gerem externalidades negativas a outros indivíduos.

O segundo critério de decisão para decidir a estrutura de impostos é a capacidade de transmitir informações sobre os custos dos programas de governo. Buchanan, citado por Oates, sugere o uso de impostos “*ear-marked*”, cujo gasto em certo programa governamental é assegurado. Uma boa taxa “*ear-marked*” é aquela em que a arrecadação total é simples de se inferir. Esta arrecadação permite aos contribuintes-votantes maior entendimento e previsão sobre os gastos de governo; tal é o caso, por exemplo, do ICMS em São Paulo. Considerando que, ao nível estadual, este é dos impostos de arrecadação mais estável, fica mais fácil para a população conhecer os custos do sistema de ensino superior do estado. Novamente, as taxas

¹⁸ *When we move away from our ideal world (...) the problem of specifying an effective tax system, becomes extremely complicated. (...) we have entered the world of the second best.* Oates, 1972, pp. 121.

neutras são boas no aspecto da previsibilidade da receita, justamente por que são inevitáveis, não sofrem com as mudanças de hábitos ou estratégias dos consumidores. Assim, são adequadas segundo este critério da informação dos custos do governo.

Um terceiro critério é a capacidade do sistema de impostos de encorajar a decisão coletiva. Como antes, supomos que os agentes respondem aos incentivos de custos e benefícios. Indivíduos que se beneficiam diferentemente de um bem coletivo terão opinião diferente sobre qual é o valor aceitável de imposto que se deve pagar por tal bem. Para ajustar suas diferentes opiniões, as tarifas devem corresponder à distribuição de benefícios. Mas isso requer a existência de um sistema em que os cidadãos revelarão suas verdadeiras preferências. Ora, como já visto, repete-se o problema da provisão privada de um bem público, e é pouco provável que os cidadãos decidam voluntariamente pagar mais que outros. Oates reconhece que tal problema faz o resultado depender da força política dos grupos envolvidos.

Para tentar mais uma vez reduzir seu problema, Oates sugere que são desejáveis níveis mais descentralizados de governo – ou seja, onde os indivíduos sejam mais homogêneos. Aqui seria o caso, por exemplo, das jurisdições escolares americanas, cuja escala é bem reduzida, menor que a de municípios – e com grande independência de arrecadação e decisão destes.

De qualquer maneira, nota-se que para este terceiro critério os impostos de alíquota neutra não são os mais desejáveis, pois taxam igualmente cidadãos com benefícios desiguais. Um exemplo de imposto com tal característica é o imposto territorial urbano. Áreas com acesso a mais amenidades públicas têm seu valor aumentado e os moradores ou as empresas que utilizam este solo são assim mais beneficiadas que os moradores ou empresas de locais precários. O problema do imposto territorial é que ele incide sobre a renda da terra – que não é resultado unicamente de ações do governo, mas muitas vezes de externalidades advindas da ação privada.

O quarto critério de escolha dos impostos é a equidade, ou seja, tratar igualmente os iguais independentemente da jurisdição onde residam. Mais uma vez, o que se considera não é a distribuição de renda, mas os critérios de justiça e a estabilidade, evitando incentivos para uma migração oportunista. O quinto e último critério é o custo de arrecadação e administração do imposto, uma vez que quanto mais cara a arrecadação mais deve crescer a receita total.

2.4.1 Um exemplo de interação jurisdicional pela via fiscal

Suponha duas comunidades numa federação. A comunidade Alpha decide financiar seus gastos com um imposto proporcional à renda, enquanto a comunidade Beta cobra um imposto fixo por pessoa. Duas ineficiências surgirão: a primeira é que os agentes moradores de Alpha irão mudar suas preferências acerca de trabalho e descanso, segundo a microeconomia clássica.

A segunda envolve as duas comunidades. Os indivíduos ricos da comunidade Alpha preferirão se mudar para Beta, e os mais pobres preferirão seguir no sentido contrário. Ambos os sistemas tributários poderão se provar ineficientes. Supondo que o número de ricos é baixo, Beta terá uma arrecadação inferior à que estimava supondo não haver migração. A comunidade Alpha terá um imposto sobre a renda que incide apenas sobre indivíduos com pouca, o que resultará em alíquota alta ou baixa arrecadação.

Oates sugere um segundo “experimento mental”: a cidade Beta adota não um imposto por habitante, mas “ad valorem” e neutro sobre vendas. Em princípio, ambos os impostos são idênticos, pois se tratam de impostos diretos ou indiretos sobre a renda. Entretanto, caso parte dos produtos possa ser comprado de outras localidades, os cidadãos de beta estarão sujeitos a uma taxa total inferior.

Na abertura da sessão sobre federalismo fiscal foi exposto um exemplo semelhante. Apreende-se destes exemplos que os impostos geram incentivos capazes de modificar as ações dos agentes. Logo, a dimensão estratégica deve ser considerada por aquele que escolhe o desenho tributário. Estas estratégias de migração podem levar a uma alocação ineficiente de recursos e pessoas, resultados das externalidades fiscais.

2.4.2 Impostos sobre propriedade

De uma maneira geral, os sistemas locais de impostos geram algum grau de externalidade fiscal para os demais. A melhor maneira de evitar tais estratégias é conseguir cobrar impostos equivalentes aos benefícios dos bens coletivos. O melhor dos impostos para esta tarefa é o imposto sobre a propriedade.

O valor de uma propriedade ou terreno pode ser dividido em três componentes: a)- custo de construção, ou custo de uma nova propriedade equivalente; b)- valor adicionado por

amenidades públicas ou privadas de caráter coletivo¹⁹; c)- valor adicionado por amenidades privadas.

Para Oates, um imposto sobre terrenos ou sobre propriedade gera duas ineficiências: um consumo reduzido de área para residência (pois seu custo é mais alto) e o risco do governo sobretaxar as propriedades de maior valor. Contudo, se a alíquota for igual ou inferior ao componente b, será igual ao benefício que a coletividade gera para o imóvel. Isto por que a renda da terra, que é o diferencial da utilidade de um terreno frente aos demais, será de qualquer maneira cobrado no preço final de aluguel. Esta renda será apropriada por alguém, seja o governo, sejam os donos dos imóveis.

Este é, de fato, o único imposto realmente relevante em comunidades pequenas. Não se deseja afirmar que este imposto é o de maior receita dentre os impostos municipais; a experiência brasileira mostra que tal não é verdade. O que se deseja salientar é que este é o único imposto cujo caráter é eminentemente local. Este é o único imposto cuja alíquota pode ser bastante diferenciada entre dois municípios sem causar grandes problemas de incentivo. Desde que seja inferior ao componente b da renda da terra, o único impacto que gera é redução da renda do proprietário. Os indivíduos que compram ou alugam esta propriedade nada sofrem, não tem o preço alterado, e desta forma não têm por que adotar comportamento estratégico. Uma cidade pode mudar razoavelmente o valor de sua alíquota sem sofrer grandes mudanças em termos de evasão fiscal. Desta maneira, quando da proposição do modelo desta dissertação, que enfoca comunidades locais, supor-se-á que o único imposto existente é este.

2.5 O federalismo fiscal positivo

As transformações políticas da integração européia inspiraram uma nova literatura de federalismo nas suas vertentes fiscal, jurídica e política. Entre outras questões, os líderes e pensadores europeus tiveram de tratar da homogeneização de leis e estrutura fiscal, inclusão ou não de novos países e do surgimento de uma integração monetária internacional. Pode-se

¹⁹ O valor adicionado por amenidades coletivas privadas é um caso de externalidade espacialmente localizada. Pode também subtrair valor ao imóvel; tal é o caso das áreas de risco de violência nas grandes cidades brasileiras.

considerar que, sob muitos aspectos, a União Européia é uma federação como os Estados Unidos da América. Assim como a novidade das estruturas políticas americanas (além de inglesas e irlandesas) motivou Tocqueville, a integração européia motivou economistas como Alesina, Perotti, Spolaore, Pearson e Tabellini.

O centro do palco do federalismo fiscal não é mais ocupado pelo desenho de mecanismos ótimos de incentivos, mas sim pela disputa entre os diversos grupos de interesse:

“Identificamos duas questões chave no processo de integração européia: 1) uma ênfase no ‘equilíbrio institucional’ baseado em uma complexa teia de instituições com jurisdições sobrepostas; 2) Um conflito entre as abordagens dirigista versus laissez-faire na condução do governo.” (Alesina & Perotti, 2004).

“Com o objetivo de explicar mudanças nas leis eleitorais adotadas pelas cidades americanas (especialmente no Sul), mostramos por que a maioria tende a adotar regras do tipo ‘vencedor leva tudo’ [em eleições que envolvem a totalidade da cidade]. (...) em resposta a um aumento do tamanho das minorias, quando estas minorias são relativamente pequenas. (...) Entretanto, quando a minoria se torna grande (perto de uma divisão 50-50), a possibilidade de perder o controle da cidade induz a maioria a preferir que os votos das minorias sejam confinados em distritos contendo apenas esta minoria” (Trebby, Aghion & Alesina, 2005).

Observa-se, então, que agora as regras institucionais vêm de um conflito entre grupos. Assim, a literatura de federalismo fiscal sofreu uma guinada, se tornando mais positiva, mais descritiva.

A separação entre normativismo e positivismo pode ser resumida na crítica que uma faz à outra. A crítica positiva ao normativismo é: ainda que o resultado de um desenho institucional, legal e fiscal seja mais eficiente, por que se preocupar com tal desenho se o mesmo é politicamente inatingível? A crítica normativa ao positivismo é: se não é possível escolher de maneira ótima o desenho institucional, legal e fiscal, pois este desenho é fruto do jogo de interesses, qual é o papel da ciência econômica, isto é, do economista?

A saída do normativismo representa, portanto, uma diminuição do papel do economista. Apesar de ser ele o detentor de um conhecimento sobre como devem ser as políticas fiscais, monetárias e alocativas, não é mais o conhecimento que dirige a decisão. Ter poder é mais importante do que ter razão.

Contudo, sobrevive ainda um papel para este profissional/ acadêmico. Os agentes que tomam decisões não são plenamente racionais, isto é, não possuem informações nem estruturas mentais perfeitas, se tornando incapazes de traçar plenamente ligações entre causas e efeitos. Os detentores de melhores teorias seriam os economistas. Além disso, mesmo com objetivos privados, podem existir ocasiões em que, escondida da névoa de um conflito, existe a possibilidade de uma melhora paretiana, só percebida pelo economista.

2.6 Conclusão: A migração como questão política

Este capítulo apresentou uma série de efeitos econômicos da ação governamental. O objetivo do trabalho levou ao foco em dois aspectos: a explicação da migração como fruto de uma estrutura de complexos incentivos; e os efeitos da migração, como por exemplo a redução ou acentuação das diferenças entre regiões distintas.

O trabalho de Oates em federalismo fiscal possui um caráter seminal, mas também alguns importantes problemas, devido à suas hipóteses acerca da ação coletiva.

O tamanho da unidade política precisa levar em consideração a presença de externalidades, bens coletivos, e a ação estratégica dos agentes. A migração é vista ao longo da teoria como uma resposta a incentivos. De uma maneira geral, esta resposta a incentivos é racional no nível individual, mas pode levar a resultados ineficientes.

Foram colocadas muitas maneiras em que o problema do comportamento estratégico aparece na relação entre as unidades de um governo. Além disso, apontou-se que o problema é maior que o percebido por Oates.

Uma característica interessante desta abordagem é que o projeto de encontrar “a melhor prática” cria um marco utópico para a administração pública. Ainda que falho por não reconhecer inteiramente o papel das forças políticas, as recomendações normativas servem como referência e guia argumentativo. Possuem forte apelo retórico, mesmo que as políticas resultantes funcionem apenas em uma sociedade idealizada. O que determina sua aplicação na prática não é a correção de suas premissas e hipóteses, nem a perfeição de seu encaminhamento lógico ou a eficiência econômica - que tampouco atinge. O que determina

sua aplicação é o auxílio de um grupo de interesse combinado com o carisma e clareza do interlocutor economista. O discurso, normativo na teoria, é estratégico na prática.

A migração deve ser vista como resultado de incentivos que não são ótimos, e sim fruto do embate político. Os mecanismos que incentivam ou repelem a migração não surgem de um estudo sobre sua eficiência, mas dos interesses da coalizão que detêm o poder. Devemos portanto estudar os atores segundo seus interesses: migrantes e não-migrantes, oriundos da região minguante ou da região atratora, com ou sem poder de voto no local de destino.

3 A NOVA GEOGRAFIA ECONÔMICA (NGE)

Este capítulo apresenta uma abordagem de economia espacial que tem rapidamente conquistado novos adeptos, chamada Nova Geografia Econômica (NGE). Esta linha de pesquisa surgiu com o objetivo de criar uma modelagem micro-fundamentada para explicar a distribuição de atividades econômicas e demográficas no espaço. Em especial, o alto grau de heterogeneidade entre regiões. Como observa Krugman (1991):

(...) Em um país com grandes áreas esparsamente povoadas [Estados Unidos] (...) um quarto da população está espremida em uma parte não muito agradável da Costa Leste. Frequentemente se tem comentado que as fotos noturnas de satélite da Europa revelam poucas fronteiras políticas, mas sugerem claramente um padrão centro-periferia cujo eixo está em algum lugar dentro ou perto da Bélgica. Um leigo deve imaginar que tais fatos têm um papel importante na modelagem econômica. Entretanto, o estudo da geografia econômica (...), tem sido bastante sonolento na última geração²⁰.

Ao lançar no começo da década de 90 os primeiros passos dessa nova literatura, Krugman tinha em mente que o desafio de explicar a organização do espaço deveria entrar na caixa-preta dos ganhos de aglomeração. Particularmente, ao invés de remeter a uma externalidade “Deus-ex-Machina”, Krugman supõe uma fonte micro-embasada: a externalidade pecuniária, importante em mercados de competição monopolística. Esta busca por micro-fundamentação é, conforme afirmado no primeiro capítulo, a busca por uma justificação da crença, ou seja, é uma busca para conhecer, ser capaz de explicar, ao invés de crer.

O interesse em apresentar esta literatura – principalmente nos primeiros modelos de Krugman – reside em dois aspectos. Primeiro, o grande destaque que a NGE despertou nos estudos de economia espacial. Deve-se destacar que sua influência já é de tal monta que é

²⁰ “... in a generally sparsely populated country [United States] (...) a quarter of the inhabitants are crowded into a not especially inviting section of the East Coast. It has often been noted that nighttime satellite photos of Europe reveal little political boundaries but clearly suggest a center-periphery pattern whose hub is somewhere in or near Belgium. A layman might have expected that these facts would play a key role in economic modeling. Yet the study of economic geography (...) has lain largely dormant for the past generation.” (KRUGMAN, 1991 pp. 483-484).

difícil encontrar um artigo recente sobre interação regional que não leve em consideração a NGE.

Em segundo lugar, pelo surgimento recente de modelos que tentam combinar aspectos da NGE com a Nova Economia Urbana (NEU). Tabuchi (1997) desenvolve uma versão do modelo de Krugman em que o equilíbrio migratório depende do grau de congestão das cidades – isto é, incorpora ao problema da interação regional e a renda da terra dos modelos de economia urbana. Ao fazê-lo, abre, mas não explora, uma brecha de conflito social – pois certamente os novos migrantes não são ainda proprietários de terras.

O principal foco de estudo têm sido o entendimento e a explicação dos processos microeconômicos, e não tanto a busca de uma maneira de intervir neles. Krugman não vê a distância que a NGE mantém do debate político necessariamente como um erro²¹, mas sugere que para o futuro é importante encontrar implicações políticas da teoria²².

3.1 O modelo de competição monopolística de Dixit-Stiglitz

Para lidar com a competição monopolística, Krugman (1991) se utiliza do modelo de competição monopolística, conhecido como Dixit-Stiglitz. Este modelo possui uma série de hipóteses acerca das preferências dos consumidores, da produção das firmas e do ambiente de competição, que levam a uma relação positiva entre tamanho da economia, número de empresas e salário real, através das externalidades pecuniárias.

As firmas possuem ganhos de escala e livre entrada. Devido à livre entrada, cada produto é vendido a seu custo médio; devido aos ganhos de escala, há incentivos para que exista apenas uma firma por produto. Os consumidores por sua vez têm prazer em consumir a mais ampla variedade de produtos possível, com uma elasticidade de substituição comum entre eles.

O resultado dos ganhos de escala, combinado à livre entrada, é que o total produzido cresce mais que proporcionalmente com o aumento da renda gasta, ou seja, o preço cai. Desta

²¹ “Existe, para ser honesto, uma preocupação (ao menos da minha parte) de que alguns dos aspectos mais desagradáveis da história da aplicação de políticas comerciais se repetiriam [caso a teoria NGE tivesse implicações políticas]: esforços exasperados das partes interessadas em recrutar economistas de renome para endossar políticas intervencionistas questionáveis”. (FUJITA; KRUGMAN, 2004, pp. 157).

²² “Por ser a geografia um fator tão crucial no desenvolvimento, e certamente existem fortes implicações políticas de algum tipo, este será um importante objeto de pesquisa”. idem.

maneira, os consumidores se beneficiam de estar em uma economia grande, porque esta reduz os preços dos produtos que consome.

Outro efeito dos ganhos de escala é que, à medida que a renda dispendida aumenta, existe espaço para novos produtos. Considere que a nova renda pode ser gasta em mais dos mesmos produtos ou em novos produtos. Como ter pouca produção de muitos produtos sai caro (devido aos ganhos de escala), existe um “trade-off” entre preço e variedade, cujo ponto ótimo é definido pela elasticidade de substituição. Sempre que a renda total aumenta, a curva deste “trade-off” se desloca e o novo ponto ótimo possui maior diversidade e menor preço.

Os indivíduos desta economia são consumidores-trabalhadores. Como não há lucro e considerando que não há conflitos distributivos, toda a renda gasta volta aos trabalhadores como salário, no mesmo exato valor. Assim temos que o que limita a variedade dos produtos, a redução dos preços e a satisfação dos consumidores é o número de consumidores-trabalhadores. A competição monopolística Dixit-Stiglitz é o motor, enquanto o tamanho populacional é seu combustível.

3.1.1 Motor e combustível: Dixit Stiglitz, custos de transporte e migração

A força do modelo de Krugman, que será apresentado a seguir, está na mistura do modelo Dixit-Stiglitz com migração e os custos de transporte. Apesar do modelo de competição monopolística conduzir à melhoria de todos os aspectos quando o número de consumidores-trabalhadores aumenta, não existe nenhuma fonte de novos trabalhadores, pois os mesmos não são produzidos. Já no modelo de Krugman, a migração é capaz de gerar estes novos trabalhadores (em detrimento de sua região de origem). Mais trabalhadores levam à maior produção, variedade e menor preço. Estas melhoras incentivam por sua vez a chegada de mais trabalhadores, que levam a mais redução de preços e diversificação de produtos. A migração, portanto, fecha um ciclo de causação circular. Como um furacão se esgota quando não há mais água superficial aquecida, o processo se esgota quando a fonte de novos migrantes acaba.

Os custos de transporte também são fundamentais. Na ausência deles, não haveria a necessidade de uma empresa estar localizada na mesma praça que seus trabalhadores, ou seja, a demanda por um produto poderia estar separada da oferta de trabalho, reduzindo ou parando o ciclo de causação circular.

3.2 O modelo-base da NGE

No ano de 1991, Krugman publicou dois artigos sobre aglomeração econômica e geográfica no espaço. Neles são desenvolvidos modelos que mais tarde se tornaram a base da “arquitetura de modelagem” da NGE. Aqui a referência será a abordagem do texto “Increasing returns and economic geography” (KRUGMAN, 1991).

Imagine uma economia formada por duas regiões, com dois setores (agrícola e manufatureiro) e dois tipos de trabalho (fazendeiros e trabalhadores). O setor manufatureiro produz um *continuum* de variedades de produtos diferenciados. Cada variedade é produzida apenas por uma firma e cada firma produz apenas uma variedade²³. A função de produção apresenta ganhos de escala: existe um custo fixo e o custo marginal é constante. O único insumo é o trabalho. Os trabalhadores são livres para migrar, enquanto os fazendeiros estão presos aos seus locais iniciais, distribuídos homoganeamente nas duas regiões.

O bem agrícola é considerado livre de custos de transporte, o que certamente é um truque facilitador da modelagem. Já os bens manufaturados têm um custo de transporte do tipo “iceberg”, ou seja: não existe dispêndio com a carga, mas parte dela se perde no caminho segundo uma função estritamente côncava da distância.

Há uma grande celeuma em torno da adoção dos custos de transporte do tipo “iceberg”. Certamente, o apelo empírico desta hipótese é bastante restrito. Pode-se pensar em exemplos não muito perfeitos. No caso de um super-petroleiro que tem como seu principal insumo o diesel, que é aproximadamente a mesma coisa que ele carrega, pode-se imaginar que ele está consumindo a própria carga ao se deslocar. Outro exemplo seria o transporte descuidado de minérios em caçambas, onde parte do produto se perde com o vento: um custo importante é a própria perda da carga. Um exemplo melhor seria a transmissão de eletricidade, onde o maior custo (excetuando o custo de implantação da linhas) é a perda de carga no caminho.

Todavia sequer estes casos se adequam razoavelmente à hipótese. É com certeza um aspecto criticável da abordagem, adotado pela razão prática de não incluir um terceiro setor,

²³ Essa relação biunívoca é fruto do modelo Dixit Stiglitz, conforme explicitado na seção anterior.

de transportes, no modelo²⁴. Além disso, facilita a análise, pois o custo de transporte é físico, não ficando sujeito a estratégias de preço.

A força centrífuga presente nesse modelo é a residência fixa dos fazendeiros. Eles consomem os dois tipos de bens e se localizam de maneira dispersa e, portanto, atender sua demanda seria mais barato por indústrias também dispersas. Já a força centrípeta é complexa, exigindo a demonstração das propriedades do modelo para que seja entendida.

Não somente os fazendeiros, mas todos os indivíduos consomem os dois tipos de bens. Os parâmetros decisivos de suas preferências são: a elasticidade de substituição entre os bens manufaturados e a proporção da renda gasta em cada um dos dois tipos de bens²⁵.

Como visto, a competição das indústrias é monopolística “a la Dixit Stiglitz”. Isto significa que apesar dos ganhos de escala que poderiam conferir poder de mercado, o preço final de cada produto é o seu custo médio. E ainda, caso no momento inicial as firmas estejam um pouco mais concentradas em uma das duas regiões, os consumidores deste local terão à sua disposição uma maior variedade de produtos²⁶ e menores preços, o que resultará em salário real e utilidade maiores. Como este mercado será maior que seus rivais, as empresas preferirão se transferir para a área, evitando que a maior parte de sua produção sofra custos de transporte. Elas produzem em uma região, mas vendem nas duas: melhor é, portanto, produzir na região que tem maior demanda.

As empresas não vão, porém, se transferir²⁷ todas juntas de uma só vez. A cada aumento do tamanho do mercado da região atratora, há espaço para mais algumas empresas, mas não infinitas. O número de empresas que se transfere ou surge é tal que, se mais uma empresa se instalasse na região crescente, aumentaria demasiado a competição, obtendo prejuízos.

O processo de transferência das empresas gera por sua vez aumento dos salários e da utilidade dos moradores da região atratora. Em especial, aumenta o diferencial de salários e utilidade das duas regiões, em detrimento da região minguante. Na região crescente, a

²⁴ Esta hipótese surgiu pela primeira vez em Samuelson, 1952.

²⁵ As preferências do consumidor são do tipo Cobb-Douglas ou CES (Constant Elasticity Substitution).

²⁶ Na verdade, os consumidores de ambas as regiões têm acesso a todos os produtos, mas os da região com maior terão acesso a mais produtos domésticos. Isto é importante por que os produtos importados chegam mais caros.

²⁷ O modelo não pressupõe de fato a transferência, mas sim o surgimento de novas indústrias na região atratora concomitantemente à morte de indústrias na região minguante. Nada define se é uma mesma empresa se transferindo ou se é uma nova. Até porque o número de empresas que somem não precisa ser igual à quantidade de empresas que aparece em outras terras. O leitor deve ver a transferência mais como uma metáfora do que como o processo que o modelo descreve.

proporção de produtos importados (mais caros) se reduz²⁸, os preços dos produtos domésticos também se reduzem e a diversidade total aumenta. Estes melhores salário e utilidade levarão à nova migração. Temos assim que o aumento populacional gera melhoria do padrão de vida, que gera novos aumentos populacionais. A causalidade é circular e cumulativa, de maneira que uma pequena diferença de tamanho entre as regiões no momento inicial gera um processo contínuo ampliador dessa diferença. A força centrípeta do modelo tem dois componentes: o diferencial de utilidade entre as duas cidades e o incentivo às empresas se transferirem, sendo que um intensifica o outro.

Dependendo dos custos de transporte e das preferências dos consumidores, o resultado de longo prazo será um padrão centro-periferia: toda a atividade manufatureira de um lado, assim como a maior parte da população (os fazendeiros continuam onde estavam). Uma das grandes novidades do modelo de Krugman é que o resultado final é quase independente da situação inicial (Ottaviano & Nicoud, 2006).

3.3 Resultados do modelo de Krugman

A aglomeração explosiva é um dos resultados possíveis do modelo, assim como a perfeita dispersão²⁹ (ou seja, separação meio a meio das atividades), dependendo de alguns parâmetros decisivos: custos de transporte, a proporção dos gastos dos consumidores em bens manufaturados e a elasticidade de substituição.

Se os custos de transporte forem baixos, as vantagens para uma empresa se situar no maior mercado são muito grandes: ela ganha acesso a uma maior demanda e por outro lado consegue permanecer vendendo seu produto na outra região. Contudo, se os custos de transporte forem nulos, as empresas não precisam se transferir, porque podem vender igualmente a qualquer mercado independente da distância. Neste caso, tanto faz a concentração plena em uma região, a divisão meio a meio das atividades, ou qualquer

²⁸ O aumento do número de trabalhadores em uma região leva ao efeito denominado por Krugman “home market effect”. Devido às economias de escala, quanto maior a planta produtiva, menor o custo. Assim, cada variedade será produzida em apenas uma localidade. Uma localidade maior (em termos de população e demanda) será melhor para as empresas e para os trabalhadores, por evitar os custos de transporte em grande parte dos gastos.

²⁹ Equilíbrios intermediários também são possíveis, mas todos instáveis.

resultado intermediário. O ciclo de causação circular é quebrado, por que independente da distribuição populacional, o mercado funciona como um só.

No caso de excessivos custos de transporte, não há muita competição entre as cidades, pois o comércio é muito dificultado. A força centrípeta se torna assim menor que a força centrífuga e o equilíbrio estável é a divisão meio a meio da atividade econômica.

Os parâmetros de preferências do consumidor também são decisivos e, em resumo, quanto maior a proporção da renda dedicada a bens manufaturados e quanto menor a elasticidade de substituição, maior a tendência concentradora.

Deve-se notar o caráter extremo da concentração e da dispersão. O modelo tem dois resultados estáveis diametralmente opostos, o que significa que uma sutil variação dos parâmetros pode levar a efeitos muito grandes. Este efeito poderoso de uma sutil mudança é o que leva Krugman a acreditar que seu programa de pesquisa terá em algum momento aplicações em termos de políticas públicas – uma pequena mudança em alíquotas de imposto, por exemplo, poderia levar uma das duas regiões à posição de centro.

Este caráter extremo pode ser também uma janela aberta para críticas de que o modelo não está muito bem balanceado. Mesmo que a concentração geográfica seja bastante intensa, ainda se observa empiricamente que existe espaço para cidades pequenas e médias, com atividades econômicas bastante variadas (e não apenas presas aos recursos naturais locais). Tabuchi (1997) afirma — e isso será mais detalhado a seguir — que apesar dos custos de transporte apresentarem queda notável desde a revolução industrial, nas últimas décadas têm se observado, nos países desenvolvidos, uma tendência à descentralização e não à centralização³⁰. Em termos gerais, podemos afirmar que a força centrífuga do modelo, uma vez superada pela centrípeta, jamais recupera seu domínio, independente do grau de concentração de moradores numa localidade. Ora, justamente pela simplicidade, este modelo não incorpora custos de congestionamento, que é uma força centrífuga crescente com o grau de concentração populacional.

³⁰ Krugman faz um comentário bem humorado sobre o excesso de concentração na cidade do México (e de penosa tradução): “... I am quite sure in my gut, and even more so in my lungs, that Mexico city is too big – but gut feelings are not a sound basis for policy”. Fujita & Krugman, 2004, pp. 157.

3.4 Uma tentativa de integração entre NGE e NEU

Em seu artigo “Urban economics and dispersion: a synthesis of Alonso and Krugman” (TABUCHI, 1997), Tabuchi procura explicar por que a redução continuada dos custos de transporte tem resultado, nas últimas décadas, em maior desconcentração industrial nas economias desenvolvidas. Para tanto, ele elaborará um modelo em que o excesso de moradores em uma cidade levará ao surgimento de custos de congestão, gerando assim uma nova força centrífuga dentro do modelo da NGE.

Estes custos de congestão surgem da disponibilidade limitada de terras na cidade. Dentro do modelo de localização espacial é considerada a existência de um centro de negócios para o qual todos os moradores da cidade devem se deslocar cotidianamente. Assim, tudo o mais constante, eles prefeririam morar o mais próximo possível deste local, para economizar seu tempo ou outros custos de deslocamento. E ainda, os indivíduos desejam consumir “habitação” ou tamanho da residência. O desejo de morar perto do centro, o desejo de obter a maior residência ao menor custo e a escassez de terrenos próximos ao centro gera um conflito entre os moradores da cidade. Este conflito é pacificamente solucionado pelo surgimento de um diferencial de renda entre os terrenos bem localizados e os demais, de maneira a equilibrar oferta e demanda por terra. Enfim, existirá um perfil de rendas tal que os indivíduos, se homogêneos em renda e preferências, fiquem indiferentes em morar a qualquer distância do centro.

À medida que a população residente em uma cidade aumenta, ocorrem dois efeitos simultâneos: o raio do perímetro urbano é ampliado e o valor da renda da terra aumenta. Estes dois efeitos ocorrem de maneira a manter o equilíbrio das utilidades. Como resultado, os habitantes da cidade, considerando tudo o mais constante, ficam em pior situação³¹.

É importante notar que o acréscimo de mais um habitante não gera diferenciação entre os moradores, pelo menos no modelo de Tabuchi. O equilíbrio espacial via renda da terra garante a indiferença dos moradores entre as localidades de moradia, desde que nenhum deles seja dono de terras e tenham todos o mesmo salário. Além disso, ocasiona um equilíbrio de mercado competitivo, logo dois indivíduos com a mesma dotação e preferências não podem estar em uma situação assimétrica de utilidade. Por outro lado, o mercado é competitivo por

³¹ A menos que sejam eles próprios donos das terras; neste caso, o efeito é ambíguo, dependendo do tamanho dos terrenos que possuem, e da localização.

que os proprietários de terras atuam como leiloeiros walrasianos. Este aspecto será mais analisado em breve.

Tabuchi acrescenta, assim, uma nova força centrífuga no modelo de Krugman. O excesso de concentração de moradores em uma cidade levará ao aumento de custos de transporte intra-cidade. Disto resulta que cidades muito grandes, cujo transporte se tornou caótico, deixam de serem vantajosas, parando de atrair novos moradores. Existe, portanto, um nível de concentração ótimo, dependendo dos parâmetros de custo de transporte intra e inter jurisdições.

O resultado mais interessante deste trabalho é que dificilmente ocorrerá a explosão concentradora de Krugman. À medida que os custos de transporte se reduzem, o desejo dos consumidores de obter maior área residencial leva a uma completa dispersão demográfica e industrial, independente dos parâmetros iniciais. Não há custos de transporte para cargas ou pessoas; o indivíduo pode escolher o local onde mora (e preferirá o local mais vazio possível) independente do local onde trabalha e as empresas podem ter garantido o acesso a trabalhadores e mercados independente de sua localização. Há aqui uma importante discordância em relação ao modelo básico de Krugman, onde a anulação dos custos leva à indiferença entre todos os graus de concentração. Antagonicamente a este futuro de plena dispersão, haveria uma complexa sucessão de fases de concentração e dispersão, dependendo da razão entre custos intra-cidade e inter-cidades, combinados às preferências dos consumidores e ao tamanho dos ganhos de escala.

Convém chamar a atenção para como hipóteses comuns da Nova Economia Urbana ganham novo significado quando utilizadas dentro desta outra abordagem. Tabuchi afirma que “desenvolve uma análise de equilíbrio geral” (TABUCHI, 1997, pp. 333). Entretanto os proprietários de terra, além de ausentes, “keep the rental revenue” (TABUCHI, 1997, pp. 336), ou seja, não gastam a renda recebida. Esta é uma hipótese boa numa análise de equilíbrio parcial, pois reduz a complexidade analítica. Entretanto, não é necessária, pois como demonstrado por Alonso (1964) é possível inserir a terra como parte da dotação inicial dos consumidores, aumentando a renda dos que têm mais e melhores terras.

A escolha desta suposição em um modelo que se pretende de equilíbrio geral é bem mais complicada. É possível imaginar maneiras pelas quais o uso da renda modificaria as conclusões de Tabuchi. Se, por exemplo, as rendas fossem investidas em firmas, localizadas na mesma cidade dos detentores da renda, obter-se-ia novamente um ciclo virtuoso de aglomeração. A renda poderia ser gasta também em consumo, ou no tamanho das residências

dos donos desta renda. Do modo como é apresentada, a renda da terra nivela por baixo a utilidade de todos os residentes na cidade. Os que moram perto do centro têm de gastar muito com terrenos, os que moram longe têm de gastar muito com transporte. Mas se esta renda fosse utilizada dentro da cidade, o equilíbrio da balança penderia um pouco mais para a aglomeração e, quem sabe, poderia levar a casos de aglomeração explosiva novamente.

Além disso, os proprietários de terras receberiam incentivos distintos dos demais habitantes da cidade: enquanto para os pagadores de renda a aglomeração gera um custo extra, para os recebedores é uma fonte de receitas. Eles poderiam então atuar de forma estratégica, ainda mais quando fossem em pequeno número.

É inclusive bastante difícil visualizar uma tal situação, em que a contínua retirada de renda do sistema não afete de alguma maneira o nível geral de renda dos seus participantes. Um país que sofreu nas mãos de um grupo de proprietários de terras ausentes foi a Irlanda, ao longo de toda a ocupação inglesa. Os senhores latifundiários, impostos pelo invasor, não tinham ligação com a Irlanda nem sequer ali moravam. A contínua retirada de renda do sistema tinha graves conseqüências, dentre as quais a extrema pobreza local. Certamente o caso irlandês não se assemelha ao que Tabuchi queria tratar em seu artigo. Cabe entretanto ressaltar o quão longe está ele de fazer uma análise de equilíbrio geral.

Não cabe aqui fazer conjecturas sobre que modelos podem surgir da modificação de algumas hipóteses utilizadas por este ou aquele autor. Fica claro que falta um modelo de uma interação regional (NGE), renda da terra (NUE), e a dimensão política da migração (Federalismo Fiscal). Este é o objetivo do próximo capítulo.

4 UM MODELO DE INTERAÇÃO JURISDICIONAL

O presente capítulo tem como objetivo apresentar um modelo contrastante em alguns sentidos ao apresentado por Tabuchi (1997). O ponto focal do contraste está nos resultados sociais da migração e no uso da renda da terra. Em Tabuchi os proprietários de terras são ausentes e não gastam dentro do sistema a renda que dele adquirem. No modelo que será apresentado, todos os agentes são proprietários, contudo é muito mais vantajoso ser proprietário de terras numa cidade que está crescendo do que numa cidade que está minguando. Além disso, diferente do modelo de Tabuchi, os consumidores-moradores são também votantes, e a renda da terra é o único imposto existente.

Dois são os principais resultados do modelo desenvolvido:

- 1)- Há grande e crescente desigualdade na região atratora.
- 2)- Pode ser útil aos moradores da região atratora realizar uma transferência unilateral para a região minguante.

A resolução matemática pode ser encontrada extensamente nos anexos. A numeração em números arábicos apresentada no corpo do texto segue o desenvolvimento nas partes anexas. Além disso, o primeiro dos anexos apresenta uma lista completa das variáveis utilizadas pelo modelo.

4.1 Visão geral

É retratada uma situação do tipo centro-periferia. A ascensão de uma cidade ou região leva à pobreza relativa as demais cidades (ou regiões) e os imigrantes.

Dentre um número $N+1$ de municípios, um deles, doravante denominado município “A”, começa um pouco maior (em número de habitantes) que os demais. Esta pequena vantagem na população gera maior salário, o que atrai imigrantes. A migração porém possui diversas desvantagens: a impossibilidade de votar na cidade central e a necessidade de alugar terrenos (moradia), sempre a um preço muito alto.

À medida que os emigrantes deixam as cidades periferia, estas cidades vão ficando vazias e sem capacidade de produzir bens públicos em quantidade. A pequenez da indústria e comércio local também resulta em menores salários.

Assim, o mercado de terras e a restrição do direito ao voto ampliam as desigualdades, pois tudo é favorável aos nativos da cidade “A”, que possuem direito a voto e terras, agora valiosas.

Contudo, a existência de custos de congestão (crescentes com o tamanho da cidade) resulta na necessidade de limitar de alguma forma o tamanho da imigração. Os nativos de “A” podem assim investir em outras cidades, apenas com o objetivo de reduzir um pouco o fluxo migratório.

4.2 Hipóteses

As hipóteses espaciais são bastante simplificadas. Não existe custo de mudança, ou seja, a migração de um indivíduo é feita de graça. Dentro da cidade, todos os terrenos têm acesso igual ao local de trabalho e bem coletivo: é como se não houvesse custos de transportes. Por fim, a cidade tem seus limites definidos estritamente, como se acabasse em um precipício: não é possível, a nenhum custo de transporte, morar em alguma região satélite e se aproveitar dos benefícios locais.

Ou seja, não há custos de transporte, mas a decisão de morar em um local determina que o cidadão vai também trabalhar neste local. Não há possibilidade de transitar diariamente entre as cidades.

Produção e comércio: Aqui temos hipóteses extremamente simples, que podem fazer o modelo parecer inocente aos olhos da NGE. A produtividade é determinada pelo local de moradia, e não pelas qualidades do indivíduo: quem mora numa cidade produtiva se torna imediatamente produtivo. Por outro lado, esta maior produtividade não reduz preços dos bens que uma cidade vende a outra – considera-se que o impacto dessas comunidades no todo da nação é ínfimo, logo o preço de venda dos produtos não se altera. Uma cidade não se beneficia dos ganhos de eficiência da outra. Desta maneira, a relação comercial entre as cidades é inexistente ou irrelevante.

Ainda sobre a produção, as cidades apresentam ganhos de produtividade quando sua população aumenta. Não há micro-fundamentação: a função de ganhos de produtividade é absolutamente exógena. Esta maior produtividade se reflete em maiores salários reais dos trabalhadores de cidades maiores. Desta forma, há uma mimetização dos modelos de clusters.

Consumidor: é utilizada uma função objetivo do tipo Cobb-Douglas, e três produtos: moradia (tamanho da mesma), bem privado e bem coletivo. Todos os agentes, independente da origem, tem a mesma função de preferência, com os mesmos pesos. Entre os nativos de uma mesma cidade, todos têm igual dotação (no caso, parcelas iguais do total de terras do município), assim como o mesmo salário. Os consumidores são racionais e auto-interessados. As estratégias dos indivíduos são: escolher a quantidade consumida de bem privado e terreno para moradia, votar no valor da alíquota do imposto territorial, escolher o valor da transferência de recursos para o outro município, escolher a cidade de moradia.

Decisões coletivas: os indivíduos escolhem conjuntamente o valor da alíquota do imposto, assim como a transferência de recursos. Entretanto, até o momento adotamos uma simplificação extra: apenas os nativos de uma cidade têm este poder de decisão. Assim, os imigrantes não participam da escolha da provisão de bens coletivos. Este é um dos grandes defeitos do modelo, pois sendo todos cidadãos de um mesmo país, deveriam ter o direito de transferir o local de seu voto³². Por outro lado, foi evitado habilmente (a algum custo) o problema da ação oportunista. Detalhes no anexo G .

Bem coletivo é considerado um bem com uma única dimensão: a quantidade. As externalidades de seu uso estão restritas à jurisdição onde é oferecido. Sofre congestão, uma função quadrática positiva da população municipal. Sua produção pode apresentar retornos constantes ou decrescentes de escala.

4.3 Características

Nosso modelo possui dois tipos de cidades: a cidade centro “A” e um total de $N > 1$ cidades periféricas “B”. Todas as cidades começam idênticas, exceto por uma maior população na cidade A.

Os indivíduos, independentemente de onde moram, são idênticos quanto às suas preferências. O que os diferencia são suas posses. Estas posses, por sua vez, são determinadas pela situação inicial e história. Em suma, as características importantes para identificar o que

³² Essas hipóteses seriam aceitáveis se estivéssemos num contexto de imigrantes temporários, sem direito a voto, vindos de outros países, como é o caso de muitos na Europa.

possui um indivíduo é saber onde ele nasceu (em uma cidade periférica ou central) e se migrou ou não. A combinação destas duas características nos dá um total de quatro situações possíveis:

- 1)- Nascido numa periferia, residente em na cidade central.
- 2)- Nascido numa periferia, residente numa periferia.
- 3)- Nascido na cidade central, residente numa periferia.
- 4)- Nascido na cidade central, residente na cidade central.

O terceiro tipo não irá ocorrer, pois não existem incentivos ao contra-fluxo migratório. O primeiro será chamado simplesmente de “migrante”; o segundo será chamado doravante “nativo de B não-migrante”. O quarto receberá a alcunha de “nativo da cidade A”.

Como já foi explicitado, todos eles compartilham da mesma função de utilidade, que pode ser descrita como:

$$U_i = \theta \ln\{c_i\} + \phi \ln\{h_i\} + (1 - \theta - \phi) \ln\{y_i\} \quad (i)$$

Onde ϕ , θ e $1 - \theta - \phi$ são os parâmetros que definem a importância (ou parcela da renda a ser dispendida) de c_i (consumo privado), h_i (terreno para residência) e y_i (bem público líquido).

Este índice i poderá assumir três valores: A, para nativos da cidade A, B para os nativos da cidade B, e M para os nativos de B que migram para a cidade A.

Essas letras definem grupos de consumidores homogêneos: o valor dos componentes c_i , t_i , e y_i será igual intra-grupo, mas diferente entre grupos³³. Assim, resumiremos nosso problema a trabalhar com um agente representativo de cada grupo.

Como as preferências são uma função ordinal e não cardinal, podemos, sem perda de generalidade, afirmar que:

$$0 < 1 - \theta - \phi < 1 \quad 0 < \phi < 1 \quad 0 < \theta < 1$$

³³ Caso haja alguma dúvida acerca da homogeneidade intra-grupos, deve-se notar que todos os indivíduos de um mesmo grupo estão sempre na mesma situação: possuem as mesmas dotações e enfrentam os mesmos preços, o que significa que tomarão as mesmas decisões tendo no final cesta idêntica de consumo. Há algumas semelhanças entre indivíduos de grupos diferentes: A e M consumirão a mesma quantidade de bem coletivo, por estarem na mesma cidade.

Vamos começar pela definição da função de utilidade dos indivíduos que defrontarão o problema mais complexo, os nativos da cidade A.

O terreno total da jurisdição A está dividido igualmente entre seus moradores. Eles podem utilizar este terreno como residência, alugar parte dele para outro habitante da cidade. Poderíamos acrescentar uma terceira possibilidade, a de devolver parte do terreno para o governo, mas veremos na sessão 4.2.1 por que podemos descartar esta hipótese.

Assim temos que:

$$h_A = \frac{T}{P_A} - d_A \quad (ii)$$

Onde T é o tamanho (área total) da jurisdição, P_A o número de nativos da cidade A e d_A a quantidade de terreno que este indivíduo decide alugar.

A restrição orçamentária deste sujeito pode ser descrita como:

$$W_0 + qP^{1/g} + \eta_A d_A = c_A + \alpha_A \left(\frac{T}{P_A} - d_A \right)$$

Onde $W_0 + qP^{1/g}$ é o salário do indivíduo, η_A é o aluguel do terreno e α_A o imposto territorial. Podemos definir a mesma função de modo diferente:

$$c_A = W_0 + qP^{1/g} + \beta_A d_A - \alpha_A \frac{T}{P_A} \quad (iii)$$

$$\beta_A = \eta_A + \alpha_A$$

Vamos chamar este β_A de aluguel bruto, e η_A de aluguel líquido.

Observe a expressão que representa o salário dos nativos de “A”: $W_0 + qP^{1/g}$. A parcela W_0 é autônoma, enquanto que a parcela $qP^{1/g}$ é variável de acordo com P . Este P representa a população total da cidade A, que é formada pela soma da população nativa P_A mais a população migrante P_M .

O orçamento público será gasto em três itens: bem coletivo, transferências para outra jurisdição (f), e gastos advindos da congestão. A congestão aumenta com o quadrado da população total P .

Supomos anteriormente que cada nativo da cidade “A” possui uma parcela do território local, e que todos os nativos juntos possuem o terreno total. Temos assim que a base de incidência do imposto territorial é a cidade inteira.

$$y_A + f + k(P_A + P_M)^2 = \alpha_A T \quad 0 < k < 1$$

$$\Rightarrow$$

$$y_A = \alpha_A T - f - k(P_A + P_M)^2$$

Inserindo as equações (ii2) e (iii) em (i), obtemos a função objetivo do nativo da cidade “A”:

$$U_A = \theta \ln \left\{ W_0 + qP^{1/g} + \beta_A d_A - \alpha_A \frac{T}{P_A} \right\} + \varphi \ln \left\{ \frac{T}{P_A} - d_A \right\} + (1 - \theta - \varphi) \ln \{ \alpha_A T - kP^2 - f \}$$

Os indivíduos do tipo A precisam determinar o quanto de seus terrenos alugarão para os migrantes (d_A), qual o valor do imposto territorial (α_A), e qual o volume de transferências que desejarão efetuar para as cidades satélites (f). Eliminamos o problema do consumo privado usando a restrição orçamentária.

De maneira semelhante, a função objetivo dos nativos de B que não migram pode ser expressa como:

$$U_B = \theta \ln \left\{ W_0 + q\Pi^{1/g} - \beta_B d_B - \alpha_B \left(\frac{T}{P_B} + d_B \right) \right\} + \varphi \ln \left\{ \frac{T}{P_B} + d_B \right\} + \dots$$

$$+ (1 - \theta - \varphi) \ln \{ \alpha_B T - k\Pi^2 + f \}$$

Nesta função, β_B é o valor pago pelo aluguel das terras dos migrantes – eles continuam proprietários dessas terras, mesmo migrando. Contudo, consideraremos por simplificação que $\beta_B = \alpha_B$, ou seja, eles pagam um aluguel líquido nulo. Essa medida foi adotada apenas por simplificação, e desejamos numa versão posterior adicionar o β_B que resolve o mercado de terrenos em B.

Alguns sinais estão invertidos nesta função quando comparada à dos nativos de “A”. Todos os termos contendo d_B estão com sinal diferente pois os indivíduos desse grupo são compradores líquidos de terras. Já o sinal de f está invertido por que a cidade, se for participar de alguma transferência, será recebendo e não enviando.

A escolha dos moradores de B se resume ao imposto territorial e a quantidade de terra que irão comprar dos imigrantes. Assim como definimos que o aluguel líquido é zero,

suporemos que $\frac{T}{P_B} + d_B = \frac{T}{P_B - P_C}$, o que significa que os habitantes da cidade distribuem igualmente entre si os terrenos dos imigrantes.

A função de utilidade dos imigrantes também não é muito diferente:

$$U_M = \theta \ln \left\{ W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} - \beta_A d_M \right\} + \varphi \ln \{d_M\} + (1 - \theta - \varphi) \ln \{ \alpha_A T - kP^2 - f \}$$

Importante notar que os salários dos dois grupos de moradores da cidade “A” são idênticos. Isto ocorre por que não há diferenciação no mercado de trabalho. Os salários são determinados pela cidade. A escolha dos imigrantes se limita a determinar d_M , que é seu consumo de área para residência.

Antes de resolvermos este problema de maximizações simultâneas, é importante frisar como eliminamos o risco de oportunismo na escolha do valor do imposto.

4.3.1 Uma estratégia para evitar o problema do carona

Como foi mostrado no primeiro capítulo, as jurisdições pequenas enfrentam problemas de oportunismo na cobrança de impostos. De uma maneira geral, os impostos podem gerar incentivos à evasão fiscal via migração. A subseção 2.4.2 apresentou o imposto sobre terrenos ou sobre a propriedade. Como ele incide sobre a renda da terra, não irá aumentar o preço de aluguel do terreno ou da propriedade, desde que o valor do imposto não supere um certo valor limite.

No modelo aqui apresentado, o imposto territorial será o único imposto utilizado pelas cidades envolvidas. O símbolo que o representa será α_j . Sua alíquota será definida pelos nativos da cidade j . O modelo foi desenhado de modo a para tornar este imposto precisamente a cobrança do benefício que ele gera³⁴. Se o valor do terreno marginal que os indivíduos ocupam for maior que a alíquota do imposto, eles estarão satisfeitos em pagar este valor, pois estariam dispostos a pagar até mais pelo mesmo terreno. Ou seja, conforme a nomenclatura da

³⁴ Veja mais adiante quais são as condições dos parâmetros que permitem o modelo funcionar na maneira especificada.

subseção 2.4.2, basta que o imposto não exceda o valor de “b”³⁵ para que evite os problemas de oportunismo.

O valor que os proprietários dão à sua última unidade de terreno comprada é o valor pelo qual ficam indiferentes entre vendê-la ou não. Este preço é β_j , que é uma função da quantidade de terra total utilizada. O modelo não incorpora custos de construção ou especificidades da iniciativa privada (os componentes “a” e “c” apresentados na subseção 2.4.2). desta maneira, β_j possui no modelo o exato mesmo papel do valor limite “b”. Temos portanto que a condição $\alpha_j < \beta_j$ para cada cidade garante que não há problemas de oportunismo no voto nem na migração.

Isto é muito importante, pois os moradores de cada comunidade se vêm a todo momento diante de um dilema. Se o aumento do imposto aumenta por um lado a disponibilidade de bens públicos, por outro encarece o custo de seus imóveis. O morador-votante tem um conflito interno, um lado seu pensando nos bens públicos (y_j), financiados pelo imposto, o outro lado pensando na quantidade de terreno que quer utilizar (t_i), que será menor quanto maior o mesmo imposto.

É claro que, salvo enorme coincidência, o imposto que o lado votante quer jamais coincidiria com o imposto que o lado morador deseja. De fato, o lado morador aceitaria pagar, para qualquer t_i , $\beta_j(t_i)$ ³⁶. Em termos microeconômicos, β_j é o preço de reserva que deixa o morador indiferente entre comprar ou não uma parcela a mais de terra. Como $\alpha_j < \beta_j$, ele desejará mais terras do que possui. Seguindo este raciocínio microeconômico, ele comprará mais terras até que a última unha de terra tenha para ele valor equivalente ao imposto da cidade. Contudo, não só ele como todos da cidade teriam comprado mais terras que o inicialmente previsto. O total arrecadado pelo imposto seria então diferente do que todos pensavam.

Mas então seu lado votante estaria insatisfeito: Se a arrecadação gerada com α_j foi maior que a ótima, devida ao excesso de consumo de terrenos, existe espaço para uma redução da alíquota α_j . Seu lado votante votará na diminuição da alíquota do imposto, de

³⁵ Caso o leitor não lembre mais este conceito, recomenda-se que ele retorne à subseção 2.4.2.

³⁶ Este termo $\beta_j(t_i)$ indica apenas que β_j é função de t_i . É uma função decrescente com relação a t_i , ou seja, cada unidade de terra vale menos que a anterior.

forma a voltar à arrecadação anterior. Note porém, que este jogo de mudanças de opinião é infinito. Não existe equilíbrio entre a decisão de votar e a de escolher o tamanho dos terrenos que deseja utilizar.

Isto ocorre por que a decisão do voto é coletiva, mas a decisão de consumo de terras é individual (apesar de todos o fazerem). Enquanto morador, cada cidadão é um oportunista potencial.

O modelo utiliza um truque para compatibilizar as duas decisões: a terra disponível em cada cidade é escassa. Novos moradores precisam ocupar um local que já tem dono. Assim, se $\alpha_j < \beta_j$, todos os moradores da cidade desejarão comprar mais um pouco de terra. Poderia haver trocas entre os moradores, uns comprando terras de outros. Contudo, eles possuem as mesmas preferências, todos querendo comprar mais terras; dessa maneira, o único equilíbrio nas trocas de terras dessa cidade é o binômio:

$$(p, q) = (\beta_j, 0)$$

Como o preço que os torna indiferentes entre comprar, não comprar e vender é β_j , não há terras disponíveis a um preço realmente acessível. Ou seja, a escassez faz com que o indivíduo não consiga comprar mais terras ao seu preço aparente (valor do imposto) por que este é inferior ao preço real (preço de reserva). Se a quantidade de terras fosse ilimitada e/ou parte dela não possuísse dono, o preço aparente valeria, mas tal não é o caso.

Com o uso desta escassez induzida, basta que α_j seja ótimo do ponto de vista do votante e que $\alpha_j < \beta_j$ para que o problema do carona não exista. O modelo escolherá parâmetros favoráveis a este contexto. Esses parâmetros são uma condição prévia para que o modelo desenvolvido faça sentido.

Vamos entender o que está acontecendo com um exemplo: ao votar na alíquota ótima do imposto territorial, o indivíduo da cidade A revela suas verdadeiras preferências, no caso o α_A que maximiza sua função utilidade. Se este α_A for inferior ou igual a β_A , então a quantidade consumida será $\frac{T}{P_A} - d_A$ ³⁷. Este é o melhor consumo de terreno possível, pois

³⁷ Mostramos no anexo que $\frac{T}{P_A} - d_A$ é igual a $\frac{T}{P_A}$ quando a população migrante é zero.

não é possível comprar terrenos dos demais moradores da cidade, cujo preço de reserva é idêntico. Assim o imposto não distorce suas escolhas.

Se ao contrário tivéssemos que $\alpha_A > \beta_A$, então haveria espaço para o comportamento oportunista dos agentes. Supondo que o indivíduo ainda votasse segundo suas verdadeiras preferências, ele posteriormente poderia descobrir que para o nível de imposto vigente (o qual ele mesmo apoiou), acima de seu preço de reserva, prefere consumir uma quantidade inferior de terreno. Resolverá então devolver suas terras ao governo até o nível em que seus gastos em residência sejam iguais a ϕW .

É claro que este comportamento será seguido por todos os nativos de A. Posteriormente, eles descobrirão que todos estão evitando pagar os impostos. Para garantir o nível desejado de provisão deste bem coletivo, irão aumentar o IPTU – a alíquota terá de ser maior já que a base de arrecadação, a área usada em moradias, foi reduzida por suas ações oportunistas. Este processo irá se repetir indefinidamente, e o único equilíbrio é pouca ou nenhuma provisão do bem coletivo.

Na hora da arrecadação, é preciso contornar as possibilidades dos agentes agirem estrategicamente. Considerando um sistema político em que as decisões sociais partem de indivíduos racionais, não temos como explicar a provisão deste bem público – a menos que a ação auto-interessada seja igual à verdadeira preferência.

E assim, nós precisamos supor que $\alpha_A > \beta_A$. Nas próximas sessões veremos que esta hipótese nada têm de inocente e leva o modelo a se comportar de maneira indesejada.

4.4 O problema: maximização conjunta com equilíbrio migratório

Temos 3 tipos de agentes: A, B e C. Abaixo temos três equações que representam a utilidade de cada um dos agentes.

$$\begin{aligned}
U_A &= \theta \ln \left\{ W_0 + qP^{1/g} + \beta_A d_A - \alpha_A \frac{T}{P_A} \right\} + \varphi \ln \left\{ \frac{T}{P_A} - d_A \right\} + (1 - \theta - \varphi) \ln \{ \alpha_A T - kP^2 - f \} \\
U_M &= \theta \ln \left\{ W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} - \beta_A d_M \right\} + \varphi \ln \{ d_M \} + (1 - \theta - \varphi) \ln \{ \alpha_A T - kP^2 - f \} \\
U_B &= \theta \ln \left\{ W_0 + q\Pi^{1/g} - \beta_B d_B - \alpha_B \left(\frac{T}{P_B} + d_B \right) \right\} + \varphi \ln \left\{ \frac{T}{P_B} + d_B \right\} + \dots \\
&\quad + (1 - \theta - \varphi) \ln \{ \alpha_B T - k\Pi^2 + f \}
\end{aligned}$$

Os agentes A escolhem o valor do imposto sobre terrenos urbanos, α_A . Esta escolha é pelo voto, mas a homogeneidade dos agentes e a hipótese de que $\beta_A - \alpha_A > 0$ faz com que a decisão conjunta seja redutível à decisão individual. Os agentes A escolhem também d_A , que é a quantidade de terreno que alugam para os imigrantes M. Por fim, escolhem f , que é a quantidade de transferências unilaterais para o município vizinho.

Os agentes B escolhem d_B , que é a quantidade de terreno que irão alugar dos emigrantes de sua cidade, e α_B , que é a alíquota do imposto em sua cidade.

Os agentes M escolhem d_M , que é a quantidade de terreno que alugam na cidade A, para onde migram.

Os três grupos de agentes agem simultaneamente. Sua interação ocorre através de dois principais parâmetros: preços e satisfação. Por exemplo, a interação entre os moradores de A (os agentes A e os emigrantes M) se dá no mercado de terrenos, através do preço de aluguel dos mesmos. A interação entre agentes B e M se dá de duas maneiras: no mercado de imóveis de B (onde os emigrantes M vendem e os agentes B compram), e através da condição de indiferença entre os dois grupos³⁸. Podemos descrever nosso problema como:

³⁸ Se a utilidade de migrar fosse maior que a de não migrar, todos migrariam (o que é possível no modelo, sendo porém um caso limite). O contrário também é verdadeiro. Assim, para que existam agentes do tipo B e M, é necessário que a utilidade de ambos seja idêntica, ou seja, que eles estejam indiferentes entre migrar e não migrar.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max}_{\alpha_A, d_A, f} U_A \\ \text{Max}_{d_M} U_M \\ \text{Max}_{d_B, \alpha_B} U_B \end{array} \right. \quad \text{s.a.} \left\{ \begin{array}{l} d_A P_A = d_M P_M \\ d_B \Pi = \frac{T}{P_B} \frac{P_M}{N} \\ (U_M = U_B) \end{array} \right.$$

A primeira restrição garante que o mercado de terrenos na cidade A está em equilíbrio, isto é, o total vendido deve ser igual ao total comprado, sendo que todos os terrenos da cidade já estão ocupados. O equilíbrio deste mercado define a taxa de aluguel em A, chamada β_A . A segunda restrição, que garante o equilíbrio do mercado de terrenos em B, define a taxa de aluguel nesta cidade, chamada β_B . A terceira restrição obriga a utilidade de emigrantes e não emigrantes de B a serem iguais, no chamado equilíbrio migratório.

O equilíbrio migratório existe quando não há incentivos a novas migrações. Em diferentes modelos este equilíbrio pode surgir de formas as mais diversas. Neste, temos uma definição bem clara do fenômeno.

A utilidade dos moradores de “A” será maior em não migrar, pois eles tem em sua cidade natal a propriedade das terras e maior renda que em B. Os moradores de B entretanto terão incentivos para migrar pois em A recebem maiores salários. Contudo, o aumento do número de moradores em A levará ao aumento do valor do aluguel bruto, o que resultará em queda da utilidade dos imigrantes. Enquanto isso, a utilidade na cidade B estará praticamente estável, pois a menor provisão de bem público com a saída dos imigrantes será compensada pelo aumento do consumo de terreno para residência.

Assim, dependendo de alguns parâmetros, existirá um nível de população migrante tal que não há incentivos para que mais um indivíduo migre. Seu benefício em migrar será menor que o custo de oportunidade de permanecer em B, pois as condições de vida dos imigrantes em A está piorando com o grande fluxo de novos moradores.

Vamos começar a resolução pelo mercado de imóveis na cidade A. A partir da função de utilidade³⁹, é fácil ver que a oferta de terrenos por parte dos nativos de A será definida por:

³⁹ Em caso de dúvida, consulte os cálculos nos Anexos.

$$d_A = \frac{(\alpha_A \varphi + \theta \beta_A) \frac{T}{P_A} - (W_0 + qP^{1/g}) \varphi}{(\theta + \varphi) \beta_A} \quad (3)$$

Por sua vez, a demanda dos imigrantes por terrenos será determinada por:

$$d_M = \frac{\varphi \left(W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} \right)}{(\varphi + \theta) \beta_A} \quad (8)$$

O valor de aluguel bruto que equilibra estas demandas é:

$$\beta_A = \frac{(W_0 + qP^{1/g}) [(\varphi + \theta) \varphi P_A + \theta \varphi P_M] + (\beta_B - \alpha_B) \frac{TP_M \varphi}{P_B} - [kP^2 + f] \varphi (\varphi + \theta)}{(1 - \varphi) (\varphi + \theta) T} \quad (9)$$

Nas cidades periféricas, o mercado de terrenos funciona de forma semelhante. A única diferença é que os emigrantes alugam todas as terras que possuem. Desta maneira, a quantidade alugada depende da quantidade de migrantes, mas não do preço do aluguel.

$$\begin{cases} d_B = \frac{W_0 \varphi + q \varphi \Pi^{1/g} - [\theta \beta_B + \alpha_B (\theta + \varphi)] \frac{T}{P_B}}{[(\theta + \varphi) (\beta_B + \alpha_B)]} \\ d_B \Pi = \frac{T}{P_B} \frac{P_M}{N} \end{cases}$$

O preço do aluguel na cidade B será:

$$\beta_B = \frac{(2\varphi + \theta - 1) N \Pi P_B (W_0 + q \Pi^{1/g}) - (\theta + \varphi) N P_B [k \Pi^2 + f]}{T [(1 - \varphi) \Pi N + P_M (\theta + \varphi)]} \quad (23)$$

Os nativos de A escolhem simultaneamente a alíquota do imposto territorial:

$$\alpha_A = \frac{(1 - \theta - \varphi) \left[(W_0 + qP^{1/g}) [(\varphi + \theta) P_A + \varphi P_M] + (\beta_B - \alpha_B) \frac{TP_M \varphi}{P_B} \right] + (\theta) (\varphi + \theta) [kP^2 + f]}{(\varphi + \theta) (1 - \varphi) T} \quad (10)$$

Assim como os moradores de B:

$$\alpha_B = \frac{\left(\frac{T}{P_B} + d_B\right) \left[\theta k \Pi^2 + f \theta \right] + (1 - \theta - \varphi) T \left[W_0 + q \Pi^{1/s} - \beta_B d_B \right]}{\left(\frac{T}{P_B} + d_B\right) (1 - \varphi) T} \quad (18)$$

4.4.1 Evitando o problema do carona

Definimos anteriormente que para evitar o problema do oportunismo dos agentes para definir a provisão do bem público, é preciso que:

$$\alpha_A < \beta_A$$

Em especial queremos que este resultado ocorra mesmo que não haja migração nem transferências – o que significa que o problema da provisão do bem coletivo é resolvido mesmo que a comunidade esteja isolada. Fazendo as devidas transformações aritméticas, podemos reduzir nosso problema a:

$$\beta_A - \alpha_A = \frac{(W_0 + qP^{1/s})(-1 + \theta + 2\varphi)P_A + (\beta_B - \alpha_B) \frac{TP_M \varphi}{P_B} - [kP^2 + f](\varphi + \theta)}{(1 - \varphi)T} > 0 \quad (11)$$

Para que este valor de fato seja positivo, uma condição essencial, como mostrado no Anexo G, é que

$$\varphi > \frac{1 - \theta}{2} \quad (13)$$

É interessante notar que a condição para que a população ótima seja positiva, desenvolvida no anexo H, depende da mesma condição, assim como uma série de outros resultados intermediários.

4.5 Confirmando as proposições

Até o momento, encontramos os valores de $\alpha_A, \alpha_B, \beta_A, d_A$. Resta determinar duas variáveis: qual o tamanho da migração e, se existir, qual o valor da transferência que os

moradores de A decidirão enviar para B. São justamente estas variáveis entretanto que têm sua análise mais dificultada. É extremamente trabalhoso encontrar o equilíbrio migratório. De fato, o anexo M contém equações cuja resolução e simplificação são apenas parciais. Assim, iremos apresentar a segunda proposição informalmente, usando um exemplo numérico desenvolvido em excel.

A primeira das proposições diz que o nativo da cidade A está em melhor situação que o imigrante. Para determinar se isto é verdade, precisamos comparar seus consumos de terreno e bens privados – sabemos que o consumo do bem coletivo de ambos será igual.

Na verdade, o problema se resume a saber se, na população de equilíbrio migratório, $\alpha_A < \beta_A$. Caso isto ocorra, o nativo de A tem uma renda maior do que a dos imigrantes, o que resultará em maior consumo.

$$P_M^* = \left(\frac{3q(-1 + \theta + 2\varphi)}{8k(\varphi + \theta)} + \frac{\sqrt{\Delta}}{8k(\varphi + \theta)} \right)^2 - P_A \quad (14)$$

A equação (14) mostra qual é a população limite na qual a diferença $\alpha_A > \beta_A$ continua a crescer. O desenvolvimento para encontrar esta equação pode ser encontrado no Anexo G. Como se pode ver, existe um valor limite, dado pelo primeiro termo do lado direito da igualdade. Se $P_A + P_M$ ultrapassar este limite, a desigualdade pode diminuir entre migrantes e nativos com o aumento da migração – devido a custos tão altos de congestão que exigem uma alíquota do imposto mais próxima do preço de reserva da terra.

A segunda proposição diz que Pode ser útil aos moradores da região atratora realizar uma transferência unilateral para a região minguante.

A tabela abaixo estabelece os parâmetros de uma simulação realizada para testar a segunda proposição. Note que todos os parâmetros estão escolhidos de acordo com os requisitos do modelo (por exemplo a equação 13).

Tabela 1: Valores dos parâmetros em uma simulação

Parâmetro	Valor atual	Observações
Wa	2500	Salário na cidade "A"
Wb	1000	Salário na cidade "B"
Wc	2500	Salário dos migrantes
T	1000	Terreno total de cada cidade

P_A e P_B	10000	População inicial de ambas as cidades
k	0,03	parâmetro linear da congestão
φ	0,5	parametro de pref por bens privados
θ	0,3	parametro de pref por terreno
$1 - \theta - \varphi$	0,2	parâmetro de pref por bens públicos
μ	1,80	parâmetro tecnologico do bem público

Neste caso, devemos ver como a utilidade U_A se comporta nos diferentes equilíbrios migratórios. Nossa proposição será verificada se houver um nível de transferências que gere uma utilidade maior que o equilíbrio migratório sem transferências.

Este resultado é fruto da inclinação negativa da utilidade dos nativos de A quando ocorre um aumento do fluxo migratório, que ocorre para fluxos migratórios muito grandes (veja equações do anexo G). Além disso, a um baixo custo em termos de transferência, temos uma grande resposta em termos de redução da quantidade de migrantes necessária para gerar o equilíbrio migratório.

Na tabela 2 vemos a diferença entre as utilidades dos nativos de B que migraram e que não migraram. Esta tabela nos indica a região de equilíbrio migratório.

Tabela 2.
Diferença entre a utilidade dos imigrantes e dos nativos de B que não migram
Em cinza os fluxos migratórios além do equilíbrio.

		transferências					
		0	5000	10000	15000	20000	25000
migração	8100	0,137157527	0,122693805	0,108614671	0,094900028	0,081531315	0,068491349
	8200	0,129806001	0,114600997	0,099820642	0,08544167	0,071442676	0,057803918
	8300	0,122226894	0,106194522	0,090633798	0,075517554	0,060820901	0,046520981
	8400	0,114390851	0,097429131	0,08099471	0,065055557	0,049582471	0,034548756
	8500	0,106262872	0,088249753	0,070830522	0,053967005	0,037624591	0,021771802
	8600	0,097800743	0,07858847	0,060050706	0,042141399	0,024819052	0,008046147
	8700	0,088952897	0,068360246	0,048541035	0,02943893	0,011003529	-0,006810438
	8800	0,079655412	0,057456754	0,036154828	0,015679607	-0,004031046	-0,023032519
	8900	0,069827699	0,045737203	0,02269987	0,000627017	-0,020559295	-0,040927925
	9000	0,059366138	0,033014253	0,007918246	-0,016036687	-0,038950297	-0,060909809
	9100	0,048134332	0,019031549	-0,00854596	-0,034750766	-0,059713646	-0,083547537
	9200	0,035947617	0,003426227	-0,027200744	-0,056142666	-0,08357602	-0,109650943
	9300	0,022547156	-0,01433722	-0,048801781	-0,081145526	-0,111615259	-0,140417071
	9400	-0,007553941	-0,035091926	-0,074533106	-0,111218976	-0,145510568	-0,17770231
	9500	-0,009619529	-0,060226521	-0,106379027	-0,148799802	-0,188048839	-0,224568845

Podemos perceber que, para pequenas transferências de renda, existe um ganho de utilidade para os moradores de A. Compare por exemplo as duas seguintes situações: migração de 9400 indivíduos combinada com transferência zero, versus migração de 8800 indivíduos e transferências de 20000 unidades monetárias (aproximadamente 1 unidade per

capita). Podemos ver claramente que os nativos de A preferirão neste caso transferir renda para a cidade B.

Este resultado sempre poderá ser gerado quando os custos de congestão forem suficientemente grandes. Para qualquer nível de renda e para diversas combinações de parâmetros, têm sido possível gerar resultados semelhantes a esses.

Tabela 3.

Utilidade dos nativos de A. Os resultados entre a região em branco e em cinza são de equilíbrio.

	0	5000	10000	15000	20000	25000
8100	4,93324435	4,931967262	4,930687357	4,929404624	4,92811905	4,926830623
8200	4,932138527	4,93086058	4,929579816	4,928296223	4,927009789	4,925720502
8300	4,93102584	4,92974702	4,928465381	4,927180914	4,925893605	4,924603443
8400	4,929906164	4,928626455	4,927343928	4,926058571	4,924770372	4,92347932
8500	4,928779375	4,927498762	4,926215331	4,924929069	4,923639965	4,922348006
8600	4,927645353	4,926363821	4,925079469	4,923792286	4,922502261	4,921209381
8700	4,926503976	4,925221509	4,923936221	4,922648101	4,921357138	4,92006332
8800	4,925355127	4,924071708	4,922785467	4,921496395	4,920204478	4,918909704
8900	4,924198688	4,9229143	4,92162709	4,920337048	4,91904416	4,917748415
9000	4,923034542	4,921749169	4,920460973	4,919169944	4,917876068	4,916579333
9100	4,921862575	4,920576199	4,919287001	4,917994966	4,916700085	4,915402344
9200	4,920682673	4,919395278	4,918105058	4,916812002	4,915516097	4,914217332
9300	4,919494724	4,918206291	4,916915032	4,915620936	4,91432399	4,913024183
9400	4,918298615	4,917009127	4,915716811	4,914421657	4,913123651	4,911822783
9500	4,917094238	4,915803675	4,914510285	4,913214053	4,91191497	4,910613022

CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou diversas teorias sobre a atividade econômica no espaço. Foi discutido como que a razão primeira de migrar, que é a busca de melhores condições de vida, pode resultar na verdade em uma piora coletiva.

Apresentamos alguns modelos de interação entre jurisdições. A interação dos modelos de Krugman se dá pelo comércio e migração; a do modelo de Tiebout, pela migração e graças à renda independente da localização. Nos modelos de federalismo fiscal, a interação pode ser mais complexa, envolvendo uma mistura de relações comerciais, migração, transferências horizontais e verticais.

Foi desenvolvido um modelo de interação jurisdicional com enfoque na escolha do consumidor. Este modelo teve como apelo o fato de incorporar os donos de terras como consumidores, moradores e votantes de uma cidade. Foi demonstrado que quando há restrição ao acesso da terra, é possível que a migração gere crescente desigualdade. Foi também demonstrado que a migração é a princípio benéfica para os nativos da cidade central, mas em excesso pode ter efeito contrário. Foi também desenvolvido um exemplo numérico que mostrou que os nativos da cidade central podem se beneficiar de uma transferência de renda para as cidades periféricas.

REFERÊNCIAS

- AGHION, P.; ALESINA, A.; TREBBI, F.** *Choosing Electoral rules: Theory and Evidence from US Cities*. Harvard Institute of Economic Research Working Papers: 2065, 2005.
- ALESINA, A., PEROTTI, R., SPOLAORE, E.** Together or separately? Issues on the costs and benefits of political and fiscal unions. *European Economic Review* 39 n.3-4. pp. 751-758, 1995.
- ALESINA, A.; PEROTTI, R.** *The European Union: A Politically Incorrect View*. Harvard Institute of Economic Research Working Papers: 2029, 2004.
- ALONSO, W.** *Location and Land Use*. Harvard University Press, 1964.
- ARROW, K.** The organization of economic activity: Issues pertinent to the choice of market versus non-market allocation. In *Collected Papers of K. J. Arrow*, Vol. 2. Cambridge, Massachusetts. Harvard University Press, 1983.
- BECKER, G. S.** A Theory of Competition Among Pressure Groups for Political Influence. *The Quarterly Journal of Economics* 98, n. 3. pp. 371-400. 1983.
- COASE, R.** *The problem of social cost*. *Journal of Law and Economics* 1: 1-44, 1960.
- DIXIT, A., STIGLITZ, J.** Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity. *American Economic Review* 67, pp. 297-308, Jun. 1977.
- EPPLE, D., ROMER, T.** Mobility and redistribution. *The Journal of Political Economy* 99, n.4. pp. 828-858. Ago. 1991.
- FLATTERS, F. HENDERSON, V., MIESZCOWSKI, P.** Public goods, efficiency, and regional equalization. *Journal of Public Economics* 3, n.2. pp. 417-444. Maio 1974.
- FUJITA, M., KRUGMAN, P.** The new economic geography: Past, present, and the future. *Papers in regional science* 83, pp. 139-164. 2004.
- HENDERSON, J.** Urbanization and economic development. *Annals of Economic and Finance* 4, pp. 275-341, 2003.
- JAPIASSU, H. F.** *Epistemologia: O mito da neutralidade científica*. Rio de Janeiro, Imago, 1975.
- KRUGMAN, P.** Increasing returns and economic geography. *The Journal of Political Economy*, 99, n.3, pp. 483-499. Jun. 1991.
- Kuhn, T. S.** *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago: University of Chicago Press, 1962.
- MAS-COLLEL, A., WHINSTON, M. D., GREEN, J. R.** *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, 1995.

- OATES, W.** An essay on fiscal federalism. *Journal of Economic Literature* 37, pp. 1120-1149, set. 1999.
- _____. *Fiscal Federalism*. New York, NY: Harcourt Brace Jovanovich, 1972.
- OLSON, M.** *The logic of collective action – public goods and the theory of groups*. Harvard University Press, 1971.
- OTTAVIANO, G. I. P., NICOUD, F. R.** The ‘genome’ of NEG models with vertical linkages: a positive and normative synthesis. *Journal of Economic Geography* 6 pp. 113–139. 2006.
- PIGOU, A.** *The economics of welfare*. London: MacMillan, 1932.
- PEARSON, T., TABELINI, G.** Federal fiscal constitutions: Risk sharing and moral hazard. *Econometrica* 64, n.3, pp. 623-646, Maio 1996.
- SANDLER, T., TSCHIRHART, J.** The economic theory of clubs: an evaluative survey. *Journal of Economic Literature* 18, pp. 1481-1521, dez. 1980.
- SANDQUIST, J.** Where shall they live? *Public Interest* n. 18, pp. 88-100, 1970.
- SMITH, T.** Migration, risk aversion, and regional differentiation. *Journal of Regional Science*, 19, n.1. 1979.
- TABUCHI, T.** Urban agglomeration and dispersion: a synthesis of Alonso and Krugman. *Journal of Urban Economics* 44, pp. 333-351, 1997.
- TIEBOUT, C. M.** A pure theory of local expenditures. *Journal of Political Economy* 65, n.5, pp. 416-424, 1956.
- TOCQUEVILLE, A.** *Democracy in America*, Mansfield, H. C., 2000.

ANEXOS

A	LISTA DE VARIÁVEIS DO MODELO	61
B	APRESENTANDO O PROBLEMA	62
C	ALÍQUOTA DO IMPOSTO E OFERTA DE TERRENOS NA CIDADE “A”	63
D	REESCREVENDO A UTILIDADE DOS NATIVOS DE “A”	65
E	DEMANDA POR TERRENOS E VALOR DOS ALUGUÉIS NA CIDADE “A”	67
F	REESCREVENDO A ALÍQUOTA DO IMPOSTO NA CIDADE “A”	69
G	QUANDO O PREÇO DO ALUGUÉL É SUPERIOR À ALÍQUOTA DO IMPOSTO ..	70
H	POPULAÇÃO ÓTIMA SEM MIGRAÇÃO	73
J	QUANTIDADE DE TERRENO ALUGADO PELOS NÃO-MIGRANTES DE UMA CIDADE DO TIPO “B”	77
K	ENCONTRANDO O VALOR DOS ALUGUÉIS NAS CIDADES DO TIPO “B”	78
L	MAIS SOBRE ALUGUÉIS E ALÍQUOTA NAS CIDADES “B”	80
M	UTILIDADE SEM MIGRAÇÃO: NATIVOS DE “A” E “B”	82
N	UTILIDADE DOS NATIVOS NÃO MIGRANTES DE “B”	84
O	UTILIDADE DOS MIGRANTES	85
M	EFEITOS DO AUMENTO DA MIGRAÇÃO E DAS TRANSFERÊNCIAS.....	94
N	CONDIÇÕES PARA QUE HAJA TRANSFERÊNCIA UNILATERAL	98

A LISTA DE VARIÁVEIS DO MODELO

Nome	Tipo	Descrição
i	índice	Indica o tipo do consumidor. Assume três valores: A: Para nativos da cidade A. B: Para nativos de uma cidade B que não migram. M: Para nativos de uma cidade B que migram para A.
j	índice	Indica o local (a cidade). Assume dois valores: A: Para variáveis da cidade A. B: Para variáveis da cidade B.
θ	parâmetro	Mede a importância do consumo de bens privados (exceto tamanho da residência) para cada consumidor. $0 < \theta < 1$.
φ	parâmetro	Mede a importância do tamanho da residência para cada consumidor. $0 < \varphi < 1$.
$1 - \theta - \varphi$	parâmetro	Mede a importância do consumo de bens públicos para cada consumidor. $0 < 1 - \theta - \varphi < 1$.
T	parâmetro	Terreno existente em cada cidade.
q	parâmetro	Parâmetro da tecnologia de produção. Junto com g , mede o impacto da população sobre o salário local. Isto ocorre devido a ganhos de produtividade.
g	parâmetro	Parâmetro da tecnologia de produção. Junto com q , mede o impacto da população sobre o salário local. Isto ocorre devido a ganhos de produtividade.
W_0	parâmetro	Parcela autônoma do salário, ou independente da população.
k	parâmetro	Parâmetro da função de congestão.
N	parâmetro	Número de cidades do tipo B. N é um inteiro positivo.
U_i	variável endógena	Utilidade do consumidor do tipo i .
c_i	variável endógena	Consumo privado por um consumidor do tipo i .
y_j	variável endógena	Consumo de bens públicos na cidade j .
t_i	variável endógena	Quantidade de terreno que um consumidor do tipo i possui no momento inicial.
d_i	variável endógena	Variação do terreno consumido pelo indivíduo i : d_A : quantidade de terreno vendida por cada nativo de A. d_B : quantidade de terreno comprada por cada indivíduo do tipo B. d_M : quantidade de terreno comprada por cada migrante.
α_j	variável endógena	Imposto territorial da cidade j .
β_j	variável endógena	Preço do aluguel de terrenos na cidade j , já embutido o imposto territorial α_j .
P	variável endógena	População final da cidade A, ou seja, $P_A + P_M$.
Π	variável endógena	População final da cidade B, ou seja, $P_B - P_M / N$.
P_M	variável endógena	População que migra de uma cidade B para A.
f	variável endógena	Transferências da cidade A para as cidades do tipo B.
P_j	variável exógena	População inicial de cada cidade.

B APRESENTANDO O PROBLEMA

Como foi exposto, existem muitas decisões a serem tomadas, por diferentes grupos de agentes. Para deixar a exposição mais clara, os problemas de decisão serão tratados passo a passo. As primeiras seções deste anexo apresentarão questões referentes à cidade A, desconsiderando a existência da cidade B.

Isto significa que as variáveis β_B , f , d_B e as restrições 2 e 3 do modelo não serão tratadas nesta seção. O problema se resume portanto a:

$$\begin{cases} \text{Max}U_A \\ \alpha_A, d_A \\ \text{Max}U_M \\ d_M \end{cases} \quad s.a : d_A P_A = d_M P_M$$

Após a longa explicação do que ocorre na cidade A (Anexos C a H), será iniciada a segunda parte da demonstração. Mais uma vez, estará voltada a apenas parte do problema, no caso o equilíbrio de imóveis e a escolha da alíquota do imposto na cidade B:

$$\text{Max}U_B \quad s.a : d_B \Pi = \frac{T}{P_B} \frac{P_M}{N}$$

Note que a população migrante não tem nenhuma escolha a fazer na cidade B. Não morando mais em B, eles irão alugar todo o terreno que possuem. Além disso, é feita a hipótese de que eles não irão votar na cidade B (isto é, não votarão em local algum).

Finalmente, a relação entre as duas cidades e as diferentes populações é evidenciada. O último conjunto de anexos mostra os resultados do último problema de maximização:

$$\text{Max}U_A \quad s.a. \{U_M = U_B$$

Este é um problema bastante complexo. A escolha de f envolve diversos impactos simultâneos. A condição nos diz que a utilidade de migrar ou não têm de ser igual (pois no equilíbrio, caso sejam diferentes, todos decidirão pela melhor das duas ações).

C ALÍQUOTA DO IMPOSTO E OFERTA DE TERRENOS NA CIDADE “A”

As decisões sobre a quantidade de terreno que um nativo de A quer alugar (d_A) e o valor do imposto territorial na cidade A (α_A) são simultâneas:

$$U_A = \theta \ln \left\{ W_0 + qP^{1/g} + \beta_A d_A - \alpha_A \frac{T}{P_A} \right\} + \varphi \ln \left\{ \frac{T}{P_A} - d_A \right\} + (1 - \theta - \varphi) \ln \{ \alpha_A T - kP^2 - f \}$$

$$\frac{\partial U_A}{\partial d_A} : \frac{\theta \beta_A}{W_0 + qP^{1/g} + \beta_A d_A - \alpha_A \frac{T}{P_A}} - \frac{\varphi}{\frac{T}{P_A} - d_A} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_A}{\partial \alpha_A} : \frac{\theta \frac{T}{P_A}}{W_0 + qP^{1/g} + \beta_A d_A - \alpha_A \frac{T}{P_A}} - \frac{(1 - \theta - \varphi)T}{\alpha_A T - kP^2 - f} = 0 \quad (2)$$

De (1) temos que:

$$\begin{aligned} \theta \beta_A \left(\frac{T}{P_A} - d_A \right) &= \varphi \left[W_0 + qP^{1/g} + \beta_A d_A - \alpha_A \frac{T}{P_A} \right] \\ \Rightarrow \\ (\theta + \varphi) \beta_A d_A &= (\alpha_A \varphi + \theta \beta_A) \frac{T}{P_A} - (W_0 + qP^{1/g}) \varphi \\ \Rightarrow \\ d_A &= \frac{(\alpha_A \varphi + \theta \beta_A) \frac{T}{P_A} - (W_0 + qP^{1/g}) \varphi}{(\theta + \varphi) \beta_A} \end{aligned} \quad (3)$$

De (2) temos que:

$$\begin{aligned} \theta (\alpha_A T - kP^2 - f) - (1 - \theta - \varphi) \left(W_0 + qP^{1/g} + \beta_A d_A - \alpha_A \frac{T}{P_A} \right) T P_A &= 0 \\ \Rightarrow \\ [T\theta + (1 - \theta - \varphi)T] \alpha_A &= (1 - \theta - \varphi) (W_0 + qP^{1/g} + \beta_A d_A) P_A + [kP^2 + f] \theta \\ \Rightarrow \\ \alpha_A &= \frac{(1 - \theta - \varphi) (W_0 + qP^{1/g} + \beta_A d_A) P_A + [kP^2 + f] \theta}{(1 - \varphi) T} \end{aligned} \quad (4)$$

Aplicando (4) em (3) temos uma nova definição de d_A :

$$\begin{aligned}
d_A &= \frac{((1-\theta-\varphi)\varphi(W_0 + qP^{1/g} + \beta_A d_A)P_A + [kP^2 + f]\varphi\theta + (1-\varphi)T\theta\beta_A) - (W_0 + qP^{1/g})(1-\varphi)\varphi P_A}{(\theta + \varphi)(1-\varphi)P_A\beta_A} \\
&\Rightarrow \\
d_A &= \frac{((1-\theta-\varphi)\varphi(W_0 + qP^{1/g})P_A + [kP^2 + f]\varphi\theta + (1-\varphi)T\theta\beta_A) - (W_0 + qP^{1/g})(1-\varphi)P_A\varphi}{((\theta + \varphi)(1-\varphi) - (1-\theta-\varphi)\varphi)\beta_A P_A} \\
&\Rightarrow \\
d_A &= \frac{[kP^2 + f]\varphi + (1-\varphi)T\beta_A - \varphi(W_0 + qP^{1/g})P_A}{\beta_A P_A} \tag{5}
\end{aligned}$$

É importante também encontrar o valor total que os nativos de A recebem pelo aluguel de seus terrenos ($\beta_A d_A$)

$$\beta_A d_A = \frac{[kP^2 + f]\varphi + (1-\varphi)T\beta_A - \varphi(W_0 + qP^{1/g})P_A}{P_A} \tag{6}$$

D REESCREVENDO A UTILIDADE DOS NATIVOS DE “A”

Reescrever a função de utilidade é importante para futuras derivações. Como veremos, a cara da função de utilidade muda muito à medida em que as variáveis são reduzidas a seus componentes.

Aplicando (4) na função de utilidade do nativo de A (U_A):

$$\begin{aligned}
 U_A &= \theta \ln \left\{ W_0 + qP^{1/g} + \beta_A d_A - \frac{(1-\theta-\varphi)(W_0 + qP^{1/g} + \beta_A d_A)P_A + [kP^2 + f]\theta}{(1-\varphi)P_A} \right\} + \dots \\
 &\quad + \varphi \ln \left\{ \frac{T}{P_A} - d_A \right\} + (1-\theta-\varphi) \ln \left\{ \frac{(1-\theta-\varphi)(W_0 + qP^{1/g} + \beta_A d_A)P_A + [kP^2 + f]\theta}{(1-\varphi)} - kP^2 - f \right\} \\
 &\Rightarrow \\
 U_A &= \theta \ln \left\{ \frac{\theta}{(1-\varphi)P_A} [(W_0 + qP^{1/g} + \beta_A d_A)P_A - [kP^2 + f]] \right\} + \dots \\
 &\quad + \varphi \ln \left\{ \frac{T}{P_A} - d_A \right\} + (1-\theta-\varphi) \ln \left\{ \frac{(1-\theta-\varphi)}{(1-\varphi)} [(W_0 + qP^{1/g} + \beta_A d_A)P_A - [kP^2 + f]] \right\} \\
 &\Rightarrow \\
 U_A &= (1-\varphi) \ln \left\{ (W_0 + qP^{1/g} + \beta_A d_A)P_A - kP^2 - f \right\} + \varphi \ln \left\{ \frac{T}{P_A} - d_A \right\} + \theta \ln \left\{ \frac{\theta}{(1-\varphi)P_A} \right\} + \dots \\
 &\quad + (1-\theta-\varphi) \ln \left\{ \frac{(1-\theta-\varphi)}{(1-\varphi)} \right\}
 \end{aligned}$$

Aplicando (5) e (6) na função de utilidade do nativo de A (U_A):

$$\begin{aligned}
 U_A &= (1-\varphi) \ln \left\{ W_0 + qP^{1/g} + \frac{[kP^2 + f]\varphi + (1-\varphi)T\beta_A - \varphi(W_0 + qP^{1/g})P_A}{P_A} - kP^2 - f \right\} + \dots \\
 &\quad + \theta \ln \left\{ \frac{\theta}{(1-\varphi)P_A} \right\} + (1-\theta-\varphi) \ln \left\{ \frac{(1-\theta-\varphi)}{(1-\varphi)} \right\} + \dots \\
 &\quad + \varphi \ln \left\{ \frac{T}{P_A} - \frac{[kP^2 + f]\varphi + (1-\varphi)T\beta_A - \varphi(W_0 + qP^{1/g})P_A}{P_A\beta_A} \right\} \\
 &\Rightarrow \\
 U_A &= (1-\varphi) \ln \left\{ \frac{(1-\varphi)(W_0 + qP^{1/g})P_A + (1-\varphi)T\beta_A - (1-\varphi)[kP^2 + f]}{P_A} \right\} + \theta \ln \left\{ \frac{\theta}{(1-\varphi)P_A} \right\} + \dots \\
 &\quad + (1-\theta-\varphi) \ln \left\{ \frac{(1-\theta-\varphi)}{(1-\varphi)} \right\} + \varphi \ln \left\{ \frac{\varphi(W_0 + qP^{1/g})P_A + \varphi T\beta_A - [kP^2 + f]}{P_A\beta_A} \right\} \\
 &\Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$U_A = (1 - \varphi) \ln \left\{ \frac{(1 - \varphi)}{P_A} [(W_0 + qP^{1/g})P_A + T\beta_A - [kP^2 + f]] \right\} + \theta \ln \left\{ \frac{\theta}{(1 - \varphi)P_A} \right\} + \dots$$

$$+ (1 - \theta - \varphi) \ln \left\{ \frac{(1 - \theta - \varphi)}{(1 - \varphi)} \right\} + \varphi \ln \left\{ \frac{\varphi}{P_A \beta_A} [(W_0 + qP^{1/g})P_A + T\beta_A - [kP^2 + f]] \right\}$$

\Rightarrow

$$U_A = \ln \{ (W_0 + qP^{1/g})P_A + T\beta_A - [kP^2 + f] \} - \varphi \ln \beta_A - (1 + \theta) \ln P_A + \dots$$

$$+ \varphi \ln \varphi + \theta \ln \theta + (1 - \theta - \varphi) \ln (1 - \theta - \varphi) \quad (7)$$

O próximo passo na decomposição da função U_A depende da variável β_A , que será encontrada na próxima seção.

E DEMANDA POR TERRENOS E VALOR DOS ALUGUÉIS NA CIDADE “A”

O preço do aluguel é aquele que gera o equilíbrio no mercado de terrenos. Já conhecemos o valor da oferta de terrenos (d_A) como função apenas de β_A e parâmetros. É preciso encontrar o valor da demanda por terrenos (d_M).

$$\begin{aligned}
 U_M &= \theta \ln \left\{ W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} - \beta_A d_M \right\} + \varphi \ln \{d_M\} + (1 - \theta - \varphi) \ln \{ \alpha_A T - kP^2 - f \} \\
 \frac{\partial U_M}{\partial d_M} &: \frac{-\theta \beta_A}{W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} - \beta_A d_M} + \frac{\varphi}{d_M} = 0 \\
 \Rightarrow \\
 \theta \beta_A d_M &= \varphi \left(W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} - \beta_A d_M \right) \\
 \Rightarrow \\
 (\varphi + \theta) \beta_A d_M &= \varphi \left(W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} \right) \\
 \Rightarrow \\
 d_M &= \frac{\varphi \left(W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} \right)}{(\varphi + \theta) \beta_A} \tag{8}
 \end{aligned}$$

Para encontrar o equilíbrio de mercado vamos utilizar a restrição $d_M P_M = d_A P_A$. Esta restrição nos informa simplesmente que a demanda por terrenos ($d_M P_M$) é igual à oferta de terrenos ($d_A P_A$).

$$\begin{cases}
 d_A = \frac{[kP^2 + f] \varphi \theta + (1 - \varphi) T \theta \beta_A - \theta \varphi (W_0 + qP^{1/g}) P_A}{\theta \beta_A P_A} \\
 d_M P_M = d_A P_A \\
 d_M = \frac{\varphi \left(W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} \right)}{(\varphi + \theta) \beta_A} \\
 \frac{\varphi \left(W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} \right) P_M}{(\varphi + \theta) \beta_A} = \frac{[kP^2 + f] \varphi + (1 - \varphi) T \beta_A - \varphi (W_0 + qP^{1/g}) P_A}{\beta_A}
 \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned}
\varphi \left(W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} \right) P_M &= [kP^2 + f] \varphi(\varphi + \theta) + (1 - \varphi)(\varphi + \theta) T \beta_A + \dots \\
&\quad - (\varphi + \theta) \varphi (W_0 + qP^{1/g}) P_A \\
\Rightarrow \\
(W_0 + qP^{1/g}) [(\varphi + \theta) \varphi P_A + \varphi P_M] &+ (\beta_B - \alpha_B) \frac{TP_M \varphi}{P_B} - [kP^2 + f] \varphi(\varphi + \theta) = (1 - \varphi)(\varphi + \theta) T \beta_A \\
\Rightarrow \\
\beta_A &= \frac{(W_0 + qP^{1/g}) [(\varphi + \theta) \varphi P_A + \varphi P_M] + (\beta_B - \alpha_B) \frac{TP_M \varphi}{P_B} - [kP^2 + f] \varphi(\varphi + \theta)}{(1 - \varphi)(\varphi + \theta) T} \quad (9)
\end{aligned}$$

F REESCREVENDO A ALÍQUOTA DO IMPOSTO NA CIDADE “A”

Podemos reescrever α_A , primeiro inserindo(6):

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \\ \alpha_A &= \frac{(1-\theta-\varphi)((W_0 + qP^{1/g})P_A + [kP^2 + f])\varphi + (1-\varphi)T\beta_A - \varphi(W_0 + qP^{1/g})P_A + \theta[kP^2 + f]}{(1-\varphi)T} \\ &\Rightarrow \\ \alpha_A &= \frac{(1-\theta-\varphi)((1-\varphi)T\beta_A + (1-\varphi)(W_0 + qP^{1/g})P_A) + (\theta + \varphi - \theta\varphi - \varphi\varphi)[kP^2 + f]}{(1-\varphi)T} \\ &\Rightarrow \\ \alpha_A &= \frac{(1-\theta-\varphi)((1-\varphi)(W_0 + qP^{1/g})P_A) + (\varphi + \theta)(1-\varphi)[kP^2 + f]}{(1-\varphi)T} + \dots \\ &\qquad\qquad\qquad + \frac{(1-\theta-\varphi)(1-\varphi)T\beta_A}{(1-\varphi)T} \end{aligned}$$

Depois inserindo (9):

$$\begin{aligned} \alpha_A &= \frac{(1-\theta-\varphi)((1-\varphi)(\varphi + \theta)(W_0 + qP^{1/g})P_A) + (\varphi + \theta)(1-\varphi)(\varphi + \theta)[kP^2 + f]}{(\varphi + \theta)(1-\varphi)T} + \dots \\ &+ \frac{(1-\theta-\varphi) \left[(W_0 + qP^{1/g})((\varphi + \theta)\varphi P_A + \varphi P_M) + (\beta_B - \alpha_B) \frac{TP_M \varphi}{P_B} - [kP^2 + f]\varphi(\varphi + \theta) \right]}{(\varphi + \theta)(1-\varphi)T} \\ &\Rightarrow \\ \alpha_A &= \frac{(1-\theta-\varphi) \left[(W_0 + qP^{1/g})((\varphi + \theta)P_A + \varphi P_M) + (\beta_B - \alpha_B) \frac{TP_M \varphi}{P_B} \right] + \theta(\varphi + \theta)[kP^2 + f]}{(\varphi + \theta)(1-\varphi)T} \quad (10) \end{aligned}$$

G QUANDO O PREÇO DO ALUGUÉL É SUPERIOR À ALÍQUOTA DO IMPOSTO

Este é um problema importante por dois motivos. Primeiro, caso $\beta_A > \alpha_A$, temos que a alíquota do imposto sobre a terra é ótima, no sentido descrito na subseção 2.4.2. Em segundo lugar, caso $\alpha_A > \beta_A$, temos um colapso do modelo, pois não há a este preço interesse em alugar terrenos. Mais do que isso, quando $\alpha_A > \beta_A$ não há vantagem em possuir terras. Neste caso, migrantes e nativos se tornam iguais. Temos que descobrir portanto se $\beta_A - \alpha_A > 0$.

$$\begin{aligned} \beta_A - \alpha_A &= \frac{(W_0 + qP^{1/g})[(\varphi + \theta)\varphi P_A + \varphi P_M] + (\beta_B - \alpha_B)\frac{TP_M \varphi}{P_B} - [kP^2 + f]\varphi(\varphi + \theta)}{(1 - \varphi)(\varphi + \theta)T} + \\ &\quad - \frac{(1 - \theta - \varphi)(W_0 + qP^{1/g})\left[[(\varphi + \theta)P_A + \varphi P_M] + (\beta_B - \alpha_B)\frac{TP_M \varphi}{P_B}\right] + (\theta)(\varphi + \theta)[kP^2 + f]}{(\varphi + \theta)(1 - \varphi)T} \\ \Rightarrow \\ \beta_A - \alpha_A &= \frac{(W_0 + qP^{1/g})[(\varphi + \theta)[(-1 + \theta + 2\varphi)P_A + \varphi P_M]] + (\varphi + \theta)(\beta_B - \alpha_B)\frac{TP_M \varphi}{P_B}}{(1 - \varphi)(\varphi + \theta)T} + \\ &\quad - \frac{[kP^2 + f](\varphi + \theta)^2}{(1 - \varphi)(\varphi + \theta)T} \\ \Rightarrow \\ \beta_A - \alpha_A &= \frac{(W_0 + qP^{1/g})[(-1 + \theta + 2\varphi)P_A + \varphi P_M] + (\beta_B - \alpha_B)\frac{TP_M \varphi}{P_B} - [kP^2 + f](\varphi + \theta)}{(1 - \varphi)T} \end{aligned} \quad (11)$$

Para que parâmetros $\beta_A > \alpha_A$? Considere um caso simples, em que não há migração nem transferências f . Considere ainda $g = 2$.

$$\begin{aligned} &(-1 + \theta + 2\varphi)(W_0 + qP_A^{1/2})P_A - kP_A^2(\varphi + \theta) > 0 \\ \Rightarrow \\ &(-1 + \theta + 2\varphi)(W_0 + qP_A^{1/2}) - kP_A(\varphi + \theta) > 0 \\ \Rightarrow \\ \sqrt{P_A^*} &= \frac{(2\varphi + \theta - 1)q}{2(\varphi + \theta)k} + \frac{\sqrt{(2\varphi + \theta - 1)^2 q^2 + 4(\varphi + \theta)(2\varphi + \theta - 1)qk}}{2(\varphi + \theta)k} \\ \Rightarrow \\ P_A^* &= \left(\frac{(2\varphi + \theta - 1)q}{2(\varphi + \theta)k} + \frac{\sqrt{(2\varphi + \theta - 1)^2 q^2 + 4(\varphi + \theta)(2\varphi + \theta - 1)qk}}{2(\varphi + \theta)k} \right)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Qual o significado de P_A^* ? Se a população $P_A > P_A^*$, $\alpha_A > \beta_A$. Uma condição suficiente para que P_A^* seja positiva é:

$$2\varphi + \theta - 1 > 0$$

\Rightarrow

$$\varphi > \frac{1 - \theta}{2} \quad (13)$$

O que ocorre com $\beta_A - \alpha_A$ à medida que a população migrante aumenta (considerando novamente $g = 2$)?

$$\beta_A - \alpha_A = \frac{(W_0 + qP^{1/2})[(-1 + \theta + 2\varphi)P_A + \varphi P_M] + (\beta_B - \alpha_B) \frac{TP_M \varphi}{P_B} - [kP^2 + f](\varphi + \theta)}{(1 - \varphi)T}$$

$$\frac{\partial(\beta_A - \alpha_A)}{\partial P_M} = \left[[W_0 + q\sqrt{P_A + P_M}] \varphi + \frac{q}{2\sqrt{P_A + P_M}} [(-1 + \theta + 2\varphi)P_A + \varphi P_M] \right] \frac{1}{(1 - \varphi)T} +$$

$$+ \left[(\beta_B - \alpha_B) \frac{T\varphi}{P_B} - 2k(P_A + P_M)(\varphi + \theta) \right] \frac{1}{(1 - \varphi)T}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\partial(\beta_A - \alpha_A)}{\partial P_M} = \frac{\left[[W_0 + q\sqrt{P_A + P_M}] \varphi + \frac{q}{2\sqrt{P_A + P_M}} [(-1 + \theta + 2\varphi)P_A + \varphi P_M] \right]}{(1 - \varphi)T} +$$

$$\frac{(\beta_B - \alpha_B) \frac{T\varphi}{P_B} - 2k(P_A + P_M)(\varphi + \theta)}{(1 - \varphi)T}$$

Uma condição suficiente para que esta equação acima seja positiva é que:

$$\left[W_0 + q\sqrt{P_A + P_M} \right] \varphi + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T\varphi}{P_B} - 2k(P_A + P_M)(\varphi + \theta) = 0$$

\Rightarrow

$$\sqrt{P_A + P_M} = \frac{q\varphi}{4k(\varphi + \theta)} \pm \sqrt{\frac{(q\varphi)^2 + 8k(\varphi + \theta)(\beta_B - \alpha_B) \left(\frac{T\varphi}{P_B} + W_0\varphi \right)}{4k(\varphi + \theta)}}$$

Como uma destas raízes é positiva, existem valores P_M positivos tais que $\frac{\partial(\beta_A - \alpha_A)}{\partial P_M} > 0$.

Ou seja, para certos valores de P_M , o aumento de P_M provoca aumento da desigualdade social.

Pode-se mostrar também que quando $P_M = 0$, $\frac{\partial(\beta_A - \alpha_A)}{\partial P_M} > 0$. Supondo $P_M = 0$, vamos ver se existe uma solução tal que $\frac{\partial(\beta_A - \alpha_A)}{\partial P_M} > 0$.

$$\frac{\partial(\beta_A - \alpha_A)}{\partial P_M} = \frac{[W_0 + q\sqrt{P_A}]\varphi + \frac{q}{2}(-1 + \theta + 2\varphi)\sqrt{P_A} + (\beta_B - \alpha_B)\frac{T\varphi}{P_B} - 2k(P_A)(\varphi + \theta)}{(1 - \varphi)T} > 0$$

\Rightarrow

$$\frac{\partial(\beta_A - \alpha_A)}{\partial P_M} = -2k(P_A)(\varphi + \theta) + \frac{q}{2}(-1 + \theta + 4\varphi)\sqrt{P_A} + (\beta_B - \alpha_B)\frac{T\varphi}{P_B} + W_0\varphi > 0$$

\Rightarrow

$$\sqrt{P_A} = \frac{q(-1 + \theta + 4\varphi)}{8k(\varphi + \theta)} \pm \sqrt{\frac{q^2(-1 + \theta + 4\varphi)^2 + 32\left[(\beta_B - \alpha_B)\frac{T\varphi}{P_B} + W_0\varphi\right]k(P_A)(\varphi + \theta)}{8k(\varphi + \theta)}}$$

Este resultado é, claramente, positivo. Ou seja, ao menos para pequenas populações migrantes, a desigualdade é crescente com o número de migrantes.

H POPULAÇÃO ÓTIMA SEM MIGRAÇÃO

Esta seção apenas mostra que a população ótima de uma cidade é positiva, ou seja, que não há incentivos para a total descentralização dentro do universo do modelo.

Inserindo a equação (9) em (7), supondo $g = 2$, e ignorando P_M e f (ou seja, no considerando a comunidade A isolada):

$$\begin{aligned}
 U_A &= \ln \left\{ (W_0 + qP_A^{1/2})P_A + \frac{(W_0 + qP_A^{1/2})[\varphi P_A] + -[kP_A^2]\varphi}{(1-\varphi)} - [kP^2 + f] \right\} + \\
 &- \varphi \ln \left\{ \frac{(W_0 + qP_A^{1/2})[\varphi P_A] + -[kP_A^2]\varphi}{(1-\varphi)T} \right\} - (1+\theta) \ln P_A + (1-\theta-\varphi) \ln [1-\varphi] + \varphi \ln \varphi + \dots \\
 &\qquad\qquad\qquad + \theta \ln \theta + (1-\theta-\varphi) \ln \left\{ \frac{(1-\theta-\varphi)}{(1-\varphi)} \right\} \\
 \Rightarrow \\
 U_A &= \ln \left\{ \frac{(W_0 + qP_A^{1/2})P_A - [kP_A^2]}{(1-\varphi)} \right\} - \varphi \ln \left\{ \frac{(W_0 + qP_A^{1/2})\varphi P_A - [kP_A^2]\varphi}{(1-\varphi)} \right\} + \\
 &\quad - (1+\theta) \ln P_A + (1-\theta-\varphi) \ln [1-\varphi] + \varphi \ln \varphi + \theta \ln \theta + (1-\theta-\varphi) \ln \left\{ \frac{(1-\theta-\varphi)}{(1-\varphi)} \right\} \\
 \Rightarrow \\
 U_A &= (1-\varphi) \ln \left\{ (W_0 + qP_A^{1/2})P_A - [kP_A^2] \right\} - (1-\varphi) \ln (1-\varphi) - \varphi \ln \frac{\varphi}{(1-\varphi)} - (1+\theta) \ln P_A + \\
 &\quad + (1-\theta-\varphi) \ln [1-\varphi] + \varphi \ln \varphi + \theta \ln \theta + (1-\theta-\varphi) \ln \left\{ \frac{(1-\theta-\varphi)}{(1-\varphi)} \right\}
 \end{aligned}$$

Agora é preciso achar a relação entre população inicial e utilidade dos nativos de “A”:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_A}{\partial P_A} &: \frac{(1-\varphi) \left[(W_0 + qP_A^{1/2}) - 2kP_A + \frac{q}{2} P_A^{1/2} \right]}{(W_0 + qP_A^{1/2})P_A - [kP_A^2]} - \frac{(1+\theta)}{P_A} = 0 \\
 \Rightarrow \\
 (1-\varphi) \left[(W_0 + qP_A^{1/2}) - 2kP_A + \frac{q}{2} P_A^{1/2} \right] P_A &= (1+\theta) \left[(W_0 + qP_A^{1/2})P_A - [kP_A^2] \right] \\
 \Rightarrow \\
 (1-\varphi) \left[(W_0 + qP_A^{1/2}) - 2kP_A + \frac{q}{2} P_A^{1/2} \right] &= (1+\theta) \left[(W_0 + qP_A^{1/2}) - [kP_A] \right] \\
 \Rightarrow \\
 W_0(\theta + \varphi) + (1-\theta-2\varphi)kP_A + qP_A^{1/2} \left(\frac{1}{2} + \theta + \frac{\varphi}{2} \right) &= 0 \\
 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{P_A} = -\frac{(1/2 + \theta + \varphi/2)q}{(1 - \theta - 2\varphi)k} \pm \frac{\sqrt{(1/2 + \theta + \varphi/2)^2 q^2 - 4(1 - \theta - 2\varphi)kW_0(\theta + \varphi)}}{(1 - \theta - 2\varphi)k}$$

É fácil ver que não existirá uma população ótima positiva se $(1 - \theta - 2\varphi) > 0$. Então temos que $\varphi > \frac{1 - \theta}{2} \Leftrightarrow (1 - \theta - 2\varphi) < 0$. Ora, esta hipótese é a mesma que garantia que $\beta_A > \alpha_A$ ocorria para populações positivas. Temos então que esta condição é central em nosso modelo. Como $1 - \theta = 1 - \theta - \varphi + \varphi$, temos que $1 - \theta$ é a soma dos coeficientes da importância de terrenos e bens públicos para o consumidor. $\varphi > \frac{1 - \theta}{2}$ significa que a importância dos terrenos têm de ser maior do que a importância dos bens públicos, para que o modelo funcione adequadamente.

$$P_A^l = \left(\frac{(1/2 + \theta + \varphi/2)q}{(1 - \theta - 2\varphi)k} + \frac{\sqrt{(1/2 + \theta + \varphi/2)^2 q^2 - 4(1 - \theta - 2\varphi)kW_0(\theta + \varphi)}}{(1 - \theta - 2\varphi)k} \right)^2 \quad (16)$$

P_A^l é a população ótima da cidade sem imigrantes. Entretanto, como sabemos, a população inicial é uma variável exógena, não precisamos nos preocupar com ela. Nossa análise apenas serviu para mostrar que existe uma força de atração no modelo.

I DEMANDA POR TERRENOS E ALÍQUOTA DO IMPOSTO NA CIDADE “B”

Já foram tratadas diversas questões relacionadas à cidade A. Chegou a hora de cuidar das cidades minguantes do modelo.

Os moradores de uma cidade B se dividem em dois tipos: os que migram e os que não migram para A. Os que migram alugam suas terras para os que não migram. É suposto também que apenas os que não migram votam; isto por que os migrantes consideram seu voto inútil, ou muito custoso dada a necessidade de viajar para efetuar-lo.

Como os migrantes irão alugar a totalidade das terras que possuíam, sabemos que a oferta de terrenos será igual a: $\frac{T}{P_B} \frac{P_M}{N}$. Precisamos descobrir qual a demanda por terrenos.

$$\begin{aligned}
 U_B &= \theta \ln \left\{ W_0 + q\Pi^{1/g} - \beta_B d_B - \alpha_B \left(\frac{T}{P_B} + d_B \right) \right\} + \varphi \ln \left\{ \frac{T}{P_B} + d_B \right\} + \dots \\
 &\quad + (1 - \theta - \varphi) \ln \{ \alpha_B T - k\Pi^2 - f/N \} \\
 \frac{\partial U_B}{\partial d_B} &: - \frac{\theta(\beta_B + \alpha_B)}{W_0 + q\Pi^{1/g} - \beta_B d_B - \alpha_B \left(\frac{T}{P_B} + d_B \right)} + \frac{\varphi}{\frac{T}{P_B} + d_B} = 0 \\
 \Rightarrow \\
 \theta(\beta_B + \alpha_B) \left(\frac{T}{P_B} + d_B \right) &= \varphi \left[W_0 + q\Pi^{1/g} - \beta_B d_B - \alpha_B \left(\frac{T}{P_B} + d_B \right) \right] \\
 \Rightarrow \\
 [(\theta + \varphi)(\beta_B + \alpha_B)] d_B &= W_0 \varphi + q\varphi \Pi^{1/g} - [\theta\beta_B + \alpha_B(\theta + \varphi)] \frac{T}{P_B} \\
 \Rightarrow \\
 d_B &= \frac{W_0 \varphi + q\varphi \Pi^{1/g} - [\theta\beta_B + \alpha_B(\theta + \varphi)] \frac{T}{P_B}}{[(\theta + \varphi)(\beta_B + \alpha_B)]} \tag{17}
 \end{aligned}$$

Ao mesmo tempo, os moradores de B precisam definir qual o valor da alíquota do imposto. Como no Anexo C, estas decisões são simultâneas.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_B}{\partial \alpha_B} &: - \frac{\left(\frac{T}{P_B} + d_B \right) \theta}{W_0 + q\Pi^{1/g} - \beta_B d_B - \alpha_B \left(\frac{T}{P_B} + d_B \right)} + \frac{(1 - \theta - \varphi)T}{\alpha_B T - k\Pi^2 - f/N} = 0 \\
 \Rightarrow \\
 \left(\frac{T}{P_B} + d_B \right) \theta [\alpha_B T - k\Pi^2 - f/N] &= (1 - \theta - \varphi) T \left[W_0 + q\Pi^{1/g} - \beta_B d_B - \alpha_B \left(\frac{T}{P_B} + d_B \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{T}{P_B} + d_B\right)(1-\varphi)\alpha_B T &= \theta\left(\frac{T}{P_B} + d_B\right)\left[k\Pi^2 - f/N\right] + (1-\theta-\varphi)T\left[W_0 + q\Pi^{1/g} - \beta_B d_B\right] \\
\Rightarrow \\
\alpha_B &= \frac{\theta\left(\frac{T}{P_B} + d_B\right)\left[k\Pi^2 - f/N\right] + (1-\theta-\varphi)T\left[W_0 + q\Pi^{1/g} - \beta_B d_B\right]}{\left(\frac{T}{P_B} + d_B\right)(1-\varphi)T} \quad (18)
\end{aligned}$$

Sem migração:

$$\alpha_B = \frac{\theta\left[kP_B^2 - f/N\right] + (1-\theta-\varphi)P_B\left[W_0 + qP_B^{1/g}\right]}{(1-\varphi)T}$$

J QUANTIDADE DE TERRENO ALUGADO PELOS NÃO-MIGRANTES DE UMA CIDADE DO TIPO “B”

O equilíbrio do mercado de terrenos da cidade “B” é definido por:

$$\begin{cases} d_B = \frac{W_0\varphi + q\varphi\Pi^{1/g} - [\theta\beta_B + \alpha_B(\theta + \varphi)]\frac{T}{P_B}}{[(\theta + \varphi)(\beta_B + \alpha_B)]} \\ d_B\Pi = \frac{T}{P_B} \frac{P_M}{N} \end{cases}$$

Pode-se dispensar a primeira equação do sistema, escrevendo simplesmente:

$$d_B = \left(\frac{TP_M}{\Pi NP_B} \right) \quad (19)$$

Outro resultado interessante é:

$$\begin{aligned} \frac{T}{P_B} + d_B &= \frac{T}{P_B} + \left(\frac{TP_M}{\Pi NP_B} \right) = \frac{T}{P_B} \left(\frac{N\Pi + P_M}{N\Pi} \right) = \frac{N\Pi T + TP_M}{N\Pi P_B} \\ \Rightarrow \\ \frac{T}{P_B} + d_B &= \frac{T}{\Pi} \end{aligned} \quad (20)$$

Com facilidade, pode-se reescrever (18) como:

$$\begin{aligned} \alpha_B &= \frac{\theta \left(\frac{T}{\Pi} \right) [k\Pi^2 - f/N] + (1 - \theta - \varphi)T [W_0 + q\Pi^{1/g} - \beta_B d_B]}{\frac{T}{\Pi} (1 - \varphi)T} \\ \Rightarrow \\ \alpha_B &= \frac{\theta [k\Pi^2 - f/N] + (1 - \theta - \varphi)\Pi \left[(W_0 + q\Pi^{1/g}) - \beta_B \frac{TP_M}{\Pi NP_B} \right]}{(1 - \varphi)T} \\ \Rightarrow \\ \alpha_B &= \frac{NP_B [k\Pi^2 - f/N] \theta + (1 - \theta - \varphi) [(W_0 + q\Pi^{1/g}) N\Pi P_B - \beta_B TP_M]}{(1 - \varphi)T NP_B} \end{aligned} \quad (21)$$

K ENCONTRANDO O VALOR DOS ALUGUÉIS NAS CIDADES DO TIPO “B”

A partir de (17) e (19), podemos encontrar uma equação para β_B :

$$d_B = \frac{W_0\varphi + q\varphi\Pi^{1/s} - [\theta\beta_B + \alpha_B(\theta + \varphi)]\frac{T}{P_B}}{[(\theta + \varphi)(\beta_B + \alpha_B)]}$$

$$\Rightarrow$$

$$[(\theta + \varphi)(\beta_B + \alpha_B)]\frac{TP_M}{\Pi NP_B} = W_0\varphi + q\varphi\Pi^{1/s} - [\theta\beta_B + \alpha_B(\theta + \varphi)]\frac{T}{P_B}$$

$$\left(\frac{(\theta + \varphi)TP_M + \theta\Pi NT}{\Pi NP_B}\right)\beta_B = W_0\varphi + q\varphi\Pi^{1/s} - \left(\frac{T\Pi N + TP_M}{\Pi NP_B}\right)(\theta + \varphi)\alpha_B$$

$$\left(\frac{(\theta + \varphi)TP_M + \theta\Pi NT}{\Pi NP_B}\right)\beta_B = W_0\varphi + q\varphi\Pi^{1/s} - \frac{T}{\Pi}(\theta + \varphi)\alpha_B$$

$$\Rightarrow$$

$$\beta_B = \frac{(W_0 + q\Pi^{1/s})\varphi\Pi NP_B - TNP_B(\theta + \varphi)\alpha_B}{(\theta + \varphi)TP_M + \theta\Pi NT} \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_B = \frac{(W_0 + q\Pi^{1/s})\varphi\Pi NP_B - TNP_B(\theta + \varphi)\alpha_B}{(\theta + \varphi)TP_M + \theta\Pi NT} \\ \alpha_B = \frac{NP_B[k\Pi^2 - f/N]\theta + (1 - \theta - \varphi)[(W_0 + q\Pi^{1/s})N\Pi P_B - \beta_B TP_M]}{(1 - \varphi)TNP_B} \end{array} \right.$$

$$\beta_B = \frac{(W_0 + q\Pi^{1/s})\varphi\Pi NP_B}{(\theta + \varphi)TP_M + \theta\Pi NT} - \left(\frac{TNP_B(\theta + \varphi)}{(\theta + \varphi)TP_M + \theta\Pi NT}\right)\alpha_B$$

$$\Rightarrow$$

$$\beta_B = \frac{(W_0 + q\Pi^{1/s})\varphi\Pi NP_B(1 - \varphi)}{[(\theta + \varphi)TP_M + \theta\Pi NT](1 - \varphi)} + \frac{\beta_B TP_M(1 - \theta - \varphi)(\theta + \varphi)}{[(\theta + \varphi)TP_M + \theta\Pi NT](1 - \varphi)}$$

$$- \frac{(\theta + \varphi)[NP_B[k\Pi^2 - f/N]\theta + (1 - \theta - \varphi)[(W_0 + q\Pi^{1/s})N\Pi P_B]}{[(\theta + \varphi)TP_M + \theta\Pi NT](1 - \varphi)}$$

$$\Rightarrow$$

$$\left[\frac{[(\theta + \varphi)TP_M + \theta\Pi NT](1 - \varphi) - TP_M(1 - \theta - \varphi)(\theta + \varphi)}{[(\theta + \varphi)TP_M + \theta\Pi NT](1 - \varphi)}\right]\beta_B =$$

$$= \frac{(W_0 + q\Pi^{1/s})\varphi\Pi NP_B(1 - \varphi)}{[(\theta + \varphi)TP_M + \theta\Pi NT](1 - \varphi)} - \frac{(\theta + \varphi)[NP_B[k\Pi^2 - f/N]\theta + (1 - \theta - \varphi)[(W_0 + q\Pi^{1/s})N\Pi P_B]}{[(\theta + \varphi)TP_M + \theta\Pi NT](1 - \varphi)}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{[(\theta + \varphi)TP_M + \theta\Pi NT](1 - \varphi) - TP_M(1 - \theta - \varphi)(\theta + \varphi)}{[(\theta + \varphi)TP_M + \theta\Pi NT](1 - \varphi)} \right] \beta_B = \\
& = \frac{(W_0 + q\Pi^{1/g})\varphi\Pi NP_B(1 - \varphi) - (\theta + \varphi)[NP_B[k\Pi^2 - f/N]\theta + (1 - \theta - \varphi)(W_0 + q\Pi^{1/g})\Pi NP_B]}{[(\theta + \varphi)TP_M + \theta\Pi NT](1 - \varphi)} \\
& \Rightarrow \\
& [(\theta + \varphi)\theta TP_M + (1 - \varphi)\theta\Pi NT]\beta_B = \\
& = (W_0 + q\Pi^{1/g})\varphi\Pi NP_B(1 - \varphi) - (\theta + \varphi)[\theta NP_B[k\Pi^2 - f/N] + (1 - \theta - \varphi)(W_0 + q\Pi^{1/g})\Pi NP_B] \\
& \dots\dots\dots \\
& [(\theta + \varphi)\theta TP_M + (1 - \varphi)\theta\Pi NT]\beta_B = \\
& = (W_0 + q\Pi^{1/g})\Pi NP_B[(1 - \varphi)\varphi - (\theta + \varphi)(1 - \theta - \varphi)] - (\theta + \varphi)\theta[NP_B[k\Pi^2 - f/N]] \\
& \Rightarrow \\
& \beta_B = \frac{(W_0 + q\Pi^{1/g})\Pi NP_B[\varphi - (1 - \theta - \varphi)\theta] - (\theta + \varphi)\theta NP_B[k\Pi^2 - f/N]}{[(\theta + \varphi)\theta TP_M + (1 - \varphi)\theta\Pi NT]} \\
& \Rightarrow \\
& \beta_B = \frac{(W_0 + q\Pi^{1/g})\Pi NP_B[\varphi - (1 - \theta - \varphi)\theta] - (\theta + \varphi)NP_B[k\Pi^2 - f/N]}{T[(\theta + \varphi)P_M + (1 - \varphi)\Pi N]} \tag{23}
\end{aligned}$$

É interessante notar que, caso não haja migração,

$$\begin{aligned}
& \beta_B = \frac{[\varphi - (1 - \theta - \varphi)\theta]NP_B P_B (W_0 + q\Pi^{1/g}) - (\theta + \varphi)NP_B[k\Pi^2 - f/N]}{(1 - \varphi)\Gamma NP_B} \\
& \Rightarrow \\
& \beta_B = \frac{[\varphi - (1 - \theta - \varphi)\theta](W_0 + q\Pi^{1/g})P_B - (\theta + \varphi)[k\Pi^2 - f/N]}{(1 - \varphi)\Gamma} \tag{24}
\end{aligned}$$

Este resultado é bastante semelhante ao da cidade A, onde sem migração o valor dos aluguéis seria dado pela seguinte equação (gerada a partir da equação (9)):

$$\beta_A = \frac{\varphi(W_0 + qP^{1/g})P_A - \varphi[kP^2 - f/N]}{(1 - \varphi)\Gamma}$$

L MAIS SOBRE ALUGUÉIS E ALÍQUOTA NAS CIDADES “B”

$$\begin{aligned}
\alpha_B &= \frac{NP_B [k\Pi^2 - f/N] \theta + (1 - \theta - \varphi) [(W_0 + q\Pi^{1/s}) N\Pi P_B]}{(1 - \varphi) TNP_B} - \frac{\beta_B P_M}{(1 - \varphi) TNP_B} \\
\Rightarrow \\
\alpha_B &= \frac{[NP_B [k\Pi^2 - f/N] \theta + (1 - \theta - \varphi) [(W_0 + q\Pi^{1/s}) N\Pi P_B] \mathbb{I}[(1 - \varphi)\Pi N + P_M (\theta + \varphi)]]}{[(1 - \varphi)\Pi N + P_M (\theta + \varphi)](1 - \varphi) TNP_B} \\
&\quad - \frac{[\varphi - (1 - \theta - \varphi)\theta] N\Pi P_B (W_0 + q\Pi^{1/s}) P_M}{[(1 - \varphi)\Pi N + P_M (\theta + \varphi)](1 - \varphi) TNP_B} \\
&\quad + \frac{(\theta + \varphi) NP_B \mathbb{I}[k\Pi^2 + f] P_M}{[(1 - \varphi)\Pi N + P_M (\theta + \varphi)](1 - \varphi) TNP_B} \\
\Rightarrow \\
\alpha_B &= \frac{[NP_B [k\Pi^2 + f] + \mathbb{I}[(1 - \varphi)\theta \Pi N + (\theta + \varphi)(1 - \theta) P_M]]}{[(1 - \varphi)\Pi N + P_M (\theta + \varphi)](1 - \varphi) TNP_B} \\
&\quad + \frac{[(W_0 + q\Pi^{1/s}) N\Pi P_B \mathbb{I}[(1 - \varphi)(1 - \theta - \varphi)\Pi N + (\theta + \varphi)(1 - \theta - \varphi) P_M - [\varphi - (1 - \theta - \varphi)\theta] P_M]]}{[(1 - \varphi)\Pi N + P_M (\theta + \varphi)](1 - \varphi) TNP_B} \\
\Rightarrow \\
\alpha_B &= \frac{[k\Pi^2 + f] \mathbb{I}[(1 - \varphi)\theta \Pi N + (\theta + \varphi)(1 - \theta) P_M]}{[(1 - \varphi)\Pi N + P_M (\theta + \varphi)](1 - \varphi) T} \\
&\quad + \frac{[(W_0 + q\Pi^{1/s}) \Pi \mathbb{I}[1 - \theta\varphi - \varphi\varphi] P_B - \theta \Pi N + \varphi(\theta + \varphi) P_M]}{[(1 - \varphi)\Pi N + P_M (\theta + \varphi)](1 - \varphi) T}
\end{aligned} \tag{25}$$

É importante encontrar o valor de $\alpha_B - \beta_B$ para calcular a utilidade dos nativos de A.

$$\begin{aligned}
\beta_B - \alpha_B &= \frac{(2\varphi + \theta - 1) N\Pi P_B (W_0 + q\Pi^{1/s}) - (\theta + \varphi) NP_B [k\Pi^2 + f]}{T[(1 - \varphi)\Pi N + P_M (\theta + \varphi)]} \\
&\quad - \frac{[k\Pi^2 + f] \mathbb{I}[(1 - \varphi)\theta \Pi N + (\theta + \varphi)(1 - \theta) P_M]}{[(1 - \varphi)\Pi N + P_M (\theta + \varphi)](1 - \varphi) T} \\
&\quad - \frac{[(W_0 + q\Pi^{1/s}) \Pi \mathbb{I}[1 - \theta\varphi - \varphi\varphi] P_B - \theta \Pi N - (\varphi + \theta\theta + \theta\varphi) P_M]}{[(1 - \varphi)\Pi N + P_M (\theta + \varphi)](1 - \varphi) T} \\
\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_B - \alpha_B &= \frac{[(2\varphi + \theta - 1)NP_B - [1 - \theta\varphi - \varphi\varphi]NP_B + \theta\Pi N + (\varphi + \theta\theta + \theta\varphi)P_M] \Pi(W_0 + q\Pi^{1/g})}{T[(1 - \varphi)\Pi N + P_M(\theta + \varphi)]} \\
&\quad - \frac{(\theta + \varphi)NP_B [k\Pi^2 + f]}{T[(1 - \varphi)\Pi N + P_M(\theta + \varphi)]} - \frac{[k\Pi^2 + f][(1 - \varphi)\theta\Pi N + (\theta + \varphi)(1 - \theta)P_M]}{[(1 - \varphi)\Pi N + P_M(\theta + \varphi)](1 - \varphi)\Gamma} \\
&\Rightarrow \\
\beta_B - \alpha_B &= \frac{[(\theta\varphi + \varphi\varphi + 2\varphi + 2\theta - 2)NP_B + (\varphi - \theta + \theta\theta + \theta\varphi)P_M] \Pi(W_0 + q\Pi^{1/g})}{T[(1 - \varphi)\Pi N + P_M(\theta + \varphi)]} \\
&\quad - \frac{[k\Pi^2 + f][(2\theta + \varphi - \theta\varphi)NP_B + (\varphi - \theta\theta)P_M]}{[(1 - \varphi)\Pi N + P_M(\theta + \varphi)](1 - \varphi)\Gamma} \\
&\Rightarrow \\
\beta_B - \alpha_B &= \frac{[(\theta\varphi + \varphi\varphi + 2\varphi + 2\theta - 2)NP_B + (\varphi - \theta + \theta\theta + \theta\varphi)P_M] \Pi(W_0 + q\Pi^{1/g})}{T[(1 - \varphi)\Pi N + P_M(\theta + \varphi)]} \\
&\quad - \frac{[k\Pi^2 + f][(2\theta + \varphi - \theta\varphi)NP_B + (\varphi - \theta\theta)P_M]}{[(1 - \varphi)\Pi N + P_M(\theta + \varphi)](1 - \varphi)\Gamma}
\end{aligned} \tag{26}$$

M UTILIDADE SEM MIGRAÇÃO: NATIVOS DE “A” E “B”.

Inserindo (4) na função de utilidade do nativo de “A”:

$$U_A = (1 - \varphi) \ln \left\{ (W_0 + qP^{1/g} + \beta_A d_A) P_A - kP^2 - f \right\} + \varphi \ln \left\{ \frac{T}{P_A} - d_A \right\} + \theta \ln \left\{ \frac{\theta}{(1 - \varphi) P_A} \right\} + \dots$$

$$+ (1 - \theta - \varphi) \ln \left\{ \frac{(1 - \theta - \varphi)}{(1 - \varphi)} \right\}$$

Como $d_M P_M = d_A P_A$, quando $P_M = 0$, $d_A = 0$. Assim, podemos simplificar a equação acima para:

$$U_A = (1 - \varphi) \ln \left\{ (W_0 + qP_A^{1/g}) P_A - kP_A^2 - f \right\} + \varphi \ln \{T\} - (\varphi + \theta) \ln P_A +$$

$$+ \theta \ln \theta + (1 - \varphi) \ln(1 - \varphi) + (1 - \theta - \varphi) \ln(1 - \theta - \varphi) \quad (27)$$

Vamos proceder de maneira semelhante com a função de utilidade dos nativos de B. Inserindo nesta função o valor de α_B da equação (18), temos:

$$U_B = \theta \ln \left\{ W_0 + q\Pi^{1/g} - \beta_B d_B - \frac{\left(\frac{T}{P_B} + d_B \right) \theta [k\Pi^2 + f] + (1 - \theta - \varphi) T [W_0 + q\Pi^{1/g} - \beta_B d_B]}{(1 - \varphi) T} \right\} +$$

$$+ \varphi \ln \left\{ \frac{T}{P_B} + d_B \right\} +$$

$$+ (1 - \theta - \varphi) \ln \left\{ \frac{\left(\frac{T}{P_B} + d_B \right) \theta [k\Pi^2 + f] + (1 - \theta - \varphi) T [W_0 + q\Pi^{1/g} - \beta_B d_B]}{(1 - \varphi) \left(\frac{T}{P_B} + d_B \right)} - k\Pi^2 + f \right\}$$

$$\Rightarrow$$

$$U_B = (1 - \varphi) \ln \left\{ T [W_0 + q\Pi^{1/g} - \beta_B d_B] - \left(\frac{T}{P_B} + d_B \right) [k\Pi^2 + f] \right\}$$

$$- (1 - \theta - 2\varphi) \ln \left\{ \frac{T}{P_B} + d_B \right\} + \theta \ln \frac{\theta}{(1 - \varphi) T} + (1 - \theta - \varphi) \ln \frac{(1 - \theta - \varphi)}{(1 - \varphi)} \quad (28)$$

Considerando novamente que não há migração, temos:

$$\begin{aligned}
 U_B = & (1 - \varphi) \ln \left\{ \left[W_0 + q P_B^{1/g} \right] P_B - \left[k P_B^2 + f \right] \right\} + \varphi \ln T - (\theta + \varphi) \ln P_B + \dots \\
 & - (1 - \varphi) \ln(1 - \varphi) + \theta \ln \theta + (1 - \theta - \varphi) \ln(1 - \theta - \varphi)
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

É fácil perceber que as equações (27) e (29) são iguais, caso P_B e P_A sejam iguais, $U_B = U_A$. Isto não deve surpreender o leitor, pois sem migração e com população idêntica, as duas cidades são iguais.

N UTILIDADE DOS NATIVOS NÃO MIGRANTES DE “B”

$$\begin{aligned}
U_B &= (1-\varphi)\ln\left\{T\left[W_0 + q\Pi^{1/g} - \beta_B d_B\right] - \left(\frac{T}{P_B} + d_B\right)[k\Pi^2 + f]\right\} \\
&\quad - (1-\theta-2\varphi)\ln\left\{\frac{T}{P_B} + d_B\right\} + \theta\ln\frac{\theta}{(1-\varphi)T} + (1-\theta-\varphi)\ln\frac{(1-\theta-\varphi)}{(1-\varphi)} \\
&\Rightarrow \\
U_B &= (1-\varphi)\ln\left\{\left[\frac{(W_0 + q\Pi^{1/g})T - (W_0 + q\Pi^{1/g})\Pi[(2\varphi + \theta - 1)] - (\theta + \varphi)[k\Pi^2 + f]TP_M}{[(\theta + \varphi)P_M + (1-\varphi)\Pi N]} \frac{TP_M}{\Pi}\right] \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{NT}{NP_B - P_M}\right)[k\Pi^2 + f]\right\} \\
&\quad - (1-\theta-2\varphi)\ln\left\{\frac{N}{NP_B - P_M}\right\} + \theta\ln\frac{\theta}{(1-\varphi)} + \varphi\ln T + (1-\theta-\varphi)\ln\frac{(1-\theta-\varphi)}{(1-\varphi)} \\
&\Rightarrow \\
U_B &= (1-\varphi)\ln\left\{\frac{(W_0 + q\Pi^{1/g})(1-\varphi)NP_B - (1-\varphi)[k\Pi^2 + f]N}{[(\theta + \varphi)P_M + (1-\varphi)\Pi N]}\right\} - (1-\theta-2\varphi)\ln\left\{\frac{1}{\Pi}\right\} + \\
&\quad + \theta\ln\theta + \ln T + (1-\theta-\varphi)\ln(1-\theta-\varphi) - (1-\varphi)\ln(1-\varphi) \\
&\Rightarrow \\
U_B &= (1-\varphi)\ln\left\{\left(W_0 + q\left(\frac{NP_B - P_M}{N}\right)^{1/g}\right)NP_B - \left(k\left(\frac{NP_B - P_M}{N}\right)^2 + f\right)N\right\} + \theta\ln\theta + \\
&\quad + (1-\theta-\varphi)\ln(1-\theta-\varphi) + \ln T + (1-\varphi)\ln\{(\theta + \varphi)P_M + (1-\varphi)(NP_B - P_M)\} + \\
&\quad + (1-\theta-2\varphi)\ln\left\{\frac{NP_B - P_M}{N}\right\} \tag{30}
\end{aligned}$$

Esta última expressão é função apenas dos parâmetros e de P_M e f . Ela será utilizada na simulação (anexo P)

O UTILIDADE DOS MIGRANTES

Vamos agora escrever a utilidade dos migrantes. Primeiro vamos inserir a equação (8).

$$\begin{aligned}
 U_M &= \theta \ln \left\{ W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} - \frac{\varphi \left(W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} \right)}{(\varphi + \theta)} \right\} + \\
 &+ \varphi \ln \left\{ \frac{\varphi \left(W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} \right)}{(\varphi + \theta) \beta_A} \right\} + (1 - \theta - \varphi) \ln \{ \alpha_A T - kP^2 - f \} \\
 &\Rightarrow \\
 U_M &= \theta \ln \left\{ \frac{\theta}{(\varphi + \theta)} \left[W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} \right] \right\} + (1 - \theta - \varphi) \ln \{ \alpha_A T - kP^2 - f \} + \\
 &\quad + \varphi \ln \left\{ \frac{\theta}{(\varphi + \theta)} \left[W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} \right] \right\} - \varphi \ln \beta_A \\
 &\Rightarrow \\
 &(\varphi + \theta) \ln \left\{ W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} \right\} + (1 - \theta - \varphi) \ln \{ \alpha_A T - kP^2 - f \} - \varphi \ln \beta_A \\
 &\quad + \varphi \ln \varphi + \theta \ln \theta - (\varphi + \theta) \ln (\varphi + \theta)
 \end{aligned}$$

Inserindo (9) e (10):

$$\begin{aligned}
 &(\varphi + \theta) \ln \left\{ W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} \right\} + \varphi \ln T + \theta \ln \theta - (\varphi + \theta) \ln (\varphi + \theta) + \\
 &+ (1 - \theta - \varphi) \ln \left\{ (W_0 + qP^{1/g}) [(\varphi + \theta) P_A + \varphi P_M] + (\beta_B - \alpha_B) \frac{TP_M \varphi}{P_B} - (\varphi + \theta) [kP^2 + f] \right\} + \\
 &- \varphi \ln \left\{ (W_0 + qP^{1/g}) [(\varphi + \theta) P_A + P_M] + (\beta_B - \alpha_B) \frac{TP_M}{P_B} - [kP^2 + f] (\varphi + \theta) \right\} + \\
 &(1 - \theta - \varphi) \ln (1 - \theta - \varphi) - (1 - \theta - 2\varphi) \ln (1 - \varphi) (\varphi + \theta) \\
 &\Rightarrow \\
 &(\varphi + \theta) \ln \left\{ W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} \right\} + \varphi \ln T + \theta \ln \theta - (1 - \varphi) \ln (\varphi + \theta) + \\
 &+ (1 - \theta - 2\varphi) \ln \left\{ (W_0 + qP^{1/g}) [(\varphi + \theta) P_A + \varphi P_M] + (\beta_B - \alpha_B) \frac{TP_M \varphi}{P_B} - (\varphi + \theta) [kP^2 + f] \right\} + \\
 &(1 - \theta - \varphi) \ln (1 - \theta - \varphi) - (1 - \theta - 2\varphi) \ln (1 - \varphi)
 \end{aligned}$$

Inserindo

$$\begin{aligned}
& (\varphi + \theta) \ln \left\{ W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} \right\} + \varphi \ln \varphi T + \theta \ln \theta - (1 + \varphi) \ln(\varphi + \theta) + \\
& (1 - \theta - 2\varphi) \ln \left\{ (W_0 + qP^{1/g}) [(\varphi + \theta)\varphi P_A + \varphi P_M] + (\beta_B - \alpha_B) \frac{TP_M \varphi}{P_B} - [kP^2 + f] \varphi(\varphi + \theta) \right\} \\
& - (1 - \theta) \ln(1 - \varphi) + (1 - \theta - \varphi) \ln(1 - \theta - \varphi)
\end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned}
& (\varphi + \theta) \ln \left\{ W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} \right\} + \varphi \ln T \varphi + \theta \ln \theta - (\varphi + \theta) \ln(\varphi + \theta) + \\
& - \varphi \ln \left\{ (W_0 + qP^{1/g}) [(\varphi + \theta)\varphi P_A + \theta \varphi P_M] + (\beta_B - \alpha_B) \frac{TP_M \varphi}{P_B} - [kP^2 + f] \varphi(\varphi + \theta) \right\} \\
& + (1 - \theta - \varphi) \ln \left\{ (W_0 + qP^{1/g}) [(\varphi + \theta)P_A + \varphi P_M] + (\beta_B - \alpha_B) \frac{TP_M \varphi}{P_B} - (\varphi + \theta)[kP^2 + f] \right\} \\
& + (1 - \theta - \varphi) \ln[1 - \theta - \varphi] - (1 - \theta - 2\varphi) \ln(\varphi + \theta)(1 - \varphi) \\
& \alpha_A = \frac{(1 - \theta - \varphi) \left[(W_0 + qP^{1/g}) [(\varphi + \theta)P_A + \varphi P_M] + (\beta_B - \alpha_B) \frac{TP_M \varphi}{P_B} \right] + (\theta)(\varphi + \theta)[kP^2 + f]}{(\varphi + \theta)(1 - \varphi)T} \\
& \beta_A = \frac{(W_0 + qP^{1/g}) [(\varphi + \theta)\varphi P_A + \theta \varphi P_M] + (\beta_B - \alpha_B) \frac{TP_M \varphi}{P_B} - [kP^2 + f] \varphi(\varphi + \theta)}{(1 - \varphi)(\varphi + \theta)T} \\
& d_M = \frac{\varphi \left(W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} \right)}{(\varphi + \theta)\beta_A}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_M &= \theta \ln \left\{ W_0 + qP^{1/g} + (\beta_B - \alpha_B) \frac{T}{P_B} - \frac{\varphi((W_0 + qP^{1/g})P_B + (\beta_B - \alpha_B)T)}{(\varphi + \theta)P_B} \right\} + \\
&\quad + \varphi \ln \left\{ \frac{\varphi((W_0 + qP^{1/g})P_B + (\beta_B - \alpha_B)T)}{(\varphi + \theta)P_B \beta_A} \right\} + (1 - \theta - \varphi) \ln \{ \alpha_A T - kP^2 - f \} \\
&\Rightarrow \\
U_M &= \theta \ln \left\{ \frac{\theta((W_0 + qP^{1/g})P_B + (\beta_B - \alpha_B)T)}{(\varphi + \theta)P_B} \right\} + \varphi \ln \left\{ \frac{\varphi((W_0 + qP^{1/g})P_B + (\beta_B - \alpha_B)T)}{(\varphi + \theta)P_B \beta_A} \right\} + \\
&\quad + (1 - \theta - \varphi) \ln \{ \alpha_A T - kP^2 - f \} \\
&\Rightarrow \\
U_M &= \theta \ln \{ (W_0 + qP^{1/g})P_B + (\beta_B - \alpha_B)T \} - \varphi \ln \beta_A + (1 - \theta - \varphi) \ln \{ \alpha_A T - kP^2 - f \} + \\
&\quad \theta \ln \left\{ \frac{\theta}{(\varphi + \theta)P_B} \right\} + \varphi \ln \left\{ \frac{\varphi}{(\varphi + \theta)P_B} \right\} \\
&\Rightarrow \\
U_M &= \theta \ln \{ (W_0 + qP^{1/g})P_B + (\beta_B - \alpha_B)T \} - \varphi \ln \beta_A + \theta \ln \theta + \varphi \ln \varphi - (\theta + \varphi) \ln \{ (\varphi + \theta)P_B \} \\
&\quad + (1 - \theta - \varphi) \ln \{ \alpha_A T - [kP^2 - f] \}
\end{aligned}$$

Inserendo (9) e (10):

$$\begin{aligned}
U_M &= \theta \ln \{ (W_0 + qP^{1/g})P_B + (\beta_B - \alpha_B)T \} - \varphi \ln \beta_A + \theta \ln \theta + \varphi \ln \varphi - (\theta + \varphi) \ln \{ (\varphi + \theta)P_B \} \\
&\quad + (1 - \theta - \varphi) \ln \{ \alpha_A T - [kP^2 - f] \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_M &= \theta \ln \{ (W_0 + qP^{1/g})P_B + (\beta_B - \alpha_B)T \} + \dots \\
&\quad - \varphi \ln \left\{ (W_0 + qP^{1/g})[(\varphi + \theta)P_A + \theta P_M] + (\beta_B - \alpha_B) \frac{TP_M}{P_B} - [kP^2 + f](\varphi + \theta) \right\} + \\
&\quad + (1 - \theta - \varphi) \ln \left\{ (1 - \theta - \varphi)(\varphi + \theta) \left[(W_0 + qP^{1/g}) - [kP^2 - f] \right] + (\beta_B - \alpha_B) \frac{TP_M \varphi}{P_B} \right\} + \\
&\quad - (1 - \theta - 2\varphi) \ln \{ (1 - \varphi)(\varphi + \theta)T \} + \theta \ln \theta - (\theta + \varphi) \ln \{ (\varphi + \theta)P_B \}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial U_B}{\partial P_M} = \frac{-(1-\varphi) \frac{qP_B}{2\left(\frac{NP_B - P_M}{N}\right)^{1/2}} + 2(1-\varphi)\left(\frac{NP_B - P_M}{N}\right)k}{\left(W_0 + q\left(\frac{NP_B - P_M}{N}\right)^{1/2}\right)NP_B - \left(k\left(\frac{NP_B - P_M}{N}\right)^2 + f\right)N} +$$

$$+ \frac{(1-\varphi)(\theta + \varphi) + (1-\varphi)^2}{(\theta + \varphi)P_M + (1-\varphi)(NP_B - P_M)} - \frac{(1-\theta - 2\varphi)}{NP_B - P_M}$$

$$\frac{\partial U_B}{\partial P_M} N \left(\frac{NP_B - P_M}{N} \right)^{1/2} = \frac{-(1-\varphi) \frac{qP_B}{2} + 2(1-\varphi)k \left(\frac{NP_B - P_M}{N} \right)^{1/2}}{\left(W_0 + \frac{q}{N^{1/2}} (NP_B - P_M)^{1/2} \right) P_B - \left(\frac{k}{N^2} (NP_B - P_M)^2 + f \right)} +$$

$$+ \frac{N \left[(1-\varphi)(\theta + \varphi) + (1-\varphi)^2 \right] (NP_B - P_M) - N(1-\theta - 2\varphi) \left[(\theta + \varphi)P_M + (1-\varphi)(NP_B - P_M) \right]}{\left[(\theta + \varphi)P_M + (1-\varphi)(NP_B - P_M) \right] \left[N(NP_B - P_M) \right]^{1/2}}$$

\Rightarrow

$$\frac{\partial U_B}{\partial P_M} N \left(\frac{NP_B - P_M}{N} \right)^{1/2} = \frac{(1-\varphi)N^2 \left[-\frac{qP_B}{2} + 2k \left(\frac{NP_B - P_M}{N} \right)^{1/2} \right]}{\left(W_0 N^2 + qN^{3/2} (NP_B - P_M)^{1/2} \right) P_B - \left(k(NP_B - P_M)^2 + fN^2 \right)} +$$

$$+ \frac{N \left[(1-\varphi)(\theta + \varphi) + (1-\varphi)^2 \right] (NP_B - P_M) - N(1-\theta - 2\varphi) \left[(\theta + \varphi)P_M + (1-\varphi)(NP_B - P_M) \right]}{\left[(\theta + \varphi)P_M + (1-\varphi)(NP_B - P_M) \right] \left[N(NP_B - P_M) \right]^{1/2}}$$

\Rightarrow

$$\frac{\partial U_B}{\partial P_M} N \left(\frac{NP_B - P_M}{N} \right)^{1/2} = \frac{(1-\varphi)N^2 \left[-\frac{qP_B}{2} + 2k \left(\frac{NP_B - P_M}{N} \right)^{1/2} \right]}{\left(W_0 N^2 + qN^{3/2} (NP_B - P_M)^{1/2} \right) P_B - \left(k(NP_B - P_M)^2 + fN^2 \right)} +$$

$$+ \frac{N \left[\theta + \varphi - \theta\varphi - \varphi\varphi + 1 - \varphi - \varphi + \varphi\varphi \right] (NP_B - P_M)}{\left[(\theta + \varphi)P_M + (1-\varphi)(NP_B - P_M) \right] \left[N(NP_B - P_M) \right]^{1/2}} +$$

$$- \frac{N \left[(1-\theta - 2\varphi)(\theta + \varphi)P_M + (1-\theta - 2\varphi - \varphi + \theta\varphi + 2\varphi\varphi)(NP_B - P_M) \right]}{\left[(\theta + \varphi)P_M + (1-\varphi)(NP_B - P_M) \right] \left[N(NP_B - P_M) \right]^{1/2}}$$

\Rightarrow

$$\frac{\partial U_B}{\partial P_M} N \left(\frac{NP_B - P_M}{N} \right)^{1/2} = \frac{(1-\varphi)N^2 \left[-\frac{qP_B}{2} + 2k \left(\frac{NP_B - P_M}{N} \right)^{1/2} \right]}{\left(W_0 N^2 + qN^{3/2} (NP_B - P_M)^{1/2} \right) P_B - \left(k(NP_B - P_M)^2 + fN^2 \right)} +$$

$$+ \frac{-N \left[(1-\theta - 2\varphi)(\theta + \varphi)P_M + 2(\theta\varphi + \varphi\varphi - \theta - \varphi)(NP_B - P_M) \right]}{\left[(\theta + \varphi)P_M + (1-\varphi)(NP_B - P_M) \right] \left[N(NP_B - P_M) \right]^{1/2}}$$

\Rightarrow

$$\frac{\partial U_B}{\partial P_M} N \left(\frac{NP_B - P_M}{N} \right)^{1/2} = \frac{(1-\varphi)N^2 \left[-\frac{qP_B}{2} + 2k \left(\frac{NP_B - P_M}{N} \right)^{1/2} \right]}{\left(W_0 N^2 + qN^{3/2} (NP_B - P_M)^{1/2} \right) P_B - \left(k(NP_B - P_M)^2 + fN^2 \right)} +$$

$$+ \frac{-N \left[(1-\theta - 2\varphi)(\theta + \varphi)P_M + 2(\theta\varphi + \varphi\varphi - \theta - \varphi)(NP_B - P_M) \right]}{\left[(\theta + \varphi)P_M + (1-\varphi)(NP_B - P_M) \right] \left[N(NP_B - P_M) \right]^{1/2}}$$

$$U_B = (1-\varphi)\ln\left\{\left[\frac{(W_0 + q\Pi^{1/g})\Pi(1-\varphi)NP_B - (1-\varphi)\Pi NT[k\Pi^2 + f]}{\Pi}\right]\right\} +$$

$$+ (1-\theta-2\varphi)\ln\Pi + \theta\ln\theta + \varphi\ln T + (1-\theta-\varphi)\ln(1-\theta-\varphi) +$$

$$- (1-\varphi)\ln[(\theta+\varphi)TP_M + (1-\varphi)\Pi NT]$$

\Rightarrow

$$U_B = (1-\varphi)\ln\{(W_0 + q\Pi^{1/g})NP_B - NT[k\Pi^2 + f]\}$$

$$+ (1-\theta-2\varphi)\ln\Pi + \theta\ln\theta + \varphi\ln T + (1-\theta-\varphi)\ln(1-\theta-\varphi)$$

Considerando migração igual a zero,

$$U_B = (1-\varphi)\ln\{(W_0 + qP_B^{1/g})NP_B - NT[kP_B^2 + f]\}$$

$$+ (1-\theta-2\varphi)\ln P_B + \theta\ln\theta + \varphi\ln T + (1-\theta-\varphi)\ln(1-\theta-\varphi)$$

$$U_A = (1-\varphi)\ln\{(W_0 + qP^{1/g})P_A - kP^2 - f\} + \varphi\ln\left\{\frac{T}{P_A}\right\} + \theta\ln\left\{\frac{\theta}{(1-\varphi)P_A}\right\} + \dots$$

$$+ (1-\theta-\varphi)\ln\left\{\frac{(1-\theta-\varphi)}{(1-\varphi)}\right\}$$

$$\beta_B = \frac{(W_0 + q\Pi^{1/g})\Pi NP_B [(2\varphi + \theta - 1)] - (\theta + \varphi)NP_B [k\Pi^2 + f]}{[(\theta + \varphi)TP_M + (1-\varphi)\Pi NT]}$$

$$d_B = \frac{TP_M}{N\Pi P_B}$$

\Rightarrow

$$\frac{T}{P_B} + d_B = \frac{TN}{NP_B - P_M} = \frac{T}{\Pi}$$

$$U_A = \ln\{(W_0 + qP^{1/g})P_A + T\beta_A - [kP^2 + f]\} - \varphi\ln\beta_A - (1+\theta)\ln P_A + \dots$$

$$+ \varphi\ln\varphi + \theta\ln\theta + (1-\theta-\varphi)\ln(1-\theta-\varphi)$$

(7)

Inserindo (9) em (7), podemos reescrever a utilidade dos nativos de A:

$$\begin{aligned}
U_A = & \ln \left\{ (W_0 + qP^{1/g})(\varphi + \theta)P + (\beta_B - \alpha_B) \frac{TP_M \varphi}{P_B} - (\varphi + \theta)[kP^2 + f] \right\} - (1 + \theta) \ln P_A + \\
& - \varphi \ln \left[(W_0 + qP^{1/g})[(\varphi + \theta)P_A + \theta P_M] + (\beta_B - \alpha_B) \frac{TP_M}{P_B} - [kP^2 + f](\varphi + \theta) \right] \\
& (\varphi - 1) \ln \{(1 - \varphi)(\varphi + \theta)\} + (1 - \theta - \varphi) \ln \{1 - \varphi\} - \varphi \ln T + \theta \ln \theta + (1 - \theta - \varphi) \ln \left\{ \frac{(1 - \theta - \varphi)}{(1 - \varphi)} \right\}
\end{aligned}$$

Apesar de grande, a equação acima é bastante simples. Apenas o primeiro e o terceiro termo possuem variáveis endógenas.

Aplicando (18) na função de utilidade dos não-migrantes de B, obtemos:

$$\begin{aligned}
U_B = & \theta \ln \left\{ W_0 + q\Pi^{1/g} - \beta_B d_B - \frac{\left(\frac{T}{P_B} + d_B \right) \theta [k\Pi^2 + f] + (1 - \theta - \varphi) T [W_0 + q\Pi^{1/g} - \beta_B d_B]}{(1 - \varphi) T} \right\} + \\
& + \varphi \ln \left\{ \frac{T}{P_B} + d_B \right\} + \\
& + (1 - \theta - \varphi) \ln \left\{ \frac{\left(\frac{T}{P_B} + d_B \right) \theta [k\Pi^2 + f] + (1 - \theta - \varphi) T [W_0 + q\Pi^{1/g} - \beta_B d_B]}{(1 - \varphi) \left(\frac{T}{P_B} + d_B \right)} - k\Pi^2 + f \right\} \\
\Rightarrow & \\
U_B = & (1 - \varphi) \ln \left\{ T [W_0 + q\Pi^{1/g} - \beta_B d_B] - \left(\frac{T}{P_B} + d_B \right) [k\Pi^2 + f] \right\} - (1 - \theta - 2\varphi) \ln \left\{ \frac{T}{P_B} + d_B \right\} \\
& + \theta \ln \frac{\theta}{(1 - \varphi) T} + (1 - \theta - \varphi) \ln \frac{(1 - \theta - \varphi)}{(1 - \varphi)}
\end{aligned}$$

Aplicando (19) e (20):

$$\begin{aligned}
U_B = & (1 - \varphi) \ln \left\{ T \left[W_0 + q\Pi^{1/g} - \beta_B \frac{TP_M}{\Pi N P_B} \right] - \frac{T}{\Pi} [k\Pi^2 + f] \right\} - (1 - \theta - 2\varphi) \ln \left\{ \frac{T}{\Pi} \right\} \\
& + \theta \ln \frac{\theta}{(1 - \varphi) T} + (1 - \theta - \varphi) \ln \frac{(1 - \theta - \varphi)}{(1 - \varphi)} \\
\Rightarrow &
\end{aligned}$$

$$U_B = (1-\varphi)\ln\left\{\left[(W_0 + q\Pi^{1/g})\Pi - \beta_B \frac{TP_M}{NP_B}\right] - [k\Pi^2 + f]\right\} + (\theta + \varphi)\ln\frac{1}{\Pi}$$

$$+ (\varphi)\ln T + \theta\ln\frac{\theta}{(1-\varphi)} + (1-\theta-\varphi)\ln\frac{(1-\theta-\varphi)}{(1-\varphi)}$$

Aplicando (23):

$$U_B = (1-\varphi)\ln\left\{\left[(W_0 + q\Pi^{1/g})\Pi - \frac{(W_0 + q\Pi^{1/g})(2\varphi + \theta - 1)\Pi P_M - (\theta + \varphi)P_M [k\Pi^2 + f]}{[(\theta + \varphi)P_M + (1-\varphi)\Pi N]}\right] - [k\Pi^2 + f]\right\}$$

$$+ (\theta + \varphi)\ln\frac{1}{\Pi} + (\varphi)\ln T + \theta\ln\frac{\theta}{(1-\varphi)} + (1-\theta-\varphi)\ln\frac{(1-\theta-\varphi)}{(1-\varphi)}$$

\Rightarrow

$$\beta_B = \frac{(W_0 + q\Pi^{1/g})\Pi NP_B (2\varphi + \theta - 1) - (\theta + \varphi)NP_B [k\Pi^2 + f]}{[(\theta + \varphi)TP_M + (1-\varphi)\Pi NT]}$$

$$U_B = \theta\ln\left\{\frac{\theta}{(1-\varphi)NP_B} [(W_0 + q\Pi^{1/g})\Pi NP_B - \beta_B TP_M - NP_B [k\Pi^2 + f]]\right\} + \varphi\ln\left\{\frac{T}{\Pi}\right\} + \dots$$

$$+ (1-\theta-\varphi)\ln\left\{\frac{(1-\theta-\varphi)}{(1-\varphi)} [(W_0 + q\Pi^{1/g})\Pi NP_B - \beta_B TP_M - NP_B [k\Pi^2 + f]]\theta\right\}$$

\Rightarrow

$$U_B = (1-\varphi)\ln\left\{(W_0 + q\Pi^{1/g})\Pi NP_B - \beta_B TP_M - NP_B [k\Pi^2 + f]\right\} + \varphi\ln\left\{\frac{T}{\Pi}\right\} + \dots$$

$$+ \theta\ln\left[\frac{\theta}{(1-\varphi)NP_B}\right] + (1-\theta-\varphi)\ln\left\{\frac{(1-\theta-\varphi)}{(1-\varphi)}\right\}$$

Aplicando (23):

$$U_B = (1-\varphi)\ln\left\{\frac{(1-\varphi)\Pi NP_B (\Pi N + P_M)(W_0 + q\Pi^{1/g}) - (1-\varphi)\Pi N [k\Pi^2 + f]}{[(1-\varphi)\Pi N + P_M (\theta + \varphi)]}\right\}$$

$$+ \varphi\ln\left\{\frac{T}{\Pi}\right\} + \theta\ln\left[\frac{\theta}{(1-\varphi)NP_B}\right] + (1-\theta-\varphi)\ln\left\{\frac{(1-\theta-\varphi)}{(1-\varphi)}\right\}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned}
U_B = & (1-\varphi)\ln\left\{\frac{P_B N + P_M}{N}(NP_B)\left(W_0 + q\left(\frac{P_B N + P_M}{N}\right)^{1/2}\right) - \left[k\left[\frac{P_B N + P_M}{N}\right]^2 + f\right]\right\} + \varphi\ln\left\{\frac{NT}{P_B N + P_M}\right\} \\
& + \theta\ln\left[\frac{\theta}{(1-\varphi)NP_B}\right] + (1-\theta-\varphi)\ln\left\{\frac{(1-\theta-\varphi)}{(1-\varphi)}\right\} - (1-\varphi)\ln P_B N \\
& (1-\varphi)\ln\left\{\frac{(1-\varphi)}{[P_B N + P_M(1+\theta+\varphi)][P_B N + P_M(1+\theta)]}\right\}
\end{aligned} \tag{27}$$

Esta função de utilidades é também razoavelmente simples, uma vez que só possui variáveis endógenas no primeiro e último termos.

Esta terceira e última equação é a mais preocupante, pois possui três termos com variáveis exógenas.

M EFEITOS DO AUMENTO DA MIGRAÇÃO E DAS TRANSFERÊNCIAS

Precisamos encontrar os componentes $\frac{\partial U_i}{\partial P_M}$ e $\frac{\partial U_i}{\partial f}$ dos três tipos de agentes.

Vamos encontrar a função de variação da utilidade dos nativos de A quando a população migrante varia.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_A}{\partial P_M} &= \frac{(W_0 + qP^{1/g})(\varphi + \theta) + \frac{T\varphi}{P_B}(\beta_B - \alpha_B) - (\varphi + \theta)k(P_A + P_M)}{(W_0 + qP^{1/g})(\varphi + \theta)P + (\beta_B - \alpha_B)\frac{TP_M\varphi}{P_B} - (\varphi + \theta)[kP^2 + f]} + \\ &\quad \frac{(W_0 + qP^{1/g})\theta\varphi + \frac{T\varphi}{P_B}(\beta_B - \alpha_B) - (\varphi + \theta)\varphi k(P_A + P_M)}{\left[(W_0 + qP^{1/g})[(\varphi + \theta)P_A + \theta P_M] + (\beta_B - \alpha_B)\frac{TP_M}{P_B} - [kP^2 + f](\varphi + \theta) \right]} \\ \Rightarrow \\ \frac{\partial U_A}{\partial P_M} &= \left[(W_0 + qP^{1/g})(\varphi + \theta) + \frac{T\varphi}{P_B}(\beta_B - \alpha_B) - (\varphi + \theta)k(P_A + P_M) \right] \left[(W_0 + qP^{1/g})(\varphi + \theta)P - \varphi P_M \right] + \\ &+ \left[(W_0 + qP^{1/g})(\varphi + \theta) + \frac{T\varphi}{P_B}(\beta_B - \alpha_B) - (\varphi + \theta)k(P_A + P_M) \right] \left[(\beta_B - \alpha_B)\frac{TP_M}{P_B} - [kP^2 + f](\varphi + \theta) \right] + \\ &- \left[(W_0 + qP^{1/g})\theta\varphi + \frac{T\varphi}{P_B}(\beta_B - \alpha_B) - (\varphi + \theta)\varphi k(P_A + P_M) \right] \left[(W_0 + qP^{1/g})(\varphi + \theta)P \right] + \\ &- \left[(W_0 + qP^{1/g})\theta\varphi + \frac{T\varphi}{P_B}(\beta_B - \alpha_B) - (\varphi + \theta)\varphi k(P_A + P_M) \right] \left[(\beta_B - \alpha_B)\frac{TP_M}{P_B} - (\varphi + \theta)[kP^2 + f] \right] \\ \Rightarrow \\ \frac{\partial U_A}{\partial P_M} &= \left[(W_0 + qP^{1/g}) \right] \left[(W_0 + qP^{1/g})(\varphi + \theta - \theta\varphi)(\varphi + \theta)P + (\beta_B - \alpha_B)\frac{TP_M}{P_B} - [kP^2 + f](\varphi + \theta) \right] + \\ &- \left[(W_0 + qP^{1/g})(\varphi + \theta) + \frac{T\varphi}{P_B}(\beta_B - \alpha_B) - (\varphi + \theta)k(P_A + P_M) \right] (W_0 + qP^{1/g})\varphi P_M = 0 \\ \Rightarrow \\ \frac{\partial U_A}{\partial P_M} &= (W_0 + qP^{1/g}) \left[(W_0 + qP^{1/g})(\varphi + \theta - \theta\varphi)(\varphi + \theta)P + (\beta_B - \alpha_B)\frac{TP_M}{P_B} - [k(P_A + P_M)(P_A + P_M) + f](\varphi + \theta) \right] + \\ &- (W_0 + qP^{1/g}) \left[(W_0 + qP^{1/g})(\varphi + \theta)\varphi P_M + (\beta_B - \alpha_B)\frac{TP_M}{P_B} - (\varphi + \theta)k(P_A + P_M)\varphi P_M \right] \\ \Rightarrow \\ \frac{\partial U_A}{\partial P_M} &= (W_0 + qP^{1/g}) \left[(W_0 + qP^{1/g})(\varphi + \theta)\varphi P_A + (\varphi + \theta - \theta\varphi\varphi + \varphi\theta + \theta\theta - \theta\theta\varphi)(P_A + P_M) \right] - [k(P_A + P_M)P_A + f](\varphi + \theta) \end{aligned}$$

Esta função, se bem notada, é quadrática com relação ao número de migrantes.

A derivada da utilidade dos nativos de A com relação às transferências é muito mais simples:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_A}{\partial f} &= \frac{(\varphi + \theta)}{(W_0 + qP^{1/s})(\varphi + \theta)P + (\beta_B - \alpha_B)\frac{TP_M\varphi}{P_B} - (\varphi + \theta)[kP^2 + f]} + \\ &\quad - \frac{(\varphi + \theta)\varphi}{(W_0 + qP^{1/s})[(\varphi + \theta)P_A + \theta P_M] + (\beta_B - \alpha_B)\frac{TP_M}{P_B} - [kP^2 + f](\varphi + \theta)} \\ \Rightarrow \\ \frac{\partial U_A}{\partial f} &= (\varphi + \theta) \left[(W_0 + qP^{1/s})[(\varphi + \theta)P_A + \theta P_M] + (\beta_B - \alpha_B)\frac{TP_M}{P_B} - [kP^2 + f](\varphi + \theta) \right] + \\ &\quad - (\varphi + \theta)\varphi \left[(W_0 + qP^{1/s})(\varphi + \theta)P + (\beta_B - \alpha_B)\frac{TP_M\varphi}{P_B} - (\varphi + \theta)[kP^2 + f] \right] \\ \Rightarrow \\ \frac{\partial U_A}{\partial f} &= (W_0 + qP^{1/s})(\varphi + \theta)[(\varphi + \theta)(1 - \varphi)P_A + \theta(1 - \varphi)P_M] - [kP^2 + f](\varphi + \theta)^2(1 - \varphi) \\ &\quad + (\beta_B - \alpha_B)(\varphi + \theta)(1 - \varphi)\frac{TP_M}{P_B} \end{aligned}$$

Resolvendo para os não-migrantes de “B”:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_B}{\partial P_M} &= \left[\frac{(P_B) \left(W_0 + q \left(\frac{P_B N - P_M}{N} \right)^{1/2} \right) + P_M P_B q \left(\frac{P_B N - P_M}{N} \right)^{-1/2} - \frac{2k}{N^2} [P_B N - P_M]}{(P_B N + P_M)(P_B) \left(W_0 + q \left(\frac{P_B N - P_M}{N} \right)^{1/2} \right) - \left[k \left[\frac{P_B N - P_M}{N} \right]^2 + f \right]} \right] (1 - \varphi) + \\ &\quad - \frac{\varphi}{P_B N + P_M} - \frac{(1 - \varphi)(1 + \theta + \varphi)[P_B N + P_M(1 + \theta)] + [P_B N + P_M(1 + \theta + \varphi)](1 + \theta)}{[P_B N + P_M(1 + \theta + \varphi)][P_B N + P_M(1 + \theta)]} \\ \Rightarrow \\ \frac{\partial U_B}{\partial P_M} &= \left[\frac{(P_B) \left[\left(W_0 + q \left(\frac{P_B N - P_M}{N} \right)^{1/2} \right) + P_M q \left(\frac{P_B N - P_M}{N} \right)^{-1/2} \right] - \frac{2k}{N^2} [P_B N - P_M]}{(P_B N + P_M)(P_B) \left(W_0 + q \left(\frac{P_B N - P_M}{N} \right)^{1/2} \right) - \left[k \left[\frac{P_B N - P_M}{N} \right]^2 + f \right]} \right] (1 - \varphi) + \\ &\quad - \frac{\varphi}{P_B N - P_M} - \frac{2(1 - \varphi)(1 + \theta)[P_B N - P_M(1 + \theta)] + \varphi(1 - \varphi)[P_B N - P_M(1 + \theta)]}{[P_B N - P_M(1 + \theta)]^2 + \varphi[P_B N - P_M(1 + \theta)]P_M} \end{aligned}$$

Como estamos considerando $f = 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_B}{\partial P_M} &= \frac{\left[(P_B) \left[\left(W_0 + q \left(\frac{P_B N - P_M}{N} \right)^{1/2} \right) + P_M q \left(\frac{P_B N - P_M}{N} \right)^{-1/2} \right] - \frac{2k}{N^2} [P_B N - P_M] \right]}{(P_B N + P_M) (P_B) \left(W_0 + q \left(\frac{P_B N - P_M}{N} \right)^{1/2} \right) - \left[k \left[\frac{P_B N - P_M}{N} \right]^2 \right]} (1 - \varphi) + \\
&\quad \frac{\left[(P_B) \left(W_0 + q \left(\frac{P_B N - P_M}{N} \right)^{1/2} \right) - \frac{k}{N} [P_B N - P_M] \right] \varphi}{(P_B N + P_M) (P_B) \left(W_0 + q \left(\frac{P_B N - P_M}{N} \right)^{1/2} \right) - \left[k \left[\frac{P_B N - P_M}{N} \right]^2 \right]} + \\
&\quad \frac{2(1 - \varphi)(1 + \theta)[P_B N - P_M(1 + \theta)] + \varphi(1 - \varphi)[P_B N - P_M(1 + \theta)]}{[P_B N - P_M(1 + \theta)]^2 + \varphi[P_B N - P_M(1 + \theta)]P_M} \\
\Rightarrow &\frac{\partial U_B}{\partial P_M} = \frac{\left[(P_B) \left[\left(W_0 + q \left(\frac{P_B N - P_M}{N} \right)^{1/2} \right) + (1 - \varphi) P_M q \left(\frac{P_B N - P_M}{N} \right)^{-1/2} \right] - \frac{k(1 - 2\varphi)}{N^2} [P_B N - P_M] \right]}{(P_B N - P_M) (P_B) \left(W_0 + q \left(\frac{P_B N - P_M}{N} \right)^{1/2} \right) - \left[k \left[\frac{P_B N - P_M}{N} \right]^2 \right]} + \\
&\quad \frac{2(1 - \varphi)(1 + \theta)[P_B N - P_M(1 + \theta)] + \varphi(1 - \varphi)[P_B N - P_M(1 + \theta)]}{[P_B N - P_M(1 + \theta)]^2 + \varphi[P_B N - P_M(1 + \theta)]P_M} \\
\Rightarrow &\frac{\partial U_B}{\partial P_M} = -\frac{k(1 - 2\varphi)}{N} \left[\Pi [P_B N + P_M(1 + \theta)]^2 + \varphi [P_B N - P_M(1 + \theta)] \right] + \\
&\quad + (P_B) \left[\left(W_0 + q \Pi^{1/2} \right) + (1 - \varphi) \frac{P_M}{\sqrt{\Pi}} q \right] \left[[P_B N - P_M(1 + \theta)]^2 + \varphi [P_B N - P_M(1 + \theta)] P_M \right] + \\
&\quad - 2(1 - \varphi)(1 + \theta)[P_B N - P_M(1 + \theta)] \left[(N \Pi) (P_B) \left(W_0 + q \Pi^{1/2} \right) - [k \Pi^2] \right] + \\
&\quad + \varphi(1 - \varphi)[P_B N - P_M(1 + \theta)] \left[(N \Pi) (P_B) \left(W_0 + q \Pi^{1/2} \right) - [k \Pi^2] \right]
\end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_B}{\partial P_M} &= (W_0 + q\Pi^{1/2})[(P_B)(3 - 3\varphi - \varphi\varphi + 2\theta - 2\theta\varphi)[P_B N - P_M(1 + \theta)]] + \\ &- k\Pi^2(3 - 3\varphi - \varphi\varphi + 2\theta - 2\theta\varphi)[P_B N - P_M(1 + \theta)] + \\ &+ (1 - \varphi)\frac{P_M}{\sqrt{\Pi}}q[[P_B N + P_M(1 + \theta)]^2 + \varphi[P_B N - P_M(1 + \theta)]P_M] \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_B}{\partial P_M} &= [P_B N + P_M(1 + \theta)][(P_B)(W_0 + q\Pi^{1/2}) + k\Pi^2](1 - 3\varphi - \varphi\varphi + 2\theta - 2\theta\varphi) + \\ &+ (1 - \varphi)\frac{P_M}{\sqrt{\Pi}}q[[P_B N + P_M(1 + \theta)]^2 + \varphi[P_B N - P_M(1 + \theta)]P_M] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U_B}{\partial f} = \frac{-(1 - \varphi)}{\frac{P_B N + P_M}{N}(NP_B)\left(W_0 + q\left(\frac{P_B N + P_M}{N}\right)^{1/2}\right) - \left[k\left[\frac{P_B N + P_M}{N}\right]^2 + f\right]}$$

Finalmente, calculando para os migrantes.

É fácil notar que:

$$\begin{aligned} [P_B N + P_M(1 + \theta)][(P_B)(W_0 + q\Pi^{1/2}) + k\Pi^2](1 - 3\varphi - \varphi\varphi + 2\theta - 2\theta\varphi) + \\ + (1 - \varphi)\frac{P_M}{\sqrt{\Pi}}q[[P_B N + P_M(1 + \theta)]^2 + \varphi[P_B N - P_M(1 + \theta)]P_M] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U_M}{\partial P_M} = \theta \frac{qP_B}{P^{1/2}}$$

$$\theta \ln\{(W_0 + qP^{1/g})P_B + (\beta_B - \alpha_B)T\} + \dots$$

$$\begin{aligned} - \varphi \ln\left\{(W_0 + qP^{1/g})[(\varphi + \theta)P_A + \theta P_M] + (\beta_B - \alpha_B)\frac{TP_M}{P_B} - [kP^2 + f](\varphi + \theta)\right\} + \\ + (1 - \theta - \varphi) \ln\left\{(1 - \theta - \varphi)(\varphi + \theta)[(W_0 + qP^{1/g}) - [kP^2 - f]] + (\beta_B - \alpha_B)\frac{TP_M\varphi}{P_B}\right\} + \\ - (1 - \theta - 2\varphi) \ln\{(1 - \varphi)(\varphi + \theta)T\} + \theta \ln \theta - (\theta + \varphi) \ln\{(\varphi + \theta)P_B\} \end{aligned}$$

N CONDIÇÕES PARA QUE HAJA TRANSFERÊNCIA UNILATERAL

É preciso que exista P_M tal que, quando $f = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial(U_B - U_M)}{\partial P_M} \sigma + \frac{\partial(U_B - U_M)}{\partial f} \varpi = 0 \\ \frac{\partial U_A}{\partial P_M} \sigma' + \frac{\partial U_A}{\partial f} \varpi' = 0 \\ \frac{\sigma'}{\varpi'} < \frac{\sigma}{\varpi} \end{cases}$$

A grande sensibilidade e número de incógnitas impediu o desenvolvimento analítico deste ponto. Foi realizado um experimento matemático, apresentado no corpo da dissertação.

